特高级教师

点拨®

知识
方法
素养

本书解题方法53招·七八九年级共370招



九年级 数学(下) (BS版)

赠教材习题答案

陕西新华出版传媒集团 陕西人民教育出版社

教辅资料站
电子教辅 试卷练习
知识总结 备课资源
扫码关注获取更多学习资料

特高级教师

点拨®

知识
方法
素养

九年级 数学 下 （BS版）

主　　编：荣德基
本册主编：程小恒
范志刚



提分一定有方法

陕西新华出版传媒集团
陕西人民教育出版社
·西安·

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

提分攻略

知识点 60 个 必得分

		页码
第一章 直角三角形的边角关系	1 正切	2
	2 正切与梯子的倾斜程度的关系	3
	3 坡角与坡度	3
	4 正弦、余弦	4
	5 锐角三角函数	5
	6 30°，45°，60° 角的三角函数值	12
	7 特殊角的三角函数值的实际应用	14
	8 用科学计算器求任意锐角的三角函数值	19
	9 用科学计算器由锐角三角函数值求锐角	20
	10 仰角、俯角	20
	11 解直角三角形的定义	26
	12 直角三角形中的边角关系	27
	13 利用特殊角解直角三角形解决实际问题	35
	14 解直角三角形解决实际问题的一般步骤	37
	15 测量倾斜角	43
	16 测量底部可以到达的物体的高度	44
	17 测量底部不可以到达的物体的高度	44
第二章 二次函数	1 二次函数的定义	62
	2 建立二次函数的模型表示变量间的关系	63
	3 二次函数 $y=x^2$ 的图象的画法	67
	4 二次函数 $y=x^2$ 和 $y=-x^2$ 的图象与性质	68
	5 二次函数 $y=ax^2$ 的图象和性质	72
	6 二次函数 $y=ax^2+c$ 的图象	73
	7 二次函数 $y=a(x-h)^2$ 的图象	79
	8 二次函数 $y=a(x-h)^2+k$ 的图象和性质	80
	9 二次函数 $y=ax^2$，$y=ax^2+k$，$y=a(x-h)^2$，$y=a(x-h)^2+k$ 之间的关系	81
	10 二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 与二次函数 $y=a(x-h)^2+k$ 之间的关系	87
	11 二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图象和性质	88
	12 二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图象特征与 a，b，c 的符号关系	89

考向点 80 个 速提分

	页码
1 利用正切的概念求一个锐角的正切值	2
2 利用求正切值比较倾斜程度	3
3 利用坡度的概念解决斜坡问题	4
4 利用正弦、余弦的定义求一个锐角的正弦值、余弦值	5
5 利用三角函数的定义求函数值	5
6 利用平移法构造直角三角形求网格中的函数值	7
7 利用分类讨论思想计算不确定的三角形的面积	8
8 利用换元法解三角函数与方程的综合问题	8
9 利用特殊角的三角函数值解决计算问题	13
10 利用特殊角的三角函数值解决实际问题	14
11 利用构造法求三角形中的线段长	15
12 利用割补法解决与特殊角有关的图形面积问题	15
13 利用计算器求任一锐角的三角函数值问题	19
14 利用计算器由已知锐角的三角函数值求锐角的度数	20
15 利用仰角、俯角解决实际问题	21
16 利用解直角三角形的定义判断解直角三角形的条件	26
17 利用直角三角形的边角关系解直角三角形	27
18 利用旋转法求非直角三角形中的角度	29
19 利用分段计算法求动点的运动路程	30
20 利用解直角三角形解实际中测量问题	38
21 利用测倾器测量仰角、俯角	43
22 利用测倾器测量底部可以到达的物体的高度	44
1 利用二次函数的定义求待定字母的值	62
2 利用实际问题中的数量关系建立二次函数模型	63
3 利用分类讨论思想解二次函数定义的相关问题的应用	63
4 利用画二次函数 $y=x^2$ 的图象的步骤画图象	67
5 利用二次函数 $y=x^2$ 和 $y=-x^2$ 的图象与性质求值	68
6 利用代入比较法或增减性比较法比较函数值的大小	69
7 利用分割法求二次函数图象中的面积问题	69
8 二次函数 $y=ax^2$ 的图象和性质的应用类型	72
9 利用二次函数 $y=ax^2+c$ 的图象解相关应用问题	74
10 利用基础图象位置法识别图象	75
11 利用建模法解抛物线型实际应用问题	75
12 利用数形结合思想解决二次函数与反比例函数综合问题	76
13 利用二次函数 $y=a(x-h)^2$ 的图象识别函数	79
14 利用二次函数 $y=a(x-h)^2+k$ 的图象和性质解相关应用问题	80
15 利用特殊形式二次函数间的关系解相关应用问题	81
16 利用顶点式法求函数表达式	82
17 利用函数的增减性法确定待定字母的取值范围	82
18 利用建坐标系法解抛物线型实际应用问题	83

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

学霸图谱

提分 ← 方法 ← 学霸

方法点53个 得高分

		页码
1	比较物体倾斜程度的两种方法	3
2	定义法	5
3	参数法	6
4	求锐角三角函数值的方法	6
5	等角转换法	6
6	在网格中求锐角三角函数值的方法	7
7	分类讨论思想	8
8	换元法	8
9	有关特殊角的三角函数值的计算方法	13
10	割补法	15
11	解直角三角形的一般方法	27
12	构造直角三角形解非直角三角形问题的方法	28
13	解决可转化为直角三角形的问题的方法	29
14	旋转法	29
15	求解是否触礁或是否受台风或噪声影响等问题的方法	35
16	解直角三角形的实际应用问题的求解方法	39
1	判断一个函数为二次函数的一般步骤	64
2	判断二次函数的增减性的技巧	72
3	特殊值法	73
4	在同一坐标系中确定两个函数图象是否同时成立的方法	75
5	根据二次函数的增减性求待定字母的取值范围的方法	82
6	逆平移法	
7	二次函数最值的求法	90
8	比较抛物线上两点对应的函数值大小的方法	92
9	用二次函数的性质解几何图形面积的最值问题的方法	93
10	待定系数法	96
11	特殊位置抛物线的表达式的求法技巧	96

考法点53个 争满分

		页码
1	利用三角函数的定义说明网格中锐角三角函数的关系	10
2	利用锐角三角函数值求线段的长度	10
3	利用特殊角的三角函数值进行计算	16
4	利用特殊角的三角函数值解决实际问题	16
5	利用计算器求三角函数值	23
6	利用仰角和俯角解决实际问题	23
7	利用解直角三角形说明平方关系	31
8	利用解直角三角形求函数值	32
9	利用解直角三角形求与函数综合的最值	32
10	利用解直角三角形求相似中线段的长	33
11	利用解直角三角形构造直角三角形模型求距离	39
12	构建“⧋”式模型解实际问题	40
13	构建“◿”式模型解实际问题	41
14	从同一点看不同位置测量高度	47
15	从不同点看同一位置测量高度	47
16	从不同点看不同位置测量高度	48
1	利用二次函数的定义识别二次函数表达式	64
2	利用割补法建立几何问题的二次函数模型	65
3	利用二次函数的图象和性质辨析相关函数的性质	70
4	利用二次函数的图象解与几何图形的交点坐标	70
5	利用特殊二次函数的性质求最值	77
6	利用二次函数的性质求字母系数的值	84
7	利用二次函数的图象作等腰三角形	84
8	利用函数的最小值求字母系数的值	92
9	利用二次函数的性质比较函数值的大小	92
10	利用二次函数的性质求几何最值	93
11	利用二次函数的性质求抛物线上的最短距离问题	93
12	利用求二次函数表达式解决最值和存在性问题	101
13	利用待定系数法求二次函数图象变换的表达式	102

第一章 直角三角形的边角关系

第二章 二次函数

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

提分攻略

第二章 二次函数

第三章 圆

知识点 60 个 必得分

	页码
13 用待定系数法求二次函数的表达式	96
14 二次函数的简单应用	98
15 用二次函数解实际问题	105
16 建立二次函数模型解决几何图形面积最值问题	106
17 建立二次函数模型解决商品经济利润最值问题	108
18 二次函数与一元二次方程的关系	118
19 二次函数图象法求解一元二次方程	119
1 圆	138
2 圆的有关概念	139
3 点和圆的位置关系	140
4 圆的对称性	145
5 圆心角、弧、弦之间的关系	145
6 圆心角、弧、弦之间关系的推论	146
7 垂径定理	151
8 垂径定理的推论	152
9 圆周角	157
10 圆周角定理的推论	158
11 圆内接四边形	159
12 圆的确定	165
13 三角形的外接圆	166
14 直线和圆的位置关系	170
15 切线的性质	171
16 切线的判定	172
17 三角形的内切圆	174
18 切线长定理	180
19 圆外切四边形	181
20 圆内接正多边形	186
21 正多边形的有关计算	187
22 正多边形的画法	188
23 弧长公式	193
24 扇形	194

考向点 80 个 速提分

	页码
19 利用二次函数的图象确定代数式的符号	89
20 利用图象法求二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 在指定自变量取值范围内的最值	90
21 利用作图法求二次函数图象上的点的存在性问题	91
22 利用待定系数法求二次函数的表达式	96
23 利用用二次函数解实际问题的常用方法解应用题	105
24 利用二次函数求解图形面积的最值问题	106
25 利用二次函数的性质解决利润最值问题	108
26 利用函数思想求几何图形中的最值问题	109
27 利用图象与方程的关系分类讨论求交点坐标	121
28 利用解的个数判断法解函数图象的公共点问题	122
1 利用圆的定义解确定圆的应用问题	138
2 利用圆的有关概念判断命题的正确性	139
3 利用点和圆的位置关系判定说明点的位置	140
4 利用构造等腰三角形法求圆中的角的度数	140
5 利用转化圆的半径法比较线段的大小	141
6 利用分类法求涉点和圆的位置关系的圆的半径	141
7 利用圆的对称性进行语言辨析	145
8 利用弧、弦、圆心角的关系证明弧相等	146
9 利用等圆心角法证明圆中的弧相等	147
10 利用垂径定理解与线段有关的问题	151
11 利用垂径定理的推论证明弦相等	152
12 利用分类讨论思想求圆中位置不确定的弦长	153
13 利用两点一线法求涉及垂径定理的线段和的最小值	153
14 利用圆周角定理求角	157
15 利用圆周角定理的推论解边角应用问题	158
16 利用圆内接四边形的性质求角的度数	159
17 利用切线的性质解边角问题	172
18 利用切线的判定方法判定圆的切线	172
19 利用三角形内切圆求边角问题	174
20 利用类比法、切线的性质探究动态几何问题	175
21 利用分类讨论思想解决直线与圆相切的问题	175
22 利用切线长定理解边角问题	180
23 利用圆外切四边形的性质求线段长	181
24 利用正多边形的定义证明圆内接正多边形	187
25 利用正多边形的计算公式进行计算	187
26 利用正多边形与圆的关系作正多边形	188
27 利用弧长公式求弧长	193
28 利用扇形面积求相关面积	194
29 利用作差法求涉扇形的阴影面积	195
30 利用求弧长法求滚动路线长	195

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

学霸图谱

提分 ↑ 方法 ↑ 学霸

方法点53个 得高分

	页码
12 判断若干个数据适合的函数种类的方法	100
13 割补法	107
14 利用二次函数的性质求最大利润的方法	111
15 求抛物线最高点坐标的方法	115
16 对称轴法求一元二次方程的根	119
17 估计一元二次方程的根的方法	119
18 用图象法求一元二次方程的近似解	120
19 确定公共点个数的方法	122
1 巧用圆的半径的性质比较线段的大小的方法	141
2 证弧、弦、圆心角关系常用的作辅助线的方法	147
3 求解两弧成倍数关系问题的方法	147
4 利用弧、弦、圆心角之间的关系证明线段相等的方法	148
5 利用垂径定理求线段的长的方法	151
6 证明两条弦相等的方法	152
7 利用垂径定理求点的坐标的方法	154
8 等边三角形判定方法	158
9 常见的作辅助线的方法	159
10 确定一个圆的圆心的方法	166
11 求三角形的外接圆半径的方法	166
12 作辅助线判定圆的切线的常用方法	172
13 用直角三角形三边长表示其内切圆半径的方法	174
14 证明一个多边形是圆内接正多边形的方法	187
15 构造特殊三角形解正多边形的方法	187
16 作差法	195
17 求图形翻滚中路线长问题的方法	196
18 求不规则图形面积的方法	197

考法点53个 争满分

	页码
14 利用二次函数图象和性质解决几何问题	112
15 利用二次函数图象和性质解图表信息问题	114
16 利用二次函数的图象与性质解抛物线型运动问题	115
17 利用二次函数的图象和性质解不等关系问题	123
18 利用抛物线与直线的关系求交点横坐标和的范围	123
19 利用抛物线与直线的交点求与面积相关问题	124
1 利用对圆的认识求坐标	142
2 利用等圆的半径求角	143
3 利用网格格点上点与圆的位置关系情况确定圆的半径的范围	143
4 利用“等弧所对的圆心角相等”证线段相等	149
5 利用垂径定理求圆的周长	155
6 利用垂径定理找特殊四边形的条件	155
7 利用圆的有关性质判断正误	161
8 利用圆周角定理的推论求最短距离	162
9 求三角形外接圆的半径	168
10 圆的切线与三角形相似的综合考查	177
11 利用切线的判定和性质判定切线、求半径	177
12 利用三角形的内切圆解与切线相关的问题	178
13 利用切线长定理进行计算与证明	184
14 利用中心角的计算比较大小	190
15 利用同圆的内接正多边形的计算解有关三角形的计算	191
16 利用弧长公式求圆中的弧长	196
17 利用扇形面积求不规则图形面积	197
18 利用扇形面积公式求与圆综合的面积	197

第二章 二次函数

第三章 圆

注：“提分攻略 学霸图谱”中，所列“考向点”“方法点”为重要条目，全书不仅限于此.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

目录

二维码索引

学方法
化斜为直法…… 28

看微课
锐角三角函数的定义…… 5
仰角俯角问题…… 21
方向角问题…… 36
解直角三角形的应用…… 38

学方法
五点作图法…… 67
待定系数法…… 96

观动画
一般式化成顶点式…… 87
二次函数的图象和性质…… 88

看微课
建立二次函数模型求最值…108
抛物线与 x 轴交点的个数…118

第一章 直角三角形的边角关系

1 锐角三角函数 …… 2
2 30°，45°，60° 角的三角函数值 …… 12
3 三角函数的计算 …… 19
4 解直角三角形 …… 26
5 三角函数的应用 …… 35
6 利用三角函数测高 …… 43

素养提分

类型篇：解直角三角形常见应用举例 ☞ P50
整合篇：章末核心知识分类整合 ☞ P53

第二章 二次函数

1 二次函数 …… 62
2 二次函数的图象与性质 …… 67
2.1 二次函数 $y=x^2$，$y=-x^2$ 的图象与性质 …… 67
2.2 二次函数 $y=ax^2$，$y=ax^2+c$ 的图象与性质 …… 72
2.3 二次函数 $y=a(x-h)^2$，$y=a(x-h)^2+k$ 的图象与性质 …… 79
2.4 二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图象与性质 …… 87
3 确定二次函数的表达式 …… 96
4 二次函数的应用 …… 105
5 二次函数与一元二次方程 …… 118

素养提分

技巧篇：对称轴在二次函数中的巧妙运用 ☞ P126
整合篇：章末核心知识分类整合 ☞ P128

微信公众号
教辅资料站

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

第三章 圆

1 圆 …… 138

2 圆的对称性 …… 145

*3 垂径定理 …… 151

4 圆周角和圆心角的关系 …… 157

5 确定圆的条件 …… 165

6 直线和圆的位置关系 …… 170

*7 切线长定理 …… 180

8 圆内接正多边形 …… 186

9 弧长及扇形的面积 …… 193

观动画

点和圆的位置关系……140

直线和圆的位置关系……170

看微课

圆心角、弧、弦之间的关系……146

垂径定理……151

垂径定理的推论……152

切线的判定……173

三角形的内切圆……178

切线长定理……180

素养提分

行动篇：浅谈隐形圆——将多边形问题化归为圆的问题 ☞ P164

应用篇：分类讨论思想在圆中的应用 ☞ P199

整合篇：章末核心知识分类整合 ☞ P201

参考答案及点拨（单独成册）

微信公众号 教辅资料站

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

本册方法总览简释

1. **分类讨论思想**：把所要研究的问题根据题目的特点和要求，分成若干类，转化成若干个小问题来解决，这种按不同情况分类，然后再逐一研究解决的数学思想，称为分类讨论思想.

2. **整体思想**：一般我们把从问题的整体观点出发，通过研究问题的整体形式、整体结构、整体特征，从而对问题进行整体处理的解题方法，称为整体思想.它能使数学问题变难为易、化繁为简，其主要表现形式有整体代入、整体求值、整体设元、整体合并、整体构造等.

3. **方程思想**：方程思想是分析数学问题中各量间的等量关系，构建方程或方程组，利用方程或方程组解决问题的方法.

4. **建模思想**：建模思想是一种数学的思考方法，是运用数学的语言和方法，通过抽象、简化，建立能近似刻画并解决实际问题的一种强有力的数学手段.使用数学语言描述的事物就称为数学模型.

5. **数形结合思想**：数形结合思想就是在研究数学问题时，由数解形，以形助数，数形结合考虑问题的一种思想方法.

6. **转化思想**：转化思想也称化归思想，它是指将未知的、陌生的、复杂的问题，通过观察、分析、联想、类比等思维过程，选择恰当的方法进行变换，化为已知的、熟悉的、简单的问题，从而使问题顺利解决的数学思想.

7. **从特殊到一般的思想**：从特殊到一般的数学思想方法，即先观察一些特殊的事例，然后分析它们共同具有的特征，得出一般的结论.

8. **面积法**：运用图形的面积关系建立一个或几个关于面积的方程或不等式，通过推理、演算以达到求解或证题的目的的一种方法.

9. **参数法**：参数法是指在解题过程中，通过适当引入一些与题目中研究的数学对象发生联系的新变量——参数，再进行分析和推理，使问题得以解决的方法.

10. **换元法**：所谓换元，就是在一个比较复杂的数学式子中，用新的元去代替原式的一个部分或改造原来的式子，将问题简化，易于解决.

11. **逆向思维法**：逆向思维法是指为实现某一创新或解决某一因常规思路难以解决的问题，而采取反向思维寻求解决问题的方法.

12. **割补法**：割补法就是把图形分割，将切下来的部分移动到其他位置，从而使不规则的图形转化为规则的图形，复杂图形转化为简单图形，让题目便于解答.有些情况下利用图形变换（如旋转、平移等）也可以达到简化的目的.

13. **待定系数法**：待定系数法是求函数关系式的重要方法，求解时要先设出符合题意的函数关系式，再根据已知条件建立关于待定系数的方程或方程组，进而解方程或方程组求出待定系数的值，从而确定函数关系式.

14. **定义法**：所谓定义法，就是直接利用数学定义解题的一种方法.从本质上说，数学中的定理、公式、性质和法则等，都是由定义和公理推演出来的.因此，用定义法解题，是最直接的方法.

15. **化斜为直法**：在斜三角形中观察图形的特征，通过作辅助线把斜三角形恰当构造出直角三角形，再利用勾股定理或三角函数解直角三角形.

16. **构造法**：构造法属于非常规思维，它适用于对某些常规方法不易解决的问题，既巧妙，又简洁.其主要思想是依据题设条件特点，以所求结论为方向，在思维中形成新的数学形式，使得问题在这种形式下，拥有简捷解决的方法.主要包括构造方程法、构造图形法（全等、相似、直角三角形等）、根据实际问题构造数学模型等.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

揭秘三角形的边角关系











第一章 直角三角形的边角关系

荣德基

核心考点

你将见到的

- 锐角三角函数
- 特殊角的三角函数值
- 解直角三角形
- 三角函数的应用

核心方法

我们为你提供的

- 定义法
- 参数法
- 构造法
- 换元法
- 割补法
- 旋转法
- 化斜为直法
- 方程思想
- 转化思想

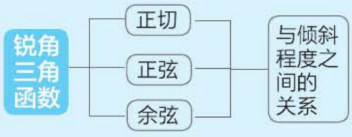
微信公众号 教辅资料站

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

1 锐角三角函数

核心知识
- 正切
- 坡度和坡角
- 正弦和余弦

知识链接



点知识·拨考向 速提分

点知识 1 正切

正切的概念

如图 1−1−1，在 Rt △ ABC 中，如果锐角 A 确定，那么∠ A 的对边与邻边的比便随之确定，这个比叫做∠ A 的正切，记作 tan A，即 tan A= $\frac{\angle A\text{的对边}}{\angle A\text{的邻边}}$. 如果用 a，b 分别表示∠ A 的对边与邻边，那么 tan A= $\frac{a}{b}$.

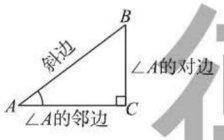


图 1−1−1

提分·必记

特别提醒

- tan A 不表示“tan”乘“A”，tan A 是一个完整的符号，它表示∠A 的正切.
- tan A > 0 且没有单位，它表示一个比值，tan A 的大小只与∠A 的大小有关.

拨考向 利用正切的概念求一个锐角的正切值

例 1 [中考·桂林] 如图 1−1−2，在 Rt △ ABC 中，∠ ACB=90°，AC=8，BC=6，CD ⊥ AB，垂足为 D，则 tan ∠ BCD=_____.

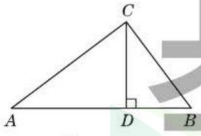


图 1−1−2

解题秘方：紧扣正切的定义，找出该锐角所在的直角三角形的两直角边的比值，或与之相等的锐角所在直角三角形的两直角边的比值.

解：根据题意得∠ BCD= ∠ CAB，

所以 tan ∠ BCD=tan ∠ CAB= $\frac{BC}{AC}=\frac{6}{8}=\frac{3}{4}$.

答案：$\frac{3}{4}$

提分·秘诀

方法点拨

直接求某个锐角的正切值有困难时，可以考虑利用中间量进行转化，可以是相等的角作为中间量，还可以利用相似得到相等的比作为中间量.

荣德基
微信公众号 教辅资料站

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

点知识 2 正切与梯子的倾斜程度的关系

正切与梯子的倾斜程度的关系

（1）当梯子与地面所成的角为锐角 A 时，$\tan A=\dfrac{\text{梯子的垂直高度}}{\text{水平宽度}}$，$\tan A$ 的值越大，梯子越陡．因此，可用梯子的倾斜角的正切值来描述梯子的倾斜程度．

（2）当倾斜角确定时，其对边与邻边的比随之确定，这一比值只与倾斜角的大小有关，而与物体的长度无关．

（3）对“倾斜程度”的理解：

①倾斜程度，其本意指倾斜角的大小，一般来说，倾斜角较大的物体，就说它放得更“陡”．

②通过计算物体与地面夹角的正切值来判断物体的倾斜程度，夹角的正切值越大，物体放置得越“陡”．

拔考向 利用求正切值比较倾斜程度

例 2 如图 1-1-3，李佳怡和王慧珍将两根木棒分别斜靠在墙上，其中 $AB=10$ cm，$CD=6$ cm，$BE=6$ cm，$DE=2$ cm，你能判断出哪根木棒更陡吗？说明理由．

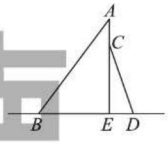


图 1-1-3

解题秘方：紧扣倾斜程度与正切值的关系以及正切值的求法解决问题．

解：木棒 CD 更陡，理由如下：

在 Rt△ABE 中，$AE=\sqrt{AB^2-BE^2}=\sqrt{10^2-6^2}=8$（cm），

$\therefore \tan\angle ABE=\dfrac{AE}{BE}=\dfrac{8}{6}=\dfrac{4}{3}$．

在 Rt△CDE 中，$CE=\sqrt{CD^2-DE^2}=\sqrt{6^2-2^2}=4\sqrt{2}$（cm），

$\therefore \tan\angle CDE=\dfrac{CE}{DE}=\dfrac{4\sqrt{2}}{2}=2\sqrt{2}$．

$\because \tan\angle CDE>\tan\angle ABE$，$\therefore$ 木棒 CD 更陡．

提分·必记

特别提醒

- 在很多实际问题中，人们无法测量倾斜角（如梯子与地面的夹角），这时通常采用倾斜角的正切值来刻画倾斜程度．
- 一个锐角的正切值随角度的增大（减小）而增大（减小）．

提分·秘诀

方法点拨

比较物体倾斜程度的两种方法：

1. 通过测量物体与地面夹角的大小来判断物体的倾斜程度，夹角越大，物体放置得越陡；
2. 通过计算物体与地面夹角的正切值来判断物体的倾斜程度，夹角的正切值越大，物体放置得越陡．

点知识 3 坡度与坡角

名称	定义	表示方法	关系	举例
坡度	坡面的铅直高度 h 与水平宽度 l 的比称为坡度（或坡比），记作 i	$i=\dfrac{h}{l}$	坡度是坡角的正切值，坡度越大，坡角越大，坡面就越陡	当 $h=1$，$l=\sqrt{3}$ 时，坡度 $i=1:\sqrt{3}$，坡角 α 为 30°
坡角	坡面与水平面的夹角叫做坡角（或倾斜角），记作 $\angle\alpha$	$\tan\alpha=\dfrac{h}{l}$		

提分·必记

特别提醒

- 坡度是一个比值，没有单位；坡角是一个角．
- 坡度一般写成 $1:m$ 的形式，比的前项为 1，后项 m 可以是小数，也可以是带根号的数．

荣德基
微信公众号 教辅资料站

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

考向▶利用坡度的概念解决斜坡问题

例 3 如图 1−1−4，拦水坝的横断面为梯形 $ABCD$，$BC \parallel AD$，斜坡 AB 的坡度为 1 ∶ 3，坝顶宽 BC=3 m，坝高为 4 m，斜坡 CD=5 m.

（1）试比较斜坡 AB 和 CD 哪个更陡.

（2）求坝底 AD 的长.

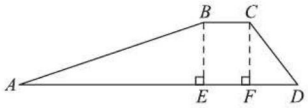


图 1−1−4

解题秘方：紧扣坡度与坡面的倾斜程度之间的关系解决问题.

解：（1）如图 1−1−4，过点 C 作 $CF \perp AD$，垂足为 F，则 CF=4 m.

在 Rt △ CFD 中，根据勾股定理，得 $FD=\sqrt{CD^2-CF^2}=\sqrt{5^2-4^2}$ = 3（m），∴ $\tan D=\dfrac{CF}{FD}=\dfrac{4}{3}$.

∵ $\tan A=\dfrac{1}{3}$，∴ $\tan D > \tan A$，∴斜坡 CD 更陡.

（2）如图 1−1−4，过点 B 作 $BE \perp AD$，垂足为 E，易知 BE=4 m，$EF=BC$=3 m. 在 Rt △ AEB 中，∵ $\tan A=\dfrac{BE}{AE}=\dfrac{1}{3}$，

∴ $AE=3BE=3\times4=12$（m）.

∴ $AD=AE+EF+FD=12+3+3=18$（m），

即坝底 AD 的长为 18 m.

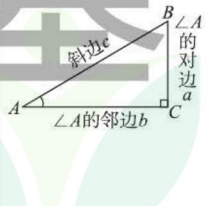
提分·秘诀

解法提醒

- 解有关坡度的问题时，往往要添加适当的辅助线，构造直角三角形.
- 比较哪个斜坡更陡，也就是比较哪个斜坡的坡度更大.

点知识▶4 正弦、余弦

1. 正弦、余弦的定义

名称	定义	数学语言	图示
正弦	在 Rt △ ABC 中，锐角 A 的对边与斜边的比叫做 ∠ A 的正弦，记作 $\sin A$，即 $\sin A=\dfrac{\angle A\text{ 的对边}}{\text{斜边}}$	在 Rt △ ABC 中，∠ C=90°，$BC=a$，$AB=c$，则 $\sin A=\dfrac{a}{c}$	
余弦	在 Rt △ ABC 中，锐角 A 的邻边与斜边的比叫做 ∠ A 的余弦，记作 $\cos A$，即 $\cos A=\dfrac{\angle A\text{ 的邻边}}{\text{斜边}}$	在 Rt △ ABC 中，∠ C=90°，$AC=b$，$AB=c$，则 $\cos A=\dfrac{b}{c}$	

2. 正弦、余弦与梯子的倾斜程度的关系

（1）$\sin A$ 的值越大，梯子越陡；

（2）$\cos A$ 的值越小，梯子越陡.

提分·必记

特别提醒

1. $\sin A$，$\cos A$ 都是一个完整的符号，注意事项与正切类似；
2. $\sin A$，$\cos A$ 没有单位，其值与锐角 A 的大小有关，与所在直角三角形的边长无关.

荣德基
微信公众号
教辅资料站

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

技考向▶利用正弦、余弦的定义求一个锐角的正弦值、余弦值

例 4 在 Rt △ ABC 中，$\angle C=90°$，$\angle A$，$\angle B$，$\angle C$ 的对边分别用 a，b，c 表示，其中 $a=5$，$b=12$，求 $\angle A$ 的正弦值和 $\angle B$ 的余弦值.

解题秘方：紧扣正弦、余弦的定义结合直角三角形的边长解决问题.

解：在 Rt △ ABC 中，由勾股定理，得 $c=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{5^2+12^2}=13$.

$\therefore \sin A=\dfrac{a}{c}=\dfrac{5}{13}$，$\cos B=\dfrac{a}{c}=\dfrac{5}{13}$.

提分·秘诀

解法提醒

求角的正弦、余弦、正切的值时，常先用勾股定理求出各边长，再求它们的值. 在这里，勾股定理起到了桥梁和纽带的作用.

点知识▶5 锐角三角函数

1. 锐角三角函数的定义

锐角 A 的正弦、余弦和正切都是 $\angle A$ 的三角函数. 锐角三角函数 $\sin A$（$\cos A$ 或 $\tan A$）是以锐角 A 为自变量的函数. 对于锐角 A 的每一个确定的值，$\sin A$（$\cos A$ 或 $\tan A$）都有唯一确定的值与其对应.

∠ABC 的正弦表示为 sin∠ABC，∠1 的余弦表示为 cos∠1，其中"∠"不能省略.

2. 锐角三角函数之间的关系

（1）同一锐角的三角函数之间的关系

①平方关系：$\sin^2 A+\cos^2 A=1$；

②商除关系：$\dfrac{\sin A}{\cos A}=\tan A$.

（2）互余两角的三角函数之间的关系

$\sin A=\cos(90°-\angle A)$；

$\cos A=\sin(90°-\angle A)$.

提分·必记

深度理解

1. 锐角三角函数之间的关系都可用定义推导得出.
2. **三角函数定义速记口诀**：
   正弦等于对比斜，
   余弦等于邻比斜，
   正切等于对比邻，
   函数特点要牢记.

锐角三角函数的定义

技考向▶利用三角函数的定义求函数值

题型 1："定义法"在求三角函数值中的应用

例 5 在 Rt △ ABC 中，$\angle C=90°$，$\angle A$，$\angle B$，$\angle C$ 的对边分别为 a，b，c. 已知 $a=6$，$b=8$，求 $\angle A$ 的三个三角函数值.

解题秘方：紧扣三角函数的定义求解.

解：如图 1−1−5，在 Rt △ ABC 中，

$\because \angle C=90°$，$a=6$，$b=8$，

$\therefore c=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{6^2+8^2}=10$.

$\therefore \sin A=\dfrac{a}{c}=\dfrac{6}{10}=\dfrac{3}{5}$，

$\cos A=\dfrac{b}{c}=\dfrac{8}{10}=\dfrac{4}{5}$，

$\tan A=\dfrac{a}{b}=\dfrac{6}{8}=\dfrac{3}{4}$.

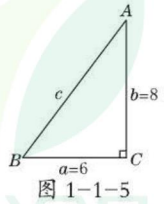


图 1−1−5

提分·秘诀

解法提醒

已知直角三角形的任意两边长求某个锐角的三角函数值时，运用数形结合思想，首先画出符合题意的直角三角形，然后根据勾股定理求出未知边长，最后结合锐角三角函数的定义求锐角的三角函数值.

禁德基
微信公众号
教辅资料站

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

题型 2：“参数法”在求三角函数值中的应用

例 6 在△ABC中，∠C=90°，$\sin A=\frac{4}{5}$，则 $\tan B$=（　　）

A. $\frac{4}{3}$　　B. $\frac{3}{4}$　　C. $\frac{3}{5}$　　D. $\frac{4}{5}$

解题秘方：当出现三角形各边长的比时，可引入参数（辅助元），用这个参数表示三角形的三边长，再用定义求解.

解：由 $\sin A=\frac{BC}{AB}=\frac{4}{5}$，可设 $BC=4k$（$k>0$），则 $AB=5k$. 根据勾股定理，得 $AC=3k$，∴ $\tan B=\frac{AC}{BC}=\frac{3k}{4k}=\frac{3}{4}$.

答案：B

题型 3：“构造法”在求三角函数值中的应用

例 7 如图 1-1-6，在等腰三角形ABC中，$AB=AC$，如果 $2AB=3BC$，求∠B的三个三角函数值.

解题秘方：紧扣三角函数的前提是直角三角形这一特征，用构造直角三角形法求解.

解：过点A作$AD\perp BC$于点D，如图 1-1-6，

∵ $AB=AC$，∴ $BD=DC$.

又∵ $2AB=3BC$，∴ $\frac{AB}{BC}=\frac{3}{2}$.

设 $AB=AC=3k$（$k>0$），则 $BC=2k$，

∴ $BD=CD=k$，

∴ $AD=\sqrt{AB^2-BD^2}=\sqrt{(3k)^2-k^2}=\sqrt{8k^2}=2\sqrt{2}k$.

∴ $\sin B=\frac{AD}{AB}=\frac{2\sqrt{2}k}{3k}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$，$\cos B=\frac{BD}{AB}=\frac{k}{3k}=\frac{1}{3}$，

$\tan B=\frac{AD}{BD}=\frac{2\sqrt{2}k}{k}=2\sqrt{2}$.

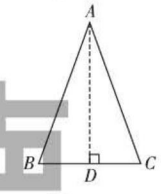


图 1-1-6

题型 4：“等角转换法”在求三角函数值中的应用

例 8 如图 1-1-7，在△ABC中，∠ACB=90°，$AC=BC=4$，将△ABC折叠，使点A落在BC边上的点D处，EF是折痕. 若 $AE=3$，则 $\sin\angle BFD$的值为（　　）

A. $\frac{1}{3}$　　B. $\frac{2\sqrt{2}}{3}$　　C. $\frac{\sqrt{2}}{4}$　　D. $\frac{3}{5}$

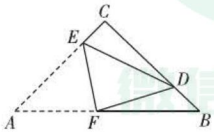


图 1-1-7

技巧点拨

在直角三角形中，给出某一锐角的三角函数值时，求另一个锐角的三角函数值，可以用设辅助元即引入参数的方法来解决，注意在最后计算时约去辅助元.

特别提醒

求锐角三角函数值的方法：三角函数是在直角三角形的条件下定义的，因此当求某一个角的三角函数值时，先观察该角是否在某一个直角三角形中. 当题目中没有直角三角形时，就需要我们作辅助线构造与该角有关的直角三角形.

教你一招

求锐角三角函数值时，若用定义法、参数法、构造法等还是不能求出所要求的锐角的三角函数值，我们需转换思维方式，将角进行转化，改求与所求锐角相等的角的三角函数值，即用等角转换法求解. 找相等的角的方法有很多种，

来德基
微信公众号
教辅资料站

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

解题秘方：紧扣角相等则其三角函数值也相等这一特征，用等角转换法将所要求的角的三角函数值转化为求直角三角形中与它相等的角的三角函数值.

解：∵在△ABC中，$\angle ACB=90°$，

$AC=BC=4$，$\therefore \angle A=\angle B=45°$.

由折叠的性质得$DE=AE=3$，$\angle EDF=\angle A$，

$\therefore \angle EDF=\angle B$.

∵$\angle CDF=\angle CDE+\angle EDF=\angle B+\angle BFD$，

$\therefore \angle CDE=\angle BFD$.

在Rt△CDE中，∵$CE=AC-AE=1$，

$\therefore \sin\angle CDE=\dfrac{CE}{DE}=\dfrac{1}{3}$，

$\therefore \sin\angle BFD$的值为$\dfrac{1}{3}$.

答案：A

可从借助平行线、三角形外角、等腰三角形、三角形全等、三角形相似等知识来寻找，要根据题目中的条件灵活选用方法.

点方法·拨技巧 提高分

拔尖角度▸ 1 利用平移法构造直角三角形求网格中的函数值

挑战·高分

例9 如图1-1-8是由边长相等的小正方形组成的网格，A，B，P，Q四点均在正方形网格的格点上.线段AB，PQ相交于点M，则图中$\angle QMB$的正切值是（　　）

A. $\dfrac{1}{2}$　　B. 1　　C. $\sqrt{3}$　　D. 2

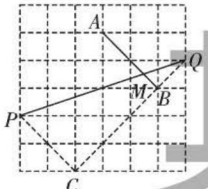


图1-1-8

解题秘方：紧扣网格的特点，用平移法构造直角三角形求解.

解：如图1-1-8，过点P作$PC\parallel AB$，连接QB并延长，交PC于点C，则$\angle QMB=\angle QPC$.

易得$QC=4\sqrt{2}$，$PC=2\sqrt{2}$，$PQ=2\sqrt{10}$，$\therefore PQ^2=QC^2+PC^2$，

$\therefore \angle PCQ=90°$，

$\therefore \tan\angle QMB=\tan\angle QPC=\dfrac{QC}{PC}=2$.

答案：D

方法点拨

在网格中求锐角三角函数值的方法：在网格中求某一锐角的三角函数值时，先要借助网格的特点，利用勾股定理求出三角形的各边长，再利用勾股定理的逆定理判断三角形是否为直角三角形.若是，则利用锐角三角函数的定义求出三角函数值；若不是，则用平移法构造直角三角形，将问题转化到直角三角形中求解.

荣德基
微信公众号 教辅资料站

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

拔尖角度▸ 2 利用分类讨论思想计算不确定的三角形的面积

例10 在△ABC中，$\tan B=\frac{2}{3}$，$BC=6$，过点A作BC边上的高，垂足为点D，且满足$BD:CD=2:1$，则△ABC面积的所有可能值为_____.

解题秘方：紧扣条件中高的位置的不确定性，用分类讨论思想画出正确的图形并求解.

解：设$CD=x$，由$BD:CD=2:1$，得$BD=2x$，分情况讨论：

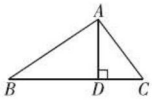


图 1-1-9

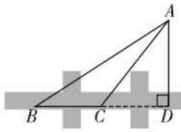


图 1-1-10

（1）如图1-1-9，当点D在线段BC上时，

则$BC=BD+CD=3x=6$，$\therefore x=2$，即$BD=4$.

由$\tan B=\frac{AD}{BD}=\frac{2}{3}$，得$AD=\frac{2}{3}BD=\frac{2}{3}\times4=\frac{8}{3}$，

$\therefore S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}BC\cdot AD=\frac{1}{2}\times6\times\frac{8}{3}=8$.

（2）如图1-1-10，当点D在线段BC的延长线上时，

则$BC=BD-CD=x=6$，$\therefore BD=2BC=12$.

由$\tan B=\frac{AD}{BD}=\frac{2}{3}$，得$AD=\frac{2}{3}BD=\frac{2}{3}\times12=8$，

$\therefore S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}BC\cdot AD=\frac{1}{2}\times6\times8=24$.

答案：8或24

挑战·高分

方法点拨

涉及三角形高的问题中，高的位置是解答问题的关键，在没有直角三角形的情况下，要构造直角三角形，将问题转化到直角三角形中求解；没有图形时，注意画图要全面.

警示误区

对于不确定的图形要注意分类讨论，本题中三角形的高可能在三角形内，也可能在三角形外，在求解时容易忘记分情况讨论，导致漏掉如图1-1-10所示的情况.

拔尖角度▸ 3 利用换元法解三角函数与方程的综合问题

例11 已知$\sin\alpha$，$\cos\alpha$是关于x的方程$25x^2-5(2t+1)x+t^2+t=0$的两根，且$\angle\alpha$为锐角，求t的值.

解题秘方：利用一元二次方程的根与系数的关系列式，结合同角三角函数的关系求解.

解：$\because\sin\alpha$，$\cos\alpha$是关于x的方程$25x^2-5(2t+1)x+t^2+t=0$的两根，$\therefore\sin\alpha+\cos\alpha=\frac{2t+1}{5}$，$\sin\alpha\cdot\cos\alpha=\frac{t^2+t}{25}$.

$\therefore\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=(\sin\alpha+\cos\alpha)^2-2\sin\alpha\cdot\cos\alpha=\left(\frac{2t+1}{5}\right)^2-2\cdot\frac{t^2+t}{25}=1$. 解得$t=3$或$t=-4$.

又$\because\angle\alpha$为锐角，$\therefore t>0$，$t=3$.

挑战·高分

规律点拨

锐角三角函数出现在方程中时，将锐角三角函数等同于普通的代数式看待，但解方程往往要结合三角函数的取值范围等对方程的根进行取舍.

荣德基
微信公众号
教辅资料站

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

拔尖角度 4 利用从特殊到一般的思想探究与三角函数有关的问题

例 12 如图 1-1-11，根据提供的数据解答下列问题：

（1）在图 1-1-11 ①中，sin A=_____，cos A=_____，$\sin^2 A+\cos^2 A$=_____；

在图 1-1-11 ②中，sin A_1=_____，cos A_1=_____，$\sin^2 A_1+\cos^2 A_1$=_____.

通过以上两个特殊例子，你发现了什么规律？试用一个式子把你发现的规律表示出来，并加以证明.

（2）在图 1-1-11 ①中，$\tan A$=_____，$\dfrac{\sin A}{\cos A}$=_____；

在图 1-1-11 ②中，$\tan A_1$=_____，$\dfrac{\sin A_1}{\cos A_1}$=_____.

通过以上两个特殊例子，你发现了什么规律？试用一个式子把你发现的规律表示出来，并加以证明.

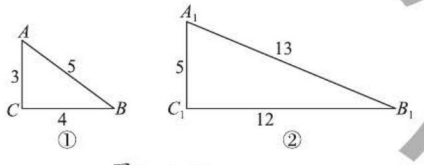


图 1-1-11

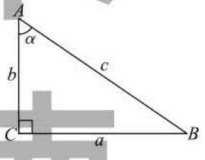


图 1-1-12

解题秘方：从特殊图形中计算出同一个锐角的三角函数值，猜想出一般图形中的规律.

解：（1）$\dfrac{4}{5}$；$\dfrac{3}{5}$；1；$\dfrac{12}{13}$；$\dfrac{5}{13}$；1

规律：对于任意锐角 α，有 $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$.

证明：如图 1-1-12，在 Rt△ABC 中，∠C=90°，$\sin\alpha=\dfrac{a}{c}$，$\cos\alpha=\dfrac{b}{c}$，∴ $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=\left(\dfrac{a}{c}\right)^2+\left(\dfrac{b}{c}\right)^2=\dfrac{a^2+b^2}{c^2}$.

又∵ $a^2+b^2=c^2$，∴ $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=\dfrac{c^2}{c^2}=1$.

（2）$\dfrac{4}{3}$；$\dfrac{4}{3}$；$\dfrac{12}{5}$；$\dfrac{12}{5}$

规律：对于任意锐角 α，有 $\tan\alpha=\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$.

证明：如图 1-1-12，∵ $\tan\alpha=\dfrac{a}{b}$，$\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\dfrac{a}{b}$，

∴ $\tan\alpha=\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$.

挑战·高分

解法提醒

解决规律探究类问题的秘诀：规律探究类的问题通常会在题干中给出一些式子的值或关系式，因此要从这些“特殊”的值或关系式中找到对我们有用的信息，然后通过猜测、验证解决问题.

荣德基
微信公众号
教辅资料站

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

点中考·拨模拟 得满分

中考探秘 直角三角形的边角关系属于中考的必考知识，有关图形的计算都离不开直角三角形的边角关系．理解锐角三角函数的意义是分析相关问题的基础．常考的内容是给出三角函数求边、角或解决一些实际问题，一般以选择题、填空题的形式出现，难度中等．

三年中考兵法

考法 1 利用三角函数的定义说明网格中锐角三角函数的关系

例 13 [中考·宜昌] △ABC 在网格中的位置如图 1-1-13 所示（每个小正方形的边长为 1），$AD \perp BC$ 于 D，下列四个选项中，错误的是（　　）

A. $\sin\alpha = \cos\alpha$　　B. $\tan C = 2$

C. $\sin\beta = \cos\beta$　　D. $\tan\alpha = 1$

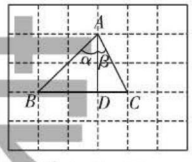


图 1-1-13

试题评析：本题考查锐角三角函数的应用、勾股定理等知识，解题的关键是灵活运用所学知识解决问题，属于中考常考题型．

解：观察图 1-1-13 可知，△ADB 和△ADC 是直角三角形，$BD = AD = 2$，$CD = 1$，∴ $AB = 2\sqrt{2}$，$AC = \sqrt{5}$，∴ $\sin\alpha = \cos\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$，$\tan C = \frac{AD}{CD} = 2$，$\tan\alpha = 1$，故 A，B，D 正确．

∵ $\sin\beta = \frac{CD}{AC} = \frac{\sqrt{5}}{5}$，$\cos\beta = \frac{2\sqrt{5}}{5}$，∴ $\sin\beta \neq \cos\beta$，故 C 错误．

答案：C

考法 2 利用锐角三角函数值求线段的长度

例 14 [中考·自贡] 如图 1-1-14，在△ABC 中，$BC = 12$，$\tan A = \frac{3}{4}$，$\angle B = 30°$，求 AC 和 AB 的长．

试题评析：本题主要考查直角三角形中的锐角三角函数值，利用三角函数值求直角三角形的边长是解题的关键．



图 1-1-14

解：如图 1-1-14，过点 C 作 $CH \perp AB$ 于点 H．

在 Rt△BCH 中，∵ $BC = 12$，$\angle B = 30°$，

∴ $CH = \frac{1}{2}BC = 6$，∴ $BH = \sqrt{BC^2 - CH^2} = \sqrt{12^2 - 6^2} = 6\sqrt{3}$．

在 Rt△ACH 中，$\tan A = \frac{3}{4} = \frac{CH}{AH}$，∴ $AH = 8$，

∴ $AC = \sqrt{AH^2 + CH^2} = 10$，$AB = AH + BH = 8 + 6\sqrt{3}$．

冲刺·满分

思路引导

观察图形可知，△ADB 和△ADC 是直角三角形，BD=AD=2，CD=1，由勾股定理可得 AB=$2\sqrt{2}$，AC=$\sqrt{5}$，利用锐角三角函数的定义一一计算即可判断．

思路引导

利用三角函数值求线段的长度主要利用函数的变形：

$\tan A = \frac{a}{b} \Rightarrow a = \tan A \cdot b$，$b = \frac{a}{\tan A}$．

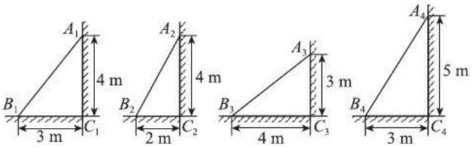
$\sin A = \frac{a}{c}$，$\cos A = \frac{b}{c} \Rightarrow a = \sin A \cdot c$，$b = \cos A \cdot c$，$C = \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\cos A}$．

素德基
微信公众号 教辅资料站

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

两年模拟兵法 ☞答案见209页

1. 下列四个选项中，梯子最陡的是（　　）



A　　B　　C　　D

2. 将 Rt △ ABC 的斜边和直角边都扩大 n 倍，那么锐角 A 的三角函数值（　　）

A. 都扩大 n 倍　　B. 都缩小 n 倍

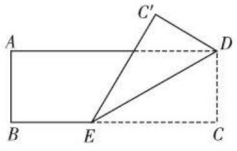
C. 没有变化　　D. 只有 $\tan A$ 发生变化

3. [中考·金华] 在 Rt △ ABC 中，$\angle C=90°$，$AB=5$，$BC=3$，则 $\tan A$ 的值是（　　）

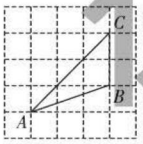
A. $\frac{3}{4}$　　B. $\frac{4}{3}$　　C. $\frac{3}{5}$　　D. $\frac{4}{5}$

4. [模拟·河北] 将一张矩形纸片 $ABCD$ 如图那样折叠，使顶点 C 落在 C' 处，测得 $AB=4$，$DE=8$，则 $\sin\angle C'ED$ 的值为（　　）

A. 2　　B. $\frac{1}{2}$　　C. $\frac{\sqrt{2}}{2}$　　D. $\frac{\sqrt{3}}{2}$



（第4题）



（第5题）

5. 如图，将△ ABC 放在每个小正方形的边长都为1的网格中，点 A，B，C 均在格点上，则 $\tan A$ 的值是（　　）

A. $\frac{\sqrt{5}}{5}$　　B. $\frac{\sqrt{10}}{5}$　　C. 2　　D. $\frac{1}{2}$

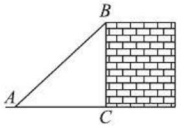
6. [中考·聊城] 在 Rt △ ABC 中，$\cos A=\frac{1}{2}$，那么 $\sin A$ 的值是（　　）

A. $\frac{\sqrt{2}}{2}$　　B. $\frac{\sqrt{3}}{2}$　　C. $\frac{\sqrt{3}}{3}$　　D. $\frac{1}{2}$

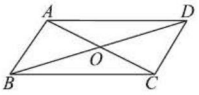
7. 一个直角三角形的两边长分别为3，4，则较小的锐角的正切值是（　　）

A. $\frac{3}{4}$　　B. $\frac{4}{3}$　　C. $\frac{3}{4}$或$\frac{\sqrt{7}}{3}$　　D. $\frac{3}{4}$或$\frac{\sqrt{7}}{4}$

8. 如图，一架梯子斜靠在墙上，若梯子底端到墙的距离 $AC=3$ m，$\cos\angle BAC=\frac{3}{4}$，则梯子 AB 的长度为_____.



（第8题）



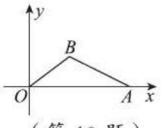
（第9题）

9. 如图，在▱ $ABCD$ 中，对角线 AC，BD 相交于点 O. 若 $AB=4$，$BD=10$，$\sin\angle BDC=\frac{3}{5}$，则▱ $ABCD$ 的面积是_____.

10. 如图，在平面直角坐标系内，O 为原点，点 A 的坐标为（10，0），点 B 在第一象限内，$BO=5$，$\sin\angle BOA=\frac{3}{5}$.

（1）求点 B 的坐标；

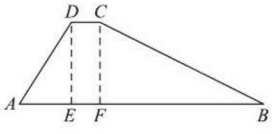
（2）求 $\cos\angle BAO$ 的值.



（第10题）

11. 如图，水库大坝横截面的迎水坡坡度（DE 与 AE 的长度之比）为1 ∶ 0.6，背水坡坡度（CF 与 FB 的长度之比）为1 ∶ 2，大坝高 $DE=30$ m，坝顶宽 $DC=10$ m，求大坝横截面的周长.

[导学号 2380328]



（第11题）

未来基德
微信公众号
教辅资料站

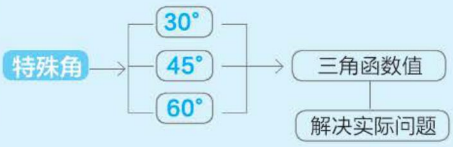
关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

2 30°，45°，60° 角的三角函数值

核心知识

- 30°，45°，60° 角的三角函数值
- 特殊角的三角函数值的实际应用

知识链接



点知识·拨考向 速提分

点知识 1 30°，45°，60° 角的三角函数值

1.30°，45°，60° 角的三角函数值

三角函数值 角 α ＼ 三角函数	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\tan\alpha$
30°	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
45°	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
60°	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$

2.30°，45°，60° 角的三角函数值的记忆法

巧记特殊角的锐角三角函数值：

三十、四十五、六十度，三角函数要记住，

分母弦二切是三，分子要把根号添，

一二三来三二一，切值三、九、二十七，

正弦正切递增值，余弦递减恰相反.

口诀释义：理解口诀前需将特殊角的锐角三角函数值的分子放入二次根号中，此时，弦函数的分母都是 2，若将切函数的分母改为 3，则分别变为 $\frac{\sqrt{3}}{3}$，$\frac{\sqrt{9}}{3}$，$\frac{\sqrt{27}}{3}$；按照 30°，45°，60° 的顺序，正弦函数值分子根号内的数分别是 1，2，3，余弦函数值的分别是 3，2，1，正切函数值的分别是 3，9，27. 正弦、正切函数值随角度的增大而增大，余弦函数值则相反.

提分·必记

特别提醒

1. 由左表可以方便地知道特殊角的三角函数值，也可由特殊角的三角函数值求出相应的锐角.
2. 2sin 60°表示 sin 60°的 2 倍，书写时省略 2 与 sin 60°之间的乘号，且应将数字 2 放在前面，不要写成 sin 60°·2，以免误认为是 sin 120°.
3. 对于含有三角函数的计算题，应先把相应的三角函数值代入，将运算转化为实数的混合运算，然后根据实数的运算法则计算.

基德荣

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

考向▶利用特殊角的三角函数值解决计算问题

题型1：特殊角的三角函数值在求函数值中的应用

例1 （1）已知$\angle\alpha=45°$，求$2\sin^2\alpha-2\sqrt{2}\sin\alpha\cdot\tan\alpha+\tan^2\alpha$的值；

（2）计算$\frac{1}{4}\tan^2 45°+\frac{1}{\sin^2 30°}-3\cos^2 30°-\frac{\sin 45°}{\cos 45°}$的值.

解题秘方：用代入法求值.

解：（1）$2\sin^2\alpha-2\sqrt{2}\sin\alpha\cdot\tan\alpha+\tan^2\alpha=(\sqrt{2}\sin\alpha-\tan\alpha)^2$.

当$\angle\alpha=45°$时，原式$=(\sqrt{2}\sin 45°-\tan 45°)^2$

$$=\left(\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}-1\right)^2$$

$$=0.$$

（2）原式$=\frac{1}{4}\times1^2+\frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)^2}-3\times\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2-\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}$

$$=\frac{1}{4}+4-\frac{9}{4}-1$$

$$=1.$$

题型2：特殊角的三角函数值在求角中的应用

例2 在$\triangle ABC$中，$\angle A$，$\angle B$均为锐角，且$\angle A$，$\angle B$满足$\left|\sin A-\frac{\sqrt{3}}{2}\right|+\left(\frac{\sqrt{3}}{3}-\tan B\right)^2=0$，试判断$\triangle ABC$的形状，并说明理由.

解题秘方：先根据特殊角的三角函数值求出两个内角的度数，再判断三角形的形状.

解：$\triangle ABC$是直角三角形.

理由如下：

$\because\left|\sin A-\frac{\sqrt{3}}{2}\right|+\left(\frac{\sqrt{3}}{3}-\tan B\right)^2=0$，

$\left|\sin A-\frac{\sqrt{3}}{2}\right|\geqslant 0$，$\left(\frac{\sqrt{3}}{3}-\tan B\right)^2\geqslant 0$，

$\therefore\sin A-\frac{\sqrt{3}}{2}=0$，$\frac{\sqrt{3}}{3}-\tan B=0$，

$\therefore\sin A=\frac{\sqrt{3}}{2}$，$\tan B=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

又$\because\angle A$，$\angle B$均为锐角，

$\therefore\angle A=60°$，$\angle B=30°$.

$\therefore\angle A+\angle B=60°+30°=90°$.

$\therefore\triangle ABC$是直角三角形.

提分·秘诀

解法提醒

有关特殊角的三角函数值的计算方法：先直接写出三角函数值，将运算转化为实数的混合运算，然后根据实数的运算法则计算.

解法提醒

已知特殊角的三角函数值求特殊角的度数时，要注意两点：

- 要求的角是锐角；
- 看准三角函数的类别，同样的函数值，不同类别，度数不一样.

荣德基

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

题型 3：特殊角的三角函数值在求非特殊角的三角函数值中的应用

例 3 求 $\tan 15°$ 的值.

解题秘方：构造与 15° 角、30° 角有关联的三角形进行计算.

解：如图 1−2−1，在 Rt△ABC 中，∠C=90°，∠ABC=30°，延长 CB 到点 D，使 $BD=AB$，连接 AD.

∵ $BD=AB$，∴∠D = ∠BAD，

易得∠$D=\frac{1}{2}\angle ABC=\frac{1}{2}\times 30°=15°$.

设 $AC=x$（$x>0$），则 $AB=BD=2x$，

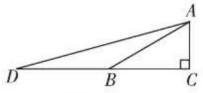


图 1−2−1

$BC=AB\cdot\cos\angle ABC=2x\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}x$,

∴ $CD=BD+BC=(2+\sqrt{3})x$,

∴ $\tan D=\frac{AC}{CD}=\frac{x}{(2+\sqrt{3})x}=2-\sqrt{3}$，即 $\tan 15°=2-\sqrt{3}$.

方法点拨

构造特殊角的方法有两种：

- 利用特殊角的组合进行转化，如 30°+45°=75°；
- 借助外角构造含特殊锐角的直角三角形.

点知识 ▸ 2 特殊角的三角函数值的实际应用

利用特殊角的三角函数值解决实际问题的一般步骤

（1）根据题意构造出含有特殊角的直角三角形，建立三角函数模型；

（2）利用三角函数的定义或定义的变形表示题目中的相关量；

（3）找出各个量之间的关系；

（4）利用已知量与未知量的关系求解未知量；

（5）得出结论.

注意在构造直角三角形时，要注意角度拆分的应用.

提分·必记

特别提醒

利用特殊角的三角函数值解决实际问题时，要找到与已知量和未知量相关联的直角三角形. 当图形中没有直角三角形时，要通过作高或垂线构造直角三角形.

拔考向 ▸ 利用特殊角的三角函数值解决实际问题

例 4 如图 1−2−2，在一次课外实践活动中，同学们要测量某公园人工湖两侧 A，B 两个凉亭之间的距离，现测得 AC=30 m，BC=70 m，∠CAB=120°，请计算 A，B 两个凉亭之间的距离.

解题秘方：紧扣利用特殊角的三角函数值解决实际问题的一般步骤，建立三角函数模型解决问题.



图 1−2−2

解：如图 1−2−2，过点 C 作 $CD\perp AB$，交 BA 的延长线于点 D.

∵ $CD\perp AB$，∠CAB=120°，

∴∠CAD=60°，∴∠ACD=30°，

∴ $AD=\frac{1}{2}AC$=15 m，$CD=AC\cdot\cos 30°=15\sqrt{3}$ m.

在 Rt△BDC 中，$BD=\sqrt{BC^2-CD^2}=\sqrt{70^2-(15\sqrt{3})^2}=65$（m），

∴ $AB=BD-AD$=65−15=50（m），

即 A，B 两个凉亭之间的距离为 50 m.

提分·秘诀

方法点拨

本题是利用构造法求解无法直接测量的距离或高度问题，具体操作时，先构造出含有特殊角（30°，45°或 60°角）的直角三角形，再利用特殊角的三角函数值来计算所要求的距离或高度.

基 德 某

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

点方法·拨技巧 提高分

拔尖角度▸ 1 利用构造法求三角形中的线段长

例5 如图1-2-3，在锐角三角形ABC中，$\angle A=45°$，$\cos A$，$\cos B$是一元二次方程$4x^2-2(1+\sqrt{2})x+m=0$的两个根，且$AC=\sqrt{2}$．求：

（1）$\angle B$的度数；

（2）AB的长．

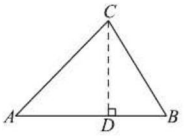


图1-2-3

解题秘方：利用作垂线构造含特殊角的直角三角形，借助特殊角的三角函数值解决问题．

解：（1）$\because \angle A=45°$，$\therefore \cos A=\frac{\sqrt{2}}{2}$．

$\because \cos A$是一元二次方程$4x^2-2(1+\sqrt{2})x+m=0$的一个根，又由根与系数的关系可知两根的和为$\frac{2(1+\sqrt{2})}{4}=\frac{1+\sqrt{2}}{2}$，

$\therefore$另一个根$\cos B=\frac{1}{2}$．

又$\because \angle B$为锐角，$\therefore \angle B=60°$．

（2）如图1-2-3，过点C作$CD\perp AB$于点D．

在Rt$\triangle ACD$中，$AD=CD=AC\cdot\sin 45°=\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=1$．

在Rt$\triangle BCD$中，$\tan B=\frac{CD}{BD}$，$\therefore BD=\frac{CD}{\tan 60°}=\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$，

$\therefore AB=AD+BD=1+\frac{\sqrt{3}}{3}=\frac{3+\sqrt{3}}{3}$．

挑战·高分

方法点拨

在作垂线构造直角三角形时，不要破坏特殊角（30°，45°或60°角）的完整性，即尽量不要过这些特殊角的顶点作垂线，而是将这些特殊角放入直角三角形中，这样有助于利用特殊角的三角函数值解决问题．

拔尖角度▸ 2 利用割补法解决与特殊角有关的图形面积问题

例6 ［中考·襄阳］如图1-2-4是一块四边形土地，其中$\angle ABD=120°$，$AB\perp AC$，$BD\perp CD$，$AB=30\sqrt{3}$ m，$CD=50\sqrt{3}$ m，求这块土地的面积．

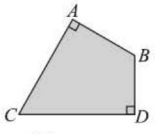


图1-2-4

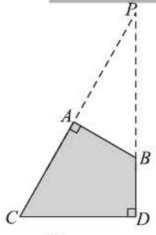


图1-2-5

解题秘方：紧扣直角进行割补，利用特殊角的三角函数值解决实际问题．

解：如图1-2-5，延长CA，DB交于点P．

挑战·高分

方法点拨

利用割补法求不规则图形的面积时要把握两个原则：

- 割补后的两个图形都是直角三角形；
- 巧妙地利用好已知的特殊角．

荣德基

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

$\because \angle ABD=120°$，$AB \perp AC$，$BD \perp CD$，

$\therefore \angle ACD=60°$，$\angle ABP=60°$．

在 Rt $\triangle CDP$ 中，$\tan C=\dfrac{PD}{CD}$，

$\therefore PD=CD \cdot \tan C=50\sqrt{3} \times \sqrt{3}=150$（m）．

在 Rt $\triangle ABP$ 中，$\tan \angle ABP=\dfrac{PA}{AB}$，

$\therefore PA=AB \cdot \tan \angle ABP=30\sqrt{3} \times \sqrt{3}=90$（m）．

$\therefore S_{四边形ACDB}=S_{\triangle CDP}-S_{\triangle ABP}$

$=\dfrac{1}{2} \times 50\sqrt{3} \times 150-\dfrac{1}{2} \times 30\sqrt{3} \times 90$

$=2\,400\sqrt{3}$（m^2）．

答：这块土地的面积为 $2\,400\sqrt{3}$ m^2．

警示误区

注意不要因为看到两个直角，就连接 BC，而导致思维陷入僵局，无法解题．

荣德基 点中考·拨模拟 得满分

中考探秘

本节两个主要考点：考点 1 是特殊角的三角函数值的计算与实数的运算的综合问题；考点 2 是借助特殊角解决实际问题，重点考查将实际问题转化为数学问题的建模思想．考查的形式主要是解答题，难度适中．

三年中考兵法

冲刺·满分

考法 1 利用特殊角的三角函数值进行计算

例 7 ［中考·娄底］计算：$(\pi-3.14)^0+\left(\dfrac{1}{3}\right)^{-2}-\left|-\sqrt{12}\right|+4\cos 30°$．

试题评析：本题考查了绝对值和二次根式的化简、特殊角的三角函数值、零指数幂以及负整数指数幂，解题的关键是熟记特殊角的三角函数值、二次根式的化简、负整数指数幂的运算法则等．

解：原式 $=1+9-2\sqrt{3}+4\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=10$．

方法规律

实数的运算经常把零指数幂、负整数指数幂、绝对值、二次根式、三角函数等知识结合起来，解决这类问题应明确各种运算的意义，运算时先确定各项符号，再按运算顺序，灵活运用法则，细心计算．

考法 2 利用特殊角的三角函数值解决实际问题

例 8 ［中考·酒泉］随着中国经济的快速发展以及科技水平的飞速提高，中国高铁正迅速崛起．高铁大大缩短了时空距离，改变了人们的出行方式．如图 1–2–6，A，B 两地被大山阻隔，由 A 地到 B 地需要绕行 C 地．若打通穿山隧道，建成 A，B 两地的直达高铁，可以缩短从 A 地到 B 地的路程．已知 $\angle CAB=30°$，$\angle CBA=45°$，$AC=640$ 公里，求隧道打通后与打通前相比，从 A 地到 B 地的路程约缩短多少公里．（参考数据：$\sqrt{3} \approx 1.7$，$\sqrt{2} \approx 1.4$）

方法点拨

解决解直角三角形的实际问题，有图的要先将题干中的已知量在图中表示出来，再根据以下方法和步骤解决：

- 根据题目中的已知条件，将实际问题抽象为解直角三角形的数学问题，画出平面几

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

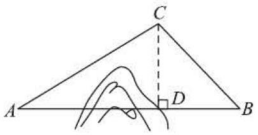


图 1-2-6

试题评析：本题考查了利用特殊角的三角函数值解决实际问题，解题的关键是添加辅助线构造直角三角形.

解：如图 1-2-6，过点 C 作 $CD \perp AB$，垂足为 D.

在 Rt $\triangle ADC$ 和 Rt $\triangle BCD$ 中，

$\because \angle CAB=30°$，$AC=640$ 公里，

$\therefore CD=320$ 公里，$AD=320\sqrt{3}$ 公里.

$\because \angle CBA=45°$，$\therefore BD=CD=320$ 公里，$BC=320\sqrt{2}$ 公里，

$\therefore AC+BC=640+320\sqrt{2}\approx 1\,088$（公里），

$AB=AD+BD=320\sqrt{3}+320\approx 864$（公里）.

$1\,088-864=224$（公里）.

答：隧道打通后与打通前相比，从 A 地到 B 地的路程约缩短 224 公里.

何图形，弄清已知条件中各量之间的关系；若三角形是直角三角形，根据边角关系进行计算，若三角形不是直角三角形，可通过添加辅助线构造直角三角形解决.

解直角三角形的实际应用问题，关键是要根据实际情况建立数学模型，正确画出图形.

两年模拟兵法

☞答案见 209 页

1.[中考·天津] $\cos 60°$ 的值等于 （　　）

A. $\sqrt{3}$　　B. 1

C. $\frac{\sqrt{2}}{2}$　　D. $\frac{1}{2}$

2. 已知 $\angle\alpha$ 为锐角，且 $\cos(90°-\angle\alpha)=\frac{\sqrt{3}}{2}$，则 $\angle\alpha$ 的度数为 （　　）

A. 50°　　B. 60°

C. 30°　　D. 40°

3. 若 $\angle\alpha$，$\angle\beta$ 是一个三角形的两个锐角，且满足 $\left|\sin\alpha-\frac{\sqrt{3}}{2}\right|+(\sqrt{3}-\tan\beta)^2=0$，则此三角形的形状是 （　　）

A. 钝角三角形　　B. 直角三角形

C. 等边三角形　　D. 无法确定

4. 已知 $\angle A$ 为锐角，且 $\sin(\angle A+15°)=\frac{\sqrt{2}}{2}$，则 $\angle A=$ _____.

5.[中考·烟台] 在 Rt $\triangle ABC$ 中，$\angle C=90°$，$AB=2$，$BC=\sqrt{3}$，则 $\sin\frac{A}{2}=$ _____.

6. 计算：

（1）$\frac{\sqrt{2}}{2}\sin 45°+\sin 60°-2\cos 45°$；

（2）$\frac{\cos 60°+\cos 30°}{\sin 60°-\sin 30°}-\frac{1}{\cos^2 45°}$；

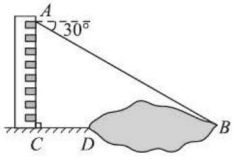
（3）$2\cos 30°-\tan 45°-\sqrt{(1-\tan 60°)^2}$；

（4）$(\sqrt{2}+1)^0-3\tan 30°+(-1)^{2\,020}-\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}$.

苹德基

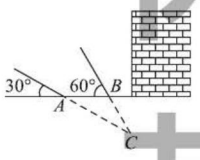
关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

7.[中考·云南]如图，某同学在楼房的A处测得荷塘的一端B处的俯角为$30°$，荷塘另一端D与点C，B在同一直线上．已知AC=32 m，CD=16 m，求荷塘宽BD为多少米．
（$\sqrt{3}\approx 1.73$，结果保留整数）



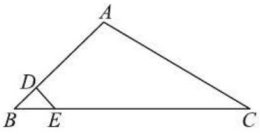
（第7题）

8.[中考·贺州]如图，在一次地震抢险救灾行动中，某武警部队救援人员在相距 4 m 的水平地面A，B两处均探测出建筑物下方C处有生命迹象．已知在A处测得探测线与地面的夹角为$30°$，在B处测得探测线与地面的夹角为$60°$，求该生命迹象所在C处与地面的距离．（结果精确到0.1 m，参考数据：$\sqrt{2}\approx 1.41$，$\sqrt{3}\approx 1.73$）



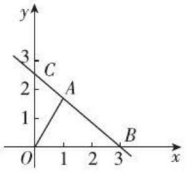
（第8题）

9.[中考·随州]随州市新溠水一桥设计灵感来源于市花——兰花，采用蝴蝶兰斜拉桥方案，设计长度为 258 m，宽 32 m，为双向六车道，2018 年 4 月 3 日通车．斜拉桥又称斜张桥，主要由索塔、主梁、斜拉索组成．某座斜拉桥的部分截面图如图，索塔AB和斜拉索（图中只画出最短的斜拉索DE和最长的斜拉索AC）均在同一水平面内，BC在水平桥面上．已知$\angle ABC=\angle DEB=45°$，$\angle ACB=30°$，$BE$=6 m，$AB=5BD$.
（1）求最短的斜拉索DE的长；
（2）求最长的斜拉索AC的长．



（第9题）

10. 如图，在平面直角坐标系中，点A在第一象限内，点B的坐标为（3，0），OA=2，$\angle AOB=60°$．
（1）求点A的坐标；
（2）若直线AB交y轴于点C，求$\triangle AOC$的面积．
[导学号 2380328]



（第10题）

荣德基

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

3 三角函数的计算

核心知识

- 用计算器求任意锐角的三角函数值
- 由锐角的三角函数值求锐角
- 仰角、俯角

知识链接



点知识·拨考向 速提分

点知识 1 用科学计算器求任意锐角的三角函数值

1. 求整数度数的锐角的三角函数值

在科学计算器的面板上涉及三角函数的键有 $\overset{\sin^{-1}\text{D}}{[\sin]}$ $\overset{\cos^{-1}\text{E}}{[\cos]}$ $\overset{\tan^{-1}\text{F}}{[\tan]}$，当我们计算某整数度数的三角函数值时，可先按相应的键，然后从高位向低位按出表示度数的整数，最后按 $[\approx]$ 键，屏幕上就会显示出结果.

2. 求非整数度数的锐角的三角函数值

（1）若度数的单位是用度表示的，则按整数度数的按键步骤操作即可.

（2）若度数的单位是用度、分、秒表示的，在用科学计算器计算三角函数值时，同样先按 $\overset{\sin^{-1}\text{D}}{[\sin]}$ 或 $\overset{\cos^{-1}\text{E}}{[\cos]}$ 或 $\overset{\tan^{-1}\text{F}}{[\tan]}$ 键，然后依次按 $\overset{\text{FACT B}}{[\circ\ '\ '']}$（度）$\overset{\text{FACT B}}{[\circ\ '\ '']}$（分）$\overset{\text{FACT B}}{[\circ\ '\ '']}$（秒）键，最后按 $[\approx]$ 键，屏幕上就会显示出结果. 若锐角中只有度、秒，则应在 $\overset{\text{FACT B}}{[\circ\ '\ '']}$（分）键前补上 0.

拨考向 利用计算器求任一锐角的三角函数值问题

例 1 用计算器求 $\sin 26°$，$\cos 42°$，$\tan 75°$，$\sin 72°\ 38'\ 25''$ 的值.

解题秘方：按计算器的使用说明求值.

解：求值过程如下表所示.

	按键顺序	显示结果
$\sin 26°$	$\overset{\sin^{-1}\text{D}}{[\sin]}$ 2 6 $[\approx]$	0.438 371 146
$\cos 42°$	$\overset{\cos^{-1}\text{E}}{[\cos]}$ 4 2 $[\approx]$	0.743 144 825
$\tan 75°$	$\overset{\tan^{-1}\text{F}}{[\tan]}$ 7 5 $[\approx]$	3.732 050 808
$\sin 72°\ 38'\ 25''$	$\overset{\sin^{-1}\text{D}}{[\sin]}$ 7 2 $\overset{\text{FACT B}}{[\circ\ '\ '']}$ 3 8 $\overset{\text{FACT B}}{[\circ\ '\ '']}$ 2 5 $\overset{\text{FACT B}}{[\circ\ '\ '']}$ $[\approx]$	0.954 450 312

提分·必记

特别提醒

1. 用科学计算器求锐角的三角函数值时，要先把科学计算器设置在“角度”状态.
2. 用计算器求锐角三角函数值时，一般先按 [ON/C] 键，目的是清除前一次的运算结果.
3. 用计算器求锐角三角函数值时，如果没有特别说明，计算结果一般精确到万分位.

提分·秘诀

特别提醒

要注意不同型号的计算器的操作步骤可能有所不同，使用前要仔细阅读计算器的使用说明书.

本来德基

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

点知识▸ 2 用科学计算器由锐角三角函数值求锐角

已知锐角三角函数值求锐角的度数

如果是特殊角（30°，45° 或 60° 角）的三角函数值，可直接写出其相应的角的度数；若不是特殊角的三角函数值，应利用计算器求角的度数. 求角的度数要先按 SHIFT ◯ 键，将 $\overset{\sin^{-1}D}{\boxed{\sin}}$ $\overset{\cos^{-1}E}{\boxed{\cos}}$ $\overset{\tan^{-1}F}{\boxed{\tan}}$ 转化成它们的第二功能. 当三角函数值为分数时，应先化成小数.

拔考向▸ 利用计算器由已知锐角的三角函数值求锐角的度数

例 2 根据下列条件求锐角 A 的度数：

（1）$\sin A=0.921\,6$；

（2）$\cos A=0.680\,7$；

（3）$\tan A=0.189\,0$.

解题秘方： 按计算器的使用说明依次按键.

解：（1）按键顺序为：SHIFT ◯ $\overset{\sin^{-1}D}{\boxed{\sin}}$ $\overset{\text{Rnd}}{\boxed{0}}$ $\overset{\text{Ran\# RanInt}}{\boxed{\cdot}}$ $\overset{\text{复位}}{\boxed{9}}$ $\boxed{2}$ $\boxed{1}$ $\boxed{6}$ $\overset{\approx}{\boxed{=}}$，

显示结果为 $\sin^{-1}0.921\,6=67.161\,123\,32$，

再按 FACT B $\boxed{\circ\ '\ ''}$ 得 $\angle A\approx 67°\ 9'\ 40''$.

（2）按键顺序为：SHIFT ◯ $\overset{\cos^{-1}E}{\boxed{\cos}}$ $\overset{\text{Rnd}}{\boxed{0}}$ $\overset{\text{Ran\# RanInt}}{\boxed{\cdot}}$ $\boxed{6}$ $\boxed{8}$ $\overset{\text{Rnd}}{\boxed{0}}$ $\boxed{7}$ $\overset{\approx}{\boxed{=}}$，

显示结果为 $\cos^{-1}0.680\,7=47.101\,632\,24$，

再按 FACT B $\boxed{\circ\ '\ ''}$ 得 $\angle A\approx 47°\ 6'\ 6''$.

（3）按键顺序为：SHIFT ◯ $\overset{\tan^{-1}F}{\boxed{\tan}}$ $\overset{\text{Rnd}}{\boxed{0}}$ $\overset{\text{Ran\# RanInt}}{\boxed{\cdot}}$ $\boxed{1}$ $\boxed{8}$ $\overset{\text{复位 Rnd}}{\boxed{9}}$ $\boxed{0}$ $\overset{\approx}{\boxed{=}}$，

显示结果为 $\tan^{-1}0.189\,0=10.702\,657\,49$，

再按 FACT B $\boxed{\circ\ '\ ''}$ 得 $\angle A\approx 10°\ 42'\ 10''$.

提分·必记

特别提醒

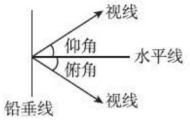
在求锐角时，若无特殊说明，一般用度作单位. 若需用度、分、秒表示，则要在键入 $\overset{\approx}{\boxed{=}}$ 后，再键入 FACT B $\boxed{\circ\ '\ ''}$，且结果一般精确到 1″.

提分·秘诀

解法提醒

计算器直接计算出的角的单位是度，而不是度、分、秒，若要得到用度、分、秒表示的角度，可以借助 FACT B $\boxed{\circ\ '\ ''}$ 键.

点知识▸ 3 仰角、俯角

名称	定义	图示
仰角	当从低处观测高处的目标时，视线与水平线所成的锐角称为仰角	
俯角	当从高处观测低处的目标时，视线与水平线所成的锐角称为俯角	

提分·必记

特别提醒

1. 仰角和俯角是视线相对于水平线而言的，不同位置的仰角和俯角是不同的.
2. 在有关仰角、俯角的问题中，常作水平线与铅垂线来构造直角三角形.

荣德基

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

拔考向▶利用仰角、俯角解决实际问题

例 3 如图 1−3−1，小东在教学楼距地面 9 m 高的窗口 C 处，测得正前方旗杆顶部 A 点的仰角为 37°，旗杆底部 B 点的俯角为 45°．升旗时，国旗上端悬挂在距地面 1.95 m 处，若国旗随国歌声冉冉升起，并在国歌播放 46 s 结束时到达旗杆顶端，则国旗应以多大的速度匀速上升？（参考数据：$\sin 37° \approx 0.60$，$\cos 37° \approx 0.80$，$\tan 37° \approx 0.75$）

解题秘方：紧扣仰角、俯角的概念，利用仰角、俯角的三角函数值解决实际问题．

解：如图 1−3−1，作 $CD \perp AB$ 于点 D，

在 Rt△BCD 中，BD=9 m，∠BCD=45°，则 BD=CD=9 m.

在 Rt△ACD 中，CD=9 m，∠ACD=37°，

则 AD=CD · tan 37° ≈ 9×0.75=6.75（m）.

所以 AB=AD+BD ≈ 15.75 m.

因为国旗上升的高度是 15.75 − 1.95=13.8（m），

整个过程耗时 46 s，所以国旗的上升速度为 $\frac{13.8}{46}$ = 0.3（m/s）.

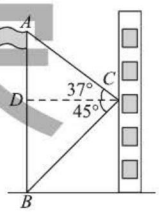


图 1−3−1

因此国旗应以 0.3 m/s 的速度匀速上升．

提分·秘诀

方法点拨

处理仰角、俯角问题的出发点：

1. 要从背景图中提炼相关信息，把仰角或俯角转化到示意图中；
2. 添加水平线或铅垂线构造直角三角形；
3. 灵活选择边角关系来体现已知和所求之间的关系．


仰角俯角问题

点方法·拨技巧 提高分

拔尖角度▶1 利用构造法解决几何问题

例 4 如图 1−3−2，在△ABC 中，AB=8，AC=9，∠A=48°．求：

（1）AB 边上的高（结果精确到 0.01）；

（2）∠B 的度数（结果精确到 1′）．

解题秘方：先利用计算器求出锐角的三角函数值，再求解线段长及角的度数．

解：（1）如图 1−3−2，作 AB 边上的高 CH，垂足为 H.

在 Rt△ACH 中，$\sin A=\frac{CH}{AC}$，

∴ CH=AC · $\sin A$=9$\sin$ 48° ≈ 6.69.

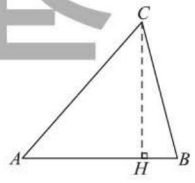


图 1−3−2

（2）在 Rt△ACH 中，$\cos A=\frac{AH}{AC}$，∴ AH=AC · $\cos A$=9$\cos$ 48°，

∴在 Rt△BCH 中，$\tan B=\frac{CH}{BH}=\frac{CH}{AB-AH}=\frac{9\sin 48°}{8-9\cos 48°}$ ≈3.381 6，

∴∠B ≈73° 32′.

挑战·高分

解法提醒

在利用三角函数值求锐角时要注意：

- 根据已知条件选择合适的三角函数值；
- 根据要求确定近似值．

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

拔尖角度▶ 2 利用建模思想解决与三角函数有关的方案设计问题

挑战·高分

例5 某房地产集团筹建一小区，居民楼均为平顶条式，南北朝向，楼高统一为16 m（五层）. 已知该城市冬至正午时分太阳高度最低，太阳光线与水平线的夹角为32° .

（1）如果甲、乙两楼相隔仅有20 m（如图1-3-3），试求此时甲楼的影子落在乙楼上有多高.

（2）根据居住要求，每层楼在冬天都要受到阳光照射，请你重新设计一个方案.（已知tan 32° ≈0.624 9, 结果精确到0.1 m）

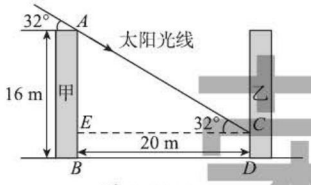


图1-3-3

方法点拨

解决方案设计问题的关键是找准达到方案要求的关键点，如本题，要使每层楼在冬天都能受到阳光照射，则需使点C和点D重合，进而利用三角函数求解问题.

解题秘方：紧扣利用锐角三角函数值求线段长或角度进行方案设计.

解：（1）如图1-3-3，过点C作$CE \perp AB$于点E.

由题意可知$\angle ACE=32°$，$CE=BD=20$ m.

在Rt$\triangle ACE$中，$\because \tan \angle ACE=\dfrac{AE}{CE}$，

$\therefore AE=CE \cdot \tan \angle ACE=20\tan 32° \approx 12.50$（m），

$\therefore DC=EB=AB-AE \approx 16-12.50=3.5$（m），

即此时甲楼的影子落在乙楼上约有3.5 m高.

（2）若使每层楼在冬天都受到阳光照射，则$DC=0$ m，即点C与点D重合.

当点C与点D重合时，$\tan \angle ACE=\tan \angle ADB=\tan 32° =\dfrac{AB}{BD}$，

$\therefore BD=\dfrac{AB}{\tan 32°}=\dfrac{16}{\tan 32°} \approx 25.6$（m）.

因此，重新设计时，两楼的距离至少应为25.6 m，才能使每层楼在冬天都受到阳光照射.

点中考·拨模拟 得满分

中考探秘▶ 利用计算器求锐角的三角函数值，以及由三角函数值解决生活中的实际问题是中考的热点. 本部分内容多以填空题的形式出现，有时也出现在解答题中.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

三年中考兵法

考法 1 利用计算器求三角函数值

例 6 ［中考·淄博］一辆小车沿着如图 1–3–4 的斜坡向上行了 100 m，其铅直高度上升了 15 m. 在用科学计算器求坡角 α 的度数时，具体按键顺序是（　　）

A. SHIFT ○ $\sin^{-1}$ D sin 0 Rnd · Ran# RanInt 1 5 ≈ =

B. $\sin^{-1}$ D sin 0 Rnd · Ran# RanInt 1 5 SHIFT ○ ≈ =

C. SHIFT ○ $\cos^{-1}$ E cos 0 Rnd · Ran# RanInt 1 5 ≈ =

D. $\cos^{-1}$ E cos 0 Rnd · Ran# RanInt 1 5 SHIFT ○ ≈ =

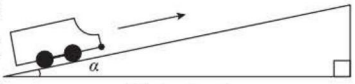


图 1–3–4

试题评析：本题主要考查的是锐角三角函数的定义、科学计算器的使用，熟练掌握科学计算器的使用方法是解题的关键.

解：由题意，得 $\sin\alpha=\frac{15}{100}=0.15$，按照利用计算器由已知三角函数值求锐角度数的步骤进行按键，所以选 A.

答案：A

考法 2 利用仰角和俯角解决实际问题

例 7 ［中考·安徽］为了测量竖直旗杆 AB 的高度，某综合实践小组在地面 D 处竖直放置标杆 CD，并在地面上水平放置一个平面镜 E，使得 B，E，D 在同一水平线上，如图 1–3–5. 该小组在标杆的 F 处通过平面镜 E 恰好观测到旗杆顶 A（此时 $\angle AEB=\angle FED$），在 F 处测得旗杆顶 A 的仰角为 39.3°，平面镜 E 的俯角为 45°，FD=1.8 m，问旗杆 AB 的高度约为多少米？（结果精确到 1 m，参考数据：$\tan 39.3°\approx 0.82$，$\tan 84.3°\approx 10.02$）

试题解析：本题主要考查利用仰角和俯角的定义进行物高测量，解决这类问题的关键是借助仰角、俯角构建直角三角形，进而运用边、角之间的关系求解.

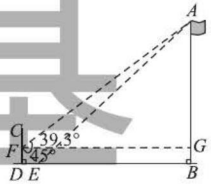


图 1–3–5

解：根据题意，得 $\angle DEF=\angle DFE=45°$，

$\therefore ED=FD=1.8$ m.

$\because \angle AEB=\angle FED$，$\therefore \angle AEB=\angle EAB=45°$.

设 $AB=x$ m，则 $BE=x$ m.

如图 1–3–5，过点 F 作 $FG\perp AB$ 于点 G，

在 Rt△AFG 中，$AG=(x-1.8)$ m，$FG=(x+1.8)$ m，

$\because \tan 39.3°=\frac{AG}{FG}$，$\therefore 0.82=\frac{x-1.8}{x+1.8}$，解得 $x\approx 18$，

$\therefore$旗杆 AB 的高度约为 18 m.

冲刺·满分

方法点拨

先根据锐角三角函数的定义找出锐角 α 的正弦值，然后利用计算器求锐角 α 的度数.

另解

根据题意，得 $\angle DEF=\angle DFE=45°$.

$\because \angle AEB=\angle FED$，

$\therefore \angle AEB=\angle EAB=45°$，

$\therefore \angle FEA=90°$.

设 $AB=x$ m，在 Rt△AFE 中，$EF=1.8\times\sqrt{2}$ m，$AE=\sqrt{2}x$ m，$\angle AFE=45°+39.3°=84.3°$.

$\because \tan 84.3°=\frac{AE}{FE}$，

$\therefore 10.02=\frac{\sqrt{2}x}{1.8\times\sqrt{2}}$，

解得 $x\approx 18$.

荣德基

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

两年模拟兵法 ☞答案见210页

1. 用科学计算器求 sin 50° 的值，按键顺序正确的是（　　）

A. SHIFT $\sin^{-1}$ D　Rnd　≈
[ ] [sin] [5] [0] [=]

B. $\sin^{-1}$ D　Rnd　≈
[sin] [5] [0] [=]

C. Rnd　$\sin^{-1}$ D　≈
[5] [0] [sin] [=]

D. Rnd　$\sin^{-1}$ D　≈
[0] [5] [sin] [=]

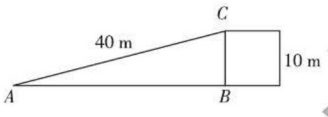
2. [中考·威海]为了方便行人推车过某天桥，市政府在 10 m 高的天桥一侧修建了 40 m 长的斜道（如图所示）. 我们可以借助科学计算器求这条斜道倾斜角的度数，具体按键顺序是（　　）

A. SHIFT　$\sin^{-1}$ D　Rnd　Ran#　RanInt
[ ] [sin] [0] [·] [2] [5] [=]

B. $\sin^{-1}$ D　SHIFT　Rnd　Ran#　RanInt
[sin] [ ] [0] [·] [2] [5] [=]

C. $\sin^{-1}$ D　Rnd　Ran#　RanInt
[sin] [0] [·] [2] [5] [=]

D. SHIFT　$\cos^{-1}$ E　Rnd　Ran#　RanInt
[ ] [cos] [0] [·] [2] [5] [=]



（第 2 题）

3. 在 Rt △ ABC 中，∠ C=90°，∠ A=72°，AB=10，则边 AC 的长约为（精确到 0.1）（　　）

A. 9.1　　B. 9.5

C. 3.1　　D. 3.5

4. 若 $\sin\alpha$ =0.6，则用计算器求锐角 α 约等于（　　）

A. 36° 8′　　B. 36° 57′

C. 36.8°　　D. 36.9°

5. 用计算器验证，下列不等式中成立的是（　　）

A. $\sin 36°\ 24' > \cos 37°\ 24' + \cos 3°\ 10'$

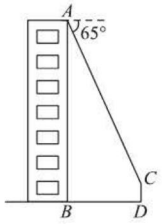
B. $\cos 45°\ 32' > \sin 45° - \sin 1°\ 12'$

C. $\sin 63°\ 47' < \cos 18°\ 21' - \cos 87°$

D. $2\sin 30°\ 12' < \sin 60°\ 24'$

6. [中考·陕西] $\sqrt[3]{17}\tan 38°\ 15' \approx$_____.（结果精确到 0.01）

7. 如图，王师傅在楼顶上的点 A 处测得楼前一棵树 CD 的顶端 C 的俯角为 65°，又知水平距离 BD=10 m，楼高 AB=24 m，则树高 CD 约为_____.（精确到 0.1 m）



（第 7 题）

8. 用科学计算器计算.

（1）求下列各三角函数的值（精确到 0.000 1）：

① $\sin 33°$；② $\sin 21°\ 18'$；

③ $\cos 31°$；④ $\tan 71°$.

（2）求锐角 α 的度数（精确到 1′）：

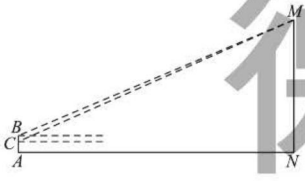
① $\sin\alpha$ =0.316 2；② $\cos\alpha$ =0.732 1；

③ $\tan\alpha$ =0.487 0.

未德基

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

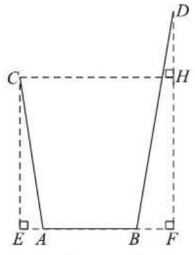
9. [中考·陕西] 某市一湖的湖心岛有一棵百年古树，当地人称它为“乡思柳”，不乘船不易到达. 每年初春时节，人们喜欢在“聚贤亭”观湖赏柳. 小红和小军很想知道“聚贤亭”与“乡思柳”之间的大致距离. 于是，有一天，他们俩带着测倾器和皮尺来测量这个距离，测量方案如下：如图，首先，小军站在“聚贤亭”的 A 处，用测倾器测得“乡思柳”顶端 M 点的仰角为 23°，此时测得小军的眼睛距地面的高度 AB 为 1.7 m；然后，小军在 A 处蹲下，用测倾器测得“乡思柳”顶端 M 点的仰角为 24°，这时测得小军的眼睛距地面的高度 AC 为 1 m. 请你利用以上所测得的数据，计算“聚贤亭”与“乡思柳”之间的距离 AN 的长. (结果精确到 1 m，参考数据：$\sin 23° \approx 0.390\,7$，$\cos 23° \approx 0.920\,5$，$\tan 23° \approx 0.424\,5$，$\sin 24° \approx 0.406\,7$，$\cos 24° \approx 0.913\,5$，$\tan 24° \approx 0.445\,2$)



(第 9 题)

10. [中考·河南] “高低杠”是女子体操特有的一个竞技项目，其比赛器材由高、低两根平行杠及若干支架组成，运动员可以根据自己的身高和习惯在规定范围内调节高、低两杠间的距离. 某兴趣小组根据高低杠器材的一种截面图编制了如下数学问题，请你解答.

如图，底座上 A，B 两点间的距离为 90 cm，低杠上点 C 到直线 AB 的距离 CE 的长为 155 cm，高杠上点 D 到直线 AB 的距离 DF 的长为 234 cm. 已知低杠的支架 AC 与直线 AB 的夹角 $\angle CAE$ 为 82.4°，高杠的支架 BD 与直线 AB 的夹角 $\angle DBF$ 为 80.3°. 求高、低杠间的水平距离 CH 的长. (结果精确到 1 cm，参考数据：$\sin 82.4° \approx 0.991$，$\cos 82.4° \approx 0.132$，$\tan 82.4° \approx 7.495$，$\sin 80.3° \approx 0.986$，$\cos 80.3° \approx 0.168$，$\tan 80.3° \approx 5.850$)



(第 10 题)

禁 德 基

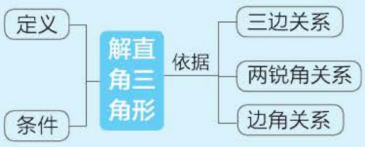
关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

4 解直角三角形

核心知识

- 解直角三角形的定义
- 解直角三角形的依据
- 解直角三角形的类型

知识链接



点知识·拨考向 速提分

点知识 1 解直角三角形的定义

解直角三角形

一般地，在直角三角形中，除直角外，共有五个元素，即三条边和两个锐角．由直角三角形中已知的元素，求出所有未知元素的过程，叫做解直角三角形．

注意：

（1）在直角三角形中，除直角外的五个元素中，已知其中的两个元素（至少有一个是边），可求出其余的三个未知元素（知二求三）．

（2）一个直角三角形可解，则其面积可求，但在一个解直角三角形的题中，如无特别说明，则不包括求面积．

提分·必记

深度理解

1. 已知两个角不能解直角三角形，因为只有角的条件，三角形边的大小不唯一，即有无数个三角形符合条件．
2. 已知一角一边时，角必须为锐角，因为若已知直角，则不能求解．

拨考向 利用解直角三角形的定义判断解直角三角形的条件

例1 根据下列所给的条件解直角三角形，不能求解的是（　　）

①已知一直角边及其对角；

②已知两锐角；

③已知两直角边；

④已知斜边和一锐角；

⑤已知一直角边和斜边．

A. ②③　　B. ②④

C. 只有②　　D. ②④⑤

解题秘方： 紧扣解直角三角形中“知二求三”的特征进行解答．

解： ①能够求解；②不能求解；③能够求解；④能够求解；⑤能够求解．

答案： C

提分·秘诀

特别提醒

解直角三角形时，求某些未知量的方法往往不唯一，选择关系式通常遵循以下原则：

1. 尽量选择可以直接应用原始数据的关系式；
2. 尽量选择便于计算的关系式；
3. 能用乘法计算的要避免使用除法计算．

荣德基

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

知识▸2 直角三角形中的边角关系

1. 直角三角形中的边角关系

在 Rt △ ABC 中，∠ C 为直角，∠ A，∠ B，∠ C 所对的边分别为 a，b，c，那么除直角 C 外的五个元素之间有如下关系：

（1）三边之间的关系：$a^2+b^2=c^2$（勾股定理）.

（2）两锐角之间的关系：∠ A + ∠ B=90° .

（3）边角之间的关系：

$$\sin A=\frac{\angle A\text{ 的对边}}{\text{斜边}}=\frac{a}{c},\ \sin B=\frac{\angle B\text{ 的对边}}{\text{斜边}}=\frac{b}{c};$$

$$\cos A=\frac{\angle A\text{ 的邻边}}{\text{斜边}}=\frac{b}{c},\ \cos B=\frac{\angle B\text{ 的邻边}}{\text{斜边}}=\frac{a}{c};$$

$$\tan A=\frac{\angle A\text{ 的对边}}{\angle A\text{ 的邻边}}=\frac{a}{b},\ \tan B=\frac{\angle B\text{ 的对边}}{\angle B\text{ 的邻边}}=\frac{b}{a}.$$

2. 运用关系式解直角三角形时，常常要用到以下变形

（1）锐角之间的关系：∠ A=90° − ∠ B，∠ B=90° − ∠ A.

（2）三边之间的关系：$a=\sqrt{c^2-b^2}$，$b=\sqrt{c^2-a^2}$，$c=\sqrt{a^2+b^2}$.

（3）边角之间的关系：$a=c\sin A$，$a=c\cos B$，$a=b\tan A$，$b=c\sin B$，$b=c\cos A$，$b=a\tan B$.

考向▸利用直角三角形的边角关系解直角三角形

题型 1：已知两边在解直角三角形中的应用

例 2 根据下列条件，解直角三角形：

（1）在 Rt △ ABC 中，∠ C=90° ，a=20，$c=20\sqrt{2}$；

（2）在 Rt △ ABC 中，∠ C=90° ，$a=2\sqrt{3}$，b=2.

解题秘方：紧扣“直角三角形的边角关系”选择合适的关系式求解.

解：（1）在 Rt △ ABC 中，∠ C=90° ，

则 $\sin A=\frac{a}{c}=\frac{20}{20\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，

∴ ∠ A=45°，∴ ∠ B=90° − ∠ A=45°，

∴ $b=a$=20.

（2）在 Rt △ ABC 中，∠ C=90°，

∵ $a=2\sqrt{3}$，b=2，

∴ $c=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{12+4}=4$.

∵ $\tan A=\frac{a}{b}=\frac{2\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}$，

∴ ∠ A=60°，

∴ ∠ B=90° − ∠ A=90° −60° =30°.

提分·必记

活学巧记

口诀记忆法

有斜求对乘正弦，
有斜求邻乘余弦，
无斜求对乘正切.

“有斜求对乘正弦”的意思是：在一个直角三角形中，对一个锐角而言，如果已知斜边长，要求该锐角的对边，那么就用斜边长乘该锐角的正弦，其他的意思可类推.

提分·秘诀

特别提醒

解直角三角形的一般方法：在解直角三角形时，应求出所有未知元素. 首先要分析出直角三角形中的已知元素，根据已知元素利用适当的边角关系进行求解. 求边的长度时，一般要选择题目中的原始数据，尽量避免用中间所得的数据参与计算.

基德

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

题型 2：已知一边一角在解直角三角形中的应用

例 3 根据下列条件，解直角三角形：

（1）在 Rt △ ABC 中，∠ C=90°，∠ A=30°，b=12；

（2）在 Rt △ ABC 中，∠ C=90°，∠ A=60°，c=6.

解题秘方：紧扣以下两种思路去求解．

（1）求边时，一般用未知边比已知边（或已知边比未知边），去找已知角的某一个锐角三角函数．

（2）求角时，一般用已知边比已知边，去找未知角的某一个锐角三角函数．

解：（1）在 Rt △ ABC 中，∠ C=90°，∠ A=30°，

∴ ∠ B=90° − ∠ A=60°．

∵ $\tan A=\frac{a}{b}$，∴ $\frac{\sqrt{3}}{3}=\frac{a}{12}$，

∴ $a=4\sqrt{3}$，

∴ $c=2a=8\sqrt{3}$．

（2）在 Rt △ ABC 中，∠ C=90°，∠ A=60°，

∴ ∠ B=90° − ∠ A=30°．

∵ $\sin A=\frac{a}{c}$，∴ $\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{a}{6}$，

∴ $a=3\sqrt{3}$．

由勾股定理得 $b=\sqrt{c^2-a^2}=\sqrt{36-27}=3$.

题型 3：解直角三角形在求非直角三角形的边角中的应用

例 4 如图 1−4−1，在 △ ABC 中，AB=1，$AC=\sqrt{2}$，$\sin B=\frac{\sqrt{2}}{4}$，求 BC 的长．

解题秘方：紧扣“化斜为直法”，通过作高把斜三角形转化为两个直角三角形求解．

解：如图 1−4−1，过点 A 作 $AE\perp BC$，垂足为点 E.

在 Rt △ ABE 中，∵ $\sin B=\frac{AE}{AB}=\frac{\sqrt{2}}{4}$，

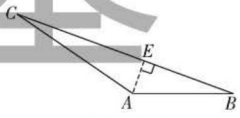


图 1−4−1

AB=1，∴ $AE=\frac{\sqrt{2}}{4}$，

∴ $BE=\sqrt{AB^2-AE^2}=\frac{\sqrt{14}}{4}$．

在 Rt △ ACE 中，$AC=\sqrt{2}$，

∴ $CE=\sqrt{AC^2-AE^2}=\frac{\sqrt{30}}{4}$，

∴ $BC=BE+CE=\frac{\sqrt{14}+\sqrt{30}}{4}$．


化斜为直法

解法提醒

解直角三角形选择关系式常遵循的原则：当已知或求解中有斜边时，优先考虑用正弦或余弦，无斜边时，就用正切；当所求的元素既可以用乘法又可以用除法求解时，优先考虑用乘法．在解题过程中，既可以用原始数据又可以用解题过程中得到的数据时，优先考虑用原始数据．

教你一招

构造直角三角形解非直角三角形问题的方法：通过作垂线（高），将斜三角形分割成两个直角三角形，然后利用解直角三角形求边或角，在作垂线时，要充分利用已知条件，一般在等腰三角形中作底边上的高，或过特殊角的一边上的点作这个角的另一边的垂线，从而构造含特殊角的直角三角形，再利用解直角三角形的相关知识求解．

荣德基

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

点方法·拨技巧 提高分

拔尖角度▸ 1 利用转化法求非直角三角形中角的三角函数值

例 5 如图 1−4−2，在△ABC中，AD，CE是高，$AB=4$，$AC=5$，$BC=6$，求 $\cos\angle DEB$.

解题秘方：紧扣相似三角形的性质将不在直角三角形的锐角转化到直角三角形中，利用解直角三角形求其三角函数值.

解：在△ABC中，∵AD，CE是高，

∴$\angle ADB=\angle CEB=90°$.

∵$\angle B=\angle B$，∴△$ADB\backsim$△CEB，

∴$\dfrac{BD}{BE}=\dfrac{BA}{BC}$.

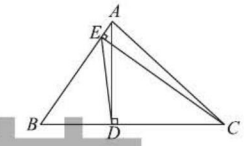


图 1−4−2

∵$\angle B=\angle B$，∴△$DBE\backsim$△ABC，∴$\angle ACB=\angle DEB$.

设$CD=x$，则$DB=6-x$. ∵在 Rt△ABD中，$AD^2=AB^2-DB^2$，

在 Rt△ACD中，$AD^2=AC^2-CD^2$，∴$AB^2-DB^2=AC^2-CD^2$.

∵$AB=4$，$AC=5$，∴$4^2-(6-x)^2=5^2-x^2$，解得$x=\dfrac{15}{4}$.

在 Rt△ACD中，$\cos\angle ACB=\dfrac{CD}{AC}=\dfrac{\frac{15}{4}}{5}=\dfrac{3}{4}$.

∴$\cos\angle DEB=\dfrac{3}{4}$.

挑战·高分

方法点拨

解决可转化为直角三角形的问题的方法：通过作辅助线转化成直角三角形解决，这种方法叫做“化斜为直法”.通常以特殊角为宜，构造直角三角形.若条件中有线段的比或锐角三角函数，可以设一个辅助的未知数，列出方程求解.

拔尖角度▸ 2 利用旋转法求非直角三角形中的角度

例 6 如图 1−4−3，两个边长为 2 cm 的互相重合的正方形纸片，按住其中一个不动，另一个绕点B旋转一定角度，使重叠部分的面积为$\dfrac{4}{3}\sqrt{3}$ cm²，求这时旋转的度数.

解题秘方：将求正方形旋转度数的问题转化为求 Rt△EBC中角度数的问题.

解：如图 1−4−3，连接BE.

在 Rt△$A'BE$中和 Rt△CBE中，

∵$BE=BE$，$A'B=BC$，

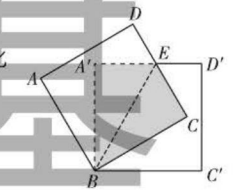


图 1−4−3

∴Rt△$A'BE\cong$Rt△CBE，∴$S_{△BCE}=\dfrac{1}{2}S_{四边形A'BCE}=\dfrac{2}{3}\sqrt{3}$ cm².

∵$S_{△BCE}=\dfrac{1}{2}BC\cdot CE=\dfrac{2}{3}\sqrt{3}$ cm²，$BC=2$ cm，∴$CE=\dfrac{2}{3}\sqrt{3}$ cm.

∴$\tan\angle EBC=\dfrac{CE}{BC}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，∴$\angle EBC=30°$，

∴$\angle A'BC=2\angle EBC=60°$，

∴$\angle C'BC=30°$，即这时旋转的度数是 30°.

挑战·高分

知识储备

图形旋转的性质：旋转过程中，对应点到旋转中心的距离都相等；图形上每一点都绕旋转中心沿相同的方向旋转相同的角度，任意两组对应点与旋转中心的连线所成的角相等，都等于旋转角；旋转中心是唯一不动的点.

特别解读

本题把求旋转角的度数转化为求 Rt△CBE 中角的度数问题，进而根据解直角三角形的相关知识求解，体现了转化思想的应用.

基础 德 英

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

拔尖角度▸ 3 利用分段计算法求动点的运动路程

挑战·高分

例7 如图1−4−4，在直角坐标系中，点A，B分别在x轴、y轴上，点A的坐标为（−1，0），$\angle ABO=30°$，线段PQ的端点P从点O出发，沿$\triangle OBA$的边按$O\to B\to A\to O$运动一周，同时另一端点Q随之在x轴的非负半轴上运动．如果$PQ=\sqrt{3}$，那么当点P运动一周时，点Q运动的总路程为_____.

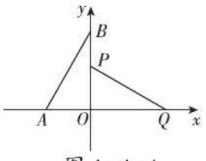


图 1−4−4

特别提醒

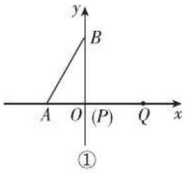
当点P从B→A时，点Q先由左→右，后由右→左进行了两个方向的运动；因此分两种情况讨论．

解题秘方：紧扣“点P，Q的运动方向”分段进行计算．

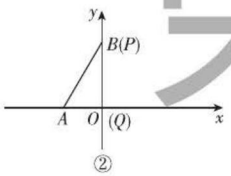
解：在Rt$\triangle AOB$中，$\because\angle ABO=30°$，$AO=1$，

$\therefore AB=2$，$\therefore BO=\sqrt{2^2-1^2}=\sqrt{3}$．

①当点P从$O\to B$时，如图1−4−5①②，点Q运动的路程为$\sqrt{3}$．



①



②

图 1−4−5

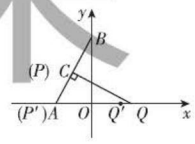


图 1−4−6

②当点P从$B\to C$时，如图1−4−6，这时$QC\perp AB$，则$\angle ACQ=90°$．

$\because\angle ABO=30°$，$\therefore\angle BAO=60°$，

$\therefore\angle AQC=90°-60°=30°$．

$\because\cos\angle AQC=\dfrac{CQ}{AQ}$，

$\therefore AQ=\dfrac{CQ}{\cos 30°}=2$，$\therefore OQ=AQ-OA=1$，

则点Q运动的路程为$QO=1$.

③当点P从$C\to A$时，如图1−4−6，点Q运动的路程为$QQ'=2-\sqrt{3}$．

④当点P从$A\to O$时，点Q运动的路程大小与点P运动的路程大小相同，即$AO=1$. 综上，点Q运动的总路程为$\sqrt{3}+1+2-\sqrt{3}+1=4$.

答案：4

点中考·拨模拟 得满分

中考探秘 在中考中，本节内容重点考查运用直角三角形的边角关系解直角三角形或非直角三角形问题，题目难度较小，题型有选择题、填空题和解答题，有时也与相似三角形、圆和函数等知识综合考查，多以解答题的形式出现．

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

三年中考兵法

考法 1 利用解直角三角形说明平方关系

例 8 [中考·黔西南州] 把$(\sin\alpha)^2$记作$\sin^2\alpha$，根据图 1-4-7①和图 1-4-7②完成下列各题.

（1）$\sin^2A_1+\cos^2A_1=$_____，$\sin^2A_2+\cos^2A_2=$_____，$\sin^2A_3+\cos^2A_3=$_____；

（2）观察上述等式，猜想在 Rt△ABC中，∠C=90°，总有$\sin^2A+\cos^2A=$_____；

（3）如图 1-4-7②，在 Rt△ABC中证明（2）题中的猜想；

（4）在△ABC中，∠A+∠B=90°，且$\sin A=\frac{12}{13}$，求$\cos A$.

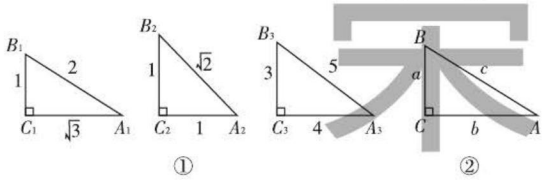


图 1-4-7

试题评析：本题主要考查解直角三角形，熟练掌握正弦函数和余弦函数的定义是解题的关键.

解：（1）1；1；1

（2）1

（3）证明如下：在图 1-4-7②中，

∵ $\sin A=\frac{a}{c}$，$\cos A=\frac{b}{c}$，且$a^2+b^2=c^2$，

∴ $\sin^2A+\cos^2A=\left(\frac{a}{c}\right)^2+\left(\frac{b}{c}\right)^2=\frac{a^2+b^2}{c^2}=\frac{c^2}{c^2}=1$，

即$\sin^2A+\cos^2A=1$.

（4）在△ABC中，∠A+∠B=90°，

∴∠C=90°.

∵ $\sin^2A+\cos^2A=1$，

∴$\left(\frac{12}{13}\right)^2+\cos^2A=1$，

解得$\cos A=\frac{5}{13}$或$\cos A=-\frac{5}{13}$（舍去），

∴ $\cos A=\frac{5}{13}$.

冲刺·满分

解法提醒

（1）根据正弦函数和余弦函数的定义分别计算可得；

（2）由（1）中的等式可猜想$\sin^2A+\cos^2A=1$；

（3）由$\sin A=\frac{a}{c}$，$\cos A=\frac{b}{c}$且$a^2+b^2=c^2$，得$\sin^2A+\cos^2A=\left(\frac{a}{c}\right)^2+\left(\frac{b}{c}\right)^2=\frac{a^2+b^2}{c^2}=\frac{c^2}{c^2}=1$；

（4）根据直角三角形中$\sin^2A+\cos^2A=1$，得$\left(\frac{12}{13}\right)^2+\cos^2A=1$，据此可得答案.

宋德基

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

考法 2 利用解直角三角形求函数值

例 9 [中考·滨州] 如图 1-4-8，在△ABC中，$AC \perp BC$，$\angle ABC=30°$，点D是CB延长线上的一点，且$BD=BA$，则$\tan \angle DAC$的值为（　　）

A. $2+\sqrt{3}$　　B. $2\sqrt{3}$　　C. $3+\sqrt{3}$　　D. $3\sqrt{3}$

试题评析：本题考查了解直角三角形，利用锐角三角函数的概念解直角三角形问题.

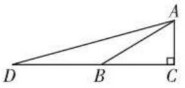


图 1-4-8

解：∵在△ABC中，$AC \perp BC$，$\angle ABC=30°$，

$\therefore AB=2AC$，$BC=\dfrac{AC}{\tan 30°}=\sqrt{3}AC$.

∵$BD=BA$，$\therefore DC=BD+BC=(2+\sqrt{3})AC$，

$\therefore \tan \angle DAC=\dfrac{DC}{AC}=\dfrac{(2+\sqrt{3})AC}{AC}=2+\sqrt{3}$.

答案：A

考法 3 利用解直角三角形求与函数综合的最值

例 10 [中考·西宁] 如图 1-4-9，在△ABC中，$\angle B=90°$，$\tan C=\dfrac{3}{4}$，$AB=6$ cm. 动点P从点A开始沿边AB向点B以 1 cm/s 的速度移动，动点Q从点B开始沿边BC向点C以 2 cm/s 的速度移动，若P，Q两点分别从A，B两点同时出发，在移动过程中，△PBQ的最大面积是（　　）

A. 18 cm^2　　B. 12 cm^2　　C. 9 cm^2　　D. 3 cm^2

试题评析：本题考查了有关直角三角形的动点型问题，考查了解直角三角形的有关知识和函数的最值问题，解决此类问题的关键是正确表示两动点的路程（路程 = 时间 × 速度）. 这类动点型问题一般都是将三角形面积或四边形面积的最值问题，转化为函数的最值问题. 可以直接利用面积公式或求和、求差表示面积的方法求出函数的表达式，再根据函数图象和性质确定最值，要注意时间的取值范围.

解：∵$\tan C=\dfrac{3}{4}$，$AB=6$ cm，

$\therefore \dfrac{AB}{BC}=\dfrac{6}{BC}=\dfrac{3}{4}$，$\therefore BC=8$ cm.

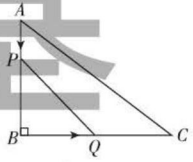


图 1-4-9

设动点P的运动时间为t s，则$AP=t$ cm，$BP=(6-t)$ cm，$BQ=2t$ cm.

设△PBQ的面积为S cm^2，则$S=\dfrac{1}{2}\times BQ\times BP=\dfrac{1}{2}\times 2t\times(6-t)=-t^2+6t=-(t^2-6t+9-9)=-(t-3)^2+9$.

由题易知$0 \leqslant t \leqslant 4$，$\therefore$当$t=3$时，$S$有最大值，为 9.

即当$t=3$时，△PBQ的面积最大，为 9 cm^2.

答案：C

活用巧记

已知斜边求直边，正弦、余弦很方便；

已知直边求直边，用正切理所当然；

已知两边求一边，勾股定理最方便；

已知两边求一角，函数关系要记牢；

已知锐角求锐角，互余关系不能少；

已知直边求斜边，用除还需正余弦.

思路引导

根据已知条件求出BC的长，设动点P的运动时间为t s，根据点P和点Q的速度表示出BP和BQ的长，设△PBQ的面积为S cm^2，利用直角三角形的面积公式列关于S与t的函数表达式，并求最值即可.

荣德基

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

考法 4 利用解直角三角形求相似中线段的长

例 11：[中考·毕节] 如图 1-4-10，在▱$ABCD$中，过点A作$AE \perp DC$，垂足为E，连接BE，F为BE上一点，且$\angle AFE = \angle D$.

（1）求证：$\triangle ABF \backsim \triangle BEC$.

（2）若$AD=5$，$AB=8$，$\sin D=\frac{4}{5}$，求AF的长.

试题评析：此题考查了相似三角形的判定与性质，以及平行四边形的性质，熟练掌握相似三角形的判定与性质是解本题的关键.

（1）**证明：**∵四边形$ABCD$是平行四边形，

∴$AD \parallel BC$，$AB \parallel CD$，$AD=BC$，

∴$\angle D + \angle C=180°$，$\angle ABF = \angle BEC$.

∵$\angle AFB + \angle AFE=180°$，$\angle D = \angle AFE$，

∴$\angle C = \angle AFB$，

∴$\triangle ABF \backsim \triangle BEC$.

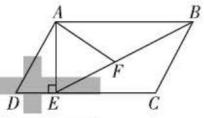


图 1-4-10

（2）**解：**∵$AE \perp DC$，$AB \parallel DC$，

∴$\angle AED = \angle BAE=90°$.

在 Rt△ADE中，$AE=AD \cdot \sin D=5 \times \frac{4}{5}=4$.

在 Rt△ABE中，根据勾股定理，得$BE=\sqrt{AE^2+AB^2}=\sqrt{4^2+8^2}=4\sqrt{5}$.

∵$BC=AD=5$，

由（1）知△$ABF \backsim$△BEC，

∴$\frac{AF}{BC}=\frac{AB}{BE}$，即$\frac{AF}{5}=\frac{8}{4\sqrt{5}}$，

解得$AF=2\sqrt{5}$.

思路引导

- 由平行四边形的性质得出 AD // BC，AB // CD，AD=BC，得出∠D+∠C=180°，∠ABF=∠BEC，证出∠C=∠AFB，即可得出结论；
- 由三角函数求出 AE 的长，由勾股定理求出 BE 的长，再由相似三角形的性质求出 AF 的长.

两年模拟兵法 ☞答案见 211 页

1. [中考·怀化]在 Rt△ABC中，$\angle C=90°$，$\sin A=\frac{4}{5}$，$AC=6$ cm，则BC的长度为（　　）

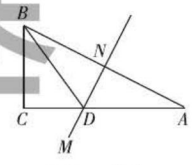
A. 6 cm　　B. 7 cm

C. 8 cm　　D. 9 cm

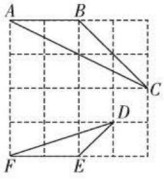
2. [模拟·达州渠县]如图，在△ABC中，$\angle C=90°$，$AC=8$ cm，AB的垂直平分线MN交AC于D，连接BD. 若$\cos \angle BDC=\frac{3}{5}$，则$BC$的长是（　　）

A. 4 cm　　B. 6 cm

C. 8 cm　　D. 10 cm



（第 2 题）



（第 3 题）

3. [模拟·绍兴越城区]如图，在 4×4 的正方形网格中，△ABC和△DEF的顶点都在边长为 1 的正方形的顶点上，则图中$\angle ACB$的正切值为（　　）

A. $\frac{2}{3}$　　B. $\frac{1}{3}$　　C. $\frac{\sqrt{2}}{2}$　　D. 3

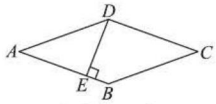
关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

4.[中考·衡阳]如图，菱形$ABCD$的周长为20 cm，$DE\perp AB$，垂足为E，$\cos A=\frac{4}{5}$，下列结论中正确的有（　　）个.

①$DE=3$ cm；

②$EB=1$ cm；

③$S_{菱形ABCD}=15$ cm^2.



（第4题）

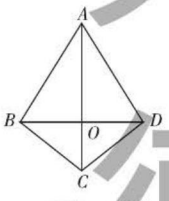
A.3　　B.2　　C.1　　D.0

5.[中考·黑龙江]在$\triangle ABC$中，$AB=12$，$AC=\sqrt{39}$，$\angle B=30°$，则$\triangle ABC$的面积是_____.

6.[模拟·江阴]如图，在四边形$ABCD$中，$AB=AD$，$\angle ABC=\angle ADC$.

（1）求证：$CB=CD$.

（2）若$\angle BCD=90°$，$AO=2CO$，求$\tan\angle ADO$.

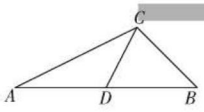


（第6题）

7.[模拟·杭州]如图，在$\triangle ABC$中，CD是边AB上的中线，$\angle B$是锐角，且$\sin B=\frac{\sqrt{2}}{2}$，$\tan A=\frac{1}{2}$，$AC=3\sqrt{5}$.

（1）求$\angle B$的度数与AB的值；

（2）求$\tan\angle CDB$的值.

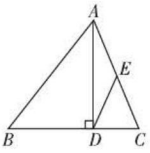


（第7题）

8.如图，在$\triangle ABC$中，AD是边BC上的高，E为边AC的中点，$BC=14$，$AD=12$，$\sin B=\frac{4}{5}$，求：

（1）线段DC的长；

（2）$\tan\angle EDC$的值.



（第8题）

9.如图，已知$\angle B=37°$，$AB=20$，C是射线BM上一点.

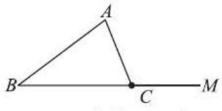
（1）求点A到BM的距离.

（2）连接AC，则在下列条件中，可以唯一确定BC长的是_____；（填序号）

①$AC=13$；②$\tan\angle ACB=\frac{12}{5}$；③$\triangle ABC$的面积为126.

（3）在（2）的答案中，选择一个作为条件，画出草图，求BC的长.

（参考数据：$\sin 37°\approx0.60$，$\cos 37°\approx0.80$，$\tan 37°\approx0.75$）　[导学号 2380328]



（第9题）

荣德基

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

5 三角函数的应用

核心知识
- 方位角、方向角
- 仰角、俯角
- 坡角、坡度

知识链接

一般步骤、一般应用问题 → 解直角三角形的应用类型 → 仰角和俯角问题、方向角问题、坡角和坡度问题

点知识·拨考向 速提分

点知识▸ 1 利用特殊角解直角三角形解决实际问题

1. 常见的特殊角

（1）方向角，是正北或正南方向线与目标方向线所成的角，一般以“北偏…”“南偏…”的形式出现；

（2）仰角和俯角，是视线相对于水平线而言的，不同位置的仰角和俯角是不同的，可简记为“上仰下俯”.

（3）坡角，是坡面与水平面的夹角，坡度是坡角的正切值，坡角越大，坡度也就越大.

2. 利用特殊角解直角三角形解决问题的步骤

（1）审题，弄清特殊角的类型，将实际问题抽象为数学问题；

（2）认真分析题意，画出平面图形，转化为解直角三角形问题；

（3）结合特殊角，选用适当的锐角三角函数解直角三角形；

（4）按照题目中的要求取值.

提分·必记

特别提醒

1. 解决实际问题时，可利用正南、正北、正西，正东方向线构造直角三角形来求解.
2. 实际问题中遇到仰角或俯角时，要放在直角三角形中或转化到直角三角形中，注意确定水平线.
3. 物体的倾斜程度通常可用物体的坡度表示，坡度越大，坡角越大，坡面越陡；反之，坡度越小，坡角越小，坡面越缓.

拔考向▸ 利用特殊角解直角三角形解决实际问题

题型 1：利用解直角三角形解实际中方向角问题

例 1 为了维护海洋权益，我国加大了在某海域的巡逻力度. 一天，两艘海警船刚好在某岛东西海岸线上的 A，B 两处巡逻，同时发现一艘不明国籍的船只停在 C 处海域. 如图 1-5-1，$AB=60(\sqrt{6}+\sqrt{2})$ 海里，在 B 处测得 C 在北偏东 45° 的方向上，在 A 处测得 C 在北偏西 30° 的方向上，在海岸线 AB 上有一灯塔 D，测得 $AD=120(\sqrt{6}-\sqrt{2})$ 海里.

（1）分别求出 A 与 C 及 B 与 C 的距离 AC，BC（结果保留根号）.

（2）已知在灯塔 D 周围 100 海里范围内有暗礁群，在 A 处的海警船沿 AC 前往 C 处

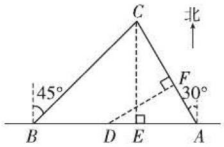


图 1-5-1

提分·秘诀

解法提醒

求解是否触礁或是否受台风、噪声影响等问题的方法：一般都是求出暗礁中心到航线的距离、城市中心（目标中心）到台风中心的最近距离或学校到噪声源的最近距离，将这些距离与暗礁半径、台风影响半径或噪声影响半径进行比较，距离小于或等于半径会触礁或受影响，距离大于半径不会触礁或受影响.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

盘查，途中有无触礁的危险（参考数据：$\sqrt{2}\approx1.41$，$\sqrt{3}\approx1.73$，$\sqrt{6}\approx2.45$）？

解题秘方：建立数学模型后，用“化斜为直法”将斜三角形问题转化为解直角三角形问题求解.

解：（1）如图 1-5-1，过点 C 作 $CE\perp AB$ 于点 E，可得 $\angle ACE=30°$，$\angle BCE=45°$.

设 $AE=x$ 海里，则在 Rt△ACE 中，$CE=\sqrt{3}x$ 海里，$AC=2x$ 海里，在 Rt△BCE 中，$BE=CE=\sqrt{3}x$ 海里，$BC=\sqrt{6}x$ 海里.

$\because AB=AE+BE$，$\therefore x+\sqrt{3}x=60(\sqrt{6}+\sqrt{2})$，

解得 $x=60\sqrt{2}$，$\therefore AC=120\sqrt{2}$ 海里，$BC=120\sqrt{3}$ 海里.

（2）如图 1-5-1，过点 D 作 $DF\perp AC$ 于点 F，可得 $\angle DAF=60°$. 在 Rt△AFD 中，$DF=AD\cdot\sin60°=\frac{\sqrt{3}}{2}AD$，

$\therefore DF=\frac{\sqrt{3}}{2}\times120(\sqrt{6}-\sqrt{2})=60(3\sqrt{2}-\sqrt{6})\approx106.8$（海里）$>100$ 海里，$\therefore$无触礁危险.

图解

通过 CE 将原三角形分成两个直角三角形，如图 1-5-2 所示.

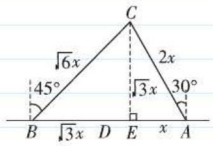


图 1-5-2


方向角问题

题型 2：利用解直角三角形解实际中仰角和俯角问题

例 2 如图 1-5-3，在数学活动课中，小敏为了测量校园内旗杆 CD 的高度，先在教学楼的底端 A 处，观测到旗杆顶端 C 的仰角 $\angle CAD=60°$，然后爬到教学楼上的 B 处，观测到旗杆底端 D 的俯角是 30°，已知教学楼 AB 高 4 m.

（1）求教学楼与旗杆的水平距离 AD（结果保留根号）；

（2）求旗杆 CD 的高度.

解题秘方：将实际问题转化为解直角三角形问题求解.

解：（1）$\because$在教学楼 B 处观测旗杆底端 D 的俯角是 30°，

$\therefore\angle ADB=30°$.

在 Rt△ABD 中，$\because\angle BAD=90°$，

$\angle ADB=30°$，$AB=4$ m，

$\therefore AD=\frac{AB}{\tan\angle ADB}=\frac{4}{\tan30°}=4\sqrt{3}$（m）.

即教学楼与旗杆的水平距离 AD 是 $4\sqrt{3}$ m.

（2）在 Rt△ACD 中，$\because\angle ADC=90°$，$\angle CAD=60°$，$AD=4\sqrt{3}$ m，

$\therefore CD=AD\cdot\tan60°=4\sqrt{3}\times\sqrt{3}=12$（m）.

即旗杆 CD 的高度是 12 m.

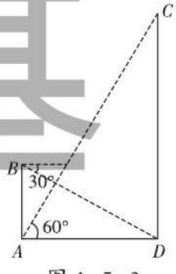


图 1-5-3

方法点拨：求解有关仰角与俯角的问题，关键是根据仰角、俯角的定义画出水平线，找准视角，建立数学模型后构造直角三角形，并结合图形利用锐角三角函数解直角三角形.

另解

（1）$\because$在教学楼 B 处观测旗杆底端 D 的俯角是 30°，

$\therefore\angle ABD=60°$.

在 Rt△ABD 中，

$\because\angle BAD=90°$，

$\angle ABD=60°$，

$AB=4$ m，

$\therefore AD=AB\cdot\tan60°=4\sqrt{3}$（m）.

因此，教学楼与旗杆的水平距离 AD 是 $4\sqrt{3}$ m.

（2）在 Rt△ACD 中，

$\because\angle ADC=90°$，

$\angle CAD=60°$，

$\therefore\angle ACD=30°$.

又 $AD=4\sqrt{3}$ m，

$\therefore AC=8\sqrt{3}$ m.

由勾股定理得

$CD=\sqrt{AC^2-AD^2}$

$=\sqrt{(8\sqrt{3})^2-(4\sqrt{3})^2}$

$=12$（m）.

因此，旗杆 CD 的高度是 12 m.

荣德基

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

题型 3：利用解直角三角形解实际中坡角和坡度问题

例 3 如图 1–5–4，李明在大楼 30 m 高（即 $PH=30$ m）的窗口 P 处进行观测，测得山坡上 A 处的俯角为 15°，山脚 B 处的俯角为 60°．已知该山坡的坡度 i 为 $1:\sqrt{3}$，点 P，H，B，C，A 在同一个平面上，点 H，B，C 在同一条直线上，且 $PH \perp HC$.

（1）山坡坡角的度数等于_____度．

（2）求 A，B 两点间的距离（结果精确到 0.1 m，参考数据：$\sqrt{3} \approx 1.732$）．

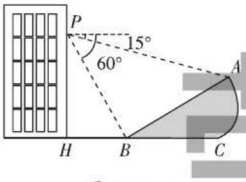


图 1–5–4

解题秘方：将分散的条件集中到△ ABP 中求解．

解：（1）30

（2）由题意，得∠ $PBH=60°$，∠ $APB=60°-15°=45°$．

∵∠ $ABC=30°$，

∴∠ $ABP=90°$，

∴∠ $BAP=45°$，

∴ $PB=AB$.

在 Rt△ PHB 中，

$$PB=\frac{PH}{\sin\angle PBH}=\frac{30}{\sin 60°}=\frac{30}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=20\sqrt{3}\ (\text{m}).$$

∴ $AB=PB=20\sqrt{3}\approx 34.6$（m）．

即 A，B 两点间的距离约为 34.6 m.

详解

∵山坡坡角为∠ ABC，

坡度 $i=1:\sqrt{3}$，

∴ $\tan\angle ABC=\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$，

∴∠ ABC=30°．

警示误区

有关坡角、坡度的问题应注意：

- 坡角是指坡面与水平面的夹角，而不是坡面与铅垂线的夹角；
- 不能把坡度比例式的分子和分母的位置颠倒．

知识 2 解直角三角形解决实际问题的一般步骤

1. 利用解直角三角形解决实际问题的一般步骤

（1）画出平面图形，将实际问题抽象为数学问题，转化为解直角三角形的问题；

（2）根据已知条件的特点，灵活选用锐角三角函数等知识解直角三角形；

（3）得到数学问题的答案；

（4）得到实际问题的答案．

提分·必记

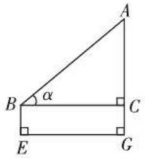
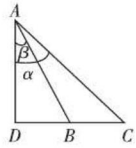
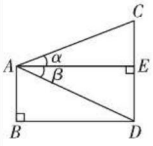
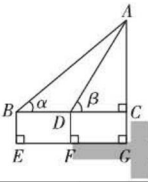
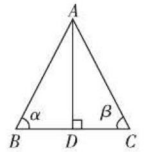
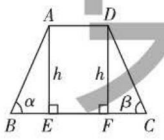
特别提醒

1. 当实际问题中涉及的图形可以直接转化为直角三角形时，可利用解直角三角形的知识直接求解．
2. 若相关的角不是直角三角形的内角，应利用平行线的性质或互余、互补的角的性质将其转化为直角三角形的内角，再利用解直角三角形的知识求解．

荣德基

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

2. 解决实际问题时，常见的基本图形及相应的关系式如表所示

图形	关系式	图形	关系式
	$AC=BC\cdot\tan\alpha$，$AG=AC+BE$		$BC=DC-BD=AD\cdot(\tan\alpha-\tan\beta)$
	$AB=DE=AE\cdot\tan\beta$，$CD=CE+DE=AE\cdot(\tan\alpha+\tan\beta)$		$BD=BC-DC=AC\cdot\left(\frac{1}{\tan\alpha}-\frac{1}{\tan\beta}\right)$，$AG=AC+CG=AC+BE$
	$BC=BD+DC=AD\cdot\left(\frac{1}{\tan\alpha}+\frac{1}{\tan\beta}\right)$		$BC=BE+EF+CF=BE+AD+CF=AD+h\cdot\left(\frac{1}{\tan\alpha}+\frac{1}{\tan\beta}\right)$

3. 若问题中有两个或两个以上的直角三角形，当其中一个直角三角形不能求解时，可考虑分别由两个直角三角形找出含有相同未知元素的关系式，运用方程求解.



核心考向▶利用解直角三角形解实际中测量问题

题型1：解直角三角形在采光问题中的应用

例4 如图1-5-5，某居民楼Ⅰ高20 m，窗户朝南，该楼内一楼住户的窗台离地面的距离CM为2 m，窗户CD高1.8 m. 现计划在楼Ⅰ的正南方距楼Ⅰ 30 m处新建一居民楼Ⅱ. 当正午时刻太阳光线与地面成30° 角时，要使楼Ⅱ的影子不影响楼Ⅰ所有住户的采光，新建楼Ⅱ最高只能建多少米？

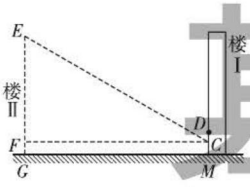


图1-5-5

提分·秘诀

解法提醒

解本题的关键是将实际中的相关数据，通过建立数学模型，归结到直角三角形中，再用三角函数(正切)求解. 注：本题也可以用30°角的直角三角形的三边关系，建立方程求解.

解题秘方：将实际问题建模成解直角三角形问题.

解：设正午时刻太阳光线正好照在楼Ⅰ一楼的窗台处，此时新建居民楼Ⅱ高$EG=x$ m，如图1-5-5，过C作$CF\perp EG$于F，则$FG=CM=2$ m.

在Rt△ECF中，$EF=(x-2)$ m，$FC=30$ m，$\angle ECF=30°$，

$$\therefore \tan 30°=\frac{EF}{FC}=\frac{x-2}{30},$$

$$\therefore x=10\sqrt{3}+2.$$

即新建楼Ⅱ最高只能建$(10\sqrt{3}+2)$ m.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

题型 2：解直角三角形在工程问题中的应用

例 5 某工程队承包了一段铁路的施工，该铁路要经过某一隧道．如图 1-5-6，已知隧道口分别为 D，E，为了如期完工，需测量出 DE 的长度．为此，该工程队在山的一侧选取适当的点 C，测得 $BC=200$ m，$\angle ABC=105°$，$\angle C=45°$，$AD=18\sqrt{2}$ m，$BE=32\sqrt{2}$ m，且 A，D，E，B 在同一条直线上．已知该工程限定时间为 10 天，该工程队每天至少需要施工多少米？（结果保留小数点后一位）

解题秘方：在建立的非直角三角形模型中，用“化斜为直法”解含公共直角边的直角三角形．

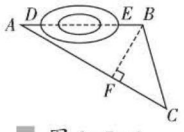


图 1-5-6

解：如图 1-5-6，过点 B 作 $BF\perp AC$ 于点 F，

$\because \angle ABC=105°$，$\angle C=45°$，

$\therefore \angle A=30°$，$\triangle BFC$ 为等腰直角三角形．

在 $\mathrm{Rt}\triangle BFC$ 中，$\because \cos C=\dfrac{FC}{BC}$，

$\therefore BF=FC=BC\cdot\cos C=200\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}=100\sqrt{2}$（m）．

在 $\mathrm{Rt}\triangle AFB$ 中，$\because \angle A=30°$，

$\therefore AB=2BF=200\sqrt{2}$ m．

又 $\because AD=18\sqrt{2}$ m，$BE=32\sqrt{2}$ m，

$\therefore DE=AB-AD-BE=200\sqrt{2}-18\sqrt{2}-32\sqrt{2}=150\sqrt{2}$（m）．

$\because 150\sqrt{2}\div 10\approx 21.2$（m），

计算结果必须根据题目要求取近似值．

$\therefore$ 该工程队每天至少需要施工 21.2 m．

教你一招

解直角三角形的实际应用问题的求解方法：

1. 根据题目中的已知条件，将实际问题抽象为解直角三角形的数学问题，画出平面几何图形，弄清已知条件中各量之间的关系．
2. 若条件中有直角三角形，则直接选择合适的三角函数关系求解即可；若条件中没有直角三角形，一般需添加辅助线构造直角三角形，再选用合适的三角函数关系求解．

点中考·拨模拟 得满分

中考探秘

本节主要内容是利用解直角三角形的知识解决实际问题，在近几年的中考中，对本知识点的考查呈上升趋势，主要涉及测量、航海、航空、工程问题等．解决这类问题的关键是把实际问题转化为数学中的锐角三角函数问题，题型以解答题为主，难度中等．

三年中考兵法

考法 1 利用解直角三角形构造直角三角形模型求距离

例 6 ［中考·呼和浩特］如图 1-5-7，地面上小山的两侧有 A，B 两地，为了测量 A，B 两地的距离，让一热气球从小山西侧 A 地出发沿与 AB 成 30° 角的方向，以每分钟 40 m 的速度直线飞行，10 分钟后到达 C 处，此时热气球上的人测得 CB 与 AB 成 70° 角，请你用测得的数据求 A，B 两地的距离 AB 的长．（结果用含非特殊角的三角函数和根式表示即可）

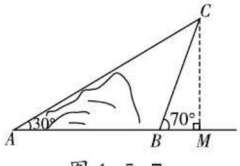


图 1-5-7

冲刺·满分

思路引导

过点 C 作 $CM\perp AB$，交 AB 的延长线于点 M，通过解 $\mathrm{Rt}\triangle ACM$ 得到 AM 的长，通过解 $\mathrm{Rt}\triangle BCM$ 得到 BM 的长，则 $AB=AM-BM$．

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

试题评析：本题考查解直角三角形的应用、锐角三角函数等知识，解题的关键是添加辅助线构造直角三角形，属于中考常考题型.

解：如图 1-5-7，过点 C 作 $CM \perp AB$，交 AB 的延长线于点 M，

由题意得 $AC=40\times 10=400$（m）.

在 Rt $\triangle ACM$ 中，

$\because \angle A=30^\circ$，$\therefore CM=\frac{1}{2}AC=200$ m，

$AM=\frac{\sqrt{3}}{2}AC=200\sqrt{3}$ m.

在 Rt $\triangle BCM$ 中，由题意易得 $\angle BCM=20^\circ$.

$\because \tan 20^\circ=\frac{BM}{CM}$，$\therefore BM=200\tan 20^\circ$ m，

$\therefore AB=AM-BM=200\sqrt{3}-200\tan 20^\circ=200(\sqrt{3}-\tan 20^\circ)$（m），

因此 A，B 两地的距离 AB 的长为 $200(\sqrt{3}-\tan 20^\circ)$ m.

考法 2 构建“⧋”式模型解实际问题

例 7 ［中考·德州］如图 1-5-8，某公路检测中心在一事故多发地段安装了一个测速仪器，检测点设在距离公路 10 m 的 A 处，测得一辆汽车从 B 处行驶到 C 处所用时间为 0.9 s，已知 $\angle B=30^\circ$，$\angle C=45^\circ$.

（1）求 B，C 之间的距离（保留根号）；

（2）如果此地限速为 80 km/h，那么这辆汽车是否超速？请说明理由（参考数据：$\sqrt{3}\approx 1.7$，$\sqrt{2}\approx 1.4$）.

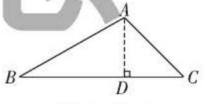


图 1-5-8

试题评析：本题考查解直角三角形的应用，锐角三角函数，速度、时间、路程之间的关系等知识，解题的关键是添加常用辅助线，构造直角三角形，属于中考常考题型.

解：（1）如图 1-5-8，作 $AD \perp BC$ 于 D，则 $AD=10$ m.

在 Rt $\triangle ACD$ 中，$\because \angle C=45^\circ$，$\therefore CD=AD=10$ m，

在 Rt $\triangle ABD$ 中，$\because \angle B=30^\circ$，$\therefore \tan 30^\circ=\frac{AD}{BD}$，

$\therefore BD=\sqrt{3}AD=10\sqrt{3}$ m，

$\therefore BC=BD+DC=(10+10\sqrt{3})$ m.

（2）结论：这辆汽车超速.

理由如下：$\because BC=(10+10\sqrt{3})$ m ≈ 27 m，

$\therefore$ 汽车速度 $\approx\frac{27}{0.9}=30$（m/s）$=108$ km/h.

$\because 108>80$，

$\therefore$ 这辆汽车超速.

解法提醒

例 7 也可以按下列图形（图 1-5-9）及关系式直接代入求解：

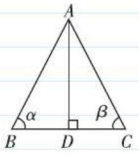


图 1-5-9

$BC=BD+DC=AD\cdot\left(\frac{1}{\tan\alpha}+\frac{1}{\tan\beta}\right)$.

荣德基

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

考法 3 构建“△”式模型解实际问题

例 8 [中考·济宁] 某地的一座人行天桥如图 1-5-10 所示，天桥高为 6 m，坡面 BC 的坡度为 1 ∶ 1，为了方便行人推车过天桥，有关部门决定降低坡度，使新坡面的坡度为 1 ∶ $\sqrt{3}$.

（1）求新坡面的坡角 α.

（2）原天桥底部正前方 8 m 处（PB 的长）的文化墙 PM 是否需要拆除？请说明理由.

试题评析：此题考查了坡度、坡角的知识，根据题意构造直角三角形是关键.

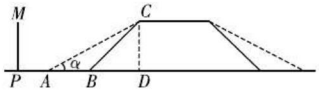


图 1-5-10

解：（1）∵新坡面的坡度为 1 ∶ $\sqrt{3}$，

∴ $\tan\alpha=\tan\angle CAB=\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$，∴ $\alpha=30°$.

故新坡面的坡角 α 为 30°.

（2）文化墙 PM 不需要拆除.

理由如下：如图 1-5-10，过点 C 作 $CD\perp AB$ 于点 D，则 $CD=6$ m.

∵坡面 BC 的坡度为 1 ∶ 1，新坡面的坡度为 1 ∶ $\sqrt{3}$，

∴ $BD=CD=6$ m，$AD=6\sqrt{3}$ m，

∴ $AB=AD-BD=(6\sqrt{3}-6)$ m<8 m，

∴文化墙 PM 不需要拆除.

思路引导

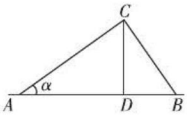
- 由新坡面的坡度为 1 ∶ $\sqrt{3}$，可得 $\tan\alpha=\tan\angle CAB=\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$，然后由特殊角的三角函数值，求得答案；
- 首先过点 C 作 CD ⊥ AB 于点 D，由坡面 BC 的坡度为 1 ∶ 1，新坡面的坡度为 1 ∶ $\sqrt{3}$，即可求得 AD，BD 的长，继而求得 AB 的长，则可求得答案.

两年模拟兵法 答案见 212 页

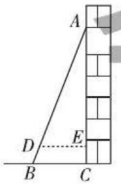
1. [中考·益阳] 如图，电线杆 CD 的高度为 h，两根拉线 AC 与 BC 相互垂直，$\angle CAB=\alpha$，则拉线 BC 的长度为（A，D，B 在同一条直线上）(　　)

A. $\frac{h}{\sin\alpha}$　　B. $\frac{h}{\cos\alpha}$

C. $\frac{h}{\tan\alpha}$　　D. $h\cdot\cos\alpha$



（第 1 题）



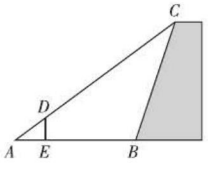
（第 2 题）

2. [模拟·临沂] 如图，AB 是斜靠在墙上的长梯，D 是梯上一点，梯脚 B 与墙脚的距离为 1.6 m（即 BC 的长），点 D 与墙的距离为 1.4 m（即 DE 的长），$BD=0.55$ m，则梯子的长为（　　）

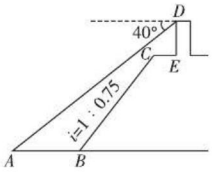
A. 4.5 m　B. 4.4 m　C. 4 m　D. 3.85 m

3. [中考·济南] 如图，为了测量山坡护坡石坝的坡度（坡面的铅直高度与水平宽度的比称为坡度），把一根长 5 m 的竹竿 AC 斜靠在石坝旁，量出竿长 1 m 处的 D 点离地面的高度 $DE=0.6$ m，又量得竿底与坝脚的距离 $AB=3$ m，则石坝的坡度为（　　）

A. $\frac{3}{4}$　B. 3　C. $\frac{3}{5}$　D. 4



（第 3 题）



（第 4 题）

荣德基

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

4. [中考·重庆]如图，小王在长江边某瞭望台D处，测得江面上的渔船A的俯角为$40°$，若$DE=3$ m，$CE=2$ m，CE平行于江面AB，迎水坡BC的坡度$i=1:0.75$，坡长$BC=10$ m，则此时AB的长约为(　　)(参考数据：$\sin 40° \approx 0.64$，$\cos 40° \approx 0.77$，$\tan 40° \approx 0.84$)

A. 5.1 m　　B. 6.3 m

C. 7.1 m　　D. 9.2 m

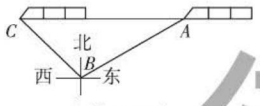
5. [中考·百色]如图，在距离铁轨200 m的B处，观察由南宁开往百色的“和谐号”动车.当动车车头在A处时，恰好位于B处的北偏东$60°$方向上，10 s后，动车车头到达C处，恰好位于B处的西北方向上，则这时段动车的平均速度是(　　) m/s.

A. $20(\sqrt{3}+1)$

B. $20(\sqrt{3}-1)$

C. 200

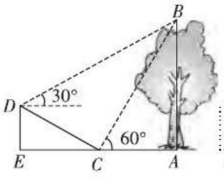
D. 300



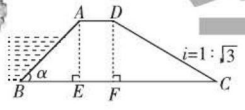
(第5题)

6. [中考·深圳]如图，学校环保社成员想测量斜坡CD旁一棵树AB的高度，他们先在点C处测得树顶B的仰角为$60°$，然后在坡顶D测得树顶B的仰角为$30°$.已知斜坡CD的长度为20 m，DE的长度为10 m，则树AB的高度是(　　) m.

A. $20\sqrt{3}$　　B. 30　　C. $30\sqrt{3}$　　D. 40



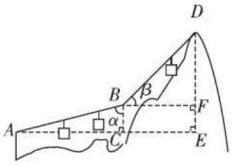
(第6题)



(第7题)

7. [中考·德阳]如图，某拦水大坝的横断面为梯形$ABCD$，AE，DF为梯形的高，其中迎水坡AB的坡角$\alpha=45°$，坡长$AB=6\sqrt{2}$ m，背水坡CD的坡度$i=1:\sqrt{3}$(i为DF与FC的比值)，则背水坡CD的坡长为_____m.

8. [中考·安徽]如图，游客在点A处坐缆车出发，沿$A-B-D$的路线可至山顶D处.假设AB和BD都是直线段，且$AB=BD=600$ m，$\alpha=75°$，$\beta=45°$，求DE的长.(参考数据：$\sin 75° \approx 0.97$，$\cos 75° \approx 0.26$，$\sqrt{2} \approx 1.41$)　　[导学号 2380328]

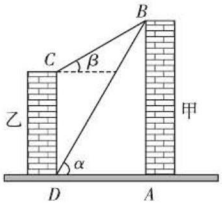


(第8题)

9. [中考·广安]如图，线段AB，CD分别表示甲、乙两建筑物的高，$BA \perp AD$，$CD \perp DA$，垂足分别为A，D，从D点测得B点的仰角α为$60°$，从C点测得B点的仰角β为$30°$，甲建筑物的高$AB=30$米.

(1)求甲、乙两建筑物之间的距离AD.

(2)求乙建筑物的高CD.



(第9题)

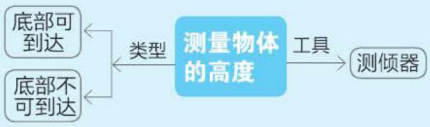
荣德基

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

6 利用三角函数测高

核心知识
- 测量倾斜角
- 测量底部可以到达的物体的高度
- 测量底部不可以到达的物体的高度

知识链接



点知识·拨考向 速提分

点知识 1 测量倾斜角

1. **测倾器** 测量倾斜角可以用测倾器. 简单的测倾器由度盘、铅锤和支杆组成(如图 1-6-1).

2. 使用测倾器测量倾斜角的步骤

(1) 把支杆竖直插入地面，使支杆的中心线、铅垂线和度盘的 0° 刻度线重合，这时度盘的顶线 PQ 在水平位置.

(2) 转动度盘，使度盘的直径对准目标，记下此时铅垂线所指的度数.

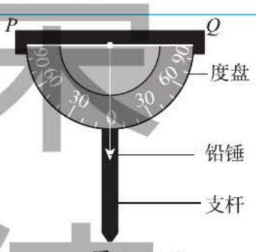


图 1-6-1

根据对顶角相等及同角的余角相等可以知道，所测倾斜角(即仰角、俯角)等于铅垂线所指的度数，读出铅垂线所指的度数，即为倾斜角的度数.

拔考向 利用测倾器测量仰角、俯角

例 1 王晓红在阳台上望楼前的一棵大树，测得大树底部和树梢的俯角、仰角分别如图 1-6-2 及图 1-6-3，请你帮助她读出测得的俯角、仰角.

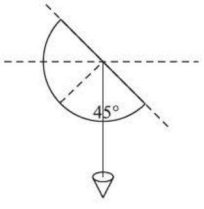


图 1-6-2

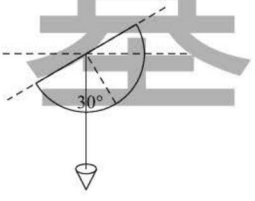


图 1-6-3

解题秘方：紧扣测倾器测量倾斜角的步骤，读出俯角和仰角的度数.

解：俯角为 45° ，仰角为 30° .

提分·必记

特别提醒

1. “刻度为 90°~0°~90°”的意思是使半圆度盘的刻度以 0° 为中心，然后向左、向右分别增加到 90°，即度盘的刻度不是 0°~180° .
2. 测倾器的使用原理是对顶角相等及同角的余角相等.
3. 两点间互看的仰角和俯角的度数是相等的(两直线平行，内错角相等).

提分·秘诀

方法点拨

测量俯角的依据是“同角的余角相等”；测量仰角的依据是“对顶角相等”和“同角的余角相等”.

基础 德 莱

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

点知识▶ 2 测量底部可以到达的物体的高度

所谓“底部可以到达”，就是在地面上可以无障碍地直接测得测点与被测物体的底部之间的距离.

如图 1−6−4，测量 MN 高度的步骤如下：

（1）在测点 A 处安置测倾器，测得 M 的仰角 $\angle MCE=\alpha$；

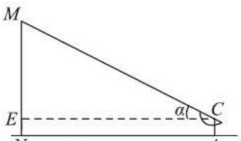


图 1−6−4

（2）量出测点 A 到物体底部 N 的水平距离 $AN=l$；

（3）量出测倾器的高度 $AC=a$.

求出 MN 的高度 $MN=ME+EN=l\tan\alpha+a$.

提分·必记

特别提醒

- 测量时，测倾器的支杆必须与水平面垂直，而不是与所在的地面垂直，注意不要忘记测倾器的高度.
- 为了尽可能减少误差，一般对同一测量对象多次测量取平均值.

拔考向▶ 利用测倾器测量底部可以到达的物体的高度

例 2 如图 1−6−5，李亮用测倾器在地点 D 处测量旗杆 BC 的高度，测倾器的高度 $AD=1.21$ m，地面上 $DC=20.04$ m，仰角 $\alpha=28°$，请你帮李亮计算一下旗杆 BC 有多高（结果精确到 0.1 m，参考数据：$\sin 28°\approx 0.469\,5$，$\cos 28°\approx 0.882\,9$，$\tan 28°\approx 0.5317$）.

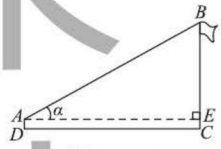


图 1−6−5

解题秘方：紧扣测倾器测出的角度以及解直角三角形求出高度.

提分·秘诀

解法提醒

测量底部可以到达的物体的高度实际上是先测量出一个直角三角形中的一个锐角和一条直角边，然后利用三角函数得出物体的高度.

解：如图 1−6−5，过点 A 作 $AE\perp BC$ 于点 E，由题意，得 $AE=DC=20.04$ m，$EC=AD=1.21$ m，$\angle BAE=\alpha=28°$.

在 $\mathrm{Rt}\triangle ABE$ 中，$BE=AE\cdot\tan\alpha=20.04\times\tan 28°\approx 20.04\times 0.531\,7\approx 10.66$（m）.

$\therefore BC=BE+EC\approx 10.66+1.21\approx 11.9$（m）.

即旗杆 BC 的高约为 11.9 m.

点知识▶ 3 测量底部不可以到达的物体的高度

所谓“底部不可以到达”，就是在地面上不能直接测得测点与被测物体的底部之间的距离.

如图 1−6−6，测量 MN 高度的步骤如下：

（1）在测点 A 处安置测倾器，测得此时 M 的仰角 $\angle MCE=\alpha$；

（2）在测点 A 与物体之间的 B 处安置测倾器，测得此时 M 的仰角 $\angle MDE=\beta$；

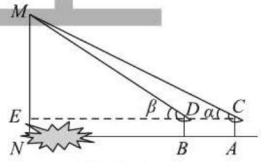


图 1−6−6

（3）量出测倾器的高度 $AC=BD=a$，以及测点 A，B 之间的距离 $AB=b$.

借助 $\dfrac{ME}{\tan\alpha}-\dfrac{ME}{\tan\beta}=b$，列方程求出 ME，

求出物体 MN 的高度 $MN=ME+EN=\dfrac{b\tan\alpha\cdot\tan\beta}{\tan\beta-\tan\alpha}+a$.

提分·必记

特别提醒

1. 测量时，测点 B 必须与 A，N 在同一条直线上，只有这样才能保证 AB+BN=AN 成立.
2. 测量时，测点 A 与 B 之间的距离必须可以直接测得.
3. 两次测量过程中度盘的圆心必须在同一水平面上.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

拔考向▶利用测倾器测量底部不可以到达的物体的高度

例3 [中考·绍兴]如图1-6-7，从地面上的点A看一山坡上的电线杆PQ，测得杆顶端点P的仰角是45°，向前走6 m到达点B，测得杆顶端点P和杆底端点Q的仰角分别是60°和30°.

(1)求$\angle BPQ$的度数.

(2)求该电线杆PQ的高度(结果精确到1 m，参考数据：$\sqrt{3}\approx1.7$，$\sqrt{2}\approx1.4$).

解题秘方：解几个直角三角形，根据线段之间的和、差关系求出高度.

解：如图1-6-7，延长PQ交直线AB于点E.

(1)在Rt△PBE中，∵$\angle PBE=60°$，

∴$\angle BPQ=90°-\angle PBE=90°-60°=30°$.

(2)设$PE=x$ m.

在Rt△APE中，$\angle A=45°$，则$AE=PE=x$ m.

在Rt△BPE中，$\angle PEB=90°$，

∵$\tan\angle PBE=\dfrac{PE}{BE}$，

∴$BE=\dfrac{PE}{\tan 60°}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}PE=\dfrac{\sqrt{3}}{3}x$ m.

∵$AB=AE-BE$，

∴$x-\dfrac{\sqrt{3}}{3}x=6$，解得$x=9+3\sqrt{3}$.

∴$BE=\dfrac{\sqrt{3}}{3}\times(9+3\sqrt{3})=3\sqrt{3}+3$(m).

在Rt△BEQ中，$\angle BEQ=90°$，

∵$\tan\angle QBE=\dfrac{QE}{BE}$，

∴$QE=BE\tan 30°=\dfrac{\sqrt{3}}{3}\times(3\sqrt{3}+3)=3+\sqrt{3}$(m).

∴$PQ=PE-QE=9+3\sqrt{3}-(3+\sqrt{3})=6+2\sqrt{3}\approx9$(m).

∴电线杆PQ的高度约为9 m.

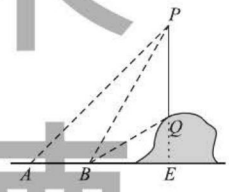


图1-6-7

提分·秘诀

方法点拨

测量底部不可以到达的物体的高度，需要测量四个数据，即测倾器在两个测点分别测得的物体的仰角、两个测点之间的距离及测倾器的高度.求解时要解两个直角三角形，应用线段之间的和、差关系得到一元一次方程，求出物体的高度.

荣德基

点方法·拨技巧 提高分

拔尖角度▶利用测高的方法进行方案设计

例4 如图1-6-8，山上有一座铁塔，山脚下有一矩形建筑物$ABCD$，且建筑物周围没有开阔平整地带，该建筑物顶端宽度AD和高度DC都可直接测得，从A，D，C三点可看到塔顶端H，可供使用的测量工具有皮尺，测倾器.

挑战·高分

另解

(1)如图1-6-10，过点D作$DM\perp HG$于点M，连接AH，DH.

测量四个数据，即测

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

（1）请你根据现有条件充分利用矩形建筑物设计一个测量塔顶端到地面高度 HG 的方案，具体要求如下：①测量数据尽可能少；②在所给图形上画出你设计的测量平面图，并将应测数据标记在图形上（如果测 A，D 间的距离，用 m 表示；如果测 D，C 间的距离，用 n 表示；如果测角，用 α,β,γ 等表示，测倾器高度不计）.

（2）根据你测量的数据，计算塔顶端到地面的高度 HG（用字母表示）.

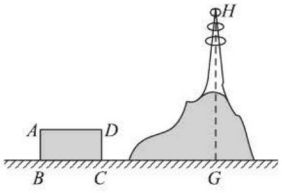


图 1−6−8

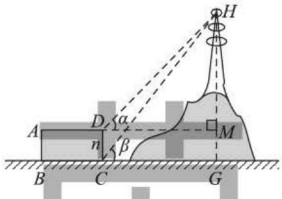


图 1−6−9

解题秘方：紧扣测量底部不能直接到达的物体的高度的方法进行方案设计.

解：（1）如图 1−6−9，过点 D 作 $DM\perp HG$ 于点 M，连接 DH，CH. 测量三个数据，即测量$\angle HDM$ 的度数，记为 α，测量$\angle HCG$ 的度数，记为 β，测量 CD 的长，记为 n.

（2）设 $HG=x$，则 $HM=x-n$.

在 Rt△HCG 中，$\angle HCG=\beta$，$\angle HGC=90°$，

$\therefore CG=\dfrac{x}{\tan\beta}$. 在 Rt△$HDM$ 中，$\angle HDM=\alpha$，$\angle HMD=90°$，

$\therefore DM=\dfrac{HM}{\tan\alpha}=\dfrac{x-n}{\tan\alpha}$.

易知 $MD=CG$，

即 $\dfrac{x-n}{\tan\alpha}=\dfrac{x}{\tan\beta}$，$\therefore x=\dfrac{n\cdot\tan\beta}{\tan\beta-\tan\alpha}$.

因此塔顶端到地面的高度 HG 为 $\dfrac{n\cdot\tan\beta}{\tan\beta-\tan\alpha}$.

量$\angle HDM$的度数，记为 α，测量$\angle HAM$ 的度数，记为 γ，测量CD的长度，记为 n，测量 AD 的长度，记为 m.

（2）设 $HG=x$，则 $HM=x-n$.

在 Rt△AHM 中，$AM=\dfrac{x-n}{\tan\gamma}$，

在 Rt△DHM 中，$DM=\dfrac{x-n}{\tan\alpha}$.

$\because AM-DM=AD$，

即 $\dfrac{x-n}{\tan\gamma}-\dfrac{x-n}{\tan\alpha}=m$，

$\therefore x=\dfrac{m\cdot\tan\alpha\cdot\tan\gamma}{\tan\alpha-\tan\gamma}+n$.

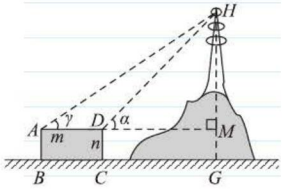


图 1−6−10

点中考·拨模拟 得满分

中考探秘 本节主要考查利用解直角三角形解决测量物体高度的三角函数应用题，中考题中主要以解答题的形式出现，难度适中.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

三年中考兵法

考法 1 从同一点看不同位置测量高度

例 5 [中考·绍兴] 如图 1-6-11，学校的实验楼对面是一幢教学楼，小敏在实验楼的窗口 C 测得教学楼顶部 D 的仰角为 18°，教学楼底部 B 的俯角为 20°，量得实验楼与教学楼之间的距离 $AB=30$ m.

（1）求 $\angle BCD$ 的度数.

（2）求教学楼的高 BD.（结果精确到 0.1 m，参考数据：$\tan 20° \approx 0.36$，$\tan 18° \approx 0.32$）

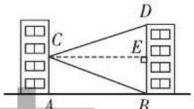


图 1-6-11

试题评析：此题考查解直角三角形的应用，仰角、俯角问题，熟练掌握锐角三角函数的定义是解本题的关键.

解：（1）如图 1-6-11，过点 C 作 $CE \perp BD$ 于点 E，则有

$\angle DCE=18°$，$\angle BCE=20°$，

$\therefore \angle BCD = \angle DCE + \angle BCE = 18° + 20° = 38°$.

（2）由题意得，$CE=AB=30$ m.

在 Rt $\triangle CBE$ 中，$BE=CE \cdot \tan 20° \approx 10.8$ m，

在 Rt $\triangle CDE$ 中，$DE=CE \cdot \tan 18° \approx 9.6$ m，

$\therefore BD=BE+DE \approx 10.8+9.6=20.4$（m），

$\therefore$ 教学楼的高 BD 约为 20.4 m.

考法 2 从不同点看同一位置测量高度

例 6 [中考·内江] 如图 1-6-12，某人为了测量小山顶上的塔 ED 的高，他在山下的点 A 处测得塔尖点 D 的仰角为 45°，再沿 AC 方向前进 60 m 到达山脚点 B，测得塔尖点 D 的仰角为 60°，塔底点 E 的仰角为 30°，求塔 ED 的高度.（结果保留根号）

试题评析：本题考查解直角三角形的应用，解答本题的关键是根据仰角构造直角三角形，利用三角函数的知识求解，难度一般.

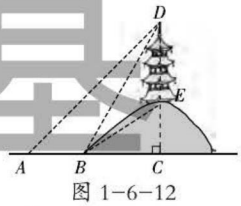


图 1-6-12

解：由题易知，$\angle DBC=60°$，$\angle EBC=30°$，

$\therefore \angle DBE = \angle DBC - \angle EBC = 60° - 30° = 30°$.

又 $\because \angle BCD=90°$，$\therefore \angle BDC=90° - \angle DBC=90° - 60° = 30°$.

$\therefore \angle DBE = \angle BDE$，$\therefore BE=DE$.

设 $EC=x$ m，则 $DE=BE=2EC=2x$ m，

$DC=EC+DE=x+2x=3x$（m），

$BC=\sqrt{BE^2-EC^2}=\sqrt{(2x)^2-x^2}=\sqrt{3}x$（m）.

易知 $\angle DAC=45°$，$\angle DCA=90°$，$AB=60$ m，

冲刺·满分

解法提醒

- 过点 C 作 CE 与 BD 垂直，根据题意确定出所求角度数即可；
- 在 Rt△CBE 中，利用锐角三角函数定义求出 BE 的长，在 Rt△CDE 中，利用锐角三角函数定义求出 DE 的长，由 BE+DE 求出 BD 的长，即为教学楼的高.

思路引导

先求出 $\angle DBE=30°$，$\angle BDE=30°$，得出 $BE=DE$，然后设 $EC=x$ m，则 $BE=2x$ m，$DE=2x$ m，$DC=3x$ m，$BC=\sqrt{3}x$ m，再根据 $\angle DAC=45°$，可得 $AC=CD$，列出方程求出 x 的值，进而可求出塔 ED 的高度.

基德莱

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

$\therefore AC=DC=(\sqrt{3}x+60)$ m，$\therefore \sqrt{3}x+60=3x$，

解得 $x=30+10\sqrt{3}$，$\therefore 2x=60+20\sqrt{3}$.

即塔 ED 的高度为 $(60+20\sqrt{3})$ m.

考法 3 从不同点看不同位置测量高度

例 7 [中考·潍坊] 如图 1-6-13，某数学兴趣小组要测量一栋五层居民楼 CD 的高度. 该楼底层为车库，高 2.5 m；上面五层居住，每层高度相等. 测倾器离地 1.5 m，在 A 处测得五楼顶部点 D 的仰角为 60°，在 B 处测得四楼顶部点 E 的仰角为 30°，$AB=14$ m，求居民楼的高度. (精确到 0.1 m，参考数据：$\sqrt{3}\approx 1.73$)

试题评析：本题考查解直角三角形的应用，仰角、俯角问题，熟练掌握锐角三角函数的定义是解本题的关键.

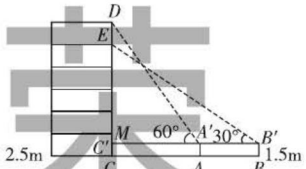


图 1-6-13

解：设每层楼高为 x m，

由题意得 $MC'=MC-CC'=2.5-1.5=1$ (m)，

$\therefore DC'=(5x+1)$ m，$EC'=(4x+1)$ m.

在 Rt△$DC'A'$ 中，$\angle DA'C'=60°$，

$\therefore C'A'=\dfrac{DC'}{\tan 60°}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}(5x+1)$ m.

在 Rt△$EC'B'$ 中，$\angle EB'C'=30°$，

$\therefore C'B'=\dfrac{EC'}{\tan 30°}=\sqrt{3}(4x+1)$ m.

$\because A'B'=C'B'-C'A'=AB$，$\therefore \sqrt{3}(4x+1)-\dfrac{\sqrt{3}}{3}(5x+1)=14$，

解得 $x\approx 3.18$，则居民楼的高度约为 $5\times 3.18+2.5=18.4$ (m).

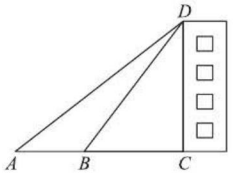
思路引导

设每层楼高为 xm，由 $MC-CC'$ 求出 MC' 的长，进而表示出 DC' 与 EC' 的长，在 Rt△$DC'A'$ 中，利用锐角三角函数定义表示出 $C'A'$，同理表示出 $C'B'$，由 $A'B'=C'B'-C'A'$ 可求出每层楼高，从而求出居民楼的高度.

两年模拟兵法

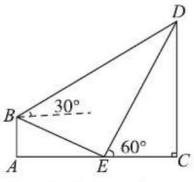
☞ 答案见 213 页

1. [中考·乌鲁木齐] 如图，小强想测量楼 CD 的高度，楼在围墙内，小强只能在围墙外测量，他无法测得观测点到楼底的距离，于是小强在 A 处仰望楼顶，测得仰角为 37°，再往楼的方向前进 30 m 至 B 处，测得楼顶的仰角为 53° (A，B，C 三点在一条直线上)，求楼 CD 的高度. (结果精确到 0.1 m，小强的身高忽略不计)



(第 1 题)

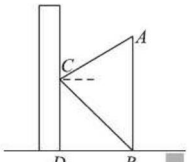
2. [中考·兰州] 如图，斜坡 BE 的坡顶 B 到水平地面的距离 AB 为 3 m，坡底 AE 为 18 m，在 B 处，E 处分别测得 CD 顶部点 D 的仰角为 30°，60°，求 CD 的高度. (结果保留根号)



(第 2 题)

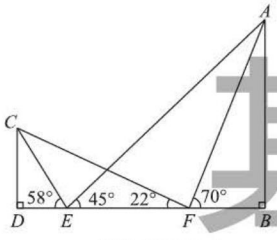
关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

3.[中考·新疆生产建设兵团]如图，在数学活动课上，小丽为了测量校园内旗杆 AB 的高度，站在教学楼的 C 处测得旗杆底端 B 的俯角为 45°，测得旗杆顶端 A 的仰角为 30°．已知旗杆与教学楼的距离 $BD=9$ m，请你帮她求出旗杆的高度．（结果保留根号）



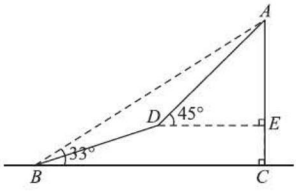
（第 3 题）

4.[中考·南京]如图，为了测量建筑物 AB 的高度，在 D 处竖立标杆 CD，标杆高 2 m. 在 DB 上选取观测点 E，F，从 E 处测得标杆和建筑物的顶部 C，A 的仰角分别为 58°，45°，从 F 处测得 C，A 的仰角分别为 22°，70°，求建筑物 AB 的高度．（精确到 0.1 m，参考数据：$\tan 22°\approx 0.40$，$\tan 58°\approx 1.60$，$\tan 70°\approx 2.75$）



（第 4 题）

5.[中考·呼和浩特]如图，一座山的一段斜坡 BD 的长度为 600 m，且这段斜坡的坡度 $i=1:3$（沿斜坡从 B 到 D 时，其升高的高度与水平前进的距离之比）．已知在地面 B 处测得山顶 A 的仰角为 33°，在斜坡 D 处测得山顶 A 的仰角为 45°，求山顶 A 到地面 BC 的高度 AC 是多少米．（结果用含非特殊角的三角函数和根式表示即可）



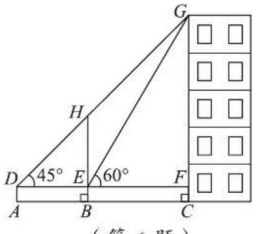
（第 5 题）

6.[中考·海南]如图，某数学兴趣小组为测量一棵古树 BH 和教学楼 CG 的高，先在 A 处用高 1.5 m 的测倾器测得古树顶端 H 的仰角 $\angle HDE$ 为 45°，此时教学楼顶端 G 恰好在视线 DH 上，再向前走 7 m 到达 B 处，又测得教学楼顶端 G 的仰角 $\angle GEF$ 为 60°，A，B，C 三点在同一水平线上．

（1）计算古树 BH 的高；

（2）计算教学楼 CG 的高．

（参考数据：$\sqrt{2}\approx 1.4$，$\sqrt{3}\approx 1.7$）



（第 6 题）

荣德基

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

解直角三角形常见应用举例

荣老师告诉你 利用锐角三角函数解决实际问题，关键是构造直角三角形．在构造时，依据角（视角和方向角）或线，一般都是作垂线构造一个甚至几个直角三角形．

类型一 一角一线型

例1 [中考·吉林]如图1，某飞机于空中A处探测到目标C，此时飞行高度AC=1 200 m，从飞机上看地面指挥台B的俯角α=43°，求A与指挥台B的距离．（结果取整数，参考数据：sin 43° ≈ 0.68，cos 43° ≈ 0.73，tan 43° ≈ 0.93）

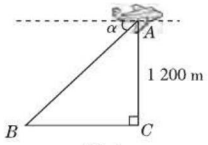


图1

解题秘方：解题的关键是结合图形利用锐角三角函数解直角三角形．显然，$\angle ABC=\alpha$=43°，利用$\sin\angle ABC=\frac{AC}{AB}$可求$AB$.

解：根据题意，得$\angle ACB$=90°，$\angle ABC=\alpha$=43°，AC=1 200 m.

在Rt△ABC中，

$\because \sin\angle ABC=\frac{AC}{AB}$，

$\therefore AB=\frac{AC}{\sin\angle ABC}=\frac{1\,200}{\sin 43°}\approx\frac{1\,200}{0.68}\approx$1 765（m）.

答：A与指挥台B的距离约为1 765 m.

方法点拨：仰角和俯角是视线相对于水平线而言的，仰角和俯角问题是解直角三角形中的常见题型，作辅助线构造直角三角形（一般同时得到两个直角三角形）并解之是解决这类问题的常用方法．在多个直角三角形中，一定要认真分析各条线段之间的关系（包括三角函数关系、相等关系等）．运用方程求解，有时可起到事半功倍之效．

类型二 一角两线型（构造一个直角三角形和矩形）

例2 [中考·长春]如图2，为了测量长春解放纪念碑的高度AB，在与纪念碑底部B相距27 m的C处，用高1.5 m的测倾器DC测得纪念碑顶端A的仰角为47°．求纪念碑的高度．（结果精确到0.1 m，参考数据：sin 47° ≈ 0.731，cos 47° ≈ 0.682，tan 47° ≈ 1.072）

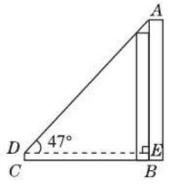


图2

解题秘方：解题的关键是作辅助线，构造含已知角的直角三角形．过点D作$DE\perp AB$于点E，首先解Rt△AED，根据正切的概念求出AE的长，再利用$AB=AE+BE$即可求纪念碑的高度．

解：如图2，过点D作$DE\perp AB$于E.由题意，得$DE=BC$=27 m，$BE=DC$=1.5 m，$\angle ADE$=47°．

在Rt△ADE中，$AE=DE\cdot\tan\angle ADE\approx 27\times1.072$=28.944（m），

所以$AB=AE+BE\approx$30.4 m.

答：纪念碑的高度约为30.4 m.

方法点拨：解直角三角形应用题时，通常会利用仰角、俯角来构造直角三角形，具体方法如下：①如果题中仰角和俯角的顶点在同一点上，就从这个点作垂线，构造直角三角形；②如果仰角和俯角的顶点分别在两个点上，就过第三点引垂线构造直角三角形．

荣德基

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

类型三 ▶ 两角一线型

例 3 ［中考·兰州］如图 3，一垂直于地面的灯柱 AB 被一钢缆 CD 固定，CD 与地面成 45° 夹角（$\angle CDB=45°$），在点 C 上方 2 m 处加固另一条钢缆 ED，ED 与地面成 53° 夹角（$\angle EDB=53°$）. 那么钢缆 ED 的长度约为多少米？（结果精确到 1 m，参考数据：$\sin 53° \approx 0.80$，$\cos 53° \approx 0.60$，$\tan 53° \approx 1.33$）

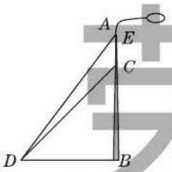


图 3

解题秘方：①因本题中有两个直角三角形，其中△ DCB 是等腰直角三角形，所以先假设 $BD=x$ m，再用含 x 的代数式表示 BC 与 BE；②在 Rt△ BDE 中，借助 $\angle EDB$ 的正切列方程求 x；③在 Rt△ BDE 中，借助 $\angle EDB$ 的正弦求出 ED 的长.

解：设 $BD=x$ m，易得 $BC=x$ m，$BE=(x+2)$ m.

在 Rt△ BDE 中，$\because \dfrac{BE}{DB}=\tan\angle EDB$，

$\therefore \dfrac{x+2}{x}=1.33$，$\therefore x \approx 6.06$.

$\because \dfrac{BE}{ED}=\sin\angle EDB$，

$\therefore ED=\dfrac{BE}{\sin\angle EDB} \approx \dfrac{2+6.06}{0.80} \approx 10$（m）.

答：钢缆 ED 的长度约为 10 m.

方法点拨：在实际问题中，当有多个直角三角形时，一定要认真分析各条线段之间的关系（包括三角函数产生的比例关系、相等关系、和差关系等），同时关注方程思想在解题中的应用.

类型四 ▶ 两角两线型

例 4 ［中考·广州］如图 4，某无人机于空中 A 处探测到目标 B，D，从无人机上看目标 B，D 的俯角分别是 30°，60°，此时无人机的飞行高度 AC 为 60 m，随后无人机从 A 处继续水平飞行 $30\sqrt{3}$ m 到达 A' 处.

（1）求 A，B 之间的距离.

（2）求无人机从 A' 处看目标 D 的俯角的正切值.

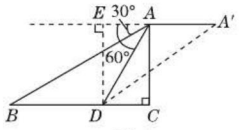


图 4

解题秘方：（1）在 Rt△ ABC 中，易知 $\angle BAC$ 或 $\angle B$ 的度数，又知一边 AC 的长度，可通过解 Rt△ ABC 得到 AB 的长度.

（2）作 $DE \perp AA'$ 交 $A'A$ 的延长线于点 E，连接 $A'D$. ①无人机从 A' 处看目标 D 的俯角为 $\angle AA'D$；②通过解 Rt△ ADE 可求得 AE 的长，进而可知 $A'E$ 的长；③在 Rt△ $A'ED$ 中，计算 $\tan A'$ 的值即为所求.

解：根据题意，可知 $AA' /\!/ BC$，又 $AC \perp BC$，$\therefore AC \perp AA'$.

（1）在 Rt△ ABC 中，$\angle BAC=90° - 30° =60°$，$AC=60$ m，

$\therefore AB=\dfrac{AC}{\cos 60°}=60 \div \dfrac{1}{2}=120$（m），

即 A，B 之间的距离为 120 m.

（2）如图 4，过点 D 作 $DE \perp AA'$ 交 $A'A$ 的延长线于点 E，连接 $A'D$，易得 $DE=AC=60$ m.

在 Rt△ ADE 中，$\tan\angle DAE=\dfrac{DE}{AE}$，

$\therefore AE=\dfrac{60}{\sqrt{3}}=20\sqrt{3}$（m）.

$\therefore A'E=AA'+AE=30\sqrt{3}+20\sqrt{3}=50\sqrt{3}$（m）.

在 Rt△ $A'ED$ 中，$\tan A'=\dfrac{DE}{A'E}=\dfrac{60}{50\sqrt{3}}=\dfrac{2\sqrt{3}}{5}$.

故无人机从 A' 处看目标 D 的俯角的正切值为 $\dfrac{2\sqrt{3}}{5}$.

方法点拨：解直角三角形的问题中，双直角三角形是常见的基本模型，具体如下：

如图 5 ①，若 $BC=m$，设 $AD=x$，由 $BD+CD=m$，可得 $\dfrac{x}{\tan\alpha}+\dfrac{x}{\tan\beta}=m$，解得 $x=\dfrac{m\tan\alpha\cdot\tan\beta}{\tan\alpha+\tan\beta}$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

如图5②，若$BC=m$，设$AD=x$，同理，可得$x=\dfrac{m\tan\alpha\cdot\tan\beta}{\tan\beta-\tan\alpha}$.

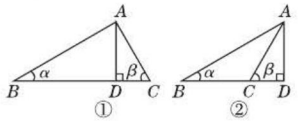


图5

类型五 三角一线型

例5 [中考·海南]如图6，在大楼AB的正前方有一斜坡CD，$CD=4$ m，坡角$\angle DCE=30°$. 小红在斜坡下的点C处测得楼顶B的仰角为$60°$，在斜坡上的点D处测得楼顶B的仰角为$45°$，其中A，C，E在同一直线上.

（1）求斜坡CD的高度DE.

（2）求大楼AB的高度（结果保留根号）.

解题秘方：（1）在Rt△DCE中，根据$\angle DCE=30°$，$CD=4$m，可知$DE=CD\cdot\sin 30°$，求出DE；（2）延长BD，交AE的延长线于点F，构造Rt△ABF，根据已知条件解此三角形.

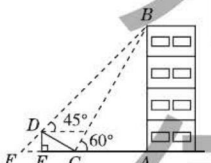


图6

解：（1）在Rt△DCE中，$\angle DCE=30°$，

$\therefore\sin\angle DCE=\dfrac{DE}{CD}=\sin 30°$.

$\therefore DE=CD\cdot\sin 30°=4\times\dfrac{1}{2}=2$（m）.

（2）如图6，延长BD，交AE的延长线于点F，易知$\angle F=45°$.

$\because\angle DEF=90°$，

$\therefore\angle EDF=\angle F=45°$.

$\therefore EF=DE=2$ m. 设$AC=x$ m，

则$AB=AC\cdot\tan\angle ACB=x\cdot\tan 60°=\sqrt{3}x$（m）.

在Rt△DCE中，$CE=\sqrt{CD^2-DE^2}=2\sqrt{3}$ m，

$\therefore AF=EF+EC+CA=(2+2\sqrt{3}+x)$ m.

在Rt△ABF中，$\tan F=\dfrac{AB}{AF}$，

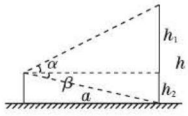
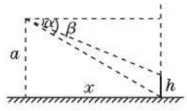
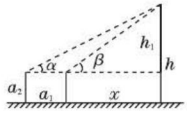
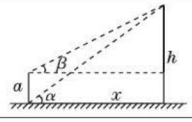
$\therefore\tan 45°=\dfrac{\sqrt{3}x}{2+2\sqrt{3}+x}$.

$\therefore x=4+2\sqrt{3}$.

$\therefore AB=\sqrt{3}x=6+4\sqrt{3}$（m）.

$\therefore$大楼AB的高度为$(6+4\sqrt{3})$ m.

方法点拨：测量物体高度的常见模型

数学模型	已知数据	数学关系
	仰角α，俯角β，水平距离a	$\tan\alpha=\dfrac{h_1}{a}$，$\tan\beta=\dfrac{h_2}{a}$，$\therefore h=h_1+h_2=a(\tan\alpha+\tan\beta)$
	俯角α，俯角β，垂直高度a	$\tan\alpha=\dfrac{a-h}{x}$，$\tan\beta=\dfrac{a}{x}$，$\therefore x=\dfrac{a-h}{\tan\alpha}=\dfrac{a}{\tan\beta}$，$\therefore h=a-\dfrac{a\tan\alpha}{\tan\beta}$
	仰角α，仰角β，水平距离a_1，测倾器高度a_2	$\tan\alpha=\dfrac{h_1}{a_1+x}$，$\tan\beta=\dfrac{h_1}{x}$，$\therefore h_1=\dfrac{a_1\tan\alpha\tan\beta}{\tan\beta-\tan\alpha}$，$\therefore h=a_2+h_1=a_2+\dfrac{a_1\tan\alpha\tan\beta}{\tan\beta-\tan\alpha}$
	仰角α，仰角β，高度a	$\tan\alpha=\dfrac{h}{x}$，$\tan\beta=\dfrac{h-a}{x}$，$\therefore h=\dfrac{a\tan\alpha}{\tan\alpha-\tan\beta}$

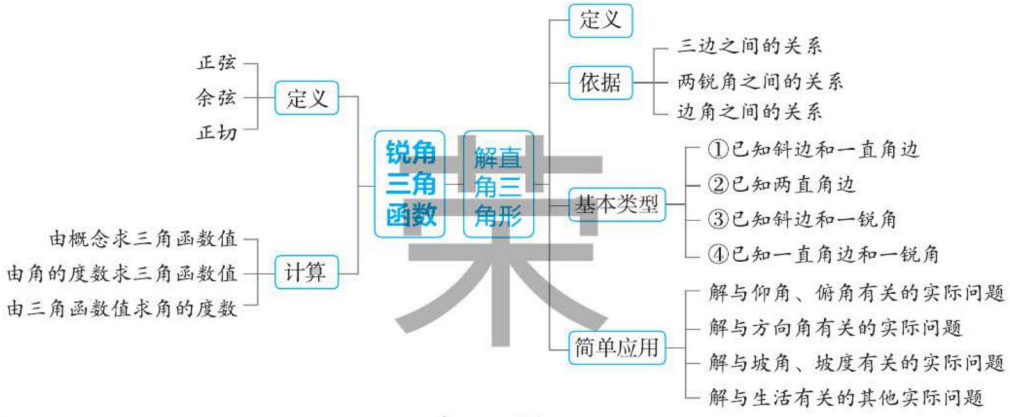
宋德基

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

章末核心知识分类整合

核心结构专题

结构必知



核心必读

1. 直角三角形的边角关系（a，b 为直角边，c 为斜边）

（1）锐角之间的关系：$\angle A=90^\circ-\angle B$，$\angle B=90^\circ-\angle A$.

（2）三边之间的关系：$a=\sqrt{c^2-b^2}$，$b=\sqrt{c^2-a^2}$，$c=\sqrt{a^2+b^2}$.

（3）边角之间的关系：$a=c\sin A$，$a=c\cos B$，$a=b\tan A$，$b=c\sin B$，$b=c\cos A$，$b=a\tan B$.

2. 解直角三角形解决实际问题的步骤

（1）审题，弄清方向角、仰角、俯角、坡角、坡度、水平距离、垂直距离等概念，将实际问题抽象为数学问题.

（2）认真分析题意，画出平面图形，将题目转化为解直角三角形问题. 对于较复杂的问题，往往要通过作辅助线构造直角三角形，或分割成一些直角三角形或矩形.

（3）根据条件，结合图形，选用适当的锐角三角函数解直角三角形.

（4）按照题目中已知数的精确度进行近似计算，检验得到符合实际要求的解，并按题目要求的精确度确定答案，并标注单位.

知识方法专题

知识必学

专题一 锐角三角函数

链接中考≫锐角三角函数的有关计算，主要就是求锐角的三角函数值. 解决这类问题的关键是看清锐角所在的图形以及该图形的性质. 这类题目一般属中档题，多以填空题或选择题的形式出现.

例1 [中考·荆门]如图1-1，在△ABC中，$\angle BAC=90^\circ$，$AB=AC$，点 D 为边 AC 的中点，$DE\perp BC$ 于点 E，连接 BD，则 $\tan\angle DBC$ 的值为（　　）

A. $\frac{1}{3}$　B. $\sqrt{2}-1$　C. $2-\sqrt{3}$　D. $\frac{1}{4}$

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

解题秘方：根据线段之间的关系，以及勾股定理、等角对等边的性质求出线段 DE 和 BE 的关系.

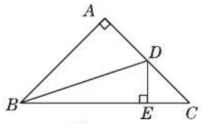


图 1-1

解：设 $DE=x$.

$\because \angle BAC=90°$，$AB=AC$，

$\therefore \angle C=45°$.

又 $\because DE \perp BC$，

$\therefore \angle CDE=45°$，

$\therefore EC=ED=x$.

在 Rt $\triangle DEC$ 中，由勾股定理，得 $DC=\sqrt{2}x$，

$\therefore AC=2\sqrt{2}x$.

在 Rt $\triangle ABC$ 中，由勾股定理，得 $BC=4x$，

$\therefore BE=3x$.

在 Rt $\triangle DBE$ 中，$\tan\angle DBC=\dfrac{DE}{BE}=\dfrac{x}{3x}=\dfrac{1}{3}$.

故选 A.

答案：A

例 2 ［中考·烟台］如图 1-2，BD 是菱形 $ABCD$ 的对角线，$CE \perp AB$ 于点 E，交 BD 于点 F，且点 E 是 AB 的中点，则 $\tan\angle BFE$ 的值是（　　）

A. $\dfrac{1}{2}$　　B. 2　　C. $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$　　D. $\sqrt{3}$

解：如图 1-2，连接 AC.

$\because CE \perp AB$，

$AE=BE$，

$\therefore BC=AC$.

又因四边形 $ABCD$ 是菱形，

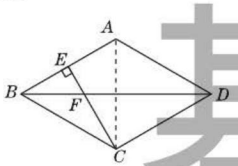


图 1-2

$\therefore AB=BC$，$\angle ABD=\dfrac{1}{2}\angle ABC$，

$\therefore \triangle ABC$ 是等边三角形.

$\therefore \angle ABC=60°$，

$\therefore \angle ABD=\dfrac{1}{2}\times 60°=30°$.

$\therefore$ 在 Rt $\triangle BEF$ 中，$\angle BFE=60°$.

$\therefore \tan\angle BFE=\sqrt{3}$.

故选 D.

答案：D

方法点拨：在 Rt $\triangle ABC$ 中，$\angle C=90°$，则 $\sin A=\dfrac{\angle A\text{的对边}}{\text{斜边}}$，$\cos A=\dfrac{\angle A\text{的邻边}}{\text{斜边}}$，$\tan A=\dfrac{\angle A\text{的对边}}{\angle A\text{的邻边}}$. 求直角三角形中某锐角的三角函数值，常常利用勾股定理求出有关边长来解决.

专题二 特殊角的三角函数值

链接中考≫ 一般情况下，求含有三角函数的代数式的值，要先将各角的三角函数值代入，再根据运算法则和运算律进行计算，注意最后结果要化简. 这类题目常与零次幂、负整数指数幂、乘方、开方等综合考查.

例 3 ［中考·天水］计算：$(\pi-3)^0+\sqrt{18}-2\cos 45°-\left(\dfrac{1}{8}\right)^{-1}$.

解题秘方：按照运算法则和运算顺序进行运算即可.

解：原式 $=1+3\sqrt{2}-2\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}-8$

$=1+3\sqrt{2}-\sqrt{2}-8$

$=-7+2\sqrt{2}$.

方法点拨：实数的运算通常会结合一些特殊角的三角函数值、整数指数幂（包括正整数指数幂、零指数幂、负整数指数幂）、二次根式、绝对值等来考查. 运算时应“各个击破”，准确记忆特殊角的三角函数值及相关运算的法则，如 $a^{-p}=\dfrac{1}{a^p}(a\neq 0)$，$a^0=1(a\neq 0)$.

专题三 解直角三角形

链接中考≫ 解直角三角形主要是在直角三角形中根据已知的边角条件求未知的边和角，解决这类问题的关键是要结合图形的性质，灵活运用锐角三角函数的定义，此类问题一般都是以解答题的形式出现.

例 4 ［中考·益阳］如图 1-3，在 $\square ABCD$ 中，对角线 AC 与 BD 相交于点 O，$\angle CAB=$

基础知识德基

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

∠ ACB. 过点 B 作 $BE \perp AB$，交 AC 于点 E.

（1）求证：$AC \perp BD$.

（2）若 $AB=14$，$\cos \angle CAB=\frac{7}{8}$，求线段 OE 的长.

解题秘方：（1）只需证明四边形 $ABCD$ 是菱形，就可得出 $AC \perp BD$；

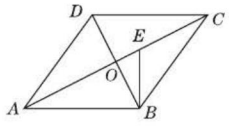


图 1-3

（2）由于 $OE=AE-AO$，故可先求出 AO 与 AE 的长，AO 与 AE 可利用 $\cos \angle CAB=\frac{7}{8}$ 在相应的直角三角形中求出.

（1）**证明**：$\because \angle CAB=\angle ACB$，

$\therefore AB=CB$，

$\therefore$ ▱ $ABCD$ 是菱形，

$\therefore AC \perp BD$.

（2）**解**：在 Rt △ AOB 中，

$\cos \angle OAB=\frac{AO}{AB}=\frac{7}{8}$，$AB=14$，

$\therefore AO=14\times\frac{7}{8}=\frac{49}{4}$.

在 Rt △ ABE 中，$\cos \angle EAB=\frac{AB}{AE}=\frac{7}{8}$，$AB=14$，

$\therefore AE=\frac{8}{7}\times 14=16$，

$\therefore OE=AE-AO=16-\frac{49}{4}=\frac{15}{4}$.

专题四 解直角三角形的应用

链接中考≫ 利用解直角三角形解决实际问题是中考的热点. 解题的关键是正确理解题意，将实际问题转化为解直角三角形的问题，利用直角三角形的知识解决问题. 一般都是以解答题的形式考查.

例 5 ［中考·巴中］如图 1-4，随着我市铁路建设进程的加快，现规划从 A 地到 B 地修一条笔直的铁路，但在附近的 C 处有一大型油库，现测得油库 C 在 A 地的北偏东 60° 方向上，在 B 地的西北方向上，A，B 两地的距离为 $250(\sqrt{3}+1)$ m. 已知在以油库 C 为中心、半径为 200 m 的范围内施工会对油库的安全造成影响. 问若在此路段修建铁路，油库 C 是否会受到影响？请说明理由.

解题秘方：根据题意得，在△ ABC 中，∠ $ABC=45°$，∠ $BAC=30°$，$AB=250(\sqrt{3}+1)$ m，是否受到影响取决于点 C 到 AB 的距离，因此，求点 C 到 AB 的距离，作 $CD \perp AB$ 于点 D.

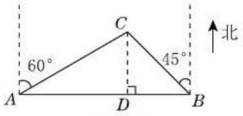


图 1-4

解：不会. 理由：如图 1-4，过点 C 作 $CD \perp AB$ 于点 D，

$\therefore AD=\frac{CD}{\tan 30°}$，$BD=\frac{CD}{\tan 45°}$.

$\because AD+BD=AB=250(\sqrt{3}+1)$ m，

即 $\sqrt{3}CD+CD=250(\sqrt{3}+1)$ m，

$\therefore CD=250$ m.

$\because 250$ m >200 m，

$\therefore$ 在此路段修建铁路，油库 C 不会受到影响.

方法点拨：此题考查解直角三角形的应用，用到的知识点是方向角，关键是作出辅助线，构造直角三角形，化斜为直是解三角形的基本思路，常需作垂线（高），原则上不破坏特殊角（30°，45°，60°角）.

方法必会

专题五 割补法

专题解读≫ 如果题目中所给的图形是正方形、菱形、矩形、平行四边形、等腰三角形、梯形或其他不规则的四边形，一般要根据题意，灵活地添加辅助线（主要是高线或垂线）对图形进行“割”或“补”，构造直角三角形.

例 6 如图 1-5，在四边形 $ABCD$ 中，∠ $ABC=120°$，$AD \perp BA$，$CD \perp BC$，垂足分别为 A，C，$AB=30\sqrt{3}$，$BC=50\sqrt{3}$，求四边形 $ABCD$ 的面积.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

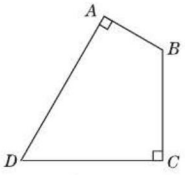


图 1−5

解题秘方：求不规则图形的面积要转化为求几个规则图形的面积之和（或差）来解答.

解：（方法 1）如图 1−6 ①，过点 B 作 $BE \parallel AD$，交 CD 于点 E，过点 E 作 $EF \parallel AB$，交 AD 于点 F，则 $BE \perp AB$，$EF \perp AD$.

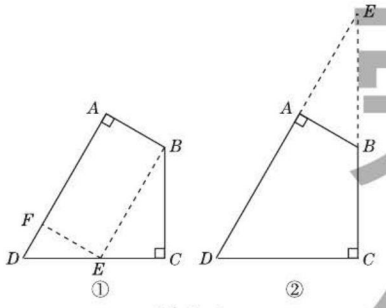


图 1−6

∴四边形 $ABEF$ 是矩形，

$\angle CBE = \angle ABC - \angle ABE = 120° - 90° = 30°$.

$\therefore \angle BED = \angle CBE + \angle C = 30° + 90° = 120°$.

$\because BE \parallel AD$，

$\therefore \angle D + \angle BED = 180°$.

$\therefore \angle D = 180° - \angle BED = 180° - 120° = 60°$.

在 Rt △ BCE 中，

$$BE = \frac{BC}{\cos \angle CBE} = \frac{50\sqrt{3}}{\cos 30°} = \frac{50\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 100,$$

$$EC = BC \cdot \tan \angle CBE = 50\sqrt{3} \times \tan 30° = 50\sqrt{3} \times \frac{\sqrt{3}}{3} = 50.$$

∵四边形 $ABEF$ 是矩形，

$\therefore EF = AB$，$AF = BE$.

在 Rt △ DEF 中，

$$DF = \frac{EF}{\tan D} = \frac{AB}{\tan 60°} = \frac{30\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = 30,$$

$\therefore AD = AF + DF = BE + DF = 100 + 30 = 130$.

$\therefore S_{四边形 ABCD} = S_{梯形 ABED} + S_{\triangle BCE}$

$$= \frac{1}{2}(AD + BE) \cdot AB + \frac{1}{2} BC \cdot EC$$

$$= \frac{1}{2} \times (130 + 100) \times 30\sqrt{3} + \frac{1}{2} \times 50\sqrt{3} \times 50$$

$$= 4\,700\sqrt{3}.$$

（方法 2）如图 1−6 ②，分别延长 DA，CB，交于点 E，则 $\angle BAE = 90°$，$\angle ABE = 60°$，

$\therefore \angle E = 30°$.

在 Rt △ ABE 中，

$$AE = AB \cdot \tan \angle ABE = 30\sqrt{3} \times \sqrt{3} = 90,$$

$$BE = \frac{AB}{\cos \angle ABE} = \frac{30\sqrt{3}}{\frac{1}{2}} = 60\sqrt{3}.$$

$\therefore CE = BE + BC = 60\sqrt{3} + 50\sqrt{3} = 110\sqrt{3}$.

在 Rt △ DCE 中，

$$DC = CE \cdot \tan E = 110\sqrt{3} \times \frac{\sqrt{3}}{3} = 110.$$

$\therefore S_{四边形 ABCD} = S_{\triangle EDC} - S_{\triangle EAB}$

$$= \frac{1}{2} \times 110 \times 110\sqrt{3} - \frac{1}{2} \times 90 \times 30\sqrt{3}$$

$$= 4\,700\sqrt{3}.$$

技巧点拨：此题给出了两种不同的解答方法，一是适当添加辅助线，把不规则四边形分割为直角三角形和直角梯形求解；二是通过补图，把求不规则四边形的面积转化为求两个直角三角形的面积之差.

专题六 方程思想

专题解读 ≫ 在处理有关直角三角形的问题及利用直角三角形的边角关系解决实际问题时，可依据题意设适当的未知数，再从题目的条件和要求中寻求等量关系，构造出方程或方程组，从而使问题得解.

例 7 如图 1−7 是儿童乐园为小朋友们设计的滑梯的平面图. 已知 $BC = 4$ m，$AB = 6$ m，中间平台宽度 $DE = 1$m，EN，DM，CB 为三根垂直于 AB 的支柱，垂足分别为 N，M，B，$\angle EAB = 31°$，$DF \perp BC$ 于 F，$\angle CDF = 45°$，求 DM 和 BC 的水平距离 BM 的长度.（结果精确到 0.1 m，参

荣德基

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

考数据：sin 31° ≈ 0.52，cos 31° ≈ 0.86，tan 31° ≈ 0.60）

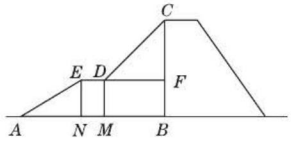


图 1-7

解题秘方：设 $BM=x$ m，由等腰直角三角形的性质知 $CF=DF=x$ m，得 $EN=FB=BC-CF=(4-x)$ m. 又知 $AN=AB-BM-MN=(5-x)$ m，在 Rt △ ANE 中，有 $EN=AN\cdot\tan 31°$，建立方程求得 x 的值.

解：设 $BM=x$ m.

∵ ∠ $CDF=45°$，∠ $CFD=90°$，

∴ $CF=DF=BM=x$ m，

∴ $BF=BC-CF=(4-x)$ m，

∴ $EN=DM=BF=(4-x)$ m.

∵ $AB=6$ m，$DE=1$ m，$BM=x$ m，

∴ $AN=AB-MN-BM=(5-x)$ m.

在 Rt △ AEN 中，∠ $ANE=90°$，

∠ $EAN=31°$，

∴ $EN=AN\cdot\tan 31°$，

即 $4-x\approx(5-x)\times 0.60$，

解得 $x\approx 2.5$.

∴ DM 和 BC 的水平距离 BM 的长度约为 2.5 m.

技巧点拨：此题主要考查解直角三角形的应用，通过设适当的未知数，利用直角三角形的边角关系建立方程求解是解题的关键.

专题七 转化思想

专题解读 ≫ 在解直角三角形和利用直角三角形的边角关系解决实际问题时，常常寻找已知量和未知量的关系建立方程，将几何问题转化为代数问题求解，体现了数学的转化思想.

例 8 如图 1-8，某幼儿园为了加强安全管理，决定将园内的滑板的倾斜角由 45° 降为 30°. 已知原滑板 AB 的长为 5 m，点 D，B，C 在同一水平线上.

（1）改造后滑板会加长多少？

（2）若滑板的正前方有 3 m 长的空地就能保证安全，原滑板的前方有 6 m 长的空地，像这样改造是否可行？请说明理由.（参考数据：$\sqrt{2}\approx 1.414$，$\sqrt{3}\approx 1.732$，$\sqrt{6}\approx 2.449$）

解题秘方：（1）在 Rt △ ABC 中，根据 ∠ ABC 的度数和 AB 的长求 AC 的长；在 Rt △ ACD 中，根据 ∠ D 的度数和 AC 的长，运用正弦函数求出 AD 的长.（2）“改造是否可行”，实际是求 BD 的长是否超过 3 m，如果超过了，那么这样改造滑板就不可行，反之，则可行. 要求 BD 的长，我们可以将此问题转化为解直角三角形问题，求出 CD，BC 的长.

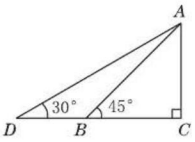


图 1-8

解：（1）在 Rt △ ABC 中，$\sin 45°=\dfrac{AC}{AB}$，

∴ $AC=AB\cdot\sin 45°=\dfrac{5\sqrt{2}}{2}$ m.

在 Rt △ ADC 中，

∵ ∠ $ADC=30°$，

∴ $AD=2AC=5\sqrt{2}\approx 5\times 1.414=7.07$（m），

∴ 改造后滑板会加长约 $7.07-5=2.07$（m）.

（2）可行. 理由如下：

由（1）得 $BC=AC=\dfrac{5\sqrt{2}}{2}$ m.

在 Rt △ ADC 中，$CD=\dfrac{AC}{\tan 30°}=\dfrac{5}{2}\sqrt{6}$（m），

∴ $BD=CD-BC=\dfrac{5}{2}(\sqrt{6}-\sqrt{2})\approx 2.59$（m）.

∵ $6-2.59=3.41$（m），$3.41>3$，

∴ 这样改造是可行的.

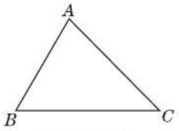
方法点拨：利用解直角三角形解决实际问题时，关键是根据题意画出图形，将实际问题转化成解直角三角形问题进行解决.

荣德基

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

类型1 巧用“化斜为直法”构造直角三角形求线段长度

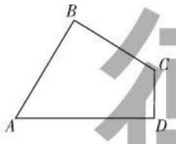
1. 如图，在△ABC中，已知$BC=1+\sqrt{3}$，$\angle B=60°$，$\angle C=45°$，求AB的长.



（第1题）

类型2 巧用“割补法”构造直角三角形求面积

2. 如图，在四边形$ABCD$中，$\angle B=\angle D=90°$，$\angle A=60°$，$AB=4$，$AD=5$，求四边形$ABCD$的面积.

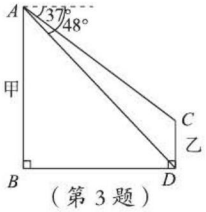


（第2题）

类型3 巧用建模思想建立直角三角形模型解实际应用问题

题型1：测高问题

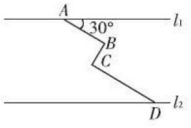
3. 如图，线段AB，CD分别表示甲、乙两幢居民楼的高，两楼间的距离BD是60 m. 某人站在A处测得C点的俯角为37°，D点的俯角为48°（人的身高忽略不计），求乙楼的高度CD.（结果精确到1 m，参考数据：$\sin 37°\approx\frac{3}{5}$，$\tan 37°\approx\frac{3}{4}$，$\sin 48°\approx\frac{7}{10}$，$\tan 48°\approx\frac{11}{10}$）



（第3题）

题型2：测距问题

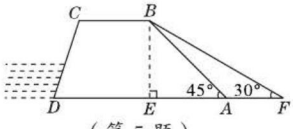
4. 如图，在同一平面内，两条平行的高速公路l_1和l_2间有一条“Z”型道路连通. 其中AB段与高速公路l_1成30°角，长为20 km，BC段与AB、CD段都垂直，长为10 km，CD段长为30 km，求两条高速公路之间的距离.（结果保留根号）



（第4题）

题型3：坡坝问题

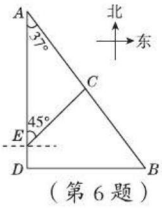
5. 如图，水坝的横断面是梯形，背水坡AB的坡角$\angle BAE=45°$，坝高$BE=20$ m. 汛期来临，为加大水坝的防洪强度，将坝底从A处向后水平延伸到F处，使新的背水坡BF的坡角$\angle F=30°$，求AF的长度.（结果精确到1 m，参考数据：$\sqrt{2}\approx1.414$，$\sqrt{3}\approx1.732$）



（第5题）

题型4：航行问题

6.[中考·南京]如图，港口B位于港口A的南偏东37°方向上，灯塔C恰好在AB的中点处. 一艘海轮位于港口A的正南方向，港口B的正西方向的D处，它沿正北方向航行5 km到达E处，此时测得灯塔C在北偏东45°方向上，E处距离港口A有多远？（参考数据：$\sin 37°\approx0.60$，$\cos 37°\approx0.80$，$\tan 37°\approx0.75$）



（第6题）

荣德基

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

第一章测试卷

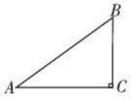
答案见 215 页

（100 分 60 分钟）

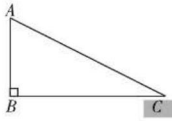
一、选择题（每题 4 分，共 32 分）

1. 如图，在 $\triangle ABC$ 中，$\angle C=90°$，$AB=5$，$BC=3$，则 $\sin A$ 的值是（　　）

A. $\frac{3}{4}$　　B. $\frac{4}{3}$　　C. $\frac{3}{5}$　　D. $\frac{4}{5}$



（第 1 题）



（第 4 题）

2. 在 Rt $\triangle ABC$ 中，$\angle C=90°$，$AC=9$，$\sin B=\frac{3}{5}$，则 $AB=$（　　）

A. 15　　B. 12　　C. 9　　D. 6

3. 在 $\triangle ABC$ 中，$\angle C=90°$，若 $\sin B=\frac{1}{3}$，则 $\cos A$ 的值为（　　）

A. $\frac{1}{3}$　　B. $\frac{2\sqrt{3}}{3}$　　C. 1　　D. $\frac{3}{2}$

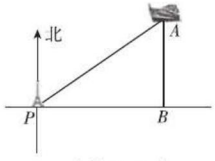
4. 如图，在 $\triangle ABC$ 中，$\angle B=90°$，$BC=2AB$，则 $\cos A=$（　　）

A. $\frac{\sqrt{5}}{2}$　　B. $\frac{1}{2}$　　C. $\frac{2\sqrt{5}}{5}$　　D. $\frac{\sqrt{5}}{5}$

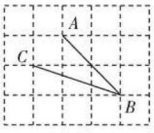
5. 如图，一艘海轮位于灯塔 P 的北偏东 55° 方向，距离灯塔为 2 海里的点 A 处. 如果海轮沿正南方向航行到灯塔的正东方向，海轮航行的距离 AB 的长是（　　）

A. 2 海里　　B. $2\sin 55°$ 海里

C. $2\cos 55°$ 海里　　D. $2\tan 55°$ 海里



（第 5 题）



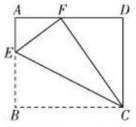
（第 7 题）

6. 若关于 x 的一元二次方程 $x^2-\sqrt{2}x+\sin\alpha=0$ 有两个相等的实数根，则锐角 α 等于（　　）

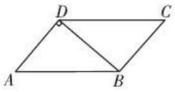
A. 15°　　B. 30°　　C. 45°　　D. 60°

7. 如图，在网格中，小正方形的边长均为 1，点 A，B，C 都在格点上，则 $\angle ABC$ 的正切值是（　　）

A. 2　　B. $\frac{2\sqrt{5}}{5}$　　C. $\frac{\sqrt{5}}{5}$　　D. $\frac{1}{2}$



（第 8 题）



（第 10 题）

8. 如图，在矩形 $ABCD$ 中，点 E 在 AB 边上，沿 CE 折叠矩形 $ABCD$，使点 B 落在 AD 边上的点 F 处. 若 $AB=4$，$BC=5$，则 $\tan\angle AFE$ 的值为（　　）

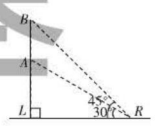
A. $\frac{4}{3}$　　B. $\frac{3}{5}$　　C. $\frac{3}{4}$　　D. $\frac{4}{5}$

二、填空题（每题 4 分，共 16 分）

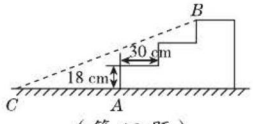
9. 计算：$\sin 30°=$_____.

10. 如图，在 $\square ABCD$ 中，连接 BD，$AD\perp BD$，$AB=4$，$\sin A=\frac{3}{4}$，则 $\square ABCD$ 的面积是_____.

11. 如图，运载火箭从地面 L 处垂直向上发射，当火箭到达 A 点时，位于地面 R 处的雷达测得 AR 的距离是 40 km，仰角是 30°，n 秒后，火箭到达 B 点，此时在 R 处测得仰角是 45°，则火箭在这 n 秒中上升的高度是_____km.



（第 11 题）



（第 12 题）

12. 如图，某公园入口处原有三级台阶，每级台阶高为 18 cm，深为 30 cm. 为方便残疾人士，欲将台阶改为斜坡，设台阶的起点为 A，斜坡的起点为 C，现设计斜坡 BC 的坡度 $i=1:5$，则 AC 的长度是_____.

未德基

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

三、解答题（共52分）

13.（10分）计算：

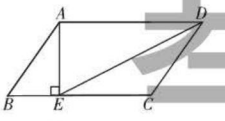
$2\cos^2 45° - \sqrt{(\tan 60° - 2)^2} - (\sin 60° - 1)^0 + \left(\frac{1}{2}\right)^{-2}$.

14.（10分）在△ABC中，∠C=90°，∠A，∠B，∠C的对边分别为a，b，c.

（1）已知$c=8\sqrt{3}$，∠A=60°，求∠B，a，b；

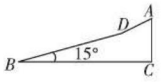
（2）已知$a=3\sqrt{6}$，∠A=45°，求∠B，b，c.

15.（10分）如图，在▱$ABCD$中，$AE \perp BC$，垂足为E. 如果AB=5，BC=8，$\sin B=\frac{4}{5}$，求$\tan \angle CDE$.



（第15题）

16.（10分）某校八年级（1）班学生在寒假期间到郊区进行社会实践活动，活动之余，同学们准备攀登附近的一个小山坡. 如图，他们从B点出发，沿坡角为15°的坡面以5 km/h的速度行至D点，用了10 min，然后沿坡比为1∶$\sqrt{3}$的坡面以3 km/h的速度到达山顶A点，用了5 min，求小山坡的高（即AC的长度）.（精确到0.01 km，参考数据：$\sin 15° \approx 0.258\,8$，$\cos 15° \approx 0.965\,9$，$\sqrt{3} \approx 1.732\,1$）

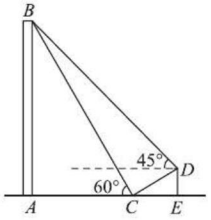


（第16题）

17.（12分）如图，在大楼AB正前方有一斜坡CD，坡角∠DCE=30°，楼高AB=60 m，在斜坡下的点C处测得楼顶B的仰角为60°，在斜坡上的点D处测得楼顶B的仰角为45°，其中点A，C，E在同一直线上.

（1）求坡底C点到大楼距离AC的值.

（2）求斜坡CD的长度.



（第17题）

荣德基

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

构建数形的桥梁

构建数形的桥梁











第二章

二次函数

荣德基

核心考点

你将见到的

- 二次函数的几种常见模型
  $y=ax^2$　$y=ax^2+c$　$y=a(x-h)^2$
  $y=a(x-h)^2+k$　$y=ax^2+bx+c$
- 二次函数的图象与性质
- 用待定系数法求二次函数表达式
- 二次函数与一元二次方程之间的关系
- 建立二次函数模型解决实际问题

核心方法

我们为你提供的

- 代入比较法
- 增减性比较法
- 割补法
- 平移法
- 逆平移法
- 对称轴法
- 待定系数法
- 数形结合思想
- 分类讨论思想

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

1 二次函数

核心知识
- 二次函数的定义
- 二次函数的表达式的一般形式
- 实际问题中建立二次函数模型

知识链接



点知识·拨考向 速提分

点知识 1 二次函数的定义

1. 定义 一般地，若两个变量 x，y 之间的对应关系可以表示成 $y=ax^2+bx+c$（a，b，c 是常数，$a\neq 0$）的形式，则称 y 是 x 的二次函数. 其中，x 是自变量，a，b，c 分别是函数表达式的二次项系数、一次项系数和常数项.

示例：

二次函数和它的各项系数	$y=x^2-x-4$：二次项系数是 1；常数项是 −4；一次项系数是 −1 $y=x^2+\frac{4}{x}$ 不是二次函数：分母中含有未知数，不是整式

2. 确定二次函数的“三要素”

（1）含有自变量的代数式必须是整式；

（2）化简后自变量的最高次数是 2；

（3）二次项系数不等于 0.

拔考向 利用二次函数的定义求待定字母的值

例 1 当 m 取何值时，函数 $y=(m^2+m)x^{m^2-2m-1}+(m-5)x+m^2$ 是关于 x 的二次函数？并求出这时二次函数的表达式.

解题秘方：紧扣二次函数的“三要素”进行解答.

解：由题意，得 $\begin{cases}m^2-2m-1=2,\\ m^2+m\neq 0,\end{cases}$

解得 $m=3$.

∴当 $m=3$ 时，该函数是二次函数，表达式为

$y=(3^2+3)x^{3^2-2\times 3-1}+(3-5)x+3^2$，

即 $y=12x^2-2x+9$.

提分·必记

详解

二次函数的特殊形式：

1. 只含二次项，即 $y=ax^2$（$b=0$，$c=0$）；
2. 不含一次项，即 $y=ax^2+c$（$b=0$，$c\neq 0$）；
3. 不含常数项，即 $y=ax^2+bx$（$b\neq 0$，$c=0$）.

提分·秘诀

警示误区

当函数的二次项系数包含字母时，要注意二次项系数不为 0. 解此类题易只关注满足指数的要求，而忽略对二次项系数的限制，从而导致错误.

宋德基

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

点知识▸ 2 建立二次函数的模型表示变量间的关系

建立二次函数的模型的一般步骤

（1）**审清题意**：找出问题中的已知量（常量）和未知量（变量），把问题中的文字或图形语言转化成数学语言.

（2）**找相等关系**：分析常量和变量之间的关系，列出等式.

（3）**列二次函数表达式**：设出表示变量的字母，把相等关系用含字母的式子表示，并把它整理成二次函数的一般形式.

拔考向▸ 利用实际问题中的数量关系建立二次函数模型

例 2 某网店销售某款童装，每件售价为 60 元，每星期可卖 300 件. 为了促销，该网店决定降价销售. 市场调查反映，每件童装每降价 1 元，每星期可多卖 30 件. 已知该款童装每件成本价为 40 元，设每件售价为 x 元，每星期的销售量为 y 件.

（1）求 y 与 x 之间的函数表达式，并写出自变量的取值范围.

（2）设每星期的销售利润为 W 元，求 W 与 x 之间的函数关系式.

解题秘方：紧扣销售量和销售利润的基本关系式解答.

解：（1）$y=300+30(60-x)=-30x+2\,100\ (40\leqslant x\leqslant 60)$.

（2）$W=(x-40)(-30x+2\,100)=-30x^2+3\,300x-84\,000$.

方法点拨：在实际问题中建立二次函数模型时，关键要找出两个变量之间的相等关系，用类似建立一元二次方程模型的方法，借助方程思想求出二次函数的表达式.

提分·必记

特别提醒

1. 建立二次函数的模型与建立一元二次方程的模型类似，不同的是需将它转化为用含一个未知数（自变量）的代数式表示另一个未知数（函数）的形式.
2. 自变量的取值范围应使实际问题有意义.

提分·秘诀

知识储备

销售利润=每件利润×销售量.

详解

相等关系

- 降价后销售量=降价前可卖件数+降价后多卖的件数，每件降价(60-x)元；
- 销售利润=每件的利润×销售量，每件的利润为(x-40)元.

点方法·拨技巧 提高分

拔尖角度▸ 1 利用分类讨论思想解二次函数定义的相关问题的应用

例 3 若关于 x 的函数 $y=(m+1)x^{m^2-2}+2x^2+3\ (x\neq 0)$ 是二次函数，求 m 的值.

解题秘方：紧扣二次函数的“三要素”，按系数与指数的不同情况分类求解.

解：当 $m+1=0$，即 $m=-1$ 时，$y=(m+1)x^{m^2-2}+2x^2+3\ (x\neq 0)$ 是二次函数；当 $\begin{cases}m^2-2=2,\\ m+1\neq -2,\end{cases}$ 即 $m=\pm 2$ 时，$y=(m+1)x^{m^2-2}+2x^2+3\ (x\neq 0)$ 是二次函数；当 $m^2-2=1$，即 $m=\pm\sqrt{3}$ 时，$y=(m+1)x^{m^2-2}+2x^2+3\ (x\neq 0)$ 是二次函数；当 $m^2-2=0$，即 $m=\pm\sqrt{2}$ 时，$y=(m+1)x^{m^2-2}+2x^2+3\ (x\neq 0)$ 是二次函数.

综上，当 $m=-1$，± 2，$\pm\sqrt{3}$，$\pm\sqrt{2}$ 时，$y=(m+1)x^{m^2-2}+2x^2+3\ (x\neq 0)$ 是二次函数.

挑战·高分

评析

在进行分类讨论时，首先考虑首项系数等于 0 的情况，然后考虑首项系数不等于 0 的情况，当首项系数不等于 0 时，要根据次数必须小于或等于 2 这一条件进行分类.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

拔尖角度 2 利用静态法建立涉及几何动态问题的二次函数模型

例4 已知等腰直角三角形 ABC 的直角边长与正方形 $MNPQ$ 的边长均为 20 cm，AC 与 MN 在同一条直线上，如图 2-1-1. 开始时点 A 与点 N 重合，让△ ABC 以 2 cm/s 的速度向左运动，最终点 A 与点 M 重合，求重叠部分的面积 y（cm^2）与运动时间 t（s）之间的函数表达式.

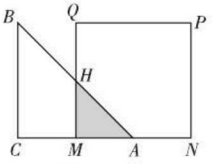


图 2-1-1

解题秘方：运用等腰直角三角形的性质，用含 t 的代数式表示 AM、MH 的长是求 y 关于 t 的函数表达式的切入点.

解：∵△ ABC 为等腰直角三角形，∴∠ CAB=∠ CBA=45°.

∵∠ QMN=90°，∴∠ MHA=∠ MAH=45°，∴ MH=AM.

∴△ AHM 为等腰直角三角形.

∵ AN=$2t$ cm，∴ AM=MN−AN=（20−$2t$）cm.

∴ MH=AM=（20−$2t$）cm.

∴ $y=\frac{1}{2}(20-2t)^2=2t^2-40t+200$.

∵ $t\geqslant 0$，$20-2t\geqslant 0$，∴ $0\leqslant t\leqslant 10$.

故 $y=2t^2-40t+200$（$0\leqslant t\leqslant 10$）.

挑战·高分

解法提醒

在几何动态问题中建立二次函数模型关键要掌握两点：

- 掌握用点运动的路程表示线段长；
- 掌握几何图形的面积公式.

遇到动态问题时，我们要将其固定在某一时刻或某一状态，从而转化成静态问题. 本题中，当图形运动时，重叠部分是等腰直角三角形，因此可以用含 t 的代数式来表示直角边的长，然后根据直角三角形的面积公式求出 y 和 t 之间的函数表达式.

点中考·拨模拟 得满分

中考探秘

二次函数的定义及列表达式表示函数关系是中考命题的热点，特别是利用二次函数定义确定字母系数的取值更是常考内容. 从命题形式上看，有选择题、填空题，也有解答题，难度适中. 对列表达式表示二次函数关系的考查，既有单纯的命题，也有与解决实际问题有关的综合题，难度相对较大.

三年中考兵法

考法 1 利用二次函数的定义识别二次函数表达式

例5 [中考·兰州]下列函数表达式中，一定为二次函数的是（　　）

A. $y=3x-1$　　B. $y=ax^2+bx+c$　　C. $s=2t^2-2t+1$　　D. $y=x^2+\frac{1}{x}$

试题评析：本题考查了二次函数的定义，$y=ax^2+bx+c$（$a\neq 0$）是二次函数，注意含自变量的代数式都是整式.

解：$y=3x-1$ 是一次函数，故 A 错误；

$y=ax^2+bx+c$ 不一定是二次函数，故 B 错误；

$s=2t^2-2t+1$ 是二次函数，故 C 正确；

$y=x^2+\frac{1}{x}$ 不是二次函数，故 D 错误. 故选 C.

答案：C

冲刺·满分

教你一招

判断一个函数为二次函数的一般步骤：

1. 将函数表达式进行整理，使其右边是含自变量的代数式，左边是因变量；
2. 判断右边含自变量的代数式是否为整式；
3. 判断含自变量的项的最高次数是否为 2；
4. 判断二次项的系数是否为 0.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

考法 2 利用割补法建立几何问题的二次函数模型

例 6 [中考·丽水]如图 2-1-2，在四边形 $ABCD$ 中，$\angle BAD=\angle ACB=90°$，$AB=AD$，$AC=4BC$. 设 CD 的长为 x，四边形 $ABCD$ 的面积为 y，则 y 与 x 之间的函数关系式是（　　）

A. $y=\frac{2}{25}x^2$　　B. $y=\frac{4}{25}x^2$

C. $y=\frac{2}{5}x^2$　　D. $y=\frac{4}{5}x^2$

试题评析：本题运用割补法，将求不规则四边形的面积转化为求梯形的面积，充分体现了全等三角形、勾股定理在解题中的作用.

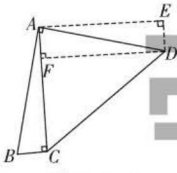


图 2-1-2

解：如图 2-1-2，过 D 作 $DF\perp AC$ 于 F，过点 A 作 $AE\perp AC$，过点 D 作 $DE\perp AE$ 于 E，易证 $\mathrm{Rt}\triangle ADE\backsim\mathrm{Rt}\triangle ABC$，则 $BC=DE$，$AC=AE$，$S_{四边形ABCD}=S_{梯形ACDE}$.

易得四边形 $AFDE$ 是矩形，设 $BC=a$，则 $DE=AF=a$，$DF=AE=AC=4BC=4a$，$CF=AC-AF=3a$.

在 $\mathrm{Rt}\triangle CDF$ 中，由勾股定理得 $CF^2+DF^2=CD^2$，

即 $(3a)^2+(4a)^2=x^2$. 解得 $a_1=\frac{x}{5}$，$a_2=-\frac{x}{5}$（舍去）.

$\therefore\ y=S_{四边形ABCD}=S_{梯形ACDE}=\frac{1}{2}\times(DE+AC)\times DF=\frac{1}{2}\times(a+4a)\times 4a=10a^2=\frac{2}{5}x^2$.

答案：C

技巧点拨

- 本题用割（△ABC）补（△ADE）法将不规则的四边形ABCD转化为规则的梯形ACDE，从而建立两个变量间的函数关系.
- 当几何图形不能通过已知条件直接建立两个变量的函数关系时，应适当考虑通过割补法或分割法来建立两个变量间的函数关系.

两年模拟兵法

☞答案见 216 页

1. 下列式子是二次函数的是（　　）

A. $y=\frac{2}{x^2-1}$

B. $y=x^2+\frac{1}{x^2}$

C. $y=(x-2)^2-2x^2$

D. $2x^2-3x=5$

2. [模拟·邢台桥西区]某工厂 2017 年某产品的产量为 100 t，该产品产量的年平均增长率为 x（$x>0$）. 设 2019 年该产品的产量为 y t，则 y 关于 x 的函数关系式为（　　）

A. $y=100(1-x)^2$

B. $y=100(1+x)^2$

C. $y=\frac{100}{(1+x)^2}$

D. $y=100+100(1+x)+100(1+x)^2$

3. 某商品现在的售价为每件 60 元，每星期可卖出 300 件. 市场调查反映，如果调整商品售价，每

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

降价 1 元，每星期可多卖出 20 件．设每件商品降价 x 元后，每星期售出商品的总销售额为 y 元，则 y 与 x 的函数表达式为（　　）

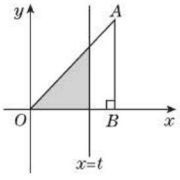
A. $y=60(300+20x)$

B. $y=(60-x)(300+20x)$

C. $y=300(60-20x)$

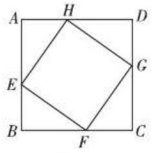
D. $y=(60-x)(300-20x)$

4. 如图，在直角三角形 AOB 中，$AB\perp OB$，且 $AB=OB=3$，设直线 $x=t$ 截此三角形所得的阴影部分的面积是 S，则 S 与 t 之间的函数关系式是_____，自变量的取值范围是_____．

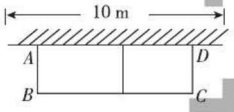


（第 4 题）

5. [中考·常德] 如图，正方形 $EFGH$ 的顶点在边长为 2 的正方形 $ABCD$ 的边上，若设 $AE=x$，正方形 $EFGH$ 的面积为 y，则 y 与 x 的函数关系式为_____．



（第 5 题）



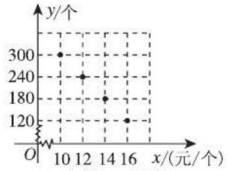
（第 6 题）

6. [模拟·青岛] 如图，有长为 24 m 的篱笆，一面利用墙（墙的最大可用长度为 10 m），围成中间隔有一道篱笆的矩形花圃．设花圃的一边 AB 的长为 x m，面积为 S m^2，则 S 与 x 的函数关系式为_____，自变量的取值范围为_____．

7. 在“母亲节”期间，某校部分团员参加社会公益活动，准备购进一批许愿瓶进行销售，并将所得利润捐给慈善机构．根据市场调查，这种许愿瓶一段时间内销售量 y（个）与售价 x（元/个）（x 为整数）之间的对应关系如图所示．

（1）试判断 y 与 x 之间的函数关系，并求出函数表达式．

（2）若许愿瓶的进价为 6 元/个，按照上述市场调查的销售规律，求销售利润 W（元）与售价 x（元/个）之间的函数表达式．



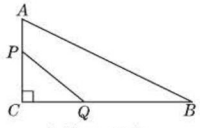
（第 7 题）

8. 如图，在 Rt $\triangle ABC$ 中，$\angle C=90°$，$AC=6$ mm，$BC=12$ mm．动点 P 从点 A 开始沿边 AC 向 C 以 1 mm/s 的速度移动，动点 Q 从点 C 开始沿边 CB 向 B 以 2 mm/s 的速度移动．

（1）若 P、Q 两点同时出发，请求出 $\triangle PCQ$ 的面积 S_1（mm^2）与出发时间 t（s）之间的函数表达式，并直接写出 t 的取值范围．

（2）在（1）的条件下，请写出四边形 $APQB$ 的面积 S_2（mm^2）关于运动时间 t（s）的函数表达式．

[导学号 2380328]



（第 8 题）

荣德基

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

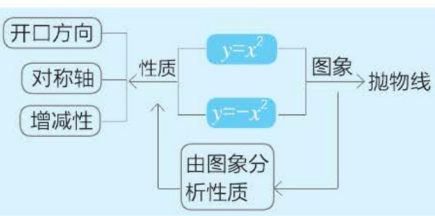
2 二次函数的图象与性质

2.1 二次函数 $y=x^2$，$y=-x^2$ 的图象与性质

核心知识

- $y=x^2$ 的图象与性质
- $y=-x^2$ 的图象与性质

知识链接



点知识·拨考向 速提分

点知识 1 二次函数 $y=x^2$ 的图象的画法

画二次函数 $y=x^2$ 的图象，一般用描点法，具体步骤如下

（1）**列表**：先取原点（0，0），然后通常在原点两侧对称地各取 2 个点．自变量 x 的取值要有一定的代表性，使所对应的函数值不能太大或太小，便于描点．

（2）**描点**：在直角坐标系中，先将 y 轴右侧的 2 个点描出来，然后根据对称关系找到 y 轴左侧的 2 个点．

五点作图法

（3）**连线**：按照自变量由小到大的顺序，把所描各点用光滑的曲线顺次连起来．

拨考向 利用画二次函数 $y=x^2$ 的图象的步骤画图象

例 1 画出二次函数 $y=x^2$ 的图象．

解题秘方：紧扣描点法的步骤画出二次函数 $y=x^2$ 的图象．

解：（1）观察 $y=x^2$，选择适当的 x 值，并计算出相应的 y 值，完成下表．

x	…	−3	−2	−1	0	1	2	3	…
$y=x^2$	…	9	4	1	0	1	4	9	…

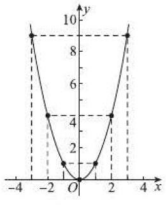


图 2−2−1

（2）在平面直角坐标系中描点．

（3）用平滑的曲线连接各点，得二次函数 $y=x^2$ 的图象，如图 2−2−1.

提分·必记

特别提醒

1. 由于二次函数 $y=x^2$ 的自变量的取值范围是全体实数，因此应以原点（0，0）为中心对称取值．
2. 在画二次函数的图象时，一般在顶点的两侧对称地各取三、四个点即可，并且用平滑的曲线依次连接，切忌用线段连接或漏点、跨点连接．
3. 二次函数图象的两端是无限伸展的，画图象时要画“出头”．

提分·秘诀

解法提醒

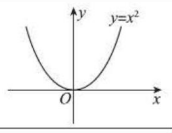
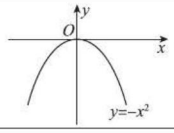
画二次函数 $y=x^2$ 的图象时，应用平滑曲线连接相邻点，因为 x 的取值为全体实数，所以抛物线应向开口方向无限延伸．

荣德基

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

点知识 ▸ 2 二次函数 $y=x^2$ 和 $y=-x^2$ 的图象与性质

二次函数 $y=-x^2$ 的图象可类比 $y=x^2$ 的图象来画，二者的图象与性质的区别与联系如下表.

二次函数	$y=x^2$	$y=-x^2$
图象		
图象形状	y 抛物线 $x=0$	
开口方向	向上	向下
对称轴	y 轴（或直线 $x=0$）	
顶点坐标	原点（0,0）	
增减性	当 $x<0$ 时，y 的值随 x 值的增大而减小；当 $x>0$ 时，y 的值随 x 值的增大而增大	当 $x<0$ 时，y 的值随 x 值的增大而增大，当 $x>0$ 时，y 的值随 x 值的增大而减小
最值	当 $x=0$ 时，$y_{最小值}=0$	当 $x=0$ 时，$y_{最大值}=0$
联系	（1）自变量 x 的取值范围都是全体实数； （2）若把函数 $y=x^2$ 的图象和函数 $y=-x^2$ 的图象画在同一平面直角坐标系中，则两图象既关于 x 轴成轴对称，又关于原点成中心对称	

提分·必记

特别提醒

1. 对于二次函数，一般从图象特征（开口方向、顶点坐标、对称轴）、函数变化（即增减性）、最大（小）值等方面加以研究.
2. 若把二次函数 $y=x^2$ 的图象和二次函数 $y=-x^2$ 的图象画在同一平面直角坐标系中，则两个图象既关于 x 轴成轴对称，又关于原点成中心对称.

拔考向 ▸ 利用二次函数 $y=x^2$ 或 $y=-x^2$ 的图象与性质求值

例 2 已知 $y=\frac{k}{2}x^{k^2-2}$ 是 y 关于 x 的二次函数，其图象为抛物线.

（1）求满足条件的 k 的值.

（2）k 为何值时，抛物线有最低点？求出这个最低点的坐标. 当 x 为何值时，y 的值随 x 值的增大而增大？

（3）k 为何值时，二次函数有最大值？最大值是多少？当 x 为何值时，y 的值随 x 值的增大而减小？

解题秘方：紧扣二次函数 $y=x^2$ 和 $y=-x^2$ 的图象与性质求待定字母的值或取值范围.

提分·秘诀

解法提醒

1. 根据二次函数的定义可知 x 的次数是 2，且系数不能为 0；
2. 抛物线有最低点意味着 $\frac{k}{2}>0$，据此可求 k 的值；
3. 函数有最大值意味着 $\frac{k}{2}<0$，据此可求 k 的值.

解：（1）由题意，得 $k^2-2=2$，$\frac{k}{2}\neq 0$，解得 $k=\pm 2$.

（2）若抛物线有最低点，则抛物线的开口向上，

$\therefore \frac{k}{2}>0$，即 $k>0$. $\therefore k=2$.

$\because$ 这个最低点为抛物线的顶点，$\therefore$ 其坐标为（0，0），

$\because \frac{k}{2}>0$，$\therefore$ 当 $x>0$ 时，y 的值随 x 值的增大而增大.

（3）若二次函数有最大值，则对应抛物线的开口向下，

$\therefore \frac{k}{2}<0$，即 $k<0$. $\therefore k=-2$.

$\because$ 二次函数的最大值为抛物线顶点的纵坐标，顶点坐标为（0，0），

$\therefore$ 当 $k=-2$ 时，函数有最大值，最大值为 0，

当 $x>0$ 时，y 的值随 x 值的增大而减小.

基 德

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

点方法·拨技巧 提高分

拔尖角度▸ 1 利用代入比较法或增减性比较法比较函数值的大小

例 3 已知点 $A(-4, y_1)$，$B(\sqrt{2}, y_2)$，$C(2, y_3)$ 都在二次函数 $y=x^2$ 的图象上，则 y_1，y_2，y_3 的大小关系是_____（用“<”连接）.

解题秘方一：用代入比较法比较大小.

解法一：∵点 $A(-4, y_1)$，$B(\sqrt{2}, y_2)$，$C(2, y_3)$ 都在二次函数 $y=x^2$ 的图象上，∴ $y_1=(-4)^2=16$，$y_2=(\sqrt{2})^2=2$，$y_3=2^2=4$，

∴ $y_2<y_3<y_1$.

答案：$y_2<y_3<y_1$

解题秘方二：用函数的增减性比较法比较大小.

解法二：抛物线 $y=x^2$ 的对称轴是 y 轴，点 $A(-4, y_1)$ 关于 y 轴的对称点是 $(4, y_1)$，由二次函数 $y=x^2$ 的图象开口向上，对称轴为 y 轴可知，当 $x>0$ 时，y 随 x 的增大而增大.

∵$\sqrt{2}<2<4$,

∴ $y_2<y_3<y_1$.

答案：$y_2<y_3<y_1$

挑战·高分

技巧 1

代入比较法：若已知二次函数的表达式，则将几个点的横坐标分别代入，求出对应的函数值，再比较大小.

技巧 2

增减性比较法：当所给的几个点在抛物线对称轴的同一侧时，直接利用增减性即可比较；当所给的几个点不在抛物线对称轴的同一侧时，需先利用抛物线的对称性将点转化到对称轴的同一侧，再利用函数的增减性或点在抛物线上的大致位置来比较函数值的大小.

拔尖角度▸ 2 利用分割法求二次函数图象中的面积问题

例 4 如图 2-2-2，已知 $y=-2x+3$ 的图象与 $y=x^2$ 的图象交于 A，B 两点，且与 x 轴、y 轴分别交于 D，C 两点，O 为坐标原点.

（1）求点 A，B 的坐标；

（2）求 $S_{\triangle AOB}$.

解题秘方：用分割法求面积.

解：（1）依题意，可列方程组 $\begin{cases}y=-2x+3,\\y=x^2,\end{cases}$

解得 $\begin{cases}x_1=-3,\\y_1=9,\end{cases}$ $\begin{cases}x_2=1,\\y_2=1.\end{cases}$ ∴ $A(-3, 9)$，$B(1, 1)$.

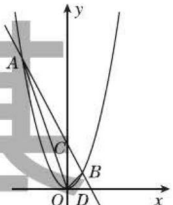


图 2-2-2

（2）直线 $y=-2x+3$ 与 y 轴的交点 C 的坐标为 $(0, 3)$，

∴ $S_{\triangle AOB}=S_{\triangle AOC}+S_{\triangle BOC}=\frac{1}{2}\times3\times3+\frac{1}{2}\times3\times1=6.$

方法技巧：求斜置于平面直角坐标系中的三角形的面积时，一般可用分割法将其转化为一边在坐标轴上的两个三角形的面积的和或差来求解. 当三角形的一边在坐标轴上时，这条边的长度容易求得，这条边上的高为第三个顶点的横坐标或纵坐标的绝对值.

挑战·高分

另解

（2）也可以采用作差法求面积. 直线 $y=-2x+3$ 与 x 轴的交点 D 的坐标为 $\left(\frac{3}{2}, 0\right)$.

∴ $S_{\triangle AOB}=S_{\triangle AOD}-S_{\triangle BOD}=\frac{1}{2}\times\frac{3}{2}\times9-\frac{1}{2}\times\frac{3}{2}\times1=6.$

苏德基

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

点中考·拨模拟 得满分

中考探秘 二次函数 $y=x^2$ 和 $y=-x^2$ 的图象是历年中考的常考点，涉及二次函数的图象和性质．抛物线 $y=x^2$ 和 $y=-x^2$ 的开口方向、顶点坐标、增减性等性质在中考中常有体现，题目为中、低档题，有些中考压轴题也会涉及，预计在以后几年的考题中仍会出现．

三年中考兵法

考法 1 利用二次函数的图象和性质辨析相关函数的性质

例 5 [中考·玉林]抛物线 $y=x^2$，$y=-x^2$ 的共同性质是：

①都是开口向上；　②都以点（0，0）为顶点；

③都以 y 轴为对称轴；　④都关于 x 轴对称．

其中正确的有（　　）

A. 1 个　　B. 2 个　　C. 3 个　　D. 4 个

试题评析：本题考查了二次函数的图象与性质，熟记抛物线的开口方向、对称轴、顶点坐标是解决问题的关键．

解：抛物线 $y=x^2$ 的开口向上，$y=-x^2$ 的开口向下，①错误；抛物线 $y=x^2$，$y=-x^2$ 的顶点都为（0，0），对称轴都为 y 轴，②③正确；④错误．故选 B.

答案：B

考法 2 利用二次函数的图象解与几何图形的交点坐标

例 6 [中考·淄博]如图 2-2-3，Rt △ OAB 的顶点 A（-2，4）在抛物线 $y=ax^2$ 上，将 Rt △ OAB 绕点 O 顺时针旋转 90°，得到 △ OCD，边 CD 与该抛物线交于点 P，则点 P 的坐标为（　　）

A. $(\sqrt{2},\sqrt{2})$　B.（2，2）　C. $(\sqrt{2},2)$　D. $(2,\sqrt{2})$

试题评析：本题考查了二次函数的综合知识，解题时首先求得抛物线的表达式，然后再求得点 D、点 P 的纵坐标，将点 P 的纵坐标代入函数的表达式求解即可．

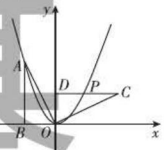


图 2-2-3

解：∵ Rt △ OAB 的顶点 A（-2，4）在抛物线 $y=ax^2$ 上，∴ $4=a\times(-2)^2$，解得 $a=1$.

∴抛物线的表达式为 $y=x^2$.

∵ Rt △ OAB 的顶点 A 的坐标为（-2，4），∴ $OB=2$.

∵ Rt △ OAB 绕点 O 顺时针旋转 90°，得到△ OCD，

∴ $CD\parallel x$ 轴，$OD=OB=2$. ∴点 D 和点 P 的纵坐标均为 2.

在 $y=x^2$ 中，令 $y=2$，得 $2=x^2$，解得 $x=\pm\sqrt{2}$.

∵点 P 在第一象限，

∴点 P 的坐标为 $(\sqrt{2},2)$.

答案：C

冲刺·满分

解法提醒

解二次函数 $y=x^2$ 和 $y=-x^2$ 的图象问题时，一般应从分析图象的形状及位置、开口大小及方向、顶点坐标、对称轴等入手．

解二次函数 $y=x^2$ 和 $y=-x^2$ 的增减性问题时，一般应分析函数的最大（小）值、增（减）区间等．

解法提醒

解答二次函数的图象与几何图形的综合题要抓住以下几点：

1. 读懂抛物线与几何图形，找出有用信息；
2. 将抛物线看作几何图形的组成部分进行解答；
3. 由几何图形中的结论，回归到抛物线上点的坐标时，要注意带上符号．

基德荣

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

两年模拟兵法 答案见216页

1. 抛物线 $y=x^2$ 与 y 轴的交点个数是（　　）

A.0　　B.1　　C.2　　D.3

2. 已知 $a<-1$，点 $(a-1, y_1)$，(a, y_2)，$(a+1, y_3)$ 都在函数 $y=-x^2$ 的图象上，则（　　）

A. $y_1<y_2<y_3$　　B. $y_1<y_3<y_2$

C. $y_3<y_2<y_1$　　D. $y_2<y_1<y_3$

3. 观察函数 $y=x^2$ 的图象，则下列判断中正确的是（　　）

A. 此图象与 y 轴有且只有一个交点

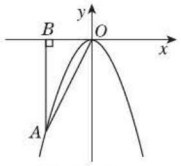
B. 点 $(3, -9)$ 在该图象上

C. 平行于 x 轴的直线一定与此图象有交点

D. 当 $x<0$ 时，y 随 x 的增大而增大

4. 已知函数 $y=x^2$ 的图象经过点 $(a, 4.5)$ 和点 $(-a, b)$，则 $b=$_____.

5. 如图，点 A 是抛物线 $y=-x^2$ 上一点，$AB\perp x$ 轴于点 B，连接 AO，若 B 点的坐标为 $(-2, 0)$，则 A 点的坐标为_____，$S_{\triangle AOB}=$_____.



（第5题）

6. 已知 $y=(k+2)x^{k^2+k-4}$ 是二次函数，且当 $x>0$ 时，y 随 x 的增大而减小.

（1）求 k 的值；

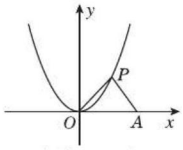
（2）画出该二次函数的图象；

（3）根据图象指出该抛物线的对称轴和顶点坐标.

7. 如图，点 P 为抛物线 $y=x^2$ 在第一象限内的一点，点 A 的坐标为 $(2, 0)$.

（1）若点 P 的坐标为 (x, y)，试求 $\triangle AOP$ 的面积 S 与 P 点横坐标之间的函数关系式.

（2）在直角坐标系中画出 S 关于 x 的函数图象.

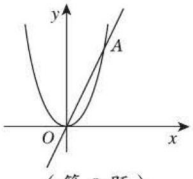


（第7题）

8. 如图，抛物线 $y=x^2$ 与直线 $y=2x$ 在第一象限内有一交点 A.

（1）求出点 A 的坐标.

（2）在 x 轴上是否存在一点 P，使 $\triangle AOP$ 为等腰三角形？若存在，请求出点 P 的坐标；若不存在，请说明理由.　[导学号 2380328]

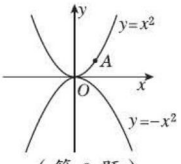


（第8题）

9. 如图，已知 $y=x^2$ 和 $y=-x^2$ 的图象在平面直角坐标系中，点 $A(1, 1)$ 在 $y=x^2$ 的图象上.

（1）分别作点 A 关于 x 轴、y 轴及原点对称的点 B，C，D，并判断 B，C，D 分别在哪个函数的图象上.

（2）顺次连接 A，B，D，C，A，判断四边形 $ABDC$ 的形状，并求出四边形 $ABDC$ 的面积.



（第9题）

荣德基

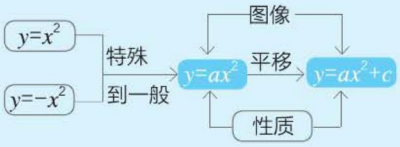
关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

2.2 二次函数 $y=ax^2$，$y=ax^2+c$ 的图象与性质

核心知识

- $y=ax^2$ 的图象与性质
- $y=ax^2$ 与 $y=ax^2+c$ 图象之间的关系
- $y=ax^2+c$ 的图象与性质

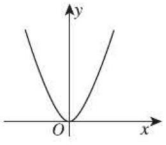
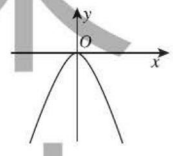
知识链接



点知识·拨考向 速提分

点知识 1 二次函数 $y=ax^2$ 的图象和性质

二次函数 $y=ax^2$（$a\neq0$）的图象与性质

$y=ax^2$	$a>0$	$a<0$
图象		
开口方向	开口向上	开口向下
顶点坐标	$(0,0)$	
对称轴	y 轴（或直线 $x=0$）	
增减性	在对称轴的左侧，即 $x<0$ 时，y 随 x 的增大而减小；在对称轴的右侧，即 $x>0$ 时，y 随 x 的增大而增大	在对称轴的左侧，即 $x<0$ 时，y 随 x 的增大而增大；在对称轴的右侧，即 $x>0$ 时，y 随 x 的增大而减小
最值	当 $x=0$ 时，$y_{最小值}=0$	当 $x=0$ 时，$y_{最大值}=0$

拔考向 二次函数 $y=ax^2$ 的图象和性质的应用类型

题型 1：二次函数 $y=ax^2$ 的图象的应用

例 1 如图 2-2-4，四个二次函数的图象分别对应的是：

① $y=ax^2$；② $y=bx^2$；

③ $y=cx^2$；④ $y=dx^2$.

①与③，②与④分别关于 x 轴对称.

（1）比较 a，b，c，d 的大小关系；

（2）说明 a 与 c，b 与 d 的数量关系.

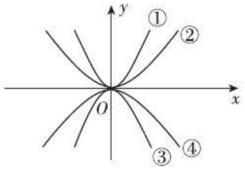


图 2-2-4

提分·必记

要点解读

1. 判断二次函数的增减性的技巧：以抛物线的对称轴为界，自左向右看，“上坡路”就是 y 随 x 的增大而增大，“下坡路”就是 y 随 x 的增大而减小.
2. 在二次函数 $y=ax^2$（$a\neq0$）中，a 的正负性决定开口方向，$|a|$ 决定开口的大小.$|a|$ 越大，抛物线开口越小；$|a|$ 越小，抛物线开口越大.
3. 二次函数 $y=-ax^2$（$a\neq0$）与 $y=ax^2$（$a\neq0$）的图象关于 x 轴对称.

提分·秘诀

解法提醒

a 与抛物线开口方向、开口大小之间的关系：

1. $a>0\Leftrightarrow$开口向上，$a<0\Leftrightarrow$开口向下.
2. $|a|$ 越大$\Leftrightarrow$开口越小，$|a|$ 相等$\Leftrightarrow$开口大小相同.

学霸基

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

解题秘方：紧扣“a的符号”及“$|a|$的大小”，采用数形结合思想进行解答.

解：（1）由抛物线的开口方向，知 $a>0$，$b>0$，$c<0$，$d<0$.

由抛物线的开口大小，知 $|a|>|b|$，$|c|>|d|$，因此 $a>b$，$c<d$.

$\therefore a>b>d>c$.

（2）$\because$①与③，②与④分别关于 x 轴对称，

$\therefore$①与③，②与④的开口大小相同，方向相反.

$\therefore a+c=0$，$b+d=0$.

另解

用特殊值法：当 $x=1$ 时，四个函数值分别等于二次项系数，$\therefore$直线 $x=1$ 与四条抛物线的交点从上到下依次为 $(1,a)$，$(1,b)$，$(1,d)$，$(1,c)$，$\therefore a>b>d>c$.

题型 2：二次函数 $y=ax^2$ 的性质的应用

例 2 ［易错题］已知函数 $y=(m+2)x^{m^2+m-4}$ 是关于 x 的二次函数.

（1）求满足条件的 m 的值.

（2）当 m 为何值时，其图象有最低点？求出这个最低点. 这时当 x 为何值时，y 随 x 的增大而增大？

（3）当 m 为何值时，函数有最大值？最大值是多少？这时当 x 为何值时，y 随 x 的增大而减小？

解题秘方：按在顶点的左、右两侧，即分 $x>0$ 和 $x<0$ 两种情况讨论函数的增减性.

解：（1）由题意，得 $\begin{cases}m^2+m-4=2,\\ m+2\neq 0.\end{cases}$

解得 $m=2$ 或 $m=-3$，

$\therefore$当 $m=2$ 或 $m=-3$ 时，函数为二次函数.

（2）若抛物线有最低点，则抛物线的开口向上，

$\therefore m+2>0$，即 $m>-2$.

$\therefore m=2$.

$\because$这个最低点为抛物线的顶点，

$\therefore$最低点的坐标为（0，0）. 当 $x>0$ 时，y 随 x 的增大而增大.

（3）若函数有最大值，则抛物线的开口向下，

$\therefore m+2<0$，即 $m<-2$.

$\therefore m=-3$.

$\because$函数的最大值为抛物线顶点的纵坐标，顶点坐标为（0，0），

$\therefore$当 $m=-3$ 时，函数有最大值 0. 当 $x>0$ 时，y 随 x 的增大而减小.

知识储备

满足条件即满足二次函数定义的“三要素”：

1. 整式；
2. 最高次数为 2；
3. 二次项系数不为 0.

解法提醒

在分析二次函数的增减性时，都是从对称轴为分界线进行讨论：

- 开口向下的抛物线，在对称轴左侧 y 随 x 的增大而增大，在对称轴右侧 y 随 x 的增大而减小；
- 开口向上的抛物线，在对称轴左侧 y 随 x 的增大而减小，在对称轴右侧 y 随 x 的增大而增大.

知识点 2 二次函数 $y=ax^2+c$ 的图象

提分·必记

1. 二次函数 $y=ax^2+c$ 的图象与二次函数 $y=ax^2$ 的图象的关系

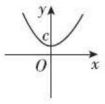
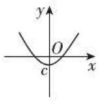
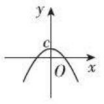
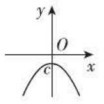
它们的形状（开口大小、方向）相同，只是上、下位置不同，二次函数 $y=ax^2+c$ 的图象可由二次函数 $y=ax^2$ 的图象上下平移 $|c|$ 个单位长度得到.

要点提醒

a 决定抛物线的开口方向和开口大小，所以 $y=ax^2(a\neq 0)$ 与 $y=ax^2+c(a\neq 0)$ 的图象开口方向和开口大小相同，只是位置不同.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

2. 二次函数 $y=ax^2+c$ 的图象

$y=ax^2+c$	$a>0$		$a<0$	
	$c>0$	$c<0$	$c>0$	$c<0$
图象				
开口方向	向上		向下	
顶点坐标	$(0,c)$			
对称轴	y 轴			

3. 二次函数 $y=ax^2+c$ 的图象的画法

（1）**描点法**：类比画二次函数 $y=ax^2$ 图象的描点法，按列表→描点→连线的程序作图.

（2）**平移法**：将二次函数 $y=ax^2$ 的图象向上（$c>0$）或向下（$c<0$）平移 $|c|$ 个单位长度，即可得二次函数 $y=ax^2+c$ 的图象.

拔考向▶利用二次函数 $y=ax^2+c$ 的图象解相关应用问题

例 3 画出函数 $y=-x^2+1$ 与 $y=-x^2-1$ 的图象，并根据图象回答下列问题.

（1）抛物线 $y=-x^2+1$ 经过怎样的平移才能得到抛物线 $y=-x^2-1$？

（2）对于函数 $y=-x^2+1$，其图象与 x 轴的公共点坐标是_____，对称轴是_____，顶点坐标是_____.

解题秘方：紧扣抛物线 $y=ax^2+c$ 与抛物线 $y=ax^2$ 间的关系及图象的平移规律解答.

解：先列表如下：

x	…	-3	-2	-1	0	1	2	3	…
$y=-x^2+1$	…	-8	-3	0	1	0	-3	-8	…
$y=-x^2-1$	…	-10	-5	-2	-1	-2	-5	-10	…

然后描点、连线，画出这两个函数的图象，如图 2-2-5.

（1）由图象可以看出，抛物线 $y=-x^2+1$ 向下平移 2 个单位长度得到抛物线 $y=-x^2-1$.

（2）$(-1,0)$，$(1,0)$；y 轴；$(0,1)$

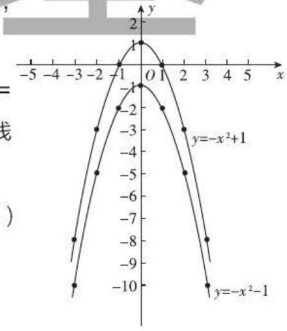


图 2-2-5

平移规律口诀

平移规律：上加下减，纵变横不变.

“上加下减”表示抛物线的位置上下平移规律，即抛物线 $y=ax^2+c$ 是由抛物线 $y=ax^2$ 平移 $|c|$ 个单位长度得到.“上加”表示当 c 为正数时，向上平移；“下减”表示当 c 为负数时，向下平移.

“纵变横不变”表示坐标的平移规律，即抛物线平移时，其对应点的纵坐标改变而横坐标不变.

提分·秘诀

方法 1

从抛物线 $y=-x^2$ 作中介平移：抛物线 $y=-x^2+1$ 是由抛物线 $y=-x^2$ 向上平移 1 个单位长度得到的，抛物线 $y=-x^2-1$ 是由抛物线 $y=-x^2$ 向下平移 1 个单位长度得到的，因此抛物线 $y=-x^2-1$ 是由抛物线 $y=-x^2+1$ 向下平移 2 个单位长度得到的.

方法 2

从对应点作中介平移：观察图 2-2-5 中的两条抛物线，抛物线 $y=-x^2+1$ 的顶点是 $(0,1)$，抛物线 $y=-x^2-1$ 的顶点是 $(0,-1)$，因为顶点向下平移了 2 个单位长度，所以将抛物线 $y=-x^2+1$ 向下平移 2 个单位长度可得到抛物线 $y=-x^2-1$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

点方法·拨技巧 提高分

拔尖角度 1 利用基础图象位置法识别图象

例 4 ［模拟·淄博博山］当 $ab>0$ 时，$y=ax^2$ 与 $y=ax+b$ 的图象大致是图 2-2-6 中的（　　）

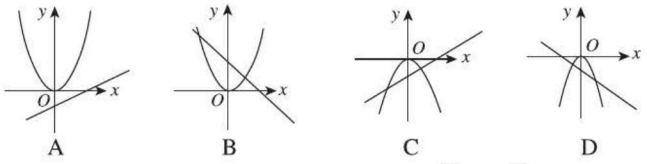


图 2-2-6

解题秘方：对 a，b 的符号情况进行分类讨论.

解：根据题意，$ab>0$，即 a，b 同号.

当 $a>0$ 时，$b>0$，$y=ax^2$ 的图象开口向上，过原点，$y=ax+b$ 的图象过一、二、三象限，此时，没有选项符合.

当 $a<0$ 时，$b<0$，$y=ax^2$ 的图象开口向下，过原点，$y=ax+b$ 的图象过二、三、四象限，此时，D 选项符合.

答案：D

挑战·高分

方法点拨

在同一坐标系中确定两个函数图象是否同时成立的方法：先确定一个基础函数图象，再根据这个基础函数图象的位置确定待定系数的取值范围，然后再看求出的待定系数的范围是否满足另一个函数图象.

拔尖角度 2 利用建模法解抛物线型实际应用问题

例 5 有一条抛物线形状的隧道，隧道的最大高度为 6 m，跨度为 8 m，把它放在如图 2-2-7 的平面直角坐标系中（1 个单位长度表示 1 m）.

（1）求这条抛物线的表达式.

（2）若要在隧道壁上点 P 处安装一盏照明灯，灯离地面的高度为 4.5 m，求照明灯与点 B 的距离.

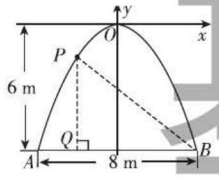


图 2-2-7

解题秘方：根据抛物线在坐标系中的位置建立二次函数模型，求出抛物线的表达式，然后结合图象求照明灯与点 B 的距离.

解：（1）由题意，设抛物线的表达式为 $y=ax^2$.

∵点 $A(-4,-6)$ 在抛物线上，

∴ $a\cdot(-4)^2=-6$，

解得 $a=-\frac{3}{8}$，故抛物线的表达式为 $y=-\frac{3}{8}x^2$.

挑战·高分

解法提醒

一般地，求二次函数 $y=ax^2$ 的表达式时，只需已知一个点（坐标原点除外）的坐标. 本题中点 A 和点 B 关于 y 轴对称，将点 A 或点 B 的坐标代入表达式所得方程相同，故任选一点坐标代入即可.

基础·德·基

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

（2）过点 P 作 $PQ \perp AB$ 于点 Q，连接 PB，如图 2-2-7，则 PQ=4.5m.

∴点 P 的纵坐标为 -1.5. 将 $y=-1.5$ 代入 $y=-\frac{3}{8}x^2$，得 $x=\pm 2$.

∵点 P 在第三象限，

∴点 P 的坐标为（-2，-1.5）.

未考虑坐标轴的位置，容易误将点 P 的纵坐标看作 -4.5 进行计算.

∴ BQ=6m，∴ $PB=\sqrt{PQ^2+BQ^2}=\sqrt{4.5^2+6^2}=7.5$（m）.

答：照明灯与点 B 的距离为 7.5m.

拔尖角度 3 利用数形结合思想解决二次函数与反比例函数综合问题

挑战·高分

方法点拨

1. 公共点的几何意义是两个图象的交点，代数意义是两个函数关系式方程的公共解.
2. 反比例函数的增减性由 k 的正负性决定，而二次函数 $y=ax^2+c$ 的增减性由 a 的正负性及在 y 轴的左右侧决定.

例 6 已知二次函数 $y=mx^2+1$ 与反比例函数 $y=\frac{k}{x}$ 的图象有一个公共点（-1，-1）.

（1）求二次函数及反比例函数的表达式.

（2）能否找到自变量 x 的最大取值范围，使二次函数、反比例函数的函数值在这个范围内都随 x 的增大而减小？若能，写出这个取值范围；若不能，说明理由.

解题秘方：紧扣公共点的代数意义及几何意义求两个函数表达式，利用两个图象在平面直角坐标系中的位置关系及增减性解决问题.

解：（1）∵两个函数图象有一个公共点（-1，-1），

∴ $-1=m\times(-1)^2+1$，$-1=\frac{k}{-1}$.

∴ $m=-2$，$k=1$.

∴函数表达式分别是 $y=-2x^2+1$，$y=\frac{1}{x}$.

（2）如图 2-2-8，是函数 $y=-2x^2+1$ 和 $y=\frac{1}{x}$ 在同一平面直角坐标系中的图象，由图象可知存在这样的自变量 x 的取值范围，即当 $x>0$ 时，二次函数、反比例函数的函数值都随 x 的增大而减小.

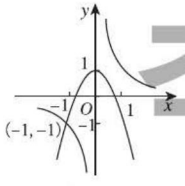


图 2-2-8

点中考·拔模拟 得满分

中考探秘

二次函数 $y=ax^2$ 与 $y=ax^2+c$ 的图象是历年中考的常考点，涉及开口方向、顶点坐标、增减性等性质，题目为中、低档题，有些中考压轴题也会涉及，预计以后几年中考题中仍会经常出现.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

三年中考兵法

考法 利用特殊二次函数的性质求最值

例7 [中考·泸州]已知抛物线 $y=\frac{1}{4}x^2+1$ 具有如下性质：该抛物线上任意一点到定点 $F(0,2)$ 的距离与到 x 轴的距离始终相等. 如图 2-2-9，点 M 的坐标为 $(\sqrt{3},3)$，P 是抛物线 $y=\frac{1}{4}x^2+1$ 上一个动点，则△ PMF 周长的最小值是（　　）

A. 3　　B. 4　　C. 5　　D. 6

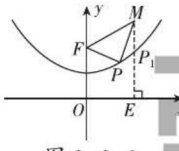


图 2-2-9

试题评析：本题考查了二次函数的性质、垂线段最短、三角形三边关系. 根据垂线段最短确定点 P 的位置是解题的关键.

解：如图 2-2-9，过点 M 作 $ME\perp x$ 轴于点 E，交抛物线 $y=\frac{1}{4}x^2+1$ 于点 P_1，当 P 与 P_1 重合时△ PMF 的周长最小，且最小值是 $ME+FM$.

∵ $F(0,2)$，$M(\sqrt{3},3)$，

∴ $ME=3$，$FM=\sqrt{(\sqrt{3}-0)^2+(3-2)^2}=2$，

∴△ PMF 周长的最小值 $=ME+FM=3+2=5$.

答案：C

冲刺·满分

详解

在抛物线上任取一点 P'（不同于点 P_1），连接 $P'F$、$P'M$，过 P' 作 $P'E'\perp x$ 轴于 E'，连接 ME'. 由已知得 $P'E'=P'F$，∴△ $P'MF$ 的周长 $=P'F+P'M+FM=P'E'+P'M+FM$. 又△ P_1MF 的周长 $=ME+FM$，$P'M+P'E'>ME'$（两边之和大于第三边），$ME'>ME$（垂线段最短），∴△ PMF 的周长 > △ P_1MF 的周长.

两年模拟兵法

答案见 217 页

1. 在同一坐标系中，画出函数 $y=x^2$，$y=-\frac{1}{2}x^2$，$y=\frac{1}{3}x^2-1$ 的图象，它们的共同特点是（　　）

A. 开口向上

B. 都是关于 x 轴对称的抛物线，且 y 随 x 的增大而增大

C. 开口大小相同

D. 都是关于 y 轴对称的抛物线

2. 如果将抛物线 $y=x^2+2$ 向下平移 1 个单位，那么所得新抛物线对应的函数表达式是（　　）

A. $y=(x-1)^2+2$　　B. $y=(x+1)^2+2$

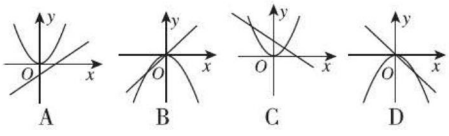
C. $y=x^2+1$　　D. $y=x^2+3$

3. [中考·连云港]已知抛物线 $y=ax^2$（$a>0$）过 $A(-2,y_1)$，$B(1,y_2)$ 两点，则下列关系式一定正确的是（　　）

A. $y_1>0>y_2$　　B. $y_2>0>y_1$

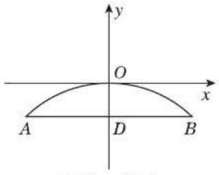
C. $y_1>y_2>0$　　D. $y_2>y_1>0$

4. 在同一坐标系内，函数 $y=ax^2$（$a\neq 0$）与 $y=ax$ 的图象可以为（　　）



关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

5. [中考·铜仁] 河北省赵县的赵州桥的桥拱是近似的抛物线形，建立如图所示的平面直角坐标系，其函数的关系式为 $y=-\frac{1}{25}x^2$. 当水面离拱桥顶的高度 DO 是 4 m 时，水面宽度 AB 为（　　）



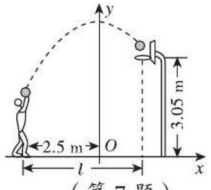
（第 5 题）

A. −20 m　　B. 10 m

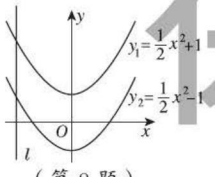
C. 20 m　　D. −10 m

6. 已知二次函数的图象开口向上，且顶点在 y 轴的负半轴上，请你写出一个满足条件的二次函数的表达式：_____.

7. 如图，小明在某次投篮中，球的运动路线是抛物线 $y=-\frac{1}{5}x^2+3.5$ 的一部分. 若命中篮圈中心，则他与篮底的距离 l=_____.



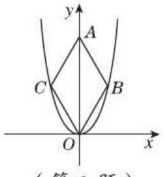
（第 7 题）



（第 8 题）

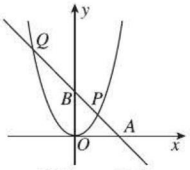
8. 如图，平行于 y 轴的直线 l 被抛物线 $y_1=\frac{1}{2}x^2+1$，$y_2=\frac{1}{2}x^2-1$ 所截. 当直线 l 向右平移 3 个单位时，直线 l 被两条抛物线所截得的线段扫过的图形面积为_____个平方单位.

9. [中考·菏泽] 二次函数 $y=\sqrt{3}x^2$ 的图象如图，点 O 为坐标原点，点 A 在 y 轴的正半轴上，点 B，C 在二次函数 $y=\sqrt{3}x^2$ 的图象上，四边形 $OBAC$ 为菱形，且 $\angle OBA=120°$，则菱形 $OBAC$ 的面积为_____.



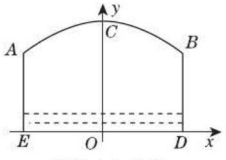
（第 9 题）

10. 已知一次函数 $y=kx+b$ 与二次函数 $y=ax^2$ 的图象如图，其中一次函数的图象与 x 轴、y 轴的交点分别为 A（2，0），B（0，2），直线与抛物线的交点分别为 P，Q，且它们的纵坐标的比为 1 ∶ 4，求这两个函数的表达式.



（第 10 题）

11. 如图，小河上有一拱桥，拱桥及河道的截面轮廓线由抛物线的一部分 ACB 和矩形的三边 AE，ED，DB 组成. 已知河底 ED 是水平的，ED=16 m，AE=8 m，抛物线的顶点 C 到 ED 的距离是 11 m. 以 ED 所在的直线为 x 轴，抛物线的对称轴为 y 轴建立平面直角坐标系，求抛物线对应的函数表达式. [导学号 2380328]



（第 11 题）

荣德基

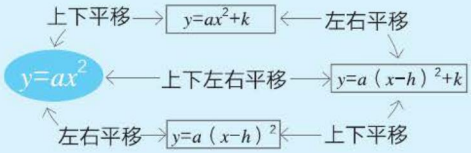
关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

2.3 二次函数 $y=a(x-h)^2$，$y=a(x-h)^2+k$ 的图象与性质

核心知识

- $y=a(x-h)^2$ 的图象
- $y=a(x-h)^2+k$ 的图象

知识链接



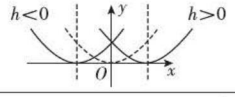
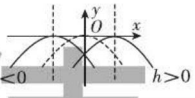
点知识·拨考向 速提分

点知识 1 二次函数 $y=a(x-h)^2$ 的图象

1. 二次函数 $y=a(x-h)^2$ 的图象与二次函数 $y=ax^2$ 的图象的关系

它们的形状（开口大小、方向）相同，只是左、右位置不同，二次函数 $y=a(x-h)^2$ 的图象可由 $y=ax^2$ 的图象左右平移 $|h|$ 个单位长度得到.

2. 二次函数 $y=a(x-h)^2$ 的图象

函数	$y=a(x-h)^2$ $(a>0)$	$y=a(x-h)^2$ $(a<0)$
图象		
顶点坐标	$(h, 0)$	
对称轴	直线 $x=h$	
顶点位置	当 $h>0$ 时，顶点在 y 轴的右侧（即 x 轴的正半轴上）； 当 $h<0$ 时，顶点在 y 轴的左侧（即 x 轴的负半轴上）	
开口方向	向上	向下

拔考向 利用二次函数 $y=a(x-h)^2$ 的图象识别函数

例 1 在平面直角坐标系中，函数 $y=-x-1$ 与 $y=-\frac{3}{2}(x-1)^2$ 的图象大致是图 2-2-10 中的（　　）

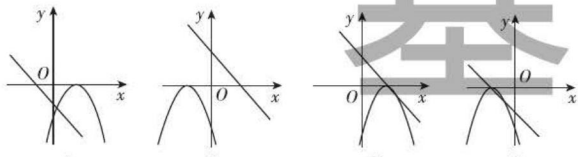


图 2-2-10

解题秘方：由两种函数图象的位置与系数的关系判断.

解：∵ $k=-1<0$，$b=-1<0$，∴ $y=-x-1$ 的图象过二、三、四象限.

又∵ $a=-\frac{3}{2}<0$，$h=1$，∴ $y=-\frac{3}{2}(x-1)^2$ 的图象开口向下，顶点为 $(1, 0)$.

∴同时符合条件的只有 A.

答案：A

提分·必记

方法点拨

平移规律：左加右减，横变纵不变.

1. “左加”表示当 $h<0$ 时，函数 $y=a(x-h)^2$ 可变形为 $y=a(x+|h|)^2$，其图象可以由函数 $y=ax^2$ 的图象向左平移 $|h|$ 个单位长度得到.
2. “右减”表示当 $h>0$ 时，函数 $y=a(x-h)^2$ 的图象可以由函数 $y=ax^2$ 的图象向右平移 h 个单位长度得到.
3. “横变纵不变”表示坐标的平移规律，即抛物线平移时对应点的横坐标改变而纵坐标不变.

提分·秘诀

知识储备

直线 $y=kx+b$ $(b\neq 0)$ 的位置与 k，b 符号的关系：

- $k>0$ 时，若 $b>0$，则直线经过一、二、三象限；若 $b<0$，则直线经过一、三、四象限.
- $k<0$ 时，若 $b>0$，则直线经过一、二、四象限；若 $b<0$，则直线经过二、三、四象限.

来德基

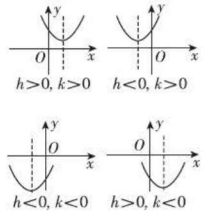
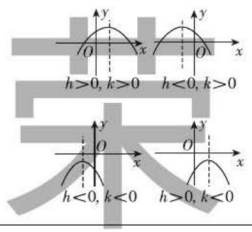
关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

点知识▶ ② 二次函数 $y=a(x-h)^2+k$ 的图象和性质

1. 二次函数 $y=a(x-h)^2+k$ 的图象与二次函数 $y=ax^2$ 的图象的关系

它们的形状（开口大小、方向）相同，只是位置不同. 二次函数 $y=a(x-h)^2+k$ 的图象可由二次函数 $y=ax^2$ 的图象平移得到，即先将二次函数 $y=ax^2$ 的图象左右平移 $|h|$ 个单位长度得到二次函数 $y=a(x-h)^2$ 的图象，再将二次函数 $y=a(x-h)^2$ 的图象上下平移 $|k|$ 个单位长度得到二次函数 $y=a(x-h)^2+k$ 的图象.

2. 二次函数 $y=a(x-h)^2+k$ 的图象和性质

函数	$y=a(x-h)^2+k\ (a>0)$	$y=a(x-h)^2+k\ (a<0)$
图象		
顶点位置	当 $h>0$，$k>0$ 时，顶点在第一象限；当 $h<0$，$k>0$ 时，顶点在第二象限；当 $h<0$，$k<0$ 时，顶点在第三象限；当 $h>0$，$k<0$ 时，顶点在第四象限	
对称轴	直线 $x=h$	
开口方向	向上	向下
增减性	在对称轴的左侧，y 随 x 的增大而减小；在对称轴的右侧，y 随 x 的增大而增大	在对称轴的左侧，y 随 x 的增大而增大；在对称轴的右侧，y 随 x 的增大而减小
最值	当 $x=h$ 时，$y_{最小值}=k$	当 $x=h$ 时，$y_{最大值}=k$

拔考向▶ 利用二次函数 $y=a(x-h)^2+k$ 的图象和性质解相关应用问题

例 2 对于抛物线 $y=-(x+1)^2+3$，下列结论：

① 抛物线的开口向下；② 对称轴为直线 $x=1$；

③ 顶点坐标为 $(-1,3)$；④ $x>1$ 时，y 随 x 的增大而减小.

其中正确结论有（　　）

A. 1 个　　B. 2 个　　C. 3 个　　D. 4 个

解题秘方：紧扣二次函数 $y=a(x-h)2+k$ 的图象和性质逐一判断.

解：①∵ $a=-1<0$，∴抛物线的开口向下，正确；

②对称轴为直线 $x=-1$，错误；

③顶点坐标为 $(-1,3)$，正确；

④ $x>1$ 时，y 随 x 的增大而减小，正确.

综上所述，结论正确的是①③④，共 3 个，故选 C.

答案：C

提分·必记

特别解读

- 从 $y=a(x-h)^2+k(a\neq 0)$ 中可以直接看出抛物线的顶点坐标，所以通常把它称为二次函数的顶点式，顶点坐标是 (h,k).
- 对二次项系数相同的二次函数，可以根据两抛物线的顶点位置来判断平移的方式. 例如，抛物线 $y=(x+3)^2+2$ 的顶点是 $(-3,2)$，它的图象可以看成是把 $y=x^2$ 的图象先向左平移 3 个单位长度，再向上平移 2 个单位长度得到的.

提分·秘诀

解法提醒

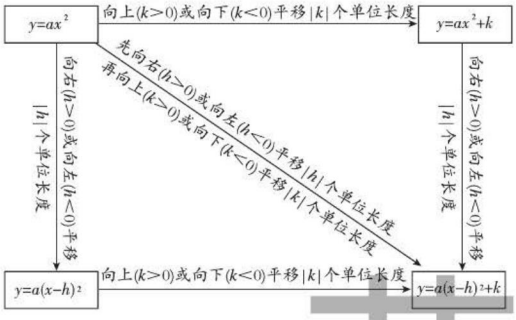
解答抛物线 $y=a(x-h)^2+k$ 的开口方向、对称轴、顶点坐标、最值、增减性规律等问题，首先必须弄清顶点式 $y=a(x-h)^2+k$ 中 a，h，k 与开口方向、对称轴、顶点坐标、最值间的关系，比较题中给出的相关数据与 a，h，k 间的关系，再结合相关知识按题目要求解答.

荣德基

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

点知识▶ 3 二次函数 $y=ax^2$，$y=ax^2+k$，$y=a(x-h)^2$，$y=a(x-h)^2+k$ 之间的关系

1. 位置关系



2. 图象和性质关系

函数		$y=a(x-h)^2+k$	$y=a(x-h)^2$	$y=ax^2+k$	$y=ax^2$
相同点	形状	图象都是抛物线，形状相同，开口方向相同			
	对称性	图象都是轴对称图形			
	增减性	$a>0$ 时，开口向上，在对称轴左侧，y 随 x 的增大而减小，在对称轴右侧，y 随 x 的增大而增大；$a<0$ 时，开口向下，在对称轴左侧，y 随 x 的增大而增大，在对称轴右侧，y 随 x 的增大而减小			
不同点	顶点	(h, k)	$(h, 0)$	$(0, k)$	$(0, 0)$
	对称轴	直线 $x=h$		y 轴	

拔考向▶ 利用特殊形式二次函数间的关系解相关应用问题

例 3 已知抛物线 $y=a(x-h)^2+k$ 是由抛物线 $y=-\frac{1}{2}x^2$ 向上平移 2 个单位长度，再向右平移 1 个单位长度得到的.

(1) 求出 a，h，k 的值.

(2) 在同一直角坐标系中，画出 $y=a(x-h)^2+k$ 与 $y=-\frac{1}{2}x^2$ 的图象.

(3) 观察 $y=a(x-h)^2+k$ 的图象，当 x_____时，y 随 x 的增大而增大，当 x_____时，函数有最_____值，最_____值是_____.

(4) 观察 $y=a(x-h)^2+k$ 的图象，你能说出对于一切 x 的值，函数 y 的取值范围吗?

解题秘方：紧扣特殊形式的二次函数间的关系进行解答.

提分·必记

特别解读

1. 抛物线 $y=ax^2$，$y=ax^2+k$，$y=a(x-h)^2$，$y=a(x-h)^2+k$ 的表达式中 a 值相等，所以这四条抛物线的开口方向、形状、大小完全一样，故它们之间可互相平移得到.
2. 抛物线的平移规律是“左加右减，上加下减”，所不同的是，左右平移时，只针对常数 h 进行变化，而上下平移时，只针对常数 k 进行变化，可简记为：左加右减自变量，上加下减常数项.

提分·秘诀

特别解读

二次函数 $y=a(x-h)^2+k$ 的图象与二次函数 $y=ax^2$ 的图象的平移关系：既可以先上下平移再左右平移，也可以先左右平移再上下平移.

基础 教辅

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

解：（1）∵抛物线 $y=-\frac{1}{2}x^2$ 向上平移 2 个单位长度，再向右平移 1 个单位长度后得到的抛物线是 $y=-\frac{1}{2}(x-1)^2+2$，

∴ $a=-\frac{1}{2}$，$h=1$，$k=2$.

（2）函数 $y=-\frac{1}{2}(x-1)^2+2$ 与 $y=-\frac{1}{2}x^2$ 的图象如图 2-2-11.

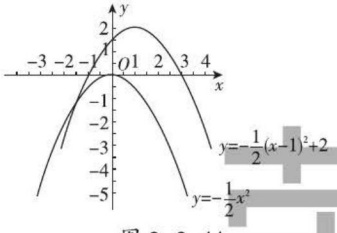


图 2-2-11

（3）<1；=1；大；大；2

（4）由图象知，对于一切 x 的值，总有 $y \leqslant 2$.

技巧点拨

1. “左加右减自变量，上加下减常数项.”抛物线左右平移时，只有常数 h 发生变化；上下平移时，只有常数 k 发生变化. 反之，根据 h 的值可以确定左右平移的方向和距离；根据 k 的值可以确定上下平移的方向和距离.
2. 画二次函数 $y=a(x-h)^2+k$（$a \neq 0$）的图象的关键是先确定顶点坐标，再列表取值，也可以不列表，但要将 x，y 的对应值在图象中标出来.

点方法·拨技巧 提高分

拔尖角度 1 利用顶点式法求函数表达式

挑战·高分

例 4 已知二次函数图象的顶点为（-2，-3），且图象过点（-3，-2），求此二次函数的表达式.

解题秘方：利用顶点式及点的坐标与函数表达式的关系用方程思想解答.

解：∵二次函数图象的顶点为（-2，-3），

∴设此二次函数的表达式为 $y=a(x+2)^2-3$.

又∵图象过点（-3，-2），

∴ $-2=a\times(-3+2)^2-3$. ∴ $a=1$.

∴此二次函数的表达式为 $y=(x+2)^2-3$.

警示误区

本题设表达式时一定要注意 $y=a(x-h)^2+k$ 中 h 与 k 的符号，千万不要设成 $y=a(x-2)^2-3$.

拔尖角度 2 利用函数的增减性法确定待定字母的取值范围

挑战·高分

例 5 若二次函数 $y=(x-m)^2-1$，当 $x \leqslant 1$ 时，y 随 x 的增大而减小，则 m 的取值范围是（　　）

A. $m=1$　　B. $m>1$　　C. $m \geqslant 1$　　D. $m \leqslant 1$

解题秘方：紧扣对称轴两侧的增减性求解.

解：二次函数 $y=(x-m)^2-1$ 的图象开口向上，对称轴为直线 $x=m$，故在对称轴的左侧，即当 $x \leqslant m$ 时，y 随 x 的增大而减小. 又因为当 $x \leqslant 1$ 时，y 随 x 的增大而减小，所以直线 $x=1$ 应在对称轴 $x=m$ 的左侧或与对称轴重合，故 $m \geqslant 1$，故选 C.

答案：C

解题通法

根据二次函数的增减性求待定字母的取值范围的方法：首先将二次函数化为顶点式，确定对称轴的位置，然后根据图象的开口方向确定对称轴左、右两侧的增减性，最后结合图象确定待定字母的取值范围.

荣德基

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

拔尖角度▸ 3 利用建坐标系法解抛物线型实际应用问题

挑战·高分

例6 有一拱洞为抛物线形状的拱桥，当水位涨至AB时，水面宽度为14 m，如果水位再上升4 m，就到达警戒水位CD，这时水面的宽度是10 m.

（1）建立直角坐标系，求抛物线的表达式.

（2）某日上午7时，洪水已涨至警戒水位，并继续以每小时0.5 m的速度上升，有一条满载抗洪物资的小船，船露出水面部分的横截面是矩形，且高为1.5 m，宽为2 m，求小船必须在几时之前才能安全通过该桥的拱洞.

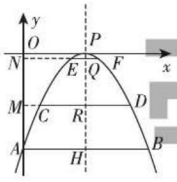


图 2-2-12

解题秘方：利用拱洞的形状特征建立适当的直角坐标系的模型，然后结合抛物线的性质解答.若所建直角坐标系不同，则所求抛物线的表达式也不同.

解：（1）如图2-2-12，建立直角坐标系，由条件可知抛物线的顶点为（7，0）.

设该抛物线的表达式为$y=a(x-7)^2$，由题知$AH=7$ m，$CR=5$ m，延长DC交y轴于点M，则$MC=7-5=2$（m）.

当$x=2$时，$y=25a$，则$OM=-25a$ m.

当$x=0$时，$y=49a$，则$OA=-49a$ m.

$\therefore AM=OA-OM=-24a$ m.

$\because AM=4$m，

$\therefore a=-\frac{1}{6}$. $\therefore y=-\frac{1}{6}(x-7)^2$.

（2）如图2-2-12，$EF=2$m，则$EQ=1$m.延长FE交y轴于N，则$NQ=7$m，$\therefore NE=6$m.

当$x=6$时，$y=-\frac{1}{6}$，则$PQ=\frac{1}{6}$ m.

当$x=2$时，$y=-\frac{1}{6}\times25=-\frac{25}{6}$，则$PR=\frac{25}{6}$ m.

$\therefore QR=4$m.

$\because$船露出水面部分的高为1.5m，

$\therefore$安全通过该桥的拱洞时水位最多上升$4-1.5=2.5$（m）.

$\because 2.5\div0.5=5$（时），$7+5=12$（时），

$\therefore$小船必须在12时之前才能安全通过该桥的拱洞.

解法提醒

用函数知识解决实际问题的关键是建立适当的平面直角坐标系，把实际问题转化为数学问题，本题可用**建模思想**，将桥的拱洞看成抛物线的一部分，利用二次函数知识来求解问题.

特别提醒

建立直角坐标系可用不同的表达式建立，先想好所用的表达式，当用$y=a(x-h)^2$的形式解决问题时，建系的方法是将过抛物线的顶点且垂直于对称轴的直线作为x轴，平行于对称轴的直线作为y轴.

荣德基

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

点中考·拨模拟 得满分

中考探秘 本节所学知识是学习一般形式的二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图象及性质的必备内容.本节在中考中单独考查开口方向、顶点坐标、对称轴、增减性等知识的时候较少,多以选择题、填空题的形式出现,较少出现解答题,而且题目多以中、低档试题为主.

三年中考兵法

冲刺·满分

考法1 利用二次函数的性质求字母系数的值

例7 [中考·潍坊]已知二次函数 $y=-(x-h)^2$ (h 为常数),当自变量 x 的值满足 $2\leqslant x\leqslant 5$ 时,与其对应的函数值 y 的最大值为 -1,则 h 的值为(　　)

A. 3或6　　B. 1或6　　C. 1或3　　D. 4或6

试题评析:本题考查了二次函数的最值以及二次函数的性质,分 $h<2$、$2\leqslant h\leqslant 5$ 和 $h>5$ 三种情况求出 h 的值是解题的关键.

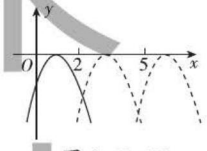


图 2-2-13

解:如图 2-2-13,当 $h<2$ 时,

有 $-(2-h)^2=-1$,

解得 $h_1=1$,$h_2=3$(舍去);

当 $2\leqslant h\leqslant 5$ 时,$y=-(x-h)^2$ 的最大值为 0,不符合题意;

当 $h>5$ 时,有 $-(5-h)^2=-1$,解得 $h_3=4$(舍去),$h_4=6$.

综上所述,h 的值为 1 或 6.

答案:B

思路引导

分 $h<2$、$2\leqslant h\leqslant 5$ 和 $h>5$ 三种情况考虑:

当 $h<2$ 时,根据二次函数的性质可得出关于 h 的一元二次方程,解之即可得出 h 的值;

当 $2\leqslant h\leqslant 5$ 时,函数的最大值为 0,与题意不符,可得出该情况不存在;

当 $h>5$ 时,根据二次函数的性质可得出关于 h 的一元二次方程,解之即可得出 h 的值.

考法2 利用二次函数的图象作等腰三角形

例8 [中考·桂林]已知直线 $y=-\sqrt{3}x+3$ 与坐标轴分别交于点 A,B,点 P 在抛物线 $y=-\frac{1}{3}(x-\sqrt{3})^2+4$ 上,能使△ABP 为等腰三角形的点 P 有(　　)

A. 3个　　B. 4个　　C. 5个　　D. 6个

试题评析:本题考查了二次函数的图象与坐标轴的交点坐标、等腰三角形的性质、一次函数的图象与坐标轴的交点坐标以及等边三角形的判定定理,解题的关键是依照题意画出图形,利用数形结合思想来解决问题.本题属于中档题,难度不小.本题不需要求出点 P 的坐标,但在寻找点 P 的过程中会出现多次点的重合问题,由此给解题带来了难度.

解:如图 2-2-14,以点 B 为圆心,线段 AB 的长为半径作圆,交抛物线于点 C,M,N,连接 AC,BC.

令一次函数 $y=-\sqrt{3}x+3$ 中 $x=0$,则 $y=3$,

∴点 A 的坐标为(0,3).由题易知,点 A 为直线与抛物线的一个交点.

思路引导

以点 B 为圆心,线段 AB 长为半径作圆,交抛物线于点 C,M,N,连接 AC,BC,由直线 $y=-\sqrt{3}x+3$ 可求出点 A、B 的坐标,结合抛物线的表达式可得出△ABC 为等边三角形;再令抛物线表达式中 $y=0$ 求出抛物线与 x 轴的两交点的坐标,也易求得所作圆与 x

苏德基

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

令一次函数 $y=-\sqrt{3}x+3$ 中 $y=0$，

则 $-\sqrt{3}x+3=0$，解得 $x=\sqrt{3}$，

∴点 B 的坐标为 $(\sqrt{3},\ 0)$，

∴ $AB=2\sqrt{3}$.

∵抛物线的对称轴为直线 $x=\sqrt{3}$，

∴点 C 的坐标为 $(2\sqrt{3},\ 3)$，

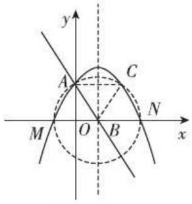


图 2-2-14

所作的圆与 x 轴的交点为 $(-\sqrt{3},\ 0)$，$(3\sqrt{3},\ 0)$.

∴ $AC=2\sqrt{3}=AB=BC$，

∴△ ABC 为等边三角形.

令 $y=-\frac{1}{3}(x-\sqrt{3})^2+4$ 中 $y=0$，则 $-\frac{1}{3}(x-\sqrt{3})^2+4=0$，

解得 $x=-\sqrt{3}$ 或 $x=3\sqrt{3}$.

∴抛物线与 x 轴的交点为 $(-\sqrt{3},\ 0)$，$(3\sqrt{3},\ 0)$.

∴点 M 的坐标为 $(-\sqrt{3},\ 0)$，点 N 的坐标为 $(3\sqrt{3},\ 0)$.

△ ABP 为等腰三角形分三种情况：

（1）当 $AB=BP$ 时，以 B 点为圆心，AB 的长为半径作圆，与抛物线交于 C，M，N 三点；

（2）当 $AB=AP$ 时，以 A 点为圆心，AB 的长为半径作圆，与抛物线交于 C，M 两点；

（3）当 $AP=BP$ 时，作线段 AB 的垂直平分线，与抛物线交于 C，M 两点.

综上，能使△ ABP 为等腰三角形的点 P 有 3 个. 故选 A.

答案：A

轴的两交点坐标，从而得出 M，N 的坐标；结合图形分三种情况研究△ ABP 为等腰三角形，由此即可得出结论.

警示误区

本题易忽视点的重合而出现重复计数的错误，克服出错的方法有两种：

- 准确作图.
- 求出各点的坐标.

两年模拟兵法

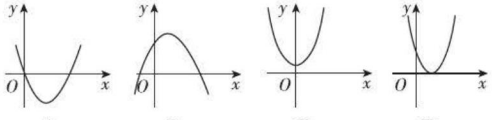
☞答案见 217 页

1. [中考·长沙]抛物线 $y=2(x-3)^2+4$ 的顶点坐标是（　　）

A.（3，4）　　B.（−3，4）

C.（3，−4）　　D.（2，4）

2. [中考·沈阳]在平面直角坐标系中，二次函数 $y=a(x-h)^2$（$a\neq 0$）的图象可能是（　　）



A　　B　　C　　D

3. [中考·山西]将抛物线 $y=(x-2)^2-8$ 向左平移 3 个单位长度，再向上平移 5 个单位长度，得到的抛物线的表达式为（　　）

A. $y=(x+1)^2-13$　　B. $y=(x-5)^2-3$

C. $y=(x-5)^2-13$　　D. $y=(x+1)^2-3$

4. [中考·宜宾]如图，抛物线 $y_1=\frac{1}{2}(x+1)^2+1$ 与 $y_2=a(x-4)^2-3$ 交于点 $A(1,\ 3)$，过点 A 作 x 轴的平行线，分别交两条抛物线于 B，C 两点，且 D，E 分别为顶点，则下列结论：

① $a=\frac{2}{3}$；

② $AC=AE$；

③△ ABD 是等腰直角三角形；

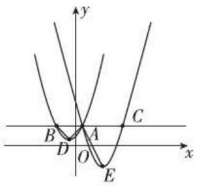
宋德基

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

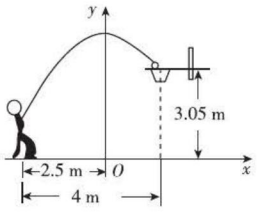
④当 $x>1$ 时，$y_1>y_2$.

其中正确结论的个数是（　　）

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4



（第 4 题）



（第 5 题）

5. [中考 · 巴中]一位篮球运动员在距离篮圈中心水平距离 4 m 处起跳投篮，球沿一条抛物线运动，当球运动的水平距离为 2.5 m 时，达到最大高度 3.5 m，然后准确落入篮圈内．已知篮圈中心距离地面高度为 3.05 m，在如图的平面直角坐标系中，下列说法正确的是（　　）

A. 此抛物线的表达式是 $y=-\frac{1}{5}x^2+3.5$

B. 篮圈中心的坐标是（4，3.05）

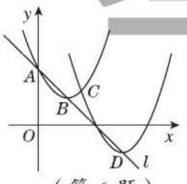
C. 此抛物线的顶点坐标是（3.5，0）

D. 篮球出手时离地面的高度是 2m

6. 如图，已知直线 l：$y=-x+2$ 与 y 轴交于点 A，抛物线 $y=(x-1)^2+k$ 经过点 A，其顶点为 B，另一抛物线 $y=(x-h)^2+2-h\ (h>1)$ 的顶点为 D，两抛物线相交于点 C.

（1）求点 B 的坐标，并说明点 D 在直线 l 上．

（2）设交点 C 的横坐标为 m，交点 C 的纵坐标可以表示为_____或_____，由此进一步探究 m 关于 h 的函数关系式．

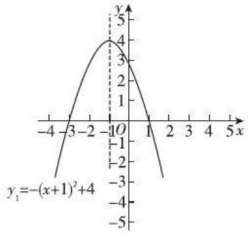


（第 6 题）

7. [模拟 · 杭州](1) 已知二次函数 $y_1=-(x+1)^2+4$ 的图象如图，请在同一坐标系中画出二次函数 $y_2=-(x-2)^2+1$ 的图象．

（2）平行于 x 轴的直线 $y=k$ 在抛物线 $y_2=-(x-2)^2+1$ 上截得的线段 $AB=4$，求抛物线 $y_2=-(x-2)^2+1$ 的顶点到线段 AB 的距离．

（3）当 $-1<x<2$ 时，利用函数图象比较 y_1 与 y_2 的大小．



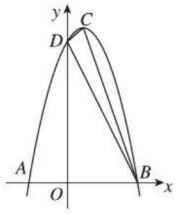
（第 7 题）

8. 如图，抛物线与 x 轴交于 $A(-2,0)$，$B(4,0)$ 两点，且顶点 C 的纵坐标为 9.

（1）求抛物线的表达式．

（2）设此抛物线与 y 轴交点为 D，求 $S_{\triangle BCD}$.

[导学号 2380328]



（第 8 题）

未德基

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

2.4 二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图象与性质

核心知识

- 二次函数顶点式
- 二次函数一般式
- 二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图象和性质

知识链接



点知识·拨考向 速提分

点知识 1 二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 与二次函数 $y=a(x-h)^2+k$ 之间的关系

1. 二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 与二次函数 $y=a(x-h)^2+k$ 的互化

$h=-\dfrac{b}{2a}$，$k=\dfrac{4ac-b^2}{4a}$，即 $y=ax^2+bx+c=a\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2+\dfrac{4ac-b^2}{4a}$.

提分·必记

配方过程

$$y=ax^2+bx+c$$
$$=a\left(x^2+\frac{b}{a}x\right)+c$$
$$=a\left[x^2+\frac{b}{a}x+\left(\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{b}{2a}\right)^2\right]+c$$
$$=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2}{4a^2}\right]+c$$
$$=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2}{4a}+c$$
$$=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a}.$$

2. 二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图象的画法

方法一：描点法.

（1）把二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 化成 $y=a(x-h)^2+k$ 的形式；

（2）确定抛物线的开口方向、对称轴和顶点坐标；

（3）在对称轴两侧，以顶点为中心，左右对称描点并用光滑曲线顺次连接.

方法二：平移法.

（1）把二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 化成 $y=a(x-h)^2+k$ 的形式，确定其顶点坐标为 (h,k)；

（2）作出二次函数 $y=ax^2$ 的图象；

（3）将二次函数 $y=ax^2$ 的图象平移，使其顶点平移到 (h,k).



3. 拓展 对于二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图象上的两点 $P_1(x_1,y_1)$，$P_2(x_2,y_2)$，若 $P_1(x_1,y_1)$ 和 $P_2(x_2,y_2)$ 关于直线 $x=-\dfrac{b}{2a}$ 对称，则 $y_1=y_2$，$\dfrac{x_1+x_2}{2}=-\dfrac{b}{2a}$.

拔考向 利用一般式与顶点式的关系解题

例 1 抛物线的表达式为 $y=x^2-4x+3$.

（1）将抛物线的一般式化为顶点式；

（2）在坐标系中利用五点法画出此抛物线.

解题秘方： 先用配方法将一般式化为顶点式，再进行解答.

提分·秘诀

解法提醒

“五点”包括顶点，以及关于对称轴对称的两个对点.

宋德基

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

解：（1）∵ $y=x^2-4x+3=(x^2-4x+4)-4+3=(x-2)^2-1$，

∴抛物线的顶点式为 $y=(x-2)^2-1$.

（2）列表：

x	…	0	1	2	3	4	…
y	…	3	0	−1	0	3	…

函数图象如图 2−2−15.

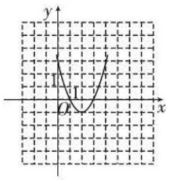


图 2−2−15

画图通法：若二次函数图象与 x 轴和 y 轴有交点，则最好选取交点进行描点. 在画二次函数的大致图象时，应注意以下五点：（1）开口方向；（2）对称轴；（3）顶点；（4）与 x 轴的交点；（5）与 y 轴的交点. 这种画法先研究函数图象的特点，确定图象的大致形状后，再选点就有了依据，避免了盲目性.

特别解读

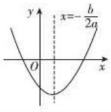
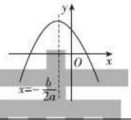
化一般式为顶点式也可用公式求，即

$h=-\frac{b}{2a}=-\frac{-4}{2\times1}=2$,

$k=\frac{4ac-b^2}{4a}=\frac{4\times1\times3-(-4)^2}{4\times1}=-1$,

∴抛物线的顶点式为 $y=(x-2)^2-1$.

点知识 ▸ 2 二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图象和性质

函数	$y=ax^2+bx+c$（a，b，c 是常数，$a\neq0$）	
	$a>0$	$a<0$
图象		
开口方向	向上	向下
对称轴	直线 $x=-\frac{b}{2a}$	
顶点坐标	$\left(-\frac{b}{2a},\frac{4ac-b^2}{4a}\right)$	
增减性	当 $x<-\frac{b}{2a}$ 时，y 随 x 的增大而减小；当 $x>-\frac{b}{2a}$ 时，y 随 x 的增大而增大	当 $x<-\frac{b}{2a}$ 时，y 随 x 的增大而增大；当 $x>-\frac{b}{2a}$ 时，y 随 x 的增大而减小
最值	当 $x=-\frac{b}{2a}$ 时，$y_{最小值}=\frac{4ac-b^2}{4a}$	当 $x=-\frac{b}{2a}$ 时，$y_{最大值}=\frac{4ac-b^2}{4a}$

拔考向 ▸ 利用二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图象和性质解决问题

例 2 已知抛物线 $y=2x^2-4x-6$.

（1）直接写出抛物线的开口方向、对称轴、顶点坐标；

（2）求抛物线与 x 轴的交点坐标、与 y 轴的交点坐标；

（3）当 x 取何值时，y 随 x 的增大而增大？

解题秘方：求图象与 x 轴的交点坐标，令 $y=0$，再解方程；求图象与 y 轴的交点坐标，令 $x=0$，再求值.

提分·必记

活学巧记

曲线名叫抛物线，
线轴交点是顶点，
顶点纵标是最值，
如果要画抛物线，
描点平移两条路.
提取配方定顶点，
平移描点皆成图.
列表描点后连线，
五点大致定全图.
若要平移也不难，
先画基础抛物线，
顶点移到新位置，
开口大小都不变.



二次函数的图象和性质

提分·秘诀

方法点拨

若要不画图象直接写出函数图象的特征，就必须根据函数图象的特征与二次函数表达式中系数之间的关系来确定. 对于抛物线 $y=ax^2+bx+c$，其中 a 决定

基础 不得不德

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

解：（1）开口向上，对称轴为直线 $x=1$，顶点坐标为（1，−8）.

（2）令 $y=0$，得 $2x^2-4x-6=0$，解得 $x_1=-1$，$x_2=3$.

∴与 x 轴的交点坐标为（−1，0），（3，0）.

令 $x=0$，得 $y=-6$.

∴与 y 轴的交点坐标为（0，−6）.

（3）当 $x\geqslant 1$ 时，y 随 x 的增大而增大.

开口方向，c为抛物线与y轴交点的纵坐标，对称轴和顶点坐标可直接根据公式 $x=-\frac{b}{2a}$，$\left(-\frac{b}{2a},\frac{4ac-b^2}{4a}\right)$ 来确定.

点知识 ▶ 3 二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图象特征与 a，b，c 的符号关系

二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 中，a 的符号决定抛物线的开口方向，ab 的符号决定抛物线对称轴的大致位置，c 的符号决定抛物线与 y 轴交点的大致位置，b^2-4ac 的符号决定抛物线与 x 轴的交点情况. 具体如下表：

	字母的符号	图象的特征
a	$a>0$	开口向上
	$a<0$	开口向下
$-\frac{b}{2a}$	$b=0$	对称轴为 y 轴
	$ab>0$（a，b 同号）	对称轴在 y 轴左侧
	$ab<0$（a，b 异号）	对称轴在 y 轴右侧
c	$c=0$	图象过原点
	$c>0$	图象与 y 轴正半轴相交
	$c<0$	图象与 y 轴负半轴相交
b^2-4ac	$b^2-4ac=0$	图象与 x 轴有唯一一个交点
	$b^2-4ac>0$	图象与 x 轴有两个交点
	$b^2-4ac<0$	图象与 x 轴没有交点

提分·必记

收藏夹

对于二次函数 $y=ax^2+bx+c$，

当 $x=1$ 时，$y=a+b+c$. 此时，

若 $y=0$，则 $a+b+c=0$；

若 $y>0$，则 $a+b+c>0$；

若 $y<0$，则 $a+b+c<0$.

当 $x=-1$ 时，$y=a-b+c$. 此时，

若 $y=0$，则 $a-b+c=0$；

若 $y>0$，则 $a-b+c>0$；

若 $y<0$，则 $a-b+c<0$.

拔考向 ▶ 利用二次函数的图象确定代数式的符号

例 3 已知二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图象如图 2−2−16，有下列结论：① $a+b+c<0$；② $a-b+c>0$；③ $abc>0$；④ $b=2a$. 其中正确的结论有（　　）

A. 4 个　　B. 3 个

C. 2 个　　D. 1 个

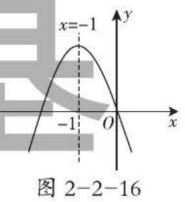


图 2−2−16

解题秘方：根据二次函数的图象特征与字母系数之间的关系判断.

提分·秘诀

详解

当 x=1 时，对应的函数值 $y=ax^2+bx+c=a+b+c$，观察图象可知此时抛物线上对应的点在 x 轴下方，说明此时的函数值 $y<0$，即 $a+b+c<0$.

解：当 $x=1$ 时，对应的函数值 $y=a+b+c$，观察图象可知此时 $y<0$，即 $a+b+c<0$，故①正确.

当 $x=-1$ 时，对应的函数值 $y>0$，即 $a-b+c>0$，故②正确.

观察图象知抛物线过原点，$c=0$，故 $abc=0$，故③错误.

∵此抛物线的对称轴是直线 $x=-1$，∴ $-\frac{b}{2a}=-1$，∴ $b=2a$，故④正确.

答案：B

特别提醒

因为抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 的对称轴是直线 $x=-\frac{b}{2a}$，所以判断 a，b 之间的关系时，往往需要根据抛物线的对称轴的位置来判断.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

点方法·拨技巧 提高分

拔尖角度 1 利用平移法解涉二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 与二次函数 $y=a(x-h)^2+k$ 的关系问题

例 4 将抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 向右平移 3 个单位长度，再向下平移 2 个单位长度，得到抛物线 $y=x^2+2x+3$，求 a，b，c 的值.

解题秘方：用逆向思维，把从未知抛物线平移到已知抛物线转化为从已知抛物线平移到未知抛物线求解.

解：∵ $y=x^2+2x+3=(x+1)^2+2$，

把抛物线 $y=(x+1)^2+2$ 向左平移 3 个单位长度，

再向上平移 2 个单位长度得到抛物线 $y=(x+4)^2+4$，

∴ $y=ax^2+bx+c=(x+4)^2+4=x^2+8x+20$.

∴ $a=1$，$b=8$，$c=20$.

技巧点拨：逆平移法

把从未知抛物线平移到已知抛物线，转化为从已知抛物线平移到未知抛物线的方法称为逆平移法，其方法的本质就是将平移的方向改变为原方向的相反方向，如本例逆过来就变为抛物线 $y=x^2+2x+3$ 向上平移 2 个单位长度，再向左平移 3 个单位长度得到抛物线 $y=ax^2+bx+c$.

挑战·高分

特别提醒

一般式也可以不化成顶点式，仍然按“左加右减自变量，上加下减常数项”原则进行平移. 只要熟记左加右减在所有的 x 上加减，上加下减在函数的末尾加减即可.

如本例可另解为：

∵抛物线 $y=x^2+2x+3$ 向上平移 2 个单位长度，再向左平移 3 个单位长度得到抛物线 $y=ax^2+bx+c$，

∴ $y=ax^2+bx+c=(x+3)^2+2(x+3)+3+2=x^2+8x+20$.

∴ $a=1$，$b=8$，$c=20$.

拔尖角度 2 利用图象法求二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 在指定自变量取值范围内的最值

例 5 在指定范围内求函数 $y=x^2-2x-3$ 的最值.

(1) $0<x<2$；

(2) $2\leqslant x\leqslant 3$.

解题秘方：紧扣抛物线的位置特征用图象法解.

解：∵ $y=x^2-2x-3=(x-1)^2-4$，

∴对称轴为直线 $x=1$，顶点坐标为 $(1,-4)$. 其图象如图 2-2-17.

(1) 由图知，当 $0<x<2$ 时，函数 $y=x^2-2x-3$ 有最小值，

当 $x=1$ 时，$y_{最小值}=-4$.

(2) ∵当 $x>1$ 时，y 随 x 的增大而增大，

∴当 $2\leqslant x\leqslant 3$ 时，y 随 x 的增大而增大.

∴当 $x=3$ 时，$y_{最大值}=3^2-2\times3-3=0$；

当 $x=2$ 时，$y_{最小值}=2^2-2\times2-3=-3$.

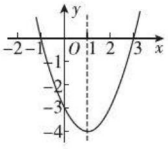


图 2-2-17

挑战·高分

技巧点拨

二次函数最值的求法：

1. 若自变量的取值范围是全体实数，则函数在顶点处取得最大值或最小值.

2. 若自变量的取值范围是 $x_1\leqslant x\leqslant x_2$.

(1) 若 $-\frac{b}{2a}$ 在自变量的取值范围内，则当 $x=-\frac{b}{2a}$ 时，取得最值 $y=\frac{4ac-b^2}{4a}$；

(2) 若 $-\frac{b}{2a}$ 不在自变量的取值范围内，则函数的最值即为当 $x=x_1$，$x=x_2$ 时的函数值.

荣德基

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

拔尖角度▸ 3 利用作图法求二次函数图象上的点的存在性问题

挑战·高分

例6 如图2-2-18，已知抛物线与x轴交于$A(-1,0)$，$B(3,0)$两点，与y轴交于$C(0,3)$.

（1）求抛物线的表达式.

（2）设抛物线的顶点为D，在其对称轴的右侧的抛物线上是否存在点P，使得$\triangle PDC$是等腰三角形？若存在，求出符合条件的点P的坐标；若不存在，请说明理由.

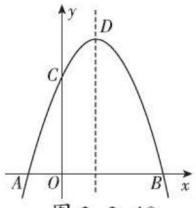


图2-2-18

特别提醒

- 对于是否存在的探究问题，一般先假设存在，在存在的前提下求出结论，则说明存在，否则说明不存在.
- 第(2)问中没有明确哪两条线段是等腰三角形的腰，还需分类讨论，即分PC=PD，DC=DP，CD=CP三种情况，防止漏解.

解题秘方：用作图法以CD为边作等腰三角形，再结合图象的性质求点P的坐标.

解：（1）∵抛物线与x轴交于$A(-1,0)$，$B(3,0)$两点，

∴对称轴为直线$x=1$.

设抛物线的表达式为$y=a(x+1)^2+k$.

分别将点$A(-1,0)$，$C(0,3)$的坐标代入表达式，

解得$a=-1$，$k=4$.

∴抛物线的表达式为$y=-(x+1)^2+4=-x^2+2x+3$.

（2）存在. 由（1）得，点D的坐标为$(1,4)$，对称轴为直线$x=1$，

①若$PC=PD$，设点P的坐标为(m,n)，

根据勾股定理，得$m^2+(3-n)^2=(m-1)^2+(4-n)^2$，

即$n=4-m$.

又点$P(m,n)$在抛物线上，

∴$4-m=-m^2+2m+3$，

即$m^2-3m+1=0$，解得$m=\dfrac{3\pm\sqrt{5}}{2}$.

∵$\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}<1$，

∴$m=\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$，

∴$n=4-m=\dfrac{5-\sqrt{5}}{2}$，

即点P的坐标为$\left(\dfrac{3+\sqrt{5}}{2},\dfrac{5-\sqrt{5}}{2}\right)$.

②若$DC=DP$，∵点P在对称轴右侧的抛物线上，

∴由抛物线的对称性知，点P与点C关于直线$x=1$对称，此时点P的坐标为$(2,3)$.

③若$CD=CP$，由图象知此种情况不存在.

∴符合条件的点P的坐标为$\left(\dfrac{3+\sqrt{5}}{2},\dfrac{5-\sqrt{5}}{2}\right)$或$(2,3)$.

宋德基

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

点中考·拨模拟 得满分

中考探秘 二次函数是历年中考的热点与难点，题型既有选择题和填空题，也有中档的解答题，还有与其他知识相结合的难度较大的压轴题．近几年，各地的中考试卷中还出现了设计新颖、贴近生活、反映时代特点的阅读理解题以及开放性探索题，主要考查学生分析问题和解决问题的能力以及计算能力和空间想象能力．解题的关键是掌握二次函数的有关性质及图象特征．

三年中考兵法

冲刺·满分

考法1 利用函数的最小值求字母系数的值

例7 [中考·黄冈]当 $a \leqslant x \leqslant a+1$ 时，函数 $y=x^2-2x+1$ 的最小值为1，则 a 的值为（　　）

A. -1　　B. 2　　C. 0或2　　D. -1 或2

试题评析：本题考查了二次函数的最值，求出当 $y=1$ 时 x 的值是解题的关键．

解：∵ $y=x^2-2x+1=(x-1)^2$，

∴抛物线对称轴为直线 $x=1$，顶点坐标为 $(1,0)$．

∵当 $a \leqslant x \leqslant a+1$ 时，函数有最小值1，且当 $y=1$ 时，有 $x^2-2x+1=1$，解得 $x_1=0$，$x_2=2$，∴ $a=2$ 或 $a+1=0$，

∴ $a=2$ 或 $a=-1$．

答案：D

思路引导

先化为顶点式，判断出增减情况，再求出当 $y=1$ 时 x 的值，结合当 $a \leqslant x \leqslant a+1$ 时函数有最小值1，即可得出关于 a 的一元一次方程，解之即可得出结论．

考法2 利用二次函数的性质比较函数值的大小

例8 [中考·兰州]点 $P_1(-1, y_1)$，$P_2(3, y_2)$，$P_3(5, y_3)$ 均在二次函数 $y=-x^2+2x+c$ 的图象上，则 y_1，y_2，y_3 的大小关系是（　　）

A. $y_3>y_2>y_1$　　B. $y_3>y_1=y_2$

C. $y_1>y_2>y_3$　　D. $y_1=y_2>y_3$

试题评析：本题考查了二次函数的增减性和对称性，解题的关键是利用二次函数的对称性，将对称轴两侧的函数值大小比较问题转化为同侧的函数值大小比较问题．

解：∵ $y=-x^2+2x+c=-(x-1)^2+1+c$，

∴该抛物线的对称轴为直线 $x=1$，且开口向下，$P_2(3, y_2)$，$P_3(5, y_3)$ 在对称轴的右侧．

∵在对称轴右侧，y 随 x 的增大而减小，$3<5$，∴ $y_2>y_3$．

根据二次函数图象的对称性可知，$P_1(-1, y_1)$ 与 $P_2(3, y_2)$ 关于抛物线的对称轴对称，故 $y_1=y_2>y_3$．

答案：D

方法点拨

比较抛物线上两点对应的函数值大小的方法：

1. 如果两点在对称轴的同侧，可以用二次函数的增减性比较大小；
2. 如果两点在对称轴的两侧，则可以利用二次函数的对称性将对称轴两侧的函数值大小比较问题转化为同侧的函数值大小比较问题；
3. 如果无法确定这两点是否在对称轴的同侧，可以把两点的坐标代入函数表达式中，用作差法比较大小．

荣德基

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

考法 3 利用二次函数的性质求几何最值

例 9 [中考·泰安]如图 2-2-19，在△ABC中，∠C=90°，AB=10 cm，BC=8 cm，点P从点A沿AC向点C以 1 cm/s 的速度运动，同时点Q从点C沿CB向点B以 2 cm/s 的速度运动（点Q运动到点B时两点均停止运动）．在运动过程中，四边形$PABQ$的面积最小值为（　　）

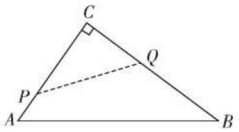


图 2-2-19

A. 19 cm^2　　B. 16 cm^2　　C. 15 cm^2　　D. 12 cm^2

试题评析：本题考查了二次函数的最值以及勾股定理，利用分割图形求面积法求出$S_{四边形PABQ}=t^2-6t+24$是解题的关键．

解：在 Rt△ABC中，∠C=90°，AB=10 cm，BC=8 cm，

∴ $AC=\sqrt{AB^2-BC^2}=6$ cm.

设运动时间为t s（$0\leqslant t\leqslant 4$），则$PC=(6-t)$ cm，$CQ=2t$ cm.

$$\therefore S_{四边形PABQ}=S_{\triangle ABC}-S_{\triangle CPQ}=\frac{1}{2}AC\cdot BC-\frac{1}{2}PC\cdot CQ$$

$$=\frac{1}{2}\times 6\times 8-\frac{1}{2}(6-t)\times 2t=t^2-6t+24$$

$$=(t-3)^2+15.$$

∴当t=3 时，四边形$PABQ$的面积取最小值，最小值为 15 cm^2.

答案：C

考法 4 利用二次函数的性质求抛物线上的最短距离问题

例 10 [中考·宁波]如图 2-2-20，已知抛物线$y=-x^2+mx+3$与x轴交于A，B两点，与y轴交于点C，点B的坐标为（3，0）．

（1）求m的值及抛物线的顶点坐标．

（2）点P是抛物线对称轴l上的一个动点，当$PA+PC$的值最小时，求点P的坐标．

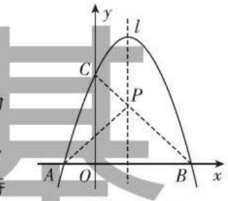


图 2-2-20

试题评析：此题考查了二次函数的性质、待定系数法求表达式以及最短距离问题，注意找到点P的位置是解此题的关键．

解：（1）把点B的坐标（3，0）代入$y=-x^2+mx+3$，

得$0=-3^2+3m+3$，解得m=2.

∴ $y=-x^2+2x+3=-(x-1)^2+4$，∴顶点坐标为（1，4）．

（2）如图 2-2-20，连接BC交抛物线的对称轴l于点P，连接PA，则此时$PA+PC$的值最小．

设直线BC的表达式为$y=kx+b$，由题易得C（0，3），

方法点拨

用二次函数的性质解几何图形面积的最值问题的方法：通常先根据图形的特点，结合相关联的几何性质，运用"面积法"和"勾股法"建立有关等式，进而转化为函数关系式，再运用求函数最值的方法求解．

详解

要在直线l上找一点P使$PA+PC$最小，可先找出点A（或点C）关于直线l的对称点，再将找出的对称点与另一点C（或点A）连接，连线与直线l的交点就是所求的点．

理由：如图 2-2-20，连接CB交直线l于点P，连接PA，∵点A关于直线l的对称点为点B，∴$PA=PB$.∴$PA+PC=CB$.在l上任取点P'（异于点P），连接$P'A$，$P'B$，$P'C$，则$P'A=P'B$.

∴$P'A+P'C=P'B+P'C$.

∵$P'B+P'C>BC$，

∴$PA+PC$的值最小．

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

$\therefore \begin{cases} 0=3k+b, \\ 3=b, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} k=-1, \\ b=3. \end{cases}$ $\therefore$ 直线 BC 的表达式为 $y=-x+3$.

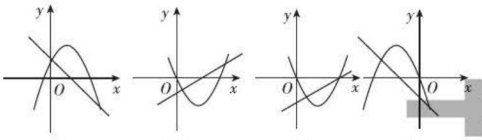
当 $x=1$ 时，$y=-1+3=2$.

$\therefore$ 当 $PA+PC$ 的值最小时，点 P 的坐标为（1，2）.

两年模拟兵法

☞ 答案见 218 页

1. [模拟 · 太原] 一次函数 $y=ax+b$ 和二次函数 $y=ax^2+bx$ 在同一平面直角坐标系中的图象可能是（　　）



A　　B　　C　　D

2. [中考 · 临沂] 二次函数 $y=ax^2+bx+c$，自变量 x 与函数 y 的对应值如表：

x	…	−5	−4	−3	−2	−1	0	…
y	…	4	0	−2	−2	0	4	…

下列说法正确的是（　　）

A. 抛物线的开口向下

B. 当 $x>-3$ 时，y 随 x 的增大而增大

C. 二次函数的最小值是 −2

D. 抛物线的对称轴是直线 $x=-\frac{5}{2}$

3. [中考 · 绍兴] 抛物线 $y=x^2+bx+c$（其中 b，c 是常数）过点 A（2，6），且抛物线的对称轴与线段 $y=0$（$1 \leqslant x \leqslant 3$）有交点，则 c 的值不可能是（　　）

A. 4　　B. 6　　C. 8　　D. 10

4. [模拟 · 重庆] 在平面直角坐标系中，已知抛物线 $y_1=ax^2+bx$ 与直线 $y_2=kx$ 如图. 当 $y_1 \neq y_2$ 时，取 y_1，y_2 中的较大值记为 N；当 $y_1=y_2$ 时，$N=y_1=y_2$. 下列说法：

①当 $0<x<2$ 时，$N=y_1$；

② N 随 x 的增大而增大的取值范围是 $x<0$；

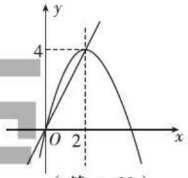
③取 y_1，y_2 中的较小值记为 M，则使得 M 大于 4 的 x 值不存在；

④若 $N=2$，则 $x=2-\sqrt{2}$ 或 $x=1$.

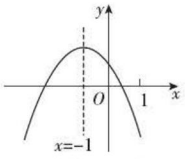
其中正确的有（　　）

A. 1 个　　B. 2 个

C. 3 个　　D. 4 个



（第 4 题）



（第 5 题）

5. [中考 · 安顺] 二次函数 $y=ax^2+bx+c$（$a \neq 0$）的图象如图，给出下列四个结论：

① $4ac-b^2<0$；② $3b+2c<0$；③ $4a+c<2b$；④ $m(am+b)+b<a$（$m \neq -1$）.

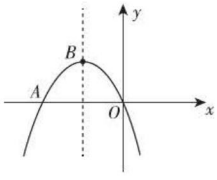
其中结论正确的个数是（　　）

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

6. [模拟 · 西安莲湖] 如图，二次函数 $y=-x^2+bx+c$ 的图象经过坐标原点，与 x 轴交于点 A（−2，0）.

（1）求此二次函数的顶点 B 的坐标.

（2）在抛物线上有一点 P，满足 $S_{\triangle AOP}=1$，请直接写出点 P 的坐标.



（第 6 题）

基德茉

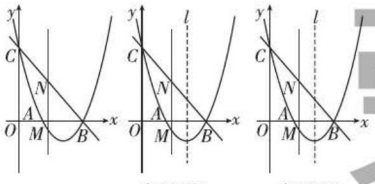
关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

7. [**中考·漳州**]如图，抛物线 $y=x^2+bx+c$ 与 x 轴交于点 A 和点 $B(3,0)$，与 y 轴交于点 $C(0,3)$.

（1）求抛物线的表达式.

（2）若点 M 是抛物线上在 x 轴下方的动点，过点 M 作 MN 平行于 y 轴，交直线 BC 于点 N，求线段 MN 的最大值.

（3）在（2）的条件下，当 MN 取得最大值时，在抛物线的对称轴 l 上是否存在点 P，使 $\triangle PBN$ 是等腰三角形？若存在，请直接写出所有点 P 的坐标；若不存在，请说明理由.



备用图1　备用图2

（第 7 题）

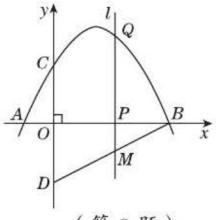
8. [**中考·黄冈**]如图，抛物线 $y=-\frac{1}{2}x^2+\frac{3}{2}x+2$ 与 x 轴交于点 A，点 B，与 y 轴交于点 C，点 D 与点 C 关于 x 轴对称，点 P 是 x 轴上一个动点. 设点 P 的坐标为（m，0），过点 P 作 x 轴的垂线 l 交抛物线于点 Q.

（1）求点 A，点 B，点 C 的坐标.

（2）求直线 BD 的表达式.

（3）当点 P 在线段 OB 上运动时，直线 l 交 BD 于点 M，试探究 m 为何值时，四边形 $CQMD$ 是平行四边形.

（4）在点 P 的运动过程中，是否存在点 Q，使 $\triangle BDQ$ 是以 BD 为直角边的直角三角形？若存在，求出点 Q 的坐标；若不存在，请说明理由.（提示：两条直线 $y_1=k_1x+b_1$ 与 $y_2=k_2x+b_2$ 互相垂直，则 $k_2k_2=-1$）



（第 8 题）

荣德基

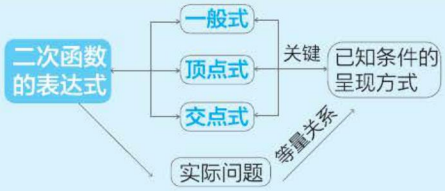
关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

3 确定二次函数的表达式

核心知识

- 用待定系数法求二次函数的表达式
- 二次函数的简单应用

知识链接



点知识·拨考向 速提分

点知识 1 用待定系数法求二次函数的表达式

1. 常见的二次函数表达式的适用条件

（1）一般式 $y=ax^2+bx+c$（a，b，c 为常数，$a\neq 0$）：已知抛物线上三点的坐标时，设此二次函数的表达式为 $y=ax^2+bx+c$.

（2）顶点式 $y=a(x-h)^2+k$（a，h，k 为常数，$a\neq 0$）：已知抛物线的顶点坐标或对称轴或最大（小）值时，可设此二次函数的表达式为 $y=a(x-h)^2+k$.

（3）交点式 $y=a(x-x_1)(x-x_2)$（a，x_1，x_2 为常数，$a\neq 0$）：已知抛物线与 x 轴的两个交点（x_1，0），（x_2，0）时，可设此二次函数的表达式为 $y=a(x-x_1)(x-x_2)$.

2. 用待定系数法求二次函数表达式的步骤

（1）**设**：根据题中已知条件，合理设出二次函数的表达式，如 $y=ax^2+bx+c$ 或 $y=a(x-h)^2+k$ 或 $y=a(x-x_1)(x-x_2)$，其中 $a\neq 0$.

（2）**代**：把已知点的坐标代入所设的二次函数表达式中，得到关于表达式中待定系数的方程（组）.

（3）**解**：解此方程或方程组，求出待定系数的值.

（4）**还原**：将求出的待定系数还原到表达式中，求得表达式.

提分·必记

技巧提醒

特殊位置抛物线的表达式的求法技巧：

1. 顶点在原点，可设为 $y=ax^2$；
2. 对称轴是 y 轴（或顶点在 y 轴上），可设为 $y=ax^2+k$；
3. 顶点在 x 轴上，可设为 $y=a(x-h)^2$；
4. 抛物线过原点，可设为 $y=ax^2+bx$.



拔考向 利用待定系数法求二次函数的表达式

题型 1：一般式在求二次函数表达式中的应用

例 1 如图 2-3-1，抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 经过 $A(-1,0)$，$B(0,-3)$，$C(3,0)$ 三点.

（1）求该抛物线对应的函数表达式.

（2）若该抛物线的顶点为 D，求 $\sin\angle BOD$ 的值.

解题秘方：紧扣利用待定系数法求二次函数的表达式的步骤解决问题.

提分·必记

方法点拨

求三角函数值必须构造直角三角形. 在平面直角坐标系中，一般向坐标轴作垂线段来构造直角三角形.

苯德基

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

解：（1）∵抛物线经过$A(-1,0)$，$B(0,-3)$，$C(3,0)$三点，

∴将A，B，C三点的坐标代入$y=ax^2+bx+c$中，得

$$\begin{cases} a-b+c=0, \\ c=-3, \\ 9a+3b+c=0, \end{cases} \text{解得} \begin{cases} a=1, \\ b=-2, \\ c=-3. \end{cases}$$

∴抛物线对应的函数表达式为$y=x^2-2x-3$.

（2）∵$y=x^2-2x-3=(x-1)^2-4$，

∴抛物线的顶点坐标为$(1,-4)$.

如图2-3-1，过点D作$DH\perp y$轴于点H.

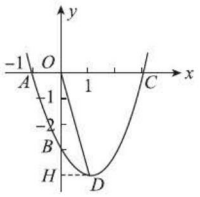


图2-3-1

在Rt△ODH中，∵$DH=1$，$OH=4$，

∴由勾股定理，得$OD=\sqrt{1^2+4^2}=\sqrt{17}$.

∴$\sin\angle BOD=\dfrac{DH}{OD}=\dfrac{1}{\sqrt{17}}=\dfrac{\sqrt{17}}{17}$.

题型2：顶点式在求二次函数表达式中的应用

例2 已知一个二次函数的图象的顶点坐标为$(-2,3)$，且图象与y轴的交点在y轴正方向上距原点4个单位长度处，求这个二次函数的表达式.

解题秘方：紧扣已知的顶点坐标，用待定系数法设出顶点式，求出函数的表达式.

解：由于此二次函数图象的顶点坐标为$(-2,3)$，所以可设其函数的表达式为$y=a[x-(-2)]^2+3$，即$y=a(x+2)^2+3$. 由题意可知，函数图象经过$(0,4)$点，将其代入$y=a(x+2)^2+3$中，得$4=a(0+2)^2+3$，所以$a=\dfrac{1}{4}$. 将$a=\dfrac{1}{4}$代入$y=a(x+2)^2+3$中，得$y=\dfrac{1}{4}x^2+x+4$，故这个二次函数的表达式为$y=\dfrac{1}{4}x^2+x+4$.

方法点拨

已知抛物线的顶点坐标，尽量将其表达式设为顶点式，这样会使计算变得简单.

题型3：交点式在求二次函数表达式中的应用

例3 已知抛物线与x轴的交点是$A(-2,0)$，$B(1,0)$，且抛物线经过点$C(2,8)$，求该抛物线对应的函数表达式.

解题秘方：紧扣交点式的函数表达式以及需要的条件，利用待定系数法求函数表达式.

解：∵抛物线与x轴的交点是$A(-2,0)$，$B(1,0)$，

∴可设抛物线对应的函数表达式为$y=a(x+2)(x-1)$.

又∵抛物线经过点$C(2,8)$，把它代入$y=a(x+2)(x-1)$中，得$8=a(2+2)\times(2-1)$，∴$a=2$.

故抛物线对应的函数表达式为$y=2(x+2)(x-1)$，即$y=2x^2+2x-4$.

方法点拨

当已知抛物线与x轴的两交点的坐标时，可将抛物线的表达式设为交点式，再把另一点的坐标代入，求出待定系数的值.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

点知识 ▸ 2 二次函数的简单应用

根据实际问题求二次函数表达式的步骤：

（1）先通过已知条件确定抛物线所经过的点的坐标；

（2）根据题意设出合适的二次函数表达式；

（3）用待定系数法和方程思想求出待定系数的值，从而确定二次函数的表达式.

拔考向 ▸ 利用待定系数法求函数表达式解决实际问题

例 4 一施工队对某隧道进行美化施工，已知隧道的横截面为抛物线的一部分，其最大高度为 7 m，底部宽度 OE 为 14 m. 如图 2-3-2，以点 O 为原点，OE 所在直线为 x 轴建立平面直角坐标系.

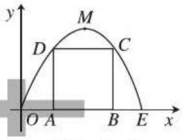


图 2-3-2

（1）写出顶点 M 的坐标并求出抛物线的函数表达式.

（2）施工队计划在隧道口搭建一个矩形“脚手架” $ABCD$，使 C，D 两点在抛物线上，A，B 两点在地面 OE 上. 设 OA 为 x m，“脚手架”三根木杆 AD,DC,CB 的长度之和为 l m. 当 x 为何值时，l 最大，最大值是多少？

解题秘方：先用待定系数法求出函数表达式，再利用表达式表示出有关点的坐标和所求量，进而求函数的最值.

解：（1）由题意，得点 M 的坐标为（7，7），点 E 的坐标为（14，0）. 设抛物线的函数表达式为 $y=ax^2+bx$,

则 $\begin{cases}49a+7b=7,\\196a+14b=0,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=-\dfrac{1}{7},\\b=2.\end{cases}$

故抛物线的函数表达式为 $y=-\dfrac{1}{7}x^2+2x$.

（2）由题意知，点 A 坐标为 $(x,0)$，则点 B，C，D 坐标分别为 $(14-x,0)$，$\left(14-x,-\dfrac{1}{7}x^2+2x\right)$，$\left(x,-\dfrac{1}{7}x^2+2x\right)$.

根据题意，得 $l=AD+DC+CB=\left(-\dfrac{1}{7}x^2+2x\right)+(14-2x)+\left(-\dfrac{1}{7}x^2+2x\right)=-\dfrac{2}{7}x^2+2x+14=-\dfrac{2}{7}\left(x-\dfrac{7}{2}\right)^2+\dfrac{35}{2}$.

$\because -\dfrac{2}{7}<0$,

$\therefore x=\dfrac{7}{2}$ 时，l 有最大值，最大值为 $\dfrac{35}{2}$.

提分·必记

特别提醒

当实物模型呈抛物线状时，平面直角坐标系的位置决定二次函数表达式的类型.

提分·秘诀

技巧点拨

本题第（2）问求解的关键是先分别求出 AD,DC,CB 的长度表达式，再求其和. 其中根据图形的特点，选取一个合适的变量是解题的难点.

详解

设 A(x,0)，∴点 A,D 的横坐标为 x. ∵点 D 在抛物线上，

∴点 D 的纵坐标为 $-\frac{1}{7}x^2+2x$,

∴ $AD=BC=\left(-\frac{1}{7}x^2+2x\right)$ m.

由抛物线的对称性，得 OA=BE=x,

∴ AB=CD=14-2x.

荣德基

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

点方法·拨技巧 提高分

拔尖角度 1 用待定系数法求二次函数的表达式

挑战·高分

例5 已知一个二次函数的图象经过 $A(-1,0)$，$B(3,0)$，$C(4,-5)$ 三点，求这个二次函数的表达式.

解题秘方：将点的坐标代入所设表达式，通过解方程（组）求出其待定系数的值.

解：方法一（设一般式）

设所求二次函数的表达式为 $y=ax^2+bx+c$，

把点 $A(-1,0)$，$B(3,0)$，$C(4,-5)$ 的坐标分别代入，得

$$\begin{cases} a-b+c=0, \\ 9a+3b+c=0, \\ 16a+4b+c=-5, \end{cases}$$

解得 $\begin{cases} a=-1, \\ b=2, \\ c=3. \end{cases}$

$\therefore$ 二次函数的表达式为 $y=-x^2+2x+3$.

方法二（设交点式）

设所求二次函数的表达式为 $y=a(x-x_1)(x-x_2)$，

$\because$ 二次函数的图象与 x 轴的两个交点为 $A(-1,0)$，$B(3,0)$，

$\therefore x_1=-1$，$x_2=3$.

故所求二次函数的表达式为 $y=a(x+1)(x-3)$.

又因其图象经过点 $C(4,-5)$，

$\therefore -5=a\times 5\times 1$，

$\therefore a=-1$.

故二次函数的表达式为 $y=-(x+1)(x-3)$，即 $y=-x^2+2x+3$.

方法三（设顶点式）

$\because$ 二次函数的图象与 x 轴的两个交点为 $A(-1,0)$，$B(3,0)$，

$\therefore$ 二次函数的图象的对称轴为直线 $x=1$.

设所求二次函数的表达式为 $y=a(x-1)^2+k$，

把点 $A(-1,0)$，$C(4,-5)$ 的坐标分别代入，得

$$\begin{cases} 4a+k=0, \\ 9a+k=-5, \end{cases}$$

解得 $\begin{cases} a=-1, \\ k=4, \end{cases}$

$\therefore$ 二次函数的表达式为 $y=-(x-1)^2+4$，即 $y=-x^2+2x+3$.

详解

$\begin{cases} a-b+c=0, ① \\ 9a+3b+c=0, ② \\ 16a+4b+c=-5, ③ \end{cases}$

②－①，得 $8a+4b=0$，

即 $2a+b=0$，④

③－②，得 $7a+b=-5$，⑤

⑤－④，得 $5a=-5$，

解得 $a=-1$

把 $a=-1$ 代入④，得 $b=2$.

把 $a=-1$，$b=2$ 代入①，得 $c=3$.

技巧点拨

求解二次函数的表达式时，应根据具体问题灵活选用最简便的方法．一般来说，设顶点式或交点式，计算过程会更简便一些，所以在涉及顶点坐标或图象与 x 轴的交点坐标时，优先选择设顶点式或交点式.

荣德基

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

拔尖角度▶ 2 利用待定系数法求函数表达式

挑战·高分

例 6 科幻小说《实验室的故事》中，有这样一个情节，科学家把一种珍奇的植物分别放在不同温度的环境中，经过一天后，测试出这种植物高度的增长情况（如下表）：

温度 x/℃	…	−4	−2	0	2	4	4.5	…
植物每天的高度增长量 y/mm	…	41	49	49	41	25	19.75	…

由这些数据，科学家推测出植物每天的高度增长量 y 是温度 x 的函数，且这种函数是一次函数和二次函数中的一种.

（1）请你选择一种适当的函数，求出它的函数关系式，并简要说明不选择另一种函数的理由.

（2）温度为多少时，这种植物每天的高度增长量最大？

（3）如果实验室温度保持不变，在 10 天内要使该植物高度增长量的总和超过 250 mm，那么实验室的温度 x 应该在哪个范围内？请直接写出结果.

解题秘方：先根据统计的数据特征判断满足条件的函数类型，求出函数表达式，再根据函数的性质解答相关问题.

解：（1）选择二次函数，设 $y=ax^2+bx+c$，

则 $\begin{cases} c=49, \\ 4a-2b+c=49, \\ 4a+2b+c=41, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} a=-1, \\ b=-2, \\ c=49. \end{cases}$

故 y 关于 x 的函数关系式是 $y=-x^2-2x+49$.

经验证，其他数据均满足 $y=-x^2-2x+49$.

∴ y 关于 x 的函数关系式为 $y=-x^2-2x+49$.

不选另外一种函数的理由：点（−4，41），（−2，49），（2，41）不在同一直线上，所以 y 不是 x 的一次函数.

（2）由（1）得，$y=-x^2-2x+49=-(x+1)^2+50$.

∵ $a=-1<0$，∴当 $x=-1$ 时，y 有最大值 50，

即当温度为 −1 ℃时，这种植物每天的高度增长量最大.

（3）$-6\ ℃<x<4\ ℃$.

解法提醒

判断若干个数据适合的函数种类的方法：

- 验证法：先分别用待定系数法求出不同种类的函数表达式，再将余下的数据代入，若满足所求表达式，则说明该表达式就是所求满足条件的表达式，否则就不是.
- 图象法：先画出满足数据条件的图象，再根据图象确定函数的种类.

基德英

点中考·拨模拟 得满分

中考探秘▶ 本节的主要考点有二次函数的三种表示形式之间的互相转化、二次函数表达式的确定、运用二次函数解决实际问题. 二次函数的表达式和二次函数的图象经常出现在综合题中，常见的题型有选择题、填空题、解答题，选择题和填空题一般较简单，解答题有一定的难度.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

三年中考兵法

考法1 利用求二次函数表达式解决最值和存在性问题

例7 [中考·宜宾]在平面直角坐标系 xOy 中，已知抛物线的顶点坐标为（2,0），且经过点（4,1），如图 2-3-3，直线 $y=\frac{1}{4}x$ 与抛物线交于 A，B 两点，直线 l 为 $y=-1$.

（1）求抛物线的表达式.

（2）在 l 上是否存在一点 P，使 $PA+PB$ 取得最小值？若存在，求出点 P 的坐标；若不存在，请说明理由。

试题评析：本题主要考查利用求二次函数的表达式解决最值和存在性的问题，解题的关键是用待定系数法求函数表达式，并利用二次函数的图象及性质解决最值问题及存在性问题。

解：（1）设抛物线的表达式为 $y=a(x-2)^2$，把点（4，1）代入，得 $a=\frac{1}{4}$，

$\therefore y=\frac{1}{4}(x-2)^2=\frac{1}{4}x^2-x+1.$

（2）存在. 联立 $\begin{cases}y=\frac{1}{4}x^2-x+1,\\ y=\frac{1}{4}x,\end{cases}$

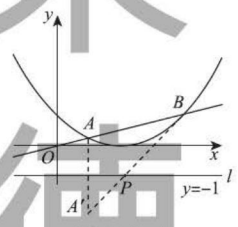


图 2-3-3

解得 $\begin{cases}x_1=1,\\ y_1=\frac{1}{4},\end{cases}$ $\begin{cases}x_2=4,\\ y_2=1,\end{cases}$

$\therefore A\left(1,\frac{1}{4}\right)$，$B(4,1)$.

如图 2-3-3，作点 A 关于直线 $y=-1$ 的对称点 A'，

易得 A' 的坐标为 $\left(1,-\frac{9}{4}\right)$.

连接 $A'B$，交 l 于点 P，则 P 即是所求的点.

设 $A'B$ 的表达式为 $y=kx+b$，

其经过 $A'\left(1,-\frac{9}{4}\right)$ 和 $B(4,1)$ 点，

$\therefore \begin{cases}1=4k+b,\\ -\frac{9}{4}=k+b,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}k=\frac{13}{12},\\ b=-\frac{10}{3},\end{cases}$

$\therefore y=\frac{13}{12}x-\frac{10}{3}.$

$\because$ 当 $y=-1$ 时，$x=\frac{28}{13}$，$\therefore P$ 点的坐标为 $\left(\frac{28}{13},-1\right)$.

冲刺·满分

方法点拨

- 用待定系数法求二次函数表达式的关键是根据给出的点的坐标特征或图象的特征选择合适的二次函数表达式的类型。
- 利用轴对称解决最值问题，关键要扣住“一线两点”的基本模型.

宋德基

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

考法 2 利用待定系数法求二次函数图象变换的表达式

例 8 [中考·凉山州] 如图 2-3-4，已知抛物线 $y=x^2+bx+c$ 经过点 $A(1,0)$，$B(0,2)$ 两点，顶点为 D.

(1) 求抛物线的表达式.

(2) 将 $\triangle OAB$ 绕点 A 顺时针旋转 $90°$ 后，点 B 落在点 C 的位置，将抛物线沿 y 轴平移后经过点 C，求平移后所得图象的函数表达式.

(3) 设 (2) 中平移后，所得抛物线与 y 轴的交点为 B_1，顶点为 D_1，若点 N 在平移后的抛物线上，且满足 $\triangle NBB_1$ 的面积是 $\triangle NDD_1$ 面积的 2 倍，求点 N 的坐标.

试题评析：本题考查的是抛物线表达式的求法，解题关键是会用待定系数法求函数表达式.

解：(1) 已知抛物线 $y=x^2+bx+c$ 经过点 $A(1,0)$，$B(0,2)$，

$\therefore \begin{cases} 1+b+c=0, \\ c=2, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} b=-3, \\ c=2. \end{cases}$

$\therefore$ 所求抛物线的表达式为 $y=x^2-3x+2$.

(2) $\because$ 点 A，B 坐标为 $(1,0)$，$(0,2)$，

$\therefore OA=1$，$OB=2$.

$\therefore$ 旋转后的点 C 的坐标为 $(3,1)$.

$\because$ 当 $x=3$ 时，$y=3^2-3\times3+2=2$，

$\therefore$ 抛物线 $y=x^2-3x+2$ 过点 $(3,2)$.

$\therefore$ 将原抛物线沿 y 轴向下平移 1 个单位后过点 C.

$\therefore$ 平移后的抛物线的表达式为 $y=x^2-3x+1$.

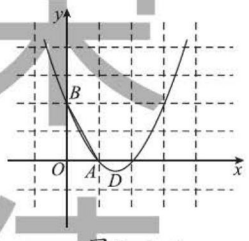


图 2-3-4

(3) 由题易得点 B_1，D，D_1 的坐标分别为 $(0,1)$，$\left(\frac{3}{2},-\frac{1}{4}\right)$，$\left(\frac{3}{2},-\frac{5}{4}\right)$，$\therefore BB_1=1$，$DD_1=1$.

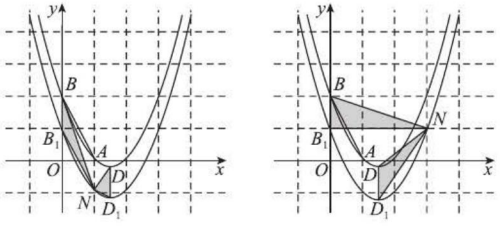
$\because$ 点 N 在 $y=x^2-3x+1$ 上，$\therefore$ 可设点 N 坐标为 $(x_0, x_0^2-3x_0+1)$.

将 $y=x^2-3x+1$ 配方得 $y=\left(x-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{5}{4}$，$\therefore$ 对称轴为直线 $x=\frac{3}{2}$.

①当 $0<x_0<\frac{3}{2}$ 时，如图 2-3-5 ①，

$\because S_{\triangle NBB_1}=2S_{\triangle NDD_1}$，$\therefore \frac{1}{2}\times1\times x_0=2\times\frac{1}{2}\times1\times\left(\frac{3}{2}-x_0\right)$，解得 $x_0=1$.

$\because x_0=1$ 时，$x_0^2-3x_0+1=-1$，$\therefore$ 点 N 的坐标为 $(1,-1)$.



① 图 2-3-5 ②

思路引导

1. 用待定系数法代入两个点的坐标，列出方程组，求出函数表达式；
2. 由旋转求出点 C 的坐标，因为抛物线沿 y 轴方向平移，所以将点 C 的横坐标代入，求出对应的纵坐标，即可求出平移的距离，得到平移后的表达式；
3. 点 N 在平移后的抛物线上，画草图发现，点 N 在对称轴的左侧或在对称轴的右侧时，组成的三角形形状发生变化，求面积时 $\triangle NDD_1$ 的高的表示方法分别为 $\frac{3}{2}-x_0$，$x_0-\frac{3}{2}$，所以这一问要进行分类讨论，按照点在对称轴的左右两侧分别研究. 在两种情况下分别列出方程，求出点的横坐标，继而可求出点的纵坐标.

突破基

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

②当 $x_0>\frac{3}{2}$ 时，如图 2-3-5 ②，

同理可得 $\frac{1}{2}\times1\times x_0=2\times\frac{1}{2}\times1\times(x_0-\frac{3}{2})$，解得 $x_0=3$.

∵ $x_0=3$ 时，$x_0^2-3x_0+1=1$，

∴点 N 的坐标为（3，1）.

综上，点 N 的坐标为（1，－1）或（3，1）.

两年模拟兵法

☞ 答案见 219 页

1. 若抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 的顶点坐标是（－2，3），且点（－1，5）在这条抛物线上，则该抛物线所对应的函数表达式为（　　）

A. $y=x^2+8x+11$　　B. $y=x^2-8x-11$

C. $y=2x^2+8x+11$　　D. $y=2x^2-8x+11$

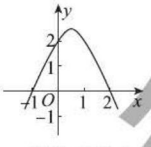
2. 如图，抛物线所对应的函数表达式是（　　）

A. $y=x^2-x+2$

B. $y=-x^2-x-2$

C. $y=x^2+x+2$

D. $y=-x^2+x+2$



（第 2 题）

3. 已知某抛物线与 x 轴的两个交点为（－1，0），（3，0），且其形状与抛物线 $y=-2x^2$ 相同，则该抛物线的函数表达式为（　　）

A. $y=-2x^2-x+3$　　B. $y=-2x^2+4x+5$

C. $y=-2x^2+4x+8$　　D. $y=-2x^2+4x+6$

4. 某同学在用描点法画二次函数的图象时，列出了下面的表格：

x	…	−2	−1	0	1	2	…
y	…	−11	−2	1	−2	−5	…

由于粗心，他算错了其中一个 y 的值，则这个错误的数值是（　　）

A. −11　　B. −2

C. 1　　D. −5

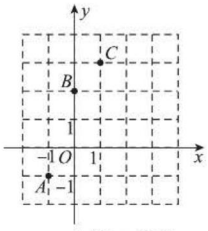
5. [中考·上海] 已知一个二次函数的图象开口向上，顶点坐标为（0，－1），那么这个二次函数的表达式可以是_____.（只需写一个）

6. 对称轴与 y 轴平行且经过原点 O 的抛物线也经过 $A(2,m)$，$B(4,m)$，若△AOB 的面积为 4，则抛物线的表达式为_____.

7. 如图，已知二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图象经过点 $A(-1,-1)$，$B(0,2)$，$C(1,3)$.

（1）求二次函数的表达式；

（2）画出该二次函数的图象.



（第 7 题）

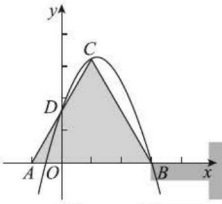
苏德基

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

8. 如图，已知△ ABC 是边长为 4 的正三角形，AB 在 x 轴上，点 C 在第一象限，AC 与 y 轴交于点 D，点 A 的坐标为（ − 1，0）.

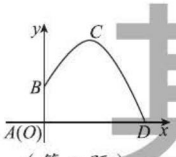
（1）求出 B，C，D 三点的坐标.

（2）若抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 经过 B，C，D 三点，求此抛物线的表达式.



（第 8 题）

9. 改革开放后，不少农村用上了自动喷灌设备. 如图，设水管 AB 高出地面 1.5 m，在 B 处有一个自动旋转的喷水龙头，喷出的水流呈抛物线状，喷头 B 与水流最高点 C 的连线与水平面成 45° 角，水流最高点 C 比喷头高出 2 m，在所建立的平面直角坐标系中（点 A 与原点重合），求水流的落地点 D 到 A 的距离.



（第 9 题）

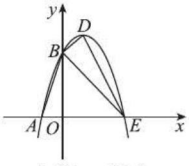
10. 如图，已知抛物线与 x 轴交于 A（ − 1，0），E（3，0）两点，与 y 轴交于点 B（0，3）.

（1）求抛物线对应的函数表达式.

（2）设抛物线的顶点为 D，求四边形 $ABDE$ 的面积.

（3）△ AOB 与△ DBE 是否相似？如果相似，请给以证明；如果不相似，请说明理由.

[导学号 2380328]



（第 10 题）

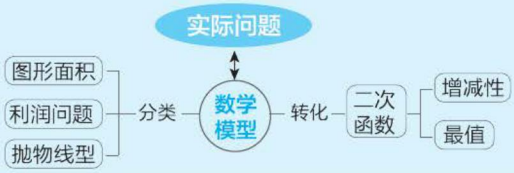
荣德基

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

4 二次函数的应用

核心知识
- 实际问题
- 二次函数模型

知识链接



点知识·拨考向 速提分

点知识 1 用二次函数解实际问题

1. 常用方法

利用二次函数解决实际问题，首先要建立数学模型，把实际问题转化为二次函数问题，利用题中存在的等量关系，求出函数表达式，然后利用函数的图象和性质去解决问题.

2. 一般步骤

（1）**审**：仔细审题，理清题意.

（2）**设**：找出问题中的变量和常量，分析它们之间的关系，与图形相关的问题要结合图形具体分析，设出适当的未知数.

（3）**列**：用二次函数表示出变量和常量之间的关系，建立二次函数模型，把实际问题转化成数学问题，根据题中的数量关系列出二次函数的表达式.

（4）**解**：依据已知条件，借助二次函数的表达式、图象和性质等求解实际问题.

（5）**检**：检验结果，得出符合实际意义的结论.

提分·必记

要点解读

1. 用二次函数求解实际问题时，审题是关键，检验容易被忽略. 求得的结果，除了要满足题中的数量关系，还要符合实际问题的意义.
2. 在求解实际问题中的最值问题时，解题思路是列二次函数表达式，用配方法把函数表达式化为 $y=a(x-h)^2+k$ 的形式求解，或者针对函数表达式用顶点坐标公式计算函数的最值.

拔考向 利用用二次函数解实际问题的常用方法解应用题

例 1 [中考·青岛]青岛市某大酒店豪华间实行淡季、旺季两种价格标准，旺季每间价格比淡季上涨 $\frac{1}{3}$. 下表是去年该酒店豪华间某两天的相关记录：

	淡季	旺季
未入住房间数	10	0
日总收入/元	24 000	40 000

（1）该酒店豪华间有多少间？旺季每间价格为多少元？

（2）今年旺季来临，豪华间的间数不变. 经市场调查发现，如果豪华间仍旧实行去年的旺季价格，那么每天都客满；如果价格继

提分·秘诀

特别提醒

1. 要按照用二次函数解实际问题的步骤解答.
2. 列函数表达式时，要找能包含全部题意的等量关系，并且要考虑自变量的取值范围.
3. 求所列函数的最值时，既可以化为顶点式求，也可以按顶点坐标公式求.

荣德基

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

续上涨，那么每增加 25 元，每天未入住房间数增加 1 间．不考虑其他因素，该酒店将豪华间的价格上涨多少元时，豪华间的日总收入最高？最高日总收入是多少元？

解题秘方：紧扣“总收入 = 每间价格 × 房间数”列式解答．

解：（1）设淡季每间价格为 x 元，酒店豪华间有 y 间，则

$$\begin{cases} x(y-10)=24\,000, \\ x\left(1+\dfrac{1}{3}\right)y=40\,000, \end{cases} \text{解得} \begin{cases} x=600, \\ y=50. \end{cases}$$

$$\therefore x+\frac{1}{3}x=600+\frac{1}{3}\times 600=800.$$

因此，该酒店豪华间有 50 间，旺季每间价格为 800 元．

（2）设该酒店豪华间的价格上涨 m 元，日总收入为 W 元，则

$$W=(800+m)\left(50-\frac{m}{25}\right)=-\frac{1}{25}(m-225)^2+42\,025.$$

当 $m=225$ 时，W 取得最大值，此时 $W=42\,025$．

因此，该酒店将豪华间的价格上涨 225 元时，豪华间的日总收入最高，最高日总收入是 42 025 元．

4. 写答案时，要特别注意函数的最值是否是实际问题的最值．若顶点的横坐标的取值在实际问题的自变量的取值范围内，则函数的最值是实际问题的最值，否则就不是．

点知识 ▸ 2 建立二次函数模型解决几何图形面积最值问题

1. 有关图形的面积问题，通常用含有自变量 x 的代数式来表示，一般步骤为

（1）根据图形的面积构造关于 x 的二次函数；

（2）利用二次函数的顶点坐标求出二次函数的最值，从而解决几何图形面积的最值问题．

2. 根据几何图形的面积建立函数关系的方法

求解图形面积的最值问题时，若针对规则几何图形（如三角形、平行四边形等），则可依据几何图形的面积公式建立函数关系；若针对不规则图形，则要用割补图形的方法，将不规则的图形转化成规则的几何图形，然后通过计算规则几何图形的面积和（或面积差）建立函数关系．

提分·必记

特别提醒

解决几何图形面积的最大或最小问题，先确定面积的变化与哪些量的变化有关，然后利用图形的面积与这些变量之间的关系建立二次函数的模型，最后利用二次函数的性质以及自变量的取值范围确定面积的最大值或最小值．

拔考向 ▸ 利用二次函数求解图形面积的最值问题

题型 1：二次函数模型在周长已知、求面积最大值中的应用

例 2 如图 2-4-1，有长为 24 m 的篱笆，一面利用墙（墙的最大可用长度 a 为 10 m），围成中间隔有一道篱笆的长方形花圃．设花圃的宽 AB 为 x m，面积为 S m^2．

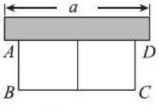


图 2-4-1

（1）求 S 关于 x 的函数表达式．

（2）围成的花圃面积最大是多少？请说明围法．

解题秘方：紧扣几何图形的形状，建立二次函数模型，利用二次函数的性质求面积的最值．

提分·秘诀

方法点拨

求二次函数的最值时，不要盲目地认为顶点的纵坐标就是函数的最值．要结合实际意义确定自变量的取值范围，根据二次函数增减性求出该范围内的最值．

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

解：（1）由题得 $S=x(24-3x)=-3x^2+24x\left(\frac{14}{3}\leqslant x<8\right)$.

（2）$S=-3x^2+24x=-3(x-4)^2+48$.

$\because \frac{14}{3}\leqslant x<8$,

$\therefore$ 当 $x=\frac{14}{3}$ 时，S 有最大值，$S_{最大值}=48-3\times\left(\frac{14}{3}-4\right)^2=\frac{140}{3}$.

围法：$\because 24-3\times\frac{14}{3}=10$（m），

$\therefore$ 花圃的长为 10 m，宽为 $\frac{14}{3}$ m，这时最大面积为 $\frac{140}{3}$ m^2.

题型 2：二次函数模型在动点类图形面积最值中的应用

例 3 如图 2-4-2，已知抛物线 $y=-x^2+bx+c$ 经过 $A(3,0)$，$B(0,3)$ 两点．取一根橡皮筋，两端点分别固定在 A，B 处，用铅笔拉着这根橡皮筋使笔尖 P 在直线 AB 上方的抛物线上移动，动点 P 与 A，B 两点构成无数个三角形，在这些三角形中是否存在一个面积最大的三角形？如果存在，求出最大面积，并指出此时点 P 的坐标；如果不存在，请简要说明理由．

解题秘方：紧扣动点对三角形面积变化的决定作用，利用动点的坐标表示三角形面积，建立二次函数模型，结合二次函数的性质求面积的最值．

解：存在．由题意，得 $\begin{cases}c=3,\\-9+3b+c=0,\end{cases}$

解得 $b=2,c=3$.

所以抛物线表达式为 $y=-x^2+2x+3$. 易求得直线 AB 的表达式为 $y=-x+3$.

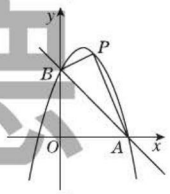


图 2-4-2

如图 2-4-3，过点 P 作 $PD\perp x$ 轴，交直线 AB 于点 N，交 x 轴于点 D.

过点 B 作 $BC\perp PD$ 交 PD 于点 C.

设点 P 坐标为 $(x,-x^2+2x+3)$，则点 N 坐标为 $(x,-x+3)$.

$\therefore PN=-x^2+2x+3-(-x+3)=-x^2+3x$.

$\therefore S_{\triangle ABP}=S_{\triangle BPN}+S_{\triangle APN}$

$=\frac{1}{2}PN\cdot BC+\frac{1}{2}PN\cdot AD$

$=\frac{1}{2}(-x^2+3x)\cdot x+\frac{1}{2}(-x^2+3x)(3-x)$

$=-\frac{3}{2}x^2+\frac{9}{2}x=-\frac{3}{2}\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{27}{8}\left(0<x<3\right)$.

故当 $x=\frac{3}{2}$ 时，$\triangle ABP$ 的面积最大，最大面积为 $\frac{27}{8}$.

此时点 P 的坐标为 $\left(\frac{3}{2},\frac{15}{4}\right)$.

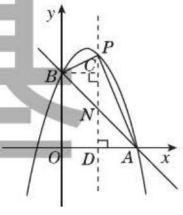


图 2-4-3

方法点拨

本题利用割补法把一个三角形分成两个三角形，巧妙地假设点 P 的横坐标为 x，结合铅垂高表示出三角形面积的函数表达式，然后利用二次函数的性质求出面积的最大值．有时候利用铅垂高来求三角形的面积不失为一种好的方法．

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

点知识▶ 3 建立二次函数模型解决商品经济利润最值问题

1. 常见利润问题中的数量关系

利润 = 售价 − 成本，总利润 = 每件商品的利润 × 销量，利润率 = $\frac{\text{利润}}{\text{进价}}\times 100\%$.

2. 利用二次函数解决商品销售中的最大利润问题时，一般步骤为

（1）**审**：仔细审题，理解题意.

（2）**设**：设出自变量，并用含自变量的代数式表示销售单价、销售量、营业额、成本等.

（3）**列**：用因变量及含自变量的代数式分别表示销售利润，即可得到二次函数表达式.

（4）**解**：根据函数表达式求出最值及取得最值时自变量的值.

提分·必记

特别提醒

解决商品经济利润最大值的问题，需要先建立利润与售价之间的函数表达式，然后根据自变量——售价的取值范围，结合二次函数的增减性确定利润的最大值.

拔考向▶ 利用二次函数的性质解决利润最值问题

例 4 草莓是云南多地盛产的一种水果. 今年某水果销售店在草莓销售旺季，试销售成本为每千克 20 元的草莓，规定试销期间销售单价不低于成本单价，也不高于每千克 40 元. 经试销发现，销售量 y（千克）与销售单价 x（元）符合一次函数关系，如图 2−4−4 是 y 与 x 的函数关系图象.

（1）求 y 关于 x 的函数表达式，并直接写出 x 的取值范围.

（2）设该水果销售店试销草莓获得的利润为 W 元，求 W 的最大值.

解题秘方：紧扣总利润的计算方法，建立总利润与单价之间的二次函数关系式，利用二次函数的性质求利润的最大值.

解：（1）设 y 关于 x 的函数表达式为 $y=kx+b$，由图 2−4−4 可知，函数图象经过点 $A(20,300)$，$B(30,280)$，

$$\therefore \begin{cases} 20k+b=300, \\ 30k+b=280, \end{cases} \text{解得} \begin{cases} k=-2, \\ b=340. \end{cases}$$

$\therefore$ y 关于 x 的函数表达式为 $y=-2x+340$，x 的取值范围是 $20\leqslant x\leqslant 40$.

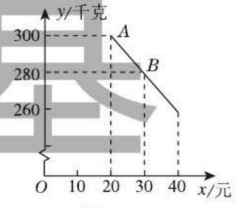


图 2−4−4

（2）该水果销售店试销草莓获得的利润为

$W=y(x-20)=(-2x+340)(x-20)=-2x^2+380x-6\,800$

$=-2(x-95)^2+11\,250.$

$\because -2<0$，$\therefore$ 当 $x\leqslant 95$ 时，W 随 x 的增大而增大.

$\because 20\leqslant x\leqslant 40$，

$\therefore$ 当 $x=40$ 时，W 最大，$W_{\text{最大值}}=-2\times(40-95)^2+11\,250=5\,200$（元）.

提分·秘诀

方法点拨

(1) 解答本题的关键是将实际问题转化为求函数最值问题. 解这类题，既要看到销售价格对销售量的影响，也要看到销售价格对单件商品利润产生的影响，两者结合起来，销售价格就会对销售总利润产生影响.

(2) 利润公式：总利润 = 单件利润 × 销售量 = 总销售额 − 总成本；利润 = 售价 − 进价.


建立二次函数模型求最值

荣德基

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

点方法·拨技巧 提高分

拔尖角度 1 利用函数思想求几何图形中的最值问题

挑战·高分

例5 [中考·潍坊]如图2-4-5，工人师傅用一块长为10 dm、宽为6 dm的矩形铁皮制作一个无盖的长方体容器，需要将四角各裁掉一个正方形.（厚度不计）

（1）在图中画出裁剪示意图，用实线表示裁剪线，虚线表示折痕，并求长方体底面面积为12 dm^2时，裁掉的正方形边长多大.

（2）若要求制作的长方体的底面长不大于底面宽的五倍，并将容器进行防锈处理，侧面每平方分米的费用为0.5元，底面每平方分米的费用为2元，裁掉的正方形边长多大时，总费用最低，最低为多少？

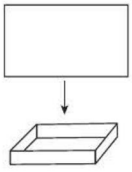


图2-4-5



图2-4-6

解题秘方：紧扣长方形面积与边长的关系列式解答.

解：（1）裁剪示意图如图2-4-6.

设裁掉的正方形的边长为x dm，

由题意可得$(10-2x)(6-2x)=12$，

即$x^2-8x+12=0$，

解得$x=2$或$x=6$（舍去）.

因此，当长方体底面面积为12 dm^2时，裁掉的正方形的边长为2 dm.

（2）∵长方体的底面长不大于底面宽的五倍，

∴$10-2x\leqslant 5(6-2x)$，

∴$0<x\leqslant 2.5$.

设总费用为W元，由题意可知

$W=0.5\times 2x(16-4x)+2(10-2x)(6-2x)$

$=4x^2-48x+120$

$=4(x-6)^2-24$.

∵对称轴为直线$x=6$，且开口向上，

∴当$0<x\leqslant 2.5$时，W随x的增大而减小.

∴当$x=2.5$时，W有最小值，最小值为25.

因此，当裁掉的正方形边长为2.5 dm时，总费用最低，最低费用为25元.

解法提醒

求满足什么条件时几何图形（几何体）有最大面积（最大体积）的问题，往往可转化成求二次函数的最值问题，需要借助几何图形的面积和体积公式及相关性质，建立变量之间的二次函数关系，利用二次函数的性质求最值.

警示误区

本例不要误认为当x=6时，w=-24是实际问题的最小值，因为x=6不在实际问题的自变量的范围内，所以只能从函数的增减性来求最值.

宋德基

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

拔尖角度▶ 2 利用二次函数增减性法求销售利润中的最值问题

挑战·高分

题型1：求最大利润问题

例6 [中考·安徽]某超市销售一种商品，成本每千克40元，规定每千克售价不低于成本，且不高于80元．经市场调查，每天的销售量y（千克）与每千克售价x（元）满足一次函数关系，部分数据如下表：

售价x/（元/千克）	50	60	70
销售量y/千克	100	80	60

（1）求y与x之间的函数表达式．

（2）设商品每天的总利润为W（元），求W与x之间的函数表达式（利润＝售价－成本）．

（3）试说明（2）中总利润W随售价x的变化而变化的情况，并指出售价为多少元时获得最大利润，最大利润是多少．

解题秘方：紧扣“总利润＝每千克商品的利润×销售量”这一关系解答．

解：（1）设y与x之间的函数表达式为$y=kx+b$，则

$$\begin{cases}50k+b=100,\\60k+b=80,\end{cases}\text{解得}\begin{cases}k=-2,\\b=200,\end{cases}$$

即y与x之间的函数表达式是$y=-2x+200$（$40\leqslant x\leqslant 80$）．

（2）由题意可得，$W=(x-40)(-2x+200)=-2x^2+280x-8\,000$，

即W与x之间的函数表达式是$W=-2x^2+280x-8\,000$（$40\leqslant x\leqslant 80$）．

（3）$\because W=-2x^2+280x-8\,000=-2(x-70)^2+1\,800$，$40\leqslant x\leqslant 80$，

$\therefore$当$40\leqslant x\leqslant 70$时，$W$随$x$的增大而增大；当$70<x\leqslant 80$时，$W$随$x$的增大而减小．

$\therefore$当$x=70$时，W取得最大值，此时$W=1\,800$，即最大利润是1 800元．

题型2：优选销售方案

例7 某商场要经营一种新上市的文具，进价为20元/件，试营销阶段发现：当销售价格为25元/件时，每天的销售量为250件，每件销售价格每上涨1元，每天的销售量就减少10件．

（1）请你写出商场销售这种文具每天所得的销售利润w（元）与销售价格x（元/件）之间的函数关系式．

（2）销售价格为多少时，该文具每天的销售利润最大？

（3）商场的营销部结合上述情况，提出了A，B两种营销方案．

方案A：该文具的销售价格高于进价且不超过30元/件．

方案B：每天销售量不少于10件，且每件文具的利润至少为25元．

知识储备

用二次函数解决商品销售问题中的最大利润、最低成本等问题，要熟练掌握相关数量的意义、常用的数量关系，根据具体问题，建立函数表达式，解决实际问题．

常见销售问题中的数量关系：利润＝售价－成本，总利润＝每千克商品的利润×销售量，利润率＝$\frac{\text{利润}}{\text{进价}}\times 100\%$．

详解

销售价格（元/件）	销售量（件）
25	250
25+1	250−10
25+2	250−20
…	…
25+m	250−10m
x	250−10（x−25）

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

请通过计算说明哪种方案的最大利润更高.

解题秘方：用比较法对求出的每种方案的最大利润进行比较，优选销售方案.

解：（1）$w=(x-20)[250-10(x-25)]=-10x^2+700x-10\,000$.

（2）∵ $w=-10x^2+700x-10\,000=-10(x-35)^2+2\,250$，

∴当 $x=35$ 时，w 有最大值，

即销售价格为 35 元/件时，该文具每天的销售利润最大.

（3）方案 A：由题意，得 $w=-10(x-35)^2+2\,250\ (20<x\leqslant 30)$.

∵ $-10<0$，抛物线的对称轴为直线 $x=35$，

∴抛物线开口向下，在对称轴的左侧，w 随 x 的增大而增大.

∴当 $x=30$ 时，w 取最大值为 2 000.

方案 B：由题意得，$\begin{cases}x\geqslant 20+25,\\250-10(x-25)\geqslant 10,\end{cases}$ 解得 $45\leqslant x\leqslant 49$.

∴ $w=-10(x-35)^2+2\,250\ (45\leqslant x\leqslant 49)$.

∵在对称轴（直线 $x=35$）的右侧，w 随 x 的增大而减小，

∴当 $x=45$ 时，w 取最大值为 1 250.

∵ $2\,000>1\,250$，∴方案 A 的最大利润更高.

方法点拨：利用二次函数的性质求最大利润的方法

对于二次函数 $y=ax^2+bx+c$，当 $a<0$ 时，函数有最大值，最大值为 $\dfrac{4ac-b^2}{4a}$. 在实际问题中，求商品最大利润的一般步骤：

（1）列出二次函数表达式，并根据自变量的实际意义，确定自变量的取值范围；

（2）在自变量的取值范围内，运用公式法或配方法求出二次函数的最大值. 需要注意的是，当二次函数图象的顶点的横坐标不在自变量的取值范围之内时，需结合二次函数的图象，根据二次函数的增减性，在自变量的取值范围之内求出函数的最值.

拔尖角度 3 利用建立二次函数模型法解实际中抛物线型最值问题

例 8 [中考·德州]随着新农村的建设和旧城的改造，我们的家园越来越美丽，小明家附近广场中央新修了一个圆形喷水池（如图 2-4-8），在水池中心竖直安装了一根高为 2 m 的喷水管，它喷出的抛物线形水柱在与水池中心的水平距离为 1 m 处达到最高，水柱落地处离水池中心 3 m.

（1）请你建立适当的平面直角坐标系，并求出水柱抛物线对应的函数表达式.

图解

$w=-10(x-35)^2+2\,250$ 的大致图象如图 2-4-7.

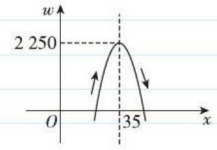


图 2-4-7

特别提醒

第(3)问中由于自变量取值范围的限制，方案A和方案B中所求的最大利润都不是抛物线顶点的纵坐标.

挑战·高分

知识储备

许多实际问题（如与隧道洞口、桥洞、球的运动轨迹、喷泉喷出的水的轨迹等相关的实际问题）中都存在着与抛物线的形状相关的图形，此类问题可以通过构建二次函数表达式来求解.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

（2）求水柱的最大高度是多少．



图 2-4-8

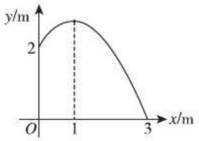


图 2-4-9

解题秘方：求水柱的最大高度，关键是建立适当的平面直角坐标系，求出其顶点坐标．

解：（1）如图 2-4-9，以喷水管与地面交点为原点，原点与水柱落地点所在直线为 x 轴，喷水管所在直线为 y 轴，建立平面直角坐标系．设抛物线对应的函数表达式为 $y=a(x-1)^2+h$，

把（0，2）和（3，0）代入得 $\begin{cases}4a+h=0,\\ a+h=2,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=-\dfrac{2}{3},\\ h=\dfrac{8}{3}.\end{cases}$

$\therefore$ 抛物线对应的函数表达式为 $y=-\dfrac{2}{3}(x-1)^2+\dfrac{8}{3}$，

即 $y=-\dfrac{2}{3}x^2+\dfrac{4}{3}x+2\ (0\leqslant x\leqslant 3)$．

（2）由（1）得 $y=-\dfrac{2}{3}x^2+\dfrac{4}{3}x+2=-\dfrac{2}{3}(x-1)^2+\dfrac{8}{3}\ (0\leqslant x\leqslant 3)$，

$\therefore$ 当 $x=1$ 时，$y=\dfrac{8}{3}$，即水柱的最大高度为 $\dfrac{8}{3}$ m．

求解的一般步骤是：

1. 建立适当的平面直角坐标系，将抛物线形状的图形放在坐标系中；
2. 结合图形和已知条件，分析变量间的关系；
3. 用待定系数法求函数表达式；
4. 利用二次函数的表达式及其性质，求解实际问题．

技巧点拨

同一个问题中，建立平面直角坐标系的方法有多种，建立适当的平面直角坐标系能简化求解过程．通常在已知点所在位置处建立平面直角坐标系，以方便求解为原则．

点中考·拨模拟 得满分

中考探秘

利用二次函数解决实际问题，是中考考查的重点和热点，命题形式多样，试题背景新颖．简单的实际问题多以选择题和填空题的形式出现；综合性较强的实际问题常与一次函数、方程、不等式等知识综合考查，有时也会结合三角形、四边形等几何知识综合考查，以解答题的形式出现．

三年中考兵法

考法 1 利用二次函数图象和性质解决几何问题

例 9 [中考·荆州]为响应荆州市“创建全国文明城市”号召，某单位不断美化环境，拟在一块矩形空地上修建绿色植物园，其中一边靠墙，可利用的墙长不超过 18 m，另外三边由 36 m 长的栅栏围成．设矩形 $ABCD$ 空地中，垂直于墙的边 $AB=x$ m，面积为 y m^2（如图 2-4-10）．

（1）求 y 与 x 之间的函数关系式，并写出自变量 x 的取值范围．

（2）若矩形空地的面积为 160 m^2，求 x 的值．

冲刺·满分

思路引导

1. 用含 x 的代数式表示矩形的另一边 BC，根据矩形面积的计算方法列出函数关系式．由矩形的任一边都大于 0 m 且 BC 不超过 18 m 列出关于 x 的不等式组，确定 x 的取值范围．

莱德基

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

（3）若该单位用 8 600 元购买了甲、乙、丙三种绿色植物共 400 棵（每种植物的单价和每棵栽种的合理用地面积如下表）. 问丙种植物最多可以购买多少棵？此时，这批植物可以全部栽种到这块空地上吗？请说明理由.

	甲	乙	丙
单价 / 元	14	16	28
合理用地 /（m^2/ 棵）	0.4	1	0.4

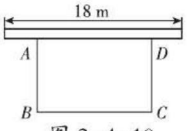


图 2-4-10

试题评析：此题主要考查了由实际问题列二次函数关系式并求二次函数最值的问题，同时也利用了矩形的性质. 解题时正确理解题意，列出符合题意的方程、不等式、函数关系式是关键.

解：（1）∵四边形 $ABCD$ 是矩形，垂直于墙的边 $AB=x$ m，

∴ $CD=AB=x$ m，$BC=(36-2x)$ m.

∴ $y=x(36-2x)$，即 $y=-2x^2+36x$.

由矩形的任一边都大于 0 m 且 BC 不超过 18 m，

得 $\begin{cases} x>0, \\ 36-2x>0, \\ 36-2x\leqslant 18, \end{cases}$ 解得 $9\leqslant x<18$，

∴ y 与 x 之间的函数关系式为 $y=-2x^2+36x\ (9\leqslant x<18)$.

（2）∵矩形空地的面积为 160 m^2，即 $y=160$，

∴ $-2x^2+36x=160$，解得 $x_1=10$，$x_2=8$.

∵ $9\leqslant x<18$，∴ $x_2=8$ 舍去.

∴ x 的值为 10.

（3）设甲、乙、丙三种植物分别购买了 m 棵、n 棵、k 棵，

由题意，得 $\begin{cases} m+n+k=400, \\ 14m+16n+28k=8\ 600, \end{cases}$

解得 $\begin{cases} m=6k-1\ 100, \\ n=1\ 500-7k. \end{cases}$

∵ m，n，k 分别表示三种植物的数量，

∴ m，n，k 为正整数.

∴ $\begin{cases} 6k-1\ 100>0, \\ 1\ 500-7k>0, \end{cases}$ 解得 $\frac{550}{3}<k<\frac{1\ 500}{7}$.

∵ k 为正整数，∴ k 能取的最大值为 214，即丙种植物最多可以购买 214 棵. 当 $k=214$ 时，$m=6k-1\ 100=184$，$n=1\ 500-7k=2$.

∵ $y=-2x^2+36x=-2(x-9)^2+162$，

∴当 $x=9$ 时，y 有最大值，最大值为 162，即当垂直于墙的一边长为 9 m 时，矩形空地的面积最大，最大为 162 m^2.

∵ $0.4\times 184+1\times 2+0.4\times 214=161.2\ (m^2)<162\ m^2$，

∴这批植物可以全部栽种到这块空地上.

2. 令函数关系式中的 $y=160$，得到关于 x 的一元二次方程，解之即可.

3. 设甲、乙、丙三种植物分别购买了 m 棵、n 棵、k 棵，利用题中的等量关系将 m，n 分别用含有 k 的代数式表示. 由 m，n，k 都为正整数得到关于 k 的不等式组，即可得到最多购买丙种植物的数量. 再将三种植物的合理用地面积与矩形的最大面积作比较，便可判断这批植物是否可以全部栽种到这块空地上.

荣德基

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

考法 2 利用二次函数图象和性质解图表信息问题

例 10 [中考·黄冈]我市某乡镇在“精准扶贫”活动中销售一农产品，经分析发现月销售量 y（万件）与月份 x（月）的关系为：$y=\begin{cases}x+4\ (1\leqslant x\leqslant 8,\ x\text{为整数}),\\ -x+20\ (9\leqslant x\leqslant 12,\ x\text{为整数}),\end{cases}$ 每件产品的利润 z（元）与月份 x（月）的关系如下表：

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
z	19	18	17	16	15	14	13	12	11	10	10	10

（1）请你根据表格求出每件产品利润 z（元）与月份 x（月）的关系式.

（2）若月利润 w（万元）= 当月销售量 y（万件）× 当月每件产品的利润 z（元），求月利润 w（万元）与月份 x（月）的关系式.

（3）当 x 为何值时，月利润 w 有最大值，最大值为多少？

试题评析：本题考查二次函数的应用，解答本题的关键是明确题意，找出所求问题需要的条件，利用二次函数的性质解答.

解：（1）①当 $1\leqslant x\leqslant 10$，x 为整数时，设 $z=kx+b$，当 $x=1$ 时，$z=19$；当 $x=2$ 时，$z=18$，即有方程组 $\begin{cases}19=k+b,\\ 18=2k+b,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}k=-1,\\ b=20.\end{cases}$

故 $z=-x+20$，检验其他数据均满足该关系式.

②当 $11\leqslant x\leqslant 12$，$x$ 为整数时，$z=10$.

综上，每件产品的利润 z（元）与月份 x（月）之间的函数关系式为

$$z=\begin{cases}-x+20\ (1\leqslant x\leqslant 10,\ x\text{为整数}),\\ 10\ (11\leqslant x\leqslant 12,\ x\text{为整数}).\end{cases}$$

（2）由题得，$w=\begin{cases}(-x+20)(x+4)\ (1\leqslant x\leqslant 8,\ x\text{为整数}),\\ (-x+20)(-x+20)\ (9\leqslant x\leqslant 10,\ x\text{为整数})\\ 10(-x+20)\ (11\leqslant x\leqslant 12,\ x\text{为整数}).\end{cases}$

化简得 $w=\begin{cases}-x^2+16x+80\ (1\leqslant x\leqslant 8,\ x\text{为整数}),\\ (-x+20)^2\ (9\leqslant x\leqslant 10,\ x\text{为整数}),\\ -10x+200\ (11\leqslant x\leqslant 12,\ x\text{为整数}).\end{cases}$

（3）①当 $1\leqslant x\leqslant 8$，x 为整数时，$w=-x^2+16x+80=-(x-8)^2+144$，当 $x\leqslant 8$ 时，w 随 x 的增大而增大，

$\therefore$ 当 $x=8$ 时，$w_{最大}=-(8-8)^2+144=0+144=144$；

②当 $9\leqslant x\leqslant 10$，x 为整数时，$w=(-x+20)^2$，

当 $x<20$ 时，w 随 x 的增大而减小，

$\therefore$ 当 $x=9$ 时，$w_{最大}=(-9+20)^2=121$；

③当 $11\leqslant x\leqslant 12$，$x$ 为整数时，$w=-10x+200$，

$\because -10<0$，$\therefore w$ 随 x 的增大而减小，

$\therefore$ 当 $x=11$ 时，$w_{最大}=-10\times 11+200=90$.

$\because 90<121<144$，$\therefore$ 当 $x=8$ 时，w 有最大值，最大值为 144.

思路引导

1. 观察表格发现：1~10月，随着月份(x)的增加，每件产品的利润(z)不断减少，且是依次减少1元；11、12月的每件产品的利润保持不变，故能得出两个结论：一是z与x之间的函数关系是一个分段函数；二是1~10月的z与x之间的函数关系为一次函数；
2. 利用等量关系式 $w=yz$ 写出函数关系式，注意是分段函数，自变量分为1~8、9~10、11~12三段；
3. 分别求出每段函数的最大值，再比较得出w的最大值.

特别提醒

由表格可知：1~10月每件产品的利润z(元)与月份x(月)之间的函数关系为一次函数，11、12月的z均为10.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

考法 3 利用二次函数的图象与性质解抛物线型运动问题

例 11 [中考·金华]甲、乙两人进行羽毛球比赛，羽毛球飞行的路线为抛物线的一部分，如图 2-4-11，甲在 O 点正上方 1 m 的 P 处发出一球，羽毛球飞行的高度 y（m）与水平距离 x（m）之间满足函数表达式 $y=a(x-4)^2+h$. 已知点 O 与球网的水平距离为 5 m，球网的高度为 1.55 m.

（1）当 $a=-\frac{1}{24}$ 时：①求 h 的值；②通过计算判断此球能否过网.

（2）若甲发球过网后，羽毛球飞行到与点 O 的水平距离为 7 m，离地面的高度为 $\frac{12}{5}$ m 的 Q 处时，乙扣球成功，求 a 的值.

试题评析：本题主要考查二次函数的应用，熟练掌握待定系数法求函数表达式是解题的关键.

解：（1）①当 $a=-\frac{1}{24}$ 时，$y=-\frac{1}{24}(x-4)^2+h$，将点 $P(0,1)$ 的坐标代入，得 $-\frac{1}{24}\times16+h=1$，解得 $h=\frac{5}{3}$.

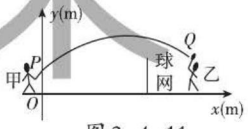


图 2-4-11

②把 $x=5$ 代入 $y=-\frac{1}{24}(x-4)^2+\frac{5}{3}$，得 $y=-\frac{1}{24}(5-4)^2+\frac{5}{3}=1.625$.

∵ $1.625>1.55$，∴此球能过网.

（2）把 $(0,1)$，$(7,\frac{12}{5})$ 代入 $y=a(x-4)^2+h$，

得 $\begin{cases}16a+h=1,\\9a+h=\frac{12}{5},\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=-\frac{1}{5},\\h=\frac{21}{5}.\end{cases}$ ∴ $a=-\frac{1}{5}$.

方法点拨

求抛物线最高点坐标的方法：已知二次函数的表达式，求抛物线的最高点坐标，可以把函数表达式配方，转化成二次函数的顶点式，写出顶点坐标；也可以根据二次函数的一般式，用公式法直接计算出顶点坐标. 若二次函数的表达式是未知的，可观察抛物线的已知点、对称轴等条件，用待定系数法求得表达式，再求解.

两年模拟兵法

答案见 221 页

1. [中考·临沂]足球运动员将足球沿与地面成一定角度的方向踢出，足球飞行的路线是一条抛物线，不考虑空气阻力，足球距离地面的高度 h（单位：m）与足球被踢出后经过的时间 t（单位：s）之间的关系如下表：

t	0	1	2	3	4	5	6	7	…
h	0	8	14	18	20	20	18	14	…

下列结论：

①足球距离地面的最大高度为 20m；

②足球飞行路线的对称轴是直线 $t=\frac{9}{2}$；

③足球被踢出 9 s 时落地；

④足球被踢出 1.5 s 时，距离地面的高度是 11 m.

其中正确结论的个数是（　　）

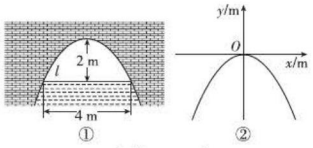
A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

2. [模拟·兰州西固] 如图①是一个横断面为抛物线形状的拱桥洞，当水面在 l 时，拱顶（拱桥洞的最高点）离水面 2 m，水面宽 4 m，如图②建立平面直角坐标系，则抛物线的表达式是（　　）

A. $y=-2x^2$　　B. $y=2x^2$

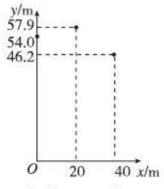
C. $y=-0.5x^2$　　D. $y=0.5x^2$



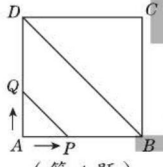
（第 2 题）

3. [中考·北京] 跳台滑雪是冬季奥运会比赛项目之一，运动员起跳后的飞行路线可以看作是抛物线的一部分，运动员起跳后的竖直高度 y（单位：m）与水平距离 x（单位：m）近似满足函数关系 $y=ax^2+bx+c$（$a\neq 0$）. 如图记录了某运动员起跳后的 x 与 y 的三组数据，根据上述函数模型和数据，可推断出该运动员起跳后飞行到最高点时，水平距离为（　　）

A. 10 m　　B. 15 m　　C. 20 m　　D. 22.5 m

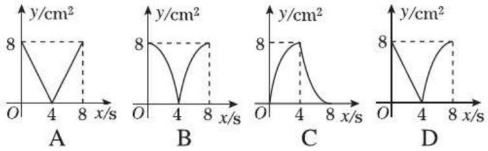


（第 3 题）



（第 4 题）

4. [中考·临沂] 如图，正方形 $ABCD$ 的边长为 4 cm，动点 P，Q 同时从点 A 出发，以 1 cm/s 的速度分别沿 $A\to B\to C$ 和 $A\to D\to C$ 的路径向点 C 运动. 设运动时间为 x（单位：s），四边形 $PBDQ$ 的面积为 y（单位：cm^2），则 y 与 x（$0\leqslant x\leqslant 8$）之间的函数关系可用图象表示为（　　）



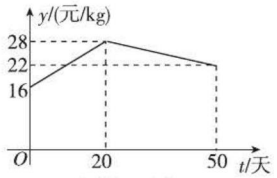
5. [中考·荆门] 随着龙虾节的火热举办，某龙虾养殖大户为了发挥技术优势，一次性收购了 10 000 kg 小龙虾，计划养殖一段时间后再出售. 已知每天养殖龙虾的成本相同，放养 10 天的总成本为 166 000 元；放养 30 天的总成本为 178 000 元. 设这批小龙虾放养 t 天后的质量为 a kg，销售单价为 y 元/kg，根据往年的行情预测，a 与 t 的函数关系为 $a=\begin{cases}10\,000\ (0\leqslant t\leqslant 20),\\ 100t+8\,000\ (20<t\leqslant 50).\end{cases}$ y 与 t 的函数关系如图.

（1）设每天的养殖成本为 m 元，收购成本为 n 元，求 m 与 n 的值.

（2）求 y 与 t 的函数关系式.

（3）如果将这批小龙虾放养 t 天后一次性出售所得利润为 W 元，问该龙虾养殖大户将这批小龙虾放养多少天后一次性出售所得利润最大？最大利润是多少？（总成本 = 放养总费用 + 收购成本；利润 = 销售总额 − 总成本）

[导学号 2380328]



（第 5 题）

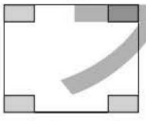
基础·作业·本

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

6. 某小区有一块长 100 m、宽 80 m 的空地，现将其建成花园广场，设计图案如图，阴影区域为绿化区（四块绿化区是全等矩形），空白区域为活动区，且四周出口一样宽，宽度不小于 50 m，不大于 60 m，预计活动区每平方米造价 60 元，绿化区每平方米造价 50 元.

（1）设其中一块绿化区的长边长为 x（m），写出工程总造价 y（元）与 x（m）的函数表达式（写出 x 的取值范围）.

（2）如果小区投资 46.9 万元，问能否完成工程任务. 若能，请写出 x 为整数的所有可能取值；若不能，请说明理由.



（第 6 题）

7. [**中考·永州**]如图，已知抛物线 $y=ax^2+bx+1$ 经过 $A(-1,0)$，$B(1,1)$ 两点.

（1）求该抛物线的表达式.

（2）阅读理解：

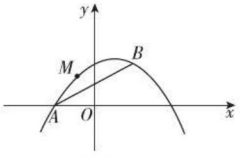
在同一平面直角坐标系中，直线 $l_1:y=k_1x+b_1$（k_1，b_1 为常数，且 $k_1\neq 0$），直线 $l_2:y=k_2x+b_2$（k_2，b_2 为常数，且 $k_2\neq 0$），若 $l_1\perp l_2$，则 $k_1\cdot k_2=-1$.

解决问题：

①若直线 $y=3x-1$ 与直线 $y=mx+2$ 互相垂直，求 m 的值；

②抛物线上是否存在点 P，使得 $\triangle PAB$ 是以 AB 为直角边的直角三角形？若存在，请求出点 P 的坐标；若不存在，请说明理由.

（3）M 是抛物线上一动点，且在直线 AB 的上方（不与 A，B 重合），求点 M 到直线 AB 的距离的最大值.



（第 7 题）

荣德基

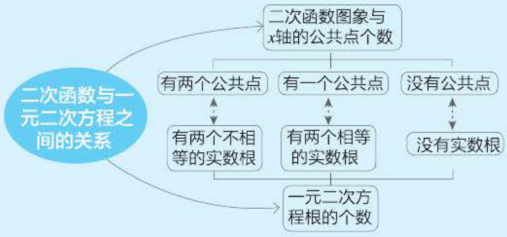
关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

5 二次函数与一元二次方程

核心知识

- 二次函数
- 一元二次方程
- 实数根的个数

知识链接



点知识·拨考向 速提分

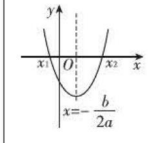
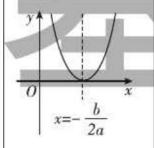
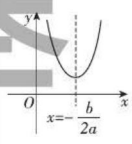
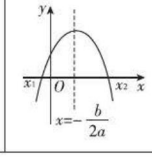
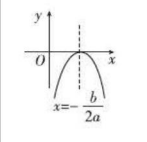
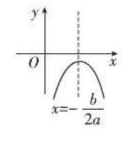
点知识 1 二次函数与一元二次方程的关系

1. 二次函数图象与 x 轴的交点的横坐标与一元二次方程根的关系

一般地，从二次函数 $y=ax^2+bx+c$（$a\neq0$）的图象可知：如果抛物线 $y=ax^2+bx+c$（$a\neq0$）与 x 轴有公共点，公共点的横坐标是 x_0，那么当 $x=x_0$ 时，函数值是 0，因此 $x=x_0$ 是方程 $ax^2+bx+c=0$（$a\neq0$）的一个根.

2. 二次函数与一元二次方程的联系与区别

一元二次方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq0)$ 与二次函数 $y=ax^2+bx+c(a\neq0)$ 二者之间的内在联系与区别列表如下.

结果 / 判别式 / 内容		$b^2-4ac>0$	$b^2-4ac=0$	$b^2-4ac<0$
一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$（$a\neq0$）的根的情况		有两个不等实根 $x_1=\dfrac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ $x_2=\dfrac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$	有两个相等实根 $x_1=x_2=-\dfrac{b}{2a}$	没有实根
二次函数 $y=ax^2+bx+c$（$a\neq0$）的图象	$a>0$			
	$a<0$			
抛物线与 x 轴的交点		$(x_1,0)$，$(x_2,0)$	$\left(-\dfrac{b}{2a},0\right)$	没有交点

提分·必记

拓宽视野

1. 如果 $y=ax^2+bx+c$（$a\neq0$）的函数值为 m，求 $y=m$ 时的自变量 x 的值，可以解一元二次方程 $ax^2+bx+c=m$；反之，解一元二次方程 $ax^2+bx+c=m$ 可以看成是已知 $y=ax^2+bx+c$ 的函数值 $y=m$，求自变量 x 的值. 方程 $ax^2+bx+c=m$ 的解是抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 与直线 $y=m$ 的公共点的横坐标.
2. 二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 与一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 的关系密切，二者可以相互转化. 已知二次函数的值为 0 求自变量，可以看作解一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$；反过来，解一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 可以看作已知二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的函数值为 0，求自变量 x 的值.


抛物线与 x 轴交点的个数

学德基

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

拔考向▶利用二次函数与一元二次方程的关系解与字母系数相关问题

例 1 二次函数 $y=x^2-6x+n$ 的图象如图 2-5-1，若关于 x 的一元二次方程 $x^2-6x+n=0$ 的一个解为 $x_1=1$，则另一个解 $x_2=$_____.

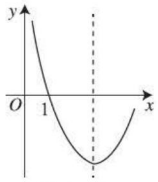


图 2-5-1

解题秘方：紧扣抛物线与 x 轴两交点坐标与对称轴的关系求解.

解：由图象知抛物线的对称轴为直线 $x=-\frac{-6}{2}=3$.

又∵抛物线与 x 轴的一个交点为（1，0），

∴由轴对称的性质知，点(1,0)以直线 $x=3$ 为对称轴的对称点是(5,0).

∴方程的另一个解为 $x_2=5$.

答案：5

提分·秘诀

技巧点拨

对称轴法求一元二次方程的根：根据一元二次方程与二次函数的关系，当已知抛物线与 x 轴一个公共点的坐标和对称轴时，可根据轴对称的性质求出抛物线与 x 轴另一个公共点的坐标，从而求得对应一元二次方程的根.

点知识▶2 二次函数图象法求解一元二次方程

二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图象与 x 轴公共点的横坐标是一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 的解，因此可以借助二次函数的图象求一元二次方程的解.

1. 利用二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图象与 x 轴的公共点求一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 的解的步骤

（1）作出二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图象，确定图象与 x 轴公共点的个数，公共点的个数就是方程 $ax^2+bx+c=0$ 的解的个数；

（2）观察图象，函数图象与 x 轴的交点的横坐标就是一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 的根，当函数图象与 x 轴有两个交点，且交点的横坐标不是整数时，可通过不断缩小根所在的范围估计一元二次方程的根；

（3）交点横坐标即为一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 的解.

2. 利用二次函数 $y=ax^2$ 的图象与直线 $y=-bx-c$ 的公共点求方程 $ax^2+bx+c=0$ 的解的步骤

（1）将一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 化为 $ax^2=-bx-c$ 的形式；

（2）在平面直角坐标系中画出抛物线 $y=ax^2$ 和直线 $y=-bx-c$，并确定抛物线与直线的公共点的坐标；

（3）公共点的横坐标即为一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 的解.

提分·必记

方法点拨

估计一元二次方程的根的方法：在难以读出公共点的坐标时，我们还可以通过不断缩小根所在范围估计一元二次方程的根.对于 $y=ax^2+bx+c$ $(a\neq 0)$，如果 $ax_1^2+bx_1+c>0$，且 $ax_2^2+bx_2+c<0$，那么在 x_1 与 x_2 之间存在一个根，取 $x_3=\frac{x_1+x_2}{2}$.若 $ax_3^2+bx_3+c>0$，则取 $x_4=\frac{x_3+x_2}{2}$；若 $ax_3^2+bx_3+c<0$，则取 $x_4=\frac{x_1+x_3}{2}$.这样不停地取下去，直到达到所要求的精确度为止.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

考向▶利用图象法求一元二次方程的近似解

例 2 利用二次函数的图象求一元二次方程 $-x^2+2x-3=-8$ 的近似解（结果精确到 0.1）.

解题秘方一：画出二次函数 $y=-x^2+2x+5$ 的图象，利用二次函数的图象计算方程的近似解 .

解法一：整理方程，得 $-x^2+2x+5=0$.

作函数 $y=-x^2+2x+5$ 的图象如图 2-5-2.

由图象可知，抛物线与 x 轴公共点的横坐标分别在 -2 和 -1，3 和 4 之间，即方程 $-x^2+2x-3=-8$ 的两个实数解分别在 -2 和 -1，3 和 4 之间，用取平均数的方法不断缩小解的取值范围，从而确定方程的近似解 .

由图象可知，当 $x=3$ 时，$y>0$；当 $x=4$ 时，$y<0$，

取 3 和 4 的平均数 3.5，当 $x=3.5$ 时，$y=-0.25$，与 $x=3$ 时的函数值异号，所以方程的这个解在 3 和 3.5 之间 .

取 3 和 3.5 的平均数 3.25，当 $x=3.25$ 时，$y=0.937\ 5$，与 $x=3.5$ 时的函数值异号，所以方程的这个解在 3.25 和 3.5 之间 .

取 3.25 和 3.5 的平均数 3.375，当 $x=3.375$ 时，$y=0.359\ 375$，与 $x=3.5$ 时的函数值异号，所以方程的这个解在 3.375 和 3.5 之间 .

由此方法可得到原方程的一个近似解为 3.4.

用同样的方法可得到原方程的另一个近似解为 -1.4.

所以方程 $-x^2+2x-3=-8$ 的解为 $x_1\approx-1.4$，$x_2\approx3.4$.

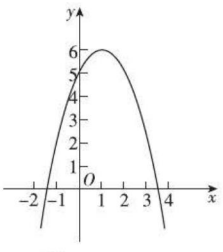


图 2-5-2

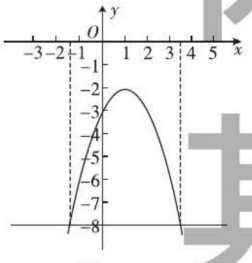


图 2-5-3

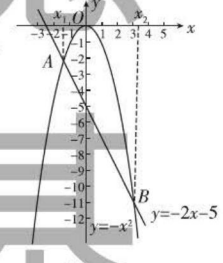


图 2-5-4

解题秘方二：画出二次函数 $y=-x^2+2x-3$ 的图象，再画出直线 $y=-8$，利用两图象的公共点求方程的近似解 .

解法二：作出函数 $y=-x^2+2x-3$ 的图象，再画出直线 $y=-8$，如图 2-5-3.

由图象知，方程 $-x^2+2x-3=-8$ 的解是抛物线 $y=-x^2+2x-3$ 与直线 $y=-8$ 的公共点的横坐标，一个公共点的横坐标在 -2 与 -1 之间，另一个公共点的横坐标在 3 与 4 之间 .

同样用取平均数的方法，可得方程 $-x^2+2x-3=-8$ 的解为 $x_1\approx-1.4$，$x_2\approx3.4$.

提分·秘诀

特别提醒

用图象法解一元二次方程是数形结合思想的具体应用. 通过画函数的图象解一元二次方程是数的直观化的体现，但由于作图或观察存在误差，因此通过这种方法求得的方程的解一般是近似的 .

另解

将原方程变形，得 $-x^2=-2x-5$，画出函数 $y=-x^2$ 和 $y=-2x-5$ 的图象，如图 2-5-4.

由图可知，抛物线和直线交于 A，B 两点，分别过 A，B 两点向 x 轴作垂线，可知 A，B 两点的横坐标约为 -1.4 和 3.4，所以方程 $-x^2+2x-3=-8$ 的解是 $x_1\approx-1.4$，$x_2\approx3.4$.

方法点拨

用图象法求一元二次方程的近似解：用图象法求一元二次方程的近似解时，一般是作出相应的二次函数的图象，确定一元二次方程的解的个数，找出公共点的横坐标的大致范围，然后利用取平均数的方法缩小解所在的范围，通过反复计算求出满足精确度要求的近似解 .

宋德基

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

点方法·拨技巧 提高分

拔尖角度 1 利用抛物线与 x 轴的交点情况用判别式法求字母的值（范围）

例 3 已知二次函数 $y=2x^2-(m+1)x+m-1$.

（1）求证：不论 m 为何值，函数的图象与 x 轴总有交点．指出当 m 为何值时，只有一个交点．

（2）当 m 为何值时，函数的图象经过原点？

（3）指出在（2）的条件下，使 $y<0$ 的 x 的取值范围，及使 $y>0$ 的 x 的取值范围．

解题秘方：（1）用判别式法；（2）用点的坐标与函数的关系；（3）用图象法．

（1）**证明**：函数对应的方程 $2x^2-(m+1)x+m-1=0$ 的 $\Delta=[-(m+1)]^2-4\times2\times(m-1)=m^2+2m+1-8m+8=m^2-6m+9=(m-3)^2$.

显然不论 m 为何值，均有 $\Delta=(m-3)^2\geqslant0$，且当 $m=3$ 时，$\Delta=0$，故不论 m 为何值，抛物线与 x 轴总有交点，且当 $m=3$ 时，只有一个交点．

（2）**解**：∵函数的图象经过原点（0，0），

∴ $0=2\times0^2-(m+1)\times0+m-1$，∴ $m=1$，

即当 $m=1$ 时，函数的图象经过原点．

（3）**解**：由（2）得 $y=2x^2-2x$，其图象大致如图 2-5-5．∵抛物线与 x 轴的两个交点分别为（0，0），（1，0），∴当 $0<x<1$ 时，$y<0$；当 $x<0$ 或 $x>1$ 时，$y>0$.



图 2-5-5

拔尖角度 2 利用图象与方程的关系分类讨论求交点坐标

例 4 如果函数 $y=kx^2-kx+3x+1$ 的图象与 x 轴有且只有一个交点，那么交点坐标是_____.

解题秘方：用分类讨论思想求交点坐标．

解：（1）当 $k=0$ 时，函数为 $y=3x+1$，其图象与 x 轴有且只有一个交点，是 $\left(-\frac{1}{3},0\right)$.

（2）当 $k\neq0$ 时，原函数为二次函数．

∵其图象与 x 轴有且只有一个交点，∴ $\Delta=b^2-4ac=(3-k)^2-4k=0$，

即 $k^2-10k+9=0$，解得 $k_1=1$，$k_2=9$.

当 $k=1$ 时，$y=x^2+2x+1$，与 x 轴交于点（-1，0）；

当 $k=9$ 时，$y=9x^2-6x+1$，与 x 轴交于点 $\left(\frac{1}{3},0\right)$.

答案：$\left(-\frac{1}{3},0\right)$ 或（-1，0）或 $\left(\frac{1}{3},0\right)$

挑战·高分

拓宽视野

利用二次函数的图象分析自变量的取值范围（或求不等式的解集）：

1. 从“形”的方面看，不等式 $ax^2+bx+c>0$（$a\neq0$）的解是二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图象位于 x 轴上方的所有点的横坐标；不等式 $ax^2+bx+c<0$（$a\neq0$）的解是二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图象位于 x 轴下方的所有点的横坐标．
2. 从“数”的方面看，当二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的函数值 $y>0$ 时，其自变量 x 的取值范围是不等式 $ax^2+bx+c>0$ 的解集；当二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的函数值 $y<0$ 时，其自变量 x 的取值范围是不等式 $ax^2+bx+c<0$ 的解集．

挑战·高分

特别提醒

本例条件中并未说明函数是几次函数或图象是什么图象，所以对它的不同情况都要予以讨论．

解答时，先由系数 k 的取值情况确定函数是哪类函数，然后再求交点坐标．若抛物线与 x 轴只有一个交点，则这个交点就是抛物线的顶点．

基础·题组 拔高·题组 挑战·题组

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

拔尖角度 3 利用解的个数判断法解函数图象的公共点问题

例 5 已知抛物线 G 的表达式为 $y=ax^2+bx+c$，且抛物线 G 经过 $(-5,0)$，$\left(0,\frac{5}{2}\right)$，$(1,6)$ 三点，直线 l 的表达式为 $y=2x-3$.

（1）求抛物线 G 的表达式.

（2）求证：抛物线 G 与直线 l 无公共点.

（3）若与直线 l 平行的直线 $y=2x+m$ 与抛物线 G 只有一个公共点 P，求 P 点的坐标.

解题秘方：用根的判别式与公共点个数的关系解答.

（1）**解**：∵抛物线 G 经过 $(-5,0)$，$\left(0,\frac{5}{2}\right)$，$(1,6)$ 三点，

$$\therefore \begin{cases} 0=25a-5b+c, \\ \frac{5}{2}=c, \\ 6=a+b+c, \end{cases} \text{解得} \begin{cases} a=\frac{1}{2}, \\ b=3, \\ c=\frac{5}{2}. \end{cases}$$

∴抛物线 G 的表达式为 $y=\frac{1}{2}x^2+3x+\frac{5}{2}$.

（2）**证明**：由 $\begin{cases} y=2x-3, \\ y=\frac{1}{2}x^2+3x+\frac{5}{2}, \end{cases}$

消去 y，得 $\frac{1}{2}x^2+x+\frac{11}{2}=0$.

∵ $\Delta=1-4\times\frac{1}{2}\times\frac{11}{2}=-10<0$,

∴方程无实根，即抛物线 G 与直线 l 无公共点.

（3）**解**：由 $\begin{cases} y=2x+m, \\ y=\frac{1}{2}x^2+3x+\frac{5}{2}, \end{cases}$

消去 y，得 $\frac{1}{2}x^2+x+\frac{5}{2}-m=0$. ①

∵抛物线 G 与直线 $y=2x+m$ 只有一个公共点 P，

∴ $\Delta=1-4\times\frac{1}{2}\times\left(\frac{5}{2}-m\right)=0$，解得 $m=2$.

把 $m=2$ 代入①，解得 $x=-1$.

把 $x=-1$ 代入 $y=\frac{1}{2}x^2+3x+\frac{5}{2}$ 中，得 $y=0$.

∴ P 点的坐标为 $(-1,0)$.

挑战·高分

解法提醒

1. 把已知的三点坐标分别代入 $y=ax^2+bx+c$ 中，解关于 a，b，c 的方程组即可.
2. 要证抛物线 G 与直线 l 无公共点，就是证明抛物线 G 与直线 l 的表达式组成的方程组无实数解，即消去 y 后所得关于 x 的一元二次方程的根的判别式小于 0.
3. 若直线 $y=2x+m$ 与抛物线 G 只有一个公共点 P，则由它们的表达式组成的方程组有唯一解，即消去 y 后所得关于 x 的一元二次方程的根的判别式等于 0.

技巧点拨

确定公共点个数的方法：解关于直线与抛物线的公共点个数问题，即求直线与抛物线的表达式联立组成的方程组，消去 y 后得到的一元二次方程的解的个数问题，从而转化为所得到的一元二次方程的根的判别式的符号问题.

有两个公共点，则 $\Delta>0$；有一个公共点，则 $\Delta=0$；无公共点，则 $\Delta<0$.

荣德基

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

中考探秘 中考中关于二次函数与一元二次方程的联系，主要考查从二次函数的角度看一元二次方程，有时还与一元二次不等式、一次函数及几何中的一些知识联系在一起进行考查，综合考查函数的性质和方程思想．解答此类题的关键是熟悉函数与方程的关系以及能从图象上获取有价值的信息，题型主要有选择题和解答题．

三年中考兵法

考法1 利用二次函数的图象和性质解不等关系问题

例6 [中考·咸宁]如图2-5-6是二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图象，下列结论：①二次三项式 ax^2+bx+c 的最大值为4；

② $4a+2b+c<0$；

③一元二次方程 $ax^2+bx+c=1$ 的两根之和为 -1；

④使 $y\leqslant 3$ 成立的 x 的取值范围是 $x\geqslant 0$.

其中正确的个数有（　　）

A. 1个　　B. 2个　　C. 3个　　D. 4个

试题评析：本题考查的是二次函数的图象、二次函数的最值、二次函数与不等式，掌握二次函数的性质、正确获取图象信息是解题的关键．

解：∵抛物线的顶点坐标为（-1，4），

∴二次三项式 ax^2+bx+c 的最大值为4，①正确；

∵ $x=2$ 时，$y<0$，∴ $4a+2b+c<0$，②正确；

根据抛物线的对称性可知，一元二次方程 $ax^2+bx+c=1$ 的两根之和为 -2，③错误；

使 $y\leqslant 3$ 成立的 x 的取值范围是 $x\geqslant 0$ 或 $x\leqslant -2$，④错误．

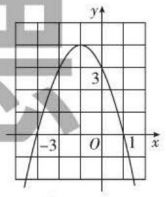


图 2-5-6

答案：B

考法2 利用抛物线与直线的关系求交点横坐标和的范围

例7 [中考·北京]在平面直角坐标系 xOy 中，抛物线 $y=x^2-4x+3$ 与 x 轴交于点 A，B（点 A 在点 B 的左侧），与 y 轴交于点 C.

（1）求直线 BC 的表达式．

（2）垂直于 y 轴的直线 l 与抛物线交于点 $P(x_1, y_1)$，$Q(x_2, y_2)$，与直线 BC 交于点 $N(x_3, y_3)$，若 $x_1<x_2<x_3$，结合函数的图象，求 $x_1+x_2+x_3$ 的取值范围．

试题评析：本题考查了抛物线与 x 轴的交点，解答第（2）问时，利用了“数形结合”的数学思想，降低了解题的难度．

解：（1）由 $y=x^2-4x+3$，得点 C 坐标为（0，3），$y=(x-3)(x-1)$，

∴点 A 坐标为（1，0），点 B 坐标为（3，0）．

冲刺·满分

思路引导

1. 根据抛物线的顶点坐标确定二次三项式 ax^2+bx+c 的最大值；
2. 由图象知当 $x=2$ 时，$y<0$，即 $4a+2b+c<0$；
3. 由于抛物线的对称轴为直线 $x=\frac{-3+1}{2}=-1$，由抛物线的对称性知 y 取一个值时（有两个对应点）其对应的两点的横坐标之和为 -2，∴一元二次方程 $ax^2+bx+c=1$ 的两根之和为 -2；
4. 由图象法求出．

另解

∵方程 $x^2-4x+3=0$ 的两根为 $x_1=1$，$x_2=3$，

∴ $A(1,0)$，$B(3,0)$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

设直线 BC 的表达式为 $y=kx+b$（$k\neq0$），

则 $\begin{cases}b=3,\\3k+b=0,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}k=-1,\\b=3.\end{cases}$

∴直线 BC 的表达式为 $y=-x+3$.

（2）如图 2-5-7，

∵ $y=x^2-4x+3=x^2-4x+4-4+3=(x-2)^2-1$，

∴抛物线 $y=x^2-4x+3$ 的顶点坐标为（2，-1），对称轴为直线 $x=2$.

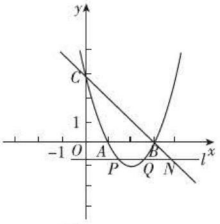


图 2-5-7

∵ $P(x_1,y_1)$，$Q(x_2,y_2)$ 两点关于抛物线的对称轴对称，

∴ $2=\dfrac{x_1+x_2}{2}$，即 $x_1+x_2=4$.

由 $x_1<x_2<x_3$，结合函数的图象可得，$-1<y_3<0$，即 $-1<-x_3+3<0$，

∴ $3<x_3<4$，∴ $7<x_1+x_2+x_3<8$.

考法 3 利用抛物线与直线的交点求与面积相关问题

例 8 ［中考·黄冈］已知直线 l：$y=kx+1$ 与抛物线 $y=x^2-4x$.

（1）求证：直线 l 与该抛物线总有两个交点.

（2）设直线 l 与该抛物线两交点为 A，B，O 为原点，当 $k=-2$ 时，求 $\triangle OAB$ 的面积.

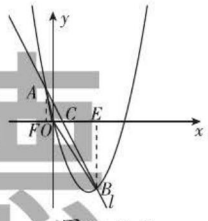


图 2-5-8

试题评析：本题考查二次函数的综合问题，涉及解一元二次方程组、根的判别式、三角形的面积公式等知识，综合程度较高，弄清二次函数与一元二次方程之间的关系，点的坐标与它表示几何位置的关系是解题的关键.

（1）**证明**：联立 $\begin{cases}y=kx+1,\\y=x^2-4x,\end{cases}$ 化简可得 $x^2-(4+k)x-1=0$.

∵ $\Delta=(4+k)^2+4>0$，∴直线 l 与该抛物线总有两个交点；

（2）**解**：当 $k=-2$ 时，$y=-2x+1$.

如图 2-5-8，过点 A 作 $AF\perp x$ 轴于 F，过点 B 作 $BE\perp x$ 轴于 E.

联立 $\begin{cases}y=x^2-4x,\\y=-2x+1,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x=1+\sqrt{2},\\y=-1-2\sqrt{2}\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x=1-\sqrt{2},\\y=2\sqrt{2}-1.\end{cases}$

∴点 A 坐标为 $(1-\sqrt{2},2\sqrt{2}-1)$，点 B 坐标为 $(1+\sqrt{2},-1-2\sqrt{2})$.

∴ $AF=2\sqrt{2}-1$，$BE=1+2\sqrt{2}$.

易求得直线 $y=-2x+1$ 与 x 轴的交点 C 坐标为 $(\dfrac{1}{2},0)$.

∴ $OC=\dfrac{1}{2}$. ∴ $S_{\triangle AOB}=S_{\triangle AOC}+S_{\triangle BOC}=\dfrac{1}{2}OC\cdot AF+\dfrac{1}{2}OC\cdot BE$

$=\dfrac{1}{2}OC\cdot(AF+BE)=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{2}\times(2\sqrt{2}-1+1+2\sqrt{2})$

$=\sqrt{2}$.

特别解读

解答第（2）问的关键是确定 x_3 的范围.

方法点拨

- 对于两个函数图象交点的问题，一般要将函数问题转化为由两个函数表达式组成的方程组来解，因为这两个函数的公共解一定是这两个函数图象的交点.
- 解图象与几何的综合问题，要注意表示几何的量与点的坐标的区别：表示几何的量都是正数，表示点的坐标有正有负.

学德基

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

两年模拟兵法 ☞答案见222页

1. [模拟·盐城滨海]二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 中，函数 y 与自变量 x 的部分对应值如下表，则方程 $ax^2+bx+c=0$ 的一个解的范围是（　　）

x	6.17	6.18	6.19
y	−0.03	−0.01	0.02

A. $-0.03<x<-0.01$　　B. $-0.01<x<0.02$

C. $6.18<x<6.19$　　D. $6.17<x<6.18$

2. [中考·兰州]下表是二次函数 $y=x^2+3x-5$ 的自变量 x 与函数值 y 的对应值：

x	1	1.1	1.2	1.3	1.4
y	−1	−0.49	0.04	0.59	1.16

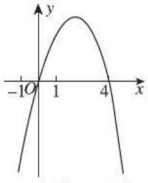
那么方程 $x^2+3x-5=0$ 的一个近似根是（　　）

A. 1　　B. 1.1　　C. 1.2　　D. 1.3

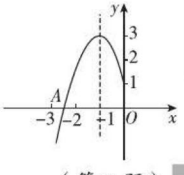
3. [模拟·西安蓝田]二次函数 $y=-x^2+mx$ 的图象如图，对称轴为直线 $x=2$. 若关于 x 的一元二次方程 $-x^2+mx-t=0$（t 为实数）在 $1<x<5$ 的范围内有解，则 t 的取值范围是（　　）

A. $t>-5$　　B. $-5<t<3$

C. $3<t\leqslant 4$　　D. $-5<t\leqslant 4$



（第3题）



（第5题）

4. [中考·苏州]若二次函数 $y=ax^2+1$ 的图象经过点（-2，0），则关于 x 的方程 $a(x-2)^2+1=0$ 的实数根为（　　）

A. $x_1=0$，$x_2=4$　　B. $x_1=-2$，$x_2=6$

C. $x_1=\frac{3}{2}$，$x_2=\frac{5}{2}$　　D. $x_1=-4$，$x_2=0$

5. [中考·广安]如图，抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 的顶点为 $B(-1,3)$，与 x 轴的交点 A 在点（-3，0）和（-2，0）之间，以下结论：① $b^2-4ac=0$；② $a+b+c>0$；③ $2a-b=0$；④ $c-a=3$.

其中正确的有（　　）

A. 1个　　B. 2个　　C. 3个　　D. 4个

6. [中考·泰安]已知二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的 y 与 x 的部分对应值如下表：

x	−1	0	1	3
y	−3	1	3	1

下列结论：①抛物线的开口向下；②其图象的对称轴为 $x=1$；③当 $x<1$ 时，函数值 y 随 x 的增大而增大；④方程 $ax^2+bx+c=0$ 有一个根大于4.

其中正确的有（　　）

A. 1个　　B. 2个　　C. 3个　　D. 4个

7. 已知抛物线 $y=(x-m)^2-(x-m)$，其中 m 是常数.

（1）求证：不论 m 为何值，该抛物线与 x 轴一定有两个公共点.

（2）若该抛物线的对称轴为直线 $x=\frac{5}{2}$.

①求该抛物线对应的函数表达式；

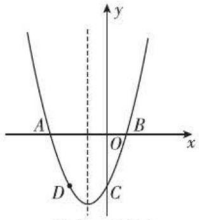
②把该抛物线沿 y 轴向上平移多少个单位长度后，得到的抛物线与 x 轴只有一个公共点？

8. [模拟·广安岳池]如图，已知二次函数 $y=x^2+bx+c$ 的图象与 x 轴交于 A，B 两点，其中点 A 坐标为（-3，0），与 y 轴交于点 C，点 D（-2，-3）在抛物线上.

（1）求抛物线的表达式.

（2）抛物线的对称轴上有一动点 P，求出 $PA+PD$ 的最小值.

（3）若抛物线上有一动点 N，使△ABN 的面积为6，求点 N 的坐标.



（第8题）

未德基

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

对称轴在二次函数中的巧妙运用

荣老师告诉你 二次函数的图象——抛物线是一个轴对称图形，对称轴是过顶点且垂直于 x 轴的一条直线．由一般式 $y=ax^2+bx+c$，可得对称轴为 $x=-\dfrac{b}{2a}$；由顶点式 $y=a(x-h)^2+k$ 可知对称轴为 $x=h$；由交点式 $y=a(x-x_1)(x-x_2)$ 可知对称轴为 $x=\dfrac{x_1+x_2}{2}$；若知抛物线上纵坐标相同的两个点 (m, a)，(n, a)，则对称轴为 $x=\dfrac{m+n}{2}$．

技巧一 利用对称轴求抛物线与 x 轴或平行于 x 轴的直线的交点坐标

例 1 [中考·齐齐哈尔]抛物线 $y=ax^2+bx+c$（$a\neq 0$）的对称轴为直线 $x=1$，与 x 轴的一个交点坐标为 $(-1, 0)$，其部分图象如图 1．下列结论：

① $4ac<b^2$；

② 方程 $ax^2+bx+c=0$ 的两个根是 $x_1=-1$，$x_2=3$；

③ $3a+c>0$；

④ 当 $y>0$ 时，x 的取值范围是 $-1\leqslant x<3$；

⑤ 当 $x<0$ 时，y 随 x 的增大而增大．

其中结论正确的个数是（　　）

A. 4　　B. 3　　C. 2　　D. 1

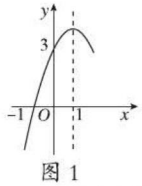


图 1

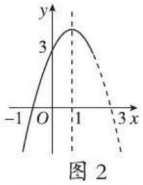


图 2

解题秘方：先根据抛物线的对称性得到抛物线与 x 轴的另一个交点坐标；由交点个数得到 b^2-4ac 的符号；根据图象可得到 $y>0$ 时，x 的范围以及 $x<0$ 时，函数的增减性．

解：如图 2，根据抛物线的对称性可知抛物线与 x 轴的另一个交点为 $(3, 0)$，∵抛物线 $y=ax^2+bx+c$（$a\neq 0$）与 x 轴有两个公共点 $(-1, 0)$，$(3, 0)$，∴方程 $ax^2+bx+c=0$ 的两个根是 $x_1=-1$，$x_2=3$，∴结论②正确．∵$b^2-4ac>0$，∴$4ac<b^2$，∴结论①正确．∵$-\dfrac{b}{2a}=1$，∴$b=-2a$．∵当 $x=-1$ 时，$y=0$，∴$a-b+c=0$，∴$a-(-2a)+c=0$，∴$3a+c=0$，∴结论③错误．由图象可知，只有当 $-1<x<3$ 时，对应的函数图象才在 x 轴上方，∴结论④不正确．由图象可知，在 $x\leqslant 1$ 的范围之内，y 都随 x 的增大而增大，∴结论⑤正确．∴正确结论有①②⑤，故选 B．

答案：B

例 2 [中考·宿迁]当 $x=m$ 或 $x=n$（$m\neq n$）时，代数式 x^2-2x+3 的值相等，则 $x=m+n$ 时，代数式 x^2-2x+3 的值为_____．

解题秘方：由代数式 x^2-2x+3 联想到二次函数，根据题意，将代数式的值相等转译为函数语言就是：当 $x=m$ 或 $x=n$ 时，函数 $y=x^2-2x+3$ 的函数值相等．根据抛物线的对称性可以列出关于 m，n 的等式，从而求出 $m+n$ 的值，进而获得答案．

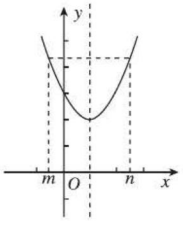


图 3

解：如图 3，将代数式 x^2-2x+3 的值看成关于 x 的二次函数 $y=x^2-2x+3$ 的函数值．此抛物线的对称轴为直线 $x=1$，同时对称轴又可以表示为直线 $x=\dfrac{m+n}{2}$，所以 $m+n=2$．将 $x=2$ 代入 x^2-2x+3，计算得到结果为 3．

荣德基

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

答案：3

方法点拨：数形结合思想是解决二次函数图象问题的基本数学思想，在解题时应关注抛物线顶点、与坐标轴（x 轴、y 轴）的交点、与 x 轴的位置关系、象限分布等关键元素，最关键的是要充分利用对称轴，因为这些元素都与对称轴有关.

技巧二 ▶ 利用对称轴比较函数值的大小

例 3 已知点 $A(4, y_1)$，$B(\sqrt{3}, y_2)$，$C(-2, y_3)$ 都在二次函数 $y=(x-2)^2-1$ 的图象上，则 y_1，y_2，y_3 的大小关系是_____.

解题秘方：思路一　由顶点式可知抛物线的对称轴是直线 $x=2$，A，B，C 三点在对称轴两侧，可以利用 A 点的对称点在对称轴左侧，依据开口向上和在对称轴左侧 y 随 x 的增大而减小进行比较. 思路二　抛物线开口向上，顶点纵坐标最小，由图象的变化趋势可知，抛物线上的点距离对称轴越近（即离顶点越近），纵坐标越小.

解：**方法一**　$\because y=(x-2)^2-1$，

$\therefore$ 抛物线的对称轴为直线 $x=2$.

$\therefore$ 点 $A(4, y_1)$ 关于 $x=2$ 的对称点是 $(0, y_1)$.

$\because -2<0<\sqrt{3}<2$，且抛物线开口向上，

$\therefore y_2<y_1<y_3$.

方法二　设 A，B，C 三点到抛物线对称轴的距离分别为 d_1，d_2，d_3.

$\because y=(x-2)^2-1$，

$\therefore$ 抛物线的对称轴为直线 $x=2$.

$\therefore d_1=2$，$d_2=2-\sqrt{3}$，$d_3=4$.

$\because 2-\sqrt{3}<2<4$，且抛物线开口向上，

$\therefore y_2<y_1<y_3$.

答案：$y_2<y_1<y_3$

方法点拨：比较抛物线上点的纵坐标大小的基本方法有两种.

（1）利用抛物线上对称点的纵坐标相等，把各点转化到对称轴的同侧，再利用二次函数的增减性进行比较；

（2）利用“开口向上，抛物线上的点距离对称轴越近，点的纵坐标越小；开口向下，抛物线上的点距离对称轴越近，点的纵坐标越大”进行比较.

技巧三 ▶ 利用对称轴确定函数的最值

例 4 [中考·天津]已知二次函数 $y=(x-h)^2+1$（h 为常数），在自变量 x 的值满足 $1\leqslant x\leqslant 3$ 的情况下，与其对应的函数值 y 的最小值为 5，则 h 的值为（　　）

A. 1 或 −5　　B. −1 或 5

C. 1 或 −3　　D. 1 或 3

解题秘方：先分析出 x 取何值时 y 取最小值，此时对称轴在哪个位置，再按照对称轴的位置分类讨论. 若 $1\leqslant x\leqslant 3<h$，当 $x=3$ 时，y 取得最小值 5；若 $h<1\leqslant x\leqslant 3$，当 $x=1$ 时，y 取得最小值 5. 然后分别列出关于 h 的方程求解即可.

解：根据题意知，最小值肯定不是当 $x=h$ 时 y 的值，对称轴 $x=h$ 中的 h 不在 $1\leqslant x\leqslant 3$ 范围内.

由抛物线开口向上知，当 $x>h$ 时，y 随 x 的增大而增大，当 $x<h$ 时，y 随 x 的增大而减小，

若 $h<1\leqslant x\leqslant 3$，则当 $x=1$ 时，y 取得最小值 5，于是有 $(1-h)^2+1=5$，解得 $h=-1$ 或 $h=3$（舍去）.

若 $1\leqslant x\leqslant 3<h$，则当 $x=3$ 时，y 取得最小值 5，于是有 $(3-h)^2+1=5$，解得 $h=5$ 或 $h=1$（舍去）.

综上，h 的值为 −1 或 5，故选 B.

答案：B

方法点拨：仔细分析本题会发现函数值 y 的最小值为 5 时是在自变量 x 的某一范围内，本题是用这一函数最小值确定自变量 x 的值，从而确定 h 的值.

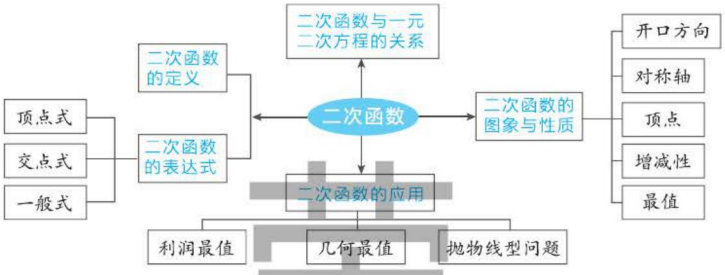
基础·德·基

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

章末核心知识分类整合

核心结构专题

结构必知



核心必读

1. 二次函数表达式的几种形式：（1）$y=ax^2$；（2）$y=ax^2+bx$；（3）$y=ax^2+c$；（4）$y=ax^2+bx+c$；（5）$y=a(x-h)^2$；（6）$y=a(x-h)^2+k$；（7）$y=a(x-x_1)(x-x_2)$.

2. 抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 的对称轴是直线 $x=-\dfrac{b}{2a}$，顶点坐标是 $\left(-\dfrac{b}{2a},\dfrac{4ac-b^2}{4a}\right)$.

3. 对于抛物线 $y=ax^2+bx+c$，当 $a>0$ 时，开口向上，在对称轴的左侧 y 随 x 的增大而减小，在对称轴的右侧 y 随 x 的增大而增大，当 $x=-\dfrac{b}{2a}$ 时，y 有最小值 $\dfrac{4ac-b^2}{4a}$；当 $a<0$ 时，开口向下，在对称轴的左侧 y 随 x 的增大而增大，在对称轴的右侧 y 随 x 的增大而减小，当 $x=-\dfrac{b}{2a}$ 时，y 有最大值 $\dfrac{4ac-b^2}{4a}$.

4. 抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 与 x 轴的交点个数与一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 的根的情况有关，该一元二次方程的两根就是抛物线与 x 轴交点的横坐标.

知识方法专题

知识必学

专题一 二次函数的图象

链接中考» 二次函数图象问题主要从开口方向、对称轴、顶点坐标、与坐标轴的交点坐标几个方面考查；两个二次函数图象之间的关系主要有平移、轴对称、中心对称（以后将学）等，考查的形式主要是选择题.

类型一 单个图象的位置特征

例1 [中考·深圳]二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图象如图 2-1，给出以下结论：① $a>0$；② $b>0$；③ $c<0$；④ $b^2-4ac>0$. 其中所有正确结论的序号是（　　）

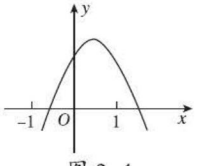


图 2-1

A. ②④　　B. ①③

C. ③④　　D. ①②③

解：图象开口向下，$\therefore a<0$，①错误；对称轴在 y 轴右侧，$\therefore -\dfrac{b}{2a}>0$，$\therefore b>0$，②正确；图象与 y 轴交点在 y 轴正半轴上，$\therefore c>0$，

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

③错误；图象与 x 轴有两个不同的交点，即方程 $ax^2+bx+c=0$ 有两个不等实根，$\therefore b^2-4ac>0$，④正确．故选 A.

答案：A

类型二　两个图象之间的位置变换

例 2　[中考·荆州]将抛物线 $y=x^2-2x+3$ 向上平移 2 个单位长度，再向右平移 3 个单位长度后，得到的抛物线的表达式为（　　）

A. $y=(x-1)^2+4$　　B. $y=(x-4)^2+4$

C. $y=(x+2)^2+6$　　D. $y=(x-4)^2+6$

解：将抛物线 $y=x^2-2x+3=(x-1)^2+2$ 向上平移 2 个单位长度，得 $y=(x-1)^2+4$，再向右平移 3 个单位长度后，得到的抛物线的表达式为 $y=(x-4)^2+4$，故选择 B.

答案：B

方法点拨：两个函数图象作全等的变换，则这两个函数图象上所有的点都作同样的变换．求变换后的图象的表达式时，一般利用顶点式，确定顶点坐标是关键，再任找一点作为辅助的条件即可．

专题二　二次函数图象的性质

链接中考» 二次函数图象的性质主要有两个：一是轴对称性，即二次函数的图象关于对称轴对称．二是增减性，当开口向上时，在对称轴的左侧 y 随 x 的增大而减小，在对称轴的右侧 y 随 x 的增大而增大；当开口向下时，在对称轴的左侧 y 随 x 的增大而增大，在对称轴的右侧 y 随 x 的增大而减小．两个性质有时同时考查，一般以填空题、选择题形式出现．

例 3　[中考·常州]已知二次函数 $y=x^2+(m-1)x+1$，当 $x>1$ 时，y 随 x 的增大而增大，则 m 的取值范围是（　　）

A. $m=-1$　　B. $m=3$

C. $m\leqslant -1$　　D. $m\geqslant -1$

解：由二次项系数为正，可知抛物线开口向上，在对称轴右侧，y 的值随 x 值的增大而增大，可得此对称轴应为直线 $x=1$ 或在其左侧．

由于抛物线的对称轴为直线 $x=-\dfrac{m-1}{2}$，

所以 $-\dfrac{m-1}{2}\leqslant 1$，解得 $m\geqslant -1$.

答案：D

专题三　求二次函数的表达式

链接中考» 二次函数的表达式是两个变量之间的关系式，所以求二次函数的表达式的方法有两种：一种是直接根据两个变量之间的等量关系列出函数表达式；另一种是用待定系数法，先设出函数表达式，然后根据函数图象上点的坐标或几对对应值求出函数表达式．考查的形式多样，填空题、选择题和解答题都有．

类型一　根据两个变量之间的关系求表达式

例 4　如图 2-2，已知抛物线 $y=-\dfrac{1}{2}x^2+bx+c$ 与坐标轴分别交于点 $A(0,8)$，$B(8,0)$ 和点 E，动点 C 从原点 O 开始沿 OA 方向以每秒 1 个单位长度的速度移动，动点 D 从点 B 开始沿 BO 方向以每秒 1 个单位长度的速度移动．动点 C，D 同时出发，当动点 D 到达原点 O 时，点 C，D 停止运动．

(1) 求抛物线的表达式．

(2) 求 $\triangle CED$ 的面积 S 关于 D 点运动时间 t(s) 的函数表达式；当 t 为何值时，$\triangle CED$ 的面积最大？最大面积是多少？

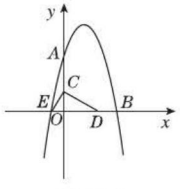


图 2-2

解题秘方：(1) 把点 A，B 的坐标代入表达式，用待定系数法求解即可；

(2) $\triangle CED$ 的面积 $S=\dfrac{1}{2}DE\cdot CO$，分别

基础 德 未

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

用含 t 的式子表示 DE，CO，然后把二次函数配方，求最值即可．

解：（1）将坐标（0，8），（8，0）代入抛物线 $y=-\frac{1}{2}x^2+bx+c$ 得：

$$\begin{cases} c=8, \\ -\frac{1}{2}\times 64+8b+c=0, \end{cases}$$

解得 $\begin{cases} b=3, \\ c=8. \end{cases}$

∴抛物线的表达式为 $y=-\frac{1}{2}x^2+3x+8$.

（2）∵点 B 坐标为（8，0），

∴ $OB=8$.

令 $y=0$，得 $-\frac{1}{2}x^2+3x+8=0$，

解得 $x_1=8$，$x_2=-2$，

∴点 E 坐标为（-2，0）．

∴ $OE=2$.

根据题意得，当 D 点运动 t s 时，$BD=t$，$OC=t$，

∴ $OD=8-t$.

∴ $DE=OE+OD=10-t$.

∴ $S=\frac{1}{2}DE\cdot OC=\frac{1}{2}\times(10-t)\times t=-\frac{1}{2}t^2+5t\ (0<t\leqslant 8)$，

即 $S=-\frac{1}{2}t^2+5t=-\frac{1}{2}(t-5)^2+\frac{25}{2}$.

∴当 $t=5$ 时，$S_{最大}=\frac{25}{2}$.

方法点拨：利用两个变量之间的关系求表达式，关键是要分析出两点：一是两个变量中每个变量表示的实际意义；二是两个变量之间的数量关系．

类型二　根据图象上的点的坐标求表达式

例 5　［中考·龙东］如图 2-3，抛物线 $y=x^2-bx+c$ 交 x 轴于点 A（1，0），点 C，交 y 轴于点 B，对称轴是直线 $x=2$.

（1）求抛物线的表达式．

（2）点 P 是抛物线对称轴上的一个动点，是否存在点 P，使△PAB 的周长最小？若存在，求出点 P 的坐标；若不存在，请说明理由．

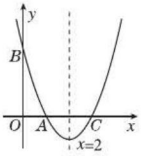


图 2-3

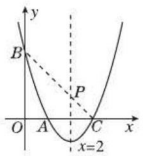


图 2-4

解：（1）由题意得 $\begin{cases} 1-b+c=0, \\ \frac{b}{2}=2, \end{cases}$

解得 $\begin{cases} b=4, \\ c=3. \end{cases}$

∴抛物线的表达式为 $y=x^2-4x+3$.

（2）存在．

∵点 A 与点 C 关于直线 $x=2$ 对称，

∴点 C 的坐标为（3，0）．

连接 BC，与直线 $x=2$ 交于点 P，则点 P 即为所求，如图 2-4.

由题知抛物线 $y=x^2-4x+3$ 与 y 轴的交点为 B（0，3）．

设直线 BC 的表达式为 $y=kx+b_1$，

则 $\begin{cases} 3k+b_1=0, \\ b_1=3, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} k=-1, \\ b_1=3. \end{cases}$

∴直线 BC 的表达式为 $y=-x+3$.

当 $x=2$ 时，$y=-2+3=1$，

∴点 P 的坐标为（2，1）．

方法点拨：求有图象的函数的表达式，一般都是采用待定系数法，根据函数图象提供的信息求出函数表达式．

专题四　二次函数与一元二次方程或不等式之间的关系

链接中考» 二次函数与一元二次方程的关系，关键就是看函数图象与 x 轴的交点坐标；解决函数值大于零或小于零的问题，就是看函数图象在 x 轴上方或下方的问题，主要以解答题的形式出现．

例 6　［中考·滨州］根据下列要求，解答

荣德基

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

相关问题.

（1）请补全以下求不等式 $-2x^2-4x \geqslant 0$ 的解集的过程.

①构造函数，画出图象：根据不等式特征构造二次函数 $y=-2x^2-4x$，并在下面的坐标系中（如图 2-5）画出二次函数 $y=-2x^2-4x$ 的图象（只画出图象即可）.

②求得界点，标示所需：当 $y=0$ 时，求得方程 $-2x^2-4x=0$ 的解为_____，并用线标示出函数 $y=-2x^2-4x$ 图象中 $y \geqslant 0$ 的部分.

③借助图象，写出解集：由所标示图象，可得不等式 $-2x^2-4x \geqslant 0$ 的解集为_____.

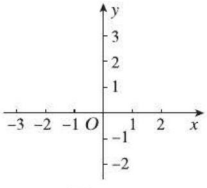


图 2-5

（2）利用（1）中求不等式解集的步骤，求不等式 $x^2-2x+1 < 4$ 的解集.

①构造函数，画出图象；

②求得界点，标示所需；

③借助图象，写出解集.

（3）参照以上两个求不等式解集的过程，借助一元二次方程的求根公式，直接写出关于 x 的不等式 $ax^2+bx+c > 0$（$a > 0$）的解集.

解：（1）①如图 2-6①.

②$x_1=0$，$x_2=-2$；图略.

③$-2 \leqslant x \leqslant 0$.

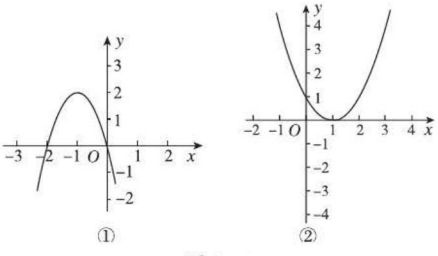


图 2-6

（2）①构造二次函数 $y=x^2-2x+1$，并画出图象如图 2-6②.

②当 $y=4$ 时，求得方程 $x^2-2x+1=4$ 的解为 $x_1=3$，$x_2=-1$. 图略.

③借助图象，直接写出不等式 $x^2-2x+1 < 4$ 的解集为 $-1 < x < 3$.

（3）①当 $b^2-4ac > 0$ 时，解集为

$$x > \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \text{ 或 } x < \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a};$$

②当 $b^2-4ac=0$ 时，解集为 $x \neq -\frac{b}{2a}$；

③当 $b^2-4ac < 0$ 时，解集为全体实数.

专题五 二次函数的应用

链接中考» 二次函数的应用主要有两种形式：第一种是在实际问题中建立二次函数模型，利用二次函数的性质求解；第二种是二次函数与其他知识的综合应用. 考查时多以解答题的形式出现.

类型一 二次函数的实际应用

例 7 [**中考·鄂州**] 鄂州市化工材料经销公司购进一种化工材料若干千克，价格为每千克 30 元. 物价部门规定其销售单价不高于每千克 60 元，不低于每千克 30 元. 经市场调查发现，日销售量 y（千克）是销售单价 x（元）的一次函数，且当 $x=60$ 时，$y=80$，$x=50$ 时，$y=100$. 在销售过程中，每天还要支付其他费用 450 元.

（1）求 y 与 x 的函数表达式，并写出自变量 x 的取值范围.

（2）求该公司销售该材料日获利 w（元）与销售单价 x（元）之间的函数表达式.

（3）当销售单价为多少元时，该公司日获利最大？最大利润是多少元？

解：（1）设 $y=kx+b$，由题意，得

$$\begin{cases} 80=60k+b, \\ 100=50k+b, \end{cases}$$

荣德基

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

解得 $\begin{cases}k=-2,\\ b=200.\end{cases}$

∴ $y=-2x+200\ (30\leqslant x\leqslant 60)$.

（2）$w=(x-30)(-2x+200)-450=-2x^2+260x-6\,450\ (30\leqslant x\leqslant 60)$.

（3）$w=-2x^2+260x-6\,450=-2(x-65)^2+2\,000$.

∵ $-2<0$，∴当 $x<65$ 时 w 随 x 的增大而增大.

又∵ $30\leqslant x\leqslant 60$，∴当 $x=60$ 时，w 有最大值，$w_{最大}=1\,950$.

∴当销售单价为 60 元时，该公司日获利最大，最大利润是 1 950 元.

方法点拨：解此类题的关键是厘清各种数量关系，能根据数量关系列函数表达式；利用函数的增减性以及自变量的取值范围解决问题.

类型二　二次函数的几何应用

例 8　［中考·铜仁］如图 2-7，已知：关于 x 的二次函数 $y=x^2+bx+c$ 的图象与 x 轴交于点 $A(1,0)$ 和点 B，与 y 轴交于点 $C(0,3)$，抛物线的对称轴与 x 轴交于点 D.

（1）求二次函数的表达式.

（2）在 y 轴上是否存在一点 P，使△ PBC 为等腰三角形，若存在，请求出点 P 的坐标.

（3）有一个点 M 从点 A 出发，以每秒 1 个单位长度的速度在 AB 上向点 B 运动，另一个点 N 从点 D 与点 M 同时出发，以每秒 2 个单位长度的速度在抛物线的对称轴上运动，当点 M 到达点 B 时，点 M，N 同时停止运动，问 M，N 运动到何处时，△ MNB 的面积最大，试求出最大面积.

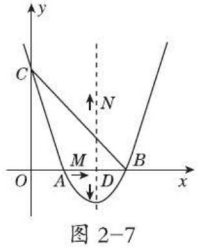


图 2-7

解：（1）∵抛物线 $y=x^2+bx+c$ 经过点 $A(1,0)$，$C(0,3)$，

∴ $\begin{cases}1+b+c=0,\\ c=3,\end{cases}$

解得 $\begin{cases}b=-4,\\ c=3.\end{cases}$

∴二次函数的表达式为 $y=x^2-4x+3$.

（2）存在.

由题易得 B 点坐标为 $(3,0)$.

①当以 BC 为底边时，

∵ $OB=OC=3$，

∴点 O 符合条件，即存在点 $P(0,0)$，使△ PBC 为等腰三角形.

②当以 PB 为底边，BC 为腰时，

$PC=BC=\sqrt{3^2+3^2}=3\sqrt{2}$.

当点 P 在点 C 上方时，点 P 坐标为 $(0,3\sqrt{2}+3)$；

当点 P 在点 C 下方时，点 P 坐标为 $(0,3-3\sqrt{2})$.

③当以 PC 为底边、BC 为腰时，$OP=OC$，

∴点 P 坐标为 $(0,-3)$.

综上所述，符合条件的点 P 有四个，分别为 $(0,0)$，$(0,3\sqrt{2}+3)$，$(0,3-3\sqrt{2})$，$(0,-3)$.

（3）易得抛物线的对称轴为 $x=2$. 设点 M 的运动时间为 t 秒，由题易得 $0\leqslant t\leqslant 2$.

∵点 A 坐标为 $(1,0)$，点 B 坐标为 $(3,0)$，

∴ $OA=1$，$OB=3$.

∴ $BM=3-1-t=2-t$.

∵点 N 的速度是点 M 的 2 倍，

∴ $DN=2t$.

∴ $S_{△MNB}=\frac{1}{2}\times(2-t)\times 2t$

$=-(t-1)^2+1$.

∴当 $t=1$ 时，$S_{△MNB}$ 有最大值，为 1，

即当 $M(2,0)$，$N(2,2)$ 或 $N(2,-2)$ 时，△ MNB 的面积最大，最大面积为 1.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

方法点拨：（1）会用待定系数法求函数表达式；（2）利用“数形结合”的思想，按照“表达式→坐标→距离（线段长度）→几何图形性质及应用”的思路思考；（3）在运动中求最大值或最小值时，通常可以考虑将问题转化为函数的最值问题，利用二次函数的顶点坐标结合自变量的取值范围解决.

方法必会

专题六 分类讨论思想

专题解读» 当被研究的问题包含多种可能情况，不能一概而论时，必须按可能出现的所有情况分别进行讨论，从而得出相应的结论，这种处理问题的思维方法称为分类讨论思想.

例9 关于x的二次函数$y=-x^2+(k^2-4)x+2k-2$的图象以y轴为对称轴，且与y轴的交点在x轴的上方.

（1）求此抛物线所对应的函数表达式，并在直角坐标系中画出函数的大致图象.

（2）设A是y轴右侧抛物线上的一个动点，过点A作$AB\perp x$轴于点B，再过点A作x轴的平行线交抛物线于点D，过点D作$DC\perp x$轴于点C，得到矩形$ABCD$. 设矩形$ABCD$的周长为l，点A的横坐标为x，试求l关于x的函数表达式.

（3）当点A在y轴右侧的抛物线上运动时，矩形$ABCD$能否成为正方形？若能，请求出此时正方形的周长；若不能，请说明理由.

解：（1）根据题意，得$k^2-4=0$，解得$k=\pm 2$.

∵抛物线与y轴的交点在x轴的上方，

∴$2k-2>0$.

∴$k=2$.

∴抛物线所对应的函数表达式为$y=-x^2+2$.

函数的大致图象如图2-8.

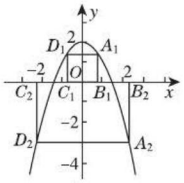


图2-8

（2）令$-x^2+2=0$，得$x=\pm\sqrt{2}$.

如图2-8，当$0<x<\sqrt{2}$时，

$A_1D_1=2x$，$A_1B_1=-x^2+2$，

∴$l=2(A_1B_1+A_1D_1)=-2x^2+4x+4$.

当$x>\sqrt{2}$时，

$A_2D_2=2x$，$A_2B_2=-(-x^2+2)=x^2-2$，

∴$l=2(A_2B_2+A_2D_2)=2x^2+4x-4$.

综上所述，l关于x的函数表达式是

$$l=\begin{cases}-2x^2+4x+4 & (0<x<\sqrt{2}),\\ 2x^2+4x-4 & (x>\sqrt{2}).\end{cases}$$

（3）能.

当$0<x<\sqrt{2}$时，

令$A_1D_1=A_1B_1$，得$x^2+2x-2=0$，

解得$x_1=-1-\sqrt{3}$（舍去），$x_2=-1+\sqrt{3}$.

将$x=-1+\sqrt{3}$代入$l=-2x^2+4x+4$，

得$l=8\sqrt{3}-8$.

当$x>\sqrt{2}$时，令$A_2D_2=A_2B_2$，

得$x^2-2x-2=0$，

解得$x_1=1+\sqrt{3}$，$x_2=1-\sqrt{3}$（舍去）.

将$x=1+\sqrt{3}$代入$l=2x^2+4x-4$，

得$l=8\sqrt{3}+8$.

综上可知，矩形$ABCD$能成为正方形. 当$x=-1+\sqrt{3}$时，正方形的周长为$8\sqrt{3}-8$；当$x=1+\sqrt{3}$时，正方形的周长为$8\sqrt{3}+8$.

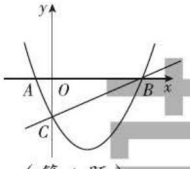
未德基

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

好题必解 答案见 223 页

类型 1：巧用待定系数法求二次函数表达式

1. 如图，已知抛物线 $y=ax^2-\frac{3}{2}x+c$ 与 x 轴相交于 A，B 两点，并与直线 $y=\frac{1}{2}x-2$ 交于 B，C 两点，其中点 C 是直线 $y=\frac{1}{2}x-2$ 与 y 轴的交点，求该抛物线对应的函数表达式.



（第 1 题）

类型 2：巧用图象法解一元二次方程或一元二次不等式

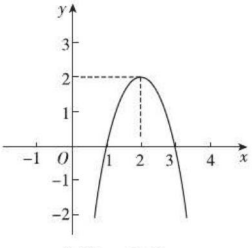
2. 二次函数 $y=ax^2+bx+c$（$a\neq 0$）的图象如图，根据图象解答下列问题：

（1）写出方程 $ax^2+bx+c=0$ 的两个根；

（2）写出不等式 $ax^2+bx+c>0$ 的解集；

（3）写出 y 随 x 的增大而减小的自变量 x 的取值范围；

（4）若方程 $ax^2+bx+c=k$ 有两个不相等的实数根，求 k 的取值范围.



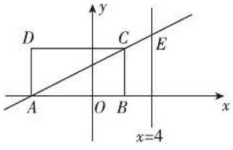
（第 2 题）

类型 3：巧用二次函数求几何最值

3. 如图，矩形 $ABCD$ 的顶点 A，B 的坐标分别为（-4，0）和（2，0），且 $BC=2\sqrt{3}$. 直线 AC 与直线 $x=4$ 交于点 E.

（1）求以直线 $x=4$ 为对称轴，且过点 C 与原点 O 的抛物线的表达式，并说明此抛物线一定过点 E.

（2）设（1）中的抛物线与 x 轴的另一个交点为 N，点 M 是该抛物线上位于点 C，N 之间的一个动点，求△ CMN 面积的最大值.



（第 3 题）

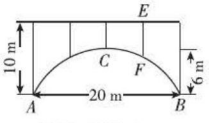
类型 4：巧建坐标系解抛物线型问题

4. 一座抛物线型的拱桥如图，拱桥的最大高度为 6 m，跨度为 20 m，相邻两支柱间的距离均为 5 m.

（1）建立适当的平面直角坐标系，求抛物线所对应的函数表达式.

（2）求支柱 EF 的长度.

（3）拱桥下是双向行道（正中间是一条宽 2 m 的隔离带），其中的一条行车道能否并排行驶宽 2 m、高 3 m 的三辆汽车（汽车间的间隔忽略不计）？请说明你的理由.



（第 4 题）

荣德基

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

第二章测试卷

答案见 224 页

（100 分 60 分钟）

一、选择题（每题 4 分，共 32 分）

1. 下列各式中，y 是 x 的二次函数的是（　　）

A. $xy+x^2=1$　　B. $x^2-y+2=0$

C. $y=\dfrac{1}{x^2}$　　D. $y^2-4x=3$

2. 下列关于二次函数 $y=-\dfrac{1}{2}x^2$ 的图象的说法：

①图象是一条抛物线；②开口向下；

③对称轴是 y 轴；④顶点坐标为（0，0）.

其中正确的有（　　）

A. 1 个　B. 2 个　C. 3 个　D. 4 个

3. 抛物线 $y=x^2+bx+c$ 的图象先向右平移 2 个单位长度，再向下平移 3 个单位长度，所得图象的函数表达式为 $y=(x-1)^2-4$，则 b，c 的值为（　　）

A. $b=2$，$c=-6$　　B. $b=2$，$c=0$

C. $b=-6$，$c=8$　　D. $b=-6$，$c=2$

4. 二次函数 $y=-x^2+2x+4$ 的最大值为（　　）

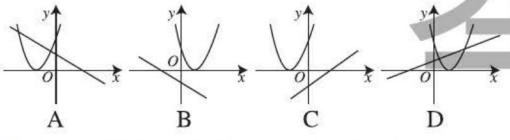
A. 3　　B. 4　　C. 5　　D. 6

5. 已知二次函数 $y=3(x-1)^2+k$ 的图象上有 $A(\sqrt{2},y_1)$，$B(2,y_2)$，$C(-\sqrt{5},y_3)$ 三个点，则 y_1，y_2，y_3 的大小关系是（　　）

A. $y_1>y_2>y_3$　　B. $y_2>y_1>y_3$

C. $y_3>y_1>y_2$　　D. $y_3>y_2>y_1$

6. 同一坐标系中，抛物线 $y=(x-a)^2$ 与直线 $y=a+ax$ 的图象可能是（　　）



A　　B　　C　　D

7. 向空中发射一枚炮弹，经 x 秒后的高度为 y 米，且时间与高度的关系为 $y=ax^2+bx+c$（$a\neq0$）. 若此炮弹在第 7 秒与第 14 秒时的高度相等，则在下列时间中炮弹所在高度最高的是（　　）

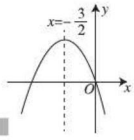
A. 第 8 秒　　B. 第 10 秒

C. 第 12 秒　　D. 第 15 秒

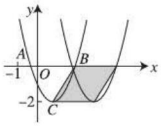
8. 已知二次函数 $y=ax^2+bx+c$（$a\neq0$）的图象如图，给出以下四个结论：① $abc=0$；② $a+b+c>0$；③ $a>b$；④ $4ac-b^2<0$. 其中，正确的结论有（　　）

A. 1 个　　B. 2 个

C. 3 个　　D. 4 个



（第 8 题）



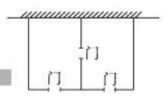
（第 10 题）

二、填空题（每题 4 分，共 16 分）

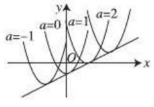
9. 二次函数 $y=-x^2+2x+3$ 的图象与 x 轴交于 A，B 两点，P 为它的顶点，则 $S_{\triangle PAB}=$_____.

10. 如图，已知抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 与 x 轴交于 A，B 两点，顶点 C 的纵坐标为 -2. 现将抛物线向右平移 2 个单位长度，得到抛物线 $y=a_1x^2+b_1x+c_1$，则下列结论正确的是_____.（写出所有正确结论的序号）

①$b>0$；②$a-b+c<0$；③阴影部分的面积为 4；④若 $c=-1$，则 $b^2=4a$.



（第 11 题）



（第 12 题）

11. 某农场拟建两间矩形饲养室，一面靠现有墙（墙足够长），中间用一道墙隔开，并在如图的三处各留 1 m 宽的门，已知计划中的材料可建墙体（不包括门）总长为 27 m，则能建成的饲养室总占地面积最大为____m^2.

12. 已知二次函数 $y=(x-2a)^2+(a-1)$（a 为常数），当 a 取不同的值时，其图象构成一个“抛物线系”. 如图分别是当 $a=-1$，$a=0$，$a=1$，$a=2$ 时二次函数的图象. 它们的顶点在一条直线上，这条直线的表达式是_____.

基德苯

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

三、解答题（共52分）

13.（12分）（1）用配方法把二次函数 $y=x^2-4x+3$ 变成 $y=(x-h)^2+k$ 的形式；

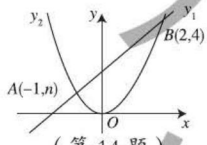
（2）在平面直角坐标系中画出 $y=x^2-4x+3$ 的图象．

（3）把方程 $x^2-4x+3=2$ 的根在函数 $y=x^2-4x+3$ 的图象上表示出来．

14.（12分）如图，一次函数 $y_1=kx+b$ 与二次函数 $y_2=ax^2$ 的图象交于 A，B 两点．

（1）利用图中条件，求两个函数的表达式．

（2）根据图象写出使 $y_1>y_2$ 的 x 的取值范围．

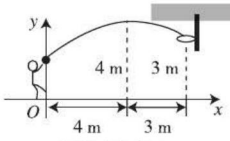


（第14题）

15.（14分）在一次篮球比赛中，如图，队员甲正在投篮．已知球出手时离地面 $\frac{20}{9}$ m，与篮圈中心的水平距离为7 m，球出手后水平距离为4 m时达到最大高度4 m．设篮球运行轨迹为抛物线，篮圈距地面3 m．

（1）建立如图的平面直角坐标系，问：此球能否准确投中？

（2）此时，对方队员乙在甲前面1 m处跳起盖帽拦截，已知乙的最大摸高为3.1 m，那么他能否获得成功？



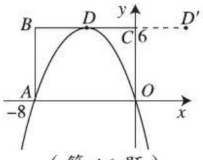
（第15题）

16.（14分）矩形 $OABC$ 的顶点 $A(-8,0)$，$C(0,6)$，点 D 是 BC 边上的中点，抛物线 $y=ax^2+bx$ 经过 A，D 两点，如图．

（1）求点 D 关于 y 轴的对称点 D' 的坐标及 a，b 的值．

（2）在 y 轴上取一点 P，使 $PA+PD$ 长度最短，求点 P 的坐标．

（3）将抛物线 $y=ax^2+bx$ 向下平移，记平移后点 A 的对应点为 A_1，点 D 的对应点为 D_1，当抛物线平移到某个位置时，恰好使得点 O 是 y 轴上到 A_1，D_1 两点距离之和 OA_1+OD_1 最短的一点，求此抛物线的表达式．



（第16题）

荣德基

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

最完美的对称图形











第二章 圆

荣德基

核心考点

你将见到的

- 圆的轴对称性——垂径定理
- 圆的旋转不变性
  ——弧、弦、圆心角之间关系定理
- 圆周角定理
- 与圆有关的位置关系——点、直线、正多边形与圆的位置关系
- 弧长和扇形面积的计算

核心方法

我们为你提供的

- 类比法
- 等积变形法
- 作差法
- 转化思想
- 数形结合思想
- 分类讨论思想
- 割补法
- 方程思想

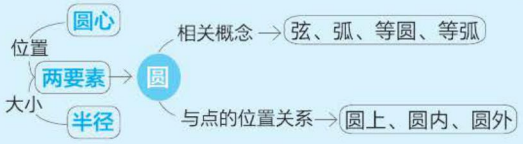
关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

1 圆

核心知识

- 弦　直径
- 弧　半圆
- 等圆　等弧
- 点与圆的位置关系

知识链接



点知识·拨考向 速提分

点知识 1 圆

1. 圆的定义

（1）**描述性定义**：在一个平面内，线段 OA 绕它固定的一个端点 O 旋转一周，另一个端点 A 所形成的图形叫做圆. 其固定的端点 O 叫做圆心，线段 OA 叫做半径.

（2）**集合观点定义**：圆可以看成是平面上到定点的距离等于定长的所有点组成的图形，定点就是圆心，定长就是半径.

2. 圆的表示法　以点 O 为圆心的圆，记作⊙O，读作“圆 O”.

3. 圆的特性

（1）圆上各点到定点（圆心 O）的距离都等于定长（半径 r），即同圆的半径相等.

（2）到定点 O 的距离等于定长 r 的点都在同一个圆上，即到圆心的距离等于半径的点在圆上.

提分·必记

特别提醒

1. 确定一个圆需要“两个要素”，一是圆心：圆心定其位置，二是半径：半径定其大小.
2. 圆是一条封闭的曲线，曲线是“圆周”，而不能认为是“圆面”.
3. “圆上的点”指圆周上的点.

拔考向 利用圆的定义解确定圆的应用问题

题型 1：圆的定义在确定圆中的应用

例 1　下列说法中，错误的有（　　）

（1）经过点 P 的圆有无数个；

（2）以点 P 为圆心的圆有无数个；

（3）半径为 3 cm 且经过点 P 的圆有无数个；

（4）以点 P 为圆心，3 cm 长为半径的圆有无数个.

A. 1 个　　B. 2 个　　C. 3 个　　D. 4 个

解题秘方：紧扣圆的定义的“两要素”进行判断.

解：确定一个圆必须有两个条件，即圆心和半径，只满足一个条件或不满足任何一个条件的圆都有无数个，由此可知（1）（2）（3）正确；圆心和半径都确定，这样的圆有且只有一个（唯一），由此可知（4）错误.

答案：A

提分·秘诀

特别提醒

1. 圆的两种定义中确定圆的条件是相同的，即圆心和半径，两者缺一不可.
2. “点在圆上”和“圆过点”表示的意义都是：这个点在圆周上.
3. 圆将平面划分为三部分：圆上、圆内、圆外.

基础 德基

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

题型 2：圆的定义在说明点共圆中的应用

例 2 菱形 $ABCD$ 的对角线 AC 和 BD 相交于点 O. E，F，G，H 分别为边 AB，BC，CD，DA 的中点，那么点 E，F，G，H 是否在同一个圆上？请说明理由.

解题秘方：只需说明 E，F，G，H 四点到点 O 的距离相等.

解：点 E，F，G，H 在同一个圆上，理由如下：

如图 3-1-1，连接 OE，OF，OG，OH.

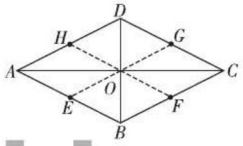


图 3-1-1

∵四边形 $ABCD$ 是菱形，

∴ $AB=BC=CD=DA$，$AC \perp BD$.

又∵ E 为 AB 边的中点，∴ $OE=\frac{1}{2}AB$.

同理可得，$OF=\frac{1}{2}BC$，$OG=\frac{1}{2}CD$，$OH=\frac{1}{2}DA$.

∴ $OE=OF=OG=OH$.

∴点 E，F，G，H 在以点 O 为圆心、OE 为半径的圆上.

解法提醒

本题运用数形结合思想，将说明“位置关系”转化为说明“数量关系”，即将求证几个点在同一个圆上转化为证明这几个点到某点（圆心）的距离相等；“到定点的距离相等（数量关系）的点在同一个圆上（位置关系）”是证明多点共圆问题的常用方法.

点知识 2 圆的有关概念

	定义	注意
弦	连接圆上任意两点的线段叫做弦	圆中有无数条弦，其中直径是最长的弦
直径	经过圆心的弦叫做直径	
弧、半圆、劣弧、优弧	（1）圆上任意两点间的部分叫做圆弧； （2）圆的任意一条直径的两个端点分圆成两条弧，每一条弧都叫做半圆； （3）小于半圆的弧叫做劣弧； （4）大于半圆的弧叫做优弧	弧包括优弧、劣弧和半圆；半圆既不是劣弧，也不是优弧
等圆	能够重合的两个圆叫做等圆，容易看出：半径相等的两个圆是等圆；反过来，同圆或等圆的半径相等	等圆只和半径的大小有关，和圆心的位置无关
等弧	在同圆或等圆中，能够互相重合的弧叫做等弧	等弧只能出现在同圆或等圆中；等弧是全等的，而不仅仅是弧的长度相等

提分·必记

特别提醒

1. 直径是过圆心（最长）的弦，但弦不一定是直径.
2. 半圆是弧，但弧不一定是半圆.
3. 每条弧对一条弦；而每条弦对的弧有两条：一条优弧、一条劣弧或两个半圆.

拔考向 利用圆的有关概念判断命题的正确性

例 3 下列语句中正确的有（　　）

①直径是弦；②弦是直径；③半径相等的两个半圆是等弧；④长度相等的两条弧是等弧；⑤半圆是弧，弧不一定是半圆.

A. 1 个　　B. 2 个　　C. 3 个　　D. 4 个

提分·秘诀

警示误区

只有同圆或等圆中才可能有等弧，等弧长度一定相等，但长度相等的弧不一定是等弧.

解题秘方：紧扣圆的相关概念进行解答.

解：直径是最长的弦，故①正确；直径是过圆心的弦，但弦不一定是直径，故②错误；半圆是弧，半径相等的两个半圆能互相重合，所以是等弧，故③正确；只有在同圆或等圆中，长度相等的两条弧才是等弧，故④错误；弧分为劣弧、优弧、半圆，故⑤正确.

答案：C

荣德基

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

点知识▶ 3 点和圆的位置关系

点和圆的位置关系

设⊙O的半径为r，点P到圆心的距离$OP=d$，则有：

点和圆的位置关系	特点	等价关系
点在圆外	点到圆心的距离大于半径	点P在圆外⇔$d>r$
点在圆上	点到圆心的距离等于半径	点P在圆上⇔$d=r$
点在圆内	点到圆心的距离小于半径	点P在圆内⇔$d<r$

特别提醒：符号“⇔”读作“等价于”，它表示从符号的左端可以推出右端，从右端也可以推出左端，即左右两端互为因果关系.

拔考向▶ 利用点和圆的位置关系判定说明点的位置

例4 已知⊙O的半径$r=5$ cm，圆心O到直线l的距离$d=OD=3$ cm，在直线l上有P，Q，R三点，且有$PD=4$ cm，$QD=5$ cm，$RD=3$ cm，那么P，Q，R三点与⊙O的位置关系各是怎样的？

解题秘方：比较点到圆心的距离与半径的大小确定点的位置情况.

解：如图3−1−2，连接OR，OP，OQ.

∵ $PD=4$ cm，$OD=3$ cm，且$OD\perp l$，

∴ $OP=\sqrt{PD^2+OD^2}=5$ cm$=r$.

∴点P在⊙O上.

∵ $QD=5$ cm，$OD=3$ cm，且$OD\perp l$，

∴ $OQ=\sqrt{QD^2+OD^2}=\sqrt{34}$ cm>5 cm$=r$.

∴点Q在⊙O外.

∵ $RD=3$ cm，$OD=3$ cm，且$OD\perp l$，

∴ $OR=\sqrt{RD^2+OD^2}=3\sqrt{2}$ cm<5 cm$=r$.

∴点R在⊙O内.

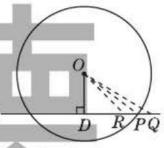


图3−1−2

点方法·拨技巧 提高分

拔尖角度▶ 1 利用构造等腰三角形法求圆中的角的度数

例5 如图3−1−3，AB为⊙O的直径，CD为⊙O的弦，AB，CD的延长线交于点E，已知$AB=2DE$，$\angle E=18°$，求$\angle AOC$的度数.

解题秘方：紧扣“同圆的半径相等”构造等腰三角形，利用三角形边角关系计算.

解：如图3−1−3，连接OD.

∵ AB为⊙O的直径，OD为⊙O的半径，

∴ $AB=2OD$.

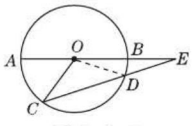


图3−1−3

提分·必记

拓宽视野

一个圆将平面分为三个部分：

1. 圆的外部可以看成到圆心的距离大于半径的点的集合；
2. 圆上可以看成到圆心的距离等于半径的点的集合；
3. 圆的内部可以看成到圆心的距离小于半径的点的集合.

提分·秘诀

活学巧记

点和圆位置关系，
d，r关系是关键，
d小于r在圆内，
d等于r在圆上，
d大于r在圆外.

点和圆的位置关系

挑战·高分

解法提醒

连接圆心和圆周上任一点可得到圆的半径；同圆或等圆中的所有半径都相等，所以以圆上任意两点和圆心为顶点的三角形是等腰三角形.因此，连接半径构造等腰三角形是圆中求角的常用方法.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

又∵ $AB=2DE$，∴ $OD=DE$.

∴ $\angle DOE=\angle E=18°$.

∴ $\angle ODC=\angle DOE+\angle E=36°$.

∵ $OC=OD$，∴ $\angle C=\angle ODC=36°$.

∴ $\angle AOC=\angle C+\angle E=36°+18°=54°$.

拔尖角度▸ 2 利用转化圆的半径法比较线段的大小

挑战·高分

例 6 如图 3-1-4，点 A，D，M 在半圆 O 上，四边形 $ABOC$，四边形 $DEOF$，四边形 $HMNO$ 均为矩形．设 $BC=a$，$EF=b$，$NH=c$，则下列各式中正确的是（　　）

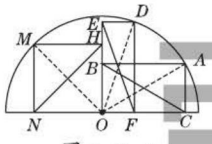


图 3-1-4

A. $a>b>c$　　B. $a=b=c$

C. $c>a>b$　　D. $b>c>a$

解题秘方：把要比较长短的线段都转化为同圆的半径来解答．

解：如图 3-1-4，连接 OA，OD，OM.

∵四边形 $ABOC$，四边形 $DEOF$，四边形 $HMNO$ 均为矩形，

∴ $a=BC=OA$，$b=EF=OD$，$c=NH=OM$.

∵ A，D，M 都在半圆 O 上，∴ $OA=OD=OM$.

∴ $a=b=c$.

答案：B

技巧点拨

巧用圆的半径的性质比较线段大小的方法：本题巧妙地运用矩形的两条对角线相等，将没有任何关联的三条线段转化为圆的三条半径，再根据“同圆的所有半径都相等”，比较线段的大小关系．

拔尖角度▸ 3 利用分类法求涉点和圆的位置关系的圆的半径

挑战·高分

例 7 已知点 P 到⊙ O 的最近距离为 4 cm，最远距离为 10 cm，求⊙ O 的半径．

解题秘方：紧扣“点、点到圆的距离最近（远）的点和圆心三点在同一直线上”，并结合点的不同位置进行分类解答．

解：点 P 的位置分两种情况：

当点 P 在⊙ O 外时，如图 3-1-5 ①．

∵ $PA=4$ cm，$PB=10$ cm，

∴ $AB=PB-PA=10-4=6$（cm）．

∴⊙ O 的半径为 3 cm.

当点 P 在⊙ O 内时，如图 3-1-5 ②．

∵ $PA=4$ cm，$PB=10$ cm，

∴ $AB=PB+PA=10+4=14$（cm）．

∴⊙ O 的半径为 7 cm.

综上所述，⊙ O 的半径是 3 cm 或 7 cm.

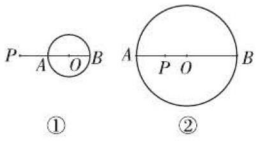


图 3-1-5

特别提醒

1. 涉及点和圆的位置关系的问题，如果题目中没有明确点和圆的位置关系，应考虑点在圆内、圆上和圆外三种可能的情况，即图形位置不确定时应分类讨论，利用数形结合思想来解决．
2. 点及点到圆的距离最近的点，点到圆的距离最远的点，三点在同一直线上，且经过圆心．

荣德基

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

拔尖角度 4 利用比较法解涉点和圆的位置关系的相关问题

挑战·高分

例 8 如图 3-1-6，在 $\triangle ABC$ 中，$\angle ACB=90°$，$AC=2$，$BC=3$，AB 的中点为 M.

（1）若以点 C 为圆心，2 为半径作 $\odot C$，则点 A，B，M 与 $\odot C$ 有怎样的位置关系？

（2）若以点 C 为圆心作 $\odot C$，使 A，B，M 三点中至少有一点在 $\odot C$ 内，并且至少有一点在 $\odot C$ 外，求 $\odot C$ 的半径 r 的取值范围.

解题秘方： 分别用点 A，B，M 到点 C 的距离与 $\odot C$ 半径的大小进行比较，说明位置情况.

解：（1）$\because AC=2$，且 $\odot C$ 的半径为 2，

$\therefore$ 点 A 在 $\odot C$ 上.

又 $\because BC=3>2$，$\therefore$ 点 B 在 $\odot C$ 外.

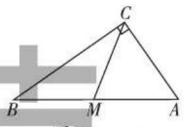


图 3-1-6

在 Rt $\triangle ABC$ 中，$AB=\sqrt{3^2+2^2}=\sqrt{13}$，

$\therefore MC=\frac{\sqrt{13}}{2}<2$. $\therefore$ 点 M 在 $\odot C$ 内.

（2）$\because AC=2$，$BC=3$，$MC=\frac{\sqrt{13}}{2}$，$\therefore BC>AC>MC$.

$\therefore \odot C$ 的半径 r 的取值范围是 $\frac{\sqrt{13}}{2}<r<3$.

解法提醒

- 判断点和圆的位置关系的实质是比较点到圆心的距离与半径的大小关系，再由数量的大小关系确定位置关系；
- 三点中至少有一点在圆内，且至少有一点在圆外，说明这个圆的半径小于圆心到最远点的距离，大于圆心到最近点的距离.

点中考·拔模拟 得满分

中考探秘

本节内容主要是介绍圆的概念及圆的基本元素的概念，在中考中很少单独命题，偶尔以选择题的形式出现，通常与其他的知识结合出题.

三年中考兵法

考法 1 利用对圆的认识求坐标

冲刺·满分

例 9 [中考·百色]已知点 A 的坐标为（2，0），点 P 在直线 $y=x$ 上运动，当以点 P 为圆心、PA 的长为半径的圆的面积最小时，点 P 的坐标为（　　）

A.（1，−1）　B.（0，0）　C.（1，1）　D.（$\sqrt{2}$，$\sqrt{2}$）

试题评析： 本题考查了一次函数图象上点的坐标特征、垂线的性质、等腰三角形的性质及对圆的认识，综合性较强，难度适中，得出点 P 的位置是解题的关键.

解： 如图 3-1-7，过点 A 作 AP 与直线 $y=x$ 垂直，垂足为点 P，此时 PA 最小，则以点 P 为圆心、PA 的长为半径的圆的面积最小，过点 P 作 PM 与 x 轴垂直，垂足为点 M.

思路引导

当 PA 最小时，以点 P 为圆心、PA 的长为半径的圆的面积最小. 根据垂线段最短可知，过点 A 作 AP 与直线 y=x 垂直，垂足为点 P，此时 PA 最小.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

在 Rt△ OAP 中，∵∠ OPA=90°，∠ POA=45°，

∴∠ OAP=45°．∴ PO=PA.

∵ PM ⊥ x 轴于点 M，

∴ OM=MA=$\frac{1}{2}$ OA=1.

∴ PM=OM=1. ∴点 P 的坐标为（1，1）.

答案：C

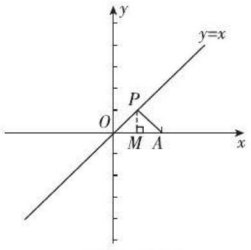


图 3-1-7

考法 2 利用等圆的半径求角

例 10 ［中考·益阳］如图 3-1-8，分别以 A，B 为圆心，线段 AB 的长为半径的两个圆相交于 C，D 两点，则∠ CAD 的度数为_____.

试题评析：本题考查了等圆的半径、等边三角形的定义和性质，构造半径是解题关键.

解：如图 3-1-8，连接 BC，BD.

∴ AC=AD=AB=BD=BC.

∴△ ABC 和△ ABD 都是等边三角形.

∴∠ BAC=∠ BAD=60°.

∴∠ CAD=120°.

答案：120°

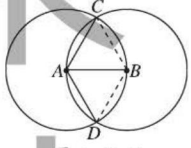


图 3-1-8

考法 3 利用网格格点上点与圆的位置关系情况确定圆的半径的范围

例 11 ［中考·枣庄］如图 3-1-9，在网格（每个小正方形的边长均为 1）中选取 9 个格点（格线的交点称为格点），如果以 A 为圆心，r 为半径画圆，选取的格点中除点 A 外恰好有 3 个在圆内，则 r 的取值范围为（　　）

A. $2\sqrt{2}<r<\sqrt{17}$

B. $\sqrt{17}<r\leqslant 3\sqrt{2}$

C. $\sqrt{17}<r<5$

D. $5<r<\sqrt{29}$

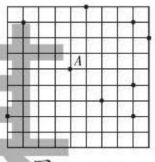


图 3-1-9

试题评析：本题考查了点与圆的位置关系以及勾股定理，利用勾股定理求出各格点到点 A 的距离是解题的关键.

解：给各格点标上字母，如图 3-1-10.

AB=$\sqrt{2^2+2^2}$ =$2\sqrt{2}$，AC=AD=$\sqrt{4^2+1^2}$ =$\sqrt{17}$，

AE=$\sqrt{3^2+3^2}$ =$3\sqrt{2}$，AF=$\sqrt{5^2+2^2}$ =$\sqrt{29}$，

AG=AM=AN=$\sqrt{4^2+3^2}$ =5，

∴当$\sqrt{17}<r\leqslant 3\sqrt{2}$时，以 A 为圆心、r 为半径画圆，选取的格点中除点 A 外恰好有 3 个在圆内.

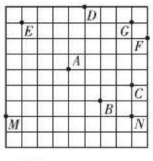


图 3-1-10

答案：B

解法提醒

利用特殊图形——平角、等边三角形、含 30° 角的直角三角形、等腰直角三角形等求角度，是没有已知角度求角度问题的一种常用方法.

解法提醒

分别求出各格点到圆心的距离，除点 A 外恰有 3 个点在圆内，说明只有 3 个点到圆心距离小于半径（即圆的半径大于此 3 个点到圆心的距离），并且半径小于或等于另 5 个点到圆心的距离中的最小距离.

警示误区

不要忽视半径等于最小距离，因为在圆上也不算在圆内.

宋德基

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

两年模拟兵法 ☞答案见225页

1. [模拟·苏州吴中]下列说法错误的是（　　）

A. 直径是圆中最长的弦

B. 长度相等的两条弧是等弧

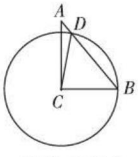
C. 面积相等的两个圆是等圆

D. 半径相等的两个半圆是等弧

2. [模拟·潍坊寿光]下列说法：①弧分为优弧和劣弧；②半径相等的圆是等圆；③过圆心的线段是直径；④长度相等的弧是等弧；⑤半径是弦. 其中错误的个数为（　　）

A. 2　　B. 3　　C. 4　　D. 5

3. [模拟·陕西]如图，在△ABC中，∠ACB=90°，∠A=40°，以C为圆心、CB为半径的圆交AB于点D，连接CD，则∠ACD=（　　）



（第3题）

A. 10°　　B. 15°　　C. 20°　　D. 25°

4. 在平面直角坐标系中，⊙O的圆心在原点，半径为2，则下列各点在⊙O上的是（　　）

A.（1,1）　　B.（−1，$\sqrt{3}$）

C.（−2，−1）　　D.（$\sqrt{2}$，2）

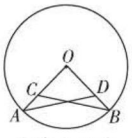
5. 若点P到⊙O上的点的最小距离为4，最大距离为8，则该圆的直径是（　　）

A. 2　　B. 6

C. 2或6　　D. 4或12

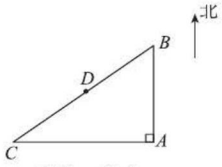
6. 如图，已知OA，OB是⊙O的两条半径，C，D分别为OA，OB上的点，且AC=BD.

求证：AD=BC.



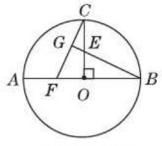
（第6题）

7. 如图，A地有一幢旧楼需要爆破，从A地往北300 m的B地有一家医院，往西400 m的C地有一幢民房，在B，C两地的中点D处有一根高压电线杆. 为了使医院、民房和高压电线杆都不受到影响，爆破的影响半径应该控制在什么范围内？　　[导学号 2380328]



（第7题）

8. 如图，在⊙O中，半径OC⊥直径AB，OE=OF，连接BE并延长交CF于G. 求证：BG⊥CF.



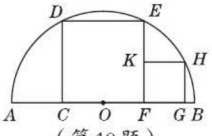
（第8题）

9. 已知⊙O的半径为3，设点P到圆心O的距离OP=m，且关于x的方程$2x^2-4x+m-1=0$有实根，试确定点P与⊙O的位置关系.

10. 如图，AB是半圆O的直径，四边形$CDEF$是正方形.

（1）求证：OC=OF.

（2）在正方形$CDEF$的右侧有一正方形$FGHK$，点G在AB上，H在半圆上，K在EF上. 若正方形$CDEF$的边长为2，求正方形$FGHK$的面积.



（第10题）

苏德基

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

2 圆的对称性

核心知识
- 圆的对称性
- 圆心角、弧、弦之间的关系

知识链接



点知识·拨考向 速提分

点知识▸1 圆的对称性

1. 圆的轴对称性 圆是轴对称图形，其对称轴是任意一条过圆心的直线.

2. 圆的中心对称性 圆是中心对称图形，对称中心为圆心.

3. 圆的旋转不变性 一个圆绕着它的圆心旋转任意一个角度，都能与原来的图形重合，这种性质就是圆的旋转不变性.

拨考向▸利用圆的对称性进行语言辨析

例 1 下列命题中，正确的是（ ）

A. 圆和正方形都既是轴对称图形，又是中心对称图形

B. 圆和正方形的对称轴都有无数条

C. 圆和正方形绕其对称中心旋转任意一个角度，都能与原来的图形重合

D. 圆和正方形都有有限条对称轴

解题秘方：紧扣圆和正方形的轴对称性及中心对称性进行辨析.

解：圆和正方形都既是轴对称图形，又是中心对称图形，所以 A 中命题正确；圆的对称轴有无数条，正方形的对称轴有 4 条，所以 B，D 中命题错误；圆绕其对称中心旋转任意一个角度都能与原来的图形重合，而正方形只有绕它的对称中心旋转 90° 或 90° 的整数倍才能与原图形重合，所以 C 中命题错误. 故选 A.

答案：A

点知识▸2 圆心角、弧、弦之间的关系

1. 圆心角、弧、弦之间的关系

在同圆或等圆中，相等的圆心角所对的弧相等，所对的弦相等.

2. 示例 弧、弦、圆心角的关系

如图 3-2-1，$\angle AOB=\angle A'OB' \Rightarrow \overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{A'B'}$，$AB=A'B'$.

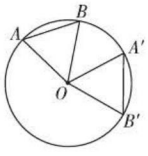


图 3-2-1

提分·必记

特别提醒

1. 圆有无数条对称轴，但只有一个对称中心.
2. 因为直径是弦，弦是线段，而对称轴是直线，所以说“圆的对称轴是直径所在的直线”或说成“圆的对称轴是经过圆心的直线”.

提分·秘诀

解法提醒

分析图形的轴对称性、中心对称性以及旋转对称性，关键是要分析对称轴、对称中心.

提分·必记

警示误区

不能忽略在同圆或等圆中这个前提，如果丢掉了这个前提，即使圆心角相等，所对的弧、弦也不一定相等.

荣德基

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

考向▶ 利用弧、弦、圆心角的关系证明弧相等

例2 如图3-2-2，AB，CD是⊙O的两条直径，弦$CE \parallel AB$，求证：$\overset{\frown}{BC} = \overset{\frown}{AE}$.

解题秘方：构造圆心角，利用“相等的圆心角所对的弧相等”证明.

证明：如图3-2-2，连接OE.

$\because OE=OC$，

$\therefore \angle C= \angle E$.

$\because CE \parallel AB$，

$\therefore \angle C= \angle BOC$，$\angle E= \angle AOE$.

$\therefore \angle BOC= \angle AOE$.

$\therefore \overset{\frown}{BC} = \overset{\frown}{AE}$.

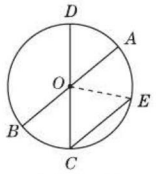


图 3-2-2

提分·秘诀

技巧点拨

由例2的结论可知，在同圆中，圆的两条平行弦所夹的弧相等.

圆心角、弧、弦之间的关系

点知识▶ 3 圆心角、弧、弦之间关系的推论

1. 推论

在同圆或等圆中，如果两个圆心角、两条弧、两条弦中有一组量相等，那么它们所对应的其余各组量都分别相等.

2. 弦和弦心距（圆心到弦的距离）之间的关系（拓展）

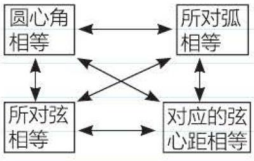
在同圆或等圆中，如果两条弦的弦心距相等，那么这两条弦相等.

注意：涉及弦心距的问题，应用时要加上垂直的条件.

提分·必记

拓宽视野

在同圆或等圆中，两个圆心角、两条弦、两条弧、两个弦心距中如果有一组量相等，那么它们所对应的其余各组量也分别相等，其关系可表示为



考向▶ 利用弧、弦、圆心角之间关系定理的推论判断边、角、弧的关系

例3 如图3-2-3，在⊙O中，$\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{CD}$，有以下结论：①$AB=CD$；②$AC=BD$；③$\angle AOC= \angle BOD$；④$\overset{\frown}{AC} = \overset{\frown}{BD}$. 其中正确的个数是（　　）

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

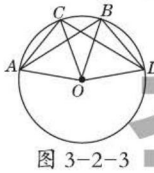


图 3-2-3

解题秘方：紧扣弧、弦、圆心角之间关系定理的推论判断.

解：$\because \overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{CD}$，

$\therefore AB=CD$，故①正确.

$\because \overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{CD}$，

$\therefore \overset{\frown}{AC} = \overset{\frown}{BD}$.

$\therefore AC=BD$，$\angle AOC= \angle BOD$，

故②③④正确. 故选D.

答案：D

提分·秘诀

解法提醒

在同一个圆中，弧、弦和圆心角中只要有一组量相等，就能推出另两组量相等. 线段有和差，弧也有和差.

荣德基

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

点方法·拨技巧 提高分

拔尖角度▸ 1 利用等圆心角法证明圆中的弧相等

例 4 如图 3-2-4，在⊙O中，C，D是直径AB上两点，且$AC=BD$，$MC\perp AB$，$ND\perp AB$，点M，N在⊙O上.

（1）求证：$\overset{\frown}{AM}=\overset{\frown}{BN}$.

（2）若C，D分别为OA，OB的中点，则$\overset{\frown}{AM}=\overset{\frown}{MN}=\overset{\frown}{NB}$成立吗？请说明理由.

解题秘方：利用“相等的圆心角所对的弧相等”证明.

（1）**证明**：如图 3-2-4，连接OM，ON.

$\because AC=DB$，$AO=BO$，$\therefore OC=OD$.

在 Rt△OCM和 Rt△ODN中，$\begin{cases}OM=ON,\\OC=OD,\end{cases}$

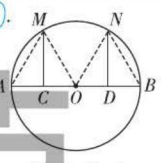


图 3-2-4

$\therefore$ Rt△$OCM\cong$ Rt△ODN. $\therefore\angle AOM=\angle BON$. $\therefore\overset{\frown}{AM}=\overset{\frown}{BN}$.

（2）**解**：$\overset{\frown}{AM}=\overset{\frown}{MN}=\overset{\frown}{NB}$成立.

理由：如图 3-2-4，连接AM，BN.

$\because C$，D分别为OA，OB的中点，且$MC\perp AB$，$ND\perp AB$，

$\therefore AM=OM$，$ON=NB$.

又$\because OM=OA=ON=OB$，$\therefore$△AOM和△BON是等边三角形.

$\therefore\angle AOM=\angle BON=60°$.

$\therefore\angle AOM=\angle BON=\angle MON=60°$. $\therefore\overset{\frown}{AM}=\overset{\frown}{MN}=\overset{\frown}{NB}$.

挑战·高分

解法提醒

证弧相等⇨证弧所对的圆心角相等⇨证圆心角所在的三角形全等⇨连接半径构造三角形

方法点拨

证弧、弦、圆心角关系常用的作辅助线的方法：在同圆或等圆中，要证弧、弦、圆心角及弦心距中的一组量相等，通常可以将其转化成证另外三组量中的一组量相等，一般有多种证法，而连半径或作垂直于弦的直径构造等弧、等弦、等圆心角、等弦心距是常用的作辅助线的方法.

拔尖角度▸ 2 利用转移位置法探究弧、弦之间的关系

例 5 如图 3-2-5，在⊙O中，$\overset{\frown}{AB}=2\overset{\frown}{CD}$，则关于弦$AB$，$CD$判断正确的是（　　）

A. $AB>2CD$　　B. $AB<2CD$

C. $AB=2CD$　　D. 无法比较

解题秘方：根据$\overset{\frown}{AB}=2\overset{\frown}{CD}$，不能直接判断出$AB$与$CD$之间的数量关系，可将$\overset{\frown}{CD}$转移至$\overset{\frown}{AB}$上去，使$\overset{\frown}{AB}$等分成两段，然后利用弧和弦之间的关系进行判断.

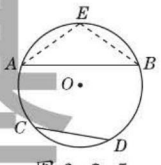


图 3-2-5

解：如图 3-2-5，取$\overset{\frown}{AB}$的中点E，连接AE，BE，则$\overset{\frown}{AE}=\overset{\frown}{BE}$.

$\because\overset{\frown}{AB}=2\overset{\frown}{CD}$，

$\therefore\overset{\frown}{AE}=\overset{\frown}{BE}=\overset{\frown}{CD}$.

$\therefore AE=BE=CD$.

$\because AE+BE>AB$，$\therefore AB<2CD$.

答案：B

挑战·高分

技巧点拨

求解两弧成倍数关系问题的方法：若遇到弧之间的倍数关系，可以将长弧等分成相等的短弧然后利用圆心角、弧、弦之间的等量关系解决问题.

注意：圆心角、弧、弦之间的等量关系可以相互转化，但圆心角与弦、弧与弦之间的倍数关系不能相互转化.

基 德 荣

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

拔尖角度 3 利用转化为弦法证明线段相等

例 6 如图 3-2-6，$\angle AOB=90°$，C，D 是$\overset{\frown}{AB}$（以 O 为圆心）的三等分点，AB 分别交 OC，OD 于点 E，F.

求证：$AE=BF=CD$.

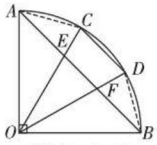


图 3-2-6

解题秘方：本题先由弧相等，得出所对的弦相等，即 $AC=CD=DB$，再证 AE，BF 分别与 AC，DB 相等，便可证得 $AE=BF=CD$.

证明：连接 AC，DB，如图 3-2-6，

$\because C$，D 是$\overset{\frown}{AB}$的三等分点，

$\therefore \overset{\frown}{AC}=\overset{\frown}{CD}=\overset{\frown}{DB}$. $\therefore AC=CD=DB$.

又 $\because \angle AOB=90°$，$\therefore \angle AOC=\angle COD=\angle DOB=30°$.

$\because OA=OB$，$\angle AOB=90°$，$\therefore \angle OAB=\angle OBA=45°$.

$\therefore \angle AEC=\angle AOC+\angle OAB=75°$.

在△AOC 中，$OA=OC$，$\therefore \angle ACO=\dfrac{180°-30°}{2}=75°$.

$\therefore \angle AEC=\angle ACO$. $\therefore AE=AC$.

同理可得，$BF=DB$. $\therefore AE=BF=CD$.

挑战·高分

特别提醒

利用弧、弦、圆心角之间的关系证明线段相等的方法：在同一个圆中，证明线段相等时，可以利用相等的线段转化，将不是弦的线段转化为弦，然后再转化为证明弧相等或圆心角相等.

拔尖角度 4 利用弧、弦、圆心角之间关系转化法证四边形是菱形

例 7 如图 3-2-7，在⊙O 中，$\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{AC}$，$\angle ACB=60°$.

（1）求证：$\angle AOB=\angle BOC=\angle AOC$.

（2）若 D 是$\overset{\frown}{AB}$的中点，求证：四边形 $OADB$ 是菱形.

解题秘方：利用弧、弦、圆心角间关系证四边形相等来判定菱形.

证明：（1）$\because \overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{AC}$，$\therefore AB=AC$.

又 $\because \angle ACB=60°$，$\therefore$△ABC 是等边三角形.

$\therefore AB=BC=CA$. $\therefore \angle AOB=\angle BOC=\angle AOC$.

（2）连接 OD，如图 3-2-7.

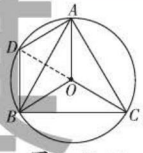


图 3-2-7

$\because \angle AOB=\angle BOC=\angle AOC$，

$\therefore \angle AOB=\dfrac{1}{3}\times 360°=120°$.

$\because D$ 是$\overset{\frown}{AB}$的中点，$\therefore \overset{\frown}{AD}=\overset{\frown}{BD}$.

$\therefore \angle AOD=\angle BOD=\dfrac{1}{2}\angle AOB=60°$.

又 $\because OD=OA$，$OD=OB$，

$\therefore$△OAD 和△OBD 都是等边三角形.

$\therefore OA=AD=OD$，$OB=BD=OD$. $\therefore OA=AD=DB=BO$.

$\therefore$四边形 $OADB$ 是菱形.

挑战·高分

解法提醒

- $\angle AOB$，$\angle BOC$，$\angle AOC$ 都是圆心角，要证这三个角相等，可考虑证这三个圆心角所对的弧相等或所对的弦相等；
- 由已知易得四边形 OADB 的两组邻边分别相等，所以连接 OD，证明△AOD 和△BOD 是等边三角形，然后可证得四边形 OADB 是菱形.

来德基

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

点中考·拨模拟 得满分

中考探秘 本节的主要内容是圆的旋转对称性，弧、弦、圆心角的关系定理及其推论，中考中主要考查三者之间关系的转化，题型有选择题、填空题和解答题，多为基础题，有时也会结合三角形、四边形及其他知识以解答题的形式出现.

三年中考兵法

冲刺·满分

考法 利用“等弧所对的圆心角相等”证线段相等

例 8 [中考·牡丹江] 如图 3-2-8，在⊙O中，$\overset{\frown}{AC}=\overset{\frown}{CB}$，$CD\perp OA$于点$D$，$CE\perp OB$于点$E$，求证：$AD=BE$.

试题评析：本题考查的是弧与圆心角的关系，熟知“在同圆中，相等的弧所对的圆心角相等”，构造圆心角是解题关键.

证明：连接OC，如图 3-2-8.

$\because \overset{\frown}{AC}=\overset{\frown}{CB}$，$\therefore \angle AOC=\angle BOC$.

$\because CD\perp OA$于点D，$CE\perp OB$于点E，

$\therefore \angle CDO=\angle CEO=90^\circ$.

又$\because \angle DOC=\angle EOC$，$CO=CO$，

$\therefore \triangle COD\cong\triangle COE$(AAS).

$\therefore OD=OE$.

$\because AO=BO$，$\therefore AD=BE$.

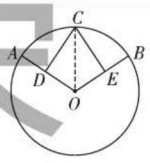


图 3-2-8

思路引导

由于OA=OB，欲证AD=BE，只需证OD=OE.

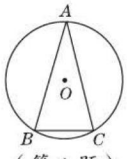
连接OC，需证△COD≌△COE，先根据$\overset{\frown}{AC}=\overset{\frown}{CB}$得∠AOC=∠BOC，再由已知条件根据AAS即可证得△COD≌△COE.

两年模拟兵法

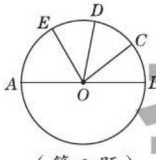
☞答案见226页

1. [中考·厦门]如图，在⊙O中，$\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{AC}$，$\angle A=30^\circ$，则$\angle B$等于(　　)

A. 150°　B. 75°　C. 60°　D. 15°



(第 1 题)



(第 2 题)

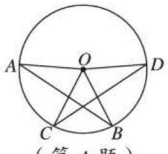
2. 如图，已知AB是⊙O的直径，点C，D是$\overset{\frown}{BE}$的三等分点，$\angle AOE=60^\circ$，则$\angle COE$的度数是(　　)

A. 40°　B. 60°　C. 80°　D. 120°

3. 已知⊙O的半径为3，一弦长为$x^2-x-6=0$的一个根，则该弦所对的圆心角的度数为_____.

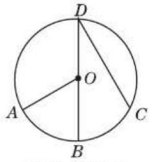
4. 已知：如图，A，B，C，D在⊙O上，$AB=CD$.

求证：$\angle AOC=\angle DOB$.



(第 4 题)

5. 如图，已知BD是⊙O的直径，点A，C在⊙O上，$\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{BC}$，$\angle AOB=60^\circ$，求$\angle BDC$的度数.

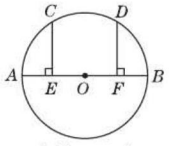


(第 5 题)

宋德基

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

6. 如图，AB 为⊙ O 的直径，点 C，D 在⊙ O 上，$CE \perp AB$，$DF \perp AB$，垂足分别为 E，F，且 $\overset{\frown}{AC}$与$\overset{\frown}{BD}$相等，问：AE 与 BF 相等吗？为什么？

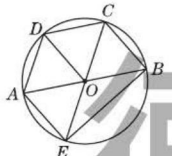


（第 6 题）

7. 如图，AB，CE 是⊙ O 的直径，$\angle COD=60°$，且$\overset{\frown}{AD} = \overset{\frown}{BC}$.

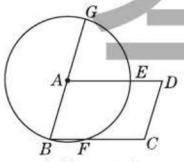
（1）请你写出与$\angle AOE$ 相等的圆心角.

（2）连接 AE，AD，DC，CB，BE，写出其中与线段 AE 相等的弦.



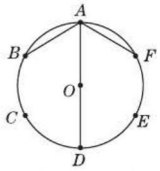
（第 7 题）

8. 如图，以▱ $ABCD$ 的顶点 A 为圆心，以 AB 边为半径作⊙ A，分别交 AD，BC 于点 E，F，延长 BA 交⊙ A 于点 G. 求证：$\overset{\frown}{GF}=2\overset{\frown}{GE}$.



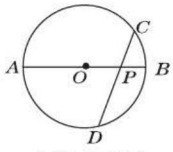
（第 8 题）

9. 如图，A，B，C，D，E，F 是⊙ O 的六等分点. 连接 AB，AD，AF，求证：$AB+AF=AD$.



（第 9 题）

10. 如图，在⊙ O 中，AB 为直径，弦 CD 交 AB 于点 P，且 $OP=PC$，试猜想$\overset{\frown}{AD}$与$\overset{\frown}{CB}$的度数之间的关系，并证明你的猜想.

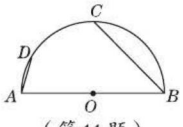


（第 10 题）

11. 如图，AB 为半圆 O 的直径，点 C，D 在半圆 O 上.

（1）若$\overset{\frown}{BC} = 3\overset{\frown}{AD}$，$\overset{\frown}{CD} = 2\overset{\frown}{AD}$，求$\angle DAB$ 和$\angle ABC$ 的大小.

（2）若点 C，D 在半圆 O 上运动，并保持弧 CD 的长度不变（点 C，D 不与点 A，B 重合），试比较$\angle DAB$ 和$\angle ABC$ 的大小.



（第 11 题）

荣德基

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

*3 垂径定理

核心知识
- 垂径定理及其推论
- 垂直于弦（直径）
- 平分弦、平分弦所对的弧

知识链接



点知识·拨考向 速提分

点知识 1 垂径定理

1. 垂径定理

垂直于弦的直径平分这条弦，并且平分弦所对的两条弧.

2. 示例

如图 3-3-1，$CD \perp AB$ 于点 E，CD 是⊙ O 的直径，那么可用几何语言表述为

$$\left.\begin{array}{l} CD \text{ 是直径} \\ CD \perp AB \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{cases} AE=BE, \\ \overset{\frown}{AD}=\overset{\frown}{BD}, \\ \overset{\frown}{AC}=\overset{\frown}{BC}. \end{cases}$$

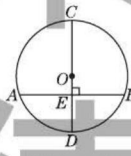


图 3-3-1


垂径定理

特别提醒
- “垂直于弦的直径”中的“直径”，还可以是垂直于弦的半径或过圆心垂直于弦的直线. 其实质是：过圆心且垂直于弦的线段、直线均可.
- “弧”是指弦所对的劣弧和优弧，不要漏掉了优弧.

拔考向 利用垂径定理解与线段有关的问题

题型 1：垂径定理在求线段长中的应用

例 1 如图 3-3-2，弦 CD 垂直于⊙ O 的直径 AB，垂足为点 H，且 $CD=2\sqrt{2}$，$BD=\sqrt{3}$，则 AB 的长为（　　）

A. 2　　B. 3　　C. 4　　D. 5

解题秘方：构造垂径定理的基本图形.

解：连接 OD，如图 3-3-2.

$\because CD \perp AB$，$CD=2\sqrt{2}$，

$\therefore CH=DH=\sqrt{2}$.

在 Rt△ BHD 中，由勾股定理，得 $BH=1$.

设⊙ O 的半径为 r，

在 Rt△ OHD 中，$OH^2+HD^2=OD^2$，

即 $(r-1)^2+(\sqrt{2})^2=r^2$.

解得 $r=\frac{3}{2}$.

$\therefore AB=3$.

答案：B

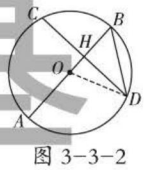


图 3-3-2

方法点拨

利用垂径定理求线段的长的方法：垂径定理是解决有关圆的计算、证明问题常用的知识. 求线段长时，一般把半径、圆心到弦的垂线段、弦的一半构建在一个直角三角形里，运用勾股定理求解，即用“垂径定理＋勾股定理”求解.

荣德基

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

题型 2：垂径定理在证线段关系中的应用

例 2 如图 3-3-3，在⊙ O 中，AB 为⊙ O 的弦，C，D 是直线 AB 上两点，且 $AC=BD$.

求证：△ OCD 为等腰三角形.

解题秘方：构建垂径定理的基本图形结合线段垂直平分线性质证明.

证明：过点 O 作 $OM \perp AB$，垂足为 M，

如图 3-3-3.

∵ $OM \perp AB$，∴ $AM=BM$.

∵ $AC=BD$，∴ $CM=DM$.

又∵ $OM \perp CD$，∴ $OC=OD$.

∴△ OCD 为等腰三角形.

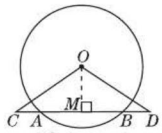


图 3-3-3

解法提醒

垂径定理涉及弦、圆心到弦的垂线段、直径三个量，证明线段相等、证明垂直、证明角相等都经常用到垂径定理.在使用时，若已知圆心，作垂直于弦的半径（或直径）或连半径，是常用的作辅助线的方法.

知识 2 垂径定理的推论

1. 推论 平分弦（不是直径）的直径垂直于弦，并且平分弦所对的弧.

2. 示例 如图 3-3-4，CD 是⊙ O 的直径，AB 是弦（非直径），AB 与 CD 相交于点 E，且 $AE=BE$，那么 $CD \perp AB$，并且 $\overset{\frown}{AC}=\overset{\frown}{CB}$，$\overset{\frown}{AD}=\overset{\frown}{DB}$.

可用几何语言表述为

$$\left.\begin{array}{l} CD \text{ 是直径} \\ AE=BE \\ AB \text{ 不是直径} \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{cases} CD \perp AB, \\ \overset{\frown}{AD}=\overset{\frown}{BD}, \\ \overset{\frown}{AC}=\overset{\frown}{BC}. \end{cases}$$

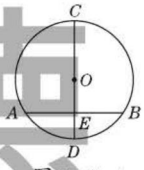


图 3-3-4

拓宽视野

对于圆中的一条直线，如果具备下列五个条件中的任意两个，那么一定具备其他三个：1. 过圆心；2. 垂直于弦；3. 平分弦（非直径）；4. 平分弦所对的劣弧；5. 平分弦所对的优弧.简记为“知二推三”.

提分·必记

考向 利用垂径定理的推论证明弦相等

例 3 如图 3-3-5，AB，CD 是⊙ O 的弦，M，N 分别为 AB，CD 的中点，且∠ AMN = ∠ CNM. 求证：$AB=CD$.

解题秘方：紧扣弦的中点作符合垂径定理推论的基本图形，再结合全等三角形的判定和性质进行证明.

证明：如图 3-3-5，连接 OM，ON，OA，OC.

∵ O 为圆心，且 M，N 分别为 AB，CD 的中点，

∴ $AB=2AM$，$CD=2CN$，$OM \perp AB$，$ON \perp CD$.

∴∠ OMA= ∠ ONC=90° .

∵∠ AMN= ∠ CNM，

∴∠ OMN= ∠ ONM. ∴ $OM=ON$.

又∵ $OA=OC$，

∴ Rt△ OAM ≌ Rt△ OCN（HL）.

∴ $AM=CN$.

∴ $AB=CD$.

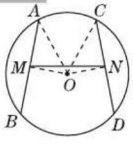


图 3-3-5

提分·秘诀

方法点拨

证明两条弦相等的方法：证明两条弦相等，可以先证明弦的一半相等.根据垂径定理的推论，连接圆心和弦的中点是常见的作辅助线的方法.

垂径定理的推论

荣德基

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

点方法·拨技巧 提高分

拔尖角度 1 利用分类讨论思想求圆中位置不确定的弦长

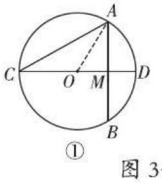
例 4 [中考·安顺]已知⊙O的直径CD=10 cm，AB是⊙O的弦，$AB \perp CD$，垂足为M，且AB=8 cm，则AC的长为（　　）

A. $2\sqrt{5}$ cm　　B. $4\sqrt{5}$ cm

C. $2\sqrt{5}$ cm或$4\sqrt{5}$ cm　　D. $2\sqrt{3}$ cm或$4\sqrt{3}$ cm

解题秘方：当作出符合条件的两条弦后，直径的端点C，D在弦AB的哪一侧位置不确定时，需分类进行求解.

解：如图 3-3-6，连接AO.



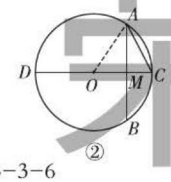


图 3-3-6

∵⊙O的直径CD=10 cm，$AB \perp CD$，AB=8 cm，

∴ $AM=\frac{1}{2}AB=\frac{1}{2}\times 8=4$（cm），$OD=OC=5$ cm.

∵ C，D在弦AB的哪一侧位置不确定，∴求弦AC的长需分如图 3-3-6 两种情况.

当点C的位置如图 3-3-6①时，∵ OA=5 cm，AM=4 cm，$CD \perp AB$，

∴ $OM=\sqrt{OA^2-AM^2}=\sqrt{5^2-4^2}=3$（cm）.

∴ $CM=OC+OM=5+3=8$（cm）.

∴ $AC=\sqrt{AM^2+CM^2}=\sqrt{4^2+8^2}=4\sqrt{5}$（cm）.

当点C的位置如图 3-3-6②时，同理可得OM=3 cm.

∵ OC=5 cm，∴ MC=5-3=2（cm）.

∴在 Rt△AMC中，$AC=\sqrt{AM^2+MC^2}=\sqrt{4^2+2^2}=2\sqrt{5}$（cm）.

答案：C

挑战·高分

警示误区

题目中没有给出图形，需要根据题意画出草图.本题应分两种情况讨论：

- 点C和弦AB在圆心O的异侧；
- 点C和弦AB在圆心O的同侧.

本题容易考虑不周全，只考虑一种情形，导致错误.

拔尖角度 2 利用两点一线法求涉及垂径定理的线段和的最小值

例 5 如图 3-3-7，AB，CD是半径为 5 的⊙O的两条弦，AB=8，CD=6，MN是直径，$AB \perp MN$于点E，$CD \perp MN$于点F，P为EF上的任意一点，则$PA+PC$的最小值为_____.

解题秘方：利用圆的轴对称性，建立两点一线求最短距离（最小值）的模型求解.

解：如图 3-3-7，由题意易知，

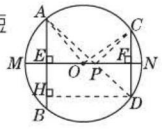


图 3-3-7

挑战·高分

解法提醒

- 圆是轴对称图形，结合垂径定理可知，“垂直于弦的直径”这个条件中，弦的两个端点关于这条直径对称.
- 数学建模不仅可以将数学问题进行数学建

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

点 C 关于 MN 的对称点为点 D.

连接 AD 交 MN 于点 P，连接 PC，

易知 $PA+PC$ 的值最小时的 P 点即为 AD 与 MN 的交点，

此时 $PA+PC=AD$.

过点 D 作 $DH \perp AB$ 于点 H，连接 OA，OC，如图 3-3-7.

$\because AB \perp MN$ 于点 E，$CD \perp MN$ 于点 F，

$\therefore AE=\frac{1}{2}AB=\frac{1}{2}\times 8=4$，$CF=\frac{1}{2}CD=\frac{1}{2}\times 6=3$.

在 Rt $\triangle OAE$ 中，$OE=\sqrt{OA^2-AE^2}=\sqrt{5^2-4^2}=3$，

在 Rt $\triangle OCF$ 中，$OF=\sqrt{OC^2-CF^2}=\sqrt{5^2-3^2}=4$.

$\therefore DH=EF=OE+OF=3+4=7$，$AH=AE+EH=4+3=7$.

在 Rt $\triangle ADH$ 中，$AD=\sqrt{AH^2+DH^2}=\sqrt{7^2+7^2}=7\sqrt{2}$.

答案：$7\sqrt{2}$

模，也可以是学科内移植建模，如将“在直线上找一点使它到同侧两点的距离之和最短”的模型移植到本题中.

拔尖角度▸ 3 利用数形转换法巧求涉圆的图形中点的坐标

挑战·高分

例 6 如图 3-3-8，半径为 6 的 $\odot E$ 在平面直角坐标系中与 x 轴交于 A，B 两点，与 y 轴交于 C，D 两点，已知 $C(0,3)$，$D(0,-7)$，求圆心 E 的坐标.

解题秘方：将坐标轴的一部分看成两条互相垂直的弦进行解答，并注意坐标与线段长的相互转换.

解：如图 3-3-8，作 $EN \perp x$ 轴于点 N，$EM \perp y$ 轴于点 M，连接 ED.

$\because C(0,3)$，$D(0,-7)$，

$\therefore CD=3-(-7)=10$.

又 $\because EM \perp y$ 轴，$\therefore MD=\frac{1}{2}CD=5$.

$\therefore EM=\sqrt{ED^2-MD^2}=\sqrt{6^2-5^2}=\sqrt{11}$.

易知四边形 $ENOM$ 为矩形，且 $EN=OM=OD-MD=7-5=2$，

$\therefore$ 圆心 E 的坐标为 $(\sqrt{11},-2)$.

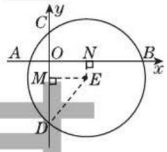


图 3-3-8

技巧点拨

利用垂径定理求点的坐标的方法：求点的坐标关键就是过点作两坐标轴的垂线，当两坐标轴与圆相交时，两坐标轴的一部分变成了圆的两条弦，恰好借助垂径定理求出圆心到弦的垂线段的长度，从而达到求出点的坐标的目的.

点中考·拔模拟 得满分

中考探秘

垂径定理是圆中的重要内容，也是中考的主要考点，主要考查利用垂径定理证明线段、角、弧相等，以及求线段长度等，常以选择题、填空题和解答题形式出现；其中选择题、填空题较容易，解答题常用到勾股定理、方程等知识.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

三年中考兵法

考法 1 利用垂径定理求圆的周长

例 7 [中考·呼和浩特]如图 3-3-9，CD 为 $\odot O$ 的直径，弦 $AB \perp CD$，垂足为 M，若 $AB=12$，$OM : MD=5 : 8$，则 $\odot O$ 的周长为（　　）

A. 26π　　B. 13π

C. $\dfrac{96\pi}{5}$　　D. $\dfrac{39\sqrt{10}\,\pi}{5}$

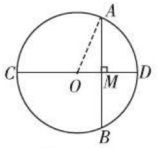


图 3-3-9

试题评析：本题考查的是垂径定理，根据题意作出辅助线，构造出直角三角形，利用勾股定理求解是解答此题的关键.

解：如图 3-3-9，连接 OA.

$\because CD$ 为 $\odot O$ 的直径，弦 $AB \perp CD$，$\therefore AM=\dfrac{1}{2}AB=6$.

$\because OM : MD=5 : 8$，$\therefore$ 设 $OM=5x$，$DM=8x$.

$\therefore OA=OD=13x$. $\therefore AM=12x=6$.

$\therefore x=\dfrac{1}{2}$. $\therefore OA=\dfrac{1}{2}\times 13=\dfrac{13}{2}$.

$\therefore \odot O$ 的周长 $=2OA\cdot\pi=13\pi$.

答案：B

考法 2 利用垂径定理找特殊四边形的条件

例 8 [中考·上海]如图 3-3-11，已知在 $\odot O$ 中，AB 是弦，半径 $OC \perp AB$，垂足为 D，要使四边形 $OACB$ 为菱形，还需要添加一个条件，这个条件可以是（　　）

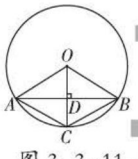


图 3-3-11

A. $AD=BD$　　B. $OD=CD$

C. $\angle CAD=\angle CBD$　　D. $\angle OCA=\angle OCB$

试题评析：此题主要考查了菱形的判定以及垂径定理，熟练掌握菱形的判定方法是解题关键.

解：$\because$ 在 $\odot O$ 中，AB 是弦，半径 $OC \perp AB$，

$\therefore AD=DB$.

当 $OD=CD$ 时，则由 $AD=BD$，$OD=CD$，$AB \perp CO$，

可得四边形 $OACB$ 为菱形.

答案：B

冲刺·满分

特别提醒

在运用垂径定理的计算中，常涉及弦长 a、圆心到弦的距离 d、半径 r 及弓形高 h 之间的关系，如图 3-3-10，它们的关系为：$r^2=d^2+\left(\dfrac{a}{2}\right)^2$，$r=d+h$.

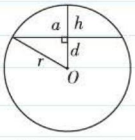


图 3-3-10

知识储备

判定菱形的条件

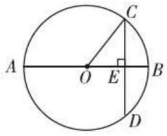
1. 从边上看：四边形的四边相等或平行四边形的一组邻边相等；
2. 从对角线看：四边形的对角线互相垂直平分或平行四边形的对角线互相垂直.

荣德基

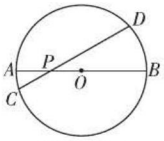
关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

1. [中考·张家界]如图，AB是⊙O的直径，弦$CD\perp AB$于点E，OC=5 cm，CD=8 cm，则AE=（　　）

A.8 cm　　B.5 cm　　C.3 cm　　D.2 cm



（第1题）



（第2题）

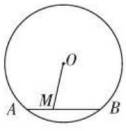
2. [中考·西宁]如图，AB是⊙O的直径，弦CD交AB于点P，AP=2，BP=6，$\angle APC$=30°，则CD的长是（　　）

A.$\sqrt{15}$　　B.$2\sqrt{5}$　　C.$2\sqrt{15}$　　D.8

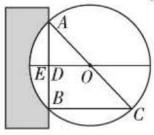
3. [中考·顺德]如图，⊙O的直径为10，弦AB的长为6，M是弦AB上的一动点，则线段OM的长的取值范围是（　　）

A.$3\leqslant OM\leqslant 5$　　B.$4\leqslant OM\leqslant 5$

C.$3<OM<5$　　D.$4<OM<5$



（第3题）



（第4题）

4. [中考·乐山]《九章算术》是我国古代第一部自成体系的数学专著，代表了东方数学的最高成就，它的算法体系至今仍在推动着计算机的发展和应用，书中记载：“今有圆材埋在壁中，不知大小，以锯锯之，深一寸，锯道长一尺，问径几何？”译为：“今有一圆柱形木材，埋在墙壁中，不知其大小，用锯去锯这木材，锯口深1寸（ED=1寸），锯道长1尺（AB=1尺=10寸），问这块圆柱形木材的直径是多少？”

如图，请根据所学知识计算：圆柱形木材的直径AC是（　　）

A.13寸　　B.20寸

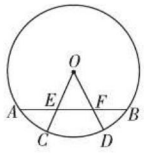
C.26寸　　D.28寸

5. [中考·潍坊]点A，C为半径是3的圆周上两点，点B为$\overset{\frown}{AC}$的中点，以线段BA，BC为邻边作菱形$ABCD$，顶点D恰在该圆直径的三等分点上，则该菱形的边长为（　　）

A.$\sqrt{5}$或$2\sqrt{2}$　　B.$\sqrt{5}$或$2\sqrt{3}$

C.$\sqrt{6}$或$2\sqrt{2}$　　D.$\sqrt{6}$或$2\sqrt{3}$

6. [中考·南通]已知：如图，AB是⊙O的弦，半径OC，OD分别交AB于点E，F，且OE=OF. 求证：AE=BF.

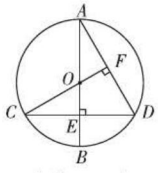


（第6题）

7. [模拟·西安碑林]如图，已知圆O的直径$AB\perp$弦CD于点E，连接CO并延长交AD于点F，且$CF\perp AD$.

（1）请证明：E是OB的中点.

（2）若AB=8，求CD的长.



（第7题）

8. 已知⊙O的半径为13 cm，弦AB∥CD，AB=10 cm，CD=24 cm，求AB与CD之间的距离.

[导学号 2380328]

9. 某地方有一座圆弧形的拱桥，桥下的水面宽度为7.2 m，拱顶高出水面2.4 m. 现有一艘宽3 m、船舱顶部为长方形并高出水面2 m的货船要经过这里，此货船能顺利通过这座拱桥吗？

荣德基

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

4 圆周角和圆心角的关系

核心知识

- 圆周角的定义
- 圆周角定理
- 圆周角定理的推论
- 圆内接四边形

知识链接



点知识·拨考向 速提分

点知识▸1 圆周角

1. 圆周角的定义 顶点都在圆上，两边分别与圆还有另一个交点，像这样的角，叫做圆周角.

（1）**特征** 圆周角必须满足两个条件：

①顶点在圆上；②两边都和圆相交.

（2）**示例** 如图 3-4-1 ①中的角是圆周角.

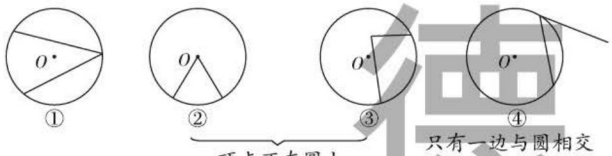


图 3-4-1

2. 圆周角定理 圆周角的度数等于它所对弧上的圆心角度数的一半.

如图 3-4-2，$\angle ACB=\frac{1}{2}\angle AOB$.

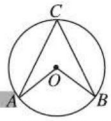


图 3-4-2

特别警示：定理中的圆周角与圆心角是通过它们所对的同一条弧联系在一起的，故不能把同一条弧这个前提省略.

拔考向▸利用圆周角定理求角

例 1 如图 3-4-3，AB 是 $\odot O$ 的直径，弦 $BC=BD$，若 $\angle BOD=50°$，求 $\angle A$ 的度数.

解题秘方：连接 OC，将求 $\overset{\frown}{BC}$ 所对的圆周角转化为求 $\overset{\frown}{BC}$ 所对的圆心角来解.

解：连接 OC，如图 3-4-3.

$\because BC=BD$，$\therefore \angle BOC=\angle BOD=50°$.

$\therefore \angle A=\frac{1}{2}\angle BOC=\frac{1}{2}\times 50°=25°$.

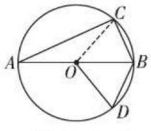


图 3-4-3

提分·必记

特别提醒

圆心角与圆周角的区别与联系：

名称 / 关系	圆心角	圆周角
区别	顶点在圆心	顶点在圆上
区别	在同圆中，一条弧所对的圆心角唯一	在同圆中，一条弧所对的圆周角有无数个
联系	两边都与圆相交	

提分·秘诀

技巧点拨

圆周角定理是将圆心角与圆周角进行转化，因此求一个圆周角的度数时，我们可以求同弧所对圆心角的度数.

茉德基

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

点知识 ▶ 2 圆周角定理的推论

1. 推论 1　同弧或等弧所对的圆周角相等.

2. 推论 2　（1）直径所对的圆周角是直角；

（2）90° 的圆周角所对的弦是直径.

3. “五量关系”定理（拓展归纳）

在同圆或等圆中，如果两个圆心角、两条弧、两条弧所对（或所含）的圆周角、两条弦、两条弦的弦心距中有一组量相等，那么它们所对应的其余各组量都分别相等.

特别提醒：弧所对的圆周角与所含的圆周角是两类角，它们之间一般不相等，只有当弧为半圆时，才相等.

提分·必记

特别提醒

“同弧或等弧”若改为“同弦或等弦”结论就不成立了. 因为一条弦所对的圆周角有两种情况：优弧上的圆周角和劣弧上的圆周角.

拔考向 ▶ 利用圆周角定理的推论解边角应用问题

题型 1：同弧或等弧所对圆周角在判断三角形形状中的应用

例 2　如图 3-4-4，A，P，B，C 是圆上的四个点，$\angle APC=\angle CPB=60°$. 求证：$\triangle ABC$ 是等边三角形.

解题秘方：紧扣“同弧所对的圆周角相等”解决.

证明：∵ A，P，B，C 是圆上的四个点，

∴ $\angle ABC=\angle APC$，$\angle CPB=\angle BAC$.

又∵ $\angle APC=\angle CPB=60°$，

∴ $\angle ABC=\angle BAC=60°$.

∴ $AC=BC$.

又 $\angle BAC=60°$，∴ $\triangle ABC$ 是等边三角形.

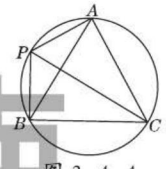


图 3-4-4

提分·秘诀

方法点拨

等边三角形判定方法：

1. 有一个角为 60° 的等腰三角形；
2. 三边都相等的三角形；
3. 三个角都相等的三角形.

题型 2：“直径所对的圆周角是直角”在证明线段相等中的应用

例 3　如图 3-4-5，AB 是⊙ O 的直径，BD 是⊙ O 的弦，延长 BD 到点 C，使 $AC=AB$. 求证：$BD=CD$.

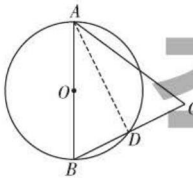


图 3-4-5

解题秘方：紧扣“直径所对的圆周角是直角”，结合等腰三角形“三线合一”的性质求解.

证明：如图 3-4-5，连接 AD.

∵ AB 是⊙ O 的直径，

∴ $\angle ADB=90°$，即 $AD\perp BC$.

又∵ $AC=AB$，∴ $BD=CD$.

解法提醒

题中条件有直径，因此可作辅助线. 构造直径所对的圆周角（直角）是常用的作辅助线的方法，而题中有条件 AB=AC，因此可根据等腰三角形“三线合一”的性质证明 BD=CD.

荣德基

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

题型 3：“直角所对的弦是直径”在求角中的应用

例 4 如图 3-4-6，已知经过原点的⊙P与x轴、y轴分别交于A，B两点，点C是弧AB上一点，则∠ACB的度数是（　　）

A. 80°　　B. 90°

C. 100°　　D. 无法确定

解题秘方：利用“直角所对的弦是直径”，结合“直径所对的圆周角是直角”求解.

解：连接AB，如图 3-4-6.

∵∠AOB=90°，

∴AB是⊙P的直径.

∴∠ACB=90°.

答案：B

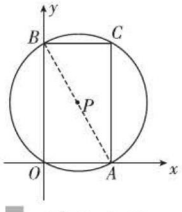


图 3-4-6

技巧点拨

常见的作辅助线的方法：

1. 有直径，通常作直径所对的圆周角，从而得出两直线互相垂直，简记为“见直径作直角”.
2. 有 90° 的圆周角，通常作直径，简记为“有直角作直径”.

知识 3 圆内接四边形

1. 圆内接四边形

四边形$ABCD$的四个顶点都在⊙O上，像这样的四边形叫做圆内接四边形，这个圆叫做四边形的外接圆.

2. 圆周角定理的推论 3

圆内接四边形的对角互补.

特别解读

- 内接和外接是一个相对的概念，是一种位置关系.
- 每一个圆都有无数个内接四边形，但并不是所有的四边形都有外接圆，只有对角互补的四边形才有外接圆.

考向 利用圆内接四边形的性质求角的度数

例 5 [中考·常德]如图 3-4-7，四边形$ABCD$为⊙O的内接四边形，已知∠BOD=100°，则∠BCD的度数为（　　）

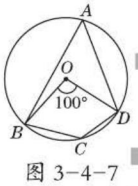


图 3-4-7

A. 50°　　B. 80°　　C. 100°　　D. 130°

解题秘方：将所求角的度数转化为求圆内接四边形对角的度数.

解：∵∠BAD与∠BOD是同弧所对的圆周角和圆心角，

$$\therefore \angle BAD = \frac{1}{2}\angle BOD = \frac{1}{2} \times 100^\circ = 50^\circ .$$

又∵四边形$ABCD$为⊙O的内接四边形，

∴∠BCD+∠BAD = 180°.

∴∠BCD = 180° − ∠BAD = 180° −50° = 130°.

答案：D

特别提醒

1. 求圆中的某一个圆周角时，根据“圆内接四边形的对角互补”，可以转化为求其所在的内接四边形的对角的度数.
2. 圆内接四边形的一组对角其实是圆中一条弦所对的两个圆周角，因此，在同圆或等圆中，相等的弦所对的圆周角相等或互补.

荣德基

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

点方法·拨技巧 提高分

拔尖角度 1 利用构造全等三角形法证明圆中的线段相等

例6 如图 3-4-8，在⊙O中，AB，AC为弦，D为$\overset{\frown}{BC}$的中点，$DE\perp AB$于点E，$DF\perp AC$交AC的延长线于点F，求证：$BE=CF$.

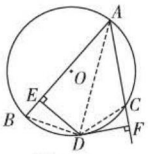


图 3-4-8

解题秘方：利用“同弧或等弧所对的圆周角相等、弦相等”，结合角平分线及全等三角形的性质证明.

证明：如图 3-4-8，连接AD，BD，CD.

$\because D$为$\overset{\frown}{BC}$的中点，$\therefore \overset{\frown}{BD}=\overset{\frown}{CD}$.

由弧的中点可得到相等的弧、相等的弦、相等的圆周角.

$\therefore BD=CD$，$\angle BAD=\angle CAD$.

$\because DE\perp AB$，$DF\perp AC$，$\therefore DE=DF$.

在Rt$\triangle BED$和Rt$\triangle CFD$中，$\begin{cases}BD=CD,\\DE=DF,\end{cases}$

$\therefore$ Rt$\triangle BED\cong$ Rt$\triangle CFD$. $\therefore BE=CF$.

挑战·高分

解法提醒

BE，CF分别在AB，AF上，要证BE=CF，需分别以BE，CF为一边构造三角形，分析已知条件，因为D为$\overset{\frown}{BC}$的中点，所以连接BD，CD构造出三角形，证明△BED≌△CFD即可.

拔尖角度 2 利用构造基本图形法证明圆中的线段相等

例7 如图 3-4-9，AB是⊙O的直径，C是弧AE的中点，$CD\perp AB$于点D，交AE于点F，连接AC，求证：$AF=CF$.

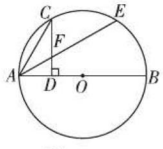


图 3-4-9

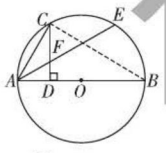


图 3-4-10

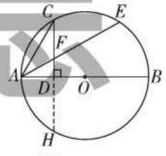


图 3-4-11

解题秘方一：构造“直径所对的圆周角”结合直角三角形的性质证明.

证法一：连接BC，如图 3-4-10.

$\because AB$是直径，$\therefore \angle ACB=90°$，即$\angle ACF+\angle BCD=90°$.

$\because CD\perp AB$，$\therefore \angle B+\angle BCD=90°$. $\therefore \angle ACF=\angle B$.

$\because$点C是$\overset{\frown}{AE}$的中点，$\therefore \overset{\frown}{AC}=\overset{\frown}{CE}$.

$\therefore \angle B=\angle CAF$. $\therefore \angle ACF=\angle CAF$. $\therefore AF=CF$.

解题秘方二：构造“垂径定理”的基本图形结合“等弧所对的圆周角相等”证明.

证法二：延长CD，交⊙O于点H，如图 3-4-11.

$\because AB$是直径，$CD\perp AB$，$\therefore \overset{\frown}{AC}=\overset{\frown}{AH}$.

$\because$点C是$\overset{\frown}{AE}$的中点，$\therefore \overset{\frown}{AC}=\overset{\frown}{CE}$.

$\therefore \overset{\frown}{AH}=\overset{\frown}{CE}$. $\therefore \angle ACH=\angle CAE$.

$\therefore AF=CF$.

挑战·高分

技巧点拨

1. 在圆中，通过作辅助线构造同弧或等弧所对的圆周角，由此可得到相关角相等.
2. “见直径，构造直径所对的圆周角”是常用且重要的构造辅助线的思路.
3. 在已知条件下，若有与半径或直径垂直的线段，常延长此线段与圆相交，这样可利用垂径定理得到线段相等、弧相等.

宋德基

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

拔尖角度 3 利用转化圆内接四边形对角法探究动点中的两角的关系

挑战·高分

特别提醒

同圆等圆有关角，
勿忘相互有关联.
圆周等于圆心半，
细找关系把线连.
直径对的是直角，
直角所对最长弦.
同弧圆周角相等，
证题用它最多见.

例 8 如图 3-4-12，AB 是⊙O 的直径，CD 是弦，$AB \perp CD$.

（1）点 P 是 $\overset{\frown}{CAD}$ 上一个动点（不与点 C，D 重合），求证：$\angle CPD = \angle COB$.

（2）点 P' 在劣弧 CD 上移动（不与点 C，D 重合）时，探究 $\angle CP'D$ 与 $\angle COB$ 有怎样的数量关系，请证明你的结论.

解题秘方：（1）连半径构造同弧所对的圆心角和圆周角证明；（2）利用（1）的结论结合圆内接四边形探究两角的关系.

（1）**证明**：连接 OD，如图 3-4-12.

$\because AB$ 是⊙O 的直径，$AB \perp CD$，$\therefore \overset{\frown}{BC} = \overset{\frown}{BD}$.

$\therefore \angle COB = \angle BOD = \frac{1}{2}\angle COD$.

又 $\because \angle CPD = \frac{1}{2}\angle COD$，$\therefore \angle CPD = \angle COB$.

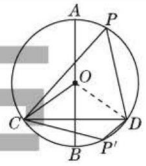


图 3-4-12

（2）**解**：$\angle CP'D$ 与 $\angle COB$ 的数量关系是 $\angle CP'D + \angle COB = 180°$.

证明：$\because$ 四边形 $CP'DP$ 是⊙O 的内接四边形，

$\therefore \angle CP'D + \angle CPD = 180°$.

由（1）知，$\angle CPD = \angle COB$，$\therefore \angle CP'D + \angle COB = 180°$.

点中考·拨模拟 得满分

中考探秘

本节内容是中考中的重点，主要考查圆周角与圆心角的关系，直径所对的圆周角，圆内接四边形等，一般以填空题、选择题为主，既会渗透圆的其他知识，又会结合三角形、四边形的知识以解答题的形式出现.

三年中考兵法

考法 1 利用圆的有关性质判断正误

冲刺·满分

解法提醒

根据 $AB \perp MN$，利用垂径定理得出①③正确；利用 MN 是直径得出②正确；利用 $\overset{\frown}{AC} = \overset{\frown}{AM} = \overset{\frown}{BM}$，得出④正确；由④可推出⑤正确.

例 9 [中考·雅安] 如图 3-4-13，MN 是⊙O 的直径，作 $AB \perp MN$，垂足为 D，连接 AM，AN，点 C 为 $\overset{\frown}{AN}$ 上一点，且 $\overset{\frown}{AC} = \overset{\frown}{AM}$，连接 CM，交 AB 于点 E，交 AN 于点 F，现给出以下结论：① $AD = BD$；② $\angle MAN = 90°$；③ $\overset{\frown}{AM} = \overset{\frown}{BM}$；④ $\angle ACM + \angle ANM = \angle MOB$；⑤ $AE = \frac{1}{2}MF$.

其中正确结论的个数是（　　）

A. 2　　B. 3　　C. 4　　D. 5

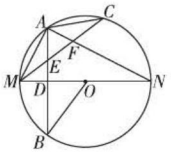


图 3-4-13

试题评析：本题考查了圆周角定理、垂径定理及直角三角形性质，熟悉各个定理的基本图形是解题关键.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

解：∵ MN 是⊙ O 的直径，$AB \perp MN$，

∴ $AD=BD$，$\overset{\frown}{AM}=\overset{\frown}{BM}$，$\angle MAN=90°$.（①②③正确）

∵ $\overset{\frown}{AC}=\overset{\frown}{AM}$，∴ $\overset{\frown}{AC}=\overset{\frown}{AM}=\overset{\frown}{BM}$.

∴ $\angle ACM+\angle ANM=\angle MOB$.（④正确）

易知 $\angle MAE=\angle AME$，可推出 $AE=ME$，$\angle EAF=\angle AFM$.

∴ $AE=EF$. ∴ $AE=\frac{1}{2}MF$.（⑤正确）

答案：D

考法 2 利用圆周角定理的推论求最短距离

例 10 ［中考·贺州］如图 3–4–14，在⊙ O 中，AB 是⊙ O 的直径，$AB=10$，$\overset{\frown}{AC}=\overset{\frown}{CD}=\overset{\frown}{DB}$，点 E 是点 D 关于 AB 的对称点，M 是 AB 上的一动点，有下列结论：①$\angle BOE=60°$；②$\angle CED=\frac{1}{2}\angle DOB$；③$DM \perp CE$；④$CM+DM$ 的最小值是 10. 其中正确的个数是（　　）

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

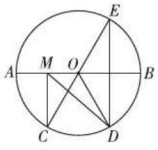


图 3–4–14

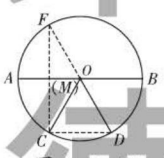


图 3–4–15

试题评析：本题考查了圆周角定理及其推论、轴对称、最短距离问题等知识点，能灵活运用圆周角定理求出各个角的度数并求出 $CM+DM$ 最小时点 M 的位置是解此题的关键.

解：∵ 点 E 是点 D 关于 AB 的对称点，∴ $\overset{\frown}{BD}=\overset{\frown}{BE}$.

又∵ $\overset{\frown}{AC}=\overset{\frown}{CD}=\overset{\frown}{DB}$，∴ $\angle DOB=\angle BOE=\angle COD=60°$. ∴①正确.

∵ $\angle CED=\frac{1}{2}\angle COD=\frac{1}{2}\times 60°=30°=\frac{1}{2}\angle DOB$，∴②正确.

∵ $\angle CED=30°$，∴当 $\angle MDE=60°$ 时，$DM \perp CE$.

∵ $\overset{\frown}{BE}$ 的度数是 60°，∴ $\overset{\frown}{AE}$ 的度数是 120°.

∴只有当 M 和 A 重合时，$\angle MDE=60°$.

∴只有当 M 和 A 重合时，$DM \perp CE$. ∴③错误.

如图 3–4–15，作 C 关于 AB 的对称点 F，连接 CF，DF，DF 交 AB 于点 M，此时 $CM+DM$ 的值最小，等于 DF 的长.

连接 CD，∵ $\overset{\frown}{AC}=\overset{\frown}{CD}=\overset{\frown}{DB}=\overset{\frown}{AF}$，并且弧的度数都是 60°，

∴易得 $\angle D=60°$，$\angle CFD=30°$.

∴ $\angle FCD=180°-60°-30°=90°$. ∴ DF 是⊙ O 的直径，即 $DF=AB=10$.

∴ $CM+DM$ 的最小值是 10. ∴④正确.

答案：C

解法提醒

根据 $\overset{\frown}{AC}=\overset{\frown}{DB}=\overset{\frown}{CD}$ 和点 E 是点 D 关于 AB 的对称点，求出 $\angle DOB=\angle COD=\angle BOE=60°$，从而求出 $\angle CED$，即可判断①②；根据圆周角定理求出当 M 和 A 重合时 $\angle MDE=60°$ 即可判断③；求出 CM+DM 最小时 M 点的位置，根据圆周角定理的推论得出此时 DF 是直径，从而可求出 DF 的长，即可判断④.

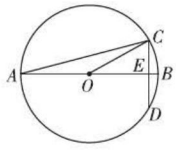
苹德基

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

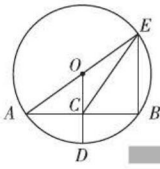
1. [中考·黔东南州]如图，⊙O的直径AB⊥弦CD，垂足为E，∠A=15°，半径为2，则弦CD的长为（　　）

A. 2　　B. 1

C. $\sqrt{2}$　　D. 4



（第1题）



（第2题）

2. [中考·新疆]如图，⊙O的半径OD垂直于弦AB，垂足为C，连接AO并延长交⊙O于点E，连接BE，CE. 若AB=8，CD=2，则△BCE的面积为（　　）

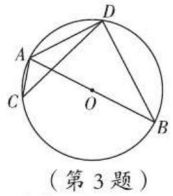
A. 12　　B. 15

C. 16　　D. 18

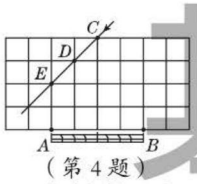
3. [中考·福建]如图，AB是⊙O的直径，C，D是⊙O上位于AB异侧的两点，下列四个角中，一定与∠ACD互余的角是（　　）

A. ∠ADC　　B. ∠ABD

C. ∠BAC　　D. ∠BAD



（第3题）



（第4题）

4. [中考·金华]足球射门，不考虑其他因素，仅考虑射点到球门AB的张角大小时，张角越大，射门越好. 如图的正方形网格中，点A，B，C，D，E均在格点上，球员带球沿CD方向进攻，最好的射点在（　　）

A. 点C

B. 点D或点E

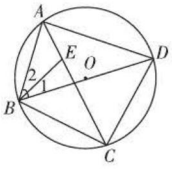
C. 线段DE（异于端点）上一点

D. 线段CD（异于端点）上一点

5. [中考·台州]如图，四边形$ABCD$内接于⊙O，点E在对角线AC上，EC=BC=DC.

（1）若∠CBD=39°，求∠BAD的度数.

（2）求证：∠1=∠2.

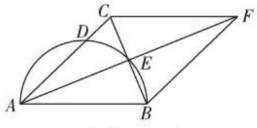


（第5题）

6. [中考·宜昌]如图，在△ABC中，AB=AC，以AB为直径的圆交AC于点D，交BC于点E，延长AE至点F，使EF=AE，连接FB，FC.

（1）求证：四边形$ABFC$是菱形.

（2）若AD=7，BE=2，求半圆形和菱形$ABFC$的面积.



（第6题）

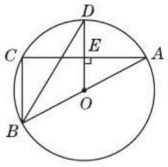
荣德基

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

7. 如图，△ ABC 是⊙ O 的内接三角形，AB 是⊙ O 的直径，D 为⊙ O 上一点，$OD \perp AC$，垂足为 E，连接 BD.

（1）求证：BD 平分∠ ABC.

（2）当∠ $ODB=30°$ 时，求证：$BC=OD$.



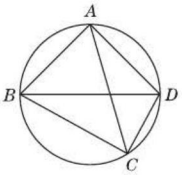
（第 7 题）

8. [**中考 · 广州**]如图，点 C 为△ ABD 外接圆上的一动点（点 C 不在$\overset{\frown}{BAD}$ 上，且不与点 B，D 重合），∠ $ACB=$ ∠ $ABD=45°$.

（1）求证：BD 是该外接圆的直径.

（2）连接 CD，求证：$\sqrt{2}\,AC=BC+CD$.

（3）若△ ABC 关于直线 AB 的对称图形为△ ABM，连接 DM，试探究 DM^2，AM^2，BM^2 三者之间满足的等量关系，并证明你的结论. [**导学号 2380328**]



（第 8 题）

荣德基

素养提分 行动篇

浅谈隐形圆——将多边形问题化归为圆的问题

在最近几年的中考题和中考模拟题中，经常会出现一类有关圆的题目，这类题目在条件中没有直接给出有关圆的信息，但我们通过分析和转化，最终都可以利用圆的知识求解. 这类题目构思巧妙，综合性强，它将复杂的多边形求角问题转化为圆内的求角问题，体现了转化和化归的数学思想，处理这类题目，关键在于能否把“隐形圆”找出来.

下面就有关数学中的“隐形圆”问题作一些探索.

[案例] 如图 3−4−16，已知 $AB=AC=AD$，若∠ $BDC=40°$ ，求∠ BAC 的度数.

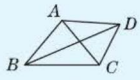


图 3−4−16

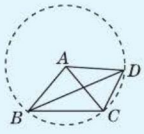


图 3−4−17

[案例分析] 直接根据条件求∠ BAC 的度数有一定的难度，但由 $AB=AC=AD$ 可知，B，C，D 三点到 A 点的距离相等，于是得到 B，C，D 三点在以点 A 为圆心，AB 为半径的圆上. 画出这个隐形圆，如图 3−4−17，根据圆的基本性质就可巧妙地求出∠ $BAC=2$ ∠ $BDC=2\times40°=80°$.

[探究应用] 如图 3−4−18，已知点 O 是三角形 ABC 内一点，$OA=OB=OC$，∠ $AOB=$ ∠ AOC，∠ $ABC=70°$ ，求∠ BAC 的度数.

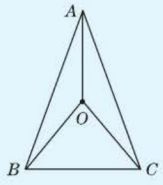


图 3−4−18

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

5 确定圆的条件

核心知识
- 确定圆的条件
- 外接圆

知识链接

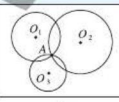
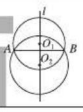
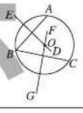
确定圆的条件 —关键→ 不在同一条直线上的三点

确定圆的条件 → 三角形的外接圆

点知识·拨考向 速提分

点知识 1 圆的确定

1. 过已知点作圆

条件	作法	作圆的个数	图示
过一点 A 作圆	以点 A 以外的任意一点为圆心，以该点与点 A 的距离为半径作圆	无数个	
过两点 A，B 作圆	连接 AB，作线段 AB 的垂直平分线，以其垂直平分线上任意一点为圆心，以该点与点 A（或点 B）的距离为半径作圆	无数个	
过不在同一条直线上的三点 A，B，C 作圆	连接 AB，BC，分别作线段 AB，BC 的垂直平分线 DE 和 FG，DE 和 FG 相交于点 O，以 O 为圆心，以 OA（或 OB，OC）为半径作圆，$\odot O$ 就是所求作的圆	一个	

2. 确定一个圆的条件

（1）已知圆心、半径，可以确定一个圆.

（2）不在同一条直线上的三点确定一个圆.

"确定"是"有且只有"的意思.

拔考向 利用确定一个圆的条件分析确定圆的情况

题型 1：不在同一条直线上三点确定一个圆在分析确定圆的个数中的应用

例 1 如图 3-5-1，点 A，B，C 在同一条直线上，点 D 在直线 AB 外，过这四个点中的任意三个点，能画圆的个数是（　　）

A.1　　B.2　　C.3　　D.4

解题秘方：（1）四个点中取三个点的组数；

（2）去掉三点共线的组数.

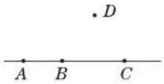


图 3-5-1

解：过不在同一条直线上的三点确定一个圆，在点 A，B，C，D 四个点中取三个点的方法有：点 A，B，C；点 A，B，D；点 B，C，D；点 A，C，D，共四组. 又因 A，B，C 三点在同一条直线上，故过这四个点中的任意三个点能画圆的个数为 3.

答案：C

提分·必记

方法点拨

过不在同一条直线上的任意四点作圆：要想过四点作圆，应先作出经过不在同一条直线上的三点的圆，若第四个点到圆心的距离等于半径，则第四个点在圆上，否则，第四个点不在圆上.

提分·秘诀

特别提醒

确定一个圆要具备两个关键点：

- 已知三个点，若已知两个点或一个点，都无法确定圆；
- 三个点不在同一条直线上.

学霸笔记

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

题型 2：圆心和半径在确定圆中的应用

例 2 图 3-5-2 是一个残破的圆轮的示意图，李师傅想要再浇铸一个同样大小的圆轮，你能想办法帮帮李师傅吗？

解题秘方：利用线段的垂直平分线确定圆心和半径.

解：（1）如图 3-5-3，在圆轮对应的弧上任取三点 A，B，C，并且连接 AB，BC；



图 3-5-2

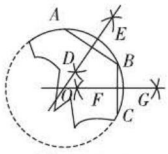


图 3-5-3

（2）分别作 AB、BC 的垂直平分线 DE，FG，且 DE，FG 相交于点 O；

（3）以点 O 为圆心，以 OA 为半径作⊙ O，⊙ O 就是圆轮对应的圆. 按上述步骤就能得到与原来同样大小的圆轮.

点知识 ▸ 2 三角形的外接圆

1. 三角形的外接圆

三角形的三个顶点确定一个圆，这个圆叫做三角形的外接圆，这个三角形叫做这个圆的内接三角形. “接”是指三角形的三个顶点都在圆上.

2. 三角形的外心

（1）定义：三角形的外接圆的圆心是三角形三边垂直平分线的交点，叫做三角形的外心.

（2）性质：三角形的外心到三角形三个顶点的距离相等，等于其外接圆的半径.

3. 三角形外接圆的作法

（1）作三角形任意两边的垂直平分线，确定其交点.

（2）以该交点为圆心，以交点到三个顶点中任意一点的距离为半径作圆即可.

拔考向 ▸ 利用三角形外接圆的定义求外接圆的半径

例 3 如图 3-5-4，△ ABC 内接于⊙ O，∠ C=45°，AB=4，求⊙ O 的半径.

解题秘方：连接半径，利用圆周角与圆心角的关系结合勾股定理求解.

解：如图 3-5-4，连接 OA，OB，设⊙ O 的半径为 r.

∵∠ C=45°，∴∠ AOB=2∠ C=90°.

∴ $OA^2+OB^2=AB^2$，即 $r^2+r^2=4^2$.

解得 $r_1=2\sqrt{2}$，$r_2=-2\sqrt{2}$（不符合题意，舍去）.

∴⊙ O 的半径为 $2\sqrt{2}$.

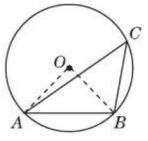


图 3-5-4

特别提醒

确定一个圆的圆心的方法：确定一个圆的圆心时，只需作出此圆任意两条弦（不平行）的垂直平分线，因为弦的垂直平分线经过圆心，且两条不平行的弦的垂直平分线只有一个交点.

提分·必记

特别提醒

任意一个三角形都有且只有一个外接圆，但一个圆有无数个内接三角形.

特别提醒

三角形外心的位置：锐角三角形的外心在三角形的内部；直角三角形的外心是斜边的中点；钝角三角形的外心在三角形的外部.

提分·秘诀

技巧点拨

求三角形的外接圆半径的方法：求三角形的外接圆半径时，最常用的方法是作出圆心与三角形顶点的连线（即半径），或延长使这条半径变为直径，将求半径转化为直角三角形中求边的长.

荣德基

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

点方法·拨技巧 提高分

拔尖角度 1 利用三角形的三边关系证明边的不等关系

例 4 如图 3-5-5，△ ABC 内接于⊙ O，∠ ACB=2∠ ABC，弦 AD // BC.

求证：（1）CD 平分∠ ACB.

（2）$2AC > AB$.

解题秘方：（1）利用同弧所对的圆周角相等，结合平行线的性质求证；（2）利用等角对等弦，转化为三角形的三边关系求证.

证明：（1）∵ AD // BC，∴∠ ADC=∠ DCB.

∵∠ ABC=∠ ADC，∴∠ ABC=∠ DCB.

又∵∠ ACB=2∠ ABC=2∠ DCB，

∴∠ ACD=∠ DCB，即 CD 平分∠ ACB.

（2）连接 BD，如图 3-5-5.

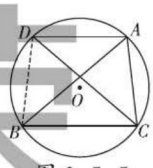


图 3-5-5

由（1）易得∠ ABC=∠ ACD.

∴ $\overset{\frown}{AC}=\overset{\frown}{AD}$. ∴ AC=AD.

又由（1）知∠ BCD=∠ ACD，∴ $\overset{\frown}{BD}=\overset{\frown}{AD}$.

∴ BD=AD. ∴ AC=AD=BD.

在△ ABD 中，AD+BD > AB，∴ $2AC > AB$.

拔尖角度 2 利用数形结合思想求三角形外心的坐标

例 5 如图 3-5-6，已知抛物线 $y=x^2-4x$ 经过原点，且与 x 轴交于点 A.

（1）求线段 OA 的长.

（2）设抛物线的顶点为 B，试求△ OAB 外接圆圆心的坐标.

解题秘方：（1）利用求抛物线与 x 轴的交点求 OA 的长；

（2）利用抛物线对称轴上的点的坐标特征，结合外心的性质，求三角形外接圆圆心的坐标.

解：（1）当 y=0 时，x^2-4x=0.

解得 x_1=0，x_2=4. ∴ A（4，0）. ∴ OA=4.

（2）作抛物线的对称轴交 x 轴于点 E，如图 3-5-6.

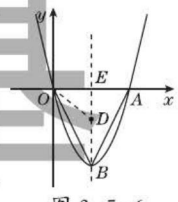


图 3-5-6

易知顶点 B 坐标为（2，−4），∴ BE=4.

设 D 为△ OAB 外接圆圆心，连接 OD，根据抛物线的对称性和三角形外心的性质知，△ OAB 的外心 D 必在 BE 上，且 OD=DB.

设 OD=r，易知 $r^2=2^2+(4-r)^2$，∴ $r=\frac{5}{2}$. ∴ $DE=4-\frac{5}{2}=\frac{3}{2}$.

∵点 D 在第四象限，

∴△ OAB 的外接圆圆心的坐标为（2，$-\frac{3}{2}$）.

挑战·高分

特别提醒

利用三角形的外接圆解有关边角问题时，常常用到圆周角定理及其推论，以及弧、弦、圆心角（圆周角）之间的关系.

挑战·高分

知识储备

1. 抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 与 x 轴交点的横坐标为方程 $ax^2+bx+c=0$ 的两个实数根.
2. 抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 的对称轴为直线 $x=-\frac{b}{2a}$；顶点坐标为（$-\frac{b}{2a}$，$\frac{4ac-b^2}{4a}$）.

技巧点拨

运用方程思想求线段长是常用的方法，确定以抛物线的顶点、抛物线与x轴的两个交点为顶点的三角形的外心时，根据外心的确定方法可知，外心必定在抛物线的对称轴上.

荣德基

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

点中考·拨模拟 得满分

中考探秘 本小节在中考中主要考查不在同一条直线上的三点确定一个圆及简单的应用问题，主要以选择题、填空题的形式出现，分值不大，在以后的中考中依然会维持这一考查模式.

三年中考兵法

考法 求三角形外接圆的半径

例6 [中考·贵阳]小颖同学在手工制作中，把一张边长为12 cm的等边三角形纸片贴到一张圆形的纸片上，若三角形的三个顶点恰好都在这个圆上，则圆的半径为（　　）

A.$2\sqrt{3}$ cm　B.$4\sqrt{3}$ cm　C.$6\sqrt{3}$ cm　D.$8\sqrt{3}$ cm

试题评析：本题考查了三角形外接圆半径的求法，确定三角形外接圆的圆心是解题关键.

解：记该等边三角形为△ABC，如图3-5-7，过点A作BC边上的垂线交BC于点D，过点B作AC边上的垂线交AD于点O. 以点O为圆心，OB的长为半径作圆，则OB的长即为所求.

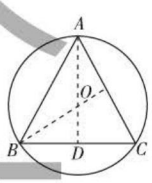


图3-5-7

设$OB=R$ cm，由等边三角形的性质，可知$\angle OBC=30°$，

$\therefore OD=\frac{R}{2}$ cm.

在Rt△ODB中，$BD=\sqrt{OB^2-OD^2}=\frac{\sqrt{3}}{2}R$ cm，

则$BC=2BD=\sqrt{3}R$ cm.

又$BC=12$cm，$\therefore\sqrt{3}R=12$，

$\therefore R=\frac{12}{\sqrt{3}}=4\sqrt{3}$. $\therefore$圆的半径为$4\sqrt{3}$ cm.

答案：B

冲刺·满分

另解

如图3-5-7，设$OB=OA=R$ cm. $\because BC=12$ cm，$\therefore BD=6$ cm.

在Rt△ABD中，$AD=\sqrt{AB^2-BD^2}=6\sqrt{3}$ cm，

$\therefore OD=AD-AO=(6\sqrt{3}-R)$ cm.

在Rt△BOD中，由勾股定理，得$BO^2=BD^2+OD^2$，

即$R^2=6^2+(6\sqrt{3}-R)^2$，

解得$R=4\sqrt{3}$.

$\therefore$圆的半径为$4\sqrt{3}$ cm.

两年模拟兵法

☞答案见229页

1. 下面四个命题：

①经过三点一定可以作圆；

②任意一个三角形一定有一个外接圆，而且只有一个外接圆；

③任意一个圆一定有一个内接三角形，而且只有一个内接三角形；

④三角形的外心到三角形三个顶点的距离相等.

其中真命题有（　　）

A. 4个　B. 3个　C. 2个　D. 1个

2. 在平面直角坐标系中，点A，B，C的坐标分别为$(1,4)$，$(5,4)$，$(1,-2)$，则△ABC外接圆的圆心坐标是（　　）

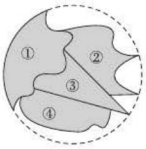
A.$(2,3)$　B.$(3,2)$

C.$(1,3)$　D.$(3,1)$

苹德基

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

3. 小军不慎把家里的圆形镜子打碎了，其中四块碎片如图，为了买到与原来大小一样的圆形镜子，小军带到商店的一块碎片应该是（　　）



（第 3 题）

A. 第①块　　B. 第②块

C. 第③块　　D. 第④块

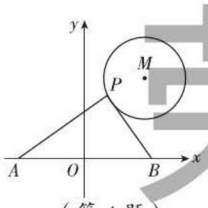
4. [中考·泰安]如图，⊙ M 的半径为 2，圆心 M 的坐标为（3，4），点 P 是⊙ M 上的任意一点，$PA \perp PB$，且 PA，PB 与 x 轴分别交于 A，B 两点，若点 A，点 B 关于原点 O 对称，则 AB 的最小值为（　　）

A.3

B.4

C.6

D.8



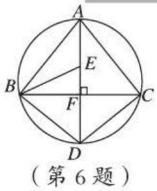
（第 4 题）

5. 已知 $\triangle ABC$ 内接于⊙ O，若 $AB=AC$，⊙ O 的半径等于 6 cm，点 O 到 BC 的距离等于 2 cm，求 AB 的长.

6. 如图，AD 为 $\triangle ABC$ 外接圆的直径，$AD \perp BC$，垂足为 F，$\angle ABC$ 的平分线交 AD 于点 E，连接 DB，DC.

（1）求证：$DB=DC$.

（2）请判断 B，E，C 三点是否在以点 D 为圆心、DB 为半径的圆上，并说明理由.



（第 6 题）

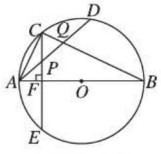
7. 在等腰三角形 ABC 中，$\angle A$，$\angle B$，$\angle C$ 的对边分别为 a，b，c，已知 $a=3$，b 和 c 是关于 x 的方程 $x^2+mx+2-\frac{1}{2}m=0$ 的两个实数根.

（1）求 $\triangle ABC$ 的周长.

（2）当 $\triangle ABC$ 的三边长均为整数时，求 $\triangle ABC$ 的外接圆半径.

8. 已知：如图，$\triangle ABC$ 内接于⊙ O，AB 为直径，弦 $CE \perp AB$ 于点 F，C 是 $\overset{\frown}{AD}$ 的中点，连接 AD，分别交 CE，BC 于点 P，Q.

求证：点 P 是 $\triangle ACQ$ 的外心.



（第 8 题）

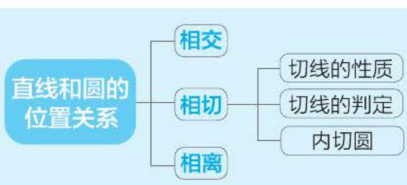
荣德基

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

6 直线和圆的位置关系

核心知识
- 相交、相切、相离
- 切线的性质与判定
- 内切圆

知识链接



点知识·拨考向 速提分

点知识 1 直线和圆的位置关系

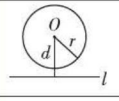
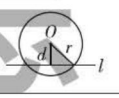
1. 直线和圆有三种位置关系

（1）相交：直线和圆有两个公共点时，叫做直线和圆相交，这时的直线叫做圆的割线.

（2）相切：直线和圆有唯一的公共点时，叫做直线和圆相切，唯一的公共点叫做切点，这时的直线叫做圆的切线.

（3）相离：直线和圆没有公共点时，叫做直线和圆相离.

2. 直线和圆的位置关系

直线和圆的位置关系	相离	相切	相交
图示			
公共点个数	0	1	2
公共点名称		切点	交点
直线名称		切线	割线
圆心 O 到直线的距离 d 与半径 r 的关系	$d>r$	$d=r$	$d<r$
等价关系	$d>r \Leftrightarrow$ 直线 l 与⊙O 相离	$d=r \Leftrightarrow$ 直线 l 与⊙O 相切	$d<r \Leftrightarrow$ 直线 l 与⊙O 相交

拔考向 利用直线与圆的位置关系解圆心到直线的距离与半径的大小关系的相关应用

题型 1：圆心到直线的距离与半径的大小关系在判定直线与圆的位置关系中的应用

例 1 如图 3-6-1，在 Rt△ABC 中，$\angle C=90°$，$AC=6$ cm，$BC=8$ cm，则直线 AB 和以点 C 为圆心、r 为半径的圆有何位置关系？为什么？（1）$r=4$ cm；（2）$r=4.8$ cm；（3）$r=7$ cm.

解题秘方：求出点 C 到 AB 的距离，再将其与圆的半径的大小进行比较.

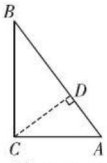
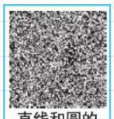


图 3-6-1

提分·必记

要点提醒

1. 如果一条直线满足下列三个条件中的任意两个，那么第三个也成立：
（1）过圆心；
（2）过切点；
（3）垂直于切线.
2. 根据切线的定义，可以知道切线具备的性质还有：
（1）切线和圆只有一个公共点；
（2）切点到圆心的距离等于半径.


直线和圆的位置关系

提分·秘诀

解法提醒

判断直线和圆的位置关系，有两种方法：
1. 根据直线与圆的公共点的个数判断.
2. 将圆心到直线的距离 d 与圆的半径 r 相比较，在没有给出 d 与 r 的具体数值的情况下，

荣德基

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

解：过点 C 作 $CD \perp AB$ 于点 D，如图 3-6-1.

在 Rt $\triangle ABC$ 中，$\angle ACB=90°$，$AC=6$ cm，

$BC=8$ cm，则 $AB=\sqrt{AC^2+BC^2}=\sqrt{6^2+8^2}=10$（cm）.

又 $\because S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}AB\cdot CD=\frac{1}{2}AC\cdot BC$，

$\therefore AB\cdot CD=AC\cdot BC$，即 $10\times CD=6\times 8$. $\therefore CD=4.8$ cm.

（1）当 $r=4$ cm 时，$CD>r$，直线 AB 和⊙ C 相离；

（2）当 $r=4.8$ cm 时，$CD=r$，直线 AB 和⊙ C 相切；

（3）当 $r=7$ cm 时，$CD<r$，直线 AB 和⊙ C 相交.

可先利用图形条件及性质求出 d 与 r 的值，再通过比较大小确定其位置关系.

题型 2：直线与圆的位置关系在求字母取值范围中的应用

例 2 如图 3-6-2，在 $\triangle ABC$ 中，$\angle C=90°$，$\angle A=30°$，O 是 AB 上的一点，$OB=m$（$m>0$），⊙ O 的半径 r 为 $\frac{1}{2}$，当 m 分别在什么范围内取值时，直线 BC 与⊙ O 相离、相切、相交？

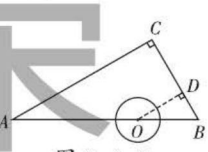


图 3-6-2

解题秘方：利用点与圆的位置关系的相关知识建立方程（或不等式）求 m 的取值范围.

解：如图 3-6-2，作 $OD \perp BC$ 于点 D.

$\because \angle A=30°$，$\angle C=90°$，$\therefore \angle B=60°$. $\therefore \angle DOB=30°$.

在 Rt $\triangle ODB$ 中，$\because OB=m$，$\therefore DB=\frac{1}{2}m$，$\therefore OD=\frac{\sqrt{3}}{2}m$. 设 $OD=d$.

（1）当直线 BC 与⊙ O 相离时，$d>r$，即 $\frac{\sqrt{3}}{2}m>\frac{1}{2}$，解得 $m>\frac{\sqrt{3}}{3}$.

（2）当直线 BC 与⊙ O 相切时，$d=r$，即 $\frac{\sqrt{3}}{2}m=\frac{1}{2}$，解得 $m=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

（3）当直线 BC 与⊙ O 相交时，$d<r$，即 $\frac{\sqrt{3}}{2}m<\frac{1}{2}$，解得 $m<\frac{\sqrt{3}}{3}$.

又 $m>0$，$\therefore 0<m<\frac{\sqrt{3}}{3}$.

解法提醒

要判断 m 在什么范围内取值时 BC 与⊙O 相离、相切、相交，就是要求出圆心 O 到直线 BC 的距离 d，把 d 与⊙O 的半径 r 的大小进行比较，并利用直线与圆的位置关系中相切、相离、相交时 d 与 r 之间的相等或不等关系，转化为解方程或不等式的问题，从而求出 m 的取值范围.

点知识 ▸ 2 切线的性质

提分·必记

1. **性质定理** 圆的切线垂直于过切点的半径.

特别提醒

性质定理的题设有两个条件：

1. 圆的切线；
2. 半径过切点.

应用时缺一不可.

2. 切线的性质

（1）切线和圆只有一个公共点.

（2）圆心到切线的距离等于半径.

（3）圆的切线垂直于过切点的半径.

（4）经过圆心且垂直于切线的直线必过切点（找切点用）.

（5）经过切点且垂直于切线的直线必过圆心（找圆心用）.

以上（3）（4）（5）可归纳为：如果直线满足过圆心、过切点、垂直于切线这三个条件中的任意两个，那么第三个也成立.

紧 德 基

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

考向▶利用切线的性质解边角问题

例 3 如图 3-6-3，AB 为⊙O 的直径，PD 切⊙O 于点 C，交 AB 的延长线于点 D，且 $\angle D=2\angle CAD$.

（1）求 $\angle D$ 的度数.

（2）若 $CD=2$，求 BD 的长.

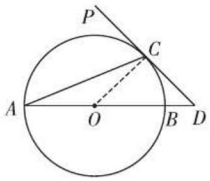


图 3-6-3

解题秘方：（1）利用“等半径”得等腰三角形；（2）利用“切线”垂直于过切点的半径构成直角三角形，再结合相关性质求解.

解：（1）如图 3-6-3，连接 OC. ∵ $AO=CO$，

∴ $\angle OAC=\angle ACO$. ∴ $\angle COD=2\angle CAD$.

又∵ $\angle D=2\angle CAD$，∴ $\angle D=\angle COD$.

∵ PD 与⊙O 相切于点 C，∴ $OC\perp PD$，即 $\angle OCD=90°$.

∴ $\angle D=45°$.

（2）由（1）可知△OCD 是等腰直角三角形. ∴ $OC=CD=2$.

由勾股定理，得 $OD=\sqrt{OC^2+CD^2}=\sqrt{2^2+2^2}=2\sqrt{2}$，

∴ $BD=OD-OB=2\sqrt{2}-2$.

提分·秘诀

解法提醒

已知圆的切线时，常连接圆心和切点，得到的半径垂直于切线，通过构造直角三角形来解决问题，即“见切线，连半径，得垂线”；而等半径可得等腰三角形，继而可得两底角相等. 在同圆中有关切线的问题常通过等腰三角形和直角三角形的性质来解决.

知识点 3 切线的判定

1. **判定定理** 过半径外端且垂直于这条半径的直线是圆的切线.

2. **判定方法** （1）**定义法**：与圆有唯一公共点的直线是圆的切线.

（2）**数量法**：圆心到直线的距离等于半径的直线是圆的切线.

（3）**判定定理法**：经过半径的外端并且垂直于这条半径的直线是圆的切线.

提分·必记

特别提醒

切线必须同时具备两个条件：

1. 直线过半径的外端；
2. 直线垂直于这条半径.

考向▶利用切线的判定方法判定圆的切线

题型 1：“有切点”在判定切线中的应用

例 4 如图 3-6-4，已知 AB 是⊙O 的直径，$AB=4$，点 C 在线段 AB 的延长线上，点 D 在⊙O 上，连接 CD，且 $CD=OA$，$OC=2\sqrt{2}$，求证：CD 是⊙O 的切线.

解题秘方：利用“有切点，连半径，证垂直”判定圆的切线.

证明：如图 3-6-4，连接 OD.

由题意可知 $CD=OD=OA=\frac{1}{2}AB=2$.

∵ $OC=2\sqrt{2}$，∴ $OD^2+CD^2=OC^2$.

∴ $\angle ODC=90°$，即 $OD\perp CD$.

又点 D 在⊙O 上，∴ CD 是⊙O 的切线.

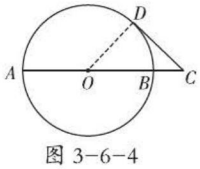


图 3-6-4

提分·秘诀

技巧点拨

作辅助线判定圆的切线的常用方法：

- 有切点，连半径，证垂直. 如果已知直线经过圆上的一点，那么连接这点和圆心，得到辅助半径，再证明所作半径与这条直线垂直即可，简记为：有切点，连半径，证垂直.

基德教辅

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

题型 2：“无切点”在判定切线中的应用

例 5 如图 3-6-5，在 Rt △ ABC 中，∠ B=90° ，∠ BAC 的平分线交 BC 于点 D，以点 D 为圆心，DB 的长为半径作⊙ D.

求证：AC 与⊙ D 相切.

解题秘方：利用“无切点，作垂线，证半径”判定圆的切线.

证明：如图 3-6-5，过点 D 作 $DF \perp AC$ 于点 F.

∵ ∠ B=90° ，

∴ $DB \perp AB$.

又∵ AD 平分∠ BAC，

∴ DF=DB.

∴ AC 与⊙ D 相切.

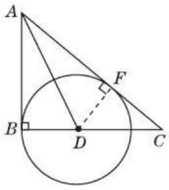


图 3-6-5

无切点，作垂直，证半径. 如果已知条件中不知道直线与圆是否有公共点，那么过圆心作直线的垂线段，再证明垂线段的长度等于半径即可，简记为：无切点作垂直证半径.

题型 3：切线的性质和判定在解题中的应用

例 6 [中考·湖州]如图 3-6-6，已知 BC 是⊙ O 的直径，AC 与⊙ O 相切于点 C，AB 交⊙ O 于点 D，E 为 AC 的中点，连接 DE.

（1）若 AD=DB，OC=5，求 AC 的长.

（2）求证：DE 是⊙ O 的切线.

解题秘方：（1）构造直径所对的圆周角，利用直径所对的圆周角是直角求解；

（2）利用“连半径，证垂直”求证.

（1）**解**：连接 CD，如图 3-6-6.

∵ BC 是⊙ O 的直径，

∴ ∠ BDC=90° ，

即 $CD \perp AB$.

∵ AD=DB，

∴ AC=BC=2OC=10.

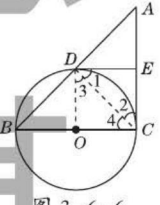


图 3-6-6

（2）**证明**：连接 OD，如图 3-6-6.

∵ ∠ ADC=90° ，E 为 AC 的中点，

∴ DE=EC= $\frac{1}{2}AC$.

∴ ∠ 1 = ∠ 2.

∵ OD=OC，∴ ∠ 3 = ∠ 4.

∵ AC 切⊙ O 于点 C，∴ $AC \perp OC$.

∴ ∠ 1+ ∠ 3= ∠ 2+ ∠ 4 = 90° ，即 $DE \perp OD$.

∴ DE 是⊙ O 的切线.

切线的判定

解法提醒

看到切线，就想作过切点的半径；看到直径，就想直径所对的圆周角是直角；看到切线的判定，就想：（1）若已知直线与圆有公共点，则采用**判定定理法**，其基本思路是，当已知点在圆上时，连接过这点的半径，证明这条半径与直线垂直即可，可简述为“有切点，连半径，证垂直”；（2）若未知直线与圆有公共点，则采用**数量关系法**，其基本思路是，过圆心作直线的垂线段，证明垂线段的长等于圆的半径，可简述为“无切点，作垂线，证相等”.

荣德基

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

点知识▸4 三角形的内切圆

1. 三角形的内切圆 与三角形各边都相切的圆叫做三角形的内切圆，这个三角形叫做这个圆的外切三角形.

2. 三角形的内心 三角形的内切圆的圆心是三角形三条角平分线的交点，叫做三角形的内心.

三角形内心的性质：三角形的内心到三角形三条边的距离相等，且等于其内切圆的半径.

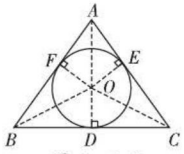


图 3-6-7

拓宽视野：如图 3-6-7，$\triangle ABC$ 的周长是 l，内切圆 $\odot O$ 的半径为 r.

设 $BC=a$，$AC=b$，$AB=c$，则 $S_{\triangle ABC}=S_{\triangle BOC}+S_{\triangle AOC}+S_{\triangle AOB}=\frac{1}{2}ar+\frac{1}{2}br+\frac{1}{2}cr=\frac{1}{2}(a+b+c)r=\frac{1}{2}lr$.

故三角形的面积可以用三角形的周长与其内切圆半径之积的一半表示.

拔考向▸利用三角形内切圆求边角问题

题型 1：三角形内切圆在求半径中的应用

例 7 a，b，c 分别是 Rt $\triangle ABC$ 的三边 BC，AC，AB 的长，其中 $\angle C=90°$，求此三角形内切圆的半径.

解题秘方：利用等积法求解.

解：如图 3-6-8，设 Rt $\triangle ABC$ 的内切圆 $\odot O$ 的半径为 r，连接 OA，OB，OC.

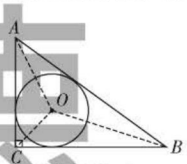


图 3-6-8

由 $S_{\triangle ABC}=S_{\triangle AOB}+S_{\triangle AOC}+S_{\triangle BOC}$，得 $\frac{1}{2}ab=\frac{1}{2}(a+b+c)r$.

故 $r=\frac{ab}{a+b+c}$.

题型 2：三角形的内心在求角中的应用

例 8 如图 3-6-9，在 $\triangle ABC$ 中，$\angle A=70°$，点 O 是 $\triangle ABC$ 的内心，求 $\angle BOC$ 的度数.

解题秘方：三角形的内心是三角形三个内角的平分线的交点.

解：$\because \angle A=70°$，

$\therefore \angle ABC+\angle ACB=180°-70°=110°$.

$\because$ 点 O 是 $\triangle ABC$ 的内心，

$\therefore \angle OBC=\frac{1}{2}\angle ABC$，

$\angle OCB=\frac{1}{2}\angle ACB$.

$\therefore \angle OBC+\angle OCB=\frac{1}{2}(\angle ABC+\angle ACB)=55°$.

$\therefore \angle BOC=180°-55°=125°$.

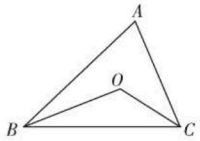


图 3-6-9

提分·必记

要点解读

1. “内切”“外切”是针对位置而言的，“内”是相对于三角形而言，“外”是相对于圆而言.
2. 一个三角形有一个内切圆，而一个圆有无数多个外切三角形.
3. 三角形的内心在三角形的内部. 在实际操作中，画出三角形任意两个内角的平分线，找到交点，该交点就是三角形的内心.

提分·秘诀

特别提醒

用直角三角形三边长表示其内切圆半径的方法：$r=\frac{ab}{a+b+c}=\frac{2S}{a+b+c}$（其中 a，b 为直角边长，r 为圆的半径，c 为斜边长，S 是面积）.（解其他题时可作公式用）

特别提醒

如图 3-6-10 是数学中一个典型的基本图形. 在 $\triangle ABC$ 中，若点 I 是 $\triangle ABC$ 的内心，则 $\angle BIC=90°+\frac{1}{2}\angle BAC$；若点 I 是 $\triangle ABC$ 的外心，则 $\angle BIC=2\angle A$.

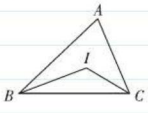


图 3-6-10

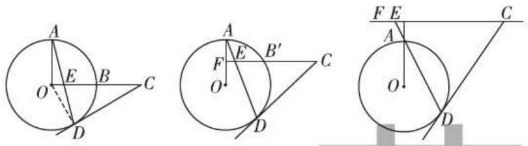
荣德基

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

点方法·拨技巧 提高分

拔尖角度▸ 1 利用类比法、切线的性质探究动态几何问题

例 9 如图 3-6-11 ①，OA，OB 是 $\odot O$ 的两条半径，且 $OA \perp OB$，点 C 是 OB 延长线上的任意一点，过点 C 作 CD 切 $\odot O$ 于点 D，连接 AD 交 OC 于点 E.



① ② ③

图 3-6-11

（1）在图 3-6-11 ①中，求证：$CD=CE$.

（2）若将图 3-6-11 ①中 OB 所在的直线向上平移交 OA 于点 F，交 $\odot O$ 于点 B'，其他条件不变，如图 3-6-11 ②，那么上述结论 $CD=CE$ 还成立吗？

（3）若将图 3-6-11 ①中 OB 所在的直线向上平移到 $\odot O$ 外的 CF，点 E 是 DA 的延长线与 CF 的交点，其他条件不变，如图 3-6-11 ③，那么上述结论 $CD=CE$ 还成立吗？

解题秘方：把证 $CD=CE$ 转化为证 $\angle CDE=\angle CED$，结合等角的余角相等求解.

（1）**证明**：如图 3-6-11 ①，连接 OD.

$\because CD$ 切 $\odot O$ 于点 D，$\therefore OD \perp CD$.

$\therefore \angle CDE+\angle ODA=90°$.

又 $\because OA \perp OB$，$\therefore \angle A+\angle OEA=90°$.

$\because OA=OD$，$\therefore \angle A=\angle ODA$. $\therefore \angle CDE=\angle OEA$.

又 $\because \angle OEA=\angle CED$，$\therefore \angle CDE=\angle CED$. $\therefore CD=CE$.

（2）**解**：结论 $CD=CE$ 成立，证明略.

（3）**解**：结论 $CD=CE$ 成立，证明略.

挑战·高分

解法提醒

利用切线的性质得直角，然后将证线段相等的问题转化为证角相等.

方法点拨

对于动态几何问题的探究，要处理好变与不变的关系. 变的是几何图形的形状，不变的是它所含的几何性质，因此解题时可采用类比法进行探究证明.

拔尖角度▸ 2 利用分类讨论思想解决直线与圆相切的问题

例 10 如图 3-6-12，半圆 O 的直径 $DE=12$ cm，在 $\triangle ABC$ 中，$\angle ACB=90°$，$\angle ABC=30°$，$BC=12$ cm，半圆 O 以 2 cm/s 的速度从左向右运动，在运动过程中，点 D，E 始终在直线 BC 上，设运动时间为 t（s），当 $t=0$ s 时，半圆 O 在 $\triangle ABC$ 的左侧，$OC=8$ cm. 当 t 为何值时，$\triangle ABC$ 某一条边所在的直线能与半圆 O 所在的圆相切？

挑战·高分

技巧点拨

求解与运动相关的问题，要运用变化的眼光分析. 求解本题时，应先运用动态思维，分析半圆 O 所在的圆与直角三角形一边所在直线相切的所有情况，再

基德荣

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

解题秘方：画出直线与圆相切的几种静态图形，利用切线的性质求出时间 t 的值.

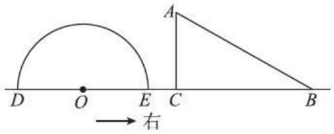


图 3-6-12

针对各种情况，根据运动过程求出 t 的值.

解：由题意知，可分四种情况讨论：

（1）如图 3-6-13 ①，当点 E 与点 C 重合时，$AC \perp OE$，$OC=OE=6$ cm，此时直线 AC 与半圆 O 所在的圆相切. 点 O 运动了 2 cm，运动时间 $t=\frac{2}{2}=1$（s）.

（2）如图 3-6-13 ②，当点 O 运动到点 C 时，过点 O 作 $OF \perp AB$，垂足为点 F.

在 Rt $\triangle FOB$ 中，$\angle FBO=30°$，$OB=12$ cm，则 $OF=6$ cm，即 OF 的长等于半圆 O 的半径，此时直线 AB 与半圆 O 所在的圆相切. 点 O 运动了 8 cm，运动时间 $t=\frac{8}{2}=4$（s）.

（3）如图 3-6-13 ③，当点 O 运动到 BC 的中点时，$AC \perp OD$，$OC=OD=6$ cm，此时直线 AC 与半圆 O 所在的圆相切，点 O 运动了 14 cm，运动时间 $t=\frac{14}{2}=7$（s）.

（4）如图 3-6-13 ④，当点 O 运动到点 B 的右侧，且 $OB=12$cm 时，过点 O 作 $OQ \perp AB$，交 AB 的延长线于点 Q. 在 Rt $\triangle QOB$ 中，$\angle OBQ=30°$，则 $OQ=6$cm，即 OQ 等于半圆 O 的半径，此时直线 AB 与半圆 O 所在的圆相切，点 O 运动了 32 cm，运动时间 $t=\frac{32}{2}=16$（s）.

综上所述，当 $t=1$s 或 4s 或 7s 或 16s 时，$\triangle ABC$ 某一边所在的直线与半圆 O 所在的圆相切.

警示误区

解决动态问题时，忽略某种情况导致漏解.

本题的易错点：在分类讨论时，忽略“半圆 O 所在的圆”这个条件，漏掉该半圆 O 所在的圆与 AB 的延长线相切的情况.

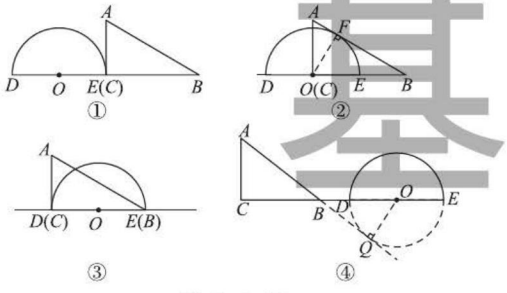


图 3-6-13

点中考·拨模拟 得满分

中考探秘

本节的主要考点为直线和圆的位置关系，主要考查直线和圆的位置关系的确定、切线的性质及判定和三角形的内切圆等，试题既有填空题、选择题，也有解答题，还常与三角形、方程、函数等知识点相结合，构成题型新颖、构思巧妙的综合性试题.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

三年中考兵法

考法 1 圆的切线与三角形相似的综合考查

例 11 [中考·聊城]如图 3-6-14，在 Rt△ABC 中，$\angle C=90°$，BE 平分$\angle ABC$ 交 AC 于点 E，作 $ED\perp EB$ 交 AB 于点 D，⊙O 是△BED 的外接圆.

（1）求证：AC 是⊙O 的切线.

（2）若⊙O 的半径为 2.5，$BE=4$，求 BC，AD 的长.

试题评析：本题考查圆的切线的判定以及利用相似求线段长，正确地利用切线的判定与性质是解题的关键.

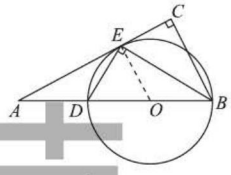


图 3-6-14

（1）**证明**：连接 OE，如图 3-6-14，

∵ $OB=OE$，∴$\angle OBE=\angle OEB$.

∵ BE 平分$\angle ABC$，∴$\angle OBE=\angle EBC$.

∴$\angle OEB=\angle EBC$. ∴ $OE\parallel BC$.

又∵$\angle C=90°$，∴$\angle OEA=90°$，即 $AC\perp OE$.

又∵ OE 是⊙O 的半径，∴ AC 是⊙O 的切线.

（2）**解**：在△BCE 与△BED 中，

∵$\angle C=\angle BED=90°$，$\angle EBC=\angle DBE$，

∴△BCE∽△BED.

$\therefore\dfrac{BE}{BD}=\dfrac{BC}{BE}$.

易知 BD 是⊙O 的直径，∴ $BD=2.5\times2=5$.

又∵ $BE=4$，$\therefore\dfrac{4}{5}=\dfrac{BC}{4}$，∴ $BC=\dfrac{16}{5}$.

又∵ $OE\parallel BC$，$\therefore\dfrac{AO}{AB}=\dfrac{OE}{BC}$.

∵ $AO=AD+2.5$，$AB=AD+5$，

$\therefore\dfrac{AD+2.5}{AD+5}=\dfrac{2.5}{\frac{16}{5}}$，解得 $AD=\dfrac{45}{7}$.

考法 2 利用切线的判定和性质判定切线、求半径

例 12 [中考·凉山]如图 3-6-15，已知 AB 为⊙O 的直径，AD，BD 是⊙O 的弦，BC 是⊙O 的切线，切点为 B，$OC\parallel AD$，BA，CD 的延长线相交于点 E.

（1）求证：DC 是⊙O 的切线.

（2）若 $AE=1$，$ED=3$，求⊙O 的半径.

试题评析：本题主要考查的是切线的判定、勾股定理的应用，掌握切线的判定定理，利用勾股定理列出关

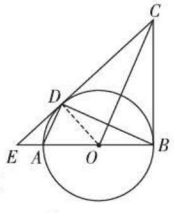


图 3-6-15

冲刺·满分

方法点拨

对于已知“公共点”证切线的关键是证“垂直”，而证垂直的关键是向已知的直角转化，转化的方法有很多种，例如：平行线的性质；三角形全等的性质；等角的转化等.

解法提醒

- 首先连接 OD，易证得△COD≌△COB(SAS)，然后由全等三角形的对应角相等，求得∠CDO=90°，即可证得 DC 是⊙O 的切线；
- 设⊙O 的半径为 R，则 OE=R+1，在 Rt△ODE 中，利用勾股定理列出方程，求解即可.

荣德基

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

于半径的方程是解题的关键.

（1）**证明**：如图 3−6−15，连接 DO.

$\because AD \parallel OC$，$\therefore \angle DAO = \angle COB$，$\angle ADO = \angle COD$.

又 $\because OA = OD$，$\therefore \angle DAO = \angle ADO$.

$\therefore \angle COD = \angle COB$.

又 $\because OD = OB$，$OC = OC$，

$\therefore \triangle COD \cong \triangle COB$（SAS）.

$\therefore \angle CDO = \angle CBO$.

$\because BC$ 是⊙ O 的切线，$\therefore \angle CBO = 90°$.

$\therefore \angle CDO = 90°$. $\therefore CD \perp OD$.

又 $\because$ 点 D 在⊙ O 上，$\therefore CD$ 是⊙ O 的切线.

（2）**解**：设⊙ O 的半径为 R，则 $OD = R$，$OE = R + 1$.

$\because CD$ 是⊙ O 的切线，$\therefore \angle EDO = 90°$. $\therefore ED^2 + OD^2 = OE^2$.

$\therefore 3^2 + R^2 = (R+1)^2$，解得 $R = 4$，

$\therefore$ ⊙ O 的半径为 4.

方法点拨

证明圆的切线问题的常用思路：证明圆的切线问题时，常利用切线的判定定理，将问题转化成证明垂直的问题.

考法 3 利用三角形的内切圆解与切线相关的问题

例 13 ［**中考·黄石**］如图 3−6−16，⊙ O 是△ ABC 的外接圆，BC 为⊙ O 的直径，点 E 为△ ABC 的内心，连接 AE 并延长交⊙ O 于点 D，连接 BD 并延长至点 F，使得 $BD = DF$，连接 CF，BE.

（1）求证：$DB = DE$.

（2）求证：直线 CF 为⊙ O 的切线.

试题评析：本题考查三角形的内心、切线的判定等知识，属于中考常考题型.

思路引导

- 欲证明 DB=DE，只要证明∠ DBE = ∠ DEB.
- 欲证明直线 CF 为⊙O 的切线，只要证明 BC ⊥ CF 即可.

证明：（1）$\because E$ 为△ ABC 的内心，

$\therefore \angle BAE = \angle CAE$，$\angle EBA = \angle EBC$.

$\because \angle BED = \angle BAE + \angle EBA$，

$\angle DBE = \angle EBC + \angle DBC$，

$\angle DBC = \angle EAC$，

$\therefore \angle DBE = \angle DEB$. $\therefore DB = DE$.

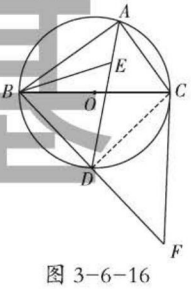


图 3−6−16

（2）如图 3−6−16，连接 CD.

$\because \angle DAB = \angle DAC$,

$\therefore \overset{\frown}{BD} = \overset{\frown}{CD}$. $\therefore BD = CD$.

$\because BD = DF$，$\therefore CD = DB = DF$.

$\therefore \angle BCF = 90°$.

$\therefore BC \perp CF$.

$\therefore CF$ 是⊙ O 的切线.

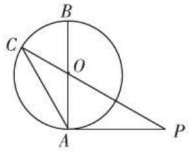
三角形的内切圆

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

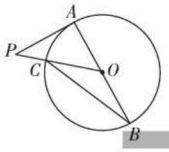
两年模拟兵法 ☞答案见230页

1. [中考·日照]如图，AB是⊙O的直径，PA切⊙O于点A，连接PO并延长交⊙O于点C，连接AC，$AB=10$，$\angle P=30°$，则AC的长度是（　　）

A. $5\sqrt{3}$　　B. $5\sqrt{2}$　　C. 5　　D. $\frac{5}{2}$



（第1题）



（第2题）

2. [中考·自贡]如图，AB是⊙O的直径，PA切⊙O于点A，PO交⊙O于点C，连接BC，若$\angle P=40°$，则$\angle B$等于（　　）

A. 20°　　B. 25°　　C. 30°　　D. 40°

3. [中考·武汉]已知一个三角形的三边长分别为5，7，8，则其内切圆的半径为（　　）

A. $\frac{\sqrt{3}}{2}$　　B. $\frac{5}{2}$　　C. $\sqrt{3}$　　D. $2\sqrt{3}$

4. [模拟·临沂]以点$P(1,2)$为圆心，r为半径画圆，与坐标轴恰好有三个交点，则r应满足（　　）

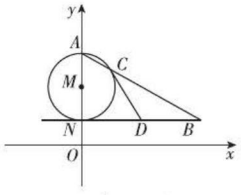
A. $r=2$或$\sqrt{5}$　　B. $r=2$

C. $r=\sqrt{5}$　　D. $2\leqslant r\leqslant\sqrt{5}$

5. [中考·白银]如图，AN是⊙M的直径，$NB\parallel x$轴，AB交⊙M于点C.

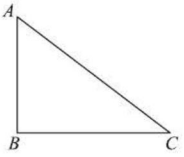
（1）若点$A(0,6)$，$N(0,2)$，$\angle ABN=30°$，求点B的坐标.

（2）若D为线段NB的中点，求证：直线CD是⊙M的切线.



（第5题）

6. 如图，王奶奶有一块三角形的布料，$\angle ABC=90°$，她要裁一个圆片，已知$AB=60$ cm，$BC=80$ cm，为了充分地利用这块布料，使剪下来的圆片的直径尽量大些，她应该怎样裁剪？这个圆的直径是多少？

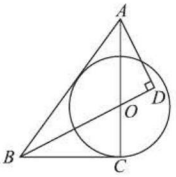


（第6题）

7. [中考·江西]如图，在△ABC中，O为AC上一点，以点O为圆心，OC为半径作圆，与BC相切于点C，过点A作$AD\perp BO$，交BO的延长线于点D，且$\angle AOD=\angle BAD$.

（1）求证：AB为⊙O的切线.

（2）若$BC=6$，$\tan\angle ABC=\frac{4}{3}$，求$AD$的长.



（第7题）

荣德基

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

*7 切线长定理

核心知识
- 切线长定理
- 圆外切四边形

知识链接

切线长 ← 切线长定理 → 圆外切四边形

解决问题的关键

点知识·拨考向 速提分

点知识 1 切线长定理

1. 切线长定义 过圆外一点画圆的切线，这点和切点之间的线段长叫做这点到圆的切线长.

切线是直线，不可度量；切线长是切线上切点与切点外一点之间线段的长，可以度量.

2. 切线长定理

过圆外一点画圆的两条切线，它们的切线长相等.

3. 示例

如图 3-7-1 是切线长定理的一个基本图形，可以直接得到结论：

（1）$PO \perp AB$；（2）$AO \perp AP$，$BO \perp BP$；

（3）$AP=BP$；（4）$\angle 1=\angle 2=\angle 3=\angle 4$；

（5）$AD=BD$；（6）$\overset{\frown}{AC}=\overset{\frown}{BC}$ 等.

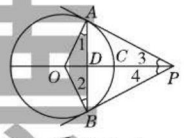


图 3-7-1

提分·必记

特别提醒

经过圆上一点作圆的切线，有且只有一条，过切点的半径垂直于这条切线；经过圆外一点作圆的切线，有两条，这点和两个切点所连的两条线段相等.

拔考向 利用切线长定理解边角问题

题型 1：切线长定理在求边角中的应用

例 1 如图 3-7-2，PA，PB，DE 分别与⊙O 相切于点 A，B，C，点 D 在 PA 上，点 E 在 PB 上.

（1）若 $PA=10$，求△PDE 的周长.

（2）若 $\angle P=50°$，求 $\angle DOE$ 的度数.

解题秘方：根据切线长的定义，判断出 PA，PB，DA，DC，EC，EB 的长都是切线长，再利用切线长定理，找到相等关系.

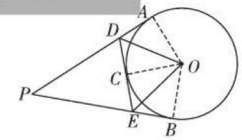


图 3-7-2

解：（1）∵ PA，PB，DE 分别切⊙O 于点 A，B，C，

∴ $PA=PB$，$DA=DC$，$EC=EB$.

∴ $PD+DE+PE=PD+DA+EB+PE=PA+PB=10+10=20$.

∴△PDE 的周长为 20.

（2）如图 3-7-2，连接 OA，OC，OB.

∵ PA，PB，DE 是⊙O 的切线，∴ $OA \perp PA$，$OB \perp PB$，$OC \perp DE$.

提分·秘诀

图解

如图 3-7-3，利用切线长定理，可将求△PDE 的周长转化为求 PA 与 PB 的和.

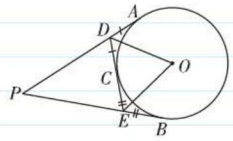


图 3-7-3



菜 德 基

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

$\therefore \angle DAO=\angle EBO=90^\circ$. $\therefore \angle P+\angle AOB=180^\circ$.

$\therefore \angle AOB=180^\circ-50^\circ=130^\circ$.

易知$\angle AOD=\angle DOC$，$\angle COE=\angle BOE$，

$\therefore \angle DOE=\frac{1}{2}\angle AOB=\frac{1}{2}\times 130^\circ=65^\circ$.

详解

由于点D到OA，OC的距离相等，点E到OB，OC的距离相等，根据到角两边距离相等的点在角的平分线上，可知点D，E分别在$\angle AOC$，$\angle BOC$的平分线上.

题型2：切线长定理在证明边角关系中的应用

例2 如图3-7-4，PA，PB是$\odot O$的切线，切点分别为A，B，BC为$\odot O$的直径，连接AB，AC，OP.

求证：（1）$\angle APB=2\angle ABC$.

（2）$AC\parallel OP$.

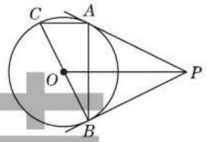


图3-7-4

特别提醒

切线长定理揭示了两个方面的内容，一是切线长相等，揭示线段之间的数量关系；二是圆外一点与圆心的连线平分两条切线的夹角.这两个方面的内容为证明线段之间的关系或者角之间的关系提供了大量的条件.

解题秘方：活用切线长定理中角的关系结合相关性质求证.

证明：（1）$\because PA$，PB分别与$\odot O$相切于点A，B，

$\therefore$由切线长定理知$\angle BPO=\angle APO=\frac{1}{2}\angle APB$，$PA=PB$.

$\therefore PO\perp AB$. $\therefore \angle ABP+\angle BPO=90^\circ$.

又$\because PB$是$\odot O$的切线，$\therefore OB\perp PB$. $\therefore \angle ABP+\angle ABC=90^\circ$.

$\therefore \angle ABC=\angle BPO=\frac{1}{2}\angle APB$，即$\angle APB=2\angle ABC$.

（2）$\because BC$是$\odot O$的直径，$\therefore \angle BAC=90^\circ$，即$AC\perp AB$.

由（1）知$OP\perp AB$，$\therefore AC\parallel OP$.

知识▸2 圆外切四边形（拓展）

1. 圆外切四边形 如果四边形的四条边都与圆相切，我们把这个四边形叫做圆外切四边形，把这个圆叫做四边形的内切圆.

2. 圆外切四边形的性质 圆外切四边形的两组对边的和相等.

提分·必记

特别提醒

任意三角形都有内切圆，但并不是所有的四边形都有内切圆，如邻边不相等的矩形就没有内切圆.

考向▸利用圆外切四边形的性质求线段长

例3 圆外切四边形顺次连接的三边的比是3∶4∶5，四边形的周长是48，则四边形各边的长是多少？

解题秘方：紧扣圆外切四边形的性质，列出方程求出线段的长.

解：设圆外切四边形三边中的最短边的长为$3x$（$x>0$），则其他两边长分别为$4x$，$5x$.

因为四边形的周长为48，而圆外切四边形的对边之和相等，

所以一组对边的和是$48\div 2=24$，即$3x+5x=24$，得$x=3$.

所以三边长分别是$3\times 3=9$，$3\times 4=12$，$3\times 5=15$，

三边的总长是$9+12+15=36$，

所以第四条边的长是$48-36=12$.

提分·秘诀

另解

若设四边形顺次连接的三边长为$3x$，$4x$，$5x$，则第四条边长为$4x$，根据周长为48，可列方程$3x+4x+5x+4x=48$.

荣德基

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

点方法·拨技巧 提高分

拔尖角度 1 利用方程思想解决三角形内切圆问题

例 4 如图 3-7-5，已知∠ $MON=90°$，线段 $AB=10$，若点 A 在 ON 上滑动，点 B 随着线段 AB 在射线 OM 上滑动（A，B 与 O 不重合），Rt △ AOB 的内切圆⊙ K 分别与 OA，OB，AB 相切于点 E，F，P.

（1）在上述变化过程中，△ AOB 的外接圆半径是否会发生变化？并简要说明理由.

（2）当 $AE=4$ 时，求⊙ K 的半径 r.

（3）设 Rt △ AOB 的面积为 S，AE 为 x，试求：S 与 x 之间的函数表达式，并求出 S 最大时直角边 OA 的长.

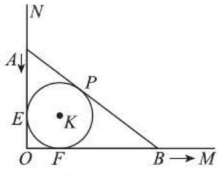


图 3-7-5

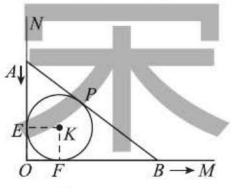


图 3-7-6

解题秘方：从图中找出切线长的模型，紧扣切线长定理解决问题.

解：（1）不会发生变化.

理由：∵∠ $MON=90°$，∴ AB 是△ AOB 的外接圆的直径.

∵线段 AB 的长度不变，∴△ AOB 的外接圆半径不变.

（2）如图 3-7-6，连接 EK，KF，则∠ $KEO=\angle OFK=\angle MON=90°$，

∴四边形 $EOFK$ 是矩形.

又 $EK=FK$，∴四边形 $EOFK$ 是正方形，

∴ $OE=OF=r$.

∵ $AE=AP=4$，∴ $PB=BF=6$，

在 Rt △ AOB 中，由勾股定理，得 $OA^2+OB^2=AB^2$，

∴ $(4+r)^2+(6+r)^2=10^2$，∴ $r=2$（负值已舍去）.

（3）设 $AO=b$，$OB=a$，则 $OE=b-x$，易证 $OE=EK=\dfrac{a+b-10}{2}$，

∴ $2(b-x)+10=a+b$，∴ $10-2x=a-b$，

∴ $100-40x+4x^2=a^2+b^2-2ab$.

∵ $S=\dfrac{1}{2}ab$，∴ $ab=2S$. 又 $a^2+b^2=10^2$，

∴ $100-40x+4x^2=100-4S$，∴ $S=-x^2+10x$.

∵ $S=-x^2+10x=-(x-5)^2+25$，

∴当 $x=5$，即 $AE=5$ 时，S 取得最大值，此时 $OA=OB=\dfrac{10}{\sqrt{2}}=5\sqrt{2}$.

挑战·高分

图解

根据切线长定理，可得相关线段的长度，如图 3-7-7.

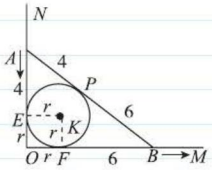


图 3-7-7

另解

由题意知 $OA=x+r$，$OB=OF+FB=r+(10-x)=10-x+r$.

又 $OA^2+OB^2=AB^2$，

∴ $(x+r)^2+(10-x+r)^2=10^2$，

∴ $r^2+10r=-x^2+10x$.

∵ $S=\dfrac{1}{2}\cdot r(OA+OB+AB)=\dfrac{1}{2}r(r+x+10-x+r+10)=\dfrac{1}{2}r(20+2r)=r^2+10r$，

∴ $S=r^2+10r=-x^2+10x$.

荣德基

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

拔尖角度▸ 2 利用数形结合思想解切线长定理与函数、方程综合的问题

挑战·高分

解法提醒

从切线长定理中可得出线段相等、角相等，定理中有切点，所以该定理和全等三角形、方程、勾股定理、直角三角形、等腰三角形、切线的性质定理经常综合应用.

例 5 如图 3-7-8，⊙ O 的直径 $AB=12$，AM 和 BN 是⊙ O 的两条切线，DC 与⊙ O 相切于点 E，交 AM 于点 D，交 BN 于点 C，设 $AD=x$，$BC=y$（$x<y$）.

（1）求 y 与 x 的函数关系式（不必写出 x 的取值范围）.

（2）若 x，y 是关于 t 的方程 $2t^2-30t+m=0$ 的两根，求 x，y 的值.

（3）在（2）的条件下，求△ COD 的面积.

解题秘方：（1）利用切线长定理结合方程思想求函数关系式；（2）利用（1）的结论结合根与系数的关系求解；（3）利用面积公式求解.

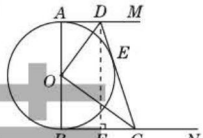


图 3-7-8

解：（1）如图 3-7-8，过点 D 作 $DF\perp BC$ 于点 F，易知四边形 $ABFD$ 为矩形. ∴ $AB=DF=12$，$AD=BF=x$. ∴ $CF=BC-BF=y-x$.

∵ AM，BN，CD 分别切⊙ O 于点 A，B，E，

∴ $DE=DA$，$CE=CB$.

∴ $CD=DE+CE=AD+BC=x+y$.

∵ $CD^2=CF^2+DF^2$，∴ $(x+y)^2=(y-x)^2+12^2$，

整理，得 $y=\dfrac{36}{x}$. ∴ y 与 x 的函数关系式是 $y=\dfrac{36}{x}$.

（2）∵ x，y 是关于 t 的方程 $2t^2-30t+m=0$ 的两根，

∴ $x+y=15$.

与 $y=\dfrac{36}{x}$ 联立得方程组 $\begin{cases}x+y=15,\\ y=\dfrac{36}{x}.\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x_1=3,\\ y_1=12,\end{cases}$ $\begin{cases}x_2=12,\\ y_2=3.\end{cases}$

∵ $x<y$，∴ $x=3$，$y=12$.

（3）连接 OE. ∵ CD 是⊙ O 的切线，∴ $OE\perp DC$.

又由（1）（2）知，$CD=x+y=15$，$OE=\dfrac{1}{2}AB=6$，

∴ $S_{\triangle COD}=\dfrac{1}{2}\times 15\times 6=45$.

点中考·拨模拟 得满分

中考探秘 切线长定理属选学内容，中考中很少单独考查，一般与切线的性质和判定综合考查，难度中等，多以选择题形式出现.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

三年中考兵法

考法 利用切线长定理进行计算与证明

例6 [中考·遵义]如图3-7-9，PA，PB是⊙O的切线，A，B为切点，$\angle APB=60°$，连接PO并延长与⊙O交于C点，连接AC，BC.

（1）求证：四边形$ACBP$是菱形.

（2）若⊙O的半径为1，求菱形$ACBP$的面积.

试题评析：本题考查了切线长定理、等边三角形判定、菱形判定、特殊角三角函数，综合性比较强. 利用切线长定理得到边角的数量关系是解题的关键.

（1）**证明**：如图3-7-9，连接OA，AB.

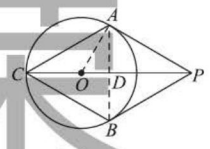


图3-7-9

∵ PA，PB是切线，

∴ $OA\perp PA$，PO平分$\angle APB$，$AP=BP$.

又∵ $\angle APB=60°$，

∴ $\angle APO=\frac{1}{2}\angle APB=30°$，$\triangle ABP$为等边三角形.

∴ $PA=PB=AB$，$\angle PAB=60°$，$\angle AOP=90°-\angle APO=60°$.

∴ $\angle ACP=\frac{1}{2}\angle AOP=30°$.

同理可证，$\angle BCP=30°$.

∴ $\angle ACB=60°$.

∵ $\angle ACP=\angle APC=30°$，

∴ $\angle CAP=180°-\angle ACP-\angle APC=120°$.

∴ $\angle CAB=\angle CAP-\angle PAB=60°$.

∴ $\triangle ABC$是等边三角形.

∴ $AC=BC=AB$.

又∵ $PA=PB=AB$，

∴ $AC=BC=PA=PB$，

∴四边形$ACBP$是菱形；

（2）**解**：设AB与CP交于点D，如图3-7-9.

在Rt$\triangle AOD$中，$AD=OA\cdot\sin60°=\frac{\sqrt{3}}{2}$，

∴ $AB=2AD=\sqrt{3}$.

在Rt$\triangle ACD$中，$CD=AD\cdot\tan60°=\frac{3}{2}$，

∴ $S_{菱形ACBP}=2S_{\triangle ABC}=AB\cdot CD=\frac{3}{2}\sqrt{3}$.

冲刺·满分

思路引导

(1) 先由切线长定理结合∠APB=60°，判定△ABP是等边三角形；再求出∠ACP的度数，进而得到∠ACB=60°，判定△ABC也是等边三角形，从而得到四边形ACBP四条边都相等，即可判定它是菱形.

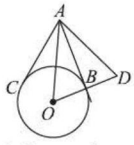
(2) 先解Rt△AOD和Rt△ACD，求出AD和CD的长，进而计算等边三角形ABC的面积，从而菱形面积可得.

荣德基

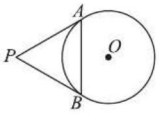
关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

1. 如图，AB，AC为⊙O的切线，B，C是切点，延长OB到点D，使$BD=OB$，连接AD. 如果∠$DAC=78°$，那么∠ADO等于（　　）

A.70°　　B.64°　　C.62°　　D.51°



（第1题）



（第2题）

2. 如图，从⊙O外一点P引⊙O的两条切线PA，PB，切点分别为A，B. 如果∠$APB=60°$，$PA=8$，那么弦AB的长是（　　）

A.4　　B.8　　C.$4\sqrt{3}$　　D.$8\sqrt{3}$

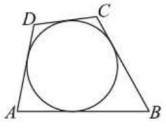
3. 从圆外一点向半径为9的圆作切线，已知切线长为18，则这点到圆的最短距离为（　　）

A.$9\sqrt{3}$　　B.$9\sqrt{3}-9$

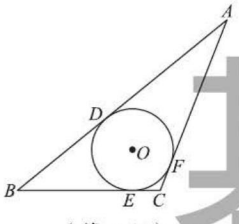
C.$9\sqrt{5}-9$　　D.9

4. 已知圆的外切四边形$ABCD$如图，若$AB=16$，$CD=10$，则四边形$ABCD$的周长为（　　）

A.50　　B.52　　C.54　　D.56



（第4题）

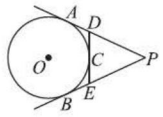


（第5题）

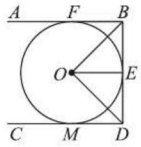
5. 如图，若△ABC的三边长分别为$AB=9$，$BC=5$，$AC=6$，△ABC的内切圆⊙O分别与AB，BC，AC相切于点D，E，F，则AF的长为（　　）

A.5　　B.10　　C.7.5　　D.4

6. 如图，点P是⊙O外一点，PA，PB分别与⊙O相切于点A，B，点C是劣弧AB上任意一点，过点C作⊙O的切线分别交PA，PB于点D，E. 若△PDE的周长为12，则PA的长为_____.



（第6题）



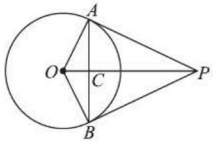
（第7题）

7. 如图，已知AB，BD，CD分别与⊙O相切于点F，E，M，$AB\parallel CD$，则∠$BOD=$_____.

8. [中考·徐州]如图，PA，PB是⊙O的两条切线，切点分别为A，B，OP交AB于点C，$OP=13$，$\sin\angle APC=\frac{5}{13}$.

（1）求⊙O的半径.

（2）求弦AB的长.

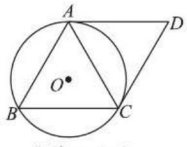


（第8题）

9. 如图，⊙O是△ABC的外接圆，分别过A，C两点作⊙O的两条切线AD，CD，它们的交点为D，且$AD\parallel BC$，$CD\parallel AB$.

（1）试说明四边形$ABCD$是菱形.

（2）若⊙O的半径是$2\sqrt{3}$，求四边形$ABCD$的面积.



（第9题）

未来基德

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

8 圆内接正多边形

核心知识

- 正多边形和圆
- 中心，半径，中心角，边心距
- 正多边形的画法

知识链接



点知识·拨考向 速提分

点知识 1 圆内接正多边形

1. 正多边形 各边相等、各角也相等的多边形是正多边形.

2. 圆的内接正多边形 顶点都在同一个圆上的正多边形叫做圆内接正多边形，这个圆叫做该正多边形的外接圆.

3. 正多边形有关概念

（1）**正多边形的中心**：一个正多边形的外接圆的圆心叫做这个正多边形的中心.

（2）**正多边形的半径**：正多边形外接圆的半径叫做正多边形的半径.

（3）**正多边形的中心角**：正多边形每一边所对的圆心角叫做正多边形的中心角.

（4）**正多边形的边心距**：正多边形的中心到正多边形的一边的距离叫做正多边形的边心距.

示图如图 3-8-1：



图 3-8-1

4. 正多边形的对称性

所有的正多边形都是轴对称图形，一个正 n 边形共有 n 条对称轴，每条对称轴都通过正 n 边形的中心. n 为偶数时，它还是中心对称图形，它的中心就是对称中心.

特别提醒：边心距是正多边形的中心到正多边形一边的距离，也可以看成正多边形的外接圆中，圆心到正多边形的边（即外接圆的弦）的距离，即边心距也是弦心距，但弦心距不一定是边心距.

提分·必记

特别解读

"各边相等、各角也相等"是正多边形的两个基本特征，当边数 $n>3$ 时，二者必须同时具备，缺一不可，否则多边形就不是正多边形.

拓宽视野

1. 圆的外切正 n 边形：把圆分成 n（$n \geqslant 3$）等份，经过各分点作圆的切线，以相邻切线的交点为顶点的多边形是这个圆的外切正 n 边形. 一定要注意正多边形的半径是指外接圆的半径，而不是内切圆的半径.
2. 任意三角形都有外接圆和内切圆，但是只有正三角形的外接圆和内切圆是同心圆.
3. 任意多边形不一定有外接圆和内切圆，但当多边形是正多边形时，一定有一个外接圆和一个内切圆，并且这两个圆是同心圆.

基德某

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

核心考向▶利用正多边形的定义证明圆内接正多边形

例1 如图3-8-2，三角形AOB是正三角形，以点O为圆心，OA为半径作⊙O，直径$FC \parallel AB$，AO，BO的延长线分别交⊙O于点D，E，求证：六边形$ABCDEF$为圆内接正六边形.

解题秘方：紧扣正多边形的定义，结合同圆中弧、圆心角的关系证明.

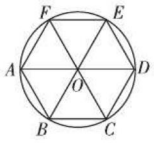


图3-8-2

证明：∵三角形AOB是正三角形，

$\therefore \angle AOB=\angle OAB=\angle OBA=60^\circ$，$OB=OA$.

∴点B在⊙O上.

$\because FC \parallel AB$，$\therefore \angle FOA=\angle OAB=60^\circ$，$\angle COB=\angle OBA=60^\circ$.

$\therefore \angle AOB=\angle BOC=\angle COD=\angle DOE=\angle EOF=\angle FOA=60^\circ$.

$\therefore \overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{BC}=\overset{\frown}{CD}=\overset{\frown}{DE}=\overset{\frown}{EF}=\overset{\frown}{FA}$.

∴六边形$ABCDEF$为圆内接正六边形.

提分·秘诀

解法提醒

证明一个多边形是圆内接正多边形的方法：

1. 利用正多边形的定义，证明圆内接多边形的每个内角相等，每条边相等；
2. 证明圆内接多边形各边所对的弧相等，即证明这个多边形的各顶点等分这个圆.

知识点▶2 正多边形的有关计算

1. 正n边形的每个内角都等于$\dfrac{(n-2)\cdot 180^\circ}{n}$.

2. 正n边形的每个中心角都等于$\dfrac{360^\circ}{n}$.

3. 正n边形的每个外角都等于$\dfrac{360^\circ}{n}$.

4. 设正n边形的半径为R，边长为a，边心距为r，则：

（1）半径、边长、边心距的关系为$R^2=r^2+\left(\dfrac{a}{2}\right)^2$；

（2）周长$l=na$；

（3）面积$S=\dfrac{1}{2}ar\cdot n=\dfrac{1}{2}lr$.

提分·必记

特别提醒

常见的正多边形的边长与半径的关系：

1. 正六边形的边长等于其外接圆半径；
2. 正三角形的边长等于其外接圆半径的$\sqrt{3}$倍；
3. 正方形的边长等于其外接圆半径的$\sqrt{2}$倍.

核心考向▶利用正多边形的计算公式进行计算

例2 已知正六边形$ABCDEF$的半径为6，求这个正六边形的边长a_6、周长l_6和面积S_6.

解题秘方：巧用正六边形的边长、半径等之间的关系进行计算.

解：如图3-8-3，设正六边形$ABCDEF$的中心为点O，过点O作$OG\perp AB$于点G，连接OA，OB.

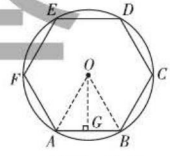


图3-8-3

$\because \angle AOB=\dfrac{360^\circ}{6}=60^\circ$，$OA=OB$，$\therefore \angle AOG=30^\circ$.

$\therefore AG=\dfrac{1}{2}AO=3$. $\therefore a_6=AB=2AG=AO=6$. $\therefore l_6=6a_6=6\times 6=36$.

在Rt△AOG中，$OG=\sqrt{AO^2-AG^2}=\sqrt{6^2-3^2}=3\sqrt{3}$，

$\therefore S_6=\dfrac{1}{2}\times AB\times OG\times 6=\dfrac{1}{2}\times 6\times 3\sqrt{3}\times 6=54\sqrt{3}$.

提分·秘诀

技巧点拨

构造特殊三角形解正多边形的方法：在解决有关正六边形和正方形的问题时，我们往往作相邻两条半径，使其与边分别构成等边三角形和等腰直角三角形，然后与前面学过的勾股定理、垂径定理及切线的性质等知识联系起来求解.

荣德基

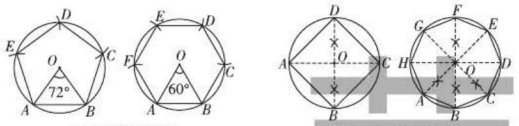
关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

点知识▶ 3 正多边形的画法

正 n 边形的画法：将圆 n 等分，然后顺次连接各等分点，即得到所要作的正 n 边形.

（1）用量角器等分圆

先用量角器画一个度数为$\frac{360°}{n}$的圆心角，则此圆心角所对的弧就是圆的$\frac{1}{n}$，然后在圆周上依次截取这条弧的等弧，就得到圆的 n 等分点，依次连接各等分点，就得到圆的内接正 n 边形，如图 3−8−4.



用量角器等分圆

用尺规等分圆

图 3−8−4

（2）用尺规等分圆

对于一些特殊的正 n 边形，如正方形、正八边形，可以用圆规和直尺作图. 如图 3−8−4.

在⊙ O 中，用直尺和圆规作两条互相垂直的直径，就可把圆周四等分，从而作出正方形. 若再逐次平分各边所对的弧，就可以作边数逐次倍增的正多边形，如正八边形、正十六边形等.

拔考向▶ 利用正多边形与圆的关系作正多边形

例 3 作一个正三角形，使其半径为 0.9 cm.

解题秘方：用量角器画，先求出其中心角；用尺规画，则先考虑等分圆周.

解：作法一 （1）作半径为 0.9 cm 的⊙ O；

（2）用量角器画∠ AOB = ∠ BOC=120°，其中 A，B，C 均为圆上的点；

（3）连接 AB，BC，CA，则△ ABC 为所求作的正三角形，如图 3−8−5.

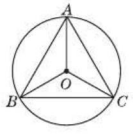


图 3−8−5

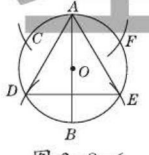


图 3−8−6

作法二（1）作半径为 0.9 cm 的⊙ O；

（2）作⊙ O 的任一直径 AB；

（3）分别以 A，B 为圆心，以 0.9 cm 为半径作弧，交⊙ O 于 C，F 和 D，E；

（4）连接 AD，DE，EA，则△ ADE 为所求作的正三角形，如图 3−8−6.

提分·必记

特别解读

画正多边形的原理是，在同圆中相等的圆心角所对的弧相等.

活学巧记

份相等分割圆，
n 值大于或等于 3，
依次连接各分点，
内接正 n 边形在眼前.

提分·秘诀

特别提醒

1. 画圆的内接正 n 边形，实质是找圆的 n 等分点.
2. 用量角器等分圆是一种简单常用的方法，但边数很大时，容易产生较大误差.
3. 尺规作图是一种比较准确的等分圆的方法，但只限于作一些特殊的正多边形.

宋德基

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

点方法·拨技巧 提高分

拔尖角度 1 利用辅助圆法（隐形圆法）证正多边形中有关线段的关系

例 4 如图 3-8-7，正五边形的对角线 AC 和 BE 相交于点 M，求证：

（1）$AC \parallel ED$.（2）$ME=AE$.

解题秘方：利用正五边形的隐形圆，结合圆中弧、角的关系证明.

证明：（1）正多边形必有外接圆，作出正五边形的外接圆⊙ O，如图 3-8-7，则 $\overset{\frown}{AB}$，$\overset{\frown}{BC}$，$\overset{\frown}{CD}$，$\overset{\frown}{DE}$，$\overset{\frown}{AE}$ 所对的圆心角的度数均为 $\frac{1}{5}\times 360^\circ = 72^\circ$.

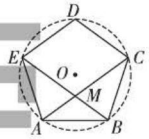


图 3-8-7

$\because \angle EAC$ 的度数等于 $\overset{\frown}{EC}$ 所对的圆心角的度数的一半，

$\therefore \angle EAC=\frac{1}{2}\times 72^\circ \times 2=72^\circ$.

同理 $\angle AED=\frac{1}{2}\times 72^\circ \times 3=108^\circ$.

$\therefore \angle EAC+\angle AED=180^\circ$.

$\therefore ED \parallel AC$.

（2）由（1）知，$\overset{\frown}{AB}$ 所对的圆心角的度数为 72°，

$\therefore \angle AEB=\frac{1}{2}\times 72^\circ = 36^\circ$.

又由（1）知 $\angle EAC=72^\circ$，

$\therefore \angle EMA=180^\circ - \angle AEB - \angle EAC=72^\circ$.

$\therefore \angle EAM=\angle EMA$.

$\therefore EA=EM$.

挑战·高分

解法提醒

正多边形一定有外接圆，本题不容易直接证明，所以可以考虑作正五边形 ABCDE 的外接圆⊙O，正五边形的五个顶点将⊙O 分成了五等份，再利用圆的相关性质进行证明.

拔尖角度 2 利用归纳法探究正多边形中角的变化规律

例 5 如图 3-8-8 ①②③…，M，N 分别是⊙ O 的内接正三角形 ABC、正方形 $ABCD$、正五边形 $ABCDE$……的边 AB，BC 上的点，且 $BM=CN$，连接 OM，ON.

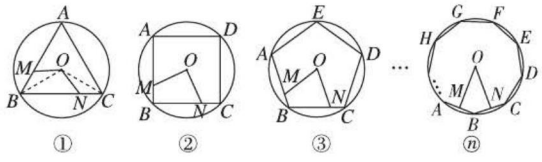


图 3-8-8

（1）求图 3-8-8 ①中 $\angle MON$ 的度数.

（2）图 3-8-8 ②中 $\angle MON$ 的度数是_____，图 3-8-8 ③

挑战·高分

解法提醒

解此题时，关键是对未知角先进行分析，再通过三角形全等进行角度的等量转化. 将求 $\angle MON$ 的度数转化为求 $\angle BOC$ 的度数.

荣德基

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

中∠MON的度数是_____.

（3）试探究∠MON的度数与正n边形边数n（$n \geqslant 3$）的关系（直接写出答案）.

解题秘方：利用正多边形的半径构造全等三角形，再进行角度的转换并计算.

解：（1）如图3-8-8①，连接OB，OC.

易知∠BOC=$\frac{360°}{3}$=120°，∠OBM=∠OCN=30°.

又∵BM=CN，OB=OC，

∴△OBM≌△OCN.

∴∠BOM=∠CON.

∴∠BON+∠BOM=∠BON+∠CON.

∴∠MON=∠BOC=120°.

（2）90°；72°

（3）∠MON=$\frac{360°}{n}$（$n \geqslant 3$）.

详解

连接OB，OC，

易知∠OBM=∠OCN=$\frac{(n-2)\times 90°}{n}$，∠BOC=$\frac{360°}{n}$.

又∵BM=CN，OB=OC，

∴△BOM≌△CON.

∴∠BOM=∠CON.

∴∠MON=∠BOC=$\frac{360°}{n}$.

点中考·拨模拟 得满分

中考探秘

正多边形的概念及有关计算在中考中频繁出现，题型以选择题、填空题为主，有时也出现在应用性解答题中.画正多边形的题目出现的次数也较多，题型也逐渐新颖、丰富起来.

三年中考兵法

冲刺·满分

考法1 利用中心角的计算比较大小

例6 [中考·株洲]下列圆的内接正多边形中，一条边所对的圆心角最大的图形是（　　）

A. 正三角形　　B. 正方形

C. 正五边形　　D. 正六边形

试题评析：本题考查圆的内接正多边形的定义，正多边形中心角的计算.

解：∵正三角形一条边所对的圆心角是360°÷3=120°，

正方形一条边所对的圆心角是360°÷4=90°，

正五边形一条边所对的圆心角是360°÷5=72°，

正六边形一条边所对的圆心角是360°÷6=60°，

∴一条边所对的圆心角最大的图形是正三角形.

答案：A

特别提醒

正多边形的有关计算是中考常考题型，熟练地掌握各种计算公式是解题的关键.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

考法 2 利用同圆的内接正多边形的计算解有关三角形的计算

例 7 [中考·达州]以半径为 2 的圆的内接正三角形、正方形、正六边形的边心距为三边作三角形，则该三角形的面积是（　　）

A. $\frac{\sqrt{2}}{2}$　　B. $\frac{\sqrt{3}}{2}$　　C. $\sqrt{2}$　　D. $\sqrt{3}$

试题评析：本题主要考查正多边形与圆，解答此题要明确正多边形的半径、边心距等概念，根据解直角三角形的知识解答是解题的关键.

解法提醒

由于内接正三角形、正方形、正六边形是特殊内角的多边形，所以可构造直角三角形分别求出边心距的长. 由勾股定理的逆定理可得该三角形是直角三角形，进而可得其面积.

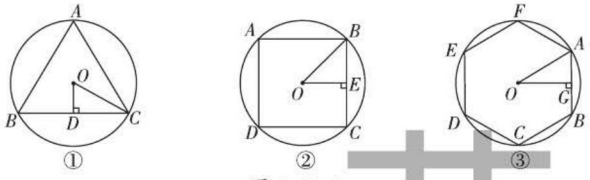


图 3-8-9

解：如图 3-8-9①，在 Rt△OCD 中，∠OCD=30°，OC=2，∴ OD=1. 如图 3-8-9②，在 Rt△OBE 中，∠BOE=∠OBE=45°，

∴ OE=BE.

∵ $OE^2+BE^2=OB^2=4$，∴ $OE=\sqrt{2}$.

如图 3-8-9③，在 Rt△OGA 中，∠AOG=30°，OA=2，

∴ $AG=\frac{1}{2}OA=1$，∴ $OG=\sqrt{OA^2-AG^2}=\sqrt{2^2-1^2}=\sqrt{3}$.

则该三角形的三边长分别为 1，$\sqrt{2}$，$\sqrt{3}$.

∵ $1^2+(\sqrt{2})^2=(\sqrt{3})^2$，∴该三角形是直角三角形.

∴该三角形的面积是$\frac{1}{2}\times1\times\sqrt{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

答案：A

两年模拟兵法 ☞答案见 231 页

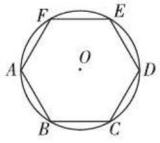
1. 正多边形的中心角与该正多边形一个内角的关系是（　　）

A. 互余　　B. 互补

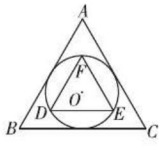
C. 互余或互补　　D. 不能确定

2. [中考·沈阳]如图，正六边形 $ABCDEF$ 内接于⊙O，正六边形的周长是 12，则⊙O 的半径是（　　）

A. $\sqrt{3}$　　B. 2　　C. $2\sqrt{2}$　　D. $2\sqrt{3}$



（第 2 题）



（第 4 题）

3. [中考·日照]下列说法正确的是（　　）

A. 圆内接正六边形的边长与该圆的半径相等

B. 在平面直角坐标系中，不同的坐标可以表示同一点

C. 一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$（$a\neq0$）一定有实数根

D. 将△ABC 绕 A 点按顺时针方向旋转 60°得△ADE，则△ABC 与△ADE 不全等

4. [模拟·河源和平]如图，△ABC 和△DEF 分别是⊙O 的外切正三角形和内接正三角形，则它们的面积的比值为（　　）

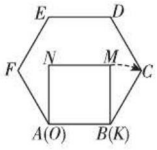
A. 4　　B. 2　　C. $\sqrt{3}$　　D. $\sqrt{2}$

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

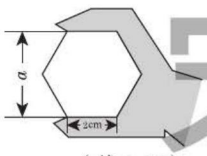
5. [中考·河北]已知正方形 $MNOK$ 和正六边形 $ABCDEF$ 的边长均为 1，把正方形放在正六边形中，使 OK 边与 AB 边重合，如图，按下列步骤操作：将正方形在正六边形中绕点 B 顺时针旋转，使 KM 边与 BC 边重合，完成第一次旋转；再绕点 C 顺时针旋转，使 MN 边与 CD 边重合，完成第二次旋转……在这样连续 6 次旋转的过程中，点 B，M 间的距离可能是（　　）

A. 1.4　　B. 1.1

C. 0.8　　D. 0.5



（第 5 题）



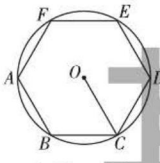
（第 6 题）

6. 如图，正六边形螺帽的边长是 2 cm，这个扳手的开口大小 a 应是（　　）

A. $2\sqrt{3}$ cm　　B. $\sqrt{3}$ cm

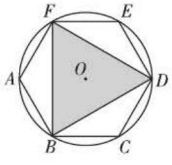
C. $\frac{2\sqrt{2}}{3}$ cm　　D. 1 cm

7. [模拟·济南槐荫]如图，在圆内接正六边形 $ABCDEF$ 中，半径 $OC=4$，求正六边形的边长.



（第 7 题）

8. 如图，已知正六边形 $ABCDEF$ 内接于⊙ O，图中阴影部分的面积为 $12\sqrt{3}$，求⊙ O 的半径.

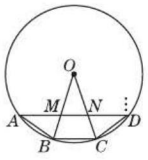


（第 8 题）

9. 如图，已知⊙ O 的内接正十边形 $ABCD\cdots$，AD 与 OB，OC 分别交于 M，N.

求证：（1）$MN \parallel BC$.

（2）$MN+BC=OB$.



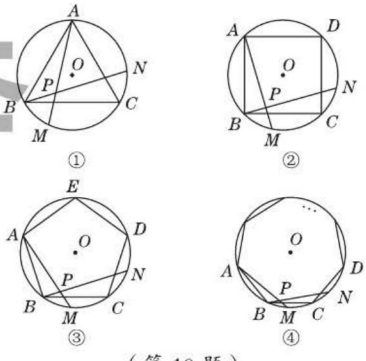
（第 9 题）

10. 如图①②③④分别是⊙ O 的内接正三角形、正四边形、正五边形、正 n 边形，点 M，N 分别从点 B，C 开始以相同的速度在⊙ O 上逆时针运动，AM，BN 相交于点 P.

（1）图①中，$\angle APN$ 的度数为_____.

（2）图②中，$\angle APN$ 的度数是_____，图③中，$\angle APN$ 的度数是_____.

（3）试探索 $\angle APN$ 的度数与正多边形边数 n 的关系（直接写答案）.



（第 10 题）

荣德基

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

9 弧长及扇形的面积

核心知识
- 弧长
- 扇形的面积

知识链接



点知识·拨考向 速提分

点知识 1 弧长公式

1. 弧长公式 在半径为 R 的圆中，$n°$ 的圆心角所对的弧长 l 的计算公式为

$$l=\frac{n\pi R}{180}.$$

2. 弧、弧长、弧的度数间的关系

（1）弧相等表示弧长、弧的度数都相等；

（2）度数相等的弧，弧长不一定相等；

（3）弧长相等的弧，弧的度数不一定相等，只有在同圆或等圆中，弧长相等的弧才是等弧.

提分·必记

特别提醒

1. 公式中，n 表示 $1°$ 的 n 倍，180 表示 $1°$ 的 180 倍，n，180 不带单位.
2. 题目若没有写明精确度，可以用含“π”的式子表示弧长.
3. 在弧长公式中，已知 l，n，R 中任意两个量，都可求出第三个量.

拔考向 利用弧长公式求弧长

例 1 [中考·沈阳] 如图 3-9-1，正方形 $ABCD$ 内接于 $\odot O$，$AB=2\sqrt{2}$，则 $\overset{\frown}{AB}$ 的长是（　　）

A. π　　B. $\frac{3}{2}\pi$

C. 2π　　D. $\frac{1}{2}\pi$

解题秘方：紧扣“弧长公式”进行解答.

解：如图 3-9-1，连接 OA，OB，

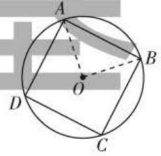


图 3-9-1

∵正方形 $ABCD$ 内接于 $\odot O$，

∴ $AB=BC=DC=AD$.

$\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{BC}=\overset{\frown}{DC}=\overset{\frown}{AD}$，

∴ $\angle AOB=\frac{1}{4}\times 360°=90°$.

在 Rt $\triangle AOB$ 中，由勾股定理得 $2AO^2=(2\sqrt{2})^2$，

解得 $AO=2$.

∴ $\overset{\frown}{AB}$ 的长为 $\frac{90\pi\times 2}{180}=\pi$.

答案：A

提分·秘诀

解法提醒

在弧长公式中有三个量：弧长、半径、圆心角的度数. 利用弧长公式可以解决已知这三个量中的两个量求第三个量的问题. 解题时，可以利用方程求解.

荣德基

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

点知识▶2 扇形

1. 定义　由组成圆心角的两条半径和圆心角所对的弧围成的图形叫做扇形.

2. 面积公式

（1）已知半径 R 和 $n°$ 的圆心角，则 $S_{扇形}=\dfrac{n\pi R^2}{360}$.

（2）已知弧长 l 和半径 R，则 $S_{扇形}=\dfrac{1}{2}lR$（推导过程：$S_{扇形}=\dfrac{n\pi R^2}{360}=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{n\pi R}{180}\cdot R=\dfrac{1}{2}lR$）.

3. 弓形的面积

（1）当弓形的弧小于半圆时，它的面积等于扇形面积与三角形面积的差，即 $S_{弓形}=S_{扇形}-S_{三角形}$；

（2）当弓形的弧大于半圆时，它的面积等于扇形面积与三角形面积的和，即 $S_{弓形}=S_{扇形}+S_{三角形}$；

（3）当弓形的弧是半圆时，它的面积是圆面积的一半，即 $S_{弓形}=\dfrac{1}{2}S_{圆}$.

提分·必记

特别提醒

- 扇形面积公式中的 n 与弧长公式中的 n 一样应该理解为 $1°$ 的 n 倍，不带单位.
- 根据扇形面积公式和弧长公式，已知 $S_{扇形}$，l，n，R 四个量中的任意两个，都可以求出另外两个.

拔考向▶利用扇形面积求相关面积

题型1：扇形面积在求弓形面积中的应用

例2　[中考·甘孜]如图 3-9-2，已知扇形 AOB 的半径为 2，圆心角为 90°，连接 AB，则图中阴影部分的面积是（　　）

A. $\pi-2$　　B. $\pi-4$　　C. $4\pi-2$　　D. $4\pi-4$

解题秘方：用弓形面积公式计算.

解：$S_{阴影}=S_{扇形AOB}-S_{\triangle AOB}=\dfrac{90\pi\times2^2}{360}-\dfrac{1}{2}\times2\times2=\pi-2$.

答案：A

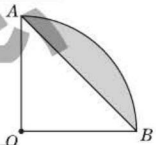


图 3-9-2

题型2：扇形面积在求不规则图形的面积中的应用

例3　如图 3-9-3，AC 是汽车挡风玻璃前的雨刷器，如果 $AO=45$ cm，$CO=5$ cm，当 AC 绕点 O 顺时针旋转 90° 时，雨刷器 AC 扫过的面积为_____cm².（结果保留 π）

解题秘方：利用旋转，将不规则图形的面积转化为规则图形的面积，本题利用 $S_{扇形}=\dfrac{n\pi R^2}{360}$ 求扇形的面积.

解：易知 $\triangle A'C'O$ 是 $\triangle ACO$ 绕 O 旋转 90° 而得到的三角形，$\therefore\triangle AOC\cong\triangle A'OC'$. $\therefore$ 雨刷器 AC 扫过的面积 = 扇形 AOA' 的面积 − 扇形 COC' 的面积 $=\dfrac{90\pi\times45^2}{360}-\dfrac{90\pi\times5^2}{360}=\dfrac{45^2-5^2}{4}\times\pi=500\pi$（cm²）.

答案：500π

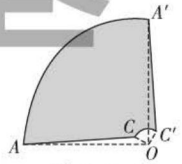


图 3-9-3

提分·秘诀

解法提醒

所谓弓形就是由弦及其所对的弧组成的图形. 求弓形的面积一般转化为求扇形与三角形的面积之差（和）.

特别提醒

1. 图解

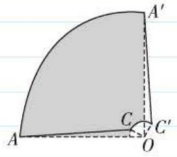


图 3-9-4

雨刷器 AC 扫过的面积可转化为图 3-9-4 中阴影部分的面积.

2. 解法点拨：解此类从实际生活为背景的题目需分析题意，明确题目要求，将不规则图形的面积转化为学习过的规则图形的面积求解.

荣德基

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

点方法·拨技巧 提高分

拔尖角度 1 利用作差法求涉扇形的阴影面积

例 4 如图 3-9-5，AB 为 $\odot O$ 的直径，AC，DC 为弦，$\angle ACD=60°$，P 为 AB 延长线上的点，$\angle APD=30°$.

（1）求证：DP 是 $\odot O$ 的切线.

（2）若 $\odot O$ 的半径为 3，求图中阴影部分的面积.

解题秘方：（1）连接 OD，证明半径 OD 垂直于直线 DP；（2）利用割补法将阴影部分的面积转化为 $\triangle ODP$ 的面积与扇形 DOB 的面积之差.

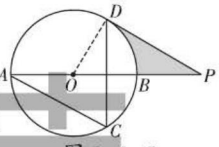


图 3-9-5

（1）**证明**：如图 3-9-5，连接 OD.

$\because \angle ACD=60°$，$\therefore \angle AOD=2\angle ACD=120°$.

$\therefore \angle DOP=180°-120°=60°$.

$\because \angle APD=30°$，$\therefore \angle ODP=180°-30°-60°=90°$.

$\therefore OD\perp DP$.

又 $\because OD$ 为 $\odot O$ 的半径，$\therefore DP$ 是 $\odot O$ 的切线.

（2）**解**：$\because \angle P=30°$，$\angle ODP=90°$，$OD=3$，

$\therefore OP=2OD=6$.

$\therefore DP=\sqrt{OP^2-OD^2}=3\sqrt{3}$.

$\therefore S_{阴影}=S_{\triangle ODP}-S_{扇形DOB}=\frac{1}{2}\times 3\times 3\sqrt{3}-\frac{60\pi\times 3^2}{360}=\frac{9\sqrt{3}}{2}-\frac{3\pi}{2}$.

挑战·高分

解法提醒

求不规则图形的面积，一般采用割补法，将不规则图形的面积转化为已学过的规则图形面积的和或差计算.

拔尖角度 2 利用求弧长法求滚动路线长

例 5 如图 3-9-6，矩形 $ABCD$ 中，$AB=4$，$BC=3$，边 CD 在直线 l 上，将矩形 $ABCD$ 沿直线 l 作无滑动翻滚. 当点 A 第一次翻滚到点 A_1 位置时，点 A 经过的路线长为_____.

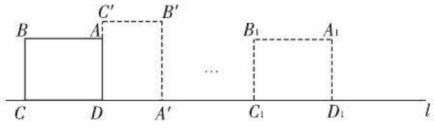


图 3-9-6

解题秘方：如图 3-9-7，点 A 经过的路线分三段：（1）以点 D 为圆心、90° 为圆心角、3 为半径的弧；（2）以点 B'' 为圆心、90° 为圆心角、4 为半径的弧；（3）以点 C_1 为圆心、90° 为圆心角、5 为半径的弧. 利用弧长公式计算即可.

挑战·高分

特别提醒

平面图形的滚动问题中：

- 滚动前后图形的形状、大小不变，位置改变；
- 滚动时不动的点是定点，移动的点是动点，滚动过程中动点经过的路线一般是一段圆弧，所形成的图形一般是扇形.

未德基

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

解：点 A 运动的路径如图 3-9-7.

∵四边形 $ABCD$ 是矩形，$AB=4$，$BC=3$，

∴ $AD=BC=3$，$\angle ADC=90°$，对角线长为 5.

根据旋转的性质知，$\angle ADA'=90°$，$AD=A'D=BC=3$，

∴从点 A 翻滚到点 A' 位置时，点 A 经过的路线长为 $\frac{90\pi\times3}{180}=\frac{3\pi}{2}$.

同理，从点 A' 翻滚到点 A'' 位置时，点 A 经过的路线长为 $\frac{90\pi\times4}{180}=2\pi$，

从点 A'' 翻滚到点 A_1 位置时，点 A 经过的路线长为 $\frac{90\pi\times5}{180}=\frac{5\pi}{2}$.

∴当点 A 第一次翻滚到点 A_1 位置时，点 A 经过的路线长为 $\frac{3\pi}{2}+2\pi+\frac{5\pi}{2}=6\pi$.

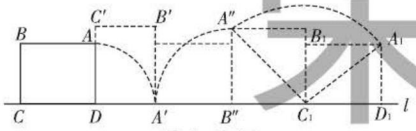


图 3-9-7

答案：6π

技巧点拨

求图形翻滚中路线长问题的方法：可通过探究归纳出这个点一个周期经过的路线的情况，推断出整个运动路线，从而利用弧长公式求出运动的路线长.

点中考·拨模拟 得满分

中考探秘

本节的主要考点是弧长和扇形面积，主要考查运用弧长公式、扇形面积公式进行计算，求圆锥的侧面积和全面积，尤其是不规则图形的面积计算成为中考的热点，多以填空题、选择题的形式出现，有时也在综合性较强的题型中体现.

三年中考兵法

考法 1 利用弧长公式求圆中的弧长

例 6 [中考·湖州]如图 3-9-8，已知 AB 是⊙ O 的直径，C，D 是⊙ O 上的点，$OC\parallel BD$，交 AD 于点 E，连接 BC.

（1）求证：$AE=ED$.

（2）若 $AB=10$，$\angle CBD=36°$，求 $\overset{\frown}{AC}$ 的长.

试题评析：此题考查弧长公式，关键是根据弧长公式和垂径定理解答.

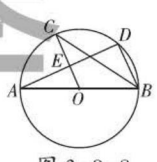


图 3-9-8

（1）**证明**：∵ AB 是⊙ O 的直径，∴ $\angle ADB=90°$.

∵ $OC\parallel BD$，∴ $\angle AEO=\angle ADB=90°$，即 $OC\perp AD$，∴ $AE=ED$.

（2）**解**：∵ $OC\perp AD$，∴ $\overset{\frown}{AC}=\overset{\frown}{CD}$，

∴ $\angle ABC=\angle CBD=36°$，∴ $\angle AOC=2\angle ABC=2\times36°=72°$，

∴ $\overset{\frown}{AC}$ 的长 $=\frac{72\pi\times5}{180}=2\pi$.

冲刺·满分

解法提醒

- 根据平行线的性质得出 $\angle AEO=90°$，再利用垂径定理证明即可；
- 根据弧长公式解答即可.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

考法 2 利用扇形面积求不规则图形面积

例 7 [中考·山西]如图 3-9-9，正方形 $ABCD$ 内接于⊙O，⊙O 的半径为 2，以点 A 为圆心，以 AC 的长为半径画弧，交 AB 的延长线于点 E，交 AD 的延长线于点 F，则图中阴影部分的面积为(　　)

A. $4\pi-4$　　B. $4\pi-8$　　C. $8\pi-4$　　D. $8\pi-8$

试题评析：本题考查扇形的面积公式、正方形的性质等知识，解题的关键是学会用转化的思想思考问题，属于中考常考题型.

解：利用对称性可知：$S_{阴影}=S_{扇形EAF}-S_{\triangle ABD}=\dfrac{90\cdot\pi\cdot4^2}{360}-\dfrac{1}{2}\times4\times2=4\pi-4$.

答案：A

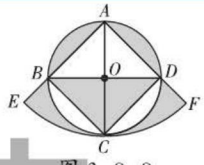


图 3-9-9

考法 3 利用扇形面积公式求与圆综合的面积

例 8 [中考·襄阳]如图 3-9-10，AB 是⊙O 的直径，AM 和 BN 是⊙O 的两条切线，E 为⊙O 上一点，过点 E 作直线 DC 分别交 AM，BN 于点 D，C，且 $CB=CE$.

(1) 求证：$DA=DE$.

(2) 若 $AB=6$，$CD=4\sqrt{3}$，求图中阴影部分的面积.

试题评析：本题考查了切线的判定与性质，全等三角形的判定与性质，勾股定理及扇形面积的计算，活用这些知识是解题的关键.

(1) **证明**：连接 OE，OC，如图 3-9-10.

∵ BN 与⊙O 相切于点 B，∴ $\angle OBN=90°$.

∵ $OE=OB$，$OC=OC$，$CE=CB$，

∴ $\triangle OEC\cong\triangle OBC$.

∴ $\angle OEC=\angle OBC=90°$.

∴ $OE\perp EC$. ∴ CD 是⊙O 的切线.

∵ AD 与⊙O 相切于点 A，∴ $DA=DE$.

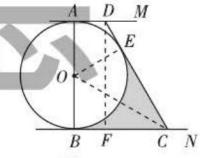


图 3-9-10

(2) **解**：过点 D 作 $DF\perp BC$ 于点 F，如图 3-9-10，则四边形 $ABFD$ 是矩形. ∴ $AD=BF$，$DF=AB=6$.

∵ $FC=\sqrt{DC^2-DF^2}=2\sqrt{3}$，∴ $BC-AD=BC-BF=2\sqrt{3}$.

又 $DC=CE+DE=BC+AD=4\sqrt{3}$，∴ $BC=3\sqrt{3}$.

在 Rt△OBC 中，$OC=\sqrt{OB^2+BC^2}=6$，

∴ $OB=\dfrac{1}{2}OC$. ∴ $\angle OCB=30°$. ∴ $\angle BOC=60°$.

∵ $\triangle OEC\cong\triangle OBC$，∴ $\angle BOE=2\angle BOC=120°$.

∴ $S_{阴影部分}=S_{四边形BCEO}-S_{扇形BOE}=2\times\dfrac{1}{2}BC\cdot OB-\dfrac{120}{360}\times\pi\times OB^2=9\sqrt{3}-3\pi$.

技巧点拨

求不规则图形面积的方法：一般不能直接利用公式求解，常用的方法有割补法、拼凑法、等积变形法、迁移变换法、构造方程法等. 其中前四种方法的基本思想都是将不规则图形转化为规则图形(可直接求面积的图形，如三角形、特殊四边形、圆、扇形、弓形)或规则图形的和、差进行求解.

解法提醒

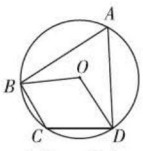
- 连接 OE，OC，通过证明△OEC≌△OBC，得到∠OEC=∠OBC=90°，先证得 CD 是⊙O 的切线，再根据切线长定理，可得 DA=DE.
- 过点 D 作 DF⊥BC 于点 F，得 DF=AB，在 Rt△DFC 中，先运用勾股定理求出 FC=2√3，再根据 CD=BC+AD=4√3，FC=BC-AD=2√3，求出 BC 的长，然后求出 OC 的长，进而求出∠BOC 的度数，最后根据 $S_{阴影部分}=S_{四边形BCEO}-S_{扇形BOE}=2S_{\triangle OBC}-S_{扇形BOE}$ 计算求解.

菜 德 基

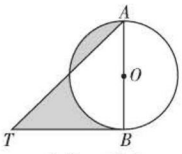
关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

1. [中考·咸宁]如图，⊙O的半径为3，四边形$ABCD$内接于⊙O，连接OB，OD，若$\angle BOD=\angle BCD$，则$\overset{\frown}{BD}$的长为（　　）

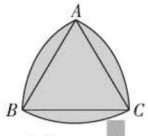
A. π　　B. $\frac{3}{2}\pi$　　C. 2π　　D. 3π



（第1题）



（第2题）



（第3题）

2. [中考·临沂]如图，AB是⊙O的直径，BT是⊙O的切线，若$\angle ATB=45°$，$AB=2$，则阴影部分的面积是（　　）

A. 2　　B. $\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\pi$　　C. 1　　D. $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\pi$

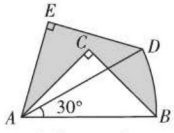
3. [中考·广西]如图，分别以等边三角形ABC的三个顶点为圆心，以边长为半径画弧，得到的封闭图形是莱洛三角形. 若$AB=2$，则莱洛三角形的面积（即阴影部分面积）为（　　）

A. $\pi+\sqrt{3}$　　B. $\pi-\sqrt{3}$

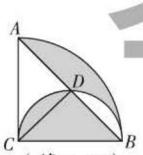
C. $2\pi-\sqrt{3}$　　D. $2\pi-2\sqrt{3}$

4. [中考·济宁]如图，在Rt△ABC中，$\angle ACB=90°$，$AC=BC=1$，将Rt△ABC绕点A逆时针旋转30°后得到Rt△ADE，点B经过的路径为$\overset{\frown}{BD}$，则图中阴影部分的面积是（　　）

A. $\frac{\pi}{6}$　　B. $\frac{\pi}{3}$　　C. $\frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}$　　D. $\frac{1}{2}$



（第4题）



（第5题）

5. 如图，在半径为2、圆心角为90°的扇形内，以BC为直径作半圆交AB于点D，连接CD，则阴影部分的面积是（　　）

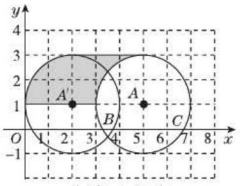
A. $\frac{1}{2}\pi-1$　　B. $\frac{1}{2}\pi-2$

C. $\pi-2$　　D. $\pi-1$

6. [中考·吉林]如图，在平面直角坐标系中，以$A(5,1)$为圆心、以2个单位长度为半径的⊙A交x轴于点B，C，解答下列问题：

（1）将⊙A向左平移_____个单位长度，便与y轴首次相切，得到⊙A'. 此时点A'的坐标为_____，阴影部分的面积$S=$_____.

（2）求BC的长.

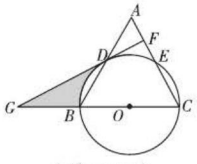


（第6题）

7. [中考·张家界]如图，在等腰△ABC中，$AC=BC$，以BC为直径的⊙O分别与AB，AC相交于点D，E，过点D作$DF\perp AC$，垂足为F.

（1）求证：DF是⊙O的切线.

（2）分别延长CB，FD，相交于点G，$\angle A=60°$，⊙O的半径为6，求阴影部分的面积.　[导学号 2380328]

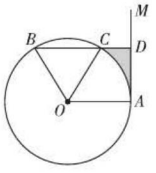


（第7题）

8. [中考·赤峰]如图，点A是直线AM与⊙O的交点，点B在⊙O上，$BD\perp AM$，垂足为D，BD与⊙O交于点C，OC平分$\angle AOB$，$\angle B=60°$.

（1）求证：AM是⊙O的切线.

（2）若$DC=2$，求图中阴影部分的面积（结果保留π和根号）.



（第8题）

莱德基

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

分类讨论思想在圆中的应用

荣老师告诉你 当一个命题的题设和结论不唯一确定，有多种可能情况，难以统一解答时，需要按可能出现的各种情况分门别类地加以讨论，得出各种情况的相应结论，最后综合归纳出问题的正确答案．分类讨论是一种逻辑方法，是一种重要的数学思想，同时也是一种重要的解题策略，它体现了化整为零、积零为整的思想与归类整理的方法．

应用一 由点与圆的位置关系引起的不唯一性

例 1 已知点 A 到⊙ O 的最近距离和最远距离分别是 3 cm 和 9 cm，求⊙ O 的半径．

解：设⊙ O 的半径为 R，

（1）如图 1 ①，当点 A 在⊙ O 内时，$2R=AC+AB=3+9=12$（cm），所以⊙ O 的半径是 6 cm；

（2）如图 1 ②，当点 A 在⊙ O 外时，$2R=AB-AC=9-3=6$（cm），所以⊙ O 的半径是 3 cm．

综上所述，⊙ O 的半径是 6 cm 或 3 cm．

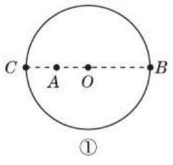


图 1

方法点拨：点与圆的位置关系有三种——点在圆内、点在圆上、点在圆外．当点与圆的位置关系不确定时，需按照此三种情况进行分类讨论．

应用二 由圆的对称性引起的不唯一性

例 2 已知⊙ O 的直径是 10 cm．弦 $AB \parallel CD$，$AB=6$ cm，$CD=8$ cm，求 AB 与 CD 之间的距离．

解：（1）如图 2 ①，当 AB，CD 位于圆心 O 的异侧时，连接 OB，OD，过点 O 作 $OE \perp CD$ 于点 E，OE 的反向延长线交 AB 于点 F．

$\because AB \parallel CD$，$OE \perp CD$，

$\therefore OF \perp AB$．

$\because OE \perp CD$，

$\therefore DE=\frac{1}{2}CD=4$ cm．

在 Rt△ OED 中，

$OE=\sqrt{OD^2-ED^2}=\sqrt{5^2-4^2}=3$（cm）．

同理，在 Rt△ OFB 中，$OF=4$ cm．

所以 $EF=OE+OF=7$ cm．

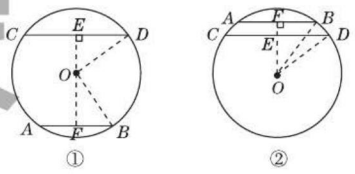


图 2

（2）如图 2 ②，当 AB，CD 位于圆心 O 的同侧时，连接 OB，OD，过 O 作 $OF \perp AB$，垂足为 F，交 CD 于点 E．可得 $OF=4$ cm，$OE=3$ cm，

$\therefore EF=OF-OE=4-3=1$（cm）．

综上所述，AB 与 CD 之间的距离是 7 cm 或 1 cm．

方法点拨：平行两弦有可能位于圆心的异侧，也有可能位于圆心的同侧，需分情况讨论．

应用三 由一弦对两弧而引起的不唯一性

例 3 弦 AB 的长等于半径，求弦 AB 所对的圆周角的度数．

解题秘方：因为弦 AB 所对的弧有优弧和劣弧，所以需分情况讨论，分别求出优弧和劣弧所对的圆周角的度数．

解：（1）当圆周角所对的弧是劣弧时，如图 3．

连接 OA，OB，AC，CB，

易得△ ABO 是等边三角形．

$\therefore \angle AOB=60°$．

$\therefore \angle ACB=\frac{1}{2}\angle AOB=30°$．

荣德基

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

（2）当圆周角所对的弧是优弧时，连接 AC'，BC'，如图 3.

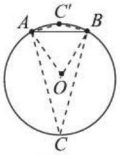


图 3

易得 $\angle AC'B=150°$.

综上所述，弦 AB 所对的圆周角等于 30° 或 150°.

方法点拨：在一个圆中，一条非直径的弦所对的弧有两条，分别是优弧和劣弧. 当点的位置不能确定时，分在优弧和劣弧上两种情况讨论.

应用四 ▶ 由运动导致直线与圆位置关系的不唯一性

例 4 如图 4，射线 QN 与等边 $\triangle ABC$ 的两边 AB，BC 分别交于点 M，N，且 $AC \parallel QN$，$AM=MB=2$ cm，$QM=4$ cm. 动点 P 从点 Q 出发，沿射线 QN 以每秒 1 cm 的速度向右移动，经过 t s，以点 P 为圆心、$\sqrt{3}$ cm 为半径的圆与 $\triangle ABC$ 相切（切点在边上），请写出 t 的取值.（单位：s）

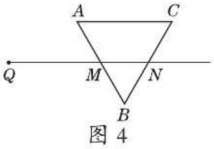


图 4

解：∵ $\triangle ABC$ 是等边三角形，

∴ $AB=AC=BC=AM+MB=4$ cm，$\angle A=\angle C=\angle B=60°$.

∵ $QN \parallel AC$，$AM=BM$，

∴ N 为 BC 中点.

∴ $MN=\frac{1}{2}AC=2$ cm. 易知 $\angle BMN=\angle BNM=60°$.

分为三种情况：（1）如图 5.

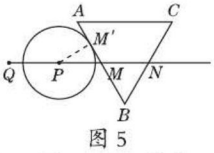


图 5

当⊙ P 切 AB 于 M' 时，连接 PM'，

则 $PM'=\sqrt{3}$ cm，$\angle PM'M=90°$.

由 $\angle PMM'=\angle BMN=60°$，

易知 $M'M=1$ cm，∴ $PM=2MM'=2$ cm.

∴ $QP=4-2=2$（cm），

∴ $t=2$ s.

（2）如图 6.

当⊙ P 切 AC 于点 A 时，连接 PA，

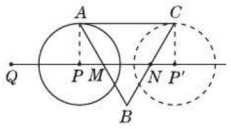


图 6

则 $\angle CAP=\angle APM=90°$，$\angle PMA=\angle BMN=60°$，

$AP=\sqrt{3}$ cm.

∴ $PM=1$ cm.

∴ $QP=4-1=3$（cm），

∴ $t=3$ s.

当与 AC 切于 C 点时，连接 $P'C$，

则 $\angle CP'N=\angle ACP'=90°$，$\angle P'NC=\angle BNM=60°$，$CP'=\sqrt{3}$ cm.

∴ $P'N=1$ cm.

∴ $QP'=4+2+1=7$（cm），

∴ $t=7$ s.

故当 3 s ≤ t ≤ 7 s 时，⊙ P 和 AC 边相切.

（3）如图 7，当⊙ P 切 BC 于 N' 时，连接 PN'，

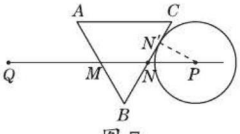


图 7

则 $PN'=\sqrt{3}$ cm，$\angle PN'N=90°$.

由 $\angle PNN'=\angle BNM=60°$，

易知 $N'N=1$ cm，

∴ $PN=2NN'=2$ cm.

∴ $QP=4+2+2=8$（cm），

∴ $t=8$ s.

综上所述，$t=2$s 或 3s ≤ t ≤ 7s 或 $t=8$s.

方法点拨：由图形运动导致的分类讨论，要抓住图形变化时的几个关键点进行分类.

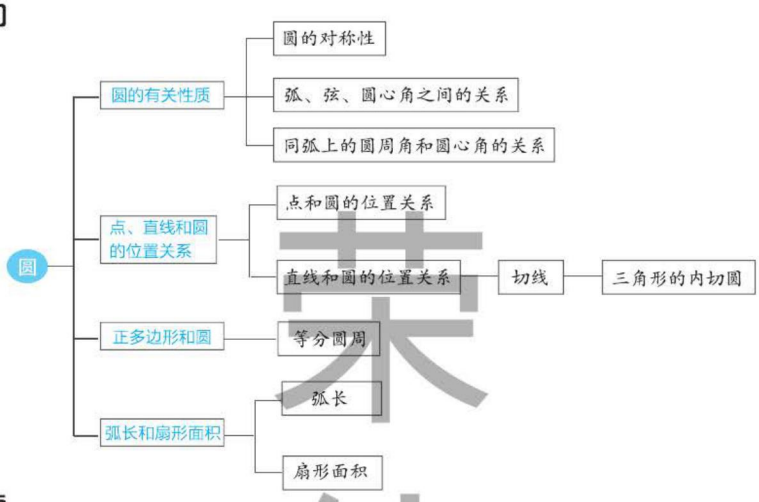
禁 德 基

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

章末核心知识分类整合

核心结构专题

结构必知



核心必读

1. 圆是轴对称图形，根据圆的轴对称性推出垂径定理.
2. 圆是中心对称图形，且具有旋转不变性，推出“圆心角、弦、弧、圆周角”之间的四量关系定理.
3. 同弧或等弧所对的圆心角和圆周角之间的数量关系构成圆周角定理，由圆周角定理推出两个结论：一是半圆（或直径）所对的圆周角是直角，90° 的圆周角所对的弦是直径；二是同弧或等弧所对的圆周角相等.
4. 与圆有关的位置关系中，直线与圆的位置关系最重要. 在直线与圆的三种位置中，相切最关键，包括切线的性质、切线的判定以及切线长定理，都是重中之重.
5. 三角形与圆之间的关系主要有“内接”和“外切”两种形式. 正多边形与圆之间的关系也是“内接”这种形式.
6. **在圆的计算中主要掌握两个公式：**（1）$l=\frac{n\pi R}{180}$；（2）$S_{扇形}=\frac{n\pi R^2}{360}$ 或 $S_{扇形}=\frac{1}{2}lR$.

知识方法专题

知识必学

专题一 垂径定理

链接中考» 垂径定理是圆中非常重要的定理之一，它是用来证明线段相等或角相等的重要依据. 单独考查时，一般以填空题、选择题的形式出现，渗透到其他知识点时，以综合题的形式考查.

例1 [中考·江西] $\odot O$ 为 $\triangle ABC$ 的外接圆，请仅用无刻度的直尺，根据下列条件分别在图 3-1①、图 3-1②中画出一条弦，使这条弦将 $\triangle ABC$ 分成面积相等的两部分（保留作图痕迹，不写作法）.

（1）如图 3-1①，$AC=BC$.

（2）如图 3-1②，直线 l 与 $\odot O$ 相切于点 P，

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

且 $l \parallel BC$.

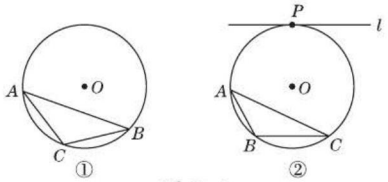


图 3-1

解：（1）作图如图 3-2 ①，弦 CD 即为所求.

（2）作图如图 3-2 ②，弦 AD 即为所求.

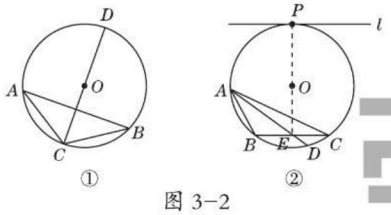


图 3-2

专题二 四量关系定理

链接中考» 四量关系定理是圆的旋转不变性的体现，它揭示同圆或等圆中弧、弦、圆心角、圆周角之间的等量关系，它为证明线段相等和角相等提供了有力的依据，考查时，其一般以解答题的形式出现.

例 2 ［**中考·台州**］如图 3-3，四边形 $ABCD$ 内接于 $\odot O$，点 E 在对角线 AC 上，$EC=BC=DC$.

（1）若 $\angle CBD=39°$，求 $\angle BAD$ 的度数.

（2）求证：$\angle 1=\angle 2$.

（1）**解**：$\because BC=DC$，$\therefore \overset{\frown}{BC}=\overset{\frown}{DC}$.

$\therefore \angle BAC=\angle CAD=\angle CBD$.

$\because \angle CBD=39°$，

$\therefore \angle BAC=\angle CAD=39°$.

$\therefore \angle BAD=\angle BAC+\angle CAD=78°$.

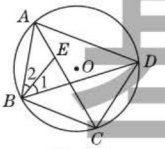


图 3-3

（2）**证明**：$\because EC=BC$，

$\therefore \angle CBE=\angle CEB$.

$\because \angle CBE=\angle 1+\angle CBD$，

$\angle CEB=\angle 2+\angle BAC$，

$\therefore \angle 1+\angle CBD=\angle 2+\angle BAC$.

又 $\because \angle BAC=\angle CBD$，

$\therefore \angle 1=\angle 2$.

方法点拨：在圆中，证明两个角相等，可根据四量关系定理转化为证明弧相等或弦相等；若已知弦相等，可以推出弧相等以及圆心角相等或圆周角相等.

专题三 圆周角定理及其推论

链接中考» 圆周角定理揭示圆心角和圆周角之间的数量关系. 考查圆周角和圆心角之间的数量关系时，题目一般以填空题、选择题的形式出现；考查直径与 90° 圆周角之间的关系时，题目一般以解答题的形式出现.

例 3 ［**中考·滨州**］如图 3-4，$\odot O$ 的直径 AB 的长为 10，弦 AC 的长为 5，$\angle ACB$ 的平分线交 $\odot O$ 于点 D，连接 AD，BD.

（1）求 $\overset{\frown}{BC}$ 的长.

（2）求弦 BD 的长.

解：（1）如图 3-4，连接 OC. $\because AB$ 为 $\odot O$ 的直径，

$\therefore \angle ACB=\angle ADB=90°$.

在 Rt $\triangle ABC$ 中，$AB=10$，$AC=5$，

$\therefore \angle ABC=30°$. $\therefore \angle BAC=60°$.

$\therefore \angle BOC=2\angle BAC=120°$.

$\therefore \overset{\frown}{BC}$ 的长为 $\dfrac{120\times\pi\times5}{180}=\dfrac{10}{3}\pi$.

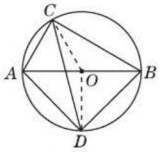


图 3-4

（2）如图 3-4，连接 OD.

$\because CD$ 平分 $\angle ACB$，

$\therefore \angle ACD=\angle BCD$，

$\therefore \angle AOD=\angle BOD$，$\therefore AD=BD$.

$\therefore \angle BAD=\angle ABD=45°$.

在 Rt $\triangle ABD$ 中，$AB=10$，

易得 $BD=5\sqrt{2}$.

方法点拨：在具体解答问题时，找准同弧所对的圆周角及圆心角，然后利用圆周角定理解题即可. 而在圆中出现直径时，常构造直径所对的圆周角，利用圆周角定理的推论得出直角三角形，然后利用勾股定理解决问题.

荣德基

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

专题四 圆的切线的性质与判定

链接中考» 圆的切线的性质与判定的运用都是作同样的辅助线——连接圆心和切点，运用的特征都离不开垂直．考查切线的性质时，题目一般以填空题、选择题的形式出现，而考查切线的判定时，题目常以解答题的形式出现．很多题都综合考查切线的性质与判定．

例4 ［中考·武威］已知△ABC内接于⊙O，过点A作直线EF.

（1）如图3-5①，若AB为⊙O的直径，要使EF成为⊙O的切线，还需要添加的一个条件是（要求写出两种情况）：_____或者_____.

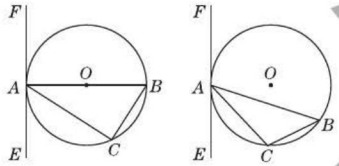


图3-5

（2）如图3-5②，如果AB是不过圆心O的弦，且∠CAE＝∠B，那么EF是⊙O的切线吗？试证明你的判断．

解：（1）∠BAE＝90°；∠EAC＝∠B（答案不唯一）．

（2）EF是⊙O的切线．

证明：作直径AM，连接CM，

则∠ACM＝90°，∠M＝∠B，

∴∠B＋∠CAM＝∠M＋∠CAM＝90°．

∵∠CAE＝∠B，∴∠CAM＋∠CAE＝90°，

∴AE⊥AM.

∵AM为直径，∴EF是⊙O的切线．

方法点拨：通常证切线有两种类型：（1）若直线与圆有交点，则连半径，证垂直，得切线；（2）若直线与圆的交点不明确，则作垂直，证半径，得切线．

专题五 圆的有关计算

链接中考» 圆的有关计算一般涉及两个公式——弧长公式和扇形的面积公式，考查的题型形式多样，有直接考查弧长和扇形面积的，一般以填空题、选择题为主；有求阴影部分面积的，可通过转化为扇形面积来求，一般以解答题形式考查．

例5 ［中考·兰州］如图3-6，在Rt△ABC中，∠C=90°，∠BAC的平分线AD交BC边于点D. 以AB上一点O为圆心作⊙O，使⊙O经过点A和点D.

（1）判断直线BC与⊙O的位置关系，并说明理由．

（2）若AC=3，∠B=30°，

①求⊙O的半径；

②设⊙O与AB边的另一个交点为E，求线段BD，BE与劣弧DE所围成的阴影部分的面积．（结果保留根号和π）

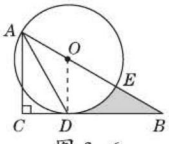


图3-6

解：（1）相切，理由如下：

如图3-6，连接OD.

∵AD平分∠BAC，∴∠CAD=∠OAD.

∵OA=OD，∴∠OAD=∠ODA.

∴∠CAD=∠ODA，∴OD∥AC.

又∵∠C=90°，∴AC⊥BC，

∴OD⊥BC. ∴BC与⊙O相切．

（2）①∵AC=3，∠B=30°，∴AB=6.

设OA=OD=r，则OB=2r，

∴2r+r=6，解得r=2，即⊙O的半径是2.

②由①得OD=2，OB=4，∴BD=$2\sqrt{3}$.

∵在Rt△OBD中，∠B=30°，

∴∠DOB=60°.

$$\therefore S_{阴影}=S_{\triangle BOD}-S_{扇形EOD}=\frac{1}{2}\times 2\sqrt{3}\times 2-\frac{60\pi\times 2^2}{360}=2\sqrt{3}-\frac{2\pi}{3}.$$

方法点拨：求不规则图形的面积往往需要将其转化成规则图形面积的和或差．

未德基

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

方法必会

专题六 转化思想

专题解读» 转化思想是指在解决问题的过程中，对问题进行转化，将“未知”转化为“已知”，将“陌生”转化为“熟知”，将“复杂”转化为“简单”，其核心就是将有待解决的问题转化为已能明确解决的问题，从便利用已有的结论加以处理，从而培养学生用联系的、发展的、运动变化的观点观察事物、认识问题.

例6 [中考·咸宁] 如图3-7，在△ABC中，$CA=CB$，$\angle ACB=90°$，以AB的中点D为圆心，作圆心角为90°的扇形EDF，点C恰在弧EF上.设$\angle BDF=\alpha$（$0°<\alpha<90°$），当α由小到大变化时，图中阴影部分的面积（　　）

A. 由小变大

B. 由大变小

C. 不变

D. 先由小变大，后由大变小

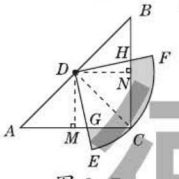


图3-7

解：如图3-7，作$DM\perp AC$于M，$DN\perp BC$于N，连接DC.易得四边形$DMCN$是矩形.

$\because CA=CB$，$\angle ACB=90°$，

$\therefore \angle A=\angle B=45°$，

$\therefore DM=\frac{\sqrt{2}}{2}AD=\frac{\sqrt{2}}{4}AB$，

$DN=\frac{\sqrt{2}}{2}BD=\frac{\sqrt{2}}{4}AB$. $\therefore DM=DN$.

$\therefore$四边形$DMCN$是正方形. $\therefore \angle MDN=90°$.

$\therefore \angle MDG=90°-\angle GDN$.

$\because \angle EDF=90°$，$\therefore \angle NDH=90°-\angle GDN$.

$\therefore \angle MDG=\angle NDH$.

在△DMG和△DNH中，

$$\begin{cases}\angle MDG=\angle NDH,\\ DM=DN,\\ \angle DMG=\angle DNH=90°,\end{cases}$$

$\therefore$△$DMG\cong$△DNH.

$\therefore$四边形$DGCH$的面积=正方形$DMCN$的面积.

$\because$正方形$DMCN$的面积$=DM^2=\frac{1}{8}AB^2$，

$\therefore$四边形$DGCH$的面积$=\frac{1}{8}AB^2$.

$\because$扇形EDF的面积$=\frac{90\pi\cdot CD^2}{360}=\frac{\pi AB^2}{16}$，

$\therefore$阴影部分的面积=扇形EDF的面积−四边形$DGCH$的面积$=\frac{(\pi-2)AB^2}{16}$（定值）.

答案：C

方法点拨：求不规则图形的面积时，可利用转化思想，借助三角形全等的知识，将不规则图形转化为规则图形，再根据规则图形面积的和或差去解答.

专题七 分类讨论思想

专题解读» 分类讨论思想是初中重要的数学思想方法之一.近几年中考经常出现需要分类讨论的试题，因此，我们在平时的学习中要增强分类讨论的意识，培养思维的条理性、缜密性.这类题一般不给出图形，满足条件的图形又具有多样性和普遍性，所以解题时一般根据不同情况画出不同图形，分别求解或证明.

例7 已知在半径为1的⊙O中，弦AB，AC的长分别为$\sqrt{3}$和$\sqrt{2}$，则$\angle BAC$的度数为_____.

解：当圆心在$\angle BAC$的外部时，

如图3-8①，连接AO并延长，交⊙O于点E，连接BE，CE，则在Rt△ABE中，由勾股定理，得$BE=\sqrt{2^2-(\sqrt{3})^2}=1=\frac{1}{2}AE$，

$\therefore \angle BAE=30°$.

在Rt△ACE中，$CE=\sqrt{2^2-(\sqrt{2})^2}=\sqrt{2}=AC$，

$\therefore \angle EAC=45°$.

$\therefore \angle BAC=45°-30°=15°$；

荣德基

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

当圆心在∠ BAC 的内部时，

如图 3−8 ②，连接 AO 并延长，交⊙ O 于点 E，连接 BE，CE. 由上面计算结果知∠ BAC=45° + 30° =75° .

综上，∠ BAC 的度数为 15° 或 75° .

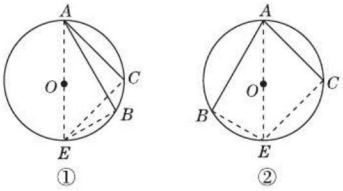


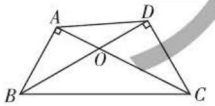
图 3−8

答案：15° 或 75°

好题必解 ☞答案见 233 页

类型 1：巧用圆周角求角的度数

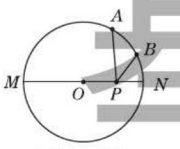
1. 如图，在四边形 $ABCD$ 中，对角线 AC，BD 相交于点 O，且 $BA \perp AC$，$BD \perp CD$，∠ DCB=60°，求∠ DAC 的度数.



（第 1 题）

类型 2：巧用圆的对称性求最值

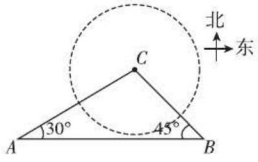
2. 已知：如图，点 A 是半圆上一个三等分点，点 B 是 AN 的中点，P 是直径 MN 上一动点，⊙ O 的半径为 1，则 AP+BP 的最小值为多少?



（第 2 题）

类型 3：巧判断与圆有关的位置关系解决问题

3. 去年某企业将地处 A，B 两地的两个小厂合并成一个大厂，为了方便两地职工，企业准备在相距 2 km 的 A，B 两地之间修筑一条笔直公路. 如图，经测量，在 A 地的北偏东 60° 方向，B 地的北偏西 45° 方向的 C 处有一半径为 0.7 km 的圆形公园（点 C 为圆心）. 问修筑的这条公路会不会穿过公园? 为什么?



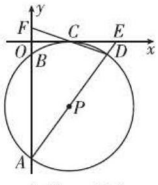
（第 3 题）

类型 4：巧用切线解决问题

4. 如图，在平面直角坐标系中，⊙ P 与 x 轴切于点 C，与 y 轴交于 A，B 两点，连接 AP 并延长，分别交⊙ P，x 轴于点 D，E，连接 DC 并延长，交 y 轴于点 F. 若点 F 的坐标为（0，1），点 D 的坐标为（6，−1）.

（1）求证：DC=FC.

（2）求直线 AD 的表达式.



（第 4 题）

基 德 来

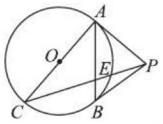
关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

类型 5：圆与相似

5. [中考·武汉]如图，PA 是⊙ O 的切线，A 是切点，AC 是直径，AB 是弦，连接 PB，PC，PC 交 AB 于点 E，且 $PA = PB$.

（1）求证：PB 是⊙ O 的切线.

（2）若∠ $APC = 3$ ∠ BPC，求 $\frac{PE}{CE}$ 的值.



（第 5 题）

类型 6：圆与锐角三角函数

6. [中考·荆门]如图，AB 为⊙ O 的直径，C 为⊙ O 上一点，经过点 C 的切线交 AB 的延长线于点 E，$AD \perp EC$ 交 EC 的延长线于点 D，AD 交⊙ O 于 F，$FM \perp AB$ 于 H，分别交⊙ O，AC 于 M，N，连接 MB，BC.

（1）求证：AC 平分∠ DAE.

（2）若 $\cos M = \frac{4}{5}$，$BE = 1$，

①求⊙ O 的半径；

②求 FN 的长.



（第 6 题）

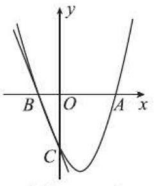
类型 7：圆与二次函数

7. [中考·济宁]如图，已知抛物线 $y = ax^2+bx+c(a \neq 0)$ 经过点 $A(3,0)$，$B(-1,0)$，$C(0,-3)$.

（1）求该抛物线的表达式.

（2）若以点 A 为圆心的圆与直线 BC 相切于点 M，求切点 M 的坐标.

（3）若点 Q 在 x 轴上，点 P 在抛物线上，是否存在以点 B，C，Q，P 为顶点的平行四边形？若存在，求出点 P 的坐标；若不存在，请说明理由.



（第 7 题）

荣德基

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

第三章测试卷

☞答案见235页

（100分 60分钟）

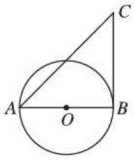
一、选择题（每题4分，共32分）

1. 已知⊙O的半径是5，直线l是⊙O的切线，则点O到直线l的距离是（　　）

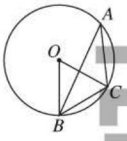
A.2.5　　B.3　　C.5　　D.10

2. 如图，在△ABC中，$AB=BC=2$，以AB为直径的⊙O与BC相切于点B，则AC等于（　　）

A.$\sqrt{2}$　　B.$\sqrt{3}$　　C.$2\sqrt{2}$　　D.$2\sqrt{3}$



（第2题）



（第3题）

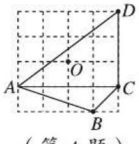
3. 如图，⊙O是△ABC的外接圆，连接OB，OC，若$OB=BC$，则∠BAC等于（　　）

A.60°　　B.45°　　C.30°　　D.20°

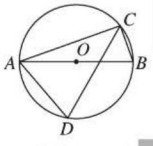
4. 如图为4×4的网格图，A，B，C，D，O均在格点上，点O是（　　）

A. △ACD的外心　　B. △ABC的外心

C. △ACD的内心　　D. △ABC的内心



（第4题）



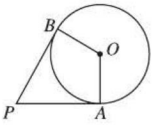
（第5题）

5. 如图，C，D是以线段AB为直径的⊙O上两点，若$CA=CD$，且∠$ACD=40°$，则∠CAB=（　　）

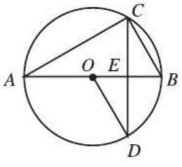
A.10°　　B.20°　　C.30°　　D.40°

6. 如图，PA，PB是⊙O的切线，切点分别为A，B，若$OA=2$，$\angle P=60°$，则$\overset{\frown}{AB}$的长为（　　）

A.$\frac{2}{3}\pi$　　B.π　　C.$\frac{4}{3}\pi$　　D.$\frac{5}{3}\pi$



（第6题）



（第7题）

7. 如图，AB是⊙O的直径，CD是弦，$AB\perp CD$，垂足为点E，连接OD，CB，AC，∠$DOB=60°$，$EB=2$，那么CD的长为（　　）

A.$\sqrt{3}$　　B.$2\sqrt{3}$　　C.$3\sqrt{3}$　　D.$4\sqrt{3}$

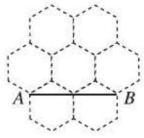
8. 如图是由7个形状、大小完全相同的正六边形组成的网格，正六边形的顶点称为格点，△ABC的顶点都在格点上．设定AB边如图，若△ABC是直角三角形，则其个数为（　　）

A.4

B.6

C.8

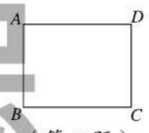
D.10



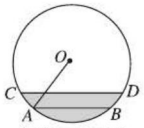
（第8题）

二、填空题（每题4分，共16分）

9. 如图，在矩形$ABCD$中，$AB=3$，$AD=4$，若以点A为圆心，以4为半径作⊙A，则点A，点B，点C，点D四点中在⊙A外的是_____.



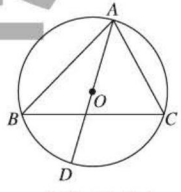
（第9题）



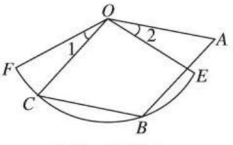
（第10题）

10. 一条排水管的截面如图，已知排水管的半径$OA=1$ m，水面宽$AB=1.2$ m．某天下雨后，排水管水面上升了0.2 m，则此时排水管水面宽CD等于_____m.

11. 如图，⊙O是△ABC的外接圆，直径$AD=4$，∠$ABC=\angle DAC$，则AC长为_____.



（第11题）



（第12题）

12. 如图，四边形$OABC$是菱形，点B，C在以点O为圆心的弧EF上，且∠1=∠2，若扇形EOF的面积为3π，则菱形$OABC$的边长为_____.

禁 未 德 基

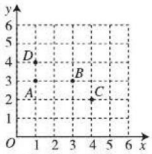
关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

三、解答题（共52分）

13.（8分）如图，在平面直角坐标系中，已知点$A(1,3)$，$B(3,3)$，$C(4,2)$.

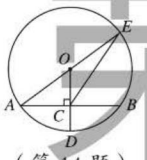
（1）请在图中作出经过点A，B，C三点的⊙M，并写出圆心M的坐标；

（2）若点D坐标为（1，4），则直线BD与⊙M的位置关系是_____.



（第13题）

14.（10分）如图，⊙O的半径$OD \perp$弦AB于点C，连接AO并延长，交⊙O于点E，连接EC. 若$AB=8$，$CD=2$，求EC的长.

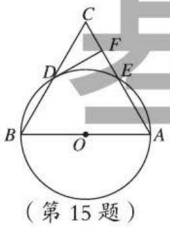


（第14题）

15.（10分）如图，在$\triangle ABC$中，以AB为直径的⊙O分别与BC，AC相交于点D，E，$BD=CD$，过点D作⊙O的切线，交边AC于点F.

（1）求证：$DF \perp AC$.

（2）若⊙O的半径为5，$\angle CDF=30°$，求$\overset{\frown}{BD}$的长（结果保留π）.

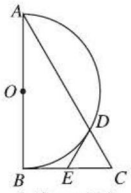


（第15题）

16.（12分）如图，在Rt$\triangle ABC$中，$\angle ABC=90°$，以AB为直径作半圆O，交AC于点D，点E为BC的中点，连接DE.

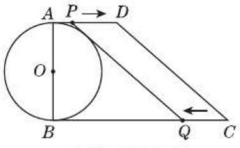
（1）求证：DE是半圆O的切线.

（2）若$\angle BAC=30°$，$DE=2$，求AD的长.



（第16题）

17.（12分）如图，在四边形$ABCD$中，$AD \parallel BC$，$\angle ABC=90°$，$AB=12$ cm，$AD=8$ cm，$BC=22$ cm，AB为⊙O的直径. 动点P从点A开始，沿AD边向点D以1 cm/s的速度运动，动点Q从点C开始，沿CB边向点B以2 cm/s的速度运动，P,Q分别从点A，C同时出发. 当其中一点到达终点时，另一个动点也随之停止运动. 设运动时间为t s. 当t为何值时，PQ与⊙O相切?



（第17题）

荣德基

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料



荣德基

参考答案及点拨

（209页～236页）

另赠送教材习题参考答案

（237页～268页）

九年级 数学 下

（BS版）

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

参考答案及点拨

第一章 直角三角形的边角关系

1 锐角三角函数

【两年模拟兵法】

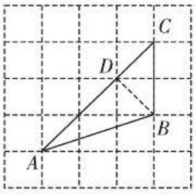
1. B　**点拨:** 依题意可得 $\tan\angle A_1B_1C_1=\frac{4}{3}$, $\tan\angle A_2B_2C_2=2$, $\tan\angle A_3B_3C_3=\frac{3}{4}$, $\tan\angle A_4B_4C_4=\frac{5}{3}$. $\because 2>\frac{5}{3}>\frac{4}{3}>\frac{3}{4}$, 即 $\tan\angle A_2B_2C_2>\tan\angle A_4B_4C_4>\tan\angle A_1B_1C_1>\tan\angle A_3B_3C_3$, 且锐角的正切值随角度的增大而增大, $\therefore\angle A_2B_2C_2>\angle A_4B_4C_4>\angle A_1B_1C_1>\angle A_3B_3C_3$, 故选项 B 中的梯子最陡.

2. C　**点拨:** 锐角 A 的三角函数值只与锐角 A 的大小有关, 与所在直角三角形边的长短无关, 当 $\mathrm{Rt}\triangle ABC$ 的边同时扩大 n 倍时, $\angle A$ 的大小不变, 所以锐角 A 的三角函数值没有变化.

3. A

4. B　**点拨:** 由折叠的性质可知, $C'D=CD$, $\angle C'=\angle C=90°$. $\because AB=CD$, $\therefore C'D=AB=4$. $\therefore\sin\angle C'ED=\frac{C'D}{DE}=\frac{4}{8}=\frac{1}{2}$.

5. D　**点拨:** 如图, 连接 BD, 易得 $AD=2\sqrt{2}$, $BD=\sqrt{2}$, $AB=\sqrt{10}$, $\therefore AB^2=AD^2+BD^2$, $\therefore\angle ADB=90°$, $\therefore\tan A=\frac{BD}{AD}=\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}=\frac{1}{2}$. 故答案是 D.



(第 5 题)

6. B

7. C　**点拨:** 本题采用分类讨论思想, "4" 可能是较长的直角边长, 也可能是斜边长, 因此分两种情况讨论: ① 当 "4" 为较长的直角边长时, 较小的锐角的正切值为 $\frac{3}{4}$; ② 当 "4" 为斜边长时, 另一直角边长为 $\sqrt{4^2-3^2}=\sqrt{7}$, 则较小的锐角的正切值为 $\frac{\sqrt{7}}{3}$.

8. 4 m　**点拨:** 在 $\mathrm{Rt}\triangle ABC$ 中, $AC=3$ m, $\cos\angle BAC=\frac{AC}{AB}=\frac{3}{4}$, 所以 $AB=4$ m, 即梯子 AB 的长度为 4 m.

9. 24　**点拨:** 过点 C 作 $CE\perp BD$ 于点 E.

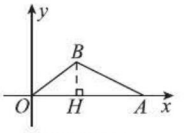
在 $\mathrm{Rt}\triangle CDE$ 中,

$\because\sin\angle EDC=\frac{3}{5}=\frac{CE}{CD}=\frac{CE}{AB}$, $AB=4$,

$\therefore CE=\frac{12}{5}$.

$\therefore S_{\square ABCD}=2\times\frac{1}{2}\times BD\times CE=24$.

10. 解: (1) 如图, 过点 B 作 $BH\perp OA$, 垂足为点 H.



(第 10 题)

$\because$ 在 $\mathrm{Rt}\triangle OHB$ 中,

$BO=5$, $\sin\angle BOH=\frac{3}{5}$,

$\therefore BH=3$, $\therefore OH=4$,

$\therefore$ 点 B 的坐标为 $(4,3)$.

(2) $\because OA=10$, $OH=4$, $\therefore AH=6$.

又 $\because$ 在 $\mathrm{Rt}\triangle AHB$ 中, $BH=3$,

$\therefore AB=\sqrt{BH^2+AH^2}=\sqrt{3^2+6^2}=3\sqrt{5}$,

$\therefore\cos\angle BAO=\frac{AH}{AB}=\frac{6}{3\sqrt{5}}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$.

11. 解: $\because$ 迎水坡坡度 (DE 与 AE 的长度之比) 为 1 ∶ 0.6, $DE=30$ m, $\therefore AE=18$ m.

在 $\mathrm{Rt}\triangle ADE$ 中, $AD=\sqrt{DE^2+AE^2}=6\sqrt{34}$ m.

$\because$ 背水坡坡度 (CF 与 FB 的长度之比) 为 1 ∶ 2, $CF=DE=30$ m,

$\therefore FB=60$ m.

在 $\mathrm{Rt}\triangle BCF$ 中, $BC=\sqrt{CF^2+BF^2}=30\sqrt{5}$ m,

易知 $EF=DC=10$ m,

$\therefore$ 大坝横截面的周长为 $DC+AD+AE+EF+FB+BC=10+6\sqrt{34}+18+10+60+30\sqrt{5}=6\sqrt{34}+30\sqrt{5}+98$ (m).

2 30°, 45°, 60° 角的三角函数值

【两年模拟兵法】

1. D　**2.** B

3. C　**点拨:** 由题意, 得 $\sin\alpha-\frac{\sqrt{3}}{2}=0$, $\sqrt{3}-\tan\beta=0$,

$\therefore\sin\alpha=\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\tan\beta=\sqrt{3}$.

$\therefore\angle\alpha=60°$, $\angle\beta=60°$.

$\therefore$ 此三角形为等边三角形.

4. 30°　**点拨:** $\because\angle A$ 为锐角, 且 $\sin(\angle A+15°)=\frac{\sqrt{2}}{2}$,

关注微信公众号 "教辅资料站" 获取更多学习资料

$\therefore \angle A+15°=45°$,$\therefore \angle A=30°$.

5. $\frac{1}{2}$ **点拨:** $\because$ 在 Rt$\triangle ABC$ 中,$\angle C=90°$,$AB=2$,

$BC=\sqrt{3}$,

$\therefore \sin A=\frac{BC}{AB}=\frac{\sqrt{3}}{2}$,$\therefore \angle A=60°$,

$\therefore \sin\frac{A}{2}=\sin 30°=\frac{1}{2}$.

6. **解:** (1) 原式 $=\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}-2\times\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}-\sqrt{2}=\frac{1+\sqrt{3}-2\sqrt{2}}{2}$.

(2) 原式 $=\frac{\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}}-\frac{1}{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}-2=\frac{4+2\sqrt{3}}{2}-2=2+\sqrt{3}-2=\sqrt{3}$.

(3) 原式 $=2\times\frac{\sqrt{3}}{2}-1-(\sqrt{3}-1)=\sqrt{3}-1-\sqrt{3}+1=0$.

(4) 原式 $=1-3\times\frac{\sqrt{3}}{3}+1-2=1-\sqrt{3}+1-2=-\sqrt{3}$.

7. **解:** 连接 BD,在 Rt$\triangle ABC$ 中,$\angle ACB=90°$,$\angle CAB=90°-30°=60°$.

$\because \tan\angle CAB=\frac{BC}{AC}$,

$\therefore BC=AC\cdot\tan\angle CAB=32\times\tan 60°=32\sqrt{3}$(m),

$\therefore BD=BC-CD=32\sqrt{3}-16\approx 39$(m),

故荷塘宽 BD 约为 39 m.

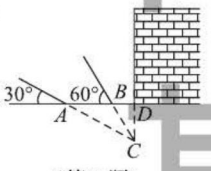
8. **解:** 如图,过点 C 作 $CD\perp AB$ 于点 D.

易知 $\angle CAB=30°$,$\angle CBD=60°$,

$\therefore \angle ACB=30°$,

$\therefore \angle CAB=\angle ACB$,

$\therefore BC=AB=4$ m.



(第 8 题)

在 Rt$\triangle CDB$ 中,$BC=4$ m,$\angle CBD=60°$,

$\sin\angle CBD=\frac{CD}{BC}$,

$\therefore \sin 60°=\frac{CD}{4}$,

$\therefore CD=4\sin 60°=4\times\frac{\sqrt{3}}{2}=2\sqrt{3}\approx 3.5$(m).

故该生命迹象所在 C 处与地面的距离约为 3.5 m.

9. **解:** (1) $\because \angle ABC=\angle DEB=45°$,

$\therefore \triangle BDE$ 为等腰直角三角形,

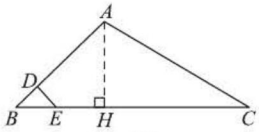
$\therefore DE=BE\cdot\sin\angle ABC=6\times\frac{\sqrt{2}}{2}=3\sqrt{2}$(m).

答:最短的斜拉索 DE 的长为 $3\sqrt{2}$ m.

(2) 如图,作 $AH\perp BC$ 于点 H,

$\because BD=DE=3\sqrt{2}$ m,

$\therefore AB=5BD=5\times 3\sqrt{2}=15\sqrt{2}$(m).



(第 9 题)

在 Rt$\triangle ABH$ 中,

$\because \angle B=45°$,

$\therefore AH=AB\cdot\sin B=15\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=15$(m).

在 Rt$\triangle ACH$ 中,$\because \angle C=30°$,

$\therefore AC=2AH=30$ m.

答:最长的斜拉索 AC 的长为 30 m.

10. **解:** (1) 过点 A 作 $AD\perp x$ 轴,垂足为点 D,

则 $OD=OA\cdot\cos 60°=2\times\frac{1}{2}=1$,$AD=OA\cdot\sin 60°=2\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}$,故点 A 的坐标为$(1,\sqrt{3})$.

(2) 设直线 AB 对应的函数表达式为 $y=kx+b$,

$\because$ 直线过 $A(1,\sqrt{3})$ 和 $B(3,0)$ 两点,

则有 $\begin{cases}k+b=\sqrt{3},\\3k+b=0,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}k=-\frac{\sqrt{3}}{2},\\b=\frac{3}{2}\sqrt{3}.\end{cases}$

$\therefore$ 直线 AB 对应的函数表达式为 $y=-\frac{\sqrt{3}}{2}x+\frac{3}{2}\sqrt{3}$,

令 $x=0$,得 $y=\frac{3}{2}\sqrt{3}$,$\therefore OC=\frac{3}{2}\sqrt{3}$,

$\therefore S_{\triangle AOC}=\frac{1}{2}OC\cdot OD=\frac{1}{2}\times\frac{3}{2}\sqrt{3}\times 1=\frac{3}{4}\sqrt{3}$.

点拨: 过点 A 作 x 轴的垂线是求点 A 的坐标及 $\triangle AOC$ 面积的重要步骤,本题也可过点 A 作 y 轴的垂线.

3 三角函数的计算

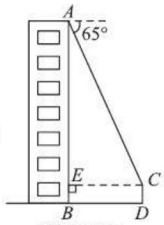
【两年模拟兵法】

1. B **2.** A **3.** C **4.** D **5.** B **6.** 2.03

7. 2.6 m **点拨:** 如图,过点 C 作 $CE\perp AB$ 于点 E,则 $EC=BD=10$ m.

在 Rt$\triangle AEC$ 中,

$AE=EC\cdot\tan 65°\approx 21.45$(m). 故 $CD=AB-AE\approx 2.6$(m).



(第 7 题)

8. **解:** (1) ①sin 33° ≈ 0.544 6.

②sin 21°18′ ≈ 0.363 3.

③cos 31° ≈ 0.857 2. ④tan 71° ≈ 2.904 2.

(2) ①$\angle\alpha\approx 18°26'$. ②$\angle\alpha\approx 42°56'$. ③$\angle\alpha\approx 25°58'$.

9. **解:** 如图,过点 B 作 $BD\perp MN$,过点 C 作 $CE\perp MN$,垂足分别为 D,E.

设 $AN=x$ m,则 $BD=CE=x$ m.

在 Rt$\triangle MBD$ 中,$MD=x\cdot\tan 23°$ m.

在 Rt$\triangle MCE$ 中,$ME=x\cdot\tan 24°$ m.

$\because ME-MD=DE=BC$,

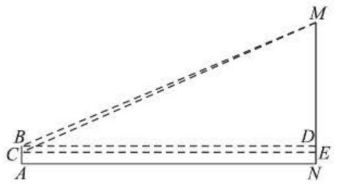
荣德基

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

$\therefore x\cdot\tan 24°-x\cdot\tan 23°=1.7-1$,

$\therefore x=\dfrac{0.7}{\tan 24°-\tan 23°}\approx 34$.

故“聚贤亭”与“乡思柳”之间的距离 AN 的长约为 34 m.



(第 9 题)

10. 解:在 Rt△ACE 中,

$\because \tan\angle CAE=\dfrac{CE}{AE}$,

$\therefore AE=\dfrac{CE}{\tan\angle CAE}=\dfrac{155}{\tan 82.4°}\approx\dfrac{155}{7.495}\approx 20.7$(cm).

在 Rt△DBF 中,$\because \tan\angle DBF=\dfrac{DF}{BF}$,

$\therefore BF=\dfrac{DF}{\tan\angle DBF}=\dfrac{234}{\tan 80.3°}\approx\dfrac{234}{5.850}=40$(cm).

$\therefore EF=AE+AB+BF\approx 20.7+90+40=150.7\approx 151$(cm).

$\because CE\perp EF, CH\perp DF, DF\perp EF$,

$\therefore$ 四边形 $CEFH$ 是矩形.

$\therefore CH=EF\approx 151$ cm.

答:高、低杠间的水平距离 CH 的长约为 151 cm.

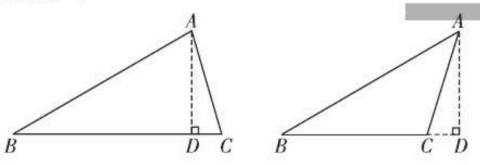
4 解直角三角形

【两年模拟兵法】

1. C **2.** A **3.** B

4. A **点拨**:由题意可得菱形的边长为 5 cm,又 $\cos A=\dfrac{AE}{AD}=\dfrac{4}{5}$,所以 $AE=4$ cm,所以 $DE=3$ cm,$EB=1$ cm,所以 $S_{菱形ABCD}=AB\cdot DE=5\times 3=15(\text{cm}^2)$,故①②③均正确.

5. $21\sqrt{3}$ 或 $15\sqrt{3}$ **点拨**:①如图①,过点 A 作 $AD\perp BC$,垂足为点 D,



(第 5 题)

在 Rt△ABD 中,$\because AB=12$,$\angle B=30°$,

$\therefore AD=\dfrac{1}{2}AB=6$,$BD=AB\cdot\cos B=12\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=6\sqrt{3}$,

在 Rt△ACD 中,$CD=\sqrt{AC^2-AD^2}=\sqrt{(\sqrt{39})^2-6^2}=\sqrt{3}$,

$\therefore BC=BD+CD=6\sqrt{3}+\sqrt{3}=7\sqrt{3}$,

$\therefore S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}\times BC\times AD=\dfrac{1}{2}\times 7\sqrt{3}\times 6=21\sqrt{3}$.

②如图②,过点 A 作 $AD\perp BC$,交 BC 延长线于点 D,

易得 $AD=6$,$BD=6\sqrt{3}$,$CD=\sqrt{3}$,

$\therefore BC=BD-CD=5\sqrt{3}$,

$\therefore S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}\times BC\times AD=\dfrac{1}{2}\times 5\sqrt{3}\times 6=15\sqrt{3}$.

故答案为 $21\sqrt{3}$ 或 $15\sqrt{3}$.

6. (1)**证明**:$\because AB=AD$,$\therefore\angle ABD=\angle ADB$.

又$\because\angle ABC=\angle ADC$,$\therefore\angle ABC-\angle ABD=\angle ADC-\angle ADB$,

即 $\angle CBD=\angle CDB$,$\therefore CB=CD$.

(2)**解**:$\because CB=CD$,$AB=AD$,$\therefore AC$ 垂直平分 BD,

$\therefore\angle AOD=90°$,$BO=DO$.

$\because\angle BCD=90°$,

$\therefore OC=OD=\dfrac{1}{2}BD$.

$\because AO=2OC$,$\therefore AO=2OD$,即$\dfrac{AO}{OD}=2$.

$\therefore$ 在 Rt△AOD 中,$\tan\angle ADO=\dfrac{AO}{OD}=2$.

7. 解:(1)如图,过点 C 作 $CE\perp AB$ 于 E,设 $CE=x$,

在 Rt△ACE 中,$\because\tan A=\dfrac{CE}{AE}=\dfrac{1}{2}$,$\therefore AE=2x$,

$\therefore AC=\sqrt{x^2+(2x)^2}=\sqrt{5}x$,

$\therefore\sqrt{5}x=3\sqrt{5}$,解得 $x=3$,$\therefore CE=3$,$AE=6$,

在 Rt△BCE 中,$\because\sin B=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$,$\therefore\angle B=45°$,

$\therefore$ △BCE 为等腰直角三角形,

$\therefore BE=CE=3$,$\therefore AB=AE+BE=9$.

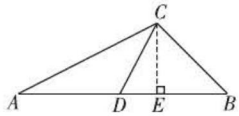
(2)$\because CD$ 为中线,$\therefore BD=\dfrac{1}{2}AB=4.5$,

$\therefore DE=BD-BE=4.5-3=1.5$,

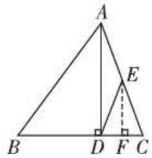
$\therefore\tan\angle CDE=\dfrac{CE}{DE}=\dfrac{3}{1.5}=2$,

即 $\tan\angle CDB$ 的值为 2.

点拨:本题考查解直角三角形. 在直角三角形中,由已知元素求未知元素的过程就是解直角三角形. 解决此类题目的关键是熟练应用勾股定理和锐角三角函数的定义.



(第 7 题)



(第 8 题)

8. 解:(1)$\because AD$ 是边 BC 上的高,$\therefore\angle BDA=90°$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

又∵ $AD=12$, $\sin B=\frac{AD}{AB}=\frac{4}{5}$,

∴ $AB=\frac{AD}{\sin B}=\frac{12}{\frac{4}{5}}=15$,

∴ $BD=\sqrt{AB^2-AD^2}=\sqrt{15^2-12^2}=9$,

∴ $DC=BC-BD=14-9=5$.

(2)如图,过点 E 作 $EF\perp DC$,垂足为点 F,则 $\angle EFC=90°$,

由题意得 $\angle ADC=90°$, ∴ $\angle EFC=\angle ADC$.

∵ $\angle C=\angle C$, ∴ $\triangle EFC\backsim\triangle ADC$. ∴ $\frac{CE}{CA}=\frac{CF}{CD}=\frac{EF}{AD}$.

∵ E 是 AC 的中点, $AD=12$, $DC=5$,

∴ $EF=\frac{1}{2}AD=6$, $CF=\frac{1}{2}DC=\frac{5}{2}$,

∴ $DF=DC-CF=\frac{5}{2}$.

在 Rt△DEF 中, $\angle EFD=90°$,

$\tan\angle EDC=\frac{EF}{DF}=\frac{6}{\frac{5}{2}}=\frac{12}{5}$.

9. **解**:(1)如图,过点 A 作 $AD\perp BC$ 于点 D,则 $\angle ADB=90°$. 在 Rt△ABD 中, $AD=AB\cdot\sin B\approx12$.

∴ 点 A 到 BM 的距离约为 12.

(2)②③ **点拨**:①以点 A 为圆心、13 为半径画圆,与 BM 有两个交点,故 BC 的长不能唯一确定;②由 $\tan\angle ACB=\frac{12}{5}$,知 $\angle ACB$ 的大小确定,在△ABC 中, $\angle ACB$, $\angle B$ 及边 AB 确定,此时的三角形唯一,故 BC 的长能唯一确定;③AB 的长度和△ABC 的面积均确定,则点 C 到 AB 的距离确定,即 BM 上的点 C 是唯一的,故 BC 的长能唯一确定.

(3)方案一 选条件②.

由(1)得 $AD\approx12$, $BD=AB\cdot\cos B\approx16$.

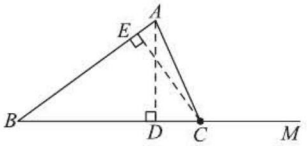
∵ $\angle ADC=90°$, $\tan\angle ACB=\frac{AD}{CD}$,

∴ $CD=\frac{AD}{\tan\angle ACB}\approx\frac{12}{\frac{12}{5}}=5$,

∴ $BC=BD+CD\approx21$.

方案二 选条件③.

如图,过点 C 作 $CE\perp AB$ 于点 E,则 $\angle BEC=90°$.



(第 9 题)

由 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}AB\cdot CE=126$,得 $CE=12.6$.

在 Rt△BEC 中, $\sin B=\frac{CE}{BC}$, ∴ $BC=\frac{CE}{\sin B}\approx21$.

5 三角函数的应用

【两年模拟兵法】

1. B **2.** B

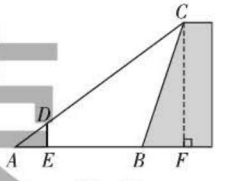
3. B **点拨**:如图,过点 C 作 $CF\perp AB$,交 AB 的延长线于 F,则 $DE\parallel CF$,

易得 $\frac{AD}{AC}=\frac{DE}{CF}$,即 $\frac{1}{5}=\frac{0.6}{CF}$,解得 $CF=3$ m,

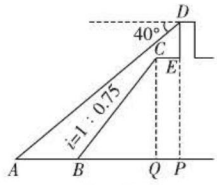
∴ 在 Rt△ACF 中, $AF=\sqrt{5^2-3^2}=4$(m).

又∵ $AB=3$ m, ∴ $BF=4-3=1$(m),

∴ 石坝的坡度为 $\frac{CF}{BF}=\frac{3}{1}=3$,故选 B.



(第 3 题)



(第 4 题)

4. A **点拨**:如图,延长 DE 交 AB 的延长线于点 P,作 $CQ\perp AP$ 于点 Q,易知四边形 $CEPQ$ 为矩形,

∴ $CE=PQ=2$ m, $CQ=PE$,

∵ $i=\frac{CQ}{BQ}=\frac{1}{0.75}=\frac{4}{3}$, ∴ 设 $CQ=4x$ m,则 $BQ=3x$ m,

由 $BQ^2+CQ^2=BC^2$ 可得 $(4x)^2+(3x)^2=10^2$,

解得 $x=2$ 或 $x=-2$(舍去),则 $CQ=PE=8$ m, $BQ=6$ m, ∴ $DP=DE+PE=11$ m,

在 Rt△ADP 中, ∵ $AP=\frac{DP}{\tan A}=\frac{11}{\tan 40°}\approx13.1$(m),

∴ $AB=AP-BQ-PQ\approx13.1-6-2=5.1$(m),故选 A.

5. A

6. B

7. 12

8. **解**:在 Rt△ABC 中, ∵ $AB=600$ m, $\alpha=75°$,

∴ $BC=AB\cdot\cos75°\approx600\times0.26=156$(m),

在 Rt△BDF 中, ∵ $BD=600$ m, $\beta=45°$,

∴ $DF=BD\cdot\sin45°=600\times\frac{\sqrt{2}}{2}\approx300\times1.41=423$(m),

易知四边形 $BCEF$ 是矩形, ∴ $EF=BC\approx156$ m,

∴ $DE=DF+EF\approx423+156=579$(m).

故 DE 的长约为 579 m.

点拨:本题考查解直角三角形的应用、锐角三角函数、矩形的性质等知识,解题的关键是学会利用直角三角形解决问题,属于中考常考题型.

9. **解**:(1)在 Rt△ABD 中, $AD=\frac{AB}{\tan\alpha}=\frac{30}{\sqrt{3}}=10\sqrt{3}$(米).

∴ 甲、乙两建筑物之间的距离 AD 为 $10\sqrt{3}$ 米.

(2)如图,作 $CE\perp AB$ 于点 E.

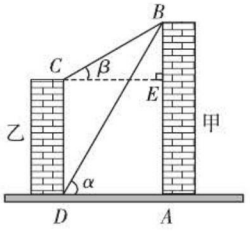
关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

易知 $AE=CD$，$CE=AD=10\sqrt{3}$ 米.

在 Rt△BCE 中，$BE=CE\cdot\tan\beta=10\sqrt{3}\times\frac{\sqrt{3}}{3}=10$（米），

则 $CD=AE=AB-BE=30-10=20$（米）.

故乙建筑物的高度 CD 为 20 米.



（第 9 题）

点拨：本题考查直角三角形中三角函数的应用，特殊角的三角函数值，本题中求得 AD 的长是解题的关键.

6 利用三角函数测高

【两年模拟兵法】

1. 解：设楼 CD 的高为 x m，由题意，得 $\angle DAC=37°$，$\angle DBC=53°$.

在 Rt△ACD 中，$\angle DCA=90°$，$\tan\angle DAC=\frac{DC}{AC}$，$\therefore AC=\frac{DC}{\tan\angle DAC}=\frac{x}{\tan 37°}$ m.

在 Rt△BCD 中，$\angle DCB=90°$，$\tan\angle DBC=\frac{DC}{BC}$，$\therefore BC=\frac{DC}{\tan\angle DBC}=\frac{x}{\tan 53°}$ m，又 $AB=AC-BC$，$\therefore 30=\frac{x}{\tan 37°}-\frac{x}{\tan 53°}$，解得 $x\approx 52.3$.

$\therefore$ 楼 CD 的高度约是 52.3 m.

2. 解：过点 B 作 CD 的垂线，垂足为 F，设 $CD=x$ m，则 $DF=(x-3)$ m，$BF=\frac{DF}{\tan 30°}=\sqrt{3}(x-3)$ m，$AC=AE+CE=18+\frac{CD}{\tan 60°}=18+\frac{\sqrt{3}}{3}x$（m），易知 $BF=AC$，即 $\sqrt{3}(x-3)=18+\frac{\sqrt{3}}{3}x$，

解得 $x=9\sqrt{3}+\frac{9}{2}$，即 CD 的高度为 $(9\sqrt{3}+\frac{9}{2})$ m.

3. 解：如图，过点 C 作 $CE\perp AB$ 于点 E，根据题意得，$CE=DB=9$ m，$\angle BCE=45°$，$\angle ACE=30°$，

在 Rt△ACE 中，$CE=9$ m，$\angle ACE=30°$，

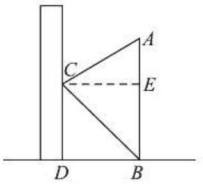
$\therefore AE=CE\tan\angle ACE=9\tan 30°=9\times\frac{\sqrt{3}}{3}=3\sqrt{3}$（m）.

在 Rt△BCE 中，$CE=9$ m，$\angle BCE=45°$，

$\therefore BE=CE\tan\angle BCE=9\tan 45°=9\times 1=9$（m）.

$\therefore AB=AE+BE=(3\sqrt{3}+9)$ m.

答：旗杆的高度为 $(3\sqrt{3}+9)$ m.



（第 3 题）

4. 解：在 Rt△CED 中，$\angle CED=58°$，

$\because\tan 58°=\frac{CD}{DE}$，

$\therefore DE=\frac{CD}{\tan 58°}=\frac{2}{\tan 58°}$ m.

在 Rt△CFD 中，$\angle CFD=22°$，

$\because\tan 22°=\frac{CD}{DF}$，

$\therefore DF=\frac{CD}{\tan 22°}=\frac{2}{\tan 22°}$ m.

$\therefore EF=DF-DE=\left(\frac{2}{\tan 22°}-\frac{2}{\tan 58°}\right)$ m.

同理得 $EF=BE-BF=\frac{AB}{\tan 45°}-\frac{AB}{\tan 70°}$.

$\therefore\frac{2}{\tan 22°}-\frac{2}{\tan 58°}=\frac{AB}{\tan 45°}-\frac{AB}{\tan 70°}$，解得 $AB\approx 5.9$ m.

$\therefore$ 建筑物 AB 的高度约为 5.9 m.

5. 解：如图，过点 D 作 $DH\perp BC$ 于点 H.

$\because$ 斜坡 BD 的坡度 $i=1:3$，

$\therefore BH:DH=3:1$，设 $DH=k$ m，则 $BH=3k$ m，由勾股定理可得 $BD=\sqrt{10}k$ m，

$\therefore\sin\angle DBH=\frac{DH}{BD}=\frac{k}{\sqrt{10}k}=\frac{\sqrt{10}}{10}$，$\cos\angle DBH=\frac{BH}{BD}=\frac{3k}{\sqrt{10}k}=\frac{3}{10}\sqrt{10}$.

$\therefore DH=BD\sin\angle DBH=60\sqrt{10}$ m，$BH=BD\cos\angle DBH=180\sqrt{10}$ m.

$\because\angle ADE=45°$，$\therefore AE=DE=CH$，

设 $AE=DE=CH=x$ m，

$\therefore BC=BH+CH=(180\sqrt{10}+x)$ m，$AC=AE+CE=AE+DH=(x+60\sqrt{10})$ m，

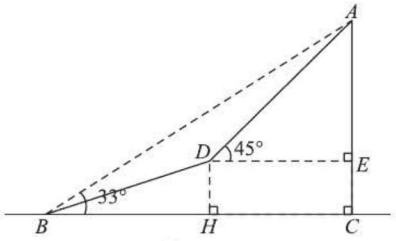
在 Rt△ABC 中，$AC=BC\tan 33°$，

$\therefore x+60\sqrt{10}=\tan 33°(180\sqrt{10}+x)$，

$\therefore x=\frac{180\sqrt{10}\tan 33°-60\sqrt{10}}{1-\tan 33°}$，

$\therefore AC=AE+CE=\frac{180\sqrt{10}\tan 33°-60\sqrt{10}}{1-\tan 33°}+60\sqrt{10}=\frac{120\sqrt{10}\tan 33°}{1-\tan 33°}$（m）.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料



(第5题)

6. 解:根据题意,得 $AD=BE=CF=1.5$ m,$AB=DE=7$ m,$\angle HDE=45°$,$\angle GEF=60°$,

$\angle HED=\angle GFD=90°$.

(1)在 Rt△DHE 中,

∵ $\angle HED=90°$,$\angle HDE=45°$,$DE=7$ m,

∴ $\tan\angle HDE=\dfrac{EH}{ED}$,即 $\tan 45°=\dfrac{EH}{7}$.

∴ $EH=7$ m.

∴ $BH=EH+BE=7+1.5=8.5$(m).

答:古树 BH 的高为 8.5 m.

(2)设 GF 的长为 x m,

在 Rt△DFG 中,

∵ $\angle GFD=90°$,$\angle HDE=45°$,

∴ $\tan\angle HDE=\dfrac{GF}{DF}$,即 $\tan 45°=\dfrac{x}{DF}$.

∴ $DF=x$ m. ∴ $EF=(x-7)$ m.

在 Rt△EFG 中,

∵ $\angle GFD=90°$,$\angle GEF=60°$,

∴ $\tan\angle GEF=\dfrac{GF}{EF}$,即 $\tan 60°=\dfrac{x}{x-7}$.

解得 $x=\dfrac{21+7\sqrt{3}}{2}\approx\dfrac{21+7\times1.7}{2}=16.45$.

∴ $CG=CF+FG\approx1.5+16.45\approx18.0$(m).

答:教学楼 CG 的高约为 18.0 m.

素养提分整合篇

【好题必解】

1. 解:如图,过点 A 作 $AD\perp BC$,垂足为点 D.

设 $BD=x$,在 Rt△ABD 中,$AD=BD\cdot\tan B=x\cdot\tan 60°=\sqrt{3}x$.

在 Rt△ACD 中,∵ $\angle C=45°$,

∴ $\angle CAD=90°-\angle C=45°$,

∴ $\angle C=\angle CAD$,∴ $CD=AD=\sqrt{3}x$.

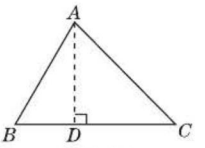
∵ $BC=1+\sqrt{3}$,

∴ $\sqrt{3}x+x=1+\sqrt{3}$,

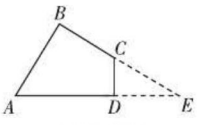
解得 $x=1$,即 $BD=1$.

在 Rt△ABD 中,∵ $\cos B=\dfrac{BD}{AB}$,

∴ $AB=\dfrac{BD}{\cos B}=\dfrac{1}{\cos 60°}=2$.



(第1题)



(第2题)

2. 解:如图,延长 AD,BC 交于点 E.

∵ $\angle A=60°$,$\angle B=90°$,

∴ $\angle E=30°$.

在 Rt△ABE 中,$\tan A=\dfrac{BE}{AB}$,∴ $BE=AB\tan A=4\sqrt{3}$,

由勾股定理得 $AE=8$,

∴ $DE=AE-AD=8-5=3$.

易得 $CD=\sqrt{3}$.

∴ $S_{四边形ABCD}=S_{\triangle ABE}-S_{\triangle CDE}$

$=\dfrac{1}{2}AB\cdot BE-\dfrac{1}{2}CD\cdot DE$

$=\dfrac{1}{2}\times4\times4\sqrt{3}-\dfrac{1}{2}\times\sqrt{3}\times3$

$=\dfrac{13}{2}\sqrt{3}$.

3. 解:如图,过点 C 作 $CE\perp AB$ 于点 E,易知四边形 $EBDC$ 为矩形,∴ $BE=CD$,$CE=BD=60$ m.

根据题意可得 $\angle ADB=48°$,$\angle ACE=37°$.

在 Rt△ADB 中,∵ $\angle ABD=90°$,$\tan\angle ADB=\dfrac{AB}{BD}$,

即 $\tan 48°=\dfrac{AB}{BD}$,

∴ $AB=BD\tan 48°\approx60\times\dfrac{11}{10}=66$(m).

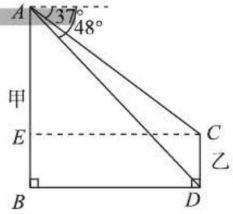
在 Rt△ACE 中,∵ $\angle AEC=90°$,$\tan\angle ACE=\dfrac{AE}{CE}$,

即 $\tan 37°=\dfrac{AE}{CE}$,

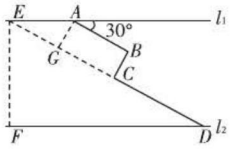
∴ $AE=CE\tan 37°\approx60\times\dfrac{3}{4}=45$(m),

∴ $CD=BE=AB-AE\approx66-45=21$(m).

∴ 乙楼的高度 CD 约为 21 m.



(第3题)



(第4题)

4. 解:如图,延长 DC 交 l_1 于点 E,过点 A 作 $AG\perp DE$ 于点 G,过点 E 作 $EF\perp l_2$ 于点 F.

易知四边形 $AGCB$ 是矩形,

∴ $GC=AB=20$ km,$AG=BC=10$ km.

荣德基

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

易知 $AB\parallel DE$，$\therefore\angle AEG=30°$，

$\therefore EG=\sqrt{3}AG=10\sqrt{3}$ km.

$\therefore DE=EG+GC+CD=10\sqrt{3}+20+30=50+10\sqrt{3}$(km).

$\because l_1\parallel l_2$，$\therefore\angle EDF=30°$，

$\therefore EF=\frac{1}{2}ED=(25+5\sqrt{3})$ km.

$\therefore$ 两条高速公路之间的距离为$(25+5\sqrt{3})$ km.

5. 解：在 Rt $\triangle ABE$ 中，$\angle BEA=90°$，$\angle BAE=45°$，$BE=20$ m，

$\therefore AE=20$ m.

在 Rt$\triangle BEF$ 中，$\angle BEF=90°$，$\angle F=30°$，$BE=20$ m，

$\therefore EF=\frac{BE}{\tan 30°}=\frac{20}{\frac{\sqrt{3}}{3}}=20\sqrt{3}$(m).

$\therefore AF=EF-AE=20\sqrt{3}-20\approx 20\times 1.732-20=14.64\approx 15$(m).

即 AF 的长度约是 15 m.

6. 解：如图，作 $CH\perp AD$ 于点 H. 设 $CH=x$ km，

在 Rt$\triangle ACH$ 中，$\angle A=37°$，$\tan 37°=\frac{CH}{AH}$，

$\therefore AH=\frac{CH}{\tan 37°}=\frac{x}{\tan 37°}$ km.

在 Rt$\triangle CEH$ 中，

$\because\angle CEH=45°$，$\therefore CH=EH=x$ km.

$\because CH\perp AD$，$BD\perp AD$，

$\therefore CH\parallel BD$，

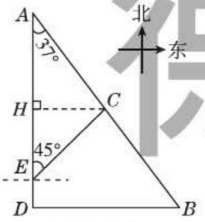
$\therefore\frac{AH}{HD}=\frac{AC}{CB}$.

$\because AC=CB$，$\therefore AH=HD$.

$\therefore\frac{x}{\tan 37°}=x+5$. $\therefore x\approx 15$.

$\therefore AE=AH+HE\approx\frac{15}{\tan 37°}+15\approx 35$(km)，

$\therefore E$ 处距离港口 A 约 35 km.



(第 6 题)

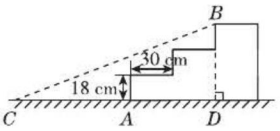
【第一章测试卷】

一、1. C　2. A　3. A　4. D　5. C　6. B　7. D　8. C

二、9. $\frac{1}{2}$　10. $3\sqrt{7}$

11. $(20\sqrt{3}-20)$

12. 210 cm　**点拨**：如图，过点 B 作 $BD\perp AC$，交 CA 的延长线于点 D，根据题意，坡度 $i=1:5$，$\therefore BD:CD=1:5$. $\therefore CD=5BD=5\times(18\times 3)=270$(cm). $\therefore AC=CD-AD=270-30\times 2=210$(cm)，即 AC 的长度是 210 cm.



(第 12 题)

三、13. **解**：原式$=2\times\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2-|\sqrt{3}-2|-1+4$

$=1-(2-\sqrt{3})-1+4$

$=\sqrt{3}+2$.

14. 解：(1) $\angle B=30°$，$a=12$，$b=4\sqrt{3}$.

(2) $\angle B=45°$，$b=3\sqrt{6}$，$c=6\sqrt{3}$.

15. 解：在 $\triangle ABE$ 中，$\because\angle AEB=90°$，$AB=5$，$\sin B=\frac{4}{5}$，

$\therefore BE=3$，$AE=4$.

$\therefore EC=BC-BE=8-3=5$.

$\because$ 四边形 $ABCD$ 为平行四边形，

$\therefore CD=AB=5$. $\therefore CD=EC$.

$\therefore\triangle CED$ 为等腰三角形.

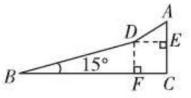
$\therefore\angle CDE=\angle CED$.

$\because AD\parallel BC$，$\therefore\angle ADE=\angle CED$. $\therefore\angle CDE=\angle ADE$.

在 Rt$\triangle ADE$ 中，$\because AE=4$，$AD=BC=8$，

$\therefore\tan\angle ADE=\frac{4}{8}=\frac{1}{2}$. $\therefore\tan\angle CDE=\frac{1}{2}$.

16. 解：如图，过 D 作 $DF\perp BC$ 于点 F，$DE\perp AC$ 于点 E.



(第 16 题)

$\because$ 沿坡比为 1：$\sqrt{3}$ 的坡面以 3 km/h 的速度到达山顶 A 点，

$\therefore\frac{AE}{DE}=\frac{1}{\sqrt{3}}$. $\therefore\angle ADE=30°$.

$\because BD=\frac{10}{60}\times 5=\frac{5}{6}$(km)，$AD=\frac{5}{60}\times 3=\frac{1}{4}$(km)，

$\therefore AC=AE+EC=AE+DF=AD\sin 30°+BD\sin 15°\approx\frac{1}{4}\times\frac{1}{2}+\frac{5}{6}\times 0.258\,8\approx 0.34$(km).

答：小山坡的高约为 0.34 km.

17. 解：(1) 由题意，得 $AB=60$ m，$\angle BCA=60°$，

$\angle BAC=90°$，

在 Rt$\triangle ABC$ 中，$\tan\angle BCA=\frac{AB}{AC}=\tan 60°=\sqrt{3}$，

$\therefore AC=\frac{60}{\sqrt{3}}=20\sqrt{3}$(m).

答：坡底 C 点到大楼距离 AC 的值为 $20\sqrt{3}$ m.

(2) 如图，过点 D 作 $DF\perp AB$，垂足为 F，

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

设 $DE=x$ m,在 Rt△CDE 中,∠$DCE=30°$,则 $CE=\sqrt{3}x$ m,$CD=2x$ m,

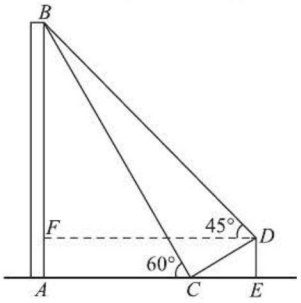
由题意得,$AE=DF=AC+CE=(20\sqrt{3}+\sqrt{3}x)$ m,$AF=DE=x$ m,

在 Rt△BDF 中,∠$BDF=45°$,则有 $BF=DF=(20\sqrt{3}+\sqrt{3}x)$ m.

由 $AB=AF+BF=60$ m,得 $60=20\sqrt{3}+\sqrt{3}x+x$,

解得 $x=40\sqrt{3}-60$,则 $CD=(80\sqrt{3}-120)$ m.

答:斜坡 CD 的长度为$(80\sqrt{3}-120)$ m.



(第 17 题)

第二章 二次函数

1 二次函数

【两年模拟兵法】

1. C **2.** B

3. B **点拨:**本题主要考查根据实际问题列二次函数表达式,关键是正确理解题意,找出题目中的等量关系,再列函数表达式.根据降价 x 元,知售价为$(60-x)$元,销售量为$(300+20x)$件,由题意可得等量关系为总销售额=销售量×售价,根据等量关系列出函数表达式即可.

4. $S=\frac{1}{2}t^2$;$0\leqslant t\leqslant 3$

5. $y=2x^2-4x+4$

点拨:易证△AHE≌△BEF,

∴ $AH=BE$.

∵ $AE=x$,∴ $AH=BE=2-x$.

在 Rt△AHE 中,由勾股定理得

$EH^2=AE^2+AH^2=x^2+(2-x)^2=2x^2-4x+4$,

即 $y=2x^2-4x+4$.

故答案为 $y=2x^2-4x+4$.

6. $S=-3x^2+24x$;$\frac{14}{3}\leqslant x<8$

点拨:本题考查根据实际问题列二次函数关系式,可先用 x 表示出 BC 的长,然后根据矩形的面积=长×宽,得出 S 与 x 的函数关系式.

7. **解:**(1)由题图知 y 与 x 是一次函数关系,设 $y=kx+b$,

∵ $y=kx+b$ 的图象过点(10,300),(12,240),

∴ $\begin{cases}10k+b=300,\\12k+b=240,\end{cases}$

解得 $\begin{cases}k=-30,\\b=600.\end{cases}$

∴ $y=-30x+600$.

当 $x=14$ 时,$y=180$,

当 $x=16$ 时,$y=120$,

即点(14,180),(16,120)均在函数 $y=-30x+600$ 的图象上.

∵ $-30x+600>0$ 且 $x>0$,

∴ $0<x<20$,

∴ y 与 x 之间的函数表达式为 $y=-30x+600(0<x<20$ 且 x 为整数).

(2)根据题意,得 $W=(x-6)(-30x+600)=-30x^2+780x-3\,600$,

即 W 与 x 之间的函数表达式为 $W=-30x^2+780x-3\,600(6\leqslant x<20$ 且 x 为整数).

8. **解:**(1)∵ 出发时间为 t s,点 P 的速度为 1 mm/s,点 Q 的速度为 2 mm/s,

∴ $PC=(6-t)$ mm,$CQ=2t$ mm,

∴ $S_1=\frac{1}{2}\times(6-t)\times 2t=-t^2+6t$,

即 $S_1=-t^2+6t(0<t<6)$.

(2)$S_2=S_{\triangle ABC}-S_1=\frac{1}{2}\times 12\times 6-(-t^2+6t)=t^2-6t+36$,

∴ $S_2=t^2-6t+36$.

2 二次函数的图象与性质

2.1 二次函数 $y=x^2$,$y=-x^2$ 的图象与性质

【两年模拟兵法】

1. B

2. A **点拨:**∵ $a<-1$,

∴ $a-1<a<a+1<0$.

∴ 这三个点都在函数 $y=-x^2$ 的图象的对称轴左侧,y 随 x 的增大而增大.

∴ $y_1<y_2<y_3$.

3. A **4.** 4. 5

5. $(-2,-4)$;4 **点拨:**∵ $AB\perp x$ 轴于点 B,且 $B(-2,0)$,

∴ A 点的横坐标为 -2,纵坐标为 $y=-(-2)^2=-4$.

∴ $A(-2,-4)$.

∴ $S_{\triangle AOB}=\frac{1}{2}\times 2\times 4=4$.

6. **解:**(1)依题意,得 $\begin{cases}k^2+k-4=2, & ①\\k+2<0, & ②\end{cases}$

由①得,$k_1=-3$,$k_2=2$. 由②得 $k<-2$,

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

$\therefore k = -3$.

(2)当 $k = -3$ 时,$y = -x^2$,列表:

x	…	-2	-1	0	1	2	…
y	…	-4	-1	0	-1	-4	…

描点并用光滑的曲线依次连接各点,即可得到函数 $y = -x^2$ 的图象,画图略.

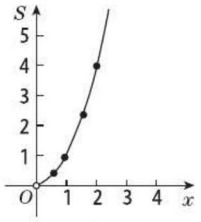
(3)该抛物线的对称轴为 y 轴,顶点坐标为(0,0).

7. 解:(1)根据题意得,$S = \frac{1}{2} \times 2 \times x^2 = x^2$,即 S 与 P 点横坐标之间的函数关系式为 $S = x^2 (x > 0)$.

(2)列表:

x	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	2	…
S	0	$\frac{1}{4}$	1	$\frac{9}{4}$	4	…

描点并连线,得到 S 关于 x 的函数图象,如图.



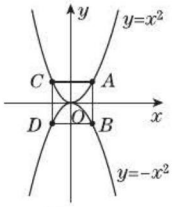
(第 7 题)

8. 解:(1)解方程组 $\begin{cases} y = x^2, \\ y = 2x, \end{cases}$ 得 $\begin{cases} x_1 = 0, \\ y_1 = 0, \end{cases}$ $\begin{cases} x_2 = 2, \\ y_2 = 4, \end{cases}$ 所以 A 点的坐标为(2,4).

(2)存在满足条件的点 P,其坐标共有四个,即 $(-2\sqrt{5},0)$,$(2\sqrt{5},0)$,(4,0),(5,0). 解法如下:当 $OA = OP$ 时,$\because OA = \sqrt{2^2 + 4^2} = 2\sqrt{5}$,$\therefore P$ 点的坐标为 $(-2\sqrt{5},0)$ 或 $(2\sqrt{5},0)$;当 $PA = AO$ 时,过点 A 作 $AQ \perp x$ 轴于点 Q,$\because PQ = OQ = 2$,$\therefore P$ 点的坐标为(4,0);当 $PA = PO$ 时,过点 P 作 $PM \perp AO$ 于点 M,易知 $\cos \angle AOP = \frac{\sqrt{5}}{5}$,$OM = \sqrt{5}$,则 $OP = \frac{OM}{\cos \angle AOP} = 5$,$\therefore$ 点 P 的坐标为(5,0).

9. 解:(1)如图,点 C 在 $y = x^2$ 的图象上,点 B,D 在 $y = -x^2$ 的图象上.

(2)如图,由(1)易知,$B(1,-1)$,$C(-1,1)$,$D(-1,-1)$,则 $BD = 2$. 根据 $y = x^2$ 与 $y = -x^2$ 的图象的对称性以及点 A,B,C,D 的坐标特征,可知四边形 $ABDC$ 为正方形,所以 $S_{四边形ABDC} = BD^2 = 4$.



(第 9 题)

2.2 二次函数 $y = ax^2$,$y = ax^2 + c$ 的图象与性质

1. D **2.** C **3.** C

4. D **点拨**:当 $a < 0$ 时,二次函数 $y = ax^2$ 的图象开口向下,顶点位于原点,而直线 $y = ax$ 经过第二、四象限,且直线 $y = ax$ 与抛物线 $y = ax^2$ 有两个交点,故选 D.

5. C

6. $y = x^2 - 2$ **点拨**:依题意,只要满足二次项系数为正数,顶点坐标为 $(0,k)$,$k < 0$ 即可,本题答案不唯一.

7. 4 m

8. 6 **点拨**:函数 $y_1 = \frac{1}{2}x^2 + 1$ 与 $y_2 = \frac{1}{2}x^2 - 1$ 的图象都可以看成是由函数 $y = \frac{1}{2}x^2$ 的图象平移得到的,当 x 取同一值时,相应的 y_1,y_2 满足 $y_1 - y_2 = 2$. 本题运用数形结合思想,题中所求图形的面积可以看成是宽为 2 个单位、长为 3 个单位的矩形的面积.

9. $2\sqrt{3}$

10. 解:把点 A 的坐标(2,0)和点 B 的坐标(0,2)分别代入 $y = kx + b$,得 $\begin{cases} 2k + b = 0, \\ b = 2, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} k = -1, \\ b = 2. \end{cases}$

$\therefore$ 一次函数的表达式为 $y = -x + 2$. 设点 P 的坐标为 (x_1,y_1),点 Q 的坐标为 (x_2,y_2),则 $y_1 = ax_1^2$,$y_2 = ax_2^2$,且 $y_1 : y_2 = 1 : 4$,

$\therefore y_2 = 4y_1$,$ax_2^2 : ax_1^2 = 1 : 4$. $\therefore x_1 : x_2 = (\pm 1) : 2$.

又点 Q 在第二象限,点 P 在第一象限,

$\therefore x_1 : x_2 = -1 : 2$. $\therefore x_2 = -2x_1$.

$\therefore$ 点 Q 的坐标为 $(-2x_1, 4y_1)$.

把 P,Q 两点的坐标分别代入 $y = -x + 2$,

得 $\begin{cases} y_1 = -x_1 + 2, \\ 4y_1 = 2x_1 + 2, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} x_1 = 1, \\ y_1 = 1. \end{cases}$

$\therefore$ 点 P 的坐标为(1,1). 把点 P 的坐标(1,1)代入 $y = ax^2$,得 $a = 1$.

$\therefore$ 二次函数的表达式为 $y = x^2$.

11. 解:依题意可得,顶点 C 的坐标为(0,11).

设抛物线对应的函数表达式为 $y = ax^2 + 11$.

由抛物线的对称性可得 $B(8,8)$,

$\therefore 8 = 64a + 11$,解得 $a = -\frac{3}{64}$,

$\therefore$ 抛物线对应的函数表达式为 $y = -\frac{3}{64}x^2 + 11$.

2.3 二次函数 $y = a(x-h)^2$,$y = a(x-h)^2 + k$ 的图象与性质

【两年模拟兵法】

1. A **点拨**:此题主要考查了二次函数的性质,关键是熟记抛物线 $y = a(x-h)^2 + k$ 的顶点坐标是 (h,k),对称轴是直线 $x = h$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

2. D **点拨:**本题考查了二次函数的图象,解决本题的关键是明确二次函数 $y=a(x-h)^2$ 的图象的顶点坐标.

3. D

4. B **点拨:**把点 A 的坐标代入 $y_2=a(x-4)^2-3$,求出 a 的值,即可得到函数表达式,再利用二次函数的相关知识,结合勾股定理的逆定理分析得出答案.

5. A **点拨:**A. ∵ 抛物线的顶点坐标为(0,3.5),

∴ 可设抛物线的表达式为 $y=ax^2+3.5$.

由题易知篮圈中心坐标为(1.5,3.05),将它的坐标代入上式,得 $3.05=a\times1.5^2+3.5$,

$\therefore a=-\frac{1}{5}$.

$\therefore y=-\frac{1}{5}x^2+3.5$.

故本选项正确.

B. 由题知,篮圈中心的坐标是(1.5,3.05).

故本选项错误.

C. 由题知,此抛物线的顶点坐标是(0,3.5).

故本选项错误.

D. ∵ 在 $y=-\frac{1}{5}x^2+3.5$ 中,

当 $x=-2.5$ 时,

$y=-\frac{1}{5}\times(-2.5)^2+3.5=2.25$,

∴ 篮球出手处离地面 2.25 m.

故本选项错误.

6. **解:**(1)当 $x=0$ 时,$y=-x+2=2$,所以 $A(0,2)$. 把点 $A(0,2)$ 的坐标代入 $y=(x-1)^2+k$,得 $1+k=2$,所以 $k=1$. 所以 $B(1,1)$.

因为 $D(h,2-h)$,所以当 $x=h$ 时,$y=-x+2=-h+2=2-h$,所以点 D 在直线 l 上.

(2)$(m-1)^2+1$;$(m-h)^2+2-h$

由题意得 $(m-1)^2+1=(m-h)^2+2-h$,整理得 $2mh-2m=h^2-h$.

因为 $h>1$,所以 $h-1\neq0$. 所以 $m=\frac{h^2-h}{2h-2}=\frac{h}{2}$.

7. **解:**(1)如图.

(2)解 $\begin{cases}y=k,\\y=-(x-2)^2+1,\end{cases}$ 得 $\begin{cases}x=2+\sqrt{1-k},\\y=k,\end{cases}$

或 $\begin{cases}x=2-\sqrt{1-k},\\y=k.\end{cases}$

∵ $AB=4$,∴ $2\sqrt{1-k}=4$. ∴ $k=-3$.

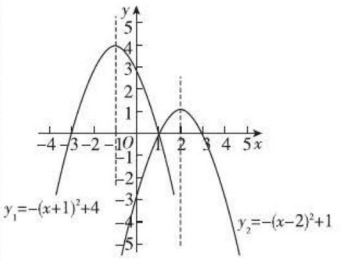
∵ 抛物线 $y_2=-(x-2)^2+1$ 的顶点坐标为(2,1),

∴ 抛物线 $y_2=-(x-2)^2+1$ 的顶点到线段 AB 的距离为4.

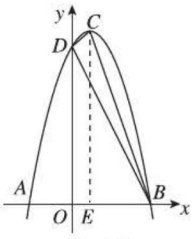
(3)由图可知,当 $-1<x<1$ 时,$y_1>y_2$;

当 $x=1$ 时,$y_1=y_2$;

当 $1<x<2$ 时,$y_1<y_2$.



(第7题)



(第8题)

8. **解:**(1)由抛物线的对称性知,它的对称轴是 $x=\frac{-2+4}{2}=1$.

∴ 抛物线的顶点为 $C(1,9)$.

设抛物线的表达式为 $y=a(x-1)^2+9$,把 B 点的坐标代入,求得 $a=-1$.

∴ 抛物线的表达式是 $y=-(x-1)^2+9$.

(2)如图,过 C 作 $CE\perp x$ 轴于 E 点. 在 $y=-(x-1)^2+9$ 中,当 $x=0$ 时,$y=8$,即抛物线与 y 轴的交点 D 的坐标为(0,8).

$\therefore S_{\triangle BCD}=S_{四边形DOEC}+S_{\triangle CEB}-S_{\triangle DOB}=\frac{1}{2}\times(8+9)\times1+\frac{1}{2}\times3\times9-\frac{1}{2}\times4\times8=6$.

2.4 二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图象与性质

【两年模拟兵法】

1. C **2.** D

3. A **点拨:**本题考查二次函数的性质、解不等式,解题关键是明确题意,列出相应的关系式.

根据抛物线 $y=x^2+bx+c$(其中 b,c 是常数)过点 $A(2,6)$,且抛物线的对称轴与线段 $y=0(1\leqslant x\leqslant3)$ 有交点,可以得到 c 的取值范围,从而可以解答本题.

4. B

5. C **点拨:**本题考查二次函数图象与系数的关系,解题的关键是能看懂图象,利用数形结合的思想解答. 由抛物线与 x 轴有两个交点得到 $b^2-4ac>0$,可判断①正确;根据对称轴是 $x=-1$,可得 $x=-2$,$x=0$ 时,对应函数值相等,所以 $4a-2b+c>0$,可判断③错误;根据 $-\frac{b}{2a}=-1$,得出 $b=2a$,再根据 $a+b+c<0$,可得 $\frac{1}{2}b+b+c<0$,所以 $3b+2c<0$,可判断②正确;$x=-1$ 时该二次函数取得最大值,据此可判断④正确.

6. **解:**(1)将 $A(-2,0)$、$O(0,0)$ 的坐标分别代入表达式 $y=-x^2+bx+c$,得 $\begin{cases}-4-2b+c=0,\\c=0,\end{cases}$

解得 $c=0$,$b=-2$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

所以二次函数表达式为 $y=-x^2-2x=-(x+1)^2+1$，所以顶点 B 的坐标为 $(-1,1)$.

(2)点 P 的坐标为 $(-1,1)$ 或 $(-1+\sqrt{2},-1)$ 或 $(-1-\sqrt{2},-1)$.

7. 解：(1)将点 $B(3,0)$，$C(0,3)$ 的坐标代入 $y=x^2+bx+c$ 中，

得 $\begin{cases}0=9+3b+c,\\3=c,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}b=-4,\\c=3.\end{cases}$

$\therefore$ 抛物线的表达式为 $y=x^2-4x+3$.

(2)设点 M 的坐标为 (m,m^2-4m+3)，设直线 BC 的表达式为 $y=kx+3$，把点 $B(3,0)$ 的坐标代入 $y=kx+3$ 中，

得 $0=3k+3$，解得 $k=-1$.

$\therefore$ 直线 BC 的表达式为 $y=-x+3$.

$\because MN/\!/y$ 轴，

$\therefore$ 点 N 的坐标为 $(m,-m+3)$.

$\because$ 抛物线的表达式为 $y=x^2-4x+3=(x-2)^2-1$，

$\therefore$ 抛物线的对称轴为直线 $x=2$.

$\therefore$ 由题意得点 $(1,0)$ 在抛物线上.

$\therefore 1<m<3$.

$\because MN=-m+3-(m^2-4m+3)$

$=-m^2+3m$

$=-\left(m-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{9}{4}$，

$\therefore$ 当 $m=\frac{3}{2}$ 时，线段 MN 取得最大值，最大值为 $\frac{9}{4}$.

(3)存在. 点 P 的坐标为 $\left(2,\frac{1}{2}\right)$、$\left(2,-\frac{\sqrt{14}}{2}\right)$、$\left(2,\frac{\sqrt{14}}{2}\right)$、$\left(2,\frac{3-\sqrt{17}}{2}\right)$ 或 $\left(2,\frac{3+\sqrt{17}}{2}\right)$.

8. 解：(1)$\because$ 当 $x=0$ 时，$y=2$，

$\therefore C(0,2)$.

当 $y=0$ 时，$-\frac{1}{2}x^2+\frac{3}{2}x+2=0$，

解得 $x_1=4$，$x_2=-1$.

$\therefore B(4,0)$，$A(-1,0)$.

(2)$\because$ 点 D 与点 C 关于 x 轴对称，

$\therefore D(0,-2)$.

设直线 BD 的表达式为 $y=kx+b$.

$\therefore \begin{cases}4k+b=0,\\b=-2.\end{cases}$ $\therefore \begin{cases}k=\frac{1}{2},\\b=-2.\end{cases}$

$\therefore y=\frac{1}{2}x-2$.

(3)$\because CD/\!/QM$，

$\therefore$ 当 $CD=QM$ 时四边形 $CQMD$ 是平行四边形.

$\because Q\left(m,-\frac{1}{2}m^2+\frac{3}{2}m+2\right)$，

$M\left(m,\frac{1}{2}m-2\right)$，

$\therefore QM=-\frac{1}{2}m^2+\frac{3}{2}m+2+2-\frac{1}{2}m=-\frac{1}{2}m^2+m+4$.

$\because CD=4$，

$\therefore -\frac{1}{2}m^2+m+4=4$，

解得 $m_1=0$，$m_2=2$.

$\because m=0$ 时，MQ 与 DC 重合，不能构成平行四边形，

$\therefore m=0$ 不符合题意，舍去.

$\therefore m=2$.

(4)①当 $\angle QBD=90°$，即 $QB\perp DB$ 时，

设直线 BQ 的表达式为 $y=-2x+b_1$，

将 $B(4,0)$ 的坐标代入得 $b_1=8$，

$\therefore y=-2x+8$.

$\because$ 点 Q 是直线 BQ 与抛物线的交点，

$\therefore -\frac{1}{2}x^2+\frac{3}{2}x+2=-2x+8$，

解得 $x_1=3$，$x_2=4$.

$\because B(4,0)$，$\therefore Q_1(3,2)$.

②当 $\angle QDB=90°$，即 $QD\perp DB$ 时，

设直线 QD 的表达式为 $y=-2x+b_2$，

将 $D(0,-2)$ 的坐标代入得 $b_2=-2$，

$\therefore y=-2x-2$.

$\because$ 点 Q 是直线 QD 与抛物线的交点，

$\therefore -\frac{1}{2}x^2+\frac{3}{2}x+2=-2x-2$，

解得 $x_1=8$，$x_2=-1$.

$\therefore Q_2(8,-18)$，$Q_3(-1,0)$.

综上所述，点 Q 的坐标为 $(3,2)$，$(8,-18)$ 或 $(-1,0)$.

3 确定二次函数的表达式

【两年模拟兵法】

1. C **点拨**：设抛物线所对应的函数表达式为 $y=a(x+2)^2+3$，把点 $(-1,5)$ 的坐标代入，得 $a=2$，$\therefore$ 抛物线所对应的函数表达式为 $y=2(x+2)^2+3$，即 $y=2x^2+8x+11$，故选 C.

2. D **点拨**：设其函数表达式为交点式，然后代入与 y 轴的交点坐标即可，故选 D.

3. D **点拨**：设抛物线的表达式为 $y=a(x-x_1)(x-x_2)$，因为其形状与抛物线 $y=-2x^2$ 相同，则 $a=-2$. 又抛物线与 x 轴的两个交点为 $(-1,0)$，$(3,0)$，则 $x_1=-1$，$x_2=3$，代入上式得该抛物线的函数表达式为 $y=-2(x+1)(x-3)=-2x^2+4x+6$，故选 D.

4. D **点拨**：设二次函数的表达式为 $y=ax^2+bx+c$，由函数图象的对称性，得 $(-1,-2)$，$(0,1)$，$(1,-2)$ 在函数图象上，把 $(-1,-2)$，$(0,1)$，$(1,-2)$ 代入函数表达式，得

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

$\begin{cases}a-b+c=-2,\\ c=1,\\ a+b+c=-2,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=-3,\\ b=0,\\ c=1,\end{cases}$ 所以函数表达式为 $y=-3x^2+1$,当 $x=2$ 时 $y=-11$,故选 D.

5. $y=2x^2-1$ **点拨:**∵ 抛物线的顶点坐标为$(0,-1)$,

∴ 可设该抛物线的表达式为 $y=ax^2-1$.

又二次函数的图象开口向上,

∴ $a>0$.

∴ 这个二次函数的表达式可以是 $y=2x^2-1$. 答案不唯一.

6. $y=-\frac{1}{2}x^2+3x$ 或 $y=\frac{1}{2}x^2-3x$ **点拨:**∵ 抛物线经过 $A(2,m)$,$B(4,m)$,∴ 对称轴是直线 $x=3$,$AB=2$.

∵ $\triangle AOB$ 的面积为 4,∴ $\frac{1}{2}AB\cdot|m|=4$. ∴ $m=\pm4$.

当 $m=4$ 时,则 $A(2,4)$,$B(4,4)$,

设抛物线的表达式为 $y=a(x-3)^2+h$,,把$(0,0)$和$(2,4)$代入得 $\begin{cases}9a+h=0,\\ a+h=4,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=-\frac{1}{2},\\ h=\frac{9}{2},\end{cases}$

∴ 抛物线的表达式为 $y=-\frac{1}{2}(x-3)^2+\frac{9}{2}=-\frac{1}{2}x^2+3x$.

当 $m=-4$ 时,则 $A(2,-4)$,$B(4,-4)$.

设抛物线的表达式为 $y=a_1(x-3)^2+h_1$,

把$(0,0)$和$(2,-4)$代入得 $\begin{cases}9a_1+h_1=0,\\ a_1+h_1=-4,\end{cases}$

解得 $\begin{cases}a_1=\frac{1}{2},\\ h_1=-\frac{9}{2},\end{cases}$

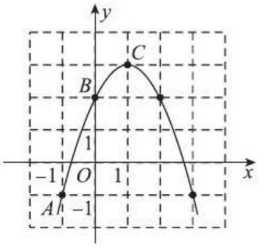
∴ 抛物线的表达式为 $y=\frac{1}{2}(x-3)^2-\frac{9}{2}=\frac{1}{2}x^2-3x$.

综上所述,抛物线的表达式为 $y=-\frac{1}{2}x^2+3x$ 或 $y=\frac{1}{2}x^2-3x$.

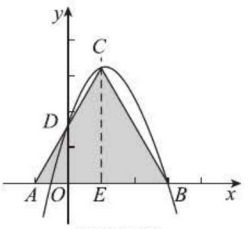
7. **解:**(1)根据题意,把点 $A(-1,1)$,$B(0,2)$,$C(1,3)$的坐标代入 $y=ax^2+bx+c$ 中,得 $\begin{cases}a-b+c=-1,\\ c=2,\\ a+b+c=3,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=-1,\\ b=2,\\ c=2,\end{cases}$

所以二次函数的表达式为 $y=-x^2+2x+2$.

(2)如图.



(第 7 题)



(第 8 题)

8. **解:**(1)如图,过点 C 作 $CE\perp AB$ 交 x 轴于点 E.

∵ $\triangle ABC$ 是正三角形,∴ $AB=AC=BC=4$. 又点 A 的坐标为$(-1,0)$,∴ 点 B 的坐标为$(3,0)$,点 E 的坐标为$(1,0)$.

∴ $AE=2$.

在 Rt$\triangle ACE$ 中,$CE=\sqrt{AC^2-AE^2}=2\sqrt{3}$,

∴ 点 C 的坐标为$(1,2\sqrt{3})$.

∵ $CE/\!/DO$,∴ $\frac{DO}{CE}=\frac{AO}{AE}$,∴ $DO=\sqrt{3}$. ∴ 点 D 的坐标为$(0,\sqrt{3})$.

(2)由抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 经过 B,C,D 三点,得

$\begin{cases}c=\sqrt{3},\\ a+b+c=2\sqrt{3},\\ 9a+3b+c=0.\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=-\frac{2}{3}\sqrt{3},\\ b=\frac{5}{3}\sqrt{3},\\ c=\sqrt{3}.\end{cases}$

∴ 抛物线的表达式为 $y=-\frac{2}{3}\sqrt{3}x^2+\frac{5}{3}\sqrt{3}x+\sqrt{3}$.

9. **解:**如图,过点 C 作 $CF\perp AD$ 于点 F,过点 B 作 $BE\perp CF$ 于点 E,连接 BC. 易知 $OF=BE=CE=2$ m,$EF=OB=1.5$ m,$CF=2+1.5=3.5$(m),∴ $B(0,1.5)$,$C(2,3.5)$.

设抛物线所对应的函数表达式为 $y=a(x-2)^2+3.5$,

当 $x=0$ 时,有 $a(0-2)^2+3.5=1.5$,解得 $a=-\frac{1}{2}$,

∴ 抛物线所对应的函数表达式为 $y=-\frac{1}{2}(x-2)^2+3.5$.

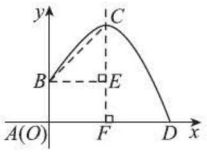
令 $y=0$,则 $-\frac{1}{2}(x-2)^2+3.5=0$,

解得 $x_1=2+\sqrt{7}$,$x_2=2-\sqrt{7}$(舍去).

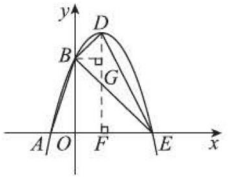
∴ 水流的落地点 D 到 A 的距离为$(2+\sqrt{7})$m.

点拨:先求出抛物线所对应的函数表达式,再根据图形知点 D 在 x 轴上,要想求点 D 到点 A 的距离,只要令抛物线所对应的函数表达式中的 $y=0$,求出点 D 的横坐标即可.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料



（第9题）



（第10题）

10. 解：(1)∵ 抛物线与 y 轴交于点 $B(0,3)$，

∴ 设抛物线对应的函数表达式为 $y=ax^2+bx+3$.

根据题意，得 $\begin{cases}a-b+3=0,\\9a+3b+3=0.\end{cases}$

解得 $\begin{cases}a=-1,\\b=2.\end{cases}$

∴ 抛物线对应的函数表达式为 $y=-x^2+2x+3$.

(2)由顶点坐标公式得顶点坐标为 $D(1,4)$.

如图，过点 D 作 $DF\perp x$ 轴于点 F，

则 $S_{四边形ABDE}=S_{\triangle ABO}+S_{梯形BOFD}+S_{\triangle DFE}$

$=\frac{1}{2}AO\cdot BO+\frac{1}{2}(BO+DF)\cdot OF+\frac{1}{2}EF\cdot DF$

$=\frac{1}{2}\times1\times3+\frac{1}{2}\times(3+4)\times1+\frac{1}{2}\times2\times4=9.$

(3)相似. 证明如下：

如图，过点 B 作 $BG\perp DF$ 于点 G，则 $BD=\sqrt{BG^2+DG^2}=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$.

∵ $BE=\sqrt{BO^2+OE^2}=\sqrt{3^2+3^2}=3\sqrt{2}$，

$DE=\sqrt{DF^2+EF^2}=\sqrt{4^2+2^2}=2\sqrt{5}$，

∴ $BD^2+BE^2=20$，$DE^2=20$，∴ $BD^2+BE^2=DE^2$.

∴ $\triangle BDE$ 是直角三角形.

∴ $\angle AOB=\angle DBE=90°$. 又∵ $\frac{AO}{BD}=\frac{BO}{BE}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，

∴ $\triangle AOB\backsim\triangle DBE$.

4 二次函数的应用

【两年模拟兵法】

1. B **点拨：**本题考查二次函数的应用，求出抛物线的表达式是解题的关键. 由题意，抛物线的表达式为 $y=at(t-9)$，把(1,8)代入可得 $a=-1$，可得 $y=-t^2+9t=-(t-4.5)^2+20.25$，由此即可一一判断.

2. C **点拨：**本题主要考查了二次函数的应用，正确设出抛物线的表达式是解题的关键. 首先设抛物线的表达式为 $y=ax^2$，再得出抛物线上一点为(2，-2)，进而求出 a 的值.

3. B **点拨：**根据题意知，抛物线 $y=ax^2+bx+c(a\neq0)$ 经过点(0,54.0)，(40,46.2)，(20,57.9)，

则 $\begin{cases}c=54.0,\\1\,600a+40b+c=46.2,\\400a+20b+c=57.9,\end{cases}$

解得 $\begin{cases}a=-0.0195,\\b=0.585,\\c=54.0.\end{cases}$

∴ $x=-\frac{b}{2a}=-\frac{0.585}{2\times(-0.0195)}=15.$

故选 B.

本题考查了二次函数的应用，此题也可以将所求得的抛物线表达式利用配方法求得顶点式方程，然后直接得到抛物线顶点坐标，由顶点坐标推知该运动员起跳后飞行到最高点时的水平距离.

4. B **点拨：**(1)当 $0\leqslant x\leqslant4$ 时，由题意可知，$y=S_{\triangle ABD}-S_{\triangle APQ}=\frac{1}{2}\times4\times4-\frac{1}{2}\cdot x\cdot x=-\frac{1}{2}x^2+8$；

(2)当 $4<x\leqslant8$ 时，$y=S_{\triangle BCD}-S_{\triangle CPQ}=\frac{1}{2}\times4\times4-\frac{1}{2}(8-x)\cdot(8-x)=-\frac{1}{2}(x-8)^2+8$，∴ y 与 x 之间的函数关系可以用两段二次函数图象表示，分析可知 B 选项符合.

5. 解：(1)依题意得 $\begin{cases}10m+n=166\,000,\\30m+n=178\,000,\end{cases}$

解得 $\begin{cases}m=600,\\n=160\,000.\end{cases}$

(2)①当 $0\leqslant t\leqslant20$ 时，设 $y=k_1t+b_1$，由图象得 $\begin{cases}b_1=16,\\20k_1+b_1=28,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}k_1=\frac{3}{5},\\b_1=16.\end{cases}$

∴ $y=\frac{3}{5}t+16$.

②当 $20<t\leqslant50$ 时，设 $y=k_2t+b_2$，由图象得 $\begin{cases}20k_2+b_2=28,\\50k_2+b_2=22,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}k_2=-\frac{1}{5},\\b_2=32.\end{cases}$

∴ $y=-\frac{1}{5}t+32$.

综上，$y=\begin{cases}\frac{3}{5}t+16(0\leqslant t\leqslant20),\\-\frac{1}{5}t+32(20<t\leqslant50).\end{cases}$

(3)由题得，$W=ya-mt-n$.

①当 $0\leqslant t\leqslant20$ 时，$W=10\,000\left(\frac{3}{5}t+16\right)-600t-160\,000=5\,400t$.

∵ $5\,400>0$，

∴ 当 $t=20$ 时，$W_{最大}=5\,400\times20=108\,000$.

②当 $20<t\leqslant50$ 时，$W=\left(-\frac{1}{5}t+32\right)(100t+8\,000)-600t-160\,000$

$=-20t^2+1\,000t+96\,000$

$=-20(t-25)^2+108\,500.$

荣德基

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

∵ $-20<0$,

∴ 抛物线的开口向下,

∴ 当 $t=25$ 时,$W_{最大}=108\ 500$.

∵ $108\ 500>108\ 000$,

∴ 当 $t=25$ 时,W 取得最大值,该最大值为 108 500.

答:该龙虾养殖大户将这批小龙虾放养 25 天后一次性出售所得利润最大,最大利润是 108 500 元.

6. 解:(1)由题可得活动区出口的宽度为 $(100-2x)$ m,

则其中一块绿化区的短边长为 $\frac{80-(100-2x)}{2}=(x-10)$ m,则 $y=60\times[100\times80-4x(x-10)]+50\times4x(x-10)$

$=-40x^2+400x+480\ 000$,

∵ $50\leqslant100-2x\leqslant60$,

∴ $20\leqslant x\leqslant25$.

∴ y 与 x 的函数表达式为 $y=-40x^2+400x+480\ 000(20\leqslant x\leqslant25)$.

(2)能. 要完成工程任务,则 $y=-40x^2+400x+480\ 000\leqslant469\ 000$,

化简并整理得,$(x-5)^2-300\geqslant0$,

解得 $x\geqslant10\sqrt{3}+5$ 或 $x\leqslant-10\sqrt{3}+5$(舍去),

∴ $10\sqrt{3}+5\leqslant x\leqslant25$.

∵ x 为整数,

∴ x 的可能取值为 23,24,25.

7. 解:(1)由题意,得 $\begin{cases}a-b+1=0,\\a+b+1=1,\end{cases}$

解得 $\begin{cases}a=-\frac{1}{2},\\b=\frac{1}{2}.\end{cases}$

∴ 抛物线的表达式为 $y=-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}x+1$.

(2)①由直线 $y=3x-1$ 与直线 $y=mx+2$ 互相垂直,得 $3m=-1$,即 $m=-\frac{1}{3}$.

②由题意易得直线 AB 的表达式为 $y=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$.

当 $PA\perp AB$ 时,PA 的表达式为 $y=-2x-2$.

∵ 点 P 是直线 PA 与抛物线的交点,联立得 $\begin{cases}y=-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}x+1,\\y=-2x-2,\end{cases}$

解得 $\begin{cases}x_1=-1,\\y_1=0,\end{cases}$(舍去) $\begin{cases}x_2=6,\\y_2=-14,\end{cases}$

即点 P 坐标为 $(6,-14)$.

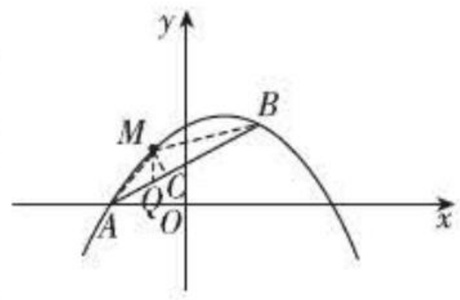
当 $PB\perp AB$ 时,PB 的表达式为 $y=-2x+3$,易得点 P 坐标为 $(4,-5)$.

综上所述,存在点 $P(6,-14)$ 或 $P(4,-5)$,使得 $\triangle PAB$ 是以 AB 为直角边的直角三角形.

(3)如图,连接 MA,MB.

设 $M\left(t,-\frac{1}{2}t^2+\frac{1}{2}t+1\right)$,过 M 作 $MQ\parallel y$ 轴,交 AB 于 Q,

则点 Q 坐标为 $\left(t,\frac{1}{2}t+\frac{1}{2}\right)$,



(第 7 题)

∴ $MQ=-\frac{1}{2}t^2+\frac{1}{2}$.

∵ $S_{\triangle MAB}=\frac{1}{2}MQ|x_B-x_A|=\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}t^2+\frac{1}{2}\right)\times2=-\frac{1}{2}t^2+\frac{1}{2}$,

∴ 当 $t=0$ 时,$S_{\triangle MAB}$ 取最大值 $\frac{1}{2}$.

易得 $AB=\sqrt{(1+1)^2+1^2}=\sqrt{5}$,过 M 作 $MC\perp AB$ 于 C,则 M 到直线 AB 的距离为 MC 的长,由三角形的面积得,MC 的最大值 $=\frac{1}{\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{5}}{5}$.

∴ 点 M 到直线 AB 的距离的最大值是 $\frac{\sqrt{5}}{5}$.

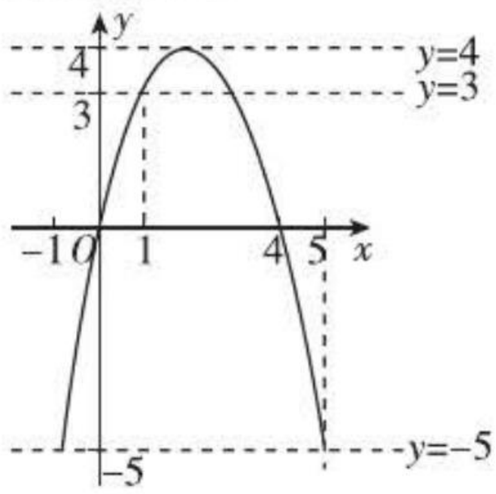
5 二次函数与一元二次方程

【两年模拟兵法】

1. C **2.** C

3. D **点拨**:如图,关于 x 的一元二次方程 $-x^2+mx-t=0$ 的解,就是抛物线 $y=-x^2+mx$ 与直线 $y=t$ 的交点的横坐标. 由题易知 $m=4$,∴ 当 $x=1$ 时,$y=3$;当 $x=5$ 时,$y=-5$;当 $x=2$ 时,$y=4$. 由图象可知,要使关于 x 的一元二次方程 $-x^2+mx-t=0$(t 为实数)在 $1<x<5$ 的范围内有解,则直线 $y=t$ 在直线 $y=-5$ 和直线 $y=4$ 之间,且包括直线 $y=4$,

∴ $-5<t\leqslant4$,故答案为 D.



(第 3 题)

4. A **点拨**:本题考查了二次函数的图象与 x 轴的交点问题、一元二次方程的解,正确理解题意是解题的关键. 二次函数 $y=ax^2+1$ 的图象经过点 $(-2,0)$,得到 $4a+1=0$,求得 $a=-\frac{1}{4}$,代入方程 $a(x-2)^2+1=0$ 求解即可得到结论.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

5. B　**点拨:**本题考查二次函数的图象与性质.

6. B

7. (1)**证明:**$y=(x-m)^2-(x-m)=x^2-(2m+1)x+m^2+m$.

$\because \Delta=(2m+1)^2-4(m^2+m)=1>0$,

$\therefore$ 不论 m 为何值,该抛物线与 x 轴一定有两个公共点.

(2)**解:**①$\because$ 抛物线的对称轴为直线

$x=-\dfrac{-(2m+1)}{2}=\dfrac{5}{2}$,

$\therefore m=2$,

$\therefore$ 抛物线对应的函数表达式为 $y=x^2-5x+6$.

②设抛物线沿 y 轴向上平移 k 个单位长度后,得到的抛物线与 x 轴只有一个公共点,则平移后抛物线对应的函数表达式为 $y=x^2-5x+6+k$.

$\because$ 抛物线 $y=x^2-5x+6+k$ 与 x 轴只有一个公共点,

$\therefore \Delta=5^2-4\times(6+k)=0$,解得 $k=\dfrac{1}{4}$.

即把该抛物线沿 y 轴向上平移$\dfrac{1}{4}$个单位长度后,得到的抛物线与 x 轴只有一个公共点.

点拨:(1)也可以用求解法来证明;

(2)②也可以用平移顶点法求解.

8. **解:**(1)$\because$ 二次函数 $y=x^2+bx+c$ 的图象经过 $A(-3,0)$,$D(-2,-3)$,

$\therefore \begin{cases}9-3b+c=0,\\4-2b+c=-3,\end{cases}$

解得$\begin{cases}b=2,\\c=-3.\end{cases}$

$\therefore$ 抛物线的表达式为 $y=x^2+2x-3$.

(2)$\because$ 抛物线的对称轴为 $x=-1$,点 D 坐标为$(-2,-3)$,点 C 坐标为$(0,-3)$,$\therefore$ C,D 关于对称轴对称.

连接 AC,AC 与对称轴的交点,就是 $PA+PD$ 取最小值时的点 P. 此时 $PA+PD=PA+PC=AC=\sqrt{OA^2+OC^2}=\sqrt{3^2+3^2}=3\sqrt{2}$.

(3)设点 N 的坐标为(m,m^2+2m-3),

令 $y=0$,则 $x^2+2x-3=0$,

$\therefore x=-3$ 或 1,

$\therefore$ 点 B 的坐标为$(1,0)$,

$\therefore AB=4$.

$\because S_{\triangle ABN}=6$,

$\therefore \dfrac{1}{2}\times4\times|m^2+2m-3|=6$,

$\therefore m^2+2m=0$ 或 $m^2+2m-6=0$,

$\therefore m=0$ 或 -2 或 $-1+\sqrt{7}$或 $-1-\sqrt{7}$,

$\therefore$ 点 N 的坐标为$(0,-3)$或$(-2,-3)$或$(-1+\sqrt{7},3)$或$(-1-\sqrt{7},3)$.

素养提分整合篇

【好题必解】

1. **解:**$\because$ 直线 $y=\dfrac{1}{2}x-2$ 分别交 x 轴、y 轴于点 B,点 C,

$\therefore$ 点 B 坐标为$(4,0)$,点 C 坐标为$(0,-2)$.

又$\because$ 抛物线 $y=ax^2-\dfrac{3}{2}x+c$ 过 B,C 两点,

$\therefore \begin{cases}0=16a-6+c,\\-2=c,\end{cases}$解得$\begin{cases}a=\dfrac{1}{2},\\c=-2.\end{cases}$

$\therefore$ 该抛物线对应的函数表达式为 $y=\dfrac{1}{2}x^2-\dfrac{3}{2}x-2$.

2. **解:**(1)由二次函数 $y=ax^2+bx+c(a\neq0)$ 的图象可知,抛物线与 x 轴交于$(1,0)$,$(3,0)$两点,则 $x_1=1$,$x_2=3$ 是方程 $ax^2+bx+c=0$ 的两个根.

(2)求不等式 $ax^2+bx+c>0$ 的解集,就是求 $y>0$ 的解集,由题图可知 $1<x<3$.

(3)$\because a<0$,$\therefore$ 在对称轴的右侧,y 随 x 的增大而减小,即当 $x>2$ 时,y 随 x 的增大而减小.

(4)若方程 $ax^2+bx+c=k$ 有两个不相等的实数根,则函数图象与平行于 x 轴的直线有两个不同的交点,观察图象可知,当 $k<2$ 时,满足条件.

3. **解:**(1)由题意得,点 C 的坐标为$(2,2\sqrt{3})$.

设抛物线的表达式为 $y=a(x-4)^2+m(a\neq0)$.

由抛物线经过点 $O(0,0)$,$C(2,2\sqrt{3})$,

可得$\begin{cases}16a+m=0,\\4a+m=2\sqrt{3},\end{cases}$解得$\begin{cases}a=-\dfrac{\sqrt{3}}{6},\\m=\dfrac{8\sqrt{3}}{3}.\end{cases}$

$\therefore$ 抛物线的表达式为 $y=-\dfrac{\sqrt{3}}{6}(x-4)^2+\dfrac{8\sqrt{3}}{3}$.

设直线 AC 的表达式为 $y=kx+b(k\neq0)$.

由直线 AC 过点 $A(-4,0)$,$C(2,2\sqrt{3})$,

可得$\begin{cases}-4k+b=0,\\2k+b=2\sqrt{3},\end{cases}$解得$\begin{cases}k=\dfrac{\sqrt{3}}{3},\\b=\dfrac{4\sqrt{3}}{3}.\end{cases}$

$\therefore$ 直线 AC 的表达式为 $y=\dfrac{\sqrt{3}}{3}x+\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$.

对于 $y=\dfrac{\sqrt{3}}{3}x+\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$,令 $x=4$,则 $y=\dfrac{8\sqrt{3}}{3}$,

$\therefore$ 点 E 的坐标为$(4,\dfrac{8\sqrt{3}}{3})$.

把 $x=4$ 代入抛物线的表达式,

得 $y=-\dfrac{\sqrt{3}}{6}\times(4-4)^2+\dfrac{8\sqrt{3}}{3}=\dfrac{8\sqrt{3}}{3}$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

∴此抛物线一定过点 E.

(2)由题意知,(1)中的抛物线与 x 轴的另一个交点为 $N(8,0)$.

设点 M 的坐标为 (x,y),过点 M 作 $MG\perp x$ 轴于点 G,如图,

则 $S_{\triangle CMN}=S_{\triangle MGN}+S_{四边形MGBC}-S_{\triangle BCN}$

$$=\frac{1}{2}(8-x)y+\frac{1}{2}(y+2\sqrt{3})(x-2)-\frac{1}{2}\times(8-2)\times 2\sqrt{3}$$

$$=3y+\sqrt{3}x-8\sqrt{3}$$

$$=3\left[-\frac{\sqrt{3}}{6}(x-4)^2+\frac{8\sqrt{3}}{3}\right]+\sqrt{3}x-8\sqrt{3}$$

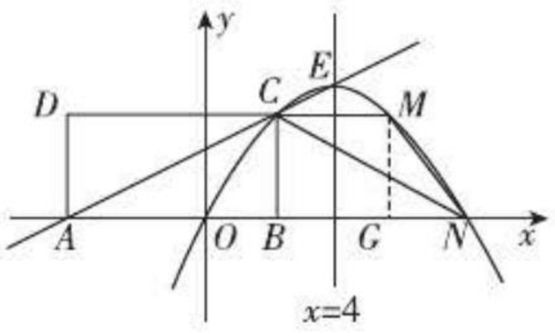
$$=-\frac{\sqrt{3}}{2}x^2+5\sqrt{3}x-8\sqrt{3}$$

$$=-\frac{\sqrt{3}}{2}(x-5)^2+\frac{9\sqrt{3}}{2}.$$

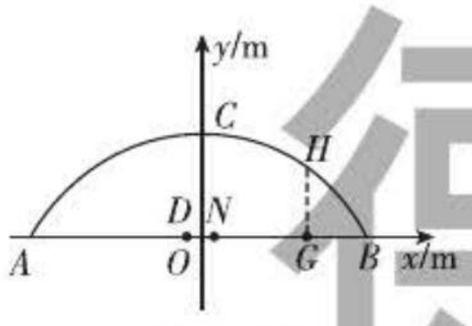
∵ $2<x<8$,

∴ 当 $x=5$ 时,$S_{\triangle CMN}$ 有最大值,且最大值为 $\frac{9\sqrt{3}}{2}$.

故 $\triangle CMN$ 面积的最大值为 $\frac{9\sqrt{3}}{2}$.



(第3题)



(第4题)

4. 解:(1)建坐标系方法不唯一. 以 AB 所在直线为横轴,AB 的垂直平分线为纵轴,建立如图的平面直角坐标系,则 A,B,C 三点的坐标分别是 $(-10,0)$,$(10,0)$,$(0,6)$.

由此设抛物线对应的函数表达式为 $y=ax^2+6$ $(a\neq 0)$,将点 B 的坐标代入,得 $100a+6=0$,

解得 $a=-\frac{3}{50}$.

∴抛物线所对应的函数表达式是 $y=-\frac{3}{50}x^2+6$.

(2)可设点 F 坐标为 $(5,y_F)$,于是 $y_F=-\frac{3}{50}\times 5^2+6=4.5$.

∴支柱 EF 的长度是 $10-4.5=5.5$(m).

(3)能. 理由:如图,设 DN 为隔离带的宽,NG 是三辆汽车的宽度和,则易得点 G 的坐标是 $(7,0)$.

过点 G 作 $GH\perp AB$,交抛物线于点 H,则 $y_H=-\frac{3}{50}\times 7^2+6=3.06>3$.

故一条行车道能并排行驶宽 2 m、高 3 m 的三辆汽车.

【第二章测试卷】

一、1. B **2.** D **3.** B **4.** C **5.** D **6.** D **7.** B **8.** C

二、9. 8 **10.** ③④ **11.** 75 **12.** $y=\frac{1}{2}x-1$

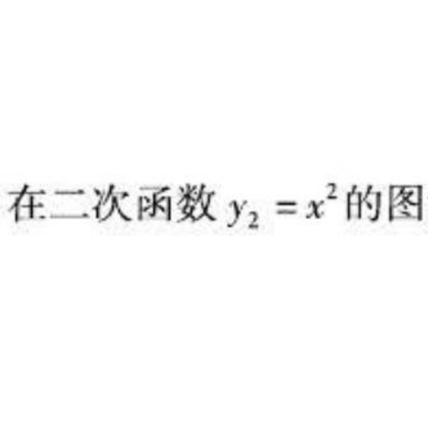
三、13. 解:(1)$y=x^2-4x+3=(x-2)^2-1$.

(2)对称轴为直线 $x=2$,顶点为 $(2,-1)$.

列表如下:

x	…	0	1	2	3	4	…
y	…	3	0	−1	0	3	…

描点、连线,如图.



(第13题)

(3)如图,点 C,D 的横坐标 x_1,x_2 即为方程 $x^2-4x+3=2$ 的两个根.

14. 解:(1)由图象可知:

$B(2,4)$ 在二次函数 $y_2=ax^2$ 的图象上,

∴ $4=a\cdot 2^2$.

∴ $a=1$.

∴ $y_2=x^2$.

又∵ $A(-1,n)$ 在二次函数 $y_2=x^2$ 的图象上,

∴ $n=(-1)^2$.

∴ $n=1$.

∴ $A(-1,1)$.

又∵ A,B 两点在一次函数 $y_1=kx+b$ 的图象上,

∴ $\begin{cases}1=-k+b,\\4=2k+b,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}k=1,\\b=2.\end{cases}$

∴ $y_1=x+2$.

∴一次函数的表达式为 $y_1=x+2$,

二次函数的表达式为 $y_2=x^2$.

(2)根据图象可知:当 $-1<x<2$ 时,$y_1>y_2$.

15. 解:(1)由题意知,抛物线的顶点为 $(4,4)$,经过点 $(0,\frac{20}{9})$.

设抛物线的表达式为 $y=a(x-4)^2+4$,

将 $(0,\frac{20}{9})$ 代入,解得 $a=-\frac{1}{9}$,

∴ $y=-\frac{1}{9}(x-4)^2+4$.

当 $x=7$ 时,$y=-\frac{1}{9}\times(7-4)^2+4=3$,

∴此球能准确投中.

(2)当 $x=1$ 时,

$y=-\frac{1}{9}\times(1-4)^2+4=3<3.1$,

荣基德 关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

∴ 他能获得成功.

16. 解:(1)由矩形的性质可知:点 B 坐标为 $(-8,6)$,

∴ 点 D 坐标为 $(-4,6)$.

∴ 点 D 关于 y 轴的对称点 D' 的坐标为 $(4,6)$.

将 $A(-8,0)$,$D(-4,6)$ 的坐标代入 $y=ax^2+bx$,得

$$\begin{cases}64a-8b=0,\\16a-4b=6,\end{cases}\quad\text{解得}\begin{cases}a=-\dfrac{3}{8},\\b=-3.\end{cases}$$

(2)连接 AD',AD' 与 y 轴的交点即为点 P. 设直线 AD' 的表达式为 $y=kx+n$,

$$\text{则}\begin{cases}-8k+n=0,\\4k+n=6,\end{cases}\text{解得}\begin{cases}k=\dfrac{1}{2},\\n=4.\end{cases}$$

∴ 直线 $y=\frac{1}{2}x+4$. ∵ 直线 AD' 与 y 轴交于点 $(0,4)$,

∴ 点 P 坐标为 $(0,4)$.

(3)由于 $OP=4$,故将抛物线向下平移 4 个单位长度时,有 OA_1+OD_1 最短.

由(1)得平移前抛物线表达式为 $y=-\frac{3}{8}x^2-3x$,

∴ 平移后的表达式为 $y=-\frac{3}{8}x^2-3x-4$.

第三章 圆

1 圆

【两年模拟兵法】

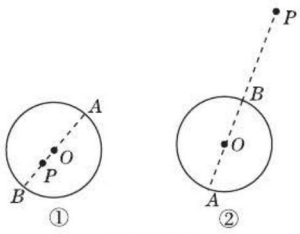
1. B **2.** C

3. A **点拨**:先求得 $\angle B$,再由等腰三角形的性质求出 $\angle BCD$,最后由 $\angle ACD$ 与 $\angle BCD$ 互余求解即可.

4. B

5. D **点拨**:若点 P 在⊙O 内,如图①,连接 OP 并向两端延长,交⊙O 于点 A,B,则最大距离 $PA=8$,最小距离 $PB=4$,∴ $AB=8+4=12$;若点 P 在⊙O 外,如图②,连接 OP 交⊙O 于点 B,延长 PO 交⊙O 于点 A,则最大距离 $PA=8$,最小距离 $PB=4$,∴ $AB=8-4=4$.

故选 D.



(第 5 题)

6. 证明:∵ OA,OB 是⊙O 的两条半径,

∴ $AO=BO$.

∵ $AC=BD$,

∴ $OC=OD$.

在△OCB 和△ODA 中,

$$\begin{cases}BO=AO,\\\angle O=\angle O,\\OC=OD,\end{cases}$$

∴ △OCB≌△ODA(SAS).

∴ $AD=BC$.

点拨:首先证明 $OC=OD$,再证明△OCB≌△ODA,进而得到 $AD=BC$.

7. 解:如图,连接 AD.

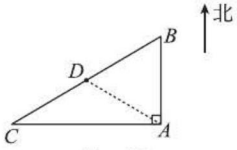
∵ $AB=300$ m,$AC=400$ m,

$\angle BAC=90°$,

∴ $BC=\sqrt{AC^2+AB^2}=\sqrt{400^2+300^2}=500$(m).

∵ D 是 BC 的中点,

∴ $AD=\frac{1}{2}BC=250$ m.



(第 7 题)

∵ 要使爆破对医院、民房和高压电线杆都没有影响,

∴ 爆破的影响半径应该控制在 250 m 以内.

8. 证明:∵ $OC\perp AB$,

∴ $\angle COF=\angle BOE=90°$.

又∵ $OC=OB$,$OF=OE$.

∴ △OCF≌△OBE.

∴ $\angle B=\angle C$.

又∵ $\angle C+\angle CFO=\angle COB=90°$,

∴ $\angle B+\angle CFO=\angle BGC=90°$.

∴ $BG\perp CF$.

9. 解:∵ 关于 x 的方程 $2x^2-4x+m-1=0$ 有实根,

∴ $(-4)^2-4\times2(m-1)=-8m+24\geqslant0$.

故 $m\leqslant3$. 又∵ ⊙O 的半径为 3,

∴ 点 P 在⊙O 内或⊙O 上.

10. (1)**证明**:如图,连接 OD,OE,则 $OD=OE$. 又 $\angle OCD=\angle OFE=90°$,$DC=EF$,

∴ Rt△ODC≌Rt△OEF(HL).

∴ $OC=OF$.

(2)**解**:如图,连接 OH.

∵ $CF=2$,$OC=OF$,

∴ $OF=1$,∴ $OH^2=OE^2=1^2+2^2=5$.

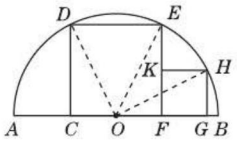
设 $FG=GH=x$,

则 $(x+1)^2+x^2=5$,

∴ $x^2+x-2=0$.

解得 $x_1=1$,$x_2=-2$(舍去).

∴ $S_{\text{正方形}FGHK}=1^2=1$.



(第 10 题)

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

2 圆的对称性

【两年模拟兵法】

1. B **点拨:** ∵ 在⊙O 中,$\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{AC}$,

∴ $AB=AC$. ∴ $\angle B=\angle C$.

又∵ $\angle A=30°$,

∴ $\angle B=\dfrac{180°-30°}{2}=75°$.

故选 B.

2. C **3.** 60°

4. **证明:** ∵ $AB=CD$,

∴ $\angle AOB-\angle BOC=\angle COD-\angle BOC$,

即 $\angle AOC=\angle DOB$.

5. **解:** 连接 OC.

∵ $\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{BC}$, $\angle AOB=60°$,

∴ $\angle BOC=\angle AOB=60°$.

∵ $OC=OD$,

∴ $\angle OCD=\angle ODC$.

∴ $\angle BDC=\dfrac{1}{2}\angle BOC=30°$.

6. **解:** $AE=BF$. 理由如下:

如图,连接 OC, OD.

∵ $\overset{\frown}{AC}=\overset{\frown}{BD}$, ∴ $\angle COE=\angle DOF$.

∵ $CE\perp AB$, $DF\perp AB$,

∴ $\angle CEO=\angle DFO=90°$.

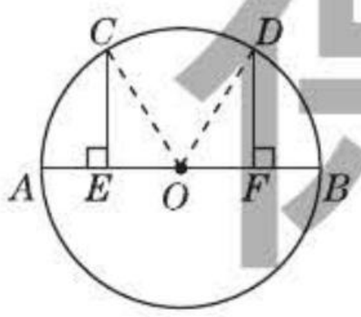
又∵ $OC=OD$,

∴ △OCE≌△ODF.

∴ $OE=OF$.

又∵ $OA=OB$,

∴ $AE=BF$.



(第6题)

7. **解:** (1) 在⊙O 中, ∵ $\overset{\frown}{AD}=\overset{\frown}{BC}$,

∴ $\angle AOD=\angle BOC$.

又∵ AB 是⊙O 的直径, $\angle COD=60°$.

∴ $\angle AOD=\angle BOC=60°$.

∵ AB, CE 是⊙O 的直径,

∴ $\angle AOE=\angle BOC=60°$.

∴ 与 $\angle AOE$ 相等的圆心角有 $\angle AOD$, $\angle DOC$, $\angle BOC$.

(2) 由(1)易知, $AE=AD=DC=BC$,

∴ 与 AE 相等的弦有 AD, DC, BC.

8. **证明:** 连接 AF.

∵ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形,

∴ $AD/\!/BC$.

∴ $\angle GAE=\angle B$, $\angle EAF=\angle AFB$.

∵ $AB=AF$, ∴ $\angle B=\angle AFB$.

∴ $\angle GAE=\angle EAF$.

∴ $\overset{\frown}{GE}=\overset{\frown}{EF}$. ∴ $\overset{\frown}{GF}=2\overset{\frown}{GE}$.

9. **证明:** 连接 OB, OF, 如图.

∵ A, B, C, D, E, F 是⊙O 的六等分点,

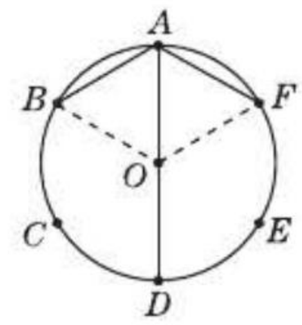
∴ AD 是⊙O 的直径,

$\angle AOB=\angle AOF=60°$,

易知△AOB, △AOF 是等边三角形.

∴ $AB=AF=AO=OD$.

∴ $AB+AF=AD$.



(第9题)

10. **解:** $\overset{\frown}{AD}$的度数是$\overset{\frown}{CB}$度数的3倍. 证明:如图,连接 OC, OD.

∵ $OC=OD$,

∴ $\angle D=\angle C$.

∵ $OP=PC$, ∴ $\angle C=\angle COP$.

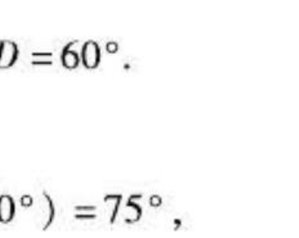
∴ $\angle D=\angle C=\angle COP$.

又∵ $\angle AOD=\angle DPO+\angle D$, $\angle DPO=\angle C+\angle COP$,

∴ $\angle AOD=\angle C+\angle COP+\angle D=3\angle COP$.

∴ $\overset{\frown}{AD}$的度数是$\overset{\frown}{CB}$度数的3倍.

点拨: 判断两条弧的度数的关系,可以考虑先判断两条弧所对圆心角的关系.



(第10题)

11. **解:** (1) 连接 OD, OC.

∵ $\overset{\frown}{BC}=3\overset{\frown}{AD}$, $\overset{\frown}{CD}=2\overset{\frown}{AD}$,

∴ $\angle BOC=3\angle AOD$, $\angle COD=2\angle AOD$.

∵ $\angle BOC+\angle COD+\angle AOD=180°$,

∴ $\angle AOD=30°$, $\angle BOC=90°$, $\angle COD=60°$.

∵ $OA=OD$, $OC=OB$,

∴ $\angle DAB=\angle ADO=\dfrac{1}{2}\times(180°-30°)=75°$,

$\angle ABC=\angle BCO=\dfrac{1}{2}\times(180°-90°)=45°$.

(2) ①若$\overset{\frown}{AD}<\overset{\frown}{CB}$, 则 $\angle DAB>\angle ABC$;

②若$\overset{\frown}{AD}=\overset{\frown}{CB}$, 则 $\angle DAB=\angle ABC$;

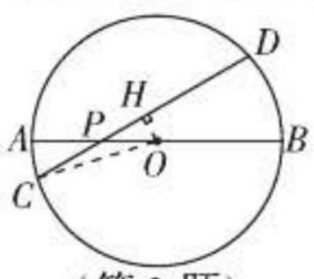
③若$\overset{\frown}{AD}>\overset{\frown}{CB}$, 则 $\angle DAB<\angle ABC$.

* 3 垂径定理

【两年模拟兵法】

1. A

2. C **点拨:** 作 $OH\perp CD$ 于 H, 连接 OC, 如图. 根据垂径定理,由 $OH\perp CD$ 得到 $HC=HD$, 再利用 $AP=2$, $BP=6$, 可计算出半径 $OA=4$, 则 $OP=OA-AP=2$. 接着在 Rt△OPH中,根据含30°角的直角三角形的性质,计算出 $OH=\dfrac{1}{2}OP=1$, 然后在Rt△OHC中,利用勾股定理计算出 $CH=\sqrt{15}$, 所以$CD=2CH=2\sqrt{15}$.



(第2题)

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

3. B　**点拨：**由垂线段最短可知，当 $OM \perp AB$ 时最短，当 OM 是半径时最长，根据垂径定理求最短长度.

4. C　**点拨：**设 $\odot O$ 的半径为 r 寸.

在 $\mathrm{Rt}\triangle ADO$ 中，$AD=5$ 寸，$OD=(r-1)$ 寸，$OA=r$ 寸，

则有 $r^2=5^2+(r-1)^2$，

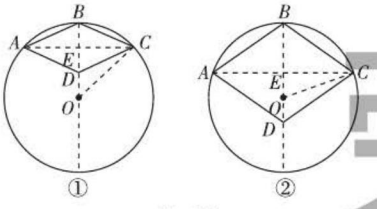
解得 $r=13$，

$\therefore \odot O$ 的直径为 26 寸.

5. D　**点拨：**过点 B 作 $\odot O$ 的直径，连接 AC 交 BO 于点 E.

$\because$ 点 B 为 $\overset{\frown}{AC}$ 的中点，$\therefore BD \perp AC$.

如图①，



（第 5 题）

$\because$ 点 D 恰在该圆直径的三等分点上，

$\therefore BD=\frac{1}{3}\times 2\times 3=2$.

$\therefore OD=OB-BD=1$.

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是菱形，

$\therefore DE=\frac{1}{2}BD=1$. $\therefore OE=2$.

连接 OC，$\because CE=\sqrt{OC^2-OE^2}=\sqrt{5}$，

$\therefore CD=\sqrt{DE^2+CE^2}=\sqrt{6}$.

如图②，$BD=\frac{2}{3}\times 2\times 3=4$.

$\therefore OD=1$，$DE=2$. $\therefore OE=1$.

连接 OC，

$\because CE=\sqrt{OC^2-OE^2}=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$，

$\therefore CD=\sqrt{DE^2+CE^2}=2\sqrt{3}$.

故选 D.

6. **证明：**过点 O 作 $OM \perp AB$ 于点 M，则 $AM=BM$.

又$\because OE=OF$，$\therefore EM=FM$.

$\therefore AE=BF$.

7. (1) **证明：**连接 AC，如图.

$\because$ 直径 $AB \perp$ 弦 CD 于点 E，

$\therefore CE=DE$，即 AB 是 CD 的垂直平分线.

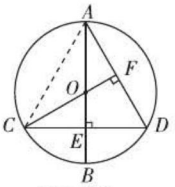
$\therefore AC=AD$.

$\because$ 过圆心 O 的线段 $CF \perp AD$，

$\therefore AF=DF$，即 CF 是 AD 的垂直平分线.

$\therefore AC=CD$. $\therefore AC=AD=CD$，

即 $\triangle ACD$ 是等边三角形.



（第 7 题）

$\therefore \angle FCD=30°$.

$\therefore$ 在 $\mathrm{Rt}\triangle COE$ 中，$OE=\frac{1}{2}OC$.

$\therefore OE=\frac{1}{2}OB$. $\therefore E$ 是 OB 的中点.

(2) **解：**$\because AB=8$，$\therefore OC=\frac{1}{2}AB=4$.

又$\because BE=OE$，$\therefore OE=2$.

$\therefore CE=\sqrt{OC^2-OE^2}=\sqrt{16-4}=2\sqrt{3}$.

$\therefore CD=2CE=4\sqrt{3}$.

8. **解：**当 AB，CD 在圆心 O 的异侧时，如图①，过点 O 作 $MN \perp AB$，分别交 AB，CD 于 M，N 两点. 连接 OA，OC.

$\because AB \parallel CD$，$\therefore ON \perp CD$.

由垂径定理，得 $AM=BM=\frac{1}{2}AB=5$ cm，

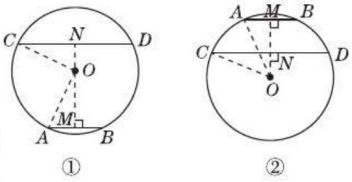
$CN=ND=\frac{1}{2}CD=12$ cm.

在 $\mathrm{Rt}\triangle AOM$ 和 $\mathrm{Rt}\triangle CON$ 中，由勾股定理，得

$OM=\sqrt{OA^2-AM^2}=\sqrt{13^2-5^2}=12(\mathrm{cm})$，

$ON=\sqrt{OC^2-CN^2}=\sqrt{13^2-12^2}=5(\mathrm{cm})$.

$\therefore MN=OM+ON=12+5=17(\mathrm{cm})$.



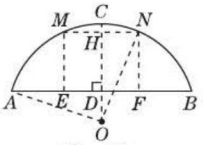
（第 8 题）

当 AB，CD 在圆心 O 的同侧时，如图②. 过点 O 作 $OM \perp AB$，$ON \perp CD$，由题易知，点 O，M，N 在同一直线上. 连接 OA，OC，同理可得 $OM=12$ cm，$ON=5$ cm.

$\therefore MN=OM-ON=12-5=7(\mathrm{cm})$.

综上所述，AB 与 CD 之间的距离为 17 cm 或 7 cm.

9. **解：**如图，设 M，N 为圆弧上两点，四边形 $MEFN$ 为矩形，且 $EF=MN=3$ m，设圆心为 O，连接 OA，ON，作 $OD \perp AB$ 于点 D，交圆 O 于点 C，交 MN 于点 H，由垂径定理可知 D 为 AB 的中点，



（第 9 题）

则 $AD=\frac{1}{2}AB=3.6$ m.

设 $OA=r$ m，则 $OD=OC-DC=(r-2.4)$ m.

在 $\mathrm{Rt}\triangle AOD$ 中，$OA^2=AD^2+OD^2$，

即 $r^2=3.6^2+(r-2.4)^2$，

解得 $r=3.9$.

在 $\mathrm{Rt}\triangle OHN$ 中，$OH=\sqrt{ON^2-NH^2}=$

$\sqrt{3.9^2-\left(\frac{3}{2}\right)^2}=3.6(\mathrm{m})$.

荣德基

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

$\therefore FN = DH = OH - OD = 3.6 - (3.9 - 2.4) = 2.1(\text{m})$.

$\because 2.1\text{m} > 2\text{m}$,

$\therefore$ 此货船能顺利通过这座拱桥.

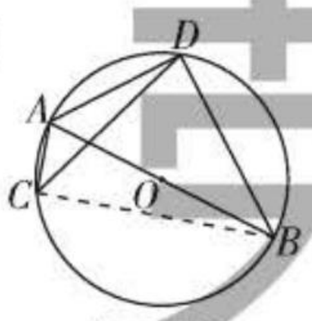
4 圆周角和圆心角的关系

【两年模拟兵法】

1. A **点拨:** 根据垂径定理得到 $CE = DE$,根据圆周角定理得到 $\angle COE = 30°$,从而得到 $CE = \frac{1}{2}OC = 1$,所以 $CD = 2CE = 2$.

2. A **点拨:** 先根据垂径定理求出 AC 的长,再设 $OA = r$,则 $OC = r - 2$,在 $\text{Rt}\triangle AOC$ 中利用勾股定理求出 r 的值,再求出 BE 的长,最后利用三角形的面积公式即可得出结论.

3. D **点拨:** 连接 BC,如图. 由圆周角定理的推论得出 $\angle ACB = \angle ACD + \angle BCD = 90°$. 由 $\angle BCD = \angle BAD$ 得出 $\angle ACD + \angle BAD = 90°$,即可得出答案.



(第3题)

4. C

5. (1) **解:** $\because BC = DC$,

$\therefore \angle CBD = \angle CDB = 39°$.

$\because \angle BAC = \angle CDB = 39°$, $\angle CAD = \angle CBD = 39°$,

$\therefore \angle BAD = \angle BAC + \angle CAD = 39° + 39° = 78°$.

(2) **证明:** $\because EC = BC$, $\therefore \angle CEB = \angle CBE$.

而 $\angle CEB = \angle 2 + \angle BAE$, $\angle CBE = \angle 1 + \angle CBD$,

$\therefore \angle 2 + \angle BAE = \angle 1 + \angle CBD$.

$\because \angle BAE = \angle BDC = \angle CBD$,

$\therefore \angle 1 = \angle 2$.

6. (1) **证明:** $\because AB$ 是直径,

$\therefore \angle AEB = 90°$,

$\therefore AE \perp BC$,

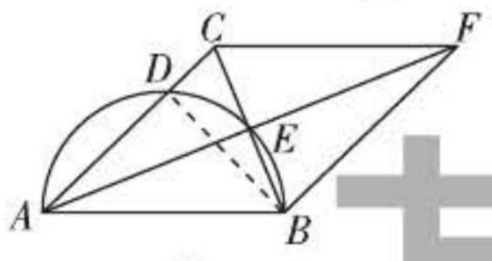
$\because AB = AC$,

$\therefore BE = CE$.

$\because AE = EF$,

$\therefore$ 四边形 $ABFC$ 是平行四边形,

$\because AC = AB$, $\therefore$ 四边形 $ABFC$ 是菱形.



(第6题)

(2) **解:** 设 $CD = x$,连接 BD,如图.

$\because AB$ 是直径, $\therefore \angle ADB = \angle BDC = 90°$,

$\therefore AB^2 - AD^2 = CB^2 - CD^2$,

$\therefore (7 + x)^2 - 7^2 = 4^2 - x^2$,

解得 $x_1 = 1$, $x_2 = -8$(舍去).

$\therefore AC = 8$, $BD = \sqrt{8^2 - 7^2} = \sqrt{15}$,

$\therefore S_{\text{菱形}ABFC} = 8\sqrt{15}$.

$\therefore S_{\text{半圆形}} = \frac{1}{2} \times \pi \times \left(\frac{8}{2}\right)^2 = 8\pi$.

7. **证明:** (1) $\because OD \perp AC$, OD 为半径,

$\therefore \overset{\frown}{CD} = \overset{\frown}{AD}$. $\therefore \angle CBD = \angle ABD$.

$\therefore BD$ 平分 $\angle ABC$.

(2) $\because OB = OD$, $\therefore \angle OBD = \angle ODB = 30°$.

$\therefore \angle AOD = 2\angle OBD = 60°$.

$\because OD \perp AC$ 于点 E, $\therefore \angle OEA = 90°$.

$\therefore \angle A = 180° - \angle OEA - \angle AOD = 180° - 90° - 60° = 30°$.

又 $\because AB$ 为 $\odot O$ 的直径, $\therefore \angle ACB = 90°$.

$\therefore BC = \frac{1}{2}AB$.

又 $\because OD = \frac{1}{2}AB$. $\therefore BC = OD$.

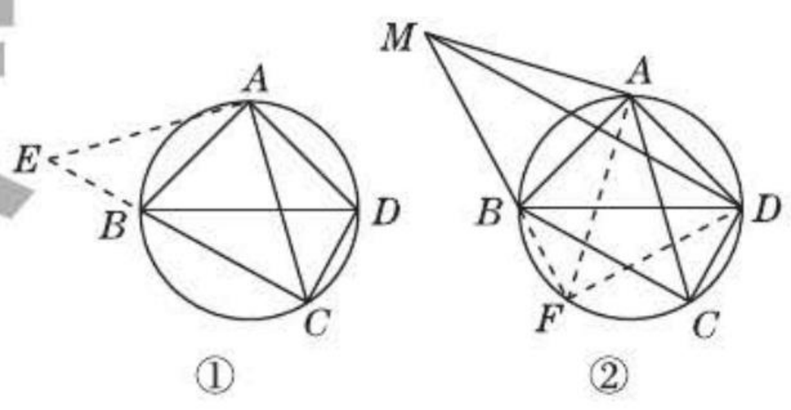
8. (1) **证明:** 由 $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{AB}$,得 $\angle ADB = \angle ACB = 45°$.

又 $\because \angle ABD = 45°$, $\therefore \angle ABD + \angle ADB = 90°$.

$\therefore \angle BAD = 90°$.

$\therefore BD$ 是该外接圆的直径.

(2) **证明:** 如图①,作 $AE \perp AC$,交 CB 的延长线于点 E.



(第8题)

$\because \angle EAC = \angle BAD = 90°$,

$\therefore \angle EAB + \angle BAC = \angle DAC + \angle BAC$.

$\therefore \angle EAB = \angle DAC$.

$\because \angle EAC = 90°$, $\angle ACB = 45°$, $\therefore \angle E = 45°$.

$\therefore \triangle AEC$ 是等腰直角三角形.

$\therefore AE = AC$. 由(1)易知, $AB = AD$,

$\therefore \triangle ABE \cong \triangle ADC$.

$\therefore CD = EB$. 在等腰直角三角形 ACE 中,由勾股定理,得 $CE = \sqrt{2}AC$.

$\because CE = BC + BE$, $\therefore \sqrt{2}AC = BC + CD$.

(3) **解:** $DM^2 = BM^2 + 2AM^2$. 证明如下:如图②,延长 MB 交圆于点 F,连接 AF, DF.

$\because \angle BFA = \angle ACB = \angle BMA = 45°$,

$\therefore \angle MAF = 90°$, $MA = AF$.

$\therefore AM^2 + AF^2 = 2AM^2 = MF^2$.

又 $\because AC = MA = AF$, $\therefore \overset{\frown}{AC} = \overset{\frown}{AF}$.

易知 $\overset{\frown}{AD} = \overset{\frown}{AB}$, $\therefore \overset{\frown}{CD} = \overset{\frown}{BF}$.

$\therefore \overset{\frown}{DF} = \overset{\frown}{BC}$. $\therefore DF = BC = BM$.

$\because BD$ 是直径, $\therefore \angle BFD = 90°$.

在 $\text{Rt}\triangle MDF$ 中,由勾股定理,得 $DM^2 = DF^2 + MF^2$,

$\therefore DM^2 = BM^2 + 2AM^2$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

5 确定圆的条件

【两年模拟兵法】

1. C **2.** D

3. A **点拨:**要想买到与原来大小一样的圆形镜子,则需要知道圆形镜子的半径. 由于第①块出现一段完整的弧,可在这段弧上任作两条弦,作出这两条弦的垂直平分线,两条垂直平分线的交点就是圆心,进而可得到半径的长. 所以应带第①块.

4. C

5. 解:当$\angle BAC$为直角时,因为$\triangle ABC$内接于$\odot O$,所以BC为$\odot O$的直径,则点O在BC上,与已知条件"点O到BC的距离等于2 cm"矛盾,所以$\angle BAC$不能为直角. 下面分两种情况来讨论:

(1)当$\angle BAC$是锐角时,$\triangle ABC$的外心在三角形内部,如图①,连接AO,BO,延长AO交BC于点D,则$AD\perp BC$.

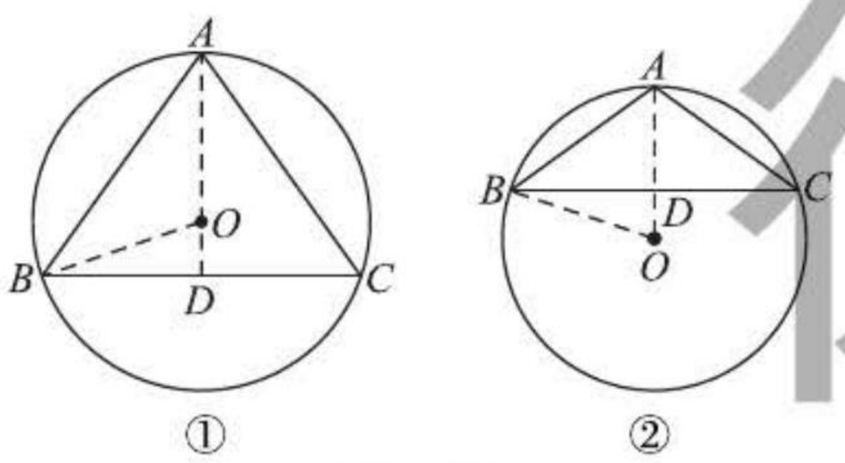
依题意,得$AO=BO=6$ cm,$OD=2$ cm.

在Rt$\triangle ABD$中,由勾股定理,得$AB^2-AD^2=BD^2$,

在Rt$\triangle OBD$中,由勾股定理,得$BO^2-OD^2=BD^2$,

所以$AB^2-AD^2=BO^2-OD^2$,即$AB^2-(6+2)^2=6^2-2^2$,

解得$AB=4\sqrt{6}$ cm.



(第5题)

(2)当$\angle BAC$是钝角时,$\triangle ABC$的外心在三角形外部,如图②,连接AO,BO,AO交BC于点D,则$AD\perp BC$.

同(1)中的求解过程可得$AB^2-(6-2)^2=6^2-2^2$,

解得$AB=4\sqrt{3}$ cm.

综上可知,AB的长为$4\sqrt{6}$ cm或$4\sqrt{3}$ cm.

6. (1)**证明:**$\because AD$为$\triangle ABC$外接圆的直径,且$AD\perp BC$,

$\therefore \overset{\frown}{DB}=\overset{\frown}{DC}$. $\therefore DB=DC$.

(2)**解:**B,E,C三点在以点D为圆心,DB为半径的圆上.

理由:由(1)知$\overset{\frown}{DB}=\overset{\frown}{DC}$,

$\therefore \angle BAD=\angle CBD$.

$\because BE$平分$\angle ABC$,$\therefore \angle CBE=\angle ABE$.

又$\because \angle DBE=\angle CBD+\angle CBE$,$\angle DEB=\angle BAD+\angle ABE$,

$\therefore \angle DBE=\angle DEB$. $\therefore DB=DE$.

由(1)知$DB=DC$,$\therefore DB=DE=DC$.

$\therefore B$,E,C三点在以点D为圆心,DB为半径的圆上.

7. 解:(1)若b,c中有一个等于3,则$9+3m+2-\frac{1}{2}m=0$,解得$m=-\frac{22}{5}$,

原方程可化为$x^2-\frac{22}{5}x+\frac{21}{5}=0$,

解得$x_1=3$,$x_2=\frac{7}{5}$.

$\therefore \triangle ABC$的周长为$3+3+\frac{7}{5}=7\frac{2}{5}$.

若$b=c$,则$m^2-4\left(2-\frac{1}{2}m\right)=0$,

解得$m=-4$或$m=2$.

当$m=-4$时,方程为$x^2-4x+4=0$,

解得$x_1=x_2=2$,

$\therefore \triangle ABC$的周长为$2+2+3=7$.

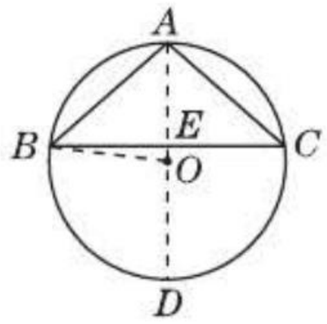
当$m=2$时,方程为$x^2+2x+1=0$,

解得$x_1=x_2=-1$(不合题意,舍去).

综上可知,$\triangle ABC$的周长为$7\frac{2}{5}$或7.

(2)当$\triangle ABC$的三边长均为整数时,有$AB=AC=2$,$BC=3$.

如图,作$\triangle ABC$的外接圆$\odot O$,连接AO并延长,交$\odot O$于点D,交BC于点E,连接BO,易知$AE\perp BC$.



(第7题)

$\therefore BE=\frac{1}{2}BC=\frac{3}{2}$.

$\therefore AE=\sqrt{AB^2-BE^2}=\sqrt{4-\frac{9}{4}}=\frac{\sqrt{7}}{2}$.

设$AO=R$,在Rt$\triangle BOE$中,

$R^2=\left(\frac{3}{2}\right)^2+\left(R-\frac{\sqrt{7}}{2}\right)^2$,

$\therefore R=\frac{4\sqrt{7}}{7}$.

$\therefore$当$\triangle ABC$的三边长均为整数时,$\triangle ABC$的外接圆半径为$\frac{4\sqrt{7}}{7}$.

点拨:解答本题运用了分类讨论思想,注意(1)中的两种情况. 要能够熟练结合等腰三角形三线合一的性质和勾股定理求得等腰三角形的外接圆的半径.

8. 证明:$\because C$是$\overset{\frown}{AD}$的中点,

$\therefore \overset{\frown}{AC}=\overset{\frown}{CD}$. $\therefore \angle ABC=\angle CAD$.

$\because AB$是$\odot O$的直径,

$\therefore \angle ACB=90°$. $\therefore \angle CAD+\angle AQC=90°$.

又$\because CE\perp AB$,$\therefore \angle ABC+\angle PCQ=90°$.

$\therefore \angle AQC=\angle PCQ$. $\therefore PC=PQ$.

$\because CE\perp AB$,$\therefore \overset{\frown}{AC}=\overset{\frown}{AE}$.

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

$\therefore \overset{\frown}{CD} = \overset{\frown}{AE}$. $\therefore \angle CAD = \angle ACE$.

$\therefore PA = PC$. $\therefore PA = PC = PQ$.

$\therefore$ 点 P 是 $\triangle ACQ$ 的外心.

点拨:解决本题的关键是证明点 P 到 $\triangle ACQ$ 的三个顶点的距离相等,综合运用圆的有关性质是解决此类问题的难点.

6 直线和圆的位置关系

【两年模拟兵法】

1. A **点拨:**方法一 过点 O 作 $OD \perp AC$ 于点 D,由已知条件和圆的性质易求 OD 的长,再根据勾股定理即可求出 AD 的长,进而可求出 AC 的长.

方法二 先求出 $\angle AOP = 60°$,进而求出 $\angle ACP = \angle P$,即可得出 $AC = AP$,求出 AP 即可.

2. B **点拨:**由切线的性质得 $\angle PAB = 90°$. 根据直角三角形的两锐角互余,得出 $\angle POA = 50°$,最后利用同圆的半径相等得出结论.

3. C **点拨:**如图,$AB = 7$,$BC = 5$,$AC = 8$,内切圆的半径为 r,作 $AD \perp BC$ 于点 D,设 $BD = x$,则 $CD = 5 - x$.

由勾股定理可知,$AD^2 = AB^2 - BD^2 = AC^2 - CD^2$,

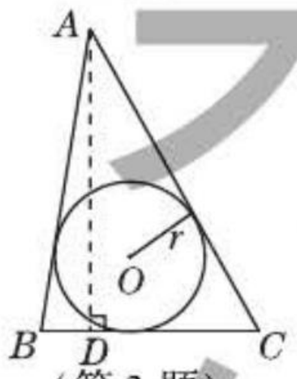
即 $7^2 - x^2 = 8^2 - (5-x)^2$,解得 $x = 1$.

$\therefore AD = 4\sqrt{3}$.

$\because \frac{1}{2} \cdot BC \cdot AD = \frac{1}{2}(AB + BC + AC) \cdot r$,

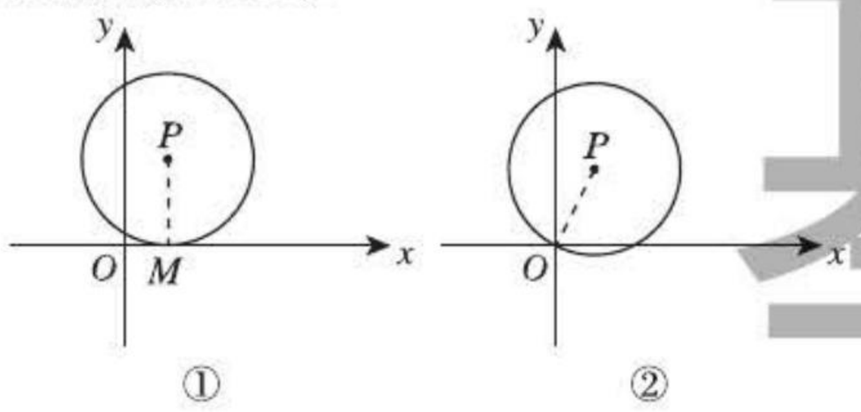
即 $\frac{1}{2} \times 5 \times 4\sqrt{3} = \frac{1}{2} \times 20 \times r$,

$\therefore r = \sqrt{3}$. 故选 C.



(第3题)

4. A **点拨:**$\because$ 以点 $P(1,2)$ 为圆心、r 为半径画圆,与坐标轴恰好有三个交点,$\therefore$ $\odot P$ 与 x 轴相切(如图①)或 $\odot P$ 过原点(如图②).



(第4题)

当 $\odot P$ 与 x 轴相切于点 M 时,连接 PM,易得 $r = PM = 2$;

当 $\odot P$ 过原点时,连接 OP,易得 $r = OP = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$. 综上,$r = 2$ 或 $\sqrt{5}$. 故选 A.

5. (1)**解:**$\because A(0,6)$,$N(0,2)$,

$\therefore AN = 4$. 易知 $\angle ANB = 90°$.

$\because \angle ABN = 30°$,$\therefore AB = 2AN = 8$.

由勾股定理可知,$NB = \sqrt{AB^2 - AN^2} = 4\sqrt{3}$.

$\therefore B(4\sqrt{3},2)$.

(2)**证明:**如图,连接 MC,NC.

$\because AN$ 是 $\odot M$ 的直径,

$\therefore \angle ACN = 90°$.

$\therefore \angle NCB = 90°$.

在 $\mathrm{Rt}\triangle NCB$ 中,$\because D$ 为 NB 的中点,

$\therefore CD = \frac{1}{2}NB = ND$.

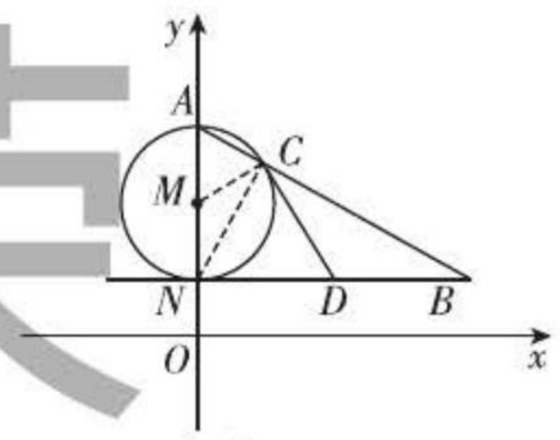
$\therefore \angle CND = \angle NCD$.

$\because MC = MN$,$\therefore \angle MCN = \angle MNC$.

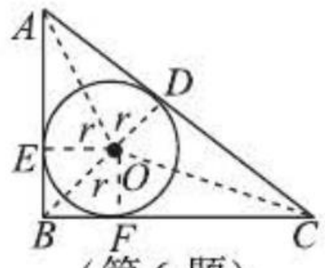
$\because \angle MNC + \angle CND = 90°$,

$\therefore \angle MCN + \angle NCD = 90°$,即 $MC \perp CD$.

$\therefore$ 直线 CD 是 $\odot M$ 的切线.



(第5题)



(第6题)

6. **解:**如图所示,设 O 为 $\triangle ABC$ 内切圆的圆心,r 为内切圆的半径,D,E,F 分别为 $\odot O$ 与边 AC,AB,BC 的切点,连接 OA,OB,OC,OD,OE,OF.

在 $\triangle ABC$ 中,$\because AB = 60$ cm,$BC = 80$ cm,$\angle ABC = 90°$,

$\therefore AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{60^2 + 80^2} = 100$(cm).

$\because S_{\triangle ABC} = S_{\triangle OAB} + S_{\triangle OBC} + S_{\triangle OAC}$,

$\therefore \frac{1}{2}AB \cdot BC = \frac{1}{2}AB \cdot r + \frac{1}{2}BC \cdot r + \frac{1}{2}AC \cdot r$,

$\therefore \frac{1}{2} \times 60 \times 80 = \frac{1}{2} \times 60r + \frac{1}{2} \times 80r + \frac{1}{2} \times 100r$,

解得 $r = 20$ cm,$\therefore 2r = 40$ cm.

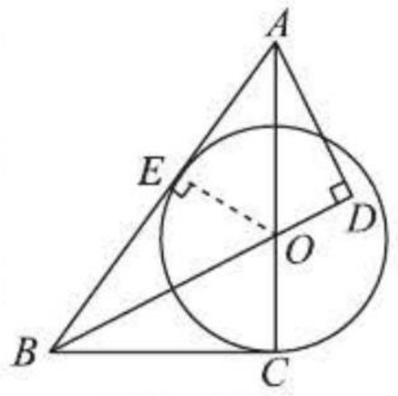
$\therefore$ 王奶奶应该剪出这个三角形的内切圆,这个圆的直径是 40 cm.

7. (1)**证明:**如图,作 $OE \perp AB$ 于 E.

因为 $\odot O$ 与 BC 相切于点 C,所以 $AC \perp BC$.

因为 $\angle AOD = \angle BAD$,所以 $\angle OAD = \angle ABD$.

易知 $\angle OAD = \angle OBC$,所以 $\angle ABD = \angle OBC$,所以 $OE = OC$,所以点 E 在 $\odot O$ 上,即 AB 为 $\odot O$ 的切线.



(第7题)

(2)**解:**由 $BC = 6$,$\tan \angle ABC = \frac{4}{3}$,易得 $BE = 6$,$AC = 8$,$AB = 10$,$AE = 4$.

设 $OE = OC = x$,则在 $\mathrm{Rt}\triangle AEO$ 中,$(8-x)^2 = 4^2 + x^2$,解得 $x = 3$,所以 $BO = 3\sqrt{5}$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

因为$\frac{1}{2}AB\times OE=\frac{1}{2}OB\times AD$,所以$\frac{1}{2}\times 10\times 3=\frac{1}{2}\times 3\sqrt{5}\times AD$,所以$AD=2\sqrt{5}$.

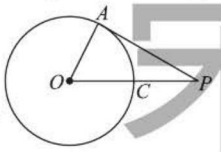
* 7 切线长定理

【两年模拟兵法】

1. B **点拨:**因为AB为$\odot O$的切线,所以$OB\perp AB$. 又因为$BD=OB$,所以$AO=AD$,所以AB平分$\angle OAD$. 由AB,AC为$\odot O$的切线可得AO平分$\angle BAC$,所以$\angle DAB=\angle BAO=\angle OAC=\frac{1}{3}\angle DAC=26°$. 所以$\angle ADO=90°-26°=64°$. 故选 B.

2. B **点拨:**由从圆外一点引圆的两条切线,它们的切线长相等,知$PA=PB$. 因为$\angle APB=60°$,所以$\triangle PAB$为等边三角形,所以$AB=PA=PB=8$. 故选 B.

3. C **点拨:**如图,由题意知$OA=9$,$AP=18$. $\because AP$是$\odot O$的切线,$\therefore OA\perp AP$,$\therefore OP=\sqrt{AP^2+OA^2}=9\sqrt{5}$. 易知点$P$到$\odot O$的最短距离为$PC$的长,$PC=OP-OC=9\sqrt{5}-9$. 故选 C.



(第 3 题)

4. B **点拨:**因为圆外切四边形$ABCD$的两组对边的和相等,所以四边形$ABCD$的周长为$2\times(16+10)=52$.

5. A **点拨:**设$AF=x$,根据切线长定理,得$AD=x$,$BD=BE=9-x$,$CE=CF=6-x$,则有$9-x+6-x=5$,解得$x=5$,即AF的长为 5.

6. 6 **7.** 90°

8. **解:**(1)$\because PA$是$\odot O$的切线,

$\therefore \angle OAP=90°$.

在 Rt$\triangle APO$中,$\sin\angle APO=\frac{OA}{OP}$.

$\because \sin\angle APO=\frac{5}{13}$,且$OP=13$,$\therefore OA=5$,即$\odot O$的半径为 5.

(2)在 Rt$\triangle OAP$中,$AP=\sqrt{OP^2-OA^2}=12$.

$\because PA$,PB是$\odot O$的两条切线,

$\therefore PA=PB$,$OA\perp AP$,$OB\perp BP$.

又$OA=OB$,$\therefore \angle APO=\angle BPO$,

$\therefore AC=BC=\frac{1}{2}AB$,$PC\perp AB$.

在 Rt$\triangle APC$中,$\sin\angle APC=\frac{AC}{AP}$.

又$\sin\angle APC=\frac{5}{13}$,且$AP=12$,

$\therefore AC=\frac{60}{13}$,$\therefore AB=2AC=\frac{120}{13}$.

9. **解:**(1)$\because AD/\!/BC$,$CD/\!/AB$,

$\therefore$四边形$ABCD$是平行四边形.

$\because AD$,CD是$\odot O$的两条切线,$\therefore AD=CD$,

$\therefore$四边形$ABCD$为菱形.

(2)如图,连接AO,CO,延长AO交BC于点E.

$\because AD$,CD是$\odot O$的两条切线,

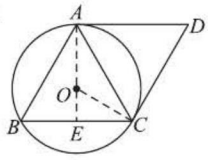
$\therefore \angle OAD=\angle OCD=90°$,

$\therefore \angle OAD+\angle OCD=180°$,

$\therefore \angle AOC+\angle D=180°$. $\because$四边形$ABCD$为菱形,$\therefore \angle D=\angle B$.

$\because \angle AOC=2\angle B$,$\therefore \angle B=\angle D=60°$,

易得$\triangle ABC$是等边三角形.



(第 9 题)

由$AO=2\sqrt{3}$,易得菱形的高AE的长为$3\sqrt{3}$,底BC的长为 6,

$\therefore S_{四边形ABCD}=18\sqrt{3}$.

8 圆内接正多边形

【两年模拟兵法】

1. B **点拨:**设正多边形的边数为n,则正多边形的中心角为$\frac{360°}{n}$,正多边形的一个外角等于$\frac{360°}{n}$,所以正多边形的中心角等于正多边形的一个外角,而正多边形的一个外角与该正多边形相邻的一个内角互补,所以正多边形的中心角与该正多边形一个内角互补.

2. B **点拨:**连接OA,OB,根据等边三角形的性质可得$\odot O$的半径.

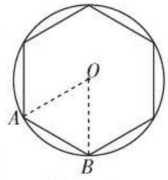
3. A **点拨:**如图,$\angle AOB=\frac{360°}{6}=60°$,

$OA=OB$,

$\therefore \triangle AOB$是等边三角形.

$\therefore AB=OA$.

$\therefore$圆内接正六边形的边长与该圆的半径相等,A 正确.

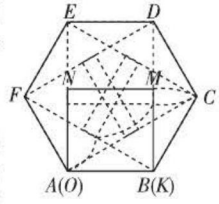


(第 3 题)

在平面直角坐标系中,不同的坐标表示不同的点,B 错误.

一元二次方程$ax^2+bx+c=0(a\neq 0)$不一定有实数根,C 错误.

根据旋转变换的性质可知,将$\triangle ABC$绕A点按顺时针方向旋转 60°得$\triangle ADE$,则$\triangle ABC$与$\triangle ADE$全等,D 错误. 故选 A.



(第 5 题)

4. A

5. C **点拨:**如图,在这样连续 6 次旋转的过程中,点M的运动轨迹是图中的曲线,观察图可知点B,M间的距离大于或等于$2-\sqrt{2}$,且小于或等于 1. 故选 C.

6. A

7. **解:**连接OD,如图.

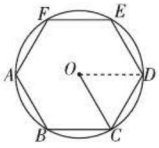
$\because$六边形$ABCDEF$是圆O的内接正六边形,

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

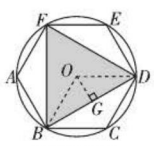
$\therefore \angle O=\frac{360°}{6}=60°$.

$\because OC=OD$,$\therefore \triangle OCD$ 是等边三角形.

$\therefore CD=OC=4$,即正六边形的边长为4.



(第7题)



(第8题)

8. 解:如图,连接 OB,OD,

过点 O 作 $OG\perp BD$ 于点 G.

设 $OB=OD=R$,易得 $OG=\frac{1}{2}OD=\frac{1}{2}R$.

在 Rt$\triangle ODG$ 中,由勾股定理,得 $GD=\frac{\sqrt{3}}{2}R$.

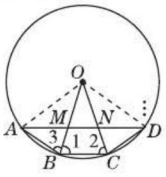
$\because S_{\triangle BDF}=12\sqrt{3}$,$\therefore 6S_{\triangle OGD}=12\sqrt{3}$,

即 $6\times\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}R\times\frac{1}{2}R=12\sqrt{3}$,

$\therefore R^2=16$,即 $R=4$ 或 $R=-4$(不合题意,舍去).

$\therefore \odot O$ 的半径为4.

9. 证明:(1)连接 OD,OA,如图.



(第9题)

$\because AB$,BC,CD 为$\odot O$ 的内接正十边形的边,

$\therefore \angle AOB=\angle BOC=\angle COD=\frac{360°}{10}=36°$.

$\therefore \angle BOD=72°$. $\therefore \angle BAD=\frac{1}{2}\angle BOD=36°$.

$\because OB=OC$,

$\therefore \angle 1=\angle 2=\frac{1}{2}\times(180°-36°)=72°$.

同理$\angle 3=72°$. $\therefore \angle ABC=\angle 1+\angle 3=144°$.

$\therefore \angle BAD+\angle ABC=180°$.

$\therefore AD/\!/BC$,即$MN/\!/BC$.

(2)$\because \angle BAD=36°$,$\angle 3=72°$,

$\therefore \angle AMB=180°-\angle BAD-\angle 3=72°$.

$\therefore \angle OMN=\angle AMB=72°$.

同理$\angle ONM=72°$.

$\therefore \angle OMN=\angle ONM$. $\therefore OM=ON$.

$\because \angle OMN=\angle AOM+\angle OAM$,$\angle AOM=36°$,

$\therefore \angle OAM=36°$. $\therefore \angle OAM=\angle AOM$.

$\therefore OM=AM$.

在$\triangle OMN$和$\triangle AMB$中,$\begin{cases}\angle MON=\angle MAB,\\ OM=AM,\\ \angle OMN=\angle AMB,\end{cases}$

$\therefore \triangle OMN\cong\triangle AMB$.

$\therefore MN=MB$,$ON=AB$. 而 $OM=ON$,

$\therefore OB=OM+MB=AB+MN$. 而 $AB=BC$,

$\therefore MN+BC=OB$.

10. 解:(1)60°

(2)90°;108°

(3)$\angle APN=\frac{(n-2)\cdot 180°}{n}$.

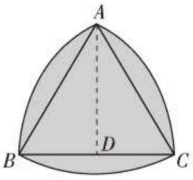
9 弧长及扇形的面积

【两年模拟兵法】

1. C **点拨**:由圆内接四边形的性质和圆周角定理求出$\angle A=60°$,得出$\angle BOD=120°$,再由弧长公式即可得出答案.

2. C **点拨**:设 AT 交$\odot O$ 于点 D,连接 BD,先根据圆周角定理的推论得到$\angle ADB=90°$,则可判断$\triangle ADB$,$\triangle BDT$ 都是等腰直角三角形,可得 $AD=BD=TD=\frac{\sqrt{2}}{2}AB=\sqrt{2}$,然后利用弓形 AD 的面积等于弓形 BD 的面积,得到阴影部分的面积等于 $S_{\triangle BTD}$.

3. D **点拨**:过 A 作 $AD\perp BC$ 于 D,如图.



(第3题)

$\because \triangle ABC$ 是等边三角形,

$\therefore AB=AC=BC=2$,$\angle BAC=\angle ABC=\angle ACB=60°$.

$\because AD\perp BC$,

$\therefore BD=CD=1$,易知 $AD=\sqrt{3}BD=\sqrt{3}$,

$\therefore \triangle ABC$ 的面积为$\frac{1}{2}\times BC\times AD=\frac{1}{2}\times 2\times\sqrt{3}=\sqrt{3}$.

$\because S_{扇形BAC}=\frac{60\pi\times 2^2}{360}=\frac{2}{3}\pi$,

$\therefore S_{莱洛三角形}=3\times\frac{2}{3}\pi-2\times\sqrt{3}=2\pi-2\sqrt{3}$.

特别提醒:莱洛三角形由三块相同的扇形叠加而成,其面积等于三块扇形的面积相加,再减去两个等边三角形的面积,分别求出即可.

4. A **5.** D

6. 解:(1)3;(2,1);6

(2)连接 AC,过点 A 作 $AD\perp BC$ 于点 D,则 $BC=2DC$. 由 $A(5,1)$ 可得 $AD=1$. 又 $AC=2$,$\therefore$ 在 Rt$\triangle ADC$ 中,$DC=\sqrt{AC^2-AD^2}=\sqrt{2^2-1^2}=\sqrt{3}$,故 $BC=2\sqrt{3}$.

7. (1)**证明**:连接 OD,如图.

$\because AC=BC$,$OB=OD$,

$\therefore \angle ABC=\angle A$,$\angle ABC=\angle ODB$.

荣德基

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

$\therefore \angle A = \angle ODB$.

$\therefore OD // AC$.

$\because DF \perp AC$,

$\therefore DF \perp OD$.

$\because OD$ 是$\odot O$ 的半径,

$\therefore DF$ 是$\odot O$ 的切线.

(2)**解**:$\because AC = BC, \angle A = 60°$,

$\therefore \triangle ABC$ 是等边三角形.

$\therefore \angle ABC = 60°$.

$\because OD = OB$,

$\therefore \triangle OBD$ 是等边三角形.

$\therefore \angle BOD = 60°$.

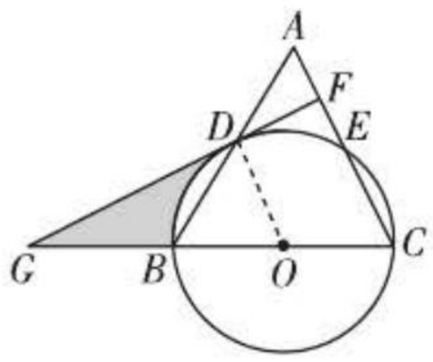
$\because DF \perp OD$,

$\therefore \angle ODG = 90°$.

$\therefore \angle G = 30°$.

$\therefore DG = \sqrt{3}OD = 6\sqrt{3}$.

$\therefore$ 阴影部分的面积 = $\triangle ODG$ 的面积 − 扇形 BOD 的面积 $= \frac{1}{2} \times 6 \times 6\sqrt{3} - \frac{60\pi \times 6^2}{360} = 18\sqrt{3} - 6\pi$.



(第7题)

8. (1)**证明**:如图,$\because \angle B = 60°, OB = OC$,

$\therefore \triangle BOC$ 是等边三角形.

$\therefore \angle 1 = \angle 2 = 60°$.

$\because OC$ 平分 $\angle AOB$,$\therefore \angle 1 = \angle 3$.

$\therefore \angle 2 = \angle 3$. $\therefore OA // BD$.

$\because BD \perp AM$,$\therefore OA \perp AM$.

$\because OA$ 为$\odot O$ 的半径,

$\therefore AM$ 是$\odot O$ 的切线.

(2)**解**:连接 AC,如图.

$\because \angle 3 = 60°, OA = OC$,

$\therefore \triangle OAC$ 是等边三角形.

$\therefore \angle OAC = 60°, OA = AC$.

$\because \angle OAM = 90°$,$\therefore \angle CAD = 30°$.

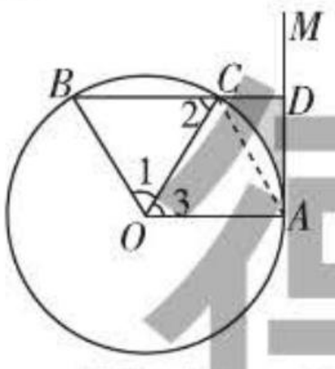
$\because CD = 2$,$\therefore AC = 2CD = 4$.

$\therefore AD = 2\sqrt{3}, OA = 4$.

$\therefore S_{阴影} = S_{梯形OADC} - S_{扇形AOC}$

$= \frac{1}{2} \times (4 + 2) \times 2\sqrt{3} - \frac{60\pi \times 4^2}{360}$

$= 6\sqrt{3} - \frac{8\pi}{3}$.



(第8题)

素养提分整合篇

【好题必解】

1. **解**:如图,取 BC 的中点 E,连接 AE, DE.

$\because BA \perp AC, BD \perp CD$,

$\therefore AE = \frac{1}{2}BC, DE = \frac{1}{2}BC$.

又$\because BE = CE = \frac{1}{2}BC$,

$\therefore BE = AE = DE = CE$.

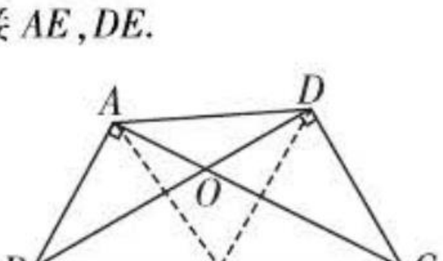
$\therefore A, B, C, D$ 四点共圆.

$\therefore \angle DAC = \angle DBC$.

在 Rt$\triangle BCD$ 中,$\angle DCB = 60°$,

$\therefore \angle DBC = 90° - 60° = 30°$.

$\therefore \angle DAC = 30°$.



(第1题)

2. **解**:作点 A 关于 MN 的对称点 A',根据圆的对称性可知,点 A'在$\odot O$ 上.

连接 BA'交 MN 于点 P',连接 $P'A$,

则 $P'A + P'B = P'A' + P'B = A'B$,

故当点 P 与点 P'重合时,

$AP + BP$ 取得最小值 $A'B$.

连接 OA, OA', OB,

$\because \overset{\frown}{AN} = \frac{1}{3}\overset{\frown}{MN}$,

$\therefore \angle AON = \angle A'ON = 60°$.

$\because \overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{BN}$,

$\therefore \angle BON = \frac{1}{2}\angle AON = 30°$,

$\therefore \angle A'OB = 90°$,

$\therefore A'B = \sqrt{OA'^2 + OB^2} = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$,

即 $AP + BP$ 的最小值是$\sqrt{2}$.

3. **解**:修筑的这条公路不会穿过公园. 理由如下:如图,过点 C 作 $CD \perp AB$,垂足为 D.

$\because \angle B = 45°$,

$\therefore \angle BCD = 45°$,

$\therefore CD = BD$.

设 $CD = x$ km,

则 $BD = x$ km.

由 $\angle A = 30°$ 知 $AC = 2x$ km,

$AD = \sqrt{(2x)^2 - x^2} = \sqrt{3}x$(km).

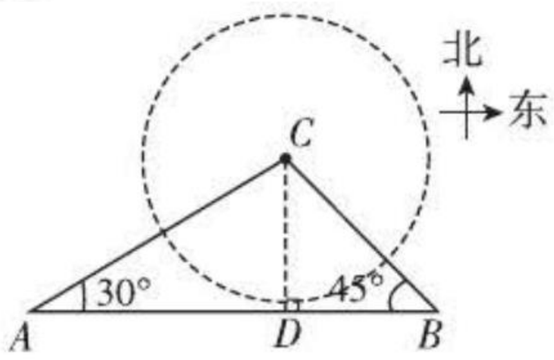
$\because AD + BD = AB$,

$\therefore \sqrt{3}x + x = 2$,

$\therefore x = \sqrt{3} - 1$,

即 $CD = \sqrt{3} - 1 \approx 0.732$(km) > 0.7 km.

也就是说,以点 C 为圆心且以 0.7 km 为半径的圆与直线 AB 相离,即修筑的这条公路不会穿过公园.



(第3题)

4. (1)**证明**:如图,作 $DH \perp x$ 轴于点 H.

$\because F(0,1), D(6,-1)$,

$\therefore OF = DH = 1$.

又$\angle FCO = \angle DCH, \angle FOC = \angle DHC = 90°$,

$\therefore \triangle OCF \cong \triangle HCD$(AAS),

$\therefore DC = FC$.

(2)**解**:如图,连接 PC,作 $PG \perp y$ 轴于点 G,易得 $PC \perp x$ 轴. 设$\odot P$ 的半径为 r.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

由(1)易知 $OC=HC$,

$\therefore C(3,0)$,

$\therefore GP=3$.

$\because C,P$ 分别为 FD,AD 的中点,

$\therefore CP$ 是 $\triangle DFA$ 的中位线,

$\therefore AF=2CP=2r$.

$\because F(0,1)$, $OG=CP=r$,

$\therefore AG=AF-OF-OG=r-1$.

在 $\mathrm{Rt}\triangle AGP$ 中, $AP^2=AG^2+GP^2$,

$\therefore r^2=(r-1)^2+3^2$,

$\therefore r=5$,

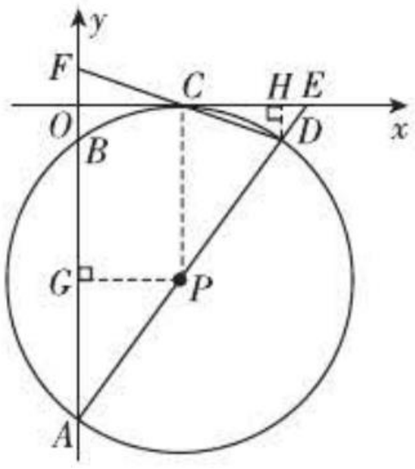
$\therefore A(0,-9)$.

设直线 AD 的表达式为 $y=kx+b$,

则 $\begin{cases}-9=b,\\-1=6k+b,\end{cases}$

$\therefore \begin{cases}k=\dfrac{4}{3},\\b=-9.\end{cases}$

$\therefore$ 直线 AD 的表达式为 $y=\dfrac{4}{3}x-9$.



(第4题)

5. (1)**证明**:分别连接 OB,OP,

如图,在 $\triangle OAP$ 和 $\triangle OBP$ 中, $\begin{cases}OA=OB,\\OP=OP,\\AP=BP,\end{cases}$

$\therefore \triangle OAP\cong\triangle OBP(\mathrm{SSS})$,

$\therefore \angle OBP=\angle OAP$.

$\because PA$ 是 $\odot O$ 的切线,

$\therefore \angle OBP=\angle OAP=90°$,

$\therefore PB$ 是 $\odot O$ 的切线.

(2)**解**:连接 BC,设 AB 与 OP 交于点 F,如图,

$\because AC$ 是 $\odot O$ 的直径,

$\therefore \angle ABC=90°$.

$\because PA,PB$ 是 $\odot O$ 的切线,

$\therefore PO$ 垂直平分 AB, PO 平分 $\angle APB$.

易得 $OP/\!/BC$,

$\therefore \angle OPC=\angle PCB$.

$\because \angle APC=3\angle BPC$,

$\therefore \angle OPC=\angle CPB$,

$\therefore \angle PCB=\angle CPB$.

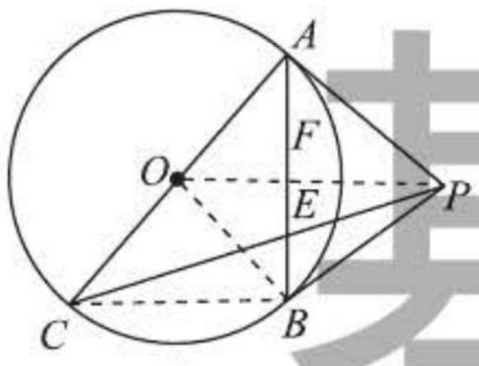
$\therefore CB=BP$.

设 $OF=t$,则易知 $CB=BP=2t$.

易得 $\triangle PBF\backsim\triangle POB$,

$\therefore PB^2=PF\cdot PO$.

即 $(2t)^2=PF\cdot(PF+t)$.



(第5题)

解得 $PF=\dfrac{-1+\sqrt{17}}{2}t$.(取正值)

易得 $\triangle PFE\backsim\triangle CBE$,

$\therefore \dfrac{PE}{CE}=\dfrac{PF}{BC}=\dfrac{\sqrt{17}-1}{4}$.

6. (1)**证明**:如图,连接 OC.

$\because DE$ 与 $\odot O$ 相切于点 C,

$\therefore OC\perp DE$.

$\because AD\perp DE$,

$\therefore AD/\!/OC$.

$\therefore \angle DAC=\angle OCA$.

$\because OA=OC$,

$\therefore \angle OAC=\angle OCA$.

$\therefore \angle DAC=\angle OAC$.

即 AC 平分 $\angle DAE$.

(2)**解**:①由(1)可知 $AD/\!/OC$,

$\therefore \angle COE=\angle DAE$.

$\because \angle M=\angle DAE$,

$\therefore \angle COE=\angle M$.

设 $\odot O$ 的半径为 r,

在 $\mathrm{Rt}\triangle COE$ 中, $\cos\angle COE=\dfrac{OC}{OE}$,

$\therefore \dfrac{4}{5}=\dfrac{r}{r+1}$.

解得 $r=4$. 即 $\odot O$ 的半径为 4.

②如图,连接 FB. 在 $\mathrm{Rt}\triangle OCE$ 中, $CE=\sqrt{OE^2-OC^2}=\sqrt{5^2-4^2}=3$.

$\because AB$ 是 $\odot O$ 的直径,

$\therefore AD\perp BF$,

$\therefore AF=AB\cdot\cos\angle FAB=8\times\dfrac{4}{5}=\dfrac{32}{5}$.

$\because FM\perp AB$,

$\therefore \angle HFB+\angle ABF=90°$.

$\because AD\perp FB$,

$\therefore \angle AFH+\angle HFB=90°$.

$\therefore \angle AFH=\angle ABF$.

$\because BF\perp AD, ED\perp AD$,

$\therefore BF/\!/ED$,

$\therefore \angle ABF=\angle E$,

$\therefore \angle AFH=\angle E$.

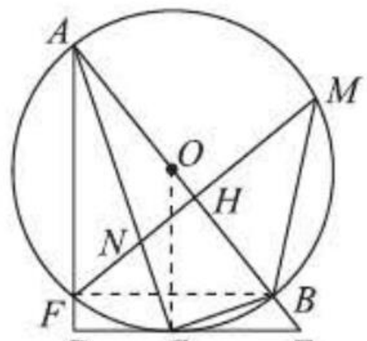
易知 $\angle ACB=\angle OCE=90°$,

$\therefore \angle BCE=\angle OCA=\angle OAC=\angle FAN$.

$\therefore \triangle AFN\backsim\triangle CEB$.

$\therefore \dfrac{FN}{BE}=\dfrac{AF}{CE}$, 即 $\dfrac{FN}{1}=\dfrac{\frac{32}{5}}{3}$.

$\therefore FN=\dfrac{32}{15}$.



(第6题)

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

7. 解:(1)∵ 抛物线 $y=ax^2+bx+c(a\neq0)$ 经过点 $A(3,0)$,$B(-1,0)$,

∴ $y=a(x-3)(x+1)$.

∵ 抛物线 $y=ax^2+bx+c(a\neq0)$ 经过点 $C(0,-3)$,

∴ $-3=a(0-3)(0+1)$.

解得 $a=1$.

∴ 抛物线的表达式为 $y=(x-3)(x+1)$,

即 $y=x^2-2x-3$.

(2)过点 A 作 $AM\perp BC$,垂足为点 M,AM 交 y 轴于点 N.

∴ $\angle BAM+\angle ABM=90°$.

在 $Rt\triangle BCO$ 中,$\angle BCO+\angle ABM=90°$.

∴ $\angle BAM=\angle BCO$.

∵ 点 A,B,C 坐标分别为 $(3,0)$,$(-1,0)$,$(0,-3)$,

∴ $AO=CO=3$,$OB=1$.

又∵ $\angle BAM=\angle BCO$,$\angle AON=\angle BOC=90°$,

∴ $\triangle AON\cong\triangle COB$.

∴ $ON=OB=1$.

∴ $N(0,-1)$.

设直线 AM 的表达式为 $y=kx+b'$.

把 $(3,0)$,$(0,-1)$ 分别代入,得 $\begin{cases}0=3k+b',\\-1=b',\end{cases}$

解得 $k=\frac{1}{3}$,$b'=-1$.

∴ 直线 AM 的表达式为 $y=\frac{1}{3}x-1$.

同理可求得直线 BC 的表达式为 $y=-3x-3$.

解方程组 $\begin{cases}y=\frac{1}{3}x-1,\\y=-3x-3,\end{cases}$

得 $\begin{cases}x=-\frac{3}{5},\\y=-\frac{6}{5}.\end{cases}$

∴ 切点 M 的坐标为 $\left(-\frac{3}{5},-\frac{6}{5}\right)$

(3)存在以点 B,C,Q,P 为顶点的平行四边形. 设点 Q 坐标为 $(t,0)$,点 P 坐标为 (m,m^2-2m-3),分两种情况考虑:

当四边形 $BCQP$ 为平行四边形时,$-1+t=0+m$,

$0+0=-3+m^2-2m-3$,

解得 $\begin{cases}m=1+\sqrt{7},\\t=2+\sqrt{7},\end{cases}$

或 $\begin{cases}m=1-\sqrt{7},\\t=2-\sqrt{7}.\end{cases}$

当 $m=1+\sqrt{7}$ 时,$m^2-2m-3=8+2\sqrt{7}-2-2\sqrt{7}-3=3$,

即点 P 坐标为 $(1+\sqrt{7},3)$;

当 $m=1-\sqrt{7}$ 时,$m^2-2m-3=8-2\sqrt{7}-2+2\sqrt{7}-3=3$,

即点 P 坐标为 $(1-\sqrt{7},3)$;

当四边形 $BCPQ$ 为平行四边形时,$-1+m=0+t$,$0+m^2-2m-3=-3+0$,解得 $\begin{cases}m=0,\\t=-1,\end{cases}$(舍去)或 $\begin{cases}m=2,\\t=1.\end{cases}$

当 $m=2$ 时,$m^2-2m-3=2^2-2\times2-3=-3$,

即点 P 坐标为 $(2,-3)$.

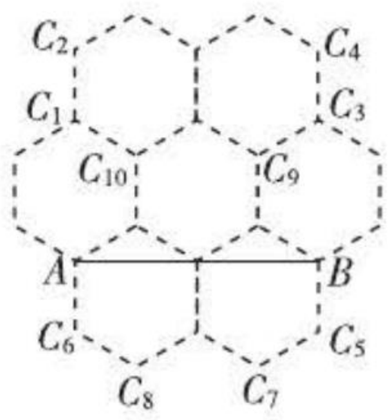
综上,存在以点 B,C,Q,P 为顶点的平行四边形.

点 P 的坐标为 $(2,-3)$ 或 $(1+\sqrt{7},3)$ 或 $(1-\sqrt{7},3)$.

【第三章测试卷】

一、1. C **2.** C **3.** C **4.** B **5.** B **6.** C **7.** D

8. D **点拨**:当 $\triangle ABC$ 为直角三角形时,线段 AB 可能是直角边,也可能是斜边. 如图,当线段 AB 为直角边时,点 A 和点 B 都可能为直角顶点. 当点 A 为直角顶点时,点 C 的位置可以是 C_1,C_2,C_6;当点 B 为直角顶点时,点 C 的位置可以是 C_3,C_4,C_5. 当线段 AB 为斜边时,点 C 在以线段 AB 为直径的圆上,所以点 C 的位置可以是 C_7,C_8,C_9,C_{10},所以若 $\triangle ABC$ 是直角三角形,其个数为 10,故选 D.

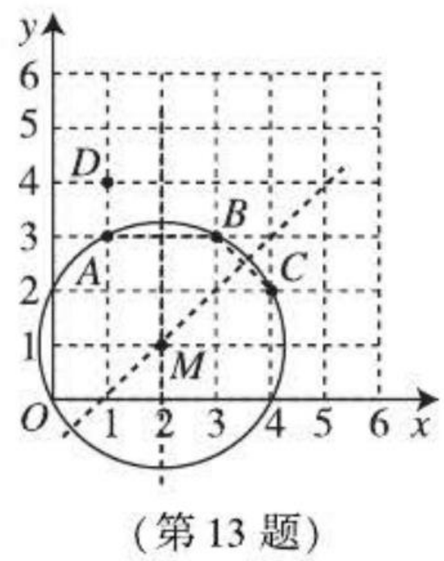


(第 8 题)

二、9. 点 C **10.** 1.6

11. $2\sqrt{2}$ **12.** 3

三、13. 解:(1)如图,圆心 M 的坐标为 $(2,1)$.



(第 13 题)

(2)相切

14. 解:∵ $\odot O$ 的半径 OD 垂直于弦 AB 于点 C,$AB=8$,

∴ $AC=\frac{1}{2}AB=4$.

设 $\odot O$ 的半径为 r,则 $OC=r-2$.

在 $Rt\triangle AOC$ 中,$OA^2=AC^2+OC^2$,

∴ $r^2=4^2+(r-2)^2$,

解得 $r=5$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

$\therefore AE=2r=10.$

连接 BE.

$\because AE$ 是⊙O 的直径,

$\therefore \angle ABE=90°$.

在 Rt△ABE 中,

$\because AE=10, AB=8$,

$\therefore BE=\sqrt{AE^2-AB^2}=\sqrt{10^2-8^2}=6.$

在 Rt△BCE 中,

$\because BE=6, BC=4$,

$\therefore CE=\sqrt{BE^2+BC^2}=\sqrt{6^2+4^2}=2\sqrt{13}.$

15. (1)**证明**:连接 OD.

$\because DF$ 是⊙O 的切线,D 为切点,

$\therefore OD\perp DF.$

$\therefore \angle ODF=90°.$

$\because BD=CD, OA=OB$,

$\therefore OD$ 是△ABC 的中位线.

$\therefore OD/\!/AC.$

$\therefore \angle CFD=\angle ODF=90°$,

$\therefore DF\perp AC.$

(2)**解**:$\because \angle CDF=30°, \angle ODF=90°$,

$\therefore \angle ODB=180°-\angle CDF-\angle ODF=60°.$

$\because OB=OD$,

$\therefore$ △OBD 是等边三角形.

$\therefore \angle BOD=60°.$

$\therefore \overset{\frown}{BD}$ 的长为$\frac{60\pi\times5}{180}=\frac{5}{3}\pi.$

16. (1)**证明**:连接 OD, OE, BD.

$\because AB$ 为半圆 O 的直径,

$\therefore \angle ADB=\angle BDC=90°.$

在 Rt△BDC 中,E 为斜边 BC 的中点,

$\therefore DE=BE=CE.$

在△OBE 和△ODE 中,$\begin{cases}OB=OD,\\OE=OE,\\BE=DE,\end{cases}$

$\therefore$ △$OBE\cong$△ODE(SSS).

$\therefore \angle ODE=\angle ABC=90°.$

$\therefore DE$ 为半圆 O 的切线.

(2)**解**:在 Rt△ABC 中,$\angle BAC=30°$,

$\therefore BC=\frac{1}{2}AC, \angle C=60°.$

$\because BC=2DE=4$,

$\therefore AC=8.$

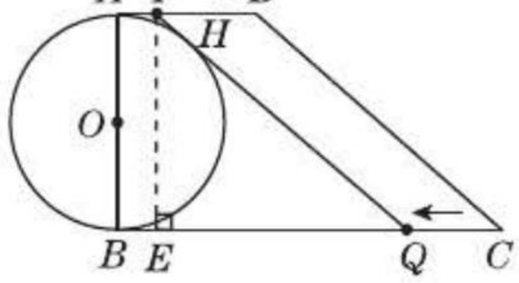
又$\because \angle C=60°, DE=EC$,

$\therefore$ △DEC 为等边三角形.

$\therefore DC=DE=2.$

$\therefore AD=AC-DC=6.$

17. **解**:如图,设 PQ 与⊙O 相切于点 H,过点 P 作 $PE\perp BC$,垂足为 E.



(第 17 题)

$\because$ 在四边形 $ABCD$ 中,$AD/\!/BC, \angle ABC=90°$,

$\therefore PE=AB.$

由题意可知 $AP=BE=t, CQ=2t$,

$\therefore BQ=BC-CQ=22-2t$,

$EQ=|BQ-BE|=|22-2t-t|=|22-3t|.$

$\because AB$ 为⊙O 的直径,

$\angle ABC=\angle DAB=90°$,

$\therefore AD, BC$ 为⊙O 的切线.

$\therefore AP=PH, HQ=BQ.$

$\therefore PQ=PH+HQ=AP+BQ=t+22-2t=22-t.$

在 Rt△PEQ 中,$PE^2+EQ^2=PQ^2$,

$\therefore 12^2+(22-3t)^2=(22-t)^2$,

即 $t^2-11t+18=0.$

解得 $t_1=2, t_2=9.$

$\because \frac{8}{1}=8(\text{s}), \frac{22}{2}=11(\text{s})$,

而 $11>8, t=9>8$,

$\therefore t=9$ 舍去.

$\therefore$ 当 $t=2$ 时,PQ 与⊙O 相切.

荣德基

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

教材习题参考答案及点拨

第一章 直角三角形的边角关系

1 锐角三角函数

随堂练习(教材第4页)

1. 解: ∵ $\triangle ABC$ 是等腰三角形,$BD \perp AC$,

∴ D 是 AC 的中点. ∴ $DC = AD = \frac{1}{2}AC = 2$.

在 $Rt\triangle BCD$ 中,$\tan C = \frac{BD}{DC} = \frac{1.5}{2} = \frac{3}{4}$.

2. 解: 由勾股定理可得 $AC = \sqrt{AB^2 - BC^2} = \sqrt{200^2 - 55^2} \approx 192.288\,9(\text{m})$,∴ $\tan \angle BAC = \frac{BC}{AC} \approx \frac{55}{192.288\,9} \approx 0.286$.

∴ 山的坡度大约是 0.286.

习题 1.1

1. 解: 由勾股定理得 $BC = \sqrt{AB^2 - AC^2} = \sqrt{13^2 - 5^2} = \sqrt{144} = 12$.

在 $Rt\triangle ABC$ 中,$\tan A = \frac{BC}{AC} = \frac{12}{5}$,$\tan B = \frac{AC}{BC} = \frac{5}{12}$.

2. 解: 在 $Rt\triangle ABC$ 中,$\tan A = \frac{BC}{AC}$.

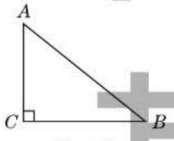
又∵ $BC = 3$,∴ $AC = \frac{BC}{\tan A} = \frac{3}{\frac{5}{12}} = 7.2$.

3. 略.

4. 解: 如图,$\tan A = \frac{BC}{AC}$,$\tan B = \frac{AC}{BC}$,

∴ $\tan A \cdot \tan B = 1$.

∴ $\tan A$ 与 $\tan B$ 互为倒数.



(第4题)

随堂练习(教材第6页)

1. 解: 过点 A 作 $AD \perp BC$ 于点 D.

∵ $\triangle ABC$ 是等腰三角形,∴ $BD = CD = \frac{1}{2}BC = 3$.

在 $Rt\triangle ABD$ 中,∵ $AD = \sqrt{AB^2 - BD^2} = 4$,

∴ $\sin B = \frac{AD}{AB} = \frac{4}{5}$,$\cos B = \frac{BD}{AB} = \frac{3}{5}$,$\tan B = \frac{AD}{BD} = \frac{4}{3}$.

2. 解: 在 $Rt\triangle ABC$ 中,∵ $\sin A = \frac{4}{5}$,$BC = 20$,

∴ $AB = \frac{BC}{\sin A} = \frac{20}{\frac{4}{5}} = 25$.

∴ 由勾股定理得 $AC = \sqrt{AB^2 - BC^2} = \sqrt{25^2 - 20^2} = 15$.

∴ $C_{\triangle ABC} = AB + BC + CA = 25 + 20 + 15 = 60$,$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}BC \cdot AC = \frac{1}{2} \times 20 \times 15 = 150$.

习题 1.2

1. 解: 由勾股定理可得 $x = \sqrt{9^2 - \left(\frac{36}{5}\right)^2} = \frac{27}{5}$,

∴ $\sin \alpha = \frac{\frac{27}{5}}{9} = \frac{3}{5}$,$\cos \alpha = \frac{\frac{36}{5}}{9} = \frac{4}{5}$,$\tan \alpha = \frac{\frac{27}{5}}{\frac{36}{5}} = \frac{3}{4}$,$\sin \beta = \frac{\frac{36}{5}}{9} = \frac{4}{5}$,$\cos \beta = \frac{\frac{27}{5}}{9} = \frac{3}{5}$,$\tan \beta = \frac{\frac{36}{5}}{\frac{27}{5}} = \frac{4}{3}$.

2. 解: 倾斜角的正弦值越大,梯子越陡;倾斜角的余弦值越小,梯子越陡;倾斜角的正切值越大,梯子越陡.

3. 解: 在 $Rt\triangle ABC$ 中,$\angle C = 90°$,$\sin A$ 的值等于 $\cos B$ 的值.

点拨: 在 $Rt\triangle ABC$ 中,∵ $\sin A = \frac{BC}{AB}$,$\cos B = \frac{BC}{AB}$,

∴ $\sin A = \cos B$.

4. 解: 过点 D 作 $DF // CB$ 交 AC 于点 F,则 $\angle AFD = 90°$.

∵ D 是 AB 的中点,

∴ $DF = \frac{1}{2}BC = \frac{1}{2} \times 8 = 4$.

由勾股定理得 $FC = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3$.

∴ 在 $Rt\triangle CFD$ 中,$\sin \angle ACD = \frac{DF}{CD} = \frac{4}{5}$,

$\cos \angle ACD = \frac{FC}{CD} = \frac{3}{5}$,$\tan \angle ACD = \frac{DF}{FC} = \frac{4}{3}$.

点拨: 过点 D 作 $DF // CB$ 交 AC 于点 F,由 D 是 AB 的中点,可得到 DF 的长度,然后在 $Rt\triangle CFD$ 中,利用边角关系求出答案.

5. 解: 若 $\angle BAC > 90°$,则点 D 在 BC 上.

在 $Rt\triangle ABD$ 中,$BD = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3$,

∴ $CD = BC - BD = 13 - 3 = 10$.

∴ 在 $Rt\triangle ADC$ 中,由勾股定理得 $AC = \sqrt{10^2 + 4^2} = 2\sqrt{29}$.

∴ $\sin C = \frac{AD}{AC} = \frac{4}{2\sqrt{29}} = \frac{2\sqrt{29}}{29}$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

若$\angle BAC<90°$,则点D在CB的延长线上.

在Rt$\triangle ABD$中,$BD=\sqrt{5^2-4^2}=3$,

$\therefore CD=BC+BD=13+3=16$. $\therefore$在Rt$\triangle ADC$中,由勾股定理得$AC=\sqrt{16^2+4^2}=4\sqrt{17}$. $\therefore \sin C=\frac{AD}{AC}=\frac{4}{4\sqrt{17}}=\frac{\sqrt{17}}{17}$.

2 30°,45°,60°角的三角函数值

随堂练习(教材第9页)

1. 解:(1)原式$=\frac{\sqrt{3}}{2}-1=\frac{\sqrt{3}-2}{2}$.

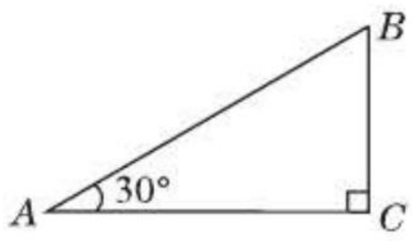
(2)原式$=\frac{1}{2}+\sqrt{3}=\frac{1+2\sqrt{3}}{2}$.

(3)原式$=\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}-2\times\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}-\sqrt{2}=\frac{1+\sqrt{3}-2\sqrt{2}}{2}$.

2. 解:如图,$BC=7$ m,$\angle BAC=30°$,

$\therefore AB=\frac{BC}{\sin\angle BAC}=\frac{7}{\sin 30°}=\frac{7}{\frac{1}{2}}=14$(m).

$\therefore$扶梯的长度是14 m.



(第2题)

习题1.3

1. 解:(1)原式$=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$.

(2)原式$=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{3}}{3}=\frac{3+3\sqrt{2}-2\sqrt{3}}{6}$.

(3)原式$=6\times\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2-\sqrt{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}-2\times\frac{\sqrt{2}}{2}=2-\frac{3}{2}-\sqrt{2}=\frac{1-2\sqrt{2}}{2}$.

2. 解:由题意可知$AB=12$ m,$\angle ABC\approx 90°$,

$\therefore$在Rt$\triangle ABC$中,

$BC=\frac{AB}{\tan\angle BCA}=\frac{12}{\tan 60°}=\frac{12}{\sqrt{3}}=4\sqrt{3}\approx 7$(m).

$\therefore B,C$间的距离约是7 m.

3. 解:$\because$ $\triangle SAB$是等腰三角形,SO是$\triangle SAB$的高,

$\therefore OA=\frac{1}{2}AB=\frac{1}{2}\times 54=27$,

$\angle ASO=\frac{1}{2}\angle ASB=\frac{1}{2}\times 120°=60°$.

$\therefore$在Rt$\triangle SAO$中,

$SO=\frac{OA}{\tan\angle ASO}=\frac{27}{\tan 60°}=9\sqrt{3}$.

4. 解:在Rt$\triangle CAD$中,$CD=AD\tan\angle CAD=5\times\tan 30°=\frac{5\sqrt{3}}{3}$(m). $\therefore CE=CD+DE=CD+AB\approx 4.6$ m.

$\therefore$这棵树大约有4.6 m高.

5. 解:由题意可知$\angle BCF=45°$.

$\because AB\parallel CD$,$AE\perp AB$,$BF\perp AB$,

$\therefore$四边形$ABFE$是矩形.

$\therefore BF=AE=0.8$ m,

$EF=AB=1.2$ m.

在Rt$\triangle AED$和Rt$\triangle BFC$中,

$\begin{cases}AD=BC,\\AE=BF,\end{cases}$

$\therefore$Rt$\triangle AED\cong$Rt$\triangle BFC$.

在Rt$\triangle BCF$中,$FC=\frac{FB}{\tan 45°}=0.8$ m,

$\therefore V=\frac{1}{2}\times(1.2+1.2+0.8+0.8)\times 0.8\times 1\,500=2\,400$(m^3).

$\therefore$该段水渠最多能蓄水2 400 m^3.

6. 解:在Rt$\triangle ABD$中,$AB=\frac{AD}{\cos 45°}=\frac{1.5}{\frac{\sqrt{2}}{2}}=\frac{3\sqrt{2}}{2}$(m),

$BD=AD\tan 45°=1.5\times 1=\frac{3}{2}$(m).

$\because BC=AB$, $\therefore BC=\frac{3\sqrt{2}}{2}$ m. 在Rt$\triangle BCE$中,$CE=BC\sin 30°=\frac{3\sqrt{2}}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{3\sqrt{2}}{4}$(m).

$\because\left(\frac{3}{2}+\frac{3\sqrt{2}}{4}\right)\times 100\div 20\approx 12.8$.

$\therefore$这一阶梯至少有13个台阶.

点拨:本题利用$BC=AB$将两个直角三角形联系起来,通过直角三角形的边角关系,求出阶梯的高.

3 三角函数的计算

随堂练习(教材第14页)

1. 解:(1)$\sin 56°\approx 0.829\,0$.

(2)$\cos 20.5°\approx 0.936\,7$.

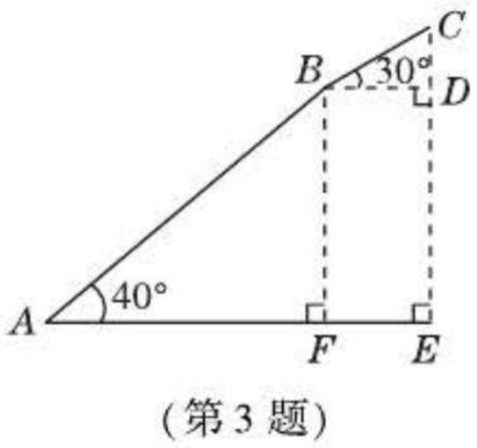
(3)$\tan 44°59'59''\approx 1.000\,0$.

(4)$\sin 15°+\cos 61°+\tan 76°\approx 4.754\,4$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

2. 解：∵ $\sin\theta = 0.829\ 04$，∴ $\theta \approx 56°1''$.

3. 解：如图，过点 C 作 $CE \perp AE$ 于点 E，过点 B 作 $BF \perp AE$ 于点 F，过点 B 作 $BD \perp CE$ 于点 D，易知 $BF = DE$.



（第 3 题）

在 $\mathrm{Rt}\triangle ABF$ 中，$BF = AB\sin 40°$，

在 $\mathrm{Rt}\triangle CDB$ 中，$CD = BC\sin 30°$.

∴ $CE = CD + DE = CD + BF = BC\sin 30° + AB\sin 40° = 100\sin 30° + 300\sin 40° \approx 242.8(\mathrm{m})$.

∴ 山高约 242.8 m.

4. 解：设梯子与地面所成的锐角为 $\angle\alpha$，则 $\cos\alpha = \frac{2.5}{4} = \frac{5}{8} = 0.625$. ∴ $\angle\alpha \approx 51°19'4''$. ∴ 梯子与地面所成锐角的度数约为 $51°19'4''$.

习题 1.4

1. 解：(1) $\tan 32° \approx 0.624\ 9$.

(2) $\cos 24.53° \approx 0.909\ 7$.

(3) $\sin 62°11' \approx 0.884\ 4$.

(4) $\tan 39°39'39'' \approx 0.829\ 1$.

2. 解：(1) $\sin^2 56° + \cos^2 25° \approx 1.508\ 7$.

(2) $\sin 62.6° - 2\sin 37°\cdot\cos 20° \approx -0.243\ 2$.

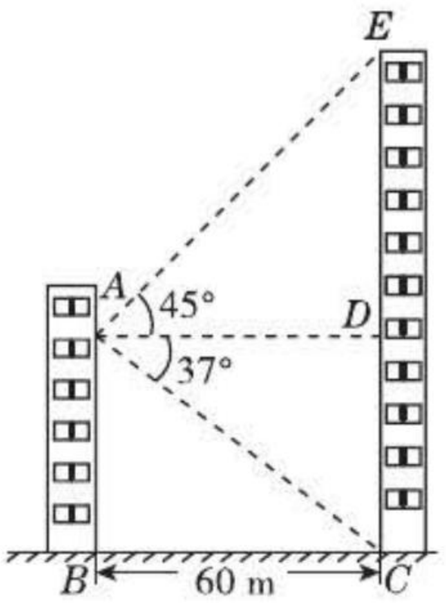
3. 解：(1) $\angle\theta \approx 71°30'2''$. (2) $\angle\theta \approx 23°18'35''$.

(3) $\angle\theta \approx 38°16'46''$. (4) $\angle\theta \approx 41°53'54''$.

4. 解：如图，$AD /\!/ BC$，$AB \perp BC$，$DC \perp BC$，

∴ 四边形 $ABCD$ 是矩形.

∴ $AD = BC$.



（第 4 题）

在 $\mathrm{Rt}\triangle AED$ 中，$ED = AD\tan 45°$.

在 $\mathrm{Rt}\triangle ADC$ 中，$DC = AD\tan 37°$.

∴ $EC = ED + DC = AD\tan 45° + AD\tan 37° = 60\tan 45° + 60\tan 37° \approx 105.2(\mathrm{m})$.

∴ 该大厦的高度约是 105.2 m.

5. 解：设山坡与水平面所成锐角为 $\angle\alpha$，

则 $\sin\alpha = \frac{50}{1\ 000} = 0.05$.

∴ $\angle\alpha \approx 2°51'58''$.

∴ 山坡与水平面所成锐角的度数约为 $2°51'58''$.

6. 解：设甲、乙两地间的坡角为 $\angle\alpha$，

则 $\sin\alpha = \frac{27\times 100}{1.5\times 20\ 000} = 0.09$.

∴ $\angle\alpha \approx 5°9'49''$.

∴ 甲、乙两地间的坡角约为 $5°9'49''$.

4 解直角三角形

随堂练习（教材第 17 页）

解：(1) 在 $\mathrm{Rt}\triangle ABC$ 中，

由勾股定理得 $c = \sqrt{4^2 + 8^2} = 4\sqrt{5}$.

∵ $\sin A = \frac{a}{c} = \frac{4}{4\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$，∴ $\angle A \approx 27°$.

∵ $\angle C = 90°$，∴ $\angle B = 90° - \angle A \approx 63°$.

(2) 在 $\mathrm{Rt}\triangle ABC$ 中，$\angle C = 90°$，$\angle B = 60°$，

∴ $\angle A = 30°$. ∵ $\sin B = \frac{b}{c}$，$b = 10$，

∴ $c = \frac{b}{\sin B} = \frac{10}{\sin 60°} = \frac{20\sqrt{3}}{3}$.

由勾股定理得 $a = \sqrt{c^2 - b^2} = \frac{10\sqrt{3}}{3}$.

(3) 在 $\mathrm{Rt}\triangle ABC$ 中，$\angle C = 90°$，$\angle A = 60°$，

∴ $\angle B = 30°$. ∵ $\sin A = \frac{a}{c}$，$c = 20$，

∴ $a = c\cdot\sin A = 20\times\sin 60° = 20\times\frac{\sqrt{3}}{2} = 10\sqrt{3}$. 由勾股定理得 $b = \sqrt{c^2 - a^2} = 10$.

习题 1.5

1. 解：(1) 在 $\mathrm{Rt}\triangle ABC$ 中，

∵ $\sin A = \frac{a}{c}$，$a = 19$，$c = 19\sqrt{2}$，

∴ $\sin A = \frac{19}{19\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$. ∴ $\angle A = 45°$.

∵ $\angle C = 90°$，

∴ $\angle B = 45°$. ∴ $b = a\cdot\tan B = 19\times 1 = 19$.

(2) 在 $\mathrm{Rt}\triangle ABC$ 中，∵ $a = 6\sqrt{2}$，$b = 6\sqrt{6}$，

∴ $c = \sqrt{a^2 + b^2} = 12\sqrt{2}$. ∴ $\sin A = \frac{a}{c} = \frac{6\sqrt{2}}{12\sqrt{2}} = \frac{1}{2}$.

德基

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

$\therefore \angle A=30°.\therefore \angle B=90°-30°=60°.$

2. 解:(1)在 Rt $\triangle ABC$ 中,$\angle C=90°$,$\angle A=45°$,

$\therefore \angle B=45°.$

$\because \sin A=\frac{a}{c},\sin B=\frac{b}{c},c=20,\therefore a=c\cdot\sin A=20\times\sin 45°=10\sqrt{2},b=c\cdot\sin B=20\times\sin 45°=10\sqrt{2}.$

(2)在 Rt$\triangle ABC$ 中,$\angle C=90°$,$\angle B=30°$,$\therefore \angle A=60°.$

$\because \sin A=\frac{a}{c},a=36,\therefore c=\frac{a}{\sin A}=\frac{36}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=24\sqrt{3}.$

$\therefore b=c\cdot\sin B=24\sqrt{3}\times\sin 30°=12\sqrt{3}.$

3. 解:由题意可得 $AD=\frac{1}{2}AB=10$ mm. 在Rt$\triangle ACD$ 中,

$\tan\angle ACD=\frac{AD}{CD}=\frac{10}{19.2}=\frac{25}{48},\therefore \angle ACD\approx 27.5°,$

$\therefore \angle ACB=2\angle ACD\approx 55°.$

$\therefore$ V 形角($\angle ACB$)的度数约为 55°.

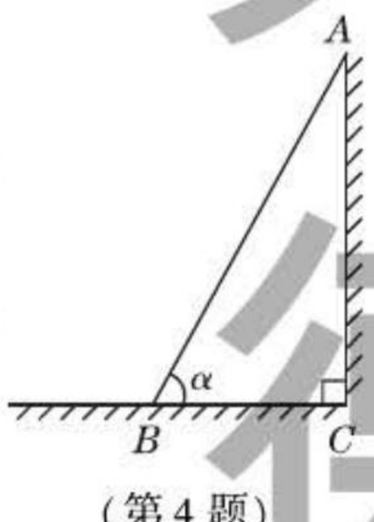
4. 解:(1)如图,在 Rt $\triangle ABC$ 中,

$AC=AB\cdot\sin\alpha=6\sin\alpha.$

当 $50°\leqslant\alpha\leqslant 75°$ 时,$\sin\alpha$ 随 α 的增大而增大,

$\therefore$ 当 $\angle\alpha=75°$ 时,$\sin\alpha$ 最大,即 AC 取得最大值,此时 $AC=6\times\sin 75°\approx 5.8(\text{m}).$

$\therefore$ 使用这个梯子最高可以安全攀上约5.8 m 高的墙.



(第4题)

(2)由题意可知 $BC=2.4$ m,

$\therefore \cos\alpha=\frac{BC}{AB}=\frac{2.4}{6}=0.4.$

$\therefore \angle\alpha\approx 66°.$

$\therefore$ 梯子与地面所成的锐角 α 约等于 66°,这时人能够安全使用这个梯子.

5 三角函数的应用

随堂练习(教材第 20 页)

1. 解:在 Rt$\triangle DBC$ 中,$\angle CBD=90°$,

$DB=5$ m,$\angle CDB=40°$,

而 $\tan\angle CDB=\frac{CB}{DB}$,

$\therefore CB=DB\tan\angle CDB=5\times\tan 40°\approx 4.20(\text{m}).$

$\therefore EB=CB+EC\approx 4.20+2=6.20(\text{m}).$

在 Rt$\triangle EDB$ 中,由勾股定理得 $ED=\sqrt{EB^2+DB^2}\approx\sqrt{6.20^2+5^2}\approx 7.96(\text{m}).$

$\therefore$ 钢缆 ED 的长度约为 7.96 m.

2. 解:(1)过点 A 作 $AE\perp BC$ 于点 E,过点 D 作 $DF\perp BC$ 于点 F.

$\because AD/\!/BC,\therefore$ 四边形 $AEFD$ 是矩形.

$\therefore AD=EF,AE=DF.$

$\because \angle ADC=135°,\therefore \angle FDC=45°.$

在 Rt$\triangle DCF$ 中,$DF=CD\cos\angle FDC=8\times\cos 45°=4\sqrt{2}$(m),$FC=CD\sin\angle FDC=8\times\sin 45°=4\sqrt{2}$(m),

$\therefore BE=BC-EF-FC=30-6-4\sqrt{2}=24-4\sqrt{2}$(m).

在 Rt$\triangle ABE$ 中,

$\tan\angle ABE=\frac{AE}{BE}=\frac{DF}{BE}=\frac{4\sqrt{2}}{24-4\sqrt{2}}\approx 0.3084,$

$\therefore \angle ABC\approx 17°8'23''.$

(2)$S_{\text{四边形}ABCD}=\frac{1}{2}(AD+BC)\times DF$

$=\frac{1}{2}\times(6+30)\times 4\sqrt{2}$

$=72\sqrt{2}(\text{m}^2),$

$V=72\sqrt{2}\times 100\approx 10\,182.34(\text{m}^3).$

$\therefore$ 建筑这个大坝共需约 10 182.34 m^3 土石料.

习题 1.6

1. 解:设此斜坡的倾斜角为 α,

$\therefore \sin\alpha=\frac{20}{40}=\frac{1}{2}.\therefore \alpha=30°.$

$\therefore$ 此斜坡的倾斜角为 30°.

2. 解:设建筑物的高度为 x m,如图,

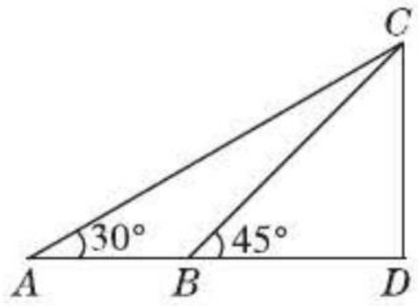
在 Rt$\triangle ACD$ 中,$\tan A=\frac{CD}{AD}$,

在 Rt$\triangle CBD$ 中,$\tan\angle CBD=\frac{CD}{BD}$,

$\therefore (BD+AB)\cdot\tan A=BD\cdot\tan\angle CBD.$ 易知 $BD=CD$,

$\therefore (x+50)\times\frac{\sqrt{3}}{3}=x.$ 解得 $x\approx 68.3.$

$\therefore$ 建筑物的高度约为 68.3 m.



(第2题)

3. 解:过点 A 作 $AE\perp BC$ 于点 E,过点 D 作 $DF\perp BC$ 于点 F,连接 AD.

由 $AD/\!/BC$,易知四边形 $AEFD$ 是矩形.

$\therefore AD=EF,AE=DF,\angle AEB=90°,\angle DFC=90°.$

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

在 Rt△AEB 中，$BE=\frac{AE}{\tan B}=\frac{70}{\tan 55°}$ mm.

∵ $\angle AEB=\angle DFC=90°$，$AE=DF$，$AB=DC$，

∴ Rt△AEB≌Rt△DFC. ∴ $EB=FC$.

∴ $BC=BE+EF+FC=BE+AD+BE=2BE+AD=\frac{2\times 70}{\tan 55°}+180\approx 278$(mm).

∴ 它的里口宽 BC 约为 278 mm.

点拨：分别过点 A，D 作垂线构造直角三角形是解题的关键.

4. 解：过点 B 作 $BE\perp AN$ 于点 E.

$AC=36\times\frac{40}{60}=24$(n mile).

在 Rt△ABE 中，$\tan A=\frac{BE}{AE}=\tan 45°=1$，

∴ $BE=AE$.

在 Rt△CBE 中，

$\tan\angle ECB=\frac{BE}{CE}$，∴ $CE=\frac{BE}{\tan 75°}$.

设 $BE=x$ n mile，则有 $x-24=\frac{x}{\tan 75°}$，

解得 $x\approx 32.785$.

∴ $BC=\frac{BE}{\sin 75°}\approx 33.94$ n mile.

∴ 此时货轮与灯塔 B 的距离约为 33.94 n mile.

6 利用三角函数测高

习题 1.7

1. 略. **2.** 略. **3.** 略.

复习题

1. 解：(1) 原式 $=\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{1}{2}+\sqrt{3}=\frac{\sqrt{2}-1+2\sqrt{3}}{2}$；

(2) 原式 $=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2-1=\frac{3}{4}+\frac{1}{4}-1=0$；

(3) 原式 $=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{3}+\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{3+3\sqrt{2}-2\sqrt{3}}{6}$.

2. 解：(1) $\sin 23°5'+\cos 66°55'\approx 0.7841$；

(2) $\cos 14°28'-\tan 42°57'\approx 0.0374$；

(3) $\sin^2 7.8°-\cos 65°37'+\tan 49°56''\approx 0.7566$.

3. 解：(1) 在 Rt△ABC 中，$\angle C=90°$，$a=3$，$b=3$，

∴ $\tan A=\frac{a}{b}=\frac{3}{3}=1$. ∴ $\angle A=45°$；

(2) 在 Rt△ABC 中，$\angle C=90°$，$b=4$，$c=8$，

∴ 由勾股定理得 $a=\sqrt{c^2-b^2}=\sqrt{8^2-4^2}=4\sqrt{3}$.

∴ $\sin A=\frac{a}{c}=\frac{4\sqrt{3}}{8}=\frac{\sqrt{3}}{2}$. ∴ $\angle A=60°$；

(3) 在 Rt△ABC 中，$\angle C=90°$，$\angle A=45°$，$c=8$，$\sin A=\frac{a}{c}$，$\cos A=\frac{b}{c}$，

∴ $a=c\cdot\sin A=8\times\sin 45°=4\sqrt{2}$，$b=c\cdot\cos A=8\times\cos 45°=4\sqrt{2}$.

4. 解：在 Rt△ABC 中，$\angle C=90°$，a，b，c 分别为 $\angle A$，$\angle B$，$\angle C$ 的对边.

∵ $\cos A=\frac{3}{5}$，∴ 可设 $b=3k$，$c=5k(k>0)$，

则 $a=\sqrt{c^2-b^2}=4k$.

∴ $\sin A=\frac{a}{c}=\frac{4k}{5k}=\frac{4}{5}$，

$\tan A=\frac{a}{b}=\frac{4k}{3k}=\frac{4}{3}$.

5. 解：(1) $\angle A\approx 42°27'15''$；

(2) $\angle B\approx 85°28'29''$；

(3) $\angle C\approx 88°23'28''$.

6. 解：(1) 原式 $=\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}}=1$；

(2) 原式 $=\left(\frac{1}{2}\right)^2+2\times\frac{\sqrt{3}}{2}+1-\sqrt{3}+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2=2$；

(3) 原式 $=\sqrt{(1-\tan 60°)^2}-\tan 60°=\sqrt{(1-\sqrt{3})^2}-\sqrt{3}=\sqrt{3}-1-\sqrt{3}=-1$.

7. 解：在 Rt△ABC 中，$\angle C=90°$，$\angle B=60°$，$AB=4$，

∴ $AC=AB\sin B=4\times\sin 60°=2\sqrt{3}$，$BC=AB\cos B=4\times\cos 60°=2$.

∵ $\angle C=90°$，$\angle B=60°$，∴ $\angle A=30°$.

∴ $\sin A=\sin 30°=\frac{1}{2}$，$\cos A=\cos 30°=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

8. 略.

9. 解：(1) $\tan\angle ABC=\frac{1}{2}\tan\angle ADC$；

(2) $\tan\angle ABC=\frac{1}{3}\tan\angle ADC$；

(3) $\tan\angle ABC=\frac{1}{n+1}\tan\angle ADC$.

点拨：连接 AD，在 Rt△ABC 中求出 $\tan\angle ABC$ 的值，在 Rt△ADC 中，求出 $\tan\angle ADC$ 的值，然后确定它们之间的大小关系.

10. 解：在 Rt△ABC 中，$\tan\angle CAB=\frac{CB}{AB}$，$AB=20$ m，

$\angle CAB=50°$，

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

$\therefore CB = AB \tan \angle CAB = 20 \tan 50°$ m.

在 Rt$\triangle DAB$ 中,$\tan \angle DAB = \frac{DB}{AB}$, $\angle DAB = 56°$,

$\therefore DB = AB \tan \angle DAB = 20 \tan 56°$ m.

$\therefore DC = DB - CB = 20 \tan 56° - 20 \tan 50° \approx 5.82$(m).

$\therefore$ 题图中避雷针 CD 的长度约为 5.82 m.

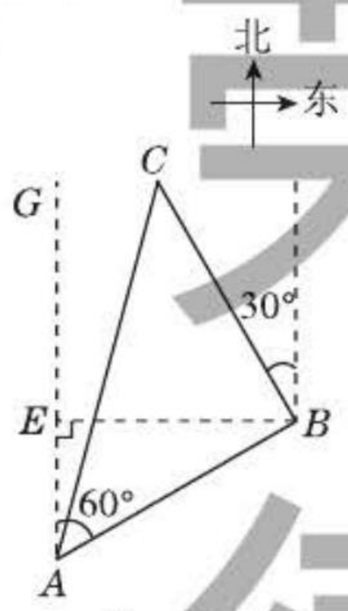
11. 解: 过点 A 作 AC 垂直于海平面,垂足为 C. 由题意可知 $AC = 100$ m, $\angle ABC = 30°$.

在 Rt$\triangle ABC$ 中,$\tan \angle ABC = \frac{AC}{BC}$,

$\therefore BC = \frac{AC}{\tan \angle ABC} = \frac{100}{\tan 30°} \approx 173.2$(m).

$\therefore$ 船与观测者之间的水平距离约为 173.2 m.

12. 解: (1) 如图,过点 B 作 $BE \perp AG$ 于点 E,则



(第 12 题)

$\angle CBE = 60°$.

在 Rt$\triangle ABE$ 中, $\angle EAB = 60°$,

$\therefore \angle ABE = 30°$.

$\therefore \angle CBA = \angle CBE + \angle ABE = 90°$.

又$\because AB = BC = 10$ km,

$\therefore \triangle ABC$ 是等腰直角三角形.

在 Rt$\triangle ABC$ 中,

$AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{10^2 + 10^2} = 10\sqrt{2} \approx 14.1$(km).

$\therefore A, C$ 两港之间的距离约为 14.1 km.

(2)$\because \triangle ABC$ 是等腰直角三角形,

$\therefore \angle CAB = 45°$,

$\therefore \angle EAC = \angle EAB - \angle CAB = 60° - 45° = 15°$.

$\therefore C$ 港在 A 港的北偏东 15°方向.

13. 解: 由题意可知 $\angle TQP = 40°$.

在 Rt$\triangle PTQ$ 中,$\tan \angle TQP = \frac{PT}{PQ}$,

$\therefore PT = PQ \tan \angle TQP = 180 \times \tan 40° \approx 151$(m).

$\therefore$ 河宽约为 151 m.

14. 解: 由题图可知 $AC = 6.3$ cm, $BC = 9.8$ cm.

在 Rt$\triangle ABC$ 中,

$\tan B = \frac{AC}{BC} = \frac{6.3}{9.8} = \frac{9}{14}$,

$\therefore \angle B \approx 32°44'7''$.

$\therefore$ 射线与皮肤所成的锐角约为 $32°44'7''$.

15. 解: (1) 如图,在 Rt$\triangle ABE$ 中,

$BE = AB \cos 60° = 4 \times \frac{1}{2} = 2$(m).

$\therefore$ 竹竿下端离墙脚 2 m 远.

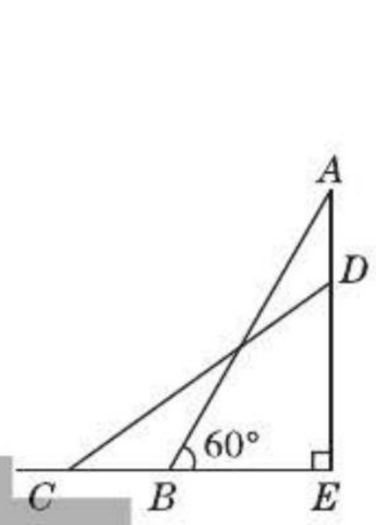
(2) 如图,当 $DE = 2.3$ m 时,

在 Rt$\triangle CDE$ 中,

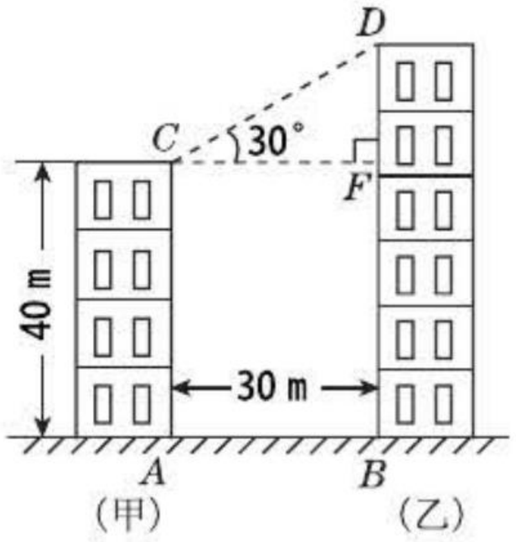
$\sin \angle DCE = \frac{DE}{CD} = \frac{2.3}{4} = 0.575$.

$\therefore \angle DCE \approx 35°5'59''$.

即此时竹竿与地面所成锐角的度数约为 $35°5'59''$.



(第 15 题)



(第 16 题)

16. 解: 如图,过点 C 作 $CF \perp DB$ 于点 F.

易知四边形 $ABFC$ 是矩形.

$\therefore BF = AC = 40$ m, $CF = AB = 30$ m.

在 Rt$\triangle DCF$ 中,$DF = CF \tan 30° = 30 \times \frac{\sqrt{3}}{3} = 10\sqrt{3}$(m).

$\therefore DB = DF + FB = 10\sqrt{3} + 40 \approx 57$(m).

$\therefore$ 乙楼大约有 57 m 高.

17. 解: 设塔高 BC 为 x m. 由题意可知 $\angle BAC = 60°$, $\angle BDE = 30°$,

$EC = DA = 30$ m, $DE = AC$.

在 Rt$\triangle BDE$ 中,$DE = \frac{BE}{\tan 30°}$.

在 Rt$\triangle ABC$ 中,$DE = AC = \frac{BC}{\tan 60°}$.

$\because BC - EC = BC - 30 = BE$,

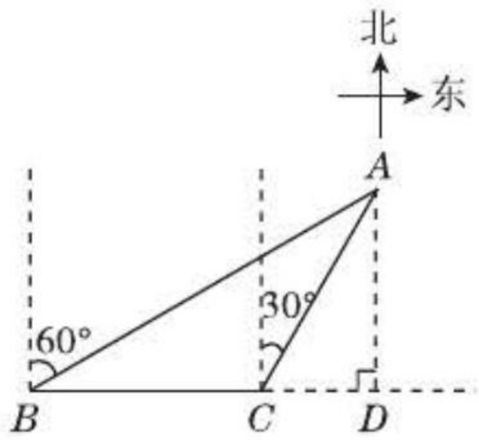
$\therefore \frac{x}{\tan 60°} = \frac{x - 30}{\tan 30°}$,

解得 $x = 45$, 即 $BC = 45$ m.

$\therefore AC = \frac{BC}{\tan 60°} = \frac{45}{\sqrt{3}} \approx 25.98$(m).

即塔高 BC 为 45 m, 大楼与塔之间的距离 AC 约为 25.98 m.

18. 解: 如图,过点 A 作 $AD \perp BC$,交 BC 的延长线于点 D.



(第 18 题)

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

在 Rt△ABD 中，$AD = BD\tan\angle ABD = BD\cdot\tan(90°-60°) = BD\tan 30° = \frac{\sqrt{3}}{3}BD$.

在Rt△ACD中，$AD = CD\cdot\tan\angle ACD = CD\tan(90°-30°) = CD\tan 60° = \sqrt{3}CD$. 设 $BD = x$ n mile.

∵ $CD = BD - BC$，

∴ 有$\frac{\sqrt{3}}{3}x = \sqrt{3}(x-12)$，解得$x = 18$.

∴ $BD = 18$ n mile.

∴ $AD = \frac{\sqrt{3}}{3}\times 18 = 6\sqrt{3}$(n mile).

又∵ $6\sqrt{3} > 8$，

∴ 渔船没有触礁的危险.

点拨：通过 Rt△ABD 和 Rt△ACD 的公共边 AD 得到方程，进而求出 AD 的长，即海岛 A 到 BC 的距离，最后通过比较得出问题的答案.

※**19. 解**：过点 C 作 $CF\perp AB$，交 AB 的延长线于点 F. 由题意得$AD = 1$ m，$DE = 0.6$ m，

∴ 在 Rt△ADE 中，$\sin\angle CAB = \frac{DE}{AD} = \frac{0.6}{1} = \frac{3}{5}$.

∵ 在 Rt△ACF 中，$\sin\angle CAB = \frac{CF}{AC}$，

∴ $\frac{CF}{AC} = \frac{3}{5}$.

∵ $AC = 4.5$ m，∴ $CF = 2.7$ m.

又∵ $BC = 2.8$ m，

∴ 在 Rt△CBF 中，$\sin\angle CBF = \frac{CF}{CB} = \frac{2.7}{2.8} = \frac{27}{28}$.

∴ $\angle\alpha = \angle CBF \approx 74°38'28''$.

点拨：本题关键在于找出公共角和公共边，通过解直角三角形求出结果.

※**20. 解**：如图，连接 BD，过点 B 作 $BE\perp AD$ 于点 E，过点 D 作 $DF\perp BC$ 于点 F.

∵ $AB = 30$ m，$\angle A = 60°$，

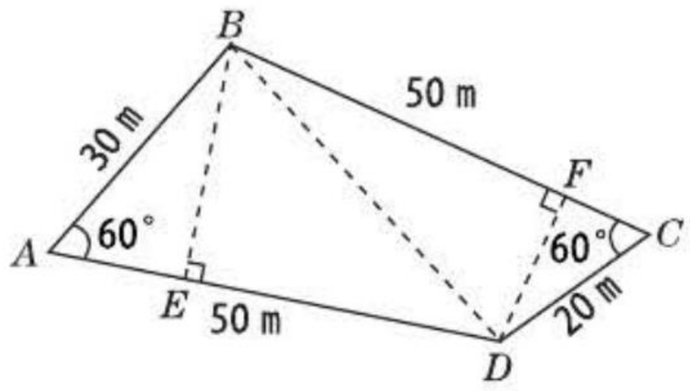
∴ 在 Rt△ABE 中，$BE = AB\sin A = 30\times\sin 60° = 15\sqrt{3}$(m).

∵ $DC = 20$ m，$\angle C = 60°$，

∴ 在 Rt△DCF 中，$DF = DC\sin C = 20\times\sin 60° = 10\sqrt{3}$(m).

∴ $S_{四边形ABCD} = S_{\triangle ABD} + S_{\triangle BDC} = \frac{1}{2}AD\cdot BE + \frac{1}{2}BC\cdot DF = \frac{1}{2}\times 50\times 15\sqrt{3} + \frac{1}{2}\times 50\times 10\sqrt{3} \approx 1\,082.53$(m²)，

即此空地的面积约为 1 082.53 m².



(第20题)

21. 解：(1)过点 E 作 $EF\perp DC$ 于点 F，易知四边形 $BCFE$ 是矩形.

∴ $EB = CF$，$BC = EF$.

在Rt△DEF中，$DF = EF\tan 30° = BC\tan 30° = 30\times\frac{\sqrt{3}}{3} = 10\sqrt{3}$(m).

∴ $DC = DF + FC = 10\sqrt{3} + 1.4 \approx 18.72$(m).

∴ 学校主楼的高度约为 18.72 m.

(2)过点 A 作 $AG\perp DC$ 于点 G，易知四边形 $ABCG$ 是矩形.

∴ $AG = BC$，$AB = GC$.

∴ $DG = DC - AB \approx 18.72 - 5 = 13.72$(m).

∴ 在Rt△AGD中，由勾股定理得 $AD = \sqrt{AG^2 + DG^2} \approx 32.99$ m.

∴ 大门顶部与主楼顶部的距离约为32.99 m.

22. 解：如图，过点 A 作 $AD\perp BC$，交 BC 于点 D.

∵ △ABC 是等腰三角形，

∴ $AB = AC$，$\angle B = \angle C$，$BD = DC$.

∴ $\angle B = \frac{1}{2}(180° - \angle BAC) = 15°$.

在 Rt△ABD 中，$BD = AB\cos 15°$，

∴ $BC = 2BD = 2AB\cos 15°$.

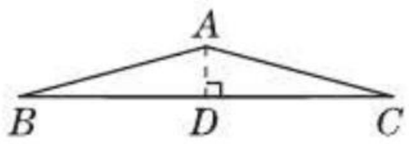
设 AB 的长为 x m，则有

$x + x + 2x\cdot\cos 15° = 1.35$，

解得 $x \approx 0.34$.

∴ $AB = AC \approx 0.34$ m，

$BC \approx 1.35 - 2\times 0.34 = 0.67$(m).



(第22题)

23. 解：(1)∵ $\tan\angle A_0OA_1 = \frac{A_0A_1}{A_0O} = \frac{1}{1} = 1$，

∴ $\angle A_0OA_1 = 45°$.

在 Rt△A_0OA_1 中，由勾股定理得 $A_1O = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$，

∴ $\tan\angle A_1OA_2 = \frac{A_1A_2}{A_1O} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

∴ $\angle A_1OA_2 \approx 35°15'52''$.

在 Rt△A_1OA_2 中，由勾股定理得 $A_2O = \sqrt{1^2+(\sqrt{2})^2} = \sqrt{3}$，

∴ $\tan\angle A_2OA_3 = \frac{A_2A_3}{A_2O} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

$\therefore \angle A_2OA_3 = 30°$.

(2)由(1)知 $\tan \angle A_{n-1}OA_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$,即 $\sqrt{n} = \frac{1}{\tan \angle A_{n-1}OA_n}$,

$\because \frac{1}{\tan 20°} \approx 2.75$,$\therefore \sqrt{n} > 2.75$.

$\because \sqrt{7} < 2.75 < \sqrt{8}$,$\angle A_{n-1}OA_n$ 是第一个小于 20° 的角,

$\therefore n = 8$.

第二章 二次函数

1 二次函数

随堂练习(教材第 30 页)

1. 解: $y = -\frac{1}{2} + 3x^2$ 是二次函数;

$y = \frac{1}{2}x^2 - x^3 + 25$ 不是二次函数;

$y = 2^2 + 2x$ 不是二次函数;

$s = 1 + t + 5t^2$ 是二次函数.

2. 解: (1) $y = \pi \cdot (1+x)^2 - \pi \cdot 1^2 = \pi x^2 + 2\pi x$,

即 y 与 x 之间的关系式为 $y = \pi x^2 + 2\pi x$.

(2)当 $x = 1$ 时,$y = \pi + 2\pi = 3\pi$;

当 $x = \sqrt{2}$ 时,$y = 2\pi + 2\sqrt{2}\pi = (2 + 2\sqrt{2})\pi$;

当 $x = 2$ 时,$y = 4\pi + 4\pi = 8\pi$.

故当圆的半径分别增加 1 cm,$\sqrt{2}$ cm,2 cm 时,圆的面积各增加 3π cm^2,$(2+2\sqrt{2})\pi$ cm^2,8π cm^2.

习题 2.1

1.

t/s	1	2	3	4	5
h/m	4.9	19.6	44.1	78.4	122.5

2. 略.

3. 解: (1) $S = 2x \cdot x + 2x(x+0.5) + 2x(x+0.5) = 6x^2 + 2x$.

(2) $y = 5S = 5(6x^2 + 2x) = 30x^2 + 10x$.

4. 解: $y = t(x-20) = (-3x+70)(x-20) = -3x^2 + 130x - 1\,400$.

2 二次函数的图象与性质

习题 2.2

1. 略.

2. 解:把点 A 的横坐标 2 代入 $y = x^2$,得 $y = 4$,

$\therefore$ 点 $A(2,4)$ 在二次函数 $y = x^2$ 的图象上.

$\because$ 点 A 和点 B 关于 x 轴对称,

$\therefore$ 它们的横坐标相同,纵坐标互为相反数.

$\therefore B$ 点的坐标为 $(2, -4)$.

$\because$ 点 A 和点 C 关于 y 轴对称,

$\therefore$ 它们的纵坐标相同,横坐标互为相反数.

$\therefore C$ 点的坐标为 $(-2,4)$.

$\because$ 点 A 和点 D 关于原点 O 对称,

$\therefore$ 它们的纵坐标、横坐标都互为相反数.

$\therefore D$ 点的坐标为 $(-2,-4)$.

将点 B,C,D 的坐标分别代入 $y = x^2$ 和 $y = -x^2$,可知 B 点和 D 点在函数 $y = -x^2$ 的图象上,C 点在函数 $y = x^2$ 的图象上.

随堂练习(教材第 36 页)

1. 解:二次函数 $y = 3x^2 - \frac{1}{2}$ 的图象与二次函数 $y = 3x^2$ 的图象都是抛物线,并且形状相同,只是位置不同. 将二次函数 $y = 3x^2 - \frac{1}{2}$ 的图象向上平移 $\frac{1}{2}$ 个单位长度,就得到二次函数 $y = 3x^2$ 的图象. 二次函数 $y = 3x^2 - \frac{1}{2}$ 的图象是轴对称图形,开口向上,对称轴为 y 轴,顶点坐标为 $\left(0, -\frac{1}{2}\right)$. 画图略.

2. 解:二次函数 $y = -2x^2 - \frac{1}{2}$ 的图象与二次函数 $y = -2x^2 + \frac{1}{2}$ 的图象都是抛物线,并且形状相同,只是位置不同. 将二次函数 $y = -2x^2 - \frac{1}{2}$ 的图象向上平移 1 个单位长度,就得到二次函数 $y = -2x^2 + \frac{1}{2}$ 的图象.

习题 2.3

1. 解:二次函数 $y = \frac{1}{3}x^2$ 的图象与二次函数 $y = 3x^2$ 的图象的相同点是都是抛物线且开口向上、图象关于 y 轴对称,顶点都是 $(0,0)$,不同点是形状不同.

2. 解:二次函数 $y = -3x^2$,$y = 3x^2$ 的图象都是抛物线,并且形状相同,只是位置不同. 将函数 $y = -3x^2$ 的图象关于 x 轴翻折,就得到函数 $y = 3x^2$ 的图象.

二次函数 $y = -3x^2$ 的图象是轴对称图形,开口向下,对称轴为 y 轴,顶点坐标为 $(0,0)$. 画图略.

二次函数 $y = -\frac{1}{2}x^2$,$y = \frac{1}{2}x^2$ 的图象也都是抛物线,并且形状相同,只是位置不同. 将函数 $y = -\frac{1}{2}x^2$ 的图象关于 x 轴翻折,就得到函数 $y = \frac{1}{2}x^2$ 的图象.

3. 解:二次函数 $y = 5x^2 - 3$,$y = 5x^2$ 的图象都是抛物线,并且形状相同,只是位置不同. 将函数 $y = 5x^2 - 3$ 的图象向上平移 3 个单位长度,就得到函数 $y = 5x^2$ 的图象.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

二次函数 $y=5x^2-3$ 是轴对称图形，开口向上，对称轴为 y 轴，顶点坐标为 $(0,-3)$. 画图略.

二次函数 $y=-5x^2-2$，$y=-5x^2+3$ 的图象也都是抛物线，并且形状相同，只是位置不同. 将函数 $y=-5x^2-2$ 的图象向上平移5个单位长度，就得到函数 $y=-5x^2+3$ 的图象.

4. 解：如 $y=2x^2+4$ 与 $y=-2x^2+4$.

点拨：答案不唯一.

5. 解：如 $y=4x^2+1$ 与 $y=4x^2-2$.

点拨：答案不唯一.

随堂练习（教材第38页）

解：(1)将二次函数 $y=-3x^2$ 的图象向左平移2个单位长度，就得到二次函数 $y=-3(x+2)^2$ 的图象. 二次函数 $y=-3(x+2)^2$ 的图象是轴对称图形，开口向下，对称轴为直线 $x=-2$，顶点坐标为 $(-2,0)$.

(2)当 $x\leqslant -2$ 时，y 的值随 x 值的增大而增大；当 $x>-2$ 时，y 的值随 x 值的增大而减小.

习题2.4

1. 解：(1)图象的开口向上，对称轴为直线 $x=3$，顶点坐标为 $(3,-5)$.

(2)图象的开口向下，对称轴为直线 $x=-1$，顶点坐标为 $(-1,0)$.

(3)图象的开口向下，对称轴为直线 $x=0$，顶点坐标为 $(0,-1)$.

(4)图象的开口向上，对称轴为直线 $x=2$，顶点坐标为 $(2,5)$.

(5)图象的开口向上，对称轴为直线 $x=-4$，顶点坐标为 $(-4,2)$.

(6)图象的开口向下，对称轴为直线 $x=3$，顶点坐标为 $(3,0)$.

2. 解：将二次函数 $y=-3x^2$ 的图象向右平移 $\frac{1}{2}$ 个单位长度，就得到 $y=-3\left(x-\frac{1}{2}\right)^2$ 的图象. 二次函数 $y=-3\left(x-\frac{1}{2}\right)^2$ 的图象是轴对称图形，开口向下，对称轴为直线 $x=\frac{1}{2}$，顶点坐标为 $\left(\frac{1}{2},0\right)$.

3. 解：将函数 $y=2x^2$ 的图象先向右平移1个单位长度，再向上平移3个单位长度，就得到函数 $y=2(x-1)^2+3$ 的图象. 对于函数 $y=2(x-1)^2+3$，当 $x>1$ 时，y 的值随 x 值的增大而增大；当 $x\leqslant 1$ 时，y 的值随 x 值的增大而减小.

4. 解：(1) $y=2x^2$，$y=x^2+4$.

(2) $y=-\frac{1}{3}x^2+1$，$y=-\frac{1}{3}x^2+2$.

点拨：答案不唯一.

随堂练习（教材第41页）

解：(1) $y=2x^2-12x+3=2(x-3)^2-15$. 对称轴为直线 $x=3$，顶点坐标为 $(3,-15)$.

(2) $y=-5x^2+80x-319=-5(x-8)^2+1$. 对称轴为直线 $x=8$，顶点坐标为 $(8,1)$.

(3) $y=2\left(x-\frac{1}{2}\right)(x-2)=2x^2-5x+2=2\left(x-\frac{5}{4}\right)^2-\frac{9}{8}$. 对称轴为直线 $x=\frac{5}{4}$，顶点坐标为 $\left(\frac{5}{4},-\frac{9}{8}\right)$.

(4) $y=3(2x+1)(2-x)=-6x^2+9x+6=-6\left(x-\frac{3}{4}\right)^2+\frac{75}{8}$. 对称轴为直线 $x=\frac{3}{4}$，顶点坐标为 $\left(\frac{3}{4},\frac{75}{8}\right)$.

习题2.5

1. 解：(1)开口向上，对称轴为直线 $x=2$，顶点坐标为 $(2,5)$.

(2)开口向上，对称轴为直线 $x=1$，顶点坐标为 $(1,-3)$.

(3)开口向上，对称轴为直线 $x=1$，顶点坐标为 $(1,-1)$.

(4)开口向下，对称轴为直线 $x=-6$，顶点坐标为 $(-6,27)$.

2. 解：得到的抛物线为 $y=(x+2)^2+2=x^2+4x+6$，则 $b=4$，$c=6$. 这条抛物线的开口向上，对称轴为直线 $x=-2$，顶点坐标为 $(-2,2)$.

3. 解：$h=-5t^2+150t+10=-5(t-15)^2+1\,135$，其图象的顶点坐标为 $(15,1\,135)$. 所以，经过15 s，火箭到达它的最高点，最高点的高度是1 135 m.

4. 解：(1)因为 $y=-0.1x^2+2.6x+43=-0.1(x-13)^2+59.9$. 所以，当 $0\leqslant x\leqslant 13$ 时，学生的接受能力逐步增强；当 $13<x\leqslant 30$ 时，学生的接受能力逐渐降低.

(2)由(1)知图象的顶点坐标为 $(13,59.9)$，因此，经过13 min，学生的接受能力最强.

※5. 解：右面抛物线的表达式为 $y=\frac{9}{400}x^2-\frac{9}{10}x+10$.

3 确定二次函数的表达式

随堂练习（教材第43页）

1. 解：设二次函数的表达式为 $y=a(x-h)^2+k$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

∵ 二次函数图象的顶点坐标为(-1,1),

∴ $h=-1,k=1$.

又∵ 二次函数的图象经过点(1,-3),

代入得 $-3=a(1+1)^2+1$,解得 $a=-1$.

∴ 所求二次函数的表达式为 $y=-(x+1)^2+1=-x^2-2x$.

2. 解:(1)将点(1,1)和(2,3)的坐标分别代入表达式 $y=x^2+bx+c$,得 $\begin{cases}1=1+b+c,\\3=4+2b+c.\end{cases}$

解这个方程组,得 $\begin{cases}c=1,\\b=-1.\end{cases}$

∴ 所求二次函数的表达式为 $y=x^2-x+1$.

(2)将点(2,3)更换为点(0,1). 将点(1,1)和(0,1)的坐标分别代入表达式 $y=x^2+bx+c$,得 $\begin{cases}1=1+b+c,\\1=c.\end{cases}$ 解这个方程组,得 $\begin{cases}c=1,\\b=-1.\end{cases}$

∴ 所求二次函数的表达式为 $y=x^2-x+1$.

点拨:第(2)题答案不唯一.

习题 2.6

1. 解:设二次函数的表达式为 $y=a(x-h)^2+k$.

∵ 二次函数图象的顶点坐标为(2,3),

∴ $h=2,k=3$.

又∵ 二次函数图象经过点(-1,0),代入得 $0=a(-1-2)^2+3$,解得 $a=-\frac{1}{3}$.

∴ 所求二次函数的表达式为 $y=-\frac{1}{3}(x-2)^2+3=-\frac{1}{3}x^2+\frac{4}{3}x+\frac{5}{3}$.

2. 解:设所求二次函数的表达式为 $y=ax^2+bx+c$. 由已知得,图象经过(-2,0),(1,0),(0,3)三点,将点的坐标分别代入表达式,

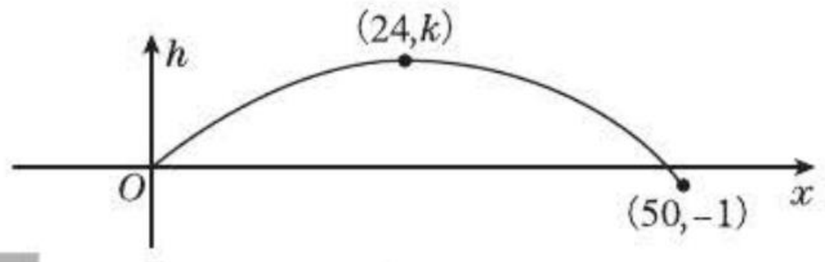
得 $\begin{cases}0=4a-2b+c,\\0=a+b+c,\\3=c.\end{cases}$ 解这个方程组,

得 $\begin{cases}a=-\frac{3}{2},\\b=-\frac{3}{2},\\c=3.\end{cases}$ ∴ 所求二次函数的表达式为 $y=-\frac{3}{2}x^2-\frac{3}{2}x+3$.

※3. 解:(1)如图,建立直角坐标系. 设二次函数的表达式为 $h=a(x-24)^2+k$,将点(0,0)和(50,-1)的坐标分别代入,得 $\begin{cases}0=a(0-24)^2+k,\\-1=a(50-24)^2+k.\end{cases}$

解这个方程组,得 $\begin{cases}a=-\frac{1}{100},\\k=\frac{144}{25}.\end{cases}$

∴ 球的高度 h(m)关于水平距离 x(m)的二次函数表达式为 $h=-\frac{1}{100}(x-24)^2+\frac{144}{25}$.



(第3题)

(2)将 $x=24$ 代入(1)中所求出的二次函数表达式,得 $h=\frac{144}{25}=5.76$.

因此,与击球点相比,球运动到最高点时有5.76 m高.

随堂练习(教材第45页)

解:设所求的二次函数的表达式为 $y=ax^2+bx+c$,由已知,将三点(0,2),(1,0),(-2,3)的坐标分别代入表达式,得 $\begin{cases}2=c,\\0=a+b+c,\\3=4a-2b+c.\end{cases}$ 解这个方程组,得 $\begin{cases}a=-\frac{1}{2},\\b=-\frac{3}{2},\\c=2.\end{cases}$

∴ 所求二次函数的表达式为 $y=-\frac{1}{2}x^2-\frac{3}{2}x+2$.

习题 2.7

1. 解:设所求的二次函数的表达式为 $y=ax^2+bx+c$,由已知,将三点(1,3),(2,0),(3,4)的坐标分别代入表达式,得 $\begin{cases}3=a+b+c,\\0=4a+2b+c,\\4=9a+3b+c.\end{cases}$ 解这个方程组,得 $\begin{cases}a=\frac{7}{2},\\b=-\frac{27}{2},\\c=13.\end{cases}$ ∴ 所求二次函数的表达式为 $y=\frac{7}{2}x^2-\frac{27}{2}x+13$.

2. 解:设所求的二次函数的表达式为 $y=ax^2+bx+c$,由已知,将三点(1,0),(3,0),(2,3)的坐标分别代入表达式,得 $\begin{cases}0=a+b+c,\\0=9a+3b+c,\\3=4a+2b+c.\end{cases}$ 解这个方程组,得 $\begin{cases}a=-3,\\b=12,\\c=-9.\end{cases}$

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

∴ 所求二次函数的表达式为 $y=-3x^2+12x-9$.

3. 解：添加的条件：$C(-1,-2)$. 将点 $A(0,a)$，$B(1,-2)$，$C(-1,-2)$ 的坐标分别代入二次函数的表达式 $y=ax^2+bx+c$，得

$$\begin{cases} a=c, \\ -2=a+b+c, \\ -2=a-b+c. \end{cases}$$ 解这个方程组，得 $$\begin{cases} a=-1, \\ b=0, \\ c=-1. \end{cases}$$

∴ 所求二次函数的表达式为 $y=-x^2-1$.

点拨：答案不唯一.

4 二次函数的应用

随堂练习(教材第 47 页)

解：(1)∵ 四边形 $ABCD$ 是矩形，∴ $AB=DC$.

又∵ $\frac{30}{40}=\frac{30-x}{AB}$，∴ $AB=\frac{4}{3}(30-x)$ m.

(2)由已知可得 $y=x\cdot\frac{4}{3}(30-x)=-\frac{4}{3}(x-15)^2+300$. ∴ 当 $x=15$ 时，$y_{最大}=300$，即当 $x=15$ 时，y 的值最大，最大值是 300.

习题 2.8

1. 解：设 $AD=x$ m，则 $AB=\frac{6-2x}{3}$ m.

设窗户的面积为 y m^2，则 $y=x\cdot\frac{6-2x}{3}=\frac{1}{3}(6x-2x^2)=-\frac{2}{3}(x^2-3x)=-\frac{2}{3}\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{3}{2}$.

∴ 当 $x=1.5$ 时，$y_{最大}=1.5$，即当 $AD=1.5$ m，$AB=1$ m 时，窗户的面积最大.

2. 解：(1)由 $AB=x$ m，得 $BC=(80-2x)$ m，

∴ $S=x(80-2x)=-2x^2+80x$.

又∵ $0<2x<80$，且 $0<80-2x\leqslant 50$，∴ $15\leqslant x<40$.

∴ $S=-2x^2+80x(15\leqslant x<40)$.

(2)由(1)得 $S=-2x^2+80x(15\leqslant x<40)$，即 $S=-2(x-20)^2+800(15\leqslant x<40)$. ∴ 当 $x=20$ 时，$S_{最大}=800$，即当 $BC=40$ m，$AB=20$ m 时，羊圈的面积最大，最大面积为 800 m^2.

3. 解：(1)当这辆货运卡车走隧道的正中间时，最有可能通过该隧道. 当 $x=1$ 时，$y=3.75$. 又∵ 隧道的截面由抛物线和长方形构成，且长方形的宽是 2 m，∴ 当 $x=1$ 时，对应的抛物线上的点距地面高度为 $3.75+2=5.75$(m) >4 m. ∴ 这辆货运卡车能通过该隧道.

(2)当 $x=2$ 时，$y=3$，即当 $x=2$ 时，对应的抛物线上的点距地面高度为 $3+2=5$(m) >4 m. ∴ 如果该隧道内设双向行车道，那么这辆货运卡车也可以通过.

※4. 解：(1)设此抛物线的函数表达式为 $y=ax^2+bx+c$. 设 B 点的坐标为 $(10,y_1)$，则 D 点的坐标为 $(5,y_1+3)$. 又由题图可知 $c=0$，$-\frac{b}{2a}=0$，即 $c=0$，$b=0$，∴ 表示此抛物线的函数表达式为 $y=ax^2$. 将点 B，D 的坐标分别代入，得

$$\begin{cases} y_1=100a, \\ y_1+3=25a. \end{cases}$$ 解这个方程组，得 $$\begin{cases} a=-\frac{1}{25}, \\ y_1=-4. \end{cases}$$ ∴ 此抛物线的函数表达式为 $y=-\frac{1}{25}x^2$.

(2)由题意可知，水位由 AB 处达到 CD 处时，上涨了 3 m，且水位每小时上涨 0.25 m，因此水位由 AB 处达到 CD 处所需时间为 $3\div 0.25=12$(h). 又由船速为 5 km/h，船与桥的距离为 35 km，得船行驶到桥下所需时间为 $35\div 5=7$(h). 所以该船行驶到桥下时所用的时间 7 h 小于水位上涨至 CD 处所用的时间 12 h，即该船的速度不变，能安全通过此桥.

点拨：(1)由题图中的特殊点和对称轴求出 $b=0$，$c=0$，得到点 B，D 的纵坐标之间的关系是解答此题的关键. (2)先计算出水位上涨到 CD 处所需时间和船行驶到桥下所用时间，然后比较大小，即可得到答案.

随堂练习(教材第 49 页)

解：由已知得，如果以单价 20 元销售，那么半月内可售出 600 件. 设销售单价提高 x 元，则销售量相应减少 $20x$ 件. 设半月内获得的利润为 y 元，则 $y=x(600-20x)=-20(x^2-30x)=-20(x-15)^2+4\,500$.

∵ $x\geqslant 0$，且 $600-20x>0$，

∴ $0\leqslant x<30$.

∴ 当 $x=15$ 时，$y_{最大}=4\,500$.

即销售单价为 35 元时，半月内获得的利润最大.

习题 2.9

1. 解：设旅游团增加 x 人，则每人的单价就降低 $10x$ 元. 设旅行社可获得的营业额为 y 元，则

$y=(30+x)(800-10x)$

$=24\,000-300x+800x-10x^2$

$=-10(x-25)^2+30\,250$.

∵ $x\geqslant 0$，x 为整数，且 $800-10x>0$，

∴ $0\leqslant x<80$，且 x 为整数.

∴ 当 $x=25$ 时，y 有最大值 30 250，

即当一个旅游团的人数是 55 时，旅行社可以获得最大营业额.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

2. 解:由已知得,如果按每件 8 元出售,那么每天可销售 120 件. 设这种商品的销售单价提高 x 元,则销售量相应减少 10 x 件. 设每天所获销售利润为 y 元,则

$y=x(120-10x)=-10(x^2-12x)=-10(x-6)^2+360.$

∵ 由题意知 $x\geqslant 0$,且 $120-10x>0$,

∴ $0\leqslant x<12$. 又 x 为整数,

∴ 当 $x=6$ 时,y 有最大值 360,

即当销售单价定为 14 元时,才能使每天所获销售利润最大,最大利润是 360 元.

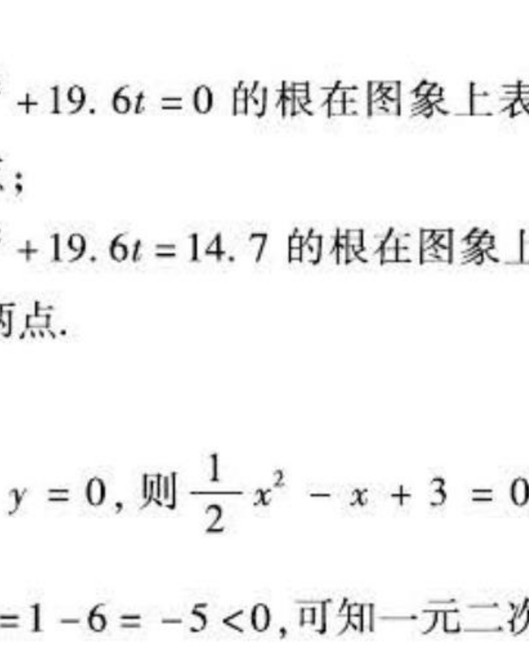
3. 解:整理函数表达式,得 $y=5x^2-59.2x+178.2=5(x-5.92)^2+2.968.$

∵ $5>0$,∴ 抛物线开口向上. ∴ 当 $x=5.92$ 时,y 取得最小值,即大麦穗长的最佳近似长度为5.92 cm.

5 二次函数与一元二次方程

随堂练习(教材第 52 页)

解:(1)函数 $h=-4.9t^2+19.6t$ 的图象如图所示.



(2)当 $t=1$ 时,$h=-4.9+19.6=14.7$;

当 $t=2$ 时,$h=-4.9\times4+19.6\times2=19.6$.

(3)方程 $-4.9t^2+19.6t=0$ 的根的实际意义是足球离开地面及落地的时间;方程 $-4.9t^2+19.6t=14.7$ 的根的实际意义是当足球距地面的高度为14.7 m 时经过的时间.

方程 $-4.9t^2+19.6t=0$ 的根在图象上表示出来如图中 O,A 两点;

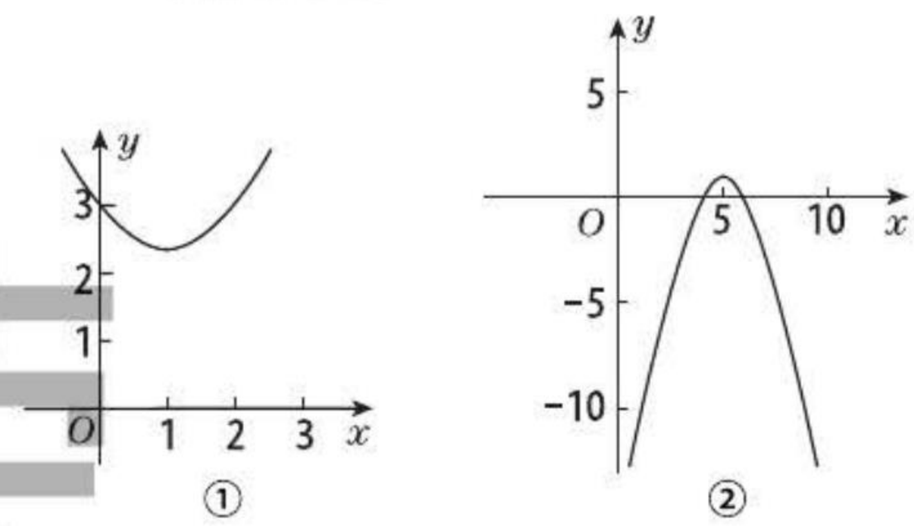
方程 $-4.9t^2+19.6t=14.7$ 的根在图象上表示出来如图中 M,N 两点.

习题 2.10

1. 解:(1)令 $y=0$,则 $\frac{1}{2}x^2-x+3=0$. 由判别式 $\Delta=b^2-4ac=1-6=-5<0$,可知一元二次方程 $\frac{1}{2}x^2-x+3=0$ 无实数根,即二次函数 $y=\frac{1}{2}x^2-x+3$ 的图象与 x 轴无交点.

二次函数 $y=\frac{1}{2}x^2-x+3$ 的草图如图①所示.

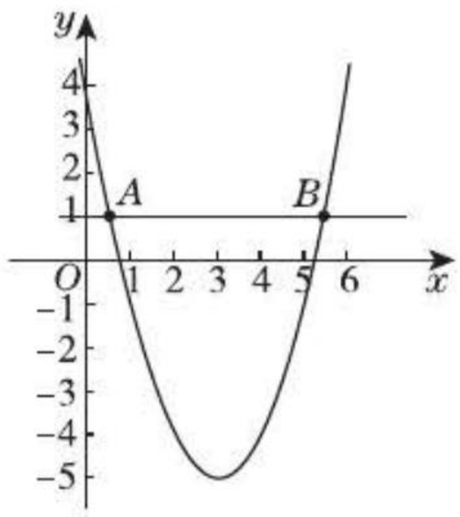
(2)令 $y=0$,则 $-2x^2+20x-49=0$. 由判别式 $\Delta=b^2-4ac=400-4\times(-2)\times(-49)=400-392=8>0$,可知一元二次方程 $-2x^2+20x-49=0$ 有两个不相等的实数根. 解方程得 $x_1=\frac{10+\sqrt{2}}{2}$,$x_2=\frac{10-\sqrt{2}}{2}$,即二次函数 $y=-2x^2+20x-49$ 的图象与 x 轴的交点坐标为 $\left(\frac{10+\sqrt{2}}{2},0\right)$和$\left(\frac{10-\sqrt{2}}{2},0\right)$. 二次函数 $y=-2x^2+20x-49$的草图如图②.



(第 1 题)

2. 解:二次函数 $y=x^2+bx-1$ 的图象与 x 轴相交,且交点的横坐标为一元二次方程 $x^2+bx-1=0$ 的根. ∵ 判别式 $\Delta=b^2-4\times(-1)=b^2+4>0$ 恒成立,∴ 一元二次方程有两个不相等的实数根. ∴ 二次函数 $y=x^2+bx-1$ 的图象与 x 轴有 2 个交点.

3. 解:如图,一元二次方程 $x^2-6x+4=1$ 的根为二次函数 $y=x^2-6x+4$ 的图象与直线 $y=1$ 的交点的横坐标,即 A,B 两点的横坐标.



(第 3 题)

4. 解:由 $-x^2+3x+4=2x-1$,整理得 $-x^2+x+5=0$,∵ 判别式 $\Delta=b^2-4ac=1-4\times(-1)\times5=21>0$,

∴ 一元二次方程 $-x^2+x+5=0$ 有两个不相等的实数根. ∴ 二次函数 $y=-x^2+3x+4$ 的图象与一次函数 $y=2x-1$的图象相交,交点的横坐标为一元二次方程 $-x^2+x+5=0$ 的根. 由题得交点坐标分别为 $\left(\frac{1-\sqrt{21}}{2},-\sqrt{21}\right)$和$\left(\frac{1+\sqrt{21}}{2},\sqrt{21}\right)$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

随堂练习(教材第55页)

解:由题图可知一元二次方程有两个根,一个在 -1 和0之间,另一个在2和3之间.

(1)先求 -1 和0之间的根,利用计算器进行探索:

x	-0.1	-0.2	-0.3
y	0.58	0.12	-0.38

因此,$x=-0.2$ 是方程的一个近似根.

(2)另一个根可以类似地求出:

x	2.1	2.2	2.3
y	0.58	0.12	-0.38

因此,$x=2.2$ 是方程的另一个近似根.

习题2.11

1. 解:(1)由图象可知一元二次方程有两个根,一个在2和3之间,另一个在 -4 和 -3 之间.

①先求2和3之间的根,利用计算器进行探索:

x	2.1	2.2	2.3	2.4	2.5
y	-4.08	-3.12	-2.12	-1.08	0

因此,$x=2.5$ 是方程的一个根.

②另一个根可以类似地求出:

x	-3.4	-3.3	-3.2	-3.1	-3
y	4.72	3.48	2.28	1.12	0

因此,$x=-3$ 是方程的另一个根.

(2)由图象可知一元二次方程有两个根,一个在 -1 和0之间,另一个在0和1之间.

①先求 -1 和0之间的根,利用计算器进行探索:

x	-0.7	-0.6	-0.5	-0.4
y	1.17	0.68	0.25	-0.12

因此,$x=-0.4$ 是方程的一个近似根.

②另一个根可以类似地求出:

x	0.5	0.6	0.7	0.8
y	-0.75	-0.52	-0.23	0.12

因此,$x=0.8$ 是方程的另一个近似根.

2. 解:由题图可知 OA 的高度为抛物线与 y 轴交点的纵坐标,即当 $x=0$ 时,得 $y=\frac{7}{4}$. ∴柱子 OA 的高度为 $\frac{7}{4}$ m.

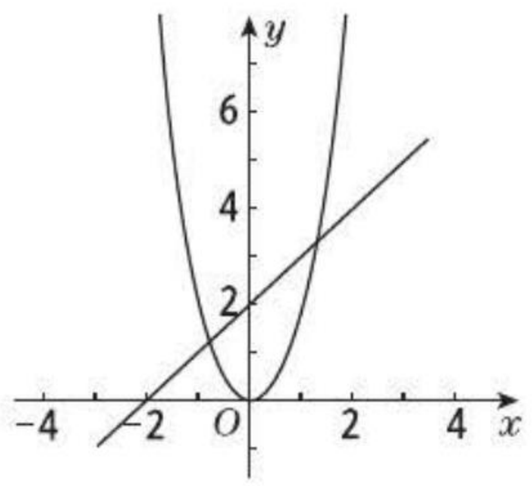
由题图可知水流喷出的最大水平距离为抛物线与 x 轴交点的横坐标.

令 $y=0$,即 $-x^2+2x+\frac{7}{4}=0$,

解得 $x_1=\frac{2-\sqrt{11}}{2}$(舍去),$x_2=\frac{2+\sqrt{11}}{2}$. ∴水池的半径至少为 $\frac{2+\sqrt{11}}{2}$ m,才能使喷出的水流不至于落在池外.

3. 解:作二次函数 $y=2x^2$ 与一次函数 $y=x+2$ 的图象,如图.

由图象可知一元二次方程 $2x^2=x+2$ 有两个根,即 $2x^2-x-2=0$ 有两个根,一个在 -1 和0之间,另一个在1和2之间.



(第3题)

(1)先求 -1 和0之间的根,利用计算器进行探索:

x	-0.9	-0.8	-0.7
y	0.52	0.08	-0.32

因此,$x=-0.8$ 是方程的一个近似根.

(2)另一个根可以类似地求出:

x	1.1	1.2	1.3
y	-0.68	-0.32	0.08

因此,$x=1.3$ 是方程的另一个近似根.

复习题

1. 解:设其中一个数为 x,则另一个数为 $6-x$.

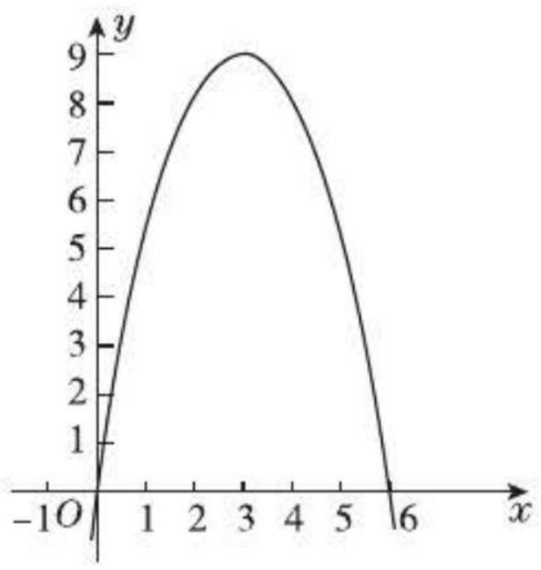
设这两个数的积为 y,则 $y=x(6-x)=-(x-3)^2+9$.

∵ $-1<0$,∴抛物线开口向下.

∴当 $x=3$ 时,$y_{最大}=9$,

即这两个数的积最大可以达到9.

乘积与因数之间的关系图象如图所示.



(第1题)

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

2. 解:(1)对称轴为 y 轴,顶点坐标为(0,2).

(2)对称轴为直线 $x=1$,顶点坐标为(1,5).

(3)对称轴为直线 $x=-3$,顶点坐标为$(-3,-1)$.

(4)对称轴为直线 $x=\frac{5}{2}$,顶点坐标为$\left(\frac{5}{2},\frac{25}{4}\right)$.

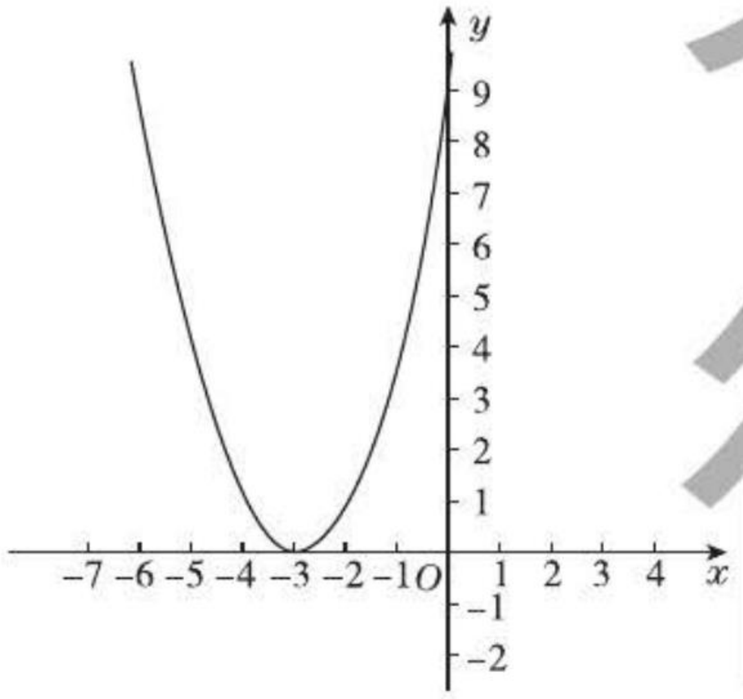
(5)对称轴为直线 $x=1$,顶点坐标为(1,2).

(6)对称轴为直线 $x=\frac{7}{4}$,顶点坐标为$\left(\frac{7}{4},\frac{47}{8}\right)$.

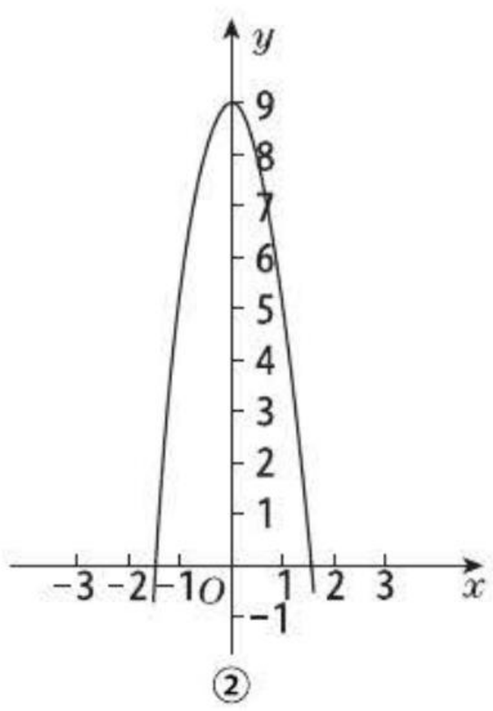
点拨:二次函数 $y=ax^2+bx+c(a\neq0)$ 图象的对称轴为直线 $x=-\frac{b}{2a}$,顶点坐标为 $\left(-\frac{b}{2a},\frac{4ac-b^2}{4a}\right)$.

3. 解:(1)令 $y=0$,则 $x^2+6x+9=0$,解得$x_1=x_2=-3$.

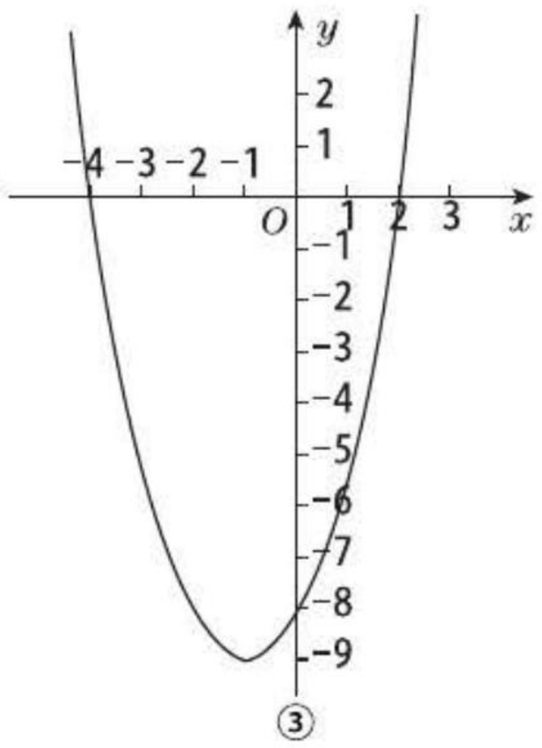
∴ 二次函数 $y=x^2+6x+9$ 的图象与 x 轴的交点的坐标为$(-3,0)$. 作二次函数 $y=x^2+6x+9$ 的图象如图①所示,可知二次函数的图象与 x 轴的交点的坐标为$(-3,0)$.



①



②



③

(第3题)

(2)令 $y=0$,则$9-4x^2=0$,解得 $x_1=\frac{3}{2}$,$x_2=-\frac{3}{2}$.

∴ 二次函数 $y=9-4x^2$ 的图象与 x 轴的交点的坐标为$\left(\frac{3}{2},0\right)$和$\left(-\frac{3}{2},0\right)$. 作二次函数 $y=9-4x^2$ 的草图如图②所示,可知二次函数的图象与 x 轴的交点的坐标为$\left(-\frac{3}{2},0\right)$和$\left(\frac{3}{2},0\right)$.

(3)令 $y=0$,则$(x+1)^2-9=0$,解得 $x_1=2$,$x_2=-4$.

∴ 二次函数 $y=(x+1)^2-9$ 的图象与 x 轴的交点的坐标为(2,0)和$(-4,0)$. 作二次函数 $y=(x+1)^2-9$ 的草图如图③所示,可知二次函数的图象与 x 轴的交点的坐标为(2,0)和$(-4,0)$.

4. 解:设其中一部分铁丝的长为 x cm,则另一部分铁丝的长为$(120-x)$ cm. 设弯曲成的两个小正方形的面积和为 y cm^2,则

$$y=\left(\frac{x}{4}\right)^2+\left(\frac{120-x}{4}\right)^2=\frac{1}{8}(x-60)^2+450.$$

∵ $x>0$,且 $120-x>0$,∴ $0<x<120$.

∴ 当 $x=60$ 时,$y_{最小}=450$,

即它们的面积和最小是 450 cm^2.

5. 解:(1)I 与 v 的关系列表如下:

v	0	1	2	3	4	5	…
I	0	2	8	18	32	50	…

(2)∵ 表示汽车的撞击影响的公式为 $I=2v^2$,∴ 当汽车的速度增加到原来的 2 倍时,$I=2(2v)^2=8v^2$.

∴ 当汽车的速度增加到原来的 2 倍时,撞击影响扩大为原来的 4 倍.

6. 解:(1)地球、月球上 h 和 t 的关系如图所示.

(2)当 $t=4$ 时,$h_{地}=4.9\times4^2=78.4(\text{m})$,

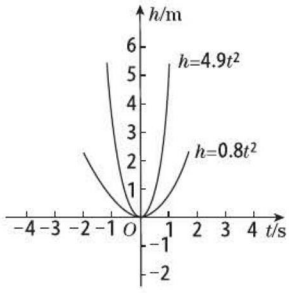
$h_{月}=0.8\times4^2=12.8(\text{m})$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

∴ 当物体下落4 s时，

在地球上下落的距离为78.4 m，

在月球上下落的距离为12.8 m.



（第6题）

(3)当物体在地球上下落10 m时，

有$4.9t^2=10$，解得$t_1\approx-1.4$(舍去)，

$t_2\approx1.4$. ∴ 在地球上下落10 m时，

所需时间约为1.4 s.

当物体在月球上下落10 m时，

有$0.8t^2=10$，解得$t_1\approx-3.5$(舍去)，

$t_2\approx3.5$.

∴ 在月球上下落10 m时，

所需时间约为3.5 s.

7. 解：(1)利用函数表达式求解.

由题可知二次函数$y=x^2-x-5$的图象与一次函数$y=2x-1$的图象的交点的横坐标即为一元二次方程$x^2-x-5=2x-1$的解.

解这个方程，得$x_1=4$，$x_2=-1$.

把$x=4$代入$y=2x-1$，得$y=7$；

把$x=-1$代入$y=2x-1$，

得$y=-3$.

∴ 二次函数$y=x^2-x-5$的图象与一次函数$y=2x-1$的图象的交点坐标为(4,7)和(−1,−3).

(2)利用表格求解. 列表如下：

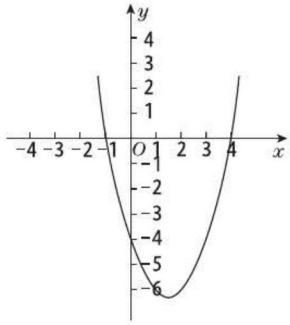
x	−2	−1	0	1	2	3	4	…
$y=2x-1$	−5	−3	−1	1	3	5	7	…
$y=x^2-x-5$	1	−3	−5	−5	−3	1	7	…

由表格可知，二次函数$y=x^2-x-5$的图象与一次函数$y=2x-1$的图象的交点坐标为(−1,−3)和(4,7).

(3)利用图象求解.

作二次函数$y=x^2-x-5-(2x-1)$，

即$y=x^2-3x-4$的图象如图所示.



（第7题）

由函数图象可知，方程$x^2-3x-4=0$有两个根，分别为−1和4.

将$x=-1$代入$y=2x-1$，得$y=-3$，

将$x=4$代入$y=2x-1$，得$y=7$.

∴ 二次函数$y=x^2-x-5$的图象与一次函数$y=2x-1$的图象的交点坐标是(−1,−3)和(4,7).

8. 解：方程$-x^2+2x+\frac{1}{2}=0$的根是二次函数$y=-x^2+2x+\frac{1}{2}$的图象与x轴交点的横坐标.

9. 解：(1)原方程可化为$x^2+11x-9=0$.

作二次函数$y=x^2+11x-9$的图象如图①所示，

由函数图象可知方程有两个根，一个在−12和−11之间，另一个在0和1之间.

①先求−12和−11之间的根，利用计算器进行探索：

x	−11.5	−11.6	−11.7	−11.8
y	−3.25	−2.04	−0.81	0.44

因此，$x=-11.8$是方程的一个近似根.

②另一个根可以类似地求出：

x	0.5	0.6	0.7	0.8
y	−3.25	−2.04	−0.81	0.44

因此，$x=0.8$是方程的另一个近似根.

(2)原方程可化为$x^2+3x-20=0$，

作二次函数$y=x^2+3x-20$的图象如图②所示.

由函数图象可知方程有两个根，

一个在−7和−6之间，

另一个在3和4之间.

①先求−7和−6之间的根，利用计算器进行探索：

x	−6.1	−6.2	−6.3
y	−1.09	−0.16	0.79

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

因此,$x=-6.2$ 是方程的一个近似根.

②另一个根可以类似地求出:

x	3.1	3.2	3.3
y	-1.09	-0.16	0.79

因此,$x=3.2$ 是方程的另一个近似根.

(3)作二次函数 $y=x^2+2x-9$ 的图象如图③.

由函数图象可知方程有两个根,一个在 -5 和 -4 之间,另一个在 2 和 3 之间.

①先求 -5 和 -4 之间的根,利用计算器进行探索:

x	-4.1	-4.2
y	-0.39	0.24

因此,$x=-4.2$ 是方程的一个近似根.

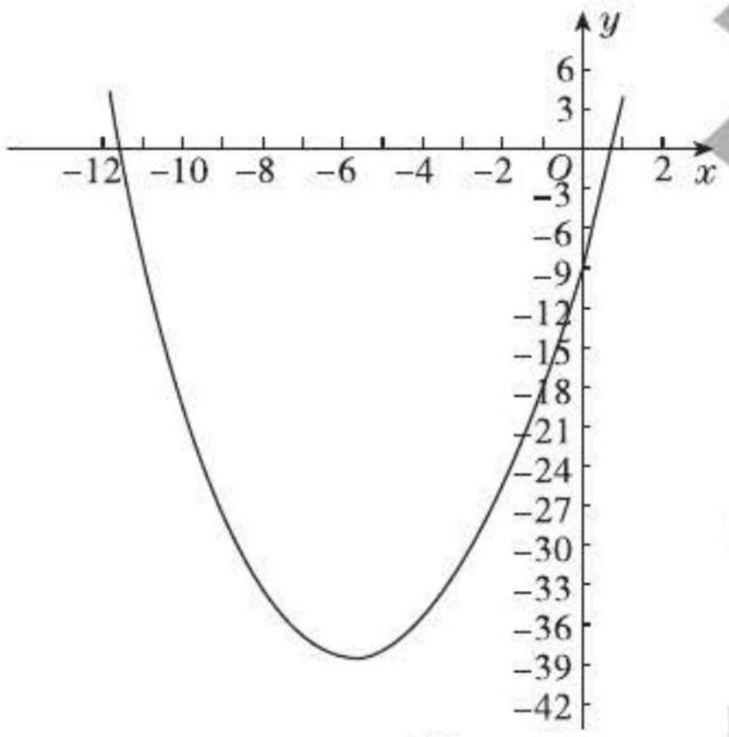
②另一个根可以类似地求出:

x	2.1	2.2
y	-0.39	0.24

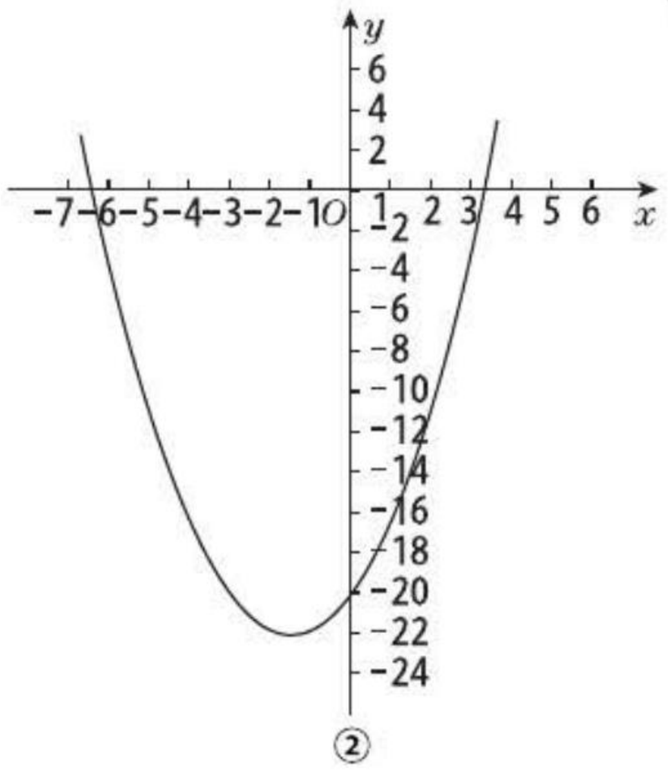
因此,$x=2.2$ 是方程的另一个近似根.

(4)原方程可化为 $x^2-3x+3=0$,作二次函数 $y=x^2-3x+3$ 的图象如图④.

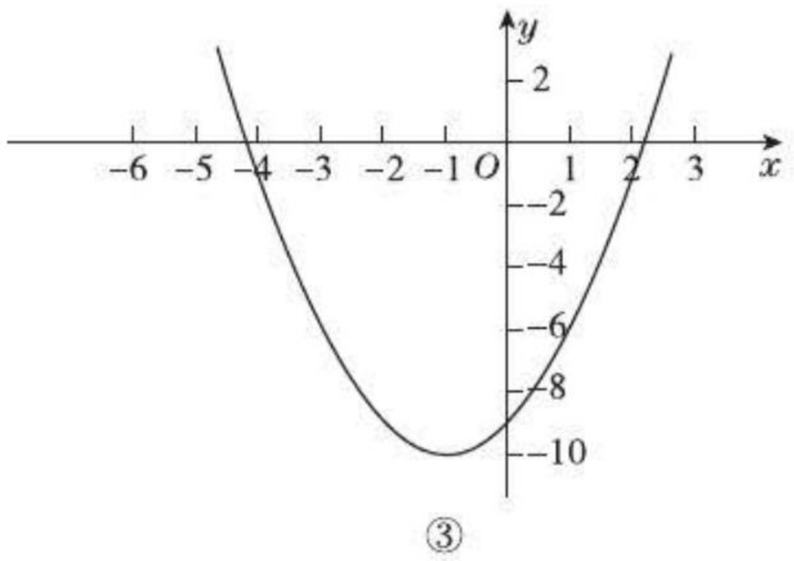
由图可知方程无实数根.



①



②



③

④

(第9题)

10. 解:等边三角形的面积 S 与其边长 a 之间的关系式为

$$S=\frac{1}{2}a\cdot a\sin 60^\circ=\frac{\sqrt{3}}{4}a^2.$$

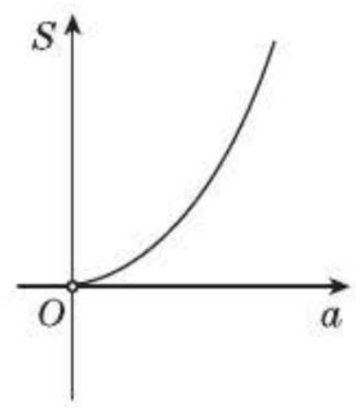
当 $a=1$ 时,$S=\frac{\sqrt{3}}{4}$;当 $a=\sqrt{3}$ 时,$S=\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot 3=\frac{3\sqrt{3}}{4}$;当 $a=2$ 时,$S=\frac{\sqrt{3}}{4}\times 4=\sqrt{3}$.

11. 解:(1)$A=x^2(x>0)$;$l=4x(x>0)$.

(2)略.

(3)函数 $A=x^2$ 的图象是 $y=x^2$ 的图象的一部分. 因为函数 $A=x^2$ 中,$x>0$,而 $y=x^2$ 中,x 是全体实数,所以函数 $A=x^2$ 的图象是 $y=x^2$ 的图象的一部分.

12. 解:平行四边形的面积 S 与它的底边 a 之间的关系式为 $S=\frac{2}{5}a^2(a>0)$. 画出其图象如图.



(第12题)

由图象可知平行四边形的面积 S 随其底边 a 的增大而增大.

荣德基
关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

13. 解:(1) $-\frac{b}{2a}=-\frac{4}{2\times\left(-\frac{1}{2}\right)}=4$,

$\frac{4ac-b^2}{4a}=\frac{0-16}{4\times\left(-\frac{1}{2}\right)}=\frac{-16}{-2}=8$,

则小球到达的最高点的坐标为(4,8).

(2)联立两个函数的表达式,得$\begin{cases}y=4x-\frac{1}{2}x^2,\\ y=\frac{1}{2}x,\end{cases}$

解得$\begin{cases}x=0,\\ y=0,\end{cases}$或$\begin{cases}x=7,\\ y=\frac{7}{2}.\end{cases}$

∴ 点 A 的坐标是$\left(7,\frac{7}{2}\right)$.

14. 解:设矩形一边的长为 x m,则与其相邻一边的长为(15 − x) m. 设所围矩形的面积为 S m^2,则 $S=x(15-x)=-x^2+15x$. 当 $x=-\frac{15}{2\times(-1)}=\frac{15}{2}$时,$S_{最大}=\frac{0-15^2}{4\times(-1)}=\frac{15^2}{4}=56.25$.

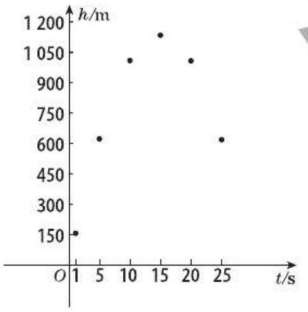
即当围成边长为$\frac{15}{2}$ m 的正方形时,面积最大. 最大面积是 56.25 m^2.

15. 解:(1)根据题意得,移动过程中重叠部分为等腰直角三角形,其直角边长为 $2x$ m. ∴ $y=\frac{1}{2}\cdot 2x\cdot 2x=2x^2$.

(2)当 $x=2$ 时,$y=2\times4=8$;当 $x=3.5$ 时,$y=2\times3.5^2=24.5$.

(3)当移动到 AB 与 CD 重合时,重叠部分的面积是正方形面积的一半. 三角形移动了$\frac{10}{2}=5$(s).

16. 解:(1)如图.



(第 16 题)

(2)能. 是二次函数模型.

(3)设函数表达式为 $h=a(t-15)^2+1\,135$. ∵ 函数的图象过点(1,155),∴ $155=a\times(1-15)^2+1\,135$,解得 $a=-5$. ∴ 函数表达式为 $h=-5(t-15)^2+1\,135$.

(4)根据函数的表达式解得该火箭的最高射程是 1 135 m.

*17. **解**:如图,建立直角坐标系.

设右边水柱的函数表达式为 $y=ax^2+bx+c(0\leqslant x\leqslant1)$.

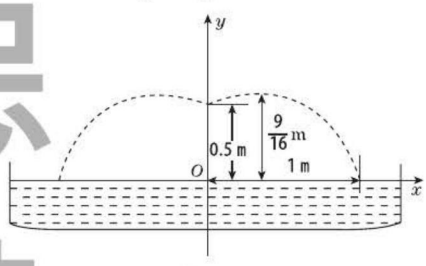
∵ 函数图象过点(0,0.5),(1,0),且函数图象的最高点的纵坐标为$\frac{9}{16}$,

∴ $\begin{cases}0.5=c,\\ a+b+c=0,\\ \frac{4ac-b^2}{4a}=\frac{9}{16}.\end{cases}$

解得$\begin{cases}a=-\frac{1}{4},\\ b=-\frac{1}{4},\\ c=0.5\end{cases}$(不合题意,舍去),或$\begin{cases}a=-1,\\ b=\frac{1}{2},\\ c=\frac{1}{2}.\end{cases}$

∴ 所求函数表达式为 $y=-x^2+\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}(0\leqslant x\leqslant1)$.

由右边水柱的函数表达式可知左边水柱的函数表达式为 $y=-x^2-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}(-1\leqslant x<0)$.



(第 17 题)

18. 解:设拆成的两数中,一个为 x,则另一个为($a-x$). 设它们的乘积为 y,则 $y=x(a-x)=-x^2+ax$. 当 $x=-\frac{a}{2\times(-1)}=\frac{a}{2}$时,$y$ 最大. 一般性的结论:把一个数拆成两个相等的数之和时,拆成的两个数的乘积最大.

19. 解:(1)$y=(26-2x)(22-2x)=4x^2-96x+572$.

(2)函数图象略.

(3)当 $x=1$ 时,$y=4-96+572=480$.

当 $x=1.5$ 时,$y=4\times1.5^2-96\times1.5+572=437$.

当 $x=2$ 时,$y=4\times4-96\times2+572=396$.

∴ 当 $x=1$ 时,可以放入长 24 cm,宽 20 cm,面积为 480 cm^{2}的相片;当 $x=1.5$ 时,可以放入长 23 cm,宽 19 cm,面积为 437 cm^2 的相片;当 $x=2$ 时,可以放入

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

长 22 cm,宽 18 cm,面积为 396 cm^2 的相片.

20. 解:根据题意,得$\frac{4\times(-5)\times0-v_0^2}{4\times(-5)}=15$,

解得 $v_0\approx17.32$(负值舍去).

即喷水的速度应该达到约 17.32 m/s.

21. 解:(1)设函数表达式为 $y=ax^2+c$.

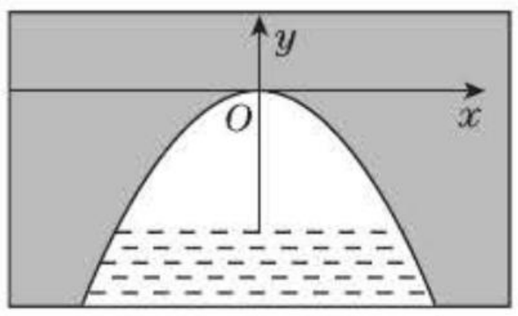
∵ 函数图象过点(8,6),(0,8),

∴ $\begin{cases}6=64a+c,\\8=c,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=-\frac{1}{32},\\c=8.\end{cases}$ ∴ 表示该抛物线的函数表达式为 $y=-\frac{1}{32}x^2+8(-8\leqslant x\leqslant8)$.

(2)令 $x=4$,则 $y=-\frac{1}{32}\times16+8=7.5$.

∵ 7.5 > 7,∴ 这辆货车能安全通过.

※22. 解:如图,建立直角坐标系.



(第 22 题)

设表示该抛物线的函数表达式为 $y=ax^2$.

∵ 抛物线过点(2,−2),

∴ $-2=a\cdot4$,解得 $a=-\frac{1}{2}$.

∴ 函数表达式为 $y=-\frac{1}{2}x^2$.

当 $y=-3$ 时,$-\frac{1}{2}x^2=-3$,$x=\pm\sqrt{6}$. ∴ 当水面下降 1 m后,水面宽度是 $\sqrt{6}-(-\sqrt{6})\approx4.9$(m).

23. 解:过点 A 作 $AP\perp BC$ 于点 P,

易得 $BP=PC=\frac{1}{2}BC=6$,$EP=PF=\frac{1}{2}x$.

在 Rt△ABP 中,$AP=\sqrt{AB^2-BP^2}=\sqrt{10^2-6^2}=8$.

易得 △BDE∽△BAP,则 $\frac{DE}{AP}=\frac{BE}{BP}$.

即 $\frac{DE}{8}=\frac{6-\frac{1}{2}x}{6}$,解得 $DE=\frac{24-2x}{3}$.

∴ $y=DE\cdot EF=\frac{24-2x}{3}\cdot x=-\frac{2}{3}x^2+8x$.

表格和图象略.

(1)自变量 x 的取值范围是 $0<x<12$.

(2)图象的对称轴是直线 $x=-\frac{8}{2\times\left(-\frac{2}{3}\right)}$,即直线 $x=6$,顶点坐标是(6,24).

(3)当 $0<x<6$ 时,y 的值随 x 值的增大而增大;当 $6<x<12$ 时,y 的值随 x 值的增大而减小.

※24. 解:设线段的函数表达式为 $y=kx+b(3\leqslant x\leqslant6)$.

∵ 线段过点(3,5)和(6,3),则有 $\begin{cases}5=3k+b,\\3=6k+b,\end{cases}$

解得 $\begin{cases}k=-\frac{2}{3},\\b=7.\end{cases}$

∴ 线段的函数表达式为 $y=-\frac{2}{3}x+7(3\leqslant x\leqslant6)$.

设抛物线的函数表达式为 $y=a(x-6)^2+1$.

∵ 抛物线过点(3,4),∴ 有 $4=a(3-6)^2+1$. 解得 $a=\frac{1}{3}$. 则抛物线的函数表达式为 $y=\frac{1}{3}(x-6)^2+1$. 设每千克的收益为 m 元,

则 $m=-\frac{2}{3}x+7-\left[\frac{1}{3}(x-6)^2+1\right]=-\frac{1}{3}x^2+\frac{10}{3}x-6$.

当 $x=-\frac{\frac{10}{3}}{2\times\left(-\frac{1}{3}\right)}=5$ 时,m 最大,

即 5 月份出售这种蔬菜,每千克的收益最大.

※25. 解:(1)第 1 个图形中有 1 个小正方形,$1=1^2$;第 2 个图形中有 4 个小正方形,$4=2^2$;第 3 个图形中有 9 个小正方形,$9=3^2$,…,∴ 第 n 个图形中有 n^2 个小正方形.

(2)$1+3=4=2^2$,$1+3+5=9=3^2$,$1+3+5+7=16=4^2$,$1+3+5+7+9=25=5^2$,…,$1+3+5+7+9+\cdots+(2n-1)=n^2$.

※26. 解:(1)第 1 个图形中有 1 个小圆圈,$1=1$;第 2 个图形中有 3 个小圆圈,$3=1+2$;第 3 个图形中有 6 个小圆圈,$6=1+2+3$;第 4 个图形中有 10 个小圆圈,$10=1+2+3+4$;第 5 个图形中有 15 个小圆圈,$15=1+2+3+4+5$,那么第 6 个图形中应该有 $1+2+3+4+5+6=21$(个)小圆圈.

(2)

边上的小圆圈数	1	2	3	4	5
每个图中小圆圈的总数	1	3	6	10	15

(3)$m=\frac{n(n+1)}{2}$.

※27. 解:(1)第 1 个图形中有 1 个小圆圈,第 2 个图形中

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

有7个小圆圈，第3个图形中有19个小圆圈，第4个图形中有37个小圆圈，第5个图形中应该有61个小圆圈. 因为第 n 个图形总比第 $(n-1)$ 个图形多 $6(n-1)$ 个小圆圈，由此知第5个图形中应有 $37+6\times(5-1)=61$（个）小圆圈.

(2)

边上的小圆圈数	1	2	3	4	5
每个图中小圆圈的总数	1	7	19	37	61

(3) $m=1+6+6\times2+6\times3+\cdots+6\times(n-1)$

$=1+6\times[1+2+3+\cdots+(n-1)]$

$=1+6\times\dfrac{n(n-1)}{2}$

$=3n^2-3n+1.$

※**28. 解**：由26题(3)问得出的结论 $m=\dfrac{n(n+1)}{2}$ 知，图形中小圆圈的总数为 $\dfrac{13\times(13+1)}{2}+3\times\dfrac{4\times(4+1)}{2}=121.$

点拨：本题方法不唯一. 也可以运用27题(3)问得出的结论求解.

第三章 圆

1 圆

随堂练习（教材第66页）

1. 解：将绳子的一端 A 固定，然后拉紧绳子的另一端 B，并绕 A 点在地上旋转一周，则 B 经过的路线就是一个半径为3 m的圆.

点拨：画一个圆，先确定圆心和半径，然后绕着圆心旋转一周即可.

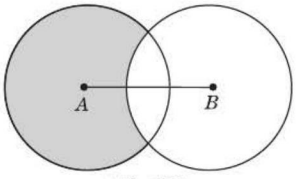
2. 解：小明投的球落在5～6 m的区域内，小华投的球落在6～7 m的区域内.

习题3.1

1. 略.

2. (1) $\odot O$ 外　(2) $\odot O$ 内　(3)5

3. 解：如图，阴影部分（不包括阴影边界）为所求作的图形.



（第3题）

点拨：要使一个点同时符合两个条件，应先分别作出符合这两个条件的具体图形，然后找出它们的公共部分.

※**4. 解**：小明可能，如 $1+1+1+1+1+3=8$（分），则用彩笔画出1,3所在的靶区；小华不可能，因为最多只能得到 $9\times6=54$（分）；小红可能，如 $5+5+5+5+7+1=28$（分），则用和小明所中靶区不同颜色的彩笔画出5,7,1所在的靶区.

点拨：小红投中的靶区不唯一.

2 圆的对称性

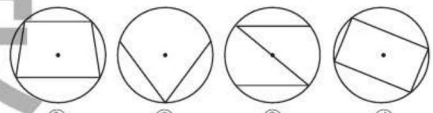
随堂练习（教材第72页）

1. 略.

2. 解：(1)如图①②是轴对称图形但不是中心对称图形；

(2)如图③是中心对称图形但不是轴对称图形；

(3)如图④既是轴对称图形又是中心对称图形.

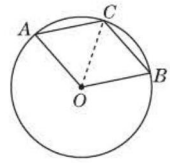


（第2题）

点拨：答案不唯一.

3. 解：四边形 $OACB$ 是菱形.

理由如下：如图，连接 OC.



（第3题）

$\because C$ 是 $\overset{\frown}{AB}$ 的中点，

$\therefore \overset{\frown}{AC}=\overset{\frown}{BC}.\ \therefore \angle AOC=\angle BOC.$

$\because \angle AOB=120°,$

$\therefore \angle AOC=\angle BOC=60°.$

又 $\because OB=OC, OA=OC,$

$\therefore \triangle BOC$ 和 $\triangle AOC$ 都是等边三角形.

$\therefore OB=BC=OC=CA=AO.$

$\therefore$ 四边形 $OACB$ 是菱形.

点拨：圆的半径都相等是隐含的条件，不可忽视.

习题3.2

1. 解：$\triangle ABC$ 和 $\triangle DCB$ 全等.

理由如下：$\because AB=DC, \therefore \overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{CD}.$

$\therefore \overset{\frown}{AB}+\overset{\frown}{BC}=\overset{\frown}{CD}+\overset{\frown}{CB}$，即 $\overset{\frown}{AC}=\overset{\frown}{DB}.$

$\therefore AC=DB.$

又 $\because BC=CB, AB=DC,$

$\therefore \triangle ABC\cong\triangle DCB.$

2. 解：(1) $OE=OF.$

理由如下：$\because OA=OB=OC=OD, \angle AOB=\angle COD,$

$\therefore \triangle AOB\cong\triangle COD.$

$\therefore$ 对应边上的高也相等，即 $OE=OF.$

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

(2) $AB=CD$, $\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{CD}$, $\angle AOB=\angle COD$.

理由如下:易证 Rt $\triangle AOE\cong$ Rt $\triangle COF$, Rt $\triangle BOE\cong$ Rt $\triangle DOF$,

$\therefore AE=CF, BE=DF$.

$\therefore AE+BE=CF+DF$,即 $AB=CD$.

$\therefore \overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{CD}, \angle AOB=\angle COD$.

3. 解: $\overset{\frown}{CD}=\overset{\frown}{BD}$.

理由如下:如图,连接 OC.

$\because OD\parallel AC$,

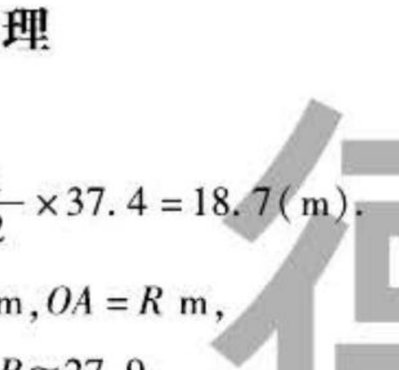
$\therefore \angle BOD=\angle A, \angle DOC=\angle C$.

$\because OC=OA$,

$\therefore \angle A=\angle C$.

$\therefore \angle BOD=\angle COD$.

$\therefore \overset{\frown}{CD}=\overset{\frown}{BD}$.



(第3题)

点拨: 在圆中,证明两条弧相等,可以通过证明这两条弧所对的弦相等或所对的圆心角相等来得出.

* 3 垂径定理

随堂练习(教材第76页)

1. 解: $\because OD\perp AB, \therefore AD=\frac{1}{2}AB=\frac{1}{2}\times 37.4=18.7$(m).

在 Rt $\triangle ODA$ 中, $OD=(R-7.2)$ m, $OA=R$ m,

$\therefore R^2=(R-7.2)^2+18.7^2$,解得 $R\approx 27.9$.

$\therefore$ 桥拱所在圆的半径约为 27.9 m.

2. 解: 相等. 理由略.

习题 3.3

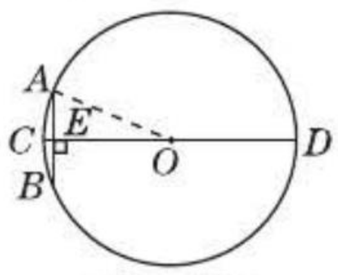
1. 解: 如图,连接 OA,设 $OA=OC=x$ 寸,

在 Rt $\triangle OEA$ 中,有 $OA^2=OE^2+AE^2$.

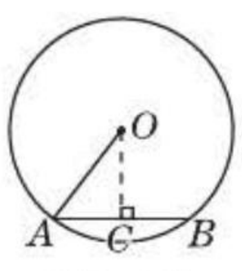
$\because AE=\frac{1}{2}AB=5$ 寸, $OE=OC-CE=(x-1)$ 寸,

$\therefore x^2=(x-1)^2+25$. 解得 $x=13$,即 $OC=13$ 寸.

$\therefore CD=26$ 寸.



(第1题)



(第2题)

2. 解: 如图,过点 O 作 $OC\perp AB$ 于点 C,

则 $AC=\frac{1}{2}AB=18$ mm.

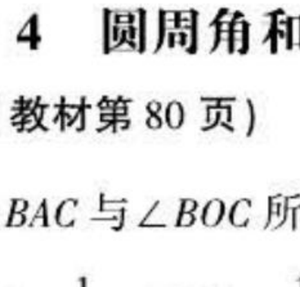
在 Rt $\triangle ACO$ 中, $OC=\sqrt{AO^2-AC^2}=\sqrt{30^2-18^2}=24$(mm), $\cos\angle OAB=\cos\angle OAC=\frac{AC}{AO}=\frac{18}{30}=0.6$.

$\therefore$ 点 O 到 AB 的距离为 24 mm, $\angle OAB$ 的余弦值为 0.6.

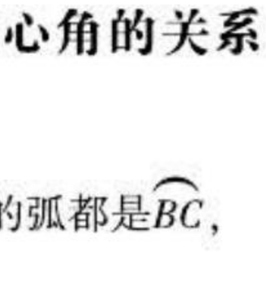
点拨: 要求点 O 到 AB 的距离,需过点 O 向 AB 作垂线段,利用勾股定理求解,进而求出 $\cos\angle OAB$.

3. 解: $AC=BD$. 理由如下:如图,过点 O 作 $OE\perp AB$ 于点 E. $\because$ 在大圆中, $AE=BE$,在小圆中, $CE=DE$, $\therefore AE-CE=BE-DE$,即 $AC=BD$.

点拨: 过圆心且垂直于弦的线段是一条常见的辅助线,常与垂径定理结合起来解题.



(第3题)



(第4题)

4. 解: 弦 AB 如图. 作法:

(1)连接 OM,并延长交⊙O 于 C 点;

(2)过点 M 作 OM 的垂线,交⊙O 于 A, B 两点. 线段 AB 即为所求作的弦.

点拨: 过点 M 作弦 AB,要使弦 AB 被点 M 平分,依据垂径定理,只要满足 $OM\perp AB$ 即可.

4 圆周角和圆心角的关系

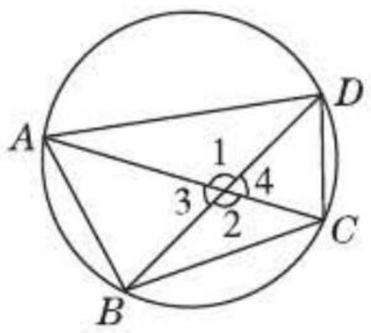
随堂练习(教材第80页)

1. 解: $\because \angle BAC$ 与 $\angle BOC$ 所对的弧都是 $\overset{\frown}{BC}$,

$\therefore \angle BAC=\frac{1}{2}\angle BOC=\frac{1}{2}\times 50^\circ=25^\circ$.

点拨: 圆周角的度数等于它所对弧上的圆心角度数的一半.

2. 解: $\angle BDC=\angle BAC$,如图,相等的角还有 $\angle ADB=\angle ACB$, $\angle ACD=\angle ABD$, $\angle CAD=\angle CBD$, $\angle 1=\angle 2$, $\angle 3=\angle 4$.



(第2题)

习题 3.4

1. 解: $\angle ACB=2\angle BAC$. 理由如下:$\because \angle ACB=\frac{1}{2}\angle AOB$, $\angle BAC=\frac{1}{2}\angle BOC$, $\angle AOB=2\angle BOC$, $\therefore \angle ACB=2\angle BAC$.

2. 解: 如图,设 $\overset{\frown}{BAD}$ 所对的圆心角为 $\angle\alpha$, $\because \angle C=100^\circ$,而

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

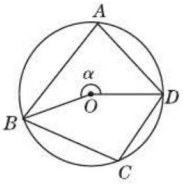
$\angle C$ 为$\overset{\frown}{BAD}$所对的圆周角，

$\therefore \angle\alpha = 200°$.

$\therefore \angle BOD = 360° - 200° = 160°$.

又$\because \angle A = \frac{1}{2}\angle BOD$，

$\therefore \angle A = \frac{1}{2} \times 160° = 80°$.



（第 2 题）

3. 解：尽量保证同排的人视角相同.

4. 解：设 AP 与$\odot O$ 交于点 D，连接 BD，$\therefore \angle ACB = \angle ADB$.

又$\because \angle ADB = \angle\alpha + \angle PBD$，$\angle PBD > 0°$，$\therefore \angle ADB > \angle\alpha$，即$\angle ACB > \angle\alpha$. 故当船 P 位于安全区域时，它与两个灯塔的夹角$\angle\alpha$小于“危险角”.

随堂练习（教材第 83 页）

1. 解：$\because AB$ 为$\odot O$的直径，$\therefore \angle ACB = 90°$.

在 $\mathrm{Rt}\triangle ACB$ 中，$\sin\angle ABC = \frac{AC}{AB}$，

$\therefore AC = AB \sin\angle ABC = 10 \times \sin 30° = 10 \times \frac{1}{2} = 5(\mathrm{cm})$.

$\therefore AC$ 的长为 5 cm.

2. 解：题图（2）是半圆形. $\because 90°$的圆周角所对的弦是直径.

点拨：$\because$ 题图（2）这段弧含有一个 90°的圆周角，$\therefore$ 可确定题图（2）为半圆形.

3. 解：设$\angle A = 4x°$，则$\angle C = 5x°$.

$\because \angle A + \angle C = 180°$，$\therefore 4x° + 5x° = 180°$.

$\therefore x = 20$. $\therefore \angle C = 5 \times 20° = 100°$.

习题 3.5

1. 解：$\because \angle BOD = 80°$，$\therefore \angle BAD = 40°$.

又$\because \angle BAD + \angle BCD = 180°$，

$\therefore \angle BCD = 180° - 40° = 140°$.

2. 解：连接 OD. $\because \angle ACD = 15°$，$\therefore \angle AOD = 15° \times 2 = 30°$.

$\because \angle AOD + \angle BOD = 180°$，$\therefore \angle BOD = 180° - 30° = 150°$.

又$\because \angle BAD = \frac{1}{2}\angle BOD$，$\therefore \angle BAD = \frac{1}{2} \times 150° = 75°$.

3. 解：$\because \angle ADC = \angle E + \angle DCE$，$\angle ABC = \angle F + \angle BCF$，$\angle E = 40°$，$\angle F = 60°$，

$\therefore \angle ADC + \angle ABC = 40° + \angle DCE + 60° + \angle BCF = 100° + \angle DCE + \angle BCF$.

又$\because \angle DCE = \angle BCF$，$\angle ADC + \angle ABC = 180°$，

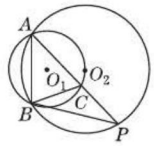
$\therefore \angle BCF = \angle DCE = 40°$.

又$\because \angle A + \angle DCB = 180°$，$\angle BCF + \angle DCB = 180°$，

$\therefore \angle A = \angle BCF = 40°$.

4. 解：（1）完整图形如图.

（2）大小不变的角有$\angle APB$，$\angle ACB$，$\angle BCP$，$\angle CBP$.



（第 4 题）

5 确定圆的条件

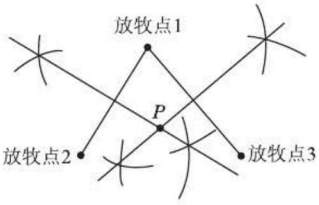
随堂练习（教材第 86 页）

解：作图略. 经观察发现：锐角三角形的外心在三角形的内部；直角三角形的外心在斜边的中点处；钝角三角形的外心在三角形的外部.

点拨：作三角形的外接圆，关键是确定圆心的位置.

习题 3.6

1. 解：定居点的位置如图所示. 作法：（1）连接放牧点 1 和放牧点 2，连接放牧点 1 和放牧点 3；（2）分别作上述两条线段的垂直平分线，相交于 P 点. 则 P 点即为所求.

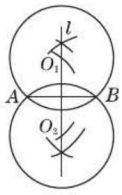


（第 1 题）

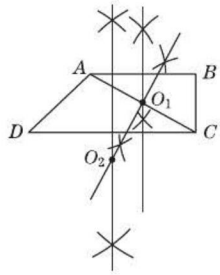
2. 解：能作出 2 个，如图所示. 作法：

（1）作线段 AB 的垂直平分线 l；（2）以 A 点为圆心，3 cm长为半径作弧，分别交直线 l 于点 O_1，O_2；（3）分别以点 O_1，O_2 为圆心，O_1A，O_2A 为半径作圆. $\odot O_1$ 和 $\odot O_2$ 即为所求作的圆.

点拨：经过两点 A，B 作圆，则圆心一定在线段 AB 的垂直平分线上，加上半径的条件即可确定圆心的位置.



（第 2 题）



（第 3 题）

3. 解：不一定. 如图，点 A，B，C 确定的圆的圆心为 O_1，点 A，C，D 确定的圆的圆心为 O_2. 即经过不在同一条直线

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

上的四个点不一定能作一个圆.

4. 解:最少使用两次,就可以找到圆形工件的圆心. ∵ AB 为圆的弦,MN 所在的直线垂直平分线段 AB,∴ MN 所在的直线为圆的直径所在的直线,而两条直径的交点即为圆心.

6 直线和圆的位置关系

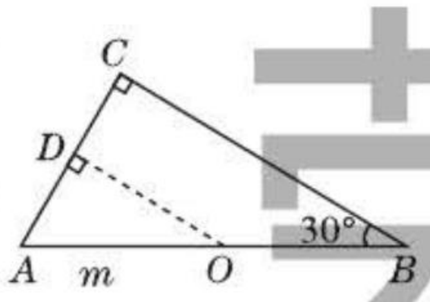
随堂练习(教材第 91 页)

1. 解:$r>5$. **点拨**:一条直线与圆相交,说明圆心到这条直线的距离小于半径.

2. 解:πd.

习题 3.7

1. 解:如图,过点 O 作 $OD\perp AC$ 于点 D,则 $OD/\!/BC$. ∵ $\angle B=30°$,∴ $\angle DOA=30°$. 在 $\mathrm{Rt}\triangle AOD$ 中,$OD=AO\cos 30°=\frac{\sqrt{3}}{2}m$.



(第 1 题)

(1)当 $\frac{\sqrt{3}}{2}m<r\leqslant m$ 时,AC 与 $\odot O$ 相交;

(2)当 $r=\frac{\sqrt{3}}{2}m$ 时,AC 与 $\odot O$ 相切;

(3)当 $r<\frac{\sqrt{3}}{2}m$ 时,AC 与 $\odot O$ 相离.

点拨:欲判断直线与圆的位置关系,必须先计算出圆心到直线的距离,然后与半径作比较.

2. 解:当波纹刚好抵达对岸时,形成了以 O 为圆心,河宽为半径的一个半圆,而圆的半径都相等.

3. 解:设光盘的圆心为 O,连接 AO,BO. 由题意易知 $\angle OAB=60°$,∴ $\tan\angle OAB=\tan 60°=\frac{OB}{AB}$. ∴ $OB=AB\tan 60°=6\sqrt{3}$ cm. ∴ 这张光盘的直径是 $12\sqrt{3}$ cm.

随堂练习(教材第 93 页)

1. 解:如图,在 $\triangle ABC$ 中,∵ $AC^2+BC^2=3^2+4^2=25$,$AB^2=5^2=25$,∴ $AC^2+BC^2=AB^2$.

∴ $\triangle ACB$ 是直角三角形,且 $\angle ACB=90°$.

过点 C 作 $CD\perp AB$ 于点 D,

∵ $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}AC\cdot BC=\frac{1}{2}AB\cdot CD$.

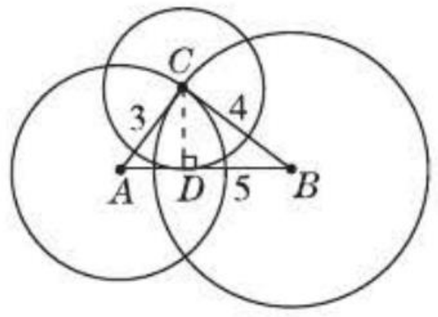
∴ $3\times 4=5\cdot CD$. ∴ $CD=\frac{12}{5}$.

若以点 A 为圆心作 $\odot A$ 和 BC 边相切,∵ $BC\perp AC$,

∴ 此时半径为 $AC=3$;

若以点 B 为圆心作 $\odot B$ 和 AC 边相切,∵ $AC\perp BC$,

∴ 此时半径为 $BC=4$;若以点 C 为圆心作 $\odot C$ 和 AB 边相切,∵ $CD\perp AB$,∴ 此时半径为 $CD=\frac{12}{5}$.



(第 1 题)

点拨:圆的切线垂直于经过切点的半径.

2. 解:图略. 三角形的内心都在三角形的内部.

习题 3.8

1. 解:是. 理由:如图,连接 OC.

∵ $OA=OB$,$CA=CB$,$OC=OC$,

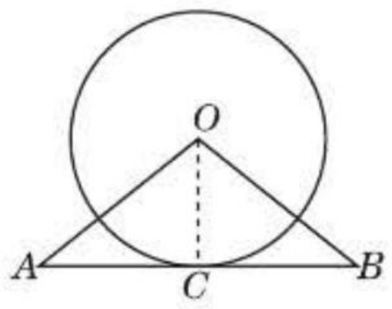
∴ $\triangle AOC\cong\triangle BOC$.

∴ $\angle OCA=\angle OCB=90°$,

即 $OC\perp AB$.

又∵ 点 C 在 $\odot O$ 上,

∴ 直线 AB 是 $\odot O$ 的切线.



(第 1 题)

点拨:要证明直线 AB 是 $\odot O$ 的切线,只需利用切线的判定定理,证明 $OC\perp AB$ 于点 C(C 在圆上)即可.

2. 解:∵ 点 I 是内心,∴ $\angle IBC=\frac{1}{2}\angle ABC$,$\angle ICB=\frac{1}{2}\angle ACB$. ∴ $\angle IBC+\angle ICB=\frac{1}{2}(\angle ABC+\angle ACB)$.

∵ $\angle ABC+\angle ACB=180°-\angle A=180°-68°=112°$,

∴ $\angle IBC+\angle ICB=\frac{1}{2}\times 112°=56°$.

∴ $\angle I=180°-(\angle IBC+\angle ICB)=180°-56°=124°$.

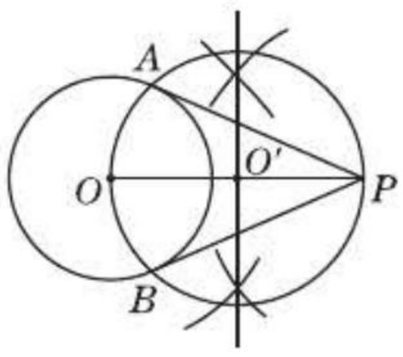
点拨:要求 $\angle I$ 的大小,因题目中只有 $\angle A$ 的度数已知,故需考虑把 $\angle I$ 与 $\angle A$ 联系起来.

※3. 解:能. 切线如图,

作法:(1)连接 OP;

(2)取 OP 的中点 O',以 OP 为直径作 $\odot O'$ 交 $\odot O$ 于 A,B 两点;

(3)连接 PA,PB,则 PA,PB 所在的直线即为 $\odot O$ 的切线. 第二问的答案略.



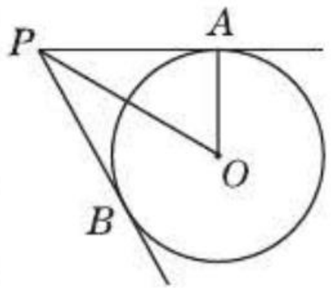
(第 3 题)

* 7 切线长定理

随堂练习(教材第 95 页)

解:如图,PA,PB 为 $\odot O$ 的切线. 由题意可知 $OA=3$ cm,$PO=6$ cm,

$OA\perp PA$,∴ $PA=\sqrt{OP^2-OA^2}=\sqrt{36-9}=3\sqrt{3}$(cm). 又由切线长定



关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

理知 $PA=PB$,

$\therefore PB=3\sqrt{3}$ cm.

习题 3.9

1. 解:由题意可得 $DA=DC, EC=EB$,

$\therefore \triangle PDE$ 的周长为 $PD+PE+DE=PA-AD+PB-BE+DC+CE=PA+PB$.

又∵ $PA=PB=5$ cm,

$\therefore \triangle PDE$ 的周长为 $5+5=10$(cm).

2. 解:∵ $\odot O$ 为 $\triangle ABC$ 的内切圆,切点分别为点 E, F, D,

$\therefore AE=AF, BF=BD, CD=CE$.

设 $AE=AF=x$ cm, $BF=BD=y$ cm, $CD=CE=z$ cm,则有 $\begin{cases}x+y=9,\\ y+z=14,\\ x+z=13.\end{cases}$ 解方程组得 $\begin{cases}x=4,\\ y=5,\\ z=9.\end{cases}$ 即 AF 的长为 4 cm, BD 的长为 5 cm, CE 的长为 9 cm.

3. 解:连接 OA, OB. ∵ PA, PB 都是 $\odot O$ 的切线,

$\therefore OA\perp PA, OB\perp PB$. $\therefore \angle OBP=\angle OAP=90°$.

∵ $OA=OB$, $\therefore \angle OBA=\angle OAB$.

$\therefore \angle DBE=\angle FAD$.

又∵ $BE=AD, BD=AF$,

$\therefore \triangle BED\cong\triangle ADF$. $\therefore \angle BED=\angle ADF$.

∵ $\angle P=40°$, $\therefore \angle AOB=140°$.

$\therefore \angle OBA=\angle OAB=20°$.

又∵ $\angle EDF=180°-\angle ADF-\angle BDE$,

$\therefore \angle EDF=180°-\angle BED-\angle BDE=180°-(\angle BED+\angle BDE)=\angle DBE=90°-\angle OBA=90°-20°=70°$.

4. 解:存在.

设内切圆圆心为 O,连接 OA, OB, OC, OD.

易知 A, O, C 三点共线,且 $\angle D=\angle B=90°$.

$\therefore S_{四边形ABCD}=S_{\triangle ABC}+S_{\triangle ACD}=2\times\frac{1}{2}\times6\times8=48(\text{cm}^2)$.

设内切圆半径为 r cm,则 $S_{四边形ABCD}=\frac{1}{2}(AB+BC+CD+DA)\cdot r=14r=48$ cm^2, $\therefore r=\frac{24}{7}$, $\therefore$ 内切圆的半径为 $\frac{24}{7}$ cm.

8 圆内接正多边形

随堂练习(教材第 98 页)

解:边长为 $6\sqrt{3}$ cm,边心距为 3 cm.

习题 3.10

1. 解:设正六边形 $DFHKGE$ 的中心为 O,连接 OH, OK,则 $\triangle OHK$ 为等边三角形. 由题意可得 $OH=HK=\frac{1}{3}BC=2$, $\angle OHK=60°$,

$\therefore S_{\triangle OHK}=\frac{1}{2}HK\cdot OH\sin 60°=\frac{1}{2}\times2\times2\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}$.

又∵ $S_{正六边形}=6S_{\triangle OHK}$, $\therefore S_{正六边形}=6\times\sqrt{3}=6\sqrt{3}$.

2. 解:边长为 $6\sqrt{2}$ cm,边心距为 $3\sqrt{2}$ cm,面积为 72 cm^2.

3. 解:各边相等的圆内接四边形是正方形. 理由:各边相等的四边形是菱形,而菱形的对角线恰为圆的直径,其所对的圆周角是直角,故各边相等的圆内接四边形是正方形. 各角相等的圆内接四边形不一定是正方形,例如矩形.

4. 解:(1) $a=\sqrt{3}r, b=\sqrt{2}r, c=r$.

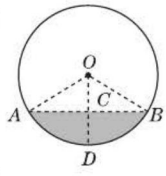
(2)以 a, b, c 为边能构成三角形. ∵ $a^2=3r^2, b^2=2r^2, c^2=r^2$, $\therefore a^2=b^2+c^2$. $\therefore$ 它们构成的是直角三角形.

5. 解:画图略. 得到一个正五角星的图案.

9 弧长及扇形的面积

随堂练习(教材第 101 页)

*1. 解:如图,连接 OA, OB. 设 $OC\perp AB$ 于点 C,交圆 O 于点 D.



(第 1 题)

∵ $CD=6$ cm, $OD=OA=12$ cm,

$\therefore OC=12-6=6$(cm).

在 Rt$\triangle AOC$ 中, $AC=\sqrt{OA^2-OC^2}=\sqrt{12^2-6^2}=6\sqrt{3}$(cm),

$\therefore AB=12\sqrt{3}$ cm.

∵ $\cos\angle COA=\frac{OC}{OA}=\frac{6}{12}=\frac{1}{2}$, $\therefore \angle COA=60°$.

$\therefore \angle AOB=120°$. $\therefore$ 截面上有油部分的面积为 $S_{扇形AOB}-S_{\triangle AOB}=\frac{120\times\pi\times12^2}{360}-\frac{1}{2}\times12\sqrt{3}\times6\approx88.4(\text{cm}^2)$.

2. 解:(1)设内圈弯道的半径为 r m.

由题意知 $\frac{1}{2}\times2\pi r=100$. 解得 $r\approx31.8$.

$\therefore$ 内圈弯道的半径约为 31.8 m.

(2)设外圈弯道的半径为 R m. ∵ 共有 6 条跑道,

$\therefore$ 外圈弯道的半径 $R=\left(\frac{100}{\pi}+6\right)$ m.

$\therefore$ 一个外圈弯道的弧长为 $\frac{1}{2}\times2\pi R=\pi R=\pi\left(\frac{100}{\pi}+6\right)=100+6\pi$(m).

$\therefore$ 一个内圈弯道与一个外圈弯道的长相差 $100+6\pi-100=6\pi\approx18.8$(m).

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

点拨:解答本题的关键是处理好内圈弯道的半径、弧长与外圈弯道的半径、弧长之间的数量关系.

习题 3.11

1. 解:设该圆的半径为 R cm.

根据题意,得$\frac{100\pi R}{180}=4\pi$. 解得 $R=7.2$.

因此,该圆的半径是 7.2 cm.

点拨:直接利用弧长公式 $l=\frac{n\pi R}{180}$求解.

2. 解:设点 P 旋转了 $n°$,则有$\frac{5n\pi}{180}=10$,

解得$n=\frac{360}{\pi}\approx115$.

即滑轮上某一点 P 旋转了约 115°.

3. 解:商标纸的长为$\frac{90\times\pi\times5}{180}\approx7.85(\text{cm})$.

因此,商标纸的长约为 7.85 cm.

点拨:此类问题可直接代入弧长公式 $l=\frac{n\pi R}{180}$求解.

4. 解:$\because\theta$ 与 $360°-\theta$ 的比为黄金比,$\therefore\frac{\theta}{360°-\theta}\approx0.618$. 解得

$\theta\approx137.5°$. $\therefore 2\times\left[\frac{137.5\times\pi\times(15+5)^2}{360}-\frac{137.5\times\pi\times5^2}{360}\right]=$

$2\times\frac{137.5\times\pi\times(20^2-5^2)}{360}\approx899.9(\text{cm}^2)$. 即制作一把这样的纸扇至少要用约899.9 cm^2 的纸.

点拨:本题的关键是先根据 θ 与 $360°-\theta$ 的比是黄金比求得 θ,然后再代入扇形面积公式 $S_{扇形}=\frac{n\pi R^2}{360}$求解.

复习题

1. 解:题图(4).

点拨:判断一个圆与另一个图形组成的组合图形的对称性,关键是判断另一个图形具备哪种对称性,再考虑一下它的位置即可.

2. 解:如图,过点 O 作 $OC\perp AB$ 于点 C. $\because OA=OB$,

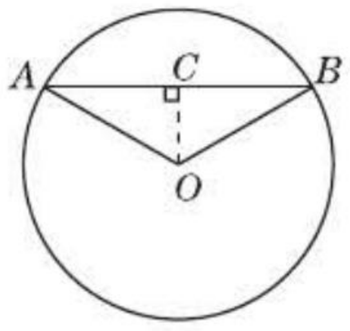
$\therefore\angle AOC=\angle BOC=\frac{1}{2}\times120°=60°$.

在 Rt$\triangle AOC$中,$OC=AO\cos\angle AOC=20\times\cos60°=20\times\frac{1}{2}=10(\text{cm})$,$AC=AO\sin60°=20\times\frac{\sqrt{3}}{2}=10\sqrt{3}(\text{cm})$.

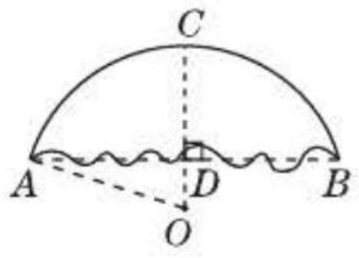
由垂径定理可得 $AB=2AC=20\sqrt{3}$ cm,

$\therefore S_{\triangle AOB}=\frac{1}{2}AB\cdot OC=\frac{1}{2}\times20\sqrt{3}\times10=100\sqrt{3}(\text{cm}^2)$.

点拨:关于圆中弦长的计算,常从圆心向该弦作垂线,构造直角三角形,再进行相关计算.



(第 2 题)



(第 3 题)

*3. **解**:如图,过点 O 作 $OD\perp AB$ 于点 D,交$\overset{\frown}{AB}$于点 C,则 C 为$\overset{\frown}{AB}$的中点. $\therefore CD=h=0.25$ m. 设车轮的半径为 R m,则 $OD=(R-0.25)$ m. 易知 $AD=\frac{1}{2}AB=\frac{1}{2}a=\frac{1}{2}\times0.72=0.36$(m). 在Rt$\triangle OAD$中,$OA^2=OD^2+AD^2$,

$\therefore R^2=(R-0.25)^2+0.36^2$. 解得 $R\approx0.384$.

$\therefore$ 这个车轮的半径约为 0.384 m.

4. 解:$CD=CE$. 理由如下:如图,连接 OC. $\because\overset{\frown}{AC}=\overset{\frown}{BC}$, $\therefore\angle AOC=\angle BOC$.

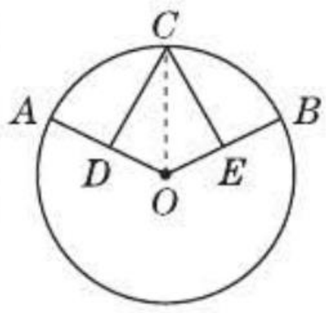
$\because OA=OB$, D, E 分别是 OA, OB 的中点, $\therefore OD=OE$.

在$\triangle CDO$和$\triangle CEO$中,

$$\begin{cases}OC=OC,\\ \angle DOC=\angle EOC,\\ OD=OE,\end{cases}$$

$\therefore\triangle CDO\cong\triangle CEO$.

$\therefore CD=CE$.



(第 4 题)

5. 解:$OD\parallel AC$. 理由如下:$\because\angle COD=60°$,

$\therefore\angle CAD=30°$. 又$\because\angle DAB=30°$,

$\therefore\angle CAO=60°$. 又$\because\angle DOB=2\angle DAB=60°$,

$\therefore\angle DOB=\angle CAO$. $\therefore OD\parallel AC$.

点拨:证明平行,离不开角. 在圆中,证明角相等一般与圆周角、圆心角有关.

6. 解:$\angle ACE=\angle ADE$, $\angle BDC=\angle BAC$, $\angle BDA=\angle BCA$, $\angle CAD=\angle CBD$.

点拨:利用同弧所对的圆周角相等来找. 本题为开放性问题,答案不唯一.

7. 解:如图,连接 BC,则$\angle BCD$为$\overset{\frown}{DAB}$所对的圆周角.

$\because\overset{\frown}{AD}=\overset{\frown}{BC}$, $\therefore\angle DCA=\angle BAC$.

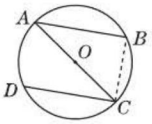
又$\because AC$为直径, $\therefore\angle ABC=90°$. $\therefore\angle BAC+\angle BCA=90°$.

$\therefore\angle BCA+\angle DCA=90°$.

$\therefore\angle BCD=90°$. 即$\overset{\frown}{DAB}$所对的圆周角的度数为 90°.

点拨:当遇到直径时,常构造直径所对的圆周角.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料



（第7题）

8. 解：∵ AB 为直径，

∴ $\angle BCA=90°$，即 $\triangle BCA$ 为直角三角形.

又∵ $CD\perp AB$ 于点 D，

∴ 易得 $\triangle ACD\backsim\triangle CBD$.

∴ $\frac{CD}{BD}=\frac{AD}{CD}$. ∴ $CD^2=BD\cdot AD$，

即 $CD^2=(AB-AD)\cdot AD$. ∵ $CD=6$ cm，

$AB=13$ cm，∴ $36=(13-AD)\cdot AD$.

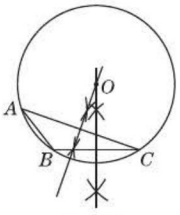
解得 $AD=4$ cm 或 $AD=9$ cm.

∵ $AD<DB$，

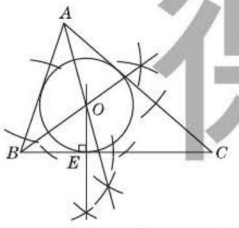
∴ $AD=9$ cm 应舍去. ∴ $AD=4$ cm.

9. 解：所求作的外接圆如图，作法：(1) 分别作 AC，BC 边的垂直平分线，相交于 O 点；(2) 以 O 点为圆心，线段 OA 长为半径作圆. 则⊙O 即为所求.

点拨：不同的三角形（锐角三角形、钝角三角形、直角三角形）的外接圆的圆心会有不同的位置.



（第9题）



（第10题）

10. 解：内切圆如图，作法：(1) 分别作 $\angle BAC$，$\angle CBA$ 的平分线，相交于 O 点；(2) 过点 O 作 $OE\perp BC$ 于点 E；(3) 以点 O 为圆心，线段 OE 的长为半径作圆. 则⊙O 即为所求作的内切圆.

11. 解：如图，连接 OC，则 $OC=\frac{1}{2}\times 8=4$(cm).

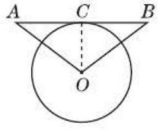
∵ AB 切⊙O 于点 C，∴ $OC\perp AB$.

又∵ $OA=OB$，

∴ $AC=\frac{1}{2}AB=\frac{1}{2}\times 10=5$(cm).

在 $\mathrm{Rt}\triangle AOC$ 中，$OA=\sqrt{AC^2+OC^2}=\sqrt{5^2+4^2}=\sqrt{41}$(cm).

∴ OA 的长为 $\sqrt{41}$ cm.



（第11题）

点拨：当圆有一条切线，且切点已明确时，可以连接切点与圆心，利用切线的性质定理构造直角三角形解答问题.

12.

正多边形边数	内角	中心角	半径	边长	边心距	周长	面积
3	60°	120°	2	$2\sqrt{3}$	1	$6\sqrt{3}$	$3\sqrt{3}$
4	90°	90°	$\sqrt{2}$	2	1	8	4
6	120°	60°	2	2	$\sqrt{3}$	12	$6\sqrt{3}$

13. 解：连接 OC，OD. ∵ ⊙O 的周长为 $2\pi R=6\pi$ cm，

∴ $R=3$ cm.

由题意可得 $OC=OD=CD=3$ cm，$\angle OCD=60°$，

∴ $S_{\triangle OCD}=\frac{1}{2}CD\cdot OC\sin 60°=\frac{1}{2}\times 3\times 3\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{9\sqrt{3}}{4}$(cm^2).

又∵ $S_{正六边形}=6S_{\triangle OCD}$，

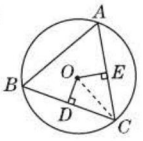
∴ $S_{正六边形}=6\times\frac{9\sqrt{3}}{4}=\frac{27\sqrt{3}}{2}$(cm^2).

14. 解：由题意可得 $\angle DAB=\frac{1}{2}\times 120°=60°$.

∵ AD 为直径，

∴ $\angle ABD=90°$. ∴ $\angle ADB=30°$.

15. 解：$\triangle ABC$ 是等边三角形. 理由如下：如图，连接 OC. ∵ $\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{BC}$，∴ $AB=BC$. ∵ $OD=OE$，$OC=OC$，$OD\perp BC$，$OE\perp AC$，∴ $\mathrm{Rt}\triangle ODC\cong\mathrm{Rt}\triangle OEC$.



（第15题）

∴ $DC=EC$. 又∵ $OD\perp BC$，$OE\perp AC$，

∴ $BC=2CD$，$AC=2CE$. ∴ $BC=AC$. ∴ $AB=AC=BC$.

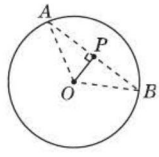
∴ $\triangle ABC$ 是等边三角形.

16. 解：∵ $\triangle ABC$ 是等边三角形，∴ $\overset{\frown}{BC}=\overset{\frown}{AC}=\overset{\frown}{AB}$.

∴ $\overset{\frown}{AB}$ 的长为 $\frac{\pi}{3}$. ∴ $\frac{\pi}{3}=\frac{60}{180}\cdot\pi\cdot AB$. ∴ $AB=1$.

∴ $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}\times 1\times 1\times\sin 60°=\frac{\sqrt{3}}{4}$. ∴ 所求曲边三角形的面积为 $3\times\frac{60}{360}\pi\cdot AB^2-2S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}\pi-\frac{\sqrt{3}}{2}$. 故这个曲边三角形的面积为 $\frac{1}{2}\pi-\frac{\sqrt{3}}{2}$.

17. 解：如图，设过点 P 且垂直于 OP 的弦为 AB，连接 AO，BO. 由题意可知 $AO=4$ cm，$OP=2$ cm，∴ $AP=\sqrt{AO^2-OP^2}=\sqrt{4^2-2^2}=2\sqrt{3}$(cm). 由垂径定理可得 $AB=$



（第17题）

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

$2AP=4\sqrt{3}$ cm,

$\therefore S_{\triangle AOB}=\frac{1}{2}AB\cdot OP=\frac{1}{2}\times4\sqrt{3}\times2=4\sqrt{3}(\text{cm}^2)$.

又$\because OP=\frac{1}{2}AO$,$\therefore \angle OAP=30°$.

$\therefore \angle AOP=60°$. $\therefore \angle AOB=2\angle AOP=120°$.

$\therefore$ 最小的弓形面积是$\frac{120}{360}\cdot\pi\cdot4^2-4\sqrt{3}=\frac{16}{3}\pi-4\sqrt{3}(\text{cm}^2)$.

18. **解:**(1)点 P 在$\odot O$ 外;

(2)点 P 可能在$\odot O$ 外,也可能在$\odot O$ 上,还可能在$\odot O$ 内.

19. **解:**$\odot P$ 运动一圈与$\triangle OBC$ 的边相切 6 次. 当点 P 在 BO 上且$\odot P$ 与 BC 相切时,设切点为 M,连接 MP,则有 $MP=\sqrt{BP^2-MB^2}$. 由$\angle PBM=60°$,易得 $MB=\frac{1}{2}BP$.

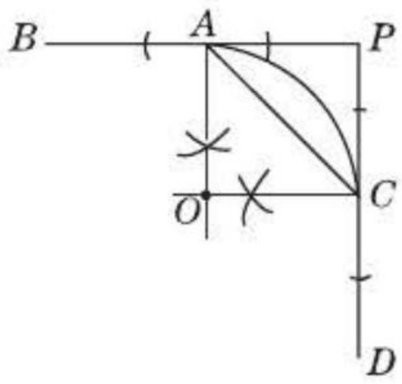
又$\because MP=\sqrt{3}$,$\therefore$ 易得 $BP=2$. 即当 P 点在 BO 上且到 B 点的距离为 2 时,$\odot P$ 与 BC 边相切. 同理可知,当点 P 在边 BC 上且到 B 点的距离为2 时,$\odot P$ 与 BO 边相切;当点 P 在边 BC 上且到 C 点的距离为 2 时,$\odot P$ 与 CO 边相切;当点 P 在边 CO 上且到点 C 的距离为 2 时,$\odot P$ 与 BC 边相切;当点 P 在边 CO 上且到点 O 的距离为 2 时,$\odot P$ 与 BO 边相切;当点 P 在边 BO 上且到点 O 的距离为 2 时,$\odot P$ 与 CO 边相切.

20. **解:**(1)所求作的劣弧 AC 如图.

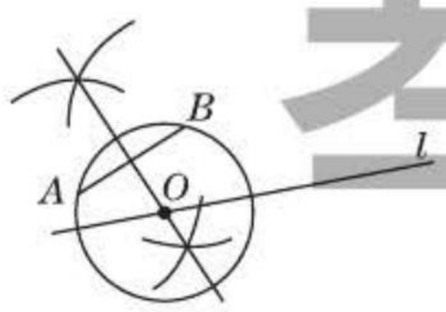
(2)由题意可知$\angle AOC=90°$,

$\therefore AO=CO=\frac{\sqrt{2}}{2}AC=\frac{\sqrt{2}}{2}\times6=3\sqrt{2}(\text{cm})$.

$\therefore$ 该圆弧的长为$\frac{1}{4}\times2\pi\times3\sqrt{2}=\frac{3\sqrt{2}}{2}\pi(\text{cm})$.



(第 20 题)



(第 21 题)

21. **解:**(1)如图,作法:①作线段AB 的垂直平分线交直线 l 于点 O. ②以点O 为圆心,线段 OA 的长为半径作圆,则$\odot O$ 即为所求. 即此时可作一个圆. (2)不存在这样的圆. (3)可作无数个圆.

点拨:(1)圆心到 A,B 两点的距离相等,$\therefore$ 圆心应在线段 AB 的垂直平分线上. 又$\because$ 圆心在直线 l 上,$\therefore$ 圆心应是线段 AB 的垂直平分线和直线 l 的交点;(2)作线段 AB 的垂直平分线,而直线 l 和线段 AB 也垂直,$\therefore$ 线段 AB 的垂直平分线和直线 l 平行,故所求作的圆不存在;(3)此时线段 AB 的垂直平分线和直线 l 重合,在直线 l 上任取一点 P 为圆心,线段 PA 的长为半径作圆,则$\odot P$ 都符合要求.

22. **解:**设 AB,BC,CA 分别切$\odot O$ 于点 D,E,F,连接 OA,OB,OC,OD,OE,OF,则 $OD\perp AB$,$OE\perp BC$,$OF\perp AC$.

$\therefore S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}AB\cdot r+\frac{1}{2}BC\cdot r+\frac{1}{2}AC\cdot r=\frac{1}{2}(AB+BC+AC)\cdot r=\frac{1}{2}lr$.

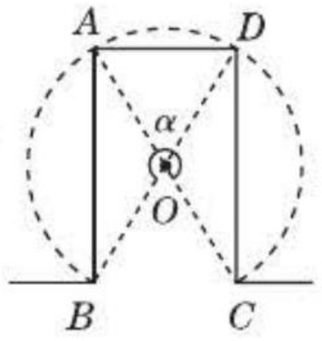
23. 略.

24. **解:**如图,连接 BD,交 AC 于 O 点. 设$\overset{\frown}{BAC}$ 所对的圆心角为$\angle\alpha$. 在 Rt$\triangle ACD$ 中,$\sin\angle ACD=\frac{AD}{AC}=\frac{1}{2}$,$\angle ACD$ 为锐角,$\therefore \angle ACD=30°$.

$\therefore \angle BAC=30°$. $\therefore \angle BOC=60°$.

$\therefore \angle\alpha=360°-60°=300°$.

$\therefore$ 大扇形的面积为$\frac{300\times\pi\times1^2}{360}=\frac{5}{6}\pi(\text{m}^2)$. $\because DC=\sqrt{AC^2-AD^2}=\sqrt{2^2-1^2}=\sqrt{3}(\text{m})$,



(第 24 题)

$\therefore$ 矩形 $ABCD$ 的面积为$1\times\sqrt{3}=\sqrt{3}(\text{m}^2)$.

$\therefore$ 要打掉墙体的面积为$\frac{5}{6}\pi-\frac{3\sqrt{3}}{4}\approx1.3(\text{m}^2)$.

25. **解:**$\because AB=30$ cm,$BD=20$ cm,

$\therefore AD=30-20=10(\text{cm})$. $\therefore$ 贴纸部分单面的面积为$\frac{120\pi\times30^2}{360}-\frac{120\pi\times10^2}{360}\approx837.76(\text{cm}^2)$.

$\therefore$ 贴纸部分的总面积约为$837.76\times2\approx1\,675.5(\text{cm}^2)$.

点拨:本题容易忽视纸扇两面都贴纸.

26. **解:**这一比赛的危险区域的面积至少应为$\frac{40\times\pi\times7^2}{360}\approx17.1(\text{m}^2)$.

27. **解:**如图,连接 CD,OA',OB'. 易知 O 在 CD 上. $\because AA'$切$\odot O$ 于点 A',BB'切$\odot O$ 于点 B',$\therefore OA'\perp AA'$,$OB'\perp BB'$.

$\because AB=40$ km,$\therefore BO=AO=\frac{1}{2}\times40=20(\text{km})$.

在 Rt$\triangle AOA'$中,$\cos\angle AOA'=\frac{A'O}{AO}=\frac{10}{20}=\frac{1}{2}$,

$\angle AOA'$为锐角,$\therefore \angle AOA'=60°$.

$\therefore AA'=AO\sin60°=20\times\frac{\sqrt{3}}{2}=10\sqrt{3}(\text{km})$.

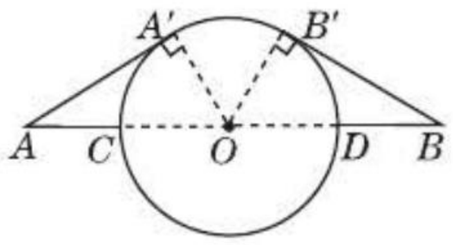
同理$\angle BOB'=60°$,$BB'=10\sqrt{3}$ km.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

$\therefore \angle A'OB' = 60°. \therefore \overset{\frown}{A'B'}$的长 $= \dfrac{60\pi \times 10}{180} = \dfrac{10\pi}{3}$(km).

$\therefore$ 这段公路的长度为 $AA' + \overset{\frown}{A'B'}$的长 $+ B'B = 10\sqrt{3} \times 2 + \dfrac{10}{3}\pi \approx 45.1$(km).

$\therefore$ 这段公路的长度约为 45.1 km.



(第 27 题)

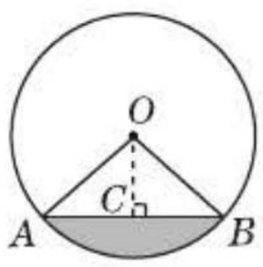
点拨:当圆有切线时,可以连接切点与圆心,构造直角三角形,如本题中的 Rt$\triangle AOA'$和 Rt$\triangle BOB'$.

28. 解:如图,过点 O 作 $OC \perp AB$ 于点 C,则 $AC = \dfrac{1}{2}AB = \dfrac{1}{2} \times 30 = 15$(m). 在Rt$\triangle AOC$ 中,$OC = \sqrt{20^2 - 15^2} = 5\sqrt{7}$(m), $\sin \angle COA = \dfrac{AC}{AO} = \dfrac{15}{20} = 0.75$, $\therefore \angle COA \approx 48.6°. \therefore \angle AOB \approx 97.2°. \therefore$ 阴影区域的面积为 $S_{扇形} - S_{\triangle AOB} = \dfrac{97.2 \times \pi \times 20^2}{360} - \dfrac{1}{2} \times 30 \times 5\sqrt{7} \approx 140.9(m^2)$.

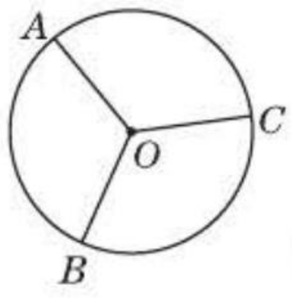
$\therefore 140.9 \times 3 \approx 422$(名).

因此,大约有 422 名观众在看马戏.

点拨:本题阴影区域是小弓形,小弓形的面积等于扇形的面积减去三角形的面积.



(第 28 题)

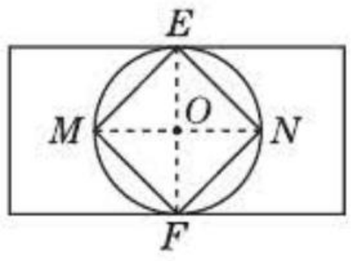


(第 29 题)

29. 解:如图,方案:(1)确定圆心 O;(2)作一个120°的圆心角$\angle AOB$;(3)以 B 点为圆心,线段 AB 的长为半径作弧交$\odot O$ 于点 C,连接 OC,则 OA, OB, OC 将圆三等分.

点拨:本题的答案不唯一.

30. 解:方案:(1)作矩形一边的垂直平分线分别交两边于点 E, F. (2)以线段 EF 为直径作$\odot O$. (3)作线段EF的垂直平分线交$\odot O$ 于点 M, N,连接 EM, MF, FN, NE(如图).



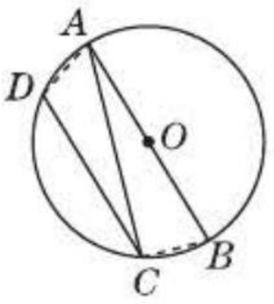
(第 30 题)

点拨:本题答案不唯一.

31. 解:①若为正三角形,则正三角形的边长为 $\dfrac{60}{3} = 20$(m), $S_{正三角形} = 100\sqrt{3} \approx 173.2$(m^2);②若为正方形,则正方形的边长为 15 m, $S_{正方形} = 225$ m^2;③若为正六边形,则正六边形的边长为 10 m, $S_{正六边形} = 150\sqrt{3} \approx 259.8$(m^2);④若为圆,则圆的半径为 $\dfrac{30}{\pi}$ m, $S_{圆} = \dfrac{900}{\pi} \approx 286.5$(m^2). 比较可知,圆的面积最大.

32. 解:如图,连接 AD, BC. $\because AB$ 是$\odot O$ 的直径, $\therefore \angle ACB = 90°$. 在Rt$\triangle ABC$中, $BC = \sqrt{AB^2 - AC^2} = \sqrt{d^2 - a^2}$.

$\because \overset{\frown}{AD} = \overset{\frown}{BC}, \therefore AD = BC = \sqrt{d^2 - a^2}$.



(第 32 题)

33. 解:$\because AB = AC, \therefore \overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{AC}$.

$\therefore \angle ABC = \angle ADB$.

又$\because \angle BAE = \angle DAB, \therefore \triangle BAE \backsim \triangle DAB$.

$\therefore \dfrac{AB}{AE} = \dfrac{AD}{AB}. \therefore AB^2 = AE \cdot AD = 2 \times (2+4) = 12. \therefore AB = 2\sqrt{3}$.

点拨:求 AB 时,需要找 AB 与已知长度的线段之间的关系. 我们发现 $AB = AC$,可知$\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{AC}$,进而得到了三角形相似,从而找到了 AB 与 AE, AD 之间的关系.

34. 解:学校到货车行驶路线的距离为 $200 \times \sin(90° - 53°) \approx 120.4$(m) < 130 m, $\therefore$ 学校在该货车噪声污染范围内. $\sqrt{130^2 - 120.4^2} \approx 49.0$(m), $2 \times 49.0 \div 5 \approx 20$(s). 故学校受该货车噪声污染的时间约有 20 s.

35. 解:由题意可知 $AH = BH$, $BH + CH = 500$ m, $\tan \angle ACH = \dfrac{AH}{CH} = \dfrac{BH}{500 - BH} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$,解得 $BH \approx 183$ m,即 $AH \approx 183$ m < 300 m. 所以,该公路会穿过该森林公园.

综合与实践 视力的变化

习题

1. 略. 2. 略. 3. 略.

综合与实践 哪种方式更合算

习题

解: $\dfrac{1}{70} \times 50 + \dfrac{16}{70} \times 20 - \dfrac{36}{70} \times 30 + \dfrac{16}{70} \times 20 + \dfrac{1}{70} \times 50 = -\dfrac{34}{7}$(元) ≈ -4.86(元),即顾客每摸一次球的平均收益约为 -4.86 元.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

综合与实践 设计遮阳篷(无)

总复习

1. 解: (1) $\sin 60° - \cos 45° + \tan 45° = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} + 1 = \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}+2}{2}$.

(2) $\cos^2 60° + \sin^2 45° = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}$.

(3) $\frac{\cos 30° - \sin 45°}{\sin 60° - \cos 45°} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}} = 1$.

2. 解: 如图,∵ $\angle A$ 是锐角,∴ 可把$\angle A$ 看成一个直角三角形的锐角,构造直角三角形.



(第2题)

(1)∵ $\sin A = \frac{1}{5}$,∴ 可设 $BC = k, AB = 5k(k>0)$.

在Rt△ABC中,$AC = \sqrt{(5k)^2 - k^2} = 2\sqrt{6}k$,

∴ $\cos A = \frac{AC}{AB} = \frac{2\sqrt{6}k}{5k} = \frac{2\sqrt{6}}{5}$, $\tan A = \frac{BC}{AC} = \frac{k}{2\sqrt{6}k} = \frac{\sqrt{6}}{12}$.

(2)∵ $\tan A = \frac{8}{15}$,∴ 可设 $BC = 8k, AC = 15k(k>0)$,则 $AB = \sqrt{(15k)^2 + (8k)^2} = 17k$. ∴ $\sin A = \frac{BC}{AB} = \frac{8k}{17k} = \frac{8}{17}$, $\cos A = \frac{AC}{AB} = \frac{15k}{17k} = \frac{15}{17}$.

点拨: 要求某角的三角函数值,依据三角函数的定义,需把该角放在直角三角形中,通过确定各边之间的关系来进一步确定三角函数值.

3. 解: (1)∵ $\sin A = 0.753$,∴ $\angle A \approx 48°51'3''$;

(2)∵ $\cos B = 0.083\ 2$,∴ $\angle B \approx 85°13'39''$;

(3)∵ $\tan C = 45.8$,∴ $\angle C \approx 88°44'57''$.

点拨: 注意按键顺序.

4. 解: (1)在 Rt△ABC 中,$\angle C = 90°$, $\angle A = 10°$,∴ $\angle B = 80°$.

∵ $\sin A = \frac{a}{c}$, $a = 8$,∴ $c = \frac{a}{\sin A} = \frac{8}{\sin 10°} \approx 46.07$.

又∵ $\tan B = \frac{b}{a}$,∴ $b = a\tan B = 8\tan 80° \approx 45.37$.

(2)在 Rt△ABC 中,$\angle C = 90°$, $\angle B = 33°$,∴ $\angle A = 57°$.

∵ $\sin B = \frac{b}{c}$, $b = 5$,∴ $c = \frac{b}{\sin B} = \frac{5}{\sin 33°} \approx 9.18$.

又∵ $\tan B = \frac{b}{a}$,∴ $a = \frac{b}{\tan B} = \frac{5}{\tan 33°} \approx 7.70$.

(3)在 Rt△ABC 中,$\angle C = 90°$, $a^2 + b^2 = c^2$, $a = 5$, $c = 13$,∴ $b = \sqrt{c^2 - a^2} = \sqrt{13^2 - 5^2} = 12$.

又∵ $\sin A = \frac{a}{c} = \frac{5}{13}$,

∴ $\angle A \approx 22°37'12''$. ∴ $\angle B \approx 67°22'48''$.

(4)在 Rt△ABC 中,$\angle C = 90°$, $a^2 + b^2 = c^2$, $c = 4\sqrt{6}$, $b = 4\sqrt{2}$,∴ $a = \sqrt{c^2 - b^2} = \sqrt{(4\sqrt{6})^2 - (4\sqrt{2})^2} = 8$.

又∵ $\sin B = \frac{b}{c} = \frac{4\sqrt{2}}{4\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$,

∴ $\angle B \approx 35°15'52''$. ∴ $\angle A \approx 54°44'8''$.

5. 解: (1)对称轴为直线 $x = 2$,顶点坐标为(2,4);

(2)对称轴为直线 $x = -5$,顶点坐标为(−5,−3);

(3)∵ $y = x - 2x^2 = -2x^2 + x = -2\left(x^2 - \frac{x}{2}\right) = -2\left(x^2 - \frac{x}{2} + \frac{1}{16} - \frac{1}{16}\right) = -2\left(x - \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{1}{8}$,

∴ 对称轴为直线 $x = \frac{1}{4}$,顶点坐标为 $\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{8}\right)$;

(4) $y = 2x(3 - x) = -2x^2 + 6x$. ∵ $-\frac{b}{2a} = -\frac{6}{2\times(-2)} = \frac{3}{2}$, $\frac{4ac - b^2}{4a} = \frac{4\times(-2)\times 0 - 6^2}{4\times(-2)} = \frac{9}{2}$,∴ 对称轴为直线 $x = \frac{3}{2}$,顶点坐标为 $\left(\frac{3}{2}, \frac{9}{2}\right)$;

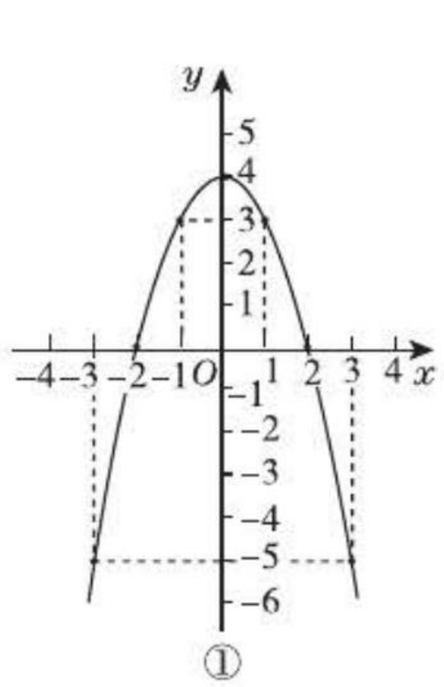
(5) $y = 9 - 2x - x^2 = -x^2 - 2x + 9$.

∵ $-\frac{b}{2a} = -\frac{-2}{2\times(-1)} = -1$, $\frac{4ac - b^2}{4a} = \frac{4\times(-1)\times 9 - (-2)^2}{4\times(-1)} = 10$,∴ 对称轴为直线 $x = -1$,顶点坐标为(−1,10).

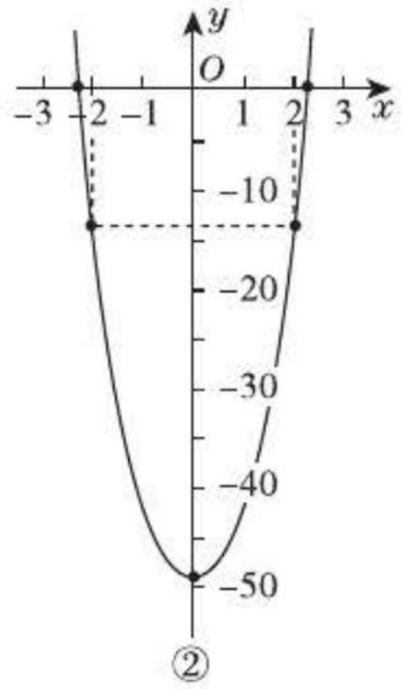
6. 解: (1)当 $y = 0$ 时, $-(x+2)(x-2) = 0$,解得 $x_1 = 2$, $x_2 = -2$,∴ 二次函数 $y = -(x+2)(x-2)$ 的图象与 x 轴的交点坐标为(−2,0),(2,0). 列表如下:

x	−3	−2	−1	0	1	2	3
y	−5	0	3	4	3	0	−5

描点、连线,二次函数的图象如图①.

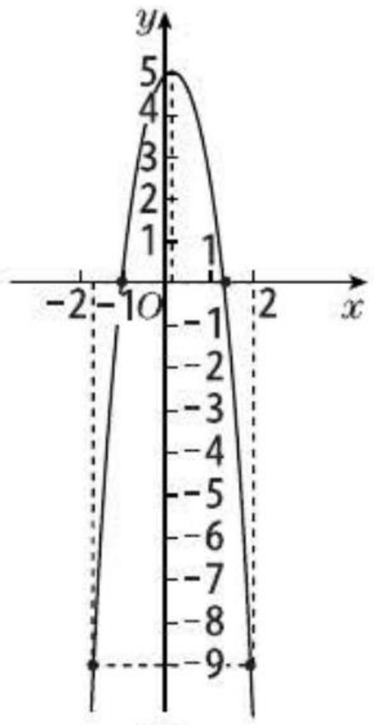


①

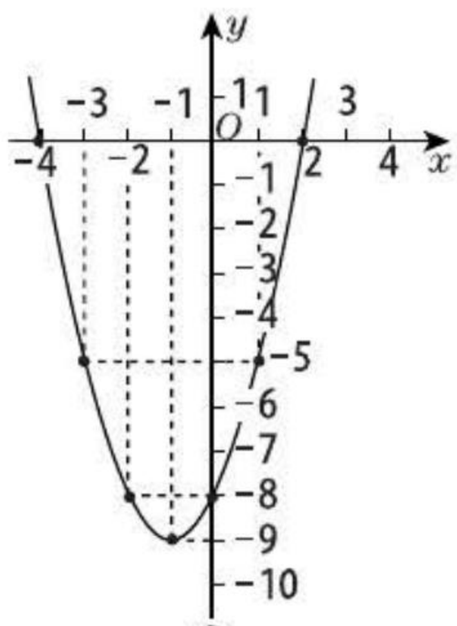


②

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料



③



④

（第6题）

(2)当 $y=0$ 时，$9x^2-49=0$，解得 $x_1=\frac{7}{3}$，$x_2=-\frac{7}{3}$，

∴二次函数 $y=9x^2-49$ 的图象与 x 轴的交点坐标为 $\left(-\frac{7}{3},0\right)$，$\left(\frac{7}{3},0\right)$

列表如下：

x	$-2\frac{1}{3}$	-2	0	2	$2\frac{1}{3}$
y	0	-13	-49	-13	0

描点、连线，二次函数的图象如图②.

(3)当 $y=0$ 时，$-4x^2+x+5=0$，解得 $x_1=-1$，$x_2=\frac{5}{4}$，

∴二次函数 $y=5+x-4x^2$ 的图象与 x 轴的交点坐标为 $(-1,0)$，$\left(\frac{5}{4},0\right)$ 列表如下：

x	$-1\frac{3}{4}$	-1	$\frac{1}{8}$	$\frac{5}{4}$	2
y	-9	0	$5\frac{1}{16}$	0	-9

描点、连线，二次函数的图象如图③.

(4)当 $y=0$ 时，$(x+1)^2-9=0$，解得 $x_1=-4$，$x_2=2$，

∴二次函数 $y=(x+1)^2-9$ 的图象与 x 轴的交点坐标为 $(-4,0)$，$(2,0)$. 列表如下：

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2
y	0	-5	-8	-9	-8	-5	0

描点、连线，二次函数的图象如图④.

7. 解：(1)画函数 $y=x^2-5x+5$ 的图象. 列表：

x	-0.5	0.5	1.5	2.5	3.5	4.5	5.5
y	7.75	2.75	-0.25	-1.25	-0.25	2.75	7.75

描点、连线，二次函数的图象如图①. 由图象知一元二次方程 $x^2-5x+5=0$ 有两个根，一个在1和2之间，另一个在3和4之间. ①先求在1和2之间的根，利用计算器进行探索：

x	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5
y	0.71	0.44	0.19	-0.04	-0.25

因此，$x=1.4$ 是方程的一个近似根；②再求在3和4之间的根：

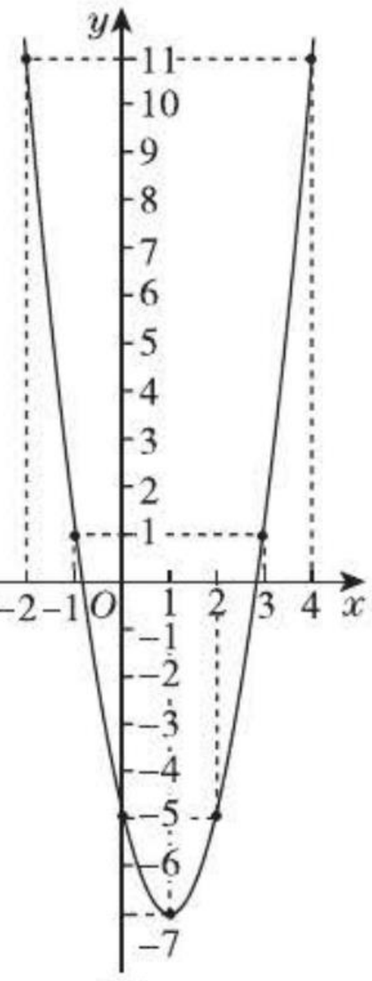
x	3.1	3.2	3.3	3.4	3.5	3.6	3.7
y	-0.89	-0.76	-0.61	-0.44	-0.25	-0.04	0.19

因此，$x=3.6$ 是方程的另一个近似根.

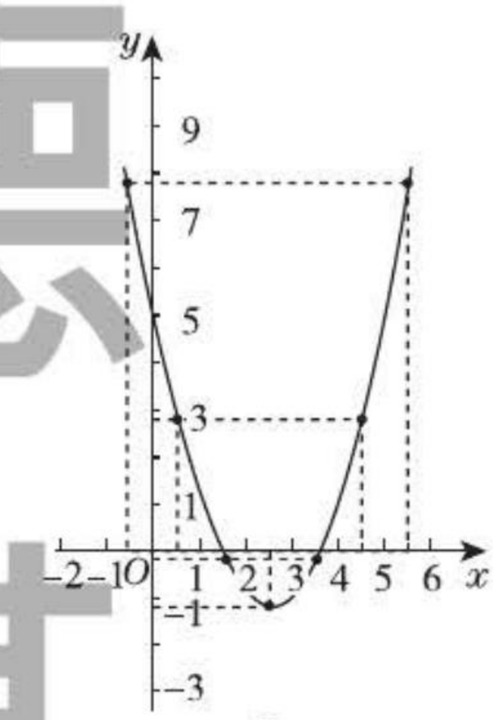
(2)画函数 $y=2x^2-4x-5$ 的图象. 列表：

x	-2	-1	0	1	2	3	4
y	11	1	-5	-7	-5	1	11

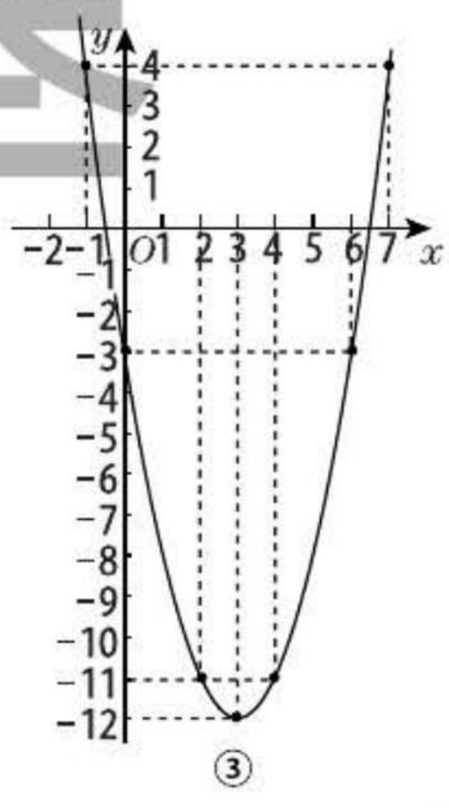
描点、连线，二次函数的图象如图②.



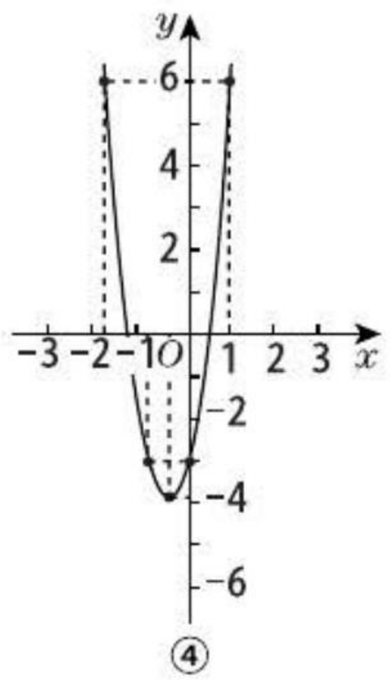
②



①



③



④

（第7题）

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

由图象知一元二次方程 $2x^2-4x=5$ 有两个根,一个在 -1 和 0 之间,另一个在 2 和 3 之间.

①先求在 -1 和 0 之间的根,利用计算器进行探索:

x	-0.9	-0.8	-0.7
y	0.22	-0.52	-1.22

因此,$x=-0.9$ 是方程的一个近似根;

②再求在 2 和 3 之间的根:

x	2.1	2.2	2.3	2.4	2.5
y	-4.58	-4.12	-3.62	-3.08	-2.5
x	2.6	2.7	2.8	2.9	
y	-1.88	-1.22	-0.52	0.22	

因此,$x=2.9$ 是方程的另一个近似根.

(3)画函数 $y=x^2-6x-3$ 的图象. 列表:

x	-1	0	2	3	4	6	7
y	4	-3	-11	-12	-11	-3	4

描点、连线,二次函数的图象如图③. 由图象知一元二次方程 $x^2-6x=3$ 有两个根,一个在 -1 和 0 之间,另一个在 6 和 7 之间.

①先求在 -1 和 0 之间的根,利用计算器进行探索:

x	-0.9	-0.8	-0.7	-0.6	-0.5	-0.4
y	3.21	2.44	1.69	0.96	0.25	-0.44

因此,$x=-0.5$ 是方程的一个近似根;

②再求在 6 和 7 之间的根:

x	6.1	6.2	6.3	6.4	6.5	6.6
y	-2.39	-1.76	-1.11	-0.44	0.25	0.96

因此,$x=6.5$ 是方程的另一个近似根.

(4)画函数 $y=5x^2+4x-3$ 的图象. 列表:

x	-1.8	-0.8	-0.4	0	1
y	6	-3	-3.8	-3	6

描点、连线,二次函数的图象如图④. 由图象知一元二次方程 $5x^2+4x-3=0$ 有两个根,一个在 -2 和 -1 之间,另一个在 0 和 1 之间.

①先求在 -2 和 -1 之间的根,利用计算器进行探索:

x	-1.9	-1.8	-1.7	-1.6
y	7.45	6	4.65	3.4
x	-1.5	-1.4	-1.3	-1.2
y	2.25	1.2	0.25	-0.6

因此,$x=-1.3$ 是方程的一个近似根.

②再求在 0 和 1 之间的根:

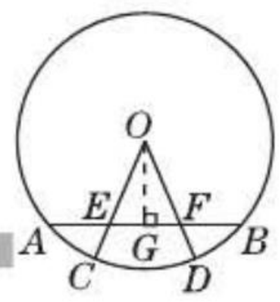
x	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6
y	-2.55	-2	-1.35	-0.6	0.25	1.2

因此,$x=0.5$ 是方程的另一个近似根.

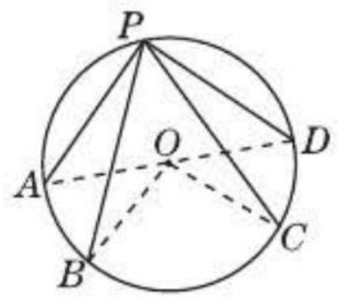
*8. **解**:$OE=OF$. 理由如下:如图,过点 O 作 $OG\perp AB$ 于点 G,由垂径定理得 $AG=BG$.

又∵ $AE=BF$,∴ $EG=FG$.

∴ OG 所在直线垂直平分线段 EF. ∴ $OE=OF$.



(第 8 题)



(第 9 题)

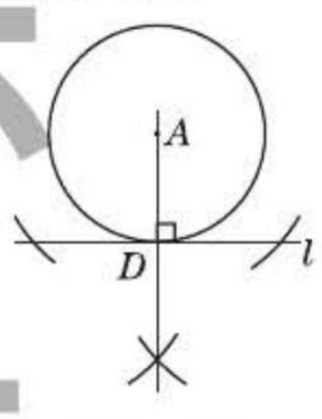
点拨:弦为已知条件时,常从过圆心作弦的垂线段入手来解答问题.

9. **解**:$\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{CD}$. 理由如下:如图,连接 OA,OB,OC,OD,

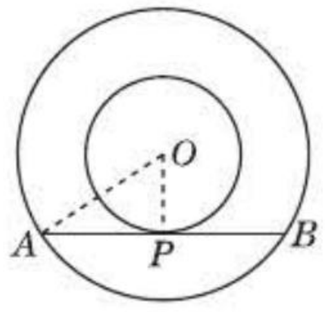
∴ $\angle AOB=2\angle APB$,$\angle COD=2\angle CPD$.

又∵ $\angle APB=\angle CPD$,∴ $\angle AOB=\angle COD$,∴ $\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{CD}$.

10. **解**:如图,作法:(1)过点 A 作 AD ⊥ 直线 l 于点 D. (2)以点 A 为圆心,线段 AD 的长为半径作圆,则 $\odot A$ 与直线 l 相切于点 D.



(第 10 题)



(第 11 题)

点拨:利用圆心到直线的距离等于半径,作圆与直线相切.

*11. **解**:如图,设弦 AB 与小圆相切于点 P,连接 OP(O 为圆心),则由切线性质得 $OP\perp AB$. 由垂径定理得 $PA=PB$. 连接 OA,在 $\mathrm{Rt}\triangle AOP$ 中,$OA=2$ cm,$OP=1$ cm,

∴ $AP=\sqrt{OA^2-OP^2}=\sqrt{2^2-1^2}=\sqrt{3}$(cm).

∴ $AB=2\sqrt{3}$ cm.

12. **解**:设 $\odot O$ 的半径为 r cm,根据题意得 $2\pi r=a$,$\pi r^2=a$,∴ $\pi r^2=2\pi r$,解得 $r=2$.

又∵ $\pi>2$,∴ 这条直线与圆相离.

点拨:要判断直线与圆的位置关系只需看圆心到直线的距离与半径的大小关系. 本题中距离已知,因此只需求出半径,即可判断其大小关系.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

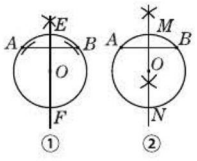
*13. 略.

*14. 略.

15. 解:连接 OC,OD. 由题意得 $\angle COD = 360° \div 5 = 72°$,则 $\angle CFD = \frac{1}{2}\angle COD = 36°$.

16. 解:设圆心为点 O. 方法一:(1)连接 AB. (2)过点 O 作线段 AB 的垂线 EF,分别交⊙O 于点 E,F,则直线 EF 为所求的关于 A,B 两点的对称轴,如图①.

方法二:(1)连接 AB. (2)作弦 AB 的垂直平分线 MN,分别交⊙O 于点 M,N,则直线 MN 为所求的对称轴,如图②.

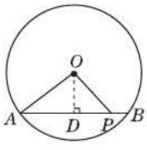


(第 16 题)

*17. 解:如图,过点 O 作 $OD \perp AB$ 于点 D,

$\therefore AD = BD = \frac{1}{2}AB = 4$ cm.

又∵ ⊙O 的直径为 10 cm,$\therefore OA = 5$ cm. 在 Rt△AOD 中,$OD = \sqrt{OA^2 - AD^2} = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3$(cm),$\therefore$ 3 cm$\leqslant OP \leqslant$ 5 cm.



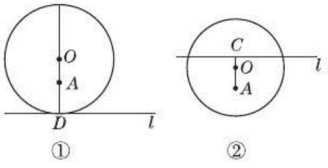
(第 17 题)

点拨:点 P 与圆心 O 连线的最长距离是半径,最短距离是弦心距.

18. 略.

19. 解:相交或相切. 理由如下:如图①,设 $OA \perp$ 直线 l 于点 D,由已知得 $OA = 2$,$AD = 3$,$\therefore OA + AD = 5$,则直线 l 与⊙O 相切.

如图②,设 $OA \perp$ 直线 l 于点 C,∵ $OC = AC - AO = 3 - 2 = 1 < 5$,$\therefore$ 直线 l 与⊙O 相交. $\therefore$ 直线 l 与⊙O 相交或相切.



(第 19 题)

20. 解:如图,过点 A 作 $AD \perp BC$ 于点 D,则 $BD = \frac{1}{2}BC$.

在 Rt△ABD 中,$AD = \frac{1}{2}AB = 1$ cm,$BD = AB\cos 30° = 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$(cm),

$\therefore BC = 2BD = 2\sqrt{3}$ cm.

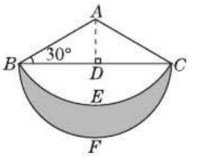
又∵ $\angle B = 30°$,$AB = AC$,$\therefore \angle ACB = 30°$.

$\therefore \angle BAC = 120°$.

$\therefore \overset{\frown}{BEC}$与 BC 围成的弓形面积 $S = \frac{120\pi \times 2^2}{360} - \frac{1}{2} \times 2\sqrt{3} \times 1 = \frac{4\pi}{3} - \sqrt{3}$(cm²).

$\therefore S_{阴影} = \frac{1}{2}\pi \times (\sqrt{3})^2 - \left(\frac{4}{3}\pi - \sqrt{3}\right) = \frac{3\pi}{2} - \frac{4\pi}{3} + \sqrt{3} = \frac{\pi + 6\sqrt{3}}{6}$(cm²).

即图案的面积为$\frac{\pi + 6\sqrt{3}}{6}$ cm².



(第 20 题)

点拨:阴影部分的面积 = 半圆的面积 − (扇形的面积 − △ABC 的面积),因此求阴影部分的面积,可以从计算扇形的面积着手,层层计算即可.

21. 解:∵ 四边形 $ABCD$ 是正方形,$\therefore \angle DAB = \angle ABC = \angle BCD = \angle CDA = 90°$,$AD = AB = BC = CD = 1$.

$\therefore \angle DAE = \angle EBF = \angle FCG = \angle GDH = 90°$.

$\therefore \overset{\frown}{DE}$的长 $= \frac{90 \times \pi \times 1}{180} = \frac{\pi}{2}$,

$\overset{\frown}{EF}$的长 $= \frac{90 \times \pi \times 2}{180} = \pi$,

$\overset{\frown}{FG}$的长 $= \frac{90 \times \pi \times 3}{180} = \frac{3\pi}{2}$,$\overset{\frown}{GH}$的长 $= \frac{90 \times \pi \times 4}{180} = 2\pi$.

$\therefore$ 曲线 $DEFGH$ 的长度为 $\frac{\pi}{2} + \pi + \frac{3\pi}{2} + 2\pi = 5\pi$.

点拨:该曲线为正方形的渐开线,应分段计算.

22. 解:设 $AB = CD = x$ m,等腰梯形 $ABCD$ 的面积为 y m².

∵ $\angle ABC = \angle C = 120°$,$\angle EBC = 90°$,$\therefore \angle ABE = 30°$.

在Rt△ABE 中,$AE = \frac{1}{2}x$ m,$BE = x\cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}x$ m,

$\therefore AD = 5 - 2x + x = 5 - x$(m).

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

$\therefore y=\frac{1}{2}(5-x+5-2x)\times\frac{\sqrt{3}}{2}x=-\frac{3\sqrt{3}}{4}x^2+\frac{5\sqrt{3}}{2}x$

$\left(0<x<\frac{5}{2}\right)$

$\therefore$ 当 $x=-\frac{\frac{5\sqrt{3}}{2}}{2\times\left(-\frac{3\sqrt{3}}{4}\right)}=\frac{5}{3}$ 时,y 有最大值.

因此,要使流水的截面面积最大,弯折的长度应为 $\frac{5}{3}$ m.

点拨:根据题意,首先需要找到截面面积与弯折的长度(AB 的长)之间的关系,发现它们是二次函数关系,再运用二次函数的性质进行求解.

23. 解:设直线跑道的长为 x m,矩形的面积为 S m^2,则矩形的另一边的长为 $\frac{400-2x}{\pi}$ m.

根据题意得 $S=x\cdot\frac{400-2x}{\pi}=-\frac{2}{\pi}x^2+\frac{400}{\pi}x$($0<x<200$).

$\therefore$ 当 $x=-\frac{\frac{400}{\pi}}{2\times\left(-\frac{2}{\pi}\right)}=100$ 时,S 有最大值,

即要使矩形内部操场的面积最大,直线跑道的长应为 100 m.

24. 解:设两船行驶 x 时后,它们之间的距离为 y n mile.

根据题意得 $y=\sqrt{(15x)^2+(20-20x)^2}=\sqrt{625x^2-800x+400}$. $\therefore$ 当 $x=-\frac{-800}{2\times625}=0.64$ 时,

$y_{最小}=\sqrt{\frac{4\times625\times400-(-800)^2}{4\times625}}=12$,即经过 0.64 时后,两船的距离最小,最小距离为 12 n mile.

点拨:利用顶点坐标公式,求函数的最大值或最小值.

25. 解:(1)$S=-\frac{3}{2}x^2+300x(0<x<200)$.

(2)由 $-\frac{300}{2\times\left(-\frac{3}{2}\right)}=100$,可知当 $x=100$ 时,$S_{最大}=15\ 000$. 即矩形绿地的最大面积为 15 000 m^2.

26. 解:(1)当 $x=0$ 时,$y_{最大}=3.5$.

$\therefore$ 球能达到的最大高度是 3.5 m.

(2)当 $y=3.05$ 时,$3.05=-0.2x^2+3.5$,

解得 $x=1.5$($x=-1.5$ 舍去).

$\therefore$ 此人离 y 轴的距离为 $4-1.5=2.5$(m).

$\therefore$ 此人跳起投篮时,所在点的横坐标为 -2.5,此时 $y=-0.2\times(-2.5)^2+3.5=2.25$.

$\therefore$ 球出手时,运动员跳离地面的高度为 $2.25-1.8-0.25=0.2$(m).

27. 解:$\odot B$ 与直线 AC 相切,与直线 FG 相交,与直线 DC 相离. 理由如下:

如图,$\because$ 四边形 $ABCD$ 是正方形,

$\therefore AC\perp BD$,$AE=BE$. $\therefore\angle ABE=45°$.

$\therefore BE=AB\cos 45°=\frac{\sqrt{2}}{2}a$.

$\because\odot B$ 的半径为 $\frac{\sqrt{2}}{2}a$,

$\therefore$ 直线 AC 与 $\odot B$ 相切.

$\because FG/\!/AB$,$\therefore\angle FGB+\angle ABG=180°$.

$\because\angle ABC=90°$,$\therefore\angle FGB=90°$.

在 Rt$\triangle BGE$ 中,$BG<BE=\frac{\sqrt{2}}{2}a$,

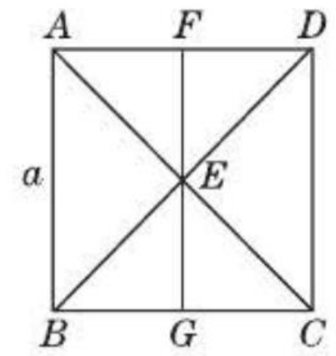
$\therefore$ 直线 FG 与 $\odot B$ 相交.

在 Rt$\triangle BEC$ 中,

$BC>BE=\frac{\sqrt{2}}{2}a$. 又 $BC\perp DC$,

$\therefore$ 直线 DC 与 $\odot B$ 相离.

$\therefore\odot B$ 与直线 AC 相切,与直线 FG 相交,与直线 DC 相离.



(第 27 题)

点拨:判断直线与圆的位置关系时,需求得该圆的圆心与直线的距离 d,再与半径 r 比较. 当 $d=r$ 时,直线与圆相切;当 $d>r$ 时,直线与圆相离;当 $d<r$ 时,直线与圆相交.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

廿年磨一剑 · 匠心铸经典

教师的备课笔记 · 学生的随身家教 · 家长的辅导工具



封面题字：沈　鹏

荣德基官方网站：http://www.rujder.com.cn

荣德基天猫旗舰店：http://rongdej.tmall.com

荣德基初中精选

ISBN 978-7-5450-6225-6

9 787545 062256 >

定价：39.80元

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料