特高级教师

点拨®

知识
方法
素养

本书解题方法44招·七八九年级共439招



九年级 数学 下

(HS版)

赠教材习题答案

吉林教育出版社

教辅资料站

电子教辅 试卷练习
知识总结 备课资源

扫码关注获取更多学习资料

构建数形的桥梁

构建数形的桥梁











第26章 二次函数

荣德基

核心考点

你将见到的

- 二次函数的几种常见模型
  $y=ax^2$　$y=ax^2+c$　$y=a(x-h)^2$
  $y=a(x-h)^2+k$　$y=ax^2+bx+c$
- 二次函数的图象与性质
- 用待定系数法求二次函数表达式
- 二次函数与一元二次方程之间的关系
- 建立二次函数模型解决实际问题

核心方法

我们为你提供的

- 代入比较法
- 增减性比较法
- 割补法
- 平移法
- 逆平移法
- 对称轴法
- 待定系数法
- 数形结合思想
- 分类讨论思想

微信公众号 教辅资料站

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

26.1 二次函数

核心知识

- 二次函数的定义
- 二次函数的值
- 二次函数的表达式的一般形式
- 二次函数自变量的取值范围

知识链接



点知识·拨考向 速提分

点知识 1 二次函数的定义

1. 定义： 形如 $y=ax^2+bx+c$（a，b，c 是常数，$a\neq 0$）的函数叫做二次函数．其中，x 是自变量，a，b，c 分别是二次函数表达式的二次项系数、一次项系数和常数项．

示例：

二次函数和它的各项系数	$y=x^2-x-4$：二次项系数是 1；常数项是 −4；一次项系数是 −1 $y=x^2+\frac{4}{x}$ 不是二次函数：分母中含有未知数，不是整式

2. 确定二次函数的“三要素”：

（1）含有自变量的代数式必须是整式；

（2）化简后自变量的最高次数是 2；

（3）二次项系数不等于 0．

提分·必记

详解

二次函数的三种特殊形式：

1. 只含二次项，即：$y=ax^2$（$b=0$，$c=0$）；
2. 不含一次项，即：$y=ax^2+c$（$b=0$，$c\neq 0$）；
3. 不含常数项，即：$y=ax^2+bx$（$b\neq 0$，$c=0$）．

拔考向 利用二次函数的定义求待定字母的值

例 1 当 m 取何值时，函数 $y=(m^2+m)x^{m^2-2m-1}+(m-5)x+m^2$ 是关于 x 的二次函数？并求出这时二次函数的表达式．

解题秘方： 紧扣二次函数定义的“三要素”进行解答．

解： 由题意，得 $\begin{cases}m^2-2m-1=2,\\ m^2+m\neq 0.\end{cases}$

$\therefore m=3$．

∴当 $m=3$ 时，该函数是二次函数，其表达式为

$y=(3^2+3)x^{3^2-2\times 3-1}+(3-5)x+3^2$，

即 $y=12x^2-2x+9$．

提分·秘诀

特别警示

当含字母系数的函数是二次函数时，它必隐含二次项系数不为 0 这一条件，解此类题易只关注满足指数的要求，而忽略对二次项系数的限制，从而导致错误．

基础 德基 微信公众号 教辅资料站

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

点知识 ▸ 2 建立二次函数的模型表示变量间的关系

建立二次函数的模型的一般步骤：

1. **审清题意**：找出问题中的已知量（常量）和未知量（变量），把问题中的文字或图形语言转化成数学语言.

2. **找相等关系**：分析常量和变量之间的关系，列出等式.

3. **列二次函数表达式**：设出表示变量的字母，把相等关系用含字母的式子表示并把它整理成二次函数的一般形式.

提分·必记

特别提醒

1. 建立二次函数的模型与建立一元二次方程的模型类似；不同的是需将它转化为用含一个未知数（自变量）的代数式表示另一个未知数（函数）.
2. 自变量的取值范围应使实际问题有意义.

拔考向 ▸ 利用实际问题中数量关系建立二次函数模型

例 2 某网店销售某款童装，每件售价 60 元，每星期可卖 300 件. 为了促销，该网店决定降价销售. 市场调查反映，每降价 1 元，每星期可多卖 30 件. 已知该款童装每件成本价为 40 元，设该款童装每件售价 x 元，每星期的销售量为 y 件.

（1）求 y 与 x 之间的函数关系式，并写出自变量的取值范围；

（2）设每星期的销售利润为 W 元，求 W 与 x 之间的函数关系式.

（3）当每件售价定为 50 元时，每星期的销售量为多少件？销售利润为多少元？

解题秘方：紧扣销售量和销售利润的基本关系式解答.

解：（1）$y=300+30(60-x)=-30x+2\,100\ (40\leqslant x\leqslant 60)$.

（2）$W=(x-40)(-30x+2\,100)=-30x^2+3\,300x-84\,000$.

（3）当 $x=50$ 时，$y=-30\times 50+2\,100=600$；$W=-30\times 50^2+3\,300\times 50-8\,4000=6\,000$.

即当每件售价定为 50 元时，每星期的销售量为 600 件，销售利润为 6 000 元.

方法点拨：在实际问题中建立二次函数模型时，关键要找出两个变量之间的相等关系，用类似建立一元二次方程模型的方法，借助方程思想求出二次函数的关系式.

提分·秘诀

知识储备

销售利润=每件利润×销售量.

详解

- 降价后销售量=降价前可卖件数+降价后多卖的件数，每件降价(60-x)元；
- 销售利润=每件利润×销售量，每件的利润为(x-40)元.

点方法·拨技巧 提高分

拔尖角度 ▸ 1 利用分类法解二次函数定义的应用

例 3 若关于 x 的函数 $y=(m+1)x^{m^2-2}+2x^2+3\ (x\neq 0)$ 是二次函数，求 m 的值.

解题秘方：紧扣二次函数定义的“三要素”按系数与指数的不同情况分类求解.

解：当 $m+1=0$，即 $m=-1$ 时，$y=(m+1)x^{m^2-2}+2x^2+3$ 是二次函数；

当 $\begin{cases}m^2-2=2,\\ m+1\neq -2,\end{cases}$ 即 $m=\pm 2$ 时，$y=(m+1)x^{m^2-2}+2x^2+3$ 是二次函数；

当 $m^2-2=1$，即 $m=\pm\sqrt{3}$ 时，$y=(m+1)x^{m^2-2}+2x^2+3$ 是二次函数；

当 $m^2-2=0$，即 $m=\pm\sqrt{2}$ 时，$y=(m+1)x^{m^2-2}+2x^2+3\ (x\neq 0)$ 是二次函数.

综上，当 $m=-1$，± 2，$\pm\sqrt{3}$，$\pm\sqrt{2}$ 时，$y=(m+1)x^{m^2-2}+2x^2+3\ (x\neq 0)$ 是二次函数.

挑战·高分

评析

在进行分类讨论时，首先考虑首项系数等于 0 的情况，然后考虑首项系数不等于 0 的情况，当首项系数不等于 0 时，要根据次数必须小于等于 2 进行分类.

特别提醒

在讨论指数是 0 的时候，需指出底数不为 0 这一条件.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

拔尖角度 2 利用静态法建立涉及几何动态问题的二次函数模型

挑战·高分

例4 已知等腰直角三角形 ABC 的直角边长与正方形 $MNPQ$ 的边长均为 20cm，AC 与 MN 在同一条直线上，如图 26.1-1，开始时点 A 与点 N 重合，让△ABC 以 2cm/s 的速度向左运动，最终点 A 与点 M 重合，

（1）求重叠部分的面积 y（cm^2）与运动时间 t（s）之间的函数表达式.

（2）当重叠部分的面积为 $32cm^2$ 时，运动的时间为多少秒?

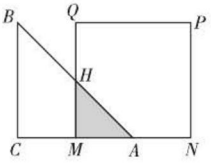


图 26.1-1

解题秘方：运用等腰直角三角形的性质，用含 t 的代数式表示 AM、MH 的长是求 y 关于 t 的函数表达式的切入点.

解：（1）∵△ABC 为等腰直角三角形，∴∠CAB=∠CBA=45°.

∵∠QMN=90°，∴∠MHA=∠MAH=45°. ∴ $MH=AM$.

又∵ $AN=2t$ cm，∴ $AM=MN-AN=(20-2t)$ cm.

∴ $MH=AM=(20-2t)$ cm. ∴ $y=\frac{1}{2}(20-2t)^2=2t^2-40t+200$.

又∵ $t\geqslant 0$，$20-2t\geqslant 0$，∴ $0\leqslant t\leqslant 10$.

故 $y=2t^2-40t+200$（$0\leqslant t\leqslant 10$）.

（2）当 $y=32$ 时，$2t^2-40t+200=32$，解得 $t_1=6$，$t_2=14$.

∵ $0\leqslant t\leqslant 10$，∴ $t=6$.

即当重叠部分的面积为 32 cm^2 时，运动的时间为 6 s.

解法提醒

在几何动态问题中建立二次函数模型关键要掌握两点：

一是掌握用点运动的路程表示线段长；

二是掌握几何图形的面积公式.

遇到动态问题时，我们要将其固定在某一时刻或某一状态，从而转化成静态问题. 本题中，当图形运动时，重叠部分是等腰直角三角形，因此可以用含 t 的代数式来表示直角边的长，然后根据直角三角形的面积公式求出 y 和 t 的函数表达式.

点中考·拔模拟 得满分

中考探秘

二次函数的定义及列表达式表示函数关系是中考命题的热点，特别是利用二次函数定义确定字母系数的取值更是常考内容. 从命题形式上看，有选择题、填空题，也有解答题，难度适中. 对列表达式表示二次函数关系的考查，既有单纯的命题，也有与实际问题有关的综合题，难度相对较大.

三年中考兵法

考法 1 利用定义法识别二次函数表达式

例5 [中考·兰州]下列函数表达式中，一定为二次函数的是(　　)

A. $y=3x-1$　B. $y=ax^2+bx+c$　C. $s=2t^2-2t+1$　D. $y=x^2+\frac{1}{x}$

试题评析：本题考查了二次函数的定义，$y=ax^2+bx+c$（$a\neq 0$）是二次函数，注意二次函数都是整式.

解：A. $y=3x-1$ 是一次函数，故 A 错误；

B. $y=ax^2+bx+c$ 不一定是二次函数，故 B 错误；

C. $s=2t^2-2t+1$ 是二次函数，故 C 正确；

D. $y=x^2+\frac{1}{x}$ 不是二次函数，故 D 错误. 故选 C.

答案：C

冲刺·满分

教你一招

判断一个函数为二次函数的一般步骤：

1. 将函数进行整理，使其右边是含自变量的代数式，左边是因变量；
2. 判断右边含自变量的代数式是不是整式；
3. 判断含自变量的项的最高次数是不是 2；
4. 判断二次项的系数是不是 0.

微信公众号 教辅资料站

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

考法 2 利用割补法建立几何问题的二次函数模型

例 6 [中考·丽水]如图 26.1-2，四边形 $ABCD$ 中，$\angle BAD=\angle ACB=90°$，$AB=AD$，$AC=4BC$，设 CD 的长为 x，四边形 $ABCD$ 的面积为 y，则 y 与 x 之间的函数关系式是(　　)

A. $y=\frac{2}{25}x^2$　　B. $y=\frac{4}{25}x^2$

C. $y=\frac{2}{5}x^2$　　D. $y=\frac{4}{5}x^2$

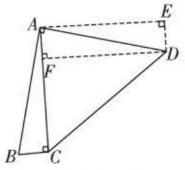


图 26.1-2

试题评析：本题运用了割补法，将求不规则四边形面积转化为求梯形的面积，充分体现了全等三角形、勾股定理在解题中的应用.

解：由于 $AB=AD$，故以 AD 为斜边作 $\mathrm{Rt}\triangle ADE\cong\mathrm{Rt}\triangle ABC$，过 D 作 $DF\perp AC$ 于 F，如图 26.1-2，易知 $BC=DE$，$AC=AE$，四边形 $AFDE$ 是矩形，$S_{四边形ABCD}=S_{梯形ACDE}$.

设 $BC=a$，则 $DE=AF=a$，$DF=AE=AC=4BC=4a$，$CF=AC-AF=3a$，在 $\mathrm{Rt}\triangle CDF$ 中，由勾股定理得 $CF^2+DF^2=CD^2$，即 $(3a)^2+(4a)^2=x^2$. 解得 $a_1=\frac{x}{5}$，$a_2=-\frac{x}{5}$(舍去).

$\therefore\ y=S_{四边形ABCD}=S_{梯形ACDE}=\frac{1}{2}\times(DE+AC)\times DF=\frac{1}{2}\times(a+4a)\times 4a=10a^2=\frac{2}{5}x^2$.

答案：C

技巧点拨

- 本题是用割(△ABC)补(△ADE)法，将不规则的四边形ABCD转化为规则的梯形ACDE，从而建立两个变量间的函数关系.
- 当几何图形不能通过已知条件直接建立两个变量的函数关系时，应适当考虑通过割补法或分割法来建立两个变量间的函数关系.

素养提分　行动篇

走进函数大家庭

我们已经学过一次函数和二次函数，在这些函数中，对于自变量 x 的每一个确定的值，因变量 y 有几个值与它对应?

假设在一个变化过程中有两个变量 x，y，如果对于 x 在某一范围内的每一个确定的值，y 都有唯一的值与它对应，那么就说变量 y 是变量 x 的函数，x 叫做自变量.

除了一次函数和二次函数之外，在函数大家庭里还有许多其他成员.

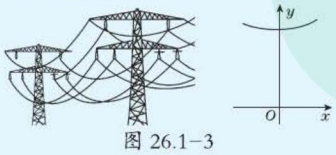


图 26.1-3

如函数 $y=\frac{a}{2}(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}})$ $(a>0$，$e=2.718\ 281\ 8\cdots)$，它的面孔尽管陌生，但是它的图象就是我们所熟悉的那种下垂的高压输电线(如图 26.1-3).

又如脑电波图(如图 26.1-4)，常人看上去也许觉得它们杂乱无章，但是对于一个临床医生来说，它们却是发现脑部异常的重要依据，脑细胞活动时会产生生物电流，脑电波反映了生物电流随人脑活动的变化而变化的情况.

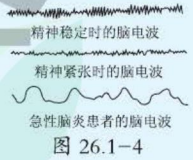


图 26.1-4

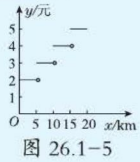


图 26.1-5

利用函数图象帮助医生进行医疗诊断，除了脑电波图之外，还有心电图等，它们都早已成为临床诊断常用的辅助手段.

还有一些函数的图象不是连续的，如表示某公共汽车票价与乘坐距离之间的关系的图象(如图 26.1-5)就是如此，结合乘车购票经验，相信你一定能读懂它.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

两年模拟兵法 ☞答案见185页

1. 下列属于二次函数的是（　　）

A. $y=\dfrac{2}{x^2-1}$　　B. $y=x^2+\dfrac{1}{x^2}$

C. $y=(x-2)^2-2x^2$　　D. $2x^2-3x=5$

2. [模拟·桥西] 某工厂2017年某产品的产量为100吨，该产品产量的年平均增长率为$x(x>0)$，设2019年该产品的产量为y吨，则y关于x的函数关系式为（　　）

A. $y=100(1-x)^2$

B. $y=100(1+x)^2$

C. $y=\dfrac{100}{(1+x)^2}$

D. $y=100+100(1+x)+100(1+x)^2$

3. [模拟·北京] 某商品现在的售价为每件60元，每星期可卖出300件，市场调查反映，如果调整商品售价，每降价1元，每星期可多卖出20件，设每件商品降价x元后，每星期售出商品的总销售额为y元，则y与x的函数表达式为（　　）

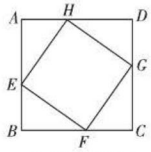
A. $y=60(300+20x)$

B. $y=(60-x)(300+20x)$

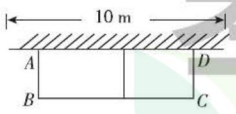
C. $y=300(60-20x)$

D. $y=(60-x)(300-20x)$

4. [中考·常德] 如图，正方形$EFGH$的顶点在边长为2的正方形的边上，若设$AE=x$，正方形$EFGH$的面积为y，则y与x的函数关系式为_____.



（第4题）



（第5题）

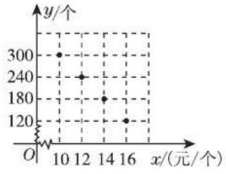
5. [模拟·青岛] 如图，有长为24 m的篱笆，一面利用墙（墙的最大可用长度为10 m），围成中间隔有一道篱笆的矩形花圃，设花圃的宽AB为x m，面积为S m^2，则S与x的函数关系式为_____；自变量的取值范围为_____.

当$S=45$时，$x=$_____.

6. 在“母亲节”期间，某校部分团员参加社会公益活动，准备购进一批许愿瓶进行销售，并将所得利润捐给慈善机构. 根据市场调查，这种许愿瓶一段时间内销售量y（个）与售价x（元/个）（x为整数）之间的对应关系如图.

（1）试判断y与x之间的函数关系，并求出函数表达式；

（2）若许愿瓶的进价为6元/个，按照上述市场调查的销售规律，求销售利润W（元）与售价x（元/个）之间的函数表达式.



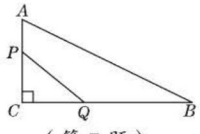
（第6题）

7. 如图，在Rt△ABC中，$\angle C=90°$，$AC=6$ mm，$BC=12$ mm，动点P从点A开始沿边AC向C以1 mm/s的速度移动，动点Q从点C开始沿边CB向B以2 mm/s的速度移动.

（1）如果P、Q两点同时出发，那么△PCQ的面积S_1（mm^2）随出发时间t（s）如何变化？写出函数表达式及t的取值范围.

（2）在（1）的条件下，请写出四边形$APQB$的面积S_2（mm^2）关于运动时间t（s）的函数表达式.

【导学号：8603511】



（第7题）

荣德基
微信公众号
教辅资料站

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

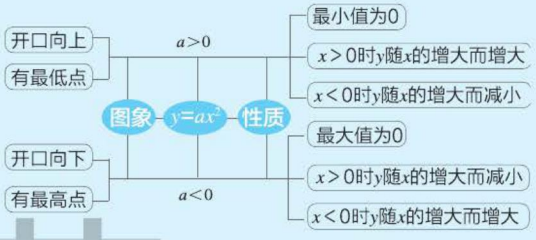
26.2 二次函数的图象与性质

26.2.1 二次函数 $y=ax^2$ 的图象与性质

核心知识

- 抛物线
- 开口方向
- 对称轴
- 增减性

知识链接



点知识·拨考向 速提分

点知识 1 二次函数 $y=ax^2$ 的图象的画法

1. 用描点法画函数 $y=ax^2$（$a\neq0$）的图象的一般步骤

（1）**列表**：

列表时，自变量 x 的取值应有一定的代表性，并且所对应的函数值不能太大也不能太小，以便于描点和全面反映图象情况．作图选点时，一般应先找出对称轴，然后在对称轴的两侧对称选取，以计算简单、描点方便为原则．

（2）**描点**：

一般来说，点取得越多、越密集，描出的图象就越准确．实际画图中，一般取顶点及顶点两侧对称的两对点，共 5 个点，用“五点法”快速准确地作出抛物线，有时也会在对称轴的两侧各取三个点画图．

（3）**连线**：

按自变量由小到大（或由大到小）的顺序，依次用平滑的曲线连结各点．

2. 抛物线：二次函数 $y=ax^2$ 的图象是一条经过原点，以 y 轴为对称轴的抛物线，也称抛物线 $y=ax^2$．抛物线与它的对称轴的交点叫做抛物线的顶点．

提分·必记

特别提醒

- 用描点法可以画出任意一个二次函数的图象．用描点法画出的图象只是二次函数图象的一部分，并且是近似的．在画二次函数图象时，图象必须平滑，顶端不能画成尖的，一般来说，选点越多，图象越精确，但也要具体问题具体分析．
- 抛物线是向两方无限延伸的，画图时要画“出头”，左右两侧必须保持关于对称轴对称．

拔考向 利用描点法作函数的图象

例 1 在同一平面直角坐标系中作出 $y=\frac{1}{2}x^2$，$y=-\frac{1}{2}x^2$ 和 $y=\frac{1}{4}x^2$ 的图象．

解题秘方：用描点法，按列表→描点→连线这三个流程作图．

提分·秘诀

作图通法

1. 列表、描点、连线是画函数图象的基本方法，用这种方法可以画出任意一个函数的图象．

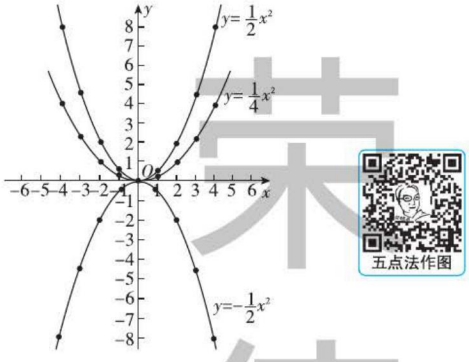
菜德意
微信公众号 教辅资料站

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

解：列表：

x	…	−4	−3	−2	−1	0	1	2	3	4	…
$y=\frac{1}{2}x^2$	…	8	4.5	2	0.5	0	0.5	2	4.5	8	…
$y=-\frac{1}{2}x^2$	…	−8	−4.5	−2	−0.5	0	−0.5	−2	−4.5	−8	…
$y=\frac{1}{4}x^2$	…	4	2.25	1	0.25	0	0.25	1	2.25	4	…

描点、连线，即得三个函数的图象，如图 26.2−1.



五点法作图

图 26.2−1

2. 利用列表、描点、连线画二次函数 $y=ax^2$ 的图象时，列表中的 x 的值要在坐标原点（0，0）的左右两边对称选取，选点时，应以计算简单、描点方便为原则.

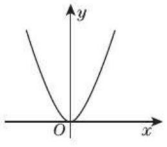
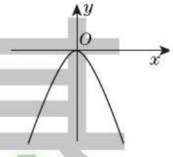
3. 在同一坐标系中作多个函数图象时，要在图象旁边标明函数的表达式.

解法警示

连线时，必须按照自变量由小到大（或由大到小）的顺序，并且用光滑的曲线顺次连结，初始点和末端点要注意适当“向外延伸”，切忌用线段连结或漏点、跨点连结.

点知识 ▸ 2 二次函数 $y=ax^2$ 的图象与性质

二次函数 $y=ax^2$（$a\neq0$）的图象与性质：

$y=ax^2$	$a>0$	$a<0$
图象		
开口方向	开口向上	开口向下
顶点坐标	（0，0）	
对称轴	y 轴（或直线 $x=0$）	
增减性	在对称轴的左侧即 $x<0$ 时，y 随 x 的增大而减小；在对称轴的右侧即 $x>0$ 时，y 随 x 的增大而增大	在对称轴的左侧即 $x<0$ 时，y 随 x 的增大而增大；在对称轴的右侧即 $x>0$ 时，y 随 x 的增大而减小
最值	当 $x=0$ 时，$y_{最小值}=0$	当 $x=0$ 时，$y_{最大值}=0$

提分·必记

要点解读

1. 判断二次函数的增减性的技巧：从抛物线的对称轴分开，自左向右看，“上坡路”就是 y 随 x 的增大而增大，“下坡路”就是 y 随 x 的增大而减小.

2. 在二次函数 $y=ax^2$（$a\neq0$）中，a 的正负性决定开口方向，$|a|$ 决定开口的大小. $|a|$ 越大，抛物线开口越小，反之，$|a|$ 越小，抛物线开口越大.

3. 二次函数 $y=-ax^2$（$a\neq0$）与 $y=ax^2$（$a\neq0$）的图象关于 x 轴对称.

荣德基
微信公众号 教辅资料站

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

考向▶二次函数 $y=ax^2$ 的图象与性质的应用类型

类型1：二次函数 $y=ax^2$ 的图象的应用

例2 如图26.2-2，四个二次函数的图象中，分别对应的是：①$y=ax^2$；②$y=bx^2$；③$y=cx^2$；④$y=dx^2$，且①与③，②与④分别关于x轴对称.

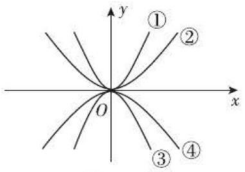


图26.2-2

（1）比较a，b，c，d的大小关系；

（2）说明a与c，b与d的数量关系.

解题秘方：紧扣“a的符号”及“$|a|$的大小”采用数形结合思想进行解答.

解：（1）由抛物线的开口方向，知$a>0$，$b>0$，$c<0$，$d<0$，

由抛物线的开口大小，知$|a|>|b|$，$|c|>|d|$，因此$a>b$，$c<d$.

$\therefore a>b>d>c$.

（2）$\because$①与③，②与④分别关于x轴对称，

$\therefore$①与③，②与④的开口大小相同，方向相反.

$\therefore a+c=0$，$b+d=0$.

类型2：二次函数 $y=ax^2$ 的性质的应用

例3 已知函数$y=(m+2)x^{m^2+m-4}$是关于x的二次函数.

（1）求满足条件的m的值.

（2）当m为何值时，其图象有最低点？求出这个最低点，这时当x为何值时，y随x的增大而增大？

（3）当m为何值时，函数有最大值？最大值是多少？这时当x为何值时，y随x的增大而减小？

解题秘方：按顶点的左、右两侧，即分$x>0$和$x<0$两种情况讨论函数的增减性.

解：（1）由题意，得$\begin{cases}m^2+m-4=2,\\ m+2\neq 0.\end{cases}$

解得$m=2$或$m=-3$.

$\therefore$当$m=2$或$m=-3$时，函数为二次函数.

（2）若抛物线有最低点，则抛物线的开口向上，

$\therefore m+2>0$，即$m>-2$. $\therefore m=2$.

$\because$这个最低点为抛物线的顶点，

$\therefore$最低点的坐标为（0，0）.

当$x>0$时，y随x的增大而增大.

（3）若函数有最大值，则抛物线的开口向下，

$\therefore m+2<0$，即$m<-2$. $\therefore m=-3$.

$\because$函数的最大值为抛物线顶点的纵坐标，顶点坐标为（0，0），

$\therefore$当$m=-3$时，函数有最大值0. 当$x>0$时，y随x的增大而减小.

提分·秘诀

解法提醒

a与抛物线开口方向、开口大小之间的关系：

1. a的符号：

$a>0$⇔开口向上

$a<0$⇔开口向下.

2. a的绝对值：

$|a|$越大⇔开口越小

$|a|$相等⇔开口大小相同.

另解

用特殊值法：

当$x=1$时，四个函数值分别等于二次项系数，

∴直线$x=1$与四条抛物线的交点从上到下依次为$(1,a)$，$(1,b)$，$(1,d)$，$(1,c)$，∴$a>b>d>c$.

知识储备

满足条件即满足二次函数定义的“三要素”：

1. 整式；
2. 最高次数为2；
3. 二次项系数不为0.

解法提醒

在分析二次函数的增减性时，都是以对称轴为分界线进行讨论：

- 开口向下的抛物线，在对称轴左侧y随x的增大而增大，在对称轴右侧y随x的增大而减小；
- 开口向上的抛物线，在对称轴左侧y随x的增大而减小，在对称轴右侧y随x的增大而增大.

宋德基
微信公众号 教辅资料站

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

点方法·拨技巧 提高分

拔尖角度 1 利用基础图象位置法识别图象

例 4 ［模拟·博山］当 $ab>0$ 时，$y=ax^2$ 与 $y=ax+b$ 的图象大致是图 26.2-3 中的（　　）

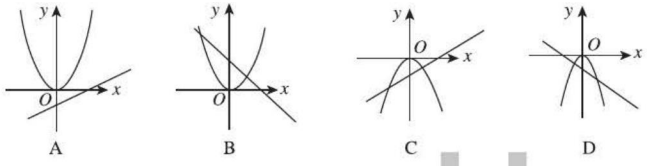


图 26.2-3

解题秘方：对 a，b 的符号情况进行分类讨论.

解：根据题意，$ab>0$，即 a，b 同号，

当 $a>0$ 时，$b>0$，$y=ax^2$ 的图象开口向上，过原点，$y=ax+b$ 的图象过一、二、三象限，此时，没有选项符合.

当 $a<0$ 时，$b<0$，$y=ax^2$ 的图象开口向下，过原点，$y=ax+b$ 的图象过二、三、四象限，此时，D 选项符合.

答案：D

挑战·高分

解题通法

在同一坐标系中确定两个函数图象是否同时成立的方法：

先确定一个基础函数图象，再根据这个基础函数图象的位置确定待定系数的取值范围，然后再看求出的待定系数的范围是否满足另一个函数图象.

拔尖角度 2 利用求值比较法或性质比较法比较函数值的大小

例 5 已知点 $A(-4,\ y_1)$，$B(\sqrt{2},\ y_2)$，$C(2,\ y_3)$ 都在二次函数 $y=x^2$ 的图象上，则 y_1，y_2，y_3 的大小关系是_____（用“<”连接）.

解题秘方一：用代入比较法比较大小.

解法一：∵点 $A(-4,\ y_1)$，$B(\sqrt{2},\ y_2)$，$C(2,\ y_3)$ 都在二次函数 $y=x^2$ 的图象上，

∴ $y_1=(-4)^2=16$，$y_2=(\sqrt{2})^2=2$，$y_3=2^2=4$.

∴ $y_2<y_3<y_1$.

答案：$y_2<y_3<y_1$

解题秘方二：用函数的增减性比较法比较大小.

解法二：抛物线 $y=x^2$ 的对称轴是 y 轴，点 $A(-4,\ y_1)$ 关于 y 轴的对称点是 $(4,\ y_1)$，由二次函数 $y=x^2$ 的图象开口向上，对称轴为 y 轴可知，当 $x>0$ 时，y 随 x 的增大而增大.

∵$\sqrt{2}<2<4$,

∴ $y_2<y_3<y_1$.

答案：$y_2<y_3<y_1$

挑战·高分

技巧 1

代入比较法：若已知二次函数的表达式，则将几个点的横坐标分别代入二次函数的表达式，求出对应的函数值，再比较大小.

技巧 2

增减性比较法：当所给的几个点在抛物线的对称轴的同一侧时，直接利用增减性即可比较；当所给的几个点不在抛物线的对称轴的同一侧时，需先利用抛物线的对称性将点转化到对称轴的同一侧，再利用函数的增减性或点在抛物线上的大致位置来比较函数值的大小.

荣德基
微信公众号
教辅资料站

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

拔尖角度 3 利用分割法求二次函数图象中的面积问题

例 6 如图 26.2−4，已知 $y=-2x+3$ 的图象与 $y=x^2$ 的图象交于 A，B 两点，且与 x 轴、y 轴分别交于 D，C 两点，O 为坐标原点.

（1）求点 A，B 的坐标；

（2）求 $S_{\triangle AOB}$.

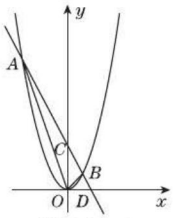


图 26.2−4

解题秘方：用分割法求面积.

解：（1）依题意，可列方程组 $\begin{cases}y=-2x+3,\\y=x^2.\end{cases}$

解得 $\begin{cases}x_1=-3,\\y_1=9\end{cases}$ $\begin{cases}x_2=1,\\y_2=1.\end{cases}$ $\therefore A(-3,9)$，$B(1,1)$.

（2）直线 $y=-2x+3$ 与 y 轴的交点 C 的坐标为 $(0,3)$，

$\therefore S_{\triangle AOB}=S_{\triangle AOC}+S_{\triangle BOC}=\frac{1}{2}\times3\times3+\frac{1}{2}\times3\times1=6.$

方法技巧：求斜置于平面直角坐标系中的三角形的面积时，一般可用分割法将其转化为一边在坐标轴上的两个三角形的面积的和或差来求解. 当三角形的一边在坐标轴上时，这条边的长度容易求得，这条边上的高为第三个顶点的横坐标或纵坐标的绝对值.

挑战·高分

另解

（2）也可以采用作差法求面积. 直线 $y=-2x+3$ 与 x 轴的交点 D 的坐标为 $\left(\frac{3}{2},0\right)$，

$\therefore S_{\triangle AOB}=S_{\triangle AOD}-S_{\triangle BOD}=\frac{1}{2}\times\frac{3}{2}\times9-\frac{1}{2}\times\frac{3}{2}\times1=6.$

拔尖角度 4 利用建模法解抛物线型实际应用问题

例 7 有一条抛物线形状的隧道，隧道的最大高度为 6m，跨度为 8m，把它放在如图 26.2−5 的平面直角坐标系中（1 个单位表示 1m）.

（1）求这条抛物线的表达式；

（2）若要在隧道壁上点 P 处安装一盏照明灯，灯离地面的高度为 4.5m，求照明灯与点 B 的距离.

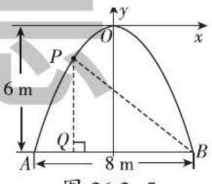


图 26.2−5

解题秘方：根据抛物线在坐标系中的位置建立二次函数模型，求出抛物线的表达式，然后结合图象求照明灯与点 B 的距离.

解：（1）由题意，设抛物线的表达式为 $y=ax^2$.

$\because$ 点 $A(-4,-6)$ 在抛物线上，$\therefore a\cdot(-4)^2=-6.$

解得 $a=-\frac{3}{8}$. 故抛物线的表达式为 $y=-\frac{3}{8}x^2$.

（2）过点 P 作 $PQ\perp AB$ 于点 Q，连结 PB，如图 26.2−5，则 $PQ=4.5$m.

$\therefore$ 点 P 的纵坐标为 -1.5. 将 $y=-1.5$ 代入 $y=-\frac{3}{8}x^2$，得 $x=\pm2$.

$\because$ 点 P 在第三象限，$\therefore$ 点 P 的坐标为 $(-2,-1.5)$.

$\therefore BQ=6$m，$\therefore PB=\sqrt{PQ^2+BQ^2}=\sqrt{4.5^2+6^2}=7.5$（m）.

答：照明灯与点 B 的距离为 7.5m.

挑战·高分

解题策略

一般地，求二次函数 $y=ax^2$ 的表达式时，只需已知一个点（坐标原点除外）的坐标即可，本题中点 A 和点 B 关于 y 轴对称，将点 A 或点 B 的坐标代入表达式所得方程相同，故任选一点坐标代入即可.

警示误区

未考虑坐标轴的位置，容易误将点 P 的纵坐标看作 -4.5 进行计算.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

点中考·拨模拟 得满分

中考探秘 二次函数 $y=ax^2$ 的图象是历年中考的常考点，涉及二次函数的图象和性质，抛物线 $y=ax^2$ 的开口方向、顶点坐标、增减性等性质在中考中常有体现，题目为中、低档题，有些中考压轴题也会涉及，预计在以后几年的考题中仍会出现.

三年中考兵法

考法 1 利用二次函数的图象和性质辨析相关函数的性质

例 8 [中考·玉林]抛物线 $y=\frac{1}{2}x^2$，$y=x^2$，$y=-x^2$ 的共同性质是：

①都是开口向上；　②都以点（0，0）为顶点；

③都以 y 轴为对称轴；　④都关于 x 轴对称.

其中正确的有（　　）

A. 1 个　　B. 2 个　　C. 3 个　　D. 4 个

试题评析：本题考查了二次函数的图象与性质；熟记抛物线的开口方向、对称轴、顶点坐标是解决问题的关键.

解：抛物线 $y=\frac{1}{2}x^2$，$y=x^2$ 的开口向上，抛物线 $y=-x^2$ 的开口向下，①错误；抛物线 $y=\frac{1}{2}x^2$，$y=x^2$，$y=-x^2$ 的顶点都为（0，0），对称轴都为 y 轴，②③正确；④错误. 故选 B.

答案：B

考法 2 利用二次函数的图象解与几何图形的交点坐标

例 9 [中考·淄博]如图 26.2-6，Rt △ OAB 的顶点 A（-2，4）在抛物线 $y=ax^2$ 上，将 Rt △ OAB 绕点 O 顺时针旋转 90°，得到 △ OCD，边 CD 与该抛物线交于点 P，则点 P 的坐标为（　　）

A. （$\sqrt{2}$，$\sqrt{2}$） B. （2，2）　C. （$\sqrt{2}$，2）　D. （2，$\sqrt{2}$）

试题评析：本题考查了二次函数的综合知识，解题时首先求得抛物线的表达式，然后再求得点 P 的纵坐标，将点 P 的纵坐标代入函数的表达式求解即可.

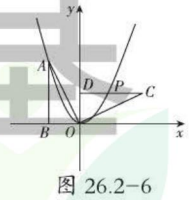


图 26.2-6

解：∵ Rt △ OAB 的顶点 A（-2，4）在抛物线 $y=ax^2$ 上，∴ $4=a\times(-2)^2$. 解得 $a=1$. ∴抛物线的表达式为 $y=x^2$.

∵ Rt △ OAB 的顶点 A 的坐标为（-2，4），∴ $OB=2$.

∵ Rt △ OAB 绕点 O 顺时针旋转 90°，得到△ OCD，

∴ $CD\parallel x$ 轴，$OD=OB=2$. ∴点 D 和点 P 的纵坐标均为 2.

在 $y=x^2$ 中，令 $y=2$，得 $2=x^2$，解得 $x=\pm\sqrt{2}$.

∵点 P 在第一象限，∴点 P 的坐标为（$\sqrt{2}$，2）.

答案：C

冲刺·满分

解题通法

解二次函数 $y=ax^2$ 的图象问题时，一般应从分析图象的形状及位置、开口大小及方向、顶点坐标、对称轴等入手.

解二次函数 $y=ax^2$ 的增减性问题时，一般应分析函数的最大（小）值、增（减）区间等.

解题策略

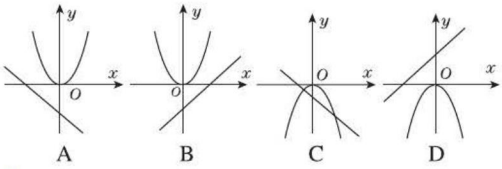
解答二次函数的图象与几何图形的综合题要抓住以下几点：

1. 读懂抛物线与几何图形，找出有用信息.
2. 将抛物线看作几何图形的组成部分进行解答.
3. 由几何图形中的结论，回归到抛物线上点的坐标时，要注意带上符号.

荣德基 微信公众号 教辅资料站

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

1. 二次函数 $y=ax^2$ 与一次函数 $y=ax+a$ 在同一坐标系中的大致图象为（　　）



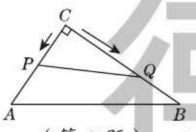
A　　B　　C　　D

2. 已知 $a<-1$，点 $(a-1, y_1)$，(a, y_2)，$(a+1, y_3)$ 都在函数 $y=-x^2$ 的图象上，则（　　）

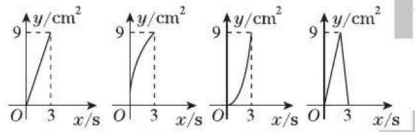
A. $y_1<y_2<y_3$　　B. $y_1<y_3<y_2$

C. $y_3<y_2<y_1$　　D. $y_2<y_1<y_3$

3. [中考·黔西南州]如图，在 Rt△ABC 中，$\angle C=90°$，$AC=4$ cm，$BC=6$ cm，动点 P 从点 C 沿 CA 以 1 cm/s 的速度向 A 点运动，同时动点 Q 从点 C 沿 CB 以 2 cm/s 的速度向 B 点运动，其中一个动点到达终点时，另一个动点也停止运动，则运动过程中所构成的△CPQ 的面积 y（cm^2）与运动时间 x（s）之间的函数图象大致是（　　）

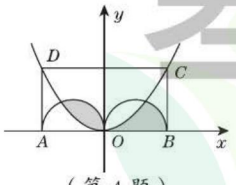


（第 3 题）



A　　B　　C　　D

4. 如图，矩形 $ABCD$ 的长 $AB=4$ cm，宽 $AD=2$ cm，O 是 AB 的中点，以 O 为顶点的抛物线经过 C，D 两点，以 OA，OB 为直径在矩形内画两个半圆，则图中阴影部分的面积为_____.



（第 4 题）

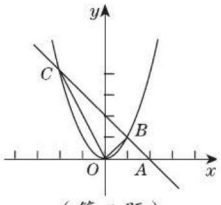
5. 如图，直线 AB 过 x 轴上一点 $A(2, 0)$，且与抛物线 $y=ax^2$ 相交于 B，C 两点，B 点坐标为 $(1, 1)$，

（1）求直线 AB 的表达式及抛物线 $y=ax^2$ 的表达式；

（2）求点 C 的坐标；

（3）求 $S_{\triangle OBC}$；

（4）若抛物线上有一点 D（在第一象限内），使得 $S_{\triangle AOD}=S_{\triangle COB}$，求点 D 的坐标.



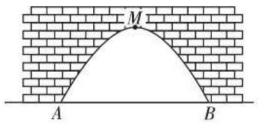
（第 5 题）

6. 如图是抛物线形拱桥，水面在 AB 时，拱顶 M 离水面 4m，水面宽为 8m.

（1）若以 M 为坐标原点建立平面直角坐标系，求出抛物线的表达式；

（2）若水位上升 1m，水面宽度减少多少？（结果保留根号）

【导学号：8603511】



（第 6 题）

荣德基
微信公众号
教辅资料站

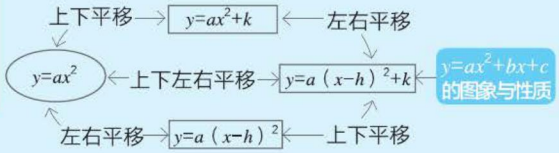
关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

26.2.2 二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图象与性质

核心知识

- $y=ax^2+k$ 的图象与性质
- $y=a(x-h)^2$ 的图象与性质
- $y=a(x-h)^2+k$ 的图象与性质
- $y=ax^2+bx+c$ 的图象与性质

知识链接



点知识·拨考向 速提分

点知识 ▸ 1 二次函数 $y=ax^2+k$ 的图象与性质

1. 二次函数 $y=ax^2+k$ 的图象与二次函数 $y=ax^2$ 的图象的关系：

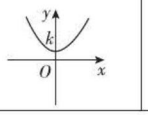
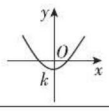
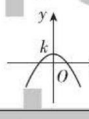
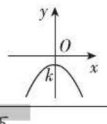
它们的开口大小、方向相同，只是上、下位置不同，二次函数 $y=ax^2+k$ 的图象可由二次函数 $y=ax^2$ 的图象上下平移 $|k|$ 个单位得到.

2. 二次函数 $y=ax^2+k$ 的图象的画法：

（1）**描点法**：类比作二次函数 $y=ax^2$ 的图象的方法按列表→描点→连线的程序作图.

（2）**平移法**：将二次函数 $y=ax^2$ 的图象，向上（$k>0$）或向下（$k<0$）平移 $|k|$ 个单位，即可得二次函数 $y=ax^2+k$ 的图象.

3. 二次函数 $y=ax^2+k$ 的图象与性质：

a，k 的符号	$y=ax^2+k$（$a>0$）		$y=ax^2+k$（$a<0$）	
	$k>0$	$k<0$	$k>0$	$k<0$
图象				
开口方向	向上		向下	
对称轴	y 轴			
顶点坐标	$(0,k)$			
增减性	当 $x<0$ 时，函数值 y 随 x 的增大而减小；当 $x>0$ 时，函数值 y 随 x 的增大而增大		当 $x<0$ 时，函数值 y 随 x 的增大而增大；当 $x>0$ 时，函数值 y 随 x 的增大而减小	
最值	当 $x=0$ 时，$y_{最小值}=k$，无最大值		当 $x=0$ 时，$y_{最大值}=k$，无最小值	

拔考向 ▸ 利用二次函数 $y=ax^2+k$ 的图象与性质解相关应用问题

例 1 画出函数 $y=-x^2+1$ 与 $y=-x^2-1$ 的图象，并根据图象回答下列问题.

（1）抛物线 $y=-x^2+1$ 经过怎样的平移才能得到抛物线 $y=-x^2-1$？

（2）对于函数 $y=-x^2+1$，其图象与 x 轴的公共点坐标是_____；对称轴是_____；顶点坐标是_____.

（3）对于函数 $y=-x^2-1$，当 $x<0$ 时，函数值 y 随 x 的增大而_____，当 $x=0$ 时，y 有最_____值，为_____.

提分·必记

要点提醒

a 决定抛物线的开口方向和开口大小，所以 $y=ax^2(a\neq0)$ 与 $y=ax^2+k(a\neq0)$ 的图象开口方向和开口大小相同，只是位置不同.

平移规律口诀

上加下减，纵变横不变，“上加下减”表示抛物线的位置上下平移规律，即：抛物线 $y=ax^2+k$ 是由抛物线 $y=ax^2$ 平移 $|k|$ 个单位得到的，“上加”表示当 k 为正数时，向上平移；“下减”表示当 k 为负数时，向下平移；

“纵变横不变”表示坐标的平移规律，即：抛物线平移时其对应点的坐标纵坐标改变而横坐标不变.

提分·秘诀

方法 1

从抛物线 $y=-x^2$ 作平移：

抛物线 $y=-x^2+1$ 是由抛物线 $y=-x^2$ 向上平移 1 个单位得到的，抛物线

禁德堂 微信公众号 教辅资料站

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

解题秘方：紧扣抛物线 $y=ax^2+k$ 与抛物线 $y=ax^2$ 间的关系及平移规律解答.

解：先列表如下：

x	…	−3	−2	−1	0	1	2	3	…
$y=-x^2+1$	…	−8	−3	0	1	0	−3	−8	…
$y=-x^2-1$	…	−10	−5	−2	−1	−2	−5	−10	…

然后描点、连线，画出这两个函数的图象.

如图 26.2−7.

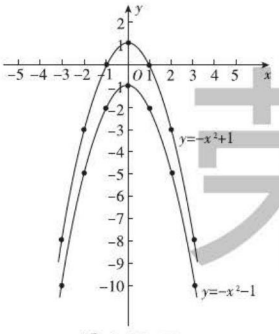


图 26.2−7

（1）由图象可以看出，抛物线 $y=-x^2+1$ 向下平移 2 个单位得到抛物线 $y=-x^2-1$.

（2）（−1，0），（1，0）；y 轴；（0，1）

（3）增大；大；−1

$y=-x^2-1$ 是由抛物线 $y=-x^2$ 向下平移 1 个单位得到的；因此抛物线 $y=-x^2-1$ 是由抛物线 $y=-x^2+1$ 向下平移 2 个单位得到的.

方法 2

从对应点作中介平移：

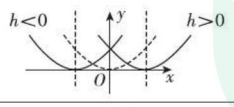
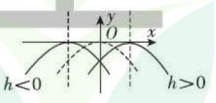
观察图 26.2−7 中的两条抛物线，抛物线 $y=-x^2+1$ 的顶点是 (0，1)，抛物线 $y=-x^2-1$ 的顶点是 (0，−1)，因为顶点向下平移了 2 个单位，所以将抛物线 $y=-x^2+1$ 向下平移 2 个单位可得到抛物线 $y=-x^2-1$.

点知识 ▸ 2 二次函数 $y=a(x-h)^2$ 的图象与性质

1. 二次函数 $y=a(x-h)^2$ 的图象与二次函数 $y=ax^2$ 的图象的关系：

它们的开口大小、方向相同，只是左、右位置不同，二次函数 $y=a(x-h)^2$ 的图象可由二次函数 $y=ax^2$ 的图象左右平移 $|h|$ 个单位得到.

2. 二次函数 $y=a(x-h)^2$ 的图象与性质：

函数	$y=a(x-h)^2$ $(a>0)$	$y=a(x-h)^2$ $(a<0)$
图象		
开口方向	向上	向下
对称轴	直线 $x=h$	
顶点坐标	$(h, 0)$	
顶点位置	当 $h>0$ 时，顶点在 y 轴的右侧（即 x 轴的正半轴上）； 当 $h<0$ 时，顶点在 y 轴的左侧（即 x 轴的负半轴上）	
增减性	当 $x>h$ 时，y 随 x 的增大而增大； 当 $x<h$ 时，y 随 x 的增大而减小	当 $x<h$ 时，y 随 x 的增大而增大； 当 $x>h$ 时，y 随 x 的增大而减小
最值	当 $x=h$ 时，$y_{最小值}=0$	当 $x=h$ 时，$y_{最大值}=0$

提分·必记

方法点拨

平移规律：左加右减，横变纵不变.

1. “左加”表示当 $h<0$ 时，函数 $y=a(x-h)^2$ 可变形为 $y=a(x+|h|)^2$，其图象可以由函数 $y=ax^2$ 的图象向左平移 $|h|$ 个单位得到.
2. “右减”表示当 $h>0$ 时，函数 $y=a(x-h)^2$ 的图象可以由函数 $y=ax^2$ 的图象向右平移 h 个单位得到.
3. “横变纵不变”表示坐标的平移规律，即抛物线平移时对应点的横坐标改变而纵坐标不变.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

拔考向▶利用二次函数 $y=a(x-h)^2$ 的图象与性质解决相关问题

例 2 已知二次函数 $y=-\frac{1}{2}(x-2)^2$.

（1）写出它的图象的开口方向、对称轴、顶点坐标和最值.

（2）抛物线 $y=-\frac{1}{2}(x-2)^2$ 可以由抛物线 $y=-\frac{1}{2}x^2$ 怎样平移得到?

（3）若 $3\leqslant x\leqslant 10$，则当 x 取何值时，y 取最大值，最大值是多少?

（4）若点 $A(x_1,\ y_1)$，$B(x_2,\ y_2)$ 在该二次函数的图象上，且 $x_1<x_2<2$，试比较 y_1 与 y_2 的大小.

解题秘方：紧扣二次函数 $y=a(x-h)^2$ 的图象与性质解决问题.

解：（1）开口向下，对称轴为直线 $x=2$，顶点坐标为（2，0），

当 $x=2$ 时，$y_{最大值}=0$.

（2）抛物线 $y=-\frac{1}{2}(x-2)^2$ 可以由抛物线 $y=-\frac{1}{2}x^2$ 向右平移 2 个单位得到.

（3）∵抛物线开口向下，对称轴为直线 $x=2$，∴当 $x>2$ 时，y 随 x 的增大而减小.

∵ $3\leqslant x\leqslant 10$，∴当 $x=3$ 时，y 取最大值，$y_{最大值}=-\frac{1}{2}\times(3-2)^2=-\frac{1}{2}$.

（4）∵抛物线开口向下，对称轴为直线 $x=2$，∴当 $x<2$ 时，y 随 x 的增大而增大.

∵ $x_1<x_2<2$，∴ $y_1<y_2$.

提分·秘诀

方法点拨

- 在自变量有取值范围时求函数的最值时，要做两步：先观察对应的函数图象在对称轴的哪一侧，再根据增减性求最值；
- 比较函数图象上两个点纵坐标的大小，也要分两步：先观察两个点在对称轴的哪一侧，再根据增减性比较纵坐标的大小.

点知识▶3 二次函数 $y=a(x-h)^2+k$ 的图象与性质

1. 二次函数 $y=a(x-h)^2+k$ 的图象与二次函数 $y=ax^2$ 的图象的关系：

它们的开口大小、方向相同，只是位置不同；二次函数 $y=a(x-h)^2+k$ 的图象可由二次函数 $y=ax^2$ 的图象平移得到，即先将二次函数 $y=ax^2$ 的图象左右平移 $|h|$ 个单位得到二次函数 $y=a(x-h)^2$ 的图象，再将二次函数 $y=a(x-h)^2$ 的图象上下平移 $|k|$ 个单位得到二次函数 $y=a(x-h)^2+k$ 的图象.

2. 二次函数 $y=a(x-h)^2+k$ 的图象与性质：

函数	$y=a(x-h)^2+k\ (a>0)$	$y=a(x-h)^2+k\ (a<0)$
图象	$h>0,\ k>0$　$h<0,\ k>0$ $h<0,\ k<0$　$h>0,\ k<0$	$h>0,\ k>0$　$h<0,\ k>0$ $h<0,\ k<0$　$h>0,\ k<0$

提分·必记

特别解读

- 从 $y=a(x-h)^2+k\ (a\neq 0)$ 中可以直接看出抛物线的顶点坐标，所以通常把它称为二次函数的顶点式，顶点坐标是 $(h,\ k)$.
- 对二次项系数相同的二次函数，可以根据两抛物线的顶点位置来判断平移的方式. 例如，抛物线 $y=(x+3)^2+2$ 的顶点是 $(-3,\ 2)$，可以看成是把 $y=x^2$ 的图象先向左平移 3 个单位，再向上平移 2 个单位得到的.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

续表

函数	$y=a(x-h)^2+k$ $(a>0)$	$y=a(x-h)^2+k$ $(a<0)$
开口方向	向上	向下
对称轴	直线 $x=h$	
顶点位置	当 $h>0$，$k>0$ 时，顶点在第一象限；当 $h<0$，$k>0$ 时，顶点在第二象限；当 $h<0$，$k<0$ 时，顶点在第三象限；当 $h>0$，$k<0$ 时，顶点在第四象限	
增减性	在对称轴的左侧，y 随 x 的增大而减小；在对称轴的右侧，y 随 x 的增大而增大	在对称轴的左侧，y 随 x 的增大而增大；在对称轴的右侧，y 随 x 的增大而减小
最值	当 $x=h$ 时，$y_{最小值}=k$	当 $x=h$ 时，$y_{最大值}=k$

核心考向▶利用二次函数 $y=a(x-h)^2+k$ 的图象与性质解相关应用问题

类型 1：利用二次函数 $y=a(x-h)^2+k$ 的图象与性质进行辨析

例 3 对于抛物线 $y=-(x+1)^2+3$，下列结论：

① 抛物线的开口向下；

② 对称轴为直线 $x=1$；

③ 顶点坐标为 $(-1,3)$；

④ 当 $x>1$ 时，y 随 x 的增大而减小．

其中正确结论有（　　）

A. 1 个　　B. 2 个　　C. 3 个　　D. 4 个

解题秘方：紧扣二次函数 $y=a(x-h)^2+k$ 的图象和性质逐一判断．

解：①∵ $a=-1<0$，

∴抛物线的开口向下，正确；

②对称轴为直线 $x=-1$，错误；

③顶点坐标为 $(-1,3)$，正确；

④当 $x>1$ 时，y 随 x 的增大而减小，正确．

综上所述，正确结论是①③④，共 3 个，故选 C.

答案：C

类型 2：利用函数的增减性确定待定字母的取值范围

例 4 若二次函数 $y=(x-m)^2-1$，当 $x\leqslant 1$ 时，y 随 x 的增大而减小，则 m 的取值范围是（　　）

A. $m=1$　　B. $m>1$　　C. $m\geqslant 1$　　D. $m\leqslant 1$

解题秘方：紧扣二次函数的增减性求解．

解：二次函数 $y=(x-m)^2-1$ 的图象开口向上，对称轴为直线 $x=m$，故在对称轴的左侧，即当 $x\leqslant m$ 时，y 随 x 的增大而减小．又因为当 $x\leqslant 1$ 时，y 随 x 的增大而减小，所以直线 $x=1$ 应在对称轴 $x=m$ 的左侧或与对称轴重合，故 $m\geqslant 1$，故选 C.

答案：C

提分·秘诀

解题策略

解答抛物线 $y=a(x-h)^2+k$ 的开口方向、对称轴、顶点坐标、最值、增减性规律等问题，首先必须弄清顶点式 $y=a(x-h)^2+k$ 中 a、h、k 与开口方向、对称轴、顶点坐标、最值间的关系，比较题中给出的相关数据与 a、h、k 间的关系，再结合相关知识按题目要求解答．

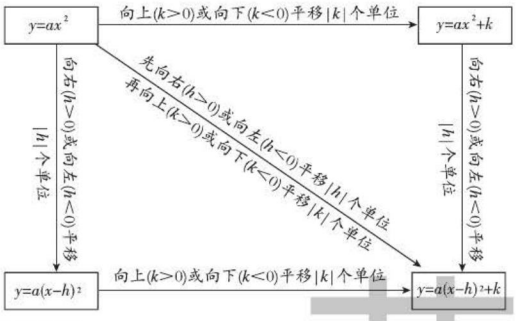
警示误区

逆向考查二次函数的增减性时，自变量的取值范围决定对称轴的位置，而不是决定对称轴．

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

点知识▶ 4 二次函数 $y=ax^2$，$y=ax^2+k$，$y=a(x-h)^2$，$y=a(x-h)^2+k$ 之间的关系

1. 位置关系



2. 图象和性质关系

函数		$y=a(x-h)^2+k$	$y=a(x-h)^2$	$y=ax^2+k$	$y=ax^2$
相同点	形状	图象都是抛物线，形状相同，开口方向相同			
	对称性	图象都是轴对称图形			
	增减性	$a>0$ 时，开口向上，在对称轴左侧，y 随 x 的增大而减小，在对称轴右侧，y 随 x 的增大而增大；$a<0$ 时，开口向下，在对称轴左侧，y 随 x 的增大而增大，在对称轴右侧，y 随 x 的增大而减小			
不同点	顶点	(h, k)	$(h, 0)$	$(0, k)$	$(0, 0)$
	对称轴	直线 $x=h$		y 轴	

拔考向▶ 利用特殊形式二次函数图象间的关系解相关应用问题

例 5 已知抛物线 $y=a(x-h)^2+k$ 是由抛物线 $y=-\frac{1}{2}x^2$ 向上平移 2 个单位，再向右平移 1 个单位得到的.

（1）求出 a，h，k 的值；

（2）在同一直角坐标系中，画出 $y=a(x-h)^2+k$ 与 $y=-\frac{1}{2}x^2$ 的图象；

（3）观察 $y=a(x-h)^2+k$ 的图象，当 x_____时，y 随 x 的增大而增大；当 x_____时，函数有最_____值，最_____值是_____；

（4）观察 $y=a(x-h)^2+k$ 的图象，你能说出对于一切 x 的值，函数 y 的取值范围吗？

解题秘方：紧扣特殊形式的二次函数图象间的关系进行解答.

解：（1）∵抛物线 $y=-\frac{1}{2}x^2$ 向上平移 2 个单位，再向右平移 1 个单

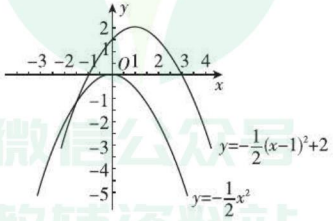


图 26.2-8

提分·必记

特别解读

- 抛物线 $y=ax^2$，$y=ax^2+k$，$y=a(x-h)^2$，$y=a(x-h)^2+k$ 中 a 值相等，所以这四条抛物线的形状、开口方向完全一样，故它们之间可互相平移得到.
- 抛物线的平移规律是“左加右减，上加下减”，所不同的是，左右平移时，只针对常数 h 进行变化，而上下平移时，只针对常数 k 进行变化，可简记为：左加右减自变量，上加下减常数项.

提分·秘诀

特别解读

二次函数 $y=a(x-h)^2+k$ 的图象与二次函数 $y=ax^2$ 的图象的平移关系：既可以先上下平移再左右平移，也可以先左右平移再上下平移.

解题技巧

1. “左加右减自变量，上加下减常数项”，抛物线左右平移时，只有常数 h 发生变化；上下平移时，只有常数 k 发生变化，反之，根据 h 的值可以确定左右平移的方向和距离；根据 k 的值可以确定上下平移的方向和距离.

禁止复制 微信公众号 教辅资料站

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

位后得到的抛物线是 $y=-\frac{1}{2}(x-1)^2+2$，

$\therefore a=-\frac{1}{2}$，$h=1$，$k=2$.

（2）函数 $y=-\frac{1}{2}(x-1)^2+2$ 与 $y=-\frac{1}{2}x^2$ 的图象如图 26.2-8.

（3）<1；=1；大；大；2

（4）由图象知，对于一切 x 的值，总有 $y\leqslant 2$.

2. 画二次函数 $y=a(x-h)^2+k$（$a\neq 0$）的图象的关键是先确定顶点坐标，再列表取值，也可以不列表，但要将 x，y 的对应值在图象中标出来.

点知识 5 二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 与二次函数 $y=a(x-h)^2+k$ 之间的关系

1. 二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 与二次函数 $y=a(x-h)^2+k$ 的互化.

$h=-\frac{b}{2a}$，$k=\frac{4ac-b^2}{4a}$，即 $y=ax^2+bx+c=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a}$.

提分·必记

配方过程

$y=ax^2+bx+c$

$=a\left(x^2+\frac{b}{a}x\right)+c$

$=a\left[x^2+\frac{b}{a}x+\left(\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{b}{2a}\right)^2\right]+c$

$=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2}{4a^2}\right]+c$

$=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2}{4a}+c$

$=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a}$.

2. 二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图象的画法.

方法一：描点法，画二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图象的步骤：

（1）把二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 化成 $y=a(x-h)^2+k$ 的形式；

（2）确定抛物线的开口方向、对称轴和顶点坐标；

（3）在对称轴两侧，以顶点为中心，左右对称描点并用光滑曲线顺次连结.

方法二：平移法，画二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图象的步骤：

（1）把二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 化成 $y=a(x-h)^2+k$ 的形式，确定其顶点坐标为 (h,k)；

（2）作出二次函数 $y=ax^2$ 的图象；

（3）将二次函数 $y=ax^2$ 的图象平移，使其顶点平移到 (h,k).

3. 拓展： 对于二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图象上的两点 $P_1(x_1,y_1)$，$P_2(x_2,y_2)$，若 $P_1(x_1,y_1)$ 和 $P_2(x_2,y_2)$ 关于直线 $x=-\frac{b}{2a}$ 对称，则 $y_1=y_2$，$\frac{x_1+x_2}{2}=-\frac{b}{2a}$.

技考向 利用一般式与顶点式的关系解题

例 6 对于抛物线 $y=x^2-4x+3$.

（1）将抛物线的表达式化为顶点式.

（2）在坐标系中利用五点法画出此抛物线.

提分·秘诀

解法提醒

“五点”包括顶点，以及关于对称轴对称的两对点.

解题秘方： 先用配方法将一般式转化为顶点式，再进行解答.

解：（1）$\because y=x^2-4x+3=(x^2-4x+4)-4+3=(x-2)^2-1$，

$\therefore$ 抛物线的顶点式为 $y=(x-2)^2-1$.

来德基
微信公众号 教辅资料站

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

（2）列表：

x	…	0	1	2	3	4	…
y	…	3	0	−1	0	3	…

函数图象如图 26.2−9.

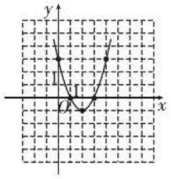


图 26.2−9

画图通法：若二次函数图象与 x 轴和 y 轴有交点，则最好选取交点进行描点，特别是在画二次函数的大致图象时，应注意以下五点：（1）开口方向；（2）对称轴；（3）顶点；（4）与 x 轴的交点；（5）与 y 轴的交点．这种画法先研究函数图象的特点，确定图象的大致形状后，选点就有了依据，避免了盲目性．

特别解读

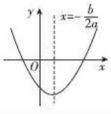
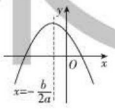
化一般式为顶点式也可用公式求，即

$h=-\frac{b}{2a}=-\frac{-4}{2\times1}=2$,

$k=\frac{4ac-b^2}{4a}=\frac{4\times1\times3-(-4)^2}{4\times1}=-1$,

∴抛物线的顶点式为 $y=(x-2)^2-1$.

点知识▸ 6 二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图象与性质

函数	$y=ax^2+bx+c$（a，b，c 是常数，$a\neq0$）	
	$a>0$	$a<0$
图象		
开口方向	向上	向下
对称轴	直线 $x=-\frac{b}{2a}$	
顶点坐标	$\left(-\frac{b}{2a},\frac{4ac-b^2}{4a}\right)$	
增减性	当 $x<-\frac{b}{2a}$ 时，y 随 x 的增大而减小；当 $x>-\frac{b}{2a}$ 时，y 随 x 的增大而增大	当 $x<-\frac{b}{2a}$ 时，y 随 x 的增大而增大；当 $x>-\frac{b}{2a}$ 时，y 随 x 的增大而减小
最值	当 $x=-\frac{b}{2a}$ 时，$y_{最小值}=\frac{4ac-b^2}{4a}$	当 $x=-\frac{b}{2a}$ 时，$y_{最大值}=\frac{4ac-b^2}{4a}$

提分·必记

活学巧记

曲线名叫抛物线，
线轴交点是顶点，
顶点纵标是最值，
如果要画抛物线，
描点平移两条路．
提取配方定顶点，
平移描点皆成图．
列表描点后连线，
五点大致定全图．
若要平移也不难，
先画基础抛物线，
顶点移到新位置，
开口大小都不变．

拔考向▸ 利用二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图象与性质说明函数图象的特征

类型 1：二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图象和性质在解读函数图象特征中的应用

例 7 已知抛物线 $y=2x^2-4x-6$.

（1）直接写出抛物线的开口方向、对称轴、顶点坐标；

（2）求抛物线与 x 轴的交点坐标、与 y 轴的交点坐标；

（3）当 x 取何值时，y 随 x 的增大而增大？

解题秘方：（2）类比一次函数的方法，求图象与 x 轴的交点坐标令 $y=0$，再解方程，求图象与 y 轴的交点坐标令 $x=0$，再求值．

提分·秘诀

方法总结

若不画图象直接说出函数图象的特征，则必须根据函数图象的特征与二次函数表达式中系数之间的关系来确定．对于抛物线 $y=ax^2+bx+c$，其中 a 决定开口方向，c 为抛物线与 y 轴交点的纵坐标．对

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

解：（1）开口向上，对称轴为直线 $x=1$，顶点坐标为（1，−8）.

（2）令 $y=0$，得 $2x^2-4x-6=0$. 解得 $x_1=-1$，$x_2=3$.

∴抛物线与 x 轴的交点坐标为（−1，0），（3，0）.

令 $x=0$，得 $y=-6$.

∴抛物线与 y 轴的交点坐标为（0，−6）.

（3）当 $x\geqslant 1$ 时，y 随 x 的增大而增大.



称轴和顶点坐标可直接根据公式 $x=-\frac{b}{2a}$，$\left(-\frac{b}{2a},\frac{4ac-b^2}{4a}\right)$ 来确定.

类型 2：二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的性质在比较函数值大小中的应用

例 8 ［中考·兰州］点 $P_1(-1,y_1)$，$P_2(3,y_2)$，$P_3(5,y_3)$ 均在二次函数 $y=-x^2+2x+c$ 的图象上，则 y_1，y_2，y_3 的大小关系是（　　）

A. $y_3>y_2>y_1$　　B. $y_3>y_1=y_2$

C. $y_1>y_2>y_3$　　D. $y_1=y_2>y_3$

解题秘方：解本题的关键是利用二次函数图象的对称性将对称轴两侧的函数值大小比较问题转化为同侧的函数值大小比较问题.

解：∵ $y=-x^2+2x+c=-(x-1)^2+1+c$，

∴该抛物线的对称轴为直线 $x=1$，且开口向下，$P_2(3,y_2)$，$P_3(5,y_3)$ 在对称轴的右侧.

∵在对称轴右侧，y 随 x 的增大而减小，$3<5$，∴ $y_2>y_3$.

根据二次函数图象的对称性可知，$P_1(-1,y_1)$ 与 $P_2(3,y_2)$ 关于抛物线的对称轴对称，故 $y_1=y_2>y_3$.

答案：D

解法提醒

比较抛物线上两点对应的函数值大小的方法：

如果两点在对称轴的同侧，可以利用二次函数的增减性比较大小；

如果两点在对称轴的两侧，则可以利用二次函数的对称性将对称轴两侧的函数值大小比较问题转化为同侧的函数值大小比较问题；

如果无法确定这两点是否在对称轴的同侧，可以把两点的坐标代入函数表达式中，用作差法比较大小.

点知识 7 二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图象特征与 a，b，c 的符号关系

二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 中，a 的符号决定抛物线的开口方向，ab 的符号决定抛物线对称轴的大致位置，c 的符号决定抛物线与 y 轴交点的大致位置，b^2-4ac 的符号决定抛物线与 x 轴的交点情况. 具体如下表：

	字母的符号	图象的特征
a	$a>0$	开口向上
	$a<0$	开口向下
$-\frac{b}{2a}$	$b=0$	对称轴为 y 轴
	$ab>0$（a，b 同号）	对称轴在 y 轴左侧
	$ab<0$（a，b 异号）	对称轴在 y 轴右侧
c	$c=0$	图象过原点
	$c>0$	图象与 y 轴正半轴相交
	$c<0$	图象与 y 轴负半轴相交
b^2-4ac	$b^2-4ac=0$	图象与 x 轴有唯一一个交点
	$b^2-4ac>0$	图象与 x 轴有两个交点
	$b^2-4ac<0$	图象与 x 轴没有交点

提分·必记

收藏夹

对于二次函数 $y=ax^2+bx+c$，

当 $x=1$ 时，$y=a+b+c$，此时，

若 $y=0$，则 $a+b+c=0$；

若 $y>0$，则 $a+b+c>0$；

若 $y<0$，则 $a+b+c<0$.

当 $x=-1$ 时，$y=a-b+c$，此时，

若 $y=0$，则 $a-b+c=0$；

若 $y>0$，则 $a-b+c>0$；

若 $y<0$，则 $a-b+c<0$.

基德

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

考向▶利用二次函数的图象确定代数式的符号

例 9 已知二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图象如图 26.2−10，有下列结论：① $a+b+c<0$；② $a-b+c>0$；③ $abc>0$；④ $b=2a$，其中正确的结论有（　　）

A. 4 个　　B. 3 个

C. 2 个　　D. 1 个

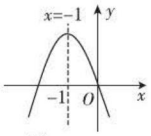


图 26.2−10

解题秘方：根据二次函数的图象特征与字母系数之间的关系判断.

解：当 $x=1$ 时，对应的函数值 $y=a+b+c$，观察图象可知此时 $y<0$，即 $a+b+c<0$，故①正确；

当 $x=-1$ 时，对应的函数值 $y>0$，即 $a-b+c>0$，故②正确；

观察图象知抛物线过原点，

$\therefore c=0$，故 $abc=0$，故③错误；

∵此抛物线的对称轴是直线 $x=-1$，$\therefore -\dfrac{b}{2a}=-1$，

$\therefore b=2a$，故④正确.

答案：B

提分·秘诀

详解

当 x=1 时，对应的函数值 $y=ax^2+bx+c=a+b+c$，观察图象可知此时抛物线上对应的点在 x 轴下方，说明此时的函数值 $y<0$，即 $a+b+c<0$.

特别提醒

因为抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 的对称轴是直线 $x=-\dfrac{b}{2a}$，所以判断 a，b 之间的关系时，往往需要根据抛物线的对称轴的位置来判断.

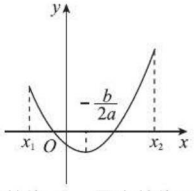
知识▶8 二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的最值

二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 最值的求解方法：

（1）公式法，即当 $x=-\dfrac{b}{2a}$ 时，$y_{最值}=\dfrac{4ac-b^2}{4a}$；

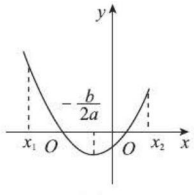
（2）配方法，即把二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 配方成 $y=a(x-h)^2+k$ 的形式，则当 $x=h$ 时，$y_{最值}=k$.

应注意这两种情况都是指自变量 x 的取值范围是全体实数，若自变量 x 的取值范围不是全体实数，而是 $x_1\leqslant x\leqslant x_2$ 时，则要根据 $-\dfrac{b}{2a}$ 与 x_1，x_2 的关系及函数的增减性来讨论其最值. 令 $x=x_1$ 时，$y=y_1$；$x=x_2$ 时，$y=y_2$；$x=-\dfrac{b}{2a}$ 时，$y_0=\dfrac{4ac-b^2}{4a}$，则二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的最值情况（部分）如图 26.2−11 所示：



最大值为 y_2，最小值为 y_0

①



最大值为 y_1，最小值为 y_0

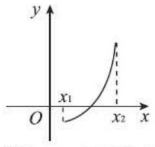
②

提分·必记

特别提醒

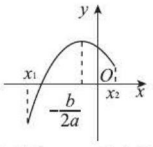
二次函数取最值主要分两大类：第一大类是自变量取任意实数时，直接用顶点坐标确定最值；第二大类是自变量有取值范围时，看顶点的横坐标是否在自变量的取值范围之内. 若在，用顶点坐标确定最值；若不在，利用增减性确定最值.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料



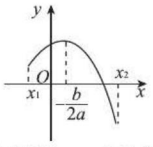
最大值为 y_2，最小值为 y_1

③



最大值为 y_0，最小值为 y_1

④



最大值为 y_0，最小值为 y_2

⑤

图 26.2-11

核心考向▶利用二次函数的最值解决实际问题

例 10 如图 26.2-12，某小区准备用篱笆围成一块矩形花圃 $ABCD$，为了节省篱笆，一边利用足够长的墙，另外三边用篱笆围着，再用两段篱笆 EF 与 GH 将矩形 $ABCD$ 分割成①②③三块矩形区域，而且这三块矩形区域的面积相等. 现有总长 80 米的篱笆，当围成的花圃 $ABCD$ 的面积最大时，AB 长_____米.

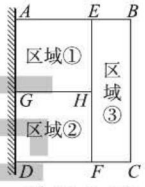


图 26.2-12

解题秘方：先建立二次函数模型，再结合自变量的取值范围以及函数的增减性求最值.

解：∵三块矩形区域的面积相等，∴ $S_{矩形AEFD}=2S_{矩形BCFE}$，∴ $AE=2BE$.

设矩形 $ABCD$ 的面积为 y 平方米，$BC=x$ 米，$BE=a$ 米，则 $AE=2a$ 米，

∴ $8a+2x=80$，∴ $a=-\frac{1}{4}x+10$，∴ $AB=3a=\left(-\frac{3}{4}x+30\right)$ 米，

∴ $y=\left(-\frac{3}{4}x+30\right)x=-\frac{3}{4}x^2+30x$.

∵ $a=-\frac{1}{4}x+10>0$，∴ $x<40$，则 $y=-\frac{3}{4}x^2+30x=-\frac{3}{4}(x-20)^2+300$ $(0<x<40)$，

∴当 $x=20$ 时，y 有最大值，此时 $a=-\frac{1}{4}\times20+10=5$，故 $AB=15$ 米.

答案：15

提分·秘诀

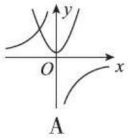
方法点拨

利用二次函数的最值解决问题有三步：第一步建立二次函数模型；第二步求自变量的取值范围；第三步利用求最值的方法解决问题.

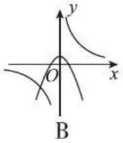
点方法·拨技巧 提高分

拔尖角度▶1 利用排除法解决图象共存问题

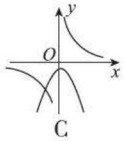
例 11 函数 $y=\frac{k}{x}$ 与 $y=-kx^2+k$ $(k\neq0)$ 在同一坐标系中的图象可能是图 26.2-13 中的（　　）



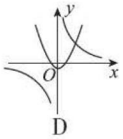
A



B



C



D

图 26.2-13

挑战·高分

技巧点拨

在同一坐标系中确定两个函数的图象，一般先根据较简单的函数的图象确定字母的取值范围，然后确定另一个函数的图象，再验证题中所给的图象是否符合要求.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

解题秘方：可根据反比例函数图象所在的位置分为两类：①$k>0$；②$k<0$，然后逐一加以排除.

解：选项A中，由双曲线的两支分别位于第二、四象限，可得$k<0$，则$-k>0$，所以抛物线应开口向上，且与y轴的交点在y轴的负半轴上.选项A中抛物线与y轴的交点在y轴的正半轴上，故选项A错误；

选项B，C，D中，由双曲线的两支分别位于第一、三象限，可得$k>0$，则$-k<0$，所以抛物线应开口向下，且与y轴的交点在y轴的正半轴上.选项B中的图象符合题意，选项C，D中的图象均不符合题意，故选项B正确.

答案：B

拔尖角度▸ 2 利用待定系数法解决抛物线的对称变换问题

挑战·高分

例12 在平面直角坐标系中，先将抛物线$y=2x^2+x-3$关于x轴作轴对称变换，再将所得的抛物线关于y轴作轴对称变换，最后将所得的抛物线关于原点作中心对称变换.求经过三次变换后，所得的新抛物线的函数关系式.

详解

对称变换是全等变换，关键是看开口方向及顶点坐标：

关于x轴对称的图象开口方向相反，顶点坐标横同纵反.

关于y轴对称的图象开口方向相同，顶点坐标横反纵同.

关于原点对称的图象开口方向相反，顶点坐标横反纵反.

解题秘方：将抛物线的关系式写成顶点式.紧扣开口方向及顶点坐标的变化规律写出变换后的函数关系式.

解：将抛物线$y=2x^2+x-3$写成顶点式为$y=2\left(x+\frac{1}{4}\right)^2-\frac{25}{8}$.

第一次关于x轴对称的抛物线的函数关系式为$y=-2\left(x+\frac{1}{4}\right)^2+\frac{25}{8}=-2x^2-x+3$，

第二次关于y轴对称的抛物线的函数关系式为$y=-2\left(x-\frac{1}{4}\right)^2+\frac{25}{8}=-2x^2+x+3$，

第三次关于原点中心对称的抛物线的函数关系式为$y=2\left(x+\frac{1}{4}\right)^2-\frac{25}{8}=2x^2+x-3$.

故所得的新抛物线的函数关系式为$y=2x^2+x-3$.

方法点拨：求解抛物线的对称变换问题的方法

解决抛物线的对称变换问题主要依据以下规律：（1）关于x轴对称的抛物线所对应的函数关系式中，二次项、一次项系数及常数项互为相反数；（2）关于y轴对称的抛物线所对应的函数关系式中，二次项系数及常数项相同，一次项系数互为相反数；（3）关于原点中心对称的抛物线所对应的函数关系式中，一次项系数相同，二次项系数及常数项互为相反数.

拔尖角度▸ 3 利用函数思想求几何图形中的最值问题

挑战·高分

例13 [中考·潍坊]如图26.2-14，工人师傅用一块长为10 dm，宽为6 dm的矩形铁皮制作一个无盖的长方体容器，需要将四角各裁掉一个正方形.（厚度不计）

解法提醒

求满足什么条件时几何图形（几何体）有最大面

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

（1）在图中画出裁剪示意图，用实线表示裁剪线，虚线表示折痕；并求长方体容器底面面积为 12 dm^2 时，裁掉的正方形边长多大？

（2）若要求制作的长方体容器的底面长不大于底面宽的五倍，并将容器进行防锈处理，侧面每平方分米的费用为 0.5 元，底面每平方分米的费用为 2 元，裁掉的正方形边长多大时，总费用最低，最低为多少？

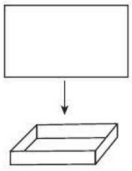


图 26.2−14

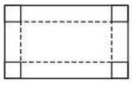


图 26.2−15

解题秘方：紧扣长方形面积与边长的关系列式解答．

解：（1）裁剪示意图如图 26.2−15.

设裁掉的正方形的边长为 x dm，由题意可得 $(10-2x)(6-2x)=12$，

即 $x^2-8x+12=0$，解得 $x=2$ 或 $x=6$（舍去）．

答：当长方体容器底面面积为 12 dm^2 时，裁掉的正方形的边长为 2 dm.

（2）∵长方体容器的底面长不大于底面宽的五倍，

∴ $10-2x \leqslant 5(6-2x)$，解得 $x \leqslant 2.5$，∴ $0<x \leqslant 2.5$.

设总费用为 w 元，由题意可知 $w=0.5\times 2x(16-4x)+2(10-2x)(6-2x)=4x^2-48x+120=4(x-6)^2-24$，

∵抛物线的对称轴为直线 $x=6$，开口向上，

∴当 $0<x \leqslant 2.5$ 时，w 随 x 的增大而减小．

∴当 $x=2.5$ 时，w 有最小值，最小值为 25.

答：当裁掉的正方形边长为 2.5 dm 时，总费用最低，最低为 25 元．

积（最大体积）的问题，往往可转化成求二次函数的最值问题，需要借助几何图形面积公式、体积公式及相关性质，建立变量之间的二次函数关系，利用二次函数的性质求最值．

警示误区

本例不要误认为当 $x=6$ 时，$w=-24$ 是实际问题的最小值，因为 $x=6$ 不在实际问题的自变量的取值范围内，所以只能根据函数的增减性来求最值．

拔尖角度 4 利用作图法求二次函数图象上的点的存在性问题

挑战·高分

例 14 如图 26.2−16，已知抛物线与 x 轴交于 $A(-1,0)$，$B(3,0)$ 两点，与 y 轴交于 $C(0,3)$．

（1）求抛物线的表达式．

（2）设抛物线的顶点为 D，在其对称轴的右侧的抛物线上是否存在点 P，使得 $\triangle PDC$ 是等腰三角形？若存在，求出符合条件的点 P 的坐标；若不存在，请说明理由．

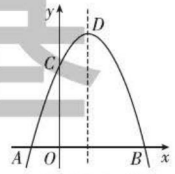


图 26.2−16

提醒

点 A,B 是抛物线与 x 轴的交点，可设交点式解题．

解题秘方：用作图法以 CD 为边作等腰三角形，再结合图象求点 P 的坐标．

解：（1）∵抛物线与 x 轴交于 $A(-1,0)$，$B(3,0)$ 两点，

∴设抛物线的表达式为 $y=a(x+1)(x-3)$．

∵抛物线与 y 轴交于点 $C(0,3)$，

∴ $a(0+1)(0-3)=3$. ∴ $a=-1$.

∴抛物线的表达式为 $y=-(x+1)(x-3)=-x^2+2x+3$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

（2）存在．由 $y=-x^2+2x+3$ 得，点 D 的坐标为（1，4），对称轴为直线 $x=1$，①若 $PC=PD$，设点 P 的坐标为（m，n），

根据勾股定理，得 $m^2+(3-n)^2=(m-1)^2+(4-n)^2$，即 $n=4-m$.

又点 P（m，n）在抛物线上，

$\therefore 4-m=-m^2+2m+3$，

即 $m^2-3m+1=0$，解得 $m=\dfrac{3\pm\sqrt{5}}{2}$.

$\because \dfrac{3-\sqrt{5}}{2}<1$，$\therefore m=\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$.

$\therefore n=4-m=\dfrac{5-\sqrt{5}}{2}$，即点 P 的坐标为 $\left(\dfrac{3+\sqrt{5}}{2},\ \dfrac{5-\sqrt{5}}{2}\right)$.

②若 $DC=DP$，$\because$ 点 P 在对称轴右侧的抛物线上，$\therefore$ 由抛物线的对称性知，点 P 与点 C 关于直线 $x=1$ 对称，此时点 P 的坐标为（2，3）.

③若 $CD=CP$，由图象知此种情况不存在.

$\therefore$ 符合条件的点 P 的坐标为 $\left(\dfrac{3+\sqrt{5}}{2},\ \dfrac{5-\sqrt{5}}{2}\right)$ 或（2，3）.

特别提醒

- 对于是否存在的探究问题，一般先假设存在，在存在的前提下求出结论，则说明存在，否则说明不存在.
- 第(2)问中没有明确哪两条线段是等腰三角形的腰，还需分类讨论，即分 PC=PD，DC=DP，CD=CP 三种情况，防止漏解.

点中考·拨模拟 得满分

中考探秘

本节学习了二次函数 $y=ax^2+k$，$y=a(x-h)^2$，$y=a(x-h)^2+k$，$y=ax^2+bx+c$ 的图象与性质，在中考中单独考查开口方向、顶点坐标、对称轴、增减性等方面的知识较少，多以选择题、填空题的形式出现，较少出现解答题，而且题目多以中、低档试题为主.

三年中考兵法

冲刺·满分

考法1 利用二次函数最大值的性质求字母系数的值

例15 [中考·潍坊]已知二次函数 $y=-(x-h)^2$（h 为常数），当自变量 x 的值满足 $2\leqslant x\leqslant 5$ 时，与其对应的函数值 y 的最大值为 -1，则 h 的值为（　　）

A. 3 或 6　　B. 1 或 6　　C. 1 或 3　　D. 4 或 6

试题评析：本题考查了二次函数的最值以及二次函数的性质，分 $h<2$、$2\leqslant h\leqslant 5$ 和 $h>5$ 三种情况求出 h 的值是解题的关键.

解：如图 26.2-17，当 $h<2$ 时，有 $-(2-h)^2=-1$，

解得 $h_1=1$，$h_2=3$（舍去）；

当 $2\leqslant h\leqslant 5$ 时，$y=-(x-h)^2$ 的最大值为 0，不符合题意；

当 $h>5$ 时，有 $-(5-h)^2=-1$，解得 $h_3=4$（舍去），$h_4=6$.

综上所述，h 的值为 1 或 6.

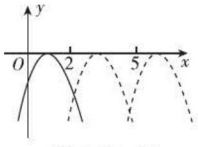


图 26.2-17

答案：B

思路点拨

分 $h<2$、$2\leqslant h\leqslant 5$ 和 $h>5$ 三种情况考虑：

当 $h<2$ 时，根据二次函数的性质可得出关于 h 的一元二次方程，解之即可得出结论；

当 $2\leqslant h\leqslant 5$ 时，函数的最大值为 0，与题意不符，可得出该情况不存在；

当 $h>5$ 时，根据二次函数的性质可得出关于 h 的一元二次方程，解之即可得出结论，综上即可得出结论.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

考法 2 利用特殊二次函数的性质求最值

例 16 [中考·泸州]已知抛物线 $y=\frac{1}{4}x^2+1$ 具有如下性质：该抛物线上任意一点到定点 $F(0,2)$ 的距离与到 x 轴的距离始终相等，如图 26.2−18，点 M 的坐标为 $(\sqrt{3},3)$，P 是抛物线 $y=\frac{1}{4}x^2+1$ 上一个动点，则△ PMF 周长的最小值是（　　）

A. 3　　B. 4　　C. 5　　D. 6

试题评析：本题考查了二次函数的性质、垂线段最短、三角形三边关系，根据垂线段最短确定点 P 的位置是解题的关键.

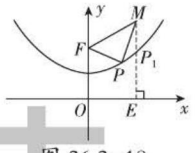


图 26.2−18

解：如图 26.2−18，过点 M 作 $ME\perp x$ 轴于点 E，交抛物线 $y=\frac{1}{4}x^2+1$ 于点 P_1，当 P 与 P_1 重合时△ PMF 的周长最小，且最小值是 $ME+FM$. ∵ $F(0,2)$，$M(\sqrt{3},3)$，∴ $ME=3$，$FM=\sqrt{(\sqrt{3}-0)^2+(3-2)^2}=2$，∴△ PMF 周长的最小值 $=ME+FM=3+2=5$.

答案：C

详解

在抛物线上任取一点 P'（不同于点 P_1），连结 $P'F$、$P'M$，过 P' 作 $P'E'\perp x$ 轴于 E'，连结 ME'，由已知得 $P'E'=P'F$，∴△ $P'MF$ 的周长 $=P'F+P'M+FM=P'E'+P'M+FM$，又△ P_1MF 的周长 $=ME+FM$，$P'M+P'E'>ME'$（两边之和大于第三边），$ME'>ME$（垂线段最短），∴△ $P'MF$ 的周长 > △ P_1MF 的周长.

考法 3 利用二次函数的图象作等腰三角形

例 17 [中考·桂林]已知直线 $y=-\sqrt{3}x+3$ 与坐标轴分别交于点 A，B，点 P 在抛物线 $y=-\frac{1}{3}(x-\sqrt{3})^2+4$ 上，能使△ ABP 为等腰三角形的点 P 有（　　）

A. 3 个　　B. 4 个　　C. 5 个　　D. 6 个

试题评析：本题考查了二次函数的图象与坐标轴的交点坐标、等腰三角形的性质、一次函数的图象与坐标轴的交点坐标以及等边三角形的判定定理，解题的关键是依照题意画出图形，利用数形结合思想来解决问题，本题属于中档题，难度不小，本题不需要求出点 P 的坐标，但在寻找点 P 的过程中会出现多次点的重合问题，由此给解题带来了难度.

解：以点 B 为圆心，线段 AB 长为半径作圆，与抛物线的另外三个交点为 C、M、N，连结 AC、BC，如图 26.2−19.

令一次函数 $y=-\sqrt{3}x+3$ 中 $x=0$，则 $y=3$.

∴点 A 的坐标为 $(0,3)$.

令一次函数 $y=-\sqrt{3}x+3$ 中 $y=0$，

则 $-\sqrt{3}x+3=0$，解得 $x=\sqrt{3}$.

∴点 B 的坐标为 $(\sqrt{3},0)$.

∴ $AB=2\sqrt{3}$.

∵抛物线的对称轴为直线 $x=\sqrt{3}$，

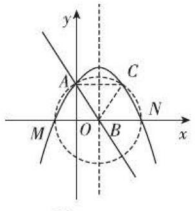


图 26.2−19

思路点拨

以点 B 为圆心，线段 AB 长为半径作圆，交抛物线于点 C、M、N，连结 AC、BC，由直线 $y=-\sqrt{3}x+3$ 可求出点 A、B 的坐标，结合抛物线的表达式可得出△ ABC 为等边三角形，再令抛物线表达式中 $y=0$ 求出抛物线与 x 轴的两交点的坐标，也易求得所作圆与 x 轴的两交点坐标，从而得出 M，N 的坐标，结合图形分三种情况研究△ ABP 为等腰三角形，由此即可得出结论.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

∴点 C 的坐标为 $(2\sqrt{3}, 3)$，所作的圆与 x 轴的交点为 $(-\sqrt{3}, 0)$、$(3\sqrt{3}, 0)$.

∴ $AC=2\sqrt{3}=AB=BC$,

∴△ ABC 为等边三角形.

令 $y=-\frac{1}{3}(x-\sqrt{3})^2+4$ 中 $y=0$，则 $-\frac{1}{3}(x-\sqrt{3})^2+4=0$,

解得 $x=-\sqrt{3}$，或 $x=3\sqrt{3}$.

∴抛物线与 x 轴的交点为 $(-\sqrt{3}, 0)$，$(3\sqrt{3}, 0)$.

∴点 M 的坐标为 $(-\sqrt{3}, 0)$，点 N 的坐标为 $(3\sqrt{3}, 0)$.

△ ABP 为等腰三角形分三种情况：

（1）当 $AB=BP$ 时，以 B 点为圆心，AB 长为半径作圆，与抛物线交于 C、M、N 三点（A 点除外）；

（2）当 $AB=AP$ 时，以 A 点为圆心，AB 长为半径作圆，与抛物线交于 C、M 两点；

（3）当 $AP=BP$ 时，作线段 AB 的垂直平分线，与抛物线交于 C、M 两点.

∴能使△ ABP 为等腰三角形的点 P 有 3 个. 故选 A.

答案：A

警示误区

本题易忽视点的重合而出现重复计数的错误，克服出错的方法有两种：

- 准确作图.
- 求出各点的坐标.

两年模拟兵法 ☞答案见 186 页

1. [中考·长沙]抛物线 $y=2(x-3)^2+4$ 的顶点坐标是（　　）

A.（3，4）　　B.（−3，4）

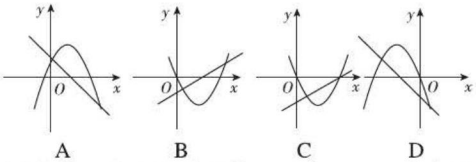
C.（3，−4）　　D.（2，4）

2. [中考·山西]将抛物线 $y=(x-2)^2-8$ 向左平移 3 个单位长度，再向上平移 5 个单位长度，得到抛物线的表达式为（　　）

A. $y=(x+1)^2-13$　　B. $y=(x-5)^2-3$

C. $y=(x-5)^2-13$　　D. $y=(x+1)^2-3$

3. [模拟·太原]一次函数 $y=ax+b$ 和二次函数 $y=ax^2+bx$ 在同一平面直角坐标系中的图象可能是（　　）



A　　B　　C　　D

4. [中考·临沂]二次函数 $y=ax^2+bx+c$，自变量 x 与函数 y 的对应值如表：

x	…	−5	−4	−3	−2	−1	0	…
y	…	4	0	−2	−2	0	4	…

下列说法正确的是（　　）

A. 抛物线的开口向下

B. 当 $x>-3$ 时，y 随 x 的增大而增大

C. 二次函数的最小值是 −2

D. 抛物线的对称轴是直线 $x=-\frac{5}{2}$

5. [中考·安顺]二次函数 $y=ax^2+bx+c$（$a\neq 0$）的图象如图，给出下列四个结论：

① $4ac-b^2<0$;

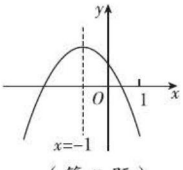
② $3b+2c<0$;

③ $4a+c<2b$;

④ $m(am+b)+b<a$（$m\neq -1$），其中结论正确的个数是（　　）

A. 1　　B. 2

C. 3　　D. 4



（第 5 题）

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

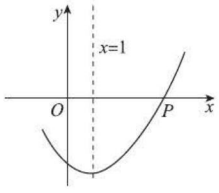
6. [中考·泸州]已知二次函数 $y=ax^2+2ax+3a^2+3$（其中 x 是自变量），当 $x\geqslant 2$ 时，y 随 x 的增大而增大，且 $-2\leqslant x\leqslant 1$ 时，y 的最大值为 9，则 a 的值为（　　）

A.1 或 −2　　B. $-\sqrt{2}$ 或 $\sqrt{2}$

C. $\sqrt{2}$　　D.1

7. 已知函数 $y=-(x-1)^2$ 的图象上两点 $A(2,\ y_1)$，$B(a,\ y_2)$，其中 $a>2$，则 y_1 与 y_2 的大小关系是 y_1_____y_2（填“<”“>”或“=”）.

8. [中考·兰州]如图，若抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 上的 $P(4,\ 0)$，Q 两点关于它的对称轴 $x=1$ 对称，则 Q 点的坐标为_____.



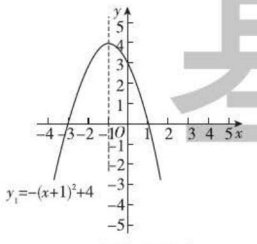
（第 8 题）

9. [模拟·杭州](1) 已知二次函数 $y_1=-(x+1)^2+4$ 的图象如图，请在同一坐标系中画出二次函数 $y_2=-(x-2)^2+1$ 的图象.

(2) 平行于 x 轴的直线 $y=k$ 在抛物线 $y_2=-(x-2)^2+1$ 上截得的线段 $AB=4$，求抛物线 $y_2=-(x-2)^2+1$ 的顶点到线段 AB 的距离.

(3) 当 $-1<x<2$ 时，利用函数图象比较 y_1 与 y_2 的大小.

【导学号：8603511】



（第 9 题）

10. 已知关于 x 的函数 $y=kx^2+(2k-1)x-2$（k 为常数）.

(1) 试说明：不论 k 取何值，此函数图象一定经过点（−2，0）；

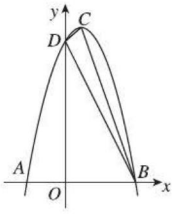
(2) 当 $x>0$ 时，若要使 y 随 x 的增大而减小，求 k 的取值范围；

(3) 试问该函数是否存在最小值 −3？若存在，请求出此时 k 的值，若不存在，请说明理由.

11. 如图，抛物线与 x 轴交于 $A(-2,\ 0)$，$B(4,\ 0)$ 两点，且顶点 C 的纵坐标为 9.

(1) 求抛物线的表达式；

(2) 设此抛物线与 y 轴的交点为 D，求 $S_{\triangle BCD}$.



（第 11 题）

荣德基

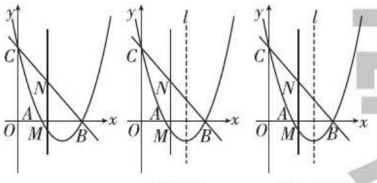
关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

12. [中考·漳州]如图，抛物线 $y=x^2+bx+c$ 与 x 轴交于点 A 和点 $B(3,0)$，与 y 轴交于点 $C(0,3)$.

（1）求抛物线的表达式；

（2）若点 M 是抛物线在 x 轴下方上的动点，过点 M 作 $MN \parallel y$ 轴交直线 BC 于点 N，求线段 MN 的最大值；

（3）在（2）的条件下，当 MN 取得最大值时，在抛物线的对称轴 l 上是否存在点 P，使 $\triangle PBN$ 是等腰三角形？若存在，请直接写出所有点 P 的坐标；若不存在，请说明理由.



备用图1　备用图2

（第 12 题）

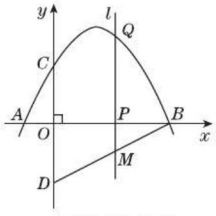
13. [中考·黄冈]如图，抛物线 $y=-\frac{1}{2}x^2+\frac{3}{2}x+2$ 与 x 轴交于点 A、点 B，与 y 轴交于点 C，点 D 与点 C 关于 x 轴对称，点 P 是 x 轴上一个动点. 设点 P 的坐标为（m，0），过点 P 作 x 轴的垂线 l 交抛物线于点 Q.

（1）求点 A、点 B、点 C 的坐标；

（2）求直线 BD 的表达式；

（3）当点 P 在线段 OB 上运动时，直线 l 交 BD 于点 M，试探究 m 为何值时，四边形 $CQMD$ 是平行四边形；

（4）在点 P 的运动过程中，是否存在点 Q，使 $\triangle BDQ$ 是以 BD 为直角边的直角三角形？若存在，求出点 Q 的坐标；若不存在，请说明理由.



（第 13 题）

荣德基

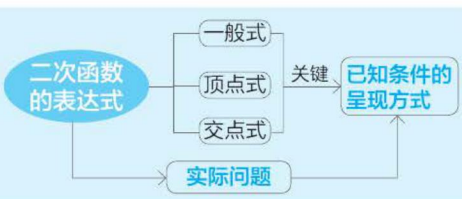
关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

26.2.3 求二次函数的表达式

核心知识

- 用待定系数法求二次函数的表达式
- 二次函数的简单应用

知识链接



点知识·拨考向 速提分

点知识 1 用待定系数法求二次函数的表达式

1. 常见的二次函数表达式的适用条件：

（1）一般式 $y=ax^2+bx+c$（a，b，c 为常数，$a\neq 0$），已知抛物线上三点的坐标时，设此二次函数的表达式为 $y=ax^2+bx+c$；

（2）顶点式 $y=a(x-h)^2+k$（a，h，k 为常数，$a\neq 0$），当已知抛物线的顶点坐标或对称轴或最大（小）值时，可设此二次函数的表达式为 $y=a(x-h)^2+k$；

（3）交点式 $y=a(x-x_1)(x-x_2)$（a，x_1，x_2 为常数，$a\neq 0$），当已知抛物线与 x 轴的两个交点（x_1，0），（x_2，0）时，可设此二次函数的表达式为 $y=a(x-x_1)(x-x_2)$.

2. 用待定系数法求二次函数表达式的步骤：

（1）**设**：根据题中已知条件，合理设出二次函数的表达式，如 $y=ax^2+bx+c$ 或 $y=a(x-h)^2+k$ 或 $y=a(x-x_1)(x-x_2)$，其中 $a\neq 0$；

（2）**代**：把已知点的坐标代入所设的二次函数表达式中，得到关于表达式中待定系数的方程（组）；

（3）**解**：解此方程或方程组，求出待定系数的值；

（4）**还原**：将求出的待定系数还原到表达式中，求得表达式.

提分·必记

技巧提醒

特殊位置抛物线的表达式的求法技巧：

1. 顶点在原点，可设为 $y=ax^2$；
2. 对称轴是 y 轴（或顶点在 y 轴上），可设为 $y=ax^2+k$；
3. 顶点在 x 轴上，可设为 $y=a(x-h)^2$；
4. 抛物线过原点，可设为 $y=ax^2+bx$.



拔考向 利用待定系数法求二次函数的表达式

类型 1：一般式在求二次函数表达式中的应用

例 1 如图 26.2-20，抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 经过 $A(-1,0)$，$B(0,-3)$，$C(3,0)$ 三点.

（1）求该抛物线对应的函数表达式；

（2）若该抛物线的顶点为 D，求 $\sin\angle BOD$ 的值.

解题秘方：紧扣利用待定系数法求二次函数的表达式的步骤，设出一般式解决问题.

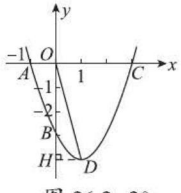


图 26.2-20

提分·秘诀

解法提醒

用待定系数法求二次函数表达式的两个关键：一是代，将已知点的坐标代入函数表达式中；二是解，解三元一次方程组.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

解：（1）∵抛物线经过 $A(-1,0)$，$B(0,-3)$，$C(3,0)$ 三点，

∴将 A，B，C 三点的坐标代入 $y=ax^2+bx+c$ 中，得

$$\begin{cases} a-b+c=0, \\ c=-3, \\ 9a+3b+c=0. \end{cases} \text{解得} \begin{cases} a=1, \\ b=-2, \\ c=-3. \end{cases}$$

∴该抛物线对应的函数表达式为 $y=x^2-2x-3$.

（2）∵ $y=x^2-2x-3=(x-1)^2-4$，

∴抛物线的顶点坐标为（1，−4）.

如图 26.2−20，过点 D 作 $DH \perp y$ 轴于点 H.

在 Rt△ODH 中，∵ $DH=1$，$OH=4$，

∴由勾股定理，得 $OD=\sqrt{1^2+4^2}=\sqrt{17}$.

∴ $\sin\angle BOD=\dfrac{DH}{OD}=\dfrac{1}{\sqrt{17}}=\dfrac{\sqrt{17}}{17}$.

方法总结

求三角函数值必须构造直角三角形，在平面直角坐标系中，一般向坐标轴作垂线段来构造直角三角形.

类型 2：顶点式在求二次函数表达式中的应用

例 2 已知一个二次函数的图象的顶点坐标为（−2，3），且图象与 y 轴的交点在 y 轴正方向上距原点 4 个单位处，求这个二次函数的表达式.

解题秘方：紧扣已知的顶点坐标用待定系数法设出顶点式，求出函数的表达式.

解：由于此二次函数图象的顶点坐标为（−2，3），所以可设其函数的表达式为 $y=a[x-(-2)]^2+3$，即 $y=a(x+2)^2+3$.

由题意可知，函数图象经过（0，4）点，将坐标代入 $y=a(x+2)^2+3$ 中，得 $4=a(0+2)^2+3$.

所以 $a=\dfrac{1}{4}$，将 $a=\dfrac{1}{4}$ 代入 $y=a(x+2)^2+3$ 中，得 $y=\dfrac{1}{4}x^2+x+4$.

故这个二次函数的表达式为 $y=\dfrac{1}{4}x^2+x+4$.

解法提醒

已知抛物线的顶点坐标，尽量将其表达式设为顶点式，这样会使计算变得简单.

类型 3：交点式在求二次函数表达式中的应用

例 3 已知抛物线与 x 轴的交点是 $A(-2,0)$，$B(1,0)$，且抛物线经过点 $C(2,8)$. 求该抛物线对应的函数表达式.

解题秘方：紧扣交点式的函数表达式以及需要的条件，利用待定系数法求函数表达式.

解：∵抛物线与 x 轴的交点是 $A(-2,0)$，$B(1,0)$，

∴可设抛物线对应的函数表达式为 $y=a(x+2)(x-1)$.

又∵抛物线经过点 $C(2,8)$，∴把点 C 的坐标代入 $y=a(x+2)(x-1)$ 中，得 $8=a(2+2)\times(2-1)$，∴ $a=2$.

∴抛物线对应的函数表达式为 $y=2(x+2)(x-1)$，即 $y=2x^2+2x-4$.

解法提醒

当已知抛物线与 x 轴的两交点的坐标时，可将抛物线的表达式设为交点式，再把另一点的坐标代入求出待定系数的值即可.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

知识▶ 2 二次函数的简单应用

根据实际问题求二次函数表达式的步骤：

（1）先通过已知条件确定抛物线所经过的点的坐标；

（2）根据题意设出合适的二次函数表达式；

（3）用待定系数法和方程思想求出待定系数的值，从而确定二次函数的表达式.

考向▶ 利用待定系数法求函数表达式解决实际问题

例 4 一施工队对某隧道进行美化施工，已知隧道的横截面为抛物线的一部分，其最大高度为 7 米，底部宽度 OE 为 14 米，如图 26.2-21 所示，以点 O 为原点，OE 所在直线为 x 轴建立平面直角坐标系.

（1）写出顶点 M 的坐标并求出抛物线的函数表达式；

（2）施工队计划在隧道门口搭建一个矩形“脚手架” $ABCD$，使 C，D 两点在抛物线上，A，B 两点在地面 OE 上，设 OA 为 x 米，“脚手架”的三根木杆 AD，DC，CB 的长度之和为 l 米，当 x 为何值时，l 最大，最大值是多少？

解题秘方：先用待定系数法求出函数表达式，再利用表达式表示出有关点的坐标和所求量，进而求出函数的最值.

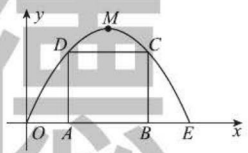


图 26.2-21

解：（1）由题意，得点 M 的坐标为（7，7），点 E 的坐标为（14，0）.

设抛物线的函数表达式为 $y=ax^2+bx$，

则 $\begin{cases}49a+7b=7,\\196a+14b=0,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=-\dfrac{1}{7},\\b=2.\end{cases}$

故抛物线的函数表达式为 $y=-\dfrac{1}{7}x^2+2x$.

（2）由题知 $A(x,0)$，则 $B(14-x,0)$，

$C\left(14-x,-\dfrac{1}{7}x^2+2x\right)$，$D\left(x,-\dfrac{1}{7}x^2+2x\right)$.

$\therefore l=AD+DC+CB=\left(-\dfrac{1}{7}x^2+2x\right)+(14-2x)+\left(-\dfrac{1}{7}x^2+2x\right)=-\dfrac{2}{7}x^2+2x+14=-\dfrac{2}{7}\left(x-\dfrac{7}{2}\right)^2+\dfrac{35}{2}$.

$\because -\dfrac{2}{7}<0$，

$\therefore$ 当 $x=\dfrac{7}{2}$ 时，l 有最大值，最大值为 $\dfrac{35}{2}$.

提分·必记

特别提醒

利用二次函数解决实际问题时，要灵活利用二次函数的性质，另外还要注意自变量的取值范围.

提分·秘诀

技巧点拨

本题(2)问求解的关键是先分别求出AD，DC，CB的长度表达式，再求和.

详解

$\because$ 点A，D的横坐标为x，点D在抛物线上，

$\therefore$ 点D的纵坐标为 $-\dfrac{1}{7}x^2+2x$，

$\therefore AD=BC=-\dfrac{1}{7}x^2+2x$.

由抛物线的对称性，得 $OA=BE=x$，$\therefore AB=CD=14-2x$.

基德莱

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

点方法·拨技巧 提高分

拔尖角度 1 用待定系数法求二次函数的表达式

挑战·高分

例5 已知一个二次函数的图象经过 $A(-1,0)$，$B(3,0)$，$C(4,-5)$ 三点，求这个二次函数的表达式.

解题秘方：将点的坐标代入所设表达式，通过解方程（组）求出待定系数的值.

解：**方法一** （设一般式）设所求二次函数的表达式为 $y=ax^2+bx+c$，把点 $A(-1,0)$，$B(3,0)$，$C(4,-5)$ 的坐标分别代入，得

$$\begin{cases} a-b+c=0, \\ 9a+3b+c=0, \\ 16a+4b+c=-5, \end{cases} \text{解得} \begin{cases} a=-1, \\ b=2, \\ c=3. \end{cases}$$

$\therefore$ 二次函数的表达式为 $y=-x^2+2x+3$.

方法二 （设交点式）设所求二次函数的表达式为 $y=a(x-x_1)(x-x_2)$，

$\because$ 二次函数的图象与 x 轴的两个交点为 $A(-1,0)$，$B(3,0)$，

$\therefore x_1=-1$，$x_2=3$.

$\therefore$ 所求二次函数的表达式为 $y=a(x+1)(x-3)$.

又其图象经过点 $C(4,-5)$，

$\therefore -5=a\times5\times1$，$\therefore a=-1$.

$\therefore$ 二次函数的表达式为 $y=-(x+1)(x-3)$，即 $y=-x^2+2x+3$.

方法三 （设顶点式）$\because$ 二次函数的图象与 x 轴的两个交点为 $A(-1,0)$，$B(3,0)$，

$\therefore$ 二次函数的图象的对称轴为直线 $x=1$.

设所求二次函数的表达式为 $y=a(x-1)^2+k$，

把点 $A(-1,0)$，$C(4,-5)$ 的坐标分别代入，得

$$\begin{cases} 4a+k=0, \\ 9a+k=-5, \end{cases} \text{解得} \begin{cases} a=-1, \\ k=4. \end{cases}$$

$\therefore$ 二次函数的表达式为 $y=-(x-1)^2+4$，即 $y=-x^2+2x+3$.

详解

$\begin{cases} a-b+c=0 & ①, \\ 9a+3b+c=0 & ②, \\ 16a+4b+c=-5 & ③, \end{cases}$

②−①，得 $8a+4b=0$，

即 $2a+b=0$ ④，

③−②，得 $7a+b=-5$ ⑤，

⑤−④，得 $5a=-5$，

解得 $a=-1$.

把 $a=-1$ 代入④，得 $b=2$.

把 $a=-1$，$b=2$ 代入①，得 $c=3$.

技巧点拨

求二次函数的表达式时，应根据具体问题灵活选用最简便的方法. **一般设顶点式或交点式，计算过程会更简便一些**，所以在涉及顶点坐标或图象与 x 轴的交点坐标时，优先选择设顶点式或交点式.

拔尖角度 2 利用平移法解涉及二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 与二次函数 $y=a(x-h)^2+k$ 的关系问题

挑战·高分

例6 将抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 向右平移 3 个单位，再向下平移 2 个单位，得到抛物线 $y=x^2+2x+3$，求 a，b，c 的值.

解题秘方：用逆向思维，把从未知抛物线平移到已知抛物线转化为从已知抛物线平移到未知抛物线求解.

解：$y=x^2+2x+3=(x+1)^2+2$，

特别提醒

一般式也可以不化成顶点式，仍然按"左加右减自变量，上加下减常数项"原则进行平移；只要熟记左加右减在所有的 x 上加减，上加下减在

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

∵把抛物线 $y=(x+1)^2+2$ 向左平移 3 个单位，再向上平移 2 个单位得到抛物线 $y=(x+4)^2+4$.

$\therefore y=ax^2+bx+c=(x+4)^2+4=x^2+8x+20$. $\therefore a=1$，$b=8$，$c=20$.

技巧点拨：逆平移法

把从未知抛物线平移到已知抛物线，转化为从已知抛物线平移到未知抛物线的方法称为逆平移法，其方法的本质就是将平移的方向改变为原方向的相反方向，如本例逆过来就变为抛物线 $y=x^2+2x+3$ 向上平移 2 个单位，再向左平移 3 个单位得到抛物线 $y=ax^2+bx+c$.

拔尖角度 3 利用待定系数法求实际问题中的函数表达式

例 7 科幻小说《实验室的故事》中，有这样一个情节，科学家把一种珍奇的植物分别放在不同温度的环境中，经过一天后，测试出这种植物高度的增长情况（如下表）：

温度 x/℃	…	−4	−2	0	2	4	4.5	…
植物每天高度增长量 y/mm	…	41	49	49	41	25	19.75	…

由这些数据，科学家推测出植物每天高度的增长量 y（mm）是温度 x（℃）的函数，且这种函数是一次函数和二次函数中的一种.

（1）请你选择一种适当的函数，求出它的函数关系式，并简要说明不选择另一种函数的理由.

（2）温度为多少时，这种植物每天高度的增长量最大？

（3）如果实验室温度保持不变，在 10 天内要使该植物高度增长量的总和超过 250 mm，那么实验室的温度 x 应该在哪个范围内？请直接写出结果.

解题秘方：先根据统计的数据判断满足条件的函数种类，求出函数关系式，再根据函数的性质解答相关问题.

解：（1）选择二次函数，设 $y=ax^2+bx+c$，

则 $\begin{cases} c=49, \\ 4a-2b+c=49, \\ 4a+2b+c=41. \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} a=-1, \\ b=-2, \\ c=49. \end{cases}$

$\therefore y$ 关于 x 的函数关系式是 $y=-x^2-2x+49$.

经验证，其他数据均满足 $y=-x^2-2x+49$.

$\therefore y$ 关于 x 的函数关系式为 $y=-x^2-2x+49$.

不选另外一种函数的理由：点（−4，41），（−2，49），（2，41）不在同一直线上，$\therefore y$ 不是 x 的一次函数.

（2）由（1）得，$y=-x^2-2x+49$，$\therefore y=-(x+1)^2+50$.

∵ $a=-1<0$，∴当 $x=-1$ 时，y 有最大值 50.

即当温度为 −1 ℃时，这种植物每天高度的增长量最大.

（3）$-6<x<4$.

函数的末尾加减即可.
如本例可另解为：
∵抛物线 $y=x^2+2x+3$ 向上平移 2 个单位，再向左平移 3 个单位得到抛物线 $y=ax^2+bx+c$，
$\therefore y=ax^2+bx+c=(x+3)^2+2(x+3)+3+2=x^2+8x+20$.
$\therefore a=1$，$b=8$，$c=20$.

挑战·高分

解法提醒

判断若干个数据适合的函数种类的方法：

- 验证法：先分别用待定系数法求出不同种类的函数表达式，再将余下的数据代入，若满足所求表达式，则说明该表达式就是所求的表达式，否则就不是.
- 图象法：先画出满足数据条件的图象，再根据图象确定函数的种类.

方法点拨

已知抛物线过三点，求其表达式，可采用一般式；用一般式求待定系数的步骤：第一步：设一般式 $y=ax^2+bx+c$；第二步：将三点的坐标分别代入一般式中，组成一个三元一次方程组；第三步：解方程组即可求出 a，b，c 的值.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

中考探秘 本节的主要考点有二次函数的三种表示形式之间的相互转化、二次函数表达式的确定，运用二次函数解决实际问题．二次函数的表达式和二次函数的图象经常出现在综合题中，常见的题型有选择题、填空题、解答题，选择题和填空题一般较简单，解答题有一定的难度．

三年中考兵法

考法 1 求二次函数的表达式

例 8 ［中考·凉山州］如图 26.2−22，已知抛物线 $y=x^2+bx+c$ 经过点 $A(1,0)$，$B(0,2)$ 两点，顶点为 D.

（1）求抛物线的表达式；

（2）将△ABO 绕点 A 顺时针旋转 90° 后，点 B 落在点 C 的位置，将抛物线沿 y 轴平移后经过点 C，求平移后所得抛物线的函数表达式；

（3）设（2）中平移后，所得抛物线与 y 轴的交点为 B_1，顶点为 D_1，若点 N 在平移后的抛物线上，且满足△NBB_1 的面积是△NDD_1 面积的 2 倍，求点 N 的坐标．

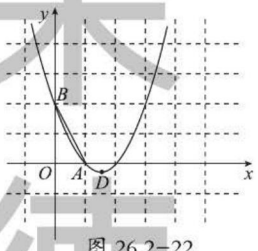


图 26.2−22

试题评析：本题考查的是抛物线的函数表达式的求法，解题关键是会用待定系数法求函数表达式．

解：（1）已知抛物线 $y=x^2+bx+c$ 经过点 $A(1,0)$，$B(0,2)$，

$\therefore \begin{cases} 1+b+c=0, \\ c=2, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} b=-3, \\ c=2. \end{cases}$

$\therefore$ 所求抛物线的表达式为 $y=x^2-3x+2$.

（2）$\because A(1,0)$，$B(0,2)$，$\therefore OA=1$，$OB=2$，

$\therefore$ 可得旋转后点 C 的坐标为 $(3,1)$，

当 $x=3$ 时，$y=3^2-3\times3+2=2$，

可知抛物线 $y=x^2-3x+2$ 过点 $(3,2)$，

$\therefore$ 将抛物线 $y=x^2-3x+2$ 沿 y 轴向下平移 1 个单位后过点 C，

$\therefore$ 平移后所得抛物线的函数表达式为 $y=x^2-3x+1$.

（3）$\because$ 点 N 在抛物线 $y=x^2-3x+1$ 上，可设 N 点坐标为 $(x_0, x_0^2-3x_0+1)$，

将 $y=x^2-3x+1$ 配方得 $y=\left(x-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{5}{4}$，$\therefore$ 对称轴为直线 $x=\frac{3}{2}$.

① 当 $0<x_0<\frac{3}{2}$ 时，如图 26.2−23 ①，

$\because S_{\triangle NBB_1}=2S_{\triangle NDD_1}$，

冲刺·满分

思路导引

1. 用待定系数法代入两个点的坐标，列出方程组，求出函数关系式；
2. 由旋转求出点 C 的坐标，因为抛物线沿 y 轴方向平移，所以将点 C 的横坐标代入，求出对应的纵坐标，即可求出平移的距离，得到平移后抛物线的表达式；
3. 点 N 在平移后的抛物线上，画草图发现，点 N 在对称轴的左侧或在对称轴的右侧时，组成的三角形形状发生变化，求面积时△NDD_1 的高的表示方法分别为 $\frac{3}{2}-x_0$，$x_0-\frac{3}{2}$，所以这一问要进行分类讨论，按照点在对称轴的左右两侧分别研究．在两种情况下分别列出方程，求出点 N 的横坐标，代入即可求出点 N 的纵坐标．

荣德基

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

$\therefore \frac{1}{2}\times 1\times x_0=2\times \frac{1}{2}\times 1\times\left(\frac{3}{2}-x_0\right)$,

$\therefore x_0=1$, 此时 $x_0^2-3x_0+1=-1$,

$\therefore N$ 点的坐标为 (1, −1).

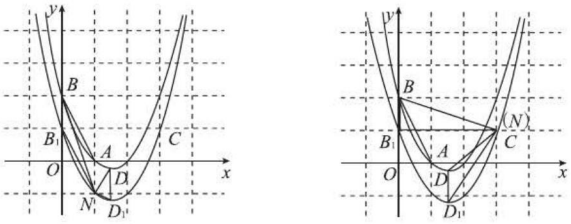


图 26.2−23

②当 $x_0>\frac{3}{2}$ 时, 如图 26.2−23 ②,

同理可得 $\frac{1}{2}\times 1\times x_0=2\times \frac{1}{2}\times 1\times\left(x_0-\frac{3}{2}\right)$, $\therefore x_0=3$,

此时 $x_0^2-3x_0+1=1$, $\therefore N$ 点的坐标为 (3, 1).

综上, N 点的坐标为 (1, −1) 或 (3, 1).

考法 2 利用二次函数的表达式解决存在性探索题

例 9 [中考 · 安顺] 如图 26.2−24, 抛物线经过 $A(-1, 0)$, $B(5, 0)$, $C\left(0, -\frac{5}{2}\right)$ 三点.

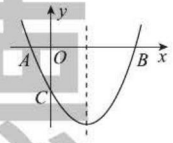


图 26.2−24

(1) 求抛物线的函数表达式;

(2) 在抛物线的对称轴上有一点 P, 使 $PA+PC$ 的值最小, 求点 P 的坐标;

(3) 点 M 为 x 轴上一动点, 在抛物线上是否存在一点 N, 使得以 A, C, M, N 四点构成的四边形为平行四边形? 若存在, 求点 N 的坐标; 若不存在, 请说明理由.

技巧点拨

求两条线段和的最小值问题, 通常都是根据已知条件, 将两条线段转化到同一条线段上, 再利用"两点之间线段最短"进行求解.

试题评析: 本题主要考查用待定系数法求二次函数表达式, 利用对称性求最值以及图形的存在性探索, 解题的关键是把握"二次函数", "最短路径", "平行四边形"等几个基本模型.

解: (1) 设抛物线的函数表达式为 $y=ax^2+bx+c$ ($a\neq 0$).

$\because A(-1, 0)$, $B(5, 0)$, $C\left(0, -\frac{5}{2}\right)$ 三点在抛物线上,

$$\therefore \begin{cases} a-b+c=0, \\ 25a+5b+c=0, \\ c=-\frac{5}{2}, \end{cases} \text{解得} \begin{cases} a=\frac{1}{2}, \\ b=-2, \\ c=-\frac{5}{2}. \end{cases}$$

$\therefore$ 抛物线的函数表达式为 $y=\frac{1}{2}x^2-2x-\frac{5}{2}$.

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

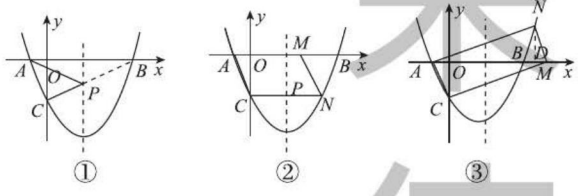
（2）∵抛物线的表达式为 $y=\frac{1}{2}x^2-2x-\frac{5}{2}$，

∴其对称轴为直线 $x=-\frac{b}{2a}=-\frac{-2}{2\times\frac{1}{2}}=2$. 连结 BC，则 BC 与直线 $x=2$ 的交点即为点 P，如图 26.2−25 ①所示，设直线 BC 的表达式为 $y=kx+m$（$k\neq0$），

∵ $B(5,0)$，$C\left(0,-\frac{5}{2}\right)$，∴ $\begin{cases}5k+m=0,\\ m=-\frac{5}{2},\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}k=\frac{1}{2},\\ m=-\frac{5}{2},\end{cases}$

∴直线 BC 的表达式为 $y=\frac{1}{2}x-\frac{5}{2}$.

当 $x=2$ 时，$y=1-\frac{5}{2}=-\frac{3}{2}$，∴ $P\left(2,-\frac{3}{2}\right)$.



① ② ③

图 26.2−25

（3）存在. ①当点 N 在 x 轴下方时，如图 26.2−25 ②所示，

∵抛物线的对称轴为直线 $x=2$，$C\left(0,-\frac{5}{2}\right)$，

∴点 C 关于直线 $x=2$ 对称的点为 $N\left(4,-\frac{5}{2}\right)$，此时，点 A，C，N，M 构成平行四边形；

②当点 N 在 x 轴上方时，如图 26.2−25 ③所示，过点 N 作 $ND\perp x$ 轴于点 D，在△ AND 与△ MCO 中，

由题意易得 ∠ ADN= ∠ MOC=90°，∠ NAD= ∠ CMO，$AN=CM$，

∴△ AND ≌△ MCO，

∴ $ND=OC=\frac{5}{2}$，即点 N 的纵坐标为 $\frac{5}{2}$.

∴ $\frac{1}{2}x^2-2x-\frac{5}{2}=\frac{5}{2}$，解得 $x=2+\sqrt{14}$ 或 $x=2-\sqrt{14}$，

∴ $N\left(2+\sqrt{14},\frac{5}{2}\right)$ 或 $N\left(2-\sqrt{14},\frac{5}{2}\right)$.

综上所述，符合条件的点 N 的坐标为 $\left(4,-\frac{5}{2}\right)$，$\left(2+\sqrt{14},\frac{5}{2}\right)$ 或 $\left(2-\sqrt{14},\frac{5}{2}\right)$.

详解

∵点 A 和点 B 关于抛物线的对称轴对称，
∴连结 BC 交对称轴于点 P，此时 PB+PC=PA+PC.

易错警示

问题(3)的特点是结论不确定，要求同学们自己通过计算来判断结论存在与否，在求解时要充分考虑可能存在的所有情况，并进行验证.

苏德基

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

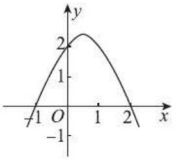
两年模拟兵法 ☞答案见188页

1. 若抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 的顶点坐标是（-2，3），且点（-1，5）在这条抛物线上，则该抛物线所对应的函数表达式为（　　）

A.$y=x^2+8x+11$　　B.$y=x^2-8x-11$

C.$y=2x^2+8x+11$　　D.$y=2x^2-8x+11$

2. 如图，抛物线所对应的函数表达式是（　　）



（第2题）

A.$y=x^2-x+2$　　B.$y=-x^2-x-2$

C.$y=x^2+x+2$　　D.$y=-x^2+x+2$

3. 已知某抛物线与 x 轴的两个交点为（-1，0），（3，0），且其形状及开口方向与抛物线 $y=-2x^2$ 相同，则该抛物线的函数表达式为（　　）

A.$y=-2x^2-x+3$　　B.$y=-2x^2+4x+5$

C.$y=-2x^2+4x+8$　　D.$y=-2x^2+4x+6$

4. 某同学在用描点法画二次函数的图象时，列出了下面的表格：

x	…	-2	-1	0	1	2	…
y	…	-11	-2	1	-2	-5	…

由于粗心，他算错了其中一个 y 值，则这个错误的数值是（　　）

A.-11　　B.-2

C.1　　D.-5

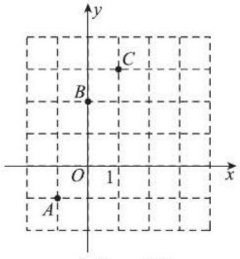
5. [中考·上海]已知一个二次函数的图象开口向上，顶点坐标为（0，-1），那么这个二次函数的表达式可以是_____.（只需写出一个）

6. 对称轴与 y 轴平行且经过原点 O 的抛物线也经过 $A(2,\ m)$，$B(4,\ m)$，若△AOB 的面积为 4，则抛物线的表达式为_____.

7. 如图，已知二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图象经过点 $A(-1,\ -1)$，$B(0,\ 2)$，$C(1,\ 3)$.

（1）求二次函数的表达式；

（2）画出该二次函数的图象.

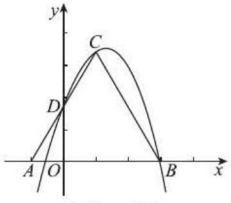


（第7题）

8. 如图，已知△ABC 是边长为 4 的正三角形，AB 在 x 轴上，点 C 在第一象限，AC 与 y 轴交于点 D，点 A 的坐标为（-1，0）.

（1）写出 B，C，D 三点的坐标；

（2）若抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 经过 B，C，D 三点，求此抛物线的表达式.

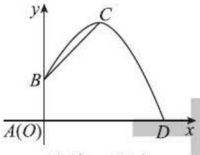


（第8题）

荣德基

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

9. 改革开放后，不少农村用上了自动喷灌设备，如图，设水管 AB 高出地面 1.5 m，在 B 处有一个自动旋转的喷水龙头，喷出的水流呈抛物线形状，喷头 B 与水流最高点 C 的连线与水平面成 45° 角，水流最高点 C 比喷头高出 2 m，在所建立的平面直角坐标系中（A 点与原点重合），求水流的落地点 D 到 A 的距离． 【导学号：8603511】



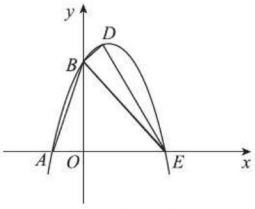
（第 9 题）

10. 如图，已知抛物线与 x 轴交于 $A(-1, 0)$，$E(3, 0)$ 两点，与 y 轴交于点 $B(0, 3)$．

（1）求抛物线对应的函数表达式．

（2）设抛物线的顶点为 D，求四边形 $ABDE$ 的面积．

（3）$\triangle AOB$ 与 $\triangle DBE$ 是否相似？如果相似，请证明；如果不相似，请说明理由．



（第 10 题）

荣德基

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

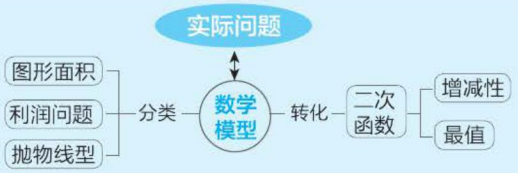
26.3 实践与探索

26.3.1 建立二次函数模型解决实际问题

核心知识

- 实际问题
- 二次函数模型
- 最值
- 增减性

知识链接



点知识·拨考向 速提分

点知识▶ 用二次函数解实际问题

1. 常用方法：

利用二次函数解决实际问题，首先要建立数学模型，把实际问题转化为二次函数问题，利用题中存在的等量关系，求出函数表达式，然后利用函数的图象和性质去解决问题.

2. 一般步骤：

（1）**审**：仔细审题，理清题意；

（2）**设**：找出问题中的变量和常量，分析它们之间的关系，与图形相关的问题要结合图形具体分析，设出适当的未知数；

（3）**列**：用二次函数表示出变量和常量之间的关系，建立二次函数模型，把实际问题转化成数学问题，根据题中的数量关系列出二次函数的表达式；

（4）**解**：依据已知条件，借助二次函数的表达式、图象和性质等求解实际问题；

（5）**检**：检验结果，得出符合实际意义的结论.

拨考向▶ 利用二次函数解实际问题的常用方法解应用题

例 1 [中考·青岛]青岛市某大酒店豪华间实行淡季、旺季两种价格标准，旺季每间价格比淡季上涨$\frac{1}{3}$，下表是去年该酒店豪华间某两天的相关记录：

	淡季	旺季
未入住房间数	10	0
日总收入（元）	24 000	40 000

（1）该酒店豪华间有多少间？旺季每间价格为多少元？

（2）今年旺季来临，豪华间的间数不变，经市场调查发现，如果豪华间仍旧实行去年旺季价格，那么每天都客满；如果价格继续上涨，那么每增加 25 元，每天未入住房间数增加 1 间，不考虑其他

提分·必记

要点解读

1. 用二次函数求解实际问题时，审题是关键，检验容易被忽略，求得的结果，除了要满足题中的数量关系，还要符合实际问题的意义.
2. 在求解实际问题中的最值问题时，解题思路是列二次函数表达式，用配方法把函数表达式化为 $y=a(x-h)^2+k$ 的形式求解，或者针对函数表达式用顶点坐标公式计算函数的最值.

提分·秘诀

特别提醒

1. 要按照用二次函数解实际问题的步骤解答.
2. 列函数表达式时，要找能包含全部题意的等量关系，并且要考虑自变量的取值范围.
3. 求所列函数的最值时，既可以化为顶点式求，也可以根据顶点坐标公式求.

荣德基

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

因素，该酒店将豪华间的价格上涨多少元时，豪华间的日总收入最高？最高日总收入是多少元？

解题秘方：紧扣“总收入 = 每间价格 × 房间数”列式解答.

解：（1）设淡季每间价格为 x 元，酒店豪华间有 y 间，

$$\begin{cases} x(y-10)=24\,000, \\ x\left(1+\dfrac{1}{3}\right)y=40\,000, \end{cases} \text{解得} \begin{cases} x=600, \\ y=50. \end{cases}$$

$$\therefore x+\frac{1}{3}x=600+\frac{1}{3}\times 600=800.$$

答：该酒店豪华间有 50 间，旺季每间价格为 800 元.

（2）设该酒店豪华间的价格上涨 m 元，日总收入为 W 元，

$$W=(800+m)\left(50-\frac{m}{25}\right)=-\frac{1}{25}(m-225)^2+42\,025.$$

$\therefore$ 当 $m=225$ 时，W 取得最大值，$W_{最大}=42\,025$.

答：该酒店将豪华间的价格上涨 225 元时，豪华间的日总收入最高，最高日总收入是 42 025 元.

4. 写答案时，要特别注意函数的最值是否是实际问题的最值.

顶点的横坐标在实际问题的自变量的取值范围内，则函数的最值是实际问题的最值，否则就不是.

点方法·拨技巧 提高分

拔尖角度 1 利用二次函数增减性求销售利润中的最值问题

挑战·高分

题型 1：求最大利润问题

例 2 [中考·安徽] 某超市销售一种商品，成本每千克 40 元，规定每千克售价不低于成本，且不高于 80 元，经市场调查，每天的销售量 y（千克）与每千克售价 x（元）满足一次函数关系，部分数据如下表：

售价 x（元/千克）	50	60	70
销售量 y（千克）	100	80	60

（1）求 y 与 x 之间的函数表达式；

（2）设商品每天的总利润为 W（元），求 W 与 x 之间的函数表达式（利润 = 收入 − 成本）；

（3）试说明（2）中总利润 W 随售价 x 的变化而变化的情况，并指出售价为多少元时获得最大利润，最大利润是多少？

解题秘方：紧扣“总利润 = 每千克商品的利润 × 销售量”这一关系解答.

解：（1）设 y 与 x 之间的函数表达式为 $y=kx+b$，则

$$\begin{cases} 50k+b=100, \\ 60k+b=80, \end{cases} \text{解得} \begin{cases} k=-2, \\ b=200, \end{cases} \therefore y=-2x+200.$$

经验证，$x=70$，$y=60$ 满足 $y=-2x+200$，

即 y 与 x 之间的函数表达式是 $y=-2x+200$.

知识储备

用二次函数解决商品销售问题中的最大利润等问题，要熟练掌握相关数量的意义、常用的数量关系，根据具体问题，建立函数表达式，解决实际问题.

常见销售问题中的数量关系：利润 = 售价 − 成本，总利润 = 每千克商品的利润 × 销售量，利润率 = $\frac{\text{利润}}{\text{进价}}\times 100\%$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

（2）由题意可得，$W=(x-40)(-2x+200)=-2x^2+280x-8\,000$，

即 W 与 x 之间的函数表达式是 $W=-2x^2+280x-8\,000$.

（3）∵ $W=-2x^2+280x-8\,000=-2(x-70)^2+1\,800$，$40\leqslant x\leqslant 80$，∴当 $40\leqslant x\leqslant 70$ 时，W 随 x 的增大而增大，当 $70<x\leqslant 80$ 时，W 随 x 的增大而减小.

当 $x=70$ 时，W 取得最大值，$W_{最大}=1\,800$.

答：当 $40\leqslant x\leqslant 70$ 时，W 随 x 的增大而增大，当 $70<x\leqslant 80$ 时，W 随 x 的增大而减小. 售价为 70 元时获得最大利润，最大利润是 1 800 元.



题型 2：优选销售方案

例 3 某商场要销售一种新上市的文具，进价为 20 元/件，试销阶段发现：当销售价格为 25 元/件时，每天的销售量为 250 件，每件销售价格每上涨 1 元，每天的销售量就减少 10 件.

（1）请你写出商场销售这种文具，每天的销售利润 w（元）与销售价格 x（元/件）之间的函数关系式；

（2）销售价格为多少时，该文具每天的销售利润最大？

（3）商场的营销部结合上述情况，提出了 A，B 两种营销方案.

方案 A：该文具的销售价格高于进价且不超过 30 元/件；

方案 B：每天销售量不少于 10 件，且每件文具的利润至少为 25 元. 请通过计算说明哪种方案的最大利润更高.

解题秘方：用比较法对求出的每种方案的最大利润进行比较，优选营销方案.

解：（1）$w=(x-20)[250-10(x-25)]=-10x^2+700x-10\,000$.

（2）∵ $w=-10x^2+700x-10\,000=-10(x-35)^2+2\,250$，

∴当 $x=35$ 时，w 有最大值，即销售价格为 35 元/件时，该文具每天的销售利润最大.

（3）方案 A：由题意，得 $w=-10(x-35)^2+2\,250$（$20<x\leqslant 30$），

∵ $-10<0$，抛物线的对称轴为直线 $x=35$，

∴抛物线开口向下，在对称轴的左侧，w 随 x 的增大而增大.

∴当 $x=30$ 时，w 取最大值为 2 000.

方案 B：由题意得，$\begin{cases}x\geqslant 20+25,\\250-10(x-25)\geqslant 10,\end{cases}$ 解得 $45\leqslant x\leqslant 49$.

∴ $w=-10(x-35)^2+2\,250$（$45\leqslant x\leqslant 49$）.

∵在对称轴（直线 $x=35$）的右侧，w 随 x 的增大而减小，

∴当 $x=45$ 时，w 取最大值为 1 250.

∵ $2\,000>1\,250$，∴方案 A 的最大利润更高.

详解

销售价格（元/件）	销售量（件）
25	250
25+1	250−10
25+2	250−20
…	…
25+m	250−10m
x	250−10（x−25）

特别提醒

第(3)问中由于自变量取值范围的限制，方案A和方案B中所求的最大利润都不是抛物线顶点的纵坐标.

图解

$w=-10(x-35)^2+2\,250$ 的大致图象如图 26.3-1.

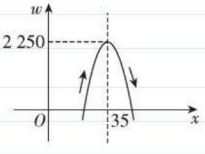


图 26.3-1

答案详解

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

解题通法：利用二次函数的性质求最大利润的方法

二次函数 $y=ax^2+bx+c$，当 $a<0$ 时，函数有最大值，最大值为 $\frac{4ac-b^2}{4a}$. 在实际问题中，求商品的最大利润的一般步骤：

（1）列出二次函数表达式，并根据自变量的实际意义，确定自变量的取值范围；

（2）在自变量的取值范围内，运用公式法或配方法求出二次函数的最大值，当二次函数图象的顶点的横坐标不在自变量的取值范围之内时，需结合二次函数的图象，根据二次函数的增减性，在自变量的取值范围之内求出函数的最值.

拔尖角度 2 利用建立二次函数模型法解实际中抛物线型最值问题

例 4 [中考·德州] 随着新农村的建设和旧城的改造，我们的家园越来越美丽. 小明家附近广场中央新修了一个圆形喷水池（如图 26.3-2），在水池中心竖直安装了一根高为 2 米的喷水管，它喷出的抛物线形水柱在与水池中心的水平距离为 1 米处达到最高，水柱落地处离水池中心 3 米.

（1）请你建立适当的平面直角坐标系，并求出水柱抛物线对应的函数表达式；

（2）求出水柱的最大高度是多少？



图 26.3-2

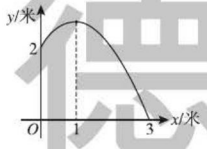


图 26.3-3

解题秘方：求水柱的最大高度，关键是建立适当的平面直角坐标系，求出其顶点坐标.

解：（1）如图 26.3-3，以喷水管与地面交点为原点，原点与水柱落地点所在直线为 x 轴，喷水管所在直线为 y 轴，建立平面直角坐标系. 设抛物线对应的函数表达式为 $y=a(x-1)^2+h$，

把点（3，0）和（0，2）的坐标代入得 $\begin{cases}4a+h=0,\\ a+h=2,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=-\frac{2}{3},\\ h=\frac{8}{3},\end{cases}$

∴水柱抛物线对应的函数表达式为 $y=-\frac{2}{3}(x-1)^2+\frac{8}{3}$，

即 $y=-\frac{2}{3}x^2+\frac{4}{3}x+2\ (0\leqslant x\leqslant 3)$.（答案不唯一）

（2）由 $y=-\frac{2}{3}(x-1)^2+\frac{8}{3}\ (0\leqslant x\leqslant 3)$ 知，当 $x=1$ 时，$y=\frac{8}{3}$，即水柱的最大高度为 $\frac{8}{3}$ 米.

挑战·高分

知识储备

许多实际问题（如与隧道洞口、桥洞、球的运动轨迹、喷泉喷出的水的轨迹等相关的实际问题）中都存在着与抛物线相关的图形，此类问题可以通过构建二次函数模型来求解，求解的一般步骤是：

1. 建立适当的平面直角坐标系，将抛物线形状的图形放在坐标系中；
2. 结合图形和已知条件，分析变量间的关系；
3. 用待定系数法求函数表达式；
4. 利用二次函数的表达式及其性质，求解实际问题.

技巧提醒

同一个问题中，建立平面直角坐标系的方法有多种，建立适当的平面直角坐标系能简化求解过程，通常建立平面直角坐标系，以方便求解为原则.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

拔尖角度▸ 3 利用建模思想解决通行问题

例 5 如图 26.3−4，某企业的大门是抛物线形，大门底部的宽 AB 为 4 m，顶端 C 距离地面高度为 4.4 m，现有一辆满载货物的汽车欲通过大门，货物顶部距地面 2.8 m，装货宽度为 2.4 m. 试通过计算，判断这辆汽车能否顺利通过大门.

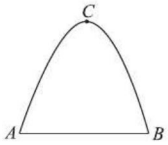


图 26.3−4

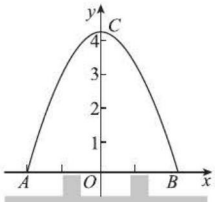


图 26.3−5

解题秘方：根据题意先建立适当的平面直角坐标系，找出相应点的坐标并求出抛物线的函数表达式，然后运用二次函数的性质解答.

解：如图 26.3−5，以 AB 的中点为坐标原点，以 AB 所在直线为 x 轴，以线段 AB 的垂直平分线为 y 轴建立平面直角坐标系.

根据题意得点 B 的坐标为（2，0），点 C 的坐标为（0，4.4）.

设抛物线的函数表达式为 $y=ax^2+k$（$a<0$），

把 B（2，0），C（0，4.4）的坐标代入上式得

$$\begin{cases}0=a\times 2^2+k,\\4.4=k.\end{cases}$$

解得 $\begin{cases}a=-1.1,\\k=4.4.\end{cases}$

∴抛物线的函数表达式为 $y=-1.1x^2+4.4$.

当 $x=\dfrac{2.4}{2}=1.2$ 时，$y=-1.1\times 1.2^2+4.4=2.816>2.8$，

∴这辆汽车能顺利通过大门.

挑战·高分

方法点拨

建立二次函数模型解决通行问题，应把握两个关键：

一是建立适当的平面直角坐标系，将实物模型转化为抛物线；

二是找准能否通行的判定标准与图象上哪个点的坐标有关，然后通过计算进行比较判断.

基本德基

点中考·拨模拟 得满分

中考探秘 利用二次函数解决实际问题，是中考考查的重点和热点，命题形式多样，试题背景新颖多元，简单的实际问题多以选择题和填空题的形式出现；综合性较强的实际问题常与一次函数、方程、不等式等知识综合考查，有时也会结合三角形、四边形等几何知识综合考查，以解答题的形式出现.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

三年中考兵法

考法 1 利用二次函数图象和性质说明实际应用中几何原理

例 6 [中考·荆州]为响应荆州市“创建全国文明城市”号召，某单位不断美化环境，拟在一块矩形空地上修建绿色植物园，其中一边靠墙，可利用的墙长不超过 18 m，另外三边由 36 m 长的栅栏围成. 设矩形空地 $ABCD$ 中，垂直于墙的边 $AB=x$ m，面积为 y m^2（如图 26.3-6）.

（1）求 y 与 x 之间的函数关系式，并写出自变量 x 的取值范围；

（2）若矩形空地的面积为 160 m^2，求 x 的值；

（3）若该单位用 8 600 元购买了甲、乙、丙三种绿色植物共 400 棵（每种植物的单价和每棵栽种的合理用地面积如下表）. 问丙种植物最多可以购买多少棵？此时，这批植物可以全部栽种到这块空地上吗？请说明理由.

	甲	乙	丙
单价（元/棵）	14	16	28
合理用地（m^2/棵）	0.4	1	0.4

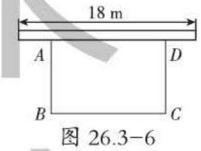


图 26.3-6

试题评析：此题主要考查了由实际问题列二次函数关系式以及求二次函数的最值问题，同时也利用了矩形的性质，解题时首先正确理解题意，列出符合题意的方程、不等式、函数关系式是解题的关键.

解：（1）∵四边形 $ABCD$ 是矩形，垂直于墙的边 $AB=x$ m，

∴ $CD=AB=x$ m，$BC=(36-2x)$ m.

∴ $y=x(36-2x)$，即 $y=-2x^2+36x$.

由矩形的任一边都大于 0 m 且靠墙的一边不超过 18 m 得

$$\begin{cases} x>0, \\ 36-2x>0, \\ 36-2x\leqslant 18, \end{cases}$$ 解得 $9\leqslant x<18$,

∴ y 与 x 之间的函数关系式为 $y=-2x^2+36x\ (9\leqslant x<18)$.

（2）∵矩形空地的面积为 160 m^2，即 $y=160$,

∴ $-2x^2+36x=160$，解得 $x_1=10$，$x_2=8$.

∵ $9\leqslant x<18$，∴ x 的值为 10.

（3）设甲、乙、丙三种植物分别购买了 m 棵、n 棵、k 棵，

由题意，得 $\begin{cases} m+n+k=400, \\ 14m+16n+28k=8\,600, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} m=6k-1\,100, \\ n=1\,500-7k. \end{cases}$

∵ m、n、k 分别表示三种植物的数量，∴ m、n、k 为正整数，

∴ $\begin{cases} 6k-1\,100>0, \\ 1\,500-7k>0, \end{cases}$ 解得 $\dfrac{550}{3}<k<\dfrac{1\,500}{7}$.

冲刺·满分

思路点拨

1. 用含 x 的代数式表示矩形的另一边 BC，根据矩形面积的计算方法列出函数关系式. 由矩形的任一边都大于 0m 且靠墙的一边不超过 18m 列出关于 x 的不等式组确定 x 的取值范围；
2. 令函数关系式中的 y=160，得到关于 x 的一元二次方程，解之即可；
3. 设甲、乙、丙三种植物分别购买了 m 棵、n 棵、k 棵，利用题中的等量关系将 m、n 分别用含有 k 的代数式表示，由 m、n、k 都为正整数得到关于 k 的不等式组即可得到最多购买丙种植物的数量；再求出这批植物的用地面积，与矩形的最大面积作比较，便可判断这批植物是否可以全部栽种到这块空地上.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

∵ k 为正整数，∴ k 能取的最大正整数为 214，即丙种植物最多可以购买 214 棵．当 $k=214$ 时，$m=6k-1\,100=184$，$n=1\,500-7k=2$.

∵ $y=-2x^2+36x=-2(x-9)^2+162$，

∴当 $x=9$ 时，y 有最大值，最大值为 162，即当垂直于墙的边 AB 长为 9 m 时，矩形空地的面积最大，最大面积为 162 m^2.

∵ $0.4\times184+1\times2+0.4\times214=161.2\,(m^2)<162\,m^2$，

∴这批植物可以全部栽种到这块空地上．

考法 2 利用二次函数的图象和性质解图表信息的实际应用问题

例 7 ［中考·黄冈］我市某乡镇在“精准扶贫”活动中销售一农产品，经分析发现月销售量 y（万件）与月份 x（月）的关系为：$y=\begin{cases}x+4\ (1\leqslant x\leqslant 8,\ x\text{为整数}),\\ -x+20\ (9\leqslant x\leqslant 12,\ x\text{为整数}),\end{cases}$ 每件产品的利润 z（元）与月份 x（月）的关系如下表：

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
z	19	18	17	16	15	14	13	12	11	10	10	10

（1）请你根据表格求出每件产品的利润 z（元）与月份 x（月）的关系式；

（2）若月利润 w（万元）= 当月销售量 y（万件）× 当月每件产品的利润 z（元），求月利润 w（万元）与月份 x（月）的关系式；

（3）当 x 为何值时，月利润 w 有最大值，最大值为多少？

试题评析：本题考查二次函数的应用，解答本题的关键是明确题意，找出所求问题需要的条件，利用二次函数的性质解答．

解：（1）由表格可知：1~10 月每件产品的利润 z（元）与月份 x（月）之间的函数关系为一次函数，11、12 月每件产品的利润均为 10 元．

①当 $1\leqslant x\leqslant 10$，x 为整数时，设 $z=kx+b$，当 $x=1$ 时，$z=19$；当 $x=2$ 时，$z=18$，即有方程组 $\begin{cases}19=k+b,\\ 18=2k+b,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}k=-1,\\ b=20.\end{cases}$

故 $z=-x+20$，经检验，其他数据均满足该关系式．

②当 $11\leqslant x\leqslant 12$，$x$ 为整数时，$z=10$.

综上，每件产品的利润 z（元）与月份 x（月）之间的函数关系式为

$$z=\begin{cases}-x+20\ (1\leqslant x\leqslant 10,\ x\text{为整数}),\\ 10\ (11\leqslant x\leqslant 12,\ x\text{为整数}).\end{cases}$$

$$(2)\ w=\begin{cases}(-x+20)(x+4)\ (1\leqslant x\leqslant 8,\ x\text{为整数}),\\ (-x+20)(-x+20)\ (9\leqslant x\leqslant 10,\ x\text{为整数}),\\ 10(-x+20)\ (11\leqslant x\leqslant 12,\ x\text{为整数}).\end{cases}$$

$$\text{化简得 } w=\begin{cases}-x^2+16x+80\ (1\leqslant x\leqslant 8,\ x\text{为整数}),\\ (-x+20)^2\ (9\leqslant x\leqslant 10,\ x\text{为整数}),\\ -10x+200\ (11\leqslant x\leqslant 12,\ x\text{为整数}).\end{cases}$$

思路点拨

1. 观察表格发现：1~10 月，随着月份(x)的增加，每件产品的利润(z)不断减少，且是依次减少 1 元；11、12 月每件产品的利润保持不变．故能得出两个结论：一是 z 与 x 之间的函数关系是一个分段函数，二是 1~10 月 z 与 x 之间的函数关系为一次函数；
2. 利用等量关系式 w=yz 写出函数关系式，注意是分段函数，分为 $1\leqslant x\leqslant 8$、$9\leqslant x\leqslant 10$、$11\leqslant x\leqslant 12$ 三段；
3. 分别求出函数的最大值，再比较得出 w 的最大值．

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

（3）①当 $1 \leqslant x \leqslant 8$，$x$ 为整数时，$w=-x^2+16x+80=-(x-8)^2+144$，当 $x \leqslant 8$ 时，w 随 x 的增大而增大，

$\therefore$ 当 $x=8$ 时，$w_{最大}=-(8-8)^2+144=0+144=144$；

②当 $9 \leqslant x \leqslant 10$，$x$ 为整数时，$w=(-x+20)^2$，

当 $x<20$ 时，w 随 x 的增大而减小，

$\therefore$ 当 $x=9$ 时，$w_{最大}=(-9+20)^2=121$；

③当 $11 \leqslant x \leqslant 12$，$x$ 为整数时，$w=-10x+200$，

$\because k=-10$，$\therefore w$ 随 x 的增大而减小，

$\therefore$ 当 $x=11$ 时，$w_{最大}=-10\times11+200=90$.

$\because 90<121<144$，$\therefore$ 当 $x=8$ 时，w 有最大值，最大值为 144.

考法 3 利用二次函数的图象与性质解抛物线型运动问题

例 8 [中考·金华]甲、乙两人进行羽毛球比赛，羽毛球飞行的路线为抛物线的一部分，如图 26.3-7，甲在 O 点正上方 1 m 的 P 处发出一球，羽毛球飞行的高度 y（m）与水平距离 x（m）之间满足函数关系式 $y=a(x-4)^2+h$，已知点 O 与球网的水平距离为 5 m，球网的高度为 1.55 m.

（1）当 $a=-\frac{1}{24}$ 时，①求 h 的值；②通过计算判断此球能否过网.

（2）若甲发球过网后，羽毛球飞行到与点 O 的水平距离为 7m，离地面的高度为 $\frac{12}{5}$ m 的 Q 处时，乙扣球成功，求 a 的值.



图 26.3-7

试题评析：本题主要考查二次函数的应用，熟练掌握用待定系数法求函数关系式是解题的关键.

解：（1）①当 $a=-\frac{1}{24}$ 时，$y=-\frac{1}{24}(x-4)^2+h$，将点 $P(0,1)$ 的坐标代入，得 $-\frac{1}{24}\times16+h=1$，解得 $h=\frac{5}{3}$.

②把 $x=5$ 代入 $y=-\frac{1}{24}(x-4)^2+\frac{5}{3}$，得 $y=-\frac{1}{24}\times(5-4)^2+\frac{5}{3}=1.625$.

$\because 1.625>1.55$，$\therefore$ 此球能过网.

（2）把点 $P(0,1)$，$Q\left(7,\frac{12}{5}\right)$ 的坐标代入 $y=a(x-4)^2+h$，

得 $\begin{cases}16a+h=1,\\9a+h=\frac{12}{5}.\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=-\frac{1}{5},\\h=\frac{21}{5}.\end{cases}$ $\therefore a=-\frac{1}{5}$.

方法点拨

利用二次函数解决抛物线型实际应用问题时，首先要把这些实际问题中的相应数据正确地落实到平面直角坐标系中的抛物线上，求解得出抛物线所对应的函数表达式，再利用二次函数的性质来解决推理判断问题、最值问题等.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

1. [中考·临沂]足球运动员将足球沿与地面成一定角度的方向踢出，足球飞行的路线是一条抛物线，不考虑空气阻力，足球距离地面的高度 h（单位：m）与足球被踢出后经过的时间 t（单位：s）之间的关系如下表：

t	0	1	2	3	4	5	6	7	…
h	0	8	14	18	20	20	18	14	…

下列结论：

①足球距离地面的最大高度为 20m；

②足球飞行路线的对称轴是直线 $t=\frac{9}{2}$；

③足球被踢出 9 s 时落地；

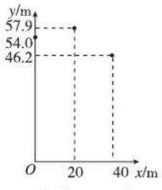
④足球被踢出 1.5 s 时，距离地面的高度是 11 m.

其中正确结论的个数是（　　）

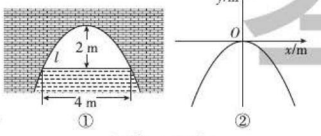
A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

2. [中考·北京]跳台滑雪是冬季奥运会比赛项目之一，运动员起跳后的飞行路线可以看作是抛物线的一部分，运动员起跳后的竖直高度 y（单位：m）与水平距离 x（单位：m）近似满足函数关系 $y=ax^2+bx+c$（$a\neq 0$）. 如图记录了某运动员起跳后 x 与 y 的三组数据，根据上述函数模型和数据，可推断出该运动员起跳后飞行到最高点时，水平距离为（　　）

A. 10m　　B. 15m　　C. 20m　　D. 22.5m



（第 2 题）



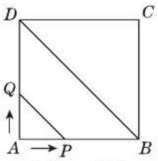
（第 3 题）

3. [模拟·西固]如图①是一个横断面为抛物线形状的拱桥，当水面在 l 时，拱顶（拱桥洞的最高点）离水面 2m，水面宽 4m，如图②建立平面直角坐标系，则抛物线的表达式是（　　）

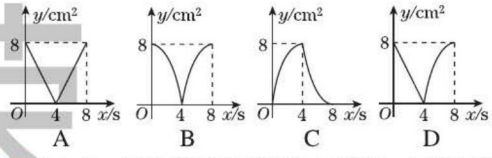
A. $y=-2x^2$　　B. $y=2x^2$

C. $y=-0.5x^2$　　D. $y=0.5x^2$

4. [中考·临沂]如图，正方形 $ABCD$ 的边长为 4 cm，动点 P，Q 同时从点 A 出发，以 1 cm/s 的速度分别沿 $A\to B\to C$ 和 $A\to D\to C$ 的路径向点 C 运动. 设运动时间为 x（单位：s），四边形 $PBDQ$ 的面积为 y（单位：cm^2），则 y 与 x（$0\leqslant x\leqslant 8$）之间的函数关系可用图象表示为（　　）



（第 4 题）

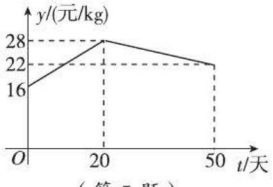


5. [中考·荆门]随着龙虾节的火热举办，某龙虾养殖大户为了发挥技术优势，一次性收购了 10 000 kg 小龙虾，计划养殖一段时间后再出售. 已知每天养殖龙虾的成本相同，放养 10 天的总成本为 166 000 元；放养 30 天的总成本为 178 000 元. 设这批小龙虾放养 t 天后的质量为 a kg，销售单价为 y 元/kg，根据往年的行情预测，a 与 t 的函数关系为 $a=\begin{cases}10\,000\ (0\leqslant t\leqslant 20),\\ 100t+8\,000\ (20<t\leqslant 50).\end{cases}$ y 与 t 的函数关系如图.

（1）设每天的养殖成本为 m 元，收购成本为 n 元，求 m 与 n 的值；

（2）求 y 与 t 的函数关系式；

（3）如果将这批小龙虾放养 t 天后一次性出售所得利润为 W 元，问该龙虾养殖大户将这批小龙虾放养多少天后一次性出售所得利润最大？最大利润是多少？（总成本 = 放养总费用 + 收购成本；利润 = 销售总额 − 总成本）



（第 5 题）

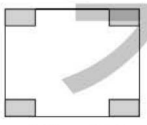
基础题 重难题

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

6. 某小区有一块长 100m、宽 80m 的空地，现将其建成花园广场，设计图案如图，阴影区域为绿化区（四块绿化区是全等矩形），空白区域为活动区，且四周出口一样宽，宽度不小于 50m，不大于 60m，预计活动区每平方米造价 60 元，绿化区每平方米造价 50 元.

（1）设其中一块绿化区的长边长为 x（m），写出工程总造价 y（元）与 x（m）的函数表达式（写出 x 的取值范围）；

（2）如果小区投资 46.9 万元，能否完成工程任务？若能，请写出 x 为整数的所有可能取值；若不能，请说明理由.



（第 6 题）

7. [**中考·永州**]如图，已知抛物线 $y=ax^2+bx+1$ 经过 $A(-1,0)$，$B(1,1)$ 两点.

（1）求该抛物线的表达式.

（2）阅读理解：

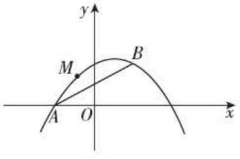
在同一平面直角坐标系中，直线 $l_1:y=k_1x+b_1$（k_1，b_1 为常数，且 $k_1\neq 0$），直线 $l_2:y=k_2x+b_2$（k_2，b_2 为常数，且 $k_2\neq 0$），若 $l_1\perp l_2$，则 $k_1\cdot k_2=-1$.

解决问题：

①若直线 $y=3x-1$ 与直线 $y=mx+2$ 互相垂直，求 m 的值.

②抛物线上是否存在点 P，使得 $\triangle PAB$ 是以 AB 为直角边的直角三角形？若存在，请求出点 P 的坐标；若不存在，请说明理由.

（3）M 是抛物线上一动点，且在直线 AB 的上方（不与 A，B 重合），求点 M 到直线 AB 的距离的最大值.【**导学号**：8603511】



（第 7 题）

荣德基

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

26.3.2 二次函数与一元二次方程、一元二次不等式之间的关系

核心知识
- 二次函数
- 一元二次方程
- 一元二次不等式

知识链接

二次函数与一元二次方程、一元二次不等式之间的关系
- 用图象法解一元二次方程
- 二次函数与一元二次方程（图象与x轴交点个数）
  - 有两个交点⇔有两个不相等的实数根
  - 有一个交点⇔有两个相等的实数根
  - 没有交点⇔没有实数根
- 二次函数与一元二次不等式

点知识·拨考向 速提分

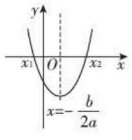
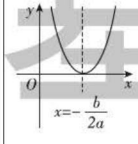
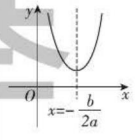
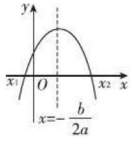
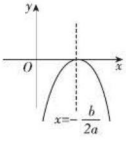
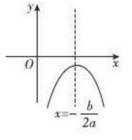
点知识 1 二次函数与一元二次方程的关系

1. 二次函数图象与 x 轴的交点横坐标与一元二次方程根的关系：

一般地，从二次函数 $y=ax^2+bx+c$（$a\neq0$）的图象可知：如果抛物线 $y=ax^2+bx+c$（$a\neq0$）与 x 轴有公共点，公共点的横坐标是 x_0，那么当 $x=x_0$ 时，函数值是 0，因此 $x=x_0$ 是方程 $ax^2+bx+c=0$（$a\neq0$）的一个根.

2. 二次函数与一元二次方程的联系与区别：

一元二次方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq0)$ 与二次函数 $y=ax^2+bx+c(a\neq0)$ 二者之间的内在联系与区别，列表如下：

结果 / 判别式 / 内容		$b^2-4ac>0$	$b^2-4ac=0$	$b^2-4ac<0$
一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$（$a\neq0$）的根的情况		有两个不等实根 $x_{1,2}=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$	有两个相等实根 $x_1=x_2=-\dfrac{b}{2a}$	没有实根
二次函数 $y=ax^2+bx+c$（$a\neq0$）的图象	$a>0$			
	$a<0$			
抛物线与 x 轴的交点		$(x_1,0)$，$(x_2,0)$	$\left(-\dfrac{b}{2a},0\right)$	没有交点

提分·必记

拓宽视野

1. 如果 $y=ax^2+bx+c$（$a\neq0$）的函数值为 m，求 $y=m$ 时的自变量 x 的值，可以解一元二次方程 $ax^2+bx+c=m$；反之，解一元二次方程 $ax^2+bx+c=m$ 可以看成是已知 $y=ax^2+bx+c$ 的函数值为 m，求自变量 x 的值. 方程 $ax^2+bx+c=m$ 的解是抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 与直线 $y=m$ 的公共点的横坐标.
2. 二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 与一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 的关系密切，二者可以相互转化. 已知二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的函数值为 0，求自变量 x 的值，可以看作解一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$；反过来，解一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 可以看作已知二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的函数值为 0，求自变量 x 的值.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

考向▶ 利用二次函数与一元二次方程的关系解与字母系数相关的问题

例 1 二次函数 $y=x^2-6x+n$ 的图象如图 26.3-8，若关于 x 的一元二次方程 $x^2-6x+n=0$ 的一个解为 $x_1=1$，则另一个解 $x_2=$_____.

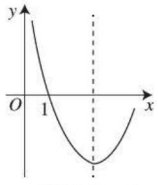


图 26.3-8

解题秘方：紧扣抛物线与 x 轴两交点坐标与对称轴的关系求解.

解：由图象知抛物线的对称轴为直线 $x=-\dfrac{-6}{2}=3$.

又∵抛物线与 x 轴的一个交点为（1，0），

∴由轴对称的性质知点（1，0）以直线 $x=3$ 为对称轴的对称点是（5，0）.

∴方程的另一个解为 $x_2=5$.

答案：5

点知识▶ 2 用图象法解一元二次方程

二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图象与 x 轴公共点的横坐标是一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 的解，因此可以借助二次函数的图象求一元二次方程的解.

1. 利用二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图象与 x 轴的公共点求一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 的解的步骤：

（1）作出二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图象，确定图象与 x 轴公共点的个数，公共点的个数就是方程 $ax^2+bx+c=0$ 的解的个数.

（2）观察图象，函数图象与 x 轴的交点的横坐标就是一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 的解，当函数图象与 x 轴有两个交点，且交点的横坐标不是整数时，可通过不断缩小根所在的范围估计一元二次方程的解.

（3）交点横坐标即为一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 的解.

2. 利用二次函数 $y=ax^2$ 的图象与直线 $y=-bx-c$ 的公共点求方程 $ax^2+bx+c=0$ 的解的步骤：

（1）将一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 化为 $ax^2=-bx-c$ 的形式；

（2）在平面直角坐标系中画出抛物线 $y=ax^2$ 和直线 $y=-bx-c$，并确定抛物线与直线的公共点的坐标；

（3）公共点的横坐标即为一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 的解.

提分·秘诀

方法技巧

利用对称轴法求一元二次方程的根：

根据一元二次方程与二次函数的关系，当已知抛物线与 x 轴一个公共点的坐标和对称轴时，可根据轴对称的性质求出抛物线与 x 轴另一个公共点的坐标，从而求得对应一元二次方程的根.

提分·必记

方法提醒

估计一元二次方程的解的方法：

在难以读出公共点的坐标时，我们还可以通过不断缩小根所在范围估计一元二次方程的解，对于 $y=ax^2+bx+c(a\neq 0)$，如果 $ax_1^2+bx_1+c>0$，且 $ax_2^2+bx_2+c<0$，那么在 x_1 与 x_2 之间存在一个根，取 $x_3=\dfrac{x_1+x_2}{2}$，若 $ax_3^2+bx_3+c>0$，则取 $x_4=\dfrac{x_3+x_2}{2}$；若 $ax_3^2+bx_3+c<0$，则取 $x_4=\dfrac{x_1+x_3}{2}$.

这样不停地取下去，直到达到所要求的精确度为止.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

核心考向▶利用图象法求一元二次方程的近似解

例 2 利用二次函数的图象求一元二次方程 $-x^2+2x-3=-8$ 的近似解（结果精确到 0.1）.

解题秘方一：画出二次函数 $y=-x^2+2x+5$ 的图象，利用二次函数的图象与 x 轴的公共点计算方程的近似解.

解法一：整理方程，得 $-x^2+2x+5=0$.

作函数 $y=-x^2+2x+5$ 的图象如图 26.3-9.

由图象可知，抛物线与 x 轴公共点的横坐标分别在 -2 和 -1，3 和 4 之间，即方程 $-x^2+2x-3=-8$ 的两个实数解分别在 -2 和 -1，3 和 4 之间，用取平均数的方法不断缩小解的取值范围，从而确定方程的近似解.

由图象可知，当 $x=3$ 时，$y>0$；当 $x=4$ 时，$y<0$，

取 3 和 4 的平均数 3.5，当 $x=3.5$ 时，$y=-0.25$，与 $x=3$ 时的函数值异号，所以方程的这个解在 3 和 3.5 之间.

取 3 和 3.5 的平均数 3.25，当 $x=3.25$ 时，$y=0.9375$，与 $x=3.5$ 时的函数值异号，所以方程的这个解在 3.25 和 3.5 之间.

取 3.25 和 3.5 的平均数 3.375，当 $x=3.375$ 时，$y=0.359375$，与 $x=3.5$ 时的函数值异号，所以方程的这个解在 3.375 和 3.5 之间.

由此方法可得到原方程的一个近似解为 3.4.

用同样的方法可得到原方程的另一个近似解为 -1.4.

所以方程 $-x^2+2x-3=-8$ 的解为 $x_1\approx-1.4$，$x_2\approx3.4$.

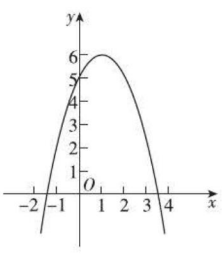


图 26.3-9

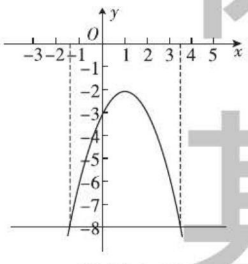


图 26.3-10

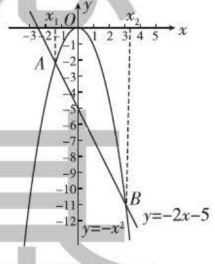


图 26.3-11

解题秘方二：画出二次函数 $y=-x^2+2x-3$ 的图象，再画出直线 $y=-8$，利用两图象的公共点求方程的近似解.

解法二：作出函数 $y=-x^2+2x-3$ 的图象，再画出直线 $y=-8$，如图 26.3-10.

由图象知，方程 $-x^2+2x-3=-8$ 的解是抛物线 $y=-x^2+2x-3$ 与直线 $y=-8$ 的公共点的横坐标，一个公共点的横坐标在 -2 与 -1 之间，另一个公共点的横坐标在 3 与 4 之间.

同样用取平均数的方法，可得方程 $-x^2+2x-3=-8$ 的解为 $x_1\approx-1.4$，$x_2\approx3.4$.

提分·秘诀

特别提醒

用图象法解一元二次方程是数形结合思想的具体应用，通过画函数的图象解一元二次方程是数的直观化的体现，但由于作图或观察存在误差，因此通过这种方法求得的方程的解一般是近似的.

另解

将原方程变形，得 $-x^2=-2x-5$，画出函数 $y=-x^2$ 和 $y=-2x-5$ 的图象，如图 26.3-11.

由图可知，抛物线和直线交于 A，B 两点，分别过 A，B 两点向 x 轴作垂线，可知 A，B 两点的横坐标约为 -1.4 和 3.4，所以方程 $-x^2+2x-3=-8$ 的解是 $x_1\approx-1.4$，$x_2\approx3.4$.

解题通法

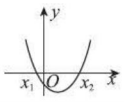
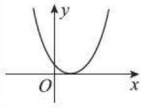
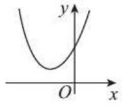
用图象法求一元二次方程的近似解：

用图象法求一元二次方程的近似解时，一般是作出相应的二次函数的图象，确定一元二次方程的解的个数，找出公共点的横坐标的大致范围，然后利用取平均数的方法缩小解所在的范围，通过反复计算求出满足精确度要求的近似解.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

点知识▶ 3 二次函数与一元二次不等式的关系

对于二次函数 $y=ax^2+bx+c$（$a\neq 0$），令 $y>0$ 或 $y<0$，则得到一元二次不等式 $ax^2+bx+c>0$ 或 $ax^2+bx+c<0$，所以求不等式 $ax^2+bx+c>0$ 或 $ax^2+bx+c<0$（$a\neq 0$）的解集，就是求当 x 为何值时，$y>0$ 或 $y<0$. 具体情况如下：（以 $a>0$ 为例）

判别式 b^2-4ac		$b^2-4ac>0$	$b^2-4ac=0$	$b^2-4ac<0$
$y=ax^2+bx+c$（$a>0$）的图象				
一元二次不等式	$ax^2+bx+c>0$（$a>0$）	$x<x_1$ 或 $x>x_2$.	$x\neq -\frac{b}{2a}$.	全体实数.
	$ax^2+bx+c<0$（$a>0$）	$x_1<x<x_2$.	无解.	无解.

拔考向▶ 利用二次函数的图象解一元二次不等式

例 3 利用二次函数的图象解下列不等式：

（1）$x^2-6x>7$；（2）$-x^2+6x>5$.

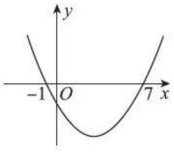
解题秘方：紧扣一元二次不等式与二次函数图象之间的关系，找出对应的自变量的取值范围即可.

解：（1）不等式 $x^2-6x>7$ 可化为 $x^2-6x-7>0$.

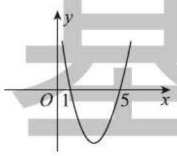
函数 $y=x^2-6x-7$ 的图象与 x 轴交于（-1，0）和（7，0）两点.

如图 26.3-12①，由图象可知当 $x<-1$ 或 $x>7$ 时，图象在 x 轴上方，即 $y>0$.

∴不等式 $x^2-6x>7$ 的解集为 $x<-1$ 或 $x>7$.



①



②

图 26.3-12

（2）不等式 $-x^2+6x>5$ 可化为 $x^2-6x+5<0$.

函数 $y=x^2-6x+5$ 的图象与 x 轴交于（1，0）和（5，0）两点.

如图 26.3-12②，由图象可知当 $1<x<5$ 时，图象在 x 轴下方，即 $y<0$.

∴不等式 $x^2-6x+5<0$ 的解集是 $1<x<5$.

∴原不等式 $-x^2+6x>5$ 的解集是 $1<x<5$.

提分·必记

特别提醒

1. 不等式 $ax^2+bx+c>0$ 或 $ax^2+bx+c<0$（$a\neq 0$）的解集就是二次函数 $y=ax^2+bx+c$（$a\neq 0$）的图象在 x 轴上方或下方的点所对应的 x 的取值范围.

2. $ax^2+bx+c>0$ 恒成立的条件是 $\begin{cases}a>0,\\ b^2-4ac<0,\end{cases}$ $ax^2+bx+c<0$ 恒成立的条件是 $\begin{cases}a<0,\\ b^2-4ac<0.\end{cases}$

提分·秘诀

解法提醒

先将两个不等式分别化成 $ax^2+bx+c>0$ 或 $ax^2+bx+c<0$ 的形式（其中 $a>0$），然后结合抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 在 x 轴上方的部分或抛物线在 x 轴下方的部分对应的 x 的取值范围写出解集. 因此只要求出二次函数的图象与 x 轴的交点坐标，结合草图即可得解.

荣德基

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

点方法·拨技巧 提高分

拔尖角度 1 利用抛物线与 x 轴的交点情况用判别式法求字母的值（范围）

例 4 已知二次函数 $y=2x^2-(m+1)x+m-1$.

（1）求证：不论 m 为何值，函数的图象与 x 轴总有交点，并指出当 m 为何值时，只有一个交点.

（2）当 m 为何值时，函数的图象经过原点？

（3）指出在（2）的条件下，使 $y<0$ 的 x 的取值范围，及使 $y>0$ 的 x 的取值范围.

抛物线与 x 轴交点的个数

解题秘方：（1）用判别式法；（2）用点的坐标与函数的关系；（3）用图象法.

（1）**证明**：函数对应的方程 $2x^2-(m+1)x+m-1=0$ 的 $\Delta=[-(m+1)]^2-4\times2\times(m-1)=m^2+2m+1-8m+8=m^2-6m+9=(m-3)^2$.

显然不论 m 为何值，均有 $\Delta=(m-3)^2\geqslant0$，且当 $m=3$ 时，$\Delta=0$，故不论 m 为何值，抛物线与 x 轴总有交点，且当 $m=3$ 时，只有一个交点.

（2）**解**：∵函数的图象经过原点（0，0），

∴ $0=2\times0^2-(m+1)\times0+m-1$，∴ $m=1$，

即当 $m=1$ 时，函数的图象经过原点.

（3）**解**：由（2）得 $y=2x^2-2x$，其图象大致如图 26.3-13. ∵抛物线与 x 轴的两个交点分别为（0，0），（1，0），∴当 $0<x<1$ 时，$y<0$；当 $x<0$ 或 $x>1$ 时，$y>0$.

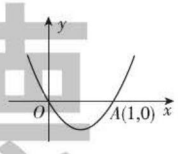


图 26.3-13

拔尖角度 2 利用图象与方程的关系分类讨论求交点坐标

例 5 如果函数 $y=kx^2-kx+3x+1$ 的图象与 x 轴有且只有一个交点，那么交点坐标是_____.

解题秘方：用分类讨论思想求交点坐标.

解：（1）当 $k=0$ 时，函数为 $y=3x+1$，其图象与 x 轴有且只有一个交点，是 $\left(-\frac{1}{3},0\right)$.

（2）当 $k\neq0$ 时，原函数为二次函数.

∵其图象与 x 轴有且只有一个交点，∴ $\Delta=b^2-4ac=(3-k)^2-4k=0$，

即 $k^2-10k+9=0$，解得 $k_1=1$，$k_2=9$.

当 $k=1$ 时，$y=x^2+2x+1$，与 x 轴交于点（-1，0）；

当 $k=9$ 时，$y=9x^2-6x+1$，与 x 轴交于点 $\left(\frac{1}{3},0\right)$.

答案：$\left(-\frac{1}{3},0\right)$ 或（-1，0）或 $\left(\frac{1}{3},0\right)$

挑战·高分

拓宽视野

利用二次函数的图象分析自变量的取值范围（或求不等式的解集）：

1. 从“形”的方面看：不等式 $ax^2+bx+c>0$（$a\neq0$）的解集是二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图象位于 x 轴上方的所有点的横坐标；不等式 $ax^2+bx+c<0$（$a\neq0$）的解集是二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图象位于 x 轴下方的所有点的横坐标.
2. 从“数”的方面看：当二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的函数值 $y>0$ 时，其自变量 x 的取值范围是不等式 $ax^2+bx+c>0$ 的解集；当二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的函数值 $y<0$ 时，其自变量 x 的取值范围是不等式 $ax^2+bx+c<0$ 的解集.

挑战·高分

解题提醒

本例条件中并未说明函数是几次函数或图象是什么图象，因此对它的不同情况都要予以讨论.

解答时，先由系数 k 的取值情况确定函数是哪类函数，然后再求交点坐标. 若抛物线与 x 轴只有一个交点，则这个交点就是抛物线的顶点.

实德基

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

拔尖角度▸ 3 利用判断解的个数法解函数图象的公共点问题

挑战·高分

例 6 已知抛物线 G 的表达式为 $y=ax^2+bx+c$，且抛物线 G 经过（-5，0），$\left(0,\ \frac{5}{2}\right)$，（$1$，$6$）三点，直线 l 的表达式为 $y=2x-3$.

（1）求抛物线 G 的表达式；

（2）求证：抛物线 G 与直线 l 无公共点；

（3）若与直线 l 平行的直线 $y=2x+m$ 与抛物线 G 只有一个公共点 P，求 P 点的坐标.

解题秘方：用根的判别式与公共点的关系解答.

（1）**解**：∵抛物线 G 经过（-5，0），$\left(0,\ \frac{5}{2}\right)$，（$1$，$6$）三点，

$$\therefore \begin{cases} 0=25a-5b+c, \\ \frac{5}{2}=c, \\ 6=a+b+c, \end{cases} \text{解得} \begin{cases} a=\frac{1}{2}, \\ b=3, \\ c=\frac{5}{2}. \end{cases}$$

∴抛物线 G 的表达式为 $y=\frac{1}{2}x^2+3x+\frac{5}{2}$.

（2）**证明**：由 $\begin{cases} y=2x-3, \\ y=\frac{1}{2}x^2+3x+\frac{5}{2}, \end{cases}$

消去 y，得 $\frac{1}{2}x^2+x+\frac{11}{2}=0$.

∵ $\Delta=1-4\times\frac{1}{2}\times\frac{11}{2}=-10<0$,

∴方程无实根，即抛物线 G 与直线 l 无公共点.

（3）**解**：由 $\begin{cases} y=2x+m, \\ y=\frac{1}{2}x^2+3x+\frac{5}{2}, \end{cases}$

消去 y，得 $\frac{1}{2}x^2+x+\frac{5}{2}-m=0$. ①

∵抛物线 G 与直线 $y=2x+m$ 只有一个公共点 P，

∴ $\Delta=1-4\times\frac{1}{2}\times\left(\frac{5}{2}-m\right)=0$，解得 $m=2$.

把 $m=2$ 代入方程①，解得 $x=-1$.

把 $x=-1$ 代入 $y=\frac{1}{2}x^2+3x+\frac{5}{2}$ 中，得 $y=0$.

∴ P 点的坐标为（-1，0）.

解法提醒

1. 把已知的三点坐标分别代入 $y=ax^2+bx+c$ 中，解关于 a，b，c 的方程组即可.
2. 要证抛物线 G 与直线 l 无公共点，就是证明抛物线 G 与直线 l 的表达式组成的方程组无实数解.
3. 若直线 $y=2x+m$ 与抛物线 G 只有一个公共点 P，则由它们的表达式组成的方程组有唯一解，即消去 y 后所得关于 x 的一元二次方程的根的判别式等于 0

技巧点拨

确定公共点个数的方法：

解关于直线与抛物线的公共点个数问题，即求直线与抛物线的表达式联立组成的方程组，消去 y 后得到的一元二次方程的解的个数问题，从而转化为所得到的一元二次方程的根的判别式的符号问题.

有两个公共点，则 $\Delta>0$；有一个公共点，则 $\Delta=0$；无公共点，则 $\Delta<0$.

荣德基

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

点中考·拨模拟 得满分

中考探秘 中考中关于二次函数与一元二次方程的联系，主要考查从二次函数的角度看一元二次方程，有时还与一元二次不等式、一次函数及几何中的一些知识联系在一起进行考查，综合考查函数的性质和方程思想，解答此类题的关键是熟悉函数与方程的关系以及能从图象上获取有价值的信息，题型主要有选择题和解答题.

三年中考兵法

考法1 利用二次函数的图象和性质解不等关系问题

例7 [中考·咸宁]如图26.3-14是二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图象，下列结论：①二次三项式 ax^2+bx+c 的最大值为4；

② $4a+2b+c<0$；

③一元二次方程 $ax^2+bx+c=1$ 的两根之和为 -1；

④使 $y\leqslant 3$ 成立的 x 的取值范围是 $x\geqslant 0$.

其中正确的个数有（　　）

A. 1个　　B. 2个　　C. 3个　　D. 4个

试题评析：本题考查的是二次函数的图象、二次函数的最值、二次函数与不等式，掌握二次函数的性质、正确获取图象信息是解题的关键.

解：∵抛物线的顶点坐标为（-1，4），

∴二次三项式 ax^2+bx+c 的最大值为4，①正确；

∵ $x=2$ 时，$y<0$，∴ $4a+2b+c<0$，②正确；

根据抛物线的对称性可知，一元二次方程 $ax^2+bx+c=1$ 的两根之和为 -2，③错误；

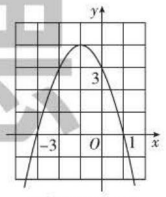


图 26.3-14

使 $y\leqslant 3$ 成立的 x 的取值范围是 $x\geqslant 0$ 或 $x\leqslant -2$，④错误.

答案：B

考法2 利用抛物线与直线的关系求交点横坐标和的范围

例8 [中考·北京]在平面直角坐标系 xOy 中，抛物线 $y=x^2-4x+3$ 与 x 轴交于点 A、B（点 A 在点 B 的左侧），与 y 轴交于点 C.

（1）求直线 BC 的表达式；

（2）垂直于 y 轴的直线 l 与抛物线交于点 $P(x_1, y_1)$，$Q(x_2, y_2)$，与直线 BC 交于点 $N(x_3, y_3)$，若 $x_1<x_2<x_3$，结合函数的图象，求 $x_1+x_2+x_3$ 的取值范围.

试题评析：本题考查了抛物线与直线的交点，解答(2)问时，利用了“数形结合”的数学思想，降低了解题的难度.

解：（1）由 $y=x^2-4x+3$，得 $C(0, 3)$，$y=(x-3)(x-1)$，

∴ $A(1, 0)$，$B(3, 0)$，

冲刺·满分

思路点拨

1. 根据抛物线的顶点坐标确定二次三项式 ax^2+bx+c 的最大值；
2. 由图象知当 $x=2$ 时，$y<0$，即 $4a+2b+c<0$；
3. 由于抛物线的对称轴为 $x=\frac{-3+1}{2}=-1$，由抛物线的对称性知 y 取一个值时有两个对应点，其对应的两点的横坐标之和为 -2，∴一元二次方程 $ax^2+bx+c=1$ 的两根之和为 -2；
4. 由图象法求出.

另解

∵方程 $x^2-4x+3=0$ 的两根为 $x_1=1$，$x_2=3$，

∴ $A(1, 0)$，$B(3, 0)$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

设直线 BC 的表达式为 $y=kx+b$（$k\neq0$），

则 $\begin{cases}b=3,\\3k+b=0,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}k=-1,\\b=3.\end{cases}$

∴直线 BC 的表达式为 $y=-x+3$.

（2）如图 26.3−15，

∵ $y=x^2-4x+3=x^2-4x+4-4+3=(x-2)^2-1$，

∴抛物线 $y=x^2-4x+3$ 的顶点坐标为（2，-1），对称轴为直线 $x=2$.

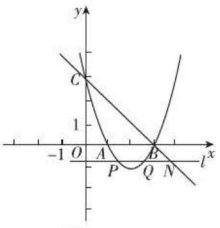


图 26.3−15

∵ $P(x_1,y_1)$、$Q(x_2,y_2)$ 两点关于抛物线的对称轴对称，

∴ $2=\dfrac{x_1+x_2}{2}$，即 $x_1+x_2=4$.

由 $x_1<x_2<x_3$，结合函数的图象可得，$-1<y_3<0$，即 $-1<-x_3+3<0$.

∴ $3<x_3<4$，∴ $7<x_1+x_2+x_3<8$.

解读

解答（2）问的关键是确定 x_3 的范围.

考法 3 利用抛物线与直线的交点求与面积相关的问题

例 9 [中考·黄冈]已知直线 l：$y=kx+1$ 与抛物线 $y=x^2-4x$.

（1）求证：直线 l 与该抛物线总有两个交点；

（2）设直线 l 与该抛物线两交点为 A，B，O 为原点，当 $k=-2$ 时，求 $\triangle OAB$ 的面积.

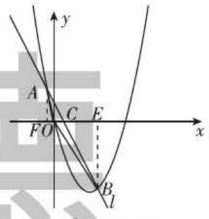


图 26.3−16

试题评析：本题考查二次函数的综合问题，涉及解二元二次方程组，根的判别式，三角形的面积公式等知识，综合程度较高，弄清二次函数与一元二次方程之间的关系，点的坐标与它表示几何位置的关系是解题的关键.

（1）**证明**：联立 $\begin{cases}y=kx+1,\\y=x^2-4x,\end{cases}$ 化简可得 $x^2-(4+k)x-1=0$，

∴ $\Delta=(4+k)^2+4>0$，故直线 l 与该抛物线总有两个交点；

（2）**解**：当 $k=-2$ 时，$y=-2x+1$.

如图 26.3−16，过点 A 作 $AF\perp x$ 轴于 F，过点 B 作 $BE\perp x$ 轴于 E.

联立 $\begin{cases}y=x^2-4x,\\y=-2x+1,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x=1+\sqrt{2},\\y=-1-2\sqrt{2},\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x=1-\sqrt{2},\\y=2\sqrt{2}-1.\end{cases}$

∴ $A(1-\sqrt{2},\ 2\sqrt{2}-1)$，$B(1+\sqrt{2},\ -1-2\sqrt{2})$.

∴ $AF=2\sqrt{2}-1$，$BE=1+2\sqrt{2}$.

易求得直线 $y=-2x+1$ 与 x 轴的交点 C 为 $(\dfrac{1}{2},\ 0)$. ∴ $OC=\dfrac{1}{2}$.

∴ $S_{\triangle AOB}=S_{\triangle AOC}+S_{\triangle BOC}=\dfrac{1}{2}OC\cdot AF+\dfrac{1}{2}OC\cdot BE$

$=\dfrac{1}{2}OC\cdot(AF+BE)=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{2}\times(2\sqrt{2}-1+1+2\sqrt{2})$

$=\sqrt{2}$.

方法技巧

- 对于两个函数图象交点的问题，一般要将函数问题转化为由两个函数表达式组成的方程组来解；因为这两个函数的公共解一定是这两个函数图象的交点.
- 解图象与几何的综合问题，要注意表示几何的量与点的坐标的区别：表示几何的量都是正数，表示点的坐标有正、有负.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

1. [模拟·滨海]二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 中，函数 y 与自变量 x 的部分对应值如下表，则方程 $ax^2+bx+c=0$ 的一个解的范围是（　　）

x	6.17	6.18	6.19
y	−0.03	−0.01	0.02

A. $-0.03<x<-0.01$　　B. $-0.01<x<0.02$

C. $6.18<x<6.19$　　D. $6.17<x<6.18$

2. [中考·兰州]下表是二次函数 $y=x^2+3x-5$ 的自变量 x 与函数值 y 的对应值：

x	1	1.1	1.2	1.3	1.4
y	−1	−0.49	0.04	0.59	1.16

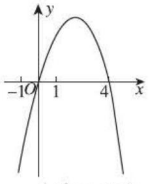
那么方程 $x^2+3x-5=0$ 的一个近似根是（　　）

A. 1　　B. 1.1　　C. 1.2　　D. 1.3

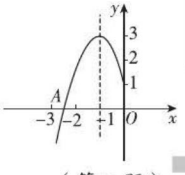
3. [模拟·蓝田]二次函数 $y=-x^2+mx$ 的图象如图，对称轴为直线 $x=2$，若关于 x 的一元二次方程 $-x^2+mx-t=0$（t 为实数）在 $1<x<5$ 的范围内有解，则 t 的取值范围是（　　）

A. $t>-5$　　B. $-5<t<3$

C. $3<t\leqslant 4$　　D. $-5<t\leqslant 4$



（第3题）



（第5题）

4. [中考·苏州]若二次函数 $y=ax^2+1$ 的图象经过点 $(-2,0)$，则关于 x 的方程 $a(x-2)^2+1=0$ 的实数根为（　　）

A. $x_1=0$，$x_2=4$　　B. $x_1=-2$，$x_2=6$

C. $x_1=\frac{3}{2}$，$x_2=\frac{5}{2}$　　D. $x_1=-4$，$x_2=0$

5. [中考·广安]如图，抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 的顶点为 $B(-1,3)$，与 x 轴的交点 A 在点 $(-3,0)$ 和 $(-2,0)$ 之间，以下结论：① $b^2-4ac=0$；② $a+b+c>0$；③ $2a-b=0$；④ $c-a=3$.

其中正确的有（　　）个.

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

6. [中考·泰安]已知二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的 y 与 x 的部分对应值如下表：

x	−1	0	1	3
y	−3	1	3	1

下列结论：①抛物线的开口向下；②其图象的对称轴为 $x=1$；③当 $x<1$ 时，函数值 y 随 x 的增大而增大；④方程 $ax^2+bx+c=0$ 有一个根大于4. 其中正确的结论有（　　）

A. 1个　　B. 2个　　C. 3个　　D. 4个

7. 已知抛物线 $y=(x-m)^2-(x-m)$，其中 m 是常数.

（1）求证：不论 m 为何值，该抛物线与 x 轴一定有两个公共点.

（2）若该抛物线的对称轴为直线 $x=\frac{5}{2}$.

①求该抛物线对应的函数表达式；

②把该抛物线沿 y 轴向上平移多少个单位长度后，得到的抛物线与 x 轴只有一个公共点.

8. [中考·青岛]某企业设计了一款工艺品，每件工艺品的成本是50元，为了合理定价，投放市场进行试销. 据市场调查，销售单价是100元时，每天的销售量是50件，而销售单价每降低1元，每天就可多售出5件，但要求销售单价不得低于成本，且不超过100元.

（1）求出每天的销售利润 y 元与销售单价 x 元之间的函数关系式；

（2）销售单价为多少元时，每天的销售利润最大？最大利润是多少？

（3）如果该企业要使每天的销售利润不低于4 000元，且每天的总成本不超过7 000元，那么销售单价应控制在什么范围内？（每天的总成本＝每件的成本×每天的销售量）

未经授权

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

对称轴在二次函数中的巧妙应用

荣老师告诉你 二次函数的图象——抛物线是一个轴对称图形，对称轴是过顶点且垂直于 x 轴的一条直线．由一般式 $y=ax^2+bx+c$，可得对称轴为 $x=-\frac{b}{2a}$；由顶点式 $y=a(x-h)^2+k$ 可知对称轴为 $x=h$；由交点式 $y=a(x-x_1)(x-x_2)$ 可知对称轴为 $x=\frac{x_1+x_2}{2}$；若知抛物线上纵坐标相同的两个点 (m, a)，(n, a)，则对称轴为 $x=\frac{m+n}{2}$．

技巧一 利用对称轴求抛物线与 x 轴或平行于 x 轴的直线的交点坐标

例 1 [中考·齐齐哈尔]抛物线 $y=ax^2+bx+c$（$a\neq 0$）的对称轴为直线 $x=1$，与 x 轴的一个交点坐标为 $(-1, 0)$，其部分图象如图 1．下列结论：

① $4ac<b^2$；

② 方程 $ax^2+bx+c=0$ 的两个根是 $x_1=-1$，$x_2=3$；

③ $3a+c>0$；

④ 当 $y>0$ 时，x 的取值范围是 $-1\leqslant x<3$；

⑤ 当 $x<0$ 时，y 随 x 的增大而增大．

其中结论正确的个数是（　　）

A. 4 个　　B. 3 个　　C. 2 个　　D. 1 个

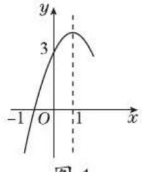


图 1

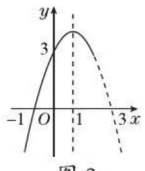


图 2

解题秘方：先根据抛物线的对称性得到抛物线与 x 轴的另一个交点坐标，再由交点个数得到 b^2-4ac 的符号，根据图象得到，$y>0$ 时，x 的范围以及 $x<0$ 时，函数的增减性．

解：如图 2，根据抛物线的对称性可知抛物线与 x 轴的另一个交点为 $(3, 0)$，∵抛物线 $y=ax^2+bx+c(a\neq 0)$ 与 x 轴有两个公共点 $(-1, 0)$、$(3, 0)$，∴方程 $ax^2+bx+c=0$ 的两个根是 $x_1=-1$，$x_2=3$，∴结论②正确；∵ $b^2-4ac>0$，∴ $4ac<b^2$，∴结论①正确；∵ $-\frac{b}{2a}=1$，∴ $b=-2a$，∵当 $x=-1$ 时，$y=0$，∴ $a-b+c=0$，∴ $a-(-2a)+c=0$，∴ $3a+c=0$，∴结论③错误；由图象可知，只有当 $-1<x<3$ 时，对应的函数图象才在 x 轴上方，∴结论④错误；由图象可知，在 $x\leqslant 1$ 的范围之内，y 都随 x 的增大而增大，∴结论⑤正确．∴正确结论有①②⑤，故选 B．

答案：B

例 2 [中考·宿迁]当 $x=m$ 或 $x=n(m\neq n)$ 时，代数式 x^2-2x+3 的值相等，则 $x=m+n$ 时，代数式 x^2-2x+3 的值为_____．

解题秘方：由代数式 x^2-2x+3 联想到二次函数，根据题意代数式的值相等，转译为函数语言就是：当 $x=m$ 或 $x=n$ 时，函数 $y=x^2-2x+3$ 的函数值相等．根据抛物线的对称性可以列出关于 m，n 的等式，进而求出 $m+n$ 的值，进而获得答案．

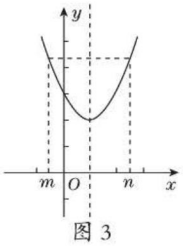


图 3

解：如图 3，将代数式 x^2-2x+3 的值可以看成关于 x 的二次函数 $y=x^2-2x+3$ 的函数值．此抛物线的对称轴为直线 $x=1$，同时对称轴又可以表示为直线 $x=\frac{m+n}{2}$，所以 $m+n=2$，将 $x=2$ 代入 x^2-2x+3 计算得到结果为 3．

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

答案：3

方法点拨：数形结合思想是解决二次函数图象问题的基本数学思想，在解题时应关注抛物线顶点、与坐标轴（x 轴、y 轴）的交点、与 x 轴的位置关系、象限分布等关键元素，最关键是要充分利用对称轴，因为这些元素都与对称轴有关.

技巧二 ▶ 利用对称轴比较函数值的大小

例 3 已知点 $A(4, y_1)$，$B(\sqrt{3}, y_2)$，$C(-2, y_3)$ 都在二次函数 $y=(x-2)^2-1$ 的图象上，则 y_1，y_2，y_3 的大小关系是_____.

解题秘方：思路一：由顶点式可知抛物线的对称轴是直线 $x=2$，A，B，C 三点在对称轴两侧，可以利用 A 点的对称点转化到对称轴左侧，依据开口向上和在对称轴左侧 y 随 x 的增大而减小进行比较. 思路二：抛物线开口向上，顶点纵坐标最小，由图象的变化趋势可知抛物线上的点距离对称轴越近（即离顶点越近）纵坐标越小，从而进行比较.

解：**方法一**：$\because y=(x-2)^2-1$，

$\therefore$ 抛物线的对称轴为直线 $x=2$.

$\therefore$ 点 $A(4, y_1)$ 关于 $x=2$ 的对称点是 $(0, y_1)$.

$\because -2<0<\sqrt{3}<2$，且抛物线开口向上，

$\therefore y_2<y_1<y_3$.

方法二：设 A，B，C 三点到抛物线对称轴的距离分别为 d_1，d_2，d_3.

$\because y=(x-2)^2-1$，

$\therefore$ 抛物线的对称轴为直线 $x=2$.

$\therefore d_1=2$，$d_2=2-\sqrt{3}$，$d_3=4$.

$\because 2-\sqrt{3}<2<4$，且抛物线开口向上，

$\therefore y_2<y_1<y_3$.

答案：$y_2<y_1<y_3$

方法点拨：抛物线上点的纵坐标比较大小的基本方法：

（1）利用抛物线上的对称点的纵坐标相等，把各点转化到对称轴的同侧，再利用二次函数的增减性进行比较；

（2）利用“开口向上，抛物线上的点距离对称轴越近，点的纵坐标越小；开口向下，抛物线上的点距离对称轴越近，点的纵坐标越大”进行比较.

技巧三 ▶ 利用对称轴确定函数的最值

例 4 [中考·天津]已知二次函数 $y=(x-h)^2+1$（h 为常数），在自变量 x 的值满足 $1\leqslant x\leqslant 3$ 的情况下，与其对应的函数值 y 的最小值为 5，则 h 的值为（　　）

A. 1 或 −5　　B. −1 或 5

C. 1 或 −3　　D. 1 或 3

解题秘方：先分析出 x 取何值时 y 取最小值，此时对称轴在哪个位置，再按照对称轴的位置分类讨论是解题的关键. 分如下两种情况：（1）若 $1\leqslant x\leqslant 3<h$，当 $x=3$ 时，y 取得最小值 5；（2）若 $h<1\leqslant x\leqslant 3$，当 $x=1$ 时，y 取得最小值 5，分别列出关于 h 的方程求解即可.

解：根据题意知，最小值肯定不是当 $x=h$ 时 y 的值，对称轴 $x=h$ 中的 h 不在 $1\leqslant x\leqslant 3$ 范围内.

由抛物线开口向上知，当 $x>h$ 时，y 随 x 的增大而增大，当 $x<h$ 时，y 随 x 的增大而减小，

$\therefore$ 若 $h<1\leqslant x\leqslant 3$，则当 $x=1$ 时，y 取得最小值 5，于是有 $(1-h)^2+1=5$，

解得 $h=-1$ 或 $h=3$（舍去）；

若 $1\leqslant x\leqslant 3<h$，则当 $x=3$ 时，y 取得最小值 5，于是有 $(3-h)^2+1=5$，解得 $h=5$ 或 $h=1$（舍去）.

综上，h 的值为 −1 或 5，故选 B.

答案：B

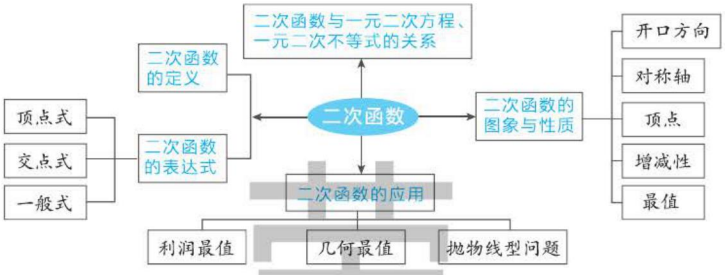
方法点拨：仔细分析本题会发现函数值 y 的最小值为 5 时是在自变量 x 的某一范围内，本题就是用这一函数最小值去确定自变量 x 的值，进而确定 h 的值.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

章末核心知识分类整合

核心结构专题

结构必知



核心必读

1. 二次函数的表达式的几种形式：（1）$y=ax^2$；（2）$y=ax^2+bx$；（3）$y=ax^2+c$；（4）$y=ax^2+bx+c$；（5）$y=a(x-h)^2$；（6）$y=a(x-h)^2+k$；（7）$y=a(x-x_1)(x-x_2)$.

2. 抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 的对称轴是直线 $x=-\dfrac{b}{2a}$，顶点坐标公式是 $\left(-\dfrac{b}{2a},\dfrac{4ac-b^2}{4a}\right)$.

3. 抛物线 $y=ax^2+bx+c$，当 $a>0$ 时，开口向上，在对称轴的左侧 y 随 x 的增大而减小，在对称轴的右侧 y 随 x 的增大而增大，当 $x=-\dfrac{b}{2a}$ 时，y 有最小值 $\dfrac{4ac-b^2}{4a}$；当 $a<0$ 时，开口向下，在对称轴的左侧 y 随 x 的增大而增大，在对称轴的右侧 y 随 x 的增大而减小，当 $x=-\dfrac{b}{2a}$ 时，y 有最大值 $\dfrac{4ac-b^2}{4a}$.

4. 抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 与 x 轴的交点个数与一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 的根的情况有关，该一元二次方程的两根就是抛物线与 x 轴交点的横坐标.

知识方法专题

知识必学

专题一 二次函数的图象

链接中考» 二次函数图象的特征主要从开口方向、对称轴、顶点坐标、与坐标轴的交点坐标几个方面考查；两个二次函数图象之间的关系主要有平移、轴对称、中心对称等，考查的形式主要是选择题.

类型一 单个图象的位置特征

例1 [中考·深圳]二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图象如图 26-1，给出以下结论：① $a>0$，② $b>0$，③ $c<0$，④ $b^2-4ac>0$，其中所有正确结论的序号是（　　）

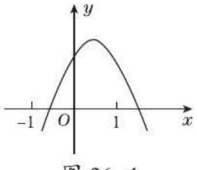


图 26-1

A. ②④　　B. ①③

C. ③④　　D. ①②③

解：图象开口向下，$\therefore a<0$，①错误；对称轴在 y 轴右侧，$\therefore -\dfrac{b}{2a}>0$，$\therefore b>0$，②正确；图象与 y 轴交点在 y 轴正半轴上，$\therefore c>0$，

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

③错误；图象与 x 轴有两个不同的交点，即方程 $ax^2+bx+c=0$ 有两个不等实根，$\therefore b^2-4ac>0$，④正确．故选 A.

答案：A

类型二　两个图象之间的位置变换

例 2　[中考·荆州]将抛物线 $y=x^2-2x+3$ 向上平移 2 个单位长度，再向右平移 3 个单位长度后，得到的抛物线的表达式为（　　）

A. $y=(x-1)^2+4$　　B. $y=(x-4)^2+4$

C. $y=(x+2)^2+6$　　D. $y=(x-4)^2+6$

解：将抛物线 $y=x^2-2x+3=(x-1)^2+2$ 向上平移 2 个单位长度，得 $y=(x-1)^2+4$，再向右平移 3 个单位长度后，得到的抛物线的表达式为 $y=(x-4)^2+4$，故选择 B.

答案：B

方法点拨：两个函数图象作全等的变换，则这两个函数图象上所有的点都作同样的变换，求变换后的图象的表达式时，一般利用顶点式，确定顶点坐标是关键，再任找一点作为辅助的条件即可．

专题二　二次函数图象的性质

链接中考» 二次函数图象的性质主要有两个：一是轴对称性，二次函数的图象关于对称轴对称；二是增减性，在对称轴的同侧具有相同的增减性，当开口向上时，在对称轴的左侧 y 随 x 的增大而减小，在对称轴的右侧 y 随 x 的增大而增大；当开口向下时，在对称轴的左侧 y 随 x 的增大而增大，在对称轴的右侧 y 随 x 的增大而减小．考查时两个性质有时同时考查，一般以填空题、选择题形式出现．

例 3　[中考·常州]已知二次函数 $y=x^2+(m-1)x+1$，当 $x>1$ 时，y 随 x 的增大而增大，则 m 的取值范围是（　　）

A. $m=-1$　　B. $m=3$

C. $m\leqslant -1$　　D. $m\geqslant -1$

解：由二次项系数为正，可知抛物线开口向上，在对称轴右侧，y 的值随 x 值的增大而增大，可得对称轴应为直线 $x=1$ 或在其左侧．

由于抛物线的对称轴为直线 $x=-\dfrac{m-1}{2}$，

所以 $-\dfrac{m-1}{2}\leqslant 1$，解得 $m\geqslant -1$.

答案：D

专题三　求二次函数的表达式

链接中考» 二次函数的表达式是两个变量之间的关系式，所以求二次函数的表达式的方法有两种：一种是直接根据两个变量之间的等量关系列出函数表达式；另一种是用待定系数法先设出函数表达式，然后根据函数图象上点的坐标或几对对应值求出函数表达式．考查的形式多样，填空题、选择题和解答题都会考查．

类型一　根据两个变量之间的关系求表达式

例 4　如图 26-2，已知抛物线 $y=-\dfrac{1}{2}x^2+bx+c$ 与坐标轴分别交于点 $A(0,8)$，$B(8,0)$ 和点 E，动点 C 从原点 O 开始沿 OA 方向以每秒 1 个单位长度的速度移动，动点 D 从点 B 开始沿 BO 方向以每秒 1 个单位长度的速度移动，动点 C，D 同时出发，当动点 D 到达原点 O 时，点 C，D 停止运动．

（1）求抛物线的表达式；

（2）求 $\triangle CED$ 的面积 S 关于 D 点运动时间 t（s）的函数表达式；当 t 为何值时，$\triangle CED$ 的面积最大？最大面积是多少？

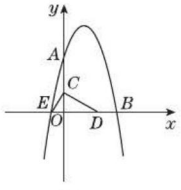


图 26-2

解题秘方：（1）把点 A，B 的坐标代入表达式，用待定系数法求解即可；

（2）$\triangle CED$ 的面积 $S=\dfrac{1}{2}\times DE\times CO$，分

基础·中考·德州

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

别用含t的式子表示DE，CO，然后把二次函数配方，求最值即可．

解：（1）将（0，8），（8，0）代入抛物线$y=-\frac{1}{2}x^2+bx+c$得：

$$\begin{cases}c=8,\\-\frac{1}{2}\times64+8b+c=0,\end{cases}$$

解得$\begin{cases}b=3,\\c=8.\end{cases}$

∴抛物线的表达式为$y=-\frac{1}{2}x^2+3x+8$.

（2）∵点B（8，0），

∴$OB=8$.

令$y=0$，得$-\frac{1}{2}x^2+3x+8=0$，

解得$x_1=8$，$x_2=-2$，

∴点E（-2，0）．

∴$OE=2$.

根据题意得：当D点运动t s时，$BD=t$，$OC=t$，

∴$OD=8-t$.

∴$DE=OE+OD=10-t$.

∴$S=\frac{1}{2}\times DE\times OC=\frac{1}{2}\times(10-t)\times t=-\frac{1}{2}t^2+5t$（$0<t\leqslant8$），

即$S=-\frac{1}{2}t^2+5t=-\frac{1}{2}(t-5)^2+\frac{25}{2}$.

∴当$t=5$时，$S_{最大}=\frac{25}{2}$.

方法点拨：利用两个变量之间的关系求表达式，关键是要分析出两点：一是两个变量中每个变量表示的实际意义；二是两个变量之间的数量关系．

类型二　根据图象上的点的坐标求表达式

例5　［中考·龙东］如图26−3，抛物线$y=x^2-bx+c$交x轴于点A（1，0），交y轴于点B，对称轴是直线$x=2$.

（1）求抛物线的表达式．

（2）点P是抛物线对称轴上的一个动点，是否存在点P，使△PAB的周长最小？若存在，求出点P的坐标；若不存在，请说明理由．

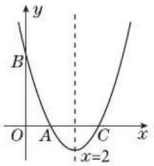


图26−3

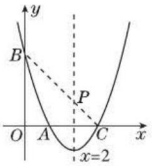


图26−4

解：（1）由题意得$\begin{cases}1-b+c=0,\\\frac{b}{2}=2,\end{cases}$

解得$\begin{cases}b=4,\\c=3.\end{cases}$

∴抛物线的表达式为$y=x^2-4x+3$.

（2）存在．

∵点A与点C关于直线$x=2$对称，

∴连结BC与直线$x=2$交于点P，则点P即为所求，如图26−4.

根据抛物线的对称性可知，点C的坐标为（3，0）．

抛物线$y=x^2-4x+3$与y轴的交点为B（0，3）．

设直线BC的表达式为$y=kx+b_1$，

则$\begin{cases}3k+b_1=0,\\b_1=3,\end{cases}$解得$\begin{cases}k=-1,\\b_1=3,\end{cases}$

∴直线BC的表达式为$y=-x+3$，

当$x=2$时，$y=-2+3=1$.

∴点P的坐标为（2，1）．

方法点拨：求有函数图象的函数表达式，一般都是采用待定系数法，根据函数图象提供的信息求出函数表达式．

专题四　二次函数与一元二次方程或不等式之间的关系

链接中考» 二次函数与一元二次方程的关系，关键就是看函数图象与x轴的交点坐标；解决函数值大于零或小于零的问题，就是看函数图象在x轴上方或下方的问题．考查时主要以解答题的形式出现．

荣德基

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

例6 [中考·滨州]根据下列要求，解答相关问题.

(1) 请补全以下求不等式 $-2x^2-4x \geqslant 0$ 的解集的过程.

①构造函数，画出图象：根据不等式特征构造二次函数 $y=-2x^2-4x$；并在下面的坐标系中(如图26-5)画出二次函数 $y=-2x^2-4x$ 的图象(只画出图象即可).

②求得界点，标示所需：当 $y=0$ 时，求得方程 $-2x^2-4x=0$ 的解为_____；并用线标示出函数 $y=-2x^2-4x$ 图象中 $y \geqslant 0$ 的部分.

③借助图象，写出解集：由所标示图象，可得不等式 $-2x^2-4x \geqslant 0$ 的解集为_____.

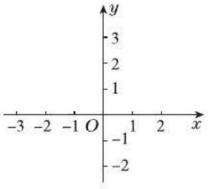


图 26-5

(2) 利用(1)中求不等式解集的步骤，求不等式 $x^2-2x+1 < 4$ 的解集.

①构造函数，画出图象；

②求得界点，标示所需；

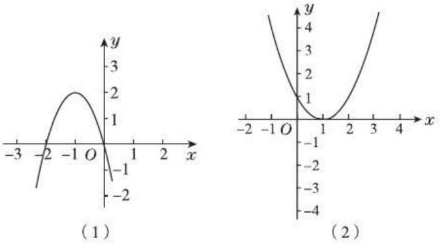
③借助图象，写出解集.

(3) 参照以上两个求不等式解集的过程，借助一元二次方程的求根公式，直接写出关于 x 的不等式 $ax^2+bx+c > 0$ ($a > 0$) 的解集.

解：(1)①如图26-6(1).

② $x_1=0$，$x_2=-2$；图略.

③ $-2 \leqslant x \leqslant 0$



(1)　　(2)

图 26-6

(2)①构造二次函数 $y=x^2-2x+1$，并画出图象如图26-6(2).

②当 $y=4$ 时，求得方程 $x^2-2x+1=4$ 的解为 $x_1=3$，$x_2=-1$. 图略.

③借助图象，直接写出不等式 $x^2-2x+1 < 4$ 的解集为 $-1 < x < 3$.

(3)①当 $b^2-4ac > 0$ 时，解集为

$$x > \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \text{或} x < \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a};$$

②当 $b^2-4ac=0$ 时，解集为 $x \neq -\frac{b}{2a}$；

③当 $b^2-4ac < 0$ 时，解集为全体实数.

专题五 二次函数的应用

链接中考» 二次函数的应用主要有两种形式，第一种是在实际问题中建立二次函数模型，利用二次函数的性质求解；第二种是二次函数与其他知识的综合应用. 考查时多以解答题的形式出现.

类型一 二次函数的实际应用

例7 [中考·鄂州]鄂州市化工材料经销公司购进一种化工材料若干千克，价格为每千克30元，物价部门规定其销售单价不高于每千克60元，不低于每千克30元. 经市场调查发现，日销售量 y(千克)是销售单价 x(元)的一次函数，且当 $x=60$ 时，$y=80$；当 $x=50$ 时，$y=100$. 在销售过程中，每天还要支付其他费用450元.

(1) 求 y 与 x 的函数表达式，并写出自变量 x 的取值范围；

(2) 求该公司销售该材料日获利 w(元)与销售单价 x(元)之间的函数表达式；

(3) 当销售单价为多少元时，该公司日获利最大？最大利润是多少元？

解：(1) 设 $y=kx+b$，由题意得：

$$\begin{cases} 80=60k+b, \\ 100=50k+b, \end{cases}$$

荣德基

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

解得 $\begin{cases}k=-2,\\ b=200.\end{cases}$

$\therefore y=-2x+200\ (30\leqslant x\leqslant 60)$.

（2）$w=(x-30)(-2x+200)-450=-2x^2+260x-6\,450$.

（3）$w=-2x^2+260x-6\,450=-2(x-65)^2+2\,000$.

$\because -2<0$，$\therefore$ 当 $x<65$ 时，w 随 x 的增大而增大.

又 $\because 30\leqslant x\leqslant 60$，$\therefore$ 当 $x=60$ 时，w 有最大值，$w_{最大}=1\,950$.

$\therefore$ 当销售单价为 60 元时，该公司日获利最大，最大利润是 1 950 元.

方法点拨：解此类题的关键是理清各种数量关系，能根据数量关系列函数表达式；利用函数的增减性以及自变量的取值范围解决问题.

类型二　二次函数在几何中的应用

例 8　［中考·铜仁］如图 26-7，已知：关于 x 的二次函数 $y=x^2+bx+c$ 的图象与 x 轴交于点 $A(1,0)$ 和点 B，与 y 轴交于点 $C(0,3)$，抛物线的对称轴与 x 轴交于点 D.

（1）求二次函数的表达式；

（2）在 y 轴上是否存在一点 P，使 $\triangle PBC$ 为等腰三角形，若存在，请求出点 P 的坐标；

（3）有一个点 M 从点 A 出发，以每秒 1 个单位长度的速度在 AB 上向点 B 运动，另一个点 N 从点 D 与点 M 同时出发，以每秒 2 个单位长度的速度在抛物线的对称轴上运动，当点 M 到达点 B 时，点 M，N 同时停止运动，问 M，N 运动到何处时，$\triangle MNB$ 的面积最大，试求出最大面积.

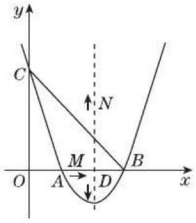


图 26-7

解：（1）$\because$ 抛物线 $y=x^2+bx+c$ 经过点 $A(1,0)$，$C(0,3)$，

$\therefore \begin{cases}1+b+c=0,\\ c=3,\end{cases}$

解得 $\begin{cases}b=-4,\\ c=3.\end{cases}$

$\therefore$ 二次函数的表达式为 $y=x^2-4x+3$.

（2）存在.

易得 B 点坐标为 $(3,0)$.

①当以 BC 为底边时，

$\because OB=OC=3$，

$\therefore$ 点 O 符合条件，即存在点 $P(0,0)$，使 $\triangle PBC$ 为等腰三角形；

②当以 PB 为底边，BC 为腰时，

$PC=BC=\sqrt{3^2+3^2}=3\sqrt{2}$，

当点 P 在 C 点上方时，P 点坐标为 $(0,3\sqrt{2}+3)$；

当点 P 在 C 点下方时，P 点坐标为 $(0,3-3\sqrt{2})$；

③当以 PC 为底边，BC 为腰时，$OP=OC$，

$\therefore$ 点 P 坐标为 $(0,-3)$.

综上所述，符合条件的 P 点有四个，分别为 $(0,0)$，$(0,3\sqrt{2}+3)$，$(0,3-3\sqrt{2})$，$(0,-3)$.

（3）易得抛物线的对称轴为 $x=2$. 设点 M 的运动时间为 t 秒.

$\because$ 点 $A(1,0)$，$B(3,0)$，

$\therefore OA=1$，$OB=3$.

$\therefore BM=3-1-t=2-t$.

$\because$ 点 N 的速度是点 M 的 2 倍，

$\therefore DN=2t$.

$\therefore S_{\triangle MNB}=\frac{1}{2}(2-t)\times 2t$

$=-(t-1)^2+1$.

$\therefore$ 当 $t=1$ 时，$S_{\triangle MNB}$ 有最大值，为 1，

即当 $M(2,0)$，$N(2,2)$ 或 $N(2,-2)$ 时，$\triangle MNB$ 的面积最大，最大面积为 1.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

方法点拨：（1）会用待定系数法求函数表达式；（2）利用“数形结合”的思想，按照“表达式→坐标→距离（线段长度）→几何图形性质及应用”的思路思考；（3）在运动中求最大值或最小值时，通常可以考虑将问题转化为函数的最值问题，利用二次函数的顶点坐标结合自变量的取值范围解决.

方法必会

专题六 分类讨论思想

专题解读» 当被研究的问题包含多种可能情况，不能一概而论时，必须按可能出现的所有情况分别进行讨论，从而得出相应的结论，这种处理问题的思维方法称为分类讨论思想.

例9 关于x的二次函数$y=-x^2+(k^2-4)x+2k-2$的图象以y轴为对称轴，且与y轴的交点在x轴的上方.

（1）求此抛物线所对应的函数表达式，并在直角坐标系中画出函数的大致图象；

（2）设A是y轴右侧抛物线上的一个动点，过点A作$AB\perp x$轴于点B，再过点A作x轴的平行线交抛物线于点D，过点D作$DC\perp x$轴于点C，得到矩形$ABCD$. 设矩形$ABCD$的周长为l，点A的横坐标为x，试求l关于x的函数表达式；

（3）当点A在y轴右侧的抛物线上运动时，矩形$ABCD$能否成为正方形？若能，请求出此时正方形的周长；若不能，请说明理由.

解：（1）根据题意，得$k^2-4=0$，解得$k=\pm 2$.

∵抛物线与y轴的交点在x轴的上方，

∴$2k-2>0$.

∴$k=2$.

∴抛物线所对应的函数表达式为$y=-x^2+2$.

函数的大致图象如图26-8.

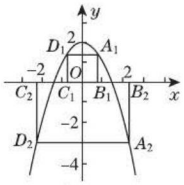


图26-8

（2）令$-x^2+2=0$，得$x=\pm\sqrt{2}$.

如图26-8，当$0<x<\sqrt{2}$时，

$A_1D_1=2x$，$A_1B_1=-x^2+2$，

∴$l=2(A_1B_1+A_1D_1)=-2x^2+4x+4$.

当$x>\sqrt{2}$时，

$A_2D_2=2x$，$A_2B_2=-(-x^2+2)=x^2-2$，

∴$l=2(A_2B_2+A_2D_2)=2x^2+4x-4$.

综上所述，l关于x的函数表达式是

$$l=\begin{cases}-2x^2+4x+4 & (0<x<\sqrt{2}),\\ 2x^2+4x-4 & (x>\sqrt{2}).\end{cases}$$

（3）能.

当$0<x<\sqrt{2}$时，

令$A_1D_1=A_1B_1$，得$x^2+2x-2=0$，

解得$x_1=-1-\sqrt{3}$（舍去），$x_2=-1+\sqrt{3}$.

将$x=-1+\sqrt{3}$代入$l=-2x^2+4x+4$，

得$l=8\sqrt{3}-8$.

当$x>\sqrt{2}$时，令$A_2D_2=A_2B_2$，

得$x^2-2x-2=0$，

解得$x_1=1+\sqrt{3}$，$x_2=1-\sqrt{3}$（舍去）.

将$x=1+\sqrt{3}$代入$l=2x^2+4x-4$，

得$l=8\sqrt{3}+8$.

综上可知，矩形$ABCD$能成为正方形，且当$x=-1+\sqrt{3}$时，正方形的周长为$8\sqrt{3}-8$；

当$x=1+\sqrt{3}$时，正方形的周长为$8\sqrt{3}+8$.

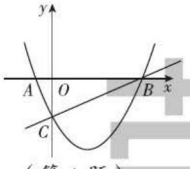
未经许可

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

好题必解 ☞答案见191页

题型1：巧用待定系数法求二次函数表达式

1. 如图，已知抛物线 $y=ax^2-\frac{3}{2}x+c$ 与 x 轴相交于 A，B 两点，并与直线 $y=\frac{1}{2}x-2$ 交于 B，C 两点，其中点 C 是直线 $y=\frac{1}{2}x-2$ 与 y 轴的交点，求该抛物线对应的函数表达式.



（第1题）

题型2：巧用图象法解一元二次方程或一元二次不等式

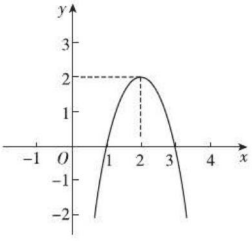
2. 二次函数 $y=ax^2+bx+c$（$a\neq0$）的图象如图，根据图象解答下列问题：

（1）写出方程 $ax^2+bx+c=0$ 的两个根；

（2）写出不等式 $ax^2+bx+c>0$ 的解集；

（3）写出 y 随 x 的增大而减小的自变量 x 的取值范围；

（4）若方程 $ax^2+bx+c=k$ 有两个不相等的实数根，求 k 的取值范围.



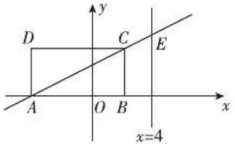
（第2题）

题型3：巧用二次函数求几何最值

3. 如图，矩形 $ABCD$ 的顶点 A，B 的坐标分别为（-4，0）和（2，0），且 $BC=2\sqrt{3}$. 直线 AC 与直线 $x=4$ 交于点 E.

（1）求以直线 $x=4$ 为对称轴，且过点 C 与原点 O 的抛物线的表达式，并说明此抛物线一定过点 E；

（2）设（1）中的抛物线与 x 轴的另一个交点为 N，点 M 是该抛物线上位于点 C，N 之间的一个动点，求△ CMN 面积的最大值.



（第3题）

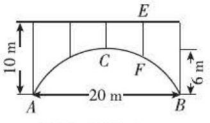
题型4：巧建平面直角坐标系解抛物线型问题

4. 一座抛物线形的拱桥如图，拱桥的最大高度为6 m，跨度为20 m，相邻两支柱间的距离均为5 m.

（1）建立适当的平面直角坐标系，求抛物线所对应的函数表达式.

（2）求支柱 EF 的长度.

（3）拱桥下地平面是双向行车道（正中间是一条宽2 m的隔离带），其中的一条行车道能否并排行驶宽2 m、高3 m的三辆汽车（汽车间的间隔忽略不计）？请说明你的理由.



（第4题）

荣德基

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

第 26 章测试卷 ☞答案见 192 页

（100 分 60 分钟）

一、选择题（每题 4 分，共 32 分）

1. 下列关于二次函数 $y=-\frac{1}{2}x^2$ 的图象的说法：

①图象是一条抛物线；②开口向下；

③对称轴是 y 轴；④顶点坐标为（0，0）.

其中正确的有（　　）

A. 1 个　B. 2 个　C. 3 个　D. 4 个

2. 将抛物线 $y=x^2+bx+c$ 先向右平移 2 个单位长度，再向下平移 3 个单位长度后，所得抛物线的表达式为 $y=(x-1)^2-4$，则 b，c 的值为（　　）

A. $b=2$，$c=-6$　B. $b=2$，$c=0$

C. $b=-6$，$c=8$　D. $b=-6$，$c=2$

3. 二次函数 $y=-x^2+2x+4$ 的最大值为（　　）

A. 3　B. 4　C. 5　D. 6

4. 二次函数图象上部分点的坐标对应值列表如下：

x	…	−3	−2	−1	0	1	…
y	…	−3	−2	−3	−6	−11	…

则该函数图象的对称轴是（　　）

A. 直线 $x=-3$　B. 直线 $x=-2$

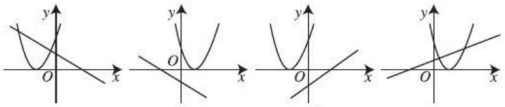
C. 直线 $x=-1$　D. 直线 $x=0$

5. 已知二次函数 $y=3(x-1)^2+k$ 的图象上有 $A(\sqrt{2},y_1)$，$B(2,y_2)$，$C(-\sqrt{5},y_3)$ 三个点，则 y_1，y_2，y_3 的大小关系是（　　）

A. $y_1>y_2>y_3$　B. $y_2>y_1>y_3$

C. $y_3>y_1>y_2$　D. $y_3>y_2>y_1$

6. 同一坐标系中，二次函数 $y=(x-a)^2$ 与一次函数 $y=a+ax$ 的图象可能是（　　）



A　B　C　D

7. 向空中发射一枚炮弹，经 x 秒后的高度为 y 米，且时间与高度的关系为 $y=ax^2+bx+c$（$a\neq0$）. 若此炮弹在第 7 秒与第 14 秒时的高度相等，则在下列时间中炮弹所在高度最高的是（　　）

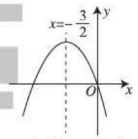
A. 第 8 秒　B. 第 10 秒

C. 第 12 秒　D. 第 15 秒

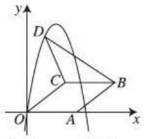
8. 已知二次函数 $y=ax^2+bx+c$（$a\neq0$）的图象如图，给出以下四个结论：① $abc=0$；② $a+b+c>0$；③ $a>b$；④ $4ac-b^2<0$. 其中，正确的结论有（　　）

A.1 个　B.2 个

C.3 个　D.4 个



（第 8 题）

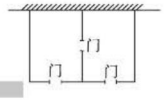


（第 10 题）

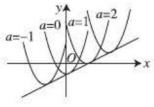
二、填空题（每题 4 分，共 16 分）

9. 二次函数 $y=-x^2+2x+3$ 的图象与 x 轴交于 A，B 两点，P 为它的顶点，则 $S_{\triangle PAB}=$_____.

10. 如图，在平面直角坐标系中，菱形 $OABC$ 的顶点 A 在 x 轴正半轴上，顶点 C 的坐标为（4，3）. D 是抛物线 $y=-x^2+6x$ 上一点，且在 x 轴上方，则△ BCD 面积的最大值为_____.



（第 11 题）



（第 12 题）

11. 某农场拟建两间矩形饲养室，一面靠现有墙（墙足够长），中间用一道墙隔开，并在如图的三处各留 1 m 宽的门，已知计划中的材料可建墙体（不包括门）总长为 27 m，则能建成的饲养室总占地面积最大为____m^2.

12. 已知二次函数 $y=(x-2a)^2+(a-1)$（a 为常数），当 a 取不同的值时，其图象构成一个“抛物线系”. 如图分别是当 $a=-1$，$a=0$，$a=1$，$a=2$ 时二次函数的图象. 它们的顶点在一条直线上，这条直线的表达式是_____.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

三、解答题（共52分）

13.（8分）（1）用配方法把二次函数 $y=x^2-4x+3$ 变成 $y=(x-h)^2+k$ 的形式；

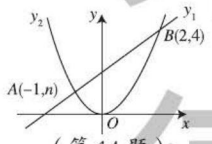
（2）在平面直角坐标系中画出 $y=x^2-4x+3$ 的图象；

（3）把方程 $x^2-4x+3=2$ 的根在函数 $y=x^2-4x+3$ 的图象上表示出来.

14.（10分）如图，一次函数 $y_1=kx+b$ 与二次函数 $y_2=ax^2$ 的图象交于 A、B 两点.

（1）利用图中条件，求两个函数的表达式；

（2）根据图象写出使 $y_1>y_2$ 的 x 的取值范围.

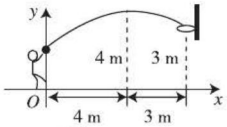


（第14题）

15.（10分）在一次篮球比赛中，如图，队员甲正在投篮. 已知球出手时离地面 $\frac{20}{9}$ m，与篮圈中心的水平距离为7 m，球出手后水平距离为4 m时达到最大高度4 m，设篮球运行轨迹为抛物线，篮圈距地面3 m.

（1）建立如图的平面直角坐标系，此球能否准确投中？

（2）此时，对方队员乙在甲前面1 m处跳起盖帽拦截，已知乙的最大摸高为3.1 m，那么他能否获得成功？



（第15题）

16.（12分）[中考·荆州] 荆州市某水产养殖户进行小龙虾养殖. 已知每千克小龙虾养殖成本为6元，在整个销售旺季的80天里，销售价格 p（元/千克）与时间第 t（天）之间的函数关系为：

$$p=\begin{cases}\frac{1}{4}t+16\ (1\leqslant t\leqslant 40,\ t\text{为整数}),\\ -\frac{1}{2}t+46\ (41\leqslant t\leqslant 80,\ t\text{为整数}),\end{cases}$$

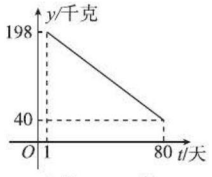
日销售量 y（千克）与时间第 t（天）之间的函数关系如图所示.

（1）求日销售量 y 与时间 t 的函数关系式.

（2）哪一天的日销售利润最大？最大利润是多少？

（3）该养殖户有多少天日销售利润不低于2400元？

（4）在实际销售的前40天中，该养殖户决定每销售1千克小龙虾，就捐赠 m（$m<7$）元给村里的特困户. 在这前40天中，每天扣除捐赠后的日销售利润随时间 t 的增大而增大，求 m 的取值范围.



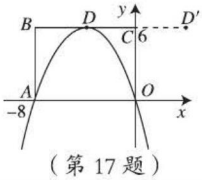
（第16题）

17.（12分）矩形 $OABC$ 的顶点 $A(-8,0)$，$C(0,6)$，点 D 是 BC 边上的中点，抛物线 $y=ax^2+bx$ 经过 A，D 两点，如图.

（1）求点 D 关于 y 轴的对称点 D' 的坐标及 a，b 的值；

（2）在 y 轴上取一点 P，使 $PA+PD$ 长度最短，求点 P 的坐标；

（3）将抛物线 $y=ax^2+bx$ 向下平移，记平移后点 A 的对应点为 A_1，点 D 的对应点为 D_1，当抛物线平移到某个位置时，恰好使得点 O 是 y 轴上到 A_1，D_1 两点距离之和 OA_1+OD_1 最短的一点，求此抛物线的表达式.



（第17题）

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

最完美的对称图形

最完美的对称图形











第27章 圆

荣德基

核心考点

你将见到的

- 圆的轴对称性——垂径定理
- 圆的旋转不变性
  ——弧、弦、圆心角之间的关系定理
- 圆周角定理
- 与圆有关的位置关系——点、直线、正多边形与圆的位置关系
- 圆中的计算问题

核心方法

我们为你提供的

- 构造法
- 割补法
- 作差法
- 化曲为直法
- 等积变形法
- 方程思想
- 转化思想
- 数形结合思想
- 分类讨论思想

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

27.1 圆的认识

27.1.1 圆的基本元素

核心知识

- 圆　圆心　半径
- 弦　直径
- 弧　半圆
- 等圆　等弧

知识链接



点知识·拨考向 速提分

点知识 1 圆

1. 圆的定义

（1）**描述性定义**：在一个平面内，线段 OA 绕它固定的一个端点 O 旋转一周，另一个端点 A 所形成的图形叫做圆．其固定的端点 O 叫做圆心，线段 OA 叫做半径．

（2）**集合观点定义**：圆也可以看成是所有到定点（圆心 O）的距离等于定长（半径 r）的点的集合．

2. 圆的表示法：以点 O 为圆心的圆，记作⊙O，读作“圆 O”．

3. 圆的特性

（1）圆上各点到定点（圆心 O）的距离都等于定长（半径 r），即同圆的半径相等．

（2）到定点 O 的距离等于定长 r 的点都在同一个圆上，即到圆心的距离等于半径的点在圆上．

提分·必记

特别提醒

1. 确定一个圆需要“两个要素”，一是圆心：圆心定其位置；二是半径：半径定其大小．
2. 圆是一条封闭的曲线，曲线是“圆周”，而不能认为是“圆面”．
3. “圆上的点”指圆周上的点．

拨考向 利用圆的定义解确定圆的应用问题

题型 1：圆的定义在确定圆中的应用

例 1　下列说法中，错误的有（　　）

（1）经过点 P 的圆有无数个；

（2）以点 P 为圆心的圆有无数个；

（3）半径为 3 cm 且经过点 P 的圆有无数个；

（4）以点 P 为圆心，3 cm 长为半径的圆有无数个．

A. 1 个　　B. 2 个　　C. 3 个　　D. 4 个

解题秘方：紧扣圆的定义的“两要素”进行判断．

解：确定一个圆必须有两个条件，即圆心和半径，只满足一个条件或不满足任何一个条件的圆都有无数个，由此可知（1）（2）（3）正确；圆心和半径都确定，这样的圆有且只有一个（唯一），由此可知（4）错误．

答案：A

提分·秘诀

特别提醒

1. 圆的两种定义中确定圆的条件是相同的，即圆心和半径，两者缺一不可；
2. “点在圆上”和“圆过点”表示的意义都是：这个点在圆周上；
3. 圆将平面划分为三部分：圆上、圆内、圆外．

基本·德基

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

题型 2：圆的定义在说明点共圆中的应用

例 2 菱形 $ABCD$ 的对角线 AC 和 BD 相交于点 O. E，F，G，H 分别为边 AB，BC，CD，DA 的中点，那么点 E，F，G，H 是否在同一个圆上？请说明理由.

解题秘方：只需说明 E，F，G，H 四点到点 O 的距离相等.

解：点 E，F，G，H 在同一个圆上，理由如下：

如图 27.1−1，连结 OE，OF，OG，OH.

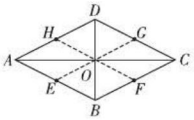


图 27.1−1

∵四边形 $ABCD$ 是菱形，

∴ $AB=BC=CD=DA$，$AC \perp BD$.

又∵ E 为 AB 边的中点，∴ $OE=\frac{1}{2}AB$.

同理可得，$OF=\frac{1}{2}BC$，$OG=\frac{1}{2}CD$，$OH=\frac{1}{2}DA$.

∴ $OE=OF=OG=OH$.

∴点 E，F，G，H 在以点 O 为圆心，OE 为半径的圆上.

解法提醒

本题运用数形结合思想，将说明“位置关系”转化为说明“数量关系”，即将说明几个点在同一个圆上转化为说明这几个点到某点（圆心）的距离相等；“到定点的距离相等（数量关系）的点在同一个圆上（位置关系）”是说明多点共圆问题的常用方法.

点知识 2 圆的有关概念

	定义	注意
弦	连结圆上任意两点的线段叫做弦	圆中有无数条弦，其中直径是最长的弦
直径	经过圆心的弦叫做直径	
弧、半圆、劣弧、优弧	（1）圆上任意两点间的部分叫做圆弧，简称弧； （2）圆的任意一条直径的两个端点把圆分成两条弧，每一条弧都叫做半圆； （3）小于半圆周的弧叫做劣弧； （4）大于半圆周的弧叫做优弧	弧包括优弧、劣弧和半圆；半圆既不是劣弧，也不是优弧
等圆	能够重合的两个圆叫做等圆，容易看出：半径相等的两个圆是等圆；反过来，同圆或等圆的半径相等	等圆只和半径的大小有关，和圆心的位置无关
等弧	在同圆或等圆中，能够互相重合的弧叫做等弧	等弧只能出现在同圆或等圆中；等弧是全等的，而不仅仅是弧的长度相等
圆心角	顶点在圆心的角叫做圆心角	顶点在圆心

提分·必记

特别提醒

1. 弦与直径的关系：直径是过圆心（最长）的弦，但弦不一定是直径.
2. 弧与半圆的关系：半圆是弧，但弧不一定是半圆.
3. 弦与弧的关系：

（1）弦是圆上两点间的线段，有无数条；弧是圆上两点间的部分，是曲线，也有无数条.

（2）每条弧对一条弦；而每条弦对的弧有两条：一条优弧、一条劣弧或两个半圆.

技考向 利用圆的有关概念判断命题的正确性

例 3 下列语句中正确的有（　　）

①直径是弦；②弦是直径；③半径相等的两个半圆是等弧；④长度相等的两条弧是等弧；⑤半圆是弧，弧不一定是半圆.

A. 1 个　　B. 2 个　　C. 3 个　　D. 4 个

解题秘方：紧扣圆的相关概念进行解答.

解：直径是最长的弦，故①正确；直径是过圆心的弦，但弦不一定是直径，故②错误；半圆是弧，半径相等的两个半圆能互相重合，所以是等弧，故③正确；只有在同圆或等圆中，长度相等的两条弧才是等弧，故④错误；弧分为劣弧、优弧、半圆，故⑤正确.

答案：C

提分·秘诀

警示误区

只有同圆或等圆中才可能有等弧，等弧长度一定相等，但长度相等的弧不一定是等弧.

弧不仅有长度，还有度数，规定：半圆的度数为 180°，劣弧的度数小于 180°，优弧的度数大于 180°.

荣德基

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

点方法·拨技巧 提高分

拔尖角度▸ 1 利用构造等腰三角形法求圆中的角的度数

挑战·高分

例 4 如图 27.1−2，AB 为⊙O 的直径，CD 为⊙O 的弦，AB，CD 的延长线交于点 E，已知 $AB=2DE$，$\angle E=18°$，求 $\angle AOC$ 的度数.

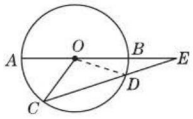


图 27.1−2

解题秘方：紧扣“同圆的半径相等”构造等腰三角形，利用三角形边角关系计算.

解：如图 27.1−2，连结 OD.

$\because AB$ 为⊙O 的直径，OD 为⊙O 的半径，$\therefore AB=2OD$.

又 $\because AB=2DE$，$\therefore OD=DE$.

$\therefore \angle DOE=\angle E=18°$.

$\therefore \angle ODC=\angle DOE+\angle E=36°$.

$\because OC=OD$，$\therefore \angle C=\angle ODC=36°$.

$\therefore \angle AOC=\angle C+\angle E=36°+18°=54°$.

解法提醒

连结圆心和圆周上任一点可得到圆的半径，同圆或等圆中的所有半径都相等，所以从圆上任意两点和圆心为顶点的三角形是等腰三角形，因此，连结半径构造等腰三角形是圆中求角的常用方法.

拔尖角度▸ 2 利用转化圆的半径法比较线段的大小

挑战·高分

例 5 如图 27.1−3，点 A，D，M 在半圆 O 上，四边形 $ABOC$，四边形 $DEOF$，四边形 $HMNO$ 均为矩形，设 $BC=a$，$EF=b$，$NH=c$，则下列各式中正确的是（　　）

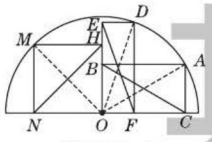


图 27.1−3

A. $a>b>c$　　B. $a=b=c$

C. $c>a>b$　　D. $b>c>a$

解题秘方：把要比较的线段都转化为同圆的半径来解答.

解：如图 27.1−3，连结 OA，OD，OM.

$\because$四边形 $ABOC$，四边形 $DEOF$，四边形 $HMNO$ 均为矩形，

$\therefore a=BC=OA$，$b=EF=OD$，$c=NH=OM$.

$\because A$，D，M 都在半圆 O 上，$\therefore OA=OD=OM$.

$\therefore a=b=c$.

答案：B

拨技巧

本例巧妙地运用矩形的两条对角线相等，将没有任何关联的三条线段转化为圆的三条半径，再根据“同圆的所有半径都相等”比较线段的大小关系.

荣德基

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

点中考·拨模拟 得满分

中考探秘 本节内容主要是介绍圆的概念及圆的基本元素的概念，在中考中很少单独命题，偶尔以选择题的形式出现，通常与其他的知识结合出题.

三年中考兵法

考法 1 利用圆的认识求坐标

例 6 [中考·百色]已知点 A 的坐标为（2，0），点 P 在直线 $y=x$ 上运动，当以点 P 为圆心，PA 的长为半径的圆的面积最小时，点 P 的坐标为（　　）

A.（1，−1）　B.（0，0）　C.（1，1）　D.（$\sqrt{2}$，$\sqrt{2}$）

试题评析：本题考查了一次函数图象上点的坐标特征，垂线的性质，等腰三角形的性质及对圆的认识，综合性较强，难度适中，得出点 P 的位置是解题的关键.

解：如图 27.1−4，过点 A 作 AP 与直线 $y=x$ 垂直，垂足为点 P，此时 PA 最小，则以点 P 为圆心，PA 的长为半径的圆的面积最小，过点 P 作 PM 与 x 轴垂直，垂足为点 M.

在 Rt△OAP 中，∵∠OPA=90°，∠POA=45°，

∴∠OAP=45°. ∴PO=PA.

又∵PM⊥x 轴于点 M，

∴ $OM=MA=\frac{1}{2}OA=1$.

∴ $PM=OM=1$. ∴点 P 的坐标为（1，1）.

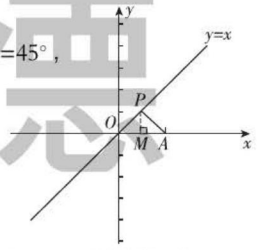


图 27.1−4

答案：C

考法 2 利用等圆的半径相等求角

例 7 [中考·益阳]如图 27.1−5，分别以 A，B 为圆心，线段 AB 的长为半径的两个圆相交于 C，D 两点，则∠CAD 的度数为_____.

试题评析：本题考查了等圆的半径相等、等边三角形的定义和性质，构造同圆的半径是解题关键.

解：如图 27.1−5，连结 BC，BD.

∴AC=AD=AB=BD=BC.

∴△ABC 和△ABD 都是等边三角形.

∴∠BAC=∠BAD=60°.

∴∠CAD=120°.

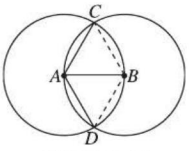


图 27.1−5

答案：120°

冲刺·满分

思路点拨

当 PA 最小时，以点 P 为圆心，PA 的长为半径的圆的面积最小，根据垂线段最短可知，过点 A 作 AP 与直线 y=x 垂直，垂足为点 P，此时 PA 最小.

解法提醒

利用特殊图形：平角、等边三角形、含 30° 角的直角三角形、等腰直角三角形等求角度，是没有已知角度求角度问题的一种常用方法.

菜 德 基

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

两年模拟兵法 ☞答案见194页

1. [模拟·吴中]下列说法错误的是（　　）

A. 直径是圆中最长的弦

B. 长度相等的两条弧是等弧

C. 面积相等的两个圆是等圆

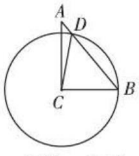
D. 半径相等的两个半圆是等弧

2. [模拟·寿光]下列说法：①弧分为优弧和劣弧；②半径相等的圆是等圆；③过圆心的线段是直径；④长度相等的弧是等弧；⑤半径是弦. 其中错误的个数为（　　）

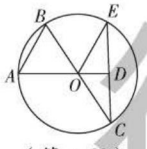
A. 2　　B. 3　　C. 4　　D. 5

3. [模拟·陕西]如图，在△ABC中，∠ACB=90°，∠A=40°，以C为圆心，CB为半径的圆交AB于点D，连结CD，则∠ACD=（　　）

A. 10°　　B. 15°　　C. 20°　　D. 25°



（第3题）



（第4题）

4. 如图，在⊙O中，点E，D，C在一条直线上，点B，O，C在一条直线上，那么图中有弦（　　）

A. 2条　　B. 3条　　C. 4条　　D. 5条

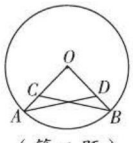
5. 若点P到⊙O上的点的最小距离为4，最大距离为8，则该圆的直径是（　　）

A. 2　　B. 6

C. 2或6　　D. 4或12

6. 如图，已知OA，OB是⊙O的两条半径，C，D分别为OA，OB上的点，且AC=BD.

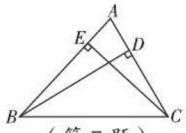
求证：AD=BC.



（第6题）

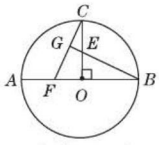
7. 如图，BD，CE是△ABC的高.

求证：E，B，C，D四点在同一个圆上.



（第7题）

8. 如图，在⊙O中，半径OC垂直于直径AB，OE=OF，连结BE并延长交CF于G. 求证：BG⊥CF.　【导学号：8603511】



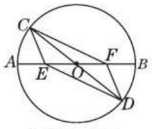
（第8题）

荣德基

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

9. 如图，AB，CD 为⊙ O 的两条直径，E，F 分别为 OA，OB 的中点．

求证：四边形 $CEDF$ 为平行四边形．

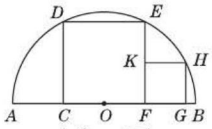


（第 9 题）

10. 如图，AB 是半圆 O 的直径，四边形 $CDEF$ 是正方形．

（1）求证：$OC=OF$；

（2）在正方形 $CDEF$ 的右侧有一正方形 $FGHK$，点 G 在 AB 上，H 在半圆上，K 在 EF 上．若正方形 $CDEF$ 的边长为 2，求正方形 $FGHK$ 的面积．



（第 10 题）

荣德基

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

27.1.2 圆的对称性

核心知识

- 圆的对称性
- 圆心角、弧、弦的关系
- 垂径定理

知识链接



点知识·拨考向 速提分

点知识 1 圆的旋转不变性

1. 圆的旋转不变性

圆是中心对称图形，圆心就是它的对称中心．圆具有旋转不变性，把圆绕圆心旋转任意一个角度，所得的图形都与原图形重合．

2. 弧、弦、圆心角之间的关系定理：

在同一个圆中，如果圆心角相等，那么它们所对的弧相等，所对的弦相等．

实际上，在等圆中，上述关系定理也同样成立．

3. 示例： 弧、弦、圆心角的关系．

如图 27.1−6，$\angle AOB=\angle A'OB' \Rightarrow \overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{A'B'}$，$AB=A'B'$．

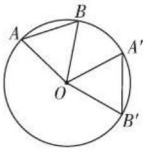


图 27.1−6



图 27.1−7

拔考向 利用弧、弦、圆心角的关系证明弧相等

例 1 如图 27.1−8，AB，CD 是 $\odot O$ 的两条直径，弦 $CE \parallel AB$，求证：$\overset{\frown}{BC}=\overset{\frown}{AE}$．

解题秘方： 构造圆心角，利用“相等的圆心角所对的弧相等”证明．

证明： 如图 27.1−8，连结 OE．

$\because OE=OC$，

$\therefore \angle C=\angle E$．

$\because CE \parallel AB$，

$\therefore \angle C=\angle BOC$，$\angle E=\angle AOE$．

$\therefore \angle BOC=\angle AOE$．

$\therefore \overset{\frown}{BC}=\overset{\frown}{AE}$．

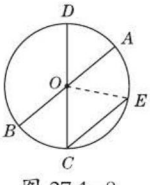


图 27.1−8

提分·必记

警示误区

不能忽略在同一个圆中这个前提，如果去掉了这个前提，即使圆心角相等，所对的弧、弦也不一定相等．如图 27.1−7，两个圆的圆心相同，$\overset{\frown}{AB}$ 与 $\overset{\frown}{A'B'}$ 对应的圆心角相等，但 $\overset{\frown}{AB} \neq \overset{\frown}{A'B'}$，$AB \neq A'B'$．

弧、弦、圆心角之间的关系

提分·秘诀

技巧提醒

由例 1 的结论可知，在同圆中，圆的两条平行弦所夹的弧相等，以后若遇到圆的两条平行弦，可考虑运用它们所夹弧相等证明两弧所对的弦、圆心角分别相等．

菜德基

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

点知识▸ 2 弧、弦、圆心角之间关系定理的推论

1. 推论：

（1）在同一个圆中，如果弧相等，那么它们所对的圆心角相等，所对的弦相等，即在⊙O中，若$\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{A'B'}$，则$\angle AOB=\angle A'OB'$，$AB=A'B'$.

（2）在同一个圆中，如果弦相等，那么它们所对的圆心角相等，所对的弧相等，即在⊙O中，若$AB=A'B'$，则$\angle AOB=\angle A'OB'$，$\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{A'B'}$.

实际上，在等圆中，弧、弦、圆心角之间关系定理的推论也成立.

2. 弦和弦心距（圆心到弦的距离）之间的关系.

在同圆或等圆中，如果两条弦的弦心距相等，那么这两条弦相等.

注意：涉及弦心距的问题，应用时要加上垂直的条件.

核考向▸ 利用弧、弦、圆心角之间关系定理的推论判断边、角、弧的关系

例 2 如图 27.1−9，在⊙O中，$\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{CD}$，则在①$AB=CD$；②$AC=BD$；③$\angle AOC=\angle BOD$；④$\overset{\frown}{AC}=\overset{\frown}{BD}$中，正确的个数是（　　）

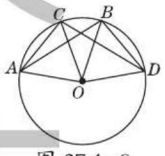


图 27.1−9

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

解题秘方：紧扣弧、弦、圆心角之间关系定理的推论判断.

解：∵$\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{CD}$，∴$AB=CD$，故①正确.

∵$\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{CD}$，∴$\overset{\frown}{AC}=\overset{\frown}{BD}$.

∴$AC=BD$，$\angle AOC=\angle BOD$，故②③④正确. 故选 D.

答案：D

点知识▸ 3 圆的轴对称性

1. 圆是轴对称图形，它的任意一条直径所在的直线都是它的对称轴.

（1）圆的对称轴有无数条.

（2）“圆的对称轴是直径所在的直线”或说成“圆的对称轴是经过圆心的直线”.

2. 垂径定理：垂直于弦的直径平分这条弦，并且平分这条弦所对的两条弧.

示例：如图 27.1−10，$CD\perp AB$于点E，CD是⊙O的直径，那么$AE=BE$，$\overset{\frown}{AD}=\overset{\frown}{BD}$，$\overset{\frown}{AC}=\overset{\frown}{BC}$.

可用几何语言表述为

$$\left.\begin{array}{l}CD\text{是直径}\\CD\perp AB\end{array}\right\}\Rightarrow\begin{cases}AE=BE,\\\overset{\frown}{AD}=\overset{\frown}{BD},\\\overset{\frown}{AC}=\overset{\frown}{BC}.\end{cases}$$

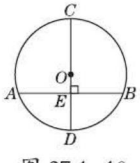


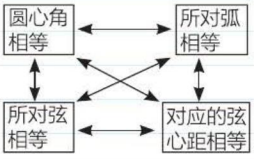
图 27.1−10



提分·必记

拓宽视野

在同圆或等圆中，两个圆心角、两条弦、两条弧、两个弦心距中如果有一组量相等，那么它们所对应的其余各组量也分别相等，其关系可表示为



提分·秘诀

解法提醒

在同一个圆中，弧、弦和圆心角中只要有一组量相等，就能推出另两组量相等. 线段有和差，弧也有和差.

提分·必记

警示误区

因为直径是弦，弦是线段，而对称轴是直线，所以不能说“圆的对称轴是直径”.

特别提醒

1.“垂直于弦的直径”中的“直径”，还可以是垂直于弦的半径或过圆心垂直于弦的直线. 其实质是：过圆心且垂直于弦的线段、直线均可.

2.“两条弧”是指弦所对的劣弧和优弧，不要漏掉了优弧.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

考向▶利用垂径定理解与线段有关的问题

题型1：垂径定理在求线段长中的应用

例3 如图27.1−11，弦CD垂直于⊙O的直径AB，垂足为点H，且$CD=2\sqrt{2}$，$BD=\sqrt{3}$，则AB的长为（　　）

A. 2　　B. 3　　C. 4　　D. 5

解题秘方：构造垂径定理的基本图形.

解：连结OD，如图27.1−11.

∵ $CD\perp AB$，$CD=2\sqrt{2}$，

∴ $CH=DH=\sqrt{2}$.

在Rt△BHD中，由勾股定理，得$BH=1$.

设⊙O的半径为r，在Rt△OHD中，$OH^2+HD^2=OD^2$，即$(r-1)^2+(\sqrt{2})^2=r^2$. 解得$r=\frac{3}{2}$. ∴ $AB=3$.

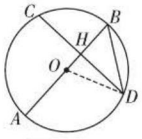


图27.1−11

答案：B

题型2：垂径定理在证线段关系中的应用

例4 如图27.1−12，在⊙O中，AB为⊙O的弦，C，D是直线AB上两点，且$AC=BD$.

求证：△OCD为等腰三角形.

解题秘方：构建垂径定理的基本图形结合线段垂直平分线的性质证明.

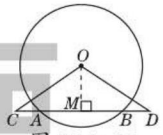


图27.1−12

证明：过点O作$OM\perp AB$，垂足为M，如图27.1−12.

∵ $OM\perp AB$，∴ $AM=BM$.

∵ $AC=BD$，∴ $CM=DM$.

又∵ $OM\perp CD$，∴ $OC=OD$.

∴△OCD为等腰三角形.

知识▶4 垂径定理的推论

1. 推论：（1）平分弦（不是直径）的直径垂直于这条弦，并且平分这条弦所对的两条弧；

（2）平分弧的直径垂直平分这条弧所对的弦.

2. 示例：（1）如图27.1−13，CD是⊙O的直径，AB是弦（非直径），AB与CD相交于点E，且$AE=BE$，那么CD垂直于AB，并且$\overset{\frown}{AC}=\overset{\frown}{CB}$，$\overset{\frown}{AD}=\overset{\frown}{DB}$.

（2）如图27.1−13，CD是⊙O的直径，AB与CD相交于点E，且$\overset{\frown}{AD}=\overset{\frown}{BD}$，那么$CD$垂直于$AB$，并且$AE=BE$.

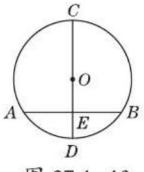


图27.1−13

提分·秘诀

方法提醒

利用垂径定理求线段的长的方法：

垂径定理是解决圆中的计算、证明常用的知识，求线段长时，一般把半径、圆心到弦的垂线段、弦的一半构建在一个直角三角形里，运用勾股定理求解，即用“垂径定理＋勾股定理”求解.

解题通法

垂径定理涉及弦、圆心到弦的垂线段、直径三个量，证明线段相等、证明垂直、证明角相等都经常用到垂径定理. 在使用时，若已知圆心，作垂直于弦的半径（或直径）或连半径，是常用的作辅助线的方法.

提分·必记

拓宽视野

对于圆中的一条直线，如果具备下列五个条件中的任意两个，那么一定具备其他三个：（1）过圆心；（2）垂直于弦；（3）平分弦（非直径）；（4）平分弦所对的劣弧；（5）平分弦所对的优弧.

简记为“知二推三”.

宋德基

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

可用几何语言表述为

$$(1)\ \left.\begin{array}{l} CD\text{ 是直径} \\ AE=BE \\ AB\text{ 不是直径} \end{array}\right\}\Rightarrow\begin{cases} CD\perp AB, \\ \overset{\frown}{AD}=\overset{\frown}{BD}, \\ \overset{\frown}{AC}=\overset{\frown}{BC}. \end{cases}$$

$$(2)\ \left.\begin{array}{l} CD\text{ 是直径} \\ \overset{\frown}{AD}=\overset{\frown}{BD} \end{array}\right\}\Rightarrow\begin{cases} CD\perp AB, \\ AE=BE. \end{cases}$$



拔考向▸利用垂径定理的推论证明弦相等

例 5 如图 27.1−14，AB，CD 是⊙O 的弦，M，N 分别为 AB，CD 的中点，且 $\angle AMN=\angle CNM$. 求证：$AB=CD$.

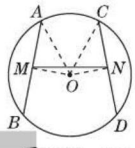


图 27.1−14

解题秘方：紧扣弦的中点作符合垂径定理推论的基本图形，再结合全等三角形的判定和性质进行证明.

证明：如图 27.1−14，连结 OM，ON，OA，OC.

∵ O 为圆心，且 M，N 分别为 AB，CD 的中点，

∴ $AB=2AM$，$CD=2CN$，$OM\perp AB$，$ON\perp CD$.

∴ $\angle OMA=\angle ONC=90°$.

∵ $\angle AMN=\angle CNM$，∴ $\angle OMN=\angle ONM$. ∴ $OM=ON$.

又∵ $OA=OC$，∴ Rt△OAM ≌ Rt△OCN.

∴ $AM=CN$. ∴ $AB=CD$.

提分·秘诀

解题通法

证明两条弦相等的方法：

证明两条弦相等，可以先证明弦的一半相等. 根据垂径定理的推论，连结圆心和弦的中点是常见的作辅助线的方法.

点方法·拨技巧 提高分

拔尖角度▸[1] 利用转移位置法探究弧、弦之间的关系

挑战·高分

例 6 如图 27.1−15，在⊙O 中，$\overset{\frown}{AB}=2\overset{\frown}{CD}$，则弦 AB 与弦 CD 的关系是（　　）

A. $AB>2CD$

B. $AB<2CD$

C. $AB=2CD$

D. 无法确定

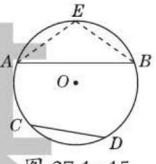


图 27.1−15

解题秘方：根据 $\overset{\frown}{AB}=2\overset{\frown}{CD}$，不能直接判断 AB 与 CD 之间的倍数关系，可将 $\overset{\frown}{CD}$ 转移至 $\overset{\frown}{AB}$ 上去，使 $\overset{\frown}{AB}$ 等分成两段，然后利用弧和弦之间的等量关系进行判断.

解：如图 27.1−15，取 $\overset{\frown}{AB}$ 的中点 E，连结 AE，BE，则 $\overset{\frown}{AE}=\overset{\frown}{BE}$.

∵ $\overset{\frown}{AB}=2\overset{\frown}{CD}$，

∴ $\overset{\frown}{AE}=\overset{\frown}{BE}=\overset{\frown}{CD}$.

∴ $AE=BE=CD$.

∵ $AE+BE>AB$，∴ $AB<2CD$.

答案：B

技巧点拨

求解两弧成倍数关系问题的方法：

若遇到弧之间的倍数关系，可以将长弧等分成相等的短弧，然后利用圆心角、弧、弦之间的等量关系解决问题.

注意：圆心角、弧、弦之间的等量关系可以相互转化，但圆心角与弦、弧与弦之间的倍数关系不能相互转化.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

拔尖角度▸ 2 利用分类讨论思想求圆中位置不确定的弦长

挑战·高分

例7 [中考·安顺]已知⊙O的直径CD=10cm，AB是⊙O的弦，$AB\perp CD$，垂足为M，且AB=8cm，则AC的长为（　　）

A. $2\sqrt{5}$ cm　　B. $4\sqrt{5}$ cm

C. $2\sqrt{5}$ cm或$4\sqrt{5}$ cm　　D. $2\sqrt{3}$ cm或$4\sqrt{3}$ cm

解题秘方：当作出符合条件的两条弦后，直径的端点C，D在弦AB的哪一侧位置不确定时，需分类进行求解.

解：如图27.1−16，连结AO.

∵⊙O的直径CD=10cm，$AB\perp CD$，AB=8cm，

∴$AM=\frac{1}{2}AB=\frac{1}{2}\times 8=4$（cm），$OD=OC=5$cm.

∵C、D在弦AB的哪一侧位置不确定，

∴求弦AC的长需分如图27.1−16两种情况.

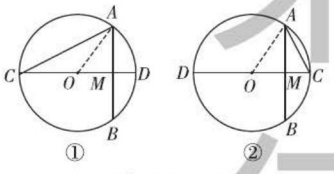


图27.1−16

当点C的位置如图27.1−16①时，

∵OA=5cm，AM=4cm，$CD\perp AB$，

∴$OM=\sqrt{OA^2-AM^2}=\sqrt{5^2-4^2}=3$（cm）.

∴$CM=OC+OM=5+3=8$（cm）.

∴$AC=\sqrt{AM^2+CM^2}=\sqrt{4^2+8^2}=4\sqrt{5}$（cm）.

当点C的位置如图27.1−16②时，同理可得OM=3 cm.

∵OC=5 cm，

∴MC=5−3=2（cm）.

∴在Rt△AMC中，$AC=\sqrt{AM^2+MC^2}=\sqrt{4^2+2^2}=2\sqrt{5}$（cm）.

答案：C

特别提醒

题目中没有给出图形，需要根据题意画出草图，本题应分两种情况讨论：

- 点C和弦AB在圆心O的异侧；
- 点C和弦AB在圆心O的同侧. 本题容易考虑不周全，只考虑一种情形，导致错误.

拔尖角度▸ 3 利用两点一线法求涉垂径定理的线段和的最小值

挑战·高分

例8 如图27.1−17，AB，CD是半径为5的⊙O的两条弦，AB=8，CD=6，MN是直径，$AB\perp MN$于点E，$CD\perp MN$于点F，P为EF上的任意一点，则$PA+PC$的最小值为_____.

解题秘方：利用圆的轴对称性建立两点一线求最短距离（最小值）的模型法求解.

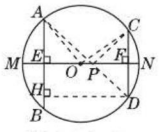


图27.1−17

解题通法

- 圆是轴对称图形，结合垂径定理可知，“垂直于弦的直径”这个条件中，弦的两个端点关于这条直径对称.

荣德基

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

解：如图 27.1−17，由题意易知，

点 C 关于 MN 的对称点为点 D，

∴连结 AD 交 MN 于点 P，连结 PC，

易知 $PA+PC$ 的值最小时的 P 点即为 AD 与 MN 的交点，

此时 $PA+PC=AD$.

过点 D 作 $DH \perp AB$ 于点 H，连结 OA，OC，

∵ $AB \perp MN$ 于点 E，$CD \perp MN$ 于点 F.

∴ $AE=\frac{1}{2}AB=\frac{1}{2}\times 8=4$，$CF=DF=\frac{1}{2}CD=\frac{1}{2}\times 6=3$.

在 Rt △ OAE 中，$OE=\sqrt{OA^2-AE^2}=\sqrt{5^2-4^2}=3$，

在 Rt △ OCF 中，$OF=\sqrt{OC^2-CF^2}=\sqrt{5^2-3^2}=4$.

∴ $DH=EF=OE+OF=3+4=7$，$AH=AE+EH=AE+DF=4+3=7$.

在 Rt △ ADH 中，$AD=\sqrt{AH^2+DH^2}=\sqrt{7^2+7^2}=7\sqrt{2}$.

答案：$7\sqrt{2}$

数学建模不仅可以将数学问题进行数学建模，也可以是学科内移植建模，如将“在直线上找一点使它到同侧两点的距离之和最短”的模型移植到本题中.

拔尖角度▸ 4 利用数形转换法巧求涉圆的图形中点的坐标

挑战·高分

例 9 如图 27.1−18，半径为 6 的⊙ E 在平面直角坐标系中与 x 轴交于 A，B 两点，与 y 轴交于 C，D 两点，已知 $C(0,3)$，$D(0,-7)$，求圆心 E 的坐标.

技巧提醒

利用垂径定理求点的坐标的方法：

求点的坐标关键就是过点作两坐标轴的垂线，当两坐标轴与圆相交时，两坐标轴的一部分变成了圆的两条弦，恰好借助垂径定理求出圆心到弦的垂线段的长度，从而达到求出点的坐标的目的.

解题秘方：将坐标轴的一部分看作两条互相垂直的弦进行解答，并注意坐标与线段长的相互切换.

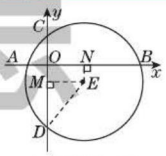


图 27.1−18

解：如图 27.1−18，作 $EN \perp x$ 轴于点 N，$EM \perp y$ 轴于点 M，连结 ED.

∵ $C(0,3)$，$D(0,-7)$，

∴ $CD=3-(-7)=10$.

又∵ $EM \perp y$ 轴，∴ $MD=\frac{1}{2}CD=5$.

∴ $EM=\sqrt{ED^2-MD^2}=\sqrt{6^2-5^2}=\sqrt{11}$.

易知四边形 $ENOM$ 为矩形，且 $EN=OM=OD-MD=7-5=2$，

∴圆心 E 的坐标为 $(\sqrt{11},-2)$.

点中考·拨模拟 得满分

中考探秘

本节主要考查圆的旋转不变性及轴对称性. 两个性质主要体现在弧、弦、圆心角的关系定理以及垂径定理两个方面，它们是求线段长，证明线段或角相等的重要依据，在中考中以填空题考查为主，与四边形相结合时考查解答题.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

三年中考兵法

考法 1 利用弧度与圆心角的关系求弧度

例 10 [中考·舟山]把一张圆形纸片按如图 27.1-19 方式折叠两次后展开，图中的虚线表示折痕，则$\overset{\frown}{BC}$的度数是（　　）

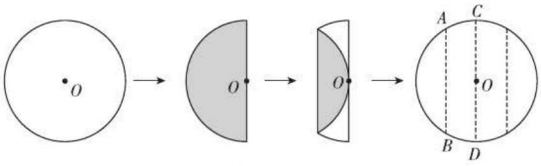


图 27.1-19

A. 120°　　B. 135°　　C. 150°　　D. 165°

试题评析：此题主要考查了翻折变换的性质以及弧度与圆心角的关系.

解：如图 27.1-20，连结 BO，过点 O 作 $OE \perp AB$ 于点 E.

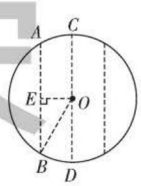


图 27.1-20

由题意可得：$EO=\frac{1}{2}BO$，$AB \parallel DC$.

可得$\angle EBO=30°$. 故$\angle BOD=30°$.

则$\angle BOC=150°$. 故$\overset{\frown}{BC}$的度数是 150°.

答案：C

考法 2 利用垂径定理求圆的周长

例 11 [中考·呼和浩特]如图 27.1-21，CD 为⊙ O 的直径，弦 $AB \perp CD$，垂足为 M，若 $AB=12$，$OM : MD=5 : 8$，则⊙ O 的周长为（　　）

A. 26π　　B. 13π

C. $\frac{96\pi}{5}$　　D. $\frac{39\sqrt{10}\pi}{5}$

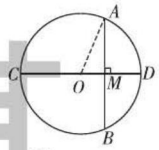


图 27.1-21

试题评析：本题考查的是垂径定理，根据题意作出辅助线，构造出直角三角形，利用勾股定理求解是解答此题的关键.

解：如图 27.1-21，连结 OA.

∵ CD 为⊙ O 的直径，弦 $AB \perp CD$，∴ $AM=\frac{1}{2}AB=6$.

∵ $OM : MD=5 : 8$，∴设 $OM=5x$，$DM=8x$.

∴ $OA=OD=13x$. ∴ $AM=12x=6$.

$AM^2=AO^2-OM^2$，即 $AM^2=(13x)^2-(5x)^2$，∴ $AM=12x$.

∴ $x=\frac{1}{2}$. ∴ $OA=\frac{1}{2}\times 13=\frac{13}{2}$.

∴⊙ O 的周长 $=2OA\cdot\pi=13\pi$.

答案：B

冲刺·满分

知识储备

圆心角的度数等于它所对的弧的度数，即 1° 圆心角所对弧的度数也为 1°.

特别提醒

在运用垂径定理的计算中，常涉及弦长 a、圆心到弦的距离 d、半径 r 及弓形高 h 之间的关系，如图 27.1-22，它们的关系：$r^2=d^2+\left(\frac{a}{2}\right)^2$，$r=d+h$.

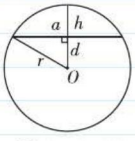


图 27.1-22

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

考法 3 利用垂径定理找特殊四边形的条件

例 12 [中考·上海]如图 27.1−23，已知在⊙ O 中，AB 是弦，半径 $OC \perp AB$，垂足为 D，要使四边形 $OACB$ 为菱形，还需要添加一个条件，这个条件可以是（　　）

A. $AD=BD$　　B. $OD=CD$

C. $\angle CAD=\angle CBD$　　D. $\angle OCA=\angle OCB$

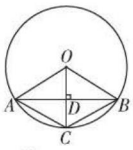


图 27.1−23

试题评析：此题主要考查了菱形的判定以及垂径定理，熟练掌握菱形的判定方法是解题关键.

解：∵在⊙ O 中，AB 是弦，半径 $OC \perp AB$，∴ $AD=DB$.

当 $OD=CD$ 时，则由 $AD=BD$，$OD=CD$，$AB \perp CO$，

可得四边形 $OACB$ 为菱形.

答案：B

知识储备

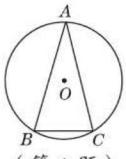
判定菱形的条件

1. 从边上看：四边形的四边相等或平行四边形的一组邻边相等；
2. 从对角线看：四边形的对角线互相垂直平分或平行四边形的对角线互相垂直.

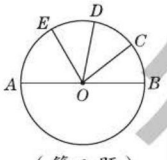
两年模拟兵法 ☞答案见 195 页

1. [中考·厦门]如图，在⊙ O 中，$\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{AC}$，$\angle A=30°$，则 $\angle B$ 等于（　　）

A. 150°　　B. 75°　　C. 60°　　D. 15°



（第 1 题）



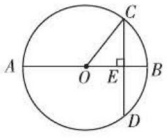
（第 2 题）

2. 如图，已知 AB 是⊙ O 的直径，点 C，D 是 $\overset{\frown}{BE}$ 的三等分点，$\angle AOE=60°$，则 $\angle COE$ 的度数是（　　）

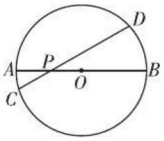
A. 40°　　B. 60°　　C. 80°　　D. 120°

3. [中考·张家界]如图，AB 是⊙ O 的直径，弦 $CD \perp AB$ 于点 E，$OC=5$ cm，$CD=8$ cm，则 $AE=$（　　）

A.8 cm　　B.5 cm　　C.3 cm　　D.2 cm



（第 3 题）



（第 4 题）

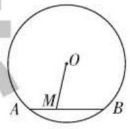
4. [中考·西宁]如图，AB 是⊙ O 的直径，弦 CD 交 AB 于点 P，$AP=2$，$BP=6$，$\angle APC=30°$，则 CD 的长是（　　）

A. $\sqrt{15}$　　B. $2\sqrt{5}$　　C. $2\sqrt{15}$　　D. 8

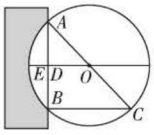
5. [中考·顺德]如图，⊙ O 的直径为 10，弦 AB 的长为 6，M 是弦 AB 上的一动点，则线段 OM 的长的取值范围是（　　）

A. $3 \leqslant OM \leqslant 5$　　B. $4 \leqslant OM \leqslant 5$

C. $3<OM<5$　　D. $4<OM<5$



（第 5 题）



（第 6 题）

6. [中考·乐山]《九章算术》是我国古代第一部自成体系的数学专著，代表了东方数学的最高成就，它的算法体系至今仍在推动着计算机的发展和应用，书中记载："今有圆材埋在壁中，不知大小，以锯锯之，深一寸，锯道长一尺，问径几何？"译为："今有一圆柱形木材，埋在墙壁中，不知其大小，用锯去锯这木材，锯口深 1 寸（$ED=1$ 寸），锯道长 1 尺（$AB=1$ 尺 $=10$ 寸），问这块圆柱形木材的直径是多少？"

如图，请根据所学知识计算：圆柱形木材的直径 AC 是（　　）

A.13 寸　　B.20 寸

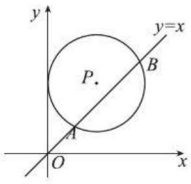
C.26 寸　　D.28 寸

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

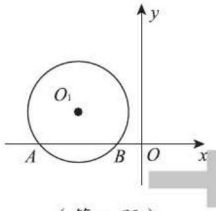
7. 如图，在平面直角坐标系中，⊙ P 的圆心坐标是（3，a）（$a>3$），半径为 3，函数 $y=x$ 的图象被⊙ P 截得的弦 AB 的长为 $4\sqrt{2}$，则 a 的值是（　　）

A.4　　B.$3+\sqrt{2}$

C.$3\sqrt{2}$　　D.$3+\sqrt{3}$



（第 7 题）

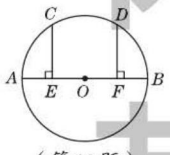


（第 9 题）

8. 已知⊙ O 的半径为 3，一弦长为 $x^2-x-6=0$ 的一个根，则该弦所对的圆心角的度数为_____.

9. 如图，半径为 $\frac{5}{2}$ 的⊙ O_1，与坐标轴交于 $A(-5,0)$，$B(-1,0)$ 两点，则圆心 O_1 的坐标为_____.

10. 如图，AB 为⊙ O 的直径，点 C，D 在⊙ O 上，$CE\perp AB$，$DF\perp AB$，垂足分别为 E，F，且 $\overset{\frown}{AC}$ 与 $\overset{\frown}{BD}$ 相等，问：AE 与 BF 相等吗？为什么？

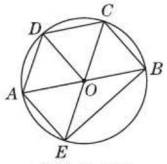


（第 10 题）

11. 如图，AB，CE 是⊙ O 的直径，$\angle COD=60°$，且 $\overset{\frown}{AD}=\overset{\frown}{BC}$.

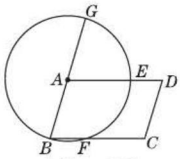
（1）请你写出与 $\angle AOE$ 相等的圆心角；

（2）连结 AE，AD，DC，CB，BE，写出其中与线段 AE 相等的弦.



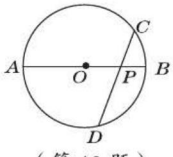
（第 11 题）

12. 如图，以▱ $ABCD$ 的顶点 A 为圆心，以 AB 边为半径作⊙ A，分别交 AD，BC 于点 E，F，延长 BA 交⊙ A 于点 G. 求证：$\overset{\frown}{GF}=2\overset{\frown}{GE}$.



（第 12 题）

13. 如图，在⊙ O 中，AB 为直径，弦 CD 交 AB 于点 P，且 $OP=PC$，试猜想 $\overset{\frown}{AD}$ 与 $\overset{\frown}{CB}$ 的度数之间的关系，并证明你的猜想.　　【导学号：8603511】



（第 13 题）

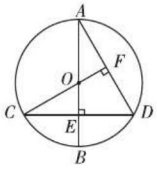
荣德基

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

14. [模拟·碑林] 如图，已知圆 O 的直径 AB 垂直于弦 CD 于点 E，连结 CO 并延长交 AD 于点 F，且 $CF \perp AD$.

（1）请证明：E 是 OB 的中点.

（2）若 $AB=8$，求 CD 的长.

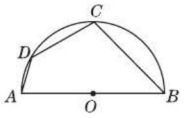


（第14题）

16. 如图，AB 为半圆 O 的直径，点 C，D 在半圆 O 上.

（1）若 $\overset{\frown}{BC}=3\overset{\frown}{AD}$，$\overset{\frown}{CD}=2\overset{\frown}{AD}$，求 $\angle DAB$ 和 $\angle ABC$ 的大小；

（2）若点 C，D 在半圆 O 上运动，并保持 $\overset{\frown}{CD}$ 的长度不变（点 C，D 不与点 A，B 重合）. 试比较 $\angle DAB$ 和 $\angle ABC$ 的大小.



（第16题）

15. 已知 $\odot O$ 的半径为 13 cm，弦 $AB \parallel CD$，$AB=10$ cm，$CD=24$ cm，求 AB 与 CD 之间的距离.

17. 某地方有一座圆弧形的拱桥，桥下的水面宽度为 7.2 m，拱顶高出水面 2.4 m，现有一艘宽 3 m，船舱顶部为矩形并高出水面 2 m 的货船要经过这里，此货船能顺利通过这座拱桥吗?

荣德基

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

27.1.3 圆周角

核心知识
- 圆周角的定义
- 圆周角定理
- 圆周角定理的推论
- 圆内接多边形

知识链接



点知识·拨考向 速提分

点知识 1 圆周角

1. 圆周角的定义： 顶点在圆上，并且两边都与圆相交的角叫做圆周角.

（1）**特征：** 圆周角必须满足两个条件：

①顶点在圆上；②两边都与圆相交.

（2）**示例：** 如图 27.1−24 ①中的角是圆周角，②③④中的角不是圆周角.

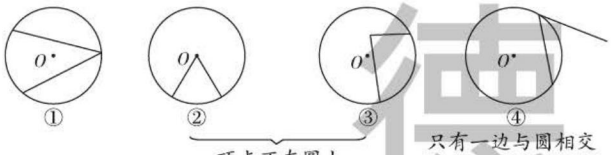


图 27.1−24

2. 特殊圆周角的性质： 半圆或直径所对的圆周角都相等，都等于 90°（直角）.

提分·必记

特别提醒

圆心角与圆周角的区别与联系：

名称 / 关系	圆心角	圆周角
区别	顶点在圆心	顶点在圆上
区别	在同圆中，一条弧所对的圆心角唯一	在同圆中，一条弧所对的圆周角有无数个
联系	两边都与圆相交	

拨考向 利用特殊圆周角的性质进行计算与证明

类型 1：特殊圆周角的性质在求角的度数中的应用

例 1 如图 27.1−25，$\square ABCD$ 的顶点 A，B，D 在 $\odot O$ 上，顶点 C 在 $\odot O$ 的直径 BE 上，连结 AE，$\angle E=36°$，则 $\angle ADC$ 的度数是（　　）

A.44°　　B.54°　　C.72°　　D.53°

解题秘方： 紧扣直径所对的圆周角的特殊性，转化为求直角三角形锐角的度数解决问题.

解： 由 BE 为 $\odot O$ 的直径知 $\angle BAE=90°$. 又 $\angle E=36°$，所以 $\angle B=90°-36°=54°$. 又四边形 $ABCD$ 为平行四边形，所以 $\angle B=\angle ADC$，所以 $\angle ADC=54°$，故选 B.

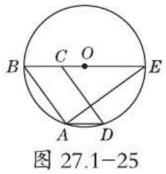


图 27.1−25

答案： B

提分·秘诀

解法提醒

由直径所对的圆周角是 90°得到直角三角形，进而求得直角三角形的另一锐角的度数，再由平行四边形的对角相等，可以把数量关系进行转化.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

类型 2：特殊圆周角的性质在证明线段相等中的应用

例 2 如图 27.1−26，AB 是⊙ O 的直径，BD 是⊙ O 的弦，延长 BD 到点 C，使 $AC=AB$. 求证：$BD=CD$.

解题秘方：紧扣“直径所对的圆周角是直角”结合等腰三角形“三线合一”性质求解.

证明：如图 27.1−26，连结 AD.

∵ AB 是⊙ O 的直径，

∴ $\angle ADB=90°$，即 $AD\perp BC$.

又∵ $AC=AB$，∴ $BD=CD$.

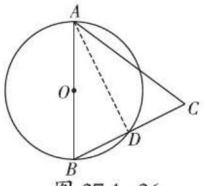


图 27.1−26

解法提醒

题中条件有直径，因此可作辅助线，构造直径所对的圆周角（直角）是常用的作辅助线的方方法，而题中有条件 AB=AC，因此可根据等腰三角形“三线合一”性质证明 BD=CD.

知识▶ 2 圆周角定理及其推论

提分·必记

1. 圆周角定理：在同圆或等圆中，同弧或等弧所对的圆周角相等，都等于该弧所对的圆心角的一半；相等的圆周角所对的弧相等.

特别提醒

“同弧或等弧”若改为“同弦或等弦”结论就不成立了. 因为一条弦所对的圆周角有两种情况：优弧上的圆周角和劣弧上的圆周角.

2. 圆周角定理的推论 1：$90°$ 的圆周角所对的弦是直径.

3. “五量关系”定理

在同圆或等圆中，如果两个圆心角、两条弧、两条弧所对（或所含）的圆周角、两条弦、两条弦的弦心距中有一组量相等，那么它们所对应的其余各组量都分别相等.

特别提醒：弧所对的圆周角与所含的圆周角是两类角，它们之间一般不相等，只有当弧为半圆时，才相等.

考向▶ 利用圆周角定理及其推论解边角应用问题

提分·秘诀

技巧提醒

圆周角定理是将圆心角与圆周角进行转化，因此求一个圆周角的度数时，我们可以求与之相等的另一个圆周角的度数，也可以求同弧所对圆心角的度数，可根据题目所给的条件选用其一进行求解.

题型 1：圆周角定理在求角度中的应用

例 3 如图 27.1−27，AB 是⊙ O 的直径，弦 $BC=BD$，若 $\angle BOD=50°$，求 $\angle A$ 的度数.

解题秘方：连结 OC，将求 $\overset{\frown}{BC}$ 所对的圆周角转化为求 $\overset{\frown}{BC}$ 所对的圆心角来解.

解：连结 OC，如图 27.1−27.

∵ $BC=BD$，∴ $\angle BOC=\angle BOD=50°$.

∴ $\angle A=\frac{1}{2}\angle BOC=\frac{1}{2}\times 50°=25°$.

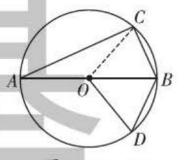


图 27.1−27

题型 2：同弧或等弧所对的圆周角相等在判断三角形形状中的应用

例 4 如图 27.1−28，A，P，B，C 是圆上的四个点，$\angle APC=\angle CPB=60°$.

求证：△ ABC 是等边三角形.

解题秘方：紧扣“同弧所对的圆周角相等”和“相等的圆周角所对的弦相等”判断.

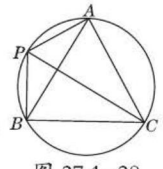


图 27.1−28

方法点拨

等边三角形判定方法：

方法 1：有一个角为 60° 的等腰三角形.

方法 2：三边都相等的三角形.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

证明：∵ A，P，B，C 是圆上的四个点，

∴ $\angle ABC=\angle APC$，$\angle CPB=\angle BAC$.

又∵ $\angle APC=\angle CPB=60°$，

∴ $\angle ABC=\angle BAC=60°$. ∴ $AC=BC$.

又 $\angle BAC=60°$，∴ $\triangle ABC$ 是等边三角形.

方法 3：三个角都相等的三角形.

题型 3：“90°的圆周角所对的弦是直径”在求角中的应用

例 5 如图 27.1−29，已知经过原点的⊙P 与 x 轴，y 轴分别交于 A，B 两点，点 C 是弧 AB 上一点，则 $\angle ACB$ 的度数是（　　）

A. 80°　　B. 90°

C. 100°　　D. 无法确定

解题秘方：利用“90°的圆周角所对的弦是直径”结合“直径所对的圆周角是直角”求解.

解：连结 AB，如图 27.1−29.

∵ $\angle AOB=90°$，∴ AB 是⊙P 的直径.

∴ $\angle ACB=90°$.

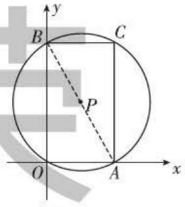


图 27.1−29

答案：B

通用技巧

圆中求角常见的作辅助线的方法：

1. 有直径，通常作直径所对的圆周角，从而得出两直线互相垂直，简记为见直径作直角.
2. 有 90°的圆周角，通常作直径，简记为有直角作直径.

点知识▸3 圆内接多边形

1. 圆内接多边形：

如果一个圆经过一个多边形的各个顶点，这个圆就叫做这个多边形的外接圆，这个多边形叫做这个圆的内接多边形.

2. 圆周角定理的推论 2（圆内接四边形的性质）：

圆内接四边形的对角互补.

拓展：圆内接四边形的一个外角等于它的内对角.

提分·必记

特别解读

- 内接和外接是一个相对的概念，是一种位置关系.
- 每一个圆都有无数个内接四边形，但并不是所有的四边形都有外接圆，只有对角互补的四边形才有外接圆.

拔考向▸利用圆内接四边形的性质求角的度数

例 6 [中考·常德]如图 27.1−30，四边形 $ABCD$ 为⊙O 的内接四边形，已知 $\angle BOD=100°$，则 $\angle BCD$ 的度数为（　　）

A. 50°　　B. 80°　　C. 100°　　D. 130°

解题秘方：将所求的角的度数转化为求圆内接四边形对角的度数.

解：∵ $\angle BAD$ 与 $\angle BOD$ 是同弧所对的圆周角和圆心角，

$$\therefore \angle BAD=\frac{1}{2}\angle BOD=\frac{1}{2}\times 100°=50°.$$

又∵四边形 $ABCD$ 为⊙O 的内接四边形，

∴ $\angle BCD+\angle BAD=180°$.

∴ $\angle BCD=180°-\angle BAD=180°-50°=130°$.

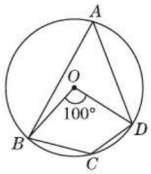


图 27.1−30

答案：D

提分·秘诀

特别提醒

- 求圆中的某一个圆周角时，根据“圆内接四边形的对角互补”，可以转化为求其所在的内接四边形的对角的度数.
- 圆内接四边形的一组对角其实是圆中一条弦所对的两个圆周角，因此，在同圆或等圆中，相等的弦所对的圆周角相等或互补.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

点方法·拨技巧 提高分

拔尖角度 1 利用构造全等三角形法证明圆中的线段相等

例 7 如图 27.1−31，在⊙O 中，AB，AC 为弦，D 为$\overset{\frown}{BC}$的中点，$DE \perp AB$ 于点 E，$DF \perp AC$ 交 AC 延长线于点 F，求证：$BE=CF$.

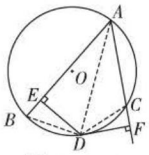


图 27.1−31

解题秘方：利用“同弧或等弧所对的圆周角相等、弦相等”结合角平分线及全等三角形的性质证明.

证明：如图 27.1−31，连结 AD，BD，CD.

$\because D$ 为$\overset{\frown}{BC}$的中点，$\therefore \overset{\frown}{BD}=\overset{\frown}{CD}$.

$\therefore BD=CD$，$\angle BAD=\angle CAD$.

$\because DE \perp AB$，$DF \perp AC$，$\therefore DE=DF$.

在 Rt△BED 和 Rt△CFD 中，$\begin{cases} BD=CD, \\ DE=DF, \end{cases}$

$\therefore$ Rt△$BED \cong$ Rt△CFD. $\therefore BE=CF$.

挑战·高分

解法提醒

BE，CF 分别在 AB，AF 上，要证 BE=CF，需分别以 BE，CF 为一边构造三角形，分析已知条件，因为 D 为$\overset{\frown}{BC}$的中点，所以连结 BD，CD 构造出三角形，证明△BED≌△CFD 即可.

由弧的中点，根据圆的性质，就可得到相等的弧，相等的弦，相等的圆周角，相等的圆心角.

拔尖角度 2 利用构造基本图形法证明圆中的线段相等

例 8 如图 27.1−32，AB 是⊙O 的直径，C 是$\overset{\frown}{AE}$的中点，$CD \perp AB$ 于点 D，交 AE 于点 F，连结 AC，求证：$AF=CF$.

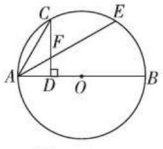


图 27.1−32

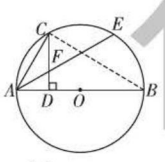


图 27.1−33

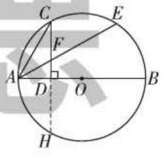


图 27.1−34

解题秘方一：构造“直径所对的圆周角”结合直角三角形的性质证明.

证法一：连结 BC，如图 27.1−33.

$\because AB$ 是直径，$\therefore \angle ACB=90°$，即$\angle ACF+\angle BCD=90°$.

$\because CD \perp AB$，$\therefore \angle B+\angle BCD=90°$. $\therefore \angle ACF=\angle B$.

$\because$点 C 是$\overset{\frown}{AE}$的中点，$\therefore \overset{\frown}{AC}=\overset{\frown}{CE}$.

$\therefore \angle B=\angle CAF$. $\therefore \angle ACF=\angle CAF$. $\therefore AF=CF$.

解题秘方二：构造“垂径定理”的基本图形结合“等弧所对的圆周角相等”证明.

证法二：延长 CD，交⊙O 于点 H，如图 27.1−34.

$\because AB$ 是直径，$CD \perp AB$，$\therefore \overset{\frown}{AC}=\overset{\frown}{AH}$.

$\because$点 C 是$\overset{\frown}{AE}$的中点，$\therefore \overset{\frown}{AC}=\overset{\frown}{CE}$.

$\therefore \overset{\frown}{AH}=\overset{\frown}{CE}$. $\therefore \angle ACH=\angle CAE$.

$\therefore AF=CF$.

挑战·高分

技巧点拨

1. 在圆中，通过作辅助线构造同弧或等弧所对的圆周角，由此可得到相关角相等.
2. “见直径，构造直径所对的圆周角”是常用且重要的构造辅助线的思路.
3. 在已知条件下，若有与半径或直径垂直的线段，常延长此线段与圆相交，这样可利用垂径定理得到线段相等、弧相等.

未 德 基

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

拔尖角度 3 利用转化圆内接四边形对角法探究动点中的两角的关系

例 9 如图 27.1-35，AB 是⊙ O 的直径，CD 是弦，$AB \perp CD$.

（1）点 P 是 $\overset{\frown}{CAD}$ 上一个动点（不与点 C，D 重合），求证：$\angle CPD = \angle COB$；

（2）点 P' 在劣弧 CD 上移动（不与点 C，D 重合）时，探究 $\angle CP'D$ 与 $\angle COB$ 有怎样的数量关系，请证明你的结论.

解题秘方：（1）连半径构造同弧所对的圆心角和圆周角证明；（2）利用（1）的结论结合圆内接四边形的性质探究两角的关系.

（1）**证明**：连结 OD，如图 27.1-35.

$\because AB$ 是⊙ O 的直径，$AB \perp CD$，$\therefore \overset{\frown}{BC} = \overset{\frown}{BD}$.

$\therefore \angle COB = \angle BOD = \frac{1}{2}\angle COD$.

又 $\because \angle CPD = \frac{1}{2}\angle COD$，$\therefore \angle CPD = \angle COB$.

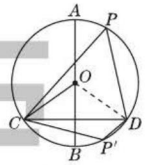


图 27.1-35

（2）**解**：$\angle CP'D$ 与 $\angle COB$ 的数量关系是 $\angle CP'D + \angle COB = 180°$.

证明：$\because$ 四边形 $CP'DP$ 是⊙ O 的内接四边形，

$\therefore \angle CP'D + \angle CPD = 180°$.

由（1）知，$\angle CPD = \angle COB$，$\therefore \angle CP'D + \angle COB = 180°$.

挑战 · 高分

特别提醒

同圆等圆有关角，
勿忘相互有关联.
圆周等于圆心半，
细找关系把线连.
直径对的是直角，
直角所对最长弦.
同弧圆周角相等，
证题用它最多见.

拔尖角度 4 利用圆周角定理的推论解决与相似三角形的综合问题

例 10 如图 27.1-36，在 $\triangle ABC$ 中，$\angle C = 60°$，以 AB 为直径的半圆 O 分别交 AC，BC 于点 D，E，已知⊙ O 的半径为 $2\sqrt{3}$.

（1）求证：$CD \cdot CA = CE \cdot CB$；

（2）求 DE 的长.

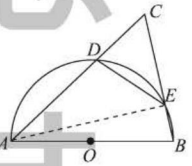


图 27.1-36

解题秘方：紧扣圆周角定理的推论找出相等的角，证明三角形相似从而解决问题.

（1）**证明**：$\because$ 四边形 $ABED$ 为⊙ O 的内接四边形，

$\therefore \angle CAB + \angle DEB = 180°$.

又 $\angle CED + \angle DEB = 180°$，

$\therefore \angle CED = \angle BAD$.

又 $\angle C = \angle C$，$\therefore \triangle CDE \backsim \triangle CBA$，

$\therefore \frac{CE}{CA} = \frac{CD}{CB}$，

$\therefore CD \cdot CA = CE \cdot CB$.

（2）**解**：如图 27.1-36，连结 AE.

挑战 · 高分

另解

如图 27.1-37，连结 DO，EO.

$\because AO = DO = EO = BO$，

$\therefore \angle A = \angle ODA$，$\angle B = \angle OEB$.

$\because$ 四边形 $ABED$ 为⊙ O 的内接四边形，

$\therefore \angle A + \angle BED = 180°$.

又 $\angle BED + \angle CED = 180°$，

$\therefore \angle A = \angle CED$.

同理，得 $\angle B = \angle CDE$.

又 $\because \angle CDE + \angle CED = 120°$，

$\angle A + \angle B + \angle ODA + \angle ODE + \angle OEB + \angle OED = 360°$，

$\therefore \angle ODE + \angle OED = 120°$，

荣德基

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

由（1）得△ CDE ∽△ CBA，$\therefore \dfrac{DE}{BA}=\dfrac{CE}{CA}$.

$\because AB$ 为⊙ O 的直径，

$\therefore AB=4\sqrt{3}$，$\angle AEB=\angle AEC=90°$.

在 Rt△ AEC 中，$\because \angle C=60°$，$\therefore \angle CAE=30°$，

$\therefore \dfrac{CE}{CA}=\dfrac{1}{2}$，

$\therefore \dfrac{DE}{BA}=\dfrac{CE}{CA}=\dfrac{1}{2}$，$\therefore DE=2\sqrt{3}$.

则$\angle DOE=60°$，

$\therefore$△ ODE 为等边三角形，

$\therefore DE=OE=2\sqrt{3}$.

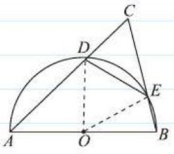


图 27.1-37

点中考·拨模拟 得满分

中考探秘

本节内容是中考中的重点内容，主要考查圆周角与圆心角的关系，直径所对的圆周角，圆内接四边形等，一般以填空题、选择题为主，既会渗透圆的其他知识，又会结合三角形、四边形的知识以解答题的形式出现.

三年中考兵法

考法 1 利用圆的有关性质判断正误

例 11 [中考·雅安] 如图 27.1-38，MN 是⊙ O 的直径，作 $AB\perp MN$，垂足为 D，连结 AM，AN，点 C 为 $\overset{\frown}{AN}$ 上一点，且 $\overset{\frown}{AC}=\overset{\frown}{AM}$，连结 CM，交 AB 于点 E，交 AN 于点 F，现给出以下结论：① $AD=BD$；② $\angle MAN=90°$；③ $\overset{\frown}{AM}=\overset{\frown}{BM}$；④ $\angle ACM+\angle ANM=\angle MOB$；⑤ $AE=\dfrac{1}{2}MF$.

其中正确结论的个数是（　　）

A. 2　　B. 3　　C. 4　　D. 5

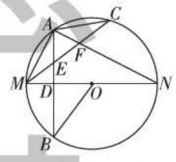


图 27.1-38

试题评析：本题考查了圆周角定理、垂径定理及直角三角形的性质，熟悉各个定理的基本图形是解题的关键.

解：$\because MN$ 是⊙ O 的直径，$AB\perp MN$，

$\therefore AD=BD$，$\overset{\frown}{AM}=\overset{\frown}{BM}$，$\angle MAN=90°$.（①②③正确）

$\because \overset{\frown}{AC}=\overset{\frown}{AM}$，

$\therefore \overset{\frown}{AC}=\overset{\frown}{AM}=\overset{\frown}{BM}$.

$\therefore \angle ACM+\angle ANM=\angle MOB$.（④正确）

$\because \overset{\frown}{BM}=\overset{\frown}{AC}$，$\therefore \angle MAE=\angle AME$，$\therefore AE=ME$.

又$\because \angle MAE+\angle EAF=\angle AME+\angle AFM=90°$，$\therefore \angle EAF=\angle AFM$.

$\therefore AE=EF$.

$\therefore AE=\dfrac{1}{2}MF$.（⑤正确）

答案：D

冲刺·满分

解法提醒

根据 $AB\perp MN$，利用垂径定理得出①③正确；利用 MN 是直径得出②正确；利用 $\overset{\frown}{AC}=\overset{\frown}{AM}=\overset{\frown}{BM}$，得出④正确；利用 $\overset{\frown}{BM}=\overset{\frown}{AC}$，$\angle MAN=90°$，得出⑤正确.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

考法 2 利用圆周角定理的推论求最短距离

例 12 [中考·贺州]如图 27.1-39，在⊙O 中，AB 是⊙O 的直径，$AB=10$，$\overset{\frown}{AC}=\overset{\frown}{CD}=\overset{\frown}{DB}$，点 E 是点 D 关于 AB 的对称点，M 是 AB 上的一动点，下列结论：①$\angle BOE=60°$；②$\angle CED=\frac{1}{2}\angle DOB$；③$DM\perp CE$；④$CM+DM$ 的最小值是 10. 上述结论中正确的个数是（　　）

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

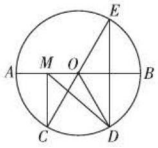


图 27.1-39

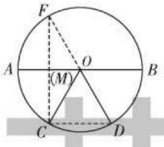


图 27.1-40

试题评析：本题考查了圆周角定理及其推论、轴对称、最短距离问题等知识点，能灵活运用圆周角定理及其推论求出各个角的度数并求出 $CM+DM$ 最小时点 M 的位置是解此题的关键.

解：∵点 E 是点 D 关于 AB 的对称点，

∴$\overset{\frown}{BD}=\overset{\frown}{BE}$.

又∵$\overset{\frown}{AC}=\overset{\frown}{CD}=\overset{\frown}{DB}$，$AB$ 是⊙O 的直径，

∴$\angle DOB=\angle BOE=\angle COD=60°$. ∴①正确.

∵$\angle CED=\frac{1}{2}\angle COD=\frac{1}{2}\times 60°=30°=\frac{1}{2}\angle DOB$，∴②正确.

∵$\angle CED=30°$，

∴当$\angle MDE=60°$ 时，$DM\perp CE$.

∵$\overset{\frown}{BE}$的度数是 60°，

∴$\overset{\frown}{AE}$的度数是 120°.

∴只有当 M 和 A 重合时，$\angle MDE=60°$.

∴只有当 M 和 A 重合时，$DM\perp CE$. ∴③错误.

如图 27.1-40，作 C 关于 AB 的对称点 F，连结 CF，DF，DF 交 AB 于点 M，此时 $CM+DM$ 的值最小，等于 DF 的长. 连结 CD.

∵$\overset{\frown}{AC}=\overset{\frown}{CD}=\overset{\frown}{DB}=\overset{\frown}{AF}$，并且弧的度数都是 60°，易得$\angle D=60°$，$\angle CFD=30°$.

∴$\angle FCD=180°-60°-30°=90°$.

∴DF 是⊙O 的直径，即 $DF=AB=10$.

∴$CM+DM$ 的最小值是 10. ∴④正确.

答案：C

解法提醒

根据 AB 是⊙O 的直径，$\overset{\frown}{AC}=\overset{\frown}{DB}=\overset{\frown}{CD}$ 和点 E 是点 D 关于 AB 的对称点，求出 $\angle DOB=\angle COD=\angle BOE=60°$，从而求出 $\angle CED$，即可判断①②；根据圆周角定理求出当 M 和 A 重合时 $\angle MDE=60°$ 即可判断③；求出 CM+DM 最小时 M 点的位置，根据圆周角定理的推论得出此时 DF 是直径，从而可求出 DF 的长，即可判断④.

基德本

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

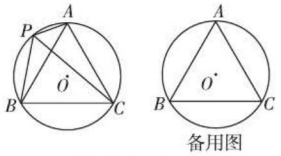
考法 3 利用圆周角定理证明边的关系

例 13 [中考·德州]如图 27.1−41，⊙ O 的半径为 1，A，P，B，C 是⊙ O 上的四个点，$\angle APC=\angle CPB=60°$.

（1）判断△ ABC 的形状：_____；

（2）试探究线段 PA，PB，PC 之间的数量关系，并证明你的结论；

（3）当点 P 位于$\overset{\frown}{AB}$的什么位置时，四边形 $APBC$ 的面积最大？求出最大面积.



备用图

图 27.1−41

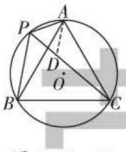


图 27.1−42

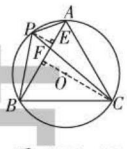


图 27.1−43

试题评析：本题考查了圆周角定理、等边三角形的判定、三角形的面积公式以及全等三角形的判定与性质.

解：（1）等边三角形

（2）$PC=PA+PB$.

证明如下：在 PC 上截取 $PD=AP$，连结 AD，如图 27.1−42.

∵ $\angle APC=60°$，∴ △ APD 是等边三角形.

∴ $AD=AP=PD$，$\angle ADP=60°$. ∴ $\angle ADC=120°$.

又∵ $\angle APB=\angle APC+\angle BPC=120°$，

∴ $\angle ADC=\angle APB$.

在△ APB 和△ ADC 中，$\begin{cases}\angle ABP=\angle ACD,\\ \angle APB=\angle ADC,\\ AP=AD,\end{cases}$

∴ △ APB ≌△ ADC. ∴ $BP=CD$.

又∵ $PD=AP$，∴ $PC=PA+PB$.

（3）当点 P 为$\overset{\frown}{AB}$的中点时，四边形 $APBC$ 的面积最大. 如图 27.1−43，过点 P 作 $PE\perp AB$，垂足为 E. 过点 C 作 $CF\perp AB$，垂足为 F.

∵ $S_{\triangle APB}=\frac{1}{2}AB\cdot PE$，$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}AB\cdot CF$，

∴ $S_{四边形APBC}=\frac{1}{2}AB\cdot(PE+CF)$.

当点 P 为$\overset{\frown}{AB}$的中点时，$PE+CF=PC$，PC 为⊙ O 的直径，此时四边形 $APBC$ 的面积最大.

又∵⊙ O 的半径为 1，∴其内接正三角形的边长 $AB=\sqrt{3}$.

∴四边形 $APBC$ 的最大面积为 $\frac{1}{2}\times2\times\sqrt{3}=\sqrt{3}$.

解法提醒

1. 利用圆周角定理可得 ∠BAC = ∠CPB，∠ABC = ∠APC，而 ∠APC = ∠CPB = 60°，则 ∠BAC = ∠ABC = 60°，从而可判断△ABC 的形状；
2. 在 PC 上截取 PD=AP，则△APD 是等边三角形，然后证明△APB ≌ △ADC，得到 BP=CD，即可得证；
3. 过点 P 作 PE ⊥ AB，垂足为 E，过点 C 作 CF ⊥ AB，垂足为 F，把四边形的面积转化为两个三角形的面积进行计算，当点 P 为$\overset{\frown}{AB}$的中点时，PE+CF=PC，从而得出最大面积.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

浅谈隐形圆——将多边形问题化归为圆的问题

在最近几年的中考题和中考模拟题中，经常会出现一类有关圆的题目，这类题目在条件中没有直接给出有关圆方面的信息，但我们通过分析和转化，最终都可以利用圆的知识求解．这类题目构思巧妙，综合性强，它将复杂的多边形求角问题转化为圆内的求角问题，体现了转化和化归的数学思想，处理这类题目，关键在于能否把“隐形圆”找出来．

下面就有关数学中的“隐形圆”问题进行一些探索．

［案例］如图 27.1−44，已知 $AB=AC=AD$，若 $\angle BDC=40°$，求 $\angle BAC$ 的度数．

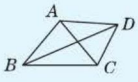


图 27.1−44

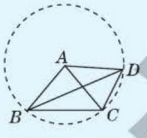


图 27.1−45

［案例分析］直接根据条件求 $\angle BAC$ 的度数有一定的难度，但由 $AB=AC=AD$ 可知，B，C，D 三点到 A 点的距离相等，于是得到 B，C，D 三点在以点 A 为圆心，AB 为半径的圆上．画出这个隐形圆，如图 27.1−45，根据圆的基本性质就可巧妙地求出 $\angle BAC=2\angle BDC=2\times40°=80°$．

［探究应用］如图 27.1−46，已知点 O 是三角形 ABC 内一点，$OA=OB=OC$，$\angle AOB=\angle AOC$，$\angle ABC=70°$，求 $\angle BAC$ 的度数．

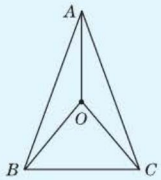
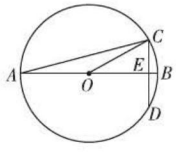


图 27.1−46

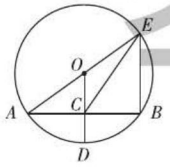
两年模拟兵法 ☞答案见 196 页

1. ［中考·黔东南州］如图，$\odot O$ 的直径 AB 垂直于弦 CD，垂足为 E，$\angle A=15°$，半径为 2，则弦 CD 的长为（　　）

A. 2　　B. −1　　C. $\sqrt{2}$　　D. 4



（第 1 题）



（第 2 题）

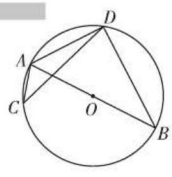
2. ［中考·新疆］如图，$\odot O$ 的半径 OD 垂直于弦 AB，垂足为 C，连结 AO 并延长交 $\odot O$ 于点 E，连结 BE，CE，若 $AB=8$，$CD=2$，则 $\triangle BCE$ 的面积为（　　）

A. 12　　B. 15　　C. 16　　D. 18

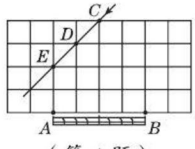
3. ［中考·福建］如图，AB 是 $\odot O$ 的直径，C，D 是 $\odot O$ 上位于 AB 异侧的两点，下列四个角中，一定与 $\angle ACD$ 互余的角是（　　）

A. $\angle ADC$　　B. $\angle ABD$

C. $\angle BAC$　　D. $\angle BAD$



（第 3 题）



（第 4 题）

4. ［中考·金华］足球射门，不考虑其他因素，仅考虑射点到球门 AB 的张角大小时，张角越大，射门越好．如图的正方形网格中，点 A，B，C，

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

D，E 均在格点上，球员带球沿 CD 方向进攻，最好的射点在（　　）

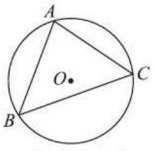
A. 点 C

B. 点 D 或点 E

C. 线段 DE（异于端点）上一点

D. 线段 CD（异于端点）上一点

5. 如图，$\odot O$ 经过 $\triangle ABC$ 的三个顶点，$\odot O$ 的半径 $R=2$，$\sin B=\frac{3}{4}$，则弦 AC 的长为_____.

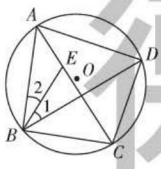


（第 5 题）

6. [中考·台州]如图，四边形 $ABCD$ 内接于 $\odot O$，点 E 在对角线 AC 上，$EC=BC=DC$.

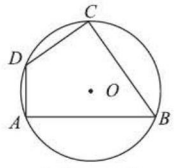
（1）若 $\angle CBD=39°$，求 $\angle BAD$ 的度数；

（2）求证：$\angle 1=\angle 2$.



（第 6 题）

7. [2018·无锡]如图，四边形 $ABCD$ 内接于 $\odot O$，$AB=17$，$CD=10$，$\angle A=90°$，$\cos B=\frac{3}{5}$，求 AD 的长.　　【导学号：8603511】

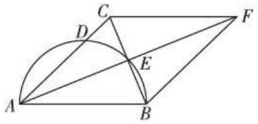


（第 7 题）

8. [中考·宜昌]如图，在 $\triangle ABC$ 中，$AB=AC$，以 AB 为直径的圆交 AC 于点 D，交 BC 于点 E，延长 AE 至点 F，使 $EF=AE$，连结 FB，FC.

（1）求证：四边形 $ABFC$ 是菱形；

（2）若 $AD=7$，$BE=2$，求半圆形和菱形 $ABFC$ 的面积.

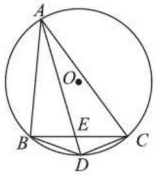


（第 8 题）

荣德基

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

9. 如图，⊙ O 经过△ ABC 的三个顶点，点 D 是 $\overset{\frown}{BC}$ 的中点，AD 交 BC 于点 E，连结 BD，DC. 请考虑：$DC^2=DE\cdot DA$ 是否成立？若成立，给出证明；若不成立，举例说明.

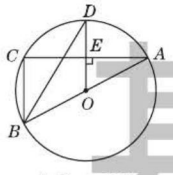


（第 9 题）

10. 如图，△ ABC 是⊙ O 的内接三角形，AB 是⊙ O 的直径，D 为⊙ O 上一点，$OD\perp AC$，垂足为 E，连结 BD.

（1）求证：BD 平分∠ ABC；

（2）当∠ $ODB=30°$ 时，求证：$BC=OD$.



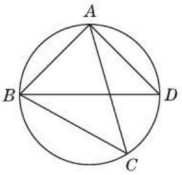
（第 10 题）

11. [**中考 · 广州**]如图，点 C 为△ ABD 外接圆上的一动点（点 C 不在 $\overset{\frown}{BAD}$ 上，且不与点 B，D 重合），∠ $ACB=$ ∠ $ABD=45°$.

（1）求证：BD 是该外接圆的直径；

（2）连结 CD，求证：$\sqrt{2}\,AC=BC+CD$；

（3）若△ ABC 关于直线 AB 的对称图形为△ ABM，连结 DM，试探究 DM^2，AM^2，BM^2 三者之间满足的等量关系，并证明你的结论.



（第 11 题）

荣德基

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

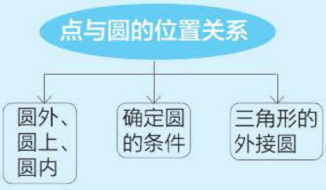
27.2 与圆有关的位置关系

27.2.1 点与圆的位置关系

核心知识

- 圆外、圆上、圆内
- 确定圆的条件
- 三角形的外接圆

知识链接



点知识·拨考向 速提分

点知识 1 点与圆的位置关系

点与圆的位置关系

设⊙O的半径为r，点P到圆心的距离$OP=d$，则有：

点和圆的位置关系	特点	等价关系
点在圆外	点到圆心的距离大于半径	点P在圆外$\Leftrightarrow d>r$
点在圆上	点到圆心的距离等于半径	点P在圆上$\Leftrightarrow d=r$
点在圆内	点到圆心的距离小于半径	点P在圆内$\Leftrightarrow d<r$

特别提醒：符号“$\Leftrightarrow$”读作“等价于”，它表示从符号的左端可以推出右端，从右端也可以推出左端，即左右两端互为因果关系.

拨考向 利用点与圆的位置关系判定说明点的位置

例1 已知⊙O的半径$r=5$ cm，圆心O到直线l的距离$d=OD=3$ cm，在直线l上有P，Q，R三点，且有$PD=4$ cm，$QD=5$ cm，$RD=3$ cm，那么P，Q，R三点与⊙O的位置关系各是怎样的？

解题秘方：比较点到圆心的距离与半径的大小确定点的位置情况.

解：如图27.2−1，连结OR，OP，OQ.

∵ $PD=4$ cm，$OD=3$ cm，且$OD\perp l$，

∴ $OP=\sqrt{PD^2+OD^2}=5$ cm$=r$.

∴点P在⊙O上.

∵ $QD=5$ cm，

∴ $OQ=\sqrt{QD^2+OD^2}=\sqrt{34}$ cm>5 cm$=r$，

∴点Q在⊙O外.

∵ $RD=3$ cm，

∴ $OR=\sqrt{RD^2+OD^2}=3\sqrt{2}$ cm<5 cm$=r$.

∴点R在⊙O内.

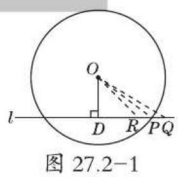


图27.2−1

提分·必记

拓宽视野

一个圆将平面分为三个部分.

圆的外部可以看成到圆心的距离大于半径的点的集合；

圆上可以看成到圆心的距离等于半径的点的集合；

圆的内部可以看成到圆心的距离小于半径的点的集合.

提分·秘诀

解法巧记

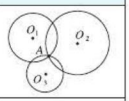
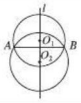
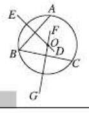
点和圆位置关系，
d，r关系是关键，
d小于r在圆内，
d等于r在圆上，
d大于r在圆外.



关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

点知识▶ 2 圆的确定

1. 过已知点作圆

条件	作法	作圆的个数	图示
过一点 A 作圆	以点 A 以外的任意一点为圆心，以该点与点 A 的距离为半径作圆	无数个	
过两点 A，B 作圆	连结 AB，作线段 AB 的垂直平分线，以其垂直平分线上任意一点为圆心，以该点与点 A（或点 B）的距离为半径作圆	无数个	
过不在同一条直线上的三点 A，B，C 作圆	连结 AB，BC，分别作线段 AB，BC 的垂直平分线 DE 和 FG，DE 和 FG 相交于点 O，以 O 为圆心，以 OA（或 OB，OC）为半径作圆，⊙O 就是所求作的圆	一个	

2. 确定一个圆的条件：

（1）已知圆心、半径，可以确定一个圆．

（2）不在同一条直线上的三点确定一个圆．

→"确定"是"有且只有"的意思．

拔考向▶ 利用确定一个圆的条件分析确定圆的情况

题型 1：不在同一条直线上的三点确定一个圆在分析确定圆的个数中的应用

例 2 如图 27.2-2，点 A，B，C 在同一条直线上，点 D 在直线 AB 外，过这四个点中的任意三个点，能画圆的个数是（　　）

A.1　　B.2　　C.3　　D.4

解题秘方：紧扣两点：（1）四个点中取三个点的组数；

（2）去掉三点共线的组数．

解：不在同一条直线上的三点确定一个圆，在点 A，B，C，D 四个点中取三个点的组数为：点 A，B，C；点 A，B，D；点 B，C，D；点 A，C，D，共四组，而 A，B，C 三点在同一条直线上，因此过这四个点中的任意三个点，能画圆的个数为 3.

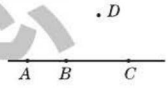


图 27.2-2

答案：C

题型 2：圆心和半径在确定圆中的应用

例 3 图 27.2-3 是一个残破的圆轮的示意图，李师傅想要再浇铸一个同样大小的圆轮，你能想办法帮帮李师傅吗？

解题秘方：由线段的垂直平分线的判定和性质确定圆心和半径．

解：（1）如图 27.2-4，在圆轮对应的弧上任取三点 A，B，C，并且连结 AB，BC；


图 27.2-3

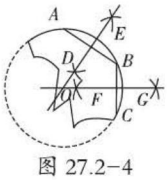


图 27.2-4

（2）分别作 AB，BC 的垂直平分线 DE，FG，且 DE，FG 相交于点 O；

（3）以点 O 为圆心，以 OA 为半径作⊙O，⊙O 就是圆轮对应的圆．按上述步骤就能得到与原来同样大小的圆轮．

提分·必记

方法点拨

过不在同一条直线上的任意四点作圆：

要想过四点作圆，应先作出经过不在同一条直线上的三点的圆，若第四个点到圆心的距离等于半径，则第四个点在圆上，否则，第四个点不在圆上．

提分·秘诀

特别提醒

确定一个圆要具备两个关键点：

- 已知三个点，若已知两个点或一个点，都无法确定圆；
- 三个点不在同一条直线上．

特别提醒

确定一个圆的圆心的方法：

确定一个圆的圆心时，只需作出此圆任意两条弦（不平行）的垂直平分线，因为弦的垂直平分线经过圆心，且两条不平行的弦的垂直平分线只有一个交点．

荣德基

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

点知识▸ 3 三角形的外接圆

1. 三角形的外接圆：

经过三角形三个顶点的圆就是这个三角形的外接圆，三角形外接圆的圆心叫做这个三角形的外心．这个三角形叫做这个圆的内接三角形．

2. 三角形的外心特点及性质：

（1）特点：三角形的外心是三角形三条边的垂直平分线的交点．

（2）性质：三角形的外心到三角形三个顶点的距离相等，等于其外接圆的半径．

3. 三角形外接圆的作法：

（1）作三角形任意两边的垂直平分线，确定其交点；

（2）以该交点为圆心，以交点到三个顶点中任意一点的距离为半径作圆即可．

提分·必记

特别提醒

任意一个三角形都有且只有一个外接圆，但一个圆有无数个内接三角形．

特别提醒

三角形外心的位置：

锐角三角形的外心在三角形的内部；

直角三角形的外心是斜边的中点；

钝角三角形的外心在三角形的外部．

拔考向▸ 利用三角形外接圆的定义求外接圆的半径

例 4 如图 27.2−5，△ ABC 内接于⊙ O，∠ C=45°，AB=4，求⊙ O 的半径．

解题秘方：连结半径，利用圆周角与圆心角的关系结合勾股定理求解．

解：如图 27.2−5，连结 OA，OB，设⊙ O 的半径为 r.

∵∠ C=45°，∴∠ AOB=2∠ C=90°．

∴ $OA^2+OB^2=AB^2$，即 $r^2+r^2=4^2$.

解得 $r_1=2\sqrt{2}$，$r_2=-2\sqrt{2}$（不符合题意，舍去）．

∴⊙ O 的半径为 $2\sqrt{2}$．

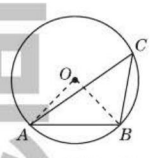


图 27.2−5

提分·秘诀

巧记提醒

求三角形的外接圆半径的方法：

求三角形的外接圆半径时，最常用的方法是作出圆心与三角形顶点的连线（即半径），或延长使这条半径变为直径，将求半径转化为直角三角形中求边的长．

点方法·拨技巧 提高分

拔尖角度▸ 1 利用分类法求涉点和圆的位置关系的圆的半径

例 5 已知点 P 到⊙ O 的最近距离为 4 cm，最远距离为 10 cm，求⊙ O 的半径．

解题秘方：紧扣“点到圆的最近（远）距离的点，圆心和这点本身这三点在同一直线上”，并结合点的不同位置进行分类解答．

解：点 P 的位置分两种情况：

当点 P 在⊙ O 外时，如图 27.2−6 ①．

∵ PA=4 cm，PB=10 cm，

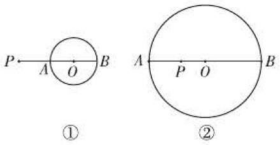
∴ $AB=PB-PA$=10−4=6（cm）．

∴⊙ O 的半径为 3 cm.

当点 P 在⊙ O 内时，如图 27.2−6 ②．∵ PA=4 cm，PB=10 cm，

∴ $AB=PB+PA$=4+10=14（cm）．∴⊙ O 的半径为 7 cm.

综上所述，⊙ O 的半径是 3 cm 或 7 cm.



① ②

图 27.2−6

挑战·高分

特别提醒

- 涉及点和圆的位置关系的问题，如果题目中没有明确点和圆的位置关系，应考虑点在圆内、圆上和圆外三种可能的情况，即图形位置不确定时应分类讨论，利用数形结合思想来解决．
- 点及点到圆的最近距离的点，点到圆的最远距离的点，三点在同一直线上，且经过圆心．

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

拔尖角度 [2] 利用比较法解涉点和圆的位置关系的相关问题

例 6 如图 27.2-7，在 $\triangle ABC$ 中，$\angle ACB=90°$，$AC=2$，$BC=3$，AB 的中点为 M.

（1）以点 C 为圆心，2 为半径作 $\odot C$，则点 A，B，M 与 $\odot C$ 有怎样的位置关系？

（2）若以点 C 为圆心作 $\odot C$，使 A，B，M 三点中至少有一点在 $\odot C$ 内，并且至少有一点在 $\odot C$ 外，求 $\odot C$ 的半径 r 的取值范围.

解题秘方： 分别用点 A，B，M 到点 C 的长与 $\odot C$ 半径的大小进行比较，说明它们的位置情况.

解：（1）$\because AC=2$，且 $\odot C$ 的半径为 2，

$\therefore$ 点 A 在 $\odot C$ 上.

又 $\because BC=3>2$，$\therefore$ 点 B 在 $\odot C$ 外.

在 $\mathrm{Rt}\triangle ABC$ 中，$AB=\sqrt{3^2+2^2}=\sqrt{13}$，

$\therefore MC=\dfrac{\sqrt{13}}{2}<2$. $\therefore$ 点 M 在 $\odot C$ 内.

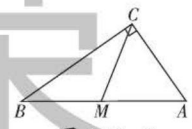


图 27.2-7

（2）$\because AC=2$，$BC=3$，$MC=\dfrac{\sqrt{13}}{2}$，$\therefore BC>AC>MC$.

$\therefore \odot C$ 的半径 r 的取值范围是 $\dfrac{\sqrt{13}}{2}<r<3$.

挑战·高分

解法提醒

- 判断点和圆的位置关系的实质是比较点到圆心的距离与半径的大小关系，再由数量的大小关系确定位置关系；
- 三点中至少有一点在圆内，且至少有一点在圆外，说明这个圆的半径小于圆心到最远点的距离，大于圆心到最近点的距离.

拔尖角度 [3] 利用三角形的三边关系证明边的不等关系

例 7 如图 27.2-8，$\triangle ABC$ 内接于 $\odot O$，$\angle ACB=2\angle ABC$，弦 $AD\parallel BC$.

求证：（1）CD 平分 $\angle ACB$；

（2）$2AC>AB$.

解题秘方：（1）利用同弧所对的圆周角相等结合平行线的性质求解；（2）利用等角对等弦转化为三角形的三边关系求解.

证明：（1）$\because AD\parallel BC$，$\therefore \angle ADC=\angle DCB$.

$\because \angle ABC=\angle ADC$，$\therefore \angle ABC=\angle DCB$.

又 $\because \angle ACB=2\angle ABC=2\angle DCB$，

$\therefore \angle ACD=\angle DCB$，即 CD 平分 $\angle ACB$.

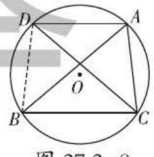


图 27.2-8

（2）连结 BD，如图 27.2-8.

由（1）易得 $\angle ABC=\angle ACD$.

$\therefore \overset{\frown}{AC}=\overset{\frown}{AD}$. $\therefore AC=AD$.

又由（1）知 $\angle BCD=\angle ACD$，$\therefore \overset{\frown}{BD}=\overset{\frown}{AD}$.

$\therefore BD=AD$. $\therefore AC=AD=BD$.

在 $\triangle ABD$ 中，$AD+BD>AB$，$\therefore 2AC>AB$.

挑战·高分

特别提醒

利用三角形的外接圆解有关边角问题时，常常用到圆周角定理及其推论，以及弧、弦、圆心角（圆周角）之间的关系.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

拔尖角度 4 利用数形结合思想求三角形外心的坐标

挑战·高分

例 8 如图 27.2−9，已知抛物线 $y=x^2-4x$ 经过原点，且与 x 轴交于点 A.

（1）求线段 OA 的长；

（2）设抛物线的顶点为 B，试求△ OAB 外接圆圆心的坐标.

解题秘方：（1）利用抛物线与 x 轴的交点求 OA 的长；

（2）利用抛物线上的点的坐标特点结合外心的性质求三角形外接圆圆心的坐标.

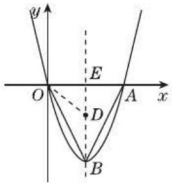


图 27.2−9

解：（1）当 $y=0$ 时，$x^2-4x=0$.

解得 $x_1=0$，$x_2=4$. ∴ A（4，0）. ∴ $OA=4$.

（2）作抛物线的对称轴交 x 轴于点 E，如图 27.2−9.

∵顶点 B（2，−4），∴ $BE=4$.

设点 D 为△ OAB 外接圆圆心，连结 OD，根据抛物线的对称性和三角形外心的性质知△ OAB 的外心 D 必在 BE 上，且 $OD=DB$.

设 $OD=r$，易知 $r^2=2^2+(4-r)^2$，∴ $r=\frac{5}{2}$. ∴ $DE=4-\frac{5}{2}=\frac{3}{2}$.

∵点 D 在第四象限，

∴△ OAB 外接圆圆心的坐标为 $(2,-\frac{3}{2})$.

知识储备

1. 抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 与 x 轴交点的横坐标为方程 $ax^2+bx+c=0$ 的两个实数根.
2. 抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 的对称轴为 $x=-\frac{b}{2a}$；顶点坐标为 $(-\frac{b}{2a},\frac{4ac-b^2}{4a})$.

技巧提醒

运用方程思想求线段长是常用的方法，确定以抛物线的顶点、抛物线与x轴的两个交点为顶点的三角形的外心时，根据外心的确定方法可知，外心必定在抛物线的对称轴上.

点中考·拔模拟 得满分

中考探秘

近几年中考考查点和圆的位置关系的题型出现得不多，但点和圆的位置关系是讨论直线和圆的位置关系的基础，中考主要考查的内容有判断点和圆的位置关系和写出网格图中圆心坐标及格点上的点与圆的位置关系等，多以选择题、填空题的形式出现. 另外，三角形外接圆的应用在中考中也常有出现，题目难度不大.

三年中考兵法

考法 1 利用网格格点上点与圆的位置关系情况确定圆的半径的范围

冲刺·满分

例 9 [中考·枣庄]如图 27.2−10，在网格（每个小正方形的边长均为 1）中选取 9 个格点（格线的交点称为格点），如果以 A 为圆心，r 为半径画圆，选取的格点中除点 A 外恰好有 3 个在圆内，则 r 的取值范围为（　　）

A. $2\sqrt{2}<r<\sqrt{17}$

B. $\sqrt{17}<r\leqslant 3\sqrt{2}$

C. $\sqrt{17}<r<5$

D. $5<r<\sqrt{29}$

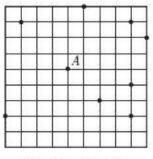


图 27.2−10

解法提醒

分别求出各格点到圆心的距离，除点A外恰有3个点在圆内，说明只有3个点到圆心的距离小于半径（即圆的半径大于此3个点到圆心的距离），并且半径小于或等于另5个点到圆心的距离中的最小距离.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

试题评析：本题考查了点与圆的位置关系以及勾股定理，利用勾股定理求出各格点到点 A 的距离是解题的关键.

解：给各格点标上字母，如图 27.2−11，连结 AB，AC，AD，AE，AF，AG，AM，AN.

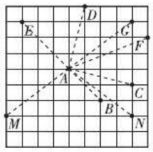


图 27.2−11

$AB=\sqrt{2^2+2^2}=2\sqrt{2}$，$AC=AD=\sqrt{4^2+1^2}=\sqrt{17}$，

$AE=\sqrt{3^2+3^2}=3\sqrt{2}$，$AF=\sqrt{5^2+2^2}=\sqrt{29}$，

$AG=AM=AN=\sqrt{4^2+3^2}=5$，

∴当 $\sqrt{17}<r\leqslant 3\sqrt{2}$ 时，以 A 为圆心，r 为半径画圆，选取的格点中除点 A 外恰好有 3 个在圆内.

答案：B

警示

不要忽视半径等于最小距离，因为在圆上也不算在圆内.

考法 2 利用点与圆的位置关系求最小值

例 10 ［中考·贵港］如图 27.2−12，已知 P 是⊙ O 外一点，Q 是⊙ O 上的动点，线段 PQ 的中点为 M，连结 OP，OM，若⊙ O 的半径为 2，$OP=4$，则线段 OM 的最小值是（　　）

A. 0　　B. 1　　C. 2　　D. 3

试题评析：本题考查了点与圆的位置关系：点与圆的位置关系可以确定该点到圆心的距离与半径的关系，反过来点到圆心的距离与半径的关系也可以确定该点与圆的位置关系.

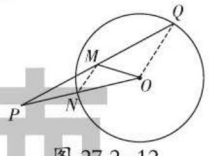


图 27.2−12

解：设 OP 与⊙ O 交于点 N，连结 MN，OQ，如图 27.2−12.

∵ $OP=4$，$ON=2$，∴ N 是 OP 的中点.

∵ M 为 PQ 的中点，∴ MN 为△ POQ 的中位线.

∴ $MN=\frac{1}{2}OQ=\frac{1}{2}\times 2=1$.

∴点 M 在以 N 为圆心，1 为半径的圆上.

当点 M 在 ON 上时，OM 最小，最小值为 1，∴线段 OM 的最小值为 1.

答案：B

解法提醒

设 OP 与⊙ O 交于点 N，连结 MN，OQ，如图 27.2−12，可判断 MN 为△ POQ 的中位线，则 $MN=\frac{1}{2}OQ=1$，则点 M 在以 N 为圆心，1 为半径的圆上. 当点 M 在 ON 上时，OM 最小，最小值为 1.

两年模拟兵法 ☞答案见 198 页

1. 下面 4 个命题：

①经过三点一定可以作圆；

②任意一个三角形一定有一个外接圆，而且只有一个外接圆；

③任意一个圆一定有一个内接三角形，而且只有一个内接三角形；

④三角形的外心到三角形三个顶点的距离相等.

其中真命题的个数有（　　）

A. 4 个　　B. 3 个　　C. 2 个　　D. 1 个

2. 在平面直角坐标系中，点 A，B，C 的坐标分别为（1，4），（5，4），（1，−2），则△ ABC 外接圆的圆心坐标是（　　）

A.（2，3）　B.（3，2）　C.（1，3）　D.（3，1）

3. 已知⊙ O 是以坐标原点 O 为圆心，5 为半径的圆，点 M 的坐标为（−3，4），则点 M 与⊙ O 的位置关系为（　　）

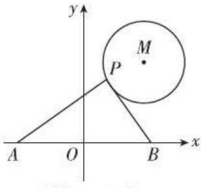
A. 点 M 在⊙ O 上　　B. 点 M 在⊙ O 内

C. 点 M 在⊙ O 外　　D. 点 M 在⊙ O 右上方

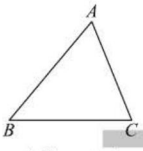
关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

4. [中考·泰安]如图，⊙M的半径为2，圆心M的坐标为(3，4)，点P是⊙M上的任意一点，$PA \perp PB$，且PA，PB与x轴分别交于A，B两点，若点A，点B关于原点O对称，则AB的最小值为(　　)

A.3　　B.4　　C.6　　D.8



(第4题)



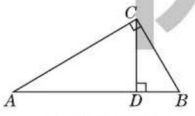
(第5题)

5. [中考·临沂]如图，在△ABC中，$\angle A=60°$，$BC=5$ cm. 能够将△ABC完全覆盖的最小圆形纸片的直径是_____cm.

6. 如图，在△ABC中，$\angle ACB=90°$，$CD \perp AB$于点D，$\angle A=30°$，$AC=3$.

(1)以点C为圆心，$\sqrt{3}$为半径画⊙C，指出点A，B，D与⊙C的位置关系；

(2)若要使⊙C经过点D，则⊙C的半径应为多长?

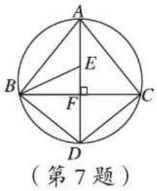


(第6题)

7. 如图，AD为△ABC外接圆的直径，$AD \perp BC$，垂足为F，$\angle ABC$的平分线交AD于点E，连结DB，DC.

(1)求证：$DB=DC$；

(2)请判断B，E，C三点是否在以点D为圆心，DB为半径的圆上，并说明理由.

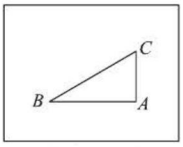


(第7题)

8. 小明家的房前有一块矩形的空地，空地上有三棵树A，B，C，如图，小明想建一个圆形花坛，使三棵树都在花坛的边上.

(1)请你帮小明把花坛的位置画出来(尺规作图，不写作法，保留作图痕迹)；

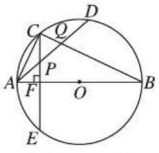
(2)在△ABC中，若$AB=8$米，$AC=6$米，$\angle BAC=90°$，试求小明家圆形花坛的面积.　　【导学号：8603511】



(第8题)

9. 已知：如图，△ABC内接于⊙O，AB为直径，弦$CE \perp AB$于点F，C是$\overset{\frown}{AD}$的中点，连结AD，分别交CE，BC于点P，Q.

求证：点P是△ACQ的外心.



(第9题)

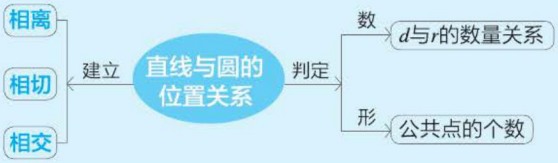
荣德基

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

27.2.2 直线与圆的位置关系

核心知识
- 直线与圆的位置关系
- 直线与圆的位置关系的判定

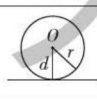
知识链接



点知识·拨考向 速提分

点知识▶ 直线与圆的位置关系

直线与圆的位置关系

直线与圆的位置关系	相离	相切	相交
图示			
公共点个数	0	1	2
公共点名称		切点	交点
直线名称		切线	割线
圆心 O 到直线的距离 d 与半径 r 的关系	$d>r$	$d=r$	$d<r$
等价关系	$d>r\Leftrightarrow$直线 l 与⊙ O 相离	$d=r\Leftrightarrow$直线 l 与⊙ O 相切	$d<r\Leftrightarrow$直线 l 与⊙ O 相交

拔考向▶ 利用直线与圆的位置关系解圆心到直线的距离和半径的相关应用

题型 1：圆心到直线的距离与半径的大小关系在判定直线与圆的位置关系中的应用

例 1 如图 27.2−13，在 Rt△ABC 中，∠C=90°，AC=6 cm，BC=8 cm，则直线 AB 和以点 C 为圆心，r 为半径的圆有何位置关系？为什么？（1）r=4 cm；（2）r=4.8 cm；（3）r=7 cm.

解题秘方：求出点 C 到 AB 的距离，再将其与圆的半径的大小进行比较.

解：过点 C 作 $CD\perp AB$ 于点 D，如图 27.2−13.

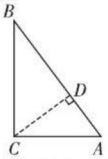


图 27.2−13

在 Rt△ABC 中，∠ACB=90°，AC=6 cm，BC=8 cm，则 $AB=\sqrt{AC^2+BC^2}=\sqrt{6^2+8^2}=10$(cm).

又∵ $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}AB\cdot CD=\frac{1}{2}AC\cdot BC$，

∴ $AB\cdot CD=AC\cdot BC$，即 $10\times CD=6\times 8$. ∴ CD=4.8 cm.

（1）当 r=4 cm 时，$CD>r$，直线 AB 和⊙ C 相离；

（2）当 r=4.8 cm 时，$CD=r$，直线 AB 和⊙ C 相切；

（3）当 r=7 cm 时，$CD<r$，直线 AB 和⊙ C 相交.


直线和圆的位置关系

提分·必记

要点提醒

1. 如果一条直线满足下列三个条件中的任意两个，那么第三个也成立：
   （1）过圆心；
   （2）过切点；
   （3）垂直于切线.
2. 根据切线的定义，可以知道切线具备的性质还有：
   （1）切线和圆只有一个公共点；
   （2）切点到圆心的距离等于半径.

提分·秘诀

解法提醒

判定直线和圆的位置关系的两种方法：
1. 根据直线与圆的公共点的个数判定；
2. 将圆心到直线的距离 d 与圆的半径 r 相比较，在没有给出 d 与 r 的具体数值的情况下，可先利用图形条件及性质求出 d 与 r 的值，再通过比较大小确定其位置关系.

荣德基

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

题型 2：直线与圆的位置关系在求字母取值范围中的应用

例 2 如图 27.2−14，在△ ABC 中，$\angle C=90°$，$\angle A=30°$，O 是 AB 上的一点，$OB=m$（$m>0$），⊙ O 的半径 r 为 $\frac{1}{2}$，当 m 分别在什么范围内取值时，直线 BC 与⊙ O 相离、相切、相交？

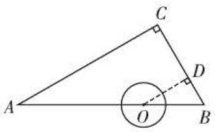


图 27.2−14

解题秘方：利用点与圆的位置关系的性质建立方程（或不等式）求 m 的范围.

解：如图 27.2−14，作 $OD\perp BC$ 于点 D.

$\because\angle A=30°$，$\angle C=90°$，$\therefore\angle B=60°$. $\therefore\angle DOB=30°$.

在 Rt△ ODB 中，$\because OB=m$，$\therefore DB=\frac{1}{2}m$，$OD=\frac{\sqrt{3}}{2}m$. 设 $OD=d$.

（1）当直线 BC 与⊙ O 相离时，$d>r$，即 $\frac{\sqrt{3}}{2}m>\frac{1}{2}$，解得 $m>\frac{\sqrt{3}}{3}$.

（2）当直线 BC 与⊙ O 相切时，$d=r$，即 $\frac{\sqrt{3}}{2}m=\frac{1}{2}$，解得 $m=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

（3）当直线 BC 与⊙ O 相交时，$d<r$，即 $\frac{\sqrt{3}}{2}m<\frac{1}{2}$，解得 $m<\frac{\sqrt{3}}{3}$.

又 $m>0$，$\therefore 0<m<\frac{\sqrt{3}}{3}$.

题型 3：直线与圆的位置关系在解决与圆有关的实际问题中的应用

例 3 如图 27.2−15，某货船以 20 海里/时的速度将一批重要物资由 A 处运往正西方向的 B 处. 经 16 小时的航行到达 B 处，到达后立即卸货. 此时接到气象部门的通知，一台风中心正以 40 海里/时的速度由 A 向北偏西 60° 方向移动，距台风中心 200 海里的圆形区域（包括边界）均会受到影响，问：

（1）B 处是否会受到台风影响？

（2）若使该船不受台风影响，应在多长时间内卸完货物？（结果保留一位小数）

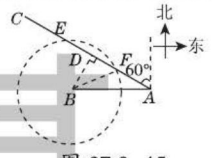


图 27.2−15

解题秘方：将实际问题转化为直线与圆的位置关系问题来解决.

解：（1）如图 27.2−15，过点 B 作 $BD\perp AC$ 于点 D.

在 Rt△ ABD 中，$\angle BAD=90°-60°=30°$，

所以 $BD=\frac{1}{2}AB=\frac{1}{2}\times20\times16=160$（海里）$<200$ 海里，

所以 B 处会受到台风影响.

（2）设以点 B 为圆心，200 海里为半径的圆交 AC 于点 E,F，连结 BF，如图 27.2−15. 由题意知 $DF=\sqrt{200^2-160^2}=120$（海里），$AD=\sqrt{(20\times16)^2-160^2}=160\sqrt{3}$（海里），所以 $\frac{160\sqrt{3}-120}{40}\approx3.9$（小时）. 所以该船应在 3.9 小时内卸完货物.

解法提醒

要判断 $OB=m$ 在什么范围内取值时，BC 与⊙O 相离、相切、相交，就是要求出圆心 O 到直线 BC 的距离 d，把 d 与⊙O 的半径 r 进行大小比较，并利用直线与圆的位置关系中相切、相离、相交时 d 与 r 之间的相等或不等关系，转化为解方程或不等式的问题，从而求出 m 的取值范围.

方法点拨

解决圆形区域的实际问题，先建立圆的模型，然后利用直线与圆的位置关系的判定方法来判断受影响情况，再结合垂径定理进行计算解决问题.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

点方法·拨技巧 提高分

拔尖角度 1 利用数形结合思想解决直线与圆的位置关系问题

例 4 （1）若半径为 3 的圆的圆心到一条直线的距离为方程 $x^2-4x+3=0$ 的一个根，则这条直线与该圆的位置关系是_____.

（2）若 $P(4,3)$ 是平面直角坐标系内一点，以点 P 为圆心，R 为半径的圆与坐标轴有三个交点，则 R 的值是_____.

解题秘方：紧扣数形结合思想，利用 d 与 r 的数量关系和直线与圆的位置关系的相互转化解决问题.

解：（1）∵圆心到直线的距离 d 是方程 $x^2-4x+3=0$ 的一根，∴ $d=1$ 或 $d=3$. 当 $d=1$ 时，$d<r$（半径为 3），此时直线与圆相交；当 $d=3$ 时，$d=r$，此时直线与圆相切. 故此题填“相交或相切”.

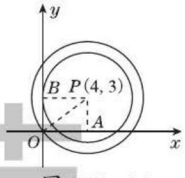


图 27.2-16

（2）如图 27.2-16，作 PA，PB 分别垂直 x 轴、y 轴于 A，B 两点，连结 OP. 当⊙ P 以 4 为半径时和以 PO 为半径（$PO=5$）时，⊙ P 与坐标轴都有三个交点，而在其他情况下都不满足题意. 因此 $R=4$ 或 $R=5$.

答案：（1）相交或相切　（2）4 或 5

挑战·高分

方法点拨

要判断直线与圆的位置关系，就是判断圆心到直线的距离 d 与半径 r 的大小关系；反过来，已知直线与圆的位置关系，则可以确定圆心到直线的距离 d 或半径 r 的变化范围.

拔尖角度 2 直线与圆的位置关系与特殊四边形的综合

例 5 如图 27.2-17，在梯形 $ABCD$ 中，$AD\parallel BC$，$\angle C=90°$，$AD+BC=AB$，以 AB 为直径作⊙ O，请判断直线 CD 与⊙ O 的位置关系，并证明你的结论.

解题秘方：紧扣直线与圆的位置关系的判定方法，找出 d 与 r 之间的数量关系即可.

解：直线 CD 与⊙ O 相切.

证明：如图 27.2-17，过点 O 作 $OE\perp CD$ 于点 E.

∵ $AD\parallel BC$，$\angle C=90°$，∴ $AD\parallel BC\parallel OE$.

∵点 O 为 AB 的中点，

∴点 E 为 CD 的中点.

∴ OE 是梯形 $ABCD$ 的中位线.

∴ $OE=\frac{1}{2}(AD+BC)$.

又∵ $AD+BC=AB$，∴ $OE=\frac{1}{2}AB$.

∵ AB 是⊙ O 的直径，

∴ OE 恰好等于⊙ O 的半径.

∴直线 CD 与⊙ O 相切.

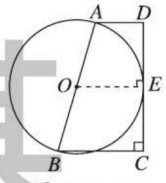


图 27.2-17

挑战·高分

方法规律

判断直线与圆的位置关系，关键是作出圆心到直线的垂线段. 求出垂线段的长，再与半径进行比较即可判断出二者的位置关系. 在本题中，运用梯形的中位线定理是解题的关键.

基础·素养·德育

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

点中考·拨模拟 得满分

中考探秘 直线与圆的位置关系是中考的必考内容，主要考查直线与圆的位置关系与数量关系的转化，常以选择题、填空题的形式出现，难度不是很大.

三年中考兵法

考法 利用直线与圆的位置关系、一次函数图象性质求字母的取值范围

例 6 [中考·百色]以坐标原点 O 为圆心，作半径为 2 的圆，若直线 $y=-x+b$ 与⊙ O 相交，则 b 的取值范围是（　　）

A. $0 \leqslant b < 2\sqrt{2}$　　B. $-2\sqrt{2} \leqslant b \leqslant 2\sqrt{2}$

C. $-2\sqrt{3} < b < 2\sqrt{3}$　　D. $-2\sqrt{2} < b < 2\sqrt{2}$

试题评析: 本题考查了切线的性质，正确证得直线 $y=-x+b$ 与圆相切时，其与两坐标轴围成的三角形是等腰直角三角形是解此题的关键.

解: 当直线 $y=-x+b$ 与圆相切，且直线经过一、二、四象限时，切点为 C，直线与 x 轴、y 轴的交点分别为点 A，B，如图 27.2-18.

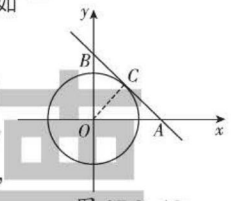


图 27.2-18

在 $y=-x+b$ 中，当 $x=0$ 时，$y=b$，

∴直线与 y 轴的交点 B 的坐标是（0，b）.

∵当 $y=0$ 时，$x=b$，∴ A 的坐标是（b，0），

∴ $OA=OB$，即△ OAB 是等腰直角三角形.

连结圆心 O 和切点 C，则 $OC=2$，易得 $OB=\sqrt{2}\,OC=2\sqrt{2}$，

即 $b=2\sqrt{2}$.

同理，当直线 $y=-x+b$ 与圆相切，且函数经过二、三、四象限时，$b=-2\sqrt{2}$.

故若直线 $y=-x+b$ 与⊙ O 相交，则 b 的取值范围是 $-2\sqrt{2} < b < 2\sqrt{2}$.

答案: D

冲刺·满分

解法提醒

求出直线 $y=-x+b$ 与圆相切，且函数经过一、二、四象限，和直线 $y=-x+b$ 与圆相切，且函数经过二、三、四象限时 b 的值，相交时 b 的值在相切时的两个 b 的值之间.

两年模拟兵法

答案见 199 页

1. 已知⊙ O 的半径是 6，点 O 到直线 l 的距离为 5，则直线 l 与⊙ O 的位置关系是（　　）

A. 相离　　B. 相切

C. 相交　　D. 无法判断

2. 直线 l 与半径为 r 的⊙ O 相交，且点 O 到直线 l 的距离为 6，则 r 的取值范围是（　　）

A. $r < 6$　　B. $r=6$

C. $r > 6$　　D. $r \geqslant 6$

3. [中考·无锡]已知⊙ O 的半径为 2，直线 l 上有一点 P 满足 $PO=2$，则直线 l 与⊙ O 的位置关系是（　　）

A. 相切　　B. 相离

C. 相离或相切　　D. 相切或相交

4. 已知⊙ O 中最长的弦长为 a，如果直线 PQ 与⊙ O 相离，设直线 PQ 与圆心 O 的距离为 d，那么（　　）

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

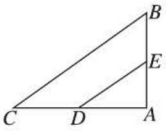
A. $d>\frac{a}{2}$　　B. $d=\frac{a}{2}$

C. $d<\frac{a}{2}$　　D. $\frac{a}{2}<d<a$

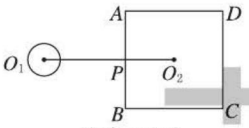
5. [中考·盘锦]如图，在△ABC中，$AB=6$，$AC=8$，$BC=10$，D，E分别是AC，AB的中点，则以DE为直径的圆与BC的位置关系是（　　）

A. 相交　　B. 相切

C. 相离　　D. 无法确定



（第5题）



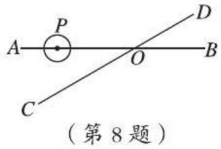
（第6题）

6. [探究题]如图，⊙O_1的半径为1，正方形$ABCD$的边长为6，点O_2为正方形$ABCD$的中心，O_1O_2垂直AB于P点，$O_1O_2=8$，若将⊙O_1绕点P按顺时针方向旋转360°，在旋转过程中，⊙O_1与正方形$ABCD$的边只有一个公共点的情况一共出现（　　）

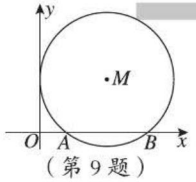
A.3次　　B.5次　　C.6次　　D.7次

7. [易错题]在Rt△ABC中，∠C=90°，$AC=3$，$BC=4$，若以C为圆心，r为半径的⊙C与斜边AB只有一个公共点，则半径r的取值范围是_____.

8. [易错题]如图，直线AB，CD相交于点O，∠AOC=30°，$PO=6$ cm，如果半径为1 cm的⊙P以1 cm/s的速度沿直线AB向右移动，那么当⊙P运动的时间为_____时，⊙P与直线CD相切.



（第8题）



（第9题）

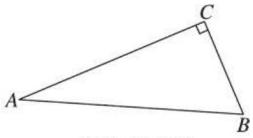
9. 如图，⊙M与x轴相交于点$A(2,0)$，$B(8,0)$，与y轴相切，则圆心M的坐标为_____.

10. 已知⊙O的圆心到直线l的距离为d，⊙O的半径为r，且d，r是关于x的一元二次方程$x^2-4x+m=0$的两个实数根，则当直线l与⊙O相切时，m的值为_____.

11. [一题多变题]如图，在△ABC中，∠ACB=90°，$AC=6$，$BC=3$，若以点C为圆心，以5为半径作⊙C，试判断直线AB与⊙C的位置关系.

（1）一变：若直线AB与半径为r的⊙C相切，求r的值.

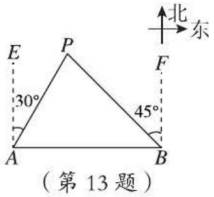
（2）二变：若线段AB与半径为r的⊙C有两个公共点，求r的取值范围.



（第11题）

12. 已知在菱形$ABCD$中，对角线AC，BD相交于点O，且$AC=6$，$BD=2\sqrt{3}$，以O为圆心，以$\frac{3}{2}$为半径作圆，请判断⊙O与AD的位置关系，并说明理由.　　【导学号：8603511】

13. 如图，A，B两城市相距100 km. 现计划在这两座城市间修筑一条东西走向的高速公路（即线段AB），经测量，森林保护区的中心P在A城市的北偏东30°和B城市的北偏西45°的方向上. 已知森林保护区的范围是以P点为圆心，50 km为半径的圆形区域，请问计划修筑的这条高速公路会不会穿越森林保护区？为什么？（参考数据：$\sqrt{3}\approx1.732$，$\sqrt{2}\approx1.414$）



（第13题）

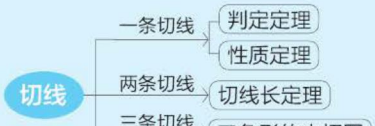
基础题

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

27.2.3 切线

核心知识
- 切线的判定定理
- 切线的性质定理
- 切线长定理
- 三角形的内切圆

知识链接



点知识·拨考向 速提分

点知识 1 切线的判定定理

1. **判定定理**：经过圆的半径的外端且垂直于这条半径的直线是圆的切线.

2. **判定方法**：（1）**定义法**：与圆有唯一公共点的直线是圆的切线；

（2）**数量法**：圆心到直线的距离等于半径的直线是圆的切线；

（3）**判定定理法**：经过圆的半径的外端并且垂直于这条半径的直线是圆的切线.

拨考向 利用切线的判定定理判定圆的切线

题型 1：“有切点”在判定切线中的应用

例 1 如图 27.2-19，已知 AB 是⊙O 的直径，$AB=4$，点 C 在线段 AB 的延长线上，点 D 在⊙O 上，连结 CD，且 $CD=OA$，$OC=2\sqrt{2}$，求证：CD 是⊙O 的切线.

解题秘方：利用“有切点，连半径，证垂直”判定圆的切线.

证明：如图 27.2-19，连结 OD.

由题意可知 $CD=OD=OA=\frac{1}{2}AB=2$.

$\because OC=2\sqrt{2}$，$\therefore OD^2+CD^2=OC^2$.

$\therefore \angle ODC=90°$，即 $OD\perp CD$.

又点 D 在⊙O 上，$\therefore CD$ 是⊙O 的切线.

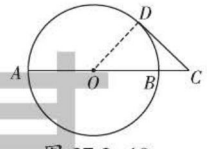


图 27.2-19

题型 2：“无切点”在判定切线中的应用

例 2 如图 27.2-20，在 Rt△ABC 中，$\angle B=90°$，$\angle BAC$ 的平分线交 BC 于点 D，以点 D 为圆心，DB 长为半径作⊙D.

求证：AC 与⊙D 相切.

解题秘方：利用“无切点，作垂线，证半径”判定圆的切线.

证明：如图 27.2-20，过点 D 作 $DF\perp AC$ 于点 F.

$\because \angle B=90°$，$\therefore DB\perp AB$.

又 $\because AD$ 平分 $\angle BAC$，$\therefore DF=DB$. $\therefore AC$ 与⊙D 相切.

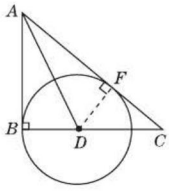


图 27.2-20

提分·必记

特别解读

切线必须同时具备两个条件：

1. 直线过半径的外端；
2. 直线垂直于这条半径.

提分·秘诀

技巧提醒

作辅助线判定圆的切线的常用方法：

- 有切点，连半径，证垂直. 如果已知直线经过圆上的一点，那么连结这点和圆心，得到辅助半径，再证明所作半径与这条直线垂直即可，简记为：有切点，连半径，证垂直.
- 无切点，作垂直，证半径. 如果已知条件中不知道直线与圆是否有公共点，那么过圆心作直线的垂线段，再证明垂线段的长度等于半径即可，简记为：无切点，作垂直，证半径.



关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

点知识▶ 2 切线的性质定理

1. **性质定理：** 圆的切线垂直于经过切点的半径.

2. **切线的性质：**

（1）切线和圆只有一个公共点.

（2）圆心到切线的距离等于半径.

（3）圆的切线垂直于过切点的半径.

（4）经过圆心且垂直于切线的直线必过切点（找切点用）.

（5）经过切点且垂直于切线的直线必过圆心（找圆心用）.

以上（3）（4）（5）可归纳为：如果直线满足过圆心、过切点、垂直于切线这三个条件中的任意两个，那么第三个也成立.

拔考向▶ 利用切线的性质解边角问题

题型 1：切线的性质在求边角中的应用

例 3 如图 27.2−21，AB 为⊙O 的直径，PD 切⊙O 于点 C，交 AB 的延长线于点 D，且∠D=2∠CAD.

（1）求∠D 的度数.

（2）若 CD=2，求 BD 的长.

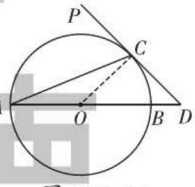


图 27.2−21

解题秘方：（1）利用“等半径”得等腰三角形；（2）利用“切线”垂直于过切点的半径构成直角三角形，再结合相关性质求解.

解：（1）如图 27.2−21，连结 OC.

∵ AO=CO，∴∠OAC=∠ACO. ∴∠COD=2∠CAD.

又∵∠D=2∠CAD，∴∠D=∠COD.

∵ PD 与⊙O 相切于点 C，

∴ OC ⊥ PD，即∠OCD=90°. ∴∠D=45°.

（2）由（1）可知△OCD 是等腰直角三角形. ∴ OC=CD=2.

由勾股定理，得 $OD=\sqrt{OC^2+CD^2}=\sqrt{2^2+2^2}=2\sqrt{2}$，

∴ BD=OD−OB=$2\sqrt{2}-2$.

题型 2：切线的性质和判定在解题中的应用

例 4 [中考·湖州]如图 27.2−22，已知 BC 是⊙O 的直径，AC 切⊙O 于点 C，AB 交⊙O 于点 D，E 为 AC 的中点，连结 DE.

（1）若 AD=DB，OC=5，求切线 AC 的长；

（2）求证：DE 是⊙O 的切线.

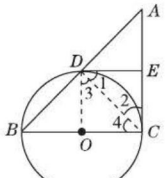


图 27.2−22

解题秘方：（1）构造直径所对的圆周角，利用直径所对的圆周角是直角求解；

（2）利用“连半径，证垂直”求解.

提分·必记

特别解读

1. 性质定理的题设有两个条件：

（1）圆的切线；

（2）半径过切点.

应用时缺一不可.

2. 切线的判定定理与性质定理的区别：切线的判定定理是在未知相切而要证明相切的情况下使用；切线的性质定理是在已知相切而要推得其他的结论时使用. 它们是一个互逆的过程，不要混淆.

提分·秘诀

解法提醒

已知圆的切线时，常连结圆心和切点，得到半径垂直于切线，通过构造直角三角形来解决问题，即“见切线，连半径，得垂线”；而等半径，可得等腰三角形，从而可得两底角相等；在同圆中有关切线的问题常通过等腰三角形和直角三角形的性质来解决问题.

解法提醒

看到切线，就想作过切点的半径；看到直径，就想直径所对的圆周角是直角；看到切线的判定，就想：(1)若已知直线与圆有公共点，则采用判定定理法，其基本思路是：当已知

荣德基

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

（1）**解**：连结 CD，如图 27.2−22.

∵ BC 是⊙ O 的直径，

∴ ∠ BDC=90° ，即 $CD \perp AB$.

∵ AD=DB，∴ AC=BC=2OC=10.

（2）**证明**：连结 OD，如图 27.2−22.

∵ ∠ ADC=90° ，E 为 AC 的中点，

∴ DE=EC=$\frac{1}{2}AC$. ∴ ∠ 1 = ∠ 2.

∵ OD=OC，∴ ∠ 3 = ∠ 4.

∵ AC 切⊙ O 于点 C，∴ $AC \perp OC$.

∴ ∠ 1+ ∠ 3= ∠ 2+ ∠ 4 = 90° ，即 $DE \perp OD$.

∴ DE 是⊙ O 的切线.

点在圆上时，连结过这点的半径，证明这条半径与直线垂直即可，可简述为：有切点，连半径，证垂直；

(2)若未知直线与圆有公共点，则采用数量关系法，其基本思路是：过圆心作直线的垂线段，证明垂线段的长等于圆的半径，可简述为：无切点，作垂直，证相等.

点知识▶ 3 切线长定理

1. 切线长定义：我们把圆的切线上某一点与切点之间的线段的长，叫做这点到圆的切线长.

切线是直线，不可度量；切线长是切线上切点与切点外另一点之间的线段的长，可以度量.

2. 切线长定理：

过圆外一点所画的圆的两条切线，它们的切线长相等，这一点和圆心的连线平分这两条切线的夹角.

3. 示例.

如图 27.2−23 是切线长定理的一个基本图形，可以直接得到结论：

（1）$PO \perp AB$；

（2）$AO \perp AP$，$BO \perp BP$；

（3）AP=BP；

（4）∠ 1= ∠ 2= ∠ 3= ∠ 4；

（5）AD=BD；

（6）$\overset{\frown}{AC} = \overset{\frown}{BC}$ 等.

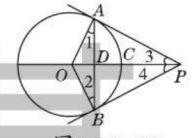


图 27.2−23

提分·必记

特别解读

经过圆上一点作圆的切线，有且只有一条，过切点的半径垂直于这条切线；经过圆外一点作圆的切线，有两条，这点和两个切点所连的两条线段相等.



拔考向▶ 利用切线长定理解边角问题

题型 1：切线长定理在求边角中的应用

例 5 如图 27.2−24，PA，PB，DE 分别切⊙ O 于点 A，B，C，点 D 在 PA 上，点 E 在 PB 上.

（1）若 PA=10，求△ PDE 的周长；

（2）若∠ P=50°，求∠ DOE 的度数.

解题秘方：根据切线长的定义，判断出 PA，PB，DA，DC，EC，EB 的长都是切线长，再利用切线长定理，找到相等关系.

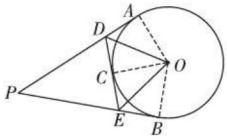


图 27.2−24

提分·秘诀

图解

如图 27.2−25，利用切线长定理，可将求△ PDE 的周长转化为求 PA 与 PB 的和.

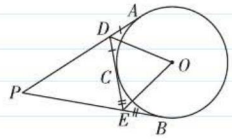


图 27.2−25

荣德基

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

解：（1）∵ PA，PB，DE 分别切⊙ O 于点 A，B，C，

∴ $PA=PB$，$DA=DC$，$EC=EB$.

∴ $PD+DE+PE=PD+DA+EB+PE=PA+PB=10+10=20$.

∴ △ PDE 的周长为 20.

（2）如图 27.2-24，连结 OA，OC，OB.

∵ PA，PB，DE 是 ⊙ O 的 切 线，∴ $OA \perp PA$，$OB \perp PB$，$OC \perp DE$.

∴ $\angle DAO=\angle EBO=90°$. ∴ $\angle P+\angle AOB=180°$.

∴ $\angle AOB=180°-50°=130°$.

易知 $\angle AOD=\angle DOC$，$\angle COE=\angle BOE$，

∴ $\angle DOE=\frac{1}{2}\angle AOB=\frac{1}{2}\times 130°=65°$.

详解

由于点 D 到 OA，OC 的距离相等，点 E 到 OB，OC 的距离相等，根据到角两边距离相等的点在角的平分线上，可知点 D，E 分别在 ∠AOC，∠BOC 的平分线上.

题型 2：切线长定理在证明边角关系中的应用

例 6 如图 27.2-26，PA，PB 是⊙ O 的切线，切点分别为 A，B，BC 为⊙ O 的直径，连结 AB，AC，OP.

求证：（1）$\angle APB=2\angle ABC$；

（2）$AC \parallel OP$.

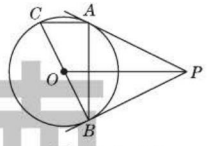


图 27.2-26

解题秘方：活用切线长定理中角的关系结合相关性质求解.

证明：（1）∵ PA，PB 分别切⊙ O 于点 A，B，

∴由切线长定理知 $\angle BPO=\angle APO=\frac{1}{2}\angle APB$，$PA=PB$.

∴ $PO \perp AB$. ∴ $\angle ABP+\angle BPO=90°$.

又∵ PB 是⊙ O 的切线，∴ $OB \perp PB$. ∴ $\angle ABP+\angle ABC=90°$.

∴ $\angle ABC=\angle BPO=\frac{1}{2}\angle APB$，即 $\angle APB=2\angle ABC$.

（2）∵ BC 是⊙ O 的直径，∴ $\angle BAC=90°$，即 $AC \perp AB$.

由（1）知 $OP \perp AB$，∴ $AC \parallel OP$.

特别提醒

切线长定理揭示了两个方面的内容，一是切线长相等，揭示线段之间的数量关系；二是圆外一点与圆心的连线平分两条切线的夹角.这两个方面的内容为证明线段之间的关系或者角之间的关系提供了大量的条件.

点知识 ▸ 4 三角形的内切圆

1. 三角形的内切圆：与三角形各边都相切的圆叫做三角形的内切圆，这个三角形叫做这个圆的外切三角形.

2. 三角形的内心：三角形的内切圆的圆心叫做这个三角形的内心.

3. 三角形内心的性质：

（1）三角形的内心在这个三角形的内部；

（2）三角形的内心与这个三角形各顶点的连线分别平分其对应的内角；

（3）三角形的内心到三角形三条边的距离相等，且等于其内切圆的半径.

提分·必记

要点解读

1. “内切”“外切”是针对位置而言的，“内”是相对于三角形而言，“外”是相对于圆而言.
2. 一个三角形有一个内切圆，而一个圆有无数多个外切三角形.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

拓宽视野：如图 27.2−27，△ABC的周长是l，内切圆⊙O的半径为r. 设 $BC=a$，$AC=b$，$AB=c$，则

$S_{\triangle ABC}=S_{\triangle BOC}+S_{\triangle AOC}+S_{\triangle AOB}=\frac{1}{2}ar+\frac{1}{2}br+\frac{1}{2}cr=\frac{1}{2}(a+b+c)r=\frac{1}{2}lr$. 故三角形的面积可以用三角形的周长与其内切圆半径之积的一半表示.

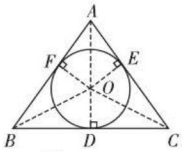


图 27.2−27

3. 三角形的内心在三角形的内部. 在实际操作中，画出三角形任意两个内角的平分线，找到交点，该交点就是三角形的内心.

核心考向▶利用三角形内切圆求边角问题

题型 1：三角形内切圆在求半径中的应用

例 7 a，b，c 分别是 Rt△ABC 的三边 BC，AC，AB 的长，其中∠C=90°，求此三角形内切圆的半径.

提分·秘诀

特别提醒

用直角三角形三边长表示其内切圆半径的两种方法：

$r=\frac{a+b-c}{2}$ 或 $r=\frac{ab}{a+b+c}=\frac{2S}{a+b+c}$（其中 a，b 为直角边长，r 为圆的半径，c 为斜边长，S 是三角形的面积）.

（解其他题时可作公式用）

解题秘方一：将 Rt△ABC 内切圆的半径转化到 Rt△ABC 的边上，然后借助切线长定理进行线段间的转化.

解法一：如图 27.2−28，设 Rt△ABC 的内切圆⊙O 的半径为 r，⊙O 分别切 AB，BC，AC 于点 D，E，F，连结 OD，OE，OF，则四边形 $OECF$ 为正方形.

∴ $CE=CF=r$. ∴ $AF=AD=b-r$，$BD=BE=a-r$.

∵ $AD+BD=AB$，即 $b-r+a-r=c$，∴ $r=\frac{a+b-c}{2}$.

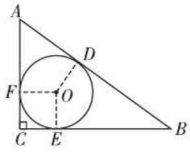


图 27.2−28

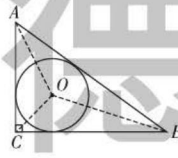


图 27.2−29

解题秘方二：利用等积法求解.

解法二：如图 27.2−29，设 Rt△ABC 的内切圆⊙O 的半径为 r，连结 OA，OB，OC.

由 $S_{\triangle ABC}=S_{\triangle AOB}+S_{\triangle AOC}+S_{\triangle BOC}$，得 $\frac{1}{2}ab=\frac{1}{2}(a+b+c)r$.

故 $r=\frac{ab}{a+b+c}$.



题型 2：三角形的内心在求角中的应用

例 8 如图 27.2−30，在△ABC 中，∠A=70°，点 O 是△ABC 的内心，求∠BOC 的度数.

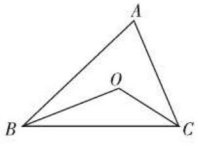


图 27.2−30

特别提醒

如图 27.2−31 是数学中一个典型的基本图形. 在△ABC 中，若点 I 是△ABC 的内心，则 $\angle BIC=90°+\frac{1}{2}\angle BAC$；若

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

解题秘方：三角形的内心是三角形三个内角的平分线的交点.

解：∵∠A=70°，

∴∠ABC+∠ACB=180° −70° =110° .

∵点O是△ABC的内心，

∴∠OBC=$\frac{1}{2}$∠ABC，∠OCB=$\frac{1}{2}$∠ACB.

∴∠OBC+∠OCB=$\frac{1}{2}$(∠ABC+∠ACB)=55°.

∴∠BOC=180° −55° =125° .

点 I 是△ABC 的外心，则∠BIC=2∠A.

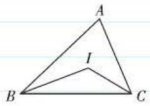


图 27.2−31

点方法·拨技巧 提高分

拔尖角度 1 利用类比法、切线的性质探究变式几何问题

挑战·高分

例 9 如图 27.2−32 ①，OA，OB是⊙O的两条半径，且OA⊥OB，点C是OB延长线上的任意一点，过点C作CD切⊙O于点D，连结AD交OC于点E.

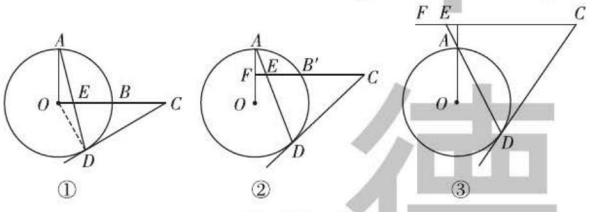


图 27.2−32

（1）在图 27.2−32 ①中，求证：CD=CE.

（2）若将图 27.2−32 ①中OB所在的直线向上平移交OA于点F，交⊙O于点B'，其他条件不变，如图 27.2−32 ②，那么上述结论CD=CE还成立吗？若成立，请予以证明.

（3）若将图 27.2−32 ①中OB所在的直线向上平移到⊙O外的CF，点E是DA的延长线与CF的交点，其他条件不变，如图 27.2−32 ③，那么上述结论CD=CE还成立吗？若成立，请予以证明.

解题秘方：把证CD=CE转化为证∠CDE=∠CED，结合等角的余角相等来解.

（1）**证明**：如图 27.2−32 ①，连结OD.

∵CD切⊙O于点D，∴OD⊥CD.

∴∠CDE+∠ODA=90° .

又∵OA⊥OB，∴∠A+∠OEA=90° .

∵OA=OD，∴∠A=∠ODA. ∴∠CDE=∠OEA.

又∵∠OEA=∠CED，∴∠CDE=∠CED. ∴CD=CE.

（2）**解**：结论CD=CE成立，证明略.

（3）**解**：结论CD=CE成立，证明略.

解法提醒

利用切线的性质得直角，然后将证线段相等的问题转化为证角相等.

方法总结

对于动态几何问题的探究，要处理好变与不变的关系. 变的是几何图形的形状，不变的是它所含的几何性质，因此解题时可采用类比法进行探究证明.

未经授权

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

拔尖角度 2 利用数形结合思想解切线长定理与函数、方程综合的问题

挑战·高分

例 10 如图 27.2−33，⊙ O 的直径 $AB=12$，AM 和 BN 是⊙ O 的两条切线，DC 切⊙ O 于点 E，交 AM 于点 D，交 BN 于点 C，设 $AD=x$，$BC=y$（$x<y$）.

（1）求 y 与 x 的函数关系式（不必写出 x 的取值范围）；

（2）若 x，y 是关于 t 的方程 $2t^2-30t+m=0$ 的两根，求 x，y 的值；

（3）在（2）的条件下，求△ COD 的面积.

解题秘方：（1）利用切线长定理结合方程思想求函数关系式；（2）利用（1）的结论结合根与系数的关系求解；（3）利用面积公式求解.

解：（1）如图 27.2−33，过点 D 作 $DF\perp BC$ 于点 F，易知四边形 $ABFD$ 为矩形. ∴ $AB=DF=12$，$AD=BF=x$.

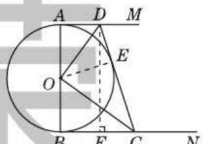


图 27.2−33

∵ AM，BN，CD 分别切⊙ O 于点 A，B，E，∴ $DE=DA$，$CE=CB$.

∴ $CD=DE+CE=AD+BC=x+y$，$CF=BC-BF=BC-AD=y-x$.

∵ $CD^2=CF^2+DF^2$，∴ $(x+y)^2=(y-x)^2+12^2$，

整理，得 $y=\dfrac{36}{x}$. ∴ y 与 x 的函数关系式是 $y=\dfrac{36}{x}$.

（2）∵ x，y 是关于 t 的方程 $2t^2-30t+m=0$ 的两根，∴ $x+y=15$.

与 $y=\dfrac{36}{x}$ 联立得方程组 $\begin{cases}x+y=15,\\ y=\dfrac{36}{x}.\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x_1=3,\\ y_1=12,\end{cases}$ $\begin{cases}x_2=12,\\ y_2=3.\end{cases}$

∵ $x<y$，∴ $x=3$，$y=12$.

（3）如图 27.2−33，连结 OE. ∵ CD 是⊙ O 的切线，∴ $OE\perp DC$.

又由（1）（2）知，$CD=x+y=15$，$OE=\dfrac{1}{2}AB=6$，

∴ $S_{\triangle COD}=\dfrac{1}{2}\times 15\times 6=45$.

解法提醒

从切线长定理中可得出线段相等、角相等，定理中有切点，所以该定理和全等三角形、方程、勾股定理、直角三角形、等腰三角形、切线的性质定理经常综合应用.

荣德基

点中考·拨模拟 得满分

中考探秘 本节的主要考点为：切线的判定及性质、切线长定理和三角形的内切圆等，试题题型既有填空题、选择题，也有解答题，还常与三角形、方程、函数等知识点相结合，构成题型新颖、构思巧妙的综合性试题.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

三年中考兵法

考法 1 利用切线的判定和性质判定切线、求半径

例 11 [中考·凉山]如图 27.2-34，已知 AB 为 $\odot O$ 的直径，AD，BD 是 $\odot O$ 的弦，BC 是 $\odot O$ 的切线，切点为 B，$OC \parallel AD$，BA，CD 的延长线相交于点 E.

（1）求证：DC 是 $\odot O$ 的切线；

（2）若 $AE=1$，$ED=3$，求 $\odot O$ 的半径.

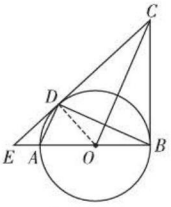


图 27.2-34

试题评析：本题主要考查的是切线的判定、勾股定理的应用，掌握切线的判定定理，利用勾股定理列出关于半径的方程是解题的关键.

（1）**证明**：如图 27.2-34，连结 DO.

$\because AD \parallel OC$，$\therefore \angle DAO=\angle COB$，$\angle ADO=\angle COD$.

又 $\because OA=OD$，$\therefore \angle DAO=\angle ADO$.

$\therefore \angle COD=\angle COB$.

$\because OD=OB$，$OC=OC$，

$\therefore \triangle COD \cong \triangle COB$.

$\therefore \angle CDO=\angle CBO$.

$\because BC$ 是 $\odot O$ 的切线，$\therefore \angle CBO=90°$.

$\therefore \angle CDO=90°$.

又 $\because$ 点 D 在 $\odot O$ 上，$\therefore CD$ 是 $\odot O$ 的切线.

（2）**解**：设 $\odot O$ 的半径为 R，则 $OD=R$，$OE=R+1$.

$\because CD$ 是 $\odot O$ 的切线，$\therefore \angle EDO=90°$.

$\therefore ED^2+OD^2=OE^2$.

$\therefore 3^2+R^2=(R+1)^2$，解得 $R=4$，

$\therefore \odot O$ 的半径为 4.

考法 2 利用三角形的内切圆解与切线相关问题

例 12 [中考·黄石]如图 27.2-35，$\odot O$ 是 $\triangle ABC$ 的外接圆，BC 为 $\odot O$ 的直径，点 E 为 $\triangle ABC$ 的内心，连结 AE 并延长交 $\odot O$ 于点 D，连结 BD 并延长至点 F，使得 $BD=DF$，连结 CF，BE.

（1）求证：$DB=DE$；

（2）求证：直线 CF 为 $\odot O$ 的切线.

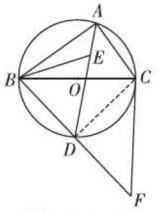


图 27.2-35

试题评析：本题考查三角形的内心、切线的判定、等腰三角形的判定、直角三角形的判定等知识，属于中考常考题型.

冲刺·满分

解法提醒

- 首先连结 OD，易证得 △COD≌△COB，然后由全等三角形的对应角相等，求得∠CDO=90°，即可证得 CD 是⊙O 的切线；
- 设⊙O 的半径为 R，则 OE=R+1，在 Rt△ODE 中，利用勾股定理列出方程，求解即可.

方法总结

证明圆的切线问题的常用思路：

证明圆的切线问题时，常利用切线的判定定理将其转化成证明垂直的问题.

思路点拨

- 欲证明 DB=DE，只要证明∠DBE=∠DEB.
- 欲证明直线 CF 为⊙O 的切线，只要证明 BC⊥CF 即可.

基德莱

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

证明：（1）∵ E 为△ ABC 的内心，

∴∠ BAE = ∠ CAE，∠ EBA = ∠ EBC.

∵ ∠ DEB = ∠ BAE+ ∠ EBA，∠ DBE = ∠ EBC+ ∠ DBC，∠ DBC = ∠ EAC，

∴∠ DBE = ∠ DEB. ∴ DB=DE.

（2）如图 27.2–35，连结 CD.

∵∠ BAE = ∠ CAE，

∴$\overset{\frown}{BD}$ = $\overset{\frown}{CD}$. ∴ BD=CD.

∵ BD=DF，∴ CD=DB=DF.

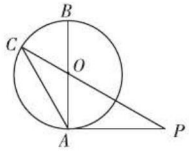
∴∠ BCF=90°. ∴ BC ⊥ CF.

∴ CF 是⊙ O 的切线.

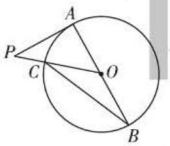
两年模拟兵法 ☞答案见 200 页

1. [中考·日照] 如图，AB 是⊙ O 的直径，PA 切⊙ O 于点 A，连结 PO 并延长交⊙ O 于点 C，连结 AC，AB=10，∠ P=30°，则 AC 的长度是（　　）

A. $5\sqrt{3}$　　B. $5\sqrt{2}$　　C. 5　　D. $\frac{5}{2}$



（第 1 题）



（第 2 题）

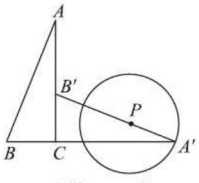
2. [中考·自贡] 如图，AB 是⊙ O 的直径，PA 切⊙ O 于点 A，PO 交⊙ O 于点 C，连结 BC，若∠ P = 40°，则∠ B 等于（　　）

A. 20°　　B. 25°　　C. 30°　　D. 40°

3. [中考·武汉] 已知一个三角形的三边长分别为 5、7、8，则其内切圆的半径为（　　）

A. $\frac{\sqrt{3}}{2}$　　B. $\frac{5}{2}$　　C. $\sqrt{3}$　　D. $2\sqrt{3}$

4. [中考·泰州] 如图，△ ABC 中，∠ ACB=90°，$\sin A=\frac{5}{13}$，AC=12，将△ ABC 绕点 C 顺时针旋转 90° 得到△ $A'B'C$，P 为线段 $A'B'$ 上的动点，以点 P 为圆心，PA' 长为半径作⊙ P，当⊙ P 与△ ABC 的边相切时，⊙ P 的半径为_____.

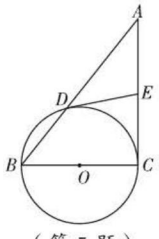


（第 4 题）

5. [中考·丽水] 如图，在 Rt△ ABC 中，∠ C= 90°，以 BC 为直径的⊙ O 交 AB 于点 D，切线 DE 交 AC 于点 E.

（1）求证：∠ A= ∠ ADE；

（2）若 AD=16，DE=10，求 BC 的长.



（第 5 题）

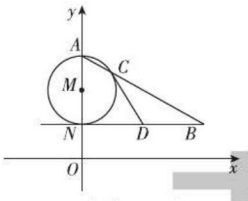
荣德基

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

6. [中考·白银]如图，AN是⊙M的直径，$NB\parallel x$轴，AB交⊙M于点C.

（1）若点$A(0,6)$，$N(0,2)$，$\angle ABN=30°$，求点B的坐标；

（2）若D为线段NB的中点，求证：直线CD是⊙M的切线．　【导学号：8603511】

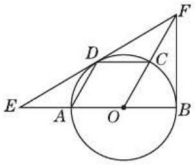


（第6题）

8. [中考·玉林]如图，AB是⊙O的直径，点C，D在圆上，且四边形$AOCD$是平行四边形，过点D作⊙O的切线，分别交OA的延长线与OC的延长线于点E，F，连结BF.

（1）求证：BF是⊙O的切线；

（2）已知圆的半径为1，求EF的长．

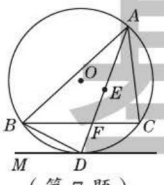


（第8题）

7. [中考·滨州]如图，点E是△ABC的内心，AE的延长线交BC于点F，交△ABC的外接圆⊙O于点D，连结BD，过点D作直线DM，使$\angle BDM=\angle DAC$.

（1）求证：直线DM是⊙O的切线；

（2）求证：$DE^2=DF\cdot DA$.



（第7题）

荣德基

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

27.3 圆中的计算问题

核心知识
- 弧长
- 扇形的面积
- 圆锥的侧面积
- 圆锥的全面积

知识链接



点知识·拨考向 速提分

点知识 1 弧长公式

1. 弧长公式： 在半径为 r 的圆中，$n°$ 的圆心角所对的弧长 l 的计算公式为

$$l=\frac{n\pi r}{180}.$$

2. 弧、弧长、弧的度数间的关系：

（1）弧相等表示弧长、弧的度数都相等；

（2）度数相等的弧，弧长不一定相等；

（3）弧长相等的弧，弧的度数不一定相等；只有在同圆或等圆中，弧长相等的弧才是等弧.

提分·必记

特别提醒

1. 公式中，n 表示 $1°$ 的 n 倍，180 表示 $1°$ 的 180 倍，n，180 不带单位.
2. 题目若没有写明精确度，可以用含“π”的式子表示弧长.
3. 在弧长公式中，已知 l，n，r 中任意两个量，都可求出第三个量.

拔考向 利用弧长公式求弧长

例 1 [中考·沈阳] 如图 27.3-1，正方形 $ABCD$ 内接于⊙O，$AB=2\sqrt{2}$，则 $\overset{\frown}{AB}$ 的长是（　　）

A. π　　B. $\frac{3}{2}\pi$

C. 2π　　D. $\frac{1}{2}\pi$

解题秘方： 紧扣“弧长公式”进行解答.

解： 如图 27.3-1，连结 OA，OB，

∵正方形 $ABCD$ 内接于⊙O，

∴ $AB=BC=DC=AD$.

$\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{BC}=\overset{\frown}{DC}=\overset{\frown}{AD}$，

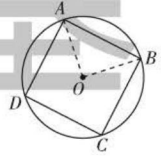


图 27.3-1

$\therefore \angle AOB=\frac{1}{4}\times 360°=90°$.

在 Rt△AOB 中，由勾股定理得 $2AO^2=(2\sqrt{2})^2$，

解得 $AO=2$.

$\therefore \overset{\frown}{AB}$ 的长为 $\frac{90\pi\times 2}{180}=\pi$.

答案： A

提分·秘诀

解法提醒

在弧长公式中有三个量：弧长、半径、圆心角的度数，利用弧长公式可以解决已知这三个量中的两个量求第三个量的问题；解题时，可以利用方程求解.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

点知识▶ 2 扇形

1. 定义：由组成圆心角的两条半径和圆心角所对的弧围成的图形叫做扇形.

2. 面积公式：

（1）已知半径 r 和 $n°$ 的圆心角，则 $S_{扇形}=\dfrac{n\pi r^2}{360}$.

（2）已知弧长 l 和半径 r，则 $S_{扇形}=\dfrac{1}{2}lr$（推导过程：$S_{扇形}=\dfrac{n\pi r^2}{360}=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{n\pi r}{180}\cdot r=\dfrac{1}{2}lr$）.

3. 弓形的面积

（1）当弓形的弧小于半圆时，它的面积等于扇形面积与三角形面积的差，即 $S_{弓形}=S_{扇形}-S_{三角形}$；

（2）当弓形的弧大于半圆时，它的面积等于扇形面积与三角形面积的和，即 $S_{弓形}=S_{扇形}+S_{三角形}$；

（3）当弓形的弧是半圆时，它的面积是圆面积的一半，即 $S_{弓形}=\dfrac{1}{2}S_{圆}$.

提分·必记

特别提醒

- 扇形面积公式中的 n 与弧长公式中的 n 一样，应该理解为 $1°$ 的 n 倍，不带单位.
- 根据扇形面积公式和弧长公式，已知 $S_{扇形}$，l，n，r 四个量中的任意两个，都可以求出另外两个.

拔考向▶ 利用扇形面积求相关面积

题型 1：扇形面积在求弓形面积中的应用

例 2 [中考·甘孜]如图 27.3-2，已知扇形 OAB 的半径为 2，圆心角为 90°，连结 AB，则图中阴影部分的面积是（　　）

A. $\pi-2$　　B. $\pi-4$　　C. $4\pi-2$　　D. $4\pi-4$

解题秘方：利用弓形面积公式计算.

解：$S_{阴影}=S_{扇形OAB}-S_{\triangle OAB}=\dfrac{90\pi\times2^2}{360}-\dfrac{1}{2}\times2\times2=\pi-2$.

答案：A

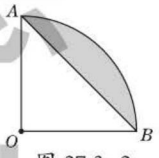


图 27.3-2

题型 2：扇形面积在求不规则图形的面积中的应用

例 3 如图 27.3-3，AC 是汽车挡风玻璃前的雨刷器，如果 $AO=45$ cm，$CO=5$ cm，当 AC 绕点 O 顺时针旋转 90° 时，雨刷器 AC 扫过的面积为_____cm^2.（结果保留 π）

解题秘方：利用旋转，将不规则图形的面积转化为规则图形的面积，本题利用 $S_{扇形}=\dfrac{n\pi r^2}{360}$ 求扇形的面积.

解：$\triangle A'C'O$ 是 $\triangle ACO$ 绕点 O 旋转 90° 而得到的三角形，$\therefore\triangle AOC\cong\triangle A'OC'$. $\therefore$雨刷器 AC 扫过的面积 = 扇形 AOA' 的面积 − 扇形 COC' 的面积 $=\dfrac{90\pi\times45^2}{360}-\dfrac{90\pi\times5^2}{360}=\dfrac{45^2-5^2}{4}\times\pi=500\pi$（cm^2）.

答案：500π

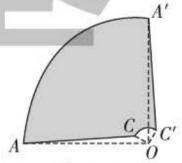


图 27.3-3

提分·秘诀

解法提醒

所谓弓形就是由弦及其所对的弧组成的图形，求弓形的面积一般转化为扇形的面积与三角形的面积之差（和）.

特别提醒

1. 图解

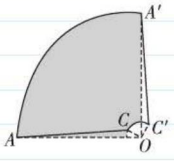


图 27.3-4

雨刷器 AC 扫过的面积可转化为图 27.3-4 中阴影部分的面积.

2. 解法点拨：解此类以实际生活为背景的题目需分析题意，明确题目要求，将不规则图形的面积转化为学习过的规则图形的面积求解.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

点知识▶3 圆锥

1. 与圆锥有关的概念

（1）**圆锥**：圆锥是由一个底面和一个侧面围成的几何体（如图 27.3–5），圆锥可以看作是一个直角三角形绕它的一条直角边所在的直线旋转一周所形成的图形；这条直线叫做圆锥的轴.

（2）**圆锥的母线**：底面圆周上任意一点和圆锥顶点的连线叫做圆锥的母线.

（3）**圆锥的高**：连结圆锥顶点与底面圆心的线段叫做圆锥的高.

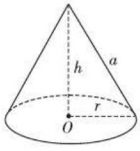


图 27.3–5

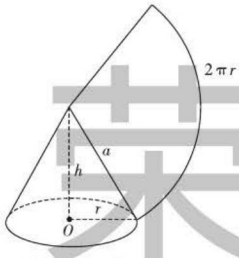


图 27.3–6

2. 圆锥的侧面积和全面积

如图 27.3–6，沿一条母线将圆锥侧面剪开并展平，容易得到，圆锥的侧面展开图是一个扇形. 设圆锥的母线长为 a，底面圆的半径为 r，那么这个扇形的半径为 a，扇形的弧长为 $2\pi r$，因此圆锥的侧面积 $S_{侧}=S_{扇形}=\frac{1}{2}\times 2\pi r\times a=\pi ra$，圆锥的全面积 $S_{全}=S_{侧}+S_{底}=\pi ra+\pi r^2=\pi r(a+r)$.

技考向▶利用圆锥的特征求面积

例 4 如图 27.3–7，在△ABC 中，$\angle C=90°$，$AC=3$，$BC=4$.

（1）将△ABC 以 BC 所在直线为轴旋转一周，求所得旋转体的全面积；

（2）将△ABC 以 AC 所在直线为轴旋转一周，求所得旋转体的全面积.

解题秘方：所得旋转体是一个圆锥，其全面积等于侧面展开图的扇形的面积与底面圆的面积之和.

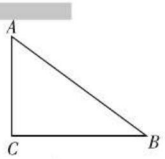


图 27.3–7

解：（1）∵$\angle C=90°$，$AC=3$，$BC=4$，

∴ $AB=\sqrt{AC^2+BC^2}=5$.

∴ $S_{底}=\pi AC^2=9\pi$，$S_{侧}=\pi\times 3\times 5=15\pi$.

∴ $S_{全}=S_{底}+S_{侧}=24\pi$.

（2）$S_{底}=\pi BC^2=16\pi$，$S_{侧}=\pi\times 4\times 5=20\pi$，

∴ $S_{全}=S_{底}+S_{侧}=36\pi$.

提分·必记

特别提醒

1. 圆锥的轴通过底面的圆心，并且垂直于底面；
2. 圆锥的母线长都相等；
3. 圆锥的母线 a、高 h 及底面圆的半径 r 构成直角三角形，有 $a^2=h^2+r^2$，已知 a，h 和 r 中任意两个量都可以求出第三个量.

警示误区

解决有关圆锥的计算题的关键是清楚立体图与平面展开图的联系与区别，特别是不要混淆底面圆半径 r 和侧面展开图的扇形的半径 a. 记住：圆锥侧面展开图的扇形的半径为圆锥的母线长.

提分·秘诀

特别提醒

关于圆锥的计算的题型主要有三种形式：

1. 圆锥的底面圆半径、高、母线长中已知两个量求圆锥的侧面积或全面积；
2. 知道圆锥的侧面积和底面圆半径，求母线长或高或圆锥侧面展开图的圆心角；
3. 已知圆锥侧面展开图的弧长及圆心角度数，求圆锥的底面圆半径和高.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

点方法·拨技巧 提高分

拔尖角度 1 利用作差法求涉扇形的阴影面积

例 5 如图 27.3-8，AB 为 $\odot O$ 的直径，AC，DC 为弦，$\angle ACD=60°$，P 为 AB 延长线上的点，$\angle APD=30°$.

（1）求证：DP 是 $\odot O$ 的切线；

（2）若 $\odot O$ 的半径为 3，求图中阴影部分的面积.

解题秘方：（1）连结 OD，证明半径 OD 垂直于直线 DP；（2）利用割补法将阴影部分的面积转化为 $\triangle ODP$ 的面积与扇形 DOB 的面积之差.

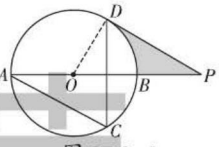


图 27.3-8

（1）**证明**：如图 27.3-8，连结 OD.

$\because \angle ACD=60°$，$\therefore \angle AOD=2\angle ACD=120°$.

$\therefore \angle DOP=180°-120°=60°$.

$\because \angle APD=30°$，$\therefore \angle ODP=180°-30°-60°=90°$.

$\therefore OD\perp DP$.

又 $\because OD$ 为 $\odot O$ 的半径，$\therefore DP$ 是 $\odot O$ 的切线.

（2）**解**：$\because \angle P=30°$，$\angle ODP=90°$，$OD=3$，

$\therefore OP=2OD=6$.

$\therefore DP=\sqrt{OP^2-OD^2}=3\sqrt{3}$.

$\therefore S_{阴影}=S_{\triangle ODP}-S_{扇形DOB}=\frac{1}{2}\times 3\times 3\sqrt{3}-\frac{60\pi\times 3^2}{360}=\frac{9\sqrt{3}}{2}-\frac{3\pi}{2}$.

挑战·高分

解法提醒

此类求不规则图形面积的问题，一般采用割补法，将不规则图形的面积转化为已学过的规则图形面积的和或差计算.

图解

如图 27.3-9，$S_{阴影}=S_{\triangle ODP}-S_{扇形DOB}$.

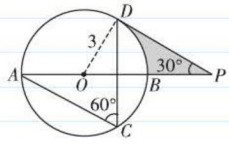


图 27.3-9

拔尖角度 2 利用求弧长法求滚动路线长

例 6 如图 27.3-10，矩形 $ABCD$ 中，$AB=4$，$BC=3$，边 CD 在直线 l 上，将矩形 $ABCD$ 沿直线 l 进行无滑动翻滚，当点 A 第一次翻滚到点 A_1 位置时，点 A 经过的路线长为_____.

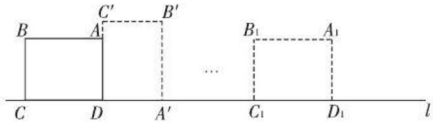


图 27.3-10

解题秘方：如图 27.3-11，点 A 经过的路线分三段：（1）以点 D 为圆心，90° 为圆心角，3 为半径的弧；（2）以点 B'' 为圆心，90° 为圆心角，4 为半径的弧；（3）以点 C_1 为圆心，90° 为圆心角，5 为半径的弧；利用弧长公式计算.

挑战·高分

特别提醒

平面图形的滚动问题中：

- 滚动前后图形的形状、大小不变，位置改变；
- 滚动时不动的点是定点，移动的点是动点，滚动过程中动点经过的路线一般是一段圆弧，所形成的图形一般是扇形.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

解：点 A 运动的路径如图 27.3−11.

∵四边形 $ABCD$ 是矩形，$AB=4$，$BC=3$，

∴ $AD=BC=3$，$\angle ADC=90°$，对角线长为 5.

根据旋转的性质知，$\angle ADA'=90°$，$AD=A'D=BC=3$，

∴从点 A 翻滚到点 A' 位置时，点 A 经过的路线长为 $\frac{90\pi\times3}{180}=\frac{3\pi}{2}$.

同理，从点 A' 翻滚到点 A'' 位置时，点 A 经过的路线长为 $\frac{90\pi\times4}{180}=2\pi$，

从点 A'' 翻滚到点 A_1 位置时，点 A 经过的路线长为 $\frac{90\pi\times5}{180}=\frac{5\pi}{2}$.

∴当点 A 第一次翻滚到点 A_1 位置时，点 A 经过的路线长为 $\frac{3\pi}{2}+2\pi+\frac{5\pi}{2}=6\pi$.

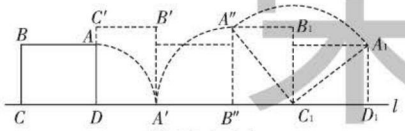


图 27.3−11

答案：6π

拔尖角度 3 利用展开法求圆锥的侧面中两点间的最短距离

挑战·高分

例 7 如图 27.3−12，有一个圆锥形的粮堆，其轴截面是边长为 6m 的等边三角形，在圆锥的母线 AC 的中点 P 处有一只老鼠正偷吃粮食，此时小猫正在点 B 处，它要沿圆锥侧面到达点 P 处捕捉老鼠，求小猫所经过的最短路程.

解题秘方：要求小猫所经过的最短路程，需将圆锥的侧面展开，根据“两点之间线段最短”找出最短路径，再进行计算.

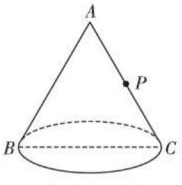


图 27.3−12

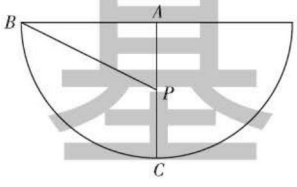


图 27.3−13

解：由题意知，圆锥底面圆的直径 $BC=6$m，故圆锥底面圆的周长为 6πm. 圆锥的侧面展开图是如图 27.3−13 的扇形，设此扇形的圆心角为 $n°$，

则 $6\pi=\frac{n\pi\times6}{180}$，解得 $n=180$，∴展开后 $\angle BAP=90°$.

又 $AP=\frac{1}{2}AC=3$m，∴在 Rt△ABP 中，$BP=\sqrt{AB^2+AP^2}=\sqrt{6^2+3^2}=3\sqrt{5}$（m）. ∴小猫所经过的最短路程为 $3\sqrt{5}$ m.

解法技巧

求图形翻滚中路线长问题的方法：

求此类翻滚中路线长的问题，可通过探究归纳出这个点一个周期经过的路线的情况，并从此推断整个运动路线，从而利用弧长公式求出运动的路线长.

解题技巧

化曲为直法：

“化曲为直”是把曲面（圆锥的侧面）展开成平面（扇形，即圆锥的侧面展开图），利用“两点之间线段最短”来解决距离最短问题.

详解

圆锥底面圆的周长为 6πm，圆锥侧面展开图的弧长为 $\frac{n\pi\times6}{180}$ m，根据“圆锥底面圆的周长＝圆锥侧面展开图的弧长”列方程.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

点中考·拨模拟 得满分

中考探秘 本节的主要考点是弧长和扇形面积，主要考查运用弧长公式、扇形面积公式进行计算，求圆锥的侧面积和全面积，尤其是不规则图形的面积计算成为中考的热点，多以填空题、选择题的形式出现，有时也在综合性较强的题型中体现.

三年中考兵法

考法1 利用弧长公式求圆中的弧长

例8 [中考·湖州]如图27.3-14，已知AB是⊙O的直径，C，D是⊙O上的点，$OC \parallel BD$，交AD于点E，连结BC.

（1）求证：$AE=ED$；

（2）若$AB=10$，$\angle CBD=36°$，求$\overset{\frown}{AC}$的长.

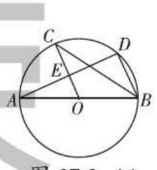


图27.3-14

试题评析：此题考查弧长公式，关键是根据弧长公式和垂径定理解答.

（1）**证明**：∵AB是⊙O的直径，∴$\angle ADB=90°$，

∵$OC \parallel BD$，

∴$\angle AEO=\angle ADB=90°$，即$OC \perp AD$，

∴$AE=ED$.

（2）**解**：∵$OC \perp AD$，∴$\overset{\frown}{AC}=\overset{\frown}{CD}$，

∴$\angle ABC=\angle CBD=36°$，

∴$\angle AOC=2\angle ABC=2\times 36°=72°$，

∴$\overset{\frown}{AC}=\dfrac{72\pi\times 5}{180}=2\pi$.

考法2 利用扇形面积求不规则图形面积

例9 [中考·山西]如图27.3-15，正方形$ABCD$内接于⊙O，⊙O的半径为2，以点A为圆心，以AC长为半径画弧交AB的延长线于点E，交AD的延长线于点F，则图中阴影部分的面积为(　　)

A.$4\pi-4$　　B.$4\pi-8$

C.$8\pi-4$　　D.$8\pi-8$

试题评析：本题考查扇形的面积公式、正方形的性质等知识，解题的关键是学会用转化的思想思考问题，属于中考常考题型.

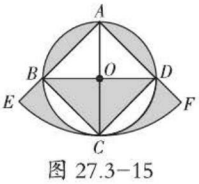


图27.3-15

解：利用对称性可知：$S_{阴影}=S_{扇形AEF}-S_{\triangle ABD}=\dfrac{90\cdot\pi\cdot 4^2}{360}-\dfrac{1}{2}\times 4\times 2=4\pi-4$.

答案：A

冲刺·满分

解法提醒

- 根据平行线的性质得出∠AEO=90°，再利用垂径定理证明即可；
- 根据弧长公式解答即可.

解法技巧

求不规则图形面积的方法：

求不规则图形的面积时，一般不能直接利用公式求解，常用的方法有：**割补法、拼凑法、等积变形法、迁移变换法、构造方程法**等.其中前四种方法的基本思想都是将不规则图形转化为规则图形（可直接求面积的图形，如三角形、特殊四边形、圆、扇形）或规则图形的和、差进行求解.

苹德基

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

考法 3 利用圆锥的面积公式求几何体的表面积

例 10 [中考·绵阳]如图 27.3-16，蒙古包可近似地看作由圆锥和圆柱组成，若用毛毡搭建一个底面圆面积为 $25\pi\ m^2$，圆柱高为 3 m，圆锥高为 2 m 的蒙古包，则需要毛毡的面积是（　　）

A. $(30+5\sqrt{29})\pi\ m^2$　　B. $40\pi\ m^2$

C. $(30+5\sqrt{21})\pi\ m^2$　　D. $55\pi\ m^2$

试题评析：本题考查了圆锥的计算及几何体的表面积的知识，难度不大.



图 27.3-16

解：设底面圆的半径为 R m，则 $\pi R^2=25\pi$，

解得 $R=5$，$\therefore$ 圆锥的母线长 $=\sqrt{2^2+5^2}=\sqrt{29}$ m，

$\therefore S_{圆锥侧}=\pi\times5\times\sqrt{29}=5\sqrt{29}\ \pi m^2$，$S_{圆柱侧}=2\pi\times5\times3=30\pi m^2$，

$\therefore S_{毛毡}=(30+5\sqrt{29})\pi m^2$.

答案：A

考法 4 利用扇形面积公式求与圆综合的面积

例 11 [中考·襄阳]如图 27.3-17，AB 是⊙O 的直径，AM 和 BN 是⊙O 的两条切线，E 为⊙O 上一点，过点 E 作直线 DC 分别交 AM，BN 于点 D，C，且 $CB=CE$.

（1）求证：$DA=DE$；

（2）若 $AB=6$，$CD=4\sqrt{3}$，求图中阴影部分的面积.

试题评析：本题考查了切线的判定与性质，全等三角形的判定与性质，勾股定理及扇形面积的计算. 活用这些性质和公式是解题的关键.

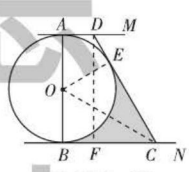


图 27.3-17

（1）**证明**：连结 OE，OC，如图 27.3-17.

$\because BN$ 切⊙O 于点 B，$\therefore\angle OBN=90°$.

$\because OE=OB$，$OC=OC$，$CE=CB$，$\therefore\triangle OEC\cong\triangle OBC$.

$\therefore\angle OEC=\angle OBC=90°$. $\therefore OE\perp EC$. $\therefore CD$ 是⊙O 的切线.

$\because AD$ 切⊙O 于点 A，$\therefore DA=DE$.

（2）**解**：过点 D 作 $DF\perp BC$ 于点 F，如图 27.3-17，则四边形 $ABFD$ 是矩形. $\therefore AD=BF$，$DF=AB=6$. $\therefore DC=CE+DE=BC+AD=4\sqrt{3}$.

$\because FC=\sqrt{DC^2-DF^2}=2\sqrt{3}$，$\therefore BC-AD=2\sqrt{3}$. $\therefore BC=3\sqrt{3}$.

在 Rt△OBC 中，$OC=\sqrt{OB^2+BC^2}=6$，

$\therefore OB=\frac{1}{2}OC$. $\therefore\angle OCB=30°$. $\therefore\angle BOC=60°$.

$\because\triangle OEC\cong\triangle OBC$，$\therefore\angle BOE=2\angle BOC=120°$.

$\therefore S_{阴影部分}=S_{四边形BCEO}-S_{扇形OBE}=2\times\frac{1}{2}BC\cdot OB-\frac{120}{360}\times\pi\times OB^2=9\sqrt{3}-3\pi$.

思路点拨

利用圆的面积得到底面圆的半径为 5，再利用勾股定理计算出母线长，接着根据圆锥的侧面展开图为扇形和圆柱的侧面展开图为矩形计算它们的侧面积，最后求它们的和即可.

解法提醒

- 连结 OE，OC，通过证明△OEC≌△OBC，得到∠OEC=∠OBC=90°，先证得 CD 是⊙O 的切线，再根据切线长定理，可得 DA=DE.
- 过点 D 作 DF⊥BC 于点 F，得 DF=AB，在 Rt△DFC 中，先运用勾股定理求出 FC=2√3，再根据 CD=BC+AD=4√3，FC=BC-AD=2√3 求出 BC，OC 的长，然后求出∠BOC 的度数，最后根据 $S_{阴影部分}=S_{四边形BCEO}-S_{扇形OBE}=2S_{\triangle OBC}-S_{扇形OBE}$ 计算求解.

宋德基

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

1. [中考·遂宁]已知圆锥的母线长为6，将其侧面沿着一条母线展开后所得扇形的圆心角为120°，则该扇形的面积是（　　）

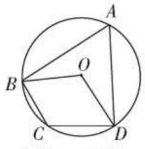
A.4π　　B.8π　　C.12π　　D.16π

2. [中考·天门]一个圆锥的侧面积是底面积的2倍，则该圆锥侧面展开图的圆心角的度数是（　　）

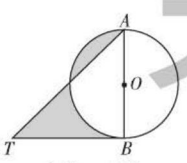
A.120°　　B.180°　　C.240°　　D.300°

3. [中考·咸宁]如图，⊙O的半径为3，四边形$ABCD$内接于⊙O，连结OB，OD，若∠BOD=∠BCD，则$\overset{\frown}{BD}$的长为（　　）

A. π　　B. $\frac{3}{2}$π　　C. 2π　　D. 3π



（第3题）



（第4题）

4. [中考·临沂]如图，AB是⊙O的直径，BT是⊙O的切线，若∠ATB=45°，AB=2，则阴影部分的面积是（　　）

A.2　　B. $\frac{3}{2}-\frac{1}{2}$π　　C.1　　D. $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}$π

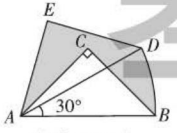
5. [中考·济宁]如图，在Rt△ABC中，∠ACB=90°，AC=BC=1，将Rt△ABC绕点A逆时针旋转30°后得到Rt△ADE，点B经过的路径为$\overset{\frown}{BD}$，则图中阴影部分的面积是（　　）

A. $\frac{\pi}{6}$

B. $\frac{\pi}{3}$

C. $\frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}$

D. $\frac{1}{2}$

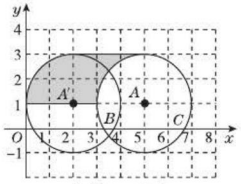


（第5题）

6. [中考·吉林]如图，在平面直角坐标系中，以A(5，1)为圆心，以2个单位为半径的⊙A交x轴于点B，C，解答下列问题：

（1）将⊙A向左平移_____个单位与y轴首次相切，得到⊙A'，此时点A'的坐标为_____，阴影部分的面积S=_____；

（2）求BC的长.

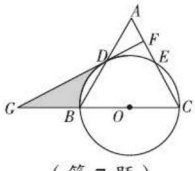


（第6题）

7. [中考·张家界]如图，在等腰△ABC中，AC=BC，以BC为直径的⊙O分别与AB，AC相交于点D，E，过点D作DF⊥AC，垂足为F.

（1）求证：DF是⊙O的切线；

（2）分别延长CB，FD，相交于点G，∠A=60°，⊙O的半径为6，求阴影部分的面积.

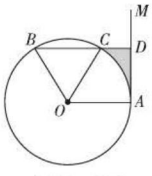


（第7题）

8. [中考·赤峰]如图，点A是直线AM与⊙O的交点，点B在⊙O上，BD⊥AM，垂足为D，BD与⊙O交于点C，OC平分∠AOB，∠B=60°.

（1）求证：AM是⊙O的切线；

（2）若DC=2，求图中阴影部分的面积（结果保留π和根号）.　　【导学号：8603511】



（第8题）

禁德基

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

27.4 正多边形和圆

核心知识

- 正多边形和圆
- 中心，半径，中心角，边心距
- 正多边形的画法

知识链接



点知识·拨考向 速提分

点知识 1 正多边形及有关概念

1. **正多边形**：各条边相等、各个角也相等的多边形是正多边形.

2. **圆的内接正 n 边形**：把圆分成 n（$n \geqslant 3$）等份，依次连结各分点得到的多边形就是这个圆的内接正 n 边形，这个圆就是这个正 n 边形的外接圆.

3. **正多边形有关概念**

（1）**正多边形的中心**：一个正多边形的外接圆的圆心叫做这个正多边形的中心.

（2）**正多边形的半径**：正多边形外接圆的半径叫做正多边形的半径.

（3）**正多边形的中心角**：正多边形每一条边所对的外接圆的圆心角叫做正多边形的中心角.

（4）**正多边形的边心距**：正多边形内切圆的半径叫做正多边形的边心距.

提分·必记

特别解读

“各边相等，各角相等”是正多边形的两个特征，当边数 $n>3$ 时，二者必须同时具备，缺一不可，否则多边形就不是正多边形.

拨考向 利用弧相等证明圆内接正多边形

例 1 如图 27.4-1，三角形 AOB 是正三角形，以点 O 为圆心，OA 为半径作⊙O，直径 $FC \parallel AB$，AO，BO 的延长线交⊙O 于点 D，E，求证：六边形 $ABCDEF$ 为圆内接正六边形.

解题秘方：结合同圆中弦、弧、圆心角的关系证明.

证明：∵三角形 AOB 是正三角形，

$\therefore \angle AOB=\angle OAB=\angle OBA=60^\circ$，$OB=OA$.

$\therefore$ 点 B 在⊙O 上.

∵ $FC \parallel AB$，$\therefore \angle FOA=\angle OAB=60^\circ$，$\angle COB=\angle OBA=60^\circ$.

$\therefore \angle AOB=\angle BOC=\angle COD=\angle DOE=\angle EOF=\angle FOA=60^\circ$.

$\therefore \overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{BC}=\overset{\frown}{CD}=\overset{\frown}{DE}=\overset{\frown}{EF}=\overset{\frown}{FA}$.

$\therefore$ 六边形 $ABCDEF$ 为圆内接正六边形.

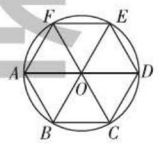


图 27.4-1

提分·秘诀

解法提醒

证明一个多边形是圆内接正多边形的方法：

- 利用正多边形的定义，证明圆内接多边形的每个内角相等，每条边相等；
- 证明圆内接多边形各边所对的弧相等，即证明这个多边形的各顶点等分这个圆.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

点知识▶ 2 正多边形的性质

1. 正多边形的性质：

（1）**轴对称性**：正多边形都是轴对称图形，一个正 n 边形的每个顶点与它的中心连线所在直线都是这个正 n 边形的对称轴.

（2）任何正多边形都有一个外接圆和一个内切圆.

2. 拓展：旋转对称性与中心对称性

任意一个正 n（$n \geqslant 3$）边形绕它的中心旋转 $\frac{360°}{n}$ 所得图形与这个正 n 边形重合，即任意正 n 边形具有旋转对称性. 特别地，当 n 为偶数时，正 n 边形绕它的中心旋转 $\frac{n}{2} \cdot \frac{360°}{n} = 180°$，所得图形与这个正 n 边形重合，因此正 n 边形（n 为偶数）也是中心对称图形.

提分·必记

特别提醒

- 多边形（边数大于2）不一定有外接圆和内切圆，但正多边形一定有外接圆和内切圆，且两圆是同心圆.
- 任意三角形都具有外接圆和内切圆，但只有正三角形的外接圆和内切圆是同心圆.

拔考向▶ 利用正多边形的性质辨析

例 2 一个正多边形绕它的中心旋转 36° 后，才与原正多边形第一次重合，那么这个正多边形（　　）

A. 是轴对称图形，但不是中心对称图形

B. 是中心对称图形，但不是轴对称图形

C. 既是轴对称图形，又是中心对称图形

D. 既不是轴对称图形，又不是中心对称图形

解题秘方：紧扣正多边形的对称性进行辨析.

解：先根据旋转角确定此正多边形的边数，再根据边数的奇偶性确定其对称性. 因为最小旋转角为 36°，所以设该正多边形的边数为 n，则 $\frac{360°}{n} = 36°$，解得 $n=10$. 因为 10 为偶数，所以此正多边形既是轴对称图形，又是中心对称图形，故选 C.

答案：C

提分·秘诀

方法点拨

正多边形都是轴对称图形，但不一定是中心对称图形，只有边数为偶数的正多边形才是中心对称图形.

点知识▶ 3 正多边形的有关计算

1. 正 n 边形的每个内角都等于 $\frac{(n-2)\cdot 180°}{n}$.

2. 正 n 边形的每个中心角都等于 $\frac{360°}{n}$.

3. 正 n 边形的每个外角都等于 $\frac{360°}{n}$.

4. 设正 n 边形的半径为 R，边长为 a，边心距为 r，则：

（1）半径、边长、边心距的关系为 $R^2=r^2+\left(\frac{a}{2}\right)^2$；

（2）周长 $l=na$；

（3）面积 $S=\frac{1}{2}ar\cdot n=\frac{1}{2}lr$.

提分·必记

特别提醒

常见的正多边形的边长与半径的关系：

1. 正六边形的边长等于其外接圆半径.
2. 正三角形的边长等于其外接圆半径的 $\sqrt{3}$ 倍.
3. 正方形的边长等于其外接圆半径的 $\sqrt{2}$ 倍.

荣德基

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

核心考向▶利用正多边形的计算公式进行计算

例 3 已知正六边形 $ABCDEF$ 的半径为 6，求这个正六边形的边长 a_6，周长 l_6 和面积 S_6.

解题秘方：巧用正六边形的边长、半径等之间的关系进行计算.

解：如图 27.4−2，设正六边形 $ABCDEF$ 的中心为点 O，过点 O 作 $OG\perp AB$ 于点 G，连结 OA，OB.

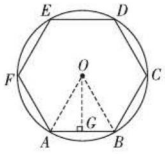


图 27.4−2

$\because \angle AOB=\dfrac{360°}{6}=60°$，$OA=OB$，

$\therefore \angle AOG=30°$.

$\therefore AG=\dfrac{1}{2}AO=3$.

$\therefore a_6=AB=2AG=AO=6$.

$\therefore l_6=6a_6=6\times 6=36$.

在 Rt $\triangle AOG$ 中，$OG=\sqrt{AO^2-AG^2}=\sqrt{6^2-3^2}=3\sqrt{3}$，

$\therefore S_6=\dfrac{1}{2}\times AB\times OG\times 6=\dfrac{1}{2}\times 6\times 3\sqrt{3}\times 6=54\sqrt{3}$.

知识点▶4 正多边形的画法

正 n 边形的画法：将圆 n 等分，然后顺次连结各等分点即得到所要作的正 n 边形.

1. 用量角器等分圆

先用量角器画一个度数为 $\dfrac{360°}{n}$ 的圆心角，则此圆心角所对的弧就是圆的 $\dfrac{1}{n}$，然后在圆周上依次截取这条弧的等弧，就得到圆的 n 等分点，依次连结各等分点，就得到圆的内接正 n 边形，如图 27.4−3.

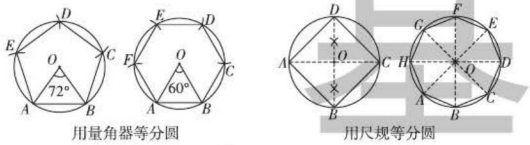


图 27.4−3

2. 用尺规等分圆

对于一些特殊的正 n 边形，如正方形、正八边形，可以用圆规和直尺作图. 如图 27.4−3：

在⊙ O 中，用直尺和圆规作两条互相垂直的直径，就可把圆周四等分，从而作出正四边形，若再逐次平分各边所对的弧，就可以作边数逐次倍增的正多边形，如正八边形、正十六边形等.

提分·秘诀

解法技巧

构造特殊三角形解正多边形的方法：

在解决有关正六边形和正方形的计算时，我们往往作相邻两条半径使其与边分别构成等边三角形和等腰直角三角形，然后与前面学过的勾股定理、垂径定理及切线的性质等知识联系起来综合求解.

提分·必记

解读

画正多边形的原理是在同圆中，相等的圆心角所对的弧相等.

活学巧记

份相等分割圆，
n 值大于等于 3，
依次连结各分点，
内接正 n 边形在眼前.

荣德基

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

拔考向▶利用正多边形与圆的关系作正多边形

例 4 作一个正三角形，使其半径为 0.9 cm.

解题秘方：用量角器画先求出其中心角，用尺规画则先考虑等分圆周.

解：**作法一**：（1）作半径为 0.9 cm 的⊙ O；

（2）用量角器画∠ AOB = ∠ BOC=120°，其中 A，B，C 均为圆上的点；

（3）连结 AB，BC，CA，则△ ABC 为所求作的正三角形，如图 27.4−4.

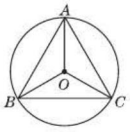


图 27.4−4

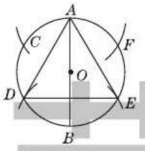


图 27.4−5

作法二：（1）作半径为 0.9 cm 的⊙ O；

（2）作⊙ O 的任意一条直径 AB；

（3）分别以 A，B 为圆心，以 0.9 cm 为半径作弧，交⊙ O 于 C，F 和 D，E；

（4）连结 AD，DE，EA，则△ ADE 为所求作的正三角形，如图 27.4−5.

点方法·拨技巧 提高分

拔尖角度▶[1] 利用辅助圆法（隐形圆法）证正多边形中有关线段的关系

例 5 如图 27.4−6，正五边形的对角线 AC 和 BE 相交于点 M，求证：（1）AC // ED；（2）ME=AE.

解题秘方：利用正五边形的隐形圆，结合圆中弧、边、角的关系证明.

证明：（1）正多边形必有外接圆，作出正五边形的外接圆⊙ O，如图 27.4−6，则 $\overset{\frown}{AB}$，$\overset{\frown}{BC}$，$\overset{\frown}{CD}$，$\overset{\frown}{DE}$，$\overset{\frown}{AE}$ 所对的圆心角的度数均为 $\frac{1}{5}\times 360°=72°$.

∵∠ EAC 的度数等于 $\overset{\frown}{EC}$ 所对的圆心角的度数的一半，

∴∠ $EAC=\frac{1}{2}\times 72°\times 2=72°$.

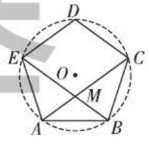


图 27.4−6

同理∠ $AED=\frac{1}{2}\times 72°\times 3=108°$.

∴∠ EAC+∠ AED=180°. ∴ ED // AC.

（2）由（1）知，$\overset{\frown}{AB}$ 所对的圆心角的度数为 72°，

∴∠ $AEB=\frac{1}{2}\times 72°=36°$. 又由（1）知∠ EAC=72°，

∴∠ EMA=180° − ∠ AEB− ∠ EAC=72°.

∴∠ EAM= ∠ EMA. ∴ EA=EM.

提分·秘诀

特别提醒

1. 画圆内接正 n 边形，实质是找圆的 n 等分点.
2. 用量角器等分圆是一种简单常用的方法，但边数很大时，容易产生较大误差.
3. 尺规作图是一种比较准确的等分圆的方法，但只限于作一些特殊的正多边形.

挑战·高分

解法提醒

正多边形一定有外接圆，本题不容易直接证明，所以可以考虑作正五边形 $ABCDE$ 的外接圆⊙ O，正五边形的五个顶点将⊙ O 分成了五等份，再利用圆的相关性质进行证明.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

拔尖角度▸ 2 利用归纳法探究正多边形中角的变化规律

挑战·高分

例 6 如图 27.4-7 ①②③…，M，N 分别是 $\odot O$ 的内接正三角形 ABC、正方形 $ABCD$、正五边形 $ABCDE$…的边 AB，BC 上的点，且 $BM=CN$，连结 OM，ON.

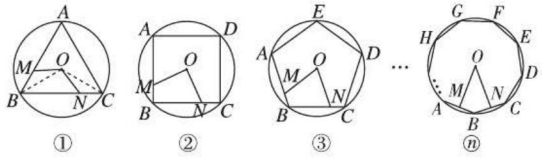


图 27.4-7

（1）求图 27.4-7 ①中 $\angle MON$ 的度数；

（2）图 27.4-7 ②中 $\angle MON$ 的度数是_____，图 27.4-7 ③中 $\angle MON$ 的度数是_____；

（3）试探究 $\angle MON$ 的度数与正 n 边形边数 n（$n \geqslant 3$）的关系（直接写出答案）.

解题秘方：利用正多边形的半径构造全等三角形，再进行角度的转换并计算.

解：（1）如图 27.4-7 ①，连结 OB，OC.

易知 $\angle BOC=\dfrac{360°}{3}=120°$，$\angle OBM=\angle OCN=30°$.

又 $\because BM=CN$，$OB=OC$，

$\therefore \triangle OBM \cong \triangle OCN$.

$\therefore \angle BOM=\angle CON$.

$\therefore \angle BON+\angle BOM=\angle BON+\angle CON$.

$\therefore \angle MON=\angle BOC=120°$.

（2）90°；72°

（3）$\angle MON=\dfrac{360°}{n}$（$n \geqslant 3$）.

解法提醒

解此题时，关键是对未知角先进行分析，再通过三角形全等进行角度的等量转化，将求 $\angle MON$ 的度数转化为求 $\angle BOC$ 的度数.

详解

连结 OB，OC，

易知 $\angle OBM=\angle OCN=\dfrac{(n-2)\times 90°}{n}$，$\angle BOC=\dfrac{360°}{n}$.

又 $\because BM=CN$，$OB=OC$，

$\therefore \triangle BOM \cong \triangle CON$.

$\therefore \angle BOM=\angle CON$.

$\therefore \angle MON=\angle BOC=\dfrac{360°}{n}$.

点中考·拔模拟 得满分

中考探秘

正多边形的概念及有关计算在中考中频繁出现，题型以选择题、填空题为主，有时也出现在应用性解答题中，画正多边形的题目出现的次数也较多，题型也逐渐新颖、丰富起来.

基础·德基·基础

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

三年中考兵法

冲刺·满分

特别提醒

正多边形的有关计算是中考常考题型，熟练地掌握各种计算公式是解题的关键.

考法1 利用中心角的计算比较大小

例7 [中考·株洲]下列圆的内接正多边形中，一条边所对的圆心角最大的图形是（　　）

A. 正三角形　B. 正方形　C. 正五边形　D. 正六边形

试题评析：本题考查圆的内接正多边形的定义，正多边形中心角的计算，比较大小是解题的关键.

解：∵正三角形一条边所对的圆心角是 $360°\div3=120°$，

正方形一条边所对的圆心角是 $360°\div4=90°$，

正五边形一条边所对的圆心角是 $360°\div5=72°$，

正六边形一条边所对的圆心角是 $360°\div6=60°$，

∴一条边所对的圆心角最大的图形是正三角形.

答案：A

考法2 利用同圆的内接正多边形的计算解有关三角形的计算

例8 [中考·达州]以半径为2的圆的内接正三角形、正方形、正六边形的边心距为三边作三角形，则该三角形的面积是（　　）

A. $\frac{\sqrt{2}}{2}$　B. $\frac{\sqrt{3}}{2}$　C. $\sqrt{2}$　D. $\sqrt{3}$

试题评析：本题主要考查正多边形与圆，解答此题要明确正多边形的半径、边心距、中心角等概念，根据解直角三角形的知识解答是解题的关键.

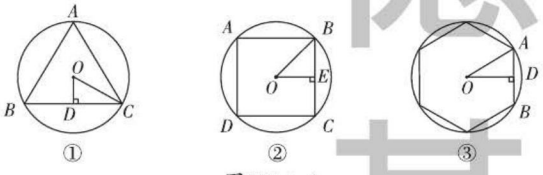


图 27.4-8

解：如图 27.4-8①，在 Rt△OCD 中，∠OCD=30°，OC=2，∴OD=1. 如图 27.4-8②，在 Rt△OBE 中，∠BOE=∠OBE=45°，

∴OE=BE. ∵$OE^2+BE^2=OB^2=4$，∴$OE=\sqrt{2}$.

如图 27.4-8③，在 Rt△ODA 中，∠AOD=30°，∠OAD=60°，OA=2. ∴$AD=\frac{1}{2}OA=1$，$OD=\sqrt{OA^2-AD^2}=\sqrt{2^2-1^2}=\sqrt{3}$.

则该三角形的三边分别为：1，$\sqrt{2}$，$\sqrt{3}$.

∵$1^2+(\sqrt{2})^2=(\sqrt{3})^2$，∴该三角形是直角三角形.

∴该三角形的面积是$\frac{1}{2}\times1\times\sqrt{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

答案：A

解法提醒

由于内接正三角形、正方形、正六边形是特殊内角的多边形，可构造直角三角形分别求出边心距的长，由勾股定理的逆定理可得该三角形是直角三角形，进而可得其面积.

荣德基

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

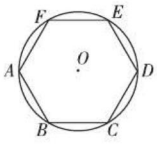
1. 正多边形的中心角与该正多边形一个内角的关系是（　　）

A. 互余　　B. 互补

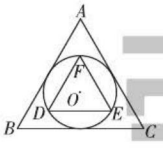
C. 互余或互补　　D. 不能确定

2. [中考·沈阳]如图，正六边形 $ABCDEF$ 内接于⊙O，正六边形的周长是12，则⊙O的半径是(　　)

A. $\sqrt{3}$　　B. 2　　C. $2\sqrt{2}$　　D. $2\sqrt{3}$



（第2题）



（第4题）

3. [中考·日照]下列说法正确的是（　　）

A. 圆内接正六边形的边长与该圆的半径相等

B. 在平面直角坐标系中，不同的坐标可以表示同一点

C. 一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$（$a\neq 0$）一定有实数根

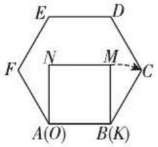
D. 将△ABC绕A点按顺时针方向旋转60°得△ADE，则△ABC与△ADE不全等

4. [模拟·和平]如图，△ABC和△DEF分别是⊙O的外切正三角形和内接正三角形，则它们的面积比为（　　）

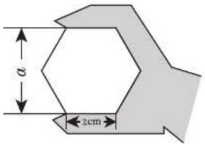
A. 4　　B. 2　　C. $\sqrt{3}$　　D. $\sqrt{2}$

5. [中考·河北]已知正方形 $MNOK$ 和正六边形 $ABCDEF$ 的边长均为1，把正方形放在正六边形中，使OK边与AB边重合，如图，按下列步骤操作：将正方形在正六边形中绕点B顺时针旋转，使KM边与BC边重合，完成第一次旋转；再绕点C顺时针旋转，使MN边与CD边重合，完成第二次旋转……在这样连续6次旋转的过程中，点B，M间的距离可能是（　　）

A. 1.4　　B. 1.1　　C. 0.8　　D. 0.5



（第5题）



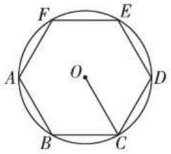
（第6题）

6. 如图，正六边形螺帽的边长是2 cm，这个扳手的开口大小a应是（　　）

A. $2\sqrt{3}$ cm　　B. $\sqrt{3}$ cm

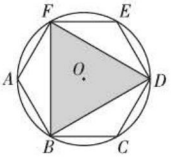
C. $\frac{2\sqrt{2}}{3}$ cm　　D. 1 cm

7. [模拟·槐荫]如图，在圆内接正六边形 $ABCDEF$ 中，半径OC=4，求正六边形的边长.



（第7题）

8. 如图，已知正六边形 $ABCDEF$ 内接于⊙O，图中阴影部分的面积为 $12\sqrt{3}$，求⊙O的半径.



（第8题）

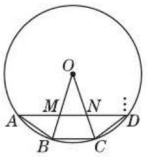
菜德基

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

9. 如图，已知⊙ O 的内接正十边形 $ABCD\cdots$，AD 与 OB，OC 分别交于 M，N.

求证：（1）$MN \parallel BC$；

（2）$MN+BC=OB$.



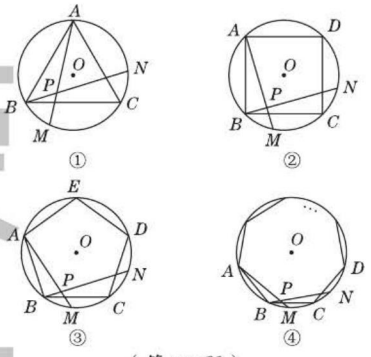
（第 9 题）

10. 如图①②③④分别是⊙ O 的内接正三角形、正四边形、正五边形、正 n 边形，点 M，N 分别从点 B，C 开始以相同的速度在⊙ O 上逆时针运动，AM，BN 相交于点 P.

（1）图①中，$\angle APN$ 的度数为_____；

（2）图②中，$\angle APN$ 的度数是_____，图③中，$\angle APN$ 的度数是_____；

（3）试探索 $\angle APN$ 的度数与正多边形边数 n 的关系（直接写答案）.



（第 10 题）

荣德基

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

分类讨论思想在圆中的应用

荣老师告诉你 当一个命题的题设和结论不唯一确定，有多种可能情况，难以统一解答时，需要按可能出现的各种情况分门别类地加以讨论，一一作解，得出各种情况的相应结论，最后综合归纳出问题的正确答案．分类讨论是一种逻辑方法，是一种重要的数学思想，同时也是一种重要的解题策略，它体现了化整为零、积零为整的思想与归类整理的方法．

应用一 ▸ 由点与圆的位置关系引起的不唯一性

例 1 已知点 A 到⊙ O 的最近距离和最远距离分别是 3 cm 和 9 cm，求⊙ O 的半径．

解：设⊙ O 的半径为 R，

（1）如图 1①，当点 A 在⊙ O 内时，$2R=3+9=12$（cm），所以⊙ O 的半径是 6 cm；

（2）如图 1②，当点 A 在⊙ O 外时，$2R=9-3=6$（cm），所以⊙ O 的半径是 3 cm．

综上所述，⊙ O 的半径是 6 cm 或 3 cm．

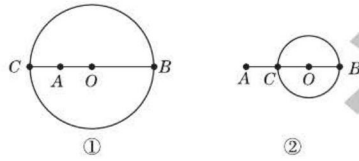


图 1

方法点拨：点与圆的位置关系有三种：点在圆内、点在圆上、点在圆外．当点与圆的位置关系不确定时，需按照此三种关系进行分类讨论．

应用二 ▸ 由圆的对称性引起的不唯一性

例 2 已知⊙ O 的直径是 10 cm．弦 $AB \parallel CD$，$AB=6$ cm，$CD=8$ cm，求 AB 与 CD 之间的距离．

解：（1）如图 2①，当 AB，CD 位于圆心 O 的异侧时，连结 OB，OD，过点 O 作 $OE \perp CD$ 于点 E，OE 的反向延长线交 AB 于点 F．

$\because AB \parallel CD$，$OE \perp CD$，

$\therefore OF \perp AB$．

$\because OE \perp CD$，

$\therefore DE=\frac{1}{2}CD=4$ cm．

在 Rt△ OED 中，

$OE=\sqrt{OD^2-ED^2}=\sqrt{5^2-4^2}=3$（cm）．

同理，在 Rt△ OFB 中，$OF=4$cm．

所以 $EF=OE+OF=7$cm．

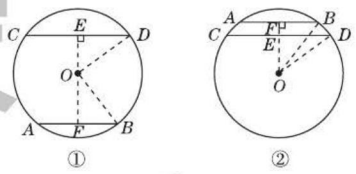


图 2

（2）如图 2②，当 AB，CD 位于圆心 O 的同侧时，连结 OB，OD，过点 O 作 $OF \perp AB$，垂足为 F，交 CD 于点 E．可得 $OF=4$ cm，$OE=3$ cm，

$\therefore EF=OF-OE=4-3=1$（cm）．

综上所述，AB 与 CD 之间的距离是 7 cm 或 1 cm．

方法点拨：平行两弦有可能位于圆心的异侧，也有可能位于圆心的同侧，需分情况讨论．

应用三 ▸ 由一弦对两弧引起的不唯一性

例 3 弦 AB 的长等于半径，求 AB 所对的圆周角的度数．

解题秘方：因为弦 AB 所对的弧有优弧和劣弧，需分情况讨论，分别求出优弧和劣弧所对的圆周角的度数．

解：（1）当弦 AB 所对的弧是劣弧时，如图 3．

连结 OA，OB，AC，CB，

易得△ ABO 是等边三角形．

$\therefore \angle AOB=60°$．

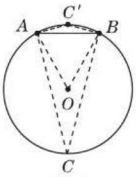


图 3

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

$\therefore \angle ACB=\frac{1}{2}\angle AOB=30°$.

（2）当弦 AB 所对的弧是优弧时，连结 AC'，BC'，如图 3.

易得 $\angle AC'B=150°$.

综上所述，弦 AB 所对的圆周角等于 $30°$ 或 $150°$.

方法点拨：在一个圆中，一条非直径的弦所对的弧有两条，分别是优弧和劣弧．当点的位置不能确定时，分在优弧和劣弧上两种情况讨论．

应用四 ▶ 由运动导致直线与圆位置关系的不唯一性

例 4 如图 4，射线 QN 与等边三角形 ABC 的两边 AB，BC 分别交于点 M，N，且 $AC \parallel QN$，$AM=MB=2$ cm，$QM=4$ cm. 动点 P 从点 Q 出发，沿射线 QN 以 1 cm/s 的速度向右移动，经过 t s，以点 P 为圆心，$\sqrt{3}$ cm 为半径的圆与等边三角形 ABC 相切（切点在边上），请写出 t 的取值．

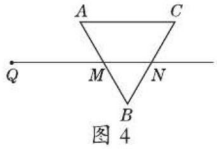


图 4

解：$\because \triangle ABC$ 是等边三角形，

$\therefore AB=AC=BC=AM+MB=4$ cm，$\angle A=\angle C=\angle B=60°$.

$\because QN \parallel AC$，$AM=BM$，

$\therefore N$ 为 BC 的中点，$\angle BMN=\angle BNM=\angle C=\angle A=60°$.

$\therefore MN=\frac{1}{2}AC=2$ cm.

分为三种情况：（1）如图 5.

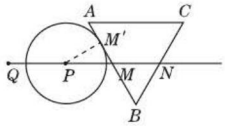


图 5

当⊙ P 切 AB 于 M' 时，连结 PM'，

则 $PM'=\sqrt{3}$ cm，$\angle PM'M=90°$.

$\because \angle PMM'=\angle BMN=60°$，

$\therefore M'M=1$ cm，$PM=2MM'=2$ cm.

$\therefore QP=4-2=2$（cm），即 $t=2$.

（2）如图 6.

当⊙ P 切 AC 于点 A 时，连结 PA，

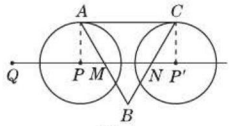


图 6

则 $\angle CAP=\angle APM=90°$，$\angle PMA=\angle BMN=60°$，$AP=\sqrt{3}$ cm.

$\therefore PM=1$ cm.

$\therefore QP=4-1=3$（cm），即 $t=3$.

当⊙ P 运动到⊙ P' 处与 AC 切于 C 点时，连结 $P'C$，

则 $\angle CP'N=\angle ACP'=90°$，$\angle P'NC=\angle BNM=60°$，$CP'=\sqrt{3}$ cm.

$\therefore P'N=1$ cm.

$\therefore QP'=4+2+1=7$（cm），即 $t=7$.

故当 $3 \leqslant t \leqslant 7$ 时，⊙ P 和 AC 边相切．

（3）如图 7，当⊙ P 切 BC 于 N' 时，连结 PN'，

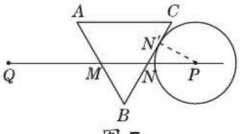


图 7

则 $PN'=\sqrt{3}$ cm，$\angle PN'N=90°$.

$\because \angle PNN'=\angle BNM=60°$，

$\therefore N'N=1$ cm，$PN=2NN'=2$ cm.

$\therefore QP=4+2+2=8$（cm），即 $t=8$.

综上所述，$t=2$ 或 $3 \leqslant t \leqslant 7$ 或 $t=8$.

方法点拨：由图形运动导致的分类讨论，要抓住图形变化时的几个关键点进行分类．

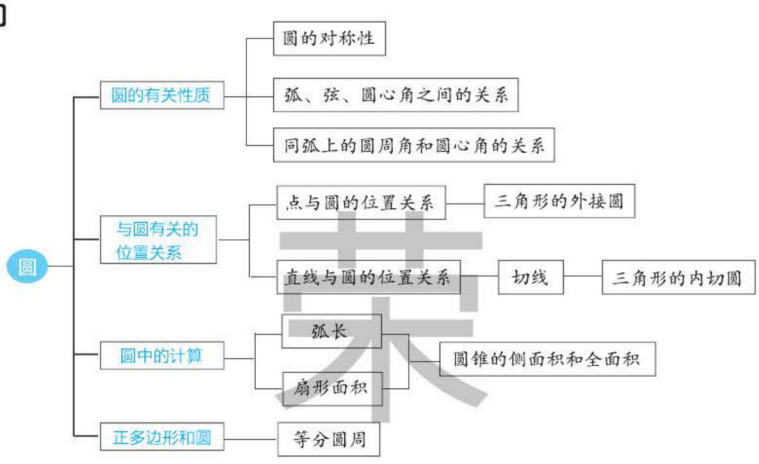
未德基

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

章末核心知识分类整合

核心结构专题

结构必知



核心必读

1. 圆是轴对称图形，根据圆的轴对称性推出垂径定理.
2. 圆是中心对称图形，且具有旋转不变性，推出“圆心角、弦、弧、圆周角”之间的四量关系定理.
3. 同弧或等弧的圆心角和圆周角之间的数量关系构成圆周角定理，由圆周角定理推出两个结论：一是半圆（或直径）所对的圆周角是直角，90° 的圆周角所对的弦是直径；二是同弧或等弧所对的圆周角相等.
4. 与圆有关的位置关系中，直线与圆的位置关系最重要，在直线与圆的三种位置中，相切最关键，包括切线的性质与切线的判定以及切线长定理都是重中之重.
5. 三角形与圆之间的关系主要有“内接”和“外切”两种形式. 正多边形与圆之间的关系也是“内接”这种形式.
6. **在圆的计算中主要掌握两个公式：**（1）$l=\frac{n\pi R}{180}$；（2）$S_{扇形}=\frac{n\pi R^2}{360}$ 或 $S_{扇形}=\frac{1}{2}lR$. 圆锥的侧面积和全面积都需要转化为前面两个公式进行计算.

知识方法专题

知识必学

专题一 垂径定理

链接中考» 垂径定理是圆中非常重要的定理之一，它是用来证明线段相等或角相等的重要依据. 单独考查时，一般以填空题、选择题的形式出现，渗透到其他知识点时，以综合题的形式考查.

例1 [中考·江西] $\odot O$ 为 $\triangle ABC$ 的外接圆，请仅用无刻度的直尺，根据下列条件分别在图 27-1 ①，图 27-1 ②中画出一条弦，使这条弦将 $\triangle ABC$ 分成面积相等的两部分（保留作图痕迹，不写作法）.

（1）如图①，$AC=BC$；

（2）如图②，直线 l 与 $\odot O$ 相切于点 P，

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

且 $l \parallel BC$.

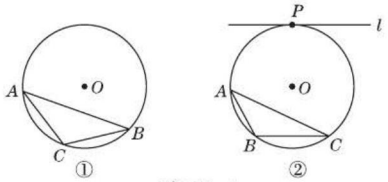


图 27−1

解：（1）作图如图 27−2①，弦 CD 即为所求.

（2）作图如图 27−2②，弦 AD 即为所求.

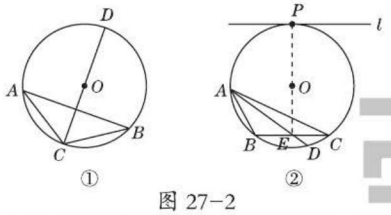


图 27−2

方法点拨：在圆中，垂径定理把弦、半径、弦心距三者联系起来. 已知其中两个量，便可求出第三个量.

专题二 四量关系定理

链接中考» 四量关系定理是圆的旋转不变性的体现，它揭示同圆或等圆中弧、弦、圆心角、圆周角之间的等量关系，它为证明线段相等和角相等提供了有力的依据，考查时，一般以解答题的形式出现.

例 2 ［中考·台州］如图 27−3，四边形 $ABCD$ 内接于 $\odot O$，点 E 在对角线 AC 上，$EC=BC=DC$.

（1）若 $\angle CBD=39°$，求 $\angle BAD$ 的度数；

（2）求证：$\angle 1=\angle 2$.

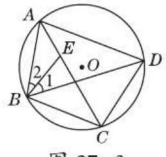


图 27−3

（1）**解**：$\because BC=DC$，$\therefore \overset{\frown}{BC}=\overset{\frown}{DC}$.

$\therefore \angle BAC=\angle CAD=\angle CBD$.

$\because \angle CBD=39°$，

$\therefore \angle BAC=\angle CAD=39°$.

$\therefore \angle BAD=\angle BAC+\angle CAD=78°$.

（2）**证明**：$\because EC=BC$，$\therefore \angle CBE=\angle CEB$.

$\because \angle CBE=\angle 1+\angle CBD$，

$\angle CEB=\angle 2+\angle BAC$，

$\therefore \angle 1+\angle CBD=\angle 2+\angle BAC$.

又 $\because \angle BAC=\angle CBD$，

$\therefore \angle 1=\angle 2$.

方法点拨：在圆中，证明两个角相等，根据四量关系定理可以转化为证明弧相等或弦相等；若已知弦相等，可以推出弧相等以及圆心角相等或圆周角相等.

专题三 圆周角定理及其推论

链接中考» 圆周角定理揭示圆心角和圆周角之间的数量关系，是对特殊圆周角和直径之间关系的一种揭示，考查圆周角和圆心角之间的数量关系时，一般以填空题、选择题的形式出现，考查直径与 90° 的圆周角之间的关系时，一般以解答题的形式出现.

例 3 ［中考·滨州］如图 27−4，$\odot O$ 的直径 AB 的长为 10，弦 AC 的长为 5，$\angle ACB$ 的平分线交 $\odot O$ 于点 D，连结 AD，BD.

（1）求 $\overset{\frown}{BC}$ 的长；

（2）求弦 BD 的长.

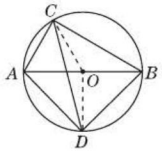


图 27−4

解：（1）如图 27−4，连结 OC. $\because AB$ 为 $\odot O$ 的直径，

$\therefore \angle ACB=\angle ADB=90°$.

在 Rt $\triangle ABC$ 中，$AB=10$，$AC=5$，

$\therefore \angle ABC=30°$. $\therefore \angle BAC=60°$.

$\therefore \angle BOC=2\angle BAC=120°$.

$\therefore \overset{\frown}{BC}$ 的长为 $\dfrac{120\times\pi\times5}{180}=\dfrac{10}{3}\pi$.

（2）如图 27−4，连结 OD.

$\because CD$ 平分 $\angle ACB$，$\therefore \angle ACD=\angle BCD$，

基础 德标

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

$\therefore \angle AOD=\angle BOD$，$\therefore AD=BD$.

$\therefore \angle BAD=\angle ABD=45°$，

在 Rt $\triangle ABD$ 中，$AB=10$，

$\therefore BD=5\sqrt{2}$.

方法点拨：在具体解答问题时，找准同弧所对的圆周角及圆心角，然后利用圆周角定理解题即可. 而在圆中出现直径时，常构造直径所对的圆周角，利用圆周角定理的推论得出直角三角形，然后利用勾股定理解决问题.

专题四 圆的切线的性质与判定

链接中考» 圆的切线的性质与判定的运用都是作同样的辅助线：连结圆心和切点，运用的特征都离不开垂直. 考查切线的性质时，一般以填空题、选择题的形式出现，而考查切线的判定时，以解答题的形式出现较多. 很多题都综合考查切线的性质与判定.

例 4 [中考·武威] 已知 $\triangle ABC$ 内接于 $\odot O$，过点 A 作直线 EF.

（1）如图 27-5 ①，若 AB 为 $\odot O$ 的直径，要使 EF 成为 $\odot O$ 的切线，还需要添加的一个条件是（要求写出两种情况）：

_____或者_____.

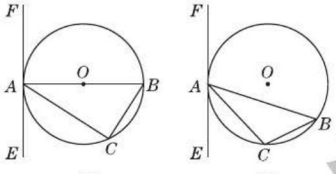


图 27-5

（2）如图 27-5 ②，如果 AB 是不过圆心 O 的弦，且 $\angle CAE=\angle B$，那么 EF 是 $\odot O$ 的切线吗？试证明你的判断.

解：（1）$\angle BAE=90°$；$\angle EAC=\angle B$（答案不唯一）

（2）EF 是 $\odot O$ 的切线.

证明：作 $\odot O$ 的直径 AM，连结 CM，

则 $\angle ACM=90°$，$\angle M=\angle B$，

$\therefore \angle B+\angle CAM=\angle M+\angle CAM=90°$.

$\because \angle CAE=\angle B$，$\therefore \angle CAM+\angle CAE=90°$，

$\therefore AE\perp AM$.

$\because AM$ 为 $\odot O$ 的直径，$\therefore EF$ 是 $\odot O$ 的切线.

方法点拨：通常证切线有两种类型：（1）若直线与圆有交点，则连半径，证垂直，得切线；（2）若直线与圆的交点不明确，则作垂直，证半径，得切线.

专题五 圆的有关计算

链接中考» 圆的有关计算一般涉及两个公式——弧长公式和扇形的面积公式，考查的题型形式多样，有直接考查弧长和扇形面积的，一般以填空题、选择题的形式出现；有求阴影部分面积的题型，通过转化为扇形面积来求，一般以解答题的形式考查；还有求圆锥的侧面展开图的面积，也是转化为求扇形面积.

例 5 [中考·兰州] 如图 27-6，在 Rt $\triangle ABC$ 中，$\angle C=90°$，$\angle BAC$ 的平分线 AD 交 BC 边于点 D. 以 AB 上一点 O 为圆心作 $\odot O$，使 $\odot O$ 经过点 A 和点 D.

（1）判断直线 BC 与 $\odot O$ 的位置关系，并说明理由；

（2）若 $AC=3$，$\angle B=30°$.

①求 $\odot O$ 的半径；

②设 $\odot O$ 与 AB 边的另一个交点为 E，求线段 BD，BE 与劣弧 DE 所围成的阴影部分的面积.（结果保留根号和 π）

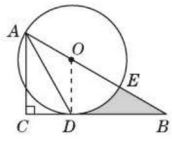


图 27-6

解：（1）相切，理由如下：

如图 27-6，连结 OD.

$\because AD$ 平分 $\angle BAC$，$\therefore \angle CAD=\angle OAD$.

未来基

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

∵ $OA=OD$，

∴ $\angle OAD=\angle ODA$.

∴ $\angle CAD=\angle ODA$，

∴ $OD\parallel AC$.

又∵ $\angle C=90°$，

∴ $OD\perp BC$.

∴ BC 与⊙ O 相切.

（2）①∵ $AC=3$，$\angle B=30°$，

∴ $AB=6$. 设 $OA=OD=r$，则 $OB=2r$，

∴ $2r+r=6$，解得 $r=2$，即⊙ O 的半径是 2.

②由①得 $OD=2$，$OB=4$，

∴ $BD=2\sqrt{3}$.

∵在 Rt△ OBD 中，$\angle B=30°$，

∴ $\angle DOB=60°$.

∴ $S_{阴影}=S_{\triangle BOD}-S_{扇形OED}=\frac{1}{2}\times 2\sqrt{3}\times 2-\frac{60\pi\times 2^2}{360}=2\sqrt{3}-\frac{2\pi}{3}$.

方法点拨：求不规则图形的面积往往需要将其转化成规则图形面积的和或差的形式.

方法必会

专题六 转化思想

专题解读» 转化思想是指在解决问题的过程中，对问题进行转化，将“未知”转化为“已知”、将“陌生”转化为“熟知”、将“复杂”转化为“简单”的解题方法，其核心就是将有待解决的问题转化为已能明确解决的问题，从便利用已有的结论来加以处理，从而培养学生用联系的、发展的、运动变化的观点观察事物、认识问题.

例 6 [中考·咸宁] 如图 27−7，在△ ABC 中，$CA=CB$，$\angle ACB=90°$，以 AB 的中点 D 为圆心，作圆心角为 90° 的扇形 DEF，点 C 恰在弧 EF 上，设 $\angle BDF=\alpha$（$0°<\alpha<90°$），当 α 由小到大变化时，图中阴影部分的面积（　　）

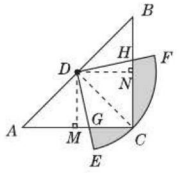


图 27−7

A. 由小到大　B. 由大到小

C. 不变　　D. 先由小变大，后由大变小

解：如图 27−7，作 $DM\perp AC$ 于 M，$DN\perp BC$ 于 N，连结 DC，设 DF 与 BC 交于点 H，DE 与 AC 交于点 G. 易得四边形 $DMCN$ 是矩形.

∵ $CA=CB$，$\angle ACB=90°$，

∴ $\angle A=\angle B=45°$，

∴ $DM=\frac{\sqrt{2}}{2}AD=\frac{\sqrt{2}}{4}AB$，$DN=\frac{\sqrt{2}}{2}BD=\frac{\sqrt{2}}{4}AB$.

∴ $DM=DN$.

∴四边形 $DMCN$ 是正方形.

∵ $\angle MDN=90°$.

∴ $\angle MDG=90°-\angle GDN$.

∵ $\angle EDF=90°$，

∴ $\angle NDH=90°-\angle GDN$.

∴ $\angle MDG=\angle NDH$.

在△ DMG 和△ DNH 中，

$$\begin{cases}\angle MDG=\angle NDH,\\ DM=DN,\\ \angle DMG=\angle DNH=90°,\end{cases}$$

∴ $\triangle DMG\cong\triangle DNH$.

∴四边形 $DGCH$ 的面积 = 正方形 $DMCN$ 的面积.

∵正方形 $DMCN$ 的面积 = $DM^2=\frac{1}{8}AB^2$，

∴四边形 $DGCH$ 的面积 = $\frac{1}{8}AB^2$.

∵扇形 DEF 的面积 = $\frac{90\pi\cdot CD^2}{360}=\frac{\pi AB^2}{16}$，

∴阴影部分的面积 = 扇形 DEF 的面积 − 四边形 $DGCH$ 的面积 = $\frac{(\pi-2)AB^2}{16}$（定值）.

答案：C

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

方法点拨：求不规则图形的面积时，利用转化思想，借助三角形全等的知识，将不规则图形转化为规则图形，再根据规则图形面积的和或差去求.

专题七 分类讨论思想

专题解读» 分类讨论思想是初中重要的数学思想方法之一.近几年中考经常出现需要分类讨论的试题，我们在平时的学习中要增强分类讨论的意识，培养思维的条理性、缜密性.这类题一般不给出图形，满足条件的图形又具有多样性和普遍性，所以解题时一般根据满足不同图形或图形的不同位置，分别求解或证明.

例7 已知在半径为1的⊙O中，弦AB，AC的长分别为$\sqrt{3}$和$\sqrt{2}$，则∠BAC的度数为_____.

解：当圆心在∠BAC的外部时，

如图27-8①，连结AO并延长交⊙O于点E，连结BE，CE，

则在Rt△ABE中，由勾股定理，得$BE=\sqrt{2^2-(\sqrt{3})^2}=1=\frac{1}{2}AE$，

∴∠BAE=30°.

在Rt△ACE中，$CE=\sqrt{2^2-(\sqrt{2})^2}=\sqrt{2}=AC$，

∴∠EAC=45°.

∴∠BAC=45°-30°=15°；

当圆心在∠BAC的内部时，

如图27-8②，连结AO并延长交⊙O于点E，连结BE，CE.由上面计算结果知∠BAC=45°+30°=75°.

综上，∠BAC的度数为15°或75°.

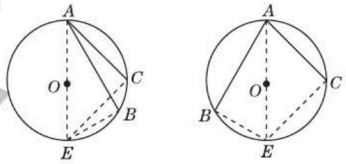


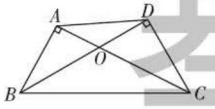
图27-8

答案：15°或75°

好题必解 ☞答案见203页

题型1：巧用圆周角求角的度数

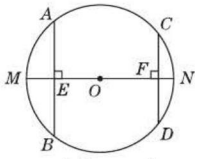
1. 在四边形$ABCD$中，对角线AC，BD相交于点O，且$BA\perp AC$，$BD\perp CD$，∠DCB=60°，求∠DAC的度数.



（第1题）

题型2：巧用垂径定理求最值

2. 如图，AB，CD是半径为5的⊙O的两条弦，AB=8，CD=6，MN是直径，$AB\perp MN$于点E，$CD\perp MN$于点F，P为直线EF上的任意一点，求$PA+PC$的最小值.



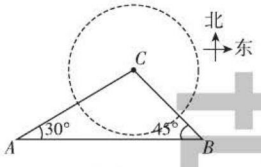
（第2题）

荣德基

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

题型 3：巧判断与圆有关的位置关系解决问题

3. 去年某企业将地处 A，B 两地的两个小厂合并成一个大厂，为了方便两地职工，企业准备在相距 2 km 的 A，B 两地之间修筑一条笔直公路，经测量，在 A 地的北偏东 60° 方向，B 地的北偏西 45° 方向的 C 处有一半径为 0.7 km 的圆形公园（点 C 为圆心）. 问修筑的这条公路会不会穿过公园？为什么？



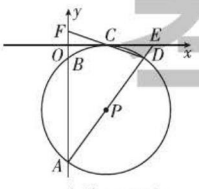
（第 3 题）

题型 4：巧用切线解决问题

4. 如图，在平面直角坐标系中，$\odot P$ 与 x 轴切于点 C，与 y 轴交于 A，B 两点，连结 AP 并延长分别交 $\odot P$、x 轴于点 D，E，连结 DC 并延长交 y 轴于点 F，若点 F 的坐标为（0，1），点 D 的坐标为（6，−1）.

（1）求证：$DC=FC$.

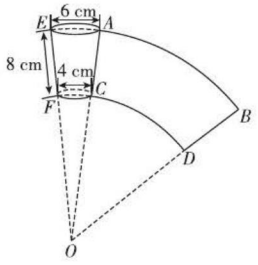
（2）求直线 AD 的表达式.



（第 4 题）

题型 5：巧用圆锥的侧面展开图求面积

5. 如图是一纸杯，它的母线 AC 和 EF 延长后形成的立体图形是圆锥. 该圆锥的侧面展开图是扇形 OAB. 经测量，纸杯上开口圆的直径为 6 cm，下底面的直径为 4 cm，母线长 $EF=8$ cm. 求扇形 OAB 的圆心角及这个纸杯的表面积.（面积计算结果用 π 表示）



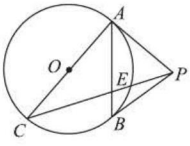
（第 5 题）

题型 6：圆与相似

6. [中考·武汉]如图，PA 是 $\odot O$ 的切线，A 是切点，AC 是直径，AB 是弦，连结 PB、PC，PC 交 AB 于点 E，且 $PA = PB$.

（1）求证：PB 是 $\odot O$ 的切线；

（2）若 $\angle APC=3\angle BPC$，求 $\dfrac{PE}{CE}$ 的值.



（第 6 题）

荣德基

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

题型 7：圆与锐角三角函数

7. [**中考 · 荆门**] 如图，AB 为⊙ O 的直径，C 为⊙ O 上一点，经过点 C 的切线交 AB 的延长线于点 E，$AD \perp EC$ 交 EC 的延长线于点 D，AD 交⊙ O 于 F，$FM \perp AB$ 于 H，分别交⊙ O、AC 于 M，N，连结 MB，BC.

（1）求证：AC 平分∠ DAE；

（2）若 $\cos M=\frac{4}{5}$，$BE=1$，①求⊙ O 的半径；②求 FN 的长.



（第 7 题）

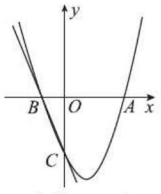
题型 8：圆与二次函数

8. [**中考 · 济宁**] 如图，已知抛物线 $y=ax^2+bx+c$（$a \neq 0$）经过点 $A(3, 0)$、$B(-1, 0)$、$C(0, -3)$.

（1）求该抛物线的表达式；

（2）若以点 A 为圆心的圆与直线 BC 相切于点 M，求切点 M 的坐标；

（3）若点 Q 在 x 轴上，点 P 在抛物线上，是否存在以点 B、C、Q、P 为顶点的四边形是平行四边形？若存在，求点 P 的坐标；若不存在，请说明理由.



（第 8 题）

荣德基

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

第 27 章测试卷

答案见 205 页

（100 分 60 分钟）

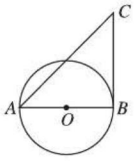
一、选择题（每题 4 分，共 32 分）

1. 已知⊙ O 的半径是 5，直线 l 是⊙ O 的切线，则点 O 到直线 l 的距离是（　　）

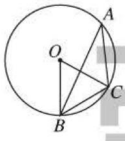
A. 2.5　　B. 3　　C. 5　　D. 10

2. 如图，在△ ABC 中，$AB = BC = 2$，以 AB 为直径的⊙ O 与 BC 相切于点 B，则 AC 等于（　　）

A. $\sqrt{2}$　　B. $\sqrt{3}$　　C. $2\sqrt{2}$　　D. $2\sqrt{3}$



（第 2 题）



（第 3 题）

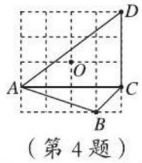
3. 如图，⊙ O 是△ ABC 的外接圆，连结 OB，OC，若 $OB = BC$，则∠ BAC 等于（　　）

A. 60°　　B. 45°　　C. 30°　　D. 20°

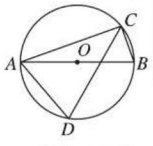
4. 如图所示为 4×4 的网格图，A，B，C，D，O 均在格点上，点 O 是（　　）

A. △ ACD 的外心　　B. △ ABC 的外心

C. △ ACD 的内心　　D. △ ABC 的内心



（第 4 题）



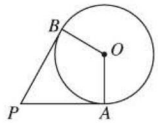
（第 5 题）

5. 如图，C，D 是以线段 AB 为直径的⊙ O 上两点，若 $CA = CD$，且∠ $ACD = 40°$，则∠ CAB =（　　）

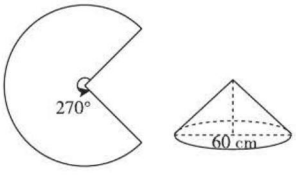
A. 10°　　B. 20°　　C. 30°　　D. 40°

6. 如图，PA，PB 是⊙ O 的切线，切点分别为 A，B，若 $OA = 2$，∠ $P = 60°$，则 $\overset{\frown}{AB}$ 的长为（　　）

A. $\frac{2}{3}\pi$　　B. π　　C. $\frac{4}{3}\pi$　　D. $\frac{5}{3}\pi$



（第 6 题）



（第 7 题）

7. 如图，已知一块圆心角为 270° 的扇形铁皮，用它做一个圆锥形的烟囱帽（接缝忽略不计），圆锥底面圆的直径是 60 cm，则这块扇形铁皮的半径是（　　）

A. 40 cm　　B. 50 cm　　C. 60 cm　　D. 80 cm

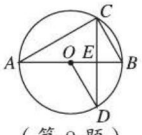
8. 如图，AB 是⊙ O 的直径，CD 是弦，$AB \perp CD$，垂足为点 E，连结 OD，CB，AC，∠ $DOB = 60°$，$EB = 2$，那么 CD 的长为（　　）

A. $\sqrt{3}$

B. $2\sqrt{3}$

C. $3\sqrt{3}$

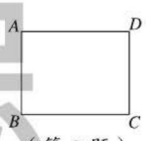
D. $4\sqrt{3}$



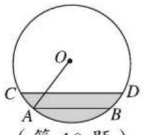
（第 8 题）

二、填空题（每题 4 分，共 16 分）

9. 如图，在矩形 $ABCD$ 中，$AB = 3$，$AD = 4$，若以点 A 为圆心，以 4 为半径作⊙ A，则点 A，点 B，点 C，点 D 中在⊙ A 外的是_____.



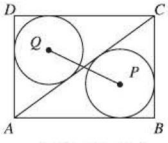
（第 9 题）



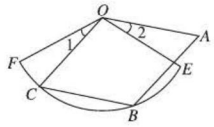
（第 10 题）

10. 一条排水管的截面如图，已知排水管的半径 OA=1 m，水面宽 AB=1.2 m，某天下雨后，排水管水面上升了 0.2 m，则此时排水管水面宽 CD 等于_____m.

11. 如图，在矩形 $ABCD$ 中，$AB = 4$，$BC = 3$，连结 AC，⊙ P 和⊙ Q 分别是△ ABC 和△ ADC 的内切圆，则 PQ 的长是_____.



（第 11 题）



（第 12 题）

12. 如图，四边形 $OABC$ 是菱形，点 B，C 在以点 O 为圆心的弧 EF 上，且∠ 1 = ∠ 2，若扇形 OEF 的面积为 3π，则菱形 $OABC$ 的边长为_____.

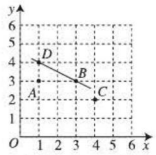
禁德基

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

三、解答题（共52分）

13.（8分）如图，在平面直角坐标系中，已知点 $A(1,3)$，$B(3,3)$，$C(4,2)$.

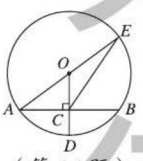
（1）请在图中作出经过 A，B，C 三点的⊙ M，并写出圆心 M 的坐标；



（第13题）

（2）若 D 的坐标为（1，4），则直线 BD 与⊙ M 的位置关系是_____.

14.（10分）如图，⊙ O 的半径 $OD \perp$ 弦 AB 于点 C，连结 AO 并延长交⊙ O 于点 E，连结 EC. 若 $AB = 8$，$CD = 2$，求 EC 的长.

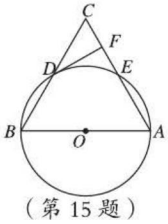


（第14题）

15.（10分）如图，在△ ABC 中，以 AB 为直径的⊙ O 分别与 BC，AC 相交于点 D，E，$BD = CD$，过点 D 作⊙ O 的切线交边 AC 于点 F.

（1）求证：$DF \perp AC$；

（2）若⊙ O 的半径为5，$\angle CDF = 30°$，求 $\overset{\frown}{BD}$ 的长（结果保留 π）.

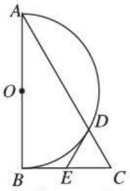


（第15题）

16.（12分）如图，在Rt△ ABC 中，$\angle ABC = 90°$，以 AB 为直径作半圆 O 交 AC 于点 D，点 E 为 BC 的中点，连结 DE.

（1）求证：DE 是半圆 O 的切线；

（2）若 $\angle BAC = 30°$，$DE = 2$，求 AD 的长.



（第16题）

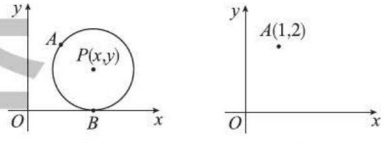
17.（12分）如图①，在平面直角坐标系中，圆心为 $P(x, y)$ 的动圆经过点 $A(1, 2)$ 且与 x 轴相切于点 B.

（1）当 $x = 2$ 时，求⊙ P 的半径；

（2）求 y 关于 x 的函数表达式；

（3）请类比圆的定义（圆可以看成是到定点距离等于定长的所有点的集合），给（2）中所得函数图象进行定义：此函数图象可以看成是到_____的距离等于到_____的距离的所有点的集合.

（4）当⊙ P 的半径为1时，若⊙ P 与以上（2）中所得函数图象相交于点 C，D，其中交点 $D(m, n)$ 在点 C 的右侧. 求 $\cos \angle APD$ 的大小.



（第17题）

基础题 中档题 拓展题

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

调查的必要性和科学性

第28章 样本与总体

荣德基

核心考点

你将见到的

- 普查和抽样调查
- 总体、个体、样本、样本容量
- 用样本估计总体
- 借助调查做决策

核心方法

我们为你提供的

- 收集数据法
- 合理选取样本法
- 样本估计总体法
- 数形结合思想

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

28.1 抽样调查的意义

核心知识

- 普查与抽样调查
- 总体、个体、样本及样本容量
- 选择合适的样本

知识链接



点知识·拨考向 速提分

点知识 1 普查与抽样调查

1. 普查：

（1）**定义**：为特定目的而对所有考察对象作的全面调查叫做普查.

（2）**优缺点**：①普查的对象是全体（总体），调查范围广；②普查的工作量大，调查过程耗时费力；③普查的数据准确、详实.

（3）**适用范围**：调查范围小、调查不具有破坏性、数据要求准确全面.

2. 抽样调查：

（1）**定义**：为特定目的而对部分考察对象作的调查叫做抽样调查.

（2）**优缺点**：

①抽样调查的对象仅是总体的一个样本，是对局部的调查，调查范围小；

②抽样调查工作量小，方式灵活，调查过程节省时间、人力、物力、财力等；

③抽样调查的结果反映的是局部的情况，可能不如普查准确.

（3）**适用范围**：调查对象涉及面广，范围大，或受条件限制，或具有破坏性等.

提分·必记

误区警示

选择哪种调查方式，一定要依据具体问题灵活选择，使得调查既有可靠的结果，又不会造成较大的损失或付出较大的代价；

在进行抽样时，要注意：(1)调查对象不宜太少（要具有广泛性）；(2)调查对象应随意抽取（要具有代表性）；(3)调查数据应真实可靠（要具有真实性）.

拔考向 选择合适的调查方式

例 1 下列调查中，哪些适宜抽样调查，哪些适宜普查？

（1）调查我市中学生每天做作业的时间；

（2）学校招聘教师，对应聘人员进行面试；

（3）调查某班学生对“中国梦”的知晓率；

（4）调查一架“歼 20”隐形战机各零部件的质量；

（5）调查里约热内卢奥运会 100 m 跨栏决赛参赛运动员兴奋剂的使用情况.

解题秘方：紧扣普查和抽样调查的优缺点及适用范围进行判断.

提分·秘诀

解法提醒

选择抽样调查的情况有：

1. 当被调查的对象数目较多时，普查的工作量较大，可选择抽样调查；
2. 当客观条件限制，无法对所有调查对象进行全面调查时，可选择抽样调查；

荣德基

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

解：（1）中涉及的范围较大，适宜抽样调查.

（2）学校招聘教师，应对所有应聘人员进行面试，所以应采用普查.

（3）中某班学生的人数有限，适宜普查.

（4）中考虑到一架“歼 20”隐形战机各零部件的数量有限，并且其安全性对质量的要求较高，适宜普查.

（5）中调查里约热内卢奥运会 100 m 跨栏决赛参赛运动员兴奋剂的使用情况适宜普查.

3. 当调查具有破坏性时，可选择抽样调查.

点知识 ▸ 2 总体、个体、样本及样本容量

1. 相关概念：

总体：所要考察的对象的全体叫做总体.

个体：组成总体的每一个考察对象叫做个体.

样本：从总体中取出的一部分个体叫做这个总体的一个样本.

样本容量：一个样本中包含的个体的数量叫做样本容量.

注意：样本容量没有单位.

2. 总体和样本的区别与联系：

总体包括所有个体，样本只包括所抽取的个体；样本是总体的一部分，一个总体中可以有多个样本；样本在一定程度上能反映总体，用样本的特征可以估计总体的特征.

提分·必记

特别解读

1. 样本、个体、总体所要考察的内容是相同的，只是数量不同.
2. 样本的抽取是否得当直接关系到对总体估计的准确度，因此**抽取的样本要具有代表性和广泛性**.
3. 样本容量是一个样本中包含的个体的数目；**样本容量越大，样本的特征越接近总体的特征**.

拔考向 ▸ 利用总体与样本的相关概念进行辨析

例 2 某市有 3 万名学生参加 2019 年的中考，想要了解这 3 万名考生的中考成绩，从中抽取了 500 名考生的中考成绩进行统计分析，以下说法正确的是（　　）

A. 这 500 名考生是总体的一个样本

B. 每名考生的中考成绩是个体

C. 3 万名考生是总体

D. 500 名考生是样本容量

解题秘方：紧扣总体、个体、样本及样本容量的概念进行辨析.

解：首先要明确考察对象是 3 万名考生的中考成绩，再按相关概念判断.500 名考生的中考成绩是总体的一个样本，所以选项 A 不正确；3 万名考生的中考成绩是总体，所以选项 C 也不正确；由于选项 D 中所说的样本容量带有单位，因此选项 D 也不正确，故本题的正确答案是 B.

答案：B

提分·秘诀

特别提醒

本例中总体是 3 万名考生的中考成绩，而不是 3 万名考生；样本是 500 名考生的中考成绩；个体是每名考生的中考成绩；样本容量是 500.

样本与总体

荣德基

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

点知识▸3 选择合适的样本

为了获得较为精确的结果，抽取的样本要具有随机性、代表性，样本容量要足够大.

（1）所谓抽样的随机性，是指每个对象被抽取的可能性都相等，当全体对象较少时，常采取简单随机抽样；当全体对象较多且由明显差异的几部分构成时，可采取分层抽样.

（2）所谓样本的代表性，是指所抽取的样本能代表总体的平均水平和一般水平；

（3）为了使调查的结果更精确，抽取的调查对象要足够多，抽取的调查对象越多，样本反映总体的情况就越精确.

拔考向▸利用样本的特征合理选择样本

例3 [中考·贵阳]在“生命安全”主题教育活动中，为了解甲、乙、丙、丁四所学校学生对生命安全知识的掌握情况，小丽制订了如下方案，你认为最合理的是（　　）

A. 抽取乙校初二年级学生进行调查

B. 在丙校随机抽取600名学生进行调查

C. 随机抽取150名老师进行调查

D. 在四个学校各随机抽取150名学生进行调查

解题秘方：紧扣抽样调查的广泛性和代表性进行辨析解答.

解：为了解甲、乙、丙、丁四所学校学生对生命安全知识的掌握情况，在四个学校各随机抽取150名学生进行调查最具有广泛性和代表性.

答案：D

提分·必记

特别提醒

总体中的一些特殊群体不能单独作样本，即选取的样本要具有代表性、广泛性.

提分·秘诀

技巧点拨

合理选择样本的技巧

抽样调查时，一定要使抽取的样本具有广泛性和代表性，要随机抽取，也就是要确保总体中每个个体被抽到的可能性相同，且数目不能太少，同时还要考虑地区差异、文化差异等.对抽取的样本还要具体分析，有些调查看似具有代表性，但仔细分析就会发现调查中存在弊端.

点方法·拨技巧 提高分

拔尖角度▸1 设计调查方案解决实际问题

例4 由于天气逐渐转凉，学校给同学们订购了一批冬季校服，为检验厂家生产的冬装质量是否合格，学校需要在发放前对冬装进行抽样调查. 已知运来的冬装一共有10包，每包有10打，每打有12套.要求样本的容量为100.

（1）请你帮学校设计一个调查方案；

（2）通过调查，冬装质量是合格的，但发放后不知道学生的满意程度，请你再设计一个方案，调查学生的满意程度.

解题秘方：紧扣样本的随机性、代表性进行设计调查方案.

解：（1）调查方案为从10×10×12=1 200（套）冬装中任意抽取100套冬装，检查其质量是否合格.

（2）答案不唯一，如从1 200名学生中任意抽取100名学生调查他们对所发放的冬装是否满意.

挑战·高分

方法点拨

此类型问题的解答通常是根据题目提供的信息，综合应用已有的知识，构造解决问题的可行方案，一般可以设计出多种方案.

警示误区

不能合理选择样本而致误

总体中的特殊群体不具有代表性，不能作为样本，如本题中不能从其中一包(120套)中任选100套检查其质量.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

拔尖角度▸ 2 利用合适的调查方式解决实际问题

挑战·高分

技巧点拨

抽样调查是实际生活中经常采用的调查方式，如果抽取的样本得当，就能很好地反映总体的情况，否则抽样调查的结果会偏离总体的情况.

例 5 某市晚报上刊登了这样一则新闻，标题为“本市电动自行车的合格率为 82%”.

（1）这则新闻是否说明该市所有品牌的电动自行车的合格率均为 82%？

（2）你认为这则消息中的数据是来源于普查，还是抽样调查？为什么？

（3）如果已知在这次质量监督检查中共查出不合格电动自行车 36 辆，你能算出共有多少辆电动自行车接受了质量检查吗？

（4）如果在该市一家商场检查了 2 辆电动自行车发现有 1 辆不合格，即合格率为 50%，是否可以由此断定该晚报上的那则新闻是虚假新闻？为什么？

解题秘方：紧扣普查与抽样调查的优缺点，对实际生活问题进行辨析.

解：（1）因为“本市电动自行车的合格率为 82%”是对全市电动自行车的质量调查后得出的结论，所以不能说明该市所有品牌的电动自行车的合格率均为 82%.

（2）抽样调查. 因为全市电动自行车的数量很多，对其进行普查会浪费大量的人力、物力，是不科学的.

（3）接受检查的电动自行车数量为 36÷（1−82%）=200（辆）.

（4）不可以由此断定该晚报上的那则新闻是虚假新闻，因为本市电动自行车的合格率是针对全市电动自行车的质量分析的，而该市一家商场 2 辆电动自行车的质量不具有代表性，且样本容量不够大.

警示误区

选取样本验证调查结果是否合理时，要注意选取的样本应具有代表性，且样本容量要足够大.

拔尖角度▸ 3 利用统计图解抽样调查问题

挑战·高分

技巧点拨

此类问题一般需结合两幅统计图，从中提取有用的信息解决问题. 比如从条形统计图中可知关注 C 类的人数，而从扇形统计图中可知关注 C 类的人数占被调查总人数的百分比，依据这两个数据可求出抽样调查的样本容量.

例 6 大数据在推动经济发展、改善公共服务等方面日益显示出巨大的价值，为创建大数据应用示范城市，某市某机构针对市民最关心的四类生活信息进行了民意调查（被调查者每人限选一项），下面是部分四类生活信息关注度统计图，请根据图 28.1−1 中提供的信息解答下列问题：

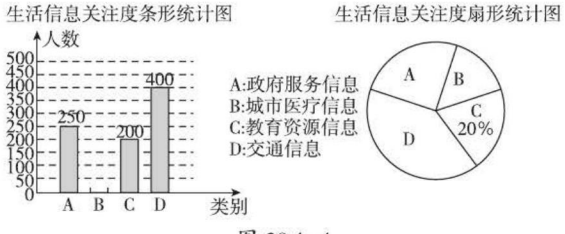


图 28.1−1

（1）下列选取样本的方法最合理的是_____（填序号）.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

①在市中心某个居民区对居民进行随机抽取；②在全市政府机构工作者中进行随机抽取；③在全市常住人口中进行随机抽取.

（2）本次调查的样本容量为_____；扇形统计图中，关注D类的圆心角是_____°.

（3）本次调查中关注城市医疗信息的有___人，并补全条形统计图.

解题秘方：紧扣统计图反映的信息解决问题.

解：（1）选取样本时不能遗漏某些群体，据此可以判断选取样本的方法最合理的是③.

（2）本次参与调查的人数为200÷20%=1 000，即样本容量为1 000. 所以扇形统计图中，关注D类的圆心角是$360° \times \frac{400}{1\,000}=144°$.

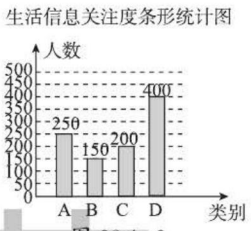


图 28.1-2

（3）本次调查中关注城市医疗信息的有1 000-（250+200+400）=150（人），补全条形统计图如图28.1-2.

答案：（1）③　（2）1 000；144　（3）150　补全条形统计图如图28.1-2.

点中考·拨模拟 得满分

中考探秘

本节知识在中考中常考的知识点是普查与抽样调查的区别，在实际情况中判断采用普查还是抽样调查研究事件，对总体、个体、样本、样本容量的识别，一般以选择题或填空题的形式进行考查，题目难度不大.

三年中考兵法

冲刺·满分

考法1 调查方式的选择

例7 [中考·襄阳]下列调查中，调查方式选择合理的是（　　）

A. 为了解襄阳市初中生每天锻炼所用的时间，选择普查

B. 为了解襄阳电视台《襄阳新闻》栏目的收视率，选择普查

C. 为了解神舟飞船设备零件的质量情况，选择抽样调查

D. 为了解一批节能灯的使用寿命，选择抽样调查

试题评析：本题考查了抽样调查与普查，解题的关键是正确理解普查和抽样调查的联系与区别.

解：选项A中了解襄阳市初中生每天锻炼所用的时间，普查工作量大，适合抽样调查；

选项B中了解襄阳电视台《襄阳新闻》栏目的收视率，范围比较大，适合抽样调查；

选项C中了解神舟飞船设备零件的质量情况必须对零件进行普查，才能保证不出问题；

选项D中了解一批节能灯的使用寿命，破坏性比较强，所以适合抽样调查. 故选择D.

答案：D

解法提醒

本题考查了抽样调查和普查的区别：

一般来说，对于具有破坏性的调查、无法进行、普查的意义或价值不大时，应选择抽样调查，对于精确度要求高的调查，事关重大的调查往往选用普查. 选择普查还是抽样调查要根据所要考察的对象的特征灵活选用.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

考法 2 抽样调查的相关概念的考查

例 8 [中考·柳州]某校为了了解本届初三学生体质健康情况，从全校初三学生中随机抽取 46 名学生进行调查，上述抽取的样本容量为_____.

试题评析：本题考查了样本容量的概念，解题的关键是理解概念的意义.

解：∵从全校初三学生中随机抽取 46 名学生进行调查，

∴上述抽取的样本容量为 46.

答案：46

解法提醒

所要考察的对象的全体叫做总体；总体中的每一个考察对象叫做个体；从总体中所抽取的一部分个体叫做总体的一个样本；样本中个体的数量叫做样本容量. 样本是总体的一部分，样本通常只包括一部分个体，样本在一定程度上能够反映总体. 特别注意，样本容量不带单位.

两年模拟兵法 ☞答案见 207 页

1.[中考·衡阳]下列调查方式中，合适的是(　　)

A. 调查你所在班级同学的身高，采用抽样调查方式

B. 调查湘江的水质情况，采用抽样调查的方式

C. 调查 CCTV−5《NBA 总决赛》栏目在我市的收视率，采用普查的方式

D. 要了解全市初中学生的业余爱好，采用普查的方式

2. [中考·南京]为了了解某中学学生的视力情况，需要抽取部分学生进行调查. 下列抽取学生的方法最合适的是(　　)

A. 随机抽取该校一个班级的学生

B. 随机抽取该校一个年级的学生

C. 随机抽取该校一部分男生

D. 分别从该校七、八、九年级中各随机抽取 10% 的学生

3. [中考·内江]今年我市有近 4 万名学生参加中考，为了解这些考生的数学成绩，从中抽取 1 000 名考生的数学成绩进行统计分析，以下说法正确的是(　　)

A. 这 1 000 名考生是总体的一个样本

B. 近 4 万名考生是总体

C. 每名考生的数学成绩是个体

D.1 000 名考生是样本容量

4. 某小组为了解本校学生的视力情况，分别作了四种抽样调查的方案，你认为方案比较合理的是(　　)

A. 调查邻近学校 200 名学生的视力情况

B. 随机调查本校九年级 50 名学生的视力情况

C. 从每年级随机调查 2 个学生的视力情况

D. 随机调查本校各年级 10% 的学生视力情况

5.[中考·德阳]为了解我市 6 000 名学生参加初中毕业会考数学考试的成绩情况，从中抽取了 200 名考生的成绩进行统计，在这个问题中，下列说法：

①这 6 000 名学生的数学考试成绩的全体是总体；

②每名考生是个体；

③ 200 名考生是总体的一个样本；

④样本容量是 200.

其中说法正确的有(　　)

A.4 个　　B.3 个　　C.2 个　　D.1 个

6. 下列调查的样本不缺乏代表性的有(　　)

(1) 为了了解某校七年级学生期末考试数学成绩，抽取七(2)班 50 名学生的成绩进行分析；

(2) 为了了解我国 18 岁青年的身高，从不同的地区随机抽取 1 000 名 18 岁青年的身高进行分析；

(3) 为了了解一批洗衣粉的质量情况，从中抽取 50 袋进行检查；

(4) 为了了解某公园每天的游园人数，从中抽

荣德基

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

查一年中每个星期天的游园人数进行分析.

A.1 个　　B.2 个

C.3 个　　D.4 个

7. 下列抽样调查中抽取的样本合适吗？为什么？

（1）数学老师为了了解全班同学数学学习中存在的困难和问题，请数学成绩好的 10 名同学开座谈会；

（2）在上海市调查我国公民的受教育程度；

（3）在中学生中调查青少年对网络的态度；

（4）调查每个班学号为 5 的倍数的学生的身高和体重，以了解学校全体学生的身高和体重；

（5）调查七年级中的两名同学，以了解全校学生课外辅导用书的拥有量.

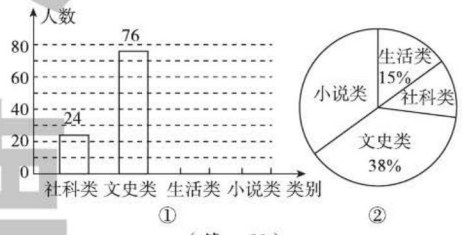
8. [**中考·威海**]央视热播节目“朗读者”激发了学生的阅读兴趣，某校为满足学生的阅读需求，欲购进一批学生喜欢的图书，学校组织学生会成员随机抽取部分学生进行问卷调查，被调查学生需从“文史类、社科类、小说类、生活类”中选择自己喜欢的一类，根据调查结果绘制了如图所示的统计图（未完成），请根据图中信息，解答下列问题：

（1）此次共调查了_____名学生；

（2）将条形统计图补充完整；

（3）图②中“小说类”所在扇形的圆心角为_____度；

（4）若该校共有学生 2 500 人，估计该校喜欢“社科类”书籍的学生人数.【**导学号**：8603511】



（第 8 题）

基德荣

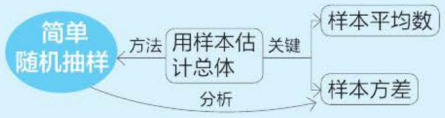
关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

28.2 用样本估计总体

核心知识

- 简单随机抽样
- 随机抽样的可靠性
- 用样本估计总体

知识链接



点知识·拨考向 速提分

点知识▸1 简单随机抽样

1. 简单随机抽样： 要使样本具有代表性，不偏向总体中的某些个体，有一个对每个个体都公平的办法，那就是用抽签的办法决定哪些个体进入样本，统计学家称这种理想的抽样方法为简单随机抽样.

2. 简单随机抽样的一般步骤：

（1）将每个个体编号；

（2）将写有这些编号的纸条全部放入一个盒子中，搅拌均匀；

（3）用抽签的办法，抽出一个编号，那个编号的个体就被选入样本；

（4）继续抽样，直到达到样本容量.

3. 随机性： 在抽样之前，我们不能预测到哪些个体会被抽中，这种不能够事先预测结果的特性叫做随机性.

提分·必记

特别提醒

- 随机抽样时不要忽略某些个体，要将所有个体全部编上号，这样才能使抽样科学、公平、合理.
- 抽样时要根据总体数量的大小，选取数量合适的个体作为样本.

拔考向▸利用简单随机抽样的特点进行随机抽样

例1 某车间工人加工一种轴100件，为了了解这种轴的直径，要从中抽取10件轴在同一条件下测量，如何采用简单随机抽样的方法抽取样本？

解题秘方： 简单随机抽样一般采用两种方法：抽签法和随机数表法.

解：（抽签法）将100件轴分别编号1，2，…，100，并做好大小，形状相同的签，分别写上这100个数，将这些号签放在一起，搅拌均匀，接着逐个不放回地抽取10个号签，然后测量这10个号签对应的轴的直径.

提分·秘诀

另解

随机数表法

将100件轴分别编号00，01，…，99，在随机数表中选定一个起始位置，然后开始选取10个数，这10个数对应的10件轴的直径即为所要抽取的样本.

点知识▸2 简单随机抽样的可靠性

1. 样本的可靠性： 在进行简单随机抽样调查时，由于调查人员不同，选取的样本不同，所以得到的调查结果也不同，但是只要选取的样本具有随机性、代表性，且样本的容量合适，这样的样本就具有可靠性.

提分·必记

特别提醒

1. 选取样本的容量不能太小.
2. 防止太大的"盲目性".
3. 样本要具有代表性.

菜 德 基

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

2. 可靠的抽样调查应具备以下几个特征：

（1）在开展调查之前，要保证总体中的每个个体都有可能成为调查的对象；

（2）调查的对象在总体中具有代表性；

（3）调查的样本容量要足够大.

技考向▶利用随机抽样的可靠性进行抽样

例2 某校九年级学生共有600名，小明要了解这些学生每天上网的时间，便采用抽样调查的方式，设计了如下四个方案：①选取10名学生每天上网的时间作样本；②选取100名学生每天上网的时间作样本；③选取20名学生每天上网的时间作样本；④选取300名学生每天上网的时间作样本，你觉得哪个方案所抽取的样本既可靠又省时、省力？

解题秘方：紧扣简单随机抽样的可靠性进行抽取样本.

解：抽样调查时，选取的样本容量要足够大，并且样本要有较好的代表性，样本容量较小时，样本与总体的差异可能很大，样本容量很大时，调查又比较麻烦，因此本题中选取100名学生每天上网的时间作样本即可.

故选取方案②所抽取的样本既可靠又省时、省力.

提分·秘诀

方法点拨

若使抽样调查可靠，必须满足以下条件：

1. 样本容量足够大；
2. 样本具有代表性；
3. 样本具有随机性.

点知识▶3 用样本估计总体

通过比较样本平均数、方差与总体平均数、方差可以知道，随着样本容量的增加，由样本得出的平均数、方差会更接近总体的平均数、方差，所以我们可以用随机抽样调查的方法，用样本估计总体.

特别解读 （1）在抽样调查中，随机抽样是可靠的，但是可靠的程度还要看所得到的数据与总体实际情况的接近程度.样本取自总体，它能在一定程度上反映总体，能对总体的情况作出一个估计和推测.一般来说，样本容量越大，用样本估计总体就越精确，抽样调查的可靠程度也就越高.

（2）用样本的平均数或方差来估计总体的平均数或方差只是一个近似值，并不十分准确，但误差还在我们可以接受的范围之内，毕竟抽样调查已经极大地减少了我们在调查中需要投入的人力、物力和时间.

提分·必记

特别提醒

注意选取的样本容量要足够大.当样本容量较小时，样本的平均数、方差与总体的平均数、方差的差距较大；随着样本容量的增加，由样本得出的平均数、方差往往更接近总体的平均数、方差.

技考向▶利用样本估计总体的思想解决问题

类型1：样本估计总体思想在统计量中的应用

例3 王大伯几年前承包了甲、乙两片荒山，各栽100棵杨梅树，成活率为98%.现在杨梅树开始结果，经济效益初步显现.为了分析收成情况，他分别从两山上随意采摘了4棵杨梅树上的杨梅，每



关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

棵杨梅树的杨梅产量如折线统计图所示（如图 28.2-1）.

（1）分别计算甲、乙两山杨梅产量的样本平均数，并估算出甲、乙两山杨梅产量的总和；

（2）试通过计算说明哪个山上的杨梅树的杨梅产量较稳定？

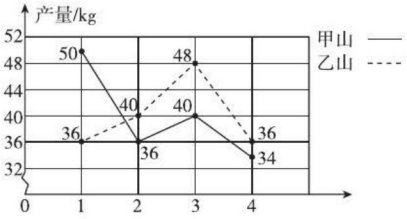


图 28.2-1

解题秘方：紧扣样本估计总体思想，利用样本平均数、方差估计总体的平均数、方差解决问题.

解：（1）甲山上 4 棵杨梅树的杨梅产量分别为 50 kg，36 kg，40 kg，34 kg，

所以甲山杨梅产量的样本平均数为 $\overline{x}_{甲}=\dfrac{50+36+40+34}{4}=40$（kg）.

乙山上 4 棵杨梅树的杨梅产量分别为 36 kg，40 kg，48 kg，36 kg，

所以乙山杨梅产量的样本平均数为 $\overline{x}_{乙}=\dfrac{36+40+48+36}{4}=40$（kg）.

所以估算甲、乙两山杨梅产量的总和为 $2\times100\times98\%\times40=7\,840$（kg）.

（2）甲山杨梅产量的样本方差为 $s_{甲}^2=\dfrac{1}{4}\times[(50-40)^2+(36-40)^2+(40-40)^2+(34-40)^2]=38$，

乙山杨梅产量的样本方差为 $s_{乙}^2=\dfrac{1}{4}\times[(36-40)^2+(40-40)^2+(48-40)^2+(36-40)^2]=24$.

因为 $s_{甲}^2>s_{乙}^2$，所以乙山上的杨梅树的杨梅产量较稳定.

类型 2：样本估计总体思想在统计图中的应用

例 4 某学校要了解学生上学的方式，选取九年级全体学生进行调查，根据调查结果，画出扇形统计图（如图 28.2-2），图中“公交车”对应的扇形圆心角为 60°，“自行车”对应的扇形圆心角为 120°，已知九年级乘公交车上学的人数为 50 人.

（1）九年级学生中，骑自行车和乘公交车上学哪个多？多多少人？

（2）如果全校有学生 2 100 人，学校准备的 400 个自行车停车

提分·秘诀

解法提醒

用样本中的统计量（平均数、中位数、众数、方差）估计总体中的统计量时，要注意样本应具有随机性和代表性.

技巧点拨

分析扇形统计图时，根据各种情况所占**百分比**或每个扇形对应的**圆心角大小**来分析解答.

宋德基

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

位是否足够?

解题秘方：利用扇形统计图反映的样本情况估计总体情况.

解：（1）九年级骑自行车上学的学生多.

被调查的学生总人数为 $50\div\frac{60}{360}=300$（人）.

骑自行车的人数为 $300\times\frac{120}{360}=100$（人）.

$100-50=50$（人）.

所以九年级学生中，骑自行车比乘公交车上学的人多 50 人.



图 28.2-2

（2）$2\,100\times\frac{120}{360}=700$（人），$700>400$，

所以学校准备的 400 个自行车停车位不够.

图解

解决此类问题时，可将已知条件在扇形统计图中用铅笔标注出来，找到对应关系，进而求解问题.根据已知，可得图 28.2-3.



图 28.2-3

点方法·拨技巧 提高分

拔尖角度 1 利用样本估计总体解与概率的综合

挑战·高分

例 5 为了解某市的交通状况，现对该市的 6 条道路进行评估，得分分别为 5，6，7，8，9，10.规定评估的平均得分与全市的总体交通状况等级如下表：

评估的平均得分 x	$0\leqslant x<6$	$6\leqslant x<8$	$8\leqslant x\leqslant 10$
全市的总体交通状况等级	不合格	合格	优秀

（1）求本次评估的平均得分，并参照上表估计该市的总体交通状况等级；

（2）用简单随机抽样的方法从这 6 条道路中抽取 2 条，它们的得分组成一个样本，求该样本的平均数与总体的平均数之差的绝对值不超过 0.5 的概率.

解题秘方：（1）由 6 条道路的评估得分计算出平均得分并与表中数据进行比较，即可得到答案；（2）列出所有情况，以及满足样本的平均数与总体的平均数之差的绝对值不超过 0.5 的情况，即可得到答案.

解：（1）这 6 条道路的平均得分为 $\frac{5+6+7+8+9+10}{6}=7.5$，

因为 $6\leqslant 7.5<8$，所以该市的总体交通状况等级为合格.

（2）设事件 A 表示“样本的平均数与总体的平均数之差的绝对值不超过 0.5”.

从 6 条道路中抽取 2 条的得分组成的所有基本事件为：（5，6），（5，

解法提醒

弄清一次实验的意义以及每个基本事件的含义是解决问题的前提，正确把握各个事件的相互关系是解决问题的关键.

技巧点拨

列举基本事件的技巧

列举基本事件时，为了防止出现重复或遗漏的情况，可采用“固定第一项，穷尽第二项”的方法.如本题中，列举

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

7），（5，8），（5，9），（5，10），（6，7），（6，8），（6，9），（6，10），（7，8），（7，9），（7，10），（8，9），（8，10），（9，10），共15个，且每个基本事件发生的可能性是相等的.

事件A包括（5，9），（5，10），（6，8），（6，9），（6，10），（7，8），（7，9），共7个基本事件，所以$P(A)=\frac{7}{15}$.

故该样本的平均数与总体的平均数之差的绝对值不超过0.5的概率为$\frac{7}{15}$.

所有基本事件时，先固定第一项，然后依次列出第二项，再更换第一项，并依次列出第二项，直至所有基本事件全部列出.

拔尖角度▸ 2 利用样本估计总体解与方程（组）的综合

挑战·高分

例6 为了保护环境，某校环保小组成员小明每天坚持收集废电池，第一天收集1号废电池4节，5号废电池5节，总质量为450克；第二天收集1号废电池2节，5号废电池3节，总质量为240克.

（1）1号废电池和5号废电池每节的质量分别为多少克？

（2）学校环保小组为估算四月份收集废电池的总质量，他们随机抽取了该月某5天每天收集废电池的数量，如下表：

1号废电池（单位：节）	29	30	32	28	31
5号废电池（单位：节）	51	53	47	49	50

分别计算这两种废电池的样本平均数，并由此估计该月（30天）环保小组收集废电池的总质量大约是多少千克.

（3）试说明上述表格中数据的获取方法.你认为这种方法合理吗？

解：（1）设1号废电池每节的质量为x克，5号废电池每节的质量为y克.

依题意，得$\begin{cases}4x+5y=450,\\2x+3y=240.\end{cases}$解得$\begin{cases}x=75,\\y=30.\end{cases}$

即1号废电池每节的质量为75克，5号废电池每节的质量为30克.

（2）每天收集1号废电池的样本平均数为$\frac{29+30+32+28+31}{5}=30$（节）.

每天收集5号废电池的样本平均数为$\frac{51+53+47+49+50}{5}=50$（节）.

故每天可收集的废电池总质量大约为$30\times75+50\times30=3\,750$（克）.

因而该月环保小组收集废电池的总质量大约为$3\,750\times30=112\,500$（克）$=112.5$千克.

（3）上述表格中数据是抽样调查的结果，且由抽样的“随机性”知，这种抽样调查方法是合理的.

思路点拨

1. 题中有两个未知量——1号废电池和5号废电池每节的质量，有两个相等关系，即“4节1号废电池的质量+5节5号废电池的质量=450克”和“2节1号废电池的质量+3节5号废电池的质量=240克”，应该考虑列二元一次方程组解决这个问题；
2. 通过表格中的数据计算出样本的平均数，这个样本平均数可当作总体的平均数，即可求出该月环保小组收集废电池的总质量；
3. 上述表格中数据是抽样调查的结果，并且这种抽样调查方法是合理的.

方法点拨

要使样本平均数能当作总体平均数，必须使得**抽取的样本具有代表性和广泛性**，本题抽样具有“随机性”，因此这种抽样方法是合理的.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

点中考·拨模拟 得满分

中考探秘 随机抽样调查和利用样本估计总体是中考经常考查的内容，这类问题都是以现实生活情景为背景，让学生感受生活与数学的联系，这类问题常以选择题、填空题、解答题的形式出现，难度一般不大.

三年中考兵法

考法 1 随机抽样调查的可靠性

例 7 [中考·重庆]为调查某大型企业员工对企业的满意程度，以下样本最具代表性的是（　　）

A. 企业男员工

B. 企业年满 50 岁及以上员工

C. 用企业人员名册，随机抽取三分之一的员工

D. 企业新进员工

试题评析：本题主要考查随机抽样调查的可靠性，判断选取的样本是否具有随机性、代表性和足够大的样本容量是解题的关键.

解：A. 调查对象只涉及男性员工；B. 调查对象只涉及即将退休的员工；D. 调查对象只涉及新进员工.

答案：C

考法 2 利用样本估计总体思想解决问题

例 8 [中考·娄底]为了取得扶贫工作的胜利，某市对扶贫工作人员进行了扶贫知识的培训与测试，随机抽取了部分人员的测试成绩作为样本，并将成绩划分为 A、B、C、D 四个不同的等级，绘制成不完整统计图如图 28.2-4，请根据图中的信息，解答下列问题.

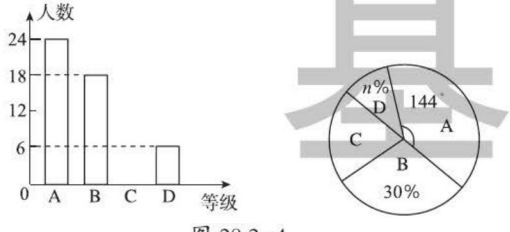


图 28.2-4

（1）求样本容量；

（2）补全条形统计图，并填空：n=_____；

（3）若全市有 5 000 人参加了本次测试，估计本次测试成绩为 A 级的人数为多少？

试题评析：本题主要考查根据统计图中的信息解决实际问题，解题的关键是利用样本估计总体的思想，分析样本中的统计量来估计总体的

冲刺·满分

考法点评

从实际生活问题为背景，考查随机抽样调查的可靠性，随机抽样调查选取的样本必须具有随机性、代表性，且样本容量足够大.

知识链接

统计图中相关量的计算方法

1. 条形统计图：一般涉及补图，也就是求未知组的频数，方法如下：

（1）未知组频数 = 样本总量 − 已知组频数之和；

（2）未知组频数 = 样本容量 × 该组所占样本百分比；

2. 扇形统计图：一般涉及求未知组的百分比或其所占圆心角的度数，方法如下：

（1）未知组百分比 = 1− 已知组百分比之和；

（2）未知组百分比 = $\frac{\text{未知组的频数}}{\text{样本容量}}$；

（3）若求未知组在扇形统计图中圆心角的度数，利用 360° × 其所占样

荣德基

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

情况．

解：（1）样本容量为 $18\div30\%=60$；

（2）10；

补全条形统计图如图 28.2−5.

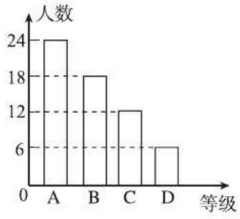


图 28.2−5

（3）估计本次测试成绩为 A 级的人数为 $5\,000\times\frac{144}{360}=2\,000$（人）.

本百分比即可.

3. 统计表：一般涉及求频数和频率（百分比），方法同上．

两年模拟兵法 ☞答案见 207 页

1.［**中考·内江**］为了解某市老人的身体状况，需要抽取部分老人进行调查，下列抽取老人的方法最合适的是（　　）

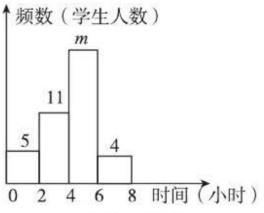
A. 随机抽取 100 位女性老人

B. 随机抽取 100 位男性老人

C. 随机抽取公园内 100 位老人

D. 在城市和乡镇各选 10 个点，每个点任选 5 位老人

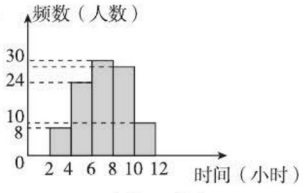
2. 为了了解我市某学校“书香校园”的建设情况，检查组在该校随机抽取 40 名学生，调查了解他们一周阅读课外书籍的时间，并将调查结果绘制成如图所示的频数分布直方图（每小组的时间包含最小值，不包含最大值），根据图中信息估计该校学生一周课外阅读时间不少于 4 小时的人数占全校总人数的百分比约等于（　　）



（第 2 题）

A.50%　　B.55%　　C.60%　　D.65%

3.［**中考·安徽**］为了解某校学生今年五一期间参加社团活动时间的情况，随机抽查了其中 100 名学生进行统计，并绘制成如图所示的频数分布直方图，已知该校共有 1 000 名学生，据此估计，该校五一期间参加社团活动时间在 8~10 小时之间的学生数是（　　）



（第 3 题）

A.280　　B.240　　C.300　　D.260

4. 有三位同学从编号为 1~50 的总体中抽取 8 个个体组成一个样本，他们选取的样本中个体编号分别为：

①43，44，45，46，47，48，49，50；

②1，3，5，7，9，11，13，15；

③43，25，2，17，35，9，24，19.

你认为样本_____比较具有随机性.（填序号）

5. 为了了解每天的用电量是多少，小明在六月份连续几天同一时刻观察电表的显示度数，记录

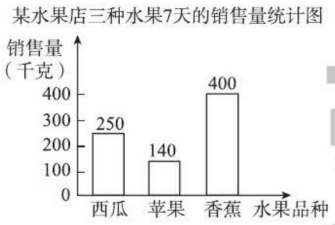
关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

如下表所示：

日期	1号	2号	3号	4号	5号	6号	7号	8号
电表显示/度	117	120	124	129	135	138	142	145

若每度电的电费为0.53元，则估计小明家六月份的电费是_____元.

6. 为了估计西瓜、苹果和香蕉三种水果一个月的销售量，某水果店对这三种水果7天的销售量进行了统计，统计结果如图所示.



（第6题）

（1）若西瓜、苹果和香蕉的售价分别为6元/千克、8元/千克和3元/千克，则这7天销售额最大的水果品种是（　　）

A. 西瓜　　B. 苹果　　C. 香蕉

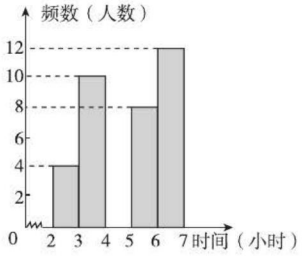
（2）估计一个月（按30天计算）该水果店可销售苹果多少千克?

7. [**中考·贺州**]某中学为了了解学生每周在校体育锻炼时间，在本校随机抽取了若干名学生进行调查，并依据调查结果绘制了以下不完整的统计图表，请根据图表信息解答下列问题：

时间（小时）	频数（人数）	频率
$2 \leqslant t<3$	4	0.1
$3 \leqslant t<4$	10	0.25
$4 \leqslant t<5$	a	0.15
$5 \leqslant t<6$	8	b
$6 \leqslant t<7$	12	0.3
合计	40	1

（1）表中的a=_____，b=_____；

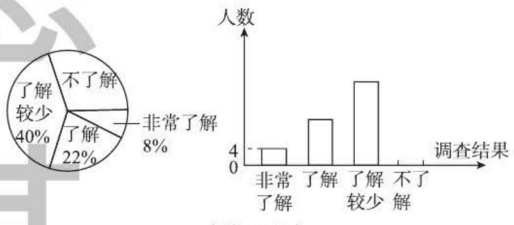
（2）请将频数分布直方图补全；



（第7题）

（3）若该校共有1 200名学生，试估计全校每周在校参加体育锻炼时间至少有4小时的学生为多少名?　　【**导学号**：8603511】

8. [**中考·成都**]随着经济的快速发展，环境问题越来越受到人们的关注，某校学生会为了了解节能减排、垃圾分类知识的普及情况，随机调查了部分学生，调查结果分为“非常了解”“了解”“了解较少”“不了解”四类，并将调查结果绘制成如下两个统计图.



（第8题）

（1）本次调查的学生共有_____人，估计该校1 200名学生中“不了解”的人数是_____人;

（2）“非常了解”的4人有A_1，A_2两名男生，B_1，B_2两名女生，若从中随机抽取两人向全校做环保交流，请利用画树状图或列表的方法，求恰好抽到一男一女的概率.

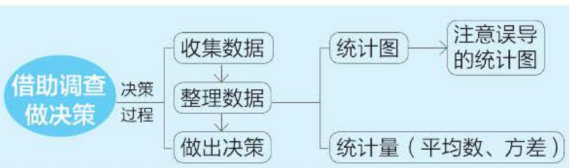
荣德基

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

28.3 借助调查做决策

核心知识
- 借助调查做决策
- 容易误导的统计图

知识链接



点知识·拨考向 速提分

点知识 1 借助调查做决策

1. 调查是收集数据的重要途径，它包括两大类：一是普查，二是抽样调查. 经常采用的调查方法是：访问调查、问卷调查、查阅文献资料等.

2. 借助调查做决策的一般步骤：（1）确定调查目标；（2）选择调查对象；（3）设计调查问题；（4）展开调查；（5）收集并整理调查数据；（6）分析调查结果，确定最佳方案或做出正确决策.

3. 借助媒体查询数据时可以借助的媒体主要有：报刊、杂志、电视、广播、网络等.

4. 我们在获取信息的同时，还要对获取的信息的合理性进行全面的分析，具体可从以下几方面入手：

（1）看调查的样本是不是随机抽样；

（2）看样本在总体中是否具有代表性；

（3）看样本容量是否足够大；

（4）看调查统计的方法是否科学，选用的统计图是否恰当.

提分·必记

特别提醒

1. 要针对不同的问题确定不同的调查对象，调查对象应具有代表性和广泛性.
2. 设计调查问题时要做到调查的问题具体、清晰.
3. 要从数据的来源分析数据的可信度，对于同一组数据，从不同的角度，采用不同的数据处理方法，有可能得出不同的结论.

拨考向 利用调查的数据做决策

类型 1：统计图的信息在做决策中的应用

例 1 为了丰富校园文化生活，某校计划在午间校园广播电台播放《百家讲坛》的部分内容. 为了了解学生的喜好，抽取若干名学生进行问卷调查（每人只选一项内容），整理调查结果，绘制统计图，如图 28.3-1.

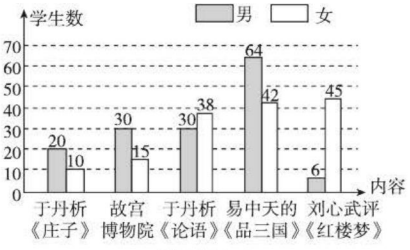


图 28.3-1

提分·秘诀

方法点拨

利用统计图中的信息做决策，关键要把握两点：

一是看清调查的目的，即决策的方向；

二是看清统计图反映出的数据，利用反映的数据进行计算做决策.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

请根据统计图提供的信息回答以下问题：

（1）抽取的学生为_____名．

（2）该校有3 000名学生，估计喜欢收听易中天的《品三国》的学生有_____名．

（3）估计该校女学生喜欢收听刘心武评《红楼梦》的约占全校学生的_____%．

（4）如果你是学校广播电台的主持人，那么你选择怎样播放《百家讲坛》？

解题秘方：紧扣统计图中提供的信息做决策．

解：（1）300　（2）1 060　（3）15

（4）答案不唯一．如多播放易中天的《品三国》和于丹析《论语》等．

思路导析

1. 将统计图中的各项数据加起来；
2. 计算出样本中《品三国》所占的比例，进而估计总体的人数；
3. 利用样本中的百分比估计总体的百分比．

类型2：表格的信息在做决策中的应用

例2　育英中学对初中毕业班经过初步比较后，决定从九年级（2）（3）（6）班这三个班中推荐一个班为市级优秀班级候选班，现对这三个班进行综合素质考评，下表是其五项素质考评的得分表．（以分为单位，每项满分为10分）

班级 \ 素质	行为规范	学习成绩	校运动会	艺术获奖	劳动卫生
九年级（2）班	10	10	6	10	7
九年级（3）班	9	10	9	9	6
九年级（6）班	10	8	8	8	9

（1）请问：各班五项考评得分的平均数、中位数、众数哪个统计量不能反映三个班的考评结果的差异？从中选择一个能反映差异的统计量将这三个班的得分进行排序，由此确定候选班．

（2）根据你对表中五项素质的重要程度的认识，设定一个各项考评内容的占分比例（比例的各项必须满足：①均为整数；②总和为10；③不全相同）．按这个比例对各班的得分重新计算，比较出大小关系，并从中推选出一个得分最高的班级作为市级优秀班级的候选班．

解题秘方：紧扣表格中提供的数据选择合适的统计量做决策．

解：（1）经计算各班总分均为43分，则平均分均为$\frac{43}{5}$分，即平均数不能反映三个班考评结果的差异．用中位数和众数均可反映三个班的考评结果的差异．它们的中位数分别为10分，9分，8分，众数分别为10分，9分，8分，故中位数或众数的先后顺序为（2）班，（3）班，（6）班，由此推选九年级（2）班为市级优秀班级候选班．

方法点拨

注意题中的各项考评数据的统计比例，明确中位数与众数的定义．像（1）题中在平均数相同的条件下，有时中位数和众数的排序不同会得到不同的结论．

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

（2）答案不唯一．可令行为规范：学习成绩：校运动会：艺术获奖：劳动卫生 =3 ：3 ：2 ：1 ：1.

∴（2）班的考评分为 $10\times0.3+10\times0.3+6\times0.2+10\times0.1+7\times0.1=8.9$（分），

（3）班的考评分为 $9\times0.3+10\times0.3+9\times0.2+9\times0.1+6\times0.1=9$（分），

（6）班的考评分为 $10\times0.3+8\times0.3+8\times0.2+8\times0.1+9\times0.1=8.7$（分）．

∵ 9>8.9>8.7，

∴推选九年级（3）班为市级优秀班级候选班．

类型 3：媒体与网络信息在决策中的应用

例 3 某市某县某乡中心小学要开校田径运动会，通过电视的天气预报了解第二天的天气情况．中央气象台的天气预报说，该市的天气情况是“阴”，省气象台的天气预报说，该县的天气情况是“阴，局部地方有小雨”，而该县的气象台的天气预报说，该乡的天气情况是“有小到中雨”．综合三个气象部门的预报，你怎样判断该乡第二天的天气情况？

解题秘方：分析媒体或网络揭示的信息，正确地做决策．

解：首先，应该认为三个气象部门的预报是不矛盾的，我国地域辽阔，对一个较大范围进行天气预报，不可能说得很具体，特别是对于一些小范围的特殊情况，更不可能进行详细的预报，随着预报范围的逐渐缩小，预报的针对性和准确性会逐渐提高．因此，应该认为该乡第二天“有小到中雨”的可能性较大．

方法总结

在根据媒体或网络的信息做决策时，一定要注意该事件在媒体或网络中的地位，如果地位重要，那么相关的信息会比较准确，如果地位不重要，那么这些信息的可靠性一定要仔细分析．

知识 2 容易误导的统计图

提分·必记

1. 简洁的统计表和形象的统计图可以在决策过程中帮助我们得到很多有用的信息，比如，最小值和最大值是什么，发展变化的趋势和快慢程度如何等．

2. 不过，形象的统计图如果画得不规范也会给人留下不真实的印象，从而得出错误的结论．

特别提醒

在分析统计图时，我们要从数据上认真观察，一定要看它是否合理，如果不合理，那么最好重新制作一个合适的统计图再进行分析．

3. 容易误导决策的统计图的常见类型

易出现误导决策的情形：

（1）纵轴上的数据不是从 0 开始，易造成比例上的错觉．

（2）对两个不同的样本进行比较时，两张统计图上的纵轴刻度不同，易造成错觉．

（3）在使用立体统计图时，要注意除长方体的高度之外，长方体的宽度和长度若不一致，易因体积造成误解．

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

核考向▶容易误导的统计图

类型 1：容易误导的折线统计图

例 4 甲、乙两个车间 2~5 月的产量情况如图 28.3-2 所示，试回答下列问题：

（1）初看两幅统计图，你感觉哪个车间的产量增长快？

（2）把乙车间的产量情况画在甲车间产量情况统计图中，再看看，哪个车间的产量增长较快？

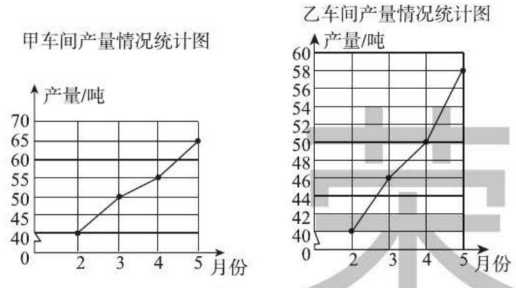


图 28.3-2

解题秘方：看清折线统计图中纵轴的单位长度，正确地读出统计图反映的信息.

解：（1）折线越接近纵轴，说明增长速度越快，所以初看统计图感觉乙车间的产量增长快.

（2）乙车间 2~5 月的产量分别是：40 吨，46 吨，50 吨，58 吨. 把乙车间的产量用虚线绘制在甲车间产量情况统计图中，如图 28.3-3 所示.

从图 28.3-3 可以观察到虚线在实线下面，也就说明甲车间的产量增长较快.

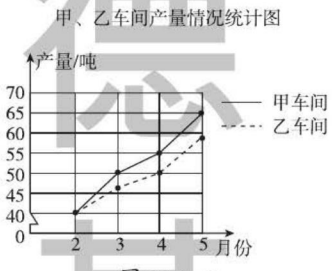


图 28.3-3

类型 2：容易误导的扇形统计图

例 5 从如图 28.3-4 所示的两个扇形统计图来看，车间生产的合格品的情况为（　　）

A. 甲车间多　　B. 乙车间多

C. 一样多　　D. 不能确定

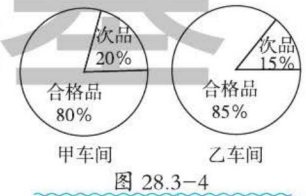


图 28.3-4

解题秘方：根据扇形统计图不能得到两个车间的合格品数量，也就无法进行比较.

解：甲车间生产的合格品所占的比例为 80%，乙车间生产的合格品所占的比例为 85%. 因为不知道每个车间生产的产品总量，所以无法判断两车间生产的合格品的数量关系.

答案：D

提分·秘诀

技巧点拨

绘制折线统计图时，选取不同的单位画出的折线统计图的形状不同，给人的直观印象也不一样. 为了客观反映两个统计量的变化情况，在绘制折线统计图时，应注意两个统计图中，坐标轴上同一单位表示的意义保持一致.

技巧点拨

在两个不同的扇形统计图中，容易错误地根据某个统计量所占的百分比的大小来说明具体数值的大小. 要比较两个扇形统计图中某个统计量的大小，除了知道统计量所占的百分比外，还必须知道两个统计图中总量的大小.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

类型 3：容易误导的条形统计图

例 6 某市 2017 年自来水使用情况如图 28.3-5 所示，试回答下列问题：

（1）工业用水量是商业用水量的多少倍？

（2）这个图容易使人产生错觉吗？为什么？要使读者直观、清楚地获得该市各项用水量的比例情况，统计图应做怎样的改动？

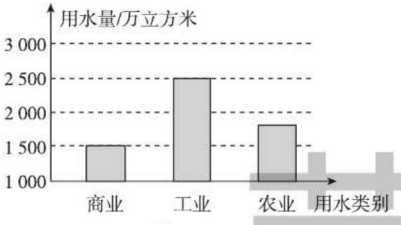


图 28.3-5

解题秘方：条形统计图中纵轴的数值不是从 0 开始的，其是易误导的关键所在．

解：（1）工业用水量是 2 500 万立方米，商业用水量是 1 500 万立方米，所以工业用水量是商业用水量的 $\frac{5}{3}$ 倍．

（2）该图容易使人产生错觉．因为纵轴上的数值不是从 0 开始的，容易使读者直观地根据条形的高度来判断倍数关系．

为了使读者更直观、清楚地获得该市各项用水量的比例情况，统计图纵轴上的数值应从 0 开始，这样条形的高度的比例与实际用水量的比例是一致的．

技巧点拨

当条形统计图纵轴上的数值不是从 0 开始时，极易错误地根据条形的高度比值来判断各个统计量的倍数关系，所以绘制条形统计图时，要标清各个量的含义及其单位，纵轴上的数要从 0 开始取．

点方法·拨技巧 提高分

拔尖角度 1 利用数据分析法做决策

挑战·高分

例 7 甲、乙两名队员参加射击训练，成绩分别被制成两个统计图（如图 28.3-6）．

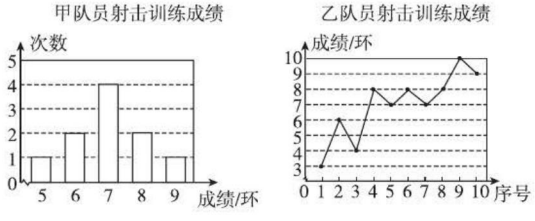


图 28.3-6

特别警示

通常情况下，方差越小越好，但也有例外，如本题中乙成绩的方差虽然较大，但由于他的成绩呈上升趋势，所以他的训练成绩较好，解答本题时容易出现根据方差大小来确定，得到选甲队员的错误．

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

根据以上信息，整理分析数据如下：

	平均数 / 环	中位数 / 环	众数 / 环	方差
甲	a	7	7	1.2
乙	7	b	8	c

（1）求出表格中 a，b，c 的值；

（2）分别运用上表中的四个统计量，简要分析这两名队员的射击训练成绩．若选派其中一名参赛，你认为应选哪名队员？

解题秘方：根据实际中不同的需要，结合不同的数据特点；选取“三数或方差”作依据进行决策．

解：（1）观察甲队员射击训练成绩统计图可知，$a=\frac{1}{10}(5\times1+6\times2+7\times4+8\times2+9\times1)=\frac{1}{10}\times70=7$.

观察乙队员射击训练成绩统计图可知，乙的10次射击训练成绩分别为3，6，4，8，7，8，7，8，10，9，

按从小到大的顺序排列为：3，4，6，7，7，8，8，8，9，10，

其中最中间的两个数分别为7和8，故 $b=\frac{7+8}{2}=7.5$.

$c=\frac{1}{10}[(3-7)^2+(4-7)^2+(6-7)^2+2\times(7-7)^2+3\times(8-7)^2+(9-7)^2+(10-7)^2]=4.2$.

（2）根据表中数据可知，甲和乙的平均数相等，乙的中位数大于甲的中位数，乙的众数大于甲的众数，说明乙的成绩好于甲的成绩；虽然乙的方差大于甲的方差，但乙的成绩呈上升趋势，故应选乙队员．

拔尖角度▸ 2 利用代数知识进行决策

挑战·高分

方法点拨

有些决策问题可借助代数知识如不等式（组），方程（组）及函数等相关知识，制订方案，并优化方案做决策．

例8 为了更好地保护美丽如画的邛海湿地，西昌市污水处理厂决定先购买 A，B 两型污水处理设备共20台，对邛海湿地周边污水进行处理，每台 A 型污水处理设备12万元，每台 B 型污水处理设备10万元．已知1台 A 型污水处理设备和2台 B 型污水处理设备每周可以处理污水640吨，2台 A 型污水处理设备和3台 B 型污水处理设备每周可以处理污水1 080吨．

（1）A，B 两型污水处理设备每周每台分别可以处理污水多少吨？

（2）经预算，市污水处理厂购买设备的资金不超过230万元，每周处理污水的量不低于4 500吨，请你列举出所有购买方案，并指出哪种方案所需资金最少？最少是多少？

解题秘方：紧扣题目中的数量关系建立方程（组），不等式（组）的模型，利用解或解集设计方案做决策．

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

解：（1）设 A 型污水处理设备每周每台可以处理污水 x 吨，B 型污水处理设备每周每台可以处理污水 y 吨，

根据题意得$\begin{cases}x+2y=640,\\2x+3y=1\,080,\end{cases}$ 解得$\begin{cases}x=240,\\y=200,\end{cases}$

即 A 型污水处理设备每周每台可以处理污水 240 吨，B 型污水处理设备每周每台可以处理污水 200 吨．

（2）设购买 A 型污水处理设备 x 台，则购买 B 型污水处理设备（$20-x$）台，

则$\begin{cases}12x+10(20-x)\leqslant 230,\\240x+200(20-x)\geqslant 4\,500,\end{cases}$ 解得 $12.5\leqslant x\leqslant 15$.

第一种方案：当 $x=13$ 时，$20-x=7$，花费的费用为：$13\times 12+7\times 10=226$（万元）；

第二种方案：当 $x=14$ 时，$20-x=6$，花费的费用为：$14\times 12+6\times 10=228$（万元）；

第三种方案：当 $x=15$ 时，$20-x=5$，花费的费用为：$15\times 12+5\times 10=230$（万元）．

所以购买 A 型污水处理设备 13 台，B 型污水处理设备 7 台时，所需资金最少，最少是 226 万元．

点中考·拨模拟 得满分

中考探秘 这部分知识一方面考查根据统计知识对现实问题进行决策，另一方面考查从统计图中获取信息．通过对信息的处理来对实际问题做出决策．考查方式以解答题为主，题目一般比较容易．

三年中考兵法

考法 借助调查做决策

例 9 ［中考·泰州］某软件科技公司 20 人负责研发与维护游戏、网购、视频和送餐共 4 款软件．投入市场后，游戏软件的利润占这 4 款软件总利润的 40%．图 28.3-7 是这 4 款软件研发与维护人数的扇形统计图和利润的条形统计图．

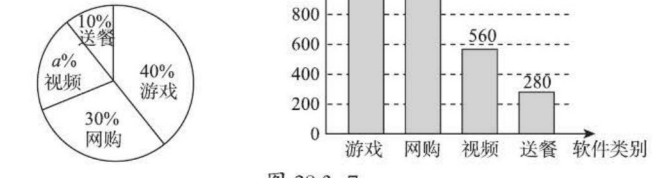


图 28.3-7

冲刺·满分

思路导析

1. 用 1 减去其他扇形的百分数即可求 a，利用题干中的条件“游戏软件的利润占这 4 款软件总利润的 40%”可以先求出总利润，再求 m；
2. 利用各项目利润除以其人数即可；
3. 由于网购人均利润高于视频人均利润，因此可以考虑将一部分视频人员改为网购人员，据此列出方程，若方程有解且符合题意，

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

根据以上信息，回答下列问题：

（1）直接写出图中 a，m 的值；

（2）分别求出网购与视频软件的人均利润；

（3）在总人数和各款软件人均利润都保持不变的情况下，能否只调整网购与视频软件的研发与维护人数，使总利润增加 60 万元？如果能，写出调整方案；如果不能，请说明理由．

试题评析：本题主要考查从统计图中获取信息并解决问题的能力，利用调查的数据以及整理的统计图做决策是解题的关键．

解：（1）$a=20$，$m=960$.

（2）$\bar{x}_{网购}=960\div(20\times30\%)=160$（万元），$\bar{x}_{视频}=560\div(20\times20\%)=140$（万元），∴网购与视频软件的人均利润分别为 160 万元、140 万元．

（3）能，设网购人员增加 x 人，则视频人员减少 x 人，由题知 $160(6+x)+140(4-x)=960+560+60$，解得 $x=3$.

∴调整方案为：网购人员增加 3 人，视频人员减少 3 人．

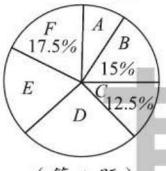
则可行；若方程无解或解不合题意，则不可行．

两年模拟兵法 ☞答案见 208 页

1. 某学校将为初一学生开设 A，B，C，D，E，F 共 6 门选修课，现选取若干名学生进行了“我最喜欢的一门选修课”调查，将调查结果绘制成如下统计表（不完整）和如图所示的扇形统计图（不完整）．

选修课	A	B	C	D	E	F
人数	40	60		100		

根据图表提供的信息，下列结论错误的是（　　）



（第 1 题）

A. 这次被调查的学生人数为 400

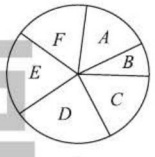
B. 扇形统计图中 E 部分扇形的圆心角为 72°

C. 被调查的学生中喜欢选修课 E，F 的人数分别为 80，70

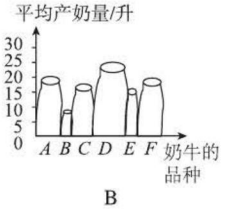
D. 喜欢选修课 C 的人数最少

2. 某研究员调查了 6 种不同品种的奶牛的平均产奶量，分别用 A，B，C，D，E，F 表示，下列四个统计图中，最适合用来表示不同品种的奶牛的平均产奶量的是（　　）

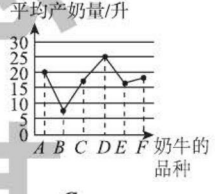
不同品种的奶牛的平均产奶量的扇形统计图



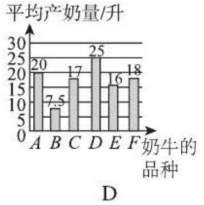
A



B

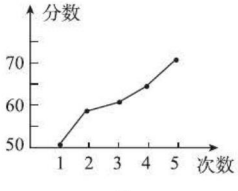


C

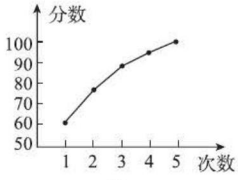


D

3. 甲、乙两名同学最近 5 次的语文考试成绩如图所示，图象给人的视觉效果是_____同学的成绩上升速度较快；事实上，_____同学的成绩上升速度较快．图象让人产生错觉的原因是_____．



甲



乙

（第 3 题）

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

4. 大学生张军到某公司应聘时，了解到该公司员工的月工资情况如下表：

员工	经理	副经理	职员 A	职员 B	职员 C
月工资（元）	6 000	4 000	1 700	1 300	1 200
员工	职员 D	职员 E	职员 F	杂工 G	
月工资（元）	1 100	1 100	1 100	500	

在了解过程中，有三位公司员工对收入情况给出了三个说法：

甲：我的月工资是 1 200 元，在公司中算中等收入；

乙：我们好几个人的月工资都是 1 100 元；

丙：我们公司员工收入很高，月平均工资为 2 000 元.

请用所学知识分析以上说法并回答问题：

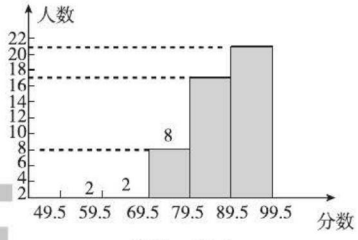
（1）甲的说法中的数据 1 200 元，我们称之为_____；

（2）乙的说法中的数据 1 100 元，我们称之为_____；

（3）丙是用什么方法得出 2 000 元的？

（4）甲、乙、丙的说法中，谁的说法可以较好地反映公司员工收入的一般水平？

5. 在世界环境日到来之际，希望中学开展了“环境与人类生存”的主题研讨活动，活动之一是对我们的生存环境进行社会调查，并对学生的调查报告进行评比，九年级（3）班班长小英同学将本班 50 份学生调查报告的得分进行分析处理（成绩均为整数），绘制成如图所示的统计图.



（第 5 题）

（1）将得分按下面的要求分组：50~59 分为第一组，60~69 分为第二组，70~79 分为第三组，80~89 分为第四组，90~99 分为第五组；直观地看，第几组的份数最多？第几组的份数最少？能求出最多的是最少的几倍吗？

（2）实际上，最多的是最少的几倍？图中所表现出来的直观情况与此相符吗？

（3）这个图为什么会给人这样的感觉？

（4）为了更直观、清楚地反映实际情况，如图所示的统计图应做怎样的改动？【**导学号**：8603511】

荣德基

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

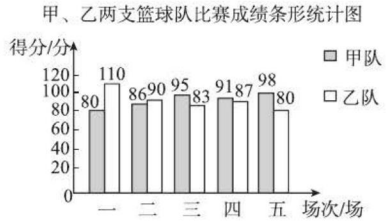
6. 现计划把甲种货物 1 240 t 和乙种货物 880 t 用一列货车运往某地，已知这列货车挂有 A、B 两种不同规格的货车厢共 40 节，使用 A 型车厢每节费用为 6 000 元，使用 B 型车厢每节费用为 8 000 元.

（1）设运送这批货物的总费用为 y 万元，这列货车挂 A 型车厢 x 节，试写出 y 与 x 之间的函数关系式；

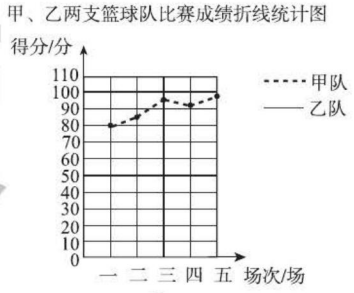
（2）如果每节 A 型车厢最多可装甲种货物 35 t 和乙种货物 15 t，每节 B 型车厢最多可装甲种货物 25 t 和乙种货物 35 t，装货时按此要求安排 A、B 两种车厢的节数，那么共有哪几种安排车厢的方案？

（3）在上述方案中，哪种方案运费最省？最省运费为多少元？

7. 甲、乙两支篮球队在集训期间进行了五场比赛，将比赛成绩进行统计后，绘制成如图所示的统计图.



①



②

（第 7 题）

（1）在图②中画出折线表示乙队在集训期间这五场比赛成绩的变化情况；

（2）已知甲队五场比赛成绩的平均分 $\bar{x}_{甲}=90$ 分，请你计算乙队五场比赛成绩的平均分 $\bar{x}_{乙}$；

（3）如果从甲、乙两队中选派一支篮球队参加篮球锦标赛，根据上述统计情况，试从平均分、获胜场数、折线的走势三个方面分别进行简要分析，你认为选派哪支篮球队参赛能取得更好的成绩？

荣德基

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

用样本估计总体思想的技巧应用

荣老师告诉你 在统计中，用样本估计总体思想是最根本的思想，抽样调查收集的数据以及整理、分析数据都是为估计总体服务的．所以在考试的命题中，先考察样本的一些情况，然后用样本估计总体的思想分析总体的情况．

类型一 利用样本的百分比估计总体的百分比

例1 [中考·黄冈]我市某实验中学准备开展“阳光体育活动”，决定举办足球、篮球、乒乓球、羽毛球、排球等球类活动．为了解学生对这五项活动的喜爱情况，随机调查了m名学生（每名学生必选且只能选择这五项活动中的一项）．

根据图1中提供的信息，请解答下列问题：

（1）m=_____，n=_____；

（2）补全图1中的条形统计图；

（3）若全校共有2 000名学生，请估计出全校约有多少名学生喜欢乒乓球活动；

（4）在调查的m名学生中，有小薇、小燕、小红、小梅等10名学生喜欢羽毛球活动，学校打算从小薇、小燕、小红、小梅这4名女生中，选取2名参加全市中学生女子羽毛球比赛，请用列表法或画树状图法，求同时选中小红、小燕的概率．（解答过程中，可将小薇、小燕、小红、小梅分别用字母A，B，C，D表示）

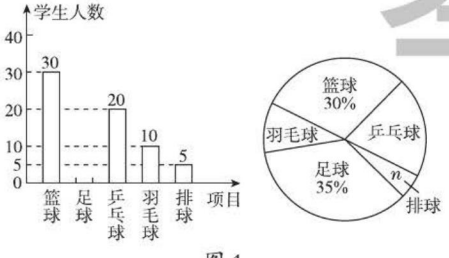


图1

解题秘方：（1）先根据条形统计图中喜欢篮球活动的人数以及扇形统计图中篮球所占的百分比求出抽查的学生数m，再根据喜欢排球的人数求出百分比，得出n的值；（2）根据足球的百分比求出喜欢足球的人数，补全条形统计图；（3）用样本中乒乓球所占的百分比估计全校学生中喜欢乒乓球活动的百分比，然后算出全校学生中喜欢乒乓球活动的人数；（4）用树状图列出所有等可能的结果，求出同时选中小红和小燕的概率．

解：（1）100；5%

（2）喜欢足球活动的人数：$100\times35\%=35$，补全条形统计图如图2所示：

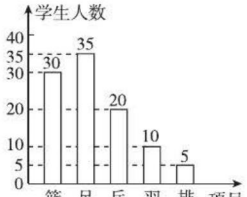


图2

（3）全校喜欢乒乓球活动的学生约有：$2\,000\times(20\div100)=400$（名）．

（4）画树状图如图3：

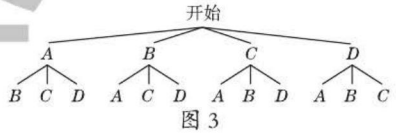


图3

则P（同时选中小红和小燕）$=\frac{2}{12}=\frac{1}{6}$．

方法点拨：（1）列表法可以不重复、不遗漏地列出所有可能的结果，适合于两步完成的事件；画树状图法适合于两步或两步以上完成的事件；如果是试验操作题要注意是放回试验还是不放回试验．

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

（2）概率的计算公式：

$$P(A)=\frac{\text{事件 } A \text{ 可能出现的结果数}}{\text{所有可能出现的结果数}}.$$

类型二 ▶ 利用样本的中位数估计总体的中位数

例 2 ［中考·呼和浩特］在一次男子马拉松长跑比赛中，随机抽取 12 名选手所用的时间（单位：分钟）得到如下样本数据：

140　146　143　175　125　164　134　155　152　168　162　148

（1）计算该样本数据的中位数和平均数；

（2）如果一名选手的成绩是 147 分钟，请你依据该样本数据的中位数，推断他的成绩如何？

解题秘方：先将数据按从小到大的顺序排列后，利用中位数的定义求出该组数据的中位数，再由算术平均数公式算出该组数据的平均数，最后将 147 分钟与中位数比较即可得到正确的结论.

解：（1）将这组数据按从小到大的顺序排列如下：

125，134，140，143，146，148，152，155，162，164，168，175.

∵这组数据按从小到大的顺序排列后，处于最中间的两个数为 148，152，

∴该样本数据的中位数为 $\frac{148+152}{2}=150$（分钟），平均数为 $\bar{x}=\frac{1}{12}\times(125+134+140+143+146+148+152+155+162+164+168+175)=\frac{1}{12}\times 1\,812=151$（分钟）.

（2）该样本数据的中位数为 150 分钟，说明在这次马拉松长跑比赛中，大约有一半选手的成绩快于 150 分钟，有一半选手的成绩慢于 150 分钟. 这名选手的成绩为 147 分钟，快于中位数 150 分钟，可以断定他的成绩比一半以上选手的成绩好.

方法点拨：只要抽取的样本具有代表性，就可以用样本的中位数估计总体的中位数，就能对调查的情况下正确的结论.

类型三 ▶ 利用样本中的方差估计总体的方差

例 3 ［中考·乐山］甲、乙两名射击运动员进行射击比赛，两人在相同条件下各射击 10 次，射击的成绩如图 4 所示.

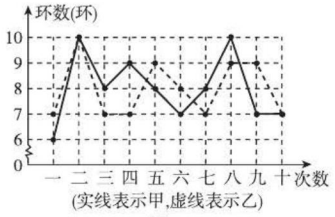


图 4

根据图中信息，回答下列问题：

（1）甲的平均数是_____，乙的中位数是_____；

（2）分别计算甲、乙成绩的方差，并从计算结果来分析，你认为哪名运动员的射击成绩更稳定？

解题秘方：（1）根据平均数和中位数的定义解答即可；（2）计算方差，方差是用来衡量一组数据波动大小的量，方差越大，表明这组数据偏离平均数越大，即波动越大，数据越不稳定.

解：（1）8 环；7.5 环

（2）$\bar{x}_{乙}=\frac{7+10+7+7+9+8+7+9+9+7}{10}=8$（环），

$s^2_{甲}=\frac{1}{10}\times[(6-8)^2+(10-8)^2+\cdots+(7-8)^2]=1.6$，

$s^2_{乙}=\frac{1}{10}\times[(7-8)^2+(10-8)^2+\cdots+(7-8)^2]=1.2$，

∵$s^2_{乙}<s^2_{甲}$，

∴乙运动员的射击成绩更稳定.

方法点拨：一组数据方差越大，说明这组数据的波动越大，方差越小，数据的波动越小. 判断两个人成绩是否稳定时，可以抽取两个人数据的样本，利用样本的方差估计两个人的总体情况的方差.

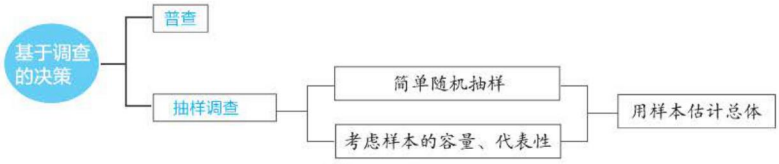
基础题 课标题

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

章末核心知识分类整合

核心结构专题

结构必知



核心必读

1. 当我们所要考察的对象多得数不胜数的时候，当我们的考察会给考察对象带来损伤破坏的时候，当我们的考察经费和时间都非常有限的时候，抽样调查方法就发挥出其独特的作用了，简单随机抽样方法是一种很重要的数学方法，它使每个个体都有相等的机会被选入样本.
2. 抽样调查是一种可以信赖的方法，当样本足够大且有较好的代表性时，样本的平均数、方差与总体的平均数、方差可以很接近. 所以，我们可以用样本估计总体.
3. 我们感受到数据分析对于决策的重要性. 我们应该在进行决策的过程中积极开动脑筋，让学过的知识发挥它们应有的作用. 同时，我们还了解到有些不规范的统计图容易误导读者.

知识方法专题

知识必学

专题一 普查与抽样调查

链接中考» 统计调查的常用方法是普查与抽样调查，抽样调查的目的是用样本估计总体，它是统计知识和方法的源头，也是中考命题的热点内容，题型多以选择题为主.

例1 [中考·重庆] 下列调查中，最适宜采用普查方式的是（　　）

A. 对重庆市中学生每天学习所用时间的调查

B. 对全国中学生心理健康现状的调查

C. 对某班学生进行6月5日是“世界环境日”知晓情况的调查

D. 对重庆市初中学生课外阅读量的调查

解题秘方：根据普查和抽样调查适用条件确定正确答案.

解：A，B，D中调查范围较大，不适宜普查，只有C中调查范围小，操作容易，适宜普查，故选择C.

答案：C

方法点拨：本题考查了抽样调查和普查的适用条件的区别：一般来说，对于具有破坏性、调查范围广、无法进行普查、普查的意义或价值不大的调查，应选择抽样调查；对于精确度要求高的调查、调查范围比较小、事关重大的调查往往选用普查. 选择普查还是抽样调查要根据所要考察的对象的特征灵活选用.

专题二 总体、个体、样本、样本容量的概念

链接中考» 正确区分总体、个体、样本、样本容量的概念是掌握抽样调查的关键，对于这些概念的考查一般都在一个调查过程中去识别，以选择题的形式考查较多.

例2 [中考·荆州] 荆州古城是闻名遐迩的

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

历史文化名城．“五一”期间相关部门对到荆州观光游客的出行方式进行了随机抽样调查，整理后绘制了如图 28–1 所示的两幅统计图（尚不完整）．根据图中信息，下列结论错误的是(　　)

A. 本次抽样调查的样本容量是 5 000

B. 扇形统计图中的 m 为 10%

C. 样本中选择公共交通出行的有 2 500 人

D. 若“五一”期间到荆州观光的游客有 50 万人，则选择自驾方式出行的有 25 万人

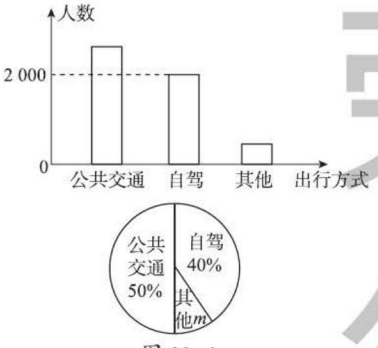


图 28–1

解题秘方：紧扣统计图中反映的数据进行逐项计算辨析．

解：2 000÷40%=5 000（人），故 A 正确；m=1–50%–40%=10%，故 B 正确；5 000×50%=2 500（人），故 C 正确；50×40%=20（万人），故 D 错误．

答案：D

专题三 借助调查做决策

链接中考» 数据收集、整理后，常常用统计表或统计图的形式呈现．因此，读懂图表信息显得尤为重要，通过对统计图表的分析，可以提高读图和识图能力、对图表的综合分析能力及利用图表信息做出判断和决策的能力．

例 3 ［中考·呼和浩特］下表是随机抽取的某公司部分员工的月收入资料．

月收入 / 元	45 000	18 000	10 000	5 500	5 000	3 400	3 000	2 000
人数	1	1	1	3	6	1	11	2

（1）请计算以上样本的平均数和中位数；

（2）甲、乙两人分别用样本平均数和中位数来估计推断该公司全体员工月收入水平，请你写出甲、乙两人的推断结论；

（3）指出谁的推断比较科学合理，能真实地反映该公司全体员工月收入水平，并说出另一个人的推断依据不能真实反映该公司全体员工月收入水平的原因．

解题秘方：紧扣调查收集的数据，利用各个统计量的作用做决策．

解：（1）样本平均数

$$=\frac{45\,000+18\,000+10\,000+5\,500\times3+5\,000\times6+3\,400+3\,000\times11+2\,000\times2}{1+1+1+3+6+1+11+2}$$

=6 150（元），

中位数为$\frac{3\,400+3\,000}{2}$=3 200（元）；

（2）甲：由样本平均数为 6 150 元，估计全体员工月平均收入大约为 6 150 元．

乙：由样本中位数为 3 200 元，估计全体员工大约有一半的员工月收入超过 3 200 元，有一半的员工月收入不足 3 200 元；

（3）乙的推断比较科学合理．由题意知样本中的 26 名员工，只有 3 名员工的收入在 6 150 元以上，原因是该样本数据极差较大，所以平均数不能真实反映该公司全体员工月收入水平．

Ⅱ 方法必会

专题四 用样本估计总体的思想

专题解读» 用样本估计总体是统计中最基本的思想方法，从总体中抽取样本，通过对样本的整理、分析，去估计总体的情况．

例 4 ［中考·绵阳］要估计鱼塘中的鱼数，养鱼者首先从鱼塘中打捞了 50 条鱼，在每条鱼身上做好记号后把这些鱼放归鱼塘，再从鱼塘中打捞出 100 条鱼，发现只有 2 条鱼是刚才做了记号的鱼，假设鱼在鱼塘内均匀分布，那么估计这个鱼塘的鱼数大约为(　　)

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

A.5 000 条　　B.2 500 条

C.1 750 条　　D.1 250 条

解题秘方：首先求出有记号的 2 条鱼在 100 条鱼中所占的比例，然后根据样本中有记号的鱼所占的比例等于鱼塘中有记号的鱼所占的比例，从而求得这个鱼塘的鱼数大约为 $50\div\frac{2}{100}=2\,500$（条）. 故选 B.

答案：B

例 5　[中考·吉林]某校组织了主题为“让勤俭节约成为时尚”的电子小报作品征集活动，现从中随机抽取部分作品，按 A，B，C，D 四个等级进行评价，并根据统计结果绘制了如图 28–2 所示的两幅不完整的统计图.

（1）求抽取了多少份作品；

（2）此次抽取的作品中等级为 B 的作品有多少份？并补全条形统计图；

（3）若该校共征集到 800 份作品，请估计等级为 A 的作品大约有多少份.

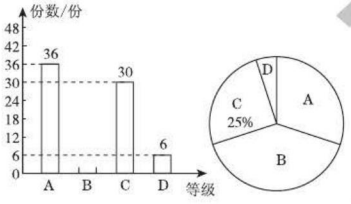


图 28–2

解题秘方：（1）根据等级为 C 的份数除以所占的百分比，得到抽取作品的总份数；（2）由总份数减去其他份数，求出 B 等级的份数，补全条形统计图即可；（3）求出 A 等级的作品所占的百分比，乘 800 即可得到结果.

解：（1）根据题意得 $30\div25\%=120$（份），则抽取了 120 份作品.

（2）等级为 B 的作品有 $120-(36+30+6)=48$（份），

补全条形统计图如图 28–3 所示.

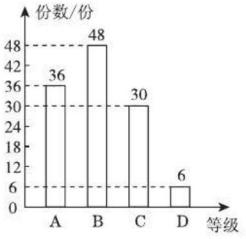


图 28–3

（3）根据题意得 $800\times\left(\frac{36}{120}\times100\%\right)=240$（份），

则估计等级为 A 的作品大约有 240 份.

解题策略：此题考查了条形统计图、扇形统计图，以及用样本估计总体，弄清题意是解本题的关键.

专题五　数形结合思想

专题解读» 涉及有关统计图、表的问题时，需要从统计图、表中准确提取信息，恰当分析统计图、表中数据的含义.

例 6　某同学在学习了统计知识后，就下表所列的 5 种用牙不良习惯对全班每一名同学进行了问卷调查（每名被调查的同学必须选择而且只能在 5 种用牙不良习惯中选择一项），调查结果如图 28–4 所示.

种类	A	B	C	D	E
不良习惯	睡前吃水果喝牛奶	用牙开瓶盖	常喝饮料嚼冰	常吃生冷零食	磨牙

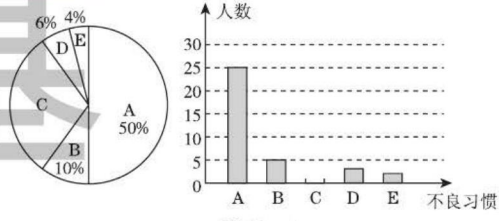


图 28–4

根据以上统计图提供的信息，回答下列问题：

（1）这个班共有多少名学生？

（2）这个班中有 C 类用牙不良习惯的学生多少名？占全班人数的百分比是多少？

（3）请补全条形统计图.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

（4）根据调查结果，估计这个年级850名学生中有B类用牙不良习惯的学生约多少名.

解题秘方：由统计图可知A类人数占50%，则可求出全班的人数，进而解决问题.

解：（1）25÷50%=50（名）.

∴这个班共有50名学生.

（2）1−50%−10%−6%−4%=30%，50×30%=15（名）.

∴这个班中有C类用牙不良习惯的学生15名，占全班人数的30%.

（3）如图28−5所示.

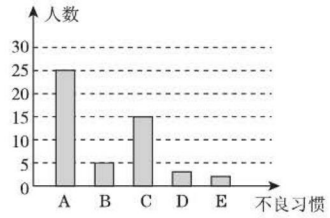


图28−5

（4）850×10%=85（名）.

∴估计这个年级850名学生中有B类用牙不良习惯的学生约85名.

好题必解 答案见208页

题型1：调查方式的选择

1. [**中考·重庆**]下列调查中，最适合采用全面调查（普查）方式的是（　　）

A. 对重庆市初中学生每天阅读时间的调查

B. 对端午节期间市场上粽子质量情况的调查

C. 对某批次手机的防水功能的调查

D. 对某校九年级（3）班学生肺活量情况的调查

2. 在下列调查中：

①对市场上某一品牌电脑使用寿命的调查；

②了解某池塘鱼的产量；

③调查某市合资企业的数量；

④调查全国中学生的环保意识；

⑤审查某篇文章中的错别字的数量.

其中适合普查的有_____，适合抽样调查的有_____.（填序号）

题型2：抽样调查中相关统计量

3. 为了了解攀枝花市2019年中考数学学科各分数段的成绩分布情况，从中抽取150名考生的中考数学成绩进行统计分析，在这个问题中，样本是指（　　）

A.150

B. 被抽取的150名考生

C. 被抽取的150名考生的中考数学成绩

D. 攀枝花市2019年中考数学成绩

4. 为纪念中国人民抗日战争的胜利，9月3日被确定为抗日战争胜利纪念日，某校为了了解学生对“抗日战争”的知晓情况，从全校6 000名学生中，随机抽取了120名学生进行调查，在这次调查中（　　）

A.6 000名学生是总体

B. 所抽取的每名学生对“抗日战争”的知晓情况是总体的一个样本

C.120名是样本容量

D. 所抽取的120名学生对“抗日战争”的知晓情况是总体的一个样本

题型3：用样本估计总体

5. [**中考·湘潭**]每年5月11日是由世界卫生组织确定的世界防治肥胖日，某校为了了解全校2 000名学生的体重情况，随机抽测了200名学生的体重，根据体质指数（BMI）标准，体重超标的有15名学生，则估计全校体重超标学生的人数为（　　）

A.15　　B.150　　C.200　　D.2 000

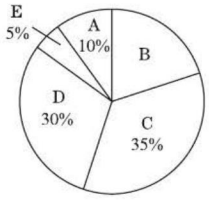
6. [**中考·安徽**]自来水公司调查了若干用户的月用水量x（单位：吨），按月用水量将用户分成A，B，C，D，E五组进行统计，并制作了如图所示的扇形统计图.已知除B组以外，参与调查的用户共有64户，则所有

来德基

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

参与调查的用户中月用水量在6吨以下的共有（　　）

组别	月用水量 x（单位：吨）
A	$0 \leqslant x < 3$
B	$3 \leqslant x < 6$
C	$6 \leqslant x < 9$
D	$9 \leqslant x < 12$
E	$x \geqslant 12$



（第6题）

A.18户　　B.20户　　C.22户　　D.24户

7. 甲、乙、丙、丁四名同学在一次投掷实心球训练中，在相同条件下各投掷10次，他们成绩的平均数 $\bar{x}$ 与方差 s^2 如下表：

	甲	乙	丙	丁
平均数 $\bar{x}$（米）	11.1	11.1	10.9	10.9
方差 s^2	1.1	1.2	1.3	1.4

若要选一名成绩好且发挥稳定的同学参加比赛，则应该选择（　　）

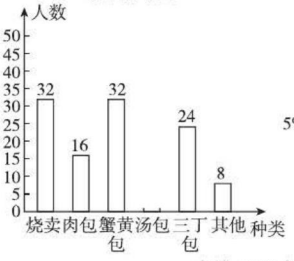
A. 甲　　B. 乙　　C. 丙　　D. 丁

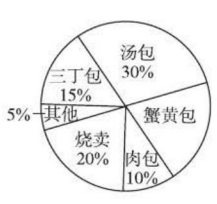
8. [中考·扬州]“富春包子”是扬州特色早点，富春茶社为了了解顾客对各种早点的喜爱情况，设计了如下的调查问卷，对顾客进行了抽样调查．根据统计数据绘制了如下尚不完整的统计图．

下列富春早点中你最喜欢的是（　　）[单选]

A. 烧卖　　B. 肉包　　C. 蟹黄包

D. 汤包　　E. 三丁包　　F. 其他





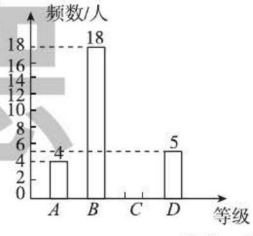
（第8题）

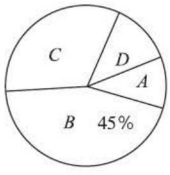
根据以上信息，解决下列问题：

（1）条形统计图中最喜欢“汤包”的人数是_____，扇形统计图中最喜欢“蟹黄包”部分的圆心角为_____；

（2）根据抽样调查结果，请你估计富春茶社1 000名顾客中最喜欢“汤包”的有多少人？

9. “足球运球”是中考体育必考项目之一．兰州市某学校为了解今年九年级学生足球运球的掌握情况，随机抽取部分九年级学生足球运球的测试成绩（整数）作为一个样本，按 A，B，C，D 四个等级进行统计，制成了如下不完整的统计图．（说明：A 级：8分~10分，B 级：7分~7.9分，C 级：6分~6.9分，D 级：1分~5.9分）





（第9题）

根据所给信息，解答以下问题：

（1）在扇形统计图中，C 对应的扇形的圆心角是_____度；

（2）补全条形统计图；

（3）所抽取学生的足球运球测试成绩的中位数会落在_____等级；

（4）该校九年级有300名学生，请估计足球运球测试成绩达到 A 级的学生有多少人？

未经授权禁止复制

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

第 28 章测试卷

答案见 209 页

（100 分 60 分钟）

一、选择题（每题 4 分，共 32 分）

1. 下列调查适合采用抽样调查的是（　　）

A. 审核书稿中的错别字

B. 对某社区的卫生死角进行调查

C. 对八名同学的身高情况进行调查

D. 对中学生目前的睡眠情况进行调查

2. 某市 2019 年中考考生约为 4 万人，从中抽取 2 000 名考生的数学成绩进行分析，在这个问题中样本是指（　　）

A. 2 000

B. 被抽取的 2 000 名考生的数学成绩

C. 4 万名考生的数学成绩

D. 被抽取的 2 000 名考生

3. 下列调查中，用全面调查方式收集数据的是（　　）

①为了了解全校学生对任课教师的意见，学校向全校学生进行问卷调查；

②为了了解初中生上网情况，某市团委对 10 所初中的部分学生进行调查；

③某班学生拟组织一次春游活动，为了确定春游的地点，向全班同学进行调查；

④为了了解全班同学的作业完成情况，对学号为奇数的学生进行调查．

A. ①③　　B. ①②

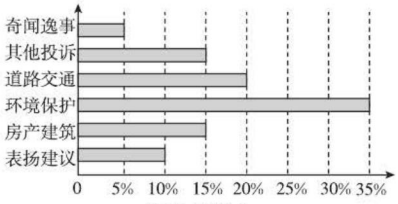
C. ②④　　D. ②③

4. 为了鼓励学生课外阅读，学校公布了“阅读奖励”方案，并设置了“赞成、反对、无所谓”三种意见．现从学校所有 2 400 名学生中随机征求了 100 名学生的意见，其中持“反对”和“无所谓”意见的共有 30 名学生，估计全校持“赞成”意见的学生人数约为（　　）

A.70 名　　B.720 名

C.1 680 名　　D.2 370 名

5. 如图是某晚报“百姓热线”一周内接到热线电话的统计图，其中有关环境保护话题的电话最多，共有 70 个，则本周“百姓热线”共接到热线电话有（　　）



（第 5 题）

A.350 个　B.200 个　C.180 个　D.150 个

6. 学校为了了解学生课外阅读情况，随机抽取了一个班级的学生，对他们一周的读书时间进行了统计，统计数据如下表所示：

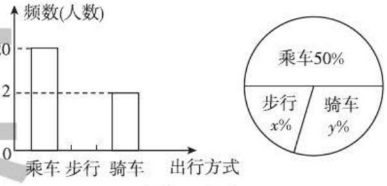
读书时间（小时）	7	8	9	10	11
学生人数	6	10	9	8	7

则该班学生一周读书时间的中位数和众数分别是（　　）

A. 9 小时，8 小时　　B. 9 小时，9 小时

C. 9.5 小时，9 小时　　D. 9.5 小时，8 小时

7. 如图是某中学九（3）班学生出行方式（乘车、步行、骑车）的频数（人数）分布直方图（部分）和扇形统计图，那么下列说法正确的是（　　）



（第 7 题）

A. 九（3）班的学生共有 42 人

B. 九（3）班的学生出行时步行的有 8 人

C. 在扇形统计图中，步行的学生人数所占的扇形的圆心角为 82°

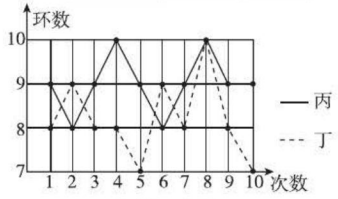
D. 如果该校九年级学生共有 500 人，那么估计九年级的学生出行时骑车的约有 140 人

8. 甲、乙、丙、丁四名射击运动员在选拔赛中，每人射击了 10 次，甲、乙两人的成绩如下表所示，

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

丙、丁两人的成绩如图所示，欲选一名运动员参赛，从平均数和方差两个因素分析，应选（　　）

	甲	乙
平均数	9	8
方差	1	1



（第 8 题）

A. 甲　　B. 乙　　C. 丙　　D. 丁

二、填空题（每题 4 分，共 16 分）

9. 为了了解 10 000 只灯泡的使用寿命，从中抽取 10 只进行试验，则该考察中的样本容量是_____.

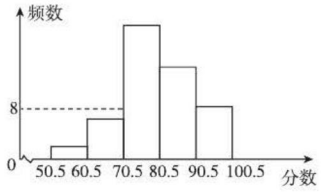
10. 黔东南下司“蓝莓谷”以盛产“优质蓝莓”而吸引来自四面八方的游客，某果农今年的蓝莓得到了丰收，为了了解自家蓝莓的质量，随机从种植园中抽取适量蓝莓进行检测，发现在多次重复的抽取检测中“优质蓝莓”出现的频率逐渐稳定在 0.7，该果农今年的蓝莓总产量约为 800 kg. 由此估计该果农今年的“优质蓝莓”产量约是_____kg.

11. 学校为七年级学生订制校服，校服型号有小号、中号、大号、特大号四种. 随机抽取了 100 名学生调查他们的身高，得到身高频数分布表如下：

型号	身高（x/cm）	人数（频数）
小号	$145 \leqslant x < 155$	22
中号	$155 \leqslant x < 165$	45
大号	$165 \leqslant x < 175$	28
特大号	$175 \leqslant x \leqslant 185$	5

已知该校七年级学生有 800 名，那么请你估计中号校服应订制_____套.

12. 某班班长将全班同学一次知识竞赛成绩（整数）进行整理后，分成五组，绘制成如图所示频数分布直方图，图中从左到右的前四组的百分比分别是 4%，12%，40%，28%，最后一组的频数是 8，则该班有_____名同学参赛.



（第 12 题）

三、解答题（共 52 分）

13.（8 分）判断下面这几个抽样调查选取样本的方法是否合适，并说明理由.

（1）为调查全校学生对购买正版书籍、唱片和软件的支持率，在全校所有的班级中任意抽取 8 个班级，调查这 8 个班所有学生对购买正版书籍、唱片和软件的支持率；

（2）为调查一个省的环境污染情况，调查省会城市的环境污染情况.

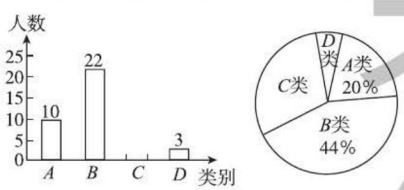
荣德基

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

14.（10 分）某校为了预测本校九年级男生毕业体育测试达标情况，随机抽取该年级部分男生进行了一次测试（满分为 50 分，成绩均记为整数分），并按测试成绩 m（单位：分）分成四类：A 类（$45 < m \leqslant 50$），B 类（$40 < m \leqslant 45$），C 类（$35 < m \leqslant 40$），D 类（$m \leqslant 35$），绘制出如图所示的两幅不完整的统计图，请根据图中信息解答下列问题：

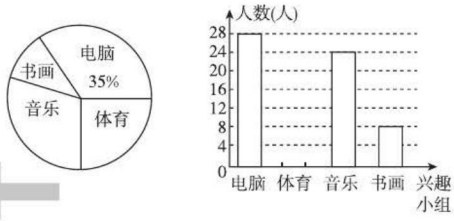
（1）求本次抽取的样本容量和扇形统计图中 A 类所对的圆心角的度数；

（2）若该校九年级男生有 500 名，D 类为测试成绩不达标，请估计该校九年级男生毕业体育测试成绩能达标的有多少名？



（第 14 题）

15.（10 分）实验中学现有学生 2 870 人，学校为了进一步丰富学生课余生活，拟调查各兴趣小组人数情况，为此校学生会委托小容、小易进行一次随机抽样调查．根据采集到的数据，小容绘制的统计图如图①，小易绘制的统计图如图②（不完整）．



（第 15 题）

请你根据统计图①②中提供的信息，解答下列问题：

（1）写出 2 条有价值的信息（不包括下面要计算的信息）；

（2）这次抽样调查的样本容量是多少？在图②中，请将小易画的统计图中的“体育”部分的图形补充完整；

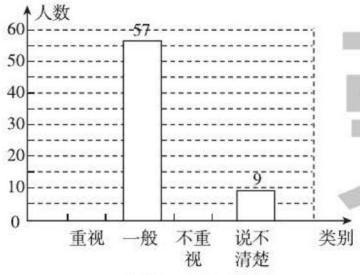
（3）爱好“书画”的人数占被调查人数的百分比是多少？估计实验中学现有的学生中，有多少人爱好“书画”？

宋德基

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

16.（12 分）某教研机构为了了解在校初中生阅读数学教科书的现状，随机抽取某校部分初中学生进行了调查．依据相关数据绘制成以下不完整的统计图表，请根据图表中的信息解答下列问题：

类别	人数	占总人数比例
重视	a	0.3
一般	57	0.38
不重视	b	c
说不清楚	9	0.06



（第 16 题）

（1）求样本容量及表格中 a，b，c 的值，并补全统计图；

（2）若该校共有初中生 2 300 名，请估计该校“不重视阅读数学教科书”的初中生人数；

（3）①根据上面的统计结果，谈谈你对该校初中生阅读数学教科书的现状的看法及建议；

②如果要了解全省初中生阅读数学教科书的情况，你认为应该如何进行抽样？

17.（12 分）某工厂甲、乙两个部门各有员工 400 人，为了解这两个部门员工的生产技能情况，进行了抽样调查，过程如下，请补充完整．

收集数据 从甲、乙两个部门各随机抽取 20 名员工，进行了生产技能测试，测试成绩（百分制）如下：

甲　78　86　74　81　75　76　87　70
　　75　90　75　79　81　70　74　80
　　86　69　83　77

乙　93　73　88　81　72　81　94　83
　　77　83　80　81　70　81　73　78
　　82　80　70　40

整理、描述数据 按如下分数段整理、描述这两组样本数据：

人数 / 成绩 / 部门	$40 \leqslant x \leqslant 49$	$50 \leqslant x \leqslant 59$	$60 \leqslant x \leqslant 69$	$70 \leqslant x \leqslant 79$	$80 \leqslant x \leqslant 89$	$90 \leqslant x \leqslant 100$
甲	0	0	1	11	7	1
乙						

（说明：成绩 80 分及以上为生产技能优秀，70~79 分为生产技能良好，60~69 分为生产技能合格，60 分以下为生产技能不合格）

分析数据 两组样本数据的平均数、中位数、众数如下表所示：

部门	平均数	中位数	众数
甲	78.3	77.5	75
乙	78	80.5	81

得出结论 a. 估计乙部门生产技能优秀的员工人数；

b. 可以推断出哪个部门员工的生产技能水平较高，理由是什么？（至少从两个不同的角度说明推断的合理性）

基德莱

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

参考答案及点拨

第26章 二次函数

26.1 二次函数

【两年模拟兵法】

1. C　2. B

3. B　**点拨**：本题主要考查了根据实际问题列二次函数表达式，关键是正确理解题意，找出题目中的等量关系，再列函数表达式. 根据降价 x 元，知售价为 $(60-x)$ 元，销售量为 $(300+20x)$ 件，由题意可得等量关系：总销售额 = 销售量 × 售价，根据等量关系列出函数表达式即可.

4. $y=2x^2-4x+4$

点拨：本题可以先证 $\triangle AHE\cong\triangle BEF$，

$\therefore AH=BE$.

$\because AE=x$，$\therefore AH=BE=2-x$.

在 $\mathrm{Rt}\triangle AHE$ 中，由勾股定理得

$EH^2=AE^2+AH^2=x^2+(2-x)^2=2x^2-4x+4$，

即 $y=2x^2-4x+4$.

5. $S=-3x^2+24x$；$\frac{14}{3}\leqslant x<8$；5

点拨：本题考查根据实际问题列二次函数关系式，可先用 x 表示出 BC 的长，然后根据矩形的面积 = 长 × 宽，得出 S 与 x 的函数关系式.

6. **解**：(1) 由题图知 y 与 x 是一次函数关系，设 $y=kx+b$，

$\because y=kx+b$ 的图象过点 $(10,300)$，$(12,240)$，

$\therefore\begin{cases}10k+b=300,\\12k+b=240.\end{cases}$

解得 $\begin{cases}k=-30,\\b=600.\end{cases}$

$\therefore y=-30x+600$.

当 $x=14$ 时，$y=180$；

当 $x=16$ 时，$y=120$，

即点 $(14,180)$，$(16,120)$ 均在函数 $y=-30x+600$ 的图象上.

$\because -30x+600>0$ 且 $x>0$，

$\therefore 0<x<20$，

$\therefore y$ 与 x 之间的函数表达式为 $y=-30x+600(0<x<20$ 且 x 为整数$)$.

(2) 根据题意，得 $W=(x-6)(-30x+600)$

$=-30x^2+780x-3600$，

即 W 与 x 之间的函数表达式为 $W=-30x^2+780x-3600(6<x<20$ 且 x 为整数$)$.

7. **解**：(1) 当 $0<t\leqslant 3$ 时，S_1 随 t 的增大而增大；

当 $3<t<6$ 时，S_1 随 t 的增大而减小.

$\because$ 出发时间为 t s，点 P 的速度为 1mm/s，点 Q 的速度为 2mm/s，

$\therefore PC=(6-t)$ mm，$CQ=2t$ mm，

$\therefore S_1=\frac{1}{2}\times(6-t)\times 2t=-t^2+6t$，

即 $S_1=-t^2+6t$.

$\because\begin{cases}t>0,\\6-t>0,\end{cases}$

$\therefore 0<t<6$.

(2) $S_2=S_{\triangle ABC}-S_1$

$=\frac{1}{2}\times 12\times 6-(-t^2+6t)$

$=t^2-6t+36$，

$\therefore S_2=t^2-6t+36$.

26.2 二次函数的图象与性质

26.2.1 二次函数 $y=ax^2$ 的图象与性质

【两年模拟兵法】

1. C　**点拨**：A，B 选项中二次函数图象开口向上，说明 $a>0$，则一次函数的图象必经过第一、二、三象限，故 A，B 都不正确；C，D 选项中二次函数的图象开口向下，说明 $a<0$，则一次函数的图象必经过第二、三、四象限，故 C 正确.

2. A　**点拨**：$\because a<-1$，

$\therefore a-1<a<a+1<0$.

$\therefore$ 这三个点都在函数 $y=-x^2$ 的图象的对称轴左侧，y 随 x 的增大而增大.

$\therefore y_1<y_2<y_3$.

3. C

4. $\frac{\pi}{2}\mathrm{cm}^2$　**点拨**：本题考查不规则图形面积的求法，根据图形的对称性和割补法转化为规则图形，再进行求解.

5. **解**：(1) 设直线 AB 的表达式为 $y=kx+b$.

$\because$ 直线 AB 过点 $A(2,0)$ 和点 $B(1,1)$，

$\therefore\begin{cases}2k+b=0,\\k+b=1.\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}k=-1,\\b=2.\end{cases}$

$\therefore$ 直线 AB 的表达式为 $y=-x+2$.

$\because$ 抛物线 $y=ax^2$ 过点 $B(1,1)$，

$\therefore a\times 1^2=1$，

解得 $a=1$.

$\therefore$ 抛物线的表达式为 $y=x^2$.

(2) 由方程组 $\begin{cases}y=-x+2,\\y=x^2.\end{cases}$

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

得$\begin{cases}x=-2,\\y=4\end{cases}$或$\begin{cases}x=1,\\y=1.\end{cases}$

∴点 C 的坐标为$(-2,4)$.

(3)易知 $S_{\triangle OAC}=\frac{1}{2}\times2\times4=4$,

$S_{\triangle OAB}=\frac{1}{2}\times2\times1=1$,

∴ $S_{\triangle OBC}=S_{\triangle OAC}-S_{\triangle OAB}=4-1=3$.

(4)设 D 点的坐标为(x,y),

则 $S_{\triangle OAD}=\frac{1}{2}\times OA\times|y|=\frac{1}{2}\times2\times y=y=3$,

把 $y=3$ 代入$y=x^2$,

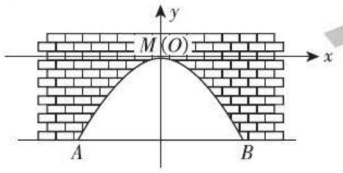
得 $x=\pm\sqrt{3}$,

又∵点 D 在第一象限,

∴ $x=\sqrt{3}$,

∴点 D 的坐标为$(\sqrt{3},3)$.

6. 解:(1)如图.



(第6题)

设这条抛物线的表达式为 $y=ax^2$.

易知点 B 的坐标为$(4,-4)$,代入 $y=ax^2$

得 $-4=a\times4^2$.

解得 $a=-\frac{1}{4}$.

∴ $y=-\frac{1}{4}x^2$.

(2)当 $y=-3$ 时,$-3=-\frac{1}{4}x^2$.

解得 $x=\pm2\sqrt{3}$.

∴水位上升 1m,水面宽度减少$(8-4\sqrt{3})$m.

26.2.2 二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图象与性质

【两年模拟兵法】

1. A **点拨**:此题主要考查了二次函数的顶点式,关键是熟记:抛物线 $y=a(x-h)^2+k$ 的顶点坐标是(h,k),对称轴是直线 $x=h$.

2. D **3. C** **4. D**

5. C **点拨**:本题考查二次函数图象与系数的关系,解题的关键是能看懂图象,利用数形结合的思想解答. 由抛物线与 x 轴有两个交点得到 $b^2-4ac>0$,可判断①正确;根据对称轴是直线 $x=-1$,可得 $x=-2$,0时,y 的值相等,所以 $4a-2b+c>0$,可判断③错误;根据 $-\frac{b}{2a}=-1$,得出 $b=2a$,再根据 $a+b+c<0$,可得$\frac{1}{2}b+b+c<0$,所以 $3b+2c<0$,可判断②正确;$x=-1$ 时该二次函数取得最大值,据此可判断④正确.

6. D **点拨**:∵二次函数 $y=ax^2+2ax+3a^2+3$(其中 x 是自变量),

∴图象的对称轴是直线 $x=-\frac{2a}{2a}=-1$.

∵当 $x\geqslant2$ 时,y 随 x 的增大而增大,∴ $a>0$.

∵ $-2\leqslant x\leqslant1$ 时,y 的最大值为 9,

∴当 $x=1$ 时,$y=a+2a+3a^2+3=9$.

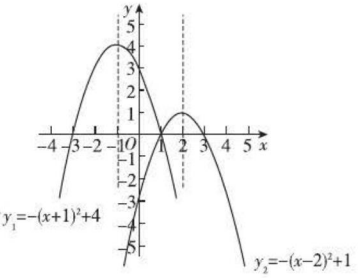
∴ $3a^2+3a-6=0$.

∴ $a=1$ 或 $a=-2$(不合题意,舍去).

7. > **点拨**:易知函数 $y=-(x-1)^2$ 的图象的对称轴是直线 $x=1$,开口向下,又函数图象上点 A,B 的坐标分别为$(2,y_1)$,(a,y_2),$a>2$,∴ $y_1>y_2$.

8. $(-2,0)$ **点拨**:∵抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 上的 $P(4,0)$,Q 两点关于它的对称轴 $x=1$ 对称,∴ P,Q 两点到对称轴 $x=1$ 的距离相等,∴ Q 点的坐标为$(-2,0)$.

9. 解:(1)如图.



(第9题)

(2)解$\begin{cases}y=k,\\y=-(x-2)^2+1,\end{cases}$得$\begin{cases}x=2+\sqrt{1-k},\\y=k\end{cases}$

或$\begin{cases}x=2-\sqrt{1-k},\\y=k.\end{cases}$

∵ $AB=4$,∴ $2\sqrt{1-k}=4$.

∴ $k=-3$.

∵抛物线 $y_2=-(x-2)^2+1$ 的顶点坐标为$(2,1)$,

∴抛物线 $y_2=-(x-2)^2+1$ 的顶点到线段 AB 的距离 $=4$.

(3)当 $-1<x<1$ 时,$y_1>y_2$;

当 $x=1$ 时,$y_1=y_2$;

当 $1<x<2$ 时,$y_1<y_2$.

10. 解:(1)将 $x=-2$ 代入 $y=kx^2+(2k-1)x-2$(k 为常数),得 $y=k\times(-2)^2+(2k-1)\times(-2)-2=0$,

故不论 k 取何值,此函数图象一定经过点$(-2,0)$.

(2)①若 $k=0$,则此函数为一次函数 $y=-x-2$,

当 $x>0$ 时,y 随 x 的增大而减小,∴ $k=0$ 符合题意;

荣德基

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

②若 $k\neq0$,则此函数为二次函数.

要使当 $x>0$ 时,y 随 x 的增大而减小,须满足 $k<0$ 且 $x=-\dfrac{2k-1}{2k}=\dfrac{1}{2k}-1\leqslant0$,$\therefore k<0$,

综上,k 的取值范围是 $k\leqslant0$.

(3)存在. ①若 $k=0$,此函数为一次函数 $y=-x-2$,

$\because x$ 的取值为全体实数,

$\therefore y$ 无最小值;

②若 $k\neq0$,此函数为二次函数,若存在最小值为 -3,

则 $\dfrac{-8k-(2k-1)^2}{4k}=-3$,且 $k>0$,

解得 $k=\dfrac{2\pm\sqrt{3}}{2}$,符合题意,

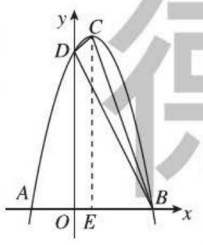
$\therefore$ 当 $k=\dfrac{2\pm\sqrt{3}}{2}$ 时,函数存在最小值 -3.

11. 解:(1)由抛物线的对称性知,它的对称轴是直线 $x=\dfrac{-2+4}{2}=1$. $\therefore$ 抛物线的顶点为 $C(1,9)$.

设抛物线的表达式为 $y=a(x-1)^2+9$,把 B 点的坐标代入,求得 $a=-1$.

$\therefore$ 抛物线的表达式是 $y=-(x-1)^2+9$,即 $y=-x^2+2x+8$.

(2)过 C 作 $CE\perp x$ 轴于 E 点,如图. 在 $y=-x^2+2x+8$ 中,当 $x=0$ 时,$y=8$,即抛物线与 y 轴的交点 D 的坐标为 $(0,8)$.



(第11题)

$\therefore S_{\triangle BCD}=S_{梯形DOEC}+S_{\triangle CEB}-S_{\triangle DOB}=\dfrac{1}{2}\times(8+9)\times1+\dfrac{1}{2}\times3\times9-\dfrac{1}{2}\times4\times8=6$.

12. 解:(1)将点 $B(3,0)$、$C(0,3)$ 的坐标代入 $y=x^2+bx+c$ 中,

得 $\begin{cases}0=9+3b+c,\\3=c,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}b=-4,\\c=3.\end{cases}$

$\therefore$ 抛物线的表达式为 $y=x^2-4x+3$.

(2)设点 M 的坐标为 (m,m^2-4m+3),设直线 BC 的表达式为 $y=kx+3$,把点 $B(3,0)$ 的坐标代入 $y=kx+3$ 中,得 $0=3k+3$,解得 $k=-1$.

$\therefore$ 直线 BC 的表达式为 $y=-x+3$.

$\because MN\parallel y$ 轴交直线 BC 于点 N,$\therefore$ 点 N 的坐标为 $(m,-m+3)$.

$\because$ 抛物线的表达式为 $y=x^2-4x+3=(x-2)^2-1$,

$\therefore$ 抛物线的对称轴为直线 $x=2$.

$\therefore$ 点 $(1,0)$ 在抛物线上. $\therefore1<m<3$.

$\because MN=-m+3-(m^2-4m+3)=-m^2+3m=-\left(m-\dfrac{3}{2}\right)^2+\dfrac{9}{4}$,

$\therefore$ 当 $m=\dfrac{3}{2}$ 时,线段 MN 取最大值,最大值为 $\dfrac{9}{4}$.

(3)存在. 点 P 的坐标为 $\left(2,\dfrac{1}{2}\right)$、$\left(2,-\dfrac{\sqrt{14}}{2}\right)$、$\left(2,\dfrac{\sqrt{14}}{2}\right)$、$\left(2,\dfrac{3-\sqrt{17}}{2}\right)$或$\left(2,\dfrac{3+\sqrt{17}}{2}\right)$.

13. 解:(1)当 $x=0$ 时,$y=2$,$\therefore C(0,2)$.

当 $y=0$ 时,$-\dfrac{1}{2}x^2+\dfrac{3}{2}x+2=0$,

解得 $x_1=4$,$x_2=-1$. $\therefore B(4,0)$,$A(-1,0)$.

(2)$\because$ 点 D 与点 C 关于 x 轴对称,

$\therefore D(0,-2)$.

设直线 BD 的表达式为 $y=kx+b$,

$\therefore\begin{cases}4k+b=0,\\b=-2.\end{cases}$ $\therefore\begin{cases}k=\dfrac{1}{2},\\b=-2.\end{cases}$

$\therefore y=\dfrac{1}{2}x-2$.

(3)$\because CD\parallel QM$,

$\therefore$ 当 $CD=QM$ 时,四边形 $CQMD$ 是平行四边形.

$\because$ 由题意易得 $Q\left(m,-\dfrac{1}{2}m^2+\dfrac{3}{2}m+2\right)$,

$M\left(m,\dfrac{1}{2}m-2\right)$,

$\therefore QM=-\dfrac{1}{2}m^2+\dfrac{3}{2}m+2+2-\dfrac{1}{2}m=-\dfrac{1}{2}m^2+m+4$.

$\because CD=4$,$\therefore-\dfrac{1}{2}m^2+m+4=4$. 解得 $m_1=0$,$m_2=2$.

$\because m=0$ 时,MQ 与 DC 重合,不能构成平行四边形,

$\therefore m=0$ 不符合题意,舍去.

$\therefore m=2$.

(4)①当 $\angle QBD=90°$,即 $QB\perp DB$ 时,

设直线 BQ 的表达式为 $y=-2x+b_1$,

将 $B(4,0)$ 的坐标代入得 $b_1=8$,

$\therefore y=-2x+8$.

$\because$ 点 Q 是直线 BQ 与抛物线的交点,

$\therefore-\dfrac{1}{2}x^2+\dfrac{3}{2}x+2=-2x+8$,

解得 $x_1=3$,$x_2=4$.

$\because B(4,0)$,$\therefore Q(3,2)$.

②当 $\angle QDB=90°$,即 $QD\perp DB$ 时,

设直线 QD 的表达式为 $y=-2x+b_2$,

将 $D(0,-2)$ 的坐标代入得 $b_2=-2$,

$\therefore y=-2x-2$.

$\because$ 点 Q 是直线 QD 与抛物线的交点,

$\therefore-\dfrac{1}{2}x^2+\dfrac{3}{2}x+2=-2x-2$,

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

解得 $x_1=8, x_2=-1$.

$\therefore Q(8,-18)$ 或 $Q(-1,0)$,

综上所述,点 Q 的坐标为(3,2),(8,-18),(-1,0).

26.2.3 求二次函数的表达式

【两年模拟兵法】

1. C **点拨:** 抛物线所对应的函数表达式为 $y=a(x+2)^2+3$,把点(-1,5)的坐标代入,得 $a=2$. $\therefore$ 抛物线所对应的函数表达式为 $y=2(x+2)^2+3$,即 $y=2x^2+8x+11$. 故选 C.

2. D **点拨:** 设其函数表达式为交点式,然后将抛物线与 y 轴的交点坐标代入求解即可.

3. D **点拨:** 设抛物线的表达式为 $y=a(x-x_1)(x-x_2)$,因为其形状及开口方向与抛物线 $y=-2x^2$ 相同,则 $a=-2$,又抛物线与 x 轴的两个交点为(-1,0),(3,0),则 $x_1=-1, x_2=3$,代入上式得该抛物线的函数表达式为 $y=-2(x+1)(x-3)=-2x^2+4x+6$,故选 D.

4. D **点拨:** 设二次函数的表达式为 $y=ax^2+bx+c$,由函数图象的对称性,得点(-1,-2),(0,1),(1,-2)在函数图象上,把点(-1,-2),(0,1),(1,-2)的坐标代入函数表达式,得 $\begin{cases}a-b+c=-2,\\c=1,\\a+b+c=-2,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=-3,\\b=0,\\c=1,\end{cases}$ 所以函数表达式为 $y=-3x^2+1$,当 $x=2$ 时 $y=-11$,故选 D.

5. $y=2x^2-1$ **点拨:** $\because$ 抛物线的顶点坐标为(0,-1),

$\therefore$ 可设该抛物线的表达式为 $y=ax^2-1$,

又二次函数的图象开口向上,$\therefore a>0$,

$\therefore$ 这个二次函数的表达式可以是 $y=2x^2-1$.

此题答案不唯一.

6. $y=-\frac{1}{2}x^2+3x$ 或 $y=\frac{1}{2}x^2-3x$ **点拨:** $\because$ 抛物线经过 $A(2,m), B(4,m)$. $\therefore$ 对称轴是直线 $x=3$, $AB=2$.

$\because \triangle AOB$ 的面积为 4.

$\therefore \frac{1}{2}AB\cdot|m|=4$. $\therefore m=\pm4$.

当 $m=4$ 时,$A(2,4), B(4,4)$.

设抛物线的表达式为 $y=a(x-3)^2+h$,

把点(0,0)和(2,4)的坐标代入得 $\begin{cases}9a+h=0,\\a+h=4,\end{cases}$

解得 $\begin{cases}a=-\frac{1}{2},\\h=\frac{9}{2},\end{cases}$

$\therefore$ 抛物线的表达式为 $y=-\frac{1}{2}(x-3)^2+\frac{9}{2}=-\frac{1}{2}x^2+3x$;

当 $m=-4$ 时,$A(2,-4), B(4,-4)$.

设抛物线的表达式为 $y=a_1(x-3)^2+h_1$,

把点(0,0)和(2,-4)的坐标代入得 $\begin{cases}9a_1+h_1=0,\\a_1+h_1=-4,\end{cases}$

解得 $\begin{cases}a_1=\frac{1}{2},\\h_1=-\frac{9}{2},\end{cases}$

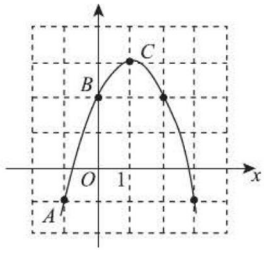
$\therefore$ 抛物线的表达式为 $y=\frac{1}{2}(x-3)^2-\frac{9}{2}=\frac{1}{2}x^2-3x$.

综上所述,抛物线的表达式为 $y=-\frac{1}{2}x^2+3x$ 或 $y=\frac{1}{2}x^2-3x$.

7. **解:** (1)根据题意,得 $\begin{cases}a-b+c=-1,\\c=2,\\a+b+c=3.\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=-1,\\b=2,\\c=2.\end{cases}$

所以二次函数的表达式为 $y=-x^2+2x+2$.

(2)如图.



(第 7 题)

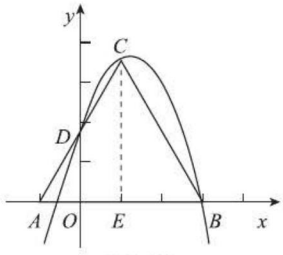
8. **解:** (1)如图,过点 C 作 $CE\perp AB$ 交 x 轴于点 E.

$\because \triangle ABC$ 是正三角形,

$\therefore AB=AC=BC=4$. 又点 A 的坐标为(-1,0),

$\therefore$ 点 B 的坐标为(3,0),点 E 的坐标为(1,0),

$\therefore AE=2$.



(第 8 题)

在 $\mathrm{Rt}\triangle ACE$ 中,$CE=\sqrt{AC^2-AE^2}=2\sqrt{3}$,

$\therefore$ 点 C 的坐标为$(1,2\sqrt{3})$.

$\because CE/\!/DO$, $\therefore \frac{DO}{CE}=\frac{AO}{AE}$, $\therefore DO=\sqrt{3}$,

$\therefore$ 点 D 的坐标为$(0,\sqrt{3})$.

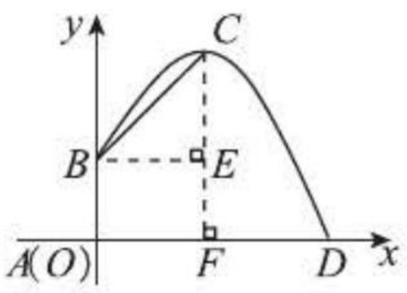
关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

(2)由抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 经过 B,C,D 三点,

得 $\begin{cases} c=\sqrt{3}, \\ a+b+c=2\sqrt{3}, \\ 9a+3b+c=0, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} a=-\frac{2}{3}\sqrt{3}, \\ b=\frac{5}{3}\sqrt{3}, \\ c=\sqrt{3}. \end{cases}$

∴ 抛物线的表达式为 $y=-\frac{2}{3}\sqrt{3}x^2+\frac{5}{3}\sqrt{3}x+\sqrt{3}$.

9. 解:如图,过点 C 作 $CF\perp AD$ 于点 F,过点 B 作 $BE\perp CF$ 于点 E. 易知 $OF=BE=CE=2\text{m}$, $EF=OB=1.5\text{m}$, $CF=2+1.5=3.5(\text{m})$,



(第9题)

∴ $B(0,1.5)$, $C(2,3.5)$.

设抛物线所对应的函数表达式为 $y=a(x-2)^2+3.5$.

当 $x=0$ 时,有 $a(0-2)^2+3.5=1.5$,解得 $a=-\frac{1}{2}$.

∴ 抛物线所对应的函数表达式为 $y=-\frac{1}{2}(x-2)^2+3.5$.

令 $y=0$,则 $-\frac{1}{2}(x-2)^2+3.5=0$,

解得 $x_1=2+\sqrt{7}$, $x_2=2-\sqrt{7}$(舍去).

答:水流的落地点 D 到 A 的距离为 $(2+\sqrt{7})\text{m}$.

10. 解:(1)∵ 抛物线与 y 轴交于点 $B(0,3)$,

∴ 设抛物线对应的函数表达式为 $y=ax^2+bx+3$.

根据题意,得 $\begin{cases} a-b+3=0, \\ 9a+3b+3=0. \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} a=-1, \\ b=2. \end{cases}$

∴ 抛物线对应的函数表达式为 $y=-x^2+2x+3$.

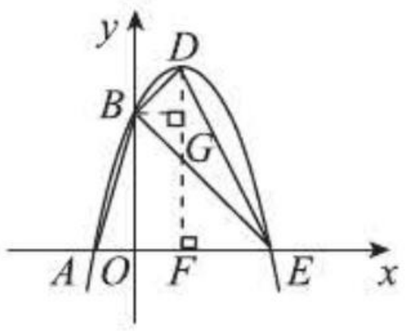
(2)由顶点坐标公式得顶点坐标为 $D(1,4)$.

如图,过点 D 作 $DF\perp x$ 轴于点 F.

∴ $S_{\text{四边形}ABDE}=S_{\text{三角形}ABO}+S_{\text{梯形}BOFD}+S_{\text{三角形}DFE}$

$=\frac{1}{2}AO\cdot BO+\frac{1}{2}(BO+DF)\cdot OF+\frac{1}{2}EF\cdot DF$

$=\frac{1}{2}\times1\times3+\frac{1}{2}\times(3+4)\times1+\frac{1}{2}\times2\times4=9$.



(第10题)

(3)相似. 证明如下:

如图,过点 B 作 $BG\perp DF$ 于点 G,则 $BD=\sqrt{BG^2+DG^2}=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$.

∵ $BE=\sqrt{BO^2+OE^2}=\sqrt{3^2+3^2}=3\sqrt{2}$,

$DE=\sqrt{DF^2+EF^2}=\sqrt{4^2+2^2}=2\sqrt{5}$,

∴ $BD^2+BE^2=20$, $DE^2=20$,则 $BD^2+BE^2=DE^2$,

∴ $\triangle BDE$ 是直角三角形且 $\angle DBE=90°$.

∴ $\angle AOB=\angle DBE=90°$.

∵ $\frac{AO}{BD}=\frac{BO}{BE}=\frac{\sqrt{2}}{2}$,

∴ $\triangle AOB\backsim\triangle DBE$.

26.3 实践与探索

26.3.1 建立二次函数模型解决实际问题

【两年模拟兵法】

1. B **点拨**:本题考查二次函数的应用,求出抛物线的表达式是解题的关键. 由题意,设抛物线的表达式为 $h=at(t-9)$,把 $t=1$, $h=8$ 代入可得 $a=-1$,所以 $h=-t^2+9t=-(t-4.5)^2+20.25$,由此即可一一判断.

2. B **点拨**:根据题意知,抛物线 $y=ax^2+bx+c(a\neq0)$ 经过点 $(0,54.0)$, $(40,46.2)$, $(20,57.9)$,

则 $\begin{cases} c=54.0, \\ 1\,600a+40b+c=46.2, \\ 400a+20b+c=57.9, \end{cases}$

解得 $\begin{cases} a=-0.0195, \\ b=0.585, \\ c=54.0. \end{cases}$

∴ $x=-\frac{b}{2a}=-\frac{0.585}{2\times(-0.0195)}=15$.

本题考查了二次函数的应用,此题也可以利用配方法将所求得的抛物线表达式转化为顶点式,然后直接得到抛物线顶点坐标,由顶点坐标求出该运动员起跳后飞行到最高点时的水平距离.

3. C **点拨**:本题主要考查了二次函数的应用,正确设出抛物线的表达式是解题的关键. 首先设抛物线的一般形式为 $y=ax^2$,再得出抛物线上一点的坐标为 $(2,-2)$,进而求出 a 的值.

4. B **点拨**:(1)当 $0\leqslant x\leqslant4$ 时,由题意可知, $y=S_{\triangle ABD}-S_{\triangle APQ}=\frac{1}{2}\times4\times4-\frac{1}{2}\cdot x\cdot x=-\frac{1}{2}x^2+8$;

(2)当 $4<x\leqslant8$ 时, $y=S_{\triangle BCD}-S_{\triangle CPQ}=\frac{1}{2}\times4\times4-\frac{1}{2}(8-x)\cdot(8-x)=-\frac{1}{2}(x-8)^2+8$, ∴ y 与 x 之间的函数关系可以用两段二次函数图象表示,分析可知 B 选项符合.

5. 解:(1)依题意得 $\begin{cases} 10m+n=166\,000, \\ 30m+n=178\,000, \end{cases}$

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

解得$\begin{cases}m=600,\\n=160\ 000.\end{cases}$

(2)①当$0\leqslant t\leqslant 20$时,设$y=k_1t+b_1$,由图象得

$\begin{cases}b_1=16,\\20k_1+b_1=28.\end{cases}$解得$\begin{cases}k_1=\frac{3}{5},\\b_1=16.\end{cases}$

$\therefore y=\frac{3}{5}t+16.$

②当$20<t\leqslant 50$时,设$y=k_2t+b_2$,由图象得

$\begin{cases}20k_2+b_2=28,\\50k_2+b_2=22.\end{cases}$解得$\begin{cases}k_2=-\frac{1}{5},\\b_2=32.\end{cases}$

$\therefore y=-\frac{1}{5}t+32.$

综上,$y=\begin{cases}\frac{3}{5}t+16(0\leqslant t\leqslant 20),\\-\frac{1}{5}t+32(20<t\leqslant 50).\end{cases}$

(3)$W=ya-mt-n.$

①当$0\leqslant t\leqslant 20$时,$W=10\ 000\left(\frac{3}{5}t+16\right)-600t-160\ 000=5\ 400t.$

$\because 5\ 400>0,$

$\therefore$当$t=20$时,$W_{最大}=5\ 400\times 20=108\ 000.$

②当$20<t\leqslant 50$时,$W=\left(-\frac{1}{5}t+32\right)(100t+8\ 000)-600t-160\ 000$

$=-20t^2+1\ 000t+96\ 000$

$=-20(t-25)^2+108\ 500.$

$\because -20<0,$

$\therefore$抛物线的开口向下,

$\therefore$当$t=25$时,$W_{最大}=108\ 500.$

$\because 108\ 500>108\ 000,$

$\therefore$当$t=25$时,W取得最大值,该最大值为108 500.

答:该龙虾养殖大户将这批小龙虾放养25天后一次性出售所得利润最大,最大利润是108 500元.

6. **解**:(1)由题可得活动区出口的宽度为$(100-2x)$m,则其中一块绿化区的短边长为$\frac{80-(100-2x)}{2}=(x-10)$m,

则$y=60\times[100\times 80-4x(x-10)]+50\times 4x(x-10)$

$=-40x^2+400x+480\ 000,$

$\because 50\leqslant 100-2x\leqslant 60,$

$\therefore 20\leqslant x\leqslant 25.$

$\therefore y$与x的函数表达式为$y=-40x^2+400x+480\ 000(20\leqslant x\leqslant 25).$

(2)能.要完成工程任务,则$y=-40x^2+400x+480\ 000\leqslant 469\ 000,$

化简并整理得,$(x-5)^2-300\geqslant 0,$

解得$x\geqslant 10\sqrt{3}+5$或$x\leqslant -10\sqrt{3}+5$(舍去),

$\therefore 10\sqrt{3}+5\leqslant x\leqslant 25.$

$\because x$为整数,$\therefore x$的可能取值为23,24,25.

7. **解**:(1)由题意,得$\begin{cases}a-b+1=0,\\a+b+1=1,\end{cases}$解得$\begin{cases}a=-\frac{1}{2},\\b=\frac{1}{2}.\end{cases}$

$\therefore$抛物线的表达式为$y=-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}x+1.$

(2)①由直线$y=3x-1$与直线$y=mx+2$互相垂直,得$3m=-1$,即$m=-\frac{1}{3}.$

②由题意易得直线AB的表达式为$y=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$,

当$PA\perp AB$时,直线PA的表达式为$y=-2x-2.$

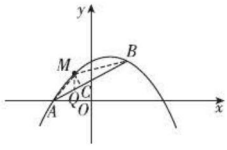
$\because$点P是直线PA与抛物线的交点,$\therefore$联立方程组,得$\begin{cases}y=-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}x+1,\\y=-2x-2,\end{cases}$

解得$\begin{cases}x_1=-1,\\y_1=0,\end{cases}\begin{cases}x_2=6,\\y_2=-14,\end{cases}\therefore P(6,-14).$

当$PB\perp AB$时,直线PB的表达式为$y=-2x+3$,易得$P(4,-5).$

综上所述,存在点$P(6,-14)$或$P(4,-5)$,使得$\triangle PAB$是以AB为直角边的直角三角形.

(3)如图,连结$MA,MB.$



(第7题)

设$M\left(t,-\frac{1}{2}t^2+\frac{1}{2}t+1\right)$,过$M$作$MQ\parallel y$轴,交$AB$于$Q$,

则$Q\left(t,\frac{1}{2}t+\frac{1}{2}\right),\therefore MQ=-\frac{1}{2}t^2+\frac{1}{2}.$

$\because S_{\triangle MAB}=\frac{1}{2}MQ|x_B-x_A|=\frac{1}{2}\times\left(-\frac{1}{2}t^2+\frac{1}{2}\right)\times 2=-\frac{1}{2}t^2+\frac{1}{2},$

$\therefore$当$t=0$时,$S_{\triangle MAB}$取最大值$\frac{1}{2}.$

易得$AB=\sqrt{(1+1)^2+1^2}=\sqrt{5}$,过$M$作$MC\perp AB$于$C$,则$M$到直线$AB$的距离为$MC$的长,由三角形的面积得,$MC$的最大值为$=\frac{1}{\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{5}}{5}.$

$\therefore$点M到直线AB的距离的最大值是$\frac{\sqrt{5}}{5}.$

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

26.3.2 二次函数与一元二次方程、一元二次不等式之间的关系

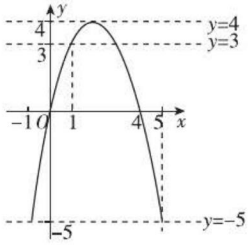
【两年模拟兵法】

1. C 2. C

3. D **点拨**:如图,关于x的一元二次方程$-x^2+mx-t=0$的解就是抛物线$y=-x^2+mx$与直线$y=t$的交点的横坐标. 由题易知$m=4$,

∴ 当$x=1$时,$y=3$,当$x=5$时,$y=-5$,当$x=2$时,$y=4$,由图象可知要使关于x的一元二次方程$-x^2+mx-t=0$(t为实数)在$1<x<5$的范围内有解,可得直线$y=t$在直线$y=-5$和直线$y=4$之间包括直线$y=4$,

∴ $-5<t\leqslant 4$,故答案为D.



(第3题)

4. A **点拨**:本题考查了二次函数的图象与x轴的交点问题、一元二次方程的解,正确理解题意是解题的关键,二次函数$y=ax^2+1$的图象经过点$(-2,0)$,得到$4a+1=0$,求得$a=-\frac{1}{4}$,代入方程$a(x-2)^2+1=0$求解即可得到结论.

5. B **点拨**:本题考查二次函数的图象与性质.

6. B

7. (1)**证明**:$y=(x-m)^2-(x-m)=x^2-(2m+1)x+m^2+m$.

∵ $\Delta=(2m+1)^2-4(m^2+m)=1>0$,

∴ 不论m为何值,该抛物线与x轴一定有两个公共点.

(2)**解**:①∵ 抛物线的对称轴为直线

$x=-\frac{-(2m+1)}{2}=\frac{5}{2}$,

∴ $m=2$,

∴ 抛物线对应的函数表达式为$y=x^2-5x+6$.

②设抛物线沿y轴向上平移k个单位长度后,得到的抛物线与x轴只有一个公共点,则平移后抛物线对应的函数表达式为$y=x^2-5x+6+k$.

∵ 抛物线$y=x^2-5x+6+k$与x轴只有一个公共点,

∴ $\Delta=5^2-4(6+k)=0$,解得$k=\frac{1}{4}$.

即把该抛物线沿y轴向上平移$\frac{1}{4}$个单位长度后,得到的抛物线与x轴只有一个公共点.

注意:(1)也可以用求解法来证明;

(2)②也可以用平移顶点法求解.

8. **解**:(1)$y=(x-50)[50+5(100-x)]$

$=(x-50)(-5x+550)$

$=-5x^2+800x-27\,500$,

故$y=-5x^2+800x-27\,500(50\leqslant x\leqslant 100)$.

(2)∵ $y=-5x^2+800x-27\,500$

$=-5(x-80)^2+4\,500$,

∴ 当$x=80$时,$y_{最大值}=4\,500$.

∴ 销售单价为80元时,每天的销售利润最大,最大利润为4 500元.

(3)当$y=4\,000$时,$-5(x-80)^2+4\,500=4\,000$,

解方程,得$x_1=70$,$x_2=90$.

∴ 当$70\leqslant x\leqslant 90$时,每天的销售利润不低于4 000元.

由每天的总成本不超过7 000元,得$50(-5x+550)\leqslant 7\,000$,解不等式,得$x\geqslant 82$.

又$50\leqslant x\leqslant 100$,

∴ $82\leqslant x\leqslant 100$.

∴ 当$82\leqslant x\leqslant 100$时,每天的总成本不超过7 000元.

综上可知,销售单价应控制在82元至90元之间(包含82元和90元).

素养提分整合篇

【好题必解】

1. **解**:∵ 直线$y=\frac{1}{2}x-2$交x轴、y轴于B,C两点,

∴ $B(4,0)$,$C(0,-2)$.

又∵ 抛物线$y=ax^2-\frac{3}{2}x+c$过B,C两点,

∴ $\begin{cases}0=16a-6+c,\\-2=c,\end{cases}$

解得$\begin{cases}a=\frac{1}{2},\\c=-2.\end{cases}$

∴ 该抛物线对应的函数表达式为$y=\frac{1}{2}x^2-\frac{3}{2}x-2$.

2. **解**:(1)由二次函数$y=ax^2+bx+c(a\neq 0)$的图象可知,抛物线与x轴交于$(1,0)$,$(3,0)$两点,即$x_1=1$,$x_2=3$是方程$ax^2+bx+c=0$的两个根.

(2)由题图可知$1<x<3$.

(3)∵ $a<0$,∴ 在对称轴的右侧,y随x的增大而减小,即当$x>2$时,y随x的增大而减小.

(4)若方程$ax^2+bx+c=k$有两个不相等的实数根,即函数图象与平行于x轴的直线有两个不同的交点,观察图象可知,当$k<2$时,满足条件.

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

3. 解:(1)由题意得,点 C 的坐标为 $(2,2\sqrt{3})$.

设抛物线的表达式为 $y=a(x-4)^2+m(a\neq0)$.

由抛物线经过点 $O(0,0)$,$C(2,2\sqrt{3})$,

可得 $\begin{cases}16a+m=0,\\4a+m=2\sqrt{3},\end{cases}$

解得 $\begin{cases}a=-\dfrac{\sqrt{3}}{6},\\m=\dfrac{8\sqrt{3}}{3}.\end{cases}$

∴ 抛物线的表达式为 $y=-\dfrac{\sqrt{3}}{6}(x-4)^2+\dfrac{8\sqrt{3}}{3}$.

设直线 AC 的表达式为 $y=kx+b(k\neq0)$.

由直线 AC 过点 $A(-4,0)$,$C(2,2\sqrt{3})$,

可得 $\begin{cases}-4k+b=0,\\2k+b=2\sqrt{3},\end{cases}$

解得 $\begin{cases}k=\dfrac{\sqrt{3}}{3},\\b=\dfrac{4\sqrt{3}}{3}.\end{cases}$

∴ 直线 AC 的表达式为 $y=\dfrac{\sqrt{3}}{3}x+\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$.

对于 $y=\dfrac{\sqrt{3}}{3}x+\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$,

令 $x=4$,则 $y=\dfrac{8\sqrt{3}}{3}$,

∴ 点 E 的坐标为 $(4,\dfrac{8\sqrt{3}}{3})$.

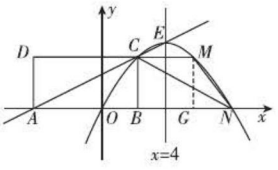
把 $x=4$ 代入抛物线的表达式,

得 $y=-\dfrac{\sqrt{3}}{6}(4-4)^2+\dfrac{8\sqrt{3}}{3}=\dfrac{8\sqrt{3}}{3}$.

∴ 此抛物线一定过点 E.

(2)由题意知,(1)中的抛物线与 x 轴的另一个交点为 $N(8,0)$.

设点 M 的坐标为 (x,y),过点 M 作 $MG\perp x$ 轴于点 G,如图,



(第3题)

则 $S_{\triangle CMN}=S_{\triangle MGN}+S_{四边形MGBC}-S_{\triangle BCN}$

$=\dfrac{1}{2}(8-x)y+\dfrac{1}{2}(y+2\sqrt{3})(x-2)-\dfrac{1}{2}\times(8-2)\times2\sqrt{3}$

$=3y+\sqrt{3}x-8\sqrt{3}$

$=3\left[-\dfrac{\sqrt{3}}{6}(x-4)^2+\dfrac{8\sqrt{3}}{3}\right]+\sqrt{3}x-8\sqrt{3}$

$=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}x^2+5\sqrt{3}x-8\sqrt{3}$

$=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}(x-5)^2+\dfrac{9\sqrt{3}}{2}$.

∵ $2<x<8$,

∴ 当 $x=5$ 时,$S_{\triangle CMN}$ 有最大值,且最大值为 $\dfrac{9\sqrt{3}}{2}$.

故△CMN 面积的最大值为 $\dfrac{9\sqrt{3}}{2}$.

4. 解:(1)建平面直角坐标系方法不唯一.

以 AB 所在直线为横轴,AB 的垂直平分线为纵轴建立如图的平面直角坐标系,则 A,B,C 三点的坐标分别是 $(-10,0)$,$(10,0)$,$(0,6)$.

由此设抛物线对应的函数表达式为 $y=ax^2+6$ $(a\neq0)$,将点 B 的坐标代入,得 $100a+6=0$,

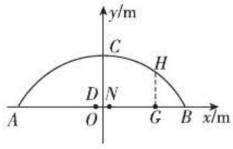
解得 $a=-\dfrac{3}{50}$.

∴ 抛物线所对应的函数表达式是 $y=-\dfrac{3}{50}x^2+6$.

(2)可设 $F(5,y_F)$,于是 $y_F=-\dfrac{3}{50}\times5^2+6=4.5$.

∴ 支柱 EF 的长度是 $10-4.5=5.5$(m).

(3)如图,设 DN 为隔离带的宽,NG 是三辆汽车的宽度和,则易得点 G 的坐标是(7,0).



(第4题)

过点 G 作 $GH\perp AB$,交抛物线于点 H,则 $y_H=-\dfrac{3}{50}\times7^2+6=3.06>3$.

故一条行车道能并排行驶宽 2 m、高 3 m 的三辆汽车.

【第26章测试卷】

一、**1.** D **2.** B **3.** C **4.** B **5.** D **6.** D **7.** B **8.** C

二、**9.** 8 **10.** 15

11. 75 **12.** $y=\dfrac{1}{2}x-1$

三、**13. 解:**(1)$y=x^2-4x+3=(x-2)^2-1$.

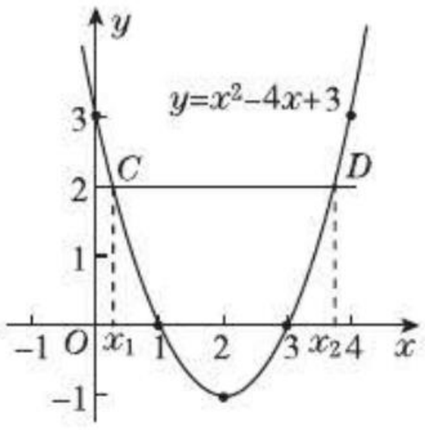
(2)对称轴为直线 $x=2$,顶点为 $(2,-1)$.

列表如下:

x	…	0	1	2	3	4	…
y	…	3	0	−1	0	3	…

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

描点、连线,如图.



(第13题)

(3)如图,点 C,D 的横坐标 x_1,x_2 即为方程 $x^2-4x+3=2$ 的两个根.

14. 解:(1)由图象可知:

$B(2,4)$ 在二次函数 $y_2=ax^2$ 的图象上,

$\therefore 4=a\cdot 2^2$.

$\therefore a=1$.

$\therefore y_2=x^2$.

又$\because A(-1,n)$ 在二次函数 $y_2=x^2$ 的图象上,

$\therefore n=(-1)^2$.

$\therefore n=1$.

$\therefore A(-1,1)$.

又$\because A,B$ 两点在一次函数 $y_1=kx+b$ 的图象上,

$\therefore \begin{cases}1=-k+b,\\4=2k+b,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}k=1,\\b=2.\end{cases}$

$\therefore y_1=x+2$.

$\therefore$ 一次函数的表达式为 $y_1=x+2$,二次函数的表达式为 $y_2=x^2$.

(2)根据图象可知:当 $-1<x<2$ 时,$y_1>y_2$.

15. 解:(1)由题意知,抛物线的顶点为(4,4),经过点 $(0,\frac{20}{9})$.

设抛物线的表达式为 $y=a(x-4)^2+4$,

将 $(0,\frac{20}{9})$ 代入,解得 $a=-\frac{1}{9}$,

$\therefore y=-\frac{1}{9}(x-4)^2+4$.

当 $x=7$ 时,$y=-\frac{1}{9}\times(7-4)^2+4=3$,

$\therefore$ 此球能准确投中.

(2)当 $x=1$ 时,

$y=-\frac{1}{9}\times(1-4)^2+4=3<3.1$,

$\therefore$ 他能获得成功.

16. 解:(1)设函数关系式为 $y=kt+b(k\neq 0)$.

将(1,198),(80,40)代入,得 $\begin{cases}k+b=198,\\80k+b=40,\end{cases}$

解得 $\begin{cases}k=-2,\\b=200,\end{cases}$

$\therefore y=-2t+200(1\leqslant t\leqslant 80,t$ 为整数).

(2)设日销售利润为 w 元,则 $w=(p-6)y$.

①当 $1\leqslant t\leqslant 40$ 时,$w=(\frac{1}{4}t+16-6)(-2t+200)=-\frac{1}{2}(t-30)^2+2\,450$,

$\therefore$ 当 $t=30$ 时,$w_{最大}=2\,450$.

②当 $41\leqslant t\leqslant 80$ 时,$w=(-\frac{1}{2}t+46-6)(-2t+200)=(t-90)^2-100$,

$\therefore$ 当 $t=41$ 时,$w_{最大}=2\,301$.

$\because 2\,450>2\,301$,

$\therefore$ 第30天的日销售利润最大,最大利润为2 450元.

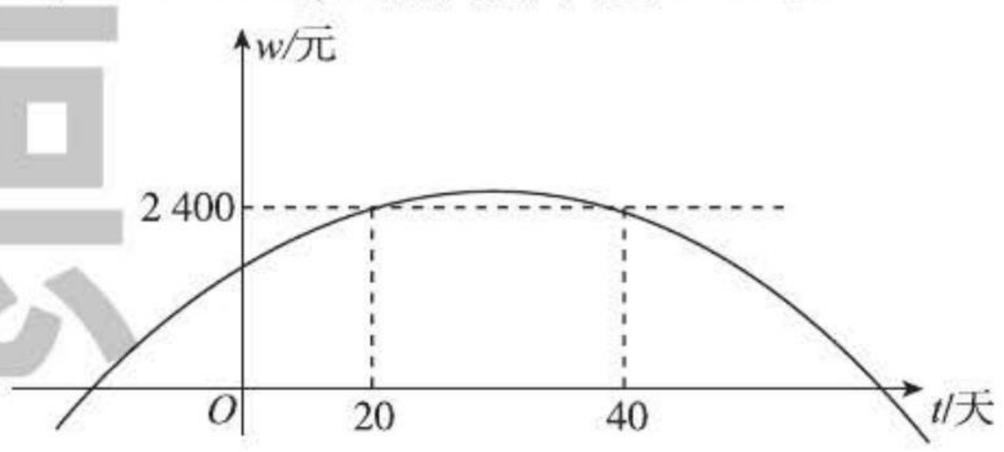
(3)由(2)得当 $1\leqslant t\leqslant 40$ 时,$w=-\frac{1}{2}(t-30)^2+2\,450$,

令 $w=2\,400$,即 $-\frac{1}{2}(t-30)^2+2\,450=2\,400$,

解得 $t_1=20,t_2=40$,

由函数 $w=-\frac{1}{2}(t-30)^2+2\,450$ 的图象(如图)可知,

当 $20\leqslant t\leqslant 40$ 时,日销售利润不低于2 400元.



(第16题)

而当 $41\leqslant t\leqslant 80$ 时,$w_{最大}=2\,301<2\,400$,

$\therefore t$ 的取值范围是 $20\leqslant t\leqslant 40$,$t$ 为整数,

$\therefore$ 该养殖户有21天日销售利润不低于2 400元.

(4)设每天扣除捐赠后的日销售利润为 w_1 元,根据题意,得

$w_1=(\frac{1}{4}t+16-6-m)(-2t+200)=-\frac{1}{2}t^2+(30+2m)t+2\,000-200m$.

其函数图象的对称轴为直线 $t=2m+30$,

$\because w_1$ 随 t 的增大而增大,且 $1\leqslant t\leqslant 40$,

$\therefore$ 由二次函数的图象及其性质可知 $2m+30\geqslant 40$,解得 $m\geqslant 5$,

又 $m<7$,$\therefore 5\leqslant m<7$.

17. 解:(1)由矩形的性质可知:$B(-8,6)$,

$\therefore D(-4,6)$.

$\therefore$ 点 D 关于 y 轴的对称点 D' 的坐标为(4,6).

将 $A(-8,0),D(-4,6)$ 的坐标代入 $y=ax^2+bx$,得

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

$\begin{cases}64a-8b=0,\\16a-4b=6,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=-\frac{3}{8},\\b=-3.\end{cases}$

(2)连结 AD',AD'与 y 轴的交点即为点 P. 设直线 AD' 的表达式为 $y=kx+n$,

则 $\begin{cases}-8k+n=0,\\4k+n=6,\end{cases}$

解得 $\begin{cases}k=\frac{1}{2},\\n=4.\end{cases}$

∴ 直线 $y=\frac{1}{2}x+4$ 与 y 轴交于点$(0,4)$.

∴ $P(0,4)$.

(3)由于 $OP=4$,故将抛物线向下平移 4 个单位长度时,有 OA_1+OD_1最短.

∴ 此时的表达式为$y=-\frac{3}{8}x^2-3x-4$.

第27章 圆

27.1 圆的认识

27.1.1 圆的基本元素

【两年模拟兵法】

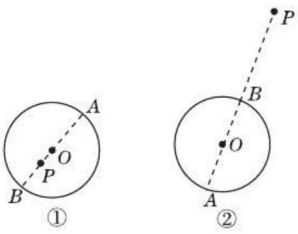
1. B **2.** C **3.** A **4.** B

5. D **点拨:**若点 P 在⊙O 内,如图①,连结 OP 并向两端延长交⊙O 于点 A,B,则最大距离 $PA=8$,最小距离 $PB=4$,

∴ $AB=8+4=12$;若点 P 在⊙O 外,如图②,连结 OP 交⊙O 于点 B,延长 PO 交⊙O 于点 A,则最大距离 $PA=8$,最小距离$PB=4$,

∴ $AB=8-4=4$.

故选 D.



(第5题)

6. **证明:**∵ OA,OB 是⊙O 的两条半径,

∴ $AO=BO$.

∵ $AC=BD$,∴ $OC=OD$.

在△OCB 和△ODA 中,

$\begin{cases}BO=AO,\\\angle O=\angle O,\\OC=OD,\end{cases}$

∴ △OCB≌△ODA.

∴ $AD=BC$.

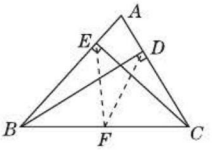
点拨:首先证明 $OC=OD$,再证明△OCB≌△ODA,进而得到 $AD=BC$.

7. **证明:**如图,取 BC 的中点 F,连结 DF,EF.

∵ BD,CE 是△ABC 的高,

∴ △BCD 和△BCE 都是直角三角形.

∴ DF,EF 分别为Rt△BCD和Rt△BCE 斜边上的中线.



(第7题)

∴ $DF=EF=\frac{1}{2}BC=BF=CF$.

∴ E,B,C,D 四点在以 F 点为圆心,$\frac{1}{2}BC$ 为半径的圆上.

8. **证明:**∵ $OC\perp AB$,

∴ $\angle COF=\angle BOE=90°$.

又∵ $OC=OB$,$OF=OE$.

∴ △OCF≌△OBE.

∴ $\angle B=\angle C$.

又∵ $\angle C+\angle CFO=\angle COB=90°$,

∴ $\angle B+\angle CFO=\angle BGC=90°$.

∴ $BG\perp CF$.

9. **证明:**∵ AB,CD 是⊙O 的两条直径,

∴ $OA=OB=OC=OD$.

∵ E,F 分别是 OA,OB 的中点,

∴ $OE=\frac{1}{2}OA$,$OF=\frac{1}{2}OB$.

∴ $OE=OF$.

在四边形 $CEDF$ 中,

∵ $OC=OD$,$OE=OF$,

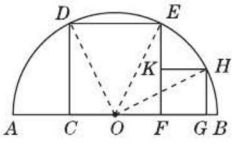
∴ 四边形 $CEDF$ 为平行四边形.

10. (1)**证明:**如图,连结 OD,OE,则 $OD=OE$. 又$\angle OCD=\angle OFE=90°$,$DC=EF$,

∴ Rt△ODC≌Rt△OEF.

∴ $OC=OF$.

(2)**解:**如图,连结 OH.



(第10题)

∵ $CF=EF=2$,

∴ $OF=1$,∴ $OH^2=OE^2=1^2+2^2=5$.

设 $FG=GH=x$,则$(x+1)^2+x^2=5$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

$\therefore x^2+x-2=0.$

解得 $x_1=1, x_2=-2$(舍去).

$\therefore S_{正方形FGHK}=1^2=1.$

27.1.2 圆的对称性

【两年模拟兵法】

1. B **点拨:** $\because$ 在$\odot O$中,$\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{AC}$,

$\therefore AB=AC. \therefore \angle B=\angle C.$

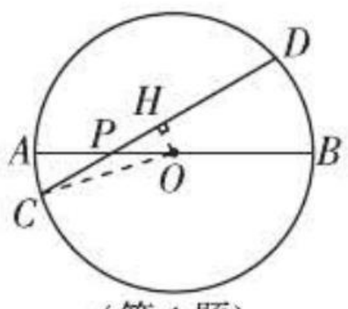
又$\because \angle A=30°$,

$\therefore \angle B=\dfrac{180°-30°}{2}=75°.$

故选 B.

2. C **3.** A

4. C **点拨:** 作 $OH\perp CD$ 于 H,连结 OC,如图. 根据垂径定理由 $OH\perp CD$ 得到 $HC=HD$,再利用 $AP=2, BP=6$ 可计算出半径 $OA=4$,则 $OP=OA-AP=2$. 接着在 Rt$\triangle OPH$中根据含30°角的直角三角形的性质计算出 $OH=\dfrac{1}{2}OP=1$,然后在Rt$\triangle OHC$中利用勾股定理计算出 $CH=\sqrt{15}$,所以$CD=2CH=2\sqrt{15}$.



(第4题)

5. B **点拨:** 由垂线段最短可知当 $OM\perp AB$ 时最短,当 OM 是半径时最长,根据垂径定理求最短长度.

6. C **点拨:** 设$\odot O$的半径为 r 寸.

在 Rt$\triangle ADO$ 中,$AD=5$ 寸,$OD=(r-1)$寸,$OA=r$ 寸,

则有 $r^2=5^2+(r-1)^2$,

解得 $r=13$,

$\therefore \odot O$ 的直径为 26 寸.

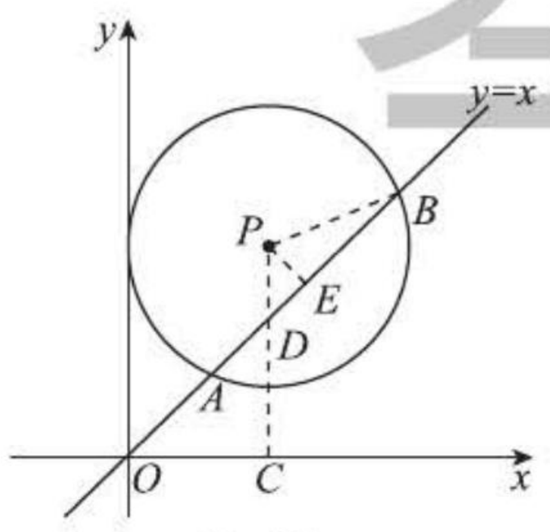
7. B **点拨:** 如图,作 $PC\perp x$ 轴于点 C,交 AB 于点 D,作 $PE\perp AB$ 于点 E,连结 PB.

$\because \odot P$ 的圆心坐标是 $(3,a)$,

$\therefore OC=3, PC=a.$ 把 $x=3$ 代入 $y=x$,得 $y=3$,

$\therefore CD=3, \therefore \triangle OCD$ 为等腰直角三角形,

$\therefore \triangle PED$ 也为等腰直角三角形.



(第7题)

$\because PE\perp AB, \therefore AE=BE=\dfrac{1}{2}AB=\dfrac{1}{2}\times 4\sqrt{2}=2\sqrt{2}.$

在 Rt$\triangle PBE$ 中,$PB=3, BE=2\sqrt{2}$,

$\therefore PE=\sqrt{3^2-(2\sqrt{2})^2}=1,$

$\therefore PD=\sqrt{PE^2+DE^2}=\sqrt{2},$

$\therefore a=3+\sqrt{2}.$

8. 60°

9. $\left(-3,\dfrac{3}{2}\right)$ **点拨:** 过圆心 O_1 作 $O_1C\perp AB$ 于点 C,连结 O_1B,易知 $AB=4, \therefore BC=2, \therefore OC=3$. 在Rt$\triangle O_1CB$中,$O_1C=\sqrt{\left(\dfrac{5}{2}\right)^2-2^2}=\dfrac{3}{2}$, $\therefore$ 圆心 O_1 的坐标为 $\left(-3,\dfrac{3}{2}\right)$.

10. **解:** $AE=BF$. 理由如下:

如图,连结 OC, OD.

$\because \overset{\frown}{AC}=\overset{\frown}{BD},$

$\therefore \angle COE=\angle DOF.$

$\because CE\perp AB, DF\perp AB,$

$\therefore \angle CEO=\angle DFO=90°.$

又$\because OC=OD,$

$\therefore \triangle OCE\cong\triangle ODF.$

$\therefore OE=OF.$

又$\because OA=OB,$

$\therefore AE=BF.$

(第10题)

11. **解:** (1)在$\odot O$中,$\because \overset{\frown}{AD}=\overset{\frown}{BC},$

$\therefore \angle AOD=\angle BOC.$

又$\because AB$ 是$\odot O$的直径,$\angle COD=60°.$

$\therefore \angle AOD=\angle BOC=60°.$

$\because AB, CE$ 是$\odot O$的直径,

$\therefore \angle AOE=\angle BOC=60°.$

$\therefore$ 与$\angle AOE$ 相等的圆心角有$\angle AOD, \angle DOC, \angle BOC.$

(2)由(1)易知,$AE=AD=DC=BC,$

$\therefore$ 与 AE 相等的弦有 $AD, DC, BC.$

12. **证明:** 连结 AF.

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形,

$\therefore AD\parallel BC.$

$\therefore \angle GAE=\angle B, \angle EAF=\angle AFB.$

$\because AB=AF, \therefore \angle B=\angle AFB.$

$\therefore \angle GAE=\angle EAF.$

$\therefore \overset{\frown}{GE}=\overset{\frown}{EF}.$

$\therefore \overset{\frown}{GF}=2\overset{\frown}{GE}.$

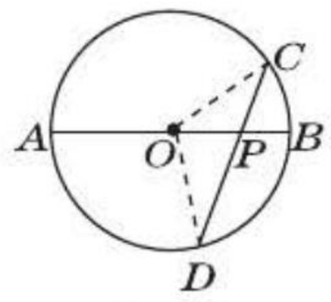
13. **解:** $\overset{\frown}{AD}$的度数是$\overset{\frown}{CB}$度数的 3 倍.

证明:如图,连结 OC, OD.

$\because OC=OD,$

$\therefore \angle D=\angle C.$

$\because OP=PC, \therefore \angle C=\angle COP.$



(第13题)

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

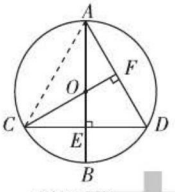
$\therefore \angle D = \angle C = \angle COP$.

又$\because \angle AOD = \angle DPO + \angle D$, $\angle DPO = \angle C + \angle COP$,

$\therefore \angle AOD = \angle C + \angle COP + \angle D = 3\angle COP$. $\therefore \overset{\frown}{AD}$的度数是$\overset{\frown}{CB}$度数的3倍.

点拨:判断两条弧的度数的关系,可以考虑先判断两条弧所对圆心角的关系.

14. (1)**证明**:连结AC,如图.



(第14题)

$\because$ 直径AB垂直于弦CD于点E,

$\therefore CE = DE$,即AB是CD的垂直平分线.

$\therefore AC = AD$.

$\because$ 过圆心O的线段$CF \perp AD$,

$\therefore AF = DF$,即CF是AD的垂直平分线.

$\therefore AC = CD$. $\therefore AC = AD = CD$,

即$\triangle ACD$是等边三角形.

$\therefore \angle FCD = 30°$.

$\therefore$ 在$\mathrm{Rt}\triangle COE$中, $OE = \frac{1}{2}OC$.

$\therefore OE = \frac{1}{2}OB$. $\therefore E$是OB的中点.

(2)**解**:$\because AB = 8$,

$\therefore OC = OB = \frac{1}{2}AB = 4$.

又$\because BE = OE$, $\therefore OE = 2$.

$\therefore CE = \sqrt{OC^2 - OE^2} = \sqrt{16 - 4} = 2\sqrt{3}$.

$\therefore CD = 2CE = 4\sqrt{3}$.

15. **解**:当AB,CD在圆心O的异侧时,如图①,过点O作$MN \perp AB$,分别交AB,CD于M,N两点. 连结OC,OA.

$\because AB \parallel CD$, $\therefore ON \perp CD$.

由垂径定理,得$AM = BM = \frac{1}{2}AB = 5$ cm,

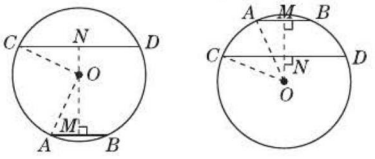
$CN = ND = \frac{1}{2}CD = 12$ cm.

在$\mathrm{Rt}\triangle AOM$和$\mathrm{Rt}\triangle CON$中,由勾股定理,得

$OM = \sqrt{OA^2 - AM^2} = \sqrt{13^2 - 5^2} = 12$(cm),

$ON = \sqrt{OC^2 - CN^2} = \sqrt{13^2 - 12^2} = 5$(cm).

$\therefore MN = OM + ON = 12 + 5 = 17$(cm).



(第15题)

当AB,CD在圆心O的同侧时,如图②. 过点O作$OM \perp AB$,$ON \perp CD$,由题易知,点O,M,N在同一直线上. 连结OC,OA.

同理可得$OM = 12$ cm, $ON = 5$ cm.

$\therefore MN = OM - ON = 12 - 5 = 7$(cm).

综上所述,AB与CD之间的距离为17 cm或7 cm.

16. **解**:(1)连结OD,OC.

$\because \overset{\frown}{BC} = 3\overset{\frown}{AD}$, $\overset{\frown}{CD} = 2\overset{\frown}{AD}$,

$\therefore \angle BOC = 3\angle AOD$, $\angle COD = 2\angle AOD$.

$\because \angle BOC + \angle COD + \angle AOD = 180°$,

$\therefore \angle AOD = 30°$, $\angle BOC = 90°$, $\angle COD = 60°$.

$\because OA = OD$, $OC = OB$,

$\therefore \angle DAB = \angle ADO = \frac{1}{2} \times (180° - 30°) = 75°$,

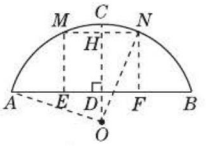
$\angle ABC = \angle BCO = \frac{1}{2} \times (180° - 90°) = 45°$.

(2)①若$\overset{\frown}{AD} < \overset{\frown}{CB}$,则$\angle DAB > \angle ABC$;

②若$\overset{\frown}{AD} = \overset{\frown}{CB}$,则$\angle DAB = \angle ABC$;

③若$\overset{\frown}{AD} > \overset{\frown}{CB}$,则$\angle DAB < \angle ABC$.

17. **解**:如图,设M,N为圆弧上两点,四边形$MEFN$为矩形,且$EF = MN = 3$ m,设圆心为O,连结OA,ON,作$OD \perp AB$于点D,交圆O于点C,交MN于点H,易知$OH \perp MN$,由垂径定理可知D为AB的中点,H为MN的中点,



(第17题)

则$AD = \frac{1}{2}AB = 3.6$ m, $NH = \frac{1}{2}MN = 1.5$ m.

设$OA = r$ m,则$OD = OC - DC = (r - 2.4)$ m.

在$\mathrm{Rt}\triangle AOD$中, $OA^2 = AD^2 + OD^2$,

即$r^2 = 3.6^2 + (r - 2.4)^2$,

解得$r = 3.9$.

在$\mathrm{Rt}\triangle OHN$中, $OH = \sqrt{ON^2 - NH^2} = \sqrt{3.9^2 - 1.5^2} = 3.6$(m).

$\therefore FN = DH = OH - OD = 3.6 - (3.9 - 2.4) = 2.1$(m).

$\because 2.1\mathrm{m} > 2\mathrm{m}$,

$\therefore$ 此货船能顺利通过这座拱桥.

27.1.3 圆周角

【两年模拟兵法】

1. A **点拨**:根据垂径定理得到$CE = DE$,根据圆周角定理得到$\angle COE = 30°$,从而得到$CE = \frac{1}{2}OC = 1$,所以$CD = 2CE = 2$.

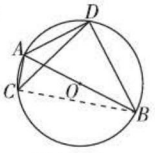
2. A **点拨**:先根据垂径定理求出AC的长,再设$OA = r$,则$OC = r - 2$,在$\mathrm{Rt}\triangle AOC$中利用勾股定理求出r的

荣德基

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

值,再求出 BE 的长,最后利用三角形的面积公式即可得出结论.

3. D　**点拨:**连结 BC,如图. 由特殊圆周角的性质得出 $\angle ACB = \angle ACD + \angle BCD = 90°$. 由 $\angle BCD = \angle BAD$ 得出 $\angle ACD + \angle BAD = 90°$,即可得出答案.



(第 3 题)

4. C

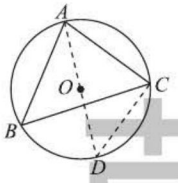
5. 3　**点拨:**如图,连结 AO 并延长交 $\odot O$ 于点 D,连结 CD,则 $\triangle ACD$ 为直角三角形.

$\because \angle B = \angle D$,

$\therefore \sin D = \sin B = \frac{3}{4} = \frac{AC}{AD}$.

$\because AD = 2R = 4$,

$\therefore AC = 3$.



(第 5 题)

6. (1)**解:**$\because BC = DC$,

$\therefore \angle CBD = \angle CDB = 39°$.

$\because \angle BAC = \angle CDB = 39°$, $\angle CAD = \angle CBD = 39°$,

$\therefore \angle BAD = \angle BAC + \angle CAD = 39° + 39° = 78°$.

(2)**证明:**$\because EC = BC$, $\therefore \angle CEB = \angle CBE$.

而 $\angle CEB = \angle 2 + \angle BAE$, $\angle CBE = \angle 1 + \angle CBD$,

$\therefore \angle 2 + \angle BAE = \angle 1 + \angle CBD$.

$\because \angle BAE = \angle BDC = \angle CBD$,

$\therefore \angle 1 = \angle 2$.

7. **解:**如图所示,延长 AD, BC 交于点 E.

$\because$ 四边形 $ABCD$ 内接于 $\odot O$, $\angle A = 90°$,

$\therefore \angle DCB = 180° - \angle A = 90°$.

$\because \angle EAB = 90°$,

$\therefore \angle E + \angle EBA = 90°$

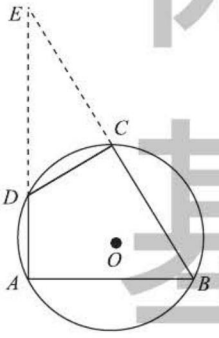
又$\because \angle E + \angle EDC = 90°$,

$\therefore \angle EBA = \angle EDC$.

又 $\cos \angle EBA = \frac{3}{5}$,

$\therefore \frac{CD}{DE} = \frac{3}{5}$,

$\therefore DE = \frac{5}{3}CD = \frac{5}{3} \times 10 = \frac{50}{3}$.



(第 7 题)

$\because \cos \angle EBA = \frac{3}{5}$,

$\therefore \tan \angle EBA = \frac{4}{3}$.

在 $\mathrm{Rt}\triangle EAB$ 中, $EA = AB \cdot \tan \angle EBA = 17 \times \frac{4}{3} = \frac{68}{3}$.

$\because AD = AE - DE$, $\therefore AD = 6$.

8. (1)**证明:**$\because AB$ 是直径,

$\therefore \angle AEB = 90°$, $\therefore AE \perp BC$,

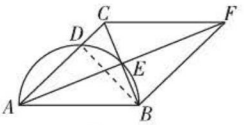
$\because AB = AC$, $\therefore BE = CE$.

$\because AE = EF$,

$\therefore$ 四边形 $ABFC$ 是平行四边形,

$\because AC = AB$,

$\therefore$ 四边形 $ABFC$ 是菱形.



(第 8 题)

(2)**解:**设 $CD = x$,连结 BD,如图.

$\because AB$ 是直径,

$\therefore \angle ADB = \angle BDC = 90°$,

$\therefore AB^2 - AD^2 = CB^2 - CD^2$,

$\therefore (7 + x)^2 - 7^2 = 4^2 - x^2$,

解得 $x_1 = 1$, $x_2 = -8$(舍去).

$\therefore AC = 8$, $BD = \sqrt{8^2 - 7^2} = \sqrt{15}$,

$\therefore S_{\text{菱形}ABFC} = 8\sqrt{15}$.

$\therefore S_{\text{半圆形}} = \frac{1}{2} \times \pi \times 4^2 = 8\pi$.

9. **解:**成立. 证明如下:

$\because$ 点 D 为 $\overset{\frown}{BC}$ 的中点,

$\therefore \overset{\frown}{BD} = \overset{\frown}{DC}$.

$\because \angle BCD$ 和 $\angle CAD$ 为等弧所对圆周角,

$\therefore \angle DCE = \angle DAC$.

$\because \angle CDE = \angle ADC$,

$\therefore \triangle DEC \backsim \triangle DCA$,

$\therefore \frac{DC}{DA} = \frac{DE}{DC}$,

$\therefore DC^2 = DE \cdot DA$.

10. **证明:**(1)$\because OD \perp AC$, OD 为半径,

$\therefore \overset{\frown}{CD} = \overset{\frown}{AD}$. $\therefore \angle CBD = \angle ABD$.

$\therefore BD$ 平分 $\angle ABC$.

(2)$\because OB = OD$, $\therefore \angle OBD = \angle ODB = 30°$.

$\therefore \angle AOD = 2\angle OBD = 60°$.

$\because OD \perp AC$ 于点 E,

$\therefore \angle OEA = 90°$.

$\therefore \angle A = 180° - \angle OEA - \angle AOD = 180° - 90° - 60° = 30°$.

又$\because AB$ 为 $\odot O$ 的直径, $\therefore \angle ACB = 90°$.

$\therefore BC = \frac{1}{2}AB$.

又$\because OD = \frac{1}{2}AB$. $\therefore BC = OD$.

11. (1)**证明:**由 $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{AB}$,得 $\angle ADB = \angle ACB = 45°$.

又$\because \angle ABD = 45°$,

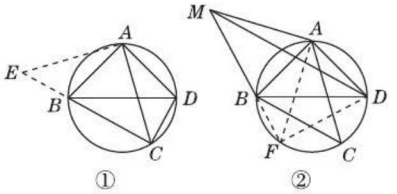
$\therefore \angle ABD + \angle ADB = 90°$.

$\therefore \angle BAD = 90°$.

$\therefore BD$ 是该外接圆的直径.

(2)**证明:**如图①,作 $AE \perp AC$,交 CB 的延长线于点 E.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料



(第11题)

∵ $\angle EAC=\angle BAD=90°$,

∴ $\angle EAB+\angle BAC=\angle DAC+\angle BAC$.

∴ $\angle EAB=\angle DAC$.

∵ $\angle EAC=90°$, $\angle ACB=45°$,

∴ $\angle E=45°$.

∴ $\triangle AEC$ 是等腰直角三角形.

∴ $AE=AC$. 由(1)易知, $AB=AD$,

∴ $\triangle ABE\cong\triangle ADC$.

∴ $CD=EB$. 在等腰直角三角形 ACE 中,由勾股定理,得 $CE=\sqrt{2}AC$.

∵ $CE=BC+BE$,

∴ $\sqrt{2}AC=BC+CD$.

(3)**解**: $DM^2=BM^2+2AM^2$.

证明如下:如图②,延长 MB 交圆于点 F,连结 AF, DF.

∵ $\angle BFA=\angle ACB=\angle BMA=45°$,

∴ $\angle MAF=90°$, $MA=AF$.

∴ $AM^2+AF^2=2AM^2=MF^2$.

又∵ $AC=MA=AF$, ∴ $\overset{\frown}{AC}=\overset{\frown}{AF}$.

易知 $\overset{\frown}{AD}=\overset{\frown}{AB}$, ∴ $\overset{\frown}{CD}=\overset{\frown}{BF}$.

∴ $\overset{\frown}{DF}=\overset{\frown}{BC}$. ∴ $DF=BC=BM$.

∵ BD 是直径, ∴ $\angle BFD=90°$.

在 Rt$\triangle MDF$ 中,由勾股定理,得 $DM^2=DF^2+MF^2$,

∴ $DM^2=BM^2+2AM^2$.

27.2 与圆有关的位置关系

27.2.1 点与圆的位置关系

【两年模拟兵法】

1. C　2. D　3. A　4. C

5. $\frac{10\sqrt{3}}{3}$　**点拨**:能够将 $\triangle ABC$ 完全覆盖的最小圆是 $\triangle ABC$ 的外接圆,如图,设该圆的圆心为点 O,连结 OB, OC.

∵ 在$\triangle ABC$中, $\angle A=60°$,

∴ $\angle BOC=120°$.

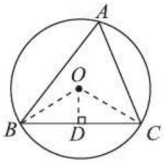
作 $OD\perp BC$ 于点 D,则 $\angle ODB=90°$, $\angle BOD=60°$, $BD=\frac{5}{2}$ cm,

∴ $\angle OBD=30°$,

∴ $OB=\frac{\frac{5}{2}}{\sin 60°}=\frac{5\sqrt{3}}{3}$(cm),

∴ $2OB=\frac{10\sqrt{3}}{3}$ cm.

即能够将 $\triangle ABC$ 完全覆盖的最小圆形纸片的直径是 $\frac{10\sqrt{3}}{3}$ cm.



(第5题)

6. **解**:(1)由 $\angle ACB=90°$, $\angle A=30°$, $AC=3$,

可求得 $BC=\sqrt{3}$, $AB=2\sqrt{3}$, $CD=\frac{3}{2}$.

设⊙C的半径为 r.

由已知知 $r=\sqrt{3}$,

∴ $BC=r$, $AC>r$, $CD<r$.

∴ 点 A 在⊙C外,点 B 在⊙C上,点 D 在⊙C内.

(2)当⊙C的半径等于 CD,即 $\frac{3}{2}$ 时,⊙C经过点 D.

点拨:确定点和圆的位置关系时,判断出点到圆心的距离 d 与圆的半径 r 之间的大小关系是关键.

7. (1)**证明**:∵ AD 为$\triangle ABC$外接圆的直径,且 $AD\perp BC$,

∴ $\overset{\frown}{DB}=\overset{\frown}{DC}$. ∴ $DB=DC$.

(2)**解**: B, E, C 三点在以点 D 为圆心, DB 为半径的圆上.

理由:由(1)知 $\overset{\frown}{DB}=\overset{\frown}{DC}$,

∴ $\angle BAD=\angle CBD$.

∵ BE 平分 $\angle ABC$,

∴ $\angle CBE=\angle ABE$.

又∵ $\angle DBE=\angle CBD+\angle CBE$, $\angle DEB=\angle BAD+\angle ABE$,

∴ $\angle DBE=\angle DEB$. ∴ $DB=DE$.

由(1)知 $DB=DC$,

∴ $DB=DE=DC$.

∴ B, E, C 三点在以点 D 为圆心, DB 为半径的圆上.

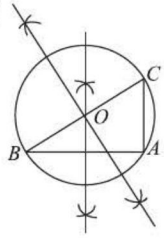
8. **解**:(1)⊙O为所求花坛的位置,如图所示.

(2)∵ $\angle BAC=90°$, $AB=8$ 米, $AC=6$ 米,

∴ $BC=\sqrt{AB^2+AC^2}=10$(米).

∴ $\triangle ABC$ 外接圆的半径为 5 米.

∴ 小明家圆形花坛的面积为 $\pi\times5^2=25\pi$(平方米).



(第8题)

9. **证明**:∵ C 是 $\overset{\frown}{AD}$ 的中点,

∴ $\overset{\frown}{AC}=\overset{\frown}{CD}$.

∴ $\angle ABC=\angle CAD$.

∵ AB 是⊙O的直径,

荣德基

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

$\therefore \angle ACB = 90°$.

$\therefore \angle CAD + \angle AQC = 90°$.

又$\because CE \perp AB$,

$\therefore \angle ABC + \angle PCQ = 90°$.

$\therefore \angle AQC = \angle PCQ$.

$\therefore PC = PQ$.

$\because CE \perp AB$,

$\therefore \overset{\frown}{AC} = \overset{\frown}{AE}$.

又$\because AC = CD$.

$\therefore \overset{\frown}{CD} = \overset{\frown}{AE}$.

$\therefore \angle CAD = \angle ACE$.

$\therefore PA = PC$.

$\therefore PA = PC = PQ$.

$\therefore$ 点 P 是$\triangle ACQ$ 的外心.

点拨:本题的解题关键是证明点 P 到$\triangle ACQ$ 的三个顶点的距离相等,综合运用圆的有关性质是解决此类问题的难点.

27.2.2 直线与圆的位置关系

【两年模拟兵法】

1. C **点拨**:根据题意得点 O 到直线 l 的距离 $d = 5$,$\odot O$ 的半径 $r = 6$,$\because d < r$,$\therefore$ 直线 l 与$\odot O$ 相交.

2. C

3. D **点拨**:当 PO 与直线 l 垂直时,圆心到直线 l 的距离 $d = PO = 2$,$r = 2$,$\therefore d = r$,$\therefore$ 直线 l 与$\odot O$ 相切;当 PO 与直线 l 不垂直时,直线 l 与$\odot O$ 相交. 综上所述,直线 l 与$\odot O$ 相切或相交. 本题运用了分类讨论思想.

4. A **点拨**:$\odot O$ 中最长的弦长为 a,即$\odot O$ 的直径为 a,

$\therefore \odot O$ 的半径为$\frac{a}{2}$. 又$\because$ 直线 PQ 与$\odot O$ 相离,

$\therefore d > \frac{a}{2}$.

5. A **点拨**:根据 $AB = 6$,$AC = 8$,$BC = 10$,可得 $AB^2 + AC^2 = BC^2$,$\therefore \triangle ABC$ 为直角三角形,$\angle A = 90°$. $\because D$,E 分别是 AC,AB 的中点,$\therefore DE$ 是$\triangle ABC$ 的中位线,$\therefore DE = \frac{1}{2}BC = 5$. $\therefore$ 以 DE 为直径的圆的半径为 2.5. 而 DE 与 BC 的距离为$\frac{6 \times 8}{10} \times \frac{1}{2} = 2.4$,且 $2.5 > 2.4$,$\therefore$ 以 DE 为直径的圆与 BC 相交.

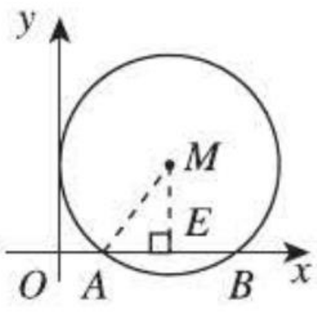
6. B

7. $r = 2.4$ 或 $3 < r \leqslant 4$

点拨:在 Rt$\triangle ABC$ 中,$\angle C = 90°$,$AC = 3$,$BC = 4$,$\therefore AB = \sqrt{AC^2 + BC^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$. 当$\odot C$ 与斜边 AB 相切时,$r = 2.4$,此时$\odot C$ 与斜边 AB 只有一个公共点;由于斜边 AB 为一条线段,不能向两方无限延伸,因此当 $3 < r \leqslant 4$时,$\odot C$ 与斜边 AB 相交且只有一个公共点. 综上所述,半径 r 的取值范围是 $r = 2.4$ 或 $3 < r \leqslant 4$. 本题运用分类讨论思想解题,有的学生由于受思维定式的影响,认为只有当$\odot C$ 与斜边 AB 相切时符合题意,忽视了第二种情况而产生漏解.

8. 4 s 或 8 s **点拨**:本题运用分类讨论思想解题,分两种情况求解:(1)当$\odot P$ 在点 O 的左侧时,可求得$\odot P$ 运动的时间为 4 s;(2)当$\odot P$ 在点 O 的右侧时,可求得$\odot P$ 运动的时间为 8 s. 本题易漏掉$\odot P$ 运动到点 O 右侧的情况而产生漏解.

9. (5,4) **点拨**:如图,过点 M 作 $ME \perp AB$ 于点 E,连结 AM,由垂径定理得 $BE = AE = \frac{1}{2}AB = 3$,$\therefore OE = 8 - 3 = 5$. $\because ME \perp AB$,y 轴 $\perp x$ 轴,$\therefore ME \parallel y$ 轴,$\therefore$ 点 M 到 y 轴的距离为 5.



(第 9 题)

$\because \odot M$ 与 y 轴相切,

$\therefore AM = 5$. 由勾股定理得 $ME = \sqrt{AM^2 - AE^2} = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4$. $\therefore M$的坐标为(5,4).

10. 4 **点拨**:当直线 l 与$\odot O$ 相切时,$d = r$,此时关于 x 的一元二次方程 $x^2 - 4x + m = 0$ 有两个相等的实数根,$\therefore (-4)^2 - 4m = 0$,解得 $m = 4$.

11. **解**:在$\triangle ABC$ 中,$\angle ACB = 90°$,$AC = 6$,$BC = 3$,由勾股定理得 $AB = \sqrt{AC^2 + BC^2} = \sqrt{6^2 + 3^2} = 3\sqrt{5}$. 过点 C 作 $CD \perp AB$ 于点 D,根据 $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}AC \cdot BC = \frac{1}{2}AB \cdot CD$,得 $CD = \frac{AC \cdot BC}{AB} = \frac{6 \times 3}{3\sqrt{5}} = \frac{6}{5}\sqrt{5}$.

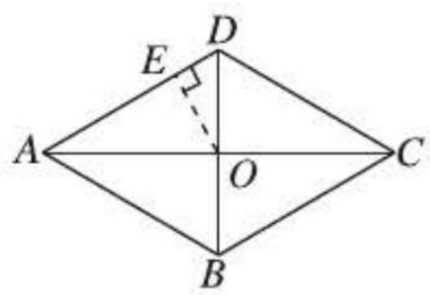
$\because \frac{6}{5}\sqrt{5} < 5$,$\therefore$ 直线 AB 与$\odot C$ 相交.

(1)当直线 AB 与$\odot C$ 相切时,$r = \frac{6}{5}\sqrt{5}$.

(2)当线段 AB 与$\odot C$ 有两个公共点时,$\frac{6}{5}\sqrt{5} < r \leqslant 3$.

点拨:根据直角三角形的面积公式求出点 C 到 AB 的距离是解题的关键. 根据点 C 到 AB 的距离与$\odot C$ 的半径之间的大小关系可以判断直线 AB 与$\odot C$ 的位置关系;反之,根据直线 AB 与$\odot C$ 的位置关系及点 C 到 AB 的距离可以求出$\odot C$ 的半径 r 的取值范围,但应注意的是在二变中 AB 是线段而不是直线.

12. **解**:$\odot O$ 与 AD 相切,理由如下:如图,过点 O 作 $OE \perp AD$ 于点 E. $\because$ 四边形$ABCD$是菱形,$\therefore AC \perp BD$,$OA = \frac{1}{2}AC = 3$,$OD = \frac{1}{2}BD = \sqrt{3}$. 由勾股定理得 $AD = \sqrt{OA^2 + OD^2} = \sqrt{3^2 + (\sqrt{3})^2} =$



(第 12 题)

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

$2\sqrt{3}$. $\because S_{\triangle AOD}=\frac{1}{2}OE\cdot AD=\frac{1}{2}OA\cdot OD$, $\therefore 2\sqrt{3}OE=3\sqrt{3}$, 解得 $OE=\frac{3}{2}$. 又 $\because \odot O$ 的半径为 $\frac{3}{2}$, $\therefore \odot O$ 与 AD 相切.

点拨: 求出圆心 O 到 AD 的距离, 然后与 $\odot O$ 的半径比较即可确定 $\odot O$ 与 AD 的位置关系. 本题综合考查了直线与圆的位置关系及菱形的性质.

13. 解: 不会穿越森林保护区,

理由如下: 如图, 过点 P 作 $PC\perp AB$,

C 是垂足, 由题易得 $\angle APC=30°$, $\angle BPC=45°$.

$\therefore AC=PC\cdot\tan30°$,

$BC=PC\cdot\tan45°$.

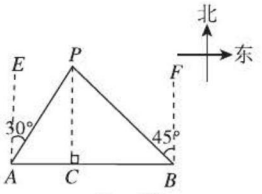
$\because AC+BC=AB$,

$\therefore PC\cdot\tan30°+PC\cdot\tan45°=100$,

即 $\left(\frac{\sqrt{3}}{3}+1\right)PC=100$.

$\therefore PC=50(3-\sqrt{3})\approx50\times(3-1.732)=63.4(\text{km})$.

$\because 63.4>50$, $\therefore$ 计划修筑的这条高速公路不会穿越森林保护区.



(第 13 题)

方法规律: 本题运用建模思想和转化思想解题, 将实际问题通过建立模型转化为直线与圆的位置关系问题, 借助解直角三角形解决问题, 解题的关键是过点 P 作 $PC\perp AB$, 构造直角三角形.

27.2.3 切线

【两年模拟兵法】

1. A **点拨**: 方法一: 过点 O 作 $OD\perp AC$ 于点 D, 由已知条件和圆的性质易求 OD 的长, 再根据勾股定理即可求出 AD 的长, 进而可求出 AC 的长.

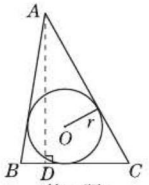
方法二: 先求出 $\angle AOP=60°$, 进而求出 $\angle ACP=\angle P$, 即可得出 $AC=AP$, 求出 AP 即可.

2. B **点拨**: 由切线的性质得: $\angle PAB=90°$, 根据直角三角形的两锐角互余得出 $\angle POA=50°$, 最后利用同圆的半径相等得结论.

3. C **点拨**: 如图, $AB=7$, $BC=5$, $AC=8$, 设内切圆的半径为 r, 作 $AD\perp BC$ 于点 D, 设 $BD=x$, 则 $CD=5-x$.

由勾股定理可知: $AD^2=AB^2-BD^2=AC^2-CD^2$,

即 $7^2-x^2=8^2-(5-x)^2$, 解得 $x=1$.



(第 3 题)

$\therefore AD=4\sqrt{3}$.

$\because \frac{1}{2}\cdot BC\cdot AD=\frac{1}{2}(AB+BC+AC)\cdot r$,

即 $\frac{1}{2}\times5\times4\sqrt{3}=\frac{1}{2}\times20\times r$,

$\therefore r=\sqrt{3}$. 故选 C.

4. $\frac{156}{25}$ 或 $\frac{102}{13}$ **点拨**: $\because \angle ACB=90°$, $\sin A=\frac{5}{13}$,

$\therefore \cos A=\frac{12}{13}$.

$\because AC=12$,

$\therefore AB=13$, $BC=5$.

如图①, 当 $\odot P$ 与 AC 相切于点 Q 时, 连结 PQ.

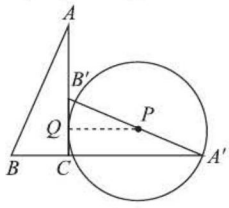
设 $PQ=PA'=r$,

易得 $PQ/\!/CA'$,

$\therefore \frac{PQ}{CA'}=\frac{PB'}{A'B'}$,

$\therefore \frac{r}{12}=\frac{13-r}{13}$,

$\therefore r=\frac{156}{25}$.



①

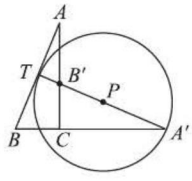
如图②, 当 $\odot P$ 与 AB 相切于点 T 时, 连结 $B'T$, 易证 A', B', T 三点共线,

易得 $\triangle A'BT\backsim\triangle ABC$,

$\therefore \frac{A'T}{AC}=\frac{A'B}{AB}$, 即 $\frac{A'T}{12}=\frac{17}{13}$,

$\therefore A'T=\frac{204}{13}$,

$\therefore r=\frac{1}{2}A'T=\frac{102}{13}$.



②
(第 4 题)

综上所述, $\odot P$ 的半径为 $\frac{156}{25}$ 或 $\frac{102}{13}$.

5. (1) **证明**: 如图, 连结 OD.

$\because DE$ 是切线,

$\therefore \angle ODE=90°$.

$\therefore \angle ADE+\angle BDO=90°$.

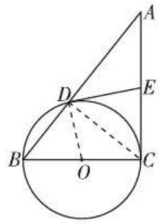
$\because \angle ACB=90°$,

$\therefore \angle A+\angle B=90°$.

$\because OD=OB$,

$\therefore \angle B=\angle BDO$.

$\therefore \angle A=\angle ADE$.



(第 5 题)

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

(2)**解**:如图,连结 CD.

$\because \angle A=\angle ADE$,

$\therefore AE=DE$.

$\because BC$ 是$\odot O$的直径,$\angle ACB=90°$,

$\therefore EC$ 是$\odot O$的切线.

$\therefore ED=EC$.

$\therefore AE=EC$.

$\because DE=10$,

$\therefore AC=2DE=20$.

易知在 Rt$\triangle ADC$ 中,

$DC=\sqrt{20^2-16^2}=12$.

设 $BD=x$,在 Rt$\triangle BDC$ 中,$BC^2=x^2+12^2$,

在 Rt$\triangle ABC$ 中,$BC^2=(x+16)^2-20^2$,

$\therefore x^2+12^2=(x+16)^2-20^2$,解得 $x=9$.

$\therefore BC=\sqrt{12^2+9^2}=15$.

6. (1)**解**:$\because A(0,6)$,$N(0,2)$,

$\therefore AN=4$. 易知$\angle ANB=90°$,

$\because \angle ABN=30°$,

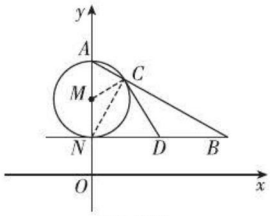
$\therefore AB=2AN=8$.

$\therefore$ 由勾股定理可知:

$NB=\sqrt{AB^2-AN^2}=4\sqrt{3}$.

$\therefore B(4\sqrt{3},2)$.

(2)**证明**:如图,连结 MC,NC.



(第6题)

$\because AN$ 是$\odot M$的直径,$\therefore \angle ACN=90°$.

$\therefore \angle NCB=90°$.

在 Rt$\triangle NCB$ 中,$\because D$ 为 NB 的中点,

$\therefore CD=\frac{1}{2}NB=ND$.

$\therefore \angle CND=\angle NCD$.

$\because MC=MN$,

$\therefore \angle MCN=\angle MNC$.

$\because \angle MNC+\angle CND=90°$,

$\therefore \angle MCN+\angle NCD=90°$,即 $MC\perp CD$.

$\therefore$ 直线 CD 是$\odot M$的切线.

7. **证明**:(1)如图①,连结 DO,

$\because$ 点 E 是$\triangle ABC$的内心,

$\therefore \angle BAD=\angle DAC$.

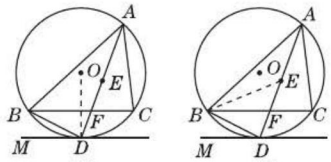
$\therefore \overset{\frown}{BD}=\overset{\frown}{CD}$. $\therefore OD\perp BC$.

$\because \angle BDM=\angle DAC$,$\angle DAC=\angle DBC$,

$\therefore \angle BDM=\angle DBC$. $\therefore BC/\!/DM$.

$\therefore OD\perp DM$.

$\therefore$ 直线 DM 是$\odot O$的切线.



(第7题)

(2)如图②,连结 BE.

$\because$ 点 E 是$\triangle ABC$的内心,$\therefore \angle ABE=\angle CBE$,$\angle BAD=\angle CAD=\angle CBD$.

$\because \angle EBD=\angle CBE+\angle CBD$,$\angle BED=\angle ABE+\angle BAD$,

$\therefore \angle EBD=\angle BED$. $\therefore DB=DE$.

$\because \angle FBD=\angle BAD$,$\angle BDF=\angle ADB$,

$\therefore \triangle DBF\backsim\triangle DAB$.

$\therefore \frac{BD}{AD}=\frac{DF}{BD}$. $\therefore BD^2=DF\cdot AD$.

$\therefore DE^2=DF\cdot DA$.

8. (1)**证明**:如图,连结 OD.

$\because$ 四边形 $AOCD$ 是平行四边形,$\therefore AD/\!/OC$.

$\therefore \angle FOB=\angle DAO$,$\angle FOD=\angle ODA$.

又$\because OA=OD$,

$\therefore \angle DAO=\angle ODA$.

$\therefore \angle FOB=\angle FOD$.

又$\because OB=OD$,$OF=OF$,

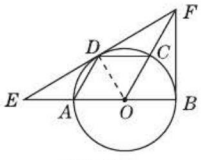
$\therefore \triangle FOD\cong\triangle FOB$.

$\therefore \angle FBO=\angle FDO$.

$\because EF$ 是$\odot O$的切线,$\therefore \angle FDO=90°$.

$\therefore \angle FBO=\angle FDO=90°$.

$\because OB$ 是$\odot O$的半径,$\therefore BF$ 是$\odot O$的切线.



(第8题)

(2)**解**:$\because OA=OC$,四边形 $AOCD$ 是平行四边形,

$\therefore \square AOCD$ 是菱形.

$\therefore AD=AO=OD$.

$\therefore \angle DAO=\angle DOA=60°$.

$\therefore \angle FOB=60°$.

$\because OB=1$,$\angle FBO=90°$,$\therefore BF=\sqrt{3}$.

$\because \angle EDO=90°$,$\therefore \angle FEB=30°$.

$\therefore EF=2BF=2\sqrt{3}$.

27.3 圆中的计算问题

【两年模拟兵法】

1. C **点拨**:由题意可知,该扇形的半径 $r=6$,圆心角为 $120°$,

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

所以该扇形的面积为$\frac{120\cdot\pi\cdot6^2}{360}=12\pi$.

2. B　**点拨:**设该圆锥母线长为R,底面半径为r.

∴ 圆锥底面周长为$2\pi r$,底面面积为πr^2,侧面面积为πrR.

∵ 圆锥的侧面积是底面积的2倍,

∴ $\pi rR=2\pi r^2$.

∴ $R=2r$.

设圆锥侧面展开图的圆心角为$n°$,

则$\frac{n\pi R}{180}=2\pi r=\pi R$.

解得$n=180$.

3. C　**点拨:**由圆内接四边形的性质和圆周角定理求出$\angle A=60°$,得出$\angle BOD=120°$,再由弧长公式即可得出答案.

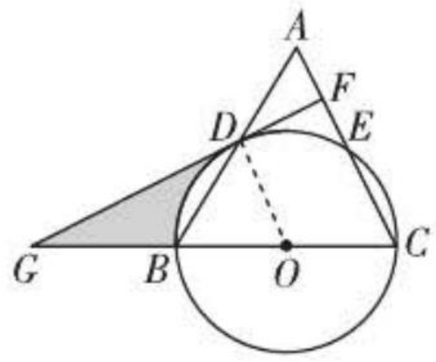
4. C　**点拨:**设AT交$\odot O$于点D,连结BD,先根据直径所对的圆周角为90°得到$\angle ADB=90°$,则可判断$\triangle ADB$,$\triangle BDT$都是等腰直角三角形,可得$AD=BD=TD=\frac{\sqrt{2}}{2}AB=\sqrt{2}$,然后利用弓形$AD$的面积等于弓形$BD$的面积得到阴影部分的面积等于$S_{\triangle BTD}$.

5. A

6. **解:**(1)3;(2,1);6

(2)连结AC,过点A作$AD\perp BC$于点D,则$BC=2DC$. 由$A(5,1)$可得$AD=1$,又$AC=2$,∴ 在Rt$\triangle ADC$中,$DC=\sqrt{AC^2-AD^2}=\sqrt{2^2-1^2}=\sqrt{3}$,故$BC=2\sqrt{3}$.

7. (1)**证明:**连结OD,如图.



(第7题)

∵ $AC=BC$,$OB=OD$,

∴ $\angle ABC=\angle A$,$\angle ABC=\angle ODB$.

∴ $\angle A=\angle ODB$. ∴ $OD\parallel AC$.

∵ $DF\perp AC$,∴ $DF\perp OD$.

∵ OD是$\odot O$的半径,∴ DF是$\odot O$的切线.

(2)**解:**∵ $AC=BC$,$\angle A=60°$,

∴ $\triangle ABC$是等边三角形. ∴ $\angle ABC=60°$.

∵ $OD=OB$,∴ $\triangle OBD$是等边三角形.

∴ $\angle BOD=60°$.

∵ $DF\perp OD$,∴ $\angle ODG=90°$.

∴ $\angle G=30°$. ∴ $DG=\sqrt{3}OD=6\sqrt{3}$.

∴ 阴影部分的面积 = $\triangle ODG$的面积 − 扇形OBD的面积 $=\frac{1}{2}\times6\times6\sqrt{3}-\frac{60\pi\times6^2}{360}=18\sqrt{3}-6\pi$.

8. (1)**证明:**∵ $\angle B=60°$,$OB=OC$,

∴ $\triangle BOC$是等边三角形.

∴ $\angle1=\angle2=60°$.

∵ OC平分$\angle AOB$,

∴ $\angle1=\angle3$.

∴ $\angle2=\angle3$.

∴ $OA\parallel BD$.

∵ $\angle BDM=90°$,

∴ $\angle OAM=90°$.

∴ AM是$\odot O$的切线.

(第8题)

(2)**解:**连结AC,如图.

∵ $\angle3=60°$,$OA=OC$,∴ $\triangle OAC$是等边三角形.

∴ $\angle OAC=60°$.

∵ $\angle OAM=90°$,∴ $\angle CAD=30°$.

∵ $CD=2$,$\angle BDA=90°$,

∴ $AC=2CD=4$. ∴ $AD=2\sqrt{3}$.

∴ $S_{阴影}=S_{梯形OADC}-S_{扇形AOC}$

$=\frac{1}{2}\times(4+2)\times2\sqrt{3}-\frac{60\pi\times16}{360}$

$=6\sqrt{3}-\frac{8\pi}{3}$.

27.4　正多边形和圆

【两年模拟兵法】

1. B　**点拨:**设正多边形的边数为n,则正多边形的中心角为$\frac{360°}{n}$,正多边形的一个外角等于$\frac{360°}{n}$,所以正多边形的中心角等于正多边形的一个外角,而正多边形的一个外角与该正多边形相邻的一个内角互补,所以正多边形的中心角与该正多边形一个内角互补.

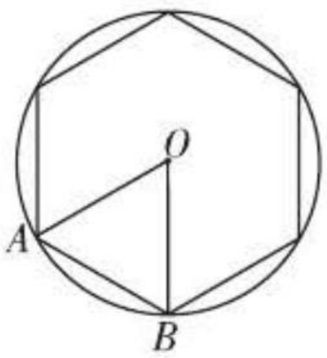
2. B　**点拨:**连结OA,OB,根据等边三角形的判定和性质可得$\odot O$的半径,进而可得出结论.

3. A　**点拨:**如图,$\angle AOB=\frac{360°}{6}=60°$,$OA=OB$,

∴ $\triangle AOB$是等边三角形.

∴ $AB=OA$.

∴ 圆内接正六边形的边长与该圆的半径相等,A正确.



(第3题)

在平面直角坐标系中,不同的坐标表示不同的点,B错误.

一元二次方程$ax^2+bx+c=0(a\neq0)$不一定有实数根,C错误.

根据旋转变换的性质可知,将$\triangle ABC$绕A点按顺时针方向旋转60°得$\triangle ADE$,则$\triangle ABC$与$\triangle ADE$全等,D错误. 故选A.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

4. A

5. C

6. A

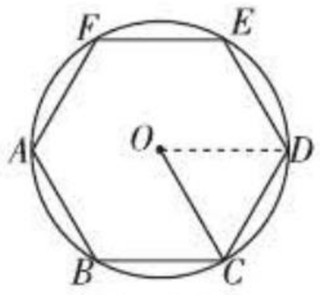
7. **解**:连结 OD,如图.

$\because$ 六边形 $ABCDEF$ 是圆 O 的内接正六边形,

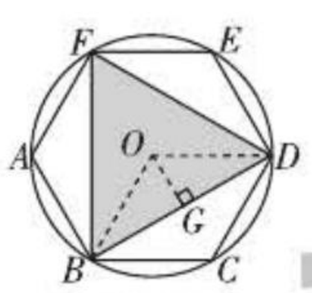
$\therefore \angle O=\dfrac{360°}{6}=60°$.

$\because OC=OD$,$\therefore$ $\triangle OCD$ 是等边三角形.

$\therefore CD=OC=4$,即正六边形的边长为 4.



(第 7 题)



(第 8 题)

8. **解**:如图,连结 OB,OD,

过点 O 作 $OG\perp BD$ 于点 G.

设 $OB=OD=R$,易得 $OG=\dfrac{1}{2}OD=\dfrac{1}{2}R$.

在 Rt$\triangle ODG$ 中,由勾股定理,得 $GD=\dfrac{\sqrt{3}}{2}R$.

$\because S_{\triangle BDF}=12\sqrt{3}$,$\therefore 6S_{\triangle OGD}=12\sqrt{3}$,

即 $6\times\dfrac{1}{2}\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}R\times\dfrac{1}{2}R=12\sqrt{3}$,

$\therefore R^2=16$,即 $R=4$ 或 $R=-4$(不合题意,舍去).

$\therefore$ $\odot O$ 的半径为 4.

9. **证明**:(1)连结 OD,OA,如图.

$\because AB$,BC,CD 为 $\odot O$ 的内接正十边形的边,

$\therefore \angle AOB=\angle BOC=\angle COD=\dfrac{360°}{10}=36°$.

$\therefore \angle BOD=72°$.

$\therefore \angle BAD=\dfrac{1}{2}\angle BOD=36°$.

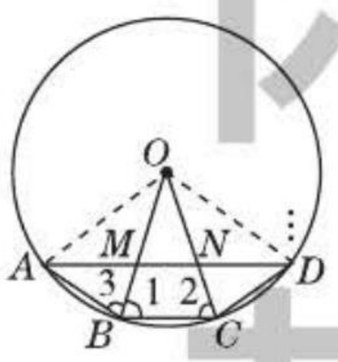
$\because OB=OC$,

$\therefore \angle 1=\angle 2=\dfrac{1}{2}\times(180°-36°)=72°$.

同理 $\angle 3=72°$. $\therefore \angle ABC=\angle 1+\angle 3=144°$.

$\therefore \angle BAD+\angle ABC=180°$.

$\therefore AD/\!/BC$,即 $MN/\!/BC$.



(第 9 题)

(2)$\because \angle BAD=36°$,$\angle 3=72°$,

$\therefore \angle AMB=180°-\angle BAD-\angle 3=72°$.

$\therefore \angle OMN=\angle AMB=72°$.

同理 $\angle ONM=72°$.

$\therefore \angle OMN=\angle ONM$. $\therefore OM=ON$.

$\because \angle OMN=\angle AOM+\angle OAM$,$\angle AOM=36°$,

$\therefore \angle OAM=36°$. $\therefore \angle OAM=\angle AOM$.

$\therefore OM=AM$.

在 $\triangle OMN$ 和 $\triangle AMB$ 中,$\begin{cases}\angle MON=\angle MAB,\\ OM=AM,\\ \angle OMN=\angle AMB,\end{cases}$

$\therefore$ $\triangle OMN\cong\triangle AMB$.

$\therefore MN=MB$,$ON=AB$. 而 $OM=ON$,$\therefore AB=OM$.

$\therefore OB=OM+MB=AB+MN$. 而 $AB=BC$,

$\therefore MN+BC=OB$.

10. **解**:(1)60°

(2)90°;108°

(3)$\angle APN=\dfrac{(n-2)\cdot 180°}{n}$.

素养提分整合篇

【好题必解】

1. **解**:如图,取 BC 的中点 E,连结 AE,DE.

$\because BA\perp AC$,$BD\perp CD$.

$\therefore AE=\dfrac{1}{2}BC$,$DE=\dfrac{1}{2}BC$.

又$\because BE=CE=\dfrac{1}{2}BC$.

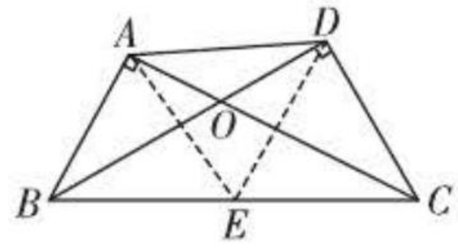
$\therefore BE=AE=DE=CE$.

$\therefore A$,B,C,D 四点共圆.

$\therefore \angle DAC=\angle DBC$.

在 Rt$\triangle BCD$ 中,$\angle DCB=60°$,

$\therefore \angle DBC=90°-60°=30°$. $\therefore \angle DAC=30°$.



(第 1 题)

2. **解**:如图,易知点 C 关于 MN 的对称点为点 D,连结 AD,交 MN 于点 P,连结 PC,易知此时 $PA+PC$ 最小且 $PA+PC=AD$. 过点 D 作 $DH\perp AB$ 于点H,连结 OA,OC.

易知 $AE=4$,$CF=3$,$EH=DN=\dfrac{1}{2}CD=3$,$HD=EF$.

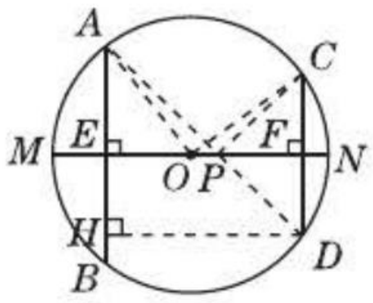
由勾股定理易得 $OE=3$,$OF=4$,

$\therefore DH=EF=7$.

又$AH=AE+EH=4+3=7$,

$\therefore AD=7\sqrt{2}$,

即 $PA+PC$ 的最小值为 $7\sqrt{2}$.



(第 2 题)

点拨:本题运用了**转化思想**,将分散的线段转化为一条线段,然后运用勾股定理求出线段的长度.

3. **解**:如图,过点 C 作 $CD\perp AB$,垂足为 D.

$\because \angle B=45°$,

$\therefore \angle BCD=45°$,$\therefore CD=BD$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

设 $CD=x$ km,则 $BD=x$ km.

由 $\angle A=30°$ 知 $AC=2x$ km,

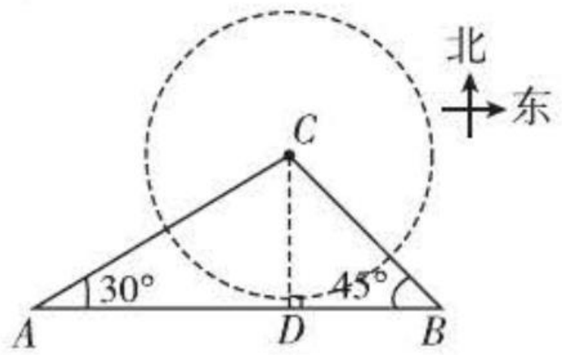
$AD=\sqrt{(2x)^2-x^2}=\sqrt{3}x$(km).

$\because AD+BD=AB$,

$\therefore \sqrt{3}x+x=2$,$\therefore x=\sqrt{3}-1$,

即 $CD=\sqrt{3}-1\approx0.732$(km) >0.7 km.

也就是说,以点 C 为圆心且以 0.7 km 为半径的圆与直线 AB 相离,即修筑的这条公路不会穿过公园.



(第3题)

4. (1)**证明**:如图,作 $DH\perp x$ 轴于点 H.

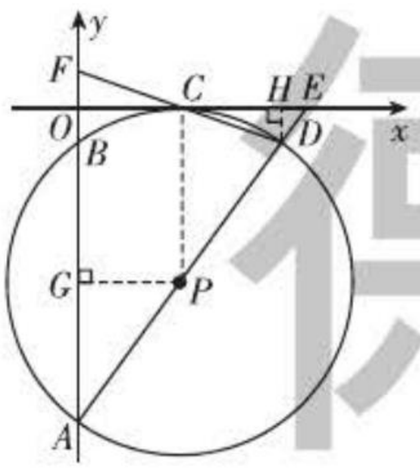
$\because F(0,1)$,$D(6,-1)$,

$\therefore OF=DH=1$,

易知 $\angle FCO=\angle DCH$,$\angle FOC=\angle DHC=90°$,

$\therefore \triangle OCF\cong\triangle HCD$,$\therefore DC=FC$.

(2)**解**:如图,连结 PC,作 $PG\perp y$ 轴于点 G,易得 $PC\perp x$ 轴. 设 $\odot P$ 的半径为 r.



(第4题)

由(1)易知 $OC=HC$,

$\therefore C(3,0)$,$GP=3$.

$\because C$,P 分别为 FD,AD 的中点,

$\therefore CP$ 是 $\triangle DFA$ 的中位线,

$\therefore AF=2CP=2r$.

$\because F(0,1)$,$OG=CP=r$,

$\therefore AG=AF-OF-OG=r-1$.

在 $\mathrm{Rt}\triangle AGP$ 中,$AP^2=AG^2+GP^2$,

$\therefore r^2=(r-1)^2+3^2$,

$\therefore r=5$,$\therefore A(0,-9)$.

设直线 AD 的表达式为 $y=kx+b$,

则 $\begin{cases}-9=b,\\-1=6k+b,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}k=\dfrac{4}{3},\\b=-9.\end{cases}$

$\therefore$ 直线 AD 的表达式为 $y=\dfrac{4}{3}x-9$.

5. **解**:由题意知 $\overset{\frown}{AB}=6\pi$ cm,$\overset{\frown}{CD}=4\pi$ cm.

设 $\angle AOB=n°$,$OA=R$ cm,

则 $OC=(R-8)$ cm,

$\therefore \dfrac{n\pi R}{180}=6\pi$,$\dfrac{n\pi(R-8)}{180}=4\pi$.

解得 $n=45$,$R=24$.

$\therefore$ 扇形 OAB 的圆心角为 $45°$,$OA=24$ cm,$OC=16$ cm.

$\therefore S_{\text{纸杯表}}=S_{\text{扇形}OAB}-S_{\text{扇形}OCD}+S_{\text{纸杯底}}$

$=\dfrac{1}{2}\times6\pi\times24-\dfrac{1}{2}\times4\pi\times16+\pi\times2^2$

$=44\pi$ (cm^2).

$\therefore$ 纸杯的表面积为 44π cm^2.

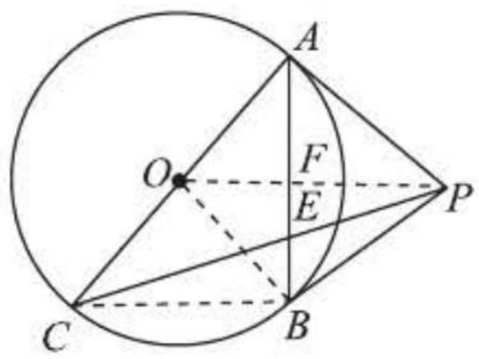
点拨:纸杯侧面展开图是一个圆环的一部分,求侧面展开图的面积关键是求小扇形 OCD 的半径.

6. (1)**证明**:如图,连结 OB,OP,在 $\triangle OAP$ 和 $\triangle OBP$ 中,

$\begin{cases}OA=OB,\\OP=OP,\\AP=BP,\end{cases}$ $\therefore \triangle OAP\cong\triangle OBP$,

$\therefore \angle OBP=\angle OAP$,$\because PA$ 是 $\odot O$ 的切线,$\therefore \angle OBP=\angle OAP=90°$,$\therefore PB$ 是 $\odot O$ 的切线.

(2)**解**:如图,连结 BC,设 AB 与 OP 交于点 F,



(第6题)

$\because AC$ 是 $\odot O$ 的直径,

$\therefore \angle ABC=90°$,

$\because PA$,PB 是 $\odot O$ 的切线,

$\therefore PO$ 垂直平分 AB,PO 平分 $\angle APB$.

$\therefore OP/\!/BC$,$\therefore \angle OPC=\angle PCB$.

$\because \angle APC=3\angle BPC$,$\therefore \angle OPC=\angle CPB$,

$\therefore \angle PCB=\angle CPB$.

$\therefore CB=BP$.

设 $OF=t$,则 $CB=BP=2t$,

易知 $\triangle PBF\backsim\triangle POB$,$\therefore PB^2=PF\cdot PO$.

即 $(2t)^2=PF\cdot(PF+t)$.

解得 $PF=\dfrac{-1+\sqrt{17}}{2}t$(取正值).

易知 $\triangle PFE\backsim\triangle CBE$,

$\therefore \dfrac{PE}{CE}=\dfrac{PF}{BC}$,

$\therefore \dfrac{PE}{CE}=\dfrac{PF}{BC}=\dfrac{\sqrt{17}-1}{4}$.

7. (1)**证明**:如图,连结 OC.

$\because DE$ 与 $\odot O$ 相切于点 C,

$\therefore OC\perp DE$.

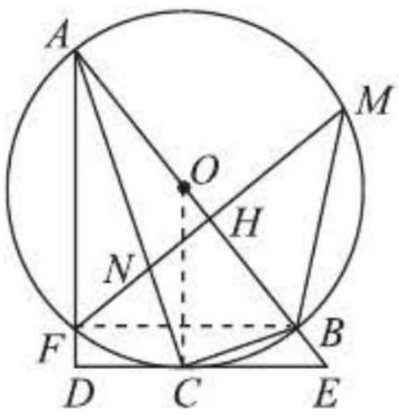
$\because AD\perp DE$,$\therefore AD/\!/OC$.

$\therefore \angle DAC=\angle OCA$.

$\because OA=OC$,$\therefore \angle OAC=\angle OCA$.

$\therefore \angle DAC=\angle OAC$,

即 AC 平分 $\angle DAE$.



(第7题)

(2)**解**:①由(1)可知 $\angle COE=\angle DAE$.$\because \angle M=\angle DAE$,

$\therefore \angle COE=\angle M$.

设 $\odot O$ 的半径为 r,

在 $\mathrm{Rt}\triangle COE$ 中,$\cos\angle COE=\dfrac{OC}{OE}$,$\therefore \dfrac{4}{5}=\dfrac{r}{r+1}$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

解得 $r=4$.

②如图,连结 FB. 在 Rt$\triangle OCE$ 中,$CE=\sqrt{OE^2-OC^2}=\sqrt{5^2-4^2}=3$.

$\because AB$ 是$\odot O$ 的直径,$\therefore AD\perp BF$.

在 Rt$\triangle AFB$ 中,$AF=AB\cdot\cos\angle FAB=8\times\frac{4}{5}=\frac{32}{5}$.

$\because FM\perp AB$,$\therefore\angle HFB+\angle ABF=90°$,

又$\because\angle AFH+\angle HFB=90°$,

$\therefore\angle AFH=\angle ABF$.

$\because AD\perp DE$,$AD\perp BF$,

$\therefore BF/\!/DE$,$\therefore\angle ABF=\angle E$,$\therefore\angle AFH=\angle E$.

易知$\angle ACB=\angle OCE=90°$,

$\therefore\angle BCE=\angle OCA=\angle OAC=\angle FAN$.

$\therefore\triangle AFN\backsim\triangle CEB$.

$\therefore\frac{FN}{BE}=\frac{AF}{CE}$,即$\frac{FN}{1}=\frac{\frac{32}{5}}{3}$.

$\therefore FN=\frac{32}{15}$.

8. 解:(1)$\because$ 抛物线 $y=ax^2+bx+c(a\neq0)$ 经过点 $A(3,0)$,$B(-1,0)$,

$\therefore y=a(x-3)(x+1)$.

$\because$ 抛物线 $y=ax^2+bx+c(a\neq0)$ 经过点 $C(0,-3)$,

$\therefore -3=a(0-3)(0+1)$.

解得 $a=1$.

$\therefore$ 抛物线的表达式为 $y=(x-3)(x+1)$,即 $y=x^2-2x-3$.

(2)如图所示,过点 A 作 $AM\perp BC$,垂足为点 M,AM 交 y 轴于点 N.

$\therefore\angle BAM+\angle ABM=90°$.

$\because$ 在 Rt$\triangle BCO$ 中,$\angle BCO+\angle ABM=90°$.

$\therefore\angle BAM=\angle BCO$.

$\because A(3,0)$,$B(-1,0)$,$C(0,-3)$,

$\therefore AO=CO=3$,$OB=1$.

又$\because\angle BOC=\angle AON=90°$,

$\therefore\triangle AON\cong\triangle COB$.

$\therefore ON=OB=1$.

$\therefore N(0,-1)$.

设直线 AM 的函数表达式为 $y=kx+m$.

把 $A(3,0)$,$N(0,-1)$ 分别代入,得$\begin{cases}0=3k+m,\\-1=m.\end{cases}$

解得$\begin{cases}k=\frac{1}{3},\\m=-1.\end{cases}$

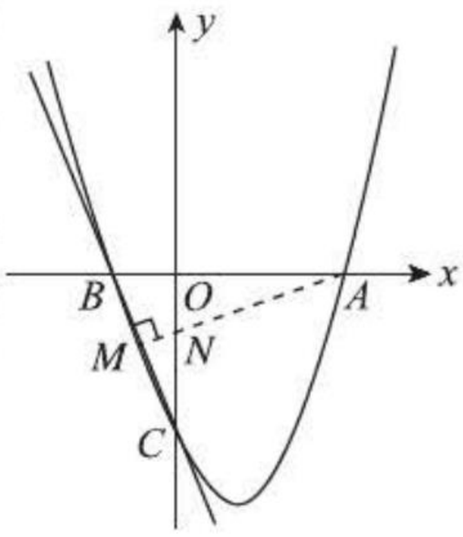
$\therefore$ 直线 AM 的函数表达式为 $y=\frac{1}{3}x-1$.

同理可求直线 BC 的函数表达式为 $y=-3x-3$.

解方程组$\begin{cases}y=\frac{1}{3}x-1,\\y=-3x-3\end{cases}$得$\begin{cases}x=-\frac{3}{5},\\y=-\frac{6}{5}.\end{cases}$

故切点 M 的坐标为$(-\frac{3}{5},-\frac{6}{5})$.

(3)存在. 分三种情况:设 $P(m,m^2-2m-3)$,①当四边形 $BCQP$ 为平行四边形时,由 $B(-1,0)$,$C(0,-3)$,得 $0+0=-3+m^2-2m-3$,解得 $m=1\pm\sqrt{7}$,当 $m=1+\sqrt{7}$ 时,$m^2-2m-3=3$,即$P(1+\sqrt{7},3)$;



(第8题)

当 $m=1-\sqrt{7}$ 时,$m^2-2m-3=3$,即 $P(1-\sqrt{7},3)$;②当四边形 $BCPQ$ 为平行四边形时,

由 $B(-1,0)$,$C(0,-3)$,得 $0+m^2-2m-3=-3+0$,解得 $m=0$(舍去)或 $m=2$,$\therefore P(2,-3)$.

③当四边形 $BQCP$ 为平行四边形时,由 $B(-1,0)$,$C(0,-3)$,得 $0-3=m^2-2m-3$,解得 $m=0$(舍去)或 $m=2$,$\therefore P(2,-3)$.

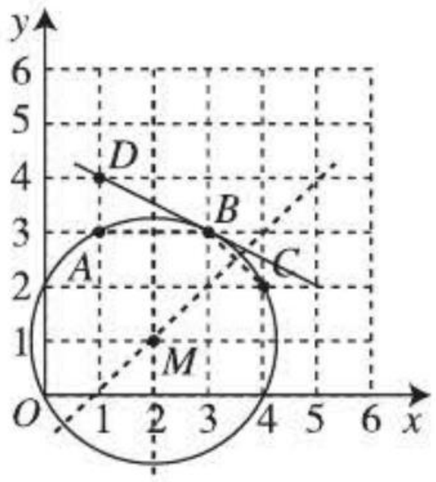
综上所述,点 P 的坐标为$(1+\sqrt{7},3)$或$(1-\sqrt{7},3)$或$(2,-3)$.

【第27章测试卷】

一、1. C **2.** C **3.** C **4.** B **5.** B **6.** C **7.** A **8.** D

二、9. 点 C **10.** 1.6 **11.** $\sqrt{5}$ **12.** 3

三、13. 解:(1)如图,圆心 M 的坐标为(2,1).



(第13题)

(2)相切

14. 解:$\because\odot O$ 的半径 $OD\perp$ 弦 AB 于点 C,$AB=8$,

$\therefore AC=\frac{1}{2}AB=4$.

设$\odot O$ 的半径为 r,则 $OC=r-2$,

在 Rt$\triangle AOC$ 中,

$\because AC=4$,$OC=r-2$,$OA^2=AC^2+OC^2$,

$\therefore r^2=4^2+(r-2)^2$,

解得 $r=5$. $\therefore AE=2r=10$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

连结 BE.

$\because AE$ 是$\odot O$ 的直径,

$\therefore \angle ABE=90°$.

在 $\mathrm{Rt}\triangle ABE$ 中,

$\because AE=10, AB=8$,

$\therefore BE=\sqrt{AE^2-AB^2}=\sqrt{10^2-8^2}=6$.

在 $\mathrm{Rt}\triangle BCE$ 中,$\because BE=6, BC=4$,

$\therefore CE=\sqrt{BE^2+BC^2}=\sqrt{6^2+4^2}=2\sqrt{13}$.

15. (1)**证明:**连结 OD,

$\because DF$ 是$\odot O$ 的切线,D 为切点,

$\therefore OD\perp DF$.

$\therefore \angle ODF=90°$.

$\because BD=CD, OA=OB$,

$\therefore OD$ 是$\triangle ABC$ 的中位线.

$\therefore OD/\!/AC$.

$\therefore \angle CFD=\angle ODF=90°$.

$\therefore DF\perp AC$.

(2)**解:**$\because \angle CDF=30°$,由(1)得$\angle ODF=90°$.

$\therefore \angle ODB=180°-\angle CDF-\angle ODF=60°$.

$\because OB=OD$,

$\therefore \triangle OBD$ 是等边三角形.

$\therefore \angle BOD=60°$.

$\therefore \overset{\frown}{BD}$ 的长为$\dfrac{60\pi\times5}{180}=\dfrac{5}{3}\pi$.

16. (1)**证明:**连结 OD, OE, BD.

$\because AB$ 为半圆 O 的直径,

$\therefore \angle ADB=\angle BDC=90°$.

在 $\mathrm{Rt}\triangle BDC$ 中,E 为斜边 BC 的中点,

$\therefore DE=BE=CE$.

在$\triangle OBE$ 和$\triangle ODE$ 中,

$$\begin{cases} OB=OD, \\ OE=OE, \\ BE=DE, \end{cases}$$

$\therefore \triangle OBE\cong\triangle ODE$.

$\therefore \angle ODE=\angle ABC=90°$.

$\therefore DE$ 为半圆 O 的切线.

(2)**解:**在 $\mathrm{Rt}\triangle ABC$ 中,$\angle BAC=30°$,

$\therefore BC=\dfrac{1}{2}AC, \angle C=60°$.

$\because BC=2DE=4, \therefore AC=8$.

又$\because \angle C=60°, DE=EC$,

$\therefore \triangle DEC$ 为等边三角形.

$\therefore DC=DE=2$.

$\therefore AD=AC-DC=6$.

17. **解:**(1)如图①,过点 A 作 $AM\perp x$ 轴于点 M,过点 P 作 $PH\perp AM$ 于点 H,连结 PA, PB,则 $PB\perp x$ 轴于点 B,

$PH=BM, PA=PB=MH=y$.

$\because A(1,2), \therefore OM=1, AM=2$.

$\because$ 点 P 的横坐标为 2,

$\therefore OB=2$,

$\therefore PH=OB-OM=2-1=1, AH=AM-PB=2-y$.

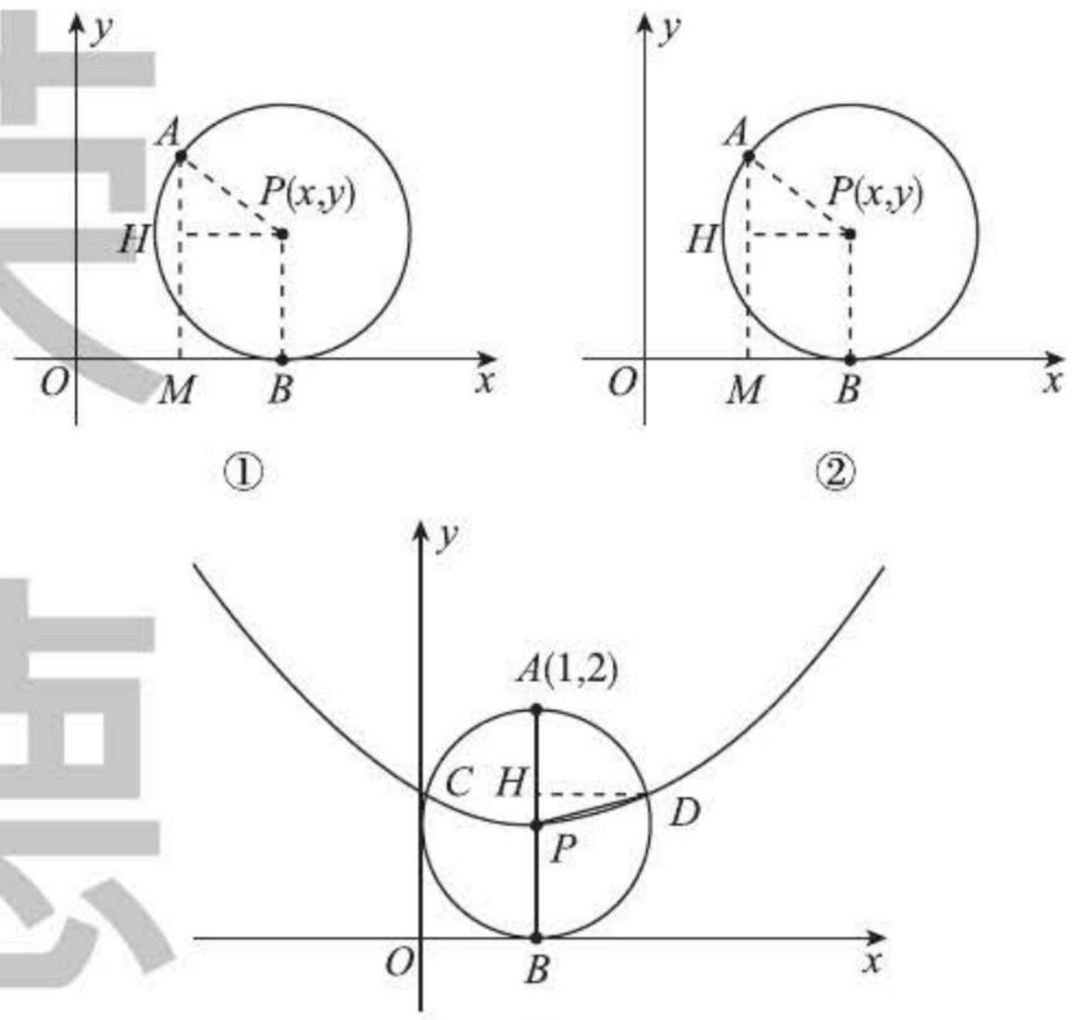
$\because$ 在 $\mathrm{Rt}\triangle AHP$ 中,

$AH^2+PH^2=AP^2$,

$\therefore (2-y)^2+1^2=y^2$.

$\therefore y=\dfrac{5}{4}$.

故当 $x=2$ 时,$\odot P$ 的半径等于$\dfrac{5}{4}$.



(第 17 题)

(2)如图②,过点 A 作 $AM\perp x$ 轴于点 M,过点 P 作 $PH\perp AM$ 所在直线于点 H. 连结 PA, PB,则 $PB\perp x$ 轴于点 $B, PH=MB, PA=PB=MH=y$.

$\because A(1,2), \therefore AM=2, OM=1$.

$\because P(x,y), \therefore OB=|x|$,

$\therefore PH=|x-1|, AH=|2-y|$.

$\because$ 在 $\mathrm{Rt}\triangle AHP$ 中,$AH^2+HP^2=AP^2$,

$\therefore |2-y|^2+|x-1|^2=y^2$.

$\therefore 4-4y+y^2+x^2-2x+1=y^2$.

$\therefore 4y=x^2-2x+5$.

$\therefore y=\dfrac{1}{4}x^2-\dfrac{1}{2}x+\dfrac{5}{4}$.

(3)点 $A(1,2)$;x 轴

(4)$\odot P$ 的半径为 1,即 $y=1$,代入 $y=\dfrac{1}{4}x^2-\dfrac{1}{2}x+\dfrac{5}{4}$求得 $x_1=x_2=1$,即圆心 $P(1,1)$,又可知 $P(1,1)$即

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

为函数 $y=\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{2}x+\frac{5}{4}$ 的图象的顶点，如图③，则 $D\left(m,\frac{1}{4}m^2-\frac{1}{2}m+\frac{5}{4}\right)$，过点 D 作 $DH\perp AP$ 于 H，则 $DH=m-1$，$HP=\frac{1}{4}m^2-\frac{1}{2}m+\frac{5}{4}-1=\frac{1}{4}m^2-\frac{1}{2}m+\frac{1}{4}=\frac{1}{4}(m-1)^2$，$PD=1$，

$\because$ 在 $\mathrm{Rt}\triangle DHP$ 中，$DH^2+HP^2=PD^2$，

$\therefore (m-1)^2+\left[\frac{1}{4}(m-1)^2\right]^2=1^2$，

令 $(m-1)^2=t$，则上式可化为 $t+\left(\frac{1}{4}t\right)^2=1^2$，解得 $t=4\sqrt{5}-8$ 或 $t=-4\sqrt{5}-8$（舍去），

$\therefore \cos\angle APD=\frac{PH}{PD}=\frac{\frac{1}{4}(m-1)^2}{1}=\frac{\frac{1}{4}t}{1}=\frac{1}{4}t=\frac{1}{4}(4\sqrt{5}-8)=\sqrt{5}-2$.

第28章 样本与总体

28.1 抽样调查的意义

【两年模拟兵法】

1. B **2.** D **3.** C

4. D **点拨：**选项 A 中，抽查对象不是本校学生的视力情况，故 A 错误；

选项 B 中，调查对象不具有广泛性、代表性，故 B 错误；

选项 C 中，调查对象不具有广泛性，故 C 错误；

选项 D 中，随机调查本校各年级 10% 的学生视力情况，具有广泛性和代表性，故 D 正确.

5. C **点拨：**每名考生的数学考试成绩是个体，故②错误；200 名考生的数学考试成绩是总体的一个样本，所以③也错误；①和④正确，故选 C.

6. B

7. 解：(1)不合适，因为抽取的样本不具有代表性，抽样时应该让成绩好、中、差的同学都有代表参加.

(2)不合适，因为上海市的经济发达，公民受教育程度较高，因而抽取的样本不具有代表性.

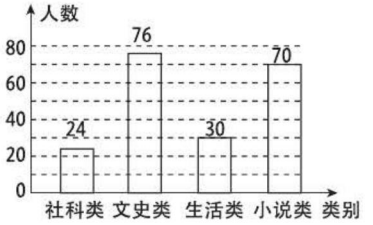
(3)不合适，因为青少年不仅仅是中学生，还有为数众多的非中学生，中学生对网络的态度不代表青少年对网络的态度.

(4)合适，由于抽样是随机的，因此抽取的样本合适.

(5)不合适，因为调查的人数太少，而且各年级的情况可能有所不同.

8. 解：(1)200

(2)补全条形统计图如图所示：



（第 8 题）

(3)126

(4)$2\,500\times\frac{24}{200}=300$（人）.

答：估计该校喜欢“社科类”书籍的学生人数为 300 人.

28.2 用样本估计总体

【两年模拟兵法】

1. D **2.** C **3.** A **4.** ③

5. 63.6

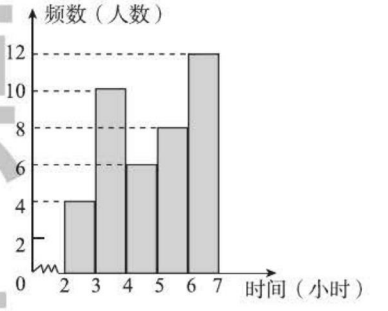
6. 解：(1)A

(2)$140\div7\times30=600$（千克）.

答：估计一个月该水果店可销售苹果 600 千克.

7. 解：(1)6；0.2

(2)补全频数分布直方图如图所示.

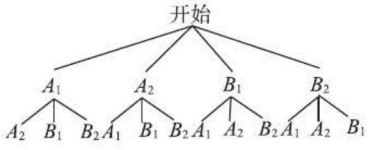


（第 7 题）

(3)由题意知，估计全校每周在校参加体育锻炼时间至少有 4 小时的学生为 $1\,200\times(0.15+0.2+0.3)=780$（名）.

8. 解：(1)50；360

(2)画树状图如图所示，共有 12 种等可能的结果，恰好抽到一男一女的结果有 8 种，所以恰好抽到一男一女的概率 $P=\frac{8}{12}=\frac{2}{3}$.



（第 8 题）

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

28.3 借助调查做决策

【两年模拟兵法】

1. D **点拨:**由题意知,被调查的学生人数为 $60 \div 15\% = 400$. ∴选项 A 正确;∵扇形统计图中 A 所占的百分比为 $\frac{40}{400} \times 100\% = 10\%$,$D$ 所占的百分比为 $\frac{100}{400} \times 100\% = 25\%$,∴扇形统计图中 E 所占的百分比为 $1 - (17.5\% + 10\% + 15\% + 12.5\% + 25\%) = 20\%$. ∴扇形统计图中 E 部分扇形的圆心角为 $360° \times 20\% = 72°$,∴选项 B 正确;被调查的学生中喜欢选修课 E 的人数为 $400 \times 20\% = 80$,被调查的学生中喜欢选修课 F 的人数为 $400 \times 17.5\% = 70$,∴选项 C 正确;∵ $12.5\% > 10\%$,∴喜欢选修课 A 的人数最少,∴选项 D 错误.

2. D **点拨:**根据统计图的特点知,条形统计图能清楚地表示出每个项目的具体数目,正好符合这道题要把不同品种的奶牛的平均产奶量表示清楚的目的.

3. 甲;乙;两个图纵轴上同一单位长度所表示的意义不同,造成图中折线的倾斜程度不同 **点拨:**甲图纵轴上一个单位长度表示 5 分,而乙图纵轴上一个单位长度表示 10 分.

4. **解:**(1)中位数

(2)众数

(3)求平均数的方法.

(4)甲、乙两人的说法都能较好地反映公司员工收入的一般水平.

5. **解:**(1)直观地看,第五组的份数最多,第一组、第二组的份数最少,不能求出最多的是最少的几倍.

(2)实际上,最多的是最少的 $\frac{21}{2} = 10.5$ 倍,图中所表现出来的直观情况与此不相符.

(3)人们习惯从条形图中直条的高度来判断倍数关系,但这个图中直条的高度之比并不等于相应的数目之比,因而容易给人造成错觉.

(4)为了更直观、清楚地反映实际情况,应将 0 作为统计图中纵轴上人数的起始值.

6. **解:**(1)依题意,得 $y = 0.6x + 0.8(40 - x)$

$= -0.2x + 32$.

(2)依题意,得

$$\begin{cases} 35x + 25(40 - x) \geqslant 1\,240, \\ 15x + 35(40 - x) \geqslant 880, \end{cases}$$

化简,得 $\begin{cases} 10x \geqslant 240, \\ 520 \geqslant 20x, \end{cases}$ 即 $\begin{cases} x \geqslant 24, \\ x \leqslant 26. \end{cases}$

所以 $24 \leqslant x \leqslant 26$.

因为 x 取整数,故 A 型车厢可用 24 节或 25 节或 26 节.

相应地有三种方案:

①24 节 A 型车厢和 16 节 B 型车厢;

②25 节 A 型车厢和 15 节 B 型车厢;

③26 节 A 型车厢和 14 节 B 型车厢.

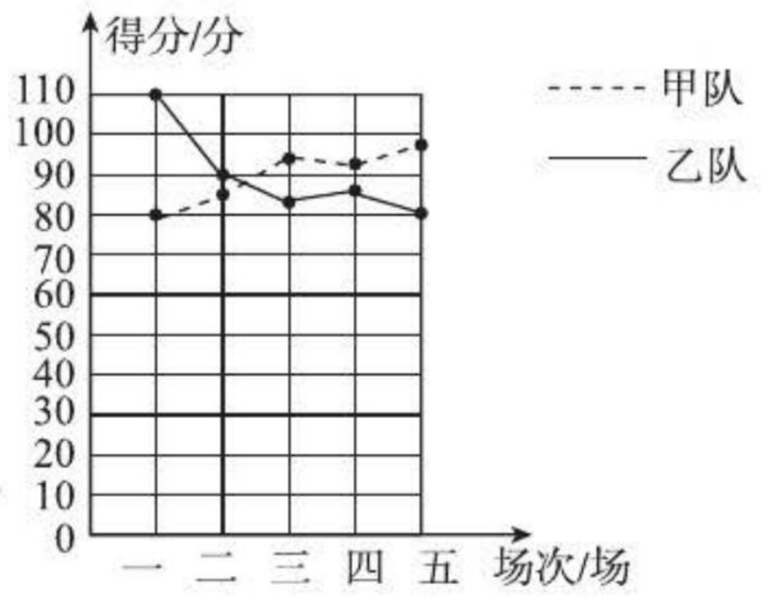
(3)由函数 $y = -0.2x + 32$ 知,x 越大,y 越小,故当 $x = 26$ 时,运费最省.

这时 $y = -0.2 \times 26 + 32 = 26.8$.

答:安排 26 节 A 型车厢和 14 节 B 型车厢运费最省,最省运费为 26.8 万元.

7. **解:**(1)由题意知,乙队五场比赛成绩分别为 110 分、90 分、83 分、87 分、80 分,画折线统计图如图所示.

甲、乙两支篮球队比赛成绩折线统计图



(第 7 题)

(2)$\bar{x}_{乙} = \frac{1}{5} \times (110 + 90 + 83 + 87 + 80) = 90$(分).

(3)从平均分看,两队的平均分相同,实力大体相当;

从获胜场数看,甲队胜三场,乙队胜两场,甲队成绩较好;

从折线的走势看,甲队比赛成绩呈上升趋势,而乙队比赛成绩呈下降趋势,可见甲队成绩较好.

综上所述,甲队优于乙队,选派甲队参赛能取得更好的成绩.

素养提分整合篇

【好题必解】

1. D

2. ③⑤;①②④ **点拨:**①中的调查具有破坏性,适宜抽样调查;②④范围广,不宜采取全面调查,只能采取抽样调查;③⑤适合全面调查.

3. C

4. D

5. B

6. D

7. A

8. **解:**(1)48 人;72°

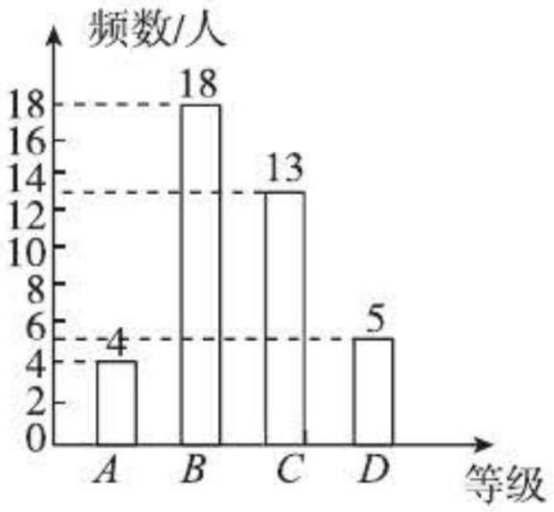
(2)$30\% \times 1\,000 = 300$(人).

故估计富春茶社 1 000 名顾客中最喜欢“汤包”的有 300 人.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

9. 解:(1)117;

(2)如图.



(第9题)

(3)B

(4)估计足球运球测试成绩达到A级的学生有$300\times\frac{4}{4+18+13+5}=30$(人).

【第28章测试卷】

一、**1**. D **2**. B **3**. A **4**. C **5**. B **6**. A **7**. B **8**. C

二、**9**. 10 **10**. 560 **11**. 360 **12**. 50

三、**13. 解**:(1)合适,在全校所有的班级中任意抽取8个班级具有一定的代表性和随机性,且工作量也不是特别大.

(2)不合适,调查的范围小,没有代表性和广泛性.

14. 解:(1)样本容量$=\frac{10}{20\%}=50$.

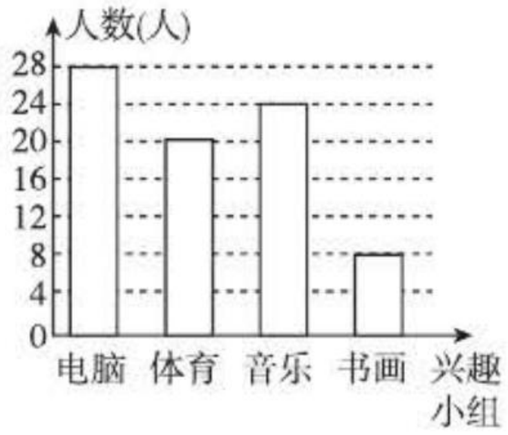
扇形统计图中A类所对的圆心角$=360°\times20\%=72°$;

(2)$500\times\frac{3}{50}=30$(名),$500-30=470$(名).

答:估计该校九年级男生毕业体育测试成绩能达标的有470名.

15. 解:(1)①电脑小组比音乐小组人数多;②音乐小组比体育小组占的比例大.(答案不唯一,合理即可)

(2)样本容量是$28\div35\%=80$,补全统计图如图所示.

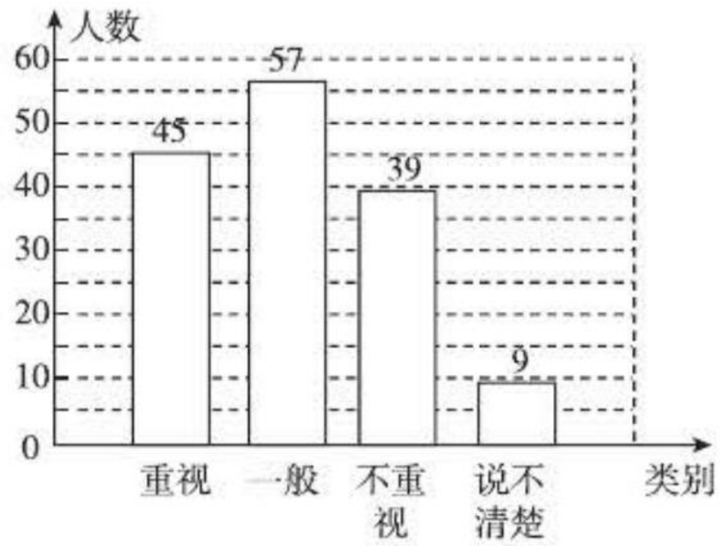


(第15题)

(3)爱好"书画"的人数占被调查人数的百分数是$8\div80\times100\%=10\%$.估计实验中学现有的学生中,爱好"书画"的人数约为$2\,870\times10\%=287$(人).

16. 解:(1)由统计表可知,样本容量为$57\div0.38=150$.

$\therefore a=150\times0.3=45$,$c=1-0.3-0.38-0.06=0.26$,$b=150\times0.26=39$,补全统计图如图所示.



(第16题)

(2)$2\,300\times0.26=598$(人).

答:估计该校"不重视阅读数学教科书"的初中生人数约为598人.

(3)(答案不唯一)①从该校初中生重视阅读数学教科书的人数比例来看,该校初中生对阅读数学教科书的重视程度不够,建议数学教师在课内外加强引导学生阅读数学教科书,逐步提高学生数学阅读能力,重视数学教科书在数学学习过程中的作用.

②考虑到样本具有的随机性、代表性和广泛性,要了解全省初中生阅读数学教科书的情况,抽样时要选择城市、乡镇不同层次的学校.

17. 解:整理、描述数据 按如下分数段整理、描述这两组样本数据:

成绩/人数/部门	40≤x≤49	50≤x≤59	60≤x≤69	70≤x≤79	80≤x≤89	90≤x≤100
甲	0	0	1	11	7	1
乙	1	0	0	7	10	2

得出结论 a. 估计乙部门生产技能优秀的员工人数为$400\times\frac{12}{20}=240$(人);

b. 答案不唯一,言之有理即可.

可以推断出甲部门员工的生产技能水平较高,理由如下:

①甲部门生产技能测试中,测试成绩的平均数较高,表示甲部门生产技能水平较高;

②甲部门生产技能测试中,没有生产技能不合格的员工.

可以推断出乙部门员工的生产技能较高,理由如下:

①乙部门生产技能测试中,测试成绩的中位数较高,表示乙部门生产技能水平优秀的员工较多;

②乙部门生产技能测试中,测试成绩的众数较高,表示乙部门生产技能水平较高.

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

教材习题参考答案及点拨

第26章 二次函数

26.1 二次函数

练习

1. 解:(1)$S=\frac{4.5\times(10-4.5)}{2}=12.375(\text{cm}^2)$.

(2)$S=\frac{x(10-x)}{2}$,即$S=-\frac{x^2}{2}+5x(0<x<10)$.

点拨:已知直角三角形的两条直角边的长的和及一条直角边的长,就可以表示出另一条直角边的长.本题中两条直角边的长的和是10 cm,若一条直角边的长为x cm,则另一条直角边的长是$(10-x)$ cm,故此直角三角形的面积是$\frac{x(10-x)}{2}$ cm^2,从而得出函数关系式.因为是实际问题,所以应标明此函数自变量的取值范围.

2. 解:(1)$S=6x^2(x>0)$;$V=x^3(x>0)$.

(2)$S=6x^2$是x的二次函数.

习题26.1

1. 解:(1)$C=2\pi r(r>0)$;$V=6\pi r^2(r>0)$;$V=\frac{3C^2}{2\pi}(C>0)$.

(2)在这三个函数中,$V=6\pi r^2(r>0)$与$V=\frac{3C^2}{2\pi}(C>0)$是二次函数.

2. 解:$y=(x+4)^2-4^2$,整理得$y=x^2+8x$.

故y关于x的函数关系式是$y=x^2+8x$.

这个函数是二次函数.

点拨:原正方形的面积是4^2,边长增加x后所得的正方形的面积是$(x+4)^2$,故可写出增加的面积y与x之间的函数关系式为$y=(x+4)^2-4^2$.

3. 解:把$x=2,y=4$与$x=-1,y=-3$分别代入$y=ax^2+c$,得$\begin{cases}4a+c=4,\\a+c=-3,\end{cases}$解得$\begin{cases}a=\frac{7}{3},\\c=-\frac{16}{3}.\end{cases}$

所以a、c的值分别是$\frac{7}{3}$,$-\frac{16}{3}$.

4. 解:(1)$S=2.5\times2r+\frac{\pi r^2}{2}(r>0)$,即$S=\frac{\pi r^2}{2}+5r(r>0)$.

(2)把$\pi\approx3.14,r=2$代入$S=\frac{\pi r^2}{2}+5r$,得$S\approx\frac{3.14\times2^2}{2}+5\times2\approx16.3$.

故当上部半圆的半径为2 m时的截面面积约是16.3 m^2.

点拨:(1)此隧道的截面是由一个矩形和一个半圆组成的,故只需分别表示出矩形和半圆的面积便可写出S关于r的函数关系式;

(2)只需把$\pi\approx3.14,r=2$代入函数关系式$S=\frac{\pi r^2}{2}+5r$,便可求出S的值.

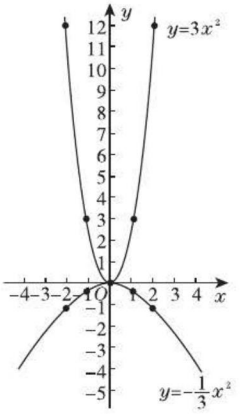
26.2 二次函数的图象与性质

练习

1. 解:(1)、(2)列表如下:

x	…	-2	-1	0	1	2	…
$y=3x^2$	…	12	3	0	3	12	…
$y=-\frac{1}{3}x^2$	…	$-\frac{4}{3}$	$-\frac{1}{3}$	0	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{4}{3}$	…

在直角坐标系中描点并连线,(1)、(2)的图象如图所示.



(第1题)

2. (1)y轴;(0,0);$\neq0$

(2)下;下;高

点拨:通过观察图象,可以发现二次函数图象的特点.

3. 解:抛物线$y=-4x^2$的开口向下,对称轴是y轴,顶点坐标是(0,0);

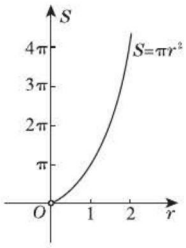
抛物线$y=\frac{1}{4}x^2$的开口向上,对称轴是y轴,顶点坐标是(0,0).

点拨:抛物线$y=ax^2$的顶点是坐标原点,对称轴是y轴.当$a>0$时,开口向上;当$a<0$时,开口向下.

4. 解:(1)$S=\pi r^2(r>0)$.

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

(2)图象如图所示.



(第4题)

点拨:圆的面积是其半径的二次函数,画函数图象时应注意函数的实际意义,显然 S 与 r 均大于零.

练习

1. 解:(1)列表:

x	…	−3	−2	−1	0	1	2	3	…
$y=-\frac{1}{3}x^2$	…	−3	$-\frac{4}{3}$	$-\frac{1}{3}$	0	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{4}{3}$	−3	…
$y=-\frac{1}{3}x^2-2$	…	−5	$-\frac{10}{3}$	$-\frac{7}{3}$	−2	$-\frac{7}{3}$	$-\frac{10}{3}$	−5	…

描点并连线,画图象略.

(2)函数 $y=-\frac{1}{3}x^2$ 的图象开口向下,对称轴是 y 轴,顶点坐标是(0,0);

函数 $y=-\frac{1}{3}x^2-2$ 的图象开口向下,对称轴是 y 轴,顶点坐标是(0,−2).

点拨:二次函数 $y=ax^2+k(a\neq0)$ 的图象的对称轴是 y 轴,顶点坐标是(0,k),当 $a>0$ 时,图象开口向上;当 $a<0$ 时,图象开口向下.

2. 解:将抛物线 $y=-\frac{1}{3}x^2$ 向下平移2个单位,可得到抛物线 $y=-\frac{1}{3}x^2-2$. 如果要得到抛物线 $y=-\frac{1}{3}x^2+4$,应将抛物线 $y=-\frac{1}{3}x^2$ 向上平移4个单位.

函数 $y=-\frac{1}{3}x^2+4$ 的图象开口向下,对称轴为 y 轴,顶点坐标为(0,4).

点拨:通过向上或向下平移,可由函数 $y=ax^2$ 的图象得到函数 $y=ax^2+k$ 的图象,其中 $a\neq0$.

3. 解:函数 $y=ax^2+k$(a、k 是常数,$a\neq0$)的图象的对称轴是 y 轴,顶点坐标是(0,k),当 $a>0$ 时,图象开口向上;当 $a<0$ 时,图象开口向下. 填表如下:

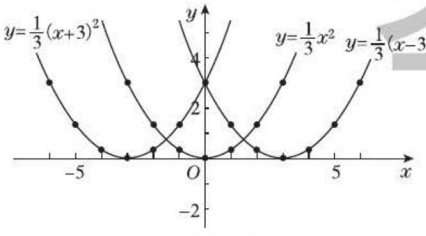
$y=ax^2+k$	开口方向		对称轴	顶点坐标
	$a>0$	向上	y 轴	(0,k)
	$a<0$	向下		

练习

1. 解:(1)列表:

x	…	−6	−5	−4	−3	−2	−1	0	1	2	3	4	5	6	…
$y=\frac{1}{3}x^2$	…				3	$\frac{4}{3}$	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{4}{3}$	3				…
$y=\frac{1}{3}(x+3)^2$	…	3	$\frac{4}{3}$	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{4}{3}$	3							…
$y=\frac{1}{3}(x-3)^2$	…							3	$\frac{4}{3}$	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{4}{3}$	3	…

描点并连线,图象如图所示.



(第1题)

(2)函数 $y=\frac{1}{3}x^2$ 的图象开口向上,对称轴是 y 轴,顶点坐标是(0,0);

函数 $y=\frac{1}{3}(x+3)^2$ 的图象开口向上,对称轴是直线 $x=-3$,顶点坐标是(−3,0);

函数 $y=\frac{1}{3}(x-3)^2$ 的图象开口向上,对称轴是直线 $x=3$,顶点坐标是(3,0).

(3)这三个函数的图象均是开口向上. 对于函数 $y=\frac{1}{3}x^2$,当 $x<0$ 时,函数值 y 随自变量 x 的增大而减小;当 $x>0$ 时,函数值 y 随自变量 x 的增大而增大;当 $x=0$ 时,函数取得最小值0. 对于函数 $y=\frac{1}{3}(x+3)^2$,当 $x<-3$ 时,函数值 y 随自变量 x 的增大而减小;当 $x>-3$ 时,函数值 y 随自变量 x 的增大而增大;当 $x=-3$ 时,函数取得最小值0. 对于函数 $y=\frac{1}{3}(x-3)^2$,当 $x<3$ 时,函数值 y 随自变量 x 的增大而减小;当 $x>3$

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

时,函数值 y 随自变量 x 的增大而增大;当 $x=3$ 时,函数取得最小值 0.

点拨:二次函数 $y=a(x-h)^2$ 的图象可由 $y=ax^2$ 的图象通过左右平移得到,且其性质与 $y=ax^2$ 的性质相类似,具有相同的开口方向,类似的变化规律.

2. 解:把抛物线 $y=\frac{1}{3}x^2$ 向左平移 3 个单位,可以得到抛物线 $y=\frac{1}{3}(x+3)^2$;把抛物线 $y=\frac{1}{3}x^2$ 向右平移 3 个单位,可以得到抛物线 $y=\frac{1}{3}(x-3)^2$.

3. 解:函数 $y=a(x-h)^2$(a、h 是常数,$a\neq0$)的图象的对称轴是直线 $x=h$,顶点坐标是 $(h,0)$,当 $a>0$ 时,图象开口向上;当 $a<0$ 时,图象开口向下. 填表如下:

$y=a(x-h)^2$	开口方向		对称轴	顶点坐标
	$a>0$	向上	直线 $x=h$	$(h,0)$
	$a<0$	向下		

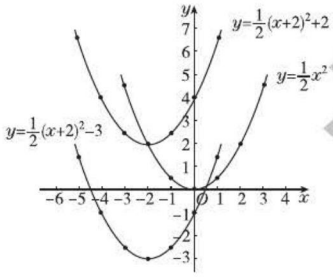
点拨:函数 $y=a(x-h)^2$(a、h 是常数,$a\neq0$)是二次函数的一种特殊形式,其图象的对称轴是直线 $x=h$,顶点坐标是 $(h,0)$,当 $a>0$ 时,图象开口向上;当 $a<0$ 时,图象开口向下.

练习

1. 解:(1)列表:

x	…	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	…
$y=\frac{1}{2}x^2$	…			$\frac{9}{2}$	2	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	2	$\frac{9}{2}$	…
$y=\frac{1}{2}(x+2)^2+2$	…	$\frac{13}{2}$	4	$\frac{5}{2}$	2	$\frac{5}{2}$	4	$\frac{13}{2}$			…
$y=\frac{1}{2}(x+2)^2-3$	…	$\frac{3}{2}$	-1	$-\frac{5}{2}$	-3	$-\frac{5}{2}$	-1	$\frac{3}{2}$			…

描点并连线,图象如图所示.



(第 1 题)

(2)函数 $y=\frac{1}{2}x^2$ 的图象开口向上,对称轴是 y 轴,顶点坐标是(0,0);

函数 $y=\frac{1}{2}(x+2)^2+2$ 的图象开口向上,对称轴是直线 $x=-2$,顶点坐标是 $(-2,2)$;

函数 $y=\frac{1}{2}(x+2)^2-3$ 的图象开口向上,对称轴是直线 $x=-2$,顶点坐标是 $(-2,-3)$.

(3)函数 $y=\frac{1}{2}(x+2)^2-3$ 的图象开口向上,对称轴是直线 $x=-2$,当 $x<-2$ 时,函数值 y 随自变量 x 的增大而减小;当 $x>-2$ 时,函数值 y 随自变量 x 的增大而增大;当 $x=-2$ 时,函数取得最小值 -3.

2. 解:把抛物线 $y=\frac{1}{2}x^2$ 向左平移 2 个单位,再向上平移 2 个单位,可以得到抛物线 $y=\frac{1}{2}(x+2)^2+2$;把抛物线 $y=\frac{1}{2}x^2$ 向右平移 2 个单位,再向下平移 3 个单位,可以得到抛物线 $y=\frac{1}{2}(x-2)^2-3$. 如果要得到抛物线 $y=\frac{1}{2}(x+2)^2-6$,应将抛物线 $y=\frac{1}{2}x^2$ 向左平移 2 个单位,再向下平移 6 个单位.

点拨:抛物线 $y=a(x-h)^2+k$ 可由抛物线 $y=ax^2$ 平移得到.

3. 解:函数 $y=a(x-h)^2+k$(a、h、k 是常数,$a\neq0$)的图象的对称轴是直线 $x=h$,顶点坐标是 (h,k),当 $a>0$ 时,抛物线开口向上;当 $a<0$ 时,抛物线开口向下. 填表如下:

$y=a(x-h)^2+k$	开口方向		对称轴	顶点坐标
	$a>0$	向上	直线 $x=h$	(h,k)
	$a<0$	向下		

点拨:a 的正负决定抛物线 $y=a(x-h)^2+k$ 的开口方向,而 h,k 则决定抛物线的对称轴及顶点坐标.

4. 解:$y=-3x^2-6x+8=-3(x^2+2x)+8=-3(x^2+2x+1-1)+8=-3(x+1)^2+3+8=-3(x+1)^2+11$,即 $y=-3(x+1)^2+11$. 故函数 $y=-3x^2-6x+8$ 的图象开口向下,对称轴是直线 $x=-1$,顶点坐标是 $(-1,11)$.

点拨:把函数 $y=ax^2+bx+c(a\neq0)$ 通过配方化成 $y=a(x-h)^2+k(a\neq0)$ 的形式后,就能很容易地确定其图象的对称轴、顶点坐标.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

练习

1. 解:(1)抛物线 $y=3(x+3)^2+4$ 的开口向上,对称轴是直线 $x=-3$,顶点坐标是 $(-3,4)$;

(2)抛物线 $y=-2(x-1)^2-2$ 的开口向下,对称轴是直线 $x=1$,顶点坐标是 $(1,-2)$;

(3)抛物线 $y=\frac{1}{2}(x+3)^2-2$ 的开口向上,对称轴是直线 $x=-3$,顶点坐标是 $(-3,-2)$;

(4)抛物线 $y=-\frac{2}{3}(x-1)^2+0.6$ 的开口向下,对称轴是直线 $x=1$,顶点坐标是 $(1,0.6)$.

点拨:抛物线 $y=a(x-h)^2+k$ 的开口方向取决于 a 的符号,当 $a>0$ 时,开口向上;当 $a<0$ 时,开口向下. 其对称轴是直线 $x=h$,顶点坐标是 (h,k).

2. 解:(1)$y=2x^2+4x=2(x^2+2x)=2(x^2+2x+1-1)=2(x+1)^2-2$,

故该抛物线开口向上,对称轴是直线 $x=-1$,顶点坐标是 $(-1,-2)$.

(2)$y=-2x^2-3x=-2\left(x^2+\frac{3}{2}x\right)=$

$-2\left[x^2+\frac{3}{2}x+\left(\frac{3}{4}\right)^2-\left(\frac{3}{4}\right)^2\right]=$

$-2\left[\left(x+\frac{3}{4}\right)^2-\frac{9}{16}\right]=-2\left(x+\frac{3}{4}\right)^2+\frac{9}{8}$,

故该抛物线开口向下,对称轴是直线 $x=-\frac{3}{4}$,顶点坐标是 $\left(-\frac{3}{4},\frac{9}{8}\right)$

(3)$y=-3x^2+6x-7=-3(x^2-2x)-7=-3(x^2-2x+1-1)-7=-3(x-1)^2+3-7=-3(x-1)^2-4$,故该抛物线开口向下,对称轴是直线 $x=1$,顶点坐标是 $(1,-4)$.

(4)$y=\frac{1}{2}x^2-4x+5=\frac{1}{2}(x^2-8x)+5=\frac{1}{2}(x^2-8x+4^2-4^2)+5=\frac{1}{2}(x-4)^2-3$,故该抛物线开口向上,对称轴是直线 $x=4$,顶点坐标是 $(4,-3)$.

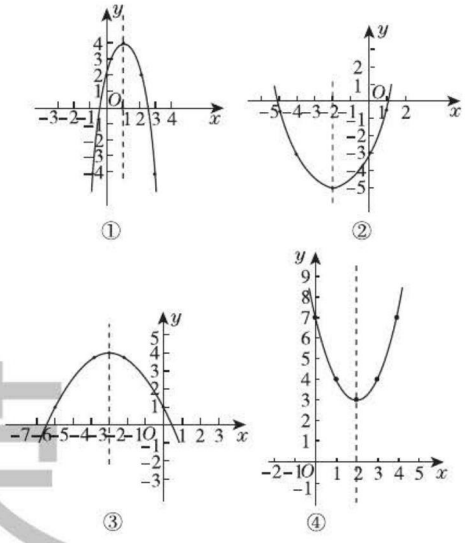
3. 解:(1)抛物线 $y=-2(x-1)^2+4$ 的开口向下,对称轴是直线 $x=1$,顶点坐标是 $(1,4)$. 图象如图①所示.

(2)抛物线 $y=\frac{1}{2}(x+2)^2-5$ 的开口向上,对称轴是直线 $x=-2$,顶点坐标是 $(-2,-5)$. 图象如图②所示.

(3)$y=-\frac{1}{3}x^2-2x+1=-\frac{1}{3}(x^2+6x)+1=$

$-\frac{1}{3}(x^2+6x+9-9)+1=-\frac{1}{3}(x+3)^2+3+1=$

$-\frac{1}{3}(x+3)^2+4$,故该抛物线的开口向下,对称轴是直线 $x=-3$,顶点坐标是 $(-3,4)$. 图象如图③所示.



(第3题)

(4)$y=x^2-4x+7=x^2-4x+4+3=(x-2)^2+3$,故该抛物线的开口向上,对称轴是直线 $x=2$,顶点坐标是 $(2,3)$. 图象如图④所示.

练习

1. 解:(1)$y=x^2-3x+4=x^2-3x+\left(-\frac{3}{2}\right)^2-\left(-\frac{3}{2}\right)^2+4=\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{7}{4}$,

即 $y=\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{7}{4}$. 故函数有最小值,且最小值是 $\frac{7}{4}$.

(2)$y=1-2x-x^2=-x^2-2x+1=-(x^2+2x)+1=-(x^2+2x+1-1)+1=-(x+1)^2+2$,

即 $y=-(x+1)^2+2$. 故函数有最大值,且最大值是 2.

(3)$y=7x^2-2\sqrt{7}x+\frac{3}{2}=7\left(x^2-\frac{2\sqrt{7}}{7}x\right)+\frac{3}{2}=7\left[x^2-\frac{2\sqrt{7}}{7}x+\left(-\frac{\sqrt{7}}{7}\right)^2-\left(-\frac{\sqrt{7}}{7}\right)^2\right]+\frac{3}{2}=7\left(x-\frac{\sqrt{7}}{7}\right)^2-1+\frac{3}{2}=7\left(x-\frac{\sqrt{7}}{7}\right)^2+\frac{1}{2}$,即 $y=7\left(x-\frac{\sqrt{7}}{7}\right)^2+\frac{1}{2}$. 故函数有最小值,且最小值是 $\frac{1}{2}$.

(4)$y=100-5x^2$,函数有最大值,且最大值是 100.

(5)$y=-6x^2+12x=-6(x^2-2x)=-6(x^2-2x+1-1)=-6(x-1)^2+6$,即 $y=-6(x-1)^2+6$. 故函数有最大值,且最大值是 6.

(6)$y=-\frac{3}{2}x^2-4x+1=-\frac{3}{2}\left(x^2+\frac{8}{3}x\right)+1=-\frac{3}{2}$

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

$\left[x^2+\frac{8}{3}x+\left(\frac{4}{3}\right)^2-\left(\frac{4}{3}\right)^2\right]+1=-\frac{3}{2}\left(x+\frac{4}{3}\right)^2+\frac{8}{3}+1=-\frac{3}{2}\left(x+\frac{4}{3}\right)^2+\frac{11}{3}$,即 $y=-\frac{3}{2}\left(x+\frac{4}{3}\right)^2+\frac{11}{3}$. 故函数有最大值,且最大值是 $\frac{11}{3}$.

2. 解:设矩形的面积是 $y\ cm^2$,一边长是 $x\ cm$,则其邻边长是 $(20-x)\ cm$. 故有 $y=x(20-x)(0<x<20)$,即 $y=-x^2+20x(0<x<20)$. 将上式配方,得 $y=-(x-10)^2+100$. 故当 $x=10$ 时,函数取最大值. 此时 $20-x=20-10=10$. 故当矩形的长、宽均是 10 cm 时,矩形的面积最大,最大面积是 $100\ cm^2$.

3. 解:设其中的一个正数为 x,则另一个正数为 $60-x$,它们的积为 y. 则有 $y=x(60-x)(0<x<60)$,即 $y=-x^2+60x(0<x<60)$. 将上式配方,得 $y=-(x-30)^2+900$.

故当 $x=30$ 时,函数取最大值 900.

所以它们的积最大是 900.

练习

1. 解:(1)因为抛物线的顶点在原点,所以可设二次函数的表达式为 $y=ax^2$.

把点(2,8)的坐标代入表达式,得 $8=a\times2^2$,解得 $a=2$.

故二次函数的表达式是 $y=2x^2$.

(2)设抛物线所对应的二次函数的表达式是 $y=a(x+1)^2-2$,

把点(1,10)的坐标代入表达式,得 $10=a\times(1+1)^2-2$,

解得 $a=3$.

故二次函数的表达式是 $y=3(x+1)^2-2$.

(3)设所求二次函数的表达式为 $y=ax^2+bx+c$,把点(0,-2),(1,0),(2,3)的坐标分别代入表达式,得

$$\begin{cases}c=-2,\\a+b+c=0,\\4a+2b+c=3,\end{cases}\quad\text{解得}\begin{cases}a=\frac{1}{2},\\b=\frac{3}{2},\\c=-2.\end{cases}$$

故二次函数的表达式是 $y=\frac{1}{2}x^2+\frac{3}{2}x-2$.

点拨:根据已知条件的不同特点选用适当的二次函数的表达式可以给我们解题带来很大的方便. 若图象顶点在原点,则可设其表达式为 $y=ax^2$;若图象顶点坐标为 (h,k),则可设其表达式为 $y=a(x-h)^2+k$;若知道的点为普通的点,则可设其表达式为 $y=ax^2+bx+c$.

2. 解:(1)把点(-1,-1),(0,-2),(1,1)的坐标分别代入 $y=ax^2+bx+c$,得

$$\begin{cases}a-b+c=-1,\\c=-2,\\a+b+c=1.\end{cases}\quad\text{解得}\begin{cases}a=2,\\b=1,\\c=-2.\end{cases}$$

所以这条抛物线所对应的二次函数的表达式为 $y=2x^2+x-2$.

(2) $y=2x^2+x-2$

$=2\left(x^2+\frac{1}{2}x\right)-2$

$=2\left[x^2+\frac{1}{2}x+\left(\frac{1}{4}\right)^2-\left(\frac{1}{4}\right)^2\right]-2$

$=2\left(x+\frac{1}{4}\right)^2-\frac{17}{8}$,

即 $y=2\left(x+\frac{1}{4}\right)^2-\frac{17}{8}$.

所以该抛物线的开口向上,对称轴是直线 $x=-\frac{1}{4}$,顶点坐标是 $\left(-\frac{1}{4},-\frac{17}{8}\right)$.

(3)这个函数有最小值,最小值是 $-\frac{17}{8}$.

点拨:通过配方把函数 $y=ax^2+bx+c$ 化成 $y=a(x-h)^2+k$ 的形式后,可以确定其图象的对称轴是直线 $x=h$,顶点坐标是 (h,k).

3. 解: $y=-\frac{1}{2}x^2-x+3$

$=-\frac{1}{2}(x^2+2x)+3$

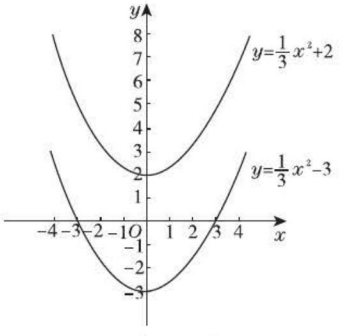
$=-\frac{1}{2}(x^2+2x+1-1)+3$

$=-\frac{1}{2}(x+1)^2+\frac{7}{2}$.

所以将抛物线 $y=-\frac{1}{2}x^2-x+3$ 向下平移 1 个单位,再向右平移 4 个单位后得到抛物线 $y=-\frac{1}{2}(x-3)^2+\frac{5}{2}$,该抛物线的开口向下,对称轴是直线 $x=3$,顶点坐标是 $\left(3,\frac{5}{2}\right)$

习题 26.2

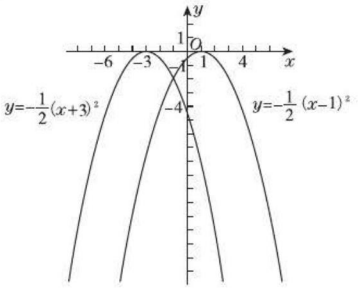
1. 解:(1)函数 $y=\frac{1}{3}x^2+2$ 与 $y=\frac{1}{3}x^2-3$ 的图象如图所示.



(第1(1)题)

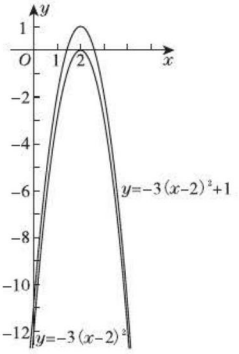
关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

(2)函数 $y=-\frac{1}{2}(x+3)^2$ 与 $y=-\frac{1}{2}(x-1)^2$ 的图象如图所示.



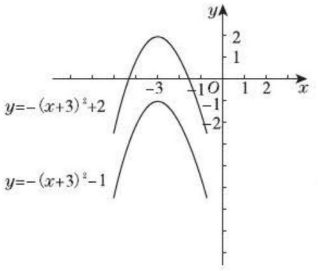
(第1(2)题)

(3)函数 $y=-3(x-2)^2$ 与 $y=-3(x-2)^2+1$ 的图象如图所示.



(第1(3)题)

(4)函数 $y=-(x+3)^2-1$ 与 $y=-(x+3)^2+2$ 的图象如图所示.



(第1(4)题)

2. 解: (1) $y=x^2-3x-4=x^2-3x+\left(-\frac{3}{2}\right)^2-\left(-\frac{3}{2}\right)^2-4=\left(x-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{25}{4}$,所以该抛物线的开口向上,对称轴是直线 $x=\frac{3}{2}$,顶点坐标是 $\left(\frac{3}{2},-\frac{25}{4}\right)$.

(2) $y=2-4x-x^2=-(x^2+4x)+2=-(x^2+4x+2^2-2^2)+2=-(x+2)^2+6$,
所以该抛物线的开口向下,对称轴是直线 $x=-2$,顶点坐标是 $(-2,6)$.

(3) $y=\frac{1}{2}x^2-2x-1=\frac{1}{2}(x^2-4x)-1=\frac{1}{2}(x^2-4x+4-4)-1=\frac{1}{2}(x-2)^2-2-1=\frac{1}{2}(x-2)^2-3$,所以该抛物线的开口向上,对称轴是直线 $x=2$,顶点坐标是 $(2,-3)$.

(4) $y=-\frac{3}{4}x^2+6x-7=-\frac{3}{4}(x^2-8x)-7=-\frac{3}{4}(x^2-8x+16-16)-7=-\frac{3}{4}(x-4)^2+12-7=-\frac{3}{4}(x-4)^2+5$,所以该抛物线的开口向下,对称轴是直线 $x=4$,顶点坐标是 $(4,5)$.

(5) $y=2x^2-3x=2\left(x^2-\frac{3}{2}x\right)$

$=2\left[x^2-\frac{3}{2}x+\left(-\frac{3}{4}\right)^2-\left(-\frac{3}{4}\right)^2\right]$

$=2\left[\left(x-\frac{3}{4}\right)^2-\frac{9}{16}\right]=2\left(x-\frac{3}{4}\right)^2-\frac{9}{8}$,

所以该抛物线的开口向上,对称轴是直线 $x=\frac{3}{4}$,顶点坐标是 $\left(\frac{3}{4},-\frac{9}{8}\right)$.

(6) $y=-2x^2-5x+7$

$=-2\left(x^2+\frac{5}{2}x\right)+7$

$=-2\left[x^2+\frac{5}{2}x+\left(\frac{5}{4}\right)^2-\left(\frac{5}{4}\right)^2\right]+7$

$=-2\left[\left(x+\frac{5}{4}\right)^2-\frac{25}{16}\right]+7$

$=-2\left(x+\frac{5}{4}\right)^2+\frac{25}{8}+7$

$=-2\left(x+\frac{5}{4}\right)^2+\frac{81}{8}$,所以该抛物线的开口向下,对称轴是直线 $x=-\frac{5}{4}$,顶点坐标是 $\left(-\frac{5}{4},\frac{81}{8}\right)$.

点拨: 先把抛物线对应的函数表达式 $y=ax^2+bx+c$ 化成 $y=a(x-h)^2+k$ 的形式,然后再确定其对称轴及顶点坐标.

3. 解: (1)有最低点. $y=4x^2-4x+1=(2x-1)^2=4\left(x-\frac{1}{2}\right)^2$,故最低点的坐标是 $\left(\frac{1}{2},0\right)$.

(2)有最高点,最高点的坐标是 $(0,-9)$.

(3)有最高点. $y=-4x^2+3x=-4\left(x^2-\frac{3}{4}x\right)$

$=-4\left[x^2-\frac{3}{4}x+\left(-\frac{3}{8}\right)^2-\left(-\frac{3}{8}\right)^2\right]$

$=-4\left(x-\frac{3}{8}\right)^2+\frac{9}{16}$,故最高点的坐标是 $\left(\frac{3}{8},\frac{9}{16}\right)$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

(4)有最低点. $y=3x^2-5x+6=3\left(x^2-\frac{5}{3}x\right)+6$

$=3\left[x^2-\frac{5}{3}x+\left(-\frac{5}{6}\right)^2-\left(-\frac{5}{6}\right)^2\right]+6$

$=3\left[\left(x-\frac{5}{6}\right)^2-\frac{25}{36}\right]+6$

$=3\left(x-\frac{5}{6}\right)^2-\frac{25}{12}+6$

$=3\left(x-\frac{5}{6}\right)^2+\frac{47}{12}$,故最低点的坐标是$\left(\frac{5}{6},\frac{47}{12}\right)$.

点拨:对于二次函数 $y=ax^2+bx+c$,当 $a>0$ 时,图象有最低点;当 $a<0$ 时,图象有最高点.

4. 解:(1)设抛物线所对应的二次函数的表达式是 $y=ax^2$,把点(3,-27)的坐标代入 $y=ax^2$,得 $a\times3^2=-27$,解得 $a=-3$. 所以抛物线所对应的二次函数的表达式是 $y=-3x^2$.

(2)设二次函数的表达式是 $y=a(x-1)^2-2$,把点(2,3)的坐标代入 $y=a(x-1)^2-2$,得 $a\times(2-1)^2-2=3$,解得 $a=5$. 所以二次函数的表达式是 $y=5(x-1)^2-2$.

(3)设二次函数的表达式是 $y=ax^2+bx+c$,把点(-1,2),(0,1),(2,-7)的坐标分别代入 $y=ax^2+bx+c$,得

$\begin{cases}a-b+c=2,\\c=1,\\4a+2b+c=-7,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=-1,\\b=-2,\\c=1.\end{cases}$ 所以二次函数的表达式是 $y=-x^2-2x+1$.

5. 解:(1)由题图可知,此抛物线的顶点坐标是(5,4),且该抛物线过原点(0,0),故设抛物线所对应的函数表达式为 $y=a(x-5)^2+4$,把点(0,0)的坐标代入 $y=a(x-5)^2+4$,得 $a\times(0-5)^2+4=0$,解得 $a=-\frac{4}{25}$. 所以这条抛物线所对应的函数表达式是 $y=-\frac{4}{25}(x-5)^2+4$.

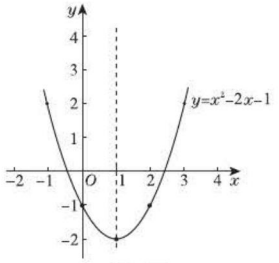
(2)把 $x=6$ 代入 $y=-\frac{4}{25}(x-5)^2+4$,得 $y=-\frac{4}{25}\times(6-5)^2+4=\frac{96}{25}$. 故点 M 处对应的桥洞壁离水面的高是$\frac{96}{25}$ m.

26.3 实践与探索

练习 略.

练习

1. 解:画函数 $y=x^2-2x-1$ 的图象如图所示.

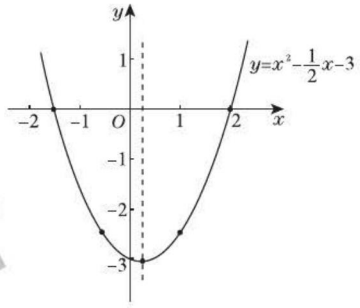


(第1题)

抛物线与 x 轴的交点坐标大约是(-0.4,0),(2.4,0),所以方程 $x^2-2x-1=0$ 的近似根是 $x_1\approx-0.4$,$x_2\approx2.4$.

点拨:函数 $y=ax^2+bx+c(a\neq0)$ 的图象与 x 轴交点的横坐标就是方程 $ax^2+bx+c=0$ 的根,故只需求出抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 与 x 轴的交点横坐标即可解决问题.

2. 解:原方程可化为 $x^2-\frac{1}{2}x-3=0$. 画函数 $y=x^2-\frac{1}{2}x-3$ 的图象如图所示.



(第2题)

因为抛物线 $y=x^2-\frac{1}{2}x-3$ 与 x 轴的交点坐标是(2,0)和(-1.5,0),所以方程 $x^2=\frac{1}{2}x+3$ 的根是 $x_1=2$,$x_2=-1.5$.

点拨:把方程 $x^2=\frac{1}{2}x+3$ 变形为 $x^2-\frac{1}{2}x-3=0$,利用抛物线 $y=x^2-\frac{1}{2}x-3$ 来求方程 $x^2-\frac{1}{2}x-3=0$ 的根是解决问题的关键.

习题 26.3

1. 解:设抛物线所对应的二次函数表达式是 $y=a(x-4)^2+3.2$,把点(0,1.6)的坐标代入 $y=a(x-4)^2+3.2$,得 $a\cdot(0-4)^2+3.2=1.6$.

解得 $a=-0.1$.

所以抛物线所对应的二次函数表达式是 $y=-0.1(x-4)^2+3.2$.

令 $y=0$,得 $-0.1(x-4)^2+3.2=0$,解得 $x\approx9.7$ 或 $x\approx$

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

-1.7(舍去).

所以该运动员的成绩约是9.7 m.

点拨:点 B 的横坐标就是该运动员的成绩,故只需先求出抛物线所对应的二次函数表达式,然后求出抛物线与 x 轴的交点横坐标即可得解.

2. 解:(1)$y=(x-8)[100-10(x-10)]$,即 $y=-10x^2+280x-1\,600(x\geqslant 10)$.

(2)$y=-10x^2+280x-1\,600=-10(x-14)^2+360$.

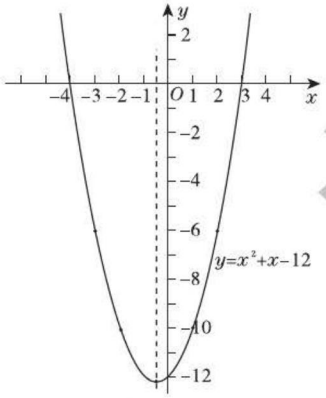
当 $x=14$ 时,函数取得最大值360.

故每件售价定为14元,才能使每天所得的利润最大.

点拨:(1)每件的售价是 x 元,则提价 $(x-10)$ 元,从而少卖 $10(x-10)$ 件,可卖 $[100-10(x-10)]$ 件. 又由于每件盈利 $(x-8)$ 元,故 $y=(x-8)[100-10(x-10)]$.

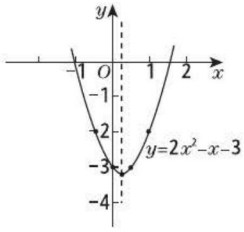
(2)只有当函数 $y=(x-8)[100-10(x-10)]$ 取得最大值时,才能使每天所得的利润最大.

3. 解:(1)画出函数 $y=x^2+x-12$ 的图象如图所示. 抛物线与 x 轴的交点坐标是 $(-4,0)$,$(3,0)$,所以方程 $x^2+x-12=0$ 的解是 $x_1=-4$,$x_2=3$.



(第3(1)题)

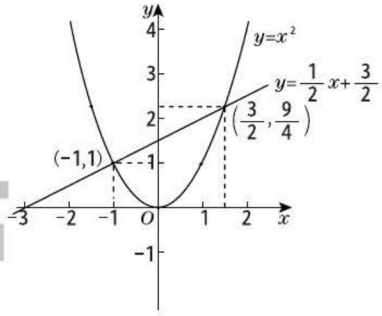
(2)画出函数 $y=2x^2-x-3$ 的图象如图所示. 抛物线与 x 轴的交点坐标是 $(-1,0)$,$(1.5,0)$,所以方程 $2x^2-x-3=0$ 的解是 $x_1=-1$,$x_2=1.5$.



(第3(2)题)

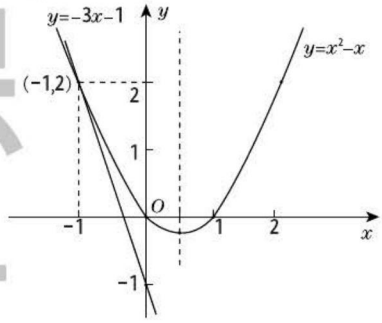
点拨:画出函数 $y=ax^2+bx+c(a\neq 0)$ 的图象,其与 x 轴交点的横坐标就是对应的一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 的解.

4. 解:(1)画出函数 $y=\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}$ 和 $y=x^2$ 的图象如图所示. 两函数图象的交点坐标是 $(-1,1)$,$\left(\frac{3}{2},\frac{9}{4}\right)$,所以原方程组的解是 $\begin{cases}x_1=-1,\\y_1=1,\end{cases}\begin{cases}x_2=\frac{3}{2},\\y_2=\frac{9}{4}.\end{cases}$



(第4(1)题)

(2)画出函数 $y=-3x-1$ 和 $y=x^2-x$ 的图象如图所示. 两函数图象的交点坐标是 $(-1,2)$. 所以原方程组的解是 $\begin{cases}x=-1,\\y=2.\end{cases}$



(第4(2)题)

点拨:两函数图象交点的横坐标就是方程组的解中 x 的值,纵坐标就是方程组的解中 y 的值.

复习题

A组

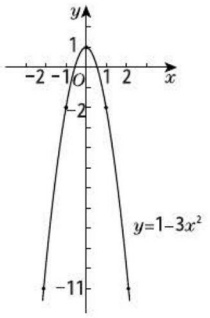
1. 解:填写表格如下:

抛物线	开口方向	对称轴	顶点坐标
$y=-\frac{3}{4}x^2$	向下	y 轴(或直线 $x=0$)	$(0,0)$
$y=2x^2-\frac{1}{4}$	向上	y 轴(或直线 $x=0$)	$\left(0,-\frac{1}{4}\right)$
$y=-1.5(x+4)^2$	向下	直线 $x=-4$	$(-4,0)$

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

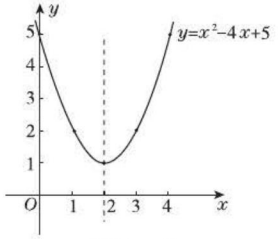
$y=x^2-2x+1$	向上	直线 $x=1$	$(1,0)$
$y=-x^2-4x+9$	向下	直线 $x=-2$	$(-2,13)$
$y=\frac{1}{3}x^2-2x+2$	向上	直线 $x=3$	$(3,-1)$

2. 解: (1)函数 $y=1-3x^2$ 的图象如图所示. 函数的最大值是1.



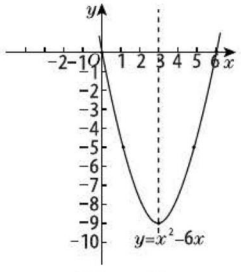
(第2(1)题)

(2)函数 $y=x^2-4x+5$ 的图象如图所示. 函数的最小值是1.



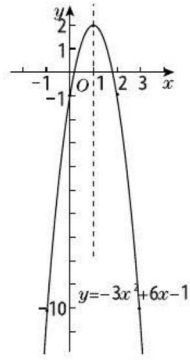
(第2(2)题)

(3)函数 $y=x^2-6x$ 的图象如图所示. 函数的最小值是 -9.



(第2(3)题)

(4)函数 $y=-3x^2+6x-1$ 的图象如图所示. 函数的最大值是2.



(第2(4)题)

3. 解: (1)$y=x^2-2x-4$

$=x^2-2x+1-5$

$=(x-1)^2-5$,

故抛物线开口向上,对称轴是直线 $x=1$,顶点坐标是 $(1,-5)$.

(2)$y=1+6x-x^2$

$=-x^2+6x+1$

$=-(x^2-6x)+1$

$=-(x^2-6x+9-9)+1$

$=-(x-3)^2+10$,

故抛物线开口向下,对称轴是直线 $x=3$,顶点坐标是 $(3,10)$.

(3)$y=-x^2+4x$

$=-(x^2-4x)$

$=-(x^2-4x+4-4)$

$=-(x-2)^2+4$,

故抛物线开口向下,对称轴是直线 $x=2$,顶点坐标是 $(2,4)$.

(4)$y=\frac{1}{4}x^2-x+4$

$=\frac{1}{4}(x^2-4x)+4$

$=\frac{1}{4}(x^2-4x+4-4)+4$

$=\frac{1}{4}(x-2)^2-1+4$

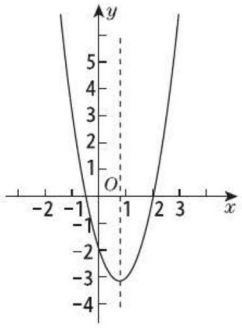
$=\frac{1}{4}(x-2)^2+3$,

故抛物线开口向上,对称轴是直线 $x=2$,顶点坐标是 $(2,3)$.

点拨: 对于抛物线 $y=ax^2+bx+c$,当 $a>0$ 时,开口向上;当 $a<0$ 时,开口向下. 把它所对应的函数表达式化成 $y=a(x-h)^2+k$ 的形式后可知,对称轴是直线 $x=h$,顶点坐标是 (h,k).

4. 解: (1)画函数 $y=2x^2-3x-2$ 的图象如图所示.

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料



（第4题）

（2）由图象可知，当 $x=-\frac{1}{2}$ 或 $x=2$ 时，函数的值为0.

点拨：$y=0$ 时，函数图象与 x 轴相交，其交点的横坐标即为所求的 x 的值.

5. （1）（0，2）；（1，0），（2，0）　**点拨**：把 $x=0$ 代入 $y=x^2-3x+2$ 可得 $y=2$，故抛物线与 y 轴的交点坐标是（0，2）. 令 $y=0$，得 $x^2-3x+2=0$. 解得 $x_1=1$，$x_2=2$. 故抛物线与 x 轴的交点坐标是（1，0），（2，0）.

（2）（0，-3）；$\left(\frac{3}{2},0\right)$，（1，0）

点拨：把 $x=0$ 代入 $y=-2x^2+5x-3$ 可得 $y=-3$，故抛物线与 y 轴的交点坐标是（0，-3）. 令 $y=0$，得 $-2x^2+5x-3=0$，解得 $x_1=\frac{3}{2}$，$x_2=1$. 故抛物线与 x 轴的交点坐标是 $\left(\frac{3}{2},0\right)$，（1，0）.

6. **解**：把点（-1，0）的坐标代入 $y=ax^2+x+2$，得 $a-1+2=0$. 解得 $a=-1$.

所以抛物线所对应的二次函数表达式是 $y=-x^2+x+2$.

配方得 $y=-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{9}{4}$，

故这条抛物线的顶点坐标是 $\left(\frac{1}{2},\frac{9}{4}\right)$.

7. **解**：（1）设抛物线所对应的二次函数表达式为 $y=ax^2+bx+c$，把点（2，0），（0，-2），（-2，3）的坐标分别代入 $y=ax^2+bx+c$，得 $\begin{cases}4a+2b+c=0,\\c=-2,\\4a-2b+c=3.\end{cases}$

解得 $\begin{cases}a=\frac{7}{8},\\b=-\frac{3}{4},\\c=-2.\end{cases}$

所以二次函数的表达式是 $y=\frac{7}{8}x^2-\frac{3}{4}x-2$.

（2）设抛物线所对应的二次函数表达式是 $y=a(x-6)^2-4$，

把点（4，-2）的坐标代入 $y=a(x-6)^2-4$，

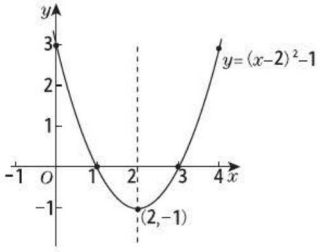
得 $a(4-6)^2-4=-2$.

解得 $a=\frac{1}{2}$.

所以抛物线所对应的二次函数表达式是 $y=\frac{1}{2}(x-6)^2-4$.

B组

8. **解**：（1）图象开口向上，对称轴是直线 $x=2$，顶点坐标是（2，-1）. 图象如图所示.



（第8题）

（2）①当 $x=1$ 或 $x=3$ 时，$y=0$；②当 $x<1$ 或 $x>3$ 时，$y>0$；③当 $1<x<3$ 时，$y<0$.

点拨：（1）抛物线 $y=a(x-h)^2+k$ 的对称轴是直线 $x=h$，顶点坐标是 (h,k). （2）抛物线在 x 轴上方时，函数值 $y>0$；在与 x 轴的交点处，函数值 $y=0$；在 x 轴下方时，函数值 $y<0$.

9. **解**：（1）抛物线 $y=3x^2-\sqrt{2}$ 是将抛物线 $y=3x^2$ 向下平移 $\sqrt{2}$ 个单位得到的.

（2）抛物线 $y=3\left(x-\frac{1}{2}\right)^2$ 是将抛物线 $y=3x^2$ 向右平移 $\frac{1}{2}$ 个单位得到的.

（3）抛物线 $y=3\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+4$ 是将抛物线 $y=3x^2$ 先向右平移 $\frac{1}{2}$ 个单位，再向上平移4个单位得到的.

（4）由 $y=3x^2-6x$ 可得 $y=3(x-1)^2-3$，故抛物线 $y=3x^2-6x$ 是将抛物线 $y=3x^2$ 先向右平移1个单位，再向下平移3个单位得到的.

10. **解**：（1）由题意，得 $\begin{cases}a=1,\\0^2\cdot a+0\cdot b+c=3,\\2^2\cdot a+2b+c=3.\end{cases}$

解得 $\begin{cases}a=1,\\b=-2,\\c=3.\end{cases}$

填表如下：

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

x	0	1	2
ax^2	0	1	4
ax^2+bx+c	3	2	3

(2)二次函数表达式是$y=x^2-2x+3$,

配方可得$y=(x-1)^2+2$,

故这个二次函数图象的顶点坐标是(1,2),对称轴是直线$x=1$.

点拨:根据表中给出的x值与代数式的对应值可得关于a,b,c的方程组,通过解方程组可得a,b,c的值.

11. 解:把点$A(3,a)$的坐标代入$y=x^2-x-2$,得$a=3^2-3-2=4$.

把点$B(b,0)$的坐标代入$y=x^2-x-2$,得$b^2-b-2=0$.

解得$b_1=2,b_2=-1$.

故点A的坐标是(3,4),点B的坐标是(2,0)或(-1,0).

点拨:抛物线上的点的坐标一定满足其对应的函数表达式.

12. 解:把$s=35.1$代入$s=0.01x+0.002x^2$,得$0.002x^2+0.01x=35.1$.

解得$x_1=130,x_2=-135$(不合题意,舍去).

故$x=130$.

由于130 km/h > 120 km/h,故刹车前,汽车超速.

13. 解:(1)根据题意可设二次函数的表达式为$y=a(x-4)^2+k$,由二次函数的图象经过原点和点(-1,3),可得

$$\begin{cases}0=a(0-4)^2+k,\\3=a(-1-4)^2+k,\end{cases}\text{解得}\begin{cases}a=\dfrac{1}{3},\\k=-\dfrac{16}{3}.\end{cases}$$

所以所求二次函数的表达式为$y=\frac{1}{3}(x-4)^2-\frac{16}{3}$.

(2)设二次函数的表达式为$y=ax^2+bx+c$,由二次函数的图象经过点(1,1),(-2,1)和(2,-3),可得

$$\begin{cases}1=a+b+c,\\1=4a-2b+c,\\-3=4a+2b+c,\end{cases}\text{解得}\begin{cases}a=-1,\\b=-1,\\c=3.\end{cases}$$

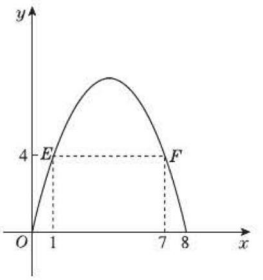
所以所求二次函数的表达式为$y=-x^2-x+3$.

C组

14. 解:建立如图所示的直角坐标系,可知$E(1,4),F(7,4)$.设二次函数的表达式为$y=ax^2+bx$.把点$E(1,4),F(7,4)$的坐标分别代入$y=ax^2+bx$,得

$$\begin{cases}a+b=4,\\49a+7b=4.\end{cases}$$

解得$\begin{cases}a=-\dfrac{4}{7},\\b=\dfrac{32}{7}.\end{cases}$所以二次函数的表达式为$y=-\frac{4}{7}x^2+\frac{32}{7}x$.配方得$y=-\frac{4}{7}(x-4)^2+\frac{64}{7}$,故这个门洞的高度为$\frac{64}{7}\approx9.1$(m).



(第14题)

答:这个门洞的高度约为9.1 m.

点拨:建立合适的直角坐标系,然后确定点的坐标,利用待定系数法求出抛物线所对应的二次函数表达式,从而可确定门洞的高度.

15. 解:(1)由题意可知,该抛物线的顶点坐标为(0,3.5)且过点(1.5,3.05).设抛物线所对应的二次函数表达式为$y=ax^2+3.5$.把点(1.5,3.05)的坐标代入$y=ax^2+3.5$,得$a\cdot1.5^2+3.5=3.05$.解得$a=-0.2$.故抛物线所对应的二次函数表达式为$y=-0.2x^2+3.5$.

(2)把$x=-2.5$代入$y=-0.2x^2+3.5$,得$y=-0.2\times(-2.5)^2+3.5=2.25$.所以这次跳投时,球出手处离地面2.25 m.

第27章 圆

27.1 圆的认识

练习

1. 略.

2. 解:从上到下,三条弧所在圆的半径逐渐增大,验证略.

练习

1. 解:在⊙O中,因为$\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{AC}$,

所以$AB=AC$,所以$\angle B=\angle C$.

因为$\angle B=70°$,所以$\angle C=70°$.

点拨:在同圆中,等弧所对的弦相等,利用等边对等角即可求出$\angle C$的度数.

2. 解:因为$\overset{\frown}{BC}=\overset{\frown}{CD}=\overset{\frown}{DE}$,$\angle BOC=40°$,所以$\angle COD=\angle DOE=\angle BOC=40°$,所以$\angle BOE=120°$,再由$AB$为直径,得$\angle AOB=180°$,所以$\angle AOE=180°-120°=60°$.

点拨:在同圆中,相等的弧所对的圆心角相等.

练习

1. 解:过点O作$OC\perp AB$于点C,连结OA,则$AC=BC=12$ cm.

在Rt△AOC中,因为$AC=12$ cm,$OC=5$ cm,所以$OA=$

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

$\sqrt{AC^2+OC^2}=13$(cm),即⊙O的半径为13 cm.

2. 解:因为 $OC\perp AB$ 于点 D,所以 $AD=BD=\frac{1}{2}AB=4$ cm.

又因为 $OA=OC=5$ cm,

所以在 Rt△AOD 中,$OD=\sqrt{OA^2-AD^2}=3$(cm).

所以 $DC=OC-OD=5-3=2$(cm).

练习

1. 解:∠1=∠4,∠2=∠7,∠3=∠6,∠5=∠8.

点拨:要找与∠1相等的圆周角,先找∠1所对的弧,再找这条弧所对的圆周角,即可找到∠4=∠1,因为在同圆或等圆中,同弧或等弧所对的圆周角相等.

2. 解:因为在同圆中,一条弧所对的圆心角是它所对的圆周角的2倍,所以 $2x+100=2(5x-30)$,解得 $x=20$.

所以 $2x+100=140$,$5x-30=70$.

答:这条弧所对的圆心角的大小为140°,圆周角的大小为70°.

3. 解:第三种情况合格,第一种、第二种情况不合格.

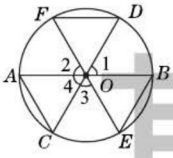
因为"90°的圆周角所对的弦为圆的直径",若要合格,曲尺顶点应在圆周上,曲尺两边应与凹面的两个端点接触,所以只有第三种情况符合.

点拨:本题是"90°的圆周角所对的弦为圆的直径"在实际问题中的典型应用,从中可感受该结论对解决相关问题的重要作用.

习题 27.1

1. 证明:因为∠COB=2∠CAB,∠COA=2∠CBA,∠CAB=∠CBA,所以∠COA=∠COB.

2. 解:相等. 证明:如图,因为∠1=∠4,且∠1=∠2=∠3,所以∠2=∠4=∠3,所以$\overset{\frown}{AF}=\overset{\frown}{AC}=\overset{\frown}{CE}$. 同理可得$\overset{\frown}{AF}=\overset{\frown}{FD}=\overset{\frown}{DB}=\overset{\frown}{BE}$,所以 $AC=EB=DF$.



(第2题)

3. 解:因为 AB 是直径,$AB\perp CD$ 于点 E,所以 $CE=DE$,所以 EF 垂直平分 CD,所以 $CF=DF$. 又因为 $EF\perp CD$,所以∠CFE=∠DFE=50°.

4. 解:因为 $AC=CD=DE=EF=FB$,所以$\overset{\frown}{AC}=\overset{\frown}{CD}=\overset{\frown}{ED}=\overset{\frown}{EF}=\overset{\frown}{FB}$,所以∠$AOC$=∠$COD$=∠$DOE$=∠$EOF$=∠$FOB$. 又因为 AB 为直径,所以$\angle AOC=\frac{1}{5}\times180°=36°$,$\angle COF=\frac{3}{5}\times180°=108°$.

点拨:利用弦、弧与圆心角的关系加以转化是解决圆中相关问题的常见思考方法.

5. AC、CD、CO、DO、DB、OB;$\overset{\frown}{CD}$、$\overset{\frown}{DB}$

点拨:由题意可得∠COD=60°,则∠AOC=∠COD=∠DOB,所以$\overset{\frown}{AC}=\overset{\frown}{CD}=\overset{\frown}{DB}$,且 $AC=CD=DB$,△AOC,△COD,△BOD都为等边三角形.

6. 解:因为∠BOC=2∠A=80°,而 $OB=OC$,所以∠OBC=∠OCB=$\frac{180°-\angle BOC}{2}=50°$.

点拨:利用"在同圆中,同弧所对的圆周角等于该弧所对的圆心角的一半"求解.

7. 证明:因为$\overset{\frown}{BD}=\overset{\frown}{CE}$,所以$\overset{\frown}{BD}+\overset{\frown}{DE}=\overset{\frown}{CE}+\overset{\frown}{DE}$,即$\overset{\frown}{BE}=\overset{\frown}{CD}$,所以∠$BCA$=∠$CBA$,所以 $AB=AC$.

点拨:在同圆或等圆中,同弧或等弧所对的圆周角相等.

8. 略.

9. 证明:连结 BC,易知∠A=∠D. 因为 $AB=CD$,所以∠ACB=∠DBC.

在△ABC和△DCB中,∠A=∠D,

∠ACB=∠DBC,$BC=CB$,所以△ABC≌△DCB.

所以∠ABC=∠DCB.

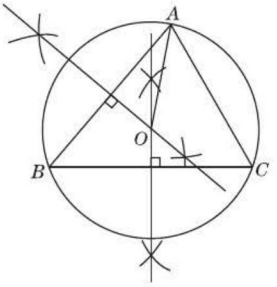
所以 $EB=EC$.

10. 解:因为∠A、∠B、∠C的度数的比是2:3:6,所以可设∠A=2x,则∠B=3x,∠C=6x. 又因为圆内接四边形的对角互补,所以∠A+∠C=∠B+∠D=180°,所以 $2x+6x=180°$,解得 $x=22.5°$,所以∠A=45°,∠B=67.5°,∠C=135°,所以∠D=112.5°.

27.2 与圆有关的位置关系

练习

1. 解:如图,画△ABC,并分别画出 AB、BC 边的垂直平分线,设交点为 O,连结 OA,以 O 为圆心,OA 为半径画圆,则⊙O即为△ABC的外接圆.

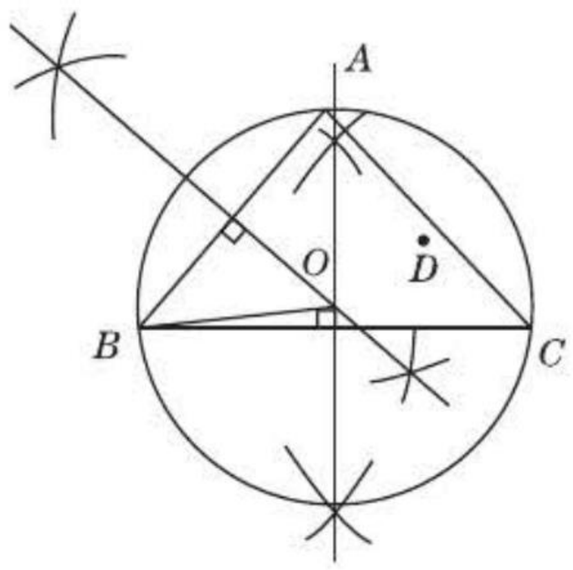


(第1题)

点拨:画三角形外接圆的步骤是:①先画出三角形两边垂直平分线的交点;②以这一交点为圆心,以这一点到三角形一个顶点的距离为半径作圆即可.

2. 解:不一定. 如图,A、B、C、D四点不在同一个圆上.

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料



(第2题)

练习

1. 解:(1)因为 $d=4\ \text{cm}<5\ \text{cm}$,所以直线 l 与圆有两个公共点,与圆相交.

(2)因为 $d=5\ \text{cm}$,所以直线 l 与圆有一个公共点,与圆相切.

(3)因为 $d=6\ \text{cm}>5\ \text{cm}$,所以直线 l 与圆无公共点,与圆相离.

点拨:判断直线与圆的位置关系,可利用圆心到直线的距离 d 与半径 r 的大小关系,即 $d<r$ 时,相交;$d=r$ 时,相切;$d>r$ 时,相离.

2. 解:易知圆的半径为 5 cm. 因为直线 l 与圆只有一个公共点,所以直线 l 与圆相切,所以圆心到直线 l 的距离等于 5 cm.

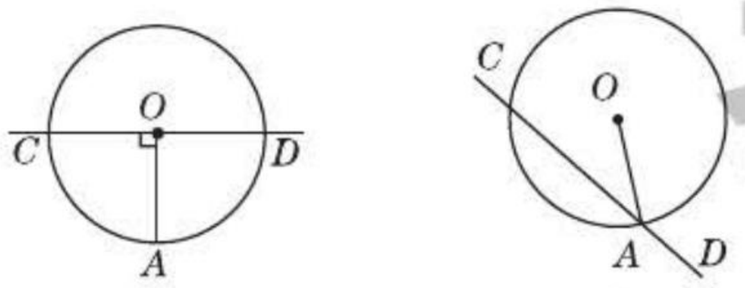
3. 解:设⊙O 的半径为 r,圆心 O 到直线 AB 的距离为 d.

因为圆的直径为 10 cm,所以半径 $r=\dfrac{10}{2}=5(\text{cm})$. 而圆心到直线 AB 的距离 $d=10\ \text{cm}$,所以 $d>r$,所以直线 AB 与⊙O 相离.

练习

1. 解:(1)不正确,如图①,CD 垂直于半径 OA,但 CD 不是⊙O 的切线.

(2)不正确,如图②,CD 过 OA 的外端点 A,但 CD 不是⊙O 的切线.



① ②

(第1题)

点拨:经过圆的半径的外端且垂直于这条半径的直线是圆的切线. 切线的识别中需同时满足两个条件:一是经过圆的半径的外端;二是与该半径垂直.

2. 证明:因为 AB 为直径,所以 $\angle BDA=90°$,所以 $\angle B+\angle BAD=90°$. 又因为 $\angle B=\angle CAD$,所以 $\angle BAD+\angle CAD=90°$,即 $BA\perp AC$. 又因为 BA 为⊙O 的直径,所以 AC 是⊙O 的切线.

3. 解:BD 是⊙O 的切线.

证明:因为 $\angle BAD=\angle B=30°$,所以 $\angle ADB=180°-\angle BAD-\angle B=120°$. 又 $OA=OD$,所以 $\angle ADO=\angle BAD=30°$,所以 $\angle ODB=\angle ADB-\angle ADO=120°-30°=90°$,即 $OD\perp BD$. 又因为 OD 为⊙O 的半径,所以 BD 是⊙O 的切线.

点拨:第 2、3 题的依据都是"经过圆的半径的外端且垂直于这条半径的直线是圆的切线",这是证明一条直线是圆的切线的常用方法.

4. 略.

练习

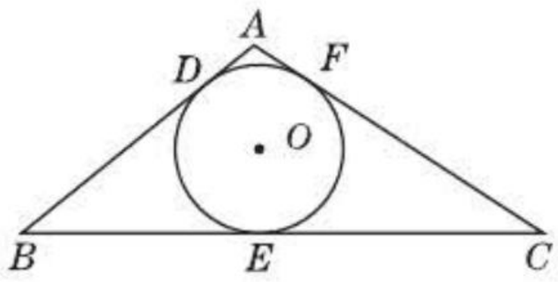
1. 解:因为⊙O 为 $\triangle ABC$ 的内切圆,D、E、F 为切点,所以 $\angle ODB=\angle OEB=\angle ODA=\angle OFA=\angle OFC=\angle OEC=90°$. 所以 $\angle A=360°-\angle DOF-\angle ADO-\angle AFO=360°-(360°-120°-150°)-90°-90°=90°$;$\angle B=360°-\angle DOE-\angle BDO-\angle BEO=60°$;$\angle C=360°-\angle EOF-\angle CFO-\angle CEO=30°$.

点拨:解题时主要利用四边形内角和为 360° 以及切线的有关性质来计算.

2. 解:如图,因为 AB、AC、BC 为⊙O 的切线,D、F、E 分别为切点,所以 $AD=AF$,$CE=CF$,$BD=BE$.

设 $AD=AF=x\ \text{cm}$,$CE=CF=y\ \text{cm}$,$BD=BE=z\ \text{cm}$,因为 $AB=5\ \text{cm}$,$BC=9\ \text{cm}$,$CA=6\ \text{cm}$,所以由 $\begin{cases}AD+BD=AB,\\AF+CF=CA,\\BE+CE=BC,\end{cases}$ 得 $\begin{cases}x+z=5,\\x+y=6,\\z+y=9.\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x=1,\\y=5,\\z=4.\end{cases}$ 即 $AD=1\ \text{cm}$,$BE=4\ \text{cm}$,$CF=5\ \text{cm}$.

点拨:本题利用了切线长定理,通过列方程组并求解直接得到结果.



(第2题)

3. 略.

习题 27.2

1. 解:设⊙O 的半径为 $r\ \text{cm}$,圆心到定点 P 的距离 $OP=d\ \text{cm}$.

(1)$d=8<r$,所以点 P 在⊙O 的内部.

(2)$d=10=r$,所以点 P 在⊙O 上.

(3)$d=12>r$,所以点 P 在⊙O 的外部.

点拨:本题考查点与圆的位置关系,主要从点到圆心的距离与半径的大小关系加以判断.

2. 解:(1)能画 2 个.

(2)能画 1 个.

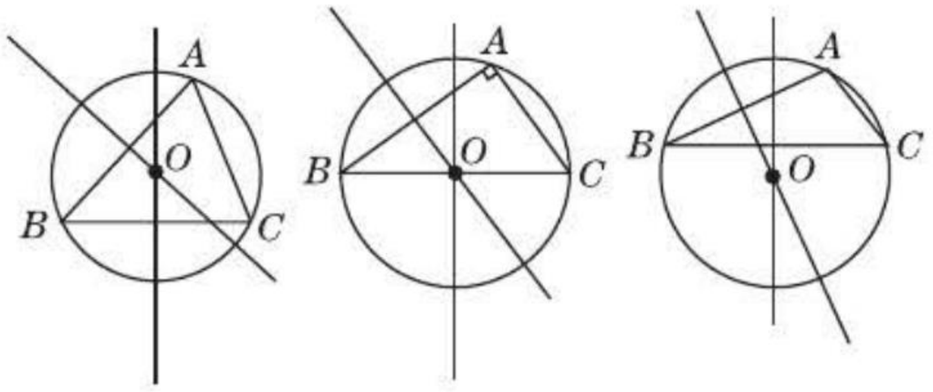
(3)能画 0 个(即不能画出满足条件的圆).

点拨:(1)可分别以点 A、B 为圆心,以 4 cm 长的线段

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

为半径画弧,交于两点,分别以这两点为圆心,以 4 cm 长的线段为半径作圆即可. (2)线段 AB 的中点即为圆心.

3. 解:如图. 锐角三角形的外心在其内部;直角三角形的外心在其斜边的中点上;钝角三角形的外心在其外部.



(第 3 题)

4. 略.

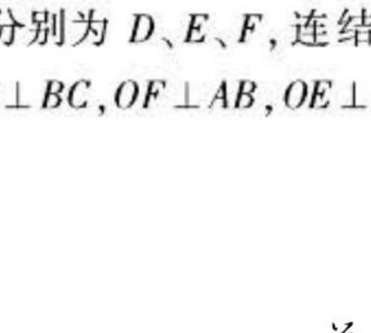
5. 解:设圆心到直线 l 的距离为 d,圆的半径为 r,由题意知半径 $r=10$ cm. (1)有两个公共点. 理由:因为 $d<r$,所以直线 l 与圆相交,有两个公共点. (2)有一个公共点. 理由:因为 $d=r$,所以直线 l 与圆相切,有一个公共点. (3)没有公共点. 理由:因为 $d>r$,所以直线 l 与圆相离,没有公共点.

点拨:通过比较圆心到直线的距离 d 与半径 r 的大小关系,可知直线与圆的位置关系,进而确定公共点的个数.

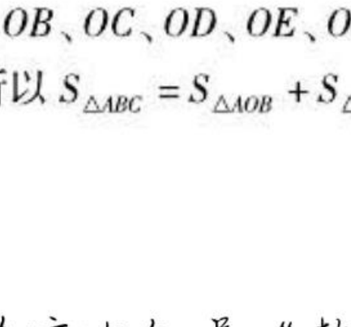
6. 解:如图,$\odot O$ 为 $\triangle ABC$ 的内切圆,D、E、F 分别为 $\odot O$ 与三边的切点,连结 OA、OB、OC、OD、OE、OF,则 $OD\perp AB$,$OE\perp BC$,$OF\perp CA$.

于是 $S=S_{\triangle OAB}+S_{\triangle OBC}+S_{\triangle OCA}=\frac{1}{2}AB\cdot OD+\frac{1}{2}BC\cdot OE+\frac{1}{2}AC\cdot OF$.

又因为 $AB+BC+CA=l$,$OD=OE=OF=r$,所以 $S=\frac{1}{2}lr$.



(第 6 题)

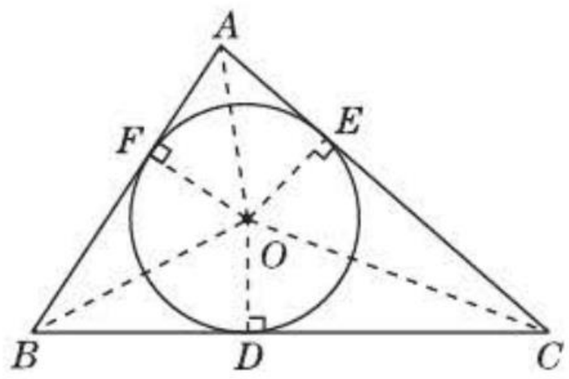


(第 7 题)

7. 证明:如图,连结 OP,因为 AB 与小圆相切于点 P,所以 $OP\perp AB$. 又 OP 为大圆的半径的一部分,AB 为大圆的弦,所以 $AP=BP$.

点拨:存在切线时,通常作过切点的半径得垂直关系,此题是切线的性质和垂径定理的综合应用.

8. 解:如图,设 $\odot O$ 为 $\triangle ABC$ 的内切圆,且半径为 r cm,切点分别为 D、E、F,连结 OA、OB、OC、OD、OE、OF,则 $OD\perp BC$,$OF\perp AB$,$OE\perp AC$. 所以 $S_{\triangle ABC}=S_{\triangle AOB}+S_{\triangle BOC}+S_{\triangle AOC}=\frac{1}{2}AB\cdot OF+\frac{1}{2}BC\cdot OD+\frac{1}{2}AC\cdot OE=\frac{1}{2}r(AB+BC+AC)$. 而 $S_{\triangle ABC}=4\ \text{cm}^2$,$AB+BC+AC=10$ cm,所以 $4=\frac{1}{2}r\cdot 10$,所以 $r=0.8$. 所以该三角形的内切圆的半径为 0.8 cm.



(第 8 题)

9. 解:因为 AC 为 $\odot O$ 的直径,PA 切 $\odot O$ 于点 A,所以 $CA\perp PA$,即 $\angle PAC=90°$.

又 $\angle CAB=20°$,所以 $\angle PAB=70°$. 因为 PA、PB 分别切 $\odot O$ 于点 A、B,所以 $PA=PB$,所以 $\angle PBA=\angle PAB=70°$,所以 $\angle P=180°-70°-70°=40°$.

10. 解:方法一:在轮片上任找两条不重合的弦,分别作其垂直平分线,交点即为圆心.

方法二:利用三角尺找出轮片上两条直径,其交点即为圆心.

点拨:方法一的依据是直径与弦垂直的有关性质;方法二是运用了 90°的圆周角所对的弦是直径这一结论.

11. 解:直线 CD 与 $\odot O$ 相切. 证明如下:连结 OD. 因为 AB 是直径,所以 $\angle ADB=90°$,所以 $\angle A+\angle B=90°$. 因为 $OA=OD$,所以 $\angle A=\angle ODA$. 又因为 $\angle B=\angle ADC$,所以 $\angle ODA+\angle ADC=90°$,即 $\angle CDO=90°$. 故 $OD\perp CD$. 所以直线 CD 与 $\odot O$ 相切.

27.3 圆中的计算问题

练习

1. 解:该圆弧的长度 $l=\frac{60\pi\times 50}{180}=\frac{50}{3}\pi\approx 52.36(\text{cm})$.

答:该圆弧的长度约为 52.36 cm.

点拨:直接利用弧长公式求解即可. 无特殊要求时可保留 π.

2. (1)$\frac{23}{36}$ (2)240 (3)$\frac{2S}{r}$

点拨:熟记扇形面积公式 $S_{\text{扇形}}=\frac{n\pi r^2}{360}=\frac{1}{2}lr$.

练习

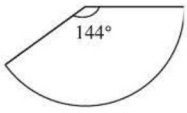
1. 解:因为内壁面积为 $(2\pi\times 4\times 1.2)\text{m}^2$,底面面积为 $(\pi\times 4^2)\text{m}^2$,所以所求面积为 $2\pi\times 4\times 1.2+\pi\times 4^2=25.6\pi\approx 80.42(\text{m}^2)$.

答:抹水泥部分的面积约为 80.42 m^2.

点拨:抹水泥部分只有一个底面.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

2. 解:设所求扇形的圆心角为 $n°$,则 $2\pi\times2=\frac{n\pi\times5}{180}$,解得 $n=144$. 所以圆锥的侧面展开图是一个圆心角为144°的扇形,其示意图如图.



(第2题)

习题 27.3

1. 解:分针经过 20 min 所扫过的圆心角为 $20\times6°=120°$,所以经过 20 min,分针在钟面上扫过的面积为 $S=\frac{n\pi R^2}{360}=\frac{120\times\pi\times5^2}{360}=\frac{25}{3}\pi\approx26.18(cm^2)$.

点拨:分针扫过的面积为扇形的面积,利用扇形的面积公式计算.

2. 解:$1.2\pi\times400\times60\times10^{-3}=28.8\pi\approx90.5(km)$.

答:火车每小时约行 90.5 km.

3. 解:设圆柱的底面半径为 R,圆锥的底面半径为 r,则 $2\pi R=a$,$2\pi r=\frac{1}{4}\times2\pi a$. 所以 $R:r=2:\pi$,即圆柱与圆锥两者的底面半径之比为 $2:\pi$.

点拨:圆柱的底面的周长等于正方形纸片的边长,圆锥的底面的周长等于扇形的弧长,又因为扇形是在边长为 a 的正方形纸片上剪下的最大扇形,所以其弧长等于半径为 a 的圆的周长的 $\frac{1}{4}$.

4. 解:设两个扇形的圆心角均为 $n°$,小扇形的半径为 r,则大扇形的半径为 $2r$. $\frac{n\pi\cdot(2r)^2}{360}\div\frac{n\pi\cdot r^2}{360}=4$. 即大扇形的面积是小扇形面积的 4 倍.

点拨:当两扇形的圆心角相等时,其面积比为半径比的平方.

27.4 正多边形和圆

练习

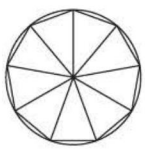
1. 解:菱形的四条边都相等,但不是正多边形.

2. 解:矩形的各角都相等,但不是正多边形.

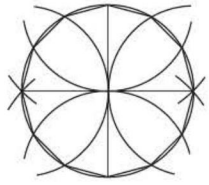
3. 解:正 n 边形共有 n 条对称轴.

习题 27.4

1. 解:如图.



(第1题)



(第2题)

2. 解:如图.

3. 解:$360°\div24°=15$.

答:这个正多边形的边数为 15.

复习题

A 组

1. 解:如图.

点拨:图案设计需要有较好的观察力、审美能力和作图能力.

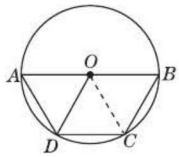
作图时利用圆的对称性所体现的美感来设计. 答案不唯一.

2. 解:直径:CD. 半径:AB、AC. 弦:CE、BF、ED. 弧:$\overset{\frown}{BC}$、$\overset{\frown}{BD}$、$\overset{\frown}{DE}$. 圆周角:$\angle ECD$、$\angle CBF$、$\angle D$. 圆心角:$\angle EAD$、$\angle BAC$、$\angle CAF$.

点拨:半径、弦、弧、圆周角和圆心角的列举不唯一.



(第1题)



(第4题)

3. 25 **点拨**:$\because\angle BOC=180°-\angle AOC=180°-130°=50°$,$\therefore\angle D=\frac{1}{2}\angle BOC=25°$.

求圆周角 $\angle D$ 的度数可先求出 $\overset{\frown}{BC}$ 所对圆心角 $\angle BOC$ 的度数. 这是求圆周角的常用方法.

4. 120 **点拨**:如图所示,连结 OC.

因为 $BC=CD=DA$,所以 $\overset{\frown}{BC}=\overset{\frown}{CD}=\overset{\frown}{DA}$.

所以 $\angle AOD=\angle DOC=\angle BOC$.

又 $\angle AOD+\angle DOC+\angle BOC=180°$,所以 $\angle BOC=\angle DOC=\angle AOD=60°$,

则 $\angle BOD=\angle BOC+\angle DOC=120°$.

5. 1;4;10 **点拨**:因为 AB 是 $\odot O$ 的直径,弦 $CD\perp AB$,$\overset{\frown}{BC}=1$ cm,$\overset{\frown}{AD}=4$ cm,所以 $\overset{\frown}{BD}=\overset{\frown}{BC}=1$ cm,$\overset{\frown}{AC}=\overset{\frown}{AD}=4$ cm.

所以 $\odot O$ 的周长为 $1\times2+4\times2=10(cm)$.

6. D **点拨**:直线与圆有公共点包括有一个公共点和有两个公共点两种情况,故 $d\leqslant r$.

7. 解:设他还要用半径为 r cm 的圆形薄膜片才能刚好贴满圆锥的底面. 根据题意,得 $\frac{108\pi\times20}{180}=2\pi r$,解得 $r=6$.

答:他还要用半径为 6 cm 的圆形薄膜片才能刚好贴满圆锥的底面.

点拨:利用扇形的弧长等于该扇形所围成的圆锥底面圆的周长列式来求解.

8. 解:因为 AB 是 $\odot O$ 的直径,所以 $\angle C=90°$. 因为半径为

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

6.5 cm,所以 $AB=2\times6.5=13$(cm). 在 Rt$\triangle ABC$ 中,由勾股定理,得 $BC=\sqrt{AB^2-AC^2}=12$ cm.

所以弦 BC 的长为 12 cm.

点拨:由直径所对的圆周角为 90°,得$\triangle ABC$ 为直角三角形,再由勾股定理可求出结果.

9. 解:因为$\angle ACB=\angle CDB=60°$,$\angle A=\angle CDB$,所以$\angle A=\angle ACB=60°$. 所以$\angle ABC=60°$. 所以 $AB=BC=AC=2$ cm. 所以$\triangle ABC$ 的周长为 $AB+AC+BC=6$ cm.

点拨:由在同圆中同弧所对的圆周角相等,把已知角转化为同一个三角形中的角,易得出 $AB=BC=AC$,进而求其周长.

10. 解:如图所示,连结 OA、OP.

则 $OA\perp AP$,所以$\angle OAP=90°$.

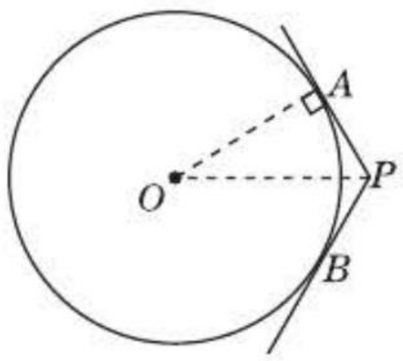
由切线长定理可知$\angle APO=\angle BPO=\frac{1}{2}\angle APB$.

因为$\angle APB=120°$,所以$\angle APO=60°$. 又$\angle OAP=90°$,

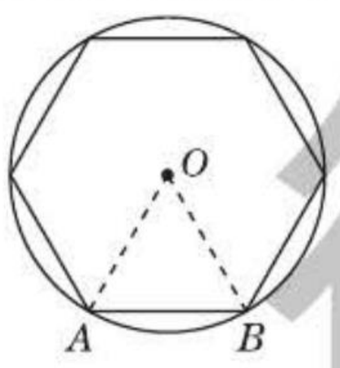
$OA=4$ cm,

所以 $PA=\frac{OA}{\tan60°}=\frac{4}{3}\sqrt{3}$(cm).

点拨:利用切线长定理和锐角三角函数来解该题.



(第 10 题)



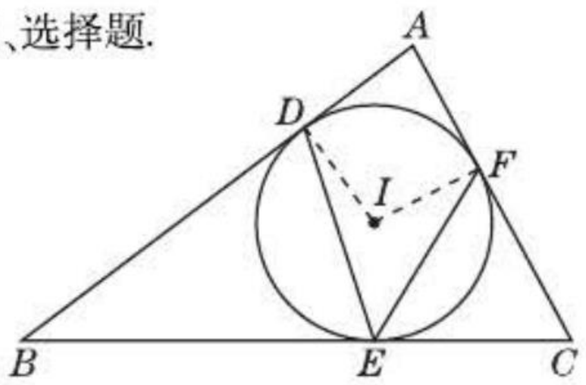
(第 11 题)

11. 解:当圆是正六边形的外接圆时,圆形纸片的半径最小. 如图所示,连结 OA、OB. 由正六边形性质易知$\angle AOB=60°$. 又因为 $OA=OB$,所以$\triangle AOB$ 是等边三角形,所以 $AB=OA=OB=6$ cm. 所以这个圆形纸片的最小半径为 6 cm.

B 组

12. 解:如图,连结 ID、IF. 因为$\odot I$ 分别切 AB、AC 于点 D、F,所以 $ID\perp AB$,$IF\perp AC$,所以$\angle IDA=90°$,$\angle IFA=90°$. 因为$\angle DEF=50°$,所以$\angle DIF=100°$,所以$\angle A=360°-90°-90°-100°=80°$.

点拨:如图,当圆是三角形的内切圆时,有$\angle A=180°-2\angle DEF$ $\left(\text{或}\angle DEF=90°-\frac{1}{2}\angle A\right)$,熟记此结论便于做填空题、选择题.



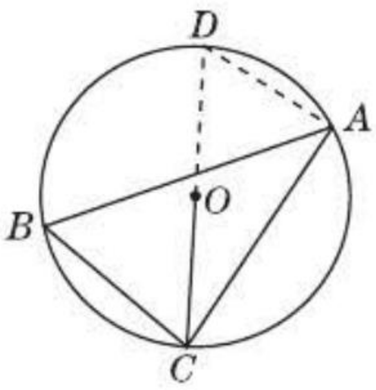
(第 12 题)

13. 证明:因为 AD、BD 分别平分$\angle BAC$ 和$\angle ABC$,所以$\angle BAE=\angle CAE$,$\angle CBD=\angle ABD$. 所以$\angle BDE=\angle ABD+\angle BAE=\angle CBD+\angle CAE$. 又$\angle EBC=\angle CAE$,$\angle DBE=\angle CBD+\angle EBC$,所以$\angle BDE=\angle DBE$. 所以 $BE=DE$.

14. 解:如图,延长 CO 交$\odot O$ 于 D,连结 DA,则$\angle CAD=90°$,

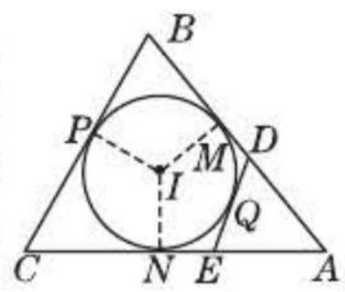
所以$\angle ADC=90°-\angle ACO=90°-30°=60°$,所以$\angle B=\angle ADC=60°$.

点拨:作直径并构造直径所对的圆周角,利用直径所对的圆周角是直角和在同圆中同弧所对的圆周角相等求解.



(第 14 题)

15. 解:如图,过点 I 作 $IP\perp BC$ 于点 P,$IN\perp AC$ 于点 N,$IM\perp AB$ 于点 M. 因为$\odot I$ 为 $\triangle ABC$ 的内切圆,所以点 P、N、M 分别为$\odot I$ 与 BC、CA、AB 边的切点. 所以设 $BP=BM=x$,$CP=CN=y$,$AN=AM=z$.



(第 15 题)

则 $\begin{cases}x+y=8,\\y+z=10,\\z+x=9.\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x=3.5,\\y=4.5,\\z=5.5.\end{cases}$

所以 $AM=AN=5.5$.

又 DE 为$\odot I$ 的切线,设切点为 Q,则 $DQ=DM$,$EQ=EN$.

所以$\triangle ADE$ 的周长为 $AD+DQ+EQ+EA=AD+DM+EN+AE=AM+AN=11$.

点拨:本题运用切线长定理,列出方程组求解.

16. (1) **解**:$\triangle BAE$,$\triangle ADE$,$\triangle AME$,$\triangle ABM$,$\triangle DME$ 都是等腰三角形.

(2) **证明**:易知$\angle MEA=\angle AEB$,$\angle MAE=\angle ABE$.

$\therefore\ \triangle AME\backsim\triangle BAE$.

$\therefore\frac{AE}{BE}=\frac{ME}{AE}$,即 $AE^2=BE\cdot ME$.

易知 $AB=BM$.

又$\because AB=AE$,$\therefore AE=BM$.

$\therefore BM^2=BE\cdot ME$.

C 组

17. 证明:(1)因为 $CD\perp AB$,

所以$\angle ABC=\angle ABD=90°$,且$\angle ABC$ 及$\angle ABD$ 分别为$\odot O_1$ 和$\odot O_2$ 的圆周角,

所以 AC、AD 分别是$\odot O_1$ 和$\odot O_2$ 的直径.

(2)因为$\angle E=\angle C$,$\angle F=\angle D$,

所以$\triangle AEF\backsim\triangle ACD$,

所以$\frac{AE}{AF}=\frac{AC}{AD}$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

因为 AC、AD 分别为 $\odot O_1$ 和 $\odot O_2$ 的直径，

所以 $\frac{AE}{AF}$ = 常数.

点拨：主要利用 90° 的圆周角所对的弦是圆的直径进行证明.

18. 证明：连结 AD、CD.

因为 D 是 $\overset{\frown}{AC}$ 的中点，所以 $\angle B = \angle DAC$.

因为 AB 是半圆的直径，所以 $\angle ADB = 90°$，

所以 $\angle DAE + \angle B = 90°$.

又因为 $DE \perp AB$ 于 E，

所以 $\angle ADE + \angle DAE = 90°$.

所以 $\angle B = \angle ADE$.

所以 $\angle DAC = \angle ADE$，所以 $AF = DF$.

又因为 $\angle ADB = 90°$，

所以 $\angle DAC + \angle DGA = 90°$，$\angle ADE + \angle GDF = 90°$，

所以 $\angle DGA = \angle GDF$. 所以 $DF = FG$.

故 $AF = FG$.

19. 解：(1)(题中左图)因为 $\angle C = \angle A = 20°$，

$\angle x + \angle C = \angle ABC = 50°$，

所以 $\angle x = \angle ABC - \angle C = 50° - 20° = 30°$；

(题中右图)因为 $\angle D = \angle A = 70°$，

$\angle C = 30°$，所以 $\angle x = \angle D + \angle C = 70° + 30° = 100°$.

(2)略.

第 28 章 样本与总体

28.1 抽样调查的意义

练习

解：(1)是用普查方式来收集数据的. (2)(3)(4)是用抽样调查方式来收集数据的.

点拨：正确区分普查和抽样调查的概念是解此题的关键.

练习

解：(1)不合适. 因为所选取的样本不具有代表性.

(2)不合适. 通常一个省的各地环境污染情况差异很大，其次省会城市的环境污染情况还与该城市的支柱产业性质，环境保护立法执法的状况及人们的环保意识等很多因素有关，因此以省会城市的环境污染情况代表全省的环境污染情况不合适.

点拨：要看一个抽样调查选取样本的方法是否合适，主要看该抽样是不是随机的，抽取的样本是否具有代表性，只有具有代表性的样本才能反映整体情况，抽样方法才算合适.

习题 28.1

1. 解：(1)是用普查的方式来收集数据的. (2)(3)是用抽样调查的方式来收集数据的.

点拨：本题考查的是普查和抽样调查的概念，正确理解它们的区别是解此题的关键.

2. 解：(1)总体为某种家用空调工作 1 h 的用电量. 样本为抽取的 10 台该种空调每台工作 1 h 的用电量.

(2)总体为一本 300 页的书稿大约有的字数. 样本为抽取的一页的字数.

点拨：正确理解总体和样本的概念是解此类题的关键.

3. 解：(1)(3)不适合作普查而适合作抽样调查.

点拨：在统计活动中，要根据不同的情况选择不同的调查方式，应从实施的可能性、方便性、繁简程度、工作成本、操作条件、结果的准确程度等多方面去考虑，具体问题具体分析.

4. 解：(1)(2)(4)调查的样本缺乏代表性.

点拨：抽样调查时，既要关注样本的广泛性，又要关注样本的代表性.

5. 解：小丽这一天的表现不具有代表性，这位客人以小丽这天的表现来评价小丽的性格是不合理的.

6. 解：不能. 春夏秋冬各观察一个月得到的结论往往更可靠，因为城市空气污染情况常与季节有关，还有多一些观察记录对估计的准确性有很大的益处.

点拨：用样本估计总体时，样本容量越大，估计越准确，因此在调查时，选取的有代表性的样本的容量应足够大.

28.2 用样本估计总体

习题 28.2

1. 解：(1)和(2)都合适.

理由：以上两题中所选取的样本都具有代表性，能较好地反映总体.

点拨：用样本估计总体特性时，一是选取的样本要有代表性，二是样本容量要足够大.

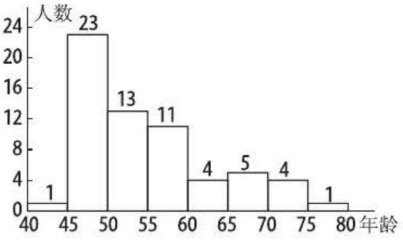
2. 解：如下表和如下图所示.

2013 年中国科学院新增院士年龄频数分布表

年龄段	40 ~ 45	45 ~ 50	50 ~ 55	55 ~ 60	60 ~ 65	65 ~ 70	70 ~ 75	75 ~ 80
频数	1	23	13	11	4	5	4	1

(每组中包含最大值，不包含最小值)

2013 年中国科学院新增院士年龄频数分布直方图



(每组中包含最大值，不包含最小值)

(第 2 题)

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

点拨:在统计人数时,一定要仔细认真,以免出现漏数或多数的情况.

3. 解:含有 6 名学生体重的两个样本(单位:千克):

样本 1:50,46,52,48,60,56;

平均数为 52 千克,方差约为 22.67.

样本 2:48,51,49,60,55,61;

平均数为 54 千克,方差为 26.

含有 15 名学生体重的两个样本(单位:千克):

样本 3:42,44,46,51,45,51,49,53,55,54,60,44,53,61,54;

平均数为 50.8 千克,方差约为 31.09.

样本 4:48,42,61,51,46,51,53,50,53,50,46,48,55,44,58;平均数为 50.4 千克,方差约为 24.51.

含有 30 名学生体重的两个样本(单位:千克):

样本 5:48,48,42,50,61,44,43,51,46,46,51,46,50,45,52,54,51,57,55,48,49,48,53,48,56,55,57,42,54,50;

平均数为 50 千克,方差为 22.

样本 6:51,46,50,45,52,54,51,57,55,48,49,48,53,48,56,55,57,42,54,49,47,61,51,51,44,41,49,53,52,49;

平均数为 50.6 千克,方差约为 20.11.

45 名学生的体重的平均数约为 50.47 千克,方差约为 24.43.

随机抽样的方法可靠. 当样本容量较大时,由样本得到的估计值往往与总体的实际值更接近.

点拨:在选取了样本后,按平均数与方差的计算公式求其平均数和方差即可,计算时可应用计算器,注意认真细心. 选取的样本不同,所得平均数和方差的值不同.

4. 解:可以在全校范围内将每个初中生编号,然后采取简单的随机抽样,以决定调查哪些学生,这样的调查方案工作量偏大,如果学生较多就会不实际,也可采取等距抽样或整群抽样(即每隔几个号抽一个或抽取某些班级)的方法,如根据简单的随机抽样,事先确定部分学号或几个班级,然后调查这部分学号的学生或全校这几个班级的全部学生.

点拨:确定方案的依据就是选取的样本要具有随机性,能代表全校的情况.

28.3 借助调查做决策

练习

解:(1)武夷山. 理由:从天气来看,周末武夷山多云,比较适合旅游;从路程来看,武夷山距小明家大约 631 km,路途较近,可以增加在旅游区游玩的时间,所以武夷山是最佳选择.

(2)通过互联网查询各旅游景区的天气情况和路程远近,根据查询结果来选择天气晴或多云、路程较近的旅游景区.

点拨:根据调查结果综合各种因素,才能做出正确的决策,如本题中旅游景点的确定应从天气和路程两方面来考虑.

习题 28.3

1. 略.

2. 解:①A、B 两班参加测试的同学各有 40 名;②A 班平均分为 4.875 分,总分为 195 分;B 班平均分为 3.95 分,总分为 158 分;③最高分和最低分都出现在 A 班,成绩波动较大;B 班同学的成绩主要集中在 4 ~ 5 分,成绩波动较小,但缺乏尖子生.

点拨:读懂统计图是解此题的前提,注意统计图横轴、纵轴表示的统计量.

3. 解:假如通话时间为 5 分钟,A 花费 1.9 元,B 花费 1.9 元,C 花费 2 元,又由于 A 以 6 秒为计费单位,当通话时间在 5 分钟左右时,有可能更省钱,因此,建议使用 A;假如通话时间为 30 分钟,A 花费 11.9 元,B 花费 11.9 元,C 花费 10.5 元,其中 15 分钟在 20:00 ~ 22:00,另外 15 分钟在 22:00 ~ 次日 7:00,因此,建议使用 C.

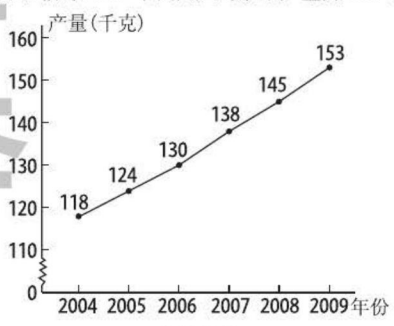
点拨:通过分类计算来判断这三种长途电话业务的话费,根据话费的多少来选择相应业务.

4. 解:样本平均数是 $\frac{1}{10}\times(65\ 100+63\ 200+64\ 600+64\ 700+67\ 300+63\ 300+65\ 100+66\ 600+62\ 800+65\ 500)=64\ 820$(棵),

所以这一防护林总共约有 $64\ 820\times100=6\ 482\ 000$(棵)$\approx$648(万棵)树.

点拨:运用样本平均数可以估计总体平均数,注意这一统计思想在实际生活中的应用.

5. 解:如图. 估计 2010 年我国人均水果产量为 161 千克.



(第 5 题)

点拨:2010 年我国人均水果产量估计值不唯一,合理即可.

复习题

A 组

1. 解:(1)(3)适合用抽样调查,(2)适合用普查.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

点拨:一般来讲,当要求全面了解数据,且数据的总数较少时,采用普查的方式;当总体中个体的数目较多,普查的工作量较大,或调查具有破坏性时,采用抽样调查的方式.

2. 解:(1)不合适,因为样本容量太小.

(2)不合适,因为此样本不具有代表性,不能准确反映男同学的意见.

点拨:抽样调查时,所选取的样本应同时具有代表性和广泛性,另外样本容量不能太小.

3. 解:不可靠,因为只调查了经销该厂产品的商场,忽略了不经销该厂产品的商场,而且仅在一个城市调查,具有局限性. 所以样本的选取缺乏代表性,不能由此估计该厂产品在国内同类产品的销售量中占 50%.

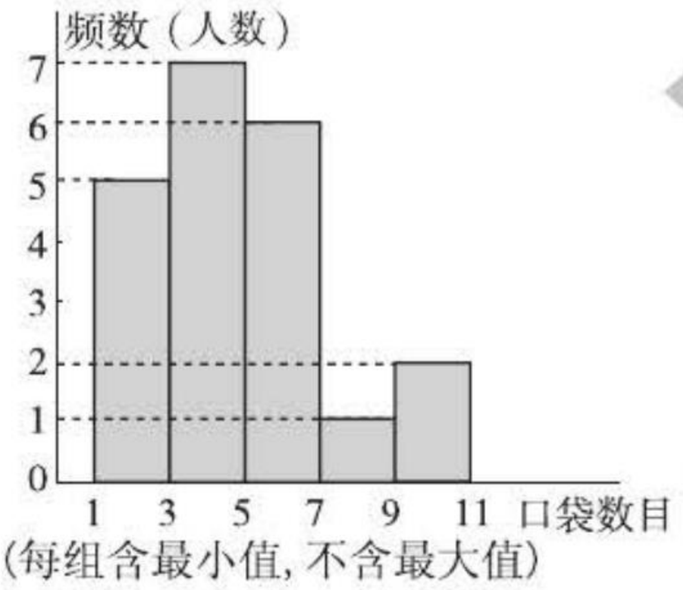
点拨:通过样本估计总体时,宜采用随机调查的方式,所抽取的样本要具有代表性和广泛性.

4. 解:(1)(a)能;(b)不能;(c)能.

(2)填写结果如下:

口袋数目 x	$1\leqslant x<3$	$3\leqslant x<5$	$5\leqslant x<7$	$7\leqslant x<9$	$x\geqslant 9$
频数记录	正	正丁	正一	一	丁
频数	5	7	6	1	2

频数分布直方图如图所示.



(第4题)

5. 解:(1)把三个年级编上 1 号,2 号,3 号,把 3 个号码都写在小纸片上,揉成小纸团,放在小筒里,摇匀,从中随机抽取一个小纸团,记下号码.

(2)把全校所有班级按从 1 到 12 分别编号,把每个号码写在小纸片上,把小纸片揉成小纸团,放在小筒里,摇匀,从中随机取出一个小纸团,记下号码,接着重复上述过程直到取出三个号码为止(不放回).

(3)把全校 567 名学生按从 1 到 567 分别编号,把每个号码写在小纸片上,抽取方法同(2),如此下去,直到取出 64 个号码为止(不放回).

点拨:用抽签的方法很容易获得简单随机样本,另外此题也可借助计算器产生随机数来选取样本.

B 组

6. 解:样本平均数可能等于总体的平均数. 相信,因为样本是由从总体中随机抽出来的个体组成的,当样本容量足够大时,样本的一些统计量(如平均数、方差等)和总体的一些统计量比较接近.

点拨:用样本的特征估计总体的特征在实际生活中应用颇多. 用样本估计总体时,样本的容量越大,样本对总体的估计越精确.

7. 略.

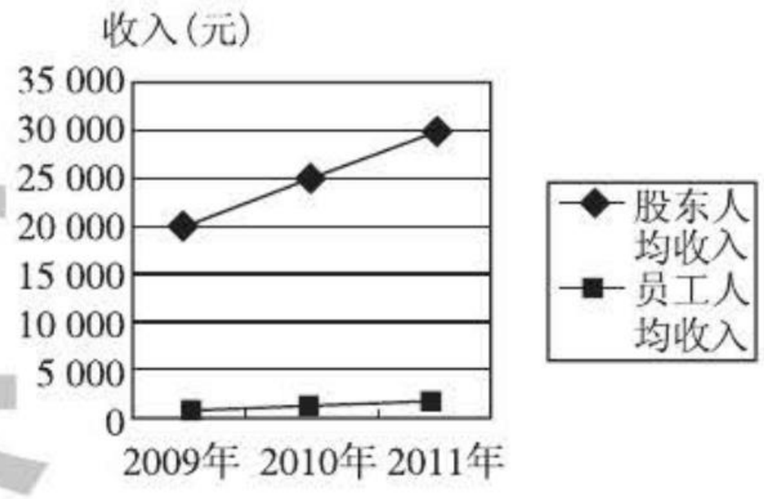
8. 解:(1)乙分厂的生产效率更高,理由:分别计算两分厂新、老车间工人的平均产量,乙分厂均比甲分厂高.

(2)不同意. 甲分厂的总产量高,是因为有更多工人在新车间工作,也就是说,甲分厂有更多的工人拥有新车间的新机器,产量自然应该比老车间的高. 因此将新、老车间的产量混在一起进行比较是不公平的. 比较公平的做法是:对两分厂不同车间的工人产量分别进行比较,由于甲分厂和乙分厂新车间的人数不同,可以计算人均产量,发现乙分厂新车间的人均产量更高;同样,在老车间中,也是乙分厂人均产量更高. 因此应该率先提高乙分厂工人的奖金.

点拨:评估生产效率,应该以甲、乙两分厂新、老车间的人均产量为依据,而不应以总产量为依据.

C 组

9. 解:从图上看劳资双方的利益增长似乎同步,但人均收入却有很大差异,可以绘制如图所示的统计图来进行分析.



(第9题)

通过统计图可以看出股东人均收入比员工高得多.

点拨:学会选取恰当的统计图或统计量对数据进行分析,才能做出正确的决策.

10. 解:这是抽样调查得到的结果.

设计调查问卷和抽样调查方案略.

点拨:设计调查问卷的方法和抽样调查方案不唯一,同学们可以自己设计调查问卷,对本校学生进行调查.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

廿年磨一剑 · 匠心铸经典

教师的备课笔记 · 学生的随身家教 · 家长的辅导工具



责任编辑：朱　林
封面题字：沈　鹏
封面设计：典点瑞泰
荣德基官方网站：http://www.rudder.com.cn
荣德基天猫旗舰店：http://rongdejj.tmall.com
荣德基初中频道
ISBN 978-7-5383-9096-4
定价：38.80元

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料