特高级教师

点拨®

知识
方法
素养

九年级 数学 下 （HK版）

主　　编：荣德基
本册主编：叶　余
　　王　涛
　　武　树



提分一定有方法

吉林教育出版社

教辅资料站

电子教辅　试卷练习
知识总结　备课资源

扫码关注获取更多学习资料

提分攻略

知识点 47 个 必得分

	页码
1 旋转的定义	2
2 旋转的性质	3
3 旋转作图	7
4 中心对称	14
5 中心对称图形	16
6 关于原点对称的点的坐标	17
7 圆的定义	22
8 点与圆的位置关系	24
9 圆的相关概念	25
10 圆的对称性	28
11 垂径定理	29
12 垂径定理的推论	31
13 圆心角的定义	36
14 圆心角、弧、弦、弦心距之间的关系定理及其推论	37
15 圆的确定	42
16 反证法	44
17 圆周角和圆周角定理及其推论 1	49
18 圆周角定理的推论 2	53
19 圆内接多边形及其性质	55
20 直线与圆的位置关系	61
21 圆的切线的性质	63
22 切线的判定	66
23 切线长定理	69
24 三角形的内切圆	75
25 三角形内切圆的作法	77
26 正多边形	81
27 画正多边形	82
28 正多边形的性质及相关概念	83
29 弧长公式	88
30 扇形的面积公式	90
31 圆柱、圆锥的侧面展开图	93

考向点 66 个 速提分

	页码
1 利用旋转的定义识别旋转现象	2
2 利用旋转的三要素确定对应关系	3
3 利用旋转的性质求角的度数	3
4 利用旋转的性质求线段的长	4
5 旋转对称图形的判断	8
6 利用中心对称的概念识别中心对称	14
7 利用中心对称图形的定义识别常见图形	16
8 利用中点坐标公式求点的坐标	18
9 利用圆的定义判断有关圆的命题的真假	22
10 利用点与圆的位置关系确定字母或半径的取值范围	24
11 利用圆的相关概念判断命题的真假	25
12 弧和弦之间的条数关系	26
13 利用圆的旋转不变性找相等的量	28
14 利用垂径定理进行计算	29
15 利用垂径定理解决实际问题	30
16 利用垂径定理的推论进行计算与证明	32
17 利用垂径定理的推论确定残缺圆的圆心	32
18 利用特殊的圆心角探究半径、弦、弦心距之间的关系	37
19 利用圆心角、弧、弦、弦心距之间的关系进行证明	38
20 利用确定圆的条件分析圆的情况	42
21 三角形外接圆的综合计算	43
22 利用反证法证命题结论反面唯一的命题	45
23 利用反证法证命题结论反面有有限种情况的命题	45
24 利用圆周角的定义识别圆周角	49
25 利用圆周角定理的推论 1 解决实际问题	52
26 利用圆内接四边形的性质求角的度数	55
27 利用直线与圆的位置关系求圆的半径的取值范围	62
28 利用切线的性质进行证明与计算	65
29 圆的切线的性质与判定的综合	68
30 利用切线长定理进行边角计算	69
31 利用三角形内切圆的性质进行计算	76
32 利用三角形的内切圆解决问题	77
33 利用正多边形的定义识别正多边形	81
34 利用正多边形与圆的关系作正多边形	83
35 利用正多边形与圆的相关概念进行计算	84
36 利用弧长公式解决实际问题	89
37 利用扇形面积公式进行计算	90
38 利用圆锥的侧面积公式进行面积计算	93

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

学霸图谱

提分 ↑ 方法 ↑ 学霸

方法点41个 得高分

	页码
1 化不规则为规则法	5
2 确定旋转中心的方法	9
3 找对称中心的方法	15
4 转化思想	17
5 数形结合思想	23
6 构造法	24
7 常见的作辅助线的方法	32
8 三角形外接圆的作法	42
9 反证法	44
10 方程思想	46
11 定义法	49
12 排除法	49
13 证明切线的常用方法	66
14 证明一个多边形是正多边形的方法	82
15 求正多边形的边数常用的方法	82
16 从特殊到一般的思想	86
17 求不规则图形的面积常用的方法	91
18 作差法	91
19 平移法	92
20 迁移变换法	92
21 割补法	92
22 化整为零法	92
23 求曲面上最短路线长问题的方法	95
24 分类讨论思想	98

拔尖角度39个 争满分

	页码
1 利用一次函数求旋转中心的坐标	10
2 利用旋转作图巧求线段的长	10
3 利用中心对称图形的特征解决函数问题	19
4 利用中心对称图形的性质巧解实际问题	19
5 利用圆的半径的性质进行计算	26
6 利用圆的半径的性质巧比较大小	26
7 利用圆的轴对称性求特殊值	33
8 利用垂径定理巧解图形中点的坐标问题	33
9 利用垂径定理进行计算、判断	33
10 与垂径定理有关的分类问题	34
11 利用圆心角、弧、弦、弦心距之间的等量关系探究它们之间的倍数关系	39
12 利用圆心角、弧、弦、弦心距之间的关系进行探究性学习	39
13 圆与平面直角坐标系相结合的问题	46
14 利用三角形外心的性质在抛物线中求外接圆的圆心	46
15 三角形的外接圆和一元二次方程相结合的问题	46
16 利用圆周角定理的推论进行证明	57
17 利用圆周角的有关知识解决动点问题	57
18 利用圆内接四边形的性质进行结论探究	58
19 利用方程思想解决与切线有关的问题	71
20 利用切线的性质解决函数与方程的综合问题	71
21 利用直线与圆的位置关系解决圆的动态探索问题	72
22 利用三角形的内切圆进行证明	78
23 利用切线长定理解决内切圆问题	78
24 利用正多边形的性质解决面积问题	85
25 利用中心角探究正多边形中角的变化规律	86
26 利用弧长和扇形面积公式解决动态问题	94
27 利用圆锥的侧面展开图巧解最短路线问题	94
28 利用弧长和扇形的面积公式进行方案设计	95

微信公众号 教辅资料站

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

提分攻略

知识点 47 个 必得分

第25章 投影与视图

	页码
1 投影	108
2 平行投影	109
3 中心投影	111
4 正投影	114
5 认识三视图	121
6 画几何体的三视图	122
7 由三视图确定立体图形	123
8 棱柱	125

第26章 概率初步

	页码
1 事件的定义与分类	142
2 事件发生的可能性	143
3 概率的意义	147
4 概率的取值范围	149
5 用画树状图法列举试验中所有等可能出现的结果求概率	150
6 用列表法求事件发生的概率	154
7 利用频率估计等可能事件的概率	161
8 利用频率估计非等可能事件的概率	163

考向点 66 个 速提分

	页码
1 利用投影的概念识别投影现象	108
2 利用平行投影的特征确定影子	109
3 利用不同时刻的平行投影确定时间顺序	110
4 利用平行投影的特点进行作图	110
5 利用中心投影的特征识别中心投影现象	112
6 利用两种投影各自的特征进行识别	112
7 利用正投影的特征进行计算	116
8 利用三视图的概念确定组合几何体的三视图	122
9 利用画三视图的步骤画含虚线的三视图	123
10 利用三视图的特征确定立体图形的平面展开图	124
11 由立体图形的一种视图确定另一种视图	124
12 利用平面展开图的特征识别棱柱	125
13 利用立体图形与平面展开图的关系确定相对的面	126
14 利用三视图计算棱柱的体积	126
1 利用各种事件的定义识别事件的类型	142
2 利用事件发生的可能性大小的意义判断可能性的大小	143
3 根据概率的定义判断概率的意义	147
4 利用概率公式求与几何图形有关的概率	148
5 利用概率值与事件之间的关系判断事件发生的情况	149
6 利用画树状图法求生活中一般事件的概率	150
7 对第二次列举理解不透彻易出现的错误	153
8 利用画树状图法求两步以上操作的事件的概率	153
9 利用列表法求两次操作的事件的概率	154
10 利用求概率判断游戏的公平性	156
11 利用频率与概率的定义辨析频率与概率之间的关系	162
12 利用频率估计等可能事件的概率	162
13 利用等可能的替代物做试验	163
14 利用频率估计非等可能事件的概率	164

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

学霸图谱

提分 ← 方法 ← 学霸

方法点 41 个 得高分

	页码
1 确定投射线的方法	109
2 画物体的平行投影的方法	110
3 利用平行投影的知识解决有关太阳光下物体影子问题的方法	111
4 确定中心投影的光源位置的方法	113
5 判断正方体展开图的方法口诀	126
6 分类讨论思想	135
7 方程思想	136
8 转化思想	136
9 建模思想	137
1 可能性大小的比较	143
2 画树状图法	150
3 用画树状图法列举试验中所有等可能出现的结果求概率的方法	150
4 列表法	154
5 列表的方法	154
6 用列表法求概率的步骤	155
7 判断某个游戏的规则是否公平的方法	156
8 列举法	157
9 用频率估计概率的方法	162
10 用替代物进行试验的方法	163
11 求概率的方法	171
12 数形结合思想	172
13 方程思想	173

拔尖角度 39 个 争满分

	页码
1 利用相似解决平行投影问题	116
2 利用相似解决中心投影问题	117
3 利用锐角三角函数解决投影问题	117
4 利用三视图的特征确定小正方体的个数	127
5 利用三视图确定立体图形的表面积或体积	127
1 利用事件的实际意义判断事件的类型	144
2 利用随机事件发生的可能性设计方案	144
3 利用列举法求概率解决学科内综合题	157
4 统计与概率有关的综合题	158
5 利用频率估计概率的综合运用	164
6 利用频率估计概率解决实际问题	165



注：“提分攻略 学霸图谱”中，所列“考向点”为重点条目，全书不仅限于此.

微信公众号 教辅资料站

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

目录

二维码索引

观动画

旋转的定义…… 2
点与圆的位置关系…… 24
直线与圆的位置关系…… 61

看微课

旋转的性质…… 3
垂径定理…… 29
垂径定理的推论…… 31
圆周角的定义…… 49
切线的判定…… 66
切线长定理…… 69

第24章 圆

24.1 旋 转……2
24.1.1 图形的旋转……2
24.1.2 中心对称…… 14
24.2 圆的基本性质…… 22
24.2.1 圆的认识…… 22
24.2.2 垂径分弦…… 28
24.2.3 圆心角、弧、弦、弦心距间关系…… 36
24.2.4 圆的确定…… 42
24.3 圆周角…… 49
24.4 直线与圆的位置关系…… 61
24.5 三角形的内切圆…… 75
24.6 正多边形与圆…… 81
24.7 弧长与扇形面积…… 88
24.8 综合与实践 进球线路与最佳射门角…… 88

素养提分应用篇 ☞ P98

中考提分专题篇 ☞ P100

数学素养提升：浅谈隐形圆——将多边形问题化归为圆的问题 ☞ P58

微信公众号
教辅资料站

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

第 25 章 投影与视图

25.1 投　影 ……108

25.2 三视图 ……121

素养提分技巧篇 ☞ P131

中考提分专题篇 ☞ P132

数学素养提升：影子断物 ☞ P125

学方法

三视图的画法……122

观动画

利用中心投影作图…… 111

看微课

投影及其相关概念……108

第 26 章 概率初步

26.1 随机事件 ……142

26.2 等可能情形下的概率计算 ……147

26.3 用频率估计概率 ……161

26.4 综合与实践　概率在遗传学中的应用 ……161

素养提分思维篇 ☞ P168

中考提分专题篇 ☞ P170

参考答案及点拨（单独成册）

看微课

事件的判断……142

概率的定义……147

用频率估计概率…… 161



微信公众号
教辅资料站

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

本册方法总览简释

1. **分类讨论思想**：把所有研究的问题根据题目的特点和要求，分成若干类，转化成若干个小问题来解决，这种按不同情况分类，然后再逐一研究解决的数学思想，称之为分类讨论思想.

2. **转化思想**：转化思想也称化归思想，它是指将未知的、陌生的、复杂的问题，通过观察、分析、联想、类比等思维过程，选择恰当的方法进行变换，化为已知的、熟悉的、简单的问题，从而使问题顺利解决的数学思想.

3. **方程思想**：方程思想是分析数学问题中各量间的等量关系，构建方程或方程组，利用方程或方程组解决问题的方法.

4. **建模思想**：建模思想是一种数学的思考方法，是运用数学的语言和方法，通过抽象、简化，建立能近似刻画并解决实际问题的模型的一种强有力的数学手段. 使用数学语言描述的事物就称为数学模型.

5. **数形结合思想**：数形结合思想就是在研究数学问题时，由数思形，以形思数，数形结合考虑问题的一种思想方法. 数形结合思想可以使复杂问题简单化、抽象问题具体化.

6. **从特殊到一般的思想**：从特殊到一般的数学思想方法，即先观察一些特殊的事例，然后分析它们共同具有的特征，得出一般的结论. 它的特点：特殊→一般.

7. **构造法**：构造法属于非常规思维，它适用于对某些常规方法不易解决的问题，既巧妙，又简洁. 其主要思想是依据题设条件的特点，以所求结论为方向，在思维中形成新的数学形式，使得问题在这种形式下，拥有简捷解决的方法. 主要包括构造方程法、构造图形法（全等、相似、直角三角形等）、根据实际问题构造数学模型等.

8. **排除法**：排除法是一种把不在结论（答案）范围内的其他结论排除掉的方法. 它是一种解答选择题的技巧方法，通过已知条件来确定结论（答案）的范围，把不在结论（答案）范围内的其他结论排除掉.

9. **反证法**：先假设不成立，再从这个假设出发，经过正确的推理，说明假设错误，从而证明原命题成立，这样的证明方法叫做反证法.

10. **定义法**：所谓定义法，就是直接利用数学定义解题的一种方法. 从本质上说，数学中的定理、公式、性质和法则等，都是由定义和公理推演出来的. 因此，定义法是最直接的解题方法.

11. **作差法**：当一个不规则图形的面积可以转化为两个规则图形的面积差时，只需求出两个规则图形的面积，然后作差即可. 这种求不规则图形面积的方法叫做作差法.

12. **平移法**：先把分散的图形平移到特殊位置，然后再计算其面积，这种求图形面积的方法叫做平移法.

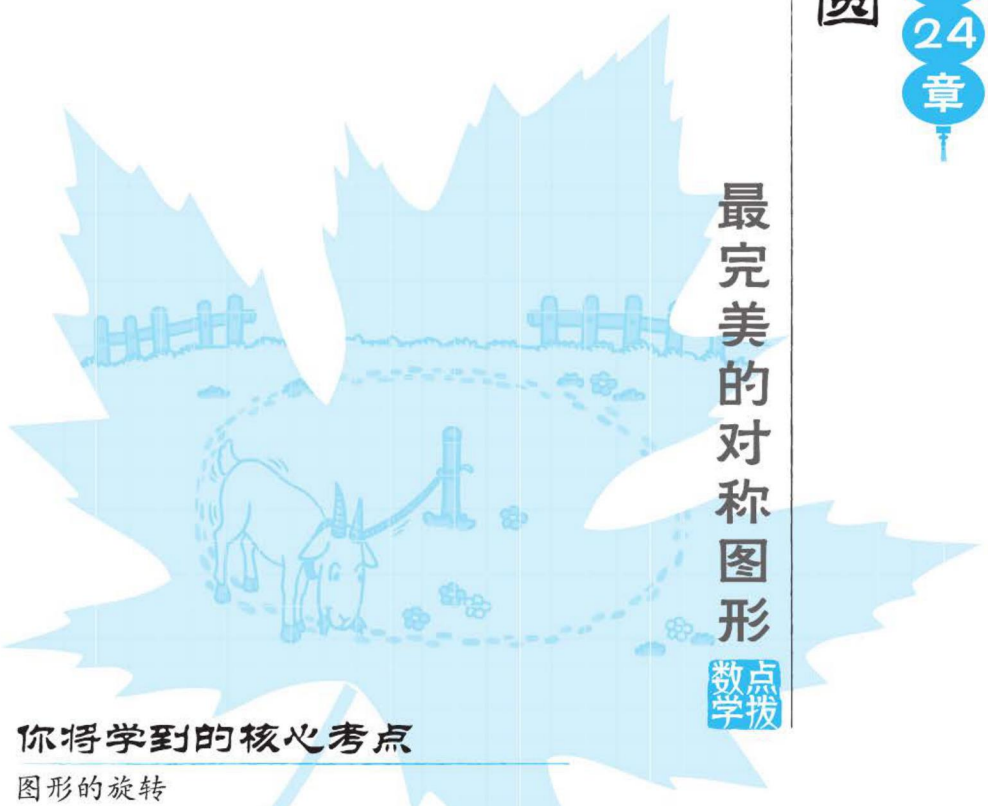
13. **割补法**：割补法就是把图形分割，切下来的部分移动到其他位置，从而将不规则的图形转化为规则的图形，复杂图形转化为简单图形，使题目便于解答. 有些情况下利用图形变换（如旋转、平移等）也可以达到易解目的.

微信公众号

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

第24章 圆

最完美的对称图形——数学点拨



你将学到的核心考点

- 图形的旋转——中心对称及中心对称图形 □
- 圆的基本性质 □
- 圆周角 □
- 与圆有关的位置关系 □
- 三角形的内切圆 □
- 正多边形与圆 □
- 弧长与扇形面积的计算 □

我们为你提供的核心方法

构造法	□	方程思想	□
反证法	□	转化思想	□
平移法	□	数形结合思想	□
割补法	□	分类讨论思想	□

掌握这些考点和方法后，记得回来给自己打✓哦！

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

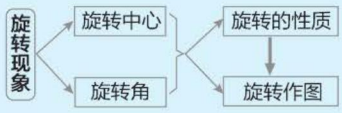
24.1 旋　转

24.1.1　图形的旋转

核心知识

- 旋转的定义
- 旋转的性质
- 旋转作图

知识链接



点知识·拨考向　速提分

点知识 1　旋转的定义（重点）

1 **定义：** 在平面内，一个图形（如$\triangle ABC$）绕着一个定点（如点O），旋转一定的角度（如θ），得到另一个图形（如$\triangle A'B'C'$）的变换，叫做旋转. 定点O叫做旋转中心，θ叫做旋转角. 原图形上一点A旋转后成为点A'，这样的两个点叫做对应点.

要点精析

（1）旋转中心在旋转的过程中是静止不动的，旋转中心可以在图形的外部，也可以在图形的内部，还可以在图形上.


旋转的定义

（2）将一个图形绕一个定点沿某个方向转动一个角度，意味着图形上每一个点同时按相同方向旋转相同的角度.

（3）旋转的三要素：旋转中心、旋转角、旋转方向.

2 **相关概念：** 旋转得到的图形能与原图形重合，我们把能够重合的点叫对应点，能够重合的线段叫对应线段，能够重合的角叫对应角.

3 **易错警示：** 旋转的范围是在平面内，否则就形成立体图形，不是我们研究的范围，因此，“在平面内”不可忽略.

拨考向　提分·秘诀

考查角度1　利用旋转的定义识别旋转现象

例1　下列运动属于旋转的是（　　）

A. 篮球的滚动

B. 钟摆的摆动

C. 气球升空的运动

D. 一个图形沿某条直线对折的过程

导引： 根据旋转的定义可以辨别，在一个平面内，一个图形绕着一个定点，旋转一定的角度，得到另一个图形的变换，叫做旋转.

A选项，不是绕着一个定点旋转，故排除；

C选项，上升过程中只有平移变换，故排除；

D选项，对应的是轴对称变换. 故本题选B.

答案： B

技巧点拨

判断一种运动是否属于旋转现象的前提是图形在同一平面内运动，其次要紧扣旋转的“三要素”，看是否同时具有旋转中心、旋转角和旋转方向.

关注公众号
教辅资料站

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

考查角度2 利用旋转的三要素确定对应关系

例2 如图 24. 1-1，△ABC 是直角三角形，延长 AB 到 D，使 $BD=BC$，在 BC 上取点 E，使 $BE=AB$，连接 DE. △ABC 旋转后能与△EBD 重合，那么，旋转中心是_____；旋转的角度是_____；AC 的对应边是_____；$\angle A$ 的对应角是_____；点 C 的对应点是_____.

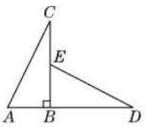


图 24. 1-1

导引： 按照旋转的相关概念进行判断.

答案： 点 B；90°；ED；$\angle BED$；点 D

方法点拨

在一些几何图形中，根据题意推出图形由旋转变换得到，由题中的边、角之间的关系确定旋转的三要素：旋转中心、旋转角、旋转方向.

点知识 2 旋转的性质（难点）

1 旋转的性质：

（1）在一个图形和它经过旋转所得到的图形中，对应点到旋转中心的距离相等；

（2）两组对应点分别与旋转中心的连线所成的角相等，都等于旋转角；

（3）旋转中心是唯一不动的点.

要点精析：

（1）旋转不改变图形的大小和形状，只改变图形的位置，即旋转前后的两个图形一定全等；



（2）经过旋转，图形上的每一点都绕旋转中心沿相同的方向旋转了相同的角度，任意一对对应点与旋转中心所连线段的夹角都是旋转角，对应点到旋转中心的距离相等；

（3）分析旋转形成的方法：分析“三个一”，即分析一个中心，一个方向，一个角度.

2 易错警示： 画旋转图形时，容易忽视对旋转方向的要求，除了旋转中心及旋转角之外，还应指明旋转方向是顺时针还是逆时针. 若无特别说明，则应考虑两种情况.

拔考向 ▶▶▶ 提分·秘诀

考查角度1 利用旋转的性质求角的度数

例3 ［中考·金华］如图 24. 1-2，将△ABC 绕点 C 顺时针旋转 90°得到△EDC. 若点 A，D，E 在同一条直线上，$\angle ACB=20°$，则 $\angle ADC$ 的度数是（　　）

A. 55°　　B. 60°　　C. 65°　　D. 70°

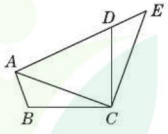


图24. 1-2

导引： ∵ 将△ABC 绕点 C 顺时针旋转 90°得到△EDC，

∴ $\angle DCE=\angle ACB=20°$，

$\angle BCD=\angle ACE=90°$，$AC=CE$，

∴ $\angle ACD=90°-20°=70°$.

∵ 点 A，D，E 在同一条直线上，$AC=CE$，$\angle ACE=90°$，

∴ $\angle E=\angle EAC=45°$.

在△ADC 中，$\angle ADC+\angle DAC+\angle DCA=180°$，

即 $\angle ADC+45°+70°=180°$，解得 $\angle ADC=65°$. 故选 C.

答案： C

方法点拨

利用旋转求角度，往往要用到旋转的性质或由旋转而得到的全等关系，以及和角有关的定理（如三角形内角和定理）来解决问题.

微信公众号 教辅资料站

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

考查角度2 利用旋转的性质求线段的长

例4 ［中考·山西］如图24.1-3，在Rt△ABC中，$\angle ACB=90°$，$\angle A=60°$，$AC=6$，将△ABC绕点C按逆时针方向旋转得到△$A'B'C$，此时点A'恰好在AB边上，则点B'与点B之间的距离为(　　)

A. 12　　B. 6　　C. $6\sqrt{2}$　　D. $6\sqrt{3}$

导引： 连接$B'B$，解答此题的关键是得出△$AA'C$，△BCB'是等边三角形，从而可以求出BB'的长.

如图24.1-3，连接$B'B$.

∵ 将△ABC绕点C按逆时针方向旋转得到△$A'B'C$，

∴ $AC=A'C$，$BC=B'C$，

$\angle ACA'=\angle BCB'$.

又$\angle A=60°$，

∴ △$AA'C$是等边三角形，

∴ $\angle ACA'=60°$，∴ $\angle BCB'=60°$，

∴ △BCB'是等边三角形，∴ $BB'=BC$.

由$\angle ACB=90°$，$\angle A=60°$，$AC=6$，

易得$BC=6\sqrt{3}$，∴ $B'B=6\sqrt{3}$. 故选D.

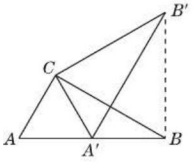
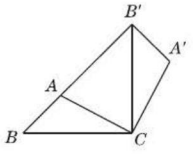


图24.1-3

答案： D

同类变式 （答案见177页）

4. ［中考·镇江］如图，在△ABC中，$\angle BAC>90°$，$BC=5$，将△ABC绕点C按顺时针方向旋转90°，点B的对应点B'落在BA的延长线上. 若$\sin\angle B'AC=\frac{9}{10}$，则$AC=$_____.



（第4题图）

方法点拨

根据旋转的性质，若旋转角为60°，则可得到等边三角形，然后利用等边三角形的特殊性求线段的长度.



考查角度3 利用旋转的性质求点的坐标

例5 ［中考·海南］如图24.1-4，在平面直角坐标系中，将点$P(-4,2)$绕原点O顺时针旋转90°，则其对应点Q的坐标为_____.

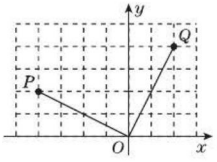


图24.1-4

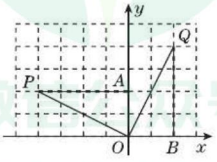


图24.1-5

方法点拨

平面直角坐标系内一点(a,b)绕原点按逆时针方向旋转90°，180°，270°后得到的点的坐标分别为$(-b,a)$，$(-a,-b)$，$(b,-a)$.

微信公众号 教辅资料站

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

导引： 如图24. 1-5，过点 P 作 $PA\perp y$ 轴于点 A，过点 Q 作 $QB\perp x$ 轴于点 B. 由旋转的性质，可知 $\angle POQ=90°$.

又∵ $\angle AOB=90°$，∴ $\angle POA=\angle QOB$.

又∵ $\angle PAO=\angle QBO=90°$，$OP=OQ$，∴ $\triangle AOP\cong\triangle BOQ$.

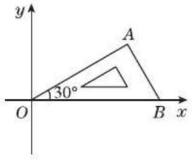
∴ $OB=OA=2$，$QB=PA=4$. ∴ 点 Q 的坐标为(2，4).

答案： (2，4)



同类变式（答案见177页）

5. ［中考·孝感］如图，将含有30°角的直角三角尺 OAB 放置在平面直角坐标系中，OB 在 x 轴上. 若 $OA=2$，将三角尺绕原点 O 顺时针旋转75°，则点 A 的对应点 A' 的坐标为(　　)



（第5题图）

A. $(\sqrt{3},-1)$　B. $(-\sqrt{3},1)$　C. $(\sqrt{2},-\sqrt{2})$　D. $(-\sqrt{2},2)$

考查角度4 利用旋转的性质求面积

例6　如图24. 1-6①，把两个全等的等腰直角三角尺 ABC 和三角尺 EFG 叠放在一起(其直角边长均为4)，且使三角尺 EFG 的直角顶点 G 与三角尺 ABC 的斜边中点 O 重合. 现将三角尺 EFG 绕点 O 按顺时针方向旋转(旋转角 α 满足条件：$0°<\alpha<90°$)，四边形 $CHGK$ 是旋转过程中两三角尺的重叠部分，如图24. 1-6②.

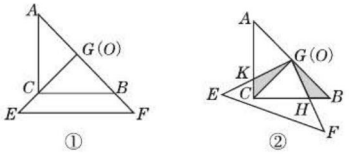


图24. 1-6

在上述旋转过程中，BH 与 CK 有怎样的数量关系？四边形 $CHGK$ 的面积有何变化？请证明你的结论.

解： 在上述旋转过程中，$BH=CK$，四边形 $CHGK$ 的面积不变.

证明：∵ $\triangle ABC$ 是等腰直角三角形，O 为斜边中点，

∴ $CG=BG$，$CG\perp AB$. ∴ $\angle ACG=\angle CBG=45°$.

∵ $\angle BGH$ 与 $\angle CGK$ 均为旋转角，∴ $\angle CGK=\angle BGH$.

∴ $\triangle CGK\cong\triangle BGH$. ∴ $BH=CK$，$S_{\triangle CGK}=S_{\triangle BGH}$.

∴ $S_{四边形CHGK}=S_{\triangle CGK}+S_{\triangle CGH}=S_{\triangle BGH}+S_{\triangle CGH}$

$=\frac{1}{2}S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times4\times4=4$，

即四边形 $CHGK$ 的面积在旋转过程中没有变化，始终为4.

方法点拨

利用旋转变换的性质，将不规则图形的面积转化为规则图形的面积，即利用化不规则为规则法求图形的面积，这种方法能将很难甚至不可求的面积巧妙地求出来.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

同类变式（答案见177页）

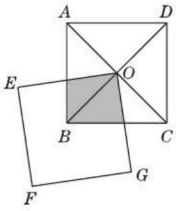
6. 如图，正方形 $ABCD$ 的对角线相交于点 O，正方形 $EFGO$ 绕点 O 旋转，若两个正方形的边长相等，则两个正方形的重合部分的面积（　　）

A. 由小变大

B. 由大变小

C. 始终不变

D. 先由大变小，然后又由小变大



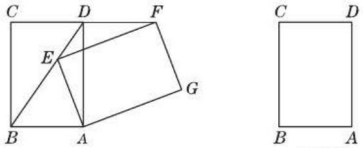
（第6题图）

考查角度5 利用旋转的性质进行证明

例7 ［中考·临沂］将矩形 $ABCD$ 绕点 A 顺时针旋转 α（$0°<\alpha<360°$），得到矩形 $AEFG$.

（1）如图24.1-7，当点 E 在 BD 上时，求证：$FD=CD$；

（2）当 α 为何值时，$GC=GB$？画出图形，并说明理由.



备用图

图24.1-7

导引：（1）先运用 SAS 判定 $\triangle AED\cong\triangle FDE$，可得 $DF=AE$，再根据 $AE=AB=CD$，即可得出 $FD=CD$；

（2）当 $GB=GC$ 时，点 G 在 BC 的垂直平分线上，分两种情况讨论. 先推出 $\angle DAG=60°$，进而可得到旋转角 α 的度数.

（1）**证明：** 由旋转的性质可得，$AE=AB$，

$\angle AEF=\angle ABC=\angle DAB=90°$，$EF=BC=AD$，

$\therefore\ \angle AEB=\angle ABE$.

又$\because\ \angle ABE+\angle EDA=90°$，$\angle AEB+\angle DEF=90°$，

$\therefore\ \angle EDA=\angle DEF$.

又$\because\ DE=ED$，

$\therefore\ \triangle AED\cong\triangle FDE(SAS)$.

$\therefore\ DF=AE$.

又$\because\ AE=AB=CD$，

$\therefore\ FD=CD$.

（2）**解：** 当 $GB=GC$ 时，点 G 在 BC 的垂直平分线上，分两种情况讨论.

①如图24.1-8，当点 G 在 AD 的右侧时，取 BC 的中点 H，连接 GH 交 AD 于 M，连接 GD.

方法点拨

根据旋转的性质：旋转角相等、对应点到旋转中心的距离相等，且旋转前后的图形全等，将题中条件转化为具体的边、角关系，从而解决问题.在解决（2）时，运用分类讨论思想，画出对应图形，再次运用旋转的性质解决问题.



微信公众号 教辅资料站

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

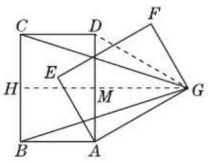


图 24. 1-8

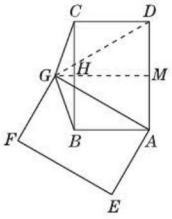


图 24. 1-9



$\because GC = GB, \therefore GH \perp BC, \therefore$ 四边形 $ABHM$ 是矩形,

$\therefore AM = BH = \frac{1}{2}AD = \frac{1}{2}AG, \therefore GM$ 垂直平分 AD.

$\therefore GD = GA = DA, \therefore \triangle ADG$ 是等边三角形,

$\therefore \angle DAG = 60°, \therefore$ 旋转角 $\alpha = 60°$.

②如图 24. 1-9,当点 G 在 AD 的左侧时,同理可得 $\triangle ADG$ 是等边三角形,$\therefore \angle DAG = 60°, \therefore$ 旋转角 $\alpha = 360° - 60° = 300°$.

点知识 3 旋转作图

1 **旋转对称图形:** 在平面内,一个图形绕着一个定点旋转一定的角度 $\theta(0° < \theta < 360°)$ 后,能够与原图形重合,这样的图形叫做旋转对称图形,这个定点就是旋转中心.

要点精析///

(1)判断一个图形是否是旋转对称图形,关键看它绕旋转中心旋转一定角度后能否与自身重合;(2)图形绕某一定点旋转一定角度后与自身重合,这里的"一定角度"包含两层意思:一是可以是多个角度;二是旋转的角度一般大于 0°且小于 360°;(3)旋转对称图形的旋转中心一定在图形内或图形上.

2 **旋转作图的依据是旋转的性质:** 对应点到旋转中心的距离相等,每个点都旋转相同的角度.

3 **简单旋转作图的一般步骤:** (1)找出图形的关键点;(2)确定旋转中心、旋转方向和旋转角;(3)将关键点与旋转中心连接起来,然后按旋转方向分别将它们旋转相同的角度,得到关键点的对应点;(4)按照原图形的顺序连接这些对应点,所得到的图形就是旋转后的图形.

4 画旋转图形时,已知条件必须满足以下几点:(1)基本图形;(2)旋转中心;(3)旋转角;(4)旋转方向.

5 图形变换:旋转、平移、轴对称间的关系:

(1)三者的概念和性质之间的相同点:①三者都是在平面内进行的图形变换,不涉及立体图形的变换;②三种变换都只改变图形的位置,而不改变图形的形状和大小,所以变换前、后的两个图形都是全等形,其对应边相等,对应角相等;③它们在作图中都要应用三角形全等的有关知识.

(2)三者的性质之间的不同点:①旋转、平移及轴对称的运动方式不同. 旋转的运动方式是将一个图形旋转一定的角度;而平移的运动方式是将一个图形沿一定方向移动;轴对称的运动方式则是将一个图形沿一条直线进行翻折. ②旋转、平移及轴对称的对应线段、对应角之间的关系不同. 旋转前、后两个图形的任意一对对应点与旋转中心所连线段的夹角都等于旋转角;而平移前后两个图形的对应线段平行(或共线),对应点所连线段平行(或共线),对应角的两边分别平行(或共线);如果成轴对称的两个图形的对应线段或其延长线相交,那么交点在对称轴上,成轴对称的两个图形的对应点连线被对称轴垂直平分. ③旋转、平移及轴对称作图时所需的条件不同. 旋转作图需要确定三个元素,即旋转中心的位置,旋转角的大小及旋转的方向;平移作图需要确定两个元素,即平移的距离和平移的方向;而作一个图形的轴对称图形只要确定一个元素就行,即对称轴.

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

考查角度1 旋转对称图形的判断

例8 如图 24. 1-10 所示的四个图案中，是旋转对称图形的是(　　)



A　　B　　C　　D

图 24. 1-10



认真会有收获

导引： 根据旋转对称图形的定义可知，在平面内，如果一个图形绕某一定点旋转一定的角度(大于 0°且小于 360°)后能与原图形重合，这个图形就是旋转对称图形.

结合选项可知，A，B，C 中的图案不是旋转对称图形，D 中的图案是旋转对称图形. 故选 D.

答案： D

同类变式 (答案见 177 页)

8. 下列四个圆形图案中，分别以它们所在圆的圆心为旋转中心，顺时针旋转 120°后，能与原图形完全重合的是(　　)



A　　B　　C　　D

考查角度2 利用旋转作图的步骤作旋转后的图形

例9 如图 24. 1-11，$\triangle ABC$ 绕点 O 旋转，使点 A 旋转到点 D 处，画出顺时针旋转后的三角形，并写出简要作法.

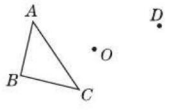


图 24. 1-11

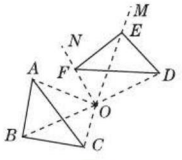


图 24. 1-12

导引： 抓住“关键点”A，B，C，D，旋转中心 O，旋转角 $\angle AOD$ 这些要素，按步骤“连——转——截——连”即可得出所求作的三角形.

解： 作图如图24. 1-12 所示.

作法：(1)连接 OA，OB，OC，OD；

(2)分别以 OB，OC 为边作 $\angle BOM = \angle CON = \angle AOD$；

(3)分别在 OM，ON 上截取 $OE = OB$，$OF = OC$；

(4)依次连接 DE，EF，FD.

$\triangle DEF$ 就是所求作的三角形.

技巧点拨

在旋转作图时，要紧扣以下三点：(1)对应点到旋转中心的距离相等；(2)旋转的角度相等；(3)旋转的方向相同.

微信公众号 教辅资料站

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

考查角度3 利用旋转的性质确定旋转中心

例10 如图24.1-13,在方格纸上,$\triangle DEF$ 是由 $\triangle ABC$ 绕定点 P 顺时针旋转得到的,如果用(2,1)表示方格纸上点 A 的位置,(1,2)表示点 B 的位置,那么点 P 的位置可表示为(　　)

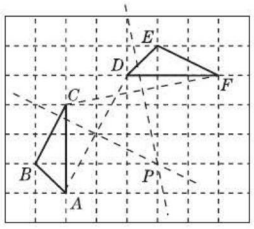


图24.1-13

A.(5,2)　　B.(2,5)　　C.(2,1)　　D.(1,2)

导引: 如图24.1-13,分别连接 AD,CF,然后作它们的垂直平分线,交于点 P,则旋转中心为 P,∴点 P 的位置可表示为(5,2).

答案: A

方法点拨

确定旋转中心的方法:在图形的旋转过程中,判断旋转中心的位置,要先确定旋转中心是否在图形上.若在图形上,哪一点在旋转的过程中位置没有改变,该点就是旋转中心;若不在图形上,对应点连线的垂直平分线的交点就是旋转中心.

考查角度4 利用旋转的性质在平面直角坐标系中进行旋转变换

例11 如图24.1-14,在平面直角坐标系中,已知 $\triangle ABC$ 的三个顶点坐标分别是 $A(1,1)$,$B(4,1)$,$C(3,3)$.

(1)将 $\triangle ABC$ 向下平移5个单位后得到 $\triangle A_1B_1C_1$,请画出 $\triangle A_1B_1C_1$;

(2)将 $\triangle ABC$ 绕原点 O 逆时针旋转90°后得到 $\triangle A_2B_2C_2$,请画出 $\triangle A_2B_2C_2$;

(3)判断以 O,A_1,B 为顶点的三角形的形状.(不用说明理由)

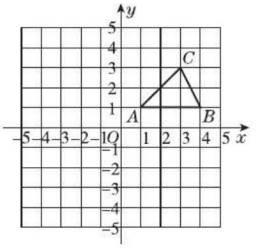


图24.1-14

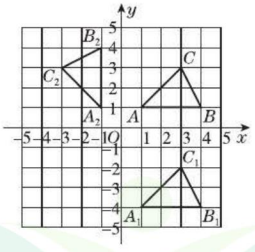


图24.1-15

导引: (1)利用点平移的坐标特征写出 A_1,B_1,C_1 的坐标,然后描点即可得到 $\triangle A_1B_1C_1$;(2)利用网格特点和旋转的性质画出 A,B,C 的对应点 A_2,B_2,C_2,从而得到 $\triangle A_2B_2C_2$;(3)根据勾股定理的逆定理解答即可.

解: (1)如图24.1-15,$\triangle A_1B_1C_1$ 即为所求.

(2)如图24.1-15,$\triangle A_2B_2C_2$ 即为所求.

(3)三角形的形状为等腰直角三角形.

方法点拨

在平面直角坐标系中进行图形的变换,关键是转化为图形的顶点坐标变换.



教辅资料站

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

点方法·拨技巧 提高分

拔尖角度 1 利用一次函数求旋转中心的坐标

例 12 ［中考·宁夏］如图 24.1-16，在平面直角坐标系 xOy 中，$\triangle A'B'C'$ 是由 $\triangle ABC$ 绕点 P 旋转得到的，求点 P 的坐标.

（提示：直线 $l_1: y_1 = k_1x + b_1$，直线 $l_2: y_2 = k_2x + b_2$，k_1，k_2 均不为 0. 若 $l_1 \perp l_2$，则 $k_1k_2 = -1$）

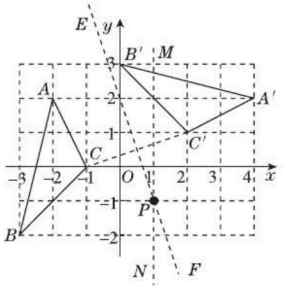


图 24.1-16

导引： 解题的关键是紧扣两组对应点连线的垂直平分线的交点就是旋转中心. ①连接 AA'，CC'；②线段 AA'，CC' 的垂直平分线的交点就是点 P.

解： 如图 24.1-16，连接 AA'，CC'，作线段 AA' 的垂直平分线 MN，作线段 CC' 的垂直平分线 EF，直线 MN 和直线 EF 的交点为 P，点 P 就是旋转中心. 易知直线 MN 的表达式为 $x = 1$. 设直线 CC' 的表达式为 $y = kx + b$. 由题意，得 $\begin{cases} -k + b = 0, \\ 2k + b = 1. \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} k = \dfrac{1}{3}, \\ b = \dfrac{1}{3}. \end{cases}$ $\therefore$ 直线 CC' 的表达式为 $y = \dfrac{1}{3}x + \dfrac{1}{3}$. $\because$ 直线 $EF \perp CC'$，且经过 CC' 的中点 $\left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right)$，$\therefore$ 易得直线 EF 的表达式为 $y = -3x + 2$. 由 $\begin{cases} x = 1, \\ y = -3x + 2, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} x = 1, \\ y = -1. \end{cases}$ $\therefore P(1, -1)$.

方法点拨： 旋转中心是两对对应点连线的垂直平分线的交点在平面直角坐标系中，可借助求函数图象的交点坐标来解决问题.

拔尖角度 2 利用旋转作图巧求线段的长

例 13 如图 24.1-17，P 是正方形 $ABCD$ 内一点，点 P 到正方形的三个顶点 A，B，C 的距离分别为 $PA = 1$，$PB = 2$，$PC = 3$. 求正方形 $ABCD$ 的边长.

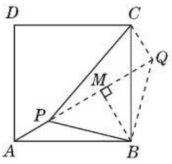


图 24.1-17

导引： 本例中 PA，PB，PC 这三个已知边在分散的位置，现有图形中的三角形不是直角三角形，而要想由已知边求未知边，唯有将其转化到直角三角形中才能达到目的，而通过旋转可帮我们实现这一目标.

解： $\because BA = BC$，$\therefore$ 可以把 $\triangle ABP$ 绕点 B 按顺时针方向旋转 90° 至 $\triangle CBQ$ 的位置，连接 PQ，如图 24.1-17.

$\therefore BQ = BP = 2$，$CQ = AP = 1$，$\angle APB = \angle CQB$，$\angle PBQ = 90°$.

$\therefore \triangle BQP$ 是等腰直角三角形，且 $\angle PQB = \angle QPB = 45°$，$\therefore PQ = 2\sqrt{2}$.

又 $\because CQ = 1$，$PC = 3$，

$\therefore PC^2 = PQ^2 + CQ^2$.

$\therefore \angle PQC = 90°$.

$\therefore \angle CQB = 135° = \angle APB$.

又 $\because \angle QPB = 45°$，

$\therefore A$，P，Q 三点共线.

过 B 作 $BM \perp PQ$，垂足为 M，

$\because \triangle BPQ$ 是等腰直角三角形，

$\therefore PM = \dfrac{1}{2}PQ = \sqrt{2} = BM$.

$\therefore AM = PA + PM = 1 + \sqrt{2}$.

$\therefore AB = \sqrt{AM^2 + BM^2} = \sqrt{5 + 2\sqrt{2}}$.

技巧点拨： 通过图形的旋转变换，可以把分散的条件重新组合，转化成规则的等腰直角三角形或直角三角形，从而巧妙地使问题得到解决. 这种技巧在正方形、正三角形中经常使用.

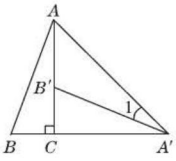
微信公众号 教辅资料站

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

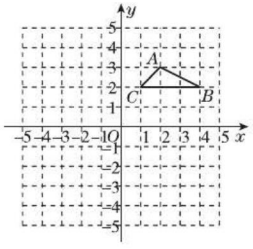
基础巩固练

1. ［中考·菏泽］如图，将 Rt△ABC 绕直角顶点 C 顺时针旋转 90°，得到 △$A'B'C$，连接 AA'，若∠1 = 25°，则∠BAA'的度数是（　　）

A. 55°　　B. 60°　　C. 65°　　D. 70°



（第1题图）



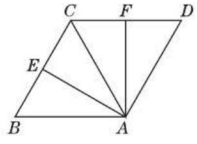
（第2题图）

2. 如图，若将 △ABC 绕点 O 逆时针旋转 90°，则顶点 B 的对应点 B_1 的坐标为（　　）

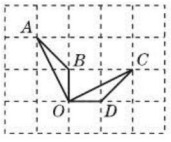
A. (−4, 2)　　B. (−2, 4)

C. (4, −2)　　D. (2, −4)

3. ［中考·益阳］如图，将等边三角形 ABC 绕顶点 A 按顺时针方向旋转，使边 AB 与 AC 重合得 △ACD，BC 的中点 E 的对应点为 F，则∠EAF 的度数是_____.



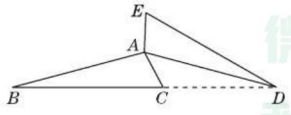
（第3题图）



（第4题图）

4. ［中考·衡阳］如图，点 A，B，C，D，O 都在方格纸的格点上，若 △COD 是由 △AOB 绕点 O 按顺时针方向旋转而得到的，则旋转的角度为_____.

5. ［中考·张家界］如图，将 △ABC 绕点 A 逆时针旋转 150°，得到 △ADE，这时点 B，C，D 恰好在同一直线上，则∠B 的度数为_____.



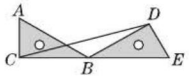
（第5题图）

6. 如图，把一个直角三角尺 ACB 绕着 30°角的顶点 B 顺时针旋转，使得点 A 与 CB 的延长线上的点 E 重合.

(1) 三角尺旋转了多少度？

(2) 连接 CD，试判断 △CDB 的形状.

(3) 求∠BDC 的度数.

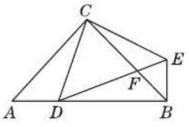


（第6题图）

7. ［中考·宁波］如图，在 △ABC 中，∠ACB = 90°，$AC = BC$，D 是 AB 边上一点（点 D 与 A，B 不重合），连接 CD，将线段 CD 绕点 C 按逆时针方向旋转 90°得到线段 CE，连接 DE 交 BC 于点 F，连接 BE.

(1) 求证：△ACD ≌ △BCE；

(2) 当 $AD = BF$ 时，求∠BEF 的度数.



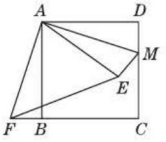
（第7题图）

微信公众号 教辅资料站

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

能力提升练

8. [中考·桂林] 如图,在正方形 $ABCD$ 中,$AB=3$,点 M 在 CD 边上,且 $DM=1$,$\triangle AEM$ 与 $\triangle ADM$ 关于 AM 所在的直线对称,将 $\triangle ADM$ 按顺时针方向绕点 A 旋转 90°得到 $\triangle ABF$,连接 EF,则线段 EF 的长为(　　)

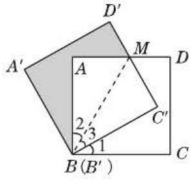


(第 8 题图)

A. 3　　B. $2\sqrt{3}$

C. $\sqrt{13}$　　D. $\sqrt{15}$

9. [中考·德阳] 如图,将边长为$\sqrt{3}$的正方形绕点 B 逆时针旋转 30°,那么图中阴影部分的面积为(　　)

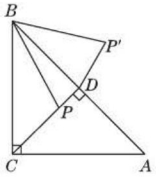


(第 9 题图)

A. 3　　B. $\sqrt{3}$

C. $3-\sqrt{3}$　　D. $3-\frac{\sqrt{3}}{2}$

10. [期末·庐阳区] 如图,在 $\triangle ABC$ 中,$\angle ACB=90°$,$AC=BC=4$,P 是 $\triangle ABC$ 的高 CD 上一个动点,以 B 点为旋转中心把线段 BP 逆时针旋转 45°得到 BP',连接 DP',则 DP'的最小值是(　　)



(第 10 题图)

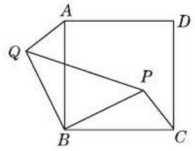
A. $2\sqrt{2}-2$　　B. $4-2\sqrt{2}$

C. $2-\sqrt{2}$　　D. $\sqrt{2}-1$

11. 如图,在正方形 $ABCD$ 中,$\triangle BCP$ 绕点 B 逆时针旋转到 $\triangle BAQ$ 的位置.

(1)求旋转角的度数;

(2)连接 PQ,请判断 $\triangle BPQ$ 的形状.

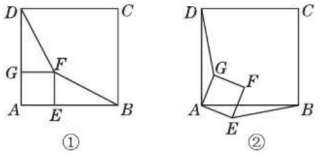


(第 11 题图)

12. 正方形 $ABCD$ 和正方形 $AEFG$ 有一公共顶点 A,点 G,E 分别在线段 AD,AB 上,如图①所示,连接 DF,BF. 【导学号:9142562】

(1)求证:$DF=BF$;

(2)若将正方形 $AEFG$ 绕点 A 按顺时针方向旋转,连接 DG,BE,如图②所示,在旋转过程中,请猜想线段 DG,BE 始终有什么数量关系和位置关系,并证明你的猜想.

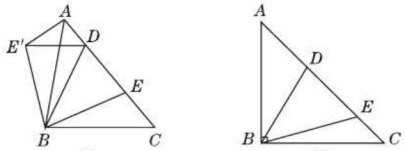


(第 12 题图)

微信公众号
教辅资料站

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

13. [中考·宿迁](1)如图①,在$\triangle ABC$中,$BA=BC$,D,E是AC边上的两点,且满足$\angle DBE=\frac{1}{2}\angle ABC$($0°<\angle CBE<\frac{1}{2}\angle ABC$).以点$B$为旋转中心,将$\triangle BEC$按逆时针方向旋转,得到$\triangle BE'A$(点$C$与点$A$重合,点$E$到点$E'$处),连接$DE'$,求证:$DE'=DE$.



(第13题图)

(2)如图②,在Rt$\triangle ABC$中,$BA=BC$,$\angle ABC=90°$,D,E是AC边上的两点,且满足$\angle DBE=\frac{1}{2}\angle ABC$($0°<\angle CBE<45°$).求证:$DE^2=AD^2+EC^2$.

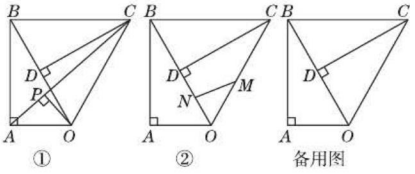
思维拓展练

14. [中考·广东]已知在Rt$\triangle OAB$中,$\angle OAB=90°$,$\angle ABO=30°$,斜边$OB=4$,将Rt$\triangle OAB$绕点O顺时针旋转$60°$,如图①,连接BC.

(1)填空:$\angle OBC=$_____°;

(2)如图①,连接AC,作$OP\perp AC$,垂足为P,求OP的长度;

(3)如图②,点M,N同时从点O出发,在$\triangle OCB$边上运动,M沿$O\to C\to B$路径匀速运动,N沿$O\to B\to C$路径匀速运动,当两点相遇时运动停止,已知点M的运动速度为1.5单位/秒,点N的运动速度为1单位/秒,设运动时间为x秒,$\triangle OMN$的面积为y,求当x为何值时,y取得最大值?最大值为多少?



(第14题图)

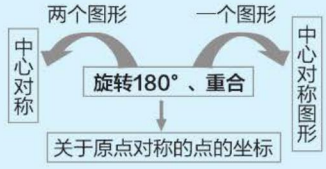
关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

24.1.2 中心对称

核心知识

- 中心对称
- 中心对称的性质
- 中心对称图形
- 关于原点对称的点的坐标

知识链接



点知识·拨考向 速提分

点知识 1 中心对称（重点）

1 中心对称的定义： 把一个图形绕着某一个定点旋转180°，如果它能和另一个图形重合，那么这两个图形关于这个点的对称叫做中心对称，这个点叫做对称中心.

要点精析///

(1) 中心对称是特殊的旋转，其旋转角为180°；

(2) 中心对称是指两个图形的位置关系，必须涉及两个图形，其中一个图形绕对称中心旋转180°后一定能与另一个图形重合；

(3) 成中心对称的两个图形，只有一个对称中心，这个对称中心可能在每个图形的外部，也可能在每个图形的内部或边上，但对称的点一定在对称中心的两侧或与对称中心重合.

2 中心对称的特征： 成中心对称的两个图形，对应点的连线经过对称中心，且被对称中心平分.

要点精析///

(1) 如果两个图形的对应点所连线段都经过某一点，并且被这一点平分，那么这两个图形关于这点成中心对称；

(2) 连接任意两对对应点，两条线段的交点就是对称中心.

拨考向 ▶▶▶ 提分·秘诀

考查角度1 利用中心对称的概念识别中心对称

例1 如图24.1-18所示的图形中，成中心对称的有_____组.



图24.1-18

导引： 利用中心对称的定义解答.

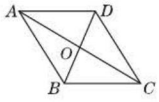
答案： 3

方法点拨

根据中心对称的定义，看左边的图形能否绕一点旋转180°后与右边的图形重合，若能，就成中心对称，否则就不成中心对称.

同类变式 （答案见179页）

1. 如图，四边形 $ABCD$ 是平行四边形，对角线 AC，BD 相交于点 O. 图中哪些三角形关于点 O 成中心对称？



（第1题图）

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

考查角度2 利用中心对称的性质作图

例2 如图 24. 1-19，已知四边形 $ABCD$ 和点 O，画四边形 $A'B'C'D'$，使四边形 $A'B'C'D'$ 与四边形 $ABCD$ 关于点 O 成中心对称.

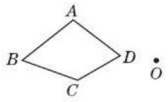


图 24. 1-19

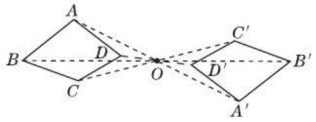


图 24. 1-20

导引： 要作四边形 $ABCD$ 关于点 O 的对称图形，只要作出点 A,B,C,D 关于点 O 的对应点，然后顺次连接即可.

解： 如图24. 1-20 所示，(1)连接 AO 并延长 AO 到 A'，使 $OA'=OA$，于是得到点 A 关于点 O 的对应点 A'；

(2)同样画出点 B,C,D 关于点 O 的对应点 B',C',D'；

(3)顺次连接 $A'B',B'C',C'D',D'A'$，则四边形 $A'B'C'D'$ 即为所求作的图形.

方法点拨

根据中心对称的性质作与已知图形关于某点成中心对称的图形的关键是作出某些特殊点的对应点作图步骤：(1)连接原图形上的特殊点和对称中心；(2)再将以上各线段延长，找对应点，使得特殊点与对称中心的距离和其对应点与对称中心的距离相等；(3)将对应点按原图形的形状连接起来，即可得出与原图形关于某点成中心对称的图形.

考查角度3 利用中心对称的性质找对称中心

例3 如图24. 1-21，四边形 $ABCD$ 与四边形 $A'B'C'D'$ 成中心对称，试画出它们的对称中心 O，并简要说明理由.

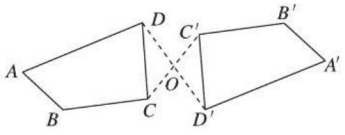


图 24. 1-21

导引： 根据中心对称的性质知，对称中心应该在对应点连线上并且平分对应点所连线段，因此只需连接对应点，这些连线的交点即为对称中心.

解： 对称中心 O 如图24. 1-21 所示.

理由：成中心对称的两个图形，对应点所连线段都经过对称中心，而且被对称中心平分.

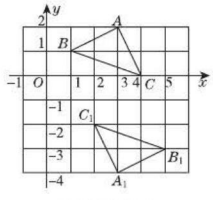
方法点拨

(1)找对称中心的方法：本例的方法是连接两对对应点，其交点即为对称中心，还可以连接任意一对对应点，这条线段的中点即为对称中心.

(2)确定两个图形是否成中心对称，只需看其所有对应点的连线是否过同一点，并且被这点平分即可.

同类变式 (答案见 179 页)

3. 如图，在平面直角坐标系中，若 $\triangle ABC$ 与 $\triangle A_1B_1C_1$ 关于点 E 成中心对称，则对称中心 E 的坐标是(　　)



(第 3 题图)

A. $(3,-1)$　　B. $(0,0)$　　C. $(2,-1)$　　D. $(-1,3)$

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

点知识 2 中心对称图形（难点）

1 **定义：** 把一个图形绕某一个定点旋转 180°，如果旋转后的图形能和原来图形重合，那么这个图形叫做中心对称图形，这个定点就是对称中心.

要点精析///

(1) 中心对称图形的对称中心一定在图形内；

(2) 中心对称图形是针对一个图形而言的；

(3) 中心对称图形上所有的点关于对称中心的对应点都在这个图形本身上；

(4) 中心对称图形一定是旋转对称图形，但旋转对称图形不一定是中心对称图形；

(5) 常见的中心对称图形有平行四边形、矩形、菱形、正方形、圆、线段、边数是偶数的正多边形.

2 **性质：** 过中心对称图形对称中心的直线将图形分成全等的两部分.

拔考向 ▶▶▶

提分·秘诀

考查角度1 利用中心对称图形的定义识别常见图形

例 4 ［中考 · 广东］下列所述图形中，是中心对称图形的是(　　)

A. 直角三角形

B. 平行四边形

C. 正五边形

D. 正三角形

导引： 解题的关键是理解中心对称图形的定义. 根据中心对称图形的定义对各选项进行逐一判断识别. 只有平行四边形绕着其对角线的交点旋转 180°后与原图形重合，符合中心对称图形的定义，故选 B.

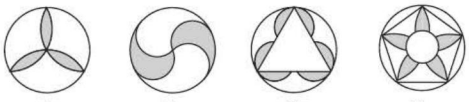
答案： B

方法点拨

判断一个图形是不是轴对称图形，就看是否存在一条直线(对称轴)，使得这个图形沿这条直线对折后两边能完全重合；判断一个图形是不是中心对称图形，可以把图形倒过来看(相当于旋转 180°)，如果看到的图形与原来的图形完全相同，就是中心对称图形，否则就不是.

考查角度2 利用中心对称图形的定义识别图案

例 5 ［中考 · 枣庄］如图 24. 1-22，下列图形，可以看成中心对称图形的是(　　)



A　　B　　C　　D

图 24. 1-22

导引： 解题的关键是根据中心对称图形的定义进行判断. 中心对称图形是指把一个图形绕着某一点旋转 180°，如果旋转后的图形能和原来的图形重合，那么这个图形就叫做中心对称图形，根据中心对称图形的定义逐一判断即可. A，C，D 选项中的图形绕中心旋转 180°后与原图不重合. B 选项中的图形绕中心旋转 180°后与原图重合，故选 B.

答案： B

方法点拨

解决此类问题应先从一般几何图形入手，熟练掌握常见的几何图形的对称性，像圆、正方形等这些既是中心对称图形又是轴对称图形的特例，还要知道有奇数个角的图案一定不是中心对称图形. 辨别时，既要关注局部，又要关注整体.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

考查角度3 利用中心对称图形的性质等分不规则图形

例6 有一块如图 24.1-23 所示的钢板，工人师傅想把它分成面积相等的两部分. 请你在图中画出分割方法.

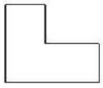


图 24.1-23

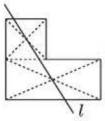


图 24.1-24

解： 钢板可看成由上、下两个矩形构成，矩形是中心对称图形，过对称中心的任一直线把矩形分成全等的两部分，自然平分其面积，而矩形的对称中心是两条对角线的交点，因此，先作出两矩形的对称中心，然后过这两个对称中心作直线 l，如图 24.1-24.（画法不唯一）

方法点拨

（1）过中心对称图形的对称中心的任一直线，能将中心对称图形分割成全等的两部分，因此，过对称中心作直线是平分面积的常用方法，而本例的图形不是中心对称图形，我们可以利用化整为零的转化思想将其转化成两个中心对称图形，再利用中心对称图形的性质来解决分割问题；（2）本例还有其他分割方法，请试一试.

点知识 3 关于原点对称的点的坐标

1 **关于原点对称的点的坐标：** 两个点关于原点对称时，它们的横、纵坐标分别互为相反数，即点 $P(x, y)$ 关于原点对称的点为 $P'(-x, -y)$.

要点精析///

第一象限内的点关于原点对称的点在第三象限，第二象限内的点关于原点对称的点在第四象限，坐标轴上的点关于原点对称的点仍在坐标轴上.

2 **线段的中点坐标公式：** 若点 P 的坐标为 (x,y)，点 P' 的坐标为 (x',y')，则 PP' 的中点坐标为 $\left(\frac{x+x'}{2},\frac{y+y'}{2}\right)$.

3 **关于坐标轴对称和关于原点对称的点的坐标的区别：**

名称		区别	表达方式
关于坐标轴对称	关于 x 轴对称	横坐标相同，纵坐标互为相反数	$P(a,b)$ 关于 x 轴对称的点为 $P_1(a,-b)$
	关于 y 轴对称	横坐标互为相反数，纵坐标相同	$P(a,b)$ 关于 y 轴对称的点为 $P_2(-a,b)$
关于原点对称		横、纵坐标分别互为相反数	$P(a,b)$ 关于原点对称的点为 $P_3(-a,-b)$

核考向 ▶▶▶ 提分·秘诀

考查角度1 直接利用关于原点对称的点的坐标特征求点的坐标

例7 [中考·乌鲁木齐] 在平面直角坐标系 xOy 中，将点 $N(-1,-2)$ 绕点 O 旋转 180°，得到的对应点的坐标是（　　）

A. $(1,2)$　　B. $(-1,2)$

C. $(-1,-2)$　　D. $(1,-2)$

导引： 根据题意，旋转前后的两个点关于原点 O 成中心对称，可知点 N 与对应点的横、纵坐标都互为相反数，得到的对应点的坐标是 $(1,2)$，故选 A.

答案： A

方法点拨

由中心对称可知，关于原点对称的两个点的横、纵坐标互为相反数

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

考查角度2 利用中点坐标公式求点的坐标

例8 如图 24. 1-25，将 $\triangle ABC$ 绕点 $C(0,1)$ 旋转 180° 得到 $\triangle A'B'C$，设点 A 的坐标为 (a,b)，则点 A' 的坐标为(　　)

A. $(-a,-b)$　　B. $(-a,-b-1)$

C. $(-a,-b+1)$　　D. $(-a,-b+2)$

导引： 由中心对称的性质可知，点 A 与点 A' 是对应点，点 C 是线段 AA' 的中点，根据中点坐标公式，可求出点 A' 的坐标.

设点 A' 的坐标为 (x,y).

易知点 A 与点 A' 是对应点，

点 C 是线段 AA' 的中点，

$\therefore a+x=0, b+y=2.$

$\therefore x=-a, y=-b+2.$

故点 A' 的坐标为 $(-a,-b+2)$.

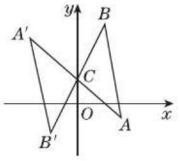


图 24. 1-25

答案： D

方法点拨

根据中点坐标公式可知，线段两端点的横坐标之和等于中点横坐标的 2 倍，纵坐标之和等于中点纵坐标的 2 倍. 据此，在这三个点中，知其中任意两个点的坐标，就能求出第三个点的坐标.

考查角度3 利用关于原点对称的点的坐标特征进行图形的变换

例9 如图 24. 1-26，在平面直角坐标系中，将四边形 $ABCD$ 称为“基本图形”，且各点的坐标分别为 $A(4,4)$，$B(1,3)$，$C(3,3)$，$D(3,1)$.

(1) 画出“基本图形”关于原点 O 对称的四边形 $A_1B_1C_1D_1$，并写出 A_1，B_1，C_1，D_1 的坐标；

(2) 画出“基本图形”关于 x 轴对称的四边形 $A_2B_2C_2D_2$；

(3) 画出四边形 $A_3B_3C_3D_3$，使之与前面三个图形组成的图形既是中心对称图形，又是轴对称图形.

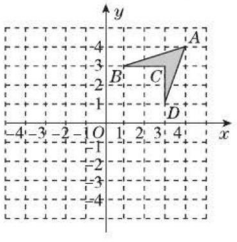


图 24. 1-26

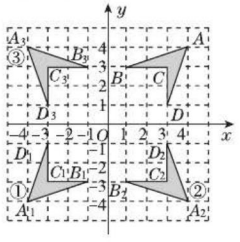


图 24. 1-27

导引： 画关于已知图形的对称变换的图形时，根据不同的对称方式确定每个对应点的坐标，然后画出对称后的图形.

解： (1) 如图 24. 1-27 中的图形①，$A_1(-4,-4)$，$B_1(-1,-3)$，$C_1(-3,-3)$，$D_1(-3,-1)$.

(2) 分别找出点 A，B，C，D 关于 x 轴对称的点 $A_2(4,-4)$，$B_2(1,-3)$，$C_2(3,-3)$，$D_2(3,-1)$，

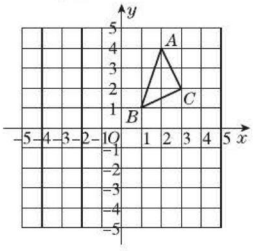
然后连接 A_2B_2，B_2C_2，C_2D_2，D_2A_2，

即得四边形 $A_2B_2C_2D_2$，

如图 24. 1-27 中的图形②.

同类变式 (答案见 179 页)

9. [中考 · 眉山] 在边长为 1 个单位长度的正方形网格中建立如图所示的平面直角坐标系，$\triangle ABC$ 的顶点都在格点上，请解答下列问题.



(第 9 题图)

(1) 作出 $\triangle ABC$ 向左平移 4 个单位长度后得到的 $\triangle A_1B_1C_1$，并写出点 C_1 的坐标；

(2) 作出 $\triangle ABC$ 关于原点 O 对称的 $\triangle A_2B_2C_2$，并写出点 C_2 的坐标；

(3) 已知 $\triangle ABC$ 关于直线 l 对称的 $\triangle A_3B_3C_3$ 的顶点 A_3 的坐标为 $(-4,-2)$，请直接写出直线 l 的函数表达式.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

(3)观察作出的图形可知,

只有四边形 $A_3B_3C_3D_3$ 与四边形 $ABCD$ 关于 y 轴对称时,

才能使之与前面三个图形组成的图形既是中心对称图形,

又是轴对称图形.

分别找出点 A,B,C,D 关于 y 轴对称的点 $A_3(-4,4)$,

$B_3(-1,3)$,$C_3(-3,3)$,$D_3(-3,1)$,

然后连接 A_3B_3,B_3C_3,C_3D_3,D_3A_3,

即得四边形 $A_3B_3C_3D_3$,

如图 24.1-27 中的图形③.

点方法·拨技巧 提高分

拔尖角度 1 利用中心对称图形的特征解决函数问题

例 10 如图 24.1-28,已知矩形 $ABCD$ 的各顶点分别为 $A(0,4)$,$B(2,0)$,$C(8,3)$,$D(6,7)$,直线 $y=kx+1$ 平分矩形的面积,求 k 的值.

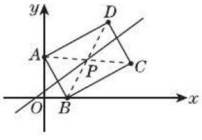


图 24.1-28

解: 如图24.1-28,连接 AC,BD,其交点 P 即为矩形 $ABCD$ 的对称中心,易求得点 P 的坐标为 $\left(4,\frac{7}{2}\right)$.

又∵ 直线 $y=kx+1$ 平分矩形的面积,

∴ 该直线一定过点 $P\left(4,\frac{7}{2}\right)$,

∴ $4k+1=\frac{7}{2}$.

解得 $k=\frac{5}{8}$.

方法点拨: 矩形是中心对称图形,对角线的交点是对称中心;经过对称中心的任何一条直线都将中心对称图形分成面积相等的两部分.

拔尖角度 2 利用中心对称图形的性质巧解实际问题

例 11 [趣味题]甲、乙两人轮流往一个圆形桌面上平放同样大小的硬币,每次只能放一枚,但不允许任何两枚硬币有重叠部分,规定谁放下最后一枚,并使得对方没有再放的位置,就算谁获胜. 假如甲、乙两人都是内行,试问是先放者获胜,还是后放者获胜?怎样放才能稳操胜券?

导引: 桌面是否呈圆形并不重要,只要是中心对称图形就可以.

因为中心对称图形上的每一点(对称中心除外)都有一个关于对称中心对称的点,所以先放者占据对称中心后,后放者每放一点,总可以找到与它对称的另一点,由此显然先放者必胜.

解: 先放者获胜.

操作办法如下:

第一枚硬币要放在桌面中心处,然后每次都往对方所放硬币位置关于桌面中心的对称位置处放硬币.

技巧点拨: 任何一个中心对称图形只有对称中心是唯一的,其他的任何点都能找到对称的点.

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

基础巩固练

1. ［中考·枣庄］将数字“6”旋转180°，得到数字“9”，将数字“9”旋转180°，得到数字“6”. 现将数字“69”旋转180°，得到的数字是(　　)

A. 96　　B. 69　　C. 66　　D. 99

2. ［中考·自贡］下列图案中，既是轴对称图形又是中心对称图形的是(　　)



A　　B　　C　　D

3. ［中考·泰州］把下列英文字母看成图形，既是轴对称图形又是中心对称图形的是(　　)

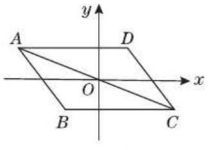
E　　F　　H　　S

A　　B　　C　　D

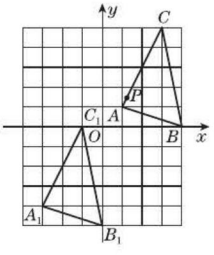
4. ［中考·宜昌］如图，在平面直角坐标系中，把△ABC绕原点O旋转180°得到△CDA，点A，B，C的坐标分别为$(-5,2)$，$(-2,-2)$，$(5,-2)$，则点D的坐标为(　　)

A. $(2,2)$　　B. $(2,-2)$

C. $(2,5)$　　D. $(-2,5)$



（第4题图）



（第6题图）

5. 有下列平面图形：①线段；②等腰直角三角形；③平行四边形；④矩形；⑤正八边形；⑥圆. 其中既是轴对称图形，又是中心对称图形的有_____.（填序号）

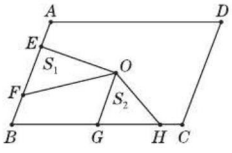
能力提升练

6. ［中考·泰安］如图，将正方形网格放置在平面直角坐标系中，其中每个小正方形的边长均为1，△ABC经过平移后得到△$A_1B_1C_1$，若AC上一点$P(1.2,1.4)$平移后对应点为P_1，点P_1绕原点顺时针旋转180°，对应点为P_2，则点P_2的坐标为(　　)

A. $(2.8,3.6)$　　B. $(-2.8,-3.6)$

C. $(3.8,2.6)$　　D. $(-3.8,-2.6)$

7. ［中考·陕西］如图，点O是平行四边形$ABCD$的对称中心，$AD>AB$，E，F是AB边上的点，且$EF=\frac{1}{2}AB$；G，H是BC边上的点，且$GH=\frac{1}{3}BC$，若S_1，S_2分别表示△EOF和△GOH的面积，则S_1与S_2之间的等量关系是_____.

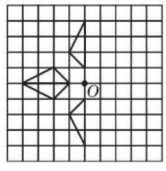


（第7题图）

8. 如图，网格中有一个四边形和两条折线.

(1) 请你分别画出三个图形关于点O成中心对称的图形.

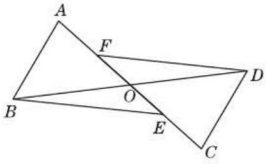
(2) 将(1)中画出的图形与原图形看成一个整体图形，请写出这个整体图形对称轴的条数. 这个整体图形至少旋转多少度才能与自身重合？



（第8题图）

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

9. 如图，$\triangle ABO$ 与 $\triangle CDO$ 关于 O 点成中心对称，点 E，F 在线段 AC 上，且 $AF = CE$，求证：$FD = BE$.

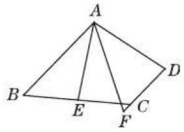


（第 9 题图）

10. ［探究题］如图，在四边形 $ABCD$ 中，$AB \parallel DC$，E 为 BC 边的中点，$\angle BAE = \angle EAF$，AF 与 DC 的延长线相交于点 F.

(1) 作出 $\triangle ABE$ 关于点 E 成中心对称的图形；

(2) 探究线段 AB 与 AF，CF 之间的数量关系，并证明你的结论.



（第 10 题图）

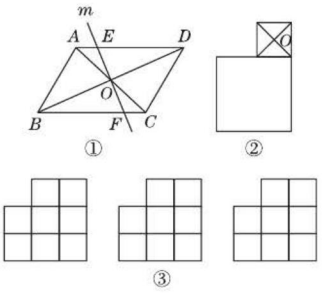
思维拓展练

11. 知识背景：过中心对称图形的对称中心的任意一条直线都将其分成全等的两个部分.

(1) 如图①，直线 m 经过平行四边形 $ABCD$ 对角线的交点 O，分别与 AD，BC 交于点 E，F，则 $S_{四边形AEFB}$ _____ $S_{四边形DEFC}$；（填“ > ”“ < ”或“ = ”）

(2) 如图②，两个正方形如图所示摆放，O 为小正方形对角线的交点，求作过点 O 的直线将整个图形分成面积相等的两部分；

(3) 八个大小相同的正方形如图③所示摆放，求作直线将整个图形分成面积相等的两部分（用三种方法分割）.



（第 11 题图）

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

24.2 圆的基本性质

24.2.1 圆的认识

核心知识

- 圆的定义
- 圆的相关概念

知识链接

圆心、半径 ⇒ 圆 ⇒ 弦、弧

点知识·拨考向 速提分

点知识 1 圆的定义（重点）

1 圆的概念：

（1）描述性定义：在平面内，线段 OP 绕着它固定的一个端点 O 旋转一周，则另一个端点 P 所形成的封闭曲线叫做圆. 固定的端点 O 叫做圆心，线段 OP 的长 r 叫做半径. 以点 O 为圆心的圆，记作“$\odot O$”，读作“圆 O”.

（2）集合观点定义：圆可以看成平面内到定点（圆心 O）的距离等于定长（半径 r）的所有点组成的图形.

2 圆的特性：（1）圆上各点到定点（圆心 O）的距离都等于定长（半径 r）；

（2）平面内到定点（圆心 O）的距离等于定长（半径 r）的所有点都在同一个圆上.

要点精析///

（1）根据圆的概念，可知“圆”指的是“圆周”，而不是“圆面”；

（2）“圆上的点”指的是圆周上的点，圆心不在圆周上.

3 确定圆的两个要素

圆心 $\xrightarrow{\text{确定}}$ 圆的位置

半径 $\xrightarrow{\text{确定}}$ 圆的大小

拨考向 ▸▸▸ 提分·秘诀

考查角度1 利用圆的定义判断有关圆的命题的真假

例1 下列说法中，错误的有（　　）

（1）经过点 P 的圆有无数个；

（2）以点 P 为圆心的圆有无数个；

（3）半径为 3 cm 且经过点 P 的圆有无数个；

（4）以点 P 为圆心，3 cm 为半径的圆有无数个.

A. 1 个　　B. 2 个

C. 3 个　　D. 4 个

导引： 确定一个圆必须有两个条件，即圆心和半径，只满足一个条件或不满足任何一个条件的圆都有无数个，由此可知

（1）（2）正确；

（3）半径确定，但圆心不确定，仍有无数个圆，故（3）正确；

（4）圆心和半径都确定的圆有且只有一个（唯一），故（4）错误.

答案： A

方法点拨

（1）圆的两种定义中确定圆的条件是相同的，即圆心和半径，两者缺一不可；（2）“点在圆上”和“圆过点”表示的意义都是这个点在圆周上；（3）圆将平面划分为三部分：圆上、圆内和圆外.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

考查角度2 利用圆的定义判定点共圆

例2 如图 24.2-1，BD，CE 是 $\triangle ABC$ 的高. 求证：E，B，C，D 四点在同一个圆上.

导引： 要证 E，B，C，D 四点在同一个圆上，即需找出一个点，使这个点到 E，B，C，D 的距离相等，联想 BC 的中点 F 到 B，C 的距离相等，因此连接 DF，EF，需证 $DF=EF=\frac{1}{2}BC$，利用直角三角形的性质易证.

证明： 如图24.2-1 所示，取 BC 的中点 F，连接 DF，EF.

$\because BD$，CE 是 $\triangle ABC$ 的高，

$\therefore \triangle BCD$ 和 $\triangle BCE$ 都是直角三角形.

$\therefore DF$，EF 分别为 $\mathrm{Rt}\triangle BCD$ 和 $\mathrm{Rt}\triangle BCE$ 斜边上的中线.

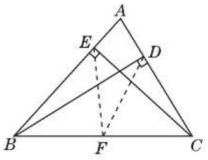


图 24.2-1

$\therefore DF=EF=\frac{1}{2}BC=BF=CF$. $\therefore E$，B，C，D 四点在以点 F 为圆心，$\frac{1}{2}BC$ 的长为半径的圆上.

方法点拨

本题运用数形结合思想，将“数量关系”转化为“位置关系”，将证明几个点在同一个圆上转化为证明这几个点到某点（圆心）的距离相等；“到定点的距离相等的点在同一个圆上”是证明多点共圆问题的一种常用方法.

考查角度3 利用圆的半径特征进行相关证明

例3 如图 24.2-2，两个圆的圆心都为点 O，大圆的半径 OC，OD 分别交小圆于 A，B 两点.

求证：$AB\parallel CD$.

导引： 要证 $AB\parallel CD$，需证 $\angle OAB=\angle OCD$，而 $\angle OAB$ 在 $\triangle OAB$ 中，$\angle OCD$ 在 $\triangle OCD$ 中，它们有一个公共角 $\angle O$，因此利用等腰三角形的性质即可得到解决.

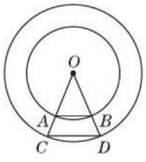


图 24.2-2

证明： $\because OA=OB$，

$\therefore \angle OAB=\angle OBA=\frac{180^\circ-\angle O}{2}$.

$\because OC=OD$，$\therefore \angle OCD=\angle ODC=\frac{180^\circ-\angle O}{2}$.

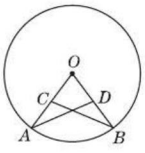
$\therefore \angle OAB=\angle OCD$. $\therefore AB\parallel CD$.

方法点拨

在圆的有关证明题中，半径相等这一特性经常用到，利用半径相等得到等腰三角形，再利用等腰三角形的性质得出相等的线段、相等的角，进而为证明其他结论提供有利的条件，这种推理方法在以后证明中常常用到.

同类变式 （答案见 180 页）

3. 如图，OA，OB 为 $\odot O$ 的半径，C，D 分别为 OA，OB 的中点. 求证：$AD=BC$.



（第 3 题图）

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

点知识 2 点与圆的位置关系（重点）

一般地，平面内的点与圆的位置关系有三种：

（1）点在圆上：该点到圆心的距离等于半径；

（2）点在圆外：该点到圆心的距离大于半径；

（3）点在圆内：该点到圆心的距离小于半径.



即：若⊙O的半径为r，点到圆心的距离为d，则存在如下关系：

（1）点在圆内$\Leftrightarrow d<r$；

（2）点在圆上$\Leftrightarrow d=r$；

（3）点在圆外$\Leftrightarrow d>r$.

说明：符号“$\Leftrightarrow$”读作“等价于”，它表示从符号的左端可以推出右端，从右端也可以推出左端，即左右两端互为因果关系.

拓展///

（1）圆的外部可以看成到圆心的距离大于半径的点的集合；

（2）圆的内部可以看成到圆心的距离小于半径的点的集合.

拔考向 ▶▶▶

提分·秘诀

考查角度1 利用点到圆心的距离与半径的大小关系判断点与圆的位置关系

例4 已知⊙O的半径$r=5$ cm，圆心O到直线l的距离$d=OD=3$ cm，在直线l上有P,Q,R三点，且有$PD=4$ cm，$QD=5$ cm，$RD=3$ cm，那么P,Q,R三点与⊙O的位置关系各是怎样的？

导引： 要判断点和圆的位置关系，实质上是要比较点到圆心的距离与半径的大小，而半径为已知量，即需求出相关点到圆心的距离.

解： 如图24.2-3，连接OR,OP,OQ.

$\because PD=4$ cm，$OD=3$ cm，且$OD\perp l$，

$\therefore OP=\sqrt{PD^2+OD^2}=5$ cm$=r$.

$\therefore$ 点P在⊙O上.

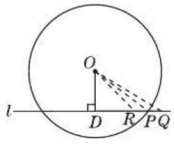


图24.2-3

$\because QD=5$ cm，$OD=3$ cm，且$OD\perp l$，

$\therefore OQ=\sqrt{QD^2+OD^2}=\sqrt{34}$ cm>5 cm$=r$. $\therefore$ 点Q在⊙O外.

$\because RD=3$ cm，$OD=3$ cm，且$OD\perp l$，

$\therefore OR=\sqrt{RD^2+OD^2}=3\sqrt{2}$ cm<5 cm$=r$. $\therefore$ 点R在⊙O内.

技巧点拨

本题运用了构造法，在圆中构造直角三角形，并利用勾股定理求距离是常用的方法.

考查角度2 利用点与圆的位置关系确定字母或半径的取值范围

例5 若点$B(a,0)$在以点$A(1,0)$为圆心，2为半径的圆内，则a的取值范围为（　　）

A. $-1<a<3$

B. $a<3$

C. $a>-1$

D. $a>3$或$a<-1$

导引： 如图24.2-4所示. $\because$ 点B在⊙A内部，$\therefore |a-1|<2$. $\therefore -1<a<3$.

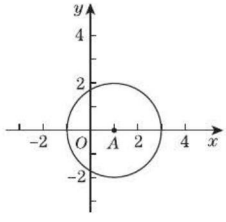


图24.2-4

答案： A

方法点拨

解答本题运用了转化思想，关键是将条件转化成点到圆心的距离与圆的半径之间的大小关系，通过列出不等式来解答.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

同类变式 （答案见180页）

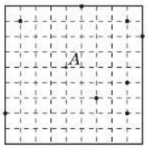
5. ［中考·连云港］如图，在网格中（每个小正方形的边长均为1个单位）选取9个格点（格线的交点称为格点）. 如果以A为圆心，r为半径画圆，选取的格点中除点A外恰好有3个在圆内，那么r的取值范围为（　　）

A. $2\sqrt{2}<r<\sqrt{17}$

B. $\sqrt{17}<r<3\sqrt{2}$

C. $\sqrt{17}<r<5$

D. $5<r<\sqrt{29}$



（第5题图）

知识3 圆的相关概念（重点）

圆的相关概念：

（1）弦：连接圆上任意两点的线段（如图24.2-5中的弦BC）.

（2）直径：经过圆心的弦（如图24.2-5中的直径AC）.

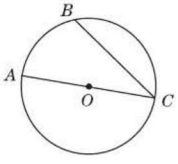


图24.2-5

（3）弧：圆上任意两点间的部分（如图24.2-5，以A，B为端点的弧记作$\overset{\frown}{AB}$，读作“弧AB”）.

①半圆：圆的任意一条直径的两个端点分圆成两条弧中的每一条弧.

②劣弧：小于半圆的弧，如图24.2-5中的$\overset{\frown}{BC}$.

③优弧：大于半圆的弧，一般用三个字母表示，如图24.2-5中的$\overset{\frown}{BAC}$.

（4）弓形：由弦及其所对的弧组成的图形（如图24.2-5中的弦BC分别与$\overset{\frown}{BC}$与$\overset{\frown}{BAC}$组成两个不同的弓形）.

（5）等圆：能够重合的两个圆.

（6）等弧：在同圆或等圆中，能够互相重合的弧.

易错警示：

（1）直径是圆中最长的弦，弦不一定是直径.

（2）半圆是弧，弧不一定是半圆.

（3）同圆中所有的半径都相等，等圆的半径也相等.

（4）只有在同圆或等圆中才可能有等弧，等弧长度一定相等，但长度相等的弧不一定是等弧.

（5）每条弧对一条弦，而每条弦对的弧有两条：一条优弧、一条劣弧或者对应两个半圆.

考向

提分·秘诀

考查角度1 利用圆的相关概念判断命题的真假

例6 ［易错题］以下命题：(1)半圆是弧，但弧不一定是半圆；(2)过圆上任意一点只能作一条弦，且这条弦是直径；(3)弦是直径；(4)直径是圆中最长的弦；(5)直径不是弦；(6)优弧大于劣弧；(7)以O为圆心可以画无数个圆. 其中正确的个数为（　　）

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

导引：(1)半圆是弧的一种，弧可以分为劣弧、半圆、优弧三种，故正确；(2)过圆上任意一点可以作无数条弦，故错误；(3)直径是过圆心的特殊弦，但弦不一定是直径，故错误；(4)圆有无数条弦，过圆心的弦最长，即直径是圆中最长的弦，故正确；(5)直径是圆中最长的弦，故错误；(6)在同圆或等圆中，优弧大于劣弧，故错误；(7)以一个点

易错警示

在圆的有关概念中有两个误区：一是“半圆”和“弧”这两个概念之间的误区，半圆是弧的一种；二是“弦”和“直径”之间的误区，直径是最长的弦.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

为圆心，若不指明半径，可画出无数个大小不等的同心圆，故正确.

答案： C

考查角度2 弧和弦之间的条数关系

例7 如图 24.2-6，已知⊙O 上有 A,B,C 三个点，以其中两个点为端点的弧共有_____条，弦共有_____条.

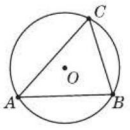


图 24.2-6

导引： 由弧的概念知，以 A,B,C 中任意两个点为端点的弧有 $\overset{\frown}{AB}$，$\overset{\frown}{BC}$，$\overset{\frown}{CA}$，$\overset{\frown}{ACB}$，$\overset{\frown}{BAC}$，$\overset{\frown}{ABC}$，共 6 条；由弦的概念知，以 A,B,C 中任意两个点为端点的弦有 AB,BC,AC，共 3 条.

答案： 6；3

方法点拨

圆上任意两点分圆为两条弧：一条优弧、一条劣弧或两个半圆；在同圆中每段弧对应一条弦，而每条弦对应两条弧：一条优弧、一条劣弧或两个半圆.

点方法·拨技巧 提高分

拔尖角度 1 利用圆的半径的性质进行计算

例8 如图 24.2-7，AB 为⊙O 的直径，CD 为⊙O 的弦，AB,CD 的延长线交于点 E. 已知 $AB=2DE$，$\angle E=18°$，求 $\angle AOC$ 的度数.

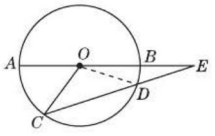


图 24.2-7

导引： 要求 $\angle AOC$ 的度数，由图知 $\angle AOC=\angle C+\angle E$，故只需求出 $\angle C$ 的度数即可. 由 $AB=2DE$ 知，DE 与⊙O 的半径相等，从而联想到连接 OD 构造等腰三角形 ODE 和等腰三角形 OCD.

解： 如图24.2-7，连接 OD.

∵ AB 为⊙O 的直径，OD 为⊙O 的半径，$AB=2DE$，

∴ $OD=DE$.

∴ $\angle DOE=\angle E=18°$.

∴ $\angle ODC=\angle DOE+\angle E=36°$.

∵ $OC=OD$，∴ $\angle C=\angle ODC=36°$.

∴ $\angle AOC=\angle C+\angle E=36°+18°=54°$.

方法点拨： 在同圆或等圆中，连接半径构造等腰三角形是在圆中求角度的常用方法在同圆或等圆中，所有的半径都相等.

拔尖角度 2 利用圆的半径的性质巧比较大小

例9 如图 24.2-8，点 A,D,M 在半圆 O 上，四边形 $ABOC$，四边形 $DEOF$，四边形 $HMNO$ 均为矩形. 设 $BC=a$，$EF=b$，$NH=c$，则下列各式中，正确的是(　　)

A. $a>b>c$

B. $a=b=c$

C. $c>a>b$

D. $b>c>a$

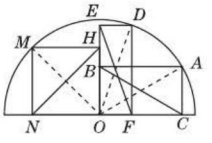


图 24.2-8

导引： 根据矩形的两条对角线相等，将 BC，EF，NH 都转化为圆的半径，然后根据圆的半径都相等，即可得出 a,b,c 之间的关系.

如图 24.2-8，连接 OA,OD,OM.

∵ 四边形 $ABOC$，四边形 $DEOF$，四边形 $HMNO$ 均为矩形，

∴ $a=BC=OA$，$b=EF=OD$，$c=NH=OM$.

∵ 点 A,D,M 都在半圆 O 上，

∴ $OA=OD=OM$. ∴ $a=b=c$. 故选 B.

答案： B

技巧点拨： 本题巧妙地运用矩形的两条对角线相等，将没有任何关联的三条线段转化为圆的三条半径，再根据“同圆中所有的半径都相等”比较线段的大小关系.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

基础巩固练

1. 以线段 AB 的长为半径作圆，可以作（　　）

A. 1个　　B. 2个

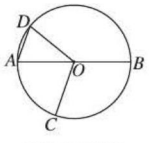
C. 3个　　D. 无数个

2. 以下命题：①直径是弦；②弦是直径；③半圆是弧，但弧不一定是半圆；④半径相等的两个半圆是等弧；⑤长度相等的两条弧是等弧；⑥直径相等的两个圆是等圆；⑦半径确定了，圆就确定了. 其中错误的有（　　）

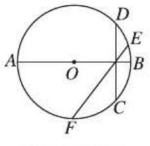
A. 1个　　B. 2个　　C. 3个　　D. 4个

3. 如图，AB 是 $\odot O$ 的直径，点 C，D 在 $\odot O$ 上，$\angle BOC = 110°$，$AD \parallel OC$，则 $\angle AOD$ 等于（　　）

A. 70°　　B. 60°　　C. 50°　　D. 40°



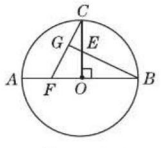
（第3题图）



（第4题图）

4. 如图，以 A 为一个端点的优弧有_____条，分别是_____；劣弧有_____条，分别是_____；半圆有_____个.

5. 如图，在 $\odot O$ 中，半径 OC 垂直于直径 AB，$OE = OF$，连接 BE 并延长，交 CF 于 G. 求证：$BG \perp CF$.



（第5题图）

能力提升练

6. ［分类讨论思想］若点 P 到 $\odot O$ 上的点的最小距离为4，最大距离为8，则该圆的直径是（　　）

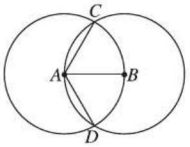
A. 2　　B. 6　　C. 2或6　　D. 4或12

7. ［期末·安庆］在平面直角坐标系中，$\odot O$ 的圆心在点 $(1,0)$，半径为2，则下面各点在 $\odot O$ 上的是（　　）

A. $(2,0)$　　B. $(0,2)$

C. $(0,\sqrt{3})$　　D. $(\sqrt{3},0)$

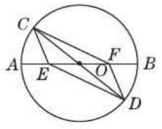
8. ［中考·益阳］如图，分别以 A，B 为圆心，线段 AB 的长为半径的两个圆相交于 C，D 两点，则 $\angle CAD$ 的度数为_____.



（第8题图）

9. 如图，AB，CD 为 $\odot O$ 的两条直径，E，F 分别为 OA，OB 的中点.

求证：四边形 $CEDF$ 为平行四边形.



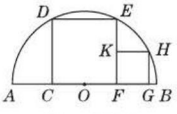
（第9题图）

思维拓展练

10. 如图，AB 是半圆 O 的直径，四边形 $CDEF$ 是正方形.　　【导学号：9142562】

（1）求证：$OC = OF$.

（2）在正方形 $CDEF$ 的右侧有一正方形 $FGHK$，点 G 在 AB 上，H 在半圆上，K 在 EF 上. 若正方形 $CDEF$ 的边长为2，求正方形 $FGHK$ 的面积.



（第10题图）

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

24.2.2 垂径分弦

核心知识

- 圆的对称性
- 垂径定理
- 垂径定理的推论

知识链接

圆的对称性 → 轴对称 → 垂径定理 → 垂径定理的推论

点知识·拨考向 速提分

点知识 1 圆的对称性（重点）

1 圆是轴对称图形，任何一条直径所在的直线都是圆的对称轴.

要点精析///

(1) 圆的对称轴有无数条；

(2) 因为直径是弦，弦是线段，而对称轴是直线，所以不能说“圆的对称轴是直径”，而应该说“圆的对称轴是直径所在的直线”，或说成“圆的对称轴是经过圆心的直线”.

2 圆是中心对称图形，圆心就是它的对称中心. 不仅如此，把圆绕圆心旋转任意一个角度，所得的图形都与原图形重合，即圆还具备旋转不变性.

拨考向 ▸▸▸ 提分·秘诀

考查角度1 利用轴对称图形的特征判断对称轴的条数

例1 下列图形中，对称轴条数最多的是(　　)

A. 线段　　B. 正方形

C. 正三角形　　D. 圆

导引： 线段有两条对称轴，正方形有四条对称轴，正三角形有三条对称轴，圆有无数条对称轴.

答案： D

方法点拨

圆有无数条对称轴，过圆心的任何一条直线都是圆的对称轴

考查角度2 利用圆的旋转不变性找相等的量

例2 如图 24.2-9，在⊙O 中，将△AOB 绕圆心 O 顺时针旋转 150°，得到△COD，指出图中相等的弧、角、线段.

导引： 利用圆的旋转不变性找相等的量.

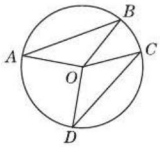


图 24.2-9

解： 相等的弧有$\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{CD}$，$\overset{\frown}{AC}=\overset{\frown}{BD}$，

$\overset{\frown}{BDA}=\overset{\frown}{DAC}$，$\overset{\frown}{CDA}=\overset{\frown}{DAB}$；

相等的角有$\angle AOB=\angle COD$，

$\angle AOC=\angle BOD$，

$\angle A=\angle B=\angle C=\angle D$；

相等的线段有 $AB=CD$，

$OA=OB=OC=OD$.

方法点拨

圆既是轴对称图形，又是中心对称图形，而且绕圆心旋转任何一个角度都能与原图形重合，即圆具有旋转不变性

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

点知识 2 垂径定理

定理：

垂直于弦的直径平分这条弦，并且平分这条弦所对的两条弧. 如图 24. 2-10，$CD \perp AB$ 于点 E，CD 是⊙O 的直径，那么可用几何语言表述为：

$$CD \text{ 是直径},\ CD \perp AB \Rightarrow \begin{cases} AE = BE \\ \overset{\frown}{AD} = \overset{\frown}{BD} \\ \overset{\frown}{AC} = \overset{\frown}{BC} \end{cases}$$

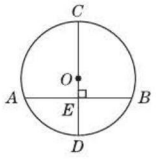


图 24. 2-10

要点精析///

(1)“垂直于弦的直径”中的“直径”，还可以是垂直于弦的半径或过圆心垂直于弦的直线. 其实质是：过圆心且垂直于弦的线段、直线均可.

(2)垂径定理中的弦可以为直径.

(3)垂径定理是证线段、弧相等的重要依据.



拔考向 ▶▶▶ 提分·秘诀

考查角度1 利用垂径定理判断相等的量

例 3 如图 24. 2-11，AB 是⊙O 的直径，CD 为弦，$CD \perp AB$ 于点 E，则下列结论中，不一定成立的是(　　)

A. $CE = DE$　　B. $\overset{\frown}{AC} = \overset{\frown}{AD}$

C. $OE = BE$　　D. $\overset{\frown}{CB} = \overset{\frown}{DB}$

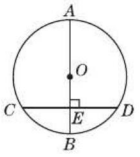


图 24. 2-11

导引： 由垂径定理知 A，B，D 中的结论一定成立. 故选 C.

答案： C

方法点拨

认识垂径定理，要善于将垂径定理的内容转化为几何语言.

考查角度2 利用垂径定理进行计算

例 4 ［模拟·安徽］如图 24. 2-12，将半径为 4 cm 的圆折叠后，圆弧恰好经过圆心，则折痕的长为(　　)

A. $2\sqrt{3}$ cm　B. $4\sqrt{3}$ cm　C. $\sqrt{3}$ cm　D. $\sqrt{2}$ cm

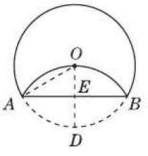


图 24. 2-12

导引： 连接 AO，过 O 作 $OD \perp AB$，交 $\overset{\frown}{AB}$ 于点 D，交弦 AB 于点 E，根据折叠的性质可知 $OE = DE$，再根据垂径定理可知 $AE = BE$，在 Rt△AOE 中利用勾股定理即可求出 AE 的长，进而可求出 AB 的长.

如图 24. 2-12，连接 AO，过 O 作 $OD \perp AB$，交 $\overset{\frown}{AB}$ 于点 D，交弦 AB 于点 E，

$\because \overset{\frown}{AB}$ 折叠后恰好经过圆心，$\therefore OE = DE$.

$\because$ ⊙O 的半径为 4 cm，$\therefore OE = \frac{1}{2}OD = \frac{1}{2} \times 4 = 2$(cm).

$\because OD \perp AB$，$\therefore AE = \frac{1}{2}AB$.

在 Rt△AOE 中，$AE = \sqrt{OA^2 - OE^2} = \sqrt{4^2 - 2^2} = 2\sqrt{3}$(cm).

$\therefore AB = 2AE = 4\sqrt{3}$ cm. 故选 B.

答案： B

方法点拨

利用垂径定理求线段长，一般是求弦长或半径或弦心距，常用的方法就是在半径、弦长的一半及弦心距三者构成的直角三角形中利用勾股定理求其中的未知的线段长.

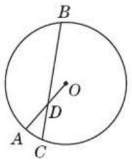
关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

同类变式（答案见181页）

4. [模拟·合肥] 如图，⊙O 的半径 $OA=4$，弦 BC 经过 OA 的中点 D，$\angle ADC=30°$，则弦 BC 的长为（　　）

A. 7　　B. $2\sqrt{15}$

C. $4\sqrt{3}$　　D. $2\sqrt{17}$



（第4题图）

考查角度3 利用垂径定理进行证明

例5　如图24.2-13，在⊙O 中，AB 为⊙O 的弦，C，D 是直线 AB 上两点，且 $AC=BD$. 求证：$\triangle OCD$ 为等腰三角形.

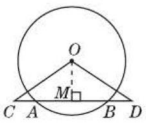


图24.2-13

导引： 要证 $\triangle OCD$ 为等腰三角形，只需证 $OC=OD$，就现有图形来看，有两个切入点：(1)利用线段垂直平分线上的点到线段两端点的距离相等，则需作垂直于弦的直径；(2)利用全等三角形的对应边相等，则需作垂直于弦的直径.

证明： 过点 O 作 $OM\perp AB$，垂足为 M，如图24.2-13所示.

$\because OM\perp AB$，$\therefore AM=BM$. $\because AC=BD$，$\therefore CM=DM$.

又 $\because OM\perp CD$，$\therefore OC=OD$. $\therefore \triangle OCD$ 为等腰三角形.

方法点拨

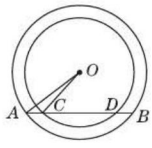
垂径定理在圆中涉及弦、弦心距、直径三个量，证明线段相等、垂直、角相等都经常用到.在使用时，若已知圆心，则作垂直于弦的半径（或直径），是常用的作辅助线的方法.

同类变式（答案见181页）

5. 已知在以点 O 为圆心的两个同心圆中，大圆的弦 AB 交小圆于点 C，D（如图）.

(1)求证：$AC=BD$；

(2)若大圆的半径 $OA=10$，小圆的半径 $OC=8$，且圆心 O 到直线 AB 的距离为6，求 AC 的长.



（第5题图）

考查角度4 利用垂径定理解决实际问题

例6　如图24.2-14，是一个古代车轮的碎片，小明为求其外圆半径，连接外圆上的两点 A，B，半径 $OC\perp AB$ 于点 D，交外圆于点 C. 测得 $CD=10$ cm，$AB=60$ cm，求这个车轮的外圆半径.

导引： 设半径为 r cm，将 OD 用 r 表示出来，利用勾股定理列出关于 r 的方程求解.

解： 如图24.2-14，连接 OA，设半径为 r cm.

$\because$ 半径 $OC\perp AB$，

$\therefore AD=\dfrac{1}{2}AB=30$ cm.

$\because CD=10$ cm，$\therefore OD=(r-10)$ cm.

在 $\mathrm{Rt}\triangle ADO$ 中，$AO^2=OD^2+AD^2$，

即 $r^2=(r-10)^2+30^2$，解得 $r=50$.

$\therefore$ 这个车轮的外圆半径是50 cm.

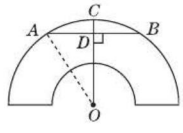


图24.2-14

方法点拨

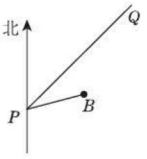
垂径定理是解决圆中的计算、证明常用的知识，一般要把半径、弦心距、弦的一半构建在一个直角三角形中，运用勾股定理求解，即“垂径定理+勾股定理”.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

同类变式（答案见181页）

6. 如图，台风中心位于点 P，并沿东北方向 PQ 移动，已知台风移动的速度为 30 km/h，受影响区域的半径为 200 km，B 市在位于点 P 的北偏东 75°方向上，距离 P 点 320 km 处.

试判断台风是否会影响 B 市. 若不会影响 B 市，请说明理由；若会影响 B 市，求台风影响 B 市的时间.



（第6题图）

点知识 3 垂径定理的推论

1 **推论：** 平分弦（不是直径）的直径垂直于弦，并且平分弦所对的两条弧，如图24.2-15，CD 是⊙O 的直径，AB 是弦（非直径），AB 与 CD 相交于点 E，且 $AE=BE$，那么 CD 垂直于 AB，并且 $\overset{\frown}{AC}=\overset{\frown}{CB}$，$\overset{\frown}{AD}=\overset{\frown}{DB}$. 可用几何语言表述为：

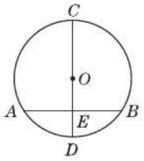


图 24.2-15

$$\left.\begin{array}{l}CD\text{ 是直径}\\ AE=BE\\ AB\text{ 不是直径}\end{array}\right\}\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}CD\perp AB\\ \overset{\frown}{AD}=\overset{\frown}{BD}\\ \overset{\frown}{AC}=\overset{\frown}{BC}\end{array}\right.$$

垂径定理的推论

要点精析///

（1）推论中被平分的弦不能为直径；

（2）弦的垂直平分线经过圆心，并且平分弦所对的两条弧，即：

$$\left.\begin{array}{l}CD\perp AB\\ AE=BE\end{array}\right\}\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}CD\text{ 是直径}\\ \overset{\frown}{AD}=\overset{\frown}{BD}\\ \overset{\frown}{AC}=\overset{\frown}{BC}\end{array}\right.$$

（3）平分弦所对的一条弧的直径垂直平分这条弦，并且平分弦所对的另一条弧，即：

$$\left.\begin{array}{l}CD\text{ 是直径}\\ \overset{\frown}{AD}=\overset{\frown}{BD}\end{array}\right\}\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}CD\perp AB\\ AE=BE\\ \overset{\frown}{AC}=\overset{\frown}{BC}\end{array}\right.$$

2 **圆心到弦的距离叫做弦心距.**

拓展///

关于垂径定理及其推论可归纳为：一条直线，它具备以下五个性质：

（1）直线过圆心；

（2）直线垂直于弦；

（3）直线平分弦（不是直径）；

（4）直线平分弦所对的优弧；

（5）直线平分弦所对的劣弧. 如果把其中的任意两条作为条件，其余三条作为结论，组成的命题都是真命题.

拔考向 ▶▶▶

提分·秘诀

考查角度1 利用垂径定理的推论进行判断

例7 ［期中·芜湖］下列说法中正确的有（　　）

①垂直平分弦的直线经过圆心；

②平分弦的直径一定垂直于弦；

③一条直线平分弦，那么这条直线垂直于这条弦；

④平分弦的直线，必定过圆心；

⑤平分弦的直径，平分这条弦所对的弧.

A. 1个　　B. 2个　　C. 3个　　D. 4个

导引： 根据垂径定理及其推论逐个判断即可. 垂直平分弦的直线经过圆心，故①正确；

平分弦（不是直径）的直径一定垂直于弦，故②错误；

一条经过圆心的直线平分弦，那么这条直线才垂直于这条

方法点拨

本题考查了垂径定理及垂径定理的推论，能熟记垂径定理及其推论的内容是解此题的关键.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

弦，故③错误；

平分弦（不是直径）的直径，才经过圆心，故④错误；

平分弦（不是直径）的直径，平分这条弦所对的弧，故⑤错误.

所以正确的命题有 1 个，故选 A.

答案： A

考查角度2 利用垂径定理的推论进行计算与证明

例 8 如图 24. 2-16，AB，CD 是 $\odot O$ 的弦，M，N 分别为 AB，CD 的中点，且 $\angle AMN = \angle CNM$. 求证：$AB = CD$.

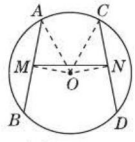


图 24. 2-16

证明： 如图24. 2-16，连接 OM，ON，OA，OC.

$\because O$ 为圆心，且 M，N 分别为 AB，CD 的中点，

$\therefore AB = 2AM$，$CD = 2CN$，

$OM \perp AB$，$ON \perp CD$.

$\therefore \angle OMA = \angle ONC = 90°$.

$\because \angle AMN = \angle CNM$，

$\therefore \angle OMN = \angle ONM$.

$\therefore OM = ON$.

又 $\because OA = OC$，

$\therefore \mathrm{Rt}\triangle OAM \cong \mathrm{Rt}\triangle OCN(HL)$.

$\therefore AM = CN$. $\therefore AB = CD$.

方法点拨

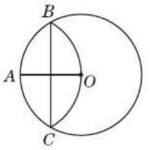
证明两条弦相等，可以先证明弦的一半相等.根据垂径定理的推论，连接圆心和弦的中点是常见的作辅助线的方法.

同类变式 （答案见 181 页）

8. ［中考 · 临安区］如图，$\odot O$ 的半径 $OA = 6$，以 A 为圆心，OA 为半径的弧交 $\odot O$ 于 B，C 两点，则 BC 等于（　　）

A. $6\sqrt{3}$　　B. $6\sqrt{2}$

C. $3\sqrt{3}$　　D. $3\sqrt{2}$



（第 8 题图）



考查角度3 利用垂径定理的推论确定残缺圆的圆心

例 9 如图 24. 2-17，某地出土了一个明代残破圆形瓷盘，为复制该瓷盘，需确定其圆心和半径. 请在图中用直尺和圆规画出瓷盘的圆心（不要求写作法和证明，但要保留作图痕迹）.

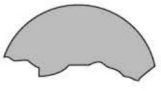


图 24. 2-17



图 24. 2-18

导引： 由垂径定理的推论可知，垂直平分弦的直线必定经过圆心，两条过圆心的直线的交点就是圆心，所以确定残缺圆的圆心时，选两条不平行的弦，作它们的垂直平分线即可.

解： 如图24. 2-18 所示，点 O 即为所求.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

点方法·拨技巧 提高分

拔尖角度 1 利用圆的轴对称性求特殊值

例 10 ［期末·包河区］如图 24.2-19，在半圆 O 中，直径 $AB=4$，C，D 是半圆上两点，且 $\angle BOC=84°$，$\angle BOD=36°$，P 为直径上一点，则 $PC+PD$ 的最小值为（　　）

A. 4　　B. $2\sqrt{3}$　　C. $2\sqrt{2}$　　D. 2

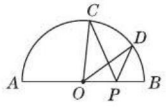


图 24.2-19

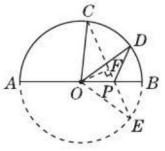


图 24.2-20

导引： 如图 24.2-20，补全 $\odot O$，作点 D 关于 AB 对称的点 E，连接 OE，CE，交 AB 于点 P，过点 O 作 $OF\perp CE$，垂足为 F. $PC+PD$ 的最小值即为 CE 的长.

$\because \angle BOD=36°$，$\therefore \angle BOE=36°$.

又 $\angle BOC=84°$，

$\therefore \angle COE=120°$. $\therefore \angle C=30°$.

$\because AB=4$，$\therefore OC=2$.

$\therefore OF=1$，$\therefore CF=\sqrt{3}$.

$\therefore CE=2\sqrt{3}$.

$\therefore PC+PD$ 的最小值为 $2\sqrt{3}$. 故选 B.

答案： B

方法点拨： 本题考查了圆心角、弦以及最短路径问题，掌握勾股定理、垂径定理以及轴对称是解题的关键.

拔尖角度 2 利用垂径定理巧解图形中点的坐标问题

例 11 如图 24.2-21，半径为 6 的 $\odot E$ 在平面直角坐标系中与 x 轴交于 A，B 两点，与 y 轴交于 C，D 两点，已知 $C(0,3)$，$D(0,-7)$，求圆心 E 的坐标.

导引： 要求圆心 E 的坐标，需作 $EN\perp x$ 轴于点 N，$EM\perp y$ 轴于点 M，连接 ED，利用垂径定理和勾股定理求出 EM，EN 的长.

解： 如图 24.2-21，作 $EN\perp x$ 轴于点 N，$EM\perp y$ 轴于点 M，连接 ED.

$\because C(0,3)$，$D(0,-7)$，

$\therefore CD=3-(-7)=10$.

又 $\because EM\perp y$ 轴，

$\therefore MD=\frac{1}{2}CD=5$.

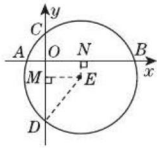


图 24.2-21

$\therefore EM=\sqrt{ED^2-MD^2}=\sqrt{6^2-5^2}=\sqrt{11}$.

易知四边形 $ENOM$ 为矩形，且 $EN=OM=OD-MD=7-5=2$，

$\therefore$ 圆心 E 的坐标为 $(\sqrt{11},-2)$.

技巧点拨： 求点的坐标关键就是过点作两坐标轴的垂线，当两坐标轴与圆相交时，两坐标轴的一部分变成了圆的两条弦，恰好借助垂径定理求出弦心距，从而达到求出点的坐标的目的.

拔尖角度 3 利用垂径定理进行计算、判断

例 12 某地方有一座圆弧形的拱桥，桥下的水面宽度为 7.2 米，拱顶高出水面 2.4 米. 现有一艘宽 3 米，船舱顶部为长方形并高出水面 2 米的货船要经过这里，此货船能顺利通过这座拱桥吗？

导引： 判断货船能否通过这座拱桥，关键是看船舱顶部两边是否会被拱桥顶部挡住. 用 $\overset{\frown}{AB}$ 表示拱桥，画出如图 24.2-22 所示的几何图形，实际问题就转化为求 FN 的长度.

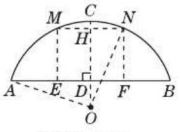


图 24.2-22

解： 如图 24.2-22 所示，设 M，N 为圆弧上两点，四边形 $MEFN$ 为矩形，且 $EF=MN=3$ 米，设圆心为 O，连接 OA，ON，作 $OD\perp AB$ 于点 D，交圆 O 于点 C，交 MN 于点 H. 由垂径定理可知 D 为 AB 的中点，则 $AD=\frac{1}{2}AB=3.6$ 米. 设 $OA=r$ 米，

则 $OD=OC-DC=(r-2.4)$ 米.

在 $\mathrm{Rt}\triangle AOD$ 中，$OA^2=AD^2+OD^2$，

即 $r^2=3.6^2+(r-2.4)^2$，

解得 $r=3.9$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

在 Rt $\triangle OHN$ 中，$OH=\sqrt{ON^2-NH^2}=\sqrt{3.9^2-\left(\frac{3}{2}\right)^2}=3.6$(米)，

$\therefore FN=DH=OH-OD=3.6-(3.9-2.4)=2.1$(米).

$\because 2.1$ 米 >2 米，

$\therefore$ 此货船能顺利通过这座拱桥.

拔尖角度 4　与垂径定理有关的分类问题

例 13　[中考·安顺] 已知 $\odot O$ 的直径 $CD=10$ cm，AB 是 $\odot O$ 的弦，$AB\perp CD$，垂足为 M，且 $AB=8$ cm，则 AC 的长为(　　)

A. $2\sqrt{5}$ cm

B. $4\sqrt{5}$ cm

C. $2\sqrt{5}$ cm 或 $4\sqrt{5}$ cm

D. $2\sqrt{3}$ cm 或 $4\sqrt{3}$ cm

导引： 先根据题意画出图形，由于点 C 的位置不能确定，故应分两种情况进行讨论. 当 C 点位置如图 24.2-23①所示时，连接 AC，AO. $\because \odot O$ 的直径 $CD=10$ cm，$AB\perp CD$，$AB=8$ cm，$\therefore AM=\frac{1}{2}AB=\frac{1}{2}\times 8=4$(cm)，$OA=OC=5$ cm.

$\therefore OM=\sqrt{OA^2-AM^2}=\sqrt{5^2-4^2}=3$(cm)，

$\therefore CM=OC+OM=5+3=8$(cm).

$\therefore AC=\sqrt{AM^2+CM^2}=\sqrt{4^2+8^2}=4\sqrt{5}$(cm)；

当 C 点位置如图 24.2-23②所示时，连接 AC，AO. 同理可得 $OM=3$ cm.

$\because OC=5$ cm，$\therefore MC=5-3=2$(cm).

在 Rt $\triangle AMC$ 中，$AC=\sqrt{AM^2+MC^2}=\sqrt{4^2+2^2}=2\sqrt{5}$(cm).

故选 C.

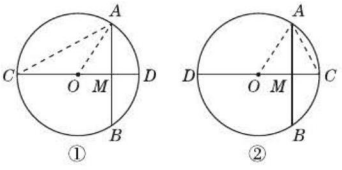


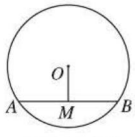
图 24.2-23

答案： C

练中考·练模拟 得满分 (答案见 181 页)

基础巩固练

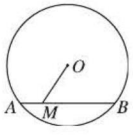
1. [中考·南通] 如图，$\odot O$ 的弦 $AB=8$，M 是 AB 的中点，且 $OM=3$，则 $\odot O$ 的半径等于(　　)



(第 1 题图)

A. 8　　B. 4　　C. 10　　D. 5

2. 如图，$\odot O$ 的半径为 5，弦 $AB=8$，M 是弦 AB 上的动点，则 OM 的长不可能为(　　)

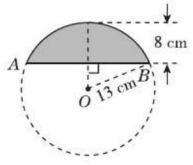


(第 2 题图)

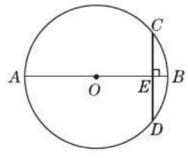
A. 2　　B. 3　　C. 4　　D. 5

3. [中考·金华] 如图，在半径为 13 cm 的圆形铁片上切下一块高为 8 cm 的弓形铁片，则弓形弦 AB 的长为(　　)

A. 10 cm　　B. 16 cm　　C. 24 cm　　D. 26 cm



(第 3 题图)



(第 5 题图)

4. [模拟·邵阳县] 在 $\odot O$ 中，P 为其内一点，过点 P 的最长弦的长为 8 cm，最短弦的长为 4 cm，则 OP 的长为(　　)

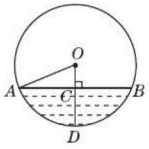
A. $2\sqrt{3}$ cm　　B. $2\sqrt{2}$ cm

C. 2 cm　　D. 1 cm

5. 如图，AB 为 $\odot O$ 的直径，弦 $CD\perp AB$ 于点 E，已知 $CD=6$，$EB=1$，则 $\odot O$ 的半径为_____.

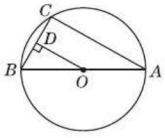
关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

6. [中考·来宾] 如图，是一圆柱形水管的截面图. 已知⊙O 的半径 $OA=13$，水面宽 $AB=24$，则水的深度 $CD=$ _____.



（第6题图）

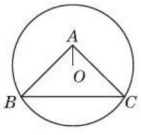
7. 如图，AB 是⊙O 的直径，点 C 是⊙O 上的一点，$OD\perp BC$ 于点 D. 若 $OD=3$ cm，则 $AC=$ _____.



（第7题图）

能力提升练

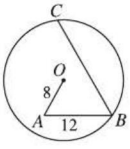
8. [模拟·相山区] 如图，⊙O 过点 B,C，圆心 O 在等腰直角三角形 ABC 的内部，$\angle BAC=90°$，$OA=2$，$BC=8$. 则⊙O 的半径为（　　）



（第8题图）

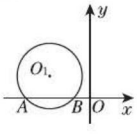
A. $\sqrt{5}$　　B. 5　　C. $2\sqrt{5}$　　D. 6

9. [中考·芜湖] 如图，在⊙O 内有折线 $OABC$，其中 $OA=8$，$AB=12$，$\angle A=\angle B=60°$，则 BC 的长为_____.



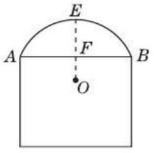
（第9题图）

10. 如图，半径为 $\frac{5}{2}$ 的⊙O_1 与坐标轴交于 $A(-5,0)$，$B(-1,0)$ 两点，则圆心 O_1 的坐标为_____.



（第10题图）

11. [中考·邵阳] 如图，是某窗户的示意图. 该窗户由矩形和弓形组成，已知弓形的跨度 $AB=3$ m，弓形的高 $EF=1$ m. 现计划安装玻璃，请帮工程师求出 $\overset{\frown}{AB}$ 所在圆 O 的半径 r.



（第11题图）

思维拓展练

12. 已知⊙O 的半径为 13 cm，弦 $AB\parallel CD$，$AB=10$ cm，$CD=24$ cm，求 AB 与 CD 之间的距离.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

24.2.3 圆心角、弧、弦、弦心距间关系

核心知识

- 圆心角的定义
- 圆心角、弧、弦、弦心距之间的关系定理
- 圆心角、弧、弦、弦心距之间的关系定理的推论

知识链接

四量关系：等圆心角 ⇔ 等弦 ⇔ 等弧 ⇔ 等弦心距

点知识·拨考向 速提分

点知识 1 圆心角的定义（重点）

定义： 顶点在圆心的角叫做圆心角. 一个角是圆心角，必须具备顶点在圆心这一特征.

要点精析///

(1) 圆心角的条件：顶点在圆心.

(2) 弧的度数：

①1°的圆心角所对的弧叫做1°的弧. 这样，$n°$的圆心角所对的弧就是$n°$的弧.

②圆心角的度数与它所对的弧的度数是一致(或相等)的，即圆心角的度数等于它所对弧的度数，注意这里仅指度数相等.

拨考向 ▶▶▶

提分·秘诀

考查角度1 利用圆心角与弧之间的关系解决问题

例1 [中考·菏泽] 如图24.2-24，在$Rt\triangle ABC$中，$\angle A=25°$，以点C为圆心，BC为半径的圆交AB于点D，则$\overset{\frown}{BD}$的度数为_____.

导引： 如图24.2-24，连接CD，先根据三角形的内角和计算出$\angle B=65°$，再由$CB=CD$得到$\angle BDC=\angle B=65°$，然后利用三角形的内角和计算出$\angle BCD=50°$，最后根据圆心角的度数等于它所对的弧的度数求解.

在$Rt\triangle ABC$中，$\angle ACB=90°$，$\angle A=25°$，$\therefore \angle B=65°$. $\because CB=CD$，$\therefore \angle BDC=\angle B=65°$. $\therefore \angle BCD=50°$. $\therefore \overset{\frown}{BD}$的度数为50°.

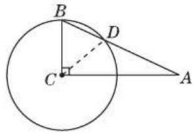


图24.2-24

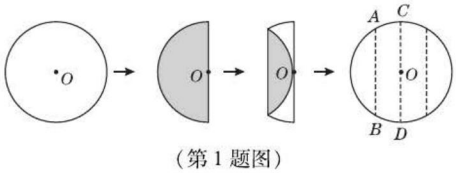
答案： 50°

方法点拨

根据弧的度数与该弧所对的圆心角的度数相等，求弧的度数时，转化为求该弧所对的圆心角的度数，体现了数学中的转化思想.

同类变式 (答案见182页)

1. [中考·舟山] 把一张圆形纸片按如图所示的方式折叠两次后展开，图中的虚线表示折痕，则$\overset{\frown}{BC}$的度数是(　　)



(第1题图)

A. 120°　　B. 135°　　C. 150°　　D. 165°

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

考查角度2 利用特殊的圆心角探究半径、弦、弦心距之间的关系

例2 如图 24.2-25，已知 A，B 是 $\odot O$ 上的两点，$\angle AOB=120°$，则 $OA:AB$ 的值为(　　)

A. $\frac{1}{2}$　　B. $\frac{\sqrt{3}}{2}$　　C. $\frac{\sqrt{3}}{3}$　　D. $\frac{2}{3}$

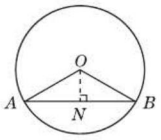


图 24.2-25

导引： 过点 O 作 AB 的垂线，利用 $\angle AOB$ 的度数求出 $\angle A$ 的度数，利用勾股定理和垂径定理探究.

如图 24.2-25，过点 O 作 $ON\perp AB$，垂足为 N.

$\because \angle AOB=120°$，$OA=OB$，$\therefore \angle A=30°$.

设 $ON=a$，则 $OA=2a$. $\because OA^2-ON^2=AN^2$，$\therefore AN=\sqrt{3}a$.

$\therefore AB=2\sqrt{3}a$. $\therefore OA:AB=2a:2\sqrt{3}a=\frac{\sqrt{3}}{3}$. 故选 C.

答案： C

方法点拨

特殊的圆心角所对的弦与半径之间有特殊的关系，60°的圆心角所对的弦等于半径；90°的圆心角所对的弦等于半径的$\sqrt{2}$倍；120°的圆心角所对的弦等于半径的$\sqrt{3}$倍.

同类变式 (答案见 182 页)

2. [期末·瑶海区] 一条弦把圆弧分成 1∶3 两个部分，已知圆的半径为 10 cm，则弦心距为_____ cm.

点知识 2 圆心角、弧、弦、弦心距之间的关系定理及其推论(重点)

1 圆心角、弧、弦、弦心距间的关系定理： 在同圆或等圆中，相等的圆心角所对的弧相等，所对的弦相等，所对弦的弦心距相等.

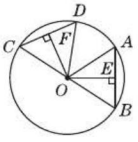


图 24.2-26

如图 24.2-26，由 $\angle AOB=\angle COD$，$OE\perp AB$ 于点 E，$OF\perp CD$ 于点 F，可得 $\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{CD}$，$AB=CD$，$OE=OF$.

2 圆心角、弧、弦、弦心距间的关系定理的推论： 在同圆或等圆中，圆心角相等⇔弧相等⇔弦相等⇔弦心距相等.

要点精析///

(1) 运用此关系可以证明同圆或等圆中弧相等、角相等及线段相等；

(2) 由弦相等推出弧相等时，这里的弧一般要求都是优弧或都是劣弧.

(3) 在应用圆心角、弧、弦、弦心距间的关系解决问题时，一定要注意“在同圆或等圆中”这个前提，否则结论不一定成立. 如图 24.2-27，两个圆的圆心相同，$\overset{\frown}{AB}$ 与 $\overset{\frown}{A'B'}$ 所对的圆心角相同，但 $AB\neq A'B'$，$\overset{\frown}{AB}\neq\overset{\frown}{A'B'}$.

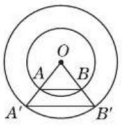


图 24.2-27

拔考向 ▶▶▶ 提分·秘诀

考查角度1 利用圆心角、弧、弦、弦心距之间的关系及其推论进行判断

例3 如图 24.2-28，在 $\odot O$ 中，$\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{CD}$，则下列结论：①$AB=CD$；②$AC=BD$；③$\angle AOC=\angle BOD$；④$\overset{\frown}{AC}=\overset{\frown}{BD}$. 其中正确的个数是(　　)

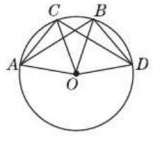


图 24.2-28

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

方法点拨

在同一个圆中，圆心角、弧、弦和弦心距中只要有一组量相等，就能推出另三组量相等.线段有和差，弧也有和差.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

导引： $\because \overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{CD}$，$\therefore AB=CD$，故①正确；

$\because \overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{CD}$，$\therefore \overset{\frown}{AC}=\overset{\frown}{BD}$.

$\therefore AC=BD$，$\angle AOC=\angle BOD$.

故②③④正确. 故选 D.

答案： D

考查角度2 利用圆心角、弧、弦、弦心距之间的关系求角的度数

方法点拨

弧相等，则所对的圆心角相等，圆中角的问题通常可以用弧为桥梁进行转化.

例4 ［中考 · 兰州］如图 24. 2-29，在⊙O 中，点 C 是$\overset{\frown}{AB}$的中点，$\angle A=50°$，则$\angle BOC$ 等于(　　)

A. 40°　　B. 45°　　C. 50°　　D. 60°

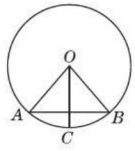


图 24. 2-29

导引： ①因为半径 $OA=OB$，所以可先根据等边对等角求得$\angle B$ 的度数；②根据三角形的内角和定理求得$\angle AOB$ 的度数；③根据等弧所对圆心角相等求得$\angle BOC$ 的度数.

因为 $OA=OB$，所以$\angle B=\angle A=50°$.

所以$\angle AOB=180°-\angle B-\angle A=80°$.

在⊙O 中，因为点 C 是$\overset{\frown}{AB}$的中点，

所以$\overset{\frown}{AC}=\overset{\frown}{CB}$.

所以$\angle AOC=\angle BOC$.

因为$\angle BOC+\angle AOC=\angle AOB$，

所以$\angle BOC=\frac{1}{2}\angle AOB=40°$.

故选 A.

答案： A

考查角度3 利用圆心角、弧、弦、弦心距之间的关系进行证明

方法点拨

圆心角相等，则弧相等，圆中证弧相等通常可借助圆心角进行转化.

例5 如图 24. 2-30，AB，CD 是⊙O 的两条直径，弦 $CE\parallel AB$，求证：$\overset{\frown}{BC}=\overset{\frown}{AE}$.

导引： 要证明$\overset{\frown}{BC}=\overset{\frown}{AE}$，由在同圆中相等的圆心角所对的弧相等可知，只需证明两条弧所对的圆心角相等即可.

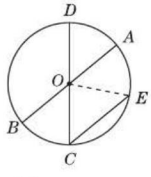


图 24. 2-30

证明： 如图24. 2-30，连接 OE.

$\because OE=OC$，

$\therefore \angle C=\angle E$.

$\because CE\parallel AB$，

$\therefore \angle C=\angle BOC$，$\angle E=\angle AOE$.

$\therefore \angle BOC=\angle AOE$.

$\therefore \overset{\frown}{BC}=\overset{\frown}{AE}$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

点方法·拨技巧 提高分

拔尖角度 1 利用圆心角、弧、弦、弦心距之间的等量关系探究它们之间的倍数关系

例 6 如图 24.2-31，在⊙O 中，$\overset{\frown}{AB}=2\overset{\frown}{CD}$，则关于弦 AB，CD 判断正确的是(　　)

A. $AB>2CD$

B. $AB<2CD$

C. $AB=2CD$

D. 无法比较

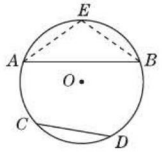


图 24.2-31

导引： 根据 $\overset{\frown}{AB}=2\overset{\frown}{CD}$，不能直接判断 AB 与 CD 之间的关系，可将 $\overset{\frown}{AB}$ 等分成两段，然后利用弧和弦之间的等量关系进行判断.

如图 24.2-31，取 $\overset{\frown}{AB}$ 的中点 E，连接 AE，BE，则 $\overset{\frown}{AE}=\overset{\frown}{BE}$. ∵ $\overset{\frown}{AB}=2\overset{\frown}{CD}$，

∴ $\overset{\frown}{AE}=\overset{\frown}{BE}=\overset{\frown}{CD}$.

∴ $AE=BE=CD$.

∵ $AE+BE>AB$，

∴ $AB<2CD$. 故选 B.

答案： B

技巧点拨： 若遇到弧之间的倍数关系，可从将长弧等分成相等的短弧，然后利用圆心角、弧、弦、弦心距之间的等量关系解决问题.

注意：圆心角、弧、弦、弦心距之间的等量关系可以相互转化，但圆心角与弦、弧与弦之间的倍数关系不能相互转化.

拔尖角度 2 利用圆心角、弧、弦、弦心距之间的关系进行探究性学习

例 7 (1) 如图 24.2-32，在⊙O 中，$\angle AOB=90°$，且 C，D 是 $\overset{\frown}{AB}$ 的三等分点，AB 分别交 OC，OD 于点 E，F，连接 CD. 求证：$AE=BF=CD$.

(2) 在上题中，如果 $\angle AOB=120°$，其他条件不变，原来的结论还成立吗？若成立，请证明；若不成立，请说明理由.

导引： (1) 连接 AC，BD，根据 C，D 是 $\overset{\frown}{AB}$ 的三等分点，可知 $AC=CD=BD$，若要证明 $AE=BF=CD$，只需证明 $AE=AC$，$BF=BD$ 即可；

(2) 思路与(1)相同.

(1) **证明：** 如图24.2-32，连接 AC，BD.

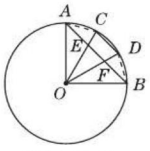


图 24.2-32

∵ C，D 是 $\overset{\frown}{AB}$ 的三等分点，

∴ $AC=CD=BD$.

∵ $\angle AOB=90°$，

∴ $\angle AOC=\angle COD=\angle BOD=30°$.

∵ $OA=OB$，∴ $\angle OAB=\angle OBA=45°$.

∴ $\angle AEC=\angle AOC+\angle OAB=75°$.

∵ $OA=OC$，$\angle AOC=30°$，

∴ $\angle ACE=\frac{1}{2}\times(180°-30°)=75°=\angle AEC$.

∴ $AE=AC$.

同理可得 $BF=BD$.

∴ $AE=BF=CD$.

(2) **解：** 结论仍然成立，理由如下：

连接 AC，BD.

∵ C，D 是 $\overset{\frown}{AB}$ 的三等分点，

∴ $AC=CD=BD$.

∵ $\angle AOB=120°$，

∴ $\angle AOC=\angle COD=\angle BOD=40°$.

∵ $OA=OB$，∴ $\angle OAB=\angle OBA=30°$.

∴ $\angle AEC=\angle AOC+\angle OAB=70°$.

∵ $OA=OC$，$\angle AOC=40°$，

∴ $\angle ACE=\frac{1}{2}\times(180°-40°)=70°=\angle AEC$.

∴ $AE=AC$.

同理可得 $BF=BD$. ∴ $AE=BF=CD$.

方法规律： 在同一个圆中，证明线段相等，可以利用相等的线段转化，将不是弦的线段转化为弦，再转化为证明弧相等或圆心角相等.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

练中考·练模拟 得满分 （答案见182页）

基础巩固练

1. 在半径为2 cm的⊙O内有长为$2\sqrt{3}$ cm的弦AB，则此弦所对的圆心角$\angle AOB$为(　　)

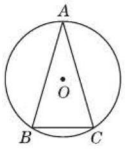
A. 60°　　B. 90°

C. 120°　　D. 150°

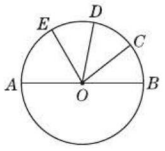
2. [中考·厦门]如图，在⊙O中，$\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{AC}$，$\angle A=30°$，则$\angle B$等于(　　)

A. 150°　　B. 75°

C. 60°　　D. 15°



（第2题图）



（第3题图）

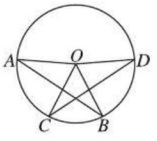
3. 如图，已知AB是⊙O的直径，点C，D是$\overset{\frown}{BE}$的三等分点，$\angle AOE=60°$，则$\angle COE$的度数是(　　)

A. 40°　　B. 60°　　C. 80°　　D. 120°

4. 已知⊙O的半径为3，一弦长为$x^2-x-6=0$的一个根，则该弦所对的圆心角的度数为_____.

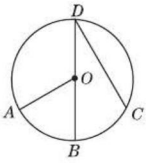
5. 已知：如图，A，B，C，D在⊙O上，$AB=CD$.

求证：$\angle AOC=\angle DOB$.



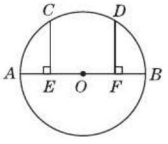
（第5题图）

6. 如图，已知BD是⊙O的直径，点A，C在⊙O上，$\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{BC}$，$\angle AOB=60°$，求$\angle BDC$的度数.



（第6题图）

7. 如图，AB为⊙O的直径，点C，D在⊙O上，$CE\perp AB$，$DF\perp AB$，垂足分别为E，F，且$\overset{\frown}{AC}$与$\overset{\frown}{BD}$相等，问：AE与BF相等吗？为什么？



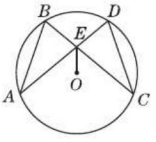
（第7题图）

能力提升练

8. [模拟·合肥]如图，在⊙O中，弦AD，BC相交于点E，连接OE，已知$AD=BC$，$AD\perp CB$.

(1)求证：$AB=CD$；

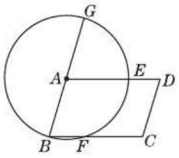
(2)如果⊙O的半径为5，$DE=1$，求AE的长.



（第8题图）

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

9. 如图，以$\square ABCD$的顶点A为圆心，以AB边的长为半径作$\odot A$，分别交AD，BC于点E，F，延长BA，交$\odot A$于点G. 求证：$\overset{\frown}{GF}=2\overset{\frown}{GE}$.

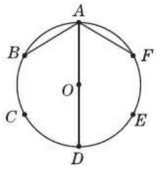


（第9题图）

10. ［探究题，易错题］如图，A，B，C，D，E，F是$\odot O$的六等分点.

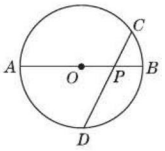
（1）连接AB，AD，AF，求证：$AB+AF=AD$；

（2）若P是圆周上异于已知六等分点的动点，连接PB，PD，PF，写出这三条线段之间的数量关系（不必说明理由）.



（第10题图）

11. ［探究题］如图，在$\odot O$中，AB为直径，弦CD交AB于点P，且$OP=PC$. 试猜想$\overset{\frown}{AD}$与$\overset{\frown}{CB}$的度数之间的关系，并证明你的猜想.



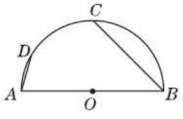
（第11题图）

思维拓展练

12. 如图，AB为半圆的直径，点C，D在半圆上.

（1）若$\overset{\frown}{BC}=3\overset{\frown}{AD}$，$\overset{\frown}{CD}=2\overset{\frown}{AD}$，求$\angle DAB$和$\angle ABC$的大小.

（2）若点C，D在半圆上运动，并保持弧CD的长度不变（点C，D不与点A，B重合）. 试比较$\angle DAB$和$\angle ABC$的大小.



（第12题图）

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

24.2.4 圆的确定

核心知识
- 确定圆的条件
- 外接圆
- 反证法

知识链接

点和圆的位置关系 → 确定圆的条件 → 不在同一条直线上的三点确定一个圆 → 反证法

点知识·拨考向 速提分

点知识 1 圆的确定（重点）

1 过已知点作圆：

（1）经过平面内一点可以作无数个圆；圆心可以是这一点之外任何点.

（2）经过平面内两点可以作无数个圆；圆心在连接这两点的线段的垂直平分线上.

（3）经过平面内不在同一直线上的三点，可以作一个圆，并且只能作一个圆；圆心为连接其中任意两点的线段的垂直平分线的交点.

2 确定一个圆的条件：

（1）已知圆心、半径，可以确定一个圆.

（2）不在同一条直线上的三个点确定一个圆.

3 三角形的外接圆：

（1）经过三角形三个顶点的圆叫做三角形的外接圆，三角形外接圆的圆心叫做这个三角形的外心. 这个三角形叫做圆的内接三角形.

（2）三角形外接圆的作法：

①作三角形任意两边的垂直平分线，确定其交点；

②以该交点为圆心，以交点到三个顶点中任意一点的距离为半径作圆即可.

注意：一个三角形只有一个外接圆，而一个圆有无数个内接三角形.

（3）三角形的外心到三角形三个顶点的距离相等.

（4）三角形外心的位置：锐角三角形的外心在三角形的内部；直角三角形的外心是斜边的中点；钝角三角形的外心在三角形的外部.

拨考向 ▸▸▸ 提分·秘诀

考查角度1 利用确定圆的条件分析圆的情况

例1 如图 24.2-33，点 A，B，C 在同一条直线上，点 D 在直线 AB 外，过这 4 个点中的任意 3 个点，能画圆的个数是（　　）

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

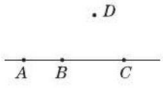


图 24.2-33

导引： 在4个点中取 3 个点确定一个圆，关键是这 3 个点要不在同一直线上，因此，本题的实质是在 A，B，C 中找 2 个点与点 D 确定圆. 根据题意得出：点 D，A，B；点 D，A，C；点 D，B，C 可以分别确定一个圆. 故过这 4 个点中的任意 3 个点，能画圆的个数是 3. 故选 C.

答案： C

方法点拨

确定一个圆要具备两个关键点：（1）已知三个点（已知两个点或一个点都无法确定圆）；（2）三个点不在同一条直线上.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

考查角度2 求三角形外接圆的圆心坐标

例2 如图24.2-34,在平面直角坐标系中,点A,B,C的坐标分别为$(1,4)$,$(5,4)$,$(1,-2)$,则$\triangle ABC$外接圆的圆心坐标是(　　)

A. $(2,3)$　　B. $(3,2)$　　C. $(1,3)$　　D. $(3,1)$

导引: 由$A(1,4)$,$B(5,4)$可知$AB\parallel x$轴,$\triangle ABC$的外接圆圆心在线段AB的垂直平分线上,所以圆心的横坐标应为$\frac{1+5}{2}=3$;同理,圆心还应在线段AC的垂直平分线上,其纵坐标应为$\frac{-2+4}{2}=1$,故选D.

答案: D

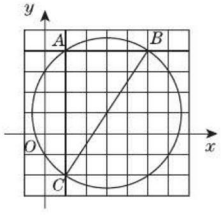
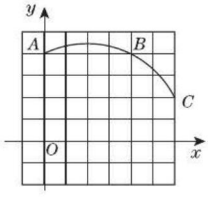


图24.2-34



(第2题图)

同类变式 (答案见183页)

2. 如图,平面直角坐标系中一条圆弧经过点$A(0,4)$,$B(4,4)$,$C(6,2)$,则该圆弧所在圆的圆心坐标为(　　)

A. $(2,1)$　　B. $(2,0)$

C. $(3,2)$　　D. 无法确定

方法点拨

根据垂径定理的推论"弦的垂直平分线必过圆心",作两条弦的垂直平分线,交点即为圆心.

考查角度3 三角形外接圆的综合计算

例3 如图24.2-35,在$\triangle ABC$中,$BC=6\sqrt{3}$ cm,$AB=AC$,$\angle BAC=120°$.

(1)尺规作图:作$\triangle ABC$的外接圆(只需作出图形,并保留作图痕迹);

(2)求它的外接圆半径.

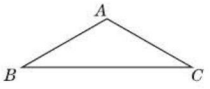


图24.2-35

解: (1)如图24.2-36,$\odot P$即为所求作的圆.

(2)如图24.2-36,连接PC.设AP与BC交于点M,

$\because BC=6\sqrt{3}$ cm,$AB=AC$,

$\angle BAC=120°$,$BC\perp AP$,

$\therefore \angle CAP=60°$,$BM=MC=3\sqrt{3}$ cm.

又$\because PA=PC$,

$\therefore \triangle APC$是等边三角形,$\therefore \angle MPC=60°$.

$\because$ 在Rt$\triangle MPC$中,

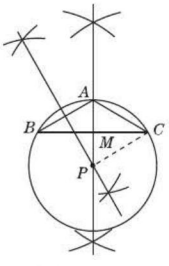


图24.2-36

方法点拨

(1)作出任意两边的垂直平分线,交点即是外接圆的圆心,交点到三角形顶点的距离是外接圆的半径;(2)利用等边三角形的性质和锐角三角函数即可求出外接圆的半径.

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

$\sin\angle MPC=\sin 60°=\dfrac{MC}{PC}=\dfrac{3\sqrt{3}}{PC}$,

$\therefore PC=\dfrac{3\sqrt{3}}{\sin 60°}=6(\text{cm})$.

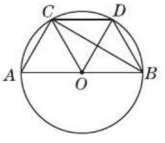
$\therefore$ 它的外接圆半径为 6 cm.

同类变式 (答案见 183 页)

3. [模拟·颍上县] 如图,已知 Rt$\triangle ABC$ 内接于$\odot O$,过圆心 O 作 BC 的垂线交$\odot O$ 于点 D,连接 CO,CD,BD.

(1)当$\angle A=60°$时,求证:四边形 $COBD$ 是菱形;

(2)当$\angle A=45°$时,OD 与 BC 交于点 E,直接写出$\dfrac{AB}{OE}$的值是_____.



(第 3 题图)



考查角度4 利用外心的特征进行简单计算

例 4 (1)已知$\triangle ABC$ 的三边长分别为 3 cm,4 cm,5 cm,则这个三角形的外接圆的面积为_____;

(2)直角三角形的两边长分别为 16 和 12,则此三角形的外接圆半径是_____.

导引: (1)由 $3^2+4^2=5^2$ 可得$\triangle ABC$ 为直角三角形,斜边长为 5 cm. 所以$\triangle ABC$ 外接圆的半径为$\dfrac{5}{2}$ cm. 故其面积为$\dfrac{25}{4}\pi\ \text{cm}^2$.

(2)分情况讨论:①当 16 为斜边长,12 为直角边长时,此三角形外接圆的半径为 8;②当 16 和 12 均为直角边长时,此三角形外接圆的半径为$\dfrac{\sqrt{16^2+12^2}}{2}=10$.

答案: (1)$\dfrac{25}{4}\pi\ \text{cm}^2$ (2)10 或 8

方法点拨

直角三角形外接圆的半径为斜边长的一半.

点知识 2 反证法(难点)

1 **反证法的定义:** 不是直接从题设推出结论,而是先假设命题结论不成立,然后经过推理,得出矛盾的结果,最后断言结论一定成立,这样的证明方法叫做反证法.

2 **反证法证明命题的一般步骤:** 反设——推理——结论,即:

(1)假设命题的结论不成立;

(2)从(1)中的“反设”出发,经过推理论证,得出与已知条件、定义、基本事实、定理等任一个相矛盾的结果;

(3)由矛盾的结果判定(1)中的“反设”不成立,从而肯定命题的结论成立.

3 **易错警示:**

(1)若结论的反面只有一种情况,则反设单一,只需驳倒这种情况,即可达到证明的目的;

(2)若结论的反面不止一种情况,则要各种情况一一驳倒,才能肯定原命题正确.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

考查角度1 利用反证法证命题结论反面唯一的命题

例5 求证:圆的两条不是直径的相交弦不能互相平分.

导引: 根据题意画出图形,直接证明比较麻烦,可假设这两条相交弦能互相平分,用反证法证明.

解: 已知:如图24.2-37所示,⊙O中不是直径的弦AB与CD交于点P.

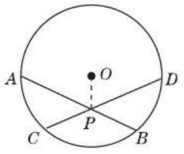


图24.2-37

求证:AB和CD不能互相平分.

证明:连接OP.假设AB和CD互相平分,即$PA=PB$,$PC=PD$.根据垂径定理的推论,有$OP\perp AB$,$OP\perp CD$,这样过点P有两条直线AB,CD都垂直于OP,这与"平面内过一点有且只有一条直线与已知直线垂直"相矛盾,所以假设不成立.故AB和CD不能互相平分.

方法点拨

(1)用反证法证明命题时,准确写出与原命题的结论相反的假设是关键.含有"至少""至多"等词语的命题常用反证法证明.(2)"一定""可能""全都是"的否定分别为"不一定""不可能""不全是";特别注意"一定"的否定不是"一定不";"至少n个"的否定为"至多$(n-1)$个";"至少一个"的否定为"一个都没有";"至多n个"的否定为"至少$(n+1)$个".

考查角度2 利用反证法证命题结论反面有有限种情况的命题

例6 用反证法证明:等腰三角形的底角一定是锐角.

导引: (1)当题目中出现"一定""不可能""不是""至少""至多"等肯定或否定的表述时,若直接证明较困难,可考虑用反证法,而对于文字表述题,可先将其转化为数学语言表述,再用反证法证明;

(2)分析题目结论的反面时,要做到不重复、不遗漏,如本题中的"一定是锐角"的反面就是"不是锐角",而"不是锐角"有两层意思:是直角、是钝角,因此,应分为两种情况进行讨论.

解: 已知:在$\triangle ABC$中,$AB=AC$.

求证:$\angle B$,$\angle C$一定是锐角.

证明:假设$\angle B$,$\angle C$不是锐角,则$\angle B$,$\angle C$是直角或钝角.

(1)若$\angle B$,$\angle C$是直角,即$\angle B=\angle C=90°$,故$\angle A+\angle B+\angle C>180°$,这与三角形的内角和定理矛盾,所以$\angle B$,$\angle C$不是直角.

(2)若$\angle B$,$\angle C$是钝角,即$\angle B=\angle C>90°$,故$\angle A+\angle B+\angle C>180°$,这与三角形的内角和定理矛盾,所以$\angle B$,$\angle C$不是钝角.

综上所述,$\angle B$,$\angle C$不是直角,也不是钝角,即$\angle B$,$\angle C$是锐角.所以等腰三角形的底角一定是锐角.

方法点拨

反证法的第一步是假设,假设时要特别注意命题结论的反面不止一种情况时,应把所有可能情况都列出来,再分别证明列举出来的各种情况均不成立,从而肯定原命题成立.

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

点方法·拨技巧 提高分

拔尖角度 1 圆与平面直角坐标系相结合的问题

例 7 如图 24.2-38，已知 $P(x,y)$ 是以坐标原点为圆心，5 个单位长为半径的圆周上的点. 若 x，y 都是整数，则这样的点 P 一共有(　　)

A. 4 个　　B. 8 个　　C. 12 个　　D. 16 个

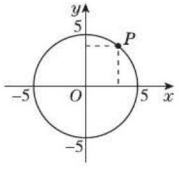


图24.2-38

导引： 先求出圆与 x 轴和 y 轴的正方向的交点分别为 $(5,0)$，$(0,5)$. 要使第一象限圆上点 P 的坐标为整数，实质是要以 OP 为斜边的直角三角形的两直角边为整数，因此，在第一象限内满足条件的点的横坐标只能是 3，4，故满足条件的点为 $(3,4)$，$(4,3)$. 其他象限的点可由对称性求出.

答案： C

方法点拨： 在平面直角坐标系中求圆上整数点的坐标时，每个点的横、纵坐标的平方和等于半径的平方. 判断出一个象限的情况，利用圆的对称性得到其他象限的情况.

拔尖角度 2 利用三角形外心的性质在抛物线中求外接圆的圆心

例 8 ［图象信息题］如图 24.2-39，已知抛物线 $y=x^2-4x$ 经过原点 O，且与 x 轴交于点 A.

(1) 求线段 OA 的长；

(2) 设抛物线的顶点为 B，试求 $\triangle OAB$ 外接圆圆心的坐标.

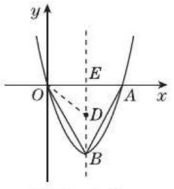


图 24.2-39

导引： (1) 要求线段 OA 的长，需求点 A 的横坐标，即需求出方程 $x^2-4x=0$ 的解. (2) 作抛物线的对称轴交 x 轴于点 E，得出点 B 的横坐标是 2，$BA=OB$，$\triangle OAB$ 的外接圆的圆心 D 在对称轴 BE 上，连接 OD，求出点 B 的坐标. 由勾股定理得出 $OD^2=OE^2+ED^2$，求出 OD 的长，进而求得结论.

解： (1) 当 $y=0$ 时，$x^2-4x=0$，解得 $x_1=0$，$x_2=4$. $\therefore A(4,0)$. $\therefore OA=4$.

(2) 如图 24.2-39 所示，作抛物线的对称轴交 x 轴于点 E. $\because$ 抛物线的顶点为 B，$A(4,0)$，$O(0,0)$，

$\therefore$ 点 B 的横坐标是 2，$BA=OB$.

$\therefore \triangle OAB$ 的外接圆的圆心 D 在对称轴 BE 上. 如图 24.2-39，连接 OD.

将点 B 的横坐标代入 $y=x^2-4x$，得 $y=4-4\times2=-4$. $\therefore B(2,-4)$.

由勾股定理，得 $OD^2=OE^2+ED^2$. 又 $BD=OD$，

$\therefore OD^2=2^2+(4-OD)^2$. 解得 $OD=\frac{5}{2}$.

$\therefore DE=BE-BD=4-\frac{5}{2}=\frac{3}{2}$.

$\therefore D\left(2,-\frac{3}{2}\right)$，

即 $\triangle OAB$ 外接圆圆心的坐标是 $\left(2,-\frac{3}{2}\right)$.

技巧点拨： 运用方程思想求线段长是常用的方法，确定以抛物线的顶点、与 x 轴的两个交点为顶点的三角形的外心时，根据外心的确定方法可知，外心必定在抛物线的对称轴上.

拔尖角度 3 三角形的外接圆和一元二次方程相结合的问题

例 9 在等腰三角形 ABC 中，$\angle A$，$\angle B$，$\angle C$ 的对边分别为 a，b，c. 已知 $a=3$，b，c 是关于 x 的一元二次方程 $x^2+mx+2-\frac{1}{2}m=0$ 的两个实数根.

(1) 求 $\triangle ABC$ 的周长；

(2) 求 $\triangle ABC$ 的三边长均为整数时的外接圆半径.

导引： (1) 分类讨论求 $\triangle ABC$ 的周长；(2) 在 (1) 的结果中利用垂径定理和三角形的知识进行求解.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

解：(1)若 b,c 中有一边长为 3，则方程可化为 $9+3m+2-\frac{1}{2}m=0$，

$\therefore m=-\frac{22}{5}$.

原方程可化为 $x^2-\frac{22}{5}x+\frac{21}{5}=0$.

$\therefore x_1=3,x_2=\frac{7}{5}$.

$\therefore$ 三角形的周长为 $3+3+\frac{7}{5}=7\frac{2}{5}$.

若 $b=c$，则 $m^2-4\left(2-\frac{1}{2}m\right)=0$. $\therefore m=-4$ 或 $m=2$. 当 $m=-4$ 时，方程为 $x^2-4x+4=0$，$\therefore x_1=x_2=2$. $\therefore$ 三角形的周长为 $2+2+3=7$. 当 $m=2$ 时，方程为 $x^2+2x+1=0$. $\therefore x_1=x_2=-1$(舍去). 综上可知，$\triangle ABC$ 的周长为 $7\frac{2}{5}$ 或 7.

(2)由(1)知 $AB=AC=2,BC=3$.

如图 24.2-40，作 $\triangle ABC$ 的外接圆 $\odot O$，连接 AO 并延长，交 $\odot O$ 于 D，交 BC 于 E，连接 BO，则 $AE\perp BC$.

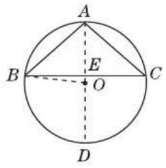


图 24.2-40

$\therefore BE=\frac{1}{2}BC=\frac{3}{2}$.

$\therefore AE=\sqrt{AB^2-BE^2}=\sqrt{4-\frac{9}{4}}=\frac{\sqrt{7}}{2}$.

设 $AO=R$，在 $\mathrm{Rt}\triangle BOE$ 中，$R^2=\left(\frac{3}{2}\right)^2+\left(R-\frac{\sqrt{7}}{2}\right)^2$，解得 $R=\frac{4\sqrt{7}}{7}$.

$\therefore \triangle ABC$ 的三边长均为整数时的外接圆半径为 $\frac{4\sqrt{7}}{7}$.

练中考·练模拟 得满分 (答案见 183 页)

基础巩固练

1. 在平面直角坐标系中，点 A,B,C 的坐标分别为 $(2,6),(8,6),(2,-4)$，则 $\triangle ABC$ 外接圆的圆心坐标是(　　)

A. $(2,1)$

B. $(5,1)$

C. $(1,5)$

D. $(5,-1)$

2. 用反证法证明命题“在直角三角形中，至少有一个锐角不大于 45°”时，应先假设(　　)

A. 有一个锐角小于 45°

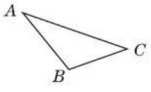
B. 每一个锐角都小于 45°

C. 有一个锐角大于 45°

D. 每一个锐角都大于 45°

3. 已知点 A,B 分别在 $\angle MON$ 的边 OM,ON 上，则经过 A，O，B 能作的圆的个数是_____.

4. 如图，已知 $\triangle ABC$，作它的外接圆.



(第 4 题图)

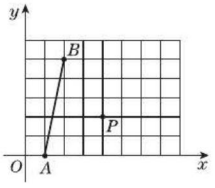
能力提升练

5. 已知三角形的三边长分别为 $2\sqrt{2}$ cm，$2\sqrt{3}$ cm，$2\sqrt{5}$ cm，则它的外接圆半径为_____.

6. 已知 $\mathrm{Rt}\triangle ABC$ 的两条直角边长分别为 a 和 b，且 a,b 是方程 $x^2-3x+1=0$ 的两根，则 $\mathrm{Rt}\triangle ABC$ 的外接圆面积为_____.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

7. [中考·泰州] 如图，在平面直角坐标系 xOy 中，点 A,B,P 的坐标分别为 $(1,0),(2,5),(4,2)$，若点 C 在第一象限，且横、纵坐标均为整数，P 为 $\triangle ABC$ 的外心，则点 C 的坐标为_____.

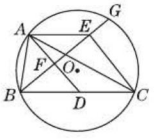


（第7题图）

8. [模拟·全椒县] 如图，$\triangle ABC$ 内接于 $\odot O$，AD 是 $\triangle ABC$ 的中线，$AE \parallel BC$，射线 BE 交 AD 于点 F，交 $\odot O$ 于点 G，点 F 是 BE 的中点，连接 CE.

(1) 求证：四边形 $ADCE$ 为平行四边形；

(2) 若 $BC=2AB$，求证：$\angle ABE=\angle DBE$.



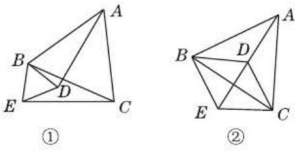
（第8题图）

思维拓展练

9. 如图①，在 $\triangle ABC$ 中，$BA=BC$，D 是平面内不与 A,B,C 重合的一点，$\angle ABC=\angle DBE$，$BD=BE$.

(1) 求证：$\triangle ABD \cong \triangle CBE$；

(2) 如图②，当点 D 是 $\triangle ABC$ 的外接圆的圆心时，请判断四边形 $BDCE$ 的形状，并证明你的结论. 【导学号：9142562】



（第9题图）

错题笔记

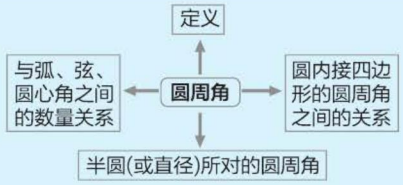
关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

24.3 圆周角

核心知识

- 圆周角的定义
- 圆周角定理
- 圆周角定理的推论
- 圆内接多边形

知识链接



点知识·拨考向 速提分

点知识 1 圆周角和圆周角定理及其推论 1(重难点)

1 **圆周角的定义:** 顶点在圆上,并且两边都与圆还有另一个公共点的角叫做圆周角.


圆周角的定义

要点精析///

圆周角有两个条件:(1)角的顶点在圆上;(2)两边都和圆相交,二者缺一不可.

2 **圆周角定理:** 一条弧所对的圆周角等于它所对圆心角的一半.

推论1: 在同圆或等圆中,同弧或等弧所对的圆周角相等,相等的圆周角所对的弧也相等.

要点精析///

(1)结合圆周角定理和推论1可知:一条弧所对的圆周角的度数等于与它相等的弧所对的圆心角度数的一半;

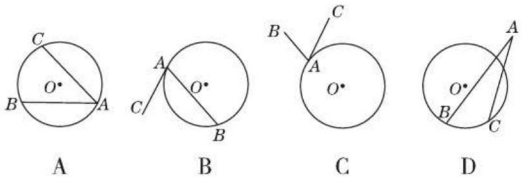
(2)结合弧、弦、圆心角之间的关系定理和圆周角定理的推论1可知:在同圆或等圆中,相等的圆周角所对的弧相等,所对的弦也相等,进而相等的弧所对的圆心角也相等,即在同圆或等圆中,圆周角、圆心角、弧、弦这四个量中有一组量相等,则可推出其他三组量相等(弦相等时需注意不同情况),也称之为"四量关系定理".

3 **易错警示:** 同一条弧所对的圆周角有无数个,它们都相等,这里特别要注意不要误认为"同弦所对的圆周角都相等",因为一条弦所对的圆周角一般情况下有两类,一类是顶点在优弧上的圆周角,一类是顶点在劣弧上的圆周角.

拔考向 ▸▸▸ 提分·秘诀

考查角度1 利用圆周角的定义识别圆周角

例1 如图24.3-1,$\angle BAC$是圆周角的是(　　)



A　　B　　C　　D

图24.3-1

导引: 顶点A必须在圆上,故排除D;AB,AC除点A外与圆有交点,B,C都不符合,故排除B,C.

答案: A

方法点拨

本题运用了定义法和排除法判断一个角是不是圆周角,必须抓住圆周角定义中的两个特征:(1)角的顶点在圆周上;(2)角的两边除顶点外与圆有交点.

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

考查角度2 利用圆周角定理求角的度数

例2 ［模拟·包河区］如图 24.3-2，$\triangle ABC$ 内接于 $\odot O$，$\angle C=20°$，则 $\angle OAB$ 的度数是(　　)

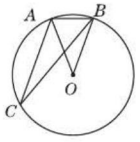


图 24.3-2

A. 50°　　B. 60°　　C. 70°　　D. 72°

导引： 根据圆周角定理求出 $\angle AOB$，再根据等腰三角形的性质计算. 由圆周角定理，得 $\angle AOB=2\angle C=40°$. $\because OA=OB$，

$\therefore \angle OAB=\angle OBA=\frac{1}{2}\times(180°-40°)=70°$，故选 C.

答案： C

同类变式 （答案见 183 页）

2. ［期末·包河区］$\triangle ABC$ 内接于 $\odot O$，记 $\angle A=x$，$\angle OBC=y$，则 x，y 之间存在的等量关系是(　　)

A. $x=2y$　　B. $x+y=90°$

C. $x-y=90°$　　D. $x+y=90°$ 或 $x-y=90°$

方法点拨

解决与圆有关的角度计算问题时，一般先判断角是圆周角还是圆心角，再转化成同弧所对的圆周角或圆心角，利用同弧(或等弧)所对的圆周角是圆心角的一半等关系求解.

考查角度3 利用圆周角定理的推论 1 进行计算与证明

例3 ［中考·安徽］如图 24.3-3，在四边形 $ABCD$ 中，$AD=BC$，$\angle B=\angle D$，AD 不平行于 BC，过点 C 作 $CE\parallel AD$ 交 $\triangle ABC$ 的外接圆 $\odot O$ 于点 E，连接 AE.

(1)求证：四边形 $AECD$ 为平行四边形；

(2)连接 CO，求证：CO 平分 $\angle BCE$.

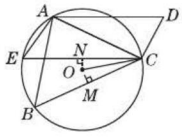


图 24.3-3

导引： (1)根据圆周角定理得到 $\angle B=\angle E$，从而得到 $\angle E=\angle D$，再根据平行线的有关知识得到 $AE\parallel CD$，即可证明结论；

(2)作 $OM\perp BC$ 于 M，$ON\perp CE$ 于 N，根据垂径定理、角平分线的判定定理证明即可.

证明： (1)由圆周角定理得，$\angle B=\angle E$.

又 $\angle B=\angle D$，$\therefore \angle E=\angle D$.

$\because CE\parallel AD$，$\therefore \angle D+\angle ECD=180°$，

$\therefore \angle E+\angle ECD=180°$，$\therefore AE\parallel CD$，

$\therefore$ 四边形 $AECD$ 为平行四边形.

方法点拨

圆周角定理的推论 1：同弧所对的圆周角相等，在圆中起到转化角的作用.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

(2)如图 24.3-3,作 $OM\perp BC$ 于 M,$ON\perp CE$ 于 N.

∵ 四边形 $AECD$ 为平行四边形,∴ $AD=CE$.

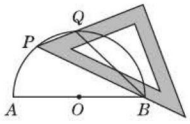
又 $AD=BC$,∴ $CE=CB$. ∴ $OM=ON$.

又 $OM\perp BC$,$ON\perp CE$,∴ CO 平分 $\angle BCE$.



同类变式 (答案见 183 页)

3. [模拟·衢州] AB 为半圆 O 的直径,现将一块等腰直角三角板如图放置,锐角顶点 P 在半圆上,斜边过点 B,一条直角边交该半圆于点 Q. 若 $AB=2$,则线段 BQ 的长为_____.



(第 3 题图)

考查角度4 利用“四量关系定理”进行证明

例 4 如图 24.3-4,AB 是⊙O 的直径,C 是$\overset{\frown}{AE}$的中点,$CD\perp AB$ 于点 D,交 AE 于点 F,连接 AC. 求证:$AF=CF$.

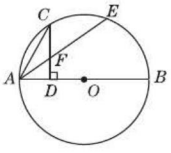


图 24.3-4

导引: 思考点1:$CD\perp AB$,联想到垂径定理,所以延长 CD,与圆相交;思考点2:点 C 是弧 AE 的中点,联想到垂径定理的推论,所以连接 OC. 最终的目的都是要证明 $\angle CAF=\angle FCA$.

证明: 方法一:如图 24.3-5①,延长 CD,交⊙O 于点 H.

∵ AB 是⊙O 的直径,$CD\perp AB$,

∴ $\overset{\frown}{AC}=\overset{\frown}{AH}$.

又∵ 点 C 是$\overset{\frown}{AE}$的中点,

∴ $\overset{\frown}{AC}=\overset{\frown}{CE}$. ∴ $\overset{\frown}{AH}=\overset{\frown}{CE}$.

∴ $\angle ACF=\angle CAF$.

∴ $AF=CF$.

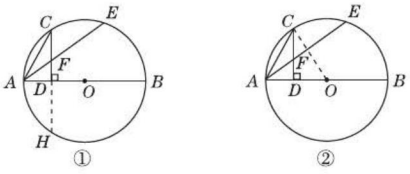


图 24.3-5

方法二:连接 OC,如图 24.3-5②.

方法点拨

(1)在圆中作辅助线构造同弧或等弧所对的圆周角是常用的方法,从而利用圆周角定理及其推论解题;(2)在已知条件中,若有与半径或直径垂直的线段,常延长线段与圆相交,构造出垂径定理的基本图形,这样可利用垂径定理得线段相等或弧相等.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

$\because \overset{\frown}{AC}=\overset{\frown}{CE}$，$OC$ 过圆心，$\therefore CO\perp AE$.

$\therefore \angle COD+\angle OAE=90°$.

$\because CD\perp OA$，$\therefore \angle DOC+\angle DCO=90°$.

$\therefore \angle DCO=\angle DAE$.

$\because OC=OA$，$\therefore \angle OCA=\angle OAC$.

$\therefore \angle FCA=\angle CAF$. $\therefore AF=CF$.

考查角度5 利用圆周角定理的推论1解决实际问题

方法点拨

本题运用转化思想，将射门角度大小的问题建模转化到圆中，根据圆周角的相关结论来解决实际问题.

例5 如图24.3-6，在“世界杯”足球比赛中，队员甲带球向对方球门 PQ 进攻，当他带球冲到 A 点时，同伴队员乙已经冲到 B 点. 现有两种射门方式：一是由队员甲直接射门；二是队员甲将球迅速传给乙，由队员乙射门.

仅从射门角度考虑，你认为选择哪种射门方式较好？为什么？

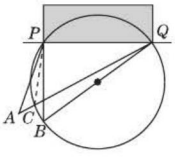


图24.3-6

导引： 对于足球射门问题，关键是看两个队员所在的位置 A，B 与球门 PQ 所形成的张角的大小，张角越大，则射门命中率越高.

解： 选择射门方式二较好. 理由如下：

设 AQ 与圆的交点为 C，连接 PC，如图24.3-6所示.

$\because \angle PCQ$ 是 $\triangle PAC$ 的外角，$\therefore \angle PCQ>\angle A$.

又$\because \overset{\frown}{PQ}=\overset{\frown}{PQ}$，$\therefore \angle PCQ=\angle B$. $\therefore \angle B>\angle A$.

$\therefore$ 在 B 点射门比在 A 点射门好. $\therefore$ 选择射门方式二较好.

考查角度6 利用圆周角定理证明三角形相似

方法点拨

在圆中证明两个三角形相似，一般找两个角相等，而找角相等的方法利用“同弧或等弧所对的圆周角相等”较常见.

例6 如图24.3-7，已知 $\odot O$ 上有两个定点 A，B 和两个动点 C，D，AC 与 BD 交于点 E.

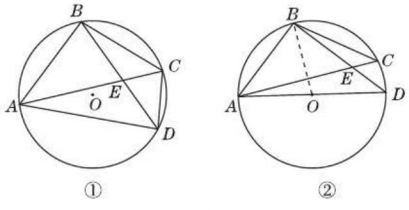


图24.3-7

(1) 如图①，求证：$EA\cdot EC=EB\cdot ED$；

(2) 如图②，若 $\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{BC}$，$AD$ 是 $\odot O$ 的直径，求证：$AD\cdot AC=2BD\cdot BC$.

导引： (1) 证明 $\triangle ABE$ 与 $\triangle DCE$ 相似，即可获得解决；(2) 连接 OB，因为 AD 是 $\odot O$ 的直径，所以 $AD=2OB$，这样原来的结论可以转化为 $OB\cdot AC=BD\cdot BC$，这时只要证明 $\triangle ABC\backsim\triangle DOB$ 即可解决.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

证明: (1)∵ $\angle ABD=\angle ACD$, $\angle BAC=\angle CDB$,

∴ $\triangle ABE\backsim\triangle DCE$. ∴ $\frac{EA}{ED}=\frac{EB}{EC}$. ∴ $EA\cdot EC=EB\cdot ED$.

(2)连接 OB,如图 24.3-7②.

∵ $OB=OD$, ∴ $\angle DBO=\angle BDO$.

又∵ $\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{BC}$, ∴ $\angle BAC=\angle BCA=\angle BDO=\angle DBO$.

∴ $\triangle ABC\backsim\triangle DOB$. ∴ $\frac{AC}{BD}=\frac{BC}{OB}=\frac{2BC}{AD}$.

∴ $AD\cdot AC=2BD\cdot BC$.

点知识 2 圆周角定理的推论 2(难点)

圆周角定理的推论 2:

(1)半圆或直径所对的圆周角是直角;

(2)90°的圆周角所对的弦是直径.

拓展///

(1)确定圆心的方法:

①弦的垂直平分线过圆心.

②90°的圆周角所对的弦过圆心.

(2)如果一个三角形一边上的中线等于这边的一半,那么这个三角形是直角三角形.

拔考向 ▸▸▸

提分·秘诀

考查角度1 利用圆周角定理的推论 2 进行计算

例 7 [模拟·铜陵县]如图 24.3-8,AB 是⊙O 的直径,C,D 两点在⊙O 上,若$\angle C=45°$.

(1)求$\angle ABD$ 的度数;

(2)若$\angle CDB=30°$,$BC=3$,求⊙O 的半径.

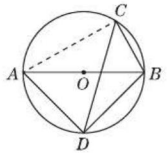


图 24.3-8

导引: (1)求出$\angle A$ 的度数,继而在 Rt△ABD 中,可求出$\angle ABD$ 的度数;

(2)连接 AC,则可得$\angle CAB=\angle CDB=30°$,在 Rt△$ACB$ 中求出 AB,继而可得⊙O 的半径.

解: (1)∵ $\angle C=45°$, ∴ $\angle A=\angle C=45°$.

∵ AB 是⊙O 的直径,

∴ $\angle ADB=90°$, ∴ $\angle ABD=45°$.

(2)如图 24.3-8,连接 AC. ∵ AB 是⊙O 的直径,

∴ $\angle ACB=90°$.

∵ $\angle CAB=\angle CDB=30°$, $BC=3$,

∴ $AB=6$,

∴ ⊙O 的半径为 3.

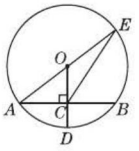
技巧点拨

看到直径,就想到直径所对的圆周角是 90°;看到圆周角,就想到它与它所对的弧所对的其他圆周角相等.

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

同类变式（答案见183页）

7. ［模拟·渭滨区］如图，⊙O的半径$OD\perp$弦AB于点C，连接AO并延长交⊙O于点E，连接EC. 若$AB=8$，$CD=2$，则EC的长为（　　）



（第7题图）

A. 2　　B. 8　　C. $\sqrt{13}$　　D. $2\sqrt{13}$

考查角度2 利用圆周角定理的推论2判断三角形的形状

例8　已知：如图24.3-9，AB是⊙O的直径，D是圆上任意一点（不与A，B重合），连接BD并延长到点C，使$BD=DC$，连接AC，试判断△ABC的形状.

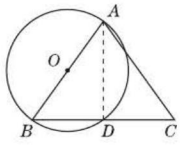


图24.3-9

导引：连接AD，由AB是⊙O的直径可得$AD\perp BC$，再由$BD=DC$可得$AB=AC$.

解：如图24.3-9，连接AD.

∵ AB是⊙O的直径，

∴ $\angle ADB=90°$.

∴ $AD\perp BC$.

∵ $BD=DC$，

∴ $AB=AC$.

∴ △ABC是等腰三角形.

技巧点拨

如果题目中有直径，常常添加辅助线，构造直径所对的圆周角，把问题转化为直角三角形的问题.



考查角度3 利用圆周角定理的推论2进行作图

例9　如图24.3-10，AB是半圆的直径，图①中，点C在半圆外；图②中，点C在半圆内. 请仅用无刻度的直尺按要求画图.

（1）在图①中，画出△ABC的三条高的交点；

（2）在图②中，画出△ABC中AB边上的高.

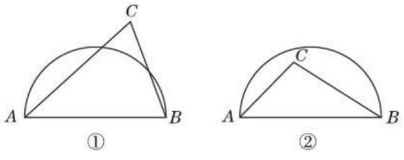


图24.3-10

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

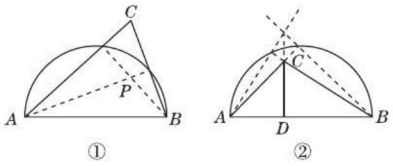


图 24. 3-11

导引： 本题是一道创新作图题，由三角形的三条高所在的直线相交于一点可知，只要作出三角形的两条高，它们所在的直线的交点就是三条高所在的直线的交点. 根据直径所对的圆周角是直角，问题便可获解.

解： (1) 如图 24. 3-11①，点 P 即为所求.

(2) 如图 24. 3-11②，CD 即为所求.

点知识 3 圆内接多边形及其性质

1 **圆内接多边形：** 如果一个多边形的所有顶点都在同一个圆上，这个多边形叫做圆内接多边形. 这个圆叫做这个多边形的外接圆.

2 **圆内接四边形的性质：** 圆内接四边形的对角互补，且任何一个外角都等于它的内对角.

要点精析

(1) 内接、外接是一个相对的概念，是一种位置关系；

(2) 在同圆或等圆中，一条弦所对的圆周角相等或互补，即圆周角在弦的同侧则相等，异侧则互补.

拔考向

提分·秘诀

考查角度1 利用圆内接四边形的性质求角的度数

例 10 ［模拟 · 合肥］如图 24. 3-12，四边形 $ABCD$ 内接于 $\odot O$，$AD \parallel BC$，BD 平分 $\angle ABC$，$\angle A = 130°$，则 $\angle BDC$ 的度数为(　　)

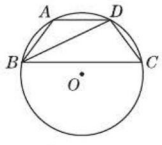


图 24. 3-12

A. 100°　　B. 105°　　C. 110°　　D. 115°

导引： 根据圆内接四边形的性质得出 $\angle C$ 的度数，进而利用平行线的性质得出 $\angle ABC$ 的度数，再利用角平分线的定义和三角形内角和解答即可.

$\because$ 四边形 $ABCD$ 内接于 $\odot O$，$\angle A = 130°$，

$\therefore \angle C = 180° - 130° = 50°$.

$\because AD \parallel BC$，$\therefore \angle ABC = 180° - \angle A = 50°$.

$\because BD$ 平分 $\angle ABC$，$\therefore \angle DBC = 25°$，

$\therefore \angle BDC = 180° - 25° - 50° = 105°$，故选 B.

答案： B

方法点拨

求圆中的某一个角时，根据圆内接四边形的对角互补的性质，可以把已知角进行转化，进而再利用已知角的和差倍分进行计算.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

考查角度2 利用圆内接四边形的性质进行计算与证明

例11 ［模拟·霍邱县］已知：如图24.3-13，四边形$ABCD$是$\odot O$的内接四边形，直径DG交边AB于点E，AB，DC的延长线相交于点F. 连接AC，若$\angle ACD=\angle BAD$.

(1)求证：$DG\perp AB$；

(2)若$AB=6$，$\tan\angle FCB=3$，求$\odot O$的半径.

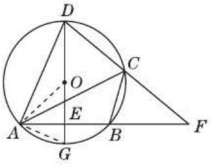


图24.3-13

导引：(1)连接AG，根据圆周角定理推论得到$\angle ACD=\angle AGD$，$\angle DAG=90°$，计算即可；

(2)连接OA，根据圆内接四边形的性质得到$\angle FCB=\angle BAD$，根据正切的定义计算.

(1)**证明：**如图24.3-13，连接AG.

$\because\angle ACD$与$\angle AGD$是同弧所对圆周角，

$\therefore\angle ACD=\angle AGD$.

$\because\angle ACD=\angle BAD$，

$\therefore\angle BAD=\angle AGD$.

$\because DG$为$\odot O$的直径，A为圆周上一点，

$\therefore\angle DAG=90°$，

$\therefore\angle BAD+\angle BAG=90°$，

$\therefore\angle AGD+\angle BAG=90°$，

$\therefore\angle AEG=90°$，即$DG\perp AB$.

(2)**解：**$\because$四边形$ABCD$是$\odot O$的内接四边形，

$\therefore\angle FCB=\angle BAD$.

$\because\tan\angle FCB=3$，

$\therefore\tan\angle BAD=\dfrac{DE}{AE}=3$.

如图24.3-13，连接OA，由垂径定理得$AE=\dfrac{1}{2}AB=3$，

$\therefore DE=9$.

在$\mathrm{Rt}\triangle OEA$中，$OE^2+AE^2=OA^2$.

设$\odot O$的半径为r，则有$(9-r)^2+3^2=r^2$，

解得$r=5$，

$\therefore\odot O$的半径为5.

方法点拨

本题考查的是圆内接四边形的性质、圆周角定理及其推论、垂径定理以及解直角三角形等知识，灵活运用圆中性质转化角是解题的关键.



关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

点方法·拨技巧 提高分

拔尖角度 1 利用圆周角定理的推论进行证明

例 12 如图 24.3-14，$\triangle ABC$ 的三个顶点在 $\odot O$ 上，$AD \perp BC$，D 为垂足，E 是 $\overset{\frown}{BC}$ 的中点，求证：$\angle 1 = \angle 2$.

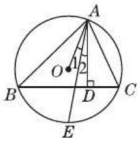


图 24.3-14

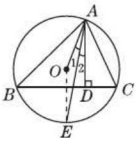


图 24.3-15

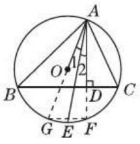


图 24.3-16

导引： 本题涉及的条件较多，图形比较复杂，因此解题的切入点就有很多，切入点不同就有不同的证法，实质不外乎从等角代换、圆周角相等转化为它所对的弧相等等方面去思考.

证明： 方法一：如图 24.3-15，连接 OE.

$\because E$ 为 $\overset{\frown}{BC}$ 的中点，OE 是半径，$\therefore OE \perp BC$.

又 $\because AD \perp BC$ 于点 D，

$\therefore OE // AD$. $\therefore \angle 2 = \angle E$.

$\because OA = OE$，$\therefore \angle 1 = \angle E$. $\therefore \angle 1 = \angle 2$.

方法二：如图 24.3-16，延长 AO，交 $\odot O$ 于点 G，延长 AD，交 $\odot O$ 于点 F，连接 FG.

$\because AG$ 为 $\odot O$ 的直径，

$\therefore \angle F = 90°$，即 $AF \perp GF$.

$\because AD \perp BC$ 于点 D，

$\therefore BC // GF$，易得 $\overset{\frown}{BG} = \overset{\frown}{CF}$.

$\because E$ 为 $\overset{\frown}{BC}$ 的中点，

$\therefore \overset{\frown}{BE} = \overset{\frown}{CE}$，$\therefore \overset{\frown}{BE} - \overset{\frown}{BG} = \overset{\frown}{CE} - \overset{\frown}{CF}$，

即 $\overset{\frown}{GE} = \overset{\frown}{FE}$. $\therefore \angle 1 = \angle 2$.

方法三：如图 24.3-17，延长 AO，交 $\odot O$ 于点 F，延长 AD，交 $\odot O$ 于点 G，连接 BF.

$\because AF$ 为 $\odot O$ 的直径，$\therefore \angle ABF = 90°$.

又 $\because \angle F = \angle C$，$AD \perp BC$ 于点 D，

$\therefore \angle 3 = \angle 4$. $\therefore \overset{\frown}{BF} = \overset{\frown}{CG}$.

$\because E$ 为 $\overset{\frown}{BC}$ 的中点，$\therefore \overset{\frown}{BE} = \overset{\frown}{CE}$.

$\therefore \overset{\frown}{FE} = \overset{\frown}{EG}$. $\therefore \angle 1 = \angle 2$.

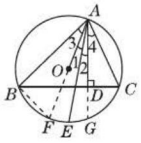


图 24.3-17

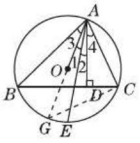


图 24.3-18

方法四：如图 24.3-18，延长 AO，交 $\odot O$ 于点 G，连接 CG.

$\because AG$ 为 $\odot O$ 的直径，$\therefore \angle ACG = 90°$.

又 $\because AD \perp BC$，$\angle B = \angle G$，

$\therefore \angle BAD = \angle GAC$. $\therefore \angle 3 = \angle 4$.

$\because E$ 为 $\overset{\frown}{BC}$ 的中点，$\therefore \overset{\frown}{BE} = \overset{\frown}{CE}$.

$\therefore \angle BAE = \angle CAE$. $\therefore \angle 1 = \angle 2$.

方法点拨： （1）作辅助线的常用方法：连接圆上两点、连半径、作直径构造直径所对的圆周角；（2）垂径定理和圆周角定理，以及它们的推论在解决圆的有关问题中使用频率较高，要注意灵活掌握

拔尖角度 2 利用圆周角的有关知识解决动点问题

例 13 ［期末·蜀山区］如图 24.3-19，在 Rt $\triangle ABC$ 中，$BC = AC = 2$，点 M 是 AC 边上一动点，连接 BM，以 CM 为直径的 $\odot O$ 交 BM 于 N，则线段 AN 的最小值为_____.

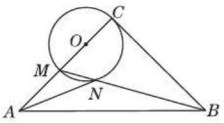


图 24.3-19

导引： 连接 CN，根据 CM 是 $\odot O$ 的直径，得到 $\angle CNM = 90°$，根据邻补角的定义得到 $\angle CNB = 90°$. 易知点 N 在以 BC 为直径的 $\odot O'$ 上，推出当点 O'，N，A 共线时，AN 最小，根据勾股定理即可得到结论.

如图 24.3-20，连接 CN，

$\because CM$ 是 $\odot O$ 的直径，

$\therefore \angle CNM = 90°$，

$\therefore \angle CNB = 90°$，

$\therefore$ 点 N 在以 BC 为直径的 $\odot O'$ 上.

易知 $\odot O'$ 的半径为 1，当点 O'，N，A 共线时，AN 最小.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

在 Rt△$AO'C$ 中，∵ $O'C=1$，$AC=2$，

∴ $O'A=\sqrt{O'C^2+AC^2}=\sqrt{5}$，

∴ $AN=AO'-O'N=\sqrt{5}-1$，即线段 AN 长度的最小值为 $\sqrt{5}-1$. 故答案为 $\sqrt{5}-1$.

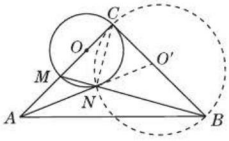


图 24.3-20

答案： $\sqrt{5}-1$

方法点拨： 解决本题的关键是确定动点 N 运动的规律，化动为静，从而把该问题转化为圆外一点到圆上一点的最短距离问题.

拔尖角度 3 利用圆内接四边形的性质进行结论探究

例 14 ［中考·佛山］ 如图 24.3-21，$\odot O$ 的内接四边形 $ABCD$ 两组对边的延长线分别交于点 E，F.

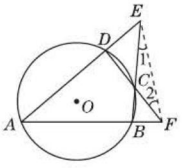


图 24.3-21

(1) 若 $\angle E=\angle F$，求证：$\angle ADC=\angle ABC$；

(2) 若 $\angle E=\angle F=42°$，求 $\angle A$ 的度数；

(3) 若 $\angle E=\alpha$，$\angle F=\beta$，且 $\alpha\neq\beta$，请你用含有 α，β 的代数式表示 $\angle A$ 的大小.

(1) **证明：** ∵ $\angle AEB=\angle AFD$，$\angle DCE=\angle BCF$，$\angle ADC=\angle AEB+\angle DCE$，$\angle ABC=\angle AFD+\angle BCF$，

∴ $\angle ADC=\angle ABC$.

(2) **解：** 由(1)知，$\angle ADC=\angle ABC$，

∵ 四边形 $ABCD$ 为 $\odot O$ 的内接四边形，

∴ $\angle EDC=\angle ABC$. ∴ $\angle EDC=\angle ADC$.

∴ $\angle ADC=90°$. ∴ $\angle A=90°-42°=48°$.

(3) **解：** 连接 EF，如图 24.3-21.

∵ 四边形 $ABCD$ 为 $\odot O$ 的内接四边形，

∴ $\angle ECD=\angle A$.

∵ $\angle ECD=\angle 1+\angle 2$，

∴ $\angle A=\angle 1+\angle 2$.

∵ $\angle A+\angle 1+\angle 2+\angle AEB+\angle AFD=180°$，

∴ $2\angle A+\alpha+\beta=180°$.

∴ $\angle A=90°-\frac{\alpha+\beta}{2}$.

数学素养提升

浅谈隐形圆——将多边形问题化归为圆的问题

在最近几年的中考题和中考模拟题中，经常会出现一类有关圆的题目，这类题目在条件中没有直接给出有关圆方面的信息，但我们通过分析和转化，最终都可以利用圆的知识求解. 这类题目构思巧妙，综合性强，它将复杂的多边形求角问题转化为圆内的求角问题，体现了转化和化归的数学思想，处理这类题目，关键在于能否把“隐形圆”找出来.

下面就有关数学中的“隐形圆”问题作一些探究.

［案例］ 如图 24.3-22，已知 $AB=AC=AD$，若 $\angle BDC=40°$，求 $\angle BAC$ 的度数.

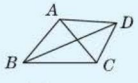


图 24.3-22

［案例分析］ 直接根据条件求 $\angle BAC$ 的度数有一定的难度，但由 $AB=AC=AD$ 可知，B，C，D 三点到点 A 的距离相等，于是得到 B，C，D 三点在以点 A 为圆心，AB 的长为半径的圆上，画出这个隐形圆，如图 24.3-23. 根据圆的基本性质就可巧妙地求出 $\angle BAC=2\angle BDC=2\times40°=80°$.

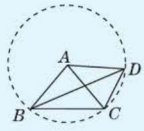


图 24.3-23

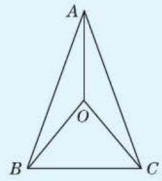


图 24.3-24

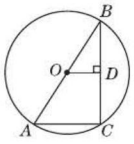
［探究应用］ 如图 24.3-24，已知点 O 是三角形 ABC 内一点，$OA=OB=OC$，$\angle AOB=\angle AOC$，$\angle ABC=70°$，求 $\angle BAC$ 的度数.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

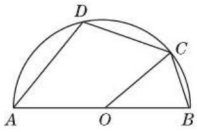
基础巩固练

1. ［中考·济南］如图，AB 是⊙O 的直径，C 是⊙O 上一点，$AB=10$，$AC=6$，$OD\perp BC$，垂足是 D，则 BD 的长为（　　）

A. 2　　B. 3　　C. 4　　D. 6



（第1题图）



（第2题图）

2. ［中考·苏州］如图，AB 是半圆的直径，O 为圆心，C 是半圆上的点，D 是$\overset{\frown}{AC}$上的点，若$\angle BOC=40°$，则$\angle D$ 的度数为（　　）

A. 100°　　B. 110°

C. 120°　　D. 130°

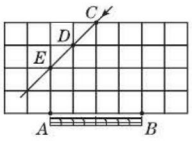
3. ［中考·金华］足球射门，不考虑其他因素，仅考虑射点到球门 AB 的张角大小时，张角越大，射门越好. 如图所示的正方形网格中，点 A，B，C，D，E 均在格点上，球员带球沿 CD 方向进攻，最好的射点在（　　）

A. 点 C

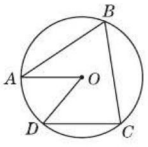
B. 点 D 或点 E

C. 线段 DE（异于端点）上一点

D. 线段 CD（异于端点）上一点



（第3题图）

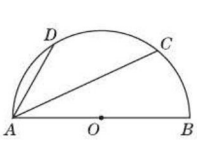


（第4题图）

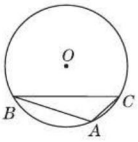
4. ［模拟·南开区］如图，A，B，C，D 四个点均在⊙O 上，$\angle AOD=50°$，$AO\parallel DC$，则$\angle B$ 的度数为（　　）

A. 50°　　B. 55°　　C. 60°　　D. 65°

5. ［模拟·定远县］如图，AB 是半圆的直径，$\angle BAC=20°$，D 是$\overset{\frown}{AC}$的中点，则$\angle DAC$ 的度数是_____.



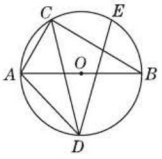
（第5题图）



（第6题图）

6. ［模拟·合肥］如图，⊙O 是△ABC 的外接圆，$\angle BAC=120°$，若⊙O 的半径为 2，则弦 BC 的长为_____.

7. 如图，AB 是⊙O 的直径，$AB=10$ cm，$\angle ADE=60°$，DC 平分$\angle ADE$，交⊙O 于点 C，求 AC，BC 的长.

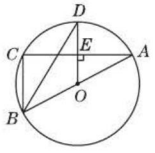


（第7题图）

8. 如图，△ABC 是⊙O 的内接三角形，AB 是⊙O 的直径，D 为⊙O 上一点，$OD\perp AC$，垂足为 E，连接 BD.

（1）求证：BD 平分$\angle ABC$；

（2）当$\angle ODB=30°$时，求证：$BC=OD$.



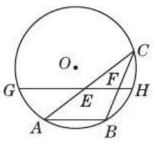
（第8题图）

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

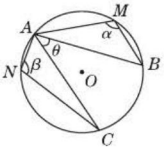
能力提升练

9. [模拟 · 蒙城县] 如图，AB 是 $\odot O$ 的一条弦，点 C 是 $\odot O$ 上一动点，且 $\angle ACB = 30°$，E，F 分别是 AC，BC 的中点，直线 EF 与 $\odot O$ 交于 G，H 两点，若 $\odot O$ 的半径为 10，则 $GE + FH$ 的最大值为(　　)

A. 5　　B. 10　　C. 15　　D. 20



(第 9 题图)



(第 10 题图)

10. [期末 · 黄山] 如图，$\odot O$ 中三个圆周角 $\angle AMB$，$\angle BAC$，$\angle ANC$ 的大小依次为 α，θ，β，三者的数量关系为(　　)

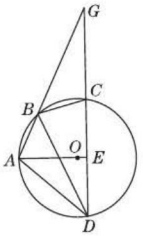
A. $\theta = 360° - \alpha - \beta$　　B. $\theta = \alpha + \beta - 180°$

C. $2\theta = \alpha + \beta - 180°$　　D. $2\theta = 360° - \alpha - \beta$

11. [中考 · 潍坊] 如图，四边形 $ABCD$ 为 $\odot O$ 的内接四边形，延长 AB 与 DC 相交于点 G，$AO \perp CD$，垂足为 E，连接 BD，$\angle GBC = 50°$，则 $\angle DBC$ 的度数为(　　)

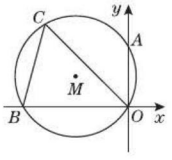
A. 50°　　B. 60°

C. 80°　　D. 85°



(第 11 题图)

12. 如图，在平面直角坐标系中，$\triangle OCB$ 的外接圆 M 与 y 轴的一个交点为点 $A(0, \sqrt{2})$，$\angle OCB = 60°$，$\angle COB = 45°$，求 OC 的长度.



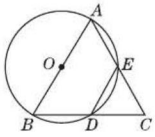
(第 12 题图)

13. 如图，在 $\triangle ABC$ 中，$AB = BC = 2$，以 AB 为直径的 $\odot O$ 分别交 BC，AC 于点 D，E，且点 D 为边 BC 的中点.

(1) 求证：$\triangle ABC$ 为等边三角形.

(2) 求 DE 的长.

(3) 在线段 AB 的延长线上是否存在一点 P，使 $\triangle PBD \backsim \triangle AED$？若存在，请求出 PB 的长；若不存在，请说明理由.



(第 13 题图)

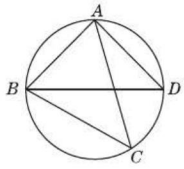
思维拓展练

14. [中考 · 广州] 如图，点 C 为 $\triangle ABD$ 外接圆上的一动点(点 C 不在 $\overset{\frown}{BAD}$ 上，且不与点 B，D 重合)，$\angle ACB = \angle ABD = 45°$.

(1) 求证：BD 是该外接圆的直径；

(2) 连接 CD，求证：$\sqrt{2}AC = BC + CD$；

(3) 若 $\triangle ABC$ 关于直线 AB 的对称图形为 $\triangle ABM$，连接 DM，试探究 DM^2，AM^2，BM^2 三者之间满足的等量关系，并证明你的结论.



(第 14 题图)

错题笔记

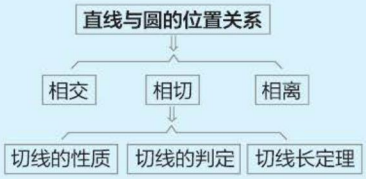
关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

24.4 直线与圆的位置关系

核心知识

- 直线与圆的位置关系
- 切线的性质
- 切线的判定
- 切线长定理

知识链接



点知识·拨考向 速提分

点知识 1 直线与圆的位置关系(重点)

1 直线与圆的位置关系:

(1) 相交: 如图 24.4-1①所示,如果直线与圆有两个公共点,这时直线与圆的位置关系叫做相交,公共点叫做交点,这条直线叫做圆的割线.

(2) 相切: 如图 24.4-1②所示,如果直线与圆只有一个公共点,这时直线与圆的位置关系叫做相切,这条直线叫做圆的切线,这个公共点叫做切点.

(3) 相离: 如图 24.4-1③所示,如果直线与圆没有公共点,这时直线与圆的位置关系叫做相离.

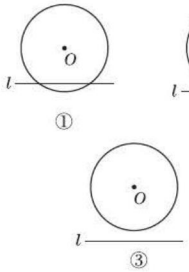


图 24.4-1

直线与圆的位置关系

2 直线与圆的位置关系的性质及判定:

直线与圆的位置关系	相离	相切	相交
图形演示			
公共点个数	0	1	2
公共点名称		切点	交点
直线名称		切线	割线
圆心 O 到直线的距离 d 与半径 r 的关系	$d>r$	$d=r$	$d<r$

3 易错警示:

(1) 理解切线的定义时,要抓住关键字眼“只有一个”,避免出现“有一个公共点时,直线和圆相切”的错误,用动态的观点及数形结合思想来准确理解切线的定义.

(2) 射线、线段和圆的位置关系不能像直线一样依据交点的个数判定,要具体情况具体分析.

拨考向 ▶▶▶ 提分·秘诀

考查角度1 利用 d 与 r 的关系判断直线与圆的位置关系

例1 [期末·太和县] 圆的直径为 13 cm,如果圆心与直线的距离是 d,则(　　)

A. 当 $d=8$ cm 时,直线与圆相交

B. 当 $d=4.5$ cm 时,直线与圆相离

C. 当 $d=6.5$ cm 时,直线与圆相切

D. 当 $d=13$ cm 时,直线与圆相切

方法点拨

解决此类问题可通过比较圆心到直线的距离与圆半径的大小关系完成判定.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

导引： 确定直线与圆的位置关系，关键是把 d 与半径 r 进行比较. 若 $d<r$，则直线与圆相交；若 $d=r$，则直线与圆相切；若 $d>r$，则直线与圆相离.

已知圆的直径为 13 cm，则半径为 6.5 cm. 当 $d=6.5$ cm 时，直线与圆相切；当 $d<6.5$ cm 时，直线与圆相交；当 $d>6.5$ cm 时，直线与圆相离，故 A，B，D 错误，C 正确，故选 C.

答案： C

考查角度2 利用直线与圆的位置关系求圆的半径的取值范围

例2 如图 24.4-2，在 $\triangle ABC$ 中，$\angle C=90°$，$\angle A=30°$，O 是 AB 上的一点，$OB=m(m>0)$，$\odot O$ 的半径 r 为 $\frac{1}{2}$，当 m 分别在什么范围内取值时，直线 BC 与 $\odot O$ 相离、相切、相交？

导引： 利用直线与圆的位置关系建立方程（或不等式）求 m 的范围.

解： 如图 24.4-2，作 $OD\perp BC$ 于点 D.

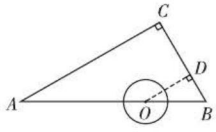


图 24.4-2

$\because \angle A=30°$，$\angle C=90°$，

$\therefore \angle B=60°$.

$\therefore \angle DOB=30°$.

在 $\mathrm{Rt}\triangle ODB$ 中，$\because OB=m$，

$\therefore BD=\frac{1}{2}m$. $\therefore OD=\frac{\sqrt{3}}{2}m$.

设 $OD=d$.

①当直线 BC 与 $\odot O$ 相离时，$d>r$，即 $\frac{\sqrt{3}}{2}m>\frac{1}{2}$，解得 $m>\frac{\sqrt{3}}{3}$.

②当直线 BC 与 $\odot O$ 相切时，$d=r$，即 $\frac{\sqrt{3}}{2}m=\frac{1}{2}$，解得 $m=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

③当直线 BC 与 $\odot O$ 相交时，$d<r$，即 $\frac{\sqrt{3}}{2}m<\frac{1}{2}$，解得 $m<\frac{\sqrt{3}}{3}$，

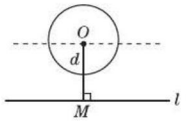
又 $\because m>0$，$\therefore 0<m<\frac{\sqrt{3}}{3}$.

方法点拨

要判断 $OB=m$ 在什么范围内取值时，BC 与 $\odot O$ 相离、相切、相交，就是要求出圆心 O 到直线 BC 的距离 d，把 d 与 $\odot O$ 的半径 r 进行大小比较，并利用直线与圆的位置关系中相切、相离、相交时 d 与 r 之间的相等或不等关系，转化为解方程或不等式的问题，从而求出 m 的取值范围.

同类变式 （答案见 184 页）

2. ［中考·永州］如图，给定一个半径为 2 的圆，圆心 O 到水平直线 l 的距离为 d，即 $OM=d$. 我们把圆上到直线 l 的距离等于 1 的点的个数记为 m. 如 $d=0$ 时，l 为经过圆心 O 的一条直线，此时圆上有四个到直线 l 的距离等于1 的点，即 $m=4$. 由此可知：



（第 2 题图）

（1）当 $d=3$ 时，$m=$ _____；

（2）当 $m=2$ 时，d 的取值范围是_____.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

考查角度3 利用直线与圆的位置关系解与圆相关的实际应用题

例3 如图 24.4-3，某货船以 20 海里/时的速度将一批重要物资由 A 处运往正西方向的 B 处. 经 16 小时的航行到达 B 处，到达后立即卸货. 此时接到气象部门的通知，一台风中心正以 40 海里/时的速度由 A 向北偏西 60°方向移动，距台风中心 200 海里的圆形区域(包括边界)均会受到影响，问：

(1) B 处是否会受到台风影响？

(2)若使该船不受台风影响，应在多长时间内卸完货物？

解：(1)如图 24.4-3，过点 B 作 $BD\perp AC$ 于点 D.

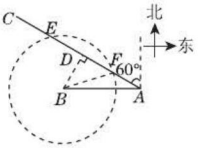


图 24.4-3

在 $Rt\triangle ABD$ 中，$\angle BAD=90°-60°=30°$，

所以 $BD=\frac{1}{2}AB=\frac{1}{2}\times 20\times 16=160$(海里) <200 海里.

所以 B 处会受到台风影响.

(2)以点 B 为圆心，200 海里为半径画圆，交 AC 于点 E,F，连接 BF，如图 24.4-3.

由题意知，$DF=\sqrt{200^2-160^2}=120$(海里)，

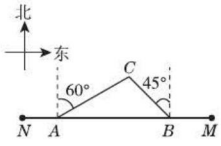
$AD=\sqrt{(20\times 16)^2-160^2}=160\sqrt{3}$(海里)，

所以 $t=\frac{160\sqrt{3}-120}{40}\approx 3.9$(时).

所以该船应在 3.9 小时内卸完货物.

同类变式 (答案见 184 页)

3. 某市要在东西方向 M,N 两地之间修建一条笔直的道路. 如图，C 点周围180 m 范围内为文物保护区，在 MN 上的点 A 处测得 C 在 A 的北偏东 60°方向，从 A 向东走 500 m 到达 B 处，测得 C 在 B 的北偏西 45°方向. MN 是否穿过文物保护区？请通过计算说明.(参考数据：$\sqrt{3}\approx 1.732$)



(第 3 题图)

点知识 2 圆的切线的性质(难点)

1 **性质定理**：圆的切线垂直于经过切点的半径.

要点精析///

(1)性质定理的题设有两个条件：①圆的切线，②半径过切点，应用时缺一不可.

(2)如果直线上一个点到圆心的距离等于圆的半径，那么这条直线与圆可能相切也可能相交.

2 **切线的性质**：(1)切线和圆只有一个公共点；

(2)圆心到切线的距离等于半径；

(3)圆的切线垂直于过切点的半径；

(4)经过圆心且垂直于切线的直线必过切点(找切点用)；

(5)经过切点且垂直于切线的直线必过圆心(找圆心用).

以上(3)(4)(5)可归纳为：

已知直线满足①过圆心，②过切点，③垂直于切线这三个条件中的任意两个，就可得到第三个.

拔考向 ▶▶▶

提分·秘诀

考查角度1 利用圆的切线的性质求角度

例4 [模拟·包河区]如图 24.4-4，已知 PA 是⊙O 的切线，A 为切点，PO 与⊙O 相交于 B 点，B 为 OP 的中点，C 为⊙O 上一点，$AC/\!/OP$，则 $\angle PAC+\angle POC$ 等于(　　)

A. 255°　　B. 285°　　C. 280°　　D. 270°

方法点拨

因为圆的切线垂直于经过切点的半径，所以若出现圆的切线，必连过切点的半径，构造定理基本图形，得

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

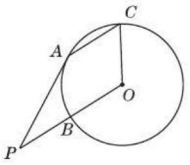


图 24.4-4

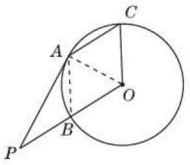


图 24.4-5

出垂直关系.简记为：见切点，连半径，得垂直.

导引： 连接 AB, OA，先利用切线的性质得 $\angle OAP = 90°$，再根据斜边上的中线等于斜边的一半判断 $\triangle OAB$ 为等边三角形，则 $\angle AOP = 60°$，接着利用平行线的性质得到 $\angle AOP = \angle OAC = 60°$，则 $\angle AOC = 60°$，然后计算 $\angle PAC + \angle POC$.

连接 AB, OA，如图 24.4-5.

$\because PA$ 是 $\odot O$ 的切线，$\therefore OA \perp PA$，$\therefore \angle OAP = 90°$.

$\because B$ 为 OP 的中点，$\therefore AB = BP = BO$，

$\therefore \triangle OAB$ 为等边三角形，$\therefore \angle AOP = 60°$.

$\because AC // OP$，$\therefore \angle AOP = \angle OAC = 60°$，

$\therefore \triangle OAC$ 为等边三角形，$\therefore \angle AOC = 60°$，

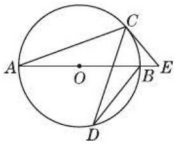
$\therefore \angle PAC + \angle POC = 90° + 60° + 60° + 60° = 270°$. 故选 D.



答案： D

同类变式 （答案见 184 页）

4. ［模拟 · 合肥］如图，线段 AB 是 $\odot O$ 的直径，$\angle CDB = 20°$，过点 C 作 $\odot O$ 的切线交 AB 的延长线于点 E，则 $\angle E$ 等于_____.



（第 4 题图）

考查角度2 利用圆的切线的性质求线段长

方法点拨

圆中常用辅助线的作法：已知圆的切线时，经常连接圆心和切点，利用圆的切线垂直于经过切点的半径进行求解.

例 5 ［模拟 · 安徽］如图 24.4-6，矩形 $ABCD$ 的一边 AD 与 $\odot O$ 相切于点 E，点 B 在 $\odot O$ 上，BC 与 $\odot O$ 相交于点 F，$AB = 2$，$AD = 7$，$FC = 1$，则 $\odot O$ 的半径长为_____.

导引： 如图24.4-6，连接 OE 交 BC 于 H，连接 OB, OF.

$\because$ 四边形 $ABCD$ 为矩形，$AD = 7$，$FC = 1$，

$\therefore BF = 6$.

$\because AD$ 与 $\odot O$ 相切于点 E，

$\therefore OE \perp AD$.

$\because AD // BC$，$\therefore OH \perp BC$，

又 $\because OB = OF$，$\therefore BH = HF = \frac{1}{2}BF = 3$.

设圆的半径为 r，则 $r^2 = (r-2)^2 + 3^2$，

解得 $r = \frac{13}{4}$.

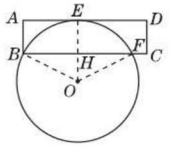


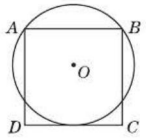
图 24.4-6

答案： $\frac{13}{4}$

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

同类变式 （答案见184页）

5. ［模拟·寿光］如图，⊙O过正方形$ABCD$的顶点A，B，且与CD相切，若正方形$ABCD$的边长为2，则⊙O的半径为（　　）



（第5题图）

A. 1　　B. $\frac{\sqrt{5}}{2}$　　C. $\frac{4}{3}$　　D. $\frac{5}{4}$

考查角度3　利用切线的性质进行证明与计算

例6　［模拟·明光］如图24.4-7，四边形$ABCD$内接于⊙O，且$CD/\!/AB$. 连接AC，且$AC=AB$. 过点A作⊙O的切线AE交CD的延长线于点E.

（1）求证：四边形$ABCE$是平行四边形；

（2）若$AB=13$，$AE=10$，求⊙O的半径.

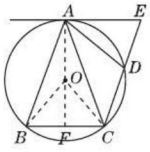


图24.4-7

导引：（1）连接AO并延长，交BC于F，连接OB，OC，先证明AF垂直平分BC，再利用切线的性质得$AE\perp OA$，推出$AE/\!/BC$，然后根据平行四边形的判定得到结论；

（2）利用平行四边形的性质得$BC=AE=10$，再利用AF垂直平分BC得到$BF=5$，则利用勾股定理可计算出$AF=12$. 设⊙O的半径为r，利用勾股定理得到$5^2+(12-r)^2=r^2$，然后解方程即可.

（1）**证明：** 连接AO并延长，交BC于F，连接OB，OC，如图24.4-7. ∵ $OB=OC$，$AB=AC$，∴ AF垂直平分BC.

∵ AE为切线，∴ $AE\perp OA$，∴ $AE/\!/BC$.

∵ $AB/\!/CD$，∴ 四边形$ABCE$是平行四边形.

（2）**解：** ∵ 四边形$ABCE$是平行四边形，∴ $BC=AE=10$.

∵ AF垂直平分BC，∴ $BF=CF=\frac{1}{2}BC=5$.

在$\mathrm{Rt}\triangle ABF$中，$AF=\sqrt{13^2-5^2}=12$.

设⊙O的半径为r，则$OF=12-r$，$OB=r$，

在$\mathrm{Rt}\triangle OBF$中，$5^2+(12-r)^2=r^2$，

解得$r=\frac{169}{24}$，即⊙O的半径为$\frac{169}{24}$.

技巧点拨

当图形中有切线和切点时，通常连接经过切点的半径，则这条半径必与切线垂直.



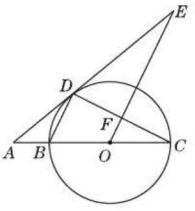
关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

同类变式（答案见184页）

6. [模拟·蜀山区] 如图，BC 为⊙O 的直径，点 D 在⊙O 上，连接 BD，CD，过点 D 的切线 AE 与 CB 的延长线交于点 A，$\angle BCD=\angle AEO$，OE 与 CD 交于点 F.

(1) 求证：$OF/\!/BD$；

(2) 当⊙O 的半径为 10，$\sin\angle ADB=\frac{2}{5}$ 时，求 EF 的长.



（第6题图）



点知识 3 切线的判定（重点）

1 **判定定理：** 经过半径外端点并且垂直于这条半径的直线是圆的切线.

要点精析

切线必须同时具备两个条件：

(1) 直线过半径的外端；

(2) 直线垂直于这条半径.



2 **判定方法：**

(1) 定义法：与圆有唯一公共点的直线是圆的切线；

(2) 数量法：圆心到直线的距离等于半径的直线是圆的切线；

(3) 判定定理：经过半径外端点并且垂直于这条半径的直线是圆的切线.

3 **证明切线的常用方法：**

(1) 有交点，连半径，证垂直.

如果已知直线经过圆上的一点，那么连接这点和圆心，得到辅助半径，再证明所作半径与这条直线垂直即可，简记为：有交点，连半径，证垂直.

(2) 无交点，作垂直，证半径.

如果已知条件中不知道直线与圆是否有公共点，那么过圆心作直线的垂线段，再证明垂线段的长度等于半径即可，简记为：无交点，作垂直，证半径.

拔考向 ▶▶▶

提分·秘诀

考查角度1 利用“作垂直，证半径”判定圆的切线

例7 如图 24.4-8，在 Rt△ABC 中，$\angle B=90°$，$\angle BAC$ 的平分线交 BC 于点 D，以点 D 为圆心，DB 的长为半径作⊙D.

求证：AC 与⊙D 相切.

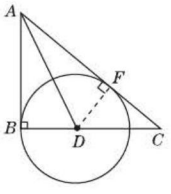


图 24.4-8

技巧点拨

如果已知条件中不知道直线与圆是否有公共点，其证法是过圆心作直线的垂线段，再证明垂线段的长等于半径的长，简记为作垂直，证半径.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

导引： 直线 AC 是否与 $\odot D$ 有公共点不确定，为此，过点 D 作 $DF \perp AC$ 于点 F，由 $d=r \Rightarrow$ 直线与圆相切可知，只需证 $DF=DB$ 即可.

证明： 如图24. 4-8，过点 D 作 $DF \perp AC$ 于点 F.

$\because \angle B=90°$，$\therefore DB \perp AB$.

又 $\because AD$ 平分 $\angle BAC$，$\therefore DF=DB$.

$\therefore AC$ 与 $\odot D$ 相切.

考查角度2 利用“连半径，证垂直”判定圆的切线

类型一：利用全等证垂直

例8 ［中考 · 盐城］如图 24. 4-9，在 $\triangle ABC$ 中，$\angle CAB=90°$，$\angle CBA=50°$，以 AB 为直径作 $\odot O$，交 BC 于点 D，点 E 在边 AC 上，且满足 $ED=EA$.

(1)求 $\angle DOA$ 的度数；

(2)求证：直线 ED 与 $\odot O$ 相切.

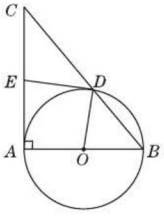


图 24. 4-9

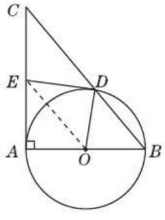


图 24. 4-10

导引： (1)由圆周角定理，得到 $\angle DOA=2\angle CBA$；(2)要证明直线 ED 与 $\odot O$ 相切，关键要证明 $\angle EDO=90°$.

(1)**解：** $\because \angle CBA=50°$，

$\therefore \angle DOA=2\angle CBA=100°$.

(2) **证明：** 连接 OE，如图 24. 4-10.

在 $\triangle EAO$ 和 $\triangle EDO$ 中，

$\because AO=DO$，$EA=ED$，$EO=EO$，

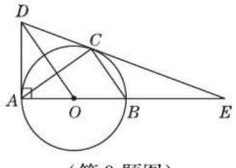
$\therefore \triangle EAO \cong \triangle EDO$.

$\therefore \angle EDO=\angle EAO=90°$.

$\therefore$ 直线 ED 与 $\odot O$ 相切.

同类变式 （答案见 185 页）

8. 如图，AB 是 $\odot O$ 的直径，点 C 在 $\odot O$ 上，连接 BC，AC，过 A 作 AB 的垂线，过 O 作 BC 的平行线，两直线交于点 D，连接 DC 并延长，交 AB 的延长线于点 E. 求证：DE 是 $\odot O$ 的切线.



（第 8 题图）

方法点拨

已知直线与圆的公共点证切线的关键就是证明“半径与直线垂直”.若已知有90°的角，则可利用三角形全等进行转化，证明未知的角等于90°，从而达到证明垂直的目的.



关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

类型二：利用平行证垂直

例9 ［模拟·瑶海区］如图24.4-11，在△ABC中，$\angle A=45°$，以AB为直径的⊙O经过AC的中点D，E为⊙O上的一点，连接DE，BE，DE与AB交于点F.

(1)求证：BC为⊙O的切线；

(2)若F为OA的中点，⊙O的半径为2，求BE的长.

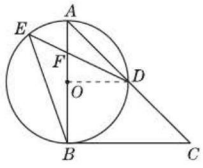


图24.4-11

导引：(1)连接OD，由三角形的中位线和切线的判定证明即可；

(2)利用勾股定理求出DF的长，再通过证明△AFD∽△EFB得到关于BE的比例式即可求出BE的长.

(1)**证明：**如图24.4-11，连接OD.

∵ $OA=OD$，$\angle A=45°$，∴ $\angle ADO=\angle A=45°$，

∴ $\angle AOD=90°$.

∵ D是AC的中点，∴ $AD=CD$，∴ $OD/\!/BC$，

∴ $\angle ABC=\angle AOD=90°$，∴ BC是⊙O的切线.

(2)**解：**由(1)可得$\angle AOD=90°$.

∵ ⊙O的半径为2，F为OA的中点，

∴ $OF=1$，$BF=3$，$AD=\sqrt{2^2+2^2}=2\sqrt{2}$，

∴ $DF=\sqrt{OF^2+OD^2}=\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt{5}$.

∵ $\overset{\frown}{BD}=\overset{\frown}{BD}$，∴ $\angle E=\angle A$. ∵ $\angle AFD=\angle EFB$，

∴ △AFD∽△EFB，

∴ $\dfrac{DF}{AD}=\dfrac{BF}{BE}$，即$\dfrac{\sqrt{5}}{2\sqrt{2}}=\dfrac{3}{BE}$，解得$BE=\dfrac{6\sqrt{10}}{5}$.

方法点拨

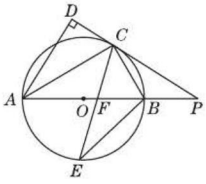
已知一条直线与某条直线垂直，要证明另一条直线也与这条直线垂直，则可证明这两条直线平行.当题目的条件出现“中点”时，则可结合圆心是任何直径的中点，构造中位线，利用中位线证明平行，从而达到证明垂直的目的.

▲**同类变式**（答案见185页）

9. ［模拟·长丰县］如图，AB是⊙O的直径，AC平分$\angle DAB$交⊙O于点C，过点C的直线垂直于AD交AB的延长线于点P，弦CE交AB于点F，连接BE.

(1)求证：PD是⊙O的切线；

(2)若$PC=PF$，试证明CE平分$\angle ACB$.



（第9题图）

考查角度3 圆的切线的性质与判定的综合

例10 ［中考·湖州］如图24.4-12，已知BC是⊙O的直径，AC切⊙O于点C，AB交⊙O于点D，E为AC的中点，连接DE.

(1)若$AD=DB$，$OC=5$，求切线AC的长；

(2)求证：DE是⊙O的切线.

导引：(1)已知BC是⊙O的直径，可连接CD，构造直径所对的圆周角，结合$AD=DB$，可得$AC=BC$.

(2)要证DE是圆的切线，而点D在圆上，可联想到连接OD，设法证$DE\perp OD$即可.

方法点拨

看到切线，就想到作过切点的半径；看到直径就想到直径所对的圆周角是直角；看到切线的判定，就想到：① 若已知直线与圆的公共点，则采用判定定理法，其基本思路是当已知点在圆上时，连接过这点的半径，证明这条半径与直线垂直即

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

(1)**解:** 连接 CD,如图 24.4-12.

$\because BC$ 是 $\odot O$ 的直径,

$\therefore \angle BDC=90°$,即 $CD\perp AB$.

$\because AD=DB$,

$\therefore AC=BC=2OC=10$.

(2) **证明:** 连接 OD,如图 24.4-12.

$\because \angle ADC=90°$,E 为 AC 的中点,

$\therefore DE=EC=\frac{1}{2}AC$. $\therefore \angle 1=\angle 2$.

$\because OD=OC$,$\therefore \angle 3=\angle 4$.

$\because AC$ 切 $\odot O$ 于点 C,$\therefore AC\perp OC$.

$\therefore \angle 1+\angle 3=\angle 2+\angle 4=90°$,即 $DE\perp OD$.

$\therefore DE$ 是 $\odot O$ 的切线.

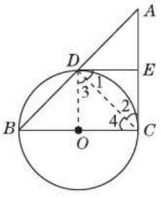


图 24.4-12

可,可简述为:有交点,连半径,证垂直;② 若不知道直线与圆是否有交点,则采用数量关系法,其基本思路是过圆心作直线的垂线段,证明垂线段的长等于圆的半径,可简述为:无交点,作垂直,证半径.

点知识 4 切线长定理(重难点)

1 切线长的定义: 切线上一点到切点之间的线段长叫做这点到圆的切线长.

要点精析///

切线是直线,不可度量;切线长是切线上切点与切点外另一点之间的线段的长,可以度量.

2 切线长定理: 过圆外一点作圆的两条切线,两条切线长相等,圆心与这一点的连线平分两条切线的夹角.


切线长定理

要点精析///

(1) 由切线长定理既可以得到线段相等,又可以得到角相等,运用时要根据题意选用.

(2) 图 24.4-13 是切线长定理的一个基本图形,可以直接得到很多结论.

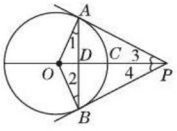


图 24.4-13

如:①$PO\perp AB$;

②$AO\perp AP$,$BO\perp BP$;

③$AP=BP$;④$\angle 1=\angle 2=\angle 3=\angle 4$;

⑤$AD=BD$;⑥$\overset{\frown}{AC}=\overset{\frown}{BC}$等.

拔考向 ▶▶▶ 提分·秘诀

考查角度1 利用切线长定理进行边角计算

例 11 如图 24.4-14,PA,PB 是 $\odot O$ 的切线,A,B 是切点,点 C 是 $\overset{\frown}{AB}$ 上一点,过点 C 作 $\odot O$ 的切线,分别交 PA,PB 于点 D,E. 已知 $\angle APB=60°$,$\odot O$ 的半径为 $\sqrt{3}$,则 $\triangle PDE$ 的周长为_____,$\angle DOE$ 的度数为_____.

导引: 如图 24.4-14,连接 PO,CO,AO,BO,由切线长定理知 $PA=PB$,$DC=DA$,$EC=EB$,且 $\angle APO=\frac{1}{2}\angle APB=30°$,因而 $\triangle PDE$ 的周长可转化为 $PA+PB$,即 $2PA$.

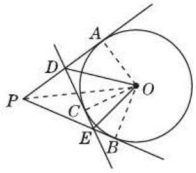


图 24.4-14

$\because AO=\sqrt{3}$,由切线的性质,得 $\angle PAO=90°$,

$\therefore PO=2\sqrt{3}$.

方法点拨

利用切线长定理进行几何计算时,要注意构成切线长定理的基本图形,作过切点的半径、连接圆外一点与圆心是常用的作辅助线的方法.由于切线长定理涉及的线段、角较多,因此,熟记基本图形的相关结论是解题的关键,而三角形的有关性质在解决切线问题时,也起到了很好的辅助作用.

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

$\therefore PA=\sqrt{PO^2-AO^2}=3.\therefore \triangle PDE$ 的周长为 6.

由切线长定理，易得 $\angle DOC=\frac{1}{2}\angle AOC$，$\angle EOC=\frac{1}{2}\angle BOC$，

$\therefore \angle DOE=\frac{1}{2}(\angle AOC+\angle BOC)=\frac{1}{2}\angle AOB.$

在四边形 $OAPB$ 中，$\angle APB=60°$，$\angle PBO=\angle PAO=90°$，

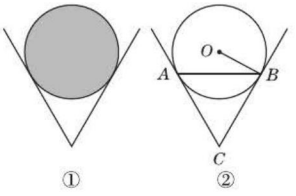
$\therefore \angle AOB=120°.\therefore \angle DOE=60°.$

答案： 6；60°

同类变式 （答案见 185 页）



11. ［中考 · 新疆］一个圆球放置在 V 形架中如图①，图②是它的平面示意图，CA 与 CB 都是 $\odot O$ 的切线，切点分别是 A，B. 如果 $\odot O$ 的半径为 $2\sqrt{3}$ cm，且 $AB=6$ cm，求 $\angle ACB$ 的度数.



（第 11 题图）

考查角度2 利用切线长定理进行证明

例 12 如图 24.4-15，PA，PB 是 $\odot O$ 的切线，切点分别为 A，B，BC 为 $\odot O$ 的直径，连接 AB，AC，OP.

求证：(1) $\angle APB=2\angle ABC$；(2) $AC/\!/OP$.

导引： (1) 由切线长定理知 $\angle BPO=\angle APO=\frac{1}{2}\angle APB$，而要证 $\angle APB=2\angle ABC$，即证明 $\angle ABC=\frac{1}{2}\angle APB=\angle BPO$，利用同角的余角相等可证；(2) 证明 $AC/\!/OP$，可用 $AC\perp AB$，$OP\perp AB$，也可用同位角相等来证.

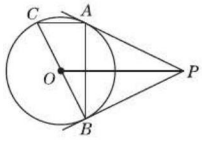


图 24.4-15

证明： (1) $\because PA$，PB 分别切 $\odot O$ 于点 A，B，

$\therefore$ 由切线长定理知 $\angle BPO=\angle APO=\frac{1}{2}\angle APB$，$PA=PB.$

$\therefore PO\perp AB.\therefore \angle ABP+\angle BPO=90°.$

又 $\because PB$ 是 $\odot O$ 的切线，$\therefore OB\perp PB.\therefore \angle ABP+\angle ABC=90°.$

$\therefore \angle ABC=\angle BPO=\frac{1}{2}\angle APB$，即 $\angle APB=2\angle ABC.$

(2) $\because BC$ 是 $\odot O$ 的直径，

$\therefore \angle BAC=90°$，即 $AC\perp AB$. 由 (1) 知 $OP\perp AB$，$\therefore AC/\!/OP.$

方法点拨

切线长定理的内容揭示两个方面，一是切线长相等，揭示线段之间的数量关系；二是与圆心的连线平分两切线的夹角.这两个方面的内容为证明线段之间的关系或者角之间的关系提供了条件.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

点方法·拨技巧 提高分

拔尖角度 1 利用方程思想解决与切线有关的问题

例 13 如图 24.4-16，已知△ABC是边长为 4 的等边三角形，点 O 在边 AB 上，⊙O 过点 B 且分别与边 AB，BC 相交于点 D，E，$EF\perp AC$，垂足为 F.

(1)求证：直线 EF 是⊙O 的切线；

(2)当直线 DF 与⊙O 相切时，求⊙O 的半径.

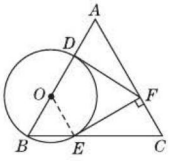


图 24.4-16

导引：(1)要证直线 EF 是⊙O 的切线，由于点 E 在圆上，因此，只要连半径 OE，证 $OE\perp EF$ 即可.(2)由 DF 是⊙O 的切线，得出△ADF 是直角三角形. ∵ $\angle A=60°$，∴ $\angle AFD=30°$，由此得出 $AF=2AD$，同理得 $EC=2FC$. 设⊙O 的半径为 r，用含 r 的代数式表示 EC，AD，AF，FC 等线段的长，构建方程即可求出 r 的值.

(1) **证明：** 如图 24.4-16，连接 OE，则 $OB=OE$. ∵ △ABC 是等边三角形，

∴ $\angle B=\angle C=60°$.

∴ △OBE 是等边三角形.

∴ $\angle OEB=\angle C=60°$. ∴ $OE/\!/AC$.

∵ $EF\perp AC$，∴ $EF\perp OE$.

∴ EF 是⊙O 的切线.

(2)**解：** ∵ DF 是⊙O 的切线，

∴ $\angle ADF=\angle ODF=90°$.

设⊙O 的半径为 r，

则由(1)得 $BE=r$，$EC=4-r$，$AD=4-2r$.

在 Rt△ADF 中，∵ $\angle A=60°$，

∴ $\angle AFD=30°$. ∴ $AF=2AD=8-4r$.

∴ $FC=4-(8-4r)=4r-4$.

在 Rt△CEF 中，∵ $\angle C=60°$，

∴ $\angle FEC=30°$. ∴ $EC=2FC$.

∴ $4-r=2(4r-4)$，解得 $r=\frac{4}{3}$.

∴ ⊙O 的半径是 $\frac{4}{3}$.

方法点拨： 证明直线和圆相切时，先认真审题，确定出直线上有无点在圆上，此题中点 E 在⊙O 上，所以我们用“连 OE，证 OE⊥EF”的方法证明 EF 是⊙O 的切线，即连半径，证垂直.

拔尖角度 2 利用切线的性质解决函数与方程的综合问题

例 14 如图 24.4-17，⊙O 的直径 $AB=12$，AM 和 BN 是⊙O 的两条切线，DC 切⊙O 于点 E，交 AM 于点 D，交 BN 于点 C. 设 $AD=x$，$BC=y(x<y)$.

(1)求 y 与 x 的函数关系式(不必写出 x 的取值范围)；

(2)若 x，y 是关于 t 的方程 $2t^2-30t+m=0$ 的两根，求 x，y 的值；

(3)在(2)的条件下，求△COD 的面积.

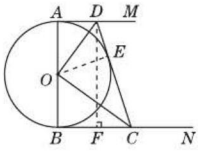


图 24.4-17

导引：(1)由切线长定理，可得 $CD=AD+BC=x+y$，过点 D 作 $DF\perp BC$ 于点 F，可得 $CF=y-x$，再由勾股定理可建立 y 与 x 的函数关系式；(2)利用一元二次方程根与系数的关系求 x，y 的值；(3)连接 OE，由(1)(2)知 CD 及 OE 的长，且 $OE\perp DC$，从而可知△COD 的面积.

解：(1)如图 24.4-17，过点 D 作 $DF\perp BC$ 于点 F，易知四边形 $ABFD$ 为矩形.

∵ AM，BN，CD 分别切⊙O 于点 A，B，E，

∴ $CD=DE+CE=AD+BC=x+y$，

$CF=BC-BF=BC-AD=y-x$.

∵ $CD^2=CF^2+DF^2$，

∴ $(x+y)^2=(y-x)^2+12^2$，

整理，得 $y=\frac{36}{x}$.

∴ y 与 x 的函数关系式是 $y=\frac{36}{x}$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

(2)∵ x,y 是关于 t 的方程 $2t^2-30t+m=0$ 的两根，

∴ $x+y=15$. 与 $y=\frac{36}{x}$ 联立得方程组

$$\begin{cases}x+y=15,\\ y=\frac{36}{x},\end{cases}\quad 解得\begin{cases}x_1=3,\\ y_1=12,\end{cases}\begin{cases}x_2=12,\\ y_2=3.\end{cases}$$

∵ $x<y$，∴ $x=3,y=12$.

(3)如图 24.4-17，连接 OE.

∵ CD 是⊙O 的切线，E 为切点，

∴ $OE\perp DC$. 又由(1)(2)知，$CD=x+y=15$，$OE=\frac{1}{2}AB=6$，

∴ $S_{\triangle COD}=\frac{1}{2}\times 15\times 6=45$.

拔尖角度 3　利用直线与圆的位置关系解决圆的动态探索问题

例 15　如图 24.4-18，⊙O 的直径 $AB=4$，C 为圆周上一点，$AC=2$，过点 C 作⊙O 的切线 DC，点 P 为优弧 CBA 上一动点(不与 A，C 重合).

(1)求∠APC 与∠ACD 的度数.

(2)当点 P 移动到$\overset{\frown}{CB}$的中点时，求证：四边形 $OBPC$ 是菱形.

(3)点 P 移动到什么位置时，△APC 与△ABC 全等？请说明理由.

导引：(1)由直径 $AB=4$，可得半径 $OA=OC=2$，又 $AC=2$，得到 $AC=OC=OA$，即△AOC 为等边三角形，可得出三个内角都为 60°. 再由同弧所对的圆心角等于所对圆周角的 2 倍，得到∠$APC=30°$. 由 CD 为⊙O 的切线，得到 $OC\perp CD$，可得出∠$OCD=90°$，用∠$OCD-$∠OCA 可得出∠ACD 的度数. (2)连接 OP. 由∠$AOC=60°$，AB 为⊙O 的直径，得到∠$BOC=120°$. 再由 P 为$\overset{\frown}{CB}$的中点，得到$\overset{\frown}{CP}=\overset{\frown}{PB}$，根据等弧对应的圆心角相等，可得出∠$COP=$∠$BOP=60°$，进而得到△$COP$与△$BOP$ 都为等边三角形，可得出 $OC=OB=PC=PB$，因此，四边形 $OBPC$ 是菱形. (3)P 有两个位置使△APC 与△ABC 全等：当 P 与 B 重合时，显然两个三角形全等. 当 CP 为⊙O 的直径时，此时两个三角形全等. 理由：当 CP 与 AB 都为圆的直径时，根据直径所对的圆周角为直角可得出△ACP 与△ABC 均为直角三角形，由 $AB=CP$，AC 为公共边，即可得到△CPA 与△ABC 全等.

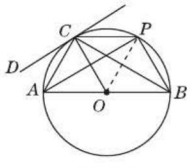


图 24.4-18

(1)**解：**∵ $AC=2$，$OA=OB=OC=\frac{1}{2}AB=2$，

∴ $AC=OA=OC$.

∴ △AOC 为等边三角形.

∴ ∠$AOC=$∠$ACO=$∠$OAC=60°$.

∴ $\angle APC=\frac{1}{2}\angle AOC=30°$.

又∵ DC 与圆 O 相切于点 C，

∴ $OC\perp DC$，∴ ∠$DCO=90°$.

∴ ∠$ACD=$∠$DCO-$∠$ACO=90°-60°=30°$.

(2)**证明：**连接 OP，如图 24.4-18 所示.

∵ AB 为⊙O 的直径，∠$AOC=60°$，

∴ ∠$BOC=120°$.

∴ 当点 P 移动到$\overset{\frown}{CB}$的中点时，∠$COP=$∠$POB=60°$.

∴ △COP 和△BOP 都为等边三角形.

∴ $OC=CP=OB=PB$.

∴ 四边形 $OBPC$ 是菱形.

(3)**解：**当点 P 与 B 重合时，△ABC 与△APC 重合，显然△$ABC\cong$△APC.

当点 P 继续运动到 CP 经过圆心时，△$ABC\cong$△CPA，理由：

∵ CP 与 AB 都为⊙O 的直径，

∴ ∠$CAP=$∠$ACB=90°$，$AB=CP$.

在 Rt△ABC 与 Rt△CPA 中，$\begin{cases}AB=CP,\\ AC=CA,\end{cases}$

∴ Rt△$ABC\cong$Rt△CPA.

综上所述，当点 P 与点 B 重合或 CP 经过圆心时，△APC 与△ABC 全等.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

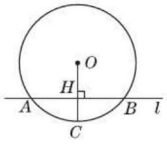
练中考·练模拟 得满分 （答案见185页）

基础巩固练

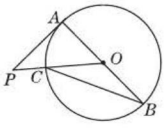
1. 如图，⊙O的半径$OC=5$ cm，直线$l\perp OC$，垂足为H，且l交⊙O于A，B两点，$AB=8$ cm. 要使l与⊙O相切，则l沿OC所在直线向下平移的距离是（　　）

A. 1 cm　　B. 2 cm

C. 3 cm　　D. 4 cm



（第1题图）



（第2题图）

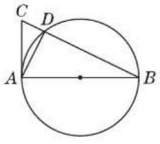
2. ［中考·自贡］如图，AB是⊙O的直径，PA切⊙O于点A，PO交⊙O于点C，连接BC，若$\angle P=40°$，则$\angle B$等于（　　）

A. 20°　　B. 25°　　C. 30°　　D. 40°

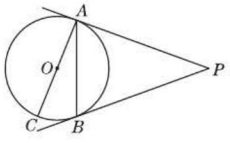
3. 如图，在$\triangle ABC$中，$AB=2$，$AC=1$，以AB为直径的圆与AC相切，与边BC交于点D，则AD的长为（　　）

A. $\frac{2}{5}\sqrt{5}$　　B. $\frac{4}{5}\sqrt{5}$

C. $\frac{2}{5}\sqrt{3}$　　D. $\frac{4}{5}\sqrt{3}$



（第3题图）

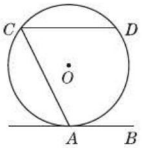


（第4题图）

4. ［模拟·重庆］如图，已知PA，PB是⊙O的切线，A，B为切点，AC是⊙O的直径，$\angle P=40°$，则$\angle BAC$的大小是（　　）

A. 70°　　B. 40°　　C. 50°　　D. 20°

5. ［期末·蜀山区］如图，⊙O的半径为5，直线AB与⊙O相切于点A，AC，CD是⊙O的两条弦，且$CD\parallel AB$，$CD=6$，则弦AC的长为（　　）



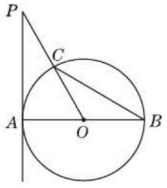
（第5题图）

A. $6\sqrt{2}$　　B. $5\sqrt{3}$　　C. $4\sqrt{5}$　　D. $3\sqrt{10}$

6. ［期末·桐城］如图，AB是⊙O的直径，直线PA与⊙O相切于点A，PO交⊙O于点C，连接BC，若$\angle P=30°$.

（1）求$\angle ABC$的度数；

（2）若$BC=6$，求PC的长.

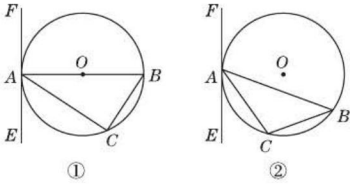


（第6题图）

7. ［模拟·赤峰］已知$\triangle ABC$内接于⊙O，过点A作直线EF.

（1）如图①，若AB为直径，要使得EF是⊙O的切线，还需要添加的条件是（只需写出两种不同情况）①_____或②_____；

（2）如图②，若AB为非直径的弦，$\angle CAE=\angle B$，试说明EF是⊙O的切线.



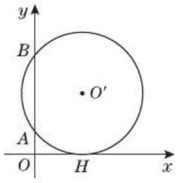
（第7题图）

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

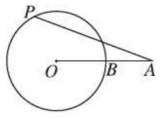
能力提升练

8. [模拟·铜陵县] 如图，点 O' 在第一象限，$\odot O'$ 与 x 轴相切于 H 点，与 y 轴相交于 $A(0,2)$，$B(0,8)$，则点 O' 的坐标是(　　)

A. (6,4)　B. (4,6)　C. (5,4)　D. (4,5)



(第 8 题图)

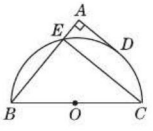


(第 9 题图)

9. 如图，已知线段 OA 交 $\odot O$ 于点 B，且 $OB = AB$，点 P 是 $\odot O$ 上的一个动点，那么 $\angle OAP$ 的最大值是(　　)

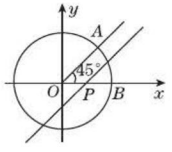
A. 30°　B. 45°　C. 60°　D. 90°

10. 如图，BC 是半圆形 O 的直径，点 D 是半圆上一点，过点 D 作半圆形 O 的切线 AD，$BA \perp DA$ 于点 A，BA 交半圆形 O 于点 E. 已知 $BC = 10$，$AD = 4$，那么直线 CE 与以点 O 为圆心，$\frac{5}{2}$ 为半径的圆的位置关系是_____.



(第 10 题图)

11. [中考·兰州] 如图，已知 $\odot O$ 是以坐标原点 O 为圆心，1 为半径的圆，$\angle AOB = 45°$，点 P 在 x 轴上运动. 若过点 P，且与 OA 平行的直线与 $\odot O$ 有公共点，设 $P(x,0)$，则 x 的取值范围是_____.

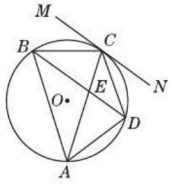


(第 11 题图)

12. [模拟·马鞍山] 如图，$\odot O$ 为 $\triangle ABC$ 的外接圆，$AB = AC$，直线 MN 与 $\odot O$ 相切于点 C，弦 $BD // MN$，AC 与 BD 相交于点 E.

(1) 求证：$\triangle ABE \backsim \triangle ACD$；

(2) 若 $AB = 5$，$BC = 3$，求 AE.

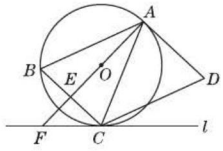


(第 12 题图)

13. [期末·蜀山区] 如图，$\odot O$ 经过平行四边形 $ABCD$ 的 A，B，C 三个顶点，并与边 AD 相切，连接 AO 并延长交 BC 于点 E，交过点 C 的直线 l 于点 F，且 $\angle BCF = \angle ACD$.

(1) 判断直线 l 与 $\odot O$ 的位置关系，并说明理由；

(2) 若 $AB = 6$，$BC = 4$，求 $\odot O$ 的半径.



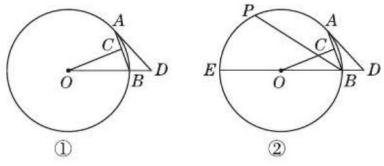
(第 13 题图)

思维拓展练

14. [模拟·繁昌县] 如图①，在 $\odot O$ 中，OC 垂直于弦 AB，C 为垂足，作 $\angle BAD = \angle BOC$，AD 与 OB 的延长线交于 D.

(1) 求证：直线 AD 是 $\odot O$ 的切线；

(2) 如图②，延长 BO，交 $\odot O$ 于点 E，点 P 是劣弧 AE 的中点，$AB = 5$，$OB = \frac{13}{2}$，求 PB 的长.　【导学号：9142562】



(第 14 题图)

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

24.5 三角形的内切圆

核心知识
- 三角形的内切圆
- 三角形内切圆的作法

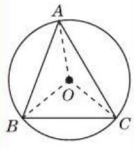
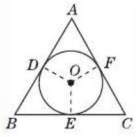
知识链接
三角形的内切圆
- 内心 → 两条内角平分线的交点
- 半径 → 内心到边的距离

点知识·拨考向 速提分

点知识 1 三角形的内切圆(重点)

1 **定义:** 与三角形三边都相切的圆叫做三角形的内切圆. 内切圆的圆心是三角形三条角平分线的交点,叫做三角形的内心.

2 **三角形的外接圆与内切圆以及外心与内心的性质:**

图形	⊙O 的名称	△ABC 的名称	圆心 O 的确定	"心"的性质	"心"的位置
	△ABC 的外接圆	⊙O 的内接三角形	三角形三边垂直平分线的交点	到三角形的三个顶点的距离相等	锐角三角形在三角形的内部;直角三角形在斜边的中点处;钝角三角形在三角形的外部
	△ABC 的内切圆	⊙O 的外切三角形	三角形三条角平分线的交点	到三角形的三条边的距离相等	一定在三角形内部

要点精析///

(1)任意一个三角形都只有一个内切圆和一个外接圆;

(2)一个圆有无数个外切三角形、内接三角形.

拓展///

(1)三角形的面积为 S,周长为 l,内切圆半径为 r,则 $S=\frac{1}{2}lr$.

(2)直角三角形内切圆的半径 $r=\frac{1}{2}$(直角边长 a + 直角边长 b − 斜边长 c).

拨考向 ▸▸▸ 提分·秘诀

考查角度1 利用内心的意义和性质求角

例1 如图 24.5-1,点 O 是△ABC 的内切圆的圆心. 若∠BAC = 80°,则∠BOC 的度数为(　　)

A. 130°　　B. 100°

C. 50°　　D. 65°

技巧点拨

根据内心的确定方法可知,内心就是三角形三条角平分线的交点,解决此类问题可以将其转化为三角形中求两条角平分线的夹角问题.

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

导引： 由题意知，BO，CO 分别是 $\angle ABC$，$\angle ACB$ 的平分线，$\therefore \angle OBC+\angle OCB=\frac{1}{2}(\angle ABC+\angle ACB)=\frac{1}{2}\times(180°-80°)=50°$.

$\therefore \angle BOC=180°-50°=130°$.

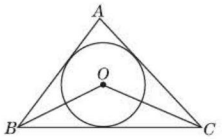


图 24.5-1

答案： A

考查角度2 利用三角形内切圆的性质进行计算

例2 如图 24.5-2，$\odot O$ 是 $Rt\triangle ABC$ 的内切圆，切点分别为 D，E，F，$\angle C=90°$，$AC=3$，$BC=4$，求 $\odot O$ 的半径 r.

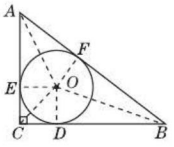


图 24.5-2

解： 方法一：如图 24.5-2，连接 OA，OB，OC，OD，OE，OF，

则 $OD=OE=OF=r$，且 $OD\perp BC$，$OE\perp AC$，$OF\perp AB$.

在 $Rt\triangle ABC$ 中，

$AB=\sqrt{AC^2+BC^2}=\sqrt{3^2+4^2}=5$.

$\because S_{\triangle ABC}=S_{\triangle COB}+S_{\triangle BOA}+S_{\triangle AOC}$，

$\therefore \frac{1}{2}AC\cdot BC=\frac{1}{2}BC\cdot r+\frac{1}{2}AB\cdot r+\frac{1}{2}AC\cdot r=\frac{1}{2}(BC+AB+AC)\cdot r$.

$\therefore r=\frac{AC\cdot BC}{BC+AB+AC}=\frac{3\times4}{4+5+3}=1$.

方法二：如图 24.5-2，连接 OD，OE，OF，

则 $OE\perp AC$，$OD\perp BC$，$OF\perp AB$.

又 $\because EC\perp CD$，且 $OE=OD=r$，

$\therefore$ 四边形 $OECD$ 是正方形. $\therefore EC=CD=r$.

$\therefore AB=AF+BF=AE+BD=(AC-EC)+(BC-CD)=3-r+4-r=7-2r$.

又易知 $AB=\sqrt{AC^2+BC^2}=\sqrt{3^2+4^2}=5$，

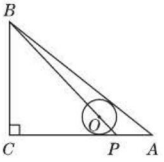
$\therefore 7-2r=5$，解得 $r=1$.

方法点拨

- 求三角形内切圆的半径问题，作辅助线的一般方法：连顶点、内心产生角平分线；连切点、内心产生半径及垂直条件.
- 三角形的内切圆的半径与三角形边长的关系：① 若 $\triangle ABC$ 中 $\angle A$，$\angle B$，$\angle C$ 的对边分别为 a，b，c，内切圆的半径为 r，则 $r=\frac{2S_{\triangle ABC}}{a+b+c}$；② 若 ① 中 $\triangle ABC$ 为直角三角形，且 $\angle C=90°$，则 $r=\frac{a+b-c}{2}$.

同类变式 （答案见 187 页）

2. 如图，在 $\triangle ABC$ 中，$\angle C=90°$，$AC=8$，$AB=10$，点 P 在 AC 上，$AP=2$. 若 $\odot O$ 的圆心在线段 BP 上，且 $\odot O$ 与 AB，AC 都相切，求 $\odot O$ 的半径.



（第 2 题图）

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

点知识 2 三角形内切圆的作法

已知：图 24.5-3 中的△ABC.

求作：一个圆，使它与△ABC 的三边都相切.

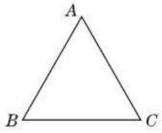


图 24.5-3

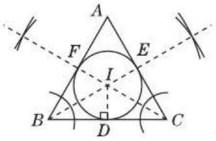


图 24.5-4

作法：如图 24.5-4.

(1) 作△ABC 中∠ABC，∠ACB 的平分线 BE，CF，设它们交于点 I；

(2) 过点 I 作 $ID \perp BC$，垂足为点 D；

(3) 以点 I 为圆心，ID 的长为半径作⊙I，则⊙I 即为所求.

要点精析

三角形三条角平分线相交于同一点，故只需要作两个角的平分线，就得到了交点，即三角形内切圆的圆心，而内切圆的半径是圆心到各边的距离. 找准了内切圆的圆心和半径，即可作出三角形的内切圆.

核考向

提分·秘诀

考查角度 利用三角形的内切圆解决问题

例 3 如图 24.5-5，是一块直角三角形形状的木板余料，木匠师傅要在此余料上锯出一块圆形的木板制作凳面，并使锯出的凳面的面积最大.

(1) 请你试着用直尺和圆规画出此圆（要求尺规作图，写出作法）；

(2) 若此直角三角形 ABC 的两条直角边长分别为 30 cm 和 40 cm，试求此圆凳面的面积.

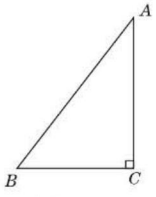


图 24.5-5

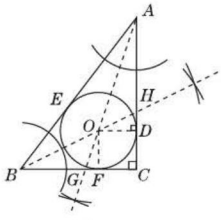


图 24.5-6

导引： 要想使锯出的凳面的面积最大，则需作出此直角三角形的内切圆，然后根据作图情况，求出圆凳面的半径，进而求其面积.

解： (1) 如图 24.5-6. 作法如下：

①作△ABC 中∠BAC，∠ABC 的平分线，它们相交于点 O；②过点 O 作 $OD \perp AC$，垂足为点 D；③以点 O 为圆心，OD 的长为半径作圆.

⊙O 即为△ABC 的内切圆，也就是所求的圆形凳面.

(2) 如图 24.5-6，设 AB，BC 两边与⊙O 的切点分别为 E，F，⊙O 的半径为 r cm. 连接 OF，则四边形 $OFCD$ 为正方形，$CD = CF = OD = r$ cm.

根据切线长定理，得 $AE = AD = (40 - r)$ cm，$BE = BF = (30 - r)$ cm.

方法点拨

本题是作图题和计算题组合而成的实际应用型问题，引导我们利用所学的数学知识解决实际问题，培养“用数学”的意识.



关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

在 Rt△ABC 中，$AB=\sqrt{30^2+40^2}=50(\text{cm})$，

即 $AE+BE=50$ cm，

∴ $(40-r)+(30-r)=50$. ∴ $r=10$.

∴ $S_{\odot O}=\pi\cdot r^2=\pi\times10^2=100\pi(\text{cm}^2)$.

点方法·拨技巧 提高分

拔尖角度 1 利用三角形的内切圆进行证明

例 4 如图 24.5-7，在△ABC 中，边 AC 上有一点 D 满足 $DC=2AD$，O 是△BDC 的内心，E，F 分别为⊙O 与边 BD，DC 的切点，$BD=BC$.

(1)求证：①$AE\perp EF$，②$AE/\!/DO$；

(2)若 $AC=6$，⊙O 的半径为 1，求 AE 的长.

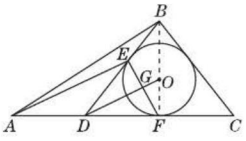


图 24.5-7

(1) **证明：** ①如图24.5-7，连接 OB，OF.

∵ 点 O 是△BDC 的内心，

∴ BO 平分∠DBC.

∵ CD 与⊙O 相切，∴ $OF\perp CD$.

∵ $BD=BC$，∴ B，O，F 三点共线，

∴ $DF=CF$.

∵ $DC=2AD$，∴ $AD=DF$.

∵ BD 与⊙O 相切，

∴ 由切线长定理可知 $DE=DF$，

∴ $AD=DE=DF$，

∴ A，E，F 三点共圆，且圆心为 D.

∵ AF 是⊙D 的直径，

∴ ∠$AEF=90°$，∴ $AE\perp EF$.

②∵ O 是△BDC 的内心，

∴ DO 平分∠BDC，∴ ∠$EDF=2\angle EDO$.

∵ ∠$EDF=\angle DAE+\angle DEA$，∠$DAE=\angle DEA$，

∴ $2\angle EDO=2\angle DEA$，

∴ ∠$EDO=\angle DEA$，∴ $AE/\!/DO$.

(2) **解：** 如图24.5-7，设 DO 与 EF 相交于点 G. 由(1)可知 $DE=DF$，DO 平分∠EDF，

∴ $DO\perp EF$. ∴ $EG=GF$.

∵ $AD=DF=CF$，$AC=6$，∴ $DF=2$.

∵ $OF=1$，∴ 由勾股定理可得 $OD=\sqrt{5}$.

∵ $\frac{1}{2}DF\cdot OF=\frac{1}{2}OD\cdot FG$，

∴ $FG=\frac{2\sqrt{5}}{5}$.

∴ $EF=2FG=\frac{4\sqrt{5}}{5}$.

∵ $AF=2DF=4$，∠$AEF=90°$，

∴ 由勾股定理可得 $AE=\frac{8\sqrt{5}}{5}$.

拔尖角度 2 利用切线长定理解决内切圆问题

例 5 如图 24.5-8，在△ABC 中，$AB=AC$，⊙O 内切于△ABC，与边 BC，AC，AB 分别切于点 D，E，F.

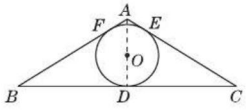


图 24.5-8

(1)求证：$BF=CE$；

(2)若∠$C=30°$，$CE=2\sqrt{3}$，求 AC 的长.

(1) **证明：** ∵ AB，AC 是由点 A 向圆引出的两条切线，F，E 分别是切点，∴ $AF=AE$.

又∵ $AB=AC$，∴ $AB-AF=AC-AE$，

∴ $BF=CE$.

(2) **解：** 如图24.5-8，连接 AD. ∵ 点 D，E，F 为切点，∴ $CD=CE$，$BD=BF$. 由(1)知 $BF=CE$，

∴ $BD=DC$，即点 D 是 BC 的中点.

又∵ △ABC 为等腰三角形，AB，AC 为腰，

∴ AD 是△ABC 的高.

∴ ∠$ADC=90°$. 在 Rt△ADC 中，

∵ ∠$C=30°$，$CD=CE=2\sqrt{3}$，

∴ $\cos 30°=\frac{CD}{AC}$，即 $\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{2\sqrt{3}}{AC}$. ∴ $AC=4$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

基础巩固练

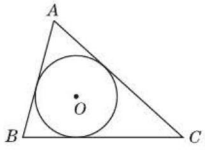
1. 如图，⊙O 是△ABC 的内切圆，则点 O 是△ABC 的（　　）

A. 三条边的垂直平分线的交点

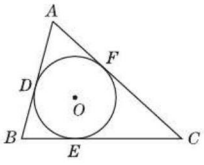
B. 三条角平分线的交点

C. 三条中线的交点

D. 三条高的交点



（第1题图）



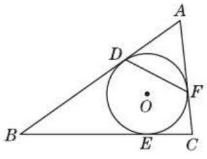
（第2题图）

2. ［模拟·东明县］如图，△ABC 的内切圆⊙O 与 AB，BC，CA 分别相切于点 D，E，F，且 $AD=2$，$BC=5$，则△ABC 的周长为（　　）

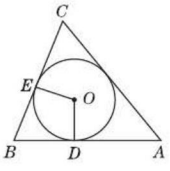
A. 16　　B. 14　　C. 12　　D. 10

3. 如图，△ABC 的内切圆⊙O 与三边分别切于 D，E，F. 若∠$A=60°$，$CB=6$ cm，△ABC 的周长为16 cm，则 DF 的长等于（　　）

A. 2 cm　　B. 3 cm　　C. 4 cm　　D. 6 cm



（第3题图）



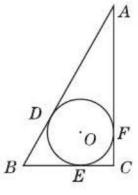
（第4题图）

4. ［期末·宜渡区］如图，⊙O 是△ABC 的内切圆，D，E 是切点，∠$A=50°$，∠$C=60°$，则∠$DOE=$（　　）

A. 70°　　B. 110°　　C. 120°　　D. 130°

5. 如图，⊙O 是△ABC 的内切圆，且∠$C=90°$，切点分别为 D，E，F. 若 AF，BE 的长是方程 $x^2-13x+30=0$ 的两个根，则△ABC 的面积为（　　）

A. 30　　B. 15　　C. 60　　D. 13



（第5题图）

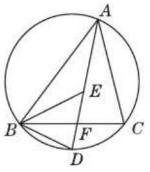
6. ［模拟·滨州］在 Rt△ABC 中，∠$C=90°$，$AB=5$，内切圆半径为1，则该三角形的周长为_____.

7. 在边长为 5 cm，5 cm，6 cm 的三角形铁皮上剪下一个最大的圆，则该圆的半径是_____ cm.

8. 如图，已知 E 是△ABC 的内心，∠BAC 的平分线交 BC 于点 F，交△ABC 的外接圆于点 D.

（1）求证：∠DEB = ∠DBE；

（2）若 $AD=8$ cm，$DF:FA=1:3$，求 DE 的长.

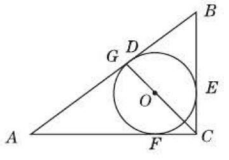


（第8题图）

9. 如图，Rt△ABC 的两直角边 AC，BC 的长分别为4，3，它的内切圆为⊙O，⊙O 分别与边 AB，BC，AC 相切于点 D，E，F. 延长 CO，交斜边 AB 于点 G.

（1）求⊙O 的半径；

（2）求线段 DG 的长.



（第9题图）

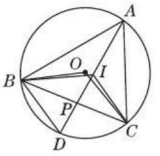
能力提升练

10. ［期末·怀远县］《九章算术》是我国古代内容极为丰富的数学名著，书中有一问题：“今有勾八步，股十五步，问勾中容圆径几何？”其意思是“今有直角三角形，勾（短直角边）长为8步，股（长直角边）长为15步，问该直角三角形能容纳的圆形（内切圆）半径是多少？”（　　）

A. 3步　　B. 5步　　C. 6步　　D. 8步

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

11. 如图，I 为 $\triangle ABC$ 的内心，AI 的延长线交 $\triangle ABC$ 的外接圆 $\odot O$ 于点 D，交 BC 于点 P，连接 BD, BI, CI, BO, CO，下列结论：



（第 11 题图）

①$DI = DB$；②$DB^2 = DP \cdot DA$；③$\angle BIC = 90° + \frac{1}{4}\angle BOC$.

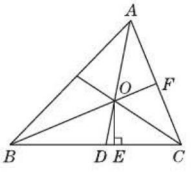
其中正确结论的个数是(　　)

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 0

12. 如图，$\triangle ABC$ 的三条内角平分线相交于点 O，过点 O 作 $OE \perp BC$ 于 E 点.

(1) 求证：$\angle BOD = \angle COE$.

(2) 如果 $AB = 25, AC = 7, BC = 24$，利用三角形内心性质及相关知识，求 OE 的长.



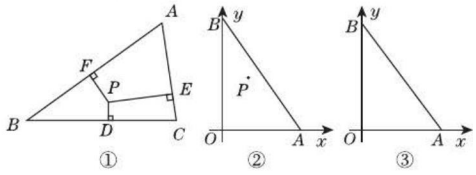
（第 12 题图）

13. 我们把三角形内部的一个点到这个三角形三边所在直线距离的最小值叫做这个点到这个三角形的距离. 如图①，$PD \perp BC$ 于 D，$PE \perp AC$ 于 E，$PF \perp AB$ 于 F，如果 $PE \geqslant PF \geqslant PD$，那么称 PD 的长度为点 P 到 $\triangle ABC$ 的距离. 如图②、图③，在平面直角坐标系中，已知 $A(6,0)$，$B(0,8)$，连接 AB.

(1) 若 P 在图②中的坐标为 $(2,4)$，则 P 到 OA 的距离为_____，P 到 OB 的距离为_____，P 到 AB 的距离为_____，所以 P 到 $\triangle AOB$ 的距离为_____；

(2) 若点 S 是图②中 $\triangle AOB$ 内的点，求点 S 到 $\triangle AOB$ 距离的最大值；

(3) 若点 R 是图③中 $\triangle AOB$ 内一点，且点 R 到 $\triangle AOB$ 的距离为 1，请画出所有满足条件的点 R 所形成的封闭图形，并求出这个封闭图形的周长（画图工具不限）.



（第 13 题图）

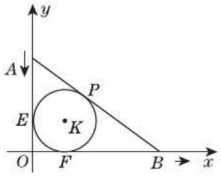
思维拓展练

14. 如图，在直角坐标系中，已知 $\angle AOB = 90°$，线段 $AB = 10$，若点 A 在射线 Oy 上滑动，点 B 在射线 Ox 上滑动（A, B 与 O 不重合），$\mathrm{Rt}\triangle AOB$ 的内切圆 $\odot K$ 分别与 OA, OB, AB 相切于点 E, F, P.

(1) 在上述变化过程中：$\mathrm{Rt}\triangle AOB$ 的周长，$\odot K$ 的半径，$\triangle AOB$ 的外接圆半径这几个量中，不会发生变化的是什么？简要说明理由.

(2) 当 $AE = 4$ 时，求 $\odot K$ 的半径 r.

(3) 当 $\mathrm{Rt}\triangle AOB$ 的面积为 S，AE 的长为 x 时，试求 S 与 x 之间的函数表达式，并求出 S 最大时 OA 的长（不必写出自变量的取值范围）.



（第 14 题图）

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

24.6 正多边形与圆

核心知识

- 正多边形
- 画正多边形
- 正多边形的性质及相关概念

知识链接

正多边形的概念、正多边形与圆 → 正多边形与圆的相关概念

利用正多边形与圆的关系画正多边形

点知识·拨考向 速提分

点知识 1 正多边形(重点)

1 **正多边形的定义**：各边相等、各角也相等的多边形叫做正多边形.

要点精析///

“各边相等、各角相等”是正多边形的两个基本特征，边数 $n\geqslant 3$(n 为整数)的多边形必须同时满足，二者缺一不可，否则多边形就不是正多边形.

2 **正多边形与圆的关系**：

圆 —分成 $n(n\geqslant 3$，且 n 为整数)条相等的弧→ 依次连接各分点所得的多边形⟶圆的内接正 n 边形

圆 —分成 $n(n\geqslant 3$，且 n 为整数)条相等的弧→ 经过各分点作圆的切线 —以相邻切线的交点为顶点的多边形→ 圆的外切正 n 边形

拨考向 ▸▸▸ 提分·秘诀

考查角度1 利用正多边形的定义识别正多边形

例1 下列说法不正确的是(　　)

A. 等边三角形是正多边形

B. 各边相等，各角也相等的多边形是正多边形

C. 菱形不一定是正多边形

D. 各角相等的多边形是正多边形

导引：等边三角形是正三角形，故 A 正确；

各边相等，各角也相等的多边形是正多边形，故 B 正确，D 不正确；

当菱形的四个角相等时才是正多边形(正方形)，所以菱形不一定是正多边形，故 C 正确.

故选 D.

答案：D

方法点拨

正多边形要从两个角度去识别，一是边都相等；二是内角都相等.

同类变式 (答案见 189 页)

1. 下列命题中，是假命题的是(　　)

A. 各边相等的圆内接多边形是正多边形

B. 各角相等的圆内接多边形是正多边形

C. 圆内接正五边形的五个顶点把圆五等分

D. 外角大于相邻内角的正多边形一定是正三角形

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

考查角度2 利用正多边形的定义证明正多边形

例2 如图 24.6-1，五边形 $ABCDE$ 内接于 $\odot O$，$\angle A=\angle B=\angle C=\angle D=\angle E$. 求证：五边形 $ABCDE$ 是正五边形.

导引： 根据同圆中相等的圆周角所对的弧相等，得出 $\overset{\frown}{BDE}=\overset{\frown}{CDA}$，利用等式的性质，两边同时减去 $\overset{\frown}{CDE}$，即可得到 $\overset{\frown}{BC}=\overset{\frown}{AE}$，根据等弧所对的弦相等，得出 $BC=AE$.

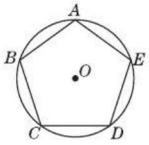


图 24.6-1

证明： $\because \angle A=\angle B=\angle C=\angle D=\angle E$，

圆周角 $\angle A$ 对 $\overset{\frown}{BDE}$，圆周角 $\angle B$ 对 $\overset{\frown}{CDA}$，

$\therefore \overset{\frown}{BDE}=\overset{\frown}{CDA}$.

$\therefore \overset{\frown}{BDE}-\overset{\frown}{CDE}=\overset{\frown}{CDA}-\overset{\frown}{CDE}$，即 $\overset{\frown}{BC}=\overset{\frown}{AE}$.

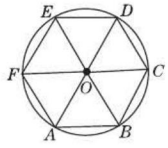
$\therefore BC=AE$. 同理可证 $AB=BC=CD=DE=AE$.

$\therefore$ 五边形 $ABCDE$ 是正五边形.

同类变式 （答案见 189 页）

2. 如图，$\triangle AOB$ 为正三角形，以 O 为圆心，OA 的长为半径作 $\odot O$，直径 $FC\parallel AB$，AO，BO 的延长线分别交 $\odot O$ 于点 D，E.

求证：六边形 $ABCDEF$ 是 $\odot O$ 的内接正六边形.



（第 2 题图）

技巧点拨

证圆内接多边形是正多边形，在图形中找到圆的弧、弦等，利用同(等)弧所对的圆周角相等、所对的弦相等解答.其证明思路如下：角相等⇒弧相等⇒弦相等⇒{各边相等 / 各角相等}⇒正多边形.

证明一个多边形是正多边形的方法：① 利用定义，证出各边相等，各角相等；② 利用圆内接多边形，证明各边所对的弧相等，即把圆 n 等分，依次连接各等分点，所得多边形即为正多边形.

考查角度3 利用正多边形的性质求边或角

例3 已知一个正多边形有一个内角是 150°，那么它是正几边形？

解： 方法一：设它是正 n 边形，

则 $150°\cdot n=(n-2)\cdot 180°$，

解得 $n=12$. $\therefore$ 它是正十二边形.

方法二：$\because$ 正多边形的每个内角都相等，

$\therefore$ 每个外角也都相等. $\therefore$ 每个外角为 $180°-150°=30°$.

又 $\because$ 多边形的外角和是 360°，$\therefore 360°\div 30°=12$，

$\therefore$ 它是正十二边形.

技巧点拨

求正多边形的边数常用的方法：一是利用正 n 边形内角和 $(n-2)\cdot 180°$ = 每个内角的度数 $\times n$，求出 n 的值；二是先求出每个外角的度数，再用 360° 除以每个外角的度数.

点知识 2 画正多边形（难点）

1 **用量角器等分圆周：** 在一个圆中，先用量角器作一个等于 $\frac{360°}{n}$ 的圆心角，这个角所对的弧就是圆周的 $\frac{1}{n}$，然后在圆周上依次截取这条弧的等弧，就得到圆周的 n 等分点，从而作出正 n 边形. 这种方法简便，且可以画任意正多边形、误差小.

2 **用尺规等分圆周：** 用尺规作图的方法等分圆周，然后依次连接圆周上各分点得到正多边形，这种方法有局限性，不是任意正多边形都能用此法作图. 这种方法从理论上讲是一种准确方法，但在作图时较复杂，同样存在作图的误差.

3 **易错警示：** 作图时，由于忽视累积误差的影响，会导致作图不准，应注意减少累积误差.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

考查角度 利用正多边形与圆的关系作正多边形

例4 作一个正三角形，使其外接圆的半径为0.9 cm.

导引： 先作出一个半径为0.9 cm的圆，再用量角器画出圆心角为120°的角(2个)，依次连接各边与圆的交点即可. 或作出圆的几个六等分点，进而作出所求作的正三角形.

解： 作法一：如图24.6-2.

(1)作半径为0.9 cm的⊙O；

(2)用量角器画$\angle AOB=\angle BOC=120°$；

(3)连接AB,BC,CA，则$\triangle ABC$为所求作的正三角形.

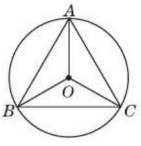


图24.6-2

作法二：如图24.6-3. (1)作半径为0.9 cm的⊙O；

(2)作⊙O的任一直径AB；

(3)以点B为圆心，以0.9 cm为半径作弧，分别交⊙O于点D,E；

(4)连接AD,DE,EA，则$\triangle ADE$为所求作的正三角形.

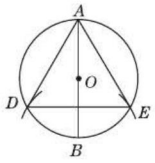


图24.6-3

方法点拨

解决这类问题通常有两种方法：(1)用量角器等分圆周；(2)用尺规等分圆周.

同类变式 (答案见189页)

4. 用直尺和圆规作一个正八边形.(不写作法，只保留作图痕迹)

点知识 3 正多边形的性质及相关概念(重点)

1 性质：

(1)任何正多边形都有一个外接圆和一个内切圆，并且这两个圆是同心圆.

(2)正多边形都是轴对称图形，一个正n边形一共有n条对称轴，每一条对称轴都通过正多边形的中心. 如果一个正多边形有偶数条边，那么它又是中心对称图形，它的中心就是对称中心.

要点精析：

(1)在判断一个正n边形的对称性时，不能仅仅局限于一种对称性，当n为偶数时，正n边形具有轴对称性、中心对称性；当n为奇数时，正n边形具有轴对称性. (2)正多边形的对称轴条数等于正多边形的边数. (3)边数相等的正多边形相似，且它们的周长比等于它们的边长比，它们的面积比等于它们边长比的平方.

2 相关概念：

名称	定义	图形
正多边形	各边相等、各角也相等的多边形叫做正多边形	
中心	一个正多边形的外接圆和内切圆的公共圆心叫做这个正多边形的中心	
半径	正多边形外接圆的半径叫做正多边形的半径	
中心角	正多边形每一条边所对的圆心角叫做正多边形的中心角	
边心距	正多边形内切圆的半径叫做正多边形的边心距	

3 与正多边形有关的计算公式：

(1)正n边形的每个内角都等于$\frac{(n-2)\cdot 180°}{n}=180°-\frac{360°}{n}$，每个外角都等于$\frac{360°}{n}$. (2)正$n$边形的每个中心角都等于$\frac{360°}{n}$. (3)正$n$边形的半径$R$、边心距$r$、边长$a$之间的关系为$\left(\frac{1}{2}a\right)^2+r^2=R^2$. (4)若正$n$边形的边长为$a$、边心距为$r$，则正$n$边形的周长$l=na$，面积$S=\frac{1}{2}arn=\frac{1}{2}rl$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

考查角度1 利用正多边形与圆的相关概念进行计算

例5 已知⊙O的半径$R=6$ cm.

(1)如图24.6-4①,求⊙O的内接正三角形ABC的边心距、边长、周长和面积;

(2)如图24.6-4②,求⊙O的内接正六边形$ABCDEF$的边心距、边长、周长和面积.

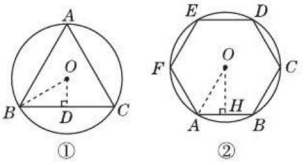


图24.6-4

导引: 解题时,作出能构成直角三角形的图形(这样很自然就产生了本题的辅助线),根据关系式$R^2=r^2+\left(\frac{a}{2}\right)^2$($R$为半径,$r$为边心距,$a$为边长)解题.

解: (1)如图24.6-4①所示,连接OB,过O作$OD\perp BC$于点D.

由题意,得$\angle BOD=\frac{1}{2}\times\frac{360^\circ}{3}=60^\circ$,$\therefore\ \angle OBD=30^\circ$.

又$\because R=6$ cm,

$\therefore$ 边心距$r=OD=\frac{1}{2}OB=\frac{1}{2}R=3$ cm.

$\therefore BD=\sqrt{OB^2-OD^2}=3\sqrt{3}$ cm.

由垂径定理得,边长$BC=2BD=6\sqrt{3}$ cm.

$\therefore$ 周长$l=3BC=18\sqrt{3}$ cm.

$\therefore$ 面积$S=\frac{1}{2}lr=\frac{1}{2}\times18\sqrt{3}\times3=27\sqrt{3}(\text{cm}^2)$.

(2)如图24.6-4②所示,连接OA,过O作$OH\perp AB$于点H.

由题意,得$\angle AOH=\frac{1}{2}\times\frac{360^\circ}{6}=30^\circ$.

$\because R=6$ cm,

$\therefore AH=\frac{1}{2}OA=\frac{1}{2}R=3$ cm.

$\therefore$ 边心距$r'=OH=\sqrt{OA^2-AH^2}=3\sqrt{3}$ cm.

由垂径定理得,边长$AB=2AH=6$ cm.

$\therefore$ 周长$l'=6AB=36$ cm.

$\therefore$ 面积$S'=\frac{1}{2}l'r'=\frac{1}{2}\times36\times3\sqrt{3}=54\sqrt{3}(\text{cm}^2)$.

方法点拨

正n边形的两条相邻的半径和它的一条边可以构成一个等腰三角形,而中心到这条边的垂线段又把这个等腰三角形分成两个全等的直角三角形(如图24.6-5),这样正n边形的有关计算就可以放到直角三角形中来处理.

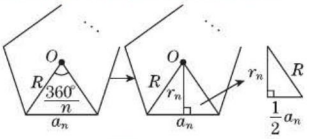
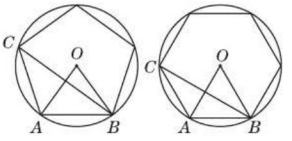


图24.6-5

同类变式 (答案见189页)

5. [模拟·霍邱县]如图①,圆内接正五边形的中心角$\angle AOB=$_____,$\angle ACB=$_____;

如图②,圆内接正六边形的中心角$\angle AOB=$_____,$\angle ACB=$_____.



(第5题图)

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

考查角度2 利用正多边形与圆的关系计算线段的问题

例6 ［月考·淮南］如图24.6-6，在正方形$ABCD$内有一折线段，其中$AE\perp EF$，$EF\perp FC$，并且$AE=3$，$EF=4$，$FC=5$，求正方形$ABCD$的外接圆的半径.

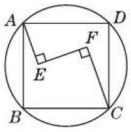


图24.6-6

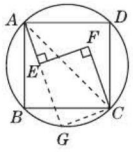


图24.6-7

导引： 首先连接AC，则可得圆的直径. 再延长AE，交圆于G，连接CG，得到$\triangle AGC$是直角三角形，且四边形$EFCG$是矩形，求出AG，CG的长，从而得到AC的长，即可求出正方形的半径.

解： 如图24.6-7，连接AC，则AC是该圆的直径. 延长AE交圆于G，连接CG，则$\angle AGC=90°$.

$\because AE\perp EF$，$EF\perp FC$，

$\therefore$ 四边形$EFCG$是矩形，

$\therefore EG=FC=5$，$GC=EF=4$，

$\therefore AG=8$.

由勾股定理，得$AC=\sqrt{8^2+4^2}=4\sqrt{5}$，

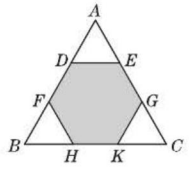
$\therefore$ 正方形$ABCD$的外接圆的半径为$2\sqrt{5}$.

方法点拨

正方形外接圆的半径等于正方形对角线长的一半，而将正多边形问题转化为三角形问题是应用正多边形的性质解题通常采用的方法，此题综合性较强，解题时要注意数形结合思想的应用.

同类变式（答案见189页）

6. ［模拟·宁晋县］如图，正三角形的边长为12 cm，剪去三个角后成为一个正六边形，则这个正六边形的内部任意一点到各边的距离和为_____cm.



（第6题图）

点方法·拨技巧 提高分

拔尖角度1 利用正多边形的性质解决面积问题

例7 如图24.6-8，是两个相同的正六边形，其中一个正多边形的顶点在另一个正多边形外接圆的圆心O处. 求重叠部分与阴影部分的面积之比.

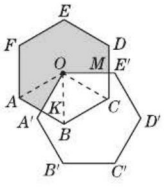


图24.6-8

导引： 要求两个正六边形重叠部分与阴影部分的面积之比，只要找到重叠部分的面积、阴影部分的面积与正六边形$ABCDEF$的面积之间的关系，即可解决问题.

解： 如图24.6-8，连接OA，OB，OC，设OA'交AB于点K，OE'交CD于点M.

$\because \angle AOK=\angle AOC-\angle KOC=120°-\angle KOC$，

$\angle MOC=120°-\angle KOC$，

$\therefore \angle AOK=\angle COM$.

又$\because \angle KAO=\angle MCO=60°$，$OA=OC$，

$\therefore \triangle AOK\cong\triangle COM$.

$\therefore S_{五边形OKBCM}=S_{四边形ABCO}=2S_{\triangle OBC}$.

$\therefore S_{阴影}=S_{正六边形ABCDEF}-S_{五边形OKBCM}=6S_{\triangle OBC}-2S_{\triangle OBC}=4S_{\triangle OBC}$.

$\therefore S_{五边形OKBCM}:S_{阴影}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$，

即重叠部分与阴影部分的面积之比为$\frac{1}{2}$.

方法点拨： 此题利用正六边形的有关性质，构造全等三角形，将不规则图形的面积转化为三角形的面积，体现了一种数学思想——转化思想，这也是解决正多边形有关问题常用到的数学思想.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

拔尖角度 2　利用中心角探究正多边形中角的变化规律

例 8　如图 24.6-9①②③…，M，N 分别是 $\odot O$ 的内接正三角形 ABC、正方形 $ABCD$、正五边形 $ABCDE$…的边 AB，BC 上的点，且 $BM=CN$，连接 OM，ON.

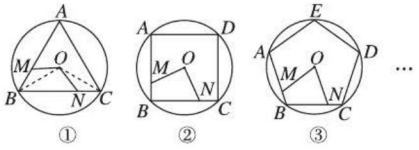


图 24.6-9

(1) 求图 24.6-9①中 $\angle MON$ 的度数；

(2) 图 24.6-9②中 $\angle MON$ 的度数是_____，图 24.6-9③中 $\angle MON$ 的度数是_____；

(3) 试探究 $\angle MON$ 的度数与正 n 边形边数 $n(n\geqslant 3)$ 的关系式(直接写出答案).

导引： 连接 OB，OC，因为 $BM=CN$，$OB=OC$，且易知 $\angle OBM=\angle OCN$，

所以 $\triangle BOM\cong\triangle CON$，

所以 $\angle BOM=\angle CON$，

从而易得 $\angle MON=\angle BOC$，

即转化为求正多边形的中心角.

解： (1) 如图 24.6-9①，连接 OB，OC.

易知 $\angle BOC=\dfrac{360°}{3}=120°$，

$\angle OBM=\angle OCN=30°$.

又∵ $BM=CN$，$OB=OC$，

∴ $\triangle BOM\cong\triangle CON$.

∴ $\angle BOM=\angle CON$.

∴ $\angle BON+\angle BOM=\angle BON+\angle CON$.

∴ $\angle MON=\angle BOC=120°$.

(2) 90°；72°

(3) $\angle MON=\dfrac{360°}{n}(n\geqslant 3)$.

方法规律： 此题运用了从特殊到一般的思想解决此类问题，关键是先对未知角进行分析，再通过三角形全等进行角度的等量转化.

练中考·练模拟 得满分 (答案见 189 页)

基础巩固练

1. [中考·株洲] 下列圆的内接正多边形中，一条边所对的圆心角最大的图形是(　　)

A. 正三角形

B. 正方形

C. 正五边形

D. 正六边形

2. [月考·颍州区] 在半径为 R 的圆中，它的内接正三角形、内接正方形、内接正六边形的边长之比为(　　)

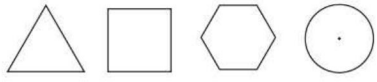
A. $1:\sqrt{2}:\sqrt{3}$

B. $\sqrt{3}:\sqrt{2}:1$

C. $1:2:3$

D. $3:2:1$

3. 一个平面封闭图形内(含边界)任意两点间距离的最大值称为该图形的“直径”，封闭图形的周长与直径之比称为图形的“周率”. 如图中四个平面图形(依次为正三角形、正方形、正六边形、圆)的周率从左到右依次记为 a_1，a_2，a_3，a_4，则下列关系中，正确的是(　　)



(第 3 题图)

A. $a_4>a_2>a_1$

B. $a_4>a_3>a_2$

C. $a_1>a_2>a_3$

D. $a_2>a_3>a_4$

4. [期末·河北] 正六边形的外接圆的半径与内切圆的半径之比为_____.

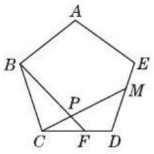
5. 以半径为 4 的圆的内接正三角形、内接正方形、内接正六边形的边心距为三边作三角形，则该三角形的面积是_____.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

6. 如图，已知正五边形$ABCDE$中，BF与CM相交于点P，$CF=DM$.

(1)求证：$\triangle BCF\cong\triangle CDM$；

(2)求$\angle BPM$的度数.

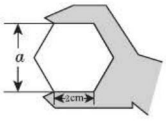


(第6题图)

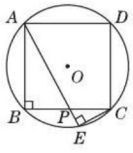
能力提升练

7. 如图，正六边形螺帽的边长是2 cm，这个扳手的开口大小a应是(　　)

A. $2\sqrt{3}$ cm　B. $\sqrt{3}$ cm　C. $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ cm　D. 1 cm



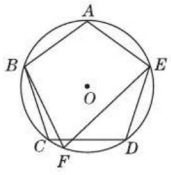
(第7题图)



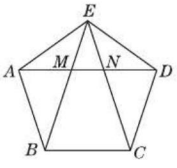
(第8题图)

8. [模拟·瑶海区]如图，正方形$ABCD$内接于$\odot O$，$AD=2$，弦AE平分BC交BC于P，连接CE，则CE的长为_____.

9. [中考·辽阳]如图，正五边形$ABCDE$内接于$\odot O$，点F在$\overset{\frown}{CD}$上，则$\angle BFE$的度数为_____.



(第9题图)



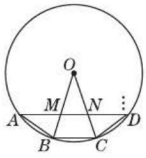
(第10题图)

10. [模拟·河北]如图，正五边形的边长为2，连对角线AD，BE，CE，线段AD分别与BE和CE相交于点M，N，则$MN=$_____.

11. 如图，已知$\odot O$的内接正十边形$ABCD\cdots$中，AD与OB，OC分别交于点M，N. 求证：

(1)$MN/\!/BC$；

(2)$MN+BC=OB$.



(第11题图)

思维拓展练

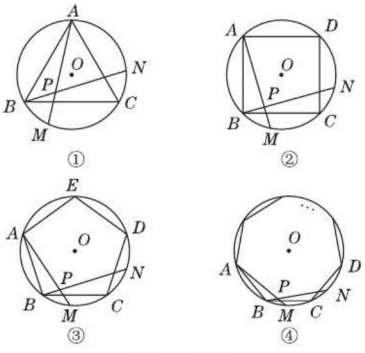
12. 如图①②③④，分别是$\odot O$的内接正三角形、正四边形、正五边形、正n边形，点M，N分别从点B，C开始以相同的速度在$\odot O$上逆时针运动. AM，BN相交于点P.

(1)图①中，$\angle APN$的度数为_____；

(2)图②中，$\angle APN$的度数是_____，图③中，$\angle APN$的度数是_____；

(3)试探索$\angle APN$的度数与正多边形边数n的关系(直接写答案).

【导学号:9142562】



(第12题图)

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

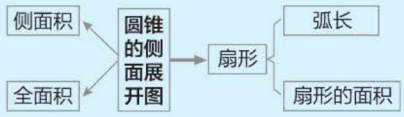
24.7 弧长与扇形面积

24.8 综合与实践　进球线路与最佳射门角

核心知识

- 弧长
- 扇形的面积
- 圆锥的侧面积与全面积

知识链接



点知识·拨考向 速提分

点知识 1 弧长公式(重点)

1 **弧长公式：** 在半径为 R 的圆中，$n°$的圆心角所对的弧长 C_1 的计算公式为 $C_1=\frac{n\pi R}{180}$.

要点精析///

(1) 应用公式时，“n”和“180”不应写单位；

(2) 题目若没有写明精确度，可以用含“π”的式子表示弧长；

(3) 在弧长公式中，已知 C_1，n，R 中任意两个量，都可求出第三个量.

2 **弧、弧长、弧的度数间的关系：**

弧相等表示弧长、弧的度数都相等；

度数相等的弧，弧长不一定相等；

弧长相等的弧，弧的度数不一定相等.

3 **易错警示：** 在弧长公式 $C_1=\frac{n\pi R}{180}$ 中，n 表示 1°的 n 倍，180 表示 1°的 180 倍，n，180 不带单位.

拨考向 ▸▸▸　提分·秘诀

考查角度1　利用弧长公式直接计算弧长

例1　如图 24.7-1，PA 切 $\odot O$ 于点 A，PB 切 $\odot O$ 于点 B，如果 $\angle APB=60°$，$\odot O$ 半径是 3，则劣弧 AB 的长为_____.

导引： 如图24.7-1，连接 OA，OB，

则 $OA\perp PA$，$OB\perp PB$.

$\because\ \angle APB=60°$，$\therefore\ \angle AOB=120°$.

$\therefore$ 劣弧 AB 的长是 $\frac{120\pi\times3}{180}=2\pi$.

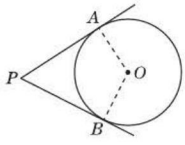


图 24.7-1

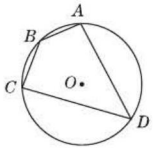
答案： 2π

同类变式 (答案见 190 页)

1-1. [中考·云南] 已知扇形的圆心角为 45°，半径长为 12，则该扇形的弧长为_____.

1-2. [中考·绍兴] 如图，四边形 $ABCD$ 是 $\odot O$ 的内接四边形，$\odot O$ 的半径为 2，$\angle B=135°$，则 $\overset{\frown}{ABC}$ 的长为(　　)

A. 2π　　B. π　　C. $\frac{\pi}{2}$　　D. $\frac{\pi}{3}$



(第 1-2 题图)

方法点拨

在弧长公式中有三个未知的量：弧长、半径、圆心角的度数，利用弧长公式可以解决已知这三个量中的两个量求第三个量的问题.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

考查角度2 利用弧长公式结合其他图形的性质求弧长

例2 ［中考·衡阳］如图24.7-2，⊙O的半径为6 cm，直线AB是⊙O的切线，切点为B，弦BC//AO. 若$\angle A=30°$，则劣弧BC的长为_____cm.

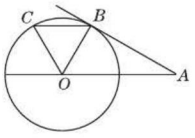


图24.7-2

导引： 由切线性质可知$\angle OBA=90°$.

因为$\angle A=30°$，所以$\angle BOA=60°$.

因为BC//AO，所以$\angle CBO=60°$.

又因为$OB=OC$，

所以$\triangle OBC$为等边三角形.

所以$\angle BOC=60°$，

所以$C_{\text{劣}}=\dfrac{n\pi R}{180}=\dfrac{60\pi\times 6}{180}=2\pi$(cm).

答案： 2π

方法点拨

本题考查了弧长的计算公式、切线的性质，根据切线的性质及圆的性质得出△OBC是等边三角形来解答本题.利用弧长公式进行计算时，关键是要确定扇形的圆心角的度数和半径.同时要熟练记忆弧长的计算公式.

考查角度3 利用弧长公式解决实际问题

例3 ［中考·达州］如图24.7-3，一条公路的转弯处是一段圆弧(即图中弧CD，点O是弧CD所在圆的圆心)，其中$CD=600$米，E为弧CD上一点，且$OE\perp CD$，垂足为F，$OF=300\sqrt{3}$米，则这段弯路的长度为(　　)

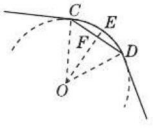


图24.7-3

A. 200π米　　B. 100π米

C. 400π米　　D. 300π米

导引： 设这段弯路所在圆的半径为R米.

$\because OE\perp CD$，$\therefore CF=\dfrac{1}{2}CD=\dfrac{1}{2}\times 600=300$(米).

根据勾股定理，得$OC^2=CF^2+OF^2$，

即$R^2=300^2+(300\sqrt{3})^2$，

解得$R=600$.

$\therefore\angle COF=30°$.

$\therefore\angle COD=60°$.

$\therefore$这段弯路的长度为$\dfrac{60\pi\times 600}{180}=200\pi$(米).

答案： A

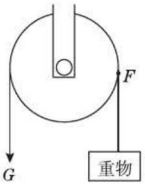
方法点拨

求弧长需要两个条件：(1)弧所在圆的半径；(2)弧所对的圆心角.当题中没有直接给出这两个条件时，需利用圆的相关知识求出.

同类变式 (答案见190页)

3. ［模拟·当涂县］如图，用一个半径为6 cm的定滑轮带动重物上升，假设绳索(粗细不计)与滑轮之间没有滑动，绳索端点G向下移动了3π cm，则滑轮上的点F旋转了(　　)

A. 60°　　B. 90°　　C. 120°　　D. 45°



(第3题图)

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

点知识 2 扇形的面积公式(重点)

1 **扇形的定义**：两条半径与所夹弧围成的图形叫做扇形.

2 **扇形的面积公式**：

(1) $S_{扇形}=\frac{n\pi R^2}{360}$;

(2) $S_{扇形}=\frac{1}{2}C_1R$(C_1 是扇形的弧长).

应用方法：①当已知半径 R 和圆心角的度数求扇形的面积时，选用公式 $S_{扇形}=\frac{n\pi R^2}{360}$;

②当已知半径 R 和弧长求扇形的面积时，选用公式 $S_{扇形}=\frac{1}{2}C_1R$.

特别注意：(1) 已知 $S_{扇形}$，C_1，n，R 四个量中的任意两个量，可以求出另外两个量；

(2) 在扇形面积公式 $S_{扇形}=\frac{n\pi R^2}{360}$ 中，n，360 不带单位.

拓展///

(1) 弓形的定义：由弦及其所对的弧组成的图形叫做弓形.

(2) 弓形的面积：①当弓形的弧小于半圆时，它的面积等于扇形面积与三角形面积的差，即 $S_{弓形}=S_{扇形}-S_{三角形}$;

②当弓形的弧大于半圆时，它的面积等于扇形面积与三角形面积的和，即 $S_{弓形}=S_{扇形}+S_{三角形}$;

③当弓形的弧是半圆时，它的面积是圆面积的一半，即 $S_{弓形}=\frac{1}{2}S_{圆}$.

拔考向 ▶▶▶ 提分·秘诀

考查角度1 利用扇形面积公式进行计算

例4 [中考·云南] 若扇形的面积为 3π，圆心角为 $60°$，则该扇形的半径为(　　)

A. 3　　B. 9

C. $2\sqrt{3}$　　D. $3\sqrt{2}$

导引：利用扇形的面积公式，将相关量代入即可求解.

答案：D

考查角度2 利用扇形面积公式求弓形的面积

例5 [中考·甘孜州] 如图 24.7-4，已知扇形 AOB 的半径为 2，圆心角为 $90°$，连接 AB，则图中阴影部分的面积是(　　)

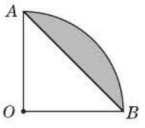


图 24.7-4

A. $\pi-2$　　B. $\pi-4$

C. $4\pi-2$　　D. $4\pi-4$

导引：由 $\angle AOB=90°$，$OA=OB$，得到 $\triangle OAB$ 为等腰直角三角形，由图可知 $S_{阴影}=S_{扇形AOB}-S_{\triangle OAB}$，然后根据扇形和直角三角形的面积公式计算即可.

$$S_{阴影}=S_{扇形AOB}-S_{\triangle OAB}=\frac{90\pi\times2^2}{360}-\frac{1}{2}\times2\times2=\pi-2,$$

故选 A.

答案：A

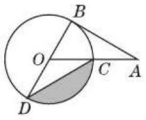
方法点拨

所谓弓形，就是由弦及其所对的弧围成的图形，求弓形的面积，一般转化为求扇形的面积与三角形的面积之差(和).

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

同类变式（答案见190页）

5. [中考·苏州] 如图，AB 为⊙O 的切线，切点为 B，连接 AO，AO 与⊙O 交于点 C，BD 为⊙O 的直径，连接 CD. 若 $\angle A = 30°$，⊙O 的半径为 2，则图中阴影部分的面积为(　　)



（第5题图）

A. $\frac{4\pi}{3}-\sqrt{3}$　　B. $\frac{4\pi}{3}-2\sqrt{3}$

C. $\pi-\sqrt{3}$　　D. $\frac{2\pi}{3}-\sqrt{3}$

考查角度3 利用扇形面积公式求不规则图形的面积

类型一：作差法

例6 [期末·望江县] 如图24.7-5是某商品的标志图案，AC 与 BD 是⊙O 的两条直径，首尾顺次连接点 A,B,C,D，得到四边形 $ABCD$，若 $AC=36$ cm，$\angle BAC=30°$，则图中阴影部分的面积为(　　)

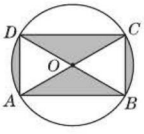


图24.7-5

A. 27π cm^2　B. 108π cm^2　C. 126π cm^2　D. 216π cm^2

导引： ∵ AC 与 BD 是⊙O 的两条直径，$AC=36$ cm，$\angle BAC=30°$，

∴ $\angle ABC=\angle BCD=\angle CDA=\angle DAB=90°$，$\angle BOC=60°$.

∵ $OB=OC$，$OA=OD$，$\angle AOD=\angle BOC=60°$，

∴ △AOD 与 △BOC 是等边三角形，$\angle COD=\angle AOB=120°$，

∴ 阴影部分的面积是 $\pi\cdot\left(\frac{36}{2}\right)^2-\frac{1}{2}\times\left(\frac{36}{2}\right)\times\left(\frac{36}{2}\times\sin 60°\right)\times 2-2\times\left[\frac{120\times\pi\left(\frac{36}{2}\right)^2}{360}-\frac{1}{2}\times\left(\frac{36}{2}\right)\times\left(\frac{36}{2}\times\sin 60°\right)\right]=108\pi(\text{cm}^2)$. 故选 B.

答案： B

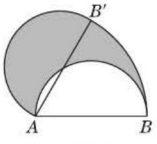
技巧点拨

● 本题也可以用另外一种思路：首先利用 OD 是 Rt△ ADC 斜边的中线，求出 $S_{\triangle AOD}=S_{\triangle COD}$，同理 $S_{\triangle COB}=S_{\triangle AOB}$，从而可证 $S_{阴}=2\cdot S_{扇形BOC}$，又因为△ OBC 是等边三角形，所以利用扇形的面积公式计算即可；

● 求不规则图形的面积常用的方法：① 作差法；② 割补法；③ 拼凑法；④ 等积变形法；⑤ 迁移变换法；⑥ 化整为零法；⑦ 平移法

同类变式（答案见190页）

6. 如图，直径 AB 为12的半圆形，绕点 A 逆时针旋转 60°，此时点 B 旋转到点 B'，则图中阴影部分的面积是(　　)



（第6题图）

A. 12π

B. 24π

C. 6π

D. 36π

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

类型二：平移法、迁移变换法

例 7 如图 24.7-6，两个半圆形中，长为 24 的弦 AB 与直径 CD 平行且与小半圆形相切，那么图中阴影部分的面积等于多少？

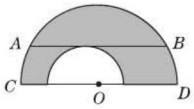


图 24.7-6

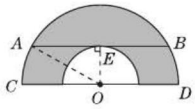


图 24.7-7

导引： 观察图形可知，阴影部分的面积等于大半圆形的面积减去小半圆形的面积，因此，当小半圆形在大半圆形内部左右移动时，其阴影部分的面积不变. 所以我们可以通过平移，使两个半圆形的圆心重合，这样求阴影部分的面积较容易.

解： 将小半圆形向右平移，使两半圆形的圆心重合，如图 24.7-7，则阴影部分的面积等于半圆环形的面积.

作 $OE \perp AB$ 于 E（易知 E 为切点），连接 OA，

$\therefore AE = \frac{1}{2}AB = 12.$

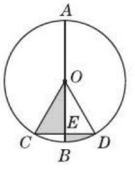
$\therefore S_{阴影} = \frac{1}{2}\pi \cdot OA^2 - \frac{1}{2}\pi \cdot OE^2 = \frac{1}{2}\pi \cdot (OA^2 - OE^2) = \frac{1}{2}\pi \cdot AE^2 = \frac{1}{2}\pi \cdot 12^2 = 72\pi.$

方法点拨

利用平移、旋转等图形变换可将不规则图形的面积转化为规则图形面积的和、差进行求解.

▲**同类变式**（答案见 190 页）

7. ［模拟 · 蜀山区］如图，AB 是半径为 6 的 $\odot O$ 的直径，CD 是弦，且 $AB \perp CD$ 于 E，若 $\angle COD = 60°$，则图中阴影部分的面积是_____.



（第 7 题图）

类型三：割补法、化整为零法

例 8 如图 24.7-8，扇形 AOB 与扇形 COD 的圆心角均为 90°，连接 AC，BD.

（1）求证：$AC = BD$；

（2）若图中阴影部分的面积是 $\frac{3}{4}\pi$ cm^2，$OA = 2$ cm，求 OC 的长.

导引： 由题易知 $\triangle AOC \cong \triangle BOD$，所以图中阴影部分面积是扇形 AOB 的面积减去扇形 COD 的面积.

（1）**证明：** $\because \angle AOB = \angle COD = 90°$，

$\therefore \angle AOC + \angle AOD = \angle BOD + \angle AOD.$

$\therefore \angle AOC = \angle BOD.$

又 $\because AO = BO$，$CO = DO$，

$\therefore \triangle AOC \cong \triangle BOD.$ $\therefore AC = BD.$

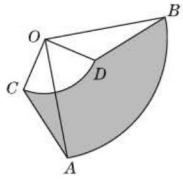


图 24.7-8

（2）**解：** 由（1）知 $\triangle AOC \cong \triangle BOD$，

$\therefore$ 阴影部分的面积为扇形 AOB 的面积减去扇形 COD 的面积. 根据题意，得

$S_{阴影} = \frac{90\pi \cdot OA^2}{360} - \frac{90\pi \cdot OC^2}{360} = \frac{90\pi \cdot (OA^2 - OC^2)}{360}$，

$\therefore \frac{3}{4}\pi = \frac{90\pi \cdot (2^2 - OC^2)}{360}$，解得 $OC = 1$ cm.

方法点拨

计算不规则图形的面积时，常常通过割补法将不规则图形的面积转化为几个规则图形面积的和或差的形式.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

点知识 3 圆柱、圆锥的侧面展开图（难点）

1 **圆柱**（底面半径为 r、母线（上下底面圆周上对应两点的连线）为 l）

- 侧面展开图：相邻两边长分别为 $2\pi r$，l 的矩形，如图 24.7-9
- 侧面展开图的面积：$S_{侧}=2\pi rl$
- 全面积：$S_{全}=S_{侧}+2S_{底}=2\pi rl+2\pi r^2=2\pi r(l+r)$

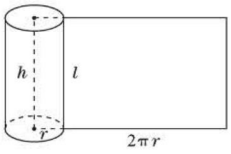


图 24.7-9

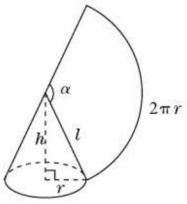


图 24.7-10

2 **圆锥**（底面半径为 r、母线（顶点与底面圆周上一点的连线）为 l）

- 侧面展开图：半径为 l，弧长为 $2\pi r$ 的扇形，如图 24.7-10
- 侧面展开图的面积：$S_{侧}=\pi rl$
- 侧面展开图（扇形）的圆心角：$\alpha=\left(\frac{360r}{l}\right)°$
- 全面积：$S_{全}=S_{侧}+S_{底}=\pi rl+\pi r^2=\pi r(l+r)$

3 **易错警示：** 在计算圆锥的侧面积时，要注意各元素之间的对应关系，千万不要误认为圆锥底面圆的半径等于扇形半径或把圆锥的母线长当成扇形的弧长.

拔考向 ▸▸▸

提分·秘诀

考查角度1 利用圆锥的相关公式求圆锥中的线段长

例 9 ［中考·威海］若用一张直径为 20 cm 的半圆形铁片做一个圆锥的侧面，接缝忽略不计，则所得圆锥的高为（　　）

A. $5\sqrt{3}$ cm　　B. $5\sqrt{5}$ cm　　C. $\frac{5\sqrt{15}}{2}$ cm　　D. 10 cm

导引： 根据侧面展开图的弧长等于圆锥底面圆的周长，得到圆锥的底面半径，再利用勾股定理计算圆锥的高.

依题意，得 $\frac{1}{2}\times 20\pi=2\pi r$，解得 $r=5$. 由勾股定理，得圆锥的高为 $\sqrt{(20\div 2)^2-5^2}=5\sqrt{3}$（cm）. 故选 A.

答案： A

方法点拨

圆锥的侧面展开图的弧长等于底面圆的周长，圆锥的母线 l、圆锥的底面半径 r、圆锥的高 h 三者满足 $r^2+h^2=l^2$.

考查角度2 利用圆锥的侧面积公式进行面积计算

例 10 如图 24.7-11，在 Rt△ABC 中，$AC=12$ cm，$BC=5$ cm，$\angle ACB=90°$，把 Rt△ABC 绕 BC 所在的直线旋转一周得到一个几何体，则这个几何体的侧面积为_____ cm^2.

导引： ∵ 在 Rt△ABC 中，$AC=12$ cm，$BC=5$ cm，$\angle ACB=90°$，∴ 由勾股定理得 $AB=13$ cm，∴ 圆锥的底面周长为 24π cm，

∴ 这个几何体的侧面积为 $\frac{1}{2}\times 24\pi\times 13=156\pi(cm^2)$，故答案为 156π.

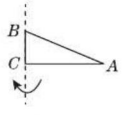


图24.7-11

答案： 156π

方法点拨

对于圆锥的计算考查主要有三种形式：（1）圆锥的底面半径、高、母线长中已知两个求圆锥的侧面积或全面积；（2）知道圆锥的侧面积和底面半径，求母线长或高或圆锥侧面展开图的圆心角；（3）已知圆锥的侧面展开图的弧长及圆心角度数，求圆锥的底面半径和高.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

考查角度3 利用圆柱的侧面展开图求圆柱中有关线段的长

例11 ［中考·天水］一个圆柱的侧面展开图是两邻边长分别为6和8的矩形，则该圆柱的底面圆半径是(　　)

A. $\frac{3}{\pi}$　　B. $\frac{4}{\pi}$　　C. $\frac{3}{\pi}$或$\frac{4}{\pi}$　　D. $\frac{6}{\pi}$或$\frac{8}{\pi}$

导引： 圆柱的侧面展开图是矩形，矩形的一边长是圆柱的高，与其相邻的一边长是圆柱的底面周长，所以此题要进行分类讨论，有两种情况. 设底面半径为r，当底面周长为8时，$2\pi r=8$，则$r=\frac{4}{\pi}$；当底面周长为6时，$2\pi r=6$，则$r=\frac{3}{\pi}$. 故选C.

答案： C

方法点拨

圆柱的侧面展开图是一个矩形，矩形的一边长是圆柱的高，与其相邻的一边长是圆柱的底面周长.

点方法·拨技巧 提高分

拔尖角度1 利用弧长和扇形面积公式解决动态问题

例12 如图24.7-12，把Rt△ABC的斜边AB放在直线l上，按顺时针方向在l上转动两次，使△ABC转动到△$A''B'C'$的位置. 若$BC=1$，$AC=\sqrt{3}$，则顶点A运动到点A''的位置时，求：

(1)点A经过的路线长；

(2)点A经过的路线与l所围成的图形的面积.

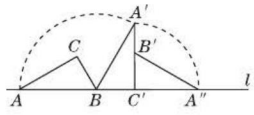


图24.7-12

导引： (1)点A经过的路线包括以点B为圆心，以AB为半径的$\overset{\frown}{AA'}$和以点C'为圆心，以$A'C'$为半径的$\overset{\frown}{A'A''}$；(2)点A经过的路线与l所围成的图形由扇形ABA'，△$A'BC'$和扇形$A'C'A''$三部分组成.

解： (1)在Rt△ABC中，$BC=1$，$AC=\sqrt{3}$，

$\therefore AB=\sqrt{AC^2+BC^2}=2$.

$\therefore \angle BAC=30°$，则$\angle ABC=60°$.

易知$\angle ABA'=120°$，

$\therefore \overset{\frown}{AA'}$的长为$\frac{120\pi\times2}{180}=\frac{4\pi}{3}$.

$\because \angle A'C'A''=90°$，

$\therefore \overset{\frown}{A'A''}$的长为$\frac{90\pi\times\sqrt{3}}{180}=\frac{\sqrt{3}\pi}{2}$.

$\therefore$ 点A经过的路线长为$\left(\frac{4}{3}+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\pi$.

(2)$S_{扇形ABA'}=\frac{1}{2}\times\frac{4\pi}{3}\times2=\frac{4\pi}{3}$，

$S_{扇形A'C'A''}=\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{3}\pi}{2}\times\sqrt{3}=\frac{3\pi}{4}$，

$S_{\triangle A'BC'}=\frac{1}{2}\times1\times\sqrt{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，

$\therefore$ 点A经过的路线与l所围成的图形的面积是$\frac{4\pi}{3}+\frac{3\pi}{4}+\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{25\pi}{12}+\frac{\sqrt{3}}{2}$.

方法点拨： 解决运动的路线问题，要先确定路线的特征，如本题(1)小问是求两段弧长的和，可以根据弧长公式计算.

拔尖角度2 利用圆锥的侧面展开图巧解最短路线问题

例13 如图24.7-13，圆锥的母线长是3，底面半径是1，A是底面圆周上一点，一只小虫从点A出发，绕侧面爬行一周，再回到点A的最短路线长是多少？

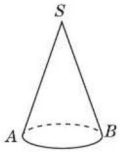


图24.7-13

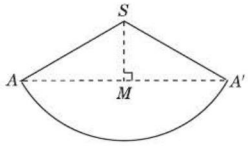


图24.7-14

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

导引： 我们知道“两点之间，线段最短”，沿母线 SA 将侧面展开，得到扇形 ASA'（如图 24.7-14 所示），小虫从点 A 出发，绕侧面爬行一周回到点 A 的最短路线长就是扇形 ASA' 上的线段 AA' 的长.

解： 沿母线 SA 将圆锥侧面展开，得扇形 ASA'（如图 24.7-14 所示）.

设 $\angle ASA'=n°$. ∵ 扇形的弧长等于圆锥底面圆周长，∴ $\dfrac{n\pi\times 3}{180}=2\pi\times 1$.

∴ $n=120$，即 $\angle ASA'=120°$.

连接 AA'，过 S 作 $SM\perp AA'$ 于 M，

则 $\angle ASM=60°$. ∴ 在 $\mathrm{Rt}\triangle ASM$ 中，$\angle SAM=30°$.

又∵ $SA=3$，∴ $SM=\dfrac{3}{2}$.

根据勾股定理，得 $AM=\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$.

∴ $AA'=2AM=3\sqrt{3}$.

∴ 小虫爬行的最短路线长是 $3\sqrt{3}$.

技巧点拨： 解决此类求曲面上最短路线长问题的方法是化曲面为平面，再利用“两点之间，线段最短”找出最短路线，注意转化前后点的位置变化.

拔尖角度 3 利用弧长和扇形的面积公式进行方案设计

例 14 在一次数学探究性学习活动中，某学习小组要制作一个圆锥体模型，操作规则是在一张边长为 16 cm 的正方形纸片上剪出一个扇形和一个圆，使得扇形围成圆锥的侧面时，圆恰好是该圆锥的底面. 他们首先设计了如图 24.7-15①所示的方案一，发现这种方案不可行，于是他们调整了扇形和圆的半径，设计了如图 24.7-15②所示的方案二.（两个方案中，圆与正方形相邻两边及扇形的弧均相切）

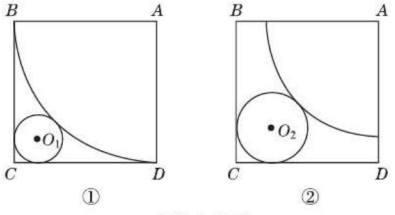


图 24.7-15

（1）请说明方案一不可行的理由；

（2）判断方案二是否可行，若可行，请确定圆锥的母线长及其底面圆的半径；若不可行，请说明理由.

导引： 判断方案可行不可行就是考虑圆的周长与扇形的弧长之间的关系，若圆的周长等于扇形的弧长，则说明方案可行；若圆的周长不等于扇形的弧长，则说明方案不可行.

解：（1）假设方案一可行，则扇形的弧长为 $2\times\pi\times 16\times\dfrac{1}{4}=8\pi(\mathrm{cm})$.

设圆锥底面圆的半径为 r cm，则圆锥底面圆的周长为 $2\pi r$ cm，

∴ 圆锥底面圆的半径为 4 cm.

由于所给正方形纸片的对角线长为 $16\sqrt{2}$ cm，而制作这样的圆锥实际需要正方形纸片的对角线长为 $16+4+4\sqrt{2}=(20+4\sqrt{2})$ cm，

又∵ $20+4\sqrt{2}>16\sqrt{2}$，

∴ 方案一不可行.

（2）方案二可行. 设圆锥底面圆的半径为 r cm，圆锥的母线长为 R cm，则

$(1+\sqrt{2})r+R=16\sqrt{2}$，①

$2\pi r=\dfrac{2\pi R}{4}$. ②

由①②，可得 $R=\dfrac{64\sqrt{2}}{5+\sqrt{2}}=\dfrac{320\sqrt{2}-128}{23}$，

$r=\dfrac{16\sqrt{2}}{5+\sqrt{2}}=\dfrac{80\sqrt{2}-32}{23}$.

故所求圆锥的母线长为 $\dfrac{320\sqrt{2}-128}{23}$ cm，

底面圆的半径为 $\dfrac{80\sqrt{2}-32}{23}$ cm.

技巧点拨： 在解决有关圆锥及其侧面展开图的计算问题时，常借助“圆锥底面圆的周长等于扇形的弧长，即 $2\pi r=\dfrac{n\pi R}{180}$”建立圆锥底面圆的半径 r、圆锥母线 R、侧面展开图中扇形圆心角 $n°$ 之间的关系来解决问题.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

练中考·练模拟 得满分 （答案见 190 页）

基础巩固练

1. 一个扇形的圆心角为 60°，它所对的弧长为 2π，则这个扇形的半径为（　　）

A. 6　　B. $\sqrt{3}$

C. $2\sqrt{3}$　　D. $\sqrt{6}$

2. 一个扇形的半径等于一个圆的半径的 2 倍，且扇形面积是圆的面积的一半，则这个扇形的圆心角度数是（　　）

A. 45°　　B. 60°

C. 90°　　D. 75°

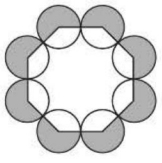
3. ［月考·繁昌县］某种表的分针长为1 cm，某天从 13:35 到 13:55，分针走过了（　　）

A. π cm　　B. $\frac{1}{3}\pi$ cm

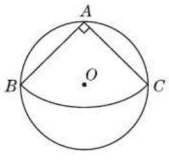
C. 2π cm　　D. $\frac{2}{3}\pi$ cm

4. ［中考·玉林］如图，把八个等圆按相邻两两外切摆放，其圆心连线构成一个正八边形，设正八边形内侧八个扇形（无阴影部分）面积之和为 S_1，正八边形外侧八个扇形（阴影部分）面积之和为 S_2，则 $\frac{S_1}{S_2}$ 等于（　　）

A. $\frac{3}{4}$　　B. $\frac{3}{5}$　　C. $\frac{2}{3}$　　D. 1



（第 4 题图）



（第 5 题图）

5. ［中考·荆门］如图，从一块直径为 24 cm 的圆形纸片上剪出一个圆心角为 90° 的扇形 BAC，使点 A，B，C 在圆周上. 将剪下的扇形作为一个圆锥的侧面，则这个圆锥的底面圆的半径是（　　）

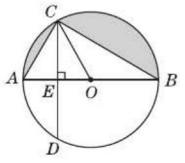
A. 12 cm　　B. 6 cm

C. $3\sqrt{2}$ cm　　D. $2\sqrt{3}$ cm

6. 如图，已知 AB 是 $\odot O$ 的直径，弦 $CD \perp AB$，垂足为 E，$\angle AOC = 60°$，$OC = 2$. 求：

（1）OE 和 CD 的长；

（2）图中阴影部分的面积.

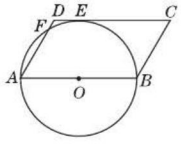


（第 6 题图）

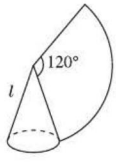
能力提升练

7. ［中考·山西］如图，在 $\square ABCD$ 中，AB 为 $\odot O$ 的直径，$\odot O$ 与 DC 相切于点 E，与 AD 相交于点 F. 已知 $AB = 12$，$\angle C = 60°$，则 $\overset{\frown}{FE}$ 的长为（　　）

A. $\frac{\pi}{3}$　　B. $\frac{\pi}{2}$　　C. π　　D. 2π



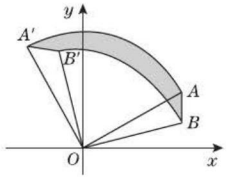
（第 7 题图）



（第 8 题图）

8. ［中考·广州］如图，圆锥的侧面展开图是一个圆心角为 120° 的扇形，若圆锥的底面圆的半径是 $\sqrt{5}$，则圆锥的母线 $l =$ _____.

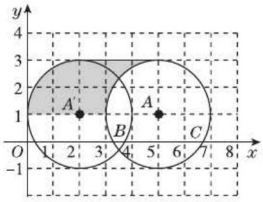
9. ［月考·田家庵区］如图，已知 $A(4,2)$，$B(4,1)$，将 $\triangle AOB$ 绕着点 O 逆时针旋转 90°，得到 $\triangle A'OB'$，则图中阴影部分的面积为_____.



（第 9 题图）

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

10. [中考·吉林] 如图,在平面直角坐标系中,以$A(5,1)$为圆心,以2个单位长度为半径的$\odot A$交x轴于点B,C,解答下列问题:



(第10题图)

(1)将$\odot A$向左平移_____个单位长度与y轴首次相切,得到$\odot A'$,此时点A'的坐标为_____,阴影部分的面积$S=$_____;

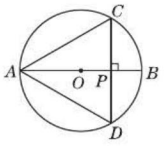
(2)求BC的长.

11. [模拟·合肥] 如图,AB是$\odot O$的直径,弦$CD\perp AB$,垂足为P,若$AB=2$,$AC=\sqrt{3}$.

(1)求$\angle BAC$的度数;

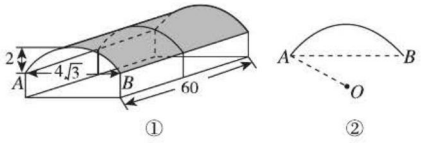
(2)求弧CBD的长;

(3)求弓形CBD的面积.



(第11题图)

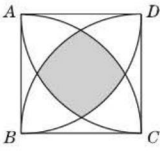
12. 如图,图①是某学校存放学生自行车的车棚示意图(尺寸如图所示,单位:m),车棚顶部是圆柱侧面的一部分,其展开图是矩形;图②是车棚顶部截面的示意图,$\overset{\frown}{AB}$所在圆的圆心为点O. 车棚顶部是用一种帆布覆盖的,求覆盖棚顶的帆布的面积.(不考虑接缝等因素,计算结果保留π)



(第12题图)

思维拓展练

13. 如图,正方形$ABCD$的边长为a,分别以正方形的四个顶点为圆心,边长为半径,在正方形内画弧,求图中阴影部分的面积.



(第13题图)

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

分类讨论思想在圆中的应用

荣老师告诉你 分类讨论思想意味着一个命题的题设和结论不唯一确定，有多种可能情况，难以统一解答，需要按可能出现的各种情况分门别类地加以讨论，一一解答，得出各种情况的相应结论，最后综合归纳出问题的正确答案. 分类讨论是一种逻辑方法，是一种重要的数学思想，同时也是一种重要的解题策略.

应用一 由点与圆的位置关系引起的不唯一性

例1 已知点 A 到⊙O 的最近距离和最远距离分别是 3 cm 和 9 cm，求⊙O 的半径.

解： 设⊙O 的半径为 R cm.

(1) 如图 1①，当点 A 在⊙O 内时，$2R = 3 + 9 = 12$(cm)，所以⊙O 的半径是 6 cm；

(2) 如图 1②，当点 A 在⊙O 外时，$2R = 9 - 3 = 6$(cm)，所以⊙O 的半径是 3 cm.

综上所述，⊙O 的半径是 6 cm 或 3 cm.

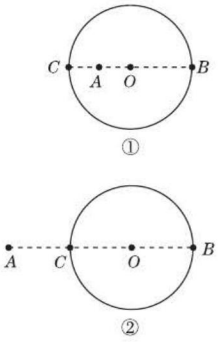


图 1

方法点拨： 点与圆的位置关系有三种：点在圆内、点在圆上、点在圆外. 当点与圆的位置关系不确定时，需按照此三种关系进行分类讨论.

应用二 由圆的对称性引起的不唯一性

例2 已知⊙O 的直径是 10 cm，弦 $AB \parallel CD$，$AB = 6$ cm，$CD = 8$ cm，求 AB 与 CD 之间的距离.

解： (1) 如图 2①，当 AB，CD 位于圆心 O 的异侧时，连接 OB，OD，过点 O 作 $OE \perp CD$ 于 E，OE 的反向延长线交 AB 于 F.

$\because AB \parallel CD$，$OE \perp CD$，

$\therefore OF \perp AB$.

$\because OE \perp CD$，

$\therefore DE = \frac{1}{2}CD = 4$ cm.

在 Rt△OED 中，

$OE = \sqrt{OD^2 - ED^2} = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3$(cm).

同理，在 Rt△OFB 中，$OF = 4$ cm.

$\therefore EF = OE + OF = 7$ cm.

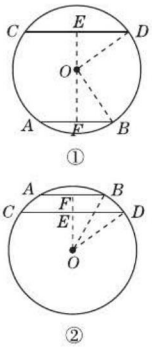


图 2

(2) 如图 2②，当 AB，CD 位于圆心 O 的同侧时，

由(1)得 $EF = OF - OE = 4 - 3 = 1$(cm).

综上所述，AB 与 CD 之间的距离是 7 cm 或 1 cm.

方法点拨： 平行两弦有可能位于圆心的异侧，也有可能位于圆心的同侧，需分情况讨论.

应用三 由一弦对两弧而引起的不唯一性

例3 弦 AB 的长等于半径，求 AB 所对的圆周角的度数.

导引： 因为弦 AB 所对的弧有优弧和劣弧，所以需分情况讨论，分别求出优弧和劣弧所对的圆周角的度数.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

解：(1)当圆周角所对的弧是劣弧时，如图3所示. 连接OA，OB，在圆上取一点C，连接AC，CB，得到$\triangle ABO$是等边三角形.

$\therefore \angle AOB=60°$.

$\therefore \angle ACB=\frac{1}{2}\angle AOB=30°$.

(2)当圆周角所对的弧是优弧时，如图3所示，在圆上取一点C'，连接AC'，BC'，易得$\angle AC'B=150°$.

综上所述，弦AB所对的圆周角等于30°或150°.

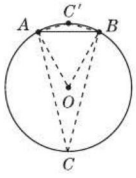


图3

方法点拨：在一个圆中，一条非直径的弦所对的弧有两段，分别是优弧和劣弧，当点的位置不能确定时，分在优弧和劣弧上两种情况讨论.

应用四 ▸▸ 由运动导致直线与圆的位置关系的不唯一性

例4 如图4，射线QN与等边$\triangle ABC$的两边AB，BC分别交于点M，N，且$AC\parallel QN$，$AM=MB=2$ cm，$QM=4$ cm. 动点P从点Q出发，沿射线QN以每秒1 cm的速度向右移动，经过t秒，以点P为圆心，$\sqrt{3}$ cm为半径的圆与$\triangle ABC$的边相切(切点在边上)，请写出t可取的一切值. (单位：秒)

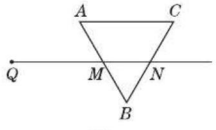


图4

解：$\because \triangle ABC$是等边三角形，

$\therefore AB=AC=BC=AM+MB=4$ cm，$\angle A=\angle C=\angle B=60°$.

$\because QN\parallel AC$，$AM=BM$，$\therefore N$为BC的中点.

$\therefore MN=\frac{1}{2}AC=2$ cm，$\angle BMN=\angle BNM=\angle C=\angle A=60°$.

分为三种情况：(1)如图5，当$\odot P$切AB于M'时，连接PM'，

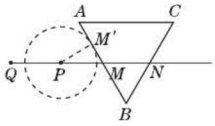


图5

则$PM'=\sqrt{3}$ cm，$\angle PM'M=90°$.

$\because \angle PMM'=\angle BMN=60°$，

$\therefore M'M=1$ cm，$PM=2MM'=2$ cm.

$\therefore QP=4-2=2$(cm)，即$t=2$.

(2)如图6，当$\odot P$切AC于点A时，连接PA，

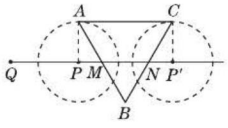


图6

则$\angle CAP=\angle APM=90°$，

$\angle PMA=\angle BMN=60°$，$AP=\sqrt{3}$ cm，

$\therefore PM=1$ cm，

$\therefore QP=4-1=3$(cm)，即$t=3$.

当$\odot P'$与AC切于点C时，连接$P'C$，则$\angle CP'N=\angle ACP'=90°$，$\angle P'NC=\angle BNM=60°$，$CP'=\sqrt{3}$ cm，$\therefore P'N=1$ cm，

$\therefore QP'=4+2+1=7$(cm)，即$t=7$.

故当$3\leqslant t\leqslant 7$时，$\odot P$和AC边相切(其中包括同时与AB，BC边分别相切的情况).

(3)如图7，当$\odot P$切BC于N'时，连接PN'.

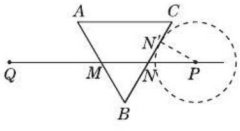


图7

则$PN'=\sqrt{3}$ cm，$\angle PN'N=90°$.

$\because \angle PNN'=\angle BNM=60°$，

$\therefore N'N=1$ cm，$PN=2NN'=2$ cm.

$\therefore QP=4+2+2=8$(cm)，即$t=8$.

综上所述，$t=2$或$3\leqslant t\leqslant 7$或$t=8$.

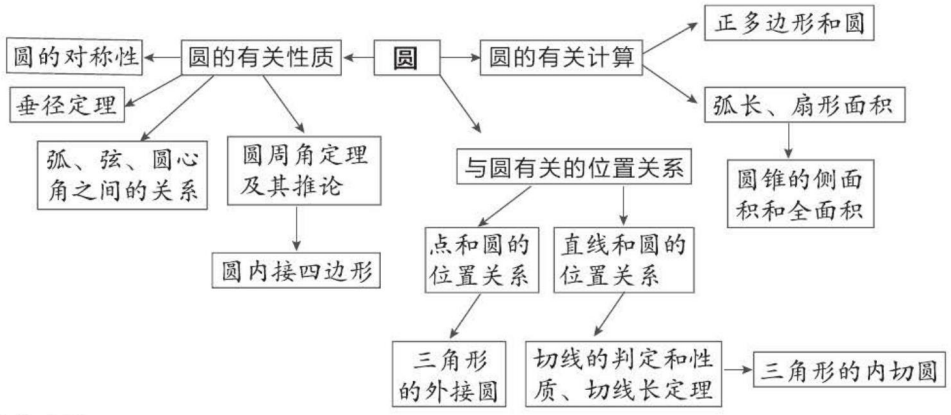
方法点拨：由图形运动导致的分类讨论，要抓住图形变化时的几个关键点进行分类.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

章末核心知识分类整合

核心结构专题

结构必知



核心必读

1. 圆是轴对称图形，根据圆的轴对称性推出圆的垂径定理.
2. 圆是中心对称图形，且具有旋转不变性，推出“圆心角、弦、弧、圆周角”之间的四量关系定理.
3. 同弧或等弧所对的圆心角和圆周角之间的数量关系构成圆周角定理，由圆周角定理推出两个结论：一是半圆（或直径）所对的圆周角是直角；二是圆内接四边形的对角互补.
4. 与圆有关的位置关系中，直线与圆的位置关系最重要，在直线与圆的三种位置中，相切最关键，包括切线的性质与切线的判定以及切线长定理都是重中之重.
5. 三角形与圆之间的关系主要有“内接”和“外切”两种形式. 正多边形与圆之间的关系也是“内接”“外切”两种形式.
6. 在圆的计算中主要掌握两个公式：(1) $C_{l}=\frac{n\pi R}{180}$；(2) $S_{扇形}=\frac{n\pi R^{2}}{360}$ 或 $S_{扇形}=\frac{1}{2}C_{l}R$. 圆锥的侧面积和全面积都需要转化为前面两个公式进行计算.

知识方法专题

知识必学

专题一 垂径定理

链接中考>> 垂径定理是圆中一个非常重要的定理之一，它是用来证明线段相等或角相等的重要依据. 单独考查时，一般以填空题、选择题的形式出现，渗透到其他知识点时，以综合题的形式考查.

例1 ［期末·包河区］如图24-1，$\odot O$ 的半径 $OD\perp$ 弦 AB 于点 C，连接 AO 并延长交 $\odot O$ 于点 E，连接 EC，若 $AB=8$，$CD=2$，求 $\odot O$ 的半径及 EC 的长.

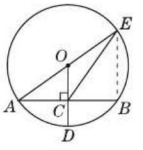


图24-1

导引： 先根据垂径定理求出 AC 的长，设 $\odot O$ 的半径为 r，在 $Rt\triangle OAC$ 中利用勾股定理求出 r 的值；连接 BE，由 AE 是直径，根据圆周角定理的推论得到 $\angle ABE=90°$，利用

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

OC 是 $\triangle ABE$ 的中位线得到 $BE=2OC$，然后在 $\mathrm{Rt}\triangle CBE$ 中利用勾股定理可计算出 CE.

解： $\because OD\perp AB, AB=8$，

$\therefore AC=\frac{1}{2}AB=\frac{1}{2}\times 8=4.$

设 $\odot O$ 的半径为 r，

则 $OC=OD-CD=r-2$.

在 $\mathrm{Rt}\triangle OAC$ 中，$r^2=(r-2)^2+4^2$，

解得 $r=5$. 连接 BE，如图 24-1.

$\because OD=5, CD=2, \therefore OC=3$.

$\because AE$ 是直径，$\therefore \angle ABE=90°$.

$\therefore$ 由题易得 OC 是 $\triangle ABE$ 的中位线，

$\therefore BE=2OC=6$. 在 $\mathrm{Rt}\triangle CBE$ 中，

$CE=\sqrt{CB^2+BE^2}=\sqrt{4^2+6^2}=2\sqrt{13}$.

方法点拨： 在圆中，垂径定理把弦、半径、弦心距三者联系起来.已知其中两个量，便可求出第三个量.

专题二 四量关系定理

链接中考>> 四量关系定理是圆的旋转不变性的体现，它揭示同圆或等圆中，弧、弦、圆心角、圆周角之间的等量关系，为证明线段相等和角相等提供了有力的依据. 考查时，一般以解答题的形式出现.

例 2 ［中考·台州］如图 24-2，四边形 $ABCD$ 内接于 $\odot O$，点 E 在对角线 AC 上，$EC=BC=DC$.

(1) 若 $\angle CBD=39°$，求 $\angle BAD$ 的度数；

(2) 求证：$\angle 1=\angle 2$.

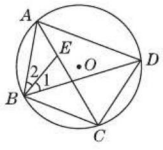


图 24-2

(1) **解：** $\because BC=DC$，

$\therefore \overset{\frown}{BC}=\overset{\frown}{DC}$.

$\therefore \angle BAC=\angle CAD=\angle CBD$.

$\because \angle CBD=39°$，

$\therefore \angle BAC=\angle CAD=39°$.

$\therefore \angle BAD=\angle BAC+\angle CAD=78°$.

(2) **证明：** $\because EC=BC$，

$\therefore \angle CBE=\angle CEB$.

$\because \angle CBE=\angle 1+\angle CBD$，

$\angle CEB=\angle 2+\angle BAC$，

$\therefore \angle 1+\angle CBD=\angle 2+\angle BAC$.

又 $\because \angle BAC=\angle CBD$，

$\therefore \angle 1=\angle 2$.

方法点拨： 在圆中，证明两个角相等，根据四量关系定理可以转化为证明弧或弦所对的圆心角或圆周角相等.

专题三 圆周角定理及其推论

链接中考>> 圆周角定理揭示圆心角和圆周角之间的数量关系，是对特殊圆周角和直径之间关系的一种揭示，考查圆周角和圆心角之间的数量关系时，一般以填空题、选择题的形式出现，考查直径与 90° 圆周角之间的关系时，一般以解答题的形式出现.

例 3 如图 24-3，在 $\triangle ABC$ 中，$AB=AC$，以 AB 为直径的 $\odot O$ 交 AC 于点 D，交 BC 于点 E，延长 AE 至点 F，使 $EF=AE$，连接 FB, FC.

(1) 求证：四边形 $ABFC$ 是菱形；

(2) 若 $AD=7, BE=3$，求 $\odot O$ 和菱形 $ABFC$ 的面积.

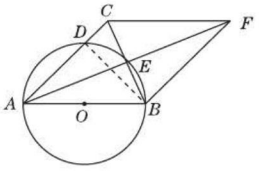


图 24-3

导引： (1) 根据对角线互相平分的四边形是平行四边形，证明是平行四边形，再根据邻边相等的平行四边形是菱形即可证明；

(2) 设 $CD=x$，连接 BD，利用勾股定理构建方程即可解决问题.

(1) **证明：** $\because AB$ 是直径，

$\therefore \angle AEB=90°, \therefore AE\perp BC$.

$\because AB=AC, \therefore BE=CE$.

$\because AE=EF$，

$\therefore$ 四边形 $ABFC$ 是平行四边形.

$\because AC=AB$，

$\therefore$ 四边形 $ABFC$ 是菱形.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

(2)**解**：设 $CD=x$，连接 BD，如图 24-3.

$\because AB$ 是直径，$\therefore \angle ADB=\angle BDC=90°$，

$\therefore AB^2-AD^2=CB^2-CD^2$，

$\therefore (7+x)^2-7^2=6^2-x^2$，

解得 $x=2$ 或 $x=-9$(舍去).

$\therefore AB=9$，$BD=\sqrt{9^2-7^2}=4\sqrt{2}$，

$\therefore S_{菱形ABFC}=36\sqrt{2}$，

$S_{\odot O}=\pi\cdot\left(\frac{9}{2}\right)^2=\frac{81}{4}\pi$.

方法点拨：在圆中出现直径时，常构造直径所对的圆周角，解题的关键是灵活运用圆周角定理的推论构造出直角三角形，然后利用勾股定理解决问题.

专题四 圆的切线的性质与判定

链接中考>> 圆的切线的性质与判定的运用都是作同样的辅助线：连接圆心和切点，运用的特征都离不开垂直. 考查切线的性质时，以填空题、选择题的形式出现较多；而考查切线的判定时，以解答题的形式出现较多. 很多题都综合考查切线的性质与判定.

例 4 如图 24-4，AB 为 $\odot O$ 的直径，射线 AP 交 $\odot O$ 于 C 点，$\angle PCO$ 的平分线交 $\odot O$ 于 D 点，过点 D 作 $DE\perp AP$ 交 AP 于 E 点.

(1)求证：DE 为 $\odot O$ 的切线；

(2)若 $DE=3$，$AC=8$，求直径 AB 的长.

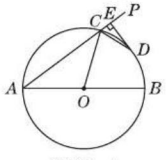


图 24-4

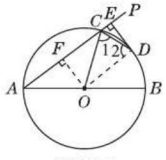


图 24-5

导引：(1)连接 OD，若要证明 DE 为 $\odot O$ 的切线，只要证明 $\angle ODE=90°$ 即可；

(2)过点 O 作 $OF\perp AP$ 于 F，利用垂径定理以及勾股定理计算即可.

(1)**证明**：连接 OD，如图 24-5.

$\because OC=OD$，$\therefore \angle 1=\angle 2$.

$\because CD$ 平分 $\angle PCO$，

$\therefore \angle 1=\angle PCD$.

$\therefore \angle PCD=\angle 2$.

$\therefore AP\parallel OD$.

$\because DE\perp AP$，$\therefore OD\perp DE$.

$\therefore DE$ 为 $\odot O$ 的切线.

(2)**解**：过点 O 作 $OF\perp AP$ 于 F，

如图 24-5. 由垂径定理得，$AF=CF$.

$\because AC=8$，$\therefore AF=4$.

$\because OD\perp DE$，$DE\perp AP$，

$\therefore$ 四边形 $ODEF$ 为矩形.

$\therefore OF=DE=3$.

在 $Rt\triangle AOF$ 中，

$OA^2=OF^2+AF^2=3^2+4^2=25$.

$\therefore OA=5$.

$\therefore AB=2OA=10$.

方法点拨：通常证切线有两种类型：① 若直线与圆有交点，则连半径，证垂直，得切线；② 若直线与圆的交点不明确，则作垂直，证半径，得切线.

专题五 圆的有关计算

链接中考>> 圆的有关计算一般涉及两个公式——弧长公式和扇形的面积公式，考查的题型多样，有的直接考查弧长和扇形面积，一般以填空题、选择题形式出现；有的要求阴影部分面积，这种一般通过转化为扇形面积来求，一般以解答题的形式出现；还有的求圆锥的侧面展开图的面积，这样的也是将其转化为求扇形的面积.

例 5 [中考·兰州] 如图 24-6，在 $Rt\triangle ABC$ 中，$\angle C=90°$，$\angle BAC$ 的平分线 AD 交 BC 边于点 D. 以 AB 上一点 O 为圆心作 $\odot O$，使 $\odot O$ 经过点 A 和点 D.

(1)判断直线 BC 与 $\odot O$ 的位置关系，并说明理由.

(2)若 $AC=3$，$\angle B=30°$.

①求 $\odot O$ 的半径；

②设 $\odot O$ 与 AB 边的另一个交点为 E，求线段 BD，BE 与劣弧 DE 所围成的阴影部分的面积(结果保留根号和 π).

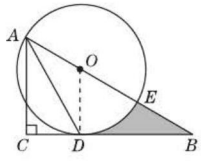


图 24-6

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

解：(1)相切. 理由如下：

如图 24-6，连接 OD.

$\because AD$ 平分 $\angle BAC$，$\therefore \angle CAD=\angle OAD$.

$\because OA=OD$，$\therefore \angle OAD=\angle ODA$.

$\therefore \angle CAD=\angle ODA$. $\therefore OD/\!/AC$.

$\because \angle C=90°$，$\therefore OD\perp BC$.

$\therefore BC$ 与 $\odot O$ 相切.

(2)①$\because AC=3$，$\angle B=30°$，

$\therefore AB=6$. 设 $OA=OD=r$，则 $OB=2r$.

$\therefore 2r+r=6$，解得 $r=2$，

即 $\odot O$ 的半径是 2.

②由①得 $OD=2$，$OB=4$，

$\therefore BD=2\sqrt{3}$.

$\because$ 在 $\mathrm{Rt}\triangle OBD$ 中，$\angle B=30°$，

$\therefore \angle DOB=60°$.

$$\therefore S_{阴影}=S_{\triangle BOD}-S_{扇形EOD}=\frac{1}{2}\times 2\sqrt{3}\times 2-\frac{60\times\pi\times 2^2}{360}=2\sqrt{3}-\frac{2\pi}{3}.$$

方法点拨：求不规则图形的面积，往往需要将其转化成规则图形面积的和或差的形式.

Ⅱ 思想方法专题

专题六 转化思想

专题解读>> 转化思想是指在解决问题的过程中，对问题进行转化，将“未知”转化为“已知”、将“陌生”转化为“熟知”、将“复杂”转化为“简单”的解题方法，其核心就是将有待解决的问题转化为已能明确解决的问题，以便利用已有的结论来加以处理.

例 6 ［中考·恩施州］如图 24-7，半径为 5 的半圆形的初始状态是直径平行于桌面上的直线 b，然后把半圆形沿直线 b 进行无滑动滚动，使半圆形的直径与直线 b 重合为止，则圆心 O 的运动路径的长度等于_____.

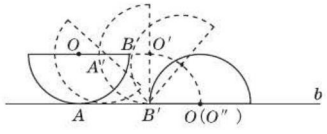


图 24-7

导引：如图24-7，由题意知，圆心 O 的运动路径分为两部分，一部分是线段 OO'，另一部分是以 B' 为圆心，$B'O'$ 为半径的圆弧 $O'O''$，所以圆心 O 运动路径的长度 $l_{总}=OO'+l_{弧O'O''}=l_{弧AB}+l_{弧O'O''}=\frac{90\times\pi\times 5}{180}+\frac{90\times\pi\times 5}{180}=5\pi$.

答案：5π

方法点拨：对于无滑动滚动来说，要注意旋转中心到直线 b 的距离不发生变化，对于旋转变换来说，要注意旋转中心的位置不发生变化，还要注意旋转方向和旋转角度.在旋转过程中，点所经过的路径是以该点到旋转中心的距离为半径，旋转角为圆心角的扇形的弧长.

例 7 如图 24-8，以 AD 为直径的半圆形 O 经过 $\mathrm{Rt}\triangle ABC$ 的斜边 AB 的两个端点，交直角边 AC 于点 E，点 B，E 是半圆弧的三等分点，若 CE 的长为 1，则图中阴影部分的面积为(　　)

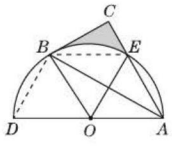


图 24-8

A. $3\sqrt{3}-\frac{\pi}{3}$　　B. $3\sqrt{3}-\frac{3\pi}{4}$

C. $\frac{3\sqrt{3}}{2}-\frac{\pi}{2}$　　D. $\frac{3\sqrt{3}}{2}-\frac{2\pi}{3}$

导引：首先根据圆周角定理得出扇形半径以及圆周角度数，进而利用锐角三角函数关系得出 BC，AC 的长，利用 $S_{\triangle ABC}-S_{扇形BOE}=$ 图中阴影部分的面积求出即可.

解：如图24-8，连接 BD，BE. $\because B$，E 是半圆弧的三等分点，

$\therefore \angle EOA=\angle EOB=\angle BOD=60°$，

$\therefore \angle BAC=\angle EBA=\angle BAD=30°$，

$\therefore BE/\!/AD$，$\angle BEC=60°$.

$\because CE=1$，$\therefore BE=2$，

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

$\therefore AD=2BE=4$,

$\therefore AB=AD\cos 30^\circ=2\sqrt{3}$,

$\therefore BC=\frac{1}{2}AB=\sqrt{3}$, $AC=\frac{\sqrt{3}}{2}AB=3$,

$\therefore S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}\times BC\times AC=\frac{1}{2}\times\sqrt{3}\times 3=\frac{3\sqrt{3}}{2}$.

$\because \triangle BOE$ 和 $\triangle ABE$ 同底等高,

$\therefore \triangle BOE$ 和 $\triangle ABE$ 面积相等,

$\therefore$ 图中阴影部分的面积为 $S_{\triangle ABC}-S_{扇形BOE}=\frac{3\sqrt{3}}{2}-\frac{60\cdot\pi\times 2^2}{360}=\frac{3\sqrt{3}}{2}-\frac{2}{3}\pi$.

故选 D.

答案: D

方法点拨: 求不规则图形的面积时,通常利用转化思想,借助三角形、四边形等知识,将不规则图形转化为规则图形,再根据规则图形面积的和或差去求.

专题七 分类讨论思想

专题解读>> 分类讨论思想是初中重要的数学思想方法之一. 近几年,中考经常出现需要分类讨论的试题,我们在平时的学习中要增强分类讨论的意识,培养思维的条理性、缜密性. 这类题一般不给出图形,满足条件的图形又具有多样性和普遍性,所以解题时,一般根据满足不同图形或图形的不同位置,分别求解或证明.

例 8 如图 24-9, AB 为 $\odot O$ 的直径,弦 $CD\perp AB$ 于 E, $\angle CDB=15^\circ$, $OE=2\sqrt{3}$.

(1)求 $\odot O$ 的半径;

(2)将 $\triangle OBD$ 绕 O 点旋转,使弦 BD 的一个端点与弦 AC 的一个端点重合,求弦 BD 与弦 AC 的夹角.

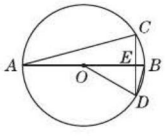


图 24-9

导引: (1)求出 $\angle BOD$ 的度数,在 $\mathrm{Rt}\triangle ODE$ 中,根据 $\angle DOE=30^\circ$, $OE=2\sqrt{3}$,求出 DE 和 OD 即可;

(2)分为 4 种情况分别讨论求解即可.

解: (1)$\because AB$ 为 $\odot O$ 的直径,弦 $CD\perp AB$ 于 E,

$\therefore \overset{\frown}{BC}=\overset{\frown}{BD}$,

$\therefore \angle CDB=\frac{1}{2}\angle BOD$.

而 $\angle CDB=15^\circ$,

$\therefore \angle BOD=2\times 15^\circ=30^\circ$.

在 $\mathrm{Rt}\triangle ODE$ 中,

$\angle DOE=30^\circ$, $OE=2\sqrt{3}$,

$\therefore OE=\sqrt{3}DE$, $OD=2DE$,

$\therefore DE=\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{3}}=2$,

$\therefore OD=4$,即 $\odot O$ 的半径为 4.

(2)有 4 种情况,如图 24-10.

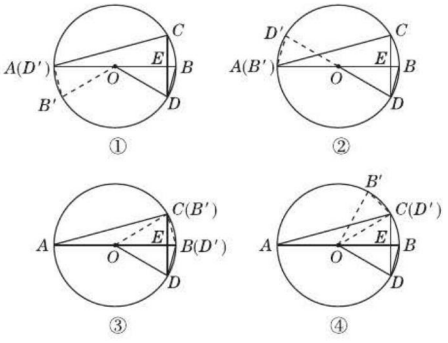


图 24-10

①如图①所示,

$\because OA=OB'$, $\angle AOB'=30^\circ$,

$\therefore \angle OAB'=\angle OB'A=75^\circ$.

$\because \angle CAB=\angle CDB=15^\circ$,

$\therefore \angle CAB'=\angle B'AO+\angle CAB=75^\circ+15^\circ=90^\circ$.

②如图②所示, $\angle CAD'=75^\circ-15^\circ=60^\circ$.

③如图③所示, $\angle ACB=90^\circ$.

④如图④所示, $\angle ACB'=60^\circ$.

故弦 BD 与弦 AC 的夹角为 60° 或 90°.

方法点拨: 动态问题经常因为漏解而出现错误,所以通常应该根据题意,首先画出满足条件的各种图形,画图要做到不重不漏,进而再分别进行求解或证明,也就是通常我们所说的"化动为静".

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

一、选择题

1. [中考·天水] 下列给出的函数中,其图象是中心对称图形的是(　　)

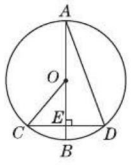
①函数 $y=x$;②函数 $y=x^2$;③函数 $y=\frac{1}{x}$.

A. ①②　　B. ②③　　C. ①③　　D. 都不是

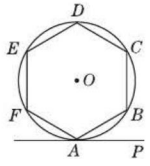
2. [中考·广州] 如图,在⊙O 中,AB 是直径,CD 是弦,$AB\perp CD$,垂足为 E,连接 CO,AD,$\angle BAD=20°$,则下列说法中正确的是(　　)

A. $AD=2OB$　　B. $CE=EO$

C. $\angle OCE=40°$　　D. $\angle BOC=2\angle BAD$



(第2题图)



(第3题图)

3. [中考·青岛] 如图,正六边形 $ABCDEF$ 内接于⊙O. 若直线 PA 与⊙O 相切于点 A,则 $\angle PAB$ 等于(　　)

A. 30°　　B. 35°　　C. 45°　　D. 60°

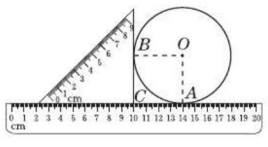
4. [中考·宜昌] 如图,圆形薄铁片与直角三角尺、直尺紧靠在一起平放在桌面上. 已知铁片的圆心为 O,三角尺的直角顶点 C 落在直尺的 10 cm 处,铁片与直尺的唯一公共点 A 落在直尺的 14 cm 处,铁片与三角尺的唯一公共点为 B. 下列说法错误的是(　　)

A. 圆形铁片的半径是 4 cm

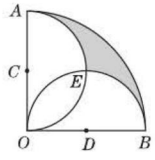
B. 四边形 $AOBC$ 为正方形

C. 弧 AB 的长度为 4π cm

D. 扇形 AOB 的面积是 4π cm^2



(第4题图)



(第5题图)

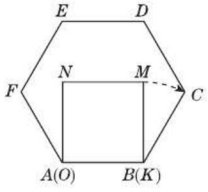
5. [模拟·临颍县] 如图,在扇形 AOB 中,$\angle AOB=90°$,$OA=2$,点 C,D 分别为 OA,OB 的中点,分别以 C,D 为圆心,以 OA,OB 为直径作半圆,两半圆交于点 E,则阴影部分的面积为(　　)

A. $\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}$　　B. $\frac{\pi}{2}-1$　　C. $\frac{\pi}{8}-\frac{1}{4}$　　D. $\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}$

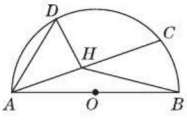
6. [中考·河北] 已知正方形 $MNOK$ 和正六边形 $ABCDEF$ 的边长均为 1,把正方形放在正六边形中,使 OK 边与 AB 边重合,如图所示. 按下列步骤操作:

将正方形在正六边形中绕点 B 顺时针旋转,使 KM 边与 BC 边重合,完成第一次旋转;再绕点 C 顺时针旋转,使 MN 边与 CD 边重合,完成第二次旋转……在这样连续 6 次旋转的过程中,点 B,M 间的距离可能是(　　)

A. 1.4　　B. 1.1　　C. 0.8　　D. 0.5



(第6题图)



(第7题图)

7. [模拟·武汉] 如图,点 D 在半圆 O 上,半径 $OB=\sqrt{61}$,$AD=10$,点 C 在弧 BD 上移动,连接 AC,H 是 AC 上一点,$\angle DHC=90°$,连接 BH,点 C 在移动的过程中,BH 的最小值是(　　)

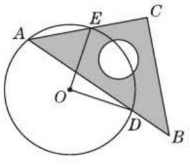
A. 5　　B. 6　　C. 7　　D. 8

二、填空题

8. [期末·宿松县] 从 3 时整开始,分针至少顺时针旋转_____度才能与时针重合.

9. [中考·自贡] 圆锥的底面周长为 6π cm,高为 4 cm,则该圆锥的全面积是_____;侧面展开扇形的圆心角是_____.

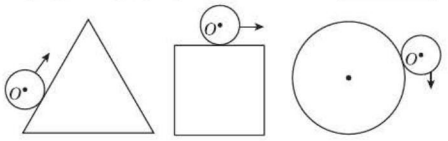
10. 如图,一块含 45°角的直角三角尺,它的一个锐角顶点 A 在⊙O 上,边 AB,AC 分别与⊙O 交于点 D,E,则 $\angle DOE$ 的度数为____.



(第10题图)

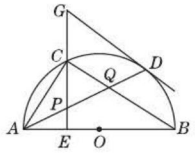
关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

11. [中考·广安] 如图,半径为 r 的⊙O 分别绕面积相等的等边三角形、正方形和圆用相同的速度匀速滚动一周,用时分别为 t_1,t_2,t_3,则 t_1,t_2,t_3 的大小关系为_____.

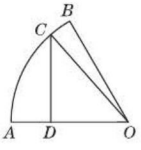


(第 11 题图)

12. [中考·广元] 如图,在⊙O 中,AB 是直径,点 D 是⊙O 上一点,点 C 是$\overset{\frown}{AD}$的中点,$CE \perp AB$ 于点 E,过点 D 的切线交 EC 的延长线于点 G,连接 AD,分别交 CE,CB 于点 P,Q,连接 AC. 关于下列结论:①$\angle BAD = \angle ABC$;②$GP = GD$;③点 P 是 $\triangle ACQ$ 的外心. 其中正确的是_____(只需填写序号).



(第 12 题图)



(第 13 题图)

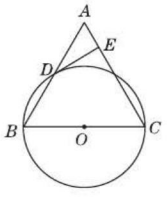
13. [中考·莱芜] 如图,在扇形 AOB 中,$\angle AOB = 60°$,扇形的半介为 r,点 C 在$\overset{\frown}{AB}$上,$CD \perp OA$,垂足为 D. 当 $\triangle OCD$ 的面积最大时,$\overset{\frown}{AC}$的长为_____.

三、解答题

14. 如图,在 $\triangle ABC$ 中,$BC = AC$,以 BC 为直径的⊙O 与边 AB 相交于点 D,$DE \perp AC$,垂足为点 E.

(1)求证:点 D 是 AB 的中点;

(2)判断 DE 与⊙O 的位置关系,并证明你的结论.

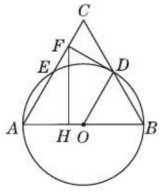


(第 14 题图)

15. 如图,在 $\triangle ABC$ 中,以 AB 为直径的⊙O 分别与 AC,BC 交于点 E,D,且 $BD = CD$.

(1)求证:$\angle B = \angle C$.

(2)过点 D 作 $DF \perp OD$,交 AC 于点 F,过点 F 作 $FH \perp AB$ 于 H,若 $AB = 5$,$CD = \sqrt{5}$,求 AH 的长.

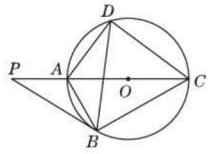


(第 15 题图)

16. 如图,点 P 是⊙O 的直径 CA 延长线上的一点,PB 切⊙O 于点 B,点 D 是圆上的一点,连接 AB,AD,BD,CD,$PB = BC$.

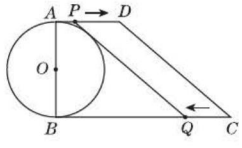
(1)求证:$OP = 2OC$;

(2)若 $OC = 5$,$\sin \angle DCA = \frac{3}{5}$,求 BD 的长.



(第 16 题图)

17. 如图,在四边形 $ABCD$ 中,$AD // BC$,$\angle ABC = 90°$,$AB = 12$ cm,$AD = 8$ cm,$BC = 22$ cm,AB 为⊙O 的直径,动点 P 从点 A 开始沿 AD 边向点 D 以 1 cm/s 的速度运动,动点 Q 从点 C 开始沿 CB 边向点 B 以2 cm/s的速度运动,P,Q 分别从点 A,C 同时出发. 当其中一点到达终点时,另一个动点也随之停止运动. 设运动时间为t(s),当 t 为何值时,PQ 与⊙O 相切? 【导学号:9142562】



(第 17 题图)

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

第25章 投影与视图



视图的魅力

数学点拨

你将学到的核心考点

- 平行投影 □
- 中心投影 □
- 正投影 □
- 三视图 □

我们为你提供的核心方法

- 投影源的确定法 □
- 中心投影测高法 □
- 平行投影测高法 □
- 分类讨论思想 □
- 转化思想 □

掌握这些考点和方法后，记得回来给自己打☑哦！

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

25.1 投　影

核心知识

- 平行投影
- 中心投影
- 正投影

知识链接

物体的投影 — 光线的特征 — 平行投影 → 正投影；中心投影

点知识·拨考向 速提分

点知识 1 投影

1 投影及相关概念： 一个物体放在阳光下或者灯光前，就会在地面上或者墙面上留下它的影子，这个影子称为物体的投影. 照射光线（阳光或灯光）叫做投射线. 投影所在的平面叫做投影面.

要点精析///

(1) 形成投影应具备的条件：

①要有物体存在且物体处于光源与投影面之间；

②要有光线；

③要有一个呈现投影的面，即投影面（投影面应是平的），以上三个条件缺一不可.


投影及其相关概念

(2) 光线移动时，物体影子的大小、方向也随着变化；在同等条件下，不同形状的物体的投影可能相同.

(3) 光线是直线照射的，我们可以由投影与物体确定光线方向.

2 易错警示：

(1) 物体投影的形状、大小与它相对于投影面的位置有关，也与照射它的光线有关；

(2) 投影可以是一条线、一个点，也可以是其他图形.

拨考向 ▸▸▸

提分·秘诀

考查角度1 利用投影的概念识别投影现象

例1 下列现象不属于投影的是(　　)

A. 皮影　　B. 树影　　C. 手影　　D. 素描画

导引： 紧扣投影的定义，投影的条件是“用光线照射物体”，皮影、手影和树影都是在光线照射下形成的影子.

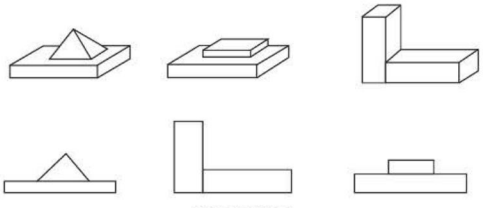
答案： D

方法点拨

投影是在光线照射下形成的影子.

同类变式 （答案见192页）

1. 用线将如图所示的各物体与它们相对应的投影连接起来（不考虑尺寸的大小）.



（第1题图）

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

考查角度2 利用投影的概念找投射线

例2 图25.1-1是一个正方体在地面上的投影，你能从图中找出投射线吗？

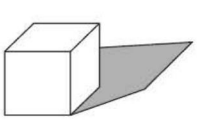


图25.1-1

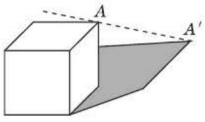


图25.1-2

解： 如图25.1-2，先找出正方体上一点A，再在投影中找出对应点A'，连接AA'，AA'即为投射线.

方法点拨

确定投射线的方法：物体上一点与它在投影中的对应点的连线即为投射线.

知识2 平行投影

1 定义： 由平行的光线所形成的投影称为平行投影. 例如，物体在太阳光的照射下形成的影子就是平行投影.

要点精析

(1) 平行投影中，物体与投影的对应点的连线是相互平行的.

(2) 物体与投影的对应点的连线是相互平行的就说明是平行投影.

(3) 物体在太阳光照射下的不同时刻，不仅影子的大小在改变，而且影子的方向也在改变，就我们生活的北半球而言，上午的影子的方向是由西向北变化，影子越来越短；下午的影子的方向是由北向东变化，影子越来越长.

2 平行投影的特点：

(1) 等高的物体垂直于地面时，在太阳光下，同一时刻，它们的影子一样长；

(2) 等长的物体平行于地面且垂直于太阳光线放置时，同一时刻，它们的影子一样长，且等于物体本身的长度；

(3) 在太阳光下，不同时刻，同一地点，同一物体的影子的长度可能不同；

(4) 在太阳光下，同一时刻，同一地点，以同样的方式放置不同的物体，影子的长度与物体的长度成正比.

核心考向 ▶▶▶ 提分·秘诀

考查角度1 利用平行投影的特征确定影子

例3 ［中考·赤峰］李刚同学拿一个矩形木框在阳光下摆弄，矩形木框在地面上形成的投影不可能是图25.1-3中的(　　)



图25.1-3

导引： 根据平行投影的特点知，矩形木框在地面上形成的投影可能是A，B，C，不可能是D.

答案： D

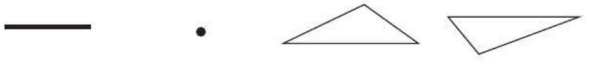
方法点拨

“平行投影的投射线是平行的”，在阳光下摆弄矩形木框时，它在地面上形成的投影不可能是一点.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

同类变式（答案见192页）

3. ［中考·贺州］小明拿一个等边三角形木框在太阳下玩耍，发现等边三角形木框在地面上的投影不可能是(　　)



A　　B　　C　　D

考查角度2　利用不同时刻的平行投影确定时间顺序

例4　如图25.1-4所示的四幅图是两个物体在不同时刻太阳光下的影子，按照时间的先后顺序排列，正确的是(　　)

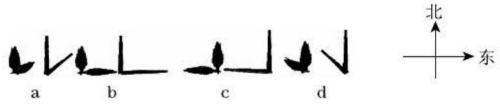


图25.1-4

A. a→b→c→d　　B. d→b→c→a

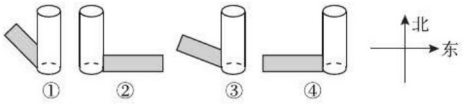
C. c→d→a→b　　D. a→c→b→d

导引： 根据不同时刻太阳光照射的方向和照射的角度去判断，最早时太阳在东方，则影子在物体的西方，随着时间的变化，影子的方向由西向东转动，影子的长度先由长变短，然后由短变长.

答案： C

同类变式（答案见192页）

4. 如图是小红在某天四个时刻看到一根木棒及其影子的情况，那么她看到的先后顺序是(　　)



（第4题图）

A. ①②③④　　B. ④③①②　　C. ④①③②　　D. ②①③④

考查角度3　利用平行投影的特点进行作图

例5　如图25.1-5，有两根木棒 AB，CD 在同一平面上直立着，其中木棒 AB 在太阳光下的影子为 BE. 请你在图中画出这时木棒 CD 的影子.

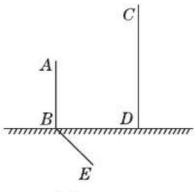


图25.1-5

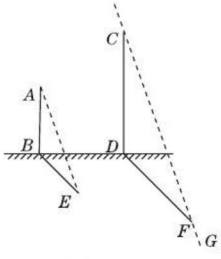


图25.1-6

方法点拨

物体在太阳光下的不同时刻，不但影子的大小在改变，而且方向也在改变.

方法点拨

画物体的平行投影的方法：先根据已知投影的物体及其投影确定光线，然后利用两个物体的顶端和各自影子的顶端的连线是一组平行线，过物体顶端作平行线与投影面相交，从而确定其影子.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

导引： 太阳光线是平行的，AB 与 CD 是平行的，所以它们的影子也是平行的. 连接 AE，过点 C 作 AE 的平行线 CG，过点 D 作 BE 的平行线 DF，交 CG 于点 F，则 FD 为木棒 CD 的影子.

解： 如图25. 1-6，作法：(1) 连接 AE；(2) 过点 C 作 $CG \parallel AE$；(3) 过点 D 作 $DF \parallel BE$，交 CG 于点 F，则木棒 CD 的影子为线段 FD.

考查角度4 利用平行投影的特征进行计算

例6 如图 25. 1-7，AB 和 DE 是直立在地面上的两根立柱，$AB = 5$ m，某一时刻 AB 在阳光下的投影 $BC = 3$ m.

(1) 请你在图中画出此时 DE 在阳光下的投影（用线段 FE 表示）；

(2) 在测量 AB 的投影时，同时测量出 DE 在阳光下的投影长为6 m，请你计算 DE 的长.

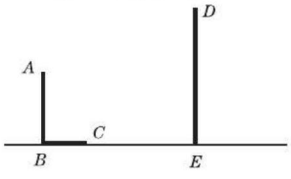


图 25. 1-7

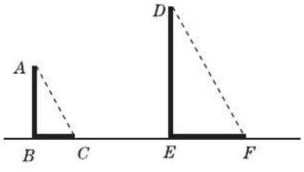


图 25. 1-8

导引： (1) 先由 AB 的影子确定太阳光线，再根据平行投影的特征画出 DE 的影子；

(2) 根据在阳光下同一时刻物高与影长的比相等求解.

解： (1) 如图 25. 1-8，连接 AC，过点 D 作 $DF \parallel AC$，交直线 BE 于点 F，则 FE 就是 DE 的投影.

(2) $\because$ 在阳光下同一时刻物高与影长的比相等，$\therefore \dfrac{AB}{BC} = \dfrac{DE}{EF}$.

$\because AB = 5$ m，$BC = 3$ m，$EF = 6$ m，$\therefore DE = \dfrac{AB \cdot EF}{BC} = 10$ m.

方法点拨

利用平行投影的知识解决有关太阳光下物体影子问题的方法：先要看清是否在同一时刻，然后画物体在太阳光下的影子（先要确定太阳光线，然后平移太阳光线），最后根据同一时刻物高与影长的比相等进行计算.

知识 3 中心投影

1 **定义：** 由一点（点光源）发出的光线所形成的投影称为中心投影.

2 **中心投影的性质：**

①光源、物体边缘上的点及它在影子上的对应点在同一条直线上，根据同一灯光下两个不同物体及它们的影子，可以确定灯（点光源）所在的位置；


利用中心投影作图

②物体相对于光源的方向改变，则该物体的影子的方向也发生变化，但光源、物体的影子始终分居在物体的两侧.

3 **平行投影与中心投影的联系与区别：**

项目 \ 类型		平行投影	中心投影
定义		由平行光线所形成的投影	由同一点发出的光线所形成的投影
区别	光源	太阳等	点光源（如电灯灯泡等）
	投射线	平行	相交于一点
	投影方向	相同	由点光源与物体的相对位置确定
联系		都是投影现象，都是物体在光线下形成的影子	

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

考查角度1 利用中心投影的特征识别中心投影现象

例7 ［中考·庆阳］如图25.1-9，晚上小亮在路灯下散步，在小亮由 A 处径直走到 B 处这一过程中，他在地上的影子(　　)

A. 逐渐变短

B. 先变短后变长

C. 先变长后变短

D. 逐渐变长

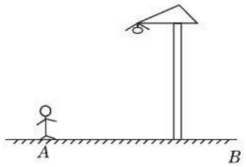


图25.1-9

导引： 根据中心投影的特点“等高的物体垂直于地面放置时，在灯光下，离灯泡近的物体的影子短，离灯泡远的物体的影子长”进行判断即可. 因为小亮由 A 处径直走到 B 处这一过程中离灯泡是由远到近再到远的过程，所以他在地上的影子先变短后变长.

答案： B

方法点拨

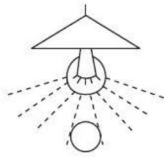
（1）等高的物体垂直于地面放置时，在灯光下，离灯泡近的物体的影子短，离灯泡远的物体的影子长；（2）等长的物体平行于地面放置时，在灯光下，离灯泡越近，影子越长；离灯泡越远，影子越短，但不会比物体本身的长度短.

同类变式 （答案见192页）

7. 如图，白炽灯下有一个乒乓球，当乒乓球越接近灯泡时，它在地面上的影子(　　)

A. 越大　　B. 越小

C. 不变　　D. 无法确定



（第7题图）

考查角度2 利用两种投影各自的特征进行识别

例8 图25.1-10中的投影不是中心投影的是(　　)



图25.1-10

导引： 解答本题需作图进行分析. 解题过程中易出现对中心投影与平行投影的特征分不清楚而致错.

答案： D

方法点拨

在辨别中心投影与平行投影时，可根据物体与影子确定光线，若所有物体与影子形成的光线相交于一点，则属于中心投影，若平行，则属于平行投影.

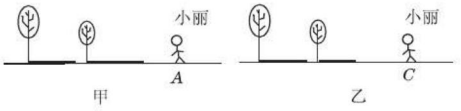
同类变式 （答案见192页）

8. 如图，甲、乙分别是两棵树及其影子的情形.

(1) 哪个图反映了太阳光下的情形？哪个图反映了路灯下的情形？

(2) 你是用什么方法判断的？

(3) 请画出图中表示小丽的影子的线段.



（第8题图）

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

考查角度3 利用中心投影的特征确定光源或影子

例9 ［中考·茂名］如图25.1-11，小华、小军和小丽同时站在路灯下，其中小军和小丽的影子分别是AB，CD.

(1)请你在图中画出路灯灯泡所在的位置(用点P表示)；

(2)画出小华此时在路灯下的影子(用线段EF表示).

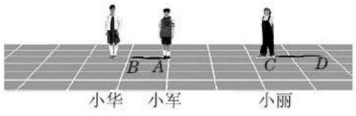


图25.1-11

导引： 因为是在路灯下形成的影子，所以是中心投影. 根据小军和小丽的影子可以确定灯泡的位置，然后就可以画出小华在路灯下的影子.

解： (1)(2)如图25.1-12所示.

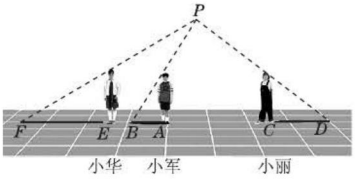
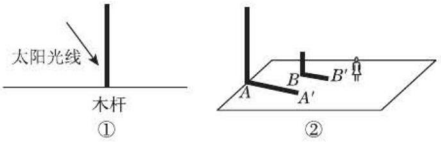


图25.1-12

同类变式 (答案见193页)

9. ［中考·兰州］(1)一木杆按如图①所示的方式直立在地面上. 请在图中画出它在阳光下的影子(用线段CD表示).



(第9题图)

(2)图②是两根木杆及它们在灯光下的影子. 请在图中画出灯泡的位置(用点P表示)，并在图中画出人在此灯泡下的影子(用线段EF表示).

考查角度4 利用中心投影的特征进行计算

例10 如图25.1-13，小芸用灯泡O照射一个矩形相框$ABCD$，在墙上形成影子$A'B'C'D'$. 现测得$OA=20$ cm，$OA'=50$ cm，相框$ABCD$的面积为80 cm^2，则影子$A'B'C'D'$的面积为_____.

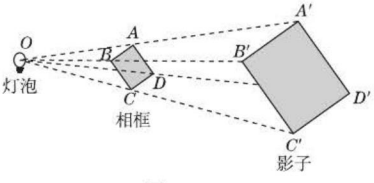


图25.1-13

方法点拨

确定中心投影的光源位置的方法：根据点光源、物体边缘上的点及它在影子上的对应点在同一条直线上的关系，先找物体上两点及其在影子上的对应点，再分别过物体上的点及其在影子上的对应点画直线，两条直线的交点即为点光源.

方法点拨

中心投影可以看成是位似变换，光源是位似中心，原图的投影可以看成是位似变换后的图形. 在求中心投影的有关线段、面积等问题时，可以运用位似的性质来解决.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

导引： 易得对应点到对应中心的长度的比值，进而可得相似比，那么面积比为相似比的平方，据此求解可得.

由 $OA:OA'=2:5$，可知 $OB:OB'=2:5$.

$\because \angle AOB=\angle A'OB'$，$\therefore \triangle AOB\backsim\triangle A'OB'$，

$\therefore AB:A'B'=2:5$，

$\therefore$ 矩形 $ABCD$ 的面积：矩形 $A'B'C'D'$ 的面积为 $4:25$.

又矩形 $ABCD$ 的面积为 $80\ \text{cm}^2$，

$\therefore$ 矩形 $A'B'C'D'$ 的面积为 $500\ \text{cm}^2$. 故答案为 $500\ \text{cm}^2$.

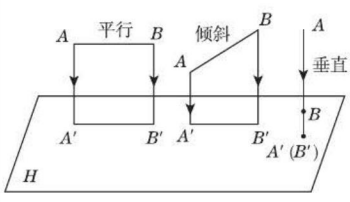
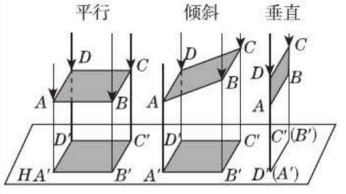
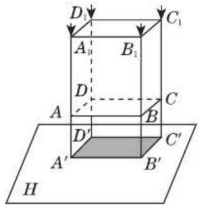
答案： $500\ \text{cm}^2$

点知识 4 正投影（重点）

1 **正投影：** 平行投影 $\xrightarrow{\text{投射线垂直于投影面}}$ 正投影. 在实际制图中，经常应用正投影. 以下介绍线段、平面图形和几何体的正投影.

拓展///

线段、平面图形、几何体的正投影如下表：

类别	图形	内容
线段的正投影（分三种情况）		设线段 AB 的端点 A,B 在投影面 H 上的投影分别为点 A',B'，线段 $A'B'$ 就是线段 AB 在投影面 H 上的投影. 当线段 AB 平行于投影面 H 时，$A'B'=AB$； 当线段 AB 倾斜于投影面 H 时，$A'B'<AB$； 当线段 AB 垂直于投影面 H 时，$A'B'=0$（此时点 A' 与点 B' 重合，点 A' 或点 B' 就是线段 AB 在投影面 H 的投影）. 规律：平行长不变，倾斜长缩短，垂直成一点.
平面图形的正投影（分三种情况）		设矩形 $ABCD$ 的顶点 A,B,C,D 在投影面 H 上的投影分别为点 A',B',C',D'，四边形 $A'B'C'D'$ 就是矩形 $ABCD$ 在投影面 H 上的投影. 当矩形 $ABCD$ 平行于投影面 H 时，四边形 $A'B'C'D'\cong$ 矩形 $ABCD$； 当矩形 $ABCD$ 倾斜于投影面 H 时，四边形 $A'B'C'D'$ 的大小、形状相对于矩形 $ABCD$ 已有改变； 当矩形 $ABCD$ 垂直于投影面 H 时，四边形 $A'B'C'D'$ 变为线段 $D'C'$（或 $A'B'$）. 规律：平行形不变，倾斜形改变，垂直成线段.
几何体的正投影		由于长方体的两个底面 $ABCD,A_1B_1C_1D_1$ 都平行于投影面 H，因而它们在投影面 H 上的正投影就是矩形 $A'B'C'D'$. 由于长方体的四个侧面都垂直于投影面 H，因而它们在投影面 H 上的正投影分别是线段 $A'B',B'C',C'D',D'A'$. 由此可知，所以长方体在投影面 H 上的正投影就是矩形 $A'B'C'D'$. 规律：一个几何体在一个平面上的正投影是一个平面图形.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

要点精析///

(1)正投影是特殊的平行投影,正投影需满足投射线垂直于投影面.

(2)正投影是光线与投影面之间的关系,与物体的位置无关.

2 视图: 一个几何体在一个平面上的正投影叫做这个几何体的视图.

要点精析///

(1)根据投影与视图之间的关系,可以用视图来研究物体的形状,也可以由物体的形状来研究它的视图.

(2)因为正投影的投射线垂直于投影面,所以一个物体的正投影与我们沿投射线方向观察这个物体看到的图形之间是有联系的.

核心考向 ▸▸▸ 提分·秘诀

考查角度1 利用正投影的概念进行辨析

例 11 [中考·百色]如图 25.1-14,长方体的一个底面 $ABCD$ 在投影面 P 上,M,N 分别是侧棱 BF,CG 的中点,矩形 $EFGH$ 与矩形 $EMNH$ 的投影都是矩形 $ABCD$,设它们的面积分别是 S_1,S_2,S,则 S_1,S_2,S 的关系是_____.(用"=""＞"或"＜"连接)

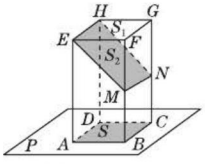


图 25.1-14

导引: ∵ 立体图形是长方体,∴ 底面 $ABCD$ // 底面 $EFGH$.

∵ 矩形 $EFGH$ 的投影是矩形 $ABCD$,∴ $S_1=S$.

∵ $EM>EF$,$EH=EH$,∴ $S_1<S_2$. ∴ $S_1=S<S_2$,

故答案为 $S_1=S<S_2$.

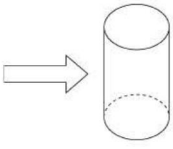
答案: $S_1=S<S_2$

同类变式 (答案见 193 页)

11. 如图,箭头表示投射线的方向,则图中圆柱体的正投影是(　　)

A. 圆　　B. 圆柱

C. 菱形　　D. 矩形


(第 11 题图)

方法点拨

物体的正投影的形状、大小与物体相对于投影面的位置有关.画一般立体图形的正投影的关键是找出平行于投影面的立体图形的最大截面.

考查角度2 利用正投影的特征画物体的正投影

例 12 如图 25.1-15,圆环 A 倾斜于投影面 M,N,分别作出圆环 A 在 M,N 中的正投影.

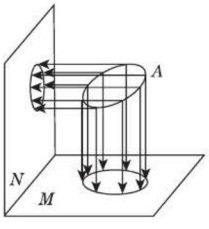


图 25.1-15

导引: 圆环上有无数个点,我们不可能作出每一个点的正投影,所以要选取有代表性的点,作出其正投影.比如作水平面上的正投影时,选择圆环最左侧、最右侧的点;作竖直面上的正投影时,选择圆环最上端、最下端的点,由此确定投影的大致范围.

解: 圆环 A 在投影面 M,N 中的正投影如图 25.1-15.

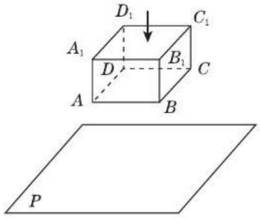
方法点拨

正投影的投射线垂直于投影面,所以即使题目中没有画出投射线,我们也能由投影面确定投射线的方向.

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

同类变式（答案见193页）

12. 如图，试画出长方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 在投影面 P 上的正投影.



（第12题图）

考查角度3 利用正投影的特征进行计算

例13 在平面直角坐标系 xOy 中，位于第一象限内的点 $A(1,2)$ 在 x 轴上的正投影为点 A'，则 $\cos\angle AOA' =$ _____.

导引： 如图25.1-16，点 $A(1,2)$ 在 x 轴上的正投影为点 A'，$\therefore A'O=1$，$AA'=2$.

$\therefore AO=\sqrt{5}$，$\therefore \cos\angle AOA'=\dfrac{A'O}{AO}=\dfrac{1}{\sqrt{5}}=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$，

故答案为 $\dfrac{\sqrt{5}}{5}$.

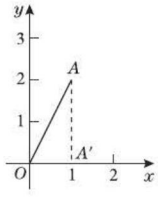


图25.1-16

答案： $\dfrac{\sqrt{5}}{5}$

方法点拨

点的正投影是点，通过构造直角三角形进行分析计算.

同类变式（答案见193页）

13. 一个圆柱的轴截面平行于投影面，圆柱的正投影是宽为3，长为5的长方形，求圆柱的体积.

点方法·拨技巧 提高分

拔尖角度1 利用相似解决平行投影问题

例14 ［中考·江西］问题背景

在某次活动课中，甲、乙、丙三个学习小组于同一时刻在阳光下对校园内一些物体进行了测量. 下面是他们通过测量得到的一些信息：

甲组：如图25.1-17①，测得一根直立于平地，长为80 cm的竹竿的影长为60 cm.

乙组：如图25.1-17②，测得学校旗杆的影长为900 cm.

丙组：如图25.1-17③，测得校园景灯（灯罩视为球体，灯杆为圆柱体，其粗细忽略不计）的高度为200 cm，影长为156 cm.

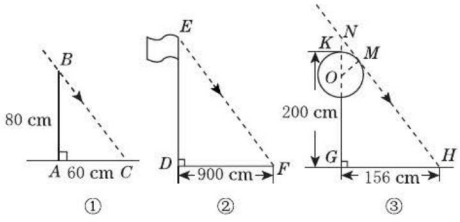


图25.1-17

任务要求

(1) 请根据甲、乙两组得到的信息，计算出学校旗杆的高度.

(2) 如图25.1-17③，设太阳光线 NH 与 $\odot O$ 相切于点 M. 请根据甲、丙两组得到的信息，求景灯灯罩的半径（友情提示：

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

如图 25.1-17③，景灯的影长等于线段 NG 的影长；需要时可采用等式 $156^2+208^2=260^2$）.

导引：（1）根据平行投影的特征，物高与影长的比相等，可求出学校旗杆的高度；

（2）先根据平行投影的特征求出 NG 的长，然后根据 $\triangle OMN$ 与 $\triangle HGN$ 相似求出灯罩的半径.

解：（1）由平行投影的特征知，$\frac{AB}{AC}=\frac{DE}{DF}$，

即 $\frac{80}{60}=\frac{DE}{900}$. $\therefore DE=1\ 200\ \text{cm}=12\ \text{m}$.

$\therefore$ 学校旗杆的高度是 12 m.

（2）与（1）类似，得 $\frac{AB}{AC}=\frac{GN}{GH}$，即 $\frac{80}{60}=\frac{GN}{156}$.

$\therefore GN=208\ \text{cm}$.

在 $\text{Rt}\triangle NGH$ 中，根据勾股定理，得

$NH^2=156^2+208^2=260^2$.

$\therefore NH=260\ \text{cm}$.

设 $\odot O$ 的半径为 r cm.

如图 25.1-17③，连接 OM.

$\because NH$ 切 $\odot O$ 于 M，$\therefore OM\perp NH$.

$\therefore \angle OMN=\angle HGN=90°$.

又 $\angle ONM=\angle HNG$，

$\therefore \triangle OMN\backsim\triangle HGN$. $\therefore \frac{OM}{HG}=\frac{ON}{HN}$.

又 $ON=OK+KN=OK+(GN-GK)=(r+8)\ \text{cm}$，

$\therefore \frac{r}{156}=\frac{r+8}{260}$. 解得 $r=12$.

$\therefore$ 景灯灯罩的半径是 12 cm.

方法点拨： 投影包括平行投影和中心投影，通过投影的特征可知，两种投影作图后，与相似紧密相关.在求投影中的线段长时，一般都结合三角形相似的知识进行计算.

拔尖角度 2 利用相似解决中心投影问题

例 15 如图 25.1-18，有一根路灯杆 AB，在光线下小明在点 D 处的影长 $DE=3$ m，沿 BD 方向行走到达点 G 处，测得 $DG=5$ m，这时小明的影长 $GH=5$ m，如果小明的身高为 1.7 m，求路灯杆 AB 的高度.（精确到 0.1 m）

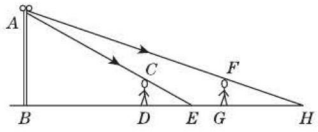


图 25.1-18

导引： 小明在点 D 和点 G 两个位置时的影子都是由路灯发出的光对人投影形成的，由图形易找到两对相似三角形，利用相似三角形对应边成比例解决问题.

解： 依题意，得 $AB\perp BH$，$CD\perp BH$，$FG\perp BH$.

在 $\triangle ABE$ 和 $\triangle CDE$ 中，

$\because AB\perp BH$，$CD\perp BH$，$\therefore CD/\!/AB$.

$\therefore \triangle ABE\backsim\triangle CDE$.

$\therefore \frac{CD}{AB}=\frac{DE}{DE+BD}$.

同理，由 $\triangle ABH\backsim\triangle FGH$，

得 $\frac{FG}{AB}=\frac{HG}{HG+GD+BD}$.

又 $\because CD=FG=1.7$ m，

$\therefore \frac{DE}{DE+BD}=\frac{HG}{HG+GD+BD}$，

即 $\frac{3}{3+BD}=\frac{5}{10+BD}$. 解得 $BD=7.5$ m.

$\therefore AB=\frac{CD}{DE}\cdot(DE+BD)=5.95\ \text{m}\approx 6.0\ \text{m}$.

故路灯杆 AB 的高度约为 6.0 m.

技巧点拨： 这是一道实际应用问题，关键在于把握在小明移动过程中，始终不变的量，即小明的身高和路灯杆 AB 的高.

拔尖角度 3 利用锐角三角函数解决投影问题

例 16 ［中考·仙桃］如图 25.1-19，在坡角为 30°的山坡上有一铁塔 AB，其正前方矗立着一大型广告牌，当阳光与水平线成 45°角时，测得铁塔 AB 落在斜坡上的影子 BD 的长为 6 米，落在广告牌上的影子 CD 的长为 4 米，求铁塔 AB 的高（AB，CD 均与水平面垂直，结果保留根号）.

导引： 过点 C 作 $CE\perp AB$ 于 E，过点 B 作 $BF\perp CD$ 于 F. 在 $\text{Rt}\triangle BFD$ 中，求出 DF，BF 的长度，在 $\text{Rt}\triangle ACE$ 中，求出 AE，CE 的长度，继而可求得 AB 的长度.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

解：如图 25. 1-19，过点 C 作 $CE\perp AB$ 于 E，过点 B 作 $BF\perp CD$ 于 F.

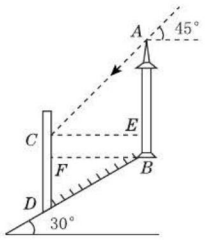


图 25. 1-19

在 $\mathrm{Rt}\triangle BFD$ 中，

$\because \angle DBF=30°$，

$\sin\angle DBF=\dfrac{DF}{BD}$，

$\cos\angle DBF=\dfrac{BF}{BD}$，

$BD=6$ 米，

$\therefore DF=3$ 米，$BF=3\sqrt{3}$ 米.

$\because AB/\!/CD$，$CE\perp AB$，$BF\perp CD$，

$\therefore$ 四边形 $BFCE$ 为矩形.

$\therefore CE=BF=3\sqrt{3}$ 米，

$BE=CF=CD-DF=1$ 米.

在 $\mathrm{Rt}\triangle ACE$ 中，$\because \angle ACE=45°$，

$\therefore AE=CE=3\sqrt{3}$ 米.

$\therefore AB=(3\sqrt{3}+1)$ 米.

因此，铁塔 AB 的高为 $(3\sqrt{3}+1)$ 米.

技巧点拨：利用影长求物高时，借助光线构造直角三角形，利用锐角三角函数值解与物高有关的直角三角形.

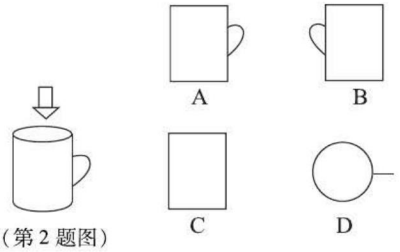
练中考·练模拟 得满分 （答案见 193 页）

基础巩固练

1. ［中考·绥化］正方形的正投影不可能是(　　)

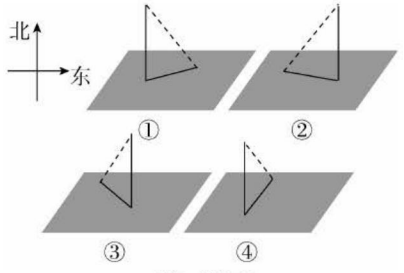
A. 线段　B. 矩形　C. 正方形　D. 梯形

2. 如图，水杯的杯口与投影面平行，投射线的方向如箭头所示，它的正投影是(　　)



（第 2 题图）

3. 在同一天的四个不同时刻，某学校旗杆的影子如图所示，按时间先后顺序排列是(　　)



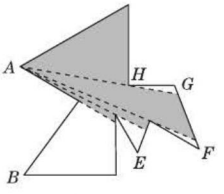
（第 3 题图）

A. ①②③④　B. ②③④①

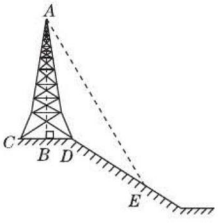
C. ③④①②　D. ④③①②

4. 如图，为了监控一不规则多边形艺术走廊内的活动情况，现已在 A，B 两处各安装了一个监控探头（走廊内所用探头的观测区域为圆心角最大可取到 180°的扇形），图中的阴影部分是 A 处监控探头观测到的区域. 要使整个艺术走廊都能被监控到，还需再安装一个监控探头，则安装的位置是(　　)

A. E 处　B. F 处　C. G 处　D. H 处



（第 4 题图）



（第 5 题图）

5. 如图，在斜坡的顶部有一铁塔 AB，B 是 CD 的中点，CD 是水平的，在阳光的照射下，塔影 DE 留在坡面上. 已知铁塔底座宽 $CD=12$ m，塔影长 $DE=18$ m. 吴明亮和张华的身高都是 1. 6 m，同一时刻，吴明亮站在点 E 处，影子在坡面上，张华站在平地上，影子在平地上，两人的影长分别为 2 m 和 1 m，那么塔高 AB 为(　　)

A. 24 m　B. 22 m

C. 20 m　D. 18 m

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

6. 上小学五年级的小丽看见上初中的哥哥小勇用测树的影长和自己的影长的方法来测树高，她也学着哥哥的样子在同一时刻测得树的影长为 5 米，自己的影长为 1 米. 要求得树高，还应测得_____.

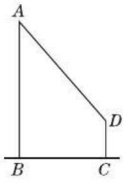
7. 当物体的某个面平行于投影面时，这个面的正投影与这个面的形状、大小_____（填“相同”“不一定相同”或“不相同”）.

8. 如图，是圆桌正上方的灯泡发出的光线照射桌面后，在地面上形成阴影（圆形）的示意图. 已知桌面的直径为 1.2 米，桌面距离地面 1 米. 若灯泡距离地面 3 米，则地面上阴影部分的面积为_____.



（第 8 题图）

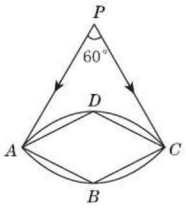
9. [**期末 · 合肥**] 如图，一位同学想利用树影测量树高（AB），他在某一时刻测得高为 1 m 的竹竿影长为 0.9 m，但当他马上测量树影时，因树靠近一幢建筑物，影子不全落在地面上，有一部分影子在墙上（CD），他先测得留在墙上的影高（CD）为 1.2 m，又测得地面部分的影长（BC）为 2.7 m，他测得的树高应为多少米？



（第 9 题图）

能力提升练

10. 如图，某剧院舞台正上方的照明灯 P 射出的光线成“锥体”，其“锥角”是 60°. 已知舞台 $ABCD$ 是边长为 6 m 的正方形. 要使灯光恰好能照射到整个舞台，则灯 P 的悬挂高度是（　　）

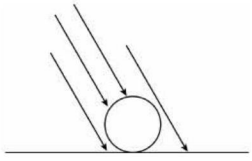


（第 10 题图）

A. $3\sqrt{6}$ m　　B. $3\sqrt{3}$ m

C. $4\sqrt{3}$ m　　D. $\sqrt{6}$ m

11. 如图，太阳光线与地面成 60°角，照射在地面上的一个皮球上，皮球在地面上的投影长是 $10\sqrt{3}$ cm，则皮球的直径是（　　）

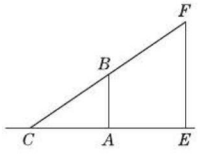


（第 11 题图）

A. $5\sqrt{3}$ cm　　B. 15 cm

C. 10 cm　　D. $8\sqrt{3}$ cm

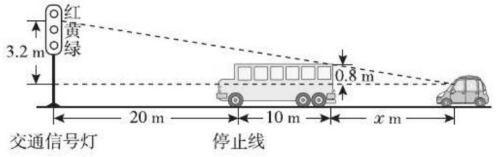
12. 如图，一根直立于水平地面的木杆 AB 在灯光下形成影子 AC（$AC > AB$），当木杆绕点 A 按逆时针方向旋转，直至到达地面时，影子的长度发生变化. 已知 $AE = 5$ m，在旋转过程中，影长的最大值为 5 m，最小值为 3 m，且影长最大时，木杆与光线垂直，则路灯 EF 的高度为_____m.



（第 12 题图）

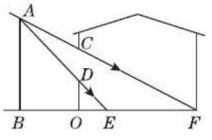
关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

13. 在同车道行驶的机动车，后车应当与前车保持足以采取紧急制动措施的安全距离. 如图，在一个路口，一辆长为 10 m 的大巴车遇红灯后停在距交通信号灯 20 m 的停止线处，小张驾驶一辆小轿车跟随大巴车行驶. 设小张距大巴车车尾 x m，若大巴车车顶高于小张的水平视线 0.8 m，红灯下沿高于小张的水平视线 3.2 m，若小张能看到整个红灯，则 x 的最小值为_____.



（第 13 题图）

14. ［模拟 · 铜陵］如图，小明家窗外有一堵围墙 AB，由于围墙的遮挡，清晨太阳光恰好从窗户的最高点 C 射进房间的地板 F 处，中午太阳光恰好能从窗户的最低点 D 射进房间的地板 E 处，小明测得窗子距地面的高度 $OD = 0.8$ m，窗高 $CD = 1.2$ m，并测得 $OE = 0.8$ m，$OF = 3$ m，求围墙 AB 的高度.

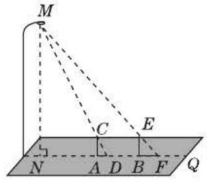


（第 14 题图）

思维拓展练

15. ［中考 · 陕西］晚饭后，小聪和小军在社区广场散步. 小聪问小军："你有多高？"小军一时语塞. 小聪思考片刻，提议用广场照明灯下的影长及地砖长来测量小军的身高. 于是，两人在灯下沿直线 NQ 移动，如图，当小聪正好站在广场的 A 点（距 N 点 5 块地砖长）时，其影长 AD 恰好为 1 块地砖长；当小军正好站在广场的 B 点（距 N 点 9 块地砖长）时，其影长 BF 恰好为 2 块地砖长. 已知广场地面由边长为 0.8 米的正方形地砖铺成，小聪的身高 AC 为 1.6 米，$MN \perp NQ$，$AC \perp NQ$，$BE \perp NQ$. 请你根据以上信息，求出小军的身高 BE.（结果精确到 0.01 米）

【导学号：9142562】



（第 15 题图）

错题笔记

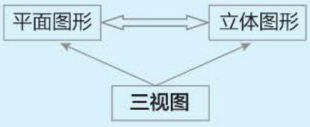
关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

25.2 三视图

核心知识

- 认识几何体的三视图
- 画几何体的三视图
- 由几何体的三视图识别几何体
- 棱柱

知识链接



点知识·拨考向 速提分

点知识 1 认识三视图

1 **三视图：** 我们用三个两两互相垂直的平面作为投影面，其中正对着我们的面叫做正面，下方的面叫做水平面，右边的面叫做侧面. 一个几何体（例如一个长方体）在三个投影面内同时进行正投影，自几何体的前方向后投射，在正面投影面上得到的视图称为主视图；自几何体的上方向下投射，在水平投影面上得到的视图称为俯视图；自几何体的左侧向右投射，在侧面投影面上得到的视图称为左视图.

2 **常见的几何体的三视图：**

几何体	主视图	左视图	俯视图
	□	□	□
	▯	▯	○

续表

几何体	主视图	左视图	俯视图
	△	△	⊙
	○	○	○
	▯	▯	△

3 **三视图之间的关系：**

（1）位置关系：三视图的位置是有规定的，主视图要在左上边，它的正下方应是俯视图，左视图在主视图的右边. 主视图反映物体的长和高，俯视图反映物体的长和宽，左视图反映物体的高和宽.

（2）大小关系：三视图之间的大小是相互联系的，主视图与俯视图的长对正，主视图与左视图的高平齐，左视图与俯视图的宽相等.

拨考向 ▸▸▸

提分·秘诀

考查角度1 利用三视图的概念确定单个几何体的三视图

例1 ［中考·昆明］图25.2-1中的几何体的左视图为长方形的是(　　)

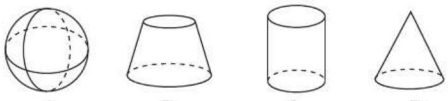


图25.2-1

导引： 左视图是从物体的左面看到的视图，从左面向右面看，A. 球的左视图是圆；B. 圆台的左视图是梯形；D. 圆锥的左视图是三角形；C. 圆柱的左视图是长方形，故选C.

答案： C

方法点拨

单个几何体的三视图直接根据常见几何体的三视图识别.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

考查角度2 利用三视图的概念确定组合几何体的三视图

例2 ［中考·本溪］如图25.2-2是由6个大小相同的小立方体搭成的几何体，这个几何体的左视图是图25.2-3中的(　　)

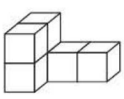


图25.2-2

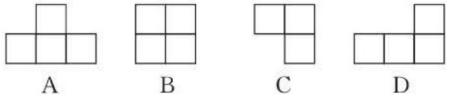


图25.2-3

导引： 从左面看易得第一层有2个正方形，第二层有2个正方形，故选B.

答案： B

方法点拨

组合体的三视图既要关注每个个体的三视图，又要关注每个个体的组合位置.

点知识 2 画几何体的三视图

1 **三视图的画法：** 画三视图时，三个视图要放在正确的位置，并且使主视图与俯视图的长对正；主视图与左视图的高平齐；左视图与俯视图的宽相等.

如图25.2-4②，为一个直三棱柱(如图25.2-4①)按1∶1的比例画出的三视图.



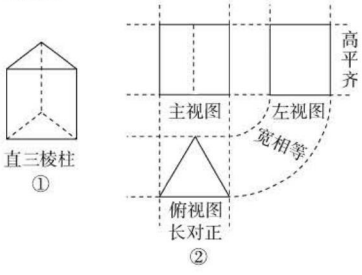


图25.2-4

要点精析

画三视图的规定：

(1) 看得见部分的轮廓线画成实线，看不见部分的轮廓线画成虚线；

(2) 若看得见的轮廓线与看不见的轮廓线重叠，则虚线不需画出；

(3) 虚线也是反映物体形状的重要部分，必须按其位置画好.

2 画三视图的一般步骤总结为一定、二画、三原则.

(1) 确定视图方向；

(2) 画出能反映物体真实形状的一个视图；

(3) 运用“长对正，高平齐，宽相等”的原则画出其他视图.

3 **易错警示：** 画三视图时，看不见的轮廓线应画成虚线，不能漏掉.

拔考向 ▸▸▸

提分·秘诀

考查角度1 利用画三视图的步骤画不含虚线的三视图

例3 画出如图25.2-5所示的几何体的三视图.

导引： 该几何体是一个圆柱和一个圆锥组合的立体图形，主视图和左视图都是由两个图形拼成的，俯视图是带圆心的圆.



25.2-5

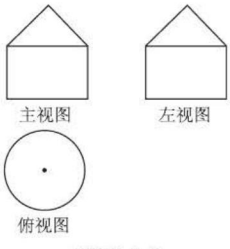


图25.2-6

解： 三视图如图25.2-6.

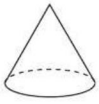
方法点拨

不论是画单个几何体的三视图还是组合几何体的三视图，都必须注意两点：一是遵循“长对正，高平齐，宽相等”的原则；二是看得见的轮廓线画成实线，看不见的轮廓线画成虚线.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

同类变式 （答案见194页）

3. 请你画出如图所示的几何体的三视图.



（第3题图）

考查角度2 利用画三视图的步骤画含虚线的三视图

例4 一种机器上有一个进行转动的零件叫燕尾槽（如图25.2-7），请画出它的三视图.

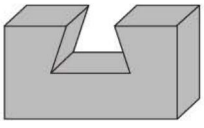


图25.2-7

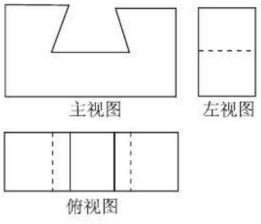


图25.2-8

导引： 画出各视图中关键线段的正投影，围成的图形即为所要求作的视图.

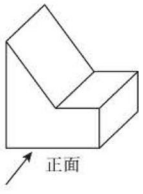
解： 这个燕尾槽的三视图如图25.2-8.

方法点拨

这个燕尾槽朝前的一个面与主视图投影面平行，所以这个燕尾槽的主视图与前面的面的大小、形状完全相同.同理，可以得到其左视图和俯视图，按照“长对正，高平齐，宽相等”的原则画出三视图，并放在相应的位置上.

同类变式 （答案见194页）

4. 如图，请画出这个几何体的三视图.



（第4题图）

知识3 由三视图确定立体图形

由三视图想象几何体：

（1）方法：由三视图想象立体图形时，要先分别根据主视图、俯视图、左视图想象立体图形的前面、上面和左侧面，然后综合起来考虑整体图形.

（2）过程：由三视图想象几何体的形状，可通过以下途径进行：①根据主视图、俯视图、左视图想象几何体的前面、上面和左侧面的形状；②根据实线和虚线想象几何体看得见部分和看不见部分的轮廓线；③熟记一些简单的几何体的三视图会对复杂几何体的想象有帮助；④利用由几何体画三视图与由三视图画几何体的互逆过程，反复练习，不断总结方法.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

考查角度1 利用三视图与立体图形之间的关系判断几何体的名称

例5 ［中考·赤峰］如图25.2-9是一个几何体的三视图，则这个几何体是(　　)

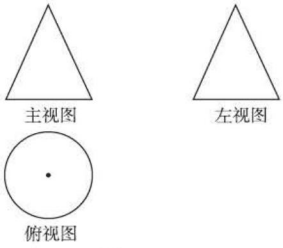


图25.2-9

A. 三棱锥　　B. 圆锥　　C. 三棱柱　　D. 圆柱

导引： 由俯视图外轮廓是圆，排除A和C，由左视图是三角形排除D，故选B.

答案： B

方法点拨

在俯视图中，外轮廓线显示这个物体的底面是一个圆，圆心就是锥尖.圆锥的主视图与左视图相同，都是等腰三角形.

考查角度2 利用三视图的特征确定立体图形的平面展开图

例6 ［中考·广州］如图25.2-10，是一个几何体的三视图，则这个几何体的展开图可以是图25.2-11中的(　　)

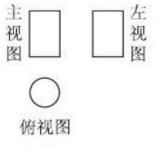


图25.2-10

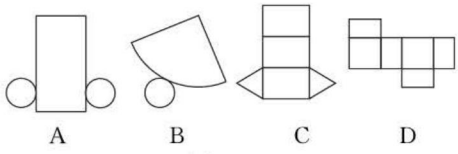


图25.2-11

导引： 由三视图可知，该几何体是圆柱，它的侧面展开图是矩形，两个底面是圆，故选A.

答案： A

技巧点拨

由三视图到平面展开图，中间跳跃一步，其实就是先由三视图到立体图形，再由立体图形到平面展开图.

考查角度3 由立体图形的一种视图确定另一种视图

例7 ［中考·达州］一个几何体由大小相同的小立方块搭成，从上面看几何体的形状如图25.2-12所示，其中小正方形中的数字表示在该位置的小立方块的个数，则从正面看几何体的形状是图25.2-13中的(　　)



图25.2-12

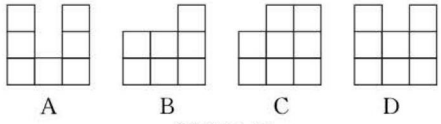


图25.2-13

导引： 由俯视图及所标数字可知，几何体中从左数第一列最高有3个小立方块，第二列最高有2个小立方块，第三列有3个小立方块，因此，主视图从左到右可看到的小立方块个数依次为3,2,3. 故选D.

答案： D

方法点拨

由一种视图猜想另一种视图，中间也是跳跃一步——还原几何体.先还原几何体，再确定另一种视图.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

数学素养提升

影子断物

“由物画图”和“由图想物”反映了“三视图”与“立体图形(实物)”之间的相互联系和转化的关系，投影的原理是其实现转化的依据. 也就是说影子对物体的形状和大小起着决定性的作用.

(1)由影子断定物体的形状.(中考高频考点)

物体的三视图就是该物体的正投影，从前向后留下的影子叫主视图；由上向下留下的影子叫俯视图；由左向右留下的影子叫左视图. 由给出的三视图的形状就可以判断该物体的形状.

例如：[中考·北京]如图 25. 2-14，是某个几何体的三视图，该几何体是(　　)

A. 圆锥　　B. 三棱锥

C. 圆柱　　D. 三棱柱

点拨：解这类题主要依靠的是空间想象能力，平时学习过程中通过观察实物，可以有效提高该能力.

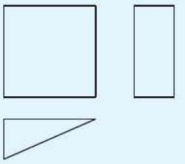


图 25. 2-14

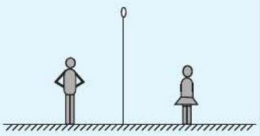


图 25. 2-15

(2)由影子断定物体的高度.(中考高频考点)

很多物体的高度无法直接测量，需通过光线(太阳光或灯光)照射物体在地面上留下的影子和其他参照物同一时刻在地面上留下的影子来计算物体的高度.

例如：[中考·北京]如图 25. 2-15，小军、小珠之间的距离为 2. 7 m，他们在同一盏路灯下的影长分别为 1. 8 m，1. 5 m. 已知小军、小珠的身高分别为 1. 8 m，1. 5 m，则路灯的高为_____ m.

点拨：此问题的背景设置得比较新颖，条件中并未给出任何三角形，需要学生联系已知条件构造出符合解题需要的图形.

知识 4　棱柱

1 **棱柱及其相关概念：** 如图 25. 2-16 这样的几何体叫做棱柱，它的上、下两个面叫做底面(△ABC，△$A_1B_1C_1$ 互相平行且是全等的三角形)，其余各面叫做侧面，相邻侧面的交线叫做侧棱(各侧棱 AA_1，BB_1，CC_1 平行且相等).

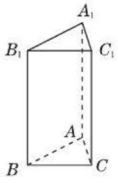


图 25. 2-16

2 **棱柱的命名：** 根据底面多边形的边数，我们依次称棱柱为三棱柱、四棱柱、五棱柱……

3 **直棱柱：** 当侧棱垂直于底面时，棱柱称为直棱柱，直棱柱的各个侧面都是矩形.

4 **正棱柱：** 底面是正多边形的直棱柱叫做正棱柱.

要点精析

正棱柱的底面都是正多边形，但并不是正棱柱的俯视图就一定是正多边形，因为它的俯视图与它放置的方式有关.

拔考向

提分·秘诀

考查角度1　利用平面展开图的特征识别棱柱

例 8　一个几何体的展开图如图 25. 2-17，把它折叠后能构成的立体图形是(　　)

A. 三棱柱　B. 三棱锥　C. 四棱柱　D. 四棱锥

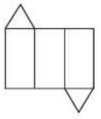


图 25. 2-17

导引： 这个几何体的展开图是由三个矩形和两个三角形组成的，它是三棱柱. 故选 A.

答案： A

方法点拨

在解决此类问题时，需要熟知常见几何体的平面展开图，从而由展开图推出几何体的形状，也可用尝试操作的办法来判断.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

考查角度2 利用立体图形与平面展开图的关系确定相对的面

例9 李亮为今年参加中考的好友王杰制作了一个正方体礼品盒，如图25.2-18，六个面上各有一个字，连起来就是“预祝中考成功”，其中“预”的对面是“中”，“成”的对面是“功”，则它的平面展开图可能是图25.2-19中的(　　)



图25.2-18

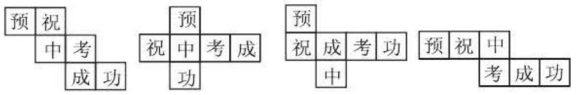


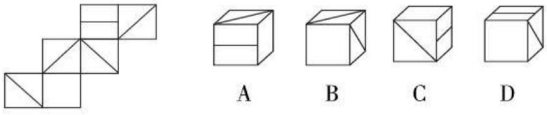
图25.2-19

导引： 根据“预”的对面是“中”，“成”的对面是“功”，可得到“祝”的对面是“考”，再根据位于同一行(或同一列)，中间隔一个面的两个面一定是相对面，验证各选项，只有C满足. 故选C.

答案： C

同类变式 (答案见194页)

9. 如图是一个纸盒的展开图，下面能由它折叠而成的正方体是(　　)



(第9题图)

方法点拨

判断正方体展开图的方法口诀：一线不过四，田凹应弃之，相间“Z”端是对面，间二拐角邻面知.“一线不过四”指的是正方体的展开图一条线上的正方形不能超过四个；“田凹应弃之”指的是含有“田”“凹”的图不是正方体的展开图；“相间‘Z’端是对面”指的是一条线上中间隔着一个正方形的两个正方形合成正方体时是对面；“间二拐角邻面知”指的是一条线上中间隔着两个正方形的两个正方形合成正方体时是邻面，拐角的两个正方形合成正方体时也是邻面.

考查角度3 利用三视图计算棱柱的体积

例10 某直三棱柱零件如图25.2-20①，根据此零件按照1∶1的比例画出准确的三视图如图25.2-20②. 在△EFG中，EF=4 cm，$\angle EFG=45°$，FG=10 cm，AD=12 cm.

(1)求AB的长；

(2)直接写出这个直三棱柱的体积.

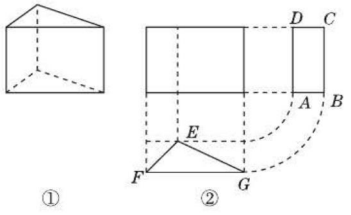


图25.2-20

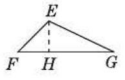


图25.2-21

方法点拨

对于由几何体的三视图求它的体积的题目，首先由几何体的三视图想象出该几何体的形状，再利用三视图中的相关数据确定立体图形的相关数据.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

导引：(1)过点 E 作 $EH\perp FG$ 于点 H，根据题意可得出 $EH=AB$，然后解直角三角形即可得出答案；(2)根据三棱柱的体积等于底面积乘高进行计算即可.

解：(1)过点 E 作 $EH\perp FG$ 于点 H，如图 25.2-21.

在 $\mathrm{Rt}\triangle EHF$ 中，$EF=4$ cm，$\angle EFH=45°$，

故 $EH=EF\cdot\sin\angle EFH=4\times\sin 45°=2\sqrt{2}$(cm).

由图形可知，$AB=EH=2\sqrt{2}$ cm.

(2)直三棱柱的体积为 $120\sqrt{2}$ cm^3.

点方法·拨技巧 提高分

拔尖角度 1 利用三视图的特征确定小正方体的个数

例 11 ［中考·莱芜］如图 25.2-22，是由若干个相同的小立方体搭成的几何体的俯视图和左视图，则小立方体的个数不可能是(　　)

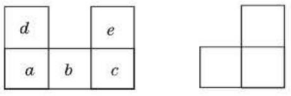


图 25.2-22

A. 6　　B. 7

C. 8　　D. 9

导引：根据左视图可以推测 $d=e=1$，a,b,c 中至少有一个为 2.

当 a,b,c 中只有一个为 2 时，小立方体的个数为 $1+1+2+1+1=6$；

当 a,b,c 中有两个为 2 时，小立方体的个数为 $1+1+2+2+1=7$；

当 a,b,c 三个都为 2 时，小立方体的个数为 $1+1+2+2+2=8$.

所以小立方体的个数可能为 6，7 或 8.

答案：D

方法点拨：由不完整的三视图推测小立方体的个数时，先根据已知的视图确定能确定的层数和某层的个数，对于不能确定的个数应进行分类讨论.

拔尖角度 2 利用三视图确定立体图形的表面积或体积

例 12 ［中考·德阳］如图 25.2-23 是一个几何体的三视图，根据图中数据计算这个几何体的表面积是(　　)

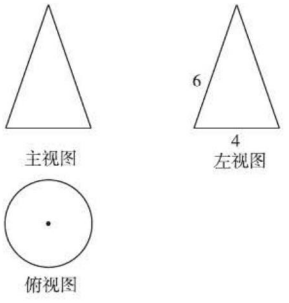


图 25.2-23

A. 16π　　B. 12π

C. 10π　　D. 4π

导引：由主视图和左视图为三角形判断出是锥体，由俯视图是带圆心的圆可判断出这个几何体是圆锥. 确定圆锥的母线长和底面半径，从而确定其表面积. 根据三视图知该圆锥的母线长为 6，底面半径为 2，故表面积 $=\pi\times2\times6+\pi\times2^2=16\pi$，故选 A.

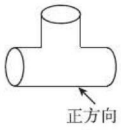
答案：A

技巧点拨：由三视图求几何体的表面积或体积，必须先由三视图还原出几何体，再确定几何体的表面积的组成或体积的计算方式，最后利用公式计算即可解决问题.

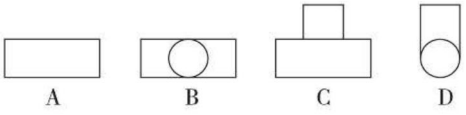
关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

基础巩固练

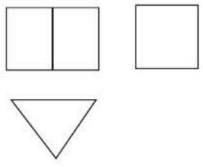
1. ［中考·德州］两个等直径圆柱构成如图所示的T型管道，则其俯视图正确的是(　　)



（第1题图）



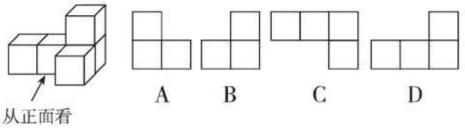
2. ［中考·大连］一个几何体的三视图如图所示，则这个几何体是(　　)



（第2题图）

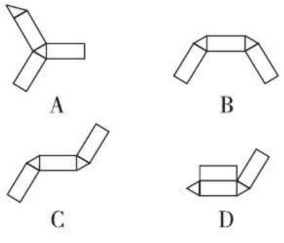
A. 圆柱　B. 圆锥　C. 三棱柱　D. 长方体

3. ［中考·徐州］如图是由5个相同的正方体搭成的几何体，其左视图是(　　)



（第3题图）

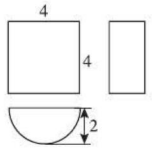
4. 把一个三棱柱的表面展开，所得到的展开图可能是(　　)



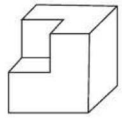
5. ［中考·济宁］一个几何体的三视图如图所示，则该几何体的表面积是(　　)

A. $24+2\pi$　B. $16+4\pi$

C. $16+8\pi$　D. $16+12\pi$



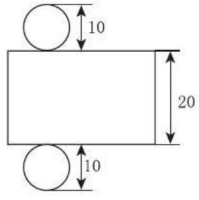
（第5题图）



（第6题图）

6. ［中考·枣庄］从棱长为2的正方体毛坯的一角，挖去一个棱长为1的小正方体，得到一个如图所示的零件，则这个零件的表面积是_____.

7. 如图所示是某几何体的表面展开图.



（第7题图）

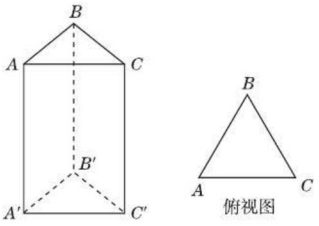
(1)这个几何体的名称是_____；

(2)画出这个几何体的三视图；

(3)求这个几何体的体积.（$\pi\approx3.14$）

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

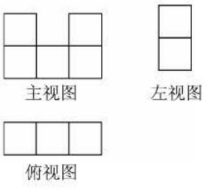
8. 如图是一个正三棱柱及其俯视图.
(1)请作出它的主视图和左视图;
(2)若 $AC=2$, $AA'=3$,求左视图的面积.



(第8题图)

能力提升练

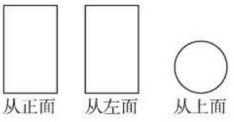
9. [中考·益阳]一个物体由多个完全相同的小正方体组成,它的三视图如图所示,那么组成这个物体的小正方体有(　　)



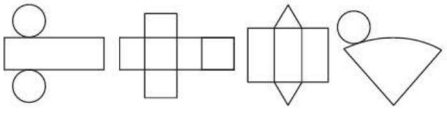
(第9题图)

A. 2个　　B. 3个　　C. 5个　　D. 10个

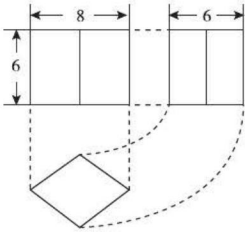
10. 如图是某个几何体从不同方向看到的形状图(视图),这个几何体的表面能展开成下面的哪个平面图形?(　　)



(第10题图)



11. 如图是一个钢坯零件的三视图,其中俯视图为菱形,其测量数据如图所示(单位:cm).请根据以上信息求出该钢坯零件的体积和表面积.



(第11题图)

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

12. 如图①是由棱长为 1 的五个相同小正方体搭成的几何体.

(1)在图②中画出该几何体的左视图、俯视图;(用阴影部分表示)

(2)在左视图和俯视图不变的情况下,最多还可以添加_____个小正方体.



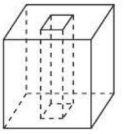
(第 12 题图)

13. 如图,用橡皮泥做一个棱长为 4 cm 的正方体.

(1)如图,在上面中心位置处从上到下打一个边长为 1 cm 的正方形通孔,打孔后的橡皮泥块的表面积为_____cm^2.

(2)如果在第(1)题打孔后,再在正面中心位置处从前到后打一个边长为1 cm的正方形通孔,那么打孔后的橡皮泥块的表面积为_____cm^2.

(3)如果把第(2)题中从前到后所打的正方形通孔扩成一个长 x cm、宽 1 cm 的长方形通孔,能不能使所得橡皮泥块的表面积为130 cm^2? 如果能,请求出 x;如果不能,请说明理由.



(第 13 题图)

思维拓展练

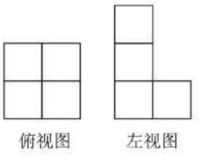
14. [中考·齐齐哈尔]如图所示的是由一些完全相同的小正方体搭成的几何体的俯视图和左视图,组成这个几何体的小正方体的个数是(　　)

A. 5 或 6 或 7

B. 6 或 7

C. 6 或 7 或 8

D. 7 或 8 或 9



(第 14 题图)

错题笔记

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

视图与投影的解题技巧

荣老师告诉你 视图和投影都是立体图形和平面图形的相互转化. 解决问题时要把握基本要领,长对正、高平齐、宽相等,还要注意线条的虚实,看得见的部分的轮廓线应画成实线,看不见部分的轮廓线应画成虚线.

技巧一 由几何体确定三视图,即“由物画图”

解题要领: (1)熟悉基本几何体的三视图. 棱柱的主视图和左视图都是矩形,俯视图是多边形;圆柱的主视图、左视图都是矩形,而俯视图是圆;圆锥的主视图、左视图都是三角形,而俯视图是带圆心的圆;棱锥的主视图、左视图都是由三角形组成的,而俯视图是含有连接多边形中心和顶点的多边形;球的主视图、左视图、俯视图均是圆.

(2)实线与虚线正确使用.

例1 一个圆柱体钢块,正中央被挖去了一个长方体孔,其立体图形及俯视图如图1所示,则此圆柱体钢块的左视图是图2中的(　　)

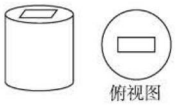


图1

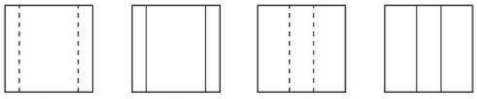


图2

导引: 圆柱体的左视图是长方形,四个选项都符合,主要看正中央挖去的长方体孔如何表示. 由俯视图可知,挖去的长方体在左边不能看见,所以应用虚线表示,故排除B,D. 比较A,C的虚线位置与俯视图中的长方形位置,便知答案为C.

答案: C

技巧二 根据三视图确定物体的形状,即“由图想物”

解题要领: 理解三视图的概念并会应用三视图“长对正,高平齐,宽相等”的性质.

例2 与图3中的三视图所对应的直观图是图4中的(　　)

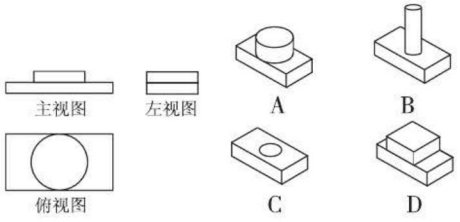


图3　　图4

导引: 本题是已知三视图,要确定物体的形状. 由主视图可知,这个物体由上、下两部分构成,排除选项C;再由俯视图可知,这个物体上部分是圆柱体,排除选项D;最后由左视图可知,上、下两部分的宽度相等,排除选项B,所以此题的答案为A.

答案: A

技巧三 根据三视图计算几何体的表面积或体积

解题要领: (1)掌握各视图反映的物体的实质,即主视图主要反映物体的长和高,左视图主要反映物体的宽和高,俯视图主要反映物体的长和宽.

(2)熟悉特殊几何体的表面积和体积计算公式.

例3 图5是一个几何体的三视图,根据图中标注的数据,可求得这个几何体的体积为(　　)

A. 24π　　B. 32π　　C. 36π　　D. 48π

导引: 利用三视图可知,此几何体是圆柱,再由主视图、左视图知其高为6,由俯视图知其底面直径是4. 根据圆柱的体积公式可得出最终答案为24π. 故选A.

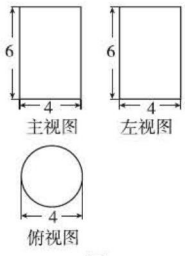


图5

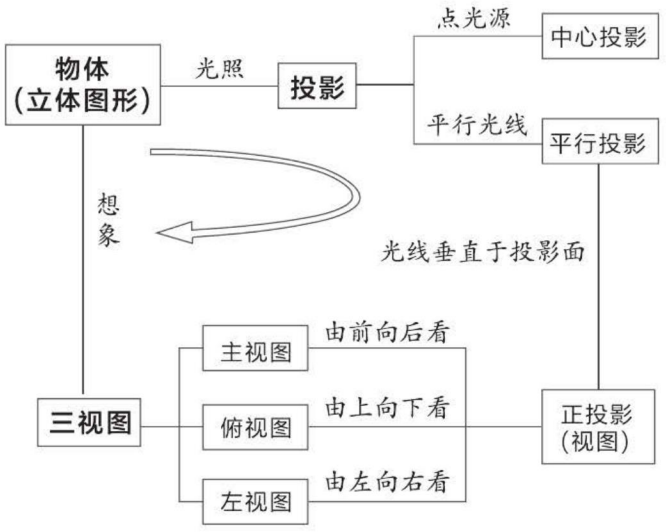
答案: A

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

章末核心知识分类整合

核心结构专题

结构必知



核心必读

1. 投影包括平行投影和中心投影,这是学好视图的基础,关键把握两点:

(1)在判断投影类型时,弄清楚物体与影子上的对应点的连线是平行还是相交;

(2)在应用平行投影求物体的高度时,注意在同时刻物体的高度与影长成正比.

2. 三视图:

名称	概念	性质
主视图	自几何体的前方向后投射,在正面投影面上得到的视图称为主视图	1. 主视图、左视图、俯视图都是物体向某个方向的正投影; 2. 从不同的方向观察几何体,得到的三视图可能是不同的
左视图	自几何体的左侧向右投射,在侧面投影面上得到的视图称为左视图	
俯视图	自几何体的上方向下投射,在水平投影面上得到的视图称为俯视图	

3. 在画三视图时,要求主俯长对正、主左高平齐、俯左宽相等.即:

(1)主视图和俯视图的长要相等,主视图和左视图的高要相等,左视图和俯视图的宽要相等;

(2)在画物体的三视图时,能看到部分的轮廓线画成实线,存在但看不到部分的轮廓线画成虚线.

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

知识必学

专题一 平行投影

链接中考>> 平行投影是由平行光线照射所形成的投影. 物体在太阳光下形成的影子随着物体与投影面的位置的改变而改变. 同一时刻，不同物体的高度与影子的长度成正比. 通常可以利用相似三角形或锐角三角函数的有关知识解决此类问题.

例1 ［中考·兰州］如图25-1，在一面与地面垂直的围墙的同侧有一根高10米的旗杆AB和一根高度未知的电线杆CD，它们都与地面垂直，为了测得电线杆的高度，一个小组的同学进行了如下测量：某时刻，在太阳光照射下，旗杆落在围墙上的影子EF的长度为2米，落在地面上的影子BF的长为10米，而电线杆落在围墙上的影子GH的长度为3米，落在地面上的影子DH的长为5米. 依据这些数据，该小组的同学计算出了电线杆的高度.

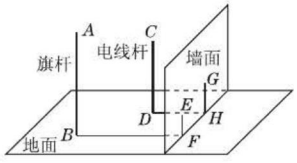


图25-1

(1)该小组的同学在这里利用的是_____投影的有关知识进行计算的；

(2)试计算出电线杆的高度，并写出计算的过程.

导引： (1)太阳光可以看成平行光线，这样的光线所形成的投影是平行投影.

(2)过点E作$EM\perp AB$于M，过点G作$GN\perp CD$于N. 利用矩形的性质和平行投影的知识可以得到比例式：$\frac{AM}{ME}=\frac{CN}{NG}$，即$\frac{8}{10}=\frac{CD-3}{5}$，由此求得$CD$的长，即电线杆的高度.

解： (1)平行

(2)如图25-2，过点E作$EM\perp AB$于M，过点G作$GN\perp CD$于N，则$MB=EF=2$米，$ND=GH=3$米，$ME=BF=10$米，$NG=DH=5$米. 所以$AM=10-2=8$(米).

由平行投影可知，$\frac{AM}{ME}=\frac{CN}{NG}$，即$\frac{8}{10}=\frac{CD-3}{5}$. 解得$CD=7$米.

故电线杆的高度为7米.

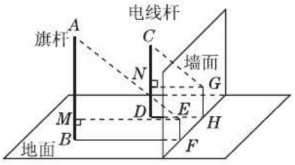


图25-2

方法点拨： (1)平行投影中物体影子的变化实际上是随太阳位置的变化而变化的，但在同一时刻，不同物体的高度与影子长度的比是相同的. 太阳光下影子的这个性质为解决实际问题提供了一种重要方法.

(2)相似三角形的应用主要有如下两个方面：①测高(不能直接使用皮尺或刻度尺量的)；②测距(不能直接测量的两点间的距离). 掌握测高和测距的方法知道在实际测量物体的高度、宽度时，关键是要构造和实物所在三角形相似的三角形，而且要能测量已知三角形的各条线段的长，运用相似三角形的性质列出比例式求解.

专题二 中心投影

链接中考>> 中心投影是光线从一点出发而形成的投影. 当点光源与所照射物体的相对位置发生变化时，物体的中心投影是不断变化的. 一般情况下，等高的物体垂直于地面放置时，物体与点光源的距离越近，物体的影子就越短，反之就越长. 等长的物体平行于地面放置时，物体与点光源的距离越近，物体的影子就越长，反之越短. 中心投影在现实中有很多应用，解决这类问题时，往往要利用相似三角形的知识.

例2 ［中考·镇江］某兴趣小组开展课外活动，如图25-3，A，B两地相距12米，小明从点A出发沿AB方向匀速前进，2秒后到

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

达点 D，此时他（CD）在某一灯光下的影子为 AD，继续按原速行走 2 秒到达点 F，此时他在同一灯光下的影子仍落在其身后，并测得这个影长为 1.2 米，然后他将速度提高到原来的 1.5 倍，再行走 2 秒到达点 H，此时他（GH）在同一灯光下的影子为 BH（点 C，E，G 在一条直线上）.

（1）请在图中画出光源点 O 的位置，并画出位于点 F 时在这个灯光下的影子 FM（不写画法）；

（2）求小明原来的速度.

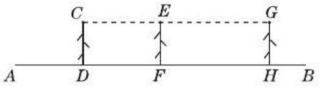


图 25-3

导引：（1）分别连接 AC，BG 并延长，两者相交于点 O，即得光源点 O，再连接 OE 并延长，交 AB 于点 M，即得 EF 的投影；（2）利用 $CG/\!/AB$，得到 $\triangle OCE\backsim\triangle OAM$，$\triangle OEG\backsim\triangle OMB$，从而 $\frac{CE}{AM}=\frac{OE}{OM}$，$\frac{EG}{MB}=\frac{OE}{OM}$，于是得到关于小明原来速度 x 的方程 $\frac{2x}{4x-1.2}=\frac{3x}{13.2-4x}$，解之即可.

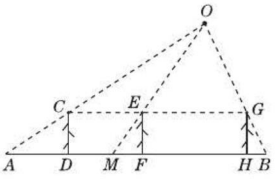


图 25-4

解：（1）如图 25-4，分别连接 AC，BG 并延长，两者相交于点 O，连接 OE 并延长，交 AB 于点 M，则点 O 和线段 FM 即为所作.

（2）设小明原来的速度为 x 米/秒，则 $AD=DF=CE=2x$ 米，$FH=EG=3x$ 米，$AM=(4x-1.2)$ 米，$BM=12-4x+1.2=(13.2-4x)$ 米.

$\because CG/\!/AB$，

$\therefore\triangle OCE\backsim\triangle OAM$，$\triangle OEG\backsim\triangle OMB$.

$\therefore\frac{CE}{AM}=\frac{OE}{OM}$，$\frac{EG}{MB}=\frac{OE}{OM}$.

$\therefore\frac{CE}{AM}=\frac{EG}{MB}$，即 $\frac{2x}{4x-1.2}=\frac{3x}{13.2-4x}$.

$\therefore 20x^2-30x=0$.

解得 $x_1=1.5$，$x_2=0$（不合题意，舍去）.

经检验，$x=1.5$ 是原方程的解，故 $x=1.5$.

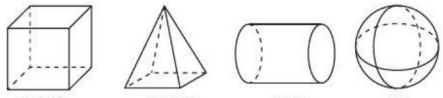
$\therefore$ 小明原来的速度为 1.5 米/秒.

方法点拨： 中心投影是物体在点光源下的投影，将两组投影对应点连线相交即得点光源的位置，同时其他物体在此光源下的投影也随之确定.

专题三 三视图

链接中考>> 本专题是中考中的必考内容之一，主要考查根据视图描述几何体的形状和名称，由实物确定或作出视图，以及根据三视图判断构成几何体的小立方体的个数等问题，题型多以选择题、填空题为主，有时也以解答题的形式出现.

例 3 ［中考·泰州］图 25-5 的几何体中，主视图与俯视图不相同的是（　　）



A　B　C　D

图 25-5

导引： 根据主视图、左视图、俯视图是分别从物体正面、左面和上面看所得到的图形进行分析，四棱锥的主视图与俯视图不同. 故选 B.

答案： B

方法点拨： 本题考查了简单几何体的三视图，从正面看得到的图形是主视图，从左边看得到的图形是左视图，从上面看得到的图形是俯视图.

专题四 根据三视图求几何体的表面积或体积

链接中考>> 根据三视图的相关数据求几何体的表面积或体积，多数是以填空题或选择题的形式出现，偶尔也会出现解答题.

例 4 （1）如图 25-6①是一个组合几何体，右边是它的两种视图，在右边横线上填写出两种视图的名称；

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

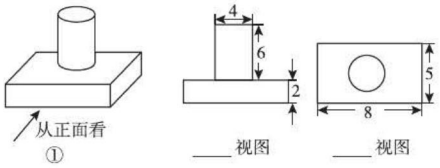


图 25-6

(2)根据两种视图中的尺寸(单位:cm),计算这个组合几何体的表面积.(π 取 3.14)

导引: (1)找到从正面和上面看所得到的图形即可,注意所有看到的棱都应表现在视图中.(2)根据题目所给尺寸,计算出下面长方体的表面积和上面圆柱的侧面积.此题主要考查了简单几何体的三视图,以及几何体的表面积,关键是掌握三视图所看的位置.

解: (1)主;俯

(2)表面积 $=2\times(8\times5+8\times2+5\times2)+4\times\pi\times6=2\times(8\times5+8\times2+5\times2)+4\times3.14\times6=207.36(cm^2)$.

方法点拨: 在解决三视图的表面积或体积计算问题时,需要画出三视图,根据"长对正、高平齐、宽相等"的口诀可从将题中的数据转化成所需数据,从而计算面积或体积.

Ⅱ思想方法专题

专题五 分类讨论思想

专题解读>> 分类讨论思想就是依据一定的标准对存在多种情况的问题分情况给予解决,最后综合得出结论.分类讨论实际上是一个"化整为零""积零为整"的解题策略.若一个几何体(由相同的小正方体组成)只给出部分视图,在判断小正方体的个数时,由于条件比较宽松,往往需要分类讨论.

例 5 [中考·青岛]一个由 16 个完全相同的小立方块搭成的几何体,其最下面一层摆放了 9 个小立方块,它的主视图和左视图如图 25-7 所示,那么这个几何体的搭法共有_____种.

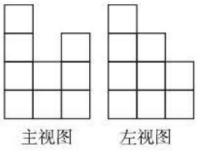


图 25-7

导引: 先根据主视图确定每一列最大分别为 4,2,3,再根据左视图确定每一行最大分别为 4,3,2,总和要保证为 16,还要保证俯视图有 9 个位置.由题意和主视图、左视图可知俯视图必定由 9 个正方形组成,并设这 9 个位置分别如图 25-8 所示.

1	2	3
4	5	6
7	8	9

图 25-8

由主视图和左视图知:①第 1 个位置一定是 4,第 6 个位置一定是 3;②一定有 2 个 2,其余有 5 个 1;③第 7,8,9 个位置所在的一行至少有一个 2,当中一列至少有一个 2.根据 2 的排列不同,这个几何体的搭法共有 10 种,如图 25-9 所示.故答案为 10.

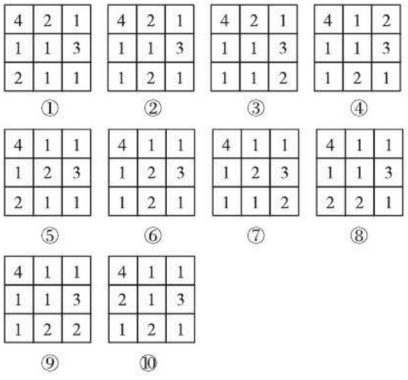


图 25-9

答案: 10

方法点拨: 本题利用分类讨论思想讨论组成这个几何体的搭法,由三视图确定每行每列的最少正方体个数和最多正方体个数,从而确定每个位置的正方体的个数的范围,再通过俯视图画出示意图,最后统计共有几种搭法.

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

专题六 方程思想

专题解读>> 在解决数学问题时，有一种将未知转化为已知的手段，这就是设元. 设元后，寻找已知与未知之间的等量关系，构造方程或方程组，然后解方程(组)完成未知向已知的转化，这种解决问题的思想称为方程思想. 在解决有关平行投影与中心投影的问题时，往往由相似三角形的性质得到一个比例式，利用方程思想求解.

例6 假山具有多方面的造景功能，与建筑、植物等组合成富于变化的景致. 某公园有一座假山，小亮、小慧等同学想用一些测量工具和所学的几何知识测量这座假山的高度来检验自己掌握知识和运用知识的能力，如图25-10，在阳光下，小亮站在水平地面的 D 处，此时小亮身高的影子顶端与假山的影子顶端 E 重合，这时小亮身高 CD 的影长 $DE=2$ 米，一段时间后，小亮从 D 点沿 BD 的方向走了3.6米到达 G 处，此时小亮身高的影子顶端与假山的影子顶端 H 重合，这时小亮身高的影长 $GH=2.4$ 米，已知小亮的身高 $CD=FG=1.5$ 米，点 G,E,D 均在直线 BH 上，$AB\perp BH$，$CD\perp BH$，$GF\perp BH$，请你根据题中提供的相关信息，求出假山的高度 AB.

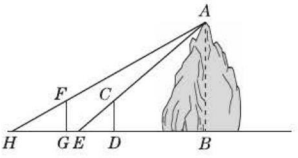


图25-10

导引： 首先判定 $\triangle AEB\backsim\triangle CED$，$\triangle AHB\backsim\triangle FHG$，根据相似三角形的性质可得 $\frac{AB}{CD}=\frac{BE}{DE}$，$\frac{AB}{FG}=\frac{BH}{GH}$，再代入数可得答案.

解： 设 $AB=x$ 米，$BD=y$ 米，

由题意得 $\angle ABD=\angle CDE=\angle FGH=90°$.

$\because\angle CED=\angle AEB$，$\angle AHB=\angle FHG$，

$\therefore\triangle AEB\backsim\triangle CED$，$\triangle AHB\backsim\triangle FHG$，

$\therefore\frac{AB}{CD}=\frac{BE}{DE}$，$\frac{AB}{FG}=\frac{BH}{GH}$，

$\therefore\frac{x}{1.5}=\frac{2+y}{2}$，$\frac{x}{1.5}=\frac{2.4+3.6+y}{2.4}$，

解得 $\begin{cases}x=15,\\y=18.\end{cases}$

所以假山的高度 AB 为15米.

方法点拨： 利用方程思想解决中心投影的问题时，通常利用相似三角形的知识，通过列方程(组)求解.

专题七 转化思想

专题解读>> 本章中，对于三视图可以通过想象形成立体图形，立体图形又可以通过三视图而转化为平面图形，实物的投影也是立体图形与平面图形的相互转化，这都体现了转化的思想.

例7 如图25-11所示，已知圆柱的高为80 cm，底面半径为10 cm，轴截面上有 P,Q 两点，$PA=40$ cm，$B_1Q=30$ cm，则在圆柱侧面上 P,Q 两点的最短距离是多少？(π 取3.14，结果保留两位小数)

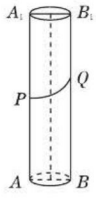


图25-11

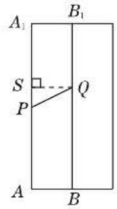


图25-12

导引： 将圆柱侧面沿母线 AA_1 展开，得到如图25-12所示的矩形，从而将曲面上的问题转化成平面上的问题，则 P,Q 两点间的最短距离即为线段 PQ 的长.

解： 将圆柱侧面沿母线 AA_1 展开，得到如图25-12所示的矩形，过点 Q 作 $QS\perp AA_1$ 于点 S.

在 $\mathrm{Rt}\triangle PQS$ 中，

$\because PS=AA_1-AP-A_1S=AA_1-AP-B_1Q=80-40-30=10(\mathrm{cm})$，

$QS=AB=\frac{1}{2}\cdot2\pi R=\pi R=10\pi(\mathrm{cm})$，

$\therefore PQ=\sqrt{PS^2+QS^2}=\sqrt{10^2+(10\pi)^2}=10\sqrt{\pi^2+1}\approx32.95(\mathrm{cm})$.

故 P,Q 两点间的最短距离约为32.95 cm.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

方法点拨： 曲面上两个点之间的距离，一般无法直接求出，而是通过将立体图形的表面展开，然后利用“两点之间线段最短”来解决.

专题八 建模思想

专题解读>> 当需要从定量的角度分析和研究一个实际问题时，人们就要在深入调查研究、了解对象信息、作出简化假设、分析内在规律等工作的基础上，用数学符号和语言，把它表述为数学式子，也就是数学模型，然后用计算得到的模型结果来解释实际问题，并接受实际的检验. 这个建立数学模型的全过程就称为数学建模.

例 8 为解决楼房的采光问题，某地区规定：两幢楼房间的距离至少为 40 m，中午 12 时不挡光. 如图 25-13，某旧楼的一楼窗台高 1 m，要在此楼正南方 40 m 处建一幢新楼. 已知该地区冬天中午 12 时阳光从正南方照射，并且光线与水平线的夹角最小为 30°，在不违反规定的情况下，请问：新建楼房最高多少米？（结果精确到 1 m，$\sqrt{3}\approx1.732$，$\sqrt{2}\approx1.414$）

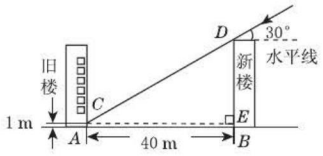


图 25-13

解： 如图25-13，过点 C 作 $CE\perp BD$，垂足为点 E.

由题意可得，四边形 $ABEC$ 为矩形，

则 $CE=AB=40$ m，$BE=AC=1$ m，

易知 $\angle DCE=30°$.

$\therefore CD=2DE$.

在 $\mathrm{Rt}\triangle CDE$ 中，由勾股定理，得 $DE^2+CE^2=CD^2=(2DE)^2$，

$\therefore DE=\dfrac{40\sqrt{3}}{3}$ m.

$\therefore BD=DE+BE=\dfrac{40\sqrt{3}}{3}+1\approx24$(m).

$\therefore$ 新建楼房最高约为 24 m.

好题必解

答案见 195 页

一、选择题

1. “横看成岭侧成峰”从数学的角度解释为(　　)

A. 从不同的方向观察同一建筑物时，看到的图形不一样

B. 从同一方向观察同一建筑物时，看到的图形不一样

C. 从同一方向观察不同的建筑物时，看到的图形不一样

D. 以上选项都不对

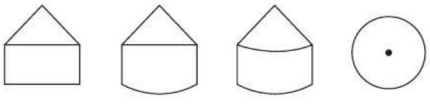
2. 下列物体的左视图是圆的是(　　)



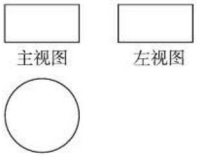
3. [中考·安徽] 一个由圆柱和圆锥组成的几何体如图水平放置，其主(正)视图为(　　)



(第 3 题图)



4. [中考·金华] 一个几何体的三视图如图所示，这个几何体是(　　)

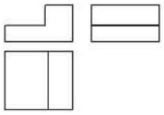


(第 4 题图)

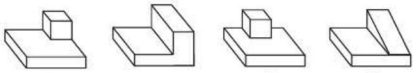
A. 球　　B. 圆柱　　C. 圆锥　　D. 立方体

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

5. 与如图所示的三视图对应的几何体是(　　)



(第5题图)

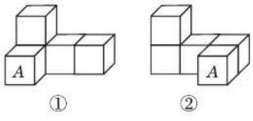


6. [中考·南通]一个圆锥的主视图是边长为4 cm的正三角形,则这个圆锥的侧面积等于(　　)

A. 16π cm^2　　B. 12π cm^2

C. 8π cm^2　　D. 4π cm^2

7. [中考·营口]如图①,该几何体是由5个棱长为1个单位长度的正方体摆放而成的,将正方体A向右平移2个单位长度后(如图②),所得几何体的视图(　　)



(第7题图)

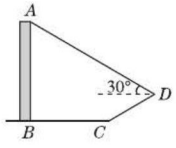
A. 主视图改变,俯视图改变

B. 主视图不变,俯视图不变

C. 主视图改变,俯视图不变

D. 主视图不变,俯视图改变

8. 如图,直立于地面上的电线杆AB,在阳光下落在水平地面和坡面上的影子分别是BC,CD,测得$BC=6$米,$CD=4$米,$\angle BCD=150°$,在D处测得电线杆顶端A的仰角为$30°$,则电线杆AB的高度为(　　)



(第8题图)

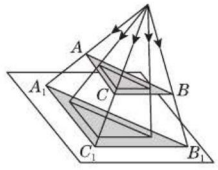
A. $(2+2\sqrt{3})$米　　B. $(4+2\sqrt{3})$米

C. $(2+3\sqrt{2})$米　　D. $(4+3\sqrt{2})$米

二、填空题

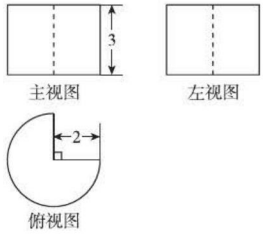
9. 写出一个在三视图中俯视图与主视图完全相同的几何体:_____(写出一个即可).

10. 如图,一块直角三角板ABC,$\angle ACB=90°$,$BC=12$ cm,$AC=8$ cm,测得BC边的中心投影B_1C_1长为24 cm,则A_1B_1长为_____cm.



(第10题图)

11. [中考·滨州]如图,一个几何体的三视图分别是两个矩形,一个扇形,则这个几何体表面积的大小为_____.



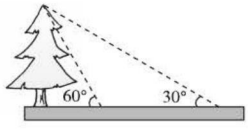
(第11题图)

12. 由几个相同的小正方体搭成的几何体从三面看的形状如图所示,则搭成的这个几何体的小正方体的个数是_____.



(第12题图)

13. 如图,校园内有一棵与地面垂直的树,数学兴趣小组两次测量它在地面上的影子,第一次是阳光与地面成60°角时,第二次是阳光与地面成30°角时,两次测量的影长相差8米,则树高_____米.(结果保留根号)

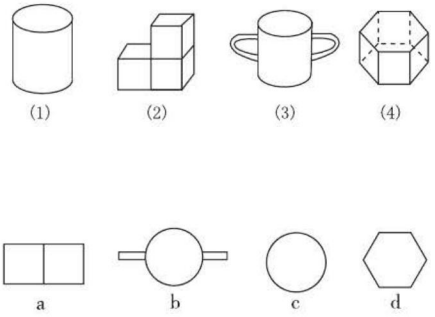


(第13题图)

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

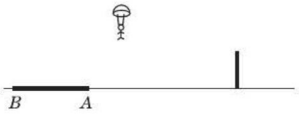
三、解答题

14. 如图，将第一行的四个物体与第二行其相应的俯视图连接起来.



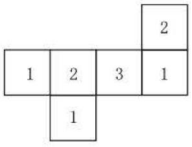
（第 14 题图）

15. 如图，快下降到地面的某伞兵在灯光下的影子为 AB. 试确定光源 P 的位置，并画出竖立在地面上木桩的影子 EF（保留作图痕迹，不要求写作法）.



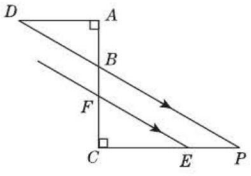
（第 15 题图）

16. 如图是一个由多个相同小正方体堆积而成的几何体的俯视图，图中所示数字为该位置上小正方体的个数. 画出这个几何体的左视图.



（第 16 题图）

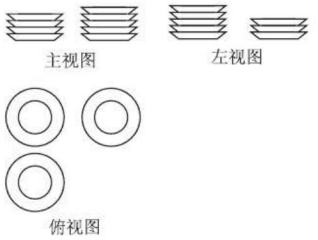
17. 如图，教室窗户的高度 AF 为 2.5 米，遮阳篷外端一点 D 到窗户上端的距离为 AD 的长度. 某一时刻，太阳光从教室窗户射入室内，与地面的夹角 $\angle BPC = 30°$，PE 为窗户的一部分在教室地面上所形成的影子，PE 的长度为 $\sqrt{3}$ 米. 试求 AD 的长度.（结果保留根号）



（第 17 题图）

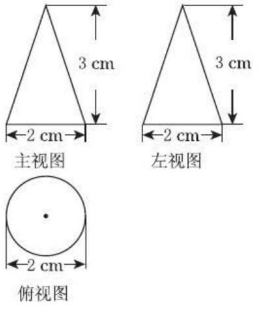
关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

18. 一张桌子上摆放有若干个大小、形状完全相同的盘子，现从三个方向看，其三视图如图所示. 求这张桌子上盘子的总数.



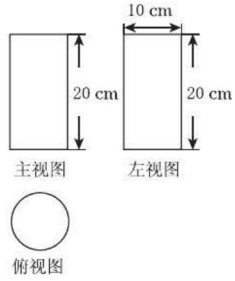
（第 18 题图）

19. 如图是一个几何体的三视图. 求这个几何体的侧面积.



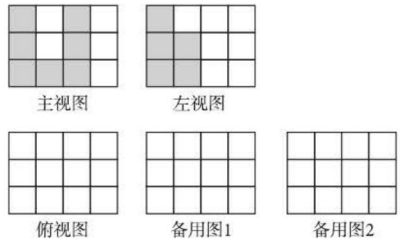
（第 19 题图）

20. 某商品的外包装盒的三视图如图所示，求这个包装盒的体积.



（第 20 题图）

21. 如图是用完全相同的小正方体搭成的几何体的主视图和左视图.



（第 21 题图）

(1) 请在方格中画出它的俯视图（至少画三个）；

(2) 若要搭成这样的几何体，最少需要_____个小正方体，最多需要_____个小正方体. 【导学号：9142562】

错题笔记

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

第26章 概率初步

揭秘事件的公平性

数学点拨



你将学到的核心考点

- 随机事件 □
- 概率的意义 □
- 等可能情形下的概率计算 □
- 用频率估计概率 □

我们为你提供的核心方法

- 列表法 □
- 画树状图法 □
- 列举法 □
- 替代物试验法 □
- 方程思想 □
- 数形结合思想 □

掌握这些考点和方法后，记得回来给自己打☑哦！

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

26.1 随机事件

核心知识
- 事件的定义与分类
- 事件发生的可能性

知识链接

确定性事件、随机事件 → 事件 → 发生的可能性

点知识·拨考向 速提分

点知识 1 事件的定义与分类(重点)

1 事件的判断:

(1) 必然事件:在每次试验中,可以事先知道其一定会发生的事件叫做必然事件.

(2) 不可能事件:在每次试验中,一定不会发生的事件叫做不可能事件.



(3) 确定性事件:必然事件和不可能事件统称为确定性事件.

(4) 随机事件:无法事先确定在一次试验中会不会发生的事件叫做随机事件或不确定性事件.

(5) 事件:确定性事件和随机事件统称为事件.

要点精析///

一般地,辨析事件的种类是在一定条件下进行的,不同的条件可能导致不同的事件归类,如:标准大气压下,水加热到 100 ℃ 时沸腾是必然事件,但在气压高于标准大气压时,水加热到 100 ℃ 时沸腾就不是必然事件了(此时沸点升高了).

2 事件的分类:

事件 { 确定性事件 { 必然事件 / 不可能事件 } / 随机事件 }

3 易错警示:

(1) 判断“不太可能”与“不可能”以及“很有可能”与“必然”时出错.

(2) 判断一个事件的类型要把握两点:①是否可能发生;②可能发生的情况是否唯一,若唯一,则为必然事件,否则为随机事件.

拨考向 ▸▸▸ 提分·秘诀

考查角度 利用各种事件的定义识别事件的类型

例 1 [模拟·六安] 下列成语所描述的是必然事件的是(　　)

A. 拔苗助长　B. 瓮中捉鳖　C. 水中捞月　D. 大海捞针

导引: A 是不可能事件;B 是必然事件;C 是不可能事件;D 是随机事件. 故选 B.

答案: B

同类变式 (答案见 196 页)

1. 下列事件:①冬天下雪;②随机掷一枚质地均匀的硬币,正面朝上;③全年级的 400 个学生中,至少有两人的生日相同;④2022 年冬季奥运会将在北京举行. 其中不确定性事件的个数为(　　)

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

方法点拨

判断一个事件的类型,要从其定义出发,同时也要联系理论及生活的相关常识来判断.注意必然事件和不可能事件都是事先可以确定的,一定发生的是必然事件,一定不发生的是不可能事件,否则就是随机事件.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

点知识 2 事件发生的可能性(重点)

1 一般地，随机事件发生的可能性是有大小的，不同的随机事件发生的可能性的大小有可能不同.

2 **事件发生的可能性：**

(1) 必然事件：试验中必然发生的事件，其发生的可能性为 100% 或 1；

(2) 不可能事件：试验中不可能发生的事件，其发生的可能性为 0；

(3) 随机事件：试验中可能发生也可能不发生的事件，其发生的可能性介于 0 和 1 之间.

3 描述随机事件发生的可能性大小的常用语："不大可能""可能""很可能""可能性极大"等.

拓展///

判断随机事件发生的可能性的大小时，先要准确地找出所有可能出现的结果数，再分情况，看每种情况包含的结果数与所有可能出现的结果数的比例大小. 比例越大，这种情况发生的可能性越大.

4 一般地，表示一个随机事件 A 发生的可能性大小的数，叫做这个事件发生的概率，记作 $P(A)$.

拔考向 ▸▸▸

提分·秘诀

考查角度1 利用事件发生的可能性大小的意义判断可能性的大小

例 2 掷一枚普通的正方体骰子，有下列事件：①掷得的点数是 6；②掷得的点数是奇数；③掷得的点数不大于 4；④掷得的点数不小于 2. 这些事件发生的可能性由大到小排列正确的是(　　)

A. ①②③④　B. ④③②①　C. ③④②①　D. ②③①④

导引： 根据题意，掷一枚普通的正方体骰子，共有 6 种情况. ①掷得的点数是 6 只包括 1 种情况；②掷得的点数是奇数包括 3 种情况；③掷得的点数不大于 4 包括 4 种情况；④掷得的点数不小于 2 包括5 种情况，故其可能性按从大到小的顺序排列为④③②①，故选 B.

答案： B

方法点拨

比较随机事件发生的可能性的大小时，先要准确地找出所有可能出现的结果数，再分情况，看每种情况包含的结果数(数目或面积)与所有可能出现的结果数(数目或面积)的比例大小，比例越大，则这种情况发生的可能性越大.

同类变式 (答案见 196 页)

2. 现有同一品牌工艺品 100 件，其中有 2 件次品. 从中任取 1 件，是次品的可能性为(　　)

A. 一定　B. 不大可能　C. 很可能　D. 不可能

考查角度2 利用随机事件发生的可能性的大小确定随机事件元素的个数

例 3 一个不透明的口袋中有红球 4 个，白球若干个，它们只有颜色上的区别. 从袋中随机地取出一个球，如果取到白球的可能性比红球大，那么袋中白球的个数可能是(　　)

A. 3 个　B. 不足 3 个

C. 4 个　D. 5 个或 5 个以上

导引： 因为袋中有红球4个，取到白球的可能性比红球大，所以袋中的白球数量大于红球数量，即袋中白球的个数可能是 5 个或 5 个以上. 故选 D.

答案： D

技巧点拨

可能性大小的比较：只要总情况数目相同，谁包含的情况数目多，谁发生的可能性就大，反之也成立；若包含的情况数目相同，则它们发生的可能性相等.

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

点方法·拨技巧 提高分

拔尖角度 1 利用事件的实际意义判断事件的类型

例 4 ［探究题］小明每天早上要在7:50之前赶到距家 1 000 米的学校上学. 一天,小明以 80 米/分的速度出发. 5 分钟后,小明的爸爸发现他忘了带数学书,于是,爸爸立即以 100 米/分的速度去追赶小明,结果在途中追上了小明. 试探究这个事件是什么事件?

导引: 列出方程,通过计算来判断事件的类型.

解: 设小明的爸爸用 x 分钟追上小明,

则可列方程为

$80(x+5)=100x$.

解得 $x=20$.

所以 $80(x+5)=80\times(20+5)=2\,000>1\,000$.

所以小明的爸爸没有在途中追上小明,

所以这个事件是不可能事件.

方法点拨: 判断一个事件的类型,关键看事件发生的可能性.实际问题中事件发生的可能性,要根据事件发生的关键元素(如本例"追上的路程")确定.

拔尖角度 2 利用随机事件发生的可能性设计方案

例 5 现有甲、乙两个不透明的袋子,甲袋内装有 99 颗黑棋子,1 颗白棋子,乙袋内装有 49 颗白棋子,1 颗黑棋子,且黑、白棋子的质地、大小均相同. 问:一次伸手在袋内随机摸一颗棋子,在哪个袋内摸到黑棋子的可能性大? 应如何设计袋内的黑、白棋子数,才能使一次摸到黑、白棋子的可能性一样大?

导引: 摸到黑棋子的可能性的大小是由袋内黑棋子颗数与袋内棋子总颗数的比值来确定的. 由题知,甲袋内黑棋子有 99 颗,黑、白棋子一共有 100 颗,它们的比值为 $\frac{99}{100}$;乙袋内黑棋子有 1 颗,黑、白棋子一共有 50 颗,它们的比值为 $\frac{1}{50}$. 因为 $\frac{99}{100}>\frac{1}{50}$,所以在甲袋内摸到黑棋子的可能性大.

解: 在甲袋内摸到黑棋子的可能性大. 要使一次摸到黑、白棋子的可能性一样大,只需在袋内放置一样多的黑、白棋子.

方法点拨: 判断事件 A 发生的可能性的大小需要明确两点:① 事件 A 包含的可能结果数(即事件 A 包含多少种可能情况);② 所有可能的结果数(即一共有多少种可能情况). 它们的比值大小就反映了事件 A 发生的可能性的大小,这个比值就是我们后面讲到的概率.

练中考·练模拟 得满分 (答案见 196 页)

基础巩固练

1. 下列诗句所描述的事件中,是不可能事件的是(　　)

A. 手可摘星辰　　B. 锄禾日当午

C. 大漠孤烟直　　D. 黄河入海流

2. "a,b 是实数,$|a|+\sqrt{b^2}\geqslant 0$"这一事件是(　　)

A. 必然事件　　B. 随机事件

C. 不可能事件　　D. 无法确定

3. ［中考·广西］下列事件为必然事件的是(　　)

A. 打开电视机,正在播放新闻

B. 任意画一个三角形,其内角和是 180°

C. 买一张电影票,座位号是奇数号

D. 掷一枚质地均匀的硬币,正面朝上

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

4. 下列事件中，哪些是必然事件？哪些是不可能事件？哪些是随机事件？

(1)太阳从西边下山；

(2)某人的体温是100 ℃；

(3)$a^2+b^2=-1$(其中a,b都是实数)；

(4)通常水往低处流；

(5)酸和碱中和反应生成盐和水；

(6)三个人性别各不相同；

(7)一元二次方程$x^2+2x+3=0$无实数解；

(8)经过有信号灯的十字路口，遇见红灯；

(9)抛掷3枚硬币，全部正面朝上.

5. 一个不透明的袋子里装有20个质地、大小一样的球，其中4个是白球，2个是红球，3个是黑球，其他都是黄球. 从中任摸一个，摸出哪种球的可能性最大？为什么？

6. 一个不透明的袋子里装有红、白两种颜色的小球，它们的质地、大小都一样，小明从中随机摸出一个小球，记下颜色后放回，如果小明3次摸到的都是红球，能否断定袋子里红球的数量比白球多？怎样做才能判断哪种颜色的小球数量较多？

7. 在如图所示的图案中，黑、白两色的直角三角形都全等. 甲、乙两人将它作为一个游戏盘，游戏规则是从一定距离处向盘中投飞镖一次，扎在黑色区域为甲胜，扎在白色区域为乙胜. 你认为这个游戏公平吗？为什么？



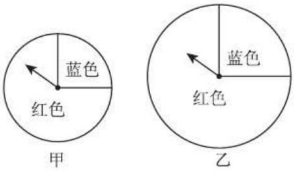
(第7题图)

8. [评估题]用力转动如图所示的甲转盘和乙转盘的指针，规定指针停在蓝色区域为成功.

A同学说："乙转盘大，相应的蓝色区域的面积也大，所以选乙转盘成功的可能性比较大."

B同学说："转盘上只有两种颜色，指针不是停在红色区域，就是停在蓝色区域，所以选择两个转盘成功的可能性都是50%."

你同意两位同学的说法吗？如果不同意，请你判断选择两个转盘成功的可能性各有多大.



(第8题图)

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

能力提升练

9. 同时抛掷两枚质地均匀的正方体骰子(骰子每个面上的点数分别为1,2,3,4,5,6). 下列事件中是必然事件的是(　　)

A. 两枚骰子朝上一面的点数和为6

B. 两枚骰子朝上一面的点数和不小于2

C. 两枚骰子朝上一面的点数均为偶数

D. 两枚骰子朝上一面的点数均为奇数

10. 判断下列事件是必然事件,不可能事件还是随机事件.

鸡蛋里挑骨头:_____;天上掉馅饼:_____;狗嘴里吐不出象牙:_____.

11. 如图,抛掷一枚质地均匀的硬币2次,2次抛掷的结果有_____种不同的可能.

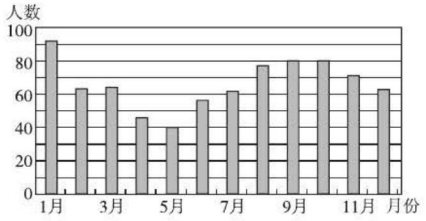


正面　　反面

(第11题图)

12. [易错题]小明在月历表上用一个正方形任意圈出3×3个数,他说其中一竖列3个数的和是50. 这是确定性事件,你相信吗?为什么?

13. 2019年某校初中三个年级在校学生共796名,学生的出生月份统计如图. 根据图中数据,回答以下问题:



(第13题图)

(1)出生人数少于60人的月份有哪些?

(2)至少有两个人的生日在10月5日是不可能事件,随机事件还是必然事件?

思维拓展练

14. 小明和小强在一起玩摸球游戏,一个不透明的盒子中装有红球、黄球共10个,每个球除颜色外都相同. 两个人规定:一次只能从盒中摸出一个球,且摸到红球赢,否则对方赢. 当由小强摸球时,请设计一种放球方案,分别满足下列所给条件:

(1)小强一定会赢;

(2)小强一定不会赢;

(3)小强很可能赢;

(4)小强不太可能赢.

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

26.2 等可能情形下的概率计算

核心知识

- 概率的意义
- 用列表法求概率
- 用画树状图法求概率

知识链接

列举法求概率 → 列表法、画树状图法

点知识·拨考向 速提分

点知识 1 概率的意义(重点)

1 概率公式:

一般地，如果在一次试验中，有 n 种可能的结果，并且这些结果发生的可能性相等，其中使事件 A 发生的结果有 $m(m\leqslant n)$ 种，那么事件 A 发生的概率为 $P(A)=\frac{m}{n}$.

要点精析///

用公式 $P(A)=\frac{m}{n}$ 求概率的试验特点：

(1)可能出现的结果是有限个；

(2)各种结果发生的可能性相等，即等可能性试验.

概率的定义

2 概率与几何图形的面积:

设某几何图形的面积为 S，其中事件 A 发生所在区域的面积为 S'，由于对这个几何图形内的每个点，事件发生的可能性是相等的，因此，我们可以得到事件 A 发生的概率为 $P(A)=\frac{S'}{S}$.

3 易错警示:

在一次试验中，如果事件发生的各种结果的可能性不同，那么不能用 $P(A)=\frac{m}{n}$ 计算其概率值.

拨考向 ▶▶▶ 提分·秘诀

考查角度1 根据概率的定义判断概率的意义

例1 [中考·兰州]“兰州市明天降水的概率是30%”，对此消息，下列说法正确的是(　　)

A. 兰州市明天将有30%的地区降水

B. 兰州市明天将有30%的时间降水

C. 兰州市明天降水的可能性较小

D. 兰州市明天肯定不降水

导引: 根据概率的意义求解，即得答案. 注意排除法在解选择题中的应用.

答案: C

方法点拨

概率是随机事件发生的可能性大小的体现.

考查角度2 利用概率公式求与骰子有关的概率

例2 一枚质地均匀的骰子，骰子的六个面上分别刻有1到6的点数，投掷这样的骰子一次，向上一面的点数是偶数的概率是(　　)

A. $\frac{1}{6}$　　B. $\frac{1}{3}$　　C. $\frac{1}{2}$　　D. 1

技巧点拨

分析事件发生的概率大小的关键是要找准两点：① 全部情况的总数目；② 符合条件的情况数目.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

导引： 骰子的六个面上偶数一共有几个，就有几种结果. 总共有6种等可能的结果，向上一面的点数是偶数的结果有3种，故选C.

答案： C

考查角度3 利用概率公式求与摸球有关的概率

方法点拨

摸到每个小球的可能性相等，故P(摸到黄球) = 黄球总数 / 所有小球数.

例3 ［中考·佛山］一个不透明的盒子中装有6个大小质地均相同的乒乓球，其中4个是黄球，2个是白球. 从该盒子中任意摸出一个球，摸到黄球的概率是(　　)

A. $\frac{1}{2}$　　B. $\frac{1}{3}$　　C. $\frac{2}{3}$　　D. $\frac{2}{5}$

导引： 从6个大小质地均相同的乒乓球中随机摸出一个球，共有6种等可能的结果，其中摸到黄球有4种可能，所以摸到黄球的概率是$\frac{2}{3}$. 故选C.

答案： C

考查角度4 利用概率公式求与转盘有关的概率

方法点拨

求与转盘有关的概率时，一般可通过计算面积的比得到. 当图形被分成的各部分都相同时，也可通过数数来计算.

例4 如图26.2-1是一个转盘，转盘被分成8个相同的扇形，颜色分为红、绿、黄三种，指针的位置固定，转动转盘后任其自由停止，其中的某个扇形会恰好停在指针所指的位置(指针指向两个扇形的交线时，当成指向指针右边的扇形)，则指针指向红色扇形区域的概率是(　　)

A. $\frac{1}{4}$　　B. $\frac{3}{8}$　　C. $\frac{5}{8}$　　D. $\frac{1}{2}$



图26.2-1

导引： 一共有8个相同的扇形，其中红色扇形有3个，所以红色扇形区域占整个圆形区域的$\frac{3}{8}$.

答案： B

考查角度5 利用概率公式求与几何图形有关的概率

方法点拨

当事件发生的可能结果不能用数量来表示时，往往利用P(A) = 事件发生的可能结果组成的图形面积 / 所有可能结果组成的图形面积 来计算事件A发生的概率.

例5 ［模拟·南陵县］如图26.2-2，正方形$ABCD$是一块绿化带，阴影部分$EOFB$，$GHMN$都是正方形的花圃，其中$EOFB$的顶点O是正方形$ABCD$的中心. 已知自由飞翔的小鸟，将随机落在这块绿化带上，则小鸟落在花圃上的概率为(　　)

A. $\frac{17}{32}$　　B. $\frac{1}{2}$　　C. $\frac{17}{36}$　　D. $\frac{17}{38}$

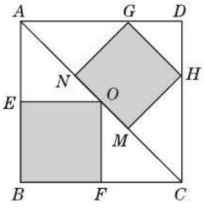


图26.2-2

导引： 设正方形$ABCD$的边长为a，根据正方形的性质得$\angle ACB = \angle ACD = 45°$，$AC = \sqrt{2}a$，再利用四边形$EOFB$为正方形易得$CF = OF = BF = \frac{1}{2}a$，则

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

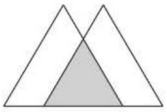
$S_{正方形EOFB}=\frac{1}{4}a^2$. 设正方形 $GHMN$ 的边长为 x，易得 $CM=AN=MN=x$，即 $3x=\sqrt{2}a$，解得 $x=\frac{\sqrt{2}}{3}a$，则 $S_{正方形GHMN}=\frac{2}{9}a^2$，然后根据几何概率的意义，用两个小正方形的面积和除以正方形 $ABCD$ 的面积即可得到小鸟落在花圃上的概率. 即小鸟落在花圃上的概率为 $\left(\frac{1}{4}a^2+\frac{2}{9}a^2\right)\div a^2=\frac{17}{36}$. 故选 C.



答案： C

同类变式 （答案见 196 页）

5. 将一边长为 3 的等边三角形向右平移得到如图所示的图形. 现有一小孩向其投一小石子且已投中，若阴影部分的面积为 $\sqrt{3}$，则小石子落在阴影部分的概率是（　　）



（第 5 题图）

A. $\frac{1}{7}$　　B. $\frac{2}{7}$　　C. $\frac{3}{7}$　　D. $\frac{4}{7}$

点知识 2 概率的取值范围（重难点）

1 **概率的求法：** 公式 $P(A)=\frac{m}{n}$ 中，n 表示在一次试验中共有 n 种等可能的结果，m 表示事件 A 包含的可能结果有 m 种，由此可知，m 与 n 的大小关系为 $m\geqslant n$，所以 $0\leqslant\frac{m}{n}\leqslant 1$.

2 **概率的取值范围：** $0\leqslant P(A)\leqslant 1$.

3 **三种事件的概率：** 当 A 是必然事件时，$P(A)=1$；当 A 是不可能事件时，$P(A)=0$；当 A 是随机事件时，$P(A)$ 满足 $0<P(A)<1$.

4 **概率值与可能性：**

事件发生的可能性越大，它的概率越接近 1；事件发生的可能性越小，它的概率越接近 0（如图 26.2-3 所示）.

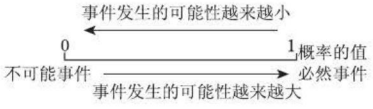


图 26.2-3

拔考向

提分·秘诀

考查角度 利用概率值与事件之间的关系判断事件发生的情况

例 6　判断下列说法是否正确.

（1）概率为 99.9% 的随机事件在两次试验中必有一次发生；

（2）概率为 $\frac{1}{3}$ 的随机事件在三次试验中恰好发生一次.

导引：（1）概率为 99.9% 的随机事件在两次试验中可能一次都不发生，也可能发生一次，还可能发生两次，故（1）不正确；

（2）概率为 $\frac{1}{3}$ 的随机事件在三次试验中可能发生一次，也可能发生两次或三次，还可能一次都不发生，故（2）不正确.

解：（1）不正确；（2）不正确.

方法点拨

概率的大小反映了事件发生的可能性的大小. 只有概率为 0 或 1 的事件，才能肯定事件是否发生.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

同类变式（答案见196页）

6. 一个不透明的箱子中装有除颜色外其他都相同的白球和蓝球共8个，其中白球有3个. 从箱子中任意摸出一个球，求下列事件发生的概率，并指出其属于哪种事件.

（1）摸出红球；（2）摸出蓝球；（3）摸出白球或蓝球.

点知识 3 用画树状图法列举试验中所有等可能出现的结果求概率（重难点）

1 **画树状图法的定义：**用画树状图的方法列出某事件的所有可能出现的结果，求出出现某种结果的概率的方法.

2 **画树状图法的应用条件：**当一次试验涉及两个或更多的因素时，为了不重复、不遗漏地列出所有可能出现的结果，通常采用画树状图法来求概率.

用画树状图法列举试验中所有等可能出现的结果求概率的方法：画树状图法适用于一次试验涉及两个或更多的因素的事件发生的概率，画树状图和计算的方法如图26. 2-4.

每种结果出现的可能性相等，再分别计算各类情况的概率.

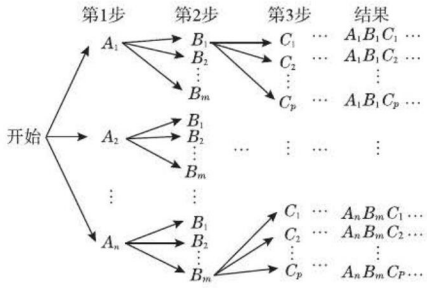


图26. 2-4

3 **易错警示：**画树状图时，每个“分支”的意义不同，但它们具有相等的可能性，因此，不能忽略任何一种情况，更不能漏掉任何可能的情况.

拔考向 ▶▶▶

提分·秘诀

考查角度1 利用画树状图法求生活中一般事件的概率

例7 ［模拟·合肥］有一种游戏叫做森林球，游戏道具包括一颗弹球和一块钉着钉子的木板，木板上的钉子如图26. 2-5所示，呈三角形排布，游戏参与者将弹球放入顶端的入口，弹球碰触钉子之后会随机地向左或向右滚动下落（向左和向右的可能性相等），直到碰触到最底端的钉子之后滚入相应的位置，每个位置对应着某一类奖品.

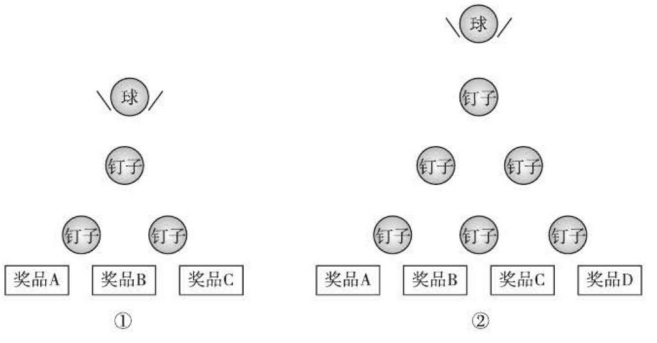


图26. 2-5

（1）如图①，木板上共有3颗钉子，直接写出一次游戏森林球落入奖品B位置的概率；

方法点拨

画树状图法一般是先选择一个元素再和其他元素分别组合，依次列出，像树的枝丫，最末端的枝丫个数就是总的可能的结果数n. 需要两步以上完成，一般可用树状图列举出所有可能情况.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

(2)如图②,木板上共有6颗钉子,求一次游戏森林球落入奖品B位置的概率.

导引: 画树状图列出所有等可能的结果,再从中找到一次游戏森林球落入奖品B位置的结果,继而根据概率公式计算可得.

解: (1)画树状图如图26.2-6.

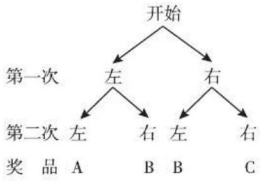


图26.2-6

由树状图可知,共有4种等可能结果,其中一次游戏森林球落入奖品B位置的有2种结果,所以一次游戏森林球落入奖品B位置的概率为$\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$.



(2)画树状图如图26.2-7.

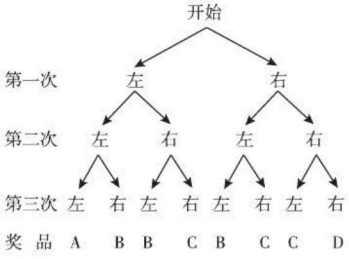


图26.2-7

由树状图可知,共有8种等可能结果,其中一次游戏森林球落入奖品B位置的有3种结果,所以一次游戏森林球落入奖品B位置的概率为$\frac{3}{8}$.

考查角度2 利用画树状图法求摸物游戏的概率

例8 [中考·吉林]在一个不透明的口袋中装有1个红球,1个绿球和1个白球,这3个球除颜色不同外,其他都相同.从口袋中随机摸出1个球,记录其颜色,然后放回口袋并摇匀,再从口袋中随机摸出1个球,记录其颜色.请利用画树状图的方法,求两次摸到的球都是红球的概率.

导引: 从袋中随机摸出1个球,只有3种等可能的结果;再从袋中随机摸出1个球,也有3种等可能的结果;采用画树状图的方法列出所有等可能出现的结果,再根据等可能条件下概率的计算方法计算即可.

方法点拨

本题中的摸球试验是有放回的,第一次随机摸出一球,有3种等可能情况;第二次摸球时,随机摸出一球,依然有3种等可能情况.要与无放回摸球试验加以区分,有无放回会直接影响摸球游戏的概率结果.

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

解： 画树状图如图26. 2-8.

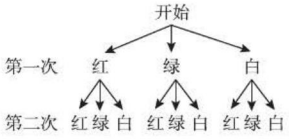


图 26. 2-8

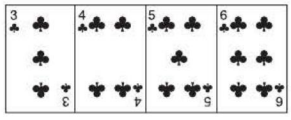
从树状图可以看出，所有等可能出现的结果共有 9 种，其中两次摸到的球都是红球的结果有 1 种.

所以 P(两次摸到的球都是红球) $=\frac{1}{9}$.



同类变式 （答案见 197 页）

8. 在一次数学文化课题活动中，把一副数学文化创意扑克牌中的 4 张扑克牌（如图所示）洗匀后正面向下放在桌面上，从中随机抽取 2 张牌. 请你用画树状图的方法，求抽取的 2 张牌的数字之和为偶数的概率.



（第 8 题图）

考查角度3 利用画树状图法求转盘游戏的概率

例 9 如图 26. 2-9，转盘 A 的三个扇形面积相等，分别标有数字 1，2，3，转盘 B 的四个扇形面积相等，分别标有数字 1，2，3，4. 转动 A，B 转盘各一次，当转盘停止转动时，将指针所落扇形中的两个数字相乘（当指针落在两个扇形的交线上时，重新转动转盘）.

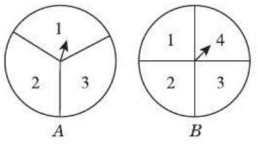


图 26. 2-9

（1）用画树状图法列出所有可能出现的结果；

（2）求两个数字的积为奇数的概率.

导引： 先列出所有的等可能结果，然后找出满足条件的结果，最后根据概率公式进行计算.

解：（1）画树状图如图 26. 2-10.

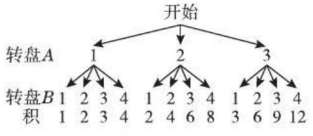


图 26. 2-10

（2）从树状图可以看出，可能出现的结果有 12 种，其中两个数字的积为奇数的结果有 4 种.

$\therefore P$(两个数字的积为奇数) $=\frac{4}{12}=\frac{1}{3}$.

方法点拨

在转盘游戏中，两个转盘表示是两步操作的游戏，其中每一个转盘等分的份数就是每步操作的等可能的情况数.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

考查角度4 对第二次列举理解不透彻易出现的错误

例10 [中考·包头]一个不透明的袋子中装有红、白两种颜色的小球,这些球除颜色外都相同,其中红球有1个,若从中随机摸出一个球,这个球是白球的概率是$\frac{2}{3}$.

(1)求袋子中白球的个数(请通过列式或列方程解答);

(2)随机摸出一个球后,放回并搅匀,再随机摸出一个球,求两次摸到相同颜色的小球的概率(请结合树状图解答).

导引: (1)根据简单的概率求法列方程进行计算;

(2)用画树状图法列出所有等可能的结果,再找出符合条件的结果,最后求概率.

解: (1)设袋子中白球有x个. 根据题意,可得$\frac{x}{x+1}=\frac{2}{3}$. 解得$x=2$. 经检验,$x=2$是所列方程的根. ∴ 袋子中有2个白球.

(2)画树状图如图26.2-11.

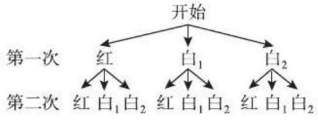


图26.2-11

∵ 总共有9种等可能的结果,其中两次摸到相同颜色的小球的结果有5种,∴ 两次摸到相同颜色的小球的概率$P=\frac{5}{9}$.

考查角度5 利用画树状图法求两步以上操作的事件的概率

例11 体育课上,小明、小强、小华三人在踢足球,足球从一人传到另一人就记为踢一次.

(1)如果从小强开始踢,经过两次踢球后,足球踢到了小华处的概率是多少(用树状图表示);

(2)如果踢三次后,球踢到了小明处的可能性最小,那么球应是从谁开始踢的?请说明理由.

导引: (1)题属于两步操作完成事件,列举出所有情况,看足球踢到了小华处的情况数占所有情况数的多少;

(2)可设球从小明处先开始踢,得到3次踢球回到小明处的概率,进而根据树状图可得球从其他2位同学处开始,3次踢球回到小明处的概率,比较可得可能性最小的方案.

解: (1)画树状图如图26.2-12.

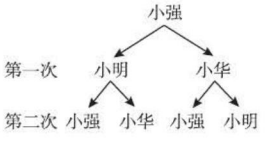


图26.2-12

易错警示

在摸球游戏中,第一次"放回"与"不放回",直接影响第二次等可能的结果,若放回,则包含放回的这个球;若不放回,则不包含这个球.注意:"一次拿两个球"与"不放回"是同一种类型.

▲**同类变式** (答案见197页)

10. [中考·海南]三张外观相同的卡片分别标有数字1,2,3,从中随机一次抽出两张,这两张卡片上的数字恰好都小于3的概率是(　　)

A. $\frac{1}{3}$　　B. $\frac{2}{3}$

C. $\frac{1}{6}$　　D. $\frac{1}{9}$

方法点拨

对于列举三步操作的事件的等可能结果只能用树状图,用树状图列举时,每一步操作都要列出所有等可能的结果.

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

由树状图，知 P(足球踢到了小华处) $=\frac{1}{4}$.

(2)球应从小明开始踢. 理由：画树状图如图 26.2-13.

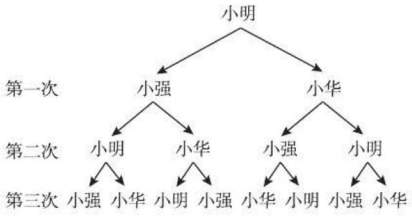


图 26.2-13

由树状图知，若从小明开始踢，则 P(球踢到小明处) $=\frac{2}{8}=\frac{1}{4}$.

同理，若从小强开始踢，则 P(球踢到小明处) $=\frac{3}{8}$；若从小华开始踢，则 P(球踢到小明处) $=\frac{3}{8}$. 所以球应从小明开始踢.

▲**同类变式**（答案见 197 页）

11. 小可、子宣、欣怡三人在一起做游戏时，需要确定做游戏的先后顺序，他们约定用“剪刀、石头、布”的方式确定. 那么，在一个回合中三个人都出“剪刀”的可能性是多少？

点知识 4 用列表法求事件发生的概率(重点)

列表法：(1)定义：用表格的形式反映事件发生的各种情况出现的次数和方式，以及某一事件发生的次数和方式，并求出概率的方法.

(2)适用条件：如果事件中各种结果出现的可能性均等，含有两次操作(如掷骰子两次)或两个条件(如转两个转盘)的事件.

(3)列表的方法：选其中的一次操作或一个条件作为横行，另一次操作或另一个条件为竖列，列表计算概率，如右表：

第一步 / 第二步	A_1	A_2	A_3	…	A_n
A'_1	(A_1,A'_1)	(A_2,A'_1)	(A_3,A'_1)	…	(A_n,A'_1)
A'_2	(A_1,A'_2)	(A_2,A'_2)	(A_3,A'_2)	…	(A_n,A'_2)
A'_3	(A_1,A'_3)	(A_2,A'_3)	(A_3,A'_3)	…	(A_n,A'_3)
…	…	…	…	…	…
A'_m	(A_1,A'_m)	(A_2,A'_m)	(A_3,A'_m)	…	(A_n,A'_m)

拔考向 ▸▸▸

提分·秘诀

考查角度1 利用列表法求两次操作的事件的概率

例 12 [易错题]一个不透明的口袋中有四个完全相同的小球，它们分别标号为 1,2,3,4.

(1)随机摸取一个小球，直接写出“摸出小球标号是 3”的概率.

(2)随机摸取一个小球然后放回，再随机摸取一个小球，请写出下列结果：

①两次取出的小球一个标号是 1，另一个标号是 2 的概率；

②第一次取出标号是 1 的小球且第二次取出标号是 2 的小球的概率.

导引：(1)共有 4 个小球，其中只有 1 个标号是 3 的小球，由此可以利用概率公式求得；(2)可以先通过列表法，分别求出两次取出的小球所有可能出现的结果数，“一个标号是 1，另一

易错警示

对于两次操作事件的概率，如抽取扑克，放回和不放回其概率是有区别的，如第一次抽出不放回，则第二次就不能抽出第一次抽出的扑克了，实质上反映在表格上就是去掉表格中一条对角线上的所有结果.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

个标号是2”的结果数和“第一次取出标号是1的小球且第二次取出标号是2的小球”的结果数，再运用概率公式求解.

解：(1)“摸出小球标号是3”的概率是$\frac{1}{4}$.

(2)列表如下：

第一次 第二次	1	2	3	4
1	(1,1)	(2,1)	(3,1)	(4,1)
2	(1,2)	(2,2)	(3,2)	(4,2)
3	(1,3)	(2,3)	(3,3)	(4,3)
4	(1,4)	(2,4)	(3,4)	(4,4)

①由表格可知，共有16种等可能的结果，其中“两次取出的小球一个标号是1，另一个标号是2”的可能结果有(2,1)，(1,2)，共2种，∴ P(两次取出的小球一个标号是1，另一个标号是2) $=\frac{2}{16}=\frac{1}{8}$.

②由表格可知，“第一次取出标号是1的小球且第二次取出标号是2的小球”的可能结果只有(1,2)1种，∴ P(第一次取出标号是1的小球且第二次取出标号是2的小球) $=\frac{1}{16}$.

考查角度2 利用列表法求两个条件的事件的概率

例13 两枚完全相同且质地均匀的正四面体骰子，四面分别标有数字1,2,3,4. 投掷这两枚骰子，第一枚朝下一面的数字记为b，第二枚朝下一面的数字记为c.

(1)计算$b>c$的概率；

(2)计算方程$x^2+bx+c=0$有实数根的概率.

导引：(1)先用列表法列出所有等可能出现的结果，然后根据概率公式求出该事件的概率；

(2)先根据方程$x^2+bx+c=0$有实数根得出$b^2-4c\geqslant 0$，再从表中得出符合条件的结果数，最后利用概率公式可得答案.

解：(1)列表如下：

第二枚 第一枚	1	2	3	4
1	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)
2	(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)
3	(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)
4	(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)

▲同类变式 (答案见197页)

12. 一个不透明的口袋中装有2个红球(记为红球1、红球2)，1个白球，1个黑球，这些球除颜色外都相同，将球摇匀.

(1)从中任意摸出1个球，恰好摸到红球的概率是_____；

(2)先从中任意摸出1个球，再从余下的3个球中任意摸出1个球，请用列表法求两次都摸到红球的概率.

方法点拨

(1)对于两步试验(两个条件或两次操作)且可能出现的结果比较多时，直接用列举法易出错，为了不重不漏地列出所有可能的结果，用列表法较好.

(2)用列表法求概率的步骤：①列表；②通过表格确定所有等可能的结果数n和关注的结果数m的值；③利用概率公式$P(A)=\frac{m}{n}$计算出事件发生的概率.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

由表格知，共有 16 种等可能结果，其中 $b>c$ 的有 6 种，

$\therefore P(b>c\text{ 的概率})=\frac{6}{16}=\frac{3}{8}$.

(2) 由题意知，$b^2-4c\geqslant 0$，即 $b^2\geqslant 4c$. 根据表格知 $b^2\geqslant 4c$ 的情况有 7 种，$\therefore P(\text{方程 } x^2+bx+c=0 \text{ 有实数根})=\frac{7}{16}$.

同类变式 (答案见 197 页)

请开始你的表演



13. 某中学要举办以“中国梦·我的梦”为主题的演讲比赛，要求每班选一名代表参赛. 九年级(1)班经过投票初选，小亮和小丽的票数并列班级第一. 现在他们都想代表本班参赛，经班长与他们协商决定，用他们学过的掷骰子游戏来确定谁去参赛(胜者参赛). 规则如下：两人同时随机各掷一枚完全相同且质地均匀的骰子一次，向上一面的点数都是奇数，则小亮胜；向上一面的点数都是偶数，则小丽胜；否则，视为平局. 若为平局，则继续上述游戏，直至分出胜负为止.

如果小亮和小丽按上述规则各掷一次骰子，那么请你解答下列问题：

(1) 小亮掷得向上一面的点数为奇数的概率是多少？

(2) 该游戏是否公平？请用列表法说明理由.(骰子是六个面上分别刻有 1,2,3,4,5,6 个小圆点的小正方体)

考查角度3 利用求概率判断游戏的公平性

方法点拨

判断某个游戏的规则是否公平的方法就是分别求出游戏双方获胜的概率，然后比较两个概率的大小，若相等，则游戏规则公平，否则不公平.

例 14 一个不透明的袋子中装有 3 个球，球上分别标有数字 0,1,2. 这些球除了数字外其余都相同. 甲、乙两人玩摸球游戏，规则如下：先由甲随机摸出一个球(不放回)，再由乙随机摸出一个球. 两人摸出的球所标的数字之和为偶数，则甲胜；和为奇数，则乙胜.

(1) 用列表法列出所有可能的结果；

(2) 这样的游戏规则是否公平？说明理由.

导引： (1) 根据题意画出无放回的两步概率的树状图或表格；(2) 正确算出两人获胜的概率，根据概率是否相等确定游戏是否公平.

解： (1) 列表如下：

和 / 甲 / 乙	0	1	2
0		1	2
1	1		3
2	2	3	

(2) 不公平. 理由：$\because P(\text{数字之和为偶数})=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$，$P(\text{数字之和为奇数})=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$，而 $\frac{1}{3}\neq\frac{2}{3}$，$\therefore$ 这样的游戏规则不公平.

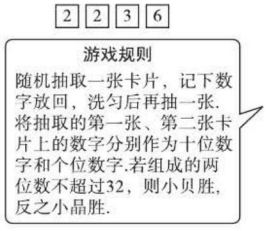
关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

同类变式（答案见198页）

14. 四张质地相同的卡片如图所示. 将卡片洗匀后，背面朝上放在桌面上.

(1)求随机抽取一张卡片，恰好得到数字2的概率；

(2)小贝和小晶想用这四张卡片做游戏，游戏规则见下图. 你认为这个游戏公平吗？请用列表法说明理由；若认为不公平，请你修改规则，使游戏变得公平.



（第14题图）



点方法·拨技巧 提高分

拔尖角度1 利用列举法求概率解决学科内综合题

例15 ［中考·成都］在四张编号为A,B,C,D的卡片（除编号外，其余完全相同）的正面分别写上如图26.2-14所示的正整数后，背面向上，洗匀放好，现从中随机抽取一张（不放回），再从剩下的卡片中随机抽取一张.

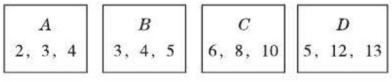


图26.2-14

(1)请用画树状图或列表的方法表示两次抽取卡片的所有等可能出现的结果（卡片用A,B,C,D表示）；

(2)我们知道，满足$a^2+b^2=c^2$的三个正整数a,b,c称为勾股数. 求抽到的两张卡片上的数都是勾股数的概率.

导引：(1)根据题意画树状图或列表，列出所有等可能出现的结果；

(2)①确定A,B,C,D四张卡片中，哪张卡片上的数是勾股数；②找出两张同时都是勾股数的所有可能结果；③代入概率公式计算出结果.

解：(1)根据题意，列表如下：

第一张＼第二张	A	B	C	D
A		(A,B)	(A,C)	(A,D)
B	(B,A)		(B,C)	(B,D)
C	(C,A)	(C,B)		(C,D)
D	(D,A)	(D,B)	(D,C)	

或画树状图如图26.2-15.

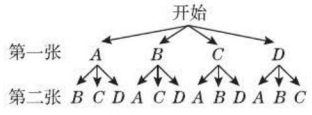


图26.2-15

由表格或树状图可知，共有12种等可能出现的结果，所有等可能出现的结果为$BA,CA,DA,AB,CB,DB,AC,BC,DC,AD,BD,CD$.

(2)因为B,C,D三张卡片上的数为勾股数，所以抽到的两张卡片上的数都是勾股数的有6种可能，所以P(抽到的两张卡片上的数都是勾股数)$=\frac{6}{12}=\frac{1}{2}$.

方法点拨：利用概率解决学科内综合题，列举等可能的结果还是只能采用列表或画树状图的方法，只是判断事件发生的情况时涉及学科内的其他知识.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

拔尖角度 2 统计与概率有关的综合题

例 16 ［模拟 · 安徽］某中学为推进素质教育，在初一年级设立了六个课外兴趣小组（每名学生只能加入一个小组，且不允许不加入），如图 26.2-16 是六个兴趣小组人数的条形统计图和扇形统计图，请根据图中提供的信息回答下列问题.

(1) 初一年级共有多少人？

(2) 补全条形统计图.

(3) 求“从该年级中任选一名学生，该学生加入音乐或科技小组”的概率.

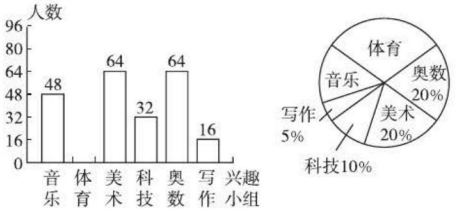


图 26.2-16

导引： (1) 用科技小组的人数除以它所占的百分比即可得到总人数；

(2) 先计算出体育小组的人数，然后补全条形统计图；

(3) 用加入音乐和科技小组的学生总数除以学生总人数即为所求概率.

解： (1) $32 \div 10\% = 320$（人）.

所以初一年级共有 320 人.

(2) 体育小组有 $320 - 48 - 64 - 32 - 64 - 16 = 96$（人）.

补全条形统计图如图 26.2-17.

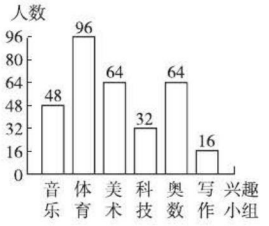


图 26.2-17

(3) P（从该年级中任选一名学生，该学生加入音乐或科技小组）$= \dfrac{48+32}{320} = \dfrac{1}{4}$.

方法点拨： 统计与概率综合考查，是常见的一种考查形式，两者之间不需要有太多的联系，只需各自运用好基础知识就可解决问题.

练中考 · 练模拟 得满分 （答案见 198 页）

基础巩固练

1. 在一个不透明的口袋中，装有若干个除颜色不同其余都相同的球，如果口袋中装有 3 个红球，且从中摸出一个球是红球的概率为 $\dfrac{1}{2}$，那么口袋中的球共有（　　）

A. 12 个　　B. 9 个

C. 6 个　　D. 3 个

2. 一个不透明的口袋中装有除颜色外完全相同的 a 个白球、b 个红球、c 个蓝球，则任意摸一个球是蓝球的概率是（　　）

A. $\dfrac{b}{a+b}$　　B. $\dfrac{c}{a+b}$

C. $\dfrac{b}{a+b+c}$　　D. $\dfrac{c}{a+b+c}$

3. ［中考 · 湖州］一个不透明的布袋里装有 4 个只有颜色不同的球，其中 3 个是红球，1 个是白球，从布袋里摸出 1 个球，记下颜色后放回，搅匀，再摸出 1 个球，则两次摸到的球都是红球的概率是（　　）

A. $\dfrac{1}{16}$　　B. $\dfrac{1}{2}$

C. $\dfrac{3}{8}$　　D. $\dfrac{9}{16}$

4. ［模拟 · 安徽］在某校运动会 4 × 400 m 接力赛中，甲、乙两名同学都是第一棒，参赛同学随机从四个赛道中抽取赛道，则甲、乙两名同学恰好抽中相邻赛道的概率为（　　）

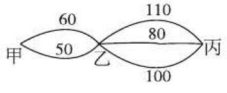
A. $\dfrac{3}{16}$　　B. $\dfrac{1}{4}$　　C. $\dfrac{3}{8}$　　D. $\dfrac{1}{2}$

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

5. 小明走进迷宫，迷宫中的每一个门都相同，第一道关口有四个门，只有第三个门有开关，第二道关口有两个门，只有第一个门有开关，他一次就能走出迷宫的概率是_____.

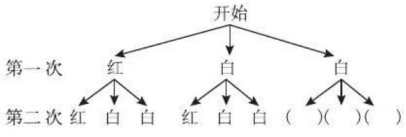
6. 银行为储户提供的储蓄卡的密码由0,1,2,…,9中的6个数字组成(可重复). 某储户的储蓄卡被盗，盗贼如果随意按下6个数字，可以取出钱的概率是_____.

7. 五一期间，梁先生驾驶汽车从甲地经过乙地到丙地游玩. 甲地到乙地有两条公路，乙地到丙地有三条公路，每一条公路的长度如图所示(单位:km). 梁先生任选一条从甲地到丙地的路线，这条路线正好是最短路线的概率是_____.



(第7题图)

8. 一个不透明的口袋中有一个红球和两个白球，它们除了颜色外都相同. 任意摸出一个球，记下球的颜色，放回袋中，搅匀后再任意摸出一个球，记下球的颜色. 为了研究两次摸球出现某种情况的概率，画出树状图如图.



(第8题图)

(1)请把树状图填写完整；

(2)根据树状图求摸到一红一白两球的概率.

能力提升练

9. [中考·自贡]已知A,B两个口袋中都有6个分别标有数字0,1,2,3,4,5的彩球，所有彩球除标示的数字外没有区别. 甲、乙两位同学分别从A,B两个口袋中随意摸出一个球. 记甲摸出的球上的数字为x，乙摸出的球上的数字为y，数对(x,y)对应平面直角坐标系内的点Q，则点Q落在以原点为圆心，半径为$\sqrt{5}$的圆上或圆内的概率为(　　)

A. $\frac{2}{9}$　　B. $\frac{8}{25}$　　C. $\frac{1}{12}$　　D. $\frac{5}{36}$

10. 将正面分别标有数字1,2,3,4,6，背面花色相同的五张卡片洗匀后，背面朝上放在桌面上，从中随机抽出两张卡片.

(1)列出所有等可能的结果，并求抽出的两张卡片上的数字之和为偶数的概率；

(2)记抽出的两张卡片上的数字分别为a，b，求点$Q(a,b)$在直线$y=x-2$上的概率.

11. [中考·怀化]已知不等式组$\begin{cases}3x\geqslant 6,\\2x-8\leqslant 0.\end{cases}$

(1)求满足此不等式组的所有整数解；

(2)从此不等式组的所有整数解中任取一个数，它是偶数的概率是多少?

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

12. 某商场为了吸引顾客，设计了一种促销活动：在一个不透明的箱子里放有 4 个相同的小球，球上分别标有“0 元”“10 元”“20 元”和“30 元”的字样. 规定：顾客在本商场同一日内，每消费满 200 元，就可以在箱子里先后摸出两个球（第一次摸出后不放回）. 商场根据两个小球所标金额的和返还相应价格的购物券，顾客拿到购物券后可以重新在本商场消费. 某顾客刚好消费了 200 元.

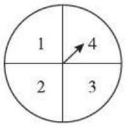
(1) 该顾客至少可得到_____元的购物券，至多可得到_____元的购物券；

(2) 请你用画树状图或列表的方法，求出该顾客所获得的购物券的金额不低于 30 元的概率.

13. [期末 · 芜湖] 如图，把一个转盘分成四等份，依次标上数字 1，2，3，4，若连续自由转动转盘两次，指针指向的数字分别记作 a，b，把 a，b 作为点 A 的横、纵坐标.

(1) 求点 $A(a,b)$ 的个数；

(2) 求点 $A(a,b)$ 在函数 $y=x$ 的图象上的概率.



（第 13 题图）

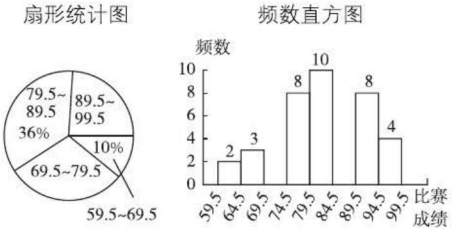
14. 若一个三位数的十位数字比个位数字和百位数字都大，则称这个数为“伞数”. 现从 1，2，3，4 这四个数字中任取 3 个数，组成无重复数字的三位数.

(1) 请画出树状图并写出所有可能得到的三位数；

(2) 甲、乙两人玩一个游戏，游戏规则：若组成的三位数是“伞数”，则甲胜；否则乙胜. 你认为这个游戏公平吗？试说明理由.

思维拓展练

15. [中考 · 安徽] “校园诗歌大赛”结束后，张老师和李老师将所有参赛选手的比赛成绩（得分均为整数）进行整理，并分别绘制成不完整的扇形统计图和频数直方图（如图）.



（第 15 题图）

(1) 本次比赛参赛选手共有_____人，扇形统计图中“69.5 ~ 79.5”这一组人数占总参赛人数的百分比为_____；

(2) 赛前规定，成绩由高到低前 60% 的参赛选手获奖. 某参赛选手的比赛成绩为 78 分，试判断他能否获奖，并说明理由；

(3) 成绩前四名是 2 名男生和 2 名女生，若从他们中任选 2 人作为获奖代表发言，试求恰好选中 1 男 1 女的概率.

【导学号：9142562】

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

26.3 用频率估计概率

26.4 综合与实践 概率在遗传学中的应用

核心知识

- 利用频率估计等可能事件的概率
- 利用频率估计非等可能事件的概率

知识链接

频率与概率的关系 → 利用频率估计等可能事件的概率；利用频率估计非等可能事件的概率

点知识·拨考向 速提分

点知识 1 利用频率估计等可能事件的概率（重难点）

1 **频率：** 试验中，某事件发生的次数与总次数的比值.

2 **用频率估计概率：**

（1）一般地，在大量重复试验下，随机事件 A 发生的频率 $\frac{m}{n}$（这里 n 是总试验次数，它必须相当大，m 是在 n 次试验中随机事件 A 发生的次数）会稳定到某个常数 p. 于是，我们用 p 这个常数表示随机事件 A 发生的概率，即 $P(A)=p$.

（2）适用条件：试验的所有可能结果不是有限个或者可能出现的结果发生的可能性不一定相等时，都可以通过统计频率来估计概率.

用频率估计概率

（3）注意点：一般地，用频率估计概率时，试验次数应该尽可能多，试验次数越多，结果越接近事件发生的概率.

（4）概率是通过大量重复试验中频率的稳定性得到的介于 0～1 之间的常数，它反映了事件发生的可能性大小.

拓展///

（1）当试验次数很大时，一个事件发生的频率稳定在相应的概率附近.

（2）频率是通过试验得到的一个数据结果，因试验次数的不同而有所改变，是一个实际的具体值. 概率是一个事件发生的可能性大小的理论值，它不因试验次数的改变而变化，是一个常数.

3 **易错警示：**

（1）对于等可能事件，我们可以用列举法通过公式求概率和用频率估计概率.

（2）对于非等可能事件（如投篮命中率等），只能用频率估计概率.

拔考向 ▸▸▸

提分·秘诀

考查角度1 利用频率的定义求事件发生的频率

例1 为了解今年九年级学生的数学学习情况，某校在第一轮模拟测试后，对九年级全体同学的数学成绩进行了统计分析，绘制得到下表和如图 26.3-1 所示的统计图. 请结合图表所给出的信息，解答下列问题：

成绩等级	频数	频率
优秀	45	b
良好	a	0.3
合格	105	0.35
不合格	60	c

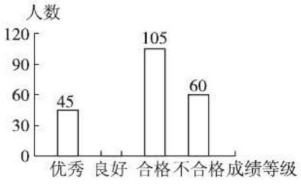


图 26.3-1

方法点拨

频数、频率与总数三者之间的数量关系：频数÷频率=总数.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

(1)该校九年级共有多少人?

(2)求表中 a,b,c 的值,并补全条形统计图.

导引: (1)九年级学生总人数 = 合格的人数 ÷ 合格的频率;

(2)根据"频率 $=\dfrac{\text{等级人数}}{\text{九年级学生总人数}}$"可求出表中 a,b,c 的值,进而补全条形统计图.



解: (1)该校九年级共有 $105\div0.35=300$(人).

(2)$a=300\times0.3=90$;$b=\dfrac{45}{300}=0.15$;$c=\dfrac{60}{300}=0.2$.

补全条形统计图如图 26.3-2.

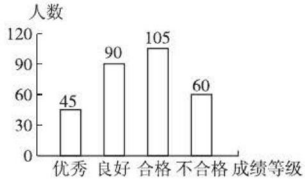


图 26.3-2

考查角度2 利用频率与概率的定义辨析频率与概率之间的关系

例2 关于频率和概率的关系,下列说法正确的是(　　)

A. 频率等于概率

B. 当试验次数很大时,频率稳定在概率附近

C. 当试验次数很大时,概率稳定在频率附近

D. 试验得到的频率与概率不可能相等

导引: 根据频率和概率的关系直接判断即可.

答案: B

同类变式 (答案见 199 页)

2. 小明看到一则有奖销售的广告,称中奖的概率为 20 %,于是他和另外 4 名同学一起去购物,结果 5 人都没中奖. 小明认为销售商在撒谎. 你认为小明的怀疑理由充分吗?为什么?

考查角度3 利用频率估计等可能事件的概率

例3 [中考·广州]4 件同型号的产品中,有 1 件不合格品和 3 件合格品.

(1)从这 4 件产品中随机抽取 1 件进行检测,求抽到的是不合格品的概率;

(2)从这 4 件产品中随机抽取 2 件进行检测,求抽到的都是合格品的概率;

(3)在这 4 件产品中加入 x 件合格品后,进行如下试验:随机抽取 1 件进行检测,然后放回,多次重复这个试验. 通过大量重复试验后发现,抽到合格品的频率稳定到 0.95,则可以推算出 x 的值大约是多少?

方法点拨

用频率估计概率的方法:利用频率估计概率时,不能从某一次试验的结果作为估计的概率,试验的次数越大,用频率估计概率也越准确,因此,用多次试验后的频率的稳定值估计概率.

在做大量重复试验时,某事件发生的频率会稳定在某个常数的附近,这个常数就叫做事件发生概率的估计值.

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

导引：(1)根据概率公式“$P(A)=\dfrac{\text{事件 } A \text{ 包含的可能结果数}}{\text{所有可能结果数}}$”计算；

(2)先列表或画树状图列举出所有可能的结果，再根据概率公式进行计算；

(3)根据“在大量重复试验中频率稳定于概率”可知，抽到合格品的概率约为0.95，从而得到$\dfrac{3+x}{4+x}=0.95$，解之即可.



解：(1)P(抽到的是不合格品)$=\dfrac{1}{4}$.

(2)画树状图如图26.3-3，由树状图可知，共有12种等可能的结果，其中抽到的都是合格品的有6种，

$\therefore P$(抽到的都是合格品)$=\dfrac{6}{12}=\dfrac{1}{2}$.

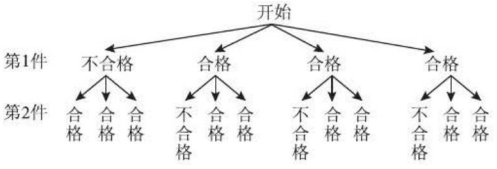


图26.3-3

(3)由题意，得$\dfrac{3+x}{4+x}=0.95$. 解得$x=16$.

答：x的值大约是16.

点知识 2 利用频率估计非等可能事件的概率

1 非等可能事件是无法用概率公式求概率的，只能通过大量重复试验，用频率来估计概率.

2 非等可能事件一般是不能用替代物来模拟试验的.

拔考向 ▸▸▸

提分·秘诀

考查角度1 利用等可能的替代物做试验

例4 在“抛一枚均匀硬币”的试验中，如果手边现在没有硬币，那么下面各个试验中，不能作替代物的是(　　)

A. 两张扑克，“黑桃”代替“正面”，“红桃”代替“反面”

B. 从形状大小质地完全相同，但颜色为一红一白的两个乒乓球中随机摸出一个乒乓球

C. 扔一枚图钉

D. 人数均等的男生、女生，以抽签的方式随机抽取一人

导引：“抛一枚均匀硬币”的试验中，出现正面和反面的可能性相同. 所以所选的替代物的试验结果只能有两个，且出现的可能性相同，所以A、B和D选项都符合要求.

答案：C

方法点拨

用替代物进行试验的方法：用替代物进行试验时，首先，要求替代物与原试验物所产生的所有等可能的结果数相同，且所有结果中的每一对对应事件的概率相等；其次，所选择的替代物不能比实物进行试验时更困难. 替代物通常选用：扑克、卡片、转盘、相同的乒乓球等.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

考查角度2 利用频率估计非等可能事件的概率

例5 一枚木质中国象棋子“兵”，它的正面雕刻一个“兵”字，它的反面是平的. 将它从一定高度下掷，落地反弹后可能是“兵”字面朝上，也可能是“兵”字面朝下. 由于棋子的两面不均匀，为了估计“兵”字面朝上的概率，某同学做了棋子下掷试验，试验数据如下表：

试验次数	20	40	60	80	100	120	140	160
“兵”字面朝上	14		38	47	52	66	78	88
相应频率	0.70	0.45	0.63	0.59		0.55	0.56	



(1)请将数据表补充完整(频率精确到0.01)；

(2)画出“兵”字面朝上的频率分布折线图；

(3)如将试验继续进行下去，根据上表的数据，这个试验的频率将稳定在它的概率附近，请你估计这个概率是多少.

导引： 利用“频率 = 事件发生的次数 ÷ 试验总次数”完成表格，对应转化成折线图，结合折线图估计事件的概率.

解： (1)从左到右依次填：18；0.52；0.55

(2)绘制的频率分布折线图如图26.3-4.

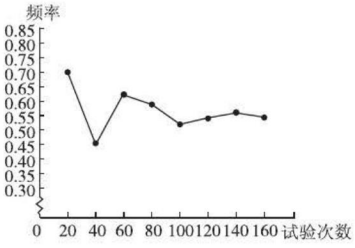


图26.3-4

(3)随着试验次数的增加，“兵”字面朝上的频率逐渐稳定在0.55左右，即P(“兵”字面朝上) = 0.55.

点方法·拨技巧 提高分

拔尖角度1 利用频率估计概率的综合运用

例6 如图26.3-5，均匀的正四面体的各面依次标有1，2，3，4四个数字. 小明做了60次投掷试验，结果统计如下：

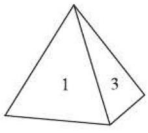


图26.3-5

朝下数字	1	2	3	4
出现的次数	16	20	14	10

(1)上述试验中“4朝下”的频率是_____.

(2)“根据试验结果，投掷一次正四面体，出现‘2朝下’的概率是$\frac{1}{3}$”的说法正确吗？为什么？

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

(3)随机投掷正四面体两次,请用列表法求两次朝下的数字之和大于4的概率.

导引: (1)根据频率=频数÷试验次数算出频率;

(2)只有当试验的次数很大时,事件发生的频率才会稳定在相应的事件发生的概率附近;

(3)通过列表法列举出所有等可能的结果,然后利用概率公式解答即可.

解: (1)$\frac{1}{6}$

(2)这种说法是错误的.理由如下:

在60次试验中,"2朝下"的频率为$\frac{1}{3}$并不能说明"2朝下"这一事件发生的概率为$\frac{1}{3}$.

只有当试验的总次数很大时,事件发生的频率才会稳定在相应的事件发生的概率附近.

(3)列表如下:

第一次 \ 第二次 和	1	2	3	4
1	2	3	4	5
2	3	4	5	6
3	4	5	6	7
4	5	6	7	8

由上表可知,共有16种结果,且每种结果出现的可能性相同,而两次朝下的数字之和大于4的结果有10种,

$\therefore P$(两次朝下的数字之和大于4)=$\frac{10}{16}=\frac{5}{8}$.

易错警示: 用频率来估计概率,其做法是取大量重复试验中的频率来估计概率,虽然同一试验中重复的次数越多,估计的效果就越好,但频率永远不能取代概率.

拔尖角度2 利用频率估计概率解决实际问题

例7 某养鱼专业户年初放养草鱼、鲢鱼共5 000条鱼苗,且100%成活.年底他想知道自己的收益情况.

(1)请你帮他设计一个估计鱼池中草鱼、鲢鱼的条数的方案;

(2)设计一个估计鱼池中草鱼、鲢鱼各有多少千克的方案;

(3)如果随机打捞起200条鱼,其中草鱼比鲢鱼多40条,草鱼平均每条的质量为2 kg,鲢鱼平均每条的质量比草鱼平均每条的质量少1 kg,市场价格是草鱼9.5元/kg,鲢鱼8.0元/kg,那么该专业户年底的毛收入估计是多少元?

导引: (1)可以先随机打捞部分鱼,将其中的草鱼做标记,并放回,再通过多次打捞试验,由每次试验中带标记的草鱼数占打捞起的草鱼数的比例估计出鱼池中草鱼的条数,进而求出鲢鱼的条数.

(2)利用样本平均数估计总体平均数的思想设计方案.

(3)先计算出鲢鱼、草鱼的条数,再计算出毛收入即可.

解: (1)先随机打捞起一定数量的鱼,给其中的草鱼做上标记,然后放回鱼池,经过一段时间后,再随机打捞若干条鱼,计算其中带标记的草鱼占打捞起的草鱼的比例.这样的试验多次进行,计算出打捞起的全部草鱼中带标记的草鱼所占的比例,据此来估计鱼池中草鱼的条数,进而求出鲢鱼的条数.

(2)先随机打捞部分鱼,称重并计算出每条草鱼、鲢鱼的平均质量.为使数据更接近准确值,这样的试验可进行多次,再由(1)中估计出的草鱼、鲢鱼的条数计算整个鱼池中草鱼、鲢鱼的质量.

(3)由题中的打捞情况可估计出鱼池中有草鱼3 000条、鲢鱼2 000条,毛收入估计是$9.5\times2\times3\,000+8.0\times(2-1)\times2\,000=73\,000$(元).

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

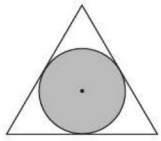
练中考·练模拟 得满分 （答案见 199 页）

基础巩固练

1. ［月考·淮南］一个不透明的盒子中有白色乒乓球 8 个和黄色乒乓球若干个，为求得盒中黄色乒乓球的个数，某同学进行了如下试验：每次摸出一个乒乓球记下它的颜色并放回搅匀，如此重复 360 次，摸出白色乒乓球 90 次，则黄色乒乓球估计有（　　）

A. 90 个　　B. 24 个　　C. 70 个　　D. 32 个

2. 小明随机地在如图所示的正三角形及其内部区域投针（未投入正三角形及其内部区域的不算），则针投到其内切圆（阴影）区域的概率为（　　）



（第 2 题图）

A. $\frac{1}{2}$　　B. $\frac{\sqrt{3}}{6}\pi$　　C. $\frac{\sqrt{3}}{9}\pi$　　D. $\frac{3\sqrt{3}}{\pi}$

3. 小明参加夏令营，一天夜里熄灯了，他想到明天去长城天不亮就出发，需把袜子准备好，而现在又不能开灯. 袋子里有质地及尺码相同的 3 双黑袜子和 1 双白袜子，混放在一起，现只能摸黑去拿出 2 只. 请你通过列表或画树状图的方式求出它们恰好是一双的概率. 若想通过试验估计出它们恰好是一双的概率，而此时手边没有袜子，能否用 6 个红色玻璃珠和两张扑克牌来代替 3 双黑袜子和 1 双白袜子进行试验？

4. 为估计某一池塘中鱼的总数目，小英从池塘中随机捕捞 100 条鱼，做了标记后放回池塘中，几天后，随机捕捞，每次捕捞后做好记录，然后将鱼放回，如此进行 20 次，记录数据如下：

总条数	50	45	60	48	10	30	42	38	15	10
有标记条数	2	1	3	2	0	1	1	2	0	1
总条数	53	36	27	34	43	26	18	22	25	47
有标记条数	2	1	2	1	2	1	1	2	1	2

（1）根据这种方法所得的结果是否准确？

（2）请设计另一种标记方法，使得估计更加准确.

能力提升练

5. 某地区林业局要考察一种树苗移植的成活率，对该地区这种树苗移植成活情况进行调查统计，并绘制了如图所示的统计图，根据统计图提供的信息解决下列问题.

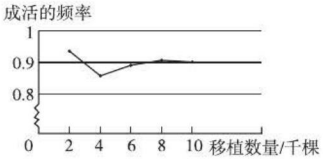
（1）这种树苗成活的频率稳定到_____，成活的概率估计值为_____.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

(2)该地区已经移植这种树苗5万棵.

①估计这种树苗成活_____万棵;

②如果该地区计划成活18万棵这种树苗,那么还需移植这种树苗约多少万棵?



(第5题图)

6. [中考·扬州]在一个不透明的口袋里装有只有颜色不同的黑、白两种颜色的球共20个,某学习小组做摸球试验,将球搅匀后从中随机摸出一个球记下颜色,再把它放回袋中,不断重复.统计数据如下表:

摸球的次数 n	100	150	200	500	800	1 000
摸到白球的次数 m	58	96	116	295	484	601
摸到白球的频率	0.58	0.64	0.58	0.59	0.605	0.601

(1)请估计:当 n 很大时,摸到白球的频率将会接近_____;

(2)假如你去摸一次,你摸到白球的概率是_____,摸到黑球的概率是_____;

(3)试估算口袋中黑、白两种颜色的球各有多少个;

(4)解决了上面的问题,小明同学猛然顿悟,过去一个悬而未决的问题有办法了.这个问题是在一个不透明的口袋里装有若干个白球,在不允许将球倒出来数的情况下,如何估计白球的个数(可以借助其他工具及用品)?请你应用统计与概率的思想和方法解决这个问题,写出解决这个问题的主要步骤及估算方法.

错题笔记

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

概率思想在学科中的渗透

荣老师告诉你 概率的基本试验一般有掷骰子、转转盘、摸球. 随着研究越来越深入,考查的触角伸向了学科内的其他各章与学科之间. 但万变不离其宗,只不过,在分析等可能结果时,用到学科内的其他知识和学科间的知识.

思想一 利用学科内的知识求概率

1 概率与方程

例1 甲、乙两同学投掷一枚正方体骰子,用字母 p,q 分别表示两人各投掷一次的点数.

(1)求满足关于 x 的方程 $x^2+px+q=0$ 有实数解的概率;

(2)求(1)中方程有两个相等实数解的概率.

解: 列表如下:

p \ q	1	2	3	4	5	6
1	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
2	(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
3	(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)
4	(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)
5	(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)
6	(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)

由上表可知,两人投掷骰子共有 36 种等可能的结果.

(1)方程有实数解的共有 19 种结果,故其概率为 $\frac{19}{36}$.

(2)方程有两个相等实数解的有 2 种结果,故其概率为 $\frac{1}{18}$.

2 概率与平面图形

例2 [中考·葫芦岛]如图1,一只蚂蚁在正方形 $ABCD$ 区域内爬行,点 O 是对角线的交点,$\angle MON=90°$,OM,ON 分别交线段 AB,BC 于 M,N 两点,求蚂蚁停留在阴影区域的概率.

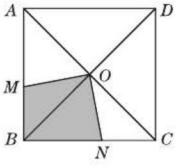


图1

解: ∵ 四边形 $ABCD$ 是正方形,

∴ $OB=OC$,$\angle MBO=\angle NCO=45°$,

$\angle BOC=90°$,∴ $\angle BON+\angle CON=90°$.

∵ $\angle MON=90°$,∴ $\angle BON+\angle BOM=90°$,

∴ $\angle BOM=\angle CON$. ∴ $\triangle BOM\cong\triangle CON$.

∴ $S_{四边形OMBN}=S_{\triangle BOC}=\frac{1}{4}S_{正方形ABCD}$.

∴ 蚂蚁停留在阴影区域的概率为 $\frac{1}{4}$.

同类变式 (答案见200页)

2. [中考·绵阳]有5张看上去无差别的卡片,上面分别写着 1,2,3,4,5,随机抽取3张,用抽到的三个数字作为边长,能构成三角形的概率是(　　)

A. $\frac{3}{10}$　　B. $\frac{3}{20}$　　C. $\frac{7}{20}$　　D. $\frac{7}{10}$

3 概率与函数

例3 [中考·泰安]在 -2,-1,0,1,2 这五个数中任取两数 m,n,则二次函数 $y=(x-m)^2+n$ 的图象的顶点在坐标轴上的概率为(　　)

A. $\frac{2}{5}$　　B. $\frac{1}{5}$　　C. $\frac{1}{4}$　　D. $\frac{1}{2}$

导引: 若二次函数 $y=(x-m)^2+n$ 的图象的顶点在坐标轴上,则 m,n 中至少有一个为0. 通过列表法或画树状图法求出事件发生的所有等可能结果数,再根据题意求出数对 (m,n) 中 m,n 至少有一个为0的结果数,进而求出能使二次函数 $y=(x-m)^2+n$ 的图象的顶点在坐标轴上的概率. 具体解题过程如下:

画树状图如图2.

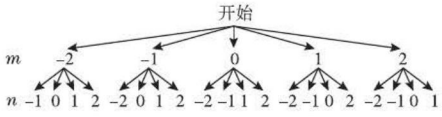


图2

由树状图可知,共有 20 种等可能的结果,

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

其中 m,n 中至少有一个为 0 的有 8 种，即 $(-2,0),(0,-2),(-1,0),(0,-1),(1,0),(0,1),(2,0),(0,2)$.

∴二次函数 $y=(x-m)^2+n$ 的图象的顶点在坐标轴上的概率为 $\frac{8}{20}$，即 $\frac{2}{5}$. 故选 A.

答案： A

方法点拨： 概率与学科内知识的综合主要体现在两个方面，一是利用学科内的知识列举等可能的结果；二是利用学科内的知识确定事件发生的结果但总体核心还是运用列举法解决问题.

思想二 ▸▸ 利用学科间的知识求概率

1 概率与英语

例 4 在组成单词“Probability”的所有字母中任意取出一个字母，则取到字母“b”的概率是_____.

导引： 在“Probability”这个英文单词中，一共有 11 个字母，其中字母“b”出现 2 次，所以取到字母“b”的概率是 $\frac{2}{11}$.

答案： $\frac{2}{11}$

2 概率与物理

例 5 ［模拟·埇桥区］小明学习电学知识后，用四个开关按键（每个开关按键闭合的可能性相等）、一个电源和一个灯泡设计了一个电路图（如图 3）.

(1) 若小明设计的电路图（四个开关按键都处于打开状态）如图①所示，求任意闭合一个开关按键，灯泡能发光的概率；

(2) 若小明设计的电路图（四个开关按键都处于打开状态）如图②所示，求同时闭合其中的两个开关按键，灯泡能发光的概率.（用列表法或画树状图法）

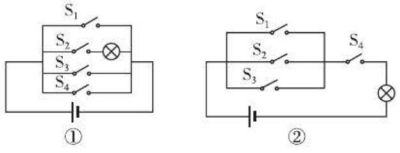


图 3

解： (1) 任意闭合一个开关按键，灯泡能发光的概率 $=\frac{1}{4}$.

(2) 若用 1,2,3,4 表示开关按键 S_1,S_2,S_3,S_4，则画树状图如图 4.

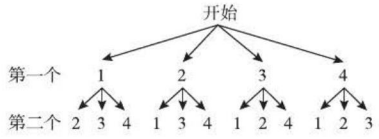


图 4

由树状图知，共有 12 种等可能的结果，其中同时闭合其中的两个开关按键，灯泡能发光的结果数为 6，所以同时闭合其中的两个开关按键，灯泡能发光的概率 $=\frac{6}{12}=\frac{1}{2}$.

3 概率与语文

例 6 田忌赛马是一个为大家所熟知的故事，传说战国时期，齐王与田忌各有上、中、下等级三匹马，同等级的马中，齐王的马比田忌的马强. 有一天，齐王要与田忌赛马，双方约定：比赛三局，每局各出一匹马，每匹马赛一次，赢得两局为胜. 看样子田忌似乎没有什么胜的希望，但是田忌的谋士了解到主人的上、中等马分别比齐王的中、下等马要强.

(1) 如果齐王将马按上、中、下的顺序出阵比赛，那么田忌的马如何出阵才能取胜？

(2) 如果齐王将马按上、中、下的顺序出阵，而田忌的马随机出阵比赛，田忌获胜的概率是多少？

解： (1) 田忌的马按下、上、中的顺序出阵才能取胜.

(2) 当田忌的马随机出阵时，双方马的对阵情况如下表：

齐王的马	上中下	上中下	上中下	上中下	上中下	上中下
田忌的马	上中下	上下中	中上下	中下上	下上中	下中上

由上表知，田忌获胜的概率 $P=\frac{1}{6}$.

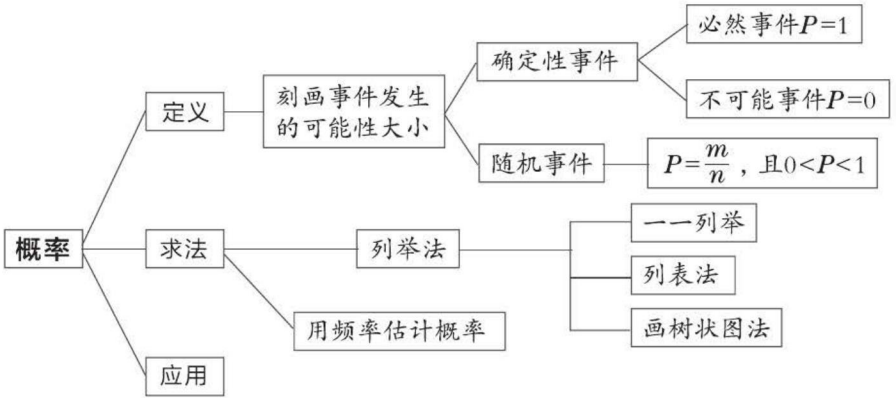
方法点拨： 概率与学科间的综合题，主要是给出的事件从学科间（如语文、英语、物理等学科）的问题作为背景，求概率的方法还是从列举法为核心.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

章末核心知识分类整合

核心结构专题

结构必知



核心必读

1. 事件分为确定性事件和随机事件，确定性事件中的必然事件的概率为1，不可能事件的概率为0；随机事件的概率为0和1之间的数.
2. 求随机事件的概率主要是列举法，列举等可能的结果时，主要有列表法和画树状图法.
3. 有些事件发生的结果不能列举，求概率时只能用频率来估计概率.

知识方法专题

知识必学

专题一 事件类型的判断

链接中考>> 对事件类型的判断，关键是判断事件发生的可能性大小，即概率的大小. 考查时一般都是以选择题的形式出现.

例1 下列说法中正确的是(　　)

A. “任意画出一个等边三角形，它是轴对称图形”是随机事件

B. “任意画出一个平行四边形，它是中心对称图形”是必然事件

C. “概率为0.000 1的事件”是不可能事件

D. 任意掷一枚质地均匀的硬币10次，正面向上一定是5次

导引： ∵ 等边三角形是轴对称图形，

∴ “任意画出一个等边三角形，它是轴对称图形”是必然事件；

∵ 平行四边形是中心对称图形，

∴ “任意画出一个平行四边形，它是中心对称图形”是必然事件；

概率为0的事件才是不可能事件，“概率为0.000 1的事件”是随机事件；

∵ 任意掷一枚质地均匀的硬币，正面向上的概率是$\frac{1}{2}$，正面向上的频率不一定是$\frac{1}{2}$，∴ 任意掷一枚质地均匀的硬币10次，正面向上不一定是5次. 故选B.

答案： B

方法点拨： 事件分为确定性事件和随机事件，确定性事件又分为必然事件和不可能事件. 必然事件发生的概率为1，即P(必然事件)=1；不可能事件发生的概率为0，即P(不可能事件)=0；如果A为随机事件，那么$0<P(A)<1$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

专题二 用列举法求概率

链接中考>> 求概率的关键就是列举事件发生的等可能结果，列举时主要有列表法和画树状图法，两种方法有时可以同时使用，有时只能选择其中一种. 在列举等可能结果时，特别关注类似于摸球问题中“放回与不放回”. 考查求概率及利用概率判断游戏是否公平时，一般都以解答题的形式出现.

例2 ［中考·漳州］在一个不透明的袋子中，装着分别标有数字3,4,5,7的质地、大小均相同的小球. 小明和小东同时从袋子中随机各摸出1个球，并计算这两球上的数字之和，当和小于9时小明获胜，反之小东获胜.

(1)请用画树状图或列表的方法，求小明获胜的概率；

(2)这个游戏公平吗？请说明理由.

解：(1)画树状图如图26-1.

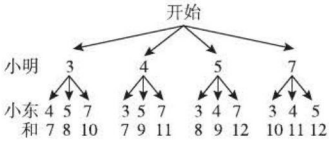


图26-1

或列表如下：

和 / 小明 / 小东	3	4	5	7
3		7	8	10
4	7		9	11
5	8	9		12
7	10	11	12	

∵ 所有等可能的结果共有12种，其中数字之和小于9的有4种，

$\therefore P(\text{小明获胜}) = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$.

(2)不公平. 理由如下：

$\because P(\text{小明获胜}) = \frac{1}{3}$,

$\therefore P(\text{小东获胜}) = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3} > \frac{1}{3}$.

∴ 这个游戏不公平.

方法点拨： 1.求概率的方法：(1)公式法：$P(A) = \frac{m}{n}$，其中n为所有事件发生的总次数，m为事件A发生的次数；

(2)列举(列表或画树状图)法：当一次试验涉及多个因素(对象)时，由于不能直观地得到事件A发生的次数m及所有事件发生的结果数n，所以需要借助于列表或画树状图的方法来列举出来，再根据公式进行计算.

一般步骤：①判断使用列表法还是画树状图法：列表法一般适用于两步计算概率，画树状图法适用于两步及以上计算概率；②不重不漏地列举出所有事件出现的可能结果，并判断每种事件发生的可能性是否相等；③确定所有事件可能出现的结果数n及所求事件A出现的结果数m；④用公式$P(A) = \frac{m}{n}$求事件A发生的概率；

2.判断游戏的公平性：判断游戏的公平性是通过概率来判断的，在条件相同的前提下，若参加游戏的每一个人获胜的概率相等，则游戏公平，否则不公平.

专题三 用频率估计概率

链接中考>> 有些事件的概率无法通过列举法求出，只能通过多次试验求出事件发生的频率，然后用频率来估计事件发生的概率. 考查时一般以填空题的形式出现.

例3 某种绿豆在相同条件下发芽的试验结果如下表，根据表中数据估计这种绿豆发芽的概率约是_____.(保留三位小数)

每批粒数	2	10	50	100	500	1 000	2 000	3 000
发芽的粒数	2	9	44	92	465	932	1 862	2 793
发芽的频率	1	0.900	0.880	0.920	0.930	0.932	0.931	0.931

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

导引： 在大量重复试验的情况下，频率的稳定值可以作为概率的估计值，即次数越大，频率越接近于概率. ∴ 这种绿豆发芽的概率约是 0.931.

答案： 0.931

例 4 ［中考 · 福州］一个不透明袋子中有 1 个红球，1 个绿球和 n 个白球，这些球除颜色外无其他差别.

(1) 当 $n=1$ 时，从袋中随机摸出 1 个球，摸到红球和摸到白球的可能性是否相同？_____（填“相同”或“不相同”）；

(2) 从袋中随机摸出 1 个球，记录其颜色，然后放回. 大量重复该试验，发现摸到绿球的频率稳定于 0.25 附近，则 n 的值是_____；

(3) 在一个摸球游戏中，所有可能出现的结果如图 26-2.

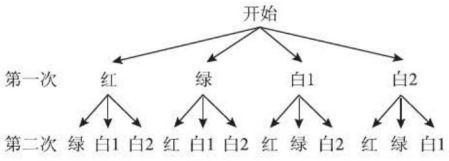


图 26-2

根据树状图呈现的结果，求两次摸出的球颜色不同的概率.

解： (1) 相同　(2) 2

(3) 由树状图可知，共有 12 种结果，且每种结果出现的可能性相同，其中两次摸出的球颜色不同（记为事件 A）的结果有 10 种，∴ $P(A)=\frac{10}{12}=\frac{5}{6}$.

方法点拨： 用频率估计概率，样本容量越大，估计越精确.

专题四 统计与概率的综合应用

链接中考>> 统计与概率的综合考查是中考常见的考查形式，考查的重点是统计知识，概率一般只是在最后一问起到点缀的作用.

例 5 ［中考 · 毕节］某中学号召学生利用假期开展社会实践活动，开学初，学校随机地通过问卷形式进行了调查，其中将学生参加社会实践活动的天数，绘制了如图 26-3所示的两幅不完整统计图.

请根据图中提供的信息，完成下列问题：

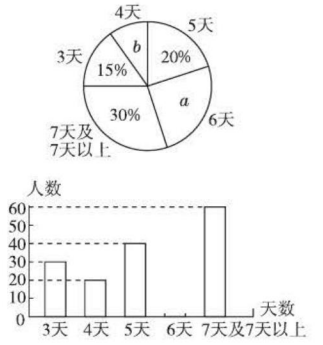


图 26-3

(1) 问卷调查的学生总数为_____人；

(2) 扇形统计图中 a 的值为_____；

(3) 补全条形统计图；

(4) 该校共有学生 1 500 人，请你估计“活动时间不少于 5 天”的大约有_____人；

(5) 如果从全校 1 500 名学生中任意抽取一名学生进行交流发言，那么被抽到的学生恰好也参加了问卷调查的概率是_____.

解： (1) 200

(2) 25%

(3) 如图 26-4.

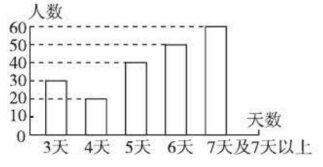


图 26-4

(4) 1 125　(5) $\frac{2}{15}$

方法点拨： 解题时要充分利用数形结合思想，正确读图与识图是解决问题的关键. 要注意条形统计图能显示各项目的具体数量，而扇形统计图能显示各项目所占的百分比的大小，扇形统计图中所有扇形表示的百分比之和为 1，某项目的具体数量除以其所占的百分比即可得到总体的数量.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

Ⅱ 思想方法专题

专题五 方程思想

专题解读>> 在由概率估计原始条件时，经常会用到方程思想，先设出所求条件，根据已知列出方程求解即可.

例6 口袋里有红、绿、黄三种颜色的球，除颜色外其余都相同，其中红球4个，绿球5个，黄球若干个，任意摸出1个球是绿球的概率是$\frac{1}{3}$. 求：

(1)口袋里黄球的个数；

(2)任意摸出1个球是红球的概率.

导引： (1)摸到绿球的可能结果共有5种，若设黄球有x个，则任意摸出1个球的所有可能结果有$(x+4+5)$种，通过摸到绿球的概率是$\frac{1}{3}$列方程即可求解.

(2)根据(1)中所求结果，由概率公式即可求得答案.

解： (1)设黄球有x个.

根据题意，得$\frac{5}{x+4+5}=\frac{1}{3}$.

解得$x=6$.

∴口袋里有6个黄球.

(2)任意摸出1个球是红球的概率为$\frac{4}{15}$.

方法点拨： 解答本题采用了方程思想，已知概率求元素的数目问题，通常是根据概率列方程求解.

专题六 数形结合思想

专题解读>> 数形结合思想是将数量与图形结合起来，对题目中给定的题设和结论进行代数方面和几何含义方面的分析. 在与转盘有关的概率中，因为指针落在某区域的概率大小与其面积有关，所以要用数形结合的思想来解题.

例7 如图26-5，甲、乙两个可以自由转动的均匀转盘，甲转盘被分成3个面积相等的扇形，乙转盘被分成4个面积相等的扇形，每一个扇形都标有相应的数，同时转动两个转盘，当转盘停止后，设甲转盘中指针所指区域内的数为m，乙转盘中指针所指区域内的数为n(若指针指向边界线时，重转一次，直到指针都指向某一个区域为止).

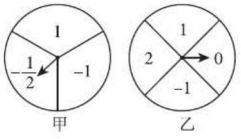


图26-5

(1)请你用画树状图或列表的方法求出$|m+n|>1$的概率；

(2)直接写出点(m,n)落在函数$y=-x$的图象上的概率.

导引： (1)根据题意列表，然后根据表格求得所有可能的结果数与$|m+n|>1$的结果数，再求解即可；

(2)根据(1)中的表格，由概率公式即可求得答案.

解： (1)列表如下：

转盘甲 \ 转盘乙	-1	0	1	2
-1	(-1, -1)	(-1, 0)	(-1, 1)	(-1, 2)
$-\frac{1}{2}$	$\left(-\frac{1}{2}, -1\right)$	$\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$	$\left(-\frac{1}{2}, 1\right)$	$\left(-\frac{1}{2}, 2\right)$
1	(1, -1)	(1, 0)	(1, 1)	(1, 2)

由上表可知，所有等可能的结果有12种，其中$|m+n|>1$的有5种，

∴$|m+n|>1$的概率$P_1=\frac{5}{12}$.

(2)点(m,n)落在函数$y=-x$的图象上的概率$P_2=\frac{2}{12}=\frac{1}{6}$.

方法点拨： 解答本题采用了列表法. 此题为函数与概率的综合，列表法可以不重复不遗漏地列出所有可能的结果，适用于两步完成的事件.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

一、选择题

1. 在四张完全相同的卡片上分别印有等边三角形、平行四边形、等腰梯形、圆的图案，现将印有图案的一面朝下，混合后从中一次性随机抽取两张，则抽到的卡片上印有的图案都是轴对称图形的概率为(　　)

A. $\frac{1}{4}$　　B. $\frac{1}{3}$　　C. $\frac{1}{2}$　　D. $\frac{3}{4}$

2. 有长度分别为3 cm，5 cm，7 cm，9 cm的四条线段，从中任取三条线段，能够组成三角形的概率是(　　)

A. $\frac{3}{4}$　　B. $\frac{2}{3}$　　C. $\frac{1}{2}$　　D. $\frac{1}{4}$

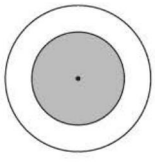
3. 一个不透明口袋中装有红球6个，黄球9个，绿球3个，这些球除颜色外没有任何区别. 从中任意摸出一个球，如果要使摸到绿球的概率为0.25，需要在这个口袋中再放入绿球的个数是(　　)

A. 4　　B. 3　　C. 2　　D. 1

4. 一个质地均匀的正方体骰子的六个面上分别有1到6的点数，将骰子抛掷两次，抛第一次将朝上一面的点数记为x，抛第二次将朝上一面的点数记为y，则点(x,y)落在直线$y=-x+5$上的概率为(　　)

A. $\frac{1}{18}$　　B. $\frac{1}{12}$　　C. $\frac{1}{9}$　　D. $\frac{1}{4}$

5. 某地发生地震时，航空兵空投救灾物资到指定区域(大圆)，如图所示. 若要使空投物资落在中心区域(阴影部分)的概率为$\frac{1}{2}$，则中心区域与指定区域的半径之比为(　　)



(第5题图)

A. 1∶2　　B. 1∶4

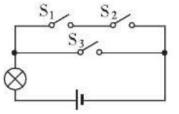
C. $\sqrt{2}$∶4　　D. $\sqrt{2}$∶2

二、填空题

6. [中考·攀枝花] 一个不透明的袋子中装有除颜色外均相同的5个红球和n个黄球，从中随机摸出一个，摸到红球的概率是$\frac{5}{8}$，则$n=$_____.

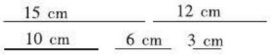
7. 在-1，1，2这三个数中任选两个数分别作为点P的横坐标和纵坐标，过点P画直线$y=kx$，则该直线经过第一、三象限的概率是_____.

8. 如图所示的电路图中，在开关全部断开的情况下，闭合其中任意一个开关，灯泡发亮的概率是_____.



(第8题图)

9. 小芳同学有两根长度为4 cm，10 cm的木棒，她想钉一个三角形相框，桌上有五根木棒供她选择(如图所示)，从中任选一根，能钉成三角形相框的概率是_____.



(第9题图)

10. 盒子里有四张分别写有整式$x+1$，$x+2$，3，4的卡片，现从中随机抽取两张，把卡片上的整式分别作为分子和分母，则能组成分式的概率是_____.

11. 有两把不同的锁A，B和三把不同的钥匙甲、乙、丙，其中甲与A配套，乙与B配套，则任意取出一把钥匙去开任意一把锁，一次打开锁的概率为_____.

三、解答题

12. 在一个不透明的盒子里，装有四个分别标有数字1，2，3，4的小球，它们的形状、大小、质地等完全相同. 小明先从盒子里随机取出一个小球，记下数字为x；放回盒子摇

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

匀后，再由小华随机取出一个小球，记下数字为 y.

(1)用列表法或画树状图法表示出(x,y)的所有可能出现的结果；

(2)求小明、小华各取一次小球所确定的点(x,y)落在函数 $y=x+1$ 的图象上的概率；

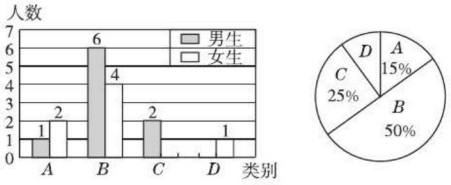
(3)求小明、小华各取一次小球所确定的数 x,y 满足 $y>x+1$ 的概率.

13. [中考·玉林]在一个不透明的袋子中有一个黑球 a 和两个白球 b,c(除颜色外其他均相同)，用画树状图法(或列表法)解答下列问题：

(1)小丽第一次从袋子中摸出一个球不放回，第二次又从袋子中摸出一个球，则小丽两次都摸到白球的概率是多少？

(2)小强第一次从袋子中摸出一个球，摸到黑球不放回，摸到白球放回，第二次又从袋子中摸出一个球，则小强两次都摸到白球的概率是多少？

14. [模拟·安徽]张老师为了解学生完成数学课前预习的具体情况，对九年级部分学生进行了跟踪调查，并将调查结果分为四类，A:很好；B:较好；C:一般；D:较差. 制成以下两幅不完整的统计图(如图)，请你根据统计图解答下列问题.



(第14题图)

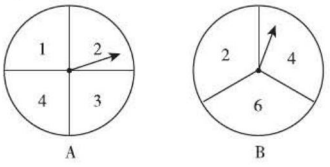
(1)C 类中女生有_____名，D 类中男生有_____名，将条形统计图补充完整.

(2)若该校九年级共有女生180名，则九年级女生完成数学课前预习达到很好和较好的约有多少名？

(3)为了共同进步，张老师想从被调查的 A 类和 D 类学生中各随机选取一名同学进行“一帮一”互助学习，请用列表法或画树状图法求出所选两名同学恰好性别相同的概率.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

15. 如图，有A，B两个转盘，其中转盘A被分成4等份，转盘B被分成3等份，并在每一份内标上数字. 现甲、乙两人同时各转动其中一个转盘，转盘停止后（当指针指在边界线上时视为无效，重转），若将A转盘指针指向的数字记为x，B转盘指针指向的数字记为y，从而确定点P的坐标为(x,y). 记$S=x+y$.



（第15题图）

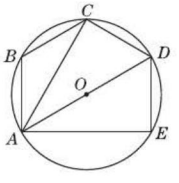
（1）请用列表或画树状图的方法写出所有可能得到的点P的坐标；

（2）李刚为甲、乙两人设计了一个游戏：当$S<6$时甲获胜，否则乙获胜. 你认为这个游戏公平吗？如果不公平，那么对谁有利？

16. 已知：如图，$\odot O$的直径$AD=2$，$\overset{\frown}{BC}=\overset{\frown}{CD}=\overset{\frown}{DE}$，$\angle BAE=90°$.

（1）求$\triangle ACD$的面积；

（2）如果在这个圆形区域中，随机确定一个点P，那么点P落在四边形$ABCD$区域内的概率是多少？



（第16题图）

17. ［中考·台州］为了估计鱼塘中成品鱼（个体质量在0.5 kg及以上，下同）的总质量，先从鱼塘中捕捞50条成品鱼，称得它们的质量如下表：

质量/kg	0.5	0.6	0.7	1.0	1.2	1.6	1.9
数量/条	1	8	15	18	5	1	2

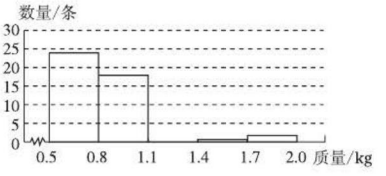
然后做上记号再放回鱼塘中，过几天又捕捞了100条成品鱼，发现其中2条带有记号.

（1）请根据表中数据补全如图所示的直方图（各组中数据包括左端点不包括右端点）.

（2）根据图中数据分组，估计从鱼塘中随机捕一条成品鱼，其质量落在哪一组的可能性最大？

（3）根据图中数据分组，估计鱼塘里质量中等的成品鱼，其质量落在哪一组内？

（4）请你用适当的方法估计鱼塘中成品鱼的总质量.　　【导学号：9142562】



（第17题图）

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

参考答案及点拨

第24章 圆

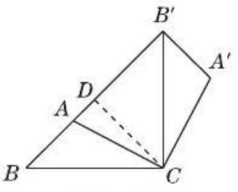
24.1 旋 转

24.1.1 图形的旋转

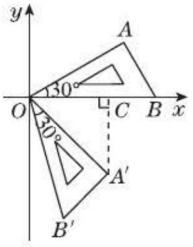
同类变式

4. $\frac{25\sqrt{2}}{9}$ **点拨**：如图，作 $CD \perp BB'$ 于 D.

∵ $\triangle ABC$绕点 C 按顺时针方向旋转 $90°$，点 B 的对应点 B'落在 BA 的延长线上，∴ $CB = CB' = 5$，$\angle BCB' = 90°$，∴ $\triangle BCB'$为等腰直角三角形，∴ $BB' = \sqrt{2}BC = 5\sqrt{2}$，∴ $CD = \frac{1}{2}BB' = \frac{5\sqrt{2}}{2}$. 在 Rt $\triangle ACD$ 中，∵ $\sin\angle DAC = \frac{CD}{AC} = \frac{9}{10}$，∴ $AC = \frac{5\sqrt{2}}{2} \times \frac{10}{9} = \frac{25\sqrt{2}}{9}$. 故答案为$\frac{25\sqrt{2}}{9}$.



（第4题图）



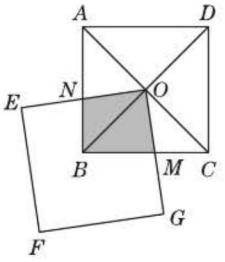
（第5题图）

5. C **点拨**：如图，由题意可知，$\angle AOA' = 75°$，$A'O = AO = 2$. ∵ $\angle AOB = 30°$，∴ $\angle BOA' = 45°$. 过点 A'作 $A'C \perp x$ 轴于点 C，则$\triangle OA'C$为等腰直角三角形，∴ $OC = A'C = \sqrt{2}$. ∴ $A'(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$. 故选 C.

6. C **点拨**：如图，∵ 四边形 $ABCD$ 和四边形 $OEFG$ 都是正方形，∴ $OB = OC$，$\angle OBN = \angle OCM = 45°$，$\angle BOC = \angle EOG = 90°$，∴ $\angle BON = \angle MOC$. 在 $\triangle OBN$ 和 $\triangle OCM$ 中，

$$\begin{cases} \angle OBN = \angle OCM, \\ OB = OC, \\ \angle BON = \angle MOC, \end{cases}$$

∴ $\triangle OBN \cong \triangle OCM$，∴ 四边形 $OMBN$ 的面积等于三角形 BOC 的面积，即重叠部分面积不变，总是等于正方形面积的$\frac{1}{4}$. 故选 C.



（第6题图）

8. A

练中考·练模拟 得满分

1. C **2.** B **3.** 60° **4.** 90° **5.** 15°

6. **解**：(1) 因为 $\angle ABC = 30°$，$\angle CBE = 180°$，所以 $\angle ABE = 180° - 30° = 150°$，即三角尺旋转了 $150°$.

(2) 根据旋转的性质知，$BD = BC$，所以 $\triangle CDB$ 是等腰三角形.

(3) 因为 $BC = BD$，$\angle CBD = 150°$，所以 $\angle BDC = \frac{1}{2} \times (180° - 150°) = 15°$.

7. (1) **证明**：由题意可知，$CD = CE$，$\angle DCE = 90°$. 又∵ $\angle ACB = 90°$，$\angle ACD = \angle ACB - \angle DCB$，$\angle BCE = \angle DCE - \angle DCB$，∴ $\angle ACD = \angle BCE$.

在 $\triangle ACD$ 和 $\triangle BCE$ 中，

$$\begin{cases} AC = BC, \\ \angle ACD = \angle BCE, \\ CD = CE, \end{cases}$$

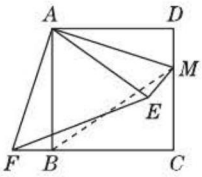
∴ $\triangle ACD \cong \triangle BCE$.

(2) **解**：∵ $\angle ACB = 90°$，$AC = BC$，∴ $\angle A = 45°$. 由(1)可知，$\angle A = \angle CBE = 45°$，$AD = BE$. ∵ $AD = BF$，∴ $BE = BF$，∴ $\angle BEF = \frac{1}{2}(180° - \angle CBE) = 67.5°$.

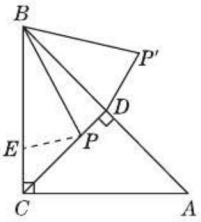
8. C **点拨**：如图，连接 BM. ∵ $\triangle AEM$ 与 $\triangle ADM$ 关于 AM 所在的直线对称，∴ $AE = AD$，$\angle MAD = \angle MAE$. ∵ $\triangle ADM$ 按顺时针方向绕点 A 旋转 $90°$得到$\triangle ABF$，∴ $AF = AM$，$AB = AD$，$\angle FAB = \angle MAD$. ∴ $\angle FAB = \angle MAE$，$AB = AE$. ∴ $\angle FAB + \angle BAE = \angle BAE + \angle MAE$. ∴ $\angle FAE = \angle MAB$. ∴ $\triangle FAE \cong \triangle MAB$. ∴ $EF = BM$. ∵ 四边形 $ABCD$ 是正

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

方形，∴ $BC = CD = AB = 3$. ∵ $DM = 1$，∴ $CM = 2$. ∴ 在 Rt $\triangle BCM$ 中，$BM = \sqrt{2^2+3^2} = \sqrt{13}$，∴ $EF = \sqrt{13}$. 故选 C.



（第 8 题图）



（第 10 题图）

9. C　**点拨**：在 $\triangle ABM$ 和 $\triangle C'BM$ 中，$\angle BAM = \angle BC'M = 90°$，∵ $\begin{cases} BM = BM, \\ AB = C'B, \end{cases}$ ∴ Rt $\triangle ABM \cong$ Rt $\triangle C'BM$. ∴ $\angle 2 = \angle 3 = \dfrac{90° - \angle 1}{2} = 30°$.

在 Rt $\triangle ABM$ 中，$AM = \sqrt{3} \times \tan 30° = 1$.

∴ $S_{\triangle ABM} = \dfrac{1}{2} \times AM \times AB = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

∵ 正方形的面积为 $(\sqrt{3})^2 = 3$，∴ 阴影部分的面积为 $3 - 2 \times \dfrac{\sqrt{3}}{2} = 3 - \sqrt{3}$. 故选 C.

10. A　**点拨**：如图，在 BC 上截取 $BE = BD$，连接 EP. 由 $\angle ACB = 90°$，$AC = BC = 4$，$CD \perp AB$，易得 $\angle ABC = \angle BCD = 45°$，$BD = BE = 2\sqrt{2}$. ∵ 线段 BP 以 B 点为旋转中心逆时针旋转 45° 得到 BP'，∴ $BP = BP'$，$\angle PBP' = 45°$. ∴ $\angle EBP + \angle DBP = \angle P'BD + \angle DBP$，∴ $\angle EBP = \angle P'BD$.

∴ $\triangle BEP \cong \triangle BDP'$ (SAS). ∴ $PE = P'D$.

当 $PE \perp CD$ 时，PE 有最小值，即 $P'D$ 有最小值. ∵ $PE \perp CD$，$\angle BCD = 45°$，∴ $CE = \sqrt{2}PE = BC - BE = 4 - 2\sqrt{2}$，∴ $PE = 2\sqrt{2} - 2$. 故选 A.

11. **解**：(1) 由旋转的性质可知，BC 与 BA 的夹角就是旋转角，所以旋转角等于 90°.

(2) 由旋转的性质得 $\triangle BCP \cong \triangle BAQ$，所以 $BP = BQ$，$\angle PBC = \angle QBA$. 又因为四边形 $ABCD$ 是正方形，所以 $\angle ABC = 90°$，即 $\angle ABP + \angle PBC = 90°$. 所以 $\angle ABP + \angle QBA = 90°$，即 $\angle QBP = 90°$. 所以 $\triangle BPQ$ 为等腰直角三角形.

12. (1) **证明**：∵ 四边形 $ABCD$ 和四边形 $AEFG$ 都是正方形，

∴ $AD = AB$，$AG = AE$. ∴ $DG = BE$.

又∵ $FG = FE$，$\angle DGF = \angle BEF = 90°$，

∴ $\triangle DGF \cong \triangle BEF$. ∴ $DF = BF$.

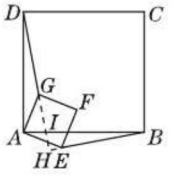
(2) **解**：猜想：$DG = BE$，$DG \perp BE$.

证明：由正方形的性质与旋转的性质知，$AD = AB$，$AG = AE$，$\angle DAG = \angle BAE$，

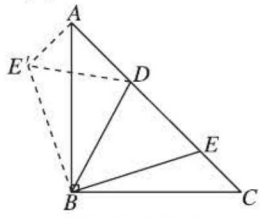
∴ $\triangle DAG \cong \triangle BAE$.

∴ $DG = BE$，$\angle ADG = \angle ABE$.

延长 DG，交 BE 的延长线于 H，交 AB 于 I，如图. ∵ $\angle ADG = \angle ABE$，$\angle DIA = \angle BIH$，$\angle ADG + \angle DIA = 90°$，∴ $\angle ABE + \angle BIH = 90°$. ∴ $\angle DHB = 90°$，即 $DG \perp BE$.



（第 12 题图）



（第 13 题图）

13. **证明**：(1) ∵ $\angle DBE = \dfrac{1}{2}\angle ABC$，

∴ $\angle ABD + \angle CBE = \angle DBE = \dfrac{1}{2}\angle ABC$.

∵ $\triangle ABE'$ 由 $\triangle CBE$ 旋转而成，

∴ $BE = BE'$，$\angle ABE' = \angle CBE$.

∴ $\angle DBE' = \angle DBE$. 在 $\triangle DBE$ 和 $\triangle DBE'$ 中，$BE = BE'$，$\angle DBE = \angle DBE'$，$BD = BD$，

∴ $\triangle DBE \cong \triangle DBE'$. ∴ $DE' = DE$.

(2) 如图所示，把 $\triangle CBE$ 绕点 B 逆时针旋转 90°，得到 $\triangle ABE'$，连接 DE'. ∵ $BA = BC$，$\angle ABC = 90°$，∴ $\angle BAC = \angle BCE = 45°$.

∴ $\angle E'AB = \angle BCE = 45°$. ∴ $\angle DAE' = 90°$.

在 Rt $\triangle ADE'$ 中，$DE'^2 = AE'^2 + AD^2$，

∵ $AE' = EC$，∴ $DE'^2 = EC^2 + AD^2$.

由 (1) 可知 $DE = DE'$，∴ $DE^2 = AD^2 + EC^2$.

14. **解**：(1) 60

(2) ∵ 在 Rt $\triangle OAB$ 中，$OB = 4$，$\angle ABO = 30°$，

∴ $OA = \dfrac{1}{2}OB = 2$，∴ $AB = \sqrt{3}OA = 2\sqrt{3}$，

易得 $S_{\triangle AOC} = \dfrac{1}{2} \cdot OA \cdot AB = \dfrac{1}{2} \times 2 \times 2\sqrt{3} = 2\sqrt{3}$. ∵ $OB = OC$，$\angle BOC = 60°$，

∴ $\triangle BOC$ 是等边三角形. ∴ $BC = OB = 4$.

易知 $\angle ABC = \angle ABO + \angle OBC = 90°$.

∴ $AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = 2\sqrt{7}$，

∴ $OP = \dfrac{2S_{\triangle AOC}}{AC} = \dfrac{2\sqrt{21}}{7}$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

(3)①当 $0<x\leqslant\frac{8}{3}$ 时,M 在 OC 上运动,N 在 OB 上运动,此时过点 N 作 $NE\perp OC$ 且交 OC 于点 E,如图①.

则 $NE=ON\cdot\sin 60°=\frac{\sqrt{3}}{2}x$.

$\therefore y=\frac{1}{2}\cdot OM\cdot NE=\frac{1}{2}\times 1.5x\times\frac{\sqrt{3}}{2}x=\frac{3\sqrt{3}}{8}x^2$.

当 $x=\frac{8}{3}$ 时,y 有最大值,最大值为 $\frac{8\sqrt{3}}{3}$.

②当 $\frac{8}{3}<x<4$ 时,M 在 BC 上运动,N 在 OB 上运动.

如图②,作 $MH\perp OB$ 于 H. 易知 $BM=8-1.5x$,$MH=BM\cdot\sin 60°=\frac{\sqrt{3}}{2}(8-1.5x)$.

$\therefore y=\frac{1}{2}\times ON\times MH=-\frac{3\sqrt{3}}{8}x^2+2\sqrt{3}x$.

当 $x=\frac{8}{3}$ 时,y 取得最大值,$\therefore y<\frac{8\sqrt{3}}{3}$.

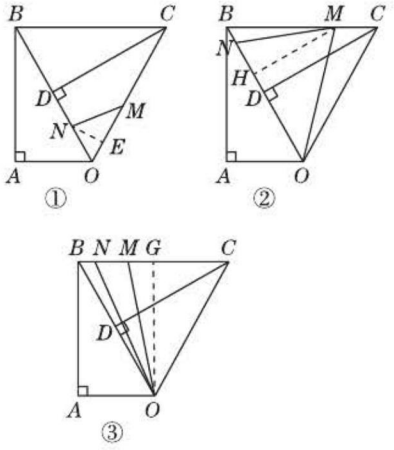
③当 $4\leqslant x<4.8$ 时,M,N 都在 BC 上运动,如图③,作 $OG\perp BC$ 于 G.

易知 $MN=12-2.5x$,$OG=AB=2\sqrt{3}$,

$\therefore y=\frac{1}{2}\cdot MN\cdot OG=12\sqrt{3}-\frac{5\sqrt{3}}{2}x$.

当 $x=4$ 时,y 取得最大值,最大值为 $2\sqrt{3}$.

综上所述,当 $x=\frac{8}{3}$ 时,y 有最大值,最大值为 $\frac{8\sqrt{3}}{3}$.



(第 14 题图)

24.1.2 中心对称

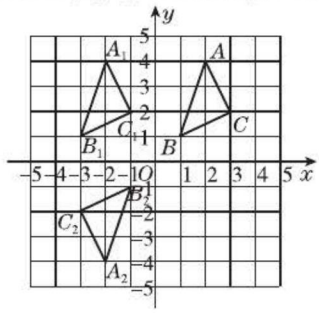
同类变式

1. 解:$\triangle OAB$ 与 $\triangle OCD$;$\triangle OAD$ 与 $\triangle OCB$;$\triangle ABC$ 与 $\triangle CDA$;$\triangle ABD$ 与 $\triangle CDB$.

3. A

9. 解:(1)如图,$\triangle A_1B_1C_1$ 为所作,$C_1(-1,2)$.

(2)如图,$\triangle A_2B_2C_2$ 为所作,$C_2(-3,-2)$.



(第 9 题图)

(3)直线 l 的函数表达式为 $y=-x$.

练中考·练模拟 得满分

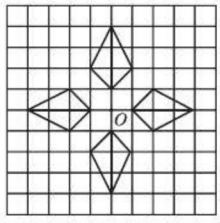
1. B **2.** D **3.** C **4.** A

5. ①④⑤⑥ **6.** A **7.** $S_1=\frac{3}{2}S_2$

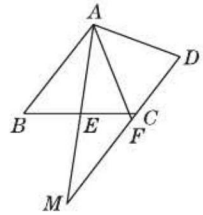
8. 解:(1)如图.

(2)4 条对称轴,至少旋转 90°能与自身重合.

点拨:该整体图形由 4 个全等的部分组成,至少旋转 $360°\div 4=90°$ 能与自身重合.



(第 8 题图)



(第 10 题图)

9. 证明:$\because\triangle ABO$ 与 $\triangle CDO$ 关于 O 点成中心对称,$\therefore BO=DO$,$AO=CO$.

$\because AF=CE$,$\therefore AO-AF=CO-CE$,

$\therefore FO=EO$.

在 $\triangle FOD$ 和 $\triangle EOB$ 中,$\begin{cases}FO=EO,\\ \angle FOD=\angle EOB,\\ DO=BO,\end{cases}$

$\therefore\triangle FOD\cong\triangle EOB$,$\therefore FD=BE$.

10. 解:(1)如图. 延长 AE 到点 M,使 $EM=AE$. 连接 CM,则 $\triangle MCE$ 为所求.

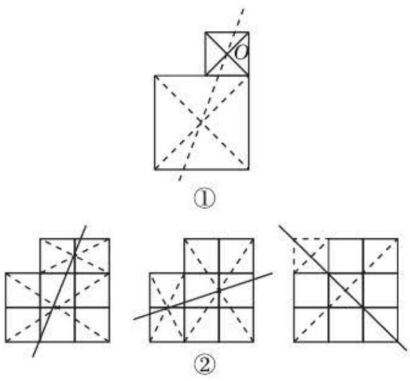
(2)$AB=AF+CF$.

证明:$\because\triangle MCE$ 为 $\triangle ABE$ 关于点 E 成中心

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

对称的图形,∴ $AB=MC$, $\angle BAE=\angle M$.
∴ $AB\parallel MC$. ∴ D,C,F,M 共线.
又∵ $\angle BAE=\angle EAF$,
∴ $\angle EAF=\angle M$. ∴ $MF=AF$.
∵ $MC=MF+CF$, ∴ $MC=AF+CF$,
∴ $AB=AF+CF$.

11. 解:(1) =
(2)如图①所示.
(3)如图②所示.



(第11题图)

24.2 圆的基本性质

24.2.1 圆的认识

同类变式

3. 证明:∵ OA,OB 为⊙O 的半径,
∴ $OA=OB$.
∵ C,D 分别为 OA,OB 的中点,
∴ $OC=OD$.
又∵ $\angle BOC=\angle AOD$,
∴ $\triangle BOC\cong\triangle AOD(SAS)$. ∴ $AD=BC$.

5. B

练中考·练模拟 得满分

1. D

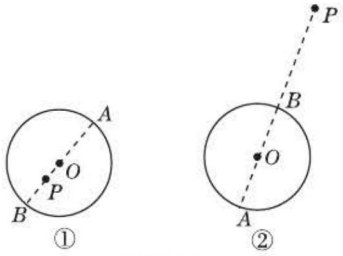
2. C 点拨:错误的有②⑤⑦.

3. D 点拨:∵ $\angle BOC=110°$, ∴ $\angle AOC=70°$.
∵ $AD\parallel OC$, ∴ $\angle A=\angle AOC=70°$.
又∵ $OA=OD$, ∴ $\angle D=\angle A=70°$.
∴ $\angle AOD=180°-2\times70°=40°$.

4. 4;$\overset{\frown}{ADC},\overset{\frown}{ADF},\overset{\frown}{ACE},\overset{\frown}{ACD}$;
4;$\overset{\frown}{AF},\overset{\frown}{AC},\overset{\frown}{AD},\overset{\frown}{AE}$;2

5. 证明:∵ $OC\perp AB$, ∴ $\angle COF=\angle BOE=90°$.
又∵ $OC=OB$, $OF=OE$,
∴ $\triangle OCF\cong\triangle OBE$. ∴ $\angle B=\angle C$.
又∵ $\angle C+\angle CFO=\angle COB=90°$,
∴ $\angle B+\angle CFO=\angle BGC=90°$.
∴ $BG\perp CF$.

6. D 点拨:若点 P 在⊙O 内,如图①,连接 OP 并向两端延长,交⊙O 于点 A,B,则最大距离 $PA=8$,最小距离 $PB=4$, ∴ $AB=8+4=12$;若点 P 在⊙O 外,如图②,连接 OP,交⊙O 于点 B,延长 PO,交⊙O 于点 A,则最大距离 $PA=8$,最小距离 $PB=4$, ∴ $AB=8-4=4$. 故选 D.



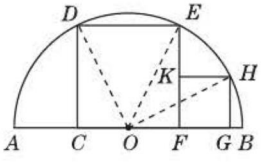
(第6题图)

7. C

8. 120° 点拨:连接 BC,BD,则 $\triangle ABC$ 和 $\triangle ADB$ 都为等边三角形,所以 $\angle BAC=\angle BAD=60°$. 所以 $\angle CAD=120°$.

9. 证明:∵ AB,CD 是⊙O 的两条直径,
∴ $OA=OB=OC=OD$.
∵ E,F 分别是 OA,OB 的中点,
∴ $OE=\frac{1}{2}OA$, $OF=\frac{1}{2}OB$. ∴ $OE=OF$.
在四边形 $CEDF$ 中,∵ $OC=OD$, $OE=OF$,
∴ 四边形 $CEDF$ 为平行四边形.

10. (1)证明:如图,连接 OD,OE,则 $OD=OE$. 又 $\angle OCD=\angle OFE=90°$, $DC=EF$,
∴ $\mathrm{Rt}\triangle ODC\cong\mathrm{Rt}\triangle OEF(HL)$. ∴ $OC=OF$.
(2)解:如图,连接 OH.
∵ $CF=EF=2$, $OF=OC$,
∴ $OF=1$. ∴ $OH^2=OE^2=1^2+2^2=5$.
设 $FG=GH=x$,
则 $(x+1)^2+x^2=5$. ∴ $x^2+x-2=0$.
解得 $x_1=1$, $x_2=-2$(舍去).
∴ $S_{\text{正方形}FGHK}=1^2=1$.



(第10题图)

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

24.2.2 垂径分弦

同类变式

4. B

5. (1)**证明**:过圆心 O 作 $OE\perp AB$ 于点 E. 易知 $AE=BE$, $CE=DE$,

$\therefore AE-CE=BE-DE$,即 $AC=BD$.

(2)**解**:由(1)知, $OE\perp AB$, $\therefore OE=6$.

又 $\because OC=8$, $OA=10$,

$\therefore CE=\sqrt{OC^2-OE^2}=\sqrt{8^2-6^2}=2\sqrt{7}$,

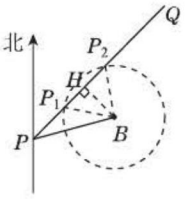
$AE=\sqrt{OA^2-OE^2}=\sqrt{10^2-6^2}=8$.

$\therefore AC=AE-CE=8-2\sqrt{7}$.

6. **解**:如图,过 B 作 $BH\perp PQ$ 于 H,在 $\mathrm{Rt}\triangle BHP$ 中,由条件易知: $PB=320$ km, $\angle BPQ=30°$,

$\therefore BH=160$ km <200 km.

$\therefore$ 台风会影响 B 市.



(第6题图)

如图,以 B 为圆心,200 km 为半径作圆,交 PQ 于 P_1, P_2 两点,连接 BP_1, BP_2. 由垂径定理知 $P_1P_2=2P_1H$.

在 $\mathrm{Rt}\triangle BHP_1$ 中, $BP_1=200$ km, $BH=160$ km,

$\therefore P_1H=\sqrt{200^2-160^2}=120$(km).

$\therefore P_1P_2=2P_1H=240$ km.

$\therefore$ 台风影响 B 市的时间为 $\dfrac{240}{30}=8$(h).

8. A

练中考·练模拟 得满分

1. D

2. A **点拨**:连接 OA,过点 O 作 $OE\perp AB$ 于点 E,则 $AE=4$. 在 $\mathrm{Rt}\triangle OAE$ 中,由勾股定理可求出 $OE=3$. $\therefore 3\leqslant OM\leqslant 5$.

3. C 4. A 5. 5

6. 8 **点拨**:$\because \odot O$ 的半径 $OA=13$,水面宽 $AB=24$, $OD\perp AB$, $\therefore OD=OA=13$, $AC=\dfrac{1}{2}AB=12$. 在 $\mathrm{Rt}\triangle AOC$ 中, $OC=\sqrt{OA^2-AC^2}=\sqrt{13^2-12^2}=5$, $\therefore CD=OD-OC=13-5=8$.

7. 6 cm 8. C

9. 20 **点拨**:延长 AO,交 BC 于点 D,过点 O 作 $OE\perp BC$ 于点 E. $\because \angle A=\angle B=60°$, $\therefore \triangle ABD$ 为等边三角形. $\therefore AD=BD=AB=12$. $\therefore OD=AD-OA=12-8=4$. 在 $\mathrm{Rt}\triangle OED$ 中, $\angle ODE=60°$, $\therefore \angle DOE=30°$. $\therefore DE=\dfrac{1}{2}OD=2$. $\therefore BE=BD-DE=12-2=10$. $\therefore BC=2BE=20$.

10. $\left(-3,\dfrac{3}{2}\right)$ **点拨**:过圆心 O_1 作 $O_1C\perp AB$ 于点 C,连接 O_1B,易知 $AB=4$, $\therefore BC=2$. $\therefore OC=3$. 在 $\mathrm{Rt}\triangle O_1CB$ 中, $O_1C=\sqrt{\left(\dfrac{5}{2}\right)^2-2^2}=\dfrac{3}{2}$, $\therefore$ 圆心 O_1 的坐标为 $\left(-3,\dfrac{3}{2}\right)$.

11. **解**:连接 OA. 由题意知, $OA=OE=r$.

$\because EF=1$, $\therefore OF=r-1$.

$\because OE\perp AB$,

$\therefore AF=\dfrac{1}{2}AB=\dfrac{1}{2}\times 3=1.5$.

在 $\mathrm{Rt}\triangle OAF$ 中, $OF^2+AF^2=OA^2$,

即 $(r-1)^2+1.5^2=r^2$,

解得 $r=1.625$.

$\therefore \overset{\frown}{AB}$ 所在圆 O 的半径 $r=1.625$ m.

12. **解**:(1)当 AB, CD 在圆心 O 的异侧时,如图①,过点 O 作 $MN\perp AB$,分别交 AB, CD 于 M, N 两点,连接 OC, OA.

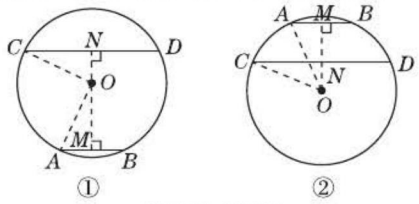
$\because AB\parallel CD$, $\therefore ON\perp CD$. 由垂径定理,得

$AM=BM=\dfrac{1}{2}AB=5$ cm,

$CN=ND=\dfrac{1}{2}CD=12$ cm.

在 $\mathrm{Rt}\triangle AOM$ 和 $\mathrm{Rt}\triangle CON$ 中,由勾股定理,得 $OM=\sqrt{OA^2-AM^2}=\sqrt{13^2-5^2}=12$(cm), $ON=\sqrt{OC^2-CN^2}=\sqrt{13^2-12^2}=5$(cm).

$\therefore MN=OM+ON=12+5=17$(cm).



(第12题图)

(2)当 AB, CD 在圆心 O 的同侧时,如图②. 同理可得 $OM=12$ cm, $ON=5$ cm,

$\therefore MN=OM-ON=12-5=7$(cm).

综上所述, AB 与 CD 之间的距离为 17 cm 或 7 cm.

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

24.2.3 圆心角、弧、弦、弦心距间关系

同类变式

1. C **2.** $5\sqrt{2}$

练中考·练模拟 得满分

1. C **点拨**:过点 O 作 $OC\perp AB$ 于点 C. 在 $Rt\triangle OCB$ 中, $OB=2$ cm, $BC=\frac{1}{2}AB=\sqrt{3}$ cm,

$\therefore OC=\sqrt{OB^2-BC^2}=\sqrt{2^2-(\sqrt{3})^2}=1$(cm). $\therefore OC=\frac{1}{2}OB$. $\therefore \angle B=30°$.

$\therefore \angle AOB=120°$.

2. B **点拨**:$\because$ 在 $\odot O$ 中, $\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{AC}$, $\therefore AB=AC$. $\therefore \angle B=\angle C$. 又$\because \angle A=30°$, $\therefore \angle B=\frac{180°-30°}{2}=75°$. 故选 B.

3. C **4.** 60°

5. **证明**:$\because AB=CD$, $\therefore \angle AOB=\angle COD$,

$\therefore \angle AOB-\angle BOC=\angle COD-\angle BOC$,

即 $\angle AOC=\angle DOB$.

6. **解**:连接 OC. $\because \overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{BC}$, $\angle AOB=60°$,

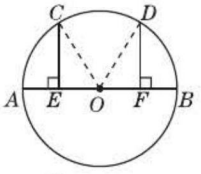
$\therefore \angle BOC=\angle AOB=60°$.

$\because OC=OD$, $\therefore \angle OCD=\angle BDC$.

$\therefore \angle BDC=\frac{1}{2}\angle BOC=30°$.

7. **解**:$AE=BF$. 理由如下:

如图所示,连接 OC, OD.



(第 7 题图)

$\because \overset{\frown}{AC}=\overset{\frown}{BD}$,

$\therefore \angle COE=\angle DOF$.

$\because CE\perp AB$, $DF\perp AB$,

$\therefore \angle CEO=\angle DFO=90°$.

又$\because OC=OD$,

$\therefore \triangle OCE\cong\triangle ODF$. $\therefore OE=OF$.

又$\because OA=OB$, $\therefore AE=BF$.

8. (1) **证明**:$\because AD=BC$, $\therefore \overset{\frown}{AD}=\overset{\frown}{BC}$,

$\therefore \overset{\frown}{AD}-\overset{\frown}{BD}=\overset{\frown}{BC}-\overset{\frown}{BD}$, 即 $\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{CD}$,

$\therefore AB=CD$.

(2) **解**:过 O 作 $OF\perp AD$ 于点 F, 作 $OG\perp BC$ 于点 G, 连接 OA, OC.

则 $AF=FD$, $BG=CG$. $\because AD=BC$,

$\therefore AF=CG$.

在 $Rt\triangle AOF$ 与 $Rt\triangle COG$ 中, $\because \begin{cases}AF=CG,\\OA=OC,\end{cases}$

$\therefore Rt\triangle AOF\cong Rt\triangle COG$, $\therefore OF=OG$.

易得四边形 $OFEG$ 是正方形, $\therefore OF=EF$.

设 $OF=EF=x$, 则 $AF=FD=x+1$.

在 $Rt\triangle OAF$ 中. 由勾股定理得 $x^2+(x+1)^2=5^2$, 解得 $x=3$.

$\therefore AF=3+1=4$, $\therefore AE=AF+3=7$.

9. **证明**:连接 AF. $\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形, $\therefore AD/\!/BC$.

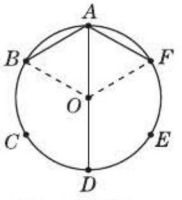
$\therefore \angle GAE=\angle B$, $\angle EAF=\angle AFB$.

$\because AB=AF$, $\therefore \angle B=\angle AFB$.

$\therefore \angle GAE=\angle EAF$. $\therefore \overset{\frown}{GE}=\overset{\frown}{EF}$.

$\therefore \overset{\frown}{GF}=2\overset{\frown}{GE}$.

10. (1) **证明**:连接 OB, OF, 如图所示.



(第 10 题图)

$\because A, B, C, D, E, F$ 是 $\odot O$ 的六等分点,

$\therefore AD$ 是 $\odot O$ 的直径, $\angle AOB=\angle AOF=60°$.

易得 $\triangle AOB$, $\triangle AOF$ 是等边三角形. $\therefore AB=AF=AO=OD$.

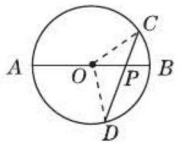
$\therefore AB+AF=AD$.

(2) **解**:当 P 在 $\overset{\frown}{BF}$ 上时, $PB+PF=PD$;

当 P 在 $\overset{\frown}{BD}$ 上时, $PB+PD=PF$;

当 P 在 $\overset{\frown}{DF}$ 上时, $PD+PF=PB$.

11. **解**:$\overset{\frown}{AD}$ 的度数是 $\overset{\frown}{CB}$ 度数的 3 倍.



(第 11 题图)

证明:如图,连接 OC, OD.

$\because OC=OD$,

$\therefore \angle D=\angle C$.

$\because OP=PC$,

$\therefore \angle C=\angle COP$. $\therefore \angle D=\angle C=\angle COP$.

又$\because \angle AOD=\angle DPO+\angle D$, $\angle DPO=\angle C+\angle COP$, $\therefore \angle AOD=\angle C+\angle COP+\angle D=3\angle COP$. $\therefore \overset{\frown}{AD}$ 的度数是 $\overset{\frown}{CB}$ 度数的 3 倍.

点拨:判断两条弧的度数的关系,可以考虑先判断两条弧所对圆心角的关系.

12. **解**:(1) 连接 OD, OC.

$\because \overset{\frown}{BC}=3\overset{\frown}{AD}$, $\overset{\frown}{CD}=2\overset{\frown}{AD}$,

$\therefore \angle BOC=3\angle AOD$, $\angle COD=2\angle AOD$.

$\because \angle BOC+\angle COD+\angle AOD=180°$,

$\therefore \angle AOD=30°$, $\angle BOC=90°$,

$\angle COD=60°$.

$\because OA=OD$, $OC=OB$, $\therefore \angle DAB=\angle ADO=\frac{1}{2}\times(180°-30°)=75°$, $\angle ABC=\angle BCO=$

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

$\frac{1}{2}\times(180°-90°)=45°$.

(2)①若$\overset{\frown}{AD}<\overset{\frown}{CB}$,则$\angle DAB>\angle ABC$;

②若$\overset{\frown}{AD}=\overset{\frown}{CB}$,则$\angle DAB=\angle ABC$;

③若$\overset{\frown}{AD}>\overset{\frown}{CB}$,则$\angle DAB<\angle ABC$.

24.2.4 圆的确定

同类变式

2. B

3. (1)**证明**:∵ $\angle A=60°$, $OA=OC$,

∴ $\triangle AOC$为等边三角形,∴ $\angle AOC=60°$.

∵ $OD\perp BC$,∴ $\overset{\frown}{CD}=\overset{\frown}{BD}$,

∴ $\angle COD=\angle BOD=\frac{1}{2}(180°-60°)=60°$,

易得$\triangle OCD$和$\triangle OBD$都是等边三角形,

∴ $OC=CD=OD=BD=OB$,

∴ 四边形$COBD$是菱形.

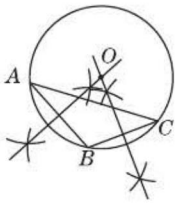
(2)$2\sqrt{2}$

练中考·练模拟 得满分

1. B **2.** D **3.** 0或1

4. **解**:如图,(1)作AB, BC的垂直平分线交于点O;

(2)以O为圆心,OA的长为半径作圆,$\odot O$即为所求作的圆.



(第4题图)

5. $\sqrt{5}$ cm **点拨**:∵ $(2\sqrt{2})^2+(2\sqrt{3})^2=(2\sqrt{5})^2$,

∴ 此三角形为直角三角形,斜边长为$2\sqrt{5}$ cm,∴ 其外接圆半径为$\frac{2\sqrt{5}}{2}=\sqrt{5}$ (cm).

6. $\frac{7}{4}\pi$ **7.** (6,5)或(7,4)或(1,4)

8. **证明**:(1)∵ AD是$\triangle ABC$的中线,∴ D是BC的中点. ∵ F是BE的中点,∴ DF是$\triangle BCE$的中位线,∴ $DF\parallel CE$,即$AD\parallel CE$.

又∵ $AE\parallel BC$,∴ 四边形$ADCE$是平行四边形.

(2)∵ 四边形$ADCE$是平行四边形,

∴ $AE=CD$. ∵ AD是$\triangle ABC$的中线,

∴ $BC=2CD$,∴ $BC=2AE$.

∵ $BC=2AB$,∴ $AB=AE$,

∴ $\angle ABE=\angle AEB$.

∵ $AE\parallel BC$,∴ $\angle AEB=\angle DBE$,

∴ $\angle ABE=\angle DBE$.

9. (1)**证明**:∵ $\angle ABC=\angle DBE$,

∴ $\angle ABC+\angle CBD=\angle DBE+\angle CBD$.

∴ $\angle ABD=\angle CBE$. 在$\triangle ABD$与$\triangle CBE$中,

∵ $BA=BC$, $\angle ABD=\angle CBE$, $BD=BE$,

∴ $\triangle ABD\cong\triangle CBE$.

(2)**解**:四边形$BDCE$是菱形. 证明如下:

同(1)可证$\triangle ABD\cong\triangle CBE$,∴ $CE=AD$.

∵ 点D是$\triangle ABC$的外接圆的圆心,

∴ $AD=BD=CD$. 又∵ $BD=BE$,

∴ $BD=BE=CE=CD$.

∴ 四边形$BDCE$是菱形.

24.3 圆周角

同类变式

2. D **3.** $\sqrt{2}$ **7.** D

练中考·练模拟 得满分

1. C **点拨**:∵ AB是$\odot O$的直径,∴ $\angle C=90°$. ∵ $AB=10$, $AC=6$,∴ $BC=\sqrt{AB^2-AC^2}=8$. ∵ $OD\perp BC$, OD过圆心,

∴ $BD=\frac{1}{2}BC=4$. 故选C.

2. B **3.** C **4.** D **5.** 35° **6.** $2\sqrt{3}$

7. **解**:∵ $\angle ADE=60°$, DC平分$\angle ADE$,

∴ $\angle ADC=30°$. ∴ $\angle B=\angle ADC=30°$.

又∵ AB是$\odot O$的直径,∴ $\angle ACB=90°$.

∴ $AC=\frac{1}{2}AB=5$ cm.

∴ $BC=\sqrt{AB^2-AC^2}=\sqrt{10^2-5^2}=5\sqrt{3}$ (cm).

8. **证明**:(1)∵ $OD\perp AC$, OD为$\odot O$的半径,

∴ $\overset{\frown}{CD}=\overset{\frown}{AD}$. ∴ $\angle CBD=\angle ABD$.

∴ BD平分$\angle ABC$.

(2)∵ $OB=OD$,∴ $\angle OBD=\angle ODB=30°$.

∴ $\angle AOD=2\angle OBD=60°$. ∵ $OD\perp AC$于点E,∴ $\angle OEA=90°$. ∴ $\angle A=180°-\angle OEA-\angle AOD=180°-90°-60°=30°$. 又∵ AB为$\odot O$的直径,∴ $\angle ACB=90°$. ∴ $BC=\frac{1}{2}AB$. 又∵ $OD=\frac{1}{2}AB$,∴ $BC=OD$.

9. C **10.** B **11.** C

12. **解**:如图,连接AB,∵ $\angle AOB=90°$,

∴ AB为$\odot M$的直径.

在Rt$\triangle ABO$中,$\angle BAO=\angle OCB=60°$,

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

$\therefore OB=\sqrt{3}OA=\sqrt{3}\times\sqrt{2}=\sqrt{6}$.

过 B 作 $BD\perp OC$ 于 D.

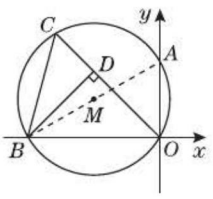
在 Rt$\triangle OBD$ 中,$\because\angle COB=45°$,

$\therefore OD=BD=\frac{\sqrt{2}}{2}OB=\sqrt{3}$.

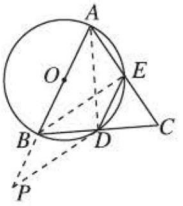
在 Rt$\triangle BCD$ 中,$\because\angle OCB=60°$,

$\therefore CD=\frac{\sqrt{3}}{3}BD=1$.

$\therefore OC=CD+OD=1+\sqrt{3}$.



(第 12 题图)



(第 13 题图)

13. (1)**证明**:连接 AD,如图所示. 因为 AB 是 $\odot O$ 的直径,所以 $\angle ADB=90°$. 因为点 D 是 BC 的中点,所以 AD 是线段 BC 的垂直平分线. 所以 $AB=AC$. 又因为 $AB=BC$,所以 $AB=BC=AC$,即 $\triangle ABC$ 为等边三角形.

(2)**解**:连接 BE,如图. 因为 AB 是 $\odot O$ 的直径,所以 $\angle AEB=90°$. 所以 $BE\perp AC$. 因为 $\triangle ABC$ 是等边三角形,所以 $AE=EC$,即 E 为 AC 的中点. 又因为 D 是 BC 的中点,所以 DE 为 $\triangle ABC$ 的中位线,所以 $DE=\frac{1}{2}AB=\frac{1}{2}\times2=1$.

(3)**解**:存在点 P,使 $\triangle PBD\cong\triangle AED$.

如图,由(1)(2)知 $BD=ED$,由四边形 $ABDE$ 内接于 $\odot O$,得 $\angle PBD=\angle AED$,要使 $\triangle PBD\cong\triangle AED$,只需 $PB=AE=1$.

点拨:(1)见直径构造直角是解这类题的常规思路;(2)连接 BE,利用直径所对的圆周角为直角,得到垂直关系,然后利用等腰三角形三线合一的性质得出 E 为 AC 的中点,用中位线的数量关系求得 DE 的长;(3)根据等边三角形的性质,可以证得 $BD=ED$,又易得 $\angle PBD=\angle AED$,所以只要再满足 PB 与 AE 相等就可得到全等.

14. (1)**证明**:由 $\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{AB}$,

得 $\angle ADB=\angle ACB=45°$.

又$\because\angle ABD=45°$,$\therefore\angle ABD+\angle ADB=90°$. $\therefore\angle BAD=90°$. $\therefore BD$ 是 $\triangle ABD$ 外接圆的直径.

(2)**证明**:如图①,作 $AE\perp AC$,交 CB 的延长线于点 E. $\because\angle EAC=\angle BAD=90°$,$\therefore\angle EAB+\angle BAC=\angle DAC+\angle BAC$. $\therefore\angle EAB=\angle DAC$. $\because\angle EAC=90°$,$\angle ACB=45°$,$\therefore\angle E=45°$. $\therefore\triangle AEC$ 是等腰直角三角形. $\therefore AE=AC$. 由(1)易知,$AB=AD$,$\therefore\triangle ABE\cong\triangle ADC$. $\therefore CD=BE$. 在等腰直角三角形 ACE 中,由勾股定理,得 $CE=\sqrt{2}AC$. $\because CE=BC+BE$,$\therefore\sqrt{2}AC=BC+CD$.

(3)**解**:$DM^2=BM^2+2AM^2$. 证明如下:如图②,延长 MB,交圆于点 F,连接 AF,DF.

$\because\angle BFA=\angle ACB=\angle BMA=45°$,

$\therefore\angle MAF=90°$,$MA=AF$.

$\therefore MA^2+AF^2=2MA^2=MF^2$.

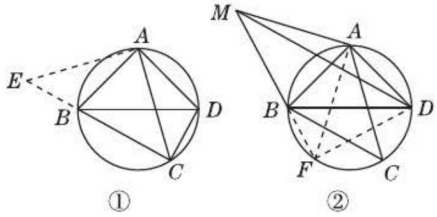
又$\because AC=MA=AF$,$\therefore\overset{\frown}{AC}=\overset{\frown}{AF}$.

易知 $\overset{\frown}{AD}=\overset{\frown}{AB}$,

$\therefore\overset{\frown}{CD}=\overset{\frown}{BF}$. $\therefore\overset{\frown}{DF}=\overset{\frown}{BC}$. $\therefore DF=BC=BM$.

$\because BD$ 是直径,$\therefore\angle BFD=90°$.

在 Rt$\triangle MDF$ 中,由勾股定理,得 $DM^2=DF^2+MF^2$,$\therefore DM^2=BM^2+2AM^2$.



(第 14 题图)

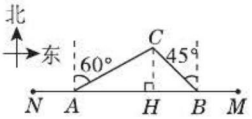
24.4 直线与圆的位置关系

同类变式

2. (1)1 (2)$1<d<3$

3. **解**:如图,过点 C 作 $CH\perp AB$ 于点 H,设 $CH=x$ m,易得 $HB=x$ m,

$AH=\sqrt{3}x$ m.



(第 3 题图)

因为 $AH+HB=AB$,即 $\sqrt{3}x+x=500$,

所以 $x=\frac{500}{\sqrt{3}+1}\approx183>180$.

所以 MN 不穿过文物保护区.

4. 50° **5.** D

6. (1)**证明**:连接 OD,如图.

$\because AE$ 与 $\odot O$ 相切,$\therefore OD\perp AE$,

$\therefore\angle ADB+\angle ODB=90°$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

∵ BC 为直径，∴ $\angle BDC=90°$，

即 $\angle ODB+\angle ODC=90°$，

∴ $\angle ADB=\angle ODC$.

∵ $OC=OD$，∴ $\angle ODC=\angle C$，

而 $\angle BCD=\angle AEO$，∴ $\angle ADB=\angle AEO$，

∴ $BD/\!/OF$.

(2)**解**：由(1)知，$\angle ADB=\angle AEO=\angle BCD$，

∴ $\sin\angle BCD=\sin\angle AEO=\sin\angle ADB=\frac{2}{5}$.

∵ 在 $\mathrm{Rt}\triangle BCD$ 中，$\sin\angle BCD=\frac{BD}{BC}=\frac{2}{5}$，

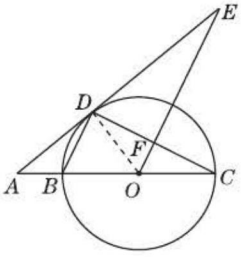
∴ $BD=\frac{2}{5}\times 20=8$.

∵ $OF/\!/BD$，O 为 BC 的中点，

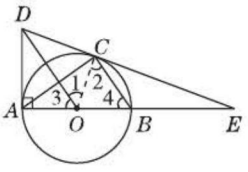
∴ $OF=\frac{1}{2}BD=4$.

在 $\mathrm{Rt}\triangle EOD$ 中，$\sin\angle AEO=\frac{OD}{OE}=\frac{2}{5}$，

∴ $OE=25$，∴ $EF=OE-OF=25-4=21$.



(第6题图)



(第8题图)

8. 证明：如图，连接 OC.

∵ $AD\perp AB$，∴ $\angle DAB=90°$.

∵ $OD/\!/BC$，∴ $\angle 1=\angle 2$，$\angle 3=\angle 4$.

∵ $OC=OB$，∴ $\angle 2=\angle 4$. ∴ $\angle 1=\angle 3$.

在 $\triangle COD$ 和 $\triangle AOD$ 中，$\begin{cases}OC=OA,\\ \angle 1=\angle 3,\\ OD=OD,\end{cases}$

∴ $\triangle COD\cong\triangle AOD$. ∴ $\angle OCD=\angle DAB=90°$，即 $OC\perp DE$ 于点 C.

又∵ OC 是⊙O 的半径，∴ DE 是⊙O 的切线.

9. 证明：(1)连接 OC，如图.

∵ AC 平分 $\angle DAB$，∴ $\angle 1=\angle 2$.

∵ $OA=OC$，∴ $\angle 1=\angle 3$，∴ $\angle 2=\angle 3$，

∴ $OC/\!/AD$. ∵ $AD\perp CD$，∴ $OC\perp CD$，

∴ PD 是⊙O 的切线.

(2)∵ $OC\perp PC$，∴ $\angle PCB+\angle BCO=90°$.

∵ AB 为直径，∴ $\angle ACB=90°$，

即 $\angle 3+\angle BCO=90°$，∴ $\angle 3=\angle PCB$.

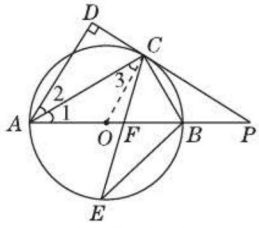
又∵ $\angle 1=\angle 3$，∴ $\angle 1=\angle PCB$.

∵ $PC=PF$，∴ $\angle PCF=\angle PFC$.

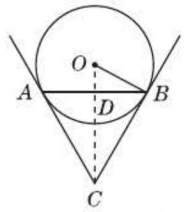
又∵ $\angle PCF=\angle PCB+\angle BCF$，

$\angle PFC=\angle 1+\angle ACF$，

∴ $\angle BCF=\angle ACF$，即 CE 平分 $\angle ACB$.



(第9题图)



(第11题图)

11. 解：如图，连接 OC，交 AB 于点 D.

∵ CA，CB 分别是⊙O 的切线，

∴ $CA=CB$，CO 平分 $\angle ACB$.

∴ $OC\perp AB$.

∵ $AB=6$，∴ $BD=\frac{1}{2}AB=3$.

在 $\mathrm{Rt}\triangle OBD$ 中，∵ $OB=2\sqrt{3}$，$BD=3$，

∴ $OD=\sqrt{OB^2-BD^2}=\sqrt{(2\sqrt{3})^2-3^2}=\sqrt{3}$.

∴ $OD=\frac{1}{2}OB$. ∴ $\angle OBD=30°$，$\angle BOC=60°$.

∵ CB 是⊙O 的切线，B 是切点，

∴ $OB\perp BC$.

∴ $\angle OCB=30°$. ∴ $\angle ACB=60°$.

练中考·练模拟 得满分

1. B　**点拨**：连接 OA，则在 $\mathrm{Rt}\triangle OAH$ 中，由勾股定理，得 $OH=\sqrt{5^2-4^2}=3(\mathrm{cm})$.

∴ $CH=2$ cm.

2. B　**3.** A　**4.** D　**5.** D

6. 解：(1)∵ 直线 PA 与⊙O 相切于点 A，

∴ $OA\perp PA$，∴ $\angle OAP=90°$，

∴ $\angle AOP=90°-\angle P=90°-30°=60°$，

∴ $\angle ABC=\frac{1}{2}\angle AOC=30°$.

(2)如图，连接 AC. ∵ AB 为直径，

∴ $\angle ACB=90°$.

又∵ $\angle ABC=30°$，

∴ $AC=\frac{\sqrt{3}}{3}BC=\frac{\sqrt{3}}{3}\times 6=2\sqrt{3}$，

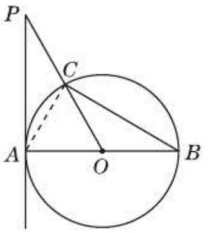
∴ $AB=2AC=4\sqrt{3}$，

∴ $OA=OC=2\sqrt{3}$.

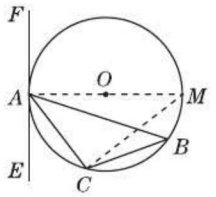
在 $\mathrm{Rt}\triangle AOP$ 中，$PO=2OA=4\sqrt{3}$，

∴ $PC=4\sqrt{3}-2\sqrt{3}=2\sqrt{3}$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料



(第6题图)



(第7题图)

7. **解**:(1)①$EF \perp AB$

②$\angle EAC = \angle B$(答案不唯一)

(2)如图,作直径AM,连接CM,

则$\angle B = \angle M$.

$\because \angle EAC = \angle B$,$\therefore \angle EAC = \angle M$.

$\because AM$是$\odot O$的直径,$\therefore \angle ACM = 90°$,

$\therefore \angle CAM + \angle M = 90°$,

$\therefore \angle EAC + \angle CAM = 90°$,

$\therefore EF \perp AM$. $\because OA$是半径,

$\therefore EF$是$\odot O$的切线.

8. D

9. A **点拨**:当AP与$\odot O$相切时,$\angle OAP$的度数最大. 连接OP,此时$OP \perp AP$,$\because OB = AB$,$\therefore OP = OB = \frac{OA}{2}$. $\therefore \angle OAP = 30°$.

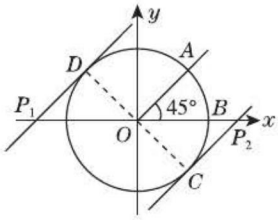
10. 相离 **点拨**:连接OD,交CE于点F,则$OD \perp AD$. 又$BA \perp DA$,$\therefore OD // BA$. $\because BC$是直径,$\therefore \angle BEC = 90°$,$\therefore OD \perp CE$. $\therefore$四边形$AEFD$是矩形. $\therefore EF = AD = 4$. 连接OE,在Rt$\triangle OEF$中,根据勾股定理,得$OF = \sqrt{OE^2 - EF^2} = \sqrt{25 - 16} = 3 > \frac{5}{2}$,

即圆心O到CE的距离大于圆的半径.

$\therefore$直线CE和圆相离.

11. $-\sqrt{2} \leqslant x \leqslant \sqrt{2}$

点拨:如图,是过点P的直线与$\odot O$相切时的情况,设切点分别为D,C. 连接OD,OC,则$OD \perp P_1D$,$OC \perp P_2C$.



(第11题图)

在Rt$\triangle OP_1D$中,$\because \angle OP_1D = 45°$,$OD = 1$,

$\therefore OP_1 = \sqrt{2}$. 同理可得,$OP_2 = \sqrt{2}$.

$\therefore x$的取值范围是$-\sqrt{2} \leqslant x \leqslant \sqrt{2}$.

12. (1)**证明**:如图,连接OC.

$\because$直线MN与$\odot O$相切于点C,

$\therefore OC \perp MN$.

$\because BD // MN$,$\therefore OC \perp BD$.

$\therefore \overset{\frown}{BC} = \overset{\frown}{CD}$. $\therefore \angle BAE = \angle CAD$.

在$\triangle ABE$和$\triangle ACD$中,

$\because \angle ABE = \angle ACD$,$AB = AC$,

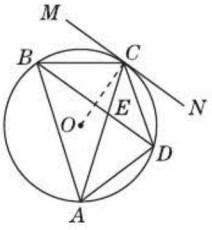
$\angle BAE = \angle CAD$,$\therefore \triangle ABE \cong \triangle ACD$.

(2)**解**:由(1)知$\angle BAC = \angle CAD = \angle CBD$,

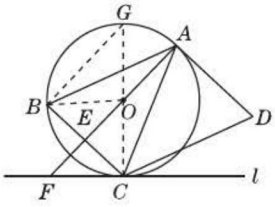
$\therefore \triangle BCE \backsim \triangle ACB$,$\therefore \frac{BC}{AC} = \frac{CE}{BC}$.

$\because AB = AC = 5$,$BC = 3$,

$\therefore CE = \frac{9}{5}$,$\therefore AE = \frac{16}{5}$.



(第12题图)



(第13题图)

13. **解**:(1)l与$\odot O$相切.

理由:过C点作直径CG,连接GB,如图.

$\because CG$为直径,

$\therefore \angle GBC = 90°$,即$\angle G + \angle BCG = 90°$.

$\because AB // DC$,$\therefore \angle ACD = \angle BAC$.

$\because \angle BAC = \angle G$,$\angle BCF = \angle ACD$,

$\therefore \angle G = \angle BCF$,

$\therefore \angle BCF + \angle BCG = 90°$,即$\angle FCG = 90°$,

$\therefore CG \perp FC$,

$\therefore FC$与$\odot O$相切,即直线l与$\odot O$相切.

(2)如图,连接OB.

$\because AD$是$\odot O$的切线,切点为A,

$\therefore OA \perp AD$.

$\because BC // AD$,$\therefore AE \perp BC$.

$\because OB = OC$,

$\therefore BE = CE = \frac{1}{2}BC = 2$,$AC = AB = 6$.

在Rt$\triangle AEC$中,$AE = \sqrt{AC^2 - EC^2} = 4\sqrt{2}$.

设$\odot O$的半径为r,则$OC = r$.

在Rt$\triangle OCE$中,$OE = 4\sqrt{2} - r$,

$CE = 2$,$OC = r$,

$\because OE^2 + CE^2 = OC^2$,

即$(4\sqrt{2} - r)^2 + 2^2 = r^2$,解得$r = \frac{9\sqrt{2}}{4}$,

$\therefore \odot O$的半径为$\frac{9\sqrt{2}}{4}$.

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

14. (1)**证明**:如图①,连接 OA.

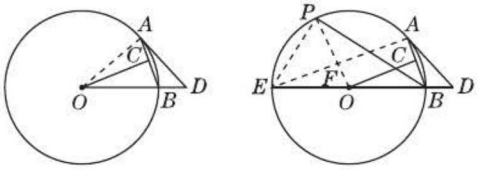
$\because OA=OB, OC\perp AB, \therefore \angle AOC=\angle BOC$.

又 $\angle BAD=\angle BOC, \therefore \angle BAD=\angle AOC$.

$\because \angle AOC+\angle OAC=90°$,

$\therefore \angle BAD+\angle OAC=90°$,

$\therefore OA\perp AD$,即直线 AD 是 $\odot O$ 的切线.



(第 14 题图)

(2)**解**:如图②,分别连接 OP, PE, AE, OP 交 AE 于点 F,

$\because BE$ 是直径, $\therefore \angle EAB=90°$,

$\therefore OC/\!/AE$. $\because$ 点 P 是劣弧 AE 的中点,

$\therefore \angle PBE=\angle ABP$.

又 $\because OB=OP, \therefore \angle PBE=\angle FPB$.

$\therefore \angle ABP=\angle FPB$.

$\therefore OP/\!/AB. \therefore OF\perp AE$.

$\therefore$ 四边形 $ACOF$ 是矩形.

$\because AB=5, \therefore AC=OF=\dfrac{5}{2}$.

在 $\mathrm{Rt}\triangle ABE$ 中, $\because OB=\dfrac{13}{2}, \therefore BE=13$.

$\because AB=5, \therefore AE=12. \therefore EF=6$,

$\therefore FP=OP-OF=\dfrac{13}{2}-\dfrac{5}{2}=4$.

在 $\mathrm{Rt}\triangle PEF$ 中, $\because FP=4, EF=6$,

$\therefore PE^2=16+36=52$.

$\therefore$ 在 $\mathrm{Rt}\triangle PEB$ 中, $PB^2=BE^2-PE^2, PB=\sqrt{13^2-52}=3\sqrt{13}$.

24.5 三角形的内切圆

同类变式

2. **解**:设 $\odot O$ 切 AC 于点 E,切 AB 于点 F, $\odot O$ 的半径为 r. $\because AB=10, AC=8, \angle C=90°$,

$\therefore BC=6$. 又 $\because AP=2, \therefore CP=8-2=6$.

$\therefore BC=PC. \therefore \triangle BCP$ 为等腰直角三角形.

$\therefore \angle BPC=45°$. 连接 OE, OF,则 $OE=OF=r. \therefore EP=r. \therefore AE=2+r. \therefore AF=2+r$.

$\therefore BF=10-(2+r)=8-r$.

在 $\mathrm{Rt}\triangle BCP$ 中,由勾股定理,得 $BP=\sqrt{6^2+6^2}=6\sqrt{2}$. 在 $\mathrm{Rt}\triangle OEP$ 中,由勾股定理,得 $OP=\sqrt{OE^2+EP^2}=\sqrt{2}r. \therefore BO=BP-OP=6\sqrt{2}-\sqrt{2}r$. 又易知 $BO^2=OF^2+BF^2$,

$\therefore (6\sqrt{2}-\sqrt{2}r)^2=r^2+(8-r)^2$,解得 $r=1$.

$\therefore \odot O$ 的半径为 1.

练中考·练模拟 得满分

1. B **2.** B

3. A **点拨**:此题主要考查了三角形内切圆的性质、切线长定理及等边三角形的判定,根据已知得出 $AD=AF=2$ cm 是解题关键.

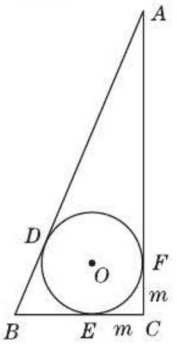
4. B

5. A **点拨**:涉及三角形内切圆的计算,一般要用到三角形内切圆的性质、切线长定理、勾股定理、直角三角形的面积公式等知识. 如图,解方程 $x^2-13x+30=0$,得 $x_1=10, x_2=3, \therefore AD=AF=10, BD=BE=3. \therefore AB=13$.

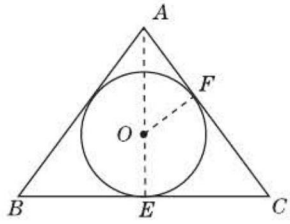
设 $CE=CF=m$,则 $AC=10+m, BC=3+m$. 由勾股定理,得 $AB^2=AC^2+BC^2$,即 $13^2=(10+m)^2+(3+m)^2$,解得 $m_1=2, m_2=-15$(舍去). $\therefore AC=12, BC=5$.

$\therefore S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}AC\cdot BC=\dfrac{1}{2}\times 12\times 5=30$.

故选 A.



(第 5 题图)



(第 7 题图)

6. 12

7. 1.5 **点拨**:剪下的最大的圆即该三角形铁皮的内切圆. 根据题意画出图形如图所示,其中 $AB=AC=5$ cm, $BC=6$ cm,点 O 为 $\triangle ABC$ 的内切圆的圆心, E, F 分别为 BC, AC 边上的切点. 连接 OF, AE,则 AE 经过点 O,且 $AE\perp BC, \therefore CE=BE=3$ cm. $\therefore CF=CE=3$ cm, $\therefore AF=2$ cm.

在 $\mathrm{Rt}\triangle ACE$ 中,由勾股定理,得 $AE=4$ cm. 易得 $\triangle AOF\backsim\triangle ACE, \therefore OF:CE=AF:AE$,即 $OF:3=2:4. \therefore OF=1.5$ cm.

$\therefore$ 该圆的半径是 1.5 cm.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

本题运用数形结合思想及转化思想,主要考查了三角形内切圆的性质及内切圆半径的求法.

8. (1)**证明**:∵ E 是△ABC 的内心,

∴ $\angle ABE = \angle CBE$, $\angle BAD = \angle CAD$.

∴ $\angle DEB = \angle BAD + \angle ABE = \angle CAD + \angle CBE = \angle CBD + \angle CBE$,

即 $\angle DEB = \angle DBE$.

(2)**解**:∵ $AD = 8$ cm, $DF : FA = 1 : 3$,

∴ $DF = 2$ cm. ∵ $\angle DBC = \angle CAD$, $\angle BAD = \angle CAD$, ∴ $\angle DBF = \angle BAD$. 又∵ $\angle D = \angle D$,

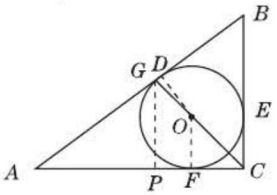
∴ △DBF∽△DAB. ∴ $BD : AD = FD : BD$,

即 $BD^2 = AD \cdot FD = 16$. ∴ $BD = 4$ cm.

∵ $\angle DBE = \angle DEB$, ∴ $DE = BD = 4$ cm.

9. **解**:(1) 在 Rt△ABC 中,由勾股定理,得 $AB = \sqrt{AC^2 + BC^2} = 5$. ∴ $\odot O$ 的半径 $r = \frac{1}{2}(AC + BC - AB) = \frac{1}{2} \times (4 + 3 - 5) = 1$.

(2)如图,过 G 作 $GP \perp AC$,垂足为 P,连接 OD, OF,则 $OD \perp AB$, $OF \perp AC$. 设 $GP = x$,由 $\angle ACB = 90°$, CG 平分 $\angle ACB$,得 $\angle GCP = 45°$, ∴ $PC = GP = x$.



(第9题图)

易知 Rt△AGP∽Rt△ABC, ∴ $\frac{GP}{BC} = \frac{AP}{AC}$,

即 $\frac{x}{3} = \frac{4 - x}{4}$,解得 $x = \frac{12}{7}$,即 $GP = \frac{12}{7}$.

∴ $CG = \sqrt{GP^2 + PC^2} = \frac{12\sqrt{2}}{7}$.

在 Rt△OCF 中,∵ $\angle OCF = 45°$, $OF = 1$,

∴ $OC = \frac{OF}{\sin 45°} = \sqrt{2}$.

∴ $OG = CG - CO = \frac{12\sqrt{2}}{7} - \sqrt{2} = \frac{5\sqrt{2}}{7}$.

∴ 在 Rt△ODG 中, $DG = \sqrt{OG^2 - OD^2} = \frac{1}{7}$.

点拨:本题考查三角形的内切圆与内心,相似三角形的判定与性质,勾股定理的运用. 关键是根据直角三角形的内心的性质作辅助线,运用三角形相似及勾股定理解题.

10. A

11. C **点拨**:本题运用转化思想,考查了三角形的内切圆以及相似三角形的判定和性质. ∵ I 为△ABC 的内心, ∴ $\angle BAD = \angle CAD$, $\angle ABI = \angle CBI$. ∵ $\angle BID = \angle BAD + \angle ABI$, $\angle DBI = \angle DBC + \angle CBI$, $\angle CAD = \angle DBC$, ∴ $\angle DBI = \angle DIB$. ∴ $DI = DB$,故①正确. 易得△DBP∽△DAB, ∴ $\frac{DB}{DA} = \frac{DP}{DB}$,即 $DB^2 = DP \cdot DA$,故②正确.

∵ $\angle BIC = 90° + \frac{1}{2}\angle BAC$, $\angle BOC = 2\angle BAC$,

∴ $\angle BIC = 90° + \frac{1}{4}\angle BOC$,故③正确.

12. (1)**证明**:∵ $\angle AFO = \angle FBC + \angle ACB = \frac{1}{2}\angle ABC + \angle ACB$,

∴ $\angle AOF = 180° - (\angle DAC + \angle AFO) = 180° - \left(\frac{1}{2}\angle BAC + \frac{1}{2}\angle ABC + \angle ACB\right) = 180° - \left[\frac{1}{2}(\angle BAC + \angle ABC) + \angle ACB\right] = 180° - \left[\frac{1}{2}(180° - \angle ACB) + \angle ACB\right] = 180° - \left(90° + \frac{1}{2}\angle ACB\right) = 90° - \frac{1}{2}\angle ACB$,

∴ $\angle BOD = \angle AOF = 90° - \frac{1}{2}\angle ACB$.

又∵ 在直角三角形 OCE 中, $\angle COE = 90° - \angle OCD = 90° - \frac{1}{2}\angle ACB$,

∴ $\angle BOD = \angle COE$.

(2)**解**:∵ $AB = 25$, $AC = 7$, $BC = 24$,

∴ $AC^2 + BC^2 = 625$, $AB^2 = 625$,

∴ $AC^2 + BC^2 = AB^2$,

∴ △ABC 为直角三角形,

∴ $EO = \frac{7 + 24 - 25}{2} = 3$.

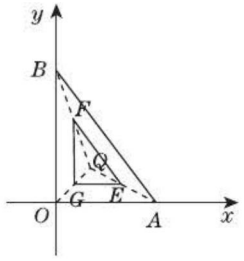
13. **解**:(1)4;2;0.8;0.8

(2)当点 S 到△AOB 三边距离相等,即 S 为△AOB 的内心时,点 S 到△AOB 的距离最大. 设这个最大值为 h,则 $\frac{1}{2} \times 6 \times h + \frac{1}{2} \times 8 \times h + \frac{1}{2} \times 10 \times h = \frac{1}{2} \times 6 \times 8$,解得 $h = 2$.

∴ 点 S 到△AOB 距离的最大值为 2.

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

(3) 如图，设点 Q 为 $\triangle AOB$ 的内心，连接 QA, QB, QO，分别取 QA, QB, QO 的中点 E, F, G，连接 EF, FG, GE，则 $\triangle EFG$ 即为所要画的图形. 由画图可知，$\triangle EFG \backsim \triangle ABO$，且 $\triangle EFG$ 与 $\triangle ABO$ 的相似比为 $\frac{1}{2}$，$\because$ $\triangle ABO$ 的周长为 24，$\therefore$ $\triangle EFG$ 的周长为 12.



(第 13 题图)

14. 解：(1) 不会发生变化的是 $\triangle AOB$ 的外接圆半径，理由如下：$\because$ $\angle AOB = 90°$，$\therefore$ AB 是 $\triangle AOB$ 的外接圆的直径. $\because$ AB 的长不变，$\therefore$ $\triangle AOB$ 的外接圆的直径不变，即 $\triangle AOB$ 的外接圆的半径不变.

(2) $\because$ $\odot K$ 与 $\mathrm{Rt}\triangle AOB$ 的三边分别相切于点 E, F, P，连接 EK, KF，则有 $\angle KEO = \angle OFK = \angle AOB = 90°$，$\therefore$ 四边形 $EOFK$ 是矩形. 又 $\because$ $EK = FK$，$\therefore$ 四边形 $EOFK$ 是正方形.

$\therefore$ $OE = OF = r$. $\because$ $AP = AE = 4$，$\therefore$ $PB = BF = 6$. $\therefore$ $(4 + r)^2 + (6 + r)^2 = 100$，解得 $r_1 = -12$ (舍去)，$r_2 = 2$. $\therefore$ $\odot K$ 的半径 r 为 2.

(3) 解法一：设 $OA = b$，$OB = a$，则有 $OE = r = \frac{a + b - 10}{2}$，即 $2(b - x) + 10 = a + b$. $\therefore$ $10 - 2x = a - b$. $\therefore$ $100 - 40x + 4x^2 = a^2 + b^2 - 2ab$. $\because$ $S = \frac{1}{2}ab$，$\therefore$ $ab = 2S$. 又 $\because$ $a^2 + b^2 = 10^2$，$\therefore$ $100 - 40x + 4x^2 = 100 - 4S$. $\therefore$ $S = -x^2 + 10x$.

解法二：$\because$ $AE = x$，$\therefore$ $AP = AE = x$. $\therefore$ $OA = x + r$，$BP = 10 - x$. $\therefore$ $BF = 10 - x$. $\therefore$ $OB = 10 - x + r$. $\therefore$ $(x + r)^2 + (10 - x + r)^2 = 100$，即 $r^2 + 10r = -x^2 + 10x$. $\because$ $S = \frac{1}{2} \cdot r(OA + OB + AB) = \frac{1}{2}r(r + x + 10 - x + r + 10) = \frac{1}{2}r(20 + 2r) = r^2 + 10r$. $\therefore$ $S = -x^2 + 10x$.

$\because$ $S = -x^2 + 10x = -(x - 5)^2 + 25$，$\therefore$ 当 $x = 5$ 时，S 取得最大值，此时 $AE = BF = 5$. $\therefore$ $OA = OB$. $\therefore$ $\triangle AOB$ 为等腰直角三角形. $\therefore$ $OA = \frac{10}{\sqrt{2}} = 5\sqrt{2}$.

方法规律：本题运用方程思想及函数思想，综合考查了二次函数与三角形的内切圆、外接圆的知识.

24.6 正多边形与圆

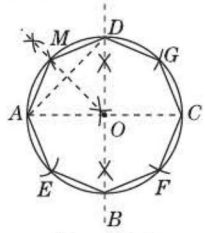
同类变式

1. B

2. 证明：$\because$ $\triangle AOB$ 是正三角形，$\therefore$ $\angle AOB = \angle OAB = \angle OBA = 60°$，$OB = OA$. $\therefore$ 点 B 在 $\odot O$ 上. 又 $\because$ $FC // AB$，$\therefore$ $\angle FOA = \angle OAB = 60°$，$\angle COB = \angle OBA = 60°$. $\therefore$ $\angle AOB = \angle BOC = \angle COD = \angle DOE = \angle EOF = \angle FOA = 60°$. $\therefore$ $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{BC} = \overset{\frown}{CD} = \overset{\frown}{DE} = \overset{\frown}{EF} = \overset{\frown}{FA}$. $\therefore$ $AB = BC = CD = DE = EF = FA$.

$\because$ $\overset{\frown}{BDF} = \overset{\frown}{CEA} = 4\overset{\frown}{AB}$，$\therefore$ $\angle FAB = \angle ABC$，同理可得 $\angle ABC = \angle BCD = \angle CDE = \angle DEF = \angle EFA$. $\therefore$ 六边形 $ABCDEF$ 是 $\odot O$ 的内接正六边形.

4. 解：如图所示，八边形 $AEBFCGDM$ 即为所求作的正八边形.



(第 4 题图)

5. $72°; 36°; 60°; 30°$ **6.** $12\sqrt{3}$

练中考·练模拟 得满分

1. A **2.** B

3. B **点拨**：正三角形的周率 $= 3$，正方形的周率 $= 2\sqrt{2}$，正六边形的周率 $= 3$，圆的周率 $= \pi$.

4. $2:\sqrt{3}$ **5.** $2\sqrt{2}$

6. (1) **证明**：$\because$ 五边形 $ABCDE$ 是正五边形，$\therefore$ $BC = CD$，$\angle BCF = \angle CDM$.

在 $\triangle BCF$ 和 $\triangle CDM$ 中，$\begin{cases} BC = CD, \\ \angle BCF = \angle CDM, \\ CF = DM, \end{cases}$

$\therefore$ $\triangle BCF \cong \triangle CDM$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

(2)**解**:∵ 五边形 $ABCDE$ 是正五边形,

$\therefore \angle BCF=\dfrac{180°\times(5-2)}{5}=108°$.

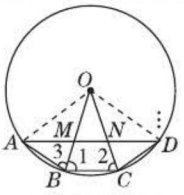
$\therefore \angle CBF+\angle CFB=180°-\angle BCF=72°$.

∵ $\triangle BCF\cong\triangle CDM$,$\therefore \angle MCD=\angle CBF$.

$\therefore \angle MCD+\angle CFB=72°$. $\therefore \angle BPM=\angle CPF=180°-(\angle MCD+\angle CFB)=108°$.

7. A **8**. $\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$ **9**. 72° **10**. $3-\sqrt{5}$

11. **证明**:(1)连接 OD,OA,如图.



(第 11 题图)

∵ BC,CD 为⊙O 的内接正十边形的边,

$\therefore \angle BOC=\angle COD=\dfrac{360°}{10}=36°$.

$\therefore \angle BOD=72°$.

$\therefore \angle BAD=\dfrac{1}{2}\angle BOD=36°$. ∵ $OB=OC$,

$\therefore \angle 1=\angle 2=\dfrac{1}{2}\times(180°-36°)=72°$.

同理,$\angle 3=72°$,

$\therefore \angle ABC=\angle 1+\angle 3=144°$.

$\therefore \angle BAD+\angle ABC=180°$,

$\therefore AD/\!/BC$,即 $MN/\!/BC$.

(2)∵ $\angle BAD=36°$,$\angle 3=72°$,

$\therefore \angle AMB=180°-\angle BAD-\angle 3=72°$.

$\therefore \angle OMN=\angle AMB=72°$.

同理,$\angle ONM=72°$,

$\therefore \angle OMN=\angle ONM$. $\therefore OM=ON$.

∵ $\angle OMN=\angle AOM+\angle OAM$,

$\angle AOM=36°$,$\therefore \angle OAM=36°$.

$\therefore \angle OAM=\angle AOM$. $\therefore OM=AM$.

在 $\triangle OMN$ 和 $\triangle AMB$ 中,

$$\begin{cases}\angle MON=\angle MAB,\\ OM=AM,\\ \angle OMN=\angle AMB,\end{cases}$$

$\therefore \triangle OMN\cong\triangle AMB$. $\therefore MN=MB$,$ON=AB$.

∵ $OM=ON$,$\therefore OB=OM+MB=AB+MN$.

∵ $AB=BC$,$\therefore MN+BC=OB$.

12. **解**:(1)60° (2)90°;108°

(3) $\angle APN=\dfrac{(n-2)\cdot 180°}{n}$.

24.7 弧长与扇形面积

24.8 综合与实践 进球线路与最佳射门角

同类变式

1-1. 3π **1-2**. B **3**. B **5**. A

6. B **点拨**:根据题意知,将以 AB' 为直径的半圆形绕点 A 顺时针旋转 60°,恰好与以 AB 为直径的半圆形重合,则图中阴影部分的面积恰好为扇形 BAB' 的面积,所以阴影部分的面积 $S_{阴影}=\dfrac{60\pi\times12^2}{360}=24\pi$. 故选 B.

7. 3π

练中考·练模拟 得满分

1. A **点拨**:已知扇形的圆心角为 60°,它所对的弧长为 2π,根据弧长公式 $C_1=\dfrac{n\pi R}{180}$,得 $2\pi=\dfrac{60\pi R}{180}$,解得 $R=6$.

2. A **3**. D **4**. B **5**. C

6. **解**:(1)在 $\triangle OCE$ 中,

∵ $\angle CEO=90°$,$\angle EOC=60°$,$OC=2$,

$\therefore OE=\dfrac{1}{2}OC=1$.

由勾股定理,得 $CE=\sqrt{3}$.

∵ $OA\perp CD$,$\therefore CE=DE$. $\therefore CD=2\sqrt{3}$.

(2)∵ $S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}AB\cdot EC=\dfrac{1}{2}\times4\times\sqrt{3}=2\sqrt{3}$,

$\therefore S_{阴影}=\dfrac{1}{2}\pi\times2^2-2\sqrt{3}=2\pi-2\sqrt{3}$.

7. C **8**. $3\sqrt{5}$ **9**. $\dfrac{3}{4}\pi$

10. **解**:(1)3;(2,1);6

(2)连接 AC,过点 A 作 $AD\perp BC$ 于点 D,则 $BC=2DC$. 由 $A(5,1)$ 可得 $AD=1$,又 $AC=2$,所以在 Rt$\triangle ADC$ 中,$DC=\sqrt{AC^2-AD^2}=\sqrt{2^2-1^2}=\sqrt{3}$,故 $BC=2\sqrt{3}$.

11. **解**:(1)如图,连接 BC,BD.

∵ AB 是直径,$\therefore \angle ACB=90°$.

∵ $AB=2$,$AC=\sqrt{3}$,$\therefore BC=1$.

$\therefore \angle BAC=30°$.

(2)如图,连接 OC,OD.

由(1)易得 $\angle BOC=2\angle BAC=60°$,

∵ $CD\perp AB$,AB 是直径,

$\therefore \angle COD=120°$,

$\therefore$ 弧 CBD 的长是 $\dfrac{120\times\pi\times1}{180}=\dfrac{2\pi}{3}$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

(3)∵ $OC=OA=1$, $\angle BOC=60°$,

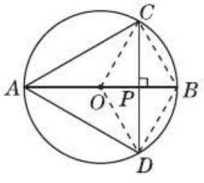
∴ $CP=OC\cdot\sin 60°=1\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$,

$OP=OC\cdot\cos 60°=\frac{1}{2}$,

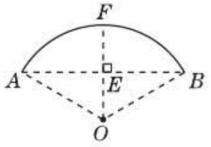
∴ $CD=2CP=\sqrt{3}$.

∴ 弓形 CBD 的面积是

$$\frac{120\times\pi\times1^2}{360}-\frac{\sqrt{3}\times\frac{1}{2}}{2}=\frac{\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{4}.$$



(第 11 题图)



(第 12 题图)

12. 解:连接 OB,过点 O 作 $OE\perp AB$,垂足为 E,交$\overset{\frown}{AB}$于 F,如图. 由垂径定理,知 E 是 AB 的中点,F 是$\overset{\frown}{AB}$的中点,从而 EF 是弓形的高,故 $AE=\frac{1}{2}AB=2\sqrt{3}$ m,$EF=2$ m.

设半径为 R m,则 $OE=(R-2)$ m.

在 Rt△AOE 中,由勾股定理,

得 $R^2=(R-2)^2+(2\sqrt{3})^2$,解得 $R=4$.

在 Rt△AEO 中,因为 $AO=2OE$,

所以 $\angle OAE=30°$,所以 $\angle AOE=60°$.

所以 $\angle AOB=120°$.

所以$\overset{\frown}{AB}$的长为$\frac{120\times4\pi}{180}=\frac{8\pi}{3}$(m).

故帆布的面积为$\frac{8\pi}{3}\times60=160\pi$(m^2).

点拨:车棚的顶部的展开图是矩形,顶部的横截面是弓形,求出弓形的弧长,即求出了展开图的宽.

13. 解:如图,设图中各部分面积分别为 x,y,z,

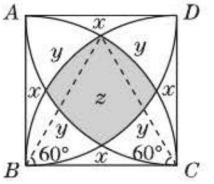
由题意得 $4x+4y+z=a^2$①,

$2x+y=a^2-\frac{\pi}{4}a^2$②,

$3x+2y=a^2-\left(2\cdot\frac{\pi}{6}a^2-\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}a\times a\right)$③,

③ − ②得,$x+y=\frac{3\sqrt{3}-\pi}{12}a^2$④,

将④代入①得 $z=\frac{3+\pi-3\sqrt{3}}{3}a^2$.



(第 13 题图)

中考提分专题篇

好题必解:

一、**1.** C **2.** D **3.** A **4.** C **5.** B **6.** C **7.** D

二、**8.** $\frac{1\,080}{11}$ **9.** 24π cm^2;216° **10.** 90°

11. $t_1>t_2>t_3$ **12.** ②③ **13.** $\frac{\pi}{4}r$

三、**14.** (1)**证明**:连接 CD,如图.

∵ BC 为直径,∴ $\angle BDC=90°$,∴ $CD\perp AB$.

∵ $AC=BC$,∴ $AD=BD$,即点 D 是 AB 的中点.

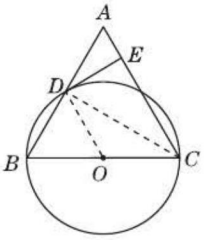
(2)**解**:DE 与⊙O 相切. 理由如下:

如图,连接 OD. ∵ $AD=BD$,$OC=OB$,

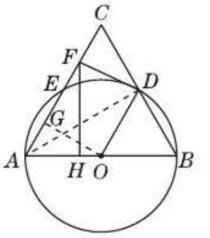
∴ OD 为△ABC 的中位线,∴ $OD/\!/AC$.

而 $DE\perp AC$,∴ $DE\perp OD$,

∴ DE 为⊙O 的切线.



(第 14 题图)



(第 15 题图)

15. (1)**证明**:连接 AD,如图.

∵ AB 是⊙O 的直径,∴ $\angle ADB=90°$,

∴ $AD\perp BC$.

∵ $BD=CD$,∴ AD 是 BC 的垂直平分线,

∴ $AB=AC$,∴ $\angle B=\angle C$.

(2)**解**:在 Rt△ADB 中,

∵ $AB=5$,$CD=BD=\sqrt{5}$,

∴ $AD=\sqrt{AB^2-BD^2}=\sqrt{5^2-(\sqrt{5})^2}=2\sqrt{5}$.

由题易知 OD 是△ABC 的中位线,

∴ $OD/\!/AC$. ∵ $OD\perp DF$,∴ $DF\perp AC$,

∴ $\angle AFD=\angle DFC=90°$.

∵ $\angle B=\angle C$,$\angle DFC=\angle ADB=90°$,

∴ △$ADB\backsim$△DFC,

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

$\therefore \frac{BD}{CF}=\frac{AD}{DF}=\frac{AB}{CD}$,$\therefore \frac{\sqrt{5}}{CF}=\frac{2\sqrt{5}}{DF}=\frac{5}{\sqrt{5}}$,

$\therefore CF=1, DF=2$,

$\therefore AF=AC-CF=5-1=4$.

如图,过 O 作 $OG\perp AC$ 于 G.

$\because \angle OGF=\angle GFD=\angle ODF=90°$,

$\therefore$ 四边形 $OGFD$ 是矩形,

$\therefore OG=DF=2$,$\therefore \sin\angle FAH=\frac{OG}{AO}=\frac{FH}{AF}$,

$\therefore \frac{2}{\frac{5}{2}}=\frac{FH}{4}$,$\therefore FH=\frac{16}{5}$.

$\therefore$ 在 $\mathrm{Rt}\triangle AFH$ 中,$AH=\sqrt{AF^2-FH^2}=\frac{12}{5}$.

16. (1)**证明**:如图①,连接 OB,

$\because PB$ 切$\odot O$ 于点 B,$\therefore \angle OBP=90°$,

$\therefore \angle P+\angle POB=90°$.

$\because PB=BC$,$\therefore \angle P=\angle OCB$,

又$\because \angle POB=2\angle OCB$,

$\therefore \angle P+\angle POB=\angle P+2\angle OCB=3\angle P=90°$,$\therefore \angle P=30°$,$\therefore OP=2OB=2OC$.

(2)**解**:如图②,作 $AH\perp BD$ 于 H,

$\because AC$ 为$\odot O$ 的直径,

$\therefore \angle ADC=90°$,$\angle ABC=90°$

$\because OC=5$,$\sin\angle DCA=\frac{3}{5}$,

$\therefore AC=10$,$CD=8$,$AD=6$.

由(1)知 $\angle OCB=30°$,

$\therefore AB=\frac{1}{2}AC=5$.

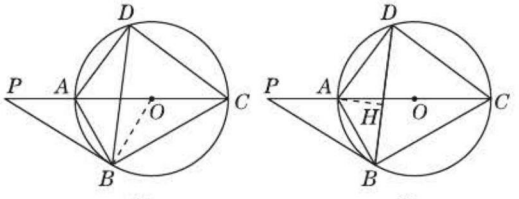
$\because \sin\angle ABD=\sin\angle DCA=\frac{3}{5}$,

$\therefore AH=3$,$BH=4$.

$\because \angle ADH=\angle OCB=30°$,

$\therefore DH=\sqrt{3}AH=3\sqrt{3}$,

$\therefore BD=BH+DH=4+3\sqrt{3}$.



(第16题图)

17. **解**:如图,设 PQ 与$\odot O$ 相切于点 H,过点 P 作 $PE\perp BC$,垂足为 E.

$\because$ 四边形 $ABCD$ 中,$AD/\!/BC$,$\angle ABC=90°$,

$\therefore PE=AB$. 由题意可知,

$AP=BE=t$ cm,$CQ=2t$ cm,

$\therefore BQ=BC-CQ=(22-2t)$ cm,$EQ=|BQ-BE|=|22-2t-t|=|22-3t|$ cm.

$\because AB$ 为$\odot O$ 的直径,$\angle ABC=\angle DAB=90°$,

$\therefore AD$,BC 为$\odot O$ 的切线.

$\therefore AP=PH$,$HQ=BQ$.

$\therefore PQ=PH+HQ=AP+BQ=t+22-2t=(22-t)$ cm.

在 $\mathrm{Rt}\triangle PEQ$ 中,$PE^2+EQ^2=PQ^2$,

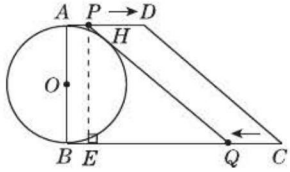
$\therefore 12^2+(22-3t)^2=(22-t)^2$,即

$t^2-11t+18=0$,解得 $t_1=2$,$t_2=9$.

$\because P$ 在 AD 边运动的最长时间为 $\frac{AD}{1}=\frac{8}{1}=8$(s),而 $t=9>8$,

$\therefore t=9$ 不符合题意,舍去.

$\therefore$ 当 $t=2$ s 时,PQ 与$\odot O$ 相切.



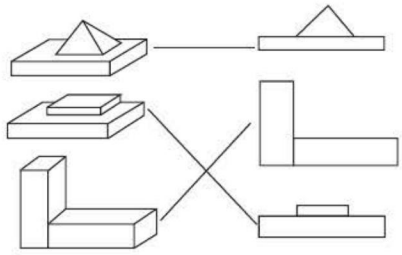
(第17题图)

第25章 投影与视图

25.1 投 影

同类变式

1. **解**:如图所示.



(第1题图)

3. B **4.** B **7.** A

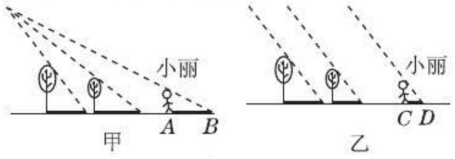
8. **解**:(1)题图甲是路灯下的情形,题图乙是太阳光下的情形.

(2)题图甲中过影子顶端与树顶端的直线相交于一点,符合中心投影的特点,所以题图甲反映了路灯下的情形;题图乙中过

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

影子顶端和树顶端的直线平行，符合平行投影的特点，所以题图乙反映了太阳光下的情形.

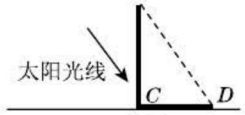
(3)路灯下小丽的影子如图甲，表示影子的线段为 AB；太阳光下小丽的影子如图乙，表示影子的线段为 CD.



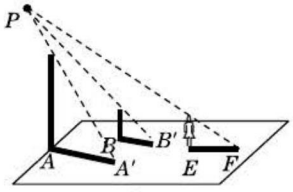
(第 8 题图)

9. **解**：(1)如图①，CD 是木杆在阳光下的影子.

(2)如图②，点 P 是灯泡的位置；EF 就是人在灯泡下的影子.



①

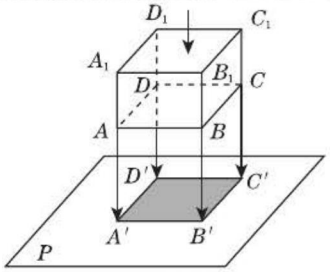


②

(第 9 题图)

11. D

12. **解**：如图，长方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 在投影面 P 上的正投影是长方形 $A'B'C'D'$.



(第 12 题图)

13. **解**：依题意，圆柱的高为 3，底面直径为 5 或者高为 5，底面直径为 3.

$\therefore$ 体积 $V=\pi\times\left(\frac{5}{2}\right)^2\times3=\frac{75}{4}\pi$

或 $V=\pi\times\left(\frac{3}{2}\right)^2\times5=\frac{45}{4}\pi$.

练中考·练模拟 得满分

1. D **2.** D **3.** B **4.** D **5.** A

6. 自己的身高 **7.** 相同 **8.** 0.81π 平方米

9. **解**：设墙上的影高 CD 落在地面上时的长度为 x m，树高为 h m.

$\because$ 某一时刻测得长为 1 m 的竹竿影长为 0.9 m，墙上的影高 CD 为 1.2 m，

$\therefore \frac{1}{0.9}=\frac{1.2}{x}$，解得 $x=1.08$，

$\therefore$ 树的影长为 $1.08+2.7=3.78$(m).

$\therefore \frac{1}{0.9}=\frac{h}{3.78}$，解得 $h=4.2$.

答：他测得的树高应为 4.2 m.

10. A **点拨**：设正方形 $ABCD$ 的中心为 O，连接 AC，OP，易知点 O 在 AC 上. $\because$ 四边形 $ABCD$ 是边长为 6 m 的正方形，

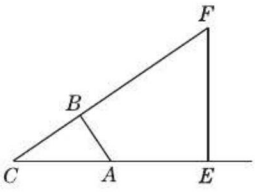
$\therefore OC=OA=3\sqrt{2}$ m. 又 $\because PA=PC$，$\angle APC=60°$，$\therefore OP\perp AC$，$\angle OPC=30°$.

$\therefore OP=\frac{OC}{\tan 30°}=3\sqrt{6}$(m).

11. B

12. 7.5 **点拨**：当旋转到达地面时，为最短影长，等于 AB. $\because$ 最小值为 3 m，$\therefore AB=3$ m. $\because$ 影长最大时，木杆与光线垂直，如图，即 $AC=5$ m，$\therefore BC=4$ m. 又可得 $\triangle CAB\backsim\triangle CFE$，$\therefore \frac{BC}{EC}=\frac{AB}{EF}$. $\because AE=5$ m，

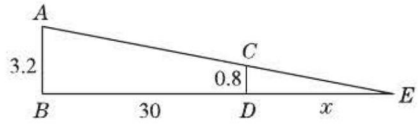
$\therefore \frac{4}{10}=\frac{3}{EF}$，解得 $EF=7.5$ m. 故答案为 7.5.



(第 12 题图)

13. 10 **点拨**：如图，当红灯下沿，大巴车车顶，小张的眼睛三点共线时，$\because CD/\!/AB$，

$\therefore \triangle ECD\backsim\triangle EAB$，$\therefore \frac{CD}{AB}=\frac{ED}{EB}$，$\therefore \frac{0.8}{3.2}=\frac{x}{x+30}$，解得 $x=10$. 故答案为 10.



(第 13 题图)

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

14. 解:如图,连接 DC,则 O,C,D 共线,

$\because DO \perp BF, \therefore \angle DOE = 90°$.

$\because OD = 0.8$ m, $OE = 0.8$ m, $\therefore \angle DEB = 45°$.

$\because AB \perp BF, \therefore \angle BAE = 45°, \therefore AB = BE$.

设 $AB = EB = x$ m, $\because AB \perp BF, CO \perp BF$,

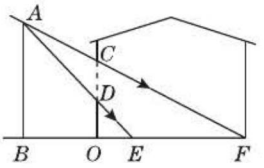
$\therefore AB // CO, \therefore \triangle ABF \backsim \triangle COF$.

$\therefore \dfrac{AB}{BF} = \dfrac{CO}{OF}$,

$\therefore \dfrac{x}{x + (3 - 0.8)} = \dfrac{1.2 + 0.8}{3}$, 解得 $x = 4.4$.

经检验:$x = 4.4$ 是原方程的解.

答:围墙 AB 的高度是 4.4 m.



(第 14 题图)

15. 解:由题意,得 $\angle CAD = \angle MND = 90°$, $\angle CDA = \angle MDN$,

$\therefore \triangle CAD \backsim \triangle MND. \therefore \dfrac{CA}{MN} = \dfrac{AD}{ND}$,

即 $\dfrac{1.6}{MN} = \dfrac{1 \times 0.8}{(5+1) \times 0.8}$.

$\therefore MN = 9.6$ 米.

又$\because \angle EBF = \angle MNF = 90°$, $\angle EFB = \angle MFN$,

$\therefore \triangle EBF \backsim \triangle MNF. \therefore \dfrac{EB}{MN} = \dfrac{BF}{NF}$,

即 $\dfrac{EB}{9.6} = \dfrac{2 \times 0.8}{(2+9) \times 0.8}$.

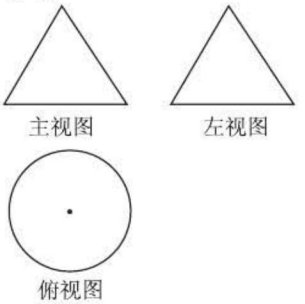
$\therefore EB \approx 1.75$ 米.

$\therefore$ 小军的身高 BE 约为 1.75 米.

25.2 三视图

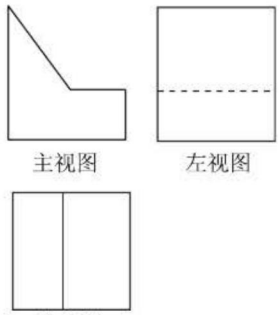
同类变式

3. 解:如图所示.



(第 3 题图)

4. 解:如图所示.



(第 4 题图)

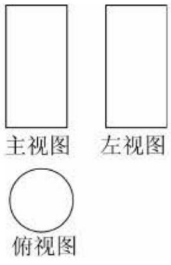
9. B **点拨**:由平面图形的折叠及正方体的展开图可知 B 正确. 故选 B.

练中考·练模拟 得满分

1. B **2. C** **3. A** **4. C** **5. D** **6. 24**

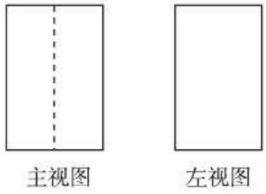
7. 解:(1)圆柱 (2)如图所示.

(3)这个几何体的体积约为 $3.14 \times \left(\dfrac{10}{2}\right)^2 \times 20 = 1\,570$.



(第 7 题图)

8. 解:(1)如图所示.

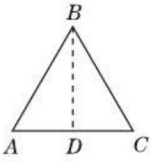


[第 8 题(1)图]

(2)如图,过点 B 作 $BD \perp AC$ 于点 D.

$\because AC = 2, \therefore AD = 1, AB = AC = 2$.

$\therefore BD = \sqrt{3}$, 则左视图的面积为 $3\sqrt{3}$.



[第 8 题(2)图]

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

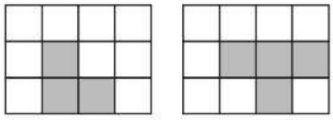
9. C **10.** A

11. **解**：由题意可得，菱形面积 $=\frac{1}{2}\times 8\times 6=24(\text{cm}^2)$，边长 $=\sqrt{3^2+4^2}=5(\text{cm})$，

∴ 该钢坯零件的体积 $=24\times 6=144(\text{cm}^3)$，

表面积 $=5\times 6\times 4+24\times 2=168(\text{cm}^2)$.

12. **解**：(1)如图所示.



左视图　　俯视图

(第12题图)

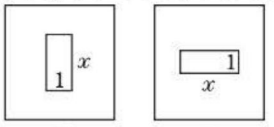
(2)2　**点拨**：在左视图和俯视图不变的情况下，可以在从左数第2列和第3列后面一排各添加1个小正方体，故答案为2.

13. **解**：(1)110

点拨：表面积为 $4\times 4\times 6-1\times 1\times 2+4\times 1\times 4=110(\text{cm}^2)$.

(2)118　**点拨**：表面积为 $110-4+8\times 1.5\times 1=118(\text{cm}^2)$.

(3)能. 理由如下：扩孔方案有如图所示的两种，其中 $1<x<4$. 由图甲、图乙分别得表面积为 $S_{甲}=110-4x+3x\times 2+3\times 2=116+2x(\text{cm}^2)$，$S_{乙}=96-2x+4\times 1\times 2+4x\times 2-1\times 1\times 4+3\times 1\times 4=112+6x(\text{cm}^2)$. 设 $116+2x=130$，得 $x=7$，不合题意，舍去. 设 $112+6x=130$，得 $x=3$，即当 $x=3$ 时，该橡皮泥块的表面积为 130 cm^2.



(第13题图)

14. C

中考提分专题篇

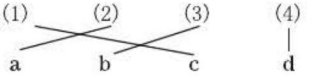
好题必解：

一、**1.** A　**2.** A　**3.** A　**4.** B　**5.** B　**6.** C　**7.** D　**8.** B

二、**9.** 球(答案不唯一)　**10.** $8\sqrt{13}$

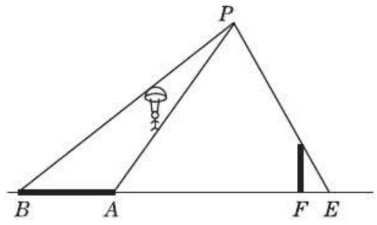
11. $12+15\pi$　**12.** 5　**13.** $4\sqrt{3}$

三、**14.** **解**：



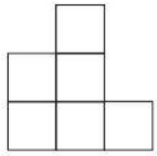
(第14题图)

15. **解**：如图所示，点 P 和线段 EF 即为所求.



(第15题图)

16. **解**：如图.



(第16题图)

17. **解**：作 $EG\perp PC$，交 PD 于点 G，则

$EG=EP\cdot\tan 30^\circ=\sqrt{3}\times\frac{\sqrt{3}}{3}=1$(米).

∴ $BF=EG=1$ 米.

∴ $AB=AF-BF=2.5-1=1.5$(米).

在 $\text{Rt}\triangle ABD$ 中，易知 $\angle D=30^\circ$，

∴ $AD=\frac{AB}{\tan 30^\circ}=\frac{1.5}{\frac{\sqrt{3}}{3}}=\frac{3\sqrt{3}}{2}$(米).

18. **解**：由三视图可知，右上角的盘子有5个，左下角的盘子有3个，左上角的盘子有4个，故这张桌子上盘子的总数为 $3+4+5=12$(个).

19. **解**：由三视图可知，此几何体为圆锥，且其底面半径为1 cm，高为3 cm，

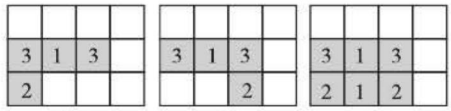
∴ 圆锥的母线长为 $\sqrt{10}$ cm.

∴ 侧面积 $=\pi\times 1\times\sqrt{10}=\sqrt{10}\pi(\text{cm}^2)$.

20. **解**：由三视图可知，此立体图形是圆柱，底面半径 $r=5$ cm，高 $h=20$ cm，

所以包装盒的体积 $V=\pi r^2h=\pi\times 5^2\times 20=500\pi(\text{cm}^3)$.

21. **解**：(1)俯视图如下.(答案不唯一)



(第21题图)

(2)9；12

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

第26章 概率初步

26.1 随机事件

同类变式

1. B 2. B

练中考·练模拟 得满分

1. A 2. A 3. B

4. 解:必然事件:(1)(4)(5)(7);
不可能事件:(2)(3)(6);
随机事件:(8)(9).

5. 解:摸出黄球的可能性最大.
因为黄球有 20 − 4 − 2 − 3 = 11(个),
数量最多,
所以摸出黄球的可能性最大.

6. 解:不能.
应做大量重复(摸球)试验,才能判断哪种颜色的小球数量较多.

7. 解:这个游戏公平.
因为黑、白两色的直角三角形都全等,且个数也相等,
所以黑、白两色直角三角形面积的和也相等.
又因为黑、白两色弓形的弦长都是直角三角形的斜边长,且个数也相等,
所以黑、白两色弓形面积的和也相等.
因此,黑、白两色区域面积各占圆面积的 50%,
即飞镖扎在黑、白两色区域的可能性均为 50%.
所以这个游戏公平.

8. 解:不同意两位同学的说法. 两个转盘的面积大小不同,但是蓝色区域面积占各自转盘面积的比例相同,都是$\frac{1}{4}$,因此,选择两个转盘成功的可能性都是 25%.

9. B 点拨:A. 两枚骰子朝上一面的点数和为 6 为随机事件,如 1 + 2 = 3,2 + 4 = 6,故不符合题意;B. 每枚骰子每个面上的点数分别为 1,2,3,4,5,6,最小为 1,两枚骰子朝上一面的点数和最小为 1 + 1 = 2,故 B 是必然事件,符合题意;两枚骰子朝上一面的点数均为偶数、均为奇数为随机事件,如 1,2,故 C,D 不符合题意. 故选 B.

10. 不可能事件;不可能事件;必然事件

11. 4 点拨:掷一枚质地均匀的硬币 2 次,会出现 4 种可能的结果:第一次掷正面朝上,第二次掷正面朝上;第一次掷正面朝上,第二次掷反面朝上;第一次掷反面朝上,第二次掷正面朝上;第一次掷反面朝上,第二次掷反面朝上.

12. 解:相信. 因为月历表上一竖列 3 个数的和是 3 的倍数,而 50 不是 3 的倍数,所以它是确定性事件中的不可能事件.
点拨:解答此题的关键是了解月历表的日期的排列规律. 不可能事件也是确定性事件,避免错解为不相信.

13. 解:(1)出生人数少于 60 人的月份有 4 月份、5 月份和6 月份.
(2)至少有两个人的生日在 10 月 5 日是随机事件.
方法规律:解答本题运用了数形结合思想,结合条形统计图考查可能性大小的判断,读懂统计图,从统计图中得到必要的信息是解决问题的关键.

14. 解:(1)盒中全部是红球.
(2)盒中全部是黄球.
(3)放 9 个红球,1 个黄球.
(4)放 1 个红球,9 个黄球.
点拨:(3)(4)题答案不唯一.

26.2 等可能情形下的概率计算

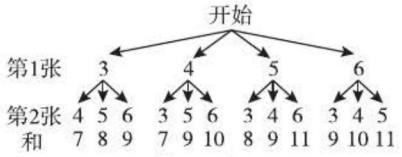
同类变式

5. B 点拨:由题意可得,边长为 3 的等边三角形的面积为$\frac{3\times3\times\sin60°}{2}=\frac{9\sqrt{3}}{4}$,∴ 小石子落在阴影部分的概率是$\frac{\sqrt{3}}{2\times\frac{9\sqrt{3}}{4}-\sqrt{3}}=\frac{2}{7}$. 故选 B.

6. 解:(1)P(摸出红球) = 0,该事件为不可能事件.
(2)P(摸出蓝球) = $\frac{5}{8}$,该事件为随机事件.
(3)P(摸出白球或蓝球) = $\frac{8}{8}$ = 1,该事件为必然事件.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

8. 解：画树状图如图.

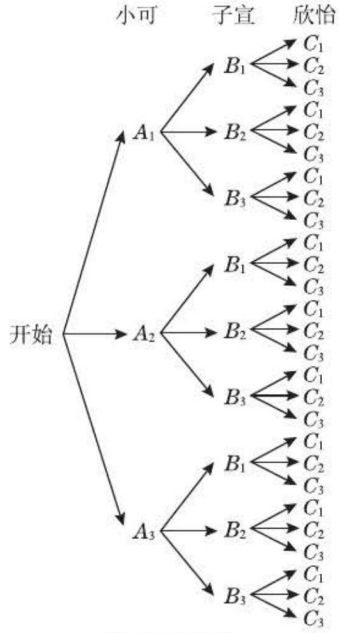


（第8题图）

所有等可能的结果有12种，其中抽取2张牌的数字之和为偶数的有4种. 所以抽取的2张牌的数字之和为偶数的概率 $P=\frac{4}{12}=\frac{1}{3}$.

10. A

11. 解：若分别用 A,B,C 表示小可、子宣、欣怡三人，用1,2,3表示石头、剪刀、布，则 A_1 表示小可出石头、B_2 表示子宣出剪刀，以此类推. 画树状图如图. 由树状图可知，所有等可能的结果有27种，三人都出“剪刀”的结果只有1种，所以在一个回合中三个人都出“剪刀”的可能性为 $\frac{1}{27}$.



（第11题图）

易错总结：在分析随机事件发生的可能性时，要从事件发生的结果入手，从中找出所关注的结果数，既不能遗漏任何一种可能结果，也不能重复计算，本题易忽略小可本身也有三种出法，而只考虑小可出“剪刀”的可能性，从而得到错误的树状图，进而得出错误的结果.

12. 解：(1) $\frac{1}{2}$

(2) 列表：

第二次 / 第一次	红球1	红球2	白球	黑球
红球1		(红球1，红球2)	(红球1，白球)	(红球1，黑球)
红球2	(红球2，红球1)		(红球2，白球)	(红球2，黑球)
白球	(白球，红球1)	(白球，红球2)		(白球，黑球)
黑球	(黑球，红球1)	(黑球，红球2)	(黑球，白球)	

由表格可知，共有12种可能出现的结果，并且它们都是等可能的，其中“两次都摸到红球”有2种可能，∴ P(两次都摸到红球) $=\frac{2}{12}=\frac{1}{6}$.

13. 解：(1) 所求概率 $P=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$.

(2) 该游戏公平. 理由如下：

小亮 / 小丽	1	2	3	4	5	6
1	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
2	(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
3	(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)
4	(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)
5	(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)
6	(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)

由上表可知，共有36种等可能的结果，其中小亮、小丽获胜各有9种结果.

∴ P(小亮胜) $=P$(小丽胜) $=\frac{9}{36}=\frac{1}{4}$.

∴ 该游戏公平.

点拨：(1) 首先判断出向上一面的点数为奇数有3种情况，然后根据概率公式计算；(2) 首先应用列表法，列举出所有可能的结果，然后分别计算小亮、小丽获胜的概率，再比较它们的大小，最后判断出该游戏是否公平即可.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

14. 解:(1)P(抽到数字 2)$=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$.

(2)不公平. 理由如下:

第一张 \ 第二张	2	2	3	6
2	22	22	23	26
2	22	22	23	26
3	32	32	33	36
6	62	62	63	66

由上表可知,所有等可能结果共有 16 种,两位数不超过 32 的有 10 种,

$\therefore P$(两位数不超过 32)$=\frac{10}{16}=\frac{5}{8}$.

$\because \frac{5}{8}\neq\frac{1}{2}$,$\therefore$ 游戏不公平.

修改规则:组成的两位数中,若个位数字是 2,则小贝胜,反之小晶胜.

点拨:修改规则不唯一,合理即可.

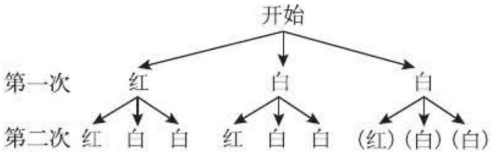
练中考·练模拟 得满分

1. C **点拨**:口袋中的球共有 $3\div\frac{1}{2}=6$(个).

2. D **3. D** **4. D**

5. $\frac{1}{8}$ **6.** $\frac{1}{1\,000\,000}$ **7.** $\frac{1}{6}$

8. 解:(1)填写树状图如图.



(第 8 题图)

(2)根据树状图可知,所有等可能的结果数是 9,摸到一红一白两球的结果数是 4,

$\therefore$ 摸到一红一白两球的概率为$\frac{4}{9}$.

9. A **点拨**:根据题意列表如下:

x \ y	0	1	2	3	4	5
0	(0,0)	(0,1)	(0,2)	(0,3)	(0,4)	(0,5)
1	(1,0)	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)
2	(2,0)	(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)
3	(3,0)	(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)
4	(4,0)	(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)
5	(5,0)	(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)

由上表知,共有 36 种等可能结果,其中满足条件的有 8 种.

$\therefore$ 点 Q 落在以原点为圆心,半径为$\sqrt{5}$的圆上或圆内的概率为$\frac{8}{36}=\frac{2}{9}$. 故选 A.

10. 解:(1)列表如下:

第一张 \ 第二张	1	2	3	4	6
1		(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,6)
2	(2,1)		(2,3)	(2,4)	(2,6)
3	(3,1)	(3,2)		(3,4)	(3,6)
4	(4,1)	(4,2)	(4,3)		(4,6)
6	(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	

由上表知,共有 20 种等可能的结果,其中和为偶数的有 8 种,所以P(和为偶数)$=\frac{8}{20}=\frac{2}{5}$.

(2)由(1)中的表格知,共有 20 种等可能的结果,其中满足点 Q 在直线 $y=x-2$ 上的只有(3,1),(4,2),(6,4),共 3 种,故所求概率$P=\frac{3}{20}$.

11. 解:(1)解不等式 $3x\geqslant 6$,得 $x\geqslant 2$.

解不等式 $2x-8\leqslant 0$,得 $x\leqslant 4$.

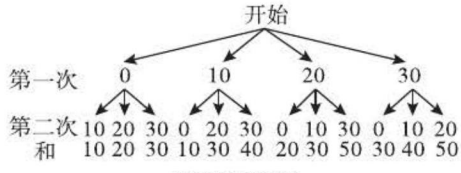
所以原不等式组的解集为 $2\leqslant x\leqslant 4$.

所以此不等式组的所有整数解为 2,3,4.

(2)从 2,3,4 中任取一个数,一共有 3 种等可能的结果,其中取出偶数的有 2,4 这 2 种结果,所以P(取出偶数)$=\frac{2}{3}$.

12. 解:(1)10;50

(2)根据题意画出树状图如图.



(第 12 题图)

由树状图可以得出,共有 12 种等可能结果,其中该顾客所获得的购物券的金额不低于 30 元的共有 8 种结果,因此,P(顾客所获得的购物券的金额不低于 30 元)$=\frac{8}{12}=\frac{2}{3}$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

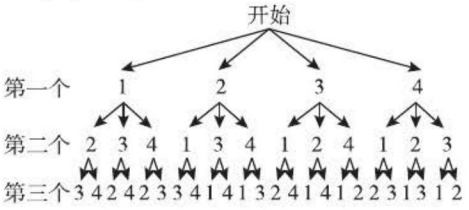
13. 解:(1)列表如下.

a \ b	1	2	3	4
1	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)
2	(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)
3	(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)
4	(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)

由上表知,点 $A(a,b)$ 的个数是 16.

(2)∵ 当 $a=b$ 时,$A(a,b)$ 在函数 $y=x$ 的图象上,∴ 点 $A(a,b)$ 在函数 $y=x$ 的图象上的有 4 种,∴ 点 $A(a,b)$ 在函数 $y=x$ 的图象上的概率是$\frac{4}{16}=\frac{1}{4}$.

14. 解:(1)画树状图如图.



(第 14 题图)

所有可能得到的三位数有 24 个,分别为 123,124,132,134,142,143,213,214,231,234,241,243,312,314,321,324,341,342,412,413,421,423,431,432.

(2)这个游戏不公平. 理由如下:

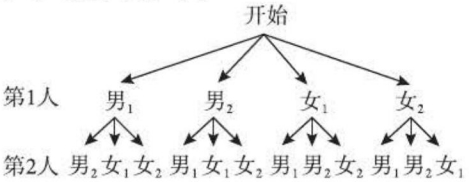
∵ 组成的三位数中是“伞数”的有 132,142,143,231,241,243,341,342,共有 8 个,∴ 甲胜的概率为$\frac{8}{24}=\frac{1}{3}$,而乙胜的概率为$\frac{16}{24}=\frac{2}{3}$,∴ 这个游戏不公平.

15. 解:(1)50;30%

(2)他不能获奖. 理由如下:

他的成绩位于“69.5 ~ 79.5”之间,而“59.5 ~ 69.5”和“69.5 ~ 79.5”两分数段的百分比之和为 10% + 30% = 40%. 因为成绩由高到低前 60% 的参赛选手获奖,而他位于后 40%,所以他不能获奖.

(3)画树状图如图.



(第 15 题图)

由树状图知,共有 12 种等可能的结果,其中恰好选中 1 男 1 女的结果有 8 种,

所以恰好选中 1 男 1 女的概率为$\frac{8}{12}=\frac{2}{3}$.

26.3 用频率估计概率

26.4 综合与实践 概率在遗传学中的应用

同类变式

2. 解:小明的怀疑理由不充分. 理由如下:广告中宣称的中奖概率为 20% ,只是销售商设定的一种奖品配送比例,人们购物就相当于去做试验,由此得到的是获奖的频率,当重复试验次数很大(购物的人很多)时,它在概率的附近浮动,但由于其具有不确定性,所以并不能保证在一定人群中都能是 20% 的中奖率. 因此,小明的怀疑理由不充分.

练中考·练模拟 得满分

1. B **2.** C

3. 解:列表或画树状图略. 它们恰好是一双的概率为$\frac{4}{7}$. 不能用 6 个红色玻璃珠和两张扑克牌来代替 3 双黑袜子和 1 双白袜子进行试验.

4. 解:(1)一是每次捕捞的鱼的数量不同,且捕捞的数量太少;二是捕捞的次数较少,所以该方法所得结果不太准确.

(2)可以先捕捞出一定数目的鱼(比如 30 条),做上标记再放回,一天后,在池塘里随机捕捞,每次捕捞 50 条,求带有标记的鱼的数目与 50 的比. 重复试验 100 次,这样估计更加准确.

5. 解:(1)0.9;0.9

(2)①4.5

②18 ÷ 0.9 − 5 = 15(万棵).

所以还需移植这种树苗约 15 万棵.

6. 解:(1)0.60

(2)0.60;0.40

(3)白球有 20 × 0.60 = 12(个),

黑球有 20 − 12 = 8(个).

(4)把 a 个黑球装入口袋中,将黑球、白球混合搅匀,做摸球试验,随机摸出一个球记下颜色,再放回口袋中,不断重复,可得摸到黑球的概率 P. 设白球的数量为 b,则$\frac{a}{a+b}=P$,解得 $b=\frac{1-P}{P}a$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

素养提分思维篇

2. A

中考提分专题篇

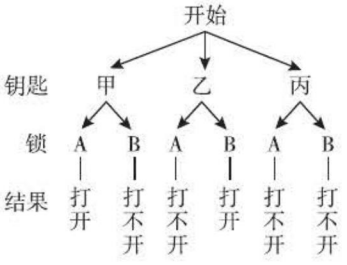
好题必解:

一、**1.** C **2.** A **3.** C **4.** C **5.** D

二、**6.** 3 **7.** $\frac{1}{3}$ **8.** $\frac{1}{3}$ **9.** $\frac{2}{5}$

10. $\frac{1}{2}$ **点拨**:从中随机抽取两张,把卡片上的整式分别作为分子和分母,有 12 种等可能结果,其中是分式的有 6 种,故P(能组成分式)$=\frac{6}{12}=\frac{1}{2}$.

11. $\frac{1}{3}$ **点拨**:画树状图如图.



(第 11 题图)

由树状图可知,一共有 6 种等可能的结果,而能打开锁的结果有 2 种,故一次打开锁的概率为$\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$.

三、**12.** **解**:(1)列表:

y \ x	1	2	3	4
1	(1,1)	(2,1)	(3,1)	(4,1)
2	(1,2)	(2,2)	(3,2)	(4,2)
3	(1,3)	(2,3)	(3,3)	(4,3)
4	(1,4)	(2,4)	(3,4)	(4,4)

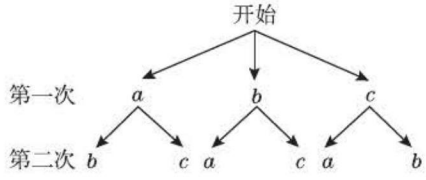
(2)可能出现的结果共有 16 种,且出现的可能性相等,满足点(x,y)落在函数$y=x+1$的图象上(记为事件A)的结果有 3 种,即(1,2),(2,3),(3,4),

所以$P(A)=\frac{3}{16}$.

(3)能使x,y满足$y>x+1$(记为事件B)的结果有 3 种,即(1,3),(1,4),(2,4),

所以$P(B)=\frac{3}{16}$.

13. **解**:(1)如图所示.

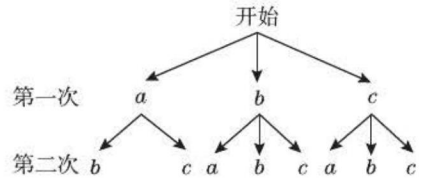


[第 13 题(1)图]

根据树状图可知共有 6 种等可能的情况,其中两次都是白球的情况有 2 种,

∴ 小丽两次都摸到白球的概率$=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$.

(2)画树状图如图所示.



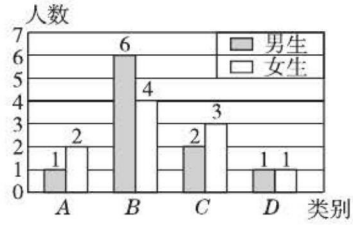
[第 13 题(2)图]

根据树状图可知共有 8 种等可能的情况,其中两次都是白球的有 4 种情况,

∴ 小强两次都摸到白球的概率$=\frac{4}{8}=\frac{1}{2}$.

14. **解**:(1)3;1

补充条形统计图如图所示.

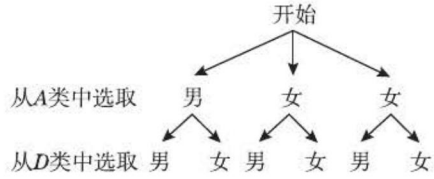


[第 14 题(1)图]

(2)根据题意得,调查的女生有 2 + 4 + 3 + 1 = 10(名).

所以九年级女生完成数学课前预习达到很好和较好的约有$\frac{2+4}{10}\times 180=108$(名).

(3)如图.



[第 14 题(3)图]

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

由树状图可得共有 6 种等可能的结果，其中两名同学性别相同的结果有 3 种，所以所选两名同学恰好性别相同的概率是 $\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$.

15. **解**：(1)列表：

转盘 A \ 转盘 B	2	4	6
1	(1,2)	(1,4)	(1,6)
2	(2,2)	(2,4)	(2,6)
3	(3,2)	(3,4)	(3,6)
4	(4,2)	(4,4)	(4,6)

(2)甲获胜的概率为 $\frac{4}{12}=\frac{1}{3}$，乙获胜的概率为 $\frac{8}{12}=\frac{2}{3}$，所以这个游戏不公平，对乙有利.

16. **解**：(1)∵ AD 为 $\odot O$ 的直径，

∴ $\angle ACD=\angle BAE=90°$.

∵ $\overset{\frown}{BC}=\overset{\frown}{CD}=\overset{\frown}{DE}$，

∴ $\angle BAC=\angle CAD=\angle DAE=30°$.

∵ 在 $\mathrm{Rt}\triangle ACD$ 中，$AD=2$，

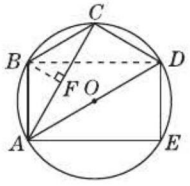
∴ $CD=1$.

∴ $AC=\sqrt{2^2-1^2}=\sqrt{3}$.

∴ $S_{\triangle ACD}=\frac{1}{2}AC\times CD=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

(2)如图，连接 BD，∴ $\angle ABD=90°$.

∵ $\angle BAD=\angle BAC+\angle CAD=60°$，



(第 16 题图)

∴ $\angle BDA=\angle BCA=30°$.

∴ $\angle BCA=\angle BAC=30°$.

∴ $BA=BC=CD=1$.

作 $BF\perp AC$，垂足为 F，

∴ $AF=\frac{1}{2}AC=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

∴ $BF=\frac{1}{2}$.

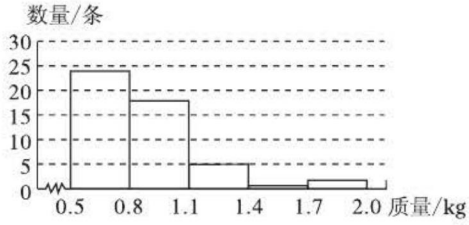
∴ $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}AC\times BF=\frac{\sqrt{3}}{4}$.

∴ $S_{四边形ABCD}=\frac{\sqrt{3}}{4}+\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{3\sqrt{3}}{4}$.

∵ $S_{\odot O}=\pi$，

∴ 点 P 落在四边形 $ABCD$ 区域内的概率 $=\frac{\frac{3\sqrt{3}}{4}}{\pi}=\frac{3\sqrt{3}}{4\pi}$.

17. **解**：(1)补全直方图如图.



(第 17 题图)

(2)由直方图知，估计从鱼塘中随机捕一条成品鱼，其质量落在 0.5 ~ 0.8 kg 的可能性最大.

(3)这组数据的个数为 50，其中排序后的第 25 个数和第 26 个数分别是 1.0，1.0，

∴ 中位数是 $(1.0+1.0)\div 2=1.0$，

∴ 鱼塘里质量中等的成品鱼，其质量落在 0.8 ~ 1.1 kg范围内.

(4)设鱼塘中成品鱼的总条数为 x. 由题意，得 $50:x=2:100$.

解得 $x=2\ 500$.

$2\ 500\times\frac{1}{50}(0.5\times1+0.6\times8+0.7\times15+1.0\times18+1.2\times5+1.6\times1+1.9\times2)=2\ 260(\mathrm{kg})$.

答：估计鱼塘中成品鱼的总质量是 2 260 kg.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

教材习题参考答案及点拨

第24章 圆

24.1 旋 转

练习

1. 略. **点拨**:解决此类问题,要注意观察图形的特征,寻找旋转的规律.

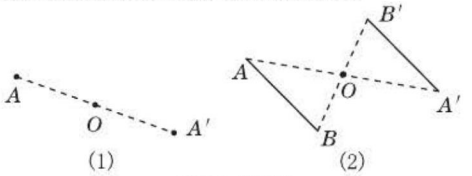
2. **解**:(1)题图中的(1)(4)是轴对称图形.图略.

(2)题图中的(1)(2)(3)是旋转对称图形.题图(1)中,该图形至少需旋转180°,才能与原图形重合;题图(2)中,该图形至少需旋转120°,才能与原图形重合;题图(3)中,该图形至少需旋转180°,才能与原图形重合.图略.

点拨:用旋转的性质解决问题时,要注意观察图形.

练习

1. **解**:(1)如图(1),点A'即为所求.



(第1题图)

点拨:连接AO并延长到A',使$OA'=OA$,即得到点A关于点O成中心对称的对应点A'.

(2)如图(2),线段$A'B'$即为所求.

点拨:作法同上,分别找到A,B的对应点A',B',连接$A'B'$,即为所求.

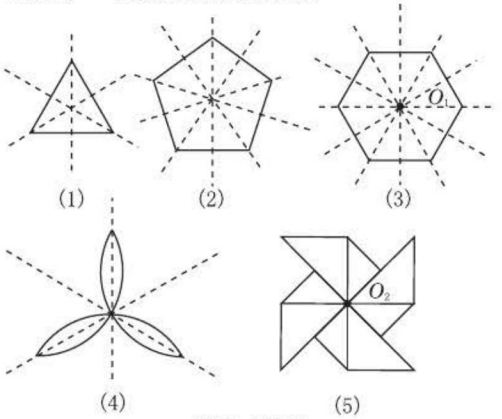
2. **解**:(1)√

点拨:平行四边形的对角线互相平分.

(2)√

练习

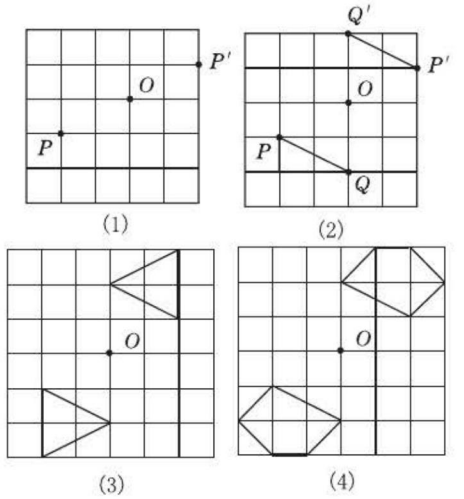
1. **解**:题图(3)、题图(5)是中心对称图形,题图(1)~(4)是轴对称图形.



(第1题图)

如图,O_1和O_2分别为图(3)和图(5)的对称中心;所画的对称轴如图所示.

2. **解**:如图.



(第2题图)

习题24.1

1. **解**:(1)只属轴对称的有(2)(3)(10).

(2)只属旋转对称的有(1)(4)(7).

(3)既属轴对称又属旋转对称的有(5)(9).

(4)不属任何对称的有(6)(8).

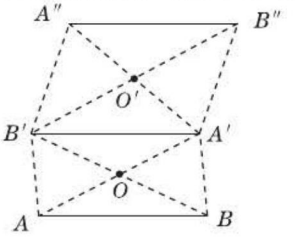
2. 略.

3. **解**:所求画的图形如图所示.证明如下:由作图可知,$OB=OB'$,$OA=OA'$,$O'A'=O'A''$,$O'B'=O'B''$,连接AB',$A'B$,$A''B'$,$A'B''$.

在四边形$ABA'B'$中,$OB=OB'$,$OA=OA'$,

$\therefore$四边形$ABA'B'$为平行四边形.$\therefore AB\parallel A'B'$.同理,$A'B'\parallel A''B''$,$\therefore A''B''\parallel AB$.

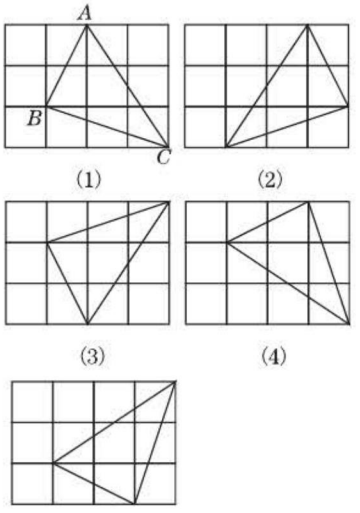
由此猜想,一条线段关于不在其上的任一点成中心对称的所有线段平行且相等.



(第3题图)

4. **解**:如图所示.

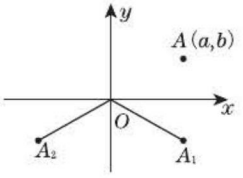
关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料



（第4题图）

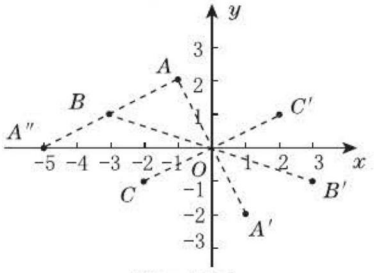
点拨：答案不唯一.

5. 解：如图. 点 A_1 绕点 O 旋转一定的角度，可以与点 A_2 重合.



（第5题图）

6. 解：如图，点 A，B，C 关于原点成中心对称的对应点分别为 $A'(1,-2)$，$B'(3,-1)$，$C'(2,1)$，点 A 关于点 B 成中心对称的对应点为 $A''(-5,0)$.

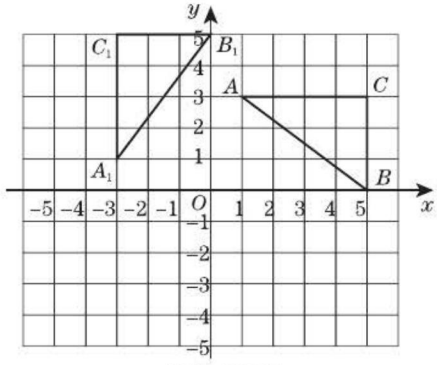


（第6题图）

7. 解：因为平行四边形 $ABCD$ 是中心对称图形，所以点 A，C 和点 B，D 都关于原点对称. 因为点 A 的坐标为(3,2)，所以点 C 的坐标为 $(-3,-2)$. 因为点 D 的坐标为 $(2,-2)$，所以点 B 的坐标为 $(-2,2)$.

点拨：点 $P(x,y)$ 关于原点对称的点 P_1 的坐标为 $(-x,-y)$，由此可直接求顶点 B，C 的坐标.

8. 解：如图中的 $\triangle A_1B_1C_1$ 是 $\triangle ABC$ 绕原点 O 按逆时针方向旋转 90° 后的图形，则点 A_1 的坐标为 $(-3,1)$，点 B_1 的坐标为(0,5)，点 C_1 的坐标为 $(-3,5)$.

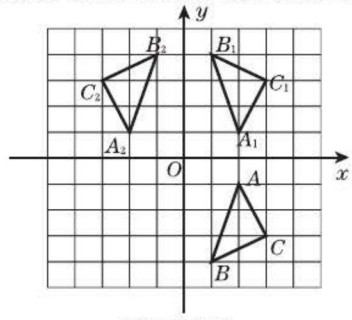


（第8题图）

9. 解：(1)建立的平面直角坐标系如图所示，点 C 的坐标为 $(3,-3)$.

(2)如图，点 C_1 的坐标为(3,3)，点 C_2 的坐标为 $(-3,3)$.

(3)能. $\triangle A_1B_1C_1$ 和 $\triangle A_2B_2C_2$ 是关于 y 轴对称的，故可经过轴对称变换而得到.



（第9题图）

点拨：应掌握轴对称图形和中心对称图形的画法.

10. 解：此时抛物线对应的函数表达式为 $y=-4x^2$.

24.2 圆的基本性质

练习

1. 略.

2. 解：图略. (1)点 P 在以点 O 为圆心，3 cm为半径的圆外. (2)点 P 在以点 O 为圆心，2 cm为半径的圆上或圆内. (3)点 P 在以点 O 为圆心，2 cm 为半径的圆外，且在以点 O 为圆心，3 cm 为半径的圆内. (4)点 P 在同心圆的圆心(即点 O)上.

3. 解：矩形的四个顶点一定能在同一个圆

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

上. 理由:矩形的对角线相交于一点,且四个顶点到交点的距离相等.

练习

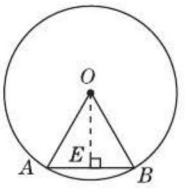
1. 解:(1)过点 O 作 $OE\perp AB$,垂足为 E,如图. 在 $Rt\triangle OEA$ 中,$AE=\frac{1}{2}AB=2$ cm,

$\therefore OE=\sqrt{OA^2-AE^2}=\sqrt{4^2-2^2}=2\sqrt{3}$(cm).

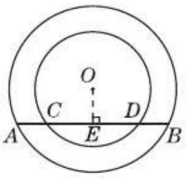
$\therefore$ 点 O 与 AB 的距离是 $2\sqrt{3}$ cm.

(2)易得 $OA=OB=AB$,$\therefore\triangle OAB$ 是等边三角形. $\therefore\angle AOB=60°$.

点拨:解决此题的关键是构造由圆的半径、弦心距及弦长的一半组成的直角三角形.



(第1题图)



(第2题图)

2. 证明:过点 O 作 $OE\perp AB$,垂足为 E,如图,则 $EA=EB$,$EC=ED$,

$\therefore EA-EC=EB-ED$,即 $AC=BD$.

点拨:解决此题的关键是过点 O 作垂直于 AB 的辅助线,利用垂径定理来求解.

3. (1)√ (2)× (3)√ (4)√

练习

1. (1)$\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{CD}$;$OE=OF$;$\angle AOB=\angle COD$

(2)$AB=CD$;$\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{CD}$;$\angle AOB=\angle COD$

(3)$AB=CD$;$OE=OF$;$\angle AOB=\angle COD$

(4)$AB=CD$;$\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{CD}$;$OE=OF$

点拨:利用在同圆或等圆中,圆心角相等⇔弧相等⇔弦相等⇔弦心距相等来解题.

2. 解:不对. 理由:此结论成立的前提条件是"在同圆或等圆中",否则不成立.

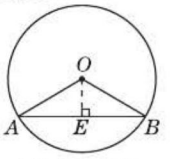
3. 解:如图,由题意知,劣弧所对的圆心角为 120°. 过点 O 作 $OE\perp AB$,垂足为 E,则 $\angle AOE=60°$,$\therefore\angle OAE=30°$. 在 $Rt\triangle AEO$ 中,

$\because AO=5$,

$\therefore OE=\frac{1}{2}AO=\frac{5}{2}$.

$\therefore AE=\sqrt{5^2-\left(\frac{5}{2}\right)^2}=\frac{5\sqrt{3}}{2}$.

$\therefore AB=2AE=2\times\frac{5\sqrt{3}}{2}=5\sqrt{3}$.



(第3题图)

练习

1. (1)内接 (2)外接 (3)外 (4)$OA=OB=OC$

2. 解:不一定能作一个圆. 因为有可能 3 个或 3 个以上的点在同一条直线上,也有可能 4 个点两两之间连线的垂直平分线不交于一点.

3. 解:图略. 外心的特点:锐角三角形的外心在锐角三角形的内部,直角三角形的外心在直角三角形斜边的中点处,钝角三角形的外心在钝角三角形的外部.

4. l_1 与 l_2 不平行;$l_1\perp l$;$l_2\perp l$;过一点有且只有一条直线垂直于已知直线;l_1 与 l_2 不平行;$l_1/\!/l_2$ **点拨**:注意掌握用反证法证明命题的步骤.

习题 24.2

1. 解:由题意知,$\odot A$ 的半径 $R=3$ cm.

$\because AB=3$ cm,$\therefore$ 点 B 在 $\odot A$ 上.

$\because AD=3\sqrt{3}$ cm >3 cm,

$\therefore$ 点 D 在 $\odot A$ 外.

$\because AC=\sqrt{3^2+(3\sqrt{3})^2}=6$(cm),6 cm >3 cm,

$\therefore$ 点 C 在 $\odot A$ 外. $\because AM=\frac{1}{2}AC=3$ cm,

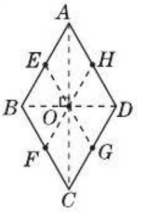
$\therefore$ 点 M 在 $\odot A$ 上.

点拨:分别计算出点 B,C,D,M 到圆心 A 的距离,并与半径 R 进行比较.

2. 解:已知:如图,在菱形 $ABCD$ 中,边 AB,BC,CD,DA 的中点分别为点 E,F,G,H.

求证:点 E,F,G,H 在同一个圆上.

证明:如图,连接 BD,AC 交于点 O,则 $AC\perp BD$. 连接 OE,OF,OG,OH,易知 $Rt\triangle AOB$,$Rt\triangle COB$,$Rt\triangle COD$,$Rt\triangle AOD$ 是全等的. $\because OE$,OF,OG,OH 分别为 $Rt\triangle AOB$,$Rt\triangle COB$,$Rt\triangle COD$,$Rt\triangle AOD$ 斜边上的中线,$\therefore OE=OF=OG=OH$. $\therefore$ 点 E,F,G,H 在以点 O 为圆心,OE 为半径的圆上,即点 E,F,G,H 在同一个圆上.



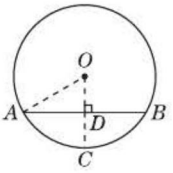
(第2题图)

点拨:解决此题的关键是证点 E,F,G,H 到点 O 的距离相等.

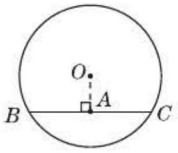
3. 解:如图,连接 OA,过点 O 作 $OD\perp AB$,垂足为 D,延长 OD,交 $\overset{\frown}{AB}$ 于 C,则 C 为 $\overset{\frown}{AB}$ 的中点,CD 即为所求. 易得 $AD=BD=\frac{1}{2}AB=\sqrt{3}$ cm. 在 $Rt\triangle OAD$ 中,$OD=\sqrt{2^2-(\sqrt{3})^2}=1$(cm),$\therefore CD=OC-OD=2-1=1$(cm). **点拨**:解决此题的关键是

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

构造由圆的半径、弦心距、弦长的一半组成的直角三角形.



(第3题图)



(第4题图)

4. 解:作法:如图,连接 OA,过点 A 作 OA 的垂线,交⊙O 于点 B,C,则弦 BC 被点 A 平分. 所以弦 BC 就是所求作的弦.

5. 解:作法:连接 AB,利用圆规和直尺作线段 AB 的垂直平分线,交 $\overset{\frown}{AB}$ 于点 C,则 C 点即为 $\overset{\frown}{AB}$ 的中点(图略).

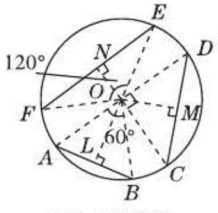
6. 解:如图,过 O 分别作弦 AB,CD,EF 的垂线,垂足分别为 L,M,N. 连接 OA,OB,OC,OD,OE,OF,则 $\angle AOB=60°$,$\angle COD=90°$,$\angle EOF=120°$. $\because$ $\angle AOB=60°$,$OL\perp AB$,

$\therefore$ $\angle AOL=30°$. $\therefore$ $AL=\dfrac{1}{2}OA=\dfrac{1}{2}R$.

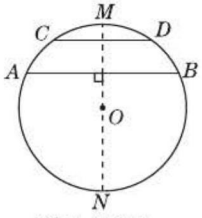
$\therefore$ $AB=2AL=R$, $\therefore$ $OL=\sqrt{OA^2-AL^2}=\sqrt{R^2-\left(\dfrac{1}{2}R\right)^2}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}R$;同理,可求得 $CD=\sqrt{2}R$,$OM=\dfrac{\sqrt{2}}{2}R$,$EF=\sqrt{3}R$,$ON=\dfrac{1}{2}R$.

(1)$\because$ $R<\sqrt{2}R<\sqrt{3}R$,$\therefore$ $AB<CD<EF$.

(2)$\because$ $\dfrac{\sqrt{3}}{2}R>\dfrac{\sqrt{2}}{2}R>\dfrac{1}{2}R$,$\therefore$ $OL>OM>ON$.



(第6题图)

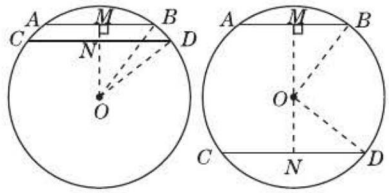


(第7题图)

7. 解:已知:如图,$AB\parallel CD$. 求证:$\overset{\frown}{AC}=\overset{\frown}{BD}$.

证明:如图,过点 O 作直径 $MN\perp AB$,则 $\overset{\frown}{AM}=\overset{\frown}{BM}$. $\because$ $AB\parallel CD$,$\therefore$ 直径 $MN\perp CD$. $\therefore$ $\overset{\frown}{CM}=\overset{\frown}{DM}$. $\therefore$ $\overset{\frown}{AM}-\overset{\frown}{CM}=\overset{\frown}{BM}-\overset{\frown}{DM}$,即 $\overset{\frown}{AC}=\overset{\frown}{BD}$.

8. 解:连接 OB,OD,过点 O 作 $OM\perp AB$,垂足为 M,OM 所在直线交 CD 于点 N. $\because$ $AB\parallel CD$,$\therefore$ $ON\perp CD$. 当弦 AB,CD 位于圆心 O 的同侧时,如图(1),$\because$ $OM=\sqrt{5^2-3^2}=4$(cm),$ON=\sqrt{5^2-4^2}=3$(cm),$\therefore$ 弦 AB,CD 之间的距离 $MN=4-3=1$(cm). 当弦 AB,CD 位于圆心 O 的两侧时,如图(2),$\because$ $OM=\sqrt{5^2-3^2}=4$(cm),$ON=\sqrt{5^2-4^2}=3$(cm),$\therefore$ 弦 AB,CD 之间的距离 $MN=4+3=7$(cm). 综上可知,AB 与 CD 之间的距离为 1 cm 或 7 cm.



(第8题图)

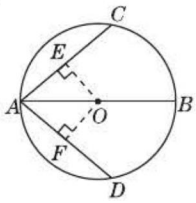
9. 证明:如图,过点 O 作 $OE\perp AC$,$OF\perp AD$,垂足分别为 E,F.

$\because$ $AC=AD$,

$\therefore$ $OE=OF$.

又 $\because$ $OE\perp AC$,$OF\perp AD$,

$\therefore$ AB 平分 $\angle CAD$.



(第9题图)

10. 证明:$\because$ $\overset{\frown}{AC}=\overset{\frown}{BC}$,$\therefore$ $\angle MOC=\angle NOC$.

$\because$ 点 M,N 分别是 OA,OB 的中点,$OA=OB$,$\therefore$ $OM=ON=\dfrac{1}{2}OA$. 在 $\triangle OMC$ 和 $\triangle ONC$ 中,$OM=ON$,$\angle MOC=\angle NOC$,$OC=OC$,$\therefore$ $\triangle OMC\cong\triangle ONC$. $\therefore$ $MC=NC$.

点拨:利用两个三角形全等是证明两条线段相等的重要方法之一.

11. 解:$\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{CD}$. 理由:过点 O_1 作 $O_1E\perp AB$,过点 O_2 作 $O_2F\perp CD$,垂足分别为点 E,F. 在 $\triangle O_1EM$ 和 $\triangle O_2FM$ 中,$\angle O_1ME=\angle O_2MF$,$\angle O_1EM=\angle O_2FM=90°$,$O_1M=O_2M$,$\therefore$ $\triangle O_1EM\cong\triangle O_2FM$. $\therefore$ $O_1E=O_2F$.

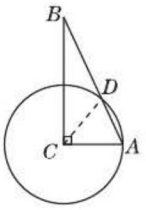
$\therefore$ $\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{CD}$.

点拨:在同圆或等圆中,证两条弧相等,可以转化为证这两条弧所对的弦相等,或证这两条弧所对弦的弦心距相等,或证这两条弧所对的圆心角相等.

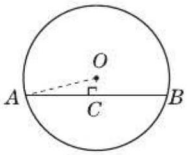
12. 解:如图,连接 CD. 在 Rt$\triangle ABC$ 中,$\angle B=25°$,则 $\angle A=65°$. $\because$ $AC=DC$,$\therefore$ $\angle ADC=\angle A=65°$. $\therefore$ $\angle ACD=50°$,即 $\overset{\frown}{AD}$ 所对圆心角的度数为 50°.

点拨:由 $\angle B=25°$,可知 $\angle A=65°$,进而求得 $\angle ADC=65°$,即可求得 $\angle ACD=50°$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料



(第12题图)



(第13题图)

13. **证明**:假设$\odot O$中存在一条弦AB,它的长大于直径,如图. 过点O作$OC\perp AB$于C,连接OA. 由垂径定理知$AC=\frac{1}{2}AB$,在$Rt\triangle AOC$中,OA为斜边,AC为直角边,故$OA>AC$,即$\odot O$的半径大于AB长的一半. 故$\odot O$的直径大于AB的长,这与假设"弦AB的长大于直径"相矛盾. 故假设不成立. 故直径是圆中最长的弦.

14. **解**:菱形$ABCD$的四个顶点可能在同一个圆上. 如在同一个圆上,它应成为正方形.

15. **解**:在弧上任取三点A,B,C,连接AB,作线段AB的垂直平分线l_1,连接BC,作线段BC的垂直平分线l_2,l_2与l_1交于点O,点O就是圆轮的圆心,OA或OB或OC的长就是圆轮半径的大小. 图略.

16. 略.

17. 略.

24.3 圆周角

练习

1. **解**:$\angle 1=\angle DBC$,$\angle 2=\angle ACB$,$\angle 3=\angle CAB$,$\angle 4=\angle ABD$.

点拨:利用在同圆或等圆中,同弧或等弧所对的圆周角相等来找.

2. **解**:$\because \angle BOC$对着$\overset{\frown}{BC}$,而$\overset{\frown}{BC}$所对的圆周角是$\angle A$,$\therefore \angle A=\frac{1}{2}\angle BOC=\frac{1}{2}\times 50°=25°$. **点拨**:利用$\overset{\frown}{BC}$所对的圆周角等于它所对的圆心角的一半来求解.

3. **证明**:易知$\angle ACB=\frac{1}{2}\angle AOB$,$\angle BAC=\frac{1}{2}\angle BOC$. $\because \angle AOB=2\angle BOC$,$\therefore \angle ACB=2\angle BAC$. **点拨**:$\angle ACB$,$\angle BAC$是通过圆心角$\angle AOB$,$\angle BOC$联系起来的.

4. **解**:所求半径为$\frac{1}{2}\times\sqrt{(\sqrt{2})^2+(\sqrt{2})^2}=\frac{1}{2}\times 2=1$.

5. **解**:已知:在$\triangle ABC$中,AD是BC边上的中线,且$AD=\frac{1}{2}BC$. 求证:$\triangle ABC$是直角三角形.

证明:$\because AD$是BC边上的中线,且$AD=\frac{1}{2}BC$,$\therefore AD=BD=CD$. $\therefore B,A,C$三点在以D点为圆心,线段DA的长为半径的圆上. $\because BC$是$\odot D$的直径,$\therefore \angle BAC=90°$,即$\triangle ABC$是直角三角形.

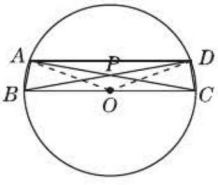
点拨:证明这个三角形是直角三角形,可利用直径所对的圆周角是直角来证明.

练习

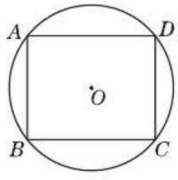
1. **解**:$\because \angle BOD=100°$,$\therefore \angle BAD=\frac{1}{2}\angle BOD=\frac{1}{2}\times 100°=50°$. 又$\because \angle BAD+\angle BCD=180°$,$\therefore \angle BCD=180°-50°=130°$.

点拨:$\angle BAD$和$\angle BCD$是圆内接四边形的对角,注意$\angle BOD+\angle BCD\neq 180°$.

2. **解**:如图,连接OA,OD. $\because BC$是$\odot O$的直径,$\therefore \angle BAC=\angle BDC=90°$. 又$\because \angle APB=\angle DPC=20°$,$\therefore \angle ABP=\angle ACD=70°$. $\therefore \angle AOD=140°$. $\because AD/\!/BC$,$\therefore \angle DAO=\angle AOB$,$\angle ADO=\angle DOC$. 又$\because OA=OD$,$\therefore \angle OAD=\angle ODA$. $\therefore \angle AOB=\angle DOC=20°$. $\therefore \angle ACB=\angle DBC=10°$. $\therefore \angle ABC=\angle DCB=80°$. $\because AD/\!/BC$,$\therefore \angle BAD=\angle ADC=100°$.



(第2题图)



(第3题图)

3. **解**:已知:如图,$\odot O$的内接四边形$ABCD$是平行四边形.

求证:四边形$ABCD$是矩形.

证明:$\because$四边形$ABCD$是$\odot O$的内接四边形,$\therefore \angle B+\angle D=180°$.

又$\because$四边形$ABCD$是平行四边形,$\therefore \angle B=\angle D$. $\therefore \angle B=\angle D=90°$. $\therefore$四边形$ABCD$是矩形. **点拨**:利用圆内接四边形的性质和平行四边形的性质来证明.

习题24.3

1. **解**:$\because$三角形的三个顶点把圆周分成的三段弧所对的圆心角之比为1∶2∶3,$\therefore$三段弧所对的圆心角分别为60°,120°,180°.

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

∴这个三角形的三个内角分别为30°,60°,90°.

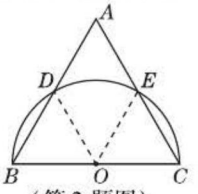
点拨:利用同弧所对的圆周角和圆心角之间的关系,求出三角形的三个内角的大小.

2. 解:如图,连接 OD, OE.

在 $\triangle OEC$ 中, $OE = OC$, $\angle C = 60°$, ∴ $\triangle OEC$ 是等边三角形.

∴ $\angle EOC = 60°$. 同理, $\angle DOB = 60°$,

∴ $\angle DOE = 60°$.



(第2题图)

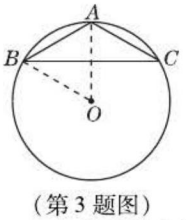
点拨:通过构造等边三角形来求每条弧所对的圆心角的度数.

3. 解:如图,设 $\triangle ABC$ 的外接圆为 $\odot O$,连接 OA, OB. ∵ $\angle BAC = 120°$, $AB = AC$, ∴ $\angle C = 30°$.

∴ $\angle AOB = 60°$.

又 $OA = OB$,

∴ $\triangle OAB$ 是等边三角形,且 $OA = AB = 3$ cm. ∴ $\triangle ABC$ 的外接圆直径是6 cm.

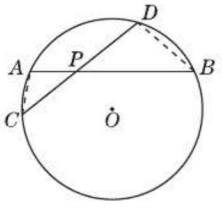


(第3题图)

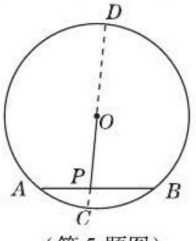
点拨:解决此题的关键是得出 $\triangle OAB$ 是等边三角形,从而得出 $\triangle ABC$ 的外接圆半径的长等于 AB 的长,最后得出直径的长度.

4. 证明:如图,连接 AC, BD. 易得 $\angle A = \angle D$, $\angle C = \angle B$, ∴ $\triangle APC \backsim \triangle DPB$. ∴ $PA : PD = PC : PB$,即 $PA \cdot PB = PC \cdot PD$.

点拨:解决此类问题的方法是先把等积式化成比例式,再根据比例式的四条线段确定哪两个三角形相似,从而进行证明.



(第4题图)



(第5题图)

5. 解:如图,延长 OP,交 $\overset{\frown}{AB}$ 于点 C,延长 PO,交 $\overset{\frown}{ADB}$ 于点 D.

由第4题结论,有 $PA \cdot PB = PC \cdot PD$.

设 $\odot O$ 的半径为 R cm,则 $PA \cdot (AB - PA) = (R - OP) \cdot (R + OP)$,

即 $4 \times (10 - 4) = (R - 5)(R + 5)$.

解得 $R = 7$ 或 $R = -7$(舍去).

故 $\odot O$ 的半径为7 cm.

点拨:此题可以利用第4题的结论解答.

6. 证明:(1)∵ AD 平分 $\angle BAC$, ∴ $\angle BAD = \angle EAC$. 又 $\angle ABD = \angle AEC$, ∴ $\triangle ABD \backsim \triangle AEC$.

(2)∵ $\triangle ABD \backsim \triangle AEC$, ∴ $\dfrac{AB}{AE} = \dfrac{AD}{AC}$,

即 $AB \cdot AC = AD \cdot AE$.

由第4题结论,有 $AD \cdot DE = BD \cdot DC$,

则 $AD \cdot AE = AD \cdot (AD + DE) = AD^2 + AD \cdot DE = AD^2 + BD \cdot DC$.

∴ $AB \cdot AC = AD \cdot AE = AD^2 + BD \cdot DC$.

点拨:(1)题的关键是得到 $\angle ABD = \angle AEC$,(2)题可以利用第4题的结论解答.

7. 解:设 AB 的中点为 O,连接 OC.

在 $\mathrm{Rt}\triangle OCD$ 中, $OC = \dfrac{1}{2}AB = \dfrac{13}{2}$ cm, $CD = 6$ cm, ∴ $OD = \sqrt{OC^2 - CD^2} = \sqrt{\left(\dfrac{13}{2}\right)^2 - 6^2} = \dfrac{5}{2}$(cm). 若 D 点在 OB 上,则 $AD = AO + OD = \dfrac{13}{2} + \dfrac{5}{2} = 9$(cm);若 D 点在 OA 上,则 $AD = AO - OD = \dfrac{13}{2} - \dfrac{5}{2} = 4$(cm). 故 AD 的长为9 cm或4 cm.

点拨:注意应分两种情况讨论. 构造直角三角形得出 OD 的长,即可得解.

8. 解:④

规律是相对的两角的比值和相等.

9. 证明:∵ DP 平分 $\angle ADC$, ∴ $\angle ADP = \angle CDP$. 而 $\angle ADP = \angle ABP$, $\angle PBE = \angle PDC$, ∴ $\angle ABP = \angle PBE$,即 BP 平分 $\angle ABE$.

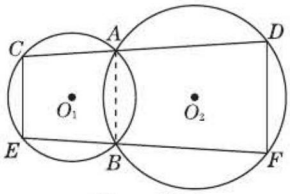
点拨:利用圆内接四边形的性质和同弧所对的圆周角相等来证明.

10. 证明:如图,连接 AB. ∵ 四边形 $ABEC$ 是 $\odot O_1$ 的内接四边形, ∴ $\angle BAD = \angle E$.

又∵ 四边形 $ADFB$ 是 $\odot O_2$ 的内接四边形,

∴ $\angle BAD + \angle F = 180°$,

∴ $\angle E + \angle F = 180°$. ∴ $CE /\!/ DF$.



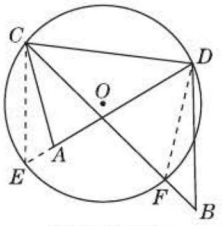
(第10题图)

11. 解:如图,延长 DA,交 $\odot O$ 于点 E,连接 CE,则 $\angle CAD > \angle E$. 设 CB 与 $\odot O$ 交于点 F,连接 DF,则 $\angle DFC > \angle CBD$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

而$\angle E=\angle DFC$,$\therefore\ \angle CAD>\angle CBD$.

点拨:利用同弧所对的圆周角相等及三角形外角的性质来比较$\angle CAD$和$\angle CBD$的大小.



(第11题图)

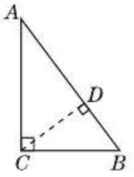
24.4 直线与圆的位置关系

练习

1. 解:$\odot O$的半径r是5 cm.

2. 解:如图,在Rt$\triangle ABC$中,$AB=\sqrt{AC^2+BC^2}=\sqrt{4^2+3^2}=5$.

过点C作$CD\perp AB$,垂足为D.设CD的长为d,则$\frac{1}{2}CD\cdot AB=\frac{1}{2}AC\cdot BC$.



(第2题图)

$\therefore CD=\frac{4\times3}{5}=2.4$,即$d=2.4$.

(1)当$r=2$时,$d>r$,$\odot C$与AB相离.

(2)当$r=2.4$时,$d=r$,$\odot C$与AB相切.

(3)当$r=2.8$时,$d<r$,$\odot C$与AB相交.

点拨:解决此题的关键是求点C到AB的距离d,比较d与r的大小即可.

3. 解:$\because AB$切$\odot O$于点C,$\therefore OC\perp AB$.

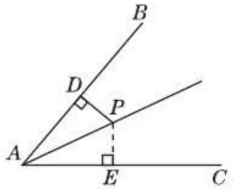
又$\because OA=OB$,$\therefore CA=CB=\frac{1}{2}AB=3$ cm.

在Rt$\triangle OAC$中,$OA=\sqrt{CO^2+AC^2}=\sqrt{4^2+3^2}=5$(cm).

点拨:解决此题的关键是得到$OC\perp AB$,$CA=CB$.

4. 证明:如图,过点P作$PE\perp AC$,垂足为E.

$\because AP$平分$\angle BAC$,$PD\perp AB$,$\therefore PD=PE$.$\therefore$点P到边AC,AB的距离等于以点P为圆心,PD为半径的圆的半径.$\therefore AC$,AB是$\odot P$的切线,即以点P为圆心,PD为半径的圆与$\angle BAC$两边相切.



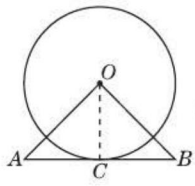
(第4题图)

点拨:圆心到直线的距离等于圆的半径,这条直线就是圆的切线.

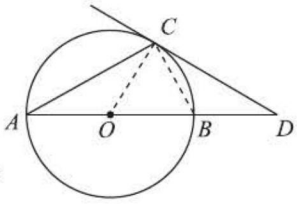
5. 证明:如图,连接OC.$\because OA=OB$,$CA=CB$,$OC=OC$,$\therefore\triangle OCA\cong\triangle OCB$.$\therefore\angle OCA=\angle OCB=90°$.$\therefore OC\perp AB$.

$\therefore$直线AB是$\odot O$的切线.

点拨:直线AB与$\odot O$有一个公共点C,因此连接OC,证明$OC\perp AB$即可.



(第5题图)



(第6题图)

6. 证明:如图,连接OC,BC.

$\because AB$是$\odot O$的直径,$\therefore\angle ACB=90°$.

又$\because\angle CAB=30°$,$\therefore\angle ACO=30°$,$\angle OBC=60°$,$\therefore\angle OCB=60°$,$BC=OB$.

$\because BD=OB$,$\therefore BC=OB=BD$.$\therefore\angle BCD=\angle D=30°$,$\therefore\angle OCD=90°$,即$OC\perp CD$.

$\therefore CD$是$\odot O$的切线.

点拨:解决此题关键是证明$OC\perp CD$.

练习

1. 解:连接OA,OP.$\because PA$,PB是$\odot O$的切线,$\therefore\angle OAP=90°$.又$\because OA=30$ cm,$OP=60$ cm,$\therefore\angle APO=30°$.$\therefore\angle APB=60°$,$PA=\sqrt{OP^2-OA^2}=\sqrt{60^2-30^2}=30\sqrt{3}$(cm).

2. 解:(1)$OA\perp PA$,$OB\perp PB$,$OP\perp AB$.

(2)$\triangle OAP\cong\triangle OBP$,$\triangle OCA\cong\triangle OCB$,$\triangle ACP\cong\triangle BCP$.

3. 解:连接OA,OB,则$OA\perp AP$,$OB\perp PB$.

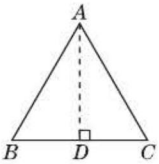
$\because\angle APB=60°$,$\therefore\angle AOB=360°-90°-90°-60°=120°$.若点$C$位于优弧$ACB$上,则$\angle ACB=\frac{1}{2}\angle AOB=\frac{1}{2}\times120°=60°$;若点$C$位于劣弧$AB$上,则$\angle ACB=\frac{1}{2}\times(360°-120°)=120°$.

点拨:要注意点C所处的位置有两种情况,不要漏解.

习题24.4

1. 解:如图,过点A作$AD\perp BC$,垂足为D,则$AD=\sqrt{3^2-\left(\frac{3}{2}\right)^2}=\frac{3\sqrt{3}}{2}$(cm).

(1)当$\frac{3\sqrt{3}}{2}$ cm$<r\leqslant3$ cm



(第1题图)

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

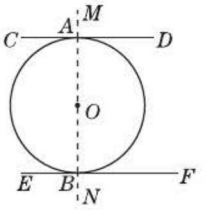
时，⊙A 与 BC 相交.

(2) 当 $r=\frac{3\sqrt{3}}{2}$ cm 时，⊙A 与 BC 相切.

(3) 当 0 cm $<r<\frac{3\sqrt{3}}{2}$ cm 时，⊙A 与 BC 相离.

点拨：用点 A 到 BC 的距离与圆的半径 r 相比较，得出结论.

2. 解：已知：CD，EF 是⊙O 的两条切线，切点分别为 A，B，且 $CD\parallel EF$，如图.



(第 2 题图)

求证：AB 是⊙O 的直径.

证明：如图，过切点 A 作直线 $MN\perp CD$，则直线 MN 必经过圆心 O.

$\because CD\parallel EF$，$MN\perp CD$，$\therefore MN\perp EF$. 又$\because$ 直线 MN 必过圆心 O，且 EF 切⊙O 于点 B，

$\therefore MN$ 必过切点 B. $\therefore$ 直线 MN 过两切点 A，B 及圆心 O，即 AB 是⊙O 的直径.

3. 略.

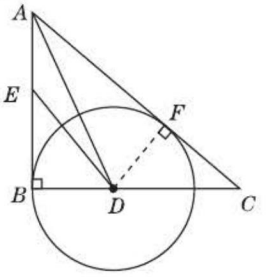
4. 证明：连接 OD. $\because OA=OD$，$\therefore \angle DAO=\angle ADO$. $\because AD\parallel OC$，$\therefore \angle DAO=\angle COB$，$\angle ADO=\angle DOC$. $\therefore \angle DOC=\angle BOC$. 又$\because OB=OD$，$OC=OC$，$\therefore \triangle OBC\cong\triangle ODC$. $\therefore \angle OBC=\angle ODC$. $\because BC$ 是⊙O 的切线，$\therefore \angle OBC=90°$. $\therefore \angle ODC=90°$. $\therefore DC$ 是⊙O 的切线.

5. 证明：连接 OD，AD. $\because AB$ 是⊙O 的直径，$\therefore \angle ADB=90°$. $\therefore AD\perp BC$. 又$\because CD=BD$，$\therefore \angle CAD=\angle BAD$. $\because OA=OD$，$\therefore \angle DAO=\angle ADO$. $\therefore \angle CAD=\angle ADO$. $\therefore AC\parallel OD$.

又$\because DE\perp AC$，$\therefore OD\perp DE$.

$\therefore DE$ 是⊙O 的切线.

6. 证明：(1) 如图，过点 D 作 $DF\perp AC$，垂足为 F. $\because AD$ 平分 $\angle BAC$，$\angle B=90°$，$\therefore DB=DF$. 又$\because DB$ 是⊙D 的半径，$\therefore AC$ 是⊙D 的切线.



(第 6 题图)

(2) 易知 AB 是⊙D 的切线，由切线长定理，得 $AB=AF$. 在 Rt△EBD 和 Rt△CFD 中，$DB=DF$，$DE=DC$，

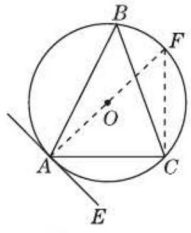
$\therefore$ Rt△$EBD\cong$Rt△CFD. $\therefore BE=FC$. $\therefore AB+EB=AF+FC=AC$，即 $AB+EB=AC$.

点拨：当没有说明 AC 与⊙D 有公共点时，利用圆心到直线的距离等于圆的半径来判断 AC 是⊙D 的切线.

7. 证明：$\because AC$ 是⊙O 的切线，$\therefore OA\perp AC$. $\therefore \angle OAB+\angle BAC=90°$. 又$\because OK\perp AB$，$\therefore \angle AOK+\angle OAK=90°$. $\therefore \angle BAC=\angle AOK$.

点拨：本题利用了切线的性质和直角三角形中两锐角互余的性质.

8. 证明：如图，连接 AO 并延长，交⊙O 于点 F，连接 FC，则 $\angle B=\angle F$.



(第 8 题图)

$\because AF$ 是⊙O 的直径，$\therefore \angle FAC+\angle F=90°$. $\because \angle CAE=\angle B=\angle F$，$\therefore \angle FAC+\angle CAE=90°$. $\therefore OA\perp AE$.

$\therefore AE$ 是⊙O 的切线，切点为 A，即 AE 与⊙O 相切于点 A.

点拨：AE 与⊙O 有公共点 A，这时需连接 AO，利用切线的判定定理来证明.

9. 解：设⊙O 的半径为 R，易得 $AB\perp PO$.

在 Rt△ADO 中，$R^2=DO^2+AD^2=(R-2)^2+(2\sqrt{3})^2$，解得 $R=4$. $\therefore OA=4$，$OD=2$.

在 Rt△PAO 和 Rt△ADO 中，

$\because \angle PAO=\angle ADO=90°$，$\angle AOP=\angle DOA$，

$\therefore \triangle PAO\backsim\triangle ADO$. $\therefore \frac{OA}{OD}=\frac{OP}{OA}$. $\therefore OP=\frac{OA^2}{OD}=\frac{4^2}{2}=8$. $\therefore PA=\sqrt{OP^2-OA^2}=\sqrt{8^2-4^2}=4\sqrt{3}$，$PC=OP-OC=8-4=4$.

10. 证明：$\because AB$，CD，BD 是⊙O 的切线，$\therefore \angle ABO=\angle DBO$，$\angle CDO=\angle BDO$. 又$\because AB\parallel CD$，$\therefore \angle ABD+\angle CDB=180°$. $\therefore \angle OBD+\angle ODB=90°$. $\therefore \angle DOB=90°$，即 $BO\perp OD$.

点拨：利用切线长定理和平行线的性质来证明此题.

11. 证明：连接 OA. $\because PA$，PB 是⊙O 的切线，$\therefore OA\perp PA$，$OB\perp PB$，$PA=PB$. $\therefore \angle AOP=\angle BOP=\frac{1}{2}\angle AOB$. 又$\because \angle C=\frac{1}{2}\angle AOB$，$\therefore \angle C=\angle BOP$. $\therefore CA\parallel OP$.

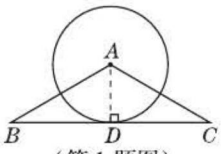
24.5 三角形的内切圆

练习

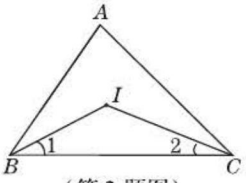
1. 解：如图，过点 A 作 $AD\perp BC$，D 为垂足，则 D 点也是 BC 在⊙A 上的切点. 在 Rt△ABD

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

中，$AB=4$ cm，$AD=2$ cm，$\therefore \angle B=30°$.
$\because AB=AC$，$\therefore \angle C=\angle B=30°$.
$\therefore \angle BAC=120°$.



（第1题图）



（第2题图）

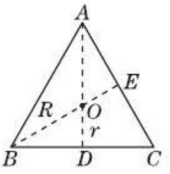
2. 解：如图，$\angle 1=\frac{1}{2}\angle ABC$，$\angle 2=\frac{1}{2}\angle ACB$，
$\therefore \angle BIC=180°-(\angle 1+\angle 2)=180°-\frac{1}{2}(\angle ABC+\angle ACB)=180°-\frac{1}{2}(180°-\angle A)=90°+\frac{1}{2}\angle A=90°+\frac{1}{2}\times 80°=130°$.

3. 解：在 Rt$\triangle ABC$ 中，$AB=\sqrt{3^2+4^2}=5$.
设其内切圆半径为 r，则有 $\frac{1}{2}\times 3r+\frac{1}{2}\times 4r+\frac{1}{2}\times 5r=\frac{1}{2}\times 3\times 4$，解得 $r=1$. 故这个三角形的内切圆半径为 1.

4. 解：设内切圆的半径为 r cm，则有 $6=\frac{1}{2}\times 12r$，解得 $r=1$. $\therefore$ 这个圆的半径是1 cm.
点拨：三角形的面积等于该三角形的周长与其内切圆半径的积的一半.

习题 24.5

1. 解：已知：$\triangle ABC$ 为等边三角形，其外接圆半径为 R，内切圆半径为 r.
求证：$\triangle ABC$ 的外心与内心重合，且 $R=2r$.
证明：如图，作 $\angle BAC$ 的平分线 AD，则 AD 垂直平分 BC，作 $\angle ABC$ 的平分线 BE，则 BE 垂直平分 AC. 设 AD 与 BE 的交点为 O，则 O 是 $\triangle ABC$ 的内心，也是 $\triangle ABC$ 的外心. 在 Rt$\triangle OBD$中，$\angle OBD=30°$，
$\therefore BO=2OD$，即 $R=2r$.



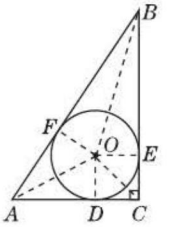
（第1题图）

点拨：注意应用等边三角形“三线合一”的性质.

2. 证明：连接 IE，IF，则 $IF\perp AB$，$IE\perp AC$，
$\therefore \angle AFI+\angle AEI=90°+90°=180°$.
$\therefore \angle EIF=180°-\angle A$. $\because \angle EIF=2\angle FDE$，
$\therefore \angle FDE=\frac{1}{2}(180°-\angle A)=90°-\frac{1}{2}\angle A$.

3. 解：连接 OE，OF，则 $OE\perp BC$，$OF\perp AC$，
$\therefore \angle OEC=\angle OED=\angle OFC=\angle C=90°$.
$\because OE=OF$，$\therefore$ 四边形 $OECF$ 是正方形，
$\therefore CE=OF=r$. 由题易得 $\triangle ODE\backsim\triangle ADC$，
$\therefore OE:AC=DE:DC$，
即 $r:4=(1-r):1$，解得 $r=\frac{4}{5}$.
点拨：此题利用相似三角形的对应边成比例求解.

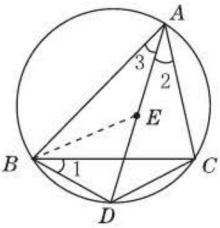
4. 证明：如图，设Rt$\triangle ABC$三边与其内切圆分别相切于点 D，E，F，且 $BC=a$，$AC=b$，$AB=c$. 连接 OD，OE，OF，OA，OB，OC. (1)易证得四边形 $ODCE$ 是正方形，则 $AF=AD=b-r$，$BF=BE=a-r$.
$\because AB=AF+BF$，
$\therefore b-r+a-r=c$.
$\therefore r=\frac{1}{2}(a+b-c)$.



（第4题图）

(2)采用等面积法，得 $\frac{1}{2}ar+\frac{1}{2}br+\frac{1}{2}cr=\frac{1}{2}ab$. $\therefore r=\frac{ab}{a+b+c}$.
点拨：(1)(2)是求直角三角形内切圆半径的两个公式，应记住.

5. 证明：如图，连接 BE.
$\because E$ 为 $\triangle ABC$ 的内心，$\therefore BE$ 平分 $\angle ABC$，AD 平分 $\angle BAC$. $\therefore \angle ABE=\angle CBE$，$\angle 3=\angle 2$. $\therefore \overset{\frown}{DB}=\overset{\frown}{DC}$. $\therefore DB=DC$. 又$\because \angle 1=\angle 2$，$\therefore \angle 1=\angle 3$. $\because \angle DEB=\angle 3+\angle ABE$，$\angle DBE=\angle 1+\angle CBE$，$\therefore \angle DEB=\angle DBE$.
$\therefore DE=DB$. $\therefore DB=DC=DE$.



（第5题图）

6. 解：能找出四个到三条直线距离相等的点. 理由是角平分线上的点到角的两边的距离相等，三角形内部有一个，外部有三个.

7. 解：设 $AF=x$ cm，$BD=y$ cm，则 $BF=(13-x)$ cm，$AE=x$ cm，$CE=CD=(14-y)$ cm，$BF=y$ cm.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

$\therefore 13-x=y$ ①. 又由 $AC=AE+CE$，得 $x+14-y=9$ ②. 联立①②，解得 $\begin{cases}x=4,\\y=9.\end{cases}$ 故 $AF=4$ cm，$BD=9$ cm，$CE=14-9=5$(cm).

24.6 正多边形与圆

练习

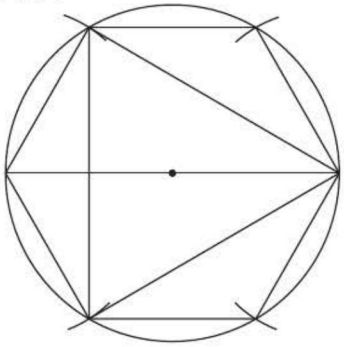
1. 解：(1) 正五边形每个内角的度数为 $\frac{(5-2)\times180°}{5}=108°$，其每个外角的度数为 72°.

(2) 正八边形每个内角的度数为 $\frac{(8-2)\times180°}{8}=135°$，其每个外角的度数为 45°.

(3) 正十二边形每个内角的度数为 $\frac{(12-2)\times180°}{12}=150°$，其每个外角的度数为 30°.

点拨：正多边形每个内角相等，等于内角和除以边数；每个外角也相等，等于外角和 360°除以边数.

2. 解：所求作的内接正六边形及内接正三角形如图所示.



(第 2 题图)

3. 解：画一个半径为 2 cm 的圆；在该圆中，用量角器作一个 72°的圆心角，其所对的弧就是圆的 $\frac{1}{5}$；依次在圆上截取这条弧的等弧，就得到圆的五等分点；顺次连接各点，就得到圆的内接正五边形. 图略.

练习

1. 解：有；不是同心圆.

点拨：不在同一条直线上的三点确定一个圆，任意一个三角形都有外接圆和内切圆，只有等边三角形的外接圆和内切圆才是同心圆.

2. 解：设正六边形 $ABCDEF$ 的外接圆半径为 r，则 $r=\frac{R}{\sin 60°}=\frac{2\sqrt{3}}{3}R$，$\therefore R:r=R:\frac{2\sqrt{3}}{3}R=\sqrt{3}:2$.

点拨：解决此类问题一般在由正多边形的外接圆半径、边心距和边长的一半所构成的直角三角形中解决.

3. 证明：正 n 边形有 n 个相等的中心角，而这 n 个相等的中心角之和是 360°，所以每一个中心角等于 $\frac{360°}{n}$. 正 n 边形有 n 个相等的外角，而这 n 个相等的外角之和是 360°，所以每一个外角也等于 $\frac{360°}{n}$. 所以正 n 边形的中心角与每个外角相等.

习题 24.6

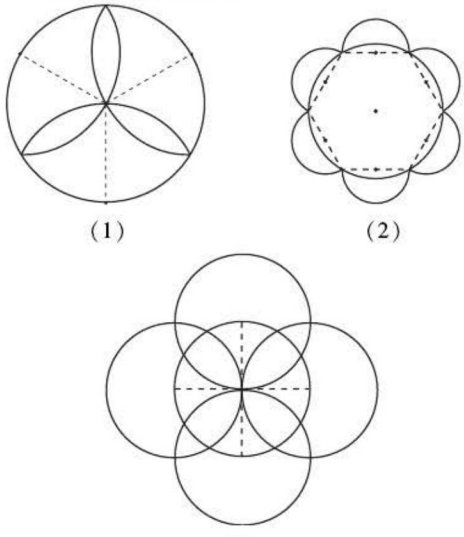
1. 略.

2. 解：所画图案作法如下：

(1) 以圆的三等分点为圆心，圆的半径为半径作三条弧，分别与圆相交. 如图(1).

(2) 以圆的六等分点为顶点作圆内接正六边形，再以正六边形的边长为直径向圆外作半圆. 如图(2).

(3) 以圆的四等分点为圆心，该圆半径为半径作圆. 如图(3).



(1)　(2)　(3)

(第 2 题图)

3. 证明：$\because AB=AC$，$\angle BAC=36°$，$\therefore \angle ABC=\angle ACB=72°$. 又 $\because BD$ 平分 $\angle ABC$，$\therefore \angle ABD=\angle CBD=36°$. 又 $\because CE$ 平分 $\angle ACB$，$\therefore \angle BCE=\angle ACE=36°$. $\therefore \overset{\frown}{AE}=$

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

$\overset{\frown}{EB}=\overset{\frown}{BC}=\overset{\frown}{CD}=\overset{\frown}{DA}$,即 A,E,B,C,D 是⊙O 的五等分点,∴ 五边形 $AEBCD$ 是正五边形.

点拨:在同圆或等圆中,相等的圆周角所对的弧相等.

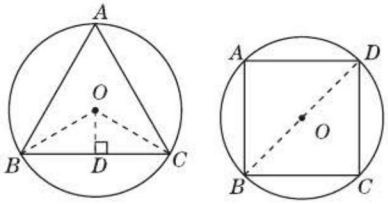
4. 解:由边长 $a=12$,得边心距 $r=\frac{\sqrt{3}}{2}\times 12=6\sqrt{3}$. 易知 b 的值是边心距的 2 倍,故 $b=12\sqrt{3}$.

点拨:注意正六边形平行边间的距离是边心距的 2 倍.

5. 解:圆形铁片的直径的最小值为 $\sqrt{a^2+a^2}=\sqrt{2}a$.

点拨:当圆为正方形的外接圆时,直径最小,为正方形对角线的长.

6. 解:如图(1),连接 OB,OC,过点 O 作 $OD\perp BC$,垂足为 D,则 $\angle BOC=120°$,$\angle BOD=\frac{1}{2}\angle BOC=60°$,∴ $BC=2BD=2R\cdot\sin 60°=\sqrt{3}R$,$OD=R\cdot\cos 60°=\frac{R}{2}$. 圆内接正三角形的周长 $=3\times\sqrt{3}R=3\sqrt{3}R$,圆内接正三角形的面积 $S_{\triangle ABC}=3S_{\triangle BOC}=3\times\frac{1}{2}\times\sqrt{3}R\times\frac{R}{2}=\frac{3\sqrt{3}}{4}R^2$.



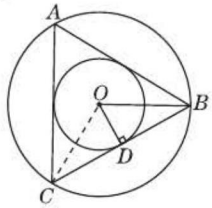
(1) (2)

(第6题图)

如图(2),连接 BD,易知 BD 是⊙O 的直径. 设正方形 $ABCD$ 的边长为 x,在 Rt△BCD中,$BC^2+DC^2=BD^2$,即 $x^2+x^2=(2R)^2$,解得 $x=\sqrt{2}R$. 圆内接正方形的周长 $=4\times\sqrt{2}R=4\sqrt{2}R$,圆内接正方形的面积 $=\sqrt{2}R\cdot\sqrt{2}R=2R^2$.

7. 解:设正三角形 ABC 的外接圆⊙O 的半径为 R cm,如图,则其内切圆半径 $OD=\frac{1}{2}R$ cm. 根据题意,得 $R-\frac{1}{2}R=2$,解得 $R=4$. ∴ 边长 $BC=2BD=2\sqrt{R^2-\left(\frac{R}{2}\right)^2}=\sqrt{3}R=4\sqrt{3}$(cm). 连接 OC,则 $S_{\triangle ABC}=3S_{\triangle BOC}=3\times\frac{1}{2}\times 4\sqrt{3}\times 2=12\sqrt{3}$(cm²).

点拨:解决此类问题的关键是构造以半径为斜边,边心距和边长的一半为直角边的直角三角形.



(第7题图)

8. 证明:作正五边形 $ABCDE$ 的外接圆,则点 A,B,C,D,E 均在圆上. (1)连接 EC,∵ $AE=CD$,∴ $\angle ECA=\angle DEC$. ∴ $AC/\!/DE$.

∴ $\angle DEB=\angle EPA$. 又∵ $\overset{\frown}{CE}=\overset{\frown}{BD}$,∴ $\angle CAE=\angle DEB$. ∴ $\angle EPA=\angle CAE$. ∴ $AE=PE$. 又∵ $AE=AB$,∴ $PE=AB$.

(2)∵ $AB=BC$,∴ $\angle AEB=\angle BAP$.

又∵ $\angle EBA=\angle ABP$,∴ △EBA∽△ABP.

∴ $\frac{AB}{BP}=\frac{BE}{AB}$,即 $AB^2=BE\cdot BP$.

又∵ $AB=PE$,∴ $PE^2=BE\cdot BP$.

24.7 弧长与扇形面积

练习

1. 解:$\overset{\frown}{AB}=\frac{120\pi\times 12}{180}=8\pi$(cm),$S_{扇形AOB}=\frac{1}{2}\overset{\frown}{AB}\cdot R=\frac{1}{2}\times 8\pi\times 12=48\pi$(cm²).

2. 解:由 $C_1=\frac{n\pi R}{180}$,得 $R=\frac{180C_1}{n\pi}$.

∴ $S_{扇形}=\frac{1}{2}C_1R=\frac{1}{2}C_1\cdot\frac{180C_1}{n\pi}=\frac{90C_1^2}{n\pi}=\frac{90\times(20\pi)^2}{150\pi}=240\pi$.

点拨:先根据弧长公式求出半径,然后由扇形面积公式求扇形的面积.

3. 解:连接 OB,则 $OB=0.6$ m,$OD=OC-CD=0.6-0.3=0.3$(m). 易知 $OD\perp AB$,$OD=\frac{1}{2}OB$,∴ $\angle OBA=30°$,$\angle BOC=60°$.

根据勾股定理,可得 $BD=\sqrt{OB^2-OD^2}=\sqrt{0.6^2-0.3^2}=\frac{3\sqrt{3}}{10}$(m). ∴ $S_{有水部分}=2(S_{扇形BOC}-S_{\triangle BOD})=2\times\left(\frac{60}{360}\pi\times 0.6^2-\frac{1}{2}\times\frac{3\sqrt{3}}{10}\times\frac{3}{10}\right)=2\times\frac{12\pi-9\sqrt{3}}{200}=\frac{12\pi-9\sqrt{3}}{100}$(m²).

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

4. 解：$C_1=\frac{n\pi R}{180}=\frac{120\times 3\pi}{180}=2\pi$，∴ $\overset{\frown}{AB}$的长为2π.

习题 24.7

1. 解：火车的前进速度是$\frac{1.2\pi\times 400\times 60}{1\,000}=\frac{144\pi}{5}$(km/h).

2. 解：连接 O_1B. 设大圆的半径为 R，$\angle AOC$的度数为 $n°$，则 $OA=R$，$O_1A=\frac{1}{2}OA=\frac{1}{2}R$，$\angle AO_1B=2\angle AOC=2n°$，$\overset{\frown}{AB}$的长度$=\frac{2n}{180}\times\pi\times\frac{R}{2}=\frac{n\pi R}{180}$，$\overset{\frown}{AC}$的长度$=\frac{n}{180}\times\pi\times R=\frac{n\pi R}{180}$. ∴ $\overset{\frown}{AB}$与$\overset{\frown}{AC}$的长度相等.

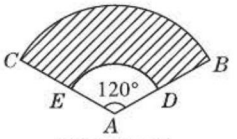
3. 解：$S_{橘红色部分}=S_{扇形BAD}+S_{\triangle ADE}-S_{\triangle ABC}=S_{扇形BAD}+(S_{\triangle ADE}-S_{\triangle ABC})=S_{扇形BAD}=\frac{30}{360}\times\pi\times(\sqrt{1^2+1^2})^2=\frac{\pi}{6}$.

4. 证明：设三个半圆面积由小到大分别为 S_1，S_2，S_3，$AC=b$，$BC=a$，$AB=c$，则 $S_{橘红色部分}=S_1+S_2-S_{弓形}=S_1+S_2-(S_3-S_{Rt\triangle ABC})=S_1+S_2-S_3+S_{Rt\triangle ABC}=\frac{\pi\times\left(\frac{b}{2}\right)^2}{2}+\frac{\pi\times\left(\frac{a}{2}\right)^2}{2}-\frac{\pi\times\left(\frac{c}{2}\right)^2}{2}+S_{Rt\triangle ABC}=\frac{\pi}{8}(a^2+b^2-c^2)+S_{Rt\triangle ABC}$.

∵ $\triangle ABC$为直角三角形且$\angle C=90°$，∴ $a^2+b^2=c^2$. ∴ $S_{橘红色部分}=S_{Rt\triangle ABC}$.

5. 解：三角形中各段弧长之和 $C_{三角形}=\frac{180}{180}\pi\times 1=\pi$；四边形中各段弧长之和 $C_{四边形}=\frac{360}{180}\pi\times 1=2\pi$；$n$ 边形的各段弧长之和 $C_{n边形}=\frac{(n-2)\times 180}{180}\times\pi\times 1=(n-2)\pi$.

6. 解：如图，$S_{贴纸部分}=2S_{扇形BAC}-2S_{扇形DAE}=2\times\frac{120}{360}\pi\times 25^2-2\times\frac{120}{360}\pi\times(25-14)^2=\frac{2\pi}{3}\times(25^2-11^2)=336\pi(cm^2)$，



(第6题图)

∴ 贴纸部分的面积为336π cm^2.

点拨：本题是扇形面积公式的实际应用题，解题关键是理解 $S_{贴纸部分}=2S_{扇形BAC}-2S_{扇形DAE}$，然后计算出贴纸部分的面积.

7. 解：设该圆形人工湖的半径为 R m，则$\frac{(7.5\times 2)\pi R}{180}=392.5$.

∴ $R=\frac{392.5\times 180}{15\pi}=\frac{4\,710}{\pi}$(m).

答：该圆形人工湖的半径为$\frac{4\,710}{\pi}$ m.

24.8 综合与实践 进球线路与最佳射门角(无)

小结·评价

A 组复习题

1. 解：(1)每幅镶边图案里的图形都是全等图形，相邻的两个图形中一个均可由另一个变换而得到.

(2)题图(1)中，后一个图形由前一个图形做平移变换得到；题图(2)中，后一个图形由前一个图形做旋转变换得到. 解释略.

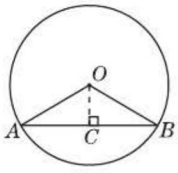
点拨：本题主要考查了图形变换的种类，主要是根据平移变换及旋转变换的特点判断.

2. 解：点 Q 在以点 P 为圆心，以 2 为半径的圆上. 图略.

3. 解：在 Rt$\triangle ABC$中，$\tan\angle ABC=\frac{AC}{BC}=\frac{\sqrt{3}}{1}=\sqrt{3}$，$AB=\sqrt{AC^2+BC^2}=\sqrt{(\sqrt{3})^2+1^2}=2$. ∴ $\angle ABC=60°$. ∴ $\angle A'BC''=\angle ABC=60°$. ∴ $\angle ABA'=180°-\angle A'BC''=180°-60°=120°$. 点 A 运动到点 A'经过的路程 $C_1=\frac{120\times\pi\times 2}{180}=\frac{4}{3}\pi$，点 A'运动到点 A''经过的路程 $C_2=\frac{90\times\pi\times\sqrt{3}}{180}=\frac{\sqrt{3}}{2}\pi$.

∴ 点 A 两次转动所经过的路程 $C=C_1+C_2=\left(\frac{4}{3}+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\pi$.

4. 解：如图. 因为弦 AB 所对劣弧为圆的$\frac{1}{3}$，所以 $\angle AOB=360°\times\frac{1}{3}=120°$. 因为 $OA=OB$，所以 $\angle A=\angle B=\frac{1}{2}\times(180°-120°)=30°$. 过点 O 作 $OC\perp AB$，点 C 为垂足，则 $OC=\frac{1}{2}OA=\frac{1}{2}\times 2=1$(cm). 根据勾股定理，可得 $AC=$



(第4题图)

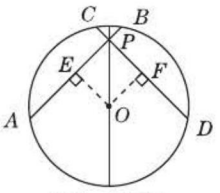
关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

$\sqrt{OA^2-OC^2}=\sqrt{2^2-1^2}=\sqrt{3}$(cm). 所以 $AB=2AC=2\sqrt{3}$ cm.

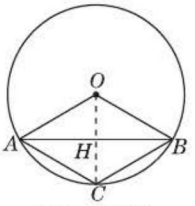
5. **解**:△ABC 是等边三角形. 理由:因为$\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{BC}$,所以 $AB=BC$.
又因为 OD,OE 是弦心距,且 $OD=OE$,
所以 $BC=AC$,
即 $AB=BC=AC$.
故△ABC 是等边三角形.

6. **解**:过点 A 与 OA 垂直的弦长度最短.
所以最短弦长为 $2\times\sqrt{5^2-3^2}=2\times4=8$.

7. **证明**:如图,过 O 作 $OE\perp AB$,$OF\perp CD$,垂足分别为 E,F. 因为 PO 平分∠APD,所以 $OE=OF$. 所以 $AB=CD$.



(第7题图)



(第8题图)

8. **解**:如图,四边形 $OACB$ 是菱形. 理由:连接 OC,交 AB 于点 H. 因为 C 是$\overset{\frown}{AB}$的中点,所以 $OH\perp AB$,且 $AH=\frac{1}{2}AB$. 又因为 $AB=\sqrt{3}OA$,所以 $\sin\angle AOH=\frac{AH}{OA}=\frac{\frac{1}{2}AB}{OA}=\frac{\frac{1}{2}\times\sqrt{3}OA}{OA}=\frac{\sqrt{3}}{2}$. 所以∠$AOH=60°$. 又因为 $OA=OC$,所以△AOC 是等边三角形. 所以 $OA=AC$. 同理 $OB=BC=OC$,所以 $OA=AC=BC=OB$. 所以四边形 $OACB$ 是菱形.

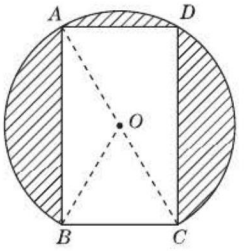
9. **解**:△ACE 与△BDF 全等. 理由:因为$AB\parallel CD\parallel EF$,所以$\overset{\frown}{AC}=\overset{\frown}{BD}$,$\overset{\frown}{CE}=\overset{\frown}{DF}$,$\overset{\frown}{AE}=\overset{\frown}{BF}$. 所以在△$ACE$ 和△BDF 中,$AC=BD$,$CE=DF$,$AE=BF$. 所以△$ACE\cong$△BDF.

10. (1)**解**:连接 OC. 因为 $AC=CD=DB$,
所以$\overset{\frown}{AC}=\overset{\frown}{CD}=\overset{\frown}{DB}$. 所以∠$COA=60°$. 又因为 $OA=OC$,所以△AOC 是等边三角形.
所以 $AC=AO=\frac{1}{2}AB=\frac{1}{2}\times10=5$(cm).

(2)**证明**:连接 BC. 因为 $\overset{\frown}{AC}=\overset{\frown}{DB}$,所以∠$CBA=$∠$BCD$. 所以 $CD\parallel AB$.

11. **证明**:连接 BE,则∠$E=$∠C,∠$ABE=$∠$ADC=90°$. 所以△$ABE\backsim$△ADC.
所以 $AB:AD=AE:AC$. 所以 $AB\cdot AC=AE\cdot AD$.

12. **解**:如图,阴影部分的面积即为要打掉墙体的面积.
设 AC 的中点为 O,连接 OB,易知 O 为圆弧形门所在圆的圆心. 因为 $BC=1$ m,$AC=2$ m,所以∠$BAC=30°$,∠$BOC=60°$,$AB=\sqrt{3}$ m. 又因为 $OB=OC$,所以△BOC 为等边三角形. 所以 $S_{\triangle BOC}=\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}\times1=\frac{\sqrt{3}}{4}$(m^2). 所以$S_{阴影}=S_{扇形BOC}-S_{矩形ABCD}+S_{\triangle BOC}=\frac{300\pi}{360}\times1^2-1\times\sqrt{3}+\frac{\sqrt{3}}{4}\approx1.32$(m^2).



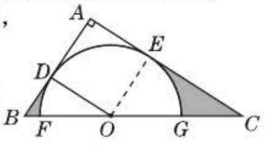
(第12题图)

答:要打掉墙体的面积约是 1.32 m^2.
点拨:解决这类问题要注意观察图形,理解面积的转化.

13. **证明**:因为 AD 平分∠EAC,所以∠$EAD=$∠DAC. 又因为∠$DAC=$∠DBC,∠$EAD=$∠DCB,所以∠$DBC=$∠DCB. 所以 $DB=DC$.
点拨:此题利用了圆内接四边形的性质,证明了△DBC 中,边 DB,DC 所对的角相等,从而得 $DB=DC$.

14. **证明**:连接 OC. 因为 DC 是⊙O 的切线,C 为切点,所以 $OC\perp DC$. 又因为 $AD\perp DC$,所以 $AD\parallel OC$. 所以∠$DAC=$∠ACO. 因为 $OA=OC$,所以∠$OCA=$∠OAC. 所以∠$DAC=$∠OAC,即 AC 平分∠DAB.
点拨:过切点作半径是常用的辅助线.

15. **解**:如图,连接 OE,则∠$OEC=90°$.
根据切线长定理,得$AE=AD=3$.
又因为∠$A=90°$,所以 $OE\parallel AB$.



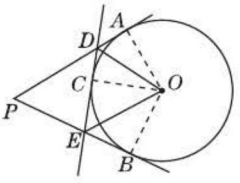
(第15题图)

同理,$OD\parallel AC$. 又因为∠$A=90°$,$OD=OE$,所以四边形 $ADOE$ 为正方形.
易证△$BDO\backsim$△OEC,则$\frac{BD}{OD}=\frac{OE}{CE}$,
设 $CE=x$,则$\frac{2}{3}=\frac{3}{x}$,解得$x=4.5$.
因为∠$DOE=90°$,所以∠$BOD+$∠$EOC=$

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

$180° - 90° = 90°$. 所以 $S_{扇形DOF} + S_{扇形EOG} = \frac{90 \times \pi \times 3^2}{360} = \frac{9\pi}{4}$. 所以 $S_{橘红色部分} = S_{\triangle BOD} + S_{\triangle COE} - (S_{扇形DOF} + S_{扇形EOG}) = \frac{1}{2} \times 2 \times 3 + \frac{1}{2} \times 3 \times 4.5 - \frac{9\pi}{4} = \frac{39}{4} - \frac{9\pi}{4}$.

16. 证明：如图.



（第16题图）

（1）因为 PA，PB，DE 是 $\odot O$ 的切线，所以 $DA = DC$，$EC = EB$. 故 $\triangle PDE$ 的周长为 $PD + DE + PE = PD + DA + BE + PE = PA + PB$.

（2）连接 OA，OB，OC，则 $OA \perp PA$，$OB \perp PB$，$OC \perp DE$. 由题可得 $\angle ADO = \angle CDO$，$\angle CEO = \angle BEO$，所以 $\angle AOD = \angle COD$，$\angle COE = \angle BOE$. 所以 $\angle DOE = \angle COD + \angle COE = \frac{1}{2}\angle AOC + \frac{1}{2}\angle BOC = \frac{1}{2}\angle AOB$.

17. 解：$\alpha_4 = 90°$，$\alpha_5 = 108°$，$\alpha_6 = 120°$. 正 n 边形相邻两条对角线的夹角存在规律：$\alpha_n = \frac{(n-2) \times 180°}{n}$.

B 组复习题

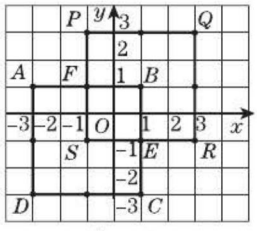
1. 略.

2. 解：如图.

（1）正方形 $ABCD$ 变换成正方形 $QRSP$ 的旋转中心是 BC 与 SR 的交点 E，旋转角度是顺时针旋转 90°（或逆时针旋转 270°）；正方形 $ABCD$ 变换成正方形 $SPQR$ 的旋转中心是 AB 与 PS 的交点 F，旋转角度是顺时针旋转 270°（或逆时针旋转 90°）；正方形 $ABCD$ 变换成正方形 $RSPQ$ 的旋转中心是坐标原点，旋转角度是顺时针（或逆时针）旋转 180°.

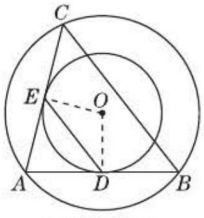
（2）成轴对称，对称轴为直线 $y = -x$.

（3）平移变换.



（第2题图）

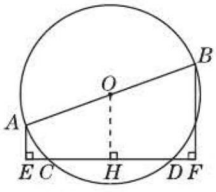
3. 证明：如图，设两个同心圆的圆心为 O，连接 OD，OE. 因为 D，E 分别是 AB，AC 与小圆的切点，所以 $OD \perp AB$，$OE \perp AC$. 又因为 AB，AC 是大圆的弦，所以 $CE = AE$，$AD = BD$. 所以 DE 是 $\triangle ABC$ 的一条中位线. 所以 $DE /\!/ BC$，且 $DE = \frac{1}{2}BC$.



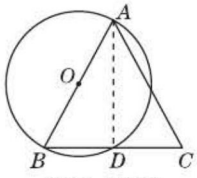
（第3题图）

点拨：根据题意作出图形，利用切线的性质和垂径定理证明 DE 是 $\triangle ABC$ 的中位线，从而得出结论.

4. 证明：如图，过点 O 作 $OH \perp CD$ 于 H，则 $CH = DH$. 因为 $AE \perp CD$，$BF \perp CD$，所以 $AE /\!/ OH /\!/ BF$. 又因为 $OA = OB$，所以 $EH = FH$. 所以 $EH - CH = FH - DH$，即 $EC = DF$.



（第4题图）



（第5题图）

5. 解：已知：如图，在 $\triangle ABC$ 中，$AB = AC$，以 AB 为直径的 $\odot O$ 交边 BC 于点 D. 求证：D 为 BC 的中点.

证明：如图，连接 AD. 因为 AB 为 $\odot O$ 的直径，所以 $\angle ADB = 90°$，即 $AD \perp BC$. 又因为 $AB = AC$，所以 $BD = CD$，即 D 为 BC 的中点.

点拨：利用直径所对的圆周角是直角及等腰三角形“三线合一”的性质证明.

6. 略.

7. 解：连接 OD. 由题意，得 $OD \perp AC$.

设 $\odot O$ 的半径为 R.

在 $Rt\triangle ADO$ 中，有 $2^2 + R^2 = (1 + R)^2$，

解得 $R = \frac{3}{2}$，$\therefore AB = 4$.

易证得 $\triangle ADO \backsim \triangle ABC$，

所以 $OD : CB = AD : AB$.

所以 $CB = \frac{OD \cdot AB}{AD} = \frac{\frac{3}{2} \times 4}{2} = 3$.

又由已知可得 $CD = CB$，所以 $CD = 3$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

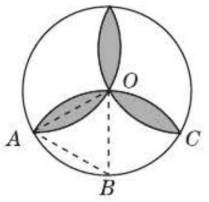
8. 解：连接 BE, EC，则 $BE = EC = BC = a$，即 $\triangle BEC$ 为正三角形，所以 $\angle EBC = 60°$. 所以 $\overset{\frown}{EC}$ 的长为 $\frac{60\pi a}{180} = \frac{\pi a}{3}$. 同理可得 $\overset{\frown}{AH}$ 的长为 $\frac{60\pi a}{180} = \frac{\pi a}{3}$. 易得 $\overset{\frown}{AC}$ 的长为 $\frac{\pi a}{2}$，所以 $\overset{\frown}{EH}$ 的长为 $\frac{\pi a}{3} + \frac{\pi a}{3} - \frac{\pi a}{2} = \frac{\pi a}{6}$. 所以橘红色部分的周长为 $4 \times \frac{\pi a}{6} = \frac{2\pi a}{3}$.

点拨：注意 $\overset{\frown}{EF}, \overset{\frown}{EH}, \overset{\frown}{HG}, \overset{\frown}{FG}$ 的长都相等.

9. 解：橘红色部分的面积为 $\frac{\pi \times 4^2}{4} - \frac{\pi \times 2^2}{4} - 2^2 - \left(2^2 - \frac{\pi \times 2^2}{4}\right) = 4\pi - \pi - 4 - 4 + \pi = 4\pi - 8$.

点拨：本题是求扇形面积的综合题目，解题关键是根据图形找出面积之间的关系.

10. 解：如图，取 $\overset{\frown}{AC}$ 的中点 B，连接 AB, AO, OB. 由题意，得 $\angle AOB = \frac{360°}{6} = 60°$. 又因为 $AO = BO$，所以 $\triangle AOB$ 是等边三角形. 所以 $\angle ABO = 60°$. 所以



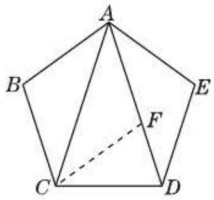
(第 10 题图)

$$S_{橘红色部分} = \left(\frac{60}{360} \times \pi R^2 - \frac{1}{2} \times R \times \frac{\sqrt{3}R}{2}\right) \times 2 \times 3 = \left(\pi - \frac{3\sqrt{3}}{2}\right)R^2.$$

C 组复习题

1. 证明：连接 OA, OB, OC. 因为弦 AB 是 $\odot O$ 内接正六边形的一边，弦 AC 是 $\odot O$ 内接正十边形的一边，所以 $\angle AOB = \frac{360°}{6} = 60°$，$\angle AOC = \frac{360°}{10} = 36°$. 所以 $\angle BOC = \angle AOB - \angle AOC = 60° - 36° = 24°$. 又因为 $\frac{360}{24} = 15$，所以 BC 是圆内接正十五边形的一边.

2. 解：如图，AC, AD 是正五边形 $ABCDE$ 的对角线，且 $AB = BC = CD = DE = AE = a$，由题得 $\angle B = \angle BCD = \angle CDE = \angle E = \frac{(5-2) \times 180°}{5} = 108°$，所以 $\angle BCA = \angle BAC = \frac{180° - 108°}{2} = 36°$. 所以 $\angle ACD = 108° - 36° = 72°$. 同理，$\angle ADC = 72°$. 所以 $\angle CAD = 180° - 72° - 72° = 36°$. 在 $\angle ACD$ 内部作 $\angle DCF = 36°$，CF 交 AD 于 F，则 $\triangle ACD \backsim \triangle CDF$，且 $AF = CF = CD$. 所以 $\frac{AC}{CD} = \frac{CD}{DF}$，即 $\frac{AC}{CD} = \frac{CD}{AD - AF}$，所以 $\frac{AC}{CD} = \frac{CD}{AC - CD}$.

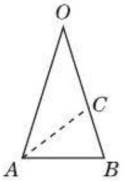


(第 2 题图)

设 AC 的长为 x，则 $\frac{x}{a} = \frac{a}{x-a}$. 整理，得 $x^2 - ax - a^2 = 0$，解得 $x_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}a$，$x_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}a$（舍去）. 所以 AC 的长为 $\frac{1+\sqrt{5}}{2}a$，即边长为 a 的正五边形对角线的长为 $\frac{1+\sqrt{5}}{2}a$.

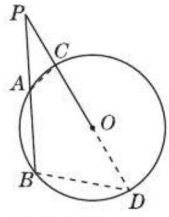
点拨：根据题意作出辅助线，通过证明三角形相似，列出比例式求出 AC 的长.

3. 证明：易知正十边形的边所对的圆心角为 $36°$，如图，取出一个小三角形 OAB，则 $\angle AOB = 36°$，$\angle OAB = \angle OBA = 72°$. 作 $\angle OAB$ 的平分线交 OB 于 C，则 $\triangle OAB \backsim \triangle ABC$，所以 $\frac{OA}{AB} = \frac{AB}{BC}$. 设 $AB = x$，则 $AC = OC = x$，$BC = R - x$，所以 $\frac{R}{x} = \frac{x}{R-x}$，即 $x^2 + Rx - R^2 = 0$，解得 $x_1 = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}R$（舍去），$x_2 = \frac{\sqrt{5}-1}{2}R$. 所以正十边形的边长 $a_{10} = \frac{1}{2}(\sqrt{5}-1)R$.



(第 3 题图)

4. 证明：如图，当点 P 在 $\odot O$ 外时，设 PO 交 $\odot O$ 于 C，延长 PO，交 $\odot O$ 于 D，连接 AC, BD. 因为 $\angle P = \angle P$，$\angle PAC = \angle D$，所以 $\triangle PAC \backsim \triangle PDB$. 所以 $\frac{PA}{PD} = \frac{PC}{PB}$. 所以 $PA \cdot PB = PC \cdot PD = (PO - R)(PO + R)$. 所以 $PA \cdot$



(第 4 题图)

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

$PB = PO^2 - R^2$；当点 P 在⊙O 内时，有 $PA \cdot PB = R^2 - OP^2$；当点 P 在⊙O 上时，有 $PA \cdot PB = |R^2 - OP^2| = 0$.

综上可得，$PA \cdot PB = |R^2 - OP^2|$.

点拨：分点 P 在⊙O 内、⊙O 外和⊙O 上三种情况讨论，不要漏掉其中一种情况.

5. 解：因为 $S_{正三角形} = \frac{1}{2} \times \frac{100}{3} \times \frac{100}{3} \times \sin 60° = \frac{2\,500\sqrt{3}}{9} \approx 481.1(m^2)$，$S_{正方形} = \left(\frac{100}{4}\right)^2 = 625(m^2)$，$S_{圆} = \pi \times \left(\frac{100}{2\pi}\right)^2 = \frac{2\,500}{\pi} \approx 795.8(m^2)$，所以 $S_{正三角形} < S_{正方形} < S_{圆}$.

所以甲、乙、丙三人中，丙所围的圆形的地面积最大.

第 25 章 投影与视图

25.1 投 影

练习

1. 解：题图(1)是平行投影，题图(2)是中心投影. 理由是两幅图中的光源不同，题图(1)中的投影是由平行光线形成的，题图(2)中的投影是由点光源形成的.

2. 解：$\triangle ABC$ 与 $\triangle A_1B_1C_1$ 相似. 因为太阳光线是相互平行的，所形成的投影是平行投影. 所以 $\triangle ABC$ 与 $\triangle A_1B_1C_1$ 相似.

3. 解：(1)能，画图略. (2)两棵树分别与各自影子构成的两个直角三角形不相似.

4. 解：学校的楼房在太阳光照射下的投影是平行投影；夜晚小明在路灯照射下的影子是中心投影. (答案不唯一)

练习

1. 解：两根交叉状的铅笔在正午阳光下的投影可能是一条线段或两条相交的线段. 矩形纸板在正午阳光下的投影可能是矩形、平行四边形、正方形或一条线段.

点拨：要考虑各种情况，可以通过实验验证.

2. 解：圆柱、圆锥的正投影都是圆，球的正投影也是圆.

习题 25.1

1. 解：不一定. 因为圆形铁片与投影面不一定平行，当圆形铁片平行于投影面时，它的正投影一定是圆.

点拨：物体的正投影图形形状和物体与投影面的位置关系有关，本题考查了同学们的空间想象能力.

2. 解：不一定. 圆柱的正投影也可能是矩形.

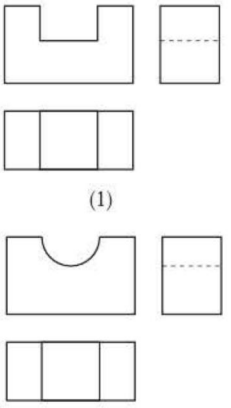
25.2 三视图

练习

1. 正三棱柱；圆柱

2. (2)；(3)；(1)

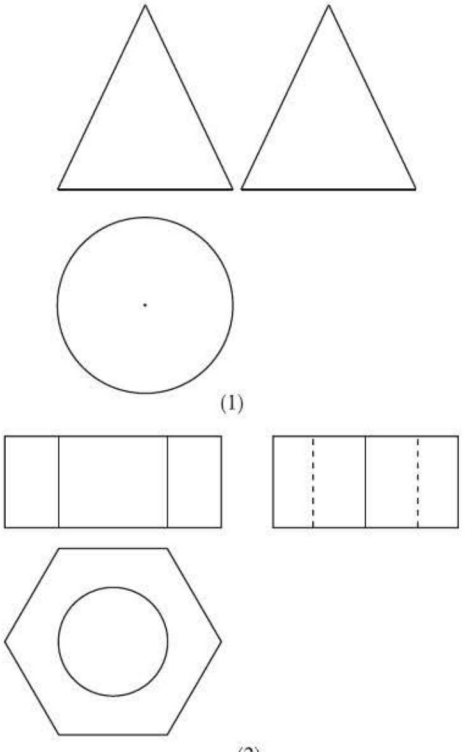
3. 解：如图.



(第 3 题图)

点拨：注意看不见的轮廓线要画成虚线.

4. 解：如图.

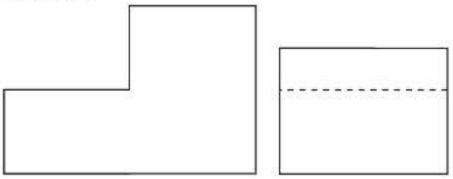


(第 4 题图)

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

习题 25.2

1. 解:如图.

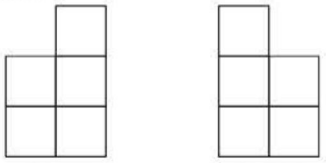


(1) (2)

(第 1 题图)

2. D

3. 解:如图.



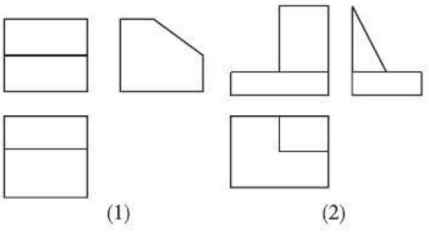
(第 3 题图)

小结·评价

A 组复习题

1. (3);(4);(1);(2)

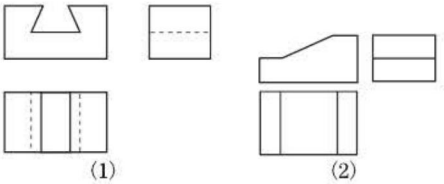
2. 解:如图.



(1) (2)

(第 2 题图)

3. 解:题图(1)(2)的视图均有错误,改正后如图.

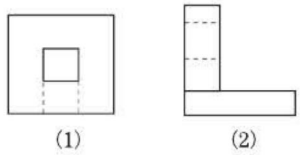


(1) (2)

(第 3 题图)

点拨:画物体的三视图时,注意看不见的轮廓线画成虚线,看得见的轮廓线画成实线,不要混淆.

4. 解:如图.



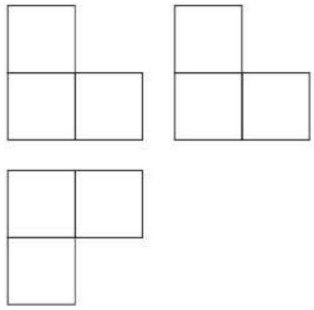
(1) (2)

(第 4 题图)

点拨:根据主视图的概念及俯视图的概念确定出物体的形状,然后画左视图.

B 组复习题

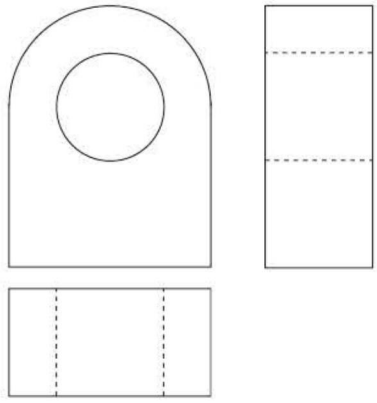
1. 解:如图.



(第 1 题图)

点拨:本题中的图形相当于 4 个小立方体摆放在一起,根据三视图的概念画出即可.

2. 解:如图.



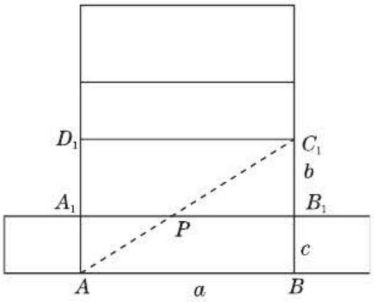
(第 2 题图)

点拨:本题中要注意实线及虚线的画法.

C 组复习题

1. 解:画出长方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 的展开图,如图. 由于 $a>b>c$,连接矩形 ABC_1D_1 的对角线 AC_1,交 A_1B_1 于点 P,则蜘蛛沿着 $A\rightarrow P\rightarrow C_1$ 爬过的路程最短. 根据勾股定理,可得最短路程为 $\sqrt{a^2+(b+c)^2}$.

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料



（第1题图）

点拨：把空间图形转化为平面图形，利用勾股定理求解.

2. 略.

第26章 概率初步

26.1 随机事件

练习

1. **解**：(3)是必然事件；(4)是不可能事件；(1)(2)是随机事件.

点拨：根据必然事件、不可能事件和随机事件的概念及生活经验判断.

2. **解**：(1)向上一面的点数是奇数与是偶数的可能性相同.

(2)略.

点拨：由班上男、女生的人数决定.

(3)指针落在白色区域内的可能性大于指针落在蓝色区域内的可能性.

(4)抽到红桃与抽到方块的可能性相同.

习题26.1

1. **解**：(3)是必然事件；(1)(2)(4)是随机事件.

2. **解**：抽到黑桃的可能性最大，抽到方块的可能性最小.

3. **解**：(1)摸到绿球的可能性较大. (2)不可能摸到黑球，摸到黑球的可能性是0.

点拨：袋中绿球最多，故摸到绿球的可能性较大；袋中没有黑球，故摸到黑球的可能性是0.

26.2 等可能情形下的概率计算

练习

1. **解**：(1)摸到红球的概率大. (2)$P(A)=\frac{3}{5}$，$P(B)=\frac{2}{5}$，$P(A)>P(B)$.

2. **解**：(1)抽到黑桃K的概率为$\frac{1}{52}$. (2)抽到红桃的概率为$\frac{13}{52}=\frac{1}{4}$. (3)抽到Q的概率为$\frac{4}{52}=\frac{1}{13}$.

练习

1. **解**：P(取到红球)$=\frac{3}{14}$，

P(取到黄球)$=\frac{11}{14}$.

2. **解**：小明抽到睡上铺的概率是$\frac{4}{7}$.

3. **解**：能组成的两位数有12，13，21，23，31，32；这两位数恰好是“32”的概率是$\frac{1}{6}$；其中“23”与“32”的数字之和等于5，故数字之和等于5的概率是$\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$.

点拨：可通过列表法列举出所有可能的情况.

4. **解**：两个圆盘的指针同时落在偶数代表的扇形上的概率为$\frac{6}{25}$.

点拨：可用列表法得出共有25种情况，其中两个圆盘的指针同时落在偶数代表的扇形上的有6种，故其概率为$\frac{6}{25}$.

练习

1. 略.

2. **解**：恰好打开锁的概率是$\frac{1}{100}$.

3. **解**：(1)小丽获得奖品“笔记本”的概率是$\frac{2}{9}$.

(2)小勇能翻的牌共8张，其中4张写的是“铅笔”，故小勇翻到“铅笔”的概率是$\frac{4}{8}=\frac{1}{2}$.

习题26.2

1. **解**：选中女生的概率大一些，因为女生人数多于男生人数. P(选中男生)$=\frac{2\,500-1\,327}{2\,500}=\frac{1\,173}{2\,500}$.

点拨：男、女生被采访的概率取决于其人数占总人数的比.

2. **解**：$200\times\frac{11}{16}\approx138$(台)，所以估计有138

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

台是国内品牌. 顾客购买国外品牌的概率是$\frac{5}{16}$.

3. 解:这样的规则不公平. 理由如下:同时自由转动转盘 A,B,转盘停止后,两指针所指的两个扇形中的数的可能结果有(1,4),(1,5),(1,6),(1,7),(2,4),(2,5),(2,6),(2,7),(3,4),(3,5),(3,6),(3,7),共 12 种,且出现的可能性相等,两数相乘的积是偶数的有(1,4),(1,6),(2,4),(2,5),(2,6),(2,7),(3,4),(3,6),共 8 种,其余 4 种两数相乘的积是奇数. 所以$P(\text{积是偶数})=\frac{8}{12}=\frac{2}{3}$,$P(\text{积是奇数})=\frac{4}{12}=\frac{1}{3}$,即 $P(\text{甲胜})=\frac{2}{3}$,$P(\text{乙胜})=\frac{1}{3}$. 因为$P(\text{甲胜})\neq P(\text{乙胜})$,所以游戏规则不公平. 公平的规则设计:将两指针所指的两个扇形中的数相加,如果得到的和是偶数,那么甲胜;如果得到的和是奇数,那么乙胜. 理由略. 设计游戏规则答案不唯一.

点拨:判断游戏规则是否公平,关键是判断双方获胜的概率是否相同,本题中关键是分别求出甲、乙获胜的概率.

26.3 用频率估计概率

练习

1. 解:(1)错误. 理由是频率不等同于概率.

(2)错误. 理由是抽取 1 000 只灯泡可能有 10 只次品,但不能确定一定是 10 只次品.

2. 解:小军的说法正确. 因为投掷次数足够多时,出现 5 点的频率就会稳定在常数$\frac{1}{6}$附近.

3. 解:(1)从左到右依次填:0.8;0.95;0.88;0.92;0.89;0.91

(2)这个射手射击 1 次,击中靶心的概率约是 0.9.

4. 解:(1)1 名顾客进入该店后购买东西的概率约是$\frac{50+60}{50+150+60+180}=\frac{1}{4}$.

(2)因为男性顾客进入该店后购买东西的概率约为$\frac{50}{50+150}=\frac{1}{4}$,女性顾客进入该店后购买东西的概率约为$\frac{60}{60+180}=\frac{1}{4}$,所以男性顾客与女性顾客进入该店后购买东西的可能性一样大.

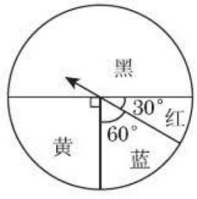
点拨:解答(2)题时,通过表格中提供的信息,分别计算出男性顾客和女性顾客进入该店后购买东西的概率,然后比较即可.

5. 略.

习题 26.3

1. 解:不对. 因为 2‰是中奖概率,表示有 2‰的可能性中奖,但不能确定买 1 000 注彩票最多只能有 2 注中奖,所买的 1 000 注彩票中中奖注数可能大于 2.

2. 解:不对. 例如,如图所示的是一个可以自由转动的转盘,转动一次转盘,转盘停止后(如果指针恰好指向分界线,那么重转一次,直到指针指向某一区域为止)指针的指向有 4 种可能,但指向红色区域的可能性为$\frac{1}{12}$,而不是$\frac{1}{4}$.



(第 2 题图)

3. 解:(1)因为$\frac{8\,500}{10\,000}=0.85$,所以这种鱼卵孵化的概率(孵化率)为 0.85.

(2)因为 30 000×0.85=25 500(尾),

所以 30 000 个鱼卵大概能孵化出 25 500 尾鱼苗.

(3)因为$\frac{5\,000}{0.85}\approx 5\,882$(个),

所以要孵化出 5 000 尾鱼苗,大概要准备 5 882个鱼卵.

点拨:本题是利用频率和概率的关系解决实际问题.

4. 略.

26.4 综合与实践
概率在遗传学中的应用(无)

小结·评价

A 组复习题

1. 解:(1)因为摸到球的号码是奇数的结果有 1,3,5 三种,$\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$,所以摸到球的号码是奇数的概率是$\frac{1}{2}$.

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

(2)因为摸到球的号码大于3的结果有4,5,6三种,$\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$,所以摸到球的号码大于3的概率是$\frac{1}{2}$.

(3)因为球的号码都不大于6,所以摸到球的号码不大于6的概率是1.

2. **解**:恰好是红T恤、黑裤子的概率是$\frac{1}{6}$.

3. **解**:根据题意,列表如下:

和 第2枚 / 第1枚	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

由上表可知,同时抛掷2枚均匀的骰子,所有等可能的结果共有36种,所得点数之和有11种可能;点数之和7出现的次数最多,故概率最大.

4. **解**:(1)因为$\frac{2}{50\ 000}=\frac{1}{25\ 000}$,所以这位顾客获得一等奖的概率是$\frac{1}{25\ 000}$.

(2)因为$\frac{2+8+40+200+1\ 000}{50\ 000}=\frac{1\ 250}{50\ 000}=\frac{1}{40}$,所以这位顾客获奖的概率是$\frac{1}{40}$.

5. **解**:选到字母P的概率是$\frac{2}{5}$.

6. **解**:因为$\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$,所以首先到站的正好是该乘客要乘的汽车的概率是$\frac{1}{2}$.

7. **解**:(1)出现3个正面的概率为$\frac{1}{8}$.

(2)出现2个正面、1个反面的概率为$\frac{3}{8}$.

8. **解**:把1,4,3三个数字排成一个3位数的可能结果有143,134,413,431,314,341,共6种,且每种结果出现的可能性相等,其中结果是偶数的有134,314,因此,排出的数是偶数的概率为$\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$.

点拨:先列出所有可能的结果,易看出结果是偶数的有2种,然后求解即可.

B组复习题

1. **解**:(1)买1注彩票中特等奖的概率是$\frac{1}{10\ 000\ 000}$.

(2)因为$\frac{9+9}{10\ 000\ 000}=\frac{18}{10\ 000\ 000}=\frac{9}{5\ 000\ 000}$,

所以买1注彩票中一等奖的概率是$\frac{9}{5\ 000\ 000}$.

2. **解**:(1)得到个位上数字为5的3位数的概率是$\frac{1}{6}$.

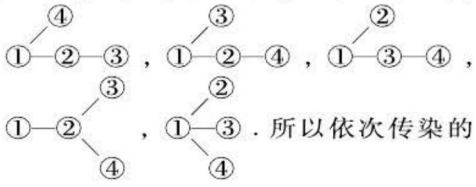
(2)得到个位上数字为5的3位数的概率与(1)的结果相同.

3. **解**:从长为2 cm,3 cm,4 cm,5 cm的4条线段中随机取出3条线段,可能的结果有2 cm,3 cm,4 cm;2 cm,3 cm,5 cm;2 cm,4 cm,5 cm;3 cm,4 cm,5 cm,共4种,且每种结果出现的可能性相等,能围成三角形的有2 cm,3 cm,4 cm;2 cm,4 cm,5 cm;3 cm,4 cm,5 cm,共3种,所以随机取出的3条线段能围成一个三角形的概率是$\frac{3}{4}$.能围成直角三角形的只有1种:3 cm,4 cm,5 cm,所以能围成直角三角形的概率是$\frac{1}{4}$.

点拨:解决本题的关键是理解3条线段可以围成三角形的条件,先求出共有多少种等可能的结果,再看有多少种结果可以围成三角形,最后看有多少种结果可以围成直角三角形.

C组复习题

解:第3个发病的人有2条传染途径,第4个发病的人有3条传染途径,由此可知,传染途径共有$2\times3=6$(条),这4人中可能的传染途径有①—②—③—④,



所以依次传染的概率为$\frac{1}{6}$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料