第5章

二次函数

构建『二次』数形世界的桥梁

数学点拨

荣德基

你将学到的核心考点

- 利用待定系数法求二次函数的表达式 □
- 二次函数的图像与性质 □
- 二次函数与二次方程间的关系 □
- 实际问题中的二次函数模型 □

我们为你提供的核心方法

待定系数法	□	配方法	□
排除法	□	数形结合思想	□
转化思想	□	分类讨论思想	□

掌握这些考点和方法后，记得回来给自己打✓哦！

教辅资料站

电子教辅　试卷练习
知识总结　备课资源

扫码关注获取更多学习资料

5.1 二次函数

1 点知识 · 拨考向 · 诊误区

知识点 1 二次函数的概念

点知识

1. **概念**:一般地,形如 $y=ax^2+bx+c$(a、b、c 是常数,且$a\neq0$)的函数叫做二次函数.
2. 二次函数的一般形式:$y=ax^2+bx+c$(a、b、c 是常数,且 $a\neq0$),a、b、c 分别是二次项系数、一次项系数、常数项.

要点精析

1. 判断一个函数是二次函数,主要从以下三个方面考虑:(1)含有自变量的代数式是整式;(2)自变量的最高次数是 2;(3)二次项系数不等于 0.
2. 二次函数特殊形式
   - 当 $b=0$ 时,$y=ax^2+c$;
   - 当 $c=0$ 时,$y=ax^2+bx$;
   - 当 $b=0,c=0$ 时,$y=ax^2$.

易错警示

1. 判断一个函数是否是二次函数,不能只看形式,如果函数表达式给出的形式比较复杂,必须将其化成一般形式,再加以判断.
2. 二次函数的一般形式:$y=ax^2+bx+c$ 中二次项系数 $a\neq0$ 这一条件不能少.

拨考向

典例剖析

考查角度 1 二次函数的识别

例 1 下列函数中,二次函数是(　　)

A. $y=-4x+5$　　B. $y=x(2x-3)$

C. $y=(x+4)^2-x^2$　　D. $y=\dfrac{1}{x^2}$

导引:根据二次函数的定义,逐一分析四个选项即可得出结论.

A. $y=-4x+5$ 为一次函数;B. $y=x(2x-3)=2x^2-3x$ 为二次函数;C. $y=(x+4)^2-x^2=8x+16$ 为一次函数;D. $y=\dfrac{1}{x^2}$ 不是二次函数. 故选 B.

▶答案:B

考查角度 2 将二次函数表达式化为一般形式

例 2 将二次函数 $y=(x-2)(x+5)-3x$ 化为一般形式,并指出其二次项系数、一次项系数和常数项.

导引:根据二次函数的一般形式 $y=ax^2+bx+c$(a,b,c 是常数,且 $a\neq0$),其中 a,b,c 分别叫做二次项系数,一次项系数,常数项进行解答即可.

▶解:$y=(x-2)(x+5)-3x=x^2-10$,

二次项系数是 1、一次项系数是 0、常数项是 -10.

举一反三训练

☞(答案见 202 页)

1. 下列函数表达式中,一定为二次函数的是(　　)

A. $y=2x+1$

B. $y=2x(x+1)$

C. $y=\dfrac{2}{x^2}$

D. $y=(x-2)^2-x^2$

2. 二次函数 $y=\dfrac{1}{2}(x-2)^2-3$ 的二次项系数、一次项系数和常数项分别是(　　)

A. $\dfrac{1}{2}$, -2, -3

B. $\dfrac{1}{2}$, -2, -1

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

点方法

二次函数表达式化为一般形式后才能确定各项系数，确定各项系数时不能遗漏这一项前面的符号.

考查角度3 求二次函数中自变量的取值

例3 若函数 $y=4x^2+1$ 的函数值为5，则自变量 x 的值应为(　　)

A. 1　　B. -1　　C. ±1　　D. $\frac{3\sqrt{2}}{2}$

导引：根据题意，把函数值代入函数表达式，然后解方程即可.

▶答案：C

点方法

本题考查给出二次函数的函数值求自变量的值，代入后转化为求一元二次方程的解.

C. $\frac{1}{2}$，-4，-3

D. $\frac{1}{2}$，4，1

3. 已知二次函数 $y=x^2-2x-3$，当 $x=1$ 时，$y=$_____；当 $y=-3$ 时，$x=$_____.

知识点2 根据实际问题列二次函数表达式(重难点)

点知识

根据实际问题列函数关系式的一般步骤：(1)审清题意，找出实际问题中的已知量、未知量，将文字、图形语言转化为数学符号语言；(2)找出等量关系；(3)设出表示变量的字母，把等量关系用含字母的式子表示，并将关系式写成用自变量表示因变量的形式.

要点精析

几种常见的二次函数关系：(1)面积、体积的一些计算公式在特定的情况下可以看成二次函数关系式；(2)在特定情况下，销售利润与售价的关系；(3)在特定情况下，银行存款本利和与年利率的关系；(4)在特定情况下，总量与增长率(降低率)的关系.

易错警示

解决与实际问题有关的二次函数的问题时，应理清两个变量之间的关系，然后列出函数关系式，同时应根据自变量的实际意义及所列的函数关系式确定自变量的取值范围.

考查角度 根据实际问题列二次函数表达式

例4 某公司的生产利润原来是 a 万元，经过连续两年的增长达到了 y 万元，如果每年的增长率都是 x，写出利润 y(万元)与增长率 x 之间的函数关系式，它是二次函数吗？如果是，请写出二次项系数、一次项系数和常数项.

导引：基数是 a 万元，增长次数是2，结果为 y 万元，根据增长率问题的公式得出函数关系式.

▶解：依题意，得 $y=a(1+x)^2=ax^2+2ax+a$，是二次函数，二次项系数为 a，一次项系数为 $2a$，常数项为 a.

4. 有下列4个函数关系：(1)正方形面积 S 与边长 x 的关系；(2)长方形的面积是常数 S，它的长与宽之间的关系；(3)圆的面积 S 与它的半径 r 之间的关系；(4)圆的面积 S 与圆的周长 L 的关系. 其中是二次函数的有(　　)

A. 1个　　B. 2个

C. 3个　　D. 4个

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

Ⅱ 点方法 · 拨技巧 · 探规律

典例剖析

拨尖角度 1　根据二次函数定义求字母的值(易错点)

例 5 已知关于 x 的函数 $y=(m+1)x^{m^2-3m-2}+(m-1)x+2$.

(1) m 为何值时,这个函数是二次函数?

(2) m 为何值时,这个函数是一次函数?

导引:(1)此函数为二次函数,则首项的次数为 2,且系数不为 0. (2)此函数为一次函数有三种情况:①首项的系数为 0 且第二项的系数不为 0;②首项的次数为 1 且两个一次项的系数和不为 0;③首项的次数为 0,系数不为 0 且第二项的系数不为 0.

▶解:(1)依题意,得 $\begin{cases} m^2-3m-2=2, \\ m+1\neq 0, \end{cases}$ 解之,得 $m=4$.

(2)依题意,得 $\begin{cases} m+1=0, \\ m-1\neq 0 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} m^2-3m-2=1, \\ (m+1)+(m-1)\neq 0 \end{cases}$

或 $\begin{cases} m^2-3m-2=0, \\ m+1\neq 0, \\ m-1\neq 0. \end{cases}$

所以,$m=-1$ 或 $m=\dfrac{3\pm\sqrt{21}}{2}$ 或 $m=\dfrac{3\pm\sqrt{17}}{2}$.

点方法

根据二次函数定义求字母的值时主要考虑两个方面的因素:其一是自变量的最高指数为 2,其二要考虑二次项系数不能为 0.

拨尖角度 2　几何问题中函数表达式的确定(拓展点)

例 6 如图 5.1-1,在一面靠墙的空地上用长为 24 米的篱笆,围成中间隔有一道篱笆的长方形花圃,设花圃的边 AB 为 x 米,面积为 S 平方米.

(1)求 S 与 x 的函数关系式及自变量 x 的取值范围;

(2)若墙的最大可用长度为 9 米,求此时自变量 x 的取值范围.

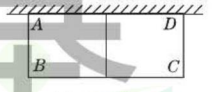


图 5.1-1

导引:(1)花圃的面积 $=AB\times$(篱笆长 $-3AB$),根据边长为正数可得自变量的取值范围;

(2)结合(1)及 AD 不大于 9 米可得自变量的取值范围.

▶解:(1) $S=BC\times AB=(24-3x)x=-3x^2+24x$,

由题意得 $\begin{cases} 24-3x>0, \\ x>0, \end{cases}$ 解得 $0<x<8$;

(2)$\because 24-3x\leqslant 9$,$\therefore x\geqslant 5$,结合(1)得,$5\leqslant x<8$.

举一反三训练

(答案见 202 页)

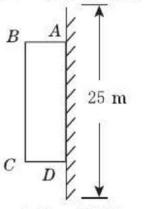
5. 已知关于 x 的函数 $y=(a+1)x^{a^2-a}+(a-3)x$.

(1)当 a 取什么值时,它为二次函数?

(2)当 a 取什么值时,它为一次函数?

利用定义求字母的值

6. 为了改善小区环境,某小区决定要在一块一边靠墙(墙长 25 m)的空地上修建一条矩形绿化带 $ABCD$,绿化带一边靠墙,另三边用总长为 40 m 的栅栏围住(如图).若设绿化带 BC 边长为 x m,绿化带的面积为 y m^2,求 y 与 x 之间的函数表达式,并写出自变量 x 的取值范围.



(第 6 题图)

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

点方法

根据实际问题寻找等量关系，列函数表达式，还要根据问题的实际意义确定自变量的取值范围.

拨尖角度3 动态问题中列二次函数表达式(易错点)

例7 如图5.1-2，在矩形$ABCD$中，$AB=6$厘米，$BC=12$厘米，点P在线段AB上，P从点A开始沿AB边以1厘米/秒的速度向点B移动. 点E为线段BC的中点，点Q从点E开始沿EC以1厘米/秒的速度向点C移动. 如果P、Q同时分别从A、E出发，求出$\triangle BPQ$的面积S(平方厘米)与出发时间t(秒)的函数表达式，并写出t的取值范围.

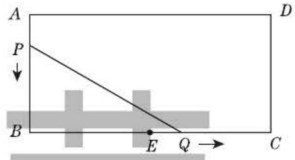


图5.1-2

导引：$\triangle BPQ$的面积$=\frac{1}{2}PB\cdot BQ$，把相关数值代入即可求解，注意得到的相关线段的长度为非负数.

▶解：$\because PB=6-t$，$BQ=BE+EQ=6+t$，

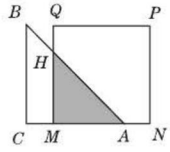
$\therefore S=\frac{1}{2}PB\cdot BQ=\frac{1}{2}(6-t)(6+t)=-\frac{1}{2}t^2+18$，

$\therefore S=-\frac{1}{2}t^2+18(0\leqslant t<6)$.

点方法

关键是找到所求三角形的面积的等量关系，注意求自变量的取值范围应从线段长度为非负数考虑.

7. 如图，已知等腰直角三角形ABC的直角边长与正方形$MNPQ$的边长均为20 cm，AC与MN在同一条直线上，开始时点A与点N重合，$\triangle ABC$以2 cm/s的速度向左运动，最终点A与点M重合，求重叠部分的面积$y(\text{cm}^2)$与时间$t(\text{s})$之间的函数表达式，并写出自变量的取值范围.



(第7题图)

III 练基础·练方法·练技巧 ☞(答案见202页)

基础巩固练

1. 下列函数中，不属于二次函数的是(　　)
   A. $y=(x-2)^2$
   B. $y=-2(x+1)(x-1)$
   C. $y=1-x-x^2$
   D. $y=\frac{1}{x^2-1}$

2. 二次函数$y=3x^2-2x-4$的二次项系数与常数项的和是(　　)
   A. 1　　B. -1　　C. 7　　D. -6

3. [易错题]下列函数关系中，是二次函数的是(　　)
   A. 在弹性限度内，弹簧的长度y与所挂物体质量x之间的关系
   B. 当距离一定时，火车行驶的时间t与速度v之间的关系
   C. 等边三角形的周长C与边长a之间的关系
   D. 圆心角为120°的扇形面积S与半径R之间的关系

4. 二次函数$y=x^2+2x-7$的函数值是8，那么对应的x的值是(　　)　【导学号 7367677】
   A. 3　　B. 5
   C. -3和5　　D. 3和-5

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

5. 若 $y = x^{m-1} + 2x$ 是二次函数，则 $m =$ _____.

6. 把二次函数 $y = -4(1+2x)(x-3)$ 化为一般形式为：_____.

7. 用一根长为 30 cm 的绳子围成一个长方形，长方形一边长为 x cm，则长方形的面积 S cm^2 与 x cm 的函数关系式为_____，其中，自变量 x 的取值范围是_____.

8. 下列函数哪些是二次函数？并写出它们的二次项、一次项、常数项.

(1) $3y = 3(x-1)^2 + 1$；

(2) $y = -0.5(x-1)(x+4)$；

(3) $s = 3 - 2t^2$；

(4) $y = 2x(x^2 + 3x - 1)$；

(5) $y = 1 - \sqrt{2}x^2$.

9. 某市政府大力扶持大学生创业. 李明在政府的扶持下投资销售一种进价为每件 20 元的护眼台灯. 销售过程中发现，每月销售量 y（件）与销售单价 x（元）之间的关系可近似看作一次函数：$y = -10x + 500$. 设李明每月获得的利润为 w（元），写出 w 与 x 的函数表达式.

能力提升练

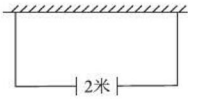
10. 若函数 $y = (m-4)x^{3m^2-2m-3}$ 是二次函数，求 m 的值.

11. 如图所示，有一矩形养鸡场，养鸡场的一边靠墙，墙长 a 米，另三边用篱笆围起来，篱笆总长 48 米，平行于墙的一边开一个 2 米宽的门.

(1) 设养鸡场垂直于墙的边长是 x 米，养鸡场的面积为 y 平方米，求 y 与 x 的函数关系式；

(2) 要使养鸡场面积为 300 平方米，当 $a = 25$ 时，能否建造符合要求的养鸡场？若能，请求出养鸡场的长与宽，若不能，说明理由；

(3) 要使养鸡场面积为 300 平方米，请就 a 的取值讨论建造符合要求的养鸡场的方案数.



（第 11 题图）

思维拓展练

12. 已知关于 x 的函数 $y = (a-b)x^3 + 2x^2 + 2 + \dfrac{2a+b-3}{x}$ 是二次函数，求 $a+b$ 的值.

我的错题笔记

荣德基
微信公众号
教辅资料站

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

5.2 二次函数的图像和性质

5.2.1 二次函数 $y=ax^2$ $(a\neq0)$ 的图像及其性质

1 点知识·拨考向·诊误区

知识点1 二次函数 $y=ax^2$ $(a\neq0)$ 的图像(重难点)

点知识

1. 二次函数 $y=ax^2$ $(a\neq0)$ 的图像的画法——描点法

用**描点法**画图像的基本步骤:列表、描点、连线.

(1)列表:选择自变量取值范围内的一些适当的 x 的值,求出相应的 y 值,填入表中.(自变量 x 的值写在第一行,其值从左到右按从小到大的顺序排列)

(2)描点:以表中每对 x 和 y 的值为坐标,在坐标平面内准确描出相应的点.一般地,点取得越多,图像就越准确.

(3)连线:按照自变量的值由小到大的顺序,把所描的点用平滑的曲线连接起来.

2. 二次函数 $y=ax^2$ $(a\neq0)$ 的图像

二次函数 $y=ax^2$ $(a\neq0)$ 的图像是一条抛物线,是轴对称图形,对称轴是 y 轴.对称轴与抛物线的交点叫做抛物线的顶点.

要点精析

用**描点法**画二次函数 $y=ax^2$ $(a\neq0)$ 的图像时,应在顶点的左、右两侧对称地选取自变量 x 的值,然后计算出对应的 y 值.

易错警示

1. 连线画函数图像时,要按自变量从小到大(或从大到小)的顺序用平滑的曲线连接起来,不能用直尺连接相邻的两点.

2. 根据实际问题画二次函数图像时还要考虑自变量的取值范围.

拨考向

典例剖析

考查角度1 画二次函数 $y=ax^2$ $(a\neq0)$ 的图像

例1 在同一平面直角坐标系中,画出下列函数的图像.

(1) $y=2x^2$; (2) $y=\frac{1}{2}x^2$.

导引:利用列表、描点、连线的方法作出两个函数的图像即可.

▸解:列表得:

x	…	-2	-1	0	1	2	…
$y=2x^2$	…	8	2	0	2	8	…
$y=\frac{1}{2}x^2$	…	2	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	2	…

举一反三训练

(答案见203页)

1. 在同一直角坐标系中,画出下列函数的图像,并判断点 $(2.5,-25)$ 在哪个图像上.

(1) $y=4x^2$;

(2) $y=-4x^2$.

宋德基 微信公众号 教辅资料站

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

描点、连线可得图像如图 5.2-1.

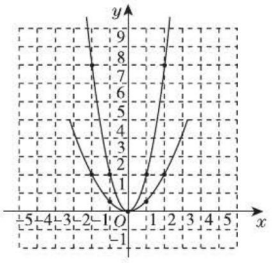


图 5.2-1

考查角度 2　实际问题为背景的二次函数图像的确定(易错点)

例 2 如图 5.2-2,Rt△AOB 中,$AB \perp OB$,且 $AB = OB = 3$,设直线 $x = t$ 截此三角形所得阴影部分的面积为 S,则 S 与 t 之间的函数关系的图像为下列选项中的(　　)

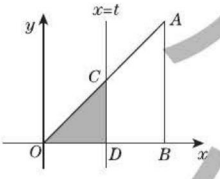
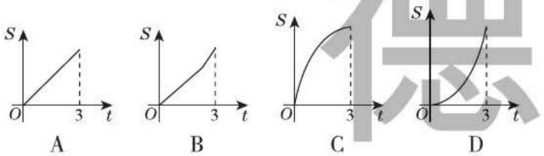


图 5.2-2



A　　B　　C　　D

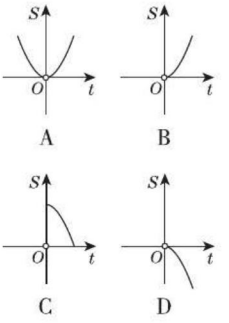
导引:Rt△AOB 中,$AB \perp OB$,且 $AB = OB = 3$,所以很容易求得 $\angle AOB = \angle A = 45°$;再由平行线的性质得出 $\angle OCD = \angle A$,即 $\angle AOD = \angle OCD = 45°$,进而证明 $OD = CD = t$;最后根据三角形的面积公式,得出 S 与 t 之间的函数关系式,由函数关系式选择图像.

∵ Rt△AOB 中,$AB \perp OB$,且 $AB = OB = 3$,∴ $\angle AOB = \angle A = 45°$. ∵ $CD \perp OB$,∴ $CD /\!/ AB$,∴ $\angle OCD = \angle A$,∴ $\angle AOD = \angle OCD = 45°$,∴ $OD = CD = t$,∴ $S_{\triangle OCD} = \frac{1}{2} \times OD \times CD = \frac{1}{2}t^2 (0 \leqslant t \leqslant 3)$,即 $S = \frac{1}{2}t^2 (0 \leqslant t \leqslant 3)$,故选 D.　▶答案:D

点方法

解答这类问题首先应根据题意列出函数关系式,再根据函数自变量取值范围选择合适的图像.

2. 正方形面积 $S(m^2)$ 与边长 $t(m)$ 之间的函数关系可用下图中的哪个来表示(　　)



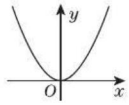
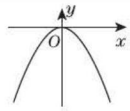
A　　B

C　　D

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

知识点2 二次函数 $y=ax^2(a\neq0)$ 的性质(重点、难点)

点知识 ▶▶▶

$y=ax^2(a\neq0)$	$a>0$	$a<0$
图像		
开口方向	向上	向下
顶点坐标	(0,0)	(0,0)
对称轴	y 轴	y 轴
增减性	当 $x<0$ 时,y 随着 x 的增大而减小. 当 $x>0$ 时,y 随着 x 的增大而增大.	当 $x<0$ 时,y 随着 x 的增大而增大. 当 $x>0$ 时,y 随着 x 的增大而减小.
最值	当 $x=0$ 时,$y_{最小值}=0$	当 $x=0$ 时,$y_{最大值}=0$

拓展:$|a|$ 越大,开口越小,图像两边越靠近 y 轴,$|a|$ 越小,开口越大,图像两边越靠近 x 轴.

考查角度1 二次函数 $y=ax^2(a\neq0)$ 的性质辨析

例3 在同一坐标系中,抛物线 $y=3x^2$,$y=\frac{1}{3}x^2$,$y=-\frac{1}{3}x^2$ 的共同特点是(　　)

A. 关于 y 轴对称,开口向上

B. 关于 y 轴对称,y 随 x 的增大而增大

C. 关于 y 轴对称,y 随 x 的增大而减小

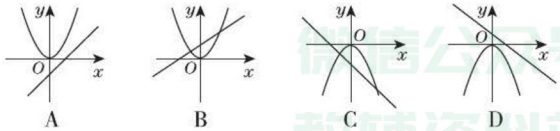
D. 关于 y 轴对称,顶点是原点

导引:先由抛物线表达式中 a 的值确定开口方向,再确定对称轴、顶点,由此即可得出结论.

$\because 3>0$,$\frac{1}{3}>0$,$-\frac{1}{3}<0$,$\therefore$ 三条抛物线有的开口向上,有的开口向下.$\because$ 三条抛物线表达式中 b、c 均为0,$\therefore$ 三条抛物线的对称轴均为 y 轴,且顶点均为原点.故选D. ▶答案:D

考查角度2 图像辨析

例4 函数 $y=ax^2$ 在第一象限内 y 随 x 的减小而减小,则 $y=ax^2$ 与 $y=ax+a$ 在同一直角坐标系中的图像的大致位置是(　　)



A　　B　　C　　D

3. 下列函数中,y 随 x 增大而增大的是(　　)

A. $y=-\frac{3}{x}(x<0)$

B. $y=-x+5$

C. $y=-\frac{1}{2}x$

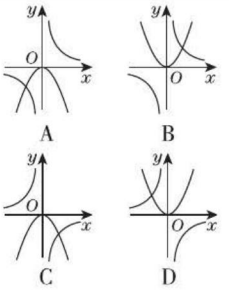
D. $y=\frac{1}{2}x^2(x<0)$

4. 已知 $a<0$,则函数 $y=ax^2$,$y=\frac{a}{x}$ 的图像大致是(　　)

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

导引：先根据二次函数的增减性确定出 $a>0$，然后判断出二次函数的开口方向，再根据一次函数的性质确定出一次函数图像经过的象限及与 y 轴的交点位置，然后判断即可.

∵ 函数 $y=ax^2$ 在第一象限内 y 随 x 的减小而减小，∴ $a>0$，∴ $y=ax^2$ 的图像经过原点且开口方向向上，$y=ax+a$ 的图像经过第一、三象限，且与 y 轴的正半轴相交. 故选 B. ▶答案：B



点方法

解答这类问题一般有两种方法：一种是**分类讨论法**，即对 a 的正负分情况讨论，第二种是**排除法**，即结合每个选项中函数图像确定函数表达式中字母的正负，找出不矛盾的选项.

II 点方法 · 拨技巧 · 探规律

典例剖析

拔尖角度 1　根据性质求值

例 5 已知二次函数 $y=(m^2-1)x^{m^2-2m+2}$.

(1) 当 m 满足什么条件时，在其图像的对称轴左侧，y 随 x 的增大而减小？

(2) 当 m 满足什么条件时，在其图像的对称轴右侧，y 随 x 的增大而减小？

导引：(1) 根据二次函数的定义列出方程求解. 在其图像的对称轴左侧，y 随 x 的增大而减小就说明图像开口向上，$m^2-1>0$.

(2) 根据二次函数的定义列出方程求解. 在其图像的对称轴右侧，y 随 x 的增大而减小就说明图像开口向下，$m^2-1<0$.

▶解：(1) 由题意可知 $m^2-2m+2=2$ 且 $m^2-1>0$，解得 $m=2$.

(2) 由题意可知 $m^2-2m+2=2$ 且 $m^2-1<0$，解得 $m=0$.

点方法

解答这类问题的基本思路是首先根据二次函数的定义求出字母的值，再由二次函数的增减性选取符合条件的值.

拔尖角度 2　求比值

例 6 如图 5.2-3，平行于 x 轴的直线 AC 分别交抛物线 $y_1=x^2(x\geqslant 0)$ 与 $y_2=\frac{x^2}{4}(x\geqslant 0)$ 于 B、C 两点，过点 C 作 y 轴的平行线交抛物线 $y_1=x^2(x\geqslant 0)$ 于点 D，直线 $DE\parallel AC$，交抛物线 $y_2=\frac{x^2}{4}(x\geqslant 0)$ 于点 E，则 $\frac{DE}{AB}=$ (　　)

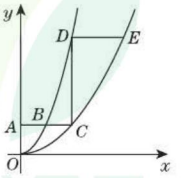


图 5.2-3

A. 2　　B. $\sqrt{2}$　　C. $\sqrt{5}$　　D. 3

举一反三训练

(答案见 203 页)

5. 已知二次函数 $y=(2-a)x^{a^2-3}$，在其图像对称轴的左侧，y 随 x 的增大而减小，则 a 的值为(　　)

A. $\sqrt{5}$　　B. $\pm\sqrt{5}$

C. $-\sqrt{5}$　　D. 0

6. 如图，过 y 轴上一点 $A(0,1)$ 作 AC 平行于 x 轴，交抛物线 $y=x^2(x\geqslant 0)$ 于点 B，交抛物线 $y=\frac{1}{4}x^2(x\geqslant 0)$ 于点 C；过点 C 作 CD 平行于 y 轴，交抛物线 $y=x^2(x\geqslant 0)$ 于

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

导引:设 A 点坐标为 $(0,a)$,利用两个函数表达式求出点 B、C 的坐标,然后求出 AB 的长度,再根据 $CD\parallel y$ 轴,利用 $y_1=x^2(x\geqslant 0)$ 求出点 D 的坐标,然后利用 $y_2=\frac{x^2}{4}(x\geqslant 0)$ 求出点 E 的坐标,从而得到 DE 的长度,最后求出比值即可得解.

设 A 点坐标为 $(0,a)(a>0)$,

则 $x^2=a$,解得 $x=\sqrt{a}$(负值舍去),$\therefore$ 点 $B(\sqrt{a},a)$,

$\frac{x^2}{4}=a$,解得 $x=2\sqrt{a}$(负值舍去),$\therefore$ 点 $C(2\sqrt{a},a)$.

$\because CD\parallel y$ 轴,$\therefore$ 点 D 的横坐标与点 C 的横坐标相同,为 $2\sqrt{a}$,

$\therefore y_1=(2\sqrt{a})^2=4a$,$\therefore$ 点 D 的坐标为 $(2\sqrt{a},4a)$.

$\because DE\parallel AC$,$\therefore$ 点 E 的纵坐标为 $4a$,$\therefore \frac{x^2}{4}=4a$,

$\therefore x=4\sqrt{a}$(负值舍去),$\therefore$ 点 E 的坐标为 $(4\sqrt{a},4a)$,

$\therefore DE=4\sqrt{a}-2\sqrt{a}=2\sqrt{a}$,又$\because AB=\sqrt{a}$,$\therefore \frac{DE}{AB}=\frac{2\sqrt{a}}{\sqrt{a}}=2$,故选 A.

▶答案:A

点方法

本题考查了二次函数图像上点的坐标特征,根据平行于 x 轴的直线上的点的纵坐标相同,平行于 y 轴的直线上的点的横坐标相同,用点 A 的纵坐标表示出各点的坐标是解题的关键.

拔尖角度3 二次函数与一次函数综合题(高频考点)

例7 已知直线 $y=ax+b$ 上有两点 A、B,它们的横坐标分别是 3、-1,若二次函数 $y=\frac{1}{3}x^2$ 的图像经过 A、B 两点.

(1)请求出一次函数的表达式;

(2)设二次函数图像的顶点为 C,求 $\triangle ABC$ 的面积.

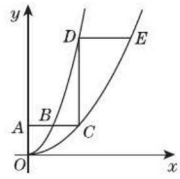
导引:(1)已知二次函数的表达式,且其图像经过 A、B 两点,因此 A、B 两点坐标可求,求出两点坐标后,代入 $y=ax+b$ 即可求出一次函数的表达式. 对于(2),画出一次函数和二次函数的图像,观察发现 $\triangle ABC$ 三边长均未知,因此考虑用间接法求其面积.

▶解:(1)设 A 点坐标为 $(3,m)$,B 点坐标为 $(-1,n)$.

因为 A、B 两点在函数 $y=\frac{1}{3}x^2$ 的图像上,所以 $m=\frac{1}{3}\times 9=3$,$n=\frac{1}{3}\times 1=\frac{1}{3}$. 所以 $A(3,3)$,$B\left(-1,\frac{1}{3}\right)$.

因为 A、B 两点在直线 $y=ax+b$ 上,所以 $\begin{cases}3=3a+b,\\ \frac{1}{3}=-a+b.\end{cases}$

点 D;过点 D 作 DE 平行于 x 轴,交抛物线 $y=\frac{1}{4}x^2(x\geqslant 0)$ 于点 E.



(第6题图)

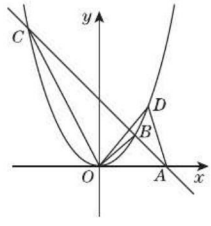
(1)求 $\frac{AB}{BC}$.

(2)判断 O、B、E 三点是否在同一直线上?如果在,写出直线的表达式;如果不在,请说明理由.

7. 如图,直线 AB 过 x 轴上的点 $A(2,0)$,且与抛物线 $y=x^2$ 相交于 B、C 两点,已知点 B 的坐标是 $(1,1)$.

(1)求直线 AB 的函数表达式;

(2)如果在第一象限,抛物线上有一点 D,使得 $S_{\triangle OAD}=S_{\triangle OBC}$,求 D 点坐标.



(第7题图)

微信公众号 教辅资料站

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

解得$\begin{cases}a=\frac{2}{3},\\ b=1.\end{cases}$所以一次函数的表达式是$y=\frac{2}{3}x+1$.

(2)如图5.2-4,设直线AB与x轴的交点为D,则D点坐标为$\left(-\frac{3}{2},0\right)$,

所以$DC=\frac{3}{2}$,所以$S_{\triangle ABC}=S_{\triangle ADC}-S_{\triangle BDC}=\frac{1}{2}\times\frac{3}{2}\times3-\frac{1}{2}\times\frac{3}{2}\times\frac{1}{3}=\frac{9}{4}-\frac{1}{4}=2$.

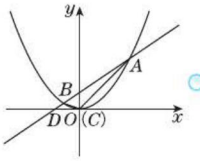


图5.2-4

点方法

坐标系中求面积问题,仍然要依据图形面积公式.对于不能直接应用公式求解的,可以运用**转化思想**,转化为若干个图形面积的和差问题.

Ⅲ 练基础 · 练方法 · 练技巧 (答案见204页)

基础巩固练

1. 关于二次函数$y=-2x^2$的图像和性质,下列说法中正确的是(　　)

A. 开口方向向上

B. 当$x>1$时,y随x的增大而增大

C. 顶点坐标是(0,0)

D. 当$x=0$时,y有最小值是0

2. 对于抛物线$y=4x^2$,$y=-4x^2$和$y=\frac{1}{4}x^2$,下列说法中正确的是(　　)

A. 开口都向上,且都关于y轴对称

B. 开口都向上,且都关于x轴对称

C. 顶点都是原点,且都关于y轴对称

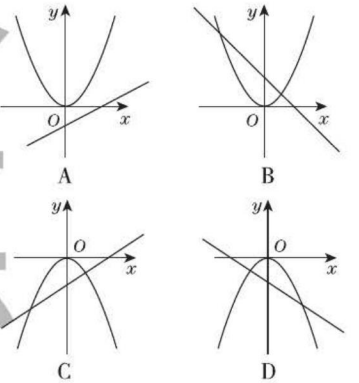
D. 顶点都是原点,且都关于x轴对称

3. 已知点$A(-3,y_1)$,$B(-1,y_2)$,$C(2,y_3)$在抛物线$y=\frac{2}{3}x^2$上,则y_1、y_2、y_3的大小关系是(　　)

A. $y_1<y_2<y_3$　　B. $y_3<y_2<y_1$

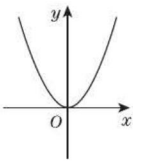
C. $y_1<y_3<y_2$　　D. $y_2<y_3<y_1$

4. 当$ab>0$时,$y=ax^2$与$y=ax+b$的图像大致是(　　)



5. 已知二次函数$y=ax^2$与一次函数$y=3x-4$的图像都过点$A(b,2)$,则$a=$_____.

6. 二次函数$y=(k+1)x^2$的图像如图所示,则k的取值范围为_____.【导学号7367677】



(第6题图)

7. 已知抛物线$y=\frac{1}{2}ax^2$与直线$y=2x-3$交于点$P(1,m)$.

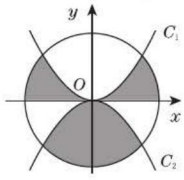
关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

(1)求抛物线的表达式,并指出当 x 取何值时,y 随 x 的增大而增大;

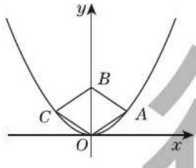
(2)此抛物线与直线还有另外的交点吗?若有,请求出其坐标;若没有,说明理由.

能力提升练

8. 如图,$\odot O$ 的半径为 2,C_1 是函数 $y=\frac{1}{2}x^2$ 的图像,C_2 是函数 $y=-\frac{1}{2}x^2$ 的图像,则阴影部分的面积是_____.



(第8题图)



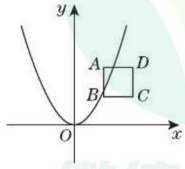
(第9题图)

9. 如图,菱形 $OABC$ 的顶点 O、A、C 在抛物线 $y=\frac{1}{3}x^2$ 上,其中点 O 为坐标原点,对角线 OB 在 y 轴上,且 $OB=2$. 则菱形 $OABC$ 的面积是_____.

10. 如图,一条抛物线 $y=ax^2$ 与四条直线 $x=1$,$x=2$,$y=1$,$y=2$ 围成的正方形 $ABCD$ 有公共点.

(1)求 a 的取值范围;

(2)若 a 为整数,求二次函数的表达式.

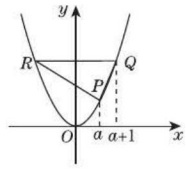


(第10题图)

11. 已知 P,Q,R 是抛物线 $y=x^2$ 上不同的三点,设 P,Q 的横坐标分别为 a,$a+1$($a>0$),R 与 Q 是关于 y 轴对称的两点.

(1)求 $\triangle PQR$ 的面积 S 关于 a 的关系式;

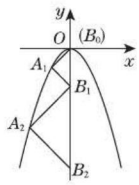
(2)当 $\triangle PQR$ 的面积 S 等于 28 时,求 a 的值.



(第11题图)

思维拓展练

12. 如图,点 A_1、A_2、A_3、…、A_n 在抛物线 $y=-x^2$ 上,点 B_0、B_1、B_2、B_3、…、B_n 在 y 轴上(点 B_0 与坐标原点 O 重合),若 $\triangle A_1B_0B_1$、$\triangle A_2B_1B_2$、…、$\triangle A_nB_{n-1}B_n$ 都为等腰直角三角形,求 $A_{2019}B_{2018}$ 的长.



(第12题图)

我的错题笔记

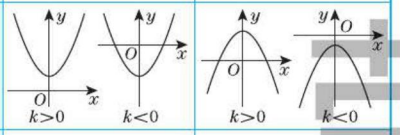
关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

5.2.2 二次函数 $y=ax^2+k$, $y=a(x+h)^2$, $y=a(x+h)^2+k(a\neq0)$ 的图像及其性质

1 点知识 · 拨考向 · 诊误区

知识点 1 二次函数 $y=ax^2+k(a\neq0)$ 的图像和性质(重点)

点知识

$y=ax^2+k$	$a>0$	$a<0$
图像		
开口	开口向上	开口向下
	a 的绝对值越大,开口越小	
对称性	关于 y 轴对称	
顶点	$(0,k)$	
	顶点是最低点	顶点是最高点
增减性	在对称轴左侧递减 在对称轴右侧递增	在对称轴左侧递增 在对称轴右侧递减

要点精析 ///

1. 平移规律:$y=ax^2+k(a\neq0)$ 的图像可由 $y=ax^2(a\neq0)$ 的图像上下平移得到,可以概括为"上加下减":

$$y=ax^2 \xrightarrow[\text{当 } k<0 \text{ 时,向下平移 } |k| \text{ 个单位长度}]{\text{当 } k>0 \text{ 时,向上平移 } k \text{ 个单位长度}} y=ax^2+k$$

2. 当 $a>0$ 时,抛物线开口向上,图像有最低点,当 $x=0$ 时,$y_{最小值}=k$;
当 $a<0$ 时,抛物线开口向下,图像有最高点,当 $x=0$ 时,$y_{最大值}=k$.

拨考向

典例剖析

考查角度 1 二次函数的平移

例 1 将抛物线 $y=-2x^2-1$ 向上平移 $\frac{3}{2}$ 个单位长度后,得到的抛物线的表达式是_____.

导引:根据上加下减的规律,直接在函数表达式上加 $\frac{3}{2}$ 可得新函数的表达式.

∵ 函数 $y=-2x^2-1$ 的图像向上平移 $\frac{3}{2}$ 个单位长度.

∴ $y=-2x^2-1+\frac{3}{2}$,即 $y=-2x^2+\frac{1}{2}$. ▶答案:$y=-2x^2+\frac{1}{2}$

考查角度 2 确定顶点坐标、对称轴

例 2 抛物线 $y=-2x^2-5$ 的开口方向_____,对称轴是_____,顶点坐标是_____.

导引:直接利用抛物线表达式进行求解即可.

举一反三训练

(答案见 205 页)

1. 将抛物线 $y=x^2-3$ 向上平移一个单位长度后,得到的新抛物线的表达式是_____.

2. 抛物线 $y=3x^2+5$ 的开口向_____,对称轴是_____,顶点坐标

素德基 微信公众号 教辅资料站

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

∵ $y=-2x^2-5$，∴ $a=-2<0$，$c=-5$，∴ 抛物线开口向下，对称轴为 y 轴，顶点坐标为 $(0,-5)$. ▶答案：向下；y 轴；$(0,-5)$

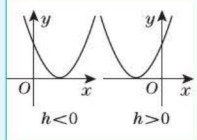
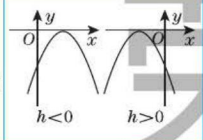
点方法

二次函数 $y=ax^2+c$ 的有关性质是解题的关键，即图像的开口方向与 a 的符号有关，对称轴为 y 轴，顶点坐标为 $(0,c)$.

是_____，函数有最_____值是_____.

知识点2 二次函数 $y=a(x+h)^2(a\neq0)$ 的图像和性质

点知识

$y=a(x+h)^2$	$a>0$	$a<0$
图像		
开口	开口向上	开口向下
	a 的绝对值越大，开口越小	
对称轴	直线 $x=-h$	
顶点	$(-h,0)$	
	顶点是最低点	顶点是最高点
增减性	在对称轴左侧递减 在对称轴右侧递增	在对称轴左侧递增 在对称轴右侧递减

要点精析

1. 平移规律：$y=a(x+h)^2(a\neq0)$ 的图像可由 $y=ax^2(a\neq0)$ 的图像左右平移得到，可以概括为“左加右减”：

$$y=ax^2 \xrightarrow[\text{当 } h<0 \text{ 时，向右平移 } |h| \text{ 个单位长度}]{\text{当 } h>0 \text{ 时，向左平移 } h \text{ 个单位长度}} y=a(x+h)^2$$

2. 当 $a>0$ 时，抛物线开口向上，图像有最低点，当 $x=-h$ 时，$y_{\text{最小值}}=0$；

当 $a<0$ 时，抛物线开口向下，图像有最高点，当 $x=-h$ 时，$y_{\text{最大值}}=0$.

考查角度1 二次函数 $y=a(x+h)^2(a\neq0)$ 的图像及性质

例3 抛物线 $y=-3(x-1)^2$ 的开口方向_____，对称轴是_____，顶点坐标是_____.

导引：根据顶点式求抛物线的开口方向，对称轴及顶点坐标.

由 $y=-3(x-1)^2$ 可知，二次项系数为 $-3<0$，∴ 抛物线开口方向向下，对称轴为直线 $x=1$，顶点坐标为 $(1,0)$.

▶答案：向下；直线 $x=1$；$(1,0)$

3. 已知二次函数 $y=(x-1)^2$，当 x _____ 时，y 随 x 的增大而增大.

考查角度2 图像的平移

例4 将二次函数 $y=2(x-1)^2$ 的图像向右平移2个单位长度，得到的图像的函数表达式是_____.

导引：可根据二次函数图像的平移规律左加右减进行解答.

将二次函数 $y=2(x-1)^2$ 的图像向右平移2个单位长度，得到的图像的函数表达式是 $y=2(x-1-2)^2$，即 $y=2(x-3)^2$.

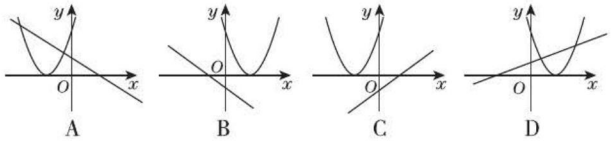
▶答案：$y=2(x-3)^2$

4. 把抛物线 $y=4(x-2)^2$ 向_____平移_____个单位长度，就得到函数 $y=4(x+2)^2$ 的图像.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

考查角度3　图像辨析

例5 同一坐标系中，抛物线 $y=(x-a)^2$ 与直线 $y=a+ax$ 的图像可能是(　　)



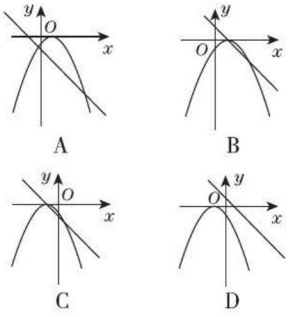
A　B　C　D

导引：可先根据一次函数的图像判断 a 的符号，再根据二次函数的图像判断 a 的符号，看是否相符.

A. 由一次函数 $y=a+ax$ 的图像可得 $a<0$ 且 $a>0$，矛盾，故错误；B. 由一次函数 $y=a+ax$ 的图像可得 $a<0$，二次函数 $y=(x-a)^2$ 的图像的顶点为 $(a,0)$，$a>0$，矛盾，故错误；C. 由一次函数 $y=a+ax$ 的图像可得 $a<0$ 且 $a>0$，矛盾，故错误；D. 由一次函数 $y=a+ax$ 的图像可得 $a>0$，二次函数 $y=(x-a)^2$ 的图像的顶点为 $(a,0)$，$a>0$，故正确；故选 D.

▶答案：D

5. 在直角坐标系中，函数 $y=-x+1$ 与 $y=-\frac{1}{2}(x-1)^2$ 的图像大致是(　　)



A　B　C　D

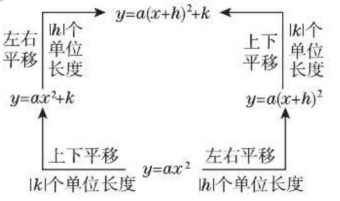
知识点3　二次函数 $y=a(x+h)^2+k(a\neq0)$ 的图像和性质(重点)

点知识

抛物线	$y=a(x+h)^2+k(a>0)$	$y=a(x+h)^2+k(a<0)$
开口方向	向上	向下
对称轴	直线 $x=-h$	直线 $x=-h$
顶点坐标	$(-h,k)$	$(-h,k)$
增减性	在对称轴的左侧，y 随着 x 的增大而减小. 在对称轴的右侧，y 随着 x 的增大而增大.	在对称轴的左侧，y 随着 x 的增大而增大. 在对称轴的右侧，y 随着 x 的增大而减小.
最值	当 $x=-h$ 时，最小值为 k.	当 $x=-h$ 时，最大值为 k.

要点精析

1. 平移规律：$y=a(x+h)^2+k(a\neq0)$ 的图像可由 $y=ax^2(a\neq0)$ 的图像上下左右平移得到，可以概括为“上加下减，左加右减”：



2. 通常把 $y=a(x+h)^2+k(a\neq0)$ 称为二次函数的顶点式.

考查角度1　图像的平移

例6 [中考 · 襄阳]将抛物线 $y=2(x-4)^2-1$ 先向左平移4个单位长度，再向上平移2个单位长度，平移后所得抛物线的表达式为(　　)

A. $y=2x^2+1$　　B. $y=2x^2-3$

C. $y=2(x-8)^2+1$　　D. $y=2(x-8)^2-3$

导引：根据平移的规律即可得到平移后抛物线的表达式.

抛物线 $y=2(x-4)^2-1$ 先向左平移4个单位长度，得到的抛

6. 将抛物线 $y=3(x+2)^2-4$ 向左平移3个单位长度，再向下平移4个单位长度，那么得到的抛物线的表达式为_____.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

物线为 $y=2(x-4+4)^2-1$，即 $y=2x^2-1$，再向上平移 2 个单位长度得到的抛物线为 $y=2x^2-1+2$，即 $y=2x^2+1$. 故选 A.

▶答案：A

考查角度 2　二次函数 $y=a(x+h)^2+k(a\neq0)$ 的性质

例 7 对于抛物线 $y=-(x+2)^2+3$，下列结论中正确结论的个数为(　　)

①抛物线的开口向下；②对称轴是直线 $x=-2$；

③图像不经过第一象限；④当 $x>2$ 时，y 随 x 的增大而减小.

A. 4　　B. 3　　C. 2　　D. 1

导引：根据抛物线的表达式可求得其开口方向、对称轴，则可判断①、②，由表达式可求得抛物线的顶点坐标及与 x 轴的交点坐标，则可判断③；利用抛物线的对称轴及开口方向可判断④；则可求得答案.

∵ $y=-(x+2)^2+3$，∴ 抛物线开口向下，对称轴为直线 $x=-2$，故①、②都正确；在 $y=-(x+2)^2+3$ 中，令 $y=0$ 可求得 $x=-2+\sqrt{3}<0$，或 $x=-2-\sqrt{3}<0$，∴ 抛物线不经过第一象限，故③正确；∵ 抛物线开口向下，对称轴为直线 $x=-2$，∴ 当 $x>-2$ 时，y 随 x 的增大而减小，∴ 当 $x>2$ 时，y 随 x 的增大而减小，故④正确. 综上可知正确的结论有 4 个，故选 A.

▶答案：A

7. 关于二次函数 $y=2(x+1)^2-3$，下列说法正确的是(　　)

A. 图像与 y 轴的交点坐标为 $(0,1)$

B. 图像的对称轴在 y 轴的右侧

C. 当 $x<0$ 时，y 的值随 x 值的增大而减小

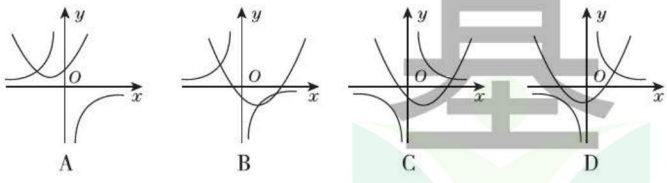
D. y 的最小值为 -3

II 点方法 · 拨技巧 · 探规律

典例剖析

拔尖角度 1　二次函数图像与系数的关系

例 8 如图，函数 $y=(x-1)^2+k$ 与 $y=\frac{k}{x}$（k 是非零常数）的图像在同一坐标系中大致是(　　)



导引：利用二次函数和反比例函数的图像与系数的关系判断.

函数 $y=(x-1)^2+k$ 的图像的对称轴为直线 $x=1$，所以 A，D 错. 对于选项 B，由反比例函数图像得 $k<0$，且抛物线的顶点在 x 轴下方，所以 B 可存在；对于 C 选项，由反比例函数图像得 $k>0$，而由抛物线得 $k<0$，所以 C 错. 故选 B.

▶答案：B

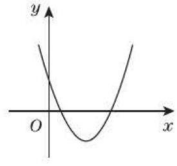
点方法

解答这类图像辨析题的基本方法是**分类讨论法**或**排除法**.

举一反三训练

(答案见 205 页)

8. 二次函数 $y=a(x+m)^2+n$ 的图像如图，则一次函数 $y=mx+n$ 的图像不经过(　　)



(第 8 题图)

A. 第一象限

B. 第二象限

C. 第三象限

D. 第四象限

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

拔尖角度2　求平移后阴影部分面积(易错点)

例9 [中考 · 盐城] 如图5.2-5,将函数 $y=\frac{1}{2}(x-2)^2+1$ 的图像沿 y 轴向上平移得到一条新图像,其中点 $A(1,m)$,$B(4,n)$ 平移后的对应点分别为点 A'、B'. 若曲线段 AB 扫过的面积为9(图中的阴影部分),则新图像的函数表达式是(　　)

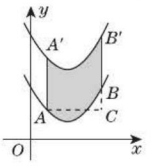


图5.2-5

A. $y=\frac{1}{2}(x-2)^2-2$　B. $y=\frac{1}{2}(x-2)^2+7$

C. $y=\frac{1}{2}(x-2)^2-5$　D. $y=\frac{1}{2}(x-2)^2+4$

导引:先根据二次函数图像上点的坐标特征求出 A、B 两点的坐标,再过 A 作 $AC\parallel x$ 轴,交 $B'B$ 的延长线于点 C,则 $C\left(4,1\frac{1}{2}\right)$,$AC=4-1=3$,根据平移的性质以及曲线段 AB 扫过的面积为9(图中的阴影部分),得出 $AA'=3$,然后根据平移规律即可求解.

∵ 函数 $y=\frac{1}{2}(x-2)^2+1$ 的图像过点 $A(1,m)$,$B(4,n)$,

∴ $m=\frac{1}{2}(1-2)^2+1=1\frac{1}{2}$,$n=\frac{1}{2}(4-2)^2+1=3$,

∴ $A\left(1,1\frac{1}{2}\right)$,$B(4,3)$. 如图5.2-5,过 A 作 $AC\parallel x$ 轴,交 $B'B$ 的延长线于点 C,则 $C\left(4,1\frac{1}{2}\right)$,∴ $AC=4-1=3$. ∵ 曲线段 AB 扫过的面积为9(图中的阴影部分),∴ $AC\cdot AA'=3AA'=9$,∴ $AA'=3$,

即将函数 $y=\frac{1}{2}(x-2)^2+1$ 的图像沿 y 轴向上平移3个单位长度得到一条新图像,

∴ 新图像的函数表达式是 $y=\frac{1}{2}(x-2)^2+4$. 故选D. ▶答案:D

点方法

解答这类不规则图形面积问题的基本思路是等积转化,将不规则图形转化为规则图形,再计算.

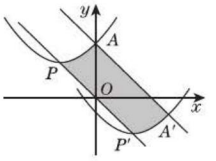
拔尖角度3　最大值、最小值的讨论

例10 已知关于 x 的二次函数 $y=(x-h)^2+3$,当 $1\leqslant x\leqslant 3$ 时,函数有最小值 $2h$,则 h 的值为_____.

导引:依据二次函数的增减性分 $1\leqslant h\leqslant 3$、$h<1$、$h>3$ 三种情况,由函数的最小值列出关于 h 的方程,解之可得.

∵ $y=(x-h)^2+3$ 中 $a=1>0$,∴ 当 $x<h$ 时,y 随 x 的增大而

9. [中考 · 阿坝州] 如图,抛物线的顶点为 $P(-2,2)$,与 y 轴交于点 $A(0,3)$. 若平移该抛物线使其顶点 P 沿直线移动到点 $P'(2,-2)$,点 A 的对应点为 A',则抛物线上 PA 段扫过的区域(阴影部分)的面积为_____.



(第9题图)

10. 当 $2.5\leqslant x\leqslant 5$ 时,二次函数 $y=-(x-1)^2+2$ 的最大值为_____.

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

减小；当 $x>h$ 时，y 随 x 的增大而增大.

①若 $1\leqslant h\leqslant 3$，则当 $x=h$ 时，函数取得最小值 3，即 $2h=3$，解得 $h=\frac{3}{2}$；

②若 $h<1$，则在 $1\leqslant x\leqslant 3$ 范围内，当 $x=1$ 时，函数取得最小值 $2h$，即 $(1-h)^2+3=2h$，解得 $h=2$（舍去）；

③若 $h>3$，则在 $1\leqslant x\leqslant 3$ 范围内，当 $x=3$ 时，函数取得最小值 $2h$，即 $(3-h)^2+3=2h$，解得 $h=6$ 或 $h=2$（舍去）.

故答案为 $\frac{3}{2}$ 或 6.

▶答案：$\frac{3}{2}$ 或 6

点方法

解答这类问题关键是根据二次函数增减性，结合图像的对称轴分类讨论.

Ⅲ 练基础·练方法·练技巧 ☞（答案见 205 页）

基础巩固练

1. 下列关于二次函数 $y=-2(x-2)^2+1$ 的叙述，其中错误的是（　　）

A. 图像的开口向下

B. 图像的对称轴是直线 $x=2$

C. 此函数有最小值是 1

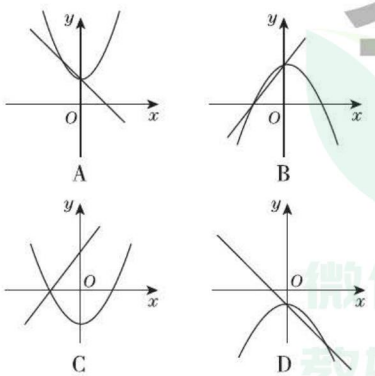
D. 当 $x>2$ 时，y 随 x 的增大而减小

2. 在平面直角坐标系中，将抛物线 $y=(x+1)^2$ 向右平移 2 个单位长度，再向下平移 4 个单位长度，得到的抛物线表达式是（　　）

A. $y=(x-2)^2-4$　　B. $y=(x-1)^2-4$

C. $y=(x-2)^2-3$　　D. $y=(x-1)^2-3$

3. 在同一坐标系内，二次函数 $y=ax^2+b$ 与 $y=ax+b(ab\neq 0)$ 的大致图像是（　　）



4. 若抛物线 $y=(x-m)^2+(m+1)$ 的顶点在第一象限，则 m 的取值范围为（　　）

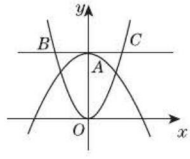
A. $m>1$　　B. $m>0$

C. $m>-1$　　D. $-1<m<0$

5. 抛物线 $y=3(x+1)^2-3$ 的顶点坐标是_____.

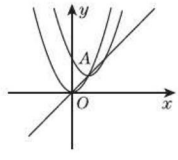
6. 如果抛物线 $y=(a+1)x^2-4$ 有最高点，那么 a 的取值范围是_____.

7. 如图，抛物线 $y=ax^2+1$ 与 y 轴交于点 A，过点 A 且与 x 轴平行的直线交抛物线 $y=4x^2$ 于点 B、C，则线段 BC 的长为_____.



（第 7 题图）

8. 如图，把抛物线 $y=x^2$ 沿直线 $y=x$ 平移 $\sqrt{2}$ 个单位长度后，其顶点在直线上的 A 处，则平移后抛物线的表达式是_____.



（第 8 题图）

荣德基
微信公众号 教辅资料站

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

9. 说出下列抛物线的开口方向、对称轴和顶点：

(1) $y=2(x+3)^2+5$；

(2) $y=-3(x-1)^2-2$；

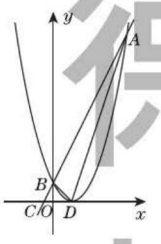
(3) $y=4(x-3)^2+7$；

(4) $y=-5(x+2)^2-6$.

10. 如图，已知抛物线 $y=(x-1)^2$ 与直线 $y=2x+1$ 相交于 A、B 两点，直线 $y=2x+1$ 与 x 轴交于点 C，抛物线 $y=(x-1)^2$ 的顶点为 D，

(1) 求抛物线与直线的交点坐标；

(2) 求 $S_{\triangle ABD}$.



(第10题图)

能力提升练

11. 在平面直角坐标系 xOy 中，如果抛物线 $y=2x^2$ 不动，而把 x 轴、y 轴分别向下、向左平移2个单位长度，则在新坐标系下抛物线的表达式为(　　)

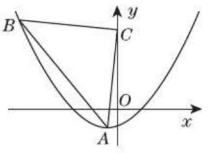
A. $y=2(x+2)^2-2$

B. $y=2(x+2)^2+2$

C. $y=2(x-2)^2-2$

D. $y=2(x-2)^2+2$

12. 已知，抛物线 $y=\frac{1}{8}(x+1)^2-2$ 的顶点为 A，点 B 在抛物线上，以 AB 为斜边作等腰直角三角形，直角顶点 C 在 y 轴上，求 C 点坐标.



(第12题图)

思维拓展练

13. 已知抛物线 C：$y_1=a(x-h)^2-1$，直线 l：$y_2=kx-kh-1$.

(1) 求证：直线 l 恒过抛物线 C 的顶点；

(2) 当 $a=1$，$2\leqslant x\leqslant m$ 时，$y_1\leqslant x-3$ 恒成立，求 m 的最大值；

(3) 当 $0<a\leqslant 1$，$k>0$ 时，若在直线 l 下方的抛物线 C 上至少存在三个横坐标为整数的点，求 k 的取值范围.

我的错题笔记

荣德基
微信公众号
教辅资料站

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

5.2.3 二次函数 $y=ax^2+bx+c(a\neq0)$ 的图像及其性质

1 点知识·拨考向·诊误区

知识点1 二次函数 $y=ax^2+bx+c(a\neq0)$ 与二次函数 $y=a(x+h)^2+k(a\neq0)$ 的关系

点知识

1. 运用**配方法**，可以将二次函数 $y=ax^2+bx+c$（一般式）转化为 $y=a(x+h)^2+k$（顶点式）的形式，则 $h=\frac{b}{2a}$，$k=\frac{4ac-b^2}{4a}$.
2. 在二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 与二次函数 $y=a(x+h)^2+k$ 中，a,b,c,h,k 这几个参数都有其不同的含义和作用，都会对函数图像产生影响. 学习这部分知识时，应紧密结合函数图像，仔细体会函数图像与函数表达式中各参数的关系.
3. 抛物线 $y=ax^2+bx+c(a\neq0)$ 的顶点坐标是 $\left(-\frac{b}{2a},\frac{4ac-b^2}{4a}\right)$，对称轴是直线 $x=-\frac{b}{2a}$，这是通过配方法得到的，可以直接作为公式套用，但在使用时应先将二次函数化为一般形式.

易错警示

二次函数配方不同于解一元二次方程的配方，二次函数配方是提取二次项系数，而解一元二次方程配方是方程两边同时除以二次项系数.

拨考向

典例剖析

考查角度1 利用配方法将一般式化为顶点式

例1 用配方法把二次函数 $y=-2x^2+6x+4$ 化为 $y=a(x+m)^2+k$ 的形式，再指出该函数图像的开口方向、对称轴和顶点坐标.

导引：利用**配方法**把一般式化为顶点式，根据二次函数的性质解答.



▶解：$y=-2x^2+6x+4$

$=-2\left(x^2-3x+\frac{9}{4}\right)+4+\frac{9}{2}$,

$=-2\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{17}{2}=-2\left[x+\left(-\frac{3}{2}\right)\right]^2+\frac{17}{2}$,

图像的开口向下，对称轴为直线 $x=\frac{3}{2}$，顶点坐标为 $\left(\frac{3}{2},\frac{17}{2}\right)$.

考查角度2 确定二次函数 $y=ax^2+bx+c(a\neq0)$ 图像的顶点坐标

例2 分别根据配方法和顶点坐标公式确定下列二次函数图像的顶点坐标.

(1) $y=2x^2-4x-1$（配方法）；(2) $y=-3x^2+6x-2$（公式法）.

举一反三训练

（答案见206页）

1. 将 $y=(2x-1)(x+2)$ 化成 $y=a(x+m)^2+n$ 的形式为（　　）

A. $y=2\left(x+\frac{3}{4}\right)^2-\frac{25}{16}$

B. $y=2\left(x-\frac{3}{4}\right)^2-\frac{17}{8}$

C. $y=2\left(x+\frac{3}{4}\right)^2-\frac{25}{8}$

D. $y=2\left(x+\frac{3}{4}\right)^2+\frac{17}{8}$

2. 求二次函数图像的顶点坐标和对称轴.

(1) 用配方法：$y=3x^2-6x+2$；

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

导引:(1)根据**配方法**整理成顶点式形式,然后写出顶点坐标即可;

(2)写出a、b、c的值,然后利用公式法求出顶点的横坐标与纵坐标,再写出顶点坐标即可.

▶解:(1)$y=2x^2-4x-1=2(x^2-2x+1)-2-1=2(x-1)^2-3$,图像的顶点坐标为$(1,-3)$;

(2)$a=-3,b=6,c=-2$,则$-\frac{b}{2a}=-\frac{6}{2\times(-3)}=1$,

$\frac{4ac-b^2}{4a}=\frac{4\times(-3)\times(-2)-6^2}{4\times(-3)}=1$,

图像的顶点坐标为$(1,1)$.

(2)用公式法:$y=-5x^2+80x-319$.

知识点 2 二次函数$y=ax^2+bx+c(a\neq0)$的性质(重点)



点知识

	$y=ax^2+bx+c(a>0)$	$y=ax^2+bx+c(a<0)$
抛物线		
顶点坐标	$\left(-\frac{b}{2a},\frac{4ac-b^2}{4a}\right)$	$\left(-\frac{b}{2a},\frac{4ac-b^2}{4a}\right)$
对称轴	直线$x=-\frac{b}{2a}$	直线$x=-\frac{b}{2a}$
位置	由a,b和c的符号确定	由a,b和c的符号确定
开口方向	向上	向下
增减性	在对称轴的左侧,y随着x的增大而减小. 在对称轴的右侧,y随着x的增大而增大.	在对称轴的左侧,y随着x的增大而增大. 在对称轴的右侧,y随着x的增大而减小.
最值	当$x=-\frac{b}{2a}$时, 最小值为$\frac{4ac-b^2}{4a}$	当$x=-\frac{b}{2a}$时, 最大值为$\frac{4ac-b^2}{4a}$

要点精析 ///

二次函数$y=ax^2+bx+c(a\neq0)$的图像与系数的关系

字母	图像的特征	字母的特征
a	开口向上	$a>0$
	开口向下	$a<0$
b	对称轴是y轴	$b=0$
	对称轴在y轴左侧	a、b同号
	对称轴在y轴右侧	a、b异号
c	经过原点	$c=0$
	与y轴的正半轴相交	$c>0$
	与y轴的负半轴相交	$c<0$

易错警示 ///

二次函数$y=ax^2+bx+c$的图像的对称轴是直线$x=-\frac{b}{2a}$,而不是直线$x=\frac{b}{2a}$.

考查角度 1 二次函数的性质

例 3 对于二次函数$y=2(x+1)(x-3)$,下列说法正确的是(　　)

A. 图像开口向下

B. 图像的对称轴是直线$x=-1$

C. $x>1$时,y随x的增大而减小

D. $x<1$时,y随x的增大而减小

3. 二次函数$y=x^2+5x+6$,下列说法正确的是(　　)

A. 抛物线的开口向下

B. 当$x>-3$时,y随x的增大而增大

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

导引：先把二次函数化为顶点式的形式，再根据二次函数的性质进行解答.

二次函数 $y=2(x+1)(x-3)$ 可化为 $y=2(x-1)^2-8$，

∵ 此二次函数中 $a=2>0$，

∴ 抛物线开口向上，对称轴为直线 $x=1$，

∴ 当 $x>1$ 时，y 随 x 的增大而增大，当 $x<1$ 时，y 随 x 的增大而减小，故选 D.

▶答案：D

点方法

根据题意把二次函数化为顶点式的形式是解答此题的关键.

考查角度2 求最大值、最小值

例4 二次函数 $y=x^2-2x-5$ 的最小值是_____.

导引：利用二次函数的顶点式求最小(大)值.

∵ 二次函数可化为 $y=x^2-2x+1-6=(x-1)^2-6$，∴ 最小值为 -6.

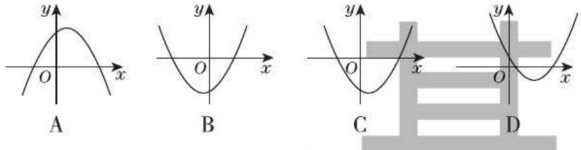
▶答案：-6

点方法

此题考查二次函数的最值，求二次函数的最大(小)值有三种方法，第一种可由图像直接得出，第二种是**配方法**，第三种是**公式法**.

考查角度3 根据 a、b、c 的符号确定图像的位置

例5 如果在二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 中，$a>0$，$b<0$，$c<0$，那么这个二次函数的图像可能是(　　)



导引：由 $a>0$，$b<0$，$c<0$，可推出抛物线开口向上，对称轴在 y 轴的右边，交 y 轴于负半轴，即可判断.

∵ $a>0$，∴ 抛物线开口向上，∵ $a>0$，$b<0$，∴ $-\dfrac{b}{2a}>0$，∴ 对称轴在 y 轴的右边. ∵ $c<0$，∴ 抛物线交 y 轴于负半轴，故选 C.

▶答案：C

点方法

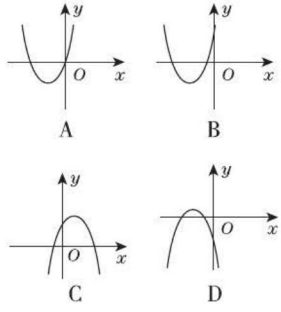
解答这类问题可根据条件直接判断，也可采用**排除法**解答.

C. 二次函数的最小值是 -2

D. 抛物线的对称轴是直线 $x=-\dfrac{5}{2}$

4. 若二次函数 $y=-x^2-4x+k$ 的最大值是 9，则 $k=$_____.

5. 若 $a>0$，$b>0$，$c>0$，那么二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图像在直角坐标系中的位置可能是(　　)



关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

Ⅱ 点方法 · 拨技巧 · 探规律

典例剖析

拔尖角度1 二次函数图像的平移

例6 若将二次函数 $y=x^2+bx-5$ 的图像向右平移2个单位长度后经过点 $M(3,-6)$，则字母 b 的值为_____.

导引：先对原表达式进行配方，再利用平移规律得出平移后抛物线的表达式，进而把 M 点的坐标代入求出答案.

$y=x^2+bx-5=\left(x+\frac{b}{2}\right)^2-\frac{b^2}{4}-5$，则 $y=x^2+bx-5$ 的图像向右平移2个单位长度后得到抛物线 $y=\left(x+\frac{b}{2}-2\right)^2-\frac{b^2}{4}-5$，

把 $M(3,-6)$ 的坐标代入得 $-6=\left(3+\frac{b}{2}-2\right)^2-\frac{b^2}{4}-5$，

解得 $b=-2$.

▶答案：-2

点方法

解答这类问题的基本思路是先对原函数表达式进行配方，再结合平移规律得出新抛物线的函数表达式，最后结合点在图像上求值.

拔尖角度2 根据对称性求函数值

例7 已知二次函数 $y=2x^2+9x+34$，当自变量 x 取两个不同的值 x_1、x_2 时，函数值相等，则当自变量 x 取 x_1+x_2 时的函数值与(　　)

A. $x=1$ 时的函数值相等　　B. $x=0$ 时的函数值相等

C. $x=\frac{1}{4}$ 时的函数值相等　　D. $x=-\frac{9}{4}$ 时的函数值相等

导引：抛物线 $y=2x^2+9x+34$ 的顶点横坐标为 $-\frac{9}{4}$，当自变量 x 取两个不同的值 x_1、x_2 时，函数值相等，则以 x_1、x_2 为横坐标的两点关于直线 $x=-\frac{9}{4}$ 对称.

设以 x_1 为横坐标的点在直线 $x=-\frac{9}{4}$ 左边，以 x_2 为横坐标的点在直线 $x=-\frac{9}{4}$ 右边，于是有 $x_2-\left(-\frac{9}{4}\right)=-\frac{9}{4}-x_1$，所以有 $x_2+x_1=-\frac{9}{2}$，则当 $x=-\frac{9}{2}$ 时，$y=34$，故选B.

▶答案：B

举一反三训练

(答案见207页)

6. 要将抛物线 $y=x^2+4x-3$ 平移后得到抛物线 $y=x^2-2x+2$，下列平移方法正确的是(　　)

A. 向左平移3个单位长度，再向上平移8个单位长度

B. 向左平移8个单位长度，再向下平移3个单位长度

C. 向右平移3个单位长度，再向上平移8个单位长度

D. 向右平移3个单位长度，再向下平移8个单位长度

7. 若二次函数 $y=ax^2-2ax-1$，当 x 分别取 x_1、x_2 两个不同的值时，函数值相等，则当 x 取 x_1+x_2 时，函数值为_____.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

点方法

解答这类问题有两种思路：思路1，自变量的值不同时，函数值相等，以自变量的这两个值为横坐标的点，关于抛物线的对称轴对称，得出自变量的这两个值的数量关系是本题的突破口. 思路2，直接将 x_1、x_2 代入函数表达式求出 x_1+x_2 的值再代入.

拔尖角度3 二次函数图像与系数的关系(拓展点)

例8 已知二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图像如图5.2-6所示，$OA=OC$，则由抛物线的特征写出如下含有 a、b、c 三个字母的等式或不等式：①$\frac{4ac-b^2}{4a}=-1$；②$ac+b+1=0$；③$abc>0$；④$a-b+c>0$. 其中正确的有(　　)

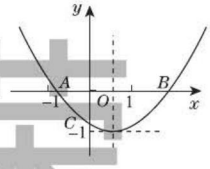


图5.2-6

A. 4个　　B. 3个

C. 2个　　D. 1个

导引：根据二次函数的图像对各式进行判断.

①抛物线顶点纵坐标为 -1，故$\frac{4ac-b^2}{4a}=-1$ 正确；

②易知 $C(0,c)$，则 $OC=|c|$，

$\because OA=OC=|c|$，$\therefore A(c,0)$，代入函数表达式得 $ac^2+bc+c=0$，又 $c\neq0$，$\therefore ac+b+1=0$，故正确；

③由图像易知 $a>0$，$b<0$，$c<0$，故 $abc>0$ 正确；

④当 $x=-1$ 时，$y=a-b+c$，由图像知点 $(-1,a-b+c)$ 在第二象限，$\therefore a-b+c>0$，故正确. 故选A. ▶答案：A

点方法

a 的正负看开口方向，c 的正负看与 y 轴交点位置，b 的正负看对称轴的位置，与 a、b 有关的代数式一般看对称轴的位置，与 a、b、c 有关的和差算式的正负一般看特殊点与 x 轴的位置关系.

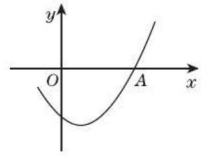
拔尖角度4 综合题

例9 [中考·盐城] 如图5.2-7①，在平面直角坐标系 xOy 中，抛物线 $y=ax^2+bx+3$ 经过点 $A(-1,0)$、$B(3,0)$ 两点，且与 y 轴交于点C.

(1)求抛物线的表达式；

(2)如图5.2-7②，宽为4个单位长度的直尺垂直于 x 轴，并沿 x 轴左右平移，直尺的左右两边所在的直线与抛物线相交于 P、Q 两点(点 P 在点 Q 的左侧)，连接 PQ，在线段 PQ 上方抛物线上有一动点 D，连接 DP、DQ.

8. [中考·枣庄] 如图是二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 图像的一部分，且过点 $A(3,0)$，二次函数图像的对称轴是直线 $x=1$，下列结论正确的是(　　)



(第8题图)

A. $b^2<4ac$

B. $ac>0$

C. $2a-b=0$

D. $a-b+c=0$

9. [中考·连云港] 如图，已知二次函数 $y=ax^2+bx+3(a\neq0)$ 的图像经过点 $A(3,0)$，$B(4,1)$，且与 y 轴交于点 C，连接 AB、AC、BC.

(1)求此二次函数的关系式；

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

(i)若点 P 的横坐标为 $-\frac{1}{2}$,求 $\triangle DPQ$ 面积的最大值,并求此时点 D 的坐标;

(ii)直尺在平移过程中,$\triangle DPQ$ 的面积是否有最大值?若有,求出面积的最大值;若没有,请说明理由.

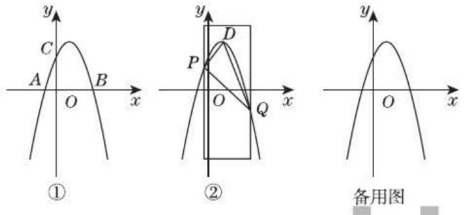


图 5.2-7

导引:(1)根据点 A、B 的坐标,利用待定系数法即可求出抛物线的表达式;

(2)(i)由点 P 的横坐标可得出点 P、Q 的坐标,利用待定系数法可求出直线 PQ 的表达式,过点 D 作 $DE\parallel y$ 轴交直线 PQ 于点 E,设点 D 的坐标为 $(x,-x^2+2x+3)$,则点 E 的坐标为 $\left(x,-x+\frac{5}{4}\right)$,进而可得出 DE 的长度,利用三角形的面积公式可得出 $S_{\triangle DPQ}=-2x^2+6x+\frac{7}{2}$,再利用二次函数的性质即可解决最值问题;

(ii)假设存在,设点 P 的横坐标为 t,则点 Q 的横坐标为 $4+t$,进而可得出点 P、Q 的坐标,利用待定系数法可求出直线 PQ 的表达式,设点 D 的坐标为 $(x,-x^2+2x+3)$,则点 E 的坐标为 $(x,-2(t+1)x+t^2+4t+3)$,进而可得出 DE 的长度,利用三角形的面积公式可得出 $S_{\triangle DPQ}=-2x^2+4(t+2)x-2t^2-8t$,再利用二次函数的性质即可解决最值问题.

▶解:(1)将 $A(-1,0)$、$B(3,0)$ 的坐标代入 $y=ax^2+bx+3$,得

$$\begin{cases}a-b+3=0,\\9a+3b+3=0,\end{cases}\text{解得}\begin{cases}a=-1,\\b=2,\end{cases}$$

$\therefore$ 抛物线的表达式为 $y=-x^2+2x+3$.

(2)(i)当点 P 的横坐标为 $-\frac{1}{2}$ 时,点 Q 的横坐标为 $\frac{7}{2}$,

$\therefore$ 点 P 的坐标为 $\left(-\frac{1}{2},\frac{7}{4}\right)$,点 Q 的坐标为 $\left(\frac{7}{2},-\frac{9}{4}\right)$.

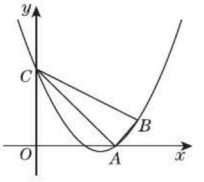
设直线 PQ 的表达式为 $y=mx+n$,

将 $P\left(-\frac{1}{2},\frac{7}{4}\right)$、$Q\left(\frac{7}{2},-\frac{9}{4}\right)$ 的坐标代入 $y=mx+n$,得

$$\begin{cases}-\frac{1}{2}m+n=\frac{7}{4},\\\frac{7}{2}m+n=-\frac{9}{4},\end{cases}\text{解得}\begin{cases}m=-1,\\n=\frac{5}{4},\end{cases}$$

(2)判断 $\triangle ABC$ 的形状;若 $\triangle ABC$ 的外接圆记为 $\odot M$,请直接写出圆心 M 的坐标;

(3)若将抛物线沿射线 BA 方向平移,平移后点 A、B、C 的对应点分别记为点 A_1、B_1、C_1,$\triangle A_1B_1C_1$ 的外接圆记为 $\odot M_1$,是否存在某个位置,使 $\odot M_1$ 经过原点?若存在,求出此时抛物线的关系式;若不存在,请说明理由.



(第 9 题图)

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

∴直线 PQ 的表达式为 $y=-x+\frac{5}{4}$.

如图 5.2-8，过点 D 作 $DE\parallel y$ 轴交直线 PQ 于点 E，

设点 D 的坐标为 $(x,-x^2+2x+3)$，则点 E 的坐标为 $\left(x,-x+\frac{5}{4}\right)$，

$\therefore DE=-x^2+2x+3-\left(-x+\frac{5}{4}\right)=-x^2+3x+\frac{7}{4}$，

$\therefore S_{\triangle DPQ}=\frac{1}{2}DE\cdot(x_Q-x_P)=-2x^2+6x+\frac{7}{2}=-2\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+8$.

$\because -2<0$，$\therefore$ 当 $x=\frac{3}{2}$ 时，$\triangle DPQ$ 的面积取最大值，最大值为 8，此时点 D 的坐标为 $\left(\frac{3}{2},\frac{15}{4}\right)$.

(ii)假设存在. 如图 5.2-8，设点 P 的横坐标为 t，则点 Q 的横坐标为 $4+t$，

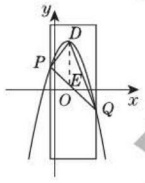


图 5.2-8

$\therefore$ 点 P 的坐标为 $(t,-t^2+2t+3)$，点 Q 的坐标为 $(4+t,-(4+t)^2+2(4+t)+3)$，

利用待定系数法易知，直线 PQ 的表达式为 $y=-2(t+1)x+t^2+4t+3$.

设点 D 的坐标为 $(x,-x^2+2x+3)$，则点 E 的坐标为 $(x,-2(t+1)x+t^2+4t+3)$，

$\therefore DE=-x^2+2x+3-[-2(t+1)x+t^2+4t+3]=-x^2+2(t+2)x-t^2-4t$，

$\therefore S_{\triangle DPQ}=\frac{1}{2}DE\cdot(x_Q-x_P)=-2x^2+4(t+2)x-2t^2-8t=-2[x-(t+2)]^2+8$.

$\because -2<0$，

$\therefore$ 当 $x=t+2$ 时，$\triangle DPQ$ 的面积取最大值，最大值为 8.

$\therefore$ 假设成立，即直尺在平移过程中，$\triangle DPQ$ 的面积有最大值，面积的最大值为 8.

点方法

本题考查了**待定系数法**求二次（一次）函数表达式、二次（一次）函数图像上点的坐标特征、三角形的面积以及二次函数的最值，解本题的关键是：(1)根据点的坐标，利用待定系数法求出二次函数表达式；(2)(i)利用三角形的面积公式得出 $S_{\triangle DPQ}=-2x^2+6x+\frac{7}{2}$；(ii)利用三角形的面积公式得出 $S_{\triangle DPQ}=-2x^2+4(t+2)x-2t^2-8t$.

荣德基

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

Ⅲ 练基础 · 练方法 · 练技巧 (答案见207页)

基础巩固练

1. [中考 · 山西] 用配方法将二次函数 $y=x^2-8x-9$ 化为 $y=a(x-h)^2+k$ 的形式为(　　)

A. $y=(x-4)^2+7$　　B. $y=(x-4)^2-25$

C. $y=(x+4)^2+7$　　D. $y=(x+4)^2-25$

2. [中考 · 哈尔滨] 将抛物线 $y=-5x^2+1$ 向左平移1个单位长度,再向下平移2个单位长度,所得到的抛物线为(　　)

A. $y=-5(x+1)^2-1$

B. $y=-5(x-1)^2-1$

C. $y=-5(x+1)^2+3$

D. $y=-5(x-1)^2+3$

3. [中考 · 陕西] 已知抛物线 $y=x^2-2mx-4(m>0)$ 的顶点 M 关于坐标原点 O 的对称点为 M',若点 M' 在这条抛物线上,则点 M 的坐标为(　　)

A. $(1,-5)$　　B. $(3,-13)$

C. $(2,-8)$　　D. $(4,-20)$

4. [中考 · 眉山] 若一次函数 $y=(a+1)x+a$ 的图像过第一、三、四象限,则二次函数 $y=ax^2-ax$(　　)

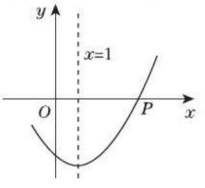
A. 有最大值 $\frac{a}{4}$　　B. 有最大值 $-\frac{a}{4}$

C. 有最小值 $\frac{a}{4}$　　D. 有最小值 $-\frac{a}{4}$

5. [中考 · 广州] 当 $x=$_____时,二次函数 $y=x^2-2x+6$ 有最小值_____.

6. 抛物线 $y=2x^2+4x-2$ 的顶点坐标是_____.

7. [中考 · 兰州] 如图,若抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 上的 $P(4,0)$,Q 两点关于它的对称轴 $x=1$ 对称,则 Q 点的坐标为_____.



(第7题图)

8. 抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 经过点 $(-3,0)$,若 $a+b+c=0$,则此抛物线的对称轴是_____.

9. 已知抛物线 $y=-2x^2-4x+1$.

(1)求这个抛物线的对称轴和顶点坐标;

(2)将这个抛物线平移,使顶点移到点 $P(2,0)$ 的位置,写出所得新抛物线的表达式和平移的过程.

能力提升练

10. [中考 · 乐山] 已知二次函数 $y=x^2-2mx$ (m 为常数),当 $-1\leqslant x\leqslant 2$ 时,y 的最小值为 -2,则 m 的值是(　　)

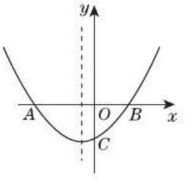
A. $\frac{3}{2}$　　B. $\sqrt{2}$

C. $\frac{3}{2}$或$\sqrt{2}$　　D. $-\frac{3}{2}$或$\sqrt{2}$

11. [中考 · 鄂州] 如图,抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 的图像交 x 轴于 $A(-2,0)$ 和点 B,交 y 轴负半轴于点 C,且 $OB=OC$,下列结论:

①$2b-c=2$;②$a=\frac{1}{2}$;③$ac=b-1$;④$\frac{a+b}{c}>0$.

其中正确的有(　　)



(第11题图)

A. 1个　　B. 2个　　C. 3个　　D. 4个

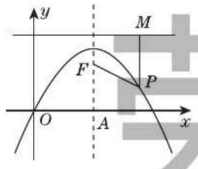
荣德基

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

12. 如图，抛物线 $y=-x^2+2x$ 的对称轴与 x 轴交于点 A，点 F 在抛物线的对称轴上，且点 F 的纵坐标为 $\frac{3}{4}$. 过抛物线上一点 $P(m,n)$ 向直线 $y=\frac{5}{4}$ 作垂线，垂足为 M，连接 PF.

(1) 当 $m=2$ 时，求证：$PF=PM$；

(2) 当点 P 为抛物线上任意一点时，$PF=PM$ 是否还成立？若成立，请给出证明；若不成立，请说明理由.



(第12题图)

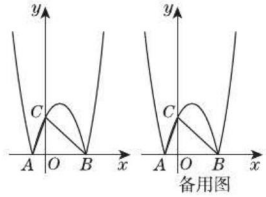
思维拓展练

13. [中考·宿迁] 如图，在平面直角坐标系 xOy 中，抛物线 $y=x^2-2x-3$ 交 x 轴于 A，B 两点(点 A 在点 B 的左侧)，将该抛物线位于 x 轴上方的曲线记作 M，将该抛物线位于 x 轴下方的部分沿 x 轴翻折，翻折后所得曲线记作 N，曲线 N 交 y 轴于点 C，连接 AC、BC.

(1) 求曲线 N 所在抛物线的函数表达式；

(2) 求 $\triangle ABC$ 外接圆的半径；

(3) 点 P 为曲线 M 或曲线 N 上的一个动点，点 Q 为 x 轴上的一个动点，若以点 B，C，P，Q 为顶点的四边形是平行四边形，求点 Q 的坐标.



(第13题图)

我的错题笔记

荣德基

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

5.3 用待定系数法确定二次函数表达式

1 点知识 · 拨考向 · 诊误区

知识点 待定系数法求二次函数表达式(重点)

点知识

求二次函数表达式的两种常用方法

(1) 已知图像过三点,求二次函数的表达式,通常用一般式 $y=ax^2+bx+c(a\neq0)$ 较方便.

(2) 已知顶点坐标、对称轴、最大值或最小值,求二次函数表达式,一般用顶点式 $y=a(x+h)^2+k$ 较方便.

要点精析

1. 求二次函数表达式应根据不同的条件,选择恰当的函数表达式,可以减少运算量,提高解题效率.
2. 运用一般式 $y=ax^2+bx+c(a\neq0)$ 求函数表达式时,先将数值代入函数表达式,列出方程组,再解方程组,解这类方程组的基本方法是加减消元,将三元一次方程组转化为二元一次方程组,一般先消去 c 得到关于字母 a、b 的二元一次方程组,再解方程组即可.
3. 运用顶点式求二次函数表达式时一般将顶点坐标作为已知量直接设出函数表达式,再将另外一个已知点的坐标代入列方程求解.

易错警示

运用顶点式求二次函数表达式,顶点坐标代入时要注意符号的处理. 例如顶点坐标为 $(-2,3)$,应设函数表达式为 $y=a(x+2)^2+3$,而不能设为 $y=a(x-2)^2+3$.

拨考向

典例剖析

考查角度1 根据一般式求函数表达式

例1 已知二次函数的图像经过点 $(0,3)$、$(-3,0)$、$(2,-5)$,试确定此二次函数的表达式.

导引:已知二次函数图像上的三点坐标,即可用待定系数法求出二次函数的表达式.

▶解:设二次函数的表达式为 $y=ax^2+bx+c$,∵ 二次函数的图像经过点 $(0,3)$、$(-3,0)$、$(2,-5)$,则有

$$\begin{cases}c=3,\\9a-3b+c=0,\\4a+2b+c=-5,\end{cases}\quad\text{解得}\quad\begin{cases}a=-1,\\b=-2,\\c=3.\end{cases}$$

$\therefore y=-x^2-2x+3.$

点方法

当题目给出二次函数图像上的三个点时,设为一般式 $y=ax^2+bx+c(a\neq0)$,转化成一个三元一次方程组,求得 a、b、c 的值. 待定系数的个数决定了求待定系数过程中所列的方程组中方程的个数,本题中有三个待定系数,因此,需要三个独立条件列出三个方程,构造方程组求解.

举一反三训练

(答案见209页)

1. 已知一个二次函数的图像经过 $A(4,3)$、$B(1,0)$、$C(-1,8)$ 三点,求这个二次函数表达式.

未雨绸缪 基础夯实

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

考查角度2 设顶点式求函数表达式(易错点)

例2 已知抛物线的顶点坐标为$(-2,-3)$,且它与y轴的交点坐标为$(0,5)$,求其所对应的函数表达式.

▶错解一:因为顶点坐标为$(-2,-3)$,所以可设其所对应的函数表达式为$y=a(x-2)^2-3$,把点$(0,5)$的坐标代入得$a=2$. 所以$y=2(x-2)^2-3$.

▶错解二:因为顶点坐标为$(-2,-3)$,所以可设其所对应的函数表达式为$y=a(x-2)^2+3$,把点$(0,5)$的坐标代入得$a=\frac{1}{2}$. 所以$y=\frac{1}{2}(x-2)^2+3$.

▶错解分析:错解一、错解二都因为不能正确设出顶点式而出错,事实上,由顶点为$(-2,-3)$可设顶点式是$y=a(x+2)^2-3$.

▶正确解法:设抛物线所对应的函数表达式为$y=a(x+2)^2-3$,因为抛物线过点$(0,5)$,所以$5=a(0+2)^2-3$,所以$a=2$. 所以$y=2(x+2)^2-3$.

点方法

当已知抛物线的顶点坐标为(h,k)时,可设所求二次函数的表达式为$y=a(x-h)^2+k$,再利用其他条件确定a的值,注意在顶点式$y=a(x-h)^2+k$中h、k的符号.

考查角度3 根据函数图像求函数表达式(易错点)

例3 二次函数的图像如图5.3-1所示,则其表达式为_____.

导引:根据图像可知,抛物线的对称轴是直线$x=1$,与y轴交于$(0,3)$,与x轴的一个交点为$(-1,0)$,设出一般式,列出方程组求出待定系数即可.

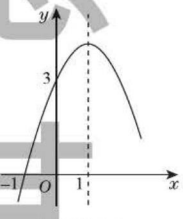


图5.3-1

由图像可知,抛物线的对称轴是直线$x=1$,与y轴交于$(0,3)$,与x轴的一个交点为$(-1,0)$.

设表达式为$y=ax^2+bx+c$,则$\begin{cases}-\frac{b}{2a}=1,\\ c=3,\\ a-b+c=0,\end{cases}$

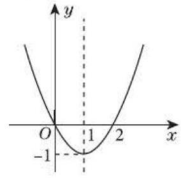
解得$\begin{cases}a=-1,\\ b=2,\\ c=3.\end{cases}$ 故答案为$y=-x^2+2x+3$. ▶答案:$y=-x^2+2x+3$

点方法

本题考查用**待定系数法**求二次函数的表达式,根据题意找出特殊点、列出方程组是解题的关键,解答时,要认真审题,找准特殊点,才能得到正确的方程组.

2. 已知二次函数的图像以$A(-1,4)$为顶点,且过点$B(2,-5)$,求该函数的表达式.

3. 已知二次函数$y=ax^2+bx+c$的图像如图所示,则这个二次函数的表达式是_____.



(第3题图)


待定系数法

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

Ⅱ 点方法 · 拨技巧 · 探规律

典例剖析

拔尖角度 1　根据轴对称求表达式(拓展点)

例 4 已知二次函数 $y=3x^2-6x+5$,求满足下列条件的抛物线的关系式:

(1)与二次函数 $y=3x^2-6x+5$ 的图像关于 x 轴对称;

(2)与二次函数 $y=3x^2-6x+5$ 的图像关于 y 轴对称;

(3)与二次函数 $y=3x^2-6x+5$ 的图像关于经过其顶点且平行于 x 轴的直线对称.

导引:(1)根据两图像关于 x 轴对称,图像上对应点的横坐标相同,纵坐标互为相反数,可得答案;

(2)根据两图像关于 y 轴对称,图像上对应点的纵坐标相同,横坐标互为相反数,可得答案;

(3)根据两图像关于直线 $y=2$ 对称,顶点相同,开口方向相反,可得答案.

▶解:二次函数 $y=3x^2-6x+5$,化成顶点式为 $y=3(x-1)^2+2$.

(1)与 $y=3(x-1)^2+2$ 的图像关于 x 轴对称的抛物线的关系式为 $y=-3(x-1)^2-2$;

(2)与 $y=3(x-1)^2+2$ 的图像关于 y 轴对称的抛物线的关系式为 $y=3(x+1)^2+2$;

(3)与 $y=3(x-1)^2+2$ 的图像关于经过其顶点且平行于 x 轴的直线对称的抛物线的关系式为 $y=-3(x-1)^2+2$.

点方法

已知一个二次函数 $y=ax^2+bx+c$,要求与其图像关于 x 轴对称(也可以说沿 x 轴翻折),y 轴对称及经过其顶点且平行于 x 轴的直线对称(也可以说图像绕顶点旋转 180°)的图像的函数关系式,先把原函数关系式化成 $y=a(x-h)^2+k$ 的形式.(1)关于 x 轴对称的两个图像的顶点关于 x 轴对称,两个图像的开口方向相反,形状不变,即二次项系数互为相反数.(2)关于 y 轴对称的两个图像的顶点关于 y 轴对称,两个图像的开口方向相同,形状不变,即二次项系数相同.(3)关于经过其顶点且平行于 x 轴的直线对称的两个函数的图像的顶点坐标不变,开口方向相反,即二次项系数互为相反数.

拔尖角度 2　根据最值求函数表达式

例 5 已知二次函数 $y=ax^2+bx+c$,当 $x=-2$ 或 3 时,$y=0$,且函数图像最高点的纵坐标为 2,用待定系数法求二次函数表达式.

举一反三训练

(答案见 209 页)

4. 已知二次函数 $y=x^2-2x-1$. 求:

(1)与此二次函数图像关于 x 轴对称的抛物线的函数表达式;

(2)与此二次函数图像关于 y 轴对称的抛物线的函数表达式;

(3)与此二次函数图像关于原点对称的抛物线的函数表达式.

5. 若二次函数 $y=mx^2+4x+m-1$ 的图像有最

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

▶解：由题知二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图像经过点 $(-2,0)$，$(3,0)$，

∴ 对称轴为直线 $x=\frac{1}{2}$，

∵ 顶点的纵坐标为2，∴ 顶点坐标为 $\left(\frac{1}{2},2\right)$，

∴ 此二次函数表达式为 $y=a\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+2$，

∴ $0=a\left(3-\frac{1}{2}\right)^2+2$，解得 $a=-\frac{8}{25}$，

∴ 二次函数的表达式为 $y=-\frac{8}{25}\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+2$，

即二次函数的表达式为 $y=-\frac{8}{25}x^2+\frac{8}{25}x+\frac{48}{25}$.

高点，且最高点的纵坐标为 -4，试求 m 的值.

点方法

本题考查了用**待定系数法**求函数表达式的方法，解答这类问题按照基本方法是无法做的，应在充分理解题意的基础上结合二次函数性质作答.

III 练基础·练方法·练技巧 ☞(答案见210页)

基础巩固练

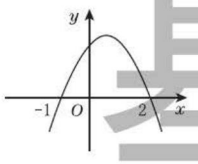
1. 若二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的 x 与 y 的部分对应值如下表：

x	-7	-6	-5	-4	-3	-2
y	-27	-13	-3	3	5	3

则当 $x=1$ 时，y 的值为(　　)

A. 5　　B. -3　　C. -13　　D. -27

2. 抛物线如图，根据图像可知，抛物线的表达式可能是(　　)



(第2题图)

A. $y=x^2-x-2$

B. $y=-\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}x+2$

C. $y=-\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}x+1$

D. $y=-x^2+x+2$

3. 若所求的二次函数图像与抛物线 $y=2x^2-4x-1$ 有相同的顶点，并且在对称轴的左侧 y 随 x 的增大而增大，在对称轴的右侧 y 随 x 的增大而减小，则所求二次函数的表达式可能是(　　)

A. $y=-x^2+2x+4$

B. $y=ax^2-2ax+a-3(a>0)$

C. $y=-2x^2-4x-5$

D. $y=ax^2-2ax+a-3(a<0)$

4. 若抛物线的顶点为 $(-2,3)$，且经过点 $(-1,5)$，则其表达式为_____.

5. 抛物线 $y=x^2-8x+c$ 的顶点在 x 轴上，则 c 的值为_____.

6. [易错题] 如果抛物线 $y=x^2-6x+c-2$ 的顶点到 x 轴的距离是3，那么 c 的值是_____.

7. 某同学利用描点法画二次函数 $y=ax^2+bx+c(a\neq0)$ 的图像时，列出的部分数据如下表. 经检查，发现表格中恰好有一组数据计算错误，请你根据上述信息写出该二次函数的表达式：_____.

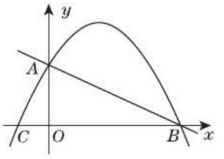
x	0	1	2	3	4
y	3	0	-2	0	3

8. 如图，在直角坐标系中，已知直线 $y=-\frac{1}{2}x+4$ 与 y 轴交于 A 点，与 x 轴交于 B 点，C 点坐标为 $(-2,0)$.

(1)求经过 A,B,C 三点的抛物线的表达式；

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

(2)如果 M 为抛物线的顶点,连接 AM、BM,求四边形 $AOBM$ 的面积.



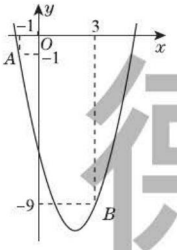
(第 8 题图)

9. 如图,已知二次函数 $y=ax^2-4x+c$ 的图像经过点 A 和点 B.

(1)求该二次函数的表达式;

(2)写出该抛物线的对称轴及顶点坐标;

(3)点 $P(m,m)(m>0)$ 与点 Q 均在该二次函数图像上,且这两点关于抛物线的对称轴对称,求 m 的值及点 Q 到 x 轴的距离.

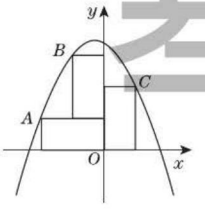


(第 9 题图)

能力提升练

10. 把二次函数 $y=2x^2-4x+3$ 的图像绕原点旋转 180°后得到的图像的表达式为_____.

11. 如图,在坐标平面上,沿着两条坐标轴摆着三个相同的长方形,其长、宽分别为 4、2,则经过 A、B、C 三点的抛物线对应的函数关系式是_____.

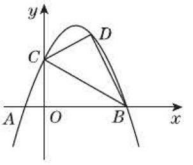


(第 11 题图)

12. 如图,抛物线 $y=-\frac{1}{2}x^2+bx+c$ 与 x 轴交于 A、B 两点,与 y 轴交于点 C,已知点 $A(-1,0)$,点 $C(0,2)$.

(1)求抛物线的函数表达式;

(2)若 D 是抛物线位于第一象限上的动点,求 $\triangle BCD$ 面积的最大值及此时点 D 的坐标.



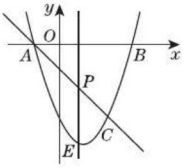
(第 12 题图)

思维拓展练

13. 如图,抛物线 $y=x^2+bx+c$ 与 x 轴交于 A,B 两点,且点 A 在点 B 的左侧,直线 $y=-x-1$ 与抛物线交于 A、C 两点,其中点 C 的横坐标为 2.

(1)求二次函数的表达式;

(2)P 是线段 AC 上的一个动点,过点 P 作 y 轴的平行线交抛物线于点 E,求线段 PE 长度的最大值.



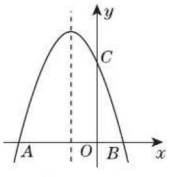
(第 13 题图)

14. 抛物线 $y=-x^2+bx+c$ 与 x 轴交于 $A(-3,0)$、$B(1,0)$ 两点,与 y 轴交于点 C.

(1)求该抛物线的表达式;

(2)在抛物线上求一点 P,使 $S_{\triangle PAB}=S_{\triangle ABC}$,写出 P 点的坐标;

(3)在抛物线的对称轴上是否存在点 Q,使得 $\triangle QBC$ 的周长最小?若存在,求出点 Q 的坐标,若不存在,请说明理由.



(第 14 题图)

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

5.4 二次函数与一元二次方程

1 点知识·拨考向·诊误区

知识点1 二次函数 $y=ax^2+bx+c(a\neq0)$ 与一元二次方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq0)$ 的关系(重点)

点知识

二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图像和 x 轴的交点	一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 的根	一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 的根的判别式 b^2-4ac
有两个交点	有两个不相等的实数根	$b^2-4ac>0$
只有一个交点	有两个相等的实数根	$b^2-4ac=0$
没有交点	没有实数根	$b^2-4ac<0$

2. 在求抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 与 x 轴交点的横坐标时，可令 $y=0$，得到一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$. 若此方程的解为 x_1、$x_2(x_1\neq x_2)$，则两交点坐标为 $(x_1,0)$、$(x_2,0)$；反过来，若抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 与 x 轴的交点坐标为 $(x_1,0)$、$(x_2,0)(x_1\neq x_2)$，则一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 的根为 x_1、x_2.

拓展：二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的交点式为 $y=a(x-x_1)(x-x_2)$，其中 x_1、x_2 是抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 与 x 轴的交点的横坐标，即两交点坐标为 $(x_1,0)$、$(x_2,0)$. 在遇到已知抛物线与 x 轴交点求表达式时，可以设交点式来解答.


抛物线与x轴交点的个数

要点精析

1. 若抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 与 x 轴有交点，则 $b^2-4ac\geqslant0$.

拨考向

典例剖析

考查角度1 根据二次函数图像与 x 轴交点情况确定字母的取值范围

例1 若二次函数 $y=x^2+2x+m$ 的图像与坐标轴有3个交点，则 m 的取值范围是(　　)

A. $m>1$　B. $m<1$　C. $m>1$ 且 $m\neq0$　D. $m<1$ 且 $m\neq0$

导引：由抛物线与坐标轴有三个交点可得出方程 $x^2+2x+m=0$ 有两个不相等的实数根，且 $m\neq0$，利用根的判别式 $b^2-4ac>0$ 可求出 m 的取值范围，此题得解.

∵ 二次函数 $y=x^2+2x+m$ 的图像与坐标轴有3个交点，∴ 方程 $x^2+2x+m=0$ 有两个不相等的实数根，且 $m\neq0$，∴ $b^2-4ac=2^2-4m>0$，∴ $m<1$. ∴ $m<1$ 且 $m\neq0$. 故选D.　▶答案：D

点方法

解题关键是正确理解“与坐标轴有3个交点”的内涵，即与 x 轴有两个交点，与 y 轴有一个交点，且不经过原点.

举一反三训练

(答案见211页)

1. 已知抛物线 $y=mx^2+2x-1$ 与 x 轴有两个交点，则 m 的取值范围是_____.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

考查角度2　根据二次函数图像与 x 轴交点坐标求一元二次方程的解

例2 已知抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 的对称轴是直线 $x=-1$，若关于 x 的一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 的一个根为4，则该方程的另一个根为_____.

导引：根据抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 与 x 轴的两个交点的横坐标就是一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 的解求解.

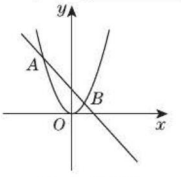
由题意知抛物线与 x 轴的一个交点为 $(4,0)$.

∵ 抛物线的对称轴是直线 $x=-1$，

∴ 抛物线与 x 轴的另一个交点为 $(-6,0)$，

∴ 一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 的另一个根为 -6. ▶答案：-6

2. 如图，抛物线 $y=ax^2(a\neq0)$ 与直线 $y=bx+c(b\neq0)$ 的两个交点坐标分别为 $A(-2,4)$，$B(1,1)$，则关于 x 的方程 $ax^2-bx-c=0$ 的解为_____.



（第2题图）

知识点2　图像法求方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq0)$ 的根

点知识 ▶▶▶

图像法求方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq0)$ 的根的一般步骤：

(1) 在平面直角坐标系中画出二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图像；

(2) 观察图像，确定抛物线与 x 轴交点的横坐标；

(3) 交点的横坐标即为方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq0)$ 的解.

拓展：图像法求方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq0)$ 的根的其他方法：

(1) 将方程变形为 $ax^2+bx=-c$，再分别作抛物线 $y=ax^2+bx$ 和直线 $y=-c$，则直线 $y=-c$ 与抛物线 $y=ax^2+bx$ 的交点的横坐标即为方程的根.

(2) 将方程变形为 $ax^2=-bx-c$，再分别作抛物线 $y=ax^2$ 和直线 $y=-bx-c$，则直线 $y=-bx-c$ 与抛物线 $y=ax^2$ 的交点的横坐标即为方程的根.

(3) 将方程变形为 $ax+b=-\frac{c}{x}$，再分别作直线 $y=ax+b$ 和双曲线 $y=-\frac{c}{x}$，则直线 $y=ax+b$ 和双曲线 $y=-\frac{c}{x}$ 的交点的横坐标即为方程的根.

考查角度1　图像法确定一元二次方程的解的范围

例3 已知二次函数 $y=-x^2-2x+2$.

(1) 在平面直角坐标系中画出这个二次函数的图像；

(2) 结合函数图像，直接写出方程 $-x^2-2x+2=0$ 的解在哪两个连续整数之间.

导引：(1) 根据函数表达式可完成表格，再根据表格中 x、y 的对应值可画函数图像；

(2) 根据二次函数图像与 x 轴交点的横坐标是相应的一元二次方程的解，可得一元二次方程的解的范围.

3. (1) 请在如图所示坐标系中画出二次函数 $y=x^2-2x-1$ 的大致图像.

(2) 根据方程的根与函数图像之间的关系，将方程 $x^2-2x-1=0$ 的根在图上表示出来.（描点）

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

▶解:(1)列表如下:

x	…	-4	-3	-2	-1	0	1	2	…
y	…	-6	-1	2	3	2	-1	-6	…

所画图像如图 5.4-1:

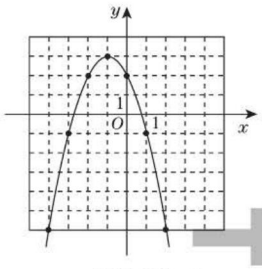


图 5.4-1

(2)由图像可知,方程 $-x^2-2x+2=0$ 的一个解在 -3 与 -2 之间,另一个解在 0 与 1 之间.

考查角度 2　根据表格确定一元二次方程的解的范围

例 4 根据下列表格的对应值,判断 $ax^2+bx+c=0(a\neq0,a,b,c$ 为常数)的一个解 x 的取值范围是_____.

x	3.23	3.24	3.25	3.26
ax^2+bx+c	-0.06	-0.02	0.03	0.09

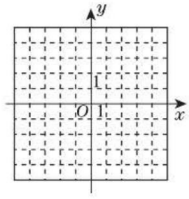
导引:根据题意可得二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图像与 x 轴的交点的横坐标即为方程 $ax^2+bx+c=0$ 的解,根据表格可知当 $x=3.24$ 时,$y=-0.02$;当 $x=3.25$ 时,$y=0.03$;则二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图像与 x 轴的交点的横坐标应在 3.24 和 3.25 之间.

∵ 当 $x=3.24$ 时,$y=-0.02$;当 $x=3.25$ 时,$y=0.03$,

∴ 方程 $ax^2+bx+c=0$ 的一个解 x 的范围是 $3.24<x<3.25$.

▶答案:$3.24<x<3.25$

(3)观察图像,直接写出方程 $x^2-2x-1=0$ 的近似根.(精确到 0.1)



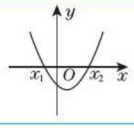
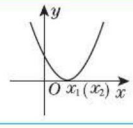
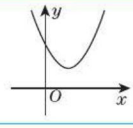
(第 3 题图)

4. 如表是二次函数 $y=ax^2+bx+c(a\neq0)$ 的自变量 x 与函数值 y 的对应关系,一元二次方程 $ax^2+bx+c=\frac{3}{10}(a\neq0)$ 的一个解 x 的取值范围是_____.

x	$y=ax^2+bx+c$
6.1	-0.3
6.2	-0.1
6.3	0.2
6.4	0.6

知识点 3　根据二次函数的图像解不等式(组)

点知识

	$b^2-4ac>0$	$b^2-4ac=0$	$b^2-4ac<0$
$y=ax^2+bx+c(a>0)$ 的图像			
$ax^2+bx+c=0(a>0)$ 的根	x_1,x_2	$x_1=x_2=-\frac{b}{2a}$	没有实数根
$ax^2+bx+c>0(a>0)$ 的解集	$x<x_1$ 或 $x>x_2$	$x\neq x_1$ 的一切实数	所有实数
$ax^2+bx+c<0(a>0)$ 的解集	$x_1<x<x_2$	无解	无解

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

要点精析 ///

1. 当 $a<0$ 时，对应的不等式的解集情况可与表格中的方法类比解答.

2. 确定解集时要注意取值范围是两交点之间还是两交点之外.

考查角度　根据函数图像确定不等式的解集

例5 如图 5.4-2 是二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的部分图像，由图像可知不等式 $ax^2+bx+c<0$ 的解集是_____.

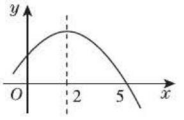


图 5.4-2

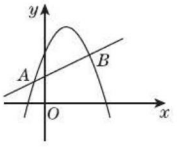
导引：根据二次函数图像的对称性求出函数图像与 x 轴的另一个交点，再写出图像在 x 轴下方部分的 x 的取值范围即可.

由图像可知，对称轴为直线 $x=2$，与 x 轴的一个交点坐标为 $(5,0)$，

∴ 函数图像与 x 轴的另一个交点坐标为 $(-1,0)$，

∴ $ax^2+bx+c<0$ 的解集是 $x<-1$ 或 $x>5$. ▶答案：$x<-1$ 或 $x>5$

5. [中考 · 咸宁] 如图，直线 $y=mx+n$ 与抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 交于 $A(-1,p)$，$B(4,q)$ 两点，则关于 x 的不等式 $mx+n>ax^2+bx+c$ 的解集是_____.



(第5题图)

II 点方法 · 技巧 · 探规律

典例剖析

拨尖角度1　设两点式求抛物线表达式(拓展点)

例6 已知抛物线 $y=x^2+bx+c$ 交 x 轴于 $A(1,0)$、$B(3,0)$ 两点，求 b、c 的值并写出抛物线的对称轴.

导引：根据抛物线交 x 轴于 A、B 两点，可写出抛物线的表达式.

▶解：经过 A、B 两点的抛物线的表达式为 $y=(x-1)(x-3)$，即 $y=x^2-4x+3$，所以 $b=-4$，$c=3$，抛物线的对称轴为直线 $x=-\frac{-4}{2}=2$.

点方法

本题也可将 A、B 两点的坐标直接代入求解. 要学会一般式与两点式的互换，利用 $y=x^2+bx+c=(x-1)(x-3)$ 解答更方便.

拨尖角度2　a、b、c 及其相关代数式的符号问题(易错点)

例7 [中考 · 白银] 如图 5.4-3 是二次函数 $y=ax^2+bx+c$ (a、b、c 是常数，$a\neq0$) 图像的一部分，与 x 轴的交点 A 在点 $(2,0)$ 和 $(3,0)$ 之间，对称轴是直线 $x=1$. 对于下列说法：①$ab<0$；②$2a+b=0$；③$3a+c>0$；④$a+b\geqslant m(am+b)$ (m 为实数)；⑤当

举一反三训练

(答案见212页)

6. 已知二次函数 $y=-x^2+bx+c$，且二次方程 $x^2-bx-c=0$ 的两个根为 $x_1=-3$，$x_2=-1$. 求二次函数的表达式.

7. [中考 · 衡阳] 如图，抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 与 x 轴交于点 $A(-1,0)$，顶点坐标为 $(1,n)$，与 y 轴

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

$-1<x<3$ 时，$y>0$，其中正确的是(　　)

A. ①②④　　B. ①②⑤　　C. ②③④　　D. ③④⑤

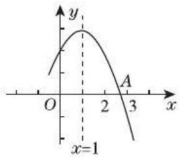


图 5.4-3

导引：①∵ 对称轴在 y 轴右侧，∴ a、b 异号，∴ $ab<0$，故正确；②∵ 对称轴为直线 $x=-\frac{b}{2a}=1$，∴ $2a+b=0$；故正确；③∵ $2a+b=0$，∴ $b=-2a$，∵ 当 $x=-1$ 时，$y=a-b+c<0$，∴ $a-(-2a)+c=3a+c<0$，故错误；④根据图像知，当 $x=1$ 时，二次函数有最大值，则当 $x=m$ 时，有 $am^2+bm+c\leqslant a+b+c$，∴ $a+b\geqslant m(am+b)$（m 为实数），故正确；⑤如图5.4-3，当 $-1<x<3$ 时，y 不只是大于0，故错误. 故选 A.

▶答案：A

点方法

本题考查了二次函数图像与系数的关系：对于二次函数 $y=ax^2+bx+c$（$a\neq0$），二次项系数 a 决定抛物线的开口方向和大小：当 $a>0$ 时，抛物线开口向上；当 $a<0$ 时，抛物线开口向下；一次项系数 b 和二次项系数 a 共同决定对称轴的位置：当 a 与 b 同号时（即 $ab>0$），对称轴在 y 轴左边；当 a 与 b 异号时（即 $ab<0$），对称轴在 y 轴右边；常数项 c 决定抛物线与 y 轴交点位置：抛物线与 y 轴交于（0，c）；抛物线与 x 轴交点个数由 b^2-4ac 决定：$b^2-4ac>0$ 时，抛物线与 x 轴有2个交点；$b^2-4ac=0$ 时，抛物线与 x 轴有1个交点；$b^2-4ac<0$ 时，抛物线与 x 轴没有交点.

拔尖角度3　构造函数比较大小

例8 若 x_1、x_2（$x_1<x_2$）是关于 x 的方程 $(x-a)(x-b)=1$（$a<b$）的两个根，则实数 x_1、x_2、a、b 的大小关系为(　　)

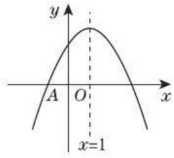
A. $x_1<x_2<a<b$　　B. $x_1<a<x_2<b$

C. $x_1<a<b<x_2$　　D. $a<x_1<b<x_2$

导引：可以将 x_1，x_2，a，b 看作是二次函数图像与直线的交点的横坐标，结合条件构造出二次函数，画出图像，结合图像可得到 x_1、x_2、a、b 的大小关系.

思路1：作出二次函数 $y=(x-a)(x-b)$ 的图像与直线 $y=1$（如图5.4-4），两图像的交点的横坐标就是方程 $(x-a)(x-b)=1$ 的两个根，即 x_1、x_2，而 a、b 是二次函数 $y=(x-a)(x-b)$ 的图像与 x 轴的两个交点的横坐标，由图像知，$x_1<a<b<x_2$. 故选 C.

的交点在(0,2)，(0,3)之间（包含端点），则下列结论：①$3a+b<0$；②$-1\leqslant a\leqslant-\frac{2}{3}$；③对于任意实数 m，$a+b\geqslant am^2+bm$ 总成立；④关于 x 的方程 $ax^2+bx+c=n-1$ 有两个不相等的实数根. 其中结论正确的有(　　)



（第7题图）

A. 1个　　B. 2个

C. 3个　　D. 4个

8. 若 x_1，x_2（$x_1<x_2$）是关于 x 的方程 $(x-a)(x-b)=a-b$（$a<b$）的两个根，则实数 x_1、x_2、a、b 的大小关系为(　　)

A. $x_1<x_2<a<b$

B. $x_1<a<b<x_2$

C. $a<x_1<x_2<b$

D. $a<x_1<b<x_2$

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

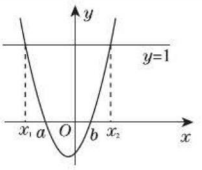


图 5.4-4

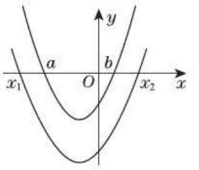


图 5.4-5

思路 2:先作出 $y=(x-a)(x-b)$ 的图像(如图 5.4-5),它的开口向上,与 x 轴有两个交点,横坐标分别为 a,b,再向下平移一个单位长度,就是 $y=(x-a)(x-b)-1$ 的图像,这时与 x 轴的交点的横坐标就是 x_1,x_2,很容易发现 $x_1<a<b<x_2$. 故选 C.

▶答案:C

点方法

解答这类问题关键是构造二次函数,将方程问题转化为二次函数图像与 x 轴交点问题,进而根据图像确定大小关系.

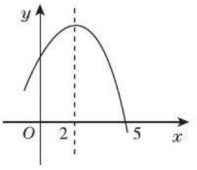
III 练基础 · 练方法 · 练技巧 (答案见 212 页)

基础巩固练

1. 关于 x 的一元二次方程 $x^2+bx+c=0$ 的两个根分别为 $x_1=1,x_2=2$,那么抛物线 $y=x^2+bx+c$ 的对称轴为直线(　　)

A. $x=1$　B. $x=2$　C. $x=\frac{3}{2}$　D. $x=-\frac{3}{2}$

2. 如图是二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的部分图像,由图像可知不等式 $ax^2+bx+c>0$ 的解集是(　　)

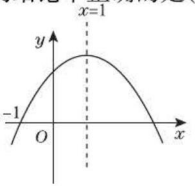


(第 2 题图)

A. $-1<x<5$　B. $x>5$

C. $x<-1$ 且 $x>5$　D. $x<-1$ 或 $x>5$

3. 二次函数 $y=ax^2+bx+c(a\neq0)$ 的图像如图所示,则下列结论中正确的是(　　)



(第 3 题图)

A. $a>0$

B. $c<0$

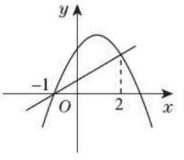
C. 当 $-1<x<3$ 时,$y>0$

D. 当 $x\geqslant1$ 时,y 随 x 的增大而增大

4. 已知抛物线 $y=ax^2+x+c$ 与 x 轴的一个交点的横坐标为 -1,则 $a+c=$_____.

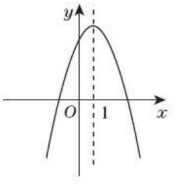
5. 抛物线 $y=3x^2-6x+a$ 与 x 轴只有一个公共点,则 a 的值为_____.

6. 如图是二次函数 $y_1=ax^2+bx+c$ 和一次函数 $y_2=kx+t$ 的图像,当 $y_1\geqslant y_2$ 时,x 的取值范围是_____. 【导学号 7367677】



(第 6 题图)

7. 已知二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图像如图所示,则关于 x 的方程 $ax^2+bx+c=0$ 的两个根的和为_____.



(第 7 题图)

基础

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

8. 已知二次函数 $y=ax^2+bx+c(a\neq0)$ 中，函数值 y 与自变量 x 的部分对应值如下表：

x	…	-5	-4	-3	-2	-1	…
y	…	3	-2	-5	-6	-5	…

则关于 x 的一元二次方程 $ax^2+bx+c=-2$ 的根是_____.

9. 已知 $P(-3,m)$ 和 $Q(1,m)$ 是抛物线 $y=2x^2+bx+1$ 上的两点.

(1)求 b 的值；

(2)判断关于 x 的一元二次方程 $2x^2+bx+1=0$ 是否有实数根，若有，求出它的实数根；若没有，请说明理由；

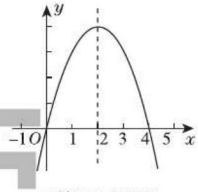
(3)将抛物线 $y=2x^2+bx+1$ 向上平移 k(k 是正整数)个单位长度，使平移后的图像与 x 轴无交点，求 k 的最小值.

能力提升练

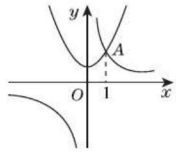
10. 二次函数 $y=-x^2+mx$ 的图像如图，对称轴为直线 $x=2$，若关于 x 的一元二次方程 $-x^2+mx-t=0$(t 为实数)在 $1<x<5$ 的范围内有解，则 t 的取值范围是(　　)

A. $t>-5$　　B. $-5<t<3$

C. $3<t\leqslant4$　　D. $-5<t\leqslant4$



(第10题图)



(第11题图)

11. 如图，抛物线 $y=x^2+1$ 与双曲线 $y=\frac{k}{x}$ 的交点 A 的横坐标是1，则关于 x 的不等式 $\frac{k}{x}-x^2-1>0$ 的解集是(　　)

A. $x>1$　　B. $x<-1$

C. $0<x<1$　　D. $-1<x<0$

我的错题笔记

基德荣

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

5.5 用二次函数解决问题

1 点知识 · 拨考向 · 诊误区

知识点 1 利润问题

点知识

在现实生活中经常遇到求最大(小)值问题,如在产品营销过程中何时取得最大利润,在生产中如何获得最大产值以及如何获得最佳效果等.解答这类问题通常需要根据问题的需要构造二次函数模型,进而根据二次函数的性质解决实际问题.

要点精析

1. 有关利润常见的几个公式:
   (1)销售额 = 销售单价 × 销售量;
   (2)利润 = 销售额 − 总成本 = 每件利润 × 销售量;
   (3)每件利润 = 销售单价 − 成本单价.
2. 解销售中最大利润问题的步骤:
   (1)利用应用题中已知条件和学过有关数学公式列出关系式;
   (2)把关系式转化为二次函数的关系式;
   (3)求二次函数的最大值或最小值.

易错警示

在确定二次函数最值时要注意自变量的取值范围是否包含抛物线的对称轴与横轴的交点的横坐标,如果包含,那么二次函数的最值就是这个问题的最值,如果不包含抛物线的对称轴与横轴的交点的横坐标,那么应根据二次函数的增减性来确定最值.

拨考向

典例剖析

考查角度 1 根据文字语言列函数表达式解决问题

例 1 [中考 · 淮安]某景区商店销售一种纪念品,每件的进货价为 40 元.经市场调研,当该纪念品每件的销售价为 50 元时,每天可销售 200 件;当每件的销售价每增加 1 元,每天的销售数量将减少 10 件.

(1)当每件的销售价为 52 元时,该纪念品每天的销售数量为_____件;

(2)当每件的销售价 x(元)为多少时,销售该纪念品每天获得的利润 y(元)最大?并求出最大利润.

导引:(1)根据"当每件的销售价每增加 1 元,每天的销售数量将减少 10 件",即可解答;由题意得:$200-10\times(52-50)=200-20=180$(件);

(2)根据等量关系"利润 = (售价 − 进价) × 销售量"列出函数关系式,再根据二次函数的性质即可解答.

▸解:(1)180

(2)由题意得:

$y=(x-40)[200-10(x-50)]=-10x^2+1\,100x-28\,000=-10(x-55)^2+2\,250$.当 $x=55$ 时,y 取得最大值,最大值为 2 250.

举一反三训练

(答案见 213 页)

1. [中考 · 十堰]某超市销售一种牛奶,进价为每箱 24 元,规定售价不低于进价.现在的售价为每箱 36 元,每月可销售 60 箱.市场调查发现:若这种牛奶的售价每降价 1 元,则每月的销量将增加 10 箱,设每箱牛奶降价 x 元(x 为正整数),每月的销量为 y 箱.

(1)写出 y 与 x 之间的函数关系式和自变量 x 的取值范围;

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

∴当每件的销售价为55元时，销售该纪念品每天获得的利润最大，最大利润为2 250元.

点方法

此题主要考查了二次函数在实际中的应用，找到等量关系准确地列出函数关系式是解决问题的关键.

考查角度2 根据函数图像列函数表达式解决问题

例2 [中考·扬州]“扬州漆器”名扬天下，某网店专门销售某种品牌的漆器笔筒，成本为30元/件，每天销售量y(件)与销售单价x(元)之间存在一次函数关系，如图5.5-1所示.

(1)求y与x之间的函数关系式；

(2)如果规定每天漆器笔筒的销售量不低于240件，当销售单价为多少元时，每天获取的利润最大，最大利润是多少？

(3)该网店店主热心公益事业，决定从每天的销售利润中捐出150元给希望工程，为了保证捐款后每天剩余利润不低于3 600元，试确定该漆器笔筒销售单价的范围.

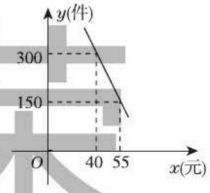


图5.5-1

导引：(1)可用待定系数法来确定y与x之间的函数关系式；

(2)设利润为w元，根据利润=销售量×单件的利润列式，然后将(1)中的函数关系式代入其中，求出利润和销售单价之间的关系式，最后根据其性质来判断出最大利润；

(3)由(2)知w与x的函数关系式，进而利用捐款后每天剩余利润等于3 600元时，求出对应x的值，根据增减性，求出x的取值范围.

▶解：(1)设y与x之间的函数关系式为$y=kx+b$. 由题意得：$\begin{cases}40k+b=300,\\55k+b=150,\end{cases}$解得：$\begin{cases}k=-10,\\b=700.\end{cases}$

故y与x之间的函数关系式为$y=-10x+700$.

(2)由题意，得$-10x+700\geqslant 240$，解得$x\leqslant 46$，

设利润为w元，则$w=(x-30)y=(x-30)(-10x+700)=-10x^2+1\,000x-21\,000=-10(x-50)^2+4\,000$，

∵$-10<0$，∴当$x<50$时，w随x的增大而增大，

∴当$x=46$时，$w_{最大}=-10\times(46-50)^2+4\,000=3\,840$.

答：当销售单价为46元时，每天获取的利润最大，最大利润是3 840元；

(3)令$w-150=-10x^2+1\,000x-21\,000-150=3\,600$，即$-10(x-50)^2=-250$，解得$x_1=55$，$x_2=45$，

如图5.5-2所示，由图像得：当$45\leqslant x\leqslant 55$时，捐款后每天剩余利润不低于3 600元.

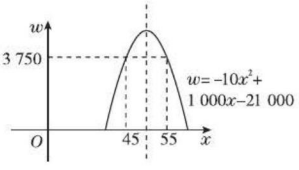


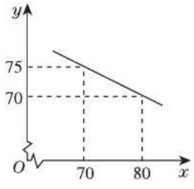
图5.5-2

(2)超市如何定价，才能使每月销售牛奶的利润最大？最大利润是多少元？

2. [中考·十堰]为早日实现脱贫奔小康的宏伟目标，我市结合本地丰富的山水资源，大力发展旅游业，王家庄在当地政府的支持下，办起了民宿合作社，专门接待游客，合作社共有80间客房. 根据合作社提供的房间单价x(元)和游客居住房间数y(间)的信息，乐乐绘制出y与x的函数图像如图所示：

(1)求y与x之间的函数关系式；

(2)合作社规定每间房间价格不低于60元且不超过150元，对于游客所居住的每间房间，合作社每天需支出20元的各种费用，房价定为多少时，合作社每天获利最大？最大利润是多少？



(第2题图)

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

知识点 2 面积问题

点知识

利用平面几何图形的有关条件和性质建立关于几何图形面积的二次函数表达式，并利用二次函数的图像和性质确定最大或最小面积. 其中求几何图形面积的常见方法有：利用几何图形的面积公式求出几何图形的面积；利用几何图形面积和或差求几何图形的面积等.

要点精析 ///

1. 解决面积问题的一般步骤：
   (1) 利用题目中的已知条件和学过的有关数学公式列出关系式；
   (2) 把关系式转化为二次函数的关系式；
   (3) 求二次函数的最大值或最小值.
2. 在处理复杂图形面积时常用的方法：把复杂的几何图形进行分割求和.

拓考向

考查角度　根据面积列函数表达式

例 3 [中考 · 福建] 空地上有一段长为 a 米的旧墙 MN，某人利用旧墙和木栏围成一个矩形菜园 $ABCD$，已知木栏总长为 100 米.

(1) 已知 $a=20$，矩形菜园的一边靠墙，另三边一共用了 100 米木栏，且围成的矩形菜园面积为 450 平方米，如图 5.5-3①，求所利用旧墙 AD 的长；

(2) 已知 $0<a<50$，且空地足够大，如图 5.5-3②. 请你合理利用旧墙及所给木栏设计一个方案，使得所围成的矩形菜园 $ABCD$ 的面积最大，并求面积的最大值.

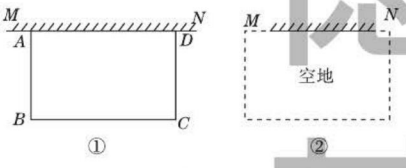


图 5.5-3

导引：(1) 按题意设出 AD，然后表示出 AB，最后列方程求解；

(2) 根据旧墙长度 a 和 AD 长度表示矩形菜园的长和宽，注意分类讨论菜园面积与菜园边长之间的数量关系.

▶解：(1) 设 $AD=x$ 米，则 $AB=\dfrac{100-x}{2}$ 米.

依题意得，$\dfrac{x(100-x)}{2}=450$，解得 $x_1=10$，$x_2=90$.

∵ $a=20$，且 $x\leqslant a$，∴ $x=90$ 不合题意，应舍去.

∴ 所利用旧墙 AD 的长为 10 米.

(2) 设 $AD=x$ 米，矩形 $ABCD$ 的面积为 S 平方米.

①如果按图 5.5-4①的方案围成矩形菜园，依题意得：

$S=\dfrac{x(100-x)}{2}=-\dfrac{1}{2}(x-50)^2+1\,250$，$0<x\leqslant a$，

3. [中考 · 潍坊] 工人师傅用一块长为 10 dm，宽为 6 dm 的矩形铁皮制作一个无盖的长方体容器，需要将四角各裁掉一个正方形. (厚度不计)
   (1) 在图中画出裁剪示意图，用实线表示裁剪线，虚线表示折痕；并求长方体底面面积为 12 dm^2 时，裁掉的正方形边长多大？
   (2) 若要求制作的长方体的底面长不大于底面宽的五倍，并将容器进行防锈处理，侧面每平方分米的费用为 0.5 元，底面每平方分米的费用为 2 元，裁掉的正方形边长多大时，总费用最低，最低为多少？

荣德基
关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

$\because 0<a<50$，

$\therefore$ 当 $x\leqslant a<50$ 时，S 随 x 的增大而增大.

故当 $x=a$ 时，$S_{最大}=50a-\frac{1}{2}a^2$.

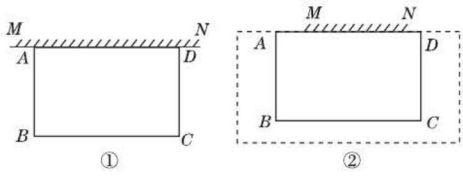
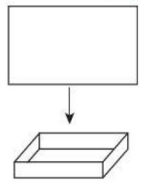


图 5.5-4



（第3题图）

②如果按图 5.5-4② 的方案围成矩形菜园，依题意得 $S=\frac{x(100+a-2x)}{2}=-\left[x-\left(25+\frac{a}{4}\right)\right]^2+\left(25+\frac{a}{4}\right)^2$，$a\leqslant x<50+\frac{a}{2}$.

当 $a<25+\frac{a}{4}<50+\frac{a}{2}$，即 $0<a<\frac{100}{3}$ 时，

$\therefore x=25+\frac{a}{4}$ 时，$S_{最大}=\left(25+\frac{a}{4}\right)^2=\frac{10\,000+200a+a^2}{16}$.

当 $25+\frac{a}{4}\leqslant a$，即 $\frac{100}{3}\leqslant a<50$ 时，

$\therefore x=a$ 时，$S_{最大}=\frac{a(100+a-2a)}{2}=50a-\frac{1}{2}a^2$.

综合①②，当 $0<a<\frac{100}{3}$ 时，

$\frac{10\,000+200a+a^2}{16}-\left(50a-\frac{1}{2}a^2\right)=\frac{(3a-100)^2}{16}>0$.

即 $\frac{10\,000+200a+a^2}{16}>50a-\frac{1}{2}a^2$，此时，按图 5.5-4② 方案围成的矩形菜园面积最大，最大面积为 $\frac{10\,000+200a+a^2}{16}$ 平方米；

当 $\frac{100}{3}\leqslant a<50$ 时，两种方案围成的矩形菜园面积的最大值相等.

综上，当 $0<a<\frac{100}{3}$ 时，围成长和宽均为 $\left(25+\frac{a}{4}\right)$ 米的矩形菜园面积最大，最大面积为 $\frac{10\,000+200a+a^2}{16}$ 平方米；

当 $\frac{100}{3}\leqslant a<50$ 时，围成长为 a 米，宽为 $\left(50-\frac{a}{2}\right)$ 米的矩形菜园面积最大，最大面积为 $\left(50a-\frac{1}{2}a^2\right)$ 平方米.

知识点 3 抛物线形问题

点知识

生活中常见的拱形桥洞、涵洞、隧道洞口、运动轨迹等都呈抛物线形，解决这些问题往往需要借助于二次函数的性质进行计算.

要点精析

1. 抛物线形问题的解题一般步骤：

（1）根据题目给出的数据建立合适的直角坐

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

标系;

(2)根据建立的坐标系,结合条件确定图像上点的坐标;

(3)根据点的坐标特点设出函数表达式,再运用**待定系数法**确定函数表达式;

(4)根据二次函数的性质解决问题.

2. 在解答这类问题时,建立合适的坐标系非常重要,基本原则是尽量选取抛物线的顶点为原点,尽量选取抛物线的对称轴为 y 轴.

热考向

考查角度1 运动轨迹问题(拓展点)

例4 [中考·德州]随着新农村的建设和旧城的改造,我们的家园越来越美丽,小明家附近广场中央新修了个圆形喷水池(如图5.5-5),在水池中心竖直安装了一根高为2米的喷水管,它喷出的抛物线形水柱在与池中心的水平距离为1米处达到最高,水柱落地处离池中心3米.

(1)请你建立适当的平面直角坐标系,并求出水柱抛物线的函数表达式;

(2)求出水柱的最大高度是多少.

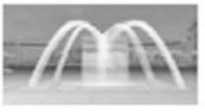


图5.5-5

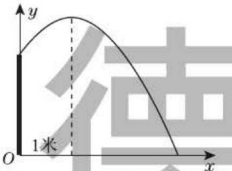


图5.5-6

导引:(1)以水管与地面交点为原点,原点与水柱落地点所在直线为 x 轴,水管所在直线为 y 轴,建立平面直角坐标系,设抛物线的函数表达式为 $y=a(x-1)^2+h$,代入点(0,2)和(3,0)的坐标得出方程组,解方程组即可,

(2)求出当 $x=1$ 时,y 的值即可.

▶解:(1)如图5.5-6所示:以水管与地面交点为原点,原点与水柱落地点所在直线为 x 轴,水管所在直线为 y 轴,建立平面直角坐标系,

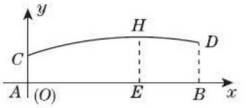
设抛物线的函数表达式为 $y=a(x-1)^2+h$,

代入点(0,2)和(3,0)的坐标得:$\begin{cases}4a+h=0,\\ a+h=2,\end{cases}$ 解得:$\begin{cases}a=-\dfrac{2}{3},\\ h=\dfrac{8}{3},\end{cases}$

∴ 抛物线的函数表达式为 $y=-\dfrac{2}{3}(x-1)^2+\dfrac{8}{3}$,

即 $y=-\dfrac{2}{3}x^2+\dfrac{4}{3}x+2(0\leqslant x\leqslant 3)$;

4. 甲、乙两人分别站在相距6米的 A、B 两点练习打羽毛球,已知羽毛球飞行的路线为抛物线的一部分,甲在离地面1米的 C 处发出一球,乙在离地面1.5米的 D 处成功击球,球飞行过程中的最高点 H 与甲的水平距离 AE 为4米,现以 A 为原点,直线 AB 为 x 轴,建立平面直角坐标系(如图所示).求羽毛球飞行的路线所在的抛物线的函数表达式及飞行的最大高度.



(第4题图)

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

(2)由(1)知 $y=-\frac{2}{3}x^2+\frac{4}{3}x+2(0\leqslant x\leqslant 3)$,

当 $x=1$ 时,$y=\frac{8}{3}$,即水柱的最大高度为$\frac{8}{3}$米.

点方法

本题考查了二次函数在实际生活中的运用,重点是二次函数的表达式的求法,利用顶点式求出表达式是解题的关键.

考查角度2 抛物线形问题(拓展点)

例5 一座钢索桥的轮廓是抛物线形,如图5.5-7所示,拱高6 m,跨度20 m,相邻两支柱间的距离约为5 m.

(1)以地面 BC 所在的直线为 x 轴,以 BC 的垂直平分线 OA 所在的直线为 y 轴,建立如图5.5-7所示的平面直角坐标系,求抛物线对应的函数表达式;

(2)求支柱 EF 的长度;

(3)拱桥下地平面是单向行车道,能否并排行驶宽2 m、高3 m的三辆汽车(汽车间的间隔忽略不计)?请说明理由;

(4)拱桥下方要悬挂宽为1 m的电子警示牌,要求警示牌下底距地面不能少于4.4 m,则电子警示牌最长为多长?

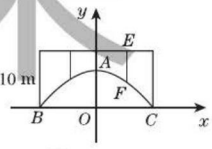


图5.5-7

导引:(1)根据题意可知点 A,B,C 的坐标,设出抛物线对应的函数表达式代入可求解.

(2)设 F 点的坐标为 $(5,y_F)$ 可求出支柱 EF 的长度.

(3)求出 $x=\frac{1}{2}\times 2+2=3$ 时 y 的值,与3比较大小即可.

(4)求出 $y=1+4.4=5.4$ 时 x 的值即可.

▶解:(1)根据题意可知点 B、C、A 的坐标分别是 $(-10,0)$,$(10,0)$,$(0,6)$,设抛物线对应的函数表达式为 $y=ax^2+c$,

将点 A、C 的坐标代入 $y=ax^2+c$,得 $\begin{cases}c=6,\\100a+c=0,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=-\frac{3}{50},\\c=6.\end{cases}$

所以抛物线对应的函数表达式为 $y=-\frac{3}{50}x^2+6$.

(2)设 F 点的坐标为 $(5,y_F)$,于是 $y_F=-\frac{3}{50}\times 5^2+6=4.5$,

从而支柱 EF 的长度是 $10-4.5=5.5$(m).

(3)根据题意,当 $x=\frac{1}{2}\times 2+2=3$ 时,$y=-\frac{3}{50}\times 3^2+6=5.46>3$,

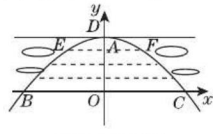
所以可以并排行驶宽2 m、高3 m的三辆汽车.

(4)根据题意,当 $y=1+4.4=5.4$ 时,$-\frac{3}{50}x^2+6=5.4$,解得:$x=\pm\sqrt{10}$,则电子警示牌最长为 $2\sqrt{10}$ m.

5. 有一座抛物线形拱桥,在正常水位时,水面 BC 的宽为10米,拱桥的最高点 D 到水面 BC 的距离 DO 为4米,点 O 是 BC 的中点,如图,以点 O 为原点,直线 BC 为 x 轴,建立平面直角坐标 xOy.

(1)求该抛物线的函数表达式;

(2)如果水面 BC 上升3米(即 $OA=3$ 米)至水面 EF,点 E 在点 F 的左侧,求水面宽度 EF 的长.



(第5题图)

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

Ⅱ 点方法 · 拨技巧 · 探规律

典例剖析

拔尖角度1　二次函数与一次函数的综合应用(易错点)

例6 某种电缆在空中架设时,两端挂起的电缆下垂都近似于抛物线 $y=\frac{1}{100}x^2$ 的形状,今在一个坡度为1∶5的斜坡 BD 上(即 $DE:BE=1:5$),沿水平距离间隔50米架设两个固定电缆的塔柱 AB、CD,塔柱高度均为20米(如图5.5-8),以点 B 为原点,BE 方向为 x 轴建立平面直角坐标系,解决下列问题:

(1)求电缆(AC 段)所在抛物线的表达式;

(2)求下垂的电缆与斜坡 BD 的最近距离.

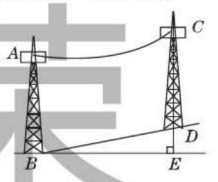


图5.5-8

导引:(1)设抛物线的表达式为 $y=\frac{1}{100}x^2+bx+c$,将点 $A(0,20)$,$C(50,30)$ 代入求解可得;

(2)先得出斜坡所在直线的表达式为 $y=\frac{1}{5}x$,设一条与 x 轴垂直的直线 $x=m$ 与抛物线交于点 M,与斜坡 BD 交于点 G,结合(1)求得的表达式可知 $MG=\frac{1}{100}m^2-\frac{3}{10}m+20-\frac{1}{5}m=\frac{1}{100}(m-25)^2+13.75$,从而可得答案.

▶解:(1)设抛物线的表达式为 $y=\frac{1}{100}x^2+bx+c$,

易知:$A(0,20)$,$C(50,30)$,

代入,得:$\begin{cases}c=20,\\25+50b+c=30,\end{cases}$ 解得:$\begin{cases}b=-\frac{3}{10},\\c=20,\end{cases}$

∴ 抛物线的表达式为 $y=\frac{1}{100}x^2-\frac{3}{10}x+20$;

(2)∵ 斜坡 BD 的坡度为1∶5,

∴ 斜坡 BD 所在直线的表达式为 $y=\frac{1}{5}x$,

设一条与 x 轴垂直的直线 $x=m$ 与抛物线交于点 M,与斜坡 BD 交于点 G,

则 $MG=\frac{1}{100}m^2-\frac{3}{10}m+20-\frac{1}{5}m=\frac{1}{100}(m-25)^2+13.75$,

∴ 当 $m=25$ 时,MG 的最小值为13.75米,即下垂的电缆与斜坡 BD 的最近距离为13.75米.

举一反三训练

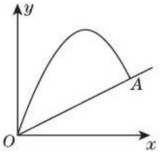
☞(答案见213页)

6. 如图,将小球从斜坡的 O 点抛出,小球的抛出路线可以用二次函数 $y=ax^2+bx$ 刻画,顶点坐标为(4,8),斜坡坡面可以用 $y=\frac{1}{2}x$ 刻画.

(1)求二次函数的表达式;

(2)若小球的落点是 A,求点 A 的坐标;

(3)求小球飞行过程中与坡面的最大距离.



(第6题图)


建立二次函数模型求最值

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

点方法

解答本题关键是正确理解“最近距离”是同一自变量取值下的两个函数值的差，据此构造二次函数求解.

拨尖角度2 代数式的最值问题

例7 已知实数x、y满足$x^2+x+y-1=0$，则$y-x$的最大值为_____.

导引：先把$x^2+x+y-1=0$变形得到$y=-x^2-x+1$，再代入$y-x$，利用二次函数的性质求最值.

$\because x^2+x+y-1=0$，$\therefore y=-x^2-x+1$.

$\therefore y-x=-x^2-x+1-x=-x^2-2x+1=-(x+1)^2+2$，

$\because a=-1<0$，

$\therefore$ 当$x=-1$时，$y-x$有最大值，最大值为2，故答案为：2.

▶答案：2

点方法

解答这类问题的基本思路是将所求代数式中的多个未知数通过变形，转化为关于某一个未知数的二次三项式，再运用二次函数的性质确定最值.

7. 已知实数x、y满足$x^2+2x+y-3=0$，则$2x-y$的最小值为_____.

Ⅲ 练基础·练方法·练技巧 ☞(答案见214页)

基础巩固练

1. [中考·怀化]下列函数是二次函数的是(　　)

A. $y=2x+1$　　B. $y=-2x+1$

C. $y=x^2+2$　　D. $y=\frac{1}{2}x-2$

2. 某大学生利用课余时间在网上销售一种成本为50元/件的商品，每月的销售量y(件)与销售单价x(元/件)之间的函数关系式为$y=-4x+440$，每月要获得最大利润，该商品的售价应定为(　　)

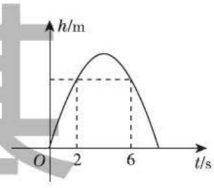
A. 60元/件　　B. 70元/件

C. 80元/件　　D. 90元/件

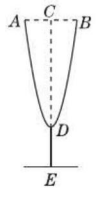
3. 竖直向上发射的小球的高度h(m)关于运动时间t(s)的函数表达式为$h=at^2+bt$，其图像如图所示，若小球在发射后第2 s与第6 s时的高度相等，则下列时刻中小球的高度最高的是(　　)

A. 第3 s　　B. 第3.9 s

C. 第4.5 s　　D. 第6.5 s



(第3题图)



(第4题图)

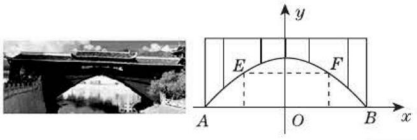
4. 小明以二次函数$y=2x^2-4x+8$的图像为灵感为“2017北京·房山国际葡萄酒大赛”设计了一款杯子，如图为杯子的设计稿，若$AB=4$，$DE=3$，则杯子的高CE为(　　)

A. 14　　B. 11　　C. 6　　D. 3

5. 将一条长为20 cm的铁丝剪成两段，并以每一段铁丝的长度为周长各做成一个正方形，则这两个正方形面积之和的最小值是_____cm^2.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

6. 廊桥是我国古老的文化遗产. 如图是某座抛物线形的廊桥示意图,已知抛物线所对应的函数表达式为 $y=-\frac{1}{40}x^2+10$,为保护廊桥的安全,在该抛物线上距水面 AB 高为 8 米的点 E,F 处要安装两盏警示灯,则这两盏灯的水平距离 EF 是_____米. (精确到 1 米)

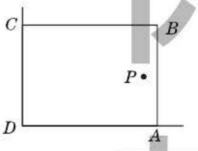


(第 6 题图)

7. 在美化校园的活动中,某兴趣小组想借助如图所示的直角墙角(两边足够长),用 28 m 长的篱笆围成一个矩形花园 $ABCD$(篱笆只围 AB,BC 两边),设 $AB=x$ m,花园的面积为 S m^2.

(1)求 S 与 x 之间的函数表达式;

(2)若在 P 处有一棵树与墙 CD,AD 的距离分别是 15 m 和 6 m,要将这棵树围在花园内(含边界,不考虑树的粗细),求花园面积的最大值.

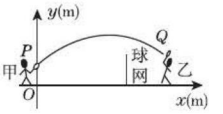


(第 7 题图)

8. [中考 · 金华]甲、乙两人进行羽毛球比赛,羽毛球飞行的路线为抛物线的一部分,如图,甲在 O 点正上方 1 m 的 P 处发出一球,羽毛球飞行的高度 y(m)与水平距离 x(m)之间满足函数表达式 $y=a(x-4)^2+h$,已知点 O 与球网的水平距离为 5 m,球网的高度为 1.55 m.

(1)当 $a=-\frac{1}{24}$ 时,①求 h 的值;②通过计算判断此球能否过网.

(2)若甲发球过网后,羽毛球飞行到与点 O 的水平距离为 7 m,离地面的高度为 $\frac{12}{5}$ m 的 Q 处时,乙扣球成功,求 a 的值.



(第 8 题图)

9. [中考 · 青岛]青岛市某大酒店豪华间实行淡季、旺季两种价格标准,旺季每间价格比淡季上涨 $\frac{1}{3}$. 下表是去年该酒店豪华间某两天的相关记录:

	淡季	旺季
未入住房间数	10	0
日总收入(元)	24 000	40 000

(1)该酒店豪华间有多少间?旺季每间价格为多少元?

(2)今年旺季来临,豪华间的间数不变. 经市场调查发现,如果豪华间仍旧实行去年旺季价格,那么每天都客满;如果价格继续上涨,那么每增加 25 元,每天未入住房间数增加 1 间. 不考虑其他因素,该酒店将豪华间的价格上涨多少元时,豪华间的日总收入最高?最高日总收入是多少元?

禁德基

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

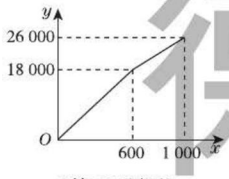
能力提升练

10. [中考·襄阳]为了“创建文明城市,建设美丽家园”,我市某社区将辖区内的一块面积为1 000 m^2 的空地进行绿化,一部分种草,剩余部分栽花,设种草部分的面积为$x(m^2)$,种草所需费用y_1(元)与$x(m^2)$的函数关系式为$y_1=\begin{cases}k_1x(0\leqslant x<600),\\k_2x+b(600\leqslant x\leqslant 1\,000),\end{cases}$其图像如图所示;栽花所需费用$y_2$(元)与$x(m^2)$的函数关系式为$y_2=-0.01x^2-20x+30\,000(0\leqslant x\leqslant 1\,000)$.

(1)请直接写出k_1、k_2和b的值;

(2)设这块1 000 m^2 空地的绿化总费用为W(元),请利用W与x的函数关系式,求出绿化总费用W的最大值;

(3)若种草部分的面积不少于700 m^2,栽花部分的面积不少于100 m^2,请求出绿化总费用W的最小值.

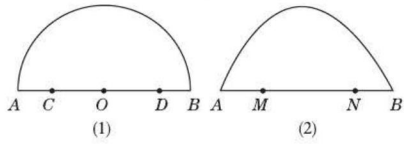


(第10题图)

11. 如图(1),某穿山隧道纵截面为半圆形,圆心O的左右两边各有一条宽为3.75 m的机动车道(OC、OD)和宽为1.25 m的非机动车道(AC、BD).(备注:机动车与非机动车通行时都只能在各自车道行驶,不能越线)

(1)若有一辆宽3.3 m的卡车载物从该隧道通行,则其最大高度不能超过多少米?(结果精确到0.1 m)

(2)为改善通行条件,地方政府另外修建了一条单向隧道,并打算将如图(1)所示的隧道改建成如图(2)所示的抛物线形隧道,并要求:①隧道宽度AB及最大高度均保持不变;②只需保留一条单向机动车道(MN);③两条非机动车道(AM、BN)均拓宽为2 m.问:改建后,若有一辆宽3.8 m的卡车载物从该隧道通行,则其最大高度不能超过多少米?(结果精确到0.1 m)



(第11题图)

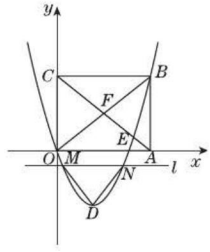
思维拓展练

12. [中考·镇江]如图,在平面直角坐标系中,矩形$OABC$的边OA、OC分别在x轴、y轴上,点B的坐标为$(4,t)(t>0)$,二次函数$y=x^2+bx(b<0)$的图像经过点B,顶点为点D.

(1)当$t=12$时,顶点D到x轴的距离等于_____;

(2)点E是二次函数$y=x^2+bx(b<0)$的图像与x轴的一个公共点(点E与点O不重合),求$OE\cdot AE$的最大值及取得最大值时的二次函数的表达式;

(3)矩形$OABC$的对角线OB、AC交于点F,直线l平行于x轴,交二次函数$y=x^2+bx(b<0)$的图像于点M、N,连接DM、DN,当$\triangle DMN\backsim\triangle FOC$时,求$t$的值.



(第12题图)

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

中考提分 专题篇

章末整合与拔高

知识专题

专题一 二次函数图像及其性质

链接中考>> 二次函数的图像及其性质,这是中考常考的内容,必须熟练掌握. 回顾近几年的中考试题,有的是直接给出函数关系式,以数学问题的形式直接考查,有的则是含在解决实际问题中进行考查,确定了图像的开口方向和顶点坐标也就确定了函数的最大值或最小值.

例1 [中考 · 兰州]点 $P_1(-1,y_1)$、$P_2(3,y_2)$、$P_3(5,y_3)$ 均在二次函数 $y=-x^2+2x+c$ 的图像上,则 y_1、y_2、y_3 的大小关系是(　　)

A. $y_3>y_2>y_1$　B. $y_3>y_1=y_2$　C. $y_1>y_2>y_3$　D. $y_1=y_2>y_3$

导引:根据二次函数的特点,其图像的对称轴为直线 $x=1$,图像开口向下,在对称轴的右侧,y 随 x 的增大而减小,根据二次函数图像的对称性可知,点 $P_1(-1,y_1)$ 与 $P_2(3,y_2)$ 关于对称轴对称,可判断 $y_1=y_2$.

∵ 二次函数的表达式为 $y=-x^2+2x+c$,∴ 图像的对称轴为直线 $x=1$,点 $P_2(3,y_2)$、$P_3(5,y_3)$ 在对称轴的右侧,y 随 x 的增大而减小,∵ $3<5$,∴ $y_2>y_3$,根据二次函数图像的对称性可知,点 $P_1(-1,y_1)$ 与 $P_2(3,y_2)$ 关于对称轴对称,故 $y_1=y_2>y_3$,故选 D.

▶答案:D

点方法

解答这类问题的通常有三种思路:(1)计算出相应的函数值再比较大小;(2)根据二次函数增减性,先将三个点分为对称轴左侧,右侧,根据它们离对称轴的远近做出判断;(3)画草图,根据二次函数的图像的开口方向和对称轴画出草图,标出三个点在图像中的大致位置,从而做出判断. 本题借助抛物线的轴对称性,把位于对称轴两侧的点,变换到了同一侧,这样便于利用二次函数的增减性来进行比较.

例2 [中考 · 广西]将抛物线 $y=\frac{1}{2}x^2-6x+21$ 向左平移 2 个单位长度后,得到新抛物线的表达式为(　　)

A. $y=\frac{1}{2}(x-8)^2+5$　　B. $y=\frac{1}{2}(x-4)^2+5$

C. $y=\frac{1}{2}(x-8)^2+3$　　D. $y=\frac{1}{2}(x-4)^2+3$

链接中考训练 (答案见215页)

1. [中考 · 连云港]已知抛物线 $y=ax^2(a>0)$ 过 $A(-2,y_1)$、$B(1,y_2)$ 两点,则下列关系式一定正确的是(　　)

A. $y_1>0>y_2$

B. $y_2>0>y_1$

C. $y_1>y_2>0$

D. $y_2>y_1>0$

2. [中考 · 乌鲁木齐]把抛物线 $y=2x^2-4x+3$ 向左平移 1 个单位长度,得到的抛物线的表达式为_____.

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

导引：直接利用**配方法**将原式变形，进而利用平移规律得出答案.

$y=\frac{1}{2}x^2-6x+21=\frac{1}{2}(x^2-12x)+21=\frac{1}{2}[(x-6)^2-36]+21=\frac{1}{2}(x-6)^2+3$,

故 $y=\frac{1}{2}(x-6)^2+3$，将抛物线 $y=\frac{1}{2}(x-6)^2+3$ 向左平移2个单位长度后，

得到新抛物线的表达式为 $y=\frac{1}{2}(x-6+2)^2+3=\frac{1}{2}(x-4)^2+3$，故选D. ▶答案：D

点方法

主要考查的是函数图像的平移，二次函数的图像平移问题，一般根据平移规则“上加下减，左加右减”写出表达式.

专题二 二次函数 $y=ax^2+bx+c(a\neq0)$ 的图像特征与系数的关系

链接中考>> 根据二次函数的图像确定其中的字母 a、b、c 及 b^2-4ac，以及关于 a、b、c 组成的代数式的正负是每年中考考查的热点问题，多以选择题的形式出现.

例3 [中考·广安] 如图5-1所示，抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 的顶点为 $B(-1,3)$，与 x 轴的交点 A 在点 $(-3,0)$ 和 $(-2,0)$ 之间，以下结论：①$b^2-4ac=0$；②$a+b+c>0$；③$2a-b=0$；④$c-a=3$. 其中正确的有(　　)个.

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

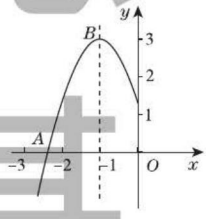
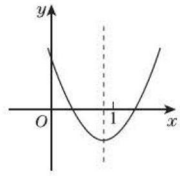


图5-1

导引：根据二次函数的图像与性质即可判断.

∵ 抛物线与 x 轴有两个交点，∴ $b^2-4ac>0$，故①错误；由于对称轴为直线 $x=-1$，∴ 直线 $x=-3$ 与直线 $x=1$ 关于直线 $x=-1$ 对称，∵ 当 $x=-3$ 时，$y<0$，∴ 当 $x=1$ 时，$y=a+b+c<0$，故②错误；∵ 对称轴为直线 $x=-\frac{b}{2a}=-1$，∴ $2a-b=0$，故③正确；∵ 顶点为 $B(-1,3)$，∴ $a-b+c=3$，∴ $a-2a+c=3$，即 $c-a=3$，故④正确. 故选B. ▶答案：B

3. [中考·湘西州] 已知抛物线 $y=ax^2+bx+c(a\neq0)$ 如图所示，则下列6个代数式：ac，abc，$2a+b$，$a+b+c$，$4a-2b+c$，b^2-4ac，其中值大于0的个数为(　　)



(第3题图)

A. 2　　B. 3　　C. 4　　D. 5

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

点方法

对于二次函数 $y=ax^2+bx+c$ ($a\neq0$)，要熟练掌握以下几点：①二次项系数 a 决定抛物线的开口方向和大小. 当 $a>0$ 时，抛物线开口向上；当 $a<0$ 时，抛物线开口向下；②一次项系数 b 和二次项系数 a 共同决定对称轴的位置：当 a 与 b 同号时（即 $ab>0$），对称轴在 y 轴左侧；当 a 与 b 异号时（即 $ab<0$），对称轴在 y 轴右侧；③常数项 c 决定抛物线与 y 轴交点：抛物线与 y 轴交于点 $(0,c)$.

专题三　二次函数与一元二次方程的关系

链接中考>> 由二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图像与 x 轴的交点和一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 的根的关系，我们借助二次函数的图像求一元二次方程的根，不过这种求法只是一元二次方程的根的近似解法. 中考对此要点的考查是关注数学知识之间的相互联系，以及体现数形结合的思想方法.

例4 [中考 · 南京] 已知二次函数 $y=2(x-1)(x-m-3)$ (m 为常数).

(1) 求证：不论 m 为何值，该函数的图像与 x 轴总有公共点；

(2) 当 m 取什么值时，该函数的图像与 y 轴的交点在 x 轴的上方？

导引：(1) 代入 $y=0$ 求出 x 的值，分 $m+3=1$ 和 $m+3\neq1$ 两种情况考虑方程解的情况，进而即可证出：不论 m 为何值，该函数的图像与 x 轴总有公共点；

(2) 利用二次函数图像上点的坐标特征求出该函数的图像与 y 轴交点的纵坐标，令其大于 0 即可求出.

(1) ▶证明：当 $y=0$ 时，$2(x-1)(x-m-3)=0$，

解得：$x_1=1$，$x_2=m+3$.

当 $m+3=1$，即 $m=-2$ 时，方程有两个相等的实数根；

当 $m+3\neq1$，即 $m\neq-2$ 时，方程有两个不相等的实数根.

∴ 不论 m 为何值，该函数的图像与 x 轴总有公共点；

(2) ▶解：当 $x=0$ 时，$y=2(x-1)(x-m-3)=2m+6$，

∴ 该函数的图像与 y 轴交点的纵坐标为 $2m+6$，

∴ 当 $2m+6>0$，即 $m>-3$ 时，该函数的图像与 y 轴的交点在 x 轴的上方.

点方法

抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 与 x 轴交点个数由 b^2-4ac 决定：当 $b^2-4ac>0$ 时，抛物线与 x 轴有 2 个交点；当 $b^2-4ac=0$ 时，抛物线与 x 轴有 1 个交点；当 $b^2-4ac<0$ 时，抛物线与 x 轴没有交点.

4. [中考 · 自贡] 若函数 $y=x^2+2x-m$ 的图像与 x 轴有且只有一个交点，则 m 的值为_____.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

专题四 二次函数的实际应用

链接中考>> 二次函数是反映现实世界中变量间关系和变化规律的一种常见的数学模型. 利用二次函数解决实际问题,一直是中考的必考内容,试题通常选取与学生生活贴近的实际问题,通过数学建模解决问题.

例5 [中考·黄冈]黄冈市某乡镇在"精准扶贫"活动中销售一农产品,经分析发现月销售量 y(万件)与月份 x(月)的关系式为:$y=\begin{cases}x+4(1\leqslant x\leqslant 8,x\text{ 为整数})\\-x+20(9\leqslant x\leqslant 12,x\text{ 为整数})\end{cases}$,每件产品的利润 z(元)与月份 x(月)的关系如下表:

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
z	19	18	17	16	15	14	13	12	11	10	10	10

(1)请你根据表格求出每件产品的利润 z(元)与月份 x(月)的关系式;

(2)若月利润 w(万元)=当月销售量 y(万件)×当月每件产品的利润 z(元),求月利润 w(万元)与月份 x(月)的关系式;

(3)当 x 为何值时,月利润 w 有最大值,最大值为多少?

导引:(1)根据表格中的数据可以求得各段对应的函数关系式;

(2)根据题目中的关系式和(1)中的关系式可以解答本题;

(3)根据(2)中的关系式可以求得各段的最大值,从而可以解答本题.

▶解:(1)当 $1\leqslant x\leqslant 9$ 时,设每件产品的利润 z(元)与月份 x(月)的关系式为 $z=kx+b$,由题意得 $\begin{cases}k+b=19,\\2k+b=18,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}k=-1,\\b=20,\end{cases}$

即当 $1\leqslant x\leqslant 9$ 时,每件产品的利润 z(元)与月份 x(月)的关系式为 $z=-x+20$,

当 $10\leqslant x\leqslant 12$ 时,$z=10$,

综上可得,$z=\begin{cases}-x+20 & (1\leqslant x\leqslant 9,x\text{ 取整数}),\\10 & (10\leqslant x\leqslant 12,x\text{ 取整数});\end{cases}$

(2)当 $1\leqslant x\leqslant 8$ 时,$w=(x+4)(-x+20)=-x^2+16x+80$,

当 $x=9$ 时,$w=(-9+20)\times(-9+20)=121$,

当 $10\leqslant x\leqslant 12$ 时,$w=(-x+20)\times 10=-10x+200$,

综上可得,$w=\begin{cases}-x^2+16x+80 & (1\leqslant x\leqslant 8,x\text{ 取整数}),\\121 & (x=9),\\-10x+200 & (10\leqslant x\leqslant 12,x\text{ 取整数});\end{cases}$

(3)当 $1\leqslant x\leqslant 8$ 时,$w=-x^2+16x+80=-(x-8)^2+144$,

∴当 $x=8$ 时,w 取得最大值,此时 $w=144$;

5. [中考·黄石]小明同学在一次社会实践活动中,通过对某种蔬菜在1月份至7月份的市场行情进行统计分析后得出如下规律:

①该蔬菜的销售单价 P(单位:元/千克)与时间 x(单位:月份)满足关系:$P=9-x$;

②该蔬菜的平均成本 y(单位:元/千克)与时间 x(单位:月份)满足二次函数关系:$y=ax^2+bx+10$.

已知4月份的平均成本为2元/千克,6月份的平均成本为1元/千克.

(1)求该二次函数的表达式;

(2)请运用小明统计的结论,求出该蔬菜在几月份的平均利润 L(单位:元/千克)最大?最大平均利润是多少?(注:平均利润=销售单价-平均成本)

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

当 $x=9$ 时，$w=121$，

当 $10\leqslant x\leqslant 12$ 时，$w=-10x+200$，

则当 $x=10$ 时，w 取得最大值，此时 $w=100$，

综上可得，当 x 为 8 时，月利润 w 有最大值，最大值为 144 万元.

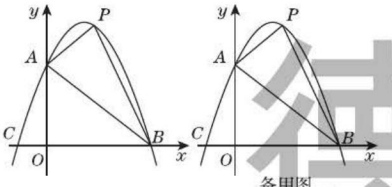
点方法

解此类题的关键是通过题意，确定出二次函数的表达式，然后确定其最大值，实际问题中自变量 x 的取值要使实际问题有意义，因此在求二次函数的最值时，一定要注意自变量 x 的取值范围.

专题五 压轴题

链接中考>> 二次函数是每年中考的重点考查内容，也是各地中考压轴题青睐的重点模型，中考中，这类问题在考点上往往与图形的判定与性质、图形的面积、图形变换、方程和二次函数等结合起来，体现出很强的**数形结合思想**.

例 6 [中考 · 资阳] 已知：如图 5-2，抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 与坐标轴分别交于点 $A(0,6)$，$B(6,0)$，$C(-2,0)$，点 P 是线段 AB 上方抛物线上的一个动点.



备用图

图 5-2

(1) 求抛物线的表达式；

(2) 当点 P 运动到什么位置时，$\triangle PAB$ 的面积有最大值？

(3) 过点 P 作 x 轴的垂线，交线段 AB 于点 D，再过点 P 作 $PE\parallel x$ 轴交抛物线于点 E，连接 DE，请问是否存在点 P 使 $\triangle PDE$ 为等腰直角三角形？若存在，求出点 P 的坐标；若不存在，请说明理由.

导引：(1) 用**待定系数法**求解可得；

(2) 如图 5-3，作 $PM\perp OB$ 于点 M，交 AB 于点 N，作 $AG\perp PM$ 于点 G，先求出直线 AB 的表达式为 $y=-x+6$，设 $P\left(t,-\frac{1}{2}t^2+2t+6\right)$，则 $N(t,-t+6)$，由 $S_{\triangle PAB}=S_{\triangle PAN}+S_{\triangle PBN}=\frac{1}{2}PN\cdot AG+\frac{1}{2}PN\cdot BM=\frac{1}{2}PN\cdot OB$ 列出关于 t 的函数表达式，利用二次函数的性质求解可得；

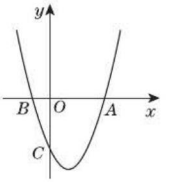
(3) 如图 5-4，由 $PH\perp OB$ 知 $DH\parallel AO$，据此由 $OA=OB=6$ 得 $\angle BDH=\angle BAO=45°$，结合 $\angle DPE=90°$ 知，若 $\triangle PDE$ 为等腰直角三角形，则 $\angle EDP=45°$，从而得出点 E 与点 A 重合，求出 $y=6$ 时 x 的值即可得出答案.

6. [中考 · 济宁] 如图，已知抛物线 $y=ax^2+bx+c(a\neq 0)$ 经过点 $A(3,0)$，$B(-1,0)$，$C(0,-3)$.

(1) 求该抛物线的表达式；

(2) 若以点 A 为圆心的圆与直线 BC 相切于点 M，求切点 M 的坐标；

(3) 若点 Q 在 x 轴上，点 P 在抛物线上，是否存在以点 B，C，Q，P 为顶点的四边形是平行四边形？若存在，求点 P 的坐标；若不存在，请说明理由.



(第 6 题图)

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

▶解:(1)∵ 抛物线过点 $B(6,0)$、$C(-2,0)$,

∴ 设抛物线的表达式为 $y=a(x-6)(x+2)$,

将点 $A(0,6)$ 的坐标代入,得:$-12a=6$,解得:$a=-\frac{1}{2}$,

∴ 抛物线的表达式为 $y=-\frac{1}{2}(x-6)(x+2)=-\frac{1}{2}x^2+2x+6$;

(2)如图 5-3,过点 P 作 $PM\perp OB$ 于点 M,交 AB 于点 N,作 $AG\perp PM$ 于点 G,

设直线 AB 的表达式为 $y=kx+b$,

将点 $A(0,6)$、$B(6,0)$ 的坐标代入,得:

$\begin{cases}b=6,\\6k+b=0,\end{cases}$ 解得:$\begin{cases}k=-1,\\b=6,\end{cases}$

则直线 AB 的表达式为 $y=-x+6$,

设 $P\left(t,-\frac{1}{2}t^2+2t+6\right)$ 其中 $0<t<6$,则 $N(t,-t+6)$,

∴ $PN=PM-MN=-\frac{1}{2}t^2+2t+6-(-t+6)=-\frac{1}{2}t^2+2t+6+t-6=-\frac{1}{2}t^2+3t$,

∴ $S_{\triangle PAB}=S_{\triangle PAN}+S_{\triangle PBN}=\frac{1}{2}PN\cdot AG+\frac{1}{2}PN\cdot BM=\frac{1}{2}PN\cdot(AG+BM)=\frac{1}{2}PN\cdot OB=\frac{1}{2}\times\left(-\frac{1}{2}t^2+3t\right)\times6=-\frac{3}{2}t^2+9t=-\frac{3}{2}(t-3)^2+\frac{27}{2}$,

∴ 当 $t=3$ 时,$\triangle PAB$ 的面积有最大值;

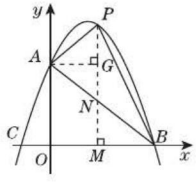


图 5-3

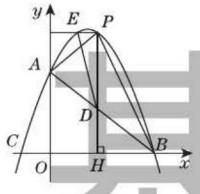


图 5-4

(3)存在.如图 5-4,∵ $PH\perp OB$ 于 H,∴ $\angle DHB=\angle AOB=90°$,∴ $DH/\!/AO$,∵ $OA=OB=6$,∴ $\angle BDH=\angle BAO=45°$,∵ $PE/\!/x$ 轴、$PD\perp x$ 轴,∴ $\angle DPE=90°$,

若 $\triangle PDE$ 为等腰直角三角形,

则 $\angle EDP=45°$,

∴ $\angle EDP$ 与 $\angle BDH$ 互为对顶角,即点 E 与点 A 重合,

则当 $y=6$ 时,$-\frac{1}{2}x^2+2x+6=6$,解得:$x=0$(舍去)或 $x=4$,

即点 $P(4,6)$.

点方法

本题主要考查二次函数的综合问题,解题的关键是掌握**待定系数法**求函数表达式、二次函数的性质、等腰直角三角形的判定与性质等知识点.

荣德基

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

思想方法专题

专题六 数形结合思想

专题解读>> 数学是研究现实世界空间形式和数量关系的学科. “数”与“形”是数学中的两个最基本的概念,每一个几何图形中都蕴含着一定的数量关系;而数量关系又常常可以通过几何图形做出直观的反映和描述,所以数形结合思想也就成为研究数学问题的重要思想方法. 在解题方法上,“数”与“形”相互转化,从而使问题化难为易、化繁为简,达到解决问题的目的. 下面结合具体例题给同学们说说数形结合思想在二次函数中的体现.

例7 如图5-5,已知二次函数 $y_1 = ax^2 + bx + c(a \neq 0)$ 与一次函数 $y_2 = kx + m(k \neq 0)$ 的图像相交于点 $A(-2,4)$,$B(8,2)$,则关于 x 的不等式 $ax^2 + (b-k)x + c - m > 0$ 的解集是_____.

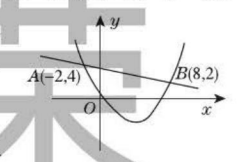


图5-5

导引:先把不等式转化为用两个函数表达式表示的形式,然后结合图像,找出二次函数图像在一次函数图像上面时自变量的取值范围就是不等式的解集.

$ax^2 + (b-k)x + c - m > 0$,

可整理为 $ax^2 + bx + c > kx + m$,

∵ 两函数图像相交于点 $A(-2,4)$,$B(8,2)$,

∴ 不等式的解集是 $x < -2$ 或 $x > 8$.

故答案为:$x < -2$ 或 $x > 8$.

▶答案:$x < -2$ 或 $x > 8$

点方法

图像法解不等式是**数形结合思想**的具体体现,解答这类问题关键是将不等式转化为相应的函数图像之间的关系,结合图像的位置确定解集.

专题七 转化思想

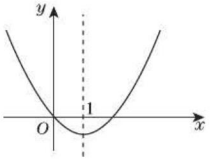
专题解读>> 我们在解数学题时,碰到陌生的问题常设法把它转化成熟悉的问题,碰到复杂的问题常设法把它转化成简单的问题,从而使问题获得解决. 这就是数学中的一种重要的思想方法——转化思想.

例8 已知抛物线 $y = x^2 - 4$ 与 y 轴交于点 A,与 x 轴分别交于 B、C 两点,将该抛物线分别平移后得到抛物线 l_1,l_2,其中 l_1 的顶点为点 B,l_2 的顶点为点 C,则由这三条抛物线所围成的图形(图5-6中阴影部分)的面积为(　　)

A. 8　　B. 16　　C. 32　　D. 无法计算

链接中考训练 (答案见216页)

7. 二次函数 $y = x^2 + bx$ 的图像如图,对称轴为直线 $x = 1$. 若关于 x 的一元二次方程 $x^2 + bx - t = 0$(t 为实数)在 $-1 < x < 4$ 的范围内有解,则 t 的取值范围是_____.



(第7题图)

8. 如图,已知抛物线 m 经过原点 O,与 x 轴交于点 $A(-3,0)$,P 为抛物线的顶点,将抛物线 m 平移后得到抛物线 $y = \left(x + \frac{3}{2}\right)^2$,其中点 A,P,O 的对应点分别为 A',P',O',连接 AA',则图中阴影部分的面积为_____.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

导引：根据平移的性质和抛物线的对称性可知图5-6中阴影部分的面积 = $\triangle ABC$ 的面积 $\times 2$.

$\because y=x^2-4=(x+2)(x-2)$,

$\therefore B(-2,0)$, $C(2,0)$,

则 $BC=4$.

又当 $x=0$ 时, $y=-4$,

则 $A(0,-4)$,

故 $OA=4$.

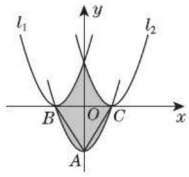


图5-6

$\therefore$ 抛物线 l_1 是由抛物线 $y=x^2-4$ 向左平移2个单位长度,再向上平移4个单位长度得到的,抛物线 l_2 是由抛物线 $y=x^2-4$ 向右平移2个单位长度,再向上平移4个单位长度得到的,

$\therefore S_{阴影}=2S_{\triangle ABC}=2\times\frac{1}{2}\times4\times4=16$. 故选B. ▶答案:B

点方法

(**转化思想**)计算这类阴影部分面积的常用方法是等积转化,根据图形性质将不规则图形转化为规则图形,再计算其面积.

专题八 分类讨论思想

专题解读>> 分类讨论思想就是在研究和解决数学问题时,根据所研究对象的差异,将各种不同的情况分类解决,最后综合各类结果得到整个问题的解的思想方法.

例9 [中考·朝阳]若函数 $y=(m-1)x^2-6x+\frac{3}{2}m$ 的图像与 x 轴有且只有一个交点,则 m 的值为(　　)

A. -2 或3　　B. -2 或 -3

C. 1或 -2 或3　　D. 1或 -2 或 -3

导引：分 $m=1$ 和 $m\neq1$ 两种情况,根据一次函数的性质、二次函数与方程的关系解答.

▶解:当 $m=1$ 时,函数 $y=-6x+\frac{3}{2}$ 是一次函数,图像与 x 轴有且只有一个交点,

当 $m\neq1$ 时,函数为二次函数,

$\because$ 函数 $y=(m-1)x^2-6x+\frac{3}{2}m$ 的图像与 x 轴有且只有一个交点,

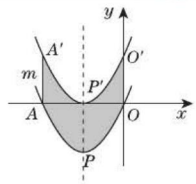
$\therefore(-6)^2-4\times(m-1)\times\frac{3}{2}m=0$,

解得 $m=-2$ 或3,

故选:C. ▶答案:C

点方法

(**分类讨论思想**)本题中没有明确是什么函数,因而需分类讨论.



(第8题图)

9. 若关于 x 的函数 $y=kx^2+2x-1$ 与 x 轴仅有一个公共点,则实数 k 的值为_____.

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

第6章

图形的相似

体验图形的缩放

数学点拨

荣德基

你将学到的核心考点

- 相似三角形的判定与性质 □
- 位似变换 □
- 相似三角形解决实际问题 □

我们为你提供的核心方法

设k法	□	方程思想	□
建模思想	□	分类讨论思想	□
转化思想	□	定义法	□

掌握这些考点和方法后，记得回来给自己打✓哦！

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

6.1 图上距离与实际距离

1 点知识·拨考向·诊误区

知识点1 线段的比

点知识

两条线段的长度的比叫做两条线段的比.

要点精析

1. 量得两条线段AB、CD的长度分别是m,n,那么就说这两条线段的比$AB:CD=m:n$或写成$\frac{AB}{CD}=\frac{m}{n}$. 若把$\frac{m}{n}$表示成比值$k$,则$\frac{AB}{CD}=k$或$AB=k\cdot CD$.
2. 在量线段时,两条线段的长度应用同一长度单位表示,如果长度单位不同,应先化成同一长度单位,再求它们的比.
3. 两条线段的比值,没有长度单位,它与所采用的长度单位无关.
4. 两条线段的比具有顺序性,要明确比的前项和后项分别是哪一条线段.

拨考向

典例剖析

考查角度1 求比值

例1 在某幅地图上,A,B两地距离为8.5 cm,实际距离为170 km,则比例尺为(　　)

A. 1∶20　B. 1∶20 000　C. 1∶200 000　D. 1∶2 000 000

导引:比例尺=图上距离∶实际距离,根据题意可直接求得比例尺.

∵ 170 km=17 000 000 cm,∴ 比例尺=8.5∶17 000 000=1∶2 000 000. 故选D.

▶答案:D

诊误区

掌握比例尺的计算方法,注意在求比的过程中,单位要统一.

考查角度2 根据比例尺计算(拓展点)

例2 如果A、B两地的实际距离是20 km,且A、B两点在地图上的距离是4 cm,那么实际距离是500 km的两地在地图上的距离是_____cm.

导引:先设这个图上距离是x cm,根据图上距离比实际距离等于比例尺,可得关于x的方程,求解即可.

设这个图上距离是x cm,则4∶2 000 000=x∶50 000 000,解得$x=100$.

▶答案:100

点方法

解答这类问题基本方法是根据比例尺列方程,列方程时要注意单位要统一.

举一反三训练

(答案见216页)

1. A市建设规划图上,城区南北长约240 cm,而A市城区南北实际长18 km,规划图采用的比例尺是_____.

2. 玄武隧道的实际长度约为2.66 km,则在比例尺是1∶38 000的南京交通浏览图上,玄武隧道长约(　　)

A. 0.266 cm

B. 2.66 cm

C. 0.7 cm

D. 7 cm

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

知识点 2 成比例线段

点知识

在四条线段中，如果两条线段的比等于另两条线段的比，那么这四条线段叫做成比例线段，简称为成比例线段.

要点精析 ///

1. 有四条线段 a、b、c、d，若 $a:b=c:d$ 或 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$，则 a、b、c、d 叫做成比例线段. a、b、c、d 叫比例的项，b、c 叫做比例的内项，a、d 叫做比例的外项.


成比例线段

2. 判断四条线段是否成比例，一般应先将四条线段的长度单位统一，然后把四条线段按从小到大(或从大到小)的顺序排列，再判断前两条线段的比是否等于后两条线段的比.

点考向

考查角度 1 成比例线段的识别(易错点)

例 3 [易错题]下列各组长度的线段(单位:cm)中，是成比例线段的是(　　)

A. 1、2、3、4　　B. 1、2、2、4　　C. 3、5、9、13　　D. 1、2、2、3

▶错误答案:A

▶错解分析:成比例线段是讲究顺序性的，不能随意调整线段的顺序，同时成比例线段不是用相邻两条线段间相差的值相等来推导，而是用“两条线段的比等于另两条线段的比”来推导.

▶正确答案:B

考查角度 2 利用成比例线段的定义求线段的长

例 4 已知 a、b、c、d 是成比例线段，其中 $a=3$ cm，$b=2$ cm，$c=6$ cm，则 $d=$ _____ cm.

导引:已知 a、b、c、d 是成比例线段，根据成比例线段的定义得：$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$，将 $a=3$ cm，$b=2$ cm，$c=6$ cm 代入可得 $d=4$ cm. ▶答案:4

点方法

紧扣成比例线段的定义解题.

3. 下列各组长度的线段(同一单位)中，不是成比例线段的是(　　)

A. 2,5,10,25

B. 4,7,4,7

C. 2,12,12,4

D. 3,6,2,4

4. 已知线段 a,b,c,d 是成比例线段，其中 $a=\sqrt{3}$，$b=\sqrt{2}$，$d=\sqrt{6}$，求线段 c 的长.

知识点 3 比例的基本性质

点知识

如果 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$，那么 $ad=bc$.

要点精析 ///

1. 基本性质中的条件“$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$”与结论“$ad=bc$”是互逆的，即如果 $ad=bc(b\neq0,d\neq0)$，那么 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ 也成立.

2. 利用这一基本性质还可以派生出一系列比例的性质:如把 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ 的前项、后项交换，可得 $\frac{b}{a}=\frac{d}{c}$ 成立;如果把 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ 的两边都加上或减去 1，可得 $\frac{a\pm b}{b}=\frac{c\pm d}{d}$ 成立等.

基础题 提优题

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

点拨考向 ▶▶▶

考查角度1 根据比例的基本性质对比例式变形

例5 已知线段 a、b、c、d 满足 $ab=cd$，把它改写成比例式，错误的是(　　)

A. $a:d=c:b$　　B. $a:b=c:d$

C. $d:a=b:c$　　D. $a:c=d:b$

导引：根据比例的基本性质将各个选项化为乘积式，看结果是否与条件相同.

A. $a:d=c:b\Rightarrow ab=cd$，故正确；B. $a:b=c:d\Rightarrow ad=bc$，故错误；C. $d:a=b:c\Rightarrow dc=ab$，故正确；D. $a:c=d:b\Rightarrow ab=cd$，故正确. 故选 B. ▶答案：B

点方法

解答这类问题一般是将各个选项化为乘积式，看结果与条件是否相同.

考查角度2 计算线段的长

例6 如图 6.1-1，在 $\triangle ABC$ 中，$AB=12$ cm，$AE=6$ cm，$EC=4$ cm，且 $\frac{AD}{BD}=\frac{AE}{EC}$.

(1)求 AD 的长；(2)求证：$\frac{BD}{AB}=\frac{EC}{AC}$.

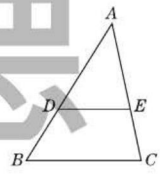


图 6.1-1

导引：(1)用 AD 表示出 BD，代入 $\frac{AD}{BD}=\frac{AE}{EC}$ 中，解方程即可.

(2)根据等式的性质将比例式转化.

(1)▶解：设 $AD=x$ cm，则 $BD=AB-AD=(12-x)$ cm.

$\because \frac{AD}{BD}=\frac{AE}{EC}$，

$\therefore \frac{x}{12-x}=\frac{6}{4}$，解得 $x=7.2$.

$\therefore AD=7.2$ cm；

(2)▶证明：$\because \frac{AD}{BD}=\frac{AE}{EC}$，

$\therefore \frac{AD+BD}{BD}=\frac{AE+EC}{EC}$，即 $\frac{AB}{BD}=\frac{AC}{EC}$.

$\therefore \frac{BD}{AB}=\frac{EC}{AC}$.

点方法

解答这类问题的基本思路是首先将数值代入比例式，再根据比例的基本性质计算出未知线段.

5. 已知 $2x=3y$(x、y 均不为0)，则下列比例式成立的是(　　)

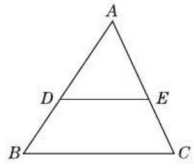
A. $\frac{x}{2}=\frac{3}{y}$

B. $\frac{x}{2}=\frac{y}{3}$

C. $\frac{x}{3}=\frac{y}{2}$

D. $\frac{x}{y}=\frac{2}{3}$

6. 如图，已知 $\frac{AD}{DB}=\frac{AE}{EC}$，$AD=6.4$ cm，$DB=4.8$ cm，$EC=4.2$ cm，求 AC 的长.



(第6题图)

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

知识点4 比例中项

点知识

1. 在比例式$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$中，如果$c=b$，那么$b^2=ad$.

   我们把b叫做a和d的比例中项.

2. 根据比例中项的定义可得比例式$a:b=b:c$或等式$b^2=ac$，具体用哪种形式，要依据情况而定.

易错警示

已知两条线段，求第三条线段，并使其中一条线段是另两条线段的比例中项时，要注意考虑全面.

拓展：如果a、b、c表示线段的长度，那么a、c的比例中项只有一个，是$\sqrt{ac}$；如果a、b、c表示数(a、c同号)，那么a、c的比例中项有两个，它们是$\pm\sqrt{ac}$.

点考向

考查角度　比例中项的相关计算

例7 如果$a:b=3:2$，且b是a和c的比例中项，那么$b:c$等于(　　)

A. 4 : 3　　B. 3 : 2　　C. 2 : 3　　D. 3 : 4

导引：因为b是a和c的比例中项，所以$a:b=b:c$. 因为$a:b=3:2$，所以$b:c=3:2$.

▶答案：B

点方法

根据b是a和c的比例中项，列出比例式即可得解.

7. 已知$a=3$ cm，$b=12$ cm，试求a、b的比例中项c.

Ⅱ 点方法 · 拨技巧 · 探规律

典例剖析

拔尖角度1　开放性问题(易错点)

例8 已知2，3，m三个数中的一个数是另外两个数的比例中项，求m的值.

导引：题中没有指明哪一个数是哪两个数的比例中项，所以需分类讨论.

▶解：(1)若2为3和m的比例中项，则有$2^2=3m$，解得$m=\frac{4}{3}$；

(2)若3为2和m的比例中项，则有$3^2=2m$，解得$m=\frac{9}{2}$；

(3)若m为2和3的比例中项，则有$m^2=2\times3$，解得$m=\pm\sqrt{6}$.

综上，m的值为$\frac{4}{3}$或$\frac{9}{2}$或$\sqrt{6}$或$-\sqrt{6}$.

点方法

(**分类讨论思想**)根据比例中项的意义建立关系式，情况未确定，要分类讨论.

举一反三训练

(答案见216页)

8. 已知两数4和8，试写出第三个数，使这三个数中，其中一个数是其余两个数的比例中项，第三个数是_____(只需写出一个).

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

拔尖角度2 设k法求比值

例9 已知$\frac{x}{2}=\frac{y}{3}=\frac{z}{4}\neq0$,求$\frac{x-4y+3z}{x+4y-3z}$的值.

导引:设每一份为k,直接代入计算即可.

▶解:设$\frac{x}{2}=\frac{y}{3}=\frac{z}{4}=k$,$\therefore x=2k,y=3k,z=4k$,

$\therefore\frac{x-4y+3z}{x+4y-3z}=\frac{2k-12k+12k}{2k+12k-12k}=1$.

点方法

(**设k法**)在解答有关比例问题时通常设每一份为k,将多个未知数统一为同一未知数,再代入求值.

9. 已知$a:b:c=2:3:5$,求$\frac{a-2b+c}{3a-c}$的值.

III 练基础·练方法·练技巧 ☞(答案见217页)

基础巩固练

1. 若$\frac{a-b}{b}=\frac{2}{3}$,则$\frac{a}{b}$等于(　　)

A. $\frac{1}{3}$　　B. $\frac{2}{3}$　　C. $\frac{4}{3}$　　D. $\frac{5}{3}$

2. 若b、c、d、a成比例,则这个比例式为(　　)

A. $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$　　B. $\frac{a}{c}=\frac{b}{d}$

C. $\frac{b}{c}=\frac{d}{a}$　　D. $\frac{b}{a}=\frac{c}{d}$

3. 下列长度的线段中,能组成比例的是(　　)

A. 3 cm、6 cm、8 cm、9 cm

B. 3 cm、5 cm、6 cm、9 cm

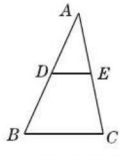
C. 3 cm、6 cm、7 cm、9 cm

D. 3 cm、6 cm、9 cm、18 cm

4. [实际应用题]在比例尺为1∶10 000的地图上,有相距2 cm的A,B两地,则它们的实际距离为_____m.

5. 已知$\frac{x}{y}=\frac{7}{4}$,则$\frac{x+y}{x-y}$的值为_____.

6. 如图,$\frac{AB}{AD}=\frac{AC}{AE}$,$AD=15$,$AB=30$,$AC=28$,求$EC$的长.



(第6题图)

7. 已知$a:b:c=2:3:7$,且$a-b+c=12$,求$2a+b-3c$的值.

能力提升练

8. 已知三条线段的长度分别为1,2,$\sqrt{3}$,请你再添一条线段,使它们能构成一个比例式.

9. 若△ABC的三边为a、b、c,三边上的高分别为h_a、h_b、h_c,且$h_a:h_b:h_c=5:2:3$,则$a:b:c=$_____.

思维拓展练

10. 已知$k=\frac{a+b}{c}=\frac{b+c}{a}=\frac{a+c}{b}$,且$a$、$b$、$c$为三角形三边,则直线$y=k(x-1)$不经过第_____象限. 【导学号7367677】

11. [实际应用题]如图,线段AB是连接A,B两城市的高速公路的示意图,公路全长240 km,在AB上建有两个休息处C,D.已知$AC:CB=1:5$,$AD:DB=7:1$,一辆客车的速度是80 km/h,请你计算出这辆客车从C到D所用的时间.



(第11题图)

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

6.2 黄金分割

1 点知识 · 拨考向 · 诊误区

知识点 黄金分割

点知识

如图 6.2-1 所示，点 B 把线段 AC 分成两部分，如果 $\frac{AB}{AC}=\frac{BC}{AB}$，那么称线段 AC 被点 B 黄金分割，点 B 为线段 AC 的黄金分割点. AB 与 AC（或 BC 与 AB）的比值 $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ 称为**黄金比**.

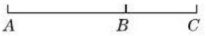


图 6.2-1

要点精析

1. 黄金比有一种通俗的说法是：小段与大段的比 = 大段与线段全长的比（小比大 = 大比全）.
2. 一条线段的黄金分割点有两个.

拨考向

典例剖析

考查角度 1　求线段的长

例 1 已知线段 $AB=2$，点 C 是线段 AB 的黄金分割点，则 AC 的长为_____.

导引：点 C 是线段 AB 的黄金分割点，分两种情况：当 $AC>BC$ 时，有 $\frac{AC}{AB}=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$，又 $AB=2$，所以 $AC=\frac{\sqrt{5}-1}{2}AB=\sqrt{5}-1$；当 $AC<BC$ 时，有 $\frac{BC}{AB}=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$，又 $AB=2$，所以 $BC=\frac{\sqrt{5}-1}{2}AB=\sqrt{5}-1$，所以 $AC=AB-BC=2-(\sqrt{5}-1)=3-\sqrt{5}$，所以 AC 的长为 $\sqrt{5}-1$ 或 $3-\sqrt{5}$.

▶答案：$\sqrt{5}-1$ 或 $3-\sqrt{5}$

点方法

本题运用**分类讨论思想**. 一条线段有两个黄金分割点，而本题的条件中并没有明确黄金分割点 C 靠近点 A 还是点 B，即没有明确 AC 与 BC 的大小关系，故应分情况讨论.

考查角度 2　黄金分割的应用（拓展点）

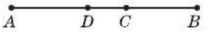
例 2 从美学角度来说，人的上身长与下身长之比越接近黄金比 0.618 时越给人一种美感，某女老师上身长约 61.8 cm，下身长约 93 cm，她要穿约_____cm 的高跟鞋才能达到黄金比的美感效果（精确到 1 cm）.

导引：设她要穿 x cm 的高跟鞋，根据题意列出方程，解方程得到答案.

举一反三训练

☞（答案见 217 页）

1. 如图，已知点 C、D 是线段 AB 的黄金分割点，$AB=10$，求线段 AC 与 CD 的长.



（第 1 题图）

2. 根据有关测定，当外界气温处于人体正常体温的黄金比值时，人体感到最舒适（人体正常体温约为 37℃），这个气温大约为（　　）

A. 23℃　　B. 28℃

C. 30℃　　D. 37℃

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

设她要穿 x cm 的高跟鞋，

由题意得，$\frac{61.8}{93+x}=0.618$，解得 $x=7$.　▶答案：7

点方法

解答本题的基本思路是根据黄金分割的定义列方程.

Ⅱ 点方法 · 拨技巧 · 探规律

典例剖析

拔尖角度 1　黄金分割点的判定

例 3 如果在矩形 $ABCD$（$AB<BC$）中，$\frac{AB}{BC}=\frac{\sqrt{5}-1}{2}\approx0.618$，那么这个矩形称为黄金矩形，黄金矩形给人以美感. 在黄金矩形 $ABCD$ 内作正方形 $CDEF$，得到一个小矩形 $ABFE$（如图 6.2-2），请问矩形 $ABFE$ 是否是黄金矩形？并说明理由.

导引：求出其宽与长的比是否等于黄金比即可.

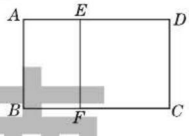


图 6.2-2

▶解：矩形 $ABFE$ 是黄金矩形. 理由如下：

由已知条件易得 $AD=BC$，$DE=AB$，

$\therefore \frac{AE}{AB}=\frac{AD-DE}{AB}=\frac{BC-AB}{AB}=\frac{BC}{AB}-1=\frac{2}{\sqrt{5}-1}-1=\frac{\sqrt{5}+1}{2}-1=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

$\therefore$ 矩形 $ABFE$ 是黄金矩形.

点方法

证明黄金分割点有两种思路：思路 1，根据黄金分割点的概念证明；思路 2，证明这个点将线段分成的两个部分的比等于黄金比.

拔尖角度 2　探究性问题（拓展点）

例 4 ［探究题］宽与长的比是 $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ 的矩形叫做黄金矩形. 如图 6.2-3 是用一张矩形纸片折叠出一个黄金矩形的方法.

第一步：在矩形纸片的一端，利用图 6.2-3（1）的方法折出一个正方形 $MNCB$，然后把纸片展开.

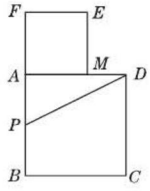
第二步：如图 6.2-3（2），把折成的正方形折成两个相等的矩形 $MNAF$ 和矩形 $FACB$，再把纸片展平.

第三步：折出内侧矩形 $FACB$ 的对角线 AB，并将 AB 折到图 6.2-3（3）中所示的 AD 处.

举一反三训练

（答案见 217 页）

3. 以长为 2 的线段 AB 为边作正方形 $ABCD$，取 AB 的中点 P，连接 PD，在 BA 的延长线上取点 F，使 $PF=PD$，以 AF 为边作正方形 $AMEF$，点 M 在 AD 上，如图. 你能找出图中的黄金分割点吗？



（第 3 题图）

4. 如图，用一张纸片折出黄金分割点：裁一张正方形的纸片 $ABCD$，先折出 BC 的中点 E，再折出线段 AE，然后通过折叠使 EB 落到线段 EA 上，折出点 B 的新位置 B'，因而 $EB'=EB$. 类似地，在 AB 上折出点 B'' 使

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

第四步：如图 6.2-3(4)，展平纸片，按照得到 D 点的方式折出 E 点，则矩形 $BCDE$ 就是黄金矩形.

你能说明为什么吗？

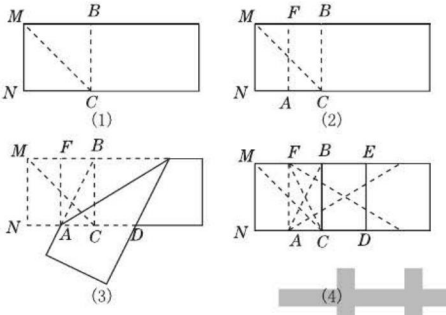


图 6.2-3

导引：设正方形 $MNCB$ 的边长为 $2a$，由折叠的性质，可得 $AC=$ 正方形 $MNCB$ 的边长 $\times\frac{1}{2}=a$，在 $\mathrm{Rt}\triangle ABC$ 中，利用勾股定理可求出 AB，再求出 $CD=\sqrt{5}a-a$，再由黄金矩形的定义即可作出判断.

▶解：在正方形 $MNCB$ 中，设 $NC=2a$，

∵ 点 A 为 NC 的中点，

∴ $AC=\frac{1}{2}NC=a$. 在 $\mathrm{Rt}\triangle ABC$ 中，$AB=\sqrt{5}a$.

∵ $AD=AB$，∴ $CD=AD-AC=(\sqrt{5}-1)a$.

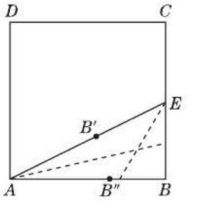
∴ $\frac{CD}{BC}=\frac{(\sqrt{5}-1)a}{2a}=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

∴ 矩形 $BCDE$ 是黄金矩形.

点方法

根据折叠的性质、勾股定理及黄金矩形的定义解题即可.

$AB''=AB'$. 这时点 B'' 就是 AB 的黄金分割点. 请你证明这个结论.



(第 4 题图)

III 练基础 · 练方法 · 练技巧 ☞(答案见 218 页)

基础巩固练

1. 如图，点 C 把线段 AB 分成 AC 和 BC 两条线段，如果 $\frac{AC}{AB}=\frac{BC}{AC}$，那么下列说法错误的是(　　)



(第 1 题图)

A. 线段 AB 被点 C 黄金分割

B. 点 C 叫做线段 AB 的黄金分割点

C. AB 与 AC 的比叫做黄金比

D. AC 与 AB 的比叫做黄金比

2. 校团委举办五四手抄报比赛，规定手抄报统一设计成长是 0.8 米的黄金矩形(黄金矩形的长与宽的比是 1.6 : 1)，则宽为(　　)米.

A. 0.5　　B. 0.6　　C. 0.618　　D. 0.62

3. 如图，P 为线段 AB 的黄金分割点($PB>PA$)，四边形 $AMNB$、四边形 $PBFE$ 都为正方

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

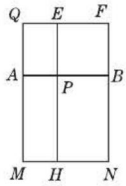
形，且面积分别为 S_1、S_2. 四边形 $APHM$、四边形 $APEQ$ 都为矩形，且面积分别为 S_3、S_4. 下列结论正确的是(　　)

A. $S_2=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}S_1$

B. $S_2=S_3$

C. $S_3=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}S_4$

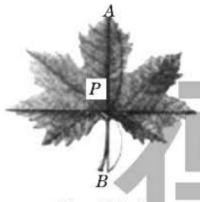
D. $S_4=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}S_1$



(第 3 题图)

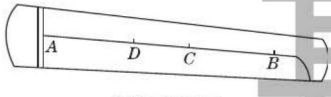
4. 小华想在教室内的墙壁上挂一幅中国地图，已知当地图挂在墙高的黄金分割点(距离地面较远)时美观. 若教室内的墙高为 2.8 米. 则地图应挂在距离地面大约_____米处较合适. (精确到0.01 米)

5. 大自然是美的设计师，即使是一片小小的树叶，也蕴含着“黄金分割”，如图，P 为 AB 的黄金分割点($AP>PB$)，如果 AB 的长度为 10 cm，那么 PB 的长度为_____cm.



(第 5 题图)

6. 如图，乐器上的一根弦 $AB=80$ cm，两个端点 A、B 固定在乐器板面上，支撑点 C 是靠近点 B 的黄金分割点，支撑点 D 是靠近点 A 的黄金分割点，求 C、D 之间的距离.



(第 6 题图)

7. 已知点 C 是线段 AB 的黄金分割点，且 $BC=AC+2$，求线段 AC 的长.

能力提升练

8. [实际应用题]电视节目主持人在主持节目时，站在舞台的黄金分割点处最自然得体，如图，若舞台 AB 的长为 20 米，试计算主持人至少应走到离 A 点多少米处时，才比较自然得体. (结果精确到 0.1 米)

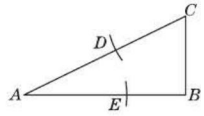


(第 8 题图)

9. (1)点 P 把线段 AB 分成两条线段 AP 和 BP，且 $\dfrac{AP}{AB}=\dfrac{BP}{AP}$，点 P 就是线段 AB 的黄金分割点，此时 $\dfrac{AP}{AB}$ 的值为_____(填一个实数)；

(2)如图，在 Rt$\triangle ABC$ 中，$\angle B=90°$，$AB=2BC$，现以 C 为圆心、CB 长为半径画弧交边 AC 于 D，再以 A 为圆心、AD 长为半径画弧交边 AB 于 E.

求证：点 E 是线段 AB 的黄金分割点.



(第 9 题图)

思维拓展练

10. 勾股定理与黄金分割是几何中的双宝，前者好比黄金，后者堪称珠玉. 生活中到处可见黄金分割的美. 如图，线段 $AB=1$，点 P_1 是线段 AB 的黄金分割点($AP_1<BP_1$)，点 P_2 是线段 AP_1 的黄金分割点($AP_2<P_1P_2$)，点 P_3 是线段 AP_2 的黄金分割点($AP_3<P_2P_3$)，…，依此类推，求 AP_n 的长度.



(第 10 题图)

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

6.3 相似图形

1 点知识 · 拨考向 · 诊误区

知识点 1 相似图形

点知识

形状相同的图形是相似图形.

要点精析

1. 相似图形是形状相同，大小不一定相同的图形.
2. 全等图形是相似图形的一种特殊情况.

易错警示

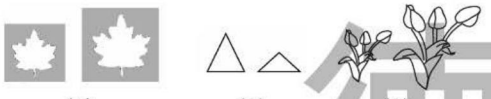
有些图形形状相似，但有些差异，这样的图形不能看作是相似图形.

拨考向

典例剖析

考查角度　判断两个图形是否相似

例 1 观察图 6.3-1 中的各组图形，哪些是相似图形，哪些不是相似图形？



(1)　(2)　(3)

图 6.3-1

导引：根据相似图形的定义，一一分析即可.

解：图 6.3-1(1)(3)是相似图形，图 6.3-1(2)不是相似图形.

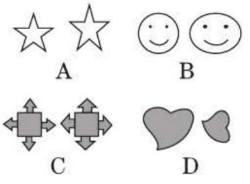
点方法

判断两个图形是不是相似图形的标准是：形状完全相同，若形状不同或部分相同，都不是相似图形.

举一反三训练

(答案见 218 页)

1. 观察下列每组图形，相似图形是(　　)



A　B　C　D

知识点 2 相似多边形及其性质

点知识

1. 定义：各角分别相等，各边成比例的两个多边形，它们的形状相同，这样的多边形称为相似多边形.
2. 性质：相似多边形对应角相等，对应边成比例.

要点精析

1. 相似用符号“∽”表示，记两个三角形相似时，通常把表示对应顶点的字母写在对应位置上. 例如 $\triangle ABC$ 相似于 $\triangle A'B'C'$ 记作：$\triangle ABC\backsim\triangle A'B'C'$，对应边的比，如 $\frac{AB}{A'B'}$ 叫做相似比.
2. 相似三角形的相似比是有顺序的. 如：$\triangle ABC\backsim\triangle A'B'C'$，它们的相似比是 $\frac{AB}{A'B'}=\frac{BC}{B'C'}=\frac{AC}{A'C'}=k$，如果写成 $\triangle A'B'C'\backsim\triangle ABC$，那么



相似多边形

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

它们的相似比为 $\frac{A'B'}{AB}=\frac{B'C'}{BC}=\frac{A'C'}{AC}=k'$，因此 $k=\frac{1}{k'}$.

易错警示 ///

判定两个多边形相似，对应边成比例、对应角相等这两个条件缺一不可.

点考向 ▸▸▸

考查角度 1　利用相似多边形的性质计算角度或线段的长

例 2 如图 6.3-2，四边形 $ABCD\backsim$ 四边形 $A'B'C'D'$，求边 x、y 的长度和 $\angle\alpha$ 的大小.

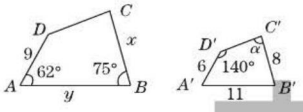


图 6.3-2

导引：直接根据相似多边形的性质即可得出结论.

▸解：∵ 四边形 $ABCD\backsim$ 四边形 $A'B'C'D'$，

∴ $\frac{x}{8}=\frac{y}{11}=\frac{9}{6}$，$\angle C=\angle\alpha$，$\angle D=\angle D'=140°$.

∴ $x=12$，$y=\frac{33}{2}$，$\angle\alpha=\angle C=360°-\angle A-\angle B-\angle D=360°-62°-75°-140°=83°$.

点方法

解答这类问题的关键是注意“对应”，利用对应边成比例可以根据已知线段的长计算未知线段的长.

考查角度 2　求相似比

例 3 如图 6.3-3，把矩形 $ABCD$ 对折，折痕为 MN，矩形 $DMNC$ 与矩形 $ABCD$ 相似，已知 $AB=4$.

(1) 求 AD 的长；

(2) 求矩形 $DMNC$ 与矩形 $ABCD$ 的相似比.

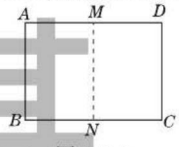


图 6.3-3

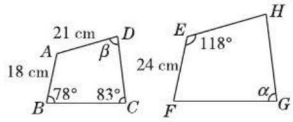
导引：由已知易得 $MN=AB$，$MD=\frac{1}{2}AD=\frac{1}{2}BC$，根据矩形的相似列出比例式求解，进而可得到矩形 $DMNC$ 和矩形 $ABCD$ 的相似比.

▸解：(1) 由已知易得 $MN=AB$，$MD=\frac{1}{2}AD=\frac{1}{2}BC$，

因为矩形 $DMNC$ 与矩形 $ABCD$ 相似，所以 $\frac{DM}{AB}=\frac{MN}{BC}$，即 $\frac{1}{2}AD^2=AB^2$，

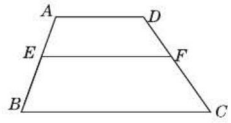
因为 $AB=4$，所以 $AD=4\sqrt{2}$.

2. 如图，四边形 $ABCD\backsim$ 四边形 $EFGH$，求 $\angle\alpha$、$\angle\beta$ 的大小和 EH 的长度.



(第 2 题图)

3. 如图，在梯形 $ABCD$ 中，$AD/\!/BC$，E 是 AB 上的一点，$EF/\!/BC$，并且 EF 将梯形 $ABCD$ 分成的两个梯形 $AEFD$、$EBCF$ 相似，若 $AD=8$，$BC=18$，求 $AE:EB$ 的值.



(第 3 题图)

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

(2)矩形 $DMNC$ 与矩形 $ABCD$ 的相似比为 $\frac{DM}{AB}=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

点方法

利用相似多边形的对应边成比例列式求解是解题的关键.

易错警示:由于相似比有顺序,因此求比值时要看清楚图形的前后顺序.

II 点方法 · 拨技巧 · 探规律

典例剖析

拔尖角度 1　对应关系不确定引起的分类讨论(易错点)

例 4 如图 6.3-4,在正方形 $ABCD$ 中,$AB=2$,点 E 为 BC 的中点,两个动点 M 和 N 分别在边 CD 和 AD 上运动且 $MN=1$,若 $\triangle ABE$ 与以 D、M、N 为顶点的三角形相似,则 $DM=$ _____.

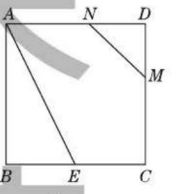


图 6.3-4

导引:利用勾股定理列式求出 AE,再根据 DM 与 AB 是对应边和与 BE 是对应边两种情况,根据相似三角形对应边成比例列式计算即可得解.

∵ 点 E 为 BC 的中点,正方形 $ABCD$ 的边长 $AB=2$,

∴ $BE=\frac{1}{2}\times 2=1$,

在 Rt $\triangle ABE$ 中,根据勾股定理得,$AE=\sqrt{AB^2+BE^2}=\sqrt{2^2+1^2}=\sqrt{5}$,

∵ $\triangle ABE$ 与以 D、M、N 为顶点的三角形相似,

∴ ①当 DM 与 AB 是对应边时,$\frac{AE}{MN}=\frac{AB}{DM}$,

即 $\frac{\sqrt{5}}{1}=\frac{2}{DM}$,解得 $DM=\frac{2\sqrt{5}}{5}$.

②当 DM 与 BE 是对应边时,$\frac{AE}{MN}=\frac{BE}{DM}$,

即 $\frac{\sqrt{5}}{1}=\frac{1}{DM}$,解得 $DM=\frac{\sqrt{5}}{5}$,

综上所述,$DM=\frac{\sqrt{5}}{5}$ 或 $\frac{2\sqrt{5}}{5}$.

▶答案:$\frac{\sqrt{5}}{5}$ 或 $\frac{2\sqrt{5}}{5}$

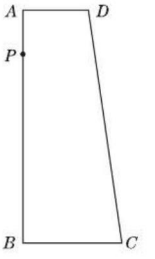
点方法

两个三角形相似,如果没有用“∽”符号表示出来,而是直接说“△ × × ×”与“△ × × ×”相似,表明对应关系没有明确,因而这样的问题需根据对应关系的不同进行分类讨论.

举一反三训练

(答案见 218 页)

4. 如图,在直角梯形 $ABCD$ 中,$\angle A=90°$,$AB=7$,$AD=2$,$BC=3$,如果边 AB 上的一点 P,使得以 P,A,D 为顶点的三角形和以 P,B,C 为顶点的三角形相似,则 $AP=$ _____.



(第 4 题图)

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

拔尖角度2 相似多边形的判定

例5 如图6.3-5，在$\square ABCD$中，对角线AC，BD相交于点O，E、F、G、H分别是OA、OB、OC、OD的中点.

（1）试说明四边形$EFGH$是平行四边形.

（2）四边形$EFGH$与$\square ABCD$相似吗？请说明理由.

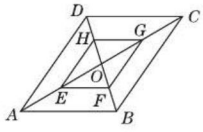


图6.3-5

导引：(1)根据三角形中位线定理及平行四边形的性质得到$EF=HG$，$FE/\!/HG$，根据平行四边形的判定定理证明即可；

(2)根据平行线的性质定理、相似多边形的判定定理证明.

▶解：(1)∵E、F分别是OA、OB的中点，

∴$EF=\frac{1}{2}AB$，$EF/\!/AB$.

∵G、H分别是OC、OD的中点，

∴$HG=\frac{1}{2}CD$，$HG/\!/CD$.

∵四边形$ABCD$是平行四边形，

∴$AB=CD$，$AB/\!/CD$，∴$EF=HG$，$EF/\!/HG$，

∴四边形$EFGH$是平行四边形；

(2)由(1)得，$EF/\!/AB$，

∴$\angle OEF=\angle OAB$，同理$\angle OEH=\angle OAD$，

∴$\angle HEF=\angle DAB$，

同理，$\angle EFG=\angle ABC$，$\angle FGH=\angle BCD$，$\angle GHE=\angle CDA$，

$\frac{EF}{AB}=\frac{FG}{BC}=\frac{GH}{CD}=\frac{HE}{DA}=\frac{1}{2}$，

∴$\square EFGH\backsim\square ABCD$.

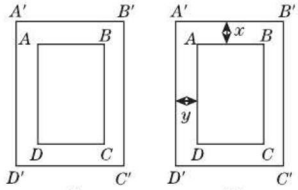
点方法

判断两个多边形是否相似不仅看各边是否成比例，还要看各角是否对应相等，二者缺一不可.

5. 在$AB=20$ m，$AD=30$ m的矩形花坛四周修筑小路.

(1)如果四周的小路的宽均相等，都是x，如图(1)，那么小路四周所围成的矩形$A'B'C'D'$和矩形$ABCD$相似吗？请说明理由；

(2)如果相对着的两条小路的宽均相等，宽度分别为x、y，如图(2)，试问小路的宽x与y的比值为多少时，能使得小路四周所围成的矩形$A'B'C'D'$和矩形$ABCD$相似？

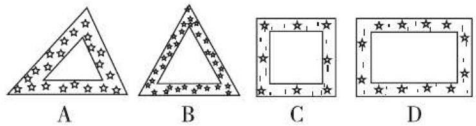


（第5题图）

III 练基础·练方法·练技巧 ☞(答案见219页)

基础巩固练

1. 手工制作课上，小红利用一些花布的边角料，剪裁后装饰手工画，下面四个图案是她剪裁出的空心不等边三角形、等边三角形、正方形、矩形花边，其中，每个图案花边的宽度都相等，那么，每个图案中花边的内外边缘所围成的几何图形不相似的是(　　)



2. 一个多边形的边长分别为2、3、4、5、6，另一个和它相似的多边形的最长边的长为24，则

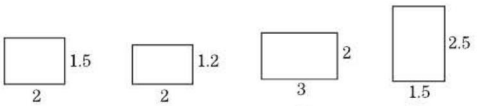
荣德基

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

这个和它相似的多边形的最短边的长为(　　)

A. 6　　B. 8　　C. 10　　D. 12

3. 已知矩形 $ABCD$ 中，$AB=4$，$BC=3$，下列四个矩形中与矩形 $ABCD$ 相似的是(　　)

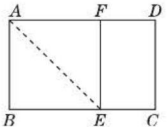


A　　B　　C　　D

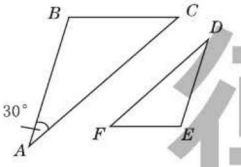
4. 如图，把矩形 $ABCD$ 中的 AB 边向上翻折到 AD 边上，当点 B 与点 F 重合时，折痕与 BC 边交于点 E，连接 EF，若四边形 $EFDC$ 与矩形 $ABCD$ 恰好相似，若 $AB=1$ 时，AD 的长为(　　)

A. $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$　　B. $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$

C. $3-\sqrt{5}$　　D. $\sqrt{5}-1$



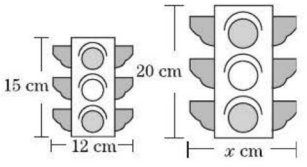
(第4题图)



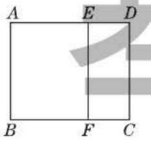
(第5题图)

5. 如图所示，若 $\triangle ABC\backsim\triangle DEF$，则 $\angle D$ 的度数为_____.

6. 如图是两个形状相同的红绿灯图案，则根据图中给出的部分数值，得到 x 的值是_____.



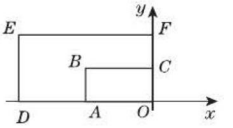
(第6题图)



(第7题图)

7. 如图，点 E，F 分别是矩形 $ABCD$ 的边 AD，BC 的三等分点(距 D、C 近)，若矩形 $ABFE$ 与矩形 $ABCD$ 相似，则矩形 $ABCD$ 的 $AD:AB$ 是_____.

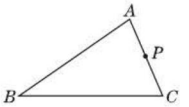
8. 如图，已知矩形 $OABC$ 各顶点的坐标分别为 $O(0,0)$、$A(-2,0)$、$B(-2,1)$、$C(0,1)$，现分别把各点的坐标乘2，再连接 ED、EF，得到矩形 $ODEF$，试说明矩形 $OABC\backsim$ 矩形 $ODEF$.



(第8题图)

能力提升练

9. 如图所示，在 $\triangle ABC$ 中，$AB=6$，$AC=4$，P 是 AC 的中点，过 P 点的直线交 AB 于点 Q，若以 A、P、Q 为顶点的三角形和以 A、B、C 为顶点的三角形相似，则 AQ 的长为_____.

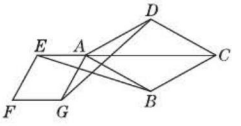


(第9题图)

10. 如图，点 E 是菱形 $ABCD$ 对角线 CA 的延长线上的任意一点，以线段 AE 为边作一个菱形 $AEFG$，且菱形 $AEFG\backsim$ 菱形 $ABCD$，连接 EB，GD.

(1) 求证：$EB=GD$；

(2) 若 $\angle DAB=60°$，$AB=2$，$AG=\sqrt{3}$，求 GD 的长.



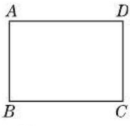
(第10题图)

思维拓展练

11. 若矩形 $ABCD$ 能以某种方式分割成 n 个小矩形，使得每个小矩形都与原矩形 $ABCD$ 相似，则此时我们称矩形 $ABCD$ 可以自相似 n 分割，已知 $AB=1$，$BC=x(x\geqslant 1)$，

(1) 若下图可以自相似2分割，请在图中画出分割草图，并求出 x 的值.

(2) 若矩形 $ABCD$ 可以自相似3分割，请画出两种不同分割的草图，并直接写出相应的 x 值.



(第11题图)

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

6.4 探索三角形相似的条件

1 点知识·拨考向·诊误区

知识点1 平行线分线段成比例

点知识

1. **基本事实**:两条直线被一组平行线所截,所得的对应线段成比例.
2. **平行线法**判定两个三角形相似:平行于三角形一边的直线与其他两边相交,所截得的三角形与原三角形相似.

要点精析

1. 如图6.4-1,在$l_1 // l_2 // l_3$的条件下,可分别推出下列结论:

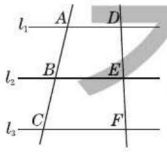


图6.4-1

(1)$\frac{AB}{BC}=\frac{DE}{EF}$简称"上比下"等于"上比下".

(2)$\frac{AB}{AC}=\frac{DE}{DF}$简称"上比全"等于"上比全".

(3)$\frac{BC}{AC}=\frac{EF}{DF}$简称"下比全"等于"下比全".


平行线分线段成比例

2. 如图6.4-2所示,∵$DE // BC$,
∴$\triangle ADE \backsim \triangle ABC$.

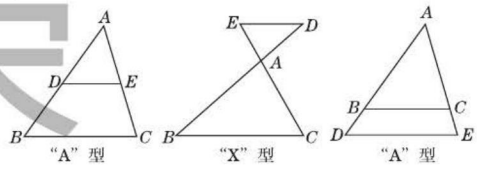


图6.4-2

易错警示

这种方法在教材中没有以黑体字形式出现,因而一般在解答题中不直接用,多用于选择题或填空题.

拨考向

典例剖析

考查角度1 求线段的长

例1 如图6.4-3,直线$A_1A // BB_1 // CC_1$,若$AB=8$,$BC=4$,$A_1B_1=6$,则线段B_1C_1的长是_____.

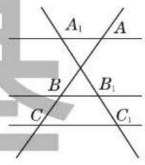


图6.4-3

导引:根据平行线分线段成比例的基本事实,列出比例式,利用比例的基本性质即可得解.

∵$A_1A // BB_1 // CC_1$,

∴$\frac{B_1C_1}{A_1B_1}=\frac{BC}{AB}$,

∵$AB=8$,$BC=4$,$A_1B_1=6$,

∴$B_1C_1=3$.

▶答案:3

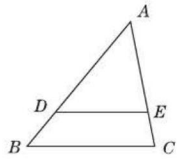
方法

根据平行线分线段成比例的基本事实计算时,在分析已知线段和所需求的线段的基础上,选择合适的比例式进行计算.

举一反三训练

(答案见220页)

1. 如图,在$\triangle ABC$中,点D、E分别在AB、AC上,$DE // BC$,若$AD:AB=3:4$,$AE=6$,则AC等于(　　)



(第1题图)

A. 3　B. 4　C. 6　D. 8

宋德基

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

考查角度2　确定相似三角形的个数

例2 如图6.4-4，点E，F分别在平行四边形$ABCD$的边AD和CB的延长线上，连接EF分别交AB、AC、CD于点G、M、H，请写出图中的相似三角形.

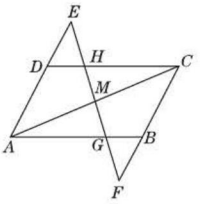
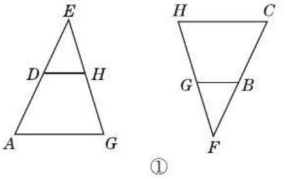


图6.4-4

导引：由平行线截得的相似三角形，主要有“A”型和“X”型两种. 在寻找这类相似三角形时，先找准平行线，再观察与这两条平行线相交的直线所构成的三角形，并逐一把它们找出来.

▶解：(1) $AB\parallel CD$，从图中找“A”型，有两个，如图6.4-5①，因为$AB\parallel CD$，所以$\triangle EDH\backsim\triangle EAG$，$\triangle FBG\backsim\triangle FCH$.



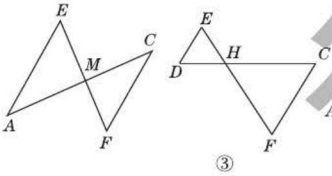


图6.4-5

(2) $AB\parallel CD$，从图中找“X”型，有一个，如图6.4-5②.

因为$AB\parallel CD$，所以$\triangle CHM\backsim\triangle AGM$.

(3) $AD\parallel CB$，从图中找“A”型，没有.

(4) $AD\parallel CB$，从图中找“X”型，有三个，如图6.4-5③.

因为$AD\parallel BC$，所以$\triangle AEM\backsim\triangle CFM$，$\triangle AEC\backsim\triangle BFG$，$\triangle EDH\backsim\triangle FCH$.

(5)在“A”、“X”型中有相同三角形的，可由相似的传递性得出相似三角形.

因为$\triangle EDH\backsim\triangle EAG$，$\triangle EDH\backsim\triangle FCH$，

所以$\triangle EAG\backsim\triangle FCH$.

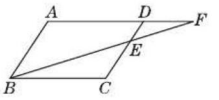
因为$\triangle FBG\backsim\triangle FCH$，$\triangle EDH\backsim\triangle FCH$，

所以$\triangle FBG\backsim\triangle EDH$.

(6)特殊的，全等三角形也是相似三角形，

所以$\triangle ABC\backsim\triangle CDA$.

2. 如图，在$\square ABCD$中，F是AD延长线上一点，连接BF交DC于点E，则图中相似三角形共有(　　)



(第2题图)

A. 2对　B. 3对

C. 4对　D. 5对

点方法

为了准确找到相似图形，常常用**分离法**排除干扰线段. 如本题，先把图形分离出各基本图形，再找相似三角形时就一目了然，不会有重复，也不会有遗漏，对应顶点也不会找错（先从$AB\parallel CD$中找，再从$AD\parallel CB$中找，再找公共的三角形，利用相似的传递性，最后找特殊的相似）.

荣德基

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

知识点2 运用两角分别相等判定两个三角形相似(重点)

点知识

两角分别相等的两个三角形相似.


相似三角形的判定

要点精析

常见模型:

运用此种方法判定两三角形相似时常涉及以下几种常见的基本图形:

①**相交型**:除"平行线法判定相似三角形"的几种基本图形外还有如图6.4-6所示的三种基本图形.

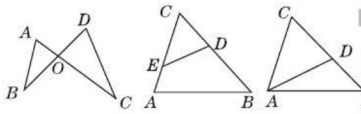


图6.4-6

②**母子直角三角形型**:母子直角三角形型就是说,直角三角形斜边上的高分得的两个小直角三角形与原直角三角形相似,如图6.4-7.

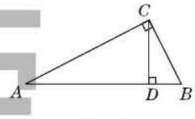


图6.4-7

③**旋转型**:如图6.4-8,旋转型的特点是将其中的一个图形旋转一定的角度,就可以得到平行线型或相交线型.

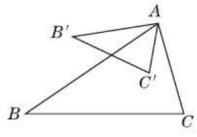


图6.4-8

拓考向

考查角度1 判定两个三角形相似

例3 如图6.4-9所示,在$\triangle ABC$中,$AB=AC$,D是边BC上一点,连接AD,若$\angle B=\angle BAD$,求证:$\triangle BAC\backsim\triangle BDA$.

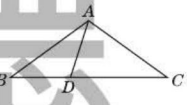


图6.4-9

导引:在$\triangle BAC$与$\triangle BDA$中,$\angle B$是公共角,由$AB=AC$,得$\angle B=\angle C$,又已知$\angle B=\angle BAD$,所以$\angle BAD=\angle C$,从而可证相似.

▶证明:$\because AB=AC$,$\therefore \angle B=\angle C$,

$\because \angle B=\angle BAD$,$\therefore \angle C=\angle BAD$.

又$\because \angle B=\angle B$,$\therefore \triangle BAC\backsim\triangle BDA$.

点方法

根据两角对应相等证明两三角形相似是判定三角形相似的最常用方法,解题时应注意挖掘题中的条件,即公共角、对顶角等.

考查角度2 根据三角形相似计算

例4 如图6.4-10,在边长为1的正方形$ABCD$中,E是AB的中点,$CF\perp DE$,F为垂足.

(1)$\triangle FCD$与$\triangle ADE$是否相似?请说明理由;

(2)求CF的长.

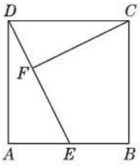
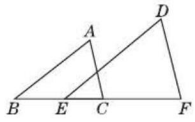


图6.4-10

导引:(1)利用正方形的性质和平行线的性质,由**两角法**证明$\triangle ADE\backsim\triangle FCD$;

(2)根据相似三角形的对应边的比相等求解.

3. 如图,$AB/\!/DE$,$AC/\!/DF$,点B、E、C、F在一条直线上,求证:$\triangle ABC\backsim\triangle DEF$.


(第3题图)

4. 如图,在平行四边形$ABCD$中,过点B作$BE\perp CD$,垂足为点E,连接AE,F为AE上一点,且$\angle BFE=\angle C$.

(1)求证:$\triangle ABF\backsim\triangle EAD$;

荣德基
关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

▶解:(1)$\triangle ADE\backsim\triangle FCD$,理由如下:

∵ 四边形 $ABCD$ 是正方形,

∴ $\angle A=90°$,$AB/\!/CD$,

∴ $\angle CDF=\angle DEA$.

又∵ $CF\perp DE$,

∴ $\angle CFD=90°$,即 $\angle CFD=\angle A$,

∴ $\triangle ADE\backsim\triangle FCD$;

(2)由题意知,$AD=CD=1$,$AE=\frac{1}{2}$.

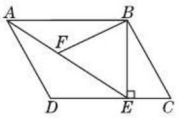
在直角三角形 DEA 中,$DE=\sqrt{AD^2+AE^2}=\sqrt{1^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{5}}{2}$.

由(1)可得:$\frac{CF}{AD}=\frac{CD}{DE}$,则 $CF=\frac{AD\cdot CD}{DE}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$.

点方法

解答这类问题的基本思路是首先根据条件证明两个三角形相似,再根据对应边成比例计算.

(2)若 $AB=4$,$\angle BAE=30°$,求 AE 的长.



(第4题图)

知识点3 运用两边成比例且夹角相等判定两个三角形相似(重点)

点知识

如果一个三角形的两条边和另一个三角形的两条边对应成比例,并且夹角相等,那么这两个三角形相似.

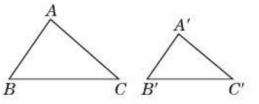


图6.4-11

要点精析

1. 如图6.4-11,在 $\triangle ABC$ 和 $\triangle A'B'C'$ 中,如果 $\frac{AB}{A'B'}=\frac{CA}{C'A'}$,$\angle A=\angle A'$,那么 $\triangle ABC\backsim\triangle A'B'C'$.

2. 可类比判定两个三角形全等的“SAS”来理解.

易错警示

如果相等的角不是夹角,那么这两个三角形不一定相似.

拓考向

考查角度 证明两个三角形相似

例5 如图6.4-12,在等边三角形 ABC 中,D,E 分别在 AC,AB 上,且 $\frac{AD}{AC}=\frac{1}{3}$,$AE=EB$. 求证:$\triangle AED\backsim\triangle CBD$.

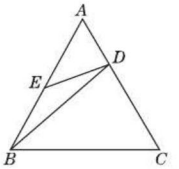
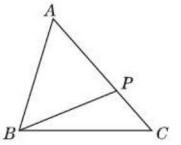


图6.4-12

导引:先根据等边三角形的性质得到 $\angle A=\angle C=60°$,$BC=AB$,由 $AE=BE$ 可得到 $CB=2AE$,再由 $\frac{AD}{AC}=\frac{1}{3}$,得到 $CD=2AD$,则 $\frac{AD}{CD}=\frac{AE}{CB}$,然后根据“两边及其夹角”法可得到结论.

5. 如图,P 是 $\triangle ABC$ 的 AC 边上的一点,连接 BP. 以下能判定 $\triangle ABP\backsim\triangle ACB$ 的是(　　)



(第5题图)

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

▶证明：∵ △ABC 为等边三角形，

∴ ∠A = ∠C = 60°，BC = AB，

∵ AE = BE，∴ CB = 2AE，

∵ $\frac{AD}{AC}=\frac{1}{3}$，∴ CD = 2AD，

∴ $\frac{AD}{CD}=\frac{AE}{CB}=\frac{1}{2}$，又∵ ∠$A$ = ∠C，

∴ △AED∽△CBD.

点方法

运用这种方法证明两个三角形相似，需根据条件得出成比例线段，再结合夹角相等证明两个三角形相似.

A. $\frac{AB}{AP}=\frac{AC}{AB}$

B. $\frac{AC}{AB}=\frac{BC}{BP}$

C. ∠ABP = ∠A

D. ∠APB = ∠ABP

知识点4 运用三边对应成比例判定两个三角形相似(重点)

点知识

如果一个三角形的三条边与另一个三角形的三条边对应成比例，那么这两个三角形相似.

△ABC∽△$A'B'C'$.

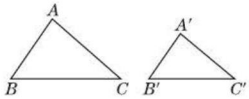


图6.4-13

要点精析

几何表述：如图6.4-13所示，在△ABC和△$A'B'C'$中，如果$\frac{AB}{A'B'}=\frac{BC}{B'C'}=\frac{CA}{C'A'}$，那么

拓考向

考查角度1 判定两个三角形相似

例6 如图6.4-14，在四边形$ABCD$中，AC、BD相交于点F，点E在BD上，且$\frac{AB}{AE}=\frac{BC}{ED}=\frac{AC}{AD}$.

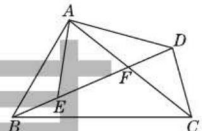


图6.4-14

(1)试问：∠BAE与∠CAD相等吗？为什么？

(2)试判断△ABE与△ACD是否相似？并说明理由.

导引：(1)先根据题意得出△ABC∽△AED，由相似三角形的性质即可得出结论；

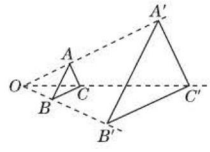
(2)先根据题意得出$\frac{AB}{AC}=\frac{AE}{AD}$，再由∠$BAE$ = ∠CAD即可得出结论.

▶解：(1)∠BAE与∠CAD相等.

理由：∵ $\frac{AB}{AE}=\frac{BC}{ED}=\frac{AC}{AD}$，∴ △$ABC$∽△$AED$，∴ ∠$BAC$ = ∠EAD，

∴ ∠BAE = ∠CAD；

6. 如图，点O是△ABC外的一点，分别在射线OA，OB，OC上取一点A'，B'，C'，使得$\frac{OA'}{OA}=\frac{OB'}{OB}=\frac{OC'}{OC}=3$，连接$A'B'$，$B'C'$，$C'A'$，所得△$A'B'C'$与△$ABC$是否相似？证明你的结论.



(第6题图)

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

(2) $\triangle ABE$ 与 $\triangle ACD$ 相似. 理由如下:

$\because \frac{AB}{AE}=\frac{AC}{AD}, \therefore \frac{AB}{AC}=\frac{AE}{AD}$.

在 $\triangle ABE$ 与 $\triangle ACD$ 中, $\because \frac{AB}{AC}=\frac{AE}{AD}$, $\angle BAE=\angle CAD$,

$\therefore \triangle ABE \backsim \triangle ACD$.

考查角度 2　网格中三角形相似的判定

例 7 如图 6.4-15, 在矩形 $ABEF$ 中, 四边形 $ABCH$、四边形 $CDGH$ 和四边形 $DEFG$ 都是正方形, 图中的 $\triangle ACD$ 与 $\triangle ECA$ 相似吗? 请说明理由.

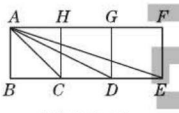


图 6.4-15

导引: 设正方形的边长为 1, 分别求得两个三角形各边的长, 再根据各边是否对应成比例来判定两个三角形是否相似.

▶解: 相似.

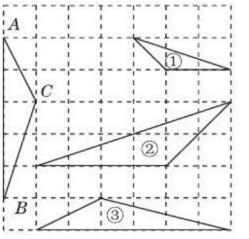
理由: 设正方形的边长为 1, 则 $AC=\sqrt{2}$, $CD=1$, $AD=\sqrt{5}$, $EC=2$, $EA=\sqrt{10}$,

$\because \frac{AC}{EC}=\frac{CD}{CA}=\frac{AD}{EA}=\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\therefore \triangle ACD \backsim \triangle ECA$.

点方法

解答这类网格中相似问题的关键是根据勾股定理计算出相应线段的长, 再结合三边对应成比例或者两边对应成比例且夹角相等判定两个三角形相似.

7. 如图, 三角形①, ②, ③中, 与 $\triangle ABC$ 相似的三角形有_____个. (网格为正方形网格)



(第 7 题图)

知识点 5　三角形的重心

点知识

三角形的三条中线相交于一点, 这点叫做三角形的重心.

要点精析

1. 根据三角形相似的性质能得出: 三角形的重心将三角形的每条中线都分成 1 : 2 两部分, 其中重心到三角形某一顶点的距离是到该顶点对边中点距离的 2 倍.
2. 重心是一个物理学概念, 在重力场中, 物体处于任何方位时所有各组成支点的重力的合力都通过的那一点. 形状规则而密度均匀物体的重心就是它的几何中心. 不规则物体的重心, 可以用悬挂法来确定. 物体的重心, 不一定在物体上.

易错警示

一般情况下题目不会直接告诉哪个点是重心, 因此在见到两条中线的交点时应认识到可以运用重心的性质解决问题. 同时要注意是哪两条线段的比等于 1 : 2, 不能颠倒.

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

拨考向

考查角度　根据三角形重心的性质计算(拓展点)

例8 如图6.4-16,点 G 为△ABC 的重心,连接 AG、BG 并延长,分别交 BC、AC 于点 D、E,过点 E 作 $EF\parallel BC$ 交 AD 于点 F,那么 $AF:AG=$_____.

导引:由三角形的重心的性质得出 $\frac{EG}{BG}=\frac{1}{2}$,$\frac{DG}{AG}=\frac{1}{2}$,由平行线分线段成比例的基本事实得出 $\frac{GF}{GD}=\frac{EG}{BG}=\frac{1}{2}$,即可得出 $\frac{FG}{AG}=\frac{1}{4}$,进而得到 $AF:AG$ 的结果.

∵ 点 G 为△ABC 的重心,

∴ $\frac{EG}{BG}=\frac{1}{2}$,$\frac{DG}{AG}=\frac{1}{2}$,

∵ $EF\parallel BC$,∴ $\frac{GF}{GD}=\frac{EG}{BG}=\frac{1}{2}$,

∴ $\frac{FG}{AG}=\frac{1}{4}$,∴ $\frac{AF}{AG}=\frac{3}{4}$.

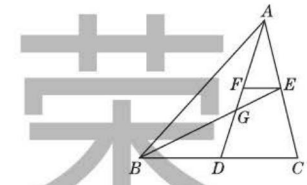


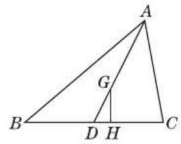
图6.4-16

▶答案:3:4

点方法

熟练掌握三角形的重心性质,由平行线分线段成比例的基本事实得出 $FG:DG=1:2$ 是解决问题的关键.

8. 如图,点 G 是△ABC 的重心,$GH\perp BC$,垂足为点 H,若 $GH=2.5$,则点 A 到 BC 的距离为_____.



(第8题图)

II 点方法·拨技巧·探规律

典例剖析

拨尖角度1　对应的多种可能(易错点、拓展点)

例9 [易错题]在△ABC 中,$AB=6$,$AC=9$,点 D 在边 AB 所在的直线上,且 $AD=2$,过点 D 作 $DE\parallel BC$,交边 AC 所在直线于点 E,则 CE 的长为_____.

▶错误答案:6

▶错解分析:点 D 在边 AB 所在的直线上,可以分为点 D 在边 AB 上与点 D 在边 BA 的延长线上两种情况,由 $DE\parallel BC$,根据平行线分线段成比例即可求得 CE 的长.

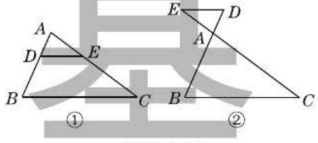


图6.4-17

如图6.4-17①,当点 D 在边 AB 上时,∵ $AB=6$,$AC=9$,$AD=2$,

∴ $BD=AB-AD=6-2=4$,∵ $DE\parallel BC$,∴ $\frac{BD}{AB}=\frac{CE}{AC}$,即 $\frac{4}{6}=\frac{CE}{9}$,∴ $CE=6$;

如图6.4-17②,当点 D 在边 BA 的延长线上时,∵ $AB=6$,$AC=9$,$AD=2$,∴ $BD=AB+AD=6+2=8$,∵ $DE\parallel BC$,

∴ $\frac{BD}{AB}=\frac{CE}{AC}$,即 $\frac{8}{6}=\frac{CE}{9}$,∴ $CE=12$.

▶正确答案:6或12

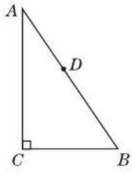
举一反三训练

☞(答案见220页)

9. 如图,在△ABC 中,$\angle C=90°$,D 是边 AB 上一点(不与点 A,B 重合),过点 D 作直线,与△ABC 的另一边相交,且使所得的三角形与原三角形相似,这样的直线有(　　)

A. 1条　　B. 2条

C. 3条　　D. 4条



(第9题图)

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

拔尖角度2　证明线段乘积相等

例10 [中考 · 朝阳] 如图6.4-18,以△ABC的边AC为直径的⊙O交AB边于点M,交BC边于点N,连接AN,过点C的切线交AB的延长线于点P,$\angle BCP=\angle BAN$.

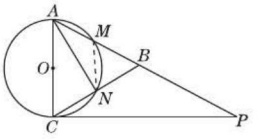


图6.4-18

(1)求证:△ABC为等腰三角形.

(2)求证:$AM\cdot CP=AN\cdot CB$.

导引:(1)由AC为⊙O的直径,得到$\angle ANC=90°$,由切线的性质得到$\angle BCP=\angle CAN$,再由$\angle BCP=\angle BAN$,得到$\angle BAN=\angle CAN$,于是得到结论.

(2)连接MN,由等腰三角形的性质得到$\angle ABC=\angle ACB$,根据圆内接四边形的性质得到$\angle AMN+\angle ACB=180°$,易得$\angle PBC=\angle AMN$,证出△$BPC$∽△$MNA$,即可得到结论.

▶证明:(1)∵AC为⊙O的直径,

∴$\angle ANC=90°$,

∵PC是⊙O的切线,

∴$\angle BCP=\angle CAN$,

∵$\angle BCP=\angle BAN$,∴$\angle BAN=\angle CAN$,由三线合一知△ABC为等腰三角形;

(2)如图6.4-18,连接MN,∵△ABC为等腰三角形,

∴$\angle ABC=\angle ACB$,∵$\angle PBC+\angle ABC=\angle AMN+\angle ACN=180°$,

∴$\angle PBC=\angle AMN$,

由(1)知$\angle BCP=\angle BAN$,∴△BPC∽△MNA,

∴$\dfrac{CB}{AM}=\dfrac{CP}{AN}$,即$AM\cdot CP=AN\cdot CB$.

点方法

证明线段乘积相等的基本思路是首先证明两个三角形相似,进而得出线段成比例,再根据比例的基本性质转化为乘积式.

拔尖角度3　直角三角形中相似的证明(拓展点)

例11 已知:如图6.4-19,在Rt△ABC中,$\angle ACB=90°$,$CD\perp AB$于D.

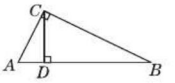


图6.4-19

(1)求证:$AC^2=AD\cdot AB$;

(2)若$AD=2$,$DB=8$,求AC、BC、CD.

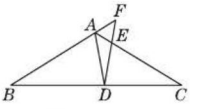
导引:(1)先根据相似三角形的判定定理得出△ACD∽△ABC,再根据相似三角形的对应边成比例即可得出结论;

(2)由$AD=2$,$DB=8$可得出AB的长,再由(1)中$AC^2=AD\cdot AB$即可得出AC的长,由勾股定理求出BC及CD的长即可.

10. 如图,在△ABC中,点D在边BC上,连接AD,$\angle ADB=\angle CDE$,DE交边AC于点E,DE的延长线交BA的延长线于点F,且$AD^2=DE\cdot DF$.

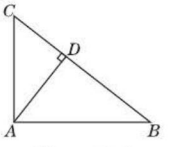
(1)求证:△BFD∽△CAD;

(2)求证:$BF\cdot DE=AB\cdot AD$.



(第10题图)

11. 如图,AD是Rt△ABC斜边上的高.



(第11题图)

(1)若$AD=6$ cm,$CD=12$ cm,则$BD=$_____cm;

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

(1)▶证明：∵ $\triangle ABC$ 是直角三角形，$CD\perp AB$，

∴ $\angle A+\angle B=90°$，$\angle A+\angle ACD=90°$，

∴ $\angle B=\angle ACD$，又∵ $\angle A=\angle A$，∴ $\triangle ACD\backsim\triangle ABC$，

∴ $\frac{AD}{AC}=\frac{AC}{AB}$，∴ $AC^2=AD\cdot AB$；

(2)▶解：∵ $AD=2$，$DB=8$，∴ $AB=AD+DB=10$，

由(1)知，$AC^2=AD\cdot AB$，

∴ $AC=\sqrt{AD\cdot AB}=\sqrt{2\times10}=2\sqrt{5}$，

在 $\mathrm{Rt}\triangle ABC$ 中，$BC=\sqrt{AB^2-AC^2}=\sqrt{10^2-(2\sqrt{5})^2}=4\sqrt{5}$，

在 $\mathrm{Rt}\triangle ACD$ 中，$CD=\sqrt{AC^2-AD^2}=\sqrt{(2\sqrt{5})^2-2^2}=4$.

点方法

本题中给出的图形是一个重要的图形，这个图形中包含了三组相似，即 $\triangle ACD\backsim\triangle CBD$，$\triangle BDC\backsim\triangle BCA$，$\triangle CDA\backsim\triangle BCA$，三组比例中项：$\triangle ACD\backsim\triangle CBD$ 中，$CD^2=AD\cdot BD$；$\triangle BDC\backsim\triangle BCA$ 中，$BC^2=DB\cdot AB$；$\triangle CDA\backsim\triangle BCA$ 中，$AC^2=AD\cdot AB$.

拔尖角度 4　动点问题(拓展点)

例 12 如图 6.4-20，已知 $\triangle ABC$ 中，$AB=10$ cm，$AC=8$ cm，$BC=6$ cm. 如果点 P 由 B 出发沿 BA 向点 A 匀速运动，同时点 Q 由 A 出发沿 AC 向点 C 匀速运动，它们的速度均为 2 cm/s. 连接 PQ，设运动的时间为 t(单位：s)$(0\leqslant t\leqslant4)$.

(1)当 t 为何值时，$PQ/\!/BC$.

(2)设 $\triangle AQP$ 的面积为 S(单位：cm^2)，当 t 为何值时，S 取得最大值，并求出最大值.

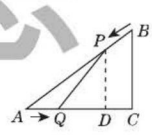


图 6.4-20

(3)是否存在某时刻 t，使线段 PQ 恰好把 $\triangle ABC$ 的面积平分？若存在，求出此时 t 的值；若不存在，请说明理由.

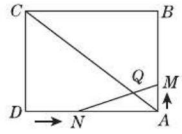
导引：(1)证 $\triangle APQ\backsim\triangle ABC$，推出 $\frac{AP}{AB}=\frac{AQ}{AC}$，代入得出 $\frac{10-2t}{10}=\frac{2t}{8}$，求出方程的解即可.

(2)证得 $\angle C=90°$，过点 P 作 $PD\perp AC$ 于点 D，证 $\triangle APD\backsim\triangle ABC$，代入得出方程 $\frac{10-2t}{10}=\frac{PD}{6}$，求出 $PD=\frac{3}{5}(10-2t)$，根据三角形的面积公式求出即可；

(3)假设存在某时刻 t，使线段 PQ 恰好把 $\triangle ABC$ 的面积平分，得出方程 $-\frac{6}{5}t^2+6t=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times8\times6$，求出此方程无解，即可得出答案.

(2)若 $AB=15$ cm，$BC=25$ cm，则 $BD=$ _____ cm.

12. 如图，已知矩形 $ABCD$ 的边长 $AB=3$ cm，$BC=4$ cm. 动点 M 从 A 出发，在边 AB 上以 1 cm/s 的速度向 B 点匀速运动，同时，动点 N 从 D 出发，在边 DA 上以 2 cm/s 的速度向 A 点匀速运动，MN 与 AC 相交于点 Q.



(第 12 题图)

(1)经过多长时间，$\triangle AMN$ 的面积等于矩形 $ABCD$ 面积的 $\frac{1}{12}$？

(2)是否存在某时刻 t，使以 A、M、N 为顶

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

▶解:(1)由题意知:$BP=2t$ cm,$AP=(10-2t)$ cm,$AQ=2t$ cm,

$\because PQ/\!/BC$,$\therefore \triangle APQ\backsim\triangle ABC$,

$\therefore \frac{AP}{AB}=\frac{AQ}{AC}$,$\therefore \frac{10-2t}{10}=\frac{2t}{8}$,解得$t=\frac{20}{9}$,即当$t$为$\frac{20}{9}$时,$PQ/\!/BC$;

(2)$\because AB=10$ cm,$AC=8$ cm,$BC=6$ cm,

$\therefore AB^2=AC^2+BC^2$,$\therefore \angle C=90°$,如图6.4-20,过点$P$作$PD\perp AC$于点$D$,则$PD/\!/BC$,$\therefore \triangle APD\backsim\triangle ABC$,

$\therefore \frac{AP}{AB}=\frac{PD}{BC}$,$\therefore \frac{10-2t}{10}=\frac{PD}{6}$,即$PD=\frac{3}{5}(10-2t)$,

$\therefore S=\frac{1}{2}AQ\cdot PD=\frac{1}{2}\cdot 2t\cdot\frac{3}{5}(10-2t)=-\frac{6}{5}t^2+6t=-\frac{6}{5}\left(t-\frac{5}{2}\right)^2+7.5$,

$\because -\frac{6}{5}<0$,开口向下,$\therefore$有最大值,

当$t=\frac{5}{2}$时,S的最大值是7.5.

(3)不存在.理由:假设存在某时刻t,使线段PQ恰好把$\triangle ABC$的面积平分,则$S_{\triangle APQ}=\frac{1}{2}S_{\triangle ABC}$.

$\therefore -\frac{6}{5}t^2+6t=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times 8\times 6$,

即$t^2-5t+10=0$,

$\because b^2-4ac=(-5)^2-4\times 1\times 10=-15<0$,$\therefore$此方程无解,

即不存在某时刻t,使线段PQ恰好把$\triangle ABC$的面积平分.

点方法

动点问题是近几年来各地中考试题中出现较多的一种题型.这类集几何、代数知识于一体的综合题,既能考查学生的创造性思维品质,又能体现学生的实际水平和应变能力.其解题策略是"动"中求"静","一般"中见"特殊",抓住要害,各个击破.

点P的三角形与$\triangle ACD$相似?若存在,求t的值;若不存在,请说明理由.

(3)求t为何值时,$QN=QA$.

Ⅲ 练基础 · 练方法 · 练技巧 (答案见221页)

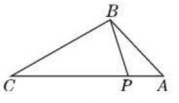
基础巩固练

1. 如图,点P在$\triangle ABC$的边AC上,下列条件中不能判定$\triangle ABP\backsim\triangle ACB$的是(　　)

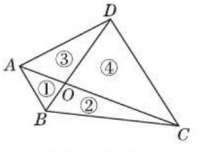
A. $\angle ABP=\angle C$　　B. $\angle APB=\angle ABC$

C. $\frac{AP}{AB}=\frac{AB}{AC}$　　D. $\frac{AB}{BP}=\frac{AC}{CB}$

2. 如图,四边形$ABCD$的对角线AC、BD相交于O,且将这个四边形分成①②③④四个三角形.若$OA:OC=OB:OD$,则下列结论中一定正确的是(　　)



(第1题图)



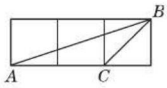
(第2题图)

荣德基
关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

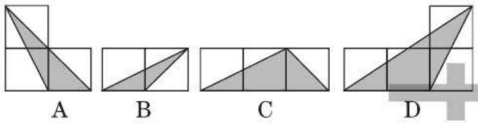
A. ①②相似　　B. ①③相似

C. ①④相似　　D. ②③相似

3. [中考·临安] 如图，小正方形的边长均为1，则下列图中的三角形（阴影部分）与△ABC相似的是(　　)

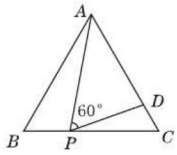


（第3题图）

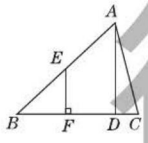


4. 如图所示，在等边三角形ABC中，P为BC边上一点，D为AC边上一点，且∠APD = 60°，BP = 1，CD = $\frac{2}{3}$，则△ABC的边长为(　　)

A. 3　　B. 4　　C. 5　　D. 6



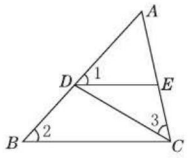
（第4题图）



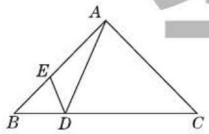
（第5题图）

5. 如图，AD是△ABC的高，E是AB边的中点，EF⊥BC，F为垂足，BF = 2DC，如果BC = 10，那么DC的长是_____.

6. 如图，在△ABC中，点D在AB边上，点E在AC边上，且∠1 = ∠2 = ∠3，则图中有_____对相似的三角形.



（第6题图）



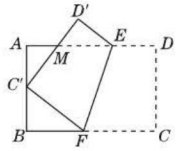
（第7题图）

7. 如图，在△ABC中，AB = AC，点D、E分别在边BC、AB上，且∠ADE = ∠B，如果DE : AD = 2 : 5，BD = 3，那么AC = _____.

8. 如图，将矩形纸片$ABCD$沿EF折叠，使顶点C恰好落在AB边的C'处，点D落在点D'处，$C'D'$交线段AE于点M.

(1) 求证：△$BC'F$∽△AMC'；

(2) 若C'是AB的中点，AB = 6，BC = 9，求AM的长.

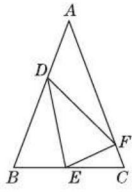


（第8题图）

9. [中考·宿迁] 如图，在△ABC中，AB = AC，点E在边BC上移动（点E不与点B，C重合），满足∠DEF = ∠B，且点D、F分别在边AB、AC上.

(1) 求证：△BDE∽△CEF；

(2) 当点E移动到BC的中点时，求证：FE平分∠DFC.



（第9题图）

基础题 德基

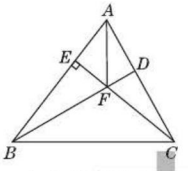
关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

能力提升练

10. 如图，在锐角三角形 ABC 中，$CE \perp AB$ 于点 E，点 D 在边 AC 上，连接 BD 交 CE 于点 F，且 $EF \cdot FC = FB \cdot DF$.

(1) 求证：$BD \perp AC$；

(2) 连接 AF，求证：$AF \cdot BE = BC \cdot EF$.



(第 10 题图)

思维拓展练

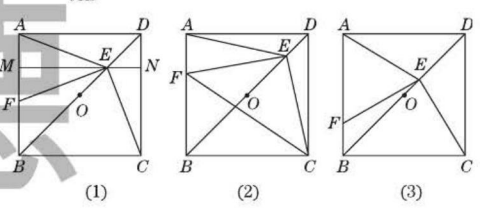
11. [中考 · 永州] 已知点 O 是正方形 $ABCD$ 对角线 BD 的中点.

(1) 如图(1)，若点 E 是 OD 的中点，点 F 是 AB 上一点，且使得 $\angle CEF = 90°$，过点 E 作 $ME \parallel AD$，交 AB 于点 M，交 CD 于点 N. 求证：

① $\angle AEM = \angle FEM$；② 点 F 是 AB 的中点；

(2) 如图(2)，若点 E 是 OD 上一点，点 F 是 AB 上一点，且使 $\frac{DE}{DO} = \frac{AF}{AB} = \frac{1}{3}$，请判断 $\triangle EFC$ 的形状，并说明理由；

(3) 如图(3)，若 E 是 OD 上的动点(不与 O，D 重合)，连接 CE，过 E 点作 $EF \perp CE$，交 AB 于点 F，当 $\frac{DE}{DB} = \frac{m}{n}$ 时，请猜想 $\frac{AF}{AB}$ 的值(请直接写出结论).



(第 11 题图)

荣德基

我的错题笔记

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

6.5 相似三角形的性质

1 点知识·拨考向·诊误区

知识点1 相似三角形的面积比和周长比

点知识

相似三角形的周长比等于相似比，相似三角形的面积比等于相似比的平方.

易错警示

周长比与面积比不能混淆，已知面积比求相似比时，相似比等于面积比的算术平方根.

拨考向

典例剖析

考查角度1 根据相似比计算周长

例1 两个相似多边形的一组对应边分别为3 cm和4 cm，如果它们的周长和为84 cm，那么较大多边形的周长为(　　)

A. 36 cm　　B. 42 cm　　C. 48 cm　　D. 54 cm

导引：根据周长比等于相似比列方程求解即可.

设较大多边形的周长为x，则较小多边形的周长：$x=3:4$，所以较小多边形的周长为$\frac{3}{4}x$. 因为它们的周长和为84 cm，所以$x+\frac{3}{4}x=84$ cm，解得$x=48$ cm.

▶答案：C

点方法

解答这类问题的基本方法是运用**方程思想**，根据周长比等于相似比列方程求解，但要注意列方程时“对应”，不能颠倒.

考查角度2 根据相似比计算面积

例2 如图6.5-1，$\triangle ADE\backsim\triangle ACB$，且$\frac{AD}{AC}=\frac{2}{3}$，若四边形$BCED$的面积是2，则$\triangle ADE$的面积是_____.

导引：根据题意求出$\triangle ADE$与$\triangle ACB$的相似比，根据相似三角形面积的比等于相似比的平方计算即可.

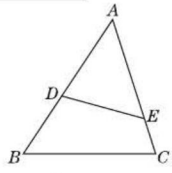


图6.5-1

$\because\triangle ADE\backsim\triangle ACB$，且$\frac{AD}{AC}=\frac{2}{3}$，

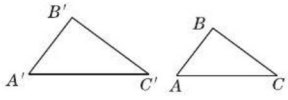
$\therefore\triangle ADE$与$\triangle ACB$的面积比为$\frac{4}{9}$，

$\therefore\triangle ADE$与四边形$BCED$的面积比为$\frac{4}{5}$. 又四边形$BCED$的

举一反三训练

(答案见222页)

1. 如图所示，$\triangle ABC\backsim\triangle A'B'C'$，它们的周长分别为60 cm和72 cm，且$AB=15$ cm，$B'C'=24$ cm，求BC、$A'C'$的长.



(第1题图)

2. 已知$\triangle ABC\backsim\triangle DEF$，且相似比为3∶4，$S_{\triangle ABC}=12$ cm^2，则$S_{\triangle DEF}=$_____cm^2.

相似三角形的性质

荣德基
关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

面积是2，∴ △ADE的面积是$\frac{8}{5}$. ▶答案：$\frac{8}{5}$

点方法

本题利用相似三角形面积的比等于相似比的平方，先算出两个三角形的面积比，进而计算出图形中两个部分的面积比，再结合条件解决问题. 本题也可根据相似三角形的性质直接列方程求解.

知识点 2 相似三角形对应线段的比

点知识 ▶▶▶

相似三角形对应线段(高、中线、角平分线)的比等于相似比.

要点精析 ///

相似三角形所有对应线段的比都等于相似比，但必须注意“对应”两字，“对应线段”除对应高、角平分线、中线外，实际上还包括处在对应位置上的所有对应线段，如对应中位线，其关键是找准对应点，书写的顺序也应对应.

拓考向 ▶▶▶

考查角度 1 根据对应线段的比计算

例 3 如图6.5-2，D、E分别是AC、AB上的点，且∠CDE + ∠B = 180°，F、G分别是DE、BC的中点. 若AD = 3，AB = 5，AC = 4，则AF的值为(　　)

A. $\frac{12}{5}$　　B. $\frac{3}{4}$　　C. $\frac{16}{9}$　　D. $\frac{15}{4}$

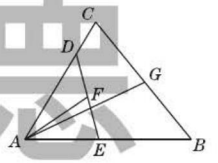


图6.5-2

导引：首先根据相似三角形的判定得出△EAD∽△CAB，进而得出$\frac{AD}{AB}=\frac{AF}{AG}$，即可得出答案.

∵ ∠CDE + ∠B = 180°，∠ADE + ∠CDE = 180°，

∴ ∠ADE = ∠B.

∵ ∠EAD = ∠CAB，

∴ △EAD∽△CAB，

∴ $\frac{AD}{AB}=\frac{AF}{AG}$(相似三角形对应中线的比等于相似比)，

∴ $\frac{3}{5}=\frac{AF}{4}$，

∴ $AF=\frac{12}{5}$. 故选A. ▶答案：A

考查角度 2 根据对应高之比计算

例 4 如图6.5-3，在△ABC中，点Q，M在BC上，点P，N分别在AB，AC上，边BC = 120毫米，高AD = 80毫米，四边形$PQMN$为矩形，设△ABC的高AD与PN相交于点E.

3. 如果两个相似三角形的面积之比是9∶25，其中小三角形一边上的中线长是12 cm，那么大三角形对应边上的中线长是_____cm.

4. 如图，△ABC是一块三角形的铁皮，BC长为4 cm，BC边上的高AD

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

(1)若这个矩形是正方形,则边长是多少?

(2)若这个矩形的长是宽的 2 倍,则长和宽各是多少?

导引:(1)设正方形的边长为 x 毫米,则可得 $AE=AD-ED=(80-x)$ 毫米,再证明 $\triangle APN\backsim\triangle ABC$,利用相似三角形对应高之比等于相似比列方程即可求出正方形的边长;

(2)设矩形的宽为 y 毫米,由(1)得 $\triangle APN\backsim\triangle ABC$,利用相似三角形对应高之比等于相似比列方程即可得到结果.

▶解:(1)设正方形的边长为 x 毫米,

∵ 四边形 $PQMN$ 为正方形,

∴ $PN/\!/QM$,∴ $\triangle APN\backsim\triangle ABC$.

又∵ $AD\perp BC$,∴ $AE\perp PN$.

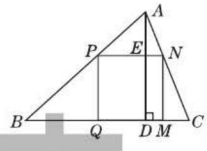


图 6.5-3

∴ $\dfrac{PN}{BC}=\dfrac{AE}{AD}$,即 $\dfrac{x}{120}=\dfrac{80-x}{80}$,解得 $x=48$,

∴ 正方形的边长是 48 毫米.

(2)设矩形的宽为 y 毫米,由(1)得 $\triangle APN\backsim\triangle ABC$,

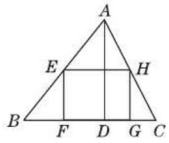
∴ $\dfrac{PN}{BC}=\dfrac{AE}{AD}$,即 $\dfrac{y}{120}=\dfrac{80-2y}{80}$ 或 $\dfrac{2y}{120}=\dfrac{80-y}{80}$,解得 $y=30$ 或 $y=\dfrac{240}{7}$,

∴ 矩形的宽为 30 毫米,长为 60 毫米或宽为 $\dfrac{240}{7}$ 毫米,长为 $\dfrac{480}{7}$ 毫米.

点方法

解答本题的基本思路是根据相似三角形对应高之比等于相似比列方程.

长为 3 cm,要将它加工成一块矩形铁皮,使矩形的一边 FG 在 BC 上,其余两个顶点 E,H 分别在 AB,AC 上,且矩形的面积是三角形面积的一半,求这个矩形的长和宽.



(第 4 题图)

Ⅱ 点方法·拨技巧·探规律

典例剖析

拨尖角度 1　根据面积比计算

例 5 如图 6.5-4,把 $\triangle ABC$ 沿 AB 边平移到 $\triangle A'B'C'$ 的位置,它们的重叠部分(即图中阴影部分)的面积是 $\triangle ABC$ 面积的一半,若 $AB=\sqrt{2}$,则此三角形移动的距离 AA' 的长是(　　)

A. $\sqrt{2}-1$　　B. $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$　　C. 1　　D. $\dfrac{1}{2}$

导引:利用相似三角形的面积比等于相似比的平方先求出 $A'B$ 的长,再求 AA' 的长就可以了.

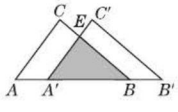


图 6.5-4

如图 6.5-4,设 BC 与 $A'C'$ 交于点 E,

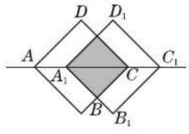
由平移的性质知,$AC/\!/A'C'$,

∴ $\triangle BEA'\backsim\triangle BCA$,∴ $S_{\triangle BEA'}:S_{\triangle BCA}=A'B^2:AB^2=1:2$.

举一反三训练

☞(答案见 222 页)

5. 把正方形 $ABCD$ 沿对角线 AC 的方向移动到 $A_1B_1C_1D_1$ 的位置,它们重叠部分的面积是正方形 $ABCD$ 的面积的一半,若 $AC=\sqrt{2}$,则平移的距离是_____.



(第 5 题图)

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

∵ $AB=\sqrt{2}$, ∴ $A'B=1$, ∴ $AA'=AB-A'B=\sqrt{2}-1$, 故选 A.

▶答案: A

点方法

本题根据平移的性质得出三角形相似，再根据相似三角形的面积比等于相似比的平方求解.

拔尖角度 2　方案设计(拓展点)

例 6 数学兴趣小组成员，为了从一张腰长为 2 的等腰直角三角形的纸片中剪出一个尽可能大的正方形，探究出甲、乙两种剪法(如图 6.5-5 甲和乙)

(1)请计算说明甲、乙两种剪法哪种剪出的正方形纸片更大.

(2)李明同学想从一张直角边分别为 3、4 的三角形纸片(如图 6.5-5 丙)中，剪出一个边长为 1.7 的正方形，能做到吗? 请说明理由.

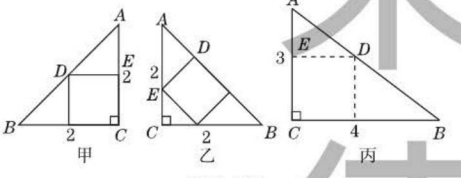


图 6.5-5

导引: (1)设甲、乙两种剪法剪出的正方形的边长分别为 x、y，再根据相似三角形的性质计算出其边长，并比较出其面积的大小即可;

(2)如图 6.5-5 丙，设正方形的边长为 m，则 $AE=3-m$，根据 $DE\perp AC$, $BC\perp AC$，故可得出 $\triangle ADE\backsim\triangle ABC$，再根据相似三角形的对应边成比例即可求出 m 的值，再与 1.7 相比较即可.

▶解: (1)如图 6.5-5 甲所示: 设正方形的边长为 x，则 $AE=2-x$,

∵ $DE\perp AC$, $BC\perp AC$, ∴ 易得 $\triangle ADE\backsim\triangle ABC$,

∴ $\dfrac{AE}{AC}=\dfrac{DE}{BC}$, 即 $\dfrac{2-x}{2}=\dfrac{x}{2}$, 解得 $x=1$, ∴ $S_{正方形}=1$;

如图 6.5-5 乙所示: ∵ 等腰直角三角形的边长为 2,

∴ $AB=\sqrt{AC^2+BC^2}=\sqrt{2^2+2^2}=2\sqrt{2}$,

设正方形的边长为 y，则 $AD=\dfrac{2\sqrt{2}-y}{2}=\sqrt{2}-\dfrac{y}{2}$,

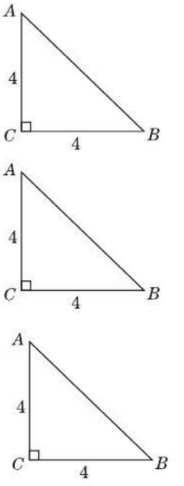
∵ $\angle A=\angle A$, $\angle ADE=\angle ACB$, ∴ $\triangle ADE\backsim\triangle ACB$,

∴ $\dfrac{AD}{AC}=\dfrac{DE}{BC}$, 即 $\dfrac{\sqrt{2}-\frac{y}{2}}{2}=\dfrac{y}{2}$, 解得 $y=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$.

∴ $S_{正方形}=\left(\dfrac{2\sqrt{2}}{3}\right)^2=\dfrac{8}{9}$;

∵ $1>\dfrac{8}{9}$, ∴ 甲种剪法剪出的正方形纸片更大.

6. 某校师生准备了一些等腰直角三角形纸片，从每张纸片中剪出一个半圆制作玩具，寄给灾区的小朋友. 如图是腰长为 4 的等腰直角三角形 ABC，要求剪出的半圆的直径在 $\triangle ABC$ 的边上，且半圆的弧与 $\triangle ABC$ 的其他两边相切，请作出所有不同方案的示意图，并求出相应半圆的半径(结果保留根号).



(第 6 题图)

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

(2)能. 若按如图 6.5-5 丙所示的正方形剪,设正方形的边长为 m,则 $AE=3-m$,

$\because DE\perp AC, BC\perp AC, \therefore$ 易得 $\triangle ADE\backsim\triangle ABC$,

$\therefore \frac{AE}{AC}=\frac{DE}{BC}$,即 $\frac{3-m}{3}=\frac{m}{4}$,解得 $m=\frac{12}{7}\approx 1.71>1.7$,

$\therefore$ 能剪出一个边长为 1.7 的正方形.

点方法

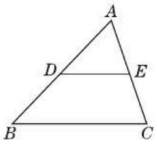
解答这类问题的关键是首先根据题目的要求画出符合条件的图形,再结合相似三角形的性质计算.

III 练基础·练方法·练技巧 ☞(答案见 223 页)

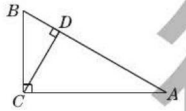
基础巩固练

1. [中考·自贡]如图,在 $\triangle ABC$ 中,点 D、E 分别是 AB、AC 的中点,若 $\triangle ADE$ 的面积为 4,则 $\triangle ABC$ 的面积为(　　)

A. 8　　B. 12　　C. 14　　D. 16



(第 1 题图)



(第 2 题图)

2. 如图,在 Rt $\triangle ABC$ 中,$\angle ACB=90°$,$\angle A=30°$,$CD\perp AB$ 于点 D. 则 $\triangle BCD$ 与 $\triangle ABC$ 的周长之比为(　　)

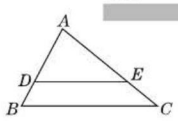
A. 1 ∶ 2　　B. 1 ∶ 3

C. 1 ∶ 4　　D. 1 ∶ 5

3. [中考·随州]如图,平行于 BC 的直线 DE 把 $\triangle ABC$ 分成面积相等的两部分,则 $\frac{BD}{AD}$ 的值为(　　)

A. 1　　B. $\frac{\sqrt{2}}{2}$

C. $\sqrt{2}-1$　　D. $\sqrt{2}+1$



(第 3 题图)

4. 用放大镜看一个直角三角形,该三角形的边长放大到原来的 10 倍后,下列结论中错误的是(　　)

A. 斜边上的中线是原来的 10 倍

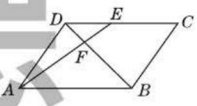
B. 斜边上的高是原来的 10 倍

C. 周长是原来的 10 倍

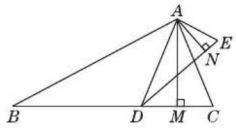
D. 最小内角是原来的 10 倍

5. 如果 $\triangle ABC\backsim\triangle DEF$,且对应面积之比为1∶4,那么它们对应周长之比为_____.

6. 如图,在平行四边形 $ABCD$ 中,E 为 CD 上一点,连接 AE、BD,且 AE、BD 交于点 F,$S_{\triangle DEF}:S_{\triangle ABF}=4:25$,则 $DE:EC=$_____.



(第 6 题图)



(第 7 题图)

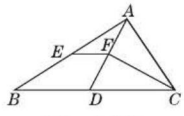
7. 如图,$AB=8$,$AD=AC=4$,$AE=2$,$\angle BAD=\angle CAE$,$AM\perp BC$ 于点 M,$AN\perp DE$ 于点 N,则 $\frac{AM}{AN}$ 的值为_____.

8. 如图,在 $\triangle ABC$ 中,$BC>AC$,点 D 在 BC 上,且 $DC=AC$,$\angle ACB$ 的平分线 CF 交 AD 于点 F,点 E 是 AB 的中点,连接 EF.

(1)求证:$\triangle AEF\backsim\triangle ABD$;

(2)①若 $BC=8$,$AC=5$,求 EF;

②若四边形 $BDFE$ 的面积为 6,求 $\triangle ABD$ 的面积.



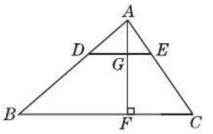
(第 8 题图)

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

9. 如图，AF 是 $\triangle ABC$ 的高，点 D、E 分别在 AB、AC 上，且 $DE \parallel BC$，DE 交 AF 于点 G. 设 $AD=10$，$AB=30$，$AC=24$，$GF=12$.

(1) 求 AE 的长；

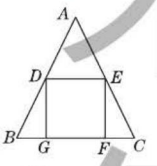
(2) 求点 A 到 DE 的距离.



(第 9 题图)

能力提升练

10. 如图，$\triangle ABC$ 中，$AB=AC$，AB、AC 的中点分别为点 D、E，点 G、F 在 BC 上，$DEFG$ 为正方形，$DE=2$ cm，则 AC 的长为 _____ cm.

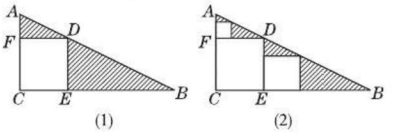


(第 10 题图)

11. 三角形纸片 ABC 中，$\angle C=90°$，$AC=1$，$BC=2$. 按图(1)的方式在这张纸片中剪去一个尽可能大的正方形，称为第 1 次剪取，记余下的两个三角形面积和为 S_1；按图(2)的方式在余下的 $\mathrm{Rt}\triangle ADF$ 和 $\mathrm{Rt}\triangle BDE$ 中，分别剪去尽可能大的正方形，称为第 2 次剪取，记余下的所有三角形面积和为 S_2；继续操作下去…

(1) 如图(1)，求 $\dfrac{CE}{BC}$ 和 S_1 的值；

(2) 第 n 次剪取后，求余下的所有三角形面积之和 S_n.



(第 11 题图)

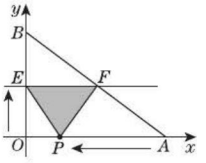
思维拓展练

12. 如图，已知 A、B 两点的坐标分别为 $(40,0)$ 和 $(0,30)$，动点 P 从点 A 开始在线段 AO 上以每秒 2 个单位长度的速度向原点 O 运动，动直线 EF 从 x 轴开始以每秒 1 个单位长度的速度向上平行移动(即 $EF \parallel x$ 轴)，并且分别与 y 轴、线段 AB 交于点 E、F，连接 EP、FP，设动点 P 与动直线 EF 同时出发，运动时间为 t 秒.

(1) 求 $t=15$ 时，$\triangle PEF$ 的面积；

(2) 直线 EF、点 P 在运动过程中，是否存在这样的 t，使得 $\triangle PEF$ 的面积等于 160(平方单位)？若存在，请求出此时 t 的值；若不存在，请说明理由.

(3) 当 t 为何值时，$\triangle EOP$ 与 $\triangle BOA$ 相似.



(第 12 题图)

我的错题笔记

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

6.6 图形的位似

1 点知识·拨考向·诊误区

知识点1 位似图形

点知识

如果两个图形不仅是相似图形，而且对应顶点的连线相交于一点，那么这样的两个图形叫做位似图形，这个点叫做位似中心.

要点精析

1. 位似比，即位似图形的相似比，指的是要画的新图形与参照的原图形的相似比.
2. 两个位似图形可能位于位似中心的两侧，也可能位于位似中心的一侧；根据一个位似中心可以作两个关于已知图形成一定位似比的位似图形，这两个图形分布在位似中心的两侧，并且关于位似中心对称.
3. 判断两个图形是否位似看两点：①两个图形必须是相似形；②对应点的连线都经过同一点. 这两个条件缺一不可.
4. 位似图形的对应边互相平行（或在同一直线上），各对对应顶点到位似中心的距离的比等于位似比.

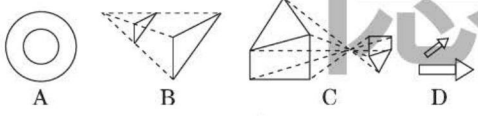

位似图形

拨考向

典例剖析

考查角度1 位似图形的识别

例1 在下列图形中，不是位似图形的是(　　)


A　B　C　D

导引：根据位似图形的定义分析各图，对各选项逐一分析，即可得出答案.

根据位似图形的概念，A、B、C中的两个图形都是位似图形，D中的两个图形不符合位似图形的概念，对应顶点不能相交于一点，故不是位似图形. 故选D.

▶答案：D

点方法

解答本题采用**定义法**，即判断两个图形是不是位似图形，首先判断它们是否相似，若不相似，则一定不是位似图形；若相似，则看两个相似图形上每组对应点所在直线是否经过同一点，如果经过同一点，那么这两个图形是位似图形，否则不是.

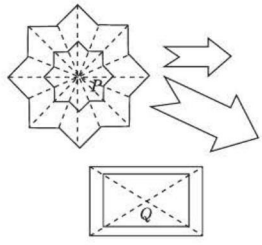
考查角度2 根据位似图形的性质计算

例2 如图6.6-1，以点O为位似中心，将$\triangle ABC$缩小后得到$\triangle A'B'C'$，已知$OB=3OB'$，若$\triangle ABC$的面积为9，则$\triangle A'B'C'$的面积为_____.

举一反三训练

(答案见224页)

1. 如图所示，判断各组中的两个图形是不是位似图形，若是，指出位似中心.


(第1题图)

2. 如图，四边形$ABCD$与四边形$AEFG$是位似图形，且$AC:AF=2:3$，则下列结论错误的是(　　)

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

导引:先求出位似比,再根据位似比等于相似比和相似三角形的面积比等于相似比的平方计算即可.

$\because OB=3OB'$,$\therefore \dfrac{OB'}{OB}=\dfrac{1}{3}$.

$\because$ 以点 O 为位似中心,将 $\triangle ABC$ 缩小后得到 $\triangle A'B'C'$,

$\therefore \triangle A'B'C' \backsim \triangle ABC$,

$\therefore \dfrac{A'B'}{AB}=\dfrac{1}{3}$. $\therefore \dfrac{S_{\triangle A'B'C'}}{S_{\triangle ABC}}=\dfrac{1}{9}$.

$\because \triangle ABC$ 的面积为 9,$\therefore \triangle A'B'C'$ 的面积为 1. ▶答案:1

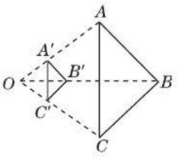
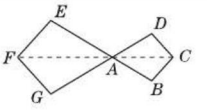


图 6.6-1

点方法

注意掌握位似是相似的特殊形式,位似比等于相似比,其对应的面积比等于相似比的平方.



(第 2 题图)

A. 四边形 $ABCD$ 与四边形 $AEFG$ 是相似图形

B. AD 与 AE 的比是 2 : 3

C. 四边形 $ABCD$ 与四边形 $AEFG$ 的周长比是 2 : 3

D. 四边形 $ABCD$ 与四边形 $AEFG$ 的面积比是 4 : 9

知识点 2 位似图形的画法(重点)

点知识 ▶▶▶

画位似图形的一般步骤为:

(1)确定位似中心;

(2)分别连接并延长位似中心和能代表原图的关键点;

(3)根据位似比,确定能代表所作的位似图形的关键点;

(4)顺次连接上述各点,得到放大或缩小的图形.

要点精析 ///

1. 画一个图形的位似图形时,位似中心的选择是任意的,这个点可以在图形的内部或外部或在图形上,对于具体问题要考虑画图方便且符合要求. 由于位似中心选择的任意性,因此画已知图形的位似图形的结果是不唯一的.

2. 在平面直角坐标系中,如果位似变换是以原点为位似中心,相似比为 k,那么位似图形对应点的坐标的比等于 k 或 $-k$.

拓考向 ▶▶▶

考查角度 1 画位似图形

例 3 [一题多解] 如图 6.6-2,已知 $\triangle ABC$,按位似比 1 : 2,把 $\triangle ABC$ 缩小.

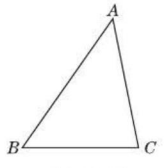


图 6.6-2

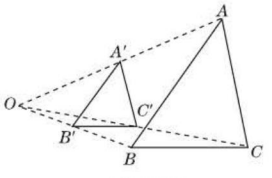


图 6.6-3

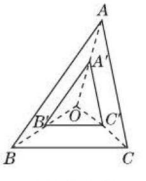
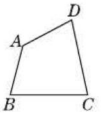


图 6.6-4

3. 把如图的四边形 $ABCD$ 以 O 为位似中心缩小为原来的 $\dfrac{1}{2}$.



(第 3 题图)

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

导引：本题提供了原图形和位似比，但没有说明对应点在位似中心的同侧还是异侧，因此，本题有多个不同结果.

▶解法一：在△ABC外任取一点O.

如图6.6-3，连接OA、OB、OC，分别取OA、OB、OC的中点A'、B'、C'，依次连接$A'B'$、$B'C'$、$C'A'$，得△$A'B'C'$，则△$A'B'C'$就是所求作的图形.

解法二：在△ABC内任取一点O.

如图6.6-4，连接OA、OB、OC，分别取OA、OB、OC的中点A'、B'、C'，依次连接$A'B'$、$B'C'$、$C'A'$，得△$A'B'C'$，则△$A'B'C'$就是所求作的图形.

点方法

作已知图形的位似图形关键在于定位似中心、定方向、定位似比.

考查角度2　网格中画位似图形（拓展点）

例4 ［中考·凉山州］如图6.6-5，在边长为1的正方形网格中建立平面直角坐标系，已知△ABC三个顶点分别为$A(-1,2)$、$B(2,1)$、$C(4,5)$.

(1)画出△ABC关于x轴对称的△$A_1B_1C_1$；

(2)以原点O为位似中心，在x轴的上方画出△$A_2B_2C_2$，使△$A_2B_2C_2$与△ABC位似，且位似比为2∶1，并求出△$A_2B_2C_2$的面积.

导引：(1)画出A、B、C关于x轴的对称点A_1、B_1、C_1即可解决问题；

(2)连接OB，延长OB到B_2，使得$BB_2=OB$，同法可得A_2、C_2，△$A_2B_2C_2$就是所求三角形；

▶解：(1)如图6.6-5，△$A_1B_1C_1$就是所求三角形.

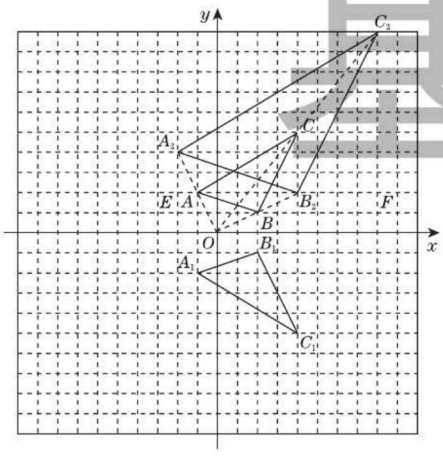
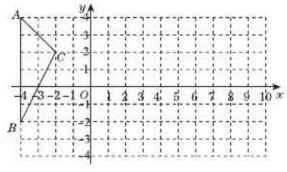


图6.6-5

4. ［中考·雅安］如图，△ABC中，$A(-4,4)$，$B(-4,-2)$，$C(-2,2)$.

(1)请画出将△ABC向右平移8个单位长度后的△$A_1B_1C_1$；

(2)以O为位似中心，将△$A_1B_1C_1$缩小为原来的$\frac{1}{2}$，得到△$A_2B_2C_2$，请在y轴右侧画出△$A_2B_2C_2$.



（第4题图）

点方法

网格中的作图应根据网格的特点，结合图形的相关性质作图.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

(2)如图 6.6-5,$\triangle A_2B_2C_2$ 就是所求三角形.

分别过点 A_2、C_2 作 y 轴的平行线,过点 B_2 作 x 轴的平行线,交点分别为 E、F,

$\because A(-1,2)$,$B(2,1)$,$C(4,5)$,$\triangle A_2B_2C_2$ 与 $\triangle ABC$ 位似,且位似比为 2 :1,

$\therefore A_2(-2,4)$,$B_2(4,2)$,$C_2(8,10)$,

$\therefore S_{\triangle A_2B_2C_2}=\frac{1}{2}\times(2+8)\times10-\frac{1}{2}\times6\times2-\frac{1}{2}\times4\times8=28.$

II 点方法 · 拔技巧 · 探规律

典例剖析

拔尖角度 1　确定位似图形中对应点的坐标(易错点)

例 5 如图 6.6-6,$\triangle ABC$ 中,A、B 两个顶点在 x 轴的上方,点 C 的坐标是 $(-1,0)$. 以点 C 为位似中心,在 x 轴的下方作 $\triangle ABC$ 的位似图形 $\triangle A'B'C$,并把 $\triangle ABC$ 的边长放大到原来的 2 倍. 设点 B 的对应点 B' 的横坐标是 a,则点 B 的横坐标是(　　)

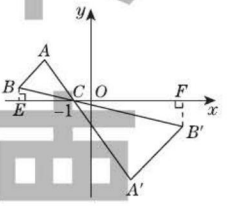


图 6.6-6

A. $-\frac{1}{2}a$　　B. $-\frac{1}{2}(a+1)$

C. $-\frac{1}{2}(a-1)$　　D. $-\frac{1}{2}(a+3)$

导引:根据位似变换的性质求解即可.

如图 6.6-6,分别过点 B,B' 作 x 轴的垂线,垂足分别为 E,F. $\because$ 点 C 的坐标是 $(-1,0)$,点 B' 的横坐标是 a,$\therefore FO=a$,$\therefore CF=a+1$. $\because$ 以点 C 为位似中心,在 x 轴的下方作 $\triangle ABC$ 的位似图形 $\triangle A'B'C$,并把 $\triangle ABC$ 的边长放大到原来的 2 倍,$\therefore CE=\frac{1}{2}(a+1)$,$\therefore$ 点 B 的横坐标是 $-\frac{1}{2}(a+1)-1=-\frac{1}{2}(a+3)$.

故选 D.　▶答案:D

点方法

根据位似图形的性质确定点的坐标,但要注意如果没有给定图形时要注意多解.

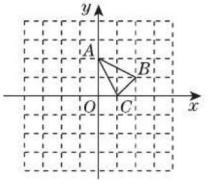
拔尖角度 2　确定位似中心的坐标

例 6 如图 6.6-7,正方形 $OEFG$ 和正方形 $ABCD$ 是位似图形,点 F 的坐标为 $(1,1)$,点 C 的坐标为 $(4,2)$,则这两个正方形位似中心的坐标是_____.

举一反三训练

☞(答案见 224 页)

5. [中考 · 营口]如图,在边长为 1 的小正方形组成的网格中,建立平面直角坐标系,$\triangle ABC$ 的三个顶点均在格点(网格线的交点)上. 以原点 O 为位似中心,画 $\triangle A_1B_1C_1$,使它与 $\triangle ABC$ 的相似比为 2 :1,则点 B 的对应点 B_1 的坐标是_____.



(第 5 题图)

6. 如图,正方形 $OABC$ 和正方形 $DEFG$ 是位似图形,点 B 的坐标为 $(-1,1)$,点 F 的坐标为 $(4,2)$,且

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

导引：两个位似图形的主要特征是：每对对应点与位似中心共线；不经过位似中心的对应线段平行. 则位似中心就是两对对应点的连线（或延长线）的交点，本题分两种情况讨论即可.

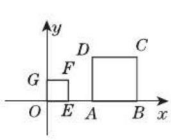


图 6.6-7

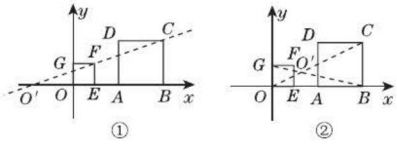


图 6.6-8

第一种情况：如图 6.6-8①，当两个位似图形在位似中心的同侧时，连接 CF 并延长交 x 轴于点 O'，O'就是位似中心，设直线 CF 对应的函数表达式为 $y=kx+b$，将 $(4,2)$、$(1,1)$ 分别代入，得 $\begin{cases}4k+b=2,\\k+b=1,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}k=\dfrac{1}{3},\\b=\dfrac{2}{3},\end{cases}$ 所以直线 CF 对应的函数表达式为 $y=\dfrac{1}{3}x+\dfrac{2}{3}$. 令 $y=0$，得 $x=-2$，所以 O' 的坐标为 $(-2,0)$.

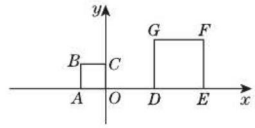
第二种情况：如图 6.6-8②，当位似中心在两个正方形之间时，连接 OC、BG，交于点 O'，O'就是位似中心. 设直线 OC 对应的函数表达式为 $y=ax$，该直线过点 C，将 $(4,2)$ 代入得 $a=\dfrac{1}{2}$，所以直线 OC 对应的函数表达式为 $y=\dfrac{1}{2}x$. 设直线 BG 对应的函数表达式为 $y=k_1x+b_1$，该直线过点 B，G，又易知 $B(4,0)$，$G(0,1)$，所以将 $(4,0)$、$(0,1)$ 分别代入 $y=k_1x+b_1$，得 $\begin{cases}4k_1+b_1=0,\\b_1=1,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}k_1=-\dfrac{1}{4},\\b_1=1,\end{cases}$ 所以直线 BG 对应的函数表达式为 $y=-\dfrac{1}{4}x+1$. 解方程组 $\begin{cases}y=\dfrac{1}{2}x,\\y=-\dfrac{1}{4}x+1,\end{cases}$ 得 $\begin{cases}x=\dfrac{4}{3},\\y=\dfrac{2}{3},\end{cases}$ 即 O' 的坐标为 $\left(\dfrac{4}{3},\dfrac{2}{3}\right)$.

▶答案：$(-2,0)$ 或 $\left(\dfrac{4}{3},\dfrac{2}{3}\right)$

点方法

解答这类题时不可忽视位似中心位于两个图形之间的情形. 本题运用了**分类讨论思想**.

位似中心在这两个图形的同侧，则位似中心的坐标为_____.



（第6题图）

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

Ⅲ 练基础 · 练方法 · 练技巧 (答案见225页)

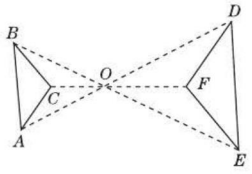
基础巩固练

1. 七边形 $ABCDEFG$ 与七边形 $A'B'C'D'E'F'G'$ 是位似形，它们的面积比为 4∶9，已知位似中心 O 到点 A 的距离为 6，则点 O 到点 A' 的距离为(　　)

A. 9　　B. 12　　C. 13.5　　D. 18

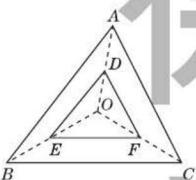
2. 如图所示，$\triangle ABC$ 与 $\triangle DEF$ 是位似形，位似比为 2∶3，已知 $AB=4$，则 DE 的长为(　　)

A. 6　　B. 5　　C. 9　　D. 8



(第2题图)

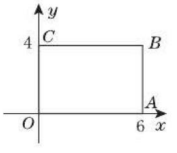
3. 如图所示，$\triangle DEF$ 是由 $\triangle ABC$ 经过位似变换得到的，点 O 是位似中心，D,E,F 分别是 OA,OB,OC 的中点，则 $\triangle DEF$ 与 $\triangle ABC$ 的面积比是(　　)



(第3题图)

A. 1∶6　B. 1∶5　　C. 1∶4　　D. 1∶2

4. 如图，在直角坐标系中，矩形 $OABC$ 的顶点 O 是坐标原点，边 OA 在 x 轴上，OC 在 y 轴上. 如果矩形 $OA'B'C'$ 与矩形 $OABC$ 关于点 O 位似，且矩形 $OA'B'C'$ 的面积等于矩形 $OABC$ 面积的 $\frac{1}{4}$，那么点 B' 的坐标是(　　)



(第4题图)

A. (3,2)

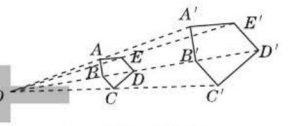
B. (−2,−3)

C. (2,3)或(−2,−3)

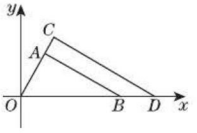
D. (3,2)或(−3,−2)

5. 如图，以点 O 为位似中心，将五边形 $ABCDE$ 放大后得到五边形 $A'B'C'D'E'$，若 $OA=10$ cm，$OA'=20$ cm，则五边形 $ABCDE$ 的周长与五边形 $A'B'C'D'E'$ 的周长的比是_____.

【导学号 7367677】



(第5题图)



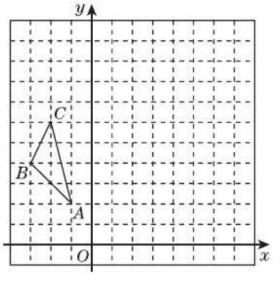
(第6题图)

6. [中考 · 菏泽] 如图，$\triangle OAB$ 与 $\triangle OCD$ 是以点 O 为位似中心的位似图形，相似比为 3∶4，$\angle OCD=90°$，$\angle AOB=60°$，若点 B 的坐标是(6,0)，则点 C 的坐标是_____.

7. 如图，在平面直角坐标系中，已知 $\triangle ABC$ 三个顶点的坐标分别为 $A(-1,2)$，$B(-3,4)$，$C(-2,6)$.

(1) 画出 $\triangle ABC$ 绕点 A 顺时针旋转 90° 后得到的 $\triangle AB_1C_1$；

(2) 以原点 O 为位似中心，在图中画出将 $\triangle AB_1C_1$ 三条边放大为原来的 2 倍后的 $\triangle A_2B_2C_2$，并写出 A_2、B_2、C_2 的坐标.

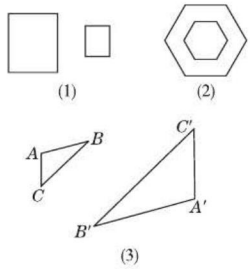


(第7题图)

宋德基

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

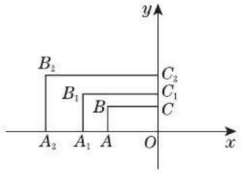
8. 找出下列图形的位似中心.



（第 8 题图）

能力提升练

9. [中考 · 齐齐哈尔] 如图，在平面直角坐标系中，矩形 $AOCB$ 的两边 OA、OC 分别在 x 轴和 y 轴上，且 $OA=2$，$OC=1$. 在第二象限内，将矩形 $AOCB$ 以原点 O 为位似中心放大为原来的 $\frac{3}{2}$ 倍，得到矩形 $A_1OC_1B_1$，再将矩形 $A_1OC_1B_1$ 以原点 O 为位似中心放大为原来的 $\frac{3}{2}$ 倍，得到矩形 $A_2OC_2B_2\cdots$，以此类推，得到的矩形 $A_nOC_nB_n$ 的对角线交点的坐标为_____.

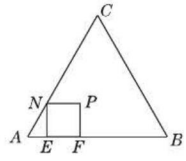


（第 9 题图）

10. 已知 $\triangle ABC$ 是正三角形，正方形 $EFPN$ 的顶点 E、F 在边 AB 上，顶点 N 在边 AC 上.

(1) 如图，在正三角形 ABC 及其内部，以点 A 为位似中心，画出正方形 $EFPN$ 的位似正方形 $E'F'P'N'$，且使正方形 $E'F'P'N'$ 的面积最大（不写画法，但要保留画图痕迹）；

(2) 若正三角形 ABC 的边长为 $3+2\sqrt{3}$，求 (1) 中画出的正方形 $E'F'P'N'$ 的边长.



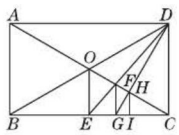
（第 10 题图）

思维拓展练

11. 如图，在矩形 $ABCD$ 中，对角线 AC、BD 相交于点 O.

(1) 过点 O 作 $OE\perp BC$ 于 E 点，连接 DE 交 OC 于 F 点，作 $FG\perp BC$ 于 G 点，则 $\triangle ABC$ 与 $\triangle FGC$ 是位似三角形吗？若是，请说出位似中心，并求出位似比；若不是，请说明理由.

(2) 同 (1) 的操作步骤，试确定 $\frac{CI}{BC}$ 的值.



（第 11 题图）

我的错题笔记

荣德基
关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

6.7 用相似三角形解决问题

1 点知识 · 拨考向 · 诊误区

知识点 1 平行投影

点知识

在平行光线的照射下，物体所产生的影叫做平行投影.

要点精析

1. 太阳光可以看成是平行光，因此在太阳光照射下形成的影子就是平行投影；
2. 在平行光线的照射下，同一时刻，不同物体的物高与影长成比例.

易错警示

利用影长测量物体高度时，要注意测量的两个物体的影长是在同一时刻下.

拨考向

典例剖析

考查角度 1 根据平行投影计算物高

例 1 如图 6.7-1，同一时刻在阳光照射下，树 AB 的影子 BC = 3 m，小明的影子 $B'C'$ = 1.5 m，已知小明的身高 $A'B'$ = 1.7 m，则树高 AB = _____.

导引：利用同一时刻物体的高度与其影长成正比得到 $\frac{AB}{3}=\frac{1.7}{1.5}$，然后利用比例性质求出 AB 即可.

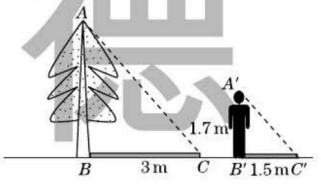


图 6.7-1

根据题意得 $\frac{AB}{BC}=\frac{A'B'}{B'C'}$，即 $\frac{AB}{3}=\frac{1.7}{1.5}$，所以 AB = 3.4 m.

▶答案：3.4 m

方法

解答这类问题的基本思路是根据“同一时刻下物高与影长成正比”列方程.

考查角度 2 根据平行投影画图

例 2 某校墙边有甲、乙两根木杆，已知乙木杆的高度为 1.5 m.

(1) 某一时刻甲木杆在阳光下的影子如图 6.7-2 所示，画出此时乙木杆的影子 DF.

(2) $\triangle ABC \backsim \triangle DEF$，如果测得甲、乙木杆的影子长分别为 1.6 m 和 1 m，那么甲木杆的高度是多少？

举一反三训练

(答案见 226 页)

1. 为了测量水塔的高度，我们取一竹竿，放在阳光下，已知 2 米长的竹竿投影长为 1.5 米，在同一时刻测得水塔的投影长为 30 米，则水塔高为_____米.

2. 如图，AB 和 DE 是直立在地面上的两根立柱. AB = 4 m，某一时刻 AB 在阳光下的投影 BC = 3 m.

荣德基

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

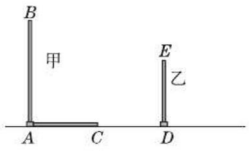


图 6.7-2

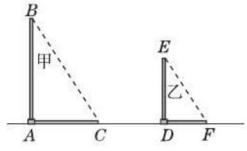


图 6.7-3

导引:(1)连接 BC,过点 E 作 $EF/\!/BC$ 与地面相交于点 F,DF 即为乙木杆的影子;

(2)根据相似三角形对应边成比例列式计算即可得解.

▶解:(1)如图 6.7-3 所示,DF 是乙木杆的影子;

(2)∵ $\triangle ABC\backsim\triangle DEF$,

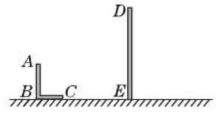
$\therefore \dfrac{AB}{DE}=\dfrac{AC}{DF}$,即 $\dfrac{AB}{1.5}=\dfrac{1.6}{1}$,

解得 $AB=2.4$ m.

答:甲木杆的高度是 2.4 m.

(1)请你在图中画出此时 DE 在阳光下的投影.

(2)在测量 AB 的投影时,同时测量出 DE 在阳光下的投影长为 8 m,请你计算 DE 的长.



(第2题图)

知识点 2 中心投影

点知识

在点光源的照射下,物体所产生的影子称为中心投影.

要点精析

1. 中心投影的对应点的连线都经过一点,这一点就是点光源的位置;
2. 物体的投影的大小是随着光源距离物体的远近而变化的,或者是随着物体距离投影面的远近而变化的;
3. 中心投影不能反映原物体的真实形状和大小.

拓展:平行投影可以看成是投影中心为无穷远点的中心投影,因此平行投影可以看成是中心投影的特殊情况.

拨考向

考查角度 1 中心投影作图

例 3 如图 6.7-4 是两根标杆及它们在灯光下的影子. 请在图中画出光源的位置(用点 P 表示);并在图中画出人在此光源下的影子. (用线段 EF 表示)

导引:分别过标杆的顶点及其影子的顶点作射线,两条射线的交点即为光源的位置.

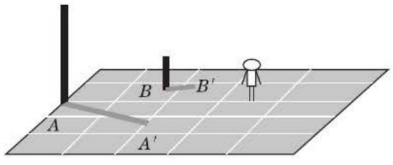


图 6.7-4

3. 如图,在路灯下,小明的身高如图中线段 AB 所示,他在地面上的影子如图中线段 AC 所示,小亮的身高如图中线段 FG 所示,路灯灯泡在线段 DE 上.

(1)请你确定灯泡所在的位置;

(2)画出小亮在灯光下形成的影子.

荣德基

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

▶解：如图 6.7-5，点 P 是光源，EF 就是人在光源下的影子.

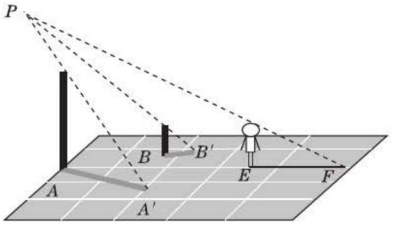


图 6.7-5

点方法

点光源由两个影子与物高决定.

考查角度 2　利用中心投影求物高、距离(拓展点)

例 4 如图 6.7-6，路灯(P 点)距地面 8 米，身高 1.6 米的小明从距路灯的底部(O 点)20 米的 A 点，沿 AO 所在的直线行走 14 米到 B 点时，身影的长度是变长了还是变短了？变长或变短了多少米？

导引：如图 6.7-6，由于 $AC \parallel BD \parallel OP$，因此有 $\triangle MAC \backsim \triangle MOP$，$\triangle NBD \backsim \triangle NOP$，即可由相似三角形的性质求解.

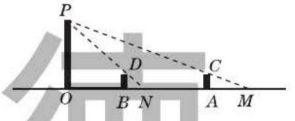


图 6.7-6

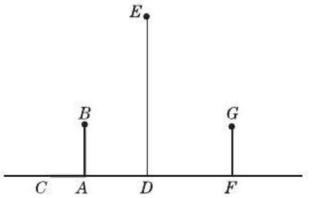
▶解：如图 6.7-6，因为 $AC \parallel OP$，所以 $\triangle MAC \backsim \triangle MOP$. 所以 $MA : MO = AC : OP$，

即 $MA : (20 + MA) = 1.6 : 8$，解得 $MA = 5$ 米；

同理，由 $\triangle NBD \backsim \triangle NOP$ 可求得 $NB = 1.5$ 米，所以小明的身影变短了 $5 - 1.5 = 3.5$(米).

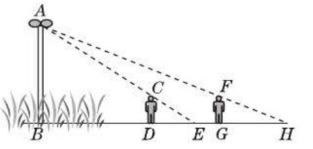
点方法

本题运用**建模思想**. 解题时关键是找出相似的三角形，然后根据对应边成比例列出方程，建立适当的数学模型来解答问题.



(第 3 题图)

4. 如图，花丛中有一路灯杆 AB，在灯光下，大华在 D 点处的影长 $DE = 3$ 米，沿 BD 方向行走到达 G 点，$DG = 5$ 米，这时大华的影长 $GH = 5$ 米. 如果大华的身高为 2 米，求路灯杆 AB 的高度.



(第 4 题图)

II 点方法 · 拨技巧 · 探规律

典例剖析

拨尖角度 1　影子不在同一直线上(拓展点)

例 5 如图 6.7-7，某时刻垂直于地面的标杆 AB 在阳光下的影子一部分落在地面上(图中的 BC)，一部分落在高楼的墙上(图中的 CD)，已知 $AB = 3$ m，$BC = 3$ m，$CD = 1$ m. 问：若无墙阻挡，则标杆 AB 在地面上的影子有多长？

举一反三训练

(答案见 226 页)

5. [实际应用题] 小明想利用太阳光测量楼高. 他带着皮尺来到一栋楼下，发现对面墙上有这

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

导引：延长 AD，交 BC 的延长线于 E，若无墙阻挡，标杆 AB 落在地面上的影子应该是 BE，根据相似三角形对应边成比例列出比例式，求出 CE 的长度，然后再加上 BC 的长度即可.

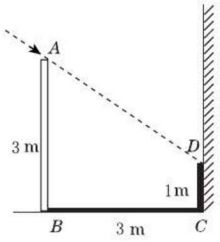


图 6.7-7

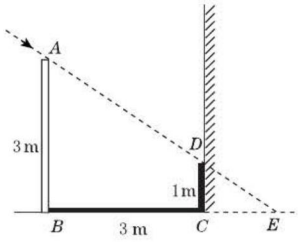


图 6.7-8

▶解：如图 6.7-8，延长 AD，交 BC 的延长线于 E，若无墙阻挡，标杆 AB 落在地面上的影子应该是 BE，即 $BC+CE$.

$\because AB \parallel DC$，

$\therefore \triangle ABE \backsim \triangle DCE$，

$\therefore \dfrac{BE}{CE}=\dfrac{AB}{DC}$，即 $\dfrac{3+CE}{CE}=\dfrac{3}{1}$，

$\therefore CE=1.5$ m，

$\therefore BE=3+1.5=4.5$(m).

答：若无墙阻挡，标杆 AB 在地面上的影子长 4.5 m.

点方法

根据相似三角形对应边成比例求解，运用**转化思想**，构造出相似三角形是解题的关键.

拔尖角度 2　镜面反射的应用(拓展点)

例 6 为了测量校园内一棵不可攀登的树的高度，学校数学应用小组准备利用大树的影长进行测量，突然天气变阴，于是他们改变了测量方法. 根据光的反射定律，利用一面镜子和一根皮尺，设计如图 6.7-9 所示的方案：把镜子放在离树(AB)8.7 米的点 E 处，然后沿着直线 BE 后退到点 D，这时恰好在镜子里看到树的顶端 A，再用皮尺量得 $DE=2.7$ 米，观察者目高 $CD=1.6$ 米，请你计算出树(AB)的高度.(精确到 0.1 米)

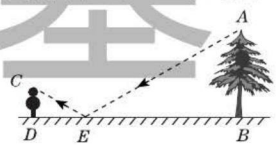


图 6.7-9

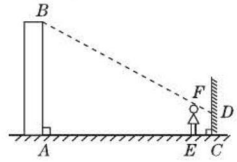
导引：由光的反射定律可以得到：$\angle AEB=\angle CED$，很容易得到 $\triangle ABE \backsim \triangle CDE$，由相似三角形对应边成比例可以求出树的高度.

▶解：$\because \angle AEB=\angle CED$，$\angle ABE=\angle CDE=90°$，

$\therefore \triangle ABE \backsim \triangle CDE$，$\therefore \dfrac{AB}{CD}=\dfrac{BE}{DE}$，

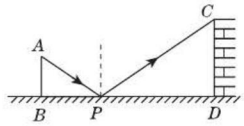
栋楼的影子，针对这种情况，他设计了一种测量方案，具体测量情况如下：

如示意图，小明边移动边观察，发现站到点 E 处时，可以使自己落在墙上的影子与这栋楼落在墙上的影子重叠，且高度恰好相同. 此时，测得小明落在墙上的影子 $CD=1.2$ m，$CE=0.8$ m，$CA=30$ m(点 A，E，C 在同一直线上). 已知小明的身高 EF 是 1.7 m，请你帮小明求出楼高 AB.(结果精确到 0.1 m)



(第 5 题图)

6. 如图是小明设计的用手电筒来测量某古城墙高度的示意图. 点 P 处放一水平的平面镜，光线从点 A 出发经平面镜反射后刚好射到古城墙 CD 的顶端 C 处，已知 $AB\perp BD$，$CD\perp BD$，且测得 $AB=1.2$ 米，$BP=1.8$ 米，$DP=12$ 米，那么该古城墙的高度是(　　)



(第 6 题图)

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

$\therefore \frac{AB}{1.6}=\frac{8.7}{2.7}$, $\therefore AB\approx 5.2$.

答:树(AB)的高度约是 5.2 米.

点方法

能从实际问题中抽象出相似三角形,利用相似三角形的性质就可以求出结果.

拔尖角度 3　求路灯之间的距离

例 7 如图 6.7-10,王华同学在晚上由路灯 AC 走向路灯 BD,当他走到点 P 时,发现身后他影子的顶部刚好接触到路灯 AC 的底部,当他向前再步行 12 m 到达 Q 点时,发现身前他影子的顶部刚好接触到路灯 BD 的底部. 已知王华同学的身高是 1.6 m,两个路灯的高度都是 9.6 m.

(1)求两个路灯之间的距离 AB 的长;

(2)当王华同学走到路灯 BD 处时,他在路灯 AC 下的影子长是多少?

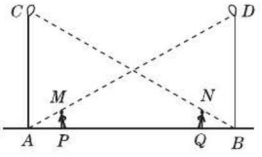


图 6.7-10

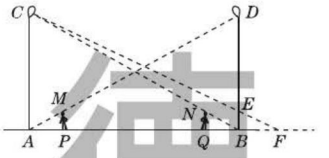


图 6.7-11

导引:(1)依题意得到 $\triangle APM\backsim\triangle ABD$,进一步可求出 AB 的长;

(2)设王华同学走到路灯 BD 处头的顶部为 E,连接 CE 并延长交 AB 的延长线于点 F,则 BF 即为此时他在路灯 AC 下的影子长,容易知道 $\triangle EBF\backsim\triangle CAF$,再利用相似三角形对应边成比例求出现在的影子长.

▶解:(1)由对称性可知 $AP=BQ$,设 $AP=BQ=x$ m,

$\because MP/\!/BD$, $\therefore \triangle APM\backsim\triangle ABD$,

$\therefore \frac{PM}{BD}=\frac{AP}{AB}$, $\therefore \frac{1.6}{9.6}=\frac{x}{2x+12}$,

$\therefore x=3$,经检验 $x=3$ 是分式方程的解.

$\therefore AB=2x+12=2\times 3+12=18$(m).

答:两个路灯之间的距离为 18 m.

(2)设王华同学走到路灯 BD 处头的顶部为 E,如图 6.7-11,连接 CE 并延长交 AB 的延长线于点 F,则 BF 即为此时他在路灯 AC 下的影子长,设 $BF=y$ m. $\because BE/\!/AC$,

$\therefore \triangle EBF\backsim\triangle CAF$.

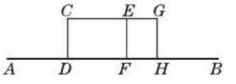
A. 6 米　　B. 8 米

C. 18 米　　D. 24 米

7. 如图,A、B 在一直线上,小明从点 A 出发沿 AB 方向匀速前进,4 秒后走到点 D,此时他(CD)在某一灯光下的影长为 AD,继续沿 AB 方向以同样的速度匀速前进 4 秒后到点 F,此时他(EF)的影长为 2 米,然后他再沿 AB 方向以同样的速度匀速前进 2 秒后到点 H,此时他(GH)处于灯光正下方.

(1)请在图中画出光源 O 点的位置,并画出他位于点 F 时在这个灯光下的影长 FM(不写画法);

(2)求小明沿 AB 方向匀速前进的速度.



(第 7 题图)

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

$\therefore \frac{BE}{AC}=\frac{BF}{AF}$，即$\frac{1.6}{9.6}=\frac{y}{y+18}$，

解得 $y=3.6$，经检验 $y=3.6$ 是分式方程的解.

答：当王华同学走到路灯 BD 处时，他在路灯 AC 下的影子长是 3.6 m.

点方法

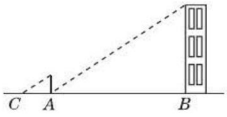
本题运用**构造法**. 先作辅助线构造出相似三角形，再利用相似三角形的性质来解答.

III 练基础·练方法·练技巧 ☞(答案见226页)

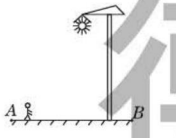
基础巩固练

1. 小明在测量楼高时，先测出楼房落在地面上的影长 BA 为 15 米(如图)，然后在 A 处竖立一根高 2 米的标杆，测得标杆的影长 AC 为 3 米，则楼高为(　　)

A. 10 米　B. 12 米　C. 15 米　D. 22.5 米



(第1题图)



(第2题图)

2. 如图所示，夜晚小刚在路灯下散步，小刚由 A 处走到 B 处这一过程中，他在地上的影子(　　)

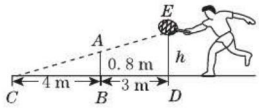
A. 逐渐变短　B. 逐渐变长

C. 先变短后变长　D. 先变长后变短

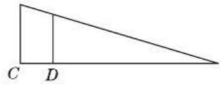
3. 如图，小李打网球时，球恰好打过网，且落在离网 4 m 的位置上，则球拍击球的高度 h 为(　　)

A. 0.6 m　B. 1.2 m

C. 1.3 m　D. 1.4 m



(第3题图)

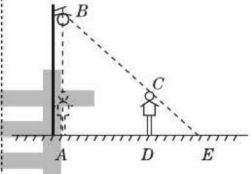


(第4题图)

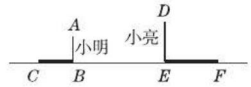
4. 如图所示，某班上体育课，甲、乙两名同学分别站在 C，D 的位置时，乙的影子恰好在甲的影子里边，已知甲身高 1.8 m，乙身高 1.5 m，甲的影长是 6 m，则甲、乙同学相距_____ m.

5. 某同学拿着一把尺子，站在距电线杆 30 m 的位置，把手臂向前伸直，把尺子竖直，看到尺子刚好遮住电线杆，已知尺子长 12 cm，这位同学的手臂长 60 cm，则电线杆高_____m.

6. 如图，小明从路灯下向前走了 3.5 m，发现自己在地面上的影长 DE 是 2 m，如果小明的身高为 1.6 m，那么路灯离地面的高度 AB 是_____m.



(第6题图)



(第7题图)

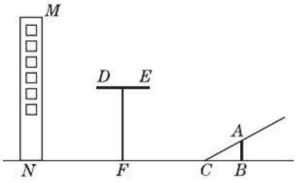
7. 如图，线段 BC，EF 分别是小明、小亮在路灯下的影子. 试确定路灯灯泡的位置.

8. (1)如图，若线段 MN 表示教学楼，线段 DE 表示“T”字形小建筑的横梁，阳光下，小俊的身高如图中线段 AB 所示，他在地面上的影子如图中线段 BC 所示，请你在图中画出横梁 DE 在同一时刻阳光照射下形成的影子；

(2)如果小俊的身高 $AB=1.5$ m，他的影子 $BC=2.5$ m，“T”字形小建筑的横梁长

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

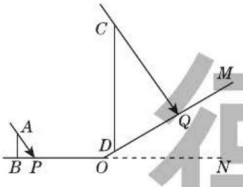
$DE=4$ m，与教学楼的距离 $FN=6$ m，请求出(1)中横梁 DE 影子的长度.



(第8题图)

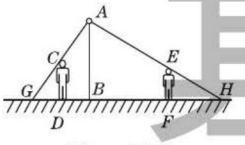
能力提升练

9. 如图，在一个阳光明媚的上午，数学陈老师组织学生测量小山坡的一棵大树 CD 的高度，山坡 OM 与地面 ON 的夹角为 $30°$ ($\angle MON=30°$)，站立在水平地面上身高 1.7 m的小明 AB 在地面的影长 BP 为 1.2 m，此刻大树 CD 在斜坡的影长 DQ 为 5 m，求大树的高度.



(第9题图)

10. 如图，小军、小珠立于灯杆两侧，两人相距 4 m，他们在同一盏路灯(AB)下的影长分别为1 m，2 m，已知小军身高(CD)为1.5 m，小珠身高(EF)为 1.2 m，求路灯的高.

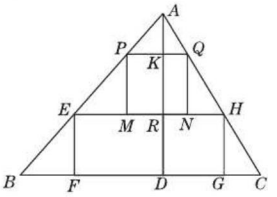


(第10题图)

11. 一块锐角三角形卡纸余料 ABC，它的边 $BC=120$ cm，高 $AD=80$ cm，为使卡纸余料得到充分利用，现把它裁剪成一个邻边之比为 2∶5 的矩形纸片 $EFGH$ 和正方形纸片 $PMNQ$，裁剪时，矩形纸片的较长边在 BC 上，正方形纸片一边在矩形纸片的较长边 EH 上，其余顶点均分别在 AB、AC 上，具体裁剪方式如图所示.

(1)求矩形纸片较长边 EH 的长；

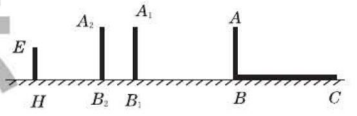
(2)裁剪正方形纸片时，小聪同学是按以下方法进行裁剪的：先沿着剩余料 $\triangle AEH$ 中与边 EH 平行的中位线剪一刀，再沿过该中位线两端点向边 EH 所作的垂线剪两刀，请你通过计算，判断小聪的剪法是否正确.



(第11题图)

思维拓展练

12. [探究题] 学习投影后，小明、小颖利用灯光下自己的影子长度来测量一路灯的高度，并探究影子长度的变化规律. 如图，在同一时间，身高为 1.6 m 的小明(AB)的影子 BC 长是 3 m，而小颖(EH)刚好在路灯灯泡的正下方 H 点，并测得 $HB=6$ m.



(第12题图)

(1)请在图中画出形成影子的光线，并确定路灯灯泡所在的位置 G；

(2)求路灯灯泡的垂直高度 GH；

(3)如果小明沿线段 BH 向小颖(H 点)走去，当小明走到 BH 的中点 B_1 处时，求其影子 B_1C_1 的长；当小明继续走剩下路程的 $\frac{1}{3}$ 到 B_2 处时，求其影子 B_2C_2 的长；当小明继续走剩下路程的 $\frac{1}{4}$ 到 B_3 处时；……按此规律继续走下去，当小明走剩下路程的 $\frac{1}{n+1}$ 到 B_n 处时，求其影子 B_nC_n 的长.(直接用含 n 的代数式表示)

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

中考提分 专题篇

章末整合与拔高

知识专题

专题一　相似三角形的判定

(1)直接运用基本方法证明

例 1　[中考·南京]如图 6-1,在正方形 $ABCD$ 中,E 是 AB 上一点,连接 DE. 过点 A 作 $AF\perp DE$,垂足为 F,$\odot O$ 经过点 C、D、F,与 AD 相交于点 G.

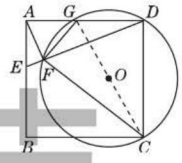


图 6-1

(1)求证:$\triangle AFG\backsim\triangle DFC$;

(2)若正方形 $ABCD$ 的边长为 4,$AE=1$,求 $\odot O$ 的半径.

导引:(1)欲证明 $\triangle AFG\backsim\triangle DFC$,只要证明 $\angle FAG=\angle FDC$,$\angle FGA=\angle FCD$;

(2)连接 CG,首先求出 CG,证明 CG 是直径即可解决问题.

(1)▶证明:在正方形 $ABCD$ 中,$\angle ADC=90°$,$\therefore\angle CDF+\angle ADF=90°$.

$\because AF\perp DE$,$\therefore\angle AFD=90°$,$\therefore\angle DAF+\angle ADF=90°$,$\therefore\angle DAF=\angle CDF$.

$\because$ 四边形 $GFCD$ 是 $\odot O$ 的内接四边形,

$\therefore\angle FCD+\angle DGF=180°$.

$\because\angle FGA+\angle DGF=180°$,$\therefore\angle FGA=\angle FCD$,

$\therefore\triangle AFG\backsim\triangle DFC$.

(2)▶解:如图 6-1,连接 CG.

$\because\angle EAD=\angle AFD=90°$,$\angle EDA=\angle ADF$,$\therefore\triangle EDA\backsim\triangle ADF$,

$\therefore\dfrac{EA}{AF}=\dfrac{DA}{DF}$,即 $\dfrac{EA}{DA}=\dfrac{AF}{DF}$.

$\because\triangle AFG\backsim\triangle DFC$,$\therefore\dfrac{AG}{DC}=\dfrac{AF}{DF}$,$\therefore\dfrac{AG}{DC}=\dfrac{EA}{DA}$.

$\because$ 在正方形 $ABCD$ 中,$DA=DC$,

$\therefore AG=EA=1$,$\therefore DG=DA-AG=4-1=3$,

$\therefore CG=\sqrt{DG^2+DC^2}=5$. $\because\angle CDG=90°$,$\therefore CG$ 是 $\odot O$ 的直径,$\therefore\odot O$ 的半径为 $\dfrac{5}{2}$.

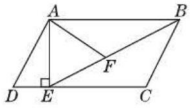
点方法

相似三角形的判定有多种方法,应根据题目的具体情况选择合适的方法. 关键抓住三点:(1)先找两组对应角相等;(2)若只能找到一组对应角相等,可考虑相等的角的两边是否对应成比例;(3)若找不到对应角相等,就判断三边是否对应成比例.

链接中考训练

(答案见 228 页)

1. [中考·毕节]如图,在 $\square ABCD$ 中过点 A 作 $AE\perp DC$,垂足为 E,连接 BE,F 为 BE 上一点,且 $\angle AFE=\angle D$. 求证:$\triangle ABF\backsim\triangle BEC$;



(第 1 题图)

荣德基

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

(2)添加辅助线,构造相似三角形

例2 [中考 · 朝阳]已知,在△ABC中,点D在AB上,点E是BC延长线上一点,且$AD=CE$,连接DE交AC于点F.

(1)猜想证明:如图6-2(1),在△ABC中,若$AB=BC$,学生们发现:$DF=EF$.下面是两位学生的证明思路:

思路1:过点D作$DG\parallel BC$,交AC于点G,可证△$DFG\cong$△EFC得出结论;

思路2:过点E作$EH\parallel AB$,交AC的延长线于点H,可证△$ADF\cong$△HEF得出结论;

…

请你参考上面的思路,证明$DF=EF$(只用一种方法证明即可).

(2)类比探究:在(1)的条件下[如图6-2(1)],过点D作$DM\perp AC$于点M,试探究线段AM,MF,FC之间满足的数量关系,并证明你的结论.

(3)延伸拓展:如图6-2(2),在△ABC中,若$AB=AC$,$\angle ABC=2\angle BAC$,$\frac{AB}{BC}=m$,请你用尺规作图在图6-2(2)中作出AD的垂直平分线交AC于点N(不写作法,只保留作图痕迹),并用含m的代数式直接表示$\frac{NF}{AC}$的值.

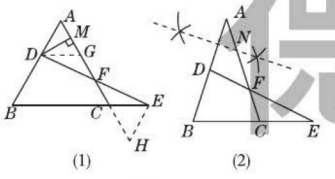


图6-2

导引:(1)根据思路1和思路2证明即可得出结论,给出一种方法即可;

(2)结论:$MF=AM+FC$.只要证明$FG=FC$,$AM=GM$即可解决问题;

(3)作出AD的垂直平分线交AC于点N,连接DN.作$DG\parallel CE$交AC于G.设$DG=a$,$BC=b$,则$AB=AC=mb$,$AD=AG=ma$,易得△$GDN\backsim$△GAD,则$DG^2=GN\cdot GA$,易知$DG=DN=AN=a$,可得$a^2=(ma-a)\cdot ma$,即$m^2a-ma-a=0$,由$DG\parallel CE$,易得$DG:EC=FG:FC=DG:DA=1:m$,由$CG=mb-ma$,推出$FG=\frac{1}{m+1}m(b-a)$,则$NF=GN+FG=ma-a+\frac{1}{m+1}m(b-a)=\frac{mb}{m+1}$,则$\frac{NF}{AC}=\frac{\frac{mb}{m+1}}{mb}=\frac{1}{m+1}$.

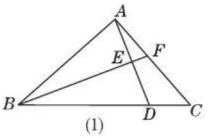
2. [中考 · 常德]如图,直角△ABC中,$\angle BAC=90°$,D在BC上,连接AD,作$BF\perp AD$分别交AD于E,AC于F.

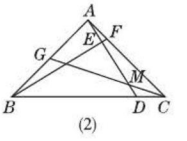
(1)如图(1),若$BD=BA$,求证:△$ABE\cong$△DBE;

(2)如图(2),若$BD=4DC$,取AB的中点G,连接CG交AD于M,求证:

①$GM=2MC$;

②$AC^2=AF\cdot AC$.





(第2题图)

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

(1)▶证明：思路1：如图6-2(1)，过点D作$DG\parallel BC$，交AC于点G.

$\because BA=BC$，$\therefore \angle A=\angle BCA$. $\because DG\parallel BC$，$\therefore \angle DGA=\angle BCA$，$\angle DGF=\angle ECF$，$\therefore \angle A=\angle DGA$，$\therefore DA=DG$.

$\because AD=CE$，$\therefore DG=CE$. $\because \angle DFG=\angle CFE$，$\therefore \triangle DFG\cong\triangle EFC$，$\therefore DF=EF$.

思路2：如图6-2(1)，过点E作$EH\parallel AB$，交AC的延长线于点H.

$\because BA=BC$，$\therefore \angle A=\angle BCA$. $\because EH\parallel AB$，$\therefore \angle A=\angle H$. 又$\angle ECH=\angle BCA$，$\therefore \angle H=\angle ECH$，$\therefore EC=EH$. $\because AD=CE$，$\therefore AD=EH$. $\because \angle AFD=\angle EFH$，$\therefore \triangle DFA\cong\triangle EFH$，$\therefore DF=EF$.

(2)▶解：结论：$MF=AM+FC$.

▶证明：由思路1可知：$DA=DG$，$\triangle DFG\cong\triangle EFC$，$\therefore FG=FC$.

$\because DM\perp AG$，$\therefore AM=GM$.

$\because MF=GM+FG$，$\therefore MF=AM+FC$.

(3)▶解：如图6-2(2).

$\dfrac{NF}{AC}=\dfrac{1}{m+1}$.

点方法

添加平行线构造相似是相似三角形中常见的作辅助线的方法.

专题二　根据三角形相似计算

(1)利用三角形相似求线段的长

例3　[中考·深圳]如图6-3，在$\mathrm{Rt}\triangle ABC$中，$\angle ABC=90°$，$AB=3$，$BC=4$，在$\mathrm{Rt}\triangle MPN$中，$\angle MPN=90°$，点P在AC上，PM交AB于点E，PN交BC于点F，当$PE=2PF$时，$AP=$_____.

导引：如图6-3，作$PQ\perp AB$于Q，$PR\perp BC$于R. 易得$\triangle QPE\backsim\triangle RPF$，则$\dfrac{PQ}{PR}=\dfrac{PE}{PF}=2$，可得$PQ=2PR=2BQ$，易得$AC=5$，$PQ\parallel BC$，则$AQ:QP:AP=AB:BC:AC=3:4:5$，设$PQ=4x$，则$AQ=3x$，$AP=5x$，$BQ=2x$，可得$2x+3x=3$，求出$x$即可解决问题.

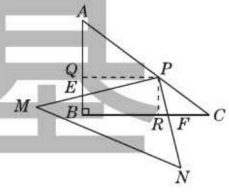


图6-3

如图6-3，作$PQ\perp AB$于Q，$PR\perp BC$于R. 则$PQ\parallel BC$.

$\because \angle PQB=\angle QBR=\angle BRP=90°$，

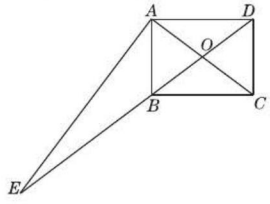
$\therefore$四边形$PQBR$是矩形，$\therefore \angle QPR=90°=\angle MPN$，

$\therefore \angle QPE=\angle RPF$，$\therefore \triangle QPE\backsim\triangle RPF$，$\therefore \dfrac{PQ}{PR}=\dfrac{PE}{PF}=2$，

反思总结

在探索三角形是否相似时，1. 寻找：缺什么找什么. 2. 构造：对于在题目中不能直接找到相似三角形的问题，我们还可以通过作辅助线的方法构造相似三角形，实现线段或角的转化将问题解决. 当然这种情况要有一定的想象力与比较扎实的基础. 3. 学会灵活转化：角的替换、比例式的替换、相等线段的替换，可以让我们更快捷地寻找证明相似的条件.

3. [中考·桂林]如图，在矩形$ABCD$中，对角线AC，BD交于点O，过点A作$EA\perp CA$交DB的延长线于点E，若$AB=3$，$BC=4$，则$\dfrac{AO}{AE}$的值为_____.



(第3题图)

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

$\therefore PQ=2PR=2BQ.$

在 $\mathrm{Rt}\triangle ABC$ 中，$AB=3$，$BC=4$，$\therefore AC=\sqrt{3^2+4^2}=5.$

$\because PQ/\!/BC$，$\therefore AQ:QP:AP=AB:BC:AC=3:4:5$，设 $PQ=4x$，则 $AQ=3x$，$AP=5x$，$BQ=2x$，

$\therefore 2x+3x=3$，$\therefore x=\frac{3}{5}$，$\therefore AP=5x=3.$

▶答案：3

点方法

解答这类问题的基本思路是通过作垂直构造相似三角形，进而根据相似三角形对应边成比例计算.

(2)利用三角形相似求面积

例4 [中考 · 内江]如图6-4，四边形 $ABCD$ 中，$AD/\!/BC$，CM 是 $\angle BCD$ 的平分线，且 $CM\perp AB$，M 为垂足，$AM=\frac{1}{3}AB$. 若四边形 $ABCD$ 的面积为 $\frac{15}{7}$，则四边形 $AMCD$ 的面积是_____.

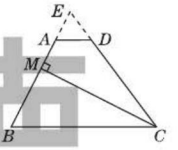


图6-4

导引：延长 BA、CD，交点为 E. 依据题意可知 $MB=ME$. 然后证明 $\triangle EAD\backsim\triangle EBC$. 依据相似三角形的性质可求得 $\triangle EAD$ 和 $\triangle EBC$ 的面积，最后依据 $S_{四边形AMCD}=\frac{1}{2}S_{\triangle EBC}-S_{\triangle EAD}$ 求解即可.

如图6-4，延长 BA、CD，交点为 E.

$\because CM$ 平分 $\angle BCD$，$CM\perp AB$，

$\therefore MB=ME.$

又 $\because AM=\frac{1}{3}AB$，$\therefore BM=2AM.$ $\therefore EM=2AM$，$\therefore AM=AE$，

$\therefore AE=\frac{1}{3}AB$，$\therefore AE=\frac{1}{4}BE.$

$\because AD/\!/BC$，$\therefore \triangle EAD\backsim\triangle EBC$，

$\therefore \frac{S_{\triangle EAD}}{S_{\triangle EBC}}=\frac{1}{16}$，$\therefore S_{四边形ABCD}=\frac{15}{16}S_{\triangle EBC}=\frac{15}{7}$，

$\therefore S_{\triangle EBC}=\frac{16}{7}$，$\therefore S_{\triangle EAD}=\frac{16}{7}\times\frac{1}{16}=\frac{1}{7}$，

$\therefore S_{四边形AMCD}=\frac{1}{2}S_{\triangle EBC}-S_{\triangle EAD}=\frac{8}{7}-\frac{1}{7}=1.$

▶答案：1

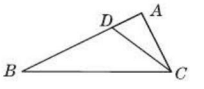
点方法

解答这类问题的基本思路是通过添加辅助线构造相似三角形，进而根据相似三角形面积比等于相似比的平方计算.

4. [中考 · 永州]如图，在 $\triangle ABC$ 中，点 D 是 AB 边上的一点，若 $\angle ACD=\angle B$，$AD=1$，$AC=2$，$\triangle ACD$ 的面积为1，则 $\triangle BCD$ 的面积为(　　)

A. 1　　B. 2

C. 3　　D. 4



(第4题图)

反思总结

解决这类问题时，需要转化到相似三角形中，用“相似三角形的对应边成比例，相似三角形的面积比等于相似比的平方”来解，没有相似三角形的，需作辅助线构造相似三角形.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

专题三 相似三角形综合题

(1)动点问题

例5 [中考·丽水]如图6-5,在矩形$ABCD$中,点E是AD上的一个动点,连接BE,作点A关于BE的对称点F,且点F落在矩形$ABCD$的内部,连接AF、BF、EF,过点F作$GF\perp AF$交AD于点G,设$\frac{AD}{AE}=n$.

(1)求证:$AE=GE$;

(2)当点F落在AC上时,用含n的代数式表示$\frac{AD}{AB}$的值;

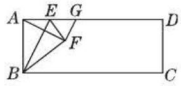


图6-5

(3)若$AD=4AB$,且以点F、C、G为顶点的三角形是直角三角形,求n的值.

导引:(1)直接利用等角的余角相等得出$\angle FGA=\angle EFG$,即可得出$EG=EF$,等量代换即可;

(2)先判断出$\triangle ABE\backsim\triangle DAC$,得出比例式用$AB=DC$代换化简即可得出结论;

(3)先判断出只有$\angle CFG=90°$或$\angle CGF=90°$,分两种情况建立方程求解即可.

(1)▶证明:设$AE=a$,则$AD=na$,由对称知,$AE=FE$,$\therefore\angle EAF=\angle EFA$.$\because GF\perp AF$,

$\therefore\angle EAF+\angle FGA=\angle EFA+\angle EFG=90°$,$\therefore\angle FGA=\angle EFG$,$\therefore GE=EF$,$\therefore AE=GE$.

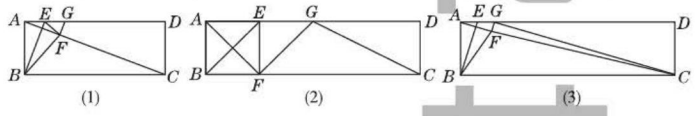


图6-6

(2)▶解:如图6-6(1),当点F落在AC上时,由对称知,$BE\perp AF$,

$\therefore\angle ABE+\angle BAC=90°$.$\because\angle DAC+\angle BAC=90°$,$\therefore\angle ABE=\angle DAC$.$\because\angle BAE=\angle D=90°$,$\therefore\triangle ABE\backsim\triangle DAC$,$\therefore\frac{AB}{DA}=\frac{AE}{DC}$.

$\because AB=DC$,$\therefore AB^2=AD\cdot AE=na^2$.$\because AB>0$,$\therefore AB=\sqrt{n}a$,

$\therefore\frac{AD}{AB}=\frac{na}{\sqrt{n}a}=\sqrt{n}$.

(3)▶解:若$AD=4AB$,则$AB=\frac{n}{4}a$,如图6-6(2),当点F落在线段BC上时,易知$EF=AE=AB=a$,此时$\frac{n}{4}a=a$,$\therefore n=4$,$\therefore$当点F落在矩形内部时,$n>4$.$\because$点F落在矩形内部,点G在AD上,

5. [中考·衢州]如图(1),在直角坐标系xOy中,直线l:$y=kx+b$交x轴,y轴于点E,F,点B的坐标是$(2,2)$,过点B分别作x轴、y轴的垂线,垂足为A、C,点D是线段CO上的动点,以BD为对称轴,作与$\triangle BCD$成轴对称的$\triangle BC'D$.

(1)当$\angle CBD=15°$时,求点C'的坐标.

(2)当图(1)中的直线l经过点A,且$k=-\frac{\sqrt{3}}{3}$时(如图(2)),求点D由C到O的运动过程中,线段BC'扫过的图形与$\triangle OAF$重叠部分的面积.

(3)当图(1)中的直线l经过点D,C'时(如图(3)),以DE为对称轴,作与$\triangle DOE$成轴对称的$\triangle DO'E$,连接$O'C$,$O'O$,问是否存在点D,使得$\triangle DO'E$与$\triangle CO'O$相似?若存在,求出k、b的值;若不存在,请说明理由.

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

$\therefore \angle FCG < \angle BCD, \therefore \angle FCG < 90°$.

①当 $\angle CFG = 90°$ 时，则点 F 落在 AC 上，由(2)得，$\frac{AD}{AB} = \sqrt{n}$，

$\therefore n = 16$.

②当 $\angle CGF = 90°$ 时，如图 6-6(3)，则 $\angle CGD + \angle AGF = 90°, \because \angle FAG + \angle AGF = 90°, \therefore \angle CGD = \angle FAG = \angle ABE. \because \angle BAE = \angle D = 90°$，

$\therefore \triangle ABE \backsim \triangle DGC, \therefore \frac{AB}{DG} = \frac{AE}{DC}, \therefore AB \cdot DC = DG \cdot AE. \because DG = AD - AE - EG = na - 2a = (n-2)a, \therefore \left(\frac{n}{4}a\right)^2 = (n-2)a \cdot a$，

$\therefore n = 8 + 4\sqrt{2}$ 或 $n = 8 - 4\sqrt{2}$（由于 $n > 4$，所以舍去），$\therefore$ 当 $n = 16$ 或 $n = 8 + 4\sqrt{2}$ 时，以点 F, C, G 为顶点的三角形是直角三角形.

点方法

解动点问题，常化动为静，借助相似形，研究它“静止时”所得的比例关系来解. 存在性问题的解题模式是假设存在→推理论证→得出结论. 若能导出合理的结果，就得出“存在”的判断，导出矛盾的结果，就得出“不存在”的判断. 注意情况不明时还需分类讨论.

(2)存在性问题

例 6 [中考 · 海南]抛物线 $y = ax^2 + bx + 3$ 经过点 $A(1,0)$ 和点 $B(5,0)$.

(1)求该抛物线对应的函数表达式；

(2)该抛物线与直线 $y = \frac{3}{5}x + 3$ 相交于 C、D 两点，点 P 是抛物线上的动点且位于 x 轴下方，直线 $PM \parallel y$ 轴，分别与 x 轴和直线 CD 交于点 M、N.

①连接 PC、PD，如图 6-7(1)，在点 P 运动过程中，$\triangle PCD$ 的面积是否存在最大值？若存在，求出这个最大值；若不存在，说明理由；

②连接 PB，过点 C 作 $CQ \perp PM$，垂足为点 Q，如图 6-7(2)，是否存在点 P，使得 $\triangle CNQ$ 与 $\triangle PBM$ 相似？若存在，求出满足条件的点 P 的坐标；若不存在，说明理由.

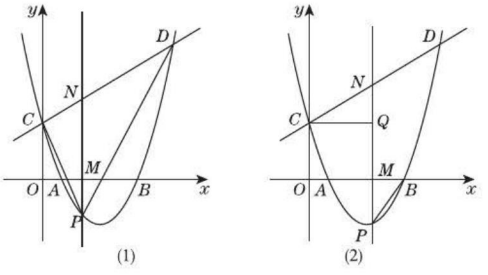
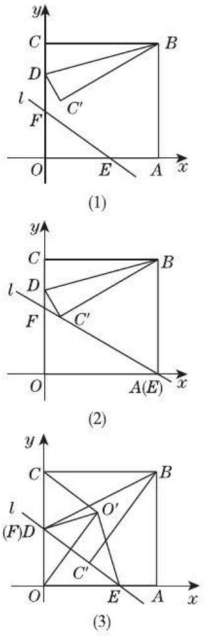


图 6-7



（第 5 题图）

6. [中考 · 淄博]如图(1)，经过原点 O 的抛物线 $y = ax^2 + bx (a \neq 0)$ 与 x 轴交于另一点 $A\left(\frac{3}{2}, 0\right)$，在第一象限内与直线 $y = x$ 交于点 $B(2,t)$.

(1)求这条抛物线对应的函数表达式；

(2)在第四象限内的抛物线上有一点 C，满足以 B, O, C 为顶点的三角形的面积为 2，求点 C 的坐标；

(3)如图(2)，若点 M 在这条抛物线上，且 $\angle MBO = \angle ABO$，在(2)的条件下，是否存在点 P，使得 $\triangle POC \backsim \triangle MOB$？

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

导引：(1) 由 A、B 两点的坐标，利用待定系数法可求得抛物线对应的函数表达式；

(2)①设出 P 点坐标，则可表示出 M、N 的坐标，联立直线与抛物线对应的函数表达式可求得 C、D 的坐标，过 C、D 作 PN 的垂线，可用 t 表示出 $\triangle PCD$ 的面积，利用二次函数的性质可求得其最大值；

②当 $\triangle CNQ$ 与 $\triangle PBM$ 相似时有 $\frac{NQ}{CQ}=\frac{PM}{BM}$ 或 $\frac{NQ}{CQ}=\frac{BM}{PM}$ 两种情况，利用 P 点坐标，可分别表示出各线段的长，列出方程，进而可求得 P 点坐标.

▶解：(1)∵ 抛物线 $y=ax^2+bx+3$ 经过点 $A(1,0)$ 和点 $B(5,0)$，

$$\therefore \begin{cases} a+b+3=0, \\ 25a+5b+3=0, \end{cases} \text{解得} \begin{cases} a=\frac{3}{5}, \\ b=-\frac{18}{5}, \end{cases}$$

∴ 该抛物线对应的函数表达式为 $y=\frac{3}{5}x^2-\frac{18}{5}x+3$.

(2)①∵ 点 P 是抛物线上的动点且位于 x 轴下方，

∴ 可设 $P\left(t,\frac{3}{5}t^2-\frac{18}{5}t+3\right)(1<t<5)$.

∵ 直线 $PM\parallel y$ 轴，分别与 x 轴和直线 CD 交于点 M、N，

∴ $M(t,0)$，$N\left(t,\frac{3}{5}t+3\right)$，

$$\therefore PN=\frac{3}{5}t+3-\left(\frac{3}{5}t^2-\frac{18}{5}t+3\right)=-\frac{3}{5}\left(t-\frac{7}{2}\right)^2+\frac{147}{20}.$$

联立直线 CD 与抛物线对应的函数表达式可得 $\begin{cases} y=\frac{3}{5}x+3, \\ y=\frac{3}{5}x^2-\frac{18}{5}x+3, \end{cases}$

$$\text{解得} \begin{cases} x=0, \\ y=3 \end{cases} \text{或} \begin{cases} x=7, \\ y=\frac{36}{5}, \end{cases}$$

∴ $C(0,3)$，$D\left(7,\frac{36}{5}\right)$，分别过 C、D 作直线 PN 的垂线，垂足分别为 E、F，如图 6-8，

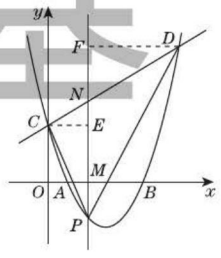
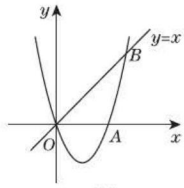


图 6-8

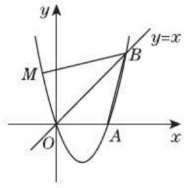
则 $CE=t$，$DF=7-t$，

$$\therefore S_{\triangle PCD}=S_{\triangle PCN}+S_{\triangle PDN}=\frac{1}{2}PN\cdot CE+\frac{1}{2}PN\cdot DF=\frac{7}{2}PN=\frac{7}{2}\left[-\frac{3}{5}\left(t-\frac{7}{2}\right)^2+\frac{147}{20}\right]=-\frac{21}{10}\left(t-\frac{7}{2}\right)^2+\frac{1\,029}{40},$$

若存在，求出点 P 的坐标；若不存在，请说明理由.



(1)



(2)

（第 6 题图）

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

∴ 当 $t=\frac{7}{2}$ 时，$\triangle PCD$ 的面积有最大值，最大值为 $\frac{1\,029}{40}$.

②存在.

∵ $\angle CQN=\angle PMB=90°$，∴ 当 $\triangle CNQ$ 与 $\triangle PBM$ 相似时，有 $\frac{NQ}{CQ}=\frac{PM}{BM}$ 或 $\frac{NQ}{CQ}=\frac{BM}{PM}$ 两种情况.

∵ $CQ\perp PM$，垂足为 Q，∴ $Q(t,3)$. 又 $C(0,3)$，$N\left(t,\frac{3}{5}t+3\right)$，

∴ $CQ=t$，$NQ=\frac{3}{5}t+3-3=\frac{3}{5}t$，∴ $\frac{CQ}{NQ}=\frac{5}{3}$.

∵ $P\left(t,\frac{3}{5}t^2-\frac{18}{5}t+3\right)$，$M(t,0)$，$B(5,0)$，

∴ $BM=5-t$，$PM=0-\left(\frac{3}{5}t^2-\frac{18}{5}t+3\right)=-\frac{3}{5}t^2+\frac{18}{5}t-3$.

当 $\frac{NQ}{CQ}=\frac{PM}{BM}$ 时，则 $PM=\frac{3}{5}BM$，即 $-\frac{3}{5}t^2+\frac{18}{5}t-3=\frac{3}{5}(5-t)$，解得 $t=2$ 或 $t=5$（舍去），此时 $P\left(2,-\frac{9}{5}\right)$；

当 $\frac{NQ}{CQ}=\frac{BM}{PM}$ 时，则 $BM=\frac{3}{5}PM$，即 $5-t=\frac{3}{5}\left(-\frac{3}{5}t^2+\frac{18}{5}t-3\right)$，解得 $t=\frac{34}{9}$ 或 $t=5$（舍去），此时 $P\left(\frac{34}{9},-\frac{55}{27}\right)$；

综上可知，存在满足条件的点 P，其坐标为 $\left(2,-\frac{9}{5}\right)$ 或 $\left(\frac{34}{9},-\frac{55}{27}\right)$.

点方法

本题为二次函数的综合应用，涉及待定系数法、函数图像的交点、二次函数的性质、相似三角形的判定和性质、方程思想及分类讨论思想等知识. 在（1）中注意待定系数法的应用，在（2）①中用 P 点坐标表示出 $\triangle PCD$ 的面积是解题的关键，在（2）②中利用相似三角形的性质确定出相应线段的比是解题的关键. 本题考查知识点较多，综合性较强，难度较大.

思想方法专题

专题四 一线三等角

专题解读>> 所谓一线三等角通俗地讲，就是一条直线上有三个相等的角，这样的图形中一般就会存在相似的三角形. 在 $\triangle ABC$ 和 $\triangle CDE$ 中，$\angle B=\angle D=\angle ACE=\alpha$，易证 $\angle A=\angle ECD$，所以 $\triangle ABC\backsim\triangle CDE$. 按 α 的大小可分为三种类型：

链接中考训练 (答案见 230 页)

7. $\triangle ABC$ 和 $\triangle DEF$ 是两个全等的等腰直角三角形，$\angle BAC=\angle EDF=90°$，$\triangle EDF$ 的顶点 E 与

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

1. 锐角型，如图6-9，$\triangle ABC\backsim\triangle CDE$.

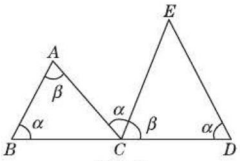


图6-9

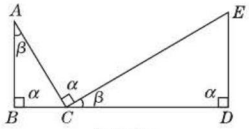


图6-10

2. 直角型，如图6-10，$\triangle ABC\backsim\triangle CDE$.

3. 钝角型，如图6-11，$\triangle ABC\backsim\triangle CDE$.

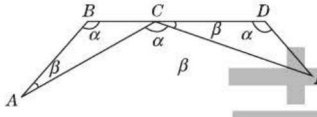


图6-11

例7 ［中考·东营］如图6-12，在等腰三角形ABC中，$\angle BAC=120°$，$AB=AC=2$，点D是BC边上的一个动点（不与B、C重合），在AC上取一点E，使$\angle ADE=30°$.

（1）求证：$\triangle ABD\backsim\triangle DCE$；

（2）设$BD=x$，$AE=y$，求y关于x的函数关系式并写出自变量x的取值范围；

（3）当$\triangle ADE$是等腰三角形时，求AE的长.

导引：（1）根据两角分别相等的两个三角形相似证明$\triangle ABD\backsim\triangle DCE$；

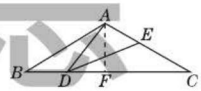


图6-12

（2）如图6-12，过点A作$AF\perp BC$于F，根据直角三角形30°角的性质求AF的长，根据勾股定理求BF的长，则可得BC的长，根据（1）中的相似列比例式可得函数关系式，并确定自变量的取值范围；

（3）分三种情况进行讨论：

①当$AD=DE$时，由（1）可知：此时$\triangle ABD\backsim\triangle DCE$，则$AB=CD$，即$2=2\sqrt{3}-x$；

②当$AE=ED$时，可得$ED=\frac{1}{2}EC$，即$y=\frac{1}{2}(2-y)$；

③当$AD=AE$时，$\angle AED=\angle EDA=30°$，则$\angle EAD=120°$，此时点$D$与点$B$重合，不符合题意，此情况不存在.

（1）▶证明：∵ $\triangle ABC$是等腰三角形，且$\angle BAC=120°$，

∴ $\angle ABD=\angle ACB=30°$，∴ $\angle ABD=\angle ADE=30°$.

∵ $\angle ADC=\angle ADE+\angle EDC=\angle ABD+\angle DAB$，

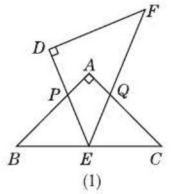
∴ $\angle EDC=\angle DAB$，∴ $\triangle ABD\backsim\triangle DCE$.

$\triangle ABC$的斜边BC的中点重合，将$\triangle DEF$绕点E旋转，旋转过程中，线段DE与线段AB相交于点P，线段EF与射线CA相交于点Q.

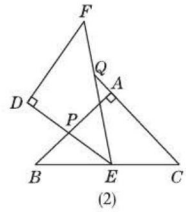
（1）如图（1），当点Q在线段AC上，且$AP=AQ$时，求证：$\triangle BPE\cong\triangle CQE$；

（2）如图（2），当点Q在线段CA的延长线上时，求证：$\triangle BPE\backsim\triangle CEQ$；

（3）在（2）的条件下，$BP=2$，$CQ=9$，求BC的长.



(1)



(2)

（第7题图）

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

(2)▶解:如图 6-12,过 A 作 $AF\perp BC$ 于 F,$\therefore\angle AFB=90°$,

$\because AB=2,\angle ABF=30°,\therefore AF=\frac{1}{2}AB=1$,

$\therefore BF=\sqrt{3},\therefore BC=2BF=2\sqrt{3}$,

则 $DC=2\sqrt{3}-x,EC=2-y$.

$\because\triangle ABD\backsim\triangle DCE,\therefore\frac{AB}{BD}=\frac{DC}{CE}$,

$\therefore\frac{2}{x}=\frac{2\sqrt{3}-x}{2-y}$,化简得:$y=\frac{1}{2}x^2-\sqrt{3}x+2(0<x<2\sqrt{3})$.

(3)▶解:当 $AD=DE$ 时,由(1)可知:此时$\triangle ABD\backsim\triangle DCE$,

则 $AB=CD$,即 $2=2\sqrt{3}-x$,

$\therefore x=2\sqrt{3}-2$. 将 $x=2\sqrt{3}-2$ 代入 $y=\frac{1}{2}x^2-\sqrt{3}x+2$,

解得:$y=4-2\sqrt{3}$,即 $AE=4-2\sqrt{3}$.

当 $AE=ED$ 时,$\angle EAD=\angle EDA=30°,\therefore\angle AED=120°$,

$\therefore\angle DEC=60°,\therefore\angle EDC=90°$,

则 $ED=\frac{1}{2}EC$,即 $y=\frac{1}{2}(2-y)$,

解得:$y=\frac{2}{3}$,即 $AE=\frac{2}{3}$.

当 $AD=AE$ 时,

$\angle AED=\angle EDA=30°,\therefore\angle EAD=120°$,

此时点 D 与点 B 重合,不符合题意,此情况不存在.

$\therefore$ 当$\triangle ADE$ 是等腰三角形时,$AE=4-2\sqrt{3}$或$\frac{2}{3}$.

基德莱

我的错题笔记

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

第7章

锐角三角函数

揭秘三角形的边角关系

数学点拨



你将学到的核心考点

- 三角函数的定义 □
- 特殊角的三角函数 □
- 解直角三角形 □
- 用锐角三角函数解决实际问题 □

我们为你提供的核心方法

- 方程思想 □
- 转化思想 □
- 分类讨论思想 □

掌握这些考点和方法后，记得回来给自己打✓哦！

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

7.1 正 切

1 点知识 · 拨考向 · 诊误区

知识点 1 正切的定义

点知识

在 Rt△ABC 中，$\angle C=90°$，锐角 A 的对边与邻边之比叫做 $\angle A$ 的正切，记作 tan$A$，如图 7.1-1 所示，$\tan A=\dfrac{\angle A\text{ 的对边}}{\angle A\text{ 的邻边}}=\dfrac{a}{b}$.

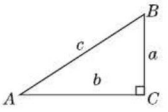


图 7.1-1

要点精析

1. 正切值的大小只与锐角的大小有关，而与所在的直角三角形的边长的大小无关.
2. tan$A$ 表示 $\angle A$ 的正切，习惯上省去表示角的符号“∠”，但当表示用三个大写字母表示一个角的正切时，角的符号“∠”不能省略，如 tan∠ABC.

易错警示

tan$A$ 是一个完整的符号，不能写成 tan · A 或者看成 tan 与 A 的积，离开 A 的 tan 没有任何意义，只有合起来才表示 $\angle A$ 的正切.

拨考向

典例剖析

考查角度 1 根据正切的定义求正切值

例 1 如图 7.1-2，在△ABC 中，$AC=4$，$AB=5$，$\angle C=90°$，求 tan$A$ 与 tan$B$ 的值.

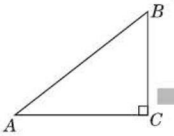


图 7.1-2

导引：要求 tan$A$ 与 tan$B$ 的值，条件中缺少 BC 的长，结合 $AC=4$，$AB=5$，根据勾股定理可求 BC 的长，问题得解.

▶解：在 Rt△ABC 中，

∵ $AC=4$，$AB=5$，

∴ $BC=\sqrt{5^2-4^2}=3$，

∴ $\tan A=\dfrac{BC}{AC}=\dfrac{3}{4}$，$\tan B=\dfrac{AC}{BC}=\dfrac{4}{3}$.

点方法

正切反映了在直角三角形中，一个锐角的对边与邻边的数量关系，这在求解有关线段长度的时候，往往能起到关键的作用.

举一反三训练

☞(答案见 230 页)

1. 在 Rt△ABC 中，$\angle C=90°$，a、b、c 分别是 $\angle A$、$\angle B$、$\angle C$ 的对边，若 $c=4a$，则 tan$A$ = _____.

荣德基

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

考查角度2　网格中正切值的计算

例2 在正方形网格中(每个小正方形的边长为1),$\triangle ABC$如图7.1-3所示放置在网格中,则$\tan\angle BAC=$_____.

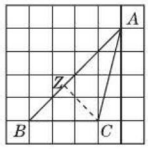


图7.1-3

导引:过C作$CZ\perp AB$于Z,则$\angle CZA=90°$,根据勾股定理求出AB、AC的长,根据三角形面积公式求出CZ的长,根据勾股定理求出AZ的长,再根据锐角三角函数的定义求解即可.

如图7.1-3,过C作$CZ\perp AB$于Z,则$\angle CZA=90°$,

由勾股定理得:$AB=\sqrt{4^2+4^2}=4\sqrt{2}$,$AC=\sqrt{4^2+1^2}=\sqrt{17}$,

在$\triangle ABC$中,$BC=3$,$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}\times3\times4=6$,

$\because S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}AB\times CZ$,$\therefore 6=\frac{1}{2}\times4\sqrt{2}\times CZ$,$\therefore CZ=\frac{3\sqrt{2}}{2}$,

由勾股定理得:$AZ=\sqrt{AC^2-CZ^2}=\sqrt{(\sqrt{17})^2-\left(\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)^2}=\frac{5\sqrt{2}}{2}$,

$\therefore \tan\angle BAC=\frac{CZ}{AZ}=\frac{\frac{3\sqrt{2}}{2}}{\frac{5\sqrt{2}}{2}}=\frac{3}{5}$.

▶答案:$\frac{3}{5}$

点方法

网格中正切值的计算基本思路是根据网格的特征找出所求角所在的直角三角形,然后直接根据正切的定义计算.

考查角度3　根据正切的定义求线段的长

例3 Rt$\triangle ABC$中,$\angle C=90°$,$BC=5$,$\tan A=\frac{5}{12}$,则$AC=$_____.

导引:根据锐角三角函数的定义可得$\tan A=\frac{BC}{AC}$,再把$BC=5$,$\tan A=\frac{5}{12}$代入即可算出AC的值.

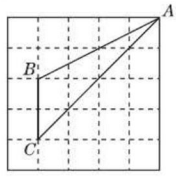
$\because \angle C=90°$,$\therefore \tan A=\frac{BC}{AC}$,

$\because BC=5$,$\tan A=\frac{5}{12}$,

$\therefore \frac{5}{AC}=\frac{5}{12}$,解得:$AC=12$.

▶答案:12

2. 如图,在5×5的正方形网格中(每个小正方形的边长为1),$\triangle ABC$的三个顶点A,B,C均在格点上,则$\tan\angle BAC$的值为_____.



(第2题图)

3. 在Rt$\triangle ABC$中,$\angle C=90°$,$\tan B=\frac{\sqrt{3}}{2}$,$BC=2\sqrt{3}$,则$AC$等于(　　)

A. $4\sqrt{5}$　　B. 4

C. 3　　D. 6

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

知识点 2 正切的性质

点知识

锐角的正切值随着锐角的增大而增大.

要点精析

1. 若锐角 $\alpha>\beta$，则 $\tan\alpha>\tan\beta$；若锐角 α,β 满足 $\tan\alpha<\tan\beta$，则 $\alpha<\beta$.
2. 这一性质是针对“锐角”而言，不是锐角的情况将在高中阶段学习.

易错警示

注意不是角度增大几倍，正切值就增大几倍.

考查角度　根据正切的性质比较大小

例 4 用“<”号连接下列各式：tan 15°、tan 30°、tan 60°、tan 75°.

导引：先比较角度的大小，再利用锐角的正切值随着角度的变化规律比较各式的值的大小.

▶解：因为 $15°<30°<60°<75°$，

所以 $\tan 15°<\tan 30°<\tan 60°<\tan 75°$.

4. 比较大小：tan40°_____(填“>”或“<”)tan70°.

知识点 3 用计算器计算锐角的正切值

点知识

利用计算器可求锐角的正切值，先选择计算器上的 ON、tan 键，再依次按数字键、°′″、)、= 键即可.

要点精析

1. 求以度、分、秒为单位的锐角的正切值，在计算器的面板上先按 tan 键，再按度的数字键，再按 °′″ 键，按分的数字键，再按 °′″ 键，按秒的数字键，再按 °′″，最后依次按)、= 键；
2. 不同的计算器操作程序不同，按键规定一般也不一样.

易错警示

1. 注意不同类型的按键顺序；
2. 注意精确的数位要求.

考查角度　用计算器计算锐角的正切值

例 5 用计算器求下列各值(精确到 0.01)：

(1) tan 73°；(2) tan 39°39′39″.

▶解：(1) 依次按键：tan 7 3) =，

显示结果为 3.270 852 618，即 $\tan 73°\approx 3.27$.

(2) 依次按键：tan 3 9 °′″ 3 9 °′″ 3 9 °′″) =，

显示结果为 0.829 061 894，即 $\tan 39°39′39″\approx 0.83$.

点方法

注意按键顺序，结果按要求取近似值. 不同的计算器按键顺序可能不同，要先读懂使用说明.

5. [动手操作题] 利用计算器求下列各值(精确到 0.01).

(1) tan 25°；

(2) tan 80°；

(3) tan 30° + tan 60°；

(4) tan 55°55′30″.

荣德基

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

Ⅱ 点方法·拨技巧·探规律

典例剖析

拔尖角度1 构造直角三角形求正切(易错点、拓展点)

例6 如图7.1-4,在$\triangle ABC$中,$AB=15$,$BC=14$,$\triangle ABC$的面积为84,求$\tan C$的值.

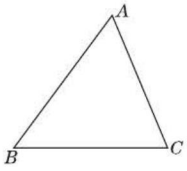


图7.1-4

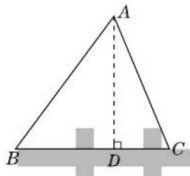


图7.1-5

导引:注意到$\angle C$不在直角三角形中,所以考虑构造一个直角三角形,将$\angle C$置于其中.

▶解:如图7.1-5,过点A作$AD\perp BC$,垂足为D.

因为$\triangle ABC$的面积为84,$BC=14$,

所以$\frac{1}{2}\times 14\times AD=84$,解得$AD=12$.

又因为在$\mathrm{Rt}\triangle ABD$中,$AB=15$,

所以由勾股定理得$BD=\sqrt{AB^2-AD^2}=\sqrt{15^2-12^2}=9$,

所以$DC=BC-BD=14-9=5$,

所以$\tan C=\frac{AD}{DC}=\frac{12}{5}$.

点方法

图形中缺少直角三角形,在不能直接应用正切的定义的情况下,一般需要构造直角三角形,将相关的量放在直角三角形中研究.

拔尖角度2 分类讨论求正切(易错点、拓展点)

例7 已知方程$x^2-4x+3=0$的两个根分别是$\mathrm{Rt}\triangle ABC$的两条边长,$\triangle ABC$中最小的角为$\angle A$,求$\tan A$的值.

导引:先求出方程的两个根是$x_1=1$,$x_2=3$,再根据3是直角边长和斜边长两种情况讨论.

▶解:解方程$x^2-4x+3=0$,得$x_1=1$,$x_2=3$,

①当3是直角边长时,∵ $\triangle ABC$中最小的角为$\angle A$,

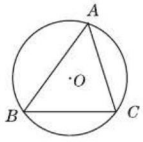
∴ $\tan A=\frac{1}{3}$;

②当3是斜边长时,根据勾股定理,得$\angle A$的邻边长$=\sqrt{3^2-1^2}=2\sqrt{2}$,

举一反三训练

(答案见231页)

6. 如图,$\triangle ABC$内接于半径为5的$\odot O$,圆心O到弦BC的距离等于3,则$\angle A$的正切值等于(　　)



(第6题图)

A. $\frac{3}{5}$　　B. $\frac{4}{5}$

C. $\frac{3}{4}$　　D. $\frac{4}{3}$

7. 若等腰三角形两边分别为4和6,求底角的正切值.

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

$\therefore \tan A=\frac{1}{2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{4}$. $\therefore \tan A$ 的值为 $\frac{1}{3}$ 或 $\frac{\sqrt{2}}{4}$.

点方法

本题运用**分类讨论思想**，解此题应注意因为 3 是直角边长还是斜边长不明确，所以要分情况讨论.

拔尖角度 3　等角转化求正切(易错点)

例 8 如图 7.1-6，从 $\odot O$ 外一点 P 引直线 PBC，过 P 作直线 PM，且 $\angle OBC=\angle CPM$. PM 与 $\odot O$ 切于 A 点，且 $PA=2OB$，求 $\tan P$ 的值.

导引：连接 OA，OC，OA 交 PC 于 D，根据已知和等腰三角形的性质得出 $\angle OCD=\angle CPM$，证得 $OC/\!/PM$，根据切线的性质得出 $OA\perp PA$，进而得到 $AO\perp OC$，根据 $PA=2OB$ 和平行线分线段成比例定理得出 $\frac{OD}{AD}=\frac{OC}{PA}=\frac{OB}{PA}=\frac{1}{2}$，即可求得 $\tan P$ 的值.

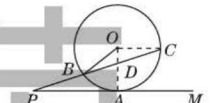


图 7.1-6

▶解：如图 7.1-6，连接 OA，OC，OA 交 PC 于 D，$\because OB=OC$，$\therefore \angle OBC=\angle OCD$. $\because \angle OBC=\angle CPM$，$\therefore \angle OCD=\angle CPM$，$\therefore OC/\!/PM$. $\because PM$ 与 $\odot O$ 切于 A 点，$\therefore OA\perp PA$，$\therefore AO\perp OC$.

$\because OC/\!/PA$，$\therefore \frac{OD}{AD}=\frac{OC}{PA}$.

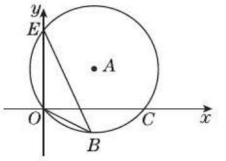
$\because PA=2OB$，$OB=OC$，$\therefore \frac{OD}{AD}=\frac{1}{2}$，$\therefore \frac{OD}{OA}=\frac{1}{3}$，$\therefore \frac{OD}{OC}=\frac{1}{3}$，

$\therefore \tan\angle OCD=\frac{OD}{OC}=\frac{1}{3}$. $\because \angle OCB=\angle CPM$，$\therefore \tan P=\frac{1}{3}$.

点方法

这类问题中所求角的正切直接计算有困难，可考虑等角转化.

8. 如图，点 $E(0,4)$，$O(0,0)$，$C(5,0)$ 在 $\odot A$ 上，BE 是 $\odot A$ 的一条弦，则 $\tan\angle OBE=$ _____.



(第 8 题图)

III 练基础 · 练方法 · 练技巧 (答案见 231 页)

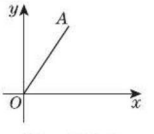
基础巩固练

1. [中考 · 云南] 在 $\mathrm{Rt}\triangle ABC$ 中，$\angle C=90°$，$AC=1$，$BC=3$，则 $\angle A$ 的正切值为(　　)

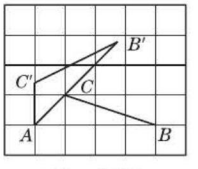
A. 3　　B. $\frac{1}{3}$　　C. $\frac{\sqrt{10}}{10}$　　D. $\frac{3\sqrt{10}}{10}$

2. 如图，A 点的坐标为 $(2,3)$，则 $\tan\angle AOy$ 的值是(　　)

A. $\frac{2}{3}$　　B. $\frac{3}{2}$　　C. $\frac{2\sqrt{13}}{13}$　　D. $\frac{3\sqrt{13}}{13}$



(第 2 题图)



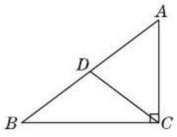
(第 3 题图)

3. 如图，A，B，C 三点在正方形网格线的交点处，若将 $\triangle ACB$ 绕着点 A 逆时针旋转得到 $\triangle AC'B'$，则 $\tan B'$ 的值为(　　)

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

A. $\frac{1}{2}$　B. $\frac{1}{3}$　C. $\frac{1}{4}$　D. $\frac{\sqrt{2}}{4}$

4. 如图，在 Rt△ABC 中，CD 是斜边 AB 上的中线，已知 $CD=5$，$AC=6$，则 $\tan\angle DCB$ 的值是(　　)



(第4题图)

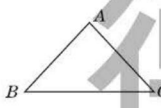
A. $\frac{4}{5}$　B. $\frac{3}{5}$　C. $\frac{4}{3}$　D. $\frac{3}{4}$

5. 在 Rt△ABC 中，$\angle C=90°$，$AC=2BC$，则 $\tan A=$ _____.

6. 化简 $\sqrt{(\tan 30°-\tan 31°)^2}=$ _____.

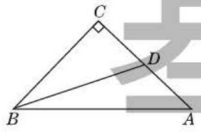
7. 计算：$\tan 54°53'40''\approx$ _____.(精确到0.001)

8. 如图，在△ABC 中，$AB=AC=3$，$BC=4$，求 $\tan B$ 的值.



(第8题图)

9. 如图，在 Rt△ABC 中，$\angle C=90°$，$BC=AC$，D 为 AC 的中点，求 $\tan\angle ABD$ 的值.

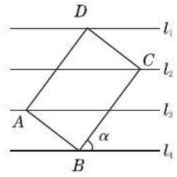


(第9题图)

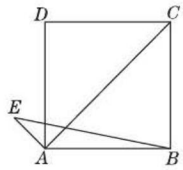
能力提升练

10. 已知直线 $l_1\parallel l_2\parallel l_3\parallel l_4$，相邻的两条平行直线间的距离均为 h，矩形 $ABCD$ 的四个顶点分别在这四条直线上，放置方式如图所示，$AB=4$，$BC=6$，则 $\tan\alpha$ 的值为(　　)

A. $\frac{2}{3}$　B. $\frac{3}{4}$　C. $\frac{4}{3}$　D. $\frac{3}{2}$



(第10题图)



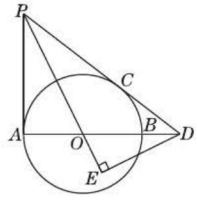
(第11题图)

11. 如图，正方形 $ABCD$ 的边长为 $2\sqrt{2}$，过点 A 作 $AE\perp AC$，$AE=1$，连接 BE，则 $\tan E=$ _____.

12. 如图，AB 是⊙O 的直径，PA，PC 分别与⊙O 相切于点 A，C，延长 PC 交 AB 的延长线于点 D，$DE\perp PO$，交 PO 的延长线于点 E.

(1)求证：$\angle EPD=\angle EDO$；

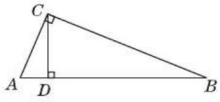
(2)若 $PC=6$，$\tan\angle PDA=\frac{3}{4}$，求 OE 的长.



(第12题图)

思维拓展练

13. 如图，在△ABC 中，$\angle ACB=90°$，$CD\perp AB$ 于 D，$CD=1$，已知 AD，BD 的长是关于 x 的方程 $x^2+px+q=0$ 的两根，且 $\tan A-\tan B=2$，求 p、q 的值.



(第13题图)

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

7.2 正弦、余弦

1 点知识 · 拨考向 · 诊误区

知识点1 正弦、余弦(重点)

点知识

1. **正弦的定义**:如图7.2-1,在Rt△ABC中,$\angle C=90°$.我们把$\angle A$的对边a与斜边c的比叫做$\angle A$的正弦,记作$\sin A$,即$\sin A=\frac{\angle A\text{的对边}}{\text{斜边}}=\frac{a}{c}$.

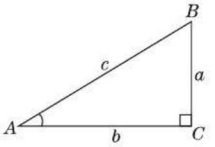


图7.2-1

2. **余弦的定义**:如图7.2-1,在Rt△ABC中,$\angle C=90°$,我们把$\angle A$的邻边b与斜边c的比叫做$\angle A$的余弦,记作$\cos A$,即$\cos A=\frac{\angle A\text{的邻边}}{\text{斜边}}=\frac{b}{c}$.

要点精析

1. 锐角的正弦、余弦与正切类似,是在一个直角三角形中定义的,其值的大小只与锐角的大小有关,而与所在的直角三角形的边的长短无关.
2. 解决这类问题的思路是依据条件确定三角形的三边的长,然后根据正弦、余弦的定义进行求值.要注意角所对应的对边、邻边是相对的,不能混淆.

易错警示

在表示锐角的正弦、余弦时,$\sin A$、$\cos A$是一个完整的符号,表示$\angle A$的正弦、余弦,习惯上省去表示角的符号"∠",但当用三个大写字母表示一个角的正弦、余弦时,角的符号"∠"不能省略,如$\sin\angle ABC$.

拨考向

典例剖析

考查角度1 求一个角的正弦值、余弦值

例1 求图7.2-2中各直角三角形锐角的正弦值、余弦值.

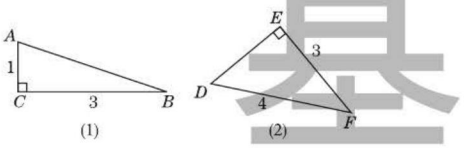


图7.2-2

导引:首先利用勾股定理得出AB以及DE的长,进而利用锐角三角函数关系得出答案.

▶解:如图7.2-2(1),∵$AC=1$,$BC=3$,

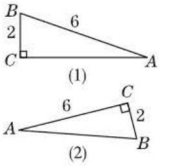
$$\therefore AB=\sqrt{1^2+3^2}=\sqrt{10},\sin A=\frac{BC}{AB}=\frac{3}{\sqrt{10}}=\frac{3\sqrt{10}}{10},$$

$$\cos A=\frac{AC}{AB}=\frac{1}{\sqrt{10}}=\frac{\sqrt{10}}{10},\sin B=\frac{AC}{AB}=\frac{1}{\sqrt{10}}=\frac{\sqrt{10}}{10},$$

举一反三训练

(答案见232页)

1. 分别求出图中$\angle A$,$\angle B$的正弦值、余弦值和正切值.



(第1题图)

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

$\cos B=\frac{BC}{AB}=\frac{3}{\sqrt{10}}=\frac{3\sqrt{10}}{10}$;

如图 7.2-2(2),$\because DF=4,EF=3,\therefore DE=\sqrt{7}$,

$\therefore \sin F=\frac{DE}{DF}=\frac{\sqrt{7}}{4},\cos F=\frac{EF}{DF}=\frac{3}{4},\sin D=\frac{EF}{DF}=\frac{3}{4},\cos D=\frac{DE}{DF}=\frac{\sqrt{7}}{4}$.

点方法

根据勾股定理,可得第一个直角三角形的斜边长,第二个直角三角形的直角边长,再根据锐角三角函数的定义,可得答案.

考查角度2 根据正弦值或余弦值求线段的长

例2 在 $\mathrm{Rt}\triangle ABC$ 中,$\angle C=90°$,若 $AB=4,\sin A=\frac{3}{5}$,则斜边 AB 上的高 CD 的长为_____.

导引:如图 7.2-3,在 $\mathrm{Rt}\triangle ABC$ 中,利用正弦的定义可计算出 $BC=\frac{12}{5}$,再利用勾股定理计算出 $AC=\frac{16}{5}$,然后利用面积法计算 CD 的长.

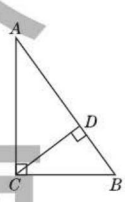


图 7.2-3

如图 7.2-3,

在 $\mathrm{Rt}\triangle ACB$ 中,$\because \sin A=\frac{BC}{AB}=\frac{3}{5},AB=4$.

$\therefore BC=\frac{3}{5}\times 4=\frac{12}{5},\therefore AC=\sqrt{AB^2-BC^2}=\frac{16}{5}$,

$\because \frac{1}{2}CD\cdot AB=\frac{1}{2}AC\cdot BC,\therefore CD=\frac{\frac{16}{5}\times\frac{12}{5}}{4}=\frac{48}{25}$,

即斜边 AB 上的高 CD 的长为 $\frac{48}{25}$.

▶答案:$\frac{48}{25}$

点方法

已知正弦值或余弦值求线段的长的基本思路是根据正弦或余弦的定义列方程求解.

2. 在 $\triangle ABC$ 中,$\angle C=90°$,若 $BC=6,\sin A=\frac{2}{3}$,则 AB 边的长是_____.

知识点2 锐角三角函数

点知识

1. 锐角 $\angle A$ 的正弦、余弦和正切都是 $\angle A$ 的三角函数.
2. 因为 $\mathrm{Rt}\triangle ABC$ 的三边长都是正数,所以锐角的三角函数值也都是正数;又因为直角三角形的斜边长大于任意一条直角边长,所以有 $\tan A>0,0<\sin A<1,0<\cos A<1(0°<\angle A<90°)$.

(1)锐角的正弦值和正切值都随着角度的增

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

大而增大，随着角度的减小而减小.

(2)锐角的余弦值随着角度的增大而减小，随着角度的减小而增大.


锐角三角函数定义

易错警示 ///

三种三角函数，要能结合图形理解，不能搞混，只能**在直角三角形中**研究它们.

拓展：

(1)**互余两角的正弦值、余弦值之间的关系：**

任意锐角的正弦值等于它的余角的余弦值，任意锐角的余弦值等于它的余角的正弦值，即

$\sin\alpha=\cos(90°-\alpha)$；

$\cos\alpha=\sin(90°-\alpha)(0°<\alpha<90°)$.

(2)**互余两角的正切值之间的关系：**

若 $\alpha+\beta=90°$，则 $\tan\alpha\cdot\tan\beta=1$，即 $\tan\alpha=\dfrac{1}{\tan\beta}$.

(3)**同角的正弦值与余弦值间的关系：**

$\sin^2A+\cos^2A=1$.

(4)**同角的正切值与正弦值、余弦值间的关系：**

$\tan A=\dfrac{\sin A}{\cos A}$.

考查角度1　比较函数值的大小

例3 将 sin37°、cos44°、sin41°、cos46°的值按从小到大的顺序排列是_____.

导引：先把余弦化成正弦，再根据当角是锐角时，正弦值随角度的增大而增大比较即可.

∵ $\cos44°=\sin(90°-44°)=\sin46°$，$\cos46°=\sin(90°-46°)=\sin44°$，∴ 根据当角是锐角时，正弦值随角度的增大而增大得出 $\sin37°<\sin41°<\cos46°<\cos44°$.

▶答案：$\sin37°<\sin41°<\cos46°<\cos44°$

点方法

本题考查了锐角三角函数的增减性和互余两角的关系的应用，注意：①如果$\angle A+\angle B=90°$，那么 $\sin A=\cos B$，②当角是锐角时，正弦值随角度的增大而增大.

3. 将 cos21°、cos37°、sin41°、cos46°的值按从小到大的顺序排列为_____.

考查角度2　根据一个三角函数值求其他三角函数值

例4 在 Rt△ABC 中，$\angle ACB=90°$，若 $\sin B=\dfrac{AC}{AB}=\dfrac{2}{7}$，则 $\cos A=$_____，$\cos B=$_____.

导引：先根据 $\sin B=\dfrac{2}{7}$，设出两条边的长，再根据勾股定理求出第三条边的长，即可求出 $\cos A$、$\cos B$ 的值.

在 Rt△ABC 中，$\angle ACB=90°$，$\sin B=\dfrac{AC}{AB}=\dfrac{2}{7}$，设 $AC=2a$，则 $AB=7a$. 根据勾股定理得到 $BC=3\sqrt{5}a$. ∴ $\cos A=\dfrac{AC}{AB}=\dfrac{2}{7}$，$\cos B=\dfrac{BC}{AB}=\dfrac{3}{7}\sqrt{5}$.

▶答案：$\dfrac{2}{7}$；$\dfrac{3\sqrt{5}}{7}$

点方法

锐角三角函数值的本质是两条线段长度的比值，因此已知一个锐角的三角函数值，求其他三角函数值时可以运用**设参数法**解答.

4. $\angle A$ 为锐角，且 $\cos A=\dfrac{4}{5}$，求 $\sin A$、$\tan A$.

基德莱

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

知识点3 利用计算器计算锐角的正弦值或余弦值(重点)

点知识

利用计算器可求锐角的正弦值,先依次按计算器上的[ON]、[sin⁻¹ D]([sin])键,再依次按数字键、[x]([)])、[≈]([=])键即可.

要点精析

1. 求以度、分、秒为单位的锐角的正弦值时,在计算器的面板上先按[sin⁻¹ D]([sin])键,再按度的数字键,再按[FACT B]([°′″])键,按分的数字键,再按[FACT B]([°′″])键,按秒的数字键,再按[FACT B]([°′″])键,最后按[x]([)])、[≈]([=])键;
2. 不同的计算器操作程序不同,按键规定一般也不一样.

例5 [动手操作题]利用计算器求下列正弦值或余弦值(精确到0.01).

(1) sin 72°;(2) cos 20°;(3) sin 80.5°;(4) cos 11°22′30″.

导引:所用计算器型号不同,按键规定可能不同.

▶解:(1) sin 72°≈0.95.

(2) cos 20°≈0.94.

(3) sin 80.5°≈0.99.

(4) cos 11°22′30″≈0.98.

5. [动手操作题]利用计算器求下列正弦值或余弦值(精确到0.01).

(1) sin 45°;

(2) cos 30°;

(3) sin 33.5°;

(4) cos 71°25′30″.

II 点方法·拨技巧·探规律

典例剖析

拔尖角度1 网格中三角函数值的计算

例6 如图7.2-4所示,△ABC的顶点都是正方形网格的格点,则 sin∠BAC 的值为(　　)

A. $\frac{1}{2}$　　B. $\frac{\sqrt{5}}{5}$　　C. $\frac{\sqrt{10}}{10}$　　D. $\frac{2\sqrt{5}}{5}$

导引:求∠BAC 的正弦值,通常情况下∠BAC 应该是直角三角形的一个锐角,而此题不符合这种情况,那么就需要根据题意,构造合适的直角三角形,问题才可以解决.我们在构造直角三角形时尽量使直角三角形的顶点均在格点上.

设小正方形的边长是1,如图7.2-5,取格点D,连接CD.

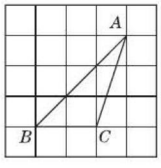


图7.2-4

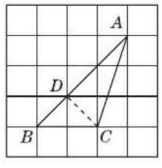


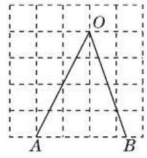
图7.2-5

因为 $AD=\sqrt{2^2+2^2}=2\sqrt{2}$, $CD=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$, $AC=$

举一反三训练

(答案见233页)

6. 在正方形网格中,每个小正方形的边长均为1,∠AOB 如图放置,则 cos∠AOB的值为_____.



(第6题图)

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

$\sqrt{3^2+1^2}=\sqrt{10}$，所以 $AC^2=AD^2+CD^2$，即 $\triangle ADC$ 是直角三角形，AC 为斜边. 所以 $\sin\angle BAC=\dfrac{CD}{AC}=\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{10}}=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$. ▶答案:B

点方法

本题运用**构造法**. 在网格图中求某个角的三角函数值时，我们通常构造合适的直角三角形，然后表示出各边的长，从而求出相应的三角函数值. 在构造直角三角形时需注意，我们通常要去求的边或角不要分割，另外就是构造的直角三角形的顶点尽量在格点上，这样便于我们求值.

拔尖角度2　构造直角三角形求三角函数值

例7 把含30°角的三角尺 ABC，绕点 B 逆时针旋转90°到三角尺 DBE 的位置(如图7.2-6所示)，求 $\sin\angle ADE$ 的值.

导引：如图7.2-6，过点 E 作 $EF\perp AD$，交 AD 于点 F；设 $BD=x$，进而可得 AB、BE、DE 的值，利用边的关系可得 AE 的值；在 $\mathrm{Rt}\triangle AEF$ 中，由三角函数的定义可得 EF 的值；最后在 $\mathrm{Rt}\triangle DEF$ 中，根据三角函数的定义可得 $\sin\angle ADE$ 的值.

▶解：如图7.2-6，过点 E 作 $EF\perp AD$，交 AD 于点 F，

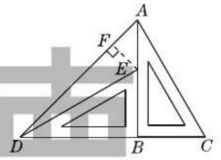


图7.2-6

设 $BD=x$，易得 $AB=x$，$BE=\dfrac{\sqrt{3}}{3}x$，

$DE=\sqrt{BD^2+BE^2}=\sqrt{x^2+\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3}x\right)^2}=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}x$，

在 $\mathrm{Rt}\triangle AEF$ 中，$AE=x-\dfrac{\sqrt{3}}{3}x=\dfrac{3-\sqrt{3}}{3}x$，

易得 $EF=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\cdot AE=\dfrac{3\sqrt{2}-\sqrt{6}}{6}x$，

在 $\mathrm{Rt}\triangle DEF$ 中，

根据三角函数的定义可得，$\sin\angle ADE=\dfrac{EF}{DE}=\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$，

所以 $\sin\angle ADE$ 的值为 $\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$.

点方法

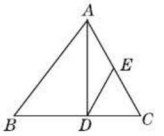
所求三角函数值的锐角不在直角三角形中时，可以通过作垂线构造直角三角形计算.

拔尖角度3　根据同角三角函数的关系求值(拓展点)

例8 对于同一锐角 α 有：$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$，现有锐角 $\angle A$ 满足 $\sin A+\cos A=\dfrac{5}{4}$.

试求：(1) $\sin A\cdot\cos A$ 的值；(2) $\sin A-\cos A$ 的值.

7. 如图，在 $\triangle ABC$ 中，$AD\perp BC$ 于 D，如果 $AD=9$，$DC=5$，E 为 AC 的中点，求 $\sin\angle EDC$ 的值.



(第7题图)

8. 若 α 为锐角，且 $\sin\alpha=\dfrac{4}{5}$，则 $\tan\alpha$ 为(　　)

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

导引：利用同角三角函数的关系 $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$ 进行适当的变形转换来求解.

▶解：(1)∵ $\sin A+\cos A=\frac{5}{4}$，∴ $\sin^2A+\cos^2A+2\sin A\cdot\cos A=\frac{25}{16}$，

即 $1+2\sin A\cdot\cos A=\frac{25}{16}$，∴ $\sin A\cdot\cos A=\frac{9}{32}$，

(2)∵ $(\sin A-\cos A)^2=\sin^2A+\cos^2A-2\sin A\cdot\cos A=1-\frac{9}{16}=\frac{7}{16}$，

∴ $\sin A-\cos A=\pm\frac{\sqrt{7}}{4}$.

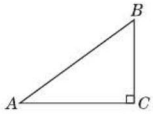
点方法

本题考查了对 $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$ 的变形应用能力，利用这一关系可以实现正弦与余弦的互化.

三 练基础·练方法·练技巧 ☞(答案见233页)

基础巩固练

1. [中考·考感]如图，在 Rt△ABC 中，$\angle C=90°$，$AB=10$，$AC=8$，则 $\sin A$ 等于(　　)



(第1题图)

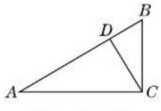
A. $\frac{3}{5}$　B. $\frac{4}{5}$　C. $\frac{3}{4}$　D. $\frac{4}{3}$

2. 已知，在 Rt△ABC 中，$\angle C=90°$，若 $AC=2$，$\angle A=\alpha$，则 AB 的长为(　　)

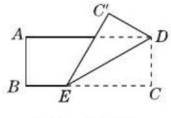
A. $2\sin\alpha$　B. $2\cos\alpha$　C. $2\tan\alpha$　D. $\frac{2}{\cos\alpha}$

3. 如图，在 Rt△ABC 中，$\angle ACB=90°$，CD 是斜边 AB 上的高，$\angle A\neq45°$，则下列比值中不等于 $\cos A$ 的是(　　)

A. $\frac{BD}{CB}$　B. $\frac{CD}{CB}$　C. $\frac{AC}{AB}$　D. $\frac{AD}{AC}$



(第3题图)



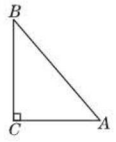
(第4题图)

4. 将一张矩形纸片 $ABCD$ 按如图所示那样折叠，使顶点 C 落在 C' 处，测量得 $AB=4$，$DE=8$. 则 $\sin\angle C'ED$ 为(　　)

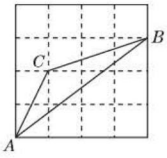
A. 2　B. $\frac{1}{2}$　C. $\frac{\sqrt{2}}{2}$　D. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

5. 在 Rt△ABC 中，$\angle C=90°$，$AB=2$，$BC=\sqrt{3}$，则 $\sin A=$ _____.

6. 如图，在△ABC 中，$\angle C=90°$，$AB=8$，$\sin A=\frac{3}{4}$，则 BC 的长是_____.



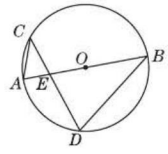
(第6题图)



(第7题图)

7. 如图，△ABC 的各个顶点都在正方形网格的格点上，则 $\sin\angle CAB$ 的值为_____.

8. 如图，在半径为3的⊙O 中，直径 AB 与弦 CD 相交于点 E，连接 AC，BD，若 $AC=2$，则 $\cos D=$ _____.

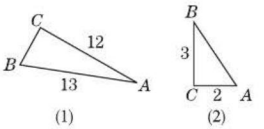


(第8题图)

宋德基

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

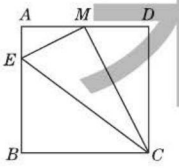
9. 如图,分别求出直角三角形中两个锐角的正弦值、余弦值和正切值.



(第9题图)

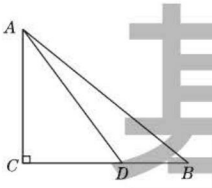
能力提升练

10. 如图,在正方形 $ABCD$ 中,M 是 AD 的中点,$BE=3AE$,试求 $\sin\angle ECM$ 的值.



(第10题图)

11. 如图,在 $\triangle ABC$ 中,$\angle C=90°$,点 D 在 BC 上,$AD=BC=5$,$\cos\angle ADC=\frac{3}{5}$,求 $\sin B$ 的值.

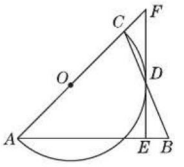


(第11题图)

12. 如图,$\triangle ABC$ 是等腰三角形,$AB=AC$,以 AC 为直径的 $\odot O$ 与 BC 交于点 D,$DE\perp AB$,垂足为 E,ED 的延长线与 AC 的延长线交于点 F.

(1)求证:DE 是 $\odot O$ 的切线;

(2)若 $\odot O$ 的半径为 2,$BE=1$,求 $\cos A$ 的值.



(第12题图)

思维拓展练

13. 学习过三角函数,我们知道在直角三角形中,一个锐角的大小与两条边长的比值相互唯一确定,因此边长与角的大小之间可以相互转化.

类似地,可以在等腰三角形中建立边角之间的联系,我们定义:等腰三角形中底边与腰的比叫做顶角的正对(sad). 如图,在 $\triangle ABC$ 中,$AB=AC$,顶角 $\angle A$ 的正对记作 $\mathrm{sad}A$,这时 $\mathrm{sad}A=\frac{\text{底边}}{\text{腰}}=\frac{BC}{AB}$. 容易知道一个角的大小与这个角的正对值也是相互唯一确定的.

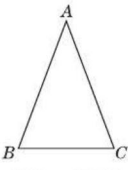
根据上述对于角的正对的定义,解下列问题:

(1)$\mathrm{sad}60°$ 的值为(　　)

A. $\frac{1}{2}$　　B. 1　　C. $\frac{\sqrt{3}}{2}$　　D. 2

(2)对于 $0°<\angle A<180°$,$\angle A$ 的正对值 $\mathrm{sad}A$ 的取值范围是_____.

(3)已知 $\sin\alpha=\frac{3}{5}$,其中 α 为锐角,试求 $\mathrm{sad}\alpha$ 的值.



(第13题图)

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

7.3 特殊角的三角函数
7.4 由三角函数值求锐角

1 点知识·拨考向·诊误区

知识点1 特殊角的三角函数值(重点)

点知识

特殊角的三角函数值:

三角函数值 θ / 三角函数	30°	45°	60°
sin θ	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
cos θ	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
tan θ	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

要点精析 ///

特殊角的三角函数值是从几何图形中概括得出的,因此,在解决问题过程中,往往还需要运用**数形结合思想**,结合图形特征,这样更有利于记忆和应用特殊角的三角函数值.

拓展:两种特殊的直角三角形:含30°角的直角三角形和等腰直角三角形,中考题中很多的解直角三角形问题或实际应用问题是用这两种三角形组合、变化出来的. 熟悉这两种直角三角形的边之比并能灵活运用,可以大大提高解决这类问题的速度.

(1)含30°角的直角三角形的三边之比(由小到大)是:1∶$\sqrt{3}$∶2;

(2)等腰直角三角形的三边之比(由小到大)是:1∶1∶$\sqrt{2}$.

易错警示 ///

对特殊角的三角函数值容易记错记混,解决的办法是,先认清特殊角的三角函数值的变化规律,再根据规律记忆.

(1)**对于正弦函数**:角度增大,正弦值随之增大,且三个特殊值的分母均为2,而分子分别为$\sqrt{1}$,$\sqrt{2}$,$\sqrt{3}$;

(2)**对于余弦函数**:角度增大,余弦值随之减小,且三个特殊值的分母仍为2,而分子分别为$\sqrt{3}$,$\sqrt{2}$,$\sqrt{1}$;

(3)**对于正切函数**:角度增大,正切值随之增大,$\frac{\sqrt{3}}{3}=\frac{1}{\sqrt{3}}$,即tan 30°与tan 60°是互为倒数的关系,而tan 45°=1.

拨考向

典例剖析

考查角度1 特殊角的三角函数值的计算

例1 计算:$(\sin 30°)^{-1}+\frac{\sin 45°+\cos^2 45°}{\tan 60°\cdot\tan 30°}-\tan 45°$.

导引:根据特殊角的三角函数值,可得答案.

▸解:原式$=\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}+\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}{\sqrt{3}\times\frac{\sqrt{3}}{3}}-1=2+\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{1}{2}-1=\frac{3+\sqrt{2}}{2}$.

举一反三训练

(答案见234页)

1. 计算:

(1)$\frac{1}{2}\sin 60°\times\frac{\sqrt{2}}{2}\cos 45°$;

(2)$\tan^2 30°+\cos^2 30°-\sin^2 45°\tan 45°$;

(3)$\frac{\tan 60°-\tan 45°}{\tan 60°\cdot\tan 45°}+$

荣德基

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

点方法

解答这类问题需熟记特殊角的三角函数值.

考查角度2 根据特殊角的三角函数值计算角度

例2 在△ABC中,$(\tan A-\sqrt{3})^2+\left|\frac{\sqrt{2}}{2}-\cos B\right|=0$,则∠$C$的度数为_____.

导引:根据非负数的性质,可得特殊角的三角函数值,再根据特殊角的三角函数值,可得答案.

由题意得 $\tan A=\sqrt{3}$,$\cos B=\frac{\sqrt{2}}{2}$,

∴ ∠A=60°,∠B=45°.

∴ ∠C=180°−∠A−∠B=75°. ▶答案:75°

点方法

利用非负数的性质得出特殊角的三角函数值,再根据特殊角的三角函数值计算角度.

知识点2 由三角函数值求锐角

点知识 ▶▶▶

	已知函数值用计算器求锐角的度数
步骤	“2ndF”→函数键→函数值→“)”“=”,显示的结果单位是“°”,如果要将单位化为“度、分、秒”的形式,应再按“°′″”键.
牢记	解读:(1)要用到“sin”、“cos”、“tan”键的第二功能键,这时就需要先按功能键“2ndF”,有的型号的计算器上找不到“2ndF”键,而是用“SHIFT”键代替. (2)不同的计算器操作程序不同,按键规定一般也不一样.

考查角度 由三角函数值求锐角

例3 [动手操作题]求满足下列条件的锐角 α(精确到0.01°):

(1)$\cos\alpha=\frac{2}{3}$;(2)$\tan\alpha=5$;(3)$\sin(\alpha+10°)=\frac{4}{5}$.

导引:运用计算器求解.

▶解:(1)$\alpha\approx48.19°$.

(2)$\alpha\approx78.69°$.

(3)$\alpha+10°\approx53.13°$,所以$\alpha\approx43.13°$.

2sin 60°;

(4)$6\tan^2 30°-\sqrt{3}\sin 60°-2\sin 45°$.

2. 求满足下列条件的锐角 α:

(1)$2\cos(\alpha+10°)=1$;

(2)$(\tan\alpha-1)(\tan\alpha-\sqrt{3})=0$.

3. [动手操作题]用计算器求锐角 α(精确到1″):

(1)若 $\cos\alpha=0.6536$,则 $\alpha\approx$_____;

(2)若 $\tan(\alpha+10°31'7'')=1.7515$,则 $\alpha\approx$_____.

荣德基
关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

Ⅱ 点方法·拨技巧·探规律

典例剖析

拔尖角度1　根据特殊角的三角函数值求点的坐标

例4 菱形 $OABC$ 在平面直角坐标系中的位置如图 7.4-1 所示，若 $OA=2$，$\angle AOC=60°$，则 B 点的坐标是(　　)

A. $(-1,\sqrt{3})$　B. $(-3,\sqrt{3})$　C. $(-3,\sqrt{2})$　D. $(3,\sqrt{3})$

导引：如图 7.4-1，延长 BA 交 y 轴于 E，则 $AE\perp y$ 轴，由菱形的性质得出 $AB=OA$，再在直角三角形中求出 AE、OE，即可得出点 B 的坐标.

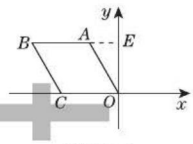


图 7.4-1

如图 7.4-1 所示，延长 BA 交 y 轴于 E，则 $AE\perp y$ 轴，

∵ 四边形 $OABC$ 是菱形，∴ $AB=OA=2$，

∵ $\angle COE=90°$，$\angle AOC=60°$，∴ $\angle AOE=30°$，

∴ $AE=OA\cdot\sin30°=1$，$OE=OA\cdot\cos30°=\sqrt{3}$，∴ $BE=2+1=3$，

∴ B 点的坐标是 $(-3,\sqrt{3})$，故选 B.　▶答案：B

点方法

确定点的坐标常用的方法是过所求点向坐标轴作垂线，构造直角三角形，再根据特殊角的三角函数计算.

拔尖角度2　估计角的大小

例5 若锐角 α 的正弦值为 0.58，则(　　)

A. $\alpha=30°$　B. $\alpha=45°$　C. $30°<\alpha<45°$　D. $45°<\alpha<60°$

导引：由锐角的正弦函数为增函数，根据正弦值的范围确定出 α 的范围即可.

∵ 锐角的正弦值随角度的增大而增大，且 $\frac{1}{2}<\sin\alpha=0.58<\frac{\sqrt{2}}{2}$，∴ $30°<\alpha<45°$，故选 C.　▶答案：C

点方法

解答这类问题的基本思路是首先估计已知数值在哪两个特殊角的三角函数值之间，再利用正弦值随角度的增大而增大，余弦值随角度的增大而减小估计角度的范围.

拔尖角度3　构造特殊角，求非特殊角的三角函数值(拓展点)

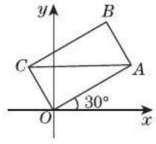
例6 [方案设计题]设计方案计算 15°角的三角函数值.

导引：15°的 2 倍等于 30°，30°角是特殊角，因此考虑构造 30°角.

举一反三训练

☞(答案见 235 页)

4. 如图，在平面直角坐标系中，矩形 $OABC$ 的对角线 AC 平行于 x 轴，边 OA 与 x 轴正半轴的夹角为 30°，$OC=2$，则点 B 的坐标是_____.



(第4题图)

5. α 是锐角，且 $\cos\alpha=\frac{3}{4}$，则(　　)

A. $0°<\alpha<30°$

B. $30°<\alpha<45°$

C. $45°<\alpha<60°$

D. $60°<\alpha<90°$

6. 请仿照例 6 的方法，求 $\tan22.5°$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

▶解：如图 7.4-2，在 Rt△ABC 中，∠A = 15°，设 BC = 1. 在 ∠ABC 内部作 ∠ABD = ∠A = 15°，则 ∠BDC = 30°.

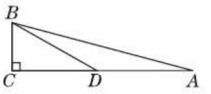


图 7.4-2

所以 $CD=\sqrt{3}$，$BD=AD=2$，

所以 $AC=2+\sqrt{3}$，$AB=\sqrt{(2+\sqrt{3})^2+1^2}=\sqrt{8+4\sqrt{3}}=\sqrt{6}+\sqrt{2}$.

所以 $\sin 15°=\dfrac{1}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$，$\cos 15°=\dfrac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$，

$\tan 15°=\dfrac{1}{2+\sqrt{3}}=2-\sqrt{3}$.

III 练基础 · 练方法 · 练技巧 ☞(答案见 235 页)

基础巩固练

1. [中考 · 云南] sin60°的值为(　　)

A. $\sqrt{3}$　　B. $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　　C. $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$　　D. $\dfrac{1}{2}$

2. 在 Rt△ABC 中，∠C = 90°，若 $\sin A=\dfrac{1}{2}$，则 BC : AC : AB 等于(　　)

A. 1 : 2 : 5　　B. 1 : $\sqrt{3}$: $\sqrt{5}$

C. 1 : $\sqrt{3}$: 2　　D. 1 : 2 : $\sqrt{3}$

3. 如果∠A 为锐角，且 $\cos A=\dfrac{1}{4}$，那么(　　)

A. 0° < ∠A < 30°　　B. 30° < ∠A < 45°

C. 45° < ∠A < 60°　　D. 60° < ∠A < 90°

4. 在△ABC 中，∠A、∠B 都是锐角，$\tan A=1$，$\sin B=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，你认为对△$ABC$ 最确切的判断是(　　)

A. 等腰三角形　　B. 等腰直角三角形

C. 直角三角形　　D. 锐角三角形

5. 计算：$2\sin^2 45°-\tan 45°=$_____.

6. 已知 α 为锐角，且 $\sin(\alpha-10°)=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，则 α 等于_____°.

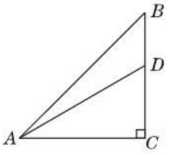
7. 已知 Rt△ABC 中，∠C = 90°，$3a=\sqrt{3}b$，则 ∠B = _____.

8. 计算：

(1) $\sqrt{3}\cos 30°-\sqrt{2}\sin 45°+\tan 60°$；

(2) $\dfrac{\sin 30°}{\cos 60°}-2\sin 60°\tan 60°+2\tan 45°$.

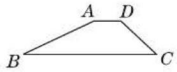
9. 已知：如图，在 Rt△ABC 中，∠C = 90°，AC = BC，∠DAC = 30°. 求：(1) ∠BAD 的度数；(2) tan ∠BAD 的值.



(第 9 题图)

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

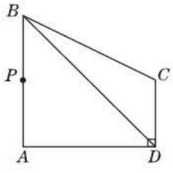
10. 如图，水库大坝的截面是梯形 $ABCD$，坝顶 $AD=6$ m，坡长 $CD=8\sqrt{2}$ m，坝底 $BC=30$ m，$\angle C=45°$，求 $\tan B$ 的值.



（第 10 题图）

能力提升练

11. 如图，在四边形 $ABCD$ 中，$\angle BAD=\angle ADC=90°$，$AB=AD=2\sqrt{2}$，$CD=\sqrt{2}$，点 P 在四边形 $ABCD$ 的边上. 若点 P 到 BD 的距离为 $\frac{3}{2}$，则点 P 的个数为（　　）



（第 11 题图）

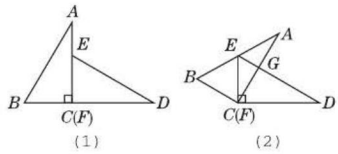
A. 2　　B. 3　　C. 4　　D. 5

12. 在 $\triangle ABC$ 中，$AB=4$，$BC=6$. $\triangle ABC$ 的面积为 $6\sqrt{3}$，则 $\angle B$ 的度数为_____度.

13. 在 Rt $\triangle ABC$ 中，$\angle C=90°$，$AB=4$，$BC=2\sqrt{3}$，则 $\sin\frac{A}{2}=$_____.

思维拓展练

14. 如图，已知 $\triangle ACB$ 与 $\triangle DFE$ 是两个全等的直角三角形，量得它们的斜边长为 8 cm，较小锐角为 30°，将这两个三角形摆成如图（1）所示的形状，使点 B、C、F、D 在同一条直线上，且点 C 与点 F 重合，将图（1）中的 $\triangle ACB$ 绕点 C 顺时针方向旋转到图（2）的位置，点 E 在 AB 边上，AC 交 DE 于点 G，求线段 FG 的长.



（第 14 题图）

我的错题笔记

荣德基

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

7.5 解直角三角形

1 点知识 · 拨考向 · 诊误区

知识点 解直角三角形

点知识

1. 通常,我们把三角形的三条边和三个角称为三角形的"**六元素**".由直角三角形的边、角中的已知元素,求出所有边、角中的未知元素的过程,叫做解直角三角形.

2. 解直角三角形常用到的数量关系(如图 7.5-1,在 $\mathrm{Rt}\triangle ABC$ 中,$\angle C=90°$):

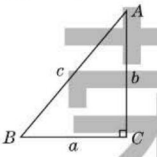


图 7.5-1

(1)边与边的关系:勾股定理,即 $a^2+b^2=c^2$.

(2)角与角的关系:两个锐角互余,即 $\angle A+\angle B=90°$.

(3)边与角的关系:锐角三角函数的定义:

$$\sin A=\frac{a}{c},\cos A=\frac{b}{c},\tan A=\frac{a}{b}.$$

(4)互余的两个角的三角函数的关系:$\sin A=\cos B,\cos A=\sin B$.

要点精析

1. 解直角三角形常见类型

$\mathrm{Rt}\triangle ABC$ 中,$\angle C=90°$			
已知条件			解法步骤
两边	斜边和一直角边	如 a、c	①由 $\sin A=\frac{a}{c}$,求 $\angle A$;②$\angle B=90°-\angle A$;③$b=\sqrt{c^2-a^2}$
	两直角边	a、b	①由 $\tan A=\frac{a}{b}$,求 $\angle A$;②$\angle B=90°-\angle A$;③$c=\sqrt{a^2+b^2}$
一边一角	斜边和一锐角	如 c、$\angle A$	①$\angle B=90°-\angle A$;②$a=c\cdot\sin A$;③$b=c\cdot\cos A$
	对边和一锐角	如 a、$\angle A$	①$\angle B=90°-\angle A$;②$b=\frac{a}{\tan A}$;③$c=\frac{a}{\sin A}$
	邻边和一锐角	如 b、$\angle A$	①$\angle B=90°-\angle A$;②$a=b\cdot\tan A$;③$c=\frac{b}{\cos A}$

2. 解直角三角形的基本方法可概括为"有斜(斜边)用弦(正弦、余弦),无斜用切(正切),宁乘勿除,取原避中",意思是:当已知或求解中有斜边时,就优先考虑用正弦或余弦;无斜边时,就用正切;当所求的元素既可以用乘法又可以用除法求解时,则选用乘法;既可以用原始数据又可以用中间数据求解时,则用原始数据.

拨考向

典例剖析

考查角度 1　已知两边解直角三角形

例 1 在 $\triangle ABC$ 中,$\angle C$ 为直角,$AC=\sqrt{2}$,$BC=\sqrt{6}$,解这个直角三角形.

导引:解直角三角形就是把直角三角形中除已知元素外的所有未知元素求出来.

举一反三训练

(答案见 236 页)

1. 在 $\mathrm{Rt}\triangle ABC$ 中,$\angle C=90°$,$BC=31$,$AB=31\sqrt{2}$,解这个直角三角形.

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

本题已知两直角边长，根据勾股定理，可求出斜边长，

再由 $\tan A=\frac{BC}{AC}$，求出 $\angle A$ 的度数，进而得出 $\angle B$ 的度数.

▶解：$AB=\sqrt{BC^2+AC^2}=\sqrt{(\sqrt{6})^2+(\sqrt{2})^2}=2\sqrt{2}$.

$\because \tan A=\frac{BC}{AC}=\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{2}}=\sqrt{3}$，

$\therefore \angle A=60°$，

$\therefore \angle B=90°-\angle A=30°$.

点方法

解直角三角形的方法：

1. 已知斜边和一直角边，解法为先求该直角边所对的角；
2. 已知斜边和一锐角，解法为先求锐角所对的边；
3. 已知一直角边和一锐角，解法为先求另一直角边或另一锐角；
4. 已知两直角边，解法为先根据勾股定理求斜边.

考查角度2　已知一边一角解直角三角形

例2 已知：在 $\mathrm{Rt}\triangle ABC$ 中，$\angle C=90°$，$\angle A=30°$，$b=2\sqrt{3}$，解这个直角三角形.

导引：直角三角形的两个锐角互余，并且在 $\mathrm{Rt}\triangle ABC$ 中，$\angle C=90°$，则 $\sin A=\cos B$，$\sin B=\cos A$，解直角三角形就是求直角三角形中除直角以外的两锐角、三边中的未知元素.

▶解：在 $\mathrm{Rt}\triangle ABC$ 中，$\angle B=90-\angle A=60°$，

$\because \tan A=\frac{a}{b}=\tan 30°=\frac{\sqrt{3}}{3}$，$\therefore a=\frac{\sqrt{3}}{3}\times 2\sqrt{3}=2$，

$\because \sin A=\frac{a}{c}=\frac{1}{2}$，$\therefore c=4$.

考查角度3　根据边之间的关系解直角三角形

例3 在 $\mathrm{Rt}\triangle ABC$ 中，$\angle C=90°$，$\angle B=30°$，$a-b=3\sqrt{3}-3$，求 a，b，c 的长.

导引：根据含30°角的直角三角形三边的关系得到 $c=2b$，$a=\sqrt{3}b$，然后利用 $a-b=3\sqrt{3}-3$，可计算出 b，进而得到 a，c 的长.

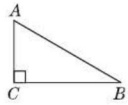
▶解：在 $\mathrm{Rt}\triangle ABC$ 中，$\because \angle C=90°$，$\angle B=30°$，$\therefore c=2b$，$a=\sqrt{3}b$，又 $\because a-b=3\sqrt{3}-3$，$\therefore \sqrt{3}b-b=3\sqrt{3}-3$，$\therefore b=3$，$\therefore a=3\sqrt{3}$，$c=6$.

考查角度4　根据边角关系求三角函数值

例4 ［易错题］如图7.5-2，在 $\mathrm{Rt}\triangle ABC$ 中，$\angle C=90°$，$\angle BAC$ 的平分线 AD 交 BC 于 D，且 $AD=4$，$AC=2\sqrt{3}$，求 $\sin\angle CAB$ 的值.

▶错解：在 $\mathrm{Rt}\triangle ACD$ 中，$\angle C=90°$，$AD=4$，$AC=2\sqrt{3}$，所以

2. 如图，在 $\mathrm{Rt}\triangle ABC$ 中，$\angle C=90°$，$AC=10$，$\angle A=60°$. 解这个直角三角形.



（第2题图）

3. 在 $\mathrm{Rt}\triangle ABC$ 中，$\angle C=90°$，$b+c=24$，$\angle A-\angle B=30°$，解这个直角三角形.

4. 如图，在 $\triangle ABC$ 中，$\angle A=90°$，$AB=AC$，D 是 AC 上的一点，且

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

$CD=\sqrt{AD^2-AC^2}=\sqrt{4^2-(2\sqrt{3})^2}=2$,

所以 $\sin\angle CAD=\dfrac{CD}{AD}=\dfrac{2}{4}=\dfrac{1}{2}$.

又因为 $\angle BAC$ 的平分线 AD 交 BC 于 D,所以 $\angle CAB=2\angle CAD$,所以 $\sin\angle CAB=2\sin\angle CAD=1$.

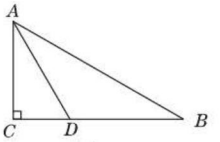


图 7.5-2

▶错解分析:产生错误的原因是误认为,当一个锐角是另一个锐角的 2 倍时,其正弦值也为这个锐角的正弦值的 2 倍.

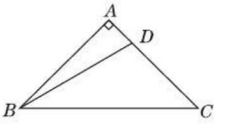
▶正确解法:在 $\mathrm{Rt}\triangle ACD$ 中,$\angle C=90°$,$AD=4$,$AC=2\sqrt{3}$,所以 $CD=\sqrt{AD^2-AC^2}=\sqrt{4^2-(2\sqrt{3})^2}=2$,

所以 $\sin\angle CAD=\dfrac{CD}{AD}=\dfrac{2}{4}=\dfrac{1}{2}$,所以 $\angle CAD=30°$.

又因为 $\angle BAC$ 的平分线 AD 交 BC 于 D,所以 $\angle CAB=2\angle CAD=60°$,

所以 $\sin\angle CAB=\sin 60°=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

$AD:DC=1:3$,求 $\tan\angle DBC$ 的值.



(第 4 题图)

Ⅱ 点方法 · 拨技巧 · 探规律

典例剖析

拔尖角度 1　运用分割法解斜三角形(易错点)

例 5 如图 7.5-3 所示,在 $\triangle ABC$ 中,$\angle A=30°$,$\angle B=45°$,$AC=2\sqrt{3}$,求 AB 的长.

导引:由于在 $\triangle ABC$ 中,30°角、45°角是特殊角,从而可以过点 C 作 $CD\perp AB$ 于点 D. 在 $\mathrm{Rt}\triangle ACD$ 中利用 30°角可以求出 CD 的长和 AD 的长;在 $\mathrm{Rt}\triangle BCD$ 中,利用 45°角可以求出 BD 的长,从而求出 AB 的长.

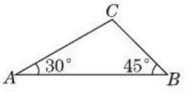


图 7.5-3

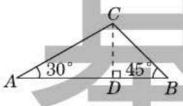


图 7.5-4

▶解:如图 7.5-4 所示,过点 C 作 $CD\perp AB$ 于点 D.

在 $\mathrm{Rt}\triangle ACD$ 中,因为 $\angle A=30°$,$AC=2\sqrt{3}$,

所以 $CD=\dfrac{1}{2}AC=\dfrac{1}{2}\times 2\sqrt{3}=\sqrt{3}$.

因为 $\cos 30°=\dfrac{AD}{AC}$,所以 $AD=2\sqrt{3}\times\cos 30°=2\sqrt{3}\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=3$.

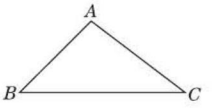
在 $\mathrm{Rt}\triangle BCD$ 中,因为 $\angle B=45°$,所以 $BD=CD=\sqrt{3}$.

所以 $AB=AD+BD=3+\sqrt{3}$.

举一反三训练

(答案见 236 页)

5. 如图,$\triangle ABC$ 中,$\cos B=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$,$\sin C=\dfrac{3}{5}$,$AC=5$,则 $\triangle ABC$ 的面积是(　　)



(第 5 题图)

A. $\dfrac{21}{2}$　　B. 12

C. 14　　D. 21



关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

点方法

对于斜三角形，通常利用**转化思想**将其转化为直角三角形解决，在作高（本题运用了**分割法**）时，通常要把题目中已知的特殊角如30°角、45°角或60°角放在直角三角形中，利用其三角函数值求解.

拔尖角度2　运用补形法解斜三角形（拓展点）

例6 在$\triangle ABC$中，$\angle A=120°$，$AB=4$，$AC=2$，则$\sin B$的值是(　　)

A. $\frac{5\sqrt{7}}{14}$　　B. $\frac{\sqrt{3}}{5}$　　C. $\frac{\sqrt{21}}{7}$　　D. $\frac{\sqrt{21}}{14}$

导引：欲求$\sin B$的值，只需将$\angle B$置于直角三角形中，求其对边与斜边之比即可.

如图7.5-5，过C作$CD\perp BA$，交BA的延长线于D.

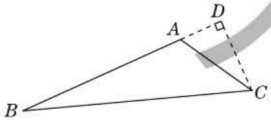


图7.5-5

因为$\angle BAC=120°$，所以$\angle CAD=60°$. 又因为$AC=2$，所以$AD=1$，$CD=\sqrt{3}$，所以$BD=5$. 在Rt$\triangle BCD$中，$BC=\sqrt{BD^2+CD^2}=\sqrt{5^2+(\sqrt{3})^2}=2\sqrt{7}$，所以$\sin B=\frac{CD}{BC}=\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{7}}=\frac{\sqrt{21}}{14}$.

▶答案：D

拔尖角度3　正多边形有关计算（易错点）

例7 已知正六边形$ABCDEF$的半径为R，求这个正六边形的边长a_6、周长P_6和面积S_6.

导引：先画出基本图形，再计算中心角的角度的一半，最后选择三角函数求解.

▶解：如图7.5-6，O为正六边形$ABCDEF$的中心.

连接OA，过O作$OM\perp AB$于M，易知$AM=\frac{a_6}{2}$，$OA=R$.

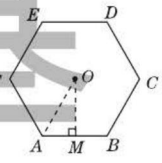


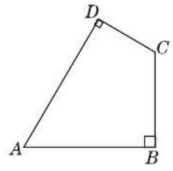
图7.5-6

$\because\ \angle AOM=\frac{1}{2}\times\frac{360°}{6}=30°$，$\sin\angle AOM=\frac{AM}{OA}=\frac{\frac{a_6}{2}}{R}$，

$\therefore\ a_6=2R\times\sin30°=R$，$\therefore\ P_6=6R$.

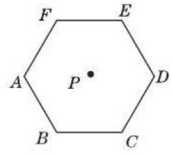
$\because\ \cos\angle AOM=\frac{OM}{OA}$，

6. 如图所示，在四边形$ABCD$中，$AB=2$，$CD=1$，$\angle A=60°$，$\angle B=\angle D=90°$，求四边形$ABCD$的面积.



（第6题图）

7. 如图，正六边形$ABCDEF$的边长为2 cm，点P为这个正六边形的中心，则点P到这个正六边形各边的距离之和为_____cm.



（第7题图）

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

$\therefore OM = R \times \cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}R$,

$\therefore S_6 = 12 \times \frac{1}{2} \times AM \times OM = 12 \times \frac{1}{2} \times \frac{R}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2}R = \frac{3\sqrt{3}}{2}R^2$.

点方法

因为正多边形的有关计算都归结为解直角三角形的问题，所以需要作辅助线，构造出直角三角形.

Ⅲ 练基础 · 练方法 · 练技巧 (答案见237页)

基础巩固练

1. 已知在 Rt△ABC 中，$\angle C = 90°$，$BC = 9$，$AB = 15$，则 $\sin A$ 的值是(　　)

A. $\frac{3}{4}$　　B. $\frac{3}{5}$　　C. $\frac{4}{5}$　　D. $\frac{4}{3}$

2. 在 Rt△ABC 中，$\angle C = 90°$，a，b，c 分别是 $\angle A$，$\angle B$，$\angle C$ 的对边，下列关系中错误的是(　　)　　【导学号 7367677】

A. $b = c \cdot \sin B$　　B. $b = a \cdot \tan B$

C. $a = c \cdot \sin A$　　D. $a = b \cdot \cos B$

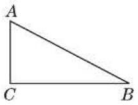
3. [易错题]若一个正九边形的边长为 a，则这个正九边形的半径是(　　)

A. $\frac{a}{\cos 20°}$　　B. $\frac{a}{\sin 20°}$

C. $\frac{a}{2\cos 20°}$　　D. $\frac{a}{2\sin 20°}$

4. 在 Rt△ABC 中，$\angle C = 90°$，如果 $AB = 6$，$\cos A = \frac{1}{3}$，那么 $AC =$ _____.

5. [中考 · 广州]如图，Rt△ABC 中，$\angle C = 90°$，$BC = 15$，$\tan A = \frac{15}{8}$，则 $AB =$ _____.



(第5题图)

6. 在△ABC 中，$\angle ABC = 30°$，$AB = \sqrt{3}$，$AC = 1$，则 $\angle ACB$ 为_____.

7. 在△ABC 中，$\angle C = 90°$，根据下列条件解直角三角形：

(1) $\angle B = 60°$，$a = 3\sqrt{3}$；

(2) $c = 10$，$\angle B = 45°$；

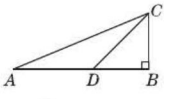
(3) $a = 3\sqrt{2}$，$b = 3\sqrt{6}$；

(4) $\angle A = 2\angle B$，$c - b = 8$.

8. 如图，在 Rt△ABC 中，$\angle B = 90°$，$\sin A = \frac{5}{13}$，点 D 在 AB 边上，且 $\angle BDC = 45°$，$BC = 5$. 求：

(1) AD 长；

(2) $\angle ACD$ 的正弦值.



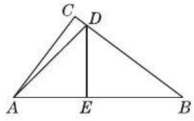
(第8题图)

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

9. 如图，在 Rt△ABC 中，$\angle C=90°$，点 D 在边 BC 上，$DE\perp AB$，点 E 为垂足，$AB=7$，$\angle DAB=45°$，$\tan B=\frac{3}{4}$. 求：

(1) DE 的长；

(2) $\angle CDA$ 的余弦值.



（第9题图）

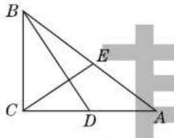
能力提升练

10. [中考·黑龙江] 在△ABC 中，$AB=12$，$AC=\sqrt{39}$，$\angle B=30°$，则△ABC 的面积是_____.

11. 如图，在△ABC 中，$\angle ACB=90°$，$AC=4$，$BC=3$，D 是边 AC 的中点，$CE\perp BD$ 交 AB 于点 E.

(1) 求 $\tan\angle ACE$ 的值；

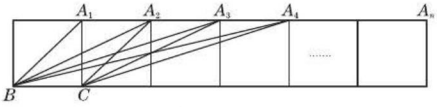
(2) 求 $AE:EB$ 的值.



（第11题图）

思维拓展练

12. 如图，把 n 个边长为1的正方形拼接成一排，求得 $\tan\angle BA_1C=1$，$\tan\angle BA_2C=\frac{1}{3}$，$\tan\angle BA_3C=\frac{1}{7}$，…按此规律，写出 $\tan\angle BA_nC=$_____（用含 n 的代数式表示）.



（第12题图）

我的错题笔记

荣德基

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

7.6 用锐角三角函数解决问题

1 点知识 · 拨考向 · 诊误区

知识点 解直角三角形的简单应用

点知识

1. **视角**:视线与水平线的夹角叫做视角. 如图7.6-1(1),从下向上看,视线与水平线的夹角叫做仰角;从上往下看,视线与水平线的夹角叫做俯角.
2. 如图7.6-1(2),坡面与水平面的夹角(用α表示)叫做坡角;我们通常把坡面的铅直高度h和水平宽度l的比叫做**坡度**(或坡比),常用字母i表示,即$i=h:l=\tan\alpha$,坡度一般写成比的形式(比的前项为1,后项可以是小数).

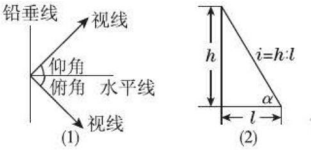


图7.6-1

3. **方向角**:方向角一般是指以观测者的位置为中心,将正北或正南方向作为起始方向旋转到目标的方向线所成的角(一般指锐角),通常表达成北(南)偏东(西)××度,若正好为45度,则表示为东(西)北(南).

要点精析 ///

"**化斜为直**"不仅是解斜三角形的常用策略,同时也是解决有关锐角三角函数实际应用题的有效方法.

易错警示 ///

1. 仰角和俯角是视线相对于水平线而言的,可记为"上仰下俯";
2. 坡度不是一个角的度数,而是一个比;坡度与坡角的关系是坡角(α)越大,则坡度(i)越大,坡面越陡.

拨考向

典例剖析

考查角度1 与坡度有关的应用问题(易错点)

例1 [易错题]如图7.6-2,防洪大堤的横断面是梯形,背水坡AB的坡比$i=1:\sqrt{3}$(指坡面的铅直高度与水平宽度的比),且$AB=20$ m. 身高为1.7 m的小明站在大堤的A点,测得高压电线杆CD的顶点D的仰角为30°. 已知地面BC宽30 m,求高压电线杆CD的高度(结果精确到十分位,$\sqrt{3}\approx1.732$).

▶错解:设大堤的高度为h m,点A到点B的水平距离为a m,∵$i=1:\sqrt{3}=\frac{\sqrt{3}}{3}$,∴背水坡$AB$与水平线的夹角为30°,∴$\frac{h}{AB}=\sin30°$,得$h=\frac{AB}{2}=\frac{1}{2}\times20=10$(m). $\frac{a}{AB}=\cos30°$,得$a=\frac{\sqrt{3}}{2}AB=\frac{\sqrt{3}}{2}\times20=$

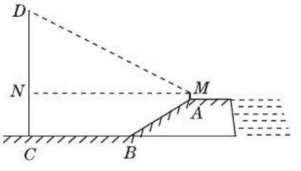


图7.6-2

举一反三训练

☞(答案见238页)

1. 如图,小明从点A出发,沿着坡角为α的斜坡向上走了0.65千米到达点B,$\sin\alpha=\frac{5}{13}$,然后又沿着坡度$i=1:4$的斜坡向上走了1千米到达点C. 问小明从A点到C点上升的高度CD是多少千米(结果保留根号)?

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

$10\sqrt{3}$(m),∴ $MN = BC + a = (30 + 10\sqrt{3})$ m. ∵ 测得高压电线杆 CD 的顶点 D 的仰角为 30°,∴ $\frac{DN}{MN} = \tan 30°$,得 $DN = (30 + 10\sqrt{3}) \times \frac{\sqrt{3}}{3} = 10\sqrt{3} + 10 \approx 27.3$(m). 所以高压电线杆的高度约为 27.3 m.

▶错解分析:在利用仰角或俯角等方法解直角三角形来求物体的高度时,所求线段的长度不一定等于物体的高度,应相应考虑测量工具、观察者高度及所处的地理高度等.

▶正确解法:在错解的基础上再算 CD 的高度,

$CD = DN + AM + h \approx 27.3 + 1.7 + 10 = 39.0$(m).

答:高压电线杆 CD 的高度约为 39.0 m.

点方法

由坡比求得大堤的高度 h,以及点 A 到点 B 的水平距离 a,从而求得 MN 的长度,由仰角求得 DN 的高度,从而求得 CD 的高度.

考查角度2　求旋转后的高度

例2 [实际应用题]如图7.6-3,是一个匀速旋转(指每分钟旋转的弧长或圆心角相同)的摩天轮的示意图,O 为圆心,AB 为水平地面,假设摩天轮的直径为 80 米,最低点 C 离地面的高度为 6 米,旋转一周所用的时间为 6 分钟,小明从点 C 乘坐摩天轮(身高忽略不计),请问:

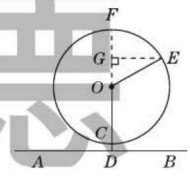


图7.6-3

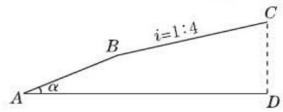
(1)经过 2 分钟后,小明离开地面的高度是多少米?

(2)若小明到了最高点,在视线没有阻挡的情况下能看到周围 3 千米远的景物,则他看到的地面景物有多大面积?(精确到 1 平方千米)

导引:(1)设小明从点 C 乘坐摩天轮,经过 2 分钟后到达点 E,延长 CO 与⊙O 交于点 F,过 E 作 $EG \perp OF$ 于点 G,如图7.6-3. 根据旋转一周所用的时间为 6 分钟,小明从点 C 乘坐摩天轮经过 2 分钟,可知 $\angle COE = 120°$,根据平角的定义可知 $\angle GOE = 60°$. 根据三角函数可求出 OG 的长,进而求出小明离开地面的高度;(2)根据圆的面积公式可求.

▶解:(1)设小明从点 C 乘坐摩天轮,经过 2 分钟后到达点 E,延长 CO 与⊙O 交于点 F,过 E 作 $EG \perp OF$ 于点 G,如图7.6-3,根据旋转一周所用的时间为 6 分钟,小明从点 C 乘坐摩天轮经过 2 分钟,可知 $\angle COE = 120°$,∴ $\angle GOE = 60°$.

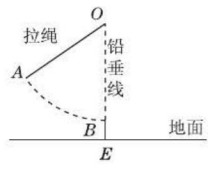
在 Rt△EOG 中,$OG = OE \times \cos\angle GOE = \frac{1}{2} \times 80 \times \cos 60° = 20$(米).



(第1题图)


解直角三角形的应用

2. 如图,秋千拉绳 OB 的长为 3 米,静止时,踏板到地面的距离 BE 是 0.6 米(踏板的厚度忽略不计),小亮荡该秋千时,当秋千拉绳由 OB 运动到 OA 时,拉绳 OA 与铅垂线 OE 的夹角为 55°,请你计算此时该秋千的踏板离地面的高度是多少米?(精确到 0.1 米)



(第2题图)

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

$\therefore DG = CD + CO + OG = 6 + \frac{1}{2} \times 80 + 20 = 66$(米).

答:小明离开地面的高度是66米.

(2)F为最高点,∵总高度为$80 + 6 = 86$(米),86米$= 0.086$千米,$\therefore S = (\sqrt{3^2 - 0.086^2})^2\pi \approx 28$(平方千米).

答:他看到的地面景物大约有28平方千米.

点方法

此类题常用**构造法**构造直角三角形,运用三角函数求出OG的长度是解题的关键.

考查角度3　与仰角、俯角有关的应用问题

例3 [中考·宿迁]如图7.6-4,为了测量土坡上一棵树PQ的高度,小明在点A处利用测角仪测得树顶P的仰角为45°,然后他沿着正对树PQ的方向前进10 m到达点B处,此时测得树顶P和树底Q的仰角分别是60°和30°,设PQ垂直于AB,且垂足为C.

(1)求$\angle BPQ$的度数;

(2)求树PQ的高度(结果精确到0.1 m,$\sqrt{3} \approx 1.73$).

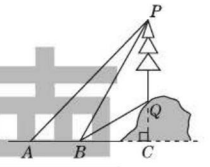


图7.6-4

导引:(1)根据直角三角形两锐角互余求解即可;

(2)设$PC = x$米,在直角三角形APC和直角△BPC中,根据三角函数利用x表示出AC和BC,根据$AB = AC - BC$即可列出方程求得x的值,再在直角三角形BQC中利用三角函数求得QC的长,则PQ的长度即可求解.

▶解:(1)易知$\angle BCP = 90°$. $\therefore \angle BPQ = 90° - 60° = 30°$.

(2)设$PC = x$米.

在直角三角形APC中,$\angle PAC = 45°$,则$AC = PC = x$米,

在直角三角形BPC中,$\angle PBC = 60°$,$\angle BPC = 30°$,$\therefore BC = \frac{\sqrt{3}}{3}PC = \frac{\sqrt{3}}{3}x$米,

∵$AB = AC - BC = 10$,$\therefore x - \frac{\sqrt{3}}{3}x = 10$,

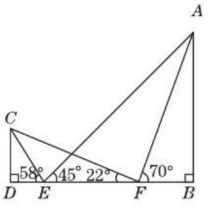
解得:$x = 15 + 5\sqrt{3}$. $\therefore BC = (5\sqrt{3} + 5)$米.

在直角三角形BCQ中,$QC = \frac{\sqrt{3}}{3}BC = \frac{\sqrt{3}}{3}(5\sqrt{3} + 5) = \left(5 + \frac{5\sqrt{3}}{3}\right)$米.

$\therefore PQ = PC - QC = 15 + 5\sqrt{3} - \left(5 + \frac{5\sqrt{3}}{3}\right) = 10 + \frac{10\sqrt{3}}{3} \approx 15.8$(米).

答:树PQ的高度约为15.8米.

3. [中考·南京]如图,为了测量建筑物AB的高度,在D处树立标杆CD,标杆的高是2 m,在DB上选取观测点E、F,从E测得标杆和建筑物的顶部C、A的仰角分别为58°、45°.从F测得C、A的仰角分别为22°、70°.求建筑物AB的高度(精确到0.1 m).(参考数据:tan22° ≈ 0.40,tan58° ≈ 1.60,tan70° ≈ 2.75)



(第3题图)


仰角俯角问题

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

点方法

本题考查的是解直角三角形的应用——仰角俯角问题，解决此类问题要了解角之间的关系，找到与已知和未知相关联的直角三角形，当图中没有直角三角形时，要通过作高或垂线构造直角三角形，另外当问题以一个实际问题的形式给出时，要善于读懂题意，把实际问题化归为直角三角形中的边角关系问题加以解决.

考查角度4　与方向角有关的应用问题

例4　[中考·连云港]如图7.6-5，湿地景区岸边有三个观景台A、B、C. 已知$AB=1\ 400$米，$AC=1\ 000$米，B点位于A点的南偏西60.7°方向，C点位于A点的南偏东66.1°方向.

(1)求$\triangle ABC$的面积；

(2)景区规划在线段BC的中点D处修建一个湖心亭，并修建观景栈道AD. 试求A、D间的距离.(结果精确到0.1米)

(参考数据：$\sin 53.2°\approx 0.80$，$\cos 53.2°\approx 0.60$，$\sin 60.7°\approx 0.87$，$\cos 60.7°\approx 0.49$，$\sin 66.1°\approx 0.91$，$\cos 66.1°\approx 0.41$，$\sqrt{2}\approx 1.414$).

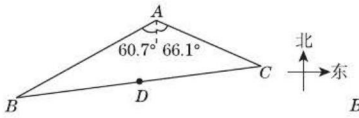


图7.6-5

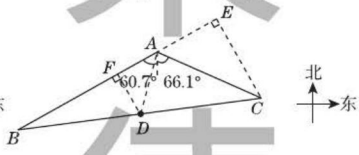


图7.6-6

导引：(1)作$CE\perp BA$，交BA的延长线于E. 在Rt$\triangle ACE$中，求出CE即可解决问题；

(2)连接AD，作$DF\perp AB$于F，则$DF\parallel CE$. 首先求出DF、AF，再在Rt$\triangle ADF$中求出AD即可.

▶解：(1)作$CE\perp BA$，交BA的延长线于E，如图7.6-6所示.

在Rt$\triangle AEC$中，$\angle CAE=180°-60.7°-66.1°=53.2°$，

$\therefore CE=AC\cdot\sin 53.2°\approx 1\ 000\times 0.8=800$(米).

$\therefore S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}\cdot AB\cdot CE\approx\frac{1}{2}\times 1\ 400\times 800=560\ 000$(平方米).

(2)如图7.6-6，连接AD，过点D作$DF\perp AB$于F，则$DF\parallel CE$.

$\because BD=CD$，$DF\parallel CE$，$\therefore BF=EF$，$\therefore DF=\frac{1}{2}CE\approx 400$(米)，

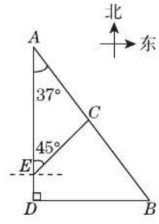
$\because AE=AC\cdot\cos 53.2°\approx 1\ 000\times 0.6=600$(米)，$\therefore BE=AB+AE\approx 2\ 000$(米)，$\therefore AF=\frac{1}{2}EB-AE\approx 400$(米)，在Rt$\triangle ADF$中，$AD=\sqrt{AF^2+DF^2}\approx 565.6$米.

$\therefore A$、D间的距离为565.6米.

点方法

解题的关键是学会添加常用辅助线.构造直角三角形解决问题，属于中考常考题型.

4. [中考·南京]如图，港口B位于港口A的南偏东37°方向，灯塔C恰好在AB的中点处. 一艘海轮位于港口A的正南方向，港口B的正西方向的D处，它沿正北方向航行5 km到达E处，测得灯塔C在北偏东45°方向上，这时，E处距离港口A有多远？(结果保留整数)(参考数据：$\sin 37°\approx 0.60$，$\cos 37°\approx 0.80$，$\tan 37°\approx 0.75$)



(第4题图)

方向角问题

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

Ⅱ 点方法 · 拨技巧 · 探规律

典例剖析

拔尖角度 1　堤坝加宽加高问题(拓展点)

例 5 如图 7.6-7,某市为加固长 90 m,高 30 m,坝顶宽为 6 m,迎水坡和背水坡的坡度都是 1∶1 的横截面是梯形的防洪大坝,要将大坝加高 2 m,背水坡坡度改为 1∶1.5,已知坝顶宽不变,求大坝横截面面积增加多少平方米.

导引:过 C 作 $CG\perp AB$ 于 G,过 D 作 $DH\perp AB$ 于 H,过 F 作 $FM\perp AB$ 于 M,过 E 作 $EN\perp AB$ 于 N,求出 AQ 和 BQ 的长,根据题意得出增加的面积等于加宽后的梯形面积减去原来的梯形面积,根据梯形的面积公式求出即可.

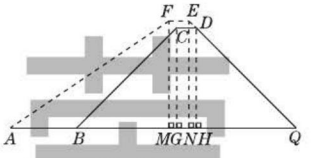


图 7.6-7

▶解:如图 7.6-7 所示,过 C 作 $CG\perp AB$ 于 G,过 D 作 $DH\perp AB$ 于 H,过 F 作 $FM\perp AB$ 于 M,过 E 作 $EN\perp AB$ 于 N,

则四边形 $CDHG$ 和四边形 $EFMN$ 都是矩形,

即 $CG=DH=30$ m,$FM=EN=30+2=32$(m),$CD=GH=6$ m,$FE=MN=6$ m.

∵ 梯形 $BCDQ$ 的迎水坡和背水坡的坡度都是 1∶1,

∴ $BG=QH=30$ m,

同理 $AM=32\times1.5=48$(m),$QN=32$ m,

∴ $AQ=48+6+32=86$(m),$BQ=30+6+30=66$(m),

大坝横截面面积增加 $\frac{1}{2}\times(6+86)\times32-\frac{1}{2}\times(6+66)\times30=392$(m^2),

答:大坝横截面面积增加 392 m^2.

点方法

解答这类问题的基本方法是通过作梯形的高将梯形转化为两个直角三角形和矩形. 这种方法多用于处理堤坝问题. 有关四边形的许多问题都可以通过添加适当的辅助线将其转化为三角形的问题,体现了数学中的**转化思想**.

拔尖角度 2　解决生活中安全问题(拓展点)

例 6 城市规划期间,欲拆除一电线杆 AB,如图 7.6-8,已知距电线杆 AB 的水平距离 14 m 的 D 处有一大坝,背水坡 CD 的坡度 $i=2:1$,坝高 CF 为 2 m,在坝顶点 C 处测得电线杆顶点 A 的仰角

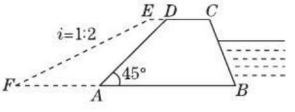
举一反三训练

(答案见 239 页)

5. 如图,广安市防洪指挥部发现渠江边一处长 400 米,高 8 米,背水坡的坡角为 45° 的防洪大堤(横截面为梯形 $ABCD$)急需加固. 经调查论证,防洪指挥部专家组制定的加固方案是:背水坡面用土石进行加固,并使上底加宽 2 米,加固后,背水坡 EF 的坡比 $i=1:2$. 求:

(1) 加固后坝底增加的宽度 AF 的长;

(2) 完成这项工程需要土石多少立方米.



(第 5 题图)

6. 为减少交通事故的发生,我市在很多危险路段设置了电子监控仪.

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

为30°，DE之间是宽为2 m的行人道，试问在拆除电线杆AB时，为确保行人安全，需要将此人行道封上吗？请说明理由.

导引：求需不需要将人行道封上实际上就是比较AB与BE的长短，如果过C作$CM\perp AB$于M，那么AB的长度就是$AM+MB$，也就是$AM+CF$. 要求AM的长，需要知道CM的长，也就是BF的长，已知BD，CF的长度，根据背水坡CD的坡度$i=2:1$，即可求出DF的长，那么AB的长度也就求出来了，现在只需要知道BE的长度即可，有BD的长，ED的长，BE的长即可求出，就可以判断出是不是需要封上人行道了.

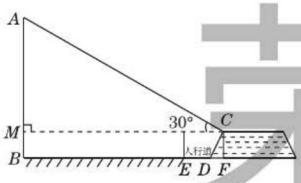


图7.6-8

▶解：如图7.6-8，作$CM\perp AB$于点M，易知$MBFC$为矩形.

$\therefore BM=CF=2$ m，$BF=CM$.

$\because$ 背水坡CD的坡度$i=2:1$，

$\therefore \dfrac{CF}{DF}=\dfrac{2}{1}$，$\therefore DF=\dfrac{1}{2}CF=1$(m).

$\therefore CM=BF=BD+DF=14+1=15$(m).

在$\mathrm{Rt}\triangle AMC$中，$\because \tan\angle ACM=\dfrac{AM}{CM}$，

$\therefore AM=CM\cdot\tan\angle ACM=15\cdot\tan30°=15\times\dfrac{\sqrt{3}}{3}=5\sqrt{3}$(m).

$\therefore AB=AM+BM=5\sqrt{3}+2\approx10.66$(m).

而$BE=BD-DE=14-2=12$(m).

$\therefore AB<BE$. 故不需封闭人行道.

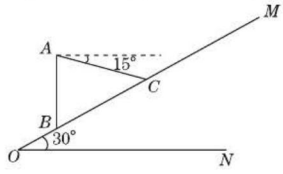
点方法

三角函数在生活应用非常广泛，解答这些问题时需首先将实际问题转化为几何问题，再结合三角函数知识加以解答. 事实上有些问题并没有直接告诉我们要求什么，需要我们在理解题意的基础上，将问题加以转化.

拔尖角度3　方案设计问题(拓展点)

例7 ［方案设计题］如图7.6-9，A，B为两个村庄，AB，BC，CD为公路，BD为田地，AD为河宽，且CD与AD互相垂直，现在要

如图，在坡角为30°的公路BC上方的A处，有一电子监控仪，一辆轿车行驶到C处，在同一平面内，由A处测得C处的轿车的俯角为15°，AB垂直于水平面且$AB=10$ m，轿车由C行驶到B处用了1 s，如果该路段限速，车速不允许超过40 km/h(约11.1 m/s)，请你求出该轿车的速度，并判断是否超速行驶.(结果精确到0.1 m/s，参考数据：$\sqrt{2}\approx1.41$，$\sqrt{3}\approx1.73$)



(第6题图)

7. 如图，飞机沿水平方向(A，B两点所在直线)飞

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

从点 E 处开始铺设往村庄 A 和村庄 B 的一条电缆，共有两种铺设方案：方案一：$E\to D\to A\to B$，方案二：$E\to C\to B\to A$. 经测量得 $AB=4\sqrt{3}$ 千米，$BC=10$ 千米，$CE=6$ 千米，$\angle BDC=45°$，$\angle ABD=15°$，已知：地下电缆的修建费为 2 万元/千米，水下电缆的修建费为 4 万元/千米.

(1)求河宽 AD；(结果保留根号)

(2)求公路 CD 的长；

(3)哪种方案铺设电缆的费用低？请说明理由.

▶解：(1)如图 7.6-9，过点 B 作 $BF\perp AD$，交 AD 的反向延长线于点 F.

因为 $CD\perp AD$，$\angle BDC=45°$，所以 $\angle BDF=45°$. 又因为 $\angle ABD=15°$，所以 $\angle BAF=45°+15°=60°$.

在 $\mathrm{Rt}\triangle BFA$ 中，因为 $\angle BAF=60°$，

所以 $BF=AB\cdot\sin 60°=4\sqrt{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=6$(千米)，

$AF=AB\cdot\cos 60°=4\sqrt{3}\times\frac{1}{2}=2\sqrt{3}$(千米).

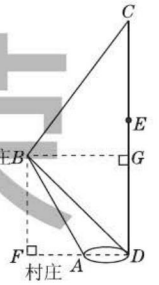


图 7.6-9

在 $\mathrm{Rt}\triangle BFD$ 中，因为 $\angle BDF=45°$，所以 $DF=BF=6$ 千米.

所以 $AD=DF-AF=(6-2\sqrt{3})$ 千米，即河宽 AD 为 $(6-2\sqrt{3})$ 千米.

(2)如图 7.6-9，过点 B 作 $BG\perp CD$ 于 G，易证四边形 $BFDG$ 是正方形，所以 $BG=GD=BF=6$ 千米. 在 $\mathrm{Rt}\triangle BGC$ 中，$CG=\sqrt{BC^2-BG^2}=\sqrt{10^2-6^2}=8$(千米).

所以 $CD=CG+GD=8+6=14$(千米)，即公路 CD 的长为 14 千米.

(3)方案一铺设电缆的费用低.

理由如下：由(2)得 $DE=CD-CE=14-6=8$(千米)，所以方案一的铺设费用为 $2(DE+AB)+4AD=2\times(8+4\sqrt{3})+4\times(6-2\sqrt{3})=40$(万元).

方案二的铺设费用为 $2(CE+BC+AB)=2\times(6+10+4\sqrt{3})=32+8\sqrt{3}$(万元).

因为 $40<32+8\sqrt{3}$，所以方案一铺设电缆的费用低.

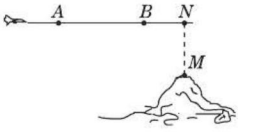
点方法

解此类应用题的关键是将实际问题转化为数学问题，将数学问题转化为直角三角形的求解问题，在解题时要善于依据题目条件构造直角三角形.

行，前方有一座高山，为了避免飞机飞行过低，就必须测量山顶 M 到飞行路线 AB 的距离 MN. 飞机能够测量的数据有俯角和飞行距离(因安全因素，飞机不能飞到山顶的正上方 N 处才测距离)，请设计一个求距离 MN 的方案，要求：

(1)指出需要测量的数据；(用字母表示，并在图中标出)

(2)用测出的数据写出求距离 MN 的步骤.



(第 7 题图)

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

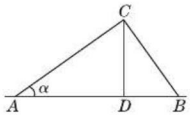
Ⅲ 练基础·练方法·练技巧 (答案见240页)

基础巩固练

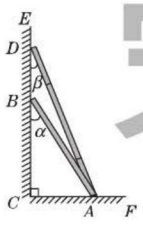
1. [中考·益阳] 如图,电线杆 CD 的高度为 h,两根拉线 AC 与 BC 相互垂直,$\angle CAB=\alpha$,则拉线 BC 的长度为(A、D、B 在同一条直线上)(　　)

A. $\dfrac{h}{\sin\alpha}$　　B. $\dfrac{h}{\cos\alpha}$

C. $\dfrac{h}{\tan\alpha}$　　D. $h\cdot\cos\alpha$



(第1题图)



(第2题图)

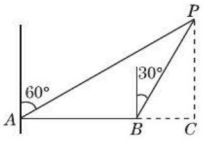
2. [中考·金华] 如图,两根竹竿 AB 和 AD 斜靠在墙 CE 上,量得 $\angle ABC=\alpha$,$\angle ADC=\beta$,则竹竿 AB 与 AD 的长度之比为(　　)

A. $\dfrac{\tan\alpha}{\tan\beta}$　B. $\dfrac{\sin\beta}{\sin\alpha}$　C. $\dfrac{\sin\alpha}{\sin\beta}$　D. $\dfrac{\cos\beta}{\cos\alpha}$

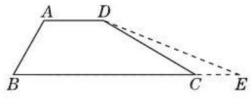
3. [中考·玉林] 如图,一艘轮船在 A 处测得灯塔 P 位于其北偏东 60°方向上,轮船沿正东方向航行 30 海里到达 B 处后,此时测得灯塔 P 位于其北偏东 30°方向上,此时轮船与灯塔 P 的距离是(　　)

A. $15\sqrt{3}$ 海里　　B. 30 海里

C. 45 海里　　D. $30\sqrt{3}$ 海里



(第3题图)

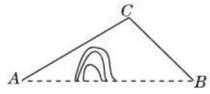


(第5题图)

4. [中考·泰州] 小明沿着坡度 i 为 $1:\sqrt{3}$ 的直路向上走了 50 m,则小明沿垂直方向升高了_____m.

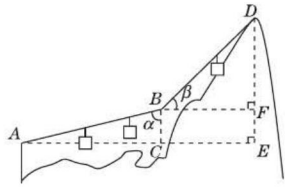
5. [中考·天门] 为加强防汛工作,某市对一拦水坝进行加固,如图,加固前拦水坝的横断面是梯形 $ABCD$. 已知迎水坡面 $AB=12$ 米,背水坡面 $CD=12\sqrt{3}$ 米,$\angle B=60°$,加固后拦水坝的横断面为梯形 $ABED$,$\tan E=\dfrac{3}{13}\sqrt{3}$,则 CE 的长为_____米.

6. [中考·淮安] A、B 两地被大山阻隔,若要从 A 地到 B 地,只能沿着如图所示的公路先从 A 地到 C 地,再由 C 地到 B 地. 现计划开凿隧道 A、B 两地直线贯通,经测量得:$\angle CAB=30°$,$\angle CBA=45°$,$AC=20$ km,求隧道开通后与隧道开通前相比,从 A 地到 B 地的路程将缩短多少?(结果精确到 0.1 km,参考数据:$\sqrt{2}\approx1.414$,$\sqrt{3}\approx1.732$)



(第6题图)

7. [中考·安徽] 如图,游客在点 A 处坐缆车出发,沿 $A-B-D$ 的路线可至山顶 D 处,假设 AB 和 BD 都是直线段,且 $AB=BD=600$ m,$\alpha=75°$,$\beta=45°$,求 DE 的长.(参考数据:$\sin75°\approx0.97$,$\cos75°\approx0.26$,$\sqrt{2}\approx1.41$)



(第7题图)

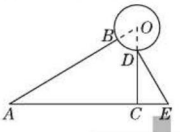
荣德基

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

8. [中考 · 岳阳]某太阳能热水器的横截面示意图如图所示,已知真空热水管 AB 与支架 CD 所在直线相交于点 O,且 $OB=OD$,支架 CD 与水平线 AE 垂直,$\angle BAC=\angle CDE=30°$,$DE=80$ cm,$AC=165$ cm.

(1)求支架 CD 的长;

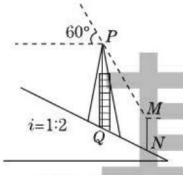
(2)求真空热水管 AB 的长.(结果保留根号)



(第8题图)

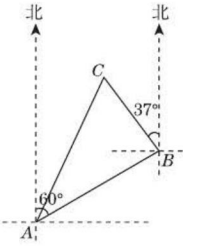
能力提升练

9. [中考 · 达州]如图,信号塔 PQ 坐落在坡度 $i=1:2$ 的山坡上,其正前方直立着一警示牌.当太阳光线与水平线成 $60°$ 角时,测得信号塔 PQ 落在斜坡上的影子 QN 长为 $2\sqrt{5}$ 米,落在警示牌上的影子 MN 长为 3 米,求信号塔 PQ 的高.(结果不取近似值)



(第9题图)

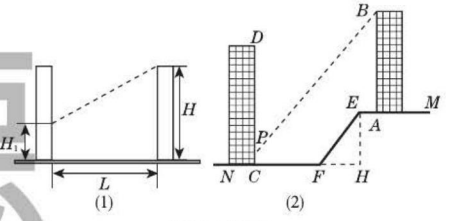
10. [中考 · 乌鲁木齐]一艘渔船位于港口 A 的北偏东 $60°$ 方向,距离港口 20 海里的 B 处,它沿北偏西 $37°$ 方向航行至 C 处突然出现故障,在 C 处等待救援,B,C 之间的距离为 10 海里,救援船从港口 A 出发 20 分钟到达 C 处,求救援船的航行速度.($\sin37°\approx0.6$,$\cos37°\approx0.8$,$\sqrt{3}\approx1.732$,结果取整数)



(第10题图)

思维拓展练

11. [中考 · 泰州]日照间距系数反映了房屋日照情况.如图(1),当前后房屋都朝向正南时,日照间距系数 $=L:(H-H_1)$,其中 L 为楼间水平距离,H 为南侧楼房高度,H_1 为北侧楼房底层窗台至地面高度.



(第11题图)

如图(2),山坡 EF 朝北,EF 长为 15 m,坡度 $i=1:0.75$,山坡顶部平地 EM 上有一高为 22.5 m 的楼房 AB,底部 A 到 E 点的距离为 4 m.

(1)求山坡 EF 的水平宽度 FH;

(2)欲在 AB 楼正北侧山脚的平地 FN 上建一楼房 CD,已知该楼底层窗台 P 处至地面 C 处的高度为 0.9 m,要使该楼的日照间距系数不低于 1.25,底部 C 距 F 处至少多远?

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

中考提分 专题篇

章末整合与拔高

知识专题

专题一 求锐角三角函数的常用方法

(1)直接用锐角三角函数的定义计算

例1 [中考·哈尔滨]在Rt△ABC中,$\angle C=90°$,$AB=4$,$AC=1$,则$\cos B$的值为(　　)

A. $\frac{\sqrt{15}}{4}$　　B. $\frac{1}{4}$　　C. $\frac{\sqrt{15}}{15}$　　D. $\frac{4\sqrt{17}}{17}$

导引:利用锐角三角函数的定义求出$\cos B$的值即可.

∵在Rt△ABC中,$\angle C=90°$,$AB=4$,$AC=1$,∴$BC=\sqrt{4^2-1^2}=\sqrt{15}$,则$\cos B=\frac{BC}{AB}=\frac{\sqrt{15}}{4}$,故选A.

▶答案:A

点方法

本题运用了**定义法**,直接运用正弦的定义,得出边之间的比值即可求解.

(2)等角转化

例2 如图7-1,在Rt△ABC中,$\angle ACB=90°$,$CD\perp AB$于D,$BC=3$,$AC=4$,设$\angle BCD=\alpha$,求$\sin\alpha$的值.

导引:由题意可知,$\angle BCD=\angle A$,$\sin\alpha=\sin A=\frac{BC}{AB}$,只要求出$AB$的长即可.

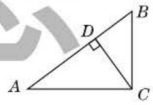


图7-1

▶解:在Rt△ABC中,$BC=3$,$AC=4$,∴$AB=5$.

∴$\sin A=\frac{3}{5}$.又由题意可知,$\angle BCD=\angle A$,∴$\sin\alpha=\sin A$.

∴$\sin\alpha=\frac{3}{5}$.

点方法

本题运用**转化思想**,通过寻找等角来巧解.

(3)构造直角三角形

例3 如图7-2,已知在△ABC中,D是AB的中点,$DC\perp AC$,且$\tan A=\frac{2}{3}$,求$\tan\angle BCD$的值.

导引:为了求出$\angle BCD$的正切值,必须构造一个以$\angle BCD$为锐角的直角三角形,可作$DE\perp CD$,交BC于点E,则$DE\parallel AC$,由D是AB的中点得DE是△ABC的

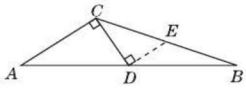


图7-2

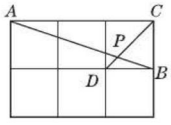
链接中考训练 ☞(答案见241页)

1. [中考·金华]在Rt△ABC中,$\angle C=90°$,$AB=5$,$BC=3$,则$\tan A$的值是(　　)

A. $\frac{3}{4}$　　B. $\frac{4}{3}$

C. $\frac{3}{5}$　　D. $\frac{4}{5}$

2. 如图,在边长相同的小正方形组成的网格中,点A、B、C、D都在这些小正方形的顶点上,AB、CD相交于点P,则$\tan\angle APD$的值是_____.



(第2题图)

3. 如图,在Rt△ABC中,$\angle C=90°$,$\sin B=\frac{3}{5}$,点D在BC边上,且$\angle ADC=45°$,$DC=6$,求$\angle BAD$的正切值.

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

中位线. 在 Rt△ACD 中，由 $\tan A=\frac{CD}{AC}=\frac{2}{3}$，可设 $AC=3k$，则 $CD=2k(k>0)$，而 $DE=\frac{1}{2}AC=\frac{3k}{2}$，则∠$BCD$ 的正切值便可求出.

▶解：如图 2，过 D 点作 $DE\perp CD$，交 BC 于点 E.

∵ ∠ACD = ∠CDE = 90°，∴ $DE\parallel AC$.

又∵ D 是 AB 的中点，∴ E 是 BC 的中点，∴ DE 为△ABC 的中位线.

在 Rt△ACD 中，由 $\tan A=\frac{CD}{AC}=\frac{2}{3}$，

可设 $AC=3k$，则 $CD=2k(k>0)$，∴ $DE=\frac{1}{2}AC=\frac{3k}{2}$.

在 Rt△CDE 中，$\tan\angle ECD=\frac{DE}{CD}=\frac{\frac{3k}{2}}{2k}=\frac{3}{4}$，

即 $\tan\angle BCD=\frac{3}{4}$.

点方法

本题运用了**设参数法**、**转化思想**和**构造法**，解题的关键是根据需要构造出直角三角形.

专题二　锐角三角函数与圆综合

(1)用圆周角性质把角转化到直角三角形中

例 4 如图 7-3，已知 AB 是⊙O 的直径，弦 $CD\perp AB$，垂足为 E，$AC=2\sqrt{2}$，$BC=1$，求 $\sin\angle EBD$ 的值.

导引：在 Rt△EBD 中，无法直接求出 $\sin\angle EBD$ 的值，但可通过找等角对其进行转化.

▶解：在⊙O 中，易知∠ACD = ∠EBD.

∵ AB 是⊙O 的直径，

∴ ∠ACB = 90°，

∴ ∠A + ∠ABC = 90°.

∵ $CD\perp AB$，∴ ∠A + ∠ACD = 90°，

∴ ∠ACD = ∠ABC.

∴ ∠ABC = ∠EBD.

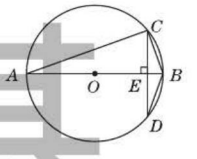


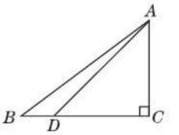
图 7-3

在 Rt△ABC 中，$AB=\sqrt{AC^2+BC^2}=\sqrt{(2\sqrt{2})^2+1^2}=3$，

∴ $\sin\angle ABC=\frac{AC}{AB}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$，即 $\sin\angle EBD=\frac{2\sqrt{2}}{3}$.

点方法

借用“同弧所对的圆周角相等”及“同角的余角相等”，把要求的∠EBD 的正弦值，转化为求∠ABC 的正弦值，充分体现了**转化思想**的巧妙运用.

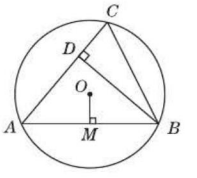


(第 3 题图)

反思总结

求锐角三角函数值，是“锐角三角函数”一章中的重要内容，图中若有直角三角形，则按锐角三角函数的定义直接求解，若不能直接求解，则可用等角来替换，构造含有等角在内的直角三角形，有时还可以用同角三角函数间的关系来转化. 在解题时，还要注意设参数法的运用.

4. 如图，⊙O 的半径为 1，锐角三角形 ABC 内接于⊙O，$BD\perp AC$ 于点 D，$OM\perp AB$ 于点 M，则 $\sin\angle CBD$ 的值等于(　　)



(第 4 题图)

A. OM 的长

B. $2OM$ 的长

C. CD 的长

D. $2CD$ 的长

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

(2)用切线的性质构造直角三角形

例5 如图7-4,AB是$\odot O$的切线,A为切点,AC是$\odot O$的弦,过O作$OH\perp AC$于点H.若$OH=2$,$AB=12$,$OB=13$.

求:(1)$\odot O$的半径;

(2)$\sin\angle OCA$的值.

导引:由切线,联想到切线垂直于经过切点的半径,则可构造直角三角形求解.

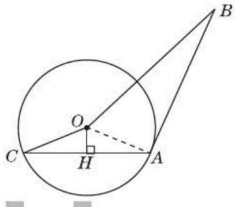


图7-4

▶解:(1)连接OA,如图4,因为AB是$\odot O$的切线,A为切点,OA是半径,所以$\angle OAB=90°$,则$OA=\sqrt{OB^2-AB^2}=\sqrt{13^2-12^2}=5$.所以$\odot O$的半径为5.

(2)因为$OH\perp AC$于点H,所以$\angle OHA=90°$,则$\sin\angle OCA=\dfrac{OH}{OC}=\dfrac{2}{5}$.

点方法

(**构造法**)根据切线垂直于经过切点的半径,可构造直角三角形,从而可以运用锐角三角函数解决有关问题.

(3)转化条件中的垂直关系

例6 [一题多解]如图7-5,在等腰三角形ABC中,$AC=BC=10$,$AB=12$.以BC为直径作$\odot O$交AB于点D,交AC于点G,$DF\perp AC$,垂足为F,交BC的反向延长线于点E.求$\sin E$的值.

导引:要求$\sin E$的值,要把$\angle E$放在直角三角形中,因为在$Rt\triangle CEF$中,不易求出$\sin E$的值,所以可进行转化.连接BG,可得$BG//EF$,那么$\angle E=\angle CBG$,把求$\sin E$的值转化为求$\sin\angle CBG$的值.

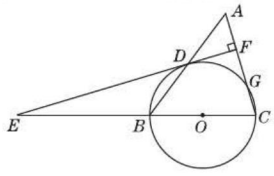


图7-5

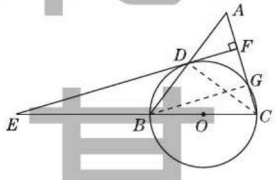


图7-6

▶解法一:如图7-6,连接BG,CD,因为BC是$\odot O$的直径,所以$\angle BGC=\angle BDC=90°$,又因为$AC=BC$,所以$AD=\dfrac{1}{2}AB=6$.

在$Rt\triangle ACD$中,$CD=\sqrt{AC^2-AD^2}=\sqrt{10^2-6^2}=8$.而$S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}AB\cdot CD=\dfrac{1}{2}AC\cdot BG$,所以有$BG=\dfrac{AB\cdot CD}{AC}=\dfrac{12\times8}{10}=\dfrac{48}{5}$.

在$Rt\triangle BCG$中,$CG=\sqrt{BC^2-BG^2}=\sqrt{10^2-\left(\dfrac{48}{5}\right)^2}=\dfrac{14}{5}$.

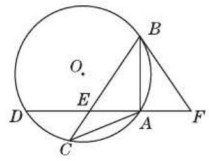
又因为$BG\perp AC$,$DF\perp AC$,所以$BG//EF$,

所以$\angle E=\angle CBG$,从而$\sin E=\sin\angle CBG=\dfrac{CG}{BC}=\dfrac{\frac{14}{5}}{10}=\dfrac{7}{25}$.

5. 如图,$\triangle ABC$内接于$\odot O$,弦$AD\perp AB$交BC于点E,过点B作$\odot O$的切线交DA的延长线于点F,且$\angle ABF=\angle ABC$.

(1)求证:$AB=AC$;

(2)若$AD=4$,$\cos\angle ABF=\dfrac{4}{5}$,求$DE$的长.

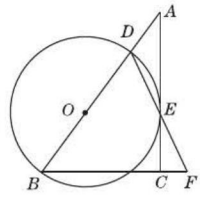


(第5题图)

6. 如图,在$Rt\triangle ABC$中,$\angle ACB=90°$,点D是边AB上一点,以BD为直径的$\odot O$与边AC相切于点E,连接DE并延长DE交BC的延长线于点F.

(1)求证:$BD=BF$;

(2)若$CF=1$,$\cos B=\dfrac{3}{5}$,求$\odot O$的半径.



(第6题图)

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

▶解法二：如图 7-7，连接 BG.

因为 BC 是 $\odot O$ 的直径，所以 $BG \perp AC$. 因为 $DF \perp AC$，所以 $BG // EF$，所以 $\angle E = \angle CBG$. 设 $CG = x$，则在 $\mathrm{Rt}\triangle BCG$ 中，$BG^2 = BC^2 - CG^2$，得 $BG^2 = 10^2 - x^2$，在 $\mathrm{Rt}\triangle ABG$ 中，$BG^2 = AB^2 - AG^2 = 12^2 - (10-x)^2$，所以 $10^2 - x^2 = 12^2 - (10-x)^2$，解得 $x = \frac{14}{5}$，所以 $\sin E = \sin\angle CBG = \frac{CG}{BC} = \frac{\frac{14}{5}}{10} = \frac{7}{25}$.

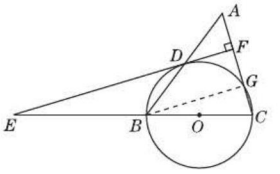


图 7-7

点方法

挖掘图形中的隐含关系，把已知条件中的垂直关系进行转化，构造出直角三角形，为求角的函数值提供便利.

专题三　运用双直角三角形解决实际问题

链接中考>> 双直角三角形是指一条直角边重合，另一条直角边共线的两个直角三角形. 解这类问题的基本思路是：运用“遇斜化直”的数学思想，即通过作辅助线（斜三角形的高线）把它转化成为双直角三角形问题，然后根据已知条件与未知元素之间的关系，利用解直角三角形的知识来求解.

解“双直角三角形”问题的关键是：适当添加辅助线，灵活转化图形，运用“遇斜化直”的数学思想构造双直角三角形，明确已知条件和所求问题是解直角三角形中的什么元素——角、边等等，用公共（或相等）的直角边沟通已知条件和未知元素之间的关系，也可设定未知数找出等量关系列出方程，就能使问题迎刃而解.

例 7 如图 7-8，甲、乙两渔船同时从港口 O 出发外出捕鱼，乙沿南偏东 30°方向以每小时 15 海里的速度航行，甲沿南偏西 75°方向以每小时 $15\sqrt{2}$ 海里的速度航行，当航行 1 小时后，甲在 A 处发现自己的渔具掉在乙船上，于是迅速改变航向和速度，仍以匀速沿南偏东 60°方向追赶乙船，正好在 B 处追上. 甲船追赶乙船的速度为多少海里/小时？

导引：如图 7-8，过 O 作 $OC \perp AB$ 于 C. 先判断出 $\triangle AOC$ 是等腰直角三角形，判断出 $\angle OAC$ 和 $\angle B$ 的度数，利用三角函数求出 BC 的长，求出乙船从 O 点到 B 点所需时间为 2 小时，甲船追赶乙船速度为 $(15+15\sqrt{3})$ 海里/小时.

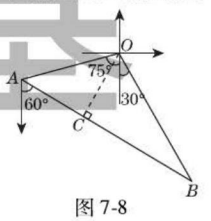


图 7-8

▶解：如图 8，过 O 作 $OC \perp AB$ 于 C.

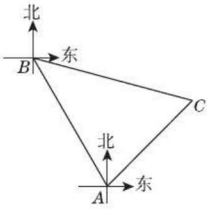
$\therefore \angle OAC = 180° - 60° - 75° = 45°$，$\therefore \triangle AOC$ 是等腰直角三角形，易知 $AO = 15\sqrt{2}$ 海里，$\therefore OC = AC = 15\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 15$（海里），

$\because \angle B = 180° - 75° - 45° - 30° = 30°$，$\tan B = \frac{OC}{BC}$，$\therefore \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{15}{BC}$，

7. 某海域有 A、B 两个港口，B 港口在 A 港口北偏西 30°方向上，距 A 港口 60 海里，有一艘船从 A 港口出发，沿东北方向行驶一段距离后，到达位于 B 港口南偏东 75°方向的 C 处，求：

(1) $\angle C =$ _____°；

(2) 此时刻船与 B 港口之间的距离 CB 的长（结果保留根号）.



（第 7 题图）

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

∴ $BC=15\sqrt{3}$ 海里，易得 $OB=15\times2=30$（海里），

∴ $AB=AC+BC=(15+15\sqrt{3})$ 海里.

∵ 乙船从 O 点到 B 点所需时间为 $30\div15=2$（小时），

∴ 甲船追赶乙船速度为 $(15+15\sqrt{3})\div(2-1)=(15+15\sqrt{3})$ 海里/小时.

思想方法专题

专题四 分类思想

专题解读>> 分类思想是指根据数学概念的本质属性，将研究的对象分为不同种类，分别进行处理的一种数学思想方法，正确运用分类思想，是解决某些数学问题的一种重要方法.

例8 [实际应用题] 一条东西走向的高速公路上有两个加油站 A、B，在 A 的北偏东 45° 方向还有一个加油站 C，C 到高速公路的距离是 30 千米，B、C 间的距离是 60 千米. 想要经过 C 修一条笔直的公路与高速公路相交，使两路交叉口 P 到 B、C 的距离相等，请求出交叉口 P 与加油站 A 的距离（结果保留根号）.

导引：首先考虑“无图多解”，画出与实际问题相符合的几何图形，有几种就画几种，然后根据图形建立数学模型，最后用解直角三角形的知识解答.

▶解：分两种情况：第一种情况：如图 7-9(1)，在 Rt△BDC 中，因为 $CD=30$ 千米，$CB=60$ 千米，所以 $\angle B=30°$.

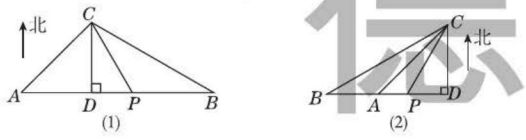


图 7-9

因为 $CP=BP$，所以 $\angle PCB=\angle B=30°$，所以 $\angle CPD=60°$.

在 Rt△CDP 中，$\angle CPD=60°$，$CD=30$ 千米，所以 $DP=\dfrac{CD}{\tan\angle CPD}=\dfrac{30}{\tan60°}=10\sqrt{3}$ 千米.

在 Rt△ADC 中，因为 $\angle CAD=45°$，所以 $AD=CD=30$ 千米，

所以 $AP=AD+DP=(30+10\sqrt{3})$ 千米；

第二种情况：如图 7-9(2)，同第一种情况，求得 $DP=10\sqrt{3}$ 千米，$AD=30$ 千米，所以 $AP=AD-DP=(30-10\sqrt{3})$ 千米.

所以交叉口 P 与加油站 A 的距离为 $(30+10\sqrt{3})$ 千米或 $(30-10\sqrt{3})$ 千米.

点方法

本题运用了**分类思想**. 当问题中有不确定因素时，往往需要运用分类思想解题. 本题中，点 P 在线段 AB 上还是在线段 AB 外不确定，因此要将各种情况考虑清楚、全面.

链接中考训练 ☞(答案见242页)

8. △ABD 中，$AB=BD$，点 C 在直线 BD 上，$BD=3CD$，$\cos\angle CAD=\dfrac{5}{6}$，$AD=6$，求 AC.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

专题五 方程思想

专题解读>> 在解决数学问题时，有一种从未知转化为已知的手段就是通过设元，寻找已知与未知之间的等量关系，构造方程或方程组，然后求解方程或方程组完成未知向已知的转化，这种解决问题的思想称为方程思想.

例 9 [中考 · 河南] 如图 7-10 所示，我国两艘海监船 A，B 在南海海域巡航，某一时刻，两船同时收到指令，立即前往救援遇险抛锚的渔船 C，此时，B 船在 A 船的正南方向 5 海里处，A 船测得渔船 C 在其南偏东 45°方向，B 船测得渔船 C 在其南偏东 53°方向，已知 A 船的航速为 30 海里/小时，B 船的航速为 25 海里/小时，问 C 船至少要等待多长时间才能得到救援？(参考数据：$\sin53°\approx\frac{4}{5}$，$\cos53°\approx\frac{3}{5}$，$\tan53°\approx\frac{4}{3}$，$\sqrt{2}\approx1.41$)

导引：如图 11，作 $CE\perp AB$ 于 E. 设 $AE=EC=x$，则 $BE=x-5$，在 $Rt\triangle BCE$ 中，根据 $\tan53°=\frac{EC}{BE}$，可得 $\frac{4}{3}=\frac{x}{x-5}$，求出 x，再求出 BC、AC，分别求出 A、B 两船到 C 的时间，即可解决问题.

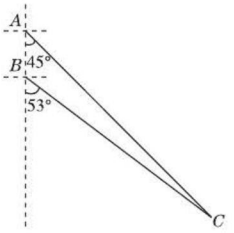


图 7-10

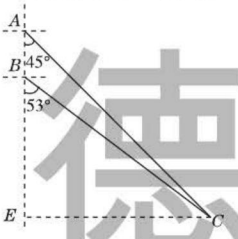


图 7-11

▶解：如图 7-11，过点 C 作 $CE\perp AB$ 于 E.

在 $Rt\triangle ACE$ 中，$\because\angle CAB=45°$，

$\therefore AE=EC$，设 $AE=EC=x$，则 $BE=x-5$，

在 $Rt\triangle BCE$ 中，$\because\tan53°=\frac{EC}{BE}$，$\therefore\frac{4}{3}=\frac{x}{x-5}$，解得 $x=20$，

$\therefore AE=EC=20$ 海里，$\therefore AC=20\sqrt{2}\approx28.2$ 海里，$BC=\frac{EC}{\sin53°}\approx25$ 海里，

$\therefore A$ 船到 C 的时间为 $\frac{28.2}{30}=0.94$(小时)，

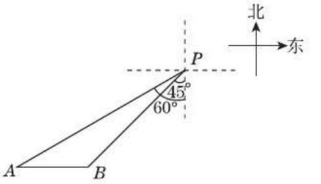
B 船到 C 的时间为 $\frac{25}{25}=1$(小时)，

$\therefore C$ 船至少要等待 0.94 小时才能得到救援.

点方法

(**方程思想**)本题考查解直角三角形的应用——方向角问题、锐角三角函数、速度、时间、路程之间的关系等知识，解题的关键是学会构建方程解决问题.

9. [中考 · 天水] 一艘轮船位于灯塔 P 南偏西 60°方向的 A 处，它向东航行 20 海里到达灯塔 P 南偏西 45°方向上的 B 处，若轮船继续沿正东方向航行，求轮船航行途中与灯塔 P 的最短距离.(结果保留根号)



(第 9 题图)

反思总结

对于可以运用方程思想解决的问题，它们都具有一个共性，即在这些问题中都存在可以用来构建方程的等量关系. 初中几何中，经常被用来构建方程的等量关系的有：(1)常见的特殊图形的面积、周长公式；(2)勾股定理；(3)相似三角形以及成比例线段；(4)锐角三角函数；(5)其他可以构造方程的等量关系(长度、角度、面积等常见量的和差倍分关系).

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

第8章 统计和概率的简单应用

揭秘事件的公平性

数学点拨

荣德基

你将学到的核心考点

- 抽样调查的方法 □
- 数据的分析与处理 □
- 相关变量间的关系 □
- 频率估计概率的应用 □

我们为你提供的核心方法

- 数形结合思想 □
- 统计思想 □

掌握这些考点和方法后，记得回来给自己打☑哦！

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

8.1 中学生的视力情况调查

1 点知识 · 拨考向 · 诊误区

知识点 1 选择调查方法

点知识

1. **普查**:为了一定的目的而考察全体对象的调查.其中所要考察的全体对象称为总体,组成总体的每一个考察对象称为个体.

   抽样调查:人们从总体中抽出一部分个体进行调查,这种调查方式称为抽样调查.其中,从总体中抽取的部分个体组成总体的一个样本.

2. **简单随机抽样**:一般地,从个体总数为 N 的总体中抽取容量为 n 的样本($n<N$),且每次抽取样本时,总体中的各个个体被抽到的可能性相同,这种抽样方法叫做简单随机抽样.常用的简单随机抽样方法有:抽签法、随机数表法和科学计算器(或计算机)产生随机数法.

3. 抽样调查与普查是两种不同的调查方式.如果不易直接判断适宜用哪种调查方式,那么可以采用**排除法**来思考:若不适宜用普查方式,则用抽样调查方式;若不适宜用抽样调查方式,则用普查方式.

要点精析 ///

1. 当总体容量较小时,适宜用抽签的方法进行简单随机抽样;当总体容量较大时,可用科学计算器(或计算机)产生随机数的方法进行简单随机抽样.

2. 用样本的平均数、方差来估计总体的平均数和方差,用样本的频数分布状态估计总体的频数分布状态,体会**用样本估计总体的思想**.

拨考向

典例剖析

考查角度 1 普查与抽样调查(高频考点)

例 1 [中考 · 重庆]下列调查中,最适合采用全面调查(普查)的是(　　)

A. 对重庆市中学生每周课外阅读时间情况的调查

B. 对重庆市市民知晓"礼让行人"交通新规情况的调查

C. 对重庆市中学生观看电影《厉害了,我的国》情况的调查

D. 对重庆国首艘国产航母 002 型各零部件质量情况的调查

导引:虽然普查得到的调查结果比较准确,但所费人力、物力和时间较多,而抽样调查得到的调查结果比较近似.

A. 对重庆市中学生每周课外阅读时间情况的调查,人数众多,意义不大,应采用抽样调查,故此选项错误;

B. 对重庆市市民知晓"礼让行人"交通新规情况的调查,人数众多,意义不大,应采用抽样调查,故此选项错误;

C. 对重庆市中学生观看电影《厉害了,我的国》情况的调查,人数众多,意义不大,应采用抽样调查,故此选项错误;

D. 对我国首艘国产航母 002 型各零部件质量情况的调查,意义重大,应采用普查,故此选项正确.故选 D.　▶答案:D

举一反三训练

(答案见 243 页)

1. [中考 · 辽阳]下列事件中适合采用抽样调查的是(　　)

A. 对乘坐飞机的乘客进行安检

B. 学校招聘教师,对应聘人员进行面试

C. 对"天宫二号"零部件的检查

D. 对端午节期间市面上粽子质量情况的调查

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

考查角度 2　样本、总体、个体、样本容量概念辨析

例 2　［中考·内江］为了了解内江市 2018 年中考数学学科各分数段成绩分布情况，从中抽取 400 名考生的中考数学成绩进行统计分析，在这个问题中，样本是指(　　)

A. 400

B. 被抽取的 400 名考生

C. 被抽取的 400 名考生的中考数学成绩

D. 内江市 2018 年中考数学成绩

导引：直接利用样本的定义，从总体中取出的一部分个体叫做这个总体的一个样本，进而分析得出答案.

为了了解内江市 2018 年中考数学学科各分数段成绩分布情况，从中抽取 400 名考生的中考数学成绩进行统计分析，在这个问题中，样本是指被抽取的 400 名考生的中考数学成绩. 故选 C.　▶答案：C

点方法

解答这类问题关键是正确理解总体、个体、样本、样本容量的概念，要注意的是总体、个体、样本指的是人或物的某一指标，而不是具体的人或物，样本容量没有单位.

考查角度 3　抽样调查的代表性

例 3　下列样本的选取具有代表性的是(　　)

A. 利用某地七月份的日平均气温估计当地全年的日平均气温

B. 为了了解一批洗衣粉的质量情况，从仓库中任意抽取 100 袋进行检验

C. 调查某校七年级(1)班学生的身高，来估计该校全体学生的身高

D. 为了解我国居民的年平均阅读时间，从大学生中随机抽取 10 万人进行调查

导引：抽取样本注意事项就是要考虑样本具有广泛性与代表性，所谓代表性，就是抽取的样本必须是随机的.

A. 利用某地七月份的日平均气温估计当地全年的日平均气温不具代表性，故 A 错误；B. 为了了解一批洗衣粉的质量情况，从仓库中任意抽取 100 袋进行检验，调查具有广泛性，代表性，故 B 正确；C. 调查某校七年级(1)班学生的身高，来估计该校全体学生的身高，调查不具代表性，故 C 错误；D. 为了解我国居民的年平均阅读时间，从大学生中随机抽取 10 万人进行抽查，调查不具代表性，故 D 错误. 故选 B.　▶答案：B

点方法

本题考查了抽样调查的代表性，解题时注意：样本具有代表性是指抽取的样本必须是随机的，即各个方面，各个层次的对象都要有所体现.

2. 2018 年镇江市有近 3 500 名考生参加中考，为了解这些考生的数学成绩，从中抽取 800 名考生的数学成绩进行统计分析，这个问题中样本是(　　)

A. 每名考生的数学成绩

B. 3 500 名考生的数学成绩

C. 被抽取的 800 名考生的数学成绩

D. 被抽取的 800 名考生



样本与总体

3. ［中考·安顺］要调查安顺市中学生了解禁毒知识的情况，下列抽样调查最适合的是(　　)

A. 在某中学抽取 200 名女生

B. 在安顺市中学生中抽取 200 名学生

C. 在某中学抽取 200 名学生

D. 在安顺市中学生中抽取 200 名男生

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

Ⅱ 点方法 · 拨技巧 · 探规律

典例剖析

拨尖角度 1　简单随机抽样

例 4 全校有七、八、九三个年级，每个年级有八个班，全校共有 1 236 名学生，在下列情况下如何用简单随机抽样的方法分别选取一个样本呢？

(1)在全校学生中随机抽取 40 名学生；

(2)在全校七、八、九三个年级中随机抽取两个班，并在这两个班中随机抽取 40 名学生.

导引：掌握产生随机数据的方法.

▶解：(1)将全校 1 236 名学生依次编号 1,2,3,…,1 236，再在这 1 236 个数中使用计算器随机产生 40 个不同的数，相应编号的学生即作为样本.

(2)将全校 24 个班依次编号 1,2,3,…,24，再在这 24 个数中使用计算器随机产生 2 个不同的数，再将相应编号的两个班中所有学生依次编号，若这两个班共有 $m(m>40)$ 名学生，那么就在 1,2,3,…,m 这 m 个数中使用计算器随机产生 40 个不同的数，相应编号的学生即作为样本.

点方法

在具体操作过程中一定要使每个个体被抽到的机会相等.

拨尖角度 2　根据统计结果做出合理的判定和预测

例 5 某中学为了解该校学生对四种国家一级保护动物的喜爱情况，围绕“在丹顶鹤、大熊猫、滇金丝猴、藏羚羊四种国家一级保护动物中，你最喜欢哪一种动物？(只写一种)”这一问题，在全校范围内随机抽取部分同学进行问卷调查. 甲同学根据调查结果计算得知：最喜欢丹顶鹤的学生人数占被抽取人数的 16%；乙同学根据调查结果绘制成如图 8.1-1 所示不完整的条形统计图. 请你根据甲、乙两位同学提供的信息解答下列问题：

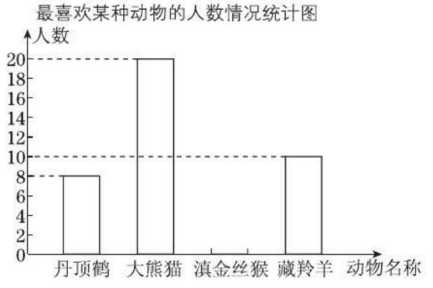


图 8.1-1

举一反三训练

(答案见 243 页)

4. 某班 40 名学生的数学成绩如下(单位：分)：
76,81,95,70,76,61,79,72,54,77,78,81,99,83,82,57,64,75,58,81,68,92,72,89,73,85,75,76,87,72,86,76,84,65,88,91,60,89,68,71.

(1)计算这 40 名学生数学成绩的平均数和方差；

(2)请用简单随机抽样的方法，分别抽取样本容量为 15 和 30 的两个样本，并分别计算这两个样本的平均数和方差，它们的结果一致吗？与总体的结果一致吗？(方差精确到 0.01)

5. [中考 · 南京]为了了解某市 120 000 名初中学生的视力情况，某校数学兴趣小组收集有关数据，并进行整理分析.

(1)小明在眼镜店调查了 1 000 名初中学生的视力，小刚在邻居中调查了 20 名初中学生的视力，他们的抽样是否合理？并说明理由.

(2)该校数学兴趣小组从该市七、八、九年级各随机抽取了 1 000 名学生进行调查，整理他们

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

(1)在这次调查中,一共抽取了多少名学生?

(2)补全条形统计图的空缺部分;

(3)如果全校有 1 200 名学生,请你估计全校最喜欢滇金丝猴的学生有多少名.

导引:根据条形统计图中最喜欢丹顶鹤的有 8 人,而最喜欢丹顶鹤的学生人数占被抽取人数的 16%,从而可求出抽样总人数.

▶解:(1)观察条形统计图发现,最喜欢丹顶鹤的有 8 人,而最喜欢丹顶鹤的学生人数占被抽取人数的 16%,所以一共抽取了 $8 \div 16\% = 50$(名)学生;

答:在这次调查中,一共抽取了 50 名学生.

(2)易得最喜欢滇金丝猴的学生有 $50 - 8 - 20 - 10 = 12$(名),补全条形统计图如图 8.1-2 所示:

(3)在抽取的学生中,最喜欢滇金丝猴的人数占被抽取人数的百分比为 $\frac{12}{50} \times 100\% = 24\%$.

由样本估计总体得全校最喜欢滇金丝猴的学生有 $1\,200 \times 24\% = 288$(名).

答:估计全校最喜欢滇金丝猴的学生有 288 名.

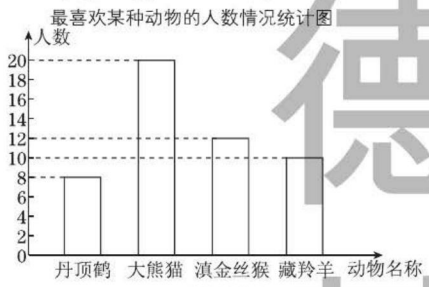


图 8.1-2

点方法

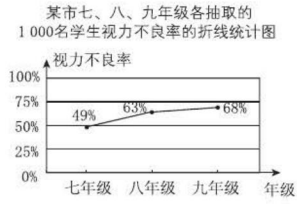
本题运用了**数形结合思想**和**统计思想**,考查从统计图中获取信息解决问题的能力,解决此类题的关键是“识图”与“用图”.

拔尖角度 3　用样本估计总体(拓展点)

例 6 某校八年级学生开展踢毽子比赛活动,每班派 5 名学生参加,按团体总分多少排列名次,在规定时间内每人踢 100 个以上(含 100)为优秀.下表是成绩最好的甲班和乙班各 5 名学生的比赛数据(单位:下):

	1 号	2 号	3 号	4 号	5 号	总数
甲班	89	100	96	118	97	500
乙班	100	95	110	91	104	500

的视力情况数据,得到如图所示的折线统计图.



(第 5 题图)

请你根据抽样调查的结果,估计该市120 000 名初中学生视力不良的人数是多少.

6. 在校体育集训队中,跳高运动员小军和小明的 9 次成绩如下:(单位:m)

小军:1.41、1.42、1.42、1.43、1.43、1.43、1.44、1.44、1.45.

小明:1.38、1.38、1.39、

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

经统计发现两班总数相等. 此时有学生建议,可以通过考察数据中的其他信息作为参考.

请你回答下列问题:

(1)计算两班的优秀率.

(2)计算两班比赛数据的方差.

(3)根据以上信息,你认为应该把冠军奖杯发给哪一个班级?简述你的理由.

导引:(1)根据优秀率的公式:优秀人数 ÷ 总人数 × 100% ,进行计算即可;

(2)根据方差的计算公式,计算即可;

(3)根据优秀率和方差进行比较即可.

▶解:(1)甲班的优秀率:$\frac{2}{5}\times 100\% = 0.4\times 100\% = 40\%$,

乙班的优秀率:$\frac{3}{5}\times 100\% = 0.6\times 100\% = 60\%$;

(2)甲班的平均数 $= \frac{89+100+96+118+97}{5} = 100$(下),

甲班的方差 $s_{甲}^2 = \frac{1}{5}\times[(89-100)^2+(100-100)^2+(96-100)^2+(118-100)^2+(97-100)^2] = 94$;

乙班的平均数 $= \frac{100+95+110+91+104}{5} = 100$(下),

乙班的方差 $s_{乙}^2 = \frac{1}{5}\times[(100-100)^2+(95-100)^2+(110-100)^2+(91-100)^2+(104-100)^2] = 44.4$;

(3)应该把冠军奖杯发给乙班. 因为乙班5名学生的比赛成绩的优秀率比甲班高,方差比甲班小,综合评定乙班踢毽子水平较高.

点方法

本题通过计算方差来估计总体情况,从而做出决策.

1.41、1.43、1.45、1.47、1.48、1.48.

只能有一人代表学校参赛,你认为选谁更合适?



Ⅲ 练基础 · 练方法 · 练技巧 ☞(答案见243页)

基础巩固练

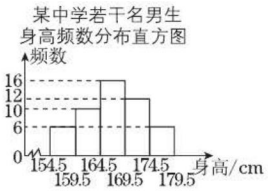
1. 下面调查中,适合采用普查方式的是(　　)
   A. 对全国中学生心理健康现状的调查
   B. 对某市食品合格情况的调查
   C. 对综艺栏目《星光大道》收视率的调查
   D. 对你所在的班级同学的身高情况的调查
2. 为了解某中学300名男生的身高情况,随机抽取若干名男生进行身高测量,将所得数据整理后,画出频数分布直方图(如图),估计该校男生的身高在169.5 ~ 174.5 cm的有(　　) 【导学号7367677】
   A. 12名　　B. 48名　　C. 72名　　D. 96名
3. 为了解中学生获取资讯的主要渠道,设置有"A:报纸,B:电视,C:网络,D:身边的人,E:其他"五项(五项中必选且只能选一项)的调查问卷,先随机抽取50名中学生进行

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

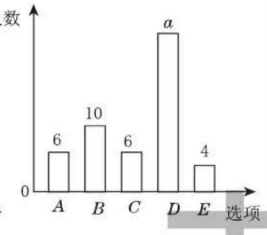
该问卷调查，根据调查的结果绘制条形统计图（如图），该调查的方式和 a 的值分别是（　　）

A. 普查，26　　B. 普查，24

C. 抽样调查，26　　D. 抽样调查，24



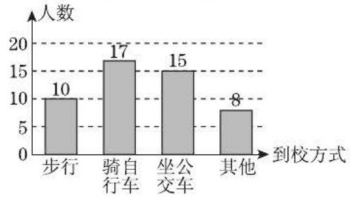
（第 2 题图）



（第 3 题图）

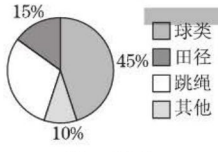
4. 某学校为了调查高三年级的 200 名文科学生完成课后作业所需时间，由学生会的学生随机抽取 20 名文科学生进行调查，这种抽样的方法为_____.

5. 某初中学校共有学生 720 人，该校有关部门从全体学生中随机抽取了 50 人对其到校方式进行调查，并将调查结果制成了如图所示的条形统计图，由此可以估计全校坐公交车到校的学生有_____人.



（第 5 题图）

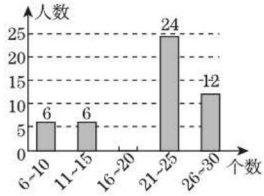
6. 某校为了解学生喜爱的体育活动项目，随机抽查了 100 名学生，让每人选一项自己喜爱的项目，并制成如图所示的扇形统计图. 如果该校有 1 200 名学生，那么喜爱跳绳的学生约有_____名.



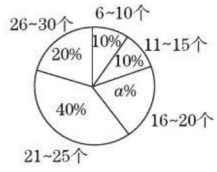
（第 6 题图）

7. [中考 · 泰州]“泰微课”是学生自主学习的平台，某初级中学共有 1 200 名学生，每人每周学习的数学泰微课都在 6 至 30 个之间（含 6 和 30），为进一步了解该校学生每周学习数学泰微课的情况，从三个年级随机抽取了部分学生的相关学习数据，并整理、绘制成统计图如下：

每周学习数学泰微课人数的条形统计图



每周学习数学泰微课人数分布扇形统计图



（第 7 题图）

根据以上信息完成下列问题：

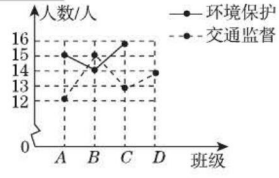
（1）补全条形统计图；

（2）估计该校全体学生中每周学习数学泰微课在 16 至 30 个之间（含 16 和 30）的人数.

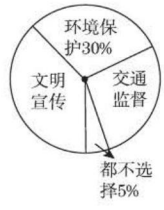
能力提升练

8. [中考 · 湖州]某校积极开展中学生社会实践活动，决定成立文明宣传、环境保护、交通监督三个志愿者队伍，每名学生最多选择一个队伍，为了了解学生的选择意向，随机抽取 A，B，C，D 四个班，共 200 名学生进行调查. 将调查得到的数据进行整理，绘制成如下统计图（不完整）.

各班选择交通监督和环境保护志愿者队伍的学生人数折线统计图



200名学生选择志愿者队伍情况的扇形统计图



（第 8 题图）

（1）求扇形统计图中交通监督所在扇形的圆心角度数；

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

(2)求 D 班选择环境保护的学生人数,并补全折线统计图;

(3)若该校共有学生 2 500 人,试估计该校选择文明宣传的学生人数.

9. [中考 · 宿迁]某市举行“传承好家风”征文比赛,已知每篇参赛征文成绩记 m 分($60 \leqslant m \leqslant 100$),组委会从 1 000 篇征文中随机抽取了部分参赛征文,统计了它们的成绩,并绘制了如下不完整的统计表和统计图.

征文比赛成绩频数分布表

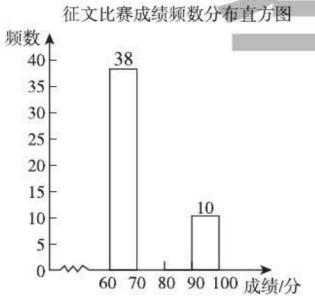
分数段/分	频数	频率
$60 \leqslant m < 70$	38	0.38
$70 \leqslant m < 80$	a	0.32
$80 \leqslant m < 90$	b	c
$90 \leqslant m \leqslant 100$	10	0.1
合计		1

请根据以上信息,解决下列问题:

(1)征文比赛成绩频数分布表中 c 的值是_____;

(2)补全征文比赛成绩频数分布直方图;

(3)若 80 分以上(含 80 分)的征文将被评为一等奖,试估计全市获得一等奖征文的篇数.



(第 9 题图)

思维拓展练

10. 经市场调查,某种优质西瓜质量为(5 ± 0.25)kg 的最为畅销. 为了控制西瓜的质量,农科所采用 A、B 两种种植技术进行试验. 现从这两种技术种植的西瓜中各随机抽取 20 个,记录它们的质量如下(单位:kg):

A:

4.1	4.8	5.4	4.9	4.7	5.0	4.9	4.8	5.8	5.2
5.0	4.8	5.2	4.9	5.2	5.0	4.8	5.2	5.1	5.0

B:

4.5	4.9	4.8	4.5	5.2	5.1	5.0	4.5	4.7	4.9
5.4	5.5	4.6	5.3	4.8	5.0	5.2	5.3	5.0	5.3

(1)若质量为(5 ± 0.25)kg 的为优等品,根据以上信息完成下表:

	优等品数量/个	平均数	方差
A		4.990	0.103
B		4.975	0.093

(2)请分别从优等品数量、平均数与方差三方面对 A、B 两种技术作出评价;从市场销售的角度看,你认为推广哪种种植技术较好?

我的错题笔记

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

8.2 货比三家

1 点知识·拨考向·诊误区

知识点1 查询数据决策

点知识

1. 媒体是获取信息的一个重要渠道，借助媒体做决策是我们常用的方法之一. 从电视、报刊、互联网等媒体上收集一些有价值的信息，运用掌握的统计知识为我们决策某些事情提供帮助.
2. 数据的描述方法要科学合理，不同的人从不同的角度评判，可以得出不同的结果. 不同的人关注的重点不同，从所给数据得到的结论也各不相同.

要点精析

1. 在获取数据前要先确定获取数据的目的，由此决定收集什么数据是适当的，以及通过什么途径收集；
2. 借助媒体获取数据做决策时要准确把握数据的来源，分析数据的可信度；
3. 处理数据时可用以前学过的统计知识，如平均数、中位数、极差、方差、标准差等来刻画，也可以通过各种统计图表来反映，便于做出决策.

易错警示

1. 查询数据做决策时首先要保证数据来源应具有可靠性，其次要对数据做出科学处理. 一般来说，要有明确的目标才能做出科学的决策；
2. 用统计图表处理数据时，要注意不同类型的数据常用不同的统计图表.

拨考向

典例剖析

考查角度1 从媒体上获取信息做出决策

例1 某单位要购置一批电脑，为了决定买哪种品牌的，该单位办事人员在网上做了一定的信息收集，如下表所示：

销售量/万台 品牌 / 年份	A	B	C	D
2011	505	398	387	372
2012	519	421	390	392
2013	533	422	418	394

该单位应选择哪种品牌的电脑呢？

导引：可根据各品牌电脑在一年内的横向比较以及某种品牌电脑几年内的纵向发展进行决策.

举一反三训练

(答案见244页)

1. 小明准备在元旦促销期间购买一部手机，由于价格原因，他准备购买甲、乙、丙、丁四种品牌中最畅销的一种，最后通过电信部门中的朋友得知这四种品牌的手机在2018年10~12月中的销售情况如下表所示：

销量/万部 品牌 / 月份	甲种	乙种	丙种	丁种
10	2.5	2.0	1.5	2.0
11	2.0	2.0	2.0	1.5
12	1.5	2.0	2.5	1.0

根据表中的信息，他应购买(　　)的手机.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

▶解:由横向比较可见,A品牌电脑最畅销,由纵向比较即每年的增长势头来看,A品牌电脑有很大潜力,因此该单位应选择A品牌电脑.

点方法

研究表中的数据,对比做出选择.

考查角度2 整理数据做出决策

例2 小明准备去旅游,需要买一套运动服饰.现有三家商店正在做促销活动,同一品牌的运动衣、运动裤、运动鞋原价分别是50元、65元和30元.

A店:买一件运动衣再加55元,可以得到一条运动裤;

B店:买运动衣、运动裤再加25元,可以得到一双运动鞋;

C店:所有商品九折出售.

你认为选哪家商店最省钱?

导引:比较在三家商店购买一套运动服饰所用的钱数即可求解.

▶解:A店:50+30+55=135(元);

B店:50+65+25=140(元);

C店:(50+65+30)×90%=130.5(元).

130.5元<135元<140元,

所以选C店最省钱.

点方法

求出在各家商店购买需要的钱数,通过比较,再做出决策.

知识点2 全面分析数据

点知识

媒体中的很多信息不一定都是可靠的,我们既要从中获得尽可能多的有用信息,还要保持理智的心态,要对数据的来源、收集数据的方法、数据的呈现方式和由此得出的结论进行合理辨析.

要点精析

分析媒体数据信息要考虑以下几个方面:(1)数据的来源是否具有可靠性;(2)数据是否与实际相符,通常根据常识去判断;(3)数据的表达含义是否清楚;(4)数据是否具有代表性.

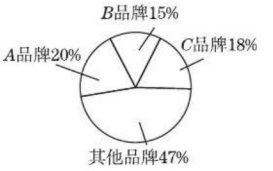
易错警示

图表产生的误导:各种媒体出于不同的目的,经常利用不规则的统计图表给人们造成错觉,因此我们要学会对各种媒体中出现的统计图表的准确性进行鉴别,对来自媒体的数据信息进行深入分析,合理质疑,是我们决策过程中不可缺少的环节.比较规范的统计报告应该说明调查的细节,统计图表的单位要统一.

A. 甲种品牌　　B. 乙种品牌

C. 丙种品牌　　D. 丁种品牌

2. 李明和赵红在商场看到一幅6月份销售各种品牌冰箱的扇形统计图(如图).



(第2题图)

李明认为:A品牌冰箱最畅销.

赵红认为:里面可能有比A品牌更畅销的冰箱.

(1)他们两个谁说的对?为什么?

(2)已知6月份其他品牌的冰箱共销售了94台,A、B、C品牌冰箱各销售了多少台?

荣德基

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

考查角度 1　利用统计知识对媒体信息全面分析(拓展点)

例 3　某种子公司在网上发布一则广告称:“种植小麦品种 A 能增加产量 50%”. 谈谈你对这则广告的看法.

导引:这则广告中,数据来源没有指明,无法确定是否可靠. 我们不知道种植小麦品种 A 能增加产量 50% 是与哪种小麦相比的,如果是与一种产量较低的品种相比的,那么广告内容就不可信了. 加之小麦品种 A 种植的条件是否与另一品种的种植条件相同,投入的成本是否一样,这些都无法知道.

▶解:要正确地评价小麦品种 A 是否产量高,还应知道与小麦品种 A 相比较的品种是否具有广泛的代表性,及对种植条件的需求是否一样,投入的成本是否相同,否则是不能确定广告的可信度的.

点方法

媒体中出现的数据很多,但不一定都是可靠的,这就要求我们对数据信息进行全面分析,合理质疑,尽量做到少受错误信息的引导.

考查角度 2　统计图表引起的错觉(拓展点)

例 4　如图 8.2-1 表示的是某综合商场 2016 ~ 2018 年甲、乙两种药的价格变化情况,根据统计图分析哪一种药的价格增长较快?

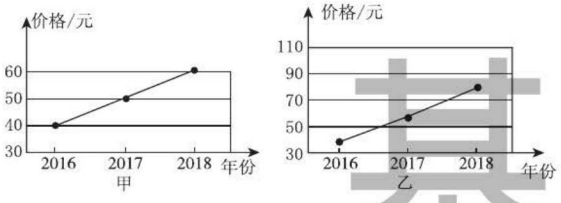


图 8.2-1

▶错解:甲种药的价格增长较快.

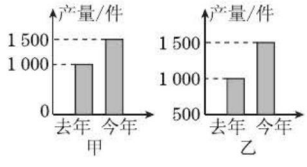
▶错解分析:从两个统计图中的数据可知,甲种药从 2016 年到 2018 年,价格上涨了 20 元,乙种药从 2016 年到 2018 年,价格从 40 元上涨到 80 元,乙种药的价格增长较快,这和统计图给人的感觉不一致,原因在于两个统计图中纵轴上的单位长度所表示的意义不一致.

▶正确解法:乙种药的价格增长较快.

3. 一则药商广告称:“本药品对各种癌症的治愈率达 80%,研制成功 10 年来,已使几万名癌症患者得以康复.”对此,你有什么看法?

4. 某公司两个车间生产同一种产品,产量都从去年的 1 000 件增至今年的 1 500 件,可两个车间主任报送的统计图却不一样.

图中的_____能较准确地反映产量的增长情况.



(第 4 题图)

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

Ⅱ 点方法 · 拨技巧 · 探规律

典例剖析

拔尖角度 1　从统计图表获取信息

例 5 某商厦对销量较大的 A、B、C 三种品牌的牙膏进行了问卷调查，发放问卷 260 份（问卷由单选和多选组成），对收回的 246 份问卷进行了整理，部分数据如下：

最近一次购买各种品牌牙膏用户比例，如图 8.2-2.

用户对三种品牌牙膏满意情况汇总表如下：

内容	质量			广告			价格		
品牌	A	B	C	A	B	C	A	B	C
满意户数	196	120	119	166	174	109	100	97	102

根据上述信息回答下列问题：

(1) A 品牌牙膏的主要竞争优势是什么？你是怎么看出来的？

(2) 广告对用户选择品牌有影响吗？请简要说明理由.

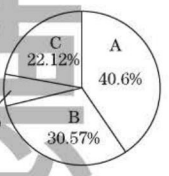


图 8.2-2

导引：(1) 由用户对三种品牌牙膏满意情况汇总表，可知对 A 品牌牙膏的质量满意的最多；

(2) 从统计表和扇形统计图中可看出：对 B 品牌牙膏的广告满意的较多，购买 B 品牌的用户高于 C 品牌的，由此即可得出答案.

▸解：(1) A 品牌牙膏的主要竞争优势是质量，理由是：

①对 A 品牌牙膏的质量满意的最多；

②对 A 品牌牙膏的广告、价格满意的不是最多.

∴ A 品牌牙膏靠的是质量优势.

(2) 广告对用户选择品牌有影响，理由是：

①对 B、C 品牌牙膏的质量、价格满意的用户相差不多；

②对 B 品牌牙膏的广告满意的用户比 C 品牌的多，且相差较大；

③购买 B 品牌牙膏的用户比例高于 C 品牌的.

∴ 广告影响用户选择品牌.

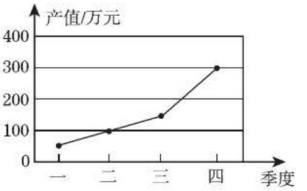
点方法

解答这类问题不仅要全面理解统计图给出的信息，还要考虑统计表中的数据信息，从而做出综合评价.

举一反三训练

(答案见 244 页)

5. 如图是某工厂今年四个季度产值统计图，下列说法正确的是(　　)



(第 5 题图)

A. 每季度的产值有增有减

B. 前三个季度的产值增长较快

C. 后三个季度的产值增长量相等

D. 第四季度的产值增长最快

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

拔尖角度 2　多个统计量综合分析数据(拓展点)

例 6 某市某中学举行“中国梦·校园好声音”歌手大赛,初、高中部根据初赛成绩各选出 5 名选手组成初中代表队和高中代表队参加学校决赛. 两个队各选出的 5 名选手的决赛成绩(满分为 100 分)如图 8.2-3 所示.

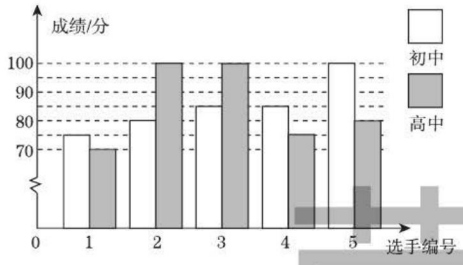


图 8.2-3

(1)填写下表;

(2)结合两队成绩的平均数和中位数,分析哪个队成绩较好;

(3)计算两队成绩的方差并判断哪个队选手成绩较为稳定.

	平均数/分	中位数/分	众数/分
初中		85	
高中	85		100

导引:(1)根据统计图可补全统计表;

(2)根据平均数和中位数的统计意义分析得出即可;

(3)分别求出初中、高中代表队成绩的方差即可.

▶解:(1)85;85;80

(2)初中代表队成绩较好. 因为两个队成绩的平均数相同,初中代表队成绩的中位数高,所以在平均数相同的情况下中位数高的初中代表队成绩较好.

(3)$\because s_{初}^2=\frac{1}{5}\times[(75-85)^2+(80-85)^2+(85-85)^2+(85-85)^2+(100-85)^2]=70$,

$s_{高}^2=\frac{1}{5}\times[(70-85)^2+(100-85)^2+(100-85)^2+(75-85)^2+(80-85)^2]=160$,

$\therefore s_{初}^2<s_{高}^2$,因此,初中代表队选手成绩较为稳定.

点方法

解答这类问题的基本思路是首先根据条形统计图读取数据,最好用表格的形式将数据罗列出来,这样可以减少失误. 明确平均数、中位数、众数和方差各自的特征,结合具体情境体会平均数、中位数、众数和方差之间的差别,选择恰当的数据代表对数据做出评判或决策.

6. 泰州市某校八年级学生开展踢毽子比赛活动,每班派 5 名学生参加,按团体总数多少排列名次,在规定时间内每人踢 100 个以上(含 100)为优秀,下表是成绩最好的甲班和乙班 5 名学生的比赛数据(单位:个):

	甲班	乙班
1 号	89	100
2 号	100	95
3 号	96	110
4 号	118	91
5 号	97	104
总数	500	500

经统计发现两班总数相等,此时有学生建议,可以通过考察数据中的其他信息作为参考,请你回答下列问题:

(1)分别求出两班 5 名学生比赛成绩的中位数;

(2)计算并比较两班比赛数据的方差哪个小?

(3)根据以上信息,你认为应该把冠军奖状发给哪一个班?简述你的理由.

宋德基

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

Ⅲ 练基础 · 练方法 · 练技巧 (答案见245页)

基础巩固练

1. 电视上的广告可谓是五彩缤纷,广告的内容让人眼花缭乱,产品也让人心动,那么你对电视上的广告所持的态度是(　　)

A. 非常相信

B. 有一定可信度,值得考虑

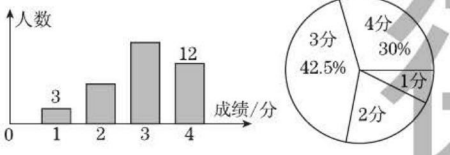
C. 不太相信

D. 一点也不相信

2. 对某校八年级随机抽取若干名学生进行体能测试,成绩记为1分,2分,3分,4分,共4个等级,将调查结果绘制成如图所示的条形统计图和扇形统计图. 根据图中信息,可得这些学生的平均成绩是(　　)

A. 2.25分　　B. 2.5分

C. 2.95分　　D. 3分

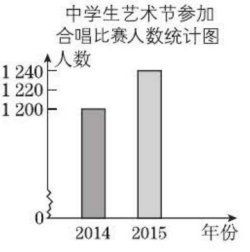


(第2题图)

3. 某个国内人力资源网站的在线调查显示,通过网站找到工作的人数占全部已就业人数的80%,你认为这个数据_____(填"可信"或"不可信").　　【导学号 7367677】

4. 某厂对A、B、C三种型号的冰箱分别降价5%、10%、15%,因此该厂宣传其产品平均降价10%,你认为该厂的说法正确吗?_____(填"正确"或"不正确").

5. 小张根据某媒体上报道的一幅条形统计图(如图),在随笔中写道:"……今年在我市的中学生艺术节上,参加合唱比赛的人数比去年激增……"小张的说法对不对?为什么?(请你用一句话对小张的说法做一个评价)

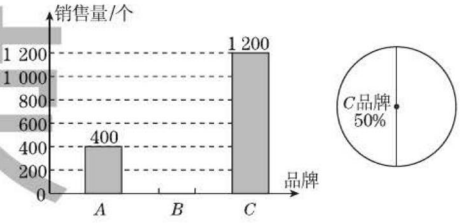


(第5题图)

_____

_____.

6. 某商场对今年端午节这天销售A、B、C三种品牌粽子的情况进行了统计,绘制了如图所示的统计图. 根据图中信息解答下列问题:



(第6题图)

(1)哪一种品牌粽子的销售量最大?

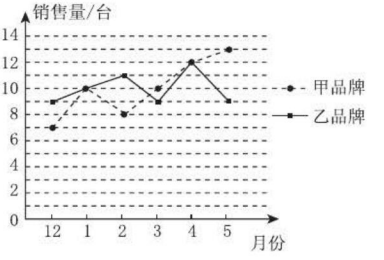
(2)补全条形统计图;

(3)求出A品牌粽子在扇形统计图中所对应扇形的圆心角的度数;

(4)明年端午节期间该商场对A,B,C三种品牌的粽子该如何进货?请你根据上述统计信息提一条合理化的建议.

能力提升练

7. 某家电公司营销点自去年12月至今年5月销售两种不同品牌冰箱的数量如图:



(第7题图)

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

(1)完成下表：

	平均数/台	方差
甲品牌销售量	10	
乙品牌销售量		$\frac{4}{3}$

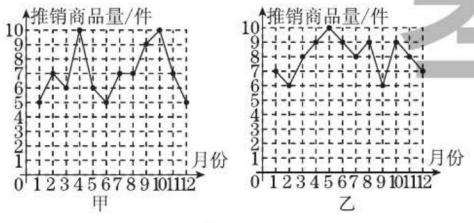
(2)请你依据折线图的变化趋势，对营销点今后的进货情况提出建议.

8. 小强家想购买一套商品房，他爸爸通过媒体查询，获得以下信息：

位置	面积/平方米	房价/万元	小强到学校的路程/千米
A 处	82	20	0.5
B 处	67	13.2	2
C 处	73	14.7	1
D 处	84	16	0.8

已知小强家对住房面积要求在 60～90 平方米，考虑到房价及小强到学校的路程，你认为小强家应选上述四处中的哪一处住房呢？

9. 某公司为了评价甲、乙两位营销员去年的营销业绩，统计了两人去年 12 个月的营销业绩(所推销商品的件数)如图所示：



(第 9 题图)

(1)利用图中信息，完成下表：

	平均数/件	中位数/件	众数/件	方差
甲	7			
乙				1.5

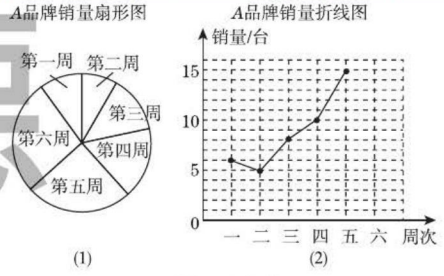
(2)假若你是公司主管，请你根据以上图表信息，应用所学的统计知识，对两人的营销业绩做出评价.

思维拓展练

10. 某太阳能热水器经销商在六周内试销 A、B 两种品牌的太阳能热水器，试销期间两种品牌的销量相同，试销结束后，依据统计数据绘制了以下尚不完整的统计图表.

(1)在图(1)中，“第五周”所在扇形的圆心角等于_____°.

B 品牌销量统计表						
周次	一	二	三	四	五	六
销量/台	14	12	14	8	7	5



(第 10 题图)

(2)补全 A 品牌销量折线图，画出 B 品牌销量折线图.

(3)请分别写出 A、B 两种品牌太阳能热水器周销量的中位数.

(4)如果该经销商决定从这两种品牌中挑选一种作为该品牌的一级代理商，请结合折线图进行简要分析，判断该经销商应选择代理哪种品牌的太阳能热水器.

基础 德禁

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

8.3 统计分析帮你做预测

1 点知识 · 拨考向 · 诊误区

知识点 构建函数模型预测

点知识

对两个相关变量，分别以这两个变量为横、纵坐标，建立平面直角坐标系，观察已有数据排列特点，根据特点猜想模型，构建合适的函数模型，求出关系式，再根据关系式，预测一个变量随另一个变量的变化趋势.

要点精析 ///

用函数表达式分析数据的一般步骤：

(1)制作统计表；

(2)选择事件中的两个量分别作为横坐标、纵坐标，建立直角坐标系；

(3)根据统计表中的数据描点；

(4)用光滑的线作出图像；

(5)根据**待定系数法**求出函数表达式；

(6)根据函数表达式预测事件的发展趋势.

易错警示 ///

画线时，尽量使点在线上或在线的两旁，不宜偏离太多.

拨考向

典例剖析

考查角度1 根据已有图像预测

例1 容积率 t 是指在房地产开发中建筑面积与用地面积之比. 为充分利用土地资源，更好地解决人们的住房需求，并适当的控制建筑物的高度，一般地，容积率 t 不小于1且不大于8. 一房地产开发商在开发某小区时，结合往年开发经验知，建筑面积 $M(m^2)$ 与容积率 t 的关系可近似地用如图8.3-1中的线段 l 来表示.

试求图中线段 l 的函数关系式，并求出开发该小区的用地面积.

导引：可先设出线段 l 的通式，再根据图像中的信息运用待定系数法来确定线段 l 的函数关系式，然后根据此函数关系式以及自变量的取值范围来确定小区的面积.

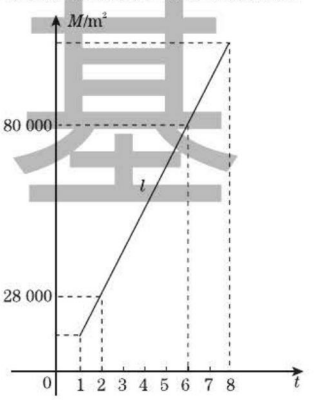


图8.3-1

▶解：设线段 l 的函数关系式为 $M=kt+b$，由图像可知：

$$\begin{cases}2k+b=28\,000,\\6k+b=80\,000,\end{cases}\text{解得}\begin{cases}k=13\,000,\\b=2\,000.\end{cases}$$

线段 l 的函数关系式为 $M=13\,000t+2\,000(1\leqslant t\leqslant 8)$.

当 $t=1$ 时，$S_{用地}=M$，

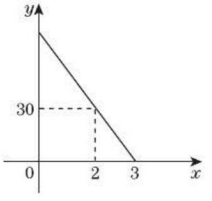
把 $t=1$ 代入 $M=13\,000t+2\,000$，得 $M=15\,000$，

即开发该小区的用地面积是 $15\,000\ m^2$.

举一反三训练

(答案见246页)

1. 如图，某航母舰载机从着舰的瞬间到在航空甲板上停下来这一过程中，飞机的变化速度和时间可近似地看做一次函数关系，其中 y 表示飞机着舰过程的变化速度(单位：米/秒)，x 表示飞机着舰所用的时间(单位：秒)，根据图像计算飞机着舰时的瞬间速度.



(第1题图)

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

点方法

本题体现了**数形结合思想**，解答这类问题的基本思路是根据给出的函数图像，确定函数类型，进而根据待定系数法求出函数关系式，再根据函数关系式计算.

考查角度 2　根据给出的数据在直角坐标系中画图像做预测

例 2 某衡器厂的 RGZ-120 型体重秤，最大称重 120 千克，你在体检时可看到如图 8.3-2 的显示盘. 已知指针顺时针旋转角 x（度）与体重 y（千克）有如表关系：

x/度	0	72	144	216
y/千克	0	25	50	75



图 8.3-2

（1）根据表中的数据在平面直角坐标系中描出相应的点，顺次连接各点后，你发现这些点在哪一种图像上？合理猜想符合这个图像的函数表达式.

（2）验证这些点的坐标是否满足此函数表达式，归纳你的结论（写出自变量 x 的取值范围）.

（3）当指针旋转到 158.4 度的位置时，显示盘上的体重读数模糊不清，用函数表达式求出此时的体重.

导引：（1）根据表中的数据，可通过描点、连线来判断函数的图像，进而猜想出函数表达式.

（2）将要验证的点的坐标代入函数表达式中，看看是否满足函数表达式.

（3）将 $x=158.4$ 代入（2）中的函数表达式里即可得出体重的值.

▶解：（1）如图 8.3-3，描点、连线后，发现四个点在经过原点的一条直线上，猜想 $y=\frac{25}{72}x$.

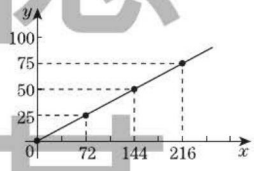


图 8.3-3

（2）把 $x=144$，$y=50$ 代入函数表达式中，左边 $=50$，右边 $=\frac{25}{72}\times144=50$，左边 = 右边，因此点（144，50）的坐标满足 $y=\frac{25}{72}x$.

同理可验证（0，0），（72，25），（216，75）也满足 $y=\frac{25}{72}x$. 所以这些点的坐标满足此函数表达式. 自变量 x 的取值范围是 $0\leqslant x\leqslant345.6$.

（3）当 $x=158.4$ 时，$y=\frac{25}{72}\times158.4=55$.

答：此时的体重是 55 千克.

点方法

本题运用**函数思想**、**数形结合思想**和**归纳思想**，根据已知信息，建立坐标系，研究点的整体分布规律，构建合理的函数模型求解.

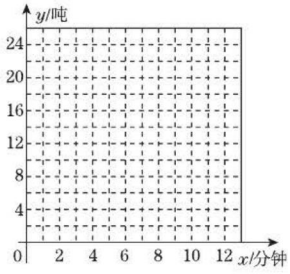
2. 某太阳能热水器，其水箱的最大蓄水量为 30 吨，当向水箱注水时，观察得到一组数据如下表：（表中 y 表示蓄水量，x 表示注水时间）

x/分钟	0	4	8	12	…
y/吨	2	8	14	20	…

（1）根据表中的数据，在坐标系中描出相应的各点，并顺次连接各点.

（2）你认为这些点在哪一个函数的图像上？请说明理由.

（3）小明说，只需 18 分钟即可注满水箱，你认为小明的说法正确吗？说明理由.



（第 2 题图）

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

Ⅱ 点方法 · 拨技巧 · 探规律

典例剖析

拔尖角度 1　根据反比例函数预测

例 3 心理学家研究发现，一般情况下，一节课 40 分钟中，学生的注意力随教师讲课的变化而变化. 开始上课时，学生的注意力逐步增强，中间有一段时间学生的注意力保持较为理想的稳定状态，随后学生的注意力开始分散. 经过实验分析可知，学生的注意力指数 y 随时间 x（分钟）的变化规律如图 8.3-4 所示（其中 AB、BC 分别为线段，CD 为双曲线的一部分）.

（1）求出线段 AB，曲线 CD 的函数表达式，并写出自变量的取值范围.

（2）开始上课后第 5 分钟与第 30 分钟相比较，何时学生的注意力更集中？

（3）一道数学竞赛题，需要讲 19 分钟，为了效果较好，要求学生的注意力指数最低达到 36，那么经过适当安排，老师能否在学生注意力达到所需的状态下讲解完这道题目？

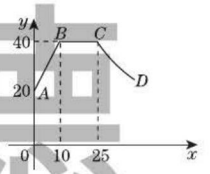


图 8.3-4

导引：（1）利用待定系数法分别求出 AB 和 CD 的函数表达式，进而得出答案；

（2）利用（1）中所求，得出第 5 分钟和第 30 分钟的注意力指数，最后比较判断；

（3）分别求出注意力指数为 36 时的两个时间，再将两时间之差和 19 分钟比较，大于或等于 19 分钟则能讲解完，否则不能.

▶解：（1）设线段 AB 所在的直线的函数表达式为 $y_1 = k_1 x + 20$，

把 $B(10,40)$ 的坐标代入，得 $k_1 = 2$，

∴ 线段 AB 的函数表达式为：$y_1 = 2x + 20 (0 \leqslant x \leqslant 10)$.

设曲线 CD 所在双曲线的函数表达式为 $y_2 = \dfrac{k_2}{x}$，

把 $C(25,40)$ 的坐标代入，得 $k_2 = 1\,000$，

∴ 曲线 CD 的函数表达式为：$y_2 = \dfrac{1\,000}{x} (25 \leqslant x \leqslant 40)$.

（2）当 $x = 5$ 时，$y_1 = 2 \times 5 + 20 = 30$，

当 $x = 30$ 时，$y_2 = \dfrac{1\,000}{30} = \dfrac{100}{3}$，∴ $y_1 < y_2$.

∴ 第 30 分钟注意力更集中.

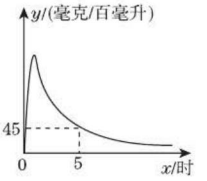
（3）令 $y_1 = 36$，∴ $36 = 2x + 20$，∴ $x = 8$.

令 $y_2 = 36$，∴ $36 = \dfrac{1\,000}{x}$，∴ $x = \dfrac{1\,000}{36} \approx 27.8$，

举一反三训练

☞（答案见 246 页）

3. 实验数据显示，一般成人喝半斤低度白酒后，1.5 小时内其血液中酒精含量 y（毫克/百毫升）与时间 x（时）的关系可近似地用二次函数 $y = -200x^2 + 400x$ 刻画；1.5 小时后（包括 1.5 小时）y 与 x 可近似地用反比例函数 $y = \dfrac{k}{x} (k > 0)$ 刻画（如图所示）.



（第 3 题图）

（1）根据上述数学模型计算：

① 当 $x = 5$ 时，$y = 45$，求 k 的值.

② 喝酒后血液中的酒精含量不低于 72 毫克/百毫升的时间持续了多长？

（2）按国家规定，车辆驾驶人员血液中的酒精含量大于或等于 20 毫克/百毫升时属于“酒后驾驶”，不能驾车上路. 参照上述数学模型，假设某驾驶员晚上 20:00 在家喝完半

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

∵ 27.8 − 8 = 19.8(分钟) > 19 分钟,

∴ 经过适当安排,老师能在学生注意力达到所需的状态下讲解完这道题目.

点方法

此题主要考查了反比例函数的应用. 解题的关键是根据实际意义列出函数表达式,从实际意义中找到对应的变量的值,利用待定系数法求出函数表达式,再根据自变量的值求对应的函数值.

拔尖角度 2　根据二次函数预测

例 4 某公司 2018 年 1 ~ 3 月的月利润 y(万元)与月份 x 之间的关系如图 8.3-5 所示. 图中的折线可近似看做是抛物线的一部分.

(1)根据图像提供的信息,求出 y 与 x 之间的函数关系式;

(2)公司开展技术革新活动,定下目标:今年 6 月份的利润仍以图中抛物线的上升趋势上升. 6 月份的利润公司预计将达到多少万元?

(3)如果公司 1 月份的利润率为 13%,以后逐月增加 1 个百分点. 已知 6 月上旬平均每日实际销售收入为 3.6 万元,照此推算 6 月份公司的利润是否会达到(2)中所确定的目标?

(成本总价 = 利润 ÷ 利润率,销售收入 = 成本总价 + 利润)

导引:(1)根据三点坐标易求关系式;

(2)即求当 $x = 6$ 时二次函数的值;

(3)因为 6 月份的利润目标已知,所以按增长速度求实际利润进行比较.

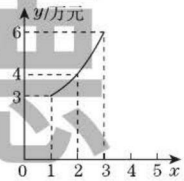


图 8.3-5

▶解:(1)设 y 与 x 之间的函数关系式为:

$y = ax^2 + bx + c$.

依题意,得 $\begin{cases} a + b + c = 3, \\ 4a + 2b + c = 4, \\ 9a + 3b + c = 6, \end{cases}$ 解得 $a = \frac{1}{2}, b = -\frac{1}{2}, c = 3$,

∴ y 与 x 之间的函数关系式为:$y = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x + 3$.

(2)当 $x = 6$ 时,解得 $y = 18$.

∴ 6 月份的利润公司预计将达到 18 万元,

(3)6 月份的利润率为:13% + 5 × 1% = 18%,

6 月份的实际销售收入为:3.6 × 30 = 108(万元),

解法一:设 6 月份的实际利润为 x 万元,依题意,得 $\frac{x}{0.18} + x = 108$.

解得 $x \approx 16.5$.

∵ 16.5 万元 < 18 万元,

∴ 6 月份公司的利润不会达到(2)中所确定的目标.

斤低度白酒,第二天早上 7:00 能否驾车去上班?请说明理由.

4. 武夷山市某茶厂生产某品牌茶叶,它的成本价是每千克 180 元,售价是每千克 230 元,年销售量为 10 000 千克. 随着产量增加,为了扩大销售量,增加效益,公司决定拿出一定量的资金做广告. 根据市场调查,若每年投入广告费为 x 万元时,产品的年销售量将是原销售量的 y 倍,且 y 与 x 之间的关系如图所示,可近似看成是抛物线的一部分.

(1)根据图像提供的信息,求 y 与 x 之间的函数关系式;

(2)求年利润 s(万元)与广告费 x(万元)之间的函数关系式;(年利润 = 年销售总额 − 成本费 − 广告费)

(3)问广告费 x 在什么范围内,公司获得的年利润 s 随广告费 x 的增多而增多?

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

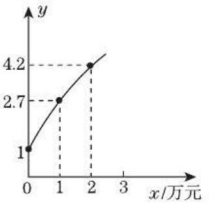
解法二:6 月份预计销售收入:$\frac{18}{0.18}+18=118$(万元),

∵ 108 万元 < 118 万元,

∴ 6 月份公司的利润不会达到(2)中所确定的目标.

点方法

前两个问题不难,最后一个问题有一个比较过程,选择利润比较直接,当然也可选择销售收入进行比较.



(第 4 题图)

III 练基础 · 练方法 · 练技巧 (答案见 246 页)

基础巩固练

1. 某小卖部为了了解热茶销售量 y(杯)与气温 x(℃)之间的关系,随机统计了某 4 天卖出的热茶的杯数与当天的气温,如下表:

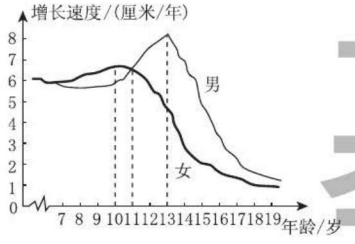
气温/℃	18	13	10	−1
销售量/杯	24	33	40	63

由表中数据算得 $y=kx+b$ 中的 $k\approx -2$,预测当气温为 −5 ℃时,热茶销售量为 (　　)

A. 65 杯　　B. 68 杯

C. 70 杯　　D. 72 杯

2. 根据生物学研究结果,青春期男、女生身高增长速度呈现如图所示的规律,由图可以判断,下列说法错误的是(　　)



(第 2 题图)

A. 男生在 13 岁时身高增长速度最快

B. 女生在 10 岁以后身高增长速度放慢

C. 11 岁时男、女生身高增长速度基本相同

D. 女生身高增长的速度总比男生慢

3. 预测人口的变化趋势有多种方法,“直接推算法”使用的公式是 $P_n=P_0(1+k)^n(k>-1)$,其中 P_n 为预测期人口数,P_0 为初期人口数,k 为预测期内年增长率,n 为预测期间隔年数. 如果在某一时期有 $-1<k<0$,那么在这期间人口数(　　)

A. 呈上升趋势　　B. 呈下降趋势

C. 摆动变化　　D. 不变

4. 以下数据是某种产品的广告费支出 x(百万元)与销售额 y(百万元)之间的对应关系,

广告费支出 x/百万元	2	4	5	6	8
销售额 y/百万元	30	40	60	50	70

(1)以 x 为横坐标,y 为纵坐标,在平面直角坐标系中画出相应的点;

(2)求 y 与 x 之间关系的近似表达式;

(3)当广告费支出为 7 百万元时,这种产品的销售额约为多少?(精确到 0.1 百万元)

5. 科学研究发现,空气含氧量 y(克/立方米)与海拔高度 x(米)之间近似地满足一次函数关系. 经测量,在海拔高度为 0 米的地方,空气含氧量约为 299 克/立方米,在海拔高度为 2 000 米的地方,空气含氧量约为 235 克/立方米.

(1)求出 y 与 x 的函数表达式;

(2)已知某山的海拔高度为 1 400 米,请你求出该山山顶处的空气含氧量约为多少.

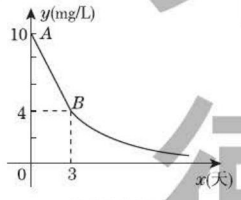
基础 德基

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

6. [中考·连云港]环保局对某企业排污情况进行检测,结果显示:所排污水中硫化物的浓度超标,即硫化物的浓度超过最高允许的 1.0 mg/L. 环保局要求该企业立即整改,在 15 天以内(含 15 天)排污达标. 整改过程中,所排污水中硫化物的浓度 y(mg/L)与时间 x(天)的变化规律如图所示,其中线段 AB 表示前 3 天的变化规律,从第 3 天起,所排污水中硫化物的浓度 y 与时间 x 成反比例关系.

(1)求整改过程中硫化物的浓度 y 与时间 x 的函数表达式;

(2)该企业所排污水中硫化物的浓度,能否在 15 天以内不超过最高允许的 1.0 mg/L? 为什么?



(第 6 题图)

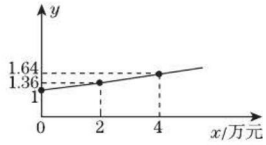
能力提升练

7. 某公司经销某品牌运动鞋,年销售量为 10 万双,每双鞋按 250 元销售,可获利 25%,设每双鞋的成本价为 a 元.

(1)试求 a 的值;

(2)为了扩大销售量,公司决定拿出一定量的资金做广告,根据市场调查,若每年投入广告费为 x 万元时,产品的年销售量将是原来年销售量的 y 倍,且 y 与 x 之间的关系如图所示,可近似看成是抛物线的一部分. 请根据图像提供的信息,求出 y 与 x 之间的函数关系式;

(3)在(2)的条件下求年利润 S(万元)与广告费 x(万元)之间的函数关系式,并请回答广告费 x 在什么范围内,公司获得的年利润 S 随广告费 x 的增大而增大?(注:年利润 = 年销售总额 − 成本费 − 广告费)



(第 7 题图)

思维拓展练

8. 某公司销售一种市场需求量较大的新型产品,每件新型产品的进价为 40 元,公司要求售价不低于进价,但不高于 65 元/件,通过市场调查,得到数据如下表所示:

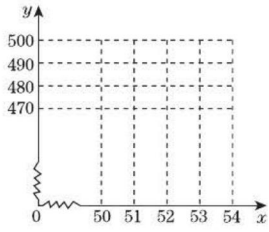
售价 x/(元/件)	50	51	52	53	…
年销售量 y/万件	500	490	480	470	…

(1)以售价为横坐标,年销售量为纵坐标把上表中的数据在如图的直角坐标系中描出相对应的点,顺次连接各点,观察并判断 y 与 x 的函数关系,并求出 y 与 x 的函数关系式(不必写出自变量的取值范围).

(2)每年销售该产品的总开支(不含进价)为 120 万元.

①求出该公司的年获利 W(万元)与售价 x(元/件)的函数关系式(年获利 = 年销售总额 − 年销售产品的总进价 − 年总开支).

②当售价为多少元/件时,能获得最大利润? 最大利润是多少?



(第 8 题图)

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

8.4 抽签方法合理吗

1 点知识 · 拨考向 · 诊误区

知识点 用抽签的方法决定某一个事件

点知识

1. 抽签虽然有先有后,但是先抽的人和后抽的人中签的机会是一样的,因此抽签对每一个人来说都是公平的,所以不必争先恐后.
2. 可用**列表法**或**画树状图法**求出前后抽签的概率一样大.

易错警示

用公式计算先抽签的概率与后抽签的概率易出错.

拨考向

典例剖析

考查角度 1　用抽签的方法决定一个事件(易错点)

例 1 在一次企业赞助的数学竞赛活动中,甲、乙两同学得分相同,获并列第一名,于是每人可在准备好的 4 件奖品中获得其中一件,至于谁得什么奖品只好用抽签的方法来决定,4 个纸签内分别写上了文具盒、计算器、篮球、文曲星 4 个奖品名称,在看不到签中所写内容的情况下:

(1)求第一位抽奖的同学抽中计算器的概率是多少;

(2)有同学认为,如果甲先抽,那么他抽到文曲星的概率会大些,你同意这种说法吗? 请说明理由.

▸错解:(1)计算器只有 1 件,奖品共 4 件,

所以第一位抽奖的同学抽中计算器的概率为$\frac{1}{4}$.

(2)同意这种说法. 理由如下:若甲先抽,P(甲抽到文曲星)$=\frac{1}{4}$.

乙有两种情况,当甲没抽到文曲星时,乙抽到文曲星的概率是$\frac{1}{3}$,当甲抽到文曲星时,乙抽到文曲星的概率是 0,这两种情况各占一半,则 P(乙抽到文曲星)$=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{6}$,所以甲抽到文曲星的概率大.

▸错解分析:(2)题的解法是错误的,这类题应用列表法或画树状图法来解答.

▸正确解法:(1)计算器只有 1 件,奖品共 4 件,

所以第一位抽奖的同学抽中计算器的概率为$\frac{1}{4}$.

举一反三训练

(答案见 247 页)

1. 我们用抽签的方法从 3 名同学中选 1 名去参加某音乐会. 事先准备 3 张相同的纸条,并在 1 张纸条上画上记号,其余 2 张纸条不画,把 3 张纸条放在一个盒子中搅匀,然后让 3 名同学去抽纸条,谁先抽,谁抽到画记号的纸条的概率会大些,你同意这种说法吗? 请说明理由.

宋德基

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

(2)不同意这种说法. 理由:画树状图如图 8.4-1,甲先抽,抽到文曲星的概率为$\frac{1}{4}$;

共有 12 种等可能的情况,乙抽奖,其中抽到文曲星的情况有 3 种,概率为$\frac{3}{12}=\frac{1}{4}$. 所以无论谁先抽,抽到文曲星的概率都相等.

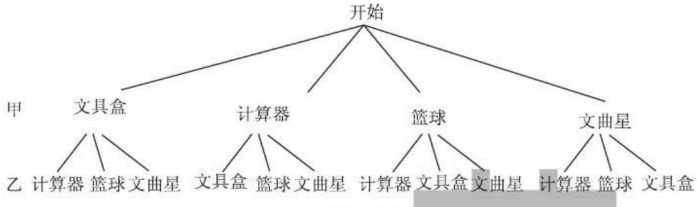


图 8.4-1

点方法

抽签虽然有先抽和后抽,但先抽者与后抽者中签的概率相等.

考查角度 2　游戏公平性的判断

例 2 从一副扑克牌中分离出所有的红桃,并将红桃 J 记为 11,红桃 Q 记为 12,红桃 K 记为 13,现将分离出来的红桃洗匀,背面朝上,从中任意抽取一张,上面的数是偶数时贝贝赢,是奇数时京京赢. 这个游戏规则是否公平? 说明理由.

▶错解:公平. 理由:因为数只有偶数和奇数,所以从中任意抽取一张为偶数或奇数的概率都是$\frac{1}{2}$.

▶错解分析:错解忽视了这 13 个数中有 6 个偶数,7 个奇数,贝贝和京京赢的概率是不等的.

▶正确解法:不公平. 京京赢的概率大一点. 理由:因为这 13 个数中有 6 个偶数,7 个奇数,所以从中任意抽取一张,上面的数是偶数的概率是$\frac{6}{13}$,是奇数的概率是$\frac{7}{13}$,而$\frac{6}{13}<\frac{7}{13}$,所以京京赢的概率大一点.

2. 玩一个抛掷两个筹码的游戏. 准备两个筹码,一个两面都画“×”;另一个一面画“×”,另一面画“□”,甲、乙各持一个筹码抛掷一次. 游戏规则:掷出一对“×”,甲得 1 分. 掷出一个“×”、一个“□”,乙得 1 分. 你认为这个游戏设计得合理吗?

II 点方法·拨技巧·探规律

典例剖析

拨尖角度 1　修改不公平的游戏规则

例 3 一个不透明的口袋中装有 4 个完全相同的小球,分别标有数 1、2、3、4,另有一个可以自由旋转的圆盘,被分成面积相等的 3 个扇形区域,分别标有数 1、2、3(如图 8.4-2 所示). 小颖和小亮想通过玩游戏的方式来决定谁代表学校参加歌咏比赛,游戏规

举一反三训练

(答案见 247 页)

3. 有一个可自由转动的转盘,被分成了 4 个相同的扇形,分别标有数 1、2、3、4(如图所示),另有一个不透明的口袋装有

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

则为:一人从口袋中摸出一个小球,另一人转动圆盘,如果所摸球上的数与圆盘上转出的数之和小于4,那么小颖去;否则小亮去.

(1)用画树状图法或列表法求出小颖参加比赛的概率;

(2)你认为这个游戏规则公平吗?请说明理由;若不公平,请修改游戏规则,使游戏对双方公平.

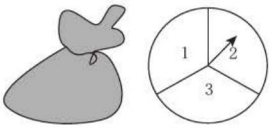


图 8.4-2

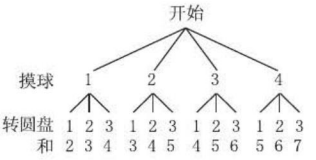


图 8.4-3

导引:(1)用画树状图法或列表法求出数之和小于4的概率,得出小颖参加比赛的概率;(2)求出小亮参加比赛的概率,然后通过比较两个概率的大小判断游戏规则是否公平.

▶解:(1)画树状图如图 8.4-3:

或列表如下:

和 / 摸球 \ 转圆盘	1	2	3
1	2	3	4
2	3	4	5
3	4	5	6
4	5	6	7

∴一共有12种等可能的结果,其中所摸球上的数与圆盘上转出的数之和小于4的结果有3种,∴$P(\text{小颖去})=\frac{3}{12}=\frac{1}{4}$.

(2)这个游戏规则不公平.理由:∵$P(\text{小颖去})=\frac{1}{4}$,$P(\text{小亮去})=\frac{3}{4}$,$\frac{1}{4}\neq\frac{3}{4}$,∴这个游戏规则不公平.游戏规则修改为:一人从口袋中摸出一个小球,另一人转动圆盘,如果所摸球上的数与圆盘上转出的数之和小于5,那么小颖去;否则小亮去.

点方法

先分别求出概率,再比较大小,最后确定游戏规则的公平性.一般情况下,概率大的赢的可能性大,概率小的赢的可能性小,只有概率相等时,游戏规则才公平.修改游戏规则不唯一.

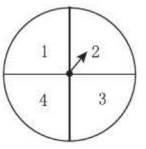
拔尖角度2 选择出赛顺序(拓展点)

例4 田忌赛马是我们都熟悉的故事,齐王和田忌各有上、中、下等三匹马,同等级的马中,齐王的马比田忌的强.而田忌的上等马能胜齐王的中等马,田忌的中等马能胜齐王的下等马.

分别标有数0、1、3的三个小球(除数不同外,其余都相同),小亮转动一次转盘,转盘停止转动后指针指向某一扇形,扇形内的数是小亮的幸运数,小红从口袋中任意摸出一个小球,小球上的数是小红的吉祥数,然后计算这两个数的积.

(1)请你用画树状图或列表的方法,求这两个数的积为0的概率;

(2)小亮与小红做游戏,规则是:若这两个数的积为奇数,小亮赢;否则,小红赢.你认为该游戏规则公平吗?为什么?如果不公平,请你修改该游戏规则,使游戏对双方公平.



(第3题图)

4. 每天某一时段从湛江市区开往湖光岩风景区有三辆汽车,这三辆车票价相同,舒适程度不同,

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

(1)如果齐王将马按上、中、下等的顺序出阵比赛,而田忌的马随机出阵比赛,请画出树状图或列表分析,田忌获胜的概率是多少?

(2)如果齐王将马按上、中、下等的顺序出阵比赛,那么田忌的马如何出阵,田忌才能取胜?说明理由.

导引:(1)列表展示所有6种等可能的结果,只有一种对抗情况田忌能赢,然后根据概率定义计算;

(2)由于田忌的上、中等马分别比齐王的中、下等马强,所以田忌的马按下、上、中等的顺序出阵,田忌才能取胜.

▶解:(1)当田忌的马随机出阵时,双方马的对阵情况列表如下:

齐王的马	上中下	上中下	上中下	上中下	上中下	上中下
田忌的马	上中下	上下中	中上下	中下上	下上中	下中上

共有6种等可能的结果,只有一种情况田忌能赢,所以田忌获胜的概率$=\frac{1}{6}$;

(2)由于田忌的上、中等马分别比齐王的中、下等马强,当齐王的马按上、中、下等顺序出阵时,田忌的马按下、上、中等的顺序出阵,田忌才能取胜.

点方法

列举出田忌的马出阵可能的情况是解决本题的难点.

拔尖角度3　学科综合题

例5 在一个不透明的口袋里装有四个分别标有1、2、3、4的小球,它们的形状、大小等完全相同.小明先从口袋里随机取出一个小球,记下数为x;小红在剩下的三个小球中随机取出一个小球,记下数为y.

(1)计算由x、y确定的点(x,y)在函数$y=-x+6$图像上的概率;

(2)小明、小红约定做一个游戏,其规则是:若x、y满足$xy>6$,则小明胜;若x、y满足$xy<6$,则小红胜.这个游戏规则公平吗?请说明理由.若不公平,请修改游戏规则,使游戏对双方公平.

导引:(1)列表,从而确定点(x,y)的不同情况共有12种(因为是第一次取出以后不放回,所以点中不包括(1,1),(2,2),(3,3),(4,4)这四个点).看这些点在函数$y=-x+6$图像上的有几个,从而可以求出概率.(2)分别求出$P(xy>6)$,$P(xy<6)$的值,就可以判断游戏规则是否公平,修改游戏规则要从使概率相等的角度出发.

按舒适程度分为上、中、下三等.甲、乙两人要去湖光岩风景区游玩,但他们不知道这三辆车的舒适程度,也不知道车开来的顺序.双方约定:甲无论如何总是上开来的第一辆车,而乙则是先观察后上车,当第一辆车开来时,他不上车,而是仔细观察车的舒适状况.若第二辆车的状况比第一辆车好,他就上第二辆车;若第二辆车不如第一辆车,他就上第三辆车.请你尝试解决下面的问题:

(1)三辆车按出现的先后顺序共有哪几种不同的可能?

(2)你认为甲、乙两人谁乘坐上等车的可能性大?为什么?

5. 有三张卡片(背面完全相同)分别写有$\sin30°$,$\tan60°$,$\cos30°$,把它们背面朝上洗匀后,小军从中抽取一张,记下这个数后放回洗匀,小明再从中抽出一张.

(1)小军抽取的卡片上是有理数的概率是_____;

(2)李刚为他们俩设计了一个游戏规则:若两人抽取的卡片上两数之积是有理数,则小军获胜,否则小明获胜.你认为这个游戏规则对

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

▶解:(1)将 $y=-x+6$ 变形为 $x+y=6$. 列表如下:

	1	2	3	4
1	–	3	4	5
2	3	–	5	6
3	4	5	–	7
4	5	6	7	–

所以 P(点(x,y)在函数 $y=-x+6$ 图像上)$=\frac{2}{12}=\frac{1}{6}$.

(2)这个游戏规则不公平. 理由:列表如下:

	1	2	3	4
1	–	2	3	4
2	2	–	6	8
3	3	6	–	12
4	4	8	12	–

因为 $P(xy>6)=\frac{4}{12}=\frac{1}{3}$, $P(xy<6)=\frac{6}{12}=\frac{1}{2}$,

所以 $P(xy>6)\neq P(xy<6)$,所以这个游戏规则不公平.

规则改为:"若 x、y 满足 $xy\geqslant 6$,则小明胜;若 x、y 满足 $xy<6$,则小红胜". (修改游戏规则不唯一)

谁有利? 请用列表法或画树状图法进行分析说明.

Ⅲ 练基础 · 练方法 · 练技巧 ☞(答案见248页)

基础巩固练

1. 小玲与小丽两人各掷一个正方体骰子,规定两人掷的点数和为偶数,则小玲胜;点数和为奇数,则小丽胜,下列说法正确的是(　　)
   A. 此规则有利于小玲
   B. 此规则有利于小丽
   C. 此规则对两人是公平的
   D. 无法判断
2. 甲、乙两人投掷两个普通的正方体骰子,规定掷出"和为7"算甲赢,掷出"和为8"算乙赢,这个游戏规则对_____有利.
3. 某中学九年级有6个班,要从中选出2个班代表学校参加某项活动,九(1)班必须参加,另外再从九(2)班到九(6)班中选出1个班,九(4)班有学生建议用如下方法:从装有编号分别为1、2、3的三个白球的A袋中摸出一个球,再从装有编号分别为1、2、3的三个红球的B袋中摸出一个球(两袋中球的大小、形状与质量完全一样),摸出的两个球上的数的和是几,就选几班,你认为这种方法公平吗? 请说明理由.
4. [中考 · 贺州]在"植树节"期间,小王、小李两人想通过摸球的方式来决定谁去参加学校植树活动,规则如下:在两个盒子内分别装入标有数字1、2、3、4的四个和标有数字1、2、3的三个完全相同的球,分别从两个盒子中各摸出一个球,如果所摸出的球上的数字之和小于6,那么小王去,否则就是小李去.
   (1)用画树状图或列表法求出小王去的概率;

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

(2)小李说:“这种规则不公平”,你认同他的说法吗?请说明理由.

5. 有红、黄两个盒子,红盒子中装有编号分别为1、2、3、5的四个红球,黄盒子中装有编号分别为1、2、3的三个黄球.甲、乙两人玩摸球游戏,游戏规则为:甲从红盒子中每次摸出一个球,乙从黄盒子中每次摸出一个球,若两球编号之和为奇数,则甲胜;否则乙胜.

(1)试用列表或画树状图的方法,求甲胜的概率;

(2)这个游戏规则对甲、乙双方公平吗?若公平,请说明理由;若不公平,试改动红盒子中的一个球的编号,使游戏规则公平.

能力提升练

6. 某口袋中有20个球,其中白球x个,绿球$2x$个,其余为黑球.从袋中任意摸出一个球,若为绿球则甲获胜,若为黑球则乙获胜.则当x等于(　　)时,游戏规则对甲、乙双方公平.

A. 3　　B. 4　　C. 5　　D. 6

7. 周末,王雪带领小朋友玩摸球游戏:在不透明塑料袋中装有1个白色和2个黄色的球,摸出两个球都是黄色的即可获胜.小明一次从袋中摸出两个球;小刚左手从袋中摸出一个球,然后右手再摸出一个球;小华则先从袋中摸出一个球看一下颜色,又放回袋中,再从袋中摸出一个球.这时,小明急了,说:小刚、小华占了便宜,不公平.你认为如何?(　　)

A. 不公平,小刚、小华占便宜了

B. 公平

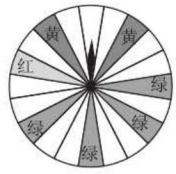
C. 不公平,小华吃亏了

D. 不公平,小华占便宜了

8. 某星期天,小亮在住宅小区门口发现了这样的“游戏”活动:某小贩设立了一个可以自由转动的转盘(转盘被等分成20个扇形),如图,交2元钱就可以转动转盘一次,如果转盘停止后指针正好对准红色、黄色、绿色区域,那么游戏者可相应获得10元、2元、1元钱的奖励,如果转盘停止后指针正好对准白色区域,那么游戏者无任何奖励(如果指针对准两色交界处,就重新转动转盘).请问:

(1)游戏者转动一次转盘获奖的概率是多少?

(2)小贩鼓动小亮参与游戏,声称:如果你交钱转动50次转盘,除按照规则奖励外,另加奖励20元.小亮说:“我才不会上你的当.”请你用所学的数学知识解释小亮这样说的道理.



(第8题图)

思维拓展练

9. 某班有50位学生,每位学生都有一个序号,将50张编有学生序号(从1号到50号)的卡片(除序号不同外其他均相同)打乱顺序重新排列,从中任意抽取1张卡片.

(1)在序号中,是20的倍数的有:20、40,能整除20的有:1、2、4、5、10(为了不重复计数,20只计一次),求取到的卡片上序号是20的倍数或能整除20的概率.

(2)若规定:取到的卡片上序号是k(k是满足$1\leqslant k\leqslant 50$的整数),则序号是k的倍数或能整除k(不重复计数)的学生能参加某项活动,这一规定是否公平?请说明理由;

(3)请你设计一个规定,能公平地选出10位学生参加某项活动.

宋德基

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

8.5 概率帮你做估计

1 点知识 · 拨考向 · 诊误区

知识点 1 利用频率估计概率(重点)

点知识

1. 在大量重复试验中,某个事件发生的频率会越来越稳定于某个常数,可以用这个常数来估计这个事件发生的概率.
2. **频率估计概率的适用对象是**:当试验的可能结果不是有限个,或各种结果发生的可能性不相等时,可通过统计频率来估计概率.

要点精析

频率和概率是研究随机事件发生的可能性大小常用的特征量,从定义可以得到二者的联系,可用大量重复试验中某事件发生的频率来估计该事件发生的可能性,另一方面,大量重复试验中事件发生的频率稳定在某个常数(事件发生的概率)附近,说明概率是一个定值,而频率随试验次数不同而有所不同,是概率的近似值.

易错警示

我们可以用频率估计概率,但不能说频率等于概率,频率是经过多次重复试验得到的数据,而概率是理论上事件发生的可能性大小,当试验次数足够多时,事件发生的频率接近于概率.

拨考向

典例剖析

考查角度 1 根据频率估算个数

例 1 [中考 · 永州]在一个不透明的盒子中装有 n 个球,它们除了颜色之外其他都没有区别,其中含有 3 个红球,每次摸球前,将盒中所有的球摇匀,然后随机摸出一个球,记下颜色后再放回盒中. 通过大量重复试验,发现摸到红球的频率稳定在 0.03,那么可以推算出 n 的值大约是_____.

导引:在同样条件下,大量反复试验时,随机事件发生的频率逐渐稳定在概率附近,可以从比例关系入手,列出方程求解.

由题意可得,$\frac{3}{n}=0.03$,解得 $n=100$.

故 n 的值大约是 100. ▶答案:100

点方法

本题考查利用频率估计概率,解答本题的关键是明确题意,利用频率估计出所求问题的答案.

考查角度 2 根据频率估计概率

例 2 [中考 · 淮安]某射手在相同条件下进行射击训练,结果如表:

举一反三训练

(答案见 249 页)

1. [中考 · 营口]在一个不透明的箱子里装有红色、蓝色、黄色的球共 20 个,除颜色外,形状、大小、质地等完全相同,小明通过多次摸球试验后发现摸到红色、黄色球的频率分别稳定在 10% 和 15%,则箱子里蓝色球的个数很可能是_____个.


用频率估计概率

2. [中考 · 郴州]某瓷砖厂在相同条件下抽取部

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

射击次数 n	10	20	40	50	100	200	500	1 000
击中靶心的频数 m	9	19	37	45	89	181	449	901
击中靶心的频率 $\frac{m}{n}$	0.900	0.950	0.925	0.900	0.890	0.905	0.898	0.901

该射手击中靶心的概率的估计值是_____(精确到 0.01).

导引:根据频率即可估计概率.

随着射击次数的增大,击中靶心的频率逐渐稳定在 0.90 附近,所以该射手击中靶心的概率的估计值是 0.90.　▶答案:0.90

点方法

大量重复试验时,事件发生的频率在某个常数附近摆动,并且趋于稳定,根据这个频率稳定性的性质,可以用频率的集中趋势来估计概率,这个常数就是这个事件发生的概率的估计值.用频率估计概率得到的是近似值,随着试验次数的增多,值越来越精确.

知识点 2　利用概率估算(重点)

点知识

1. 一般地,当试验的可能结果有很多种且各种可能结果发生的可能性相等时,可以用 $P(A)=\frac{m}{n}$ 的方式得出概率,再由概率,解决实际问题.
2. 当试验的所有可能结果不是有限个,或各种可能结果发生的可能性不相等时,常常通过统计频率来估计概率,即在同样条件下,用大量重复试验所得到的随机事件发生的频率的稳定值来估计这个事件发生的概率.

要点精析

1. 当选取多个样本时,估计总体概率等于几个样本频率的平均值;
2. 通过次数少的试验无法预测总体的概率,但每个结果在每次试验中发生的概率是可以预测的;
3. 我们可以用频率估计概率,但不能说频率等于概率,频率是经过多次试验得到的数据,而概率是理论上事件发生的可能性大小,当试验次数足够多时,事件发生的频率接近于概率.

考查角度　根据概率估算

例 3　在一个不透明的口袋中,装有除颜色不同,其他完全相同的 18 个球,若从袋中摸出绿球的概率为 $\frac{1}{3}$,则袋中装有绿球的个数为_____.

导引:等量关系为:绿球数 ∶ 总球数 $=\frac{1}{3}$,把相关数值代入即可求解.

分瓷砖做耐磨试验,结果如下表所示:

抽取瓷砖数 n	合格品频数 m	合格品频率 $\frac{m}{n}$
100	96	0.960
300	282	0.940
400	382	0.955
600	570	0.950
1 000	949	0.949
2 000	1 906	0.953
3 000	2 850	0.950

则这个厂生产的瓷砖是合格品的概率估计值是_____.(精确到 0.01)

3. 在一个不透明的布袋中装有若干个只有颜色不同的球,如果袋中有红球 5 个,黄球 4 个,其余为白球,从袋中随机摸出一个球,“摸出黄球”的概率为

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

设绿球有 x 个，根据题意得：$\frac{x}{18}=\frac{1}{3}$，解得：$x=6$，即绿球的个数为 6.

▶答案：6

点方法

解答这类问题基本方法是根据概率的意义列方程求解.

$\frac{1}{3}$，则袋中白球的个数为_____个.

II 点方法 · 拨技巧 · 探规律

典例剖析

拔尖角度 1　根据频率估算综合运用(拓展点)

例 4 在一个不透明的口袋里装有只有颜色不同的黑、白两种颜色的球共 20 只，某学习小组做摸球试验，将球搅匀后从中随机摸出一只球记下颜色，再把它放回袋中，不断重复. 下表是试验进行中的一组统计数据：

摸球的次数 n	100	150	200	500	800	1000
摸到白球的频数 m	58	96	116	295	484	601
摸到白球的频率 $\frac{m}{n}$	0.58	0.64	0.58	0.59	0.605	0.601

(1) 请估计：当 n 很大时，摸到白球的频率将会接近_____；

(2) 假如你去摸一次，估计摸到白球的概率是_____，摸到黑球的概率是_____；

(3) 试估算口袋中黑、白两种颜色的球各有多少只.

导引：本题是一道根据频率估算概率的题，利用摸球次数最多 1 000 次的频率去估计接近值，利用这个值代替概率值即可解决问题.

▶解：(1) 0.6

(2) 0.6；0.4

(3) 可估算口袋中有白球 $20\times0.6=12$(只)，黑球 $20\times0.4=8$(只).

点方法

本题运用**试验估算法**. 当试验次数很大时，其结果才具有一般性，绝不能用几次试验的结果作为分析问题的依据. 大量重复试验时，根据一个随机事件发生的频率所逐渐稳定到的常数，可以估计这个事件发生的概率.

举一反三训练

☞(答案见 249 页)

4. 一个不透明的袋子中装有 4 个质地、大小均相同的小球，这些小球分别标有数 3，4，5，x. 甲、乙两人每次同时从袋中各随机摸出 1 个小球，并计算摸出的这 2 个小球上数的和，记录后都将小球放回袋中搅匀，进行重复试验. 试验数据如下表：

摸球总次数	出现“和为 8”的频数	出现“和为 8”的频率
10	2	0.20
20	10	0.50
30	13	0.43
60	24	0.40
90	30	0.33
120	37	0.31
180	58	0.32
240	82	0.34
330	110	0.33
450	150	0.33

解答下列问题：

(1) 如果试验继续进行下去，根据上表数据，出现“和为 8”的频率将稳定在它的概率附近. 估计出现“和为 8”的概率是_____；

(2) 如果摸出的这 2 个小球上数的和为 9 的概率是 $\frac{1}{3}$，那么 x 的值可以取 7 吗？请用列表法或画树状图法说明理由；如果 x 的值不可以取 7，请写出一个符合要求的 x 值.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

拔尖角度 2　根据频率估算面积

例 5　小红和小明在操场做游戏，他们先在地上画了半径分别为 2 m 和 3 m 的同心圆，如图 8.5-1(1)，蒙上眼在一定距离外掷石子，落在阴影内小红胜，落在小圆内小明胜.

(1)你认为这个游戏公平吗？为什么？

(2)游戏结束，小明边走边想，“能否用频率估计概率的方法，来估算非规则图形的面积呢？”他发现地上有一个不规则的封闭图形 ABC，如图 8.5-1(2)，为了知道它的面积，小明在封闭图形内画了一个半径为 1 m 的圆，在不远处掷石子，且记录如下：

掷石子次数	50	150	300
石子落在圆内的次数 m	11	43	93
石子落在阴影内的次数 n	19	85	186

你能帮小明估计封闭图形 ABC 的面积吗？试试看.

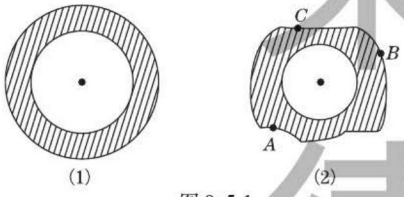


图 8.5-1

导引：(1)判断游戏是否公平，需要先计算每个事件发生的概率，然后比较概率的大小，概率相等就公平，否则就不公平.

(2)根据 m 与 n 的比估计圆的面积与阴影部分的面积比，再根据面积比即可求出不规则图形的面积.

▶解：(1)不公平. 理由：$S_{小圆}=\pi\times2^2=4\pi(m^2)$，

$S_{阴影}=\pi\times3^2-\pi\times2^2=5\pi(m^2)$，因为 $S_{阴影}>S_{小圆}$，所以投进小圆内的可能性小于投进阴影内的可能性，所以这个游戏不公平.

(2)由统计表看出 m 与 n 的比约为 1∶2，即 $m:n\approx1:2$.

所以圆的面积与封闭图形 ABC 的面积之比约为 1∶3，而圆的面积为 $\pi\times1^2=\pi(m^2)$，所以封闭图形 ABC 的面积约为 $3\pi\ m^2$.

拔尖角度 3　统计与概率综合(拓展点)

例 6　[中考·荆门]文化是一个国家、一个民族的灵魂，近年来，央视推出《中国诗词大会》、《中国成语大会》、《朗读者》、《经典咏流传》等一系列文化栏目. 为了解学生对这些栏目的喜爱情况，某学校组织学生会成员随机抽取了部分学生进行调查，被调查的学生必须从《经典咏流传》(记为 A)、《中国诗词大会》(记为 B)、《中国成语大会》(记为 C)、《朗读者》(记为 D)中选择自己最喜爱的一个栏目，也可以写出一个自己喜爱的其他文化栏目(记为 E). 根据调查结果绘制成如图 8.5-2 所示的两幅不完整的统计图.

5. 小朋和艳艳分别在地上画了周长为 4 米的圆和正方形[如图(1)]，蒙上眼在一定距离外分别向圆和正方形内掷小石子，各掷 100 次，谁投进的次数多谁就胜.



(第 5 题图)

(1)你认为这个游戏对双方公平吗？为什么？

(2)如图(2)是一个不规则的图形，你能否用频率估计概率的方法来估算这个不规则图形的面积？请你设计方案，解决这一问题.

6. [中考·泸州]为了解某中学学生课余生活情况，对喜爱看课外书、体育活动、看电视、社会实践四个方面的人数进行调查统计. 现从该校随机抽取 n 名学生作为样本，采用问卷调查的方

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

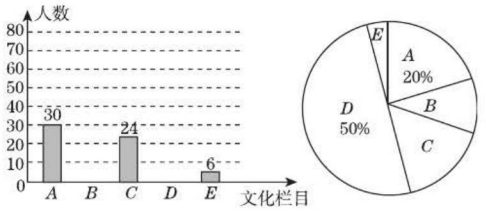


图 8.5-2

请根据图中信息解答下列问题：

(1)在这项调查中，共调查了多少名学生？

(2)将条形统计图补充完整，并求出扇形统计图中“B”所在扇形圆心角的度数；

(3)若选择“E”的学生中有 2 名女生，其余为男生，现从选择“E”的学生中随机选出两名学生参加座谈，请用列表法或画树状图的方法求出刚好选到同性别学生的概率.

导引：(1)由 A 栏目人数及其所占百分比可得总人数；

(2)用总人数乘 D 栏目所占百分比求得其人数，再用总人数减去其他栏目人数求得 B 栏目的人数即可补全条形统计图，用 360° 乘 B 栏目人数所占比例可得所求圆心角的度数；

(3)列表得出所有等可能结果，然后利用概率的计算公式即可求解.

▶解：(1)$30 \div 20\% = 150$(名)，

∴ 共调查了 150 名学生.

(2)D：$50\% \times 150 = 75$(名)，

B：$150 - 30 - 75 - 24 - 6 = 15$(名).

补全条形统计图如图 8.5-3 所示.

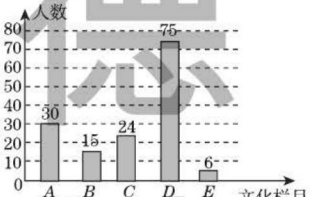


图 8.5-3

扇形统计图中“B”所在扇形圆心角的度数为 $\frac{15}{150} \times 360° = 36°$.

(3)记选择“E”的学生中的 2 名女生分别为 N_1，N_2，4 名男生分别为 M_1，M_2，M_3，M_4，列表如下：

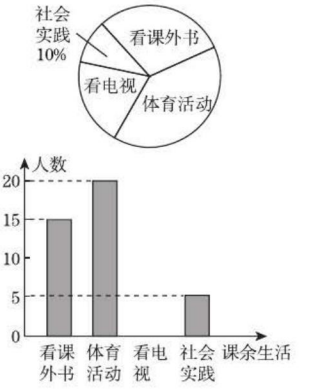
	N_1	N_2	M_1	M_2	M_3	M_4
N_1		(N_1,N_2)	(N_1,M_1)	(N_1,M_2)	(N_1,M_3)	(N_1,M_4)
N_2	(N_2,N_1)		(N_2,M_1)	(N_2,M_2)	(N_2,M_3)	(N_2,M_4)
M_1	(M_1,N_1)	(M_1,N_2)		(M_1,M_2)	(M_1,M_3)	(M_1,M_4)
M_2	(M_2,N_1)	(M_2,N_2)	(M_2,M_1)		(M_2,M_3)	(M_2,M_4)
M_3	(M_3,N_1)	(M_3,N_2)	(M_3,M_1)	(M_3,M_2)		(M_3,M_4)
M_4	(M_4,N_1)	(M_4,N_2)	(M_4,M_1)	(M_4,M_2)	(M_4,M_3)	

6. 为了解学生喜爱体育活动的情况，某校对学生喜爱的体育活动项目进行了随机抽样调查，采用问卷调查的方法收集数据(参与问卷调查的每名学生只能选择其中一项)．并根据调查得到的数据绘制成了如图所示的两幅不完整的统计图．由图中提供的信息，解答下列问题：

(1)求 n 的值；

(2)若该校学生共有 1 200 人，试估计该校喜爱看电视的学生人数；

(3)若调查到喜爱体育活动的 4 名学生中有 3 名男生和 1 名女生，现从这 4 名学生中任意抽取 2 名学生，求恰好抽到 2 名男生的概率.



(第 6 题图)

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

共有 30 种等可能的结果，其中，恰好是同性别学生（记为事件 F）的有 14 种情况，

$$\therefore P(F)=\frac{14}{30}=\frac{7}{15}.$$

点方法

考查利用统计图获取信息的能力以及求随机事件的概率. 利用统计图获取信息时，必须认真观察、分析、研究统计图，才能做出正确的判断和解决问题.

Ⅲ 练基础 · 练方法 · 练技巧

☞（答案见 250 页）

基础巩固练

1. 在一个不透明的口袋中装有 4 个红球和若干个白球，它们除颜色外其他都相同. 通过多次摸球试验后发现，摸到红球的频率稳定在 25% 附近，则口袋中白球可能有（　　）

A. 16 个　　B. 15 个

C. 13 个　　D. 12 个

2. 小明为了估计本市的人口数量，采用一种间接的办法来获得. 他从本市的一份资料上得知，该市看中央电视台早间新闻的大约有 12 500人，于是他随机调查了 2 000 人，发现其中有 250 人看中央电视台的早间新闻，则该市大约有（　　）

A. 100 000 人　　B. 200 000 人

C. 300 000 人　　D. 400 000 人

3. 一个鱼塘里养有若干条同一种鱼，养殖户为了了解鱼塘中鱼的总条数，先从鱼塘中捞出 10 000条鱼，然后给这 10 000 条鱼做上标记，把鱼重新放回鱼塘，待鱼群充分游匀后，再从鱼塘中捞出 200 条鱼，发现这些鱼中有 10 条鱼带有标记，则这个鱼塘中共约有_____条鱼.

4. 某公园游戏场举行庆“六一”活动. 有一种游戏的规则是：在一个装有 6 个红球和若干个白球（每个球除颜色外其他都相同）的袋中，随机摸出一个球，摸到一个红球就得到一个玩具. 已知参加这种游戏的有 40 000 人次，公园游戏场发放的玩具为 10 000 个.

（1）求参加这种游戏得到玩具的频率；

（2）请你估计袋中白球接近多少个.

5. 某公司对一批某品牌的衬衣的质量抽检结果如下表：

抽查件数	50	100	200	300	400	500
次品件数	0	4	16	19	24	30

（1）从这批衬衣中任抽 1 件是次品的概率约为多少？

（2）如果销售这批衬衣 600 件，那么至少需要准备多少件正品衬衣供顾客调换？

基础 德育 素养

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

6. 一个盒子中有12张空白卡片和若干张有记号的卡片，每张卡片除记号外完全相同，如果不允许将卡片取出来数一数，你能估计其中标有记号的卡片数吗？

能力提升练

7. 某人随意投掷一枚均匀的骰子，投掷了 n 次，其中有 m 次掷出的点数是偶数，即掷出的点数是偶数的频率为 $\frac{m}{n}$，则下列说法正确的是(　　)

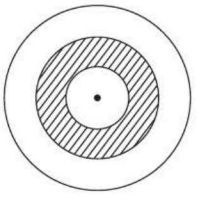
A. $\frac{m}{n}$ 一定等于 $\frac{1}{2}$

B. $\frac{m}{n}$ 一定不等于 $\frac{1}{2}$

C. $\frac{m}{n}$ 一定大于 $\frac{1}{2}$

D. 投掷的次数很多时，$\frac{m}{n}$ 稳定在 $\frac{1}{2}$ 附近

8. 如图，有三个同心圆，由里向外的半径依次是2 cm，4 cm，6 cm，将圆盘分为三部分，飞镖可以落在任何一部分内，那么飞镖落在阴影圆环内的概率是_____.



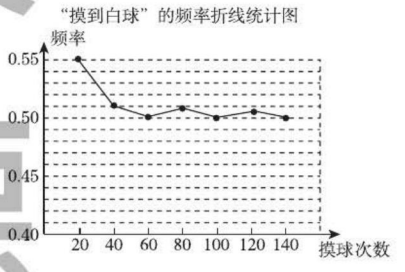
(第8题图)

9. 在一个不透明的盒子里装有颜色不同的黑、白两种球共40个，小颖做摸球试验，她将盒子里面的球搅匀后从中随机摸出一个球记下颜色，再把它放回盒子中，不断重复上述过程，如图是“摸到白球”的频率折线统计图.

(1) 请估计：当摸球次数很大时，摸到白球的频率将会接近_____(精确到0.01)，假如你摸一次，你摸到白球的概率为_____；

(2) 试估计盒子里白、黑两种球各有多少个；

(3) 在(2)条件下如果要使摸到白球的概率为 $\frac{3}{5}$，需要往盒子里再放入多少个白球？

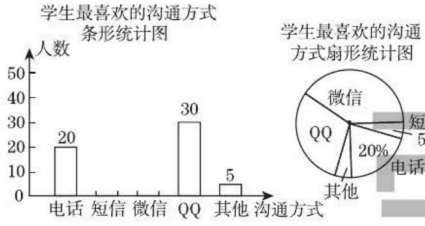


(第9题图)

荣德基

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

10. [中考·葫芦岛]随着通讯技术的迅猛发展,人与人之间的沟通方式更多样、便捷.某校数学兴趣小组设计了“你最喜欢的沟通方式”调查问卷(每人必选且只选一种),在全校范围内随机调查了部分学生,将统计结果绘制了如下两幅不完整的统计图,请结合图中所给的信息解答下列问题:



(第 10 题图)

(1)这次统计共调查了_____名学生;在扇形统计图中,表示“QQ”的扇形圆心角的度数为_____;

(2)将条形统计图补充完整;

(3)该校共有 1 500 名学生,请估计该校最喜欢用“微信”进行沟通的学生有多少名;

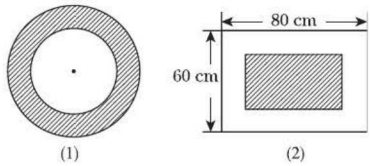
(4)某天甲、乙两名同学都想从“微信”“QQ”“电话”三种沟通方式中选一种方式与对方联系,请用列表或画树状图的方法求出甲、乙两名同学恰好选择同一种沟通方式的概率.

思维拓展练

11. 小红和小明在操场做游戏,规则是:蒙上眼睛在一定距离外向设计好的图形内掷小石子,若掷入阴影部分则小红胜,否则小明胜,未掷入图形内则重掷一次.

(1)若第一次设计的图形[图(1)]是半径分别为 20 cm 和 30 cm 的同心圆.求游戏中小红获胜的概率,你认为游戏对双方公平吗?请说明理由.

(2)若第二次设计的图形[图(2)]是两个矩形,其中大矩形的长为 80 cm、宽为 60 cm,且小矩形到大矩形的边宽相等.要使游戏对双方公平,则边宽应为多少?



(第 11 题图)

我的错题笔记

某德基

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

8.6 收取多少保险费才合理

1 点知识 · 拨考向 · 诊误区

知识点 计算随机事件发生的平均次数

点知识

1. 一般地，如果随机事件 A 发生的概率是 $P(A)$，那么在相同条件下重复 n 次试验，事件 A 发生的次数的**平均值**为 $n \times P(A)$.

2. 利用概率可以帮助保险业做出不亏本的决策，判断某一事件是否“亏本”是概率的一个重要内容.

拨考向

典例剖析

考查角度 1　根据概率解决保险问题(拓展点)

例 1 保险公司为了确定人寿保险的价格，需要对一定范围内人的寿命进行调查统计，制作了一张寿命表，现把某地区的寿命表的部分摘录如下：

年龄	活到该年龄的人数	在该年龄去世的人数
40	78 106	765
50	69 804	962
60	57 917	1 546
70	38 569	2 391
80	14 474	2 091
90	847	385

根据上表解答下列问题：

(1)某人今年 40 岁，他当年去世的概率是多少？他活到 80 岁的概率是多少？(精确到 0.000 1)

(2)如果有 10 000 个 40 岁的人参加人寿保险，当年去世的人均赔偿金为 a 元，预计保险公司需付的赔偿金总额为多少元？

导引：(1)应用在该年龄去世的人数与活到该年龄的人数的比值来求他当年去世的概率.

▶解：(1)他当年去世的概率是 $\frac{765}{78\ 106} \approx 0.009\ 8$.

他活到 80 岁的概率是 $\frac{14\ 474}{78\ 106} \approx 0.185\ 3$.

(2)有 10 000 个 40 岁的人参加人寿保险，当年去世的约为 98 人，预计保险公司需付的赔偿金总额为 $98a$ 元.

考查角度 2　概率与平均次数的关系

例 2 已知袋中有红球 5 个、白球 18 个、黄球 17 个，从中任取 1 个球，放回，再从中任取 1 个球，经过多次重复试验，平均多少次才会从中取到 1 个红球？

举一反三训练

(答案见 251 页)

1. 某野生动物园每天对游客正常开放，若游客被动物咬伤的概率 $p = 0.000\ 005$，一家保险公司要为游客保险，若保险公司向参保游客收取保险费 1 元，许诺一旦某游客被动物咬伤，要赔偿他 10 万元人民币，平均来说，保险公司是赔了还是赚了？

2. 中华中学九年级某班的同学积极参加体育锻炼，该班班长在篮球场对自己进行篮球定点投

答案 德基

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

导引：先求出从袋中任取1个球是红球的概率，设平均n次才会从中取到1个红球，然后运用随机事件A发生次数的平均值为$n\times P(A)$求解.

▶解：从袋中任取1个球是红球的概率为$\frac{5}{5+18+17}=\frac{1}{8}$，设平均$n$次才会从中取到1个红球，$n$次共取到$n$个球，∴在这$n$个球中，取到红球的平均次数为$n\times\frac{1}{8}$.

即$n\times\frac{1}{8}=1$，∴$n=8$. 即平均8次才会从中取到1个红球.

点方法

灵活运用概率的定义及事件A发生次数的平均值为$n\times P(A)$是解决此类问题的关键.

球测试，下表是他的测试成绩及相关数据：

	第一回投球	第二回投球	第三回投球	第四回投球	第五回投球	第六回投球
每回投球次数	5	10	15	20	25	30
每回进球次数	3	8		16	17	18
相应频率	0.6	0.8	0.4	0.8	0.68	0.6

(1)请将表格补充完整；

(2)估计这样投40个，平均能投中多少个？(结果保留整数)

Ⅱ 点方法·拨技巧·探规律

典例剖析

拔尖角度　利用概率解决中奖问题(拓展点)

例3 在“六·一”儿童节来临之际，某妇女儿童用品商场为吸引顾客，设立了一个可以自由转动的转盘(如图8.6-1，转盘被平均分成20份)，并规定：顾客每购物满100元，就能获得一次转动转盘的机会. 如果转盘停止后，指针正好对准红色、黄色、绿色区域，那么顾客就可以分别获得80元、50元、20元的购物券，凭购物券可以在该商场继续购物. 如果顾客不愿意转转盘，那么可直接获得15元的购物券. 转转盘和直接获得购物券，你认为哪种方式对顾客更合算？请说明理由.

导引：先求出每转动一次转盘获得各种购物券的概率，这个概率也就相当于得到各种购物券的“权”，由此可以求出每转动一次转盘所获购物券金额的平均数.

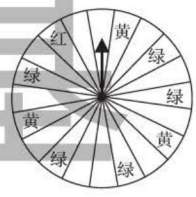


图8.6-1

▶解：转转盘对顾客更合算. 理由：每转动一次转盘获得80元购物券的概率为$\frac{1}{20}$，获得50元购物券的概率为$\frac{3}{20}$，获得20元购物券的概率为$\frac{5}{20}=\frac{1}{4}$. 所以每转动一次转盘所获购物券金额的平均数为：$80\times\frac{1}{20}+50\times\frac{3}{20}+20\times\frac{1}{4}=16.5$(元)，

因为16.5元>15元，所以选择转转盘对顾客更合算.

举一反三训练

(答案见251页)

3. 某商场设计了两种促销方案：第一种是顾客在商场消费每满200元就可以从一个装有100个完全相同的球(球上分别标有数1，2，…，100)的箱子中随机摸出一个球(摸后放回)，球上的数是88，则返购物券500元；若球上的数是11或77，则返购物券300元；若球上的数能被5整除，则返购物券5元；若是其他数，则不返购物券. 第二种是顾客在商场消费每满200元直接获得购物券15元. 估计活动期间将有5 000人参加活动，请你通过计算说明，商场选择哪种

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

点方法

在日常生活中经常遇到各种摇奖活动，到底参与这样的活动是否“合算”，我们应该运用学过的统计与概率知识进行判断，提高决策能力.

方案促销更合算些?

III 练基础 · 练方法 · 练技巧 ☞(答案见251页)

基础巩固练

1. 下列说法中正确的是(　　)
   A. 通过多次试验得到某事件发生的频率等于这一事件发生的概率
   B. 某人前9次掷出的硬币都是正面朝上，那么第10次掷出的硬币反面朝上的概率一定大于正面朝上的概率
   C. 不确定事件的概率可能等于1
   D. 试验估计结果与理论概率不一定一致

2. 如果事件A发生的概率是$\frac{1}{100}$，那么在相同条件下重复试验，下列说法中正确的是(　　)
   A. 说明做100次这种试验，事件A必发生1次
   B. 说明事件A发生的频率是$\frac{1}{100}$
   C. 说明做100次这种试验，前99次事件A没发生，最后1次事件A才发生
   D. 说明做100次这种试验，事件A可能发生1次

3. [易错题]外科大夫甲和乙手术不成功的概率分别为1%和2%，大夫甲已连续成功施行了99例手术；大夫乙已连续施行了99例手术，但有两次失败. 下一次选择大夫_____做手术更好.

4. 某船队要对下月是否出海做出决策，若出海后是好天气，可得收益5 000元；若出海后天气变坏，将要损失2 000元；若不出海，无论天气好坏都要承担1 000元的损失费，船队队长通过上网查询下月的天气情况后，预测下月好天气的机会是60%，坏天气的机会是40%，则做出决策为_____.(填“出海”或“不出海”)

5. 某客车每次旅途中约有20名乘客，旅途中出车祸的概率为0.000 016，一家保险公司要为乘客保险，一旦发生车祸，平均需要向每位乘客赔偿5万元人民币. 平均来说，保险公司应向每人至少收取多少保险费呢?

6. 假设一个小城镇过去10年中，发生火灾情况如下表所示.

总家数	365	371	385	395	412	418	430	435	440	445
被烧家数	1	0	1	2	0	2	1	2	0	2

试问：(1)设想平均每年在1 000家中烧掉几家?(保留整数)
(2)如果保户投保30万元的火灾保险，最低限度要缴多少保险费保险公司才不亏本?

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

能力提升练

7. 某超市在五一期间开展有奖促销活动，每买 100 元商品，可参加抽奖一次，中奖的概率是 $\frac{1}{3}$，小张这期间在该超市买商品获得了三次抽奖机会，则小张(　　)　【导学号 7367677】

A. 能中奖一次

B. 能中奖二次

C. 至少能中奖一次

D. 中奖次数不能确定

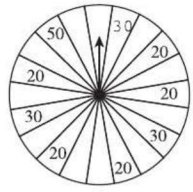
8. [探究题] 人寿保险中(某一年龄段)，在一年的保险期内，每个被保险人需缴保费 a 元，被保险人意外死亡则保险公司赔付 3 万元，出现非意外死亡则赔付 1 万元. 经统计，此年龄段一年内意外死亡的概率是 p_1，非意外死亡的概率为 p_2，则 a 满足什么条件时，保险公司才可能盈利？

思维拓展练

9. 在“五 · 一”劳动节期间，某商场为吸引顾客，设立了一个可以自由转动的转盘(如图，转盘被平均分成 20 份)，并规定：顾客每购物满 200 元，就能获得一次转动转盘的机会. 如果转盘停止后，指针正好对准标有数字的区域(未标数字的视为 0)，则顾客就可以分别获得该区域相应数字的返金券，凭返金券可以在该商场继续购物. 若顾客不愿意转转盘，则可直接获得 10 元的返金券.

(1) 写出转动一次转盘获得返金券的概率；

(2) 转转盘和直接获得 10 元的返金券，你认为哪种方式对顾客更合算？请说明理由.



(第 9 题图)

基础题 德基

我的错题笔记

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

中考提分 专题篇

章末整合与拔高

知识专题

专题一 用样本与频率估计

(1)用样本估计总体

例1 [中考 · 黄石]随着社会的发展,私家车变得越来越普及,使用节能低油耗汽车,对环保有着非常积极的意义,某市有关部门对本市的某一型号的若干辆汽车,进行了一项油耗抽样试验:即在同一条件下,被抽样的该型号汽车,在油耗 1 L 的情况下,所行驶的路程(单位:km)进行统计分析,结果如图 8-1 所示:

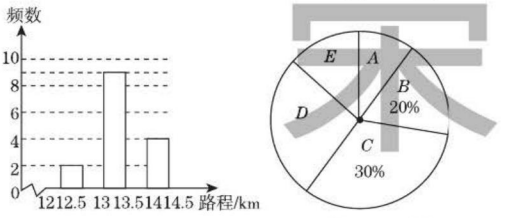


图 8-1

(注:记 A 为 12 ~ 12.5 km,B 为 12.5 ~ 13 km,C 为 13 ~ 13.5 km,D 为 13.5 ~ 14 km,E 为 14 ~ 14.5 km)

请依据统计结果回答以下问题:

(1)试求进行该试验的车辆数;

(2)请补全频数分布直方图;

(3)若该市有这种型号的汽车约 900 辆(不考虑其他因素),请利用上述统计数据初步预测,该市约有多少辆该型号的汽车,在耗油 1 L 的情况下可以行驶 13 km 以上?

导引:(1)根据 C 所占的百分比以及频数,即可得到进行该试验的车辆数;

(2)根据 B 所占的百分比,计算得到 B 的频数,进而得到 D 的频数,据此补全频数分布直方图;

(3)用 C、D、E 所占的百分比之和乘该市这种型号的汽车的总数,即可得到结果.

▶解:(1)进行该试验的车辆数为:$9 \div 30\% = 30$(辆).

(2)B:$20\% \times 30 = 6$(辆),

D:$30 - 2 - 6 - 9 - 4 = 9$(辆),

补全频数分布直方图如图 8-2.

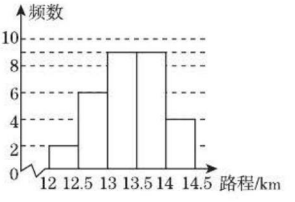


图 8-2

(3)$900 \times \dfrac{9+9+4}{30} = 660$(辆).

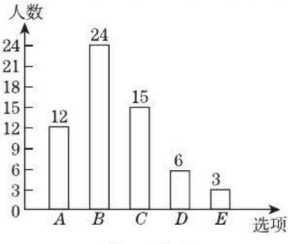
链接中考训练 (答案见 252 页)

1. [中考 · 长春]某校八年级学生会为了解本年级 600 名学生的睡眠情况,将同学们某天的睡眠时长 t(小时)分为 A,B,C,D,E(A:$9 \leqslant t \leqslant 24$;$B$:$8 \leqslant t < 9$;$C$:$7 \leqslant t < 8$;$D$:$6 \leqslant t < 7$;$E$:$0 \leqslant t < 6$)五个选项,进行了一次问卷调查,随机抽取 n 名同学的调查问卷并进行了整理,绘制成如图所示的条形统计图,根据统计图提供的信息解答下列问题:

(1)求 n 的值;

(2)根据统计结果,估计该年级 600 名学生中睡眠时长不足 7 小时的人数.

某校八年级n名同学睡眠情况条形统计图



(第 1 题图)

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

答:该市约有660辆该型号的汽车,在耗油1 L的情况下可以行驶13 km以上.

点方法

统计中的图表信息型问题常见的有表格信息型、单图信息型和复合信息型;解决图表信息题的关键是能够对实际问题中所呈现出来的图表信息正确处理,从而获取有效信息.这类问题来源广泛,形式灵活,突出对数据收集、整理和加工能力的考查.解这类题目的一般步骤是:(1)观察图表,获取有效信息;(2)对已获取的信息进行加工和整理,理清它们之间的关系;(3)选择适当的数学工具,通过建模解决问题.

(2)用频率估计

例2 [中考·宿迁]如图8-3,为测量平地上一块不规则区域(图中的阴影部分)的面积,画一个边长为2 m的正方形,使不规则区域落在正方形内,现向正方形内随机投掷小石子(假设小石子落在正方形内每一点都是等可能的),经过大量重复投掷试验,发现小石子落在不规则区域的频率稳定在常数0.25附近,由此可估计不规则区域的面积是_____m^2.

导引:首先确定小石子落在不规则区域的概率,然后利用概率公式求得其面积即可.

∵经过大量重复投掷试验,发现小石子落在不规则区域的频率稳定在常数0.25附近,

∴估计小石子落在不规则区域的概率为0.25,

∵正方形的边长为2 m,∴面积为4 m^2,

设不规则区域的面积为S,则$\frac{S}{4}=0.25$,解得:$S=1$. ▶答案:1



图8-3

点方法

考查了利用频率估计概率的知识,解题的关键是了解大量重复试验中事件发生的频率可以估计概率.

专题二　根据统计和概率决策

(1)根据统计决策

例3 [中考·台州]家庭过期药品属于"国家危险废物",处理不当将污染环境,危害健康.某市药监部门为了解市民家庭处理过期药品的方式,决定对全市家庭做一次简单随机抽样调查.

(1)下列选取样本的方法最合理的一种是_____.(只需填上正确答案的序号)

①在市中心某个居民区以家庭为单位随机抽取;②在全市医务工作者中以家庭为单位随机抽取;③在全市常住人口中以家庭为单位随机抽取.

2. [中考·贵阳]现有50张大小、质地及背面图案均相同的《西游记》人物卡片,正面朝下放置在桌面上,从中随机抽取一张并记下卡片正面所绘人物的名字后原样放回,洗匀后再抽.通过多次试验后,发现抽到绘有孙悟空这个人物卡片的频率约为0.3.估计这些卡片中绘有孙悟空这个人物的卡片张数约为_____.

3. [中考·镇江]为了解射击运动员小杰的集训效果,教练统计了他集训前后的两次测试成绩(每次测试射击10次),制作了如图所示的条形统计图.

(1)集训前小杰射击成绩的众数为_____;

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

(2)本次抽样调查发现,接受调查的家庭都有过期药品,现将有关数据呈现如图 8-4:

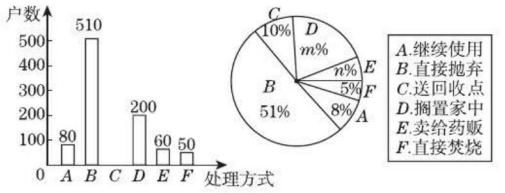


图 8-4

①m = _____,n = _____;

②补全条形统计图;

③根据调查数据,你认为该市市民家庭处理过期药品最常见的方式是什么?

④家庭过期药品的正确处理方式是送回收点,若该市有 180 万户家庭,请估计大约有多少户家庭处理过期药品的方式是送回收点.

导引:(1)根据抽样调查时选取的样本需具有代表性即可求解;

(2)①首先根据 A 类有 80 户,占 8%,求出抽样调查的家庭总户数,再用 D 类户数除以总户数求出 m,用 E 类户数除以总户数求出 n;②用总户数分别减去 A、B、D、E、F 类户数,得到 C 类户数,即可补全条形统计图;③根据调查数据,即可知道该市市民家庭处理过期药品最常见的方式是 B 类;④用 180 万户乘样本中送回收点的户数所占百分比即可.

▶解:(1)③

(2)①20;6

②补全条形统计图如图 8-5:

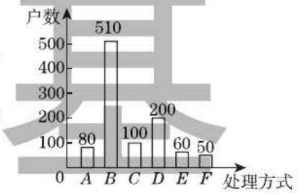


图 8-5

③根据调查数据,即可知道该市市民家庭处理过期药品最常见的方式是 B 类;

④$180 \times 10\% = 18$(万户).

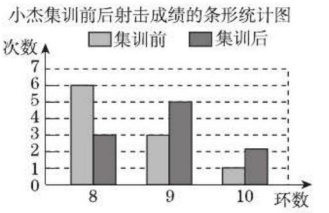
故若该市有 180 万户家庭,估计大约有 18 万户家庭处理过期药品的方式是送回收点.

点方法

本题考查的是条形统计图和扇形统计图的综合运用. 读懂统计图,从不同的统计图中得到必要的信息是解决问题的关键. 条形统计图能清楚地表示出每个项目的数据;扇形统计图直接反映部分占总体的百分比大小. 也考查了用样本估计总体以及抽样调查的可靠性.

(2)分别计算小杰集训前后射击的平均成绩;

(3)请用一句话评价小杰这次集训的效果.



(第 3 题图)

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

(2)根据概率决策

例 4 [中考·毕节]由于只有 1 张市运动会开幕式的门票,小王和小张都想去,两人商量采取转转盘(如图 8-6,转盘盘面被分为面积相等,且标有数字 1、2、3、4 的 4 个扇形区域)的游戏方式决定谁胜谁去观看. 规则如下:两人各转动转盘一次,当转盘停止,如两次指针对应盘面数字都是奇数,则小王胜;如两次指针对应盘面数字都是偶数,则小张胜;如两次指针对应盘面数字是一奇一偶,视为平局. 若为平局,继续上述游戏,直至分出胜负.

如果小王和小张按上述规则各转动转盘一次,则

(1)小王转动转盘,当转盘停止,指针对应盘面数字为奇数的概率是多少?

(2)该游戏是否公平?请用列表或画树状图的方法说明理由.

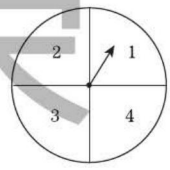


图 8-6

导引:(1)根据概率公式直接计算即可;

(2)列表得出所有等可能的情况,找出两次指针所指数字都是偶数和都是奇数的概率即可得知该游戏是否公平.

▶解:(1)∵ 转盘的 4 个等分区域内只有 1、3 两个奇数,∴ 小王转动转盘,当转盘停止,指针对应盘面数字为奇数的概率 $=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$;

(2)公平. 理由:列表如下:

	1	2	3	4
1	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)
2	(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)
3	(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)
4	(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)

所有等可能的情况有 16 种,其中两次指针所指数字都是偶数或都是奇数的都是 4 种,

∴ P(小王胜) $=\frac{4}{16}=\frac{1}{4}$, P(小张胜) $=\frac{4}{16}=\frac{1}{4}$,

∴ 游戏公平.

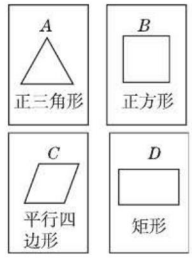
点方法

本题考查的是游戏公平性的判断. 判断游戏公平性就要计算每个事件的概率,概率相等就公平,否则就不公平.

专题三　统计与概率综合

例 5 [中考·资阳]当前,“精准扶贫”工作已进入攻坚阶段,凡贫困家庭均要“建档立卡”. 某初级中学七年级共有四个班,已“建档立卡”的贫困家庭的学生人数按一、二、三、四班分别记为 A_1, A_2, A_3, A_4,现对 A_1, A_2, A_3, A_4 统计后,制成如图 8-7 所示的统

4. [中考·营口]如图,有四张背面完全相同的纸牌 A、B、C、D,其正面分别画有四个不同的几何图形,将这四张纸牌背面朝上洗匀.



(第 4 题图)

(1)从中随机摸出一张,求摸出的牌面图形是中心对称图形的概率;

(2)小明和小亮约定做一个游戏,其规则为:先由小明随机摸出一张纸牌,不放回,再由小亮从剩下的纸牌中随机摸出一张,若摸出的两张牌面图形都是轴对称图形小明获胜,否则小亮获胜,这个游戏公平吗?请用列表法(或画树状图)说明理由(纸牌用 A、B、C、D 表示).

5. [中考·内江]小明随机调查了若干市民租用共享单车的骑车时间 t(单位:分钟),将获得的

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

计图.

(1)求七年级已“建档立卡”的贫困家庭的学生总人数;

(2)将条形统计图补充完整,并求出 A_1 所在扇形的圆心角的度数;

(3)现从 A_1、A_2 中各选出一人进行座谈,若 A_1 中有一名女生,A_2 中有两名女生,请用树状图表示所有可能情况,并求出恰好选出一名男生和一名女生的概率.

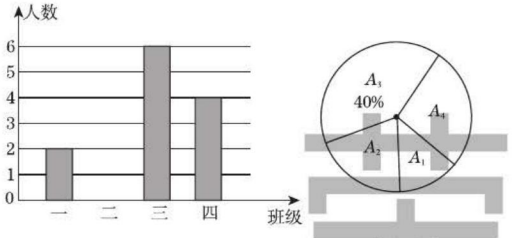


图 8-7

导引:(1)根据 A_3 的人数除以 A_3 的人数所占的百分比即可求出总人数.

(2)根据 A_1 的人数所占的百分比即可求出圆心角的度数.

(3)画树状图即可求出答案.

▶解:(1)总人数为:$6 \div 40\% = 15$(人).

(2)A_2 的人数为 $15-2-6-4=3$(人),

补全条形统计图,如图 8-8 所示.

A_1 所在扇形的圆心角的度数为:$\frac{2}{15} \times 360° = 48°$.

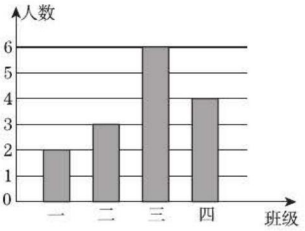


图 8-8

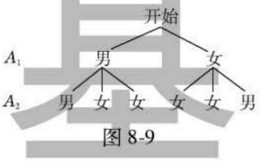


图 8-9

(3)画出树状图如图 8-9:

故所求概率为 $\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$.

点方法

本题考查统计与概率,解题的关键是熟练运用统计与概率的公式.

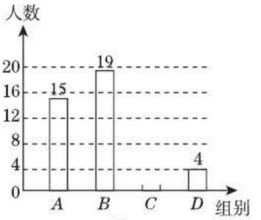
数据分成四组,绘制了如下统计图(A:$0 < t \leqslant 10$,B:$10 < t \leqslant 20$,C:$20 < t \leqslant 30$,D:$t > 30$),根据图中信息,解答下列问题:

(1)这项被调查的总人数是多少人?

(2)试求表示 A 组的扇形统计图的圆心角的度数,补全条形统计图;

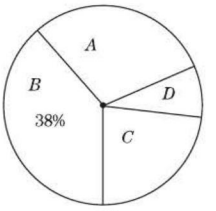
(3)如果小明想从 D 组的甲、乙、丙、丁四人中随机选择两人了解平时租用共享单车情况,请用列表或画树状图的方法求出恰好选中甲的概率.

各组人数的条形统计图



(1)

各组人数的扇形统计图



(2)

(第 5 题图)

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

参考答案及点拨

第5章 二次函数

5.1 二次函数

Ⅰ. 举一反三训练

1. B **2.** B

3. -4;0 或 2 **点拨**:求函数值实际上就是求代数式的值;求二次函数自变量的值实际上就是解一元二次方程.

4. C **点拨**:(1)$S=x^2$,是二次函数;(2)设长与宽分别为 x、y,则 $xy=S$,$y=\frac{S}{x}$(S 是常数),是反比例函数;(3)$S=\pi r^2$,是二次函数;(4)$r=\frac{L}{2\pi}$,$S=\pi r^2=\pi\left(\frac{L}{2\pi}\right)^2=\frac{L^2}{4\pi}$,是二次函数,所以是二次函数的有(1)(3)(4)共 3 个,故选 C.

Ⅱ. 举一反三训练

5. **解**:(1)当 $a^2-a=2$,且 $a+1\neq0$,即当 $a=2$ 时,原函数是二次函数.

(2)①当 $a-3\neq0$,且 $a+1=0$,即当 $a=-1$ 时,原函数是一次函数;

②当 $a^2-a=1$,且 $(a+1)+(a-3)\neq0$,即当 $a=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$ 时,原函数是一次函数;

③当 $a^2-a=0$,$a+1\neq0$,且 $a-3\neq0$,即当 $a=0$ 或 $a=1$ 时,原函数是一次函数.

综上所述,当 $a=-1$ 或 $a=0$ 或 $a=1$ 或 $a=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$ 时,原函数是一次函数.

6. **解**:由题意得 $y=x\cdot\frac{40-x}{2}=-\frac{1}{2}x^2+20x$,自变量 x 的取值范围是 $0<x\leqslant25$.

7. **解**:∵ $\triangle ABC$ 是等腰直角三角形,

∴ 重叠部分也是等腰直角三角形.

又∵ $AN=2t$,∴ $AM=MN-AN=20-2t$,

∴ $MH=AM=20-2t$.

∴ 重叠部分的面积 $y=\frac{1}{2}(20-2t)^2=2t^2-40t+200(0\leqslant t\leqslant10)$.

点拨:根据 $\triangle ABC$ 是等腰直角三角形,知重叠部分也是等腰直角三角形,根据三角形的面积公式即可求解.

Ⅲ. 练基础 · 练方法 · 练技巧

1. D **点拨**:A. 整理为 $y=x^2-4x+4$,是二次函数,不合题意;B. 整理为 $y=-2x^2+2$,是二次函数,不合题意;C. 整理为 $y=-x^2-x+1$,是二次函数,不合题意;D. 不是二次函数,符合题意. 故选 D.

2. B **点拨**:注意系数不能漏了符号. 该二次函数的二次项系数为 3,常数项为 -4,两个数的和为 $3-4=-1$. 故选 B.

3. D **点拨**:列出各选项的函数表达式,再根据二次函数的定义判断即可.

A. $y=mx+b$,当 $m\neq0$(m 是常数)时,是一次函数,错误;

B. $t=\frac{s}{v}$,当 $s\neq0$ 时,是反比例函数,错误;

C. $C=3a$,是正比例函数,错误;

D. $S=\frac{1}{3}\pi R^2$,是二次函数,正确.

故选 D.

4. D **点拨**:根据题意,得 $x^2+2x-7=8$,即 $x^2+2x-15=0$,解得 $x=3$ 或 -5,故选 D.

5. 3 **点拨**:根据题意得 $m-1=2$,解得 $m=3$.

6. $y=-8x^2+20x+12$ **点拨**:$y=-4(1+2x)(x-3)=-4(x-3+2x^2-6x)=-8x^2+20x+12$.

7. $S=-x^2+15x$;$0<x<15$ **点拨**:∵ 用一根长为 30 cm 的绳子围成一个长方形,长方形一边长为 x cm,∴ 其邻边长为 $(15-x)$ cm,∴ $S=(15-x)x=-x^2+15x$. 由题知 $15-x>0$,解得 $x<15$,故自变量 x 的取值范围是 $0<x<15$.

8. **解**:(1)$3y=3(x-1)^2+1$ 是二次函数,二次项是 x^2,一次项是 $-2x$,常数项是 $\frac{4}{3}$;

(2)$y=-0.5(x-1)(x+4)$ 是二次函数,二次项是 $-0.5x^2$,一次项是 $-1.5x$,常数项是 2;

(3)$s=3-2t^2$ 是二次函数,二次项是 $-2t^2$,一次项是 0,常数项是 3;

(5)$y=1-\sqrt{2}x^2$ 是二次函数,二次项是 $-\sqrt{2}x^2$,一次项是 0,常数项是 1.

9. **解**:由题意,得 $w=(x-20)\cdot y=(x-20)\cdot(-10x+500)=-10x^2+700x-10\,000$.

点拨:本题出现了两种不同的函数关系,一种是销售量与销售单价的关系,为一次函数,另一种是利润与销售单价的关系,为二次函数. 根据"利润=销售量×(销售单价−进价)",即可得 $w=(x-20)\cdot y$,又 $y=-10x+500$,可得 w 与 x 的函数表达式.

10. **解**:根据题意,得 $\begin{cases}3m^2-2m-3=2,\\ m-4\neq0,\end{cases}$

解得 $m=-1$ 或 $m=\frac{5}{3}$.

11. **解**:(1)养鸡场垂直于墙的边长是 x 米,则平行于墙的一边长为 $48-2x+2=50-2x$(米),

∴ $y=x(50-2x)=-2x^2+50x$;

(2)根据题意,得 $-2x^2+50x=300$,

解得 $x=10$ 或 $x=15$,

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

当 $x=10$ 时，$50-2x=30>25$，舍去，
当 $x=15$ 时，$50-2x=20<25$，
∴ 能建造符合要求的养鸡场，其长为 20 米，宽为 15 米；
(3)由(2)知，当 $a\geqslant 30$ 时，有两个方案；
当 $20\leqslant a<30$ 时，有一个方案；
当 $a<20$ 时，无方案.

12. **解**：由题意得 $\begin{cases}a-b=0,\\2a+b-3=0,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=1,\\b=1,\end{cases}$ 则 $a+b=2$.

点拨：因为已知函数是关于 x 的二次函数，所以等号右边应为关于 x 的二次多项式，故 $(a-b)x^3$ 与 $\frac{2a+b-3}{x}$ 必须都为 0，即 $a-b=0$ 且 $2a+b-3=0$，列出方程组求出 a、b.

5.2 二次函数的图像和性质

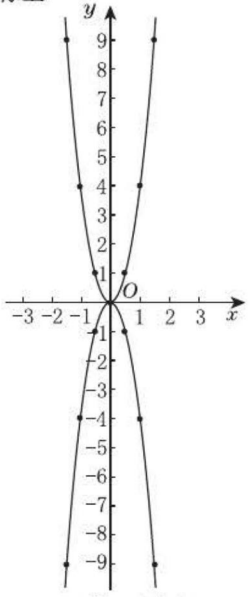
5.2.1 二次函数 $y=ax^2(a\neq 0)$ 的图像及其性质

Ⅰ. 举一反三训练

1. **解**：①列表：

x	…	$-\frac{3}{2}$	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	…
$y=4x^2$	…	9	4	1	0	1	4	9	…
$y=-4x^2$	…	-9	-4	-1	0	-1	-4	-9	…

②描点、连线，如图.
把 $x=2.5$ 分别代入两个函数表达式，只有 $y=-4x^2$ 的函数值为 -25，则这个点在函数 $y=-4x^2$ 的图像上.



(第 1 题图)

2. B　**点拨**：根据题意可知 $S=t^2(t>0)$.
∴ 图像是抛物线的一部分且在第一象限，故选 B.

3. A　**点拨**：A. $y=-\frac{3}{x}(x<0)$ 中，$k<0$，y 随 x 的增大而增大，此选项正确；B. $y=-x+5$ 是一次函数，$k<0$，故 y 随着 x 的增大而减小，此选项错误；C. $y=-\frac{1}{2}x$ 是正比例函数，$k<0$，故 y 随着 x 的增大而减小，此选项错误；D. $y=\frac{1}{2}x^2(x<0)$ 的图像在 y 轴左侧，y 随着 x 的增大而减小，此选项错误. 故选 A.

4. C　**点拨**：∵ $a<0$，∴ 函数 $y=ax^2$ 的图像经过坐标原点，且开口向下，反比例函数 $y=\frac{a}{x}$ 的图像位于第二、四象限，故选 C.

Ⅱ. 举一反三训练

5. C　**点拨**：由题意可知 $a^2-3=2$ 且 $2-a>0$，解得 $a=-\sqrt{5}$，故选 C.

6. **解**：(1)过 y 轴上一点 $A(0,1)$ 作 AC 平行于 x 轴，交抛物线 $y=x^2(x\geqslant 0)$ 于点 B，交抛物线 $y=\frac{1}{4}x^2(x\geqslant 0)$ 于点 C，
∴ $B(1,1)$，$C(2,1)$，
∴ $AB=1$，$BC=1$，
∴ $\frac{AB}{BC}=1$.
(2)∵ $B(1,1)$，
∴ 过 O、B 的直线为 $y=x$.
∵ 过点 C 作 CD 平行于 y 轴，交抛物线 $y=x^2(x\geqslant 0)$ 于点 D；过点 D 作 DE 平行于 x 轴，交抛物线 $y=\frac{1}{4}x^2(x\geqslant 0)$ 于点 E.
∴ 把 $x=2$ 代入 $y=x^2(x\geqslant 0)$ 得 $y=4$，
∴ $D(2,4)$，
把 $y=4$ 代入 $y=\frac{1}{4}x^2(x\geqslant 0)$ 得 $x=4$(负值舍去)，
∴ $E(4,4)$，
∴ 点 E 在过 O、B 的直线上，
∴ O，B，E 三点在同一直线上，该直线的表达式为 $y=x$.

7. **解**：(1)设直线 AB 的函数表达式为 $y=kx+b$，
∵ 它过点 $A(2,0)$ 和点 $B(1,1)$，
∴ $\begin{cases}2k+b=0,\\k+b=1,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}k=-1,\\b=2,\end{cases}$
∴ 直线 AB 的函数表达式为 $y=-x+2$.
(2)解方程组 $\begin{cases}y=-x+2,\\y=x^2,\end{cases}$ 得
$\begin{cases}x_1=-2,\\y_1=4,\end{cases}$ $\begin{cases}x_2=1,\\y_2=1,\end{cases}$
∴ C 点坐标为 $(-2,4)$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

又 B 点坐标为(1,1),A 点坐标为(2,0),

$\therefore S_{\triangle OAC}=\frac{1}{2}\times2\times4=4, S_{\triangle OAB}=\frac{1}{2}\times2\times1=1,$

$\therefore S_{\triangle OBC}=S_{\triangle OAC}-S_{\triangle OAB}=4-1=3,$

设 D 点的坐标为(x,y),

则 $S_{\triangle OAD}=\frac{1}{2}\times2\times y=3, \therefore y=3.$

把 $y=3$ 代入 $y=x^2$,

得 $x=\pm\sqrt{3}$,

又∵ 点 D 在第一象限,

$\therefore x=\sqrt{3}$,

$\therefore D$ 点坐标为$(\sqrt{3},3)$.

Ⅲ. 练基础·练方法·练技巧

1. C　**点拨**:A. ∵ 二次函数 $y=-2x^2$ 中,$a=-2<0$,∴ 此抛物线开口向下,故 A 项错误;B. ∵ 抛物线的对称轴是 y 轴,∴ 当 $x>1$ 时,函数图像在对称轴右侧,y 随 x 的增大而减小,故 B 项错误;C. 抛物线的顶点坐标为(0,0),故 C 项正确;D. ∵ 抛物线开口向下,∴ 此函数有最大值,故 D 项错误. 故选 C.

2. C　**点拨**:在函数 $y=4x^2$,$y=-4x^2$ 和 $y=\frac{1}{4}x^2$ 中,a 的取值分别为 $a=4>0$,$a=-4<0$,$a=\frac{1}{4}>0$,∴ 抛物线的开口方向分别向上、向下、向上;由函数 $y=4x^2$,$y=-4x^2$ 和 $y=\frac{1}{4}x^2$ 可知抛物线的顶点坐标都为(0,0),对称轴都为直线 $x=0$;∴ 它们共同的特点是都关于 y 轴对称,顶点都是原点. 故选 C.

3. D

4. D　**点拨**:根据 $ab>0$,知 a、b 同号,当 $a>0$ 时,$b>0$,$y=ax^2$ 的图像开口向上,且经过原点,$y=ax+b$ 的图像过一、二、三象限,此时,没有选项符合;当 $a<0$ 时,$b<0$,$y=ax^2$ 的图像开口向下,且经过原点,$y=ax+b$ 的图像过二、三、四象限,D 选项符合,故选 D.

5. $\frac{1}{2}$　**点拨**:把 $A(b,2)$ 的坐标代入 $y=3x-4$ 得 $2=3b-4$,解得 $b=2$,所以 A 点坐标为(2,2),把 $A(2,2)$ 的坐标代入 $y=ax^2$ 得 $2=4a$,解得 $a=\frac{1}{2}$.

6. $k>-1$　**点拨**:抛物线的开口方向向上,则 $k+1>0$,解得 $k>-1$.

7. **解**:(1)把点$(1,m)$的坐标代入 $y=2x-3$ 得$m=2-3=-1$,

把点$(1,-1)$的坐标代入 $y=\frac{1}{2}ax^2$,解得 $a=-2$.

抛物线的表达式为 $y=-x^2$,当 $x<0$ 时,y 随 x 的增大而增大.

(2)有.

解方程 $-x^2=2x-3$ 得 $x_1=1$,$x_2=-3$,

当 $x=-3$ 时,$y=-9$,

此抛物线与直线还有另外的交点,其坐标为$(-3,-9)$.

8. 2π　**点拨**:观察图形可知,把 x 轴上边的阴影部分对称到下边就得到一个半圆,则阴影部分的面积 $S=\frac{1}{2}\times\pi\times2^2=2\pi$.

9. $2\sqrt{3}$　**点拨**:∵ 菱形 $OABC$ 的顶点 O、A、C 在抛物线 $y=\frac{1}{3}x^2$ 上,对角线 OB 在 y 轴上,且 $OB=2$,

$\therefore A$,C 点纵坐标为 1,故 $1=\frac{1}{3}x^2$,解得 $x=\pm\sqrt{3}$,故$A(\sqrt{3},1)$,$C(-\sqrt{3},1)$,故菱形 $OABC$ 的面积是 $2\times\left(\frac{1}{2}\times2\times\sqrt{3}\right)=2\sqrt{3}$.

10. **解**:(1)∵ 四条直线 $x=1$,$x=2$,$y=1$,$y=2$ 围成正方形 $ABCD$,

$\therefore A(1,2)$,$C(2,1)$,

把 A 点的坐标代入 $y=ax^2$ 得 $a=2$,

把 C 点的坐标代入 $y=ax^2$ 得 $a=\frac{1}{4}$,

$\therefore \frac{1}{4}\leqslant a\leqslant2.$

(2)∵ a 为整数且$\frac{1}{4}\leqslant a\leqslant2$,

$\therefore a=1$ 或 2,

∴ 二次函数的表达式为 $y=x^2$ 或 $y=2x^2$.

11. **解**:(1)∵ R 与 Q 是关于 y 轴对称的两点,

$\therefore RQ=2(a+1)$,

把点 P,Q 的横坐标分别代入 $y=x^2$ 中,

得到点 $P(a,a^2)$,点 $Q(a+1,(a+1)^2)$,

$(a+1)^2-a^2=2a+1$,

$\therefore S=\frac{1}{2}\times2(a+1)(2a+1)=2a^2+3a+1.$

(2)由题意得 $2a^2+3a+1=28$,

解得 $a=3$ 或 $a=-\frac{9}{2}$(舍去).

故 a 的值是 3.

12. **解**:如图,作 $A_1C\perp y$ 轴,

垂足为 C,

∵ $\triangle A_1B_0B_1$ 是等腰直角三角形,

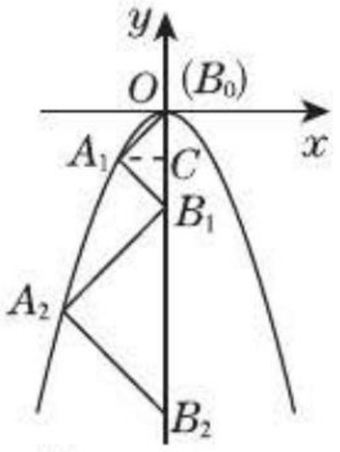
$\therefore B_1C=B_0C=A_1C$,

设 $A_1(a,b)$,

$\therefore a=b$,将其代入 $y=-x^2$ 得 $a=-a^2$,

解得 $a=0$(不符合题意,舍去)或 $a=-1$,

由勾股定理得 $A_1B_0=\sqrt{2}$,



(第 12 题图)

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

同理可以求得 $A_2B_1=2\sqrt{2}$，

$A_3B_2=3\sqrt{2}$，

$A_4B_3=4\sqrt{2}$，…，

$\therefore A_{2\,019}B_{2\,018}=2\,019\sqrt{2}$.

5.2.2 二次函数 $y=ax^2+k$，$y=a(x+h)^2$，$y=a(x+h)^2+k(a\neq0)$ 的图像及其性质

Ⅰ. 举一反三训练

1. $y=x^2-2$　**点拨**：由“上加下减”的原则可知，抛物线 $y=x^2-3$ 向上平移一个单位长度后，得到的新抛物线的表达式是 $y=x^2-3+1$，即 $y=x^2-2$.

2. 上；y 轴；(0,5)；小；5　**点拨**：$\because a=3>0$，$\therefore$ 抛物线开口向上，对称轴是 y 轴，顶点坐标为(0,5)，函数有最小值，$y_{最小值}=5$.

3. >1　**点拨**：$\because y=(x-1)^2$，$\therefore$ 抛物线开口向上，对称轴为直线 $x=1$，$\therefore$ 当 $x>1$ 时，y 随 x 的增大而增大.

4. 左；4　**点拨**：把抛物线 $y=4(x-2)^2$ 向左平移 4 个单位长度，就得到函数 $y=4(x+2)^2$ 的图像.

5. B　**点拨**：$\because y=-x+1$ 的图像经过一、二、四象限，$y=-\frac{1}{2}(x-1)^2$ 的图像的开口向下且顶点为(1,0)，$\therefore$ 符合题意的只有 B 选项，故选 B.

6. $y=3(x+5)^2-8$　**点拨**：抛物线 $y=3(x+2)^2-4$ 先向左平移 3 个单位长度，再向下平移 4 个单位长度得到的抛物线是 $y=3(x+2+3)^2-4-4=3(x+5)^2-8$. 故得到的抛物线的表达式为 $y=3(x+5)^2-8$.

7. D　**点拨**：$\because y=2(x+1)^2-3$，$\therefore$ 当 $x=0$ 时，$y=-1$，故选项 A 错误，该函数图像的对称轴是直线 $x=-1$，故选项 B 错误，当 $x<-1$ 时，y 随 x 的增大而减小，故选项 C 错误，当 $x=-1$ 时，y 取得最小值，$y_{最小值}=-3$，故选项 D 正确，故选 D.

Ⅱ. 举一反三训练

8. A　**点拨**：根据题意得抛物线的顶点坐标为 $(-m,n)$，且在第四象限，$\therefore -m>0$，$n<0$，即 $m<0$，$n<0$，则一次函数 $y=mx+n$ 的图像不经过第一象限. 故选 A.

9. 12　**点拨**：如图，连接 AP，$A'P'$，过点 A 作 $AD\perp PP'$ 于点 D，

由题意可得出 $AP/\!/A'P'$，$AP=A'P'$，

$\therefore$ 四边形 $APP'A'$ 是平行四边形.

$\because$ 抛物线的顶点为 $P(-2,2)$，与 y 轴交于点 $A(0,3)$，平移该抛物线使其顶点 P 沿直线移动到点 $P'(2,-2)$，

$\therefore PO=P'O=\sqrt{2^2+2^2}=2\sqrt{2}$，$\angle AOP=45°$，

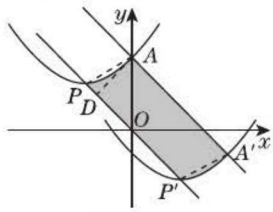
$\therefore PP'=2\sqrt{2}\times2=4\sqrt{2}$.

又 $\because AD\perp OP$，

$\therefore \triangle ADO$ 是等腰直角三角形，

$\therefore AD=DO=\frac{\sqrt{2}}{2}\times3=\frac{3\sqrt{2}}{2}$，

$\therefore$ 抛物线上 PA 段扫过的区域（阴影部分）的面积为 $4\sqrt{2}\times\frac{3\sqrt{2}}{2}=12$.



（第 9 题图）

10. $-\frac{1}{4}$　**点拨**：二次函数 $y=-(x-1)^2+2$ 的图像的对称轴是直线 $x=1$，开口向下，$\therefore$ 当 $x>1$ 时，y 随 x 的增大而减小，$\therefore$ 当 $x=2.5$ 时，二次函数 $y=-(x-1)^2+2$ 有最大值，是 $-\frac{1}{4}$.

Ⅲ. 练基础 · 练方法 · 练技巧

1. C　**点拨**：由二次函数 $y=-2(x-2)^2+1$ 可知 $a=-2<0$，所以图像的开口向下，对称轴为直线 $x=2$，当 $x>2$ 时，y 随 x 的增大而减小，函数有最大值 1，故 A、B、D 正确，C 错误，故选 C.

2. B　**点拨**：$\because$ 抛物线 $y=(x+1)^2$ 的顶点坐标为 $(-1,0)$，$\therefore$ 平移后抛物线的顶点坐标为 $(1,-4)$，$\therefore$ 平移后抛物线的表达式为 $y=(x-1)^2-4$，故选 B.

3. D　**点拨**：A. 由一次函数 $y=ax+b$ 的图像可得 $a<0$，此时二次函数 $y=ax^2+b$ 的图像应该开口向下，故 A 错误；B. 由一次函数 $y=ax+b$ 的图像可得 $a>0$，此时二次函数 $y=ax^2+b$ 的图像应该开口向上，故 B 错误；C. 由一次函数 $y=ax+b$ 的图像可得 $a>0$，$b>0$，此时二次函数 $y=ax^2+b$ 的图像应该开口向上，与 y 轴交于正半轴，故 C 错误；D. 由一次函数 $y=ax+b$ 的图像可得 $a<0$，$b<0$，此时二次函数 $y=ax^2+b$ 的图像应该开口向下，与直线交于 y 轴负半轴的同一点，故 D 正确. 故选 D.

4. B　**点拨**：根据题意，得抛物线顶点坐标为 $(m,m+1)$，因为顶点在第一象限，所以 $m>0$，且 $m+1>0$，解得 $m>0$. 故选 B.

5. $(-1,-3)$　**点拨**：二次函数 $y=3(x+1)^2-3$ 的图像的顶点坐标是 $(-1,-3)$.

6. $a<-1$　**点拨**：$\because$ 抛物线 $y=(a+1)x^2-4$ 有最高点，$\therefore a+1<0$，即 $a<-1$.

7. 1　**点拨**：$\because$ 抛物线 $y=ax^2+1$ 与 y 轴交于点 A，$\therefore A$ 点坐标为 $(0,1)$. 当 $y=1$ 时，$4x^2=1$，解得 $x=\pm\frac{1}{2}$，$\therefore B$ 点坐标为 $\left(-\frac{1}{2},1\right)$，$C$ 点坐标为

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

$\left(\frac{1}{2},1\right)$,$\therefore BC=\frac{1}{2}-\left(-\frac{1}{2}\right)=1$.

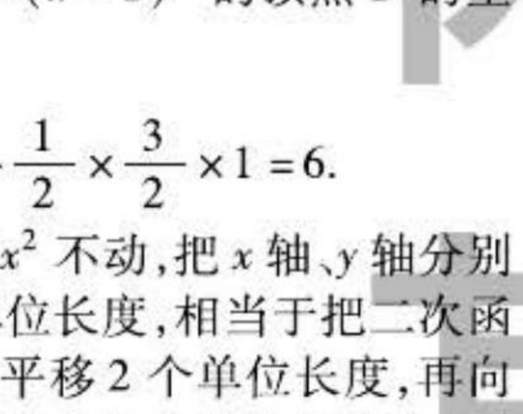
8. $y=(x-1)^2+1$ **点拨**:把抛物线 $y=x^2$ 沿直线 $y=x$ 平移$\sqrt{2}$个单位长度后顶点为 A,即将抛物线向上平移 1 个单位长度后再向右平移 1 个单位长度,根据"上加下减常数项,左加右减自变量"即可得到平移后的抛物线的表达式为 $y=(x-1)^2+1$.

9. **解**:(1)$y=2(x+3)^2+5$,
$\therefore$ 开口向上,
对称轴为直线 $x=-3$,顶点坐标为$(-3,5)$;
(2)$y=-3(x-1)^2-2$,
$\therefore$ 开口向下,
对称轴为直线 $x=1$,顶点坐标为$(1,-2)$;
(3)$y=4(x-3)^2+7$,
$\therefore$ 开口向上,
对称轴为直线 $x=3$,顶点坐标为$(3,7)$;
(4)$y=-5(x+2)^2-6$,
$\therefore$ 开口向下,
对称轴为直线 $x=-2$,顶点坐标为$(-2,-6)$.

10. **解**:(1)由题意可得$\begin{cases}y=(x-1)^2,\\y=2x+1,\end{cases}$
解得$\begin{cases}x=0,\\y=1\end{cases}$或$\begin{cases}x=4,\\y=9.\end{cases}$
A 点坐标为$(4,9)$,B 点坐标为$(0,1)$;
(2)直线 $y=2x+1$ 与 x 轴的交点 C 的坐标为$\left(-\frac{1}{2},0\right)$,抛物线 $y=(x-1)^2$ 的顶点 D 的坐标为$(1,0)$,
$S_{\triangle ABD}=\frac{1}{2}\times\frac{3}{2}\times9-\frac{1}{2}\times\frac{3}{2}\times1=6$.

11. D **点拨**:抛物线 $y=2x^2$ 不动,把 x 轴、y 轴分别向下、向左平移 2 个单位长度,相当于把二次函数 $y=2x^2$ 的图像向右平移 2 个单位长度,再向上平移 2 个单位长度,$\therefore$ 抛物线的表达式为 $y=2(x-2)^2+2$. 故选 D.

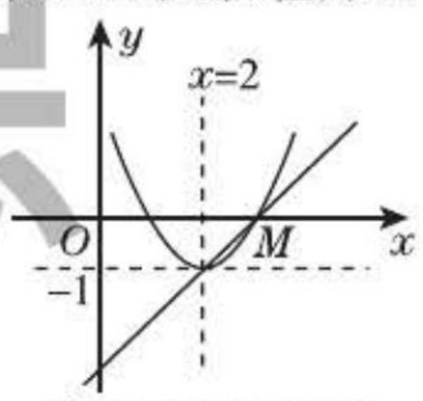
12. **解**:$\because$ 抛物线 $y=\frac{1}{8}(x+1)^2-2$ 的顶点为 A,
$\therefore A(-1,-2)$,
如图,作 $BE\perp y$ 轴于 E,$AF\perp y$ 轴于 F,
$\because$ $\triangle ABC$ 是以 AB 为斜边的等腰直角三角形,
$\therefore AC=BC$,$\angle ACB=90°$,
$\therefore \angle BCE+\angle ACF=90°$,
$\because \angle BCE+\angle EBC=90°$,$\therefore \angle ACF=\angle EBC$,
在$\triangle ACF$和$\triangle CBE$中,
$\begin{cases}\angle ACF=\angle EBC,\\\angle AFC=\angle CEB=90°,\\AC=BC,\end{cases}$
$\therefore \triangle ACF\cong\triangle CBE$(AAS),



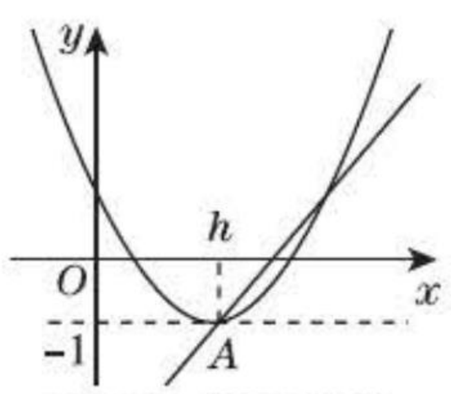
(第 12 题图)

$\therefore AF=CE$,$CF=BE$,
设 $C(0,n)$,则 $BE=CF=n+2$,$AF=CE=1$,
$\therefore B(-n-2,n+1)$,
$\because$ 点 B 在抛物线上,
$\therefore n+1=\frac{1}{8}(-n-2+1)^2-2$,解得 $n=3\pm4\sqrt{2}$,
$\therefore C(0,3+4\sqrt{2})$或$(0,3-4\sqrt{2})$.

13. (1)**证明**:抛物线 C 的顶点坐标为$(h,-1)$,
当 $x=h$ 时,$y_2=kh-kh-1=-1$,
所以直线 l 恒过抛物线 C 的顶点;
(2)**解**:当 $a=1$ 时,抛物线 C 的表达式为 $y_1=(x-h)^2-1$,
不妨令 $y_3=x-3$,
如图所示,抛物线 C 的顶点在直线 $y=-1$ 上移动,
当 $2\leqslant x\leqslant m$ 时,$y_1\leqslant x-3$ 恒成立,
则可知抛物线 C 的顶点为$(2,-1)$,
设抛物线 C 与直线 $y_3=x-3$ 除顶点外的另一交点为 M,
此时点 M 的横坐标即为 m 的最大值,
由$\begin{cases}y=(x-2)^2-1,\\y=x-3,\end{cases}$解得 $x=2$ 或 $x=3$,
所以 m 的最大值为 3.



[第 13 题(2)图]



[第 13 题(3)图]

(3)**解**:如图所示,由(1)可知,抛物线 C 与直线 l 都过点 $A(h,-1)$.
当 $0<a\leqslant1$,$k>0$ 时,在直线 l 下方的抛物线 C 上至少存在三个横坐标为整数的点,即当 $x=h+3$ 时,$y_2>y_1$ 恒成立.
所以 $k(h+3)-kh-1>a(h+3-h)^2-1$,整理得 $k>3a$.
又因为 $0<a\leqslant1$,
所以 $0<3a\leqslant3$,所以 $k>3$.

5.2.3 二次函数 $y=ax^2+bx+c(a\neq0)$ 的图像及其性质

Ⅰ. 举一反三训练

1. C **方法规律**:本题运用转化思想. 化为一般式后,利用配方法把一般式转化为顶点式. $y=(2x-1)(x+2)=2x^2+3x-2=2\left(x^2+\frac{3}{2}x+\frac{9}{16}\right)-\frac{9}{8}-2=2\left(x+\frac{3}{4}\right)^2-\frac{25}{8}$.

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

2. 解：(1) $y=3x^2-6x+2=3(x-1)^2-1$，
图像的顶点坐标为(1，-1)，对称轴为直线 $x=1$；
(2)∵ $a=-5$，$b=80$，$c=-319$，
∴ $-\frac{b}{2a}=-\frac{80}{2\times(-5)}=8$，
$\frac{4ac-b^2}{4a}=\frac{4\times(-5)\times(-319)-80^2}{4\times(-5)}=1$，
∴ 图像的顶点坐标为(8，1)，对称轴为直线 $x=8$.

3. D　点拨：$y=x^2+5x+6=\left(x+\frac{5}{2}\right)^2-\frac{1}{4}$，二次项系数是 $1>0$，则函数图像的开口向上，故 A 错误；函数图像的对称轴是直线 $x=-\frac{5}{2}$，顶点是 $\left(-\frac{5}{2},-\frac{1}{4}\right)$，B 错误，D 正确；函数有最小值 $-\frac{1}{4}$，C 错误. 故选 D.

4. 5　点拨：根据题意可知 $\frac{4ac-b^2}{4a}=9$，即 $\frac{4\times(-1)\times k-(-4)^2}{4\times(-1)}=9$，解得 $k=5$.

5. B　点拨：由 $a>0$ 可知，抛物线开口向上，排除 C、D；由 $a>0$，$b>0$ 可知，$x=-\frac{b}{2a}<0$，抛物线的对称轴在 y 轴左边，由 $c>0$ 可知，抛物线与 y 轴交点(0，c)在 x 轴上方，排除 A；故选 B.

Ⅱ. 举一反三训练

6. C　点拨：$y=x^2+4x-3$ 化成顶点式为 $y=(x+2)^2-7$，$y=x^2-2x+2$ 化成顶点式为 $y=(x-1)^2+1$，抛物线 $y=(x+2)^2-7$ 向右平移 3 个单位长度，再向上平移 8 个单位长度得抛物线 $y=(x-1)^2+1$，故选 C.

7. -1　点拨：根据题意，得 $ax_1^2-2ax_1-1=ax_2^2-2ax_2-1$，∴ $a(x_1+x_2-2)(x_1-x_2)=0$，∵ $a\neq0$，$x_1\neq x_2$，∴ $x_1+x_2-2=0$，∴ $x_1+x_2=2$. 则当 $x=x_1+x_2=2$ 时，$y=4a-4a-1=-1$.

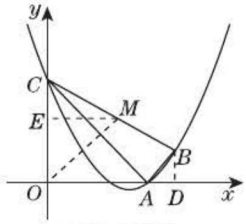
8. D　点拨：∵ 抛物线与 x 轴有两个交点，∴ $b^2-4ac>0$，即 $b^2>4ac$，∴ A 选项错误；∵ 抛物线开口向上，∴ $a>0$，∵ 抛物线与 y 轴的交点在 x 轴下方，∴ $c<0$，∴ $ac<0$，∴ B 选项错误；∵ 二次函数图像的对称轴是直线 $x=1$，∴ $-\frac{b}{2a}=1$，∴ $2a+b=0$，∴ C 选项错误；∵ 抛物线过点 $A(3,0)$，二次函数图像的对称轴是直线 $x=1$，∴ 抛物线与 x 轴的另一个交点为(-1，0)，
∴ $a-b+c=0$，∴ D 选项正确. 故选 D.

9. 解：(1) 把点 $A(3,0)$，$B(4,1)$ 的坐标代入 $y=ax^2+bx+3$ 中，

得 $\begin{cases}9a+3b+3=0,\\16a+4b+3=1,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=\frac{1}{2},\\b=-\frac{5}{2},\end{cases}$

故所求函数关系式为 $y=\frac{1}{2}x^2-\frac{5}{2}x+3$.

(2) 如图，过点 B 作 $BD\perp x$ 轴于点 D，
易知点 C 的坐标为(0，3)，∴ $OA=OC$，
∴ $\angle OAC=45°$.
又∵ 点 B 的坐标为(4，1)，∴ $AD=BD$，
∴ $\angle DAB=45°$，
∴ $\angle BAC=180°-45°-45°=90°$，
∴ $\triangle ABC$ 是直角三角形.
圆心 M 的坐标为(2，2)；



(第 9 题图)

(3) 存在，易知点 M 为 BC 的中点，过点 M 作 $ME\perp y$ 轴于点 E，连接 OM，如图，
∵ M 的坐标为(2，2)，
∴ $MC=\sqrt{2^2+1^2}=\sqrt{5}$，$OM=2\sqrt{2}$，
$\angle MOA=45°$.
又∵ $\angle BAD=45°$，∴ $OM/\!/AB$，
∴ 要使抛物线沿射线 BA 方向平移，且使 $\odot M_1$ 经过原点，则平移的长度为：$2\sqrt{2}-\sqrt{5}$ 或 $2\sqrt{2}+\sqrt{5}$.
∵ $\angle BAD=45°$，
∴ 抛物线的顶点向左、向下均分别平移 $\frac{2\sqrt{2}-\sqrt{5}}{\sqrt{2}}=\frac{4-\sqrt{10}}{2}$(个)单位长度或 $\frac{2\sqrt{2}+\sqrt{5}}{\sqrt{2}}=\frac{4+\sqrt{10}}{2}$(个)单位长度，
∵ $y=\frac{1}{2}x^2-\frac{5}{2}x+3=\frac{1}{2}\left(x-\frac{5}{2}\right)^2-\frac{1}{8}$，
∴ 平移后抛物线的关系式为
$y=\frac{1}{2}\left(x-\frac{5}{2}+\frac{4-\sqrt{10}}{2}\right)^2-\frac{1}{8}-\frac{4-\sqrt{10}}{2}$，
即 $y=\frac{1}{2}\left(x-\frac{1+\sqrt{10}}{2}\right)^2-\frac{17-4\sqrt{10}}{8}$，
或 $y=\frac{1}{2}\left(x-\frac{5}{2}+\frac{4+\sqrt{10}}{2}\right)^2-\frac{1}{8}-\frac{4+\sqrt{10}}{2}$，
即 $y=\frac{1}{2}\left(x-\frac{1-\sqrt{10}}{2}\right)^2-\frac{17+4\sqrt{10}}{8}$.
综上所述，存在一个位置，使 $\odot M_1$ 经过原点，此时抛物线的关系式为
$y=\frac{1}{2}\left(x-\frac{1+\sqrt{10}}{2}\right)^2-\frac{17-4\sqrt{10}}{8}$ 或 $y=\frac{1}{2}\left(x-\frac{1-\sqrt{10}}{2}\right)^2-\frac{17+4\sqrt{10}}{8}$.

Ⅲ. 练基础·练方法·练技巧

1. B　点拨：$y=x^2-8x-9=x^2-8x+16-25=(x-4)^2-25$，故选 B.

2. A　点拨：将抛物线 $y=-5x^2+1$ 向左平移 1 个

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

单位长度,得到抛物线 $y=-5(x+1)^2+1$,再向下平移2个单位长度,得到的抛物线为 $y=-5(x+1)^2-1$,故选 A.

3. C **点拨**:$y=x^2-2mx-4=x^2-2mx+m^2-m^2-4=(x-m)^2-m^2-4$. $\therefore$ 点 $M(m,-m^2-4)$. $\therefore$ 点 $M'(-m,m^2+4)$. $\therefore m^2+2m^2-4=m^2+4$. 解得 $m=\pm2$.

$\because m>0$, $\therefore m=2$. $\therefore M(2,-8)$. 故选 C.

4. B **点拨**:$\because$ 一次函数 $y=(a+1)x+a$ 的图像过第一、三、四象限, $\therefore a+1>0$ 且 $a<0$, $\therefore -1<a<0$, $\therefore$ 二次函数 $y=ax^2-ax$ 有最大值 $-\frac{a}{4}$,故选 B.

5. 1;5 **点拨**:$\because y=x^2-2x+6=(x-1)^2+5$, $\therefore$ 当 $x=1$ 时,二次函数 $y=x^2-2x+6$ 有最小值5.

6. $(-1,-4)$ **点拨**:$x=-\frac{4}{2\times2}=-1$,把 $x=-1$ 代入得 $y=2-4-2=-4$. 则顶点的坐标是 $(-1,-4)$.

7. $(-2,0)$ **点拨**:$\because$ 抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 上的 $P(4,0)$, Q 两点关于它的对称轴 $x=1$ 对称, $\therefore P,Q$ 两点到对称轴 $x=1$ 的距离相等, $\therefore Q$ 点的坐标为 $(-2,0)$.

8. 直线 $x=-1$ **点拨**:$\because a+b+c=0$, $\therefore$ 抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 经过点 $(1,0)$, $\therefore$ 抛物线与 x 轴的两交点分别为 $(-3,0)$ 和 $(1,0)$, $\therefore$ 此抛物线的对称轴是直线 $x=\frac{-3+1}{2}=-1$.

9. **解**:(1)$y=-2x^2-4x+1$,

$=-2(x^2+2x+1)+2+1$,

$=-2(x+1)^2+3$,

$\therefore$ 对称轴是直线 $x=-1$,

顶点坐标为 $(-1,3)$.

(2)$\because$ 新抛物线的顶点为 $P(2,0)$,

$\therefore$ 新抛物线的表达式为 $y=-2(x-2)^2$,

$\because 2-(-1)=2+1=3$, $0-3=-3$,

$\therefore$ 平移过程为:向右平移3个单位长度,向下平移3个单位长度.

10. D **点拨**:$y=x^2-2mx=(x-m)^2-m^2$,①若 $m<-1$,当 $x=-1$ 时, $y=1+2m=-2$,解得 $m=-\frac{3}{2}$;②若 $m>2$,当 $x=2$ 时, $y=4-4m=-2$,解得 $m=\frac{3}{2}$(舍去);③若 $-1\leqslant m\leqslant2$,当 $x=m$ 时, $y=-m^2=-2$,解得 $m=\sqrt{2}$ 或 $m=-\sqrt{2}$(舍去), $\therefore m$ 的值为 $-\frac{3}{2}$ 或 $\sqrt{2}$,故选 D.

11. C **点拨**:根据图像可知 $a>0$, $c<0$, $b>0$, $\therefore \frac{a+b}{c}<0$,故④错误;$\because OB=OC$, $\therefore OB=-c$, $\therefore$ 点 B 的坐标为 $(-c,0)$, $\therefore ac^2-bc+c=0$, $\therefore ac-b+1=0$, $\therefore ac=b-1$,故③正确;$\because$ 抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 与 x 轴交于 $A(-2,0)$ 和 $B(-c,0)$ 两点, $\therefore 2c=\frac{c}{a}$, $\therefore 2=\frac{1}{a}$, $\therefore a=\frac{1}{2}$,故②正确;$\because ac-b+1=0$, $\therefore b=ac+1$, $\because a=\frac{1}{2}$, $\therefore b=\frac{1}{2}c+1$, $\therefore 2b-c=2$,故①正确. 故选 C.

12. (1)**证明**:当 $m=2$ 时, $n=-2^2+2\times2=0$.

$\therefore$ 此时点 P 为抛物线与 x 轴的右交点.

$\because PM\perp$ 直线 $y=\frac{5}{4}$,

$\therefore PM=\frac{5}{4}$.

$\because$ 抛物线 $y=-x^2+2x$ 的对称轴为直线 $x=1$,

点 F 的纵坐标为 $\frac{3}{4}$,

$\therefore F\left(1,\frac{3}{4}\right)$.

在 $\triangle FAP$ 中, $\angle FAP=90°$,

$\therefore PF=\sqrt{AF^2+AP^2}=\sqrt{\left(\frac{3}{4}\right)^2+(2-1)^2}=\frac{5}{4}$.

$\therefore PF=PM$.

(2)**解**:$PF=PM$ 仍然成立. 证明如下:

过点 P 作 $PB\perp AF$ 于点 B.

当点 B 与点 F 重合时, $n=\frac{3}{4}$,

$\therefore -m^2+2m=\frac{3}{4}$,解得 $m=\frac{1}{2}$ 或 $\frac{3}{2}$.

$\therefore PF=\frac{1}{2}$.

$\because PM=\frac{5}{4}-\frac{3}{4}=\frac{1}{2}$.

$\therefore PF=PM$.

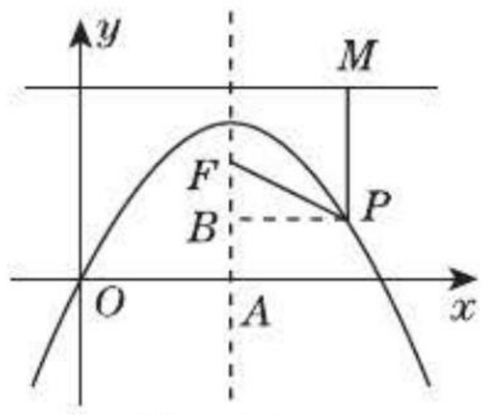
当点 B 与点 F 不重合时,如图.

$\therefore BF=\left|n-\frac{3}{4}\right|$,

$BP=|m-1|$,

在 $\triangle BFP$ 中, $\angle PBF=90°$,

$\therefore PF^2=BF^2+BP^2$.



(第12题图)

即 $PF^2=\left(n-\frac{3}{4}\right)^2+(m-1)^2=n^2-\frac{3}{2}n+\frac{25}{16}+(m^2-2m)$.

$\because$ 点 $P(m,n)$ 在抛物线上,

$\therefore -m^2+2m=n$,即 $m^2-2m=-n$,

$\therefore PF^2=n^2-\frac{3}{2}n+\frac{25}{16}-n=n^2-\frac{5}{2}n+\frac{25}{16}$.

$\because PM\perp$ 直线 $y=\frac{5}{4}$, $P(m,n)$,

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

$\therefore PM^2=\left(n-\frac{5}{4}\right)^2=n^2-\frac{5}{2}n+\frac{25}{16}$.

$\therefore PF^2=PM^2$.

$\therefore PF=PM$.

综上,点 P 为抛物线 $y=-x^2+2x$ 上任意一点都有 $PF=PM$.

13. **解**:(1)在 $y=x^2-2x-3$ 中,令 $y=0$ 可得 $x^2-2x-3=0$,解得 $x=-1$ 或 $x=3$,

$\therefore A(-1,0)$,$B(3,0)$,

令 $x=0$ 可得 $y=-3$,

又抛物线位于 x 轴下方的部分沿 x 轴翻折后得到曲线 N,

$\therefore C(0,3)$,设曲线 N 所在抛物线的函数表达式为 $y=ax^2+bx+c$,把 A、B、C 的坐标代入可得

$\begin{cases}a-b+c=0,\\9a+3b+c=0,\\c=3,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=-1,\\b=2,\\c=3,\end{cases}$

$\therefore$ 曲线 N 所在抛物线的函数表达式为 $y=-x^2+2x+3$.

(2)设 $\triangle ABC$ 外接圆的圆心为 D,则点 D 为线段 BC、线段 AB 垂直平分线的交点,

$\because B(3,0)$,$C(0,3)$,

$\therefore$ 线段 BC 的垂直平分线的表达式为 $y=x$,

又线段 AB 的垂直平分线为曲线 N 的对称轴,即直线 $x=1$,

$\therefore D(1,1)$,

连接 DB,则 $DB=\sqrt{(1-3)^2+1^2}=\sqrt{5}$,

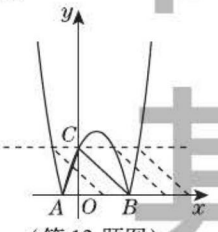
即 $\triangle ABC$ 外接圆的半径为 $\sqrt{5}$.

(3)设 $Q(t,0)$,则 $BQ=|t-3|$.

①当 BC 为平行四边形的边时,如图,则有 $BQ/\!/PC$,

$\therefore P$ 点纵坐标为 3,

即过 C 点与 x 轴平行的直线与曲线 M 或曲线 N 的交点即为点 P,x 轴上对应的即为点 Q,



(第 13 题图)

当点 P 在曲线 M 上时,在 $y=x^2-2x-3$ 中,令 $y=3$ 可解得 $x=1+\sqrt{7}$ 或 $x=1-\sqrt{7}$,

$\therefore PC=1+\sqrt{7}$ 或 $PC=\sqrt{7}-1$,

当 $x=1+\sqrt{7}$ 时,可知点 Q 在点 B 的右侧,可得 $BQ=t-3$,

$\therefore t-3=1+\sqrt{7}$,解得 $t=4+\sqrt{7}$,

当 $x=1-\sqrt{7}$ 时,可知点 Q 在点 B 的左侧,可得 $BQ=3-t$,

$\therefore 3-t=\sqrt{7}-1$,解得 $t=4-\sqrt{7}$,

$\therefore Q$ 点坐标为 $(4+\sqrt{7},0)$ 或 $(4-\sqrt{7},0)$;

当点 P 在曲线 N 上时,在 $y=-x^2+2x+3$ 中,令 $y=3$ 可求得 $x=0$(舍去)或 $x=2$,

$\therefore PC=2$,

此时 Q 点在 B 点的右侧,则 $BQ=t-3$,

$\therefore t-3=2$,解得 $t=5$,

$\therefore Q$ 点坐标为 $(5,0)$;

②当 BC 为平行四边形的对角线时,

$\because B(3,0)$,$C(0,3)$,

$\therefore$ 线段 BC 的中点为 $\left(\frac{3}{2},\frac{3}{2}\right)$,设 $P(x,y)$,

$\therefore x+t=3$,$y+0=3$,解得 $x=3-t$,$y=3$,

$\therefore P(3-t,3)$,

当点 P 在曲线 M 上时,有 $3=(3-t)^2-2(3-t)-3$,解得 $t=2+\sqrt{7}$ 或 $t=2-\sqrt{7}$,

$\therefore Q$ 点坐标为 $(2+\sqrt{7},0)$ 或 $(2-\sqrt{7},0)$;

当点 P 在曲线 N 上时,有 $3=-(3-t)^2+2(3-t)+3$,解得 $t=3$(Q、B 重合,舍去)或 $t=1$,

$\therefore Q$ 点坐标为 $(1,0)$.

综上可知 Q 点的坐标为 $(4+\sqrt{7},0)$ 或 $(4-\sqrt{7},0)$ 或 $(5,0)$ 或 $(2+\sqrt{7},0)$ 或 $(2-\sqrt{7},0)$ 或 $(1,0)$.

5.3 用待定系数法确定二次函数表达式

Ⅰ. 举一反三训练

1. **解**:设二次函数表达式为 $y=ax^2+bx+c(a\neq0)$.

$\because$ 二次函数的图像经过 $A(4,3)$,$B(1,0)$,$C(-1,8)$ 三点,

$\therefore \begin{cases}16a+4b+c=3,\\a+b+c=0,\\a-b+c=8,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=1,\\b=-4,\\c=3,\end{cases}$

则该二次函数表达式是 $y=x^2-4x+3$.

2. **解**:设该函数的表达式为 $y=a(x+1)^2+4$.

将 $B(2,-5)$ 的坐标代入,得 $-5=a(2+1)^2+4$,解得 $a=-1$. 所以该函数的表达式为 $y=-(x+1)^2+4$.

3. $y=x^2-2x$ **点拨**:根据图像可知顶点坐标为 $(1,-1)$,设函数表达式是 $y=a(x-1)^2-1$,把点 $(0,0)$ 的坐标代入表达式,得 $a-1=0$,即 $a=1$,

$\therefore$ 表达式为 $y=(x-1)^2-1$,即 $y=x^2-2x$.

Ⅱ. 举一反三训练

4. **解**:(1)$y=x^2-2x-1=(x-1)^2-2$,抛物线的顶点坐标为 $(1,-2)$,点 $(1,-2)$ 关于 x 轴对称的点的坐标为 $(1,2)$,所以与此二次函数图像关于 x 轴对称的抛物线的函数表达式为 $y=-(x-1)^2+2$;

(2)抛物线的顶点坐标为 $(1,-2)$,点 $(1,-2)$ 关于 y 轴对称的点的坐标为 $(-1,-2)$,所以与此二次函数图像关于 y 轴对称的抛物线的函数表达式为 $y=(x+1)^2-2$;

(3)抛物线的顶点坐标为 $(1,-2)$,点 $(1,-2)$ 关于原点对称的点的坐标为 $(-1,2)$,所以与此二次函数图像关于原点对称的抛物线的函数表达式为 $y=-(x+1)^2+2$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

5. 解:∵ 二次函数 $y=mx^2+4x+m-1$ 的图像有最高点,

∴ $m<0$,

∵ 最高点的纵坐标为 -4,

∴ $\dfrac{4m(m-1)-4^2}{4m}=-4$,

整理得 $m^2+3m-4=0$,

解得 $m_1=1, m_2=-4$,

∴ m 的值为 -4.

Ⅲ. 练基础 · 练方法 · 练技巧

1. D 方法规律:由表可知,抛物线的对称轴为直线 $x=-3$,顶点为 $(-3,5)$,用待定系数法求得二次函数的表达式,再把 $x=1$ 代入即可求得 y 的值.

2. D **点拨**:观察图像,抛物线开口向下,所以 $a<0$. 抛物线过点 $(-1,0),(2,0)$,根据抛物线的对称性知,顶点的横坐标是 $\dfrac{1}{2}$,分析各个选项可知 D 正确.

3. D **点拨**:易求出抛物线 $y=2x^2-4x-1$ 的顶点坐标为 $(1,-3)$,根据题意得所求的二次函数图像的顶点坐标是 $(1,-3)$,且抛物线开口向下. 再分别确定各选项中函数图像的顶点坐标和开口方向即可求解.

4. $y=2x^2+8x+11$ **点拨**:由题意可设抛物线的表达式为 $y=a(x+2)^2+3$,由抛物线经过点 $(-1,5)$,得 $5=(-1+2)^2a+3$,解得 $a=2$. 则抛物线的表达式为 $y=2(x+2)^2+3$,整理得 $y=2x^2+8x+11$.

5. 16 **点拨**:∵ $a=1, b=-8$,顶点在 x 轴上,∴ 顶点纵坐标为 0,即 $\dfrac{4ac-b^2}{4a}=\dfrac{4c-(-8)^2}{4}=0$,

解得 $c=16$.

6. 14 或 8 **点拨**:由题意,得 $\dfrac{4(c-2)-36}{4}=\pm3$,当 $\dfrac{4(c-2)-36}{4}=3$ 时,$c=14$,

当 $\dfrac{4(c-2)-36}{4}=-3$ 时,$c=8$.

所以 c 的值为 14 或 8. 注意不要漏解.

7. $y=x^2-4x+3$ **点拨**:由表中的信息知点 $(0,3)$ 和 $(4,3)$,点 $(1,0)$ 和 $(3,0)$ 都分别关于直线 $x=2$ 对称,选取 $(0,3)$、$(1,0)$、$(3,0)$,代入 $y=ax^2+bx+c$,求得 $y=x^2-4x+3$.

8. 解:(1)当 $x=0$ 时,$y=-\dfrac{1}{2}x+4=4$,则 $A(0,4)$,

当 $y=0$ 时,$-\dfrac{1}{2}x+4=0$,解得 $x=8$,则 $B(8,0)$,

设抛物线的表达式为 $y=a(x+2)(x-8)$,

把 $A(0,4)$ 的坐标代入得 $a\cdot2\cdot(-8)=4$,解得 $a=-\dfrac{1}{4}$,

∴ 抛物线的表达式为 $y=-\dfrac{1}{4}(x+2)(x-8)$,

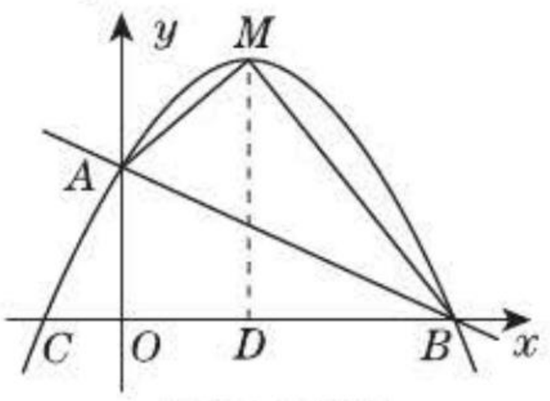
即 $y=-\dfrac{1}{4}x^2+\dfrac{3}{2}x+4$.

(2)∵ $y=-\dfrac{1}{4}x^2+\dfrac{3}{2}x+4=-\dfrac{1}{4}(x-3)^2+\dfrac{25}{4}$,

∴ $M\left(3,\dfrac{25}{4}\right)$,

作 $MD\perp x$ 轴于 D,如图,

四边形 $AOBM$ 的面积 $=S_{梯形AODM}+S_{\triangle BDM}=\dfrac{1}{2}\times\left(4+\dfrac{25}{4}\right)\times3+\dfrac{1}{2}\times5\times\dfrac{25}{4}=31$.



(第 8 题图)

9. 解:(1)将 $x=-1$、$y=-1$;$x=3$、$y=-9$ 代入 $y=ax^2-4x+c$,

得 $\begin{cases}a+4+c=-1,\\9a-12+c=-9,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=1,\\c=-6,\end{cases}$

∴ 二次函数的表达式为 $y=x^2-4x-6$.

(2)∵ $y=x^2-4x-6=(x-2)^2-10$,

∴ 抛物线的对称轴为直线 $x=2$,顶点坐标为 $(2,-10)$.

(3)将点 $P(m,m)$ 的坐标代入 $y=x^2-4x-6$,得 $m=m^2-4m-6$,

解得 $m=-1$ 或 $m=6$.

∵ $m>0$,

∴ $m=-1$ 不合题意,舍去.

∴ $m=6$.

∵ 点 P 与点 Q 关于直线 $x=2$ 对称,

∴ 点 Q 到 x 轴的距离为 6.

10. $y=-2x^2-4x-3$ **点拨**:∵ 抛物线 $y=2x^2-4x+3=2(x-1)^2+1$ 的顶点坐标为 $(1,1)$,

∴ 绕原点旋转 180° 后的抛物线的顶点坐标为 $(-1,-1)$,∴ 所得到的图像的表达式为 $y=-2(x+1)^2-1$,即 $y=-2x^2-4x-3$.

11. $y=-\dfrac{5}{12}x^2-\dfrac{1}{2}x+\dfrac{20}{3}$ **点拨**:设函数关系式为 $y=ax^2+bx+c$. ∵ 沿着两条坐标轴摆着三个相同的长方形,其长、宽分别为 4、2,∴ A 点的坐标为 $(-4,2)$,B 点的坐标为 $(-2,6)$,C 点的坐标为 $(2,4)$,

将 A,B,C 的坐标代入 $y=ax^2+bx+c$,

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

得$\begin{cases}16a-4b+c=2,\\4a-2b+c=6,\\4a+2b+c=4,\end{cases}$解得$\begin{cases}a=-\frac{5}{12},\\b=-\frac{1}{2},\\c=\frac{20}{3},\end{cases}$

∴ 所求函数关系式为$y=-\frac{5}{12}x^2-\frac{1}{2}x+\frac{20}{3}$.

12. 解:(1)将A、C的坐标代入得

$\begin{cases}-\frac{1}{2}-b+c=0,\\c=2,\end{cases}$解得$\begin{cases}b=\frac{3}{2},\\c=2,\end{cases}$

则抛物线的函数表达式为$y=-\frac{1}{2}x^2+\frac{3}{2}x+2$.

(2)连接OD,易得$B(4,0)$,设$D\left(m,-\frac{1}{2}m^2+\frac{3}{2}m+2\right)$,

∵ $S_{四边形OCDB}=S_{\triangle OCD}+S_{\triangle OBD}=\frac{1}{2}\times 2m+\frac{1}{2}\times 4\left(-\frac{1}{2}m^2+\frac{3}{2}m+2\right)=-m^2+4m+4$,

∴ $S_{\triangle BCD}=S_{四边形OCDB}-S_{\triangle OBC}=-m^2+4m+4-\frac{1}{2}\times 4\times 2=-m^2+4m=-(m-2)^2+4$,

当$m=2$时,$S_{\triangle BCD}$取得最大值4,

此时$y_D=-\frac{1}{2}\times 4+\frac{3}{2}\times 2+2=3$,即$D(2,3)$.

13. 解:(1)在$y=-x-1$中,当$y=0$时,有$-x-1=0$,

解得$x=-1$,

∴ 点A的坐标为$(-1,0)$;

当$x=2$时,$y=-x-1=-3$,

∴ 点C的坐标为$(2,-3)$.

将$A(-1,0)$、$C(2,-3)$的坐标代入$y=x^2+bx+c$,得

$\begin{cases}1-b+c=0,\\4+2b+c=-3,\end{cases}$解得$\begin{cases}b=-2,\\c=-3,\end{cases}$

∴ 二次函数的表达式为$y=x^2-2x-3$.

(2)设点P的坐标为$(m,-m-1)$$(-1\leqslant m\leqslant 2)$,则点$E$的坐标为$(m,m^2-2m-3)$,

∴ $PE=-m-1-(m^2-2m-3)=-m^2+m+2=-\left(m-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{9}{4}$.

∵ $-1<0$,

∴ 当$m=\frac{1}{2}$时,PE的长度取最大值,最大值为$\frac{9}{4}$.

14. 解:(1)∵ 抛物线$y=-x^2+bx+c$与x轴交于$A(-3,0)$,$B(1,0)$两点,

∴ $\begin{cases}-9-3b+c=0,\\-1+b+c=0,\end{cases}$解得$\begin{cases}b=-2,\\c=3,\end{cases}$

∴ 抛物线的表达式为$y=-x^2-2x+3$.

(2)∵ $y=-x^2-2x+3$,

∴ 当$x=0$时,$y=3$,

∴ 点C的坐标为$(0,3)$.

设在抛物线上存在一点$P(x,y)$,使$S_{\triangle PAB}=S_{\triangle ABC}$,

则$|y|=3$,即$y=\pm 3$.

如果$y=3$,那么$-x^2-2x+3=3$,解得$x=0$或-2,

当$x=0$时P点与C点重合,舍去,∴ 点$P(-2,3)$;

如果$y=-3$,那么$-x^2-2x+3=-3$,解得$x=-1\pm\sqrt{7}$,

∴ 点$P(-1\pm\sqrt{7},-3)$.

综上所述,所求P点的坐标为$(-2,3)$或$(-1+\sqrt{7},-3)$或$(-1-\sqrt{7},-3)$.

(3)存在. 连接AC,与抛物线的对称轴交于点Q,此时$\triangle QBC$的周长最小.

设直线AC的表达式为$y=mx+n$,

∵ $A(-3,0)$,$C(0,3)$,

∴ $\begin{cases}-3m+n=0,\\n=3,\end{cases}$解得$\begin{cases}m=1,\\n=3,\end{cases}$

∴ 直线AC的表达式为$y=x+3$.

∵ 抛物线$y=-x^2-2x+3$的对称轴是直线$x=-1$,

∴ 在$y=x+3$中,当$x=-1$时,$y=-1+3=2$,

∴ 点Q的坐标是$(-1,2)$.

5.4 二次函数与一元二次方程

Ⅰ. 举一反三训练

1. $m>-1$且$m\neq 0$ **点拨**:∵ 抛物线$y=mx^2+2x-1$与x轴有两个交点,

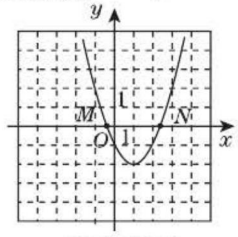
∴ $\begin{cases}m\neq 0,\\2^2-4\times m\times(-1)>0,\end{cases}$解得$m>-1$且$m\neq 0$.

2. $x=-2$或1 **点拨**:由题可知,关于x的方程$ax^2-bx-c=0$的解,就是抛物线$y=ax^2$$(a\neq 0)$与直线$y=bx+c$$(b\neq 0)$的两个交点$A(-2,4)$,$B(1,1)$的横坐标,故答案为$x=-2$或$1$.

3. 解:(1)如图.

(2)如图,点M,N的横坐标即为方程$x^2-2x-1=0$的根.

(3)方程的近似根为-0.4,2.4.



(第3题图)

4. $6.3<x<6.4$

5. $x<-1$或$x>4$ **点拨**:观察函数图像可知:当

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

$x<-1$ 或 $x>4$ 时，直线 $y=mx+n$ 在抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 的上方，∴ 不等式 $mx+n>ax^2+bx+c$ 的解集为 $x<-1$ 或 $x>4$.

Ⅱ. 举一反三训练

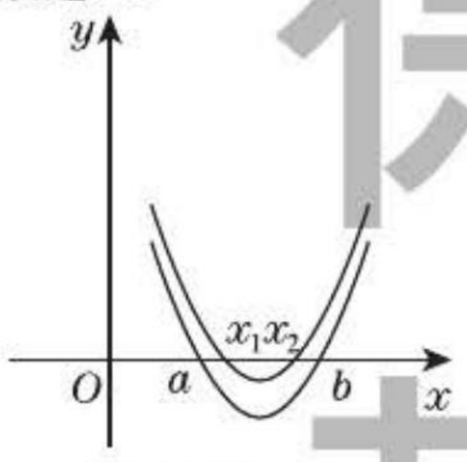
6. 解：∵ 方程 $x^2-bx-c=0$ 的两个根为 $x_1=-3$，$x_2=-1$，∴ 二次函数 $y=-x^2+bx+c$ 的图像与 x 轴的交点坐标为 $(-3,0)$，$(-1,0)$.

∴ $y=-(x+1)(x+3)$，即 $y=-x^2-4x-3$.

点拨：已知二次方程 $x^2-bx-c=0$ 的两个根为 $x_1=-3$，$x_2=-1$，那么二次函数 $y=-x^2+bx+c$ 的图像与 x 轴的两个交点坐标就是 $(-3,0)$，$(-1,0)$. 所以 $y=-(x+1)(x+3)$，整理即可.

7. D **点拨**：∵ 抛物线开口向下，∴ $a<0$，∵ 抛物线的对称轴为直线 $x=-\frac{b}{2a}=1$，即 $b=-2a$，∴ $3a+b=3a-2a=a<0$，∴ ①正确；由题知 $2\leqslant c\leqslant 3$，而 $a-b+c=0$，∴ $c=-3a$，∴ $2\leqslant -3a\leqslant 3$，∴ $-1\leqslant a\leqslant -\frac{2}{3}$，∴ ②正确；∵ 抛物线的顶点坐标为 $(1,n)$，∴ $x=1$ 时，二次函数有最大值 n，∴ $a+b+c\geqslant am^2+bm+c$，即 $a+b\geqslant am^2+bm$，∴ ③正确；∵ 抛物线的顶点坐标为 $(1,n)$，∴ 抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 与直线 $y=n-1$ 有两个交点，∴ 关于 x 的方程 $ax^2+bx+c=n-1$ 有两个不相等的实数根，∴ ④正确. 故选 D.

8. C **点拨**：首先作出 $y=(x-a)(x-b)$ 的图像，如图，开口向上，与 x 轴有两个交点，横坐标分别为 a、b，再向下平移 $(a-b)$ 个单位长度. 由于 $a<b$，所以向下平移 $(a-b)$ 个单位长度相当于向上平移 $(b-a)$ 个单位长度，就是 $y=(x-a)(x-b)-(a-b)$ 的图像，它与 x 轴的交点横坐标就是 x_1、x_2，很容易发现 $a<x_1<x_2<b$. 故选 C.



（第 8 题图）

Ⅲ. 练基础 · 练方法 · 练技巧

1. C **点拨**：∵ 方程 $x^2+bx+c=0$ 的两个根分别为 $x_1=1$、$x_2=2$，∴ 抛物线 $y=x^2+bx+c$ 与 x 轴的交点坐标为 $(1,0)$、$(2,0)$，∴ 抛物线 $y=x^2+bx+c$ 的对称轴为直线 $x=\frac{1+2}{2}=\frac{3}{2}$. 故选 C.

2. A **点拨**：由题图可知，抛物线的对称轴为直线 $x=2$，与 x 轴的一个交点为 $(5,0)$，所以抛物线与 x 轴的另一个交点坐标为 $(-1,0)$，所以不等式 $ax^2+bx+c>0$ 的解集是 $-1<x<5$. 故选 A.

3. C **点拨**：∵ 抛物线开口向下，∴ $a<0$，A 错误；∵ 抛物线与 y 轴交于正半轴，∴ $c>0$，B 错误；∵ 抛物线与 x 轴的一个交点为 $(-1,0)$，对称轴为直线 $x=1$，∴ 抛物线与 x 轴的另一个交点为 $(3,0)$，∴ 当 $-1<x<3$ 时，$y>0$，C 正确；∵ 抛物线开口向下，且对称轴为直线 $x=1$，∴ 当 $x\geqslant 1$ 时，y 随 x 的增大而减小，D 错误. 故选 C.

4. 1 **点拨**：∵ 抛物线 $y=ax^2+x+c$ 与 x 轴的一个交点的横坐标为 -1，∴ 抛物线 $y=ax^2+x+c$ 经过点 $(-1,0)$，∴ $a-1+c=0$，∴ $a+c=1$.

5. 3 **点拨**：∵ 抛物线 $y=3x^2-6x+a$ 与 x 轴只有一个公共点，∴ $36-12a=0$，解得 $a=3$.

6. $-1\leqslant x\leqslant 2$ **点拨**：根据图像可得出当 $y_1\geqslant y_2$ 时，x 的取值范围是 $-1\leqslant x\leqslant 2$.

7. 2 **点拨**：∵ 二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图像的对称轴为直线 $x=1$，∴ $-\frac{b}{2a}=1$，∴ $b=-2a$，∴ 关于 x 的方程 $ax^2+bx+c=0$ 的两个根的和为 $-\frac{b}{a}=2$.

8. $x_1=-4$，$x_2=0$ **点拨**：∵ 当 $x=-3$，$x=-1$ 时函数值都是 -5，∴ 二次函数的图像的对称轴为直线 $x=-2$，∵ 当 $x=-4$ 时，$y=-2$，∴ 当 $x=0$ 时，$y=-2$，∴ 方程 $ax^2+bx+c=-2$ 的解是 $x_1=-4$，$x_2=0$.

9. 解：(1) ∵ 点 P、Q 在抛物线上且纵坐标相同，∴ P、Q 关于抛物线的对称轴对称.

∵ 抛物线的对称轴为直线 $x=-\frac{b}{4}$，

∴ $-\frac{b}{4}=\frac{-3+1}{2}$，∴ $b=4$.

(2) 有实数根. 由 (1) 可知，关于 x 的一元二次方程为 $2x^2+4x+1=0$.

∵ $b^2-4ac=16-8=8>0$，

∴ 方程有实根，

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{8}}{2a}=\frac{-4\pm 2\sqrt{2}}{4}=-1\pm\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

(3) 将抛物线 $y=2x^2+bx+1$ 向上平移 k (k 是正整数) 个单位长度，使平移后的图像与 x 轴无交点，

∴ 方程 $2x^2+4x+1+k=0$ 没有实数根，

∴ $16-8(1+k)<0$，

∴ $k>1$，

∵ k 是正整数，

∴ k 的最小值为 2.

10. D **点拨**：如图，关于 x 的一元二次方程 $-x^2+mx-t=0$ 的解就是抛物线 $y=-x^2+mx$ 与直线 $y=t$ 的交点的横坐标，易求出 $m=4$.

当 $x=1$ 时，$y=3$，

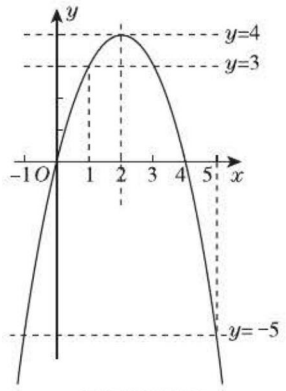
当 $x=2$ 时，$y=4$，

当 $x=5$ 时，$y=-5$，

若关于 x 的一元二次方程 $-x^2+mx-t=0$ (t 为实数) 在 $1<x<5$ 的范围内有解，

则直线 $y=t$ 在直线 $y=-5$ 和直线 $y=4$ 之间 (包括直线 $y=4$)，∴ $-5<t\leqslant 4$. 故选 D.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料



（第10题图）

11. C　**点拨**：由 $\frac{k}{x}-x^2-1>0$ 得，$x^2+1<\frac{k}{x}$，

∵ 点A的横坐标为1，∴ 不等式的解集是$0<x<1$. 故选C.

5.5　用二次函数解决问题

Ⅰ. 举一反三训练

1. **解**：(1)根据题意，得：$y=60+10x$，

由 $36-x\geqslant 24$ 得 $x\leqslant 12$，

∴ $1\leqslant x\leqslant 12$，且x为整数；

(2)设所获利润为W元，

则 $W=(36-x-24)(10x+60)$

$=-10x^2+60x+720$

$=-10(x-3)^2+810$，

∴ 当$x=3$时，W取得最大值，最大值为810.

答：超市定价为每箱33元时，才能使每月销售牛奶的利润最大，最大利润是810元.

2. **解**：(1)设y与x之间的函数关系式为 $y=kx+b$，

由题意得 $\begin{cases}70k+b=75,\\80k+b=70,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}k=-0.5,\\b=110,\end{cases}$

故y与x之间的函数关系式是 $y=-0.5x+110$；

(2)设合作社每天获得的利润为w元，则

$w=x(-0.5x+110)-20(-0.5x+110)=-0.5x^2+120x-2\,200=-0.5(x-120)^2+5\,000$，

∵ $60\leqslant x\leqslant 150$，

∴ 当$x=120$时，w取得最大值，此时$w=5\,000$，

答：房价定为120元/间时，合作社每天获利最大，最大利润是5 000元.

3. **解**：(1)如图所示：



（第3题图）

设裁掉的正方形的边长为x dm，

由题意可得$(10-2x)(6-2x)=12$，

即 $x^2-8x+12=0$，解得 $x=2$ 或 $x=6$(舍去)，

答：裁掉的正方形的边长为2 dm；

(2)∵ 底面长不大于底面宽的五倍，

∴ $10-2x\leqslant 5(6-2x)$，∴ $0<x\leqslant 2.5$，

设总费用为w元，由题意可知

$w=0.5\times 2x(16-4x)+2(10-2x)(6-2x)=4x^2-48x+120=4(x-6)^2-24$，

∵ 对称轴为直线$x=6$，图像开口向上，

∴ 当$0<x\leqslant 2.5$时，w随x的增大而减小，

∴ 当$x=2.5$时，w有最小值，最小值为25，

答：当裁掉的正方形边长为2.5 dm时，总费用最低，最低为25元.

4. **解**：由题意得：$C(0,1)$，$D(6,1.5)$，抛物线的对称轴为直线$x=4$，

设抛物线的函数表达式为 $y=ax^2+bx+1$($a\neq 0$)，根据题意得：

$\begin{cases}-\frac{b}{2a}=4,\\1.5=36a+6b+1,\end{cases}$ 解得：$\begin{cases}a=-\frac{1}{24},\\b=\frac{1}{3},\end{cases}$

∴ 羽毛球飞行的路线所在的抛物线的函数表达式为 $y=-\frac{1}{24}x^2+\frac{1}{3}x+1$，

∵ $y=-\frac{1}{24}x^2+\frac{1}{3}x+1=-\frac{1}{24}(x-4)^2+\frac{5}{3}$，

∴ 飞行的最大高度为$\frac{5}{3}$米.

5. **解**：(1)设该抛物线的函数表达式为 $y=ax^2+c$，

由题意可得图像经过点$(5,0)$，$(0,4)$，

则 $\begin{cases}c=4,\\25a+c=0,\end{cases}$ 解得：$\begin{cases}a=-\frac{4}{25},\\c=4,\end{cases}$

故该抛物线的函数表达式为 $y=-\frac{4}{25}x^2+4$；

(2)由题意可得：$y=3$时，

$3=-\frac{4}{25}x^2+4$，解得：$x=\pm\frac{5}{2}$，故$EF=5$米，

答：水面宽度EF的长为5米.

Ⅱ. 举一反三训练

6. **解**：(1)∵ 抛物线的顶点坐标为$(4,8)$，

∴ $\begin{cases}-\frac{b}{2a}=4,\\\frac{-b^2}{4a}=8,\end{cases}$ 解得：$\begin{cases}a=-\frac{1}{2},\\b=4,\end{cases}$

∴ 二次函数的表达式为 $y=-\frac{1}{2}x^2+4x$；

(2)联立两个表达式可得：

$\begin{cases}y=-\frac{1}{2}x^2+4x,\\y=\frac{1}{2}x,\end{cases}$ 解得：$\begin{cases}x=0,\\y=0\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x=7,\\y=\frac{7}{2},\end{cases}$

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

∴ 点 A 的坐标是$\left(7,\frac{7}{2}\right)$;

(3)设小球与斜坡的铅垂距离为 z,则 $z=-\frac{1}{2}x^2+4x-\frac{1}{2}x=-\frac{1}{2}(x-3.5)^2+\frac{49}{8}$,

故当小球离点 O 的水平距离为 3.5 时,小球与坡面的最大距离是$\frac{49}{8}$.

7. -7 **点拨**:∵ $x^2+2x+y-3=0$,∴ $y=-x^2-2x+3$,∴ $2x-y=2x+x^2+2x-3=x^2+4x-3=(x+2)^2-7$,∵ $a=1>0$,

∴ 当 $x=-2$ 时,$2x-y$ 有最小值,最小值为 -7.

Ⅲ. 练基础 · 练方法 · 练技巧

1. C

2. C **点拨**:设销售该商品每月所获总利润为 w 元,则 $w=(x-50)(-4x+440)=-4x^2+640x-22\,000=-4(x-80)^2+3\,600$,

∴ 当 $x=80$ 时,w 取得最大值,最大值为3 600,即当售价为 80 元/件时,销售该商品每月所获利润最大,故选 C.

3. B **点拨**:由题意可得,抛物线 $h=at^2+bt$ 的对称轴为直线 $x=\frac{2+6}{2}=4$,∴ 当 $x=4$ 时,h 取得最大值,∴ 在选项中当 $t=3.9$ 时,h 的值最大,故选 B.

4. B **点拨**:∵ $y=2x^2-4x+8=2(x-1)^2+6$,∴ 抛物线的顶点 D 的坐标为(1,6),∵ $AB=4$,∴ B 点的横坐标为 $x=3$,把 $x=3$ 代入 $y=2x^2-4x+8$,得到 $y=14$,∴ $CD=14-6=8$,∴ $CE=CD+DE=8+3=11$. 故选 B.

5. 12.5

6. 18

7. **解**:(1)∵ $AB=x$ m,

∴ $BC=(28-x)$ m.

则 $S=AB\cdot BC=x(28-x)=-x^2+28x$.

即 $S=-x^2+28x(0<x<28)$.

(2)由题意可知,$\begin{cases}x\geqslant 6,\\28-x\geqslant 15,\end{cases}$ 解得 $6\leqslant x\leqslant 13$.

由(1)知,$S=-x^2+28x=-(x-14)^2+196$.

∵ 当 $6\leqslant x\leqslant 13$ 时,S 随 x 的增大而增大,

∴ 当 $x=13$ 时,$S_{最大值}=195$,

即花园面积的最大值为 195 m^2.

8. **解**:(1)①当 $a=-\frac{1}{24}$时,$y=-\frac{1}{24}(x-4)^2+h$,

将点 $P(0,1)$ 的坐标代入,得:$-\frac{1}{24}\times 16+h=1$,

解得:$h=\frac{5}{3}$;

②把 $x=5$ 代入 $y=-\frac{1}{24}(x-4)^2+\frac{5}{3}$,得:$y=-\frac{1}{24}\times(5-4)^2+\frac{5}{3}=1.625$,

∵ $1.625>1.55$,

∴ 此球能过网;

(2)把点(0,1)、$\left(7,\frac{12}{5}\right)$的坐标代入 $y=a(x-4)^2+h$,得:

$\begin{cases}16a+h=1,\\9a+h=\frac{12}{5},\end{cases}$ 解得:$\begin{cases}a=-\frac{1}{5},\\h=\frac{21}{5},\end{cases}$

∴ $a=-\frac{1}{5}$.

9. **解**:(1)设淡季每间的价格为 x 元,该酒店豪华间有 y 间,根据题意,得

$\begin{cases}x(y-10)=24\,000,\\\left(1+\frac{1}{3}\right)xy=40\,000,\end{cases}$ 解得$\begin{cases}x=600,\\y=50,\end{cases}$

∴ $x+\frac{1}{3}x=600+\frac{1}{3}\times 600=800$.

答:该酒店豪华间有 50 间,旺季每间价格为 800 元;

(2)设该酒店豪华间的价格上涨 a 元,日总收入为 w 元,$w=(800+a)\left(50-\frac{a}{25}\right)=-\frac{1}{25}(a-225)^2+42\,025$,

∴ 当 $a=225$ 时,w 取得最大值,此时 $w=42\,025$,

答:该酒店将豪华间的价格上涨 225 元时,豪华间的日总收入最高,最高日总收入是42 025 元.

10. **解**:(1)$k_1=30$,$k_2=20$,$b=6\,000$;

(2)当 $0\leqslant x<600$ 时,$W=30x+(-0.01x^2-20x+30\,000)=-0.01x^2+10x+30\,000$,即 $W=-0.01(x-500)^2+32\,500$,∵ $-0.01<0$,

∴ 当 $x=500$ 时,W 取最大值为 32 500;

当 $600\leqslant x\leqslant 1\,000$ 时,

$W=20x+6\,000+(-0.01x^2-20x+30\,000)=-0.01x^2+36\,000$,

∵ $-0.01<0$,

∴ 当 $600\leqslant x\leqslant 1\,000$ 时,W 随 x 的增大而减小,

∴ 当 $x=600$ 时,W 取最大值为 32 400,

∵ $32\,400<32\,500$,

∴ 绿化总费用 W 的最大值为 32 500;

(3)由题意得:$1\,000-x\geqslant 100$,解得:$x\leqslant 900$,

又 $x\geqslant 700$,

则 $700\leqslant x\leqslant 900$,

∵ 当 $700\leqslant x\leqslant 900$ 时,W 随 x 的增大而减小,

∴ 当 $x=900$ 时,绿化总费用 W 的最小值为 27 900.

11. **解**:(1)如图(1)所示,

当 $OE=3.3$ m 时,卡车的高度最高,作 $EF\perp OA$ 交半圆于点 F,连接 OF,

∵ $\angle OEF=90°$,$OF=OA=OC+AC=3.75+$

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

$1.25=5(\mathrm{m})$,

$\therefore EF=\sqrt{OF^2-OE^2}=\sqrt{5^2-3.3^2}\approx 3.7(\mathrm{m})$,

即其最大高度不能超过 3.7 m;

(2)如图(2)所示,

建立平面直角坐标系,设点 E 为抛物线的顶点,

由题意可得,$MN=5\times 2-2-2=6(\mathrm{m})$,

点 E 的坐标为$(0,5)$,点 A 的坐标为$(-5,0)$,

可设抛物线对应的函数表达式为 $y=ax^2+5$,

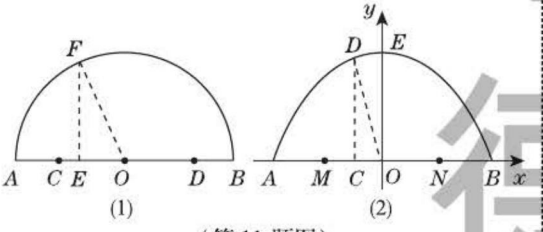
则 $0=a\times(-5)^2+5$,解得 $a=-\frac{1}{5}$,

$\therefore y=-\frac{1}{5}x^2+5$.

当 $OC=\frac{1}{2}\times 3.8=1.9(\mathrm{m})$ 时,卡车的高度最高,作 $CD\perp AB$ 交抛物线于点 D,

将 $x=-1.9$ 代入 $y=-\frac{1}{5}x^2+5$,得 $y=4.278\approx 4.2(\mathrm{m})$.

答:该卡车的最大高度不能超过 4.2 m.



(第 11 题图)

12. **解**:(1)$\frac{1}{4}$

(2)将 $y=0$ 代入 $y=x^2+bx$ 得:$x^2+bx=0$,解得 $x=0$ 或 $x=-b$,

$\because OA=4$,

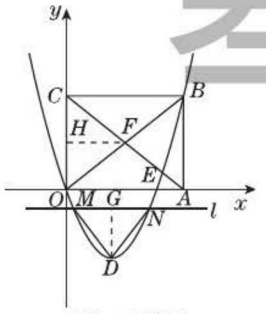
$\therefore AE=4-(-b)=4+b$.

$\therefore OE\cdot AE=-b(4+b)=-b^2-4b=-(b+2)^2+4$,

$\therefore OE\cdot AE$ 的最大值为 4,此时 b 的值为 -2,

$\therefore OE\cdot AE$ 取得最大值时的二次函数的表达式为 $y=x^2-2x$.

(3)如图,过点 D 作 $DG\perp MN$,垂足为 G,过点 F 作 $FH\perp CO$,垂足为 H.



(第 12 题图)

$\because \triangle DMN\cong\triangle FOC$,

$\therefore MN=CO=t$,$DG=FH=2$.

$\because D\left(-\frac{b}{2},-\frac{b^2}{4}\right)$,

$\therefore N\left(-\frac{b}{2}+\frac{t}{2},-\frac{b^2}{4}+2\right)$,即 $N\left(\frac{t-b}{2},\frac{8-b^2}{4}\right)$.

把点 N 的坐标代入 $y=x^2+bx$ 得:

$\frac{8-b^2}{4}=\left(\frac{t-b}{2}\right)^2+b\cdot\left(\frac{t-b}{2}\right)$,

解得:$t=\pm 2\sqrt{2}$.

$\because t>0$,

$\therefore t=2\sqrt{2}$.

章末整合与拔高

1. C　**点拨**:$\because$ 抛物线 $y=ax^2(a>0)$,

$\therefore$ 点 $A(-2,y_1)$ 关于 y 轴对称点的坐标为$(2,y_1)$. 又$\because a>0$,$0<1<2$,$\therefore y_1>y_2>0$. 故选 C.

2. $y=2x^2+1$　**点拨**:$\because y=2x^2-4x+3=2(x-1)^2+1$,$\therefore$ 向左平移 1 个单位长度得到的抛物线的表达式为 $y=2(x+1-1)^2+1=2x^2+1$.

3. C　**点拨**:$\because$ 抛物线的开口向上,$\therefore a>0$,$\because$ 与 y 轴的交点在 y 轴的正半轴上,$\therefore c>0$,$\therefore ac>0$;

$\because 0<-\frac{b}{2a}<1$,$\therefore b<0$,$-b<2a$,$2a+b>0$,则 $abc<0$;由抛物线与 x 轴的交点可以看出,当 $x=1$ 时,$y<0$,$\therefore a+b+c<0$;$\because x=-2$ 时,$y>0$,$\therefore 4a-2b+c>0$;$\because$ 抛物线与 x 轴有两个交点,$\therefore b^2-4ac>0$. 综上所述,值大于 0 的个数为 4. 故选 C.

4. -1　**点拨**:$\because$ 函数 $y=x^2+2x-m$ 的图像与 x 轴有且只有一个交点,$\therefore b^2-4ac=2^2-4\times 1\times(-m)=0$,解得:$m=-1$.

5. **解**:(1)将 $x=4$,$y=2$ 和 $x=6$,$y=1$ 代入 $y=ax^2+bx+10$,

得:$\begin{cases}16a+4b+10=2,\\36a+6b+10=1,\end{cases}$ 解得:$\begin{cases}a=\frac{1}{4},\\b=-3,\end{cases}$

$\therefore y=\frac{1}{4}x^2-3x+10$;

(2)根据题意,知 $L=P-y=9-x-\left(\frac{1}{4}x^2-3x+10\right)=-\frac{1}{4}(x-4)^2+3$,

$\therefore$ 当 $x=4$ 时,L 取得最大值,最大值为 3,

答:4 月份的平均利润 L 最大,最大平均利润是 3 元/千克.

6. **解**:(1)把点 $A(3,0)$,$B(-1,0)$,$C(0,-3)$ 的坐标代入 $y=ax^2+bx+c$ 得:

$\begin{cases}9a+3b+c=0,\\a-b+c=0,\\c=-3,\end{cases}$ 解得:$\begin{cases}a=1,\\b=-2,\\c=-3,\end{cases}$

则该抛物线的表达式为 $y=x^2-2x-3$;

(2)设直线 BC 的表达式为 $y=kx-3$,

把点 $B(-1,0)$ 的坐标代入得:$-k-3=0$,即 $k=-3$,

$\therefore$ 直线 BC 的表达式为 $y=-3x-3$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

可设直线 AM 的表达式为 $y=\frac{1}{3}x+m$，

把点 $A(3,0)$ 的坐标代入得：$1+m=0$，即 $m=-1$，

∴ 直线 AM 的表达式为 $y=\frac{1}{3}x-1$，

联立得：$\begin{cases}y=-3x-3,\\ y=\frac{1}{3}x-1,\end{cases}$ 解得：$\begin{cases}x=-\frac{3}{5},\\ y=-\frac{6}{5},\end{cases}$

则 $M\left(-\frac{3}{5},-\frac{6}{5}\right)$；

(3)存在以点 B,C,Q,P 为顶点的四边形是平行四边形，

分两种情况考虑：

设 $Q(x,0)$，$P(m,m^2-2m-3)$，

当四边形 $BCQP$ 为平行四边形时，由 $B(-1,0)$，$C(0,-3)$，

根据平移规律得：$-1+x=0+m$，$0+0=-3+m^2-2m-3$，

解得：$m=1\pm\sqrt{7}$，$x=2\pm\sqrt{7}$，

当 $m=1+\sqrt{7}$ 时，$m^2-2m-3=8+2\sqrt{7}-2-2\sqrt{7}-3=3$，即 $P(1+\sqrt{7},3)$；

当 $m=1-\sqrt{7}$ 时，$m^2-2m-3=8-2\sqrt{7}-2+2\sqrt{7}-3=3$，即 $P(1-\sqrt{7},3)$；

当四边形 $BCPQ$ 为平行四边形时，由 $B(-1,0)$，$C(0,-3)$，

根据平移规律得：$-1+m=0+x$，$0+m^2-2m-3=-3+0$，

解得：$m=0$ 或 2，

当 $m=0$ 时，$P(0,-3)$(不合题意，舍去)；当 $m=2$ 时，$P(2,-3)$，

综上，存在以点 B,C,Q,P 为顶点的四边形是平行四边形，点 P 的坐标为 $(1+\sqrt{7},3)$ 或 $(1-\sqrt{7},3)$ 或 $(2,-3)$.

7. $-1\leqslant t<8$ **点拨**：∵ 对称轴为直线 $x=-\frac{b}{2\times1}=1$，∴ $b=-2$，∴ 二次函数的表达式为 $y=x^2-2x$. 当 $x=-1$ 时，$y=1+2=3$；当 $x=4$ 时，$y=16-2\times4=8$；当 $x=1$ 时，$y=1-2=-1$. ∵ 关于 x 的一元二次方程 $x^2+bx-t=0$ 的解相当于抛物线 $y=x^2+bx$ 与直线 $y=t$ 的交点的横坐标，∴ 当 $-1\leqslant t<8$ 时，在 $-1<x<4$ 的范围内有解.

8. $\frac{27}{4}$ **点拨**：由题意知抛物线 m 的表达式为 $y=x(x+3)=x^2+3x=\left(x+\frac{3}{2}\right)^2-\frac{9}{4}$，所以抛物线 m 向上平移 $\frac{9}{4}$ 个单位长度得到抛物线 $y=\left(x+\frac{3}{2}\right)^2$，而图中阴影部分的面积等于线段 OA 向上平移 $\frac{9}{4}$ 个单位长度所扫过的面积，所以图中阴影部分的面积 $=3\times\frac{9}{4}=\frac{27}{4}$.

9. 0 或 -1 **点拨**：令 $y=0$，则 $kx^2+2x-1=0$. ∵ 关于 x 的函数 $y=kx^2+2x-1$ 与 x 轴仅有一个公共点，∴ 关于 x 的方程 $kx^2+2x-1=0$ 只有一个根.

①当 $k=0$ 时，$2x-1=0$，即 $x=\frac{1}{2}$，∴ 原方程只有一个根，∴ $k=0$ 符合题意；②当 $k\neq0$ 时，$b^2-4ac=4+4k=0$，解得 $k=-1$. 综上所述，$k=0$ 或 -1.

第6章 图形的相似

6.1 图上距离与实际距离

Ⅰ. 举一反三训练

1. 1∶7500 **点拨**：∵ 18 km = 1 800 000 cm，∴ 规划图采用的比例尺是 $\frac{240}{1\,800\,000}=\frac{1}{7\,500}$.

2. D **点拨**：理解比例尺的概念，根据比例尺 = 图上距离：实际距离正确进行有关计算，注意统一单位.

3. C

4. **解**：∵ 线段 a,b,c,d 是成比例线段，∴ $a:b=c:d$，而 $a=\sqrt{3}$，$b=\sqrt{2}$，$d=\sqrt{6}$，∴ $c=\frac{ad}{b}=\frac{\sqrt{3}\times\sqrt{6}}{\sqrt{2}}=3$，故线段 c 的长是 3.

5. C **点拨**：A. 变成等积式是：$xy=6$，故错误；B. 变成等积式是：$3x=2y$，故错误；C. 变成等积式是：$2x=3y$，故正确；D. 变成等积式是：$3x=2y$，故错误. 故选 C.

6. **解**：∵ $\frac{AD}{DB}=\frac{AE}{EC}$，

∴ $\frac{6.4}{4.8}=\frac{AE}{4.2}$，解得：$AE=5.6$ cm.

则 $AC=AE+EC=5.6+4.2=9.8$(cm).

7. **解**：因为 c 是 a、b 的比例中项，所以 $c^2=ab$. 又因为 $a=3$ cm，$b=12$ cm，且 $c>0$，所以 $c=6$ cm.

点拨：根据比例中项的意义可得 $c^2=ab$，再根据 $c>0$ 求出 c 的值即可.

Ⅱ. 举一反三训练

8. $4\sqrt{2}$ 或 $-4\sqrt{2}$ 或 2 或 16(任写一个即可)

点拨：这是一道开放性的题目，由于题中没有明确告诉数 4，8 以及所求的第三个数，哪一个数是另两个数的比例中项，因此，隐含着多种确定方法，设第三个数为 x，由 $x^2=8\times4$，可知 $x=\pm4\sqrt{2}$；由 $4^2=8x$，可知 $x=2$；由 $8^2=4x$，可知 $x=16$，故第三个数为 $\pm4\sqrt{2}$ 或 2 或 16.

9. **解**：∵ $a:b:c=2:3:5$，

∴ 设 $a=2k$，$b=3k$，$c=5k(k\neq0)$，

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

则$\frac{a-2b+c}{3a-c}=\frac{2k-2\cdot3k+5k}{3\cdot2k-5k}=1$.

Ⅲ. 练基础·练方法·练技巧

1. D　**点拨**:由合比性质,可得$\frac{a-b+b}{b}=\frac{2+3}{3}$,即$\frac{a}{b}=\frac{5}{3}$,故选 D.

2. C　**点拨**:因为 b,c,d,a 成比例,所以 $b:c=d:a$,即$\frac{b}{c}=\frac{d}{a}$.

3. D

4. 200　**点拨**:A,B 两地的图上距离与它们实际距离的比等于 1∶10 000.

5. $\frac{11}{3}$

6. **解**:因为$\frac{AB}{AD}=\frac{AC}{AE}$,所以$\frac{DB+AD}{AD}=\frac{EC+AE}{AE}$,所以$\frac{DB}{AD}=\frac{EC}{AE}$,所以$\frac{AD}{DB}=\frac{AE}{EC}$,所以$\frac{AD}{AB-AD}=\frac{AC-EC}{EC}$,因为 $AD=15,AB=30,AC=28$,所以 $EC=14$.

7. **解**:因为 $a:b:c=2:3:7$,所以设 $a=2k(k\neq0)$,则 $b=3k,c=7k$,因为 $a-b+c=12$,所以 $2k-3k+7k=12$,即 $6k=12$,得 $k=2$,
所以 $a=4,b=6,c=14$,所以 $2a+b-3c=8+6-14\times3=-28$.

方法规律:设 k 法是比例求值问题中的常用方法.

8. **解**:设所添线段长为 x.

①当 $x<1$ 时,$2x=1\times\sqrt{3}$,解得 $x=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

②当 $x>2$ 时,$1\times x=2\times\sqrt{3}$,解得 $x=2\sqrt{3}$.

③当 $1<x<2$ 时,$\sqrt{3}x=1\times2$,解得 $x=\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

综上所述,要使已知线段与所添线段构成比例式,所添加的线段的长度可以是$\frac{\sqrt{3}}{2}$或 $2\sqrt{3}$或$\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

9. 6∶15∶10　**点拨**:因为 $h_a:h_b:h_c=5:2:3$,设 $h_a=5k(k\neq0)$,则 $h_b=2k,h_c=3k$,因为 $\triangle ABC$ 的面积 $S=\frac{1}{2}ah_a=\frac{1}{2}bh_b=\frac{1}{2}ch_c$,所以 $a=\frac{2S}{5k},b=\frac{S}{k},c=\frac{2S}{3k}$,所以 $a:b:c=\frac{2}{5}:1:\frac{2}{3}=6:15:10$.

10. 二　**点拨**:因为 a,b,c 为三角形三边,所以 $a+b+c\neq0$. 因为 $k=\frac{a+b}{c}=\frac{b+c}{a}=\frac{a+c}{b}$,所以 $k=\frac{2(a+b+c)}{a+b+c}=2$,所以直线的表达式是 $y=2x-2$,因为 $2>0,-2<0$,所以该直线一定经过第一、三、四象限,不经过第二象限.

11. **解**:因为 $AC:CB=1:5,AD:DB=7:1$,所以设 $AC=x$ km,$AD=7y$ km,则 $BC=5x$ km,$BD=y$ km. 又因为 $AB=240$ km,所以$\begin{cases}x+5x=240,\\7y+y=240.\end{cases}$解得$\begin{cases}x=40,\\y=30.\end{cases}$

所以 $BC=5\times40=200$(km),$DB=30$ km,所以 $CD=BC-BD=200-30=170$(km). 所以客车从 C 到 D 所用的时间为$\frac{170}{80}=\frac{17}{8}$(h).

点拨:本题的实质是求 C、D 两点间的距离. 利用线段比表示出线段间的关系,求出线段的长. 再结合路程、速度、时间三者的关系,求出所要求的量.

6.2　黄金分割

Ⅰ. 举一反三训练

1. **解**:∵ 点 C、D 是线段 AB 的黄金分割点,

∴ $AC=\frac{\sqrt{5}-1}{2}AB=5\sqrt{5}-5,BD=\frac{\sqrt{5}-1}{2}AB=5\sqrt{5}-5$,

∴ $AD=AB-BD=15-5\sqrt{5}$,∴ $CD=AC-AD=5\sqrt{5}-5-(15-5\sqrt{5})=10\sqrt{5}-20$.

2. A　**点拨**:根据黄金比的值知,身体感到最舒适的温度应约为 37℃ 的 0.618,即 $37\times0.618\approx23$(℃),故选 A.

Ⅱ. 举一反三训练

3. **解**:因为正方形 $ABCD$ 的边长为 2,P 是 AB 的中点,所以 $AB=AD=2,AP=1$.

在 Rt△APD 中,$PD=\sqrt{AP^2+AD^2}=\sqrt{5}$,因为 $PF=PD$,所以 $AF=PF-AP=\sqrt{5}-1$.

因为四边形 $AMEF$ 是正方形,所以 $AM=AF=\sqrt{5}-1$,所以 $DM=AD-AM=2-(\sqrt{5}-1)=3-\sqrt{5}$.

又因为 $AM^2=(\sqrt{5}-1)^2=6-2\sqrt{5},AD\cdot DM=2\times(3-\sqrt{5})=6-2\sqrt{5}$,所以 $AM^2=AD\cdot DM$.

所以点 M 是线段 AD 的黄金分割点.

点拨:解题的关键是推导出 $AM^2=AD\cdot DM$.

4. **证明**:设正方形 $ABCD$ 的边长为 2,

∵ E 为 BC 的中点,

∴ $BE=1$.

∴ $AE=\sqrt{AB^2+BE^2}=\sqrt{5}$,

又∵ $B'E=BE=1$,

∴ $AB'=AE-B'E=\sqrt{5}-1$,

∵ $AB''=AB'$,

∴ $AB'':AB=(\sqrt{5}-1):2$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

∴点 B'' 是线段 AB 的黄金分割点.

Ⅲ. 练基础·练方法·练技巧

1. C **点拨**:用黄金分割的相关性质一一判断即可.

2. A **点拨**:设宽为 x 米,则有 $0.8:x=1.6:1$,解得 $x=0.5$,故选 A.

3. B **点拨**:根据黄金分割的概念知:$PB=\frac{\sqrt{5}-1}{2}AB$,设 $AB=x$,则 $PB=\frac{\sqrt{5}-1}{2}x$,$PA=\left(1-\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)x$,再分别求出四边形的面积即可得出 $S_2=S_3$. 故选 B.

4. 1.73 **点拨**:根据黄金分割点的概念得:应挂在离地面距离大约为 $2.8\times0.618=1.730\,4$(米)$\approx$1.73 米处较合适.

5. $(15-5\sqrt{5})$ **点拨**:∵ P 为 AB 的黄金分割点$(AP>PB)$,∴ $AP=\frac{\sqrt{5}-1}{2}AB=\frac{\sqrt{5}-1}{2}\times10=(5\sqrt{5}-5)$ cm,∴ $PB=AB-PA=10-(5\sqrt{5}-5)=(15-5\sqrt{5})$ cm.

6. **解**:∵ 点 C 是靠近点 B 的黄金分割点,点 D 是靠近点 A 的黄金分割点,

∴ $AC=BD=80\times\frac{\sqrt{5}-1}{2}=(40\sqrt{5}-40)$ cm,

∴ $CD=BD-(AB-BD)=2BD-AB=(80\sqrt{5}-160)$ cm.

7. **解**:设线段 AC 的长为 x,则 $BC=x+2$,

∴ $AB=2x+2$,

∵ 点 C 是线段 AB 的黄金分割点,

∴ $BC^2=AC\cdot AB$,

即 $(x+2)^2=x(2x+2)$,

整理,得 $x^2-2x-4=0$,

解得 $x_1=1+\sqrt{5}$,$x_2=1-\sqrt{5}<0$(不合题意,舍去),即线段 AC 的长为 $1+\sqrt{5}$.

8. **解**:根据黄金比得:$20\times(1-0.618)\approx7.6$(米),

∵ 黄金分割点有 2 个,

∴ 另一个黄金分割点距 A 点 $20-7.6=12.4$(米),

∵ $7.6<12.4$,

∴ 主持人至少应走到离 A 点 7.6 米处时,才比较自然得体.

点拨:注意要求的是黄金分割中的较短线段.

9. (1) **解**:$\frac{\sqrt{5}-1}{2}$

(2) **证明**:设 $BC=a$,则 $AB=2a$,

则 $AC=\sqrt{5}a$,

由题意得,$CD=BC=a$,

∴ $AE=AD=\sqrt{5}a-a$,

$BE=AB-AE=3a-\sqrt{5}a$,

∴ $\frac{AE}{AB}=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$,$\frac{BE}{AE}=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$,

∴ $\frac{AE}{AB}=\frac{BE}{AE}$,即点 E 是线段 AB 的黄金分割点.

10. **解**:∵ 线段 $AB=1$,点 P_1 是线段 AB 的黄金分割点$(AP_1<BP_1)$,

∴ $BP_1=\frac{\sqrt{5}-1}{2}AB=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$,

∴ $AP_1=1-\frac{\sqrt{5}-1}{2}=\frac{3-\sqrt{5}}{2}$,

∵ 点 P_2 是线段 AP_1 的黄金分割点$(AP_2<P_1P_2)$,

∴ $AP_2=\frac{3-\sqrt{5}}{2}\times\frac{3-\sqrt{5}}{2}=\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^2$,

∴ $AP_3=\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^3$,

∴ $AP_n=\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^n$.

6.3 相似图形

Ⅰ. 举一反三训练

1. D

2. **解**:∵ 四边形 $ABCD\backsim$四边形 $EFGH$,

∴ $\angle\alpha=\angle C=83°$,$\angle A=\angle E=118°$,

在四边形 $ABCD$ 中,$\angle\beta=360°-83°-78°-118°=81°$.

∵ 四边形 $ABCD\backsim$四边形 $EFGH$,

∴ $EH:AD=EF:AB$,

∴ $EH:21=24:18$,

∴ $EH=28$ cm.

3. **解**:因为梯形 $AEFD\backsim$梯形 $EBCF$,所以 $AD:EF=EF:BC=AE:EB$,因为 $AD=8$,$BC=18$,所以 $EF^2=AD\cdot BC=8\times18=144$,因为 $EF>0$,所以 $EF=12$,所以 $AE:EB=AD:EF=8:12=2:3$,即 $AE:EB=2:3$.

Ⅱ. 举一反三训练

4. $\frac{14}{5}$或 1 或 6 **点拨**:设 AP 的长为 x,

当$\triangle APD\backsim\triangle BPC$ 时,$\frac{AD}{BC}=\frac{AP}{BP}$,即 $\frac{2}{3}=\frac{x}{7-x}$,解得 $x=\frac{14}{5}$;

当$\triangle APD\backsim\triangle BCP$ 时,$\frac{AP}{BC}=\frac{AD}{BP}$,即 $\frac{x}{3}=\frac{2}{7-x}$,解得 $x=1$ 或 $x=6$.

故答案为$\frac{14}{5}$或 1 或 6.

5. **解**:(1) 如果四周的小路的宽均相等,那么小路四周所围成的矩形 $A'B'C'D'$ 和矩形 $ABCD$ 不相似. 理由:

∵ $\frac{30+2x}{30}=\frac{15+x}{15}$,$\frac{20+2x}{20}=\frac{10+x}{10}$,

∴ $\frac{30+2x}{30}\neq\frac{20+2x}{20}$,

∴ 小路四周所围成的矩形 $A'B'C'D'$ 和矩形 $ABCD$

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

不相似；

(2)当$\frac{20+2y}{20}=\frac{30+2x}{30}$时，小路四周所围成的矩形$A'B'C'D'$和矩形$ABCD$相似，

解得：$\frac{x}{y}=\frac{3}{2}$，

∴小路的宽x与y的比值为$\frac{3}{2}$时，能使得小路四周所围成的矩形$A'B'C'D'$和矩形$ABCD$相似.

Ⅲ. 练基础·练方法·练技巧

1. D

2. B　**点拨**：设这个和它相似的多边形的最短边的长为x，因为两个多边形相似，所以$\frac{2}{x}=\frac{6}{24}$，解得$x=8$.

3. A　**点拨**：∵$\frac{4}{2}=\frac{3}{1.5}=2$，∴A选项中的矩形与矩形$ABCD$相似. 故选A.

4. A　**点拨**：设$AD=x$，∵$AB=1$，则$FD=x-1$，$FE=1$，∵四边形$EFDC$与矩形$ABCD$相似，

∴$\frac{EF}{FD}=\frac{AD}{AB}$，即$\frac{1}{x-1}=\frac{x}{1}$，解得$x_1=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$，$x_2=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$(不合题意，舍去)，故选A.

5. 30°

6. 16　**点拨**：∵两个红绿灯的形状相同，

∴$\frac{15}{12}=\frac{20}{x}$，∴$x=16$.

7. $\sqrt{6}:2$　**点拨**：设$DE=x$，则$AE=2x$，则$AD=3x$，

∵矩形$ABFE$与矩形$ABCD$相似，∴$\frac{AE}{AB}=\frac{AB}{AD}$，

∴$AB^2=6x^2$，∴$AB=\sqrt{6}x$，

∴$AD:AB=3x:\sqrt{6}x=\sqrt{6}:2$.

8. **解**：由题意知$D(-4,0)$，$E(-4,2)$，$F(0,2)$，所以$OD=2OA$，$OF=2OC$，$ED=2BA$，$EF=2BC$，所以$ED:BA=EF:BC=FO:CO=DO:AO=2$.

易得$\angle E=\angle B$，$\angle EDO=\angle BAO$，$\angle DOF=\angle AOC$，$\angle OFE=\angle OCB$，所以矩形$OABC$∽矩形$ODEF$.

9. 3或$\frac{4}{3}$　**点拨**：∵$AC=4$，P是AC的中点，

∴$AP=\frac{1}{2}AC=2$，

①若$\triangle APQ\backsim\triangle ACB$，则$\frac{AP}{AC}=\frac{AQ}{AB}$，即$\frac{2}{4}=\frac{AQ}{6}$，解得：$AQ=3$；

②若$\triangle APQ\backsim\triangle ABC$，则$\frac{AP}{AB}=\frac{AQ}{AC}$，即$\frac{2}{6}=\frac{AQ}{4}$，解得：$AQ=\frac{4}{3}$.

∴AQ的长为3或$\frac{4}{3}$.

10. (1)**证明**：∵菱形$AEFG$∽菱形$ABCD$，

∴$\angle EAG=\angle BAD$，

∴$\angle EAG+\angle GAB=\angle BAD+\angle GAB$，

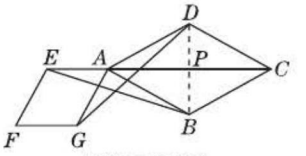
∴$\angle EAB=\angle GAD$，

又∵$AE=AG$，$AB=AD$，

∴$\triangle AEB\cong\triangle AGD$，

∴$EB=GD$；

(2)**解**：如图，连接BD交AC于点P，则$BP\perp AC$，



(第10题图)

∵$\angle DAB=60°$，

∴$\angle PAB=30°$，

∴$BP=\frac{1}{2}AB=1$，

∴$AP=\sqrt{AB^2-BP^2}=\sqrt{3}$，∵$AE=AG=\sqrt{3}$，

∴$EP=2\sqrt{3}$，

∴$EB=\sqrt{EP^2+BP^2}=\sqrt{12+1}=\sqrt{13}$，

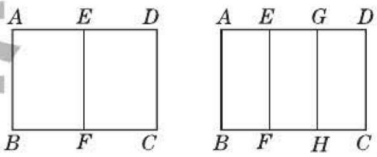
∴$GD=\sqrt{13}$.

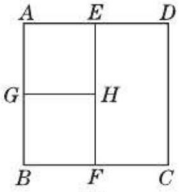
11. **解**：(1)如图(1)∵矩形$ABCD$可以自相似2分割，

∴$BF=FC=\frac{1}{2}BC=\frac{1}{2}x$，

根据相似矩形对应边成比例得$\frac{BF}{AB}=\frac{AB}{BC}$，即$BF\cdot BC=AB^2$，

∴$x\cdot\frac{1}{2}x=1$，解得$x=\sqrt{2}$；





(第11题图)

(2)如图(2)，$x=\sqrt{3}$；如图(3)，$x=\sqrt{2}$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

6.4 探索三角形相似的条件

Ⅰ. 举一反三训练

1. D **点拨:** $\because DE // BC$, $\therefore AD : AB = AE : AC$,
$\because AD : AB = 3 : 4$, $AE = 6$,
$\therefore 3 : 4 = 6 : AC$,
$\therefore AC = 8$.
故选 D.

2. B **点拨:** $\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形,
$\therefore AD // BC$, $DC // AB$, $\therefore \triangle ABF \backsim \triangle DEF \backsim \triangle CEB$, $\therefore$ 相似三角形共有 3 对. 故选 B.

3. **证明:** $\because AB // DE$, $AC // DF$,
$\therefore \angle B = \angle DEF$, $\angle F = \angle ACB$,
$\therefore \triangle ABC \backsim \triangle DEF$.

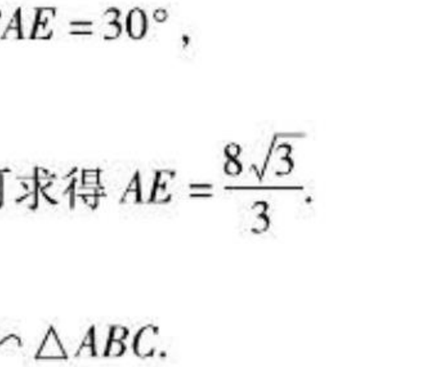
4. (1) **证明:** $\because AD // BC$,
$\therefore \angle C + \angle ADE = 180°$,
$\because \angle BFE = \angle C$, $\angle AFB + \angle BFE = 180°$.
$\therefore \angle AFB = \angle EDA$,
$\because AB // DC$,
$\therefore \angle BAE = \angle AED$,
$\therefore \triangle ABF \backsim \triangle EAD$;
(2) **解:** $\because AB // CD$, $BE \perp CD$,
$\therefore \angle ABE = 90°$,
$\because AB = 4$, $\angle BAE = 30°$,
$\therefore AE = 2BE$,
由勾股定理可求得 $AE = \frac{8\sqrt{3}}{3}$.

5. A

6. **解:** $\triangle A'B'C' \backsim \triangle ABC$.
证明:由已知 $\frac{OA'}{OA} = \frac{OC'}{OC} = 3$, $\angle AOC = \angle A'OC'$,
$\therefore \triangle AOC \backsim \triangle A'OC'$,
$\therefore \frac{A'C'}{AC} = \frac{OA'}{OA} = 3$, 同理 $\frac{B'C'}{BC} = 3$, $\frac{A'B'}{AB} = 3$.
$\therefore \frac{A'C'}{AC} = \frac{B'C'}{BC} = \frac{A'B'}{AB}$.
$\therefore \triangle A'B'C' \backsim \triangle ABC$.

7. 2 **点拨:** 分别求得各个三角形的边长,再根据三边对应成比例的两个三角形相似来进行判断.

8. 7.5 **点拨:** 如图,过点 A 作 $AE \perp BC$ 于点 E,由重心的性质可知:$AD : GD = 3 : 1$,

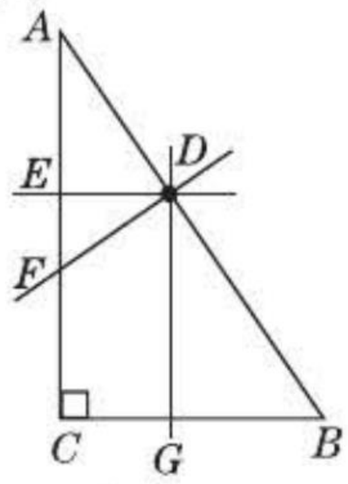


(第 8 题图)

$\because GH \perp BC$, $AE \perp BC$, $\therefore GH // AE$. $\therefore \triangle ADE \backsim \triangle GDH$,
$\therefore AD : GD = AE : GH = 3 : 1$,
$\therefore AE = 3GH = 3 \times 2.5 = 7.5$.

Ⅱ. 举一反三训练

9. C **点拨:** 如图,满足条件的直线有 3 条,分别为直线 DE、DF 和 DG,其中 $DE \perp AC$, $DF \perp AB$, $DG \perp BC$,故选 C.



(第 9 题图)

10. **证明:** (1) $\because AD^2 = DE \cdot DF$, $\therefore \frac{AD}{DE} = \frac{DF}{AD}$,
又 $\because \angle ADF = \angle EDA$, $\therefore \triangle ADF \backsim \triangle EDA$,
$\therefore \angle F = \angle DAE$,
$\because \angle ADB = \angle CDE$,
$\therefore \angle ADB + \angle ADF = \angle CDE + \angle ADF$,
即 $\angle BDF = \angle CDA$,
$\therefore \triangle BFD \backsim \triangle CAD$;
(2) $\because \triangle BFD \backsim \triangle CAD$, $\therefore \frac{BF}{AC} = \frac{DF}{AD}$,
又 $\because \frac{AD}{DE} = \frac{DF}{AD}$, $\therefore \frac{BF}{AC} = \frac{AD}{DE}$,
$\because \triangle BFD \backsim \triangle CAD$, $\therefore \angle B = \angle C$,
$\therefore AB = AC$, $\therefore \frac{BF}{AB} = \frac{AD}{DE}$,
$\therefore BF \cdot DE = AB \cdot AD$.

11. (1)3 (2)9 **点拨:** (1) $\because AD$ 是直角三角形 ABC 斜边上的高, $\therefore AD^2 = CD \cdot BD$, $\therefore BD = \frac{6^2}{12} = 3(\text{cm})$;
(2) $\because AD$ 是直角三角形 ABC 斜边上的高,
$\therefore AB^2 = BD \cdot BC$, $\therefore BD = \frac{15^2}{25} = 9(\text{cm})$.

12. **解:** (1) 设经过 t s, $\triangle AMN$ 的面积等于矩形 $ABCD$ 面积的 $\frac{1}{12}$,
由题意得 $DN = 2t$ cm, $AN = (4 - 2t)$ cm, $AM = t$ cm,
$\because$ 在矩形 $ABCD$ 中, $AB = 3$ cm, $BC = 4$ cm,
$\therefore$ 矩形 $ABCD$ 的面积为: $AB \cdot BC = 3 \times 4 = 12(\text{cm}^2)$,
$\therefore \triangle AMN$ 的面积 $= \frac{1}{2}AN \cdot AM = \frac{1}{2}(4 - 2t) \cdot t = \frac{1}{12} \times 12 = 1$,
解得 $t = 1$.
即:经过 1 s, $\triangle AMN$ 的面积等于矩形 $ABCD$ 面积的 $\frac{1}{12}$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

(2)由题意得 $DN=2t$ cm, $AN=(4-2t)$ cm, $AM=t$ cm,

若 $\triangle NMA\backsim\triangle ACD$,

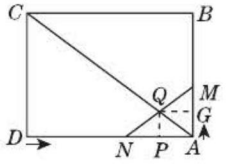
则 $\frac{AD}{AN}=\frac{CD}{AM}$,即 $\frac{4}{4-2t}=\frac{3}{t}$,解得 $t=\frac{6}{5}$,

若 $\triangle MNA\backsim\triangle ACD$,

则 $\frac{AD}{AM}=\frac{CD}{AN}$,即 $\frac{4}{t}=\frac{3}{4-2t}$,解得 $t=\frac{16}{11}$,

故当 $t=\frac{6}{5}$ 或 $\frac{16}{11}$ 时,以 A、M、N 为顶点的三角形与 $\triangle ACD$ 相似.

(3)如图,过点 Q 作 $QP\perp AD$ 于 P, $QG\perp AB$ 于 G,



(第 12 题图)

易知四边形 $APQG$ 是矩形,

$\therefore PQ=AG$, $\because QN=QA$,

$\therefore \angle ANM=\angle NAQ$,

$\because \angle NAQ+\angle MAQ=90°$, $\angle ANM+\angle AMN=90°$,

$\therefore \angle AMQ=\angle MAQ$, $\therefore AQ=MQ$,

$\because QG\perp AG$, $\therefore AG=\frac{1}{2}AM=\frac{1}{2}t$ cm,

$\therefore PQ=\frac{1}{2}t$ cm, $\because QN=QA$, $PQ\perp AD$,

$\therefore AP=\frac{1}{2}AN=(2-t)$ cm, $\because PQ/\!/CD$,

$\therefore \triangle APQ\backsim\triangle ADC$, $\therefore \frac{AP}{AD}=\frac{PQ}{CD}$,

$\therefore \frac{2-t}{4}=\frac{\frac{1}{2}t}{3}$,解得 $t=\frac{6}{5}$,

故当 $t=\frac{6}{5}$ 时, $QN=QA$.

Ⅲ. 练基础·练方法·练技巧

1. D　**点拨**:A. $\because \angle A=\angle A$, $\angle ABP=\angle C$,

$\therefore \triangle ABP\backsim\triangle ACB$;

B. $\because \angle A=\angle A$, $\angle APB=\angle ABC$,

$\therefore \triangle ABP\backsim\triangle ACB$;

C. $\because \angle A=\angle A$, $\frac{AP}{AB}=\frac{AB}{AC}$,

$\therefore \triangle ABP\backsim\triangle ACB$.

D. 不能判定 $\triangle ABP\backsim\triangle ACB$. 故选 D.

2. C　**3.** B　**4.** A

5. 2　**点拨**:由已知条件易得 $BF=DF$,

$\because BF=2DC$, $\therefore BC=5DC$. 又 $BC=10$,

$\therefore DC=2$.

6. 4　**点拨**:题图中的相似三角形有: $\triangle ADE\backsim\triangle ABC$, $\triangle ADE\backsim\triangle ACD$, $\triangle ABC\backsim\triangle ACD$, $\triangle CDE\backsim\triangle BCD$.

7. $\frac{15}{2}$　**点拨**:$\because \angle ADE=\angle B$, $\angle EAD=\angle DAB$,

$\therefore \triangle AED\backsim\triangle ADB$, $\therefore \frac{DE}{AD}=\frac{BD}{AB}$,即 $\frac{3}{AB}=\frac{2}{5}$,

$\therefore AB=\frac{15}{2}$, $\because AB=AC$,

$\therefore AC=\frac{15}{2}$.

8. (1)**证明**:由题意可知 $\angle A=\angle B=\angle MC'F=90°$,

$\therefore \angle BFC'+\angle BC'F=90°$, $\angle AC'M+\angle BC'F=90°$,

$\therefore \angle BFC'=\angle AC'M$,

$\therefore \triangle BC'F\backsim\triangle AMC'$.

(2)**解**:$\because C'$ 是 AB 的中点, $AB=6$, $\therefore AC'=BC'=3$.

$\because \angle B=90°$, $\therefore BF^2+3^2=(9-BF)^2$,

$\therefore BF=4$,

由(1)得 $\triangle AMC'\backsim\triangle BC'F$,

$\therefore \frac{AM}{BC'}=\frac{AC'}{BF}$,

$\therefore \frac{AM}{3}=\frac{3}{4}$,解得 $AM=\frac{9}{4}$.

9. **证明**:(1)$\because AB=AC$, $\therefore \angle B=\angle C$,

$\because \angle BDE=180°-\angle B-\angle DEB$,

$\angle CEF=180°-\angle DEF-\angle DEB$,

$\angle DEF=\angle B$, $\therefore \angle BDE=\angle CEF$,

$\therefore \triangle BDE\backsim\triangle CEF$;

(2)$\because \triangle BDE\backsim\triangle CEF$, $\therefore \frac{BE}{CF}=\frac{DE}{EF}$.

$\because$ 点 E 是 BC 的中点, $\therefore BE=CE$,

$\therefore \frac{CE}{CF}=\frac{DE}{EF}$,

$\because \angle DEF=\angle B=\angle C$, $\therefore \triangle DEF\backsim\triangle ECF$,

$\therefore \angle DFE=\angle CFE$, $\therefore FE$ 平分 $\angle DFC$.

10. **证明**:(1)$\because EF\cdot FC=FB\cdot DF$, $\therefore \frac{EF}{DF}=\frac{FB}{FC}$.

又 $\because \angle EFB=\angle DFC$, $\therefore \triangle EFB\backsim\triangle DFC$.

$\therefore \angle FEB=\angle FDC$.

$\because CE\perp AB$, $\therefore \angle FEB=90°$.

$\therefore \angle FDC=90°$.

$\therefore BD\perp AC$.

(2)$\because \triangle EFB\backsim\triangle DFC$, $\therefore \angle ABD=\angle ACE$.

$\because CE\perp AB$, $\therefore \angle FEB=\angle AEC=90°$.

$\therefore \triangle AEC\backsim\triangle FEB$.

$\therefore \frac{AE}{FE}=\frac{EC}{EB}$. $\therefore \frac{AE}{EC}=\frac{FE}{EB}$.

又 $\because \angle AEC=\angle FEB=90°$,

$\therefore \triangle AEF\backsim\triangle CEB$.

$\therefore \frac{AF}{CB}=\frac{EF}{EB}$, $\therefore AF\cdot BE=BC\cdot EF$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

11. (1)**证明**:①∵ 四边形 $ABCD$ 是正方形,

∴ $\angle ABD=45°$, $\angle BAD=\angle ABC=\angle BCD=\angle ADC=90°$, $AE=CE$,

∵ $ME\parallel AD$,

∴ $ME\perp AB$, $\angle AME=\angle BME=\angle BAD=90°$, $\angle ENC=\angle ADC=90°$,

∴ $\triangle BME$ 是等腰直角三角形,四边形$BCNM$是矩形,

∴ $BM=EM$, $BM=CN$,

∴ $EM=CN$,

在 $\mathrm{Rt}\triangle AME$ 和 $\mathrm{Rt}\triangle ENC$ 中, $\begin{cases}AE=CE,\\EM=CN,\end{cases}$

∴ $\mathrm{Rt}\triangle AME\cong\mathrm{Rt}\triangle ENC(\mathrm{HL})$,

∴ $\angle AEM=\angle ECN$,

∵ $\angle CEF=90°$, ∴ $\angle FEM+\angle CEN=90°$,

∵ $\angle ECN+\angle CEN=90°$,

∴ $\angle FEM=\angle ECN$,

∴ $\angle AEM=\angle FEM$;

②在 $\triangle AME$ 和 $\triangle FME$ 中, $\angle AME=\angle FME=90°$, $\angle AEM=\angle FEM$,

∴ $\angle EAF=\angle EFA$, ∴ $AE=FE$,

∵ $ME\perp AF$, ∴ $AM=FM$, ∴ $AF=2AM$,

∵ 点 E 是 OD 的中点, O 是 BD 的中点,

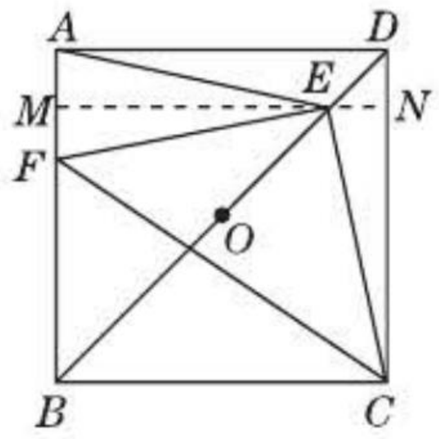
∴ $\frac{DE}{DB}=\frac{1}{4}$, ∵ $ME\parallel AD$,

∴ $\frac{AM}{AB}=\frac{DE}{DB}=\frac{1}{4}$, ∴ $\frac{AF}{AB}=\frac{1}{2}$,

∴ 点 F 是 AB 的中点;

(2)**解**:$\triangle EFC$ 是等腰直角三角形. 理由如下:

过点 E 作 $ME\parallel AD$,交 AB 于点 M,交 CD 于点 N. 如图所示:



(第11题图)

同(1)得: $AE=CE$, $\mathrm{Rt}\triangle AME\cong\mathrm{Rt}\triangle ENC$,

∴ $\angle AEM=\angle ECN$,

∵ $\frac{DE}{DO}=\frac{1}{3}$, O 是 DB 的中点, ∴ $\frac{DE}{DB}=\frac{1}{6}$,

∵ $ME\parallel AD$, ∴ $\frac{AM}{AB}=\frac{DE}{DB}=\frac{1}{6}$,

∵ $\frac{AF}{AB}=\frac{1}{3}$, ∴ $AF=2AM$,即 M 是 AF 的中点,

∵ $ME\perp AB$, ∴ $AE=FE$,

∴ $\angle AEM=\angle FEM$, $FE=CE$,

∵ $\angle ECN+\angle CEN=90°$,

∴ $\angle FEM+\angle CEN=90°$,

∴ $\angle CEF=90°$,

∴ $\triangle EFC$ 是等腰直角三角形;

(3)**解**:当 $\frac{DE}{DB}=\frac{m}{n}$ 时, $\frac{AF}{AB}=\frac{2m}{n}$.

6.5 相似三角形的性质

Ⅰ. 举一反三训练

1. 解:因为 $\triangle ABC\backsim\triangle A'B'C'$,所以 $\frac{AB}{A'B'}=\frac{BC}{B'C'}=\frac{60}{72}=\frac{5}{6}$,即 $\frac{15}{A'B'}=\frac{BC}{24}=\frac{5}{6}$,所以 $A'B'=18$ cm, $BC=20$ cm,因为 $\triangle A'B'C'$ 的周长为 72cm,所以 $A'C'=72\text{ cm}-A'B'-B'C'=30$ cm,即 $BC=20$ cm, $A'C'=30$ cm.

点拨:利用相似三角形的周长比等于相似比求出 $A'B'$ 和 BC 的长,再求出结果.

2. $\frac{64}{3}$ **点拨**:∵ $\triangle ABC\backsim\triangle DEF$,

∴ $S_{\triangle ABC}:S_{\triangle DEF}=3^2:4^2=9:16$. 而 $S_{\triangle ABC}=12\text{ cm}^2$,

∴ $S_{\triangle DEF}=\frac{16}{9}\times12=\frac{64}{3}(\text{cm}^2)$.

3. 20 **点拨**:∵ 两个相似三角形的面积之比是 9∶25, ∴ 两个三角形的相似比是 3∶5, ∴ 两个三角形对应中线的比是 3∶5. ∵ 小三角形一边上的中线长是 12 cm, ∴ 大三角形对应边上的中线长是 $12\div\frac{3}{5}=20(\text{cm})$.

4. 解:设 $EH=FG=x$ cm, $\triangle AEH$ 的高为 h cm,

∵ 四边形 $EFGH$ 是矩形, ∴ $EH\parallel BC$,

∴ $\triangle AEH\backsim\triangle ABC$, ∴ $\frac{h}{AD}=\frac{EH}{BC}$,

即 $\frac{h}{3}=\frac{x}{4}$, ∴ $h=\frac{3}{4}x$,

∴ $EF=AD-h=3-\frac{3}{4}x$.

∵ $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}BC\cdot AD=\frac{1}{2}\times4\times3=6(\text{cm}^2)$,

∴ $x\left(3-\frac{3}{4}x\right)=3$,

解得: $x=2$, ∴ $3-\frac{3}{4}x=1.5$,

∴ 这个矩形的长为 2 cm,宽为 1.5 cm.

Ⅱ. 举一反三训练

5. $\sqrt{2}-1$ **点拨**:∵ 重叠部分的面积是正方形$ABCD$的面积的一半, ∴ $\left(\frac{A_1C}{AC}\right)^2=\frac{1}{2}$, ∴ $A_1C=\frac{\sqrt{2}}{2}\times\sqrt{2}=1$, ∴ 平移的距离 $=AC-A_1C=\sqrt{2}-1$.

6. 解:根据勾股定理得,斜边 $AB=\sqrt{4^2+4^2}=4\sqrt{2}$,

①如图(1)、图(2),直径在直角边 BC 或 AC 上时,

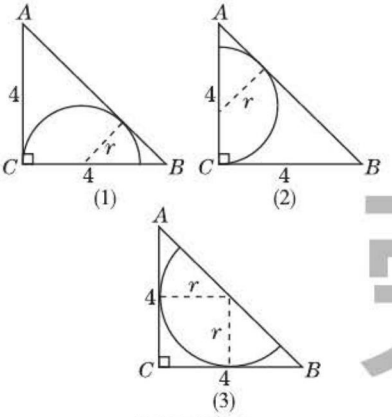
∵ 半圆的弧与 $\triangle ABC$ 的其他两边相切,

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

$\therefore \frac{r}{4}=\frac{4-r}{4\sqrt{2}}$，解得 $r=4\sqrt{2}-4$.

②如图(3)，直径在斜边 AB 上时，∵ 半圆的弧与 $\triangle ABC$ 的其他两边相切，

$\therefore \frac{4-r}{4}=\frac{r}{4}$，解得 $r=2$.



(第 6 题图)

Ⅲ. 练基础 · 练方法 · 练技巧

1. D　**点拨**：∵ 在 $\triangle ABC$ 中，点 D、E 分别是 AB、AC 的中点，$\therefore DE\parallel BC$，$DE=\frac{1}{2}BC$，

$\therefore \triangle ADE\backsim\triangle ABC$. ∵ $\frac{DE}{BC}=\frac{1}{2}$，$\therefore \frac{S_{\triangle ADE}}{S_{\triangle ABC}}=\frac{1}{4}$.

∵ $\triangle ADE$ 的面积为 4，$\therefore \triangle ABC$ 的面积为 16，故选 D.

2. A

3. C　**点拨**：∵ $DE\parallel BC$，$\therefore \angle ADE=\angle B$，$\angle AED=\angle C$，$\therefore \triangle ADE\backsim\triangle ABC$，

$\therefore \left(\frac{AD}{AB}\right)^2=\frac{S_{\triangle ADE}}{S_{\triangle ABC}}$. ∵ $S_{\triangle ADE}=S_{四边形BCED}$，

$\therefore \frac{S_{\triangle ADE}}{S_{\triangle ABC}}=\frac{1}{2}$，$\therefore \frac{AD}{AB}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，$\therefore \frac{BD}{AD}=\frac{AB-AD}{AD}=\frac{2-\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}-1$. 故选 C.

4. D

5. 1 : 2　**点拨**：∵ $\triangle ABC\backsim\triangle DEF$，且对应面积之比为 1 : 4，$\therefore \triangle ABC$ 与 $\triangle DEF$ 的相似比是 1 : 2，$\therefore$ 它们对应周长之比为 1 : 2.

6. 2 : 3

7. 2　**点拨**：∵ $\frac{AB}{AD}=\frac{8}{4}=2$，$\frac{AC}{AE}=\frac{4}{2}=2$，

$\therefore \frac{AB}{AD}=\frac{AC}{AE}$. ∵ $\angle BAD=\angle CAE$，$\therefore \angle BAC=\angle DAE$，$\therefore \triangle ABC\backsim\triangle ADE$，$\therefore \frac{BC}{DE}=\frac{AB}{AD}=2$.

∵ $AM\perp BC$，$AN\perp DE$，$\therefore \frac{AM}{AN}=\frac{BC}{DE}=2$.

8. (1)**证明**：∵ CF 平分 $\angle ACB$，$DC=AC$，

$\therefore CF$ 是 $\triangle ACD$ 的中线，

$\therefore$ 点 F 是 AD 的中点.

又∵ E 是 AB 的中点，

$\therefore EF$ 是 $\triangle ABD$ 的中位线，

$\therefore EF\parallel BD$，

$\therefore \triangle AEF\backsim\triangle ABD$.

(2)**解**：①∵ EF 是 $\triangle ABD$ 的中位线，

$\therefore EF=\frac{1}{2}BD$.

∵ $BC=8$，$AC=5$，$DC=AC$，

$\therefore BD=BC-CD=3$，

$\therefore EF=1.5$.

②由题易知 $S_{\triangle AEF}:S_{\triangle ABD}=1:4$，

$\therefore S_{\triangle AEF}:S_{四边形BDFE}=1:3$.

∵ 四边形 $BDFE$ 的面积为 6，

$\therefore S_{\triangle AEF}=2$，

$\therefore S_{\triangle ABD}=S_{\triangle AEF}+S_{四边形BDFE}=2+6=8$.

9. **解**：(1)∵ $DE\parallel BC$，$\therefore \triangle ADE\backsim\triangle ABC$，

$\therefore \frac{AD}{AB}=\frac{AE}{AC}$. ∵ $AD=10$，$AB=30$，$AC=24$，

$\therefore \frac{10}{30}=\frac{AE}{24}$，$\therefore AE=8$.

(2)∵ AF 是 $\triangle ABC$ 的高，$\therefore AF\perp BC$.

∵ $DE\parallel BC$，$\therefore AF\perp DE$.

∵ $DE\parallel BC$，$\therefore \triangle ADG\backsim\triangle ABF$，

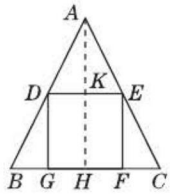
$\therefore \frac{AD}{AB}=\frac{AG}{AF}$.

∵ $GF=12$，$\therefore \frac{10}{30}=\frac{AG}{AG+12}$，

$\therefore AG=6$，$\therefore$ 点 A 到 DE 的距离是 6.

10. $2\sqrt{5}$　**点拨**：如图，过点 A 作 $AH\perp BC$ 于点 H，交 DE 于点 K. ∵ AB、AC 的中点分别为点 D、E，$\therefore BC=2DE=2\times2=4$(cm). ∵ $AB=AC$，$AH\perp BC$，

$\therefore CH=\frac{1}{2}BC=2$ cm. ∵ 四边形 $DEFG$ 为正方形，$\therefore DE\parallel BC$，$EF=DE=2$ cm，$\therefore AK\perp DE$，$\triangle ADE\backsim\triangle ABC$，$\therefore \frac{AK}{AH}=\frac{DE}{BC}=\frac{1}{2}$，$\therefore AK=KH=2$ cm，$\therefore AH=4$ cm. 在 $\mathrm{Rt}\triangle ACH$ 中，$AC=\sqrt{AH^2+CH^2}=2\sqrt{5}$(cm).



(第 10 题图)

11. **解**：(1)设 CE 的长为 x，由题意得，$AF=1-x$，$FD=x$，

∵ $DF\parallel BC$，$\therefore \triangle ADF\backsim\triangle ABC$，

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

$\therefore \frac{DF}{BC}=\frac{AF}{AC}$,即$\frac{x}{2}=\frac{1-x}{1}$,

解得 $x=\frac{2}{3}$,

则$\frac{CE}{BC}=\frac{x}{2}=\frac{1}{3}$.

则 $S_1=\frac{1}{2}\times1\times2-\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{5}{9}$.

(2)同理可得 $S_2=\left(\frac{5}{9}\right)^2$,$S_3=\left(\frac{5}{9}\right)^3$,

$\therefore S_n=\left(\frac{5}{9}\right)^n$.

12. 解:(1)$\because EF/\!/OA$,$\therefore \angle BEF=\angle BOA$.

又$\because \angle EBF=\angle EBF$,$\therefore \triangle BEF\backsim\triangle BOA$,

$\therefore \frac{EF}{OA}=\frac{BE}{BO}$. 当 $t=15$ 时,$OE=15$.

又易知 $OA=40$,$OB=30$,$\therefore BE=15$,

$\therefore EF=\frac{BE\times OA}{BO}=\frac{15\times40}{30}=20$,

$\therefore S_{\triangle PEF}=\frac{1}{2}EF\cdot OE=\frac{1}{2}\times20\times15=150$(平方单位).

(2)不存在. 理由如下:由(1)知 $EF=\frac{BE\times OA}{BO}$

$=\frac{(30-t)\times40}{30}$,

$\therefore \frac{1}{2}\times\frac{(30-t)\times40}{30}\times t=160$,

整理,得 $t^2-30t+240=0$.

$\because (-30)^2-4\times1\times240=-60<0$,

$\therefore$ 方程没有实数根.

$\therefore$ 不存在使得 $\triangle PEF$ 的面积等于 160(平方单位)的 t 值.

(3)当$\angle EPO=\angle BAO$ 时,$\triangle EOP\backsim\triangle BOA$,

$\therefore \frac{OP}{OA}=\frac{OE}{OB}$,即$\frac{40-2t}{40}=\frac{t}{30}$,解得 $t=12$;

当$\angle EPO=\angle ABO$ 时,$\triangle EOP\backsim\triangle AOB$,

$\therefore \frac{OP}{OB}=\frac{OE}{OA}$,即$\frac{40-2t}{30}=\frac{t}{40}$,解得 $t=\frac{160}{11}$;

$\therefore$ 当 $t=12$ 或 $t=\frac{160}{11}$时,$\triangle EOP$ 与 $\triangle BOA$ 相似.

6.6 图形的位似

Ⅰ. 举一反三训练

1. 解:第 1 组和第 3 组都是位似图形,位似中心分别为 P,Q. 第 2 组不是位似图形.

点拨:本题主要考查了位似图形的定义,解题关键是看它们是否相似,然后看对应点连线所在的直线是否经过同一点.

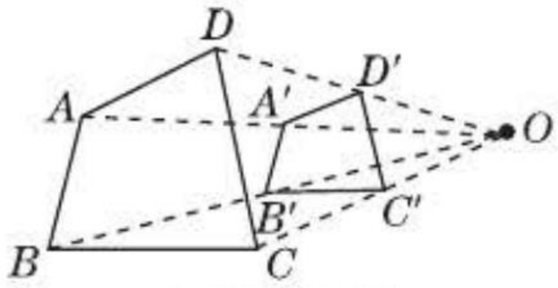
2. B　**点拨**:A. 四边形 $ABCD$ 与四边形 $AEFG$ 是位似图形,那么一定是相似图形,故本选项正确;

B. AD 与 AG 是对应边,那么 $AD:AG=2:3$,而不是 $AD:AE=2:3$,故本选项错误;

C. 因为 $AC:AF=2:3$,所以四边形 $ABCD$ 与四边形 $AEFG$ 的相似比是 2:3,所以周长比也是 2:3,故本选项正确;

D. 因为四边形 $ABCD$ 与四边形 $AEFG$ 的相似比是 2:3,所以面积比是 4:9,故本选项正确.

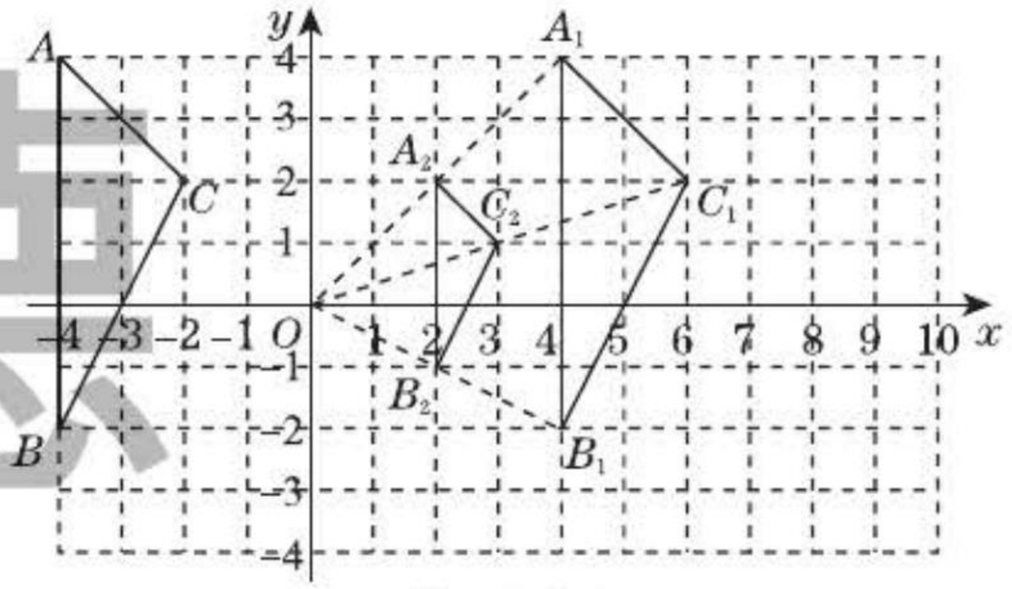
3. 解:如图所示,四边形 $A'B'C'D'$ 即为所求.(答案不唯一)



(第 3 题图)

4. 解:(1)如图所示:$\triangle A_1B_1C_1$ 即为所求;

(2)如图所示:$\triangle A_2B_2C_2$ 即为所求.



(第 4 题图)

Ⅱ. 举一反三训练

5. (4,2)或(−4,−2)　**点拨**:如图所示:点 B 的对应点 B_1 的坐标是:(4,2)或(−4,−2).

(第 5 题图)

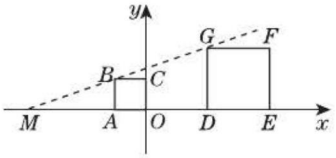
6. (−4,0)　**点拨**:如图,作直线 BG 交 x 轴于点 M,M 就是位似中心,由题易知 $AB=1$,$GD=2$,$AD=1+2=3$,

$AB/\!/GD$,$\therefore \triangle MAB\backsim\triangle MDG$,$\therefore \frac{MA}{MD}=\frac{AB}{DG}$,

$\therefore \frac{MA}{MA+3}=\frac{1}{2}$,$\therefore MA=3$,$\therefore OM=MA+OA=4$,

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

$\therefore M(-4,0)$.



（第6题图）

Ⅲ. 练基础·练方法·练技巧

1. A **2.** A **3.** C **4.** D

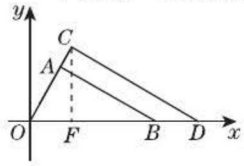
5. 1 ∶ 2　**点拨**：由五边形 $ABCDE$ 与五边形 $A'B'C'D'E'$ 位似，$OA=10$ cm，$OA'=20$ cm，知五边形 $ABCDE\backsim$ 五边形 $A'B'C'D'E'$，且相似比为 $OA:OA'=10:20=1:2$，所以五边形 $ABCDE$ 的周长与五边形 $A'B'C'D'E'$ 的周长的比为 1∶2.

6. $(2,2\sqrt{3})$　**点拨**：如图，过 C 作 $CF\perp OB$ 于 F，

$\because \angle OCD=90°$，$\angle AOB=60°$，

$\therefore \angle CDO=30°$，$\angle OCF=30°$.

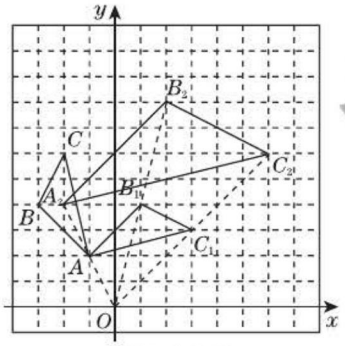
$\because$ 点 B 的坐标是 $(6,0)$，$\therefore OB=6$. $\because \triangle OAB$ 与 $\triangle OCD$ 是以点 O 为位似中心的位似图形，相似比为 3∶4，$\therefore DO=8$，故 $OC=4$，则 $FO=2$，则 $CF=\sqrt{OC^2-OF^2}=2\sqrt{3}$，故点 C 的坐标是：$(2,2\sqrt{3})$.



（第6题图）

7. **解**：(1) 如图，$\triangle AB_1C_1$ 即为所求；

(2) 如图，$\triangle A_2B_2C_2$ 即为所求，点 A_2、B_2、C_2 的坐标分别为 $(-2,4)$，$(2,8)$，$(6,6)$.



（第7题图）

8. 略

9. $\left(-\frac{3^n}{2^n},\frac{3^n}{2^{n+1}}\right)$　**点拨**：$\because$ 在第二象限内，将矩形 $AOCB$ 以原点 O 为位似中心放大为原来的 $\frac{3}{2}$ 倍，

$\therefore$ 矩形 $A_1OC_1B_1$ 与矩形 $AOCB$ 是位似图形，点 B 与点 B_1 是对应点，

$\because OA=2$，$OC=1$.

$\therefore$ 点 B 的坐标为 $(-2,1)$，

$\therefore$ 点 B_1 的坐标为 $\left(-2\times\frac{3}{2},1\times\frac{3}{2}\right)$.

$\because$ 将矩形 $A_1OC_1B_1$ 以原点 O 为位似中心放大为原来的 $\frac{3}{2}$ 倍，得到矩形 $A_2OC_2B_2$，

$\therefore B_2\left(-2\times\frac{3}{2}\times\frac{3}{2},1\times\frac{3}{2}\times\frac{3}{2}\right)$，

$\therefore B_n\left(-2\times\frac{3^n}{2^n},1\times\frac{3^n}{2^n}\right)$，

$\therefore$ 矩形 $A_nOC_nB_n$ 的对角线交点的坐标为 $\left(-2\times\frac{3^n}{2^n}\times\frac{1}{2},1\times\frac{3^n}{2^n}\times\frac{1}{2}\right)$，

即 $\left(-\frac{3^n}{2^n},\frac{3^n}{2^{n+1}}\right)$.

10. **解**：(1) 如图，正方形 $E'F'P'N'$ 即为所求.

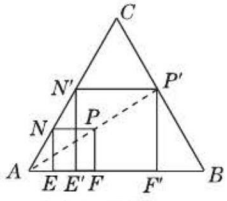
(2) 设正方形 $E'F'P'N'$ 的边长为 x，

$\because \triangle ABC$ 为正三角形，

$\therefore$ 易得 $AE'=BF'=\frac{\sqrt{3}}{3}x$.

$\because E'F'+AE'+BF'=AB$，

$\therefore x+\frac{\sqrt{3}}{3}x+\frac{\sqrt{3}}{3}x=3+2\sqrt{3}$，解得：$x=3$.



（第10题图）

11. **解**：(1) $\triangle ABC$ 与 $\triangle FGC$ 是位似三角形，C 是位似中心；

$\because$ 在矩形 $ABCD$ 中，对角线 AC、BD 相交于点 O，$OE\perp BC$，

$\therefore \frac{EO}{AB}=\frac{EO}{CD}=\frac{1}{2}$，

由题意可得：$EO/\!/FG/\!/CD$，

则 $\triangle FOE\backsim\triangle FCD$，$\triangle FGC\backsim\triangle OEC$.

$\therefore \frac{OF}{CF}=\frac{OE}{CD}=\frac{1}{2}$，

$\therefore \frac{FC}{OC}=\frac{2}{3}$. $\therefore \frac{FG}{OE}=\frac{FC}{OC}=\frac{2}{3}$.

故 $\frac{FG}{AB}=\frac{1}{3}$.

即位似比为 $\frac{1}{3}$.

(2) 由 (1) 得 $\frac{FG}{AB}=\frac{1}{3}$，

故 $\frac{FG}{CD}=\frac{1}{3}$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

又易知$\triangle FHG\backsim\triangle CHD$,$\triangle HIC\backsim\triangle FGC$.

$\therefore\frac{HF}{HC}=\frac{FG}{CD}=\frac{1}{3}$,$\therefore\frac{HC}{FC}=\frac{3}{4}=\frac{CI}{CG}$.

又$\frac{CG}{BC}=\frac{FG}{AB}=\frac{1}{3}$,$\therefore\frac{CI}{BC}=\frac{1}{4}$.

6.7 用相似三角形解决问题

Ⅰ. 举一反三训练

1. 40 **点拨**:$\because\frac{\text{竹竿的高度}}{\text{竹竿的影长}}=\frac{\text{水塔的高度}}{\text{水塔的影长}}$,

$\therefore$水塔的高度$=\frac{\text{竹竿的高度}}{\text{竹竿的影长}}\times$水塔的影长$=\frac{2}{1.5}\times30=40$(米).

2. **解**:(1)如图,连接AC,过点D作$DF//AC$,交直线BC于点F,线段EF即为DE的投影.

(2)$\because AC//DF$,

$\therefore\angle ACB=\angle DFE$.

$\because\angle ABC=\angle DEF=90°$,

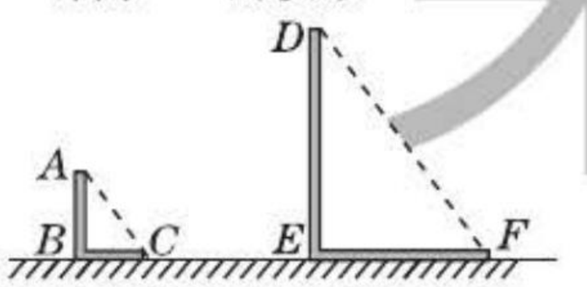
$\therefore\triangle ABC\backsim\triangle DEF$.

$\therefore AB:DE=BC:EF$,

即$AB:BC=DE:EF$.

$\because AB=4$ m,$BC=3$ m,$EF=8$ m,

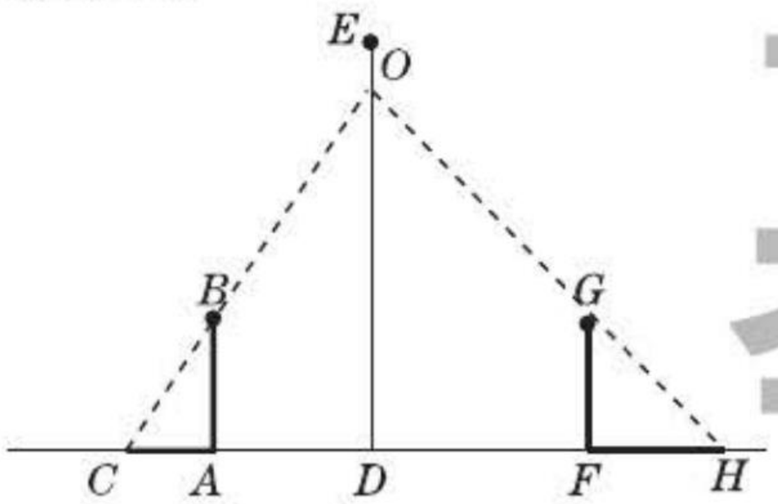
$\therefore 4:3=DE:8$,$\therefore DE=\frac{32}{3}$ m.



(第2题图)

3. **解**:(1)如图,连接CB并延长,交DE于O,点O即为所求.

(2)如图,连接OG并延长,交直线DF于H.线段FH即为所求.



(第3题图)

4. **解**:$\because CD//AB$,

$\therefore\triangle ECD\backsim\triangle EAB$,

$\therefore\frac{CD}{AB}=\frac{DE}{BE}$,即$\frac{2}{AB}=\frac{3}{3+BD}$ ①.

$\because FG//AB$,

$\therefore\triangle HFG\backsim\triangle HAB$,

$\therefore\frac{FG}{AB}=\frac{HG}{HB}$,即$\frac{2}{AB}=\frac{5}{BD+5+5}$ ②,

由①②得$\frac{3}{3+BD}=\frac{5}{BD+5+5}$,

解得$BD=7.5$米.

$\therefore\frac{2}{AB}=\frac{3}{7.5+3}$,解得:$AB=7$米.

答:路灯杆AB的高度为7米.

Ⅱ. 举一反三训练

5. **解**:过点D作$DG\perp AB$,分别交AB,EF于点G,H,则$EH=AG=CD=1.2$,$DH=CE=0.8$,$DG=CA=30$.

因为$EF//AB$,所以$\triangle FHD\backsim\triangle BGD$,所以$FH:BG=DH:DG$,

由题意,知$FH=EF-EH=1.7-1.2=0.5$,所以$0.5:BG=0.8:30$,解得$BG=18.75$,

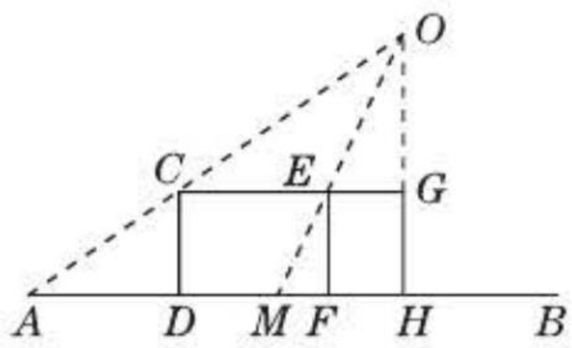
所以$AB=BG+AG=18.75+1.2=19.95\approx20.0$.

答:楼高AB约为20.0 m.

方法规律:本题是把实际问题抽象到相似三角形中,利用相似三角形对应边成比例,列出方程,通过解方程求解即可,体现了转化思想.

6. B **点拨**:由题意可知$\angle APB=\angle CPD$.由$\angle ABP=\angle CDP=90°$,$\angle APB=\angle CPD$可得$\triangle ABP\backsim\triangle CDP$,所以$AB:CD=BP:DP$,所以$CD=\frac{1.2\times12}{1.8}=8$(米),故选B.

7. **解**:(1)如图所示;



(第7题图)

(2)设速度为x米/秒,

根据题意得$CG//AH$,

$\therefore\triangle COG\backsim\triangle AOH$,

$\therefore\frac{CG}{AH}=\frac{OG}{OH}$,即:$\frac{OG}{OH}=\frac{6x}{10x}=\frac{3}{5}$,

又$\because CG//AH$,$\therefore\triangle OEG\backsim\triangle OMH$,

$\therefore\frac{EG}{MH}=\frac{OG}{OH}$,

即:$\frac{2x}{2+2x}=\frac{3}{5}$,解得:$x=\frac{3}{2}$.

答:小明沿AB方向匀速前进的速度为$\frac{3}{2}$米/秒.

Ⅲ. 练基础·练方法·练技巧

1. A **点拨**:标杆的高:标杆的影长=楼的高:楼的影长,代入数据得楼高为10米.

2. C **点拨**:根据中心投影的特点可知,小刚从A点走向路灯时影子逐渐变短,当走到路灯正下方时影子最短,然后从路灯正下方走到B处时,影子又逐渐变长,故选C.

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

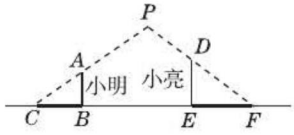
3. D　**点拨**：由 $AB \parallel DE$ 得 $\triangle CBA \backsim \triangle CDE$，所以 $AB : ED = CB : CD$，所以 $0.8 : h = 4 : (4+3)$，所以 $h = 1.4$ m. 故选 D.

4. 1

5. 6　**点拨**：设电线杆高 x m，则根据题意可得 $\frac{0.6}{30} = \frac{0.12}{x}$，解得 $x = 6$.

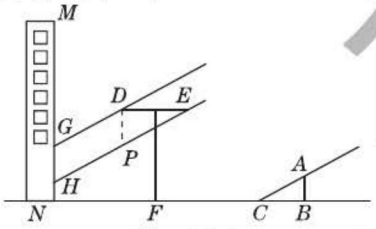
6. 4.4　**点拨**：由题意可知 $\triangle ECD \backsim \triangle EBA$，所以 $\frac{DE}{AE} = \frac{DC}{AB}$，即 $\frac{2}{3.5+2} = \frac{1.6}{AB}$，所以 $AB = \frac{(3.5+2)\times 1.6}{2} = 4.4$(m).

7. **解**：如图. 连接 CA，FD 并延长相交于点 P，点 P 就是路灯灯泡的位置.



（第 7 题图）

8. **解**：(1) 如图所示，横梁 DE 在同一时刻阳光照射下形成的影子为 GH；



（第 8 题图）

(2) 如图，过 D 作 $DP \parallel GH$，交 EH 于 P，

易得 $\triangle DEP \backsim \triangle BCA$，$\therefore \frac{PD}{DE} = \frac{AB}{BC}$.

$\because BC = 2.5$ m，$DE = 4$ m，$AB = 1.5$ m，

$\therefore \frac{PD}{4} = \frac{1.5}{2.5}$，$\therefore PD = 2.4$ m，

$\therefore GH = PD = 2.4$ m.

答：横梁 DE 影子的长度为 2.4 m.

9. **解**：如图，过点 Q 作 $QE \perp DC$ 于点 E，

由题意可得：$\triangle ABP \backsim \triangle CEQ$，

则 $\frac{AB}{BP} = \frac{EC}{EQ}$，故 $\frac{1.7}{1.2} = \frac{EC}{EQ}$，

易得 $EQ \parallel NO$，

则 $\angle 1 = \angle 2 = 30°$，

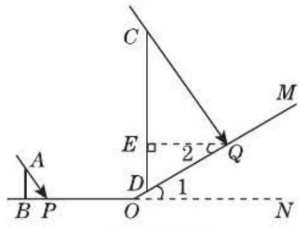
$\because QD = 5$ m，

$\therefore DE = \frac{5}{2}$ m，$\therefore EQ = \frac{5\sqrt{3}}{2}$ m，

故 $\frac{1.7}{1.2} = \frac{EC}{EQ} = \frac{EC}{\frac{5\sqrt{3}}{2}}$，解得：$EC = \frac{85\sqrt{3}}{24}$ m，

故 $CE + DE = \frac{5}{2} + \frac{85\sqrt{3}}{24} = \frac{60+85\sqrt{3}}{24}$(m)，

答：大树的高度为 $\frac{60+85\sqrt{3}}{24}$ m.



（第 9 题图）

10. **解**：设 $BD = x$ m，$\because$ 两人相距 4 m，

$\therefore BF = (4-x)$ m.

$\because AB \perp BG$，$CD \perp BG$，$\therefore AB \parallel CD$，

$\therefore \triangle ABG \backsim \triangle CDG$，$\therefore \frac{CD}{AB} = \frac{DG}{BG}$，

即 $\frac{1.5}{AB} = \frac{1}{1+x}$，$\therefore AB = (1.5+1.5x)$ m，

同理可得 $\triangle ABH \backsim \triangle EFH$，

$\therefore \frac{EF}{AB} = \frac{FH}{BH}$，即 $\frac{1.2}{AB} = \frac{2}{2+4-x}$，

$\therefore AB = (3.6-0.6x)$ m，

$\therefore 1.5+1.5x = 3.6-0.6x$，

解得 $x = 1$，

$\therefore AB = 1.5+1.5 = 3$(m).

答：路灯的高为 3 m.

11. **解**：(1) 设 $EF = 2x$ cm，$EH = 5x$ cm，

$\because$ 矩形对边 $EH \parallel BC$，$\therefore \triangle AEH \backsim \triangle ABC$，

$\therefore \frac{EH}{BC} = \frac{AR}{AD}$，即 $\frac{5x}{120} = \frac{80-2x}{80}$，

解得 $x = 15$，

则 $EH = 15\times 5 = 75$(cm)，

$\therefore$ 矩形纸片较长边 EH 的长为 75 cm；

(2) 小聪的剪法不正确.

理由如下：设正方形的边长为 a cm，$AR = AD - RD = 80 - 2\times 15 = 50$(cm)，

则 $AK = (50-a)$ cm，

由题意知，$\triangle APQ \backsim \triangle AEH$，$\therefore \frac{PQ}{EH} = \frac{AK}{AR}$，

即 $\frac{a}{75} = \frac{50-a}{50}$，解得 $a = 30$，

与边 EH 平行的中位线 $= \frac{1}{2}\times 75 = 37.5$(cm)，

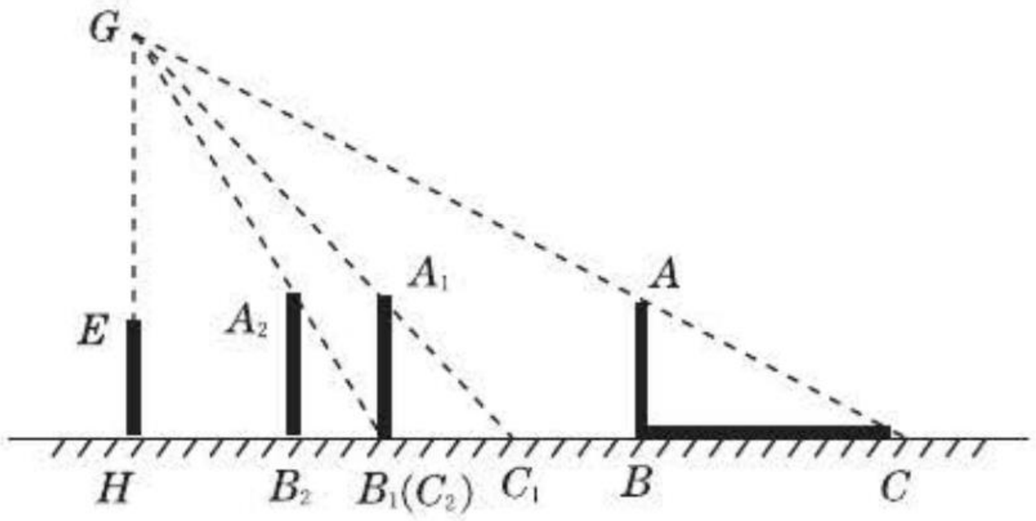
$\because 37.5 \neq 30$，

$\therefore$ 小聪的剪法不正确.

荣德基

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

12. 解:(1)如图.



(第12题图)

(2)因为 $AB \perp HC$, $GH \perp HC$, 所以 $AB // GH$, 所以 $\triangle ABC \backsim \triangle GHC$, 所以 $AB : GH = BC : HC$. 因为 $AB = 1.6$, $BC = 3$, $HB = 6$,

所以 $1.6 : GH = 3 : (6+3)$, 所以 $GH = 4.8$.

答:路灯灯泡的垂直高度 GH 为 4.8 m.

(3)如图, 同理可得 $\triangle A_1B_1C_1 \backsim \triangle GHC_1$, 所以 $A_1B_1 : GH = B_1C_1 : HC_1$,

则 $1.6 : 4.8 = B_1C_1 : \left(B_1C_1 + \frac{1}{2} \times 6\right)$, 解得

$B_1C_1 = \frac{3}{2}$.

同理 $A_2B_2 : GH = B_2C_2 : HC_2$, 则 $1.6 : 4.8 = B_2C_2 : \left[B_2C_2 + \frac{1}{2} \times 6 \times \left(1 - \frac{1}{3}\right)\right]$, 解得 $B_2C_2 = 1$, 由此可得 $B_nC_n = \frac{3}{n+1}$.

答:影子 B_1C_1 的长为 $\frac{3}{2}$ m, 影子 B_2C_2 的长为 1 m, 影子 B_nC_n 的长为 $\frac{3}{n+1}$ m.

点拨:(1)确定灯泡的位置, 可以利用光线可逆画出;(2)要求垂直高度 GH 可以把这个问题转化成相似三角形的问题, 图中 $\triangle ABC \backsim \triangle GHC$, 由对应边成比例可以求出 GH 的长;(3)的方法和(2)一样, 也是利用三角形相似, 由对应边成比例求出影长, 然后找出规律.

章末整合与拔高

1. 证明:∵ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形,

∴ $AB // CD$, $AD // BC$, $AD = BC$,

∴ $\angle D + \angle C = 180°$, $\angle ABF = \angle BEC$.

∵ $\angle AFB + \angle AFE = 180°$, $\angle AFE = \angle D$,

∴ $\angle C = \angle AFB$,

∴ $\triangle ABF \backsim \triangle BEC$.

2. 证明:(1)在 Rt$\triangle ABE$ 和 Rt$\triangle DBE$ 中, $\begin{cases} BA = BD, \\ BE = BE, \end{cases}$

∴ $\triangle ABE \cong \triangle DBE$.

(2)①如图, 过 G 作 $GH // AD$ 交 BC 于 H,

∵ $AG = BG$, ∴ $BH = DH$.

∵ $BD = 4DC$, 设 $DC = 1$, $BD = 4$,

∴ $BH = DH = 2$.

∵ $GH // AD$, ∴ $\frac{GM}{MC} = \frac{HD}{DC} = \frac{2}{1}$,

∴ $GM = 2MC$.

②如图, 过 C 作 $CN \perp AC$ 交 AD 的延长线于 N, 则 $CN // AG$,

∴ $\triangle AGM \backsim \triangle NCM$,

∴ $\frac{AG}{NC} = \frac{GM}{MC}$.

由①知 $GM = 2MC$, ∴ $2NC = AG$.

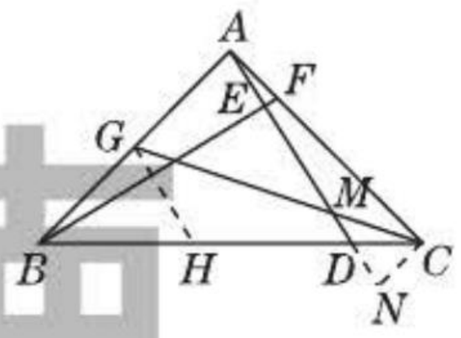
∵ $\angle BAC = \angle AEB = 90°$, ∴ $\angle ABF = \angle CAN = 90° - \angle BAE$.

又 $\angle BAF = \angle ACN = 90°$,

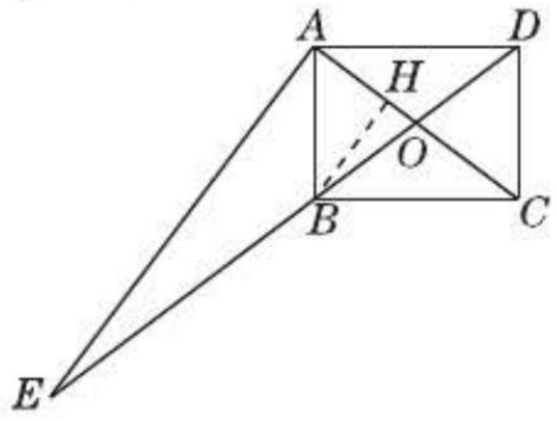
∴ $\triangle ACN \backsim \triangle BAF$, ∴ $\frac{AF}{CN} = \frac{AB}{AC}$.

∵ $AB = 2AG$, ∴ $\frac{AF}{CN} = \frac{2AG}{AC}$,

∴ $2CN \cdot AG = AF \cdot AC$, ∴ $AG^2 = AF \cdot AC$.



(第2题图)



(第3题图)

3. $\frac{7}{24}$ **点拨**:作 $BH \perp OA$ 于 H, 如图, ∵ 四边形 $ABCD$ 为矩形, ∴ $OA = OC = OB$, $\angle ABC = 90°$, 在 Rt$\triangle ABC$ 中, $AC = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$, ∴ $AO = OB = \frac{5}{2}$. ∵ $\frac{1}{2}BH \cdot AC = \frac{1}{2}AB \cdot BC$, ∴ $BH = \frac{3 \times 4}{5} = \frac{12}{5}$.

在 Rt $\triangle OBH$ 中, $OH = \sqrt{OB^2 - BH^2} = \sqrt{\left(\frac{5}{2}\right)^2 - \left(\frac{12}{5}\right)^2} = \frac{7}{10}$, ∵ $EA \perp CA$,

∴ $BH // AE$, ∴ $\triangle OBH \backsim \triangle OEA$,

∴ $\frac{BH}{AE} = \frac{OH}{OA}$, ∴ $\frac{OA}{AE} = \frac{OH}{BH} = \frac{\frac{7}{10}}{\frac{12}{5}} = \frac{7}{24}$.

4. C **点拨**:∵ $\angle ACD = \angle B$, $\angle A = \angle A$,

∴ $\triangle ACD \backsim \triangle ABC$, ∴ $\frac{S_{\triangle ACD}}{S_{\triangle ABC}} = \left(\frac{AD}{AC}\right)^2 = \frac{1}{4}$.

∵ $S_{\triangle ACD} = 1$, ∴ $S_{\triangle ABC} = 4$, ∴ $S_{\triangle BCD} = S_{\triangle ABC} - S_{\triangle ACD} = 3$. 故选 C.

5. 解:(1)由题易得 $\triangle CBD \cong \triangle C'BD$, $BC = AB = 2$,

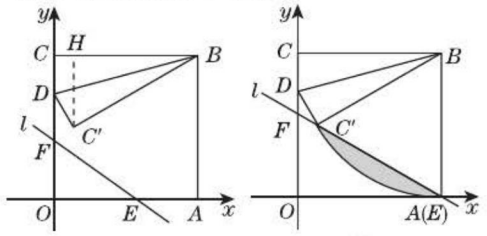
∴ $\angle CBD = \angle C'BD = 15°$, $C'B = CB = 2$,

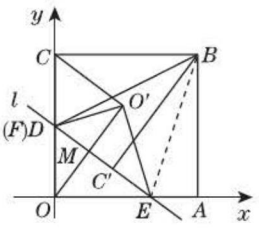
∴ $\angle CBC' = 30°$,

如图(1), 作 $C'H \perp BC$ 于 H, 则 $C'H = 1$, 则 $HB = \sqrt{3}$, ∴ $CH = 2 - \sqrt{3}$,

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

∴ 点 C'的坐标为:$(2-\sqrt{3},1)$.





(第 5 题图)

(2)如图(2),由题易知 $A(2,0)$,

将点 A 的坐标代入直线 AF 对应的函数表达式 $y=-\frac{\sqrt{3}}{3}x+b$ 中,

得 $b=\frac{2\sqrt{3}}{3}$,

则直线 AF 对应的函数表达式为 $y=-\frac{\sqrt{3}}{3}x+\frac{2\sqrt{3}}{3}$,

当 $x=2-\sqrt{3}$ 时,$y=1$,故直线 l 经过(1)中的 C' 点,此时 $\angle CBC'=30°$,则 $\angle ABC'=60°$.

∵ 在点 D 由 C 到 O 的运动过程中,BC'扫过的图形是扇形,

∴ 当 D 与 O 重合时,点 C'与 A 重合,

且 BC'扫过的图形与△OAF 重合部分是弓形.

∵ $BC'=BC=AB$,$\angle ABC'=60°$,

∴ △ABC'是等边三角形,

∴ 重叠部分的面积是$\frac{60\pi\times2^2}{360}-\frac{\sqrt{3}}{4}\times2^2=\frac{2}{3}\pi-\sqrt{3}$.

(3)存在. 如图(3),设 OO'与 DE 交于点 M,则 $O'M=OM$,$OO'\perp DE$,由题意得△$DO'E$ 为直角三角形. 若△$DO'E$ 与△$CO'O$ 相似,则△$CO'O$ 必是直角三角形,在点 D 由 C 到 O 的运动过程中,△$CO'O$ 中显然只能是 $\angle CO'O=90°$,

∴ $CO'\parallel DE$,

易得 $CD=OD=1$,

∴ $b=1$.

连接 BE,由轴对称性可知 $C'D=CD$,$BC'=BC=BA$,$\angle BC'E=\angle BCD=\angle BAE=90°$,

在 Rt△BAE 和 Rt△$BC'E$ 中,

∵ $\begin{cases}BE=BE,\\AB=BC',\end{cases}$

∴ Rt△BAE≌Rt△$BC'E$(HL),

∴ $AE=C'E$,

∴ $DE=DC'+C'E=DC+AE$,

设 $OE=x$,则 $AE=2-x$,

∴ $DE=DC+AE=3-x$,

由勾股定理得:$x^2+1=(3-x)^2$,解得:$x=\frac{4}{3}$.

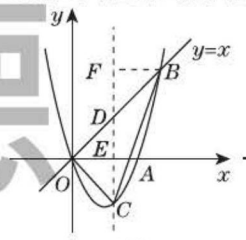
∴ $E\left(\frac{4}{3},0\right)$,

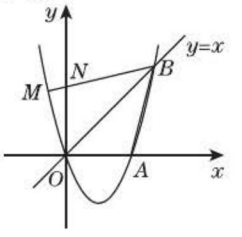
∴ $\frac{4}{3}k+1=0$,解得:$k=-\frac{3}{4}$,

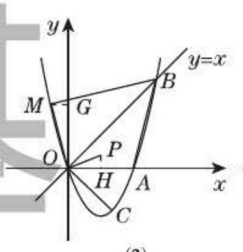
∴ 存在点 D,使△$DO'E$ 与△$CO'O$ 相似,这时 $k=-\frac{3}{4}$,$b=1$.

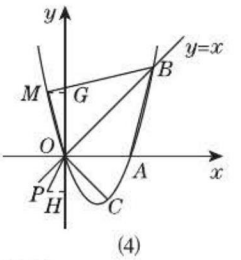
6. 解:(1)∵ $B(2,t)$在直线 $y=x$ 上,∴ $t=2$,∴ $B(2,2)$,把 A、B 两点的坐标分别代入抛物线对应的函数表达式可得$\begin{cases}4a+2b=2,\\\frac{9}{4}a+\frac{3}{2}b=0,\end{cases}$解得$\begin{cases}a=2,\\b=-3,\end{cases}$

∴ 抛物线对应的函数表达式为 $y=2x^2-3x$.









(第 6 题图)

(2)如图(1),过 C 作 $CD\parallel y$ 轴,交 x 轴于点 E,交 OB 于点 D,过 B 作 $BF\perp CD$ 于点 F,

∵ 点 C 是抛物线上第四象限的点,

∴ 可设 $C(m,2m^2-3m)$,则 $E(m,0)$,$D(m,m)$,

∴ $OE=m$,$BF=2-m$,$CD=m-(2m^2-3m)=-2m^2+4m$,

∴ $S_{\triangle OBC}=S_{\triangle CDO}+S_{\triangle CDB}=\frac{1}{2}CD\cdot OE+\frac{1}{2}CD\cdot BF=\frac{1}{2}(-2m^2+4m)(m+2-m)=-2m^2+4m$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

∵ $\triangle OBC$ 的面积为 2,

∴ $-2m^2+4m=2$,解得 $m_1=m_2=1$,

∴ $C(1,-1)$.

(3)存在.

设 MB 交 y 轴于点 N,如图(2),

∵ $B(2,2)$,∴ $\angle AOB=\angle NOB=45°$,

在 $\triangle AOB$ 和 $\triangle NOB$ 中,

$$\begin{cases}\angle AOB=\angle NOB,\\ OB=OB,\\ \angle ABO=\angle NBO,\end{cases}$$

∴ $\triangle AOB\cong\triangle NOB(\mathrm{ASA})$,

∴ $ON=OA=\frac{3}{2}$,∴ $N\left(0,\frac{3}{2}\right)$,

∴ 可设直线 BN 对应的函数表达式为 $y=kx+\frac{3}{2}$,

把 B 点坐标代入可得 $2=2k+\frac{3}{2}$,解得 $k=\frac{1}{4}$,

∴ 直线 BN 对应的函数表达式为 $y=\frac{1}{4}x+\frac{3}{2}$,

联立直线 BN 和抛物线对应的函数表达式可得

$$\begin{cases}y=\frac{1}{4}x+\frac{3}{2},\\ y=2x^2-3x,\end{cases}\text{解得}\begin{cases}x=2,\\ y=2\end{cases}\text{或}\begin{cases}x=-\frac{3}{8},\\ y=\frac{45}{32},\end{cases}$$

∴ $M\left(-\frac{3}{8},\frac{45}{32}\right)$. ∵ $C(1,-1)$,

∴ $\angle COA=45°$. 又 $\angle AOB=45°$,且 $B(2,2)$,

∴ 易得 $OB=2\sqrt{2}$,$OC=\sqrt{2}$. ∵ $\triangle POC\backsim\triangle MOB$,

∴ $\frac{OM}{OP}=\frac{OB}{OC}=2$,$\angle POC=\angle BOM$.

当点 P 在第一象限时,如图(3),过 M 作 $MG\perp y$ 轴于点 G,过 P 作 $PH\perp x$ 轴于点 H,

∵ $\angle COA=\angle BOG=45°$,

∴ $\angle MOG=\angle POH$,且 $\angle PHO=\angle MGO$,

∴ $\triangle MOG\backsim\triangle POH$,∴ $\frac{OM}{OP}=\frac{MG}{PH}=\frac{OG}{OH}=2$.

∵ $M\left(-\frac{3}{8},\frac{45}{32}\right)$,∴ $MG=\frac{3}{8}$,$OG=\frac{45}{32}$,

∴ $PH=\frac{1}{2}MG=\frac{3}{16}$,$OH=\frac{1}{2}OG=\frac{45}{64}$,

∴ $P\left(\frac{45}{64},\frac{3}{16}\right)$.

当点 P 在第三象限时,如图(4),过 M 作 $MG\perp y$ 轴于点 G,过 P 作 $PH\perp y$ 轴于点 H,

同理可求得 $PH=\frac{1}{2}MG=\frac{3}{16}$,$OH=\frac{1}{2}OG=\frac{45}{64}$,∴ $P\left(-\frac{3}{16},-\frac{45}{64}\right)$.

综上可知,存在满足条件的点 P,其坐标为 $\left(\frac{45}{64},\frac{3}{16}\right)$或$\left(-\frac{3}{16},-\frac{45}{64}\right)$.

7. (1)**证明**:∵ $\triangle ABC$ 是等腰直角三角形,

∴ $\angle B=\angle C=45°$,$AB=AC$.

∵ $AP=AQ$,∴ $BP=CQ$.

∵ E 是 BC 的中点,∴ $BE=CE$,

∴ $\triangle BPE\cong\triangle CQE$.

(2)**证明**:∵ $\triangle ABC$ 和 $\triangle DEF$ 是两个全等的等腰直角三角形,∴ $\angle B=\angle C=\angle DEF=45°$.

∵ $\angle BEQ=\angle EQC+\angle C$,即 $\angle BEP+\angle DEF=\angle EQC+\angle C$,

∴ $\angle BEP+45°=\angle EQC+45°$,

∴ $\angle BEP=\angle EQC$.

∵ $\angle B=\angle C=45°$,

∴ $\triangle BPE\backsim\triangle CEQ$.

(3)**解**:∵ $\triangle BPE\backsim\triangle CEQ$,

∴ $\frac{BP}{CE}=\frac{BE}{CQ}$,

∵ $BP=2$,$CQ=9$,$BE=CE$,∴ $BE^2=18$,

∴ $BE=CE=3\sqrt{2}$,

∴ $BC=2BE=6\sqrt{2}$.

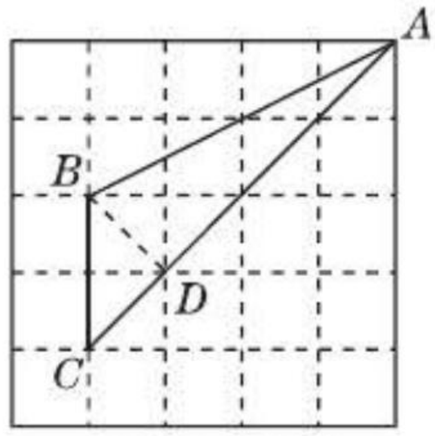
第7章 锐角三角函数

7.1 正 切

1. 举一反三训练

1. $\frac{\sqrt{15}}{15}$ **点拨**:设 $a=x$,则 $c=4x$,由勾股定理得,$b=\sqrt{15}x$,则 $\tan A=\frac{a}{b}=\frac{\sqrt{15}}{15}$.

2. $\frac{1}{3}$ **点拨**:如图:作 $BD\perp AC$ 于 D,易得 $BD=\sqrt{2}$,$AD=3\sqrt{2}$,则 $\tan\angle BAC=\frac{BD}{AD}=\frac{\sqrt{2}}{3\sqrt{2}}=\frac{1}{3}$.



(第2题图)

3. C **点拨**:$\tan B=\frac{AC}{BC}=\frac{\sqrt{3}}{2}$,∵ $BC=2\sqrt{3}$,∴ $\frac{AC}{2\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$,解得 $AC=3$,故选 C.

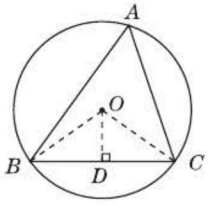
4. <

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

5. 解：(1) tan25° ≈0.47. (2) tan80° ≈5.67.
(3) tan30° + tan60° ≈2.31.
(4) tan55°55′30″≈1.48.

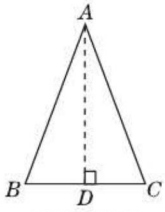
Ⅱ. 举一反三训练

6. D　**点拨**：如图，过点 O 作 $OD \perp BC$ 于 D，连接 OB，OC，根据同弧所对圆周角等于圆心角的一半和等腰三角形的性质，可以把 $\angle A$ 转化为 $\angle BOD$，然后在 Rt△BOD 中用锐角三角函数的定义求解.



（第 6 题图）

7. 解：如图，△ABC 中，$AB = AC$，作 $AD \perp BC$ 于 D，则 $BD = CD$，



（第 7 题图）

当 $AB = AC = 4$，$BC = 6$ 时，有 $BD = \frac{1}{2}BC = 3$，

在 Rt△ABD 中，$AD = \sqrt{AB^2 - BD^2} = \sqrt{7}$，

所以 $\tan B = \frac{AD}{BD} = \frac{\sqrt{7}}{3}$；

当 $AB = AC = 6$，$BC = 4$ 时，有 $BD = \frac{1}{2}BC = 2$，

在 Rt△ABD 中，$AD = \sqrt{AB^2 - BD^2} = 4\sqrt{2}$，

所以 $\tan B = \frac{AD}{BD} = \frac{4\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2}$，

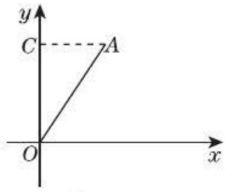
所以底角的正切值为 $\frac{\sqrt{7}}{3}$ 或 $2\sqrt{2}$.

8. $\frac{4}{5}$　**点拨**：由坐标知 $OE = 4$，$OC = 5$. 因为 $\angle OBE$ 所在的三角形不是直角三角形，所以连接 CE，可知 $\angle OCE = \angle OBE$，在 Rt△EOC 中，$\tan \angle OCE = \frac{OE}{OC} = \frac{4}{5}$，所以 $\tan \angle OBE = \frac{4}{5}$.

Ⅲ. 练基础 · 练方法 · 练技巧

1. A　**点拨**：∵ 在 Rt△ABC 中，$\angle C = 90°$，$AC = 1$，$BC = 3$，∴ $\angle A$ 的正切值为 $\frac{BC}{AC} = \frac{3}{1} = 3$，故选 A.

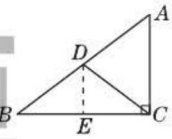
2. A　**点拨**：如图，作 $AC \perp y$ 轴于点 C. 则 $AC = 2$，$OC = 3$. ∴ $\tan \angle AOy = \frac{AC}{OC} = \frac{2}{3}$，故选 A.



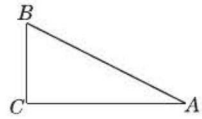
（第 2 题图）

3. B　**点拨**：由题意知 $\angle B = \angle B'$，再把 $\angle B$ 放入直角三角形中即可求解.

4. D　**点拨**：如图，作 $DE \perp BC$ 于 E，由直角三角形的性质，得 $BD = CD$，$AB = 2CD = 10$. 由勾股定理，得 $BC = 8$，由等腰三角形的性质，得 $CE = \frac{1}{2}BC = 4$，由勾股定理，得 $DE = \sqrt{CD^2 - CE^2} = 3$，则 $\tan \angle DCB = \frac{DE}{CE} = \frac{3}{4}$. 故选 D.



（第 4 题图）



（第 5 题图）

5. $\frac{1}{2}$　**点拨**：为了避免出错，画出草图求解. 如图，$\tan A = \frac{BC}{AC}$，因为 $AC = 2BC$，所以 $\frac{BC}{AC} = \frac{1}{2}$，所以 $\tan A = \frac{1}{2}$.

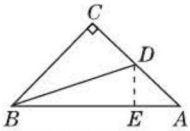
6. tan31° − tan30°　**点拨**：$\sqrt{(\tan 30° - \tan 31°)^2} = |\tan 30° - \tan 31°| = \tan 31° - \tan 30°$.
锐角的正切值随着角度的增大而增大.

7. 1.423

8. 解：过点 A 作 $AD \perp BC$ 于点 D. 因为在△ABC 中，$AB = AC = 3$，$BC = 4$，$AD \perp BC$，所以 $BD = DC = 2$，所以 $AD = \sqrt{5}$，所以 $\tan B = \frac{AD}{BD} = \frac{\sqrt{5}}{2}$.

方法规律：本题运用了定义法. 在等腰三角形中常作底边上的高，利用“三线合一”进行解题.

9. 解：如图：过 D 作 $DE \perp AB$ 于 E.
设 $AC = BC = 2a$，根据勾股定理得 $AB = 2\sqrt{2}a$.
∵ D 为 AC 的中点，∴ $AD = a$.
易得△ADE 是等腰直角三角形，



（第 9 题图）

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

$\therefore DE=AE=\frac{\sqrt{2}a}{2}$.

$\therefore BE=AB-AE=\frac{3\sqrt{2}a}{2}$,

$\therefore \tan\angle ABD=\frac{ED}{BE}=\frac{1}{3}$.

10. C　**点拨**:如图,过 A 作 $AM\perp l_4$ 于点 M,过 C 作 $CN\perp l_4$ 于点 N,则 $AM=h$, $CN=2h$, $\angle ABM+\angle BAM=90°$. $\because$ 四边形 $ABCD$ 是矩形,$\therefore \angle ABC=90°$,

$\therefore \angle ABM+\alpha=90°$,

$\therefore \angle BAM=\alpha$.

又$\because \angle AMB=\angle BNC=90°$,

$\therefore \triangle ABM\backsim\triangle BCN$,$\therefore \frac{BM}{CN}=\frac{AB}{BC}$.

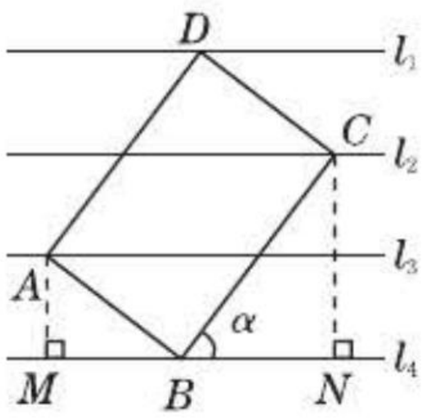
在 Rt$\triangle ABM$ 中,$\angle AMB=90°$,

$\therefore BM=AM\cdot\tan\angle BAM=h\cdot\tan\alpha$.

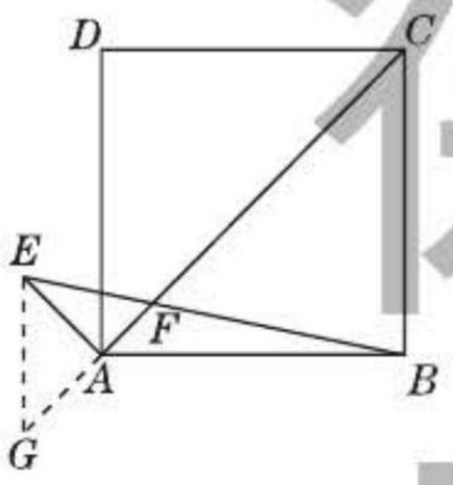
又$\because AB=4$, $BC=6$,$\therefore \frac{h\cdot\tan\alpha}{2h}=\frac{4}{6}$,

$\therefore \tan\alpha=\frac{4}{3}$. 故选 C.

构造相似的直角三角形是解决此类问题的常用方法,相邻的两条平行直线间的距离均为 h,是一个重要的条件.



(第 10 题图)



(第 11 题图)

11. $\frac{2}{3}$　**点拨**:如图,作 $EG/\!/DA$,交 CA 的延长线于点 G,设 AC, BE 交于点 F.

因为正方形的边长为 $2\sqrt{2}$,所以 $AC=\sqrt{(2\sqrt{2})^2+(2\sqrt{2})^2}=4$.

因为 $EG/\!/DA$, $AE\perp AC$, $\angle DAC=45°$,所以 $\angle EGA=\angle DAC=45°$, $\angle EAG=90°$,所以 $\triangle AEG$ 是等腰直角三角形.

因为 $AE=1$,所以 $AG=1$,所以 $GC=AG+AC=1+4=5$. 在 Rt$\triangle AEG$ 中,由勾股定理,得 $EG=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$.

因为 $EG/\!/DA$, $DA/\!/CB$,所以 $EG/\!/CB$,所以 $\triangle EGF\backsim\triangle BCF$,

所以$\frac{EG}{BC}=\frac{GF}{CF}$,即$\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}=\frac{GF}{5-GF}$,解得$GF=\frac{5}{3}$,

所以 $AF=GF-AG=\frac{5}{3}-1=\frac{2}{3}$,

所以在 Rt$\triangle AEF$ 中,$\tan\angle AEF=\frac{AF}{AE}=\frac{\frac{2}{3}}{1}=\frac{2}{3}$.

12. (1)**证明**:因为 PA, PC 分别与⊙O 相切于点 A, C,所以 $\angle APO=\angle EPD$,且 $PA\perp AO$,即 $\angle PAO=90°$. 因为 $\angle AOP=\angle EOD$, $\angle PAO=\angle E=90°$,所以 $\angle APO=\angle EDO$,所以 $\angle EPD=\angle EDO$.

(2)**解**:连接 OC,易知 $PC\perp OC$, $PA=PC=6$. 在 Rt$\triangle PAD$ 中,因为 $\tan\angle PDA=\frac{3}{4}$, $PA=6$,所以 $AD=8$,所以 $PD=10$,所以 $CD=PD-PC=10-6=4$. 因为 $PC\perp OC$,所以 $\angle OCD=90°$. 又因为 $\tan\angle PDA=\frac{3}{4}$,所以 $OC=3$,所以 $DO=5$. 因为 $\angle EPD=\angle EDO$, $\angle PED=\angle DEO$,所以 $\triangle DEP\backsim\triangle OED$,所以$\frac{DE}{OE}=\frac{PD}{DO}=\frac{10}{5}=2$,在Rt$\triangle OED$中,因为 $OE^2+DE^2=5^2$,所以 $OE=\sqrt{5}$.

13. **解**:由 $\angle ACB=90°$, $CD\perp AB$ 于 D,易知 $\triangle ACD\backsim\triangle CBD$,$\therefore CD^2=AD\times BD$,$\therefore q=AD\times BD=1$.

$\because \tan A-\tan B=2$,$\therefore \frac{CD}{AD}-\frac{CD}{BD}=2$.

$\therefore BD-AD=2$. $\because (BD+AD)^2=(BD-AD)^2+4BD\times AD$,

$\therefore BD+AD=2\sqrt{2}$,$\therefore p=-(BD+AD)=-2\sqrt{2}$.

点拨:利用三角形相似可得 $AD\times BD$ 的值,也就求得了 q 的值,根据正切的定义,把 $\tan A-\tan B=2$,转化成$\frac{CD}{AD}-\frac{CD}{BD}=2$,整理成两根之差为 2,进而求得两根之和为 $2\sqrt{2}$,也就求出了 p 的值.

7.2 正弦、余弦

1. 举一反三训练

1. **解**:在第一个直角三角形中,由勾股定理,得 $AC=\sqrt{6^2-2^2}=4\sqrt{2}$,$\therefore \sin A=\frac{BC}{AB}=\frac{1}{3}$, $\cos A=\frac{AC}{AB}=\frac{4\sqrt{2}}{6}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$, $\tan A=\frac{BC}{AC}=\frac{\sqrt{2}}{4}$; $\sin B=\frac{AC}{AB}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$, $\cos B=\frac{BC}{AB}=\frac{1}{3}$, $\tan B=\frac{AC}{BC}=2\sqrt{2}$;

在第二个直角三角形中,由勾股定理,得 $AB=\sqrt{AC^2+BC^2}=\sqrt{36+4}=2\sqrt{10}$,

$\therefore \sin A=\frac{BC}{AB}=\frac{2}{2\sqrt{10}}=\frac{\sqrt{10}}{10}$, $\cos A=\frac{AC}{AB}=\frac{6}{2\sqrt{10}}=\frac{3\sqrt{10}}{10}$, $\tan A=\frac{BC}{AC}=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$,

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

$\sin B=\frac{AC}{AB}=\frac{6}{2\sqrt{10}}=\frac{3\sqrt{10}}{10}$，$\cos B=\frac{BC}{AB}=\frac{2}{2\sqrt{10}}=\frac{\sqrt{10}}{10}$，$\tan B=\frac{AC}{BC}=3$.

2. 9

3. $\sin 41°<\cos 46°<\cos 37°<\cos 21°$

4. **解**：∵ $\angle A$ 为锐角，且 $\cos A=\frac{4}{5}$，以 $\angle A$ 为一角作直角三角形 ABC，$\angle C=90°$，

∴ $\cos A=\frac{AC}{AB}=\frac{4}{5}$.

设 $AC=4k$，则 $AB=5k$.

根据勾股定理可得 $BC=3k$.

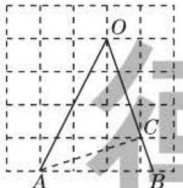
∴ $\sin A=\frac{BC}{AB}=\frac{3}{5}$，$\tan A=\frac{BC}{AC}=\frac{3}{4}$.

5. **解**：(1) $\sin 45°\approx 0.71$. (2) $\cos 30°\approx 0.87$.

(3) $\sin 33.5°\approx 0.55$. (4) $\cos 71°25'30''\approx 0.32$.

Ⅱ. 举一反三训练

6. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ **点拨**：如图，C 为 OB 边上的格点，连接 AC，根据勾股定理，得 $AO=\sqrt{2^2+4^2}=2\sqrt{5}$，$AC=\sqrt{1^2+3^2}=\sqrt{10}$，$OC=\sqrt{1^2+3^2}=\sqrt{10}$，所以 $AO^2=AC^2+OC^2=20$，所以 $\triangle AOC$ 是直角三角形，$\cos\angle AOB=\frac{CO}{AO}=\frac{\sqrt{10}}{2\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$.



（第 6 题图）

7. **解**：∵ $AD\perp BC$，∴ $\angle ADC=90°$，∵ $AD=9$，$DC=5$，

∴ $AC=\sqrt{81+25}=\sqrt{106}$，∵ E 为 AC 的中点，

∴ $DE=AE=EC=\frac{1}{2}AC$，

∴ $\angle EDC=\angle C$，∴ $\sin\angle EDC=\sin C=\frac{AD}{AC}=\frac{9}{\sqrt{106}}=\frac{9\sqrt{106}}{106}$.

8. D **点拨**：由 α 为锐角，且 $\sin\alpha=\frac{4}{5}$，得 $\cos\alpha=\sqrt{1-\sin^2\alpha}=\sqrt{1-\left(\frac{4}{5}\right)^2}=\frac{3}{5}$，$\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{\frac{4}{5}}{\frac{3}{5}}=\frac{4}{3}$，故选 D.

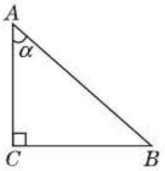
Ⅲ. 练基础 · 练方法 · 练技巧

1. A **点拨**：在 Rt$\triangle ABC$ 中，∵ $AB=10$，$AC=8$，

∴ $BC=\sqrt{AB^2-AC^2}=\sqrt{10^2-8^2}=6$，

∴ $\sin A=\frac{BC}{AB}=\frac{6}{10}=\frac{3}{5}$，故选 A.

2. D **点拨**：如图所示，$\cos\alpha=\frac{AC}{AB}=\frac{2}{AB}$，则 $AB=\frac{2}{\cos\alpha}$，故选 D.



（第 2 题图）

3. A **点拨**：∵ CD 是斜边 AB 上的高，∴ $\angle BDC=90°$，∴ $\angle B+\angle DCB=90°$，

∵ $\angle ACB=90°$，∴ $\angle A+\angle B=90°$，∴ $\angle A=\angle DCB$，∴ $\cos A=\frac{AC}{AB}=\frac{CD}{CB}=\frac{AD}{AC}$，故选 A.

4. B **点拨**：易得 $\triangle CDE\cong\triangle C'DE$，∴ $C'D=CD$.

∵ $AB=CD=4$，∴ $C'D=4$. ∵ $DE=8$，

∴ $\sin\angle C'ED=\frac{C'D}{ED}=\frac{4}{8}=\frac{1}{2}$. 故选 B.

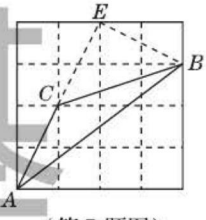
5. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ **点拨**：∵ 在 Rt$\triangle ABC$ 中，$\angle C=90°$，$AB=2$，$BC=\sqrt{3}$，∴ $\sin A=\frac{BC}{AB}=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

6. 6 **点拨**：∵ $\sin A=\frac{BC}{AB}$，∴ $\frac{BC}{8}=\frac{3}{4}$，解得 $BC=6$.

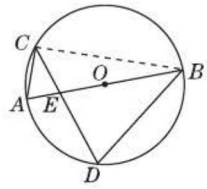
7. $\frac{\sqrt{5}}{5}$ **点拨**：如图所示，延长 AC 交网格于点 E，连接 BE，设每个小正方形的边长为 1，则 $AE=2\sqrt{5}$，$BE=\sqrt{5}$，$AB=5$，

∴ $AE^2+BE^2=AB^2$，∴ $\triangle ABE$ 是直角三角形，

∴ $\sin\angle CAB=\frac{BE}{AB}=\frac{\sqrt{5}}{5}$.



（第 7 题图）



（第 8 题图）

8. $\frac{1}{3}$ **点拨**：如图，连接 BC，∴ $\angle D=\angle A$，∵ AB 是 $\odot O$ 的直径，∴ $\angle ACB=90°$，∵ $AB=3\times 2=6$，$AC=2$，∴ $\cos D=\cos A=\frac{AC}{AB}=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$.

9. **解**：(1) 由勾股定理，得 $BC=\sqrt{AB^2-AC^2}=5$，∴ $\sin A=\frac{BC}{AB}=\frac{5}{13}$，$\cos A=\frac{AC}{AB}=\frac{12}{13}$，$\tan A=\frac{BC}{AC}=\frac{5}{12}$，$\sin B=\frac{AC}{AB}=\frac{12}{13}$，$\cos B=\frac{BC}{AB}=\frac{5}{13}$，$\tan B=\frac{AC}{BC}=\frac{12}{5}$；

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

(2)由勾股定理,得

$AB=\sqrt{AC^2+BC^2}=\sqrt{13}$,$\therefore \sin A=\frac{BC}{AB}=\frac{3\sqrt{13}}{13}$,

$\cos A=\frac{AC}{AB}=\frac{2\sqrt{13}}{13}$,$\tan A=\frac{BC}{AC}=\frac{3}{2}$,$\sin B=\frac{AC}{AB}=\frac{2\sqrt{13}}{13}$,$\cos B=\frac{BC}{AB}=\frac{3\sqrt{13}}{13}$,$\tan B=\frac{AC}{BC}=\frac{2}{3}$.

10. 解:设 $AE=x$,则 $BE=3x$,$BC=4x$,$AM=MD=2x$,$CD=4x$,

$\therefore EC=\sqrt{(3x)^2+(4x)^2}=5x$,

$EM=\sqrt{x^2+(2x)^2}=\sqrt{5}x$,

$CM=\sqrt{(2x)^2+(4x)^2}=2\sqrt{5}x$,

$\therefore EM^2+CM^2=CE^2$,

$\therefore \triangle CEM$ 是直角三角形,

$\therefore \sin\angle ECM=\frac{EM}{CE}=\frac{\sqrt{5}}{5}$.

11. 解:$\because AD=BC=5$,$\cos\angle ADC=\frac{3}{5}$,

$\therefore CD=3$,

在 $\mathrm{Rt}\triangle ACD$ 中,$\because AD=5$,$CD=3$,

$\therefore AC=\sqrt{AD^2-CD^2}=\sqrt{5^2-3^2}=4$,

在 $\mathrm{Rt}\triangle ACB$ 中,$\because AC=4$,$BC=5$,

$\therefore AB=\sqrt{AC^2+BC^2}=\sqrt{4^2+5^2}=\sqrt{41}$,

$\therefore \sin B=\frac{AC}{AB}=\frac{4}{\sqrt{41}}=\frac{4\sqrt{41}}{41}$.

12. (1)证明:如图,连接 AD,OD,

$\because AC$ 是 $\odot O$ 的直径,

$\therefore AD\perp BC$,

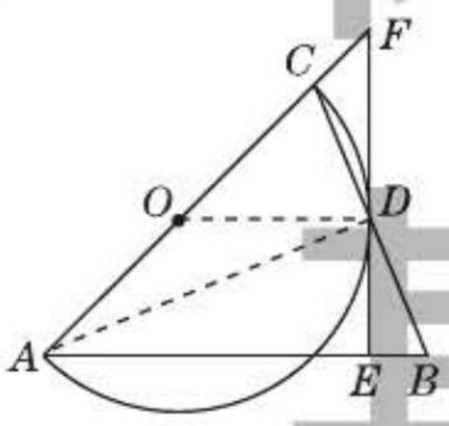
$\because AB=AC$,

$\therefore D$ 是 BC 的中点,

又$\because O$ 是 AC 的中点,

$\therefore OD$ 是 $\triangle ABC$ 的中位线,$\therefore OD/\!/AB$,

$\because DE\perp AB$,$\therefore OD\perp DE$,$\therefore DE$ 是 $\odot O$ 的切线.



(第12题图)

(2)解:由(1)知 $OD/\!/AE$,

$\therefore \angle FOD=\angle FAE$,$\angle FDO=\angle FEA$,

$\therefore \triangle FOD\backsim\triangle FAE$,$\therefore \frac{FO}{FA}=\frac{OD}{AE}$,

$\therefore \frac{FC+OC}{FC+AC}=\frac{OD}{AB-BE}$,$\therefore \frac{FC+2}{FC+4}=\frac{2}{4-1}$,

解得 $FC=2$,

$\therefore AF=6$,

$\therefore$ 在 $\mathrm{Rt}\triangle AEF$ 中,$\cos\angle FAE=\frac{AE}{AF}=\frac{AB-BE}{AF}=\frac{4-1}{6}=\frac{1}{2}$.

13. 解:(1)B

(2)$0<\mathrm{sad}A<2$

(3)如图,在 $\triangle ABC$ 中,$\angle ACB=90°$,$\angle A=\alpha$,$\sin A=\frac{3}{5}$.

在 AB 上取点 D,使 $AD=AC$,连接 CD,

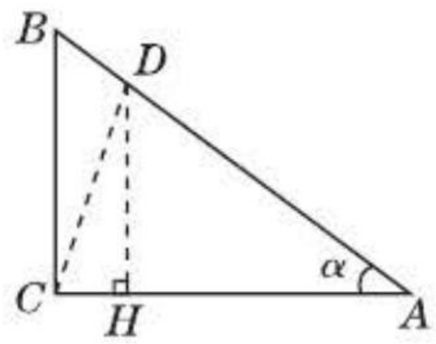
作 $DH\perp AC$,H 为垂足,

令 $BC=3k$,则 $AB=5k$,

$AD=AC=\sqrt{(5k)^2-(3k)^2}=4k$,

又$\because$ 在 $\triangle ADH$ 中,$\angle AHD=90°$,$\sin A=\frac{3}{5}$,

$\therefore DH=AD\cdot\sin A=\frac{12}{5}k$,$AH=\sqrt{AD^2-DH^2}=\frac{16}{5}k$.



(第13题图)

则在 $\triangle CDH$ 中,$CH=AC-AH=\frac{4}{5}k$,

$CD=\sqrt{DH^2+CH^2}=\frac{4\sqrt{10}}{5}k$.

于是在 $\triangle ACD$ 中,$AD=AC=4k$,

$CD=\frac{4\sqrt{10}}{5}k$.

由正对的定义可得:$\mathrm{sad}A=\frac{CD}{AD}=\frac{\sqrt{10}}{5}$,即 $\mathrm{sad}\alpha=\frac{\sqrt{10}}{5}$.

7.3 特殊角的三角函数

7.4 由三角函数值求锐角

1. 举一反三训练

1. 解:(1)原式 $=\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{8}$.

(2)原式 $=\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2\times1=\frac{1}{3}+\frac{3}{4}-\frac{1}{2}=\frac{7}{12}$. (3)原式 $=\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}\times1}+2\times\frac{\sqrt{3}}{2}=1-\frac{\sqrt{3}}{3}+\sqrt{3}=1+\frac{2}{3}\sqrt{3}$. (4)原式 $=6\times\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2-\sqrt{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}-2\times\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{1}{2}-\sqrt{2}$.

2. 解:(1)由已知,得 $\cos(\alpha+10°)=\frac{1}{2}$,所以 $\alpha+10°=60°$,所以 $\alpha=50°$.

(2)由已知,得 $\tan\alpha-1=0$ 或 $\tan\alpha-\sqrt{3}=0$,

所以 $\tan\alpha=1$ 或 $\tan\alpha=\sqrt{3}$,所以 $\alpha=45°$ 或 $\alpha=60°$.

方法规律:(1)解答本题运用了整体思想,即将题目中的 $\alpha+10°$ 当成一个整体. (2)解答本题

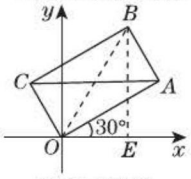
关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

体现了方程思想.

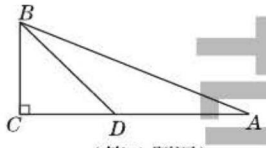
3. (1)49°11′11″　(2)49°45′28″

Ⅱ. 举一反三训练

4. (2,2$\sqrt{3}$)　**点拨**:如图,连接 OB,过点 B 作 $BE\perp OE$ 于 E,∵ 矩形 $OABC$ 的对角线 AC 平行于 x 轴,边 OA 与 x 轴正半轴的夹角为 30°,∴ $\angle CAO=30°$,∴ $AC=4$,∴ $OB=AC=4$,由矩形的性质可知 $\angle BOA=\angle CAO=30°$,∴ $\angle OBE=180°-30°-30°-90°=30°$,∴ $OE=2$,∴ $BE=2\sqrt{3}$,∴ 点 B 的坐标是(2,2$\sqrt{3}$).



(第 4 题图)



(第 6 题图)

5. B　**点拨**:在锐角三角函数中,余弦值都是随着角度的增大而减小,又知 $\cos30°=\frac{\sqrt{3}}{2}$,$\cos45°=\frac{\sqrt{2}}{2}$,故 $30°<\alpha<45°$,故选 B.

6. **解**:如图,在 Rt△ABC 中,$\angle A=22.5°$. 设 $BC=1$. 在 $\angle ABC$ 内部作 $\angle ABD=\angle A=22.5°$,则 $\angle BDC=45°$. 所以 $CD=1$,$BD=AD=\sqrt{2}$. 所以 $AC=1+\sqrt{2}$. 所以 $\tan22.5°=\frac{1}{1+\sqrt{2}}=\sqrt{2}-1$.

点拨:类比例 6,构造 45°角即可求解.

Ⅲ. 练基础·练方法·练技巧

1. B

2. C　**点拨**:因为 $\sin A=\frac{1}{2}$,所以 $\angle A=30°$,所以 $BC:AC:AB=1:\sqrt{3}:2$.

3. D　**点拨**:方法一,用计算器计算得出锐角 $\angle A$ 的大小,得出答案;方法二,锐角 $\angle A$ 的余弦值在 0°~90°是随着角度的增大而减小的,$\cos60°=\frac{1}{2}$,$\frac{1}{4}<\frac{1}{2}$,所以 $60°<\angle A<90°$. 选 D.

4. B　**点拨**:由题意,得 $\angle A=45°$,$\angle B=45°$,$\angle C=180°-\angle A-\angle B=90°$,故选 B.

5. 0　**点拨**:原式 $=2\times\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2-1=1-1=0$.

6. 70　**点拨**:∵ α 为锐角,$\sin(\alpha-10°)=\frac{\sqrt{3}}{2}$,$\sin60°=\frac{\sqrt{3}}{2}$,∴ $\alpha-10°=60°$,∴ $\alpha=70°$.

7. 60°　**点拨**:∵ $\angle C=90°$,$3a=\sqrt{3}b$,∴ $\frac{b}{a}=\sqrt{3}$,即 $\tan B=\sqrt{3}$,∴ $\angle B=60°$.

8. **解**:(1)原式 $=\sqrt{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}-\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}+\sqrt{3}=\frac{3}{2}-1+\sqrt{3}=\frac{1}{2}+\sqrt{3}$;

(2)原式 $=\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}}-2\times\frac{\sqrt{3}}{2}\times\sqrt{3}+2\times1=1-3+2=0$.

9. **解**:(1)因为 $AC=BC$,$\angle C=90°$,所以 $\angle B=\angle BAC=45°$. 因为 $\angle DAC=30°$,所以 $\angle BAD=45°-30°=15°$.

(2)过点 D 作 $DE\perp AB$ 于 E,则△BDE 是等腰直角三角形,设 $BE=DE=1$,$CD=x$,则 $BD=\sqrt{2}$. 因为 $\angle DAC=30°$,所以 $AC=\frac{CD}{\tan30°}=\sqrt{3}x$. 因为 $AC=BC$,所以 $\sqrt{3}x=\sqrt{2}+x$,解得 $x=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}-1}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}$,所以 $BC=\sqrt{2}+\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{6}+3\sqrt{2}}{2}$,所以 $AB=\frac{BC}{\sin45°}=\sqrt{2}BC=\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{6}+3\sqrt{2}}{2}=\sqrt{3}+3$,所以 $AE=\sqrt{3}+3-1=\sqrt{3}+2$,所以 $\tan\angle BAD=\frac{DE}{AE}=\frac{1}{\sqrt{3}+2}=2-\sqrt{3}$.

10. **解**:过 A 作 $AM\perp BC$ 于 M,过 D 作 $DN\perp BC$ 于 N,易得 $AD=MN$,$AM=DN$.

因为 $\angle C=45°$,所以△DNC 是等腰直角三角形,

所以 $DN=NC=CD\cdot\sin45°=8\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=8$(m).

所以 $AM=8$ m.

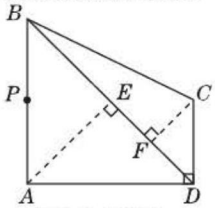
因为 $AD=6$ m,$BC=30$ m,

所以 $BM=BC-MN-NC=30-6-8=16$(m),

所以 $\tan B=\frac{AM}{BM}=\frac{8}{16}=\frac{1}{2}$.

点拨:作辅助线构造直角三角形是解题的关键.

11. A　**点拨**:如图,过点 A 作 $AE\perp BD$ 于 E,过点 C 作 $CF\perp BD$ 于 F,∵ $\angle BAD=\angle ADC=90°$,$AB=AD=2\sqrt{2}$,$CD=\sqrt{2}$,∴ $\angle ABD=\angle ADB=45°$,∴ $\angle CDF=90°-\angle ADB=45°$,



(第 11 题图)

∵ $\sin\angle ABD=\frac{AE}{AB}$,$\sin\angle CDF=\frac{CF}{CD}$,∴ $AE=AB\cdot\sin\angle ABD=2\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=2>\frac{3}{2}$,$CF=CD\cdot\sin\angle CDF=1<\frac{3}{2}$,所以在 AB 和 AD 边上符合点 P 到 BD 的距离为$\frac{3}{2}$的点共有 2 个,故选 A.

12. 60 或 120　**点拨**:过点 A 作 $AD\perp BC$ 于点 D,如

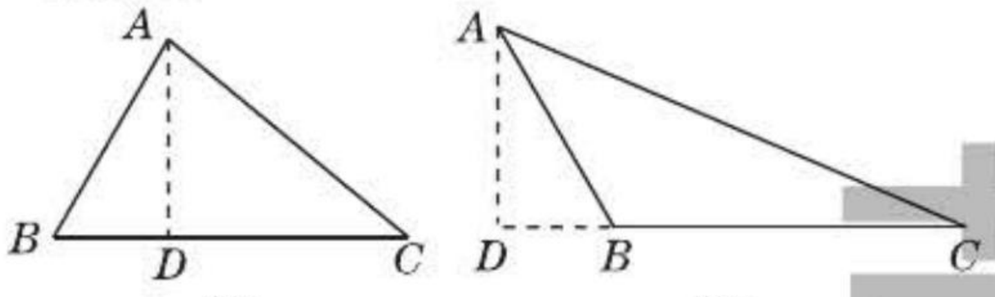
关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

图(1). ∵ $BC=6$, $\triangle ABC$ 的面积为 $6\sqrt{3}$,

∴ $AD=2\sqrt{3}$, ∴ $\sin B=\frac{AD}{AB}=\frac{\sqrt{3}}{2}$, ∴ $\angle B=60°$; 过点 A 作 $AD\perp BC$ 交 CB 的延长线于点 D, 如图(2). ∵ $BC=6$, $\triangle ABC$ 的面积为 $6\sqrt{3}$,

∴ $AD=2\sqrt{3}$, ∴ $\sin\angle ABD=\frac{AD}{AB}=\frac{\sqrt{3}}{2}$,

∴ $\angle ABD=60°$, ∴ $\angle ABC=120°$. 故答案为: 60 或 120.



(第 12 题图)

13. $\frac{1}{2}$ **点拨**: 因为 $\sin A=\frac{BC}{AB}=\frac{2\sqrt{3}}{4}=\frac{\sqrt{3}}{2}$,

所以 $\angle A=60°$, 所以 $\frac{\angle A}{2}=30°$,

所以 $\sin\frac{A}{2}=\frac{1}{2}$.

易错警示: 本题常见错误是将 $\angle A$ 的一半的正弦值看成是 $\angle A$ 的正弦值的一半. 实际上, $\angle A$ 的一半的正弦值与 $\angle A$ 的正弦值的一半是不相等的. 如 $\sin 90°=1$, 而 $\sin 45°=\frac{\sqrt{2}}{2}$, 而 $\frac{\sqrt{2}}{2}$ 不等于 1 的一半. 本题正确的解法是先求 $\frac{\angle A}{2}$ 的度数, 然后求其正弦值.

14. 解: 由题意知, 在 $\mathrm{Rt}\triangle ABC$ 中,

$\angle A=30°$, $\angle B=60°$,

由旋转的性质知图(2)中, $CB=CE$,

∴ $\triangle BCE$ 为等边三角形.

∴ $\angle ECB=60°$, ∴ $\angle ECG=30°$.

∵ $\angle FED=60°$, ∴ $\angle EGC=90°$.

在 $\mathrm{Rt}\triangle DEF$ 中, $CE=EF=DE\cdot\sin D=8\times\sin 30°=4$ (cm), 在 $\mathrm{Rt}\triangle CEG$ 中, $FG=CE\cdot\sin\angle CEG=4\times\sin 60°=2\sqrt{3}$ (cm).

∴ 线段 FG 的长为 $2\sqrt{3}$ cm.

7.5 解直角三角形

Ⅰ. 举一反三训练

1. 解: 因为 $\sin A=\frac{BC}{AB}=\frac{31}{31\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$,

所以 $\angle A=45°$.

所以 $\angle B=90°-\angle A=45°$.

因为 $\angle A=\angle B$, 所以 $AC=BC=31$.

2. 解: ∵ $\angle C=90°$, $\angle A=60°$, ∴ $\angle B=30°$, ∵ $\sin B=\frac{AC}{AB}$, ∴ $AB=\frac{AC}{\sin 30°}=20$, ∵ $\tan A=\frac{BC}{AC}$, ∴ $BC=AC\cdot\tan 60°=10\sqrt{3}$.

3. 解: ∵ $\angle C=90°$, ∴ $\angle A+\angle B=90°$,

∵ $\angle A-\angle B=30°$, ∴ $\angle A=60°$, $\angle B=30°$,

∵ $\sin 30°=\frac{b}{c}=\frac{1}{2}$, ∴ $b=\frac{1}{2}c$,

∵ $b+c=24$, ∴ $\frac{1}{2}c+c=24$, 解得 $c=16$,

则 $b=8$, $a=\sqrt{16^2-8^2}=8\sqrt{3}$.

4. 解: 过点 D 作 $DE\perp BC$ 于 E, 设 $AD=k$, $k>0$, 则 $DC=3k$, $AB=AC=4k$. 因为 $\angle A=90°$, $AB=AC$, 所以 $\angle C=45°$, 所以 $BC=\frac{AC}{\cos 45°}=\sqrt{2}AC=4\sqrt{2}k$.

因为 $\angle C=45°$, 所以 $\angle EDC=45°$, 所以 $DE=EC$.

在 $\mathrm{Rt}\triangle DEC$ 中, $DE^2+EC^2=DC^2$, 设 $DE=x$, $x>0$, 则 $x^2+x^2=9k^2$, 所以 $x^2=\frac{9}{2}k^2$, 所以 $x=\frac{3}{2}\sqrt{2}k$ 或 $x=-\frac{3}{2}\sqrt{2}k$ (负值舍去). 所以 $DE=EC=\frac{3}{2}\sqrt{2}k$, 所以 $BE=BC-EC=4\sqrt{2}k-\frac{3}{2}\sqrt{2}k=\frac{5}{2}\sqrt{2}k$, 所以 $\tan\angle DBC=\frac{DE}{BE}=\frac{\frac{3}{2}\sqrt{2}k}{\frac{5}{2}\sqrt{2}k}=\frac{3}{5}$.

Ⅱ. 举一反三训练

5. A 方法规律: 此题运用了分割法. 运用分割法解斜三角形, 要照顾到题中的特殊角, 一般来讲, 分割的时候不要破坏特殊角, 尽可能构造直角和特殊角, 分割后, 尽可能使有关量联系起来.

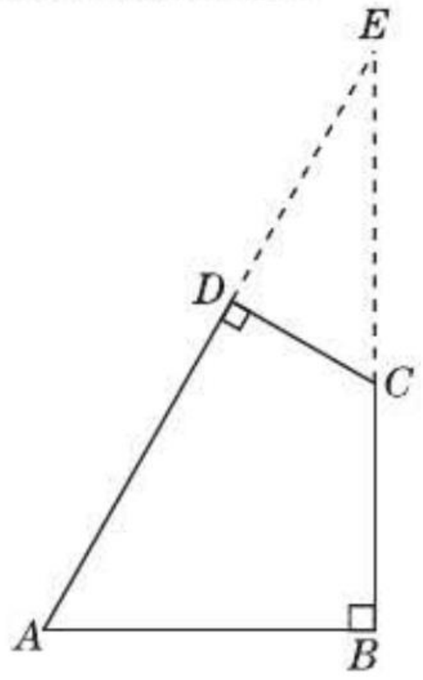
6. 解: 如图, 延长 AD, BC, 相交于点 E, 则 $\angle E=30°$.

在 $\mathrm{Rt}\triangle ABE$ 中, 因为 $\angle A=60°$, $AB=2$, 所以 $BE=AB\cdot\tan A=2\times\tan 60°=2\sqrt{3}$.

在 $\mathrm{Rt}\triangle CDE$ 中, 因为 $CD=1$, $\angle E=30°$,

所以 $DE=\frac{CD}{\tan E}=\frac{1}{\tan 30°}=\sqrt{3}$.

所以 $S_{四边形ABCD}=S_{\triangle ABE}-S_{\triangle CDE}=\frac{1}{2}AB\cdot BE-\frac{1}{2}CD\cdot DE=\frac{1}{2}\times 2\times 2\sqrt{3}-\frac{1}{2}\times 1\times\sqrt{3}=\frac{3\sqrt{3}}{2}$.



(第 6 题图)

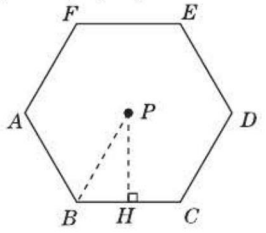
方法规律: 本题运用补形法和转化思想, 将四边形问题转化为三角形问题来解决.

7. $6\sqrt{3}$ **点拨**: 如图所示, 连接 PB, 过 P 作 $PH\perp BC$ 于

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

H,易知 $\angle BPH=\frac{1}{2}\times\frac{360°}{6}=30°$,$BH=\frac{1}{2}BC=\frac{1}{2}\times2=1(\text{cm})$,$\therefore PH=\frac{BH}{\tan\angle BPH}=\frac{1}{\tan30°}=\sqrt{3}(\text{cm})$,

$\therefore$ 点 P 到这个正六边形各边的距离之和 $=6PH=6\times\sqrt{3}=6\sqrt{3}(\text{cm})$.



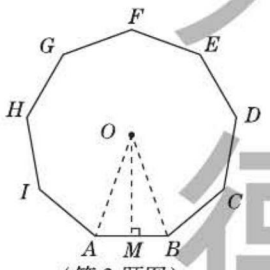
(第 7 题图)

Ⅲ. 练基础 · 练方法 · 练技巧

1. B **2.** D

3. D **点拨**:如图所示,O 为正九边形 $ABCDEFGHI$ 的中心,过 O 作 $OM\perp AB$ 于 M,则 OM 为正九边形的边心距,连接 OA,OB,$\because$ 此多边形是正九边形,

$\therefore\angle AOB=\frac{360°}{9}=40°$.



(第 3 题图)

又$\because OA=OB$,$\therefore\angle AOM=\frac{1}{2}\angle AOB=\frac{1}{2}\times40°=20°$. $\because AB=a$,$\therefore AM=\frac{1}{2}a$,

$\therefore OA=\frac{AM}{\sin\angle AOM}=\frac{\frac{a}{2}}{\sin20°}=\frac{a}{2\sin20°}$.

解决本题的关键是构造直角三角形,利用正多边形的性质及直角三角形中三角函数的定义解答.

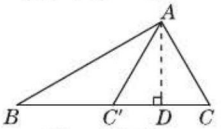
4. 2 **点拨**:$\because$ 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中,$\angle C=90°$,$AB=6$,$\cos A=\frac{1}{3}$,$\therefore\cos A=\frac{AC}{AB}=\frac{1}{3}$,$\therefore AC=\frac{1}{3}AB=\frac{1}{3}\times6=2$.

5. 17 **点拨**:$\because$ 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中,$\angle C=90°$,$\tan A=\frac{15}{8}$,$BC=15$,$\therefore\frac{15}{AC}=\frac{15}{8}$,解得 $AC=8$,根据勾股定理得,$AB=\sqrt{AC^2+BC^2}=\sqrt{8^2+15^2}=17$.

6. 60°或120° **点拨**:如图,作 $AD\perp BC$ 于 D,$AC=AC'=1$,在 $\text{Rt}\triangle ABD$ 中,$\angle B=30°$,$AB=\sqrt{3}$,

$\therefore AD=\frac{1}{2}AB=\frac{\sqrt{3}}{2}$,在 $\text{Rt}\triangle ACD$ 中,$\sin C=\frac{AD}{AC}=\frac{\sqrt{3}}{2}$,$\therefore\angle C=60°$,同理可得 $\angle AC'D=60°$,

$\therefore\angle AC'B=120°$. 故答案为 60°或 120°.



(第 6 题图)

7. 解:(1)$\because\angle B=60°$,$\therefore\angle A=30°$,

$\because\tan A=\frac{a}{b}=\frac{\sqrt{3}}{3}$,$\therefore b=9$,$c=2a=6\sqrt{3}$;

(2)$\because\angle B=45°$,$\therefore\angle A=45°$,

$\therefore a=b=c\cdot\sin A=5\sqrt{2}$;

(3)由勾股定理得:$c=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{(3\sqrt{2})^2+(3\sqrt{6})^2}=6\sqrt{2}$,

$\because\tan A=\frac{a}{b}=\frac{3\sqrt{2}}{3\sqrt{6}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$,$\therefore\angle A=30°$,

$\therefore\angle B=90°-\angle A=60°$;

(4)$\because\angle A=2\angle B$,$\angle A+\angle B=90°$,

$\therefore\angle A=60°$,$\angle B=30°$,$\therefore c=2b$,

$\because c-b=8$,$\therefore b=8$,$c=16$,

$\therefore a=\sqrt{c^2-b^2}=8\sqrt{3}$.

8. 解:(1)$\because\angle B=90°$,$\angle BDC=45°$,$\therefore\angle BCD=45°$.

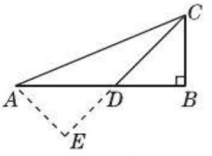
$\therefore BC=BD=5$,

$\because\sin A=\frac{5}{13}=\frac{BC}{AC}$,$BC=5$,

$\therefore AC=13$. 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中,由勾股定理可得 $AB^2=AC^2-BC^2$,

$\therefore AB=12$,

$\therefore AD=AB-BD=12-5=7$;



(第 8 题图)

(2)如图,过 A 作 $AE\perp CD$ 交 CD 的延长线于点 E,易知 $\triangle ADE$ 是等腰直角三角形,

$\therefore AE=DE=\frac{7\sqrt{2}}{2}$,

$\therefore\sin\angle ACD=\frac{7\sqrt{2}}{26}$.

9. 解:(1)$\because DE\perp AB$,

$\therefore\angle DEA=90°$,

又$\because\angle DAB=45°$,$\therefore\angle ADE=45°$,$\therefore DE=AE$,

在 $\text{Rt}\triangle DEB$ 中,$\angle DEB=90°$,$\tan B=\frac{3}{4}$,

$\therefore\frac{DE}{BE}=\frac{3}{4}$,

设 $DE=3x$,那么 $AE=3x$,$BE=4x$,

$\because AB=7$,$\therefore 3x+4x=7$,解得:$x=1$,

$\therefore DE=3$;

(2)在 $\text{Rt}\triangle ADE$ 中,由勾股定理,得 $AD=3\sqrt{2}$,同理得 $BD=5$,

在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中,由 $\tan B=\frac{3}{4}$,可得

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

$\cos B=\frac{4}{5}$,$\therefore BC=\frac{28}{5}$,$\therefore CD=\frac{3}{5}$,

$\therefore \cos\angle CDA=\frac{CD}{AD}=\frac{\sqrt{2}}{10}$,即 $\angle CDA$ 的余弦值为$\frac{\sqrt{2}}{10}$.

10. $21\sqrt{3}$或$15\sqrt{3}$ **点拨**:分两种情况:①如图(1),过点 A 作 $AD\perp BC$,垂足为点 D,

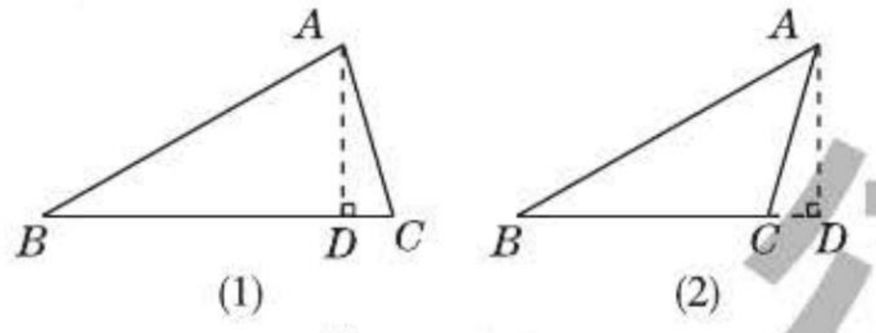
在 $\mathrm{Rt}\triangle ABD$ 中,$\because AB=12$,$\angle B=30°$,

$\therefore AD=\frac{1}{2}AB=6$,$BD=AB\cdot\cos B=12\times\frac{\sqrt{3}}{2}=6\sqrt{3}$,

在 $\mathrm{Rt}\triangle ACD$ 中,$CD=\sqrt{AC^2-AD^2}=\sqrt{(\sqrt{39})^2-6^2}=\sqrt{3}$,

$\therefore BC=BD+CD=6\sqrt{3}+\sqrt{3}=7\sqrt{3}$,

$\therefore S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}\times BC\times AD=\frac{1}{2}\times 7\sqrt{3}\times 6=21\sqrt{3}$;



(第10题图)

②如图(2),过点 A 作 $AD\perp BC$,交 BC 的延长线于点 D,

由①知,$AD=6$,$BD=6\sqrt{3}$,$CD=\sqrt{3}$,

则 $BC=BD-CD=5\sqrt{3}$,

$\therefore S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}\times BC\times AD=\frac{1}{2}\times 5\sqrt{3}\times 6=15\sqrt{3}$,

故答案为:$21\sqrt{3}$或$15\sqrt{3}$.

11. **解**:(1)由 $\angle ACB=90°$,$CE\perp BD$,

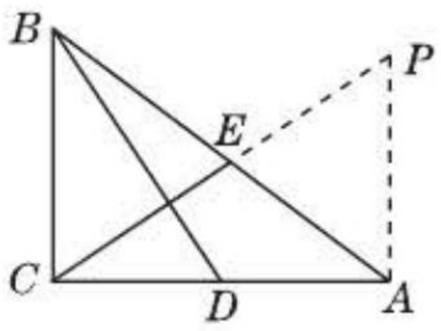
得 $\angle ACE=\angle CBD$.

在 $\triangle BCD$ 中,$BC=3$,$CD=\frac{1}{2}AC=2$,$\angle BCD=90°$,

得 $\tan\angle CBD=\frac{2}{3}$.

即 $\tan\angle ACE=\frac{2}{3}$.

(2)如图,过 A 作 AC 的垂线交 CE 的延长线于 P,则在 $\triangle CAP$ 中,$CA=4$,$\angle CAP=90°$,$\tan\angle ACP=\frac{2}{3}$,



(第11题图)

得 $AP=4\times\frac{2}{3}=\frac{8}{3}$,

又 $\angle ACB=90°$,$\angle CAP=90°$,得 $BC/\!/AP$,

$\therefore \triangle AEP\backsim\triangle BEC$.

$\therefore AE:EB=AP:BC=8:9$.

12. $\frac{1}{n^2-n+1}$ **点拨**:如图,作 $CH\perp BA_4$ 于 H,

由勾股定理得,$BA_4=\sqrt{4^2+1^2}=\sqrt{17}$,$A_4C=\sqrt{10}$,

$\triangle BA_4C$ 的面积 $=4-2-\frac{3}{2}=\frac{1}{2}$,

$\therefore \frac{1}{2}\times\sqrt{17}\times CH=\frac{1}{2}$,解得,$CH=\frac{\sqrt{17}}{17}$,

则 $A_4H=\sqrt{A_4C^2-CH^2}=\frac{13\sqrt{17}}{17}$,

$\therefore \tan\angle BA_4C=\frac{CH}{A_4H}=\frac{1}{13}$,

$\because 1=1^2-1+1$,

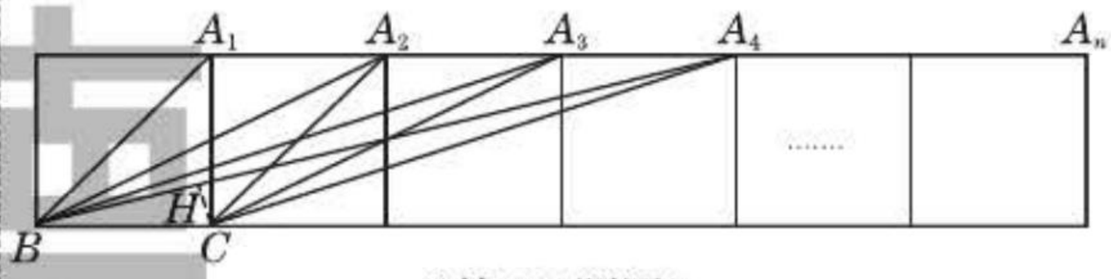
$3=2^2-2+1$,

$7=3^2-3+1$,

$13=4^2-4+1$,

…,

$\therefore \tan\angle BA_nC=\frac{1}{n^2-n+1}$.

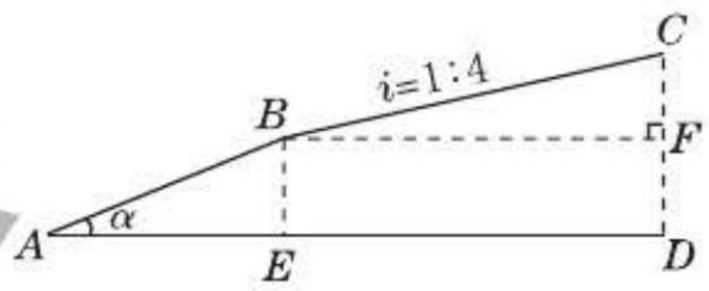


(第12题图)

7.6 用锐角三角函数解决问题

1. 举一反三训练

1. **解**:如图,作 $BE\perp AD$ 于 E,$BF\perp CD$ 于 F,则 $\sin\alpha=\frac{BE}{AB}=\frac{5}{13}$,



(第1题图)

$BE=AB\times\frac{5}{13}=0.65\times\frac{5}{13}=\frac{1}{4}$(千米).

$\because i=\frac{CF}{BF}=\frac{1}{4}$,$\therefore$ 可设 $CF=x$ 千米,则 $BF=4x$ 千米,$x>0$,

$\therefore BC=\sqrt{17}x=1$,$\therefore x=\frac{\sqrt{17}}{17}$.

$\because BE\perp AD$,$BF\perp CD$,$CD\perp AD$,

$\therefore$ 四边形 $BEDF$ 是矩形,$\therefore BE=DF$.

$\therefore CD=CF+DF=CF+BE=\left(\frac{1}{4}+\frac{\sqrt{17}}{17}\right)$千米.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

答：小明从 A 点到 C 点上升的高度 CD 是 $\left(\frac{1}{4}+\frac{\sqrt{17}}{17}\right)$ 千米.

2. 解：过 A 作 $AF\perp OE$，$AD\perp$ 地面，垂足分别为 F，D. 易知 $AD=EF$. 在 $\mathrm{Rt}\triangle AFO$ 中，$\angle AFO=90°$，

$\therefore \cos\angle AOF=\frac{OF}{OA}$，$\therefore OF=OA\cdot\cos\angle AOF$.

又$\because OA=OB=3$ 米，$\angle AOF=55°$，$\therefore OF=3\times\cos55°\approx1.72$（米），$\therefore EF=OB+BE-OF\approx3+0.6-1.72\approx1.9$（米），$\therefore AD=EF\approx1.9$ 米.

答：该秋千的踏板离地面的高度约是 1.9 米.

点拨：解此题关键是把实际问题转化为数学问题，把实际问题抽象到直角三角形中，利用三角函数解答.

3. 解：在 $\mathrm{Rt}\triangle CED$ 中，$\angle CED=58°$，

$\because \tan58°=\frac{CD}{DE}$，$\therefore DE=\frac{CD}{\tan58°}=\frac{2}{\tan58°}$米，

在 $\mathrm{Rt}\triangle CFD$ 中，$\angle CFD=22°$，

$\because \tan22°=\frac{CD}{DF}$，$\therefore DF=\frac{CD}{\tan22°}=\frac{2}{\tan22°}$米，

$\therefore EF=DF-DE=\frac{2}{\tan22°}-\frac{2}{\tan58°}$（米），

同理：$EF=BE-BF=\frac{AB}{\tan45°}-\frac{AB}{\tan70°}$（米），

$\therefore \frac{AB}{\tan45°}-\frac{AB}{\tan70°}=\frac{2}{\tan22°}-\frac{2}{\tan58°}$，

解得：$AB\approx5.9$（米），

答：建筑物 AB 的高度约为 5.9 米.

4. 解：如图，作 $CH\perp AD$ 于 H. 设 $CH=x$ km，

在 $\mathrm{Rt}\triangle ACH$ 中，$\angle A=37°$，$\because \tan37°=\frac{CH}{AH}$，

$\therefore AH=\frac{CH}{\tan37°}=\frac{x}{\tan37°}$ km，

在 $\mathrm{Rt}\triangle CEH$ 中，

$\because \angle CEH=45°$，

$\therefore CH=EH=x$ km，

$\because CH\perp AD$，$BD\perp AD$，

$\therefore CH/\!/BD$，

$\therefore \frac{AH}{HD}=\frac{AC}{CB}$，

$\because AC=CB$，

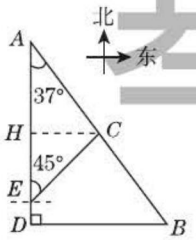
$\therefore AH=HD$，

$\therefore \frac{x}{\tan37°}=x+5$，

$\therefore x=\frac{5\cdot\tan37°}{1-\tan37°}\approx15$ km，

$\therefore AE=AH+HE\approx35$ km，

$\therefore E$ 处距离港口 A 有 35 km 远.



（第 4 题图）

Ⅱ. 举一反三训练

5. 解：（1）如图，分别过点 E、D 作 $EG\perp AB$、$DH\perp AB$ 交 AB 于 G、H，

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是梯形，且 $AB/\!/CD$，

$\therefore DH$ 平行且等于 EG，

故四边形 $EGHD$ 是矩形，

$\therefore ED=GH$，

在 $\mathrm{Rt}\triangle ADH$ 中，$AH=DH\div\tan\angle DAH=8\div\tan45°=8$（米），

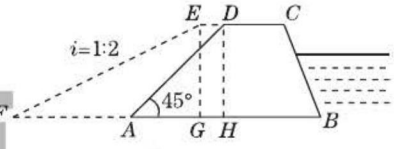
在 $\mathrm{Rt}\triangle FGE$ 中，$i=1:2=\frac{EG}{FG}$，

$\therefore FG=2EG=16$（米），

$\therefore AF=FG+GH-AH=16+2-8=10$（米）；

（2）加宽部分的体积 $V=S_{梯形AFED}\times$ 坝长 $=\frac{1}{2}\times(2+10)\times8\times400=19\,200$（立方米）.

答：加固后坝底增加的宽度 AF 的长为 10 米，完成这项工程需要土石 19 200 立方米.



（第 5 题图）

6. 解：作 $AD\perp BC$ 于点 D，

由题意知：$\angle ABD=60°$，$\angle BAC=75°$，

$\therefore \angle ACD=45°$，$\because AB=10$ m，

$\therefore BD=AB\cdot\cos\angle ABD=10\times\frac{1}{2}=5$（m），

$AD=AB\cdot\sin60°=10\times\frac{\sqrt{3}}{2}=5\sqrt{3}$（m），

在 $\mathrm{Rt}\triangle ADC$ 中，

$\because \angle ACD=45°$，

$\therefore DC=AD=5\sqrt{3}$ m，

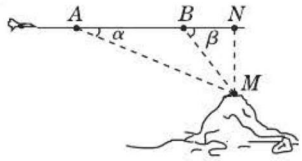
$\therefore BC=BD+DC=5+5\sqrt{3}\approx13.65$（m），

$\because$ 轿车由 C 行驶到 B 处用了 1 s，

$\therefore$ 轿车的速度为 $13.65\times3\,600\div1\,000\approx49.1$ km/h >40 km/h，

$\therefore$ 该轿车超速行驶.

7. 解：（1）如图，测出飞机在 A 处时山顶的俯角 α，测出飞机在 B 处时山顶的俯角 β，测出 A，B 之间的距离为 d.



（第 7 题图）

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

(2)第一步:在 Rt△AMN 中,$\tan\alpha=\frac{MN}{AN}$,

所以 $AN=\frac{MN}{\tan\alpha}$.

第二步:在 Rt△BMN 中,$\tan\beta=\frac{MN}{BN}$,

所以 $BN=\frac{MN}{\tan\beta}$.

因为 $AN=d+BN$,所以 $\frac{MN}{\tan\alpha}=d+\frac{MN}{\tan\beta}$.

解得 $MN=\frac{d\cdot\tan\alpha\cdot\tan\beta}{\tan\beta-\tan\alpha}$.

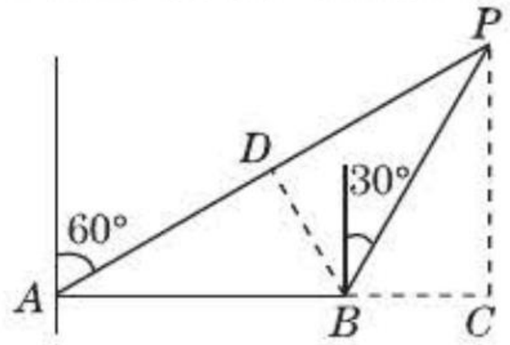
方法规律:解答这类问题运用建模思想,通常是根据题目背景转化成数学知识,建立数学模型,再根据有关知识解答.

Ⅲ. 练基础 · 练方法 · 练技巧

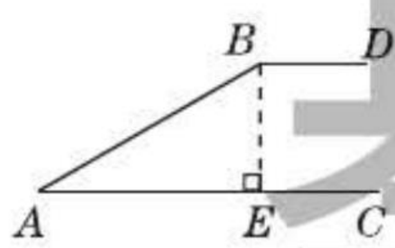
1. B　**点拨**:∵ $\angle CAD+\angle ACD=90°$,$\angle ACD+\angle BCD=90°$,∴ $\angle CAD=\angle BCD$,在Rt△BCD中,∵ $\cos\angle BCD=\frac{CD}{BC}$,∴ $BC=\frac{CD}{\cos\angle BCD}=\frac{h}{\cos\alpha}$,故选 B.

2. B　**点拨**:在 Rt△ABC 中,$AB=\frac{AC}{\sin\alpha}$,在Rt△ACD中,$AD=\frac{AC}{\sin\beta}$,∴ $AB:AD=\frac{AC}{\sin\alpha}:\frac{AC}{\sin\beta}=\frac{\sin\beta}{\sin\alpha}$,故选 B.

3. B　**点拨**:如图,过点 B 作 $BD\perp AP$,垂足为 D,根据题意,得 $\angle BAD=30°$,∴ $BD=\frac{1}{2}AB=15$(海里),易知 $\angle PBD=60°$,则 $\angle DPB=30°$,$BP=15\times2=30$(海里),故选 B.



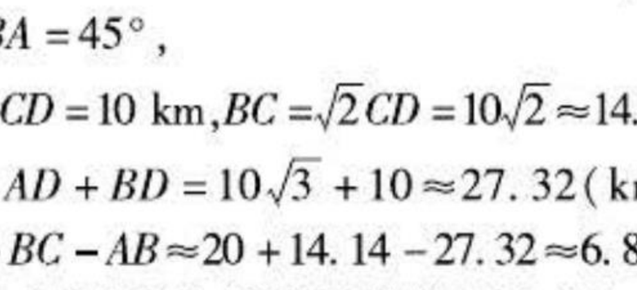
(第3题图)



(第4题图)

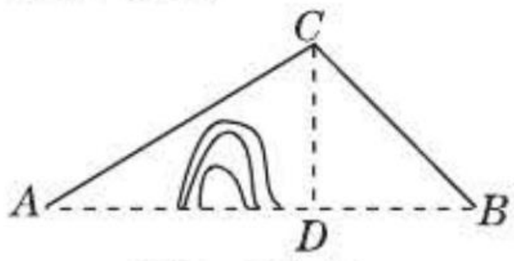
4. 25　**点拨**:如图,过点 B 作 $BE\perp AC$ 于点 E,∵ 坡度 $i=1:\sqrt{3}$,∴ $\tan A=1:\sqrt{3}=\frac{\sqrt{3}}{3}$,∴ $\angle A=30°$,∵ $AB=50$ m,∴ $BE=\frac{1}{2}AB=25$(m).

5. 8　**点拨**:分别过 A、D 作 $AF\perp BC$,$DG\perp BC$,垂足分别为 F、G,如图所示.∵ 在 Rt△ABF 中,$AB=12$ 米,$\angle B=60°$,$\sin B=\frac{AF}{AB}$,∴ $AF=12\times\frac{\sqrt{3}}{2}=6\sqrt{3}$(米),易知 $DG=AF=6\sqrt{3}$ 米.∵ 在 Rt△DGC 中,$CD=12\sqrt{3}$ 米,$DG=6\sqrt{3}$ 米,∴ $GC=\sqrt{CD^2-DG^2}=18$(米).∵ 在 Rt△DEG 中,$\tan E=\frac{3}{13}\sqrt{3}$,∴ $\frac{6\sqrt{3}}{GE}=\frac{3}{13}\sqrt{3}$,∴ $GE=26$ 米,∴ $CE=GE-CG=26-18=8$(米).即 CE 的长为 8 米.



(第5题图)

6. 解:如图,过点 C 作 $CD\perp AB$ 与 D,∵ $AC=20$ km,$\angle CAB=30°$,∴ $CD=\frac{1}{2}AC=\frac{1}{2}\times20=10$(km),



(第6题图)

$AD=\cos\angle CAB\cdot AC=\cos30°\times20=10\sqrt{3}$(km),

∵ $\angle CBA=45°$,

∴ $BD=CD=10$ km,$BC=\sqrt{2}CD=10\sqrt{2}\approx14.14$(km).

∴ $AB=AD+BD=10\sqrt{3}+10\approx27.32$(km).

则 $AC+BC-AB\approx20+14.14-27.32\approx6.8$(km).

答:从 A 地到 B 地的路程将缩短 6.8 km.

7. 解:在 Rt△ABC 中,∵ $AB=600$ m,$\alpha=75°$,

∴ $BC=AB\cdot\cos75°\approx600\times0.26=156$(m),

在 Rt△BDF 中,∵ $\beta=45°$,

∴ $DF=BD\cdot\sin45°=600\times\frac{\sqrt{2}}{2}\approx300\times1.41=423$(m),

由题易知四边形 $BCEF$ 是矩形,

∴ $EF=BC\approx156$(m),

∴ $DE=DF+EF\approx423+156=579$(m).

答:DE 的长为 579 m.

8. 解:(1)在 Rt△CDE 中,$\angle CDE=30°$,$DE=80$ cm,∴ $CD=80\times\cos30°=80\times\frac{\sqrt{3}}{2}=40\sqrt{3}$(cm).

∴ 支架 CD 的长为 $40\sqrt{3}$ cm.

(2)在 Rt△OAC 中,$\angle BAC=30°$,$AC=165$ cm,

∴ $OC=AC\times\tan30°=165\times\frac{\sqrt{3}}{3}=55\sqrt{3}$(cm),

∴ $OD=OC-CD=55\sqrt{3}-40\sqrt{3}=15\sqrt{3}$(cm),

∴ $AB=AO-OB=AO-OD=55\sqrt{3}\times2-15\sqrt{3}=95\sqrt{3}$(cm).∴ 真空热水管 AB 的长为 $95\sqrt{3}$ cm.

9. 解:如图,过点 M 作 $MF\perp PQ$ 于 F,过点 Q 作 $QE\perp MN$ 于 E,易知四边形 $EMFQ$ 是矩形.

在 Rt△QEN 中,设 $EN=x$ 米,则 $EQ=2x$ 米,

∵ $QN^2=EN^2+QE^2$,∴ $20=5x^2$,

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

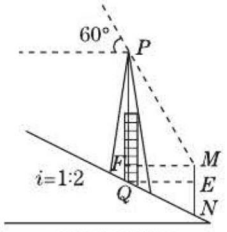
∵ $x>0$，∴ $x=2$，

∴ $EN=2$ 米，$EQ=MF=4$ 米，

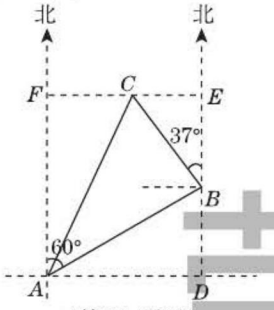
∵ $MN=3$ 米，∴ $FQ=EM=1$ 米，

在 Rt△PFM 中，$PF=FM\cdot\tan60°=4\sqrt{3}$（米），

∴ $PQ=PF+FQ=(4\sqrt{3}+1)$ 米.



（第 9 题图）



（第 10 题图）

10. **解**：作辅助线如图所示：

$BD\perp AD$，$BE\perp CE$，$CF\perp AF$，

由题意知，$\angle FAB=60°$，$\angle CBE=37°$，

∴ $\angle BAD=30°$，

∵ $AB=20$ 海里，∴ $BD=10$ 海里，

在 Rt△ABD 中，$AD=\sqrt{AB^2-BD^2}=10\sqrt{3}\approx17.32$（海里），

在 Rt△BCE 中，$\sin37°=\dfrac{CE}{BC}$，

∴ $CE=BC\cdot\sin37°\approx0.6\times10=6$（海里），

∵ $\cos37°=\dfrac{EB}{BC}$，

∴ $EB=BC\cdot\cos37°\approx0.8\times10=8$（海里），

$EF=AD\approx17.32$（海里），

∴ $FC=EF-CE\approx11.32$（海里），

$AF=ED=EB+BD\approx18$（海里），

在 Rt△AFC 中，

$AC=\sqrt{AF^2+FC^2}\approx\sqrt{18^2+11.32^2}\approx21.26$（海里），

$21.26\div(20\div60)\approx64$（海里/小时）.

答：救援船的航行速度大约是 64 海里/小时.

11. **解**：(1) 在 Rt△EFH 中，∵ $\angle H=90°$，

∴ $\tan\angle EFH=i=1:0.75=\dfrac{4}{3}=\dfrac{EH}{FH}$，

设 $EH=4x$，则 $FH=3x$，

∴ $EF=\sqrt{EH^2+FH^2}=5x$，

∵ $EF=15$，

∴ $5x=15$，∴ $x=3$，

∴ $FH=3x=9$，$EH=4x=12$.

即山坡 EF 的水平宽度 FH 为 9 m.

(2) ∵ $L=CF+FH+EA=CF+9+4=(CF+13)$ m，$H=AB+EH=22.5+12=34.5$（m），$H_1=0.9$ m，

∴ 日照间距系数 $=L:(H-H_1)=\dfrac{CF+13}{34.5-0.9}=\dfrac{CF+13}{33.6}$，

∵ 该楼的日照间距系数不低于 1.25，

∴ $\dfrac{CF+13}{33.6}\geqslant1.25$，

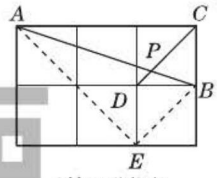
∴ $CF\geqslant29$.

答：要使该楼的日照间距系数不低于1.25，底部 C 距 F 处至少 29 m.

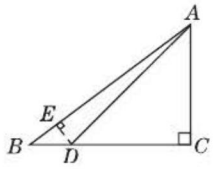
章末整合与拔高

1. A　**点拨**：由勾股定理，得 $AC=\sqrt{AB^2-BC^2}=4$，由正切函数的定义，得 $\tan A=\dfrac{BC}{AC}=\dfrac{3}{4}$，故选 A.

2. 2　**点拨**：如图，在网格中取点 E，连接 AE、BE，显然 $BE/\!/CD$，所以 $\angle ABE=\angle APD$，易知 $\angle AEB=90°$，所以 $\tan\angle ABE=\dfrac{AE}{BE}=2$，所以 $\tan\angle APD=2$.



（第 2 题图）



（第 3 题图）

3. **解**：如图，过点 D 作 $DE\perp AB$ 于点 E，∵ $\angle ADC=45°$，∴ $AC=DC=6$.

又∵ $\sin B=\dfrac{AC}{AB}=\dfrac{3}{5}$，∴ $AB=10$. 根据勾股定理，得 $BC=\sqrt{AB^2-AC^2}=8$，从而 $BD=2$. 在 Rt△BDE 中，∵ $\sin B=\dfrac{DE}{BD}=\dfrac{3}{5}$，

∴ $DE=1.2$.

∴ $BE=\sqrt{BD^2-DE^2}=1.6$，$AE=AB-BE=8.4$.

∴ $\tan\angle BAD=\dfrac{DE}{AE}=\dfrac{1.2}{8.4}=\dfrac{1}{7}$.

4. A

5. (1) **证明**：连接 BD，由 $AD\perp AB$ 可知 BD 必经过点 O.

∵ BF 相切于⊙O，∴ $\angle ABD+\angle ABF=90°$.

∵ $AD\perp AB$，∴ $\angle ABD+\angle ADB=90°$.

∴ $\angle ADB=\angle ABF$.

∵ $\angle ABC=\angle ABF$，∴ $\angle ABC=\angle ADB$.

又 $\angle ACB=\angle ADB$，∴ $\angle ABC=\angle ACB$，∴ $AB=AC$.

(2) **解**：在 Rt△ABD 中，$\angle BAD=90°$.

∵ $\cos\angle ADB=\dfrac{AD}{BD}$，∴ $BD=\dfrac{AD}{\cos\angle ADB}=\dfrac{4}{\cos\angle ABF}=5$.

∴ $AB=3$.

在 Rt△ABE 中，$\angle BAE=90°$，

∵ $\cos\angle ABE=\dfrac{AB}{BE}$，

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

$\therefore BE=\dfrac{AB}{\cos\angle ABE}=\dfrac{3}{\frac{4}{5}}=\dfrac{15}{4}$.

$\therefore AE=\sqrt{\left(\dfrac{15}{4}\right)^2-3^2}=\dfrac{9}{4}$.

$\therefore DE=AD-AE=4-\dfrac{9}{4}=\dfrac{7}{4}$.

6. (1)**证明**:连接 OE.

$\because AC$ 与$\odot O$ 相切于点 E,

$\therefore OE\perp AC$. $\therefore \angle OEA=90°$.

$\because \angle ACB=90°$, $\therefore \angle OEA=\angle ACB$.

$\therefore OE/\!/BC$, $\therefore \angle OED=\angle F$.

$\because OE=OD$, $\therefore \angle ODE=\angle OED$.

$\therefore \angle F=\angle ODE$. $\therefore BD=BF$.

(2)**解**:$\because \cos B=\dfrac{BC}{AB}=\dfrac{3}{5}$,

$\therefore$ 设 $BC=3x$,则 $AB=5x$.

又 $CF=1$, $\therefore BF=3x+1$.

由(1)知 $BD=BF$, $\therefore BD=3x+1$,

$OE=\dfrac{3x+1}{2}$, $AO=5x-\dfrac{3x+1}{2}=\dfrac{7x-1}{2}$,

$\because OE/\!/BF$, $\therefore \angle AOE=\angle B$.

$\therefore \cos B=\cos\angle AOE=\dfrac{OE}{OA}=\dfrac{3}{5}$.

即$\dfrac{\frac{3x+1}{2}}{\frac{7x-1}{2}}=\dfrac{3}{5}$,解得 $x=\dfrac{4}{3}$.

$\therefore \odot O$ 的半径为$\dfrac{3x+1}{2}=\dfrac{5}{2}$.

7. **解**:(1)60

(2)如图,作 $AD\perp BC$ 于 D,

在 $\mathrm{Rt}\triangle ABD$ 中,易得 $\angle ABD=45°$, $AB=60$ 海里,

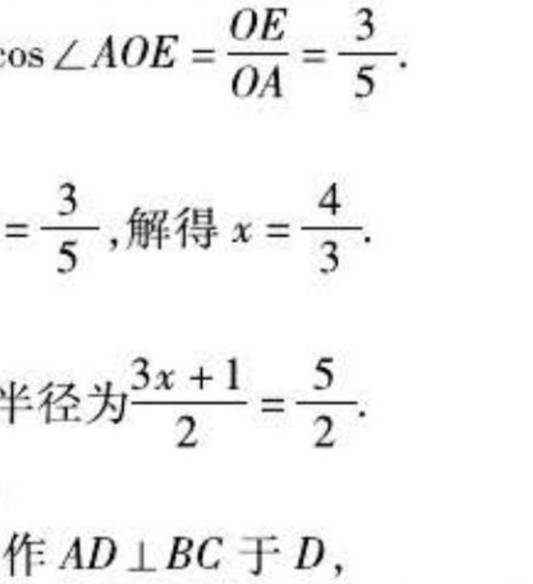
$\therefore AD=BD=30\sqrt{2}$ 海里.

在 $\mathrm{Rt}\triangle ACD$ 中,$\because \angle C=60°$, $AD=30\sqrt{2}$ 海里,

$\tan C=\dfrac{AD}{CD}$, $\therefore CD=\dfrac{30\sqrt{2}}{\sqrt{3}}=10\sqrt{6}$(海里),

$\therefore BC=BD+CD=(30\sqrt{2}+10\sqrt{6})$ 海里.

答:此时刻船与 B 港口之间的距离 CB 的长为 $(30\sqrt{2}+10\sqrt{6})$ 海里.



(第7题图)

8. **解**:分两种情况:

①如图(1)所示,当点 C 在线段 BD 上时,过 B 作 $BF\perp AD$ 于 F,过 D 作 $DE\perp AD$ 交 AC 的延长线于 E,则 $BF/\!/DE$.

$\mathrm{Rt}\triangle ADE$ 中,$\cos\angle CAD=\dfrac{AD}{AE}=\dfrac{5}{6}$,

即$\dfrac{6}{AE}=\dfrac{5}{6}$, $\therefore AE=\dfrac{36}{5}$,

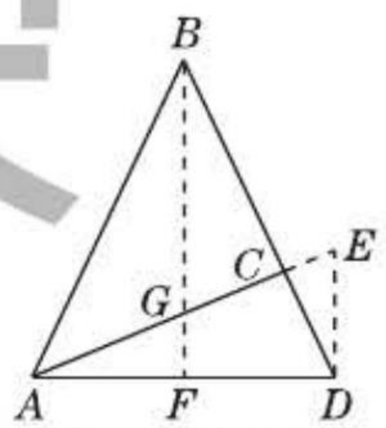
$\because BD=3CD$, $DE/\!/BF$, $\therefore \dfrac{CE}{CG}=\dfrac{CD}{CB}=\dfrac{1}{2}$,

设 $CE=x$,则 $CG=2x$, $GE=3x$,

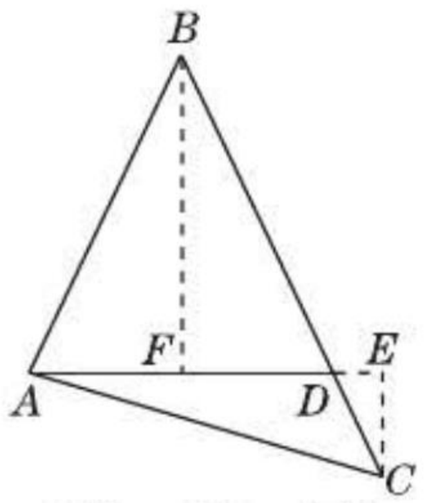
$\because AB=BD$, $BF\perp AD$, $\therefore AF=FD$,

$\therefore AG=GE=3x$, $\therefore AE=6x$, $AC=5x$,

$\therefore AC=\dfrac{5}{6}AE=\dfrac{5}{6}\times\dfrac{36}{5}=6$;



[第8题(1)图]



[第8题(2)图]

②如图(2)所示,当 C 在 BD 的延长线上时,过 B 作 $BF\perp AD$ 于 F,过 C 作 $CE\perp AD$ 交 AD 的延长线于 E,则 $BF/\!/CE$.

$\because AB=BD$, $BF\perp AD$, $\therefore AF=FD=\dfrac{1}{2}AD=3$,

$\because CE/\!/BF$, $BD=3CD$, $\therefore \dfrac{DE}{DF}=\dfrac{DC}{DB}=\dfrac{1}{3}$,

$\therefore \dfrac{DE}{3}=\dfrac{1}{3}$,即 $DE=1$, $\therefore AE=6+1=7$,

$\because \mathrm{Rt}\triangle ACE$ 中,$\cos\angle CAD=\dfrac{5}{6}$,

$\therefore \dfrac{AE}{AC}=\dfrac{5}{6}$,即$\dfrac{7}{AC}=\dfrac{5}{6}$,

$\therefore AC=\dfrac{42}{5}$.

综上所述,AC 的长为 6 或$\dfrac{42}{5}$.

9. **解**:如图,过点 P 作 $PC\perp AB$,交 AB 的延长线于 C,易知 $\angle APC=60°$, $\angle BPC=45°$, $AB=20$ 海里,

设 $BC=x$ 海里,则 $AC=AB+BC=(20+x)$ 海里.

在 $\mathrm{Rt}\triangle PBC$ 中,$\because \angle BPC=45°$,

$\therefore \triangle PBC$ 为等腰直角三角形,

$\therefore PC=BC=x$ 海里,

在 $\mathrm{Rt}\triangle APC$ 中,$\because \tan\angle APC=\dfrac{AC}{PC}$,

$\therefore AC=PC\cdot\tan 60°=\sqrt{3}x$ 海里,

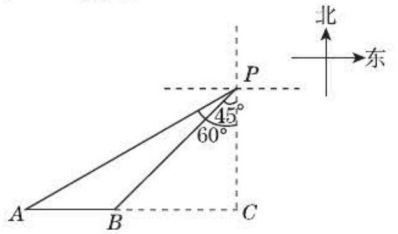
$\therefore \sqrt{3}x=20+x$,

解得 $x=10\sqrt{3}+10$,

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

$\therefore PC=(10\sqrt{3}+10)$海里.

答:轮船航行途中与灯塔 P 的最短距离是 $(10\sqrt{3}+10)$海里.



(第9题图)

第8章 统计和概率的简单应用

8.1 中学生的视力情况调查

Ⅰ. 举一反三训练

1. D **点拨**:A、对乘坐飞机的乘客进行安检是事关重大的调查,适合普查,故 A 不符合题意;B、学校招聘教师,对应聘人员进行面试是事关重大的调查,适合普查,故 B 不符合题意;C、对"天宫二号"零部件的检查是事关重大的调查,适合普查,故 C 不符合题意;D、对端午节期间市面上粽子质量情况的调查具有破坏性,适合抽样调查,故 D 符合题意. 故选 D.

2. C

3. B **点拨**:A、在某中学抽取 200 名女生,抽样具有局限性,不合题意;B、在安顺市中学生中抽取 200 名学生,具有代表性,符合题意;C、在某中学抽取 200 名学生,抽样具有局限性,不合题意;D、在安顺市中学生中抽取 200 名男生,抽样具有局限性,不合题意;故选 B.

Ⅱ. 举一反三训练

4. **解**:(1) $\bar{x}=\frac{1}{40}\times(76+81+\cdots+71)=76.65$(分), $s^2=\frac{1}{40}\times[(76-76.65)^2+(81-76.65)^2+\cdots+(71-76.65)^2]\approx113.48$.

(2)随机抽取得到容量为 15 的样本,如 76,64,86,87,89,81,75,68,88,91,68,79,54,58,85,它的平均数 $\bar{x}_1=76.6$(分),方差 ${s_1}^2\approx129.97$.

同样抽取容量为 30 的样本,如 95,70,76,61,79,72,77,78,81,99,83,82,57,64,58,81,68,92,73,75,76,72,76,84,65,88,91,89,68,71. 它的平均数 $\bar{x}_2=76.7$(分),方差 $s_2^2=109.61$. 它们的结果基本一致,与总体的结果也基本一致.

点拨:1. 用简单随机抽样的方法抽取样本时,要使每个个体被抽到的可能性相同,即抽样过程要有随机性;2. 当总体容量较小时,适用抽签法进行简单随机抽样;当总体容量较大时,可用计算器(或计算机)产生随机数的方法进行简单随机抽样.

5. **解**:(1)他们的抽样都不合理;

理由如下:因为如果 1 000 名初中学生全部在眼镜店抽取,那么该市每个学生被抽到的机会不相等,所以样本不具有代表性;

如果只抽取 20 名初中学生,那么样本的容量过小,所以样本不具有广泛性.

(2)根据题意得:

$\frac{1\,000\times49\%+1\,000\times63\%+1\,000\times68\%}{1\,000+1\,000+1\,000}\times120\,000=72\,000$(名),

所以估计该市 120 000 名初中学生视力不良的人数是72 000 名.

点拨:(1)根据学生全部在眼镜店抽取,样本不具有代表性,只抽取 20 名初中学生,样本的容量过小,得出答案;(2)用120 000乘初中学生视力不良的人数所占的百分比,即可得出答案.

6. **解**:$\because \bar{x}_{小军}=\frac{1}{9}\times(1.41+1.42+1.42+1.43+1.43+1.43+1.44+1.44+1.45)=1.43$(m),

$s^2_{小军}=\frac{1}{9}\times[(1.41-1.43)^2+(1.42-1.43)^2+(1.42-1.43)^2+(1.43-1.43)^2+(1.43-1.43)^2+(1.43-1.43)^2+(1.44-1.43)^2+(1.44-1.43)^2+(1.45-1.43)^2]\approx0.000\,13$,

$\bar{x}_{小明}=\frac{1}{9}\times(1.38+1.38+1.39+1.41+1.43+1.45+1.47+1.48+1.48)=1.43$(m),

$s^2_{小明}=\frac{1}{9}\times[(1.38-1.43)^2+(1.38-1.43)^2+(1.39-1.43)^2+(1.41-1.43)^2+(1.43-1.43)^2+(1.45-1.43)^2+(1.47-1.43)^2+(1.48-1.43)^2+(1.48-1.43)^2]\approx0.001\,56$,

$\therefore \bar{x}_{小军}=\bar{x}_{小明}$, $s^2_{小军}<s^2_{小明}$,即小军的成绩稳定,

$\therefore$ 选小军更合适.

Ⅲ. 练基础·练方法·练技巧

1. D **2.** C **3.** D

4. 简单随机抽样

5. 216 **点拨**:由统计图可知坐公交车到校的学生有 15 人,占 50 人的百分比是 $15\div50=30\%$,而 $720\times30\%=216$(人),所以可以估计全校坐公交车到校的学生有 216 人.

6. 360 **点拨**:$1-15\%-45\%-10\%=30\%$, $1\,200\times30\%=360$(名),所以如果该校有1 200名学生,那么喜爱跳绳的学生约有 360 名.

7. **解**:(1)观察统计图知:每周学习数学泰微课 6 ~ 10 个的有 6 人,占总人数的 10%,

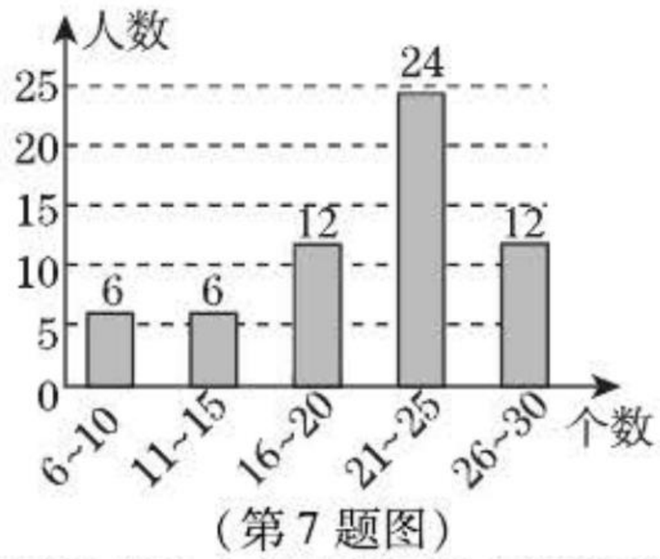
$\therefore$ 抽取学生的总人数为 $6\div10\%=60$(人),

$\therefore$ 每周学习泰微课 16 ~ 20 个的有 $60-6-6-24-12=12$(人),

$\therefore$ 补全条形统计图如图所示:

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

每周学习数学泰微课人数的条形统计图



(第7题图)

(2)该校全体学生中每周学习数学泰微课在16至30个之间的有 $1\,200\times\frac{12+12+24}{60}=960$(人).

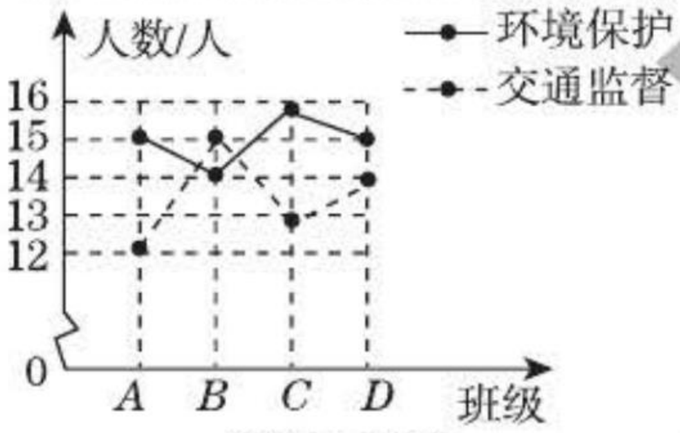
8. **解**:(1)选择交通监督的人数是:12 + 15 + 13 + 14 = 54(人),选择交通监督的人数所占的百分比是:$\frac{54}{200}\times100\%=27\%$,

扇形统计图中交通监督所在扇形的圆心角度数是:$360°\times27\%=97.2°$;

(2)D 班选择环境保护的学生人数是:$200\times30\%-15-14-16=15$(人).

补全折线统计图如图所示;

各班选择交通监督和环境保护志愿者队伍的学生人数折线统计图



(第8题图)

(3)$2\,500\times(1-30\%-27\%-5\%)=950$(人),

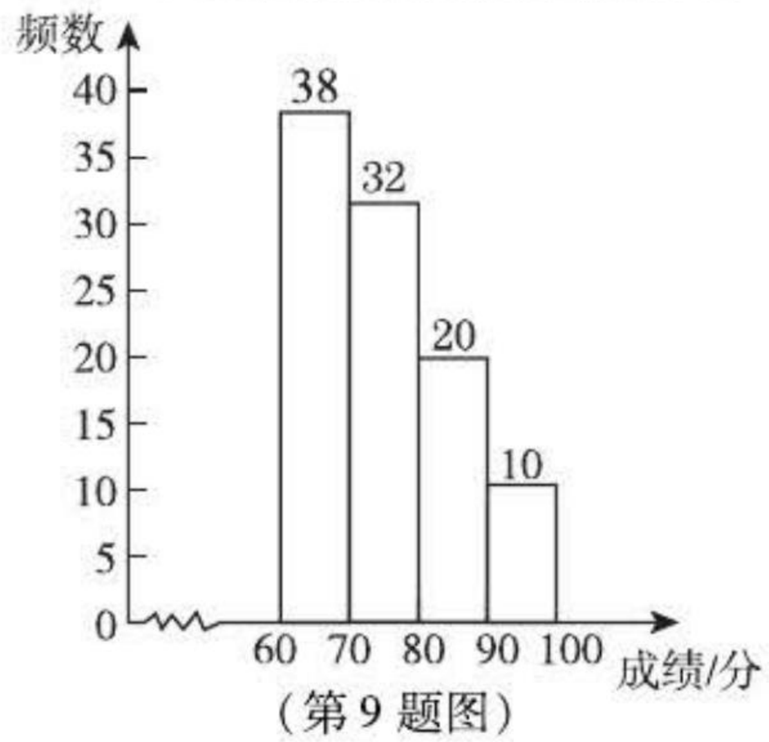
估计该校选择文明宣传的学生人数是950人.

9. **解**:(1)0.2

(2)$10\div0.1=100$(篇),$100\times0.32=32$(篇),$100\times0.2=20$(篇),

补全征文比赛成绩频数分布直方图如图:

征文比赛成绩频数分布直方图



(第9题图)

(3)全市获得一等奖征文的篇数为:$1\,000\times(0.2+0.1)=300$(篇).

10. **解**:(1)完成表格如下:

	优等品数量/个	平均数	方差
A	16	4.990	0.103
B	10	4.975	0.093

(2)从优等品数量的角度看,因为 A 种技术种植的西瓜优等品数量较多,所以 A 种技术较好;从平均数的角度看,因为 A 种技术种植的西瓜质量的平均数更接近5 kg,所以 A 种技术较好;从方差的角度看,因为 B 种技术种植的西瓜质量的方差更小,所以 B 种技术种植的西瓜质量更为稳定,所以 B 种技术较好. 从市场销售的角度看,因为优等品更畅销,A 种技术种植的西瓜优等品数量更多,且平均质量更接近5 kg,所以推广 A 种种植技术较好.

8.2 货比三家

Ⅰ. 举一反三训练

1. C **点拨**:理解“最畅销”的含义.

2. **解**:(1)赵红说的对,因为其他品牌的冰箱占47%,这里面可能有比 A 品牌冰箱更畅销的冰箱.

(2)$94\div47\%=200$(台),$200\times20\%=40$(台),$200\times15\%=30$(台),$200\times18\%=36$(台).

答:A 品牌冰箱销售了40台,B 品牌冰箱销售了30台,C 品牌冰箱销售了36台.

3. **解**:这显然是一则虚假广告. 目前世界上还没有一种药品对各种癌症都有效,更谈不上完全治愈,因此该广告无限夸大了该药品的疗效,所以不可信.

4. **错误答案**:乙

错解分析:人们习惯于从条形“柱”的高度看相应的增长比例,直观看,乙统计图给人的感觉是好像今年比去年增长一倍,而实际上不是这样的,因为去年的产量是1 000件,今年的产量是1 500件,只增加500件,比去年增加50%,所以甲统计图能较准确地反映产量的增长情况.

正确答案:甲

点拨:条形统计图的特点是能够清楚地表示出每个统计量的具体数量. 因此在绘制的过程中需要很清楚地标明各个统计量的大小. 但若纵轴的数值没有从0开始,则不能直观、清楚地反映统计量之间的关系.

Ⅱ. 举一反三训练

5. D **点拨**:观察折线统计图,折线由低到高,说明每季度的产值逐渐增加;从第三季度到第四季度的折线较陡,说明第四季度的产值增长最快,故选D.

6. **解**:(1)甲班成绩从小到大排列为(单位:个):

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

89、96、97、100、118，

∴ 甲班5名学生比赛成绩的中位数是97个.

乙班成绩从小到大排列为(单位：个)：91、95、100、104、110，

∴ 乙班5名学生比赛成绩的中位数是100个.

(2)∵ $\bar{x}_{甲}=\frac{500}{5}=100$(个)，

∴ $s^2_{甲}=\frac{1}{5}\times[(89-100)^2+(100-100)^2+(96-100)^2+(118-100)^2+(97-100)^2]=94$.

∵ $\bar{x}_{乙}=\frac{500}{5}=100$(个)，

∴ $s^2_{乙}=\frac{1}{5}\times[(100-100)^2+(95-100)^2+(110-100)^2+(91-100)^2+(104-100)^2]=44.4$.

∴ $s^2_{甲}>s^2_{乙}$，∴ 乙班比赛数据的方差小.

(3)应该把冠军奖状发给乙班.

∵ 乙班5名学生的比赛成绩的优秀率比甲班高，中位数比甲班大，方差比甲班小，

∴ 综合以上各种情况，乙班踢毽子的水平较高.

Ⅲ. 练基础·练方法·练技巧

1. B　**点拨**：广告的目的是希望有人购买其产品，其中不免有夸张的宣传，但至少给我们提供一定的参考.

2. C　**点拨**：因为得4分的有12人，占30%，所以样本容量为40，所以得3分的有17人，得2分的有8人，平均成绩为$\frac{1\times3+2\times8+3\times17+4\times12}{40}=2.95$(分)，故选C.

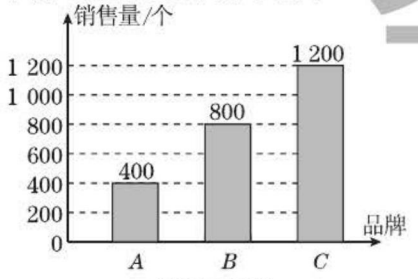
3. 不可信

4. 不正确

5. 小张的说法不对，因为纵轴上数据的差距不是很大

6. **解**：(1)C品牌粽子的销售量最大.

(2)当天销售粽子总量为1 200÷50%=2 400(个). B品牌粽子销售了2 400−1 200−400=800(个). 补全条形统计图如图所示.



(第6题图)

(3)所求圆心角的度数是$\frac{400}{2\,400}\times360°=60°$.

(4)明年端午节进货时，可少进A品牌的粽子，多进C品牌的粽子.(答案不唯一)

7. **解**：(1)

	平均数/台	方差
甲品牌销售量	10	$\frac{13}{3}$
乙品牌销售量	10	$\frac{4}{3}$

(2)建议如下：从折线图来看，甲品牌冰箱的月销售量呈上升趋势，进货时可多进甲品牌冰箱.

点拨：从统计图中得到信息，并对比分析.

8. **解**：各处1平方米的房价分别是：A处约0.244万元；B处约0.197万元；C处约0.201万元；D处约0.190万元，结合小强到学校的路程，小强家应选D处住房.

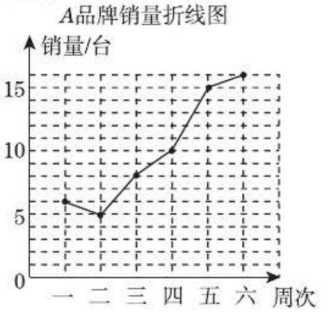
9. **解**：(1)

	平均数/件	中位数/件	众数/件	方差
甲	7	7	7	3
乙	8	8	9	1.5

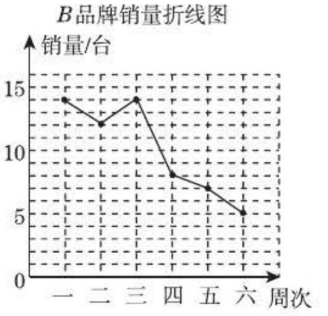
(2)由于乙的平均数、中位数和众数都比甲大，而方差较小，因此乙的营销业绩好些.

10. **解**：(1)90

(2)补全A品牌销量折线图如图(1)所示，画出B品牌销量折线图如图(2)所示.



(1)



(2)

(第10题图)

(3)A品牌太阳能热水器周销量的中位数为：(8+10)÷2=9(台)，B品牌太阳能热水器周销量的中位数为：(8+12)÷2=10(台).

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

(4)A 品牌销量折线图整体呈上升趋势,而 B 品牌销量折线图从第三周以后一直呈下降趋势,所以经销商应选择代理 A 品牌的太阳能热水器.

8.3 统计分析帮你做预测

Ⅰ. 举一反三训练

1. 解:设飞机着舰过程的变化速度 y 与飞机着舰所用的时间 x 之间的函数关系式为 $y=kx+b$,由题意,得

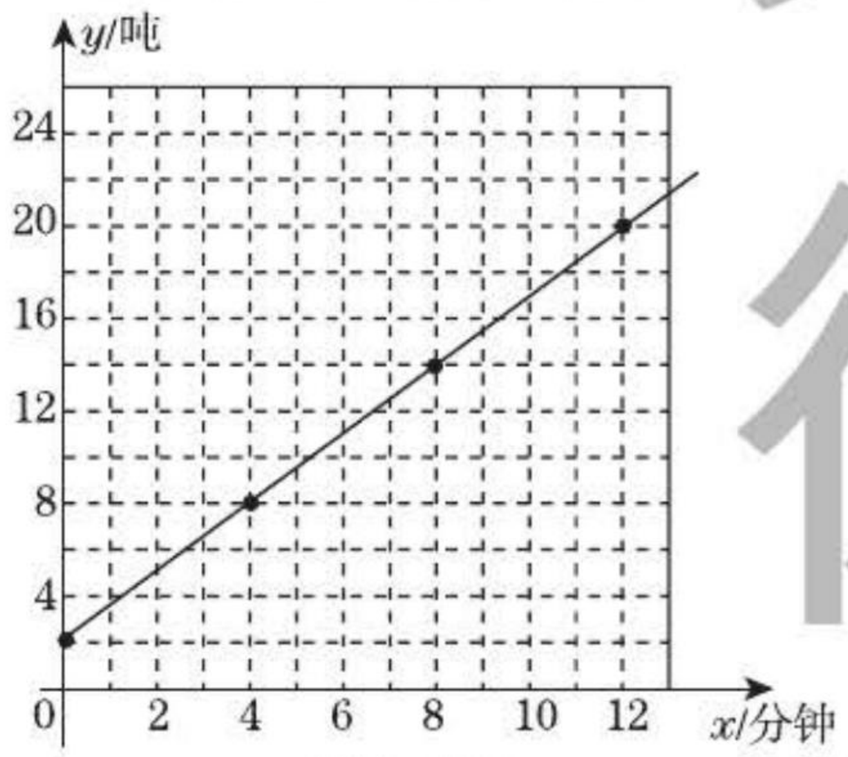
$\begin{cases}30=2k+b,\\0=3k+b,\end{cases}$ 解得:$\begin{cases}k=-30,\\b=90.\end{cases}$

所以一次函数的关系式为:$y=-30x+90$.

当 $x=0$ 时,$y=90$.

所以飞机着舰时的瞬间速度为 90 米/秒.

2. 解:(1)如图,在平面直角坐标系中描出点(0,2),(4,8),(8,14),(12,20)并连线.



(第 2 题图)

(2)由(1)观察得,可设这些点在函数 $y=kx+b$ 的图像上,由点(0,2)和(4,8)的坐标求得函数表达式为 $y=\frac{3}{2}x+2$,将点(8,14)和(12,20)的坐标代入函数表达式验证可以得出这些点都在 $y=\frac{3}{2}x+2$ 的图像上.

(3)不正确,因为当 $y=30$ 时,$x=\frac{56}{3}>18$,

故小明的说法错误.

Ⅱ. 举一反三训练

3. 解:(1)①当 $x=5$ 时,$y=45$,$\therefore k=xy=45\times5=225$.

②把 $y=72$ 代入 $y=\frac{225}{x}$,解得 $x=3.125$;

把 $y=72$ 代入 $y=-200x^2+400x$ 得,$x=0.2$ 或 $x=1.8$(大于 1.5 舍去),

$\because 3.125-0.2=2.925$(小时),

$\therefore$ 喝酒后血液中的酒精含量不低于 72 毫克/百毫升的时间持续了 2.925 小时.

(2)不能驾车去上班,理由如下:

$\because$ 晚上 20:00 到第二天早上 7:00,一共有 11 小时,

$\therefore$ 将 $x=11$ 代入 $y=\frac{225}{x}$,则 $y=\frac{225}{11}>20$,

$\therefore$ 第二天早上 7:00 不能驾车去上班.

4. 解:(1)设 y 与 x 之间的函数关系式为 $y=ax^2+bx+c$,

因为图像过点(0,1)、(1,2.7)、(2,4.2),

所以有 $\begin{cases}c=1,\\2.7=a+b+c,\\4.2=4a+2b+c,\end{cases}$

解得 $a=-0.1$,$b=1.8$,$c=1$.

所以 $y=-0.1x^2+1.8x+1(x\geqslant0)$.

(2)$s=230y-180y-x=50y-x$

$=50(-0.1x^2+1.8x+1)-x$

$=-5x^2+89x+50(x\geqslant0)$.

(3)根据 $s=-5x^2+89x+50(x\geqslant0)$ 可得:

其图像的对称轴为直线 $x=8.9$,因为 $-5<0$,

所以根据函数性质,$0<x<8.9$ 时,公司获得的年利润 s 随广告费 x 的增多而增多.

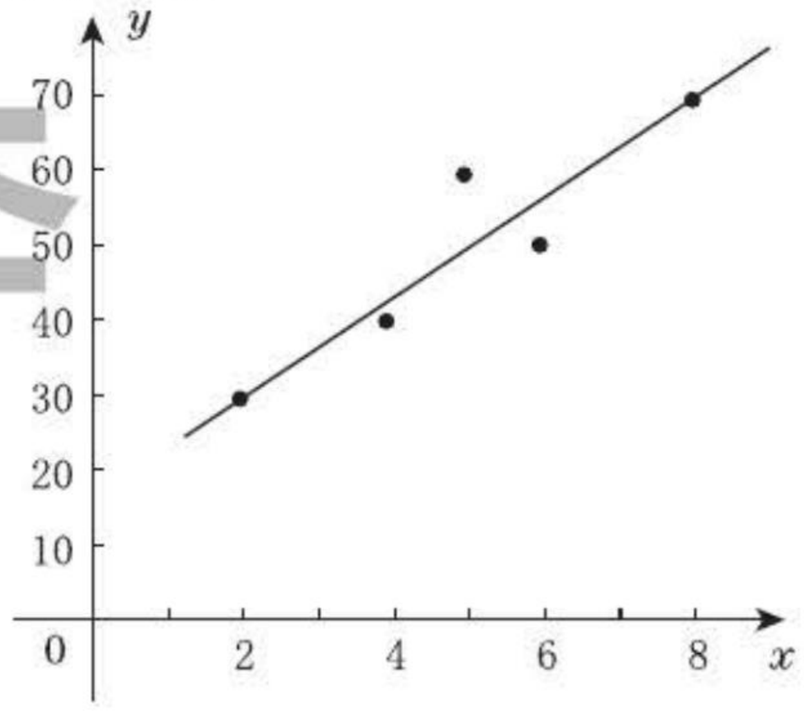
Ⅲ. 练基础 · 练方法 · 练技巧

1. C **点拨**:先计算 b 的值,再代入求值.

2. D **点拨**:首先要弄清横、纵坐标轴所代表的实际意义,然后再根据变化趋势分析.

3. B **点拨**:由题意,知 k 为预测期内年增长率,如果在某一时期有 $-1<k<0$,即年增长率为负,故这期间人口数呈下降趋势,故选 B.

4. 解:(1)如图.



(第 4 题图)

(2)从图中可以看出,这些点大致分布在一条直线附近,在图中选择其中的两个点,过这两点作一条直线(如图),设这条直线上的点的坐标满足的表达式为 $y=kx+b$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

将(2,30),(8,70)代入,得$\begin{cases}2k+b=30,\\8k+b=70,\end{cases}$解得

$\begin{cases}k=\frac{20}{3},\\b=\frac{50}{3}.\end{cases}$即$y=\frac{20}{3}x+\frac{50}{3}$.

(3)当$x=7$时,$y=\frac{20}{3}\times7+\frac{50}{3}=\frac{190}{3}\approx63.3$.

答:当广告费支出为7百万元时,这种产品的销售额约为63.3百万元.

5. 解:(1)设y与x的函数表达式为$y=kx+b(k\neq0)$,

∵$x=0$时,$y=299$,$x=2\ 000$时,$y=235$,

∴$\begin{cases}b=299,\\2\ 000k+b=235,\end{cases}$解得$\begin{cases}k=-0.032,\\b=299.\end{cases}$

∴$y=-0.032x+299$;

(2)当$x=1\ 400$时,

$y=-0.032x+299=-0.032\times1\ 400+299=254.2$.

答:该山山顶处的空气含氧量约为254.2克/立方米.

6. 解:(1)分情况讨论:

①当$0\leqslant x\leqslant3$时,

设线段AB对应的函数表达式为$y=kx+b$;

把$A(0,10)$,$B(3,4)$的坐标分别代入得

$\begin{cases}b=10,\\3k+b=4,\end{cases}$解得:$\begin{cases}k=-2,\\b=10.\end{cases}$

∴$y=-2x+10$.

②当$x>3$时,设$y=\frac{m}{x}$,

把(3,4)代入得:$m=3\times4=12$,

∴$y=\frac{12}{x}$.

综上所述:当$0\leqslant x\leqslant3$时,$y=-2x+10$;当$x>3$时,$y=\frac{12}{x}$.

(2)能. 理由如下:

令$y=\frac{12}{x}=1$,则$x=12$,

$12<15$,

故能在15天以内不超过最高允许的1.0 mg/L.

7. 解:(1)依题意有:$a(1+25\%)=250$,解得:$a=200$.

(2)根据图像得到三个点(0,1),(2,1.36),(4,1.64).

设y与x之间的函数关系式为:$y=ax^2+bx+c$.

用待定系数法有:

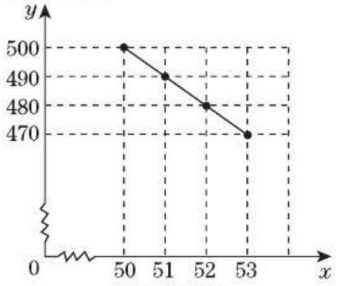
$\begin{cases}c=1,\\4a+2b+c=1.36,\\16a+4b+c=1.64,\end{cases}$解得:$\begin{cases}a=-\frac{1}{100},\\b=\frac{1}{5},\\c=1.\end{cases}$

∴$y=-\frac{1}{100}x^2+\frac{1}{5}x+1$.

(3)$S=10y\times(250-200)-x=-5x^2+99x+500$,

∵$-5<0$,其图像的对称轴为直线$x=-\frac{b}{2a}=-\frac{99}{2\times(-5)}=9.9$,∴当$0<x<9.9$时,$S$随着$x$的增大而增大.

8. 解:(1)如图所示,



(第8题图)

猜想:y是x的一次函数.

设$y=kx+b(k\neq0)$,

则$\begin{cases}50k+b=500,\\51k+b=490,\end{cases}$解得$\begin{cases}k=-10,\\b=1\ 000,\end{cases}$

∴$y=-10x+1\ 000$.

经检验表格中的其余数据均满足上述关系式,

故所求的函数关系式为$y=-10x+1\ 000$.

(2)①$W=(x-40)y-120=(x-40)(-10x+1\ 000)-120$,即$W=-10x^2+1\ 400x-40\ 120$.

②由①知,$W=-10x^2+1\ 400x-40\ 120=-10(x-70)^2+8\ 880$,

∵$-10<0$,∴抛物线开口向下.

∴在对称轴的左侧W随x的增大而增大,∵$40\leqslant x\leqslant65$,

∴当$x=65$时,W有最大值,即$W_{最大}=8\ 630$.

答:当售价为65元/件时,能获得最大利润,最大利润是8 630万元.

8.4 抽签方法合理吗

Ⅰ. 举一反三训练

1. 解:不同意. 理由:先抽的人和后抽的人抽到画记号的纸条的概率都是$\frac{1}{3}$,因此这种说法不对.

2. 错解:这个游戏设计得不合理.

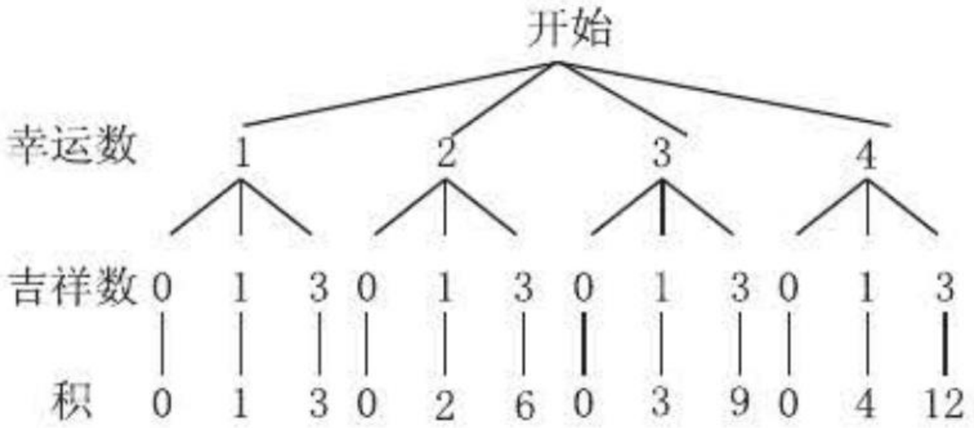
错解分析:错误地根据两个筹码中"×"和"□"的数量来确定游戏设计得是否合理.

正确解法:合理.

Ⅱ. 举一反三训练

3. 解:(1)画树状图如图:

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料



(第3题图)

或列表如下:

幸运数 / 积 / 吉祥数	1	2	3	4
0	0	0	0	0
1	1	2	3	4
3	3	6	9	12

由图(表)知,所有等可能的结果有12种,其中积为0的有4种,所以积为0的概率为$\frac{4}{12}=\frac{1}{3}$.

(2)不公平. 因为由图(表)知,积为奇数的有4种,积为偶数的有8种. 所以,积为奇数的概率为$\frac{4}{12}=\frac{1}{3}$,积为偶数的概率为$\frac{8}{12}=\frac{2}{3}$,因为$\frac{1}{3}\neq\frac{2}{3}$,所以,该游戏规则不公平.

修改游戏规则的方法不唯一. 如可修改为:若这两个数的积为0,则小亮赢;若积为奇数,则小红赢.

4. 解:(1)三辆车按开来的先后顺序为:上、中、下;上、下、中;中、上、下;中、下、上;下、中、上;下、上、中. 共有6种可能.

(2)乙乘坐上等车的可能性大. 因为三辆车按开来的先后顺序共有6种,且每种顺序出现的可能性相同,所以甲、乙乘车所有可能的情况如下表:

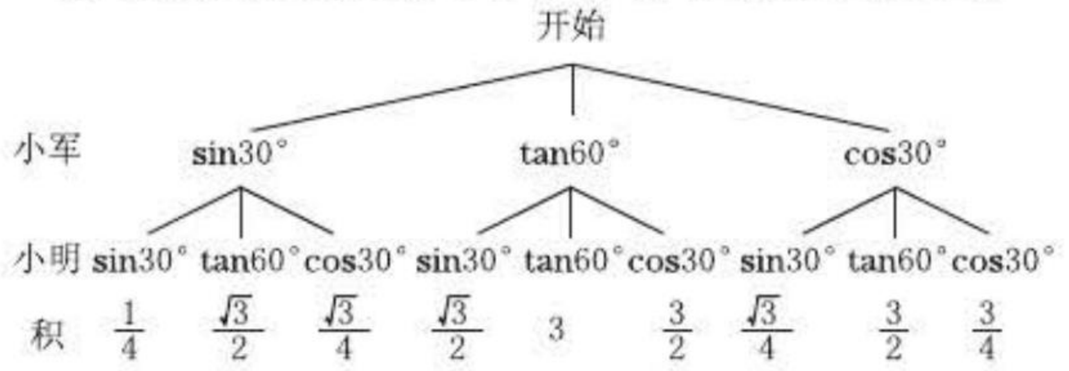
顺序	甲	乙
上、中、下	上	下
上、下、中	上	中
中、上、下	中	上
中、下、上	中	上
下、中、上	下	中
下、上、中	下	上

由表格可知:甲乘坐上等车的概率是$\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$,乙乘坐上等车的概率是$\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$.

所以乙乘坐上等车的可能性大.

5. 解:(1)$\frac{1}{3}$

(2)这个游戏规则对小军有利. 画树状图如图:



(第5题图)

由图可知共有9种等可能的结果,两人抽取的卡片上两数之积是有理数的有5种,

$\therefore P(\text{小军获胜})=\frac{5}{9}$,$P(\text{小明获胜})=\frac{4}{9}$,

$\because \frac{5}{9}>\frac{4}{9}$,

$\therefore$ 这个游戏规则对小军有利.

点拨:(2)题首先根据题意画出树状图,由树状图求得所有等可能的结果数与两人抽取的卡片上两数之积是有理数的结果数,然后利用概率公式即可求得小军获胜与小明获胜的概率,通过比较得出这个游戏规则对谁有利.

Ⅲ. 练基础·练方法·练技巧

1. C **点拨**:掷的点数和为偶数的概率是$\frac{1}{2}$,点数和为奇数的概率是$\frac{1}{2}$,所以规则对两人是公平的,故选C.

2. 甲 **点拨**:两骰子上的数之和是7的有$3+4=7$;$4+3=7$,$2+5=7$;$5+2=7$,$1+6=7$;$6+1=7$,共6种情况,和为8的有$2+6=8$;$6+2=8$,$3+5=8$;$5+3=8$;$4+4=8$,共5种情况,甲赢的概率大.

3. 解:这种方法不公平. 理由:我们可以把摸出白球、红球的情况用表格统计如下:

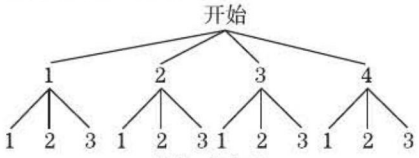
和 / 白球 \ 红球	1	2	3
1	2	3	4
2	3	4	5
3	4	5	6

从表格中可以发现:九(2)班被选中的概率为$\frac{1}{9}$;九(3)班被选中的概率为$\frac{2}{9}$;九(4)班被选中的概率为$\frac{1}{3}$;九(5)班被选中的概率为$\frac{2}{9}$;九

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

(6)班被选中的概率为$\frac{1}{9}$. 显然九(4)班被选中的概率最大,因此这种方法不公平.

4. 解:(1)画树状图如图:



(第4题图)

共有12种等可能的结果,其中摸出的球上的数字之和小于6的情况有9种,

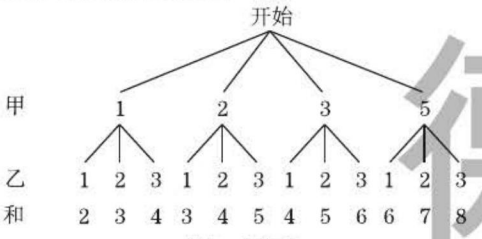
所以P(小王去)$=\frac{3}{4}$;

(2)认同,理由如下:

∵ P(小王去)$=\frac{3}{4}$,P(小李去)$=\frac{1}{4}$,$\frac{3}{4}\neq\frac{1}{4}$,

∴ 这种规则不公平.

5. 解:(1)画树状图如图:



(第5题图)

由图可知,一共有12种等可能的结果,两球编号之和为奇数的有5种结果,所以P(甲胜)$=\frac{5}{12}$.

(2)易知P(乙胜)$=\frac{7}{12}$,所以P(甲胜)$\neq P$(乙胜),所以这个游戏规则对甲、乙双方不公平.

将红盒子中编号为5的红球,改为编号是4的红球即可.

点拨:改动红盒子中的一个球的编号方法不唯一,将其中一个奇数改为偶数即可.

6. B **点拨**:根据题意得:$\frac{2x}{20}=\frac{20-x-2x}{20}$,即$2x=20-x-2x$,解得:$x=4$.

7. D **点拨**:小明一次从袋中摸出两个球,摸出两个球都是黄色的可能性是$\frac{1}{3}$;

小刚左手从袋中摸出一个球,然后右手再摸出一个球,两个球都是黄色的可能性为$\frac{1}{3}$;

小华先从袋中摸出一个球看一下颜色,又放回袋中,再从袋中摸出一个球,两个球都是黄色的可能性为$\frac{4}{9}>\frac{1}{3}$.

所以小华获胜的可能性大.

故选D.

8. 解:(1)∵ 转盘被等分成20个扇形,红色、黄色、绿色区域一共有7个,

∴ 游戏者转动一次转盘获奖的概率是$\frac{7}{20}$.

(2)由题意可知转动一次转盘获得10元,2元,1元钱的概率分别为:$\frac{1}{20}$,$\frac{1}{10}$,$\frac{1}{5}$,

∴ 转动50次转盘一共获得:$50\times\left(\frac{1}{20}\times10+\frac{1}{10}\times2+\frac{1}{5}\times1\right)+20=65$(元)$<100$元.

点拨:根据题意得出获得10元、2元、1元钱的概率是解决问题的关键.

9. 解:(1)是20的倍数或能整除20的数有7个,则所求概率为$\frac{7}{50}$.

(2)不公平,无论k取何值,都能被1整除,则序号为1的学生被抽中的概率为1,即100%,而很明显抽到其他学生的概率不为100%,所以不公平.

(3)先抽出一张卡片,记下数,然后放回. 若下一次抽到的数与之前抽到过的重复,则不记数,放回,重新抽取. 不断重复,直至抽满10个不同的数为止.

点拨:对于游戏是否公平的判断,只需比较所发生的概率大小是否相等即可. (3)题答案不唯一,合理即可.

8.5 概率帮你做估计

Ⅰ. 举一反三训练

1. 15 **点拨**:根据题意可估计摸到红色、黄色球的概率为10%和15%,所以摸到蓝色球的概率约为75%,因为$20\times75\%=15$(个),所以可估计箱子里蓝色球的个数为15个.

2. 0.95

3. 3 **点拨**:设袋中白球的个数为x个,根据题意得:$\frac{4}{5+4+x}=\frac{1}{3}$,解得:$x=3$. 经检验:$x=3$是原分式方程的解,∴ 袋中白球的个数为3个.

Ⅱ. 举一反三训练

4. 解:(1)0.33

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

(2)当 $x=7$ 时,列表如下:

	3	4	5	7
3		7	8	10
4	7		9	11
5	8	9		12
7	10	11	12	

所以2个小球上数的和为9的概率是 $\frac{2}{12}=\frac{1}{6}$,所以 x 的值不可以取7. 当 $x=5$ 时,2个小球上数的和为9的概率是 $\frac{1}{3}$.

点拨:(2)题 x 的值不唯一.

5. 解:(1)不公平. 理由:因为 $C_{圆}=4$ 米,所以 $S_{圆}=\pi\times\left(\frac{4}{2\pi}\right)^2=\frac{4}{\pi}$(平方米). 因为 $C_{正方形}=4$ 米,所以 $S_{正方形}=\left(\frac{4}{4}\right)^2=1$(平方米),所以 $S_{圆}>S_{正方形}$,

所以投进圆内的可能性大于投进正方形内的可能性,所以这个游戏对双方不公平.

(2)能. ①用可测量的规则图形,如:正方形,设其面积为 S,将不规则图形围起来.

②往图形中掷点(如蒙上眼掷石子,掷在正方形外不做记录).

③当掷点次数充分大(如1万次),记录并统计结果,掷入正方形内 m 次,其中 n 次掷入不规则图形内.

④设不规则图形的面积为 S',用频率估计概率,即 $\frac{n}{m}=\frac{S'}{S}$,所以 $S'=\frac{n}{m}S$. (方案不唯一)

6. 解:(1) $n=5\div10\%=50$;

(2)样本中喜爱看电视的人数为 $50-15-20-5=10$(人),

$1\ 200\times\frac{10}{50}=240$(人),

所以估计该校喜爱看电视的学生人数为240人;

(3)画树状图如图:



(第6题图)

共有12种等可能的结果,其中恰好抽到2名男生的结果有6种,

所以恰好抽到2名男生的概率 $=\frac{6}{12}=\frac{1}{2}$.

Ⅲ. 练基础·练方法·练技巧

1. D **点拨**:设白球有 x 个,根据题意得:$\frac{4}{4+x}=25\%$,解得 $x=12$,故选D.

2. A **点拨**:$12\ 500\div\frac{250}{2\ 000}=100\ 000$(人).

3. 200 000 **点拨**:设这个鱼塘中共有 x 条鱼,根据题意,得 $\frac{10\ 000}{x}=\frac{10}{200}$,解得 $x=200\ 000$. 即这个鱼塘中共约有200 000条鱼.

4. 解:(1)因为 $\frac{10\ 000}{40\ 000}=\frac{1}{4}$,所以参加这种游戏得到玩具的频率为 $\frac{1}{4}$.

(2)因为试验次数很大,所以频率接近于概率,所以估计从袋中任意摸出一个球,恰好是红球的概率是 $\frac{1}{4}$.

设袋中白球有 x 个,则根据题意,

得 $\frac{6}{x+6}=\frac{1}{4}$,解得 $x=18$.

所以估计袋中白球接近18个.

点拨:利用频率估计概率,并以此引进未知数构造方程是求解此类问题的常用方法.

5. 解:(1)由表可知任抽1件是次品的概率约为 $\frac{30}{500}=0.06$.

(2) $600\times0.06=36$(件).

答:至少需要准备36件正品衬衣供顾客调换.

点拨:当试验的次数足够大时,事件发生的频率稳定在事件发生的概率附近,频率接近于理论概率. 可以用表中最大试验次数的次品率来估计总体的次品率.

6. 解:从盒子中随机地取出一张卡片,记下其是否有记号,再放回盒子中,不断重复上述过程,通过试验估计取出标有记号的卡片的概率,即可估计其中标有记号的卡片数.

7. D **点拨**:某人随意投掷一枚均匀的骰子,投掷了 n 次,其中有 m 次掷出的点数是偶数,即掷出的点数是偶数的频率为 $\frac{m}{n}$,则投掷的次数很多时,$\frac{m}{n}$ 稳定在 $\frac{1}{2}$ 附近,故选D.

8. $\frac{1}{3}$ **点拨**:求出阴影部分面积与整个图形面积的比值大小即可.

9. 解:(1)0.50;0.5

(2) $40\times0.5=20$(个),$40-20=20$(个);

答:估计盒子里白、黑两种球分别有20个、20个;

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

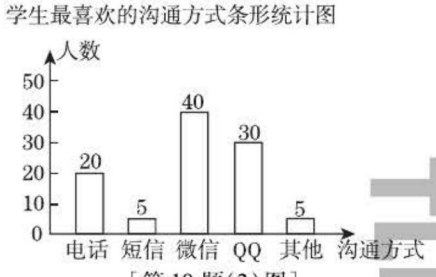
(3)设需要往盒子里再放入 x 个白球.

根据题意得:$\frac{20+x}{40+x}=\frac{3}{5}$,解得:$x=10$.

答:需要往盒子里再放入 10 个白球.

10. 解:(1)100;108°

(2)如图所示.

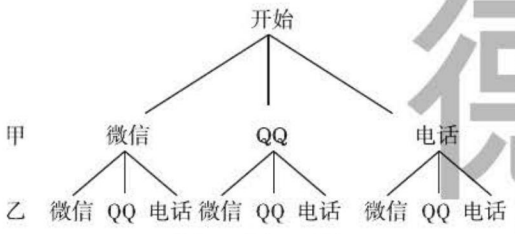


[第 10 题(2)图]

(3)$1\ 500\times\frac{40}{100}\times100\%=600$(名)

∴估计该校最喜欢用"微信"进行沟通的学生有 600 名.

(4)画出树状图如图所示.



[第 10 题(4)图]

共有 9 种等可能的情况,其中两人恰好选择同一种沟通方式共有 3 种情况,

∴甲、乙两名同学恰好选择同一种沟通方式的概率为:$\frac{3}{9}=\frac{1}{3}$.

11. 解:(1)不公平. 理由:根据几何概率的求法:小红获胜的概率就是阴影部分面积与总面积的比值,小明获胜的概率就是阴影之外部分的面积与总面积的比值.

P(小红获胜)$=\frac{\pi\times30^2-\pi\times20^2}{\pi\times30^2}=\frac{5}{9}$,$P$(小明获胜)$=\frac{4}{9}$,$\frac{5}{9}\neq\frac{4}{9}$,∴游戏对双方不公平.

(2)设边宽为 x cm,则$(80-2x)(60-2x)=\frac{1}{2}\times80\times60$,

即 $x^2-70x+600=0$,∴$x_1=10$,$x_2=60$(不符合题意,舍去),

∴边宽为 10 cm 时,游戏对双方公平.

8.6 收取多少保险费才合理

Ⅰ. 举一反三训练

1. 解:设保险公司向参保游客收取保险费 x 元,n 个游客中,平均出事 np 次,保险费收入为 nx 元,平均赔偿 $100\ 000\times np$ 元,即 $100\ 000np$ 元. 保险公司必须保证收入不小于支出,即 $nx\geqslant100\ 000np$,解得 $x\geqslant0.5$,所以保险公司至少向参保游客收取保险费 0.5 元,因为 $1>0.5$,所以平均来说,保险公司是赚了.

2. 解:(1)

	第一回投球	第二回投球	第三回投球	第四回投球	第五回投球	第六回投球
每回投球次数	5	10	15	20	25	30
每回进球次数	3	8	6	16	17	18
相应频率	0.6	0.8	0.4	0.8	0.68	0.6

(2)$\frac{3+8+6+16+17+18}{5+10+15+20+25+30}=\frac{68}{105}\approx0.648$,$40\times0.648=25.92\approx26$(个).

答:平均约能投中 26 个.

点拨:用大量反复试验下频率的稳定值即概率的估计值及概率与发生次数平均值的关系来估算.

Ⅱ. 举一反三训练

3. 解:若参与摸球活动,则获 500 元购物券的概率是$\frac{1}{100}$,获 300 元购物券的概率是$\frac{2}{100}=\frac{1}{50}$,获 5 元购物券的概率是$\frac{20}{100}=\frac{1}{5}$,摸球一次获得购物券金额的平均数是:$500\times\frac{1}{100}+300\times\frac{1}{50}+5\times\frac{1}{5}=12$(元).

若选择摸球的促销方案,商场需付出购物券的金额是 $5\ 000\times12=60\ 000$(元).

若直接返购物券,需付金额 $5\ 000\times15=75\ 000$(元).

因此商场选择摸球的方案促销更合算些.

点拨:先通过计算各种等可能条件下的概率,求出活动期间 5 000 人都参加摸球活动商场可能付出的金额与直接返购物券所付金额进行比较,从而确定更合算的方案.

Ⅲ. 练基础·练方法·练技巧

1. D **点拨**:按概率知识一一判断.

2. D

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

3. 甲　**点拨**:根据每个人的成功率来解,手术不成功的概率为1%,不是每100次必有1次不成功.

4. 出海

5. **解**:设保险公司应向每人收取 x 元保险费,在 n 次旅途中,应有 $x \times 20n \geqslant 50\ 000 \times 0.000\ 016 \times 20n$,解得 $x \geqslant 0.8$. 所以保险公司应向每人至少收取0.8元保险费.

6. **解**:(1)因为 $1+0+1+2+0+2+1+2+0+2=11$(家),
$365+371+385+395+412+418+430+435+440+445=4\ 096$(家),
$11 \div 4\ 096 \approx 0.002\ 7$,
$1\ 000 \times 0.002\ 7 = 2.7 \approx 3$(家).
(2)$300\ 000 \times 0.002\ 7 = 810$(元).
答:(1)每年在1 000家中大约烧掉3家.
(2)最低限度要缴810元保险费.

7. D

8. **解**:设有 n 个被保险人,则缴保费为 na 元,理论支出为 $(30\ 000np_1 + 10\ 000np_2)$ 元.
由题意得 $na > 30\ 000np_1 + 10\ 000np_2$,即 $a > 30\ 000p_1 + 10\ 000p_2$.
所以当 $a > 30\ 000p_1 + 10\ 000p_2$ 时,保险公司才可能盈利.

9. **解**:(1)∵ 共有20种等可能的结果,获得返金券的有9种情况,
∴ 转动一次转盘获得返金券的概率为 $\frac{9}{20}$;
(2)转转盘更合算.
理由:∵ 转转盘:$50 \times \frac{1}{20} + 30 \times \frac{3}{20} + 20 \times \frac{5}{20} = 12$(元),12元 > 10元,∴ 选择转转盘更合算.

章末整合与拔高

1. **解**:(1)$n = 12+24+15+6+3 = 60$;
(2)$(6+3) \div 60 \times 600 = 90$(名),
答:估计该年级600名学生中睡眠时长不足7小时的有90名.

2. 15张　**点拨**:因为通过多次试验后,发现抽到绘有孙悟空这个人物卡片的频率约为0.3,所以估计抽到绘有孙悟空这个人物卡片的概率为0.3,则估计这些卡片中绘有孙悟空这个人物的卡片张数为 $0.3 \times 50 = 15$(张).

3. **解**:(1)8环
(2)小杰集训前射击的平均成绩为 $\frac{8 \times 6 + 9 \times 3 + 10 \times 1}{10} = 8.5$(环),
小杰集训后射击的平均成绩为 $\frac{8 \times 3 + 9 \times 5 + 10 \times 2}{10} = 8.9$(环).
(3)由集训前后平均环数的变化可知,小杰这次集训后的命中环数明显增加.(答案不唯一)

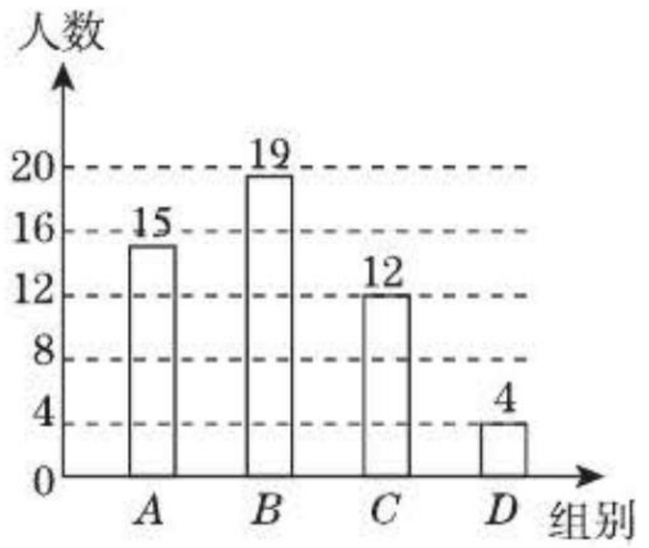
4. **解**:(1)共有4张纸牌,牌面图形是中心对称图形的情况有3种,所以摸到牌面图形是中心对称图形的概率是 $\frac{3}{4}$;
(2)公平. 理由:列表得:

	A	B	C	D
A		(A,B)	(A,C)	(A,D)
B	(B,A)		(B,C)	(B,D)
C	(C,A)	(C,B)		(C,D)
D	(D,A)	(D,B)	(D,C)	

共产生12种结果,每种结果出现的可能性相同,其中两张牌面图形都是轴对称图形的有6种,
所以 P(两张牌面图形都是轴对称图形) $= \frac{1}{2}$,
因此这个游戏公平.

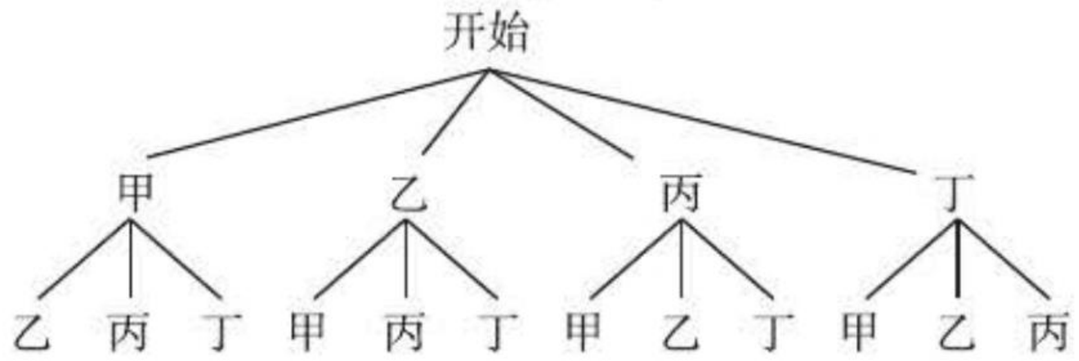
5. **解**:(1)被调查的总人数是:$19 \div 38\% = 50$(人);
(2)表示 A 组的扇形统计图的圆心角的度数是:$360° \times \frac{15}{50} = 108°$;
C 组的人数有:$50-15-19-4 = 12$(人),
补全条形统计图如图所示:

各组人数的条形统计图



[第5题(2)图]

(3)画树状图如图,共有12种等可能的结果,恰好选中甲的结果有6种,
∴ P(恰好选中甲) $= \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$.



[第5题(3)图]

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

教材习题参考答案及点拨

第5章 二次函数

5.1 二次函数

练习：

1. 解：$S=6a^2$.

2. 解：$V=14\pi r^2$.

3. 解：$S=30\times20-x^2=600-x^2$.

习题 5.1：

1. 解：$S=1.6x^2$.

2. 解：$S=2\pi r^2+2\pi r\cdot(2r)=6\pi r^2$.

3. 解：(1) $y=(200-x)(140-x)=28\ 000-340x+x^2(0<x<140)$.

(2) $y=200(1+x)^2(x\geqslant0)$.

(3) $y=x\cdot\dfrac{50-x}{2}=25x-\dfrac{1}{2}x^2(0<x<50)$.

5.2 二次函数的图像和性质

练习：

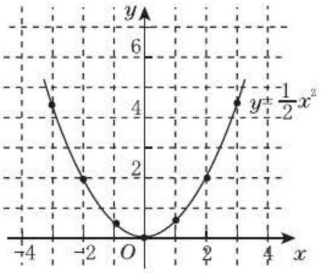
1. 解：(1)①列表：

x	…	-3	-2	-1	0	1	2	3	…
y	…	$\frac{9}{2}$	2	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	2	$\frac{9}{2}$	…

②描点；

③连线.

$y=\dfrac{1}{2}x^2$ 的图像如答图 5.2-1.



答图 5.2-1

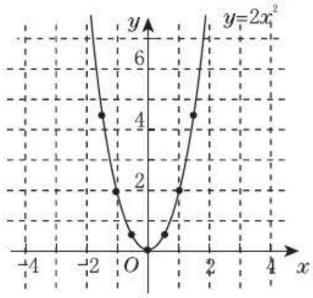
(2)①列表：

x	…	$-\frac{3}{2}$	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	…
y	…	$\frac{9}{2}$	2	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	2	$\frac{9}{2}$	…

②描点；

③连线.

$y=2x^2$ 的图像如答图 5.2-2.



答图 5.2-2

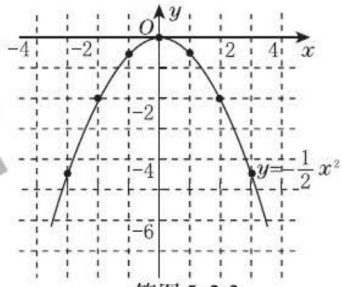
2. 解：(1)①列表：

x	…	-3	-2	-1	0	1	2	3	…
y	…	$-\frac{9}{2}$	-2	$-\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	-2	$-\frac{9}{2}$	…

②描点；

③连线.

$y=-\dfrac{1}{2}x^2$ 的图像如答图 5.2-3.



答图 5.2-3

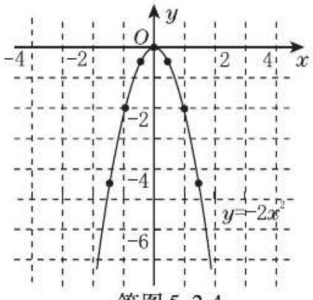
(2)①列表：

x	…	$-\frac{3}{2}$	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	…
y	…	$-\frac{9}{2}$	-2	$-\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	-2	$-\frac{9}{2}$	…

②描点；

③连线.

$y=-2x^2$ 的图像如答图 5.2-4.



答图 5.2-4

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

练习：

1. 解：函数 $y=-3x^2$ 的图像开口向下，顶点坐标为 $(0,0)$，对称轴是 y 轴；函数 $y=\frac{1}{3}x^2$ 的图像开口向上，顶点坐标为 $(0,0)$，对称轴是 y 轴；函数 $y=5x^2$ 的图像开口向上，顶点坐标为 $(0,0)$，对称轴是 y 轴；函数 $y=-\frac{3}{4}x^2$ 的图像开口向下，顶点坐标为 $(0,0)$，对称轴是 y 轴.

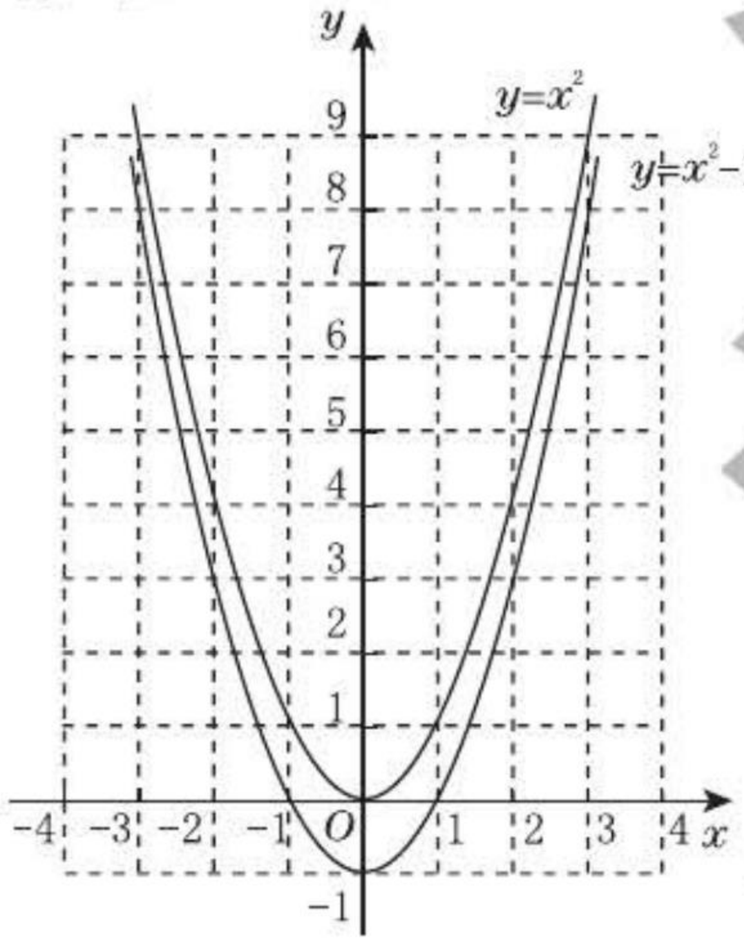
2. (1)增大；减小；0；大；大；0

(2)减小；增大；0；小；小；0

3. 解：由题意得 $3=4a$，解得 $a=\frac{3}{4}>0$，所以该二次函数图像开口向上.

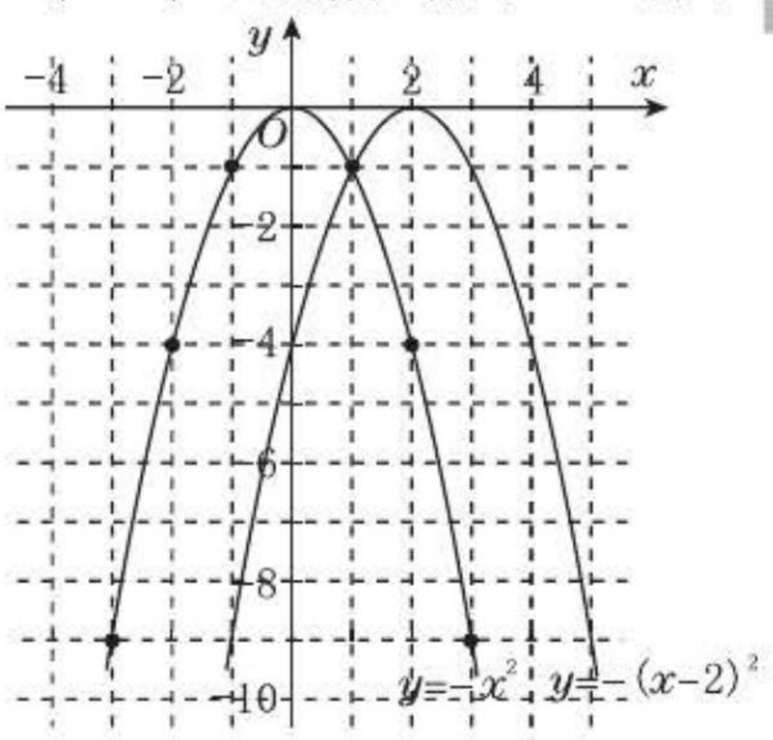
练习：

1. 解：函数 $y=x^2-1$ 的图像可以由函数 $y=x^2$ 的图像向下平移 1 个单位长度得到. 函数 $y=x^2-1$ 的图像如答图 5.2-5 所示.



答图 5.2-5

2. 解：函数 $y=-(x-2)^2$ 的图像可以由函数 $y=-x^2$ 的图像向右平移 2 个单位长度得到. 函数 $y=-(x-2)^2$ 的图像如答图 5.2-6 所示.



答图 5.2-6

练习：

1. (1)4；2　(2)$\frac{49}{16}$；$\frac{7}{4}$　(3)3　(4)$\frac{3}{4}$

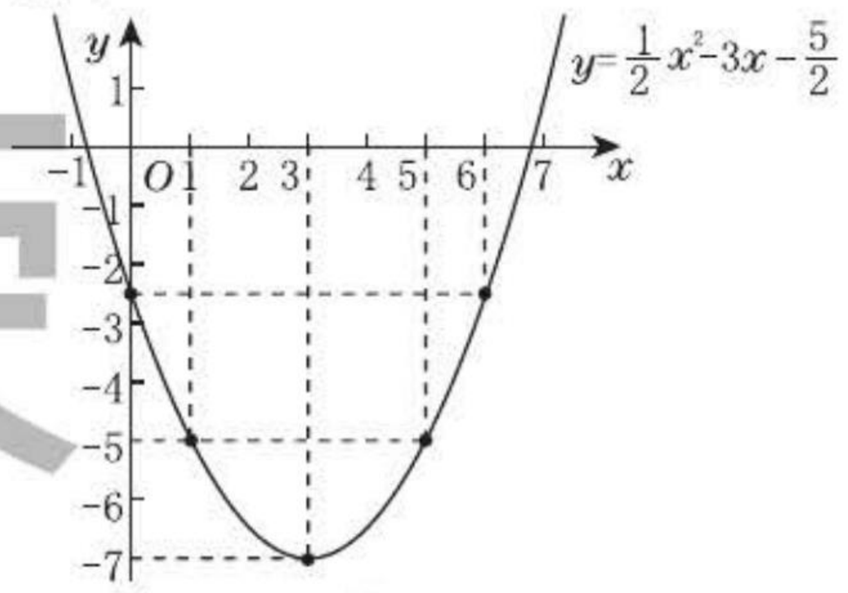
2. 解：①列表：

x	…	0	1	3	5	6	…
y	…	−2.5	−5	−7	−5	−2.5	…

②描点；

③连线.

如答图 5.2-7.



答图 5.2-7

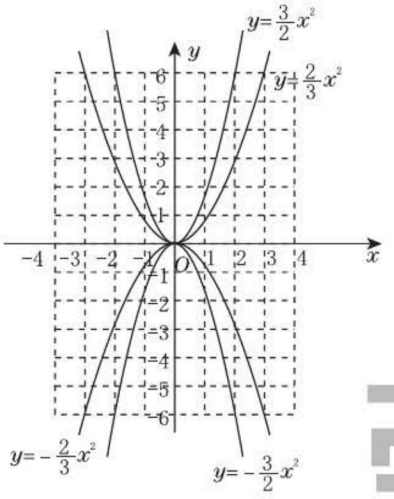
3.

函数	图像特征			函数的最大值或最小值
	开口方向	顶点坐标	对称轴	
$y=2\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-2$	开口向上	$\left(\frac{1}{2},-2\right)$	过点$\left(\frac{1}{2},-2\right)$且平行于 y 轴的直线	当 $x=\frac{1}{2}$ 时，$y_{最(小)值}=-2$
$y=2\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+5$	开口向上	$\left(\frac{3}{2},5\right)$	过点$\left(\frac{3}{2},5\right)$且平行于 y 轴的直线	当 $x=\frac{3}{2}$ 时，$y_{最(小)值}=5$
$y=2\left(x+\frac{3}{2}\right)^2-\frac{1}{2}$	开口向上	$\left(-\frac{3}{2},-\frac{1}{2}\right)$	过点$\left(-\frac{3}{2},-\frac{1}{2}\right)$且平行于 y 轴的直线	当 $x=-\frac{3}{2}$ 时，$y_{最(小)值}=-\frac{1}{2}$
$y=-2\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{1}{2}$	开口向下	$\left(\frac{3}{2},\frac{1}{2}\right)$	过点$\left(\frac{3}{2},\frac{1}{2}\right)$且平行于 y 轴的直线	当 $x=\frac{3}{2}$ 时，$y_{最(大)值}=\frac{1}{2}$

习题 5.2：

1. 解：列表略. 如答图 5.2-8.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料



答图 5.2-8

2. (1)③;①②④

(2)③;①②④

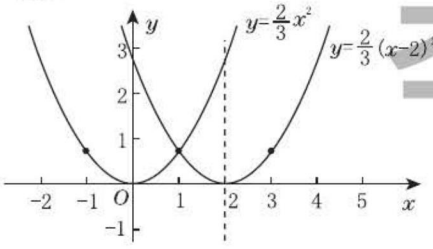
3. **解**:(1)点 B 的坐标为(2,5),点 B 在这个二次函数的图像上. 因为二次函数 $y=ax^2$ 的图像关于 y 轴对称.

(2)y 有最小值,当 $x=0$ 时,$y_{最小值}=0$.

4. **解**:将函数 $y=-\frac{1}{2}x^2$ 的图像向上平移 2 个单位长度得到函数 $y=-\frac{1}{2}x^2+2$ 的图像,将函数 $y=-\frac{1}{2}x^2$ 的图像向下平移 2 个单位长度得到函数 $y=-\frac{1}{2}x^2-2$ 的图像.

5. **解**:列表略.

如答图 5.2-9.

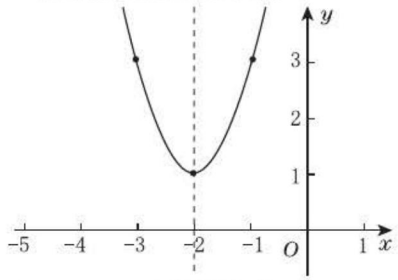


答图 5.2-9

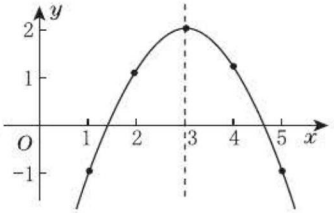
函数 $y=\frac{2}{3}x^2$ 的图像的顶点坐标是(0,0). 函数 $y=\frac{2}{3}(x-2)^2$ 的图像的顶点坐标是(2,0).

6. **解**:(1)列表略. 如答图 5.2-10. 函数 $y=2(x+2)^2+1$ 的图像的顶点坐标是(−2,1).

(2)列表略. 如答图 5.2-11. 函数 $y=-\frac{3}{4}(x-3)^2+2$ 的图像的顶点坐标是(3,2).



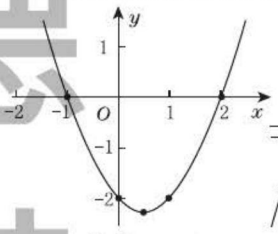
答图 5.2-10



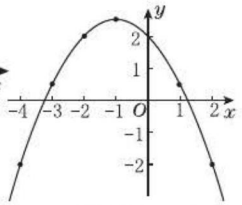
答图 5.2-11

7. **解**:(1)列表略. 如答图 5.2-12.

(2)列表略. 如答图 5.2-13.



答图 5.2-12



答图 5.2-13

8. **解**:(1)$y=x^2-2x-3=(x-1)^2-4$,

当 $x=1$ 时,$y_{最小值}=-4$.

(2)$y=-2x^2-5x+7$

$=-2\left(x^2+\frac{5}{2}x\right)+7$

$=-2\left(x+\frac{5}{4}\right)^2+\frac{81}{8}$,

当 $x=-\frac{5}{4}$ 时,$y_{最大值}=\frac{81}{8}$.

(3)$y=3x^2+2x=3\left(x^2+\frac{2}{3}x\right)$

$=3\left(x+\frac{1}{3}\right)^2-\frac{1}{3}$,

当 $x=-\frac{1}{3}$ 时,$y_{最小值}=-\frac{1}{3}$.

(4)$y=\frac{5}{2}x-2-3x^2=-3\left(x^2-\frac{5}{6}x\right)-2$

荣德基

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

$= -3\left(x-\frac{5}{12}\right)^2-\frac{71}{48}$,

当 $x=\frac{5}{12}$ 时,$y_{最大值}=-\frac{71}{48}$.

9. 解:$y=-x^2-8x-7=-(x+4)^2+9$.

所以将函数 $y=-x^2$ 的图像向左平移 4 个单位长度,再向上平移 9 个单位长度,就可以得到函数 $y=-x^2-8x-7$ 的图像.

5.3 用待定系数法确定二次函数表达式

练习:

1. 解:由二次函数 $y=ax^2+bx$ 的图像经过点 $(-2,8)$ 和 $(-1,5)$,得

$\begin{cases}8=(-2)^2a-2b,\\5=(-1)^2a-b.\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=-1,\\b=-6.\end{cases}$ 所求的二次函数的表达式为 $y=-x^2-6$.

***2. 解**:由题意得 $\begin{cases}3=c,\\0=9a+3b+c,\\4=a+b+c.\end{cases}$

解得 $\begin{cases}a=-1,\\b=2,\\c=3.\end{cases}$

所求的二次函数的表达式为 $y=-x^2+2x+3$.

习题 5.3:

1. 解:由题意得 $\begin{cases}3=a+b+1,\\-5=9a+3b+1.\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=-2,\\b=4.\end{cases}$

***2. 解**:由题意,得 $\begin{cases}-6=a-b+c,\\4=a+b+c,\\6=9a+3b+c,\end{cases}$

解得 $\begin{cases}a=-1,\\b=5,\\c=0.\end{cases}$ 所求的二次函数的表达式为 $y=-x^2+5x$.

3. 解:能. 设该二次函数的二次项系数为 a,由题意可知 $-\frac{6}{2a}=-1$,解得 $a=3$,即该二次函数的二次项系数为 3.

5.4 二次函数与一元二次方程

练习:

解:(1)因为一元二次方程 $x^2-x=0$ 的根的判别式 $b^2-4ac=(-1)^2-4\times1\times0=1>0$,所以方程 $x^2-x=0$ 有两个不相等的实数根. 二次函数 $y=x^2-x$ 的图像与 x 轴有 2 个公共点.

(2)因为一元二次方程 $-x^2+6x-9=0$ 的根的判别式 $b^2-4ac=6^2-4\times(-1)\times(-9)=0$,所以方程 $-x^2+6x-9=0$ 有两个相等的实数根. 二次函数 $y=-x^2+6x-9$ 的图像与 x 轴有 1 个公共点.

(3)因为一元二次方程 $3x^2+6x+11=0$ 的根的判别式 $b^2-4ac=6^2-4\times3\times11<0$,所以方程 $3x^2+6x+11=0$ 没有实数根.

二次函数 $y=3x^2+6x+11$ 的图像与 x 轴没有公共点.

练习:

解:

x	-3.9	-3.8	-3.7	-3.6	-3.5	-3.4
y	2.41	1.84	1.29	0.76	0.25	-0.24

所以 $-3.5<x<-3.4$.

x	-3.49	-3.48	-3.47	-3.46	-3.45	-3.44
y	0.2001	0.1504	0.1009	0.0516	0.0025	-0.0464

所以 $x\approx-3.45$.

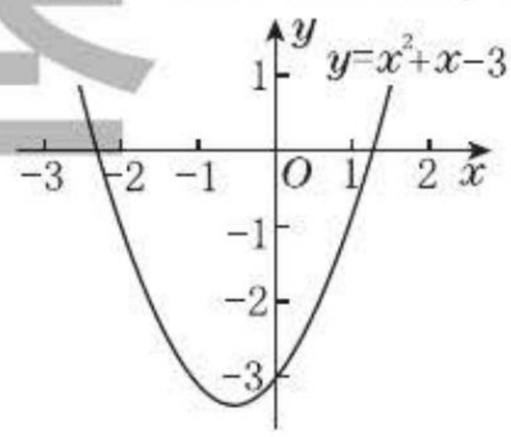
习题 5.4:

1. 解:(1)因为一元二次方程 $2x^2+x+1=0$ 的根的判别式 $b^2-4ac=1^2-4\times2\times1<0$,所以方程 $2x^2+x+1=0$ 没有实数根. 二次函数 $y=2x^2+x+1$ 的图像与 x 轴没有公共点.

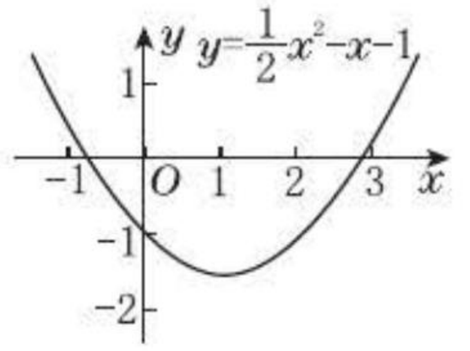
(2)因为一元二次方程 $x^2+x-6=0$ 的根的判别式 $b^2-4ac=1^2-4\times1\times(-6)>0$,所以方程 $x^2+x-6=0$ 有两个不相等的实数根,分别为 $x_1=2,x_2=-3$. 二次函数 $y=x^2+x-6$ 的图像与 x 轴有公共点,公共点的坐标为 $(2,0),(-3,0)$.

2. 解:由题意得 $\begin{cases}40=4a-2b+16,\\-8=36a+6b+16.\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=1,\\b=-10.\end{cases}$ 所以一元二次方程 $ax^2+bx+16=0$,即为 $x^2-10x+16=0$,其根为 $x_1=2,x_2=8$.

3. 解:(1)如答图 5.4-1,可以看出函数 $y=x^2+x-3$ 的图像与 x 轴有两个公共点,它们分别位于点 $(-3,0)$ 和 $(-2,0)$,点 $(1,0)$ 和 $(2,0)$ 之间,所以 $x^2+x-3=0$ 有两个根,它们分别介于实数 -3 与 -2、1 与 2 之间,利用计算器可求出方程 $x^2+x-3=0$ 的根为 $x_1\approx-2.3,x_2\approx1.3$.



答图 5.4-1



答图 5.4-2

(2)如答图 5.4-2,可以看出函数 $y=\frac{1}{2}x^2-x-1$ 的图像与 x 轴有两个公共点,它们分别位于点 $(-1,0)$ 和 $(0,0)$、点 $(2,0)$ 和 $(3,0)$ 之间,所以一元二次方程 $\frac{1}{2}x^2-x-1=0$ 有两个根,它们分别介于实数 -1 与 0、2 与 3 之间,利用计算器可

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

求出方程$\frac{1}{2}x^2-x-1=0$的根为$x_1\approx-0.7$，$x_2\approx2.7$.

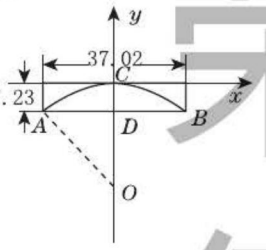
5.5 用二次函数解决问题

练习：

解：(1)$y=x(204-3x)-42(204-3x)$
$=-3x^2+330x-8\,568$.
(2)$y=-3x^2+330x-8\,568$
$=-3(x^2-110x)-8\,568$
$=-3(x-55)^2+507$.
当$x=55$时，y的值最大，最大值是507.
答：每件销售价为55元，才能使每天的毛利润最大，最大毛利润是507元.

练习：

解：如答图5.5-1，以桥拱的最高点为原点，过原点的水平线为横轴，过原点的铅垂线为纵轴，建立平面直角坐标系，则点$A(-18.51,-7.23)$. 设桥拱所在抛物线是二次函数$y=ax^2$的图像.



答图5.5-1

由题意，得$-7.23=(-18.51)^2a$，解得$a=-\frac{24\,100}{1\,142\,067}$，即这个函数的表达式是$y=-\frac{24\,100}{1\,142\,067}x^2$.（答案不唯一）

习题5.5：

1. 解：令$h=55$，有$55=4.9t^2$. 解得$t_1\approx3.4$，$t_2\approx-3.4$(舍去).
答：试验物大约经过3.4 s落到地面.

2. 解：令$t=1.3$，则$h=4.9\times1.3^2\approx8.3$.
答：该枯井大约有8.3 m深.

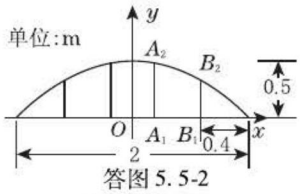
3. 解：设长方形生物园的面积为S m^2，长为x m，则根据题意，得

$$S=x\cdot\frac{16-2x}{2}=-x^2+8x.$$

当$x=-\frac{8}{2\times(-1)}=4$时，$S$的值最大.
答：当长方形生物园的长为4 m，即围成正方形生物园，可使小兔的活动范围最大.

4. 解：设每月租出x辆汽车，月收益为y元，则$y=[3\,000+(100-x)\times50]\times x-200x=-50(x-78)^2+304\,200$.
当$x=78$时，y的值最大，最大值是304 200.
答：每月租出78辆汽车时，该出租公司的月收益最大，最大月收益是304 200元.

5. 解：建立如答图5.5-2所示的坐标系，设抛物线的表达式是$y=ax^2+c$，则该抛物线过点$(0,0.5)$，$(1,0)$，故$\begin{cases}0.5=c,\\0=a+c.\end{cases}$解得$\begin{cases}a=-0.5,\\c=0.5,\end{cases}$所以$y=-0.5x^2+0.5$.



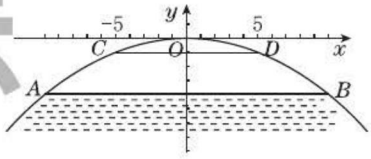
答图5.5-2

当$x=0.2$时，$y=0.48$；当$x=0.6$时，$y=0.32$，由抛物线的对称性知，加装一段护栏的立柱需要不锈钢管$2\times(0.48+0.32)=1.6$(m)，所以制作这些立柱共需要不锈钢管$1.6\times50=80$(m).

6. 解：(1)以桥拱的最高点为原点，过原点的水平线为横轴，过原点的铅垂线为纵轴，建立如答图5.5-3所示的平面直角坐标系，由题意设点D的坐标为$(5,b)$，则点B的坐标为$(10,b-3)$，设抛物线的表达式是$y=ax^2$，则$\begin{cases}b=25a,\\b-3=100a,\end{cases}$解得$\begin{cases}a=-\frac{1}{25},\\b=-1.\end{cases}$

所以$y=-\frac{1}{25}x^2$.

(2)$\frac{1}{0.2}=5$(h)，所以再过5 h此桥孔将被淹没.



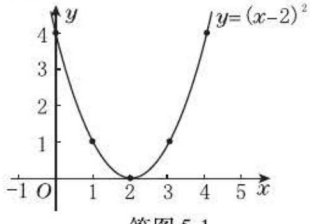
答图5.5-3

复习题

1. 解：(1)①列表：

x	…	0	1	2	3	4	…
y	…	4	1	0	1	4	…

②描点；③连线.
如答图5-1.



答图5-1

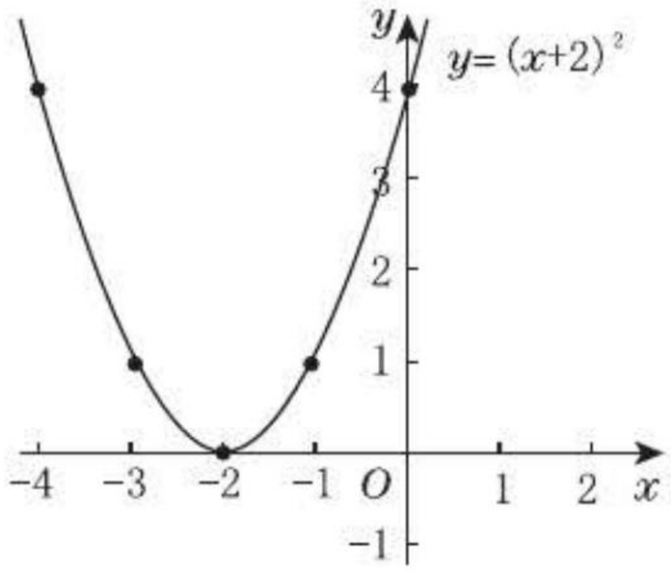
(2)①列表：

x	…	−4	−3	−2	−1	0	…
y	…	4	1	0	1	4	…

②描点；③连线.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

如答图 5-2.



答图 5-2

(3)①列表:

x	…	0	1	2	3	4	…
y	…	7	4	3	4	7	…

②描点;③连线.

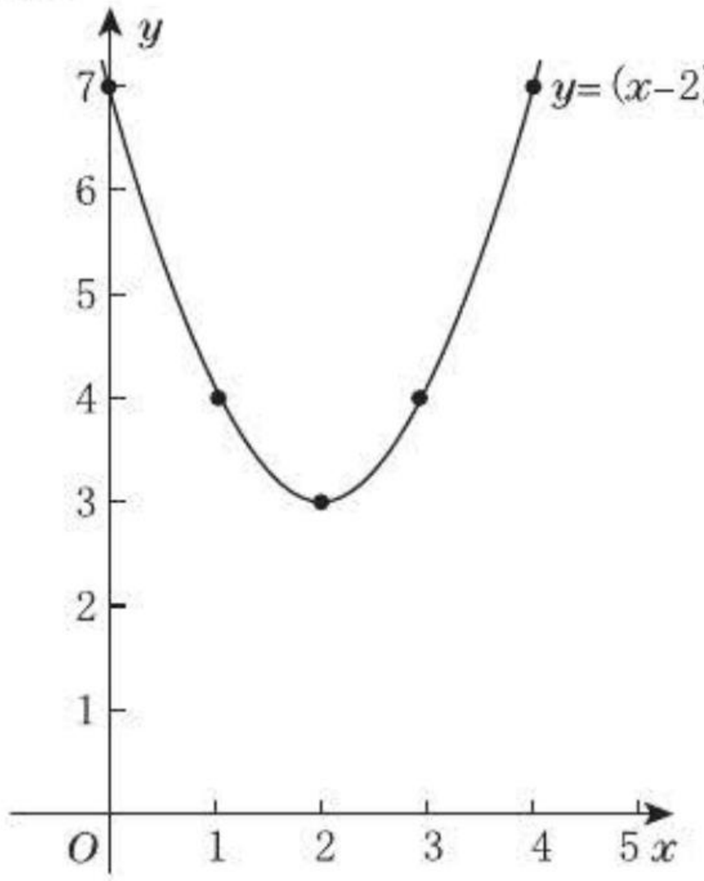
如答图 5-3.

(4)①列表:

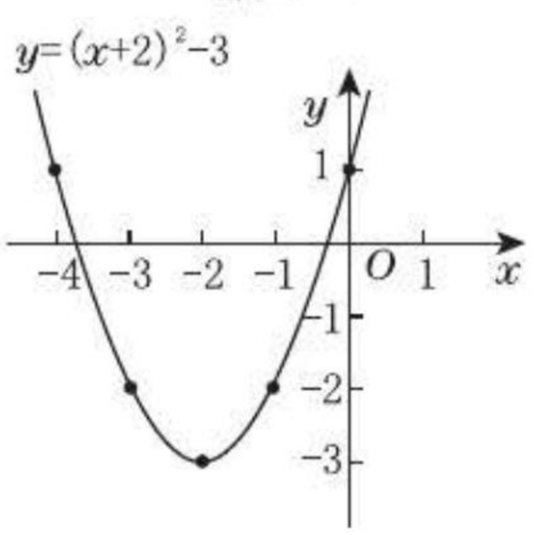
x	…	−4	−3	−2	−1	0	…
y	…	1	−2	−3	−2	1	…

②描点;③连线.

如答图 5-4.



答图 5-3

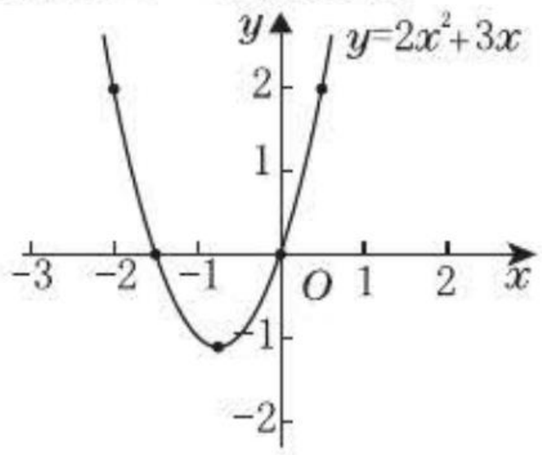


答图 5-4

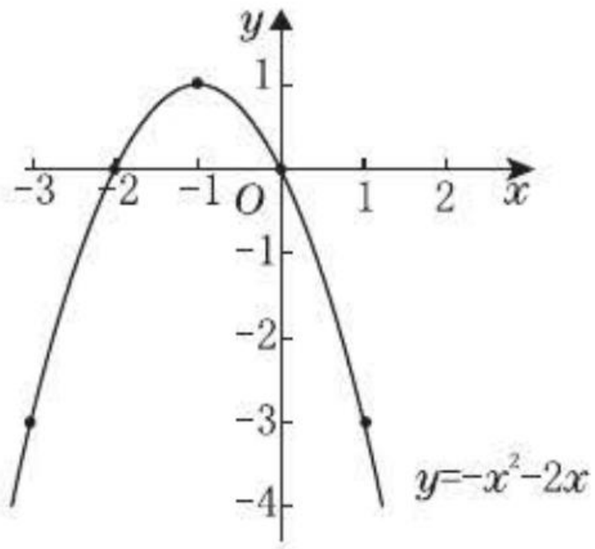
2. 解:(1)

函数	图像特征			函数的最大值或最小值
	开口方向	顶点坐标	对称轴	
$y=2x^2+3x$	开口向上	$\left(-\frac{3}{4},-\frac{9}{8}\right)$	过点$\left(-\frac{3}{4},-\frac{9}{8}\right)$且平行于 y 轴的直线	最小值为 $-\frac{9}{8}$
$y=-x^2-2x$	开口向下	$(-1,1)$	过点$(-1,1)$且平行于 y 轴的直线	最大值为 1
$y=2x^2-6x+3$	开口向上	$\left(\frac{3}{2},-\frac{3}{2}\right)$	过点$\left(\frac{3}{2},-\frac{3}{2}\right)$且平行于 y 轴的直线	最小值为 $-\frac{3}{2}$
$y=-\frac{1}{3}x^2+4x-8$	开口向下	$(6,4)$	过点$(6,4)$且平行于 y 轴的直线	最大值为 4

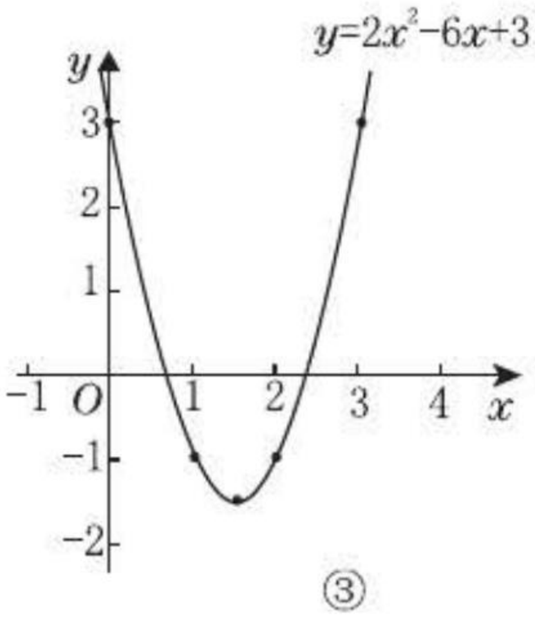
(2)列表略. 如答图 5-5①②③④.



①

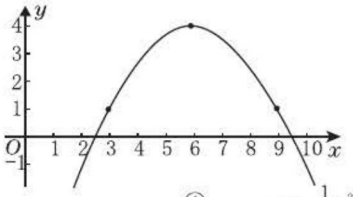


②



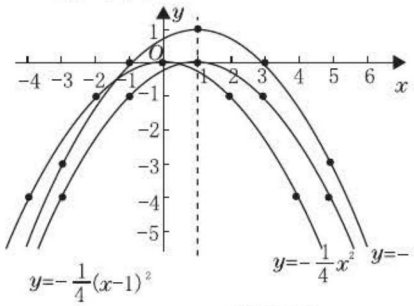
③

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料



答图 5-5

3. 解：列表略. 如答图 5-6. 将函数 $y=-\frac{1}{4}x^2$ 的图像向右平移 1 个单位长度，就可得到函数 $y=-\frac{1}{4}(x-1)^2$ 的图像，将函数 $y=-\frac{1}{4}x^2$ 的图像向右平移 1 个单位长度，再向上平移 1 个单位长度，就可得到函数 $y=-\frac{1}{4}(x-1)^2+1$ 的图像，函数 $y=-\frac{1}{4}x^2$ 的图像的顶点坐标为 $(0,0)$，函数 $y=-\frac{1}{4}(x-1)^2$ 的图像的顶点坐标是 $(1,0)$，函数 $y=-\frac{1}{4}(x-1)^2+1$ 的图像的顶点坐标是 $(1,1)$.



答图 5-6

4. 解：(1) 由题知 $\begin{cases}-1+b+c=0,\\-4+2b+c=0,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}b=3,\\c=-2.\end{cases}$

所以这个二次函数的表达式为 $y=-x^2+3x-2$.

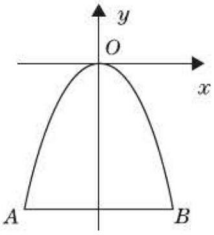
(2) $y=-x^2+3x-2=-\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{1}{4}$.

这个二次函数图像的开口方向向下，顶点坐标为 $\left(\frac{3}{2},\frac{1}{4}\right)$，对称轴为直线 $x=\frac{3}{2}$.

(3) 当 $x<\frac{3}{2}$ 时，y 随 x 增大而增大.

(4) 当 $x>\frac{3}{2}$ 时，y 随 x 增大而减小.

5. 解：以拱门的最高点为原点，过原点的水平线为横轴，过原点的铅垂线为纵轴建立平面直角坐标系，如答图 5-7，底宽为 AB. 设与该抛物线相应的函数表达式为 $y=ax^2$，由题意知，点 B 的坐标为 $(96,-192)$，则 $-192=96^2a$，解得 $a=-\frac{1}{48}$，所以与该抛物线相应的函数表达式为 $y=-\frac{1}{48}x^2$.



答图 5-7

(答案不唯一)

6. 解：设这两个数的积为 y，其中一个数是 x，则 $y=x(100-x)=-x^2+100x=-(x-50)^2+2\,500$. 当 $x=50$ 时，y 的值最大，为 2 500.

答：这两个数积的最大值是 2 500.

7. 解：$h=-t^2+26t+1=-(t-13)^2+170$，所以火箭点火后 13 s 降落伞将打开，这时该火箭的高度是170 m.

8. 解：设两个正方形的面积和为 y cm^2，其中一个正方形的边长为 x cm，则另一个正方形的边长为 $\frac{100-4x}{4}=(25-x)$ cm.

$y=x^2+(25-x)^2=2x^2-50x+625$

$=2\left(x-\frac{25}{2}\right)^2+\frac{625}{2}$,

当 $x=\frac{25}{2}$ 时，y 的值最小，为 $\frac{625}{2}$.

答：这两个正方形的面积和最小是 $\frac{625}{2}$ cm^2.

9. 解：过点 A 作 $AE\perp BC$ 于点 E，则四边形 $AECD$ 为矩形，$\angle BAE=135°-90°=45°$,

$\therefore BE=AE$. 设 $CD=x$ m，则 $AE=x$ m,

$\therefore BE=x$ m，$\therefore CE=(15-2x)$ m.

$\therefore S_{梯形ABCD}=S_{\triangle ABE}+S_{矩形AECD}$

$=\frac{1}{2}x^2+x(15-2x)$

$=-\frac{3}{2}x^2+15x$

$=-\frac{3}{2}(x-5)^2+\frac{75}{2}$,

当 $x=5$ 时，$S_{梯形ABCD}$ 的值最大.

答：当墙 CD 的长为 5 m，墙 BC 的长为10 m时，储料场的面积最大.

10. 解：(1) 由已知得，一元二次方程 $x^2-mx+m=0$ 的根的判别式 $(-m)^2-4m=0$. 解得 $m=0$ 或 4.

(2) 由已知得，一元二次方程 $ax^2-2x-3=0$ 的根的判别式 $(-2)^2+12a>0$. 解得 $a>-\frac{1}{3}$. 又 $a\neq0$，所以 a 的取值范围是 $a>-\frac{1}{3}$ 且 $a\neq0$.

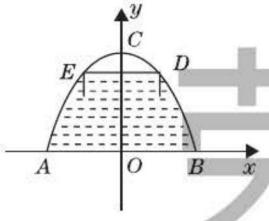
关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

11. **解**:(1)由题意,设这个二次函数的表达式为$y=a(x-4)^2-3$. 由题意知点(1,0)在这个二次函数的图像上,则$0=a(1-4)^2-3$,解得$a=\frac{1}{3}$.

所以这个二次函数的表达式为$y=\frac{1}{3}(x-4)^2-3$.

(2)令$\frac{1}{3}(x-4)^2-3=0$,解得$x_1=7$,$x_2=1$. 所以这个函数的图像与x轴另一个交点的横坐标为7.

12. **解**:以桥拱所在抛物线的对称轴为y轴,此时桥孔内水面所在直线为x轴建立平面直角坐标系,如答图5-8,水面宽$AB=8$ m,顶部C距水面5 m. 设抛物线对应的函数表达式为$y=ax^2+c$,因为抛物线在x轴上方,所以$B(4,0)$,$C(0,5)$,所以$\begin{cases}0=16a+c,\\5=c.\end{cases}$解得$\begin{cases}a=-\frac{5}{16},\\c=5.\end{cases}$所以$y=-\frac{5}{16}x^2+5$. 设水面上升$b$ m,船恰好能顺利通过桥孔,则$D(2,b+0.75)$,将$(2,b+0.75)$代入$y=-\frac{5}{16}x^2+5$,解得$b=3$. 所以要使该船顺利通过桥孔,水面与顶部至少相距$5-3=2$(m).



答图5-8

13. **解**:$y=-0.1x^2+2.6x+43$

$=-0.1(x-13)^2+59.9$.

$\because 0\leqslant x\leqslant 30$,$\therefore$ 当$x=13$时,y的值最大. $\therefore$ 当提出概念所用的时间为13 min时,学生接受概念的能力最强;13 min~30 min这个时段学生接受概念的能力逐步降低.

14. **解**:由题意得,原抛物线的顶点坐标为(3,1),所以$\begin{cases}-\frac{b}{2}=3,\\\frac{4c-b^2}{4}=1,\end{cases}$解得$\begin{cases}b=-6,\\c=10,\end{cases}$所以原抛物线相应的函数表达式为$y=x^2-6x+10$.

15. **解**:(1)$\because BP=(3-t)$cm,$BQ=2t$ cm,

$\therefore S=\frac{1}{2}BP\cdot BQ=\frac{1}{2}(3-t)\cdot 2t$

$=-t^2+3t(0\leqslant t\leqslant 2)$.

(2)$S=-t^2+3t=-\left(t-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{9}{4}$,

$\because 0\leqslant t\leqslant 2$,$\therefore$ 当$t=\frac{3}{2}$时,S的值最大,为$\frac{9}{4}$,

$\therefore$ 当$t=\frac{3}{2}$时,$\triangle PBQ$的面积最大,最大面积是$\frac{9}{4}$cm^2.

16. **解**:(1)设一周销售收入为y_1元,每只水果降价x元,则$y_1=(20-x)(300+25x)=-25(x-4)^2+6\,400$,当$x=4$时,$y_1$的值最大,为6 400,所以每只水果定价为$20-4=16$(元)时,一周销售收入最多.

(2)设一周销售收入为y_2元,每只水果涨价z元,则$y_2=(20+z)(300-10z)=-10(z-5)^2+6250$,当$z=5$时,$y_2$的值最大,为6 250,所以每只水果定价为$20+5=25$(元)时,一周销售收入最多.

(3)综合(1)、(2),可知每只水果定价为16元时,一周销售收入最多.

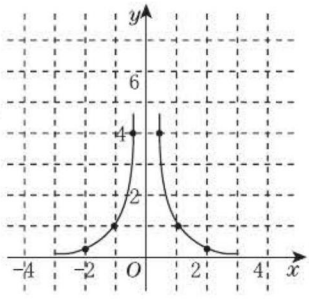
17. **解**:函数$y=\frac{1}{x^2}$的图像在x轴上方,与x轴没有公共点,与y轴没有公共点,关于y轴对称. 当$x>0$时,随着x的增大,函数的图像无限接近x轴,随着x的减小,函数的图像无限接近y轴.

①列表:

x	…	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	1	2	…
y	…	$\frac{1}{4}$	1	4	4	1	$\frac{1}{4}$	…

②描点;③连线.

函数$y=\frac{1}{x^2}$的图像如答图5-9.



答图5-9

第6章 图形的相似

6.1 图上距离与实际距离

练习:

1. **解**:设南京与徐州、南京与连云港之间的实际距离分别为x km、y km.

荣德基

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

由左侧地图易得$\frac{1}{8\,000\,000}=\frac{3.4}{100\,000x}$,解得$x=272$.

亦可得$\frac{1}{8\,000\,000}=\frac{3.4}{100\,000y}$,解得$y=272$.

由右侧地图易得$\frac{1}{16\,000\,000}=\frac{1.7}{100\,000x}$,解得$x=272$.

亦可得$\frac{1}{16\,000\,000}=\frac{1.7}{100\,000y}$,解得$y=272$.

故由提供的地图得南京与徐州、南京与连云港之间的实际距离分别为272 km、272 km.

2. 解:1.6∶2=4∶5. 故此时小丽的身高与影长的比是4∶5.

3. 解:比例尺为1∶30时,这个工件的实际长度是$40\times30=1\,200(\text{mm})=1.2\ \text{m}$,比例尺为2∶1时,这个工件的实际长度是$40\div2=20(\text{mm})$.

4. 解:$\because\frac{AD}{DB}=\frac{AE}{EC}$,$\therefore\frac{AD}{AB-AD}=\frac{AE}{AC-AE}$,即$\frac{15}{40-15}=\frac{AE}{28-AE}$,解得$AE=\frac{21}{2}$.

习题6.1:

1. 解:$7\times38\,000=266\,000(\text{cm})=2\,660\ \text{m}$.

答:这条道路的实际长度是2 660 m.

2. 解:设$\frac{a}{9}=\frac{b}{11}=\frac{c}{14}=k$,则$a=9k$,$b=11k$,$c=14k$,$\because a+b+c=68$,$\therefore 9k+11k+14k=68$,解得$k=2$,$\therefore a=18$,$b=22$,$c=28$.

3. 解:$\because\frac{AD}{DB}=\frac{AE}{EC}=2$,$\therefore AD=2DB$,$AE=2EC$,

$\therefore\frac{AB}{DB}=\frac{AD+DB}{DB}=\frac{2DB+DB}{DB}=3$.

$\frac{AE}{AC}=\frac{AE}{AE+EC}=\frac{2EC}{2EC+EC}=\frac{2}{3}$.

4. 解:由题意可得$\frac{EF}{BC}=\frac{AG}{AD}=\frac{AD-GD}{AD}$,

$\therefore\frac{10}{15}=\frac{AD-4}{AD}$,解得$AD=12$.

5. 略.

6.2 黄金分割

练习:

1. 解:设已知边长的边的邻边的长为x m,

则$\frac{3.24}{x}=\frac{\sqrt5-1}{2}$或$\frac{x}{3.24}=\frac{\sqrt5-1}{2}$.

解得$x\approx5.24$或2.00.

所以已知边长的边的邻边的长约为5.24 m或2.00 m.

2. 解:$\because C$、D是线段AB的两个黄金分割点,

$\therefore\frac{AC}{BC}=\frac{BC}{AB}=\frac{\sqrt5-1}{2}$,$\frac{BD}{AD}=\frac{AD}{AB}=\frac{\sqrt5-1}{2}$,$\because AB=1$,

$\therefore BC=\frac{\sqrt5-1}{2}$,$AD=\frac{\sqrt5-1}{2}$,

$\therefore CD=BC+AD-AB=\sqrt5-2$.

习题6.2:

1. 解:由题意可得$\frac{BC}{AB}=\frac{AB}{AC}=\frac{\sqrt5-1}{2}$,$\because AC=468\ \text{m}$,

$\therefore AB=\frac{468\times(\sqrt5-1)}{2}\approx289.2(\text{m})$,即$AB$的长约为289.2 m.

2. 解:$S_1=S_2$. 理由:由题意可得

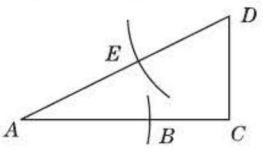
$$\frac{S_1}{S_2}=\frac{PA^2}{AB\cdot PB}=\frac{PA}{AB}\cdot\frac{PA}{PB}$$

$$=\frac{PA}{AB}\cdot\frac{PA}{AB-PA}=\frac{PA}{AB}\cdot\frac{\frac{PA}{AB}}{1-\frac{PA}{AB}}$$

$$=\frac{\sqrt5-1}{2}\cdot\frac{\frac{\sqrt5-1}{2}}{1-\frac{\sqrt5-1}{2}}=\frac{3-\sqrt5}{3-\sqrt5}=1.$$

故$S_1=S_2$.

3. 解:(1)如答图6.2-1所示.



答图6.2-1

(2)在所画图中,点B是线段AC的黄金分割点.

$\because AC=1$,$\therefore CD=\frac{1}{2}AC=\frac{1}{2}$,由勾股定理得

$AD=\sqrt{AC^2+CD^2}=\frac{\sqrt5}{2}$.

$\therefore AB=AE=AD-DE=AD-CD=\frac{\sqrt5-1}{2}$.

$\therefore\frac{AB}{AC}=\frac{\sqrt5-1}{2}$,即点$B$是线段$AC$的黄金分割点.

6.3 相似图形

练习:

1. 解:图⑨与图①相似;图⑤与图②相似;图⑦与图③相似.

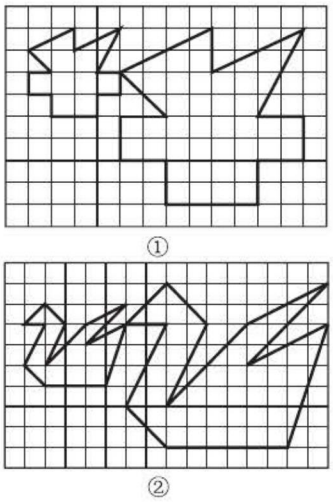
2. 解:$\because$四边形$ABCD\backsim$四边形$A'B'C'D'$,$\therefore\angle\alpha=\angle C=80°$,$\angle A=\angle A'=120°$,$\therefore\angle\beta=360°-\angle A-\angle B-\angle C=360°-120°-75°-80°=85°$.

又$\frac{AB}{A'B'}=\frac{AD}{A'D'}$,$\therefore A'D'=\frac{AD\cdot A'B'}{AB}=\frac{8\times9}{6}=12$.

习题6.3:

1. 解:如答图6.3-1①②所示.

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料



答图 6.3-1

点拨:答案不唯一.

2. **解**:∵ $\triangle ABC$ 与 $\triangle A'B'C'$ 相似,∴ 它们的对应边成比例.

设 $\triangle A'B'C'$ 的最短边的长为 x,则 $\frac{x}{4}=\frac{18}{6}$,解得 $x=12$. 故 $\triangle A'B'C'$ 的最短边的长为 12.

3. **解**:(1)所有的等腰三角形不都相似,因为所有的等腰三角形的对应角不都相等,对应边不都成比例.

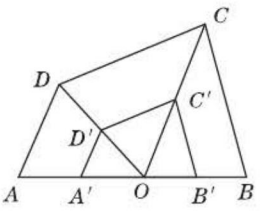
(2)所有的直角三角形不都相似,因为所有的直角三角形的对应角不都相等,对应边不都成比例;所有的等腰直角三角形都相似,因为所有的等腰直角三角形的对应角都相等,对应边都成比例.

4. **解**:四边形 $A'B'C'D'$ 与四边形 $ABCD$ 相似. 理由:如答图 6.3-2,∵ A'、B'、C'、D' 分别为 OA、OB、OC、OD 的中点,∴ 由三角形中位线的性质,知 $A'D'\parallel AD$,$C'D'\parallel CD$,$B'C'\parallel BC$;$A'D'=\frac{1}{2}AD$,$C'D'=\frac{1}{2}CD$,$B'C'=\frac{1}{2}BC$. 又∵ A'、B' 分别为 OA、OB 的中点,∴ $A'B'=\frac{1}{2}AB$. ∴ $\frac{A'B'}{AB}=\frac{B'C'}{BC}=\frac{C'D'}{CD}=\frac{D'A'}{DA}=\frac{1}{2}$.

由平行线的性质易得 $\angle A=\angle D'A'B'$,$\angle B=\angle C'B'A'$,$\angle ADO=\angle A'D'O$,$\angle CDO=\angle C'D'O$,$\angle DCO=\angle D'C'O$,$\angle BCO=\angle B'C'O$.

∴ $\angle ADC=\angle A'D'C'$,$\angle DCB=\angle D'C'B'$.

∴ 四边形 $A'B'C'D'$ 与四边形 $ABCD$ 相似.



答图 6.3-2

6.4 探索三角形相似的条件

练习:

1. **解**:∵ $l_1\parallel l_2\parallel l_3$,∴ $\frac{AB}{BC}=\frac{DE}{EF}$(两条直线被一组平行线所截,所得的对应线段成比例).

∴ $EF=\frac{BC\cdot DE}{AB}=\frac{5\times4}{3}=\frac{20}{3}$.

2. **解**:(1)图中有 2 对相似三角形,分别是 $\triangle OD'E'$ 和 $\triangle ODE$,$\triangle OD'F'$ 和 $\triangle ODF$.

(2)$\frac{DE}{D'E'}$ 与 $\frac{DF}{D'F'}$ 相等. 理由:

由题意易得 $D'E'\parallel DE$,$D'F'\parallel DF$,∴ $\triangle OD'E'\backsim\triangle ODE$,$\triangle OD'F'\backsim\triangle ODF$,∴ $\frac{DE}{D'E'}=\frac{OD}{OD'}$,$\frac{DF}{D'F'}=\frac{OD}{OD'}$,∴ $\frac{DE}{D'E'}=\frac{DF}{D'F'}$.

练习:

1. **解**:(1)当 $k=1$ 时,$\triangle ABC\cong\triangle A'B'C'$.

(2)当 $k\neq1$ 时,$\triangle ABC\backsim\triangle A'B'C'$.

2. **解**:∵ $BC\parallel ED$,∴ $\angle D=\angle B$,$\angle E=\angle C$,

∴ $\triangle ADE\backsim\triangle ABC$.

∴ $\frac{AD}{AB}=\frac{DE}{BC}$,$\frac{AE}{AC}=\frac{DE}{BC}$,∴ $AB=\frac{AD\cdot BC}{DE}=\frac{10\times18}{12}=15$,$AC=\frac{AE\cdot BC}{DE}=\frac{8\times18}{12}=12$.

3. **解**:题图中与 $\triangle ABC$ 相似的三角形有 $\triangle DEA$、$\triangle CED$. 理由:

由题意知 $\angle B=\angle DEA=\angle DEC=90°$. 又 $AD\parallel BC$,∴ $\angle ACB=\angle DAE$,

∴ $\triangle ABC\backsim\triangle DEA$.

同理可得 $\triangle ABC\backsim\triangle CED$.

练习:

1. **解**:(1)当 $k=1$ 时,$\triangle ABC\cong\triangle A'B'C'$.

(2)当 $k\neq1$ 时,$\triangle ABC\backsim\triangle A'B'C'$.

2. **解**:还需要添加 $\frac{AD}{AB}=\frac{AE}{AC}$.

点拨:答案不唯一.

3. **解**:$\triangle ABE$ 与 $\triangle DEF$ 相似. 理由:

∵ 四边形 $ABCD$ 是正方形,

∴ $AB=CD=AD$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

又∵ E 是 AD 的中点，$CF=3DF$，∴ $DE=\frac{1}{2}AB$，

$DF=\frac{1}{2}AE$. ∴ $\frac{AB}{DE}=\frac{AE}{DF}=2$.

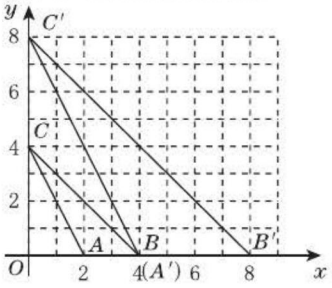
又∵ $\angle A=\angle D=90°$，∴ $\triangle ABE\backsim\triangle DEF$.

练习：

1. 解：(1) 当 $k=1$ 时，$\triangle ABC\cong\triangle A'B'C'$.

(2) 当 $k\neq1$ 时，$\triangle ABC\backsim\triangle A'B'C'$.

2. 解：(1) 由题意得 $A'(4,0)$、$B'(8,0)$、$C'(0,8)$. 所画 $\triangle A'B'C'$ 如答图 6.4-1 所示.



答图 6.4-1

(2) $\triangle A'B'C'$ 与 $\triangle ABC$ 相似. 理由：

由答图 6.4-1 易得，AC 是 $\triangle OA'C'$ 的中位线，BC 是 $\triangle OB'C'$ 的中位线，∴ $AC=\frac{1}{2}A'C'$，$BC=\frac{1}{2}B'C'$.

又易得 $AB=2$，$A'B'=4$，

∴ $AB=\frac{1}{2}A'B'$.

∴ $\frac{A'B'}{AB}=\frac{A'C'}{AC}=\frac{B'C'}{BC}=2$，

∴ $\triangle A'B'C'\backsim\triangle ABC$.

3. 解：$\angle BAD=\angle EBC$. 理由：∵ $\frac{AB}{AD}=\frac{BC}{DE}=\frac{AC}{AE}$，

∴ $\triangle ABC\backsim\triangle ADE$.

∴ $\angle ABC=\angle ADE$.

又∵ $\angle ABC=\angle ABD+\angle EBC$，$\angle ADE=\angle ABD+\angle BAD$，

∴ $\angle BAD=\angle EBC$.

练习：

1. 解：$\triangle CDE\backsim\triangle BDC$. 理由如下：

∵ $\overset{\frown}{AD}=\overset{\frown}{CD}$，∴ $\angle ACD=\angle DBC$.

又∵ $\angle CDE=\angle BDC$，∴ $\triangle CDE\backsim\triangle BDC$.

2. 解：$\triangle APC$ 与 $\triangle PBD$ 相似. 理由如下：

∵ $PC=PD=CD$，∴ $\triangle PCD$ 是等边三角形，∴ $\angle CPD=\angle PCD=\angle PDC=60°$，又∵ 点 C、D 在 AB 上，∴ $\angle A+\angle APC=60°$，$\angle B+\angle BPD=60°$.

∵ $\angle APB=120°$，∴ $\angle A+\angle B=180°-120°=60°$，∴ $\angle A=\angle BPD$，$\angle B=\angle APC$，∴ $\triangle APC\backsim\triangle PBD$(两角分别相等的两个三角形相似).

习题 6.4：

1. 解：图中有 3 对相似三角形.

$\triangle ABE\backsim\triangle ACF$、$\triangle ABE\backsim\triangle ADG$、$\triangle ACF\backsim\triangle ADG$.

2. 解：∵ $DE/\!/AB$，∴ $\triangle ABC\backsim\triangle DEC$，

∴ $\frac{DE}{AB}=\frac{CD}{CA}$.

由题意易知 $AB=7$ mm，$\frac{CD}{CA}=\frac{30}{50}$，

∴ $DE=7\times\frac{30}{50}=4.2$(mm).

如果 DE 正对“35”刻度线，那么 $\frac{CD}{AC}=\frac{35}{50}$，则 $DE=7\times\frac{35}{50}=4.9$(mm).

3. 解：(1) 图中有 3 对相似三角形.

$\triangle AEG\backsim\triangle ABD$、$\triangle AFG\backsim\triangle ACD$、$\triangle AEF\backsim\triangle ABC$.

(2) $\frac{EG}{BD}$ 与 $\frac{FG}{CD}$ 相等. 理由如下：

∵ $\triangle AEG\backsim\triangle ABD$，∴ $\frac{EG}{BD}=\frac{AG}{AD}$.

又∵ $\triangle AFG\backsim\triangle ACD$，∴ $\frac{FG}{CD}=\frac{AG}{AD}$.

∴ $\frac{EG}{BD}=\frac{FG}{CD}$.

4. 解：图中有 4 对相似三角形. $\triangle ADE\backsim\triangle ABC$、$\triangle BDC\backsim\triangle CED$、$\triangle ABC\backsim\triangle ACD$、$\triangle ADE\backsim\triangle ACD$.

5. 解：(1) $\triangle ACD$ 与 $\triangle CBD$ 相似，理由如下：

∵ $CD\perp AB$，∴ $\angle CDB=\angle ADC=90°$，

∴ $\angle B+\angle BCD=90°$.

∵ $\angle ACB=90°$，∴ $\angle ACD+\angle BCD=90°$.

∴ $\angle B=\angle ACD$.

∴ $\triangle ACD\backsim\triangle CBD$.

(2) 图中还有 2 对相似三角形. $\triangle ACD\backsim\triangle ABC$，$\triangle CBD\backsim\triangle ABC$.

6. 解：(1) $\triangle ABC$ 与 $\triangle ADE$ 相似. 理由如下：

∵ $\angle BAD=\angle CAE$，∴ $\angle BAD+\angle CAD=\angle CAE+\angle CAD$，即 $\angle BAC=\angle DAE$，又∵ $\angle B=\angle D$，

∴ $\triangle ABC\backsim\triangle ADE$.

(2) ∵ $\triangle ABC\backsim\triangle ADE$，∴ $\frac{AB}{AD}=\frac{BC}{DE}$，∴ $DE=\frac{AD\cdot BC}{AB}=2$.

7. 解：∵ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形，∴ $AD/\!/BC$，$AD=BC$，∴ $\angle DAE=\angle BEF$，

$\angle ADF=\angle EBF$，∴ $\triangle ADF\backsim\triangle EBF$.

∴ $\frac{AF}{EF}=\frac{AD}{EB}$.

又∵ E 是 BC 的中点，∴ $EB=\frac{1}{2}BC=\frac{1}{2}AD$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

$\therefore \frac{AF}{EF}=2.$

8. 解：$\because \triangle ABC\backsim\triangle DEF$，$\therefore \frac{AB}{DE}=\frac{AC}{DF}$，可得 $DF=\frac{AC\cdot DE}{AB}=\frac{8\times12}{6}=16.$

9. 解：$\angle ABD$ 与 $\angle C$ 相等. 理由如下：

$\because AB^2=AD\cdot AC$，$\therefore \frac{AB}{AD}=\frac{AC}{AB}$，

又$\because \angle A$ 是 $\triangle ABD$ 和 $\triangle ACB$ 的公共角，

$\therefore \triangle ABD\backsim\triangle ACB$（两边成比例且夹角相等的两个三角形相似）.

$\therefore \angle ABD=\angle C.$

10. 解：$\triangle OA'C'$ 与 $\triangle OAC$ 相似. 理由如下：

$\because \triangle OA'B'\backsim\triangle OAB$，$\therefore \frac{OA'}{OA}=\frac{OB'}{OB}.$

又$\because \triangle OB'C'\backsim\triangle OBC$，$\therefore \frac{OC'}{OC}=\frac{OB'}{OB}.$

$\therefore \frac{OA'}{OA}=\frac{OC'}{OC}.$

又$\because \angle A'OC'$ 是 $\triangle OA'C'$ 和 $\triangle OAC$ 的公共角，

$\therefore \triangle OA'C'\backsim\triangle OAC.$

11. 解：当 $\frac{BC}{EF}=\frac{AB}{DE}=\frac{AC}{DF}=2$ 时，$\triangle ABC\backsim\triangle DEF.$

12. 解：相似. 理由：由题图知 $AB=2$，$BC=2\sqrt{2}$，$AC=2\sqrt{5}$，$DE=\sqrt{2}$，$EF=2$，$DF=\sqrt{10}.$

$\therefore \frac{AB}{DE}=\frac{BC}{EF}=\frac{AC}{DF}=\sqrt{2}.$

$\therefore \triangle ABC$ 与 $\triangle DEF$ 相似.

13. 解：$\triangle ABC$ 与 $\triangle A'B'C'$ 相似.

理由如下：$\because \frac{AB}{A'B'}=\frac{BD}{B'D'}=\frac{AD}{A'D'}$，$\therefore \triangle ABD\backsim\triangle A'B'D'$. $\therefore \angle BAD=\angle B'A'D'$，$\angle B=\angle B'$.

又$\because AD$、$A'D'$ 分别是 $\triangle ABC$ 和 $\triangle A'B'C'$ 的角平分线.

$\therefore \angle BAC=2\angle BAD$，$\angle B'A'C'=2\angle B'A'D'$，

$\therefore \angle BAC=\angle B'A'C'$，

$\therefore \triangle ABC\backsim\triangle A'B'C'$（两角分别相等的两个三角形相似）.

14. 解：$\triangle ABE$ 与 $\triangle ADC$ 相似，理由如下：

$\because AE$ 是 $\odot O$ 的直径，$\therefore \angle ABE=90°.$

$\because AD$ 是 $\triangle ABC$ 的高，$\therefore AD\perp BC$，

$\therefore \angle ADC=90°$，$\therefore \angle ABE=\angle ADC.$

又$\because \angle E=\angle C$，$\therefore \triangle ABE\backsim\triangle ADC.$

15. 解：(1) $\triangle FDB$ 与 $\triangle ABC$ 相似.

理由如下：$\because BC$ 的垂直平分线分别交 BC、AC 于点 D、E，

$\therefore EB=EC$，$\therefore \angle FBD=\angle C.$

又$\because AB=AD$，$\therefore \angle FDB=\angle ABC.$

$\therefore \triangle FDB$ 与 $\triangle ABC$ 相似.

(2) $AF=DF$. 理由如下：$\because \triangle FDB\backsim\triangle ABC$，

$\therefore \frac{FD}{AB}=\frac{DB}{BC}$. $\because DE$ 垂直平分 BC，

$\therefore DB=CD$，$\therefore \frac{DB}{BC}=\frac{1}{2}$，

$\therefore \frac{FD}{AB}=\frac{1}{2}$. 又$\because AB=AD$，

$\therefore \frac{FD}{AD}=\frac{1}{2}$，$\therefore AF=DF.$

16. 解：由已知得 $AB=BC=CD=AD=8$，

$\because E$ 是 CD 的中点，$\therefore CE=DE=4.$

$\therefore AE=\sqrt{AD^2+DE^2}=4\sqrt{5}.$

易得 $\triangle ADE\cong\triangle FCE$，

$\therefore FE=AE=4\sqrt{5}.$

$\because HG$ 垂直平分 AE，

$\therefore AH=HE=2\sqrt{5}$，

$\therefore HF=EH+EF=6\sqrt{5}.$

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是正方形，

$\therefore \angle D=90°$，$AD/\!/BC$，

$\therefore \angle DAE=\angle HFG$，

又$\because \angle D=\angle FHG=90°$，

$\therefore \triangle ADE\backsim\triangle FHG$. $\therefore \frac{AD}{AE}=\frac{FH}{FG}.$

$\therefore FG=\frac{AE\cdot FH}{AD}=\frac{4\sqrt{5}\times6\sqrt{5}}{8}=15.$

17. 解：有两种不同的截法.

第一种截法：以 30 cm 长的钢筋为一边，从 50 cm长的钢筋上截下长 10 cm 和25 cm的两段.

第二种截法：以 30 cm 长的钢筋为一边，从 50 cm长的钢筋上截下 12 cm 和 36 cm 的两段.

6.5 相似三角形的性质

练习：

1. 解：根据相似多边形面积的比等于相似比的平方，可知大标牌的面积是小标牌的 4 倍，所以大标牌需用漆两听.

2. 解：$\because$ 两个相似多边形面积的比为 9 ∶ 16，$\therefore$ 这两个相似多边形的相似比为 3 ∶ 4.

$\because$ 相似多边形周长的比等于相似比，$\therefore$ 这两个相似多边形周长的比为 3 ∶ 4，$\therefore$ 另一个多边形的周长为 $36\times\frac{4}{3}=48(\text{cm}).$

3. 解：$\because \angle C=90°$，$\therefore \angle A+\angle B=90°$. $\because$ 四边形 $DEFG$ 是矩形，$\therefore \angle GDE=\angle DEF=90°.$

$\therefore \angle ADG=\angle FEB=90°$. $\therefore \angle A+\angle AGD=90°.$

$\therefore \angle AGD=\angle B.$

$\therefore \triangle ADG\backsim\triangle FEB$. 在 Rt$\triangle ADG$ 中，$AG=5$，$AD=$

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

4，∴ $GD=3$，∴ $EF=3$.

∴ $AD:EF=4:3$. ∴ $\triangle ADG$ 与 $\triangle FEB$ 的面积的比为 16∶9.

练习：

1. 解：∵ $\angle ADE=\angle B$，$\angle EAD=\angle CAB$，

∴ $\triangle ADE\backsim\triangle ABC$.

∵ F、G 分别是 BC、DE 的中点，即 AG、AF 分别是 $\triangle ADE$ 和 $\triangle ABC$ 对应边上的中线，∴ $\frac{AG}{AF}=\frac{AD}{AB}=\frac{3}{5}$.

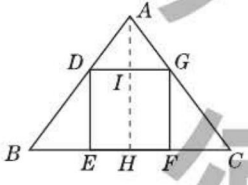
2. 解：(1) ∵ $AB=2A'B'$，$AC=2A'C'$，$\angle BAC=\angle B'A'C'$，∴ $\triangle ABC\backsim\triangle A'B'C'$，且 $\triangle ABC$ 与 $\triangle A'B'C'$ 的相似比为 2∶1.

∵ AD、$A'D'$ 分别是 $\triangle ABC$、$\triangle A'B'C'$ 的角平分线，

∴ $\frac{AD}{A'D'}=2$.

(2) 由(1)知 $\triangle ABC$ 与 $\triangle A'B'C'$ 的相似比为 2∶1，则 $\triangle ABC$ 与 $\triangle A'B'C'$ 的面积的比为 4∶1.

3. 解：如答图 6.5-1，过点 A 作 $AH\perp BC$，垂足为 H，与 DG 交于点 I.



答图 6.5-1

∵ 四边形 $DEFG$ 为正方形，

∴ $DG\parallel EF$，

∴ $\triangle ADG\backsim\triangle ABC$.

∴ $\frac{DG}{BC}=\frac{AI}{AH}$，

∴ $\frac{DG}{BC}=\frac{AH-DG}{AH}$.

∵ $AB=AC$，$AH\perp BC$，$BC=6$，∴ $BH=CH=3$.

在 Rt$\triangle ABH$ 中，由勾股定理，得

$AH=\sqrt{AB^2-BH^2}=\sqrt{5^2-3^2}=4$.

∴ $\frac{DG}{6}=\frac{4-DG}{4}$，解得 $DG=2.4$.

∴ 正方形 $DEFG$ 的边长为 2.4.

习题 6.5：

1. 解：设这个多边形地块的实际面积为 x m^2.

根据题意，得 $\frac{24}{10\,000x}=\left(\frac{1}{5\,000}\right)^2$，

解得 $x=60\,000$，$60\,000$ m$^2=6$ 公顷，故这个多边形地块的实际面积是 6 公顷.

2. 解：∵ $DE\parallel BC$，∴ $\triangle ADE\backsim\triangle ABC$.

由题意知，$\triangle ADE$ 与四边形 $DBCE$ 的面积的比为 1∶3，则 $\triangle ADE$ 与 $\triangle ABC$ 的面积的比为 1∶4.

∴ $\triangle ADE$ 与 $\triangle ABC$ 的相似比为 1∶2. ∴ $\frac{AD}{AB}=\frac{1}{2}$.

3. 解：(1) ∵ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形，

∴ $BE\parallel AD$，$BC=AD$.

∴ $\triangle BEF\backsim\triangle DAF$，∴ $\frac{BF}{DF}=\frac{BE}{DA}$. ∵ E 是 BC 上的 3 等分点，∴ $BE=\frac{1}{3}BC=\frac{1}{3}DA$，即 $\frac{BE}{DA}=\frac{1}{3}$，

∴ $\frac{BF}{DF}=\frac{1}{3}$.

(2) 由(1)得 $\triangle BEF$ 与 $\triangle DAF$ 的相似比为 1∶3，则 $\triangle BEF$ 与 $\triangle DAF$ 的周长的比为 1∶3，面积的比为 1∶9.

4. 解：(1) ∵ $EF\parallel BC$，∴ $\triangle AEF\backsim\triangle ABC$，又 $\frac{EF}{BC}=\frac{3}{5}$，

∴ $\triangle AEF$ 与 $\triangle ABC$ 的相似比为 3∶5.

由题意易知 AG、AD 分别是 $\triangle AEF$ 与 $\triangle ABC$ 的高，则 $\frac{AG}{AD}=\frac{3}{5}$.

(2) 由(1)知 $\triangle AEF$ 与 $\triangle ABC$ 的相似比为 3∶5，则 $\triangle AEF$ 与 $\triangle ABC$ 的面积的比为 9∶25.

5. 解：由题意易知 $PN\parallel BC$，∴ $\triangle APN\backsim\triangle ABC$.

∴ $\frac{PN}{BC}=\frac{AE}{AD}$. 又 $AE=AD-DE=AD-PQ$，$BC=48$，$AD=16$，$PQ:PN=5:9$，∴ $PQ=10$，$PN=18$.

∴ $S_{矩形PQMN}=PN\cdot PQ=18\times10=180$.

6. 解：(1) $\triangle ABE$ 与 $\triangle ECD$ 相似.

∵ $EC\parallel AB$，∴ $\angle A=\angle CED$. ∵ $EB\parallel DC$，

∴ $\angle AEB=\angle D$，∴ $\triangle ABE\backsim\triangle ECD$.

(2) 由题意得 $\triangle ABE$ 与 $\triangle ECD$ 的面积的比为 3∶1，则其相似比为 $\sqrt{3}:1$.

由相似三角形对应线段的比等于相似比，得 $h_1:h_2=\sqrt{3}:1$. ∵ $\frac{1}{2}BE\cdot h_1=3$，$h_1:h_2=\sqrt{3}:1$，

∴ $S_{\triangle BCE}=\frac{1}{2}BE\cdot h_2=\sqrt{3}$.

6.6 图形的位似

练习：

解：(1) 图略.

(2) 连接 OA、OB、OC、OD，分别在线段 OA、OB、OC、OD 的延长线(或反向延长线)上取点 A'、B'、C'、D'，使 $\frac{OA'}{OA}=\frac{OB'}{OB}=\frac{OC'}{OC}=\frac{OD'}{OD}=2$. (图略)

(3) 四边形 $ABCD$ 各顶点的横、纵坐标都乘 2(或 −2)，得到四边形 $A'B'C'D'$ 各顶点的坐标.

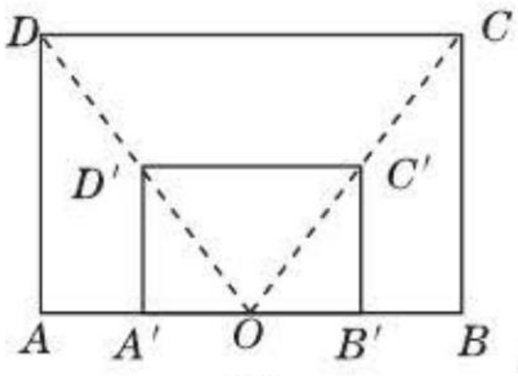
习题 6.6：

1. 解：(1) 以 AB 的中点 O 为位似中心，把矩形 $ABCD$ 按相似比 1∶2 缩小后所得的矩形 $A'B'C'D'$ 如答图 6.6-1①所示.

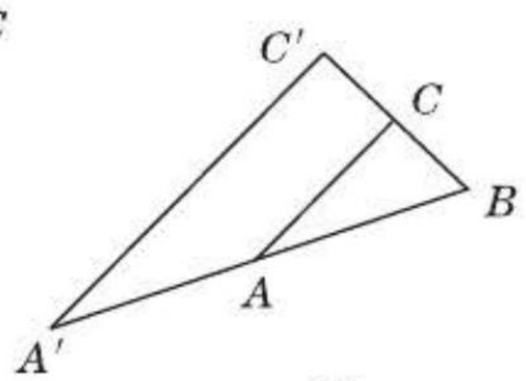
(2) 以点 B 为位似中心，把 $\triangle ABC$ 按相似比 2∶1 放大后所得的 $\triangle A'BC'$ 如答图 6.6-1②所示.

点拨：答案不唯一.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料



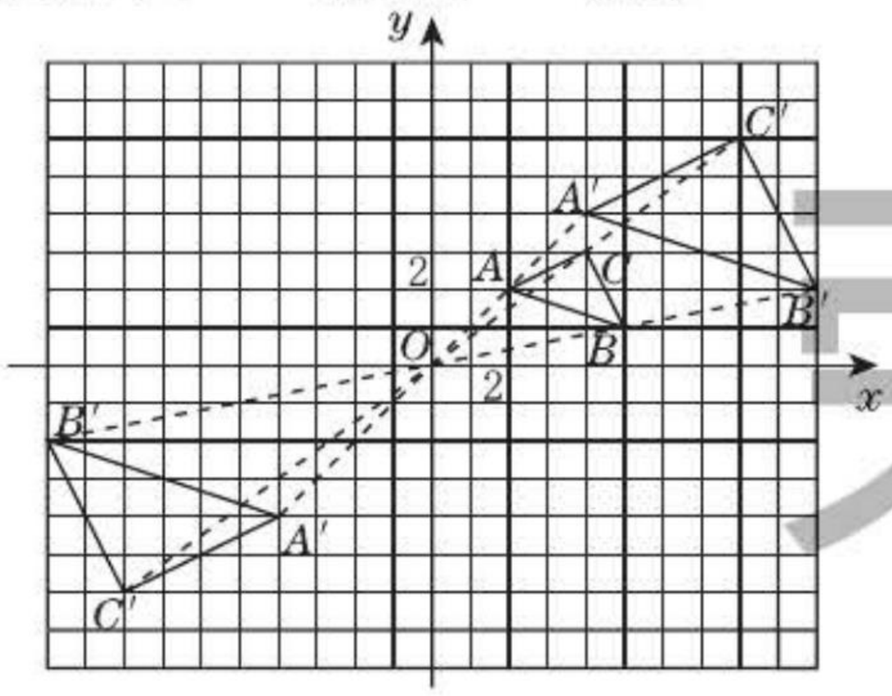
①



②

答图 6.6-1

2. 解:所画 $\triangle A'B'C'$ 如答图 6.6-2 所示.



答图 6.6-2

第一象限内 $\triangle A'B'C'$ 的 3 个顶点的坐标分别为 $A'(4,4)$、$B'(10,2)$、$C'(8,6)$,第三象限内 $\triangle A'B'C'$ 的 3 个顶点的坐标分别为 $A'(-4,-4)$、$B'(-10,-2)$、$C'(-8,-6)$.

6.7 用相似三角形解决问题

练习:

1. 解:设旗杆的高度为 x m.

由题意,得 $\frac{1.68}{x}=\frac{2}{18}$,解得 $x=15.12\approx15.1$.

答:旗杆的高度约为 15.1 m.

2. 解:设这座建筑物的高度为 x m.

由题意,得 $\frac{6}{x}=\frac{4}{36}$,解得 $x=54$.

答:这座建筑物的高度为 54 m.

练习:

1. 解:由 $AB\parallel CD$,得 $\triangle ABP\backsim\triangle CDP$.

$\therefore \frac{PB}{PD}=\frac{AB}{CD}$,即 $\frac{2}{2+4}=\frac{1.70}{CD}$,得 $CD=5.1$.

答:灯杆 CD 的高度是 5.1 m.

2. 解:由题意,得 $AC\parallel BD$,$\therefore \triangle OAC\backsim\triangle OBD$,

$\therefore \frac{OA}{OB}=\frac{AC}{BD}$,即 $\frac{2}{2+1}=\frac{0.8}{BD}$,得 $BD=1.2$.

$\therefore$ 地面上形成的影的面积为 $\pi\times(1.2)^2=1.44\pi(m^2)$.

答:地面上形成的影的面积为 1.44π m^2.

习题 6.7:

1. 解:由题意得 $CA=AD+CD=100+20=120$,

$CB=CE+BE=40+20=60$,

$\therefore \frac{CA}{CE}=\frac{CB}{CD}$.

又$\because \angle C$ 是 $\triangle ABC$ 与 $\triangle EDC$ 的公共角,$\therefore \triangle ABC\backsim\triangle EDC$. $\therefore \frac{AB}{ED}=\frac{CA}{CE}$,即 $\frac{AB}{45}=\frac{120}{40}$,得 $AB=135$.

答:A、B 两地间的距离为 135 m.

2. 解:$\because OA:OD=OB:OC=3:1$,$\angle AOB=\angle DOC$,$\therefore \triangle AOB\backsim\triangle DOC$,$\therefore \frac{AB}{DC}=\frac{OA}{OD}$,即 $\frac{AB}{5}=\frac{3}{1}$,得 $AB=15$.

由题意得 $2x+15=16$,解得 $x=0.5$.

答:零件的壁厚 x 为 0.5 cm.

3. 解:由题意易得 $\angle ACB=\angle ECD$,且 $\angle ABC=\angle EDC=90°$,$\therefore \triangle ABC\backsim\triangle EDC$.

$\therefore \frac{AB}{ED}=\frac{BC}{DC}$,即 $\frac{AB}{1.65}=\frac{60}{3}$,得 $AB=33$.

答:这座建筑物的高度是 33 m.

4. 解:设旗杆 AB 的高度为 x m.

根据题意,得 $\frac{AB-CD}{BC}=\frac{1}{0.8}$,即 $\frac{x-4}{20}=\frac{1}{0.8}$,解得 $x=29$. **答**:旗杆 AB 的高度为 29 m.

5. 解:延长 CE 交直线 DF 于点 M,由题意,得 $EF\parallel AB\parallel CD$,$\therefore \triangle MEF\backsim\triangle MAB$,$\triangle MEF\backsim\triangle MCD$.

$\therefore \frac{EF}{AB}=\frac{MF}{MB}$,即 $\frac{1.7}{2.5}=\frac{MF}{MF+3}$,得 $MF=6.375$.

同时 $\frac{EF}{CD}=\frac{MF}{MD}$,即 $\frac{1.7}{CD}=\frac{6.375}{6.375+3+10}$,得 $CD\approx5.2$. **答**:树高 CD 约为 5.2 m.

6. 解:50 cm = 0.5 m,20 cm = 0.2 m. 由题意得 $EF\parallel BA$,$\therefore \triangle CEF\backsim\triangle CBA$,

且其相似比为 $l:AD=0.5:40=1:80$.

$\therefore \frac{EF}{BA}=\frac{1}{80}$,即 $\frac{0.2}{AB}=\frac{1}{80}$,得 $AB=16$.

答:铁塔的高度为 16 m.

7. 解:5 m = 5 000 mm. $\because AB\parallel A'B'$,$\therefore \triangle OAB\backsim\triangle OA'B'$. 如果焦距是 70 mm,由题意得 $\triangle OAB$ 与 $\triangle OA'B'$ 的相似比为 70 : 5 000 = 7 : 500,

$\therefore \frac{AB}{A'B'}=\frac{7}{500}$,即 $\frac{35}{A'B'}=\frac{7}{500}$,得 $A'B'=2\,500$ mm,

2 500 mm = 2.5 m. 此时拍摄5 m外的景物 $A'B'$ 至少有 2.5 m 宽. 如果焦距是 50 mm,由题意易得 $\triangle OAB$ 与 $\triangle OA'B'$ 的相似比为 50 : 5 000 = 1 : 100,

$\therefore \frac{AB}{A'B'}=\frac{1}{100}$,即 $\frac{35}{A'B'}=\frac{1}{100}$,得 $A'B'=3\,500$ mm,

3 500 mm = 3.5 m.

此时拍摄 5 m 外的景物 $A'B'$ 至少有3.5 m宽.

8. 解:连接 EF 并延长,分别交 AB、CD 于点 P、Q.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

$\because BP // DQ$，$\therefore \triangle FBP \backsim \triangle FDQ$. $\therefore \frac{FP}{FQ}=\frac{BP}{DQ}$.

由题意易得 $BP=6-1.6=4.4$，$DQ=9-1.6=7.4$，$FQ=FP+PQ$，且 $FP=HA$，$PQ=AC$，

$\therefore \frac{AH}{AH+6}=\frac{4.4}{7.4}$，得 $AH=8.8$.

答：AH 的长为 8.8 m.

复习题

1. 解：240 cm = 2.4 m，18 km = 18 000 m. 规划图的比例尺 = 图上距离：实际距离 = 2.4 : 18 000 = 1 : 7 500.

2. 解：$\because EF // BC$，$\therefore \triangle AEF \backsim \triangle ABC$，$\therefore \frac{AE}{AB}=\frac{EF}{BC}$，即 $\frac{3.6}{3.6+2.4}=\frac{EF}{BD+2.8}$.

$\because EF // BC$，$FD // AB$，$\therefore$ 四边形 $BDFE$ 是平行四边形，$\therefore EF=BD$，$\therefore \frac{3.6}{3.6+2.4}=\frac{BD}{BD+2.8}$，得 $BD=4.2$.

3. 解：(1) $\triangle ABC$ 与 $\triangle A'B'C'$ 相似.

由题意得 $\triangle ABC$ 和 $\triangle A'B'C'$ 的三个角都分别为 40°、60°、80°. 两角分别相等的两个三角形相似.

(2) $\triangle ABC$ 与 $\triangle A'B'C'$ 相似.

由题意得 $\frac{8}{10}=\frac{12}{15}$，夹角均为 60°. 两边成比例且夹角相等的两个三角形相似.

(3) $\triangle ABC$ 与 $\triangle A'B'C'$ 相似，由题意得 $\frac{8}{24}=\frac{6}{18}=\frac{4}{12}$. 三边成比例的两个三角形相似.

4. 解：①若两个相似三角形的相似比为 4 : 2 = 2 : 1，则另一个三角形框架的其他两边的长分别为 3 和 4.

②若两个相似三角形的相似比为 6 : 2 = 3 : 1，则另一个三角形框架的其他两边的长分别为 $\frac{4}{3}$ 和 $\frac{8}{3}$.

③若两个相似三角形的相似比为 8 : 2 = 4 : 1，则另一个三角形框架的其他两边的长分别为 1 和 $\frac{3}{2}$.

5. 解：要使 $\triangle AFE \backsim \triangle ABC$，需要添加条件：$\frac{AE}{AC}=\frac{AF}{AB}$.

点拨：本题答案不唯一，符合题意即可.

6. 解：与 $\triangle ABC$ 相似的三角形有 3 个.

$\triangle AMN \backsim \triangle ABC$，$\triangle DMO \backsim \triangle ABC$，$\triangle DBE \backsim \triangle ABC$.

理由如下：$\because MN // BC$，$\therefore \triangle AMN \backsim \triangle ABC$；$\because DE // AC$，$\therefore \triangle DBE \backsim \triangle ABC$；$\because DO // AN$，$\therefore \triangle DMO \backsim \triangle AMN$.

又 $\because \triangle AMN \backsim \triangle ABC$，$\therefore \triangle DMO \backsim \triangle ABC$.

7. 解：①若 $\triangle ADE \backsim \triangle ABC$，则 $\frac{AE}{AC}=\frac{AD}{AB}=\frac{1}{2}$，即点 E 为 AC 的中点，$\therefore AE=\frac{1}{2}AC=\frac{1}{2}\times 8=4$.

②若 $\triangle ADE \backsim \triangle ACB$，则 $\frac{AE}{AB}=\frac{AD}{AC}$，即 $\frac{AE}{6}=\frac{\frac{1}{2}\times 6}{8}$，得 $AE=\frac{9}{4}$.

8. 解：$\triangle ABC$ 与 $\triangle EAB$ 相似.

理由如下：$\because$ 四边形 $ABCD$ 是矩形，$\therefore \angle CBA=\angle BAE=90°$，$AD=BC$.

又 $\because AB:BC=1:2$，$3EA=ED$，$\therefore EA=\frac{1}{4}AD=\frac{1}{2}AB$，$\therefore \frac{AB}{EA}=\frac{BC}{AB}$，$\therefore \triangle ABC \backsim \triangle EAB$（两边成比例且夹角相等的两个三角形相似）.

9. 解：过 O 点作 $OM \perp AB$ 于 M，$ON \perp A'B'$ 于 N. 则 $OM=32$，$ON=20$.

$\because AB // A'B'$，$\therefore \triangle OAB \backsim \triangle OA'B'$. 易知 $\triangle OAB$ 与 $\triangle OA'B'$ 的相似比为 $OM:ON=32:20=8:5$.

$\therefore \frac{AB}{A'B'}=\frac{8}{5}$，即 $\frac{30}{A'B'}=\frac{8}{5}$，得 $A'B'=\frac{75}{4}$. $\therefore$ 像 $A'B'$ 的长是 $\frac{75}{4}$ cm.

10. 解：$\triangle BCD$ 与 $\triangle B'C'D'$ 相似.

理由如下：$\because \angle A=\angle A'$，$\frac{AB}{A'B'}=\frac{DA}{D'A'}$，$\therefore \triangle DAB \backsim \triangle D'A'B'$. $\therefore \frac{AB}{A'B'}=\frac{BD}{B'D'}$. $\therefore \frac{BD}{B'D'}=\frac{BC}{B'C'}=\frac{CD}{C'D'}$. $\therefore \triangle BCD \backsim \triangle B'C'D'$.

11. 解：有 4 对相似三角形.

$\triangle ABC \backsim \triangle DEA$，$\triangle ABG \backsim \triangle FAG$，$\triangle FCA \backsim \triangle FAG$，$\triangle ABG \backsim \triangle FCA$.

理由如下：由全等三角形也是相似三角形可知 $\triangle ABC \backsim \triangle DEA$. 由题意得 $\angle B=\angle FAG=45°$，且 $\angle AGB=\angle FGA$，$\therefore \triangle ABG \backsim \triangle FAG$；由题意得 $\angle C=\angle FAG=45°$，且 $\angle AFC=\angle GFA$，$\therefore \triangle FCA \backsim \triangle FAG$；由 $\triangle ABG \backsim \triangle FAG$，$\triangle FCA \backsim \triangle FAG$，易得 $\triangle ABG \backsim \triangle FCA$.

12. 解：$\because EF // BC$，$\therefore \triangle AEF \backsim \triangle ABC$.

$\therefore \frac{AF}{AC}=\frac{AE}{AB}=\frac{AE}{AE+EB}=\frac{1}{3}$.

$\therefore \frac{AF}{FC}=\frac{1}{2}$.

$\therefore S_{\triangle AEF}:S_{\triangle CEF}=1:2$.

$\because S_{\triangle AEF}=3$，$\therefore S_{\triangle CEF}=6$.

$\because EF // AD$，$\therefore \triangle CEF \backsim \triangle CDA$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

$\because \frac{CF}{AC}=\frac{2}{3}$,

$\therefore S_{\triangle CEF}:S_{\triangle CAD}=4:9$,

$\therefore S_{\triangle CAD}=13.5$.

13. 解:有 3 对相似三角形.

$\triangle ABE\backsim\triangle DEF$, $\triangle ABE\backsim\triangle EBF$, $\triangle EBF\backsim\triangle DEF$.

理由如下:设正方形 $ABCD$ 的边长为 $4a$,则 $AE=DE=2a$, $DF=a$, $CF=3a$.

在 $\mathrm{Rt}\triangle BCF$ 中, $BF=\sqrt{BC^2+CF^2}=5a$,

在 $\mathrm{Rt}\triangle ABE$ 中, $BE=\sqrt{AB^2+AE^2}=2\sqrt{5}a$,

在 $\mathrm{Rt}\triangle DEF$ 中, $EF=\sqrt{DF^2+DE^2}=\sqrt{5}a$.

$\because BE^2+EF^2=BF^2$, $\therefore \triangle BEF$ 为直角三角形,且 $\angle BEF=90°$.

$\because \frac{AE}{DF}=\frac{2a}{a}=2$, $\frac{AB}{DE}=\frac{4a}{2a}=2$,

$\therefore \frac{AE}{DF}=\frac{AB}{DE}$. 又 $\angle A=\angle D=90°$,

$\therefore \triangle ABE\backsim\triangle DEF$.

又 $\angle A=\angle BEF=90°$, $\frac{AB}{BE}=\frac{AE}{EF}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$,

$\therefore \triangle ABE\backsim\triangle EBF$.

$\therefore \triangle EBF\backsim\triangle DEF$.

14. 解:(1)根据题意,得 $A_1(1,3)$、$O_1(-1,0)$、$B_1(2,0)$.

(2)根据题意,得 $A_2(-2,-3)$, $B_2(-3,0)$.

(3)根据题意,得 $A_3(2,-3)$.

(4)根据题意,得 $A_4(4,6)$、$B_4(6,0)$.

15. 解:$\triangle ADE$ 与 $\triangle ABC$ 相似.

理由:$\because$ BD、CE 是 $\triangle ABC$ 的高, $\therefore \angle ADB=\angle AEC=90°$.

又 $\angle A$ 为公共角, $\therefore \triangle ADB\backsim\triangle AEC$.

$\therefore \frac{AD}{AB}=\frac{AE}{AC}$.

$\therefore \triangle ADE\backsim\triangle ABC$.

16. 解:$\angle BED=\angle ABC$.

理由如下:$\because \angle ACB=90°$, $CE\perp AD$,

$\therefore \angle ACD=\angle CED$.

又$\because \angle CDA=\angle EDC$,

$\therefore \triangle ACD\backsim\triangle CED$.

$\therefore \frac{CD}{ED}=\frac{AD}{CD}$.

$\because D$ 是 BC 的中点, $\therefore CD=BD$.

$\therefore \frac{BD}{ED}=\frac{AD}{BD}$.

又$\because \angle BDE=\angle ADB$, $\therefore \triangle BDE\backsim\triangle ADB$.

$\therefore \angle BED=\angle ABC$.

17. 解:由题意,得 $\frac{1}{2}AC\cdot BC=1.5$,即 $\frac{1}{2}\times 1.5\times BC=1.5$,

可得 $BC=2$, $\therefore AB=2.5$.

甲:由四边形 $CDEF$ 是正方形,易得 $\angle ADE=\angle EFB=90°$, $\angle AED=\angle EBF$, $\therefore \triangle ADE\backsim\triangle EFB$.

$\therefore \frac{AD}{EF}=\frac{DE}{FB}$.

又$\because AD=1.5-CD$, $FB=2-CF$.

且 $CD=DE=EF=CF$, $\therefore \frac{1.5-DE}{DE}=\frac{DE}{2-DE}$,得 $DE=\frac{6}{7}$.

即按题图①加工成的正方形桌面的边长是 $\frac{6}{7}$ m.

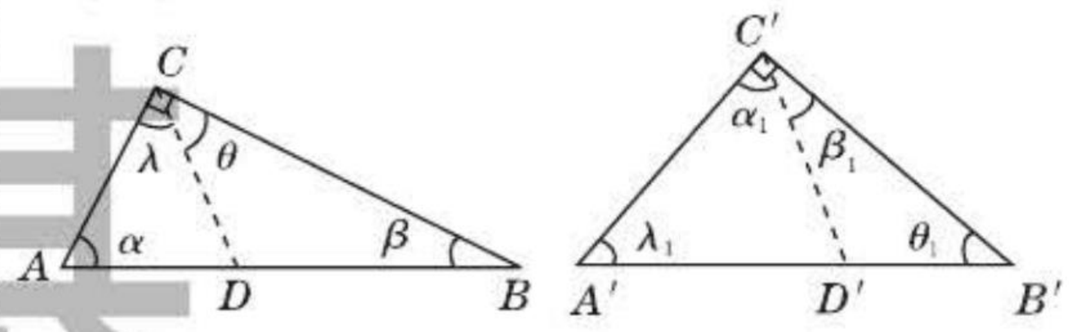
乙:设正方形 $DEFG$ 的边长为 a m,$\because DE/\!/AB$, $\therefore \triangle DEC\backsim\triangle ABC$, $\therefore \frac{EC}{BC}=\frac{DC}{AC}=\frac{DE}{AB}$,即 $\frac{EC}{2}=\frac{DC}{1.5}=\frac{a}{2.5}$, $\therefore EC=\frac{4}{5}a$, $DC=\frac{3}{5}a$. 易得 $\triangle DCE\backsim\triangle EFB$,

$\therefore \frac{DC}{EF}=\frac{DE}{EB}$,即 $\frac{\frac{3}{5}a}{a}=\frac{a}{2-\frac{4}{5}a}$,解得 $a=\frac{30}{37}$,即按题图②加工成的正方形桌面的边长是 $\frac{30}{37}$ m.

$\because \frac{6}{7}\text{ m}>\frac{30}{37}\text{ m}$, $\therefore$ 甲加工的正方形面积较大.

18. 解:能.

如答图 6-1,分割时满足 $\alpha=\alpha_1$, $\lambda=\lambda_1$, $\theta=\theta_1$, $\beta=\beta_1$.



答图 6-1

19. 解:猜想:当 $\frac{AF}{AD}=\frac{1}{n+1}$ 时, $\frac{AE}{AC}=\frac{1}{2n+1}$.

理由如下:过点 B 作 $BG/\!/AC$ 交 AD 的延长线于 G.

则 $\angle CAD=\angle G$, $\angle C=\angle GBD$.

又$\because AD$ 是 $\triangle ABC$ 的中线, $\therefore CD=BD$, $\therefore \triangle ADC\cong\triangle GDB$, $\therefore AD=GD$, $AC=GB$.

易得 $\triangle AFE\backsim\triangle GFB$, $\therefore \frac{AF}{GF}=\frac{AE}{GB}$.

$\because \frac{AF}{AD}=\frac{1}{n+1}$, $\therefore \frac{AF}{GF}=\frac{1}{2n+1}$, $\therefore \frac{AE}{GB}=\frac{1}{2n+1}$.

$\because GB=AC$, $\therefore \frac{AE}{AC}=\frac{1}{2n+1}$.

20. 解:(1)作 $OQ\perp EF$ 于点 Q.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

$\because \angle ACB=\angle ADE=90°,\angle A=\angle A,$

$\therefore \triangle ACB\backsim\triangle ADE.\ \therefore \frac{AC}{AD}=\frac{CB}{DE}.$

$\because AC=\sqrt{AB^2-BC^2}=4,$

$\therefore \frac{4}{5+3}=\frac{3}{DE},\therefore DE=6.$

$\therefore \odot O$ 的半径为3.

$\because \angle OQE=\angle ADE=90°,\angle OEQ=\angle AED,$

$\therefore \triangle OQE\backsim\triangle ADE.$

$\therefore \frac{OQ}{AD}=\frac{OE}{AE}.$

$\because AE=\sqrt{AD^2+DE^2}=10,$

$\therefore \frac{OQ}{8}=\frac{3}{10}.$

$\therefore OQ=2.4$,即圆心 O 到弦 EF 的距离为2.4.

(2)连接 $EG.\because AE=10,AC=4,\therefore CE=6.$

$\therefore CE=DE.\because ED$ 是$\odot O$ 的直径,$\therefore \angle EGD=90°$,即 $EG\perp CD.\therefore CG=DG.\therefore G$ 是 CD 的中点.

21. 解:(1)$\because DE/\!/BC,\therefore \triangle ADE\backsim\triangle ABC.$ 又$\because D$ 是 AB 的中点,

$\therefore \triangle ADE$ 与$\triangle ABC$ 的相似比为1∶2,

$\therefore S_{\triangle ADE}:S=1:4.$

易得 E 为 AC 的中点,$\therefore S_{\triangle ADE}=S'.$

$\therefore \frac{S'}{S}=\frac{1}{4}.$

(2)$\because AD=x,AB=4,$

$\therefore \triangle ADE$ 与$\triangle ABC$ 的相似比为 $x:4,$

$\therefore S_{\triangle ADE}:S=x^2:16.$

易得 $AE:AC=x:4,$

$\therefore S_{\triangle ADE}:S'=x:(4-x).$

$\therefore S':S=x(4-x):16.$

$\therefore y$ 与 x 的函数表达式为 $y=-\frac{x^2}{16}+\frac{x}{4}(0<x<4).$

(3)$S'<S.$ 理由如下:

$y=-\frac{x^2}{16}+\frac{x}{4}=-\frac{1}{16}(x-2)^2+\frac{1}{4}.$

$\because 0<x<4,\therefore 0<y\leqslant\frac{1}{4}.$

$\therefore S'<S.$

第7章 锐角三角函数

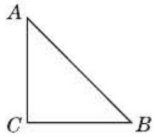
7.1 正 切

练习:

1. 解:①在 Rt$\triangle ABC$ 中,$\tan A=\frac{BC}{AC}=\frac{5}{12},\tan B=\frac{AC}{BC}=\frac{12}{5}.$

②在 Rt$\triangle A_1B_1C_1$ 中,$B_1C_1=\sqrt{A_1B_1{}^2-A_1C_1{}^2}=\sqrt{7^2-5^2}=2\sqrt{6},\tan A_1=\frac{B_1C_1}{A_1C_1}=\frac{2\sqrt{6}}{5},\tan B_1=\frac{A_1C_1}{B_1C_1}=\frac{5}{2\sqrt{6}}=\frac{5\sqrt{6}}{12}.$

2. 解:如答图7.1-1,在等腰直角三角形 ABC 中,$\angle C=90°,AC=BC,$ 且$\angle A=45°$,所以 $\tan A=\frac{BC}{AC}=\frac{BC}{BC}=1$,即 $\tan45°=1.$



答图7.1-1

练习:

1. 解:(1)$\tan38°\approx0.78.$

(2)$\tan51.34°\approx1.25.$

(3)$\tan12°6'\approx0.21.$

2. 解:由题意得 $\tan B=\frac{AC}{BC}$,则 $BC=\frac{AC}{\tan B}=\frac{4}{\tan25°}\approx8.58.$

习题7.1:

1. 解:①在 Rt$\triangle ACB$ 中,$\tan A=\frac{BC}{AC}=\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3},\tan B=\frac{AC}{BC}=\frac{\sqrt{3}}{1}=\sqrt{3}.$

②在 Rt$\triangle A_1C_1B_1$ 中,$A_1C_1=\sqrt{A_1B_1{}^2-B_1C_1{}^2}=\sqrt{5^2-3^2}=4,\tan A_1=\frac{B_1C_1}{A_1C_1}=\frac{3}{4},\tan B_1=\frac{A_1C_1}{B_1C_1}=\frac{4}{3}.$

2. 解:由题意得 $\tan A=\frac{BC}{AC}$,即$\frac{2}{3}=\frac{4}{AC}$,所以 $AC=6.$

3. 解:(1)$\tan15°\approx0.27.$

(2)$\tan48°3'\approx1.11.$

4. 解:由题意知,$\tan A=\frac{BC}{AC}$,则 $BC=AC\cdot\tan A=34\times\tan30°\approx19.63.$

7.2 正弦、余弦

练习:

1. (1)$CD;AB$ (2)$BC;AC$ (3)$AC;CD$ (4)$AD;BC;CD;BC$

2. 解:①在 Rt$\triangle ABC$ 中,$AC=\sqrt{AB^2-BC^2}=\sqrt{5^2-2^2}=\sqrt{21},\sin A=\frac{BC}{AB}=\frac{2}{5},\sin B=\frac{AC}{AB}=\frac{\sqrt{21}}{5},\cos A=\frac{AC}{AB}=\frac{\sqrt{21}}{5},\cos B=\frac{BC}{AB}=\frac{2}{5}.$

②在 Rt$\triangle A_1B_1C_1$ 中,$A_1B_1=\sqrt{A_1C_1{}^2+B_1C_1{}^2}=\sqrt{6^2+4^2}=2\sqrt{13},\sin A_1=\frac{B_1C_1}{A_1B_1}=\frac{4}{2\sqrt{13}}=$

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

$\frac{2\sqrt{13}}{13}$, $\sin B_1=\frac{A_1C_1}{A_1B_1}=\frac{6}{2\sqrt{13}}=\frac{3\sqrt{13}}{13}$,

$\cos A_1=\frac{A_1C_1}{A_1B_1}=\frac{6}{2\sqrt{13}}=\frac{3\sqrt{13}}{13}$, $\cos B_1=\frac{B_1C_1}{A_1B_1}=\frac{4}{2\sqrt{13}}=\frac{2\sqrt{13}}{13}$.

3. 解:(1) $\sin 36°\approx 0.59$. (2) $\cos 36°\approx 0.81$.

(3) $\sin 12.5°\approx 0.22$.

(4) $\cos 12.5°\approx 0.98$.

练习:

1. 解:根据勾股定理,得

$AB=\sqrt{AC^2+BC^2}=\sqrt{8^2+6^2}=10$.

根据正弦、余弦的定义,得

$\sin A=\frac{BC}{AB}=\frac{3}{5}$, $\cos A=\frac{AC}{AB}=\frac{4}{5}$,

$\sin B=\frac{AC}{AB}=\frac{4}{5}$, $\cos B=\frac{BC}{AB}=\frac{3}{5}$.

2. 解:由题意知, $\sin A=\frac{BC}{AB}$, $\cos A=\frac{AC}{AB}$, 则 $BC=AB\cdot\sin A=4\times\sin 68°\approx 3.71$, $AC=AB\cdot\cos A=4\times\cos 68°\approx 1.50$.

习题 7.2:

1. 解:① 在 Rt $\triangle ABC$ 中, $AB=\sqrt{AC^2+BC^2}=\sqrt{1^2+3^2}=\sqrt{10}$, $\sin A=\frac{BC}{AB}=\frac{3}{\sqrt{10}}=\frac{3\sqrt{10}}{10}$,

$\sin B=\frac{AC}{AB}=\frac{1}{\sqrt{10}}=\frac{\sqrt{10}}{10}$,

$\cos A=\frac{AC}{AB}=\frac{1}{\sqrt{10}}=\frac{\sqrt{10}}{10}$, $\cos B=\frac{BC}{AB}=\frac{3}{\sqrt{10}}=\frac{3\sqrt{10}}{10}$.

② 在 Rt $\triangle DEF$ 中, $DE=\sqrt{DF^2-EF^2}=\sqrt{4^2-3^2}=\sqrt{7}$, $\sin D=\frac{EF}{DF}=\frac{3}{4}$,

$\sin F=\frac{DE}{DF}=\frac{\sqrt{7}}{4}$,

$\cos D=\frac{DE}{DF}=\frac{\sqrt{7}}{4}$, $\cos F=\frac{EF}{DF}=\frac{3}{4}$.

2. 解:(1) $\sin 15°\approx 0.26$, $\cos 15°\approx 0.97$.

(2) $\sin 72°\approx 0.95$, $\cos 72°\approx 0.31$.

(3) $\sin 55°12'\approx 0.82$, $\cos 55°12'\approx 0.57$.

(4) $\sin 22.5°\approx 0.38$, $\cos 22.5°\approx 0.92$.

3. 解:(1) 在 Rt $\triangle ABC$ 中, $AB=\sqrt{AC^2+BC^2}=\sqrt{AC^2+AC^2}=\sqrt{2}AC$, $\cos A=\frac{AC}{AB}=\frac{AC}{\sqrt{2}AC}=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

(2) 由(1)知, $AB=\sqrt{2}AC$, 即 $4=\sqrt{2}AC$, 所以 $AC=2\sqrt{2}$. 又因为 $AC=BC$, 所以 $BC=2\sqrt{2}$.

4. 解:由已知得, $\sin A=\frac{BC}{AB}$, $\cos A=\frac{AC}{AB}$, 则 $BC=AB\cdot\sin A=5\times\sin 50°\approx 3.83$,

$AC=AB\cdot\cos A=5\times\cos 50°\approx 3.21$.

5. 解:由 $\cos A=\frac{3}{5}$, $\angle C=90°$,

可设 $AC=3x$, $AB=5x$.

由勾股定理,得 $BC=\sqrt{AB^2-AC^2}=4x$.

故 $\sin A=\frac{BC}{AB}=\frac{4}{5}$.

7.3 特殊角的三角函数

练习:

1. 解:(1) 原式 $=1-\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$.

(2) 原式 $=\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2}=\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{1}{3}}=\frac{3\sqrt{2}}{2}$.

2. 解:在 Rt $\triangle BCD$ 中, $\cos B=\frac{BD}{BC}=\frac{\sqrt{3}}{2}$, 所以 $\angle B=30°$. 所以 $\angle BCD=90°-\angle B=60°$.

在 Rt $\triangle ABC$ 中, $\angle A=90°-\angle B=60°$; 在 Rt $\triangle ACD$ 中, $\angle ACD=90°-\angle A=30°$.

习题 7.3:

1. 解:(1) 原式 $=2\times\frac{1}{2}+3\times\frac{1}{2}-4\times 1=1+\frac{3}{2}-4=-\frac{3}{2}$.

(2) 原式 $=\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{6}}{4}+\frac{\sqrt{2}}{4}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$.

(3) 原式 $=\frac{\frac{1}{2}-1}{\frac{1}{2}-2\times 1}=\frac{-\frac{1}{2}}{-\frac{3}{2}}=\frac{1}{3}$.

2. 解:(1) 由已知,得 $\cos\theta=\frac{1}{2}$, 所以 $\theta=60°$.

(2) 由已知,得 $\sin\theta=\frac{\sqrt{2}}{2}$, 所以 $\theta=45°$.

3. 解:在 Rt $\triangle ABC$ 中, $\tan\angle BAC=\frac{BC}{AC}$, 即 $\tan 30°=\frac{15}{AC}$, 所以 $AC=\frac{15}{\tan 30°}=15\sqrt{3}$.

在 Rt $\triangle ACD$ 中, $\angle D=\angle DAC=45°$, $\sin D=\frac{AC}{AD}$,

即 $\sin 45°=\frac{15\sqrt{3}}{AD}$, 所以 $AD=\frac{15\sqrt{3}}{\sin 45°}=15\sqrt{6}$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

7.4 由三角函数值求锐角

练习：

1. 解：(1)∵ $\sin A=\frac{1}{4}$，∴ $\angle A\approx 14.48°$.

(2)∵ $\cos A=0.23$，∴ $\angle A\approx 76.70°$.

(3)∵ $\tan A=10$，∴ $\angle A\approx 84.29°$.

2. 解：由题意，得 $OA'=OA=3.5$ m，$AB=1$ m，∴ $OB=OA-AB=3.5-1=2.5$(m)．∵ $\angle A'BO=90°$，∴ $\cos\angle AOA'=\frac{OB}{OA'}=\frac{2.5}{3.5}=\frac{5}{7}$，∴ $\angle AOA'\approx 44.4°$.

习题 7.4：

1. 解：(1)∵ $\sin A=0.82$，∴ $\angle A\approx 55.08°$.

(2)∵ $\cos A=\frac{3}{7}$，∴ $\angle A\approx 64.62°$.

(3)∵ $\tan A=\frac{20}{3}$，∴ $\angle A\approx 81.47°$.

2. 解：在 Rt△ACD 中，$\tan C=\frac{AD}{CD}$，即 $AD=CD\times\tan C=CD\times\tan 35°$．在 Rt△$BAD$ 中，$\tan B=\frac{AD}{BD}=\frac{CD\times\tan 35°}{BD}$.

∵ $CD=16$，$BD=12$，

∴ $\tan B=\frac{16\times\tan 35°}{12}\approx 0.9336$.

∴ $\angle B\approx 43°$.

7.5 解直角三角形

练习：

解：(1) $c=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{9^2+6^2}=\sqrt{117}=3\sqrt{13}$，用计算器计算，得 $c\approx 10.8$. 由题意，得 $\tan A=\frac{a}{b}=\frac{9}{6}=1.5$，用计算器计算，得 $\angle A\approx 56.3°$.

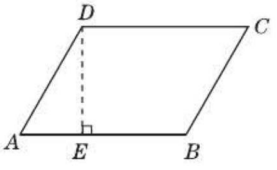
∴ $\angle B\approx 90°-56.3°=33.7°$.

(2) $\angle B=90°-\angle A=90°-18°=72°$. ∵ $\sin A=\frac{a}{c}$，∴ $a=c\times\sin A=13\times\sin 18°\approx 4.0$.

∵ $\cos A=\frac{b}{c}$，∴ $b=c\times\cos A=13\times\cos 18°\approx 12.4$.

练习：

1. 解：如答图 7.5-1，过点 D 作 $DE\perp AB$，垂足为 E，在 Rt△ADE 中，$\sin A=\frac{DE}{AD}$，即 $\sin 60°=\frac{DE}{6}$，∴ $DE=3\sqrt{3}$. ∴ $S_{□ABCD}=AB\cdot DE=8\times 3\sqrt{3}=24\sqrt{3}$.

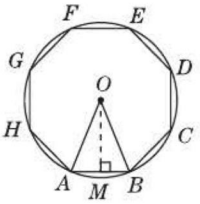


答图 7.5-1

2. 解：如答图 7.5-2，∵ 八边形 $ABCDEFGH$ 是正八边形，∴ $\angle AOB=\frac{360°}{8}=45°$.

过点 O 作 $OM\perp AB$，垂足为 M.

在 Rt△AMO 中，$\angle AOM=\frac{1}{2}\angle AOB=22.5°$，$OA=12$，∴ $AM=OA\times\sin 22.5°=12\times\sin 22.5°$，∴ 正八边形 $ABCDEFGH$ 的边长 $AB=2AM=2\times 12\times\sin 22.5°\approx 9.2$.



答图 7.5-2

习题 7.5：

1. 解：由勾股定理，得 $a=\sqrt{c^2-b^2}=\sqrt{4^2-(2\sqrt{3})^2}=2$.

由题意，得 $\sin A=\frac{a}{c}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$，

∴ $\angle A=30°$. ∴ $\angle B=90°-\angle A=60°$.

2. 解：(1)由已知得 $\cos B=\frac{BC}{AB}$，$\sin B=\frac{AC}{AB}$，则 $BC=AB\cdot\cos B=4\times\cos 25°\approx 3.6$，

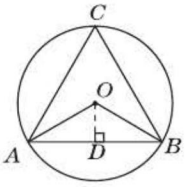
$AC=AB\cdot\sin B=4\times\sin 25°\approx 1.7$.

(2)易得 $\sin A=\frac{BC}{AB}=\frac{4.2}{5}=0.84$. 故 $\angle A\approx 57.1°$.

3. 解：如答图 7.5-3，∵ 三角形 ABC 是正三角形.

∴ $\angle AOB=\frac{360°}{3}=120°$.

过点 O 作 $OD\perp AB$，垂足为 D，在 Rt△AOD 中，$\angle AOD=\frac{1}{2}\angle AOB=60°$，$OA=20$，

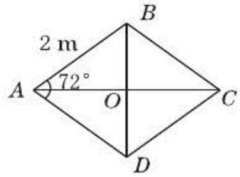


答图 7.5-3

∴ $OD=OA\times\cos 60°=20\times\frac{1}{2}=10$，$AD=OA\times\sin 60°=20\times\sin 60°=10\sqrt{3}$.

∴ 正三角形 ABC 的边长 $AB=2AD=20\sqrt{3}\approx 34.6$. ∴ $S_{△ABC}=3S_{△AOB}=3\times\frac{1}{2}\times AB\times OD=3\times\frac{1}{2}\times 20\sqrt{3}\times 10\approx 519.6$.

4. 解：如答图 7.5-4，已知在菱形 $ABCD$ 中，$AB=2$ m，$\angle BAD=72°$，设 AC 与 BD 相交于点 O，∴ $AC\perp BD$，$\angle BAO=36°$，$\sin\angle BAO=\frac{BO}{AB}$，即



答图 7.5-4

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

$\sin36° = \frac{BO}{2}$,

$\therefore BO = 2 \times \sin36°$, $\therefore BD = 2BO = 2 \times 2 \times \sin36° \approx 2.35$(m).

同理,得 $AC = 2AO = 2 \times 2 \times \cos36° \approx 3.24$(m).

$\therefore 4AB + BD + AC \approx 4 \times 2 + 2.35 + 3.24 = 13.59 \approx 13.6$(m). **答**:焊接这个钢架约需 13.6 m 长的钢材.

7.6 用锐角三角函数解决问题

练习:

1. 解:设这条公路的坡角为 α,则 $\tan\alpha = 1 : 26 = \frac{1}{26}$,

$\therefore \alpha \approx 2.2026°$. $\therefore$ 沿着这条公路每前进 100 m 所上升的高度为 $100 \times \sin2.202\,6° \approx 3.8$(m).

2. 解:设坡道的坡角为 α,则 $\tan\alpha = 1 : 3.5 = \frac{1}{3.5}$,

$\therefore \alpha \approx 15.9454°$. $\therefore$ 相邻两树间的坡道距离为 $\frac{6}{\cos15.945\,4°} \approx 6.2$(m).

练习:

1. 解:由题意知,$AB' = AB = 90$ cm.

作 $B'C \perp AB$,垂足为 C, $\therefore AC = AB' \times \cos\angle BAB' = 90 \times \cos11° \approx 88.3$(cm),

$\therefore BC = AB - AC \approx 90 - 88.3 = 1.7 \approx 2$(cm).

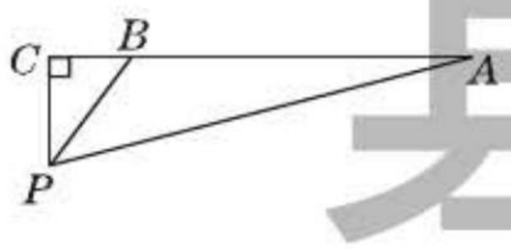
答:这时摆球 B' 相对于最低点 B 升高了 2 cm.

2. 解:设此时跷跷板与地面的夹角为 α,则由题意,得 $\sin\alpha = \frac{1.5}{4} = 0.375$, $\therefore \alpha \approx 22.0°$.

答:此时跷跷板与地面的夹角为 22.0°.

练习:

1. 解:根据题意可画出草图,如答图 7.6-1 所示. 由题意知 $AB = 10$ km $= 10\,000$ m. 设飞机飞行的高度为 x m,



答图 7.6-1

则在 Rt$\triangle PCB$ 中, $\tan\angle CBP = \frac{CP}{CB}$, 即 $\tan52° = \frac{x}{CB}$, $\therefore CB = \frac{x}{\tan52°}$.

在 Rt$\triangle PCA$ 中, $\tan\angle CAP = \frac{CP}{AC}$, 即 $\tan15° = \frac{x}{AC}$, $\therefore AC = \frac{x}{\tan15°}$. $\because AC - CB = 10\,000$, 即 $\frac{x}{\tan15°} - \frac{x}{\tan52°} = 10\,000$, $\therefore x \approx 3\,389$.

答:飞机飞行的高度约为 3 389 m.

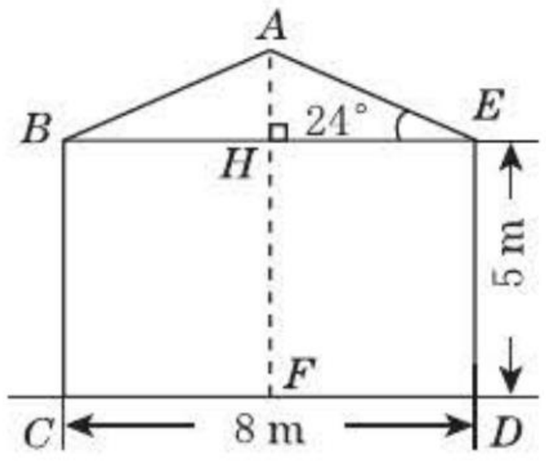
2. 解:在 Rt$\triangle ABD$ 中, $\sin\angle ABD = \frac{AD}{AB}$, 即 $\sin65° = \frac{AD}{AB}$, $\therefore AD = AB \times \sin65°$.

在 Rt$\triangle ACD$ 中, $\sin\angle ACD = \frac{AD}{AC}$, $\therefore AC = \frac{AD}{\sin40°} = \frac{AB \times \sin65°}{\sin40°} = \frac{4 \times \sin65°}{\sin40°} \approx 5.6$(m).

答:调整后的楼梯 AC 的长约是 5.6 m.

习题 7.6:

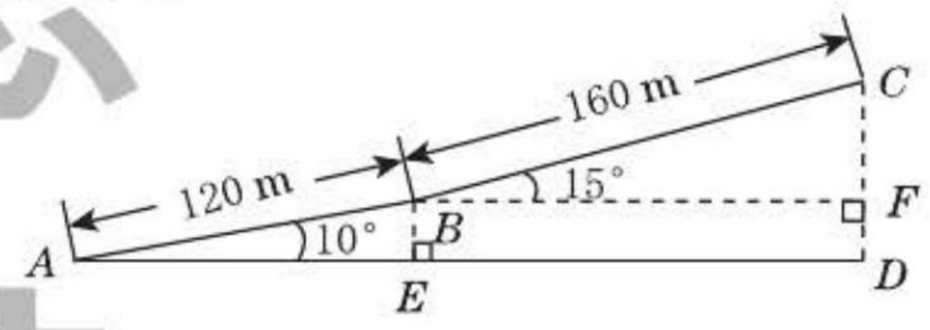
1. 解:过点 A 作 $AH \perp BE$ 于点 H,并延长 AH 交 CD 于点 F,则 $AF \perp CD$. 如答图 7.6-2.



答图 7.6-2

因为四边形 $BCDE$ 是矩形,所以 $BE = CD = 8$ m,易知 $BH = EH = 4$ m. 在 Rt$\triangle AHE$中, $AH = EH \cdot \tan\angle AEH = 4 \times \tan24° \approx 1.78$(m). 所以 $AF = AH + HF = AH + DE \approx 1.78 + 5 \approx 6.8$(m). **答**:屋顶相对于地面的高度约是 6.8 m.

2. 解:如答图 7.6-3. 过点 B 作 $BE \perp AD$ 于 E, $BF \perp CD$ 于 F.



答图 7.6-3

在 Rt$\triangle AEB$ 中, $\sin A = \frac{BE}{AB}$, 所以 $BE = AB \cdot \sin A = 120 \times \sin10° \approx 20.84$(m).

在 Rt$\triangle BFC$ 中, $\sin\angle CBF = \frac{FC}{CB}$, 所以 $FC = CB \cdot \sin\angle CBF = 160 \times \sin15° \approx 41.41$(m), 所以 $DC = DF + FC = BE + FC \approx 20.84 + 41.41 \approx 62.3$(m).

答:小明沿垂直方向升高了约 62.3 m.

3. 解:由题意,得 $\tan35° = \frac{HB}{20}$, $\therefore HB = 20 \times \tan35° \approx 14.00$(m). $\therefore HD = HB + BD \approx 14.00 + 1.6 = 15.6$(m), $\therefore$ 树的高度约为 15.6 m.

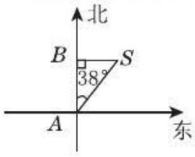
4. 解:由题意,得飞机到控制点的距离为 $\frac{1\,500}{\sin18°24'} \approx 4\,752$(m).

5. 解:由题意,作出示意图如答图 7.6-4.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

在 Rt△ABS 中，$\angle ABS=90°$，$\tan\angle BAS=\frac{BS}{AB}$，所以 $BS=AB\times\tan\angle BAS=15\times\tan38°\approx11.7$(km).

答：灯塔 S 到 B 处的距离约为 11.7 km.



答图 7.6-4

6. 解：在 Rt△ATC 中，$\angle ACT=90°$，$\tan A=\frac{TC}{AC}$，所以 $AC=\frac{TC}{\tan A}=\frac{120}{\tan15°}\approx447.85$(m).

在 Rt△BTC 中，$\angle BCT=90°$，$\tan B=\frac{TC}{BC}$，所以 $BC=\frac{TC}{\tan B}=\frac{120}{\tan28°}\approx225.69$(m).

所以 $AB=AC+BC\approx447.85+225.69\approx673.5$(m). **答**：$A$、$B$ 两点的距离约是 673.5 m.

复习题

1. (1) $1:1:\sqrt{2}$　(2) $1:\sqrt{3}:2$

2. 解：(1) $\tan^2 60°+4\sin30°\cos45°$

$=(\sqrt{3})^2+4\times\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=3+\sqrt{2}$.

(2) $\frac{\cos30°}{1+\sin30°}+\tan60°$

$=\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{1+\frac{1}{2}}+\sqrt{3}=\frac{\sqrt{3}}{3}+\sqrt{3}=\frac{4\sqrt{3}}{3}$.

3. 解：(1) $\sin70°\approx0.94$.

(2) $\cos24°12'\approx0.91$.

(3) $\tan65°\approx2.14$.

4. 解：(1) ∵ $\sin\alpha=0.3657$，∴ $\alpha\approx21.45°$.

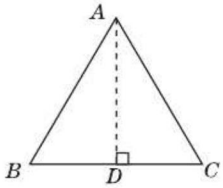
(2) ∵ $\cos\alpha=0.9150$，∴ $\alpha\approx23.79°$.

(3) ∵ $\tan\alpha=6$，∴ $\alpha\approx80.54°$.

5. 解：(1) 在 Rt△ABC 中，$\sin A=\frac{BC}{AB}$，$\tan A=\frac{BC}{AC}$，所以 $AB=\frac{BC}{\sin A}=\frac{8}{\sin30°}=16$(cm). $AC=\frac{BC}{\tan A}=\frac{8}{\tan30°}=8\sqrt{3}$(cm).

(2) 在 Rt△ABC 中，$\cos A=\frac{AC}{AB}$，$\tan A=\frac{BC}{AC}$，所以 $AB=\frac{AC}{\cos A}=\frac{\sqrt{3}}{\cos60°}=2\sqrt{3}$(cm). $BC=AC\cdot\tan A=\sqrt{3}\times\tan60°=3$(cm).

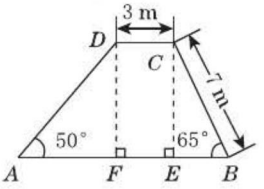
6. 解：如答图 7-1，过 A 点作 $AD\perp BC$ 于 D 点. 在等边三角形 ABC 中，$AB=BC=AC=a$，$\angle B=\angle C=60°$. 在 Rt△ABD 中，$\sin B=\frac{AD}{AB}$，所以 $AD=AB\cdot\sin B=a\cdot\sin60°=\frac{\sqrt{3}}{2}a$，所以 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}BC\cdot AD=\frac{1}{2}a\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}a=\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$，所以它的面积为 $\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$.



答图 7-1

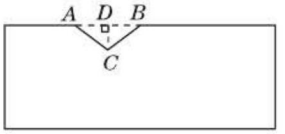
7. 解：如答图 7-2，分别过点 C，D 作 $CE\perp AB$ 于点 E，$DF\perp AB$ 于点 F，在 Rt△BCE 中，$\sin B=\frac{CE}{BC}$，$\cos B=\frac{BE}{BC}$，所以 $CE=BC\cdot\sin B=7\times\sin65°\approx6.3$(m)，$BE=BC\cdot\cos B=7\times\cos65°\approx2.96$(m). 在 Rt△$ADF$ 中，$\tan A=\frac{DF}{AF}$，又易知 $DF=CE$，所以 $AF=\frac{DF}{\tan A}=\frac{7\times\sin65°}{\tan50°}\approx5.32$(m)，易得四边形 $DFEC$ 是矩形，所以 $EF=CD=3$ m，所以 $AB=AF+EF+BE\approx5.32+3+2.96\approx11.3$(m).

答：坝高约为 6.3 m，坝底宽约为 11.3 m.



答图 7-2

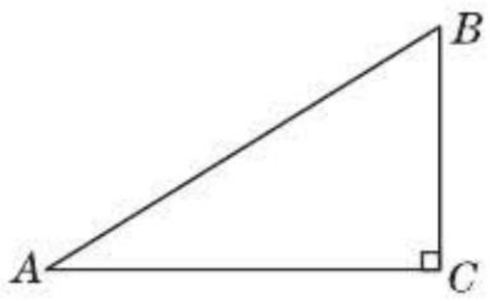
8. 解：如答图 7-3，连接 AB，过点 C 作 $CD\perp AB$ 于点 D，易知 $AD=BD=15$ mm，$CD=12$ mm，$\angle ACD=\angle BCD$，所以 $\tan\angle ACD=\frac{AD}{CD}=\frac{15}{12}=1.25$，所以 $\angle ACD\approx51.34°$. 所以 $\angle ACB\approx2\times51.34°\approx102.7°$. **答**：V 形角 $\angle ACB$ 的大小约为 102.7°.



答图 7-3

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

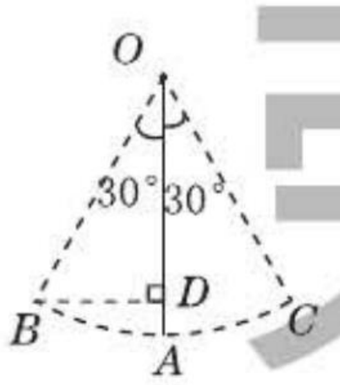
9. 解:根据题意可画出示意图,如答图 7-4 所示. 在 Rt△ACB 中,∠C = 90°, AB = 8 m, BC = 4.2 m,则 $\sin A = \frac{BC}{AB} = \frac{4.2}{8} = 0.525$,所以 ∠$A$ ≈31.7°. **答**:自动扶梯与地面所成锐角的大小约为 31.7°.



答图 7-4

10. 解:根据题意可画出示意图,如答图 7-5 所示,过 B 作 $BD \perp OA$ 于 D.

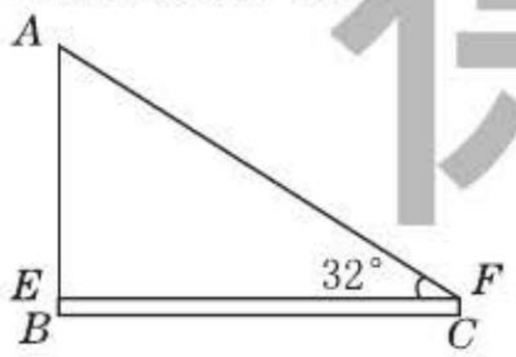
由题意,得 $OB = OA$ = 3 m. 在 Rt△BDO 中,∠BOD = 30°,所以 $\cos 30° = \frac{OD}{OB}$,则 $OD = OB \cdot \cos 30° = 3 \times \cos 30° = \frac{3\sqrt{3}}{2}$(m). 所以 $AD = OA - OD = 3 - \frac{3\sqrt{3}}{2} = \frac{6-3\sqrt{3}}{2} \approx 0.4$(m). **答**:秋千摆动的最高位置与最低位置的高度差约为 0.4 m.



答图 7-5

11. 解:如答图 7-6,易知 $CF = BE = 1.2$ m, $EF = BC = 45$ m, ∠AFE = 32°,

在Rt△AEF中, $\tan \angle AFE = \frac{AE}{EF}$,

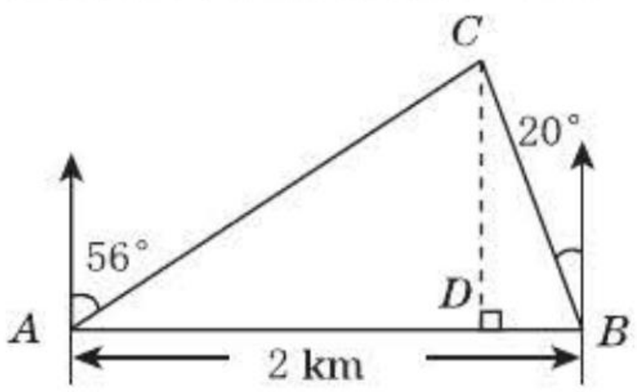


答图 7-6

所以 $AE = EF \cdot \tan \angle AFE = 45 \times \tan 32° \approx 28.12$(m). 所以 $AB = AE + EB \approx 28.12 + 1.2 \approx 29.3$(m). **答**:该楼房的高度约为 29.3 m.

12. 解:如答图 7-7,过 C 作 $CD \perp AB$ 于点 D,则 ∠ACD = 56°, ∠BCD = 20°,在 Rt△ACD 中,$AD = CD \cdot \tan 56°$,在 Rt△BCD 中,$BD = CD \cdot \tan 20°$. 因为 $AD + BD = 2$,所以 $CD \cdot \tan 56° + CD \cdot \tan 20° = 2$,解得 $CD \approx 1.1$.

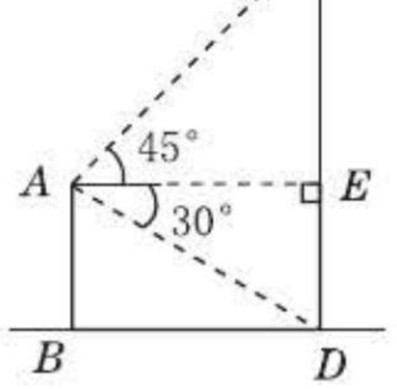
答:船 C 离海岸线的距离约为 1.1 km.



答图 7-7

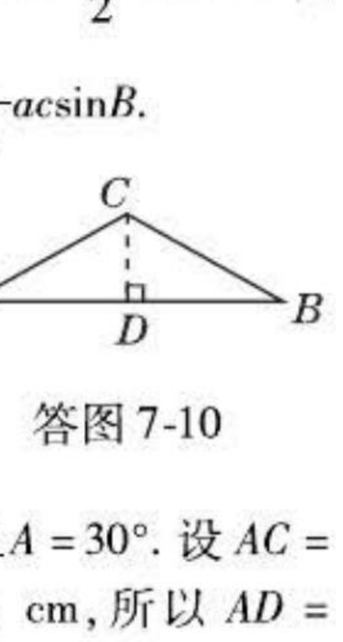
13. 解:由题意构造 Rt△ABC, ∠C = 90°,所以 $\cos A = \frac{AC}{AB} = \frac{5}{13}$. 设 $AC = 5k$, $AB = 13k$,由勾股定理,得 $BC = 12k$,所以 $\sin A = \frac{BC}{AB} = \frac{12k}{13k} = \frac{12}{13}$, $\tan A = \frac{BC}{AC} = \frac{12k}{5k} = \frac{12}{5}$.

14. 解:如答图 7-8,过 A 点作 $AE \perp CD$ 于点 E,则易知 $AE = BD = 60$ m. 在 Rt△ACE 中,因为 ∠CAE = 45°,所以 $CE = AE = 60$ m. 在 Rt△AED 中,$\tan \angle EAD = \frac{DE}{AE}$,所以 $DE = AE \cdot \tan \angle EAD = 60 \times \tan 30° \approx 34.6$(m),所以 $CD = CE + DE \approx 60 + 34.6 \approx 95$(m). 所以铁塔的高度约为 95 m.



答图 7-8

15. 解:已知:如答图 7-9,在△ABC 中,∠A,∠B,∠C 的对边分别为 a, b, c. 求证:$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}ab\sin C = \frac{1}{2}bc\sin A = \frac{1}{2}ac\sin B$.



答图 7-9

证明:如答图 9,过点 A 作 $AD \perp BC$ 于点 D,在 Rt△ADC中,$\sin C = \frac{AD}{AC}$,所以 $AD = AC \cdot \sin C = b\sin C$,所以 $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}BC \cdot AD = \frac{1}{2}ab\sin C$. 同理 $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}bc\sin \angle BAC = \frac{1}{2}ac\sin B$.

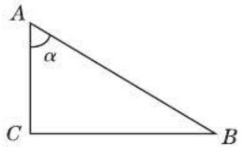
16. 解:如答图 7-10,在△ABC 中,$AC = BC$, ∠ACB = 120°. $AC + BC + AB = 5$ cm,过点 C 作 $CD \perp AB$ 于点 D. 因为 $AC = BC$, ∠ACB = 120°,所以 ∠A = 30°. 设 $AC = BC = x$ cm,则 $AB = (5 - 2x)$ cm,所以 $AD = \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2}(5-2x)$cm. 在Rt△$ACD$中,$\cos A = \frac{AD}{AC}$,即 $\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\frac{1}{2}(5-2x)}{x}$,解得 $x \approx 1.3$,所以 $AC = BC \approx 1.3$ cm, $AB = 5 - 2x \approx 5 - 2 \times 1.3 = 2.4$(cm).

答图 7-10

17. 解:如答图 7-11,在 Rt△ABC 中, ∠C = 90°,设 ∠$A = \alpha$,易知 $\sin\alpha = \frac{BC}{AB}$, $\cos\alpha = \frac{AC}{AB}$, $\tan\alpha = \frac{BC}{AC}$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

因为 $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=\frac{BC^2}{AB^2}+\frac{AC^2}{AB^2}=\frac{BC^2+AC^2}{AB^2}$. 由勾股定理可得 $AC^2+BC^2=AB^2$，所以 $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$.



答图 7-11

因为 $\tan\alpha=\frac{BC}{AC}$，$\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{\frac{BC}{AB}}{\frac{AC}{AB}}=\frac{BC}{AC}$，

所以 $\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$.

第 8 章 统计和概率的简单应用

8.1 中学生的视力情况调查

练习：

1. 解：(1)不合适. 理由：去医院的老人一般健康状况不太好，这样选取的样本不具有代表性.

(2)合适. 理由：这样选取的样本具有代表性和广泛性.

(3)不合适. 理由：季节对空气质量情况也有影响，所以这样选取的样本不具有代表性.

2. 解：(1)$\bar{x}=\frac{1}{50}\times(150+148+\cdots+162)=160.58$(cm).

$s^2=\frac{1}{50}\times[(150-160.58)^2+(148-160.58)^2+\cdots+(162-160.58)^2]=40.403\,6$.

答：这 50 名学生身高的平均数是160.58 cm，方差是 40.403 6.

(2)抽取样本容量为 20 的两个样本分别为(单位：cm)：

①150，148，159，156，157，163，156，164，156，159，169，163，170，162，163，164，155，162，153，155.

②162，165，159，147，163，172，156，165，157，164，152，156，153，164，165，162，167，151，175，162.

①$\bar{x}_1=\frac{1}{20}\times(150+148+\cdots+155)=159.2$(cm)，$s_1^2=\frac{1}{20}\times[(150-159.2)^2+(148-159.2)^2+\cdots+(155-159.2)^2]=31.86$.

②$\bar{x}_2=\frac{1}{20}\times(162+165+\cdots+162)=160.85$(cm)，$s_2^2=\frac{1}{20}\times[(162-160.85)^2+(165-160.85)^2+\cdots+(162-160.85)^2]=46.827\,5$.

它们的结果不一致，与总体的平均数和方差也不一致.

点拨：所抽取的样本不唯一.

练习：

1. 解：在被抽查的该市 30 天的空气质量中，空气质量达到良以上的有 3 + 3 + 9 = 15(天)，所以可估计该城市这一年(365 天)中有 $365\times\frac{15}{30}\approx183$(天)空气质量达到良以上.

2. 解：(1)由题图可知，3 + 6 + 9 + 8 + 4 = 30. **答：**该研究性学习小组抽取的样本容量是 30.

(2)8 + 4 = 12(人)，$\frac{12}{30}=0.4$. **答：**在所抽查的学生中，一天做家庭作业所用时间超过 120 min 的频率是 0.4.

(3)中位数落在 100.5 ~ 120.5 min 范围内.

(4)由题中所提供的信息知，该校九年级学生一天中做家庭作业所用时间大多数在 80.5 ~ 140.5 min 范围内，可见学生做家庭作业所用时间较长，作业负担较重.(答案不唯一，合理即可)

习题 8.1：

1. 解：这些样本共有 10 个. 所有可能的样本有：1、2，1、3，1、4，1、5，2、3，2、4，2、5，3、4，3、5，4、5.

2. 略

3. 略

4. 解：(1)50；80%；34%；2%；91；2；4；14；0.02；0.06；0.18；0.20；0.02

(2)估计这 480 名学生本次检测成绩的中位数落在 83.5 ~ 95.5 这个分数段内.

(3)答案不唯一，如：这次检测的最高分与最低分差距较大；及格率和优秀率都有待提高.

8.2 货比三家

练习：

1. 解：题中左图纵轴数值是从 0 开始的，比较直观、清晰，右图纵轴数值不是从 0 开始的，容易让人产生错觉.

2. 略.

3. 解：(1)A 品牌电视机销售量的平均数是 $\bar{x}_A=\frac{10+14+17+16+13+14+14}{7}=14$(台)，中位数是 14 台，方差是

$s_A^2=\frac{1}{7}\times[(10-14)^2+(14-14)^2+(17-14)^2+(16-14)^2+(13-14)^2+(14-14)^2+(14-14)^2]=\frac{30}{7}$；

B 品牌电视机销售量的平均数是

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

$\bar{x}_B = \frac{6+10+14+15+16+17+20}{7} = 14$(台),

中位数是15台,方差是

$s_B^2 = \frac{1}{7} \times [(6-14)^2 + (10-14)^2 + (14-14)^2 + (15-14)^2 + (16-14)^2 + (17-14)^2 + (20-14)^2] = \frac{130}{7}$.

(2)B品牌电视机的销售量呈上升趋势;A品牌电视机的销售量4~6月呈上升趋势,在6月达到峰值,随后下降并趋于稳定.

习题8.2:

1. 解:甲公司的利润增长较快,因为甲公司2012年比2008年多赢利约200 - 125 = 75(万元),乙公司2012年比2008年多赢利160 - 120 = 40(万元).

2. 解:不同意. 理由如下:不合格率是不合格数除以被检数乘100%得到的,从这个表格提供的信息来估计甲、乙两厂产品的不合格率显然是不可以的,因为甲厂抽取的产品数量大,而乙厂的产品只抽了6个,存在偶然性.

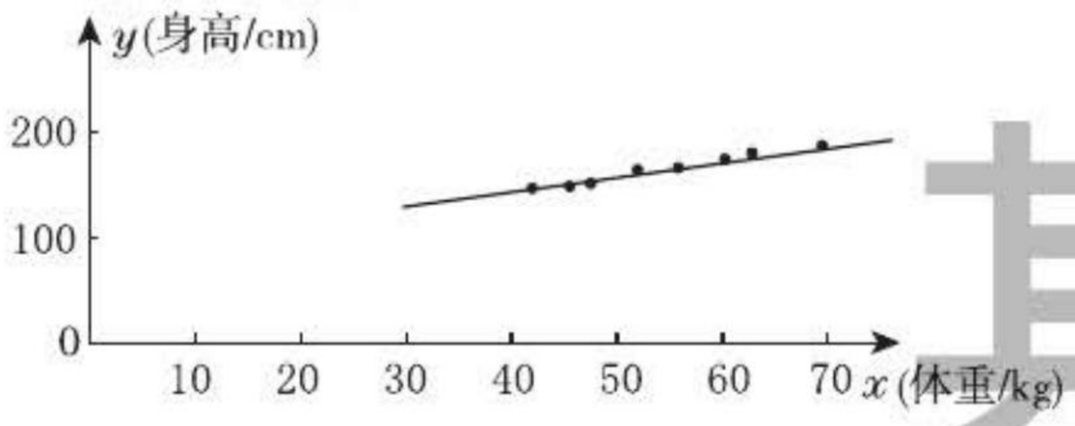
3. 解:(1)A品牌洗衣机的市场占有率最高;它的主要竞争优势是质量方面满意户数最多.

(2)有影响;理由略.

8.3 统计分析帮你做预测

练习:

解:(1)如答图8.3-1.



答图8.3-1

(2)设直线上的点的坐标满足函数表达式$y = kx + b$. 由直线过点(43,165)、(69,183)可得方程组

$\begin{cases} 43k + b = 165, \\ 69k + b = 183, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} k = \frac{9}{13}, \\ b = 135\frac{3}{13}, \end{cases}$ 由此可得到这10名男生身高与体重之间关系的近似表达式为

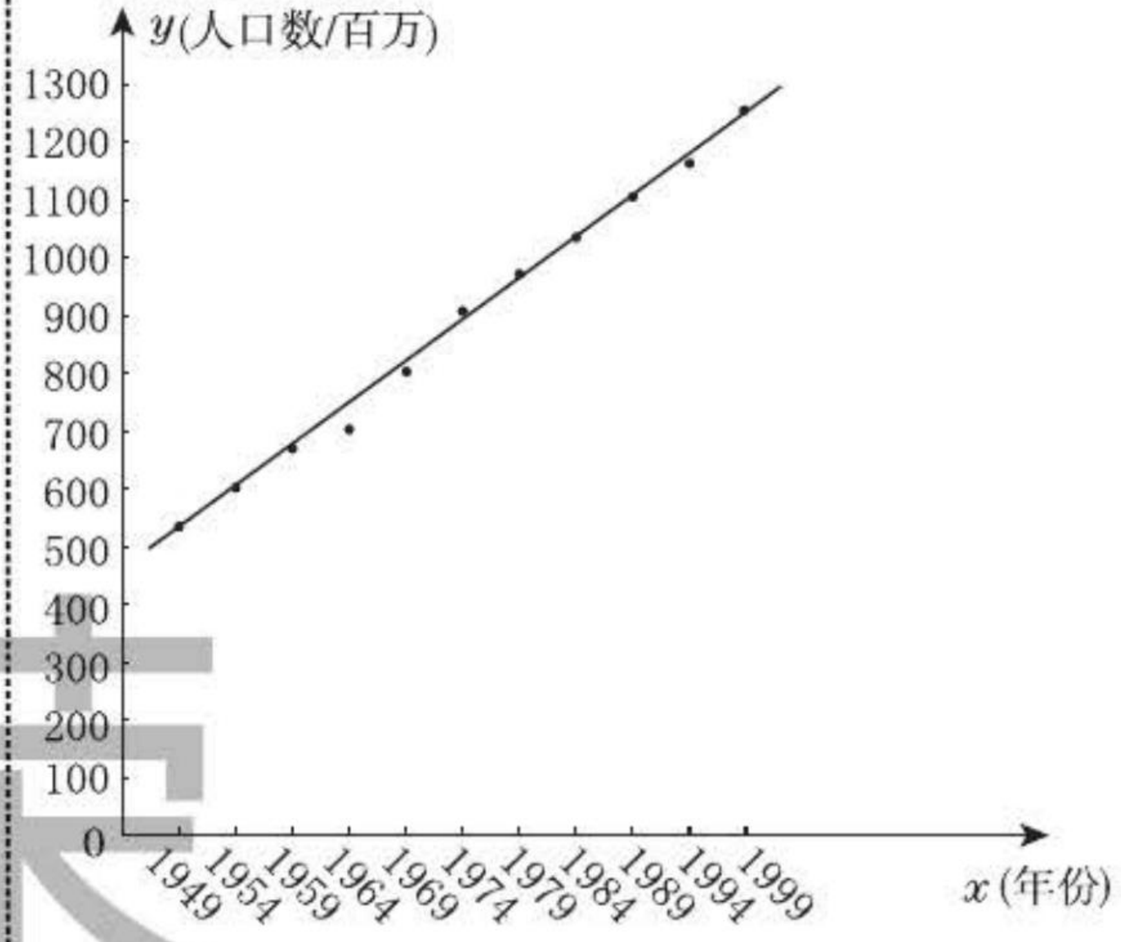
$y = \frac{9}{13}x + 135\frac{3}{13}$.

由$180 = \frac{9}{13}x + 135\frac{3}{13}$,解得$x \approx 65$.

故估计该校身高180 cm的九年级男生的体重约为65 kg.

习题8.3:

解:(1)如答图8.3-2.



答图8.3-2

(2)设直线上的点的坐标满足函数表达式$y = kx + b$. 由直线过点(1 949,542)和(1 999,1 246)可得方程组

$\begin{cases} 1\,949k + b = 542, \\ 1\,999k + b = 1246, \end{cases}$

解得 $\begin{cases} k = 14.08, \\ b = -26\,899.92. \end{cases}$ 由此可得到我国1949~1999年间部分年份的人口数与年份之间关系的近似表达式为$y = 14.08x - 26\,899.92$.

当$x = 2\,004$时,$y = 14.08 \times 2\,004 - 26\,899.92 = 1\,316.4$,

所以估计我国2004年的人口数为1 316.4百万.

8.4 抽签方法合理吗

练习:

1. 解:列表如下:

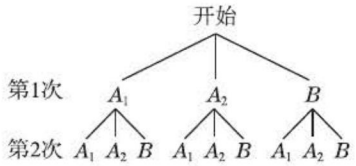
结果(甲的选择 \ 乙的选择)	A	B	C	D
A	(A,A)	(A,B)	(A,C)	(A,D)
B	(B,A)	(B,B)	(B,C)	(B,D)
C	(C,A)	(C,B)	(C,C)	(C,D)
D	(D,A)	(D,B)	(D,C)	(D,D)

由表知,共有16种等可能的结果,其中有4种结果满足题意,故所求概率为$\frac{4}{16} = \frac{1}{4}$.

2. 解:2个红球分别记作A_1、A_2,白球记作B.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

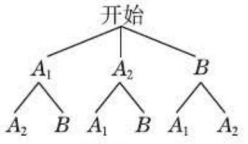
(1)用树状图列出所有可能出现的结果,如答图8.4-1.



答图8.4-1

从答图8.4-1可以看出,一共有9种等可能的结果.2次都摸到红球的有4种,故P(2次都摸到红球)$=\frac{4}{9}$.

(2)用树状图列出所有可能出现的结果,如答图8.4-2.



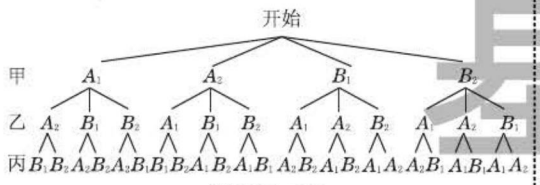
答图8.4-2

从答图8.4-2可以看出,一共有6种等可能的结果,摸到2个红球的有2种,故P(摸到2个红球)$=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$.

习题8.4

1. 解:公平.理由:抽签虽然有先有后,但是先抽的人与后抽的人抽中的概率是相同的,故这样的抽签方法是公平的.

2. 解:相同.理由:2个白球分别记为A_1、A_2,2个红球分别记为B_1、B_2,用树状图列出所有可能出现的结果,如答图8.4-3所示.



答图8.4-3

从答图8.4-3中可以看出,

P(甲摸到白球)$=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$,P(乙摸到白球)$=\frac{6}{12}=\frac{1}{2}$,$P$(丙摸到白球)$=\frac{12}{24}=\frac{1}{2}$.所以3人摸到白球的概率相同.

8.5 概率帮你做估计

练习:

1. 解:用频率作为概率的估计值可知,摸到红球、黄球和蓝球的概率分别为25%、35%和40%,故红球的数目:$360\times25\%=90$(个),黄球的数目:$360\times35\%=126$(个),蓝球的数目:$360\times40\%=144$(个),故估计这只袋子中红球有90个,黄球有126个,蓝球有144个.

2. 解:多次捕捞后,捕捞到带有标记的鱼的频率为$\frac{5}{200}=\frac{1}{40}$,将此频率作为该鱼塘中有标记的鱼的频率.

设该鱼塘中鱼的数量为N条,则有$\frac{30}{N}=\frac{1}{40}$,解得$N=1\ 200$.

答:估计该鱼塘中鱼的数量为1 200条.

习题8.5:

1. 解:由表可知,用频率0.931作为概率的估计值,$5\ 000\times(1-0.931)=345$(粒).

答:一般地,在相同条件下,5 000粒该种绿豆大约有345粒不能发芽.

2. 解:设这个地区的野鹿有x只,用频率作为概率的估计值知,$\frac{n}{x}=\frac{a}{m}$,解得$x=\frac{mn}{a}$,故可以估计该地区的野鹿约有$\frac{mn}{a}$只.

3. 解:(1)0.58;0.64;0.58;0.59;0.605;0.601

(2)当摸球次数很大时,摸到白球的概率的估计值是0.60.

(3)$24\div0.60=40$(个),$40-24=16$(个).

答:估计袋中红球的个数为16个.

8.6 收取多少保险费才合理

练习:

1. 解:不一定.

2. 解:$1-75\%=25\%=\frac{1}{4}$,所以平均来说,购买4个这样的电子产品,可能会出现1个次品.

3. 解:(2)是正确的.

习题8.6:

1. 解:$\frac{1}{1\ 000}\times10=\frac{1}{100}$,所以平均来说,100天会查到1个次品.

2. 解:(1)$80\times0.1+30\times0.15+10\times0.25=15$(元).

答:平均来说,每转动转盘1次所获购物券的金额为15元.

(2)不同意.

3. 解:设当飞机失事的概率为x,则在n次飞行中,有

$120n\times20\geqslant nx\cdot120\times500\ 000$,

解得$x\leqslant0.000\ 04$.

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

答:平均来说,当飞机失事的概率不超过0.000 04时,才能保证保险公司的收入不小于支出.

复习题

1. 略.

2. 解:不能;不能.

3. 解:这个游戏规则对双方公平. 理由如下:因为转动转盘两次,转盘指针指向相同的字母和指向不同的字母的概率都是$\frac{1}{2}$,所以这个游戏对双方公平.

4. 解:(1)任意闭合1个开关,共有4种等可能的结果,其中使小灯泡发亮有1种结果,故此时小灯泡发亮的概率是$\frac{1}{4}$.

(2)任意闭合2个开关,共有6种等可能的结果,其中使小灯泡发亮有3种结果,故此时小灯泡发亮的概率是$\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$.

5. 解:(1)由已知得,一共可以画4个三角形,它们是等可能的,其中$\triangle BCD$是等腰三角形,故所求的概率为$\frac{1}{4}$.

(2)一共可以画6个四边形,它们是等可能的,其中四边形$ABEC$,四边形$BDFC$是平行四边形,故所求的概率为$\frac{1}{3}$.

6. 解:所有的分组情况有:A、B在甲组,C、D在乙组;A、C在甲组,B、D在乙组;A、D在甲组,B、C在乙组;B、C在甲组,A、D在乙组;B、D在甲组,A、C在乙组;C、D在甲组,A、B在乙组,共6种等可能的结果.

(1)A在甲组有3种结果,故$P(A\text{在甲组})=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$.

(2)A、B都在甲组有1种结果,故$P(A$、B都在甲组$)=\frac{1}{6}$.

7. 解:题图易使人产生错觉,好像员工的收入和股东的收入是同步增长的,可是纵轴上单位长度表示的意义是不一致的,对于股东,表示的是5个人的收入,而对于员工,表示的是100个人的收入.

8. 解:(1)样本容量为$\frac{4}{0.08}=50$.

(2)样本中,睡眠时间在6~7 h的人数最多,该范围的人数为$50\times0.28=14$(人).

(3)该校九年级学生睡眠时间合理的人数约占总人数的$900\times(0.24+0.12)=324$(名),故该校九年级学生睡眠时间合理的约有324名.(答案不唯一)

9. 解:(1)$\bar{x}=\frac{1}{140}\times(49+48+43+52+\cdots+49+53+52+49)\approx51.23$(kg).

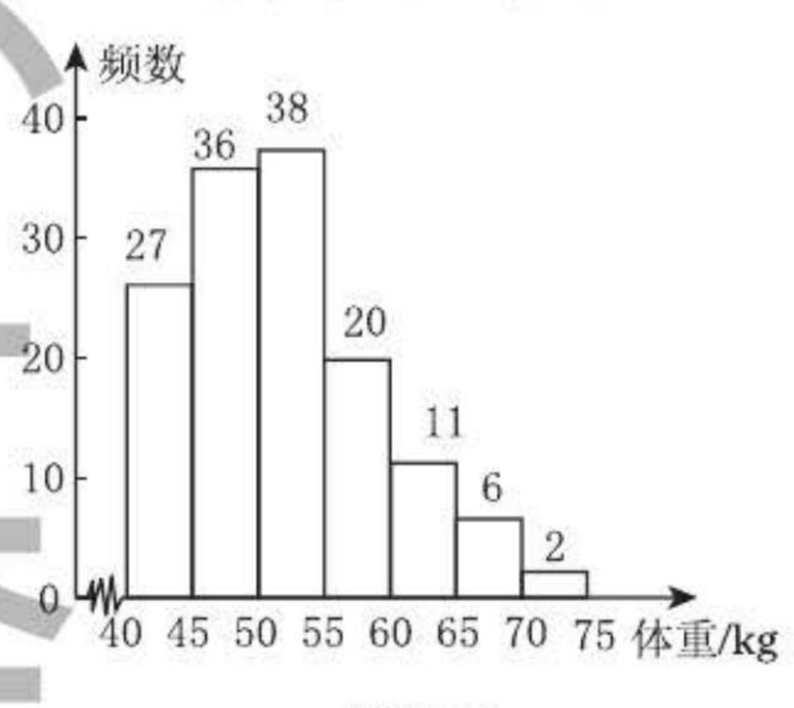
$s^2\approx47.28$.

答:总体的平均数约为51.23 kg,方差约为47.28.

列频数分布表如下:

体重/kg	划记	频数
$40\leqslant x<45$	正正正正正丅	27
$45\leqslant x<50$	正正正正正正正一	36
$50\leqslant x<55$	正正正正正正正下	38
$55\leqslant x<60$	正正正正	20
$60\leqslant x<65$	正正一	11
$65\leqslant x<70$	正一	6
$70\leqslant x<75$	丅	2

由此绘制出频数分布直方图,如答图8-1.



答图8-1

(2)抽取的两个样本容量为10的样本分别为(单位:kg):①49,52,54,52,48,50,69,43,62,44,

②48,54,68,54,49,43,48,54,46,42.

①$\bar{x}_1=\frac{1}{10}\times(49+52+54+\cdots+62+44)=52.3$(kg),$s_1^2=\frac{1}{10}\times[(49-52.3)^2+(52-52.3)^2+\cdots+(44-52.3)^2]=56.61$.

②$\bar{x}_2=\frac{1}{10}\times(48+54+\cdots+46+42)=$

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

50.6(kg).

$s_2^2=\frac{1}{10}\times[(48-50.6)^2+(54-50.6)^2+\cdots+(42-50.6)^2]=50.64$.

由上面抽取的样本容量为10的两个样本可知结果不一致.与总体的结果不一致.若抽取样本容量为20的样本,结果也可能不一致.

(3)通过以上的抽样和计算,我发现一组数据越稳定,这一组数据的方差就越小,平均数刻画一组数据的平均水平.

点拨:(2)所抽取的样本不唯一.

10. 解:不公平.

修改的规则如下:若数字之积为3的倍数,小明得3分;若数字之积为5的倍数,小丽得5分,做10次这样的游戏,得分高者为赢家.

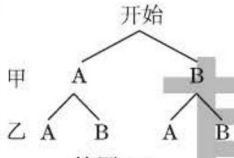
点拨:修改方法不唯一.

11. 解:(1)甲、乙2名员工的设计方案符合商场的要求.对于甲员工的设计方案,$P(\text{中大奖})=\frac{1}{10}=0.1$,$P(\text{中小奖})=\frac{9}{10}=0.9$;

对于乙员工的设计方案,通过列表易知共有10种等可能的结果,摸到2个红球的结果有1种,故$P(\text{中大奖})=\frac{1}{10}=0.1$,$P(\text{中小奖})=\frac{9}{10}=0.9$.

(2)略.

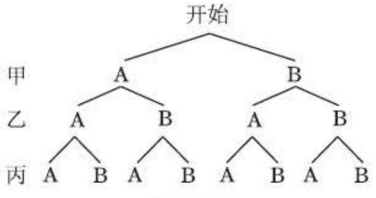
12. 解:(1)画树状图,如答图8-2所示.



答图8-2

由答图8-2可知,共有4种等可能的结果,其中甲、乙2名学生在不同书店购书有2种结果,故其概率为$\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$.

(2)画树状图,如答图8-3所示.

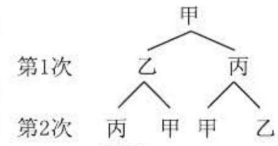


答图8-3

由答图8-3可知,共有8种等可能的结果,其中甲、乙、丙3名学生在同一书店购书有2种结果,故其概率为$\frac{2}{8}=\frac{1}{4}$.

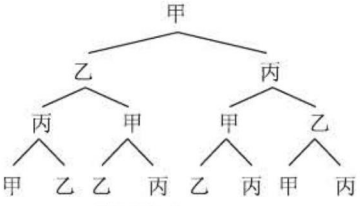
13. 证明:$y=(x-a_1)^2+(x-a_2)^2+\cdots+(x-a_n)^2=nx^2-2(a_1+a_2+\cdots+a_n)x+(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2)$,这是一个$y$关于$x$的二次函数.当$y$取最小值时,$x=\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}$,即$x$是$a_1,a_2,\cdots,a_n$的平均数.

14. 解:(1)画树状图,如答图8-4所示.



答图8-4

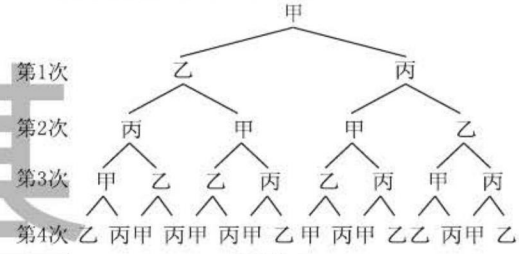
由答图8-4可知,经过2次传球后,共有4种等可能的结果,其中球回到甲手中有2种结果,其概率为$\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$.画树状图,如答图8-5所示.



答图8-5

由答图8-5可知,经过3次传球后,共有8种等可能的结果,其中球回到甲手中有2种结果,其概率为$\frac{2}{8}=\frac{1}{4}$.

(2)画树状图,如答图8-6所示.



答图8-6

由答图8-6可知,经过4次传球后,共有16种等可能的结果,其中球传到甲手中有6种结果,概率为$\frac{6}{16}=\frac{3}{8}$;球传到乙手中有5种结果,概率为$\frac{5}{16}$;球传到丙手中有5种结果,概率为$\frac{5}{16}$.

(3)当n为偶数时,$P(\text{球传到乙手中})=P(\text{球传到丙手中})<P(\text{球传到甲手中})$;当$n$为奇数时,$P(\text{球传到乙手中})=P(\text{球传到丙手中})>P(\text{球传到甲手中})$.

15. 略.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料