构建二次数形世界的桥梁

构建二次数形世界的桥梁











第5章 对函数的再探索

荣德基

核心考点

你将见到的

- 函数的三种表示方法
- 反比例函数
- 二次函数的几种常见模型

  $y=ax^2$　　$y=ax^2+k$　　$y=a(x-h)^2$

  $y=a(x-h)^2+k$　　$y=ax^2+bx+c$
- 二次函数的图象和性质
- 用待定系数法求二次函数表达式
- 二次函数与一元二次方程之间的关系
- 建立二次函数模型解决实际问题

核心方法

我们为你提供的

- 待定系数法
- 数形结合思想
- 函数思想
- 割补法
- 特殊值法
- 分类讨论思想

教辅资料站

电子教辅　试卷练习
知识总结　备课资源

扫码关注获取更多学习资料

5.1 函数与它的表示法

核心知识

- 从函数图象中获取信息
- 函数三种表示方法之间的互化
- 函数自变量的取值范围
- 分段函数

知识链接



点知识·拨考向 速提分

点知识 1 函数的三种表示方法

表示方法	定义	优点	缺点
图象法	用图象表示函数关系的方法叫做图象法	直观，能够形象地反映出当自变量的值变化时函数值的变化趋势，常用来研究函数的性质和变化趋势	不能准确地由已知自变量的值求出函数值
列表法	用表格来表示函数关系的方法叫做列表法	已知表中给出的部分自变量的值时，可以不通过计算直接查出对应的函数值	只能表示出自变量的有限个离散值及其函数值
解析法	用表达式来表示函数关系的方法叫做解析法	全面、准确、方便，对于自变量在可以取值的范围内任取一个值，都可以通过表达式计算求出它的函数值	不够形象直观，而且并不是每一个函数都可写出它的表达式

拨考向 利用函数的表示方法解决问题

题型 1 利用表格呈现的信息解决实际问题

例 1 在弹性限度内，弹簧挂上物体后会延伸，测得弹簧的长度 y（cm）与所挂物体的质量 x（kg）之间有如下表关系：

x/kg	0	1	2	3	4	…
y/cm	10	10.5	11	11.5	12	…

下列说法不正确的是（　　）

A. y 随 x 的增大而增大

B. 所挂物体质量每增加 1 kg，弹簧长度增加 0.5 cm

C. 所挂物体为 7 kg 时，弹簧长度为 13.5 cm

D. 不挂重物时弹簧的长度为 0 cm

解题秘方：由表格得弹簧原长度及所挂物体每增加 1 kg 后弹簧伸长的长度，再进行解答即可.

解：A. y 随 x 的增大而增大，正确；B. 所挂物体质量每增加 1 kg，弹簧长度增加 0.5 cm，正确；C. 所挂物体为 7 kg 时，弹簧长度为 13.5 cm，正确；D. 不挂重物时弹簧的长度为 10 cm，错误.

答案：D

提分·必记

特别提醒

函数的三种表示方法既有区别又有联系，区别是它们体现了函数的部分不同的特征；联系是它们都表示一个函数，且相互补充，体现了函数不同的性质.

注意：并不是所有的函数都能用三种表示方法，如某日气温随时间的变化情况.

提分·秘诀

技巧点拨

已知表格中自变量与函数的对应值，观察对应数值之间的联系可以确定函数的变化规律；观察自变量与函数的初始值可以确定初始状态，帮助解决问题.

不得复制 教辅资料站

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

题型 2　利用函数图象呈现的信息解决实际问题

例 2　小李与小陆从 A 地出发，骑自行车沿同一条路行驶到 B 地，他们离出发地的距离 s（单位：km）和小李的行驶时间 t（单位：h）之间的函数关系的图象如图 5.1-1，根据图中提供的信息，有下列说法：（1）他们都行驶了 20 km；（2）小陆全程共用了 1.5 h；（3）小李与小陆相遇后，小李的速度小于小陆的速度；（4）小李在途中停留了 0.5 h. 其中正确的说法有（　　）

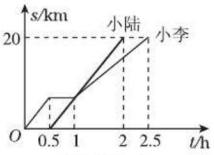


图 5.1-1

A. 4 个　　B. 3 个　　C. 2 个　　D. 1 个

解题秘方：由图象可得小陆 0.5 h 出发，2 h 到达目的地，进而得到他全程用时；小李与小陆相遇后，他们距离目的地有相同的路程，但是小陆到达目的地所用时间小于小李到达目的地所用时间，根据速度 = 路程 ÷ 时间可得小李的速度小于小陆的速度；小李出发 0.5 h 后停留了 0.5 h.

解：（1）根据图象的纵坐标可得他们都行驶了 20 km，故（1）说法正确；

（2）根据图象可得小陆全程共用了 2−0.5=1.5（h），故（2）说法正确；

（3）根据图象可得小李与小陆相遇后，他们距离目的地有相同的路程，但是小陆用 1 h 到 B 地，小李用 1.5 h 到 B 地，所以小李的速度小于小陆的速度，故（3）说法正确；

（4）根据图象可得表示小李的 $s-t$ 图象从 0.5 h 开始到 1 h 结束，时间在增多，路程没有变化，说明此时在途中停留，停留时间是 1−0.5=0.5（h），故（4）说法正确.

答案：A

题型 3　利用现实问题体会三种函数表示方法之间的互化

例 3　为了解某品牌轿车的耗油情况，将油箱加满后进行了耗油实验，得到如下表的数据：

轿车行驶的路程 s/km	0	100	200	300	400	…
油箱剩余油量 Q/L	50	42	34	26	18	…

（1）根据上表的数据，画出油箱剩余油量 Q（L）关于轿车行驶的路程 s（km）的函数图象；

（2）根据上表的数据，求出油箱剩余油量 Q（L）与轿车行驶的路程 s（km）之间的函数表达式；

（3）某人将油箱加满后，驾驶该轿车从 A 地前往 B 地，到达 B 地时，油箱剩余油量为 22 L，求 A，B 两地之间的距离.

技巧点拨

从函数图象中获取信息时要注意：(1) 看清横、纵坐标各表示哪个量，这一变化过程属于哪种变化；(2) 从左向右，分析每段图象上自变量和函数值如何变化；(3) 平行于横轴的线段，自变量在变，函数值不变；(4) 着重理解图象的端点及交点所表示的意义.

易错警示

并不是任意函数都能用函数的三种表示方法表示，在用函数图象表示函数时，要注意自变量的取值范围.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

解：（1）函数图象如图 5.1−2.

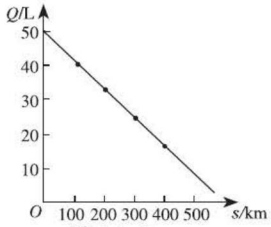


图 5.1−2

（2）由表格可知，油箱的容量为 50 L，每行驶 100 km，油量减少 8 L，据此可得 Q 与 s 的表达式为 $Q=50-0.08s$.

（3）令 $Q=22$，得 $s=350$. 故 A，B 两地之间的距离为 350 km.

点知识▸2 函数的定义的再认识

函数 在同一个变化过程中，有两个变量 x，y. 如果对于变量 x 在可以取值的范围内每取一个确定的值，变量 y 都有唯一确定的值与它对应，那么就说 y 是 x 的函数.

拔考向▸利用函数的定义判断图象是否表示一个函数

例 4 如图 5.1−3，下列表示 y 与 x 之间的关系的图象中，y 不是 x 的函数的是（　　）

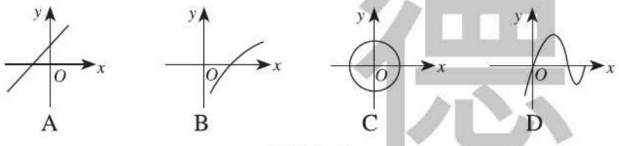


图 5.1−3

解题秘方：根据函数的定义，对图象逐个进行分析即可.

解：根据函数的定义可知，对于自变量 x 的任何值，y 都有唯一的值与之相对应，因此选项 C 不满足条件.

答案：C

点知识▸3 函数自变量的取值范围

1. 自变量的取值范围 使函数有意义的自变量取值的全体.

2. 常见函数的自变量的取值范围

（1）当函数表达式是整式时，自变量为全体实数；

（2）当函数表达式是分式时，自变量的取值范围是使分母不为 0 的全体实数；

（3）当函数表达式是二次根式时，自变量的取值范围是使被开方数不小于 0 的全体实数；

（4）当函数表达式是复合形式（如同时含有分式和二次根式）时，自变量的取值范围是使每一部分都有意义的全体实数；

（5）在实际问题中，函数自变量的取值范围应符合实际意义.

请开始你的表演



提分·必记

特别提醒

定义中的“有”是指存在性，“唯一”是指“只有一个”.

提分·秘诀

技巧点拨

判断图象是否表示一个函数，只需在 x 轴选取一点，作平行于 y 轴的直线，观察直线与图象是否有唯一交点，若是，则为函数图象；否则不是函数图象.

提分·必记

特别提醒

函数自变量的取值可能有无限个，也可能有有限个，要根据不同的函数表达式而定. 当函数的表达式是复合形式时，一定要使每个含有自变量的代数式都有意义，即取几部分的公共部分.

荣德基
微信公众号
教辅资料站

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

核心考向▶利用函数自变量的定义求函数自变量的取值范围

题型1　利用已知函数表达式求函数自变量的取值范围

例5　求下列函数中自变量的取值范围：

（1）$y=3x+7$；（2）$y=\dfrac{1}{3x-2}$；（3）$y=\sqrt{x-4}$；

（4）$y=\dfrac{\sqrt{x+2}}{x}$.

解题秘方：结合各个函数表达式的特点，按自变量取值范围的确定方法求出.

解：（1）函数表达式右边是整式，所以 x 的取值范围为一切实数.

（2）由 $3x-2\neq 0$，得 $x\neq\dfrac{2}{3}$，所以 x 的取值范围为 $x\neq\dfrac{2}{3}$的一切实数.

（3）由 $x-4\geqslant 0$，得 $x\geqslant 4$，所以 x 的取值范围是 $x\geqslant 4$.

（4）由$\begin{cases}x+2\geqslant 0,\\ x\neq 0,\end{cases}$得 $x\geqslant -2$ 且 $x\neq 0$，所以 x 的取值范围是 $x\geqslant -2$ 且 $x\neq 0$.

题型2　利用实际问题的实际意义求函数自变量的取值范围

例6　跳跳球是同学们喜爱的玩具之一，下面是体育老师根据某颗跳跳球每次弹起的高度 y（cm）与弹起的次数 x（次）之间的关系绘制的表格：

x/次	0	1	2	3	4	5	6	…
y/cm	100	95	90	85	80	75	70	…

跳跳球每次弹起的高度 y（cm）可以看成是弹起次数 x（次）的函数吗？若可以，写出函数的表达式，并写出自变量 x 的取值范围.

解题秘方：由表格中信息可得，每多弹起一次，高度减少 5 cm，在这个变化过程中，有两个变量，即弹起的次数 x（次）和弹起的高度 y（cm）.给定一个 x 值，有唯一的 y 值与其对应，符合函数的概念.

解：这颗跳跳球每次弹起的高度 y（cm）可以看成是弹起次数 x（次）的函数.

由上表知，跳跳球的起始高度是 100 cm，以后每弹起一次，高度减少 5 cm，当跳跳球弹起的高度为 0 cm 时，（100−0）÷5=20（次），即这颗跳跳球第 20 次弹起的高度为 0 cm.

所以函数表达式为 $y=100-5x$（$0\leqslant x\leqslant 20$，且 x 为整数）.

知识点▶4　分段函数

分段函数　函数关系是分段给出的，我们把它叫做分段函数.

拓展：

1. 分段函数对于自变量 x 在不同的取值范围，有着不同的函数表达式；
2. 分段函数自变量的取值范围是各段函数取值范围的总和.

提分·秘诀

技巧点拨

求函数自变量的取值范围，应根据给出的各种式子有意义的条件求出，当给出的式子是复合形式时，一般根据各部分有意义的条件列出不等式组，再求解.

易错警示

在求有关实际问题的函数表达式时，要写出自变量的取值范围，函数自变量的取值范围既要使函数的表达式有意义，也要符合实际问题的实际意义.

提分·必记

特别提醒

分段函数是一个函数，而不是两个（或多个）函数.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

考向▶利用分段函数的定义解决问题

题型1　利用分段函数的定义画分段函数图象

例7　如图5.1-4，在平面直角坐标系中，正方形$ABCD$的边长为1，AD边的中点E处有一动点P，动点P沿$E\to A\to B\to C\to D\to E$运动一周，则点$P$的纵坐标$y$与点$P$走过的路程$s$之间的函数关系用图象表示大致是图5.1-5中的（　　）

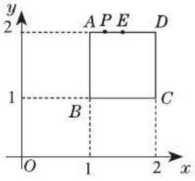


图5.1-4

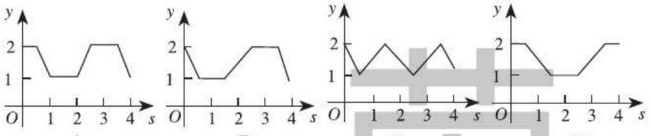


图5.1-5

解题秘方：将动点P的运动过程分为EA，AB，BC，CD，DE共5个阶段，分别进行分析，最后得出结论.

解：① 当$0\leqslant s\leqslant\frac{1}{2}$时，动点$P$在线段$EA$上运动，此时$y=2$保持不变；② 当$\frac{1}{2}<s\leqslant\frac{3}{2}$时，动点$P$在线段$AB$上运动，此时$y$由2到1逐渐减少；③ 当$\frac{3}{2}<s\leqslant\frac{5}{2}$时，动点$P$在线段$BC$上运动，此时$y=1$保持不变；④ 当$\frac{5}{2}<s\leqslant\frac{7}{2}$时，动点$P$在线段$CD$上运动，此时$y$由1到2逐渐增大；⑤ 当$\frac{7}{2}<s\leqslant 4$时，动点$P$在线段$DE$上运动，此时$y=2$保持不变. 结合函数图象，只有D选项符合要求. 故选D.

答案：D

题型2　利用分段函数的图象解决实际问题

例8　[中考·仙桃]江汉平原享有“中国小龙虾之乡”的美称，甲、乙两家农贸商店，平时以相同的价格出售品质相同的小龙虾. “龙虾节”期间，甲、乙两家商店都让利酬宾，付款金额$y_{甲}$，$y_{乙}$（单位：元）与原价x（单位：元）之间的函数关系如图5.1-6所示.

（1）求$y_{甲}$，$y_{乙}$关于x的函数关系式；

（2）“龙虾节”期间，如何选择甲、乙两家商店购买小龙虾更省钱？

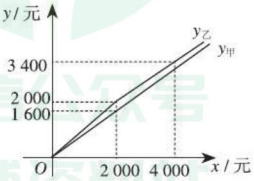


图5.1-6

提分·秘诀

技巧点拨

画动点类分段函数图象，一般根据动点运动的状态分段. 如运动到两条线段的交点位置时，前后两条线段要分开，然后根据不同的运动状态求出对应的函数表达式，最后根据函数表达式画出函数的大致图象.

技巧点拨

分段函数的自变量在不同的取值范围内，有不同的表达式. 在解决问题时，要根据图象的拐点进行分段，求出每段的函数表达式. 分段函数常应用于缴纳水电费、商品促销、生产方式更新等问题中.

荣德基
微信公众号 教辅资料站

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

解题秘方：（1）利用待定系数法即可求出 $y_{甲}$，$y_{乙}$ 关于 x 的函数关系式；（2）当 $0<x<2\,000$ 时，显然到甲商店购买更省钱，当 $x\geqslant 2\,000$ 时，分三种情况进行讨论即可.

解：（1）设 $y_{甲}=kx$，把（2 000，1 600）代入，

得 $2\,000k=1\,600$，解得 $k=0.8$，所以 $y_{甲}=0.8x$；

当 $0<x<2\,000$ 时，设 $y_{乙}=ax$，把（2 000，2 000）代入，

得 $2\,000a=2\,000$，解得 $a=1$，所以 $y_{乙}=x$；

当 $x\geqslant 2\,000$ 时，设 $y_{乙}=mx+n$，

把（2 000，2 000），（4 000，3 400）代入，

得 $\begin{cases}2\,000m+n=2\,000,\\4\,000m+n=3\,400,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}m=0.7,\\n=600.\end{cases}$

所以 $y_{乙}=0.7x+600$.

所以 $y_{乙}=\begin{cases}x\ (0<x<2\,000),\\0.7x+600\ (x\geqslant 2\,000).\end{cases}$

（2）当 $0<x<2\,000$ 时，$0.8x<x$，到甲商店购买更省钱；

当 $x\geqslant 2\,000$ 时，若到甲商店购买更省钱，

则 $0.8x<0.7x+600$，解得 $x<6\,000$；

若到乙商店购买更省钱，则 $0.8x>0.7x+600$，解得 $x>6\,000$；

若到甲、乙两商店购买花钱相同，则 $0.8x=0.7x+600$，解得 $x=6\,000$；

故当原价小于 6 000 元时，到甲商店购买更省钱；

当原价大于 6 000 元时，到乙商店购买更省钱；

当原价等于 6 000 元时，到甲、乙两商店购买花钱相同.



点方法·拨技巧 提高分

拔尖角度▸ 1 利用函数表达式解决规律探究问题

挑战·高分

例 9 一种圆环（如图 5.1–7 ①所示），它的外圆直径是 8 厘米，环宽 1 厘米.

（1）如果把这样的 2 个圆环扣在一起并拉紧（如图 5.1–7 ②），长度是多少厘米？

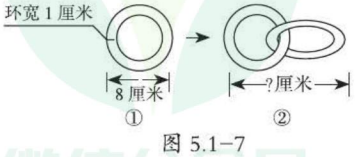


图 5.1–7

（2）用 x 个这样的圆环相扣并拉紧，长度为 y 厘米，求出 y 与 x 之间的关系式；

（3）当 $y=662$ 时，有多少个圆环套在一起？

规律点拨

对于探索图形规律问题，解决的思路有两种：一种是数图形，将图形转化为数字规律，再用函数思想、观察法解决；另一种是根据图形的直观性，从图形中直接寻找规律，常用“拆图法”解决问题.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

解：（1）把这样的2个圆环扣在一起并拉紧，长度是$6\times2+2=14$（厘米）.

（2）y与x之间的关系式为$y=6x+2$.

（3）当$y=662$时，$6x+2=662$，解得$x=110$.

即当$y=662$时，有110个圆环套在一起.

拔尖角度▸ 2 利用一元二次方程根的判别式解决自变量的取值范围的相关问题

挑战·高分

例10 如果函数$y=\dfrac{1}{x^2-2x+m}$中自变量x可以取全部实数，求m的取值范围.

解题秘方：函数表达式以分式的形式出现，且自变量的取值范围是全体实数，即分式的分母不可能等于零，换个角度说就是分母等于零时方程无解.

解：根据题意，得关于x的一元二次方程$x^2-2x+m=0$无解.

$\therefore\ \Delta=4-4m<0$，$\therefore\ m>1$.

解法提醒

当分母为0时，得到一个一元二次方程；若该方程无解，则不存在x的值可以使分母为0，满足题意，求出此时m的取值范围即可.

拔尖角度▸ 3 利用分段函数解决分段计费问题

挑战·高分

例11 某实验中学组织学生到距学校6 km的光明科技馆去参观，学生王琳因事没能乘上学校的校车，于是准备在学校门口改乘出租车去光明科技馆. 出租车的收费标准如下：

路程	费用/元
3 km以下（含3 km）	8
3 km以上，每增加1 km	1.8

（1）写出出租车行驶的路程x（km）与费用y（元）之间的函数表达式；

（2）王琳身上仅有14元，乘出租车到科技馆的车费够不够？并说明理由.

解：（1）当$0<x\leqslant3$时，$y=8$；

当$x>3$时，$y=1.8(x-3)+8=1.8x+2.6$，

即$y=\begin{cases}8\ (0<x\leqslant3),\\1.8x+2.6\ (x>3).\end{cases}$

（2）方法一 当$y=14$时，$14=1.8x+2.6$.

解得$x=6\dfrac{1}{3}$. 因为$6\dfrac{1}{3}>6$，所以车费够了.

方法二 当$x=6$时，$y=1.8x+2.6=13.4<14$，

所以车费够了.

方法点拨

乘坐出租车问题是我们在日常生活中常遇到的问题，也是中考的热点问题. 解答此类问题的方法一般是结合题目中所有信息，进行分类讨论，在不同的条件下建立相应的函数表达式，再根据自变量所在的范围，代入对应的函数表达式求值.

宋德基
微信公众号
教辅资料站

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

点中考·拨模拟 得满分

中考探秘 本节的中考考点是函数自变量的取值范围和分段函数的应用，其中函数自变量的取值范围常以选择题或填空题的形式单独考查，有时也会综合到解答题中，分段函数常与一次函数相结合，主要以解答题的形式进行考查，难度中等.

三年中考兵法

冲刺·满分

考法1 利用函数的表达式求函数自变量的取值范围

例12 [中考·黄冈]函数 $y=\frac{\sqrt{x+1}}{x-1}$ 中自变量 x 的取值范围是(　　)

A. $x\geqslant -1$ 且 $x\neq 1$　　B. $x\geqslant -1$　　C. $x\neq 1$　　D. $-1\leqslant x<1$

试题评析：本题考查了函数自变量的取值范围问题，属于常考问题，题目难度中等.

解：根据题意，得 $\begin{cases}x+1\geqslant 0,\\ x-1\neq 0,\end{cases}$ 解得 $x\geqslant -1$ 且 $x\neq 1$.

答案：A

易错警示

若分母中有字母，字母的取值不能使分母为零，在二次根号中字母的取值应确保被开方数为非负数.

考法2 利用分段函数设计方案问题

例13 [中考·成都]为了美化环境，建设宜居成都，我市准备在一个广场上种植甲、乙两种花卉，经市场调查，甲种花卉的种植费用 y（元）与种植面积 x（m^2）之间的函数关系如图 5.1-8 所示，乙种花卉的种植费用为每平方米 100 元.

(1)直接写出当 $0\leqslant x\leqslant 300$ 和 $x>300$ 时，y 与 x 的函数表达式；

(2)广场上甲、乙两种花卉的种植面积共 1 200 m^2，若甲种花卉的种植面积不少于 200 m^2，且不超过乙种花卉种植面积的 2 倍，那么应该怎样分配甲、乙两种花卉的种植面积才能使种植总费用最少？最少总费用为多少元？

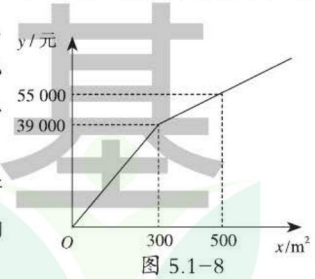


图 5.1-8

试题评析：本题是看图写函数表达式并利用表达式的题目，考查分段函数的表达式和分类讨论的数学思想.

解：(1) $y=\begin{cases}130x\ (0\leqslant x\leqslant 300),\\ 80x+15\,000\ (x>300).\end{cases}$

(2)设甲种花卉种植 a m^2，种植总费用为 W 元，则乙种花卉种植 $(1\,200-a)$ m^2.

根据题意，得 $\begin{cases}a\geqslant 200,\\ a\leqslant 2(1\,200-a),\end{cases}$

解法提醒

- 由图可知 y 与 x 的函数表达式是分段函数，用待定系数法求表达式即可.
- 设甲种花卉种植 a m^2，则乙种花卉种植 $(1\,200-a)$ m^2. 根据实际意义可以确定 a 的范围，结合种植费用 y（元）与种植面积 x（m^2）之间的函数关系可以分类讨论最少费用为多少.

荣德基 微信公众号 教辅资料站

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

$200 \leqslant a \leqslant 800$.

当 $200 \leqslant a \leqslant 300$ 时，

$W=130a+100(1\,200-a)=30a+120\,000$.

当 $a=200$ 时，$W_{最少}=126\,000$.

当 $300 < a \leqslant 800$ 时，

$W=80a+15\,000+100(1\,200-a)=135\,000-20a$.

当 $a=800$ 时，$W_{最少}=119\,000$.

$\because 119\,000 < 126\,000$，

$\therefore$ 当 $a=800$ 时，种植总费用最少，此时总费用为 119 000 元.

此时乙种花卉的种植面积为 $1\,200-800=400(m^2)$.

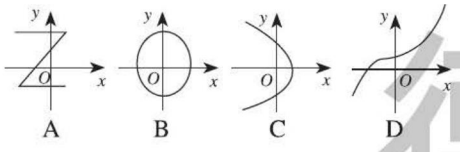
答：甲、乙两种花卉的种植面积分别是 800 m^2 和 400 m^2 时，才能使种植总费用最少，为 119 000 元.



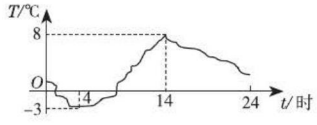
两年模拟兵法

答案见 249 页

1. 下列图象中表示 y 是 x 的函数的是(　　)



2. [中考·齐齐哈尔]如图是自动测温仪记录的图象，它反映了齐齐哈尔市的春季某天气温 T 如何随时间 t 的变化而变化，下列从图象中得到的信息正确的是(　　)



(第 2 题)

A. 0 点时气温达到最低

B. 最低气温是零下 4℃

C. 0 点到 14 点之间气温持续上升

D. 最高气温是 8℃

3. [模拟·诸城]函数 $y=\dfrac{\sqrt{x+1}}{x^2-4}$ 中自变量 x 的取值范围是(　　)

A. $x \geqslant -1$　　B. $x \geqslant -1$ 且 $x \neq 2$

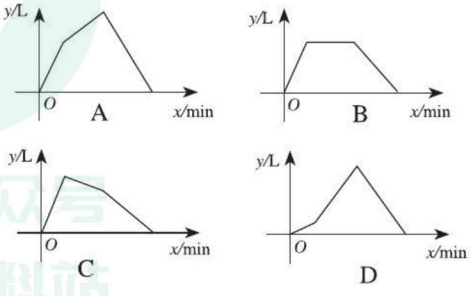
C. $x \neq \pm 2$　　D. $x > -1$ 且 $x \neq 2$

4. 某商场自行车存放处每周的存车量为 5 000 辆次，其中变速车存车费是每辆一次 1 元，普通车存车费为每辆一次 0.5 元，若普通车存车量为 x 辆次，存车的总收入为 y 元，则 y 与 x 之间的关系式是(　　)

A. $y=0.5x+5\,000$　　B. $y=0.5x+2\,500$

C. $y=-0.5x+5\,000$　　D. $y=-0.5x+2\,500$

5. [中考·孝感]一个装有进水管和出水管的空容器，从某时刻开始 4 min 内只进水不出水，容器内存水 8 L；在随后的 8 min 内既进水又出水，容器内存水 12 L；接着关闭进水管直到容器内的水放完. 若每分钟的进水量和出水量是两个常数，容器内的水量 y(单位：L)与时间 x(单位：min)之间的函数关系的图象大致的是(　　)



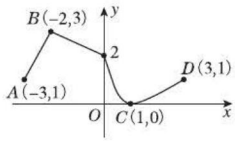
宋德基
微信公众号 教辅资料站

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

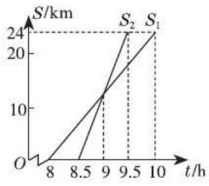
6. [中考·呼和浩特] 如果两个变量 x, y 之间的函数关系如图所示，则函数值 y 的取值范围是(　　)

A. $-3 \leqslant y \leqslant 3$　　B. $0 \leqslant y \leqslant 2$

C. $1 \leqslant y \leqslant 3$　　D. $0 \leqslant y \leqslant 3$



(第 6 题)



(第 7 题)

7. [模拟·聊城] 小亮家与姥姥家相距 24 km，小亮 8:00 从家出发，骑自行车去姥姥家. 妈妈 8:30 从家出发，乘车沿相同路线去姥姥家. 在同一直角坐标系中，小亮和妈妈的行进路程 S(km) 与北京时间 t(h) 的函数图象如图所示. 根据图象得到下列结论，其中错误的是(　　)

A. 小亮骑自行车的平均速度是 12 km/h

B. 妈妈比小亮提前 0.5 h 到达姥姥家

C. 妈妈在距家 12 km 处追上小亮

D. 9:30 妈妈追上小亮

8. 函数 $y = \sqrt{2-x} + \dfrac{1}{x+3}$ 中自变量 x 的取值范围是_____.

9. 地表以下岩层的温度 y(℃) 随着所处深度 x(km) 的变化而变化，在某个地点 y 与 x 之间有如下关系：

x/km	1	2	3	4
y/℃	55	90	125	160

根据表格，估计地表以下岩层的温度为 230℃ 时，岩层所处的深度为_____km.

10. [中考·绍兴] 某城市自来水收费实行阶梯水价，收费标准如下表所示，某户 5 月份交水费 45 元，则所用水为_____m^3.

月用水量	不超过 12 m^3 部分	超过 12 m^3 不超过 18 m^3 部分	超过 18 m^3 部分
收费标准/(元/m^3)	2	2.5	3

11. 研究发现，学生对概念的接受能力 y 与提出概念所用的时间 x(分) 之间有如下关系：

时间 x/分	2	5	7	10	12	13	14	17	20
接受能力 y	47.8	53.5	56.3	59	59.8	59.9	59.8	58.3	55

根据以上信息，回答下列问题：

(1) 当提出概念所用的时间为 10 分钟时，学生的接受能力是多少?

(2) 当提出概念所用的时间为多少分钟时，学生的接受能力最强?

(3) 在什么时间范围内，学生的接受能力在逐渐增强? 在什么时间范围内，学生的接受能力在逐渐减弱?

未德基
微信公众号 教辅资料站

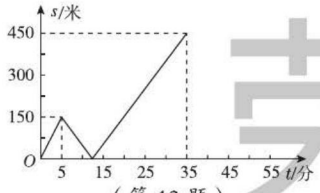
关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

12. [中考·丽水]甲、乙两人匀速从同一地点到1 500米处的图书馆看书，甲出发5分钟后，乙以50米/分的速度沿同一路线行走. 设甲、乙两人相距s（米），甲行走的时间为t（分），s关于t的函数图象的一部分如图所示.

（1）求甲行走的速度；

（2）在坐标系中，补画s关于t的函数图象的其余部分；

（3）求甲、乙两人何时相距360米.



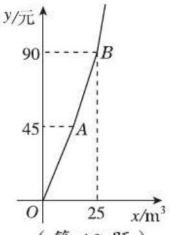
（第12题）

13. 为加强公民的节水意识，合理利用水资源，某市对居民用水实行阶梯水价. 按居民家庭每月用水量划分为三个阶梯，一、二、三阶梯用水的单价之比等于1∶1.5∶2. 图中折线表示实行阶梯水价后每月水费y（元）与月用水量x（m^3）之间的函数关系，其中线段AB表示第二阶梯时y与x之间的函数关系.【导学号：8927116】

（1）写出点B的实际意义；

（2）求线段AB所在直线的表达式；

（3）某户5月份按照阶梯水价应交水费102元，其相应用水量为多少立方米？



（第13题）

荣德基
微信公众号
教辅资料站

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

5.2 反比例函数

5.2.1 反比例函数的概念及表达式

核心知识

- 反比例函数
- 求反比例函数的表达式

知识链接



点知识·拨考向 速提分

点知识 1 反比例函数的定义

1. 定义 一般地，形如 $y=\frac{k}{x}$（k 为常数，$k\neq 0$）的函数叫做反比例函数，其中 x 是自变量，y 是函数．自变量 x 的取值范围是不等于 0 的一切实数．


反比例函数的定义

2. 反比例函数的三种形式

① $y=\frac{k}{x}$，② $y=kx^{-1}$，③ $xy=k$．（k 为常数，$k\neq 0$）

拨考向 利用反比例函数定义识别反比例函数

例 1 下列函数中，y 是 x 的反比例函数的有_____．（填序号）

① $y=2x-1$；② $y=-\frac{5}{x}$；③ $y=2x+\frac{3}{x}$；④ $y=\frac{3}{x^2}$；⑤ $y=\frac{1}{2x}$；⑥ $y=\frac{a}{x}$．

解题秘方：根据反比例函数的定义进行判断，看它是否满足反比例函数的三种形式．

解：① $y=2x-1$ 是一次函数；② $y=-\frac{5}{x}$ 是反比例函数；

③ $y=2x+\frac{3}{x}$ 不是反比例函数；

④ $y=\frac{3}{x^2}$，y 与 x^2 成反比例，但 y 与 x 不是反比例函数关系；

⑤ $y=\frac{1}{2x}$ 是反比例函数，可以写成 $y=\frac{\frac{1}{2}}{x}$；

⑥ $y=\frac{a}{x}$，当 $a\neq 0$ 时是反比例函数，没有此条件则不一定是反比例函数．

答案：②⑤

提分·必记

易错提醒

形如 $y=\frac{1}{x}+1$，$(x+1)y=3$，$y=(x+1)^{-1}$ 的函数都不是反比例函数．

提分·秘诀

技巧点拨

判断一个函数是否为反比例函数看两点：(1) 是否能写成反比例函数的三种表达形式；(2) k 是否为常数且 $k\neq 0$

易错警示

在函数 $y=\frac{3}{x^2}$ 中，y 是 x^2 的反比例函数，但不是 x 的反比例函数．

学霸德基
微信公众号 教辅资料站

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

点知识▶ 2 求反比例函数的表达式

求反比例函数的表达式，就是确定反比例函数表达式 $y=\frac{k}{x}$（$k\neq0$）中常数 k 的值，它一般需经历：“设→代→求→还原”这四步.

（1）设：设出反比例函数表达式 $y=\frac{k}{x}$；

（2）代：将所给的数据代入函数表达式；

（3）求：求出 k 的值；

（4）还原：写出反比例函数的表达式.

拔考向▶ 利用待定系数法求反比例函数的表达式

题型 1 利用待定系数法求反比例函数的表达式

例 2 [中考·陕西]若一个反比例函数的图象经过点 $A(m,m)$ 和 $B(2m,-1)$，则这个反比例函数的表达式为_____.

解题秘方：设反比例函数的表达式为 $y=\frac{k}{x}(k\neq0)$，依据反比例函数的图象经过点 $A(m,m)$ 和 $B(2m,-1)$，即可得到 k 的值，进而求得表达式.

解：设反比例函数的表达式为 $y=\frac{k}{x}(k\neq0)$.

∵反比例函数的图象经过点 $A(m,m)$ 和 $B(2m,-1)$，

∴ $k=m^2=-2m$，解得 $m_1=-2$，$m_2=0$（舍去），

∴ $k=4$，∴反比例函数的表达式为 $y=\frac{4}{x}$.

答案：$y=\frac{4}{x}$

题型 2 利用实际问题中的反比例关系求表达式

例 3 用反比例函数表达式表示下列问题中两个变量间的对应关系：

（1）小明完成 100 m 赛跑时，所用时间 t（s）随他跑步的平均速度 v（m/s）的变化而变化；

（2）一个密闭容器内有气体 0.5 kg，气体的密度 ρ 随容器体积 V 的变化而变化；

（3）压力为 600 N 时，压强 p 随受力面积 S 的变化而变化.

解题秘方：先根据每个问题中两个变量与已知量之间的等量关系建模列出等式，然后通过变形得到表达式.

解：（1）∵ $vt=100$，∴ $t=\frac{100}{v}(v>0)$.

（2）∵ $0.5=\rho V$，∴ $\rho=\frac{0.5}{V}(V>0)$.

（3）∵ $pS=600$，∴ $p=\frac{600}{S}(S>0)$.

提分·必记

特别解读

由于反比例函数的表达式中只有一个待定系数 k，因此求反比例函数的表达式只需一组对应值或一个条件即可.

提分·秘诀

解题通法

在明确两个变量为反比例函数关系的前提下，先设出反比例函数的表达式，再把满足条件的对应值代入表达式构造方程，最后解方程求出系数 k 即可.

易错警示

在解决实际问题中所遇到的反比例函数的自变量的取值范围一般情况下都大于 0.

荣德基
微信公众号
教辅资料站

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

点方法·拨技巧 提高分

拔尖角度▸ 1 利用反比例函数的定义求字母的值

挑战·高分

例 4 已知函数 $y=(m^2+2m)x^{m^2+m-1}$.

（1）若 y 是 x 的正比例函数，求 m 的值；

（2）若 y 是 x 的反比例函数，求 m 的值.

解题秘方：紧扣定义解答.（1）由正比例函数的定义可知，x 的指数为 1，系数不为零；（2）由反比例函数的定义可知，x 的指数为 -1，系数不为零.

解：（1）依题意得 $m^2+m-1=1$，且 $m^2+2m\neq 0$. 解得 $m=1$.

（2）依题意得 $m^2+m-1=-1$，且 $m^2+2m\neq 0$. 解得 $m=-1$.

技巧点拨

求反比例函数表达式中字母的值，主要关注两点：(1)x 的指数为 -1；(2)x 的系数不为 0. 然后求出其公共解.

拔尖角度▸ 2 利用待定系数法求函数表达式

挑战·高分

例 5 已知 y 是 x 的函数，下表给出了 x 与 y 的一些对应值：

x	-3		-1					3
y		1	2	4	-4	-2	-1	$-\frac{2}{3}$

根据表中数值猜想 y 是 x 的正比例函数还是反比例函数. 求出这个函数的表达式，并完成上表.

解题秘方：紧扣不同函数的定义，用分类思想分两种情况讨论，通过表中一对对应值求出函数表达式，再利用另一对对应值来检验.

解：假设 y 是 x 的正比例函数，设函数表达式为 $y=mx$（$m\neq 0$），

把 $x=-1$，$y=2$ 代入 $y=mx$ 中，解得 $m=-2$，所以 $y=-2x$.

把 $x=3$ 代入 $y=-2x$ 得 $y=-6\neq -\frac{2}{3}$，

所以 y 不是 x 的正比例函数.

假设 y 是 x 的反比例函数，设函数表达式为 $y=\frac{k}{x}$（$k\neq 0$），

把 $x=-1$，$y=2$ 代入 $y=\frac{k}{x}$ 中，解得 $k=-2$，所以 $y=-\frac{2}{x}$.

把 $x=3$ 代入 $y=-\frac{2}{x}$ 中，得 $y=-\frac{2}{3}$.

所以 y 是 x 的反比例函数，表达式为 $y=-\frac{2}{x}$.

补全表格如下：

x	-3	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	2	3
y	$\frac{2}{3}$	1	2	4	-4	-2	-1	$-\frac{2}{3}$

知识储备

解决此类根据已知表格，判断函数类型的题目，需要熟练掌握所学过的正比例函数、反比例函数的概念. 从表格中获取有用信息，从已知的对应值入手，观察其特征，求出相应的函数，进行验证.

另解

因为 $(-1)\times 2=-2$，$3\times\left(-\frac{2}{3}\right)=-2$，所以 xy 是定值，所以 y 是 x 的反比例函数.

设反比例函数的表达式为 $y=\frac{k}{x}$，把 $x=-1$，$y=2$ 代入，得 $k=-2$，所以反比例函数的表达式为 $y=-\frac{2}{x}$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

点中考·拨模拟 得满分

中考探秘 本节的中考考点是反比例函数的概念、反比例函数表达式的确定以及实际问题中的反比例函数，其中反比例函数表达式的确定是中考常考内容之一．命题形式多种多样，有时单独命题，有时与一次函数、二次函数（5.3 将学到）综合命题，题型有选择题、填空题和简单的解答题．单独考查时难度不大，当与其他知识综合考查时，难度中等．

三年中考兵法

冲刺·满分

考法 1 利用反比例函数的定义求字母的取值范围

例 6 [中考·柳州]已知反比例函数的表达式为 $y=\frac{|a|-2}{x}$，则 a 的取值范围是（　　）

A. $a\neq 2$　　B. $a\neq -2$

C. $a\neq \pm 2$　　D. $a=\pm 2$

试题评析：本题考查了反比例函数的定义，属于基础题，较为简单，熟记反比例函数的定义是解题的关键．

解：∵函数 $y=\frac{|a|-2}{x}$ 是反比例函数，∴ $|a|-2\neq 0$，即 $a\neq \pm 2$.

答案：C

解法提醒

紧扣反比例函数的定义中 $k\neq 0$ 的条件进行解题．

考法 2 利用实际问题中的等量关系求反比例函数表达式

例 7 把一个长、宽、高分别为 3 cm，2cm，1cm 的长方体铜块铸成一个圆柱形铜块，则该圆柱形铜块的底面积 S（cm^2）与高 h（cm）之间的函数关系式为_____.

试题评析：解答该类问题的关键是确定两个变量之间的函数关系，然后利用待定系数法求出它们的关系式.

解：由题意，得 $V=Sh=3\times 2\times 1=6$，则 $S=\frac{6}{h}$（$h>0$）.

答案：$S=\frac{6}{h}$（$h>0$）

解题通法

把一物体改变形状变为另外一物体的问题，应抓住“形变，体积不变”的原则，通过体积公式列出等量关系式求解．

考法 3 利用几何图形的性质求反比例函数的表达式

例 8 [中考·东营]如图 5.2-1，B（3，−3），C（5，0），以 OC，CB 为边作平行四边形 $OABC$，则经过点 A 的反比例函数的表达式为_____.

试题评析：此题考查了用待定系数法求反比例函数表达式，平行四边形的性质，熟练掌握待定系数法是解本题的关键.

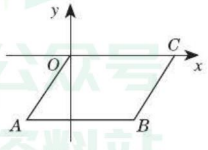


图 5.2-1

解法提醒

由平行四边形的性质可知，AB // OC，AB=OC．假设点 A 的坐标，由 AB 与 OC 之间的等量关系列方程解出点 A 的坐标，再代入求出反比例函数的表达式即可．

荣德基 微信公众号 教辅资料站

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

解：设点 A 的坐标为（x，y），

∵ B（3，−3），C（5，0），四边形 $OABC$ 为平行四边形，

∴ $5-0=3-x$，$y-0=-3-0$，解得 $x=-2$，$y=-3$，即 A（−2，−3），

设经过点 A 的反比例函数的表达式为 $y=\frac{k}{x}$，

把 A（−2，−3）的坐标代入，得 $k=6$，

∴ 经过点 A 的反比例函数的表达式为 $y=\frac{6}{x}$.

答案：$y=\frac{6}{x}$

两年模拟兵法

☞答案见 249 页

1. 下列函数中，y 是关于 x 的反比例函数的是（　　）

A. $y=-\frac{x}{2}$　　B. $y=\frac{2}{x+1}$

C. $y=-\frac{2}{x}$　　D. $y=\frac{2}{x}+1$

2. [模拟·和平区]下列关系中，两个量之间为反比例函数关系的是（　　）

A. 正方形的面积 S 与边长 a 的关系

B. 正方形的周长 L 与边长 a 的关系

C. 长方形的长为 a，宽为 20，其面积 S 与 a 的关系

D. 长方形的面积为 40，长为 a，宽为 b，a 与 b 的关系

3. 反比例函数 $y=-\frac{3}{2x}$ 中比例系数 k 为（　　）

A. −3　　B. 2　　C. $-\frac{1}{2}$　　D. $-\frac{3}{2}$

4. 若函数 $y=(m-1)x^{m^2-2}$ 是反比例函数，则 m 的值是（　　）

A. ±1　　B. −1　　C. 0　　D. 1

5. [中考·温州]验光师测得一组关于近视眼镜的度数 y（度）与镜片焦距 x（米）的对应数据如下表，根据表中数据，可得 y 关于 x 的函数表达式为（　　）

近视眼镜的度数 y/ 度	200	250	400	500	1 000
镜片焦距 x/ 米	0.50	0.40	0.25	0.20	0.10

A. $y=\frac{100}{x}$　　B. $y=\frac{x}{100}$

C. $y=\frac{400}{x}$　　D. $y=\frac{x}{400}$

6. [中考·潍坊]点 P 在反比例函数 $y=\frac{k}{x}$（$k\neq 0$）的图象上，点 Q（2，4）与点 P 关于 y 轴对称，则反比例函数的表达式为_____.

7. [中考·齐齐哈尔]在平面直角坐标系 xOy 中，点 P 到 x 轴的距离为 3 个单位长度，到原点 O 的距离为 5 个单位长度，则经过点 P 的反比例函数的表达式为_____.

8. 已知函数 $y=(m+1)x^{|2m|-1}$，当 m 取何值时，y 是 x 的正比例函数？当 m 取何值时，y 是 x 的反比例函数？

9. 已知 $y=y_1+y_2$，y_1 与 x 成正比例，y_2 与 x 成反比例，且当 $x=1$ 时，$y=4$；当 $x=2$ 时，$y=5$.

（1）求 y 与 x 之间的函数表达式；

（2）当 $x=4$ 时，求 y 的值.

荣德基
微信公众号
教辅资料站

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

5.2.2 反比例函数的图象与性质

核心知识

- 反比例函数的图象
- 反比例函数的性质
- 反比例函数中比例系数 k 的几何性质

知识链接

双曲线的位置与 k 的符号间的关系（图象）；x，y 的变化规律与 k 的符号间的关系（性质）

→ 反比例函数 → k 的几何性质：过双曲线上一点作 x 轴、y 轴的垂线，两垂线与两坐标轴组成的矩形面积与 $|k|$ 间的关系

点知识·拨考向 速提分

点知识 1 反比例函数的图象

1. 图象的画法（描点法）

（1）**列表**：选取一些自变量的值，在原点的两侧取三对或三对以上互为相反数的值，如 1 和 −1，2 和 −2，3 和 −3 等．求 y 值时，只需计算原点一侧的函数值，另一侧的函数值可以随之得出．

（2）**描点**：根据表中提供的数据，即点的坐标，在平面直角坐标系中描出对应的点．

（3）**连线**：用平滑的曲线顺次把这些点连接起来并延伸，注意双曲线的两支是断开的，延伸部分有逐渐靠近坐标轴的趋势，但永远不与坐标轴相交．

2. 图象的特点

（1）反比例函数 $y=\dfrac{k}{x}$（k 为常数，$k\neq 0$）的图象是双曲线．

（2）反比例函数图象的两支分别位于第一、第三象限或第二、第四象限．

（3）双曲线的两支都无限接近坐标轴，但永远不与坐标轴相交．

（4）双曲线既是中心对称图形（对称中心是原点），又是轴对称图形（对称轴是直线 $y=x$ 或直线 $y=-x$）．

示图（如图 5.2−2）．

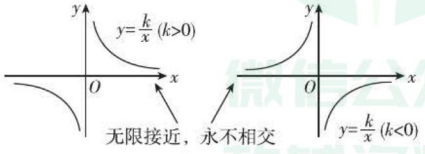


图 5.2−2

提分·必记

特别提醒

- 由于反比例函数图象的两个分支关于原点对称，所以只要画出它在一个象限内的分支，就可以对称地画出另一个分支．
- 根据实际问题画反比例函数的图象时，要考虑自变量取值范围的限制．一般实际问题的图象是反比例函数图象在第一象限内的一支或其中一部分．

宋德基 微信公众号 教辅资料站

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

核心考向▶利用图象的画法画反比例函数图象

提分·秘诀

技巧点拨

列表时，自变量的取值尽可能的以0为中心，向两边对称取值，既可简化运算又便于描点，又能凸显图象的对称性，连线时，一定要用平滑的曲线.

例1 画出反比例函数 $y=\frac{9}{x}$ 的图象.

解：（1）列表：

x	-9	-3	-1	1	3	9
$y=\frac{9}{x}$	-1	-3	-9	9	3	1

（2）描点、连线，$y=\frac{9}{x}$ 的图象如图 5.2-3 所示.

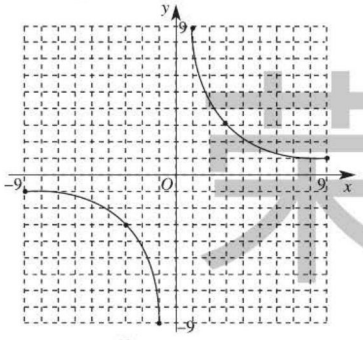


图 5.2-3

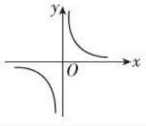
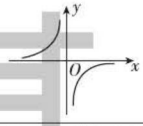
知识点 2 反比例函数的性质

提分·必记

研究反比例函数的性质，主要是研究它的图象的位置和函数值的增减情况，如下表所示.

特别提醒

在描述反比例函数的增减性时，必须根据函数所在象限指明是"在每一个象限内".因为当 $k>0(k<0)$ 时，整个函数不是 y 随 x 的增大而减小（增大），而是在每一个象限内，y 随 x 的增大而减小（增大）.

反比例函数	$y=\frac{k}{x}(k\neq 0)$	
k 的符号	$k>0$	$k<0$
图象		
图象位置	第一、第三象限	第二、第四象限
增减性	在每一个象限内，y 随 x 的增大而减小	在每一个象限内，y 随 x 的增大而增大

核心考向▶利用反比例函数的性质解决问题

题型1 利用反比例函数的图象位置求系数 k 的取值范围

提分·秘诀

技巧点拨

反比例函数图象的位置由 k 的正负决定，当 $k>0$ 时，图象在第一、第三象限；当 $k<0$ 时，图象在第二、第四象限，反之也成立.

例2 [中考·海南]如果反比例函数 $y=\frac{a-2}{x}$（a 是常数）的图象在第一、三象限，那么 a 的取值范围是（　　）

A. $a<0$　　B. $a>0$　　C. $a<2$　　D. $a>2$

解：$\because y=\frac{a-2}{x}$（a 是常数）的图象在第一、三象限，$\therefore a-2>0$，$\therefore a>2$.

答案：D

禁德基
微信公众号
教辅资料站

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

题型 2　利用反比例函数的增减性求字母的取值范围

例 3　在反比例函数 $y=\frac{m-7}{x}$ 的图象的每一支上，y 随 x 的增大而减小，则 m 的取值范围是（　　）

A. $m>7$　　B. $m<7$　　C. $m=7$　　D. $m\neq 7$

解题秘方：根据反比例函数的增减性得到 $m-7>0$，由此得解.

解：∵在反比例函数 $y=\frac{m-7}{x}$ 的图象的每一支上，y 随 x 的增大而减小，

∴ $m-7>0$，解得 $m>7$.

答案：A

题型 3　根据反比例函数的增减性判断函数值的大小

例 4　[中考·威海]若点 $(-2, y_1)$，$(-1, y_2)$，$(3, y_3)$ 在双曲线 $y=\frac{k}{x}$（$k<0$）上，则 y_1，y_2，y_3 的大小关系是（　　）

A. $y_1<y_2<y_3$　　B. $y_3<y_2<y_1$

C. $y_2<y_1<y_3$　　D. $y_3<y_1<y_2$

解题秘方：先分清各点所在的象限，再在各自的象限内利用反比例函数的增减性解决问题.

解：∵点 $(-2, y_1)$，$(-1, y_2)$，$(3, y_3)$ 在双曲线 $y=\frac{k}{x}$（$k<0$）上，

∴ $(-2, y_1)$，$(-1, y_2)$ 在第二象限，$(3, y_3)$ 在第四象限，每个象限内，y 随 x 的增大而增大，

∴ $y_3<y_1<y_2$.

答案：D

点知识▸ 3 反比例函数 $y=\frac{k}{x}$（$k\neq 0$）中 k 的几何性质

1. 矩形的面积

过反比例函数图象上任意一点 $P(x, y)$ 分别作 x 轴、y 轴的垂线 PM，PN，垂足为 M，N，所得的矩形 $PMON$ 的面积 $S=PM\cdot PN=|y|\cdot|x|=|xy|$. 因为 $y=\frac{k}{x}$，所以 $xy=k$，所以 $S=|k|$，即过双曲线上任意一点作 x 轴、y 轴的垂线，这两条垂线与两坐标轴围成的矩形的面积为 $|k|$.

2. 三角形的面积

过反比例函数图象上任意一点 E 作 EF 垂直于 x 轴（或 y 轴），垂足为 F，连接 EO，则 $S_{\triangle EOF}=\frac{|k|}{2}$，即过双曲线上的任意一点作一坐标轴的垂线，连接该点与原点，所得三角形的面积为 $\frac{|k|}{2}$.

技巧点拨

反比例函数的增减性由比例系数 k 的正负决定，在某一象限内，y 随 x 的增大而增大，则 $k<0$；在某一象限内，y 随 x 的增大而减小，则 $k>0$，反之也成立，但要注意说明是在同一象限内.

技巧点拨

根据增减性判断大小时，要先判断点是否在同一象限内的图象上. 若在，直接根据增减性判断；若不在，再分析不同象限对应的值的大小.

特殊值法

提分·必记

特别提醒

- 在利用反比例函数 $y=\frac{k}{x}$（$k\neq 0$）中 k 的几何性质确定 k 的值时，不仅要注意矩形面积的大小，还要注意函数图象的位置.
- 因为 $y=\frac{k}{x}$（$k\neq 0$）中 k 有正、负之分，所以在利用函数表达式求矩形或三角形面积时，要加上绝对值符号.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

拔考向▶ 利用反比例函数系数 k 的几何性质解决有关面积问题

例 5 [中考·宁波]如图 5.2-4，平行于 x 轴的直线与函数 $y=\frac{k_1}{x}$（$k_1>0$，$x>0$），$y=\frac{k_2}{x}$（$k_2>0$，$x>0$）的图象分别相交于 A，B 两点，点 A 在点 B 的右侧，C 为 x 轴上的一个动点，若△ ABC 的面积为 4，则 k_1-k_2 的值为（　　）

A. 8　　B. −8　　C. 4　　D. −4

解题秘方：设 $A(a,h)$，$B(b,h)$，根据反比例函数系数 k 的几何意义得，$ah=k_1$，$bh=k_2$，再根据△ ABC 的面积求出 k_1-k_2 的值.

解：∵ $AB\parallel x$ 轴，∴ A，B 两点的纵坐标相同.

设 $A(a,h)$，$B(b,h)$，

则 $ah=k_1$，$bh=k_2$.

∵ $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}AB\cdot y_A=\frac{1}{2}(a-b)h=\frac{1}{2}(ah-bh)=\frac{1}{2}(k_1-k_2)=4$，

∴ $k_1-k_2=8$. 故选 A.

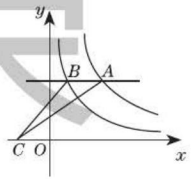


图 5.2-4

答案：A

提分·秘诀

解题通法

- 若已知反比例函数表达式，则利用反比例函数 $y=\frac{k}{x}(k\neq0)$ 中 k 的几何性质可求相关几何图形的面积；反之，若已知相关几何图形的面积及函数图象的位置，则可求 k 的值，进而可求反比例函数表达式.
- 过反比例函数图象上任意一点作两坐标轴的垂线，这两条垂线与坐标轴围成的矩形的面积是一个不变的值.

点方法·拨技巧 提高分

拔尖角度▶ 1 根据函数图象上点的坐标特征求系数的取值范围

例 6 [模拟·奎文]在反比例函数 $y=\frac{1-3m}{x}$ 的图象上有两点 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，$x_1<0<x_2$，$y_1<y_2$，则 m 的取值范围是 _____.

解题秘方：首先根据 $x_1<0<x_2$，$y_1<y_2$ 判断函数图象所在象限，再根据所在象限判断 $1-3m$ 的取值范围.

解：∵ $x_1<0<x_2$，$y_1<y_2$，

∴ 反比例函数图象在第一、三象限，∴ $1-3m>0$，解得 $m<\frac{1}{3}$.

答案：$m<\frac{1}{3}$

挑战·高分

方法总结

由 $x_1<0<x_2$ 可得点 A，点 B 不在同一象限内，此时不能直接套用反比例函数的增减性，要综合考虑象限对函数值的影响.

拔尖角度▶ 2 利用对称性求与对称点坐标有关的式子的值

例 7 如图 5.2-5 所示，直线 $y=kx$（$k<0$）与双曲线 $y=-\frac{2}{x}$ 交于 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$ 两点，则 $3x_1y_2-8x_2y_1$ 的值为（　　）

A. −5　　B. −10　　C. 5　　D. 10

挑战·高分

解法提醒

反比例函数的图象关于原点对称，正比例

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

解题秘方：紧扣“双曲线与正比例函数图象的交点关于原点对称”这一特征求解.

解：根据对称性，当正比例函数的图象和反比例函数的图象相交时，交点关于原点对称，

$\therefore A(x_1, y_1)$ 与 $B(x_2, y_2)$ 关于原点对称，

$\therefore x_1=-x_2$，$y_1=-y_2$. 又 $\because x_2y_2=-2$，

$\therefore 3x_1y_2-8x_2y_1=3\cdot(-x_2)\cdot y_2-8x_2\cdot(-y_2)=5x_2y_2=5\times(-2)=-10$.

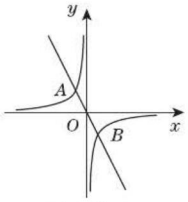


图 5.2-5

答案：B

函数的图象关于原点对称，因此反比例函数的图象和正比例函数的图象相交时，其交点关于原点对称，所以这两个交点的坐标分别为(x,y)和(-x,-y).

拔尖角度▶ 3 利用已知图形的面积求反比例函数系数 k

挑战·高分

例 8 如图 5.2-6，点 $A(-2, 0)$，$B(0, 1)$，以线段 AB 为边在第二象限作矩形 $ABCD$，双曲线 $y=\frac{k}{x}$（$k<0$）过点 D，连接 BD，若四边形 $OADB$ 的面积为 6，则 k 的值是（　　）

A. −9　　B. −12　　C. −16　　D. −18

解题秘方：过 D 作 $DM\perp x$ 轴于 M，根据相似三角形的性质和判定求出 $DM=2AM$，设 $AM=x$，根据四边形 $OADB$ 的面积求出 x，即可求出 DM 和 OM，进而得出答案.

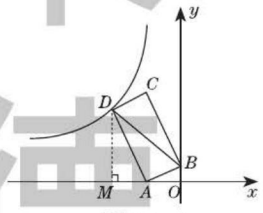


图 5.2-6

解：如图 5.2-6，过 D 作 $DM\perp x$ 轴于 M，

则 $\angle DMA=90°$. $\because$ 点 $A(-2, 0)$，$B(0, 1)$，

$\therefore OA=2$，$OB=1$.

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是矩形，

$\therefore \angle DAB=90°$，$\therefore \angle DMA=\angle DAB=\angle AOB=90°$.

$\therefore \angle DAM+\angle BAO=90°$，$\angle DAM+\angle ADM=90°$.

$\therefore \angle ADM=\angle BAO$，$\therefore \triangle DMA\backsim\triangle AOB$.

$\therefore \frac{DM}{AM}=\frac{AO}{BO}=\frac{2}{1}=2$，即 $DM=2MA$.

设 $AM=x$，则 $DM=2x$，

$\because$ 四边形 $OADB$ 的面积为 6，$\therefore S_{梯形DMOB}-S_{\triangle DMA}=6$，

$\therefore \frac{1}{2}(1+2x)(x+2)-\frac{1}{2}\times 2x\cdot x=6$. 解得 $x=2$.

则 $AM=2$，$OM=4$，$DM=4$，

$\therefore D$ 点的坐标为 $(-4, 4)$，$\therefore k=-4\times 4=-16$.

面积与定值

答案：C

技巧点拨

已知以反比例函数图象上的点为顶点的几何图形的面积求系数 k 是反比例函数系数 k 的几何性质的逆运用，一般方法是通过反比例函数图象上的点向 x 轴或 y 轴引垂线，构造矩形或三角形，把已知图形的面积转化为新构造图形的面积差或和，进而求出 k 的值.

基础 素养 德育

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

点中考·拨模拟 得满分

中考探秘

本节的主要考点是反比例函数的图象、性质及 k 的几何意义，主要考查反比例函数的图象和性质随 k 的正负的变化而变化的规律、以反比例函数图象上的点为顶点的矩形或三角形的面积的求解. 本节知识常与一次函数、二次函数（5.3 将学到）、方程、三角形、四边形、图形变换和圆等知识综合考查，题型有选择题、填空题和解答题，难度中等.

三年中考兵法

冲刺·满分

考法 1 根据反比例函数的表达式判断函数图象

例 9 [中考·潍坊] 一次函数 $y=ax+b$ 与反比例函数 $y=\frac{a-b}{x}$，其中 $ab<0$，a，b 为常数，它们在同一坐标系中的图象可以是图 5.2-7 中的（　　）

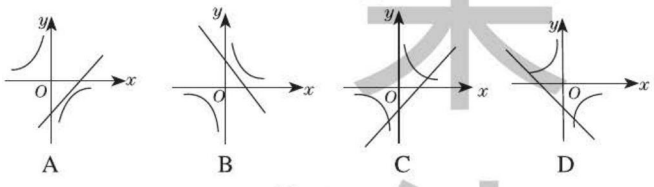


图 5.2-7

解：A. 由一次函数图象过一、三象限，得 $a>0$，又交 y 轴于负半轴，则 $b<0$，满足 $ab<0$，∴ $a-b>0$，∴反比例函数的图象过一、三象限，∴此选项不正确；B. 由一次函数图象过二、四象限，得 $a<0$，又交 y 轴于正半轴，则 $b>0$，满足 $ab<0$，∴ $a-b<0$，∴反比例函数的图象过二、四象限，∴此选项不正确；C. 由一次函数图象过一、三象限，得 $a>0$，又交 y 轴于负半轴，则 $b<0$，满足 $ab<0$，∴ $a-b>0$，∴反比例函数的图象过一、三象限，∴此选项正确；D. 由一次函数图象过二、四象限，得 $a<0$，又交 y 轴于负半轴，则 $b<0$，此时 $ab>0$，与已知相矛盾，所以此选项不正确.

答案：C

解法提醒

根据一次函数的位置确定 a,b 的符号，看是否符合 ab<0，计算 a-b 确定符号，确定双曲线的位置.



考法 2 利用反比例函数与一次函数的图象比较大小

例 10 [中考·贺州] 如图 5.2-8，在同一平面直角坐标系中，一次函数 $y_1=kx+b$（k，b 是常数，且 $k\neq 0$）与反比例函数 $y_2=\frac{c}{x}$（c 是常数，且 $c\neq 0$）的图象相交于 $A(-3,-2)$，$B(2,3)$ 两点，则不等式 $y_1>y_2$ 的解集是（　　）

A. $-3<x<2$

B. $x<-3$ 或 $x>2$

C. $-3<x<0$ 或 $x>2$

D. $0<x<2$

方法解读

一次函数图象在反比例函数图象上方时 x 的取值范围就是使一次函数的函数值大于反比例函数的函数值的自变量的取值范围.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

试题评析：本题考查了反比例函数与一次函数的交点问题，合理利用数形结合的思想是解答该类问题的关键.

解：∵一次函数 $y_1=kx+b$（k，b 是常数，且 $k\neq 0$）与反比例函数 $y_2=\frac{c}{x}$（c 是常数，且 $c\neq 0$）的图象相交于 $A(-3,-2)$，$B(2,3)$ 两点，∴不等式 $y_1>y_2$ 的解集是 $-3<x<0$ 或 $x>2$.

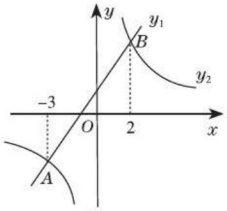


图 5.2−8

答案：C

考法 3 利用反比例函数的性质与三角形的性质求待定系数的范围

例 11 ［中考·海南］如图 5.2−9，△ABC 的三个顶点分别为 $A(1,2)$，$B(4,2)$，$C(4,4)$. 若反比例函数 $y=\frac{k}{x}$ 在第一象限内的图象与△ABC 有交点，则 k 的取值范围是（　　）

A. $1\leqslant k\leqslant 4$

B. $2\leqslant k\leqslant 8$

C. $2\leqslant k\leqslant 16$

D. $8\leqslant k\leqslant 16$

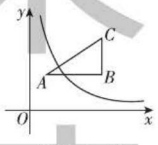


图 5.2−9

试题评析：本题考查的是反比例函数的性质，熟知反比例函数图象上点的坐标特征是解答此题的关键.

解：∵△ABC 是直角三角形，

∴当反比例函数 $y=\frac{k}{x}$ 经过点 A 时 k 最小，经过点 C 时 k 最大，

∴ $k_{最小}=1\times 2=2$，$k_{最大}=4\times 4=16$，∴ $2\leqslant k\leqslant 16$.

答案：C

考法 4 利用反比例函数中系数 k 的几何性质求几何中的最值问题

例 12 ［中考·临沂］如图 5.2−10，在平面直角坐标系中，反比例函数 $y=\frac{k}{x}$（$x>0$）的图象与边长是 6 的正方形 $OABC$ 的两边 AB，BC 分别相交于 M，N 两点. △OMN 的面积为 10. 若动点 P 在 x 轴上，则 $PM+PN$ 的最小值是（　　）

A. $6\sqrt{2}$　　B. 10

C. $2\sqrt{26}$　　D. $2\sqrt{29}$

试题评析：本题考查了反比例函数中系数 k 的几何性质. 利用轴对称、勾股定理、正方形的性质解决最小距离问题，正确构造“两点一线”型最小值的基本图形是解题的关键.

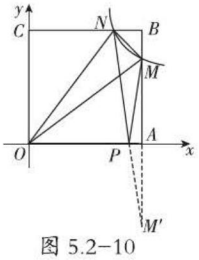


图 5.2−10

解法提醒

因为△ABC 为直角三角形，且两直角边 BC，AB 分别与 x 轴，y 轴垂直，所以在△ABC 的边上的所有点中，点 A 的横、纵坐标的积最小，点 C 的横、纵坐标的积最大.

思路点拨

由正方形 OABC 的边长是 6，得到点 M 的横坐标和点 N 的纵坐标为 6，求得 $M\left(6,\frac{k}{6}\right)$，$N\left(\frac{k}{6},6\right)$，根据三角形的面积列方程求出 k，可得 M(6,4)，N(4,6)，作 M 关于 x 轴的对称点 M′，连接 NM′交 x 轴于 P，则 NM′=PM+PN 的值最小，根据勾股定理即可得出结论.

基德

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

解：由题意知 $k>0$，∵正方形 $OABC$ 的边长是 6，

∴点 M 的横坐标和点 N 的纵坐标为 6，

∴ $M\left(6,\ \frac{k}{6}\right)$，$N\left(\frac{k}{6},\ 6\right)$，∴ $BN=6-\frac{k}{6}$，$BM=6-\frac{k}{6}$.

∵△ OMN 的面积为 10，∴ $6\times6-\frac{k}{2}-\frac{k}{2}-\frac{1}{2}\times\left(6-\frac{k}{6}\right)^2=10$，

∴ $k=24$，∴ $M(6,\ 4)$，$N(4,\ 6)$.

如图 5.2−10，作 M 关于 x 轴的对称点 M'，连接 NM' 交 x 轴于 P，则 $NM'=PM+PN$ 最小，∵ $AM=AM'=4$，∴ $BM'=10$.

∵ $BN=2$，∴ $NM'=\sqrt{BM'^2+BN^2}=\sqrt{10^2+2^2}=2\sqrt{26}$.

答案：C

考法 5 利用反比例函数与一次函数的交点解决相关问题

例 13 ［中考·潍坊］如图 5.2−11，直线 $y=3x-5$ 与反比例函数 $y=\frac{k-1}{x}$ 的图象相交于 $A(2,\ m)$，$B(n,\ -6)$ 两点，连接 OA，OB.

（1）求 k 和 n 的值；（2）求△ AOB 的面积.

试题评析：本题考查了用待定系数法求反比例函数的表达式、反比例函数与一次函数的交点问题、函数图象上点的坐标特征等知识点，求出反比例函数的表达式是解此题的关键.

解：（1）∵点 $B(n,\ -6)$ 在直线 $y=3x-5$ 上，

∴ $-6=3n-5$，解得 $n=-\frac{1}{3}$.

∴ $B\left(-\frac{1}{3},\ -6\right)$.

∵反比例函数 $y=\frac{k-1}{x}$ 的图象过点 B，

∴ $k-1=-\frac{1}{3}\times(-6)$，解得 $k=3$.

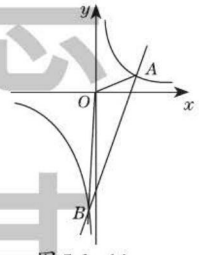


图 5.2−11

（2）如图 5.2−12，设直线 $y=3x-5$ 分别与 x 轴、y 轴交于点 C，D，

当 $y=0$ 时，$3x-5=0$，解得 $x=\frac{5}{3}$，

即 $OC=\frac{5}{3}$.

当 $x=0$ 时，$y=-5$，即 $OD=5$.

∵ $A(2,\ m)$ 在直线 $y=3x-5$ 上，

∴ $m=1$，∴ $A(2,\ 1)$.

∴ $S_{\triangle AOB}=S_{\triangle BOD}+S_{\triangle COD}+S_{\triangle AOC}=$

$\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}\times5+\frac{1}{2}\times\frac{5}{3}\times5+\frac{1}{2}\times\frac{5}{3}\times1=\frac{35}{6}$.

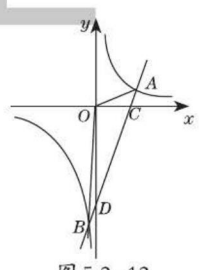


图 5.2−12

方法解读

求斜置于平面直角坐标系中的三角形面积的方法：一般采用割补法将其转化为一边在坐标轴上的几个三角形的面积的和或差来求解，因为三角形一边在坐标轴上时，可直接求出此边长，这条边上的高为第三个顶点的横坐标或纵坐标的绝对值，所以求面积的实质就是求点的坐标.

解法提醒

- 先根据点 B 在直线上，求出 n 的值，进而得到点 B 的坐标，再代入反比例函数表达式求出 k 即可；
- 先求出直线与 x 轴、y 轴的交点坐标，进而求出线段 OC，OD 的长，再把△AOB 进行分割，进而求出△AOB 的面积.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

反比例函数中比例系数 k 的妙用

反比例函数中比例系数 k 对反比例函数起决定性作用，例如：①确定了 k 的值就确定了反比例函数的表达式；②k 的正负决定双曲线所在的象限；③ $|k|$ 越大，双曲线离坐标原点越远等．反比例函数中系数 k 还有其他几种妙用，在中考中经常出现．

（1）比例系数 k 代表两个变量的乘积是定值；反之，若两个变量的乘积是定值，也可断定两个变量是反比例函数关系．例如：

①［**中考·无锡**］若点 $A(3,-4)$，$B(-2,m)$ 在同一个反比例函数的图象上，则 m 的值为（　　）

A. 6　　B. −6　　C. 12　　D. −12

点拨：利用 k 的不变性求解．

②［**中考·武汉**］科幻小说《实验室的故事》中，有这样一个情节，科学家把一种珍奇的植物分别放在不同温度的环境中，经过一天后，测试出这种植物高度的增长情况（如下表）：

温度 x/℃	…	−4	−2	0	2	4	4.5	…
植物每天高度增长量 y/mm	…	41	49	49	41	25	19.75	…

由这些数据，科学家推测出植物每天高度增长量 y 是温度 x 的函数，且这种函数是反比例函数、一次函数或二次函数（5.3 将学到）中的一种．请你选择一种适当的函数，求出它的函数关系式，并简要说明不选择另外两种函数的理由．

点拨：表中有 $x=0$ 的数据，可判断不是反比例函数．

（2）顶点在反比例函数图象上的图形的面积与 k 之间有密切的关系．如图 5.2−13，过双曲线 $y=\frac{k}{x}$ 上任意一点 $P(x,y)$ 分别作 x 轴、y 轴的垂线 PM，PN，垂足为 M，N，所得的矩形 $PMON$ 的面积 $S=PM\cdot PN=|y|\cdot|x|=|xy|$．∵ $y=\frac{k}{x}$，∴ $xy=k$．∴ $S=|k|$，即过双曲线 $y=\frac{k}{x}$ 上任意一点作 x 轴、y 轴的垂线，与两坐标轴围成的矩形的面积为 $|k|$．如图 5.2−13，过双曲线 $y=\frac{k}{x}$ 上的任意一点 E 作 EF 垂直于 y 轴，垂足为 F，连接 EO，则 $S_{\triangle EOF}=\frac{|k|}{2}$，即过双曲线 $y=\frac{k}{x}$ 上的任意一点作一坐标轴的垂线，连接该点与原点，所得三角形的面积为 $\frac{|k|}{2}$．



图 5.2−13

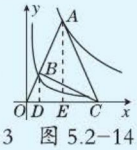


图 5.2−14

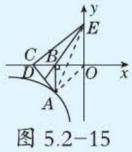


图 5.2−15

①在解决与反比例函数图象有关的图形面积问题时，通常把它转化为顶点在图象上的三角形或矩形的面积问题．例如：

［**中考·宁波**］如图 5.2−14，点 A 为函数 $y=\frac{9}{x}$（$x>0$）的图象上一点，连接 OA，交函数 $y=\frac{1}{x}$（$x>0$）的图象于点 B，点 C 是 x 轴上一点，且 $AO=AC$，则△ ABC 的面积为_____．

点拨：如图 5.2−14，分别过点 A，B 作 x 轴的垂线，垂足分别为 E，D，巧妙利用 k 的几何性质解决．

②已知某个图形的面积，求 k 的值时，将这个图形的面积转化为顶点在反比例函数图象上的几个三角形或矩形的面积之和（差），然后用含 k 的代数式表示出面积，建立方程求出 k 的值．例如：

［**中考·深圳**］如图 5.2−15，Rt△ ABC 的直角边 BC 在 x 轴的负半轴上，斜边 AC 上的中线 BD 的反向延长线交 y 轴的正半轴于点 E，反比例函数 $y=\frac{k}{x}$（$x<0$）的图象经过点 A．若 $S_{\triangle BEC}=8$，则 $k=$_____．

点拨：如图 5.2−15，连接 AE，AO，将△ BEC 的面积转化为△ AOB 的面积．

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

1. [中考·绥化]已知反比例函数 $y=\frac{3}{x}$，下列结论不正确的是（　　）

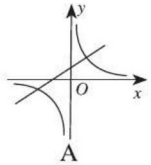
A. 其图象经过点（3，1）

B. 其图象分别位于第一、三象限

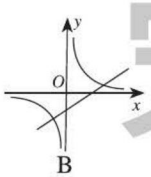
C. 当 $x>0$ 时，y 随 x 的增大而减小

D. 当 $x>1$ 时，$y>3$

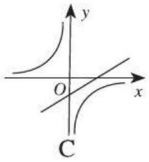
2. [中考·贺州]已知 $ab<0$，一次函数 $y=ax-b$ 与反比例函数 $y=\frac{a}{x}$ 在同一直角坐标系中的图象可能是（　　）



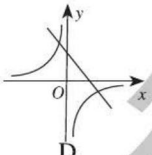
A



B

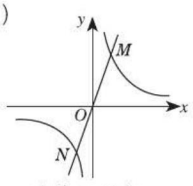


C



D

3. [中考·湖州]如图，已知直线 $y=k_1x$（$k_1\neq 0$）与反比例函数 $y=\frac{k_2}{x}$（$k_2\neq 0$）的图象交于 M，N 两点．若点 M 的坐标是（1，2），则点 N 的坐标是（　　）



（第3题）

A.（−1，−2）　　B.（−1，2）

C.（1，−2）　　D.（−2，−1）

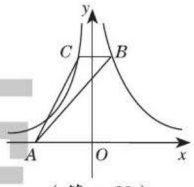
4. [中考·潍坊]设点 $A(x_1,y_1)$ 和 $B(x_2,y_2)$ 是反比例函数 $y=\frac{k}{x}$ 图象上的两个点，当 $x_1<x_2<0$ 时，$y_1<y_2$，则一次函数 $y=-2x+k$ 的图象没有经过的象限是（　　）

A. 第一象限　　B. 第二象限

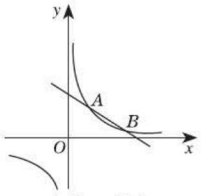
C. 第三象限　　D. 第四象限

5. [中考·黑龙江]如图，平面直角坐标系中，点 A 是 x 轴上任意一点，BC 平行于 x 轴，分别交 $y=\frac{3}{x}$（$x>0$）、$y=\frac{k}{x}$（$x<0$）的图象于 B，C 两点，若△ABC 的面积为2，则 k 的值为（　　）

A. -1　　B. 1　　C. $-\frac{1}{2}$　　D. $\frac{1}{2}$



（第5题）



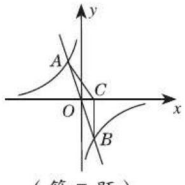
（第6题）

6. [中考·大连]如图，一次函数 $y=k_1x+b$ 的图象与反比例函数 $y=\frac{k_2}{x}$ 的图象相交于 $A(2,3)$，$B(6,1)$ 两点，当 $k_1x+b<\frac{k_2}{x}$ 时，x 的取值范围为（　　）

A. $x<2$　　B. $2<x<6$

C. $x>6$　　D. $0<x<2$ 或 $x>6$

7. 如图，直线 $y=mx$（$m\neq 0$）与双曲线 $y=\frac{n}{x}$（$n\neq 0$）相交于 $A(-1,3)$，B 两点，过点 B 作 $BC\perp x$ 轴于点 C，连接 AC，则△ABC 的面积为（　　）



（第7题）

A. 3　　B. 1.5

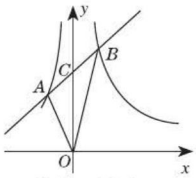
C. 4.5　　D. 6

8. 已知点 $A(x_1,3)$，$B(x_2,6)$ 都在反比例函数 $y=-\frac{3}{x}$ 的图象上，则 x_1_____x_2.（填“>”“<”或“=”）

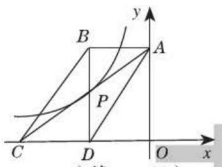
荣德基

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

9. [模拟·潍坊]如图，点A是反比例函数$y=-\frac{2}{x}$在第二象限内的图象上的一点，点B是反比例函数$y=\frac{4}{x}$在第一象限内的图象上的一点，直线AB与y轴交于点C，且$AC=BC$，连接OA，OB，则$\triangle AOB$的面积是_____.



（第9题）



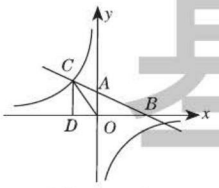
（第10题）

10. [中考·烟台]如图，反比例函数$y=\frac{k}{x}$的图象经过$\square ABCD$对角线的交点P，已知点A，C，D在坐标轴上，$BD\perp DC$，$\square ABCD$的面积为6，则$k=$_____.

11. [模拟·阳谷县]如图，在平面直角坐标系中，直线AB与x轴、y轴分别交于B，A两点，与反比例函数的图象交于点C，连接CO，过C作$CD\perp x$轴于D，已知$\tan\angle ABO=\frac{1}{2}$，$OB=4$，$OD=2$.

（1）求直线AB和反比例函数的表达式；

（2）在x轴上有一点E，使$\triangle CDE$与$\triangle COB$的面积相等，求点E的坐标.



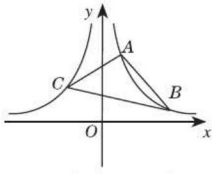
（第11题）

12. [中考·聊城]如图，已知反比例函数$y=\frac{k_1}{x}$（$x>0$）的图象与反比例函数$y=\frac{k_2}{x}$（$x<0$）的图象关于y轴对称，$A(1,4)$，$B(4,m)$是函数$y=\frac{k_1}{x}$（$x>0$）图象上的两点，连接AB，点$C(-2,n)$是函数$y=\frac{k_2}{x}$（$x<0$）图象上的一点，连接AC，BC.

（1）求m，n的值；

（2）求AB所在直线的表达式；

（3）求$\triangle ABC$的面积.



（第12题）

荣德基

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

5.2.3 反比例函数的应用

核心知识

- 实际问题中的反比例函数
- 几何图形中的反比例函数
- 跨学科中的反比例函数

知识链接

反比例函数的应用
- 步骤：审、设、列、写、解
- 常见类型
  - 数学问题
  - 跨学科问题
  - 实际问题

点知识·拨考向 速提分

点知识 建立反比例函数模型解决实际问题

1. 在生活与生产中，如果某些问题的两个量成反比例关系，那么可以根据这种关系建立反比例函数模型，再利用反比例函数的有关知识解决实际问题.

运用反比例函数解决实际问题时常用的两种思路：

（1）通过问题提供的信息，明确变量之间的函数关系，设出相应的函数表达式，再根据题目条件确定函数表达式中的待定系数的值；

（2）已知反比例函数的表达式，运用反比例函数的图象及性质解决实际问题.

2. 求反比例函数表达式常用的两种方法

（1）**待定系数法**

若题目提供的信息中明确此函数是反比例函数，则设函数表达式为 $y=\frac{k}{x}$（k 为常数，$k\neq 0$），再求出 k 的值；

（2）**列方程法**

若题目所给的信息中两个变量之间的函数关系不明确，通常列出关于两个变量的方程，通过变形得到反比例函数表达式.

3. 用反比例函数解决实际问题的一般步骤

（1）**审**：审清题意，找出题目中的常量、变量；

（2）**设**：根据常量、变量间的关系，设出函数表达式，待定的系数用字母表示；

（3）**列**：由题目中的已知条件列出方程，求出待定系数；

（4）**写**：写出函数表达式，并注意表达式中自变量的取值范围；

（5）**解**：用函数的图象和性质去解决实际问题.

提分·必记

特别提醒

利用反比例函数解决实际问题时应注意：
1. 要理清题目中的常量与变量及其基本数量的关系，将实际问题抽象成数学问题，建立数学模型；
2. 要分清自变量和因变量，从便写出正确的函数表达式，结合实际问题，确定自变量的取值范围；
3. 要熟练掌握反比例函数的意义、图象和性质，特别是图象，要做到数形结合，这样有利于分析和解决问题.

活学巧用

反比例函数应用广，
解题思路有两条，
建立模型列方程；
求表达式两方法，
待定系数与变形；
解决问题五步骤，
审设列写后再解.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

考向▶利用反比例函数模型解决实际问题

题型1　利用反比例函数解决排水问题

例1　水池内原有12 m^3的水，如果从排水管中每小时流出x m^3的水，那么经过y h就可以把水放完.

（1）求y与x之间的函数关系式；（2）画出函数的图象；

（3）当$x=6$时，求y的值.

解题秘方：（1）由题目可知$xy=12$，据此列出y与x之间的函数关系式.（2）画函数的图象时应把握实际意义，即$x>0$，∴图象只能在第一象限内画出.（3）直接把$x=6$代入关系式中可求出y的值.

解：（1）由题意，得$xy=12$，∴$y=\dfrac{12}{x}$（$x>0$）.

（2）列表如下：

x（$x>0$）	…	2	4	6	8	12	…
$y=\dfrac{12}{x}$	…	6	3	2	1.5	1	…

描点并连线，如图5.2−16所示.

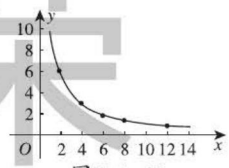


图5.2−16

（3）当$x=6$时，$y=\dfrac{12}{6}=2$.

题型2　利用反比例函数解决行程问题

例2　[中考·嘉兴]一辆汽车匀速通过某段公路，所需时间t（h）与行驶速度v（km/h）满足函数关系：$t=\dfrac{k}{v}$，其图象为如图5.2−17所示的一段曲线，且端点为$A(40,1)$和$B(m,0.5)$.

（1）求k和m的值；

（2）若行驶速度不得超过60 km/h，则汽车通过该路段最少需要多长时间？

解题秘方：（1）由A点的坐标可以求反比例函数的表达式，再由B点坐标求m的值；（2）图象在第一象限，t随v的增大而减小.

解：（1）将A（40，1）的坐标代入$t=\dfrac{k}{v}$，得$1=\dfrac{k}{40}$，解得$k=40$.

所以函数表达式为$t=\dfrac{40}{v}$.

因为B（m，0.5）在函数图象上，

所以$0.5=\dfrac{40}{m}$，解得$m=80$.

所以$k=40$，$m=80$.

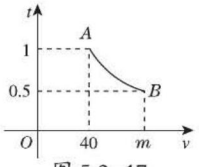


图5.2−17

（2）令$v=60$，得$t=\dfrac{40}{60}=\dfrac{2}{3}$.

结合函数图象可知，汽车通过该路段最少需要$\dfrac{2}{3}$ h.

提分·秘诀

易错警示

在排水问题中，每小时的排水量$x>0$，因此在画此实际问题中的反比例函数的图象时，只能画出第一象限内的一个分支，第三象限内的分支在此题中应舍去.

方法点拨

在实际问题中的反比例函数图象一般都在第一象限，所以函数值都随自变量的增大而减小.当需要确定其中一个变量的最值或取值范围时，可以根据另一个变量的最值或取值范围来确定.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

点方法·拨技巧 提高分

拔尖角度 1 利用分类验证法解反比例函数应用方案问题

例 3 如图 5.2-18，科技小组准备用材料围建一个面积为 60 m^2 的矩形实验场地 $ABCD$，其中一边 AB 靠墙，墙长为 12 m. 设 AD 的长为 x m，DC 的长为 y m.

（1）求 y 与 x 之间的函数表达式；

（2）若围成的矩形实验场地 $ABCD$ 的所用材料总长不超过 26 m，边 AD 和 DC 的长都是整数，求出满足条件的所有围建方案.

解题秘方：紧扣“几何相关性质、公式”建立模型，求反比例函数表达式；用“分类验证法”求围建方案.

解：（1）由题意，得 $xy=60$，即 $y=\frac{60}{x}$.

$\therefore$ y 与 x 之间的函数表达式为 $y=\frac{60}{x}$.

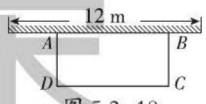


图 5.2-18

（2）$\because$ $y=\frac{60}{x}$，且 x，y 都是正整数，

$\therefore$ x 可取 1，2，3，4，5，6，10，12，15，20，30，60.

$\because$ $2x+y \leqslant 26$，$0 < y \leqslant 12$，

$\therefore$ 符合条件的有：当 $x=5$ 时，$y=12$；当 $x=6$ 时，$y=10$；当 $x=10$ 时，$y=6$.

答：满足条件的围建方案为 $AD=5$ m，$DC=12$ m 或 $AD=6$ m，$DC=10$ m 或 $AD=10$ m，$DC=6$ m.

挑战·高分

思路点拨

根据几何公式确定反比例函数表达式的思路：当问题中涉及几何图形时，可根据图形的面积公式或体积公式列出等式，通过变形得到反比例函数表达式，并运用其性质解决问题，但要注意自变量的取值范围.

特别提醒

避免因对 60 的所有因数列举不全而产生漏解.

拔尖角度 2 利用反比例函数解决跨学科问题

例 4 某闭合电路中，其电压恒定，电流 I（A）与电阻 R（Ω）成反比例函数关系，其图象如图 5.2-19 所示，根据图象回答下列问题.

（1）写出电流 I 与电阻 R 之间的函数关系式；

（2）如果一个用电器的电阻为 5 Ω，其允许通过的最大电流是 1 A，那么这个用电器接在这个闭合电路中，会不会被烧毁？请说明理由；

（3）若允许通过的电流不超过 4 A，那么电阻 R 至少应是多少？

解题秘方：紧扣“电压恒定，电流和电阻成反比例函数关系”用待定系数法求反比例函数关系式，并结合函数关系式求解.

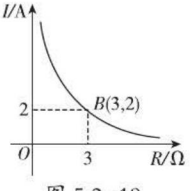


图 5.2-19

挑战·高分

知识储备

在电学中，当电压 U 一定时，闭合电路的电流 I 与电阻 R 之间是反比例函数关系，即电流(I)=电压(U)/电阻(R).

另解

在反比例函数 $y=\frac{k}{x}$ 中，k 的值等于反比例函数图象上任意一点的横坐标与纵坐标的乘积，即 $k=3\times 2=6$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

解：（1）设 $I=\frac{k}{R}$，由图象过点 B（3，2），

得 $2=\frac{k}{3}$，解得 $k=6$，即函数关系式为 $I=\frac{6}{R}$.

（2）会被烧毁．由（1）知，闭合电路的电压恒为 6 V，该用电器接到这个闭合电路中，通过的电流为 $\frac{6}{5}=1.2$（A），大于此用电器允许通过的最大电流 1 A，所以该用电器接在这个电路中会被烧毁．

（3）由 $I=\frac{6}{R}$，可知当 $I=4$ 时，$R=1.5$，

所以电阻 R 至少应是 1.5 Ω.

由题意知 $\frac{6}{R}\leqslant 4$，即 $4R\geqslant 6$，解得 $R\geqslant 1.5$，所以电阻至少应是 1.5 Ω.

拔尖角度 3 利用反比例函数解决销售问题

挑战·高分

例 5 某商场出售一批进价为 2 元的贺卡，在市场销售中发现，此商品的日销售单价 x（单位：元）与日销售量 y（单位：张）之间有如下关系：

日销售单价 x / 元	3	4	5	6
日销售量 y / 张	20	15	12	10

（1）确定 y 与 x 之间的函数表达式；

（2）设销售此贺卡的日销售利润为 w 元，试求 w 与 x 之间的函数表达式．若物价局规定该贺卡售价最高不超过 10 元 / 张，请你求出日销售单价 x 定为多少时，才能获得最大日销售利润．

思路点拨

- 由表中数据确定两个变量之间的函数关系是否为反比例函数关系，其思路是观察对应数据的乘积是否相等，若乘积相等，则是反比例函数关系；否则不是反比例函数关系．
- 利用表格中的一组数据求出反比例函数的表达式后，还要将其他各组数据代入其中进行验证．

解题秘方：（1）紧扣“两个变量的对应值的乘积为同一常数，则这两个变量成反比例关系”求反比例函数表达式；（2）紧扣“被除数一定，除数越大商越小及被减数一定，减数越小差越大”进行解答．

解：（1）根据每组数据之积均为 60，推测 y 与 x 成反比例函数关系．

设 $y=\frac{k}{x}(k\neq 0)$，把点（3，20）的坐标代入 $y=\frac{k}{x}$，

得 $k=60$，

$\therefore y=\frac{60}{x}$.

把点（4，15），（5，12），（6，10）的坐标代入上式均成立．

$\therefore y$ 与 x 之间的函数表达式为 $y=\frac{60}{x}(x\geqslant 2)$.

（2）$w=(x-2)y=(x-2)\cdot\frac{60}{x}=60-\frac{120}{x}(2\leqslant x\leqslant 10)$.

当 $x=10$ 时，w 有最大值，

即当日销售单价定为 10 元时，可获得最大日销售利润．

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

拔尖角度▸ 4 利用分段法解决双函数问题

挑战·高分

例 6 工匠制作某种金属工具要进行材料煅烧和锻造两个程序，即需要将材料煅烧到 800℃，然后停止煅烧进行锻造操作．如图 5.2−20 所示，煅烧时，温度 y（℃）与时间 x（min）成一次函数关系；锻造时，温度 y（℃）与时间 x（min）成反比例函数关系，已知该材料初始温度是 32℃，第 8min 时，材料温度降为 600℃．

（1）分别求出材料煅烧和锻造时 y 与 x 的函数表达式，并写出自变量 x 的取值范围；

（2）根据工艺要求，锻造期间当材料温度低于 480℃时，需停止操作，那么锻造的操作时间有多长？

解题秘方：（1）根据点 C 的坐标可求得锻造阶段的函数表达式，进而可确定点 B 的坐标，根据点 A，B 的坐标可求得线段 AB 所在直线的函数表达式；

（2）求当材料温度为 480℃时的时间与温度最高时的时间的差．

解：（1）设锻造时的函数表达式为 $y=\dfrac{k}{x}$，

则 $600=\dfrac{k}{8}$，

$\therefore k=4\,800$，

$\therefore y=\dfrac{4\,800}{x}$．

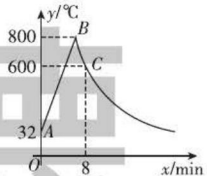


图 5.2−20

当 $y=800$ 时，$x=6$．

$\therefore$ 锻造时的函数表达式为 $y=\dfrac{4\,800}{x}$（$x\geqslant 6$），

点 B 的坐标为（6，800）．

设煅烧时的函数表达式为 $y=ax+b$，

则 $\begin{cases}b=32,\\6a+b=800,\end{cases}$

解得 $\begin{cases}a=128,\\b=32.\end{cases}$

$\therefore$ 煅烧时的函数表达式为 $y=128x+32$（$0\leqslant x<6$）．

（2）在 $y=\dfrac{4\,800}{x}$（$x\geqslant 6$）中，

当 $y=480$ 时，$x=\dfrac{4\,800}{480}=10$，

$10-6=4$（min）．

$\therefore$ 锻造的操作时间有 4 min．

解法提醒

反比例函数与其他函数的综合类问题，往往涉及函数表达式的求解、交点坐标以及面积等问题，在解决此类问题时，要注意以下几点：

- 对于特殊的点，如两个函数图象的交点、函数图象与坐标轴的交点等，通常需要先求出交点的坐标．
- 求反比例函数和一次函数相关的问题，通常要先求出反比例函数的表达式，然后利用其表达式求出特殊点的坐标，进而求出一次函数的表达式，再利用它们的性质解决相关问题．

未德基

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

点中考·拨模拟 得满分

中考探秘 利用反比例函数解决跨学科的综合题是近几年中考的热点，题型有选择题、填空题、解答题. 近两年各地中考常把反比例函数与一次函数、二次函数（5.3 将学到）、几何知识综合起来设计题目，考查反比例函数的图象及性质在实际问题中的应用，体现了数形结合思想和函数思想，这也是初中数学常用的思想方法.

三年中考兵法

冲刺·满分

考法 1 利用反比例关系判别反比例函数图象

例 7 [中考·宜昌]某学校要种植一块面积为 $100\ m^2$ 的长方形草坪，要求相邻两边长均不小于 5 m，则草坪的一边长 y（单位：m）随其邻边长 x（单位：m）的变化而变化的图象可能是图 5.2-21 中的（　　）

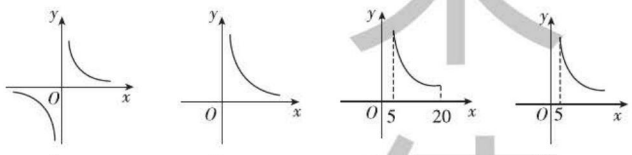


图 5.2-21

试题评析：本题考查反比例函数的应用，根据反比例函数表达式及 y 的取值范围，即可求得 x 的取值范围，熟练掌握实际问题的反比例函数图象是解题的关键.

解：∵草坪面积为 $100\ m^2$，∴ $y=\dfrac{100}{x}$.

∵相邻两边长均不小于 5 m，∴ $x\geqslant 5$，$y\geqslant 5$，∴ $5\leqslant x\leqslant 20$.

答案：C

解法提醒

判定实际情况中的反比例函数图象要注意：

- 图象分支的数量；
- 图象分支中的端点的位置，即需求出自变量、函数值的范围；由 $x\geqslant 5$，$y\geqslant 5$ 及 $y=\dfrac{100}{x}$，可求出 $5\leqslant x\leqslant 20$，$5\leqslant y\leqslant 20$.

考法 2 利用反比例函数解决物理问题

例 8 [中考·天门]已知蓄电池的电压为定值，使用蓄电池时，电流 I（单位：A）与电阻 R（单位：Ω）是反比例函数关系，它的图象如图 5.2-22 所示，如果以此蓄电池作为电源的用电器，规定其限制电流不能超过 10A，那么用电器可变电阻 R 应控制的范围是_____.

试题评析：本题是反比例函数的应用，要求学生会利用待定系数法求反比例函数的关系式，并正确认识图象，运用数形结合的思想，与不等式或等式相结合解决实际问题.

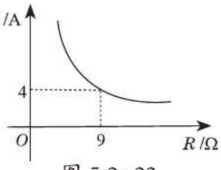


图 5.2-22

解法提醒

电压 U 一定，电阻 R 与电流 I 成反比例函数关系，设出反比例函数关系式，结合图象上点的坐标求出关系式，再根据 $I\leqslant 10$ 列出不等式，最后求出答案.

荣德基

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

解：设反比例函数关系式为 $I=\dfrac{k}{R}$，把（9，4）的坐标代入得 $k=4\times9=36$，

∴反比例函数关系式为 $I=\dfrac{36}{R}$，若 $I\leqslant10$，则 $\dfrac{36}{R}\leqslant10$，解得 $R\geqslant3.6$.

答案：$R\geqslant3.6$

考法 3 利用反比例函数解决农业生产中的温度变化问题

例 9 ［中考·乐山］某蔬菜生产基地在气温较低时，用装有恒温系统的大棚栽培一种新品种蔬菜. 如图 5.2-23 是试验阶段的某天恒温系统从开启到关闭后，大棚内的温度 y（℃）与时间 x（h）之间的函数关系，其中线段 AB，BC 表示恒温系统开启阶段，双曲线的一部分 CD 表示恒温系统关闭阶段.

请根据图中信息解答下列问题：

（1）求这天的温度 y 与时间 x（$0\leqslant x\leqslant24$）的函数表达式；

（2）求恒温系统设定的恒定温度；

（3）当大棚内的温度低于 10℃时，蔬菜会受到伤害. 问在这天内，恒温系统最多可以关闭多少小时，才能使蔬菜避免受到伤害？

试题评析：本题为实际应用背景的函数综合题，考查求一次函数、反比例函数和常函数的表达式. 解答时应注意临界点.

解：（1）设线段 AB 的表达式为 $y=k_1x+b$（$k_1\neq0$），

∵线段 AB 过点（0，10），（2，14），

∴ $\begin{cases}b=10,\\2k_1+b=14,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}k_1=2,\\b=10,\end{cases}$

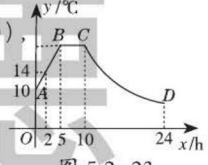


图 5.2-23

∴线段 AB 的表达式为 $y=2x+10$（$0\leqslant x<5$）.

∵ B 在线段 AB 上，当 $x=5$ 时，$y=20$，∴ B 点坐标为（5，20），

∴线段 BC 的表达式为 $y=20$（$5\leqslant x<10$）.

设双曲线 CD 的表达式为 $y=\dfrac{k_2}{x}$（$k_2\neq0$），

∵ C（10，20），∴ $k_2=200$.

∴双曲线 CD 的表达式为 $y=\dfrac{200}{x}$（$10\leqslant x\leqslant24$）.

综上，$y=\begin{cases}2x+10\ (0\leqslant x<5),\\20\ (5\leqslant x<10),\\\dfrac{200}{x}\ (10\leqslant x\leqslant24).\end{cases}$

（2）由（1）知恒温系统设定的恒定温度为 20℃.

（3）把 $y=10$ 代入 $y=\dfrac{200}{x}$ 中，解得 $x=20$，$20-10=10$（h）.

答：恒温系统最多可以关闭 10 h，才能使蔬菜避免受到伤害.

解法提醒

(1) 观察函数图象，易知函数 y 由三部分组成，故应用待定系数法分段求函数表达式，最后整合到一起；

(2) 观察图象可得 BC 段的温度不变，则 B 点的纵坐标即为设定的恒定温度；

(3) 将临界值 y=10 代入(1)中的函数表达式求出对应的 x 的值即可.



菜 德 基

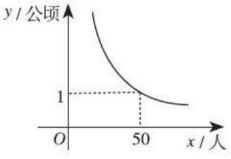
关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

1. [中考·广州]一司机驾驶汽车从甲地去乙地，他以80千米/时的平均速度用了4小时到达乙地，当他按原路匀速返回时，汽车的速度v（千米/时）与时间t（时）的函数关系式是（　　）

A. $v=320t$　　B. $v=\dfrac{320}{t}$

C. $v=20t$　　D. $v=\dfrac{20}{t}$

2. [中考·海南]某村耕地总面积为50公顷，且该村人均耕地面积y（单位：公顷）与总人口x（单位：人）的函数图象如图所示，则下列说法正确的是（　　）



（第2题）

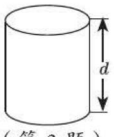
A. 该村人均耕地面积随总人口的增多而增多

B. 该村人均耕地面积y与总人口x成正比例

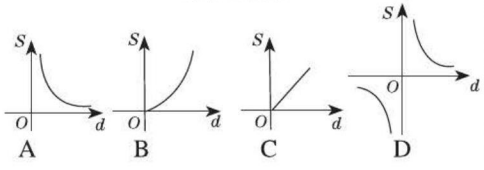
C. 若该村人均耕地面积为2公顷，则总人口为100人

D. 当该村总人口为50人时，人均耕地面积为1公顷

3. [中考·宜昌]如图，市煤气公司计划在地下修建一个容积为$10^4 m^3$的圆柱形煤气储存室，则储存室的底面积S（单位：m^2）与其深度d（单位：m）的函数图象大致是（　　）



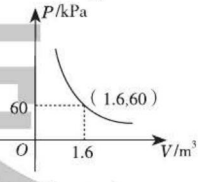
（第3题）



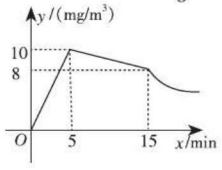
4. [模拟·高密]某气球内充满了一定质量的气体，当温度不变时，气球内气体的气压P（kPa）是气体体积V（m^3）的反比例函数，其图象如图所示．当气球内的气压大于120 kPa时，气球将爆炸．为了安全起见，气球的体积应（　　）

A. 不小于$\dfrac{5}{4}$ m^3　　B. 小于$\dfrac{5}{4}$ m^3

C. 不小于$\dfrac{4}{5}$ m^3　　D. 小于$\dfrac{4}{5}$ m^3



（第4题）



（第5题）

5. [中考·聊城]春季是传染病多发的季节，积极预防传染病是学校高度重视的一项工作，为此，某校对学生宿舍采取喷洒药物进行消毒．在对某宿舍进行消毒的过程中，先经过5 min的集中药物喷洒，再封闭宿舍10 min，然后打开门窗进行通风，室内每立方米空气中含药量y（mg/m^3）与药物在空气中的持续时间x（min）之间的函数关系，在打开门窗通风前分别满足两个一次函数，在通风后又成反比例，如图所示．下面四个选项中错误的是（　　）

A. 经过5 min集中喷洒药物，室内空气中的含药量最高达到10 mg/m^3

B. 室内空气中的含药量不低于8 mg/m^3的持续时间达到了11 min

C. 当室内空气中的含药量不低于5 mg/m^3且持续时间不低于35 min时，才能有效杀灭某种传染病毒．此次消毒完全有效

D. 当室内空气中的含药量低于2 mg/m^3时，对人体才是安全的，所以从室内空气中的含药量达到2 mg/m^3开始，需经过59 min后，学生才能进入室内

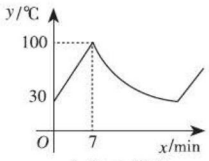
某德基

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

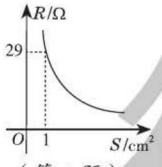
6. 在温度不变的情况下，通过对气缸顶部活塞的加压，测出每一次加压后，缸内气体体积 x（mL）和气体对汽缸壁所产生的压强 y（kPa）的值，如下表所示，可求出 y 与 x 之间的函数关系的式子为_____.

体积 x/mL	100	80	60	40	20
压强 y/kPa	60	75	100	150	300

7. 某品牌的饮水机接通电源后就进入自动程序：开机加热到水温 100℃，停止加热，水温开始下降，此时水温 y（℃）与开机后用时 x（min）成反比例关系，直至水温降至 30℃，饮水机关机. 饮水机关机后即刻自动开机，重复上述自动程序. 若在水温为 30℃时，接通电源后，水温 y（℃）和时间 x（min）的关系如图所示，水温从 100℃降到 35℃所用的时间是_____min.



（第 7 题）



（第 8 题）

8. 实验表明，当导线的长度一定时，导线的电阻与它的横截面积成反比例. 一条长为 100 cm 的导线的电阻 R（Ω）与它的横截面积 S（cm^2）的函数图象如图所示，其函数关系式是_____，当 $S=2$ 时，$R=$_____.

9. 某镇某养鱼专业户准备挖一个面积为 3 000 m^2 的长方形鱼塘. 【导学号：8927116】

（1）求鱼塘的长 y（m）关于宽 x（m）的函数表达式；

（2）由于受场地的限制，鱼塘的宽最多只能挖 20 m，当鱼塘的宽是 20 m 时，鱼塘的长为多少米？

10. [中考·杭州] 方方驾驶小汽车匀速地从 A 地行驶到 B 地，行驶里程为 480 千米，设小汽车的行驶时间为 t（单位：时），行驶速度为 v（单位：千米/时），且全程速度限定为不超过 120 千米/时.

（1）求 v 关于 t 的函数表达式；

（2）方方上午 8 点驾驶小汽车从 A 地出发.

① 方方需在当天 12 点 48 分至 14 点（含 12 点 48 分和 14 点）间到达 B 地，求小汽车行驶速度 v 的范围；

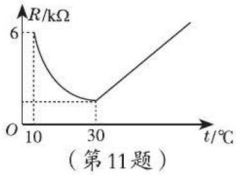
② 方方能否在当天 11 点 30 分前到达 B 地？说明理由.

11. 家用电灭蚊器的发热部分使用了 PTC 发热材料，它的电阻 R（kΩ）随温度 t（℃）（在一定范围内）变化的大致图象如图所示. 通电后，发热材料的温度在由室温 10℃上升到 30℃的过程中，电阻与温度成反比例关系，且在温度达到 30℃时，电阻下降到最小值，随后电阻随温度的升高而增加，温度每上升 1℃，电阻增加 $\frac{4}{15}$ kΩ.

（1）求当 $10 \leqslant t \leqslant 30$ 时，R 和 t 之间的关系式；

（2）求温度在 30℃时，电阻的值，并求出 $t \geqslant 30$ 时，R 和 t 之间的关系式；

（3）家用电灭蚊器在使用过程中，温度在什么范围内时，发热材料的电阻不超过 6 kΩ？



（第 11 题）

基础题 中考题 拓展题

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

5.3 二次函数

核心知识
- 二次函数的定义
- 二次函数自变量的取值范围

知识链接

模型

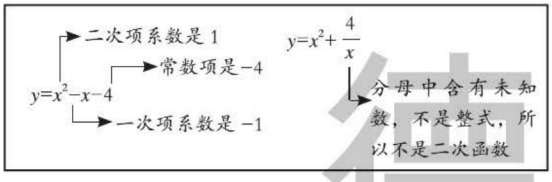
二次函数的定义 | 求函数值 | 二次函数的表达式 | 自变量的取值范围

点知识·拨考向 速提分

点知识 1 二次函数的定义

1. 定义 一般地，形如 $y=ax^2+bx+c$（a，b，c 是常数，且 $a\neq 0$）的函数叫做二次函数. 其中，x 是自变量，a，b，c 分别是函数表达式的二次项系数、一次项系数和常数项.

图例：



2. 确定二次函数的“三要素” （1）含有自变量的代数式必须是整式；（2）化简后自变量的最高次数是 2；（3）二次项系数不等于 0.

拔考向 利用二次函数的定义求字母的值

例 1 若函数 $y=(3-m)x^{m^2-7}-x+1$ 是二次函数，则 m 的值为（　　）

A. 3　　B. −3　　C. ±3　　D. 9

解题秘方：根据二次函数的“三要素”进行分析即可.

解：∵函数 $y=(3-m)x^{m^2-7}-x+1$ 是二次函数，

∴ $m^2-7=2$，且 $3-m\neq 0$，∴ $m=-3$.

答案：B

点知识 2 列二次函数表达式

根据实际问题列二次函数表达式的一般步骤

（1）确定自变量与函数代表的实际意义；

（2）找到自变量与因变量之间的等量关系，根据等量关系列出方程或等式；

（3）将方程或等式整理成二次函数的一般形式；注意：在要求写出函数的自变量的取值范围时，自变量的取值要使实际问题有意义.

提分·必记

知识链接

二次函数的特殊形式：

$y=ax^2$（$b=0$，$c=0$）；

$y=ax^2+c$（$b=0$，$c\neq 0$）；

$y=ax^2+bx$（$b\neq 0$，$c=0$）.

提分·秘诀

易错提醒

当函数的二次项系数包含字母时，要注意二次项系数不为 0，解此类题不能仅关注指数，而忽略对二次项系数的限制，从而导致错误.

提分·必记

特别提醒

- 建立二次函数的模型与建立一元二次方程的模型类似，不同之处是需将它转化为用含一个未知数（自变量）的代数式表示另一个未知数（函数）的形式.
- 自变量的取值应使实际问题有意义.

菜 德 基

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

拔考向▸利用列二次函数表达式表示变量间的关系

题型1　利用列二次函数表达式表示几何图形中变量间的关系

例2　如图5.3-1，用长为20 m的篱笆，一边利用墙（墙足够长）围成一个长方形花圃，设花圃的宽AB为x m，围成的花圃的面积为y m^2，则y关于x的函数表达式为_____，x的取值范围是_____.

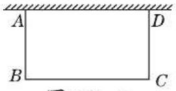


图5.3-1

解：由题意可得$y=x(20-2x)=-2x^2+20x$.

由题意，知$0<x<20$，且$x<20-2x<20$，解得$0<x<\frac{20}{3}$.

答案：$y=-2x^2+20x$；$0<x<\frac{20}{3}$

题型2　利用列二次函数表达式表示销售问题中变量间的关系

例3　某网店销售某款童装，每件售价为60元，每星期可卖300件.为了促销，该网店决定降价销售.市场调查反映，每降价1元，每星期可多卖30件.已知该款童装每件成本价为40元，设该款童装每件售价为x元，每星期的销售量为y件.

（1）求y与x之间的函数关系式，并写出自变量的取值范围；

（2）设每星期的销售利润为W元，求W与x之间的函数关系式.

解：（1）$y=300+30(60-x)=-30x+2\,100\ (40\leqslant x\leqslant 60)$.

（2）$W=(x-40)(-30x+2\,100)=-30x^2+3\,300x-84\,000$.

点方法·拨技巧 提高分

拔尖角度▸1 根据二次函数的定义求函数表达式中待定系数的值

例4　已知函数$y=(a-b)x^3+2x^2+2+\frac{2a+b-3}{x}$是关于$x$的二次函数，求$a$，$b$的值.

解题秘方：若是二次函数，则等号的右边是关于x的二次多项式，

故$a-b=0$，$2a+b-3=0$，

于是a，b可求.

解：由题意得$\begin{cases}a-b=0,\\2a+b-3=0,\end{cases}$解得$\begin{cases}a=1,\\b=1.\end{cases}$

拔尖角度▸2 利用几何动点问题求二次函数表达式

例5　如图5.3-2，已知正方形$ABCD$的边长为4，P是BC边上的一个动点（与B，C不重合），连接AP，作$PE\perp AP$交$\angle BCD$的外角平分线于点E.设$BP=x$，$\triangle PCE$的面积为y，则y与x的函数关系式是_____.

提分·秘诀

技巧点拨

求几何问题中二次函数的表达式，除了根据有关面积、体积公式求出二次函数的表达式以外，还应考虑问题的实际意义，明确自变量的取值范围.

知识储备

总利润=单件利润×总销售量.

详解

相等关系

- 降价后销售量=降价前可卖件数+降价后多卖的件数；
- 销售利润=每件利润×销售量.

挑战·高分

技巧点拨

判断含x的多项式的函数是否为二次函数，要紧扣二次函数定义，令二次项、一次项以外的项的系数为0，求出未知数的值，如本题中$a-b=0$，$2a+b-3=0$.

基础 拔高 满分

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

解：如图 5.3−2，过 E 作 $EH \perp BC$ 于 H，

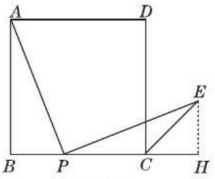


图 5.3−2

∵四边形 $ABCD$ 是正方形，

$\therefore \angle B=\angle DCH=90°$. ∵ CE 平分 $\angle DCH$，

$\therefore \angle ECH=\frac{1}{2}\angle DCH=45°$.

∵ $\angle H=90°$，$\therefore \angle ECH=\angle CEH=45°$，$\therefore EH=CH$.

∵ $AP \perp EP$，$\therefore \angle B=\angle H=\angle APE=90°$，

$\therefore \angle BAP+\angle APB=90°$，$\angle APB+\angle EPH=90°$，$\therefore \angle BAP=\angle EPH$.

$\therefore \triangle BAP \backsim \triangle HPE$，$\therefore \frac{AB}{PH}=\frac{BP}{HE}$，$\therefore \frac{4}{4-x+HE}=\frac{x}{HE}$，

$\therefore EH=x$，$\therefore y=\frac{1}{2}\times CP\times EH=\frac{1}{2}(4-x)\cdot x=-\frac{1}{2}x^2+2x$.

答案：$y=-\frac{1}{2}x^2+2x$

挑战·高分

技巧点拨

解决几何动点问题中的二次函数问题，关键是用 x 表示出动点运动过程中线段的长度，再结合题目中要求的函数 y 表示的实际意义及几何公式列出等量关系，最后再化简即可.

点中考·拨模拟 得满分

中考探秘

二次函数的定义及求二次函数表达式是中考命题的方向之一，其中二次函数的定义考查较少，如有考查，题目也较为简单，多以选择题形式呈现；二次函数表达式一般综合在二次函数的应用题中呈现，多以解答题形式呈现，难度适中.

三年中考兵法

考法 1 利用二次函数定义识别二次函数

例 6 [中考·兰州]下列函数表达式中，一定为二次函数的是(　　)

A. $y=3x-1$　　B. $y=ax^2+bx+c$　　C. $s=2t^2-2t+1$　　D. $y=x^2+\frac{1}{x}$

试题评析：本题考查了二次函数的定义，注意二次函数中含有自变量的代数式都是整式.

解：A. $y=3x-1$ 是一次函数，故 A 错误；B. $y=ax^2+bx+c$（$a\neq 0$）是二次函数，故 B 错误；C. $s=2t^2-2t+1$ 是二次函数，故 C 正确；D. $y=x^2+\frac{1}{x}$ 不是二次函数，故 D 错误；故选 C.

答案：C

考法 2 利用几何性质列二次函数表达式

例 7 [中考·丽水]如图 5.3−3，在四边形 $ABCD$ 中，$\angle BAD=\angle ACB=90°$，$AB=AD$，$AC=4BC$，设 CD 的长为 x，四边形 $ABCD$ 的面积为 y，则 y 与 x 之间的函数关系式是(　　)

A. $y=\frac{2}{25}x^2$　　B. $y=\frac{4}{25}x^2$　　C. $y=\frac{2}{5}x^2$　　D. $y=\frac{4}{5}x^2$

冲刺·满分

教你一招

判断一个函数为二次函数的一般步骤：

1. 将函数进行整理，使其右边是含自变量的代数式，左边是因变量；
2. 判断右边含自变量的代数式是不是整式，如 D 中 $\frac{1}{x}$ 不是整式；
3. 判断含自变量的项的最高次数是不是 2，如 A，最高次数为 1；
4. 判断二次项的系数是不是 0，如 B 中二次项系数 a 不确定是不是 0.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

试题评析：本题运用了割补法，将求不规则四边形的面积转化为求梯形的面积，充分运用了全等三角形，勾股定理在解题中的作用.

解：由于 $AB=AD$，以 AD 为斜边作 $\triangle ADE \cong \triangle ABC$，过 D 作 $DF \perp AC$ 于 F，如图 5.3−3，易知 $BC=DE$，$AC=AE$，四边形 $AFDE$ 是矩形，$S_{四边形ABCD}=S_{梯形ACDE}$. 设 $BC=a$，则 $DE=a$，$DF=AE=AC=4BC=4a$，$CF=AC-AF=AC-DE=3a$，在 Rt $\triangle CDF$ 中，由勾股定理得 $CF^2+DF^2=CD^2$，

即 $(3a)^2+(4a)^2=x^2$. 解得 $a_1=\frac{x}{5}$，

$a_2=-\frac{x}{5}$（舍去）.

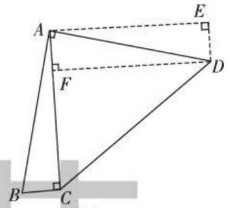


图 5.3−3

$\therefore\ y=S_{四边形ABCD}=S_{梯形ACDE}=\frac{1}{2}\times(DE+AC)\times DF=\frac{1}{2}\times(a+4a)\times 4a=10a^2=\frac{2}{5}x^2$.

答案：C

技巧点拨

- 本题是用割（△ABC）补（△ADE）法，将不规则四边形ABCD转化为梯形ACDE，从而建立两个变量间的函数关系.
- 当几何图形不能通过已知条件直接建立两个变量的函数关系时，应适当考虑通过割补法或分割法来建立两个变量间的函数关系.

素养提升篇 提升篇

走进函数大家庭

我们已经学过一次函数和二次函数，在这些函数中，对于自变量 x 的每一个确定的值，因变量 y 有几个值与它对应?

在同一个变化过程中，有两个变量 x，y，如果对于 x 在某一范围内的每一个确定的值，y 都有唯一确定的值与它对应，那么就说变量 y 是变量 x 的函数，x 叫做自变量.

除了一次函数和二次函数之外，在函数大家庭里还有许多其他成员.

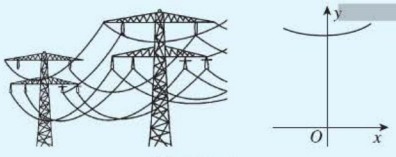


图 5.3−4

如函数 $y=\frac{a}{2}(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}})(a>0,\ e=2.718\ 281\ 8\cdots)$，它的面孔尽管陌生，但是它的图象是我们所熟悉的高压输电线（如图 5.3−4）.

又如下面的脑电波图（如图 5.3−5），常人看上去也许觉得它们杂乱无章，但是对于一个临床医生来说，它们却是发现脑部异常的重要依据，脑细胞活动时会产生生物电流，脑电波反映了生物电流随人脑活动的变化而变化的情况.

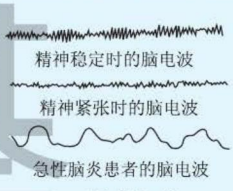


图 5.3−5

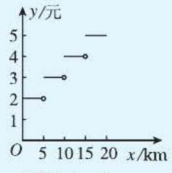


图 5.3−6

利用函数图象帮助医生进行医疗诊断，除了脑电波图之外，还有心电图等，它们都早已成为临床诊断常用的辅助手段.

还有一些函数的图象不是连续的，像表示某公共汽车票价与乘坐距离之间的关系的图象（如图 5.3−6）就是如此，结合乘车购票经验，相信你一定能读懂它.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

两年模拟兵法 答案见252页

1. 在下列函数中是二次函数的是（　　）

A. $y=2x+1$　　B. $y=(x-1)^2-x^2$

C. $y=1-x^2$　　D. $y=\dfrac{1}{x^2}$

2. 对于二次函数 $y=-x^2-1$ 的二次项系数 a，一次项系数 b，常数项 c 描述正确的是（　　）

A. $a=-1$，$b=-1$，$c=0$

B. $a=-1$，$b=0$，$c=1$

C. $a=-1$，$b=0$，$c=-1$

D. $a=1$，$b=0$，$c=-1$

3. 若函数 $y=(m+2)x^{m^2+m}+2x+1$ 是二次函数，则 m 的值为（　　）

A. -2　　B. 0　　C. -2 或 1　　D. 1

4. [模拟·北京] 某商品现在的售价为每件 60 元，每星期可卖出 300 件，市场调查反映，如果调整商品售价，每降价 1 元，每星期可多卖出 20 件，设每件商品降价 x 元后，每星期售出商品的总销售额为 y 元，则 y 与 x 的表达式为（　　）

A. $y=60(300+20x)$

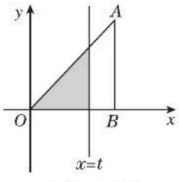
B. $y=(60-x)(300+20x)$

C. $y=300(60-20x)$

D. $y=(60-x)(300-20x)$

5. 把函数 $y=(2-3x)(6-x)$ 化成 $y=ax^2+bx+c$（$a\neq 0$）的形式为_____，其中 $a=$_____，$b=$_____，$c=$_____；当 $x=2$ 时，y 的值是_____；当 $y=-5$ 时，x 的值是_____.

6. 如图，在直角三角形 AOB 中，$AB\perp OB$，且 $AB=OB=3$，设直线 $x=t$ 截此三角形所得的阴影部分面积是 S，则 S 与 t 之间的函数关系式是_____，自变量 t 的取值范围是_____.



（第 6 题）

7. [模拟·相山区] 已知函数 $y=(m^2-m)x^2+(m-1)x+m+1$.

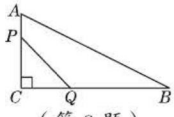
（1）若这个函数是一次函数，求 m 的值；

（2）若这个函数是二次函数，求 m 的值.

8. 如图，在 Rt△ABC 中，$\angle C=90^\circ$，$AC=12$ mm，$BC=24$ mm，动点 P 从点 A 开始沿边 AC 向 C 以 2 mm/s 的速度移动，动点 Q 从点 C 开始沿边 CB 向 B 以 4 mm/s 的速度移动.

（1）如果 P、Q 两点同时出发，那么△PCQ 的面积 S_1 随时间 t 如何变化？写出函数表达式及 t 的取值范围；

（2）在（1）的条件下，请写出四边形 $APQB$ 的面积 S_2 关于时间 t 的函数表达式.



（第 8 题）

基德莱

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

5.4 二次函数的图象和性质

5.4.1 二次函数 $y=ax^2$ 的图象和性质

核心知识
- 二次函数 $y=ax^2$ 的图象
- 二次函数 $y=ax^2$ 的性质

知识链接：二次函数 $y=ax^2$ 的性质 — a 的正负性 — 二次函数 $y=ax^2$ 的图象

点知识·拨考向 速提分

点知识 1 二次函数 $y=ax^2$ 的图象的画法

用描点法画二次函数 $y=ax^2$ 的图象的步骤

（1）列表：以坐标原点（0，0）为中心，在其左右两边均匀地选取一些便于计算的 x 的值，计算出函数 y 的对应值，列出函数对应值的表格；

（2）描点：把每对 x 与 y 的值分别作为点的横坐标和纵坐标，在坐标平面内描出相应的点；

（3）连线：按自变量的取值由小到大（或由大到小）的顺序，用平滑曲线连接各点，即可得到二次函数的大致图象.

警示误区 连线时，必须按照自变量由小到大（或由大到小）的顺序，并且用光滑的曲线按次序连接，初始点和末端点要注意适当“向外延伸”，切忌用线段连接或漏点、跨点连接.

提分·必记

特别提醒

在画二次函数图象时，一般来说取的点越密集，描出的图象就越准确，但取点过多计算量就会过大，故一般在顶点的两侧对称地各取三、四个点即可.

拨考向 利用描点法作函数的图象

例 1 在同一平面直角坐标系中作出 $y=\frac{1}{2}x^2$，$y=-\frac{1}{2}x^2$ 和 $y=\frac{1}{4}x^2$ 的图象.

解题秘方：用描点法，按列表→描点→连线这三个流程作图.

解：列表：

x	…	−4	−3	−2	−1	0	1	2	3	4	…
$y=\frac{1}{2}x^2$	…	8	4.5	2	0.5	0	0.5	2	4.5	8	…
$y=-\frac{1}{2}x^2$	…	−8	−4.5	−2	−0.5	0	−0.5	−2	−4.5	−8	…
$y=\frac{1}{4}x^2$	…	4	2.25	1	0.25	0	0.25	1	2.25	4	…

提分·秘诀

解题通法

1. 列表、描点、连线是画函数图象的基本步骤，用描点法可以画出任意一个函数的图象，表格中的数据越多，描的点越多，所画的函数图象就越精确.
2. 利用描点法画二次函数图象时，表格中的 x 的值要在坐标原点（0，0）的左右两边对称选取，选点时，应从计算简单、描点方便为原则.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

描点、连线，即得三个函数的图象，如图 5.4−1.

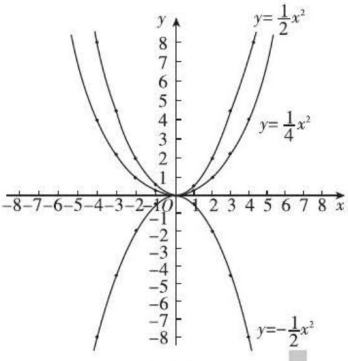
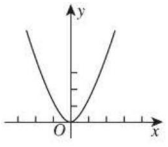
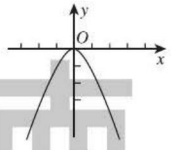


图 5.4−1

点知识▸ 2 二次函数 $y=ax^2$ 的图象和性质

二次函数 $y=ax^2$（$a\neq0$）的图象与性质

$y=ax^2$	$a>0$	$a<0$
图象		
开口方向	向上	向下
顶点坐标	(0,0)	
对称轴	y 轴（直线 $x=0$）	
增减性	在对称轴的左侧，即 $x<0$ 时，y 随 x 的增大而减小；在对称轴的右侧，即 $x>0$ 时，y 随 x 的增大而增大	在对称轴的左侧，即 $x<0$ 时，y 随 x 的增大而增大；在对称轴的右侧，即 $x>0$ 时，y 随 x 的增大而减小
最值	当 $x=0$ 时，$y_{最小值}=0$	当 $x=0$ 时，$y_{最大值}=0$

拔考向▸ 二次函数 $y=ax^2$ 的图象和性质的应用类型

题型 1 二次函数 $y=ax^2$ 的图象的应用

例 2 如图 5.4−2，四个二次函数的图象中，分别对应的是①$y=ax^2$；②$y=bx^2$；③$y=cx^2$；④$y=dx^2$，且①与③，②与④分别关于 x 轴对称.

（1）比较 a，b，c，d 的大小；

（2）说明 a 与 c，b 与 d 的数量关系.

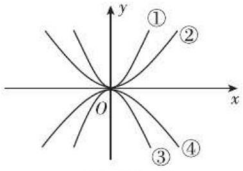


图 5.4−2

3. 在同一坐标系中画多个函数图象时，要标明函数的表达式.

提分·必记

要点解读

1. 判断二次函数的增减性的技巧：从抛物线的对称轴分开，自左向右看，“上坡路”就是 y 随 x 的增大而增大，“下坡路”就是 y 随 x 的增大而减小.

2. 在二次函数 $y=ax^2(a\neq0)$ 中，a 的正负性决定开口方向，$|a|$ 决定开口的大小.$|a|$ 越大，抛物线开口越小，反之，$|a|$ 越小，抛物线开口越大.

3. 二次函数 $y=-ax^2(a\neq0)$ 与 $y=ax^2(a\neq0)$ 的图象关于 x 轴对称.

提分·秘诀

特别提醒

a 与抛物线开口方向、开口大小之间的关系：要区分 a 的符号与 $|a|$ 的作用，a 的符号决定二次函数 $y=ax^2$ 的图象的开口方向，$|a|$ 的大小决定抛物线的开口大小.

基德苹

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

解题秘方：采用特殊值法进行验证.

解：（1）当 $x=1$ 时，四个函数值分别等于其二次项系数.

∵直线 $x=1$ 与四条抛物线的交点从上到下依次为（1，a），（1，b），（1，d），（1，c），

∴ $a>b>d>c$.

（2）∵①与③，②与④分别关于 x 轴对称，

∴①与③，②与④的开口大小相同，方向相反.

∴ $a+c=0$，$b+d=0$.

解题通法：解答二次函数 $y=ax^2$ 的图象的应用问题，主要讨论其图象形状，开口大小及方向，对称轴，顶点坐标这几个方面的情况.

a 的符号：
$a>0 \Leftrightarrow$ 开口向上，
$a<0 \Leftrightarrow$ 开口向下.
a 的绝对值：
$|a|$ 越大 $\Leftrightarrow$ 开口越小，
$|a|$ 相等 $\Leftrightarrow$ 开口大小相同.

题型 2　二次函数 $y=ax^2$ 的性质的应用

例 3　［易错题］已知函数 $y=(m+2)x^{m^2+m-4}$ 是关于 x 的二次函数.

（1）求满足条件的 m 的值；

（2）m 为何值时，其图象有最低点？求出这个最低点，并求出当 x 为何值时，y 随 x 的增大而增大；

（3）m 为何值时，函数有最大值？最大值是多少？这时当 x 为何值时，y 随 x 的增大而减小？

特别提醒
满足条件即满足二次函数的"三要素"：
1. 整式；
2. 最高次数为 2；
3. 二次项系数不为 0.

解题秘方：依题意，分 $x>0$ 和 $x<0$ 两种情况讨论函数的增减性.

解：（1）由题意，得 $\begin{cases} m^2+m-4=2, \\ m+2\neq 0. \end{cases}$

解得 $m=2$ 或 $m=-3$.

（2）若抛物线有最低点，则抛物线的开口向上，

∴ $m+2>0$，即 $m>-2$.

∴ $m=2$.

∵这个最低点为抛物线的顶点，

∴最低点的坐标为（0，0）.

当 $x>0$ 时，y 随 x 的增大而增大.

（3）若函数有最大值，则抛物线的开口向下，

∴ $m+2<0$，即 $m<-2$.

∴ $m=-3$.

∵函数的最大值为抛物线顶点的纵坐标，顶点坐标为（0，0），

∴当 $m=-3$ 时，函数有最大值，最大值为 0.

当 $x>0$ 时，y 随 x 的增大而减小.

解法提醒
在分析二次函数的增减性时，都是以对称轴为分界线. 开口向下的抛物线，在对称轴左侧，y 随 x 的增大而增大，在对称轴右侧，y 随 x 的增大而减小；开口向上的抛物线，在对称轴左侧，y 随 x 的增大而减小，在对称轴右侧，y 随 x 的增大而增大.

荣德基

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

点方法·拨技巧 提高分

拔尖角度 1 利用图象的位置识别图象

例 4 ［中考·呼和浩特］二次函数 $y=ax^2$ 与一次函数 $y=ax+a$ 在同一坐标系中的大致图象可能是图 5.4-3 中的（　　）

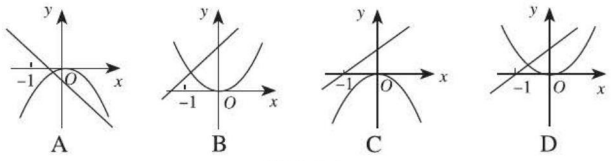


图 5.4-3

解：由一次函数 $y=ax+a$ 可知，一次函数的图象与 x 轴交于点 $(-1, 0)$，排除 A、B；当 $a>0$ 时，二次函数的图象开口向上，一次函数的图象经过一、二、三象限，当 $a<0$ 时，二次函数的图象开口向下，一次函数的图象经过二、三、四象限，排除 C.

答案：D

拔尖角度 2 利用函数的图象和性质比较函数值的大小

例 5 已知点 $A(-4, y_1)$，$B(\sqrt{2}, y_2)$，$C(2, y_3)$ 都在二次函数 $y=x^2$ 的图象上，则 y_1, y_2, y_3 的大小关系是_____（用“<”连接）.

解题秘方 1：用代入比较法比较大小.

解法一：∵点 A，B，C 都在二次函数 $y=x^2$ 的图象上，

∴ $y_1=(-4)^2=16$，$y_2=(\sqrt{2})^2=2$，$y_3=2^2=4$.

∴ $y_2<y_3<y_1$.

答案：$y_2<y_3<y_1$

解题秘方 2：用增减性比较法比较大小.

解法二：抛物线 $y=x^2$ 的对称轴是 y 轴，点 $A(-4, y_1)$ 关于 y 轴的对称点是 $(4, y_1)$，由二次函数 $y=x^2$ 的图象开口向上，对称轴为 y 轴可知，当 $x>0$ 时，y 随 x 的增大而增大.

∵$\sqrt{2}<2<4$，∴ $y_2<y_3<y_1$.

答案：$y_2<y_3<y_1$

拔尖角度 3 利用函数的图象和性质解图象的交点问题

例 6 如图 5.4-4，已知 $y=-2x+3$ 的图象与 $y=x^2$ 的图象交于 A，B 两点，且与 x 轴、y 轴分别交于 D，C 两点，O 为坐标原点.

（1）求点 A，B 的坐标；

（2）求 $S_{\triangle AOB}$ 的值.

解题秘方：用分割法求面积.

挑战·高分

解题策略

对于双函数图象问题，解题的关键是根据两类函数各自的性质进行分析，对照图象及表达式，判断出系数的符号，找出正确选项.

挑战·高分

技巧 1

代入比较法：若已知二次函数的表达式，则将几点的横坐标分别代入二次函数的表达式，求出对应的函数值，再比较大小.

技巧 2

增减性比较法：当所给的几个点在抛物线的对称轴的同一侧时，直接用增减性即可比较；当所给的几个点不在抛物线的对称轴的同一侧时，需先利用抛物线的对称性将点转化到对称轴的同一侧，再利用函数的增减性或点在抛物线上的大致位置来比较函数值的大小.

挑战·高分

另解

（2）也可采用作差法求面积. 直线 $y=-2x+3$ 与 x 轴的交点 D 的坐标为 $\left(\frac{3}{2}, 0\right)$，∴ $S_{\triangle AOB}=$

基础 德基

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

解：（1）依题意，可列方程组$\begin{cases}y=-2x+3,\\y=x^2.\end{cases}$

解得$\begin{cases}x_1=-3,\\y_1=9,\end{cases}$ $\begin{cases}x_2=1,\\y_2=1.\end{cases}$

$\therefore A(-3,9)$，$B(1,1)$.

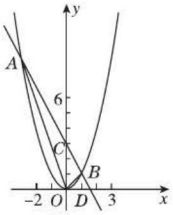


图 5.4-4

（2）直线$y=-2x+3$与y轴的交点C的坐标为$(0,3)$，

$\therefore S_{\triangle AOB}=S_{\triangle AOC}+S_{\triangle BOC}=\frac{1}{2}\times3\times3+\frac{1}{2}\times3\times1=6.$

方法技巧：用**分割法**求以直线与抛物线的两个交点及原点为顶点的三角形的面积．求斜置于平面直角坐标系中的三角形的面积时，一般可用分割法将其转化为一条边在坐标轴上的几个三角形的面积的和或差来求解．当三角形的一条边在坐标轴上时，这条边的长度容易求得，这条边上的高为第三个顶点的横坐标或纵坐标的绝对值．

拔尖角度▸ 4 利用二次函数解实际应用

挑战·高分

例7 有一条抛物线形的隧道，隧道的最大高度为6 m，跨度为8 m，把它放在如图5.4-5所示的平面直角坐标系中（1个单位长度表示1 m）．

（1）求这条抛物线的表达式；

（2）如图5.4-5，若要在隧道壁上点P处安装一盏照明灯，灯离地面高度为4.5 m，求照明灯与点B之间的距离．

解题秘方：根据抛物线在坐标系中的位置建立二次函数模型，求出抛物线的表达式，然后结合图象求照明灯与点B之间的距离．

解：（1）由题意，设抛物线的表达式为$y=ax^2$.

$\because$点$A(-4,-6)$在抛物线上，$\therefore a\cdot(-4)^2=-6$.

解得$a=-\frac{3}{8}$.

故抛物线的表达式为$y=-\frac{3}{8}x^2$.

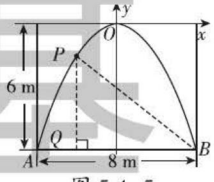


图 5.4-5

（2）过点P作$PQ\perp AB$于点Q，连接PB，

如图5.4-5，则$PQ=4.5$ m.

$\therefore$点P的纵坐标为-1.5.

将$y=-1.5$代入$y=-\frac{3}{8}x^2$，得$x=\pm2$.

$\because$点P在第三象限，$\therefore$点P的坐标为$(-2,-1.5)$.

$\therefore BQ=6$ m，$\therefore PB=\sqrt{PQ^2+BQ^2}=\sqrt{4.5^2+6^2}=7.5$（m）.

答：照明灯与点B的距离为7.5 m.

解题策略

在求二次函数$y=ax^2$的表达式时，只需已知一个点（坐标原点除外）的坐标即可，本题中点A和点B关于y轴对称，将点A或点B的坐标代入表达式所得方程相同，故任选一点坐标代入即可．

警示误区

未考虑坐标轴的位置，容易误将点P的纵坐标看作-4.5进行计算．

详解

由点P的坐标为$(-2,-1.5)$，点B的横坐标为4可得$BQ=4+2=6$（m）.

$S_{\triangle AOD}-S_{\triangle BOD}=\frac{1}{2}\times\frac{3}{2}\times9-\frac{1}{2}\times\frac{3}{2}\times1=6.$

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

点中考·拨模拟 得满分

中考探秘 二次函数 $y=ax^2$ 的图象是历年中考的常考点，二次函数的图象和性质，抛物线 $y=ax^2$ 的开口方向、顶点坐标、增减性等性质在中考中常有体现，题目为中、低档题，有时中考压轴题也涉及，预计在以后几年的考题中仍会出现.

三年中考兵法

冲刺·满分

考法 1 利用二次函数的图象和性质辨析相关函数的性质

例 8 [中考·玉林]抛物线 $y=\frac{1}{2}x^2$，$y=x^2$，$y=-x^2$ 的共同性质是：①都是开口向上；②都以点(0,0)为顶点；③都以 y 轴为对称轴；④都关于 x 轴对称. 其中正确的有(　　)

A. 1 个　　B. 2 个　　C. 3 个　　D. 4 个

试题评析：本题考查了二次函数的图象与性质，熟记抛物线的开口方向、对称轴、顶点坐标是解决问题的关键.

解：抛物线 $y=\frac{1}{2}x^2$，$y=x^2$ 的开口向上，$y=-x^2$ 的开口向下，①错误；抛物线 $y=\frac{1}{2}x^2$，$y=x^2$，$y=-x^2$ 的顶点均为(0,0)，对称轴均为 y 轴，②③正确；④错误；故选 B.

答案：B

考法 2 利用二次函数的图象解与几何图形的交点坐标

例 9 [中考·淄博]如图 5.4-6，Rt△OAB 的顶点 A(−2，4)在抛物线 $y=ax^2$ 上，将 Rt△OAB 绕点 O 顺时针旋转 90°，得到△OCD，边 CD 与该抛物线交于点 P，则点 P 的坐标为(　　)

A. $(\sqrt{2},\sqrt{2})$　　B. (2，2)

C. $(\sqrt{2},2)$　　D. $(2,\sqrt{2})$

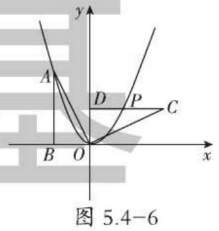


图 5.4-6

试题评析：本题考查了二次函数与几何的综合知识，解题过程中首先求得抛物线的表达式，然后再求得点 D 的纵坐标. 利用点 P 的纵坐标与点 D 的纵坐标相等代入函数的表达式求解即可.

解：∵ Rt△OAB 的顶点 $A(-2,4)$ 在抛物线 $y=ax^2$ 上，∴ $4=a\times(-2)^2$，解得 $a=1$. ∴抛物线的表达式为 $y=x^2$. ∵ Rt△OAB 的顶点 A 的坐标为(−2，4)，∴ $OB=OD=2$. ∵ Rt△OAB 绕点 O 顺时针旋转 90°，得到△OCD，∴ $CD\parallel x$ 轴. ∴点 D 和点 P 的纵坐标均为 2. ∴令 $y=2$，得 $2=x^2$，解得 $x=\pm\sqrt{2}$. ∵点 P 在第一象限，∴点 P 的坐标为 $(\sqrt{2},2)$.

答案：C

解题通法

解二次函数 $y=ax^2$ 的图象问题时，一般应从分析图象的形状及位置，开口大小及方向，顶点坐标、对称轴等入手.

解二次函数 $y=ax^2$ 的增减性问题时，一般应分析函数的最大(小)值，增(减)区间等.

解题策略

解答二次函数的图象与几何的综合题要抓住以下几点：

1. 读懂抛物线与几何图形，找出有用信息.
2. 将抛物线看作几何图形的组成部分进行解答.
3. 注意符号和最值.

荣德基

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

1. [期末·淮阴区] 抛物线 $y=x^2$ 的顶点坐标是(　　)

A. (0,0)　　B. (1,0)　　C. (0,1)　　D. (2,1)

2. 下列关于二次函数 $y=2x^2$ 的说法正确的是(　　)

A. 它的图象经过点 $(-1,-2)$

B. 它的图象的对称轴是直线 $x=2$

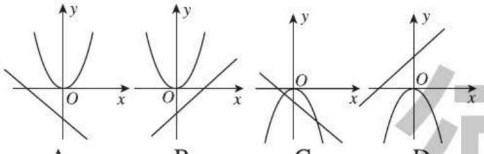
C. 当 $x<0$ 时，y 随 x 的增大而减小

D. 当 $x=0$ 时，y 有最大值为 0

3. 下列 a 的值使二次函数 $y=ax^2$ 的图象开口最大的是(　　)

A. $a=2$　　B. $a=3$　　C. $a=4$　　D. $a=5$

4. 二次函数 $y=ax^2$ 与一次函数 $y=ax+a$ 在同一坐标系中的大致图象为(　　)



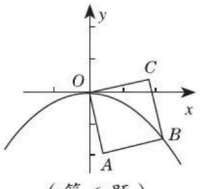
A　　B　　C　　D

5. [中考·连云港] 已知抛物线 $y=ax^2\ (a>0)$ 过 $A(-2,y_1)$、$B(1,y_2)$ 两点，则下列关系式一定正确的是(　　)

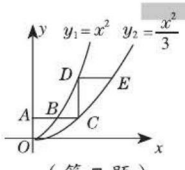
A. $y_1>0>y_2$　　B. $y_2>0>y_1$

C. $y_1>y_2>0$　　D. $y_2>y_1>0$

6. 如图，四边形 $OABC$ 是边长为 1 的正方形，OC 与 x 轴正半轴的夹角为 15°，点 B 在抛物线 $y=ax^2\ (a<0)$ 的图象上，则 a 的值为_____.



(第 6 题)



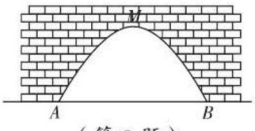
(第 7 题)

7. [中考·菏泽] 如图，平行于 x 轴的直线 AC 分别交函数 $y_1=x^2\ (x\geqslant 0)$ 与 $y_2=\dfrac{x^2}{3}\ (x\geqslant 0)$ 的图象于 B，C 两点，过点 C 作 y 轴的平行线交 y_1 的图象于点 D，直线 $DE\parallel AC$，交 y_2 的图象于点 E，则 $\dfrac{DE}{AB}=$_____.

8. 如图是抛物线形拱桥，水面在 AB 时，拱桥顶点 M 离水面 4 m，水面宽为 8 m.

(1) 若以 M 为坐标原点建立平面直角坐标系，求出抛物线的表达式；

(2) 若水位上升 1 m，水面宽度减少多少(结果保留根号)？



(第 8 题)

9. [中考·淄博] 已知，点 M 是二次函数 $y=ax^2\ (a>0)$ 图象上的一点，点 F 的坐标为 $\left(0,\dfrac{1}{4a}\right)$，直角坐标系中的坐标原点 O 与点 M，F 在同一个圆上，圆心 Q 的纵坐标为 $\dfrac{1}{8}$.

(1) 求 a 的值；

(2) 当 O，Q，M 三点在同一条直线上时，求点 M 和点 Q 的坐标；

(3) 当点 M 在第一象限时，过点 M 作 $MN\perp x$ 轴，垂足为点 N，求证：$MF=MN+OF$.

荣德基

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

5.4.2 二次函数 $y=a(x-h)^2+k$ 的图象和性质

核心知识

- $y=ax^2+k$ 的图象
- $y=a(x-h)^2$ 的图象
- $y=a(x-h)^2+k$ 的图象

知识链接



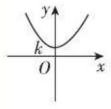
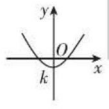
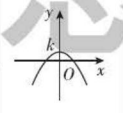
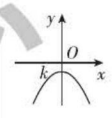
点知识·拨考向 速提分

点知识 1 二次函数 $y=ax^2+k$ 的图象和性质

1. 二次函数 $y=ax^2+k$ 的图象与二次函数 $y=ax^2$ 的图象的关系

它们的图象形状（开口大小、方向）相同，只是上、下位置不同，二次函数 $y=ax^2+k$ 的图象可由二次函数 $y=ax^2$ 的图象上下平移 $|k|$ 个单位长度得到.

2. 二次函数 $y=ax^2+k$ 的图象和性质

a，k 的符号	$y=ax^2+k$（$a>0$）		$y=ax^2+k$（$a<0$）	
	$k>0$	$k<0$	$k>0$	$k<0$
图象				
开口方向	向上		向下	
顶点坐标	$(0,k)$			
对称轴	y 轴			

拔考向 利用二次函数 $y=ax^2+k$ 的图象和性质解决问题

题型 1 利用图象的位置识别图象

例 1 在同一直角坐标系中，函数 $y=ax^2+b$ 与 $y=ax+b$（a，b 都不为 0）的图象的相对位置可以是图 5.4-7 中的（　　）

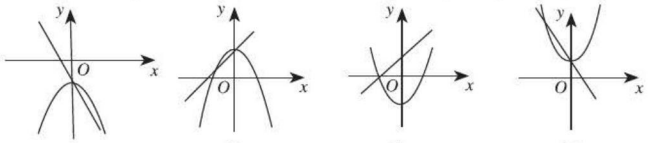


图 5.4-7

解题秘方：根据每一选项中 a，b 的符号是否相符，逐一判断.

提分·必记

平移规律口诀

上加下减，纵变横不变，“上加下减”表示抛物线的位置平移规律，即抛物线 $y=ax^2+k$ 是由抛物线 $y=ax^2$ 平移 $|k|$ 个单位长度得到，“上加”表示当 k 为正数时，向上平移；“下减”表示当 k 为负数时，向下平移；“纵变横不变”表示坐标的平移规律，即抛物线平移时其对应点的纵坐标改变而横坐标不变；对于点 (x_1, y_1)，当 k 为正数时，平移后其对应点坐标为 (x_1, y_1+k)；当 k 为负数时，平移后其对应点坐标为 $(x_1, y_1-|k|)$.

提分·秘诀

知识储备

直线 $y=kx+b$（$b\neq 0$）的位置与 k、b 符号的关系：

- 当 $k>0$ 时，若 $b>0$，则直线经过一、二、三象限；若 $b<0$，则直线经过一、三、四象限.
- 当 $k<0$ 时，若 $b>0$，则直线经过一、二、四象限；

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

解：A. 由抛物线可知 $a<0$，$b<0$. 由直线可知 $a<0$，$b<0$，故本选项正确；

B. 由抛物线可知 $a<0$，由直线可知 $a>0$，相矛盾，故本选项错误；

C. 由抛物线可知 $a>0$，$b<0$，由直线可知 $a>0$，$b>0$，相矛盾，故本选项错误；

D. 由抛物线可知 $a>0$，$b>0$，由直线可知 $a<0$，$b>0$，相矛盾，故本选项错误.

答案：A

若 $b<0$，则直线经过二、三、四象限.

题型 2　利用二次函数 $y=ax^2+k$ 的性质解决问题

例 2　对于抛物线 $y=-3x^2+2$，下列说法正确的是（　　）

A. 开口方向向上

B. 顶点坐标是（-3，2）

C. 对称轴是直线 $x=0$

D. 当 $x>1$ 时，y 随 x 的增大而增大

解题秘方：根据 $a=-3$，$k=2$ 知抛物线开口向下，与 y 轴交于点（0，2），进而判断 A，B 两项，再结合抛物线的大致形状可判别 C，D 两项.

解：$\because a=-3<0$，$\therefore$ 抛物线开口方向向下，故 A 错误；

$\because k=2$，$\therefore$ 抛物线与 y 轴交于点（0，2），故 B 错误；

抛物线 $y=-3x^2+2$ 的对称轴是 y 轴，即直线 $x=0$，故 C 正确；

抛物线开口方向向下，对称轴是 y 轴，$\therefore$ 当 $x>1$ 时，y 随 x 的增大而减小，故 D 错误.

答案：C

技巧点拨

a 的正负决定抛物线的开口方向，k 的正负决定抛物线与 y 轴的交点位置，抛物线在对称轴的两边增减性相反.

知识点 2　二次函数 $y=a(x-h)^2$ 的图象和性质

提分·必记

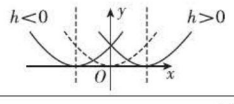
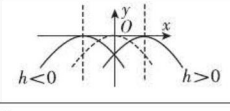
1. 二次函数 $y=a(x-h)^2$ 的图象与二次函数 $y=ax^2$ 的图象的关系

它们的图象形状（开口大小、方向）相同，只是左、右位置不同，二次函数 $y=a(x-h)^2$ 的图象可由二次函数 $y=ax^2$ 的图象左右平移 $|h|$ 个单位长度得到.

方法点拨

平移方法：当 $h>0$ 时，函数 $y=a(x-h)^2$ 的图象可以由函数 $y=ax^2$ 的图象向右平移 h 个单位长度得到；当 $h<0$ 时，函数 $y=a(x-h)^2$ 的图象可以由函数 $y=ax^2$ 的图象向左平移 $|h|$ 个单位长度得到，可简记为左加右减，横变纵不变.

2. 二次函数 $y=a(x-h)^2$ 的图象和性质

函数	$y=a(x-h)^2$（$a>0$）	$y=a(x-h)^2$（$a<0$）
图象		
顶点坐标	（h，0）	
对称轴	直线 $x=h$	
顶点位置	当 $h>0$ 时，顶点在 y 轴的右侧（即 x 轴的正半轴上）. 当 $h<0$ 时，顶点在 y 轴的左侧（即 x 轴的负半轴上）.	
开口方向	向上	向下

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

拔考向▶利用二次函数 $y=a(x-h)^2$ 的表达式识别图象

例 3 在平面直角坐标系中，函数 $y=-x-1$ 与 $y=-\frac{3}{2}(x-1)^2$ 的图象大致是图 5.4-8 中的（　　）

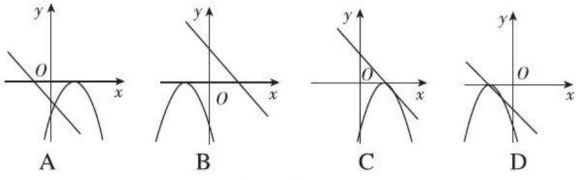


图 5.4-8

解题秘方： 由两种函数图象的位置与系数的关系判断.

解： ∵ $k=-1<0$，$b=-1<0$，∴ $y=-x-1$ 的图象过二、三、四象限.

又∵ $a=-\frac{3}{2}<0$，$h=1$，∴ $y=-\frac{3}{2}(x-1)^2$ 的图象开口向下，顶点为（1，0）. 同时符合以上条件的图象只有 A.

答案： A

提分·秘诀

技巧点拨

根据函数表达式判别函数的大致图象，一般先判别简单函数的图象，排除不合适的选项，再分析复杂函数的图象，找出正确选项.

点知识▶3 二次函数 $y=a(x-h)^2+k$ 的图象和性质

1. 二次函数 $y=a(x-h)^2+k$ 的图象与二次函数 $y=ax^2$ 的图象的关系

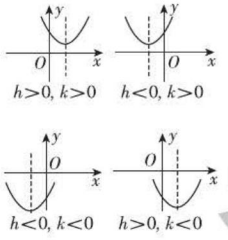
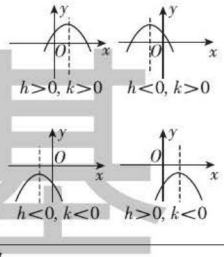
它们的图象形状（开口大小、方向）相同，只是位置不同；二次函数 $y=a(x-h)^2+k$ 的图象可由二次函数 $y=ax^2$ 的图象先左右平移 $|h|$ 个单位长度，再上下平移 $|k|$ 个单位长度得到.

提分·必记

方法点拨

平移方法：函数 $y=a(x-h)^2+k$ 的图象可以由函数 $y=ax^2$ 的图象经过上下和左右平移得到. 平移的方向和距离是由 h，k 的值决定的. 可以先将函数 $y=ax^2$ 的图象左右平移得到函数 $y=a(x-h)^2$ 的图象，再将函数 $y=a(x-h)^2$ 的图象上下平移得到函数 $y=a(x-h)^2+k$ 的图象.

2. 二次函数 $y=a(x-h)^2+k$ 的图象和性质

函数	$y=a(x-h)^2+k$（$a>0$）	$y=a(x-h)^2+k$（$a<0$）
图象		
顶点位置	当 $h>0$，$k>0$ 时，顶点在第一象限； 当 $h<0$，$k>0$ 时，顶点在第二象限； 当 $h<0$，$k<0$ 时，顶点在第三象限； 当 $h>0$，$k<0$ 时，顶点在第四象限	
对称轴	直线 $x=h$	
开口方向	向上	向下
增减性	在对称轴的左侧，y 随 x 的增大而减小；在对称轴的右侧，y 随 x 的增大而增大	在对称轴的左侧，y 随 x 的增大而增大；在对称轴的右侧，y 随 x 的增大而减小
最值	当 $x=h$ 时，$y_{最小值}=k$	当 $x=h$ 时，$y_{最大值}=k$

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

核心考向▶利用二次函数 $y=a(x-h)^2+k$ 的图象和性质解决问题

题型1　利用二次函数 $y=a(x-h)^2+k$ 的性质解决问题

例4　[模拟·南雄]对于抛物线 $y=-(x+1)^2+3$，下列结论：

①抛物线的开口向下；

②对称轴为直线 $x=1$；

③顶点坐标为（-1，3）；

④ $x>1$ 时，y 随 x 的增大而减小．

其中正确结论的个数为（　　）

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

解题秘方：紧扣二次函数 $y=a(x-h)^2+k$ 的图象和性质逐一解答．

解：①∵ $a=-1<0$，∴抛物线的开口向下，正确；

②对称轴为直线 $x=-1$，错误；

③顶点坐标为（-1，3），正确；

④ $x>1$ 时，y 随 x 的增大而减小，正确；

综上所述，正确结论是①③④，共3个，故选C.

答案：C

题型2　利用二次函数的增减性判断图象上点的坐标值的大小

例5　若 $A(-4,y_1)$，$B(-1,y_2)$，$C(0,y_3)$ 为二次函数 $y=-(x+2)^2+3$ 的图象上的三点，则 y_1，y_2，y_3 的大小关系是（　　）

A. $y_1<y_2=y_3$　　B. $y_3=y_1<y_2$

C. $y_3<y_1<y_2$　　D. $y_1=y_2<y_3$

解题秘方：方法1，将 $A(-4,y_1)$，$B(-1,y_2)$，$C(0,y_3)$ 的坐标分别代入二次函数的关系式，求得 y_1，y_2，y_3 的值，最后比较它们的大小即可；方法2，根据二次函数的对称性，将三点转化到对称轴的同一侧，再根据增减性判断大小．

解：方法1　∵ $A(-4,y_1)$，$B(-1,y_2)$，$C(0,y_3)$ 为二次函数 $y=-(x+2)^2+3$ 的图象上的三点，

∴ $y_1=-4+3=-1$，$y_2=-1+3=2$，

$y_3=-4+3=-1$，∴ $y_3=y_1<y_2$.

方法2　易知二次函数 $y=-(x+2)^2+3$ 的对称轴为直线 $x=-2$.

∴点 $A(-4,y_1)$ 的对称点为 $(0,y_1)$．∴ $y_1=y_3$.

∵ $a=-1<0$，∴当 $x>-2$ 时，y 随 x 的增大而减小．

∵ $0>-1$，

∴ $y_1<y_2$，∴ $y_3=y_1<y_2$.

答案：B

提分·秘诀

解题策略

解答抛物线 $y=a(x-h)^2+k$ 的开口方向、对称轴、顶点坐标、最值、增减性规律等问题，首先必须弄清顶点式 $y=a(x-h)^2+k$ 中 a、h、k 与开口方向、对称轴、顶点坐标、最值间的关系，比较题中给出的相关数据与 a、h、k 间的关系，再结合相关知识按题目要求解答．

解题通法

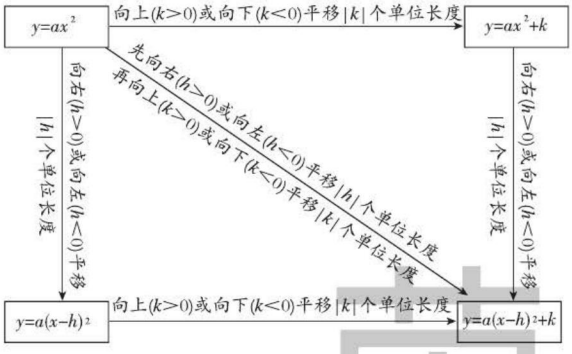
利用函数的增减性比较函数图象上点的坐标值的大小，一般先观察给出的点是否都在对称轴的同侧．若在同侧，直接利用函数的增减性判断；若不在同侧，把不在同侧的点的坐标通过对称轴转化到同侧后再比较．

宋德基

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

点知识▶ 4 二次函数 $y=ax^2$，$y=ax^2+k$，$y=a(x-h)^2$，$y=a(x-h)^2+k$ 之间的关系

1. 位置关系



2. 图象和性质关系

函数		$y=a(x-h)^2+k$	$y=a(x-h)^2$	$y=ax^2+k$	$y=ax^2$
相同点	形状	图象都是抛物线，形状相同，开口方向相同			
	对称性	图象都是轴对称图形			
	增减性	$a>0$ 时，开口向上，在对称轴左侧，y 随 x 的增大而减小，在对称轴右侧，y 随 x 的增大而增大；$a<0$ 时，开口向下，在对称轴左侧，y 随 x 的增大而增大，在对称轴右侧，y 随 x 的增大而减小			
不同点	顶点	(h, k)	$(h, 0)$	$(0, k)$	$(0, 0)$
	对称轴	直线 $x=h$		y 轴	

拔考向▶ 利用平移的规律判别平移后的函数表达式

例 6 [中考·哈尔滨]将抛物线 $y=-5x^2+1$ 向左平移 1 个单位长度，再向下平移 2 个单位长度，所得到的抛物线为（　　）

A. $y=-5(x+1)^2-1$

B. $y=-5(x-1)^2-1$

C. $y=-5(x+1)^2+3$

D. $y=-5(x-1)^2+3$

解题秘方：直接利用二次函数图象的平移规律得出答案.

解：将抛物线 $y=-5x^2+1$ 向左平移 1 个单位长度，

得到 $y=-5(x+1)^2+1$，再向下平移 2 个单位长度，

得到抛物线 $y=-5(x+1)^2-1$.

答案：A

提分·必记

解读

- 抛物线 $y=ax^2$，$y=ax^2+k$，$y=a(x-h)^2$，$y=a(x-h)^2+k$ 中 a 值相等，所以这四条抛物线的形状、大小完全一样，故它们之间可通过互相平移得到.
- 抛物线的平移规律是“左加右减，上加下减”，所不同的是，左右平移时，只针对常数 h 进行变化，而上下平移时，只针对常数 k 进行变化. 可简记为：左加右减自变量，上加下减常数项.

提分·秘诀

技巧点拨

解答抛物线平移问题，紧扣“左加右减自变量，上加下减常数项”的原则. 其中“左、右、上、下”是指抛物线“形”的位置变化；“加、减”是指表达式中“数”的变化.

宋德基

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

点方法·拨技巧 提高分

拔尖角度 利用二次函数图象与坐标轴的交点解决问题

挑战·高分

例 7 [模拟·潍坊]二次函数 $y=-x^2+1$ 的图象与 x 轴交于 A，B 两点（点 A 在点 B 左边），与 y 轴交于点 C，下列说法错误的是（　　）

A. 点 C 的坐标是（0，1）

B. 线段 AB 的长为 2

C. $\triangle ABC$ 是等腰直角三角形

D. 当 $x>0$ 时，y 随 x 增大而增大

解题秘方：令 $x=0$，得到的 y 值即为点 C 的纵坐标；令 $y=0$，得到的两个 x 值即为 A，B 两点的横坐标，线段 AB 的长可由两点横坐标求得，$\triangle ABC$ 的形状可由 A，B，C 三点坐标进行判断，函数的增减性可借助函数图象进行判断.

解：A. 令 $x=0$，得 $y=1$，则点 C 的坐标为（0，1），正确；

B. 令 $y=0$，得 $x=\pm1$，则 $A(-1,0)$，$B(1,0)$，$AB=2$，正确；

C. 由 A，B，C 三点坐标可以得出 $AC=BC$，且 $AC^2+BC^2=AB^2$，则 $\triangle ABC$ 是等腰直角三角形，正确；

D. 当 $x>0$ 时，y 随 x 增大而减小，错误.

答案：D

知识储备

有两条边相等的三角形叫做等腰三角形；顶角是直角的等腰三角形叫做等腰直角三角形.

点中考·拨模拟 得满分

中考探秘

本节所学知识是学习二次函数的一般形式 $y=ax^2+bx+c$ 的图象及性质的必备内容. 本节在中考中单独考查函数开口方向、顶点坐标、对称轴、增减性等性质的时候较少，多以选择题、填空题的形式出现，较少出现解答题，而且题目多以中、低档题为主.

三年中考兵法

考法 1 利用平移前后的函数表达式求平移方法

冲刺·满分

例 8 [中考·广安]抛物线 $y=(x-2)^2-1$ 可以由 $y=x^2$ 平移而得到，下列平移正确的是（　　）

A. 先向左平移 2 个单位长度，然后向上平移 1 个单位长度

B. 先向左平移 2 个单位长度，然后向下平移 1 个单位长度

C. 先向右平移 2 个单位长度，然后向上平移 1 个单位长度

D. 先向右平移 2 个单位长度，然后向下平移 1 个单位长度

试题评析：本题考查二次函数图象平移问题，解答时最简单的方法是先确定平移前后的抛物线顶点，再确定平移方向.

技巧点拨

利用平移前后的函数表达式求平移方法是直接利用平移规律求函数表达式的逆运用，解题方法依然是平移规律“左加右减自变量，上加下减常数项”.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

解：抛物线 $y=x^2$ 的顶点为（0，0），抛物线 $y=(x-2)^2-1$ 的顶点为（2，−1），则抛物线 $y=x^2$ 先向右平移 2 个单位长度，再向下平移 1 个单位长度得到抛物线 $y=(x-2)^2-1$.

答案：D

考法 2 利用二次函数的最值求系数的值

例 9 ［中考·潍坊］已知二次函数 $y=-(x-h)^2$（h 为常数），当自变量 x 的值满足 $2\leqslant x\leqslant 5$ 时，与其对应的函数值 y 的最大值为 −1，则 h 的值为（　　）

A. 3 或 6　　B. 1 或 6　　C. 1 或 3　　D. 4 或 6

试题评析：本题考查了二次函数的最值以及二次函数的性质，分 $h<2$、$2\leqslant h\leqslant 5$ 和 $h>5$ 三种情况求出 h 的值是解题的关键.

解：当 $h<2$ 时，有 $-(2-h)^2=-1$，

解得 $h_1=1$，$h_2=3$（舍去）；

当 $2\leqslant h\leqslant 5$ 时，$y=-(x-h)^2$ 的最大值为 0，不符合题意；

当 $h>5$ 时，有 $-(5-h)^2=-1$，

解得 $h_3=4$（舍去），$h_4=6$.

综上所述：h 的值为 1 或 6.

答案：B

考法 3 利用特殊二次函数的性质求最值

例 10 ［中考·泸州］已知抛物线 $y=\frac{1}{4}x^2+1$ 具有如下性质：该抛物线上任意一点到定点 $F(0,2)$ 的距离与到 x 轴的距离始终相等，如图 5.4−9，点 M 的坐标为 $(\sqrt{3},3)$，P 是抛物线 $y=\frac{1}{4}x^2+1$ 上一个动点，则△ PMF 周长的最小值是（　　）

A. 3　　B. 4　　C. 5　　D. 6

试题评析：本题考查了二次函数的性质、垂线段最短、三角形三边关系，根据垂线段最短确定点 P 的位置是解题的关键.

解：如图 5.4−9，过点 M 作 $ME\perp x$ 轴于点 E，交抛物线 $y=\frac{1}{4}x^2+1$ 于点 P，此时△ PMF 周长最小.

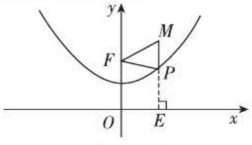


图 5.4−9

∵ $F(0,2)$，$M(\sqrt{3},3)$，

∴ $ME=3$，$FM=\sqrt{(\sqrt{3}-0)^2+(3-2)^2}=2$.

∴ △ PMF 周长的最小值 $=ME+FM=3+2=5$.

答案：C

技巧点拨

利用函数在自变量的取值范围内的最大值求系数的值，一般要分类讨论：若自变量的取值在对称轴的同侧，则直接利用二次函数的增减性求出系数的值；若自变量的取值包括对称轴的 x 值，则要将自变量的范围分成三段来讨论.

详解

在抛物线上任取一点 P'（不同于点 P），连接 $P'F$、$P'M$，过 P' 作 $P'E'\perp x$ 轴于 E'，连接 ME'，由已知得 $P'E'=P'F$，则△ $P'MF$ 的周长 $=P'F+P'M+FM=P'E'+P'M+FM$，又△ PMF 的周长 $=ME+FM$，$P'M+P'E'>ME'$（两边之和大于第三边），由垂线段最短知 $ME'>ME$. ∴ △ $P'MF$ 的周长 > △ PMF 的周长.

宋德基

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

1. [中考·衢州] 二次函数 $y=(x-1)^2+3$ 图象的顶点坐标是(　　)

A. (1, 3)　　B. (1, −3)

C. (−1, 3)　　D. (−1, −3)

2. [中考·玉林] 对于函数 $y=-2(x-m)^2$ 的图象，下列说法不正确的是(　　)

A. 开口向下　　B. 对称轴是直线 $x=m$

C. 最大值为 0　　D. 与 y 轴不相交

3. [模拟·昌乐] 在平面直角坐标系内，把抛物线 $y=(x-1)^2+3$ 向下平移 2 个单位，那么所得抛物线的表达式是(　　)

A. $y=(x-3)^2$　　B. $y=(x+1)^2$

C. $y=(x-1)^2+5$　　D. $y=(x-1)^2+1$

4. 抛物线 $y=-2(x-1)^2$ 上有三点 $A(-1, y_1)$, $B(\sqrt{2}, y_2)$, $C(2, y_3)$, 则 y_1, y_2, y_3 的大小关系是(　　)

A. $y_1<y_2<y_3$　　B. $y_2<y_3<y_1$

C. $y_2<y_1<y_3$　　D. $y_1<y_3<y_2$

5. 若抛物线 $y=ax^2+k(a\neq 0)$ 与 $y=-2x^2+4$ 关于 x 轴对称，则 $a=$_____, $k=$_____.

6. 已知正方形 $ABCD$ 中, $A(1, 1)$, $B(1, 2)$, $C(2, 2)$, $D(2, 1)$, 若抛物线 $y=(x+1)^2$ 向下平移 $m(m>0)$ 个单位后与正方形 $ABCD$ 的边(包括四个顶点)有交点，则 m 的取值范围是_____.

7. 已知二次函数 $y=-(x-1)^2+5$, 当 $m\leqslant x\leqslant n$ 且 $mn<0$ 时, y 的最小值为 $5m$, 最大值为 $5n$, 则 $m+n$ 的值为_____.

8. 已知抛物线 $y=a(x-2)^2+1$ 经过点 $P(1, -3)$.

(1) 求 a 的值;

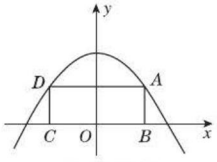
(2) 若点 $A(m, y_1)$, $B(n, y_2)$ $(m<n<2)$ 都在该抛物线上，试比较 y_1 与 y_2 的大小.

9. 如图，抛物线 $y=-mx^2+4m$ 的顶点坐标为 $(0, 2)$, 矩形 $ABCD$ 的顶点 B, C 在 x 轴上, A, D 在抛物线上，矩形 $ABCD$ 在抛物线与 x 轴围成的图形内部.

(1) 求抛物线的表达式;

(2) 设点 A 的坐标为 (x, y), 求矩形 $ABCD$ 的周长 P 关于自变量 x 的函数表达式，并写出自变量 x 的取值范围;

(3) 是否存在周长为 9 的矩形 $ABCD$?



(第 9 题)

错题笔记

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

5.4.3 二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图象和性质

核心知识

- 二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图象
- 二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的性质

知识链接

$y=ax^2+bx+c$ → 图象、性质、最值

$y=ax^2+bx+c$ —顶点式→ $y=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a}$

点知识·拨考向 速提分

点知识 1 二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 与二次函数 $y=a(x-h)^2+k$ 之间的关系

1. 二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 与二次函数 $y=a(x-h)^2+k$ 的互化

$h=-\frac{b}{2a}$，$k=\frac{4ac-b^2}{4a}$，即 $y=ax^2+bx+c=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a}$.

2. 二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图象的画法

（1）描点法，步骤如下：

①将二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 化成 $y=a(x-h)^2+k$ 的形式；

②确定抛物线的开口方向、对称轴和顶点坐标；

③在对称轴两侧，以顶点为中心，左右对称描点并用平滑曲线由左至右依次连接.

（2）平移法，步骤如下：

①把二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 化成 $y=a(x-h)^2+k$ 的形式，确定其图象的顶点坐标为 (h,k)；

②作出二次函数 $y=ax^2$ 的图象；

③将二次函数 $y=ax^2$ 的图象平移，使其顶点平移到 (h,k).

提分·必记

详解

$$y=ax^2+bx+c=a\left(x^2+\frac{b}{a}x\right)+c$$
$$=a\left[x^2+\frac{b}{a}x+\left(\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{b}{2a}\right)^2\right]+c$$
$$=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2}{4a^2}\right]+c$$
$$=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2}{4a}+c$$
$$=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a}.$$

拨考向 利用一般式与顶点式的关系解题

题型 1 利用配方法将一般式化为顶点式

例 1 把二次函数 $y=2x^2-5x+3$ 化成顶点式.

解题秘方：直接利用配方法将一般式化为顶点式.

解：$y=2\left(x^2-\frac{5}{2}x\right)+3$

$$=2\left[x^2-\frac{5}{2}x+\left(-\frac{5}{2}\times\frac{1}{2}\right)^2-\left(-\frac{5}{2}\times\frac{1}{2}\right)^2\right]+3$$
$$=2\left[\left(x-\frac{5}{4}\right)^2-\frac{25}{16}\right]+3$$
$$=2\left(x-\frac{5}{4}\right)^2-\frac{25}{8}+3=2\left(x-\frac{5}{4}\right)^2-\frac{1}{8}.$$

一般式化成顶点式

提分·秘诀

另解

设顶点式为 $y=a(x-h)^2+k$，∵ $a=2$，$b=-5$，$c=3$，

∴ $h=-\frac{b}{2a}=-\frac{-5}{2\times2}=\frac{5}{4}$，$k=\frac{4ac-b^2}{4a}=\frac{4\times2\times3-(-5)^2}{4\times2}=-\frac{1}{8}$，∴顶点式为 $y=2\left(x-\frac{5}{4}\right)^2-\frac{1}{8}$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

题型 2　利用平移规律解决抛物线一般式的平移

例 2　如果将抛物线 $y=x^2+4x+1$ 平移，使它与抛物线 $y=x^2+1$ 重合，那么平移的方式可以是（　　）

A. 向左平移 2 个单位，向上平移 4 个单位

B. 向左平移 2 个单位，向下平移 4 个单位

C. 向右平移 2 个单位，向上平移 4 个单位

D. 向右平移 2 个单位，向下平移 4 个单位

解题秘方：根据平移前后的抛物线的顶点坐标确定平移方法即可得解.

解：∵抛物线 $y=x^2+4x+1=(x+2)^2-3$ 的顶点坐标为 $(-2,-3)$，

抛物线 $y=x^2+1$ 的顶点坐标为 $(0,1)$，

∴顶点由 $(-2,-3)$ 到 $(0,1)$ 需要向右平移 2 个单位再向上平移 4 个单位.

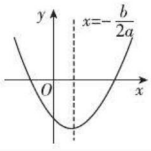
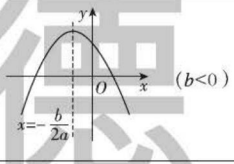
答案：C

技巧点拨

抛物线的平移实质是顶点的平移，故解决抛物线一般式的平移，要先把一般式转化为顶点式，再根据平移前后顶点坐标的变化，结合平移的规律找出平移的方法.

知识 2　二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图象和性质

提分·必记

函数	$y=ax^2+bx+c$（a，b，c 是常数，$a\neq 0$）	
	$a>0$	$a<0$
图象	 （$b<0$）	 （$b<0$）
开口方向	向上	向下
对称轴	直线 $x=-\dfrac{b}{2a}$	
顶点坐标	$\left(-\dfrac{b}{2a},\dfrac{4ac-b^2}{4a}\right)$	
增减性	在对称轴的左侧，即当 $x<-\dfrac{b}{2a}$ 时，y 随 x 的增大而减小；在对称轴的右侧，即当 $x>-\dfrac{b}{2a}$ 时，y 随 x 的增大而增大.	在对称轴的左侧，即当 $x<-\dfrac{b}{2a}$ 时，y 随 x 的增大而增大；在对称轴的右侧，即当 $x>-\dfrac{b}{2a}$ 时，y 随 x 的增大而减小.
最值	抛物线有最低点，当 $x=-\dfrac{b}{2a}$ 时，y 有最小值，$y_{最小值}=\dfrac{4ac-b^2}{4a}$.	抛物线有最高点，当 $x=-\dfrac{b}{2a}$ 时，y 有最大值，$y_{最大值}=\dfrac{4ac-b^2}{4a}$.

活学巧记

曲线名叫抛物线，
线轴交点是顶点，
顶点纵标是最值，
如果要画抛物线，
描点平移两条路.
提取配方定顶点，
平移描点皆成图.
列表描点后连线，
五点大致定全图.
若要平移也不难，
先画基础抛物线，
顶点移到新位置，
开口大小都不变.



宋德基

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

考向▶利用二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图象与性质解决问题

题型1　利用二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图象与性质说明函数图象的特征

例3　已知抛物线 $y=2x^2-4x-6$.

（1）直接写出抛物线的开口方向、对称轴、顶点坐标；

（2）求抛物线与 x 轴的交点坐标、与 y 轴的交点坐标；

（3）当 x 取何值时，y 随 x 的增大而增大？

解题秘方：（2）类比一次函数的方法，求图象与 x 轴的交点坐标，令 $y=0$，求图象与 y 轴的交点坐标，令 $x=0$，解方程即可.

解：（1）开口向上，对称轴为直线 $x=1$，

顶点坐标为（1，−8）.

（2）令 $y=0$，

得 $2x^2-4x-6=0$，

解得 $x_1=-1$，$x_2=3$.

∴与 x 轴的交点坐标为（−1，0），（3，0）.

令 $x=0$，

得 $y=-6$.

∴与 y 轴的交点坐标为（0，−6）.

（3）当 $x\geqslant 1$ 时，y 随 x 的增大而增大.

题型2　利用二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图象上点的坐标特征比较大小

例4　已知点（−1，y_1），（2，y_2），（3，y_3）在二次函数 $y=-x^2+4x+c$ 的图象上，则 y_1，y_2，y_3 的大小关系是（　　）

A. $y_1<y_2<y_3$

B. $y_3<y_2<y_1$

C. $y_3<y_1<y_2$

D. $y_1<y_3<y_2$

解题秘方：先将一般式转化为顶点式求出对称轴，再根据函数的增减性以及抛物线的对称性可得 y_1，y_2，y_3 的大小关系.

解：∵二次函数 $y=-x^2+4x+c=-(x-2)^2+c+4$，

∴对称轴为直线 $x=2$.

∵ $-1<0$，

∴当 $x<2$ 时，y 随 x 的增大而增大，当 $x>2$ 时，y 随 x 的增大而减小.

∵点（−1，y_1），（2，y_2），（3，y_3）在二次函数 $y=-x^2+4x+c$ 的图象上，且 $-1<2<3$，$|-1-2|>|2-3|$，

∴ $y_1<y_3<y_2$.

答案：D

提分·秘诀

方法总结

若不画图象直接说出函数图象的特征，则必须根据函数图象的特征与二次函数表达式中系数之间的关系来确定.对于抛物线 $y=ax^2+bx+c$，其中 a 决定开口方向，c 为抛物线与 y 轴交点的纵坐标.对称轴和顶点坐标可直接根据公式来确定.

技巧点拨

解决二次函数图象上点的纵坐标的大小比较问题，当表达式是一般式时，要先将一般式化为顶点式求出对称轴，若所给点在对称轴的同侧，则结合函数的增减性进行大小比较；若所给点在对称轴的两侧，则通过抛物线的对称性将点转化到对称轴同侧再解答.

荣德基

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

点知识▶ 3 二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图象特征与字母系数的关系

	字母的符号	图象的特征
a	$a>0$	开口向上
	$a<0$	开口向下
$-\frac{b}{2a}$	$b=0$	对称轴为 y 轴
	$ab>0$（a，b 同号）	对称轴在 y 轴左侧
	$ab<0$（a，b 异号）	对称轴在 y 轴右侧
c	$c=0$	过原点
	$c>0$	与 y 轴正半轴相交
	$c<0$	与 y 轴负半轴相交
b^2-4ac	$b^2-4ac=0$	与 x 轴有唯一一个交点
	$b^2-4ac>0$	与 x 轴有两个交点
	$b^2-4ac<0$	与 x 轴没有交点

提分·必记

技巧点拨

对于二次函数 $y=ax^2+bx+c$，

当 $x=1$ 时，$y=a+b+c$，

此时若 $y=0$，则 $a+b+c=0$；

若 $y>0$，则 $a+b+c>0$；

若 $y<0$，则 $a+b+c<0$.

当 $x=-1$ 时，$y=a-b+c$，

此时若 $y=0$，则 $a-b+c=0$；

若 $y>0$，则 $a-b+c>0$；

若 $y<0$，则 $a-b+c<0$.

核考向▶ 利用二次函数图象与系数的关系判别系数代数式

例 5 ［中考·兰州］已知二次函数 $y=ax^2+bx+c$（$a\neq 0$）的图象如图 5.4-10 所示，有下列 5 个结论：① $abc>0$；② $b-a>c$；③ $4a+2b+c>0$；④ $3a>-c$；⑤ $a+b>m(am+b)$（m 为实数，且 $m\neq 1$）. 其中正确的结论有（　　）

A. ①②③　　B. ②③⑤

C. ②③④　　D. ③④⑤

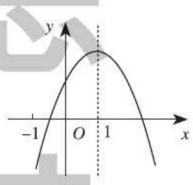


图 5.4-10

解题秘方：由抛物线对称轴的位置判断 ab 的符号，由抛物线与 y 轴的交点判断 c 的符号，然后根据对称轴及抛物线与 x 轴交点情况进行推理，进而对所有结论进行判断.

解：①由图象可知，对称轴在 y 轴的右侧，$\therefore ab<0$.

$\because c>0$，$\therefore abc<0$，故①不正确.

②当 $x=-1$ 时，$y=a-b+c<0$，$\therefore b-a>c$，故②正确.

③由对称知，当 $x=2$ 时，函数值大于 0，即 $y=4a+2b+c>0$，故③正确.

④$\because x=-\frac{b}{2a}=1$，$\therefore b=-2a$.

$\because a-b+c<0$，$\therefore a+2a+c<0$，$\therefore 3a<-c$，故④不正确.

⑤当 $x=1$ 时，y 的值最大，此时，$y=a+b+c$，

当 $x=m$ 时，$y=am^2+bm+c$，$\therefore a+b+c>am^2+bm+c$（$m\neq 1$），

$\therefore a+b>am^2+bm$，即 $a+b>m(am+b)$，故⑤正确.

答案：B

提分·秘诀

技巧点拨

某些代数式的符号可巧妙地通过图象得出，如本题③ $4a+2b+c>0$，当 $x=2$ 时，代入函数表达式，y 的值恰好是代数式 $4a+2b+c$，此时可通过观察图象得出该代数式的符号.

特别提醒

因为抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 的对称轴是直线 $x=-\frac{b}{2a}$，所以判断 a，b 之间的关系时，往往需要根据抛物线的对称轴的位置来判断.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

点方法·拨技巧 提高分

拔尖角度 1 利用二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图象的性质求指定自变量取值范围的最值

挑战·高分

例 6 分别在下列范围内求函数 $y=x^2-2x-3$ 的最值.

(1) $0<x<2$; (2) $2\leqslant x\leqslant 3$.

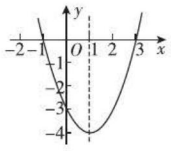


图 5.4-11

解题秘方：用图象法解.

解：$\because y=x^2-2x-3=(x-1)^2-4$,

$\therefore$ 对称轴为直线 $x=1$，顶点坐标为 $(1,-4)$,

函数图象如图 5.4-11 所示.

(1) 当 $0<x<2$ 时，函数 $y=x^2-2x-3$ 有最小值，当 $x=1$ 时，$y_{最小值}=-4$.

(2) $\because$ 当 $x>1$ 时，y 随 x 的增大而增大,

$\therefore$ 当 $2\leqslant x\leqslant 3$ 时，y 随 x 的增大而增大.

$\therefore$ 当 $x=3$ 时，$y_{最大值}=3^2-2\times 3-3=0$;

当 $x=2$ 时，$y_{最小值}=2^2-2\times 2-3=-3$.

技巧点拨

当自变量的取值范围包括 $-\frac{b}{2a}$ 时，最值即为 $\frac{4ac-b^2}{4a}$；当自变量的取值范围在对称轴的同侧时，利用函数的增减性求最值.

拔尖角度 2 利用二次函数翻折变换求系数的取值范围

挑战·高分

例 7 [中考·贵阳] 已知二次函数 $y=-x^2+x+6$ 及一次函数 $y=-x+m$，将该二次函数在 x 轴上方的图象沿 x 轴翻折到 x 轴下方，图象的其余部分不变，得到一个新函数（如图 5.4-12 所示），当直线 $y=-x+m$ 与新图象有 4 个交点时，m 的取值范围是(　　)

A. $-\frac{25}{4}<m<3$　　B. $-\frac{25}{4}<m<2$

C. $-2<m<3$　　D. $-6<m<-2$

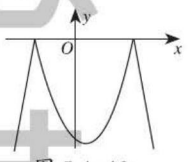


图 5.4-12

解题秘方：先求出抛物线与 x 轴的交点坐标，再求出翻折后的抛物线的表达式，再讨论直线 $y=-x+m$ 与新图象有 4 个交点时，m 的取值范围.

解：如图 5.4-13，当 $y=0$ 时，$-x^2+x+6=0$,

解得 $x_1=-2$，$x_2=3$，则 $A(-2,0)$，$B(3,0)$.

将该二次函数在 x 轴上方的图象沿 x 轴翻折到 x 轴下方的部分图象的表达式为 $y=x^2-x-6$ $(-2\leqslant x\leqslant 3)$，当直线 $y=-x+m$ 经过点 $A(-2,0)$ 时，$2+m=0$，解得 $m=-2$；当直线 $y=-x+m$ 与抛物线 $y=x^2-x-6(-2\leqslant x\leqslant 3)$ 有唯一公共点时，方程 $x^2-x-6=-x+m$ 有两个相等的实数解，解得 $m=-6$，所以当直线 $y=-x+m$ 与新图象有 4 个交点时，m 的取值范围为 $-6<m<-2$.

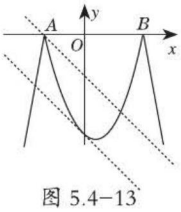


图 5.4-13

答案：D

知识储备

翻折变换的性质：沿 x 轴翻折，图象上各点对应的 x 的值不变，y 的值互为相反数；沿 y 轴翻折，图象上各点对应的 y 的值不变，x 的值互为相反数.

宋德基

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

点中考·拨模拟 得满分

中考探秘

二次函数是历年中考的热点与难点，题型既有选择题和填空题，也有中档的解答题，还有与其他知识相结合的难度较大的压轴题．近几年，各地的中考试卷中还出现了设计新颖、贴近生活、反映时代特点的阅读理解题以及开放性探索题，主要考查学生的分析问题和解决问题的能力以及计算能力和空间想象能力，解题的关键是掌握二次函数的有关性质及图象特征．

三年中考兵法

冲刺·满分

考法 1 利用函数表达式判别函数图象

例 8 [中考·德州] 如图 5.4-14，函数 $y=ax^2-2x+1$ 和 $y=ax-a$（a 是常数，且 $a\neq 0$）在同一平面直角坐标系中的图象可能是(　　)

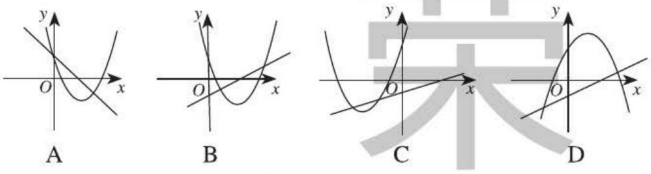


图 5.4-14

试题评析：本题考查了二次函数以及一次函数的图象，解题的关键是熟记一次函数 $y=ax-a$ 在不同情况下所在的象限，以及熟练掌握二次函数的有关性质：开口方向、对称轴、顶点坐标等．

解：A. 由一次函数 $y=ax-a$ 的图象可得 $a<0$，此时二次函数 $y=ax^2-2x+1$ 的图象应该开口向下，故选项错误；

B. 由一次函数 $y=ax-a$ 的图象可得 $a>0$，此时二次函数 $y=ax^2-2x+1$ 的图象应该开口向上，对称轴为直线 $x=-\dfrac{-2}{2a}>0$，在 y 轴右侧，故选项正确；

C. 由一次函数 $y=ax-a$ 的图象可得 $a>0$，此时二次函数 $y=ax^2-2x+1$ 的图象应该开口向上，对称轴为直线 $x=-\dfrac{-2}{2a}>0$，应该在 y 轴右侧，故选项错误；

D. 由一次函数 $y=ax-a$ 的图象可得 $a>0$，此时二次函数 $y=ax^2-2x+1$ 的图象应该开口向上，故选项错误．

答案：B

技巧点拨

解答函数图象问题主要有两种方法：一是根据函数表达式，先假设一个函数中系数的符号，根据性质寻找图象，排除不合适的选项后，再根据另一个函数最终确定正确的选项；二是根据图象逆推某一函数表达式中的系数的正负，然后再用该系数的符号判别另一个函数．

考法 2 利用表格探索二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图象与性质

例 9 [中考·临沂] 二次函数 $y=ax^2+bx+c$，自变量 x 与函数 y 的对应值如下表：

x	…	−5	−4	−3	−2	−1	0	…
y	…	4	0	−2	−2	0	4	…

技巧点拨

根据表格解决二次函数的性质问题，首先要根据所给 x 的值和对应 y 的值，判断出函数的开口方向；根据同一个 y

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

下列说法正确的是（　　）

A. 抛物线的开口向下

B. 当 $x>-3$ 时，y 随 x 的增大而增大

C. 二次函数的最小值是 -2

D. 抛物线的对称轴是直线 $x=-\frac{5}{2}$

试题评析：本题考查二次函数的性质，解题的关键是结合表中的数据得出二次函数的对称轴及增减性，进而解决问题.

解：由表格知，当 $x>-2$ 时，

y 随 x 的增大而增大，故抛物线开口向上，即 A 错误；

由表格知，当 $x=-3$ 和 $x=-2$ 时，y 的值相等，

故对称轴为直线 $x=\frac{-3+(-2)}{2}=-\frac{5}{2}$，即 D 正确；

由于抛物线开口向上，对称轴为直线 $x=-\frac{5}{2}$，故当 $-3<x<-\frac{5}{2}$ 时，y 随 x 的增大而减小，二次函数的最小值小于 -2，即 B，C 错误.

答案：D

值确定出对称轴. 有了开口方向和对称轴，函数的最值、增减性等一系列问题便能迎刃而解.

考法 3 利用二次函数的性质求几何最值

例 10 ［中考·泰安］如图 5.4−15，在 $\triangle ABC$ 中，$\angle C=90°$，$AB=10$ cm，$BC=8$ cm，点 P 从点 A 沿 AC 向点 C 以 1 cm/s 的速度运动，同时点 Q 从点 C 沿 CB 向点 B 以 2 cm/s 的速度运动（其中一点到达终点时，另一点也随之停止运动），在运动过程中，四边形 $PABQ$ 的面积的最小值为（　　）

A. 19 cm^2　　B. 16 cm^2

C. 15 cm^2　　D. 12 cm^2

试题评析：本题考查了二次函数的最值以及勾股定理，利用分割图形求面积法找出 $S_{四边形PABQ}=t^2-6t+24$ 是解题的关键.

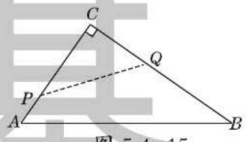


图 5.4−15

解：在 Rt $\triangle ABC$ 中，$\angle C=90°$，$AB=10$ cm，$BC=8$ cm，

$\therefore AC=\sqrt{AB^2-BC^2}=6$ cm.

设运动时间为 t（$0\leqslant t\leqslant 4$）s，则 $PC=(6-t)$ cm，$CQ=2t$ cm.

$\therefore S_{四边形PABQ}=S_{\triangle ABC}-S_{\triangle CPQ}=\frac{1}{2}AC\cdot BC-\frac{1}{2}PC\cdot CQ=\frac{1}{2}\times 6\times 8-\frac{1}{2}(6-t)\times 2t=t^2-6t+24=(t-3)^2+15$.

$\therefore$ 当 $t=3$ 时，四边形 $PABQ$ 的面积取最小值，最小值为 15 cm^2.

答案：C

解题通法

用二次函数的性质解几何面积的最值问题，通常是根据图形的特点，结合与其相关的几何性质，运用“面积法”和“勾股定理”建立有关等式，从而转化为函数关系式，再运用求函数的最值问题的方法求解.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

考法 4 利用二次函数性质求抛物线上的点的最短距离

例 11 [中考·宁波]如图 5.4−16，已知抛物线 $y=-x^2+mx+3$ 与 x 轴交于 A，B 两点，与 y 轴交于点 C，点 B 的坐标为（3，0）.

（1）求 m 的值及抛物线的顶点坐标；

（2）点 P 是抛物线对称轴直线 l 上的一个动点，当 $PA+PC$ 的值最小时，求点 P 的坐标.

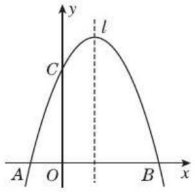


图 5.4−16

试题评析：此题考查了二次函数的性质、待定系数法求表达式以及距离最短问题，如何找到点 P 的位置是解此题的关键.

解：（1）把点 B（3，0）的坐标代入抛物线 $y=-x^2+mx+3$ 的表达式中，得 $0=-3^2+3m+3$. 解得 $m=2$.

$\therefore y=-x^2+2x+3=-(x-1)^2+4$. $\therefore$ 顶点坐标为（1，4）.

（2）如图 5.4−17，连接 BC 交抛物线对称轴直线 l 于点 P，则此时 $PA+PC$ 的值最小.

设直线 BC 的表达式为 $y=kx+b$，

$\because C(0,3)$，$B(3,0)$，

$\therefore \begin{cases}0=3k+b,\\3=b.\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}k=-1,\\b=3.\end{cases}$

$\therefore$ 直线 BC 的表达式为 $y=-x+3$.

当 $x=1$ 时，$y=-1+3=2$.

$\therefore$ 当 $PA+PC$ 的值最小时，点 P 的坐标为（1，2）.

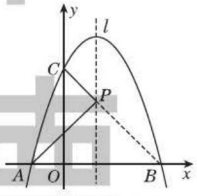


图 5.4−17

详解

要在直线 l 上找一点 P 使 $PA+PC$ 的值最小，这属于几何中“两点一线”找最短距离和的问题，解这类问题可先找出点 A（或点 C）关于直线 l 的对称点，再将找出的对称点与另一点 C（或点 A）连接，连线与直线 l 的交点就是所求的点 P，理由：以本题为例，在 l 上任取点 P'（与 P 不重合），连接 $P'A$，$P'C$，$P'B$，则 $P'A=P'B$，

$\therefore P'A+P'C=P'B+P'C$.

$\because P'B+P'C>BC$，

$\therefore$ 直线 l 上的点 P 也在直线 BC 上时，$PA+PC$ 的值最小.

两年模拟兵法 答案见 254 页

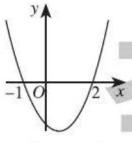
1. [模拟·莘县]二次函数 $y=x^2-x-2$ 的图象如图所示，则函数值 $y<0$ 时 x 的取值范围是（　　）

A. $x<-1$

B. $x>2$

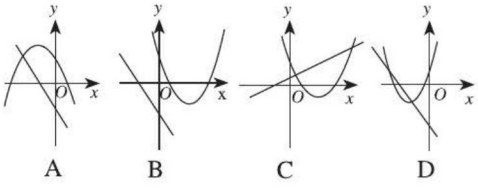
C. $-1<x<2$

D. $x<-1$ 或 $x>2$



（第 1 题）

2. 在同一平面直角坐标系中，一次函数 $y=ax+b$ 和二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图象可能为（　　）



3. 对于二次函数 $y=x^2-2x-1$，下列说法不正确的是（　　）

A. 函数图象的对称轴是直线 $x=1$

B. 函数图象的顶点坐标为 $(1,-2)$

C. 当 $x>2$ 时，y 随 x 的增大而增大

D. 函数图象与 y 轴交于点 $(0,1)$

4. [中考·福建]若二次函数 $y=|a|x^2+bx+c$ 的图象经过 $A(m,n)$，$B(0,y_1)$，$C(3-m,n)$，$D(\sqrt{2},y_2)$，$E(2,y_3)$，则 y_1,y_2,y_3 的大小关系是（　　）

A. $y_1<y_2<y_3$

B. $y_1<y_3<y_2$

C. $y_3<y_2<y_1$

D. $y_2<y_3<y_1$

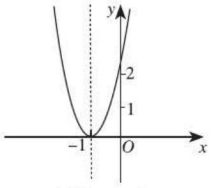
关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

5. [中考·黄冈] 当 $a \leqslant x \leqslant a+1$ 时，函数 $y=x^2-2x+1$ 的最小值为 1，则 a 的值为（　　）

A. -1　　B. 2

C. 0 或 2　　D. -1 或 2

6. [中考·潍坊] 已知二次函数 $y=ax^2+bx+c+2$ 的图象如图所示，顶点为 $(-1,0)$，下面结论：① $abc<0$；② $b^2-4ac=0$；③ $a>2$；④ $4a-2b+c>0$. 其中正确结论的个数是（　　）

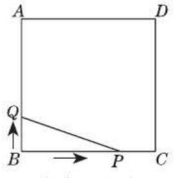


（第 6 题）

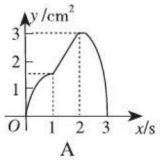
A. 1　　B. 2

C. 3　　D. 4

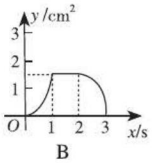
7. [模拟·冠县] 如图，正方形 $ABCD$ 的边长为 3 cm，动点 P 从 B 点出发以 3 cm/s 的速度沿着边 $BC-CD-DA$ 运动，到达 A 点停止运动；另一动点 Q 同时从 B 点出发，以 1 cm/s 的速度沿着边 BA 向 A 点运动，到达 A 点停止运动. 设 P 点运动时间为 x(s)，$\triangle BPQ$ 的面积为 y(cm^2)，则 y 关于 x 的函数图象是（　　）



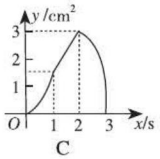
（第 7 题）



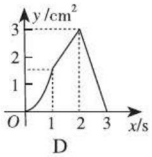
A



B

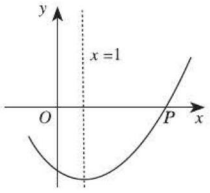


C



D

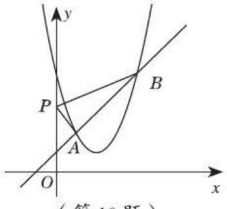
8. [中考·兰州] 如图，若抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 上的 $P(4,0)$，Q 两点关于它的对称轴 $x=1$ 对称，则 Q 点的坐标为_____.



（第 8 题）

9. 已知二次函数 $y=mx^2+(m^2-3)x+1$，当 $x=-1$ 时，y 取得最大值，则 $m=$_____.

10. [中考·潍坊] 如图，直线 $y=x+1$ 与抛物线 $y=x^2-4x+5$ 交于 A，B 两点，点 P 是 y 轴上的一个动点，当 $\triangle PAB$ 的周长最小时，$S_{\triangle PAB}=$_____.



（第 10 题）

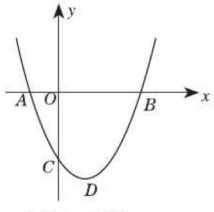
11. [模拟·临清] 如图，二次函数 $y=ax^2+bx+c$ $(a>0)$ 图象的顶点为 D，其图象与 x 轴的交点 A，B 的横坐标分别为 -1，3，与 y 轴负半轴交于点 C，在下面四个结论中：

① $2a+b=0$；② $c=-3a$；

③只有当 $a=\frac{1}{2}$ 时，$\triangle ABD$ 是等腰直角三角形；

④使 $\triangle ACB$ 为等腰三角形的 a 的值有三个.

正确的结论是_____.（请把正确结论的序号都填上）　　【导学号：8927116】



（第 11 题）

基础题 提优题

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

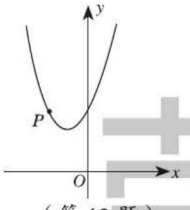
12. [中考·宁波] 如图，已知二次函数 $y=x^2+ax+3$ 的图象经过点 $P(-2,3)$.

(1) 求 a 的值和二次函数图象的顶点坐标；

(2) 点 $Q(m,n)$ 在该二次函数图象上.

①当 $m=2$ 时，求 n 的值；

②若点 Q 到 y 轴的距离小于 2，请根据图象直接写出 n 的取值范围.

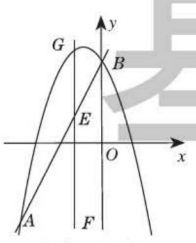


(第 12 题)

13. 如图，抛物线 $y=-x^2-2x+4$ 与直线 AB 交于 $A(-4,-4)$，B 两点，点 E 是直线 AB 上的动点，过点 E 作 $EF\perp x$ 轴，交抛物线于点 G.

(1) 求点 B 的坐标和抛物线的对称轴；

(2) 连接 GB，EO，当四边形 $GEOB$ 是平行四边形时，求点 G 的坐标.



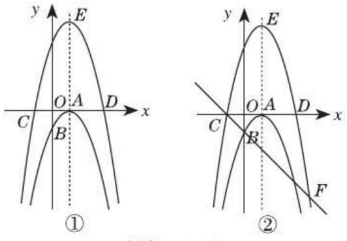
(第 13 题)

14. [中考·河池] 如图①，抛物线 $y=-x^2+2x-1$ 的顶点 A 在 x 轴上，交 y 轴于 B，将该抛物线向上平移，平移后的抛物线与 x 轴交于 C，D，顶点为 $E(1,4)$.

(1) 求点 B 的坐标和平移后抛物线的表达式；

(2) 点 M 在原抛物线上，平移后的对应点为 N，若 $OM=ON$，求点 M 的坐标；

(3) 如图②，直线 CB 与平移后的抛物线交于 F，在抛物线的对称轴上是否存在点 P，使得以 C,F,P 为顶点的三角形是直角三角形？若存在，求出点 P 的坐标；若不存在，请说明理由.



(第 14 题)

荣德基

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

5.5 确定二次函数的表达式

核心知识
- 用待定系数法求二次函数的表达式
- 用待定系数法求实际问题中的二次函数表达式

知识链接

二次函数表达式的设法：顶点式、一般式、交点式

点知识·拨考向 速提分

点知识 1 利用待定系数法求二次函数的表达式

1. 常见的二次函数表达式的适用条件

（1）一般式 $y=ax^2+bx+c$（a，b，c 为常数，$a\neq 0$）当已知抛物线上三点的坐标时，可设此二次函数的表达式为 $y=ax^2+bx+c$；

（2）顶点式 $y=a(x-h)^2+k$（a，h，k 为常数，$a\neq 0$）当已知抛物线的顶点坐标或对称轴或最大（小）值时，可设此二次函数的表达式为 $y=a(x-h)^2+k$；

（3）交点式 $y=a(x-x_1)(x-x_2)$（a，x_1，x_2 为常数，$a\neq 0$）当已知抛物线与 x 轴的两个交点 $(x_1,\ 0)$，$(x_2,\ 0)$ 时，可设此二次函数的表达式为 $y=a(x-x_1)(x-x_2)$.

2. 用待定系数法求二次函数表达式的步骤

（1）**设**：根据题中已知条件，合理设出二次函数的表达式，如 $y=ax^2+bx+c$ 或 $y=a(x-h)^2+k$ 或 $y=a(x-x_1)(x-x_2)$，其中 $a\neq 0$；

（2）**代**：把已知点的坐标代入所设的二次函数表达式中，得到关于表达式中待定系数的方程（组）；

（3）**解**：解此方程或方程组，求出待定系数的值；

（4）**还原**：将求出的待定系数还原到表达式中，求得表达式.

待定系数法

拔考向 利用待定系数法求二次函数的表达式

题型 1 利用顶点式 $y=a(x-h)^2+k$ 求二次函数表达式

例 1 若二次函数图象的顶点坐标是（2，1）且经过点（1，−2），求此二次函数表达式.

解题秘方：设二次函数表达式为顶点式，把点（1，−2）的坐标代入表达式求得 a 即可得到二次函数的表达式.

解：∵二次函数图象的顶点坐标是（2，1），

∴设二次函数的表达式为 $y=a(x-2)^2+1$.

把点（1，−2）的坐标代入表达式，

解得 $a=-3$，

∴二次函数表达式为 $y=-3(x-2)^2+1=-3x^2+12x-11$.

提分·必记

技巧点拨

特殊位置抛物线的表达式的求法技巧：

1. 顶点在原点，可设为 $y=ax^2$；
2. 对称轴是 y 轴（或顶点在 y 轴上），可设为 $y=ax^2+k$；
3. 顶点在 x 轴上，可设为 $y=a(x-h)^2$；
4. 抛物线过原点，可设为 $y=ax^2+bx$.

提分·秘诀

技巧点拨

利用顶点式求二次函数的表达式的三种常见情况：①已知图象的顶点坐标；②已知图象的对称轴或顶点的横坐标；③已知二次函数的最值或图象顶点的纵坐标.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

题型 2　利用一般式 $y=ax^2+bx+c$ 求二次函数的表达式

例 2　已知在平面直角坐标系 xOy 中，二次函数图象经过点 $A(1,0)$，$B(0,-5)$，$C(2,3)$．求这个二次函数的表达式．

解题秘方：直接利用待定系数法求出二次函数的表达式．

解：设二次函数的表达式为 $y=ax^2+bx+c$，∵函数图象经过点 $A(1,0)$，$B(0,-5)$，$C(2,3)$，

$$\therefore \begin{cases} a+b+c=0, \\ c=-5, \\ 4a+2b+c=3, \end{cases} \quad \text{解得} \begin{cases} a=-1, \\ b=6, \\ c=-5, \end{cases}$$

∴这个二次函数的表达式为 $y=-x^2+6x-5$．

题型 3　利用交点式 $y=a(x-x_1)(x-x_2)$ 求二次函数的表达式

例 3　已知抛物线经过 $(1,0)$，$(3,0)$，$(0,3)$ 三个点，求该抛物线的表达式．

解题秘方：设交点式 $y=a(x-1)(x-3)$，然后把 $(0,3)$ 代入求出 a 即可得到抛物线的表达式．

解：设抛物线的表达式为 $y=a(x-1)(x-3)$，把 $(0,3)$ 代入，得 $a\cdot(-1)\cdot(-3)=3$，解得 $a=1$，所以抛物线的表达式为 $y=(x-1)(x-3)$，即抛物线的表达式为 $y=x^2-4x+3$．

技巧点拨

利用一般式求二次函数的表达式是常用的方法．步骤为(1)设出一般式；(2)代入已知三点的坐标；(3)求出 a,b,c 的值代回一般式．

另解

设抛物线的表达式为 $y=ax^2+bx+c$，∵抛物线经过 $(1,0)$，$(3,0)$，$(0,3)$ 三个点，

$$\therefore \begin{cases} a+b+c=0, \\ 9a+3b+c=0, \\ c=3, \end{cases}$$

$$\text{解得} \begin{cases} a=1, \\ b=-4, \\ c=3, \end{cases}$$

∴抛物线的表达式为 $y=x^2-4x+3$．

点知识 ▸ 2　利用待定系数法求实际问题中的二次函数表达式

提分·必记

根据实际问题求二次函数表达式的一般步骤

(1) 先通过条件确定出抛物线所经过的点的坐标；

(2) 根据题意设出合适的二次函数表达式；

(3) 用待定系数法和方程思想求出待定系数的值；

(4) 回代二次函数表达式．

特别提醒

根据实际问题准确地找出抛物线上点的坐标是解题的关键．

拔考向 ▸ 利用待定系数法求实际问题中的二次函数表达式

提分·秘诀

例 4　在校运会上，身高 1.8 米的李明（AB）同学，把铅球抛到离脚底（B）9 米远的 P 点，如图 5.5-1 所示，李明同学所抛的铅球在到达最大高度时，距其脚底（B）的水平距离是 4 米，铅球运动的路线是抛物线，请参照图示，帮助李明同学求出此铅球运动的路线对应的函数表达式．

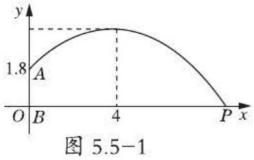


图 5.5-1

解题秘方：由题意可知点 A 的坐标为 $(0,1.8)$，点 P 的坐标为 $(9,0)$，抛物线的对称轴为直线 $x=4$，故在运用待定系数法求二次函数表达式时，既可以用一般式 $y=ax^2+bx+c$ 求解，也可以用顶点式 $y=a(x-h)^2+k$ 求解．

另解

设表达式为 $y=a(x-h)^2+k$，∵抛物线的对称轴为直线 $x=4$，∴ $y=a(x-4)^2+k$．把 $A(0,1.8)$，$P(9,0)$ 的坐标代入上式，得

$$\begin{cases} 1.8=a(0-4)^2+k, \\ 0=a(9-4)^2+k, \end{cases}$$

$$\text{解得} \begin{cases} a=-0.2, \\ k=5, \end{cases}$$

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

解：设铅球运动的路线对应的函数表达式为 $y=ax^2+bx+c$.

根据题意，得 $A(0,\ 1.8)$，$P(9,\ 0)$，抛物线的对称轴为直线 $x=4$，

则 $\begin{cases}1.8=c,\\0=81a+9b+c,\\-\dfrac{b}{2a}=4,\end{cases}$ 整理得 $\begin{cases}c=1.8,\\81a+9b+c=0,\\b=-8a,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=-0.2,\\b=1.6,\\c=1.8,\end{cases}$

$\therefore y=-0.2x^2+1.6x+1.8\ (0\leqslant x\leqslant 9)$.

$\therefore y=-0.2(x-4)^2+5$，即 $y=-0.2x^2+1.6x+1.8\ (0\leqslant x\leqslant 9)$.

点方法·拨技巧 提高分

拔尖角度 1 利用图象隐含的信息求二次函数表达式

挑战·高分

例 5 如图 5.5-2 是抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 的图象，求抛物线的表达式和对称轴.

解题秘方：因为抛物线经过点 $B(1,0)$，$C(5,0)$，可以设抛物线的表达式为 $y=a(x-1)(x-5)$，把 $A(0,4)$ 的坐标代入即可解决问题，对称轴根据图象即可得出.

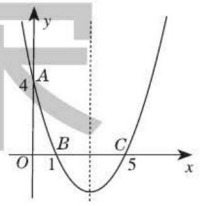


图 5.5-2

解：$\because$ 抛物线经过点 $B(1,0)$，$C(5,0)$，

$\therefore$ 设抛物线的表达式为 $y=a(x-1)(x-5)$.

把 $A(0,4)$ 的坐标代入得 $4=5a$，解得 $a=\dfrac{4}{5}$，

$\therefore$ 抛物线的表达式为 $y=\dfrac{4}{5}(x-1)(x-5)=\dfrac{4}{5}x^2-\dfrac{24}{5}x+4$，

抛物线的对称轴为直线 $x=\dfrac{1+5}{2}=3$.

技巧点拨

求二次函数表达式时，题干中没有给出足够的信息，就需要从图象中挖掘所需的条件，主要从抛物线与坐标轴的交点坐标和对称轴这两方面入手.

拔尖角度 2 利用轴对称的性质求二次函数表达式

挑战·高分

例 6 （1）已知二次函数 $y=2x^2-12x+5$，求该函数图象关于 x 轴对称的图象的表达式.

（2）求 $y=-2(x-4)^2-6$ 的图象关于 y 轴对称的图象的表达式.

解题秘方：（1）关于 x 轴对称得到的二次函数的图象与原二次函数的图象相比，形状不变，开口方向、顶点的纵坐标变化了，开口方向与原图象的开口方向相反，顶点的横坐标不变，纵坐标与原图象顶点的纵坐标互为相反数.（2）关于 y 轴对称，图象的形状，开口方向相同，顶点的纵坐标相同，顶点的横坐标互为相反数.

解：（1）因为 $y=2x^2-12x+5=2(x-3)^2-13$，所以其图象的顶点坐标为 $(3,-13)$，关于 x 轴对称的图象的顶点坐标为 $(3,\ 13)$，所以对称后的图象的表达式为 $y=-2(x-3)^2+13$.

（2）因为 $y=-2(x-4)^2-6$ 的图象的顶点坐标为 $(4,\ -6)$，关于 y 轴对称得到的图象的顶点坐标为 $(-4,\ -6)$，所以对称后的图象的表达式为 $y=-2(x+4)^2-6$.

技巧点拨

抛物线的对称主要有两种形式：沿 x 轴对称和沿 y 轴对称，其本质是顶点坐标的对称.另外沿 x 轴对称，改变抛物线的开口方向，不改变开口大小；沿 y 轴对称，改变对称轴的符号，其他不变.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

拔尖角度▸ 3 利用二次函数表达式解决几何问题

挑战·高分

例 7 [中考·宁夏] 如图 5.5−3，抛物线 $y=-\frac{1}{3}x^2+bx+c$ 经过点 $A(3\sqrt{3},0)$ 和点 $B(0,3)$，且这个抛物线的对称轴为直线 l，顶点为 C.

(1) 求抛物线的表达式；

(2) 连接 AB，AC，BC，求 $\triangle ABC$ 的面积.

解题秘方：(1) 直接利用待定系数法求抛物线的表达式；(2) 利用分割法求 $\triangle ABC$ 的面积.

解：(1) ∵抛物线 $y=-\frac{1}{3}x^2+bx+c$ 经过点 $A(3\sqrt{3},0)$，$B(0,3)$，

∴抛物线的表达式为

$$y=-\frac{1}{3}x^2+\frac{2\sqrt{3}}{3}x+3.$$

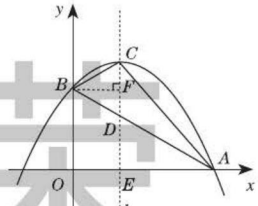


图 5.5−3

(2) 由 (1) 知抛物线的对称轴为直线 $x=\sqrt{3}$，

把 $x=\sqrt{3}$ 代入 $y=-\frac{1}{3}x^2+\frac{2\sqrt{3}}{3}x+3$，得 $y=4$，

则点 C 的坐标为 $(\sqrt{3},4)$. 设直线 AB 的表达式为 $y=kx+b$，

则有 $\begin{cases}3\sqrt{3}\,k+b=0,\\ b=3,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}k=-\frac{\sqrt{3}}{3},\\ b=3,\end{cases}$

∴直线 AB 的表达式为 $y=-\frac{\sqrt{3}}{3}x+3$.

如图 5.5−3，抛物线的对称轴直线 l 与直线 AB 交于点 D，

设点 D 的坐标为 $(\sqrt{3},m)$，

将点 $D(\sqrt{3},m)$ 的坐标代入 $y=-\frac{\sqrt{3}}{3}x+3$，解得 $m=2$，

∴点 D 的坐标为 $(\sqrt{3},2)$，∴ $CD=CE-DE=2$.

过点 B 作 $BF\perp l$ 于点 F，

则 $BF=OE=\sqrt{3}$，

$BF+AE=OE+AE=OA=3\sqrt{3}$，

$$\therefore S_{\triangle ABC}=S_{\triangle BCD}+S_{\triangle ACD}=\frac{1}{2}CD\cdot BF+\frac{1}{2}CD\cdot AE=\frac{1}{2}CD\cdot(BF+AE)=\frac{1}{2}\times2\times3\sqrt{3}=3\sqrt{3}.$$

方法点拨

求斜三角形的面积，不便于求某边上的高时，一般通过分割法，把原图形分割成易于求某边上的高的三角形或分割成直角三角形. 在二次函数中，常过三角形某顶点作 x 轴的垂线，从顶点与对边交点的连线作为底，借助剩余两个顶点的横坐标易知底边上的高，从而求出斜三角形的面积.

基德教育

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

点中考·拨模拟 得满分

中考探秘 求二次函数的表达式是中考的常考点，很少单独命题，常在二次函数的解答题中出现，作为题目的第一问，难度偏低，主要考查用待定系数法求表达式，计算的正误是解题的关键.

三年中考兵法

冲刺·满分

考法1 利用函数图象求二次函数的表达式

例8 [中考·淄博]如图5.5-4，二次函数 $y=x^2+bx+c$ 的图象过点 $B(0,-2)$. 它与反比例函数 $y=-\frac{8}{x}$ 的图象交于点 $A(m,4)$，则这个二次函数的表达式为（　　）

A. $y=x^2-x-2$　　B. $y=x^2-x+2$

C. $y=x^2+x-2$　　D. $y=x^2+x+2$

试题评析：此题考查了用待定系数法求二次函数的表达式以及反比例函数图象上点的坐标特征，熟练掌握待定系数法是解题的关键.

解：将 $A(m,4)$ 的坐标代入反比例函数表达式，

得 $4=-\frac{8}{m}$，解得 $m=-2$. ∴ A 的坐标为 $(-2,4)$.

将 $A(-2,4)$，$B(0,-2)$ 的坐标代入二次函数表达式，

得 $\begin{cases}4-2b+c=4,\\ c=-2,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}b=-1,\\ c=-2,\end{cases}$

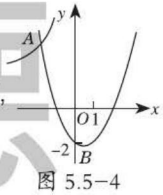


图 5.5-4

∴二次函数的表达式为 $y=x^2-x-2$.

答案：A

解法提醒

将A的坐标代入反比例函数表达式求出m的值，确定出A的坐标，将A与B的坐标代入二次函数表达式求出b与c的值，即可确定二次函数的表达式.

考法2 利用二次函数解决几何综合问题

例9 [中考·聊城]如图5.5-5，已知抛物线 $y=ax^2+bx$ 与 x 轴分别交于原点 O 和点 $F(10,0)$，与对称轴 l 交于点 $E(5,5)$. 矩形 $ABCD$ 的边 AB 在 x 轴正半轴上，且 $AB=1$，边 AD，BC 与抛物线分别交于点 M，N. 矩形 $ABCD$ 沿 x 轴正方向平移，当点 M，N 位于对称轴 l 的同侧时，连接 MN，此时，四边形 $ABNM$ 的面积记为 S；当点 M，N 位于对称轴 l 的两侧时，连接 EM，EN，此时五边形 $ABNEM$ 的面积仍记为 S. 将点 A 与点 O 重合的位置作为矩形 $ABCD$ 平移的起点，设矩形 $ABCD$ 平移的长度为 t（$0\leqslant t\leqslant 5$）.

（1）求出这条抛物线的表达式；

（2）当 $t=0$ 时，求 $S_{\triangle OBN}$ 的值；

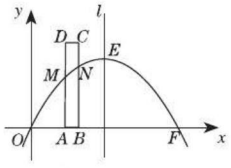


图 5.5-5

解法提醒

1. 根据点E，F的坐标，利用待定系数法即可求出抛物线的表达式；
2. 找出当 $t=0$ 时，点B，N的坐标，进而可得出OB，BN的长度，再根据三角形的面积公式可求出 $S_{\triangle OBN}$ 的值；
3. 分 $0<t\leqslant 4$ 和 $4<t\leqslant 5$ 两种情况考虑：①当 $0<t\leqslant 4$ 时（如图5.5-6①），找出点A，B，M，N的坐标，求出AM，BN的长度，利用梯形的面积公式

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

（3）当矩形$ABCD$沿着x轴的正方向平移时，求S关于t（$0<t\leqslant 5$）的函数表达式，并求出t为何值时，S有最大值，最大值是多少．

试题评析：本题考查了用待定系数法求二次函数表达式、二次函数图象上点的坐标特征、二次函数的性质、梯形的面积以及三角形的面积，属于常见的二次函数压轴题，难度稍大．

解：（1）将E（5，5），F（10，0）的坐标代入$y=ax^2+bx$，

得$\begin{cases}25a+5b=5,\\100a+10b=0,\end{cases}$解得$\begin{cases}a=-\dfrac{1}{5},\\b=2,\end{cases}$

∴这条抛物线的表达式为$y=-\dfrac{1}{5}x^2+2x$.

（2）当$t=0$时，点B的坐标为（1,0），点N的坐标为（1，$\dfrac{9}{5}$），

∴$BN=\dfrac{9}{5}$，$OB=1$，∴$S_{\triangle OBN}=\dfrac{1}{2}BN\cdot OB=\dfrac{9}{10}$.

（3）①当$0<t\leqslant 4$时（如图5.5-6①），点A的坐标为（t，0），点B的坐标为（t+1,0），∴点M的坐标为（t,$-\dfrac{1}{5}t^2+2t$），

点N的坐标为（t+1，$-\dfrac{1}{5}(t+1)^2+2(t+1)$），

∴$AM=-\dfrac{1}{5}t^2+2t$，$BN=-\dfrac{1}{5}(t+1)^2+2(t+1)$，

∴$S=\dfrac{1}{2}(AM+BN)\cdot AB=\dfrac{1}{2}\times 1\times\left[-\dfrac{1}{5}t^2+2t-\dfrac{1}{5}(t+1)^2+2(t+1)\right]=-\dfrac{1}{5}t^2+\dfrac{9}{5}t+\dfrac{9}{10}=-\dfrac{1}{5}\left(t-\dfrac{9}{2}\right)^2+\dfrac{99}{20}$.

∵$-\dfrac{1}{5}<0$，

∴当$t=4$时，S取最大值，最大值为$\dfrac{49}{10}$；

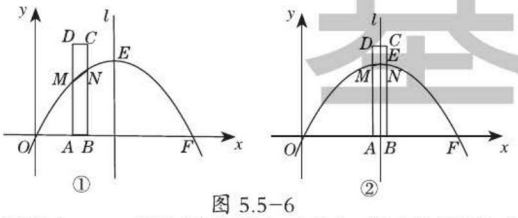


图 5.5-6

②当$4<t\leqslant 5$时（如图5.5-6②），点A的坐标为（t，0），点B的坐标为（t+1，0），∴点M的坐标为（t，$-\dfrac{1}{5}t^2+2t$），点N的坐标为（t+1,$-\dfrac{1}{5}(t+1)^2+2(t+1)$），

∴$AM=-\dfrac{1}{5}t^2+2t$，$BN=-\dfrac{1}{5}(t+1)^2+2(t+1)$，

即可找出S关于t的函数关系式，再利用二次函数的性质即可求出此时S的最大值；②当4<t≤5时（如图5.5-6②），分别找出点A，B，M，N的坐标，进而可得出AM，BN的长度，将五边形分成两个梯形，利用梯形的面积公式即可找出S关于t的函数关系式，再利用二次函数的性质即可求出此时S的最大值．将①②中的S的最大值进行比较，即可得出结论．

菜鸟德基

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

$\therefore S=\frac{1}{2}(5-t)(-\frac{1}{5}t^2+2t+5)+\frac{1}{2}(t-4)[5-\frac{1}{5}(t+1)^2+2(t+1)]$

$=\frac{1}{2}(\frac{1}{5}t^3-3t^2+5t+25)+\frac{1}{2}(-\frac{1}{5}t^3+\frac{12}{5}t^2+\frac{2}{5}t-\frac{136}{5})$

$=-\frac{3}{10}t^2+\frac{27}{10}t-\frac{11}{10}=-\frac{3}{10}(t-\frac{9}{2})^2+\frac{199}{40}$. $\because -\frac{3}{10}<0$,

$\therefore$ 当 $t=\frac{9}{2}$ 时，S 取最大值，最大值为 $\frac{199}{40}$.

$\because \frac{49}{10}=\frac{196}{40}<\frac{199}{40}$，$\therefore$ 当 $t=\frac{9}{2}$ 时，S 有最大值，最大值是 $\frac{199}{40}$.

两年模拟兵法

☞答案见 256 页

1. 已知二次函数 $y=ax^2+4x+c$，当 $x=-2$ 时，函数值是 -1；当 $x=1$ 时，函数值是 5，则此二次函数的表达式为（　　）

A. $y=2x^2+4x-1$　　B. $y=x^2+4x-2$

C. $y=-2x^2+4x+1$　　D. $y=2x^2+4x+1$

2. 对称轴平行于 y 轴的抛物线的顶点坐标为 $(2,3)$ 且抛物线经过点 $(3,1)$，那么抛物线的表达式是（　　）

A. $y=-2x^2+8x+3$　　B. $y=-2x^2-8x+3$

C. $y=-2x^2+8x-5$　　D. $y=-2x^2-8x+2$

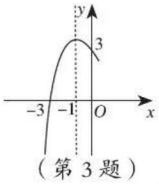
3. 二次函数的部分图象如图所示，对称轴是直线 $x=-1$，则这个二次函数的表达式为（　　）

A. $y=-x^2+2x+3$

B. $y=x^2+2x+3$

C. $y=-x^2+2x-3$

D. $y=-x^2-2x+3$



（第 3 题）

4. 已知二次函数的图象经过原点及点 $(-\frac{1}{2},-\frac{1}{4})$，且图象与 x 轴的另一个交点到原点的距离是 1，则该二次函数的表达式为（　　）

A. $y=x^2+x$

B. $y=-\frac{1}{3}x^2+\frac{1}{3}x$

C. $y=-x^2+x$ 或 $y=\frac{1}{3}x^2-\frac{1}{3}x$

D. $y=x^2+x$ 或 $y=-\frac{1}{3}x^2+\frac{1}{3}x$

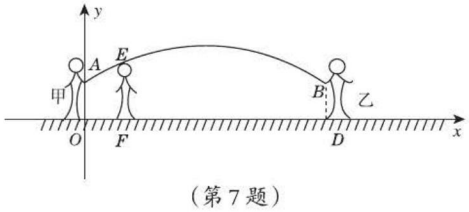
5. [中考·百色] 经过 $A(4,0)$，$B(-2,0)$，$C(0,3)$ 三点的抛物线的表达式是_____.

6. [中考·上海] 已知一个二次函数的图象开口向上，顶点坐标为 $(0,-1)$，那么这个二次函数的表达式可以是_____.（只需写一个）

7. [实际应用题] 跳绳时，绳甩到最高处时的形状是抛物线．正在甩绳的甲、乙两名同学拿绳的手间距 AB 为 6 米，到地面的距离 AO 和 BD 均为 0.9 米，身高为 1.4 米的小丽站在距离 O 水平距离为 1 米的点 F 处，绳子甩到最高处时刚好通过她的头顶点 E. 以点 O 为原点建立如图所示的平面直角坐标系，设此抛物线对应的函数表达式为 $y=ax^2+bx+0.9$.

（1）求该抛物线对应的函数表达式；

（2）如果小华站在 O，D 之间，且到点 O 的水平距离为 3 米，当绳子甩到最高处时刚好通过他的头顶，请你算出小华的身高．



（第 7 题）

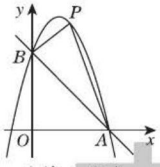
基础·德·基

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

8. 如图，抛物线 $y=-x^2+bx+c$ 经过点 $B(0,3)$ 和点 $A(3,0)$.

（1）求抛物线的函数表达式和直线的函数表达式；

（2）若点 P 是抛物线上第一象限内的点，连接 PA，PB，求△ PAB 的面积的最大值及此时点 P 的坐标.



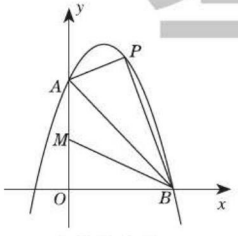
（第 8 题）

9. [**中考 · 聊城**] 如图，已知抛物线 $y=ax^2+2x+c$ 与 y 轴交于点 $A(0,6)$，与 x 轴交于点 $B(6,0)$，点 P 是线段 AB 上方抛物线上的一个动点.

（1）求这条抛物线的表达式及其顶点坐标；

（2）当点 P 移动到抛物线的什么位置时，使得 $\angle PAB=75°$，求出此时点 P 的坐标；

（3）点 P 从 A 点出发沿线段 AB 上方的抛物线向终点 B 移动，在移动过程中，点 P 的横坐标以每秒 1 个单位长度的速度变动；与此同时点 M 以每秒 1 个单位长度的速度沿 AO 向终点 O 移动，则点 P，M 移动到各自终点时停止. 当两个动点移动 t 秒时，求四边形 $PAMB$ 的面积 S 关于 t 的函数表达式，并求出 t 为何值时，S 有最大值，最大值是多少.



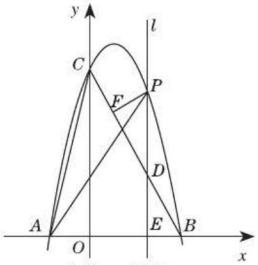
（第 9 题）

10. [**中考 · 聊城**] 如图，在平面直角坐标系中，抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 与 x 轴交于点 $A(-2,0)$，点 $B(4,0)$，与 y 轴交于点 $C(0,8)$，连接 BC，又已知位于 y 轴右侧且垂直于 x 轴的动直线 l，沿 x 轴正方向从 O 运动到 B（不含 O 点和 B 点），且分别交抛物线、线段 BC 以及 x 轴于点 P，D，E.

（1）求抛物线的表达式；

（2）连接 AC，AP，当直线 l 运动时，求使得△ PEA 和△ AOC 相似的点 P 的坐标；

（3）作 $PF\perp BC$，垂足为 F，当直线 l 运动时，求△ PFD 的面积的最大值.



（第 10 题）

错题笔记

荣德基

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

5.6 二次函数的图象与一元二次方程

核心知识

- 二次函数与一元二次方程之间的关系
- 利用二次函数图象求一元二次方程的近似解
- 二次函数图象与一元二次不等式之间的关系

知识链接

一元二次方程的根 ↔ 二次函数的图象与 x 轴的交点的横坐标

数 → 数形结合 ← 形

函数值大于 0 或小于 0 ↔ 图象在 x 轴的上方或下方

点知识·拨考向 速提分

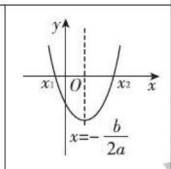
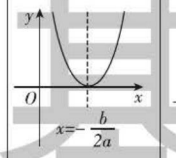
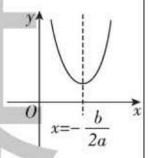
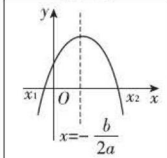
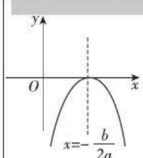
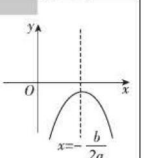
点知识 1 二次函数与一元二次方程之间的关系

1. 二次函数图象与 x 轴交点的横坐标与一元二次方程根的关系

如果一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 有实根，那么二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图象与 x 轴有公共点，且公共点的横坐标是这个一元二次方程的实根；反之，如果二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图象与 x 轴有公共点，那么公共点的横坐标就是一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 的实根.

2. 二次函数与一元二次方程的联系与区别

一元二次方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq0)$ 与二次函数 $y=ax^2+bx+c(a\neq0)$ 二者之间的内在联系与区别，列表如下：

		$b^2-4ac>0$	$b^2-4ac=0$	$b^2-4ac<0$
一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ $(a\neq0)$ 的根的情况		有两个不相等实根 $x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$	有两个相等实根 $x_1=x_2=-\dfrac{b}{2a}$	没有实根
二次函数 $y=ax^2+bx+c$ $(a\neq0)$ 的图象	$a>0$	 $(b<0)$	 $(b<0)$	 $(b<0)$
	$a<0$	 $(b>0)$	 $(b>0)$	 $(b>0)$
抛物线与 x 轴的交点个数		抛物线与 x 轴有两个交点 $(x_1, 0)$ 和 $(x_2, 0)$	抛物线与 x 轴只有一个交点 $\left(-\dfrac{b}{2a}, 0\right)$	抛物线与 x 轴没有交点

提分·必记

拓宽视野

如果 $y=ax^2+bx+c(a\neq0)$ 的函数值为 m，求 $y=m$ 时自变量 x 的值，可以解一元二次方程 $ax^2+bx+c=m$；反之，解一元二次方程 $ax^2+bx+c=m$ 可以看成是已知 $y=ax^2+bx+c$ 的函数值 $y=m$，求自变量 x 的值. 方程 $ax^2+bx+c=m$ 的解是抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 与直线 $y=m$ 的公共点的横坐标.


抛物线与 x 轴交点的个数

禁德基

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

核心考向▶利用二次函数与一元二次方程的关系解决问题

题型1　利用一元二次方程根的判别式判断抛物线与 x 轴的交点个数

例1　二次函数 $y=x^2-2x+1$ 的图象与 x 轴交点的情况是（　　）

A. 没有交点　　B. 有一个交点

C. 有两个交点　　D. 有三个交点

解题秘方：计算根的判别式的值，然后根据判别式的意义判断二次函数 $y=x^2-2x+1$ 与 x 轴的交点数量.

解：∵ $\Delta=(-2)^2-4\times1=0$，

∴二次函数 $y=x^2-2x+1$ 与 x 轴只有一个交点.

答案：B

题型2　利用二次函数的图象与 x 轴的交点个数求系数取值范围

例2　若抛物线 $y=kx^2-2x-1$ 与 x 轴有两个交点，则 k 的取值范围为（　　）

A. $k>-1$　　B. $k\geqslant-1$

C. $k>-1$ 且 $k\neq0$　　D. $k\geqslant-1$ 且 $k\neq0$

解题秘方：根据抛物线 $y=kx^2-2x-1$ 与 x 轴有两个交点，得出 $b^2-4ac>0$，从而求出 k 的取值范围.

解：∵二次函数 $y=kx^2-2x-1$ 的图象与 x 轴有两个交点，∴ $b^2-4ac=(-2)^2-4\times k\times(-1)=4+4k>0$，∴ $k>-1$. ∵抛物线 $y=kx^2-2x-1$ 为二次函数，∴ $k\neq0$，∴ k 的取值范围为 $k>-1$ 且 $k\neq0$.

答案：C

题型3　利用二次函数与一元二次方程的关系求交点坐标

例3　如图 5.6-1，二次函数 $y=x^2-3x-4$ 的图象与一次函数 $y=-\frac{3}{2}x+\frac{1}{2}$ 的图象交于 A，B 两点，求 A，B 两点的坐标.

解题秘方：令两个函数表达式的值相等，构造一元二次方程，通过解方程求出交点坐标.

解：令 $x^2-3x-4=-\frac{3}{2}x+\frac{1}{2}$，

得 $x^2-\frac{3}{2}x-\frac{9}{2}=0$，解得 $x_1=3$，$x_2=-\frac{3}{2}$.

∵点 A 在点 B 的左侧，

∴点 A 的横坐标为 $-\frac{3}{2}$，点 B 的横坐标为 3.

分别把 $x=-\frac{3}{2}$ 和 $x=3$ 代入 $y=-\frac{3}{2}x+\frac{1}{2}$，得 $y=\frac{11}{4}$ 和 $y=-4$.

∴点 A 的坐标为 $(-\frac{3}{2},\frac{11}{4})$，$B$ 的坐标为 $(3,-4)$.

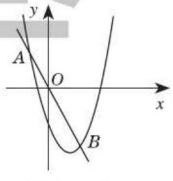


图 5.6-1

提分·秘诀

技巧点拨

在二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 中，当 $\Delta>0$ 时，二次函数的图象与 x 轴有两个交点；当 $\Delta=0$ 时，二次函数的图象与 x 轴有一个交点；当 $\Delta<0$ 时，二次函数的图象与 x 轴没有交点.

技巧点拨

抛物线与 x 轴有两个交点，则抛物线的表达式对应的一元二次方程有两个不相等的实数根，即 $\Delta>0$；同理，当抛物线与 x 轴有一个交点时，$\Delta=0$；当抛物线与 x 轴没有交点时，$\Delta<0$.

技巧点拨

求二次函数与二次函数的交点坐标问题的一般步骤：先令两函数的表达式的值相等，消去 y，得到关于 x 的一元二次方程；再解方程，得出 x 的值；最后把 x 的值代回函数表达式求出 y 的值.

荣德基

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

点知识▶ 2 利用二次函数图象求一元二次方程的近似解

提分·必记

1. 利用逼近法求一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 的近似解的步骤

（1）准确画出 $y=ax^2+bx+c$（$a\neq 0$，a，b，c 是常数）的图象；

（2）确定抛物线与 x 轴的交点的横坐标在哪两个数之间；

（3）令 x 取第（2）步中确定的两个数的平均数，计算 y 的值，根据 y 的值进一步判断方程的根在哪两个数之间；

（4）重复（2）（3）步骤，直到达到问题需要精确到的数位为止.

特别提醒

利用逼近法求一元二次方程的近似解时，要根据题目要求的近似解的精确度求解，注意逼近的方法，必须保证两边的 x 值使函数值异号.

2. 利用图象法求一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 的近似解的步骤

（1）将方程化为 $ax^2=-bx-c$（或 $x^2=-\frac{b}{a}x-\frac{c}{a}$）的形式；

（2）在同一平面直角坐标系中画出抛物线 $y=ax^2$ 与直线 $y=-bx-c$；

（3）观察图象，①若抛物线与直线无公共点，则一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 无实数根；②若抛物线与直线只有一个公共点，则一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 有两个相等的实数根，公共点的横坐标即为方程的实数根；③若抛物线与直线有两个公共点，则一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 有两个不相等的实数根，公共点的横坐标即为方程的实数根.

拔考向▶ 利用图象法求一元二次方程的近似解

提分·秘诀

特别提醒

用图象法解一元二次方程是数形结合思想的具体应用，通过画函数的图象解一元二次方程是数的直观化的体现，但由于作图或观察存在误差，因此通过这种方法一般求得的方程的近似解.

例 4 利用二次函数的图象求一元二次方程 $-x^2+2x-3=-8$ 的近似解（结果精确到 0.1）.

解题秘方 1：画出二次函数 $y=-x^2+2x+5$ 的图象，利用二次函数的图象与 x 轴的公共点计算方程的近似解.

解法 1：整理方程，得 $-x^2+2x+5=0$.

作函数 $y=-x^2+2x+5$ 的图象如图 5.6-2 所示.

由图象可知，抛物线与 x 轴交点的横坐标分别在 -2 和 -1，3 和 4 之间，即方程 $-x^2+2x-3=-8$ 的两个实数根分别在 -2 和 -1，3 和 4 之间，用取平均数的方法不断缩小解的取值范围，从而确定方程的近似解.

由图象可知，当 $x=3$ 时，$y>0$；当 $x=4$ 时，$y<0$，取 3 和 4 的平均数 3.5，当 $x=3.5$ 时，$y=-0.25$，与 $x=3$ 时的函数值异号，所以方程的这个解在 3 和 3.5 之间.

取 3 和 3.5 的平均数 3.25，当 $x=3.25$ 时，$y=0.937\ 5$，与 $x=3.5$ 时的函数值异号，所以方程的这个解在 3.25 和 3.5 之间.

取 3.25 和 3.5 的平均数 3.375，当 $x=3.375$ 时，$y=0.359\ 375$，与 $x=3.5$ 时的函数值异号，所以方程的这个解在 3.375 和 3.5 之间.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

由此方法可得到原方程的一个近似解为 3.4.

用同样的方法可得到原方程的另一个近似解为 -1.4.

所以一元二次方程 $-x^2+2x-3=-8$ 的近似解为 $x_1 \approx -1.4$，$x_2 \approx 3.4$.

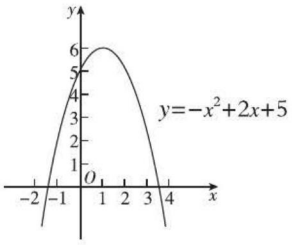


图 5.6−2

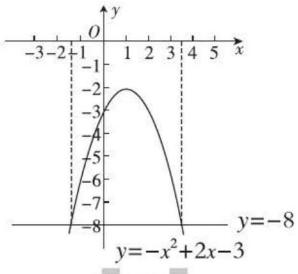


图 5.6−3

解题秘方 2：画出二次函数 $y=-x^2+2x-3$ 的图象，再画出直线 $y=-8$，利用两图象的公共点求方程的近似解.

解法 2：作出函数 $y=-x^2+2x-3$ 的图象，如图 5.6−3 所示.

由图象知，方程 $-x^2+2x-3=-8$ 的根是抛物线 $y=-x^2+2x-3$ 与直线 $y=-8$ 的公共点的横坐标，一个公共点的横坐标在 -2 与 -1 之间，另一个公共点的横坐标在 3 与 4 之间.

同样用取平均数的方法，可得一元二次方程 $-x^2+2x-3=-8$ 的近似解为 $x_1 \approx -1.4$，$x_2 \approx 3.4$.

解题通法

用图象法求一元二次方程的近似解

用图象法求一元二次方程的近似解时，一般是作出相应的二次函数的图象，确定一元二次方程的解的数量，找出公共点的横坐标的大致范围，然后利用取平均数的方法缩小解所在的范围，通过反复计算求出满足精确度要求的近似解.

点方法·拨技巧 提高分

拔尖角度 1 利用二次函数图象与坐标轴的交点个数求系数

挑战·高分

例 5 若二次函数 $y=(a-1)x^2-4x+2$ 的图象与坐标轴有 2 个交点，则 a 的值为_____；若该二次函数图象与坐标轴有 3 个交点，则 a 的取值范围是_____.

解题秘方：根据抛物线与坐标轴的交点个数，得到抛物线与 x 轴的交点个数，再借助判别式求解.

解：∵二次函数 $y=(a-1)x^2-4x+2$ 的图象恒过点 $(0,2)$，

∴二次函数 $y=(a-1)x^2-4x+2$ 的图象与 y 轴恒有一个交点.

当二次函数 $y=(a-1)x^2-4x+2$ 的图象与坐标轴有 2 个交点时，二次函数 $y=(a-1)x^2-4x+2$ 的图象与 x 轴只有 1 个交点，

即 $\Delta=(-4)^2-4(a-1)\times 2=0$，解得 $a=3$.

当二次函数 $y=(a-1)x^2-4x+2$ 的图象与坐标轴有 3 个交点时，二次函数 $y=(a-1)x^2-4x+2$ 的图象与 x 轴有 2 个交点，

即 $\Delta=(-4)^2-4(a-1)\times 2>0$，解得 $a<3$.

又∵函数 $y=(a-1)x^2-4x+2$ 是二次函数，∴ $a-1\neq 0$，即 $a\neq 1$，

∴ a 的取值范围是 $a<3$ 且 $a\neq 1$.

答案：3；$a<3$ 且 $a\neq 1$

易错警示

二次函数图象与坐标轴的交点数量，不仅是与 x 轴的交点数量，坐标轴还包括 y 轴.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

拔尖角度▸ 2 利用二次函数图象与 x 轴的交点解决不等式问题

例 6 已知二次函数 $y=2x^2-(m+1)x+m-1$.

（1）求证：不论 m 为何值，函数的图象与 x 轴总有交点，并指出当 m 为何值时，只有一个交点.

（2）当 m 为何值时，函数的图象经过原点？

（3）指出在（2）的条件下，使 $y<0$ 的 x 的取值范围，及使 $y>0$ 的 x 的取值范围.

解题秘方：（1）用判别式法；（2）用点的坐标与函数的关系；（3）用图象法.

（1）**证明**：函数对应的方程的根的判别式 $\Delta=[-(m+1)]^2-4\times2\times(m-1)=m^2+2m+1-8m+8=m^2-6m+9=(m-3)^2$.

显然不论 m 为何值，均有 $\Delta=(m-3)^2\geqslant0$，且当 $m=3$ 时，$\Delta=0$，故不论 m 为何值，函数的图象与 x 轴总有交点，且当 $m=3$ 时，只有一个交点.

（2）**解**：∵函数的图象经过原点（0，0），

∴ $0=2\times0^2-(m+1)\times0+m-1$，

∴ $m=1$，

即当 $m=1$ 时，函数的图象经过原点.

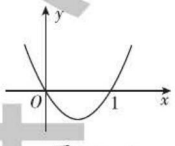


图 5.6-4

（3）**解**：由（2）得 $y=2x^2-2x$，其图象大致如图 5.6-4 所示.

∵抛物线与 x 轴的两个交点分别为（0，0），（1，0），

∴当 $0<x<1$ 时，$y<0$；

当 $x<0$ 或 $x>1$ 时，$y>0$.

拔尖角度▸ 3 利用函数图象交点与方程解的关系解图象的公共点问题

例 7 已知抛物线 G 的表达式为 $y=ax^2+bx+c$，且抛物线 G 经过 $(-5,0)$，$\left(0,\frac{5}{2}\right)$，$(1,6)$ 三点，直线 l 的表达式为 $y=2x-3$.

（1）求抛物线 G 的表达式；

（2）求证：抛物线 G 与直线 l 无公共点；

（3）若与直线 l 平行的直线 $y=2x+m$ 与抛物线 G 只有一个公共点 P，求 P 点的坐标.

解题秘方：利用一元二次方程的根的判别式与公共点的关系解答.

（1）**解**：∵抛物线 G 经过 $(-5,0)$，$\left(0,\frac{5}{2}\right)$，$(1,6)$ 三点，

挑战·高分

拓宽视野

利用二次函数的图象分析自变量的取值范围（或求不等式的解集）

- 从“形”的方面看：不等式 $ax^2+bx+c>0(a\neq0)$ 的解是二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图象位于 x 轴上方的所有点的横坐标；不等式 $ax^2+bx+c<0(a\neq0)$ 的解是二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图象位于 x 轴下方的所有点的横坐标.
- 从“数”的方面看：当二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的函数值 $y>0$ 时，其自变量 x 的取值范围是不等式 $ax^2+bx+c>0$ 的解集；当二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的函数值 $y<0$ 时，其自变量 x 的取值范围是不等式 $ax^2+bx+c<0$ 的解集.

挑战·高分

解法提醒

1. 把已知的三个点的坐标分别代入 $y=ax^2+bx+c$ 中，解关于 a，b，c 的方程组即可.
2. 要证抛物线 G 与直线 l 无公共点，就需要证明抛物线 G 与直线 l 的表达式组成的方程组无实数解.
3. 若直线 $y=2x+m$ 与抛物线 G 只有一个公共点 P，则由它们的表达式组成的方程组有唯一解，

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

$$\therefore \begin{cases} 0=25a-5b+c, \\ \dfrac{5}{2}=c, \\ 6=a+b+c, \end{cases} \text{解得} \begin{cases} a=\dfrac{1}{2}, \\ b=3, \\ c=\dfrac{5}{2}, \end{cases}$$

∴抛物线 G 的表达式为 $y=\frac{1}{2}x^2+3x+\frac{5}{2}$.

即消去 y 后所得关于 x 的一元二次方程的根的判别式等于 0

（2）**证明**：由 $\begin{cases} y=2x-3, \\ y=\frac{1}{2}x^2+3x+\frac{5}{2}, \end{cases}$ 消去 y，得 $\frac{1}{2}x^2+x+\frac{11}{2}=0$.

∵ $\Delta=1-4\times\frac{1}{2}\times\frac{11}{2}=-10<0$,

∴方程无实根，即抛物线 G 与直线 l 无公共点.

技巧点拨

确定公共点数量的方法：解关于直线与抛物线的公共点数量问题，即求直线与抛物线的表达式联立组成的方程组消去 y 后得到的一元二次方程的解的个数问题，从而转化为所得到的一元二次方程的根的判别式的符号问题. 有两个公共点，则 $\Delta>0$；有一个公共点，则 $\Delta=0$；无公共点，则 $\Delta<0$.

（3）**解**：由 $\begin{cases} y=2x+m, \\ y=\frac{1}{2}x^2+3x+\frac{5}{2}, \end{cases}$

消去 y，得 $\frac{1}{2}x^2+x+\frac{5}{2}-m=0$. ①

∵抛物线 G 与直线 $y=2x+m$ 只有一个公共点 P,

∴ $\Delta=1-4\times\frac{1}{2}\times\left(\frac{5}{2}-m\right)=0$，解得 $m=2$.

把 $m=2$ 代入方程①，解得 $x_1=x_2=-1$.

把 $x=-1$ 代入 $y=\frac{1}{2}x^2+3x+\frac{5}{2}$ 中，得 $y=0$.

∴ P 点的坐标为（-1，0）.

点中考·拨模拟 得满分

中考探秘

考查二次函数与一元二次方程的关系，主要考查从二次函数的角度看一元二次方程，有时还与一元二次不等式、一次函数及几何中的一些知识联系在一起进行考查，综合考查函数的性质和方程思想，解答此类题的关键是熟悉函数与方程的关系以及能从图象上获取有价值的信息，题型主要有选择题和解答题.

三年中考兵法

冲刺·满分

考法 1 利用二次函数与一元二次方程的关系求字母的取值范围

技巧点拨

抛物线与 x 轴有交点，令抛物线对应的函数表达式的值为 0，则该一元二次方程有实数解，

例 8 [中考·襄阳]已知二次函数 $y=x^2-x+\frac{1}{4}m-1$ 的图象与 x 轴有交点，则 m 的取值范围是（　　）

A. $m\leqslant 5$　　B. $m\geqslant 2$

C. $m<5$　　D. $m>2$

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

试题评析：本题考查了抛物线与 x 轴的交点，能根据题意得出关于 m 的不等式是解此题的关键.

解：∵二次函数 $y=x^2-x+\frac{1}{4}m-1$ 的图象与 x 轴有交点，

∴ $\Delta=(-1)^2-4\times1\times(\frac{1}{4}m-1)\geqslant0$，解得 $m\leqslant5$.

答案：A

再通过判别式 $\Delta\geqslant0$ 求出字母的取值范围.

考法 2 利用二次函数的几组特征值估计一元二次方程的近似根

例 9 [中考·兰州]下表是一组二次函数 $y=x^2+3x-5$ 的自变量 x 与函数值 y 的对应值：

x	1	1.1	1.2	1.3	1.4
y	−1	−0.49	0.04	0.59	1.16

那么方程 $x^2+3x-5=0$ 的一个近似根是（　　）

A. 1　　B. 1.1　　C. 1.2　　D. 1.3

试题评析：此题考查了求一元二次方程的近似根，弄清表格中的数据是解本题的关键.

解：观察表格知，当 $x=1.1$ 时，函数值 $y<0$，

当 $x=1.2$ 时，函数值 $y>0$.

∵ $|-0.49|=0.49>0.04$，

∴方程 $x^2+3x-5=0$ 的一个近似根是 1.2.

答案：C

技巧点拨

利用二次函数的函数值估算一元二次方程的近似根，首先找到相邻的两个 x 的值，使函数值的符号相反，再比较两个函数值的绝对值的大小，绝对值小的对应的 x 的值更接近方程的根，即为方程的近似根.

考法 3 利用函数图象交点的意义解不等式问题

例 10 [中考·咸宁]如图 5.6−5，直线 $y=mx+n$ 与抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 交于 $A(-1,p)$，$B(4,q)$ 两点，则关于 x 的不等式 $mx+n>ax^2+bx+c$ 的解集是_____.

试题评析：本题考查了二次函数与不等式，根据两函数图象的上下位置关系找出不等式的解集是解题的关键.

解：观察函数图象可知，当 $x<-1$ 或 $x>4$ 时，直线 $y=mx+n$ 在抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 的上方，

∴不等式 $mx+n>ax^2+bx+c$ 的解集为 $x<-1$ 或 $x>4$.

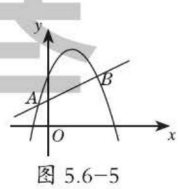


图 5.6−5

答案：$x<-1$ 或 $x>4$

技巧点拨

借助图象解决不等式问题，若已知交点的横坐标时，可直接根据函数图象的位置解答，即图象在上方时，对应的函数值大；图象在下方时，对应的函数值小. 若不知交点的横坐标，先根据两函数表达式建立方程组，求出横坐标的值，再比较.

考法 4 利用抛物线与直线的交点求与面积相关的点的坐标

例 11 [中考·黑龙江]如图 5.6−6，已知抛物线 $y=-x^2+mx+3$ 与 x 轴交于 A，B 两点，与 y 轴交于 C 点，点 B 的坐标为（3，0），抛物线与直线 $y=-\frac{3}{2}x+3$ 交于 C，D 两点，连接 BD，AD.

方法技巧

- 对于两个函数图象交点的问题，一般要将函数问题转化为由两个函数表达式组成的

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

（1）求 m 的值；

（2）若抛物线上有一点 P，满足 $S_{\triangle ABP}=4S_{\triangle ABD}$，求点 P 的坐标．

试题评析：本题考查抛物线与 x 轴的交点、二次函数的图象上的点的特征，属于中考常考题型．解题的关键是熟练运用待定系数法解决问题，学会利用方程组确定两个函数图象的交点坐标．

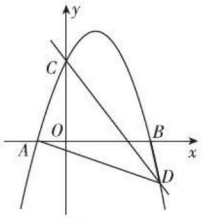


图 5.6-6

方程组来解．

解图象与几何的综合问题，要注意表示几何关系的量与点的坐标的量的区别：表示几何关系的量都是正数表示点的坐标有正、有负．

解：（1）∵抛物线 $y=-x^2+mx+3$ 过（3，0），∴ $0=-9+3m+3$，∴ $m=2$．

（2）由（1）知抛物线的表达式为 $y=-x^2+2x+3$．

由 $\begin{cases}y=-x^2+2x+3,\\ y=-\dfrac{3}{2}x+3,\end{cases}$ 得 $\begin{cases}x_1=0,\\ y_1=3,\end{cases}$ $\begin{cases}x_2=\dfrac{7}{2},\\ y_2=-\dfrac{9}{4}.\end{cases}$ ∴ $D\left(\dfrac{7}{2},-\dfrac{9}{4}\right)$．

∵ $S_{\triangle ABP}=4S_{\triangle ABD}$，∴ $\dfrac{1}{2}AB\times|y_p|=4\times\dfrac{1}{2}AB\times\dfrac{9}{4}$．

∴ $|y_p|=9$，∴ $y_p=\pm9$，当 $y_p=9$ 时，$-x^2+2x+3=9$，无实数解，

当 $y_p=-9$ 时，$-x^2+2x+3=-9$，解得 $x_3=1+\sqrt{13}$，$x_4=1-\sqrt{13}$，

∴ $P(1+\sqrt{13},-9)$ 或 $P(1-\sqrt{13},-9)$．

两年模拟兵法

☞答案见 258 页

1. 若二次函数 $y=3x^2+x-2m$ 的图象与 x 轴有两个交点，则关于 x 的一元二次方程 $3x^2+x=2m$ 的根的情况是（　　）

A. 有两个不相等的实数根

B. 有两个相等的实数根

C. 没有实数根

D. 不能确定

2. [中考·荆门] 抛物线 $y=-x^2+4x-4$ 与坐标轴的交点个数为（　　）

A. 0　　B. 1　　C. 2　　D. 3

3. 已知二次函数 $y=ax^2+bx+c$，y 与 x 的部分对应值如下表：

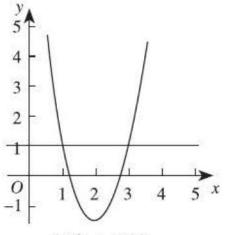
x	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5	1.6
y	−1.59	−1.16	−0.71	−0.24	0.25	0.76

则一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 的一个解 x 满足的条件是（　　）

A. $1.2<x<1.3$　　B. $1.3<x<1.4$

C. $1.4<x<1.5$　　D. $1.5<x<1.6$

4. 如图，过点（0，1）且平行于 x 轴的直线与二次函数 $y=ax^2+bx+c\,(a>0)$ 的图象的交点坐标为（1，1），（3，1），则不等式 $ax^2+bx+c-1>0$ 的解集为（　　）



（第 4 题）

A. $x<1$　　B. $1<x<3$

C. $x<1$ 或 $x>3$　　D. $x>3$

5. [中考·莱芜] 函数 $y=ax^2+2ax+m\,(a<0)$ 的图象过点（2，0），则使函数值 $y<0$ 成立的 x 的取值范围是（　　）

A. $x<-4$ 或 $x>2$　　B. $-4<x<2$

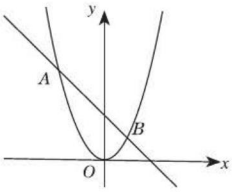
C. $x<0$ 或 $x>2$　　D. $0<x<2$

来德基

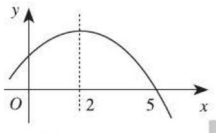
关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

6. [中考·自贡] 若函数 $y=x^2+2x-m$ 的图象与 x 轴有且只有一个交点，则 m 的值是_____.

7. [中考·孝感] 如图，抛物线 $y=ax^2$ 与直线 $y=bx+c$ 的两个交点分别为 $A(-2,4)$，$B(1,1)$，则方程 $ax^2=bx+c$ 的解是_____.



（第 7 题）



（第 9 题）

8. 已知二次函数 $y=3x^2+4x-9$ 的图象与直线 $y=x-3$ 交于 A，B 两点，则 A，B 两点间的竖直距离是_____.

9. [模拟·冠县] 如图是二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的部分图象，由图象可知不等式 $ax^2+bx+c<0$ 的解集是_____.

10. [中考·南京] 已知二次函数 $y=2(x-1)(x-m-3)$（m 为常数）.

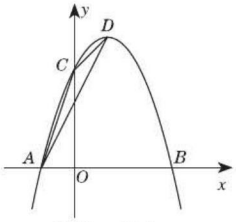
（1）求证：不论 m 为何值，该函数的图象与 x 轴总有公共点；

（2）当 m 取什么值时，该函数的图象与 y 轴的交点在 x 轴的上方？

11. 如图，抛物线 $y=ax^2+bx+3$ 与 x 轴交于 $A(-1,0)$ 和 $B(3,0)$ 两点，与 y 轴交于点 C，点 D 是该抛物线的顶点，分别连接 AC，CD，AD.

（1）求抛物线的函数表达式以及顶点 D 的坐标；

（2）在抛物线上取一点 P（不与点 C 重合），并分别连接 PA，PD，当 $\triangle PAD$ 的面积与 $\triangle ACD$ 的面积相等时，求点 P 的坐标.



（第 11 题）

基础题·德基

错题笔记

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

5.7 二次函数的应用

核心知识

- 几何图形面积最大（小）问题
- 实物模型中能力判断问题
- 商品经济利润最大问题

知识链接



点知识·拨考向 速提分

点知识▸ 利用二次函数解决实际问题

1. 常用方法 利用二次函数解决实际问题，首先要建立数学模型，把实际问题转化为二次函数问题，利用题中存在的等量关系，求出函数表达式，然后利用函数的图象和性质去解决问题.

2. 一般步骤

（1）**审**：仔细审题，理清题意.

（2）**设**：找出问题中的变量和常量，分析它们之间的关系，与图形相关的问题要结合图形具体分析，假设适当的未知数.

（3）**列**：用二次函数表示变量和常量之间的关系，建立二次函数模型，把实际问题转化成数学问题，根据题中的数量关系列出二次函数的表达式.

（4）**解**：依据已知条件，借助二次函数的表达式、图象和性质等解决实际问题.

（5）**检**：检验结果，得出符合实际意义的结论.

拨考向▸ 利用二次函数解决常见的实际问题

例 1 “垃圾分一分，明天美十分”，某单位计划订制一批垃圾分类宣传海报，海报版面不小于 300 平方米，当宣传海报的版面为 300 平方米时，价格为 80 元/平方米，为了支持垃圾分类促进环保，广告公司给予以下优惠：宣传海报版面每增加 1 平方米，每平方米的价格减少 0.2 元，但不能低于 50 元/平方米. 假设宣传海报的版面增加 x 平方米后，总费用为 y 元.

（1）求 y 关于 x 的函数表达式；

（2）订制宣传海报的版面为多少平方米时总费用最高？最高总费用为多少元？

（3）该单位希望总费用尽可能低，那么应该订制多少平方米的海报？

提分·必记

要点解读

- 用二次函数求解实际问题时，审题是关键. 最终求得的结果除了要满足题中的数量关系，还要检验是否符合实际问题的意义.
- 在求解实际问题中的最值问题时，解题思路是列二次函数表达式，用配方法把函数表达式化为 $y=a(x-h)^2+k$ 的形式求解，或者针对函数表达式用顶点坐标公式计算函数的最值.

提分·秘诀

特别提醒

1. 要严格按照用二次函数解实际问题的步骤解答.
2. 列函数表达式时，要找能包含全部题意的等量关系，并且要考虑自变量的取值范围.
3. 求所列函数的最值时，既可以化为顶点式求解，也可以按顶点坐

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

解题秘方：（1）根据题意可以写出 y 关于 x 的函数表达式．（2）根据（1）中的函数表达式和 x 的取值范围，可以解答本题．（3）根据题意和 x 的取值范围可以求得应该订制多少平方米的海报，可以使得总费用尽可能低．

解：（1）由题意可得，

$$y=(80-0.2x)(300+x)=-\frac{1}{5}x^2+20x+24\,000,$$

即 y 关于 x 的函数表达式为 $y=-\frac{1}{5}x^2+20x+24\,000$.

（2）$\because 80-0.2x\geqslant 50$，$\therefore x\leqslant 150$，$\therefore 0\leqslant x\leqslant 150$.

$\because y=-\frac{1}{5}x^2+20x+24\,000=-\frac{1}{5}(x-50)^2+24\,500$，

$\therefore$ 当 $x=50$ 时，y 取得最大值，此时 $y=24\,500$，$x+300=350$.

答：订制宣传海报的版面为 350 平方米时总费用最高，最高总费用为 24 500 元．

（3）$\because y=-\frac{1}{5}x^2+20x+24\,000=-\frac{1}{5}(x-50)^2+24\,500$，

$0\leqslant x\leqslant 150$，

$\therefore$ 当 $x=150$ 时，y 取得最小值，此时 $y=22\,500$，$x+300=450$.

答：该单位希望总费用尽可能低，那么应该订制 450 平方米的海报．

点方法·拨技巧 提高分

拔尖角度 1 利用二次函数解决最大利润问题

挑战·高分

例 2 [中考·兰州]某商家销售一款商品，进价每件 80 元，售价每件 145 元，每天销售 40 件，每销售一件需支付给商场管理费 5 元，未来一个月（按 30 天计算），这款商品将开展“每天降价 1 元”的促销活动，即从第一天开始每天的单价均比前一天降低 1 元，通过市场调查发现，该商品单价每降 1 元，每天销售量增加 2 件，设第 x 天（$1\leqslant x\leqslant 30$ 且 x 为整数）的销售量为 y 件．

（1）直接写出 y 与 x 的函数表达式；

（2）设第 x 天的利润为 w 元，试求出 w 与 x 之间的函数表达式，并求出哪一天的利润最大？最大利润是多少元？

解题秘方：（1）根据销售量 = 原价的销售量 + 增加的销售量即可得到 y 与 x 的函数表达式．（2）根据每天售出的数量 × 每件盈利 = 利润即可得到 w 与 x 之间的函数表达式，进而得出结论．

知识储备

用二次函数解决商品销售问题中的最大利润、最低成本等问题，要熟练掌握相关数量的意义、常用的数量关系，根据具体问题，建立函数表达式，解决实际问题．

常见销售问题中的数量关系：利润 = 售价 − 进价，总利润 = 每件商品的利润 × 销量，利润率 = $\frac{\text{利润}}{\text{成本}}\times 100\%$.

标公式求解．

4. 写答案时，要特别注意函数的最值是否是实际问题的最值．

顶点的自变量的值在实际问题的自变量的取值范围内，则函数的最值是实际问题的最值，否则就不是．

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

解：（1）由题意可知$y=2x+40$.

（2）根据题意可得，

$w=(145-x-80-5)(2x+40)=-2x^2+80x+2\,400=-2(x-20)^2+3\,200\ (1\leqslant x\leqslant 30)$.

$\because a=-2<0$，$\therefore$函数有最大值，

$\therefore$当$x=20$时，w有最大值为3 200，

$\therefore$第20天的利润最大，最大利润是3 200元.

建立二次函数模型求最值

拔尖角度▸ 2 利用二次函数解决优选方案问题

挑战·高分

例3 某商场要经营一种新上市的文具，进价为20元/件，试营销阶段发现，当销售价格为25元/件时，每天的销售量为250件，销售价格每上涨1元，每天的销售量就减少10件.

（1）请你写出商场销售这种文具，每天所得的销售利润w（元）与销售价格x（元/件）之间的函数表达式；

（2）销售价格为多少时，该文具每天所得的销售利润最大？

（3）商场的营销部结合上述情况，提出了A，B两种营销方案.

方案A：该文具的销售价格高于进价且不超过30元/件；

方案B：每天销售量不少于10件，且每件文具的销售利润至少为25元，请通过计算说明哪种方案的最大销售利润更高.

解题通法

在实际问题中，求商品的最大利润的一般步骤：(1)列出二次函数表达式，并确定自变量的取值范围(2)通过配方，把表达式化为顶点式(3)看自变量的取值范围是否在对称轴的同侧，若在，则根据函数的增减性求出最大利润；否则，对称轴对应的顶点坐标的纵坐标即为最大利润.

解题秘方：对求出的每种方案的最大销售利润进行比较，优选营销方案.

解：（1）$w=(x-20)[250-10(x-25)]=-10x^2+700x-10\,000$.

（2）$\because w=-10x^2+700x-10\,000=-10(x-35)^2+2\,250$，

$\therefore$当$x=35$时，w有最大值为2 250，

即销售价格为35元/件时，该文具每天所得的销售利润最大.

（3）方案A：由题意，得$w=-10(x-35)^2+2\,250\ (20<x\leqslant 30)$，

$\because -10<0$，抛物线的对称轴为直线$x=35$，

$\therefore$抛物线开口向下，在对称轴的左侧，w随x的增大而增大.

$\therefore$当$x=30$时，w取最大值为2 000.

方案B：由题意，得

$$\begin{cases} x\geqslant 20+25, \\ 250-10(x-25)\geqslant 10, \end{cases}$$

解得$45\leqslant x\leqslant 49$.

$\therefore w=-10(x-35)^2+2\,250\ (45\leqslant x\leqslant 49)$.

$\because$在对称轴（直线$x=35$）的右侧，w随x的增大而减小，

$\therefore$当$x=45$时，w取最大值为1 250.

$\because 2\,000>1\,250$，$\therefore$方案A的最大销售利润更高.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

拔尖角度▸ 3 利用二次函数解决动态几何问题

挑战·高分

例4 如图5.7-1，在四边形$ABCD$中，$AD \parallel BC$，$AB=CD$，$AD=4$，$BC=9$，$\angle B=45°$．动点P从点B出发沿BC方向向点C运动，动点Q同时以相同速度从点C出发沿CD方向向点D运动，其中一个动点到达端点时，另一个动点也随之停止运动．

（1）求AB的长度；

（2）设$BP=x$，问：当x为何值时，$\triangle PCQ$的面积最大？

解题秘方：（1）作$AE \perp BC$于E，根据题意可求BE的长度，然后在等腰直角三角形ABE中，根据勾股定理，即可求出AB的长度．

（2）作$QF \perp BC$于F，根据题意推出$\triangle CQF$为等腰直角三角形，$BP=CQ$，然后推出$\triangle CQF$的高QF关于x的表达式，推出CP关于x的表达式，即可推出$\triangle PCQ$的面积关于x的函数表达式，最后根据二次函数的最值即可求出x的值．

解：（1）如图5.7-1，过点A作$AE \perp BC$于E，

∵在四边形$ABCD$中，

$AD \parallel BC$，$AB=CD$，$AD=4$，

$BC=9$，$\angle B=45°$，

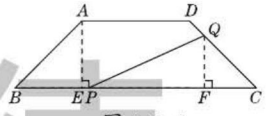


图5.7-1

$\therefore BE=AE=(BC-AD)\div 2=\frac{5}{2}$．

$\therefore AB=\sqrt{BE^2+AE^2}=\frac{5\sqrt{2}}{2}$．

（2）如图5.7-1，过点Q作$QF \perp BC$于F，易知四边形$ABCD$是轴对称图形，

$\therefore \angle B=\angle C=45°$．$\therefore \triangle CQF$为等腰直角三角形．

∵点P和点Q的运动速度、运动时间相同，$BP=x$，

$\therefore CQ=BP=x$，$\therefore QF=\frac{\sqrt{2}}{2}x$．

∵$BC=9$，$\therefore CP=9-x$．

设$\triangle PCQ$的面积为y，则$y=(9-x)\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}x\cdot\frac{1}{2}$，

即$y=-\frac{\sqrt{2}}{4}x^2+\frac{9\sqrt{2}}{4}x$，

∵$x=-\frac{b}{2a}=\frac{9}{2}>\frac{5\sqrt{2}}{2}=CD$，$\therefore$当$x=\frac{5\sqrt{2}}{2}$时，$y$的值最大，

即$\triangle PCQ$的面积最大．

解法提醒

先由动点的运动状态求出线段的长度，再利用二次函数解决动态几何问题，一般根据几何面积、体积等公式列出二次函数表达式，最后通过二次函数的最值，求出面积或体积的最值．



未德基

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

点中考·拨模拟 得满分

中考探秘 利用二次函数解决实际问题，是中考考查的重点和热点，命题形式多样，试题背景新颖多元，简单的实际问题多以选择题和填空题的形式出现；综合性较强的实际问题常与一次函数、方程、不等式等知识综合考查，有时也会结合三角形、四边形等几何知识综合考查，多以解答题的形式出现.

三年中考兵法

冲刺·满分

考法1 利用二次函数解决几何图形最值问题

例5 [中考·潍坊]如图5.7-2，工人师傅用一块长为10 dm，宽为6 dm的矩形铁皮制作一个无盖的长方体容器，需要将四角各裁掉一个正方形.（厚度不计）

（1）在图中画出裁剪示意图，用实线表示裁剪线，虚线表示折痕；并求长方体底面面积为12 dm^2时，裁掉的正方形边长多大？

（2）若要求制作的长方体的底面长不大于底面宽的五倍，并将容器（内表面）进行防锈处理，处理侧面每平方分米的费用为0.5元，处理底面每平方分米的费用为2元，裁掉的正方形边长多大时，总费用最低，这个最低总费用为多少？

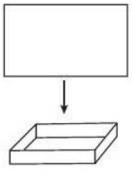


图5.7-2

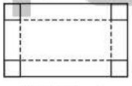


图5.7-3

试题评析：紧扣长方形面积与裁掉的正方形边长的关系列式解答.

解：（1）裁剪示意图如图5.7-3所示. 设裁掉的正方形的边长为x dm，由题意可得$(10-2x)(6-2x)=12$，

即$x^2-8x+12=0$，

解得$x=2$或$x=6$（舍去）.

答：长方体底面面积为12 dm^2时，裁掉的正方形的边长为2 dm.

（2）∵长方体的底面长不大于底面宽的五倍，∴$10-2x\leqslant 5(6-2x)$，

∴$0<x\leqslant 2.5$. 设总费用为w元，由题意可知$w=0.5\times 2x(16-4x)+2(10-2x)(6-2x)=4x^2-48x+120=4(x-6)^2-24$.

∵对称轴为直线$x=6$，开口向上，∴当$0<x\leqslant 2.5$时，w随x的增大而减小. ∴当$x=2.5$时，w有最小值，最小值为25.

答：当裁掉的正方形边长为2.5 dm的时，总费用最低，最低为25元.

解法提醒

求满足什么条件时几何图形有最大面积、最大体积的问题，常可转化成求二次函数的最值问题. 解题时可借助几何图形面积、体积公式及相关性质，建立变量之间的二次函数关系，利用二次函数的性质求最值.

易错提醒

本例不要误认为当$x=6$时，$y_{最小值}=-24$，是实际问题的最小值，因$x=6$不在实际问题的自变量的取值范围内，所以只能从函数的增减性来求最值.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

考法 2 利用二次函数解决销售问题

例 6 [中考·青岛]某公司投入研发费用 80 万元(80 万元只计入第一年成本),成功研发出一种产品.公司按订单生产(产量=销售量),第一年该产品正式投产后,生产成本为 6 元/件.此产品年销售量 y(万件)与售价 x(元/件)之间满足函数表达式 $y=-x+26$.

(1)求这种产品第一年的利润 W_1(万元)与售价 x(元/件)满足的函数表达式;

(2)该产品第一年的利润为 20 万元,那么该产品第一年的售价是多少?

(3)第二年,该公司将第一年的利润 20 万元(20 万元只计入第二年成本)再次投入研发,使产品的生产成本降为 5 元/件.为保持市场占有率,公司规定第二年产品售价不超过第一年的售价,另外因受产能限制,销售量无法超过 12 万件.设该公司第二年的利润为 W_2(万元),请计算该公司第二年的利润至少为多少万元.

解:(1)$W_1=(x-6)(-x+26)-80=-x^2+32x-236$.

(2)由题意,得 $20=-x^2+32x-236$.

解得 $x_1=x_2=16$. 答:该产品第一年的售价是 16 元/件.

(3)∵公司规定第二年产品售价不超过第一年的售价,另外因受产能限制,销售量无法超过 12 万件,∴ $14\leqslant x\leqslant 16$,

∵ $W_2=(x-5)(-x+26)-20=-x^2+31x-150$,

∴对称轴为直线 $x=15.5$,又 $14\leqslant x\leqslant 16$,

∴当 $x=14$ 时,W_2 有最小值,最小值为 88.

答:该公司第二年的利润至少为 88 万元.

解法提醒

(1)根据总利润=每件利润×销售量-投资成本,列出式子即可.

(2)构建方程即可解决问题.

(3)根据题意求出自变量的取值范围,再利用二次函数的性质即可解决问题.

考法 3 利用二次函数解决抛物线形问题

例 7 [中考·衢州]某游乐园有一个直径为 16 米的圆形喷水池,喷水池的周边有一圈喷水头,喷出的水柱为抛物线,在距水池中心 3 米处达到最高,高度为 5 米,且各方向喷出的水柱恰好在喷水池中心的装饰物处汇合.如图 5.7-4 所示,以水平方向为 x 轴,喷水池中心为原点建立直角坐标系.

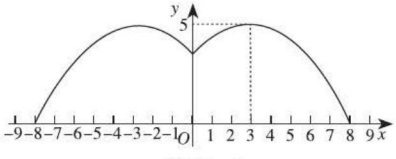


图 5.7-4

解法提醒

(1)根据顶点坐标可设二次函数的顶点式,代入点(8,0)的坐标,求出 a 的值,此题得解.

(2)利用二次函数图象上点的坐标特征,求出当 y=1.8 时 x 的值,由此即可得出结论.

(3)利用二次函数图象上点的坐标特征可求出抛物线与 y 轴的交点坐标,由抛

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

（1）求水柱所在抛物线（第一象限部分）的函数表达式；

（2）王师傅在喷水池内维修设备期间，喷水头意外喷水，为了不被淋湿，身高 1.8 米的王师傅站立时必须在离水池中心多少米以内？

（3）经检修评估，游乐园决定对喷水设施做如下设计改进：在喷出水柱的形状不变的前提下，把水池的直径扩大到 32 米，各方向喷出的水柱仍在喷水池中心保留的原装饰物（高度不变）处汇合，请探究扩建改造后喷水池水柱的最大高度.

试题评析：本题考查了二次函数的实际应用，根据图象和题干信息求出二次函数表达式是解题的关键.

解：（1）设水柱所在抛物线（第一象限部分）的函数表达式为

$y=a(x-3)^2+5\ (a\neq 0)$，

将点（8，0）的坐标代入 $y=a(x-3)^2+5$，

得 $25a+5=0$，

解得 $a=-\frac{1}{5}$.

∴水柱所在抛物线（第一象限部分）的函数表达式为

$y=-\frac{1}{5}(x-3)^2+5\ (0<x<8)$.

（2）当 $y=1.8$ 时，有 $-\frac{1}{5}(x-3)^2+5=1.8$，

解得 $x_1=-1$（舍去），$x_2=7$，

∴为了不被淋湿，身高 1.8 米的王师傅必须站立在离水池中心 7 米以内的任意位置.

（3）当 $x=0$ 时，$y=-\frac{1}{5}(0-3)^2+5=\frac{16}{5}$.

设改造后水柱所在抛物线（第一象限部分）的函数表达式为

$y=-\frac{1}{5}x^2+bx+\frac{16}{5}$，

∵该函数图象过点（16,0），

∴ $0=-\frac{1}{5}\times 16^2+16b+\frac{16}{5}$，

解得 $b=3$，

∴改造后水柱所在抛物线（第一象限部分）的函数表达式为

$y=-\frac{1}{5}x^2+3x+\frac{16}{5}=-\frac{1}{5}(x-\frac{15}{2})^2+\frac{289}{20}$.

∴扩建改造后喷水池水柱的最大高度为$\frac{289}{20}$米.

物线的形状不变可设改造后水柱所在抛物线（第一象限部分）的函数表达式为 $y=-\frac{1}{5}x^2+bx+\frac{16}{5}$，代入点（16，0）的坐标可求出 b 的值，再利用配方法将二次函数表达式变形为顶点式，即可得出最终结论.

请开始你的表演



莱德基

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

考法 4 利用二次函数解决分段函数问题

例 8 [中考·辽阳] 随着人们生活水平的提高，短途旅行日趋火爆. 我市某旅行社推出“辽阳－葫芦岛海滨观光一日游”项目，团队人均报名费用 y（元）与团队报名人数 x 之间的函数关系如图 5.7-5 所示，旅行社规定团队人均报名费用不能低于 88 元. 旅行社收到的团队总报名费用为 w（元）.

（1）求当 $x \geqslant 20$ 时，y 与 x 之间的函数表达式及自变量 x 的取值范围；

（2）儿童节当天旅行社收到某个团队的总报名费为 3 000 元，报名旅游的人数是多少？

（3）当一个团队有多少人报名时，旅行社收到的总报名费最多？最多总报名费是多少元？

试题评析：本题考查了一次函数的应用与二次函数的应用，结合图象和题干信息求出 y 与 x 的函数表达式是解题的关键.

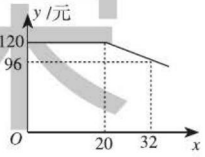


图 5.7-5

解：（1）设 $y=kx+b$，

把（20,120）和（32,96）代入得 $\begin{cases}20k+b=120,\\32k+b=96,\end{cases}$

解得 $\begin{cases}k=-2,\\b=160,\end{cases}$ $\therefore$ y 与 x 之间的函数表达式为 $y=-2x+160$.

$\because$ 旅行社规定团队人均报名费用不能低于 88 元，

当 $y \geqslant 88$ 时，$-2x+160 \geqslant 88$，$x \leqslant 36$，

$\therefore$ 自变量 x 的取值范围是 $20 \leqslant x \leqslant 36$，且 x 是正整数.

（2）$20 \times 120=2\,400 < 3\,000$，当 $x \geqslant 20$ 时，

由题意得 $w=xy=x(-2x+160)=3\,000$，

整理得，$-2x^2+160x-3\,000=0$. 解得 $x=50$ 或 $x=30$.

当 $x=50$ 时，$y=\dfrac{3\,000}{50}=60 < 88$，不符合题意，舍去.

当 $x=30$ 时，$y=\dfrac{3\,000}{30}=100 > 88$，符合题意.

答：报名旅游的人数是 30.

（3）当 $x \geqslant 20$ 时，$w=xy=x(-2x+160)=-2x^2+160x=-2(x^2-80x+1\,600-1\,600)=-2(x-40)^2+3\,200$，

$\because -2 < 0$，$\therefore$ 当 $x < 40$ 时，w 随 x 的增大而增大.

$\therefore$ 当 $x=36$ 时，w 有最大值为 $-2\times(36-40)^2+3\,200=3\,168$.

答：当一个团队有 36 人报名时，旅行社收到的总报名费最多，最多总报名费是 3 168 元.

解法提醒

(1) 直接利用待定系数法求出一次函数表达式即可，根据旅行社规定团队人均报名费用不能低于88元可得x的取值范围.

(2) 利用人均报名费用y×团队报名人数x=3 000，列方程解出x的值即可，并计算人均报名费用，由旅行社规定团队人均报名费用不能低于88元进行取舍.

(3) 配方成顶点式后，求出二次函数最值即可.

宋德基

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

1. [中考·临沂]从地面竖直向上抛出一小球，小球的高度 h（单位：m）与小球运动时间 t（单位：s）之间的函数关系如图所示. 下列结论：

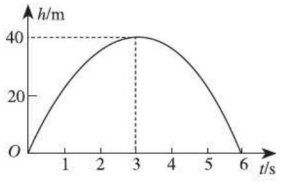
①小球在空中经过的路程是 40 m；

②小球抛出 3 s 后，速度越来越快；

③小球抛出 3 s 时速度为 0；

④小球的高度为 30 m 时，t=1.5.

其中正确的是（　　）

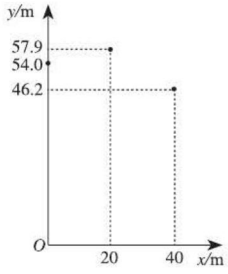


（第 1 题）

A. ①④　　B. ①②

C. ②③④　　D. ②③

2. [中考·北京]跳台滑雪是冬季奥运会比赛项目之一，运动员起跳后的飞行路线可以看成是抛物线的一部分，运动员起跳后的竖直高度 y（单位：m）与水平距离 x（单位：m）近似满足函数关系 $y=ax^2+bx+c$（$a\neq 0$）. 如图记录了某运动员起跳后的 x 与 y 的三组数据，根据上述函数模型和数据，可推断出该运动员起跳后飞行到最高点时，水平距离为（　　）

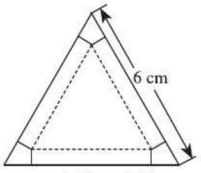


（第 2 题）

A. 10 m　　B. 15 m

C. 20 m　　D. 22.5 m

3. [中考·潍坊]如图，有一块边长为 6 cm 的等边三角形纸板，在它的三个角处分别截去一个彼此全等的箏形，再沿图中的虚线折起，做成一个无盖的直三棱柱纸盒，则该纸盒侧面积的最大值是（　　）



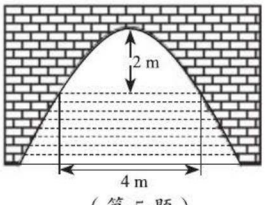
（第 3 题）

A. $\sqrt{3}$ cm²　　B. $\frac{3}{2}\sqrt{3}$ cm²

C. $\frac{9}{2}\sqrt{3}$ cm²　　D. $\frac{27}{2}\sqrt{3}$ cm²

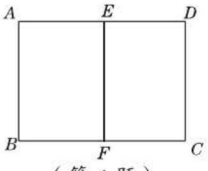
4. [中考·贺州]某种商品每件进价为 20 元，调查表明：在某段时间内若以每件 x 元（$20\leqslant x\leqslant 30$，且 x 为整数）出售，可卖出（$30-x$）件，若使利润最大，则每件商品的售价应为_____元.

5. [中考·绵阳]如图是抛物线形拱桥，当拱顶离水面 2 m 时，水面宽 4 m，水面下降 2 m，水面宽度增加_____ m.



（第 5 题）

6. [中考·沈阳]如图，一块矩形土地 $ABCD$ 由篱笆围着，并且被一条与 CD 边平行的篱笆 EF 分开. 已知篱笆的总长为 900 m（篱笆的厚度忽略不计），当 AB=_____ m 时，矩形土地 $ABCD$ 的面积最大.



（第 6 题）

荣德基

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

7. [中考·滨州] 如图，一小球沿与地面成一定角度的方向飞出，小球的飞行路线是一条抛物线. 如果不考虑空气阻力，小球的飞行高度 y（单位：m）与飞行时间 x（单位：s）之间具有函数关系 $y=-5x^2+20x$，请根据要求解答下列问题：

（1）在飞行过程中，当小球的飞行高度为 15 m 时，飞行时间是多少？

（2）在飞行过程中，小球从飞出到落地所用时间是多少？

（3）在飞行过程中，小球飞行高度何时最大？最大高度是多少？



（第 7 题）

8. [中考·潍坊] 扶贫工作小组对果农进行精准扶贫，帮助果农将一种有机生态水果拓宽了市场. 与去年相比，今年这种水果的产量增加了 1 000 千克，每千克的平均批发价比去年降低了 1 元，批发销售总额比去年增加了 20%.

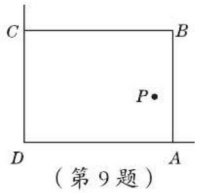
（1）已知去年这种水果批发销售总额为 10 万元，求这种水果今年每千克的平均批发价是多少元？

（2）在（1）的条件下，某水果店从果农处直接批发，专营这种水果. 调查发现，若每千克的平均销售价为 41 元，则每天可售出 300 千克；每千克的平均销售价每降低 3 元，每天可多卖出 180 千克，设水果店一天的利润为 w 元，当每千克的平均销售价为多少元时，该水果店一天的利润最大，最大利润是多少？（利润计算时，其他费用忽略不计）

9. [模拟·诸城] 在美化校园活动中，某兴趣小组借助如图所示的直角墙角（两边足够长），用 32 m 长的篱笆围成一个矩形花园 $ABCD$（篱笆只围 AB，BC 两边），设 $AB=x$ m.

（1）若花园的面积为 252 m^2，求 x 的值；

（2）若在 P 处有一棵树与墙 CD，AD 之间的距离分别是 17 m 和 6 m，要将这棵树围在花园内（含边界，不考虑树的粗细），求花园面积的最大值.

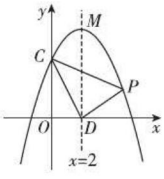


（第 9 题）

10. [模拟·山亭] 如图，抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 交 y 轴于点 C（0，4），对称轴直线 $x=2$ 与 x 轴交于点 D，顶点为 M，且 $DM=OC+OD$.

（1）求抛物线的表达式；

（2）设点 P（x，y）是第一象限内该抛物线上的一个动点，$\triangle PCD$ 的面积为 S，求 S 关于 x 的函数表达式，写出自变量 x 的取值范围，并求出当 x 为多少时，S 的值最大，这个最大值是多少？【导学号：8927116】



（第 10 题）

荣德基

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

综合与实践　实际问题与分段函数模型

点知识·拨考向 速提分

点知识▶分段函数

1. 分段函数　对于自变量的不同的取值范围，对应着不同的函数，这样的函数称为分段函数.

2. 分段函数的表达式

（1）分段函数的表达式一般用大括号括起来，把各个组成部分都呈现出来，如$y=\begin{cases}x, & x\geqslant 0,\\ -x, & x<0.\end{cases}$

（2）求分段函数表达式常用的方法是待定系数法.

3. 用分段函数解决实际问题

（1）利用分段函数解决问题，首先要分段建立函数模型，利用题中或图中的等量关系，求出各段的函数表达式，然后利用函数的图象和性质解答问题.

（2）一般步骤：审、设、列、解、验、答.

拨考向▶利用分段函数解决实际问题

题型1　利用函数图象求分段函数并解决实际问题

例1　甲、乙两个工程队共同开凿一条隧道，甲队按一定的工作效率先施工，5天后，乙队从隧道的另一端按一定的工作效率加入施工，中途乙队调离一部分工人去完成其他任务，工作效率降低.当隧道打通时，甲队工作了40天，设甲、乙两队各自开凿隧道的长度为y（米），甲队的工作时间为x（天），y与x之间的函数图象如图1所示.

（1）求甲队的工作效率；

（2）求乙队开凿隧道的长度y（米）与x（天）之间的函数表达式；

（3）求甲队开始施工几天后，甲、乙两队开凿隧道的长度相等.

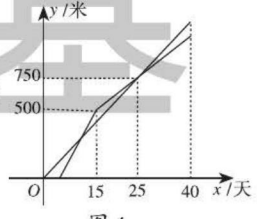


图1

解题秘方：（1）根据图象可得甲的工作效率.

（2）用待定系数法求出乙队开凿隧道的长度与时间之间的函数表达式.

（3）求出甲队的函数表达式，联立甲、乙两队的函数表达式求解即可.

解：（1）甲队的工作效率是$750\div 25=30$（米/天）.

（2）当$5\leqslant x\leqslant 15$时，设$y_{乙}=k_1x+b_1$，

提分·必记

易错警示

分段函数是一个函数，是由不同的几部分组成的.

要点解读

用分段函数解决实际问题的关键是分清函数是由几段不同的函数组成的.

提分·秘诀

方法点拨

求分段函数并解决实际问题，首先要找到分界点，分界点是分段函数两部分的公共部分；然后结合题目已知的条件（如本题中的“5天后”）和图象中的条件，利用待定系数法求出每段的函数表达式，再利用表达式求出其他问题（如本题中的交点问题）.

荣德基

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

则$\begin{cases}0=5k_1+b_1,\\500=15k_1+b_1.\end{cases}$解得$\begin{cases}k_1=50,\\b_1=-250,\end{cases}$

∴当 $5\leqslant x\leqslant 15$ 时，$y_{乙}=50x-250$.

同理，当 $15<x\leqslant 40$ 时，$y_{乙}=25x+125$.

综上所述，$y_{乙}=\begin{cases}50x-250,\ 5\leqslant x\leqslant 15,\\25x+125,\ 15<x\leqslant 40.\end{cases}$

（3）由（1）易知 $y_{甲}=30x$（$0\leqslant x\leqslant 40$）.

当 $5\leqslant x\leqslant 15$ 时，令 $50x-250=30x$，解得 $x=12.5$.

由图象知当 $x=25$ 时，$y_{甲}=y_{乙}$. ∴甲队开始施工 12.5 天或 25 天后，甲、乙两队开凿的长度相等.

题型 2　利用已知的分段函数解决实际问题

例 2　某企业接到生产一批手工艺品的订单，需连续工作 15 天完成，产品不能叠压，需专门存放，第 x 天每件产品成本 p（元）与时间 x（天）之间的关系为 $p=0.5x+7$（$1\leqslant x\leqslant 15$，x 为整数）. 约定交付产品时每件 20 元，李师傅做了记录，发现每天生产的手工艺品数量 y（件）与时间 x（天）满足关系 $y=\begin{cases}2x+20,\ 1\leqslant x<10,\\40,\ 10\leqslant x\leqslant 15.\end{cases}$

设李师傅第 x 天创造的利润为 W 元.

（1）写出李师傅第 x 天创造的利润 W（不累计）与 x 之间的函数表达式；

（2）李师傅第几天创造的利润最大，最大利润是多少元？

（3）这次订单每名员工平均每天创造的利润为 299 元，企业奖励办法是：员工某天创造利润超过平均值，当天可获得奖金 30 元，李师傅这次共获得奖金多少元？

解题秘方：（1）根据题意可以求得 W 与 x 之间的函数表达式，并注明自变量 x 的取值范围.（2）根据题意和题目中的函数表达式可以解答本题.（3）根据（2）中的结果和不等式的性质可以解答本题.

解：（1）当 $1\leqslant x<10$ 时，$W=[20-(0.5x+7)](2x+20)=-x^2+16x+260$，

当 $10\leqslant x\leqslant 15$ 时，$W=[20-(0.5x+7)]\times 40=-20x+520$，

即 $W=\begin{cases}-x^2+16x+260,\ 1\leqslant x<10,\\-20x+520,\ 10\leqslant x\leqslant 15.\end{cases}$

（2）当 $1\leqslant x<10$ 时，$W=-x^2+16x+260=-(x-8)^2+324$，

∴当 $x=8$ 时，W 取得最大值，此时 $W=324$；

当 $10\leqslant x\leqslant 15$ 时，$W=-20x+520$，

∴当 $x=10$ 时，W 取得最大值，此时 $W=320$，

∵ $324>320$，

∴李师傅第 8 天创造的利润最大，最大利润是 324 元.

易错警示

利用已知的分段函数求新的对应的分段函数时，注意新的分段函数要与利用的已知分段函数的自变量的取值范围保持一致.



关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

（3）当 $1 \leqslant x < 10$ 时，令 $-x^2+16x+260=299$，得 $x_1=3$，$x_2=13$，当 $W > 299$ 时，$3 < x < 13$. ∵ $1 \leqslant x < 10$，∴ $3 < x < 10$；

当 $10 \leqslant x \leqslant 15$ 时，令 $-20x+520 > 299$，得 $x < 11.05$，∴ $10 \leqslant x \leqslant 11$. 综上可得，李师傅获得奖金的时间段是第 4 天到第 11 天，则李师傅共获得奖金 $30 \times (11-4+1) = 240$（元）.

点方法·拨技巧 提高分

拔尖角度 1 利用分段函数解决动点问题

挑战·高分

例 3 如图 2，在矩形 $ABCD$ 中，$AB=8$ cm，$AD=10$ cm，$AE=6$ cm，点 P 从点 B 沿折线 $BE-ED-DC$ 运动到点 C 时停止；点 Q 从点 B 沿 BC 运动到点 C 时停止，速度均为每秒 1 个单位长度，如果点 P，Q 同时开始运动，设 $\triangle BPQ$ 的面积为 y cm^2，运动的时间为 t s，求当 $\triangle BPQ$ 的面积为 20 cm^2 时，动点 P 运动的时间.

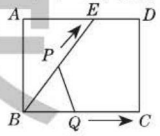


图 2

解题秘方：根据动点 P，Q 的运动状态分段求出 $\triangle BPQ$ 的面积 y 关于时间 t 的函数表达式，再代入 $y=20$ 求出 t 的值即可.

解：∵四边形 $ABCD$ 是矩形，∴ $BC=AD=10$ cm.

∵ $AE=6$ cm，$AB=8$ cm，∴ $BE=\sqrt{AB^2+AE^2}=10$ cm，$DE=4$ cm.

当点 P 在 BE 上运动，即 $0 < t \leqslant 10$ 时，$BP=BQ=t$ cm，

如图 3，过点 P 作 $PM \perp BC$ 于点 M，过点 E 作 $EF \perp BC$ 于点 F，

则 $EF=AB=8$ cm，$\triangle BPM \backsim \triangle BEF$. 易得 $PM=\frac{4}{5}t$ cm.

∴ $y=\frac{1}{2}BQ \cdot PM=\frac{2}{5}t^2\ (0 < t \leqslant 10)$.

当点 P 恰好运动到点 E 时，点 Q 运动到点 C 停止；当点 P 在 ED 上运动，即 $10 < t \leqslant 14$ 时，$y=\frac{1}{2}BC \cdot EF=40\ (10 < t \leqslant 14)$.

当点 P 在 DC 上运动，即 $14 < t \leqslant 22$ 时，$PC=(22-t)$ cm，

∴ $y=\frac{1}{2}BC \cdot PC=-5t+110\ (14 < t \leqslant 22)$.

综上所述，$y=\begin{cases}\frac{2}{5}t^2, & 0 < t \leqslant 10,\\ 40, & 10 < t \leqslant 14,\\ -5t+110, & 14 < t \leqslant 22.\end{cases}$

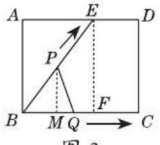


图 3

当 $y=20$ 时，令 $\frac{2}{5}t^2=20$，解得 $t=5\sqrt{2}$（负值舍去）.

令 $-5t+110=20$，解得 $t=18$. 综上所述，当 $\triangle BPQ$ 的面积为 20 cm^2 时，动点 P 运动的时间为 $5\sqrt{2}$ s 或 18 s.

技巧点拨

用分段函数解决动点问题，无论是单动点还是多动点，重点是抓住题目中的关键动点（本题中点 P 即为关键动点），再根据面积公式求出相应的函数表达式，进而解决问题.

易错警示

实际问题的时间不能取负值.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

拔尖角度▸ 2 利用分段函数解决追及问题

挑战·高分

例 4 甲、乙两车从 A 地出发，沿同一路线驶向 B 地，甲车先出发匀速驶向 B 地，40 min 后，乙车出发，匀速行驶一段时间后，在途中的货站装货耗时半小时，由于满载货物，为了行驶安全，速度减少了 50 km/h，结果与甲车同时到达 B 地．甲、乙两车距 A 地的路程 y（km）与乙车行驶的时间 x（h）之间的函数图象如图 4 所示．

（1）a 的值是_____，甲车的速度是_____km/h.

（2）求乙车距 A 地的路程 y 与 x 之间的函数表达式．

（3）若甲、乙两车距离不超过 10 km 时，可以使用车载通话机进行通话，则两车在行驶过程中可以通话的总时长为多少小时？

解题秘方：（1）由乙车在途中的货站装货半小时易知 a 的值，由路程除以时间得甲车的速度．（2）先求出乙车装货前的速度，再分段求出函数表达式．（3）求出线段 CF 的表达式，再根据题意列不等式解答．

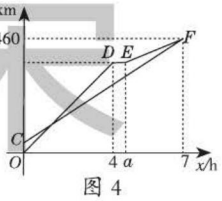


图 4

解：（1）4.5；60

（2）设乙车装货前速度为 v km/h，则 $4v+(7-4.5)(v-50)=460$，解得 $v=90$，$4v=360$，则 $D(4,360)$，$E(4.5,360)$，

∴线段 OD 的函数表达式为 $y=90x(0\leqslant x\leqslant 4)$，

设线段 EF 的函数表达式为 $y=kx+b$，

$$\begin{cases}4.5k+b=360,\\7k+b=460,\end{cases}\text{解得}\begin{cases}k=40,\\b=180,\end{cases}$$

∴线段 EF 的函数表达式为 $y=40x+180\ (4.5<x\leqslant 7)$．

综上所述，乙车距 A 地的路程 y 与 x 之间的函数表达式为

$$y=\begin{cases}90x,\ 0\leqslant x\leqslant 4,\\360,\ 4<x\leqslant 4.5,\\40x+180,\ 4.5<x\leqslant 7.\end{cases}$$

（3）易知 $C(0,40)$，设线段 CF 的函数表达式为 $y=mx+40\ (0\leqslant x\leqslant 7)$，根据题意得 $7m+40=460$，解得 $m=60$，∴线段 CF 的函数表达式为 $y=60x+40\ (0\leqslant x\leqslant 7)$．

∵甲、乙两车距离不超过 10 km 时，可以使用车载通话机进行通话，

$$\therefore\begin{cases}90x-(60x+40)\leqslant 10,\\60x+40-90x\leqslant 10,\end{cases}\text{解得}\ 1\leqslant x\leqslant\frac{5}{3},$$

$$\begin{cases}40x+180-(60x+40)\leqslant 10,\\x\leqslant 7,\end{cases}\text{解得}\ \frac{13}{2}\leqslant x\leqslant 7,$$

则两车在行驶过程中可以通话的总时长为 $\left(\frac{5}{3}-1\right)+\left(7-\frac{13}{2}\right)=\frac{7}{6}$（h）．

技巧点拨

利用分段函数解决追及问题，首先要结合图象分清整个过程中有几段，再结合题干中所给信息及图象中呈现的信息设法求出整个过程中的函数表达式，注意自变量的取值范围，最后根据分段函数表达式解决问题．



荣德基

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

点中考·拨模拟 得满分

中考探秘 利用分段函数解决实际问题，是中考的常考点，一般以解答题的形式出现，多与一次函数、二次函数相结合，有关反比例函数的考查较少，有时也会与几何面积问题相结合（此时多与动点、动线或动面问题相结合），难度中等.

三年中考兵法

考法 1 利用分段函数解决利润问题

冲刺·满分

例 5 [中考·荆门]随着龙虾节的火热举办，某龙虾养殖大户为了发挥技术优势，一次性收购了 10 000 kg 小龙虾，计划养殖一段时间后再出售. 已知每天养殖龙虾的成本相同，放养 10 天的总成本为 166 000 元，放养 30 天的总成本为 178 000 元. 设这批小龙虾放养 t 天后的质量为 a kg，销售价格为 y 元/kg，根据往年的行情预测，a 与 t 之间的函数表达式为 $a=\begin{cases}10\,000, & 0\leqslant t\leqslant 20,\\ 100t+8\,000, & 20<t\leqslant 50,\end{cases}$ y 与 t 之间的函数图象如图 5 所示.

(1) 设每天的养殖成本为 m 元，收购成本为 n 元，求 m 与 n 的值；

(2) 求 y 与 t 之间的函数表达式；

(3) 如果将这批小龙虾放养 t 天后，一次性出售所得利润为 W 元，问该龙虾养殖大户将这批小龙虾放养多少天后一次性出售所得利润最大？最大利润是多少？

（总成本 = 放养总费用 + 收购成本；利润 = 销售总额 − 总成本）

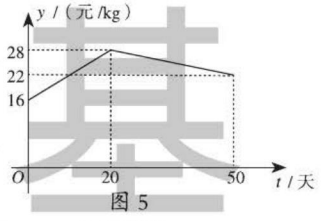


图 5

试题评析：本题考查了分段函数、一次函数、二次函数的实际应用，利用待定系数法求出函数表达式是解题的关键.

解：(1) 依题意得 $\begin{cases}10m+n=166\,000,\\ 30m+n=178\,000,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}m=600,\\ n=160\,000.\end{cases}$

(2) 当 $0\leqslant t\leqslant 20$ 时，设 $y=k_1t+b_1$，

由图象得 $\begin{cases}b_1=16,\\ 20k_1+b_1=28,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}k_1=\dfrac{3}{5},\\ b_1=16,\end{cases}$

$\therefore y=\dfrac{3}{5}t+16.$

当 $20<t\leqslant 50$ 时，设 $y=k_2t+b_2$，

解法提醒

(1) 根据题意列出方程组，求出方程组的解得到 m 和 n 的值.

(2) 根据图象分类讨论，利用待定系数法求出 y 与 t 之间的函数表达式.

(3) 根据提示可知 $W=ya-mt-n$，进而求出 W 关于 t 的函数表达式，再利用一次函数、二次函数的性质求解.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

由图象得$\begin{cases}20k_2+b_2=28,\\50k_2+b_2=22,\end{cases}$解得$\begin{cases}k_2=-\dfrac{1}{5},\\b_2=32,\end{cases}$ $\therefore y=-\dfrac{1}{5}t+32.$

综上，$y=\begin{cases}\dfrac{3}{5}t+16,\ 0\leqslant t\leqslant 20,\\-\dfrac{1}{5}t+32,\ 20<t\leqslant 50.\end{cases}$

（3）$W=ya-mt-n$，当$0\leqslant t\leqslant 20$时，

$W=10\,000\left(\dfrac{3}{5}t+16\right)-600t-160\,000=5\,400t.$

$\because 5\,400>0$，$\therefore$当$t=20$时，$W_{最大}=5\,400\times 20=108\,000.$

当$20<t\leqslant 50$时，

$W=\left(-\dfrac{1}{5}t+32\right)(100t+8\,000)-600t-160\,000=-20t^2+1\,000t+96\,000=-20(t-25)^2+108\,500.$

$\because -20<0$，$\therefore$抛物线开口向下，

$\therefore$当$t=25$时，$W_{最大}=108\,500.$

$\because 108\,500>108\,000,$

$\therefore$该龙虾养殖大户将这批小龙虾放养25天后一次性出售所得利润最大，最大利润是108 500元.



考法2 利用分段函数解决有关几何图形的面积问题

例6 [中考·大连]如图6①，在$\triangle ABC$中，$\angle C=90°$，点D在AC上，且$CD>DA$，$DA=2$，点P，Q同时从点D出发，以相同的速度分别沿射线DC、射线DA运动，过点Q作AC的垂线段QR，使$QR=PQ$，连接PR，当点Q到达点A时，点P，Q同时停止运动.设$PQ=x$，$\triangle PQR$与$\triangle ABC$重叠部分的面积为S，S关于x的函数图象如图6②所示（其中$0<x\leqslant\dfrac{8}{7}$，$\dfrac{8}{7}<x\leqslant m$时，函数的表达式不同）.

（1）填空：n的值为_____.

（2）求S关于x的函数表达式，并写出x的取值范围.

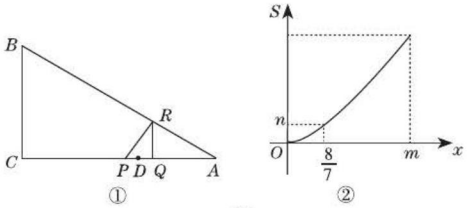


图6

解法提醒

- 当$x=\dfrac{8}{7}$时，$\triangle PQR$与$\triangle ABC$重叠部分的面积就是$\triangle PQR$的面积，然后根据$PQ=\dfrac{8}{7}$，$QR=PQ$，求出n的值.
- 先根据图象及运动状态求出m的值，再根据S关于x的函数图象，可得S关于x的函数表达式分为两段，分别为$0<x\leqslant\dfrac{8}{7}$和$\dfrac{8}{7}<x\leqslant m$对应的函数表达式，分别利用待定系数法求解即可.

荣德基

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

试题评析：本题考查了分段函数、动点函数图象问题的应用，根据图象分清动点的运动状态是解题的关键.

解：（1）$\frac{32}{49}$

（2）如图7，过点F作$FG\perp AC$于点G，R_1在AB上，根据S关于x的函数图象，可得S关于x的函数表达式有两种情况.

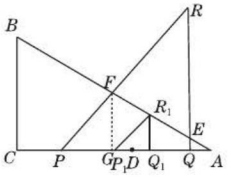


图7

当$0<x\leqslant\frac{8}{7}$时，

$S=\frac{1}{2}\times P_1Q_1\times R_1Q_1=\frac{1}{2}x^2$.

当点Q运动到点A时，$x=2AD=4$，$\therefore m=4$.

当$\frac{8}{7}<x\leqslant 4$时，

$AP=2+\frac{x}{2}$，$AQ=2-\frac{x}{2}$.

易知$\triangle AQE\backsim\triangle AQ_1R_1$，$\frac{AQ}{AQ_1}=\frac{QE}{Q_1R_1}$，

$\therefore QE=\frac{4}{5}\left(2-\frac{x}{2}\right)$. 设$FG=PG=a$，

$\because\triangle AGF\backsim\triangle AQ_1R_1$，$\frac{AG}{AQ_1}=\frac{FG}{Q_1R_1}$，$AG=2+\frac{x}{2}-a$，

$\therefore\frac{2+\frac{x}{2}-a}{\frac{10}{7}}=\frac{a}{\frac{8}{7}}$，$\therefore a=\frac{4}{9}\left(2+\frac{x}{2}\right)$.

$\therefore S=S_{\triangle APF}-S_{\triangle AQE}=\frac{1}{2}AP\cdot FG-\frac{1}{2}AQ\cdot EQ$

$=\frac{1}{2}\left(2+\frac{x}{2}\right)\cdot\frac{4}{9}\left(2+\frac{x}{2}\right)-\frac{1}{2}\left(2-\frac{x}{2}\right)\cdot\frac{4}{5}\left(2-\frac{x}{2}\right)$

$=-\frac{2}{45}x^2+\frac{56}{45}x-\frac{32}{45}$，

综上，$S=\begin{cases}\frac{1}{2}x^2, & 0<x\leqslant\frac{8}{7},\\ -\frac{2}{45}x^2+\frac{56}{45}x-\frac{32}{45}, & \frac{8}{7}<x\leqslant 4.\end{cases}$

方法点拨

分段函数问题一般需要根据题目给出的条件，找到临界状态，确定分类标准，针对自变量的取值分类讨论，求出对应的函数表达式.



荣德基

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

1. 某市出租车起步价为10元(即行驶距离在4千米以内付10元车费),刚好4千米或超过4千米后,每行驶1千米加3元(不足1千米按1千米计算).小张在该市乘出租车从甲地到乙地,支付车费28元,问从甲地到乙地的路程最少是(　　)

A. 11千米　　B. 10千米

C. 9千米　　D. 8千米

2. 如果对写文章、出版图书所获稿费的纳税计算方法是

$$y=\begin{cases}(x-800)\cdot 20\%\cdot(1-30\%), & x\leqslant 4\,000,\\ x(1-20\%)\cdot 20\%\cdot(1-30\%), & x>4\,000,\end{cases}$$

其中y表示稿费为x元应缴纳的税额,那么若小红的爸爸取得一笔稿费,缴纳个人所得税后,剩余6 216元,问这笔稿费共有(　　)

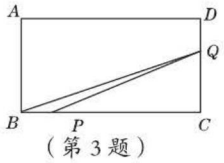
A. 7 000元

B. 7 200元

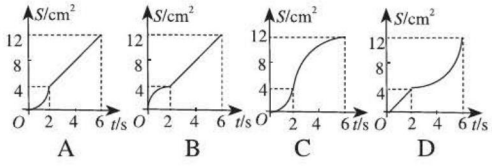
C. 7 500元

D. 8 000元

3. [中考·鄂州]如图,已知矩形$ABCD$中,$AB=4$ cm,$BC=8$ cm,动点P在边BC上从点B向C运动,速度为1 cm/s,同时动点Q从点C出发,沿折线$C\to D\to A$运动,速度为2cm/s,当一个点到达终点时,另一个点随之停止运动,设点P运动的时间为t(s),$\triangle BPQ$的面积为S(cm^2),则描述S(cm^2)与时间t(s)的函数关系的图象大致是(　　)



(第3题)

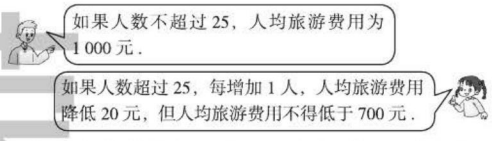


4. 为鼓励居民节约用水,某地实行阶梯水价,下表是该地居民自来水费的收费标准:

用水量x/吨	$0\leqslant x\leqslant 15$	$15<x\leqslant 30$	$x>30$
单价/(元/吨)	1.6	2	3

则该地的居民自来水费y(元)关于用水量x(吨)的函数表达式是_____.

5. 春秋旅行社为了吸引市民组团去黄山风景区旅游,推出了如下收费标准:



(1) 若某单位有18名员工去旅游,需支付给春秋旅行社旅游费用多少元?

(2) 若某单位有28名员工去旅游,需支付给春秋旅行社旅游费用多少元?

(3) 若某单位共支付给春秋旅行社旅游费用27 000元,请问该单位共有多少名员工去黄山风景区旅游?

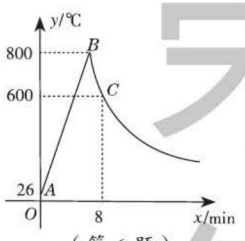
基础 德基

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

6. 工匠制作某种金属工具要进行材料煅烧和锻造两个工序，即需要将材料烧到800℃，然后停止煅烧进行锻造操作，第8 min时，材料温度降为600℃．煅烧时温度y(℃)与时间x(min)成一次函数关系；锻造时，温度y(℃)与时间x(min)成反比例函数关系(如图)，已知该材料初始温度是26℃．

(1) 求出温度y(℃)关于时间x(min)的函数表达式；

(2) 当材料温度高于400℃时，大概能维持多长时间？



(第6题)

7. [中考·襄阳]襄阳市精准扶贫工作已进入攻坚阶段，贫困户张大爷在某单位的帮扶下，把一片坡地改造后种植了优质水果蓝莓，今年正式上市销售，在销售的30天中，第一天卖出20千克．张大爷为了扩大销量，采取了降价措施，以后每天比前一天多卖出4千克，第x天的售价为y元/千克，y关于x的函数表达式为

$$y=\begin{cases} mx-76m\ (1\leqslant x<20,\ x\text{为正整数}),\\ n\ (20\leqslant x\leqslant 30,\ x\text{为正整数}),\end{cases}$$

且第12天的售价为32元/千克，第26天的售价为25元/千克，已知种植销售蓝莓的成本是18元/千克，每天的利润是W元(利润=销售收入−成本)．

(1) $m=$_____，$n=$_____；

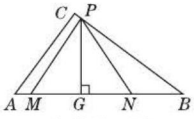
(2) 求销售蓝莓第几天时，当天的利润最大？最大利润是多少？

(3) 在销售蓝莓的30天中，当天利润不低于870元的共有多少天？

8. [中考·淮安]如图，在Rt△ABC中，$\angle ACB=90^\circ$，$AC=6$，$BC=8$，动点M从点A出发，以每秒1个单位长度的速度沿AB向点B匀速运动；同时，动点N从点B出发，以每秒3个单位长度的速度沿BA向点A匀速运动．过线段MN的中点G作边AB的垂线，垂足为点G，交△ABC的另一边于点P，连接PM，PN．当点N运动到点A时，M，N两点同时停止运动．设运动时间为t秒．

(1) 当t取什么值时，动点M，N相遇？

(2) 设△PMN的面积为S，求S与t之间的函数表达式．



(第8题)

荣德基

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

对称轴在二次函数中的巧妙应用

荣老师告诉你 二次函数的图象——抛物线是一个轴对称图形，对称轴是过顶点且垂直于 x 轴的一条直线．由一般式 $y=ax^2+bx+c$ 可得对称轴为直线 $x=-\frac{b}{2a}$；由顶点式 $y=a(x-h)^2+k$ 可知对称轴为直线 $x=h$；由交点式 $y=a(x-x_1)(x-x_2)$ 可知对称轴为直线 $x=\frac{x_1+x_2}{2}$；若知抛物线上纵坐标相同的两个点 (m, a)，(n, a)，则对称轴为直线 $x=\frac{m+n}{2}$．

技巧一 利用对称轴求抛物线与 x 轴或平行于 x 轴的直线的交点坐标

例 1 [中考·恩施州] 抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 的对称轴为直线 $x=-1$，部分图象如图 5-1 所示，下列判断：

① $abc>0$；② $b^2-4ac>0$；

③ $9a-3b+c=0$；④若点 $(-0.5, y_1)$，$(-2, y_2)$ 均在抛物线上，则 $y_1>y_2$；

⑤ $5a-2b+c<0$．其中正确的个数是（　　）

A. 2　　B. 3　　C. 4　　D. 5

解题秘方：先根据抛物线的对称性得到另一个交点，再由交点个数得到 b^2-4ac 的符号，根据抛物线的对称性比较纵坐标的大小，根据抛物线的开口方向、对称轴的位置、抛物线与 x 轴的交点坐标，判别 a，b，c 的符号．

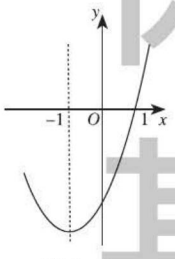


图 5-1

解：∵抛物线对称轴为直线 $x=-1$，经过 $(1, 0)$，

∴ $-\frac{b}{2a}=-1$，$a+b+c=0$，

∴ $b=2a$，$c=-3a$．

∵抛物线开口向上，∴ $a>0$，∴ $b>0$，$c<0$，

∴ $abc<0$，故①错误．

∵抛物线与 x 轴有 2 个交点，

∴ $b^2-4ac>0$，故②正确．

∵抛物线与 x 轴交于 $(-3, 0)$，

∴ $9a-3b+c=0$，故③正确．

∵点 $(-0.5, y_1)$，$(-2, y_2)$ 均在抛物线上，$x=-0.5$ 与 $x=-1.5$ 关于直线 $x=-1$ 对称，且 $-1.5<-2$，则 $y_1<y_2$，故④错误．

∵ $5a-2b+c=5a-4a-3a=-2a<0$，

故⑤正确．

答案：B

例 2 [中考·宿迁] 当 $x=m$ 或 $x=n$（$m\neq n$）时，代数式 x^2-2x+3 的值相等，则 $x=m+n$ 时，代数式 x^2-2x+3 的值为_____．

解题秘方：由代数式 x^2-2x+3 联想到二次函数，代数式的值相等，转化为函数语言就是当 $x=m$ 或 $x=n$（$m\neq n$）时，函数 $y=x^2-2x+3$ 的函数值相等．根据二次函数的对称性可以列出关于 m，n 的等式，进而求出 $m+n$ 的值，进而获得答案．

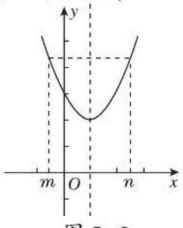


图 5-2

解：如图 5-2，将代数式 x^2-2x+3 的值看成关于 x 的二次函数 $y=x^2-2x+3$ 的函数值．此抛物线的对称轴为直线 $x=1$，同时对称轴又可以表示为直线 $x=\frac{m+n}{2}$，所以 $m+n=2$，将 $x=2$ 代入 x^2-2x+3 计算得到的结果为 3.

答案：3

方法点拨：数形结合思想是解决二次函数图象问题的基本数学思想，在解题时应关注抛物线顶点、与坐标轴（x 轴、y 轴）的交点、与 x 轴的位置关系、象限分布、增减性等关键元素，最关键的是要充分利用对称轴．

荣德基

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

技巧二 利用对称轴比较函数值的大小

例3 已知点$A(-2, a)$，$B(-1, b)$，$C(3, c)$均在抛物线$y=-2(x+1)^2+3$上，则a，b，c的大小关系为（　　）

A. $a<c<b$　　B. $b<a<c$

C. $c<a<b$　　D. $a<b<c$

解题秘方：方法一　将$x=-2$，-1，3分别代入表达式中，求出a，b，c的值并进行比较；方法二　根据二次函数的性质得到抛物线$y=-2(x+1)^2+3$的开口向下，对称轴为直线$x=-1$，然后根据三个点离对称轴的远近判断a，b，c的大小；方法三　通过对称轴将对称轴异侧的点转化到对称轴同侧，再根据增减性比较大小.

解：方法一　把$x=-2$，-1，3分别代入$y=-2(x+1)^2+3$中，得$a=1$，$b=3$，$c=-29$.

$\because -29<1<3$，$\therefore c<a<b$.

方法二　$\because$抛物线$y=-2(x+1)^2+3$的开口向下，对称轴为直线$x=-1$，

而$B(-1, b)$在直线$x=-1$上，$C(3, c)$离直线$x=-1$最远，$A(-2, a)$离直线$x=-1$的距离较近，

$\therefore c<a<b$.

方法三　$\because y=-2(x+1)^2+3$，

$\therefore$抛物线开口向下，对称轴为直线$x=-1$，

$\therefore$当$x\geqslant -1$时，y随x的增大而减小，点$A(-2, a)$关于直线$x=-1$的对称点是$(0, a)$.

$\because -1<0<3$，$\therefore c<a<b$.

答案：C

方法点拨：抛物线上点的纵坐标比较大小的基本方法（1）能求出函数值的，直接代入求出函数值比较大小.（2）利用抛物线上的对称点的纵坐标相等，把各点转化到对称轴的同侧，再利用二次函数的增减性进行比较.（3）利用“开口向上，抛物线上的点距离对称轴越近，点的纵坐标越小；开口向下，抛物线上的点距离对称轴越近，点的纵坐标越大”比较大小.

技巧三 利用对称轴确定函数的最值

例4 [中考·天津]已知二次函数$y=(x-h)^2+1$（h为常数），在自变量x的值满足$1\leqslant x\leqslant 3$的情况下，与其对应的函数值y的最小值为5，则h的值为（　　）

A. 1或-5

B. -1或5

C. 1或-3

D. 1或3

解题秘方：先分析出x取何值时y取最小值，此时对称轴在哪个位置，再按照对称轴的位置分类讨论.分如下两种情况：①若$1\leqslant x\leqslant 3<h$，当$x=3$时，$y$取得最小值5；②若$h<1\leqslant x\leqslant 3$，当$x=1$时，$y$取得最小值5，分别列出关于$h$的方程求解即可.

解：根据题意知，当$x=h$时，y不是最小值，

即h不在$1\leqslant x\leqslant 3$范围内.

由抛物线开口向上知，

当$x>h$时，y随x的增大而增大，

当$x<h$时，y随x的增大而减小，

$\therefore$若$h<1\leqslant x\leqslant 3$，

则当$x=1$时，

y取得最小值5，于是有$(1-h)^2+1=5$，

解得$h=-1$或$h=3$（舍）；

若$1\leqslant x\leqslant 3<h$，

则当$x=3$时，y取得最小值5，

于是有$(3-h)^2+1=5$，

解得$h=5$或$h=1$（舍）.

综上，h的值为-1或5，

故选B.

答案：B

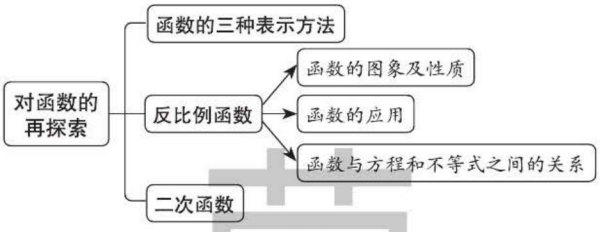
方法点拨：乍一看本题以为出错了，最小值不是1吗？仔细分析一下本题会发现函数值y的最小值为5时是在自变量x的某一范围内，本题就是用这一函数最小值去确定自变量x的值，进而确定h的值.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

章末核心知识分类整合

核心结构专题

结构必知



核心必读

1. 函数的三种表示方法：图象法、列表法、解析法.

2. 反比例函数的三种表达形式

（1）$y=\frac{k}{x}$（k 为常数，$k\neq 0$）.

（2）$y=kx^{-1}$（k 为常数，$k\neq 0$）.

（3）$xy=k$（k 为常数，$k\neq 0$）.

3. 反比例函数的图象是双曲线，关于原点对称，讨论反比例函数的增减性应指明在某一象限内的增减性.

4. 双曲线 $y=\frac{k}{x}$ 中 k 的几何性质　设 P 是双曲线 $y=\frac{k}{x}$ 上任意一点，过 P 向 x 轴、y 轴作垂线，垂足分别为 H，G，连接 PO（O 为坐标原点），则 $S_{\triangle POH}=\frac{|k|}{2}$，$S_{矩形PHOG}=|k|$.

5. 二次函数的表达式的几种形式

① $y=ax^2$；② $y=ax^2+bx$；③ $y=ax^2+c$；④ $y=ax^2+bx+c$；⑤ $y=a(x-h)^2$；⑥ $y=a(x-h)^2+k$；⑦ $y=a(x-x_1)(x-x_2)$.

6. 抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 的对称轴是直线 $x=-\frac{b}{2a}$，顶点坐标是 $\left(-\frac{b}{2a},\frac{4ac-b^2}{4a}\right)$.

7. 抛物线 $y=ax^2+bx+c$，当 $a>0$ 时，开口向上，在对称轴的左侧，y 随 x 的增大而减小，在对称轴的右侧，y 随 x 的增大而增大，当 $x=-\frac{b}{2a}$ 时，y 有最小值 $\frac{4ac-b^2}{4a}$；当 $a<0$ 时，开口向下，在对称轴的左侧，y 随 x 的增大而增大，在对称轴的右侧，y 随 x 的增大而减小，当 $x=-\frac{b}{2a}$ 时，y 有最大值 $\frac{4ac-b^2}{4a}$.

8. 抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 与 x 轴的交点个数与一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 的根的情况有关，该一元二次方程的根就是抛物线与 x 轴交点的横坐标.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

知识方法专题

知识必学

专题一 反比例函数的图象和性质

链接中考» 反比例函数的性质主要有两点：一是函数图象的对称性，函数图象关于原点成中心对称；二是增减性，同一函数在不同象限内的增减性一致．主要考查方向是根据函数的增减性比较多个函数值的大小、根据表达式判别性质等，一般以填空题、选择题为主．

例1 [中考·衡阳]对于反比例函数 $y=-\frac{2}{x}$，下列说法不正确的是（　　）

A. 图象分布在第二、四象限

B. 当 $x>0$ 时，y 随 x 的增大而增大

C. 图象经过点（1，−2）

D. 若点 $A(x_1, y_1)$，$B(x_2, y_2)$ 都在图象上，且 $x_1<x_2$，则 $y_1<y_2$

解题秘方：根据 $k=-2$，画出反比例函数的简图，结合图象逐项判断．

解：A. $k=-2<0$，∴它的图象在第二、四象限，故本选项正确；

B. $k=-2<0$，当 $x>0$ 时，y 随 x 的增大而增大，故本选项正确；

C. ∵ $-\frac{2}{1}=-2$，∴点(1，−2)在它的图象上，故本选项正确；

D. 点 $A(x_1, y_1)$，$B(x_2, y_2)$ 都在反比例函数 $y=-\frac{2}{x}$ 的图象上，若 $x_1<0<x_2$，则 $y_1>y_2$，故本选项错误．

答案：D

方法点拨：当 $k>0$ 时，反比例函数的图象在第一、三象限，在各象限内，y 随 x 的增大而减小；当 $k<0$ 时，图象在第二、四象限，在各象限内，y 随 x 的增大而增大；判断一点是否在函数图象上，直接代入验证即可；根据增减性判断大小时，要先判断点是否在同一象限内的图象上，若在，直接根据增减性判断；若不在，再分析不同象限对应的值的大小．

专题二 反比例函数系数 k 的几何意义

链接中考» 反比例函数系数 k 的几何意义指的是从函数图象上的任意一点向坐标轴作垂线，垂线与两坐标轴围成的图形的面积是 $|k|$．此类问题常体现在反比例函数与几何问题的综合中，有时是求几何图形的面积，有时根据几何图形的面积求系数 k 的值，一般以选择题或填空题的形式出现，解答题也偶有涉及，难度中等．

例2 [中考·烟台]如图5−3，反比例函数 $y=\frac{k}{x}$ 的图象经过 $\square ABCD$ 对角线的交点 P，已知点 A，C，D 在坐标轴上，$BD\perp DC$，$\square ABCD$ 的面积为6，则 $k=$_____．

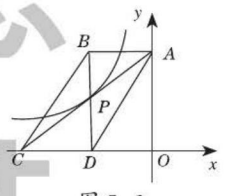


图 5−3

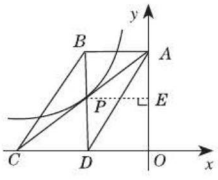


图 5−4

解：易知四边形 $ABDO$ 为矩形，且其面积与平行四边形 $ABCD$ 的面积相等，为6．

如图5−4，过点 P 作 $PE\perp y$ 轴于点 E，

易知四边形 $PDOE$ 为矩形，

且其面积等于矩形 $ABDO$ 面积的一半，

为 $6\div 2=3$，

∴ $DO\cdot EO=3$．

设 P 点坐标为 (x,y)，

则 $k=xy=-3$．

答案：−3

宋德基

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

专题三 反比例函数与一次函数的综合

链接中考》 解答反比例函数与一次函数结合在一起的综合题时，要按据题目中的条件，并结合图象找出图象中的关键点求出函数的表达式，然后再根据函数的性质解答问题．常见的命题方式有：求反比例函数、一次函数的表达式；求反比例函数与一次函数组成不等式的解集；求反比例函数与一次函数、坐标轴围成的三角形面积．一般以解答题的形式出现，难度中等．

例3 [中考·枣庄]如图5-5，一次函数 $y=kx+b$（k,b 为常数，$k\neq 0$）的图象与 x 轴、y 轴分别交于 A，B 两点，且与反比例函数 $y=\frac{n}{x}$（n 为常数，且 $n\neq 0$）的图象在第二象限交于点 C．$CD\perp x$ 轴，垂足为 D，若 $OB=2OA=3OD=12$．

（1）求一次函数与反比例函数的表达式．

（2）记两函数图象的另一个交点为 E，求 $\triangle CDE$ 的面积．

（3）直接写出不等式 $kx+b\leqslant\frac{n}{x}$ 的解集．

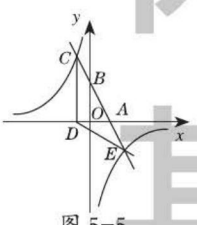


图5-5

解题秘方：（1）根据三角形相似，求出点 C 的坐标，可得反比例函数表达式．根据 OA，OB 的长度，求出点 A，B 的坐标，可得一次函数表达式．（2）联立表达式，求交点坐标，进而求得面积．（3）根据数形结合，将不等式转化为一次函数和反比例函数图象关系．

解：（1）易知 $OA=6$，$OB=12$，$OD=4$，

$\therefore AD=10$．$\because CD\perp x$ 轴，

$\therefore OB\parallel CD$，$\therefore\triangle ABO\backsim\triangle ACD$，

$\therefore\frac{OA}{AD}=\frac{OB}{CD}$，$\therefore\frac{6}{10}=\frac{12}{CD}$，

$\therefore CD=20$，$\therefore$ 点 C 的坐标为 $(-4,20)$．

把 $(-4,20)$ 代入反比例函数表达式 $y=\frac{n}{x}$，得 $n=xy=-80$．

$\therefore$ 反比例函数表达式为 $y=-\frac{80}{x}$．

把 $(6,0)$，$(0,12)$ 代入 $y=kx+b$，

得 $\begin{cases}0=6k+b,\\ b=12.\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}k=-2,\\ b=12.\end{cases}$

$\therefore$ 一次函数表达式为 $y=-2x+12$．

（2）令 $-\frac{80}{x}=-2x+12$，解得 $x_1=10$，$x_2=-4$．当 $x=10$ 时，$y=-8$．$\therefore$ 点 E 的坐标为 $(10,-8)$．$\therefore S_{\triangle CDE}=S_{\triangle CDA}+S_{\triangle EDA}=\frac{1}{2}\times 20\times 10+\frac{1}{2}\times 8\times 10=140$．

（3）从函数图象上看，不等式 $kx+b\leqslant\frac{n}{x}$ 表示一次函数 $y=kx+b$ 的图象在反比例函数 $y=\frac{n}{x}$ 的图象的下方，

$\therefore$ 由图象得不等式 $kx+b\leqslant\frac{n}{x}$ 的解集为 $x\geqslant 10$ 或 $-4\leqslant x<0$．

方法点拨：（1）求函数表达式一般采用待定系数法．用待定系数法解题，首先要设出待定系数，再根据题目中的已知条件求出待定系数．对于反比例函数而言，因为只有一个待定系数，所以只要将一个点的坐标代入函数表达式，就可以求出待定系数；若是一次函数，则一般需要两个独立的条件；若是二次函数，则一般需要三个独立的条件．（2）不能直接求三角形的面积时，常常通过坐标轴把三角形分为几个小三角形，通过求各个小三角形的面积求出所求三角形的面积．

专题四 反比例函数的应用

链接中考》 用反比例函数刻画实际问题中两个变量之间的关系以及用反比例函数的性质反映实际问题中变量之间的关系，并且解决实际问题是中考命题的重点和热点．解决这类问题，一是要表示出函数表达式，二是要注意自变量的取值范围．

未经授权

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

例 4 [中考·衡阳] 某药品研究所开发一种抗菌新药，经多年动物实验，首次用于临床人体实验. 测得成人服药后血液中药物浓度 y（微克/毫升）与服药时间 x（小时）之间的函数关系如图 5-6 所示（当 $4 \leqslant x \leqslant 10$ 时，y 与 x 成反比例）.

（1）根据图象，分别求出血液中药物浓度上升和下降阶段 y 与 x 之间的函数表达式.

（2）问血液中药物浓度不低于 4 微克/毫升的持续时间为多少小时?

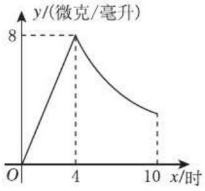


图 5-6

解：（1）由图象可知，当 $0 \leqslant x < 4$ 时，y 与 x 成正比例关系，设 $y=kx$.

由图象可知，当 $x=4$ 时，$y=8$，

$\therefore 4k=8$. 解得 $k=2$.

$\therefore y=2x\ (0 \leqslant x < 4)$.

又由题意可知，当 $4 \leqslant x \leqslant 10$ 时，y 与 x 成反比例关系，设 $y=\dfrac{m}{x}$.

由图象可知，当 $x=4$ 时，$y=8$，

$\therefore m=4\times 8=32$. $\therefore y=\dfrac{32}{x}\ (4 \leqslant x \leqslant 10)$.

$\therefore$ 血液中药物浓度上升时，

$y=2x\ (0 \leqslant x < 4)$；

血液中药物浓度下降时，

$y=\dfrac{32}{x}\ (4 \leqslant x \leqslant 10)$.

（2）血液中药物浓度不低于 4 微克/毫升，

即 $y \geqslant 4$，$\therefore 2x \geqslant 4$，且 $\dfrac{32}{x} \geqslant 4$.

解得 $x \geqslant 2$，且 $x \leqslant 8$.

$\therefore 2 \leqslant x \leqslant 8$，即持续时间为 6 小时.

方法点拨：与函数相关的问题，往往涉及待定系数法、交点坐标以及面积问题等. 在解决此类问题时，有以下几点需要注意：（1）对于特殊的点，如两个函数图象的交点、函数图象与坐标轴的交点等，通常需要先求出其坐标.（2）对于反比例函数与一次函数相关的问题，通常的做法是先求反比例函数的表达式，然后利用其表达式求出特殊点的坐标.

专题五 利用二次函数的图象判别系数代数式

链接中考» 利用二次函数的图象判别系数代数式是中考的常考点、热点和难点. 解决这类问题首先要仔细观察图象，找出对称轴、特殊点等，结合增减性、对称性等性质对各个代数式进行细致判别. 常作为选择题或填空题的压轴题出现.

例 5 [中考·滨州] 如图 5-7，若二次函数 $y=ax^2+bx+c\ (a \neq 0)$ 图象的对称轴为直线 $x=1$，与 y 轴交于点 C，与 x 轴交于点 A、点 $B\ (-1, 0)$，则①二次函数的最大值为 $a+b+c$；② $a-b+c<0$；③ $b^2-4ac<0$；④当 $y>0$ 时，$-1<x<3$. 其中正确的个数是（　　）

A. 1　　B. 2

C. 3　　D. 4

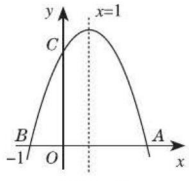


图 5-7

解题秘方：利用二次函数图象的开口方向及与 x 轴的交点分析得出答案.

解：①$\because$ 二次函数 $y=ax^2+bx+c\ (a \neq 0)$ 图象的对称轴为直线 $x=1$，且开口向下，$\therefore$ 当 $x=1$ 时，二次函数取得最大值，为 $a+b+c$，故①正确；②当 $x=-1$ 时，$a-b+c=0$，故②错误；③图象与 x 轴有 2 个交点，故 $b^2-4ac>0$，故③错误；④$\because$ 图象的对称轴为直线 $x=1$，与 x 轴交于点 A、点 $B\ (-1,0)$，

$\therefore A\ (3,0)$，

故当 $y>0$ 时，$-1<x<3$，故④正确.

答案：B

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

专题六 二次函数图象的性质

链接中考» 二次函数图象的性质主要有两条：一是轴对称性，二次函数的图象关于对称轴对称；二是增减性，在对称轴的同侧具有相同的增减性，当开口向上时，在对称轴的左侧，y随x的增大而减小，在对称轴的右侧，y随x的增大而增大；当开口向下时，在对称轴的左侧，y随x的增大而增大，在对称轴的右侧，y随x的增大而减小．两个性质有时会同时考查，一般以填空、选择题形式出现．

例6 [中考·常州]已知二次函数$y=x^2+(m-1)x+1$，当$x>1$时，y随x的增大而增大，则m的取值范围是（　　）

A. $m=-1$　　B. $m=3$

C. $m\leqslant -1$　　D. $m\geqslant -1$

解：由二次项系数为正，可知抛物线开口向上，在对称轴右侧，y随x的增大而增大，可得对称轴应为直线$x=1$或在其左侧．

由于抛物线的对称轴为直线$x=-\dfrac{m-1}{2}$，所以$-\dfrac{m-1}{2}\leqslant 1$，解得$m\geqslant -1$.

答案：D

专题七 求二次函数的表达式

链接中考» 二次函数的表达式是两个变量之间的关系式，所以求二次函数的表达式的方法有两种：一种是直接根据两个变量之间的等量关系列出函数表达式；另一种是用待定系数法先设出函数表达式，然后根据函数图象上点的坐标或几对对应值求出函数表达式．考查的形式多样，填空题、选择题和解答题都会考查．

例7 [中考·龙东]如图5-8，抛物线$y=x^2-bx+c$交x轴于点$A(1,0)$、点C，交y轴于点B，对称轴是直线$x=2$.

(1) 求抛物线的表达式．

(2) 点P是抛物线对称轴上的一个动点，是否存在点P，使$\triangle PAB$的周长最小？若存在，求出点P的坐标；若不存在，请说明理由．

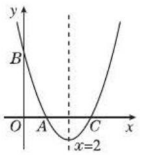


图5-8

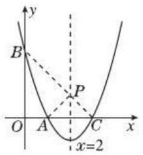


图5-9

解：(1) 由题意得$\begin{cases}1-b+c=0,\\ \dfrac{b}{2}=2,\end{cases}$　解得$\begin{cases}b=4,\\ c=3.\end{cases}$

∴抛物线的表达式为$y=x^2-4x+3$.

(2) 存在．

∵点A与点C关于直线$x=2$对称，

∴连接BC与直线$x=2$交于点P，点P即为所求，如图5-9所示，连接PA.

根据抛物线的对称性可知，点C的坐标为$(3,0)$．易知抛物线$y=x^2-4x+3$与y轴的交点为$B(0,3)$．

设直线BC的表达式为$y=kx+b_1$，则

$\begin{cases}3k+b_1=0,\\ b_1=3,\end{cases}$　解得$\begin{cases}k=-1,\\ b_1=3,\end{cases}$

∴直线BC的表达式为$y=-x+3$，

当$x=2$时，$y=-2+3=1$.

∴点P的坐标为$(2,1)$．

方法点拨：求有函数图象的函数表达式，一般都是采用待定系数法，根据函数图象提供的信息求出函数表达式．

专题八 二次函数与一元二次方程或不等式的关系

链接中考» 二次函数与一元二次方程的关系，关键就是看函数图象与x轴的交点坐标；解决函数值大于零或小于零的问题，就是看函数图象在x轴上方或下方的问题，主要以解答题的形式出现．

例8 如图5-10，抛物线$y=ax^2+c$与直线$y=3$相交于点A，B，与y轴相交于点$C(0,-1)$，其中点A的横坐标为-4.

(1) 计算a，c的值．

荣德基

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

（2）求出抛物线 $y=ax^2+c$ 与 x 轴的交点坐标.

（3）当 $y<0$ 时，利用抛物线直接写出 x 的取值范围.

解题秘方：（1）根据题意和抛物线过点 A 和点 C 可以求得 a，c 的值.（2）根据（1）中 a，c 的值可以得到抛物线的表达式，然后令函数值为 0，求出 x 的值，即可求得抛物线 $y=ax^2+c$ 与 x 轴的交点坐标.（3）$y<0$ 对应的抛物线在 x 轴的下方，观察抛物线，结合第（2）问直接写出 x 的取值范围.

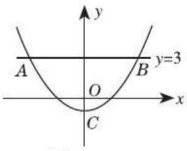


图 5-10

解：（1）∵抛物线 $y=ax^2+c$ 过点 $A(-4,3)$，点 $C(0,-1)$，

$$\therefore \begin{cases} 16a+c=3, \\ c=-1, \end{cases} \text{解得} \begin{cases} a=\dfrac{1}{4}, \\ c=-1, \end{cases}$$

即 a 的值为 $\frac{1}{4}$，c 的值为 -1.

（2）∵ a 的值为 $\frac{1}{4}$，c 的值为 -1，

$\therefore y=\frac{1}{4}x^2-1$，

当 $y=0$ 时，$0=\frac{1}{4}x^2-1$，

解得 $x_1=-2$，$x_2=2$，

即抛物线 $y=ax^2+c$ 与 x 轴的交点坐标为 $(-2,0)$，$(2,0)$.

（3）当 $y<0$ 时，抛物线在 x 轴的下方，由（2）知，此时 x 的取值范围是 $-2<x<2$.

方法点拨：求抛物线与 x 轴的交点坐标就是令 $y=0$，将二次函数转化为一元二次方程，求出的方程的解即为交点的横坐标. 求函数值小于 0 或大于 0 的部分对应的自变量的取值范围，即在 x 轴下方或上方的抛物线对应的自变量的取值范围.

专题九 二次函数的应用

链接中考» 二次函数的应用主要有两种形式，第一种是在实际问题中建立二次函数模型，利用二次函数的性质求解；第二种是二次函数的其他综合应用. 考查的形式多以解答题的形式出现.

题型 1 二次函数的实际应用

例 9 [中考·福建]如图 5-11，在足够大的空地上有一段长为 a m 的旧墙 MN，某人利用旧墙和木栏围成一个矩形菜园 $ABCD$，其中 $AD\leqslant MN$，已知矩形菜园的一边靠墙，另三边一共用了 100 m 木栏.

（1）若 $a=20$，所围成的矩形菜园的面积为 450 m^2，求所利用旧墙 AD 的长.

（2）求矩形菜园 $ABCD$ 面积的最大值.

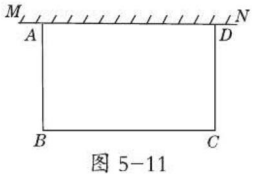


图 5-11

解题秘方：（1）设 $AB=x$ m，则 $BC=(100-2x)$ m，利用矩形的面积公式得到 $x(100-2x)=450$，解方程得 $x_1=5$，$x_2=45$，然后计算 $100-2x$ 的值与 20 进行大小比较，进而得到 AD 的长.（2）设 $AD=b$ m，利用矩形面积公式得到矩形菜园 $ABCD$ 的面积 S 与 b 的函数表达式，利用二次函数的性质求解即可.

解：（1）设 $AB=x$ m，则 $BC=(100-2x)$ m，根据题意得 $x(100-2x)=450$，解得 $x_1=5$，$x_2=45$，

当 $x=5$ 时，$100-2x=90>20$，不合题意，舍去；当 $x=45$ 时，$100-2x=10<20$，故 AD 的长为 10 m.

（2）设 $AD=b$ m，则 $0<b\leqslant a$，∴矩形菜园 $ABCD$ 的面积 $S=\frac{1}{2}b(100-b)=-\frac{1}{2}(b-50)^2+1\,250$，

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

当 $a \geqslant 50$ 时，则当 $b=50$ 时，S 有最大值为 1 250；

当 $0<a<50$ 时，则当 $0<b \leqslant a$ 时，S 随 x 的增大而增大，故当 $b=a$ 时，S 有最大值为 $50a-\frac{1}{2}a^2$. ∴当 $a \geqslant 50$ 时，矩形菜园 $ABCD$ 面积的最大值为 1 250 m^2；

当 $0<a<50$ 时，矩形菜园 $ABCD$ 面积的最大值为 $\left(50a-\frac{1}{2}a^2\right)m^2$.

题型 2　二次函数与几何的综合应用

例 10 ［中考·临沂］如图 5-12，在平面直角坐标系中，$\angle ACB=90°$，$OC=2OB$，$\tan\angle ABC=2$，点 B 的坐标为（1，0）. 抛物线 $y=-x^2+bx+c$ 经过 A，B 两点.

（1）求抛物线的表达式；

（2）点 P 是直线 AB 上方抛物线上的一点，过点 P 作 $PD \perp x$ 轴于点 D，交线段 AB 于点 E，使 $PE=\frac{1}{2}DE$.

①求点 P 的坐标；

②在直线 PD 上是否存在点 M，使 $\triangle ABM$ 为直角三角形？若存在，求出符合条件的所有点 M 的坐标；若不存在，请说明理由.

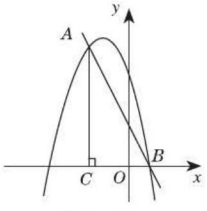


图 5-12

解：（1）∵点 B 的坐标为（1，0），∴ $OB=1$.

∴ $OC=2OB=2$，∴ $C(-2,0)$，

$BC=OB+OC=3$. 在 $\mathrm{Rt}\triangle ABC$ 中，

$\tan\angle ABC=\frac{AC}{BC}=2$，

∴ $AC=6$. ∴ $A(-2,6)$.

把（−2，6）和（1，0）代入 $y=-x^2+bx+c$，

得 $\begin{cases}-4-2b+c=6,\\-1+b+c=0.\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}b=-3,\\c=4.\end{cases}$

∴抛物线的表达式为 $y=-x^2-3x+4$.

（2）①由 $A(-2,6)$，$B(1,0)$，

易得直线 AB 的表达式为 $y=-2x+2$.

设 $P(x,-x^2-3x+4)$，则 $E(x,-2x+2)$，

∵ $PE=\frac{1}{2}DE$，

∴ $-x^2-3x+4-(-2x+2)=\frac{1}{2}(-2x+2)$.

解得 $x=1$（舍去）或 $x=-1$. ∴ $P(-1,6)$.

②存在这样的点 M. ∵ M 在直线 PD 上，且 $P(-1,6)$，设 $M(-1,m)$，

易得 $AM^2=1+(m-6)^2$，$BM^2=4+m^2$，$AB^2=45$. 分三种情况：

当 $\angle AMB=90°$ 时，

有 $AM^2+BM^2=AB^2$，

∴ $1+(m-6)^2+4+m^2=45$.

解得 $m=3\pm\sqrt{11}$.

∴点 M 的坐标为 $(-1,3+\sqrt{11})$ 或 $(-1,3-\sqrt{11})$.

当 $\angle ABM=90°$ 时，

有 $AB^2+BM^2=AM^2$，

∴ $45+4+m^2=1+(m-6)^2$. 解得 $m=-1$.

∴点 M 的坐标为 $(-1,-1)$.

当 $\angle BAM=90°$ 时，有 $AM^2+AB^2=BM^2$，

∴ $1+(m-6)^2+45=4+m^2$.

解得 $m=\frac{13}{2}$.

∴点 M 的坐标为 $(-1,\frac{13}{2})$.

综上所述，点 M 的坐标为 $(-1,3+\sqrt{11})$ 或 $(-1,3-\sqrt{11})$ 或 $(-1,-1)$ 或 $(-1,\frac{13}{2})$.

基础题·重难点·易错点

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

方法必会

专题十 数形结合思想

专题解读» 数形结合思想是将数（量）与形（图）结合起来进行分析、研究，从而解决问题的一种思维策略. 反比例函数的图象可以体现反比例函数的性质，所以解决有关反比例函数问题时，可以把函数图象与表达式有机地结合起来，使数学问题更直观，而且更容易解决.

例 11 [中考·福建]如图 5-13，一次函数 $y=kx+3$ 的图象与反比例函数 $y=\frac{m}{x}(x>0)$ 的图象交于点 P，$PA\perp x$ 轴于点 A，$PB\perp y$ 轴于点 B. 一次函数的图象分别交 x 轴、y 轴于点 C，D，且 $S_{\triangle DBP}=27$，$\frac{OD}{AP}=\frac{1}{2}$.

（1）求点 D 的坐标.

（2）求一次函数与反比例函数的表达式.

（3）根据图象，写出当 x 取何值时，一次函数的值小于反比例函数的值.

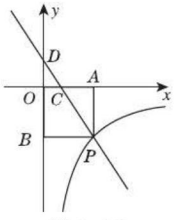


图 5-13

解：（1）∵一次函数 $y=kx+3$ 的图象与 y 轴相交于点 D，

∴可令 $x=0$，得 $y=3$. ∴ $D(0,3)$.

（2）∵$\frac{OD}{AP}=\frac{1}{2}$，$OD=3$，

∴ $AP=6$. ∴ $OB=6$.

∴ $DB=9$.

在 $\mathrm{Rt}\triangle DBP$ 中，根据三角形的面积公式，得 $\frac{DB\cdot BP}{2}=27$.

∴ $BP=6$. ∴ $P(6,-6)$.

把点 $P(6,-6)$ 的坐标代入 $y=kx+3$，得 $k=-\frac{3}{2}$.

∴一次函数的表达式为 $y=-\frac{3}{2}x+3$.

把点 $P(6,-6)$ 的坐标代入 $y=\frac{m}{x}$，得 $m=-36$.

∴反比例函数的表达式为 $y=-\frac{36}{x}(x>0)$.

（3）根据图象可得，当 $x>6$ 时，一次函数的值小于反比例函数的值.

方法点拨：本例（3）中，利用数形结合思想可直接得出 x 的取值范围.

专题十一 分类讨论思想

专题解读» 当被研究的问题包含多种可能情况，不能一概而论时，必须按可能出现的所有情况分别进行讨论，从而得出相应的结论，这种处理问题的思维方法称为分类讨论思想.

例 12 关于 x 的二次函数 $y=-x^2+(k^2-4)x+2k-2$ 的图象以 y 轴为对称轴，且与 y 轴的交点在 x 轴的上方.

（1）求此二次函数的表达式，并在直角坐标系中画出函数的大致图象.

（2）设 A 是 y 轴右侧图象上的一个动点，过点 A 作 $AB\perp x$ 轴于点 B，再过点 A 作 x 轴的平行线交图象于点 D，过点 D 作 $DC\perp x$ 轴于点 C，得到矩形 $ABCD$. 设矩形 $ABCD$ 的周长为 l，点 A 的横坐标为 x，试求 l 关于 x 的函数表达式.

（3）当点 A 在 y 轴右侧的图象上运动时，矩形 $ABCD$ 能否成为正方形？若能，请求出此时正方形的周长；若不能，请说明理由.

荣德基

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

解：（1）根据题意，得 $k^2-4=0$，解得 $k=\pm 2$.

∵图象与 y 轴的交点在 x 轴的上方，

∴ $2k-2>0$. ∴ $k=2$.

∴二次函数的表达式为

$y=-x^2+2$.

函数的大致图象如图 5−14.

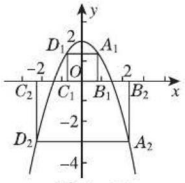


图 5−14

（2）令 $-x^2+2=0$，得 $x=\pm\sqrt{2}$.

如图 5−14，当 $0<x<\sqrt{2}$ 时，

$A_1D_1=2x$，$A_1B_1=-x^2+2$，

∴ $l=2(A_1B_1+A_1D_1)=-2x^2+4x+4$.

当 $x>\sqrt{2}$ 时，$A_2D_2=2x$，

$A_2B_2=-(-x^2+2)=x^2-2$，

∴ $l=2(A_2B_2+A_2D_2)=2x^2+4x-4$.

综上所述，l 关于 x 的函数表达式是

$$l=\begin{cases}-2x^2+4x+4, & 0<x<\sqrt{2},\\ 2x^2+4x-4, & x>\sqrt{2}.\end{cases}$$

（3）能. 当 $0<x<\sqrt{2}$ 时，令 $A_1D_1=A_1B_1$，

得 $x^2+2x-2=0$，

解得 $x=-1-\sqrt{3}$（舍去）

或 $x=-1+\sqrt{3}$.

将 $x=-1+\sqrt{3}$ 代入 $l=-2x^2+4x+4$，

得 $l=8\sqrt{3}-8$.

当 $x>\sqrt{2}$ 时，令 $A_2D_2=A_2B_2$，

得 $x^2-2x-2=0$，

解得 $x=1+\sqrt{3}$ 或 $x=1-\sqrt{3}$（舍去）.

将 $x=1+\sqrt{3}$ 代入 $l=2x^2+4x-4$，

得 $l=8\sqrt{3}+8$.

综上可知，矩形 $ABCD$ 能成为正方形，且

当 $x=-1+\sqrt{3}$ 时，

正方形的周长为 $8\sqrt{3}-8$；

当 $x=1+\sqrt{3}$ 时，

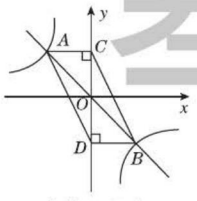
正方形的周长为 $8\sqrt{3}+8$.

好题必解

☞答案见 261 页

题型 1　巧用反比例函数系数 k 的几何意义求面积

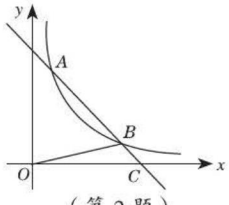
1. 如图，函数 $y=-x$ 与函数 $y=-\dfrac{4}{x}$ 的图象相交于 A，B 两点，过 A，B 两点分别作 y 轴的垂线，垂足分别为点 C，D，求四边形 $ACBD$ 的面积.



（第 1 题）

题型 2　巧解反比例函数与一次函数的公共点问题

2. 如图，直线 $y=-x+5$ 与双曲线 $y=\dfrac{k}{x}$（$x>0$）相交于 A，B 两点，与 x 轴相交于点 C，$\triangle BOC$ 的面积是 $\dfrac{5}{2}$. 若直线 $y=-x+5$ 向下平移 1 个单位，则所得直线与双曲线 $y=\dfrac{k}{x}$（$x>0$）的交点有（　　）



（第 2 题）

A. 0 个　　B. 1 个

C. 2 个　　D. 0 个或 1 个或 2 个

荣德基

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

题型 3　巧用二次函数图象解一元二次方程或不等式

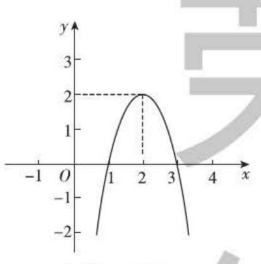
3. 二次函数 $y=ax^2+bx+c$（$a\neq 0$）的图象如图所示，根据图象解答下列问题：

（1）写出方程 $ax^2+bx+c=0$ 的两个根．

（2）写出不等式 $ax^2+bx+c>0$ 的解集．

（3）写出 y 随 x 的增大而减小的自变量 x 的取值范围．

（4）若方程 $ax^2+bx+c=k$ 有两个不相等的实根，求 k 的取值范围．



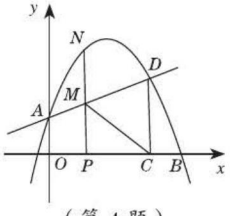
（第 3 题）

题型 4　巧用二次函数求几何最值

4. [**模拟 · 奎文**]如图，在平面直角坐标系中，抛物线 $y=ax^2+bx+1$ 交 y 轴于点 A，交 x 轴正半轴于点 B（4，0），与过点 A 的直线相交于另一点 D（3，$\frac{5}{2}$），过点 D 作 $DC\perp x$ 轴，垂足为 C．

（1）求抛物线的表达式．

（2）点 P 在线段 OC 上（不与点 O，C 重合），过 P 作 $PN\perp x$ 轴，交直线 AD 于点 M，交抛物线于点 N，连接 CM，求△ PCM 面积的最大值．



（第 4 题）

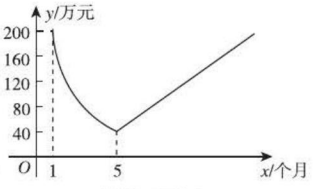
题型 5　巧解与反比例函数有关的实际应用问题

5. 保护生态环境，建设绿色社会已经从理念变为人们的行动．某化工厂 2017 年 1 月的利润为 200 万元．设 2017 年 1 月为第 1 个月，第 x 个月的利润为 y 万元．由于排污超标，该厂从 2017 年 1 月底起适当限产，并投入资金进行治污改造，导致月利润明显下降，从 1 月到 5 月，y 与 x 成反比例．到 5 月底，治污改造工程顺利完工，从这时起，该厂每月的利润比前一个月增加 20 万元（如图）．

（1）分别求该化工厂治污期间及治污改造工程完工后 y 与 x 之间的函数关系式．

（2）治污改造工程完工后经过几个月，该厂月利润才能达到 2017 年 1 月的水平？

（3）当月利润少于 100 万元时为该厂资金紧张期，问该厂资金紧张期共有几个月？



（第 5 题）

荣德基

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

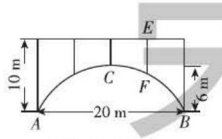
题型 6　巧建坐标系解抛物线形的实际问题

6. 一座抛物线形的拱桥如图，桥拱的最大高度为 6 m，跨度为 20 m，相邻两支柱间的距离均为 5 m.

（1）建立适当的平面直角坐标系，求抛物线所对应的函数表达式.

（2）求支柱 EF 的长度.

（3）拱桥下的地平面是双向行车道（正中间是一条宽 2 m 的隔离带），其中的一条行车道能否并排行驶宽 2 m，高 3 m 的三辆汽车（汽车间的间隔忽略不计）？



（第 6 题）

题型 7　巧用二次函数设计方案

7. 某企业信息部进行市场调研发现：

信息一：若单独投资 A 种产品，则所获利润 y_A（单位：万元）与投资金额 x（单位：万元）之间存在正比例函数关系：$y_A=kx$，并且当投资 5 万元时，可获利润 2 万元.

信息二：若单独投资 B 种产品，则所获利润 y_B（单位：万元）与投资金额 x（单位：万元）之间存在二次函数关系：$y_B=ax^2+bx$，并且当投资 2 万元时，可获利润 2.4 万元；当投资 4 万元时，可获利润 3.2 万元.

（1）请分别求出上述的正比例函数的表达式与二次函数的表达式.

（2）如果该企业同时对 A，B 两种产品进行投资，共投资 10 万元，请你设计一个能获得最大利润的投资方案，并求出按此方案能获得的最大利润.

第 5 章测试卷

☞ 答案见 263 页

（100 分　60 分钟）

一、选择题（每题 3 分，共 30 分）

1. 下列各式中，y 是关于 x 的二次函数的是（　　）

A. $xy+x^2=1$

B. $x^2-y+2=0$

C. $y=\dfrac{1}{x^2}$

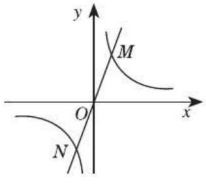
D. $y^2-4x=3$

2. 对于抛物线 $y=-2(x+1)^2+3$ 有下列结论：①抛物线的开口向下；②对称轴为直线 $x=1$；③顶点坐标为 $(-1, 3)$；④$x>-1$ 时，y 随 x 的增大而减小，其中正确结论的数量为（　　）

A. 1　　B. 2

C. 3　　D. 4

3. 如图，已知直线 $y=k_1x(k_1\neq 0)$ 与反比例函数 $y=\dfrac{k_2}{x}(k_2\neq 0)$ 的图象交于 M，N 两点. 若点 M 的坐标是 $(1, 2)$，则点 N 的坐标是（　　）



（第 3 题）

A. $(-1, -2)$　　B. $(-1, 2)$

C. $(1, -2)$　　D. $(-2, -1)$

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

4. [中考·绍兴] 在平面直角坐标系中，抛物线 $y=(x+5)(x-3)$ 经变换后得到抛物线 $y=(x+3)(x-5)$，则这个变换可以是（　　）

A. 向左平移 2 个单位

B. 向右平移 2 个单位

C. 向左平移 8 个单位

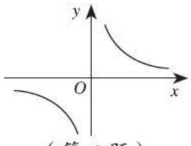
D. 向右平移 8 个单位

5. 若函数 $y=\dfrac{m+2}{x}$ 的图象在每一个象限内 y 的值随 x 值的增大而增大，则函数 $y=(1+m)x+m^2+3$ 的图象不经过（　　）

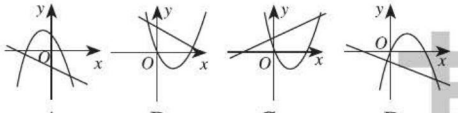
A. 第一象限　　B. 第二象限

C. 第三象限　　D. 第四象限

6. [中考·青岛] 已知反比例函数 $y=\dfrac{ab}{x}$ 的图象如图所示，则二次函数 $y=ax^2-2x$ 和一次函数 $y=bx+a$ 在同一平面直角坐标系中的图象可能是（　　）



（第 6 题）



A　　B　　C　　D

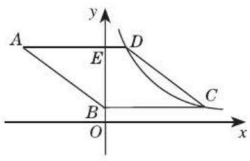
7. 已知 $(-1, y_1)$，$(2, y_2)$，$(3, y_3)$ 在二次函数 $y=-x^2+4x+c$ 的图象上，则 y_1，y_2，y_3 的大小关系正确的是（　　）

A. $y_1<y_2<y_3$　　B. $y_3<y_2<y_1$

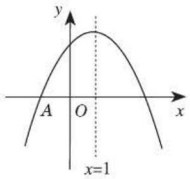
C. $y_3<y_1<y_2$　　D. $y_1<y_3<y_2$

8. 如图，菱形 $ABCD$ 的边 $AD\perp y$ 轴，垂足为点 E，顶点 A 在第二象限，顶点 B 在 y 轴的正半轴上，反比例函数 $y=\dfrac{k}{x}$ $(k\neq 0, x>0)$ 的图象同时经过顶点 C，D. 若点 C 的横坐标为 5，$BE=3DE$，则 k 的值为（　　）

A. $\dfrac{5}{2}$　　B. 3　　C. $\dfrac{15}{4}$　　D. 5



（第 8 题）



（第 10 题）

9. 已知二次函数 $y=ax^2+2ax+3a^2+3$（其中 x 是自变量），当 $x\geqslant 2$ 时，y 随 x 的增大而增大，且当 $-2\leqslant x\leqslant 1$ 时，y 的最大值为 9，则 a 的值为（　　）

A. 1 或 -2　　B. -1 或 $\sqrt{2}$

C. $\sqrt{2}$　　D. 1

10. 如图，抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 与 x 轴的一个交点为 $A(-1, 0)$，顶点坐标为 $(1, n)$，与 y 轴的交点在 $(0, 2)$，$(0, 3)$ 之间（包含端点），则下列结论：

① $3a+b<0$；② $-1\leqslant a\leqslant -\dfrac{2}{3}$；③对于任意实数 m，$a+b\geqslant am^2+bm$ 总成立；④关于 x 的方程 $ax^2+bx+c=n-1$ 有两个不相等的实数根.

其中正确的有（　　）

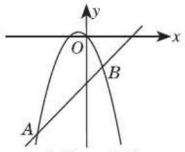
A. 1 个　　B. 2 个　　C. 3 个　　D. 4 个

二、填空题（每题 3 分，共 18 分）

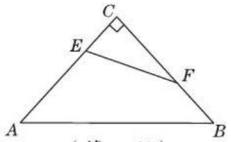
11. 如果开口向下的抛物线 $y=ax^2+5x+4-a^2$ $(a\neq 0)$ 过原点，那么 a 的值是_____.

12. 已知 y 关于 x 的函数满足下列条件：①它的图象经过点 $(1,1)$；②当 $x>1$ 时，y 随 x 的增大而减小. 写出一个符合条件的函数：_____.

13. 如图，抛物线 $y=ax^2+bx$ 与直线 $y=mx+n$ 相交于点 $A(-3, -6)$，$B(1, -2)$，则关于 x 的方程 $ax^2+bx=mx+n$ 的解为_____.



（第 13 题）

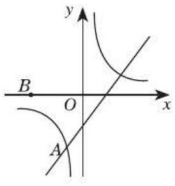


（第 14 题）

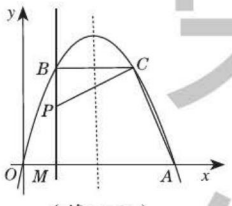
关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

14. 如图，在 Rt△ABC 中，∠ACB=90°，AC=BC=8，E，F 分别是 AC，BC 边上的动点，E 从点 A 出发向 C 运动，同时 F 以相同的速度从点 C 出发向 B 运动，当其中一点到达终点时另一点也随之停止运动，当 AE 为_____时，△ECF 的面积最大.

15. 如图，反比例函数 $y=\frac{3}{x}$ 与一次函数 $y=x-2$ 的图象在第三象限交于点 A，点 B 的坐标为 $(-3,0)$，点 P 是 y 轴左侧的一点，若以 A，O，B，P 为顶点的四边形为平行四边形，则点 P 的坐标为_____.



（第15题）



（第16题）

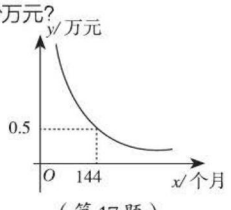
16. 如图，经过原点的抛物线 $y=-x^2+mx\ (m>2)$ 与 x 轴的另一交点为 A，过点 $P(1,\ \frac{m}{2})$ 作直线 $PM\perp x$ 轴于点 M，交抛物线于点 B. 点 B 关于抛物线对称轴的对称点为 C. 连接 CB，CP，CA，要使得 $CA\perp CP$，则 m 的值为_____.

三、解答题（共52分）

17.（8分）为了方便孩子入学，小王家购买了一套学区房，交首付款15万元，剩余部分向银行贷款，贷款及贷款利息按月分期还款，每月还款数相同. 计划每月还款 y 万元，x 个月还清贷款，若 y 是 x 的反比例函数，其图象如图所示.

（1）求 y 与 x 的函数表达式；

（2）若小王家计划180个月（15年）还清贷款，则每月应还款多少万元？

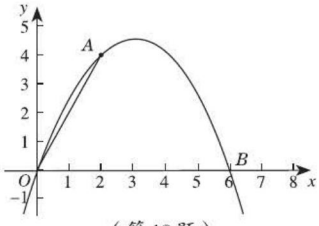


（第17题）

18.（8分）如图，二次函数 $y=ax^2+bx$ 的图象经过点 $A(2,4)$ 与 $B(6,0)$.

（1）求 a，b 的值.

（2）点 C 是该二次函数图象上 A，B 两点之间的一动点，横坐标为 $x\ (2<x<6)$，写出四边形 $OACB$ 的面积 S 关于点 C 的横坐标 x 的函数表达式，并求 S 的最大值.



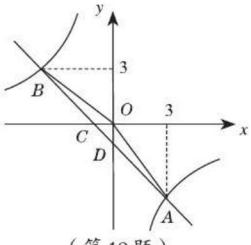
（第18题）

19.（10分）如图，一次函数 $y=kx+b\ (k,b$ 为常数，$k\neq 0)$ 的图象与反比例函数 $y=-\frac{12}{x}$ 的图象交于 A，B 两点，且与 x 轴交于点 C，与 y 轴交于点 D，A 点的横坐标与 B 点的纵坐标都是3.

（1）求一次函数的表达式.

（2）求△AOB 的面积.

（3）写出不等式 $kx+b>-\frac{12}{x}$ 的解集.



（第19题）

荣德基

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

20. （12分）某公司生产的一种健身产品在市场上受到普遍欢迎，每年可在国内、国外市场上全部售完．该公司的年产量为6千件，若在国内市场销售，平均每件产品的利润 y_1（元）与国内销售量 x（千件）的关系为 $y_1=\begin{cases}15x+90\ (0<x\leqslant 2),\\ -5x+130\ (2<x<6),\end{cases}$ 若在国外市场销售，平均每件产品的利润 y_2（元）与国外销售量 t（千件）的关系为 $y_2=\begin{cases}100\ (0<t<2),\\ -5t+110\ (2\leqslant t<6).\end{cases}$

（1）用含 x 的代数式表示 t：$t=$_____；当 $0<x\leqslant 4$ 时，y_2 与 x 的函数关系为 $y_2=$_____；当_____ $<x<$ _____ 时，$y_2=100$；

（2）求每年该公司销售这种健身产品的总利润 w（千元）与国内销售量 x（千件）的函数表达式，并指出 x 的取值范围；

（3）该公司每年国内、国外的销售量分别为多少时，可使公司每年的总利润最大？最大总利润为多少？

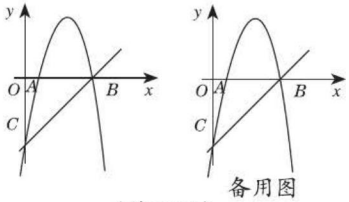
21. （14分）如图，抛物线 $y=ax^2+6x+c$ 交 x 轴于 A，B 两点，并交 y 轴于点 C．直线 $y=x-5$ 经过点 B，C．【导学号：8927116】

（1）求抛物线的表达式．

（2）过点 A 的直线交直线 BC 于点 M．

①当 $AM\perp BC$ 时，过抛物线上一动点 P（不与点 B，C 重合），作直线 AM 的平行线交直线 BC 于点 Q，若以点 A，M，P，Q 为顶点的四边形是平行四边形，求点 P 的横坐标；

②连接 AC，当直线 AM 与直线 BC 的夹角等于 $\angle ACB$ 的2倍时，求点 M 的坐标．



备用图

（第21题）

基础题

错题笔记

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

揭秘事件的公平性

揭秘事件的公平性



第6章 事件的概率

荣德基

核心考点

你将见到的

- 随机事件
- 概率的意义
- 用频率估计概率
- 用列举法求概率——列表法、画树状图法

核心方法

我们为你提供的

- 列举法
- 列表法
- 画树状图法
- 方程思想
- 数形结合思想
- 转化思想







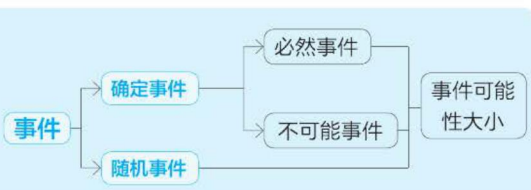


关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

6.1 随机事件

核心知识
- 随机事件
- 必然事件
- 不可能事件
- 确定事件

知识链接



点知识·拨考向 速提分

点知识 1 事件的认识

1. 事件的类别

事件类别		定义	举例
确定事件	必然事件	在一定条件下，必然会发生的事件，称为必然事件	在一个只装有红球的袋中摸球，摸出红球
	不可能事件	在一定条件下，不可能发生的事件，称为不可能事件	在一个只装有红球的袋中摸球，摸出白球
随机事件		在一定条件下，可能发生也可能不发生的事件，称为随机事件	在一个装有红球和白球的袋中摸球，摸出红球

2. 确定事件 必然事件和不可能事件，结果都是确定的，统称为确定事件.

3. “一定条件下”的意义 必然事件、不可能事件、随机事件的定义中所说的“一定条件下”是指相同的试验在不同的条件下可能会导致不同的事件归类，如标准大气压下，水加热到 100 ℃沸腾是必然事件，但当气压高于标准大气压时，水的沸点提高，水加热到 100 ℃沸腾就不是必然事件了.


事件的判断

拔考向 利用事件的定义识别事件的类型

例 1 请指出在下列事件中，哪些是随机事件，哪些是必然事件，哪些是不可能事件.

（1）通常加热到 100 ℃时，水沸腾.

（2）篮球队员在罚球线上投篮一次，未投中.

（3）掷一次骰子，向上一面的点数是 6.

（4）任意画一个三角形，其内角和是 360°.

（5）经过有交通信号灯的路口，遇到红灯.

解题秘方：根据随机事件、必然事件以及不可能事件的定义即可作出判断.

解：随机事件：（2），（3），（5）；

必然事件：（1）；不可能事件：（4）.

提分·必记

特别提醒

1. 确定事件在事件发生前是可以预知结果的，即事件的发生或不发生具有必然性.
2. 随机事件在事件发生前是不能预知结果的，也称为“不确定事件”.
3. 按事件的确定性划分，事件可划分为确定事件和不确定事件（即随机事件）.
4. 一般地，描述真理或客观存在的事实的事件是必然事件；描述违背真理或者客观存在的事实的事件是不可能事件.

提分·秘诀

方法点拨

判断一个事件的类型的方法：要从其定义出发，也要联系生活的相关常识来判断.注意必然事件和不可能事件都是事先可以确定的，一定发生的是必然事件，不可能发生的是不可能事件，不确定是否发生就是随机事件.

基础篇

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

点知识 ② 事件发生的可能性

1. 一般地，随机事件发生的可能性是有大小的，不同的随机事件发生的可能性的大小有可能不同.

2. **事件发生的可能性**

（1）**必然事件**：试验中必然发生的事件，其发生的可能性为 100% 或 1.

（2）**不可能事件**：试验中不可能发生的事件，其发生的可能性为 0.

（3）**随机事件**：试验中可能发生也可能不发生的事件，其发生的可能性介于 0 和 1 之间.

3. **描述随机事件发生的可能性大小的常用语** “可能性极小”“不大可能”“可能”“很可能”“可能性极大”等.

提分·必记

方法点拨

判断随机事件发生的可能性的大小的方法：先要准确地找出所有可能出现的结果数量，然后再看每种情况包含的结果数量与所有可能出现的结果数的比例大小，比例越大，则这种情况发生的可能性越大.

拔考向 利用随机事件的可能性的意义判断事件可能性的大小

例 2 一个不透明的口袋中有 7 个红球，5 个黄球，4 个绿球，这些球除颜色外没有其他区别，现从中任意摸出一球.

（1）你认为摸到哪种颜色的球的可能性最大？

（2）如果要使摸到绿球的可能性最大，那么需要在这个口袋中至少再放入多少个绿球？请简要说明理由.

解题秘方：口袋中哪种颜色的球最多，则摸到这种颜色的球的可能性最大.

解：（1）摸到红球的可能性最大.

（2）至少再放入 4 个绿球.

理由：当绿球的个数最多时，摸到绿球的可能性最大，因为原来口袋中红球的个数最多，有 7 个，所以至少要再放入 4 个绿球.

提分·秘诀

易错警示

要使摸到绿球的可能性最大，应保证口袋中绿球的数量最多，所以至少再放入 4 个绿球，此处容易错误地认为至少再放入 3 个绿球，当放入 3 个绿球时，红球和绿球一样多，此时摸到绿球的可能性与摸到红球的可能性一样大，并不能保证摸到绿球的可能性最大.

点方法·拨技巧 提高分

拔尖角度 ① 利用事件可能出现的结果判断可能性的大小

例 3 一个小球在如图 6.1–1 所示的地面上随意滚动，小球停在阴影部分与停在空白部分的可能性哪个大？（每个方格除颜色外完全一样）

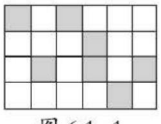


图 6.1–1

解题秘方：用图 6.1–1 中各部分方格的个数判断可能性的大小.

解：图 6.1–1 中阴影部分共有 7 个方格，空白部分共有 17 个方格，故小球停在空白部分的可能性大.

挑战·高分

方法点拨

判断随机事件发生的可能性大小的方法：可以根据不同的方法，有的可以用面积法，有的可以用数值法，因为图中各方格的大小相同，故哪一部分的方格数目多，小球停在哪一部分的可能性就大.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

拔尖角度▸ 2 利用随机事件的可能性设计方案

挑战·高分

例 4 甲袋内装有 99 颗黑棋子，1 颗白棋子，乙袋内装有 49 颗白棋子，1 颗黑棋子，如果黑、白棋子的质地、大小均相同．问：一次伸手在袋内随机摸一颗棋子，在哪个袋内摸到黑棋子的可能性大？应如何设计袋内的黑、白棋子数量，才能使一次摸到黑、白棋子的可能性一样大？

解题秘方：用黑棋子数与黑、白棋子的总数的比来比较可能性的大小．

解：在甲袋内摸到黑棋子的可能性大．要使一次摸到黑、白棋子的可能性一样大，只需将袋内放置的黑、白棋子数量一样多．

方法点拨

判断事件 A 发生的可能性的大小需要明确两点：①事件 A 包含的可能结果数量；②所有可能的结果数量．

点中考·拨模拟 得满分

中考探秘

本节主要考点是识别事件的类型及随机事件的可能性的大小，中考中主要考查认识事件的类型，而随机事件的可能性大小一般渗透到概率中，认识事件的类型一般以选择题和填空题为主，题目难度较小．

三年中考兵法

冲刺·满分

考法 1 利用定义识别随机事件

例 5 [中考·福建]投掷两枚质地均匀的骰子，骰子的六个面上分别刻有 1 到 6 的点数，则下列事件为随机事件的是（　　）

A. 两枚骰子向上一面的点数之和大于 1

B. 两枚骰子向上一面的点数之和等于 1

C. 两枚骰子向上一面的点数之和大于 12

D. 两枚骰子向上一面的点数之和等于 12

试题评析：本题考查了随机事件，熟记随机事件的定义是解题的关键．

解：A. 两枚骰子向上一面的点数之和大于 1，是必然事件，故此选项错误；

B. 两枚骰子向上一面的点数之和等于 1，是不可能事件，故此选项错误；

C. 两枚骰子向上一面的点数之和大于 12，是不可能事件，故此选项错误；

D. 两枚骰子向上一面的点数之和等于 12，是随机事件，故此选项正确．

答案：D

方法点拨

判断一个事件是不可能事件，必然事件还是随机事件，关键在于试验的结果是否在试验前预先确定，与这个试验是否进行无关，一般来说，描述已被确定的真理或客观存在的事实的事件是必然事件；描述违背已被确定的真理或客观存在的事实的事件是不可能事件；随机事件的一个明显特征是试验的结果不确定．

考法 2 利用可能性的大小解决问题

例 6 [中考·资阳]在一个布袋中装有红、白两种颜色的小球，它们除颜色外没有任何其他区别．其中红球若干，白球 5 个，袋中的球已搅匀．若从袋中随机取出 1 个球，取出红球的可能性大，则红球的数量是（　　）

A. 4 个　　B. 5 个

C. 不足 4 个　　D. 6 个或 6 个以上

技巧点拨

只要总情况数目一定，谁包含的情况数目多，谁的可能性就大，反之也成立；若包含的情况数目相同，那么它们的可能性就相等．

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

试题评析：本题主要考查可能性大小，只要在总情况数目一定的情况下，比较其包含的情况总数即可.

解：∵袋中白球有 5 个，且从袋中随机取出 1 个球，取出红球的可能性大，

∴红球比白球多，∴红球的数量满足 6 个或 6 个以上.

答案：D

两年模拟兵法 ☞答案见 266 页

1. [中考·长沙]下列事件中，是必然事件的是（　　）
   A. 购买一张彩票，中奖
   B. 射击运动员射击一次，命中靶心
   C. 经过有交通信号灯的路口，遇到红灯
   D. 任意画一个三角形，其内角和是 180°
2. 下列事件中，属于不可能事件的是（　　）
   A. 某个数的绝对值大于 0
   B. 某个数的相反数等于它本身
   C. 任意一个五边形的外角和等于 540°
   D. 长分别为 3，4，6 的三条线段能围成一个三角形
3. [中考·淄博]下列语句描述的事件中，是随机事件的为（　　）
   A. 水能载舟，亦能覆舟 B. 只手遮天，偷天换日
   C. 瓜熟蒂落，水到渠成 D. 心想事成，万事如意
4. 下列是任意抛掷一枚质地均匀的正六面体骰子所得结果，其中发生的可能性最大的是（　　）
   A. 朝上的点数为 2　　B. 朝上的点数为 7
   C. 朝上的点数不小于 2　D. 朝上的点数为 3 的倍数
5. 不透明的袋中装有 9 个白球和 1 个红球，它们除颜色外其余都相同，从袋中随意摸出一个球，则下列说法中正确的是（　　）
   A.“摸出的球是白球”是必然事件
   B.“摸出的球是红球”是不可能事件
   C. 摸出的球是白球的可能性不大
   D. 摸出的球有可能是红球
6. 一个不透明的袋子中共装有 3 个小球，它们的标号分别为 1，2，3，从中摸出 1 个小球，标号为“4”，这个事件是_____.（填“必然事件”“不可能事件”或“随机事件”）
7. 下列事件：①从装有 1 个红球和 2 个黄球的袋子中摸出的 1 个球是白球；②抛掷一枚硬币，正面朝上；③花 2 元买一张体育彩票，喜中 500 万大奖；④抛掷 1 个小石块，石块会下落. 估计这些事件的可能性大小，并将它们的序号按从小到大排列为_____.
8. 班里有 18 名男生，15 名女生，从中任意抽取 a 人打扫卫生，若女生被抽到是必然事件，则 a 的取值范围是_____.
9. 在一个不透明的口袋中装有大小、外形一模一样的 5 个红球、3 个蓝球和 2 个白球，它们已经在口袋中被搅匀了，请判断以下是随机事件、不可能事件还是必然事件.
   （1）从口袋中一次任意取出一个球，是白球.
   （2）从口袋中一次任取 5 个球，全是蓝球.
   （3）从口袋中一次任取 5 个球，只有蓝球和白球，没有红球.
   （4）从口袋中一次任意取出 6 个球，恰好红、蓝、白三种颜色的球都齐了.
10. 抛掷一枚均匀的骰子（各面上的点数分别为 1~6）1 次，落地后，
    （1）朝上的点数有哪些结果？它们发生的可能性一样吗？
    （2）朝上的点数是奇数与朝上的点数是偶数，这两个事件发生的可能性大小相等吗？
    （3）朝上的点数大于 4 与朝上的点数不大于 4，这两个事件发生的可能性大小相等吗？如果不相等，那么哪一个可能性大一些？

基础 德华

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

6.2 频数与频率

核心知识
- 频数
- 频率

知识链接



点知识·拨考向 速提分

点知识 1 频数与频率

1. **频数** 把某次试验中某个事件一共发生的次数叫做该事件发生的频数.
2. **频率** 把某个事件发生的频数与试验的总次数的比值叫做该事件发生的频率.
3. 一般地，将总体中的数据按同一个标准分组后，各组数据的频数之和等于总体中数据的个数，各组数据的频率之和等于1.

拨考向 利用频数、频率的定义求某事件的频数、频率

题型1 利用频数的定义求频数

例1 已知在一个样本中，40个数据分别落在4个组内，第一、二、四组数据个数分别为5，12，8，则第三组的频数为（　　）

A. 15　　B. 25

C. 0.375　　D. 0.6

解题秘方：根据各组频数之和等于数据总和计算第三组的频数.

解：根据题意可得，40个数据分别落在4个组内，第一、二、四组数据个数分别为5，12，8，则第三组的频数为40−（5+12+8）=15.

答案：A

题型2 利用频率的定义求频率

例2 一个班有40名学生，在期末体育考核中，达到优秀的有18名，合格（但没达到优秀）的有17名，则这次体育考核中，不合格学生的频率是（　　）

A. 0.125　　B. 0.45　　C. 0.425　　D. 1.25

解题秘方：先求得不合格的学生数量，再根据频率的计算公式求得不合格学生的频率即可.

解：不合格的学生数量为40−18−17=5（名），

∴不合格学生的频率是$\frac{5}{40}$=0.125.

答案：A

提分·必记

特别提醒

频数和频率都能反映每个对象出现的频繁程度，频数、频率和总数三者之间的关系为频率=频数÷总数.

提分·秘诀

技巧点拨

根据公式频率=$\frac{\text{频数}}{\text{总数}}$求解.



关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

点知识▸ 2 画频数、频率分布表

画频数、频率分布表的一般步骤 （1）根据事件的不同结果分组.（2）根据每个事件发生的次数进行划记，一般用“正”字划记，“正”字的每一笔画代表该事件发生一次.（3）根据划记的“正”字的笔画数出每个事件的频数.（4）根据频数与事件总数的比值计算出频率.

拔考向▸ 利用制作的频数、频率分布表解决问题

例 3 超市为调查不同饮品的市场销售情况，进行了为期一周的调查，调查发现本周内销售的饮品如下：

冰茶，可乐，冰茶，果汁，啤酒，啤酒，冰茶，可乐，
啤酒，可乐，冰茶，可乐，可乐，可乐，冰茶，可乐，
可乐，冰茶，啤酒，果汁，可乐，啤酒，啤酒，可乐，
冰茶，果汁，果汁，啤酒，可乐，冰茶，果汁，冰茶，
可乐，可乐，冰茶，可乐，可乐，啤酒，果汁，果汁，
啤酒，可乐，可乐，可乐，啤酒，可乐，冰茶，可乐，
果汁，冰茶，冰茶，啤酒，果汁，啤酒，啤酒，冰茶.

（1）整理上述结果，按“冰茶”“可乐”“果汁”“啤酒”分组，列出相应的频数、频率分布表（频率精确到 0.001）.

（2）如果你是超市经理，你认为应该多进哪种饮品？

解：（1）将上述调查结果，按“冰茶”“可乐”“果汁”“啤酒”分为四组，分别统计各组的频数，计算出频率，得到下面的频数、频率分布表：

组别	冰茶	可乐	果汁	啤酒
划记	正正一	正正正正	正一	正正下
频数	14	20	9	13
频率	0.250	0.357	0.161	0.232

（2）∵可乐的频率最大，∴本周卖出的可乐所占比重最大，

∴可乐最受欢迎，∴应多进可乐.

点方法·拨技巧 提高分

拔尖角度▸ 1 利用频率的大小比较多少

例 4 甲校中，女生的频率是 48%，乙校中，女生的频率是 54%，则女生的人数（　　）

A. 甲校多于乙校　　B. 甲校与乙校一样多

C. 甲校少于乙校　　D. 不能确定

解题秘方：这里甲校与乙校的总人数不确定，所以甲校女生人数与乙校女生人数也不能确定，所以无法比较甲、乙两校女生人数的多少.

解：两个学校的总人数不能确定，故甲校女生和乙校女生的人数不能确定.

答案：D

提分·必记

特别提醒

频数、频率分布表能集中反映在总体中各种结果所出现的次数和所占比重的大小.

提分·秘诀

技巧点拨

在分组情况指明的情况下，参照题目要求分组；在分组情况未指明的情况下，应结合实际情况合理分组.

挑战·高分

方法点拨

在根据某两项频率的大小比较该两项的数量时，前提要保证两者在同一个总体中，或两者所在的总体数量相等.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

拔尖角度▸ 2 利用频数、频率分布表解决问题

挑战·高分

例 5 某中学为了解学生的课外阅读情况，就“我最喜爱的课外读物”从文学、艺术、科普和其他四个类别进行了抽样调查（每名学生仅选一项），并根据调查结果制作了尚不完整的频数、频率分布表：

类别	频数	频率
文学	m	0.42
艺术	22	0.11
科普	66	n
其他	28	
合计		1

(1) 表中 m=_____，n=_____.

(2) 在这次抽样调查中，最喜爱阅读哪类读物的学生最少？

(3) 根据以上调查，试估计该校 1 200 名学生中最喜爱阅读科普读物的学生有多少名？

解题秘方：(1) 首先利用“艺术”的频数与频率求出抽样调查的总人数，进而求出答案. (2) 利用 (1) 中所求，即可得出答案. (3) 利用 (1) 中所求，用总数乘以“科普”的频率即可得出答案.

解：(1) 84；0.33

(2) 最喜爱阅读艺术读物的学生最少.

(3) 估计该校 1 200 名学生中最喜爱阅读科普读物的学生有 $1\,200\times0.33=396$（名）.

技巧点拨

利用频数、频率分布表解决问题，主要抓住两点：一是频率 = 频数 ÷ 总数；二是各组频数和等于总数，各组频率和等于 1.

点中考·拨模拟 得满分

中考探秘

本节的主要考点是频数与频率的关系及频数、频率分布表. 中考中主要考查利用频数与频率的关系进行简单计算，单独考查时，主要以选择题、填空题为主，有时也综合在统计的解答题中，难度偏低. 频数、频率分布表较少单独考查，常综合在统计综合题中进行考查，难度不大.

三年中考兵法

考法 1 利用频率求频数

冲刺·满分

例 6 [中考·贵阳] 某班 50 名学生在 2018 年适应性考试中，数学成绩在 100~110 分这个分数段的频率为 0.2，则该班在这个分数段的学生为_____名.

试题评析：此题主要考查了频数与频率的关系.

解：∵频数 = 总数 × 频率，

∴可得在这个分数段的学生为 $50\times0.2=10$（名）.

答案：10

解法提醒

利用“$\text{频率}=\frac{\text{频数}}{\text{总数}}$”，得到“频数 = 总数 × 频率”，进而代入数值计算即可.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

考法 2 利用频数分布表和扇形统计图解决问题

例 7 某校体育老师为了解该校八年级学生对球类运动项目的喜爱情况，进行了随机抽样调查（每位学生必须且只能选择一项最喜爱的运动项目），并将调查结果进行整理，绘制了如图 6.2-1 所示的不完整的统计图和不完整的统计表. 请根据图表中的信息解答下列问题：

类别	频数
A. 乒乓球	16
B. 足球	20
C. 排球	n
D. 篮球	15
E. 羽毛球	m

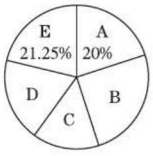


图 6.2-1

(1) 填空：m=_____，n=_____.

(2) 若该年级有学生 800 人，请你估计这个年级最喜爱篮球的学生人数.

试题评析：此题考查了频数分布表，用到的知识点是频率 = 频数 ÷ 总数，用样本估计总体，运用数形结合思想来解决由统计图形式给出的数学实际问题是本题的关键.

解：(1) 17；12

(2) 根据题意，得 $16\div20\%=80$（人），$800\times\frac{15}{80}=150$（人），故估计这个年级有 150 人最喜爱篮球.

解法提醒

- 根据乒乓球的人数和所占的百分比求出总人数，再用总人数乘以羽毛球所占的百分比，求出 m 的值，再用总人数减去其他球类运动的人数，求出 n 的值.
- 用总人数乘以最喜爱篮球的学生人数所占的百分比即可得出答案.

两年模拟兵法 ☞答案见 266 页

1. 频数分布表反映了（　　）

A. 数据总体的多少

B. 数据的平均水平

C. 数据的离散程度

D. 在各个小范围内的数量大小

2. 小明在做“抛一枚正六面体骰子”的试验时，他连续抛了 10 次，其中数字“6”朝上出现了 3 次，则出现数字“6”朝上的频率是（　　）

A. $\frac{3}{10}$　　B. $\frac{1}{6}$　　C. $\frac{3}{5}$　　D. $\frac{1}{2}$

3. 某同学按照某种规律写了下面一串数字：122，122，122，122，122，…，当写到第 93 个数字时，1 出现的频数是（　　）

A.33　　B.32

C.31　　D.30

4. [中考 · 苏州] 小明统计了他家今年 5 月份打电话的次数及通话时间，并列出了频数分布表：

通话时间 / min	$0<x\leqslant5$	$5<x\leqslant10$	$10<x\leqslant15$	$15<x\leqslant20$
频数（通话次数）	20	16	9	5

则通话时间不超过 15 min 的频率为（　　）

A.0.1　　B.0.4

C.0.5　　D.0.9

5. 某棉纺厂为了解一批棉花的质量，从中随机抽取了 20 根棉花纤维进行测量，其长度 x（单位：mm）的数据分布如下表所示，则棉花纤维长度的数据在 $8\leqslant x<32$ 这个范围的频率为（　　）

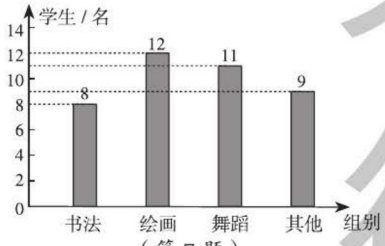
关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

棉花纤维长度 x	频数
$0 \leqslant x < 8$	1
$8 \leqslant x < 16$	2
$16 \leqslant x < 24$	8
$24 \leqslant x < 32$	6
$32 \leqslant x < 40$	3

A.0.8　　B.0.7　　C.0.4　　D.0.2

6. 在一次数学测试中，将某班 50 名学生的成绩分为六组，第一组到第五组的频数分别为 6，8，9，12，10，则第六组的频率是_____.

7. 学校为了解九年级学生参加课外兴趣小组的情况，随机调查了 40 名学生，将结果绘制成了如图所示的统计图，则九年级学生参加书法兴趣小组的频率是_____.



（第 7 题）

8. 将某班女生的身高分成三组，情况如表所示，则表中 a 的值是_____.

	第一组	第二组	第三组
频数	6	10	a
频率	b	c	20%

9. 某服装厂将一批西服进行检测，共抽检 200 套，其中不合格的有 12 套，则抽检样本中，合格西服的频率是_____. 某商店订购这套西服 1 000 套，则估计还需准备_____套合格西服供买到不合格西服的顾客更换 .

10. 德国有个叫鲁道夫的人，用毕生的精力，把圆周率算到小数点后面 35 位.

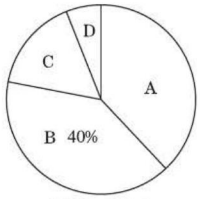
3.141　592　653　589　793　238　462　643　383　279　502　88

（1）试用划“正”字的方法记录圆周率的上述近似值中各数字出现的频数，并完成下表 .

数字	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
划记										
频数										

（2）在这串数字中，“3”“6”“9”出现的频率各是多少?

11. 2019 年 5 月某市共有 35 000 余名学生参加中考体育测试，为了了解九年级男生立定跳远的成绩，从某校随机抽取了 50 名男生的测试成绩，根据测试评分标准，将他们的得分按优秀、良好、及格、不及格 (分别用 A、B、C、D 表示) 四个等级进行统计，并绘制成如图所示的扇形统计图和统计表：



（第 11 题）

等级	成绩 / 分	频数	频率
A	90 ~ 100	19	0.38
B	75 ~ 89	m	x
C	60 ~ 74	n	y
D	60 以下	3	0.06
合计		50	1.00

请你根据以上图表提供的信息，解答下列问题：

（1）m=_____，n=_____，x=_____，y=_____.

（2）在扇形统计图中，C 等级所对应的圆心角是_____度 .

（3）如果该校九年级共有 500 名男生参加了立定跳远测试，那么请你估计这些男生成绩等级达到优秀和良好的共有多少名.

未德基

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

6.3 频数直方图

核心知识
- 频数分布表
- 频数直方图

知识链接
频数分布表 — 频数直方图

点知识·拨考向 速提分

点知识 1 频数分布表

1. 将一组数据按大小分为不同组段，然后将各数据归纳到各组段中，最后清点各组段的数据个数（即频数），再以表格形式表示，称为频数分布表.

2. 制作频数分布表的步骤

（1）**计算最大值与最小值的差**：在给出的一组数据中，找出数值最大的数据和数值最小的数据，并计算它们的差，确定数据的变化范围.

（2）**确定组距与组数**：为了整理数据，需要对所给的数据进行分组，可根据最大值与最小值的差除以组数确定组距的大小. 组距就是每组两个端点数据之间的距离. 组距和组数的确定没有固定的标准，一般数据越多，分的组数也就越多. 当数据的个数不超过 50 个时，一般分 5 ~ 7 组；当数据在 50 ~ 100 个之间时，一般分 8 ~ 12 组. 在实际分组时，往往要有个尝试的过程，最后选择一个比较合适的组数.

（3）**确定分点**：确定分点的办法有多种，为了保持组距相等，往往会把最小值减去一点作为最左端的分点，把最大值加大一点作为最右端的分点 . 当然，这也不是绝对的，也可以把分点取多一位小数.

（4）**列频数分布表**：频数分布表一般由三部分组成，一是数据分组，二是划记，三是频数. 列出频数分布表以后，就可以知道这些数据在各个小组内的分布情况了.

提分·必记

特别提醒

- 分组时，不能将同一个数据分在两个小组中，为了使每一个数据落在相应的小组中，可取比数据多一位小数来分组.
- 组数和组距的确定没有固定的标准，要凭借经验和研究的具体问题来确定，组数的多少应适当，组数太少，不能充分显示数据的分布情况；组数太多，不仅繁琐，且容易把性质相近的同类数据分散到各组，从而也不能正确显示数据分布的特征和规律. 一般地，数据在 100 个以内，可按情况分为 5~12 组.

拨考向 利用频数分布表的基本步骤作频数分布表

例 1 某校七（1）班 30 名男生的身高情况测量如下（单位：cm）：

164	169	170	182	180	169	176	166	162	174
183	170	171	170	173	174	162	174	173	165
167	160	158	175	162	177	173	156	174	175

根据这些数据，列出频数分布表.

提分·秘诀

技巧点拨

在绘制图表时，要仔细观察找出这组数据中的最大值和最小值，确定组数与组距.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

解题秘方：按照列频数分布表的步骤进行.

解：①求出最大值与最小值的差：最大值为 183，最小值为 156，它们的差为 183−156=27；

②确定组数与组距：组距定为 5，27÷5=5.4，则组数是 6；

③确定分点（每组含最小值）：155.5 ~ 160.5，160.5 ~ 165.5，165.5 ~ 170.5，170.5 ~ 175.5，175.5 ~ 180.5，180.5 ~ 185.5；

④列频数分布表：

身高分组 /cm	划记	频数
155.5 ~ 160.5	下	3
160.5 ~ 165.5	正	5
165.5 ~ 170.5	正下	7
170.5 ~ 175.5	正正	10
175.5 ~ 180.5	下	3
180.5 ~ 185.5	下	2
合计		30

知识 2 频数直方图

1. 根据频数分布表，用横轴表示各分组数据，纵轴表示各组数据的频数，绘制条形统计图直观地呈现频数的分布特征和变化规律. 像这样的统计图称为频数直方图.

2. 画频数直方图的步骤

（1）计算最大值与最小值的差.

（2）确定组距与组数.

（3）确定分点.

（4）列频数分布表.

（5）画频数直方图.

3. 频数直方图与条形统计图的区别与联系

	条形统计图	频数直方图
区别	1. 条形统计图各个“条形”之间有间隙； 2. 条形统计图用横向指标表示考察对象的类别，用纵向指标表示不同对象的数量特征.	1. 频数直方图各个“条形”之间没有间隙； 2. 频数直方图用横向指标表示考察对象数据的变化范围，用纵向指标表示相应范围内数据的频数.
联系	条形统计图、频数直方图能从不同的角度直观、形象地描述分析数据. 频数直方图是特殊的条形统计图.	

提分·必记

特别提醒

频数直方图的特点：（1）能够显示数据的分布情况.（2）易于显示各组之间的频数的差别.

荣德基

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

考向▶利用频数直方图解决问题

题型1　利用画频数直方图的步骤作频数直方图

例2　下面是2019年参加教育评估的15名学生的平均成绩x(单位:分):

40　51　56　61　62　66　62　68

65　64　69　70　77　76　78

(1)取组距为10分,列出频数分布表并画出频数直方图.

(2)写出一条可以得到的结论.

解题秘方:(1)先找到最大数78和最小数40,求出差是38,再确定组数:38÷10=3.8,应分为4组.确定分点,为了不让某些数在分点上,可以使分点比原数多一位小数,即为39.5 ~ 49.5,49.5 ~ 59.5,59.5 ~ 69.5,69.5 ~ 79.5,根据分组就可以列出频数分布表并画出频数直方图.

(2)答案不唯一,合理即可.

解:(1)①本组数据中最大的数是78,最小的数是40,78−40=38.

②确定组距与组数,条件已知组距为10分,38÷10=3.8,应分为4组.

③确定分点,为了不让某些数在分点上,可以使分点比原数多一位小数,即为39.5 ~ 49.5,49.5 ~ 59.5,59.5 ~ 69.5,69.5 ~ 79.5(每组含最小值).

④列出频数分布表如下:

平均成绩x/分	划记	频数
$39.5 \leqslant x < 49.5$	一	1
$49.5 \leqslant x < 59.5$	丅	2
$59.5 \leqslant x < 69.5$	正下	8
$69.5 \leqslant x < 79.5$	下	4
合计		15

⑤画频数直方图如图6.3−1.

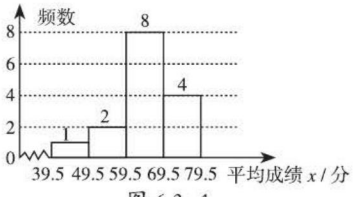


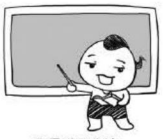
图6.3−1

(2)从上面的频数分布表和频数直方图可以看出:平均成绩在59.5 ~ 69.5分的学生最多,有8名学生(答案不唯一).

提分·秘诀

技巧点拨

根据画频数直方图的基本步骤作图时,若横轴表示的数据太大,横轴前面可以用波浪线省略横轴上数字较小的部分,波浪线后直接出现所需的数字,如本题的频数直方图.



未来基德

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

题型 2　从频数直方图中读取信息

例 3　某班同学参加公民道德知识竞赛，将竞赛所得成绩（取整数）进行整理后分成五组，并绘制成频数直方图，如图 6.3–2 所示，请结合图中提供的信息，解答下列问题：

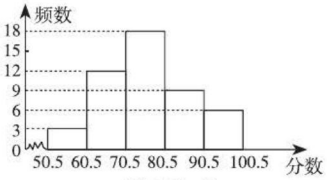


图 6.3–2

（1）该班共有多少名学生？

（2）60.5 ~ 70.5 这一分数段的频数、频率分别是多少？

解题秘方：（1）根据频数直方图即可得出该班学生数.（2）利用 60.5 ~ 70.5 这一分数段的频数，即可得出频率.

解：（1）该班共有 3+12+18+9+6=48（名）学生.

（2）由图可得 60.5 ~ 70.5 这一分数段的频数是 12，所以这一分数段的频率为 $\frac{12}{48}=0.25$.

技巧点拨

从频数直方图中读取信息时，首先要正确理解横轴和纵轴代表的意义、直方图中长方形的宽和高对应的数据指代的意义，然后结合问题找出所需的信息.

点方法·拨技巧 提高分

拔尖角度 1　利用频数直方图中长方形的高度比解决问题

挑战·高分

例 4　某班有 64 名同学，在一次数学检测中，分数只能取整数，统计其成绩绘制成频数直方图，如图 6.3–3 所示，从左到右的小长方形的高度比是 1∶3∶6∶4∶2，则由图可知，其中分数在 70.5 ~ 80.5 之间的人数是（　　）

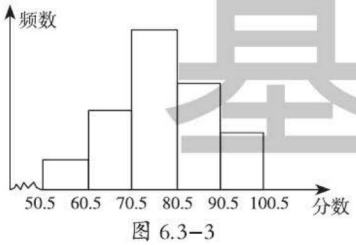


图 6.3–3

A.12　　B.24　　C.16　　D.8

解题秘方：小长方形的高度比等于各组的人数比，可求得分数在 70.5~80.5 之间的人数所占的比例，乘以总数 64 即可得出答案.

解：分数在 70.5~80.5 之间的人数是 $\frac{6}{1+3+6+4+2}\times 64=24$.

答案：B

技巧点拨

频数直方图中小长方形的高与本组中频数的多少成正比，知道各小长方形的高度比，可由比例关系求出各小长方形的高代表的频数.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

拔尖角度▸ 2 频数直方图和扇形统计图的综合运用

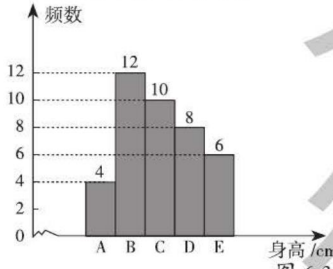
挑战·高分

例5 [中考·福州]为了解某校学生的身高情况,随机抽取该校男生、女生进行抽样调查. 已知抽取的样本中,男生、女生人数相同,利用所得数据绘制如下统计表及统计图,如图 6.3-4:

身高情况分组表(单位:cm)

组别	身高 x
A	$x<155$
B	$155 \leqslant x<160$
C	$160 \leqslant x<165$
D	$165 \leqslant x<170$
E	$x \geqslant 170$

男生身高情况频数直方图



女生身高情况扇形统计图

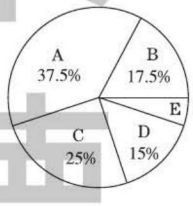


图 6.3-4

根据图表提供的信息,回答下列问题:

(1)样本中,男生身高的众数在_____组,中位数在_____组.

(2)样本中,女生身高在 E 组的有_____人.

(3)已知该校共有男生 400 人、女生 380 人,请估计该校身高在 $160 \leqslant x < 170$ 之间的学生有多少人.

解题秘方:(1)根据众数的定义以及中位数的定义解答即可.

(2)先求出女生身高在 E 组所占的百分比,再求出总人数,然后计算即可得解.

(3)分别用男、女生的人数乘以 C,D 两组的频率的和计算即可.

解:(1)B;C

(2)2

(3)男生:$400\times\dfrac{10+8}{4+12+10+8+6}=180$(人),

女生:$380\times(25\%+15\%)=152$(人),

$180+152=332$(人).

∴该校身高在 $160 \leqslant x < 170$ 之间的学生约有 332 人.

技巧点拨

频数直方图是数据统计的一种呈现形式,是一种特殊的条形统计图,其与扇形统计图及其他统计问题综合考查时,可将频数直方图看成条形统计图来处理,更好地借助旧知识解决新问题.



学案德基

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

点中考·拨模拟 得满分

中考探秘 本节的主要内容是制作频数直方图，并能从频数直方图中读取信息解决问题．中考常考查从频数直方图中读取信息，有时单独命题，以选择题或填空题的形式呈现，有时综合在与其他统计图相结合的解答题中，此时多为补全频数直方图．总体难度不大．

三年中考兵法

冲刺·满分

考法 1 利用频数直方图提取信息

例 6 ［中考·温州］如图 6.3-5 是九（1）班 45 名同学每周课外阅读时间的频数直方图（每组含前一个边界值，不含后一个边界值）．由图可知，人数最多的一组是（　　）

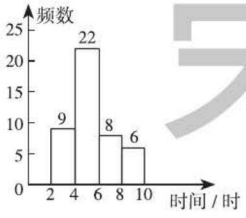


图 6.3-5

A. 2~4 时　　B. 4~6 时　　C. 6~8 时　　D. 8~10 时

试题评析：本题主要考查频数直方图，解题的关键是根据频数直方图得出各分组的具体数据．

解：由频数直方图可得，

人数最多的一组是 4~6 时，频数为 22，

故选 B．

答案：B

解法提醒

频数直方图中小长方形的高越高，频数越大，由此可知人数最多的一组是 4~6 时．

考法 2 利用频数、频率分布表作频数直方图

例 7 ［中考·聊城］为了让书籍开拓学生的视野，陶冶学生的情操，向阳中学开展了“五个一”课外阅读活动，为了解全校学生课外阅读情况，抽样调查了 50 名学生平均每天课外阅读时间 t（单位：min），将抽查得到的数据分成 5 组，下面是尚未完成的频数、频率分布表：

组别	分组	频数	频率
1	$10 \leqslant t<30$		0.16
2	$30 \leqslant t<50$	20	
3	$50 \leqslant t<70$		0.28
4	$70 \leqslant t<90$	6	
5	$90 \leqslant t<110$		

（1）将表中空格处的数据补全，完成上面的频数、频率分布表．

解法提醒

(1) 根据总人数 50，从及表格中的数据确定出所求数据，填写表格即可．

(2) 根据表格中的数据作出相应的频数直方图．

(3) 由时间不少于 50min 所占的百分比，乘以 1 500 即可得到结果．

荣德基

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

（2）请画出相应的频数直方图.

（3）如果该校有 1 500 名学生，请你估计该校共有多少名学生平均每天课外阅读时间不少于 50 min？

试题评析：此题考查了频数直方图，用样本估计总体以及频数、频率分布表，弄清题中的数据是解本题的关键.

解：（1）根据题意填写如下：

组别	分组	频数	频率
1	$10 \leqslant t<30$	8	0.16
2	$30 \leqslant t<50$	20	0.40
3	$50 \leqslant t<70$	14	0.28
4	$70 \leqslant t<90$	6	0.12
5	$90 \leqslant t<110$	2	0.04



（2）作出频数直方图，如图 6.3–6 所示：

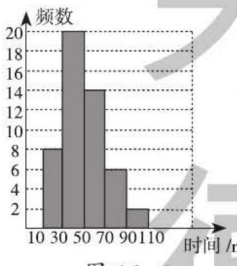


图 6.3–6

（3）根据题意，得 1 500×（0.28+0.12+0.04）=660（名），

则该校约有 660 名学生平均每天课外阅读时间不少于 50 min.

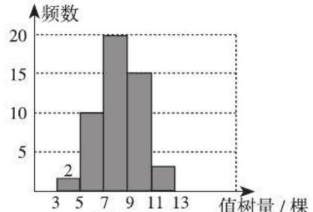
两年模拟兵法

☞答案见 267 页

1. 一个样本中有 80 个数据，最大值是 141，最小值是 50，取组距为 10，则样本可分成（　　）

A. 10 组　　B. 9 组　　C. 8 组　　D. 7 组

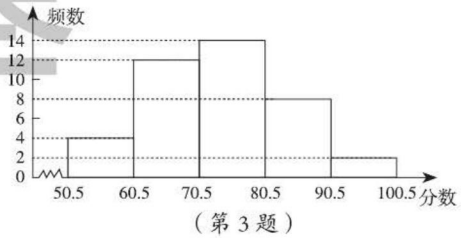
2. 单位在植树节派出 50 名员工植树造林，统计每个人植树的棵数之后，绘制出如图所示的频数直方图（图中分组含最低值，不含最高值），则植树 7 棵及以上的人数占总人数的（　　）



（第 2 题）

A. 40%　　B. 70%　　C. 76%　　D. 96%

3. 某次考试中，某班级的数学成绩的频数直方图如图所示. 下列说法错误的是（　　）



（第 3 题）

A. 得分在 70.5 ~ 80.5 分数段的人数最多

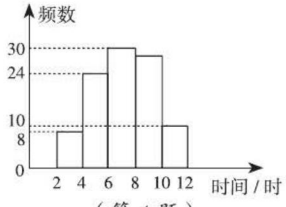
B. 该班的总人数为 40

C. 得分在 90.5 ~ 100.5 分数段的人数最少

D. 及格（≥ 60 分）的人数是 36

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

4. 为了解某校学生今年五一期间参加社团活动时间的情况，随机抽查了其中 100 名学生进行统计，并绘制成如图所示的频数直方图，已知该校共有 1 000 名学生，据此估计，该校五一期间参加社团活动时间在 8 ~ 10 小时之间的学生数大约是（　　）



（第 4 题）

A. 280　　B. 240

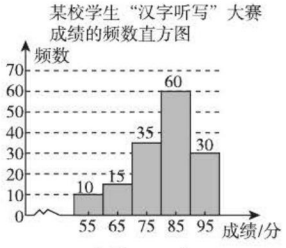
C. 300　　D. 260

5. 某班级一次数学模拟考试成成绩的最高分为 96，最低分为 30，如果把考试成绩绘制成频数直方图，组距为 10，则应分的组数是_____.

6. 小明统计了他家 5 月份的电话通话时间，并绘制成如下的频数分布表，那么小明家 5 月份电话通话时间不超过 15 min 的频数是_____.

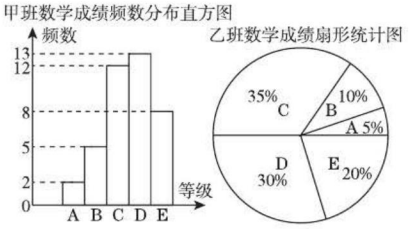
通话时间 /min	0~5	5~10	10~15	15~20	20~25
频数 / 次	24	16	8	10	16

7. [中考 · 温州] 某校学生“汉字听写”大赛成绩的频数直方图（每一组含前一个边界值，不含后一个边界值）如图所示，其中成绩为“优良”（80 分及以上）的学生有_____ 人.



（第 7 题）

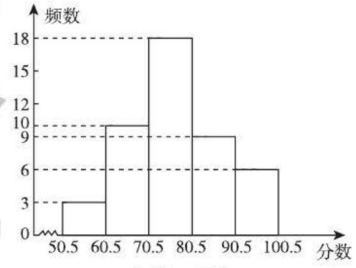
8. [中考 · 云南] 某中学九年级甲、乙两个班参加了一次数学考试，考试人数每班都为 40 人，每个班的考试成绩分为 A，B，C，D，E 五个等级，绘制的统计图如图：



（第 8 题）

根据以上统计图提供的信息，则 D 等级这一组人数较多的班是_____.

9. 某班进行了一次单元测试，老师将学生的测试成绩绘制成频数直方图（如图），请你根据直方图提供的信息，解答下列问题：【导学号：8927116】



（第 9 题）

（1）该班有多少名学生参加测试?

（2）70.5 ~ 80.5 这一分数段的频数、频率分别是多少?

（3）你认为本次测试试题的难易程度是否合理 .

基础知识夯实

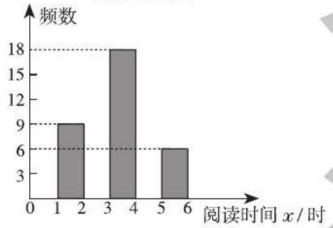
关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

10. 向阳中学为了解全校学生利用课外时间阅读的情况，调查者随机抽取若干名学生，调查他们一周的课外阅读时间，并根据调查结果绘制了如下尚不完整的统计表（图）. 根据图表信息，解答下列问题：

频数、频率分布表

阅读时间 x / 时	频数	频率
$1 \leqslant x<2$	9	0.15
$2 \leqslant x<3$	a	m
$3 \leqslant x<4$	18	0.3
$4 \leqslant x<5$	12	n
$5 \leqslant x<6$	6	0.1
合计	b	1

频数直方图



（第 10 题）

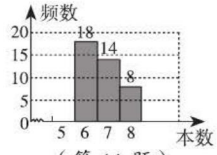
（1）填空：a=_____，b=_____，

m=_____，n=_____.

（2）将频数直方图补充完整.

11. [**模拟 · 莘县**] 中央电视台的“朗读者”节目激发了同学们的读书热情，为了引导学生“多读书，读好书”，某校对九年级部分学生的课外阅读量进行了随机调查，整理调查结果发现，学生课外阅读的本数最少的有 5 本，最多的有 8 本，并根据调查结果绘制了不完整的图表，如下所示：

本数	频数	频率
5	a	0.2
6	18	0.36
7	14	b
8	8	0.16
合计	c	1



（第 11 题）

（1）统计表中的 a=_____，b=_____，

c=_____.

（2）请将频数直方图补充完整.

（3）求所有被调查学生课外阅读的平均本数.

（4）若该校九年级共有 1 200 名学生，请你分析该校九年级学生课外阅读 7 本及以上的人数.

莘德基

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

6.4 随机现象的变化趋势

核心知识

- 随机现象的变化趋势
- 随机现象中变量之间的相关关系

知识链接

随机现象的变化趋势
- 用一条直线近似表示随机现象中变量之间的相关关系
- 随机现象中变量之间的相关关系

点知识·拨考向 速提分

点知识▸随机现象的变化趋势

相互联系的随机现象中变量之间的相关关系虽然有的不能够完全确定，但其中一个变量随机产生的数据确定后，可以借助一次函数（其图象为直线）去估计另一个变量的近似值.

拨考向▸利用随机现象的数据刻画相关关系

例 1 在某地区的 12 ~ 30 岁居民中随机抽取了 10 个人，测得其身高和体重，数据统计如下表：

身高 /cm	143	156	158	172	163	171	177	161	165	160
体重 /kg	41	49	61	79	62	69	74	69	65	54

根据上述数据，在坐标系中画出有序数对（身高，体重）对应的点，并用一条直线反映居民的身高和体重之间的相关关系.

解题秘方：根据所给的数据，用横轴表示身高，纵轴表示体重，可得到相应的点的坐标. 先在坐标系中画出相应的点，再画出反映居民的身高和体重之间的相关关系的直线即可.

解：如图 6.4−1 所示.

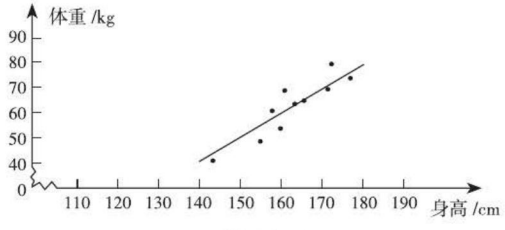


图 6.4−1

提分·必记

特别解读

画相关关系的图象时，两坐标轴的单位长度可以不同，只需刻度间的比例关系一致即可.

提分·秘诀

技巧点拨

根据散点图可以画出多条直线，其中使散点均匀分布在两侧的直线最佳.

基德莱

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

点方法·拨技巧 提高分

拔尖角度 利用随机现象的相关关系解决问题

挑战·高分

例 2 某市春节期间 7 家超市广告费支出（万元）和销售额（万元）数据如下：

超市	A	B	C	D	E	F	G
广告费支出	1	2	4	6	11	13	19
销售额	19	32	40	44	52	53	54

（1）在直角坐标系中，用横轴表示广告费支出，纵轴表示销售额，描出上述 7 对数据对应的数据点．

（2）在坐标系中，画出一条直线，使它能近似地反映样本中销售额与广告费支出的相关关系．

（3）估计当某超市的广告费支出为 22 万元时，销售额大约是多少万元？

解题秘方：（1）建立直角坐标系，描出 7 个散点；（2）根据散点的分布，作直线；（3）根据直线的走向，估计销售额．

解：（1）如图 6.4–2 所示．

（2）如图 6.4–2 所示．

（3）在这条直线上取横坐标为 22 的点，其纵坐标为 65，所以估计当某超市的广告费支出为 22 万元时，销售额大约是 65 万元．

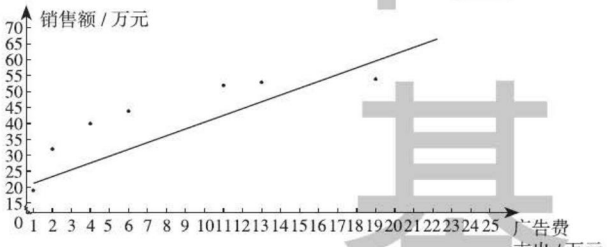


图 6.4–2

特别提醒

因为所画直线可能不同，所以根据直线预测的结果并不准确，可能有多个预测值，但预测值要符合所画相关关系的图象．如本题(3)中估计的销售额就可能不同，只要估计的销售额符合所画直线即合理．

两年模拟兵法

☞答案见 267 页

1. 某河受暴雨袭击，某天此河的水位记录如下表：

时间 / 时	0	4	8	12	16	20	24
水位 / 米	2	2.5	3	4	5	6	8

（1）上表反映了哪两个变量之间的关系？

（2）12 时的水位是多高？

（3）哪一时段水位上升最快？

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

2. 下表是某电器厂 2019 年上半年每个月的产量：

x / 月	1	2	3	4	5	6
y / 台	10 000	10 000	12 000	13 000	14 000	18 000

（1）你能根据 x 的变化，得到 y 的变化趋势吗？

（2）哪个月的产量最高？

（3）试求 2019 年上半年的平均月产量是多少.

3. 某商场 2012 年到 2018 年的销售总额和利润如下表：

年份	销售总额 / 万元	利润 / 万元
2012	13 002	1 300
2013	13 998	1 403
2014	15 013	1 489
2015	16 110	1 600
2016	16 997	1 705
2017	17 980	1 799
2018	19 058	1 898

（1）在坐标系中，用横轴表示销售总额，纵轴表示利润，描出对应的点 .

（2）在坐标系中画一条直线，使它近似地反映利润与销售总额的相关关系 .

（3）估计当该商场 2019 年的销售总额为 25 000 万元时，其利润约为多少万元？

4. 小明家开了一个小卖部，他为了研究气温对热饮销售的影响，经过统计，得到一个卖出的热饮杯数与当天气温的对比表：

气温 /℃	−5	0	4	7	12	15	19	23	27	31	36
热饮杯数	156	150	132	128	130	116	104	89	93	76	54

（1）在直角坐标系中，用横轴表示气温，纵轴表示热饮杯数，描出上述 11 对数据对应的点；

（2）在直角坐标系中，画出一条直线，使它能近似地反映样本中热饮杯数与气温的相关关系；

（3）如果某天的气温是 2 ℃，试估计这天卖出的热饮杯数.

5. 一辆小汽车在高速公路上从静止到启动 10 秒内的速度经测量如下表：

时间 / 秒	0	1	2	3	4	5
速度 /(米 / 秒)	0	0.3	1.3	2.8	4.9	7.6
时间 / 秒	6	7	8	9	10	
速度 /(米 / 秒)	11.0	14.1	18.4	24.2	28.9	

（1）如果用 T 表示时间，V 表示速度，那么随着 T 的变化，V 的变化趋势是什么？

（2）T 每增加 1 秒，V 的变化情况相同吗？若不相同，在第几秒，V 的增加量最大？

（3）若高速公路上小汽车行驶速度的上限为 120 千米 / 时，试估计大约还需几秒这辆小汽车的速度就将达到这个上限.

菜 德 基

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

6.5 事件的概率

核心知识
- 用频率估计概率
- 利用概率求元素个数
- 用频率估计概率的实际应用

知识链接

事件的概率
- 用频率估计等可能事件的概率
- 用频率估计非等可能事件的概率

点知识·拨考向 速提分

点知识 1 利用频率估计等可能事件的概率

1. **概率** 一般地，一个事件发生的可能性的大小可以用一个数来表示，我们把这个数叫做这个事件发生的概率，通常记为 P（事件）.

2. **用频率估计概率**


概率的定义

（1）一般地，在大量重复试验中，如果事件 A 发生的频率 $\frac{m}{n}$ 稳定于某个常数 p，那么事件 A 发生的概率 $P(A)=p$.

（2）注意：一般地，用频率估计概率时，试验次数应该尽可能多，试验次数越多，频率越接近事件发生的概率.

（3）概率是通过大量重复试验中频率的稳定性得到的介于 0 ~ 1 之间的常数，它反映了事件发生的可能性大小.

提分·必记

特别提醒

频率稳定在相应的概率附近的先决条件是进行大量重复试验；概率是一个事件发生的可能性的大小，与试验无关，频率是试验得到的数值，随试验次数变化而变化.

拨考向 利用频率估计概率的实际应用

题型 1 频率与概率的定义在解析频率与概率之间的关系中的应用

例 1 关于频率和概率的关系，下列说法正确的是（　　）

A. 频率等于概率

B. 当试验次数很大时，频率稳定在概率附近

C. 当试验次数很大时，概率稳定在频率附近

D. 试验得到的频率与概率不可能相等

解题秘方：紧扣频率与概率的关系解答.

解：频率不一定等于概率，故 A 错误；当试验次数很大时，频率稳定在概率附近，故 B 正确，C 错误；频率与概率可能相等，故 D 错误.

答案：B

提分·秘诀

易错警示

频率不等同于概率，概率是一个确定的值，与试验次数无关，频率是概率的估计值，只能估计概率.

题型 2 利用频率估计等可能事件的概率

例 2 为了弄清抛掷一枚硬币正面向上的概率有多大，在条件相同的情况下，有三组同学分别做了试验，试验结果如下：

第一组：做了 3 次试验，正面向上的结果出现了 2 次，占 $\frac{2}{3}$；

技巧点拨

用频率估计概率时，不能从某次试验的结果作为概率的估计值，应尽可能地多做试验，

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

第二组：做了 50 次试验，正面向上的结果出现了 28 次，占$\frac{14}{25}$；

第三组：做了 100 次试验，正面向上的结果出现了 49 次，占$\frac{49}{100}$. 结合以上试验结果，请你估计抛掷一枚硬币正面向上的概率有多大？

解题秘方：本题是用试验的方法估计概率，实际上在试验中得到的数据是抛掷一枚硬币正面向上的频率，而不是概率. 在条件相同的情况下，大量重复的试验得出的频率具有一定的稳定性，它稳定在概率附近，因此，可以用频率估计概率. 本题中，第一组同学做的试验次数太少，不能看出频率的稳定趋向，所以所得数据不能取. 需要说明的是，概率是一个确定的常数，用频率估计概率只是一种估计，所得数值不一定与概率的值完全相同，但非常接近.

解：因为第三组同学做试验的次数最多，所以可以利用第三组同学得到的正面向上的频率估计概率，所以估计抛掷一枚硬币正面向上的概率是$\frac{49}{100}$.

试验次数越多，得到的频率值就越接近概率的理论值，即估计值越准确.

点知识▶ 2 利用频率估计非等可能事件的概率

非等可能事件是指事件发生结果的可能性不一样大，此类事件无法用概率公式直接计算，只能通过大量重复试验，用频率来估计概率.

提分·必记

特别提醒

非等可能事件一般不能用替代物来模拟试验.

拔考向▶ 利用频率解决非等可能事件的概率问题

题型 1 利用事件的特性判断计算概率的方法

例 3 下列事件只能通过用频率估计概率的是（　　）

A. 在一副没有大小王的扑克牌中，随机抽出一张牌是红桃的概率

B. 抛一枚硬币，求正面朝上的概率

C. 育种工作者为了筛选出发芽率高的优质种子，往往通过大量重复试验获得种子的发芽率

D. 从一个装有 3 个白球和 2 个黄球的袋子中任意摸一个球，摸到黄球的概率

解题秘方：先判断出各选项中的事件是否为等可能事件，再判断计算概率的方法.

解：A. 在一副没有大小王的扑克牌中只有 4 种花色，抽到每种花色的可能性相同，可以用公式计算概率，故 A 错误；B. 抛一枚硬币，出现正面和反面朝上的可能性相同，可以用公式计算概率，故 B 错误；C. 只能通过用频率估计概率，故 C 正确；D. 从一个装有 3 个白球和 2 个黄球的袋子中任意摸一个球，摸到每个球的可能性都是相同的，可以用公式计算概率，故 D 错误.

答案：C

提分·秘诀

特别提醒

用频率估计概率的方法：对于一个随机事件，当试验的所有可能结果是无限个，或各种可能发生的结果的可能性不相等时，可以用大量重复试验得出的频率来估计事件发生的概率. 随着试验次数的增加，频率逐渐稳定在某个常数附近，这个常数就是事件发生的概率.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

题型 2　利用频率估计非等可能事件的概率的应用

例 4　一枚木质中国象棋子“兵”，它的正面雕刻一个“兵”字，它的反面是平的，将它从一定高度下掷，落地反弹后可能是“兵”字面朝上，也可能是“兵”字面朝下，由于棋子的两面不均匀，为了估计“兵”字面朝上的概率，某试验小组做了棋子下掷的试验，试验数据如下表：

试验次数	20	40	60	80	100	120	140	160
“兵”字面朝上的次数	14		38	47	52	66	78	88
“兵”字面朝上的频率	0.70	0.45	0.63	0.59		0.55	0.56	

（1）请将数据表补充完整；

（2）在图 6.5–1 中画出“兵”字面朝上的频率分布折线图；

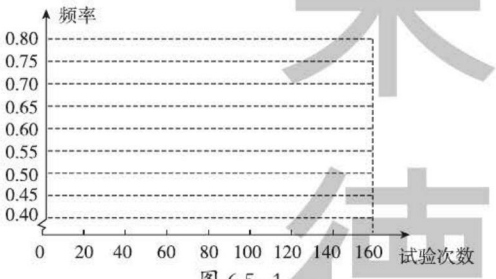


图 6.5–1

（3）如果试验继续进行下去，这个试验的频率将稳定在它的概率附近，请你估计这个概率是多少（结果保留小数点后两位）.

解题秘方：先利用频率的意义完成表格、制作频率分布折线图，再利用频率与概率的关系估计概率.

解：（1）从左向右依次填：18；0.52；0.55

（2）画频率分布折线图如图 6.5–2 所示.

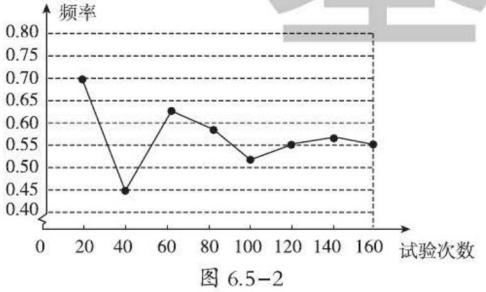


图 6.5–2

（3）随着试验次数的增加，“兵”字面朝上的频率稳定在 0.55 附近，所以估计“兵”字面朝上的概率是 0.55.

详解

“兵”字面朝上的频率 = “兵”字面朝上的次数 ÷ 试验次数. 当试验次数是 40 时，“兵”字面朝上的频率是 0.45，所以“兵”字面朝上的次数是 $40\times0.45=18$；当试验次数是 100 时，“兵”字面朝上的次数是 52，所以“兵”字面朝上的频率是 $52\div100=0.52$；当试验次数是 160 时，“兵”字面朝上的次数是 88，所以“兵”字面朝上的频率是 $88\div160=0.55$.

基础题

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

点方法·拨技巧 提高分

拔尖角度 1 利用频率估计试验对象的个数

例 5 一个不透明的口袋中放有若干个红球和白球，这两种球除了颜色以外没有任何其他区别，将口袋中的球摇匀. 每次从口袋中取出一个球记录颜色后放回再摇匀，经过大量的试验，得到取出红球的频率稳定在$\frac{1}{4}$附近.

（1）估计取出白球的概率是多少？

（2）如果口袋中的白球有18个，那么口袋中的红球约有多少个？

解题秘方：（1）取出红球的概率与取出白球的概率之和为1；（2）列出方程求解.

解：（1）∵经过大量的试验，得到取出红球的频率稳定在$\frac{1}{4}$附近，

∴估计取出红球的概率是$\frac{1}{4}$.

∴估计取出白球的概率为$1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$.

（2）设口袋中的红球有x个. 根据题意，得$\frac{x}{x+18}=\frac{1}{4}$. 解得$x=6$.

∴口袋中的红球约有6个.

挑战·高分

技巧点拨

若一次试验只有两种可能的结果，已知一种结果的概率为a，则另外一种结果的概率为$1-a$（如本题中取出白球的概率是$1-\frac{1}{4}$）；若一次试验有n种可能的结果，它们的概率分别为$m_1, m_2, m_3, \cdots, m_n$，则$m_1+m_2+m_3+\cdots+m_n=1$.

拔尖角度 2 利用频率估计概率解决几何问题

例 6 小红和小明在操场上做游戏，先在地上画了半径为2 m和3 m的同心圆，如图6.5-3①，他们蒙上眼在一定距离外向圆内掷小石子，落在阴影内小红胜，落在小圆内小明胜.

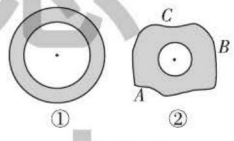


图 6.5-3

（1）你认为游戏公平吗？为什么？

（2）游戏结束后，小明边走边想：“能否用频率估计概率的方法来估算不规则图形的面积呢？”他发现地上有一个不规则的封闭图形ABC，如图6.5-3②，为了知道它的面积，小明在封闭图形内画了一个半径为1 m的圆，在不远处向圆内掷石子，且记录如下：

掷石子次数	50	150	300
石子落在圆内的次数m	14	43	93
石子落在阴影部分的次数n	29	85	186

你能帮小明估计封闭图形的面积吗？

解题秘方：（1）用面积的大小说明游戏的公平性；（2）用试验频数的比估计其面积的比.

挑战·高分

活学巧记

机会不等求概率，
要用频率去估计.
大量试验估定值，
接近常数是概率.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

解：（1）游戏不公平．理由如下：

∵ $S_{小圆}=\pi\times2^2=4\pi\,(m^2)$，$S_{阴影}=\pi\times3^2-\pi\times2^2=5\pi\,(m^2)$，

∴ $S_{阴影}\neq S_{小圆}$．

∴游戏不公平．

（2）能．由统计表看出 m 与 n 的比约为 1 ∶ 2，即 m ∶ $n\approx1$ ∶ 2.

∴圆的面积与封闭图形 ABC 的面积之比约为 1 ∶ 3.

∵圆的面积为 $\pi\times1^2=\pi\,(m^2)$，

∴封闭图形 ABC 的面积约为 $3\pi m^2$.

点中考·拨模拟 得满分

中考探秘

本节的主要考点是用频率估计概率，在近年中考中出现的频率不高，即使出现，难度也不大，主要以填空题和选择题的形式出现．要求准确理解频率和概率的定义，明确频率不能等同于概率，只能用通过大量重复试验得到的频率去估计概率．

三年中考兵法

冲刺·满分

考法 1 利用频率估计概率求试验用具的数量

例 7 ［中考·永州］在一个不透明的盒子中有 n 个球，它们除了颜色之外其他都没有区别，其中含有 3 个红球，每次摸球前，将盒中所有的球摇匀，然后随机摸出一个球，记下颜色后再放回盒中，通过大量重复试验，发现摸到红球的频率稳定在 0.03 附近，那么可以推算出 n 的值大约是_____.

试题评析：本题考查了利用频率估计概率，大量重复试验中频率的稳定值即为概率的估计值．

解：由题意，可得 $\frac{3}{n}=0.03$，解得 $n=100$.

故 n 的值大约是 100.

答案：100

解法提醒

在同样条件下的大量重复试验中，随机事件发生的频率逐渐稳定在概率附近，可以从比例关系入手，列方程求解．

考法 2 利用大量重复试验的频率估计概率

例 8 ［中考·郴州］某瓷砖厂在相同条件下抽取部分瓷砖做耐磨性试验，结果如下表所示：

抽取瓷砖数 n	100	300	400	600	1 000	2 000	3 000
合格品数 m	96	282	382	570	949	1 906	2 850
合格品频率 $\frac{m}{n}$	0.960	0.940	0.955	0.950	0.949	0.953	0.950

则这个瓷砖厂生产的瓷砖是合格品的概率估计值是_____.（精确到 0.01）

方法点拨

利用大量重复试验的频率值估计概率值时，尽可能地选取试验次数多的频率值，此时的频率值最接近概率值．

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

试题评析：本题考查了利用频率估计非等可能事件的概率，大量重复试验是解决此类问题的关键.

解：因为合格品的频率在 0.95 附近上下波动，所以这个瓷砖厂生产的瓷砖是合格品的概率估计值是 0.95.

答案：0.95

考法 3 利用频率与概率的关系说明统计图的信息

例 9 [中考·北京]如图 6.5-4 显示了用计算机模拟随机投掷一枚图钉的试验的结果.

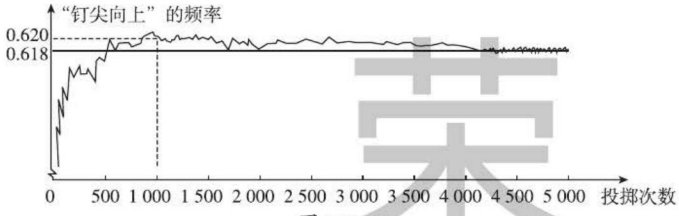


图 6.5-4

下面有三个推断：

①当投掷次数是 500 时，计算机记录“钉尖向上”的次数是 308，所以“钉尖向上”的概率是 0.616；

②随着试验次数的增加，“钉尖向上”的频率总在 0.618 附近摆动，显示出一定的稳定性，可以估计“钉尖向上”的概率是 0.618；

③若再次用计算机模拟试验，则当投掷次数为 1 000 时，“钉尖向上”的频率一定是 0.620.

其中合理的是（　　）

A. ①　　B. ②

C. ①②　　D. ①③

试题评析：本题考查利用频率估计概率，解答本题的关键是明确概率的定义，利用数形结合的思想解答.

解：当投掷次数是 500 时，计算机记录“钉尖向上”的次数是 308，所以此时“钉尖向上”的频率是 $308\div500=0.616$，但“钉尖向上”的概率不一定是 0.616，故①错误；

随着试验次数的增加，“钉尖向上”的频率总在 0.618 附近摆动，显示出一定的稳定性，可以估计“钉尖向上”的概率是 0.618，故②正确；

若再次用计算机模拟试验，则当投掷次数为 1 000 时，“钉尖向上”的频率可能是 0.620，但不一定是 0.620，故③错误.

答案：B

易错警示

不能利用多次试验得到的频率的平均值估计概率.

解法提醒

利用数形结合的思想判别三个推断是否合理.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

1. 一个不透明的盒子中有白色乒乓球8个和黄色乒乓球若干个，为求得盒中黄色乒乓球的个数，某同学进行了如下试验：每次摸出一个乒乓球后记下它的颜色并放回，如此重复360次，摸出白色乒乓球90次，则估计黄色乒乓球的个数为(　　)

A. 90　　B. 24　　C. 70　　D. 32

2. 要在一个不透明的口袋中装入若干个除颜色外其他特点完全相同的球，使得从袋中任意摸一个球，摸到红球的概率为$\frac{1}{5}$，四位同学分别采用了下列装法，你认为他们中装错的是(　　)

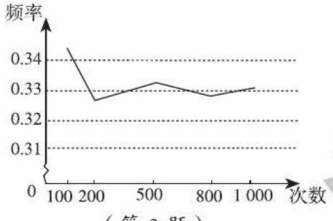
A. 装入2个红球，5个白球，1个黄球，1个蓝球，1个黑球

B. 装入1个红球，1个白球，1个黄球，1个蓝球，1个黑球

C. 装入5个红球，13个白球，2个黑球

D. 装入7个红球，13个白球，2个黑球，13个黄球

3. [中考·呼和浩特]某学习小组做“用频率估计概率”的试验时，统计了某一结果出现的频率，绘制了如图所示的折线统计图，则符合这一结果的试验最有可能的是(　　)



(第3题)

A. 袋中装有大小和质地都相同的3个红球和2个黄球，从中随机取一个，取到红球

B. 掷一枚质地均匀的正六面体骰子，向上的面的点数是偶数

C. 先后两次掷一枚质地均匀的硬币，两次都出现反面

D. 先后两次掷一枚质地均匀的正六面体骰子，两次向上的面的点数之和是7或超过9

4. 不透明的袋中装有3个小球(除颜色外均相同)，其中2个为白色球，另一个为红色球，每次从袋中摸出一个球，记下颜色后放回搅匀再摸，研究恰好摸出红色球的概率，以下替代试验方法不可行的是(　　)

A. 用6张相同的卡片，其中4张分别写上“白”，另外2张分别写上“红”，然后反复抽取

B. 用3张相同的卡片，分别写上“白”“白”“红”，然后反复抽取

C. 用一枚硬币，正面表示“白”，反面表示“红”，然后反复抛掷

D. 用一个转盘，盘面分白、红两种颜色，其中白色盘面的面积为红色的2倍，然后反复转动

5. [中考·柳州]柳州市某校的生物兴趣小组在老师的指导下进行了多项有意义的生物研究并取得成果. 下面是这个兴趣小组在相同的试验条件下，对某种植物种子发芽率进行研究时所得到的数据：

种子数 n	30	75	130	210	480	856	1 250	2 300
发芽数 m	28	72	125	200	457	814	1 187	2 185
发芽频率 $\frac{m}{n}$	0.933 3	0.960 0	0.961 5	0.952 4	0.952 1	0.950 9	0.949 6	0.950 0

依据上面的数据可以估计，这种植物种子在该试验条件下发芽的概率约是_____.(结果精确到0.01).

6. [中考·锦州]如图，这是一幅长为3 m，宽为2 m的长方形世界杯宣传画，为测量宣传画上世界杯图案的面积，现将宣传画平铺在地上，向长方形宣传画内随机投掷骰子(假设骰子落在长方形内的每一点都是等可能的)，经过大量重复投掷试验，发现骰子落在世界杯图案中的频率稳定在常数0.4附近，由此可估计宣传画上世界杯图案的面积约为_____m^2.


(第6题)

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

7. [中考·宁夏]为了解学生的体能情况，随机选取了1 000名学生进行调查，并记录了他们对长跑、短跑、跳绳、跳远四个项目的喜欢情况，整理成以下统计表，其中“√”表示喜欢，“×”表示不喜欢.

项目 / 学生人数	长跑	短跑	跳绳	跳远
200	√	×	√	√
300	×	√	×	√
150	√	√	√	×
200	√	×	√	×
150	√	×	×	×

（1）估计学生同时喜欢短跑和跳绳的概率；

（2）估计学生在长跑、短跑、跳绳、跳远中同时喜欢三个项目的概率；

（3）如果学生喜欢长跑，则该学生同时喜欢短跑、跳绳、跳远中哪项的可能性最大？

8. 为了研究“投掷一枚图钉，钉尖朝上”的概率，两个小组用同一枚图钉做试验进行比较，他们的统计数据如下表：

掷图钉的次数		50	100	200	300	400
钉尖朝上的次数	第一小组	23	39	79	121	160
	第二小组	24	41	81	124	164

（1）请你估计第一小组和第二小组所得的概率分别是多少？

（2）你能确定哪个小组的结果更准确吗？为什么？

荣德基

错题笔记

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

6.6 简单的概率计算

核心知识
- 概率公式
- 概率的大小
- 用列举法求概率

知识链接

概率
- 确定事件概率
  - 必然事件概率为 1
  - 不可能事件概率为 0
- 随机事件概率：$0 < P(E) < 1$

点知识·拨考向 速提分

点知识 1 概率公式

概率公式 一般地，在一次试验中，如果共有有限个可能发生的结果，并且每种结果发生的可能性都相等，用 m 表示一个指定事件 E 包含的结果数，n 表示试验可能出现的所有结果的总数，那么事件 E 发生的概率可利用公式 $P(E)=\frac{m}{n}$ 计算.

提分·必记

特别提醒

用概率公式计算概率的试验有以下特点：
- 可能出现的结果是有限个；
- 各种结果发生的可能性相等.

拔考向 利用概率的有关概念解概率问题

题型 1 概率的定义在解释所给说法意义中的应用

例 1 [中考·阿坝]对“某市明天下雨的概率是 75%”这句话，理解正确的是（　　）

A. 某市明天将有 75% 的时间下雨

B. 某市明天将有 75% 的地区下雨

C. 某市明天一定下雨

D. 某市明天下雨的可能性较大

概率的意义

解题秘方：紧扣概率的定义判断即可.

解：“某市明天下雨的概率是 75%”说明某市明天下雨的可能性较大.

答案：D

提分·秘诀

特别提醒

概率是反映事件发生可能性大小的概念，只表示发生的可能性大小，可能性大也不一定发生，可能性小也有可能发生.

题型 2 概率公式在求事件发生概率中的应用

例 2 在一个不透明的口袋中装有 6 个红球、9 个黄球和 3 个绿球，这些球除颜色外没有其他区别，现从中任意摸出一个球.

（1）计算摸到绿球的概率；

（2）如果要使摸到绿球的概率为 $\frac{1}{4}$，那么需要在这个口袋中再放入多少个绿球？

解题秘方：紧扣概率等于所求事件包含的结果数与所有可能的结果数的比进行计算即可.

解：（1）$P(\text{摸到绿球})=\frac{3}{6+9+3}=\frac{3}{18}=\frac{1}{6}$.

解法提醒

利用公式 $P(E)=\frac{m}{n}$ 求概率的方法：利用公式 $P(E)=\frac{m}{n}$ 直接计算概率需要满足两个条件：(1)所有可能出现的结果是有限多个；(2)每种结果出现的可能性相同.求等可能事件的概率时，首先求出所有可能的结

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

（2）设需要在这个口袋中再放入 x 个绿球，则 $\frac{3+x}{18+x}=\frac{1}{4}$，解得 $x=2$.

所以需要在这个口袋中再放入 2 个绿球.

知识点 2 概率的取值范围

1. 在公式 $P(E)=\frac{m}{n}$ 中，n 表示在一次试验中共有 n 种等可能的结果，m 表示事件 E 包含的可能结果有 m 种，由此可知 m、n 的大小关系为 $m \leqslant n$，所以 $0 \leqslant \frac{m}{n} \leqslant 1$.

2. **三种事件的概率** （1）当事件 E 是必然事件时，$P(E)=1$；

（2）当事件 E 是不可能事件时，$P(E)=0$；

（3）当事件 E 为随机事件时，$P(E)$ 在 0 和 1 之间.

3. **概率的取值范围** 任何事件 E 发生的概率 $P(E)$ 都是 0 和 1 之间（包括 0 和 1）的数，即 $0 \leqslant P(E) \leqslant 1$.

核心考向 利用概率的意义辨析概率的取值问题

例 3 下列说法中错误的是（　　）

A. 概率很小的事件不可能发生

B. 不可能事件发生的概率为 0

C. 随机事件发生的概率大于 0 且小于 1

D. 必然事件发生的概率为 1

解题秘方：利用概率的意义结合概率的取值范围逐项分析即可.

解：A. 概率很小的事件发生的可能性小，但依然可能发生，此选项错误；

B. 不可能事件发生的概率为 0，此选项正确；

C. 随机事件发生的概率大于 0 且小于 1，此选项正确；

D. 必然事件发生的概率为 1，此选项正确.

答案：A

知识点 3 用列举法求概率

1. 在一次试验中，如果可能出现的结果是有限多个，且各种结果出现的可能性大小相等，那么我们可以通过列举试验结果的方法，求出随机事件发生的概率.

2. **用列举法求概率的前提条件**

（1）所有可能出现的结果是有限多个；

（2）每个结果出现的可能性相等.

核心考向 利用列举法求多元素的等可能事件的概率

例 4 小颖为班级联欢会设计了一个“配紫色”游戏：如图 6.6-1 是两个可以自由转动的转盘，每个转盘被分成了面积相等的三个扇形. 游戏者同时转动两个转盘，

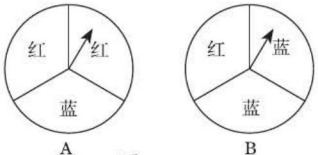


图 6.6-1

果数 n 和所求事件 E 包含的结果数 m，再运用概率公式 $P(E)=\frac{m}{n}$ 计算出所求事件发生的概率.

提分·必记

特别提醒

事件发生的可能性越大，它的概率越接近 1；事件发生的可能性越小，它的概率越接近 0.

提分·秘诀

技巧点拨

任何随机事件都有可能发生，不受概率的大小影响. 概率大的事件发生的可能性大，概率小的事件发生的可能性小.

提分·必记

特别提醒

- 列举试验的结果时，要有一定的顺序性；
- 列举要做到不重复不遗漏.

提分·秘诀

方法点拨

对于含有两个或两个以上元素的事件，无法直接看出事件发生的结果数和总事件

宋德基

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

如果一个转盘转出了红色，另一个转盘转出了蓝色，那么他就赢了（红色与蓝色能配成紫色）．求游戏者获胜的概率是多少？

解：∵每个转盘被分成了面积相等的三个扇形，∴每个转盘中转到每个扇形的可能性相等．将所有可能出现的结果（A 盘在前，B 盘在后）列举如下：

（红，红），（红，蓝），（红，蓝），（红，红），（红，蓝），（红，蓝），（蓝，红），（蓝，蓝），（蓝，蓝）．

共有 9 种结果，每种结果出现的可能性相同，其中有 5 种结果能配成紫色，即（红，蓝），（红，蓝），（红，蓝），（红，蓝），（蓝，红）．所以游戏者获胜的概率 $P=\frac{5}{9}$．

数时，通常用列举法求概率．

点方法·拨技巧 提高分

拔尖角度▸ 1 利用概率公式解实际问题

挑战·高分

例 5 元旦将至，某商场为了吸引顾客，设计了可以自由转动的转盘（如图 6.6-2 所示，转盘被等分为 20 份），并规定：顾客每购买 200 元的商品，就能获得一次转动转盘的机会，如果转盘停止后，指针正好对准红色、黄色、绿色区域（若指针停在分隔线处，则表示指向分隔线右边的区域），那么顾客就可以分别获得 200 元、100 元、50 元的购物券，可以在该商场继续购物，若某顾客购物 300 元，获得了一次转动转盘的机会．



图 6.6-2

（1）求他此时获得购物券的概率；

（2）他获得哪种购物券的概率最大？请说明理由．

解题秘方：（1）利用概率公式求解即可；（2）利用概率的大小说明即可．

解：（1）转动一次转盘，共有 20 种等可能的结果，其中能获得购物券的结果有 10 种，所以他此时获得购物券的概率是 $\frac{10}{20}=\frac{1}{2}$．

（2）他获得 50 元购物券的概率最大．

理由：因为 P（获得 200 元购物券）$=\frac{1}{20}$，P（获得 100 元购物券）$=\frac{3}{20}$，P（获得 50 元购物券）$=\frac{6}{20}=\frac{3}{10}$，$\frac{3}{10}>\frac{3}{20}>\frac{1}{20}$，所以他获得 50 元购物券的概率最大．

解法提醒

此类转转盘的问题，可以根据转盘被等分成 n 份得出共有 n 种等可能的结果，也可以从圆心角的度数考虑：指针指向某种颜色的概率和这种颜色所对应的圆心角度数成正比，如图 6.6-3 所示，指针指向阴影区域的概率是 $\frac{120}{360}=\frac{1}{3}$．

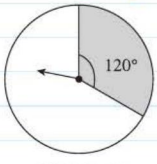


图 6.6-3

详解

P（获得 200 元购物券）$=P$（指针指向红色区域）$=\frac{\text{红色区域的份数}}{\text{总份数}}=\frac{1}{20}$．

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

拔尖角度▸ 2 利用概率公式解决几何图形中的概率问题

例 6 [模拟·潍坊]如图 6.6-4，在菱形 $ABCD$ 中，$\angle B=45°$，以点 A 为圆心的扇形与 BC，CD 相切．向这样一个靶子上随意抛一枚飞镖，则飞镖插在阴影区域的概率是（　　）

A. $1-\frac{3\sqrt{2}\pi}{16}$　　B. $\sqrt{2}-\frac{3\pi}{8}$　　C. $1-\frac{3\pi}{8}$　　D. $\frac{3\pi}{8}$

解题秘方：如图 6.6-5，设以点 A 为圆心的扇形与 BC 相切于 E，连接 AE．根据切线的性质得到 $AE\perp BC$，然后根据 $AE=BE=\frac{\sqrt{2}}{2}AB$ 及概率公式即可得到结果．

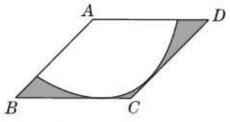


图 6.6-4

解：如图 6.6-5，设以点 A 为圆心的扇形与 BC 相切于 E，连接 AE，则 $AE\perp BC$．

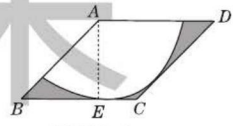


图 6.6-5

$\because \angle B=45°$，

$\therefore AE=BE=\frac{\sqrt{2}}{2}AB$，$\angle BAD=135°$，

$\therefore S_{菱形ABCD}=BC\cdot AE=\frac{\sqrt{2}}{2}AB^2$，

$\therefore S_{阴影}=\frac{\sqrt{2}}{2}AB^2-\frac{135\pi\times\left(\frac{\sqrt{2}}{2}AB\right)^2}{360}=\frac{8\sqrt{2}-3\pi}{16}AB^2$，

$\therefore P(飞镖插在阴影区域)=\frac{S_{阴影}}{S_{菱形ABCD}}=1-\frac{3\sqrt{2}\pi}{16}$．

答案：A

拔尖角度▸ 3 利用概率公式设计游戏规则

例 7 在一个不透明的袋子中，装有除颜色不同外其他都相同的 5 个红球和 3 个蓝球．从袋子中随机摸出一个球，如果是红球，那么甲获胜，如果是蓝球，那么乙获胜．甲、乙两人获胜的概率相等吗？若相等，说明理由；若不相等，分别求出甲、乙获胜的概率，并设计一个使两人获胜的概率相等的游戏规则．

解题秘方：紧扣概率公式 $P(E)=\frac{m}{n}$ 解题即可．

挑战·高分

解法提醒

向一个几何图形中抛飞镖，飞镖插在几何图形的任何位置的可能性相等，此时所求飞镖插在阴影区域的概率等于阴影部分的面积与图形总面积的比．

挑战·高分

解法提醒

设计游戏规则的应用问题，实质是按实际要求，改变概率的大小问题，根据概率公式 $P(E)=\frac{m}{n}$，改变其大小的方法有两种：一是改变除事件 E 外的其他事件的可能结果数，从而改

基德莱

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

解：甲、乙两人获胜的概率不相等，甲获胜的概率是$\frac{5}{8}$，乙获胜的概率是$\frac{3}{8}$.

游戏规则：先从袋子中拿出2个红球，再进行题目中的摸球试验即可.（游戏规则不唯一，合理即可）

变n的值；二是改变事件E的可能结果数m.

拔尖角度▸ 4 利用概率公式解决几何概率的变形问题

挑战·高分

例8 一根长10 m的绳子任意堆放在地上，如果随机地剪成两段，则每段的长度不小于3 m的概率是多少？

技巧点拨

此类比较抽象的概率问题，常借助几何图形来分析，把抽象的数学问题转化为具象的几何问题.

解题秘方：把绳子看成一条10 m长的线段，并将这条线段平均分成10份，然后根据概率公式求解.

解：如图6.6-6，将10 m长的绳子看成一条线段，并将这条线段平均分为10份，则每份长1 m.



图6.6-6

其中AD段长度为3 m，HN段长度为3 m，

∴当剪开的地方在DH段上时，满足要求.

∴随机地剪成两段，则每段的长度不小于3 m的概率$P=\frac{4}{10}=\frac{2}{5}$.

点中考·拨模拟 得满分

中考探秘

概率与日常生活的联系非常紧密.近年的中考试题中，有关概率问题的考查逐步增多，以识别事件的类型和计算随机事件发生的概率为主，多以选择题和填空题的形式出现，难度不大.另外，概率知识经常和方程、不等式、函数、几何等知识综合在一起考查.

三年中考兵法

冲刺·满分

考法1 利用概率公式解与方程的综合问题

解法提醒

已知摸出黄色乒乓球的概率，设出黄色乒乓球的个数，利用公式$P(E)=\frac{m}{n}$列方程求解.

例9 [中考·成都]在一个不透明的盒子中，装有除颜色外完全相同的乒乓球共16个，从中随机摸出一个乒乓球，若摸到黄色乒乓球的概率是$\frac{3}{8}$，则该盒子中装有黄色乒乓球的个数是_____.

试题评析：本题主要考查了概率公式的应用，利用概率公式列出方程是解题的关键.

解：设盒子中装有x个黄色乒乓球，根据题意，得$\frac{x}{16}=\frac{3}{8}$.解得$x=6$.

答案：6

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

考法 2 利用概率公式解决路口信号灯问题

例 10 [中考·聊城]某十字路口设有交通信号灯，东西向信号灯的开启规律如下：红灯开启 30 秒后关闭，紧接着绿灯开启 42 秒后关闭，再紧接着黄灯开启 3 秒，按此规律循环下去. 如果不考虑其他因素，当一辆汽车沿东西方向随机地行驶到该路口时，遇到红灯的概率是_____.

试题评析：本题考查概率的求法，直接利用概率公式求解即可.

解：∵红灯亮 30 秒，绿灯亮 42 秒，黄灯亮 3 秒，

$$\therefore P(\text{遇到红灯})=\frac{30}{30+42+3}=\frac{2}{5}.$$

答案：$\frac{2}{5}$

考法 3 利用概率公式解与统计有关的综合问题

例 11 [中考·河北]某编号为 1~5 号的 5 名学生进行定点投篮，规定每人投 5 次，每命中 1 次记 1 分，没有命中记 0 分，如图 6.6-7 是根据他们各自的累积得分绘制的条形统计图，之后来的第 6 号学生也按同样记分规定投了 5 次，其命中率为 40%.

(1) 求第 6 号学生的积分，并将图 6.6-7 改为这 6 名学生积分的条形统计图；

(2) 在这 6 名学生中，随机选一名学生，求选上命中率高于 50% 的学生的概率；

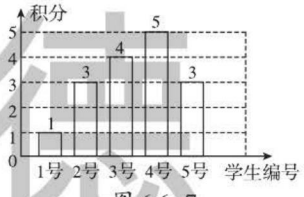


图 6.6-7

(3) 最后，又来了第 7 号学生，也按同样记分规定投了 5 次，这时 7 名学生积分的众数仍是前 6 名学生积分的众数，求这个众数，以及第 7 号学生的积分.

试题评析：本题主要考查众数的定义和条形统计图及概率公式，熟练掌握概率公式的计算和众数的定义是解题的关键.

解：(1) 第 6 号学生命中的次数为 $5\times40\%=2$，则第 6 号学生的积分为 2 分. 补全条形统计图如图 6.6-8 所示.

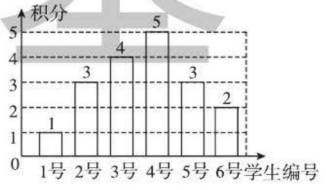


图 6.6-8

(2) 这 6 名学生中，命中率高于 50% 的有 2 号、3 号、4 号和 5 号这 4 名学生，

$\therefore$ 选上命中率高于 50% 的学生的概率 $P=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$.

(3) ∵前 6 名学生积分的众数为 3 分，

$\therefore$ 第 7 号学生的积分为 3 分或 0 分.

解法提醒

根据概率公式求解，找准两点：

- 全部情况的总数；
- 符合条件的情况数目.

二者的比值就是其发生的概率.

方法点拨

1. 由第 6 号学生命中的次数为 $5\times40\%=2$ 可得答案，并补全条形统计图.
2. 由这 6 名学生中，命中率高于 50% 的有 2 号、3 号、4 号和 5 号这 4 名学生，然后根据概率公式可得.
3. 根据众数的定义得出前 6 名学生积分的众数即可.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

1. 下列说法不正确的是（　　）

A. 必然事件发生的概率是1

B. 随机事件发生的概率是0.5

C. 概率很小的事件也可能发生

D. 投掷一枚质地均匀的硬币1 000次，正面朝上的次数可能是500

2. [中考·杭州]一个两位数，它的十位数字是3，个位数字是抛掷一枚质地均匀的骰子（六个面分别标有数字1~6）朝上一面的数字，任意抛掷这枚骰子一次，得到的两位数是3的倍数的概率等于（　　）

A. $\frac{1}{6}$　　B. $\frac{1}{3}$　　C. $\frac{1}{2}$　　D. $\frac{2}{3}$

3. [中考·海南]某路口的交通信号灯每分钟红灯亮30秒，绿灯亮25秒，黄灯亮5秒，当小明到达该路口时，遇到绿灯的概率是（　　）

A. $\frac{1}{2}$　　B. $\frac{3}{4}$　　C. $\frac{1}{12}$　　D. $\frac{5}{12}$

4. [中考·齐齐哈尔]在一个不透明的口袋中，装有一些除颜色外完全相同的红、白、黑三种颜色的小球．已知袋中有红球5个，白球23个，且从袋中随机摸出一个红球的概率是$\frac{1}{10}$，则袋中黑球的个数为（　　）

A. 27　　B. 23　　C. 22　　D. 18

5. [模拟·高密]从长为3，5，7，10的四条线段中任意选取三条作为边，能构成三角形的概率是（　　）

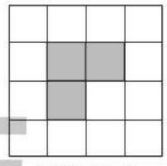
A. $\frac{1}{4}$　　B. $\frac{1}{2}$　　C. $\frac{3}{4}$　　D. 1

6. 某公司的班车分别在7:30，8:30发车，小明在7:50至8:30之间到达发车站乘坐班车，且到达发车站的时刻是随机的，则他等车时间不超过15分钟的概率是（　　）

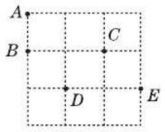
A. $\frac{1}{3}$　　B. $\frac{3}{8}$　　C. $\frac{2}{3}$　　D. $\frac{5}{8}$

7. 如图，在4×4的正方形网格中，黑色部分的图形构成一个轴对称图形，现在任意选取一个白色的小正方形并涂黑，使黑色部分的图形仍然构成一个轴对称图形的概率是（　　）

A. $\frac{6}{13}$　　B. $\frac{5}{13}$　　C. $\frac{4}{13}$　　D. $\frac{3}{13}$



（第7题）



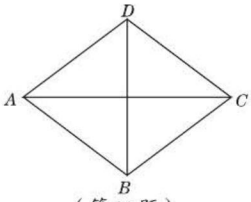
（第9题）

8. [模拟·临清]一个质地均匀的小正方体，6个面上分别标有数字1，1，2，4，5，5，若随机投掷一次小正方体，则朝上一面的数字是5的概率为_____.

9. 如图，在3×3的方格纸中，点A，B，C，D，E分别位于格点上．从A，D，E三点中任取一点，以所取的这一点与B，C为顶点画三角形，则所画三角形是直角三角形的概率是_____.

10. [模拟·冠县]“五一”期间，某商场开展购物抽奖活动．抽奖箱内有标号分别为1，2，3，4四个质地、大小相同的小球，顾客从中任意摸出一个球，然后放回，摇匀后再摸出一个球．如果两次摸出的球的标号之和为“8”得一等奖，那么顾客抽出一等奖的概率是_____.

11. [模拟·阳谷县]如图，在菱形$ABCD$中，对角线AC=8 cm，BD=6 cm，在菱形内部（包括边上）任取一点P，得到△ACP并涂成黑色，使黑色部分的面积大于6 cm^{2}的概率为_____.



（第11题）

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

12. [中考·眉山]一个不透明的口袋中放有290个涂有红、黑、白三种颜色的质地相同的小球，若红球比黑球的2倍多40个，从袋中任取一个球是白球的概率是$\frac{1}{29}$.

（1）求袋中红球的个数；

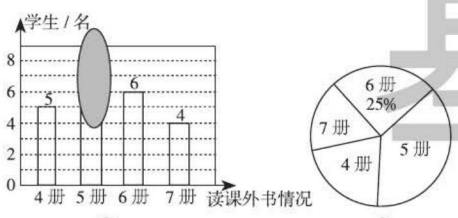
（2）求从袋中任取一个球是黑球的概率.

13. [中考·河北]老师随机抽查了本学期学生读课外书册数的情况，绘制成条形统计图（如图①）和不完整的扇形统计图（如图②），其中条形统计图被墨迹遮盖了一部分.

（1）求条形统计图中被遮盖的数，并写出册数的中位数；

（2）在所抽查的学生中随机选一人谈读书感想，求选中读课外书超过5册的学生的概率；

（3）随后又补查了另外几名学生，得知最少的读了6册，将其与之前的数据合并后，发现册数的中位数没改变，则最多补查了_____名.



（第13题）

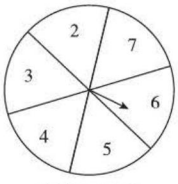
14. 如图，现有一个均匀的转盘被平均分成6等份，分别标有数字2，3，4，5，6，7，转动转盘.当转盘停止时，指针指向的数字即为转出的数字（若指针指向分界线处，则重转，直至指针指向数字为止）.

（1）转动转盘，转出的数字大于3的概率是多少？

（2）现有两张分别写有3和4的卡片，要随机转动转盘，转盘停止后记下转出的数字，与两张卡片上的数字分别作为三条线段的长度.

①这三条线段能构成三角形的概率是多少？

②这三条线段能构成等腰三角形的概率是多少？



（第14题）

错题笔记

荣德基

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

6.7 利用画树状图和列表计算概率



点知识·拨考向 速提分

点知识 1 列表法

1. 列表法求概率 是用表格的形式反映事件发生的各种结果出现的次数和方式，以及某一事件发生的次数和方式，并求出概率的方法.

2. 适用条件 当一次试验涉及两个因素，（1）同时进行两种相同的操作；（2）先后进行两次相同的操作，即两步试验.并且可能出现的等可能结果数目较多时，为不重不漏地列出所有可能的结果，常采用列表法.

3. 具体步骤

（1）选其中的一次操作（或一个条件）为横行，另一次操作（或另一个条件）为纵列，列出表格.

（2）运用概率公式 $P(E)=\frac{m}{n}$ 计算概率.

注意 在运用列表法分析随机事件发生的概率时，数据或事件的顺序不能混淆，如（1，2）与（2，1）不是相同的事件.

拔考向 利用列表法求概率

题型1 同时进行两种操作在求概率中的应用

例1 甲、乙两个不透明的口袋，甲口袋中装有三个分别标有数字1，2，3的小球，乙口袋中装有两个分别标有数字4，5的小球，除数字不同外，小球没有任何区别.先随机从甲口袋中摸出一个小球，将球上的数字作为点的横坐标记为 x；再随机从乙口袋中摸出一个小球，将球上的数字作为点的纵坐标记为 y.

（1）试用列表的方法，表示出点（x，y）所有可能出现的结果.

（2）求点（x，y）落在直线 $y=-x+6$ 上的概率.

解题秘方：（1）首先根据题意列表，然后由表格可得所有可能的结果.

（2）找出落在直线 $y=-x+6$ 上的结果数，然后根据概率公式求解.

解：（1）列表如下：

提分·必记

特别提醒

1. 列表法适用于求两步试验的概率，利用表格列出所有可能的结果.
2. 列表法不适用于求三步及三步以上试验的概率.
3. 列表法适用的条件还可以理解为各种结果出现的可能性相等，含有两次操作（如掷一枚骰子两次）或两个条件（如两个转盘）的事件.

提分·秘诀

技巧点拨

- 对于两步试验（两个条件或两次操作）且可能出现的结果比较多时，用直接列举法易出错，为了不重不漏地列出所有可能的结果，用列表法较好.
- 用列表法求概率的步骤：①列表；②通过表格计数，确定所有等可能的结果数 n 和某事件 E 的结果数 m 的值；③利用概率公式

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

x \ y	4	5
1	(1, 4)	(1, 5)
2	(2, 4)	(2, 5)
3	(3, 4)	(3, 5)

由上表知，点 (x, y) 共有 6 种等可能的结果.

(2) 落在直线 $y=-x+6$ 上的有 (1, 5)，(2, 4) 这 2 种可能，

$\therefore$ 点 (x, y) 落在直线 $y=-x+6$ 上的概率为 $\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$.

题型 2　放回与不放回的两次操作在求概率中的应用

例 2　袋中有大小相同、标号不同的白球 2 个，黑球 2 个.

(1) 从袋中取出 1 个球后不放回，再取出 1 个球，取出的 2 个球中有 1 个白球，1 个黑球的概率是多少?

(2) 从袋中有放回地取出 2 个球的顺序为黑、白的概率是多少?

解题秘方：紧扣放回两次操作相同，不放回两次操作不相同，反映在列表中的实质就是舍不舍去表格中一条对角线上的所有结果来进行求概率.

解：(1) 根据题意列表如下：

第一次 \ 第二次	白$_1$	白$_2$	黑$_1$	黑$_2$
白$_1$	—	白$_2$白$_1$	黑$_1$白$_1$	黑$_2$白$_1$
白$_2$	白$_1$白$_2$	—	黑$_1$白$_2$	黑$_2$白$_2$
黑$_1$	白$_1$黑$_1$	白$_2$黑$_1$	—	黑$_2$黑$_1$
黑$_2$	白$_1$黑$_2$	白$_2$黑$_2$	黑$_1$黑$_2$	—

共有 12 种等可能情况，符合题意的有 8 种，故有 1 个白球，1 个黑球的概率 $P=\frac{8}{12}=\frac{2}{3}$.

(2) 根据题意列表如下：

第一次 \ 第二次	白$_1$	白$_2$	黑$_1$	黑$_2$
白$_1$	白$_1$白$_1$	白$_2$白$_1$	黑$_1$白$_1$	黑$_2$白$_1$
白$_2$	白$_1$白$_2$	白$_2$白$_2$	黑$_1$白$_2$	黑$_2$白$_2$
黑$_1$	白$_1$黑$_1$	白$_2$黑$_1$	黑$_1$黑$_1$	黑$_2$黑$_1$
黑$_2$	白$_1$黑$_2$	白$_2$黑$_2$	黑$_1$黑$_2$	黑$_2$黑$_2$

共有 16 种等可能情况，符合条件的有 4 种，故取球顺序为黑、白的概率 $P=\frac{4}{16}=\frac{1}{4}$.

$P(E)=\frac{m}{n}$ 计算出事件 E 发生的概率.

特别提醒

- 对于两次操作事件的概率，如抽取牌，放回和不放回，其概率是有区别的，如第一次抽出不放回，则第二次就不能抽取第一次抽出的牌了，实质上反映在表格上就是去掉表格中一条对角线上的所有结果.
- 顺序：顺序不同，结果也不同，如(2)中黑、白顺序的概率为 $\frac{1}{4}$，但一黑一白的概率为 $\frac{8}{16}=\frac{1}{2}$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

点知识▶ 2 画树状图法

1. 画树状图法求概率 是用树状图的形式反映事件发生的各种情况出现的次数和方式，以及某一事件发生的次数和方式，并求出概率的方法.

2. 画树状图法的应用

当一次试验涉及三个或更多的因素时，列表就不方便了，为不重不漏地列出所有可能的结果，通常采用画树状图法来求事件发生的概率.

用树状图列举出的结果看起来一目了然，当事件要经过多个步骤（三步或三步以上）完成时，用画树状图法求事件的概率很有效.

画树状图和计算的方法如图 6.7−1.

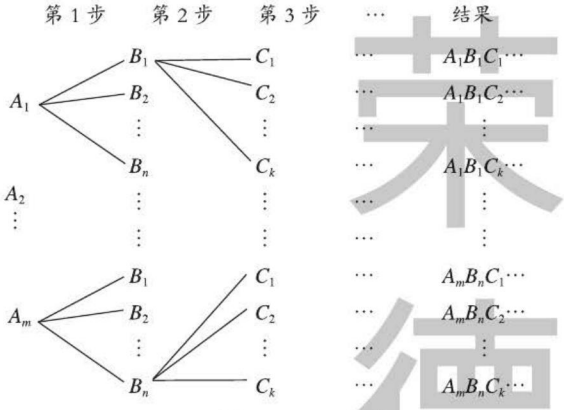


图 6.7−1

故共有 $mnk\cdots$ 种可能情况，再分别计算各类情况发生的概率.

拔考向▶ 利用画树状图法求概率

例 3 十一期间，小明、小亮和小贝三人一起去北京旅游，三人选择的景点有故宫、天坛、长城和颐和园，但每人分别去的景点不同.

（1）用画树状图的方法求出三人共有多少种旅游方式.

（2）小明游览故宫，小贝游览颐和园的概率是多少？

解：记故宫、天坛、长城和颐和园为 A，B，C，D，画树状图如图 6.7−2：

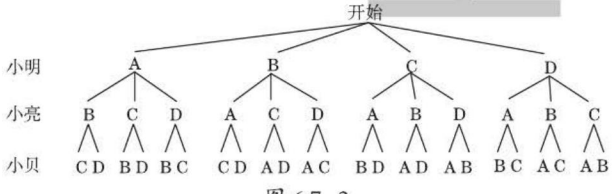


图 6.7−2

由上图知，三人共有 24 种旅游方式.

（2）由（1）知，小明游览故宫，小贝游览颐和园的旅游方式共有 2 种，

则 P（小明游览故宫，小贝游览颐和园）$=\dfrac{2}{24}=\dfrac{1}{12}$.

提分·必记

特别提醒

- 用列表法或画树状图法求事件的概率时，应注意各种情况出现的可能性必须相等.
- 当试验包含两步时，用列表法比较方便，当然此时也可用画树状图法. 当试验在三步或三步以上时用画树状图法比较方便，此时不宜列表.

提分·秘诀

特别提醒

利用树状图分析问题，可以帮助我们避免重复和遗漏，画图的过程也是模拟试验的过程，展现各种事件发生的可能性，画树状图法是求简单随机事件发生的概率的一种重要方法.

基础 素德

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

点方法·拨技巧 提高分

拔尖角度▸ 1 利用概率设计游戏规则

例 4 如图 6.7–3 所示，有 A，B 两个可以自由转动的均匀转盘，转盘 A 被均匀地分成了 4 份，每份分别标上 1，2，3，4 四个数；转盘 B 被均匀地分成了 6 份，每份分别标上 1，2，3，4，5，6 六个数，有人为甲、乙两人设计了一个游戏，游戏规则如下：

（1）同时自由转动转盘 A 与 B.

（2）转盘停止后，指针各指向一个数（如果指针恰好指在分界线上，那么重转一次，直到指针指向某一数为止），把所指的两个数相乘，若得到的积为偶数，则甲胜；若得到的积为奇数，则乙胜.

你认为这样的游戏规则是否公平？若公平，请说明理由；若不公平，请你设计一个公平的游戏规则，并说明理由.

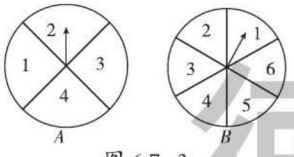


图 6.7–3

解题秘方：紧扣“游戏的公平性由他们获胜的概率的大小决定”来进行解答.

解：列表如下：

A \ B	1	2	3	4	5	6
1	(1, 1)	(1, 2)	(1, 3)	(1, 4)	(1, 5)	(1, 6)
2	(2, 1)	(2, 2)	(2, 3)	(2, 4)	(2, 5)	(2, 6)
3	(3, 1)	(3, 2)	(3, 3)	(3, 4)	(3, 5)	(3, 6)
4	(4, 1)	(4, 2)	(4, 3)	(4, 4)	(4, 5)	(4, 6)

$\therefore P(\text{积为偶数}) = \dfrac{18}{24} = \dfrac{3}{4}$,

$P(\text{积为奇数}) = \dfrac{6}{24} = \dfrac{1}{4}$.

又 $\dfrac{1}{4} \neq \dfrac{3}{4}$，$\therefore$ 游戏规则不公平.

新游戏规则：把所得的两个数相加，若和为偶数，则甲胜；若和为奇数，则乙胜（答案不唯一，只要公平，合理即可）.

方法点拨：判断游戏是否公平应先求出游戏双方各自取胜的概率，若概率相等，则游戏公平；若概率不相等，则游戏不公平.

挑战·高分

另解

也可以利用画树状图列出所有结果，如图 6.7–4.

可知所有等可能结果共有 24 种，所指两数积为偶数有 18 种，所指两数积为奇数有 6 种.

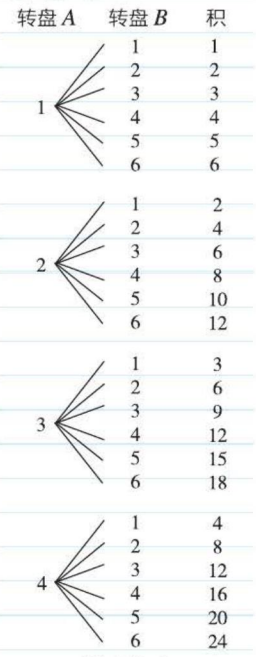


图 6.7–4

答案详解

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

拔尖角度▸ 2 利用概率解与方程有关的综合问题

挑战·高分

例 5 甲、乙两人在玩摸球游戏时，在 A、B 两个袋子中分别放有 4 个小球和 3 个小球，每个小球的形状、大小、质量均相同. A 袋子中的 4 个小球的标号分别为 1，2，3，4；B 袋子中 3 个小球的标号分别为 2，3，4. 游戏规则：甲在 A 袋子中摸一个球，并记下标号；乙在 B 袋子中摸一个球，并记下标号.

（1）请用树状图或列表法列出所有可能的结果.

（2）若甲、乙两人所摸球的两个标号都是方程 $x^2-5x+6=0$ 的解时，则甲获胜；若甲、乙两人所摸球的两个标号都不是方程 $x^2-5x+6=0$ 的解时，则乙获胜，问他们两人谁获胜的概率大？请分析说明.

方法点拨

解概率与方程的综合问题时，一般先利用列表法或画树状图法表示出所有等可能的结果数，再结合方程的限制条件，求出有关概率.

解题秘方：（1）首先根据题意列表或画出树状图，然后由表格或树状图求得所有等可能的结果.（2）首先求得方程 $x^2-5x+6=0$ 的解，由概率公式即可求得甲获胜与乙获胜的概率，继而求得他们两人谁获胜的概率大.

解：（1）列表如下：

B \ A	1	2	3	4
2	(1, 2)	(2, 2)	(3, 2)	(4, 2)
3	(1, 3)	(2, 3)	(3, 3)	(4, 3)
4	(1, 4)	(2, 4)	(3, 4)	(4, 4)

另解

画树状图如图 6.7–5.

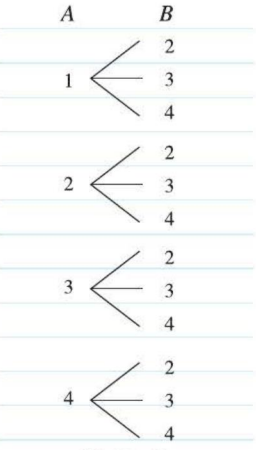


图 6.7–5

（2）因为方程 $x^2-5x+6=0$ 的解是 $x_1=2$，$x_2=3$，

所以从上表中可看出，甲、乙两人所摸球的两个标号有 12 种等可能的结果，其中两个标号都是方程 $x^2-5x+6=0$ 的解的有 2 种，两个标号都不是方程 $x^2-5x+6=0$ 的解的有 2 种，

所以 P（甲胜）$=\frac{2}{12}=\frac{1}{6}$，$P$（乙胜）$=\frac{2}{12}=\frac{1}{6}$，

所以此游戏两人获胜的概率一样大.

拔尖角度▸ 3 利用树状图求含三步的概率

挑战·高分

例 6 为了参加中考体育测试，甲、乙、丙三位同学进行足球传球训练. 球从一个人脚下随机传到另一个人脚下，且每位传球人传球给其余两人的机会是均等的，由甲开始传球，共传球三次.

（1）请利用树状图列举出三次传球的所有可能情况.

（2）求三次传球后，球回到甲脚下的概率.

（3）三次传球后，球回到甲脚下的概率大还是传到乙脚下的概率大？

解法提醒

当试验有三步时，适合采用画树状图的方法列举出所有等可能的结果，用画树状图法求概率的步骤：

1. 将第一步可能出现的 a 种等可能的结果写在

解题秘方：列举三步操作的试验的等可能的结果只能用树状图，用树状图列举时，每一步操作都要列出所有等可能的结果.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

解：（1）如图 6.7−6.

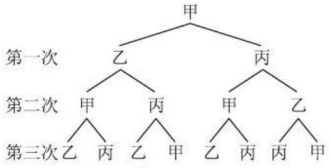


图 6.7−6

（2）P（三次传球后，球回到甲脚下）$=\frac{2}{8}=\frac{1}{4}$.

（3）P（三次传球后，球回到甲脚下）$=\frac{1}{4}$，

P（三次传球后，球传到乙脚下）$=\frac{3}{8}$，

$\because \frac{1}{4}<\frac{3}{8}$，$\therefore$三次传球后，球传到乙脚下的概率大.

第一层：
2. 若第二步对于第一步中的 a 种结果分别有 b 种等可能的结果，则在第一层的每个结果下画出 b 个分支写在第二层，以此类推，写出第三层；
3. 根据树状图求出所关注事件包含的结果数及所有等可能的结果数，再利用概率公式求解.

点中考·拨模拟 得满分

中考探秘

本节考点为用列举法求事件的概率，主要考查用列表法或画树状图法求事件的概率，是中考的必考内容，命题形式有选择题、填空题、解答题，难度适中. 富有生活气息及与社会生活息息相关的内容是中考的命题趋势，要引起重视，题目中常见的背景有转转盘、摸球、掷骰子、统计图表等.

三年中考兵法

冲刺·满分

考法 1 直接利用列表法或画树状图法求概率

例 7 [中考·聊城]小亮、小莹、大刚三位同学随机地站成一排合影留念，小亮恰好站在中间的概率是（　　）

A. $\frac{1}{2}$　　B. $\frac{1}{3}$　　C. $\frac{2}{3}$　　D. $\frac{1}{6}$

试题评析：本题考查了画树状图法. 先利用画树状图法不重不漏地列举出所有等可能的结果，再从中选出符合事件的结果数，求出概率.

解：画树状图如图 6.7−7：



图 6.7−7

共有 6 种等可能的结果，其中小亮恰好站在中间的有 2 种，

所以小亮恰好站在中间的概率是 $\frac{1}{3}$.

答案：B

解法提醒

先利用画树状图法表示出所有等可能的结果，再找到其中小亮恰好站在中间的情况，最后根据概率公式求解.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

考法 2 利用概率解与统计的综合问题

例 8 [中考·潍坊]为进一步提高全民“节约用水”意识，某学校组织学生进行家庭月用水量情况调查活动，小莹随机抽查了所住小区 n 户家庭的月用水量，绘制了如图 6.7−8 所示的不完整的统计图.

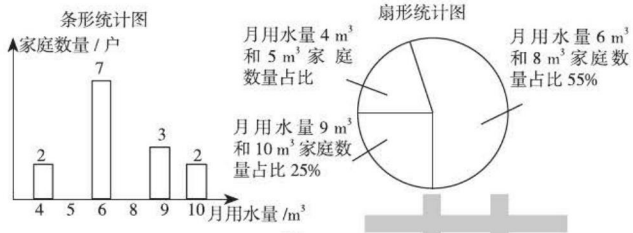


图 6.7−8

（1）求 n 并补全条形统计图.

（2）求这 n 户家庭的月平均用水量；并估计小莹所住小区 420 户家庭中月用水量低于月平均用水量的家庭数量.

（3）从月用水量为 5 m^3 和 9 m^3 的家庭中任选两户进行用水情况问卷调查，求选出的两户中月用水量为 5 m^3 和 9 m^3 恰好各有一户家庭的概率.

试题评析：本题考查了列表法或画树状图法求概率，正确列出表格或画出树状图是解题的关键，也考查了统计图和用样本估计总体.

解：（1）$n=(3+2)\div 25\%=20$，

月用水量为 8 m^3 的家庭为 $20\times 55\%-7=4$（户），

月用水量为 5 m^3 的家庭为 $20-(2+7+4+3+2)=2$（户），

补全条形统计图如图 6.7−9：

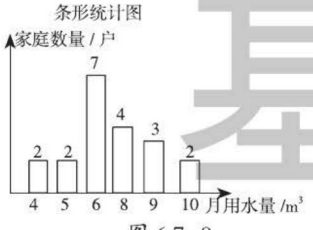


图 6.7−9

（2）这 20 户家庭的月平均用水量为

$$\frac{4\times 2+5\times 2+6\times 7+8\times 4+9\times 3+10\times 2}{20}=6.95\ (m^3).$$

因为这 20 户家庭中月用水量低于 6.95 m^3 的有 11 户，

所以估计小莹所住小区 420 户家庭中月用水量低于 6.95 m^3 的家庭数量为 $420\times\frac{11}{20}=231$（户）.

解法提醒

(1) 根据月用水量为 $9m^3$ 和 $10m^3$ 的户数及其所占百分比可得总户数，再求出月用水量为 $5m^3$ 和 $8m^3$ 的户数即可补全条形统计图.

(2) 根据平均数的定义计算可得月平均用水量，再用总户数乘以样本中月用水量低于月平均用水量的家庭户数所占比例可得.

(3) 列表得出所有等可能结果，从中找到满足条件的结果数，根据概率公式计算可得.

基础

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

（3）月用水量为 5 m^3 的两户家庭记为 a，b，月用水量为 9 m^3 的 3 户家庭记为 c，d，e，列表如下：

	a	b	c	d	e
a	—	(b, a)	(c, a)	(d, a)	(e, a)
b	(a, b)	—	(c, b)	(d, b)	(e, b)
c	(a, c)	(b, c)	—	(d, c)	(e, c)
d	(a, d)	(b, d)	(c, d)	—	(e, d)
e	(a, e)	(b, e)	(c, e)	(d, e)	—

由表可知，共有 20 种等可能结果，其中满足条件的共有 12 种情况，所以选出的两户中月用水量为 5 m^3 和 9 m^3 恰好各有一户家庭的概率为 $\frac{12}{20}=\frac{3}{5}$.

两年模拟兵法

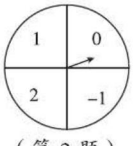
☞答案见 269 页

1. [中考·湖州]某居委会组织两个检查组，分别对“垃圾分类”和“违规停车”的情况进行抽查. 各组随机抽取辖区内某三个小区中的一个进行检查，则两个组恰好抽到同一个小区的概率是（　　）

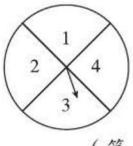
A. $\frac{1}{9}$　　B. $\frac{1}{6}$　　C. $\frac{1}{3}$　　D. $\frac{2}{3}$

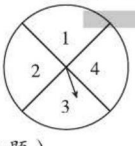
2. [中考·河南]如图是一次数学活动课制作的一个转盘，盘面被等分成四个扇形区域，并分别标有数 -1，0，1，2，若转动转盘两次，每次转盘停止后记录指针所指区域的数（当指针恰好指在分界线上时不记，重转），则记录的两个数都是正数的概率为（　　）

A. $\frac{1}{8}$　　B. $\frac{1}{6}$　　C. $\frac{1}{4}$　　D. $\frac{1}{2}$



（第 2 题）



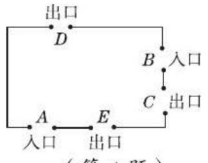


（第 3 题）

3. [中考·海南]如图，两个转盘分别自由转动一次，当停止转动时，两个转盘的指针都指向 2 的概率为（　　）

A. $\frac{1}{2}$　　B. $\frac{1}{4}$　　C. $\frac{1}{8}$　　D. $\frac{1}{16}$

4. 如图，五一期间，某景区规定 A 和 B 为入口，C，D，E 为出口，小红随机选一个入口进入景区，游玩后任选一个出口离开，则她选择从 A 入口进入、从 C，D 出口离开的概率是（　　）



（第 4 题）

A. $\frac{1}{2}$　　B. $\frac{1}{3}$

C. $\frac{1}{6}$　　D. $\frac{2}{3}$

5. [中考·淄博]在一个不透明的袋子里装有四个小球，球上分别标有 6，7，8，9 四个数字，这些小球除数字外都相同，甲、乙两人玩“猜数字”游戏，甲先从袋中任意摸出一个小球，将小球上的数字记为 m，再由乙猜这个小球上的数字，记为 n，如果 m，n 满足 $|m-n|\leqslant 1$，那么就称甲、乙两人“心领神会”，则两人“心领神会”的概率是（　　）

A. $\frac{3}{8}$　　B. $\frac{5}{8}$　　C. $\frac{1}{4}$　　D. $\frac{1}{2}$

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

6.[模拟·莘县]点P的坐标是(a,b)，从-2，-1，0，1，2这五个数中任取一个数作为a的值，再从余下的四个数中任取一个数作为b的值，则点$P(a,b)$在平面直角坐标系中第二象限内的概率是_____.

7.[模拟·潍城区]质地均匀的正四面体骰子的四个面上分别写有数字：2，3，4，5. 投掷这个正四面体两次，则第一次底面上的数字能够整除第二次底面上的数字的概率是_____.

8.[模拟·聊城]从-3，-1，0，1，3这五个数中随机抽取一个数记为a，再从剩下的四个数中任意抽取一个数记为b，恰好使关于x，y的二元一次方程组$\begin{cases}2x-y=b,\\ ax+y=1\end{cases}$有整数解，且点$(a,b)$落在双曲线$y=-\frac{3}{x}$上的概率是_____.

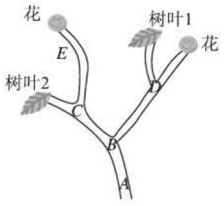
9.[中考·云南]甲、乙两名同学玩一个游戏：在一个不透明的口袋中装有标号分别为1，2，3，4的四个小球（除标号外无其他差异）. 从口袋中随机摸出一个小球，记下标号后放回口袋中，充分摇匀后，再从口袋中随机摸出一个小球，记下该小球的标号，两次记下的标号分别用x、y表示. 若$x+y$为奇数，则甲获胜；若$x+y$为偶数，则乙获胜.　　【导学号：8927116】

(1)用列表或画树状图法（树状图也称树形图）中的一种方法，求(x,y)所有可能出现的结果总数.

(2)你认为这个游戏对双方公平吗？请说明理由.

10. 如图，一条毛毛虫要从A处去吃树叶，毛毛虫在交叉口B,C,D处选择任何树杈都是等可能的. 求：(1)吃到树叶1的概率.

(2)吃到树叶的概率.



(第10题)

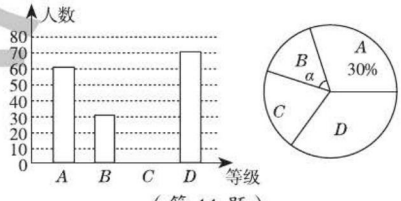
11.“切实减轻学生课业负担”是我市作业改革的一项重要举措. 某中学为了解本校学生平均每天的课外学习时间情况，随机抽取部分学生进行问卷调查，并将调查结果分为A，B，C，D四个等级. 设学习时间为t(时)，A:$t<1$，B:$1\leqslant t<1.5$，C:$1.5\leqslant t<2$，D:$t\geqslant 2$，根据调查结果绘制了如图所示的两幅不完整的统计图. 请你根据图中信息解答下列问题：

(1)该校共调查了多少人？

(2)将条形统计图补充完整.

(3)求出表示B等级的扇形圆心角α的度数.

(4)在此次问卷调查中，甲班有2人平均每天课外学习时间超过2小时，乙班有3人平均每天课外学习时间超过2小时，若从这5人中任选2人去参加座谈，试用列表或画树状图的方法求选出的2人来自不同班级的概率.



(第11题)

综合与实践　质数的分布（无）

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

概率思想在学科中的渗透

荣老师告诉你 概率的基本试验一般有掷骰子、转转盘、摸球. 随着研究越来越深入，考查的触角伸向了学科内的其他各章与学科之间，但万变不离其宗，只不过在分析等可能结果时，会用到学科内的其他知识和学科间的知识.

应用一 利用学科内的知识求概率

1 概率与方程

例1 甲、乙两同学投掷一枚骰子，用字母 p，q 分别表示两人各投掷一次的点数.

（1）求满足关于 x 的方程 $x^2+px+q=0$ 有实数解的概率.

（2）求（1）中方程有两个相等实数解的概率.

解：两人投掷骰子共有 36 种等可能情况，如下表.

p \ q	1	2	3	4	5	6
1	1 1	1 2	1 3	1 4	1 5	1 6
2	2 1	2 2	2 3	2 4	2 5	2 6
3	3 1	3 2	3 3	3 4	3 5	3 6
4	4 1	4 2	4 3	4 4	4 5	4 6
5	5 1	5 2	5 3	5 4	5 5	5 6
6	6 1	6 2	6 3	6 4	6 5	6 6

（1）其中方程有实数解共有 19 种情况，故其概率为 $\frac{19}{36}$.

（2）方程有两个相等实数解共有 2 种情况，故其概率为 $\frac{1}{18}$.

2 概率与平面图形

例2 [中考·葫芦岛] 如图 6-1，一只蚂蚁在正方形 $ABCD$ 区域内爬行，点 O 是对角线的交点，$\angle MON=90°$，OM，ON 分别交线段 AB，BC 于 M，N 两点，求蚂蚁停留在阴影区域的概率.

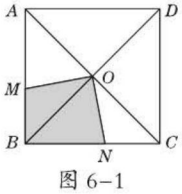


图 6-1

解：∵四边形 $ABCD$ 是正方形，∴ $OB=OC$，$\angle MBO=\angle NCO=45°$，又∵ $\angle BOC=90°$，∴ $\angle BON+\angle CON=90°$. ∵ $\angle MON=90°$，∴ $\angle BON+\angle BOM=90°$，∴ $\angle BOM=\angle CON$，∴ $\triangle BOM\cong\triangle CON$.

∴ $S_{四边形OMBN}=S_{\triangle BOC}=\frac{1}{4}S_{正方形ABCD}$.

∴蚂蚁停留在阴影区域的概率为 $\frac{1}{4}$.

同类变式 ☞答案见 270 页

2. [中考·绵阳] 有 5 张看上去无差别的卡片，上面分别写着 1，2，3，4，5，随机抽取 3 张，用抽到的卡片上的数作为边长，恰能构成三角形的概率是（　　）

A. $\frac{3}{10}$　　B. $\frac{3}{20}$　　C. $\frac{7}{20}$　　D. $\frac{7}{10}$

3 概率与函数

例3 [中考·泰安] 在 -2，-1，0，1，2 这五个数中任取两数 m，n，则二次函数 $y=(x-m)^2+n$ 图象的顶点在坐标轴上的概率为（　　）

A. $\frac{2}{5}$　　B. $\frac{1}{5}$　　C. $\frac{1}{4}$　　D. $\frac{1}{2}$

解题秘方：二次函数 $y=(x-m)^2+n$ 图象的顶点在坐标轴上，所以 m 和 n 中至少有一个为 0. 通过列表法或画树状图法求出事件发生的所有可能结果，再根据题意分别计算 (m,n) 数对中至少有一个为 0 的概率，进而求出能使二次函数 $y=(x-m)^2+n$ 图象的顶点在坐标轴上的概率.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

解：画出树状图，如图 6−2，

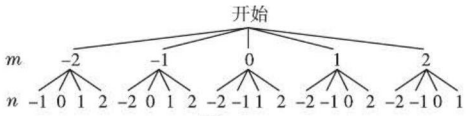


图 6−2

由树状图可知共有 20 种不同的结果，且每种结果出现的可能性相同，其中 m，n 中有一个为 0 的情况有 8 种，即 $(-2, 0)$，$(0, -2)$，$(-1, 0)$，$(0, -1)$，$(1, 0)$，$(0, 1)$，$(2, 0)$，$(0, 2)$.

所以二次函数 $y=(x-m)^2+n$ 图象的顶点在坐标轴上的概率为 $\frac{8}{20}$，即 $\frac{2}{5}$.

答案：A

方法点拨：概率与学科内知识的综合主要体现在两个方面，一是利用学科内的知识列举等可能的结果；二是利用学科内的知识确定事件发生的结果．但核心还是运用列举法解决问题．

应用二 利用学科间的知识求概率

1 概率与英语

例 4 在组成单词“Probability”（概率）的所有字母中任意取出一个字母，则取到字母“b”的概率是_____.

解：在“Probability”这个英文单词中，一共有 11 个字母，其中字母“b”出现 2 次，所以取到字母“b”的概率是 $\frac{2}{11}$.

答案：$\frac{2}{11}$

2 概率与物理

例 5 如图 6−3，随机闭合开关 S_1，S_2，S_3 中的两个，求能让灯泡发光的概率.

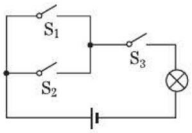


图 6−3

解：∵随机闭合开关 S_1，S_2，S_3 中的两个，有 3 种情况：S_1S_2，S_1S_3，S_2S_3. 其中能让灯泡发光的有 S_1S_3，S_2S_3 两种情况.

∴能让灯泡发光的概率为 $\frac{2}{3}$.

3 概率与语文

例 6 田忌赛马是一个为大家所熟知的故事，传说战国时期，齐王与田忌各有上、中、下等三匹马，同等级的马中，齐王的马比田忌的马强．有一天，齐王要与田忌赛马，双方约定：比赛三局，每局各出一匹马，每匹马赛一次，赢得两局为胜．看样子田忌似乎没有什么胜的希望，但是田忌的谋士了解到主人的上、中等马分别比齐王的中、下等马要强．

（1）如果齐王将马按上、中、下的顺序出阵比赛，那么田忌的马如何出阵才能取胜．

（2）如果齐王将马按上、中、下的顺序出阵，而田忌的马随机出阵比赛，田忌获胜的概率是多少？

解：（1）由于田忌的上、中等马分别比齐王的中、下等马强，当齐王的马按上、中、下的顺序出阵时，田忌的马按下、上、中的顺序出阵，田忌才能取胜．

（2）当田忌的马随机出阵时，双方马的对阵情况如下表．

齐王的马	上中下	上中下	上中下	上中下	上中下	上中下
田忌的马	上中下	上下中	中上下	中下上	下上中	下中上

所以田忌获胜的概率 $P=\frac{1}{6}$.

方法点拨：概率与学科间的综合题，主要是给出的事件以学科间（如语文、英语、物理等学科）的知识作为背景，求概率的方法还是以列举法为核心．

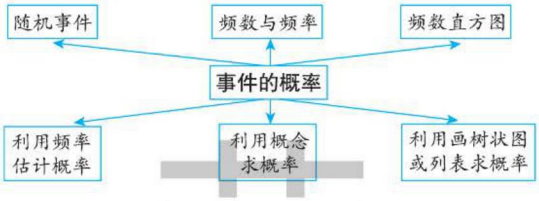
荣德基

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

章末核心知识分类整合

核心结构专题

结构必知



核心必读

1. 事件分为确定事件和随机事件．确定事件中必然事件的概率为 1，不可能事件的概率为 0；随机事件的概率在 0 到 1 之间．
2. 理解频数与频率，会画频数直方图，理解频数直方图中小长方形的高代表的意义，能从频数直方图中读取信息．
3. 求等可能随机事件的概率一般使用公式 $P(E)=\frac{m}{n}$，其中 n 是总事件的个数，m 是事件 E 的个数；求非等可能事件的概率，通过大量试验，用频率估计概率．
4. 对于需要两步操作的事件，一般用列表法或画树状图法求概率，对于三步或三步以上操作的事件，一般用画树状图法求概率．

知识方法专题

知识必学

专题一 事件类型的判断

链接中考≫ 对事件类型的判断，关键是判断事件发生的可能性的大小，即概率的大小．考查时一般都是以选择题的形式出现．

例 1 下列说法中正确的是（　　）

A. “任意画出一个等边三角形，它是轴对称图形”是随机事件

B. “任意画出一个平行四边形，它是中心对称图形”是必然事件

C. “概率为 0.000 1 的事件”是不可能事件

D. 任意掷一枚质地均匀的硬币 10 次，正面向上的一定是 5 次

解：∵等边三角形是轴对称图形，∴“任意画出一个等边三角形，它是轴对称图形”是必然事件；∵平行四边形都是中心对称图形，∴“任意画出一个平行四边形，它是中心对称图形”是必然事件；

∵概率为 0 的事件才是不可能事件，

∴“概率为 0.000 1 的事件”是随机事件；

∵任意掷一枚质地均匀的硬币，正面向上的概率是$\frac{1}{2}$，正面向上的频率不一定是$\frac{1}{2}$，∴任意掷一枚质地均匀的硬币 10 次，正面向上的不一定是 5 次．故选 B.

答案：B

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

方法点拨：事件分为确定事件和随机事件，确定事件又分为必然事件和不可能事件，其中，①必然事件发生的概率为1，即P（必然事件）=1；②不可能事件发生的概率为0，即P（不可能事件）=0；③如果E为随机事件，那么$0<P(E)<1$.

专题二 从频数直方图中获取信息

链接中考» 从频数直方图中获取信息关键是分清横轴和纵轴代表的意义，理解直方图中小长方形的高代表的意义．有时以选择题或填空题的形式单独考查对频数直方图的分析；有时以解答题的形式与其他统计知识综合考查，既考查从图中获取信息，也考查画频数直方图．

例2 为弘扬中华优秀传统文化，某校开展了“经典雅韵”诵读比赛活动，现随机抽取部分同学的成绩进行统计，并绘制了如图6-4所示的两个不完整的统计图，请结合图中提供的信息，解答下列问题：

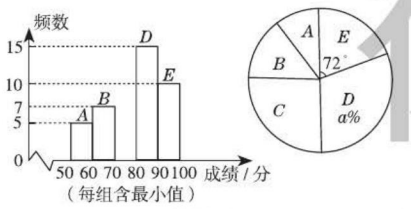


图6-4

（1）直接写出a的值，$a=$_____，并把频数直方图补充完整．

（2）求扇形B的圆心角度数．

（3）如果全校有2 000名学生参加这次活动，90分以上（含90分）为优秀，那么估计获得优秀的学生有多少名？

解：（1）30　补全频数直方图如图6-5.

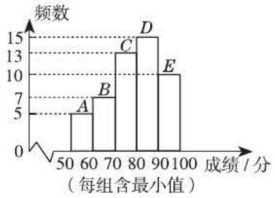


图6-5

（2）$15\div30\%=50$（名），扇形B的圆心角度数为$360°\times\frac{7}{50}=50.4°$.

（3）估计获得优秀的学生有$2\,000\times\frac{10}{50}=400$（名）．

方法点拨：解题时通常从频数直方图和扇形统计图中呈现的公共部分着手，由此可求出样本的总数，然后再结合各部分在扇形统计图中的占比或频数直方图中的频数求出其他问题．

专题三 用频率估计概率

链接中考» 有些事件的概率无法通过列举法求出，只能通过多次试验求出事件发生的频率，然后用频率来估计事件发生的概率．考查时一般以填空题的形式出现．

例3 [中考·扬州]色盲是伴X染色体隐性先天遗传病，患者中男性远多于女性，从男性体检信息库中随机抽取体检表，统计结果如下表．

抽取的体检表数n	50	100	200	400	500	800	1000	1200	1500	2000
色盲患者的频数m	3	7	13	29	37	55	69	85	105	138
色盲患者的频率$\frac{m}{n}$	0.060	0.070	0.065	0.073	0.074	0.069	0.069	0.071	0.070	0.069

根据上表，估计在男性中，患色盲的概率为_____（结果精确到0.01）．

解：观察表格，可以发现随着n的增加，色盲患者的频率越来越稳定，并且稳定在0.07附近，于是可以估计男性患色盲的概率为0.07.

答案：0.07

方法点拨：用频率估计概率，样本容量越大，估计越精确．

例4 [中考·福州]一个不透明袋子中有1个红球，1个绿球和n个白球，这些球除颜色外无其他差别．

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

（1）当 $n=1$ 时，从袋中随机摸出 1 个球，摸到红球和摸到白球的可能性_____（填“相同”或“不相同”）.

（2）从袋中随机摸出 1 个球，记录其颜色，然后放回．大量重复该试验，发现摸到绿球的频率稳定于 0.25，则 n 的值是_____.

（3）在一个摸球游戏中，所有可能出现的结果如图 6-6 所示．



图 6-6

根据树状图呈现的结果，求两次摸出的球颜色不同的概率．

解：（1）相同　（2）2

（3）由树状图可知，共有 12 种结果，且每种结果出现的可能性相同．其中两次摸出的球颜色不同（记为事件 E）的结果共有 10 种，$\therefore P(E)=\dfrac{10}{12}=\dfrac{5}{6}$.

专题四 概率公式的直接应用

链接中考» 直接利用概率公式求等可能事件的概率是中考的常考点，常以选择题或填空题的形式单独考查，有时也综合在统计问题中进行考查.

例 5 [中考·东营]有五张背面完全相同的卡片，其正面分别画有等腰三角形、平行四边形、矩形、正方形、菱形，将这五张卡片背面朝上洗匀，从中随机抽取一张，卡片上的图形是中心对称图形的概率是_____.

解：∵等腰三角形、平行四边形、矩形、正方形、菱形中，平行四边形、矩形、正方形、菱形是中心对称图形，∴从中随机抽取一张，卡片上的图形是中心对称图形的概率是 $\dfrac{4}{5}$.

答案：$\dfrac{4}{5}$

方法点拨：用概率公式求事件的概率的前提是事件是等可能事件，然后找出事件的总个数 n 和目标事件 E 的个数 m，套公式 $P(E)=\dfrac{m}{n}$ 计算.

专题五 用列表法或画树状图法求概率

链接中考» 求多步事件的概率关键是利用列表法或画树状图法表示出事件的总个数，再找出目标事件的个数，最后套概率公式．命题形式多样，单独命题时，选择题、填空题、解答题都可能出现，也可能与统计综合命题.

例 6 在一个不透明的袋中，装着标有数 3，4，5，7 的质地、大小均相同的小球．小明和小东同时从袋中随机各摸出 1 个球，并计算这两球上的数之和，当和小于 9 时小明获胜，反之小东获胜.

（1）请用画树状图或列表的方法，求小明获胜的概率.

（2）这个游戏公平吗？请说明理由.

解：（1）画树状图如图 6-7.

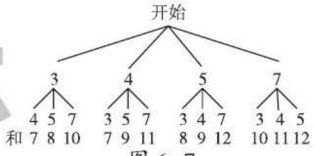


图 6-7

∵所有等可能的结果共有 12 种，其中数之和小于 9 的有 4 种，

$\therefore P(\text{小明获胜})=\dfrac{4}{12}=\dfrac{1}{3}$.

（2）不公平．理由：∵ $P(\text{小明获胜})=\dfrac{1}{3}$，

$\therefore P(\text{小东获胜})=1-\dfrac{1}{3}=\dfrac{2}{3}>\dfrac{1}{3}$．∴这个游戏不公平.

方法点拨：当一次试验涉及多个因素时，一般利用列表法或画树状图法求总事件的个数，其优点是可以不重复、不遗漏地呈现每一个事件．当一次试验涉及两个元素（或需要两步完成）时，列表法或画树状图法皆可；当一次试验涉及三个或三个以上的元素（或需要三步或三步以上完成）时，一般用画树状图法.

荣德基

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

专题六 统计与概率的综合应用

链接中考» 统计与概率的综合考查是中考常见的考查形式，考查的重点是统计知识，概率一般只是在最后一问起到点缀的作用.

例 7 [中考·泸州]为了解某中学学生课余生活情况，对喜爱看课外书、体育活动、看电视、社会实践四个方面的人数进行调查统计. 现从该校随机抽取 n 名学生作为样本，采用问卷调查的方法收集数据（参与问卷调查的每名学生只能选择其中一项）. 并根据调查得到的数据绘制成了如图 6-8 所示的两幅不完整的统计图. 由图中提供的信息，解答下列问题：

（1）求 n 的值.

（2）若该校学生共有 1 200 名，试估计该校喜爱看电视的学生数量.

（3）若调查到喜爱体育活动的 4 名学生中有 3 名男生和 1 名女生，现从这 4 名学生中任意抽取 2 名学生，求恰好抽到 2 名男生的概率.

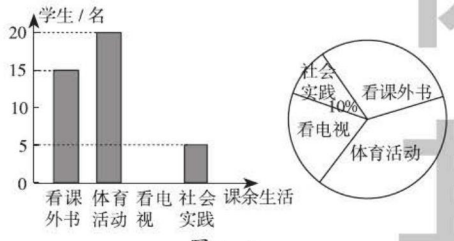


图 6-8

解：（1）$n=5\div10\%=50$.

（2）样本中喜爱看电视的学生为 $50-15-20-5=10$（名），$1\,200\times\frac{10}{50}=240$（名），所以估计该校喜爱看电视的学生为 240 名.

（3）画树状图如图 6-9.



图 6-9

共有 12 种等可能的结果，其中恰好抽到 2 名男生的结果数为 6，所以恰好抽到 2 名男生的概率为 $\frac{6}{12}=\frac{1}{2}$.

方法点拨：解题时要充分利用数形结合思想，正确读图与识图是解决问题的关键. 要注意条形统计图能显示各项目的具体数量，而扇形统计图能显示各项目所占的百分比的大小，扇形统计图中所有扇形表示的百分比之和为 1，某项目的具体数量除以其所占的百分比即可得到总体的数量.

方法必会

专题七 方程思想

专题解读» 在由概率估计原始条件时，经常会用到方程思想，先设出所求条件，根据已知列出方程求解即可.

例 8 口袋里有红、绿、黄三种颜色的球，除颜色外其余都相同，其中红球 4 个，绿球 5 个，黄球若干个，任意摸出 1 个球是绿球的概率是 $\frac{1}{3}$. 求：

（1）口袋里黄球的数量.

（2）任意摸出 1 个球是红球的概率.

解题秘方：摸到绿球的可能结果共有 5 种，若设黄球有 x 个，则任意摸出 1 个球的所有可能结果有（$x+4+5$）种，通过摸到绿球的概率是 $\frac{1}{3}$ 列方程求解即可.

解：（1）设黄球有 x 个. 则根据题意，得 $\frac{5}{x+4+5}=\frac{1}{3}$，解得 $x=6$. ∴口袋里有 6 个黄球.

（2）任意摸出 1 个球是红球的概率为 $\frac{4}{15}$.

方法点拨：解答本题采用了方程思想，已知概率求元素的数目问题，通常是根据概率公式列方程求解.

未德基

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

专题八 数形结合思想

专题解读 » 数形结合思想是将数量与图形结合起来，对题目中给定的题设和结论进行代数方面和几何含义方面的分析．在与转盘有关的概率中，由于指针落在某区域的概率大小与其面积有关，所以要用数形结合的思想来解题．

例 9　如图 6-10，甲、乙两个可以自由转动的均匀的转盘，甲转盘被分成 3 个面积相等的扇形，乙转盘被分成 4 个面积相等的扇形，每一个扇形都标有相应的数，同时转动两个转盘，当转盘停止后，设甲转盘中指针所指区域内的数为 m，乙转盘中指针所指区域内的数为 n（若指针指向边界线时，重转一次，直到指针都指向某一个区域为止）．

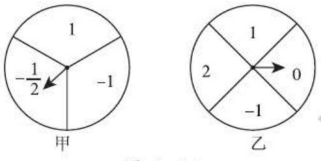


图 6-10

（1）请你用画树状图或列表的方法求出 $|m+n|>1$ 的概率．

（2）直接写出点 (m, n) 落在函数 $y=-x$ 的图象上的概率．

解：（1）列表如下．

甲转盘 / 乙转盘	-1	$-\frac{1}{2}$	1
-1	(-1, -1)	$\left(-\frac{1}{2}, -1\right)$	(1, -1)
0	(-1, 0)	$\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$	(1, 0)
1	(-1, 1)	$\left(-\frac{1}{2}, 1\right)$	(1, 1)
2	(-1, 2)	$\left(-\frac{1}{2}, 2\right)$	(1, 2)

由表可知，所有等可能的结果有 12 种，其中 $|m+n|>1$ 的情况有 5 种．

$\therefore$ $|m+n|>1$ 的概率为 $\frac{5}{12}$．

（2）点 (m, n) 落在函数 $y=-x$ 的图象上的概率为 $\frac{2}{12}=\frac{1}{6}$．

方法点拨：解答本题采用了数形结合思想、列表法．此题为函数与概率的综合，列表法可以不重复不遗漏地列出所有可能的结果，适合于两步完成的事件．

专题九 转化思想

专题解读 » 在进行模拟试验时，常将不易直接进行的试验转化为用替代物来进行的模拟试验．

例 10　甲、乙两班准备联合组织一个舞蹈节目，甲班已经有 5 名男生，4 名女生报名，乙班已经有 5 名男生，6 名女生报名．请你设计一个试验，用来估计从每班已经报名的同学中随意各抽取 3 名同学，恰好组成 3 男 3 女的舞蹈组合的概率．

解：答案不唯一．例如，取不透明的甲、乙两个袋子，有颜色不同的黑、白球各 10 个，黑球代表男生，白球代表女生，甲袋放入 5 黑 4 白，乙袋放入 5 黑 6 白，然后摇匀，任意从甲、乙两个袋子中各摸出 3 个球，经过大量重复试验，就能够估计出其中符合 3 黑 3 白组合的概率，即为所求概率．

方法点拨：在相同条件下，模拟试验的次数越多，试验所得的频率越稳定，越趋近于理论概率，因而根据实际问题灵活选择试验对象和试验方法，并能正确地设计模拟试验是解决此类问题的关键．

荣德基

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

题型1 巧用概率解决数学问题

1. 已知不等式组 $\begin{cases}3x+4>x, & ①\\ \frac{4}{3}x\leqslant x+\frac{2}{3}. & ②\end{cases}$

（1）求不等式组的解集，并写出它的所有整数解.

（2）在不等式组的所有整数解中任取两个不同的整数相乘，请用列表法求积为正数的概率.

题型2 巧用概率解决游戏公平性问题

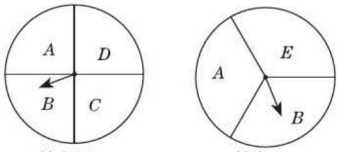
2. 一个不透明的盒子里有标号分别为1，2，3，4，5，6的六个小球，这些小球除标号数字外其余都相同.

（1）从盒中随机摸出一个小球，求摸到标号数字为奇数的小球的概率.

（2）甲、乙两人用这六个小球玩摸球游戏. 规则是甲从盒中随机摸出一个小球，记下标号数字后放回盒里. 充分摇匀后，乙再从盒中随机摸出一个小球，并记下标号数字. 若两次摸到小球的标号数字同为奇数或同为偶数，则判甲赢；若两次摸到小球的标号数字为一奇一偶，则判乙赢. 试判断这个游戏对甲、乙两人是否公平.

题型3 巧用概率解决实际生活中的问题

3. [中考·遵义]某超市在端午节期间开展优惠活动，凡购物者可以通过转动转盘的方式享受折扣优惠. 如图，本次活动共有两种方式，方式一为转动转盘甲，指针指向A区域时，所购买物品享受9折优惠，指针指向其他区域无优惠；方式二为同时转动转盘甲和转盘乙，若两个转盘的指针指向每个区域的字母相同，所购买物品享受8折优惠，其他情况无优惠. 在每个转盘中，指针指向每个区域的可能性相同(若指针指向分界线，则重新转动转盘).



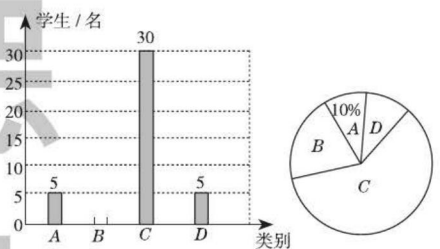
（第3题）

（1）若顾客选择方式一，享受9折优惠的概率为_____.

（2）若顾客选择方式二，请用画树状图或列表法列出所有可能，并求顾客享受8折优惠的概率.

题型4 巧用概率解与统计有关的问题

4. [中考·黄冈]央视《经典咏流传》开播以来收到社会广泛关注，我市某校就“中华文化我传承——地方戏曲进校园”的喜爱情况进行了随机调查，对收集的信息进行统计，绘制了如图所示两幅尚不完整的统计图. 请你根据统计图所提供的信息解答下列问题.



（第4题）

图中A表示“很喜欢”，B表示“喜欢”，C表示“一般”，D表示“不喜欢”.

（1）被调查的学生是_____名，扇形统计图中C部分所对应的扇形圆心角的度数为_____.

（2）补全条形统计图.

（3）若该校共有学生1 800名，请根据上述调查结果，估计该校中A类有_____名.

（4）在抽取的A类5名学生中，刚好有3名女生2名男生，从中随机抽取两名同学担任两角色，用画树状图或列表法求出被抽到的两名学生性别相同的概率.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

第 6 章测试卷 ☞答案见 271 页

（100 分 60 分钟）

一、选择题（每题 3 分，共 30 分）

1. 下列事件中是随机事件的有（　　）

①早晨的太阳一定从东方升起；②打开数学课本时刚好翻到第 60 页；③从一定高度落下的图钉，落地后钉尖朝上；④今年 14 岁的小云一定是初中学生.

A. 1 个　B. 2 个　C. 3 个　D. 4 个

2. 下列说法正确的是（　　）

A. 367 人中至少有 2 人生日相同

B. 任意掷一枚均匀的骰子，掷出的点数是偶数的概率是$\frac{1}{3}$

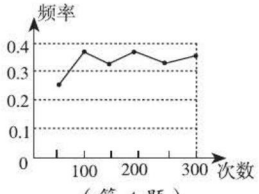
C. 天气预报说明天的降水概率为 90%，则明天一定会下雨

D. 某种彩票中奖的概率是 1%，则买 100 张彩票一定有 1 张中奖

3. 有五张背面完全相同的卡片，正面分别写有数字 1，2，3，4，5，把这些卡片背面朝上洗匀后，从中随机抽取一张，其正面的数字是偶数的概率为（　　）

A. $\frac{4}{5}$　B. $\frac{3}{5}$　C. $\frac{2}{5}$　D. $\frac{1}{5}$

4. 下图是某小组做“用频率估计概率”的试验时，绘出的某一结果出现的频率折线图，则符合这一结果的试验可能是（　　）



（第 4 题）

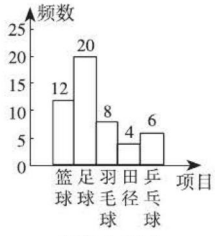
A. 抛一枚硬币，出现正面朝上

B. 掷一枚正六面体的骰子，出现 3 点朝上

C. 一副去掉大小王的扑克牌洗匀后，从中任抽一张牌的花色是红桃

D. 从一个装有除颜色外其余都相同的 2 个红球和 1 个黑球的袋子中任取一球，取到的是黑球

5. 某班组织了针对全班同学关于“你最喜欢的一项体育活动”的问卷调查后，绘制出如图所示的频数分布直方图，由图可知，下列结论正确的是（　　）



（第 5 题）

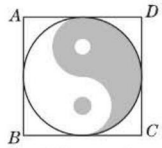
A. 最喜欢篮球的人数最多

B. 最喜欢羽毛球的人数是最喜欢乒乓球人数的两倍

C. 全班共有 50 名学生

D. 最喜欢田径的人数占总人数的 10%

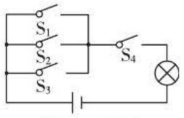
6. 如图，正方形 $ABCD$ 内的图形来自中国古代的太极图，现随机向正方形内掷一枚小针，则针尖落在阴影区域内的概率为（　　）



（第 6 题）

A. $\frac{1}{4}$　B. $\frac{1}{2}$　C. $\frac{\pi}{8}$　D. $\frac{\pi}{4}$

7. 如图，随机闭合开关 S_1，S_2，S_3，S_4 中的两个，则灯泡发光的概率是（　　）



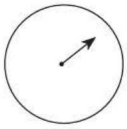
（第 7 题）

A. $\frac{2}{3}$　B. $\frac{1}{4}$　C. $\frac{1}{3}$　D. $\frac{1}{2}$

基德莱

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

8. 小明将如图所示的转盘分成 n（n 是正整数）个扇形，并使得各个扇形的面积都相等，然后他在这些扇形区域内分别标注连续偶数 2，4，6，…，$2n$（每个区域内标注 1 个数，且各区域内标注的数互不相同），转动转盘 1 次，当转盘停止转动时，若事件“指针所落区域标注的数大于 8”的概率是 $\frac{5}{6}$，则 n 的取值为（　　）



（第 8 题）

A. 36　　B. 30　　C. 24　　D. 18

9. 四边形 $ABCD$ 的对角线 AC，BD 相交于点 O，给出下列 4 个条件：① $AB \parallel CD$；② $OB = OD$；③ $AD = BC$；④ $AD \parallel BC$. 从中任取两个条件，能推出四边形 $ABCD$ 是平行四边形的概率是（　　）

A. $\frac{1}{2}$　　B. $\frac{1}{3}$

C. $\frac{2}{3}$　　D. $\frac{5}{6}$

10. 将一枚六个面编号分别为 1，2，3，4，5，6 的质地均匀的正方体骰子先后投掷两次，记第一次投掷出的点数为 a，第二次投掷出的点数为 b，则使关于 x，y 的方程组 $\begin{cases} ax+by=3, \\ x+2y=2 \end{cases}$ 只有正数解的概率为（　　）

A. $\frac{1}{12}$　　B. $\frac{2}{9}$

C. $\frac{5}{18}$　　D. $\frac{13}{36}$

二、填空题（每题 3 分，共 18 分）

11. 小明同学早上从家到学校上学，他需乘坐 52 路公交车，已知小明到达车站的时间是随机的，该路公交车 15 分钟发一班，则小明在公交车站上等车的时间少于 10 分钟的概率是_____.

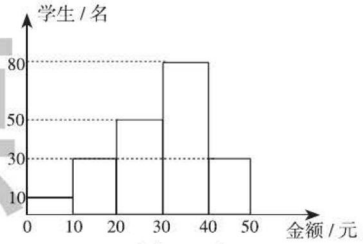
12. 在一个不透明的袋中装有除颜色外其余均相同的 n 个小球，其中 5 个黑球. 从袋中随机摸出一球，记下其颜色，之后把它放回袋中，搅匀后，再继续摸出一球.

以下是利用计算机模拟的摸球试验次数与摸出黑球次数的列表.

摸球试验次数	100	1 000	5 000	10 000	50 000	100 000
摸出黑球次数	46	487	2 506	5 008	24 996	50 007

根据列表，可以估计出 n 的值是_____.

13. 某校学生自主建立了一个学习用品义卖平台，已知九年级 200 名学生义卖所得金额的频数分布直方图如图所示，那么义卖所得金额在 20 元~30 元的频率是_____.



（第 13 题）

14. 小明和小红玩抛硬币游戏，连续抛两次. 小明说：“如果两次都是正面，那么你赢；如果两次是一正一反，则我赢.”小红赢的概率是_____，据此判断该游戏 _____（填“公平”或“不公平”）.

15. 有两把不同的锁 A，B 和三把不同的钥匙甲、乙、丙，其中甲与 A 配套，乙与 B 配套，则任意取出一把钥匙去开任意一把锁，一次打开锁的概率为_____.

16. 在一个不透明的布袋中装有标着数 2，3，4，5 的 4 个小球，这 4 个小球的材质、大小和形状完全相同，现从中随机摸出两个小球，这两个小球上的数之积大于 9 的概率为_____.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

三、解答题（共 52 分）

17.（10 分）在一个不透明的口袋中，装有 9 个大小和形状一样的小球，其中 3 个红球，3 个白球，3 个黑球，它们已在口袋中被搅匀，现在有一个事件：从口袋中任意摸出 n 个球，在这 n 个球中，红球、白球、黑球至少各有一个.

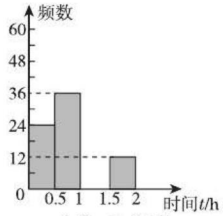
（1）当 n 为何值时，这个事件必然发生?

（2）当 n 为何值时，这个事件不可能发生?

（3）当 n 为何值时，这个事件可能发生?

18.（12 分）扬州市“五个一百工程“在各校普遍开展，为了了解某校学生每天课外阅读所用的时间情况，从该校学生中随机抽取了部分学生进行问卷调查，并将结果绘制成如图不完整的频数分布表和频数分布直方图.

每天课外阅读时间 t/h	频数	频率
$0 < t \leqslant 0.5$	24	
$0.5 < t \leqslant 1$	36	0.3
$1 < t \leqslant 1.5$		0.4
$1.5 < t \leqslant 2$	12	b
合计	a	1



（第 18 题）

根据以上信息，回答下列问题：

（1）表中 a=_____，b=_____.

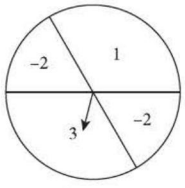
（2）请补全频数分布直方图.

（3）若该校有学生 1 200 名，试估计该校每天课外阅读时间超过 1 小时的学生数量.

19.（14 分）如图，可以自由转动的转盘被它的两条直径分成了四个分别标有数的扇形区域，其中标有数“1”的扇形的圆心角为 120°. 转动转盘，待转盘自动停止后，指针指向一个扇形的内部，则该扇形内的数即为转出的数，此时，称为转动转盘一次（若指针指向两个扇形的交线，则不计转动的次数，重新转动转盘，直到指针指向一个扇形的内部为止）.

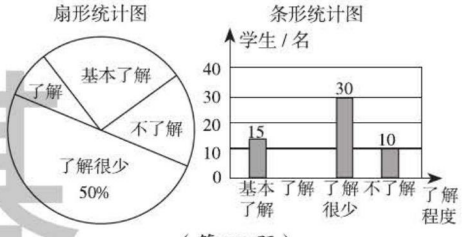
（1）转动转盘一次，求转出的数是 −2 的概率.

（2）转动转盘两次，用画树状图法或列表法求这两次分别转出的数的积为正数的概率.



（第 19 题）

20.（16 分）“食品安全”受到社会的广泛关注，我区某中学对部分学生就食品安全知识的了解程度做了随机抽样调查，并根据收集的信息进行统计，绘制了下面两幅尚不完整的统计图，请根据统计图中所提供的信息解答下列问题.



（第 20 题）

（1）接受问卷调查的学生共有_____名，扇形统计图中“基本了解”部分所对应扇形的圆心角为_____°.

（2）请补全条形统计图.

（3）若对食品安全知识达到“了解”程度的学生中，男、女生的比例恰为 2 ∶ 3，现从中随机抽取 2 名参加食品安全知识竞赛，请用画树状图法或列表法求出恰好抽到 1 名男生和 1 名女生的概率.

基础卷

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

几何学的再探索



第7章 空间图形的初步认识

荣德基









核心考点

你将见到的

- 认识多面体
- 直棱柱的侧面展开图
- 圆柱的侧面展开图
- 圆锥的侧面展开图

核心方法

我们为你提供的

- 分类讨论思想
- 函数思想
- 转化思想

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

7.1 几种常见的几何体

核心知识

- 多面体的识别
- 利用几何体的特征判断函数图象

知识链接



点知识·拨考向 速提分

点知识▸多面体

1. **定义** 由多边形围成的几何体叫做多面体，围成多面体的多边形的边叫做多面体的棱，多边形的顶点叫做多面体的顶点.

2. **注意**

（1）多面体的每个面都是多边形，且每个面都是平面，不能是曲面.

（2）每个多面体中的顶点数、面数和棱数都有一个固定的数量关系.

（3）多面体的表面积就是多面体中所有面的面积之和.

点、线、面、体的形成

拨考向▸利用多面体的特点解决问题

题型1 利用多面体的定义识别多面体

例1 如图 7.1-1 中的几何体是多面体的是_____（填序号）.

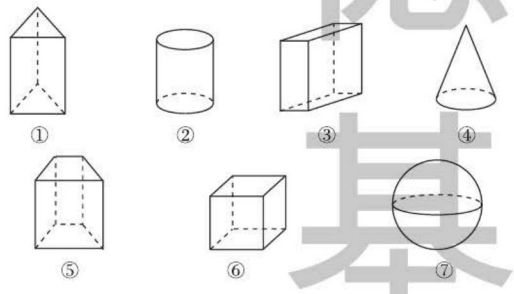


图 7.1-1

解题秘方：根据多面体的定义分析几何体即可.

解：①③⑤⑥中，每个面都是多边形，且每个面都是平面，故①③⑤⑥是多面体；②④⑦中，都有曲面，故②④⑦不是多面体.

答案：①③⑤⑥

题型2 利用组合多面体的体积大小解函数图象问题

例2 [中考·青海]均匀地向一个容器注水，最后将容器注满.在注水过程中，水的高度 h 随时间 t 的变化规律如图 7.1-2 所示，这个容器的形状可能是图 7.1-3 中的（　　）

提分·必记

特别提醒

多面体都是立体图形，但立体图形不都是多面体，因为有些立体图形中含有曲面.

提分·秘诀

技巧点拨

识别多面体的主要依据是多面体的定义，紧扣定义中每个面都是多边形的条件进行判别.

技巧点拨

每一段函数图象的倾斜程度，反映了水面上升速度的快慢，再观察容器的体积大小，作出判断.

宋德基

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

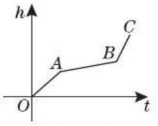


图 7.1−2

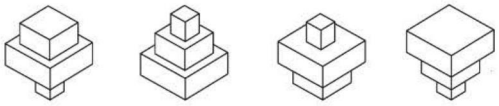


图 7.1−3

解题秘方：每一段函数图象的倾斜程度，反映了水面上升速度的快慢，再观察容器的粗细，作出判断.

解：注水量一定，从图 7.1−2 中可以看出，OA 段上升较快，AB 段上升较慢，BC 段上升最快，由此可知这个容器下面容积较大，中间容积最大，上面容积最小.

答案：C

点方法·拨技巧 提高分

拔尖角度 1 几何体与面积计算的综合

例 3 一位美术老师在课堂上进行立体模型素描教学时，把 14 个棱长为 1 dm 的正方体摆在课桌上（如图 7.1−4），然后他把露出的面涂成不同的颜色，则被他涂上颜色的部分的面积为（　　）

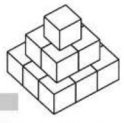


图 7.1−4

A. 33 dm^2　　B. 24 dm^2　　C. 21 dm^2　　D. 42 dm^2

解题秘方：分三层，每一层再分侧面与上表面两部分求出表面积，然后相加即可得解.

解：最上层，侧面积为 4，上表面面积为 1，总面积为 4+1=5（dm^2）；中间一层，侧面积为 2×4=8（dm^2），上表面面积为 4−1=3（dm^2），总面积为 8+3=11（dm^2）；最下层，侧面积为 3×4=12（dm^2），上表面面积为 9−4=5（dm^2），总面积为 12+5=17（dm^2），则 5+11+17=33（dm^2），所以被他涂上颜色的部分的面积为 33 dm^2.

答案：A

挑战·高分

另解

几何体的侧面积为 4×（1+2+3）=24（dm^2），上表面的面积为 3×3=9（dm^2）. 故被他涂上颜色的部分的面积为 24+9=33（dm^2）.

拔尖角度 2 利用多面体的特征探索柱形多面体的规律

例 4 观察下列多面体，并把表补充完整.

名称	三棱柱	四棱柱	五棱柱	六棱柱
图形				
顶点数 a	6		10	12
棱数 b	9	12		
面数 c	5			8

（1）完成表中的数据.

挑战·高分

知识链接

n 棱锥的底面是 n 边形，n 边形有 n 条棱，n 个顶点；n 棱锥的顶点与底面 n 边形各顶点的连线，构成 n 条棱，n 个面. 故 n 棱锥有（n+1）个面，（n+1）个顶点，2n 条棱.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

（2）若某个棱柱由 28 个面构成，则这个棱柱为 _____ 棱柱．

（3）根据表中的规律判断，n 棱柱共有 _____ 个面，_____ 个顶点，_____ 条棱．

（4）观察表中的结果，你发现棱柱顶点数、棱数、面数之间有什么关系吗？请直接写出来．

解题秘方：结合三棱柱、四棱柱、五棱柱和六棱柱的特点，即可填表，根据已知的面数、顶点数和棱数与几棱柱的关系，可知 n 棱柱一定有（$n+2$）个面，$2n$ 个顶点和 $3n$ 条棱，进而得出答案，利用前面的规律得出 a，b，c 之间的关系．

解：（1）填表如下．

名称	三棱柱	四棱柱	五棱柱	六棱柱
图形				
顶点数 a	6	8	10	12
棱数 b	9	12	15	18
面数 c	5	6	7	8

（2）二十六

（3）（$n+2$）；$2n$；$3n$

（4）$a+c-b=2$.

拔尖角度 3 利用体积公式解决面动成体的问题

例 5 ［易错题］长和宽分别是 6 cm 和 3 cm 的长方形绕它的一边所在直线旋转一周后，得到的几何体的形状是什么？其体积是多少？

解题秘方：面动成体时，同一个面绕不同的旋转轴旋转一周形成的几何体一般不相同，我们知道圆柱是由长方形绕其一边所在直线旋转一周形成的几何体，同一个长方形以不同的边所在的直线为轴旋转，得到的圆柱一般也不相同，因此，当没有明确以长方形的哪一条边所在直线为轴旋转时，应分两种情况讨论，以长方形的长边所在的直线为轴和以长方形的短边所在的直线为轴．

解：①当以长方形的短边所在的直线为轴旋转时，如图 7.1−5，所得几何体为圆柱，其体积为 $\pi\times6^2\times3=108\pi(\text{cm}^3)$.

②当以长方形的长边所在的直线为轴旋转时，如图 7.1−6，所得几何体仍为圆柱，其体积为 $\pi\times3^2\times6=54\pi(\text{cm}^3)$.

综上可知，所得几何体为圆柱，其体积为 108π cm^3 或 54π cm^3.

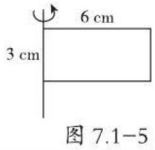


图 7.1−5

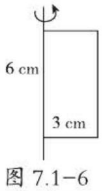


图 7.1−6

视野拓展

简单多面体的欧拉公式：若简单多面体的顶点数为 V，棱数为 E，面数为 F，则 V，E，F 之间满足公式 $V+F-E=2$.

挑战·高分

易错警示

此类题容易因漏掉其中一种情况而出现错误，本题已知条件并未给出旋转轴，所以要分两种情况，利用分类讨论思想解决此类问题．

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

点中考·拨模拟 得满分

中考探秘 本节在中考中的主要考点有识别简单的多面体或几何体、线动成面问题、多面体的注水函数图象问题等．中考中对本节的考查频率不高，且主要以选择题的形式呈现，难度偏低．

三年中考兵法

冲刺·满分

考法1 利用面的运动判别形成的几何体

例6 [中考·长沙]将如图7.1-7的平面图形绕轴l旋转一周，可以得到的立体图形是图7.1-8中的（　　）

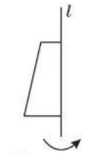


图7.1-7

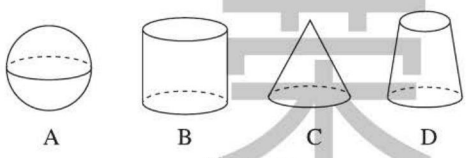


图7.1-8

试题评析：本题考查立体图形的判断，关键是根据面动成体以及圆台的特点解答．

解：绕直线l旋转一周，可以得到圆台．

答案：D

解法提醒

根据面动成体以及圆台的特点进行逐一分析，就能求出结果．

考法2 利用几何体的容积变化判别函数图象

例7 [中考·宁夏]如图7.1-9，一个实心长方体放置在圆柱形水槽容器内，向容器内按一定的速度均匀注水，60秒后将容器内注满．容器内水面的高度h（cm）与注水时间t（s）之间的函数关系图象大致是图7.1-10中的（　　）


图7.1-9

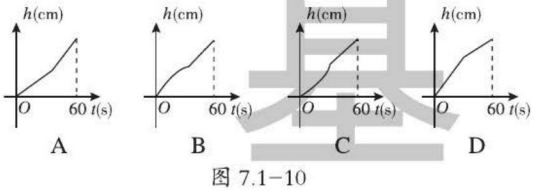


图7.1-10

试题评析：本题考查与多面体的形状有关的函数的图象问题，关键是根据容器内水面的高度h（cm）与注水时间t（s）之间的函数关系分析．

解：根据题意可知，刚开始时由于实心长方体在水槽里，圆柱底面积减小，水面上升的速度较快，水淹没实心长方体后一直到水注满，底面积是圆柱的底面积，水面上升的速度较慢．

答案：D

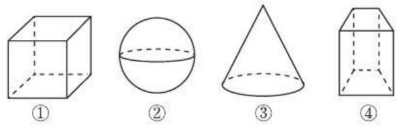
解法提醒

解决向容器内注水问题的关键是观察几何体的形状，根据几何体的形状判断出水面高度的变化情况．根据水面高度随注水时间的变化规律得出合适的图象．

荣 德 基

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

1. 如图，其中是多面体的几何体是（　　）



（第1题）

A. ①②　　B. ②③

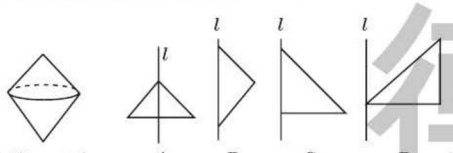
C. ③④　　D. ①④

2. 不透明袋子中装有一个几何体模型，两位同学摸该模型并描述它的特征，甲同学，它有4个面是三角形；乙同学，它有6条棱，则该模型对应的立体图形是（　　）

A. 三棱柱　　B. 四棱柱

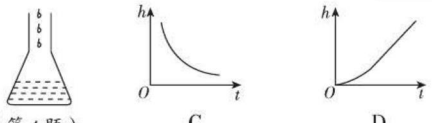
C. 三棱锥　　D. 四棱锥

3. 下列图形中，将三角形绕直线 l 旋转一周，可以形成如图所示的几何体的是（　　）



（第3题）

4. [中考·赤峰]如图是九年级某考生做的水滴入一个玻璃容器的示意图（滴水速度保持不变），能正确反映容器中水的高度（h）与时间（t）之间对应关系的大致图象是（　　）



（第4题）

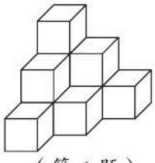
5. 三棱锥有 _____ 个面，_____ 条棱，这些棱的交点有 _____ 个；圆锥是由 _____ 个面组成的，其中一个是 _____ 面，另一个是 _____ 面.

6. 棱长为 a 的正方体，摆成如图所示的形状.

（1）如果这一物体摆放三层，试求该物体的表面积.

（2）依图中摆放方法类推，如果该物体摆放了上下20层，求该物体的表面积.

（3）依图中摆放方法类推，如果该物体摆放了上下 n 层，求该物体的表面积.



（第6题）

7. 长方形的长、宽分别为16，12.

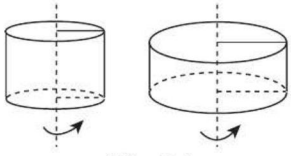
（1）以长方形的长边所在的直线为轴旋转一周，形成的几何体是 _____，其体积为 _____（结果保留 π）.

（2）你能利用“面动成体”的知识，形成三个体积不同的圆柱吗？其中形成的圆柱的体积最大是多少？

8. 将一个长为4 cm，宽为3 cm的长方形分别绕它相邻的两边所在的直线旋转一周，得到不同的圆柱，如图所示.

（1）它们的体积分别是多少？

（2）通过计算你发现了什么？



（第8题）

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

7.2 直棱柱的侧面展开图

核心知识
- 直棱柱及其性质
- 直棱柱的侧面展开图

知识链接

直棱柱的有关概念及性质
- 直棱柱的侧面展开图
- 最短线路问题

点知识·拨考向 速提分

点知识 1 直棱柱及其性质

1. **棱柱的分类** 棱柱分为直棱柱和斜棱柱.

2. **直棱柱的有关概念**

（1）直棱柱的底面是几边形就叫做直几棱柱，如长方体也叫做直四棱柱.

（2）在棱柱中，除上、下底面以外，其他的面叫做它的侧面，相邻两个侧面的公共边叫做棱柱的侧棱.

3. **直棱柱的性质**

（1）上下底面是全等的多边形，各个侧面都是矩形；

（2）侧棱数、侧面数都等于底面的边数；

（3）相邻的两条侧棱平行且相等.

拨考向 利用直棱柱的性质解决问题

例 1 在如图 7.2–1 所示的直五棱柱中，底面是正五边形，其周长为 10 cm，侧棱长为 4 cm.

（1）它有几个面？几个底面？底面和侧面分别是什么图形？哪些面的形状相同？

（2）侧面的个数与底面多边形的边数有什么关系？

（3）一共有多少条棱，各棱长是多少？

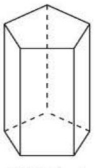


图 7.2–1

解题秘方：（1）根据图形数出面数即可，由直棱柱的性质可知各面的形状；（2）由（1）易知侧面个数与底面多边形边数的关系；（3）根据图形数出棱数，再由性质得出棱长.

提分·必记

易错提醒

直棱柱根据底面的不同可分为直三棱柱、直四棱柱、直五棱柱……它们的底面对应的是三角形、四边形、五边形……长方体和正方体都是直四棱柱，但直四棱柱不一定是长方体或正方体.

提分·秘诀

技巧点拨

直棱柱的底面是两个全等的多边形，多边形的边数是几就是直几棱柱，直棱柱的侧面都是矩形.

荣德基

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

解：（1）共有 7 个面，其中有 2 个底面，底面是正五边形，侧面是矩形，上、下底面的形状相同，各个侧面的形状相同．

（2）由（1）知，有 5 个侧面，则侧面的个数与底面多边形的边数相同．

（3）一共有 15 条棱，5 条侧棱的长为 4 cm.

∵底面是正五边形，周长为 10 cm，

∴边长为 2 cm.

∴除了 5 条侧棱以外的棱的棱长为 2 cm.

知识▶ 2 直棱柱的侧面展开图

1. 定义 一般地，将一个直棱柱沿它的一条侧棱展开，将各个侧面铺在同一个平面内，所得到的图形叫做这个直棱柱的侧面展开图．


棱柱的侧面展开图

2. 展开图的特点 直棱柱的侧面展开图是矩形，矩形的宽（或长）等于直棱柱的侧棱长，矩形的长（或宽）等于直棱柱底面的周长．

3. 直棱柱的侧面积 如果用 c 表示直棱柱的侧棱长，l 表示直棱柱底面的周长，则直棱柱的侧面积 $S_{侧}=cl$.

核心考向▶ 直接利用直棱柱的侧面积公式进行计算

例 2 如图 7.2-2，矩形 $ABCD$ 是一个直四棱柱的底面，其中 AD=6 cm，BD=10 cm，这个直四棱柱的侧棱长为 8 cm，则它的侧面积是_____cm^2.

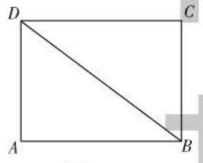


图 7.2-2

解题秘方：根据勾股定理求出 AB 的长，进而求出底面的周长，再用公式计算出侧面积．

解：∵四边形 $ABCD$ 是矩形，

∴$\angle A=90°$，

∴$\triangle ABD$ 是直角三角形．

在 Rt $\triangle ABD$ 中，由勾股定理，得 $AB^2+AD^2=BD^2$.

∴$AB=\sqrt{BD^2-AD^2}=\sqrt{10^2-6^2}=8$(cm).

∴$l=2(AB+AD)=2\times(6+8)=28$(cm).

则 $S_{侧}=cl=8\times28=224$(cm^2).

答案：224

提分·必记

特别提醒

沿直棱柱的任一侧棱展开得到的侧面展开图都是全等的矩形，所得到的矩形可以看作是几个矩形连在一起组成的．

提分·秘诀

技巧点拨

利用公式 $S_{侧}=cl$ 求直棱柱的侧面积，只要设法求出公式中的两个条件：侧棱长 c 和底面周长 l 即可．

荣德基

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

点知识 ▸ 3 直棱柱的表面展开图

1. 直棱柱的表面展开图是由两个相同的多边形（上下底面）和一些矩形连成的平面图形.

2. 直棱柱是立体图形，且它的每个面都是平面，所以计算不同面上的两点之间的表面最短距离时，可通过表面展开图，利用勾股定理求解.

3. **直棱柱的表面积** 表面积 = 底面积 + 侧面积.

拔考向 ▸ 利用直棱柱的表面展开图解决问题

题型 1 识别直棱柱的表面展开图

例 3 [中考·漳州]如图 7.2-3 是一个长方体包装盒，则它的表面展开图是图 7.2-4 中的（　　）



图 7.2-3

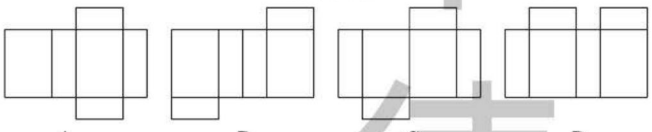


图 7.2-4

解题秘方：利用空间想象或通过动手操作，将展开图还原成立体图形，看能否构成长方体.

解：根据对面的判断规则，只有 A 选项能找到三组对面，因此只有 A 选项中的表面展开图折叠起来能构成一个长方体，故选 A.

答案：A

题型 2 正方体的表面展开图

例 4 [中考·深圳]图 7.2-5 中哪个图形是正方体的展开图（　　）

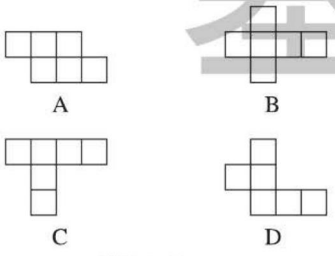


图 7.2-5

解：根据正方体展开图的特征，选项 A，C，D 不是正方体的展开图，选项 B 是正方体的展开图.

答案：B

提分·必记

特别提醒

沿直棱柱表面不同的棱展开，可得到不同的组合方式的表面展开图，即同一个直棱柱有多种表面展开图.

提分·秘诀

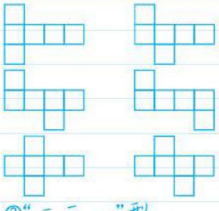
技巧点拨

直棱柱的展开图有以下特点：(1) 上下底面在侧面展开图的两侧；(2) 当直棱柱底面的长和宽不相等时，侧面展开图相邻矩形的宽度不同.

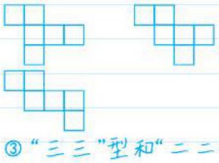
技巧点拨

常见的正方体的展开图有以下三种形式：

①“一四一”型：



②“二三一”型：



③“三三”型和“二二二”型：



关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

题型 3　利用直棱柱的展开图计算表面积

例 5　如图 7.2-6 是某长方体包装盒的展开图，已知长比宽多 4 cm，求这个长方体包装盒的表面积.

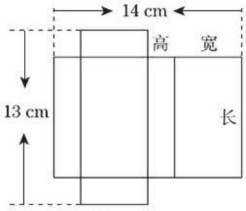


图 7.2-6

解题秘方：设这种长方体包装盒的宽为 x cm，高为 y cm，则长为（$x+4$）cm，根据图示可得 2 宽 +2 高 =14 cm，长 +2 高 =13 cm，列出方程组，求解即可.

解：设这种长方体包装盒的宽为 x cm，高为 y cm，则长为（$x+4$）cm，

根据图示，得 $\begin{cases}2x+2y=14,\\x+4+2y=13,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x=5,\\y=2,\end{cases}$

故这个包装盒的长为 9 cm，宽为 5 cm，高为 2 cm.

这个包装盒的表面积为 $2\times(9\times5+2\times5+9\times2)=146$（$\text{cm}^2$）.

请开始你的表演



点方法·拨技巧 提高分

拔尖角度 1　利用表面展开图的特征识别有特殊标记的展开图

挑战·高分

例 6　如图 7.2-7 是一个正方体，它的展开图可能是图 7.2-8 中的（　　）

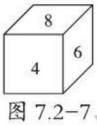
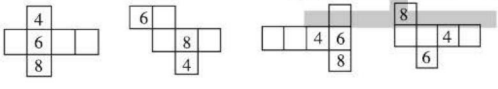


图 7.2-7



A　　B　　C　　D

图 7.2-8

解题秘方：由平面图形的折叠及立体图形的表面展开图的特点解题.

解：由原正方体的特征可知，含有 4，6，8 的数字的三个面一定相交于一点，而选项 A，B，D 中，经过折叠后与含有 4，6，8 的数字的三个面一定相交于一点不符，故选 C.

答案：C

技巧点拨

正方体中相邻的面在展开图中有公共边或公共顶点，或在展开图同行（或列）中相隔两个正方形的面.

宋德基

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

拔尖角度▸ 2 利用展开图求原几何体的侧面积

挑战·高分

例 7 如图 7.2-9，将一张边长为 3 的正方形纸片按虚线裁剪后，恰好围成一个底面是正三角形的棱柱，这个棱柱的侧面积为（　　）

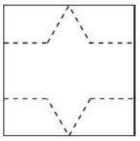


图 7.2-9

A. 9　　B. $9-3\sqrt{3}$

C. $9-\frac{5}{2}\sqrt{3}$　　D. $9-\frac{3}{2}\sqrt{3}$

解题秘方：这个棱柱的侧面展开图正好是一个长方形，长为 3，宽为 3 减去两个三角形的高，再用长方形的面积公式计算即可.

解：如图 7.2-10，问题中棱柱的侧面展开后就是矩形 $ABPQ$. 由题意知△ ECD 是等边三角形，$AC=CD=DB=1$. 过点 E 作 $EG\perp CD$ 于点 G，则 $\angle GED=30°$，$GD=\frac{1}{2}$，所以 $EG=\frac{GD}{\tan\angle GED}=\frac{\frac{1}{2}}{\tan 30°}=\frac{\sqrt{3}}{2}$. 从而有 $BP=3-2BF=3-2EG=3-\sqrt{3}$，所以棱柱的侧面积为 $3\times(3-\sqrt{3})=9-3\sqrt{3}$.

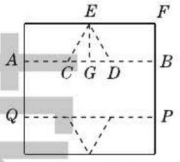


图 7.2-10

答案：B

拔尖角度▸ 3 利用展开图解决实际问题中的最短路径问题

挑战·高分

例 8 如图 7.2-11 是一个棱长为 6 的正方体盒子，一只蚂蚁从棱 CD 上的中点 A 出发，沿盒的表面爬到棱 DE 上后，接着又沿盒子的表面爬到盒底的 B 处，那么，整个爬行中，蚂蚁要爬行的最短路程为 _____.

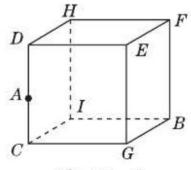


图 7.2-11

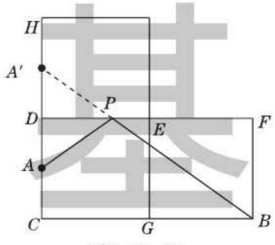


图 7.2-12

解题秘方：如图 7.2-12，作点 A 关于 DE 的对称点 A'，连接 $A'B$，$A'B$ 即为蚂蚁要爬行的最短路程，根据勾股定理即可得出结果.

解：如图 7.2-12，作点 A 关于 DE 的对称点 A'，连接 $A'B$，则 $AD=A'D=3$，$CG=CD=6$.

$A'B$ 即为蚂蚁要爬行的最短路程，

$A'B=\sqrt{A'C^2+BC^2}=\sqrt{(3+6)^2+(6+6)^2}=15$.

答案：15

技巧点拨

此类没有明显各部分分界线的展开图，要分清上下底面的边长及侧棱长，进而得出正确的结论.

解题通法

(1) 画几何体的侧面展开图；

(2) 确定最短路径；

(3) 利用轴对称的性质或勾股定理（常用）或相似等知识计算求值.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

点中考·拨模拟 得满分

中考探秘 本节的主要内容是直棱柱的展开图（侧面展开图、表面展开图）、利用展开图还原几何体、计算最短路径等. 在对展开图的考查中，对正方体的考查较多，但问题难度不大，多为选择题. 利用展开图求最短路径常作为中考的小压轴题，以选择题或填空题为主，难度稍大.

三年中考兵法

冲刺·满分

考法 1 利用几何体的展开图判别原几何体

例 9 [中考·陕西] 如图 7.2–13，是一个几何体的表面展开图，则该几何体是（　　）

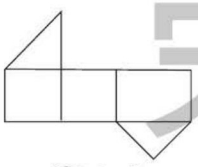


图 7.2–13

A. 正方体　　B. 长方体　　C. 三棱柱　　D. 四棱锥

试题评析：考查了由几何体的展开图还原几何体，熟悉各类几何体展开图的特点是解题的关键.

解：由图 7.2–13 得，该几何体有两个底面，故该几何体是柱体.

又因为底面是三角形，则该几何体为三棱柱.

答案：C

技巧点拨

当展开图中有两个底面时，该展开图的原几何体为柱体；当展开图中只有一个底面时，该展开图的原几何体为锥体.

考法 2 利用正方体的展开图解决对面问题

例 10 [中考·河南] 某正方体的每个面上都有一个汉字，如图 7.2–14 是它的一种展开图，那么在原正方体中，与“国”字所在面相对的面上的汉字是（　　）



图 7.2–14

A. 厉　　B. 害　　C. 了　　D. 我

试题评析：本题主要考查了正方体相对两个面上的汉字，从相对面入手，分析并解答问题.

解：正方体的表面展开图，相对的面之间一定相隔一个正方形.“的”与“害”是相对面，“了”与“厉”是相对面，“我”与“国”是相对面.

答案：D

技巧点拨

正方体中相对的面在展开图的同行（或列）中，中间隔一个正方形，如本题中“厉”与“了”相对. 展开图中和中间一行（或列）均相连的两个正方形亦相对.

荣德基

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

考法 3 利用直棱柱的展开图解决最短路径问题

例 11 [中考·东营]如图 7.2−15，一只蚂蚁沿着棱长为 2 的正方体表面从点 A 出发，经过 3 个面爬到点 B，如果它运动的路径是最短的，则 AC 的长为_____.

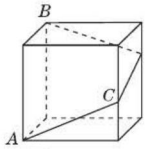


图 7.2−15

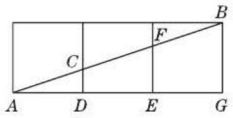


图 7.2−16

试题评析：先画出该正方体的部分展开图，确定蚂蚁运动的最短路径，然后利用勾股定理及平行线分线段成比例计算 AC 的长.

解：把正方体的侧面部分展开，如图 7.2−16 所示，则 $AG=6$，$BG=2$，根据“两点之间，线段最短”，可知线段 AB 为蚂蚁运动的最短路径. 在 Rt $\triangle ABG$ 中，$AB=\sqrt{AG^2+BG^2}=\sqrt{6^2+2^2}=2\sqrt{10}$. 由平行线分线段成比例，可知 $AC=CF=FB=\dfrac{2\sqrt{10}}{3}$. 故答案为 $\dfrac{2\sqrt{10}}{3}$.

答案：$\dfrac{2\sqrt{10}}{3}$

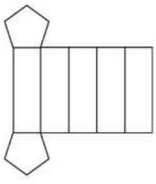
解法提醒

将正方体展开，右面与后面的正方形与前面正方形放在一个面上，此时 AB 最短.

两年模拟兵法

答案见 273 页

1. 下图是哪个几何体的平面展开图？（　　）


（第 1 题）

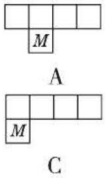
A. 六棱柱　　B. 五棱柱

C. 四棱柱　　D. 五棱锥

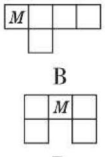
2. 如图所示，有一个无盖的正方体纸盒，有一面标有 M，沿图中的虚线将其剪开展成平面图形，想一想这个平面图是（　　）



（第 2 题）

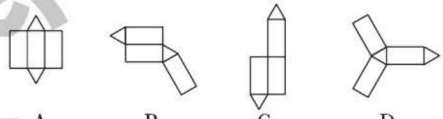


A　　C



B　　D

3. 下列图形经过折叠不能围成三棱柱的是（　　）


A　　B　　C　　D

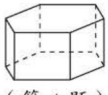
4. 一个直六棱柱模型如图所示，底面边长都是 5 cm，侧棱长是 4 cm，这个直六棱柱的所有侧面的面积之和是（　　）

A. 20 cm^2

B. 60 cm^2

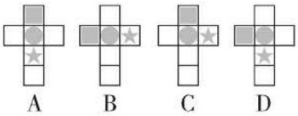
C. 120 cm^2

D. 240 cm^2


（第 4 题）

5. 将如图所示表面带有图案的正方体沿某些棱展开后，得到的图形可能是（　　）


（第 5 题）


A　　B　　C　　D

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

6. 如图所示的三个正方体的六个面都按相同规律涂有红、黄、蓝、白、黑、绿六种颜色，那么涂黄色、白色、红色的对面分别是（　　）

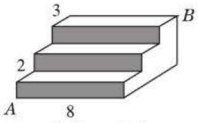


（第 6 题）

A. 蓝、绿、黑　　B. 绿、蓝、黑

C. 绿、黑、蓝　　D. 蓝、黑、绿

7. 如图，是一个三级台阶，它的每一级的长、宽、高分别为 8 dm，3 dm，2 dm. A 和 B 是这个台阶上两个相对的端点，点 A 处有一只蚂蚁，想到点 B 处去吃可口的食物，则蚂蚁沿着台阶面爬行到点 B 的最短路程为（　　）

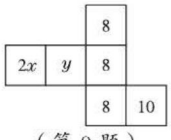


（第 7 题）

A. 15 dm　　B. 17 dm

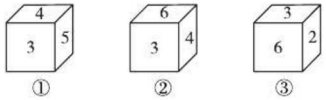
C. 20 dm　　D. 25 dm

8. 如图是一个正方体的展开图，如果正方体相对的面上标注的数相等，那么 x=_____，y=_____.



（第 8 题）

9. 如图是 3 个完全相同的 6 个面上分别标有数字 1，2，3，4，5，6 的正方体的三种不同放置方式，下底面上所标的数字依次是_____.



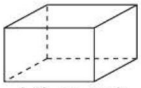
（第 9 题）

10. 如图所示是一种棱长分别为 3 cm，4 cm，5 cm 的长方体积木，现要用若干块这样的积木来搭建大长方体.

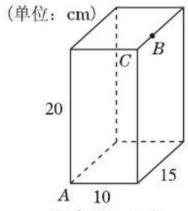
如果用 3 块来搭，那么搭成的大长方体的表面积最小是_____ cm^2,

如果用 4 块来搭，那么搭成的大长方体的表面积最小是_____ cm^2,

如果用 12 块来搭，那么搭成的大长方体的表面积最小是_____ cm^2.


（第 10 题）

11. 如图，长方体的长为 15 cm，宽为 10 cm，高为 20 cm，点 B 到点 C 的距离为 5 cm，一只蚂蚁如果要沿着长方体的表面从 A 点爬到 B 点，需要爬行的最短距离是多少？【导学号：8927116】



（第 11 题）

错题笔记

来德基

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

7.3 圆柱的侧面展开图

核心知识

- 圆柱的形成及其相关概念
- 圆柱的侧面展开图

知识链接

圆柱的形成 → 圆柱的侧面展开图 → 最短距离问题

点知识·拨考向 速提分

点知识 1 圆柱的形成及其相关概念

1. **圆柱的形成** 圆柱可以看作一个矩形绕其一边旋转一周得到的.

2. **相关概念** 在矩形中，与旋转轴垂直的边旋转后得到的面是圆柱的上下底面，与旋转轴平行的边旋转后得到的面是圆柱的侧面，该边叫做圆柱的母线.

拨考向 利用圆柱的形成解决问题

例 1 如图 7.3-1，矩形 $ABCD$ 中，$AB=4$ cm，$BC=8$ cm，把矩形 $ABCD$ 绕 AB 所在直线旋转一周得到一个圆柱，下列说法错误的是（　　）



图 7.3-1

A. 圆柱的母线长为 4 cm

B. 圆柱的高为 4 cm

C. 圆柱的底面半径长为 8 cm

D. 圆柱的底面直径长为 8 cm

解题秘方：根据矩形的边长及旋转的性质解题.

解：∵是以 AB 所在的直线为旋转轴，

∴圆柱的母线长为线段 AB 的长，

故母线的长为 4 cm，即 A 正确；

∵圆柱的高等于圆柱的母线长，故圆柱的高为 4 cm，即 B 正确；

∵ BC 边与 AB 垂直，∴ BC 边旋转一周形成圆柱的底面，

∴圆柱的底面半径等于线段 BC 的长，

故圆柱的底面半径为 8 cm，直径为 16 cm，即 C 正确，D 错误.

答案：D

提分·必记

特别解读

圆柱的母线有无数条，母线长都等于圆柱的高，圆柱的两个底面全等且平行.

提分·秘诀

技巧点拨

在矩形绕一边旋转成圆柱时，有以下两点要注意：(1)旋转轴的长即母线长；(2)与旋转轴垂直的边是底面半径.

基础 德基

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

点知识▶ 2 圆柱的侧面展开图

1. 圆柱的侧面展开图是一个矩形，它的一边是圆柱的母线，与其相邻的另一边的长等于底面圆的周长. 圆柱的侧面积等于圆柱的侧面展开图的面积.

2. **圆柱的侧面积和表面积公式** 若 r 是圆柱的底面半径，l 是圆柱的母线长，则圆柱的侧面积 $S_{侧}=2\pi rl$；表面积 $S_{表}=S_{侧}+2S_{底}=2\pi rl+2\pi r^2$.

提分·必记

特别提醒

只有沿着圆柱的母线展开，得到的圆柱的侧面展开图才是一个矩形.

技考向▶ 利用圆柱的侧面展开图解决问题

提分·秘诀

技巧点拨

求圆柱侧面积实质是求矩形的面积，关键是分清矩形的长、宽与底面圆的周长、圆柱的母线长的关系.

题型 1 利用圆柱的侧面展开图计算侧面积

例 2 如图 7.3-2，将一个底面直径为 2 cm，高为 2 cm 的圆柱形纸筒沿一条母线剪开，所得到的侧面展开图的面积为（　　）

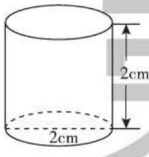


图 7.3-2

A. 2π cm^2　　B. 3π cm^2　　C. 4π cm^2　　D. 5π cm^2

解题秘方：由底面直径求出底面周长，即展开图的长，再利用矩形的面积公式计算即可.

解：圆柱形纸筒沿一条母线剪开，所得到的侧面展开图是一个矩形，它的长是底面圆的周长，即 2π cm，宽为圆柱的高，即 2 cm，所以它的面积为 4π cm^2.

答案：C

题型 2 利用圆柱的侧面展开图计算表面积

例 3 已知矩形 $ABCD$ 的一边 $AB=4$ cm，另一边 $BC=2$ cm，以直线 AB 为轴旋转一周，所得到的圆柱的表面积是（　　）

A. 12π cm^2　　B. 16π cm^2

C. 20π cm^2　　D. 24π cm^2

解题秘方：根据圆柱是通过以直线 AB 为轴旋转一周得到的，得出底面半径为 2 cm，母线长为 4 cm，进而通过圆柱的表面积 = 侧面积 + 两个底面积求出即可.

解：∵圆柱是通过以直线 AB 为轴旋转一周得到的，∴底面半径为 2 cm，母线长为 4 cm，

∴圆柱侧面积 $=2\pi\cdot BC\cdot AB=16\pi$（cm^2），

底面积 $=\pi\cdot BC^2=\pi\cdot 2^2=4\pi$（cm^2），

∴圆柱的表面积 $=16\pi+2\times 4\pi=24\pi$（cm^2）.

答案：D

特别提醒

圆柱有两个底面，计算圆柱的表面积时，不要只加一个底面的面积.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

点方法·拨技巧 提高分

拔尖角度▸ 1 利用圆柱的侧面展开图求底面半径

挑战·高分

例 4 [中考·天水]一个圆柱的侧面展开图是两邻边长分别为 6 和 8 的矩形，则该圆柱的底面半径是（　　）

A. $\frac{3}{\pi}$　　B. $\frac{4}{\pi}$

C. $\frac{3}{\pi}$或$\frac{4}{\pi}$　　D. $\frac{6}{\pi}$或$\frac{8}{\pi}$

易错提醒

当所给矩形没有指明哪条边是圆柱的底面圆的周长时，要分类讨论，不要漏解.

解题秘方：分 8 为底面周长与 6 为底面周长两种情况，求出底面半径即可.

解：若 6 为圆柱的高，8 为底面周长，此时底面半径为$\frac{8}{2\pi}=\frac{4}{\pi}$；

若 8 为圆柱的高，6 为底面周长，此时底面半径为$\frac{6}{2\pi}=\frac{3}{\pi}$.

答案：C

拔尖角度▸ 2 利用圆柱的侧面展开图求多圈问题

挑战·高分

例 5 如图 7.3-3，圆柱底面半径为 2 cm，高为 9π cm，点 A，B 分别是圆柱两底面圆周上的点，且 A，B 在同一母线上，用一棉线从 A 顺着圆柱侧面绕 3 圈到 B，求棉线最短为 _____ cm.

易错提醒

解决此类多圈问题，不要误认为最短路径即为侧面展开图对角线的长度，切记有几圈就有几条对应的线段，如本题中的 AC，CD 和 DB，它们所在小矩形的高的和等于圆柱的高.



图 7.3-3

解题秘方：要求圆柱中两点之间的最短路径，最直接的方法，就是将圆柱展开，然后利用两点之间线段最短解答.

解：圆柱的展开图如图 7.3-4 所示，用一根棉线从 A 顺着圆柱侧面绕 3 圈到 B 的最短路线是 $AC\rightarrow CD\rightarrow DB$，

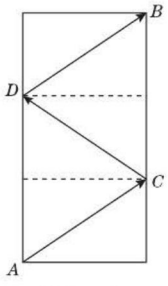


图 7.3-4

菜 德 基

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

即在圆柱的展开图中，将长方形平均分成 3 个小长方形，A 沿着 3 个小长方形的对角线运动到 B 的路线最短．

∵圆柱底面半径为 2 cm，

∴长方形的宽即是圆柱的底面周长为 $2\pi\times2=4\pi$ cm，

又∵圆柱高为 9π cm，

∴小长方形的一条边长为 3π cm．

根据勾股定理求得 $AC=CD=DB=5\pi$ cm．

∴ $AC+CD+DB=15\pi$ cm．

答案：15π

点中考·拨模拟 得满分

中考探秘

本节的主要内容是圆柱的侧面展开图，主要考查圆柱展开图的侧面积、表面积，及用圆柱的侧面展开图求最短路径问题．命题形式多为选择题、填空题，难度适中．

三年中考兵法

冲刺·满分

考法 1 利用圆柱的表面积解决实际问题

例 6 [中考·玉溪]如图 7.3-5，是一个有盖子的圆柱形水杯，底面周长为 6π cm，高为 18 cm，若盖子与杯体的重合部分忽略不计，则制作 10 个这样的水杯至少需要的材料是（　　）

A. 108π cm^2

B. $1\,080\pi$ cm^2

C. 126π cm^2

D. $1\,260\pi$ cm^2



图 7.3-5

试题评析：本题考查了圆柱表面积的计算，解题的关键是熟知一个圆柱的表面积的计算公式．

解：设底面半径为 r cm，则 $2\pi r=6\pi$，

解得 $r=3$，

∴底面积为 9π cm^2，

侧面积为 $6\pi\times18=108\pi$（cm^2）．

∴一个杯子的表面积为 $108\pi+2\times9\pi=126\pi$（$cm^2$），

∴制作 10 个这样的水杯至少需要的材料是 $10\times126\pi=1\,260\pi$（cm^2）．

故选 D．

答案：D

解法提醒

先利用底面周长求出底面的半径，进而求出底面的面积，再用底面周长与高的积求出侧面积，进而求出一个水杯需要的材料，再乘以数量 10，即可得出答案．

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

考法 2 利用圆柱的侧面展开图求最短路径问题

例 7 [中考·东营] 如图 7.3–6 所示，圆柱的高 $AB=3$，底面直径 $BC=3$，现在有一只蚂蚁想要从 A 处沿圆柱表面爬到对角 C 处捕食，则它爬行的最短距离是（　　）

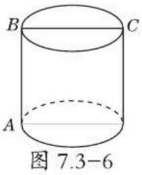


图 7.3–6

A. $3\sqrt{1+\pi}$　　B. $3\sqrt{2}$

C. $\dfrac{3\sqrt{4+\pi^2}}{2}$　　D. $3\sqrt{1+\pi^2}$

试题评析：本题考查了平面展开——最短路径问题，解题的关键是会将圆柱的侧面展开，并利用勾股定理解答.

解：把圆柱侧面展开，展开图如图 7.3–7 所示，点 A，C 间的最短距离为线段 AC 的长.

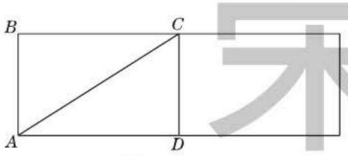


图 7.3–7

在 Rt△ADC 中，$\angle ADC=90°$，$CD=AB=3$，AD 为底面半圆弧长，

即 $AD=\dfrac{3}{2}\pi$，

$\therefore AC=\sqrt{AD^2+CD^2}=\sqrt{3^2+\left(\dfrac{3\pi}{2}\right)^2}=\dfrac{3\sqrt{4+\pi^2}}{2}$.

答案：C

解法提醒

求圆柱表面两点之间的最短路径，首先要把圆柱的侧面展开，利用两点之间线段最短，结合勾股定理求解.

两年模拟兵法 答案见 273 页

1. 圆柱的侧面展开图是（　　）

A. 圆　　B. 矩形

C. 梯形　　D. 扇形

2. 已知圆柱的底面半径为 3 cm，母线长为 5 cm，则圆柱的侧面积为（　　）

A. 30 cm^2　　B. 30 π cm^2

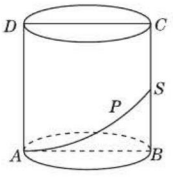
C. 15 cm^2　　D. 15 π cm^2

3. 用高为 6 cm，底面直径为 4 cm 的圆柱 A 的侧面展开图，再围成不同于 A 的另一个圆柱 B，则圆柱 B 的体积为（　　）

A. 24 π cm^3　　B. 36 π cm^3

C. 36 cm^3　　D. 40 cm^3

4. 如图，圆柱的轴截面 $ABCD$ 是边长为 4 的正方形，动点 P 从 A 点出发，沿着圆柱的侧面移动到 BC 的中点 S 的最短距离为（　　）



（第 4 题）

A. $2\sqrt{1+\pi^2}$　　B. $2\sqrt{1+4\pi^2}$

C. $4\sqrt{1+\pi^2}$　　D. $2\sqrt{4+\pi^2}$

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

5. 如果圆柱的底面积为 16 π cm^2，侧面积为 640 π cm^2，那么它的母线长为 _____.

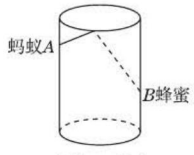
6. 已知圆柱的底面半径为 2 cm，高为 3 cm，则它的侧面展开图的对角线长为 _____.

7. 数学活动课上，老师出示如图所示的圆柱形笔筒，让同学们测量并计算笔筒的侧面积，丽丽测得笔筒的底面直径和高分别是 8 cm 和 11 cm，则笔筒的侧面积是 _____ cm^2（精确到 1 cm^2）.



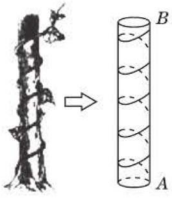
（第 7 题）

8. [中考·黄冈]如图，圆柱形玻璃杯高为 14 cm，底面周长为 32 cm，在杯内壁离杯底 5 cm 的点 B 处有一滴蜂蜜，此时一只蚂蚁正好在杯外壁，离杯上沿 3 cm 与蜂蜜相对的点 A 处，则蚂蚁从外壁 A 处到内壁 B 处的最短距离为 _____ cm（杯壁厚度不计）.



（第 8 题）

9. 我国古代有这样一道数学问题：“枯木一根直立地上，高二丈，周三尺，有葛藤自根缠绕而上，五周而达其顶，问葛藤之长几何？”题意是：如图所示，把枯木看作一个圆柱，因一丈是十尺，所以该圆柱的高为 20 尺，底面周长为 3 尺，有葛藤自点 A 处缠绕而上，绕五周后其末端恰好到达点 B 处，则问题中葛藤的最短长度是 _____ 尺.

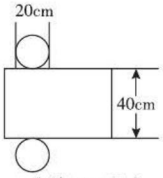


（第 9 题）

10. 如图，是某几何体的表面展开图.

（1）指出这个几何体的名称.

（2）求这个几何体的体积（π 取 3.14）.



（第 10 题）

荣德基

错题笔记

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

7.4 圆锥的侧面展开图

核心知识
- 圆锥的相关概念
- 圆锥的侧面展开图

知识链接

圆锥的侧面展开图
- 圆锥的形成
- 圆锥的体积
- 圆锥的侧面积及表面积

点知识·拨考向 速提分

点知识 1 圆锥的相关概念

1. **圆锥的定义** 圆锥是以直角三角形的一条直角边为轴旋转一周得到的立体图形，如图 7.4−1 所示.

2. **圆锥的母线** 如图 7.4−1 所示，圆锥的母线是指连接圆锥顶点和底面圆周上任意一点的线段. 母线有无数条，且每条母线的长都相等.

3. **圆锥的高** 如图 7.4−1 所示，圆锥的高就是顶点与底面圆心所连的线段.

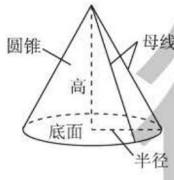


图 7.4−1

拨考向 利用圆锥的高、底面半径、母线长的关系计算

例 1 若一个圆锥的母线长为 5 cm，底面直径为 8 cm，求这个圆锥的高.

解题秘方：如图 7.4−2 所示，由题意知 AB=5 cm，OB=4 cm，利用勾股定理可求 AO 的长.

解：如图 7.4−2，∵ $\angle AOB=90°$，AB=5 cm，OB=4 cm，

∴ $AO=\sqrt{AB^2-OB^2}=\sqrt{5^2-4^2}=3$（cm）.

∴ 这个圆锥的高为 3 cm.

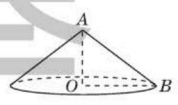


图 7.4−2

点知识 2 圆锥的侧面展开图

1. 圆锥的侧面展开图是以圆锥的顶点为圆心、以母线为半径的扇形，扇形的弧长等于圆锥底面的圆周长.

2. 圆锥的侧面积等于圆锥的侧面展开图的面积，即 $S_{侧}=\frac{1}{2}cl=\pi rl$，其中 c 是圆锥的底面圆的周长，r 是底面圆的半径，l 是圆锥的母线长.

3. 圆锥的表面积等于它的侧面积与底面积之和，即 $S_{表}=S_{侧}+S_{底}=\pi rl+\pi r^2=\pi r(l+r)$，其中 r 是底面圆的半径，l 是圆锥的母线长.

提分·必记

特别提醒

圆锥的高 h，底面半径 r，母线长 l 的关系式：$h^2+r^2=l^2$（已知其中任意两个量，可以求出第三个量）.

提分·秘诀

技巧点拨

圆锥的母线、底面半径和圆锥的高恰好构成直角三角形，利用勾股定理求解.

提分·必记

特别提醒

圆锥的母线长等于圆锥侧面展开后所得扇形的半径长，要注意与圆锥的底面半径相区分.

基德荣

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

核心考向▶利用圆锥的侧面展开图进行计算

题型1　利用圆锥的侧面展开图求侧面积

例2　[中考·河池]如图7.4-3，用一张半径为24 cm的扇形纸板制作一顶圆锥形帽子（接缝忽略不计），如果圆锥形帽子的底面半径为10 cm，那么这张扇形纸板的面积是（　　）

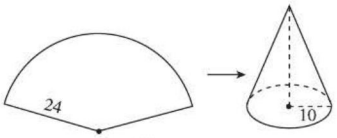


图7.4-3

A. 240 π cm^2　　B. 480 π cm^2

C. 1 200 π cm^2　　D. 2 400 π cm^2

解题秘方：圆锥的侧面展开图是扇形，圆锥的侧面积就是相关扇形的面积，直接利用圆锥的侧面积公式$S_{侧}=\pi rl$计算.

解：$S_{侧}=\pi rl=\pi\times10\times24=240\pi(cm^2)$.

答案：A

题型2　利用圆锥的侧面展开图求表面积

例3　如图7.4-4①，在正方形铁皮上剪下一个扇形和一个半径为1cm的圆形，使之恰好围成如图7.4-4②所示的一个圆锥，则圆锥的表面积为_____.

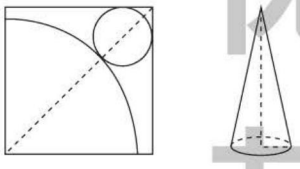


图7.4-4

解题秘方：利用已知底面圆的半径为1 cm，得出底面圆的周长为2π cm，从而得出母线长，进而求出侧面积，再加上底面积即可.

解：∵底面圆的半径为1 cm，∴底面圆的周长为2π cm.

设扇形的半径为r cm，由题意，得

$$2\pi=\frac{90\pi\times r}{180},$$

解得$r=4$，

即母线长$l=4$ cm.

∴$S_{表}=S_{侧}+S_{底}=\pi\times1\times4+\pi\times1^2=5\pi(cm^2)$.

答案：$5\pi cm^2$

提分·秘诀

技巧点拨

求圆锥的侧面积主要依据公式计算，常通过圆锥侧面展开图的扇形弧长与底面圆周长的关系进行转化，从而推导出所需条件，再套公式.

拓展

圆锥的体积

$V_{圆锥}=\frac{1}{3}\pi r^2h$，其中$r$是底面圆的半径，$h$是高.

特别提醒

圆锥只有一个底面，不要和柱体的表面积混淆，在求表面积时，只需加上一个底面的面积即可.

荣德基

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

点方法·拨技巧 提高分

拔尖角度 1 利用圆锥的侧面展开图求圆锥的体积

挑战·高分

例 4 一个竖立在地面上的圆锥形物体的母线长为 4 m，侧面展开图的圆心角为 120°，则这个圆锥的体积等于（　　）

A. $\frac{\sqrt{15}\pi}{3}$ m^3　B. $\frac{32\sqrt{35}\pi}{27}$ m^3　C. $\frac{32\sqrt{35}\pi}{81}$ m^3　D. $\frac{128\sqrt{2}\pi}{81}$ m^3

解题秘方：根据已知条件求出圆锥的底面半径和高，代入圆锥体积公式，可得答案.

解：设圆锥的底面半径为 r m，∵圆锥形物体的母线长 l=4 m，侧面展开图的圆心角为 120°，∴ $2\pi r=\frac{120\pi}{180}l$，即 $2\pi r=\frac{2\pi}{3}\cdot 4$，解得 $r=\frac{4}{3}$.

∴圆锥的高 $h=\sqrt{l^2-r^2}=\frac{8}{3}\sqrt{2}$ m. ∴圆锥的体积 $V=\frac{1}{3}\pi r^2h=\frac{128\sqrt{2}\pi}{81}$ m^3.

答案：D

技巧点拨

解决有关圆锥及其侧面展开图的计算问题时，常借助“圆锥的底面圆周长等于侧面展开图的扇形弧长”，即 $2\pi r=\frac{n\pi l}{180}$，根据圆锥底面圆的半径 r、圆锥母线长 l、侧面展开图中扇形圆心角的度数 n 之间的关系求解.

拔尖角度 2 利用圆锥的侧面展开图求最短路线长

挑战·高分

例 5 如图 7.4−5 所示，圆锥的母线长是 3，底面半径是 1，A 是底面圆周上一点，一只小虫从点 A 出发，绕侧面爬行一周，再回到点 A 的最短路线长是多少？

解题秘方：我们知道“两点之间，线段最短”，沿母线 SA 将圆锥的侧面展开，得扇形 SAA'，连接 AA'（如图 7.4−6 所示），则小虫从点 A 出发，绕侧面爬行一周回到点 A 的最短路线长就是线段 AA' 的长.

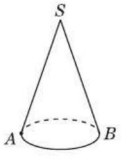


图 7.4−5

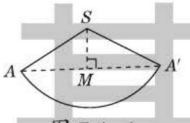


图 7.4−6

解：将圆锥侧面沿母线 SA 展开，得扇形 SAA'，如图 7.4−6.

设∠ ASA' =n°，∵扇形弧长等于圆锥底面圆周长，

∴ $\frac{n\pi\times 3}{180}=2\pi\times 1$. ∴ n=120，即∠ ASA' =120°. 连接 AA'，过 S 作 $SM\perp AA'$ 于 M，易得∠ $ASM=\frac{1}{2}\angle ASA'$ =60°，

∴在 Rt△ ASM 中，∠ SAM=30°. 又∵ SA=3，∴ $SM=\frac{3}{2}$. 根据勾股定理，得 $AM=\frac{3\sqrt{3}}{2}$，∴ AA' =2AM=3$\sqrt{3}$.

因此，小虫爬行的最短路线长是 3$\sqrt{3}$.

技巧点拨

求曲面上最短路径长的方法是化曲面为平面，再利用“两点之间，线段最短”的基本事实找出最短路径，最后构造直角三角形，用勾股定理求解.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

拔尖角度 3 求组合体的表面积

挑战·高分

例 6 蒙古包可以近似地看作由圆锥和圆柱组成（如图 7.4-7）. 如果想用毛毡搭建 20 个底面积为 12 m^2，高为 3.2 m，外围高 1.8 m 的蒙古包，至少需要多少平方米的毛毡（π 取 3.142，结果取整数）？



图 7.4-7

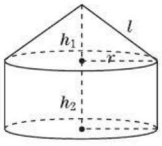


图 7.4-8

技巧点拨

求组合图形的表面积，首先要分辨出是由哪几种常见图形组成的，然后分别求出各个图形的表面积，最后相加即可，若有重叠的部分，要将重叠的部分减去.

解：如图 7.4-8 是一个蒙古包的示意图. 根据题意，知下部圆柱的底面积为 12 m^2，高 h_2=1.8 m；上部圆锥的高 h_1=3.2−1.8=1.4（m），∴圆柱的底面圆的半径 $r=\sqrt{\frac{12}{\pi}}\approx 1.954$(m)，∴圆柱的侧面积约为 $2\pi\times 1.954\times 1.8\approx 22.10$（$m^2$），圆锥的母线长 l 约为 $\sqrt{1.954^2+1.4^2}\approx 2.404$(m)，∴圆锥的侧面积约为 $\pi\times 1.954\times 2.404\approx 14.76$($m^2$).

因此，搭建 20 个这样的蒙古包至少需要毛毡 $20\times(22.10+14.76)\approx 738$($m^2$).

点中考·拔模拟 得满分

三年中考兵法

考法 1 利用圆锥与同底等高的圆柱的关系求圆锥的侧面积

冲刺·满分

例 7 [中考·遵义]若要用一个底面直径为 10，高为 12 的实心圆柱体，制作一个底面半径和高分别与圆柱底面半径和高相同的圆锥，则该圆锥的侧面积为（　　）

A. 60 π　　B. 65 π　　C. 78 π　　D. 120 π

解法提醒

先由勾股定理求出圆锥的母线长，再利用圆锥侧面积公式得出答案.

试题评析：此题主要考查了圆锥的计算，正确记忆圆锥侧面积公式是解题关键.

解：由题意可得，圆锥的底面半径为 5，母线长为 $\sqrt{12^2+5^2}=13$，则该圆锥的侧面积为 $\pi\times 5\times 13=65\pi$.

答案：B

考法 2 利用圆锥的侧面展开图求扇形的半径

例 8 [中考·聊城]用一块圆心角为 216° 的扇形铁皮，制作一个高为 40 cm 的圆锥形工件的侧面（接缝忽略不计），那么这块扇形铁皮的半径是 _____cm.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

试题评析：本题考查了圆锥的计算，掌握圆锥的侧面展开图的弧长等于圆锥底面圆的周长是解题的关键.

解：设这块扇形铁皮的半径为 R cm，圆锥的底面圆的半径为 r cm，

根据题意，得 $2\pi r=\dfrac{216\cdot\pi\cdot R}{180}$，解得 $r=\dfrac{3}{5}R$.

易得 $40^2+\left(\dfrac{3}{5}R\right)^2=R^2$，解得 $R=50$，

所以这块扇形铁皮的半径为 50 cm.

答案：50

解法提醒

设这块扇形铁皮的半径为 R cm，圆锥的底面圆的半径为 r cm，根据圆锥的侧面展开图的弧长等于圆锥底面圆的周长，列出等式求出底面圆的半径与母线长的关系，再用勾股定理求出圆锥的母线长，即扇形铁皮的半径.

考法 3 利用圆锥的侧面积求三角函数

例 9 [中考·衢州]如图 7.4-9，AB 是圆锥的母线，BC 为底面直径，已知 $BC=6$ cm，圆锥的侧面积为 15π cm^2，则 $\sin\angle ABC$ 的值为（　　）

A. $\dfrac{3}{4}$　　B. $\dfrac{3}{5}$

C. $\dfrac{4}{5}$　　D. $\dfrac{5}{3}$

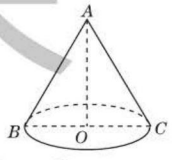


图 7.4-9

试题评析：本题考查圆锥侧面积公式的运用，注意在直角三角形中，一个角的正弦值等于这个角的对边与斜边之比.

解：设圆锥的母线长为 R cm，由题意得 $15\pi=\pi\times3\times R$，

解得 $R=5$，

$\therefore$ 圆锥的高 $AO=4$ cm，$\therefore\sin\angle ABC=\dfrac{AO}{AB}=\dfrac{4}{5}$.

答案：C

解法提醒

先根据圆锥的侧面积公式 $S=\pi rl$ 求出母线长，再根据锐角三角函数的定义解答即可.

两年模拟兵法 ☞答案见 274 页

1. [中考·义乌]已知圆锥的底面半径为 6 cm，高为 8 cm，则这个圆锥的母线长为（　　）

A. 12 cm　　B. 10 cm

C. 8 cm　　D. 6 cm

2. [中考·乌鲁木齐]圆锥的侧面展开图是一个弧长为 12π 的扇形，则这个圆锥底面圆的半径是（　　）

A. 24　　B. 12

C. 6　　D. 3

3. [中考·威海]若用一张直径为 20 cm 的半圆形铁片作为一个圆锥的侧面，接缝忽略不计，则所得圆锥的高为（　　）

A. $5\sqrt{3}$ cm　　B. $5\sqrt{5}$ cm

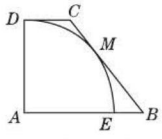
C. $\dfrac{5\sqrt{15}}{2}$ cm　　D. 10 cm

4. [中考·湖州]若一个圆锥的侧面展开图是半径为 18 cm，圆心角为 240° 的扇形，则这个圆锥的底面半径是（　　）

A. 6 cm　　B. 9 cm　　C. 12 cm　　D. 18 cm

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

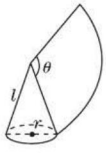
5. [模拟·潍城] 如图，在梯形 $ABCD$ 中，$AB \parallel CD$，$\angle A=90^\circ$，$AB=5$，$CD=2$. 以点 A 为圆心，腰 AD 长为半径的圆与另一腰 BC 相切于点 M，与下底 AB 交于点 E，将扇形 AED 剪下围成一个圆锥，则圆锥的高为（　　）



（第 5 题）

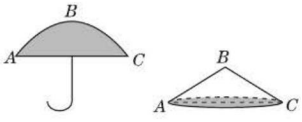
A. 1　　B. $\sqrt{15}$　　C. 4　　D. $\sqrt{17}$

6. [中考·安顺] 如图，沿一条母线将圆锥侧面剪开并展平，得到一个扇形，若圆锥的底面圆的半径 $r=2$，扇形的圆心角 $\theta=120^\circ$，则该圆锥的母线长 l 为 _____.



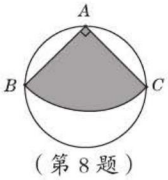
（第 6 题）

7. 如图，一把打开的雨伞可近似看成一个圆锥，伞骨（面料下方能够把面料撑起来的支架）末端各点所在圆的直径 AC 长为 12 分米，伞骨 AB 长为 7 分米，那么制作这样的一把雨伞至少需要绸布面料为 _____ 平方分米.



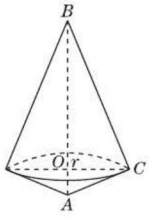
（第 7 题）

8. [模拟·高密] 如图，从一块直径是 8 m 的圆形铁皮上剪出一个圆心角为 90° 的扇形，将剪下的扇形围成一个圆锥，圆锥的高是 _____ m.



（第 8 题）

9. 如图，已知 Rt △ ABC 的斜边 $AB=13$ cm，一条直角边 $AC=5$ cm，以 AB 所在直线为轴旋转一周得一个几何体，求这个几何体的表面积.

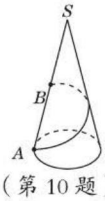


（第 9 题）

10. 如图所示，已知圆锥底面半径 $r=10$ cm，母线长为 40 cm.

（1）求它的侧面展开图的圆心角和表面积.

（2）若一甲虫从 A 点出发沿着圆锥侧面绕行到母线 SA 的中点 B 处，它所走的最短路线长是多少?



（第 10 题）

荣德基

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

利用展开图求最短路径问题

荣老师告诉你 利用展开图求最短路径问题，关键是根据几何体的特性确定展开方式，一个几何体可能有多种展开方式，找出其中使路径最短的一种，然后结合勾股定理或相似三角形等知识解题.

类型一 棱柱展开图中的最短路径

例1 如图7-1是放在地面上的一个长方体盒子，其中AB=9 cm，BC=6 cm，BF=5 cm，点M在棱AB上，且AM=3 cm，点N是FG的中点，一只蚂蚁要沿着长方体盒子的表面从点M爬行到点N，它需要爬行的最短路程为（　　）

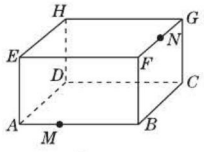


图7-1

A. 10 cm　　B. $\sqrt{106}$ cm

C. $(6+\sqrt{34})$ cm　　D. 9 cm

解题秘方：平面展开图有两种情况，画出图形，利用勾股定理求出MN的长即可.

解：如图7-2①，连接MN. ∵AB=9 cm，FG=BC=6 cm，BF=5 cm，AM=3 cm，点N是FG的中点，

∴BM=9-3=6（cm），BN=5+3=8（cm），

∴$MN=\sqrt{6^2+8^2}=10$（cm）.

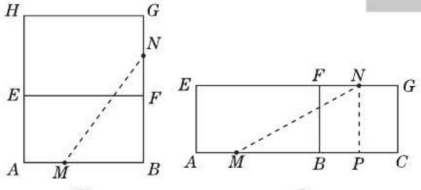


图7-2

如图7-2②，连接MN，过点N作$NP\perp BC$于P. ∵AB=9 cm，BC=GF=6 cm，BF=5 cm，AM=3 cm，点N是FG的中点，

∴PM=9-3+3=9（cm），NP=5 cm，

∴$MN=\sqrt{9^2+5^2}=\sqrt{106}$（cm）.

∵$10<\sqrt{106}$，

∴蚂蚁沿长方体盒子的表面从点M爬行到点N的最短路程为10 cm.

答案：A

方法点拨：通过棱柱平面展开图求原棱柱表面上两点的最短路径问题，应先综合考虑棱柱的不同展开方式，展开的方式不同得到的结果可能不同，然后再比较各个不同的结果确定出最短距离.

类型二 圆柱展开图中的最短路径

例2 如图7-3，一个圆柱的高为10 cm，底面半径为2 cm，一只蚂蚁从圆柱一条高的中点A处到与它正对的高的点B处的最短爬行距离是（　　）

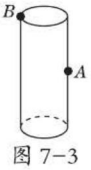


图7-3

A. 10 cm　　B. 15 cm

C. $\sqrt{25+\pi^2}$ cm　　D. $\sqrt{25+4\pi^2}$ cm

解题秘方：根据题意把圆柱侧面展开成平面图形后，再确定两点之间的最短路径即可.

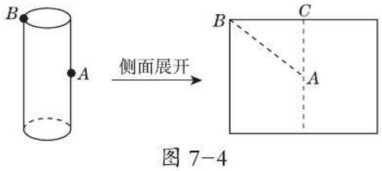


图7-4

解：如图7-4，连接AB. 在Rt△ABC中，AC=5 cm，BC=2π cm，

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

∴最短爬行距离是 $AB=\sqrt{25+4\pi^2}$ cm.

答案：D

方法点拨：沿圆柱的高线将圆柱侧面展开，得到的展开图是一个矩形，根据“两点之间，线段最短”，确定出最短路径，再构造直角三角形，利用勾股定理求解.

类型三 圆锥展开图中的最短路径

例 3 如图 7-5，一只蚂蚁从底面半径为 3 cm，母线长为 6 cm 的圆锥体的底面点 A 处出发，绕行爬至对面母线的中点 P 处，则该蚂蚁爬行的最短路程为（　　）

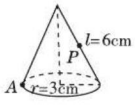


图 7-5

A. $3\sqrt{5}$ cm　　B. $2\sqrt{3}$ cm

C. $3\sqrt{3}$ cm　　D. $6\sqrt{2}$ cm

解题秘方：要求蚂蚁爬行的最短距离，需将圆锥的侧面展开，根据“两点之间，线段最短”得出结果.

解：由题意知，圆锥底面圆的半径为 3 cm，故底面周长等于 6π cm.

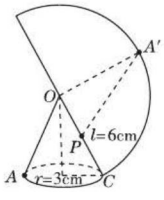


图 7-6

设圆锥侧面展开后所得的扇形圆心角为 $n°$，根据底面周长等于展开后扇形的弧长，得 $6\pi=\frac{n\pi\times 6}{180}$，解得 $n=180$，所以展开图如图 7-6 所示，连接 OA'，$A'P$，$\angle A'OP=90°$，

根据勾股定理求得 $A'P=\sqrt{OA'^2+PO^2}=\sqrt{36+9}=3\sqrt{5}$（cm）.

答案：A

方法点拨：沿圆锥的母线将圆锥的侧面展开，得到一个扇形，在扇形上确定出原圆锥上的两点，根据“两点之间，线段最短”确定出最短路径，再构造直角三角形，利用勾股定理的知识求解.

类型四 多圈问题中的最短路径

例 4 为了庆祝“元旦”，学校准备在校园操场的圆柱形柱子上贴彩带（如图 7-7），已知柱子的底面半径为 0.5 m，高为 9 m. 如果要求彩带从柱子底端的 A 处绕柱子 4 圈后到达柱子顶端的 B 处，则彩带的长度至少约为 _____ m（π 取 3）.

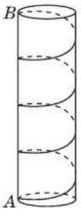


图 7-7

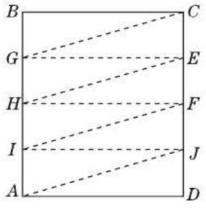


图 7-8

解：如图 7-8，将圆柱侧面展开成长方形，则螺旋线长为四个长方形对角线长的和.

∵圆柱高 9 m，易知底面周长约为 3 m，

$\therefore DJ=\frac{9}{4}$ m，$AD\approx 3$m，

$\therefore AJ^2\approx\left(\frac{9}{4}\right)^2+3^2$，

$\therefore AJ\approx\frac{15}{4}$ m，

∴彩带的长度至少约为 $4\times\frac{15}{4}=15$（m）.

答案：15

方法点拨：解此类在柱体中求多圈的最短路径问题时，把柱体侧面展开后，要根据圈数把柱体的侧面展开图平均分成几段，连接各段中的对角线，各段对角线之和即为最短距离.

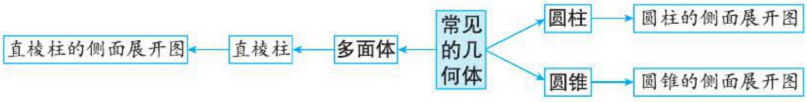
荣德基

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

章末核心知识分类整合

核心结构专题

结构必知



核心必读

1. 由多边形围成的几何体叫做多面体，围成多面体的多边形的边叫做多面体的棱，多边形的顶点叫做多面体的顶点.

2. 直棱柱的底面是几边形就叫做直几棱柱，如长方体也叫做直四棱柱；在棱柱中，除上、下底面以外，其他的面叫做它的侧面，相邻两个侧面的公共边叫做棱柱的侧棱.

3. 直棱柱的性质

（1）上、下底面是全等的多边形，各个侧面都是矩形；（2）侧棱数、侧面数都等于底面的边数；（3）相邻的两条侧棱平行且相等.

4. 直棱柱的侧面展开图是矩形，矩形的宽等于直棱柱的侧棱长，矩形的长等于直棱柱底面的周长. 直棱柱的侧面积：如果用 c 表示直棱柱的侧棱长，l 表示直棱柱底面的周长，$S_{侧}$ 表示直棱柱的侧面积，则 $S_{侧}=cl$.

5. 圆柱的侧面展开图是一个矩形，它的一边是圆柱的母线，另一边的长等于底面圆的周长. 圆柱侧面积等于圆柱的侧面展开图的面积. 若 r 是底面圆的半径，l 是圆柱的母线长，则圆柱的侧面积 $S_{侧}=2\pi rl$；表面积 $S_{表}=S_{侧}+2S_{底}=2\pi rl+2\pi r^2$.

6. 圆锥的侧面展开图是以圆锥的顶点为圆心、以母线为半径的扇形，扇形的弧长等于圆锥底面的圆周长. 圆锥的侧面积 $S_{侧}=\frac{1}{2}cl=\pi rl$，圆锥的表面积 $S_{表}=S_{侧}+S_{底}=\pi rl+\pi r^2=\pi r(l+r)$，其中 c 是圆锥的底面圆的周长，r 是底面圆的半径，l 是圆锥的母线长.

知识方法专题

知识必学

专题一 几何体的展开与折叠

链接中考» 几何体的展开与折叠常见考点为对常见几何体展开图的认识或由展开图还原几何体. 其中对正方体的展开图考查较多，包括正方体展开图的对面问题，一般以选择题的形式呈现，难度不大.

例1 [中考·泰州]一个几何体的表面展开图如图7-9所示，则这个几何体是（　　）

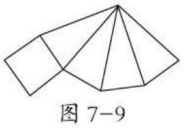


图7-9

A. 四棱锥　　B. 四棱柱

C. 三棱锥　　D. 三棱柱

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

解题秘方：根据锥体的侧面展开图的特征得出答案.

解：如图 7-9 所示，展开图中几个三角形交于一点，则该几何体为锥体.

又展开图中与三角形相连的多边形是四边形，则该几何体是四棱锥.

答案：A

例 2 [中考·襄阳]某正方体的表面展开图如图 7-10 所示，则原正方体中与“春”字所在的面相对的面上的字是（　　）



图 7-10

A. 青　　B. 来　　C. 斗　　D. 奋

解题秘方：正方体的表面展开图中，相对的面之间一定相隔一个正方形.

解：“青”和“来”是相对的面，“春”和“奋”是相对的面，“用”和“斗”是相对的面.

答案：D

方法点拨：由展开图还原几何体首先看展开图有几个底面，2 个底面为柱体，1 个底面为锥体，然后结合底面的形状和侧面的形状具体识别原几何体；正方体展开图的同一行或同一列中，正方形每隔一个相对，和同一行（或列）均相连的两个正方形亦相对.

专题二 几何体的侧面积和表面积

链接中考» 一般情况下，求几何体的侧面积和表面积常借助几何体的侧面展开图或表面展开图来进行，考查立体图形与平面图形的空间转化能力，常以选择题或填空题的形式呈现，难度中等.

例 3 如图 7-11 ①所示，O 为圆柱形木块底面的圆心，过底面的一条弦 AD，沿母线 AB 将木块剖开，得剖面为矩形 $ABCD$，$AD=24$ cm，$AB=25$ cm. 若 $\overset{\frown}{AMD}$ 的长为底面周长的 $\frac{2}{3}$，如图 7-11 ②所示.

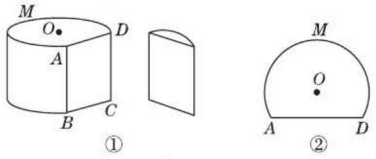


图 7-11

（1）求⊙ O 的半径.

（2）求这个圆柱形木块的表面积.（结果可保留 π 和根号）

解题秘方：（1）根据 $\overset{\frown}{AMD}$ 的长为底面周长的 $\frac{2}{3}$，可将扇形的圆心角求出，再根据弦 AD 的长可将⊙ O 的半径求出；（2）圆柱形木块的表面积 $S=2S_{底}+S_{侧}$，将上、下两个底面的面积和侧面的面积求出，相加即可.

解：（1）如图 7-12 所示，连接 OA，OD，过 O 作 $OE\perp AD$，垂足为 E，易知 $AE=\frac{1}{2}AD$.

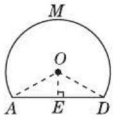


图 7-12

$\because \overset{\frown}{AMD}$ 的长 $=\frac{2}{3}$⊙ O 的周长，

$\therefore$ 扇形 OAD 的圆心角为 $360°\times\frac{2}{3}=240°$.

$\therefore \angle AOD=360°-240°=120°$.

$\because OA=OD$，$OE\perp AD$，$\therefore \angle AOE=\frac{1}{2}\times 120°=60°$，$AE=ED$.

$\because AD=24$ cm，

$\therefore AE=12$ cm.

在 Rt△ AOE 中，$\sin\angle AOE=\frac{AE}{AO}$，

$\therefore AO=\frac{AE}{\sin 60°}=12\div\frac{\sqrt{3}}{2}=8\sqrt{3}$（cm）.

$\therefore$⊙ O 的半径为 $8\sqrt{3}$ cm.

荣德基

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

（2）设圆柱形木块的表面积为 S，则 $S=2S_{底}+S_{侧}$.

$\because 2S_{底}=2\pi\times(8\sqrt{3})^2=384\pi$（$cm^2$），

$S_{侧}=2\pi\times8\sqrt{3}\times25=400\sqrt{3}\pi$（$cm^2$），

$\therefore S=(384+400\sqrt{3})\pi cm^2$.

$\therefore$ 木块的表面积为 $(384+400\sqrt{3})\pi\ cm^2$.

方法点拨：求几何体的侧面积必须先了解几何体的侧面展开图的形状，圆锥的侧面展开图是一个扇形，这个扇形的半径是圆锥的母线长，扇形的弧长是圆锥底面圆的周长；圆柱的侧面展开图是一个矩形，这个矩形的一边长是圆柱的母线长，与其相邻的另一边长是圆柱底面圆的周长.

专题三 几何体中的最短路径问题

链接中考» 几何体中的最短路径问题是近几年中考的热点，常以棱柱、圆柱为背景，考查图形表面两点的最短距离，常以选择题或填空题的形式呈现，难度稍大.

例 4 葛藤是一种多年生藤本植物，为获得更多的雨露和阳光，其茎蔓常绕着附近的树干沿最短路径盘旋而上，如图 7-13，如果把树干看成圆柱，它的底面周长是 50 cm，当一段葛藤绕树干盘旋 2 圈升高为 2.4 m 时，这段葛藤的长是（　　）



图 7-13

A. 3 m　　B. 2.6 m

C. 2.8 m　　D. 2.5 m

解题秘方：先把树干当成圆柱从侧面展开，求出葛藤绕树干盘旋 1 圈时上升的高度，进而可得出结果.

解：$\because$ 葛藤绕树干盘旋 2 圈升高为 2.4 m，

$\therefore$ 葛藤绕树干盘旋 1 圈升高为 1.2 m.

如图 7-14 所示，

$AC=\sqrt{AD^2+DC^2}=1.3$ m，

$\therefore$ 这段葛藤的长 $=2\times1.3=2.6$（m）.

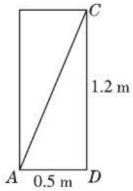


图 7-14

答案：B

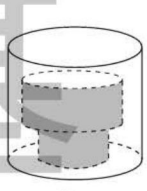
方法点拨：求最短路径问题，常常要把几何体展开成平面图形，根据“两点之间，线段最短”得到最短路径，再结合勾股定理等其他知识进行计算即可.

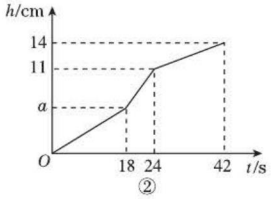
Ⅱ 方法必会

专题四 函数思想

专题解读» 函数思想是指用运动变化的观点来研究两个变量之间的相互联系与变化规律，并借助函数关系来思考、解决问题的数学思想，在解题中，要善于挖掘题目中的隐含条件，建立关系时，要结合圆柱和圆锥的图形特征去解决.

例 5 如图 7-15 ①，底面积为 30 cm^2 的空圆柱形容器内水平放置着由两个实心圆柱组成的几何体，现向容器内匀速注水，注满为止，在注水过程中，水面高度 h（cm）与注水时间 t（s）之间的关系如图 7-15 ②所示.


①



②

图 7-15

请根据图中提供的信息，解答下列问题：

（1）圆柱形容器的高为 _____cm，匀速注水的速度为 _____cm^3/s.

（2）若几何体的下方圆柱的底面积为 15 cm^2，求几何体上方圆柱的高和底面积.

基础题

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

解题秘方：（1）根据图象，分三个阶段：漫过几何体下方圆柱需 18 s，漫过几何体上方圆柱需 24−18=6（s），注满几何体上面的空圆柱形容器需 42−24=18（s），设匀速注水的速度为 x cm³/s，根据圆柱的体积公式列方程，再解方程；（2）根据圆柱的体积公式得（30−15）a=18×5，解得 a=6，于是得到几何体上方圆柱的高为 5 cm；设几何体上方圆柱的底面积为 S cm²，根据圆柱的体积公式得 5×（30−S）=5×（24−18），解方程即可.

解：（1）14；5

（2）由图②知几何体下方圆柱的高为 a cm，

则 a（30−15）=18×5，解得 a=6，

所以几何体上方圆柱的高为 11−6=5（cm）.

设几何体上方圆柱的底面积为 S cm²，根据题意得 5×（30−S）=5×（24−18），

解得 S=24，

即几何体上方圆柱的底面积为 24 cm².

专题五 转化思想

专题解读» 在研究和解决有关数学问题时，采用某种手段可将问题通过变换使之转化，进而达到解决的目的. 一般是将复杂问题通过变换转化为简单问题；将难解的问题通过变换转化为容易求解的问题；将未解决的问题通过变换转化为已解决的问题.

例 6 如图 7−16 ①是一个三棱柱包装盒，它的底面是边长为 10 cm 的正三角形，三个侧面都是矩形. 现将宽为 15 cm 的彩色矩形纸带 $AMCN$ 裁剪成一个平行四边形 $ABCD$（如图 7−16 ②），然后用这条平行四边形纸带按如图 7−16 ③的方式把这个三棱柱包装盒的侧面进行包贴（要求包贴时没有重叠部分），纸带在侧面缠绕三圈，正好将这个三棱柱包装盒的侧面全部包贴满.

（1）请在图 7−16 ②中，计算裁剪的角度 $\angle BAD$.

（2）计算按图 7−16 ③的方式包贴这个三棱柱包装盒所需的矩形纸带的长度.

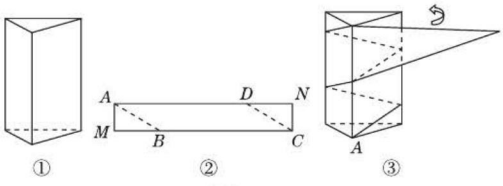


图 7−16

解：（1）由图 7−16 ③的包贴方法知，AB 的长等于三棱柱的底面周长，

$\therefore AB$=30 cm.

∵纸带宽为 15 cm，

$\therefore \sin\angle BAD=\sin\angle ABM=\dfrac{AM}{AB}=\dfrac{15}{30}=\dfrac{1}{2}$，

$\therefore \angle BAD$=30°.

（2）在图 7−16 ③中，将三棱柱沿过点 A 的侧棱剪开，得到如图 7−17 甲的侧面展开图，将图 7−17 甲中的△ABE 向左平移 30 cm，△CDF 向右平移 30 cm，拼成如图 7−17 乙中的▱$ABCD$，

此平行四边形即为图 7−16 ② 中的▱$ABCD$.

由题意，得 $BC=BE+CE=2CE=2\times\dfrac{CD}{\cos 30°}=40\sqrt{3}$（cm），

$\therefore$ 所需矩形纸带的长为 $MB+BC=30\cdot\cos 30°+40\sqrt{3}=55\sqrt{3}$（cm）.

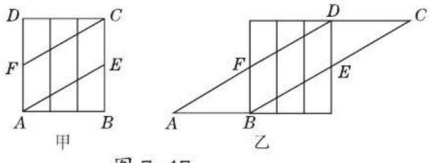


图 7−17

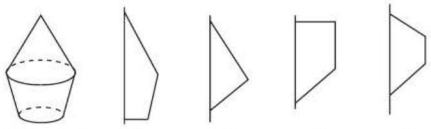
荣德基

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

好题必解 ☞答案见 274 页

题型 1　巧解面动成体问题

1. 下列平面图形经过旋转可得到如图所示几何体的是（　　）



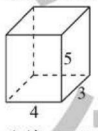
（第 1 题）

题型 2　巧解棱柱的计算问题

2. 如图，已知一个长方体的长为 4 cm，宽为 3 cm，高为 5 cm，请求出：

（1）长方体所有棱长的和.

（2）长方体的表面积.



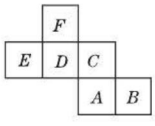
（第 2 题）

题型 3　巧解正方体的展开图问题

3. 如图是一个正方体的展开图，标注了字母 A，C 的面分别是正方体的正面和底面，其他面分别用字母 B，D，E，F 表示. 已知 $A=kx+1$，$B=3x-2$，$C=1$，$D=x-1$，$E=2x-1$，$F=x$.

（1）如果正方体的左面与右面所标注字母代表的代数式的值相等，求出 x 的值.

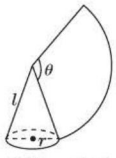
（2）如果正面字母 A 代表的代数式与对面字母代表的代数式的值相等，且 x 为整数，求整数 k 的值.



（第 3 题）

题型 4　巧解圆锥侧面展开图问题

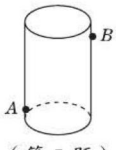
4. 如图，沿一条母线将圆锥侧面剪开并展平，得到一个扇形，若圆锥的底面圆的半径 $r=2$ cm，扇形的圆心角 $\theta=120°$. 求该圆锥的侧面积.



（第 4 题）

题型 5　巧解最短路径问题

5. 如图，圆柱形玻璃容器高 19 cm，底面周长为 60 cm，在外侧距下底 1.5 cm 的点 A 处有一只蜘蛛，距蜘蛛正对面的圆柱形容器的上底 1.5 cm 处的外侧点 B 处有一只苍蝇，蜘蛛急于捕捉苍蝇充饥，请你帮蜘蛛计算它沿容器侧面爬行的最短路线的长度.



（第 5 题）

荣德基

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

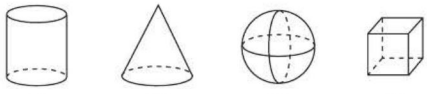
第 7 章测试卷

答案见 275 页

（100 分 60 分钟）

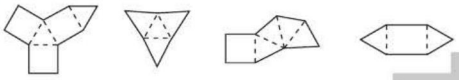
一、选择题（每题 3 分，共 30 分）

1. 下列四个几何体中，是多面体的为（　　）



A　　B　　C　　D

2. 下列图形能折叠成三棱柱的是（　　）

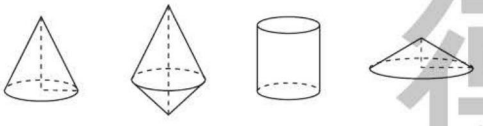


A　　B　　C　　D

3. 如图，将直角三角形绕一条边所在直线旋转一周后形成的几何体不可能是（　　）



（第 3 题）



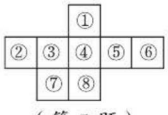
A　　B　　C　　D

4. 正多面体的面数、棱数、顶点数之间存在着一个严密的关系，若用 F，E，V 分别表示正多面体的面数、棱数、顶点数，则有 $F+V-E=2$，现有一个正多面体共有 12 条棱，6 个顶点，则它的面数 F 等于（　　）

A. 6　　B. 8

C. 12　　D. 20

5. 将如图所示的图形剪去两个小正方形，使余下的部分图形恰好能折成一个正方体，应剪去的两个小正方形可能是（　　）



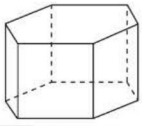
（第 5 题）

A. ①⑥　　B. ①⑦

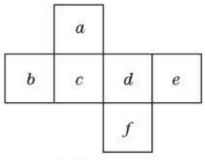
C. ②③　　D. ②⑥

6. 一个六棱柱模型如图所示，底面边长都是 5 cm，侧棱长为 4 cm，这个六棱柱的所有侧面的面积之和是（　　）

A. 20 cm^2　B. 60 cm^2　C. 120 cm^2　D. 240 cm^2



（第 6 题）

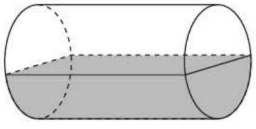


（第 7 题）

7. [中考·资阳] 如图是正方体的展开图，每个面都标注了字母，如果 b 在下面，c 在左面，那么 d 在（　　）

A. 前面　　B. 后面　　C. 上面　　D. 右面

8. 一个封闭的圆柱形水桶（桶的厚度忽略不计），底面直径为 20 cm，母线长为 40 cm，盛了半桶水，现将该水桶水平放置后如图所示，则水所形成的几何体的表面积为（　　）



（第 8 题）

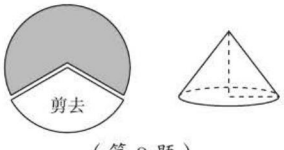
A. 800 cm^2

B.（800+400π）cm^2

C.（800+500π）cm^2

D.（1 600+1 200π）cm^2

9. 如图，从半径为 9 cm 的圆形纸片上剪去弧长为 $\frac{1}{3}$ 圆周的一个扇形，将留下的扇形围成一个圆锥（接缝处不重叠），那么这个圆锥的底面半径为（　　）



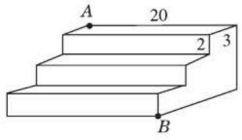
（第 9 题）

A. 6 cm　　B. 3 cm　　C. $5\sqrt{3}$ cm　　D. $3\sqrt{5}$ cm

禁 德 基

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

10. 如图，是一个三级台阶，它的每一级的长、宽、高分别为 20 dm，3 dm，2 dm，A 和 B 是这个台阶两个相对的端点，A 点有一只蚂蚁，想到 B 点去吃可口的食物，则蚂蚁沿着台阶面爬到 B 点的最短路程是（　　）



（第 10 题）

A. $20\sqrt{3}$ dm　　B. $25\sqrt{2}$ dm

C. 20 dm　　D. 25 dm

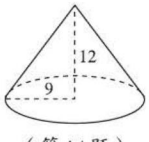
二、填空题（每题 3 分，共 18 分）

11. 正方体是一个立体图形，它有_____个面，_____条棱，_____个顶点.

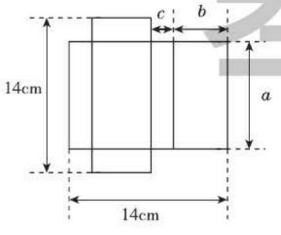
12. 一个长方形的长为 3，宽为 2，以这个长方形的长所在的直线为旋转轴，将长方形旋转 1 周，得到的几何体的体积为 _____.（用含 π 的代数式表示）

13. 一个圆柱形笔筒，量得笔筒的高是 20 cm，底面圆的半径为 5 cm，那么笔筒的侧面积为 _____ cm^2.（结果保留 π）

14. 小红需要用扇形薄纸板制作底面半径为 9 cm，高为 12 cm 的圆锥形生日帽，如图所示（单位：cm），则该扇形薄纸板的圆心角为 _____.



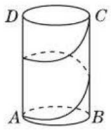
（第 14 题）



（第 15 题）

15. 如图，是一个长、宽、高分别为 a，b，c 的长方体包装盒的展开图，若长比宽多 5 cm，则这个包装盒的体积为 _____ cm^3.

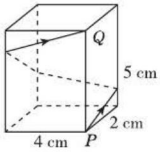
16. 在底面直径为 2 cm，高为 3 cm 的圆柱侧面上，用一条无弹性的丝带从 A 至 C 按如图所示的圈数缠绕，则丝带的最短长度为 _____（π 取 3）.



（第 16 题）

三、解答题（共 52 分）

17.（10 分）如图，长方体的底面边长分别为 2 cm 和 4 cm，高为 5 cm，若一只蚂蚁从 P 点开始经过 4 个侧面爬行一圈到达 Q 点，则蚂蚁爬行的最短路径长是多少.



（第 17 题）

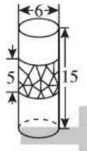
荣德基

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

18.（12 分）母亲节时，小明送妈妈一个玻璃茶杯，如图.（单位：厘米）

（1）茶杯中间部分的一圈装饰带很漂亮，那是小明怕烫伤妈妈的手特意贴上的，这条装饰带宽 5 厘米，装饰带展开后至少长多少厘米？（接头处忽略不计）

（2）这个茶杯的体积是多少？

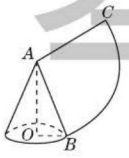


（第 18 题）

19.（14 分）如图，将一个圆锥沿母线 AB 展开后得到一个扇形.

（1）若圆锥的高 AO 为 $2\sqrt{2}$，底面半径为 1，求扇形的面积.

（2）若扇形的弧长 BC 恰好等于圆锥母线 AB 和 AC 的长度之和，求圆锥的母线 AB 与底面圆半径 OB 的比值.

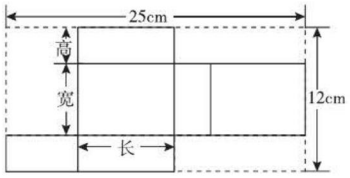


（第 19 题）

20.（16 分）某种产品的形状是长方体，长为 8 cm，它的展开图如图所示.【导学号：8927116】

（1）求长方体的体积.

（2）请为厂家设计一种包装纸箱，使每箱能装 10 件这种产品，要求没有空隙且要使该纸箱所用材料尽可能少（纸箱的表面积尽可能小）.



（第 20 题）

错题笔记

荣德基

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

视图的魅力

第8章 投影与识图

荣德基

核心考点

你将见到的

- 中心投影
- 平行投影
- 正投影
- 三视图

核心方法

我们为你提供的

- 分类讨论思想
- 方程思想
- 建模思想

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

8.1 中心投影

核心知识
- 投影
- 中心投影

知识链接

投影 → 中心投影 → 中心投影的作用；中心投影的有关计算

点知识·拨考向 速提分

点知识 1 投影

1. 定义 一般地，用光线照射物体，在某个平面（地面、墙壁等）上得到的影子叫做物体的投影. 照射光线叫做投射线，投影所在的平面叫做投影面.

2. 性质

（1）光线是沿直线照射的，因此可以由物体与它的投影确定光线的方向.

（2）不同时刻，物体的影子的方向和大小会发生变化；在投射线和投影面相同的情况下，不同形状的物体的投影一般不同.

投影及其相关概念

提分·必记

特别提醒

形成投影应具备的条件：
1. 要有物体存在且物体处于光源与投影面之间；
2. 要有光线；
3. 要有一个呈现投影的面，即投影面（投影面应是平的）.

拨考向 利用投影及其特点识别投影与投射线的方向

题型 1 利用投影的定义识别投影

例 1 下列现象不属于投影的是（　　）

A. 皮影　　B. 树影　　C. 手影　　D. 素描画

解题秘方：紧扣“投影的定义”中的三个条件进行识别.

解：皮影、手影和树影都是“用光线照射物体在某个平面上得到的影子”，因此选项 A，B，C 都属于投影. 用排除法选 D.

答案：D

提分·秘诀

特别提醒

光线、物体、投影面的相对位置发生变化，物体的影子就会相应地发生变化.

题型 2 利用投影的特点确定投射线

例 2 如图 8.1-1 是一个正方体及其在地面上的投影，你能从图中找出投射线吗？

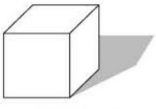


图 8.1-1

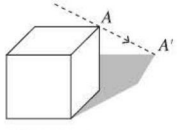


图 8.1-2

解题秘方：物体上某个特征点与其在投影中的对应点的连线即为投射线.

解：先找出正方体上一点 A，再在投影中找出对应点 A'，连接 AA'，AA' 即为投射线，如图 8.1-2.

技巧点拨

确定投射线的方法：物体上一点与它在投影中的对应点的连线即为投射线.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

点知识 ▸ 2 中心投影

1. 定义 在点光源下形成的物体的投影叫做中心投影. 如物体在灯泡发出的光照射下形成的影子就是中心投影.

特别提醒：中心投影的光源是点光源，它的光线相交于一点，常见的点光源有：手电筒、路灯、台灯等.

2. 性质

（1）等高的物体垂直地面放置时，如图 8.1−4 所示.

在灯光下，（水平方向）离点光源近的物体的影子短，离点光源远的物体的影子长.

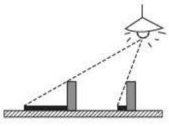


图 8.1−4

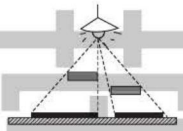


图 8.1−6

（2）等长的物体平行于地面放置时，如图 8.1−6 所示.

一般情况下，（竖直方向）离点光源越近，影子越长；离点光源越远，影子越短，但不会比物体本身的长度还短.

（3）在中心投影的情况下，点光源、物体边缘的点以及这个点在物体影子上的对应点在同一条直线上.

3. 点光源的确定方法

形成中心投影的光线是不平行的，即光线是相交的，分别过两个物体的顶端及其对应的影子的顶端作直线，这两条直线的交点即为点光源的位置.

提分·必记

示图

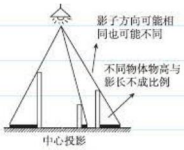


图 8.1−3

示图



图 8.1−5

如图 8.1-5，从 A 处走到 B 处，影子先变短，后变长.

示图

点光源位置的确定

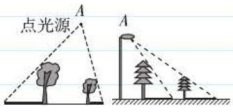


图 8.1−7

如图 8.1-7，分别过两棵树的顶端及其树影的顶端作直线，两条直线的交点 A 即为点光源的位置.

提分·秘诀

技巧点拨

连接影子的顶端和物体的顶端，若连线交于一点，则是中心投影，否则不是中心投影.

拔考向 ▸ 利用中心投影的定义和性质解决问题

题型 1 利用中心投影的定义和性质识别中心投影

例 3 如图 8.1−8 是两根标杆在地面上的影子，根据这些投影，在灯光下的影子是（　　）

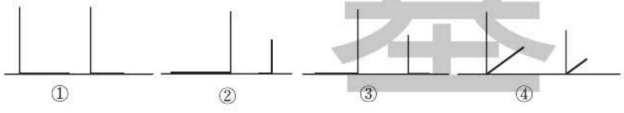


图 8.1−8

A. ①和②　　B. ②和④

C. ③和④　　D. ②和③

解题秘方：连接物体的顶端与影子的顶端的两条直线应有交点，依此可判断出答案.

解：根据物体的顶端和影子顶端的连线必经过光源可得，图中连接标杆的顶端与影子的顶端的两条直线应有交点，故只有②③符合题意.

答案：D

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

题型 2　利用中心投影的性质判断高度

例 4　灯光下的两根小木棒 A 和 B，它们竖直放置时的影子长分别为 i_A 和 i_B，若 $i_A > i_B$，则它们的高度 h_A 和 h_B 相比的结果是（　　）

A. $h_A > h_B$　　B. $h_A < h_B$　　C. $h_A \geqslant h_B$　　D. 不能确定

解题秘方：根据物体在中心投影下的影长特点判断.

解：∵两根小木棒在点光源下的位置不确定，

∴影长的大小不能确定它们的高度大小.

答案：D

技巧点拨

同一物体在点光源下的位置不同，得到的影长不同，所以知道影长的大小，而不知道具体的位置，相应高度的大小不能确定.

点方法·拨技巧 提高分

拔尖角度 1　利用中心投影的性质判别影子的变化情况

挑战·高分

例 5　如图 8.1-9，在一间屋子里用一盏白炽灯照一个球，球在地面上的投影的形状是一个圆，当把白炽灯向上移时，圆形投影的大小的变化情况是（　　）

A. 越来越小

B. 越来越大

C. 大小不变

D. 不能确定



图 8.1-9

解题秘方：根据中心投影的特点得出答案.

解：灯光下的投影为中心投影，根据中心投影的特点，灯光下影子与物体离灯源距离有关，此距离越大，影子越小.

答案：A

技巧点拨

等长的物体平行于地面放置时，在灯光下，离点光源越近，影子越长；离点光源越远，影子越短，但不会比物体本身的长度还短.

拔尖角度 2　利用中心投影的性质解决运动过程中的影长问题

挑战·高分

例 6　如图 8.1-10，夜晚，小亮从点 A 经过路灯 C 的正下方沿直线走到点 B，他的影长 y 随他与点 A 之间的距离 x 的变化而变化，那么表示 y 与 x 之间的函数关系的图象大致为图 8.1-11 中的（　　）

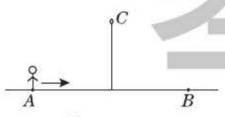
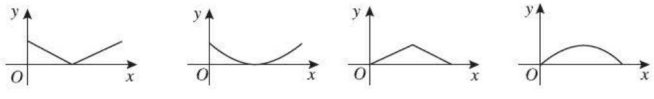


图 8.1-10



A　　B　　C　　D

图 8.1-11

解题秘方：通过作出简图构造相似三角形，用函数的思想探究出影长的变化情况.

技巧点拨

等高的物体垂直于地面时，在灯光下，离点光源越近，影子越短，离点光源越远，影子越长.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

解：如图 8.1−12，GE 表示身高，EF 表示小亮与路灯底端的距离，OE 表示影长，CF 表示路灯的高度.

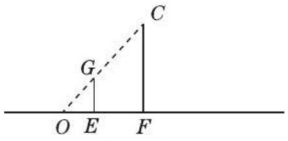


图 8.1−12

在△ OEG 和△ OFC 中，

∵∠ GOE=∠ COF（公共角），∠ OEG=∠ OFC=90°，

∴△ OEG ∽△ OFC，∴ $\dfrac{OE}{OF}=\dfrac{GE}{CF}$，

∴ $OE=\dfrac{GE}{CF}\cdot OF=\dfrac{GE}{CF}\cdot(OE+EF)$. ∴ $OE=\dfrac{\frac{GE}{CF}}{1-\frac{GE}{CF}}EF$.

∵ GE 和 CF 是定值，

∴这个函数图象肯定是一次函数图象，且 OE 随 EF 的减小而减小，随 EF 的增大而增大.

∴影长将随着小亮离路灯越来越近而越来越短，当小亮在路灯的正下方的时候，没有影子，即影长为 0，然后随着小亮离路灯越来越远，影长越来越长.

答案：A



拔尖角度 3 利用中心投影解决几何问题

挑战·高分

例 7 如图 8.1−13，位似图形由三角尺与其在灯光照射下形成的中心投影组成，相似比为 2∶5，且三角尺的一边长为 8 cm，则投影三角形的对应边长为（　　）

A. 8 cm　　B. 20 cm

C. 3.2 cm　　D. 10 cm

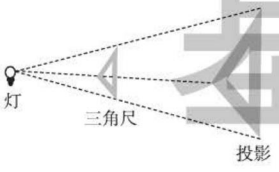


图 8.1−13

解题秘方：根据位似图形的性质得出相似比为 2∶5，即对应边的比为 2∶5，从而可得出投影三角形的对应边长.

解：∵位似图形由三角尺与其在灯光照射下形成的中心投影组成，相似比为 2∶5，三角尺的一边长为 8 cm，

∴投影三角形的对应边长为 $8\div\dfrac{2}{5}=20$（cm）.

答案：B

技巧点拨

中心投影可以看成是位似变换，光源是位似中心，投影可以看成是位似变换后的图形，在求中心投影有关线段长时，可以运用位似的性质解决.

禁德基

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

点中考·拨模拟 得满分

中考探秘 本节知识较简单，中考中偶尔考查中心投影的定义及特征，考查的内容有确定投影的类型、投影作图、投影的应用等，有时与相似及解直角三角形相联系，考查形式以选择题、填空题为主，解题的关键是熟练运用中心投影的性质.

三年中考兵法

考法 1 利用中心投影解决实际问题

例 8 如图 8.1-14，小华、小军、小丽同时站在路灯下，其中小军和小丽的影子分别是 AB，CD.

（1）请你在图中画出路灯灯泡所在的位置（用点 P 表示）.

（2）画出小华此时在路灯下的影子（用线段 EF 表示）.

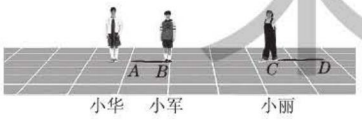


图 8.1-14

试题评析：本题考查中心投影的特点与应用，解决本题的关键是得到点光源的位置.

解：（1）如图 8.1-15，点 P 就是所求的点.

（2）如图 8.1-15，EF 就是小华此时在路灯下的影子.

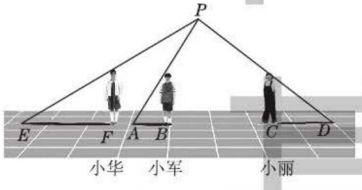


图 8.1-15

考法 2 利用物高与影长的关系求物高

例 9 [中考·陕西]一天晚上，李明和张龙利用灯光下的影子长来测量一盏路灯 D 的高度，如图 8.1-16，当李明走到点 A 处时，张龙测得李明直立时身高 AM 与其影子长 AE 正好相等；接着李明沿 AC 方向继续向前走，走到点 B 处时，李明直立时身高为 BN，其影子恰好是线段 AB，并测得 $AB=1.25$ m，已知李明直立时的身高为 1.75 m，求路灯的高 CD（结果精确到 0.1 m）.

试题评析：本题是相似三角形的应用，解题的关键是根据已知条件得到平行线，从而得到相似三角形.

冲刺·满分

解法提醒

- 根据小军和小丽的身高与影长即可得到点光源所在的位置；
- 根据光源所在的位置和小华的身高即可得到相应的影长.


利用中心投影作图

另解 如图 8.1-17，连接 MN 并延长，交 CD 于点 F，则 $MN \parallel AB$. 由题意知 $AM \perp EC$，$CD \perp EC$，$BN \perp EC$，$\therefore AB=MN=1.25$m，$MF=AC$. 设 $DF=x$ m，$\because AE=AM$，$\therefore \angle EMA=\angle MDF=45°$. $\therefore DF=MF=AC=x$ m，$DC=DF+AM=(x+1.75)$ m.

$\because MF \parallel AC$，

$\therefore \dfrac{DF}{DC}=\dfrac{NF}{AC}=\dfrac{MF-MN}{AC}$，

即 $\dfrac{x}{x+1.75}=\dfrac{x-1.25}{x}$，

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

解：设 CD 的长为 x m，

由题意知 $AM \perp EC$，$CD \perp EC$，$BN \perp EC$，

$EA=MA=BN=1.75$ m，

$\therefore MA \parallel CD \parallel BN$.

由题意易得 $EC=CD=x$ m，

$\triangle ABN \backsim \triangle ACD$，

$\therefore \dfrac{BN}{CD}=\dfrac{AB}{AC}$，

即 $\dfrac{1.75}{x}=\dfrac{1.25}{x-1.75}$，

解得 $x=6.125$，

经检验，$x=6.125$ 是原方程的解，

$\therefore$ 路灯的高 CD 约为 6.1 m.

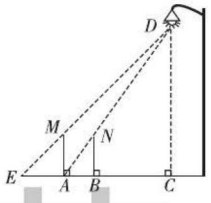


图 8.1−16

解得 $x=4.375$.

经检验，符合题意.

$\therefore DC=4.375+1.75=6.125 \approx 6.1$（m）.

$\therefore$ 路灯的高 CD 约为 6.1 m.

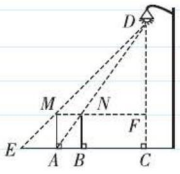
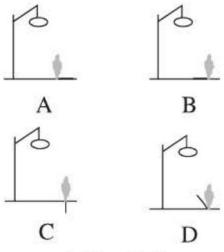


图 8.1−17

两年模拟兵法 ☞ 答案见 276 页

1. 下列四个选项中，哪个选项的图形中的灯光与物体的影子是最合理的（　　）



（第 1 题）

2. 夜晚在有路灯的路上，若想没有影子，你应该站的位置是（　　）

A. 路灯的左侧　　B. 路灯的右侧

C. 路灯的正下方　　D. 以上都可以

3. 小阳和小明两人从远处沿直线走到路灯下，他们规定：小阳在前，小明在后，两人之间的距离始终与小阳的影长相等. 在这种情况下，他们两人之间的距离（　　）

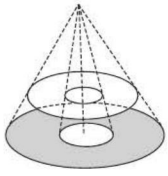
A. 始终不变　　B. 越来越远

C. 时近时远　　D. 越来越近

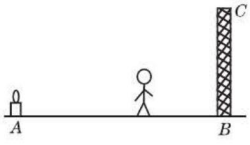
4. [中考·永州] 圆桌面（桌面中间有一个直径为 0.4 m 的圆洞）正上方的灯泡（看作一个点）发出的光线照射平行于地面的桌面后，在地面上形成如图所示的圆环形阴影，已知桌面直径为 1.2 m，桌面离地面 1 m，若灯泡离地面 3 m，则地面上圆环形阴影的面积是（　　）

A. 0.324π m^2　　B. 0.288π m^2

C. 1.08π m^2　　D. 0.72π m^2


（第 4 题）

5. 如图，地面 A 处有一支燃烧的蜡烛（长度不计），一个人在 A 与墙 BC 之间运动，则他在墙上的投影长度随着他离墙的距离变小而_____（填“变大”“变小”或“不变”）.

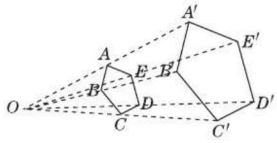


（第 5 题）

6. 小华在距离路灯 3 米的地方，发现自己在地面上的影长是 1.2 米，如果小华的身高为 1.6 米，那么路灯离地面的高度是_____米.

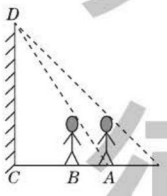
关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

7. 如图，以点 O 为光源，将五边形 $ABCDE$ 投影到荧幕中得到五边形 $A'B'C'D'E'$，已知 $OA=10$ cm，$OA'=20$ cm，则五边形 $ABCDE$ 的周长与五边形 $A'B'C'D'E'$ 的周长的比值是_____.



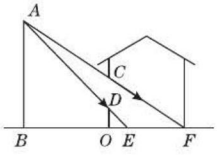
（第 7 题）

8. 如图，墙壁 CD 上 D 处有一盏灯，小明站在 A 处测得他的影长与身长相等，都为 1.6 m，他向墙壁走 1 m 到 B 处时发现影子刚好落在 A 点，求灯与地面的距离 CD.



（第 8 题）

9. 如图，小明家窗外有一盏路灯 A，由于围墙的遮挡，傍晚路灯 A 恰好从窗户的最高点 C 射进房间的地板 F 处，且路灯 A 恰好能从窗户的最低点 D 射进房间的地板 E 处，小明测得窗户距地面的高度 $OD=0.8$ m，窗高 $CD=1.2$ m，并测得 $OE=0.8$ m，$OF=3$ m，求路灯 A 的高度.



（第 9 题）

荣德基

错题笔记

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

8.2 平行投影

核心知识
- 平行投影
- 正投影

知识链接
物体的投影 —光线的特征→ 平行投影 → 正投影
光线的特征 → 中心投影

点知识·拨考向 速提分

点知识 1 平行投影

1. 定义 投射线互相平行的投影叫做平行投影. 例如，照射到物体上的太阳光线可以看成平行光线，太阳光照射物体所形成的影子属于平行投影.

注意：平行投影的投射线都是平行的.

2. 特征

平行投影的特征：①等高的物体垂直地面放置时，如图 8.2-1 ①所示，同一时刻，在太阳光下，它们的影子长相等.

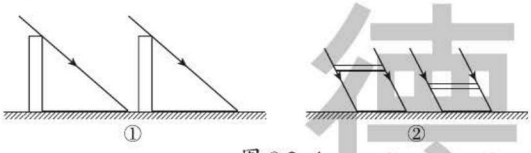


图 8.2-1

②等长的物体平行地面放置时，如图 8.2-1 ②所示，同一时刻，在太阳光下，它们的影子长相等，并且影子的长等于物体本身的长度.

③在太阳光下，不同时刻，同一地点、同一物体的影子不仅方向不同，影子的长度一般也不同，从早晨到傍晚，物体影子的指向：西偏北→西北→正北→东北→东偏北（北半球北回归线以北地区）. 一天之中，同一物体的影子的长短的变化规律是：长→短→最短→短→长.

④在太阳光下，同一时刻，不同物体本身的高度与它们的影子长度成正比.

提分·必记

深度理解

- 平行投影中物体与其投影的对应点的连线是互相平行的；反之，物体与其投影的对应点的连线是互相平行的就说明是平行投影.
- 物体在太阳光照射下的不同时刻，物体影子的大小和方向都在改变.

特别提醒

这一结论可以用相似三角形的性质得到，即

$$\frac{\text{甲物体的高度}}{\text{甲物体的影长}}=\frac{\text{乙物体的高度}}{\text{乙物体的影长}}.$$

拨考向 平行投影的应用

题型 1 平行投影的特征在判断物体的影子中的应用

例 1 小华拿一个矩形木框在阳光下玩，矩形木框在地面上形成的影子不可能是图 8.2-2 中的（　　）



图 8.2-2

提分·秘诀

解法提醒

平行投影中，不同位置、不同时刻，影子的大小、形状可能不同，具体形状应视其外在形状及其与光线的夹角而定；平行且相等的边的投影既可能平行且相等，也可能互相重合.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

解题秘方：紧扣“平行的边的平行投影是平行或重合的”这一特征解答.

解：矩形木框在地面上形成的影子应是平行四边形或一条线段，故不可能是梯形.

答案：A

题型 2　平行投影的特征在作图及计算中的应用

例 2　如图 8.2-3，AB 和 DE 是直立在地面上的两根立柱，$AB=5$ m，某一时刻 AB 在阳光下的投影 $BC=3$ m.

（1）请你在图中画出此时 DE 在阳光下的投影（用线段 EF 表示）.

（2）在测量 AB 的投影时，同时测量出 DE 在阳光下的投影长为 6m，请你计算 DE 的长.

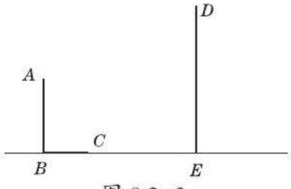


图 8.2-3

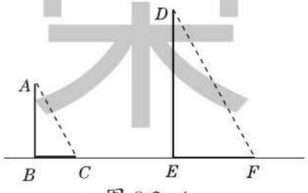


图 8.2-4

解题秘方：紧扣平行投影的特征中投射线、影子、物高的特征解答.

解：（1）如图 8.2-4，连接 AC，过点 D 作 $DF/\!/AC$，交地面于点 F，则 EF 就是此时 DE 在阳光下的投影.

（2）∵在阳光下，同一时刻不同物体的物高与影长的比相等，

$$\therefore \frac{AB}{BC}=\frac{DE}{EF}.$$

∵ $AB=5$ m，$BC=3$ m，$EF=6$ m，

$$\therefore DE=\frac{AB\cdot EF}{BC}=10\text{ m}.$$

利用平行投影作图

知识 2　正投影

1. 正投影的定义

投射线与投影面垂直时的平行投影，叫做正投影.

示意图：

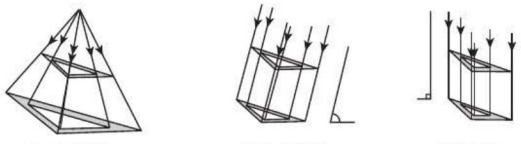


图 8.2-5

解法提醒

画物体的平行投影的方法：先根据物体的投影确定光线，然后利用两个物体的顶端和各自影子的顶端的连线是一组平行线，过物体顶端作平行线与投影的面相交，从而确定其影子.

提分·必记

活用巧记

投射线垂直投影面，所得投影正投影；
物体平行投影面，投影原图是全等；
物体倾斜投影面，形状大小都会变；
物体垂直投影面，投影就是点线面.

荣德基

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

2. 正投影与平行投影、中心投影的关系

（1）正投影是特殊的平行投影，它不可能是中心投影.

（2）正投影的判定与光线和投影面之间的位置关系有关，与物体的位置无关.

（3）物体正投影的形状、大小与物体相对于投影面的位置有关，它分物体与投影面平行、倾斜、垂直三种情况.

3. 线段、平面图形、立体图形的正投影

（1）**线段的正投影分三种情况**

位置	（如图 8.2−6 ①，以线段 AB 为例）平行于投影面	（如图 8.2−6 ②，以线段 AB 为例）倾斜于投影面	（如图 8.2−6 ③，以线段 AB 为例）垂直于投影面
正投影	A_1B_1	A_2B_2	一个点 A_3（B_3）
大小关系	$AB=A_1B_1$	$AB>A_2B_2$	

示图

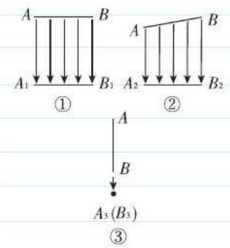
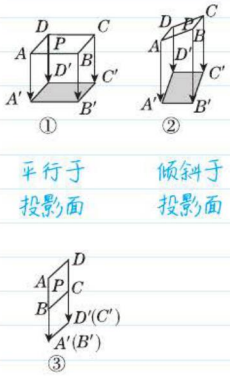


图 8.2−6

（2）**平面图形的正投影分三种情况**

①当平面图形 P 平行于投影面时，如图 8.2−7 ①，P 的正投影与 P 的形状、大小都一样. ②当平面图形 P 倾斜于投影面时，如图 8.2−7 ②，P 的正投影与 P 的形状、大小均发生改变. ③当平面图形 P 垂直于投影面时，如图 8.2−7 ③，P 的正投影为一条线段.

示图



平行于投影面　　倾斜于投影面

垂直于投影面

图 8.2−7

（3）**立体图形的正投影分为两种情况**

如图 8.2−8 所示，把正方体放在两个不同的位置.

①当正方体的一个面 $ABCD$ 平行于投影面时，如图 8.2−8 ①，正方体的正投影为正方形 $A_1B_1C_1D_1$，它与正方体的每个面都是全等关系.

②当正方体的一个面 $ABCD$ 倾斜于投影面，上底面 $ADHE$ 垂直于投影面，并且上底面的对角线 AH 垂直于投影面时，如图 8.2−8 ②，正方体的正投影是矩形 $E_1F_1C_1D_1$，这个矩形的长等于正方体的底面对角线的长，矩形的宽等于正方体的棱长；矩形上、下两边中点的连线 A_1B_1 是正方体的侧棱 AB 及它所对的另一条侧棱 HG 的投影.

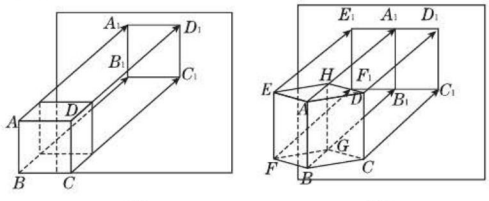


图 8.2−8

特别提醒

1. 一个立体图形在一个平面上的正投影是一个平面图形.
2. 物体正投影的形状、大小与物体和投影面的相对位置有关.
3. 几何体的正投影与平行于投影面且过几何体的最大截面全等.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

核考向▶利用正投影的定义和性质解有关正投影的问题

题型1　正投影的定义在识图中的应用

例3　[中考·南宁]把一个正六棱柱如图8.2-9摆放，光线由上向下照射，此正六棱柱的正投影是图8.2-10中的（　　）

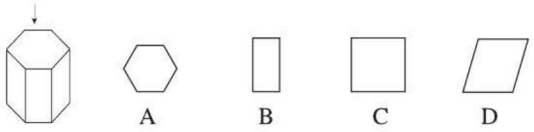


图8.2-9　　图8.2-10

解题秘方：紧扣“立体图形的正投影”的特征进行识别.

解：由题可知正六棱柱的底面平行于投影面，所以它的正投影是与它的底面全等的正六边形.

答案：A

题型2　利用正投影的性质比较物长与影长

例4　若线段CD是线段AB的正投影，则AB与CD的大小关系为（　　）

A. $AB>CD$　　B. $AB<CD$

C. $AB=CD$　　D. $AB\geqslant CD$

解题秘方：根据正投影的定义和性质解答即可.

解：若线段AB平行于投影面，则$AB=CD$；

若线段AB与投影面不平行，则$AB>CD$，

所以$AB\geqslant CD$.

答案：D

点方法·拨技巧　提高分

找尖角度▶1　利用“太阳光下的影子变化规律”解释生活现象

例5　如图8.2-12所示的四幅图是一天中四个不同时刻两座建筑物的影子（北半球），将它们按时间的先后顺序排列正确的是（　　）

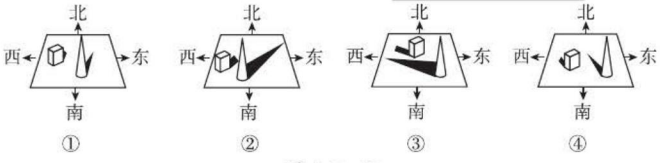


图8.2-12

A. ③①④②　　B. ③②①④　　C. ③④①②　　D. ②④①③

解题秘方：紧扣“太阳光下相同物体的影子随着时间的变化而变化”的规律进行分析.

提分·秘诀

示图提醒

正六棱柱的正投影如图8.2-11.

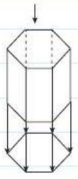


图8.2-11

注：立体图形的放置情况多种多样，故其正投影要视放置情况而定.

技巧点拨

无论是线段还是其他图形，在正投影下，投影的长度或面积均不超过原物体的长度或面积.

挑战·高分

知识储备

从早晨到傍晚，物体在太阳光下影子的指向是：西偏北→西北→正北→东北→东偏北（北半球北回归线以北地区），影长由长变短，再变长.

荣德基

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

解：观察四幅图，根据影子的方向，可知③与④是建筑物在上午时的影子，①与②是建筑物在下午时的影子；根据影子的长短，可知③早于④，①早于②，故按时间先后顺序排列为③④①②.

答案：C

拔尖角度▸ 2 利用正投影的特征解决作图计算问题

例 6 如图 8.2-13，棱长为$\sqrt{2}$的正方体的侧棱与平面 H 平行，其上下底面的对角线 AH，BG 与平面 H 垂直.

（1）作出正方体在平面 H 上的正投影.

（2）计算正投影的面积.

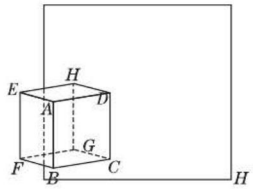


图 8.2-13

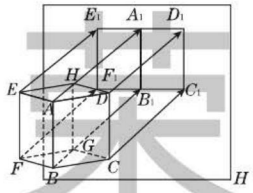


图 8.2-14

解题秘方：（1）利用“关键点的投射线”作正投影；（2）紧扣“正投影的线段长等于对应的立体图形两点间的距离”进行计算.

解：（1）正方体在平面 H 上的正投影如图 8.2-14 所示，为矩形 $E_1D_1C_1F_1$.

（2）∵正方体的棱长为$\sqrt{2}$，即 $D_1C_1=\sqrt{2}$，∴由勾股定理得对角线 ED 的长为$\sqrt{(\sqrt{2})^2+(\sqrt{2})^2}=2$，即 $E_1D_1=2$，

∴正投影矩形 $E_1D_1C_1F_1$ 的面积为 $2\times\sqrt{2}=2\sqrt{2}$.

拔尖角度▸ 3 利用平行光线求直径

例 7 在生活中需测量一些球（如足球、篮球）的直径，某校研究性学习小组通过试验发现下面的测量方法：如图 8.2-15，设光线 DA，CB 分别与球相切于点 E，F，则 EF 为球的直径. 若测得 $AB=40$ cm，$\angle ABC=30°$，请你计算球的直径.

解题秘方：紧扣“过两切点的光线间的距离即为球的直径长”进行计算.

解：如图 8.2-15，

连接 EF，由题易知 EF 为球的直径.

过点 A 作 $AG\perp BC$ 于点 G，

则 $\angle AGF=90°$. ∵ GB 切球于点 F，

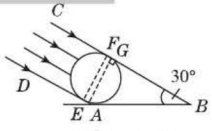


图 8.2-15

∴$\angle GFE=90°$. ∵ DA 切球于点 E，∴$\angle FEA=90°$，

∴四边形 $AEFG$ 是矩形，∴ $EF=AG$. 在 Rt△AGB 中，

$AB=40$ cm，$\angle ABC=30°$，∴ $AG=\frac{1}{2}AB=\frac{1}{2}\times40=20$（cm），

∴ $EF=20$ cm. ∴球的直径为 20cm.

易错提醒

此类问题易弄混太阳光的方向和物体影子的方向，从而导致分析出错.

挑战·高分

特别提醒

物体的正投影的形状、大小与物体相对于投影面的位置有关，画一般立体图形的正投影的关键是找出平行于投影面的立体图形的最大截面.

挑战·高分

知识储备

- 平行线间的距离处处相等.
- 直角三角形中 30° 角所对的直角边等于斜边的一半.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

点中考·拨模拟 得满分

中考链接 本节的主要内容是平行投影和正投影，在中考中所占的比重较低，很少考查．在对本节的考查中，主要以选择题的形式呈现，难度偏低．

三年中考兵法

冲刺·满分

考法 1 利用平行投影解决实际问题

例 8 [中考·吉林]在某一时刻，测得一根高为 1.8 m 的竹竿的影长为 3 m，同时同地测得一栋楼的影长为 90 m，则这栋楼的高度为_____ m.

试题评析：本题考查了平行投影的应用，熟记平行投影的影长与物高的关系是解题的关键.

解：设这栋楼的高度为 h m，

∵在某一时刻，测得一根高为 1.8 m 的竹竿的影长为 3 m，同时同地测得这栋楼的影长为 90 m，∴ $\frac{1.8}{3}=\frac{h}{90}$，解得 $h=54$.

答案：54

解题通法

在平行光线下，同一时刻，不同物体本身的高度与它们的影子长度成正比，由此列出比例关系式进行解题.

考法 2 利用正投影比较投影面积与原图形的面积的大小

例 9 [中考·百色]如图 8.2-16，长方体的一个底面 $ABCD$ 在投影面 P 上，M，N 分别是侧棱 BF，CG 的中点，矩形 $EFGH$ 与矩形 $EMNH$ 的投影都是矩形 $ABCD$，设它们的面积分别是 S_1，S_2，S，则 S_1，S_2，S 的关系是_____（用“=”“>”或“<”连起来）.

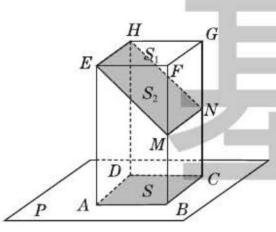


图 8.2-16

试题评析：本题考查的是正投影和立体图形，正投影：由垂直于投影面的光线形成的投影是正投影.

解：∵立体图形是长方体，∴下底面 $ABCD$// 上底面 $EFGH$，

∵矩形 $EFGH$ 的投影是矩形 $ABCD$，∴ $S_1=S$.

∵ $EM>EF$，∴ $S_1<S_2$，∴ $S_1=S<S_2$.

答案：$S_1=S<S_2$

技巧点拨

当原图形与投影面平行时，投影的面积等于原图形的面积；当原图形与投影面不平行时，投影的面积小于原图形的面积.

苹德基

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

两年模拟兵法 ☞答案见276页

1. 下图中是太阳光下形成的影子的是（　　）



2. 平行投影中的光线是（　　）

A. 平行的　　B. 聚成一点的

C. 不平行的　　D. 向四面发散的

3. 两个不同长度的物体在同一时刻同一地点的太阳光下得到的投影是（　　）

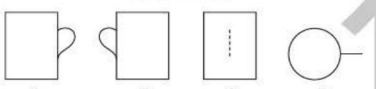
A. 相等的　　B. 长的较长

C. 短的较长　　D. 无法比较长短

4. [模拟·武汉]如图所示，水杯的杯口与投影面平行，投射线的方向如箭头所示，它的正投影是（　　）



（第4题）



5. 如图，将竖直放置的Rt△ABC绕直角边AC旋转一周，所得几何体的正投影（投射线的方向如箭头所示）是（　　）

A. 直角三角形

B. 等腰三角形

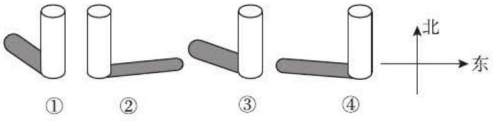
C. 等边三角形

D. 带圆心的圆



（第5题）

6. 如图是某天四个不同时刻一根木棒及其影子的情况，那么时间的先后顺序是（　　）



（第6题）

A. ①②③④　　B. ④③①②

C. ④①③②　　D. ②①③④

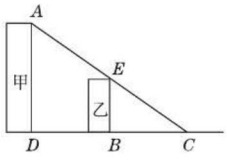
7. 在同一时刻平行投影中，两人的高度和他们的影长_____.

8. 小强说："同一时刻，阳光下影子越长的物体就越高."他的说法是否正确?

答：_____.

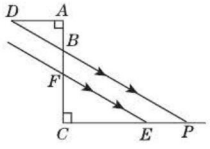
9. 在我国北方某地，上午9点和11点同一棵树的影子比较，_____点的树影长.

10. 如图所示，甲、乙两建筑物在太阳光照射下的影子的端点重合在C处，若BC=20 m，CD=40 m，乙建筑物高BE=15 m，则甲建筑物高AD=_____m.



（第10题）

11. 如图，教室窗户的高度AF为2.5米，遮阳篷外端一点D到窗户上沿的距离为AD，某一时刻太阳光从教室窗户射入室内，与地面的夹角∠BPC为30°，PE为窗户的一部分在教室地面所形成的影子且长为$\sqrt{3}$米，试求AD的长度.（结果保留根号）



（第11题）

基德莱

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

8.3 物体的三视图

核心知识

- 三视图的认识
- 画几何体的三视图
- 几何体与三视图互化

知识链接



点知识·拨考向 速提分

点知识 1 视图及相关概念

1. 视图

当我们从某一方向观察一个物体时，所看到的平面图形叫做物体的一个视图，视图可以看作物体在某一方向光线下的正投影.

2. 竖直投影面、水平投影面、侧投影面

用三个互相垂直的平面作为投影面，其中正对着我们的平面叫做竖直投影面，下方的平面叫做水平投影面，右边的平面叫做侧投影面.

3. 三视图

对一个物体在三个两两垂直的投影面上分别进行正投影，得到的三个平面图形组成这个物体的三视图，其中，

（1）**主视图**：在竖直投影面内得到的由前向后观察物体的视图.

（2）**俯视图**：在水平投影面内得到的由上向下观察物体的视图.

（3）**左视图**：在侧投影面内得到的由左向右观察物体的视图.

4. 三视图与正投影的关系：

物体的三视图实际上是该物体在一定条件下所形成的正投影，物体的主视图、左视图、俯视图可以看成一束平行光线分别从物体的正面、左面、上面照射，在垂直于这一方向光线的平面上所形成的正投影.

提分·必记

速记口诀

视图来源正投影，
三个方向实物成，
从前向后主视图，
从上向下俯视图，
从左向右左视图，
统称物体三视图.

示例图

长方体的三视图如图 8.3−1.

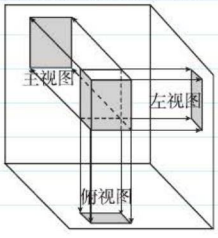


图 8.3−1

拔考向 利用三视图的定义判断物体的三视图

题型 1 利用三视图的定义判断简单几何体的三视图

例 1 如图 8.3−2 所示，其主视图与俯视图相同的是（　　）

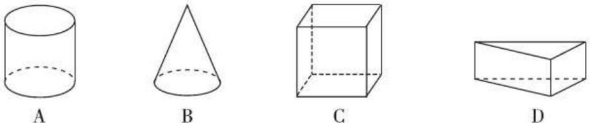


图 8.3−2

解题秘方：紧扣“三视图的定义”，想象几何体的主视图与俯视图的形状进行解答.

提分·秘诀

特别提醒

三视图与从前我们学习的从三个方向看物体所得到的图形是一致的，只不过现在我们从投影的角度来认识这个问题，并且对三个方向作了更明确的规定，即从正面看到的图形叫主

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

解：A 中主视图是矩形，俯视图是圆，故不符合题意；B 中主视图是三角形，俯视图是带圆心的圆，故不符合题意；C 中主视图和俯视图都是正方形，故符合题意；D 中主视图的外轮廓线是矩形，俯视图是三角形，故不符合题意．

答案：C

题型 2　利用三视图的定义判断组合体的三视图

例 2　［中考·泸州］如图 8.3–3 是一个由 5 个完全相同的小正方体组成的立体图形，它的俯视图是图 8.3–4 中的（　　）

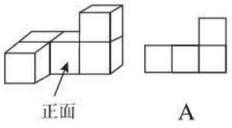


图 8.3–3

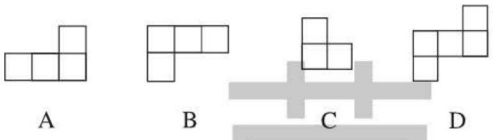


图 8.3–4

解题秘方：根据从上面看得到的图形是俯视图，可得答案．

解：从上面看第一列是两个小正方形，第二列是一个小正方形，第三列是一个小正方形．

答案：B

知识 2　由几何体画三视图

1. 三视图之间的关系

（1）**位置关系**：主视图在左上方，主视图的正下方是俯视图，左视图在主视图的右边，主视图反映物体的长和高，俯视图反映物体的长和宽，左视图反映物体的高和宽．

（2）**大小关系**：三视图之间的大小是相互联系的，主视图与俯视图的长对正，主视图与左视图的高平齐，左视图与俯视图的宽相等．

2. 三视图的画法

（1）确定主视方向，画出主视图；

（2）在主视图的正下方画出俯视图，并且主视图与俯视图的长对正；

（3）在主视图的正右方画出左视图，与主视图的高平齐，与俯视图的宽相等．图 8.3–5 ①中的几何体的三视图如图 8.3–5 ②所示．



图 8.3–5

三视图的画法

3. 画三视图的规定　画三视图时，看得见的部分的轮廓线画成实线，因被其他部分遮挡而看不见的部分的轮廓线画成虚线．

提分·必记

速记口诀

视图位置要摆明，画图规则要记清．

主俯视图长对正，左俯视图宽相等．

主左视图高平齐，实线虚线应分清．

视图，从左面看到的图形叫左视图，从上面看到的图形叫俯视图．

技巧点拨

组合体的三视图既要关注每个个体的三视图，又要关注个体在组合体中的位置．

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

核心考向▶利用三视图的画法画物体的三视图

题型1　三视图的画法在画不含虚线的物体的三视图中的应用

例3　如图 8.3–6，画出几何体的三视图．



图 8.3–6

解题秘方：紧扣“三视图的画法”画出几何体的三视图．

解：该几何体由一个长方体和一个三棱柱组合而成，依据三视图的定义，可得该几何体的三视图如图 8.3–7 所示．

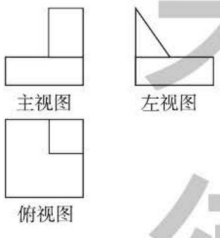


图 8.3–7

画法提醒：画几何体的三视图时，要仔细观察图形，从要看的方向将几何体压缩到平面上，使几何体在这一方向上没有厚度，同时要特别注意三视图之间应遵循：主视图与俯视图的长对正，主视图与左视图的高平齐，左视图与俯视图的宽相等．

题型2　三视图的画法在画含虚线的物体的三视图中的应用

例4　一种机器上有一个进行转动的零件叫燕尾槽，如图 8.3–9，请画出它的三视图．

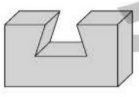


图 8.3–9

解：这个燕尾槽的三视图如图 8.3–10.

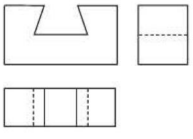


图 8.3–10

提分·秘诀

图解

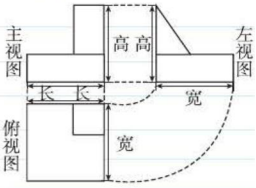


图 8.3–8

依据“长对正、高平齐、宽相等”画出三视图，如图 8.3–8.

三视图的画法

- 画立体图形的三视图时，一定要将立体图形的边、棱、顶点都体现出来，看得见的轮廓线都画成实线，看不见的轮廓线都画成虚线，不能漏掉．
- 画组合体的三视图时，常利用图形分解的方法，将组合体分解成若干个简单几何体，画出这些简单几何体的三视图，最终组合在一起．

基础 德荣

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

点知识▶ 3 由三视图确定几何体

1. 由三视图确定几何体形状的方法

由三视图确定几何体的形状，首先应分别根据主视图、俯视图和左视图想象几何体的正面、上面和左面的形状，然后综合起来考虑整体形状.

特别提醒：由三视图确定几何体的形状时，要对三视图进行综合分析，仅仅一个方向的视图只能反映几何体的部分信息.

2. 由三视图想象几何体形状的常用方法

（1）根据主视图、俯视图和左视图想象几何体的正面、上面和左面的形状以及几何体的长、宽、高.

（2）根据实线和虚线想象几何体看得见和看不见的轮廓线.

（3）熟记一些简单几何体的三视图会对复杂几何体的想象有帮助.

（4）利用由三视图画几何体与由几何体画三视图的互逆过程，反复练习，不断总结方法.

3. 常见几何体的三视图

几何体	主视图	左视图	俯视图
	□	□	□
	□	□	○
	△	△	
	▱	▱	◎
	○	○	○

拔考向▶ 利用三视图确定几何体

例 5 ［中考·绥化］已知某物体的三视图如图 8.3-11 所示，那么与它对应的物体是图 8.3-12 中的（　　）

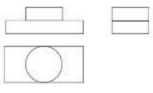


图 8.3-11

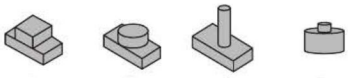


图 8.3-12

解题秘方：本题可用排除法解答，从俯视图入手分析即可.

解：从几何体的主视图可以看出几何体由上下两部分组成，从俯视图中圆的直径与矩形的宽相等，可排除 A，C，D 三项.

答案：B

提分·必记

方法点拨

几何体、三视图和展开图之间的关系：

1. 几何体的三视图和展开图是平面图形，几何体、三视图和展开图中，三者知其一，就能确定另外两种图形，即三者之间可以互相转化.
2. 对于稍复杂的视图，可先将其化成几个简单的图形，再综合分析.
3. 一个摆好的几何体的视图是唯一的，但从视图反过来考虑几何体时，它有多种可能性，如正方体的主视图是正方形，但主视图是正方形的几何体可能是直棱柱、圆柱等.

提分·秘诀

解法提醒

俯视图是几何体从上到下的正投影，可以得到几何体底面的基本形状，主视图可以看出几何体的上下构成部件，左视图可以看出几何体是否由多行组成，有时仅一种或两种视图即可判断几何体，要注意灵活选取.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

点方法·拨技巧 提高分

拔尖角度▸ 1 利用“虚线法”识别三视图

挑战·高分

例 6 如图 8.3–13，圆柱体中挖去一个小圆柱，剩余几何体的主视图和俯视图正确的是图 8.3–14 中的（　　）

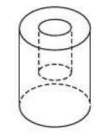


图 8.3–13

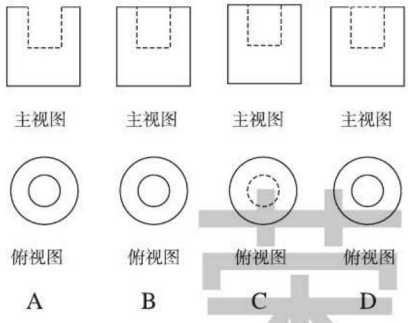


图 8.3–14

解题秘方：紧扣“能否看到”来确定虚实线进行判断.

解：主视图的外轮廓线为矩形，内部的小圆柱的轮廓线要画成虚线；俯视图为两个同心圆，且轮廓线都为实线.

答案：B

知识储备

在三视图中，看不到的部分一般用虚线表示；看得到的部分用实线表示.

特别提醒

本题易因对虚线的作用理解不全面，造成对主视图或俯视图的判断错误，错选 C 或 D.

拔尖角度▸ 2 利用部分视图确定小正方体的个数

挑战·高分

例 7 [中考·黑龙江]如图 8.3–15 是由若干个相同的小正方体搭成的一个几何体的主视图和左视图，则组成这个几何体的小正方体的个数不可能是（　　）

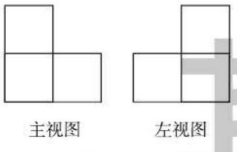


图 8.3–15

A. 3　　B. 4

C. 5　　D. 6

解题秘方：左视图底层有 2 个小正方形，主视图底层有 2 个小正方形，则可以判断出该几何体底层最少有 2 个小正方体，最多有 4 个小正方体，由此可判断出该几何体可能有多少个小正方体.

解：根据左视图和主视图，可判断出该几何体底层最少有 2 个小正方体，最多有 4 个小正方体，而顶层只有 1 个小正方体，所以这个几何体可能有 3 个或 4 个或 5 个小正方体.

答案：D

技巧点拨

由不完整的三视图推测小正方体的个数时，先根据已知的视图确定层数和某层的个数，对于不能确定的个数再分类讨论.

荣德基

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

拔尖角度 3 利用三视图确定几何体并计算面积

提分·高分

例 8 一个几何体的三视图如图 8.3-16 所示，则该几何体的表面积为（　　）

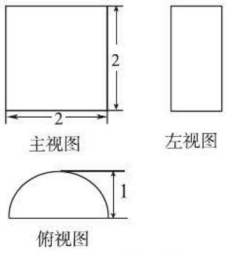


图 8.3-16

A. 4π　　B. 3π　　C. $2\pi+4$　　D. $3\pi+4$

解：由三视图可知该几何体为半圆柱，其上、下底面半圆的半径 r 为 1，其高 h 为 2，其侧面积为 $\pi rh+2^2=2\pi+4$，两个底面半圆的面积和为 $2\times\frac{1}{2}\pi r^2=\pi$，所以该几何体的表面积为 $3\pi+4$.

答案：D

解法提醒

解此类问题分两步进行：第一，确定几何体的形状；第二，根据已知数据进行计算.

特别提醒

此处求侧面积时要注意是半圆柱，切忌求成圆柱的侧面积而出错.

点中考·拔模拟 得满分

中考探秘

由几何体确定其三视图，主要考查画基本几何体的三视图，这是近几年中考命题的热点，题目较简单，题型主要是选择题；由三视图描述几何体的形状并进行相关计算，也是中考命题的热点，其命题形式比较灵活，主要考查空间想象能力，题目难度中等，题型主要是选择题和填空题.

三年中考兵法

考法 1 利用三视图的特征判断常见几何体的三视图

冲刺·满分

例 9 如图 8.3-17 所示的几何体的左视图是图 8.3-18 中的（　　）

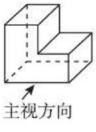


图 8.3-17

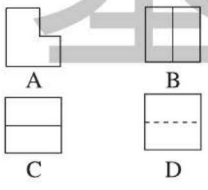


图 8.3-18

试题评析：本题考查了简单几何体的三视图，属于基础题，分辨清楚观察方向是解题的关键.

解：从左边看是两个等宽的矩形，两个矩形的公共边是虚线.

答案：D

技巧点拨

从左边看得到的图形是左视图，注意看不到但存在的线是虚线.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

考法 2 利用某种视图判别另外的视图

例 10 [中考·聊城]如图 8.3-19 是由若干个小正方体组成的几何体的俯视图，小正方形中的数字表示该位置小正方体的个数，这个几何体的主视图是图 8.3-20 中的（　　）

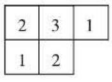


图 8.3-19

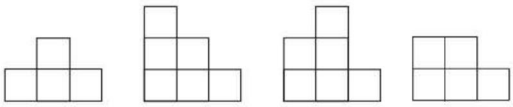


图 8.3-20

试题评析：本题考查了三视图的知识，主视图是从物体的正面看得到的视图.

解：从正面看易得该几何体的主视图第一列有 2 个正方形，第二列有 3 个正方形，第三列有 1 个正方形.

答案：C

考法 3 利用三视图确定几何体并进行计算

例 11 [中考·凉山州]如图 8.3-21 是一个几何体的三视图，则该几何体的侧面积是（　　）

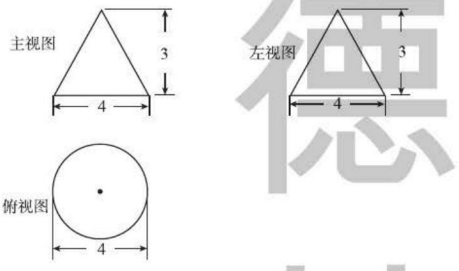


图 8.3-21

A. $2\sqrt{13}\ \pi$　　B. 10π

C. 20π　　D. $4\sqrt{13}\ \pi$

试题评析：本题考查了根据三视图判断几何体、圆锥的侧面积的计算，解答本题的关键是明确题意，判断出此几何体是圆锥，再利用圆锥的侧面积计算公式进行解答.

解：由三视图可知此几何体为圆锥，且 $d=4$，$h=3$，

∴圆锥的母线长为 $\sqrt{3^2+2^2}=\sqrt{13}$，

∴圆锥的侧面积为 $\frac{1}{2}\times 4\pi\times\sqrt{13}=2\sqrt{13}\ \pi$.

故选 A.

答案：A

解法提醒

由俯视图及相应位置上的数字可得出原几何体，再根据几何体易得主视图.

知识储备

圆锥的表面积＝圆锥的侧面积＋底面圆的面积 $=\pi rl+\pi r^2$，π 为圆周率，r 为圆锥底面圆的半径，l 为圆锥的母线长（注意：不是圆锥的高）.

荣德基

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

影子断物

“由物画图”和“由图想物”反映了“三视图”与“立体图形（实物）”之间的相互联系和转化的关系，投影的原理是其实现转化的依据，也就是说影子对物体的形状和大小起着决定性的作用.

（1）由影子断定物体的形状.（中考高频考点）

物体的三视图就是该物体的正投影，由前向后留下的影子叫主视图；由上向下留下的影子叫俯视图；由左向右留下的影子叫左视图. 由给出的三视图的形状就可以判断该物体的形状.

例如：[**中考 · 北京**] 如图 8.3−22，是某个几何体的三视图，该几何体是（　　）

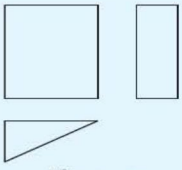


图 8.3−22

A. 圆锥　　B. 三棱锥

C. 圆柱　　D. 三棱柱

点拨：解这类题主要依靠的是空间想象能力，平时学习过程中通过观察实物，可以有效提高该能力.

（2）由影子断定物体的高度.（中考高频考点）

很多物体的高度无法直接测量，需通过光线（太阳光或灯光）照射物体时在地面上留下的影子和其他参照物同一时刻，同一光源下在地面上留下的影子来计算物体的高度.

例如：[**中考 · 北京**] 如图 8.3−23，小军、小珠之间的距离为 2.7m，他们在同一盏路灯下的影长分别为 1.8m，1.5m. 已知小军、小珠的身高分别为 1.8m，1.5m，则路灯的高为_____m.

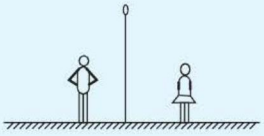


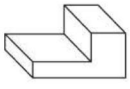
图 8.3−23

点拨：此问题的背景设置比较新颖，条件中并未给出任何三角形，需要学生联系已知条件构造出符合解题需要的图形.

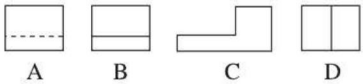
两年模拟兵法

☞ 答案见 277 页

1. [**中考 · 聊城**] 如图所示的几何体的左视图是（　　）

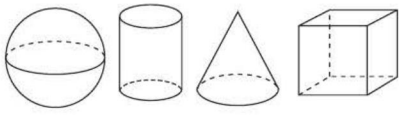


（第 1 题）



A　　B　　C　　D

2. [**模拟 · 安丘**] 如图，在下列四个几何体中，从正面、左面、上面看不完全相同的是（　　）



①球　②圆柱　③圆锥　④正方体

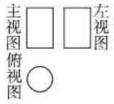
（第 2 题）

A. ①②　　B. ②③

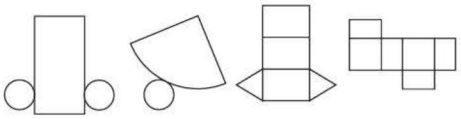
C. ①④　　D. ②④

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

3. [中考·广州]如图，是一个几何体的三视图，则这个几何体的展开图可以是（　　）

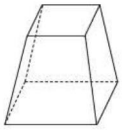


（第3题）

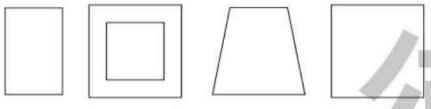


A　　B　　C　　D

4. 如图所示的几何体，它的左视图是（　　）

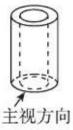


（第4题）

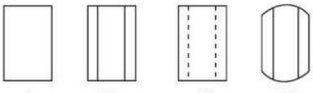


A　　B　　C　　D

5. [中考·宁波]如图，下列关于物体的主视图画法正确的是（　　）



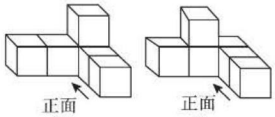
（第5题）



A　　B　　C　　D

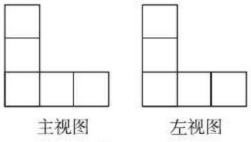
6. 如图，小明用6个相同的小正方体搭成的立体图形研究几何体的三视图的变化情况，若移动其中一个小正方体，由图①变到图②，不改变的是（　　）

A. 主视图
B. 主视图和左视图
C. 主视图和俯视图
D. 左视图和俯视图



（第6题）

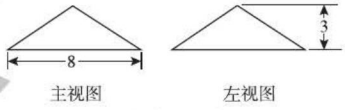
7. 某几何体由若干个大小相同的小正方体搭成，其主视图与左视图如图所示，则搭成这个几何体的小正方体最少有（　　）



（第7题）

A. 3个　　B. 5个
C. 7个　　D. 9个

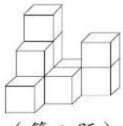
8. [中考·威海]如图是某圆锥的主视图和左视图，该圆锥的侧面积是（　　）



（第8题）

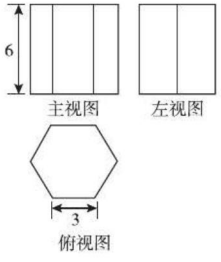
A. 25π　　B. 24π
C. 20π　　D. 15π

9. 如图是由几个相同的小正方体搭成的几何体，搭成这个几何体需要_____个小正方体，在保持主视图和左视图不变的情况下，最多可以拿掉_____个小正方体.



（第9题）

10. [中考·白银]已知某几何体的三视图如图所示，其中俯视图为正六边形，则该几何体的侧面积为_____.

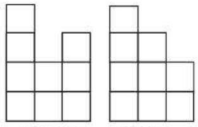


（第10题）

荣德基

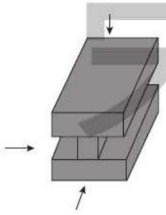
关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

11. [中考·青岛]一个由16个完全相同的小立方体搭成的几何体，其最下面一层摆放了9个小立方体，它的主视图和左视图如图所示，那么这个几何体的搭法共有_____种.



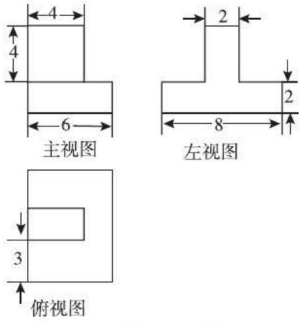
（第11题）

12. 请画出如图所示几何体的主视图、左视图和俯视图.



（第12题）

13. 如图是由两个长方体组合而成的一个立体图形的三视图，根据图中所标尺寸（单位：mm），计算出这个立体图形的体积和表面积.



（第13题）

荣德基

错题笔记

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

投影与视图的解题技巧

荣老师告诉你 视图和投影实现了立体图形和平面图形的相互转化，画三视图时要把握基本要领：主、俯视图长对正、主、左视图高平齐、左、俯视图宽相等．还要注意线条的虚实，看得见的部分的轮廓线应画成实线，看不见的部分的轮廓线应画成虚线．

技巧一 由几何体确定三视图，即“由物画图”

解题要领：（1）熟悉基本几何体的三视图．直棱柱的主视图和左视图的外轮廓线都是矩形，俯视图是多边形；圆柱的主视图、左视图都是矩形，而俯视图是圆；圆锥的主视图、左视图都是三角形，而俯视图是带圆心的圆；棱锥的主视图、左视图的外轮廓线都是三角形，而俯视图是中间有点且该点与多边形各个顶点相连的图形；球的主视图、左视图、俯视图均是圆．（2）实线与虚线的正确使用．

例 1 一个圆柱体钢块，正中央被挖去了一个长方体孔，其立体图形及俯视图如图 8–1 所示，则此圆柱体钢块的左视图是图 8–2 中的（　　）



图 8–1

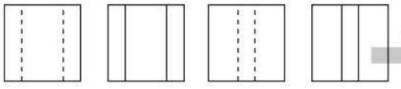


图 8–2

解：圆柱体的左视图是长方形，四个答案都符合，主要看正中央挖去的长方体孔如何表示．由俯视图知，挖去的长方体孔在左边看不见，所以用虚线表示，故排除 B，D．比较 A，C 的虚线位置与俯视图中长方形的位置，便知答案为 C．

答案：C

技巧二 根据三视图确定物体的形状，即“由图想物”

解题要领：理解三视图的概念并会应用三视图“主俯长对正、主左高平齐、左俯宽相等”的性质．

例 2 某几何体的三视图如图 8–3 所示，则该几何体是图 8–4 中的（　　）

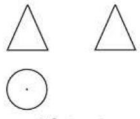


图 8–3



图 8–4

解：根据主视图和左视图为三角形判断出是锥体，根据俯视图是带圆心的圆可判断出这个几何体是圆锥．

答案：D

技巧三 根据三视图计算几何体的表面积和体积

解题要领：（1）掌握各视图反映的物体的实质，即主视图主要反映物体的长和高，左视图主要反映物体的宽和高，俯视图主要反映物体的长和宽．（2）熟悉特殊几何体的表面积和体积计算公式．

例 3 如图 8–5 是一个几何体的三视图，根据图中标注的数据，可求得这个几何体的体积为（　　）

A. 24π　　B. 32π　　C. 36π　　D. 48π

解：利用三视图可知，此几何体是圆柱，再由主视图、左视图知其高为 6，由俯视图知其底面圆的直径是 4．根据圆柱的体积公式可得出这个几何体的体积为 24π，故选 A．

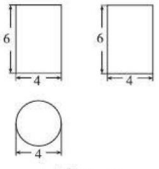


图 8–5

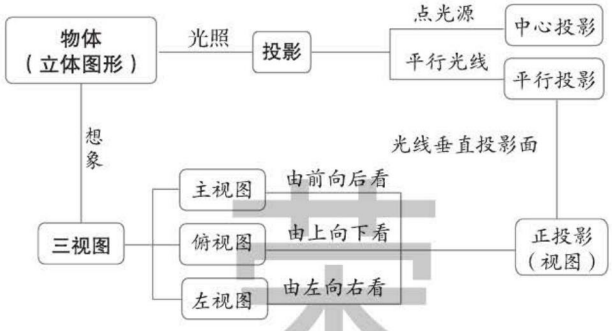
答案：A

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

章末核心知识分类整合

核心结构专题

结构必知



核心必读

1. 投影包括平行投影和中心投影，而平行投影包括正投影.

（1）在判断投影类型时，弄清楚物体上的点与影子上的对应点的连线是平行还是相交；

（2）在应用平行投影求物体的高度时，注意在同一时刻不同物体本身的高度与它们的影长成正比.

2. 三视图

名称	概念	性质
主视图	自几何体的前方向后进行正投影，在竖直投影面上得到的视图称为主视图	1. 主视图、左视图、俯视图都是物体向某个方向的正投影； 2. 从不同的方向观察几何体，得到的三视图可能是不同的
左视图	自几何体的左侧向右进行正投影，在侧投影面上得到的视图称为左视图	
俯视图	自几何体的上方向下进行正投影，在水平投影面上得到的视图称为俯视图	

3. 在画三视图时，要求主俯长对正、主左高平齐、左俯宽相等，即：主视图和俯视图的长要相等，主视图和左视图的高要相等，左视图和俯视图的宽要相等；在画物体的三视图时，能看到的部分的轮廓线画实线，存在但看不到的部分的轮廓线画虚线.

知识方法专题

知识必学

专题一 中心投影

链接中考» 中心投影是由同一点发出的光线形成的投影. 当点光源与所照射物体的相对位置发生变化时，物体的投影也随之变化. 一般情况下，等高的物体垂直于地面放置时，物体与点光源的距离越近，物体的影子越短，反之就越长. 等长的物体平行于地面放置时，物体与点光源距离越近，物体的影子越长，反之就越短. 中心投影在现实中有很多应用，解决这类问题时，往往要利用相似三角形的知识.

例1 [中考·镇江] 某兴趣小组开展课外活动，如图8-6，A，B两地相距12 m，小明从点A出发沿AB方向匀速前进，2 s后到达点D，此时他（CD）在某一灯光下的影长为AD，继续按原速行走2 s到

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

达点 F，此时他（EF）在同一灯光下的影子仍落在其身后，测得这个影长为 1.2 m，然后他将速度提高到原来的 1.5 倍，再行走 2 s 到达点 H，此时他（GH）在同一灯光下的影长为 BH（点 C，E，G 在同一条直线上）.

（1）请在图中画出光源点 O 的位置，并画出小明位于点 F 时在这个灯光下的影长 FM（不写画法）.

（2）求小明原来的速度.

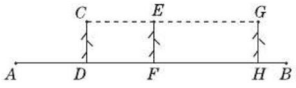


图 8-6

解题秘方：（1）分别连接 AC，BG 并延长，两者相交于点 O，即得光源点 O，再连接 OE 并延长，交 AB 于点 M，即得 EF 的投影；

（2）利用 $CG \parallel AB$，得到 $\triangle OCE \backsim \triangle OAM$，$\triangle OEG \backsim \triangle OMB$，

从而 $\dfrac{CE}{AM}=\dfrac{OE}{OM}$，$\dfrac{EG}{MB}=\dfrac{OE}{OM}$，

于是得到关于小明原来速度 x 的方程 $\dfrac{2x}{4x-1.2}=\dfrac{3x}{13.2-4x}$，解之即可.

解：（1）如图 8-7，点 O，线段 FM 即为所求.

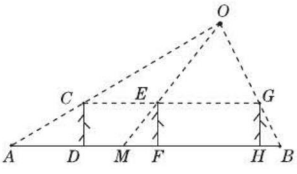


图 8-7

（2）设小明原来的速度为 x m/s，

则 $AD=DF=CE=2x$ m，

$FH=EG=3x$ m，$AM=(4x-1.2)$ m，

$BM=12-4x+1.2=(13.2-4x)$ m.

$\because CG/\!/AB$，$\therefore \triangle OCE \backsim \triangle OAM$，

$\triangle OEG \backsim \triangle OMB$.

$\therefore \dfrac{CE}{AM}=\dfrac{OE}{OM}$，$\dfrac{EG}{MB}=\dfrac{OE}{OM}$.

$\therefore \dfrac{CE}{AM}=\dfrac{EG}{MB}$，即 $\dfrac{2x}{4x-1.2}=\dfrac{3x}{13.2-4x}$.

$\therefore 20x^2-30x=0$.

解得 $x_1=1.5$，$x_2=0$（不合题意，舍去）.

经检验，$x=1.5$ 是原方程的解.

∴小明原来的速度为 1.5 m/s.

方法点拨：中心投影是物体在点光源下的投影，将两组投影对应点连线相交即得点光源的位置，同时其他物体在此光源下的投影也随之确定.

专题二 平行投影

链接中考» 平行投影是由平行光线照射所形成的投影. 物体在太阳光下形成的影子随着物体与投影面的相对位置的改变而改变. 同一时刻，不同物体的高度与影子的长度成正比，通常可以利用相似三角形或锐角三角函数的有关知识解决此类问题.

例 2 [中考·兰州]如图 8-8，在一面与地面垂直的围墙的同侧有一根高 10 米的旗杆 AB 和一根高度未知的电线杆 CD，它们都与地面垂直，为了测得电线杆的高度，一个小组的同学进行了如下测量：某一时刻，在太阳光照射下，旗杆落在围墙上的影子 EF 的长为 2 米，落在地面上的影子 BF 的长为 10 米，而电线杆落在围墙上的影子 GH 的长为 3 米，落在地面上的影子 DH 的长为 5 米. 依据这些数据，该小组的同学计算出了电线杆的高度.

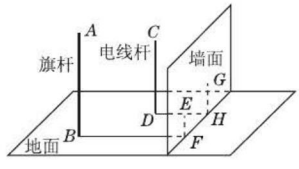


图 8-8

（1）该小组的同学在这里利用的是_____投影的有关知识进行计算的.

（2）试计算出电线杆的高度，并写出计算的过程.

荣德基

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

解题秘方：（1）太阳光可以看成平行光线，这样的光线所形成的投影是平行投影.

（2）过点 E 作 $EM \perp AB$ 于点 M，过点 G 作 $GN \perp CD$ 于点 N. 利用矩形的性质和平行投影的知识可以得到比例式 $\frac{AM}{ME}=\frac{CN}{NG}$，由此求得 CD 的长，即电线杆的高度.

解：（1）平行

（2）如图 8-9，过点 E 作 $EM \perp AB$ 于点 M，过点 G 作 $GN \perp CD$ 于点 N，则 $MB=EF=2$ 米，$ND=GH=3$ 米，$ME=BF=10$ 米，$NG=DH=5$ 米，所以 $AM=10-2=8$（米）.

设 $CD=x$ 米，由平行投影可知 $\frac{AM}{ME}=\frac{CN}{NG}$，即 $\frac{8}{10}=\frac{x-3}{5}$，解得 $x=7$，即 $CD=7$ 米. 故电线杆的高度为 7 米.

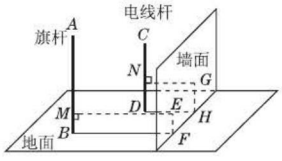


图 8-9

方法点拨：（1）平行投影中物体影子的变化实际上是随太阳位置的变化而变化的，但在同一时刻，不同物体的高度与影子长度的比是相同的. 太阳光下影子的这个性质为解决实际问题提供了一种重要方法.（2）相似三角形的应用主要有如下两个方面：①测高（不能直接使用皮尺或刻度尺测量高度的）；②测距（不能直接测量两点间距离的）. 在实际求解物体的高度、宽度时，关键是要构造和实物所在三角形相似的三角形，而且要能测量已知三角形的各条线段的长，运用相似三角形的性质列出比例式求解.

专题三 三视图

链接中考» 本专题是中考中的必考内容之一，主要考查根据视图确定几何体，由实物确定或作出视图，以及根据三视图判断构成几何体的小立方体的个数等问题，题型多以选择题、填空题为主，有时也以解答题的形式出现.

例 3 如图 8-10 所示的几何体中，主视图和俯视图都为矩形的是（　　）

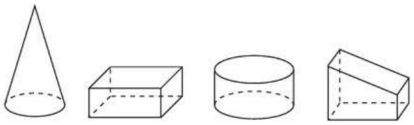


图 8-10

解：A 的主视图是三角形，俯视图是带圆心的圆；B 的主视图和俯视图都为矩形；C 的主视图是矩形，俯视图是圆；D 的主视图是梯形，俯视图是矩形. 故选 B.

答案：B

方法点拨：本题考查了简单几何体的三视图，从正面看得到的图形是主视图，从左面看得到的图形是左视图，从上面看得到的图形是俯视图.

专题四 根据三视图求几何体的表面积及体积

链接中考» 根据三视图的相关数据求几何体的表面积、体积，多数是以填空题或选择题的形式出现，偶尔也会出现解答题.

例 4 [中考·临沂]如图 8-11 是一个几何体的三视图（图中尺寸单位：cm），根据图中所示数据求得这个几何体的侧面积是（　　）

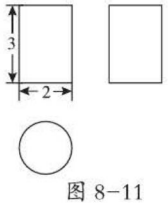


图 8-11

A. 12 cm^2　　B.（12+π）cm^2

C. 6π cm^2　　D. 8π cm^2

解题秘方：先根据三视图确定该几何体是圆柱，再计算圆柱的侧面积.

解：因为由三视图确定该几何体是圆柱，底面圆的半径是 2÷2=1 cm，圆柱的高是 3 cm，所以该几何体的侧面积为 2π×3=6π（cm^2）.

答案：C

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

方法点拨：根据三视图“主俯长对正、主左高平齐、左俯宽相等”的性质，结合常见几何体的三视图确定几何体，然后利用相应的面积公式求侧面积.

方法必会

专题五 分类讨论思想

专题解读≫ 分类讨论思想就是依据一定的标准对存在多种情况的问题分情况给予解决，最后综合得出结论. 分类讨论实际上是一个“化整为零”“积零为整”的解题策略. 本章中若一个几何体（由相同的小正方体组成）只给出部分视图，在判断小正方体的个数时，由于条件比较宽松，往往需要分类讨论.

例5 [中考·青岛]桌上摆着一个由若干个相同正方体组成的几何体，其主视图和左视图如图8-12，这个几何体最多可以由_____个这样的正方体组成.

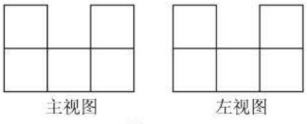


图8-12

解：通过主视图可以看出，这些正方体有三列，左右两列中各至少有一行有2个正方体，中间一列中至少有一行有1个正方体. 通过左视图可以发现，这些正方体有三行，为了便于总结数据，我们可以画一个三行三列的示意图，如图8-13①，则这三行中的前后两行中，各至少有一列有2个正方体，中间一行中至少有一列有1个正方体，如图8-13②. 据此，填出每行每列最多时的数据，如图8-13③. 所以组成这个几何体的正方体最多有2+1+2+1+1+1+2+1+2=13（个）.

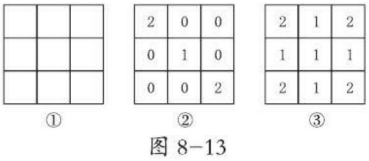


图8-13

答案：13

方法点拨：本题利用分类讨论思想讨论组成这个几何体的正方体个数最多的情况，从另一个角度考虑，我们也能求出组成这个几何体的正方体个数最少的情况，如图8-13②，最少有正方体2+1+2=5（个）.

专题六 方程思想

专题解读≫ 在解决数学问题时，有一种将未知转化为已知的手段，这就是设元. 设元后，寻找其与已知量之间的等量关系，构造方程或方程组，然后求解方程（组）完成未知向已知的转化，这种解决问题的思想称为方程思想. 在解决有关平行投影与中心投影的问题时，往往由相似三角形的性质得到一个比例式，利用方程思想求解.

例6 如图8-14，某天晚上，李亮在广场上乘凉. 图中线段AB表示站立在广场上的李亮，线段PO表示直立在广场上的灯杆，点P表示照明灯.

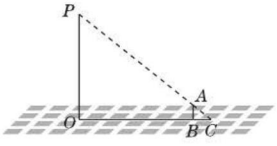


图8-14

（1）请你在图中画出李亮在照明灯（P）照射下的影子.

（2）如果灯杆高度PO=12 m，李亮的身高AB=1.6 m，李亮与灯杆的水平距离BO=13 m，请求出李亮影子的长度.

解题秘方：（1）直接连接点光源和物体顶端，形成的直线与地面的交点即是影子的顶端；（2）如图8-14，根据中心投影的特点可知$\triangle CAB \backsim \triangle CPO$，利用其性质列方程即可得解.

解：（1）如图8-14，线段BC就是李亮在照明灯（P）照射下的影子.

禁德基

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

（2）在△ CAB 和△ CPO 中，

∵∠ C=∠ C，

∠ ABC=∠ POC=90°，

∴△ CAB ∽△ CPO.

∴$\frac{AB}{PO}=\frac{CB}{CO}$.

设 CB=x m，

则$\frac{1.6}{12}=\frac{x}{13+x}$，

解得 x=2.

经检验，x=2 是原方程的解.

∴李亮影子的长度为 2 m.

方法点拨：利用方程思想解决中心投影问题时，通常利用相似三角形的知识，通过列方程求解.

专题七 建模思想

专题解读» 当需要从定量的角度分析和研究一个实际问题时，人们就要在深入调查研究、了解对象信息、作出简化假设、分析内在规律等工作的基础上，用数学符号和语言，把它表述为数学式子，也就是数学模型，然后用计算得到的模型实验结果来解释实际问题，并接受实际的检验.这个建立数学模型的过程就称为数学建模.

例 7 为解决楼房的挡光问题，某地区规定：两幢楼房间的距离至少为 40 m，中午 12 时不能挡光. 如图 8−15，某旧楼的一楼窗台高 1 m，要在此楼正南方 40 m 处建一幢新楼. 已知该地区冬天中午 12 时阳光从正南方照射，并且光线与水平线的夹角最小为 30°，在不违反规定的情况下，请问：新建楼房最高约多少米？（结果精确到 1 m. $\sqrt{3}\approx1.732$，$\sqrt{2}\approx1.414$）

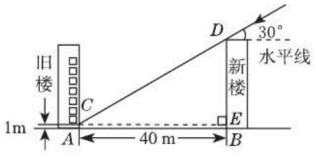


图 8−15

解：如图 8−15，过点 C 作 $CE\perp BD$，垂足为点 E. 由题意，

可得四边形 $ABEC$ 为矩形，

则 CE=AB=40 m，

BE=AC=1 m，

易知∠ DCE=30°.

在 Rt△ CDE 中，

$DE=CE\cdot\tan30°=\frac{40\sqrt{3}}{3}$（m），

∴ BD=DE+BE=$\frac{40\sqrt{3}}{3}+1\approx24$（m）.

∴新建楼房最高约 24 m.

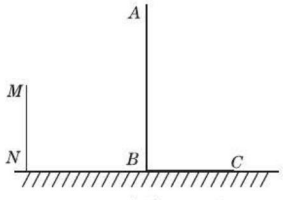
好题必解 ☞答案见 277 页

类型 1 利用投影的特征作图

1. 操场上有三根测杆 AB，MN 和 XY，MN=XY，其中测杆 AB 在太阳光下某一时刻的影子为 BC（如图中粗线）.

（1）画出测杆 MN 在同一时刻的影子 NP（用粗线表示），并简述画法.

（2）若在同一时刻测杆 XY 的影子的顶端恰好落在点 B 处，画出测杆 XY 所在的位置（用实线表示），并简述画法.



（第 1 题）

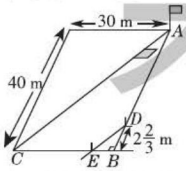
关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

类型 2　利用投影解决实际问题

2. 如图，在一个长为 40 m，宽为 30 m 的矩形小操场上，王刚从 A 点出发，沿着 $A \to B \to C$ 的路线以 3m/s 的速度跑向 C 点．当他出发 4 s 后，张华有东西需要交给他，就从 A 点出发沿王刚所跑的路线追赶，当张华跑到距 B 点 $2\frac{2}{3}$ m 的 D 处时，他和王刚在阳光下的影子恰好落在与对角线 AC 平行的直线上．

（1）他们的影子在一条直线上时，两人相距多少米（DE 的长）？

（2）张华追赶王刚的速度是多少？

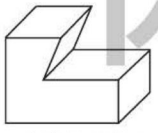


（第 2 题）

类型 3　利用三视图解决问题

题型 1　根据几何体画三视图

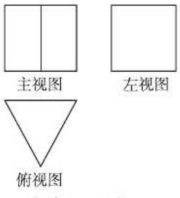
3. 如图，画出几何体的三视图．



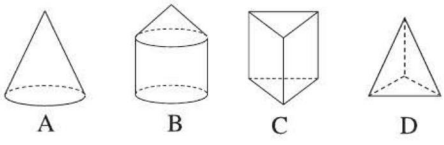
（第 3 题）

题型 2　利用三视图确定几何体形状

4. 一个几何体的三视图如图所示，那么这个几何体是（　　）



（第 4 题）

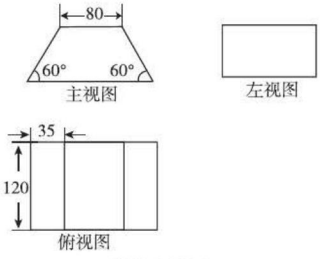


题型 3　利用三视图求几何体的表面积

5. 如图是某几何体的三视图（图中单位：mm）．

（1）请画出此几何体．

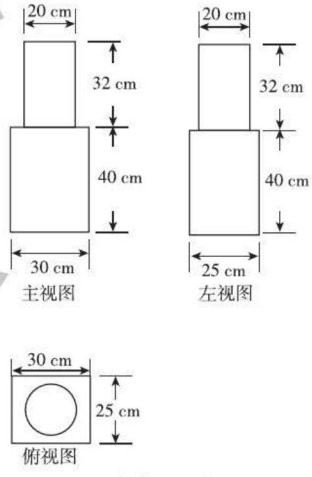
（2）根据此几何体的三视图的尺寸求此几何体的表面积．



（第 5 题）

题型 4　利用三视图求几何体的体积

6. 如图所示是一个几何体的三视图，求该几何体的体积（π 取 3.14）．



（第 6 题）

荣德基

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

第 8 章测试卷 ☞答案见 278 页

（100 分 60 分钟）

一、选择题（每题 3 分，共 30 分）

1. 下列各种现象属于中心投影现象的是（　　）

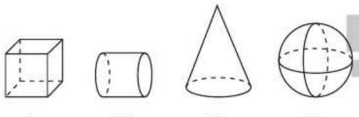
A. 上午 10 点时，走在路上的人的影子

B. 晚上 10 点时，走在路灯下的人的影子

C. 中午用来乘凉的树影

D. 升国旗时，地上旗杆的影子

2. 下列四个立体图形中，其主视图是轴对称图形但不是中心对称图形的是（　　）



A　　B　　C　　D

3. 北京天安门广场前每天早晨都会举行升国旗仪式，在一个晴朗的日子里，从早晨太阳升起的那一刻起到晚上日落前，旗杆在地面上的影子的变化规律是（　　）

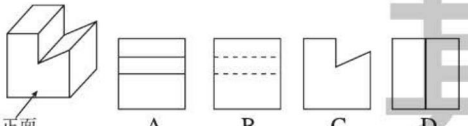
A. 先变短，后变长

B. 先变长，后变短

C. 长度不变，方向改变

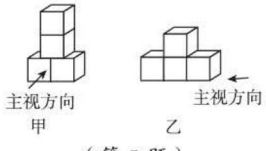
D. 以上都不正确

4. 如图所示，该几何体的左视图是（　　）



（第 4 题）

5. 如图是由四个相同的正方体组合而成的两个几何体，则下列表述正确的是（　　）



（第 5 题）

A. 图甲的主视图与图乙的左视图形状相同

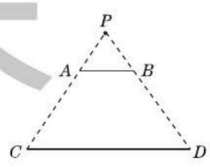
B. 图甲的左视图与图乙的俯视图形状相同

C. 图甲的俯视图与图乙的俯视图形状相同

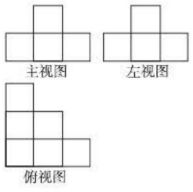
D. 图甲的主视图与图乙的主视图形状相同

6. 如图，电灯 P 在横杆 AB 的正上方，AB 在灯光下的影子为 CD，$AB \parallel CD$，$AB=2$ m，$CD=6$ m，横杆 AB 与 CD 的距离是 3 m，则 P 到 AB 的距离是（　　）

A. $\frac{2}{3}$ m　　B. 1m　　C. $\frac{3}{2}$ m　　D. 3m

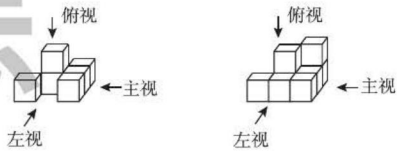


（第 6 题）



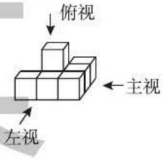
（第 7 题）

7. 如图所示三视图对应的几何体是（　　）

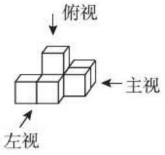


A

B

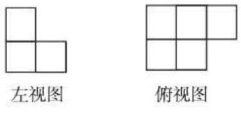


C



D

8. 由若干个完全相同的小正方体组成一个立体图形，它的左视图和俯视图如图所示，则小正方体的个数不可能是（　　）



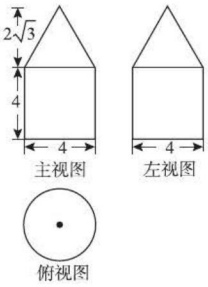
（第 8 题）

A. 5　　B. 6　　C. 7　　D. 8

荣德基

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

9. 如图是由圆柱与圆锥组合而成的几何体的三视图，则该几何体的表面积为（　　）

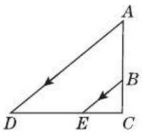


（第 9 题）

A. 20π　　B. 24π

C. 28π　　D. 32π

10. 如图，阳光从教室的窗户射入室内，窗户框 AB 在地面上的影长 $DE=1.8$ m，窗户下沿到地面的距离 $BC=1$ m，$EC=1.2$ m，那么窗户的高 AB 为（　　）



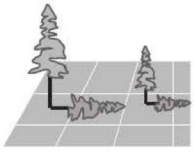
（第 10 题）

A. 1.5 m　　B. 1.6 m

C. 1.86 m　　D. 2.16 m

二、填空题（每题 3 分，共 18 分）

11. 如图所示是两棵小树在同一时刻的影子，可以断定这是_____投影.

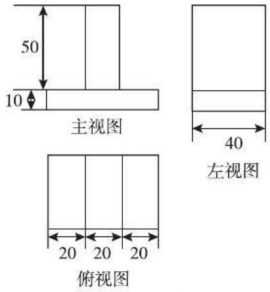


（第 11 题）

12. 一个几何体的主视图、俯视图和左视图都相同，则这个几何体可以是_____.（写出一个即可）

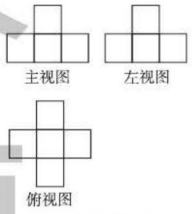
13. 为了测量水塔的高度，我们取一竹竿放在阳光下，已知 2 m 长的竹竿的影长为 1.5 m，在同一时刻测得水塔的影长为 30 m，则水塔高为_____ m.

14. 一个几何体的三视图如图所示，则这个几何体的表面积为_____.

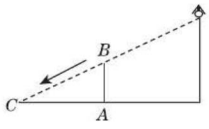


（第 14 题）

15. 仓库里堆放着若干个相同的正方体小货箱，仓库管理员将这堆小货箱的三视图画了出来，如图所示，则这堆正方体小货箱共有_____个.



（第 15 题）



（第 16 题）

16. 如图，一根直立于水平地面上的木杆 AB 在灯光下形成影子，当木杆绕 A 按逆时针方向旋转直至到达地面时，影子的长度发生变化. 若 AB 垂直于地面时的影长为 AC（假定 $AC > AB$），影长的最大值为 m，最小值为 n，有下列结论：

① $m > AC$；　② $m=AC$；

③ $n=AB$；　④ 影子的长度先增大后减小.

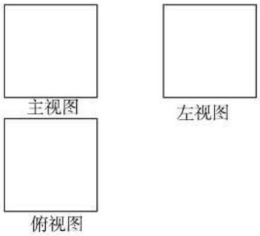
其中，正确结论的序号是_____.

三、解答题（共 52 分）

17.（8 分）请将如图所示实物的三视图画在规定位置.



（第 17 题）



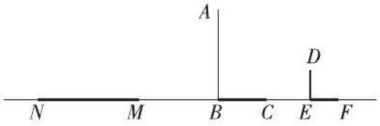
荣德基

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

18.（10分）如图，路灯下一墙墩（用线段AB表示）的影子是BC，小明（用线段DE表示）的影子是EF，在M处有一棵大树，它的影子是MN.

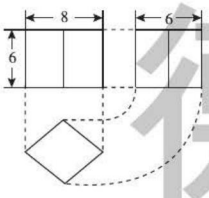
（1）标出路灯的位置（用点P表示）.

（2）在图中画出表示大树的线段MG.



（第18题）

19.（10分）如图是一个钢坯零件的三视图，这个零件的俯视图为菱形，其测量数据如图所示（单位：cm）. 请根据以上信息求出这个钢坯零件的表面积.

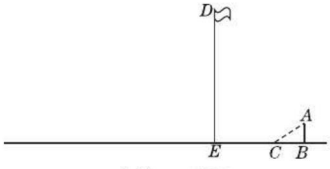


（第19题）

20.（12分）如图，小明与同学合作利用太阳光线测量旗杆的高度，身高1.6 m的小明（AB）落在地面上的影长为BC=2.4 m.

（1）请你在图中画出旗杆（DE）在同一时刻阳光照射下落在地面上的影子EG.

（2）若小明测得此刻旗杆落在地面的影长EG=16 m，请求出旗杆DE的高度.



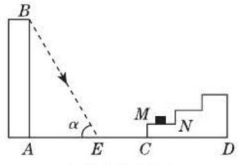
（第20题）

21.（12分）如图所示，一幢楼房AB背后有一台阶CD，台阶每层高0.2米，且AC=17.2米，设太阳光线与水平地面的夹角为α，当α=60°时，测得楼房在地面上的影长AE=10米，现有一只小猫睡在台阶的MN这层上晒太阳.

（1）楼房的高度约为多少米？（结果精确到0.1米）.

（2）过了一会儿，当α=45°时，小猫能否晒到太阳？请说明理由.（参考数据：$\sqrt{3}\approx 1.732$）

【导学号：8927116】



（第21题）

错题笔记

荣德基

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

参考答案及点拨

第5章 对函数的再探索

5.1 函数与它的表示法

【两年模拟兵法】

1. D **2.** D **3.** B **4.** C **5.** A

6. D

7. D **点拨:** A. 根据函数图象知小亮去姥姥家所用时间为 $10-8=2$(h),∴ 小亮骑自行车的平均速度为 $24\div2=12$(km/h),故正确;B. 由图象可得,妈妈到姥姥家对应的时间 $t=9.5$ h,小亮到姥姥家对应的时间 $t=10$ h,$10-9.5=0.5$(h),∴ 妈妈比小亮提前 0.5 h 到达姥姥家,故正确;C. 由图象可知,当 $t=9$ h 时,妈妈追上小亮,此时小亮离家的时间为 $9-8=1$(h),∴ 妈妈在距家 12 km 处追上小亮,故正确;D. 由图象可知,当 $t=9$ h 时,妈妈追上小亮,故错误. 故选 D.

8. $x\leqslant2$ 且 $x\neq-3$ **9.** 6 **10.** 20

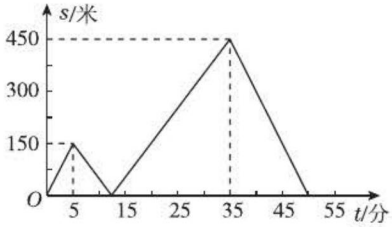
11. **解:** (1) 当 $x=10$ 时,$y=59$,所以当提出概念所用的时间是 10 分钟时,学生的接受能力是 59.

(2) 当 $x=13$ 时,y 的值最大,是 59.9,所以当提出概念所用的时间为 13 分钟时,学生的接受能力最强.

(3) 由表中数据可知,当 $0<x<13$ 时,y 值逐渐增大,学生的接受能力逐渐增强;当 $13<x<20$ 时,y 值逐渐减小,学生的接受能力逐渐减弱.

12. **解:** (1) 甲行走的速度为 $150\div5=30$(米/分).

(2) 补画的图象如图所示(横轴上对应的时间为 50).



(第 12 题)

(3) 由函数图象可知,

当 $t=12.5$ 时,$s=0$,

当 $12.5\leqslant t\leqslant35$ 时,$s=20t-250$,

当 $35<t\leqslant50$ 时,$s=-30t+1\,500$.

当甲、乙两人相距 360 米,即 $s=360$ 时,

有 $360=20t-250$ 或 $360=-30t+1\,500$,

解得 $t=30.5$ 或 $t=38$.

∴ 当甲出发 30.5 分和 38 分时,甲、乙两人相距 360 米.

13. **解:** (1) 居民家庭月用水为 25 m^3 时,应交水费 90 元.

(2) 设一阶梯用水单价为 x 元,则二阶梯用水单价为 $1.5x$ 元,根据题意得

$1.5x\left(25-\dfrac{45}{x}\right)=90-45$,解得 $x=3$,

$\dfrac{45}{x}=15$,∴ $A(15,45)$.

设线段 AB 所在直线的表达式为 $y=kx+b$,由图象知 $B(25,90)$,

∴ $\begin{cases}15k+b=45,\\25k+b=90,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}k=4.5,\\b=-22.5,\end{cases}$

∴ 线段 AB 所在直线的表达式为 $y=4.5x-22.5$.

(3) 由(2)知一阶梯用水单价为 3 元,

∵ 一、三阶梯用水的单价之比等于 1∶2,

∴ 三阶梯用水单价为 6 元,

∴ 5 月份该户用水量为 $25+(102-90)\div6=27$(m^3).

5.2 反比例函数

5.2.1 反比例函数的概念及表达式

【两年模拟兵法】

1. C **2.** D **3.** D

4. B **点拨:** ∵ $y=(m-1)x^{m^2-2}$ 是反比例函数,∴ $m^2-2=-1$,且 $m-1\neq0$,∴ $m=\pm1$,且 $m\neq1$,∴ $m=-1$. 故选 B.

5. A **点拨:** 选取表格的多对值分别代入所给函数表达式验证即可.

6. $y=-\dfrac{8}{x}$ **点拨:** ∵ 点 $Q(2,4)$ 与点 P 关于 y 轴对称,∴ P 点坐标为 $(-2,4)$,将 $(-2,$

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

4）代入 $y=\frac{k}{x}$ 中，得 $4=\frac{k}{-2}$，∴ $k=-8$，

∴ 反比例函数的表达式为 $y=-\frac{8}{x}$.

7. $y=\frac{12}{x}$ 或 $y=-\frac{12}{x}$ **点拨：**根据题意，得点 P 的坐标可能是(4,3)，(4，−3)，(−4,3)或(−4，−3)，设反比例函数的表达式为 $y=\frac{k}{x}$，将点 P 的坐标分别代入，得 $k=12$ 或 $k=-12$，则反比例函数的表达式为 $y=\frac{12}{x}$ 或 $y=-\frac{12}{x}$.

8. 解：若函数 $y=(m+1)x^{|2m|-1}$ 是正比例函数，则需满足 $|2m|-1=1$，且 $m+1\neq 0$. 解得 $m=1$. 所以当 $m=1$ 时，y 是 x 的正比例函数. 若函数 $y=(m+1)x^{|2m|-1}$ 是反比例函数，则需满足 $|2m|-1=-1$，且 $m+1\neq 0$. 解得 $m=0$. 所以当 $m=0$ 时，y 是 x 的反比例函数.

9. 解：(1) 由题意，设 $y_1=k_1x$，$y_2=\frac{k_2}{x}$，则 $y=k_1x+\frac{k_2}{x}$. 因为当 $x=1$ 时，$y=4$；当 $x=2$ 时，$y=5$，

所以 $\begin{cases}4=k_1+k_2,\\5=2k_1+\frac{k_2}{2}.\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}k_1=2,\\k_2=2.\end{cases}$

所以 y 与 x 之间的函数表达式为 $y=2x+\frac{2}{x}$.

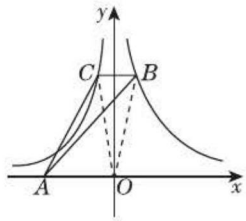
(2) 把 $x=4$ 代入 $y=2x+\frac{2}{x}$，得 $y=2\times 4+\frac{2}{4}=\frac{17}{2}$.

5.2.2 反比例函数的图象与性质

【两年模拟兵法】

1. D **2.** A **3.** A **4.** A

5. A **点拨：**连接 OC，OB，如图，∵ $BC\parallel x$ 轴，∴ $S_{\triangle ACB}=S_{\triangle OCB}$，∵ $S_{\triangle OCB}=\frac{1}{2}\cdot|3|+\frac{1}{2}\cdot|k|$，∴ $\frac{1}{2}\cdot|3|+\frac{1}{2}\cdot|k|=2$，又 $k<0$，∴ $k=-1$，故选 A.



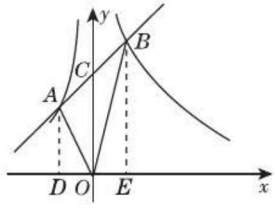
（第 5 题）

6. D

7. A **点拨：**∵ 直线 $y=mx(m\neq 0)$ 与双曲线 $y=\frac{n}{x}(n\neq 0)$ 相交于 $A(-1,3)$，∴ $-m=3$，$\frac{n}{-1}=3$，∴ $m=-3$，$n=-3$，∴ 直线的表达式为 $y=-3x$，双曲线的表达式为 $y=-\frac{3}{x}$. 列方程组 $\begin{cases}y=-3x,\\y=-\frac{3}{x},\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x_1=-1,\\y_1=3,\end{cases}\begin{cases}x_2=1,\\y_2=-3,\end{cases}$ 则点 A 的坐标为(−1,3)，点 B 的坐标为(1，−3)，∴ 点 C 的坐标为(1,0)，∴ $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}\times 1\times(3+3)=3$，故选 A.

8. <

9. 3 **点拨：**如图，分别过 A，B 两点作 $AD\perp x$ 轴，$BE\perp x$ 轴，垂足分别为 D，E，∵ $AC=CB$，∴ $OD=OE$，设 $A\left(-a,\frac{2}{a}\right)(a>0)$，则 $B\left(a,\frac{4}{a}\right)$，则 $S_{\triangle AOB}=S_{梯形ADEB}-S_{\triangle AOD}-S_{\triangle BOE}=\frac{1}{2}\left(\frac{2}{a}+\frac{4}{a}\right)\times 2a-\frac{1}{2}a\times\frac{2}{a}-\frac{1}{2}a\times\frac{4}{a}=3$.

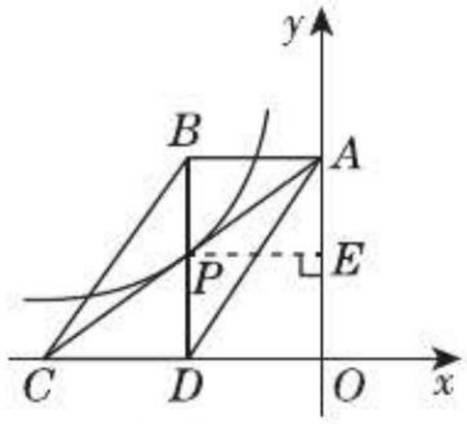


（第 9 题）

10. −3 **点拨：**如图，过点 P 作 $PE\perp y$ 轴于点 E，∵ 四边形 $ABCD$ 为平行四边形，∴ $AB=CD$. 易得四边形 $ABDO$ 为矩形，∴ $AB=DO$，∴ $S_{矩形ABDO}=S_{\square ABCD}=6$. ∵ P 为对角线交点，$PE\perp y$ 轴，∴ 四边形 $PDOE$ 为矩形，且面积为 3，即 $DO\cdot EO=3$. 设 P 点坐标为

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

(x,y),则 $k=xy=-3$,故答案为 -3.



(第 10 题)

11. 解:(1)$\because OB=4, OD=2, \therefore DB=2+4=6$.

$\because CD\perp x$ 轴,$\tan\angle ABO=\frac{1}{2}$,$\therefore OA=2$,

$CD=3$,

$\therefore A(0,2), B(4,0), C(-2,3)$. 设直线 AB 的表达式为 $y=kx+b$,

则 $\begin{cases}2=b,\\0=4k+b,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}k=-\frac{1}{2},\\b=2,\end{cases}$

$\therefore$ 直线 AB 的表达式为 $y=-\frac{1}{2}x+2$.

设反比例函数的表达式为 $y=\frac{m}{x}$,

将 $C(-2,3)$ 的坐标代入,得 $m=-2\times 3=-6$.

$\therefore$ 反比例函数的表达式为 $y=-\frac{6}{x}$.

(2)$\because$ $\triangle CDE$ 与 $\triangle COB$ 的面积相等,

$\therefore \frac{1}{2}\times CD\times DE=\frac{1}{2}\times CD\times OB$,

$\therefore DE=OB=4$,

$\therefore$ 点 E 的坐标为 $(-6,0)$ 或 $(2,0)$.

12. 解:(1)$\because$ 点 A、点 B 在反比例函数 $y=\frac{k_1}{x}$ $(x>0)$ 的图象上,

$\therefore k_1=1\times 4=m\times 4$,

$\therefore m=1, k_1=4$.

$\because$ 反比例函数 $y=\frac{k_1}{x}(x>0)$ 的图象与反比例函数 $y=\frac{k_2}{x}(x<0)$ 的图象关于 y 轴对称,

$\therefore k_2=-k_1=-4$,

$\therefore -2\times n=-4, \therefore n=2$.

(2)设 AB 所在直线的表达式为 $y=kx+b$,把 $A(1,4)$,$B(4,1)$ 的坐标代入,得 $\begin{cases}4=k+b,\\1=4k+b,\end{cases}$

解得 $\begin{cases}k=-1,\\b=5,\end{cases}$

$\therefore AB$ 所在直线的表达式为 $y=-x+5$.

(3)过点 A,B 作 x 轴的平行线,过点 C,B 作 y 轴的平行线,它们的交点分别是 E,F,G,B,易知四边形 $EFBG$ 为矩形,

$AF=3, BF=3, AE=3, EC=2, CG=1, GB=6, EG=3$.

$\therefore S_{\triangle ABC}=S_{矩形EFBG}-S_{\triangle AFB}-S_{\triangle AEC}-S_{\triangle CBG}$

$=BG\times EG-\frac{1}{2}AF\times FB-\frac{1}{2}AE\times EC-\frac{1}{2}BG\times CG$

$=18-\frac{9}{2}-3-3$

$=\frac{15}{2}$.

5.2.3 反比例函数的应用

【两年模拟兵法】

1. B **2.** D **3.** A **4.** C **5.** C **6.** $y=\frac{6\,000}{x}$

7. 13 **8.** $R=\frac{29}{S}$;14.5

9. 解:(1)由长方形鱼塘的面积为 3 000 m^2,得 $xy=3\,000$,

$\therefore y=\frac{3\,000}{x}$.

(2)当 $x=20$ 时,$y=\frac{3\,000}{20}=150$.

答:当鱼塘的宽是 20 m 时,鱼塘的长为 150 m.

10. 解:(1)$\because vt=480$,且全程速度限定为不超过 120 千米/时,

$\therefore v$ 关于 t 的函数表达式为 $v=\frac{480}{t}$ $(t\geqslant 4)$.

(2)①8 点至 12 点 48 分时间长为 $\frac{24}{5}$ 小时,8 点至 14 点时间长为 6 小时,将 $t=6$ 代入 $v=\frac{480}{t}$,得 $v=80$;将 $t=\frac{24}{5}$ 代入 $v=\frac{480}{t}$,得 $v=100$. $\therefore$ 小汽车行驶速度 v 的范围为 $80\leqslant v\leqslant 100$. ②方方不能在当天 11 点 30 分前到达 B 地. 理由如下:8 点至 11 点 30 分时间长为 $\frac{7}{2}$ 小时,将 $t=\frac{7}{2}$ 代入

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

$v=\frac{480}{t}$，得 $v=\frac{960}{7}>120$，超速了. 故方方不能在当天 11 点 30 分前到达 B 地.

11. **解：**(1)∵ 在室温由 10℃上升到 30℃的过程中，电阻与温度成反比例关系，

∴ 可设 R 和 t 之间的关系式为 $R=\frac{k}{t}$，

将(10，6)代入上式，得 $6=\frac{k}{10}$，解得 $k=60$.

故当 $10\leqslant t\leqslant 30$ 时，$R=\frac{60}{t}$.

(2)将 $t=30$ 代入(1)中的关系式，得 $R=\frac{60}{30}=2$.

∴ 室温在 30℃时，电阻的值为 2 kΩ.

∵ 在室温达到 30℃时，电阻下降到最小值，随后电阻随温度的升高而增加，温度每上升 1℃，电阻增加 $\frac{4}{15}$ kΩ，

∴ 当 $t\geqslant 30$ 时，$R=2+\frac{4}{15}(t-30)=\frac{4}{15}t-6$.

(3)把 $R=6$，代入 $R=\frac{4}{15}t-6$，得 $t=45$，

∴ 室温在 10℃～45℃时，电阻不超过 6 kΩ.

5.3 二次函数

【两年模拟兵法】

1. C　**2.** C　**3.** D

4. B　**点拨：**本题主要考查了根据实际问题列二次函数表达式，关键是正确理解题意，找出题目中的等量关系，再列函数表达式. 降价 x 元，则售价为 $(60-x)$ 元，销售量为 $(300+20x)$ 件，由题意可得等量关系为总销售额 = 销售量 × 售价，根据等量关系列出函数表达式即可.

5. $y=3x^2-20x+12$；3；-20；12；-16；1 或 $\frac{17}{3}$

6. $S=\frac{1}{2}t^2$；$0<t\leqslant 3$

7. **解：**(1)依题意得 $\begin{cases}m^2-m=0,\\ m-1\neq 0,\end{cases}$

∴ $\begin{cases}m=0\text{ 或 }m=1,\\ m\neq 1,\end{cases}$

∴ $m=0$.

(2)依题意得 $m^2-m\neq 0$，∴ $m\neq 0$ 且 $m\neq 1$.

8. **解：**(1)当 $0<t\leqslant 3$ 时，S_1 随 t 的增大而增大；当 $3<t<6$ 时，S_1 随 t 的增大而减小；∵ 出发时间为 t s，点 P 的速度为 2 mm/s，点 Q 的速度为 4 mm/s，∴ $PC=(12-2t)$ mm，$CQ=4t$ mm，∴ $S_1=\frac{1}{2}\times(12-2t)\times 4t=-4t^2+24t$.

∵ $t>0$，$12-2t>0$，∴ $0<t<6$.

(2) $S_2=S_{\triangle ABC}-S_1=\frac{1}{2}\times 24\times 12-(-4t^2+24t)=4t^2-24t+144\ (0<t<6)$.

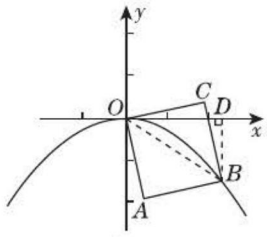
5.4 二次函数的图象和性质

5.4.1 二次函数 $y=ax^2$ 的图象和性质

【两年模拟兵法】

1. A　**2.** C　**3.** A　**4.** C　**5.** C

6. $-\frac{\sqrt{2}}{3}$　**点拨：**如图，连接 OB，∵ 四边形 $OABC$ 是边长为 1 的正方形，∴ $\angle BOC=45°$，$OB=1\times\sqrt{2}=\sqrt{2}$. 过点 B 作 $BD\perp x$ 轴于 D，∵ OC 与 x 轴正半轴的夹角为 15°，∴ $\angle BOD=45°-15°=30°$，∴ $BD=\frac{1}{2}OB=\frac{\sqrt{2}}{2}$，∴ $OD=\sqrt{(\sqrt{2})^2-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{6}}{2}$，∴ 点 B 的坐标为 $\left(\frac{\sqrt{6}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$. ∵ 点 B 在抛物线 $y=ax^2\ (a<0)$ 的图象上，∴ $a\times\left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right)^2=-\frac{\sqrt{2}}{2}$，解得 $a=-\frac{\sqrt{2}}{3}$.



（第 6 题）

7. $3-\sqrt{3}$　**点拨：**设 A 点坐标为 $(0,a)\ (a>0)$，由 $x^2=a$，得 $x=\sqrt{a}$，∴ 点 $B(\sqrt{a},a)$，∴ $AB=\sqrt{a}$. 由 $\frac{x^2}{3}=a$，得 $x=\sqrt{3a}$，∴ 点 $C(\sqrt{3a},a)$. ∵ $CD/\!/y$ 轴，∴ 点 D 的横坐标与点 C 的横坐标相同，为 $\sqrt{3a}$，当 $x=\sqrt{3a}$ 时，$y_1=(\sqrt{3a})^2=3a$，∴ 点 D 的坐标为 $(\sqrt{3a},3a)$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

$\because DE//AC$,$\therefore$ 点 E 的纵坐标为 $3a$,令 $\frac{x^2}{3}=3a$,得 $x=3\sqrt{a}$,$\therefore$ 点 E 的坐标为 $(3\sqrt{a},3a)$,$\therefore DE=3\sqrt{a}-\sqrt{3a}$,$\therefore \frac{DE}{AB}=\frac{3\sqrt{a}-\sqrt{3a}}{\sqrt{a}}=3-\sqrt{3}$.

8. **解:**(1)设抛物线的表达式为 $y=ax^2$,把 $B(4,-4)$ 的坐标代入,得 $-4=a\times4^2$,解得 $a=-\frac{1}{4}$,

$\therefore$ 抛物线的表达式为 $y=-\frac{1}{4}x^2$.

(2)当 $y=-3$ 时,$-3=\frac{1}{4}x^2$,解得 $x=\pm2\sqrt{3}$,

$\therefore$ 水位上升 1 m,水面宽度减少 $(8-4\sqrt{3})$ m.

9. (1)**解:**$\because$ 圆心 Q 的纵坐标为 $\frac{1}{8}$,

$\therefore$ 设 $Q\left(m,\frac{1}{8}\right)$.

$\because QO=QF$,

$\therefore$ 利用勾股定理可得 $m^2+\left(\frac{1}{8}\right)^2=m^2+\left(\frac{1}{8}-\frac{1}{4a}\right)^2$,

$\therefore a=1$.

(2)**解:**由(1)可知抛物线的表达式为 $y=x^2$.$\because M$ 在抛物线上,$\therefore$ 设 $M(t,t^2)$,设 $Q\left(m,\frac{1}{8}\right)$,过点 Q 作 $QP\perp x$ 轴于点 P,

$\because O,Q,M$ 在同一直线上,

$\therefore \tan\angle MOP=\tan\angle QOP$,

$\therefore \frac{t^2}{t}=\frac{\frac{1}{8}}{m}$,$\therefore m=\frac{1}{8t}$.

$\because QO=QM$,

$\therefore$ 利用勾股定理可得 $m^2+\left(\frac{1}{8}\right)^2=(m-t)^2+\left(\frac{1}{8}-t^2\right)^2$,

整理得 $-\frac{1}{4}t^2+t^4+t^2-2mt=0$,

$\therefore 4t^4+3t^2-1=0$,

$\therefore (t^2+1)(4t^2-1)=0$,

$\therefore t_1=\frac{1}{2}$,$t_2=-\frac{1}{2}$.

当 $t_1=\frac{1}{2}$ 时,$m_1=\frac{1}{4}$,

当 $t_2=-\frac{1}{2}$ 时,$m_2=-\frac{1}{4}$,

$\therefore M_1\left(\frac{1}{2},\frac{1}{4}\right)$,$Q_1\left(\frac{1}{4},\frac{1}{8}\right)$,$M_2\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{4}\right)$,$Q_2\left(-\frac{1}{4},\frac{1}{8}\right)$.

(3)**证明:**设 $M(n,n^2)(n>0)$,则 $N(n,0)$,易知 $F\left(0,\frac{1}{4}\right)$,由勾股定理得 $MF=\sqrt{n^2+\left(n^2-\frac{1}{4}\right)^2}=\sqrt{\left(n^2+\frac{1}{4}\right)^2}=n^2+\frac{1}{4}$,$MN+OF=n^2+\frac{1}{4}$,

$\therefore MF=MN+OF$.

5.4.2 二次函数 $y=a(x-h)^2+k$ 的图象和性质

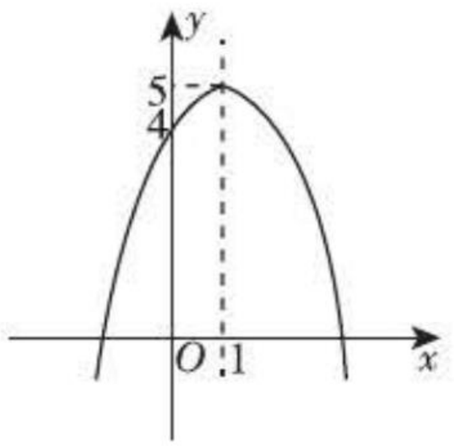
【两年模拟兵法】

1. A **2.** D **3.** D **4.** D

5. 2;-4 **点拨:**抛物线 $y=-2x^2+4$ 的顶点坐标为 $(0,4)$,对称轴为直线 $x=0$,开口向下,$\because y=ax^2+k(a\neq0)$ 与 $y=-2x^2+4$ 关于 x 轴对称,$\therefore$ 抛物线 $y=ax^2+k(a\neq0)$ 的顶点坐标为 $(0,-4)$,对称轴为直线 $x=0$,开口向上,$\therefore y=ax^2+k$ 即为 $y=2(x-0)^2-4$,$\therefore a=2$,$k=-4$.

6. $2\leqslant m\leqslant8$ **点拨:**平移后抛物线的表达式为 $y=(x+1)^2-m$,将 B 点坐标代入,得 $4-m=2$,解得 $m=2$,将 D 点坐标代入,得 $9-m=1$,解得 $m=8$,则 m 的取值范围是 $2\leqslant m\leqslant8$,故答案为 $2\leqslant m\leqslant8$.

7. -3 **点拨:**二次函数 $y=-(x-1)^2+5$ 的大致图象如图:



(第 7 题)

易知 $m<0$,$n>0$.

①若 $0<n<1$,当 $x=m$ 时,y 取最小值,即 $5m=-(m-1)^2+5$,解得 $m=-4$ 或 $m=1$(舍去).

当 $x=n$ 时,y 取最大值,即 $5n=-(n-1)^2+5$,解得 $n=-4$ 或 $n=1$(均不合题意,舍去).

②若 $n\geqslant1$,当 $x=m$ 时,y 取最小值,即 $5m=-(m-1)^2+5$,

解得 $m=-4$ 或 $m=1$(舍去).

当 $x=1$ 时,y 取最大值,即 $5n=-(1-1)^2+5$,解得 $n=1$,

或当 $x=n$ 时,y 取最小值,当 $x=1$ 时,y 取

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

最大值，此时 $5m=-(n-1)^2+5$，$n=1$，
$\therefore m=1$.
$\because m<0$，
$\therefore$ 此时情形不合题意，$\therefore m+n=-4+1=-3$.

8. **解：**(1)$\because$ 抛物线过点 $P(1,-3)$，
$\therefore -3=a+1$，解得 $a=-4$.
(2)当 $a=-4$ 时，抛物线的表达式为 $y=-4(x-2)^2+1$，
$\therefore$ 抛物线的开口向下，对称轴为直线 $x=2$，
当 $x<2$ 时，y 随 x 的增大而增大.
$\because m<n<2$，
$\therefore y_1<y_2$.

9. **解：**(1)$\because$ 抛物线 $y=-mx^2+4m$ 的顶点坐标为(0,2)，
$\therefore 4m=2$，$\therefore m=\frac{1}{2}$，
$\therefore$ 抛物线的表达式为 $y=-\frac{1}{2}x^2+2$.
(2)$\because CD=AB=|y|=y$，
$\therefore AB+CD=2y=2\left(-\frac{1}{2}x^2+2\right)$，
又$\because AD=BC=2|x|=2x$，
$\therefore P=2\left(-\frac{1}{2}x^2+2\right)+4x=-x^2+4x+4$.
$\because$ 抛物线 $y=-\frac{1}{2}x^2+2$ 与 x 轴的两个交点的坐标是 $(-2,0)$，$(2,0)$，$\therefore x$ 的取值范围是 $0<x<2$.
(3)假设存在周长为 9 的矩形 $ABCD$，
则有 $-x^2+4x+4=9$，即 $-x^2+4x-5=0$，
$\because 4^2-4\times(-1)\times(-5)<0$，
$\therefore$ 方程无实数根，
$\therefore$ 不存在周长为 9 的矩形 $ABCD$.

5.4.3 二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图象和性质

【两年模拟兵法】

1. C **2.** A **3.** D **4.** D

5. D **点拨：**当 $y=1$ 时，有 $x^2-2x+1=1$，解得 $x_1=0$，$x_2=2$.$\because$ 当 $a\leqslant x\leqslant a+1$ 时，函数有最小值 1，$\therefore a=2$ 或 $a+1=0$，$\therefore a=2$ 或 $a=-1$，故选 D.

6. B **点拨：**$\because$ 抛物线开口向上，$\therefore a>0$.$\because$ 对称轴在 y 轴左边，$\therefore ab>0$.$\because$ 抛物线与 y 轴的交点在点(0,2)的上方，$\therefore c+2>2$，$\therefore c>0$，$\therefore abc>0$，$\therefore$ 结论①不正确.$\because$ 二次函数 $y=ax^2+bx+c+2$ 的图象与 x 轴只有一个交点，$\therefore \Delta=0$，即 $b^2-4a(c+2)=0$，$\therefore b^2-4ac=8a>0$，$\therefore$ 结论②不正确.$\because$ 对称轴为直线 $x=-\frac{b}{2a}=-1$，$\therefore b=2a$.$\because b^2-4ac=8a$，$\therefore 4a^2-4ac=8a$，$\therefore a=c+2$.$\because c>0$，$\therefore a>2$，$\therefore$ 结论③正确.$\because$ 对称轴是直线 $x=-1$，且 $x=0$ 时，$y>2$，$\therefore x=-2$ 时，$y>2$，$\therefore 4a-2b+c+2>2$，$\therefore 4a-2b+c>0$，$\therefore$ 结论④正确. 综上可得正确结论有 2 个，故选 B.

7. C **点拨：**由题意可得 $BQ=x$. ①$0\leqslant x\leqslant 1$ 时，P 点在 BC 边上，$BP=3x$，$\triangle BPQ$ 的面积 $=\frac{1}{2}BP\cdot BQ$，即 $y=\frac{1}{2}\cdot 3x\cdot x=\frac{3}{2}x^2$，故 A 选项错误；②$1<x\leqslant 2$ 时，P 点在 CD 边上，$\triangle BPQ$ 的面积 $=\frac{1}{2}BQ\cdot BC$，即 $y=\frac{1}{2}\cdot x\cdot 3=\frac{3}{2}x$，故 B 选项错误；③$2<x\leqslant 3$ 时，P 点在 AD 边上，$AP=9-3x$，$\triangle BPQ$ 的面积 $=\frac{1}{2}AP\cdot BQ$，即 $y=\frac{1}{2}\cdot(9-3x)\cdot x=\frac{9}{2}x-\frac{3}{2}x^2$，故 D 选项错误. 故选 C.

8. $(-2,0)$ **9.** -1 **10.** $\frac{12}{5}$

11. ①②③ **点拨：**①$\because$ 图象与 x 轴的交点 A，B 的横坐标分别为 -1，3，$\therefore$ 对称轴为直线 $x=1$，即 $-\frac{b}{2a}=1$，$\therefore 2a+b=0$，故①正确. ②$\because A$ 点坐标为 $(-1,0)$，$\therefore a-b+c=0$. $\therefore b=-2a$，$\therefore a+2a+c=0$，即 $c=-3a$，故②正确. ③要使 $\triangle ABD$ 为等腰直角三角形，必须保证 D 到 x 轴的距离等于 AB 长的一半，而 D 到 x 轴的距离就是当 $x=1$ 时 y 的值的绝对值. 当 $x=1$ 时，$y=a+b+c$，$\therefore |a+b+c|=2$.$\because$ 当 $x=1$ 时 $y<0$，$\therefore a+b+c=-2$. 又$\because$ 图象与 x 轴的交点 A，B 的横坐标分别为 -1，3，$\therefore$ 当 $x=-1$ 时 $y=0$，即 $a-b+c=0$，$\therefore b=-1$.
又$\because b=-2a$，$\therefore a=\frac{1}{2}$，故③正确. ④要

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

使△ACB为等腰三角形,则必须保证$AB=BC=4$或$AB=AC=4$或$AC=BC$. 当$AB=BC=4$时,∵$BO=3$,△BOC为直角三角形,OC的长为$|c|$,∴$c^2=16-9=7$. ∵抛物线与y轴的交点在y轴的负半轴上,∴$c=-\sqrt{7}$. 又$c=-3a$,∴$a=\frac{\sqrt{7}}{3}$. 当$AB=AC=4$时,∵$AO=1$,△AOC为直角三角形,OC的长为$|c|$,∴$c^2=16-1=15$. ∵抛物线与y轴的交点在y轴的负半轴上,∴$c=-\sqrt{15}$. 又$c=-3a$,∴$a=\frac{\sqrt{15}}{3}$.

当$AC=BC$时,∵$AC^2=1+c^2$,$BC^2=c^2+9$,∴$1+c^2=c^2+9$,此方程无解. 综上可知只有两个a值满足条件,所以④错误. 故正确的结论为①②③.

12. 解:(1)把点$P(-2,3)$代入$y=x^2+ax+3$中,得$a=2$,

∴$y=x^2+2x+3=(x+1)^2+2$,

∴二次函数图象的顶点坐标为$(-1,2)$.

(2)①∵点$Q(m,n)$在该二次函数图象上,∴$n=m^2+2m+3$,∴当$m=2$时,$n=11$. ②$2\leqslant n<11$.

13. 解:(1)在函数$y=-x^2-2x+4$中,令$x=0$,得$y=4$,

∴点B的坐标为$(0,4)$.

抛物线的对称轴为直线$x=-\frac{b}{2a}=-\frac{-2}{2\times(-1)}=-1$.

(2)设直线AB的表达式为$y=mx+n(m\neq0)$,将$A(-4,-4)$,$B(0,4)$的坐标代入$y=mx+n$,得

$$\begin{cases}-4m+n=-4,\\ n=4,\end{cases}\text{解得}\begin{cases}m=2,\\ n=4,\end{cases}$$

∴直线AB的表达式为$y=2x+4$.

设点E的坐标为$(x,2x+4)$,则点G的坐标为$(x,-x^2-2x+4)$.

∵四边形$GEOB$是平行四边形,

∴$GE=-x^2-2x+4-(2x+4)=-x^2-4x=OB=4$,

解得$x_1=x_2=-2$,

∴点G的坐标为$(-2,4)$.

14. 解:(1)当$x=0$时,$y=-x^2+2x-1=-(x-1)^2=-1$,

∴点B的坐标为$(0,-1)$.

∵平移后的抛物线顶点为$E(1,4)$,

∴平移后抛物线的表达式为$y=-(x-1)^2+4=-x^2+2x+3$.

(2)设点M的坐标为$(x,-x^2+2x-1)$,则点N的坐标为$(x,-x^2+2x+3)$.

∵$OM=ON$,

∴点M,N关于x轴对称,

∴$-x^2+2x-1=-(-x^2+2x+3)$,

整理,得$x^2-2x-1=0$,

解得$x_1=1-\sqrt{2}$,$x_2=1+\sqrt{2}$,

∴点M的坐标为$(1-\sqrt{2},-2)$或$(1+\sqrt{2},-2)$.

(3)当$y=0$时,$-x^2+2x+3=0$,

解得$x_1=-1$,$x_2=3$,

∴点C的坐标为$(-1,0)$.

设直线CB的表达式为$y=kx+b(k\neq0)$,

将$B(0,-1)$,$C(-1,0)$的坐标代入$y=kx+b$,得

$$\begin{cases}b=-1,\\ -k+b=0,\end{cases}\text{解得}\begin{cases}k=-1,\\ b=-1,\end{cases}$$

∴直线CB的表达式为$y=-x-1$.

联立直线CB与平移后的抛物线的表达式成方程组,得

$$\begin{cases}y=-x-1,\\ y=-x^2+2x+3,\end{cases}$$

解得$\begin{cases}x_1=-1,\\ y_1=0,\end{cases}\begin{cases}x_2=4,\\ y_2=-5,\end{cases}$

∴点F的坐标为$(4,-5)$.

设点P的坐标为$(1,m)$,

∵点C的坐标为$(-1,0)$,点F的坐标为$(4,-5)$,

∴$CF^2=[4-(-1)]^2+(-5-0)^2=50$,

$CP^2=[1-(-1)]^2+(m-0)^2=m^2+4$,

$PF^2=(4-1)^2+(-5-m)^2=m^2+10m+34$.

①当$\angle PCF=90°$时,$PF^2=CF^2+CP^2$,即$m^2+10m+34=50+m^2+4$,

解得$m=2$,

∴点P的坐标为$(1,2)$;

②当$\angle CPF=90°$时,$CF^2=CP^2+PF^2$,即

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

$50=m^2+4+m^2+10m+34$，

解得 $m_1=-6$，$m_2=1$，

∴点 P 的坐标为$(1,-6)$或$(1,1)$；

③当$\angle CFP=90°$时，$CP^2=CF^2+PF^2$，即 $m^2+4=50+m^2+10m+34$，

解得 $m=-8$，

∴点 P 的坐标为$(1,-8)$.

综上所述，在抛物线的对称轴上存在点 P，使得以 C,F,P 为顶点的三角形是直角三角形，点 P 的坐标为$(1,-8)$，$(1,-6)$，$(1,1)$或$(1,2)$.

5.5 确定二次函数的表达式

【两年模拟兵法】

1. A **2.** C **3.** D

4. D **点拨：**设二次函数的表达式为 $y=ax^2+bx+c(a\neq0)$，当图象与 x 轴的另一交点坐标为$(1,0)$时，把$(0,0)$，$(1,0)$，$\left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{4}\right)$代入，得 $\begin{cases}c=0,\\a+b+c=0,\\\frac{1}{4}a-\frac{1}{2}b+c=-\frac{1}{4},\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=-\frac{1}{3},\\b=\frac{1}{3},\\c=0,\end{cases}$ 所以二次函数的表达式为 $y=-\frac{1}{3}x^2+\frac{1}{3}x$；当图象与 x 轴的另一交点坐标为$(-1,0)$时，把$(0,0)$，$(-1,0)$，$\left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{4}\right)$代入，得 $\begin{cases}c=0,\\a-b+c=0,\\\frac{1}{4}a-\frac{1}{2}b+c=-\frac{1}{4},\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=1,\\b=1,\\c=0,\end{cases}$ 所以二次函数的表达式为 $y=x^2+x$. 综上，二次函数的表达式为 $y=-\frac{1}{3}x^2+\frac{1}{3}x$ 或 $y=x^2+x$.

5. $y=-\frac{3}{8}x^2+\frac{3}{4}x+3$

6. $y=2x^2-1$（答案不唯一）

7. **解：**(1)由题意得点 $E(1,1.4)$，$B(6,0.9)$，把它们的坐标代入 $y=ax^2+bx+0.9$，得 $\begin{cases}a+b+0.9=1.4,\\36a+6b+0.9=0.9,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=-0.1,\\b=0.6,\end{cases}$

∴该抛物线对应的函数表达式为 $y=-0.1x^2+0.6x+0.9$.

(2)把 $x=3$ 代入 $y=-0.1x^2+0.6x+0.9$，得 $y=-0.1\times3^2+0.6\times3+0.9=1.8$，

∴小华的身高是 1.8 米.

8. **解：**(1)∵抛物线 $y=-x^2+bx+c$ 经过点 $B(0,3)$和点 $A(3,0)$，

∴ $\begin{cases}c=3,\\-9+3b+c=0,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}b=2,\\c=3,\end{cases}$

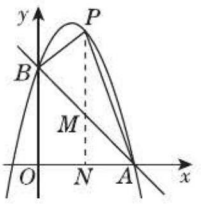
∴抛物线的函数表达式是 $y=-x^2+2x+3$.

设直线 AB 的函数表达式为 $y=kx+m$，

根据题意得 $\begin{cases}m=3,\\3k+m=0,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}k=-1,\\m=3,\end{cases}$

∴直线的函数表达式为 $y=-x+3$.

(2)如图，过 P 点作 $PN\perp OA$ 于 N，交直线 AB 于 M，设点 P 的横坐标为 a，则点 P 的坐标为$(a,-a^2+2a+3)$，点 M 的坐标是$(a,-a+3)$.



（第 8 题）

又点 P,M 在第一象限，∴ $PM=-a^2+2a+3-(-a+3)=-a^2+3a$，

∴ $S_{\triangle PAB}=S_{\triangle PAM}+S_{\triangle PBM}=\frac{1}{2}PM\cdot OA=\frac{1}{2}(-a^2+3a)\times3=-\frac{3}{2}\left(a-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{27}{8}$，

∴当 $a=\frac{3}{2}$ 时，$S_{\triangle PAB}$ 有最大值，最大值为 $\frac{27}{8}$，此时点 P 的坐标为$\left(\frac{3}{2},\frac{15}{4}\right)$.

9. **解：**(1)根据题意，把 $A(0,6)$，$B(6,0)$的坐标代入抛物线表达式，

得 $\begin{cases}c=6,\\36a+12+c=0,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=-\frac{1}{2},\\c=6,\end{cases}$

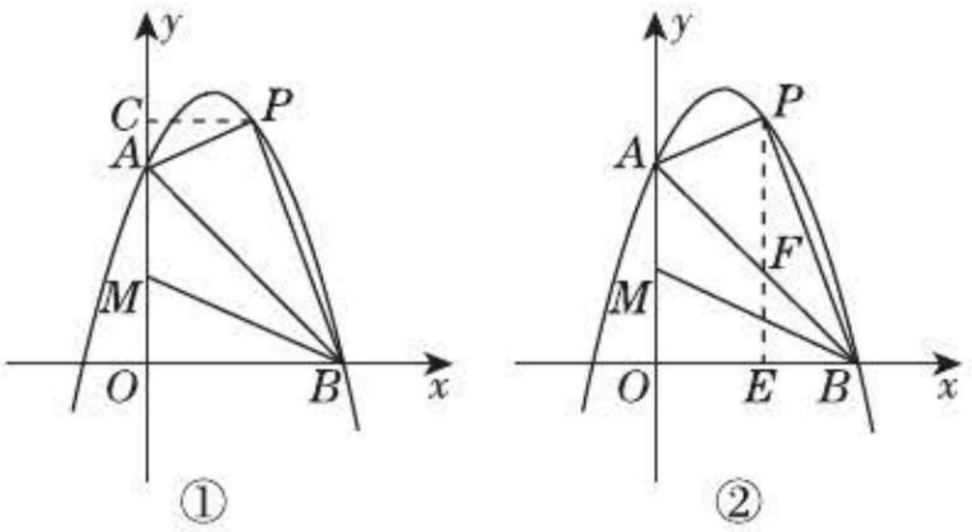
∴抛物线的表达式为 $y=-\frac{1}{2}x^2+2x+6$.

∵ $y=-\frac{1}{2}x^2+2x+6=-\frac{1}{2}(x-2)^2+8$，

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

∴ 抛物线的顶点坐标为(2,8).

(2)如图①,过 P 作 $PC\perp y$ 轴于点 C,



(第9题)

$\because OA=OB=6$,$\therefore \angle OAB=45°$,

$\therefore$ 当$\angle PAB=75°$时,$\angle PAC=60°$,

$\tan\angle PAC=\dfrac{PC}{AC}$,即$\dfrac{PC}{AC}=\sqrt{3}$.

设 $AC=m$,则 $PC=\sqrt{3}m$,

$\therefore P(\sqrt{3}m,6+m)$.

把 P 点的坐标代入抛物线表达式可得 $6+m=-\dfrac{1}{2}(\sqrt{3}m)^2+2\sqrt{3}m+6$,解得 $m=0$ 或 $m=\dfrac{4}{3}\sqrt{3}-\dfrac{2}{3}$,经检验,$P(0,6)$ 与点 A 重合,不合题意,舍去,

$\therefore$ 所求的 P 点坐标为 $\left(4-\dfrac{2}{3}\sqrt{3},\dfrac{16}{3}+\dfrac{4}{3}\sqrt{3}\right)$.

(3)当两个动点移动 t 秒时,$P\left(t,-\dfrac{1}{2}t^2+2t+6\right)$,$M(0,6-t)$,

如图②,作 $PE\perp x$ 轴于点 E,交 AB 于点 F,

则 $EF=EB=6-t$.

$\because F(t,6-t)$,

$\therefore FP=-\dfrac{1}{2}t^2+2t+6-(6-t)=-\dfrac{1}{2}t^2+3t$.

$\because$ 点 A 到 PE 的距离等于 OE,点 B 到 PE 的距离等于 BE,

$\therefore S_{\triangle PAB}=\dfrac{1}{2}FP\cdot OE+\dfrac{1}{2}FP\cdot BE=\dfrac{1}{2}FP\cdot(OE+BE)=\dfrac{1}{2}FP\cdot OB=\dfrac{1}{2}\times\left(-\dfrac{1}{2}t^2+3t\right)\times6=-\dfrac{3}{2}t^2+9t$.

$\because S_{\triangle AMB}=\dfrac{1}{2}AM\cdot OB=\dfrac{1}{2}\times t\times6=3t$,

$\therefore S=S_{\triangle PAB}+S_{\triangle AMB}=-\dfrac{3}{2}t^2+12t=-\dfrac{3}{2}(t-4)^2+24$,

$\therefore$ 当 $t=4$ 时,S 有最大值,最大值为 24.

10. 解:(1)将点 A,B,C 的坐标代入二次函数表达式得

$$\begin{cases}4a-2b+c=0,\\16a+4b+c=0,\\c=8,\end{cases}\text{解得}\begin{cases}a=-1,\\b=2,\\c=8,\end{cases}$$

故抛物线的表达式为 $y=-x^2+2x+8$.

(2)$\because$ 点 $A(-2,0)$,$C(0,8)$,

$\therefore OA=2$,$OC=8$.

$\because l\perp x$ 轴,

$\therefore \angle PEA=\angle AOC=90°$.

$\because \angle PAE\neq\angle CAO$,

$\therefore$ 只有当 $\angle PAE=\angle ACO$ 时,$\triangle PEA\backsim\triangle AOC$,

此时$\dfrac{AE}{CO}=\dfrac{PE}{AO}$,即$\dfrac{AE}{8}=\dfrac{PE}{2}$,

$\therefore AE=4PE$.

设点 P 的纵坐标为 k,则 $PE=k$,$AE=4k$,

$\therefore OE=4k-2$.

将点 P 的坐标$(4k-2,k)$代入二次函数表达式,解得 $k=0$(舍去)或 $k=\dfrac{23}{16}$,

则点 P 的坐标为$\left(\dfrac{15}{4},\dfrac{23}{16}\right)$.

(3)由题易得$\angle PFD=\angle COB=90°$.

$\because l/\!/y$ 轴,$\therefore \angle PDF=\angle BCO$,

$\therefore \mathrm{Rt}\triangle PFD\backsim\mathrm{Rt}\triangle BOC$,

$\therefore \dfrac{S_{\triangle PFD}}{S_{\triangle BOC}}=\left(\dfrac{PD}{BC}\right)^2$,

$\therefore S_{\triangle PFD}=\left(\dfrac{PD}{BC}\right)^2\cdot S_{\triangle BOC}$.

$\because S_{\triangle BOC}=\dfrac{1}{2}OB\cdot OC=\dfrac{1}{2}\times4\times8=16$,

$BC=\sqrt{CO^2+BO^2}=4\sqrt{5}$,

$\therefore S_{\triangle PFD}=\left(\dfrac{PD}{BC}\right)^2\cdot S_{\triangle BOC}=\dfrac{1}{5}PD^2$,

即当 PD 取得最大值时,$S_{\triangle PFD}$ 最大.

易知直线 BC 的函数表达式为 $y=-2x+8$,

设点 $P(m,-m^2+2m+8)$,则点 $D(m,-2m+8)$,

则 $PD=-m^2+2m+8+2m-8=-(m-$

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

$2)^2+4$，

当 $m=2$ 时，PD 取得最大值，为 4，

$\therefore S_{\triangle PFD}$ 的最大值为 $\frac{16}{5}$.

5.6 二次函数的图象与一元二次方程

【两年模拟兵法】

1. A **2.** C **3.** C **4.** C

5. A **点拨：**抛物线 $y=ax^2+2ax+m$ 的对称轴为直线 $x=-\frac{2a}{2a}=-1$，而抛物线与 x 轴的一个交点坐标为 $(2,0)$，$\therefore$ 抛物线与 x 轴的另一个交点坐标为 $(-4,0)$. $\because a<0$，$\therefore$ 抛物线开口向下，$\therefore$ 当 $x<-4$ 或 $x>2$ 时，$y<0$. 故选 A.

6. -1 **7.** $x_1=-2, x_2=1$ **8.** 3

9. $x<-1$ 或 $x>5$ **点拨：**由图象可知，对称轴为直线 $x=2$，与 x 轴的一个交点坐标为 $(5,0)$，$\therefore$ 函数图象与 x 轴的另一交点坐标为 $(-1,0)$，$\therefore ax^2+bx+c<0$ 的解集是 $x<-1$ 或 $x>5$.

10. (1) **证明：**当 $y=0$ 时，$2(x-1)(x-m-3)=0$，

解得 $x_1=1, x_2=m+3$.

当 $m+3=1$，即 $m=-2$ 时，方程有两个相等的实数根；

当 $m+3\neq 1$，即 $m\neq -2$ 时，方程有两个不相等的实数根.

$\therefore$ 不论 m 为何值，该函数的图象与 x 轴总有公共点.

(2) **解：**当 $x=0$ 时，$y=2(x-1)(x-m-3)=2m+6$，

$\therefore$ 该函数的图象与 y 轴交点的纵坐标为 $2m+6$，

$\therefore$ 当 $2m+6>0$，即 $m>-3$ 时，该函数的图象与 y 轴的交点在 x 轴的上方.

11. **解：**(1) 由题意，得 $\begin{cases}a-b+3=0,\\9a+3b+3=0,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=-1,\\b=2,\end{cases}$

$\therefore$ 抛物线的函数表达式为 $y=-x^2+2x+3$，

$\therefore$ 其对称轴为直线 $x=\frac{-1+3}{2}=1$，

将 $x=1$ 代入 $y=-x^2+2x+3$，得 $y=4$.

$\therefore$ 顶点 D 的坐标为 $(1,4)$.

(2) 易知 $C(0,3)$，$\therefore OC=3$.

设直线 AD 的表达式为 $y=kx+m$，则 $\begin{cases}-k+m=0,\\k+m=4,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}k=2,\\m=2,\end{cases}$

$\therefore$ 直线 AD 的表达式为 $y=2x+2$.

设线段 AD 交 y 轴于点 E，则 $E(0,2)$.

$\therefore CE=OC-OE=3-2=1$.

过点 C 作直线 $l_1 // AD$，则直线 l_1 的表达式为 $y=2x+3$，由 $-x^2+2x+3=2x+3$，得 $x_1=x_2=0$.

将 $x=0$ 代入 $y=2x+3$，得 $y=3$.

$\therefore$ 直线 l_1 与抛物线只有一个交点 C.

$\therefore$ 在线段 AD 上方的抛物线上不存在使 $\triangle PAD$ 的面积与 $\triangle ACD$ 的面积相等的点 P，将直线 AD 沿竖直方向向下平移 1 个单位长度，所得的直线 l_2 的表达式为 $y=2x+1$，设直线 l_2 与抛物线交于点 P，则此时 $\triangle PAD$ 的面积与 $\triangle ACD$ 的面积相等.

由 $-x^2+2x+3=2x+1$，得 $x_3=\sqrt{2}$，$x_4=-\sqrt{2}$.

$\therefore y_3=2\sqrt{2}+1, y_4=-2\sqrt{2}+1$.

$\therefore$ 点 P 的坐标为 $(\sqrt{2},2\sqrt{2}+1)$ 或 $(-\sqrt{2},-2\sqrt{2}+1)$.

5.7 二次函数的应用

【两年模拟兵法】

1. D

2. B **点拨：**根据题意知，抛物线 $y=ax^2+bx+c(a\neq 0)$ 经过点 $(0,54.0)$，$(40,46.2)$，$(20,57.9)$，则 $\begin{cases}c=54.0,\\1\,600a+40b+c=46.2,\\400a+20b+c=57.9,\end{cases}$

解得 $\begin{cases}a=-0.019\,5,\\b=0.585,\\c=54.0,\end{cases}$

所以 $x=-\frac{b}{2a}=-\frac{0.585}{2\times(-0.019\,5)}=15$.

3. C **点拨：**如图，连接 AO，$\because \triangle ABC$ 为等边三角形，$\therefore \angle BAC=\angle B=\angle C=60°$，$AB=BC=AC$. $\because$ 等形 $AKOD\cong$ 等形 $BEPF\cong$ 等形 $CGQH$，$\therefore AD=BE=BF=CG=CH=AK$. $\because$ 折叠后是一个直三棱柱，$\therefore DO=PE=PF=QG=QH=OK$，四边形 $ODEP$、四边形 $PFGQ$、四边形 $QHKO$ 都为矩形. $\therefore \angle ADO=\angle AKO=90°$.

在 $\mathrm{Rt}\triangle AOD$ 和 $\mathrm{Rt}\triangle AOK$ 中，

$\begin{cases}AO=AO,\\OD=OK,\end{cases}$

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

$\therefore \mathrm{Rt}\triangle AOD \cong \mathrm{Rt}\triangle AOK$.

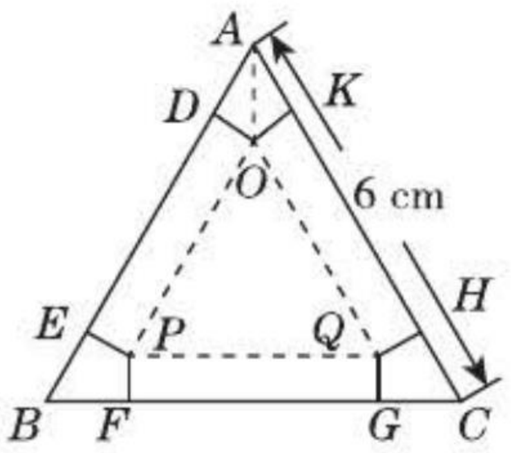
$\therefore \angle OAD = \angle OAK = 30°$.

设 $OD = x$,则 $AO = 2x$,由勾股定理得 $AD = \sqrt{3}x$,

$\therefore DE = 6 - 2\sqrt{3}x$.

$\therefore$ 纸盒侧面积 $= 3x(6 - 2\sqrt{3}x) = -6\sqrt{3}x^2 + 18x = -6\sqrt{3}\left(x - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \frac{9\sqrt{3}}{2}$.

$\therefore$ 当 $x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ cm 时,纸盒侧面积最大为 $\frac{9\sqrt{3}}{2}$ cm^2.



(第 3 题)

4. 25 **5.** $4\sqrt{2} - 4$

6. 150 **点拨:** 设 $AB = x$ m,矩形土地 $ABCD$ 的面积为 S,则 $BC = \frac{1}{2}(900 - 3x)$ m,由题意可得,$S = AB \times BC = x \times \frac{1}{2}(900 - 3x) = -\frac{3}{2}(x^2 - 300x) = -\frac{3}{2}(x - 150)^2 + 33\ 750$,

$\therefore$ 当 $x = 150$ 时,S 取得最大值.

7. **解:** (1) 当 $y = 15$ 时,$15 = -5x^2 + 20x$,

解得 $x_1 = 1$,$x_2 = 3$.

故在飞行过程中,当小球的飞行高度为 15 m时,飞行时间是 1 s 或 3 s.

(2) 当 $y = 0$ 时,$0 = -5x^2 + 20x$,

解得 $x_1 = 0$,$x_2 = 4$.

$\because 4 - 0 = 4$(s),$\therefore$ 在飞行过程中,小球从飞出到落地所用时间是 4 s.

(3) $y = -5x^2 + 20x = -5(x - 2)^2 + 20$,

$\therefore$ 当 $x = 2$ 时,y 取得最大值,此时 $y = 20$,

故在飞行过程中,小球飞行高度第 2 s 时最大,最大高度是 20 m.

8. **解:** (1) 由题意,设这种水果今年每千克的平均批发价是 x 元,则去年每千克的平均批发价为 $(x + 1)$ 元,今年的批发销售总额为 $10 \times (1 + 20\%) = 12$(万元),$\therefore \frac{120\ 000}{x} - \frac{100\ 000}{x + 1} = 1\ 000$,

整理得 $x^2 - 19x - 120 = 0$,

解得 $x = 24$ 或 $x = -5$(不合题意,舍去),

故这种水果今年每千克的平均批发价是 24 元.

(2) 设每千克的平均销售价为 m 元,

由(1)知平均批发价为 24 元,则有

$w = (m - 24)\left(\frac{41 - m}{3} \times 180 + 300\right) = -60m^2 + 4\ 200m - 66\ 240$,

整理得 $w = -60(m - 35)^2 + 7\ 260$.

$\because a = -60 < 0$,$\therefore$ 抛物线开口向下,

$\therefore$ 当 $m = 35$ 时,w 取最大值,

即每千克的平均销售价为 35 元时,该水果店一天的利润最大,最大利润是 7 260 元.

9. **解:** (1) 由 $AB = x$ m,可知 $BC = (32 - x)$ m,

根据题意得 $x(32 - x) = 252$.

解这个方程得 $x_1 = 18$,$x_2 = 14$,

故 x 的值为 18 或 14.

(2) 设花园面积为 S m^2,根据题意得 $S = x(32 - x) = -(x - 16)^2 + 256$.

$\because$ 在 P 处有一棵树与墙 CD,AD 之间的距离分别是 17 m 和 6 m,

$\therefore 6 \leqslant x \leqslant 15$.

$\therefore$ 当 $x = 15$ 时,$S_{最大} = -(15 - 16)^2 + 256 = 255$.

故花园面积的最大值是 255 m^2.

10. **解:** (1) 由题意得 $OC = 4$,$OD = 2$,

$\therefore DM = OC + OD = 6$.

$\therefore$ 顶点 M 的坐标为 $(2,6)$.

设抛物线的表达式为 $y = a(x - 2)^2 + 6$.

$\because$ 点 $C(0,4)$ 在抛物线上,

$\therefore 4 = 4a + 6$,

解得 $a = -\frac{1}{2}$.

$\therefore$ 抛物线的表达式为 $y = -\frac{1}{2}(x - 2)^2 + 6 = -\frac{1}{2}x^2 + 2x + 4$.

(2) 如图,过点 P 作 $PE \perp x$ 轴于点 E.

$\because P(x,y)$ 在第一象限,

$\therefore PE = y$,$OE = x$.

$\therefore DE = OE - OD = x - 2$,

$S = S_{梯形PEOC} - S_{\triangle COD} - S_{\triangle PDE} = \frac{1}{2}(4 + y) \cdot x - \frac{1}{2} \times 2 \times 4 - \frac{1}{2}(x - 2) \cdot y = y + 2x - 4$.

将 $y = -\frac{1}{2}x^2 + 2x + 4$ 代入上式得 $S =$

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

$-\frac{1}{2}x^2+2x+4+2x-4=-\frac{1}{2}x^2+4x.$

在抛物线的表达式 $y=-\frac{1}{2}x^2+2x+4$ 中，令 $y=0$，即 $-\frac{1}{2}x^2+2x+4=0$，

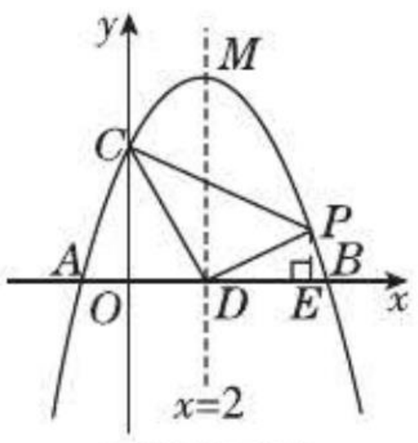
解得 $x=2\pm2\sqrt{3}$.

设抛物线与 x 轴交于点 A,B，则 $B(2+2\sqrt{3},0)$，

∴ 自变量 x 的取值范围是 $0<x<2+2\sqrt{3}$.

∴ S 关于 x 的函数表达式为 $S=-\frac{1}{2}x^2+4x=-\frac{1}{2}(x-4)^2+8(0<x<2+2\sqrt{3})$.

∴ 当 $x=4$ 时，S 的值最大，是 8.



（第 10 题）

综合与实践　实际问题与分段函数模型

【两年模拟兵法】

1. C　**2.** A

3. A　**点拨：**当 $0\leqslant t\leqslant2$ 时，$S=\frac{t\cdot2t}{2}=t^2$，

∴ 当 $0\leqslant t\leqslant2$ 时，S 随着 t 的增大而增大，函数图象开口向上，是抛物线的一部分，故选项 B，D 错误. 当 $2<t\leqslant6$ 时，$S=\frac{t\cdot4}{2}=2t$，∴ 当 $2<t\leqslant6$ 时，S 随 t 的增大而增大，当 $t=6$ 时取最大值，此时 $S=12$，函数图象是一条线段，故选项 A 正确，选项 C 错误，故选 A.

4. $y=\begin{cases}1.6x,0\leqslant x\leqslant15,\\2x-6,15<x\leqslant30,\\3x-36,x>30\end{cases}$

5. **解：**设某单位有 x 名员工去旅游，需支付旅游费用为 y 元，

当 $x\leqslant25$ 时，$y=1\ 000x$，

令 $700=1\ 000-20(x-25)$，

解得 $x=40$.

当 $25<x\leqslant40$ 时，$y=[1\ 000-20(x-25)]x=1\ 500x-20x^2$.

当 $x>40$ 时，$y=700x$.

（1）$x=18$，$y=1\ 000x=18\ 000$.

（2）$x=28$，$y=1\ 500x-20x^2=26\ 320$.

（3）当 $x\leqslant25$ 时，$y=1\ 000x\leqslant25\ 000<27\ 000$；

当 $x>40$ 时，$y=700x>28\ 000>27\ 000$；

当 $25<x\leqslant40$ 时，$y=1\ 500x-20x^2=27\ 000$，

解得 $x_1=30$，$x_2=45$（舍去）

∴ 该单位共有 30 名员工去黄山风景区旅游.

6. **解：**（1）材料锻造时，设 $y=\frac{k}{x}(k\neq0)$，

由题意得 $600=\frac{k}{8}$，

解得 $k=4\ 800$.

当 $y=800$ 时，$\frac{4\ 800}{x}=800$，

解得 $x=6$，

∴ 点 B 的坐标为 $(6,800)$.

材料煅烧时，设 $y=ax+26(a\neq0)$，

由题意得 $800=6a+26$，

解得 $a=129$，

∴ 材料煅烧时，y 与 x 的函数表达式是 $y=129x+26$，

即 $y=\begin{cases}129x+26,0\leqslant x\leqslant6,\\\frac{4\ 800}{x},x>6.\end{cases}$

（2）当 $y=400$ 时，令 $129x+26=400$，解得 $x=\frac{374}{129}$.

令 $\frac{4\ 800}{x}=400$，解得 $x=12$.

则 $12-\frac{374}{129}=\frac{1\ 174}{129}(\text{min})$.

即当材料温度高于 400℃ 时，大概能维持 $\frac{1\ 174}{129}$ min.

7. **解：**（1）$-\frac{1}{2}$；25

（2）由（1）得第 x 天的销售量为 $20+4(x-1)=4x+16$，

当 $1\leqslant x<20$ 时，

$W=(4x+16)\left(-\frac{1}{2}x+38-18\right)=-2x^2+72x+320=-2(x-18)^2+968$，

∴ 当 $x=18$ 时，$W_{最大}=968$.

当 $20\leqslant x\leqslant30$ 时，

$W=(4x+16)(25-18)=28x+112$.

∵ $28>0$，

∴ W 随 x 的增大而增大.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

∴ 当 $x=30$ 时，$W_{最大}=952$.
∵ $968>952$，
∴ 销售蓝莓第 18 天时，当天的利润最大，最大利润是 968 元.
(3)当 $1\leqslant x<20$ 时，
令 $-2x^2+72x+320=870$，
解得 $x_1=25$，$x_2=11$.
∵ 抛物线 $W=-2x^2+72x+320$ 的开口向下，
∴ 当 $11\leqslant x\leqslant 25$ 时，$W\geqslant 870$.
∴ $11\leqslant x<20$.
∵ x 为正整数，
∴ 有 9 天利润不低于 870 元.
当 $20\leqslant x\leqslant 30$ 时，令 $28x+112\geqslant 870$，
解得 $x\geqslant 27\frac{1}{14}$，
∴ 当 $27\frac{1}{14}\leqslant x\leqslant 30$ 时，$w\geqslant 870$.
∵ x 为正整数，
∴ 有 3 天利润不低于 870 元.
综上所述，当天利润不低于 870 元的共有 12 天.

8. 解：(1)由勾股定理可求得 $AB=10$，根据题意可知 $t+3t=10$，解得 $t=\frac{5}{2}$.
(2)过点 C 作 $CH\perp AB$，垂足为点 H.
∵ $\angle ACB=90°$，$AC=6$，$BC=8$，
∴ $AB=\sqrt{6^2+8^2}=10$，
$CH=4.8$，$AH=3.6$，$BH=6.4$.
∵ 当点 N 运动到点 A 时，M，N 两点同时停止运动，
∴ $0\leqslant t\leqslant\frac{10}{3}$.
当点 P 与点 C 重合时，$3.6-x=6.4-3t$，
解得 $x=1.4$.
①当点 P 在线段 BC 上，即 $0\leqslant t<1.4$ 时，
$\triangle BCH\sim\triangle BPG$，则有 $\frac{CH}{BH}=\frac{PG}{BG}$，
即 $\frac{4.8}{6.4}=\frac{PG}{5+t}$，
∴ $PG=\frac{15+3t}{4}$，
∴ $S=\frac{10-4t}{2}\times\frac{15+3t}{4}=\frac{-6t^2-15t+75}{4}$.
②当点 P 在线段 AC 上，且点 M 在点 N 的左侧，
即 $1.4\leqslant t<2.5$ 时，$\triangle ACH\sim\triangle APG$，
则 $\frac{AH}{CH}=\frac{AG}{PG}$，
即 $\frac{3.6}{4.8}=\frac{5-t}{PG}$，∴ $PG=\frac{20-4t}{3}$，
∴ $S=\frac{10-4t}{2}\times\frac{20-4t}{3}=\frac{8t^2-60t+100}{3}$.
③当点 P 在线段 AC 上，且点 M 在点 N 的右侧，即 $2.5<t\leqslant\frac{10}{3}$ 时，$\triangle ACH\sim\triangle APG$，
则 $\frac{AH}{CH}=\frac{AG}{PG}$，即 $\frac{3.6}{4.8}=\frac{5-t}{PG}$，
∴ $PG=\frac{20-4t}{3}$，
∴ $S=\frac{-10+4t}{2}\times\frac{20-4t}{3}=\frac{-8t^2+60t-100}{3}$.
综上所述，

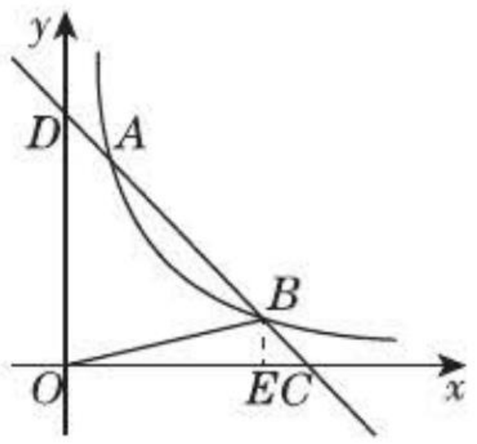
$$S=\begin{cases}\frac{-6t^2-15t+75}{4}, & 0\leqslant t<1.4,\\ \frac{8t^2-60t+100}{3}, & 1.4\leqslant t<2.5,\\ \frac{-8t^2+60t-100}{3}, & 2.5<t<\frac{10}{3}.\end{cases}$$

素养提分整合篇

【好题必解】

1. 解：由题意，易得出 $S_{\triangle ODB}=S_{\triangle AOC}=\frac{1}{2}\times|-4|=2$. 因为 $OC=OD$，$AC=BD$(易求得)，所以 $S_{\triangle AOC}=S_{\triangle ODA}=S_{\triangle ODB}=S_{\triangle OBC}=2$. 所以四边形 $ACBD$ 的面积为 $S_{\triangle AOC}+S_{\triangle ODA}+S_{\triangle ODB}+S_{\triangle OBC}=2\times 4=8$.

2. B　点拨：设直线 $y=-x+5$ 与 y 轴的交点为点 D，过点 B 作 $BE\perp x$ 轴于点 E，如图所示.



(第 2 题)

令 $y=-x+5$ 中，$y=0$，则 $0=-x+5$，解得 $x=5$，
即 $OC=5$.
∵ $\triangle BOC$ 的面积是 $\frac{5}{2}$，
∴ $\frac{1}{2}OC\cdot BE=\frac{1}{2}\times 5\cdot BE=\frac{5}{2}$，
解得 $BE=1$.
结合题意可知点 B 的纵坐标为 1，
当 $y=1$ 时，有 $1=-x+5$，
解得 $x=4$，

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

∴ 点 B 的坐标为(4,1),

∴ $k=4\times1=4$,

即双曲线表达式为 $y=\frac{4}{x}$.

将直线 $y=-x+5$ 向下平移 1 个单位得到的直线的表达式为 $y=-x+5-1=-x+4$,

将 $y=-x+4$ 代入到 $y=\frac{4}{x}$ 中,得 $-x+4=\frac{4}{x}$,

整理得 $x^2-4x+4=0$,

∵ $(-4)^2-4\times4=0$,

∴ 平移后的直线与双曲线 $y=\frac{4}{x}$ 只有一个交点. 故选 B.

3. 解: (1)由二次函数 $y=ax^2+bx+c(a\neq0)$ 的图象可知,与 x 轴交于(1,0),(3,0)两点,即 $x_1=1$,$x_2=3$ 是方程 $ax^2+bx+c=0$ 的两个根.

(2)求不等式 $ax^2+bx+c>0$ 的解集,就是求 $y>0$ 的解集,由题图可知 $1<x<3$.

(3)因为 $a<0$,所以在对称轴的右侧,y 随 x 的增大而减小,即当 $x\geqslant2$ 时,y 随 x 的增大而减小.

(4)若方程 $ax^2+bx+c=k$ 有两个不相等的实根,即函数图象与平行于 x 轴的直线有两个不同的交点,观察图象可知,当 $k<2$ 时,满足条件.

4. 解: (1)把(4,0),$\left(3,\frac{5}{2}\right)$代入 $y=ax^2+bx+1$

中得 $\begin{cases}16a+4b+1=0,\\9a+3b+1=\frac{5}{2},\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=-\frac{3}{4},\\b=\frac{11}{4},\end{cases}$

∴ 抛物线的表达式为 $y=-\frac{3}{4}x^2+\frac{11}{4}x+1$.

(2)设直线 AD 的表达式为 $y=kx+b'$,

易知 A 的坐标为(0,1),又 D 的坐标为$\left(3,\frac{5}{2}\right)$,

∴ $\begin{cases}b'=1,\\3k+b'=\frac{5}{2},\end{cases}$

解得 $\begin{cases}k=\frac{1}{2},\\b'=1,\end{cases}$

∴ 直线 AD 的表达式为 $y=\frac{1}{2}x+1$,

设 $P(t,0)$,

∴ $M\left(t,\frac{1}{2}t+1\right)$,

∴ $PM=\frac{1}{2}t+1$.

∵ $CD\perp x$ 轴,

∴ $PC=3-t$,

∴ $S_{\triangle PCM}=\frac{1}{2}PC\cdot PM=\frac{1}{2}\times(3-t)\left(\frac{1}{2}t+1\right)=-\frac{1}{4}t^2+\frac{1}{4}t+\frac{3}{2}=-\frac{1}{4}\left(t-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{25}{16}$,

∴ $\triangle PCM$ 面积的最大值是$\frac{25}{16}$.

5. 解: (1)①当 $1\leqslant x\leqslant5$ 时,设 $y=\frac{k}{x}(k\neq0)$,

把(1,200)代入,得 $k=200$,即 $y=\frac{200}{x}$;

②因为当 $x=5$ 时,$y=40$,所以当 $x>5$ 时,$y=40+20(x-5)=20x-60$.

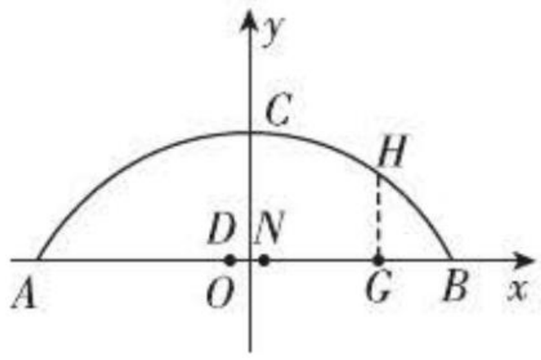
综上可知,y 与 x 之间的函数关系式为

$$y=\begin{cases}\frac{200}{x},1\leqslant x\leqslant5,\\20x-60,x>5.\end{cases}$$

(2)当 $y=200$ 时,$20x-60=200$,解得 $x=13$,所以治污改造工程完工后经过 $13-5=8$(个)月,该厂月利润才能达到 2017 年 1 月的水平.

(3)对于 $y=\frac{200}{x}$,当 $y=100$ 时,$x=2$;对于 $y=20x-60$,当 $y=100$ 时,$x=8$,所以该厂资金紧张期共有 $8-2-1=5$(个)月.

6. 解: (1)建坐标系方法不唯一. 以 AB 所在直线为横轴,AB 的垂直平分线为纵轴建立如图所示的平面直角坐标系,则 A,B,C 三点的坐标分别是(-10,0),(10,0),(0,6).



(第 6 题)

由此设抛物线对应的函数表达式为 $y=$

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

$ax^2+6(a\neq0)$,

将点 B 的坐标代入,得 $100a+6=0$,

解得 $a=-\frac{3}{50}$.

∴ 抛物线所对应的函数表达式为 $y=-\frac{3}{50}x^2+6$.

(2)可设 F 的坐标为$(5,y_F)$,

∴ $y_F=-\frac{3}{50}\times5^2+6=4.5$.

∴ 支柱 EF 的长度是 $10-4.5=5.5$(m).

(3)如图,设 DN 为隔离带的宽,NG 是三辆车的宽度和,则点 G 的坐标是$(7,0)$.

过点 G 作 $GH\perp AB$,交抛物线于点 H,则 H 点的纵坐标为 $-\frac{3}{50}\times7^2+6=3.06$,

∴ $GH=3.06$ m >3 m.

故一条行车道能并排行驶这样的三辆汽车.

7. 解:(1)因为当 $x=5$ 时,$y_A=2$,即 $2=5k$,

解得 $k=0.4$,所以 $y_A=0.4x(x\geqslant0)$.

因为当 $x=2$ 时,$y_B=2.4$,

当 $x=4$ 时,$y_B=3.2$,

所以 $\begin{cases}2.4=4a+2b,\\3.2=16a+4b,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=-0.2,\\b=1.6.\end{cases}$

所以 $y_B=-0.2x^2+1.6x(x\geqslant0)$.

(2)设投资 B 种产品 m 万元,则投资 A 种产品$(10-m)$万元,获得利润 W 万元.

根据题意可得

$$\begin{aligned}W&=-0.2m^2+1.6m+0.4(10-m)\\&=-0.2m^2+1.2m+4\\&=-0.2(m-3)^2+5.8.\end{aligned}$$

故当投资 B 种产品 3 万元时,可以获得最大利润 5.8 万元.

综上,当投资 A 种产品 7 万元、B 种产品 3 万元时,该企业可以获得最大利润 5.8 万元.

【第 5 章测试卷】

一、1. B **2.** C **3.** A **4.** B **5.** C **6.** C **7.** D

8. C **点拨:**过点 D 作 $DF\perp BC$ 于点 F,

由点 C 的横坐标为 5 知,$BC=5$,

∵ 四边形 $ABCD$ 是菱形,

∴ $DC=5$.

∵ $BE=3DE$,

∴ 设 $DE=x$,则 $BE=3x$,

∴ $DF=3x$,$BF=x$,

∴ $FC=5-x$,

在 Rt△DFC 中,

$DF^2+FC^2=DC^2$,

∴ $(3x)^2+(5-x)^2=5^2$,

解得 $x=0$(舍去)或 $x=1$.

∴ $DE=1$,$FD=3$.

设 $OB=a$,

则点 D 的坐标为$(1,a+3)$,点 C 的坐标为$(5,a)$.

∵ 点 D,C 在反比例函数 $y=\frac{k}{x}(k\neq0,x>0$ 的图象)上,

∴ $1\times(a+3)=5a$,

∴ $a=\frac{3}{4}$.

∴ 点 C 的坐标为$\left(5,\frac{3}{4}\right)$.

∴ $k=\frac{15}{4}$.

9. D **点拨:**二次函数 $y=ax^2+2ax+3a^2+3$(其中 x 是自变量)的图象的对称轴是直线 $x=-\frac{2a}{2a}=-1$. ∵ 当 $x\geqslant2$ 时,y 随 x 的增大而增大,∴ $a>0$. ∵ 当 $-2\leqslant x\leqslant1$ 时,y 的最大值为 9,∴ 当 $x=1$ 时,$y=a+2a+3a^2+3=9$,∴ $3a^2+3a-6=0$,∴ $a=1$ 或 $a=-2$(不合题意,舍去).

10. D **点拨:**∵ 抛物线开口向下,∴ $a<0$.

∵ 抛物线的对称轴为直线 $x=-\frac{b}{2a}=1$,

即 $b=-2a$,∴ $3a+b=3a-2a=a<0$,

∴ ①正确;∵ $x=-1$ 时,$y=0$,∴ $a-b+c=0$,∴ $c=-3a$. 又∵ $2\leqslant c\leqslant3$,∴ $2\leqslant-3a\leqslant3$,∴ $-1\leqslant a\leqslant-\frac{2}{3}$,∴ ②正确;∵ 抛物线的顶点坐标为$(1,n)$,∴ 当 $x=1$ 时,二次函数有最大值为 n,∴ $a+b+c\geqslant am^2+bm+c$,即 $a+b\geqslant am^2+bm$,∴ ③正确;∵ 抛物线的顶点坐标为$(1,n)$,∴ 抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 与直线 $y=n-1$ 有两个交点,∴ 关于 x 的方程 $ax^2+bx+c=n-1$ 有两个不相等的实数根,∴ ④正确. 故选 D.

二、11. -2 **12.** $y=\frac{1}{x}$(答案不唯一)

13. $x_1=-3$,$x_2=1$ **14.** 4

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

15. $(-4,-3)$或$(-2,3)$ **点拨:**设 P 的坐标为(x,y). $\begin{cases}y=x-2,\\y=\dfrac{3}{x},\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x=3,\\y=1.\end{cases}$或 $\begin{cases}x=-1,\\y=-3.\end{cases}$ ∵ 反比例函数 $y=\dfrac{3}{x}$ 与一次函数 $y=x-2$ 的图象在第三象限交于点 A, ∴ $A(-1,-3)$. 当以 AB 为对角线时, AB 中点的坐标为$(-2,-1.5)$, ∵ 平行四边形的对角线互相平分, ∴ $\dfrac{x+0}{2}=-2$, $\dfrac{y+0}{2}=-1.5$, 解得 $x=-4$, $y=-3$, ∴ $P(-4,-3)$. 当以 OB 为对角线时, 由 O, B 的坐标可求得 OB 中点的坐标为 $\left(-\dfrac{3}{2},0\right)$, ∴ $\dfrac{x-1}{2}=-\dfrac{3}{2}$, $\dfrac{y-3}{2}=0$, 解得 $x=-2$, $y=3$, ∴ $P(-2,3)$. 当以 OA 为对角线时, 由 O, A 的坐标可求得 OA 中点的坐标为 $\left(-\dfrac{1}{2},-\dfrac{3}{2}\right)$, ∴ $\dfrac{x-3}{2}=-\dfrac{1}{2}$, $\dfrac{y+0}{2}=-\dfrac{3}{2}$, 解得 $x=2$, $y=-3$, ∴ $P(2,-3)$ (舍去). 综上所述, P 点的坐标为$(-4,-3)$或$(-2,3)$.

16. 3 **点拨:**过点 C 作 $CD\perp x$ 轴于点 D.

∵ $\angle BCP+\angle PCD=90°$,

$\angle DCA+\angle PCD=90°$,

∴ $\angle BCP=\angle DCA$.

又∵ $\angle CBP=\angle CDA=90°$,

∴ $\triangle CBP\backsim\triangle CDA$,

∴ $\dfrac{CD}{BC}=\dfrac{DA}{BP}$.

在 $y=-x^2+mx$ 中,

令 $x=1$, 则 $y=m-1$,

∴ $B(1,m-1)$, $BP=m-1-\dfrac{m}{2}=\dfrac{m}{2}-1$.

又∵ 对称轴为直线 $x=-\dfrac{m}{2\times(-1)}=\dfrac{m}{2}$,

∴ $BC=2\left(\dfrac{m}{2}-1\right)=m-2$,

∴ $C(m-1,m-1)$,

∴ $CD=m-1$, 又 $DA=OM=1$,

∴ $\dfrac{m-1}{m-2}=\dfrac{1}{\frac{m}{2}-1}$,

∴ $m=3$(舍去增根).

三、17. 解:(1)设 y 与 x 的函数表达式为 $y=\dfrac{k}{x}(k\neq0)$,

把$(144,0.5)$代入得 $0.5=\dfrac{k}{144}$,

解得 $k=72$,

∴ y 与 x 的函数表达式为 $y=\dfrac{72}{x}$.

(2)当 $x=180$ 时, $y=\dfrac{72}{180}=0.4$,

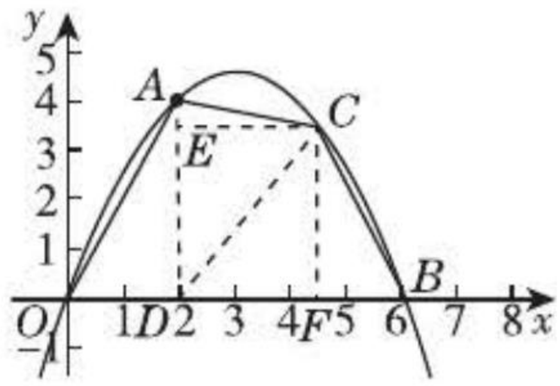
故每月应还款 0.4 万元.

18. 解:(1)将(2,4)与(6,0)代入 $y=ax^2+bx$,

得 $\begin{cases}4a+2b=4,\\36a+6b=0,\end{cases}$

解得 $\begin{cases}a=-\dfrac{1}{2},\\b=3.\end{cases}$

(2)如图, 过点 A 作 x 轴的垂线, 垂足为点 $D(2,0)$, 连接 CD, 过点 C 作 $CE\perp AD$, $CF\perp x$ 轴, 垂足分别为点 E, F,



(第 18 题)

易知 $S_{\triangle OAD}=\dfrac{1}{2}OD\cdot AD=\dfrac{1}{2}\times2\times4=4$.

$S_{\triangle ACD}=\dfrac{1}{2}AD\cdot CE=\dfrac{1}{2}\times4\times(x-2)=2x-4$.

$S_{\triangle BCD}=\dfrac{1}{2}BD\cdot CF=\dfrac{1}{2}\times4\times\left(-\dfrac{1}{2}x^2+3x\right)=-x^2+6x$.

则 $S=S_{\triangle OAD}+S_{\triangle ACD}+S_{\triangle BCD}=4+2x-4-x^2+6x=-x^2+8x$.

∴ S 关于 x 的函数表达式为 $S=-x^2+8x$

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

$(2<x<6)$,

$\because S=-x^2+8x=-(x-4)^2+16$,

$\therefore$ 当 $x=4$ 时,四边形 $OACB$ 的面积 S 有最大值,最大值为 16.

19. 解:(1)对于 $y=-\frac{12}{x}$,当 $x=3$ 时,$y=-4$;

当 $y=3$ 时,$x=-4$,

$\therefore A$ 点坐标为$(3,-4)$,B 点坐标为$(-4,3)$

把点 A,B 的坐标代入 $y=kx+b$ 得

$\begin{cases}3k+b=-4,\\-4k+b=3,\end{cases}$解得$\begin{cases}k=-1,\\b=-1,\end{cases}$

$\therefore$ 一次函数的表达式为 $y=-x-1$.

(2)对于 $y=-x-1$,当 $y=0$ 时,$x=-1$,

故 C 点坐标为$(-1,0)$,

则 $\triangle AOB$ 的面积为 $\frac{1}{2}\times1\times3+\frac{1}{2}\times1\times4=\frac{7}{2}$.

(3)不等式 $kx+b>-\frac{12}{x}$ 的解集为 $x<-4$ 或 $0<x<3$.

20. 解:(1)$6-x$;$5x+80$;4;6

(2)分三种情况:

①当 $0<x\leqslant2$ 时,$w=(15x+90)x+(5x+80)(6-x)=10x^2+40x+480$;

②当 $2<x\leqslant4$ 时,$w=(-5x+130)x+(5x+80)(6-x)=-10x^2+80x+480$;

③当 $4<x<6$ 时,$w=(-5x+130)x+100(6-x)=-5x^2+30x+600$.

综上可知,

$$w=\begin{cases}10x^2+40x+480(0<x\leqslant2),\\-10x^2+80x+480(2<x\leqslant4),\\-5x^2+30x+600(4<x<6).\end{cases}$$

(3)当 $0<x\leqslant2$ 时,$w=10x^2+40x+480=10(x+2)^2+440$,

$\therefore x=2$ 时,$w_{最大值}=600$;

当 $2<x\leqslant4$ 时,$w=-10x^2+80x+480=-10(x-4)^2+640$,

$\therefore x=4$ 时,$w_{最大值}=640$;

当 $4<x<6$ 时,$w=-5x^2+30x+600=-5(x-3)^2+645$,

$\therefore 4<x<6$ 时,$600<w<640$.

$\therefore x=4$ 时,w 取最大值 640. 此时 $6-4=2$(千件).

故该公司每年国内、国外的销售量分别为 4 千件、2 千件时,可使公司每年的总利润最大,最大总利润为 64 万元.

21. 解:(1)对于 $y=x-5$,当 $x=0$ 时,$y=-5$,

当 $y=0$ 时,$x=5$,

$\therefore C$ 点坐标为$(0,-5)$,B 点坐标为$(5,0)$.

把 $B(5,0)$,$C(0,-5)$ 的坐标代入 $y=ax^2+6x+c$,

得$\begin{cases}25a+30+c=0,\\c=-5,\end{cases}$解得$\begin{cases}a=-1,\\c=-5,\end{cases}$

$\therefore$ 抛物线的表达式为 $y=-x^2+6x-5$.

(2)①解方程 $-x^2+6x-5=0$ 得 $x_1=1$,$x_2=5$,则 A 点坐标为$(1,0)$,

$\because B$ 点坐标为$(5,0)$,C 点坐标为$(0,-5)$,

$\therefore \triangle OCB$ 为等腰直角三角形,

$\therefore \angle OBC=\angle OCB=45°$.

$\because AM\perp BC$,

$\therefore \triangle AMB$ 为等腰直角三角形,

$\therefore AM=\frac{\sqrt{2}}{2}AB=\frac{\sqrt{2}}{2}\times4=2\sqrt{2}$.

$\because$ 以点 A,M,P,Q 为顶点的四边形是平行四边形,$AM/\!/PQ$,

$\therefore PQ=AM=2\sqrt{2}$,又$\because AM\perp BC$,

$\therefore PQ\perp BC$.

作 $PD\perp x$ 轴交直线 BC 于 D,如图①,则 $\angle PDQ=45°$,

$\therefore PD=\sqrt{2}PQ=4$.

设 $P(m,-m^2+6m-5)$,则 $D(m,m-5)$.

当点 P 在直线 BC 上方时,

$PD=-m^2+6m-5-(m-5)=-m^2+5m=4$,解得 $m_1=1$(舍去),$m_2=4$.

当点 P 在直线 BC 下方时,

$PD=m-5-(-m^2+6m-5)=m^2-5m=4$,解得 $m_3=\frac{5+\sqrt{41}}{2}$,$m_4=\frac{5-\sqrt{41}}{2}$.

综上所述,点 P 的横坐标为 4 或 $\frac{5+\sqrt{41}}{2}$ 或 $\frac{5-\sqrt{41}}{2}$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

②作 $AN \perp BC$ 于点 N，$NH \perp x$ 轴于点 H，作 AC 的垂直平分线交 BC 于点 M_1，交 AC 于点 E，如图②，

$\because M_1A = M_1C$，

$\therefore \angle ACM_1 = \angle CAM_1$，

$\therefore \angle AM_1B = 2\angle ACB$.

$\because \triangle ANB$ 为等腰直角三角形，

$\therefore AH = BH = NH = 2$，

$\therefore N(3, -2)$.

易得直线 AC 的函数表达式为 $y = 5x - 5$，E 点坐标为 $\left(\frac{1}{2}, -\frac{5}{2}\right)$.

故直线 EM_1 的函数表达式为 $y = -\frac{1}{5}x - \frac{12}{5}$，

解方程组 $\begin{cases} y = x - 5, \\ y = -\frac{1}{5}x - \frac{12}{5}, \end{cases}$ 得 $\begin{cases} x = \frac{13}{6}, \\ y = -\frac{17}{6}, \end{cases}$ 则 M_1 的坐标为 $\left(\frac{13}{6}, -\frac{17}{6}\right)$.

在直线 BC 上作点 M_1 关于点 N 的对称点 M_2，如图②，则 $\angle AM_2C = \angle AM_1B = 2\angle ACB$，

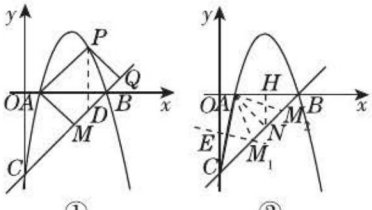
设 M_2 的坐标为 $(x, x-5)$，

$\because 3 = \frac{\frac{13}{6} + x}{2}$，

$\therefore x = \frac{23}{6}$，

$\therefore M_2$ 的坐标为 $\left(\frac{23}{6}, -\frac{7}{6}\right)$.

综上所述，点 M 的坐标为 $\left(\frac{13}{6}, -\frac{17}{6}\right)$ 或 $\left(\frac{23}{6}, -\frac{7}{6}\right)$.



（第21题）

第6章 事件的概率

6.1 随机事件

【两年模拟兵法】

1. D **2.** C **3.** D **4.** C **5.** D

6. 不可能事件

7. ①③②④

8. $18 < a \leqslant 33$ 的整数

9. **解：**（1）可能发生，也可能不发生，是随机事件.

（2）一定不会发生，是不可能事件.

（3）可能发生，也可能不发生，是随机事件.

（4）可能发生，也可能不发生，是随机事件.

10. **解：**（1）朝上的点数可能是 1，2，3，4，5，6，它们发生的可能性相同.

（2）因为朝上的点数是奇数的有 1，3，5，它们发生的可能性是 $\frac{1}{2}$，朝上的点数是偶数的有 2，4，6，它们发生的可能性是 $\frac{1}{2}$，所以发生的可能性大小相等.

（3）因为朝上的点数大于 4 的有 5，6，发生的可能性是 $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$，朝上的点数不大于 4 的有 1，2，3，4，发生的可能性是 $\frac{4}{6} = \frac{2}{3}$，所以朝上的点数大于 4 与朝上的点数不大于 4 的可能性大小不相等，朝上的点数不大于 4 发生的可能性大一些.

6.2 频数与频率

【两年模拟兵法】

1. D **2.** A **3.** C **4.** D **5.** A

6. 0.1 **7.** 0.2

8. 4 **点拨：**第一组与第二组的频率和为 $1 - 20\% = 80\%$，$\therefore$ 该班女生的总人数为 $(6 + 10) \div 80\% = 20$. $\therefore$ 第三组的人数为 $20 \times$

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

$20\% = 4. \therefore a = 4.$

9. 0.94；60　**点拨：**合格西服的频率 $= \frac{\text{合格西服的频数}}{\text{样本容量}} = \frac{200-12}{200} = 0.94$，还需准备合格西服 $1\,000 \times (1-0.94) = 60$（套）.

10. **解：**(1)表格中“划记”略，“频数”分别是 1，2，5，7，3，4，3，2，5，4.

(2)分别是 $7 \div 36 \approx 19.4\%$，$3 \div 36 \approx 8.3\%$，$4 \div 36 \approx 11.1\%$.

11. **解：**(1)20；8；0.40；0.16　(2)57.6

(3)$19 + 20 = 39$（名），

$500 \times \frac{39}{50} = 390$（名）.

6.3　频数直方图

【两年模拟兵法】

1. A　**2.** C　**3.** D

4. A　**点拨：**由题可得，抽查的学生中参加社团活动时间在 8～10 小时之间的学生数为 $100-30-24-10-8=28$，$\therefore 1\,000 \times \frac{28}{100} = 280$，即该校五一期间参加社团活动时间在 8～10 小时之间的学生数大约是 280.

5. 7　**6.** 48　**7.** 90　**8.** 甲班

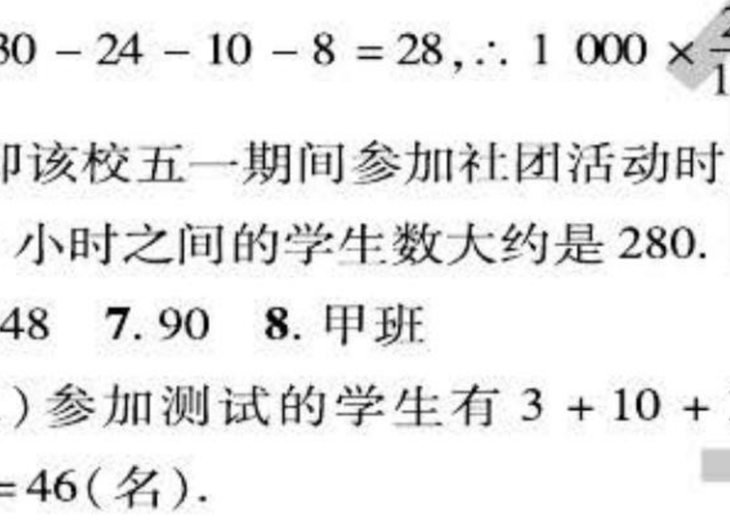
9. **解：**(1)参加测试的学生有 $3+10+18+9+6=46$（名）.

(2)频数：18，频率：$\frac{18}{46} \approx 0.39$.

(3)我认为本次测试试题的难易程度合理.

10. **解：**(1)15；60；0.25；0.2

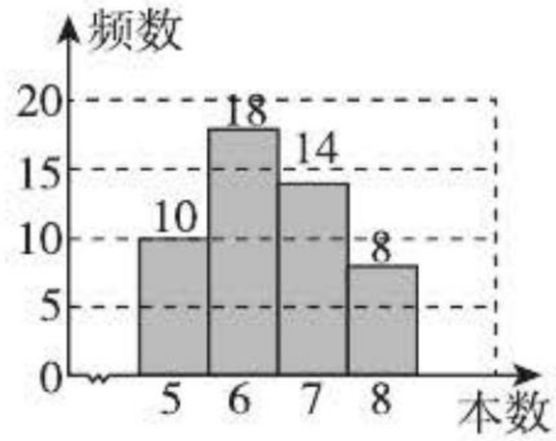
(2)补全频数直方图如下图.



（第 10 题）

11. **解：**(1)10；0.28；50

(2)将频数直方图补充完整，如图所示.



（第 11 题）

(3)所有被调查学生课外阅读的平均本数为 $(5\times10+6\times18+7\times14+8\times8) \div 50 = 320 \div 50 = 6.4$.

(4)该校九年级学生课外阅读 7 本及以上的人数为 $(0.28+0.16)\times1\,200 = 528$.

6.4　随机现象的变化趋势

【两年模拟兵法】

1. **解：**(1)反映了时间和水位之间的关系.

(2)由表可以看出 12 时的水位是 4 米.

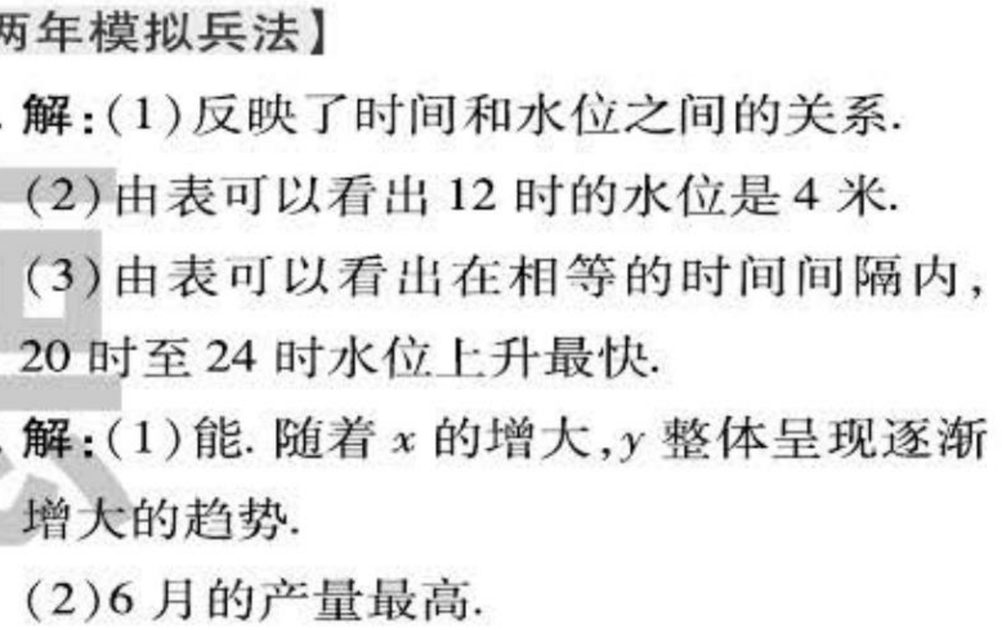
(3)由表可以看出在相等的时间间隔内，20 时至 24 时水位上升最快.

2. **解：**(1)能. 随着 x 的增大，y 整体呈现逐渐增大的趋势.

(2)6 月的产量最高.

(3)2019 年上半年的平均月产量是 $(10\,000+10\,000+12\,000+13\,000+14\,000+18\,000) \div 6 \approx 12\,833$（台）.

3. **解：**(1)(2)题如图所示.



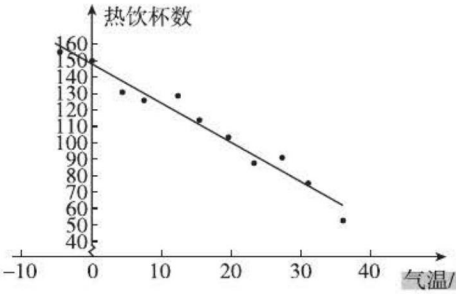
（第 3 题）

(3)在这条直线上取横坐标为 25 000 的点，其纵坐标为 2 500，所以其利润约为 2 500 万元.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

4. 解：(1)将这 11 对数据对应的点描在如图所示的直角坐标系中.

(2)如图所示.



（第 4 题）

(3)在这条直线上取横坐标为 2 的点，其纵坐标约为 143，所以估计当气温是2 ℃时，卖出的热饮杯数约为 143.

点拨：从图中可发现气温与热饮杯数之间的关系的一般规律：气温越高，卖出的热饮杯数越少.

5. 解：(1)V 随着 T 的增大而增大.

(2)T 每增加 1 秒，V 的变化情况不相同，在第 9 秒，V 的增加量最大.

(3)$\frac{120\times1\,000}{3\,600}=\frac{100}{3}\approx33.3$(米/秒)，$33.3-28.9=4.4$，且 $28.9-24.2=4.7>4.4$，故估计大约还需 1 秒.

6.5 事件的概率

【两年模拟兵法】

1. B **2.** C **3.** D **4.** C **5.** 0.95

6. 2.4 **点拨：**长方形宣传画的面积 $=3\times2=6(m^2)$. ∵ 骰子落在世界杯图案中的频率稳定在常数 0.4 附近，∴ 世界杯图案约占长方形宣传画的 40%，∴ 世界杯图案的面积约为 $6\times40\%=2.4(m^2)$.

7. 解：(1)估计学生同时喜欢短跑和跳绳的概率为 $\frac{150}{1\,000}=\frac{3}{20}$.

(2)估计学生同时喜欢三个项目的概率为 $\frac{200+150}{1\,000}=\frac{7}{20}$.

(3)喜欢长跑的 700 名学生中，有 150 名学生喜欢短跑，550 名学生喜欢跳绳，200 名学生喜欢跳远，于是喜欢长跑的学生又同时喜欢跳绳的可能性最大.

8. 解：(1)∵ 次数越多，就越精确，

∴ 第一小组所得的概率约是 $\frac{160}{400}=0.4$，

第二小组所得的概率约是 $\frac{164}{400}=0.41$.

(2)不能. 因为两组试验数据都可能有误差，所以不能确定哪个小组的结果更准确.

6.6 简单的概率计算

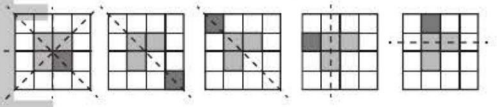
【两年模拟兵法】

1. B **2.** B **3.** D **4.** C

5. B **点拨：**从长为 3，5，7，10 的四条线段中任意选取三条作为边，所有等可能情况有 3，5，7；3，5，10；3，7，10；5，7，10，共 4 种，其中能构成三角形的情况有 3，5，7；5，7，10，共 2 种，则 P(能构成三角形) $=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$.

6. B **点拨：**设小明到达时间为 y，当 y 在 8：15 至 8：30 之间时，小明等车时间不超过 15 分钟，故 P(等车时间不超过 15 分钟) $=\frac{15}{40}=\frac{3}{8}$，故选 B.

7. B **点拨：**白色的小正方形有 13 个，而能构成一个轴对称图形的有 5 种情况，如图所示. 所以使黑色部分的图形仍然构成一个轴对称图形的概率是 $\frac{5}{13}$.



（第 7 题）

8. $\frac{1}{3}$ **9.** $\frac{2}{3}$

10. $\frac{1}{16}$ **点拨：**列举出所有等可能的结果(1，1)，(1，2)，(1，3)，(1，4)，(2，1)，(2，2)，(2，3)，(2，4)，(3，1)，(3，2)，(3，3)，(3，4)，(4，1)，(4，2)，(4，3)，(4，4)，共 16 种，其中只有 1 种结果满足题意，即(4，4). ∴ 所求概率 $P=\frac{1}{16}$.

11. $\frac{1}{4}$ **点拨：**∵ $AC=8$ cm，∴ 当黑色部分的面积等于 6 cm^2 时，AC 边上的高应等于

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

1.5 cm，∴ 在△ACD 中，符合题意的点 P 在平行于 AC 且到直线 AC 的距离为 1.5 cm的直线与 AD，CD 围成的三角形内，同理，在△ABC 中也可找到符合题意的点 P 的位置范围，然后根据面积的比得出所求的概率.

12. 解：(1)∵ 白球有 $290\times\frac{1}{29}=10$(个)，

∴ 红球与黑球共有 $290-10=280$(个)，

∴ 黑球有 $(280-40)\div(2+1)=80$(个)，

∴ 红球有 $280-80=200$(个)，

即袋中红球的个数是 200.

(2)$80\div290=\frac{8}{29}$.

故从袋中任取一个球是黑球的概率是$\frac{8}{29}$.

13. 解：(1)抽查的学生有 $6\div25\%=24$(名)，读 5 册课外书的学生有 $24-5-6-4=9$(名)，所以条形统计图中被遮盖的数为 9，册数的中位数为 5.

(2)选中读课外书超过 5 册的学生的概率 $P=\frac{6+4}{24}=\frac{5}{12}$.

(3)3

14. 解：(1)转盘被平均分成 6 等份，转到每个数字的可能性相等，共有 6 种等可能结果，大于 3 的结果有 4 种，

∴ 转出的数字大于 3 的概率是$\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$.

(2)①共有 6 种等可能结果，能构成三角形的结果有 5 种，

∴ 这三条线段能构成三角形的概率是$\frac{5}{6}$.

②共有 6 种等可能结果，能构成等腰三角形的结果有 2 种，

∴ 这三条线段能构成等腰三角形的概率是$\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$.

6.7 利用画树状图和列表计算概率

【两年模拟兵法】

1. C **2.** C **3.** D **4.** B

5. B **点拨：**画树状图如下：

甲摸出的数字 6 7 8 9

乙猜测的数字 6 7 8 9 6 7 8 9 6 7 8 9 6 7 8 9

(第 5 题)

由树状图可知，共有 16 种等可能结果，其中满足 $|m-n|\leqslant1$ 的有 10 种结果，

∴ 两人“心领神会”的概率是$\frac{10}{16}=\frac{5}{8}$，故选 B.

6. $\frac{1}{5}$ **7.** $\frac{5}{16}$

8. $\frac{3}{20}$ **点拨：**从 -3，-1，0，1，3 这五个数中随机抽取一个数记为 a，再从剩下的四个数中任意抽取一个数记为 b，列表如下：

a \ b	-3	-1	0	1	3
-3	——	$(-3,-1)$	$(-3,0)$	$(-3,1)$	$(-3,3)$
-1	$(-1,-3)$	——	$(-1,0)$	$(-1,1)$	$(-1,3)$
0	$(0,-3)$	$(0,-1)$	——	$(0,1)$	$(0,3)$
1	$(1,-3)$	$(1,-1)$	$(1,0)$	——	$(1,3)$
3	$(3,-3)$	$(3,-1)$	$(3,0)$	$(3,1)$	——

上面所有的可能结果中使关于 x，y 的二元一次方程组$\begin{cases}2x-y=b,\\ax+y=1\end{cases}$有整数解，且点 (a,b) 落在双曲线 $y=-\frac{3}{x}$ 上的是 $(-3,1)$，$(-1,3)$，$(3,-1)$，故恰好使关于 x，y 的二元一次方程组$\begin{cases}2x-y=b,\\ax+y=1\end{cases}$有整数解，且点 (a,b) 落在双曲线 $y=-\frac{3}{x}$ 上的概率是$\frac{3}{20}$.

9. 解：画树状图如图所示.

开始

1 2 3 4 1 2 3 4 1 2 3 4 1 2 3 4

(第 9 题)

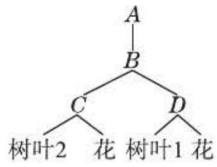
(1)共有 16 种等可能的结果数.

(2)对双方公平. 理由如下：∵ $x+y$ 为奇数的结果数为 8，$x+y$ 为偶数的结果数为 8，

∴ 甲获胜的概率 $=\frac{8}{16}=\frac{1}{2}$，乙获胜的概率 $=\frac{8}{16}=\frac{1}{2}$，∴ 甲获胜的概率 = 乙获胜的概率，∴ 这个游戏对双方公平.

10. 解：(1)如图所示.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料



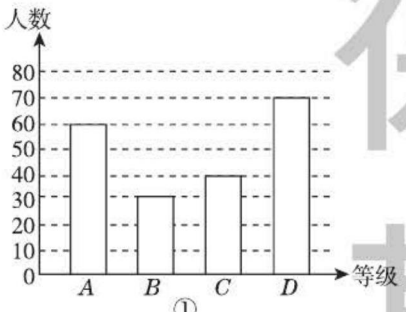
（第 10 题）

由图知，毛毛虫到达 C，D 两个交叉口后有 4 种等可能结果，其中吃到树叶 1 的只有 1 种情况，所以吃到树叶 1 的概率为 $\frac{1}{4}$.

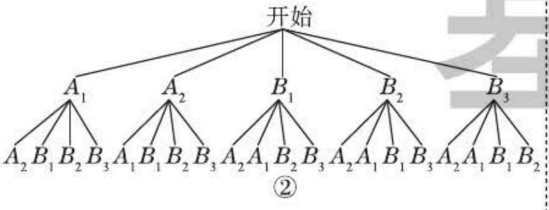
（2）由图知，毛毛虫到达 C，D 两个交叉口后有 4 种等可能结果，其中吃到树叶的有 2 种情况，所以吃到树叶的概率为 $\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$.

11. 解：（1）本次调查的人数为 $60\div30\%=200$.

（2）C 等级人数为 $200-(60+30+70)=40$. 条形统计图补充完整如图①.



①



②

（第 11 题）

（3）∵ B 等级所占的百分比为 $\frac{30}{200}\times100\%=15\%$.

∴ $\alpha=360°\times15\%=54°$.

（4）甲班的 2 人分别用 A_1，A_2 表示，乙班的 3 人分别用 B_1，B_2，B_3 表示，随机选出 2 人参加座谈的树状图如图②.

共有 20 种等可能结果，而选出的 2 人来自不同班级的有 12 种，则 P（选出的 2 人来自不同班级）$=\frac{12}{20}=\frac{3}{5}$.

综合与实践　质数的分布（无）

素养提分应用篇

【同类变式】

2. A

素养提分整合篇

【好题必解】

1. 解：由①得 $x>-2$；由②得 $x\leqslant2$，

所以原不等式组的解集为 $-2<x\leqslant2$，

所以原不等式组的所有整数解为 -1，0，1，2.

（2）列表如下.

	-1	0	1	2
-1		0	-1	-2
0	0		0	0
1	-1	0		2
2	-2	0	2	

由上表可知，共有 12 种等可能的结果，其中积为正数的结果有 2 种，所以 P（积为正数）$=\frac{2}{12}=\frac{1}{6}$.

2. 解：（1）P（标号数字为奇数）$=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$.

（2）列表如下.

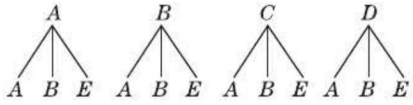
乙＼甲	1	2	3	4	5	6
1	(1,1)	(2,1)	(3,1)	(4,1)	(5,1)	(6,1)
2	(1,2)	(2,2)	(3,2)	(4,2)	(5,2)	(6,2)
3	(1,3)	(2,3)	(3,3)	(4,3)	(5,3)	(6,3)
4	(1,4)	(2,4)	(3,4)	(4,4)	(5,4)	(6,4)
5	(1,5)	(2,5)	(3,5)	(4,5)	(5,5)	(6,5)
6	(1,6)	(2,6)	(3,6)	(4,6)	(5,6)	(6,6)

由表可知，共有 36 种等可能的结果，其中摸到小球的标号数字同为奇数或同为偶数的结果有 18 种，摸到小球的标号数字为一奇一偶的结果有 18 种. 所以 P（甲赢）$=\frac{18}{36}=\frac{1}{2}$，$P$（乙赢）$=\frac{18}{36}=\frac{1}{2}$. 所以这个游戏对甲、乙两人公平.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

3. 解:(1)$\frac{1}{4}$

(2)画树状图如图.



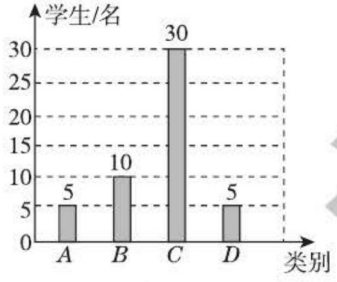
(第3题)

由树状图可知共有12种等可能结果,其中指针指向每个区域的字母相同的有2种结果,所以指针指向每个区域的字母相同的概率,即顾客享受8折优惠的概率为$\frac{2}{12}=\frac{1}{6}$.

4. 解:(1)50;216°

(2)B类的学生为$50-(5+30+5)=10$(名).

补全条形统计图如图.



(第4题)

(3)180

(4)列表如下.

	$女_1$	$女_2$	$女_3$	$男_1$	$男_2$
$女_1$	——	$女_2$ $女_1$	$女_3$ $女_1$	$男_1$ $女_1$	$男_2$ $女_1$
$女_2$	$女_1$ $女_2$	——	$女_3$ $女_2$	$男_1$ $女_2$	$男_2$ $女_2$
$女_3$	$女_1$ $女_3$	$女_2$ $女_3$	——	$男_1$ $女_3$	$男_2$ $女_3$
$男_1$	$女_1$ $男_1$	$女_2$ $男_1$	$女_3$ $男_1$	——	$男_2$ $男_1$
$男_2$	$女_1$ $男_2$	$女_2$ $男_2$	$女_3$ $男_2$	$男_1$ $男_2$	——

所有等可能的结果为20种,其中被抽到的两名学生性别相同的结果数为8,∴被抽到的两名学生性别相同的概率为$\frac{8}{20}=\frac{2}{5}$.

【第6章测试卷】

一、1. C **2.** A **3.** C **4.** D **5.** C **6.** C **7.** D

8. C **点拨:**∵指针所落区域标注的数大于8的概率是$\frac{5}{6}$,∴$\frac{n-4}{n}=\frac{5}{6}$,解得$n=24$,故选C.

9. C **点拨:**有①与②,①与③,①与④,②与③,②与④,③与④六种情况.①与④根据两组对边分别平行的四边形是平行四边形,能推出四边形$ABCD$为平行四边形;③与④根据一组对边平行且相等的四边形是平行四边形,能推出四边形$ABCD$为平行四边形;①与②,②与④通过证明三角形全等得到四边形的对角线互相平分,能推出四边形$ABCD$为平行四边形,所以能推出四边形$ABCD$为平行四边形的有4组,所以能推出四边形$ABCD$是平行四边形的概率是$\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$.

10. D **点拨:**当$2a-b=0$时,方程组无解.当$2a-b\neq 0$时,方程组的解由a,b的实际意义为1,2,3,4,5,6可得.易知a,b都为大于0的整数,则两式联合求解可得$x=\frac{6-2b}{2a-b}$,$y=\frac{2a-3}{2a-b}$,要使x,y都大于0则有$\frac{6-2b}{2a-b}>0$且$\frac{2a-3}{2a-b}>0$,解得$a<1.5$,$b>3$或者$a>1.5$,$b<3$,而a,b都为1到6的整数,所以可知当a为1时,b只能是4,5,6,或者a为2,3,4,5,6时,b为1或2,这两种情况的出现可能有$3+10=13$(种).又因为掷两次骰子出现的基本事件共$6\times 6=36$(种)情况,故所求概率为$\frac{13}{36}$,故选D.

二、11. $\frac{2}{3}$ **12.** 10 **13.** 0.25

14. $\frac{1}{4}$;不公平 **15.** $\frac{1}{3}$

16. $\frac{2}{3}$ **点拨:**根据题意列表得,

	2	3	4	5
2	——	(3,2)	(4,2)	(5,2)
3	(2,3)	——	(4,3)	(5,3)
4	(2,4)	(3,4)	——	(5,4)
5	(2,5)	(3,5)	(4,5)	——

由表可知所有可能结果共有12种,且每种结果发生的可能性相同,其中摸出的两个小球上的数字之积大于9的有8种,

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

所以两个小球上的数字之积大于9的概率为$\frac{8}{12}=\frac{2}{3}$.

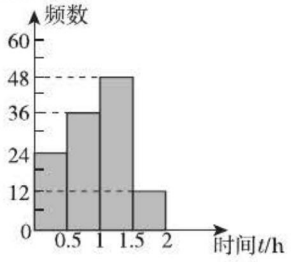
三、**17.** **解**：(1)当n为7或8或9时，这个事件必然发生.

(2)当n为1或2时，这个事件不可能发生.

(3)当n为3或4或5或6时，这个事件可能发生.

18. **解**：(1)120；0.1

(2)$1<t\leqslant 1.5$的频数为$120\times 0.4=48$，补全图形如图.



（第18题）

(3)估计该校每天课外阅读时间超过1小时的学生为$1\ 200\times(0.4+0.1)=600$(名).

19. **解**：(1)将标有数1和3的扇形两等分可知转动转盘一次共有6种等可能的结果，其中转出的数是-2的有2种结果，所以转出的数是-2的概率为$\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$.

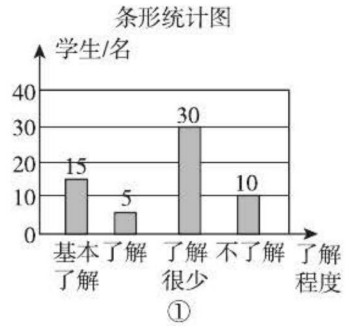
(2)列表如下.

	-2	-2	1	1	3	3
-2	4	4	-2	-2	-6	-6
-2	4	4	-2	-2	-6	-6
1	-2	-2	1	1	3	3
1	-2	-2	1	1	3	3
3	-6	-6	3	3	9	9
3	-6	-6	3	3	9	9

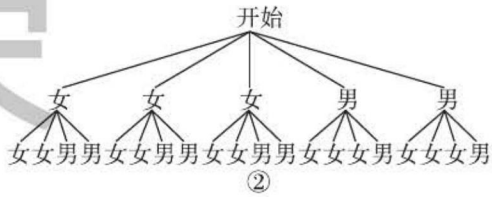
由表可知共有36种等可能结果，其中数的积为正数的有20种结果，所以这两次分别转出的数的积为正数的概率为$\frac{20}{36}=\frac{5}{9}$.

20. **解**：(1)60；90

(2)了解的人数有$60-15-30-10=5$(人)，补图如图①.



①



②

（第20题）

(3)画树状图如图②.

∵共有20种等可能的结果，恰好抽到1名男生和1名女生的有12种情况，

∴恰好抽到1名男生和1名女生的概率为$\frac{12}{20}=\frac{3}{5}$.

第7章 空间图形的初步认识

7.1 几种常见的几何体

【两年模拟兵法】

1. D **2.** C **3.** B **4.** D

5. 4；6；4；2；平；曲

6. **解**：(1)$6\times(1+2+3)\cdot a^2=36a^2$.

故该物体的表面积为$36a^2$.

(2)$6\times(1+2+3+\cdots+20)\cdot a^2=1\ 260a^2$.

故该物体的表面积为$1\ 260a^2$.

(3)$6\times(1+2+3+\cdots+n)\cdot a^2=3n(1+n)a^2=(3n^2+3n)a^2$.

故该物体的表面积为$(3n^2+3n)a^2$.

7. **解**：(1)圆柱；$2\ 304\pi$

(2)能. 分别以长方形的短边、两个短边的中点的连线段和两个长边的中点的连线段所在直线为轴旋转一周就可以形成三个体积不同的圆柱. 体积最大为$3\ 072\pi$.

荣德基

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

8. 解：(1) 当绕长边所在的直线旋转时，形成的圆柱底面半径为 3 cm，体积为 $\pi \times 3^2 \times 4 = 36\pi$ (cm^3)；

当绕短边所在的直线旋转时，形成的圆柱底面半径为 4 cm，体积为 $\pi \times 4^2 \times 3 = 48\pi$ (cm^3).

(2)(答案不唯一，合理即可) 通过计算发现，同一个平面图形由于旋转轴不同，旋转形成的立体图形也不一定完全相同.

7.2 直棱柱的侧面展开图

【两年模拟兵法】

1. B **2.** B **3.** C **4.** C **5.** C **6.** B **7.** B

8. 4；10 **9.** 2，5，1

10. 202；236；484 **点拨**：长 $3 \times 3 = 9$ (cm)，宽 4 cm，高 5 cm，最小表面积为 $(9 \times 4 + 9 \times 5 + 4 \times 5) \times 2 = (36 + 45 + 20) \times 2 = 101 \times 2 = 202$ (cm^2).

故如果用 3 块来搭，那么搭成的大长方体的表面积最小是 202 cm^2.

长 $4 \times 2 = 8$ (cm)，宽 $3 \times 2 = 6$ (cm)，高 5 cm，

最小表面积为 $(8 \times 6 + 8 \times 5 + 6 \times 5) \times 2 = (48 + 40 + 30) \times 2 = 118 \times 2 = 236$ (cm^2).

故如果用 4 块来搭，那么搭成的大长方体的表面积最小是 236 cm^2.

长 $3 \times 3 = 9$ (cm)，宽 $4 \times 2 = 8$ (cm)，高 $5 \times 2 = 10$ (cm)，

最小表面积为 $(9 \times 8 + 9 \times 10 + 8 \times 10) \times 2 = (72 + 90 + 80) \times 2 = 242 \times 2 = 484$ (cm^2).

故如果用 12 块来搭，那么搭成的大长方体的表面积最小是 484 cm^2.

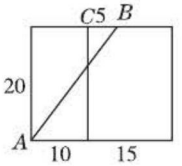
11. 解：根据题意分析知蚂蚁爬行的路线有三种情况，把蚂蚁爬行时经过的面展开，如图①②③.

图①中 $AB = \sqrt{20^2 + (10+5)^2} = 25$ (cm)，

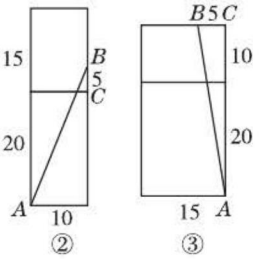
图②中 $AB = \sqrt{10^2 + (20+5)^2} = \sqrt{725}$ (cm)，

图③中 $AB = \sqrt{(20+10)^2 + 5^2} = \sqrt{925}$ (cm).

(单位：cm)



①



(第 11 题)

因为 $\sqrt{925} > \sqrt{725} > 25$，

所以蚂蚁从 A 点爬到 B 点，需要爬行的最短距离为 25 cm.

7.3 圆柱的侧面展开图

【两年模拟兵法】

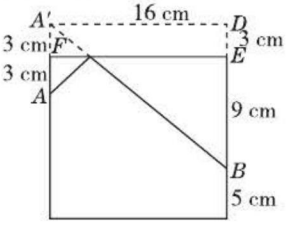
1. B **2.** B **3.** C **4.** A

5. 80 cm

6. $\sqrt{9 + 16\pi^2}$ cm

7. 276

8. 20 **点拨**：如图，

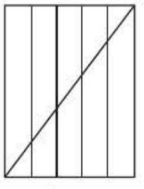


(第 8 题)

将玻璃杯侧面展开，作 A 关于 EF 的对称点 A'，连接 $A'B$，则 $A'B$ 即为最短距离，

$A'B = \sqrt{A'D^2 + BD^2} = \sqrt{16^2 + 12^2} = 20$ (cm).

9. 25 **点拨**：如图，一条直角边(即枯木的高)长 20 尺，另一条直角边长 $5 \times 3 = 15$ (尺)，因此葛藤最短长度是 $\sqrt{20^2 + 15^2} = 25$ (尺).



(第 9 题)

10. 解：(1) 这个几何体是圆柱.

(2) 由题图可知，圆柱的底面圆的半径是 $20 \div 2 = 10$ (cm)，高是 40 cm，

所以体积是 $\pi \times 10^2 \times 40 \approx 3.14 \times 100 \times 40 = 12\,560$ (cm^3).

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

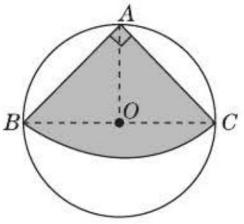
7.4 圆锥的侧面展开图

【两年模拟兵法】

1. B **2.** C **3.** A **4.** C **5.** B **6.** 6

7. 42π **点拨：**∵ 圆锥的底面半径 $r=\frac{1}{2}AC=6$ 分米，母线长 $l=7$ 分米，∴ 圆锥的侧面积 $=\pi rl=\pi\times6\times7=42\pi$（平方分米）.

8. $\sqrt{30}$ **点拨：**如图，连接 BC，取 BC 的中点 O，连接 AO.



（第 8 题）

∵ $AB=AC$，点 O 是 BC 的中点，∴ $AO\perp BC$.

又∵ $\angle BAC=90°$，∴ BC 为圆 O 的直径，$\angle ABO=\angle ACO=45°$，∴ $AB=\sqrt{2}OB=4\sqrt{2}$ m，

∴ $\overset{\frown}{BC}=\frac{90\pi\times4\sqrt{2}}{180}=2\sqrt{2}\pi$（m），∴ 将剪下的扇形围成的圆锥的底面半径是 $2\sqrt{2}\pi\div2\pi=\sqrt{2}$（m），

∴ 圆锥的高是 $\sqrt{(4\sqrt{2})^2-(\sqrt{2})^2}=\sqrt{30}$（m）.

9. **解：**∵ Rt△ABC 的斜边 $AB=13$ cm，直角边 $AC=5$ cm，

∴ 直角边 $BC=12$ cm.

∵ 直角三角形中斜边上的高 $OC=\frac{5\times12}{13}=\frac{60}{13}$（cm），以 $\frac{60}{13}$ cm 为半径的圆的周长 $=\frac{120}{13}\pi$ cm，

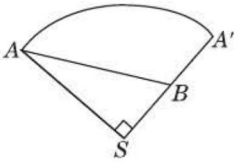
∴ 几何体的表面积 $=\frac{1}{2}\times\frac{120}{13}\pi\times(5+12)=\frac{1\,020}{13}\pi$（cm^2）.

10. **解：**（1）设它的侧面展开图的圆心角为 $n°$. 由题意，得 $\frac{n\pi\times40}{180}=2\pi\times10$.

解得 $n=90$，故侧面展开图的圆心角为 90°.

圆锥的表面积 $=\pi\times10^2+\pi\times10\times40=500\pi$（cm^2）.

（2）如图，沿 SA 将圆锥侧面展开，甲虫从 A 点出发沿着圆锥侧面绕行到母线 SA 的中点 B 处所走的最短路线长是线段 AB 的长.



（第 10 题）

在 Rt△ASB 中，$SA=40$ cm，$SB=20$ cm，

∴ $AB=20\sqrt{5}$ cm.

∴ 它所走的最短路线长是 $20\sqrt{5}$ cm.

素养提分整合篇

【好题必解】

1. A

2. **解：**（1）这个长方体的棱长总和为 $4\times(4+3+5)=48$（cm）.

（2）表面积 $=2\times(4\times3+4\times5+3\times5)=2\times47=94$（cm^2）.

3. **解：**（1）∵ 正方体的左面 D 与右面 B 代表的代数式的值相等，

∴ $x-1=3x-2$，

解得 $x=\frac{1}{2}$.

（2）∵ 正面字母 A 代表的代数式与对面字母 F 代表的代数式的值相等，

∴ $kx+1=x$，

∴ $(k-1)x=-1$.

∵ x，k 均为整数，

∴ x，$k-1$ 为 -1 的因数，

∴ $k-1=\pm1$，

∴ $k=0$ 或 $k=2$.

综上所述，整数 k 的值为 0 或 2.

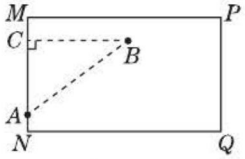
4. **解：**设该圆锥的母线长为 l cm，由题意，得 $2\pi r=\frac{120\pi l}{180}$，

∴ $l=6$.

∴ $S_{侧}=\frac{120\pi\times6^2}{360}=12\pi$（cm^2）.

5. **解：**如图，将圆柱侧面展开成矩形 $MNQP$，过点 B 作 $BC\perp MN$ 于点 C，连接 AB，

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料



（第 5 题）

则线段 AB 的长度即为最短距离.

在 Rt△ACB 中，$AC = MN - AN - CM = 16$ cm，BC 是上底面的半圆周的长，即 $BC = 30$ cm.

由勾股定理，得 $AB^2 = AC^2 + BC^2 = 16^2 + 30^2 = 1\ 156 = 34^2$，

所以 $AB = 34$ cm.

故蜘蛛爬行的最短路线的长度为 34 cm.

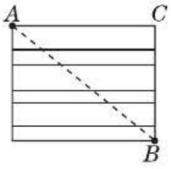
【第 7 章测试卷】

一、**1.** D　**2.** A　**3.** C　**4.** B

5. C　**6.** C　**7.** C　**8.** C

9. A　**点拨：**设圆锥的底面半径为 r cm，∵ 从半径为 9 cm 的圆形纸片上剪去一个弧长为$\frac{1}{3}$圆周的扇形，∴ 剩下的扇形的弧长 $= \frac{2}{3} \cdot 2\pi \cdot 9 = 12\pi$（cm），∴ $2\pi r = 12\pi$，∴ $r = 6$.

10. D　**点拨：**如图，连接 AB.



（第 10 题）

由题得 $AC = 20$ dm，$BC = 3 \times 3 + 2 \times 3 = 15$（dm），在 Rt△$ABC$ 中，$AB = \sqrt{AC^2 + BC^2} = \sqrt{20^2 + 15^2} = 25$(dm).

所以蚂蚁所走的最短路程为 25 dm.

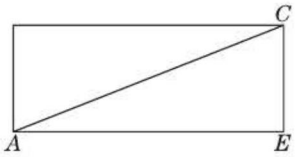
二、**11.** 6；12；8　**12.** 12π

13. 200π　**14.** 216°

15. 100　**点拨：**由题图可得 $\begin{cases} a + 2c = 14, \\ 2b + 2c = 14, \end{cases}$

∴ $a = 2b$. 又∵ $a - b = 5$，∴ $b = 5$ cm，$a = 10$ cm，∴ $c = 2$ cm，∴ 这个包装盒的体积 $= abc = 100$ cm^3.

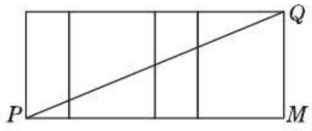
16. $3\sqrt{10}$ cm　**点拨：**如图所示.



（第 16 题）

∵ 无弹性的丝带从 A 至 C，绕了 1.5 圈，∴ $AE = 1.5 \times 2\pi \approx 9$(cm)，$EC = 3$ cm，∴ 由勾股定理得 $AC = \sqrt{AE^2 + EC^2} \approx \sqrt{9^2 + 3^2} = 3\sqrt{10}$(cm).

三、**17.** **解：**把长方体的侧面展开，如图所示，



（第 17 题）

则 $PM = 12$ cm，$QM = 5$ cm，

在 Rt△PQM 中，$PQ = \sqrt{PM^2 + QM^2} = 13$(cm).

所以蚂蚁爬行的是最短路径长是 13 cm.

18. **解：**(1)∵ 圆柱的底面直径为 6 厘米，

∴ 圆柱的底面周长为 6π 厘米，

∴ 装饰带展开后至少长 6π 厘米.

(2)∵ 圆柱的体积等于底面积乘高，

∴ $V_{圆柱} = 15 \times \pi \times (6 \div 2)^2 = 135\pi$（立方厘米）.

∴ 这个茶杯的体积是 135π 立方厘米.

19. **解：**(1)∵ 圆锥的高 AO 为 $2\sqrt{2}$，底面半径为 1，

∴ 圆锥的母线长为 3，

∴ 圆锥的侧面积为 $\pi rl = \pi \times 1 \times 3 = 3\pi$，即扇形的面积为 3π.

(2)设圆锥的母线长为 l，

根据题意得

$2\pi r = 2l$，

∴ $\frac{l}{r} = \pi$.

∴ $\frac{AB}{OB} = \pi$.

20. **解：**(1)设长方体的高为 x cm，则长方体的宽为 $(12 - 2x)$ cm，

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

根据题意可得

$12-2x+8+x+8=25$，解得 $x=3$，所以长方体的高为 3 cm，宽为 6 cm，长为 8 cm，长方体的体积为 $8\times6\times3=144(\text{cm}^3)$.

(2)因为长方体的高为 3 cm，宽为 6 cm，长为 8 cm，所以装 10 件这种产品，应该尽量使 6×8 的面重叠在一起，纸箱所用材料才尽可能少，这样的话，5 件这种产品可以用 $15\times6\times8$ 的包装纸箱，再考虑 15×8 的面积最大，所以 15×8 的面重叠在一起，纸箱所用材料才尽可能少，所以设计的包装纸箱为 $15\times12\times8$ 规格，该产品的侧面积分别为

$8\times12=96(\text{cm}^2)$，$8\times15=120(\text{cm}^2)$，

$12\times15=180(\text{cm}^2)$，

纸箱的表面积为 $(120+96+180)\times2=792(\text{cm}^2)$.

第8章 投影与识图

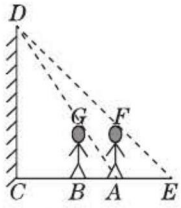
8.1 中心投影

【两年模拟兵法】

1. A **2**. C **3**. D **4**. D

5. 变小 **6**. 5.6 **7**. $\frac{1}{2}$

8. **解**：如图，



（第 8 题）

根据题意，得 $BG=AF=AE=1.6$ m，$AB=1$ m.

$\because BG/\!/AF/\!/CD$，

$\therefore \triangle EAF\backsim\triangle ECD$，

$\triangle ABG\backsim\triangle ACD$.

$\therefore AE:EC=AF:CD$，

$AB:AC=BG:CD$.

设 $BC=x$ m，$CD=y$ m，

则 $CE=(x+2.6)$ m，$AC=(x+1)$ m，

则 $\begin{cases}\frac{1.6}{x+2.6}=\frac{1.6}{y},\\ \frac{1}{x+1}=\frac{1.6}{y},\end{cases}$

即 $\frac{1.6}{x+2.6}=\frac{1}{x+1}$，

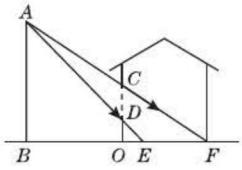
解得 $x=\frac{5}{3}$，

把 $x=\frac{5}{3}$ 代入 $\frac{1.6}{x+2.6}=\frac{1.6}{y}$，

解得 $y=\frac{64}{15}$，

$\therefore CD=\frac{64}{15}$ m.

9. **解**：如图，连接 CD，由题意可知 C，D，O 在一条直线上.



（第 9 题）

$\because DO\perp BF$，

$\therefore \angle DOE=90°$.

$\because OD=0.8$ m，$OE=0.8$ m，

$\therefore \angle DEB=45°$.

$\because AB\perp BF$，

$\therefore \angle BAE=45°$，

$\therefore AB=BE$.

设 $AB=BE=x$ m，

$\because AB\perp BF$，$CO\perp BF$，

$\therefore AB/\!/CO$，

$\therefore \triangle ABF\backsim\triangle COF$，

$\therefore \frac{AB}{BF}=\frac{CO}{OF}$，

即 $\frac{x}{x+(3-0.8)}=\frac{1.2+0.8}{3}$.

解得 $x=4.4$.

经检验 $x=4.4$ 是原方程的解，

故路灯 A 的高度是 4.4 m.

8.2 平行投影

【两年模拟兵法】

1. A **2**. A **3**. D

4. D **5**. D **6**. B

7. 对应成正比

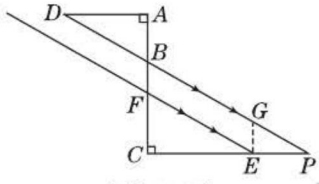
8. 小强的说法不正确

9. 9

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

10. 30　**点拨：**根据题意得 $AD/\!/BE$，$\therefore\ \triangle CBE\backsim\triangle CDA$，$\therefore\ \frac{BE}{DA}=\frac{CB}{CD}$，即 $\frac{15}{DA}=\frac{20}{40}$，$\therefore\ DA=30$ m.

11. **解：**如图，过点 E 作 $EG/\!/AC$ 交 PD 于点 G.



（第 11 题）

$\because\ EG=EP\cdot\tan30^\circ=\sqrt{3}\times\frac{\sqrt{3}}{3}=1$（米），

$\therefore\ BF=EG=1$ 米.

$\therefore\ AB=AF-BF=2.5-1=1.5$（米）.

在 Rt $\triangle ABD$ 中，$AD=\frac{AB}{\tan30^\circ}=\frac{1.5}{\frac{\sqrt{3}}{3}}=\frac{3}{2}\sqrt{3}$（米），即 AD 的长度为 $\frac{3}{2}\sqrt{3}$ 米.

8.3　物体的三视图

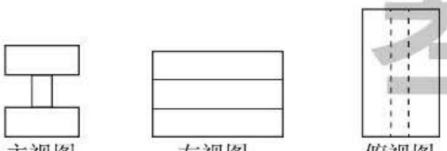
【两年模拟兵法】

1. B　**2.** B　**3.** A　**4.** C　**5.** C　**6.** D　**7.** B

8. C　**点拨：**由题可得，圆锥的底面圆的直径为 8，圆锥的高为 3，$\therefore$ 圆锥的底面圆的周长为 8π，圆锥的母线长为 $\sqrt{3^2+4^2}=5$，$\therefore$ 圆锥的侧面积为 $\frac{1}{2}\times8\pi\times5=20\pi$.

9. 10；1　**10.** 108　**11.** 10

12. **解：**如图所示.



（第 12 题）

13. **解：**根据三视图可得，上面的长方体长 4 mm，高 4 mm，宽 2 mm，下面的长方体长 8 mm，宽 6 mm，高 2 mm，

$\therefore$ 立体图形的体积是 $4\times4\times2+6\times8\times2=128(\text{mm}^3)$，

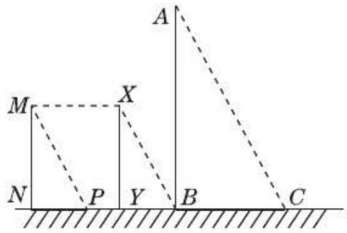
立体图形的表面积是 $4\times4\times2+4\times2\times2+4\times2+6\times2\times2+8\times2\times2+6\times8\times2-4\times2=200(\text{mm}^2)$.

素养提分整合篇

【好题必解】

1. **解：**（1）如图，连接 AC，过点 M 作 $MP/\!/AC$ 交 NC 于点 P，则 NP 为 MN 的影子.

（2）如图，过点 B 作 $BX/\!/AC$，且 $BX=MP$，过点 X 作 $XY\perp NC$ 于点 Y，则 XY 即为所求.



（第 1 题）

2. **解：**（1）在 Rt $\triangle ABC$ 中，由勾股定理可得 $AC=50$ m. 由题意可知 $DE/\!/AC$，

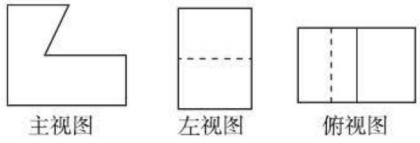
则 Rt $\triangle BDE\backsim$ Rt $\triangle BAC$，

$\therefore\ \frac{DE}{AC}=\frac{BD}{AB}$，即 $\frac{DE}{50}=\frac{\frac{8}{3}}{40}$，$\therefore\ DE=\frac{10}{3}$ m.

$\therefore$ 他们的影子在一条直线上时，两人相距 $\frac{10}{3}$ m.

（2）在 Rt $\triangle BDE$ 中，由勾股定理，得 $BE=2$ m，$\therefore$ 王刚跑的总路程为 $AB+BE=40+2=42$（m）. $\therefore$ 王刚跑这段路程的时间为 $\frac{42}{3}=14$（s），$\therefore$ 张华用的时间为 $14-4=10$（s）. 又$\because$ 张华这段时间所跑的路程是 $40-\frac{8}{3}=\frac{112}{3}$（m），$\therefore$ 张华的速度为 $\frac{112}{3}\div10=\frac{56}{15}$（m/s）. $\therefore$ 张华追赶王刚的速度是 $\frac{56}{15}$ m/s.

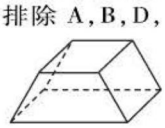
3. **解：**如图所示.



（第 3 题）

4. C　**点拨：**A，B 的俯视图均为圆（含圆心），D 的三视图中不存在矩形，排除 A，B，D，故选 C.

5. **解：**（1）如图.



（第 5 题）

（2）$S_{表}=2\times\frac{35}{\cos60^\circ}\times120+$

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

$80\times120+(35+80+35)\times120+2\times\frac{1}{2}\times(35+80+35+80)\times35\times\tan60°=(44\ 400+8\ 050\sqrt{3})\ (mm^2)$.

故此几何体的表面积为$(44\ 400+8\ 050\sqrt{3})\ mm^2$.

6. 解：$V=V_{圆柱}+V_{长方体}=\pi\cdot(\frac{20}{2})^2\times32+40\times30\times25\approx40\ 048(cm^3)$.

所以该几何体的体积约为40 048 cm^3.

点拨：该几何体由两部分构成，上部分是圆柱，下部分是长方体.

【第8章测试卷】

一、1. B **2.** C **3.** A **4.** B **5.** B **6.** C **7.** C **8.** A **9.** C

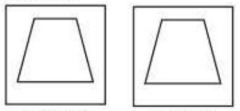
10. A **点拨：**∵ $BE//AD$，∴ $\triangle BCE\backsim\triangle ACD$，∴ $\frac{CB}{CA}=\frac{CE}{CD}$，即$\frac{BC}{AB+BC}=\frac{EC}{EC+DE}$. ∵ $BC=1$ m，$DE=1.8$ m，$EC=1.2$ m，∴ $\frac{1}{AB+1}=\frac{1.2}{1.2+1.8}$，∴ $1.2AB=1.8$，∴ $AB=1.5$ m.

二、11. 平行 **12.** 球（答案不唯一） **13.** 40

14. 12 800 **点拨：**∵ 主视图的面积$=10\times60+50\times20=1\ 600$；左视图的面积$=40\times(50+10)=2\ 400$；俯视图的面积$=40\times(20+20+20)=2\ 400$. ∴ 这个几何体的表面积$=2\times(1\ 600+2\ 400+2\ 400)=12\ 800$.

15. 6 **16.** ①③④

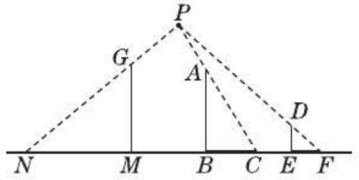
三、17. 解：如图所示.





（第17题）

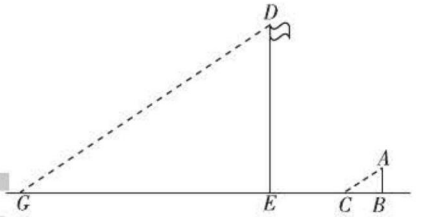
18. 解：（1）（2）如图所示.



（第18题）

19. 解：由题意可得，菱形面积$=\frac{1}{2}\times8\times6=24(cm^2)$，边长$=\sqrt{3^2+4^2}=5(cm)$，∴ 该钢坯零件的表面积$=5\times6\times4+24\times2=168(cm^2)$.

20. 解：（1）影子EG如图所示.



（第20题）

（2）∵ $DG//AC$，∴ $\angle DGE=\angle ACB$.

∴ $Rt\triangle ABC\backsim Rt\triangle DEG$.

∴ $\frac{AB}{DE}=\frac{BC}{EG}$，即$\frac{1.6}{DE}=\frac{2.4}{16}$，解得$DE=\frac{32}{3}$m.

∴ 旗杆DE的高度为$\frac{32}{3}$ m.

21. 解：（1）当$\alpha=60°$时，在$Rt\triangle ABE$中，

∵ $\tan60°=\frac{AB}{AE}=\frac{AB}{10}$，

∴ $AB=10\cdot\tan60°=10\sqrt{3}\approx10\times1.732\approx17.3$（米），

即楼房的高度约为17.3米.

（2）当$\alpha=45°$时，小猫能晒到太阳. 理由如下：如图，当$\alpha=45°$时，假设没有台阶，设经过点B的光线与地面AD的交点为点F，与MC的交点为点H.

∵ $\angle BFA=45°$，

∴ $\tan45°=\frac{AB}{AF}=1$.

∴ 此时的影长$AF=AB\approx17.3$米.

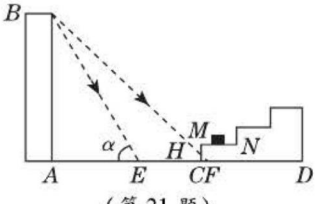
∴ $CF=AF-AC\approx17.3-17.2=0.1$（米）.

∴ $CH=CF\approx0.1$米.

又∵ 0.1米$<$0.2米，

∴ 楼房的影子落在台阶MC这个侧面上.

∴ 小猫能晒到太阳.



（第21题）

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

教材习题参考答案及点拨

第5章 对函数的再探索

5.1 函数与它的表示法

练习：

1. 解：(1)速度 v 与行驶时间 t 之间的函数关系是用图象法表示的.

(2)在这个过程中汽车共行驶了 120 min，在40～80 min 内，汽车行驶速度最大，最大速度是 90 km/h.

(3)在 0～10 min 和 20～40 min 内汽车的行驶速度逐渐增加，在 80～100 min 内行驶速度逐渐减少. 在 10～20 min、40～80 min和 100～120 min 内汽车按匀速运动行驶. 在 10～20 min 内，速度是 60 km/h，在 40～80 min 内，速度是 90 km/h，在 100～120 min 内，速度是 60 km/h.

(4)表中所填数据依次为 0，$\frac{1}{60}$，$\frac{1}{40}$，$\frac{1}{40}$，$\frac{1}{40}$，$\frac{1}{60}$，$\frac{1}{60}$

2. 解：$S=\pi r^2-\frac{3\sqrt{3}}{4}r^2$.

用解析法表示它们之间的函数关系比较方便.

练习：

1. 解：(1)当 x 取任意实数时，$\frac{3x-1}{2}$ 都有意义，所以自变量 x 可以取值的范围是全体实数.

(2)函数有意义的条件是分式的分母 $x^2-4x+3\neq 0$，即 $x\neq 1$ 且 $x\neq 3$，所以自变量可以取值的范围是 $x\neq 1$ 且 $x\neq 3$ 的实数.

(3)函数有意义的条件是 $6-2x\geqslant 0$，即 $x\leqslant 3$，所以自变量 x 可以取值的范围是 $x\leqslant 3$.

(4)函数有意义的条件是 $3x+2\geqslant 0$，即 $x\geqslant -\frac{2}{3}$，所以自变量 x 可以取值的范围是 $x\geqslant -\frac{2}{3}$.

2. 解：$y=18-2x$，x 可以取值的范围是 $\frac{9}{2}<x<9$. 画图象略.

3. 解：$Q=300-\frac{1}{12}t$，自变量 t 可以取值的范围是 $0\leqslant t\leqslant 3\ 600$. 画图象略.

练习：

1. 解：(1)用了 2 天.

(2)$y=\begin{cases}\frac{25}{2}x(0<x\leqslant 2),\\ \frac{25}{4}x+\frac{25}{2}(2<x\leqslant 6).\end{cases}$

(3)$\frac{25}{2}$；$\frac{25}{4}$

习题 5.1

1. 解：(1)$h=50+2t$.

(2)当 $t=18$ 时，$h=50+2\times 18=86$，即水面高度是 86 cm.

2. 解：设一次函数的表达式为 $y=kx+b$，由题图可知(30，330)和(40，630)在其图象上，将(30，330)，(40，630)分别代入函数表达式得 $\begin{cases}330=30k+b,\\ 630=40k+b,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}k=30,\\ b=-570,\end{cases}$

所以一次函数的表达式为 $y=30x-570$.

令 $y=0$，得 $30x-570=0$，解得 $x=19$，

所以免费托运行李质量的范围是 $0\ \text{kg}<x\leqslant 19\ \text{kg}$.

3. 解：(1)$v=2t$.

(2)t 可以取值的范围是 $0\leqslant t\leqslant 20$.

(3)当 $t=3.5$ 时，$v=2\times 3.5=7$，即小球的速度是 7 m/s.

(4)令 $v=16$，即 $16=2t$，解得 $t=8$，

即当 $t=8$ s 时，小球的速度为 16 m/s.

4. 解：(1)$y=\begin{cases}50x+1\ 500(10\leqslant x\leqslant 40),\\ 100x-500(x>40).\end{cases}$

(2)令 $y=4\ 000$，由 $50x+1\ 500=4\ 000$，得 $x=50$(舍去).

由 $100x-500=4\ 000$，得 $x=45$.

所以应从第 45 天开始进行人工灌溉.

5. 解：(1)温度；长度

(2)由表格可知，当温度是 10 ℃时，合金棒的长度是 10.01 cm.

(3)10.05；10.15

(4)$y=0.001x+10$.

(5)令 $x=-20$，则 $y=0.001\times(-20)+10=9.98$，

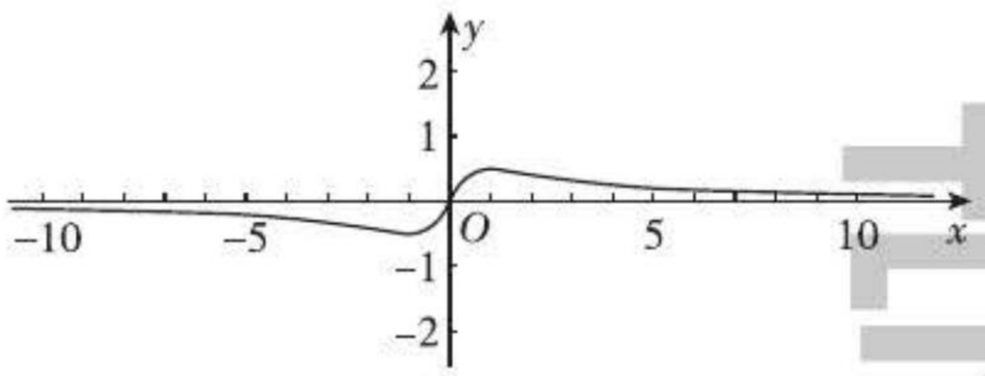
关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

令 $x=100$，则 $y=0.001\times100+10=10.1$，即当温度是 -20 ℃时，合金棒的长度是 9.98 cm，当温度是 100 ℃时，合金棒的长度是 10.1 cm.

6. 解：输出数 y 与输入数 x 之间的函数关系是用列表法表示的.

用解析法表示为 $y=\dfrac{x}{x^2+1}$.

用图象法表示如图.



（第 6 题）

7. 解：(1) $y=2-\dfrac{\sqrt{2}}{2}x$.

(2) 自变量 x 可以取值的范围是 $0\leqslant x<\sqrt{2}$.

(3) 函数值 y 的变化范围是 $1<y\leqslant2$.

8. 解：(1) 最先到达终点的是乙队，比另一个队提前 0.6 min 到达.

(2) $A(1,100)$，表示乙队在 1 min 时开始加速，此时距离出发点 100 m.

$B(3,450)$，表示甲、乙两队在 3 min 时相遇，此时距离出发点 450 m.

(3) 由题图可知，乙队在第一次加速后的速度为 175 m/min，

$\dfrac{800-100}{175}=4(\text{min})$，$1+4=5(\text{min})$，即乙队在5 min 时到达终点.

5.2 反比例函数

练习：

1. 解：(1) $\rho=\dfrac{m}{V}$，是反比例函数.

(2) $p=\dfrac{F}{S}$，是反比例函数.

(3) $I=\dfrac{U}{R}$，是反比例函数.

(4) $h=\dfrac{2S}{a+x}$，不是反比例函数.

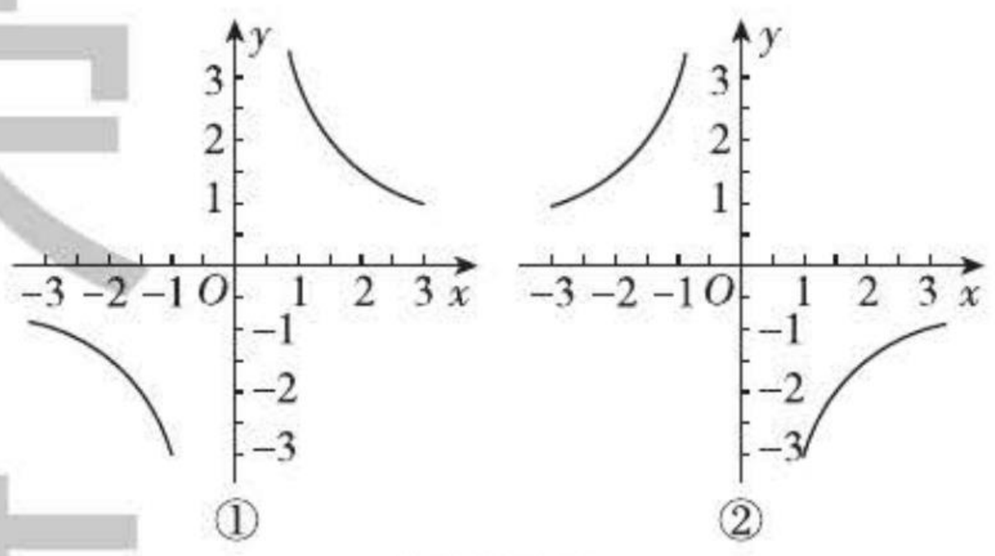
2. 解：(1) $y=\dfrac{21}{x}$.

(2) 当 $x=1$ 时，$y=21$.

(3) 当 $y=1$ 时，$x=21$.

练习：

1. 解：函数 $y=\dfrac{3}{x}$ 的图象如图①所示，函数 $y=-\dfrac{3}{x}$ 的图象如图②所示. 函数 $y=\dfrac{3}{x}$ 的图象的两个分支分别在第一、三象限，并且当 $x<0$ 时，y 随 x 的增大而减小，当 $x>0$ 时，y 随 x 的增大而减小. 函数 $y=-\dfrac{3}{x}$ 的图象的两个分支分别在第二、四象限，并且当 $x<0$ 时，y 随 x 的增大而增大，当 $x>0$ 时，y 随 x 的增大而增大. 两个函数的图象都不与坐标轴相交.



（第 1 题）

2.

表达式		自变量可以取值范围	图象		
			形状	位置	变化情况
$y=kx$ $(k\neq0)$	$k>0$	全体实数	直线	一、三象限	y 随 x 增大而增大
	$k<0$	全体实数	直线	二、四象限	y 随 x 增大而减小
$y=\dfrac{k}{x}$ $(k\neq0)$	$k>0$	$x\neq0$	双曲线	一、三象限	在每个象限内，y 随 x 增大而减小
	$k<0$	$x\neq0$	双曲线	二、四象限	在每个象限内，y 随 x 增大而增大

练习：

1. 解：设 $A(x_0,y_0)$，则 $OB=x_0$，$AB=y_0$，

所以 $S_{\triangle AOB}=\dfrac{1}{2}OB\cdot AB=\dfrac{1}{2}x_0y_0=3$，

所以 $x_0y_0=6$. 又因为 $A(x_0,y_0)$ 是反比例函数 $y=\dfrac{k}{x}$ 的图象上的一点，所以 $k=6$，所以这个反比例函数的表达式为 $y=\dfrac{6}{x}$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

2. 解：由 $\begin{cases} y=\dfrac{4}{x}, \\ y=x, \end{cases}$ 得 $\begin{cases} x=2, \\ y=2 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x=-2, \\ y=-2 \end{cases}$（舍去），

所以 $P_1(2,2)$，

所以 $P_1Q_1=2, OQ_1=2$，

所以 $P_1R_1=2, OR_1=2$，

所以四边形 $OQ_1P_1R_1$ 的周长 $=P_1Q_1+OQ_1+P_1R_1+OR_1=8$.

由 $\begin{cases} y=\dfrac{4}{x}, \\ y=2x, \end{cases}$ 得 $\begin{cases} x=\sqrt{2}, \\ y=2\sqrt{2} \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x=-\sqrt{2}, \\ y=-2\sqrt{2} \end{cases}$（舍去），

所以 $P_2(\sqrt{2},2\sqrt{2})$，所以 $P_2Q_2=2\sqrt{2}$，$OQ_2=\sqrt{2}$，所以 $P_2R_2=\sqrt{2}, OR_2=2\sqrt{2}$，所以四边形 $OQ_2P_2R_2$ 的周长 $=P_2Q_2+OQ_2+P_2R_2+OR_2=6\sqrt{2}$.

因为 $8<6\sqrt{2}$，所以四边形 $OQ_2P_2R_2$ 的周长较大.

练习：

1. 解：(1) 设反比例函数的表达式为 $P=\dfrac{k}{S}$，易知点 (0.1, 1 000) 在反比例函数的图象上，

所以 $1\ 000=\dfrac{k}{0.1}$，解得 $k=100$，

所以 P 与 S 之间的函数表达式为 $P=\dfrac{100}{S}$.

(2) 当 $S=0.5\ \text{m}^2$ 时，$P=\dfrac{100}{0.5}=200\ \text{pa}$，

即当 $S=0.5\ \text{m}^2$ 时的物体承受的压强 P 为 200 Pa.

2. C

习题 5.2

1. 解：(3)(4) 是反比例函数.

2. 解：(1) $y=\dfrac{1\ 200}{x}$，y 是 x 的反比例函数.

(2) $y=\dfrac{90}{x}$，y 是 x 的反比例函数.

3. 解：该县的总耕地面积为 $0.125\times82=10.25$（万公顷）$=102\ 500$ 公顷.

(1) $y=\dfrac{102\ 500}{x}$，y 是 x 的反比例函数.

(2) 当 $x=1\ 000\ 000$ 时，$y=\dfrac{102\ 500}{1\ 000\ 000}=0.102\ 5$，

即人均占有耕地面积是 0.102 5 公顷.

4. 解：(1) $\rho=\dfrac{14.3}{V}$.

(2) 当 $V=2\ \text{m}^3$ 时，$\rho=\dfrac{14.3}{2}=7.15\ \text{kg/m}^3$，

即氧气的密度为 $7.15\ \text{kg/m}^3$.

5. 解：由题意知，$k=1\times2=2$.

6. 解：(1) $y=-\dfrac{2}{x}$.

(2) 当 $x=-6$ 时，$y=-\dfrac{2}{-6}=\dfrac{1}{3}$，所以图象经过点 $P\left(-6,\dfrac{1}{3}\right)$. 当 $x=-\sqrt{3}$ 时，$y=-\dfrac{2}{-\sqrt{3}}=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}\neq\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，所以图象不经过点 $Q\left(-\sqrt{3},\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

7. 解：因为反比例函数的图象在第一、三象限，所以 $2m-1>0$，即 $m>\dfrac{1}{2}$.

8. 解：因为 $5>0$，所以反比例函数 $y=\dfrac{5}{x}$ 的图象经过第一、三象限，并且当 $x<0$ 时，y 随 x 的增大而减小，所以当 $x_1<x_2<0$ 时，$y_1>y_2$.

9. 解：由题意知 $k=-2$，所以这个反比例函数的表达式为 $y=-\dfrac{2}{x}$.

10. 解：(1) $y=\dfrac{80}{x}$.

(2) 根据题意得 $\dfrac{80}{x}=\dfrac{80}{(1+12\%)x}+3$，

解得 $x=\dfrac{20}{7}$.

当 $x=\dfrac{20}{7}$ 时，$y=\dfrac{80}{\frac{20}{7}}=28$，

所以原计划完成这项工程用 28 个月.

11. 解：$y=-\dfrac{15}{x}$.（答案不唯一）

12. 解：(1) $h=\dfrac{600}{S}$.

(2) 漏斗口直径为 8 cm 时，$S=16\pi\ \text{cm}^2$，

此时 $h=\dfrac{600}{16\pi}=\dfrac{75}{2\pi}\approx11.94$（cm），

即漏斗深应约是 11.94 cm.

13. 解：(1) $P=\dfrac{600}{S}(S>0)$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

(2)当 $S=0.2$ 时,$P=\frac{600}{0.2}=3\ 000$,

即木板对地面的压强是 3 000 Pa.

(3)当 $P=6\ 000$ 时,$S=\frac{600}{6\ 000}=0.1$,

所以木板的面积至少要 0.1 m^2.

14. 解:(1)$8\times6=48(m^3)$,所以这个蓄水池容积是 48 m^3.

(2)将满池水排空所需时间 t 将变小.

(3)$t=\frac{48}{Q}$.

(4)当 $t=5$ 时,$Q=\frac{48}{5}=9.6$,所以排水量至少是 9.6 m^3/h.

(5)当 $Q=12$ 时,$t=\frac{48}{12}=4$,即至少用 4 h 可将满池水全部排空.

15. 解:(1)易知 $B(3,3)$,$k=9$.

(2)易知 $3n=\frac{9}{2}$,所以 $n=\frac{3}{2}$.

当 $n=\frac{3}{2}$ 时,$m=\frac{9}{\frac{3}{2}}=6$,

所以 $P\left(6,\frac{3}{2}\right)$.

(3)$S=\frac{27}{m}$.

16. 解:(1)(1,6),(2,3),(3,2),(6,1).

(2)$m<-3$ 或 $m>0$.

17. 解:因为 $\angle BAP+\angle DAE=90°$,

$\angle BAP+\angle BPA=90°$,

所以 $\angle BPA=\angle EAD$.

又 $\angle B=\angle AED=90°$,

所以 $\triangle ABP\backsim\triangle DEA$.

所以 $\frac{AD}{PA}=\frac{DE}{AB}$,即 $\frac{3}{x}=\frac{y}{2}$,

所以 $xy=6$,所以 $y=\frac{6}{x}(2\leqslant x\leqslant\sqrt{13})$.

5.3 二次函数

练习:

1. 解:当 $a\neq0$ 时,函数 $y=ax^2+bx+c$ 是二次函数.

当 $a=0,b\neq0$ 时,函数 $y=ax^2+bx+c$ 是一次函数.

当 $a=0,c=0,b\neq0$ 时,函数 $y=ax^2+bx+c$ 是正比例函数.

2. 解:$y=x^2+6x$.

习题 5.3

1. 解:(2)(3)(4)是二次函数.

(2)$y=2x^2+1$ 中,二次项系数是 2,一次项系数是 0,常数项是 1.

(3)$y=x(2-x)=-x^2+2x$,二次项系数是 -1,一次项系数是 2,常数项是 0.

(4)$y=\frac{1}{2}(x-1)^2-\frac{5}{2}=\frac{1}{2}x^2-x-2$,二次项系数是 $\frac{1}{2}$,一次项系数是 -1,常数项是 -2.

2. 解:$y=\frac{\sqrt{3}}{8}x^2$,自变量 x 可以取值的范围是 $x>0$.

3. 解:$y=-\frac{1}{2}x^2+4x$,自变量 x 可以取值的范围是 $0<x\leqslant4$.

4. 解:$y=10\ 000(1+x)^2$.

5. 解:$y=x^2-150x+5\ 000$.

6. 解:(1)$y=(x-20)[400-20(x-30)]$

$=(x-20)(-20x+1\ 000)$

$=-20x^2+1\ 400x-20\ 000$.

(2)自变量 x 可以取值的范围是 $20<x<50$.

5.4 二次函数的图象和性质

练习:

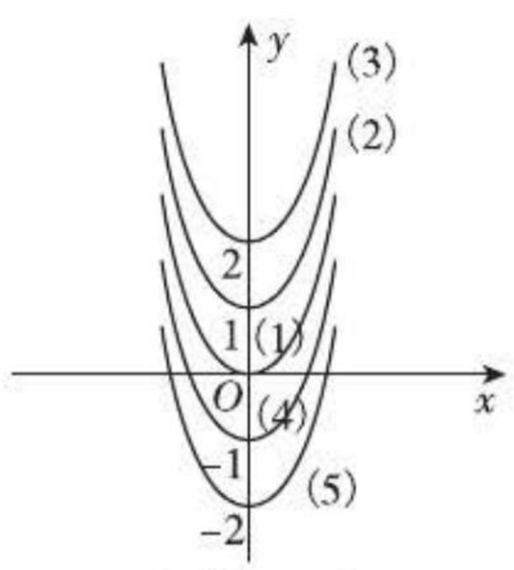
1. 解:抛物线 $y=-4x^2$ 的开口方向向下,对称轴为 y 轴,顶点坐标为(0,0),最高点坐标为(0,0).

抛物线 $y=\frac{1}{2}x^2$ 的开口方向向上,对称轴为 y 轴,顶点坐标为(0,0),最低点坐标为(0,0).

2. 解:把点(1,3)的坐标代入抛物线的表达式,得 $3=a\times1^2$,解得 $a=3$.

练习:

1. 解:如图.



(第 1 题)

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

2. 解：$y=-x^2-2x-1$.（答案不唯一）

练习：

1.

抛物线	开口方向	对称轴	顶点坐标
$y=2x^2+3$	向上	y 轴	$(0,3)$
$y=-\frac{1}{2}(x-1)^2$	向下	直线 $x=1$	$(1,0)$
$y=4(x+5)^2+\sqrt{2}$	向上	直线 $x=-5$	$(-5,\sqrt{2})$

2. 解：$y=(x-3)^2-3$.（答案不唯一）

练习：

1. 解：(1) $y=x^2-3x=\left(x-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{9}{4}$.

抛物线的开口方向向上，对称轴为直线 $x=\frac{3}{2}$，顶点坐标为 $\left(\frac{3}{2},-\frac{9}{4}\right)$，抛物线有最低点. 当 $x<\frac{3}{2}$ 时，y 随 x 的增大而减小，当 $x>\frac{3}{2}$ 时，y 随 x 的增大而增大.

(2) $y=x^2+3x-1=\left(x+\frac{3}{2}\right)^2-\frac{13}{4}$.

抛物线的开口方向向上，对称轴为直线 $x=-\frac{3}{2}$，顶点坐标为 $\left(-\frac{3}{2},-\frac{13}{4}\right)$，抛物线有最低点. 当 $x<-\frac{3}{2}$ 时，y 随 x 的增大而减小，当 $x>-\frac{3}{2}$ 时，y 随 x 的增大而增大.

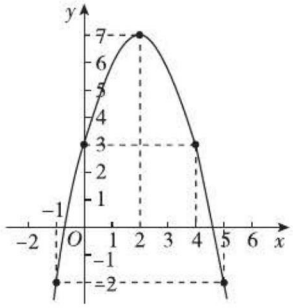
(3) $y=\frac{1}{2}x^2+3x+\frac{5}{2}=\frac{1}{2}(x+3)^2-2$.

抛物线的开口方向向上，对称轴为直线 $x=-3$，顶点坐标为 $(-3,-2)$，抛物线有最低点. 当 $x<-3$ 时，y 随 x 的增大而减小，当 $x>-3$ 时，y 随 x 的增大而增大.

(4) $y=\frac{5}{2}x-2-3x^2=-3\left(x-\frac{5}{12}\right)^2-\frac{71}{48}$.

抛物线的开口方向向下，对称轴为直线 $x=\frac{5}{12}$，顶点坐标为 $\left(\frac{5}{12},-\frac{71}{48}\right)$，抛物线有最高点. 当 $x<\frac{5}{12}$ 时，y 随 x 的增大而增大，当 $x>\frac{5}{12}$ 时，y 随 x 的增大而减小.

2. 解：函数 $y=-x^2+4x+3$ 的图象如图所示.



（第 2 题）

习题 5.4

1. 解：$y=\frac{1}{4}x^2$.

2. 解：(1) 正确. (2) 正确.
(3) 错误. (4) 正确.

3. 解：图象略.
(1) 当 $x=-1.7$ 时，$y\approx-1.4$.
(2) 当 $y=-5.8$ 时，$x\approx\pm3.4$.

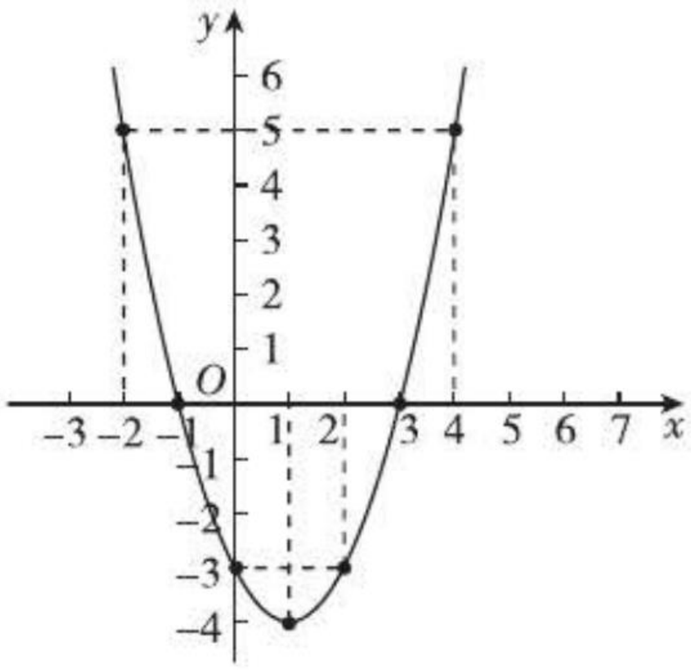
4. 解：图象略. 函数 $y=\frac{1}{4}x^2$ 的图象的开口方向向上，顶点坐标为 $(0,0)$，对称轴为 y 轴，最低点的坐标为 $(0,0)$，当 $x>0$ 时，y 随 x 的增大而增大，当 $x<0$ 时，y 随 x 的增大而减小. 函数 $y=\frac{1}{4}x^2+2$ 的图象的开口方向向上，顶点坐标为 $(0,2)$，对称轴为 y 轴，最低点的坐标为 $(0,2)$，当 $x>0$ 时，y 随 x 的增大而增大，当 $x<0$ 时，y 随 x 的增大而减小. 函数 $y=\frac{1}{4}x^2-2$ 的图象的开口方向向上，顶点坐标为 $(0,-2)$，对称轴为 y 轴，最低点的坐标为 $(0,-2)$，当 $x>0$ 时，y 随 x 的增大而增大，当 $x<0$ 时，y 随 x 的增大而减小.

5. 解：(1) 抛物线的开口方向向上，顶点坐标为 $(-1,-4)$，对称轴为直线 $x=-1$，当 $x>-1$ 时，y 随 x 的增大而增大，当 $x<-1$ 时，y 随 x 的增大而减小.
(2) 抛物线的开口方向向下，顶点坐标为 $(1,3)$，对称轴为直线 $x=1$，当 $x<1$ 时，y 随 x 的增大而增大，当 $x>1$ 时，y 随 x 的增大而减小.

6. 解：$y=(x+2)^2-1$.

7. 解：图象如图所示.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料



(第7题)

(1)图象的开口方向向上,顶点坐标为(1,-4).

(2)当 $x>1$ 时,y 随 x 的增大而增大.

(3)当 $x<1$ 时,y 随 x 的增大而减小.

8. **解**:根据题意可知函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图象必过点(0,-1),(-1,2)和(1,2),则有

$$\begin{cases}c=-1,\\a-b+c=2,\\a+b+c=2,\end{cases}\text{解得}\begin{cases}a=3,\\b=0,\\c=-1,\end{cases}$$

所以函数的表达式为 $y=3x^2-1$.

当 $x=2$ 时,$y=3\times2^2-1=11\neq5$,

所以5错误.

9. **解**:由题意易得 $-\frac{b}{2a}=-\frac{b}{2\times2}=-\frac{b}{4}>0$,

$\frac{4ac-b^2}{4a}=\frac{-40-b^2}{8}<0$,

所以当 $b<0$ 时,抛物线 $y=2x^2+bx-5$ 的顶点在第四象限.

10. **解**:将二次函数 $y=4(x+3)^2-7$ 的图象先向右平移3个单位长度,再向上平移7个单位长度,可得到二次函数 $y=4x^2$ 的图象.

11. **解**:因为点(2,a)在抛物线 $y=-\frac{1}{2}x^2$ 上,

所以 $a=-\frac{1}{2}\times2^2=-2$,即 $a=-2$.

又点(b,-8)在抛物线 $y=-\frac{1}{2}x^2$ 上,

所以 $-8=-\frac{1}{2}b^2$,即 $b^2=16$,

所以 $b=\pm4$.

综上:$a=-2$,$b=\pm4$.

12. **解**:因为点 $A(2,-1)$ 在抛物线 $y=ax^2$ 上,所以 $-1=a\times2^2$,所以 $a=-\frac{1}{4}$,

所以抛物线的表达式为 $y=-\frac{1}{4}x^2$.

又因为 $B(-3,m)$ 在抛物线上,

所以 $m=-\frac{1}{4}\times(-3)^2=-\frac{9}{4}$,

即 $m=-\frac{9}{4}$.

13. **解**:(1)当 $x=0$ 时,$y=c>0$,所以抛物线与 y 轴的交点在原点的上方.

(2)抛物线的对称轴为直线 $x=-\frac{b}{2a}$,因为 $-\frac{b}{2a}>0$,所以抛物线的对称轴在 y 轴的右侧.

(3)抛物线的顶点坐标为 $\left(-\frac{b}{2a},\frac{4ac-b^2}{4a}\right)$,

因为 $-\frac{b}{2a}>0$,$\frac{4ac-b^2}{4a}>0$,

所以抛物线的顶点在第一象限.

14. **解**:(1)抛物线的对称轴为直线 $x=-\frac{-6}{2\times1}=3$,即抛物线的对称轴为直线 $x=3$.

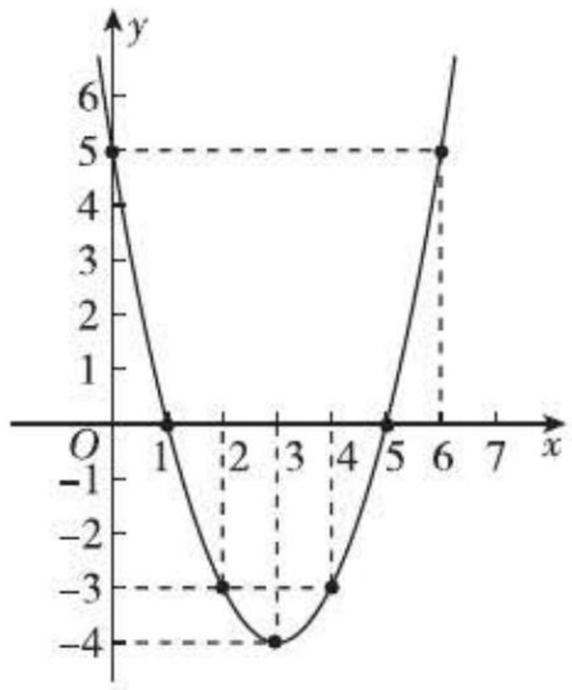
(2)由题图知(1,0)是抛物线上一点,

所以 $1-6+c=0$,所以 $c=5$,

所以抛物线的表达式为 $y=x^2-6x+5=(x-3)^2-4$.

所以它可以由抛物线 $y=x^2$ 先向右平移3个单位,再向下平移4个单位得到.

(3)如图所示.



(第14题)

15. **解**:(1)$a=-1$,$b=4$,$c=-4$.(答案不唯一)

(2)有无数组,例如:$a=-2$,$b=8$,$c=13$.(举例不唯一)

16. **解**:(1)设直线 l 的表达式为 $y=kx+b$,由题知,$A(2,0)$,$B(0,2)$ 是该直线上两点,

所以 $\begin{cases}2k+b=0,\\b=2,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}k=-1,\\b=2,\end{cases}$

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

所以直线 l 的表达式为 $y=-x+2$.

又 P 是 l 上一点,且横坐标为 1,

所以 P 点的纵坐标为 $-1+2=1$,

即 $P(1,1)$.

因为 P 是抛物线与直线的交点,

所以 $a=1$,所以二次函数的表达式为 $y=x^2$.

(2)联立 $\begin{cases}y=-x+2,\\y=x^2,\end{cases}$

得 $\begin{cases}x_1=1,\\y_1=1,\end{cases}\begin{cases}x_2=-2,\\y_2=4,\end{cases}$

所以 $Q(-2,4)$.

所以 $S_{\triangle OPQ}=S_{\triangle AOQ}-S_{\triangle AOP}$

$=\frac{1}{2}\times2\times4-\frac{1}{2}\times2\times1$

$=3$,

即 $\triangle OPQ$ 的面积是 3.

5.5 确定二次函数的表达式

练习:

1. 解:(1)设抛物线的表达式为 $y=a(x-2)^2+1$,

∵ 抛物线过点(3,0),∴ $0=a\times(3-2)^2+1$,

∴ $a=-1$.

∴ $y=-(x-2)^2+1=-x^2+4x-3$,

即 $y=-x^2+4x-3$.

(2)令 $y=0$,即 $-x^2+4x-3=0$,

解得 $x_1=1,x_2=3$.

∴ 这条抛物线与 x 轴另一个交点的坐标为(1,0).

*** 2. 解**:设这个二次函数的表达式为 $y=ax^2+bx+c$.

则 $\begin{cases}a+b+c=-2,\\a-b+c=6,\\4a+2b+c=-9,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=-1,\\b=-4,\\c=3,\end{cases}$

∴ $y=-x^2-4x+3$.

习题 5.5

1. 解:将(0,1),(2,-1)的坐标代入 $y=x^2+bx+c$ 得 $\begin{cases}c=1,\\4+2b+c=-1,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}b=-3,\\c=1.\end{cases}$

∴ $y=x^2-3x+1$.

将 $x=-1$ 代入 $y=x^2-3x+1$,得 $y=5\neq2$,

∴ 点 $P(-1,2)$ 不在这个二次函数的图象上.

2. 解:设所求表达式为 $y=ax^2$.

易知点(0.8,-2.4)在抛物线上,

则 $-2.4=a\times0.8^2$,解得 $a=-3.75$,

∴ $y=-3.75x^2$.

3. 解:设所求表达式为 $y=a(x+1)(x-3)$,

∵ 点(0,3)在图象上,

∴ $3=a(0+1)\times(0-3)$,

∴ $a=-1$.

∴ $y=-(x+1)(x-3)=-x^2+2x+3$.

4. 解:设所求表达式为 $y=a(x-1)^2+k$,

∵ 图象过点(0,-1),(3,5),

∴ $\begin{cases}a(0-1)^2+k=-1,\\a(3-1)^2+k=5,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=2,\\k=-3.\end{cases}$

∴ $y=2(x-1)^2-3=2x^2-4x-1$.

*** 5. 解**:(1)由题图可知 $B(-2,-2)$,$E(0,2)$,$F(2,0)$.

设所求表达式为 $y=ax^2+bx+c$,

将(-2,-2),(0,2),(2,0)代入上式,

得 $\begin{cases}4a-2b+c=-2,\\c=2,\\4a+2b+c=0,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=-\frac{3}{4},\\b=\frac{1}{2},\\c=2,\end{cases}$

∴ $y=-\frac{3}{4}x^2+\frac{1}{2}x+2$.

(2)∵ $-\frac{b}{2a}=-\frac{\frac{1}{2}}{2\times\left(-\frac{3}{4}\right)}=\frac{1}{3}$,

$\frac{4ac-b^2}{4a}=\frac{25}{12}$,

∴ 顶点坐标为 $\left(\frac{1}{3},\frac{25}{12}\right)$.

6. 解:(1)$y=x^2-4x+1$,$y=2x^2-6x+1$.

点拨:答案不唯一.

(2)由题意易知 $\begin{cases}a<0,\\-\frac{b}{2a}<0,\\c=1,\\4a+2b+c=-3,\end{cases}$

∴ $-1<a<0$.

5.6 二次函数的图象与一元二次方程

练习:

1. 解:令 $2x^2-4x-1=0$,解得 $x_1=\frac{2+\sqrt{6}}{2}$,

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

$x_2=\frac{2-\sqrt{6}}{2}$,

∴图象与 x 轴的公共点的坐标为 $\left(\frac{2+\sqrt{6}}{2},0\right),\left(\frac{2-\sqrt{6}}{2},0\right)$.

2. 解:图象略.

由图象可知方程的较大根在 7 和 8 之间,

∵当 $x=7$ 时,$y=-1<0$,

当 $x=8$ 时,$y=6>0$,

当 $x=7.5$ 时,$y=2.25>0$,

∴图象与 x 轴交点在(7,0)和(7.5,0)之间,再将点(7,0)和(7.5,0)之间的线段分为 5 等份,把每个分点的横坐标作为 x 值,代入 $y=x^2-8x+6$ 中,计算对应函数值,易知 $x^2-8x+6=0$ 的较大根为 $x\approx7.2$. 同理可求得较小根为 $x\approx0.8$.

习题 5.6

1. 解:(1)$b^2-4ac=1-1=0$,有 1 个公共点;

(2)$b^2-4ac=1-8=-7<0$,没有公共点;

(3)$b^2-4ac=(-3)^2+16=25>0$,有两个公共点.

2. 略.

3. 解:由题意可知 $b^2-4ac>0$,

即 $3^2-4m>0$,

解得 $m<\frac{9}{4}$,所以当 $m<\frac{9}{4}$ 时,抛物线与 x 轴有两个交点.

4. 解:(1)$x_1=1,x_2=3$.

(2)当 $1<x<3$ 时,$y>0$,

不等式 $ax^2+bx+c>0$ 的解集为 $1<x<3$.

(3)$y=-2x^2+8x-6$.

5. 解:由题意可知 $a^2-1=0$,则 $a=\pm1$.

∵抛物线开口向下,∴ $a=-1$.

6. 解:令 $y=ax^2+2x-5$.

当 $x=0$ 时,$y=a\times0^2+2\times0-5=-5$.

当 $x=1$ 时,$y=a\times1^2+2\times1-5=a-3$.

由题意易知 $-5(a-3)<0$,

∴ $a-3>0$,∴ $a>3$.

∴ a 的取值范围为 $a>3$.

5.7 二次函数的应用

练习:

1. 解:(1)由题意可知另一条对角线长为(40 − x) cm,

则 $y=\frac{1}{2}x(40-x)=-\frac{1}{2}x^2+20x$ $(0<x<40)$.

(2)∵ $y=-\frac{1}{2}x^2+20x=-\frac{1}{2}(x-20)^2+200$,∴当 $x=20$ 时,菱形的面积最大,

最大面积为 200 cm^2.

练习:

1. 解:(1)当 $x=9$ 时,$y=-\frac{1}{15}\times9^2+\frac{1}{3}\times9+\frac{10}{3}=-5.4+3+\frac{10}{3}\approx0.93<2.43$,

∴排球不能打过网.

(2)∵ $-\frac{b}{2a}=-\frac{\frac{1}{3}}{2\times\left(-\frac{1}{15}\right)}=\frac{5}{2}$,

∴当排球走过的水平距离是 $\frac{5}{2}$ m 时,排球距离地面最高.

(3)解方程 $-\frac{1}{15}x^2+\frac{1}{3}x+\frac{10}{3}=0$,

得 $x=10$ 或 $x=-5$(舍去).

∴排球将落在界内.

*** 2. 解**:(1)略.

(2)设所求表达式为 $y=ax^2+bx+c$,

则 $\begin{cases}100a+10b+c=0.5,\\400a+20b+c=2,\\900a+30b+c=4.5,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=0.005,\\b=0,\\c=0,\end{cases}$

∴ $y=0.005x^2$.

(3)当 $2x=36$ 时,$x=18$.

将 $x=18$ 代入 $y=0.005x^2$,得 $y=1.62$.

∵ $1.62<1.8$,

∴不能安全通过.

习题 5.7

1. 解:∵ $a=-\frac{1}{54\,000},b=\frac{1}{\sqrt{3}},c=0$,

∴ $\frac{4ac-b^2}{4a}=\frac{-\frac{1}{3}}{4\times\left(-\frac{1}{54\,000}\right)}=4\,500$,

∴炮弹能达到的最大高度是 4 500 m.

2. 解:(1)由题意可知

$15=20t-\frac{1}{2}\times10\times t^2$,

解得 $t=1$ 或 $t=3$(不合题意,舍去).

∴经过 1 s 离地面 15 m.

(2)烟花在 1.5 s 至 1.8 s 这段时间内上升.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

理由如下：由题得 $y=-5t^2+20t$，

则 $-\dfrac{b}{2a}=2$，

$\because 1.5<1.8<2$，

$\therefore$ 在 1.5 s 至 1.8 s 这段时间内烟花是上升的.

3. **解**：设抛物线的表达式为 $y=ax^2+k$，

则 $\begin{cases}k=0.5,\\a+k=0,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=-0.5,\\k=0.5,\end{cases}$

$\therefore y=-0.5x^2+0.5$.

$\therefore$ 当 $x=0.2$ 时，$y=0.48$，

当 $x=0.6$ 时，$y=0.32$.

$\therefore$ 所需不锈钢管的总长度为 $(0.48+0.32)\times2\times50=80$(m).

4. **解**：设剪掉的正方形的边长为 x cm，则底面边长为 $(40-2x)$ cm.

(1) 由题意可知 $(40-2x)(40-2x)=484$，

解得 $x=9$ 或 $x=31$(舍去).

$\therefore$ 剪掉的正方形的边长为 9 cm.

(2) 设长方体的侧面积为 y cm^2，

则 $y=4x(40-2x)=-8x^2+160x=-8(x-10)^2+800$，

$\therefore$ 当 $x=10$ 时，$y_{max}=800$，

$\therefore$ 长方体盒子的侧面积有最大值，最大值为 800 cm^2，此时剪掉的正方形边长为 10 cm.

5. **解**：(1) 点 $(0,0)$，$(4,0)$，$(2,-2)$.

(2) 设该函数的表达式为 $S=a(t-0)(t-4)$，

则 $-2=a(2-0)(2-4)$，

解得 $a=\dfrac{1}{2}$，

$\therefore S=\dfrac{1}{2}t(t-4)$.

当 $S=30$ 时，$30=\dfrac{1}{2}t(t-4)$，

解得 $t=10$ 或 $t=-6$(舍去).

$\therefore$ 截止到第 10 个月末，公司累计利润可达 30 万元.

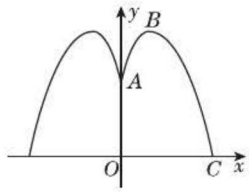
(3) 当 $t=5$ 时，$S=\dfrac{1}{2}\times5\times(5-4)=2.5$，

当 $t=4$ 时，$S=0$.

$\because 2.5-0=2.5$(万元)，

$\therefore$ 公司第 5 个月所获得的利润是 2.5 万元.

6. **解**：以 OC 所在直线为 x 轴，OA 所在直线为 y 轴建立平面直角坐标系(如图).



(第 6 题)

(1) 设抛物线对应的函数表达式为 $y=a(x-1)^2+2.25$.

将 $A(0,1.25)$ 的坐标代入上式，

得 $1.25=a(0-1)^2+2.25$，

解得 $a=-1$. $\therefore y=-(x-1)^2+2.25$.

令 $-(x-1)^2+2.25=0$，得 $x=2.5$ 或 $x=-0.5$(舍去)，

$\therefore$ 水池的半径至少为 2.5 m 时才能使喷出的水流不致落到池外.

(2) 略.

7. **解**：(1) $\because MN=x$，$AD=8$ cm，

$\therefore AE=(8-x)$ cm.

$\because PN/\!/BC$，$\therefore \triangle APN\backsim\triangle ABC$，

$\therefore \dfrac{PN}{BC}=\dfrac{AE}{AD}$，即 $\dfrac{y}{12}=\dfrac{8-x}{8}$，

$\therefore y=\dfrac{3}{2}(8-x)$.

(2) 由题意得 $S_{矩形PQMN}=PN\cdot MN=\dfrac{3}{2}(8-x)\cdot x$

$=-\dfrac{3}{2}x^2+12x$

$=-\dfrac{3}{2}(x-4)^2+24$，

$\therefore$ 当 $x=4$ cm，$y=\dfrac{3}{2}\times(8-4)=6$(cm) 时，矩形 $PQMN$ 面积最大，最大面积为 24 cm^2.

综合练习

1. (1) 双曲线；三；减小

(2) 抛物线；增大

(3) $(0,6)$；$(-2,0)$ 和 $\left(\dfrac{3}{2},0\right)$

2. **解**：$y=\begin{cases}100t(0\leqslant t\leqslant3.2),\\60t+128(3.2<t\leqslant7.2).\end{cases}$

3. **解**：(1) x 取全体实数；

(2) $\because x^2+2x-3\neq0$，

$\therefore x\neq-3$ 且 $x\neq1$；

(3) $\because x-1\geqslant0$，$\therefore x\geqslant1$；

(4) $\because x+1\geqslant0$ 且 $2-x\neq0$，

$\therefore x\geqslant-1$ 且 $x\neq2$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

4. **解**：(1)由题意易知 $A(-1,0)$，$B(0,1)$，
将 $(-1,0)$，$(0,1)$ 代入 $y=kx+b$，
得 $\begin{cases}-k+b=0,\\b=1,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}k=1,\\b=1.\end{cases}$ $\therefore y=x+1$.
当 $x=1$ 时，$y=2$.
$\therefore C(1,2)$.
(2)由(1)知一次函数表达式为 $y=x+1$.
将 $(1,2)$ 代入 $y=\frac{m}{x}$，
得 $2=\frac{m}{1}$，$\therefore m=2$.
$\therefore$ 反比例函数的表达式为 $y=\frac{2}{x}$.

5. **解**：(1)该电源两端的电压为 $1.8\times8=14.4$(V)．$I=\frac{14.4}{R}$.
(2)$\because$ 当 $R=2$ 时，$I=7.2$，当 $R=200$ 时，$I=0.072$，
$\therefore$ 电流应在 0.072 A～7.2 A 之间.
(3)由题意可知 $\frac{14.4}{R}\leqslant20$，
解得 $R\geqslant0.72$，
$\therefore$ 该滑动变阻器的可变电阻应在 0.72 Ω～200 Ω范围内.

6. **解**：(1)$\because y=x^2-4x+5=(x^2-4x+4)+1=(x-2)^2+1$，
$\therefore$ 抛物线的开口向上，对称轴为直线 $x=2$，顶点坐标为 $(2,1)$，有最小值.
(2)$\because y=-\frac{1}{4}x^2-\frac{3}{2}x+4$
$=-\frac{1}{4}(x^2+6x)+4$
$=-\frac{1}{4}(x^2+6x+9-9)+4$
$=-\frac{1}{4}(x+3)^2+\frac{9}{4}+4$
$=-\frac{1}{4}(x+3)^2+\frac{25}{4}$，
$\therefore$ 此抛物线的开口向下，对称轴为直线 $x=-3$，顶点坐标为 $\left(-3,\frac{25}{4}\right)$，有最大值.
(3)$\because y=3x^2-2x+1=3\left(x^2-\frac{2}{3}x\right)+1$
$=3\left[x^2-\frac{2}{3}x+\left(-\frac{1}{3}\right)^2-\left(-\frac{1}{3}\right)^2\right]+1$
$=3\left[\left(x-\frac{1}{3}\right)^2-\frac{1}{9}\right]+1$
$=3\left(x-\frac{1}{3}\right)^2-\frac{1}{3}+1$
$=3\left(x-\frac{1}{3}\right)^2+\frac{2}{3}$，
$\therefore$ 此抛物线开口向上，对称轴为直线 $x=\frac{1}{3}$，顶点坐标为 $\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)$，有最小值.
(4)$\because y=-\frac{1}{2}x^2+2x+1=-\frac{1}{2}(x^2-4x+4-4)+1=-\frac{1}{2}[(x-2)^2-4]+1=-\frac{1}{2}(x-2)^2+3$，
$\therefore$ 此抛物线开口向下，对称轴为直线 $x=2$，顶点坐标为 $(2,3)$，有最大值.

7. **解**：$y=-x^2$（答案不唯一）.

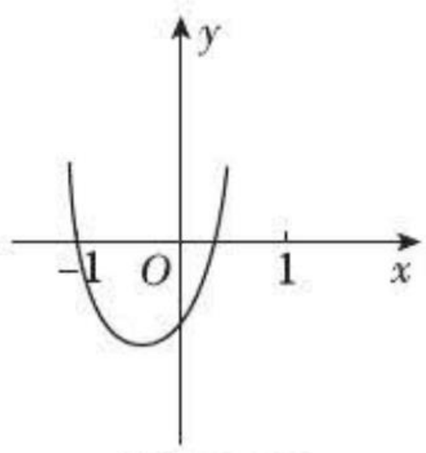
8. **解**：(1)由表格中的数据易知，
当 $x=3$ 时，$y=-4$.
(2)设该二次函数的表达式为 $y=a(x-1)^2-2$，
将 $\left(0,-\frac{5}{2}\right)$ 代入 $y=a(x-1)^2-2$，
得 $a=-\frac{1}{2}$，
$\therefore y=-\frac{1}{2}(x-1)^2-2$.

9. **解**：(1)将 $(-1,-6)$，$(2,3)$ 分别代入 $y=ax^2+2x-c$，
得 $\begin{cases}a-2-c=-6,\\4a+4-c=3,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=1,\\c=5,\end{cases}$
$\therefore y=x^2+2x-5$.
$\therefore$ 对称轴为直线 $x=-1$.
(2)$y=2x^2+4x-5$，$y=-2x^2-4x-5$.
点拨：(2)题答案不唯一.

10. 略.

11. **解**：由题意可知 $4b^2-16=0$，
解得 $b=\pm2$.

12. **解**：由题意可知当 $x=-1$ 时，$y=0$. 图象如图.



（第 12 题）

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

13. 解：(1) $y=\begin{cases}20x(0<x\leqslant 2),\\ -10x+60(2<x\leqslant 3),\\ 30(3<x\leqslant 6).\end{cases}$

(2)略.

14. C

15. 解：将面积为 S_2、S_3 的阴影部分都平移至 S_1 的下方，则易知 $S_1+S_2+S_3=2-\frac{1}{4}\times 2=\frac{3}{2}$.

16. 解：(1)错误.

$\because -\frac{b}{2a}>0$，$\therefore ab<0$.

又$\because c>0$，$\therefore abc<0$.

(2)错误.

$\because$ 当 $x=-1$ 时，$y<0$，

$\therefore a-b+c<0$，$\therefore b>a+c$.

(3)正确. 易知当 $x=2$ 时，$y>0$.

即 $4a+2b+c>0$.

(4)正确.

$\because -\frac{b}{2a}=1$，$\therefore 2a+b=0$.

$\therefore a+b=-a>0$，

$\therefore a+b>0$.

17. 解：抛物线 C_2 的表达式为 $y=-2x^2+4x-5$.

18. 解：设 AC 与 BD 的交点为 M，$A\left(x_1,\frac{k}{x_1}\right)$，$B\left(x_2,\frac{k}{x_2}\right)$，则 $C\left(x_1,0\right)$，$D\left(0,\frac{k}{x_2}\right)$，$M\left(x_1,\frac{k}{x_2}\right)$，

$\therefore BD=x_2$，$AM=\frac{k}{x_1}-\frac{k}{x_2}$，

$AC=\frac{k}{x_1}$，$BM=x_2-x_1$，

$\therefore S_{\triangle ADB}-S_{\triangle ACB}=\frac{1}{2}BD\cdot AM-\frac{1}{2}AC\cdot BM=\frac{1}{2}\cdot x_2\cdot\left(\frac{k}{x_1}-\frac{k}{x_2}\right)-\frac{1}{2}\cdot\frac{k}{x_1}\cdot(x_2-x_1)=\frac{1}{2}\left[\frac{x_2}{x_1}\cdot k-k-\frac{x_2}{x_1}k+k\right]=0$.

$\therefore \triangle ADB$ 与 $\triangle ACB$ 面积相等.

19. 解：(1)联立 $\begin{cases}y=x^2-2x+a,\\ y=x+1,\end{cases}$

得 $x+1=x^2-2x+a$，

即 $x^2-3x+a-1=0$，结合 $x_2>x_1\geqslant 0$，

可得 $(-3)^2-4(a-1)>0$ 且 $x_1\cdot x_2=a-1\geqslant 0$，

解得 $1\leqslant a<\frac{13}{4}$.

(2)由(1)得 $x^2-3x+a-1=0$，

$\therefore x_1+x_2=3$，$x_1\cdot x_2=a-1$，

易知 $y_1=x_1+1$，$y_2=x_2+1$ 且 $y_1>0$，$y_2>0$.

$S_{四边形ABFE}=\frac{1}{2}(AE+BF)\cdot EF$

$=\frac{1}{2}(|y_1|+|y_2|)\cdot|x_2-x_1|$

$=\frac{1}{2}(x_1+1+x_2+1)\cdot\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}$

$=\frac{1}{2}\times 5\times\sqrt{13-4a}$

$=\frac{5}{2}\sqrt{13-4a}$.

由(1)知 $1\leqslant a<\frac{13}{4}$，

$\therefore$ 当 $a=1$ 时，$S_{四边形ABFE}$ 有最大值，最大值为 $\frac{15}{2}$.

20. 解：(1)$\because$ 四边形 $OABC$ 为矩形，$\therefore OA=BC=3$，$OC=AB=4$. 又$\because NP\perp BC$，

$\therefore NP\parallel AB$，$\therefore \triangle CPN\backsim\triangle CAB$. $\therefore CN:CB=PN:AB$，$\therefore PN=\frac{CN\cdot AB}{CB}=\frac{4(3-x)}{3}$.

$\therefore P$ 点的纵坐标为 $4-\frac{4(3-x)}{3}=\frac{4}{3}x$，$\therefore P$ 点的坐标为 $\left(3-x,\frac{4}{3}x\right)$.

(2)设 $\triangle MPA$ 的面积为 S，

在 $\triangle MPA$ 中，$MA=3-x$，MA 边上的高为 $\frac{4}{3}x$，其中 $0\leqslant x\leqslant 3$，

则 $S=\frac{1}{2}(3-x)\cdot\frac{4}{3}x=\frac{2}{3}(-x^2+3x)=-\frac{2}{3}\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{3}{2}$.

$\therefore S$ 的最大值为 $\frac{3}{2}$，此时 $x=\frac{3}{2}$.

(3)延长 NP 交 x 轴于 Q，则有 $PQ\perp OA$.

①若 $MP=PA$.

$\because PQ\perp MA$，$\therefore MQ=QA=BN=x$.

$\therefore 3x=3$，$\therefore x=1$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

②若 $MP=MA$，则 $MQ=3-2x$，$PQ=\frac{4}{3}x$，

$PM=MA=3-x$.

在 Rt△PMQ 中，∵ $PM^2=MQ^2+PQ^2$，

∴ $(3-x)^2=(3-2x)^2+\left(\frac{4}{3}x\right)^2$，

解得 $x=0$（舍去）或 $x=\frac{54}{43}$，

∴ $x=\frac{54}{43}$.

③若 $PA=AM$.

由(1)得 $PA=\frac{5}{3}x$，$AM=3-x$，

∴ $\frac{5}{3}x=3-x$，

∴ $x=\frac{9}{8}$.

综上可知，当 $x=1$ 或$\frac{54}{43}$或$\frac{9}{8}$时，

△MPA 是等腰三角形.

综合与实践　实际问题与分段函数模型

习题：

1. 解：(1)由题意可设 $1\leqslant 13x\leqslant 1\ 000$，

解得$\frac{1}{13}\leqslant x\leqslant 76\frac{12}{13}$.

∵ x 为正整数，∴ 有 76 个数是 13 的倍数.

(2)由题意可设 $1\ 000\leqslant 87x\leqslant 2\ 000$，

解得 $11\frac{43}{87}\leqslant x\leqslant 22\frac{86}{87}$. ∵ x 为正整数，

∴ 有 11 个数是 87 的倍数.

2. 解：(1)由题意可知，

$5-\frac{1}{2}\leqslant x+2<5+\frac{1}{2}$，

即$\frac{9}{2}\leqslant x+2<\frac{11}{2}$，

∴ $\frac{5}{2}\leqslant x<\frac{7}{2}$.

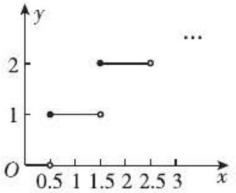
(2)设 x 的整数部分为 a，小数部分为 b，

则由题意，得$\langle x+m\rangle=\langle a+b+m\rangle=a+m+\langle b\rangle$.

∵ $\langle x\rangle+m=\langle a+b\rangle+m=a+\langle b\rangle+m$，

∴ $\langle x+m\rangle=\langle x\rangle+m$.

(3)如图.



（第 2 题）

(4)由题意可知，

$x-\frac{1}{2}\leqslant\frac{4}{3}x<x+\frac{1}{2}$，

解得 $-\frac{3}{2}\leqslant x<\frac{3}{2}$.

又由题意得 x 为非负整数，

∴ $x=0$ 或 1.

(5)不一定成立.

反例：$\langle 0.7\rangle=1$，$\langle 0.6\rangle=1$，

$\langle 0.7+0.6\rangle=\langle 1.3\rangle=1$.

∵ $\langle 0.7\rangle+\langle 0.6\rangle=2\neq\langle 0.7+0.6\rangle$，

∴ $\langle x\rangle+\langle y\rangle=\langle x+y\rangle$ 不一定成立.

第 6 章 事件的概率

6.1 随机事件

练习：

1. (1)随机　(2)随机　(3)必然

(4)不可能　(5)随机

2. B

习题 6.1

1. 解：(1)(2)(4)是随机事件，(3)是必然事件，(5)是不可能事件.

2. 略.

3. 解：随机事件.

4. 解：(1)略. (2)不一定. (3)随机事件.

5. 解：必然事件：(2)，不可能事件：(3)(5)，随机事件：(1)(4)(6)(7)(8).

举成语略.

6. 解：随机事件. 例如：用长度分别为 3,4,5 或 5,6,8 的线段能组成三角形，而用长度分别为 1,2,8 或 2,3,7 的线段不能组成三角形，所以是随机事件.

6.2 频数与频率

练习：

1. 略.

习题 6.2

1. 解：

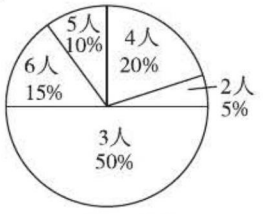
自己的衣服谁来洗	A	B	C	D
划记	正正正一	正正丁	正下	下
频数	16	12	8	4
频率	0.4	0.3	0.2	0.1

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

2. 解:(1)

家庭人口数	2	3	4	5	6
划记	一	正正	丆	丅	下
频数	1	10	4	2	3
频率	0.05	0.5	0.2	0.1	0.15

(2)如图.



(第2题)

3. 解:

字母	e	t	s	z
划记	正正正正下	正正正丆	正正正下	
频数	23	19	18	0
频率	0.127	0.105	0.099	0

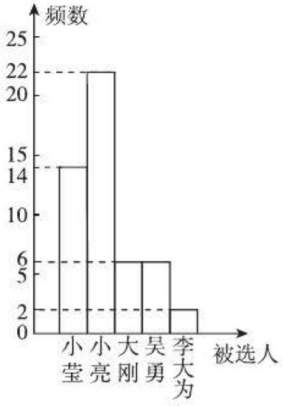
6.3 频数直方图

练习:

1. 解:

被选人	小莹	小亮	大刚	吴勇	李大为	合计
划记	正正丆	正正正正丅	正一	正一	丅	
频数	14	22	6	6	2	50
频率	0.28	0.44	0.12	0.12	0.04	1

频数直方图如图.



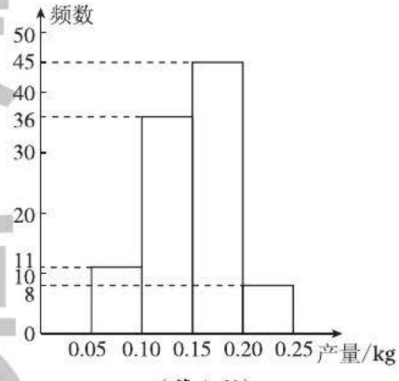
(第1题)

练习:

1. 解:(1)

产量 x/kg	$0.05<x\leqslant0.10$	$0.10<x\leqslant0.15$	$0.15<x\leqslant0.20$	$0.20<x\leqslant0.25$
划记	正正一	正正正正正正正一	正正正正正正正正	正下
频数	11	36	45	8
频率	0.11	0.36	0.45	0.08

频数直方图如图:



(第1题)

(2)略.

习题 6.3

1. 略.

2. 解:(1)3+4+6+7+8+6+4+1+1=40(名),共有40名学生参加比赛.

(2)投篮命中数在5次以上的学生共有6+4+1+1=12(名),因为$\frac{12}{40}=\frac{3}{10}$,所以投篮命中数在5次以上的学生与参赛人数的比是3:10.

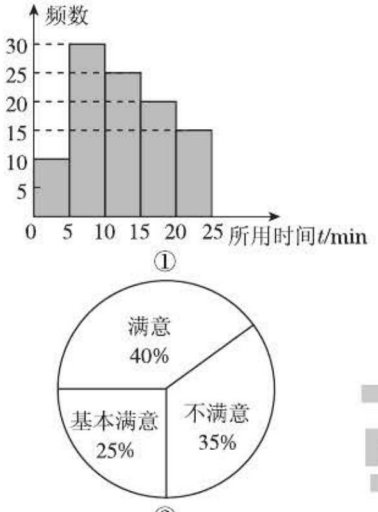
(3)投篮命中数的平均数为$\frac{3\times1+4\times2+6\times3+7\times4+5\times8+6\times6+7\times4+8\times1+9\times1}{40}=4.45$(次),投篮命中数的中位数是$\frac{4+5}{2}=4.5$(次),投篮命中数的众数是5次,投篮命中数的方差是3.747 5.

3. 解:(1)表中所填数据(从左到右)依次为0.1;30;25;0.2;15

(2)如图①所示.

(3)如图②所示.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料



（第3题）

4. 解：(1)根据题意可知活动时间少于80 min的同学占4%，

所以活动时间在80 ~ 100 min的同学占8%，

所以此次调查的总人数为12 ÷ 8% = 150(人)，

即这次共调查了150人.

(2)活动时间在60 ~ 80 min的同学有150 × 4% = 6(人)，

因为第2,3,4组的频数之比为4∶17∶15，且第2组的频数为12，所以第3组的频数为51，第4组的频数为45，所以活动时间不少于140 min的有150 − 6 − 12 − 51 − 45 = 36(人).

5. 解：12 345 679；24 691 358；49 382 716；61 728 395；86 419 753；98 765 432；135 802 469.

(1)不都是.

(2)

数字	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
划记	正一	正一	正丅	正一	正一	正丅	正	正一	正丅	一
频数	6	6	7	6	6	7	5	6	7	1
频率	$\frac{2}{19}$	$\frac{2}{19}$	$\frac{7}{57}$	$\frac{2}{19}$	$\frac{2}{19}$	$\frac{7}{57}$	$\frac{5}{57}$	$\frac{2}{19}$	$\frac{7}{57}$	$\frac{1}{57}$

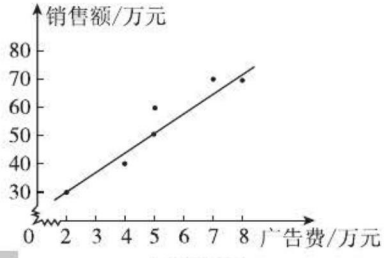
(3)略.

6.4 随机现象的变化趋势

练习：

1. 解：在例1中所画的直线上取横坐标为9的点，其纵坐标为1.7. 所以由此估计当产品日营业额为9万元时，日利润大约为1.7万元.

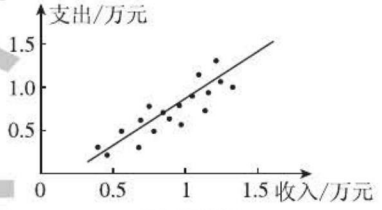
2. 解：如图.



（第2题）

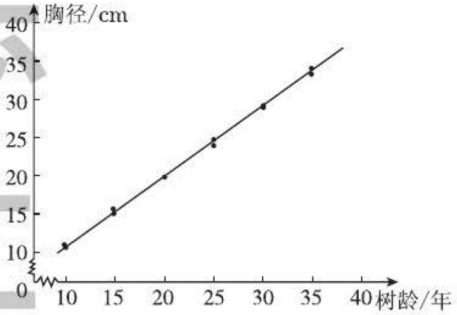
习题6.4

1. 解：如图.



（第1题）

2. 解：如图.



（第2题）

在如图所示的直线上取横坐标为40的点，其纵坐标为37.5，所以由此估计树龄为40年的这种乔木的胸径是37.5 cm.

3. 略.

4. 解：(1)描点如图.

(2)画线如图.

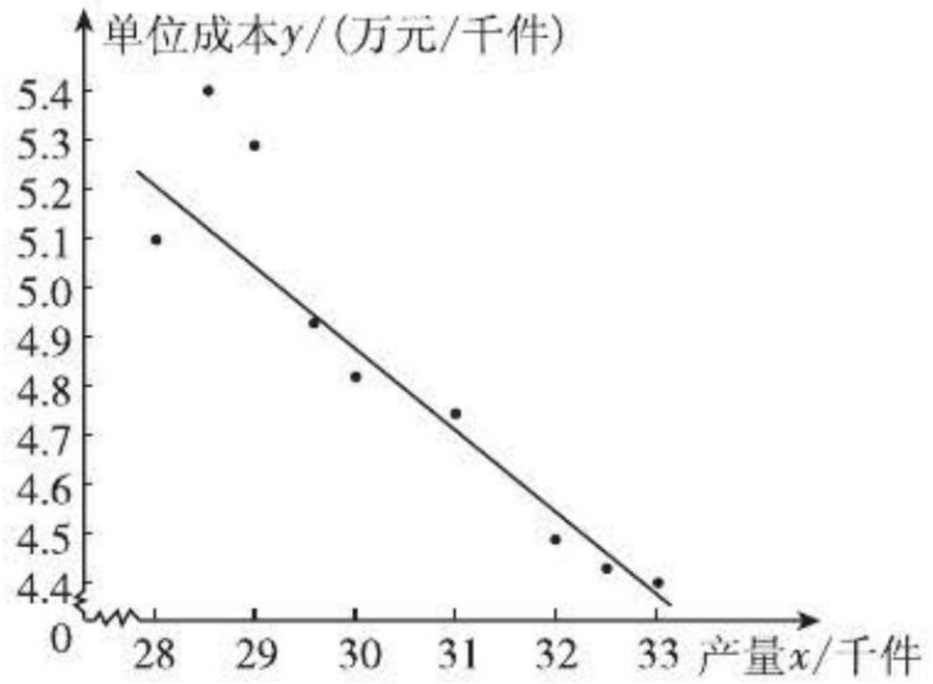
观察这条直线，可得随着产量增加，单位成本降低.

(3)估计当产量为34千件时，

单位成本是4.2万元/千件.

(4)本节例题中y随x的增大而增大，本题所画的直线对应的函数值y随x的增大而减小.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料



(第4题)

6.5 事件的概率

练习:

1. 解:(1)第4次不一定正面朝上,也不一定反面朝上. 第4次出现正面朝上的可能性为$\frac{1}{2}$.

(2)不能.

练习:

1. 解:(1)0.95;0.925;0.91;0.895;0.902 5;0.902

(2)当样本容量逐渐增大时,灯泡的合格频率逐渐稳定在0.9附近,由此可估计,这种灯泡的合格率为0.9.

2. 解:由题中数据可得这种玉米种子发芽频率稳定在0.8,由此估计这种玉米发芽率是0.8.

习题6.5

1. 解:估计一枚图钉落地时钉尖触地的概率是0.6.

2. 略.

3. 解:由试验结果估计袋子里黄球所占的比例为$\frac{90}{150}=0.6$. 估计袋中黄球有$8\div(1-0.6)\times0.6=12$(个).

4. 解:(1)0.09;0.08;0.096;0.094;0.1;0.102 4;0.100 4;0.100 34;0.995 48

(2)当n逐渐增大时,数字6出现的频率逐渐稳定在0.1附近,由此可估计6出现的概率是0.1.

5. 解:$10\div21\approx0.48$;$5\div12\approx0.42$;$6\div15=0.4$;$7\div17\approx0.41$;$3\div8=0.375$;$8\div20=0.4$. 由此估计出该运动员投篮时的命中率是0.4.

6. D;C

7. 解:抛掷第4次时,落下后正面朝上的概率是0.5.

8. 解:(1)$(505+1\ 529)\div(505+1\ 352+1\ 529+9\ 203)\approx0.16$,所以估计一名顾客进入该店后购买商品的概率是0.16.

(2)$505\div(505+1\ 352)\approx0.27$,

$1\ 529\div(1\ 529+9\ 203)\approx0.14$,

所以估计男性顾客进入该店后购买商品的可能性较大.

9. 解:说道理略.

估计这个鱼塘中共有鱼$\frac{km}{n}$条.

6.6 简单的概率计算

练习:

1. 解:$P(\text{牌上点数为2})=\frac{4}{54}=\frac{2}{27}$.

2. 解:$P(\text{摸到红球})=\frac{3}{3+5+7}=\frac{1}{5}$.

$P(\text{摸到的球不是红球})=\frac{5+7}{3+5+7}=\frac{4}{5}$.

练习:

1. 解:$P(\text{朝上一面为红色})=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$.

$P(\text{朝上一面为红色})=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$.

2. 解:$P(\text{两数之和是负数})=\frac{2}{3}$.

练习:

1. 解:$P(\text{他恰好拨通})=\frac{90-30\times2}{90}=\frac{1}{3}$.

2. 解:$P(\text{点}C\text{到原点}O\text{的距离不大于2})=\frac{2\times2}{4-(-3)}=\frac{4}{7}$.

习题6.6

1. 解:$P(\text{任取1件恰为一等品})=\frac{95}{100}=0.95$.

2. 解:$P(\text{恰好把锁打开})=\frac{1}{10\times10\times10}=\frac{1}{1\ 000}$.

3. 解:(1)$P(\text{卡片上的数是奇数})=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$.

(2)$P(\text{卡片上的数是偶数})=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

（3）P（卡片上的数小于7）$=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$.

4. **解**：（1）P（这一天是星期日）$=\frac{4}{31}$.

（2）P（这一天是星期一至星期五中的一天）$=\frac{22}{31}$.

5. **解**：（1）估计摸出花色是“红桃”的次数是 $1\,000\times\frac{1}{4}=250$.

（2）估计摸出牌面是“A”的次数是 $1\,000\times\frac{4}{52}\approx77$.

6. **解**：P（正好显示列车班次信息）$=\frac{2}{2+1}=\frac{2}{3}$.

7. **解**：每小时接待查询电话的时间为 $36\times50\div60=30$（分），

故 P（恰好接通）$=\frac{30}{60}=\frac{1}{2}$.

8. **解**：（1）涂白色的扇形圆心角为 $360°-60°-30°-120°-90°=60°$.

P（落在红色扇形中）$=\frac{60°}{360°}=\frac{1}{6}$.

P（落在绿色扇形中）$=\frac{30°}{360°}=\frac{1}{12}$.

P（落在蓝色扇形中）$=\frac{120°}{360°}=\frac{1}{3}$.

P（落在黄色扇形中）$=\frac{90°}{360°}=\frac{1}{4}$.

P（落在白色扇形中）$=\frac{60°}{360°}=\frac{1}{6}$.

（2）估计袋子中球的总数是 $2\div\frac{1}{6}=12$.

由此估计袋子中绿球个数为 $12\times\frac{1}{12}=1$.

蓝球个数为 $12\times\frac{1}{3}=4$.

黄球个数为 $12\times\frac{1}{4}=3$.

白球个数为 $12\times\frac{1}{6}=2$.

9. **解**：P（点落在正方形 $COBA$ 上及其内部的概率）$=\frac{4\times4}{6\times6}=\frac{4}{9}$.

10. **解**：在本班同学中随机地挑选两名同学，恰为同年出生的概率大于恰为同一个月出生的概率. 在一个城市中任选两个人，恰为同一个月出生的概率大于恰为同年出生的概率.

原因略.

11. **解**：（1）P（摸到C棋）$=\frac{3}{10}$.

（2）P（小莹恰能获胜）$=\frac{4}{10-1}=\frac{4}{9}$.

（3）小莹先摸到A棋，此时 P（小莹恰能获胜）$=\frac{2+3}{10-1}=\frac{5}{9}$.

小莹先摸到B棋，此时 P（小莹恰能获胜）$=\frac{3+4}{10-1}=\frac{7}{9}$.

小莹先摸到C棋，此时 P（小莹恰能获胜）$=\frac{4}{10-1}=\frac{4}{9}$.

小莹先摸到D棋，此时 P（小莹恰能获胜）$=\frac{1}{10-1}=\frac{1}{9}$.

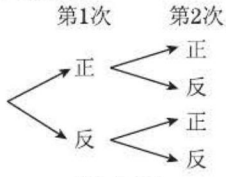
因为 $\frac{1}{9}<\frac{4}{9}<\frac{5}{9}<\frac{7}{9}$，

所以小莹先摸到B棋获胜的概率最大.

6.7 利用画树状图和列表计算概率

练习：

1. **解**：画树状图如图.



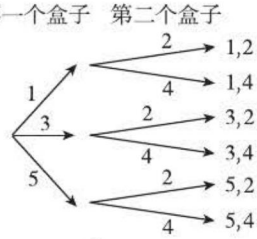
（第1题）

故落定后，两次都是正面朝上的概率是 $\frac{1}{4}$. 至少一次正面朝上的概率是 $\frac{3}{4}$.

2. **解**：两张卡片上的数字之和为1的概率 $P=\frac{1}{2}$.

练习：

1. **解**：画树状图如图.



（第1题）

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

故 P(卡片上的数字为相邻整数) = $\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$.

2. 解:列表如下:

第一只盒子 \ 第二只盒子	草莓味	柠檬味	杏仁味
草莓味	草、草	草、柠	草、杏
柠檬味	柠、草	柠、柠	柠、杏

P(两块糖恰是不同味) = $\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$.

习题 6.7

1. 解:列表如下:

第一次 \ 第二次	1	2	3	4	5	6
1	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
2	(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
3	(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)
4	(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)
5	(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)
6	(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)

共有 36 种等可能的结果,其中"朝上一面的数字都是偶数"包含 9 种结果,故"朝上一面的数字都是偶数"的概率是$\frac{9}{36}=\frac{1}{4}$.

其中"数字之积是 6"包含 4 种结果,故"数字之积是 6"的概率是$\frac{4}{36}=\frac{1}{9}$.

2. 解:画树状图如图.



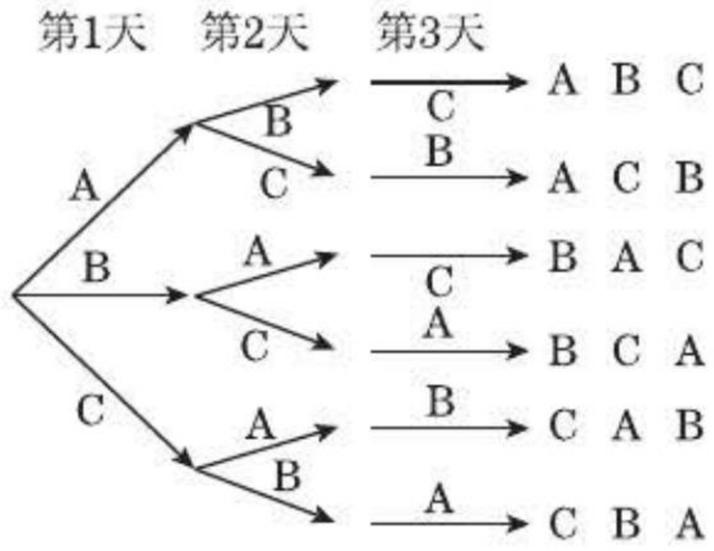
(第 2 题)

(1)两张纸牌分别写有"1"和"2"的概率是$\frac{1}{3}$.

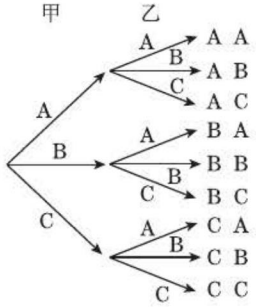
(2)其中一张纸牌上写有"1"的概率是$\frac{2}{3}$.

3. 解:在 3 个乒乓球中任取 2 个,共包含 6 种等可能的结果,其中"取出的两个球都是正品"包含2 种结果,故事件"两个球都是正品"的概率是$\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$.

4. 解:画树状图如图.


第1天
第2天
第3天
A
B
C
B
C
A
C
A
B
C
A
B
C
A
B

6. 解：画树状图如图.



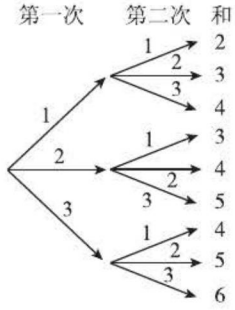
（第 6 题）

P（甲、乙恰好分到同一个组）$=\frac{3}{9}=\frac{1}{3}$.

P（甲、乙恰好都分到 A 组）$=\frac{1}{9}$.

7. 解：小亮在第 1 个路口遇到绿灯的概率为 $\frac{30}{60+30}=\frac{1}{3}$，在第 2 个路口遇到绿灯的概率为 $\frac{50}{50+50}=\frac{1}{2}$，故小亮上学时两次都遇到绿灯的概率是 $\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{6}$.

8. 解：画树状图如图.

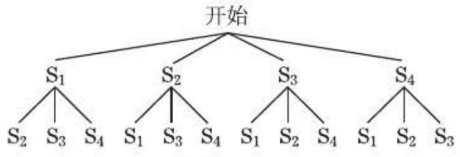


（第 8 题）

和为 2 的有 1 次，和为 3 的有 2 次，和为 4 的有 3 次，和为 5 的有 2 次，和为 6 的有 1 次，所以棋子走一步到达 E 点的可能性最大，

P（走到 E 点）$=\frac{1}{3}$.

9. 解：画树状图如图.



（第 9 题）

共有 12 种可能的结果，能使灯泡发光的是闭合 S_1、S_3 或 S_1、S_4 或 S_2、S_3 或 S_2、S_4，故能够使灯泡发光的概率是 $\frac{4}{12}=\frac{1}{3}$.

10. 解：选择 A 转盘. 理由：列表如下：

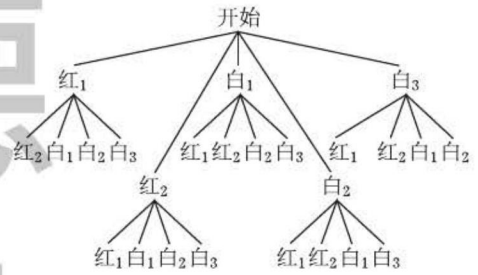
B \ A	1	6	8
4	(4,1)	(4,6)	(4,8)
5	(5,1)	(5,6)	(5,8)
7	(7,1)	(7,6)	(7,8)

从表中可以看出，转动 A 转盘胜出的概率是 $\frac{5}{9}$，因此选择 A 转盘.

11. 解：(1) P（摸到红球）$=\frac{2}{2+3}=\frac{2}{5}$.

(2) 小亮的想法不正确. 理由如下：

画树状图如图.



（第 11 题）

P（摸到两个红球）$=\frac{2}{20}=\frac{1}{10}$.

故摸出两个红球的概率是上面问题(1)的答案的 $\frac{1}{10}\div\frac{2}{5}=\frac{1}{4}$，所以小亮的想法不正确.

综合练习

1. 解：(4).

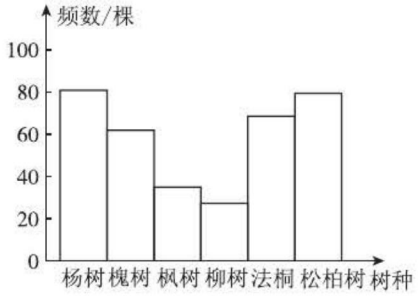
2. 解：频数、频率分布表如下：

组别	杨树	槐树	枫树	柳树	法桐	松柏树
频数	81	62	35	28	68	79
频率	0.23	0.18	0.10	0.08	0.19	0.22

画出频数直方图如图.

荣德基

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

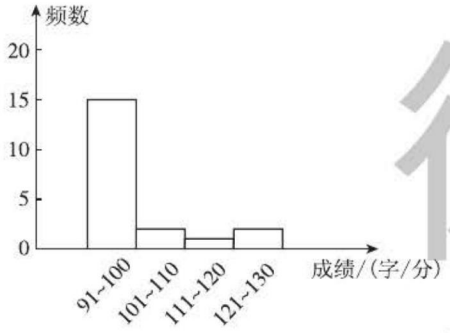


（第 2 题）

3. 解：频数、频率分布表如下：

成绩/(字/分)	91 ~ 100	101 ~ 110	111 ~ 120	121 ~ 130
频数	15	2	1	2
频率	0.75	0.1	0.05	0.1

画出频数直方图如图.

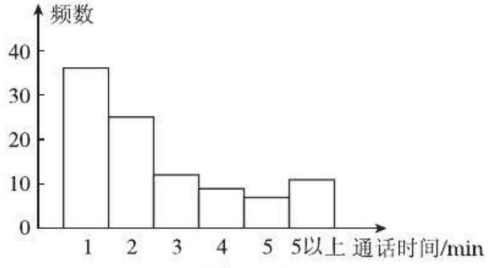


（第 3 题）

4. 解：列频数、频率分布表如下：

通话时间/min	1	2	3	4	5	5 以上
频数	36	25	12	9	7	11
频率	0.36	0.25	0.12	0.09	0.07	0.11

画频数直方图如图.



（第 4 题）

5. 解：(1)参加比赛的学生共有

$2+3+31+4=40$(名).

(2)分布在 90 分～100 分这一组的频率是

$\frac{4}{40}=\frac{1}{10}=0.1$.

(3)这次测试成绩的众数在 80 分～89 分这一组.

(4)80 分以上(含 80 分)的人数为 $31+4=35$,

所以优良率是$\frac{35}{40}=0.875$.

6. 解：(1)(2).

7. 解：(1)0.8;0.92;0.96

0.95;0.956;0.954

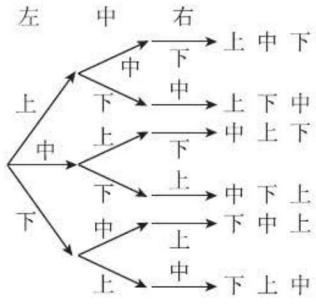
(2)估计该厂生产的电视机优等品的概率是 0.95.

8. 解：从中随机地取 1 把钥匙，能打开九年级一班教室门锁的概率是$\frac{1}{15}$.

9. 解：任意写出一个以 6 220 开头的 8 位数，这个数恰为该市一个电话用户号码的概率是$\frac{2\ 865}{10\times10\times10\times10}=0.2865$.

10. 解：恰好遇到广告的概率是$\frac{1}{18+1}=\frac{1}{19}$.

11. 解：画树状图如图.



（第 11 题）

故自左至右恰好为上、中、下的概率是$\frac{1}{6}$.

12. 解：列表如下：

B 盒 \ A 盒	黑	黑	白
黑	黑黑	黑黑	白黑

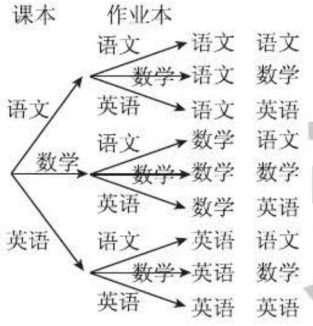
荣德基

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

白	黑白	黑白	白白
白	黑白	黑白	白白

故两枚棋子同色的概率是$\frac{4}{9}$.

13. **解**：画树状图如图.

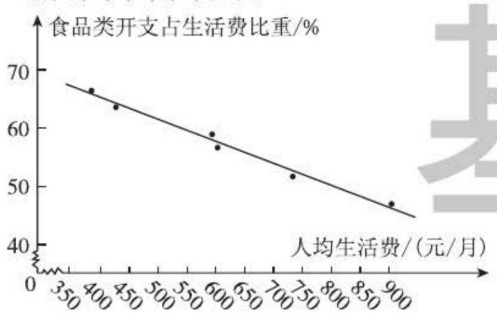


（第13题）

由树状图知共有9种等可能的结果，其中课本和作业本恰为同一门课包含3种结果，故所求概率为$\frac{3}{9}=\frac{1}{3}$.

14. **解**：10～99中共有90个整数，其中是4的倍数的整数有22个，所以这个整数是4的倍数的概率是$\frac{22}{90}=\frac{11}{45}$.

15. **解**：(1)(2)(3)如图.



（第15题）

16. **解**：(1) $\frac{30+25}{1-0.05-0.15-0.25}=100$(人).

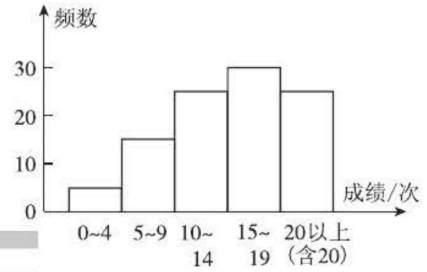
$100\times0.05=5$；$100\times0.15=15$；$100\times0.25=25$，

故前3组的频数分别为5，15，25.

(2)由(1)得参加本次测试的学生共有100人.

(3)此次测试的及格率是$1-0.05-0.15=0.8=80\%$.

(4)画频数直方图如图.

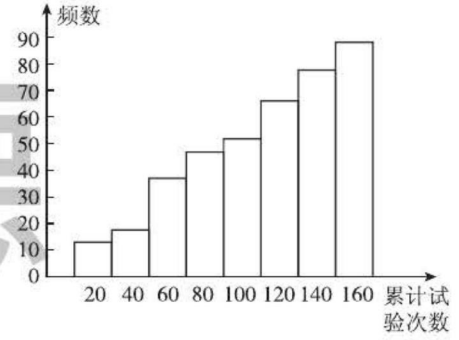


（第16题）

17. **解**：(1)(从左到右)

14；18；0.63；0.587 5；52；66；0.56；88

(2)画频数直方图如图.



（第17题）

(3)估计抛掷这枚棋子“兵”字朝上的概率是0.55. 这枚棋子质量的分布不均匀. 因为若这枚棋子质量分布均匀，则抛掷棋子试验中“兵”字朝上的概率是0.5.

18. **解**：列表如下：

小莹＼小亮	A	B	C
A	AA	AB	AC
B	BA	BB	BC

两人分别从3条道路中随机地选1条，共有6种等可能的结果，其中小亮和小莹途中相遇有2种情况，故他们途中相遇的概率是$\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

19. **解**:列表如下:

A转盘 \ B转盘 和	−3	0	−2	−1
3	0	3	1	2
0	−3	0	−2	−1
2	−1	2	0	1
1	−2	1	−1	0

共有 16 种等可能的结果.

(1)两数之和为零有 4 种情况,

故 $P(\text{两数之和为零})=\frac{4}{16}=\frac{1}{4}$.

(2)$P(\text{两数之和为 1})=\frac{3}{16}$;

$P(\text{两数之和为 2})=\frac{2}{16}=\frac{1}{8}$;

$P(\text{两数之和为 3})=\frac{1}{16}$;

$P(\text{两数之和为 }-1)=\frac{3}{16}$;

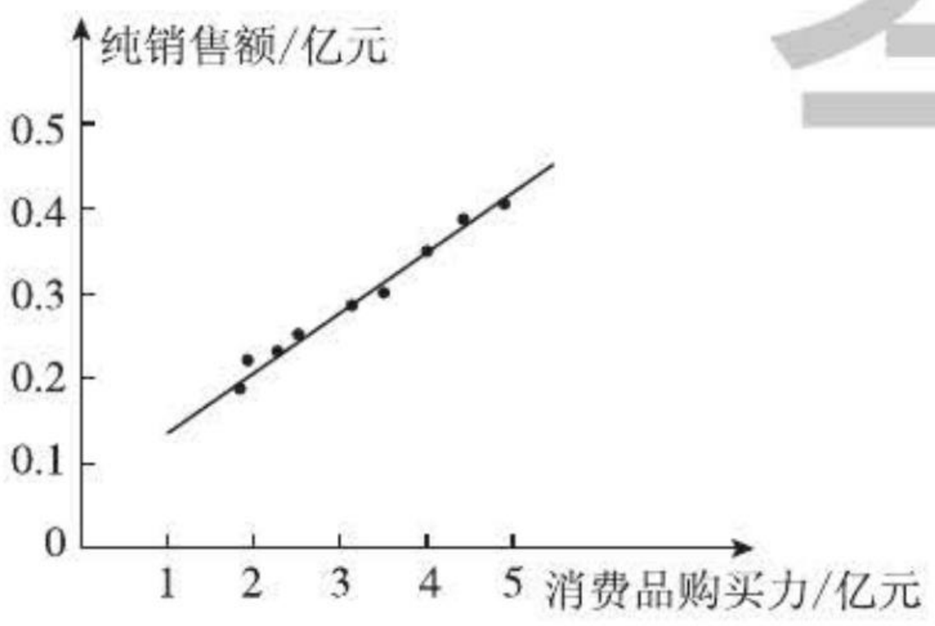
$P(\text{两数之和为 }-2)=\frac{2}{16}=\frac{1}{8}$;

$P(\text{两数之和为 }-3)=\frac{1}{16}$.

结合(1)知,在两数之和的所有情形中,概率最大的是两数之和为零的情形.

(3)由(1)(2)知,在两数之和的所有情形中,概率最小的是两数之和为 3 及两数之和为 −3 的情形.

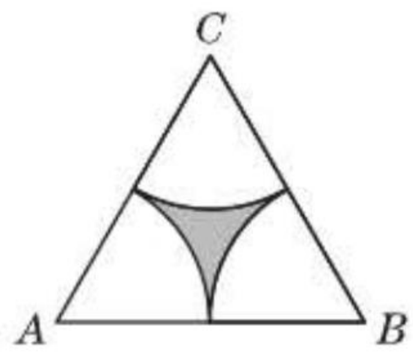
20. **解**:(1)(2)如图所示.



(第 20 题)

(3)在如图所示的直线上取横坐标为 5.2 的点,其纵坐标为 0.43,所以由此估计当消费品购买力为 5.2 亿元时,纯销售额是 0.43 亿元.

21. **解**:如图,分别以正三角形纸板的顶点 A,B,C 为圆心,以 $\frac{a}{2}$ 为半径在 $\triangle ABC$ 内画弧,则图中阴影区域内的针孔到 A,B,C 的距离都大于 $\frac{a}{2}$.



(第 21 题)

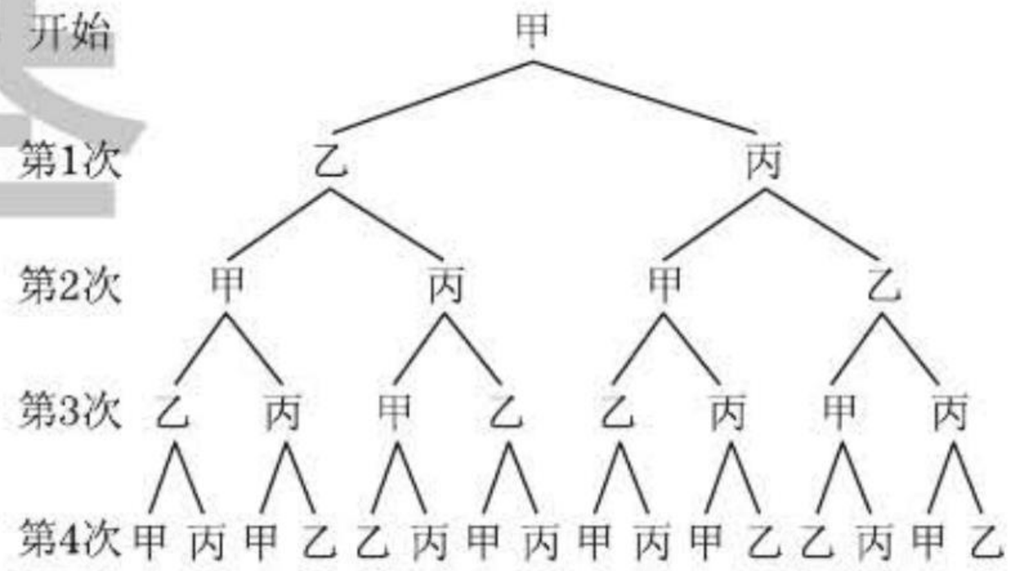
$\because \triangle ABC$ 是正三角形,

$\therefore$ 三个扇形的面积之和为半径为 $\frac{a}{2}$ 的圆的面积的一半.

$\therefore S_{\text{阴}}=S_{\triangle ABC}-3S_{\text{扇形}}=\frac{\sqrt{3}}{4}a^2-\frac{1}{2}\times\pi\times\left(\frac{a}{2}\right)^2=\frac{\sqrt{3}}{4}a^2-\frac{\pi}{8}a^2$.

$\therefore P(\text{针孔到正三角形三个顶点距离都大于}\frac{a}{2})=\frac{S_{\text{阴}}}{S_{\triangle ABC}}=\frac{\frac{\sqrt{3}}{4}a^2-\frac{\pi}{8}a^2}{\frac{\sqrt{3}}{4}a^2}=\frac{2\sqrt{3}-\pi}{2\sqrt{3}}=\frac{6-\sqrt{3}\pi}{6}$.

22. **解**:画树状图如图.



(第 22 题)

(1)由树状图知,经过 3 次传球,共 8 种可能,球回到甲手中有 2 种可能,

$\therefore P(\text{经过 3 次传球后,球回到甲手中})=\frac{2}{8}=\frac{1}{4}$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

（2）由树状图知，

P（经过4次传球，球回到甲手中）$=\frac{6}{16}=\frac{3}{8}$.

从发球到球回到甲的手中的传球方式共有6种可能，分别为：

甲→乙→甲→乙→甲；

甲→乙→甲→丙→甲；

甲→乙→丙→乙→甲；

甲→丙→甲→乙→甲；

甲→丙→甲→丙→甲；

甲→丙→乙→丙→甲.

23. **解**：（1）一共试验了 $6+7+12+13+18+12+11+6+7=92$（次）.

（2）和为6的频率是 $\frac{7}{92}\approx0.076$；

和为9的频率是 $\frac{18}{92}\approx0.196$；

和为12的频率是 $\frac{6}{92}\approx0.065$.

（3）估计牌面上两数字之和是9的概率最大，两数字之和是5，12的概率最小.

（4）列表如下：（记两数字为 a，b，两数之和为 c）.

a \ b / c	2	3	4	5	6	7
2		5	6	7	8	9
3	5		7	8	9	10
4	6	7		9	10	11
5	7	8	9		11	12
6	8	9	10	11		13
7	9	10	11	12	13	

由表知牌面上两数字之和共有30种可能，两数字之和为5，9，13的分别有2种，6种，2种可能，所以 P（两数字之和为5）$=\frac{2}{30}=\frac{1}{15}$；

P（两数字之和为9）$=\frac{6}{30}=0.2$；

P（两数字之和为13）$=\frac{2}{30}=\frac{1}{15}$.

24. **解**：（1）三面涂有红色的小正方体有8个，所以 P（三面涂有红色）$=\frac{8}{64}=\frac{1}{8}$；

（2）两面涂有红色的小正方体有24个，所以 P（两面涂有红色）$=\frac{24}{64}=\frac{3}{8}$；

（3）只有一面涂有红色的小正方体有 $4\times6=24$（个），所以各个面都没有涂成红色的小正方体有 $64-8-24-24=8$（个），所以 P（各个面都没有涂红色）$=\frac{8}{64}=\frac{1}{8}$.

综合与实践　质数的分布

习题

1. **解**：（1）数段1～40中质数有12个；

数段41～80中质数有10个；

数段81～120中质数有8个；

数段121～160中质数有7个；

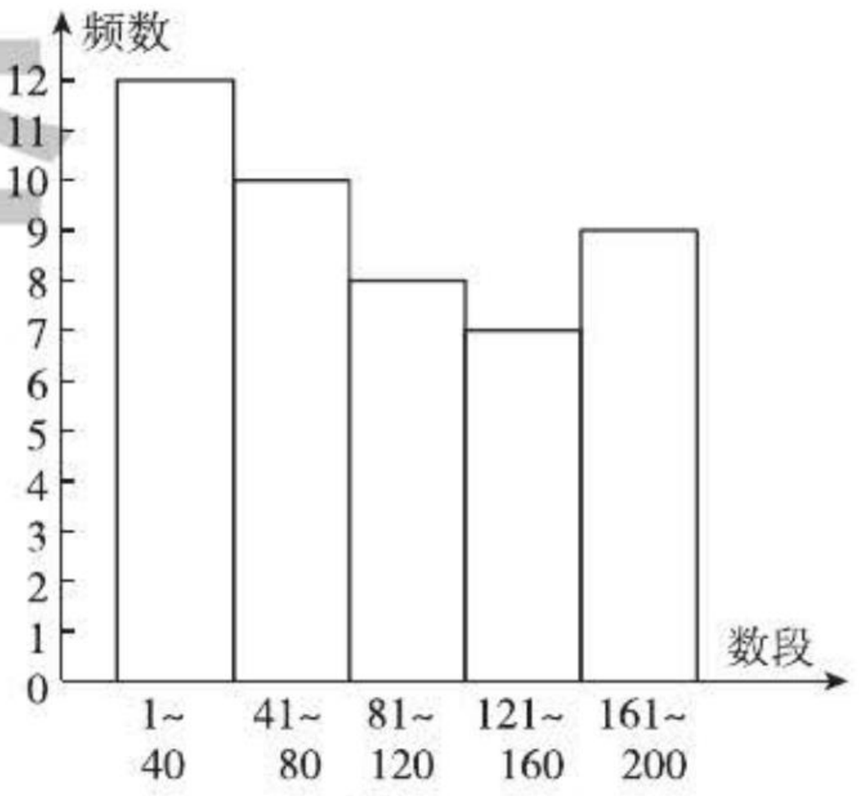
数段161～200中质数有9个；

（2）这5个数段中质数出现的频率分别为 $\frac{12}{40}=0.3$；$\frac{10}{40}=0.25$；$\frac{8}{40}=0.2$；$\frac{7}{40}=0.175$；$\frac{9}{40}=0.225$.

（3）列出频数、频率分布表如下：

数段	1～40	41～80	81～120	121～160	161～200
频数	12	10	8	7	9
频率	0.3	0.25	0.2	0.175	0.225

（4）画频数直方图如图.



（第1题）

（5）由频数直方图可知数段1～40中质数出现的频率最高.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

2. 解：因为 200 以内共有 200 个数，其中孪生质数有 3 和 5，5 和 7，11 和 13，17 和 19，29 和 31，41 和 43，71 和 73，101 和 103，107 和 109，137 和 139，149 和 151，179 和 181，191 和 193，197 和 199，共 14 对，共计 $14\times2=28$（个）质数，所以 200 以内的孪生质数出现的频数为 28，频率为 $\frac{28}{200}=0.14$.

3. 解：（1）正确.

（2）100 以内所有可以表示为不同质数乘积加 1 形式的质数为：$7=2\times3+1$，$11=2\times5+1$，$23=2\times11+1$，$31=2\times3\times5+1$，$43=2\times3\times7+1$，$47=2\times23+1$，$59=2\times29+1$，$67=2\times3\times11+1$，$71=2\times5\times7+1$，$79=2\times3\times13+1$，$83=2\times41+1$，共 11 个. 所以不超过 100 的这种质数的频数是 11，这种质数在不超过 100 的所有质数中出现的频率为 $\frac{11}{25}=0.44$.

第 7 章 空间图形的初步认识

7.1 几种常见的几何体

练习：

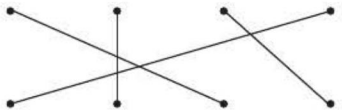
1. 解：是一个圆.

2. 解：可能是三角形，四边形，五边形，六边形.

习题 7.1

1. 解：打包带的长度至少是 $3a\times2+2a\times2+4a=14a$.

2. 解：如图.



（第 2 题）

3. C

4. 解：这个立体图形是一个圆柱和一个长方体的组合体，其中圆柱竖立在长方体的正上面，长方体的底面为边长为 a 的正方形，高为 b，圆柱的底面直径为 b，高为 a.

5. 解：（1）表中从左到右，从上到下依次填 6；6；15；$V+F-2=E$

（2）设这个多面体是 n 面体，则 $n+n-8-2=30$，解得 $n=20$，

∴ 这个多面体是二十面体.

$(3)24\times3\div2=36$（条），

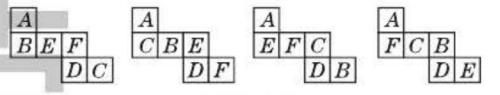
$36+2-24=14$（个），

∴ 这个玻璃饰品是十四面体.

7.2 直棱柱的侧面展开图

练习：

1. 解：能得到题图②，如图，只给出最上面小方格中填 A 的情况，其余情况可类似得出，共有 $6\times4=24$（种）不同的填法.



（第 1 题）

2. 解：因为它的高为 $\frac{S-a^2}{4a}$，所以它的体积为 $\frac{S-a^2}{4a}\times a^2=\frac{a(S-a^2)}{4}$.

练习：

1. 解：∵ $AB=8$ cm，$BC=10$ cm，$AC=6$ cm，∴ $AB^2+AC^2=BC^2$，∴ $\triangle ABC$ 为直角三角形，且 $\angle BAC=90°$，∴ 该直三棱柱的表面积 $=\frac{1}{2}\times6\times8\times2+(6+8+10)\times15=48+24\times15=408(\text{cm}^2)$.

2. 解：（1）长方体所有棱长之和为 $(4+5+5)\times4=56$（cm）.

（2）长方体的表面积 $=2\times(4\times5+4\times5+5\times5)=130(\text{cm}^2)$.

习题 7.2

1. 解：（1）略.

（2）底面三角形的面积 $=\frac{\sqrt{3}}{4}\times25=\frac{25}{4}\sqrt{3}(\text{cm}^2)$，

∴ 这个三棱柱的表面积是 $\frac{25}{4}\sqrt{3}\times2+3\times5\times10=150+\frac{25}{2}\sqrt{3}(\text{cm}^2)$.

2. 解：直四棱柱的底面边长为 $40\div4=10$（cm），∴ 这个直四棱柱的表面积 $=2\times10^2+40\times40=1\,800(\text{cm}^2)$.

3. 解：第一种围法：底面周长为 21 cm，

则此时棱柱的底面三角形的边长为 7 cm，

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

$\therefore$ 棱柱的体积 $=\frac{\sqrt{3}}{4}\times 7^2\times 15=\frac{735}{4}\sqrt{3}(\mathrm{cm}^3)$.

第二种围法:底面周长为 15 cm,

则此时棱柱的底面三角形的边长为 5 cm,

$\therefore$ 棱柱的体积 $=\frac{\sqrt{3}}{4}\times 5^2\times 21=\frac{525}{4}\sqrt{3}(\mathrm{cm}^3)$.

$\because \frac{735}{4}\sqrt{3}>\frac{525}{4}\sqrt{3}$,

$\therefore$ 第一种围法围成的棱柱的体积较大.

4. **解**:由题意易知 $CE=DE=1$ m, $AF=AB-FB=AB-DE=3-1=2(\mathrm{m})$, $\therefore DF=BE=BC-CE=6-1=5(\mathrm{m})$, $DC=\sqrt{DE^2+CE^2}=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}(\mathrm{m})$,

$\therefore AD=\sqrt{AF^2+FD^2}=\sqrt{2^2+5^2}=\sqrt{29}(\mathrm{m})$.

$\therefore$ 修建一个这样的蔬菜大棚总造价为 $3\ 200+50\times(\sqrt{2}+\sqrt{29})\times 28\approx 12\ 719$(元).

5. **解**:不需要补充数据. 它的表面积为 $2(ab+ac+bc)$,它与棱长分别为 a,b,c 的长方体的表面积相等.

6. **解**: $\frac{\sqrt{3}}{4}\times 6^2\times 6\times 2=108\sqrt{3}(\mathrm{cm}^3)$,

$\frac{\sqrt{3}}{4}\times 4^2\times 6\times 2=48\sqrt{3}(\mathrm{cm}^3)$,

$108\sqrt{3}-48\sqrt{3}=60\sqrt{3}(\mathrm{cm}^3)$,

$\because 60\sqrt{3}\neq 48\sqrt{3}$, $\therefore$ 它是赝品.

7. **解**:(1)易知 $\triangle AA_1N\backsim\triangle BMN$,

$\therefore \frac{AA_1}{BM}=\frac{AN}{BN}$,即 $\frac{1}{BM}=\frac{BN-1}{BN}$,

$\therefore \frac{1}{BM}+\frac{1}{BN}=1$.

(2)由题知 $\frac{1}{2}\times BM\cdot BN=5\times 1^2\times\frac{1}{2}$,

$\therefore BM\cdot BN=5$. 由 $\frac{1}{BM}+\frac{1}{BN}=1$,

得 $BM+BN=BM\cdot BN=5$,

$\therefore BM=\frac{5-\sqrt{5}}{2}$, $BN=\frac{5+\sqrt{5}}{2}$.

(3)由(2)知, $NE=4-\frac{5+\sqrt{5}}{2}=\frac{3-\sqrt{5}}{2}$, $MF=\frac{5-\sqrt{5}}{2}-1=\frac{3-\sqrt{5}}{2}$, $\therefore$ 点 M 与点 N 之间的距离是 1.

8. **解**:水的体积为 $\frac{\sqrt{3}}{4}\times 0.8^2\times 6\times 0.8\times 1\ 000\approx 1\ 330$(L),所以将这些水加热至 42 ℃时所需要的大约时间是 14 min.

9. 略.

7.3 圆柱的侧面展开图

练习:

1. **解**:设这个正方形的边长为 a,则圆柱底面半径为 $\frac{a}{2\pi}$.

$\therefore S_{表}=2\times\pi\times\left(\frac{a}{2\pi}\right)^2+a^2=\left(\frac{1}{2\pi}+1\right)a^2$,

$S_{侧}=a^2$, $\therefore S_{表}:S_{侧}=\left(\frac{1}{2\pi}+1\right):1$.

2. **解**:底面周长为 $32\pi\div 4=8\pi(\mathrm{cm})$, $\therefore$ 它的底面半径为 $\frac{8\pi}{2\pi}=4(\mathrm{cm})$.

练习:

1. **解**:沿 AB 将圆柱的侧面展开,连接 AF,则 AF 为最短路径,由题知, $AB=10$ cm, $BF=\frac{1}{4}\times 2\pi\times 5=\frac{5}{2}\pi(\mathrm{cm})$,

$\therefore AF=\sqrt{AB^2+BF^2}\approx 12.7$ cm.

习题 7.3

1. **解**:总费用为 $2\pi\times 0.4\times 1.2\times 100\times 2\approx 603$(元).

2. **解**:由底面积的比为 2∶1,得底面半径的比为 $\sqrt{2}$∶1, $\because$ 高相等, $\therefore$ 侧面积的比 = 底面半径的比,即 $\sqrt{2}$∶1.

3. **解**:第 1 种情况,绕长所在直线旋转一周,侧面积为 $2\pi\times 3\times 4=24\pi(\mathrm{cm}^2)$,体积为 $\pi\times 3^2\times 4=36\pi(\mathrm{cm}^3)$,

第 2 种情况,绕宽所在直线旋转一周,侧面积为 $2\pi\times 4\times 3=24\pi(\mathrm{cm}^2)$,体积为 $\pi\times 4^2\times 3=48\pi(\mathrm{cm}^3)$,

$\therefore$ 侧面积相等,体积第 2 种情况下大.

4. **解**:这个圆柱的底面直径为 $\frac{20}{\pi}\approx 6.4(\mathrm{cm})$.

5. **解**:底面半径为 $10\div 2=5(\mathrm{cm})$,

$\therefore$ “半个”圆柱形木块的表面积为 $\pi\times 5^2+$

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

$10\times15+\pi\times5\times15\approx464.2(cm^2)$.

6. 解：$y=2.7[\pi x^2\times10-\pi\times(x-0.02)^2\times(10-0.06-0.02)]=0.216\pi x^2+1.071\ 36\pi x-0.010\ 713\ 6\pi$.

7. 解：底面半径为 $10\div2=5(cm)$，

∴ 至少要爬行 $\sqrt{(8+5)^2+(5\pi)^2}\approx20.4(cm)$.

7.4 圆锥的侧面展开图

练习：

1. 解：圆锥的底面半径 $=\frac{14\pi}{7\pi}=2$，

∴ 圆锥的表面积 $=\pi\times2^2+14\pi=18\pi$.

2. 解：设侧面展开图的扇形的圆心角为 $n°$，

则 $\frac{n\pi\times9}{180}=2\pi\times5$，解得 $n=200$，

∴ 它的侧面展开图的圆心角为 200°.

侧面积 $=\pi\times5\times9=45\pi(cm^2)$.

练习：

1. C

2. 解：易知直角边长为 $4\sqrt{2}$ cm，斜边上的高为 4 cm，∴ 得到的几何体的侧面积 $=2\times\pi\times4\times4\sqrt{2}\approx142.2(cm^2)$.

习题 7.4

1. 解：圆锥的母线长为 $\sqrt{40^2+60^2}=20\sqrt{13}(cm)$，

∴ 侧面积为 $\pi\times40\times20\sqrt{13}\approx9\ 061.7(cm^2)$，

表面积为 $\pi\times40^2+\pi\times40\times20\sqrt{13}\approx14\ 088.3(cm^2)$.

2. 解：底面半径为 $\frac{10\pi\div2}{2\pi}=\frac{5}{2}(cm)$，母线长为 $10\div2=5(cm)$，∴ 圆锥的高 $=\sqrt{5^2-\left(\frac{5}{2}\right)^2}=\frac{5}{2}\sqrt{3}(cm)$，∴ 圆锥的体积 $=\frac{1}{3}\pi\times\left(\frac{5}{2}\right)^2\times\frac{5}{2}\sqrt{3}=\frac{125\sqrt{3}}{24}\pi(cm^3)$.

3. 解：底面周长 $=\frac{120\times\pi\times30}{180}=20\pi(cm)$，

∴ 底面半径 $=\frac{20\pi}{2\pi}=10(cm)$，∴ 表面积 $=\pi\times10^2+\pi\times10\times30\approx1\ 256.6(cm^2)$，

圆锥的高 $=\sqrt{30^2-10^2}=20\sqrt{2}(cm)$，

∴ 体积 $=\frac{1}{3}\pi\times10^2\times20\sqrt{2}\approx2\ 961.9(cm^3)$.

4. 解：底面周长 $=\frac{240\times\pi\times x}{180}=\frac{4}{3}\pi x$，

∴ 底面半径 $=\frac{\frac{4}{3}\pi x}{2\pi}=\frac{2}{3}x$，

∴ $S=\pi\times\left(\frac{2}{3}x\right)^2=\frac{4}{9}\pi x^2$.

5. 解：以长为 3 的直角边所在直线为轴旋转一周时，母线长 $=\sqrt{3^2+4^2}=5$，所以表面积 $=\pi\times4^2+\pi\times4\times5=36\pi$.

以长为 4 的直角边所在直线为轴旋转一周时，母线长 $=\sqrt{3^2+4^2}=5$，所以表面积 $=\pi\times3^2+\pi\times3\times5=24\pi$.

6. 解：易知圆柱的侧面积 $=2\pi rh$.

∵ 圆锥的母线长为 $\sqrt{r^2+h^2}$，

∴ 圆锥的侧面积 $=\pi r\sqrt{r^2+h^2}$，

∴ 侧面积之比为 $2\pi rh:\ \pi r\sqrt{r^2+h^2}=2h:\sqrt{r^2+h^2}$.

圆柱的体积 $=\pi r^2h$，

圆锥的体积 $=\frac{1}{3}\pi r^2h$.

∴ 体积之比为 3∶1.

当 $h=2r$ 时，侧面积之比为 4∶$\sqrt{5}$，体积之比为 3∶1.

7. 解：新圆锥的母线长为 $\sqrt{60^2+28^2}=4\sqrt{274}(cm)$，

新圆锥的底面周长为 $2\times2\pi\times28=112\pi(cm)$，

∴ 新圆锥的底面半径为 $\frac{112\pi}{2\pi}=56(cm)$，

∴ 新圆锥的高 $=\sqrt{(4\sqrt{274})^2-56^2}=4\sqrt{78}(cm)$，

∴ 新圆锥的体积 $=\frac{1}{3}\times\pi\times56^2\times4\sqrt{78}\approx116\ 014.4(cm^3)$.

8. 解：将圆锥侧面沿 OE 展开，

连接 EA，则 EA 为最短路径.

易知展开图（扇形）的圆心角 $=\frac{\pi\times10\times180°}{\pi\times10}=$

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

$180°$,

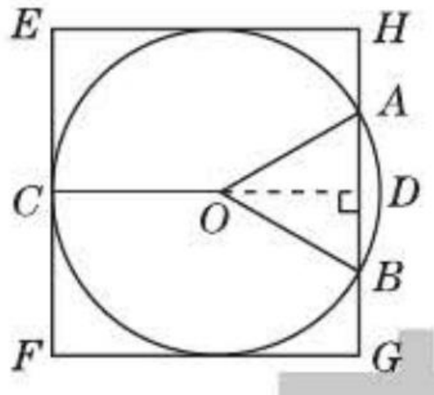
$\therefore$ 展开图中 $\angle EOA = 90°$.

$\because OF = 10, AF = 2, \therefore OA = 10 - 2 = 8$,

$\therefore EA = \sqrt{OE^2 + OA^2} = 2\sqrt{41}$,

即最短路径长是 $2\sqrt{41}$.

9. 解:设圆锥侧面展开图的圆心角为 $n°$,则 $20\pi = \frac{n\pi \times 12}{180}$, $\therefore n = 300$. 如图,C 是 EF 的中点,扇形 AOB 的半径 $OC = 12$ cm, $\angle AOB = 60°$,过 O 作 $OD \perp AB$ 于 D,则 C, O, D 三点在同一直线上, $\angle AOD = 30°$,



(第 9 题)

$\therefore AD = \frac{OA}{2} = 6$ cm, $\therefore OD = 6\sqrt{3}$ cm,

$\therefore CD = OC + OD = 12 + 6\sqrt{3} \approx 22.4$(cm),

易知 $EF = HG = 2OC = 24$ cm,

$\therefore$ 选择 24 cm $\times$ 22.4 cm 的最合适.

10. 解:当剪出的扇形为半圆形时,弧长 $= 18\pi$,剪出的圆的周长 $= 18\pi$,故此时可以拼成圆锥,当扇形的圆心角大于 $180°$ 时,弧长 $> 18\pi$,而圆的周长小于 18π,所以不合题意;当扇形的圆心角小于 $180°$ 时,弧长 $< 18\pi$,而圆的周长等于 18π,所以不合题意. 综上可知,制作出的圆锥的表面积为 $\frac{1}{2}\pi \times 18^2 + \pi \times 9^2 = 243\pi$.

综合练习

1. 解:(1) $\sqrt{(4 \times 2)^2 + 15^2} = 17$(cm),

$\therefore$ 木筷露在杯子外面的部分至少有 $20 - 17 = 3$(cm).

(2)底面正方形的对角线长为 $\sqrt{7^2 + 7^2} = 7\sqrt{2}$(cm), $\therefore$ 木筷露在容器外面的部分至少有 $20 - \sqrt{(7\sqrt{2})^2 + 15^2} \approx 2.0$(cm).

2. (1)B (2)A

3. 解:①三棱柱;②五棱柱;③圆柱;④圆锥. 图略.

4. 解:(1)长为 40 cm,宽为 40 cm,高为 2 cm,图略.

(2)该容器的容积为 $40 \times 40 \times 2 = 3\,200$(cm^3).

点拨:本题答案不唯一.

5. 解:圆锥的底面周长为 $\frac{90}{180} \times \pi \times a = \frac{\pi a}{2}$,

$\therefore$ 底面半径为 $\frac{\pi a}{2} \div 2\pi = \frac{a}{4}$, $\therefore$ 圆锥的高为 $\sqrt{a^2 - \left(\frac{a}{4}\right)^2} = \frac{\sqrt{15}}{4}a$.

6. 解:圆锥的底面半径为 $80 \div 2 = 40$(cm),

$\therefore$ 母线长 $= \sqrt{30^2 + 40^2} = 50$(cm),

$\therefore$ 表面积 $= 2 \times \pi \times 40 \times 50 + \pi \times 80 \times 80 \approx 32\,673$(cm^2).

7. 解:(1)可画出的最长线段的长是 $\sqrt{1^2 + 3^2} = \sqrt{10}$,这样的线段可画 4 条.

(2)连接 $B'C'$,则 $A'B' = B'C' = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$,

$\therefore A'B'^2 + B'C'^2 = A'C'^2$,

$\therefore \angle A'B'C' = 90°$.

又 $B'A' = B'C'$, $\therefore \angle B'A'C' = 45°$.

又易知 $\angle BAC = 45°$,

$\therefore \angle BAC = \angle B'A'C'$.

8. 解:下底面半径 $= 4 \div 2 = 2$(cm),

$\therefore$ 新几何体的体积 $= \pi \times 2^2 \times (4 + 6) \div 2 \times 3 = 60\pi$(cm^3).

9. 解:过点 C 作 $CD \perp AB$ 于 D,

由 $\angle A = 30°$, $AB = 10$ cm,

易知 $CD = \frac{5\sqrt{3}}{2}$ cm, $BC = 5$ cm,

$AC = 5\sqrt{3}$ cm,

$\therefore$ 所得几何体的表面积 $= \pi \cdot AC \cdot CD + \pi \cdot BC \cdot CD + 2\pi \cdot CD \cdot AB = \frac{75}{2}\pi + \frac{25\sqrt{3}}{2}\pi + 50\sqrt{3}\pi \approx 457.9$(cm^2).

10. 解:(1)设纸盒的高为 x cm,则 $3 \times x \times (6 - 2\sqrt{3}x) = \frac{\sqrt{3}}{4} \times (6 - 2\sqrt{3}x)^2$,

解得 $x = \frac{\sqrt{3}}{3}$ 或 $x = \sqrt{3}$(不合题意,舍去),

即纸盒的高为 $\frac{\sqrt{3}}{3}$ cm.

(2)由(1)得底面三角形的边长 $= 6 - 2\sqrt{3} \times$

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

$\frac{\sqrt{3}}{3}=4(\mathrm{cm})$，∴ 截去的面积 $=\frac{\sqrt{3}}{4}\times6^2-\frac{\sqrt{3}}{4}\times4^2-4\times\frac{\sqrt{3}}{3}\times3=\sqrt{3}(\mathrm{cm}^2)$，而原三角形纸板的面积 $=\frac{\sqrt{3}}{4}\times6^2=9\sqrt{3}(\mathrm{cm}^2)$，

∴ 截去部分的面积与原三角形纸板面积的比为 1∶ 9.

11. 解：易知当 6 或 2 朝上时，朝上一面的数恰好等于朝下一面的数的 2 倍，∴ 所求概率是 $\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$.

12. 解：将半圆柱侧面展开，连接 AE，则 AE 为最短路线.

易知 $AD=4\pi$ m，$DE=20-2=18(\mathrm{m})$，

∴ 他滑行的最短路线的长为 $\sqrt{(4\pi)^2+18^2}\approx22.0(\mathrm{m})$.

13. 解：(1) 略.

(2) 侧面积 $=3\times20\times30=1\ 800$.

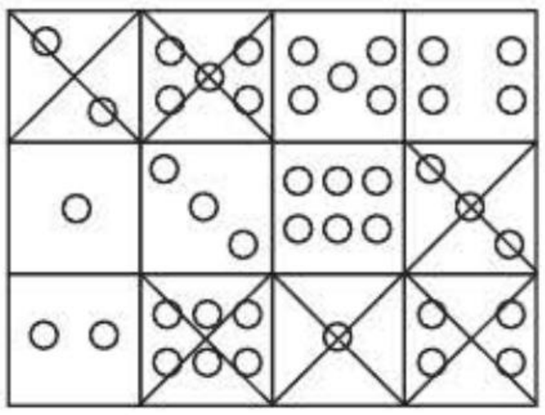
表面积 $=2\times\frac{\sqrt{3}}{4}\times20^2+1\ 800\approx2\ 146.4$.

14. 解：设小正方形的边长为 $2x$ cm，

则 $x^2+(4x)^2=5^2$，∴ $x=\frac{5}{17}\sqrt{17}$.

∴ 这个纸盒的表面积是 $6\times\left(2\times\frac{5}{17}\sqrt{17}\right)^2=\frac{600}{17}(\mathrm{cm}^2)$.

15. 解：如图.



（第 15 题）

第 8 章 投影与识图

8.1 中心投影

练习：

1. 解：小亮的影子先变短后变长.

点拨：在小亮走近一盏路灯，然后又离开这盏路灯的这一过程中离光源是由远到近再到远的过程，所以他的影子先变短后变长.

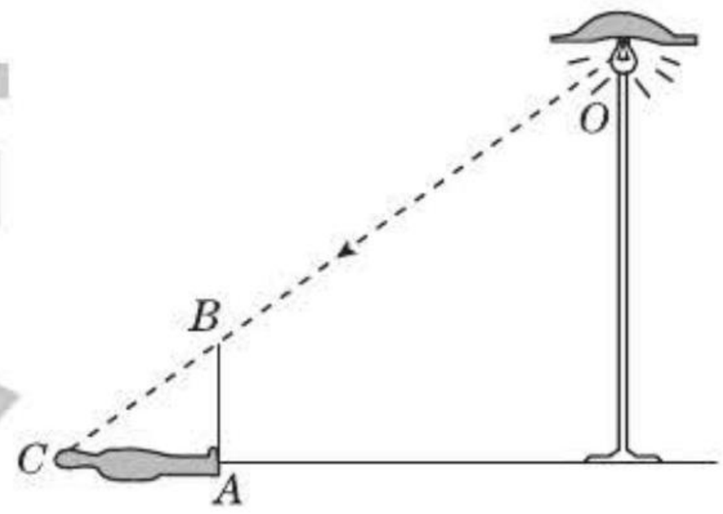
2. 解：不能说明他们身高相等. 因为他们与点光源的相对位置不确定.

3. 解：一个正方形的中心投影可能是一条线段，平行四边形，矩形，正方形.

一个正方体的中心投影不一定是正方形，只有当光源在正方体的面的中心的正上方时，中心投影才是正方形.

习题 8.1

1. 解：如图，线段 AB 表示大刚站立的位置.



（第 1 题）

2. 解：过点 O 作 $OC'\perp A'B'$ 于点 C'，交 AB 于点 C.

∵ $AB/\!/A'B'$，∴ $OC\perp AB$.

又由题意易知 $\triangle OAB\backsim\triangle OA'B'$，

∴ $\frac{AB}{A'B'}=\frac{OC}{OC'}$，即 $\frac{2}{A'B'}=\frac{3}{3+5}$，

解得 $A'B'=\frac{16}{3}$，即 $A'B'$ 的长为 $\frac{16}{3}$.

3. 解：设当灯泡距地面 3 m 时，地面上桌面影子的半径为 R_1，则由题意得

$\frac{\frac{1}{2}\times2}{R_1}=\frac{3-1}{3}$，解得 $R_1=1.5$ m，

此时地面上桌面影子的面积

$S_1=\pi R_1{}^2=\pi\times1.5^2=2.25\pi(\mathrm{m}^2)$.

设当灯泡下落 1 m 时，地面上桌面影子的半径为 R_2，同理可求得 $R_2=2$ m，

此时地面上桌面影子的面积 $S_2=\pi R_2{}^2=4\pi(\mathrm{m}^2)$. 地面阴影部分的面积增加了 $4\pi-2.25\pi=1.75\pi(\mathrm{m}^2)$.

4. 解：(1) 影子前进的速度也是匀速的. 理由如下：

当小亮在路灯下朝着远离路灯的方向匀速行走时，影长与身高之比等于影子前端离路灯正下方的距离与路灯高度之比，所以可知影子的长度与小亮前行的路程成

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

正比,所以影子前进的速度也是匀速的.

(2)当小亮在地面上走的路线是一个正方形时,他头顶的影子运动的路线不是正方形. 如果小亮在地面上走的路线是一个圆,他头顶的影子的运动路线不一定是一个圆.

5. 解:$\because AB // EG$,$\therefore \triangle OAB \backsim \triangle OEG$,

$\therefore \frac{AB}{EG}=\frac{OB}{OG}$,即$\frac{4}{EG}=\frac{3}{9}$,$\therefore EG=12$ cm.

又易知 $CD // AB // EG$,$CD=AB$,

$\therefore \frac{CD}{FG}=\frac{OD}{OG}$,即$\frac{4}{FG}=\frac{3+3}{9}$,$\therefore FG=6$ cm,

$\therefore EF=EG-FG=12-6=6(\text{cm})$,

即 EF 的长为 6 cm.

6. 解:点 P 的投影点 P'不是 $A'B'$的中点. 理由如下:

假设 P'是 $A'B'$的中点,则 $A'P'=B'P'$,又因为 AB 与 $A'B'$不平行,所以过点 P 作 $PE // A'B'$交 OA'于点 E,交 OB'于点 F,由中心投影的特点知,

$\frac{PE}{A'P'}=\frac{OP}{OP'}$,$\frac{PF}{B'P'}=\frac{OP}{OP'}$,

所以$\frac{PE}{A'P'}=\frac{PF}{B'P'}$,所以 $PE=PF$.

又因为 P 是 AB 的中点,$\angle APE=\angle BPF$,所以 $\triangle APE \cong \triangle BPF$,所以 $\angle PAE=\angle PBF$,所以 $OA' // OB'$,与已知矛盾.

所以 P'不是 $A'B'$的中点.

8.2 平行投影

练习:

1. 解:一条线段或一个三角形.

2. 解:一张圆形纸片在地面上的影子不一定是圆,例如当圆形纸片所在的平面与太阳光线平行时,它在地面上的影子是一条线段. 球的影子是椭圆.

练习:

1. 解:(1)球的正投影是圆.

(2)不一定.

2. 解:棱 AE,BF,CG,DH 的正投影分别是点 A',B',C',D';

棱 AB,EF 的正投影都是线段 $A'B'$;

棱 BC,FG 的正投影都是线段 $B'C'$;

棱 CD,GH 的正投影都是线段 $C'D'$;

棱 AD,EH 的正投影都是线段 $A'D'$.

练习:

1. 解:该圆柱在水平平面 H 内的正投影是一个矩形,矩形的长和宽分别等于圆柱的高和底面圆的直径.

该圆柱在竖直平面 V 内的正投影是一个圆,它的大小和圆柱的底面圆相同.

2. 解:正方体,长方体. **点拨**:答案不唯一.

习题 8.2

1. 解:在平行投影下,直角三角形的投影不一定是直角三角形,等腰三角形的投影也不一定还是等腰三角形. 图略.

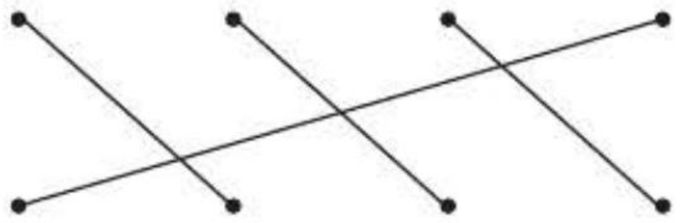
2. 解:相同:影子都可能是一条线段、平行四边形、矩形、正方形;影子的形状与木板和光线的相对位置有关.

不同:矩形木板在灯光下的影子的大小与木板离灯所在位置的远近有关,而在阳光下,只要木板摆放方式固定,影子大小就固定.

3. 解:圆柱,球.

点拨:答案不唯一.

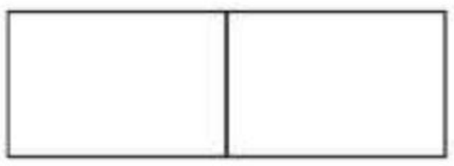
4. 解:如图.



(第 4 题)

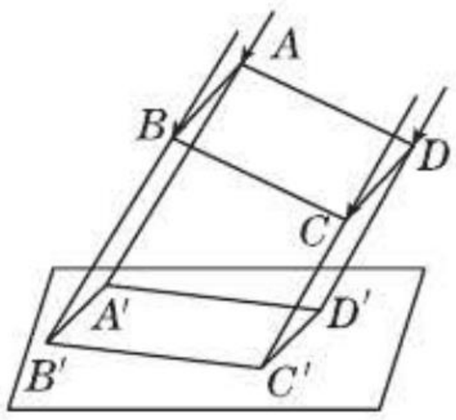
5. (1)C (2)C

6. 解:工件在竖直投射方向下的正投影是正六边形,在水平投射方向下的正投影(如图)是一个由两个相同的矩形组成的大矩形.



(第 6 题)

7. 解:如图,当纸片 $ABCD$ 所在平面与光线垂直时,才能使纸片在地面上的影子面积最大.



(第 7 题)

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

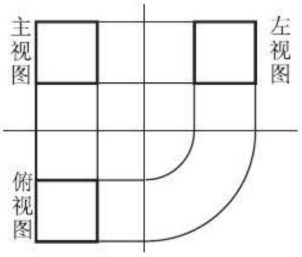
8. 解：根据题意分析可知该几何体由 3 层构成，下面一层必有 4 个小正方体，上面一层必有一个小正方体，中间一层最多有 3 个小正方体，最少有 2 个小正方体，所以组成该几何体最多需要 $4+1+3=8$（个）小正方体，最少需要 $4+1+2=7$（个）小正方体.

8.3 物体的三视图

练习：

1. C

2. 解：三视图如图.



（第 2 题）

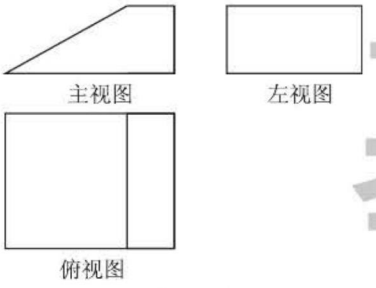
练习：

1. 解：画左视图略. 题图①是球的主视图和俯视图；

题图②是圆柱的主视图和俯视图；

题图③是圆锥的主视图和俯视图.

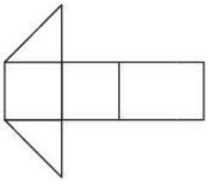
2. 解：该几何体的三视图如图.



（第 2 题）

练习：

1. 解：（1）该几何体的表面展开图如图.



（第 1 题）

该几何体的表面积为

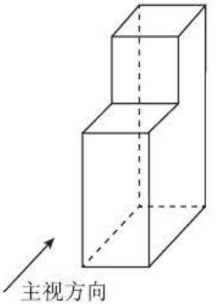
$$200^2+200^2+200\times200\sqrt{2}+\frac{1}{2}\times200\times200\times2=40\,000(3+\sqrt{2})(\text{mm}^2).$$

（2）略.

习题 8.3

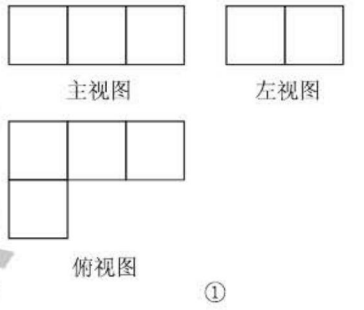
1. 解：①三棱柱；

②是由一个长、宽、高之比为 2∶1∶3 的长方体，在前面与上底面的公共棱处挖去一个棱长与宽相等的小正方体得到的几何体，如图.

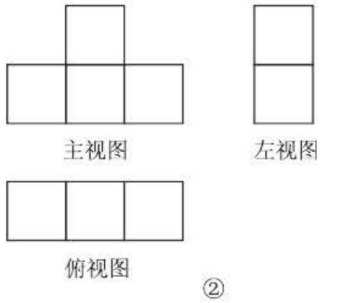


（第 1 题）

2. 解：如图.



①



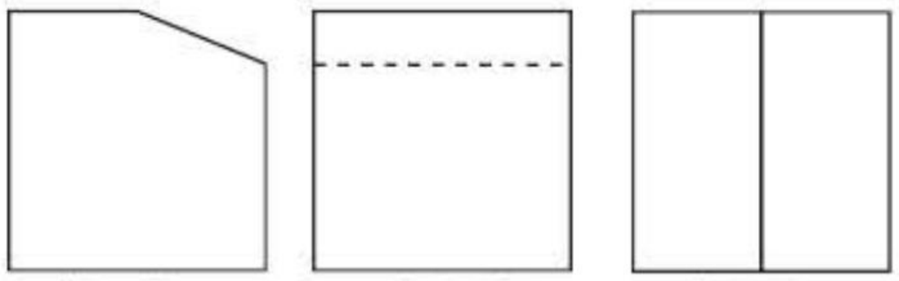
②

（第 2 题）

荣德基

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

3. 解：该几何体的三视图如图.

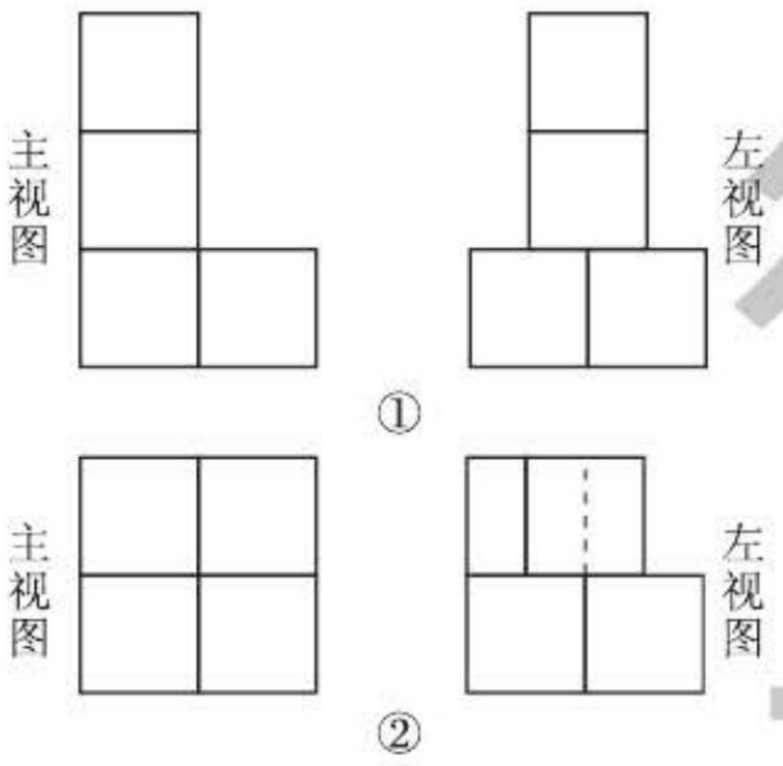


（第3题）

4. ③；④；①；②

5. 解：该几何体是一个三棱柱，侧面是三个矩形，底面是两个全等的直角三角形. 它的表面积为 $20\times30+20\times40+20\times\sqrt{30^2+40^2}+2\times\frac{1}{2}\times30\times40=3\ 600(\text{mm}^2)$.

6. 解：可能有两种不同的组合方式，其组合体的主视图和左视图分别如图①②所示.



（第6题）

7. 解：由三视图可知该工件是八棱柱形状的，上、下两个面是全等的正八边形，侧面是八个全等的矩形. 设正八边形的边长为 x mm.

由题意易知 $\sqrt{2}x+x=30$，

所以 $x=30(\sqrt{2}-1)$.

所以底面正八边形的面积为

$$30\times30-4\times\frac{1}{2}\times\left[\frac{\sqrt{2}}{2}\times30(\sqrt{2}-1)\right]^2=1\ 800(\sqrt{2}-1)(\text{mm}^2),$$

所以该工件的表面积

$S=8\times30(\sqrt{2}-1)\times50+2\times1\ 800(\sqrt{2}-1)\approx6\ 461.7(\text{mm}^2)$，体积 $V=1\ 800(\sqrt{2}-1)\times50\approx37\ 279.2(\text{mm}^3)$.

8. 解：如图.

（第8题）

综合练习

1. 解：题图①是在灯光下的情形，题图②是在阳光下的情形，理由如下：分别过影子的顶端和树的顶端作光线，由作图知题图①中的两条光线是相交的，故题图①反映了灯光下的情形；由作图知题图②中的两条光线是平行的，故题图②反映了在阳光下的情形.

2. 解：（1）球在地面上的影子是一个圆.

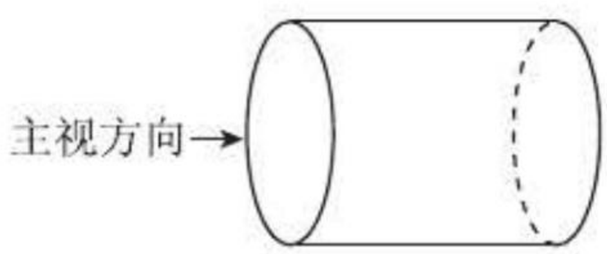
（2）当球向上移动时，影子逐渐变大；

当球向下移动时，影子逐渐变小.

3. （1）B　（2）A　（3）A

4. 俯视图；主视图；左视图

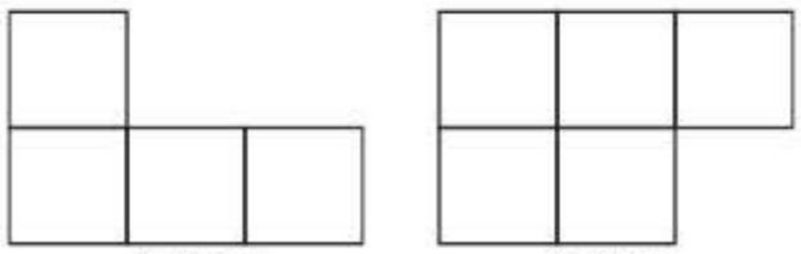
5. 解：小亮的说法不对. 圆柱的视图与主视方向有关，当主视方向如图所示时，圆柱的主视图是圆，俯视图是矩形，所以小亮的说法不对.



（第5题）

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

6. 解：主视图和俯视图如图.

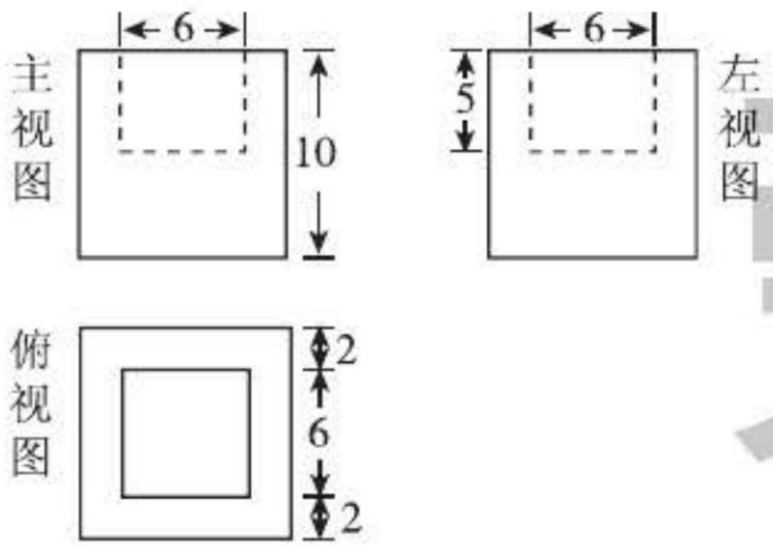


主视图　　俯视图

（第 6 题）

点拨：答案不唯一.

7. 解：所得几何体的三视图如图.（单位：cm）



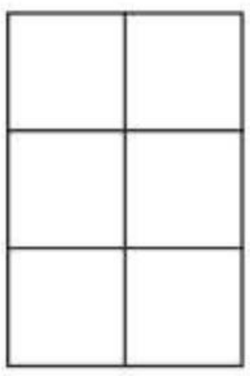
（第 7 题）

8. 解：(1) 圆锥.

(2) 由三视图中数据可知，此圆锥底面圆的半径为 3 cm，母线长为 6 cm，所以该圆锥的表面积 $S=\pi\times3\times6+\pi\times3^2=27\pi(\mathrm{cm}^2)\approx84.8\mathrm{cm}^2$.

点拨：本题采用转化法，先根据三视图判断几何体的形状，然后求其表面积.

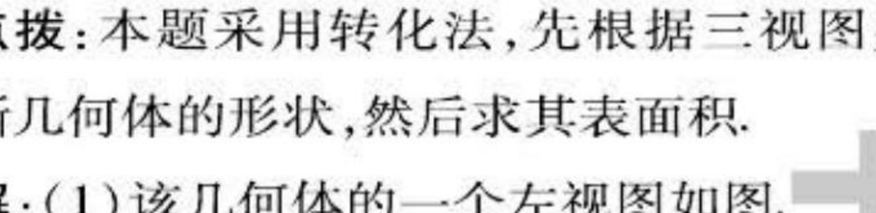
9. 解：(1) 该几何体的一个左视图如图.

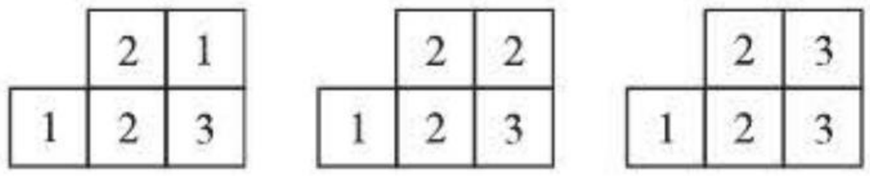


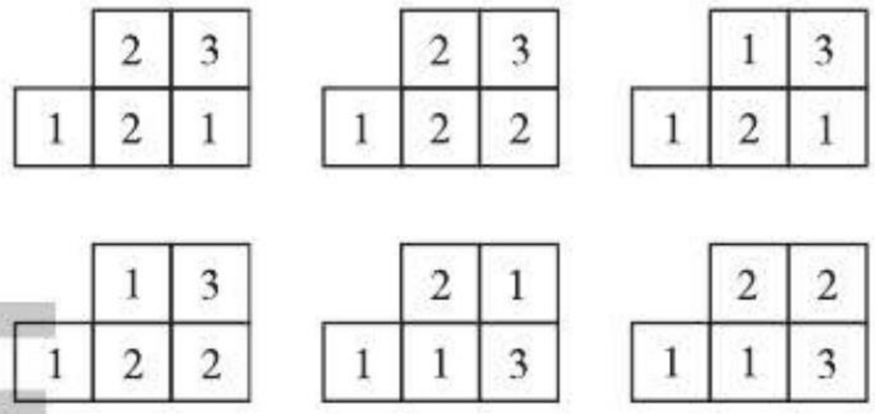
（第 9(1) 题）

点拨：本小题答案不唯一.

(2) 根据主视图和俯视图可综合判断出该几何体的可能情况，在题图中的俯视图的正方形中用数字表示该位置上放置的小正方体的个数，如图所示.







（第 9(2) 题）

故 n 的所有可能值为 8，9，10，11.

10. 解：(1) 这个组合体的上面是一个圆柱，下面是一个长方体.

(2) 该组合体的表面积等于长方体的表面积加上圆柱的侧面积，所以 $S=(40\times30+40\times30+30\times30)\times2+\pi\times20\times30=6\,600+600\pi\approx8\,485(\mathrm{mm}^2)$.

11. 解：在⑥区域放置一个点光源，所照射到的直八棱柱建筑物的面数最多.

12. 解：(1) $1+5+9+13+17+21+25=91$.

(2) $1+(1+4)+(1+4\times2)+\cdots+[1+4(n-1)]$

$=n+4[1+2+\cdots+(n-1)]$

$=n+4\times\dfrac{(n-1)n}{2}$

$=n+2n(n-1)$

$=n+2n^2-2n$

$=2n^2-n$.

(3) $1+2+3+\cdots+(n-1)+n+(n-1)+\cdots+3+2+1$

$=\dfrac{(n-1)n}{2}\times2+n$

$=n^2-n+n$

$=n^2$.

(4) $(2n-1)\times2-1=4n-2-1=4n-3$.

荣德基

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料