木牍教育通关宝典

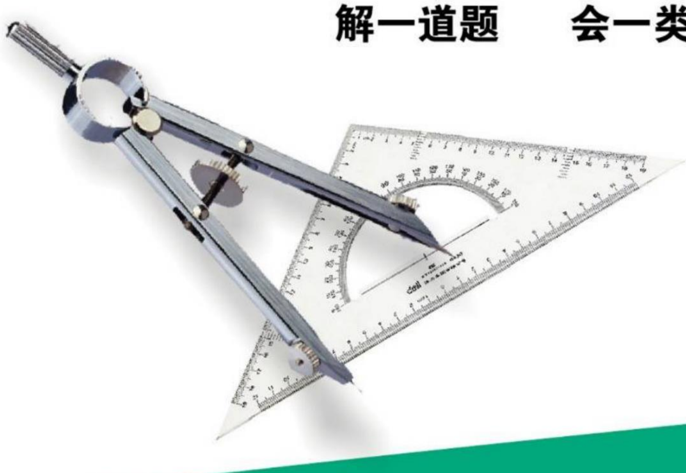
4

木牍教育
MUDU EDUCATION

# 高中数学
# 万能解题模板

Gaozhong Shuxue Wanneng Jieti Muban

解一道题　会一类题　现学活用



刘东艳 主编

安徽师范大学出版社

# 目　录

# 高中数学万能解题模板

## 特色栏目导读

### ★模板引入

本书通过对近5年高考试题的研究，分析高考必考点、高频考点、重难点，总结出高中阶段考试所需的万能解题模板，划分为六大部分17个模板，帮助考生提炼、归纳一般的解题方法,做到有的放矢。

### ★母题呈现

高考复习中所提的猜题、押题，绝不是简单的猜题、押题，而是以“母题”为原型的演变，千题万题，不离“母题”之宗，我们通过“母题”来揭开高考的神秘面纱，让学生达到解一道题、会一类题的效果!

### ★模板攻略

系统、全面地归纳了各模板的解题通法、必备知识、常用公式等，并通过图解助记来帮助考生更好地记忆每一模板的常用方法，让考生轻松应对考试。

# 一　集合、函数与导数

## 模板1　集合的运算问题

### 模板引入

本模板所讲集合之间的运算问题是集合部分的重点，也是历年的必考点.集合的基本运算主要包括交、并、补.解决集合的基本运算问题时有3种常用方法：

1.列举法：通过列举集合中的所有元素，然后根据集合基本运算的定义来求解.

2.数形结合法：利用数轴或者Venn图表示出相关集合，然后根据图形求解.

3.属性分析法：根据元素与集合之间的关系来确定集合与集合之间的关系.

### 母题呈现

**典例1** 设集合$P=\{3,4,5\}$，$Q=\{4,5,6,7\}$，若定义新集合$P*Q=\{a+b|a\in P,b\in Q\}$，则集合$P*Q$中元素的个数为（　　）

A.3　　B.4　　C.5　　D.6

**【解析】**（列举法）当$a=3$时，$b=4,5,6,7$，则$a+b$可能的结果为7,8,9,10；当$a=4$时，$b=4,5,6,7$，则$a+b$可能的结果为8,9,10,11；当$a=5$时，$b=4,5,6,7$，则$a+b$可能的结果为9,10,11,12.故$a+b$所有可能的结果为7,8,9,10,11,12，共6种.

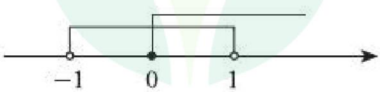
**【答案】** D

**典例2** （陕西卷）设集合$M=\{x|x\geqslant 0,x\in \mathbf{R}\}$，$N=\{x|x^2<1,x\in \mathbf{R}\}$，则$M\cap N=$（　　）

A.$[0,1]$　　B.$[0,1)$

C.$(0,1]$　　D.$(0,1)$

**【解析】**（数形结合法）由题意得$N=\{x|-1<x<1,x\in \mathbf{R}\}$，在数轴上表示$M$，$N$如图所示，则易知$M\cap N=[0,1)$.




**【答案】** B

**典例3** 已知全集$U=\{1,2,3,4,5,6,7\}$，$M=\{3,4,5\}$，$N=\{1,3,4,5,6\}$，则集合$\{2,7\}=$（　　）

A.$M\cap N$

B.$(\complement_U M)\cap(\complement_U N)$

C. $(\complement_U M)\cup(\complement_U N)$

D. $M\cup N$

【解析】(属性分析法)显然,$2\in U$,$2\notin M$,$2\notin N$,所以 $2\in\complement_U M$,$2\in\complement_U N$,所以 $2\in(\complement_U M)\cap(\complement_U N)$. 同理,7 也满足上述关系,其他数皆不满足上述关系. 故 $\{2,7\}=(\complement_U M)\cap(\complement_U N)$.

【答案】B

模板攻略

**解题通法**

1. 列举法适用于数集有关的运算,其基本解题步骤:①利用列举法定出所有集合;②根据要求将所求问题转化为集合间的基本运算;③根据基本运算得出结果.

2. 数形结合法主要是利用直观性来进行集合的基本运算,在解决较复杂的集合运算时灵活运用该法往往能取得事半功倍的效果,同时通过直观性的判断可避免直接讨论出错. 其基本解题步骤:①根据元素的性质确定每个集合;②利用数轴或者 Venn 图表示相关集合;③根据图形确定相关运算的结果.

3. 属性分析法主要解决集合和集合之间的关系,利用元素的确定性,即元素和集合之间的关系解题. 一般的解题步骤:①分别求出每个集合;②确定集合中的元素;③分析集合中的每个元素与已知集合之间的关系,从而确定该集合与已知集合之间的关系.

**图解助记**

列举法　$\boxed{\text{定元素}}\to\boxed{\text{定运算}}\to\boxed{\text{定结果}}$

数形结合法　$\boxed{\text{定集合}}\to\boxed{\text{图示}}\to\boxed{\text{运算}}$

属性分析法　$\boxed{\text{定集合}}\to\boxed{\text{定元素}}\to\boxed{\text{定关系}}$

# 模板 2　充分、必要条件的判断问题

## 模板引入

充分、必要条件的判断在高考中以基本概念的考查为主,主要包括两个方面:一是以函数、数列、不等式、立体几何中的线面关系等为背景考查充分、必要条件的判断;二是根据充分、必要条件求解参数的取值范围. 有 3 种常用解题方法:

1. 定义法:将充分、必要条件的判断转化为两个命题:“若 $p$,则 $q$”与“若 $q$,则

$p$”,根据两个命题是否正确,来确定 $p$ 与 $q$ 之间的充要关系.

2. 集合法:利用满足两个命题的参数取值集合之间的关系来判断充分、必要条件,主要解决两个相似的命题难以进行区分或判断的问题.

3. 等价转化法:根据互为逆否命题的两个命题真假性相同,要判断 $p$ 是 $q$ 的什么条件,可间接地转化为判断 $\neg q$ 是 $\neg p$ 的什么条件.

## 母题呈现

**典例 1** (浙江卷)已知函数 $f(x)=A\cos(\omega x+\varphi)(A>0,\omega>0,\varphi\in\mathbf{R})$,则“$f(x)$是奇函数”是“$\varphi=\frac{\pi}{2}$”的 (　　)

A. 充分不必要条件

B. 必要不充分条件

C. 充分必要条件

D. 既不充分也不必要条件

**【解析】**(定义法)若 $\varphi=\frac{\pi}{2}$,则 $f(x)=A\cos\left(\omega x+\frac{\pi}{2}\right)=-A\sin\omega x$ 为奇函数;反之,若 $f(x)$ 为奇函数,则 $\varphi=\frac{\pi}{2}+k\pi,k\in\mathbf{Z}$,因此 $\varphi=\frac{\pi}{2}$ 不一定成立,因此“$f(x)$ 是奇函数”是“$\varphi=\frac{\pi}{2}$”的必要不充分条件.

**【答案】** B

**典例 2** 若 $A:\log_2 a<1$,$B:x$ 的二次方程 $x^2+(a+1)x+a-2=0$ 的一个根大于零,另一个根小于零,则 $A$ 是 $B$ 的________条件.

**【解析】**(集合法)由 $\log_2 a<1$,解得 $0<a<2$,所以满足条件 $A$ 的参数 $a$ 的取值集合为 $M=\{a|0<a<2\}$;由方程 $x^2+(a+1)x+a-2=0$ 的一根大于零,另一根小于零,得 $x_1x_2=a-2<0$,解得 $a<2$,即满足条件 $B$ 的参数 $a$ 的取值集合为 $N=\{a|a<2\}$,显然 $M\subset N$,所以 $A$ 是 $B$ 的充分不必要条件.

**【答案】** 充分不必要

**典例 3** 已知条件 $p:\frac{4}{x-1}\leqslant -1$,条件 $q:x^2-x<a^2-a$,且 $\neg q$ 的一个充分不必要条件是 $\neg p$,则 $a$ 的取值范围是________.

**【解析】**(等价转化法)解 $\frac{4}{x-1}\leqslant -1$,得 $-3\leqslant x<1$. 由 $x^2-x<a^2-a$,即 $(x-a)[x+(a-1)]<0$,当 $a>1-a$,即 $a>\frac{1}{2}$ 时,不等式的解为 $1-a<x<a$;当 $a=1-a$,即 $a=\frac{1}{2}$ 时,不等式的解为 $\varnothing$;当 $a<1-a$,即 $a<\frac{1}{2}$ 时,不等式的解为 $a<$

$x<1-a$. 由$\neg q$的一个充分不必要条件是$\neg p$可知$p$为$q$的一个必要不充分条件. 当$a>\frac{1}{2}$时,由$\{x|1-a<x<a\}\subset\{x|-3\leqslant x<1\}$,得$\begin{cases}-3\leqslant 1-a,\\1\geqslant a,\end{cases}$解得$\frac{1}{2}<a\leqslant 1$;当$a=\frac{1}{2}$时,因为空集是任意一个非空集合的真子集,所以满足条件;当$a<\frac{1}{2}$时,由$\{x|a<x<1-a\}\subset\{x|-3\leqslant x<1\}$,得$\begin{cases}-3\leqslant a,\\1\geqslant 1-a,\end{cases}$解得$0\leqslant a<\frac{1}{2}$. 综上,$a$的取值范围是$[0,1]$.

【答案】$[0,1]$

## 模板攻略

**解题通法**

1. 定义法的解题步骤:①把充分、必要条件的叙述方式转化为"$p$是$q$的…";②写出两个命题——$A$:"若$p$,则$q$"与$B$:"若$q$,则$p$";③判断两个命题的真假;④根据两个命题的真假判断充分、必要条件.

2. 集合法的解题步骤:①分别求出两个命题中对应参数的取值集合;②判断两个集合之间的关系;③根据两个集合之间的关系判断两个命题之间的关系.

3. 等价转化法的解题步骤:①化简相关命题;②利用互为逆否命题的两个命题的等价性,将判断$\neg p$与$\neg q$之间的充要关系转化为判断$p,q$之间的充要关系;③根据定义法判断$p,q$之间的充要关系.

$p$与$q$的关系对应于$\neg p$与$\neg q$之间的关系如下表所示:

| $p,q$之间的关系 | $\neg p,\neg q$之间的关系 |
|---|---|
| $p$是$q$的充分不必要条件 | $\neg p$是$\neg q$的必要不充分条件 |
| $p$是$q$的必要不充分条件 | $\neg p$是$\neg q$的充分不必要条件 |
| $p$是$q$的充要条件 | $\neg p$是$\neg q$的充要条件 |
| $p$是$q$的既不充分也不必要条件 | $\neg p$是$\neg q$的既不充分也不必要条件 |

**图解助记**

定义法　定形式 → 化简命题 → 判断 → 下结论

集合法　求集合 → 断关系 → 下结论

等价转化法　化简命题 → 转化、判断 → 下结论

# 模板 3　函数单调性的求解问题

## 模板引入

函数单调性问题是高考的重点，小题和大题都有可能出现，在解答题中，单调性的讨论往往是研究其他性质、结论的出发点。解决此类问题常用 4 种方法：

1. 定义法：根据函数单调性的定义判断函数单调性。
2. 图象法：直接根据函数的图象直观地判定函数单调性。
3. 导数法：利用导数工具来研究函数单调性。
4. 同增异减法：通过内层函数和外层函数的单调性来判断函数的单调性。

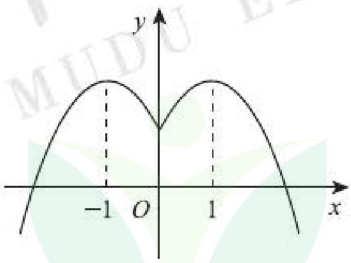
## 母题呈现

**典例 1** 根据函数单调性的定义，证明函数 $f(x)=-x^3+1$ 在 $\mathbf{R}$ 上是减函数。

**【解析】**(定义法)设 $x_1,x_2\in\mathbf{R}$，且 $x_1<x_2$，则 $f(x_1)-f(x_2)=x_2^3-x_1^3=(x_2-x_1)(x_2^2+x_1x_2+x_1^2)=(x_2-x_1)\left[\left(x_1+\frac{x_2}{2}\right)^2+\frac{3}{4}x_2^2\right]>0$，故函数 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上是减函数。

**典例 2** 函数 $y=-x^2+2|x|+1$ 的单调递减区间是________.

**【解析】**(图象法)函数解析式可化为 $y=\begin{cases}-x^2+2x+1 & (x\geqslant 0),\\ -x^2-2x+1 & (x<0),\end{cases}$ 画出函数的图象如图所示。




由函数图象得所求函数的单调递减区间为 $[-1,0]$，$[1,+\infty)$.

**【答案】** $[-1,0]$，$[1,+\infty)$

**典例 3** (广东卷)下列函数中，在区间 $(0,+\infty)$ 上为增函数的是　　(　　)

A. $y=\ln(x+2)$　　　　B. $y=-\sqrt{x+1}$

C. $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$　　　　D. $y=x+\frac{1}{x}$

【解析】(导数法)函数 $y=-\sqrt{x+1}$，$y=\left(\frac{1}{2}\right)^{x}$ 在$(0,+\infty)$上都是减函数，对$y=x+\frac{1}{x}$求导得 $y'=1-\frac{1}{x^2}$，令 $y'<0$，得 $x\in(-1,0)\cup(0,1)$，令 $y'>0$，得 $x\in(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$，则 $y=x+\frac{1}{x}$在$(0,1)$内单调递减，在$(1,+\infty)$上单调递增，都排除，只有 $y=\ln(x+2)$在$(0,+\infty)$上为增函数.

【答案】A

**典例 4** 求函数 $f(x)=2(x^2+x-2)$的单调区间.

【解析】(同增异减法)外层函数：$y=2t$，内层函数：$t=x^2+x-2$，内层函数的单调递增区间为$\left[-\frac{1}{2},+\infty\right)$，内层函数的单调递减区间为$\left(-\infty,-\frac{1}{2}\right]$，由于外层函数是增函数，所以复合函数的单调递增区间为$\left[-\frac{1}{2},+\infty\right)$，单调递减区间为$\left(-\infty,-\frac{1}{2}\right]$.

## 模板攻略

**规律总结**

1. 定义法适用于解析式较简单的函数.
2. 图象法适用于分段函数、新定义函数等解析式较复杂的函数.
3. 用导数法讨论解析式较复杂的函数时往往思维难度较小，但要保证计算的准确性.
4. 同增异减法适合复合函数单调性的判断.

**图解助记**

定义法　$\boxed{\text{取值}}\to\boxed{\text{作差}}\to\boxed{\text{定号}}\to\boxed{\text{定增减}}$

图象法　$\boxed{\text{作图}}\to\boxed{\text{观察}}\to\boxed{\text{定增减}}$

导数法　$\boxed{\text{求导}}\to\boxed{\text{定增减}}$

同增异减法　$\boxed{\text{定内外}}\to\boxed{\text{定性质}}\to\boxed{\text{合成}}\to\boxed{\text{定增减}}$

**常用结论**

函数 $U=g(x)$在其相应区间上的单调性：

| $g(x)$ | 增 | 增 | 减 | 减 |
|---|---|---|---|---|
| $f(U)$ | 增 | 减 | 增 | 减 |
| $f(g(x))$ | 增 | 减 | 减 | 增 |

# 模板4　函数的图象问题

## 模板引入

函数图象的求解是选择题、填空题的考查重点，难度中等，解决此类问题常用3种方法：

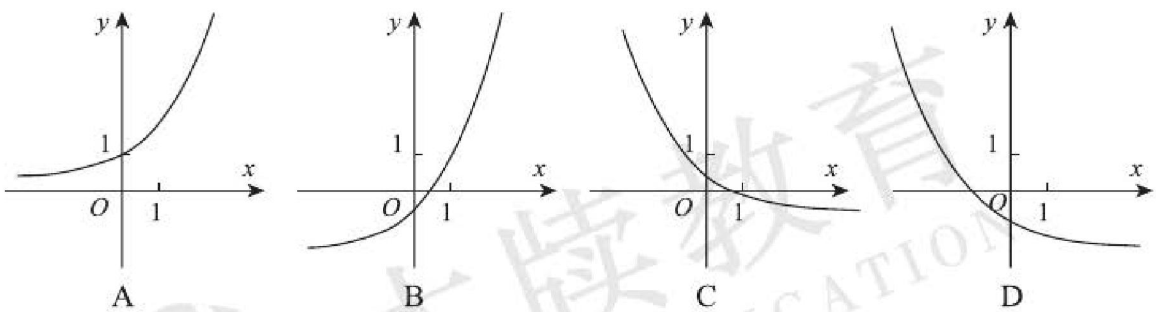
1. 特殊点法：根据函数解析式的特点，结合函数图象的特征，去找函数图象上的定点，从而识别函数图象的一种方法.

2. 图象变换法：利用函数图象的常用变换公式推理分析得到函数解析式的方法.

3. 性质分析法：通过研究函数的基本性质（单调性、奇偶性等）发现函数图象的一些基本特征，从而识别函数图象的一种方法.

## 母题呈现

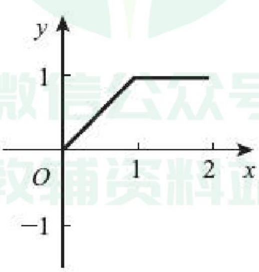
**典例1**　（四川卷）函数 $y=a^x-\frac{1}{a}(a>0$，且 $a\neq1)$ 的图象可能是　（　　）

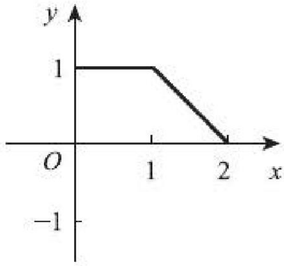



**【解析】**（特殊点法）由函数解析式 $y=a^x-\frac{1}{a}(a>0,a\neq1)$，可知当 $x=-1$ 时，$y=a^{-1}-\frac{1}{a}=0$，故函数图象必过定点 $(-1,0)$，只有D选项中的图象满足.

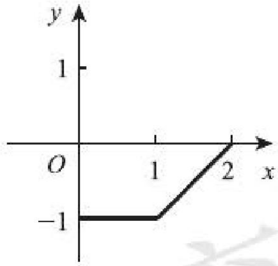
**【答案】** D

**典例2**　（湖北卷）已知定义在区间 $[0,2]$ 上的函数 $y=f(x)$ 的图象如图所示，则 $y=-f(2-x)$ 的图象为　（　　）

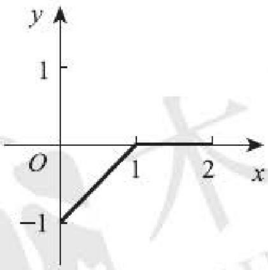




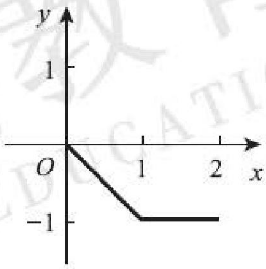

A




B




C

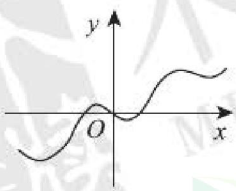



D

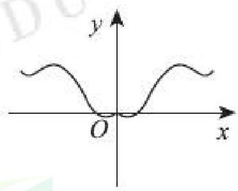
**【解析】**(图象变换法)比较抽象函数 $y=f(x)$ 与 $y=-f(2-x)$ 在结构形式上的特点,可先作函数 $y=f(x)$ 的图象关于原点对称的函数 $y=-f(-x)$ 的图象,再将函数 $y=-f(-x)$ 的图象向右平移 2 个单位,得到函数 $y=-f[-(x-2)]$ 的图象,通过观察知 B 选项正确.

**【答案】** B

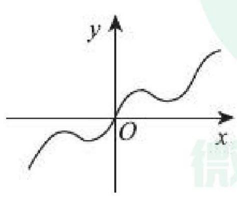
**典例 3** 已知 $f(x)=\frac{1}{4}x^2+\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)$,$f'(x)$ 为 $f(x)$ 的导函数,则 $f'(x)$ 的图象是 (　　)



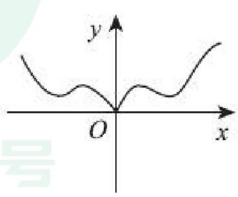

A




B




C




D

**【解析】**(性质分析法)对 $f(x)$ 求导,得 $f'(x)=\frac{1}{2}x-\sin x$. 由 $f'(-x)=$

$\frac{1}{2}(-x)-\sin(-x)=-\left(\frac{1}{2}x-\sin x\right)=-f'(x)$，知 $f'(x)$ 是奇函数. 又 $(f'(x))'=\frac{1}{2}-\cos x$，当 $x\in\left(0,\frac{\pi}{3}\right)$ 时，$(f'(x))'<0$，所以 $f'(x)$ 在 $\left[0,\frac{\pi}{3}\right]$ 上单调递减. B 和 D 中，图象关于 $y$ 轴对称，是偶函数，不满足；C 中，在 $y$ 轴右侧图象先单调递增，也不满足.

【答案】A

**模板攻略**

**规律总结**

当函数图象上存在特殊点：定点、顶点与两轴的交点等时，特殊点法往往是解决此类问题的绝招；当已知一抽象函数的图象，判断另一抽象函数的图象时，采用图象变换法较容易；当所给函数的性质差异较明显时，常使用性质分析法，用导数确定函数在某区间上的单调性.

**图解助记**

特殊点法　$\boxed{\text{找特殊点}}\to\boxed{\text{研究变换}}\to\boxed{\text{定选项}}$

图象变换法　$\boxed{\text{确定原型}}\to\boxed{\text{研究变换}}\to\boxed{\text{定选项}}$

性质分析法　$\boxed{\text{定位函数}}\to\boxed{\text{研究性质}}\to\boxed{\text{定选项}}$

**速记口诀**

基本函数有三个，指数对数幂函数.

函数表示有三种，表格图象解析式.

性质奇偶与增减，观察图象最明显.

若要详细证明它，还须将那定义抓.

## 模板 5　含参问题的求解

### 模板引入

函数问题中常含有参数，含参问题往往是函数部分的重点和难点，特别在压轴题中常会涉及. 本模板研究的含参问题一般形式为“已知函数 $f(x)$ 满足条件

$p$,求参数的值或者取值范围".

## 母题呈现

**典例1** 若 $f(x)=\log_2(2^x+1)-ax$ 是偶函数,则 $a=$________.

【解析】因为函数 $f(x)=\log_2(2^x+1)-ax$ 是偶函数,所以 $f(-x)=f(x)$,即 $\log_2(2^{-x}+1)-a(-x)=\log_2(2^x+1)-ax$,所以 $\log_2(2^x+1)-\log_2(2^{-x}+1)=2ax$,所以 $2ax=x$,所以 $a=0.5$.

【答案】0.5

**典例2** (安徽卷)设函数 $f(x)=1+(1+a)x-x^2-x^3$,其中 $a>0$.

(Ⅰ)讨论 $f(x)$ 在其定义域上的单调性;

(Ⅱ)当 $x\in[0,1]$时,求 $f(x)$取得最大值和最小值时的 $x$ 的值.

【解析】(Ⅰ)$f(x)$的定义域为$(-\infty,+\infty)$,$f'(x)=1+a-2x-3x^2$,

令 $f'(x)=0$,得 $x_1=\dfrac{-1-\sqrt{4+3a}}{3}$,$x_2=\dfrac{-1+\sqrt{4+3a}}{3}$,$x_1<x_2$,

所以 $f'(x)=-3(x-x_1)(x-x_2)$.

当 $x<x_1$ 或 $x>x_2$ 时,$f'(x)<0$;当 $x_1<x<x_2$ 时,$f'(x)>0$.

即 $f(x)$在$(-\infty,x_1)$和$(x_2,+\infty)$上单调递减,在$(x_1,x_2)$内单调递增.

故 $f(x)$在$\left(-\infty,\dfrac{-1-\sqrt{4+3a}}{3}\right)$,$\left(\dfrac{-1+\sqrt{4+3a}}{3},+\infty\right)$上单调递减,在$\left(\dfrac{-1-\sqrt{4+3a}}{3},\dfrac{-1+\sqrt{4+3a}}{3}\right)$内单调递增.

(Ⅱ)因为 $a>0$,所以 $x_1<0$,$x_2>0$.

(ⅰ)当 $a\geqslant4$,即 $x_2\geqslant1$ 时,由(Ⅰ)知,$f(x)$在$[0,1]$上单调递增,所以$f(x)$在 $x=0$ 和 $x=1$ 处分别取得最小值和最大值.

(ⅱ)当 $0<a<4$,即 $x_2<1$ 时,由(Ⅰ)知,$f(x)$在$[0,x_2]$上单调递增,在$[x_2,1]$上单调递减,因此 $f(x)$在 $x=x_2=\dfrac{-1+\sqrt{4+3a}}{3}$处取得最大值.

又 $f(0)=1$,$f(1)=a$,

所以当 $0<a<1$ 时,$f(x)$在 $x=1$ 处取得最小值;当 $a=1$ 时,$f(x)$在$x=0$ 和 $x=1$ 处同时取得最小值;当 $1<a<4$ 时,$f(x)$在 $x=0$ 处取得最小值.

**模板攻略**

**名师点睛**

求参数的值或者取值范围时，一般是将条件 $p$ 转化为关于参数的条件.

**高考解读**

含参问题在高考中以分段函数、函数的零点、函数与导数等类型呈现，常涉及分类讨论思想，综合性较强.

具体解题步骤：

①将条件 $p$ 转化为含参数的方程(组)或者不等式(组)；

②解方程(组)或者不等式(组)；

③得出参数的取值范围.

其一般解题步骤流程图如下：

转化 → 求解 → 定结论

# 模板6 函数的零点问题

## 模板引入

本模板所讲的是给定函数解析式，利用零点存在性定理和函数的图象判断函数零点的情况. 常用到 2 种方法：

1. 定理法：利用零点存在性定理，通过判断区间端点函数值的积的符号来确定函数零点位置.

2. 图象法：可将函数的零点问题等价转化为函数图象与 $x$ 轴的交点问题.

## 母题呈现

**典例 1** 设 $f(x)=e^x+x-4$，则函数 $f(x)$ 的零点位于区间 ( )

A. $(-1,0)$ B. $(0,1)$

C. $(1,2)$ D. $(2,3)$

**【解析】**(定理法)因为 $f(x)=e^x+x-4$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增，所以 $f(x)$ 最多有一个零点. 又 $f(1)=e-3<0$，$f(2)=e^2-2>0$，故函数 $f(x)$ 有且仅有一个零点位于

区间(1,2)内.

【答案】C

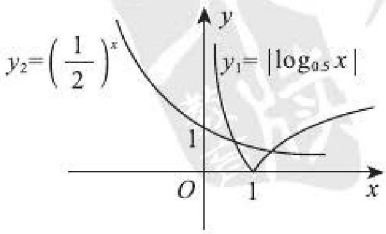
**典例2** (天津卷)函数 $f(x)=2^x|\log_{0.5}x|-1$ 的零点个数为 ( )

A. 1　　B. 2

C. 3　　D. 4

【解析】(图象法)函数 $f(x)=2^x|\log_{0.5}x|-1$ 的零点个数即为函数 $y=|\log_{0.5}x|$ 与 $y=\frac{1}{2^x}$ 图象的交点个数.

在同一直角坐标系中作出函数 $y=|\log_{0.5}x|$ 与 $y=\frac{1}{2^x}$ 的图象如图所示.




由图象易知有两个交点.

【答案】B

## 模板攻略

**必备知识**

(零点存在性定理)如果函数 $y=f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上的图象是连续不断的一条曲线,并且有 $f(a)f(b)<0$,那么函数 $y=f(x)$ 在区间 $(a,b)$ 内有零点,即存在 $c\in(a,b)$,使得 $f(c)=0$,这个 $c$ 也就是方程 $f(x)=0$ 的根.

**特别提示**

应用定理法时一定要保证函数连续,不能乱用!

**图解助记**

定理法　选点求积 → 确定符号 → 得出结论

图象法　研究性质 → 作出图象 → 得出结论

# 二　三角函数与平面向量

## 模板7　正、余弦定理的应用问题

### 模板引入

本模板所讲考点在选择题、填空题和解答题中都有可能考到，常用到下面2种方法：

1. 公式法：直接应用正、余弦定理求解未知的边、角.

2. 边角互化法：利用正弦定理或者余弦定理将边角混合式化为边的关系式或角的关系式，进而求解得到结论.

### 母题呈现

**典例1**　(新课标全国卷Ⅱ)钝角三角形 $ABC$ 的面积是 $\frac{1}{2}$，$AB=1$，$BC=\sqrt{2}$，则 $AC=$　(　　)

A. 5　　B. $\sqrt{5}$　　C. 2　　D. 1

**【解析】**(公式法)因为钝角 $\triangle ABC$ 的面积为 $\frac{1}{2}$，$AB=1$，$BC=\sqrt{2}$，所以 $\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\times 1\times\sqrt{2}\times\sin\angle ABC$，所以 $\sin\angle ABC=\frac{\sqrt{2}}{2}$，若 $\angle ABC$ 为钝角，则由余弦定理可得 $AC=\sqrt{1+2-2\times 1\times\sqrt{2}\times\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}=\sqrt{5}$；若 $\angle CAB$ 为钝角，则由余弦定理可得 $AC=\sqrt{1+2-2\times 1\times\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}}=1$，则有 $AB^2+AC^2=BC^2$，矛盾，舍去.

**【答案】** B

**典例2**　在 $\triangle ABC$ 中，设角 $A$，$B$，$C$ 的对边分别为 $a$，$b$，$c$，且 $a\cos C+\frac{1}{2}c=b$.

(Ⅰ)求角 $A$ 的大小；

(Ⅱ)若 $a=\sqrt{15}$，$b=4$，求边 $c$ 的大小.

**【解析】**(边角互化法)(Ⅰ)结合正弦定理，由 $a\cos C+\frac{1}{2}c=b$，得 $\sin A\cos C+\frac{1}{2}\sin C=\sin B$.

因为 $\sin B=\sin(A+C)=\sin A\cos C+\cos A\sin C$，

所以$\frac{1}{2}\sin C=\cos A\sin C$.

因为$\sin C\neq 0$,所以$\cos A=\frac{1}{2}$.又$0<A<\pi$,则$A=\frac{\pi}{3}$.

(Ⅱ)因为$a=\sqrt{15}$,$b=4$,由余弦定理$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$,得$15=16+c^2-2\times4\times c\times\frac{1}{2}$,即$c^2-4c+1=0$,则$c=2\pm\sqrt{3}$.

**模板攻略**

**必备公式**

正弦定理　$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$

正弦定理的变形　$a:b:c=\sin A:\sin B:\sin C$

余弦定理　$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$

$b^2=a^2+c^2-2ac\cos B$

$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$

**规律总结**

边角互化法适用于三角形形状的判断、边角混合式子的化简等问题.

**图解助记**

公式法　$\boxed{\text{找已知}}\to\boxed{\text{选定理}}\to\boxed{\text{求未知}}$

边角互化法　$\boxed{\text{边角转化}}\to\boxed{\text{得出结论}}$

# 模板8　平面向量的数量积运算

## 模板引入

平面向量的数量积运算有两种形式:一是根据长度和夹角运算;二是利用坐标来运算.常用到2种方法:

1.定义法:直接利用平面向量的数量积的定义,转化为计算问题,从而使问题得到解决.

2.坐标法:利用向量的坐标运算求向量数量积.

## 母题呈现

**典例1**　在$\triangle ABC$中,$AB=BC=2$,$B=\frac{\pi}{4}$,$AD$是$BC$边上的高,则$\overrightarrow{AD}\cdot$

$\overrightarrow{AC}$的值为　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　（　　）

A. 0　　　　　　　　　　B. 2

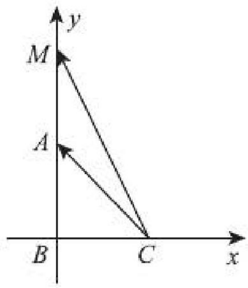
C. 4　　　　　　　　　　D. 8

**【解析】**（定义法）在 Rt△$ADB$ 中，$AB=2$，$\angle B=\frac{\pi}{4}$，所以 $AD=BD=\sqrt{2}$，所以 $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AD}\cdot(\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{BA})=\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BA}=-2\sqrt{2}\cdot\cos\frac{3\pi}{4}=2$.

**【答案】** B

**典例 2**　在△$ABC$ 中，$B=90°$，$AB=BC=1$，点 $B$ 满足 $\overrightarrow{BM}=2\overrightarrow{AM}$，则 $\overrightarrow{CM}\cdot\overrightarrow{CA}=$________.

**【解析】**（坐标法）建立如图所示的平面直角坐标系. 因为 $\overrightarrow{BM}=2\overrightarrow{AM}$，所以点 $A$ 是 $BM$ 的中点，则 $C(1,0)$，$A(0,1)$，$M(0,2)$. 所以 $\overrightarrow{CA}=(-1,1)$，$\overrightarrow{CM}=(-1,2)$. 所以 $\overrightarrow{CM}\cdot\overrightarrow{CA}=(-1)\times(-1)+2\times1=3$.




**【答案】** 3

**模板攻略**

**必备知识**

已知两个非零向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$，我们把 $|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|\cos\theta$ 叫作 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的数量积（或内积），记作 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$，即 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta$.

规定：零向量与任一向量的数量积为 0.

**误区警示**

$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$ 不能推出 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$ 或 $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$，因为 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$ 时，有可能 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$.

**图解助记**

定义法　转化 → 用定义 → 求数量积

坐标法　建系 → 求向量 → 求数量积

# 三　数列与不等式

## 模板9　数列通项公式的求解

### 模板引入

数列的通项公式是高考必考点,常用到3种方法:

1. 公式法:直接利用等差、等比数列的通项公式或者根据 $a_n=\begin{cases}S_1 & (n=1),\\ S_n-S_{n-1} & (n\geq 2)\end{cases}$ 求解.

2. 累加(乘)法:递推公式如 $a_{n+1}-a_n=f(n)\left(\text{或}\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=f(n)\right)$,可以采用累加(乘)法求解.

3. 辅助数列法:利用递推公式灵活变形,通过构造等差、等比数列等方式求解.

### 母题呈现

**典例1** 等差数列$\{a_n\}$是递增数列,前 $n$ 项和为 $S_n$,且 $a_1,a_3,a_9$ 成等比数列,$S_5=a_5^2$,则数列$\{a_n\}$的通项公式 $a_n=$ (　　)

A. $\frac{3}{5}(n-1)$　　B. $\frac{3}{5}n$　　C. $\frac{3}{5}(n+1)$　　D. $\frac{3}{5}n+1$

**【解析】**(公式法)依题意,设数列$\{a_n\}$的公差为 $d(d>0)$,因为 $a_1,a_3,a_9$ 成等比数列,所以 $a_3^2=a_1a_9$,即$(a_1+2d)^2=a_1(a_1+8d)$,化简得 $d^2=a_1d$.因为 $d\neq 0$,所以 $a_1=d$　①.因为 $S_5=a_5^2$,所以 $5a_1+\frac{5\times 4}{2}d=(a_1+4d)^2$　②.由①②得 $a_1=\frac{3}{5}$,$d=\frac{3}{5}$,所以 $a_n=\frac{3}{5}+(n-1)\times\frac{3}{5}=\frac{3}{5}n$.

**【答案】** B

**典例2** 在数列$\{a_n\}$中,$a_1=1$,$(n+1)\cdot a_{n+1}=n\cdot a_n$,则 $a_n=$________.

**【解析】**(累乘法)由 $(n+1)\cdot a_{n+1}=n\cdot a_n$ 得 $\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{n}{n+1}$,$\frac{a_n}{a_1}=\frac{a_2}{a_1}\cdot\frac{a_3}{a_2}\cdot\frac{a_4}{a_3}\cdot\cdots\cdot\frac{a_n}{a_{n-1}}=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdot\cdots\cdot\frac{n-1}{n}=\frac{1}{n}$,所以 $a_n=\frac{1}{n}$.

**【答案】** $\frac{1}{n}$

**典例3** 在数列$\{a_n\}$中，$a_1=1$，$a_2=2$，$a_{n+2}=\frac{2}{3}a_{n+1}+\frac{1}{3}a_n$，则$a_n=$________.

**【解析】**（辅助数列法）在$a_{n+2}=\frac{2}{3}a_{n+1}+\frac{1}{3}a_n$两边同时减去$a_{n+1}$，得$a_{n+2}-a_{n+1}=-\frac{1}{3}(a_{n+1}-a_n)$，则$\{a_{n+1}-a_n\}$是以$a_2-a_1=1$为首项，以$-\frac{1}{3}$为公比的等比数列，$a_{n+1}-a_n=\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}$，由累加法得$a_n=(a_n-a_{n-1})+(a_{n-1}-a_{n-2})+\cdots+(a_2-a_1)+a_1=\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-2}+\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-3}+\cdots+\left(-\frac{1}{3}\right)+1+1=\dfrac{1-\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}}{1+\frac{1}{3}}+1=\frac{7}{4}-\frac{3}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}$.

**【答案】** $\frac{7}{4}-\frac{3}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}$

**模板攻略**

**特别提示**

数列的通项公式不是唯一的，例如$-1,1,-1,1\cdots$这列数的通项公式为$(-1)^n$，也可以为$(-1)^{n+2}$.

**图解助记**

公式法　定性 → 定量 → 求通项

累加（乘）法　转化 → 赋值 → 累加（乘） → 求通项

辅助数列法　巧变形 → 构造数列 → 求通项

# 模板10　数列前$n$项和的求解

## 模板引入

数列前$n$项和的求解方法较多，下面介绍3种常用方法：

1. 错位相减法：适用于等比数列与等差数列相乘的形式（形如$a_n=b_nc_n$，其中$\{b_n\}$为等差数列，$\{c_n\}$为等比数列）.

2. 倒序相加法：将数列的各项顺序倒写，然后再求和.

3. 裂项相消法：将数列中的每项（通项）分解，然后重新组合，使之能消去一些项，最终达到求和的目的.

## 母题呈现

**典例 1** 求数列$\{na^n\}$的前 $n$ 项和 $S_n$.

**【解析】**（错位相减法）若 $a=1$，则 $S_n=1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$. 若 $a\neq1$，则由 $S_n=a+2a^2+3a^3+\cdots+na^n$ ①，得 $aS_n=a^2+2a^3+\cdots+(n-1)a^n+na^{n+1}$ ②，①－②得$(1-a)S_n=a+a^2+a^3+\cdots+a^n-na^{n+1}$ ③，则 $S_n=\frac{a(1-a^n)}{(1-a)^2}-\frac{na^{n+1}}{1-a}$.

**典例 2** 设等差数列$\{a_n\}$，公差为 $d$，求证：$\{a_n\}$的前 $n$ 项和$S_n=\frac{n(a_1+a_n)}{2}$.

**【解析】**（倒序相加法）$S_n=a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n$ ①，倒序得 $S_n=a_n+a_{n-1}+a_{n-2}+\cdots+a_1$ ②，①＋②得 $2S_n=(a_1+a_n)+(a_2+a_{n-1})+(a_3+a_{n-2})+\cdots+(a_n+a_1)$. 又 $a_1+a_n=a_2+a_{n-1}=a_3+a_{n-2}=\cdots=a_n+a_1$，所以 $2S_n=n(a_1+a_n)$，$S_n=\frac{n(a_1+a_n)}{2}$.

**典例 3** （新课标全国卷Ⅰ）已知等差数列$\{a_n\}$的前 $n$ 项和 $S_n$ 满足$S_3=0$，$S_5=-5$.

（Ⅰ）求$\{a_n\}$的通项公式；

（Ⅱ）求数列$\left\{\frac{1}{a_{2n-1}a_{2n+1}}\right\}$的前 $n$ 项和.

**【解析】**（裂项相消法）（Ⅰ）设$\{a_n\}$的公差为 $d$，则 $S_n=na_1+\frac{n(n-1)}{2}d$.

由已知可得$\begin{cases}3a_1+3d=0,\\5a_1+10d=-5.\end{cases}$解得 $a_1=1,d=-1$.

故$\{a_n\}$的通项公式为 $a_n=2-n$.

（Ⅱ）由（Ⅰ）知$\frac{1}{a_{2n-1}a_{2n+1}}=\frac{1}{(3-2n)(1-2n)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-3}-\frac{1}{2n-1}\right)$，

从而数列$\left\{\frac{1}{a_{2n-1}a_{2n+1}}\right\}$的前 $n$ 项和为

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{-1}-\frac{1}{1}+\frac{1}{1}-\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2n-3}-\frac{1}{2n-1}\right)=\frac{n}{1-2n}.$$

模板攻略

**技巧点拨**

数列求和除了以上所提到的3种常用方法外还有公式法、分组求和法等.公式法就是直接利用公式解决简单数列的求和;分组求和法就是将数列通过适当分组,可以得出两个或几个等差数列或等比数列,再分别求和,从而得到该数列的和.

**图解助记**

错位相减法　$\boxed{\text{找等差等比}} \to \boxed{\text{乘公比作差}} \to \boxed{\text{求和}}$

倒序相加法　$\boxed{\text{定和值}} \to \boxed{\text{倒序加}} \to \boxed{\text{求和}}$

裂项相消法　$\boxed{\text{定通项}} \to \boxed{\text{巧裂项}} \to \boxed{\text{求和}}$

# 模板11　运用基本不等式求最值

## 模板引入

在运用基本不等式求最值时常用到2种方法:

1. 配凑法:将已知式子进行巧妙变形,再利用基本不等式求解最值.

2. 常数代换法:把已知条件转化为"1"的表达式,再与所求最值的式子相运算,构造定和(积),再利用基本不等式求解最值.

## 母题呈现

**典例1**　已知 $a+\frac{b}{2}=4$,则 $ab$ 的最大值为________.

【解析】(配凑法)$ab=2\cdot a\cdot\frac{b}{2}\leqslant 2\left(\frac{a+\frac{b}{2}}{2}\right)^2=2\cdot 2^2=8$,当且仅当 $a=\frac{b}{2}=2$ 时等号成立.

【答案】8

**典例2**　已知不等式 $\frac{x+2}{x+1}<0$ 的解集为 $\{x|a<x<b\}$,点 $A(a,b)$ 在直线

$mx+ny+1=0$ 上，其中 $mn>0$，则 $\frac{2}{m}+\frac{1}{n}$ 的最小值为 ( )

A. $4\sqrt{2}$　　B. 8

C. 9　　D. 12

【解析】(常数代换法)不等式 $\frac{x+2}{x+1}<0$ 的解集为 $\{x|-2<x<-1\}$，所以 $a=-2,b=-1$. 由点 $A(-2,-1)$ 在直线 $mx+ny+1=0$ 上，知 $-2m-n+1=0$，即 $2m+n=1$，所以 $\frac{2}{m}+\frac{1}{n}=\left(\frac{2}{m}+\frac{1}{n}\right)\cdot(2m+n)=5+\frac{2n}{m}+\frac{2m}{n}\geqslant 5+2\sqrt{\frac{2n}{m}\cdot\frac{2m}{n}}=5+4=9$，当且仅当 $m=\frac{1}{3}$，$n=\frac{1}{3}$ 时等号成立. 所以 $\frac{2}{m}+\frac{1}{n}$ 的最小值为 9.

【答案】C

**模板攻略**

**常用公式**

$$\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}\leqslant\sqrt{ab}\leqslant\frac{a+b}{2}\leqslant\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}.$$

**图解助记**

配凑法　$\boxed{\text{配凑}}\rightarrow\boxed{\text{求最值}}$

常数代换法　$\boxed{\text{换常数}}\rightarrow\boxed{\text{构造定值}}\rightarrow\boxed{\text{求最值}}$

# 四 立体几何

## 模板12 巧解空间直线、平面之间的位置关系

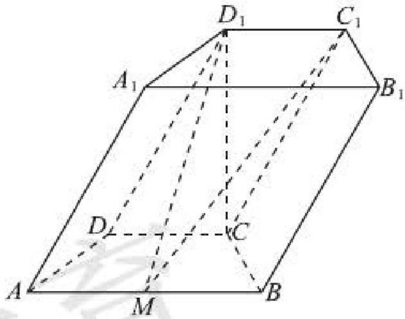
### 模板引入

空间直线、平面之间的位置关系包括线线、线面、面面3种情况，空间直线、平面之间的位置关系的确定常用到2种方法：

1. 构造平行线、平行平面法：通过构造平行线、平行平面并利用线线、面面的性质来证明线线、线面、面面的位置关系.

2. 构造垂面法：通过构造直线的垂面，利用直线与平面垂直的判定定理来证明线面垂直.

### 母题呈现



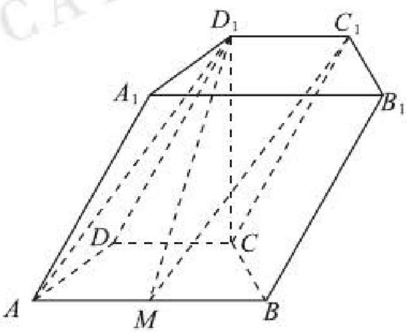
**典例1** （山东卷）如图，在四棱柱 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 中，底面 $ABCD$ 是等腰梯形，$\angle DAB=60°$，$AB=2CD=2$，$M$ 是线段 $AB$ 的中点. 求证：$C_1M//$平面 $A_1ADD_1$.

**【解析】**（构造平行线、平行平面法）因为四边形 $ABCD$ 是等腰梯形，且 $AB=2CD$，

所以 $AB//DC$，又由 $M$ 是 $AB$ 的中点，

因此 $CD//MA$ 且 $CD=MA$.

连接 $AD_1$，



在四棱柱 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 中，

因为 $CD//C_1D_1$，$CD=C_1D_1$，

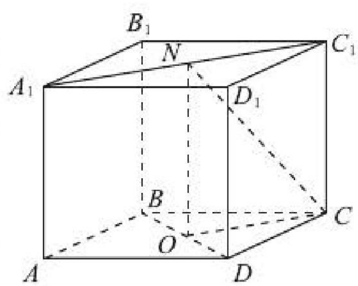
可得 $C_1D_1//MA$，$C_1D_1=MA$，

所以四边形 $AMC_1D_1$ 为平行四边形.

因此 $C_1M//D_1A$，

又 $C_1M\not\subset$平面 $A_1ADD_1$，$D_1A\subset$平面 $A_1ADD_1$，

所以 $C_1M//$平面 $A_1ADD_1$.



**典例2** 已知直四棱柱 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 的底面 $ABCD$ 为菱形，且 $\angle BCD=\frac{\pi}{3}$，$N$ 为 $A_1C_1$ 的中点. 证明：$NC\perp BD$.

**【解析】**（构造垂面法）如图所示，取 $BD$ 的中点 $O$，连

接 $ON$,$OC$,则 $ON/\!/AA_1$,所以 $ON\perp$平面 $ABCD$,所以 $ON\perp BD$.又平面 $ABCD$ 是菱形,所以 $CO\perp BD$,又因为 $NO\cap CO=O$,$NO$,$CO\subset$平面 $NOC$,所以 $BD\perp$平面 $NOC$,所以$NC\perp BD$.

**模板攻略**

**高考链接**

线面位置关系的判断是必考点,常出现在小题或者解答题的第一问中,难度中等偏下,所以要保证拿全分,这要求我们必须熟练掌握基本概念,推理过程要严谨规范.

**图解助记**

构造平行线、平行平面法　$\boxed{\text{构造}}\to\boxed{\text{证明}}\to\boxed{\text{得结论}}$

构造垂面法　$\boxed{\text{构造}}\to\boxed{\text{证明}}\to\boxed{\text{得结论}}$

# 模板 13　空间角的求解

## 模板引入

常见的空间角有线线角、线面角和面面角,在解题时我们常用的方法有 2 种:

1. 几何法:将空间角转化为两条相交直线所成的角,再求解.

2. 向量法:通过题给条件灵活建立空间直角坐标系,用向量代替直线求解空间角.

## 母题呈现

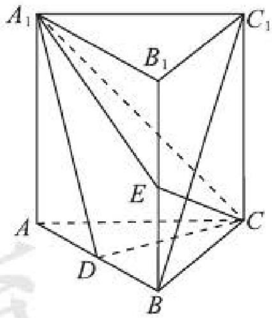
**典例 1** 在正三棱柱 $ABC\text{-}A_1B_1C_1$ 中,已知 $AB=2$,$CC_1=3$,则异面直线 $A_1B_1$ 和 $BC_1$ 所成的角的余弦值为　(　　)

A. $\frac{\sqrt{13}}{13}$　B. $\frac{\sqrt{7}}{7}$　C. $\frac{1}{2}$　D. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

**【解析】**(几何法)在正三棱柱 $ABC\text{-}A_1B_1C_1$ 中,因为 $AB/\!/A_1B_1$,所以异面直线 $A_1B_1$ 和 $BC_1$ 所成角即为$\angle C_1BA$.在$\triangle C_1BA$ 中,$C_1B=C_1A=\sqrt{13}$,$AB=2$,所以$\cos\angle C_1BA=\frac{4+13-13}{2\times2\sqrt{13}}=\frac{\sqrt{13}}{13}$.

**【答案】** A

**典例 2** (新课标全国卷Ⅱ)如图,直三棱柱 $ABC\text{-}A_1B_1C_1$ 中,$D$,$E$ 分别是




$AB,BB_1$ 的中点，$AA_1=AC=CB=\frac{\sqrt{2}}{2}AB$.

（Ⅰ）证明：$BC_1$ // 平面 $A_1CD$；

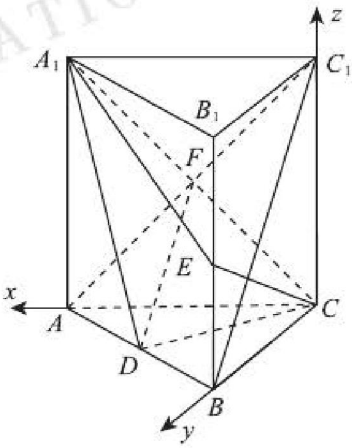
（Ⅱ）求二面角 $D\text{-}A_1C\text{-}E$ 的正弦值.

**【解析】**（向量法）（Ⅰ）连接 $AC_1$ 交 $A_1C$ 于点 $F$，则 $F$ 为 $AC_1$ 的中点.

又 $D$ 是 $AB$ 的中点，连接 $DF$，则 $BC_1$ // $DF$.

因为 $DF\subset$ 平面 $A_1CD$，$BC_1\not\subset$ 平面 $A_1CD$，

所以 $BC_1$ // 平面 $A_1CD$.




（Ⅱ）由 $AC=CB=\frac{\sqrt{2}}{2}AB$ 得，$AC\perp BC$.

以 $C$ 为坐标原点，$\overrightarrow{CA}$ 的方向为 $x$ 轴正方向，建立如图所示的空间直角坐标系 $Cxyz$. 设 $CA=2$，则 $D(1,1,0)$，$E(0,2,1)$，$A_1(2,0,2)$，

$\overrightarrow{CD}=(1,1,0)$，$\overrightarrow{CE}=(0,2,1)$，$\overrightarrow{CA_1}=(2,0,2)$，

设 $\boldsymbol{n}=(x_1,y_1,z_1)$ 是平面 $A_1CD$ 的法向量，则

$\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{CD}=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{CA_1}=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}x_1+y_1=0,\\ 2x_1+2z_1=0.\end{cases}$ 可取 $\boldsymbol{n}=(1,-1,-1)$.

同理，设 $\boldsymbol{m}$ 是平面 $A_1CE$ 的法向量，则 $\begin{cases}\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{CE}=0,\\ \boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{CA_1}=0.\end{cases}$

可取 $\boldsymbol{m}=(2,1,-2)$.

从而 $\cos\langle\boldsymbol{n},\boldsymbol{m}\rangle=\frac{\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{m}}{|\boldsymbol{n}||\boldsymbol{m}|}=\frac{\sqrt{3}}{3}$，

故 $\sin\langle\boldsymbol{n},\boldsymbol{m}\rangle=\frac{\sqrt{6}}{3}$，

即二面角 $D\text{-}A_1C\text{-}E$ 的正弦值为 $\frac{\sqrt{6}}{3}$.

## 模板攻略

**误区警示**

两异面直线所成的角可以通过这两条直线的方向向量的夹角求得，但两者并不一定相等，当两向量的夹角是钝角时应取其补角作为两条异面直线的夹角.

**图解助记**

几何法　$\boxed{\text{转化}}\to\boxed{\text{线线关系}}\to\boxed{\text{求值}}$

向量法　$\boxed{\text{建系}}\to\boxed{\text{定向量}}\to\boxed{\text{求值}}$

# 五　平面解析几何

## 模板 14　直线与圆相交时的弦长问题

### 模板引入

直线与圆相交时的弦长问题在高考中经常考到，既有单独考查，又会与坐标系与参数方程结合考查，主要考查直线与圆相交后的弦长、直线方程的求解、相关参数值的求解、参数的取值范围等. 解决此类问题常用 2 种方法：

1. 勾股定理法：根据直角三角形中三边之间存在的等量关系建立方程求解.

2. 弦长公式法：利用弦长公式 $|AB|=\sqrt{1+k^2}|x_1-x_2|$ 求直线被圆截得的弦长.

### 母题呈现

**典例 1** (江苏卷)在平面直角坐标系 $xOy$ 中，直线 $x+2y-3=0$ 被圆 $(x-2)^2+(y+1)^2=4$ 截得的弦长为________.

**【解析】**(勾股定理法)由题得圆心 $C(2,-1)$，半径为 $r=2$，而圆心 $C$ 到直线 $x+2y-3=0$ 的距离为 $d=\dfrac{|2+2\times(-1)-3|}{\sqrt{1^2+2^2}}=\dfrac{3}{\sqrt{5}}$，则截得的弦长为 $2\sqrt{r^2-d^2}=\dfrac{2\sqrt{55}}{5}$.

**【答案】** $\dfrac{2\sqrt{55}}{5}$

**典例 2** 已知过点 $M(-3,0)$ 的直线 $l$ 被圆 $x^2+(y+2)^2=25$ 所截得的弦长为 8，那么直线 $l$ 的方程为________.

**【解析】**(弦长公式法)当直线 $l$ 的斜率不存在时，直线方程为 $x=-3$，容易验证符合题意；当直线 $l$ 的斜率存在时，令其斜率为 $k$，则直线 $l$ 的方程为 $y=k(x+3)$，

联立 $\begin{cases}y=k(x+3),\\x^2+(y+2)^2=25\end{cases}$ 消去 $y$ 得 $(1+k^2)x^2+(6k^2+4k)x+9k^2+12k-21=0$　①.

设方程①的两根分别为 $x_1,x_2$，则 $\begin{cases}x_1+x_2=\dfrac{-6k^2-4k}{1+k^2},\\x_1x_2=\dfrac{9k^2+12k-21}{1+k^2}\end{cases}$　②，由弦长公式得

$\sqrt{1+k^2}|x_1-x_2|=\sqrt{(1+k^2)[(x_1+x_2)^2-4x_1x_2]}=8$. 将②式代入，解得 $k=\frac{5}{12}$，此时直线 $l$ 的方程为 $5x-12y+15=0$. 综上，直线 $l$ 的方程为 $5x-12y+15=0$ 或 $x=-3$.

**【答案】** $5x-12y+15=0$ 或 $x=-3$

**模板攻略**

**方法提炼**

1. 勾股定理法适用于所有的求弦长问题，其基本解题步骤：①计算圆心到已知直线的距离 $d$；②利用勾股定理 $d^2+\left(\frac{l}{2}\right)^2=r^2$ 列出关系式；③利用关系式计算出直线被圆所截得的弦长.

2. 弦长公式法是利用弦长公式求直线被圆截得的弦长的一种方法. 其基本解题步骤：①将已知的直线方程与圆的方程联立，得到一个一元二次方程；②通过弦长公式求出弦长，或利用弦长公式求出直线的斜率，得到所求结论.

**图解助记**

勾股定理法　$\boxed{\text{算点线距离}} \to \boxed{\text{用勾股定理}} \to \boxed{\text{得弦长}}$

弦长公式法　$\boxed{\text{联立方程}} \to \boxed{\text{用弦长公式}} \to \boxed{\text{得所求结论}}$

# 模板 15　与离心率有关的问题

## 模板引入

圆锥曲线的离心率问题是高考中的常考点，包括求解椭圆和双曲线的离心率、求离心率的取值范围等. 常用的解题方法有：

1. 公式法：利用三个基本量 $a,b,c$ 之间的等量关系，建立方程或等式，知二求一，再利用离心率公式即可求解.

2. 构造整体法：根据已知条件构造方程或函数，然后考虑用 $\Delta$ 判别式及函数值域等条件列出不等式，解不等式，从而求解离心率的取值范围.

3. 数形结合法：利用曲线的性质特征与图形的直观性，发现图形中的相关几何关系，从而建立等式或不等式来进行求解.

## 母题呈现

**典例 1** （重庆卷）设 $F_1,F_2$ 分别为双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的左、右焦点，双曲线上存在一点 $P$ 使得 $(|PF_1|-|PF_2|)^2=b^2-3ab$，则该双曲线的离心率为 （　　）

A. $\sqrt{2}$　　B. $\sqrt{15}$

C. 4　　D. $\sqrt{17}$

**【解析】**（公式法）$\because \|PF_1|-|PF_2\|=2a$，$\therefore 4a^2=b^2-3ab$，两边同除以 $a^2$，得 $\left(\frac{b}{a}\right)^2-3\cdot\frac{b}{a}-4=0$，解得 $\frac{b}{a}=4$ 或 $\frac{b}{a}=-1$（舍去），$\therefore e=\frac{c}{a}=\sqrt{1+\left(\frac{b}{a}\right)^2}=\sqrt{1+16}=\sqrt{17}$.

**【答案】** D

**典例 2** 已知过双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ 右焦点且倾斜角为 45°的直线与双曲线右支有两个交点，则双曲线的离心率 $e$ 的取值范围是________.

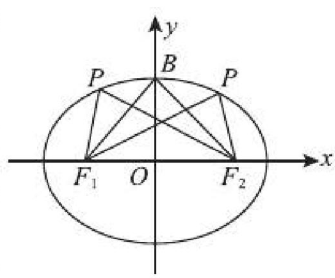
**【解析】**（构造整体法）由图形分析可得一条渐近线的斜率 $\frac{b}{a}<1$，即 $b<a$，则 $e=\sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}}<\sqrt{2}$，从而离心率 $e$ 的范围是 $(1,\sqrt{2})$.

**【答案】** $(1,\sqrt{2})$

**典例 3** 椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的左、右焦点分别为 $F_1,F_2$，若椭圆 $C$ 上恰好有 6 个不同的点 $P$，使得 $\triangle F_1F_2P$ 为等腰三角形，则椭圆 $C$ 的离心率的取值范围是 （　　）

A. $\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)$　　B. $\left(\frac{1}{2},1\right)$

C. $\left(\frac{2}{3},1\right)$　　D. $\left(\frac{1}{3},\frac{1}{2}\right)\cup\left(\frac{1}{2},1\right)$




**【解析】**（数形结合法）当点 $P$ 位于椭圆的两个短轴端点时，$\triangle F_1F_2P$ 为等腰三角形，此时有 2 个不同的点 $P$；当点 $P$ 不在短轴的端点时，要使 $\triangle F_1F_2P$ 为等腰三角形，则有 $|PF_1|=|F_1F_2|=2c$ 或 $|PF_2|=|F_1F_2|=2c$，由椭圆的对称性可知，此时有 4 个不同的点 $P$，符合题意. 不妨设点

$P$在第一象限，则$|PF_1|+|F_1F_2|>|PF_2|$，即$2c+2c>2a-2c$，故$3c>a$，即$\frac{c}{a}>\frac{1}{3}$，因为此时的点$P$不与短轴端点重合，即$2a-2c\neq a$，所以$\frac{c}{a}\neq\frac{1}{2}$．故椭圆的离心率满足$\frac{1}{3}<e<1$且$e\neq\frac{1}{2}$．

**【答案】**D

**模板攻略**

**解题通法**

1．公式法是求解离心率问题的基本方法，适用于已知曲线方程或曲线相关性质的离心率求解问题．其基本解题步骤：①根据已知条件，结合椭圆、双曲线的定义及圆锥曲线的统一定义，得到$a,b,c$的关系式或方程(组)；②根据所列方程求基本量$a,b,c$或由条件等式用适当参数表示$a,b,c$；③将求得的$a,c$的值代入离心率公式，求$e$．

2．构造整体法主要用于求解离心率的取值范围问题．其基本解题步骤：①根据已知条件寻找并确定基本量$a,b,c$之间的关系式；②从$a,b,c$之间的关系式构造方程、函数及不等式；③将$a,b,c$之间的关系式转化为关于$e$的表达式，求解即可．

3．数形结合法适用于利用曲线的性质特征与图形的直观性离心率求解问题．其基本解题步骤：①根据条件作出圆锥曲线及其他相关图形；②观察图形，判断基本量$a,b,c$之间存在何种关系；③由所得关系式求解离心率或离心率的取值范围．

**图解助记**

公式法　找关系 → 求数值(或转化) → 求离心率

构造整体法　找关系 → 构造法 → 求整体

数形结合法　作图形 → 找关系 → 求结果

# 六　概率与统计

## 模板 16　排列组合问题的求解

### 模板引入

排列组合一直都是高考中的易错点，对题目的理解很重要，常用的有以下 4 种方法：

1. 相邻问题捆绑法：先把相邻的几个元素排好，然后捆绑在一起作为一个整体再与其他元素排列.

2. 相间问题插空法：先排不相邻元素以外的其他元素，再把不相邻的元素插入上述几个元素之间.

3. 特殊优先法：特殊元素，优先处理；特殊位置，优先考虑. 对于有附加条件的排列组合问题，一般先考虑特殊的元素和位置，然后再考虑其他元素和位置.

4. 科学分类法：问题中既有元素的限制，又有排列的问题，一般是先元素（即组合）后排列.

### 母题呈现

**典例 1** 5 个男生和 3 个女生排成一排，3 个女生必须排在一起，有多少种不同排法？（　　）

A. 720　　B. 4 320　　C. 4 450　　D. 4 480

**【解析】**（相邻问题捆绑法）采用捆绑法，把 3 个女生视为一个元素，与 5 个男生进行排列，共有 $A_6^6=720$ 种，然后 3 个女生内部再进行排列，有 $A_3^3=6$ 种，所以排法共有 $720\times6=4\,320$ 种.

**【答案】** B

**典例 2** 若有甲、乙、丙、丁、戊五个人排队，要求甲和乙两个人不站在一起，且甲和乙不能站在两端，则有多少种排队方法？（　　）

A. 9　　B. 12　　C. 15　　D. 20

**【解析】**（相间问题插空法）先排好丙、丁、戊三个人，然后将甲、乙插到丙、丁、戊间的两个空中，则排队方法为 $A_3^3\times A_2^2=12$ 种.

**【答案】** B

**典例 3** 从 6 名志愿者中选出 4 人分别从事翻译、导游、导购、保洁四项不同的工作，若其中甲、乙两名志愿者都不能从事翻译工作，则不同的选派方案共有（　　）

A. 280 种　　B. 240 种　　C. 180 种　　D. 96 种

**【解析】**(特殊优先法)由于甲、乙两名志愿者都不能从事翻译工作，所以翻译工作就是“特殊”位置，因此翻译工作从剩下的四名志愿者中任选一人从事，有 $C_4^1=4$ 种不同的选法，再从其余的 5 人中任选 3 人从事导游、导购、保洁三项不同的工作有 $A_5^3=60$ 种不同的选法，所以不同的选派方案共有 $4\times60=240$ 种.

**【答案】** B

**典例 4** (浙江卷)在 8 张奖券中有一、二、三等奖各 1 张，其余 5 张无奖. 将这 8 张奖券分配给 4 个人，每人 2 张，不同的获奖情况有________种(用数字作答).

**【解析】**(科学分类法)分两种情况，第一种情况：3 张有奖的奖券分到四个人中的两个人，有 $C_3^2C_1^1A_4^2=36$ 种不同的获奖情况；第二种情况：3 张有奖的奖券分到四个人中的三个人，有 $A_4^3=24$ 种不同的获奖情况. 故总共有 60 种不同的获奖情况.

**【答案】** 60

### 模板攻略

**重要提示**

用两个计数原理解决问题时，最重要的是在开始计算之前要进行仔细分析，确定是分类还是分步.

**图解助记**

相邻问题捆绑法　$\boxed{\text{定元}}\to\boxed{\text{捆绑}}\to\boxed{\text{求结果}}$

相间问题插空法　$\boxed{\text{定元}}\to\boxed{\text{作空}}\to\boxed{\text{插空}}\to\boxed{\text{求结果}}$

特殊优先法　$\boxed{\text{定元(位置)}}\to\boxed{\text{逐步排}}\to\boxed{\text{得结果}}$

科学分类法　$\boxed{\text{分类}}\to\boxed{\text{求解}}\to\boxed{\text{求和}}\to\boxed{\text{得结果}}$

# 模板 17　求离散型随机变量的均值或方差

## 模板引入

本模板解决问题的关键在于求出随机变量的分布列，具体步骤如下：

①写出 $X$ 的所有可能取值；②求出 $X$ 取每个值的概率；③列分布列；④由均值、方差定义求 $EX$ 和 $DX$.

## 母题呈现

**典例** （江西卷）随机将 $1,2,\cdots,2n(n\in\mathbf{N}^*,n\geqslant 2)$ 这 $2n$ 个连续正整数分成 $A,B$ 两组，每组 $n$ 个数，$A$ 组最小数为 $a_1$，最大数为 $a_2$；$B$ 组最小数为 $b_1$，最大数为 $b_2$，记 $\xi=a_2-a_1$，$\eta=b_2-b_1$. 当 $n=3$ 时，求 $\xi$ 的分布列和数学期望.

**【解析】**当 $n=3$ 时，$\xi$ 的所有可能取值为 $2,3,4,5$.

将 6 个正整数平均分成 $A,B$ 两组，不同的分组方法共有 $C_6^3=20$ 种，所以 $\xi$ 的分布列为

| $\xi$ | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|
| $P$ | $\frac{1}{5}$ | $\frac{3}{10}$ | $\frac{3}{10}$ | $\frac{1}{5}$ |

$E\xi=2\times\frac{1}{5}+3\times\frac{3}{10}+4\times\frac{3}{10}+5\times\frac{1}{5}=\frac{7}{2}$.

## 模板攻略

**常用公式**

①离散型随机变量的数学期望 $E\xi=x_1p_1+x_2p_2+\cdots+x_np_n$；

②$E(a\xi+b)=aE\xi+b$（$a,b$ 是常数）；

③若 $\xi\sim B(n,p)$，则 $E\xi=np$；

④$D(a\xi+b)=a^2D\xi$（$a,b$ 是常数）；

⑤若 $\xi\sim B(n,p)$，则 $D\xi=np(1-p)$.

**图解助记**

$\boxed{\text{定 }X}\to\boxed{\text{求概率}}\to\boxed{\text{列分布列}}\to\boxed{\text{求 }EX\text{ 或 }DX}$