东方杰创®
DONGFANG JIECHUANG
让 学习更快乐，人生更精彩

骄子之路®
the Road to Pride
主　编：邓保沧

45分钟

课时作业与单元测试

活页
可拆开使用

教辅资料站

电子教辅　试卷练习
知识总结　备课资源

扫码关注获取更多学习资料

提升＝基础＋能力＋方法
课时作业　基础自测·知能提升
阶段检测　梯度练习·评估达标
答案与解析　全解全析·点拨精准

数学

必修1 RJ·A

河北人民出版社

东方杰创®
DONGFANG JIECHUANG
让 学习更快乐，人生更精彩

骄子之路®
the Road to Pride
主　编：邓保沧

45分钟 课时作业与单元测试

活页
可拆开使用

提升＝基础＋能力＋方法
课时作业　基础自测·知能提升
阶段检测　梯度练习·评估达标
答案与解析　全解全析·点拨精准

数学

必修1　RJ·A

微信公众号
教辅资料站

河北人民出版社
石家庄

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

图书在版编目（CIP）数据

45分钟课时作业与单元测试：A版．数学．1：必修／邓保沧主编．—石家庄：河北人民出版社，2013.8(2019.6重印)
ISBN 978-7-202-08017-7

Ⅰ．①4… Ⅱ．①邓… Ⅲ．①中学数学课—高中—习题集
Ⅳ．①G634

中国版本图书馆CIP数据核字(2013)第194829号

编　委：李　雅　李　越　张瑞霞
天高云　蒋　敏　金剑飞

书　名	45分钟课时作业与单元测试 数学 必修1 A
主　编	邓保沧
责任编辑	李　莉　周建图　刘晓冬
美术编辑	李　欣
封面设计	欣　羽
出版发行	河北人民出版社（石家庄市友谊北大街330号）
印　刷	河北伦洋印业有限公司
开　本	880毫米×1230毫米　1/16
印　张	8
字　数	256 000
版　次	2013年8月第1版　2019年6月第7次印刷
书　号	ISBN 978-7-202-08017-7
定　价	36.00元

版权所有　翻印必究

微信公众号
教辅资料站

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料



目录 CONTENTS

第一部分　课时作业

第一章　集合与函数概念 …… 1
1.1　集　合 …… 1
1.1.1　集合的含义与表示 …… 1
第1课时　集合的含义 …… 1
第2课时　集合的表示 …… 3
1.1.2　集合间的基本关系 …… 5
第3课时　集合间的基本关系 …… 5
1.1.3　集合的基本运算 …… 7
第4课时　并集、交集 …… 7
第5课时　全集与补集 …… 9
素养提升 …… 11
阶段质量评估1 …… 13
1.2　函数及其表示 …… 15
1.2.1　函数的概念 …… 15
第6课时　函数的概念 …… 15
第7课时　函数概念的综合应用 …… 17
1.2.2　函数的表示法 …… 19
第8课时　函数的表示法 …… 19
第9课时　分段函数与映射 …… 21
素养提升 …… 23
阶段质量评估2 …… 25
1.3　函数的基本性质 …… 27
1.3.1　单调性与最大(小)值 …… 27
第10课时　函数的单调性 …… 27
第11课时　函数的最大(小)值 …… 29
第12课时　函数单调性的应用 …… 31
素养提升 …… 33
1.3.2　奇偶性 …… 35
第13课时　函数的奇偶性 …… 35
第14课时　函数奇偶性的应用 …… 37
素养提升 …… 39
阶段质量评估3 …… 41
第二章　基本初等函数(Ⅰ) …… 43
2.1　指数函数 …… 43
2.1.1　指数与指数幂的运算 …… 43
第15课时　根　式 …… 43
第16课时　分数指数幂 …… 45
2.1.2　指数函数及其性质 …… 47
第17课时　指数函数的图象和性质 …… 47
第18课时　指数函数的性质及应用 …… 49
素养提升 …… 51
阶段质量评估4 …… 53

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料



目录 CONTENTS

2.2 对数函数 …… 55
2.2.1 对数与对数运算 …… 55
第 19 课时 对 数 …… 55
第 20 课时 对数的运算 …… 57
2.2.2 对数函数及其性质 …… 59
第 21 课时 对数函数的图象及性质 …… 59
第 22 课时 对数函数的性质及应用 …… 60
素养提升 …… 62
阶段质量评估 5 …… 64
2.3 幂函数 …… 65
第 23 课时 幂函数 …… 65
第三章 函数的应用 …… 67
3.1 函数与方程 …… 67
3.1.1 方程的根与函数的零点 …… 67
第 24 课时 方程的根与函数的零点 …… 67
3.1.2 用二分法求方程的近似解 …… 68
第 25 课时 用二分法求方程的近似解 …… 68
3.2 函数模型及其应用 …… 70
3.2.1 几类不同增长的函数模型 …… 70
第 26 课时 几类不同增长的函数模型 …… 70
3.2.2 函数模型的应用实例 …… 72
第 27 课时 函数模型的应用实例(1) …… 72
第 28 课时 函数模型的应用实例(2) …… 73
阶段质量评估 6 …… 75

第二部分 阶段检测

阶段质量测试卷(一)(第一章 集合与函数概念) …… 77
阶段质量测试卷(二)(第二章 基本初等函数(Ⅰ)) …… 81
阶段质量测试卷(三)(第三章 函数的应用) …… 85
模块综合质量测试卷 …… 89

第三部分 答案与解析

答案与解析 …… 94～124

提示:全书包括课时作业、阶段检测、答案与解析三部分,共计 128 页。

(根据教师教学情况不同,课时作业部分可在书中作答,也可撕下使用。)

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

第一章 集合与函数概念

1.1 集 合

1.1.1 集合的含义与表示

第1课时 集合的含义

掌握几个要点

1. 把握一个标准——一组对象能否构成集合的标准

考察对象能否构成一个集合，就是要看是否有一个确定的特征(或标准)，依此特征(或标准)能确定任何一个个体是否属于这个总体，如果有，则能构成集合，如果没有，就不能构成集合.

2. 掌握一组关系——元素与集合的关系

元素 a 与集合 A 之间只有两种关系：$a\in A$，$a\notin A$.

(1)唯一性：$a\in A$ 与 $a\notin A$ 取决于 a 是不是集合 A 中的元素，只有属于和不属于两种关系.

(2)方向性：符号“$\in$”“$\notin$”具有方向性，左边是元素，右边是集合.

3. 牢记三个性质——集合中元素的三个特性

(1)确定性：给定一个集合，任何一个对象是不是这个集合的元素必须是确定的. 其作用为判断一组对象能否组成集合.

(2)互异性：对于给定的一个集合，它的任何两个元素都不相同，相同的对象只能算一个元素.

(3)无序性：集合中的元素没有先后顺序，只要一个集合的元素确定，则这个集合也随之确定，与元素的排列顺序无关.

题点知识巩固

知识点一 集合的基本概念

1. 考察下列每组对象，能组成一个集合的是 (　　)

①一中高一年级聪明的学生；

②直角坐标系中横、纵坐标相等的点；

③不小于3的正整数；

④$\sqrt{3}$的近似值.

A. ①②　　B. ③④

C. ②③　　D. ①③

2. 已知集合 Ω 中的三个元素 l，m，n 分别是 $\triangle ABC$ 的三边长，则 $\triangle ABC$ 一定不是 (　　)

A. 锐角三角形　　B. 直角三角形

C. 钝角三角形　　D. 等腰三角形

3. “notebooks”中的字母构成一个集合，该集合中的元素个数是 (　　)

A. 5　　B. 6

C. 7　　D. 8

知识点二 元素与集合的关系

4. 给出下列关系：

$①\frac{1}{2}\in\mathbf{R}$；$②\sqrt{2}\notin\mathbf{R}$；$③|-3|\in\mathbf{N}$；$④|-\sqrt{3}|\in\mathbf{Q}$.

其中正确的个数为 (　　)

A. 1　　B. 2

C. 3　　D. 4

5. 已知集合 A 中的元素 x 满足 $x-1<\sqrt{3}$，则下列各式正确的是 (　　)

A. $3\in A$ 且 $-3\notin A$　　B. $3\in A$ 且 $-3\in A$

C. $3\notin A$ 且 $-3\notin A$　　D. $3\notin A$ 且 $-3\in A$

6. 用符号“$\in$”或“$\notin$”填空.

(1)0 _____ $\mathbf{N}^*$；(2)1 _____ $\mathbf{N}$；(3)1.5 _____ $\mathbf{Z}$；

(4)$2\sqrt{2}$ _____ $\mathbf{Q}$；(5)$2+\sqrt{3}$ _____ $\mathbf{R}$.

知识点三 集合元素特征的应用

7. 设 $x\in\mathbf{R}$，集合 A 中含有三个元素 3，x，x^2-2x.

(1)求实数 x 应满足的条件；

(2)若 $-2\in A$，求实数 x 的值.

8. 方程 $ax^2+2x+1=0$，$a\in\mathbf{R}$ 的根组成集合 A.

(1)当 A 中有且只有一个元素时，求 a 的值，并求此元素；

(2)当 A 中至少有一个元素时，求 a 满足的条件.

微信公众号 教辅资料站

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

提能达标过关

一、选择题

1. 下列各组对象不能构成集合的是（　　）
   A. 拥有手机的人
   B. 某校高一(3)班成绩优秀的学生
   C. 所有有理数
   D. 小于 π 的正整数

2. 若 a 是 $\mathbf{R}$ 中的元素，但不是 $\mathbf{Q}$ 中的元素，则 a 可以是（　　）
   A. 3.14　　B. -5
   C. $\frac{3}{7}$　　D. $\sqrt{7}$

3. 有下列说法：
   ①集合 $\mathbf{N}$ 中最小的数为 1；②若 $-a\in\mathbf{N}$，则 $a\in\mathbf{N}$；③若 $a\in\mathbf{N}$，$b\in\mathbf{N}$，则 $a+b$ 的最小值为 2；④所有小的正数组成一个集合.
   其中正确命题的个数是（　　）
   A. 0　　B. 1
   C. 2　　D. 3

4. 由实数 x，$-x$，$|x|$，$\sqrt{x^2}$ 及 $-\sqrt[3]{x^3}$ 所组成的集合，最多含有（　　）
   A. 2 个元素　　B. 3 个元素
   C. 4 个元素　　D. 5 个元素

5. 已知集合 A 中的元素都是自然数，满足 $a\in A$ 且 $4-a\in A$ 的有且只有 2 个元素的集合 A 的个数是（　　）
   A. 0　　B. 1　　C. 2　　D. 3

二、填空题

6. 用符号“$\in$”或“$\notin$”填空.
   设集合 M 中的元素为平行四边形，p 表示某个矩形，q 表示某个梯形，则 p _____ M，q _____ M.

7. 以方程 $x^2-5x+6=0$ 和方程 $x^2-x-2=0$ 的根为元素的集合中共有_____个元素.

8. 集合 A 中的元素 y 满足 $y\in\mathbf{N}$ 且 $y=-x^2+1$，若 $t\in A$，则 t 的值为_____.

三、解答题

9. 已知集合 A 是由 $a-2$，$2a^2+5a$，12 三个元素组成的，且 $-3\in A$，求实数 a 的值.

10. 数集 A 满足条件：若 $a\in A$，则 $\frac{1}{1-a}\in A(a\neq 1)$.
    (1)若 $2\in A$，试求出 A 中其他所有元素；
    (2)自己设计一个数属于 A，然后求出 A 中其他所有元素；
    (3)从上面的解答过程中，你能悟出什么道理？并大胆证明你发现的“道理”.

微信公众号
教辅资料站

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

第 2 课时　集合的表示

掌握几个要点

1. 牢记 3 个关键点——用列举法表示集合应注意三点

(1)用列举法表示集合时不必考虑元素的顺序,且元素不能重复,元素与元素之间要用“,”隔开.

(2)a 与$\{a\}$是完全不同的,$\{a\}$表示一个集合,这个集合由一个元素 a 构成,a 是集合$\{a\}$的元素.

(3)对于含有有限个元素且个数较少的集合,采取列举法表示较合适;对于元素个数较多的集合,如果构成该集合的元素具有明显的规律,在不发生误解的情况下,可以列举出几个元素作为代表,其他元素用省略号表示,如 $\mathbf{N}^*=\{1,2,3,\cdots\}$.

2. 掌握 2 个步骤——认识描述法所表示集合的两个步骤

(1)一看代表元素:例如$\{x\mid p(x)\}$表示数集,$\{(x,y)\mid y=p(x)\}$表示点集.

(2)二看条件:即看代表元素满足什么条件(公共特征).

3. 明辨 4 类集合

(1)$A=\{x\mid y=x^2+1\}$表示使函数 $y=x^2+1$ 有意义的自变量 x 的取值范围,且 x 的取值范围是 $\mathbf{R}$,因此 $A=\mathbf{R}$.

(2)$B=\{y\mid y=x^2+1\}$表示函数 $y=x^2+1$ 的函数值 y 的取值范围,而 y 的取值范围是 $y=x^2+1\geqslant 1$,因此,$B=\{y\mid y\geqslant 1\}$.

(3)$C=\{(x,y)\mid y=x^2+1\}$表示满足 $y=x^2+1$ 的点(x,y)组成的集合,因此 C 表示函数 $y=x^2+1$ 的图象上的点组成的集合.

(4)$P=\{y=x^2+1\}$是用列举法表示的集合,该集合中只有一个元素,且此元素是一个式子 $y=x^2+1$.

题点知识巩固

知识点一　用列举法表示集合

1. 下列命题中正确的是　(　)

①0 与$\{0\}$表示同一个集合;②由 1,2,3 组成的集合可表示为$\{1,2,3\}$或$\{3,2,1\}$;③方程$(x-1)^2(x-2)=0$的所有解的集合可表示为$\{1,1,2\}$;④集合$\{x\mid 4<x<5\}$可以用列举法表示.

A. 只有①和④　　B. 只有②和③

C. 只有②　　D. 只有②和④

2. 集合$\{x\in\mathbf{N}^*\mid x-2<3\}$的另一种表示形式是　(　)

A. $\{0,1,2,3,4\}$　　B. $\{1,2,3,4\}$

C. $\{0,1,2,3,4,5\}$　　D. $\{1,2,3,4,5\}$

3. 设 $A=\{4,a\}$,$B=\{2,ab\}$,若 $A=B$,则 $a+b=$_____.

知识点二　用描述法表示集合

4. 集合$\{(x,y)\mid y=2x-1\}$表示　(　)

A. 方程 $y=2x-1$

B. 点(x,y)

C. 平面直角坐标系中的所有点组成的集合

D. 函数 $y=2x-1$ 图象上的所有点组成的集合

5. 集合 $M=\{(x,y)\mid xy>0,x\in\mathbf{R},y\in\mathbf{R}\}$是指　(　)

A. 第一象限内的点集　　B. 第三象限内的点集

C. 第一、三象限内的点集　　D. 第二、四象限内的点集

6. 由大于-3且小于 11 的偶数所组成的集合是　(　)

A. $\{x\mid -3<x<11,x\in\mathbf{Z}\}$

B. $\{x\mid -3<x<11\}$

C. $\{x\mid -3<x<11,x=2k,k\in\mathbf{N}\}$

D. $\{x\mid -3<x<11,x=2k,k\in\mathbf{Z}\}$

知识点三　选择适当的方法表示集合

7. 方程组$\begin{cases}x+y=3,\\x-y=-1\end{cases}$的解集不能表示为　(　)

A. $\left\{(x,y)\middle|\begin{cases}x+y=3\\x-y=-1\end{cases}\right\}$　　B. $\left\{(x,y)\middle|\begin{cases}x=1\\y=2\end{cases}\right\}$

C. $\{1,2\}$　　D. $\{(x,y)\mid x=1,y=2\}$

8. 给出下列说法:

①平面直角坐标系中,第一象限内的点组成的集合为$\{(x,y)\mid x>0,y>0\}$;

②方程 $\sqrt{x-2}+|y+2|=0$ 的解集为$\{2,-2\}$;

③集合$\{y\mid y=x^2-1,x\in\mathbf{R}\}$与$\{y\mid y=x-1,x\in\mathbf{R}\}$是不相等的.

其中正确的是_____(填序号).

9. 选择适当的方法表示下列集合.

(1)由方程 $x(x^2-2x-3)=0$ 的所有实数根组成的集合;

(2)大于 2 且小于 6 的有理数;

(3)由直线 $y=-x+4$ 上的横坐标和纵坐标都是自然数的点组成的集合.

微信公众号 教辅资料站

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

提能达标过关

一、选择题

1. 已知集合 $A=\{x|x\leqslant 10\}$，$a=\sqrt{2}+\sqrt{3}$，则 a 与集合 A 的关系是　（　）

A. $a\in A$　　B. $a\notin A$

C. $a=A$　　D. $\{a\}\in A$

2. 下列四个集合中，不同于另外三个的是　（　）

A. $\{y|y=2\}$　　B. $\{x=2\}$

C. $\{2\}$　　D. $\{x|x^2-4x+4=0\}$

3. 已知集合 $A=\{1,2,3,4,5\}$，$B=\{(x,y)|x\in A,y\in A,x-y\in A\}$，则 B 中所含元素的个数为　（　）

A. 3　　B. 6

C. 8　　D. 10

4. **(2019·郑州一中期末)** 已知集合 $A=\{a,b,c\}$ 中任意 2 个元素的和构成的集合为 $\{1,2,3\}$，则集合 A 中任意 2 个元素的差的绝对值构成的集合是　（　）

A. $\{1,2,3\}$　　B. $\{1,2\}$

C. $\{0,1\}$　　D. $\{0,1,2\}$

5. **(2019·广西桂林中学检测)** 已知 x,y 为非零实数，则集合 $M=\left\{m\middle|m=\frac{x}{|x|}+\frac{y}{|y|}+\frac{xy}{|xy|}\right\}$ 为　（　）

A. $\{0,3\}$　　B. $\{1,3\}$

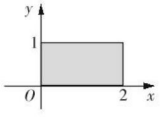
C. $\{-1,3\}$　　D. $\{1,-3\}$

二、填空题

6. 集合 $\{x|x^2-8x+16=0\}$ 中所有的元素之和是_____.

7. 已知集合 $A=\{-1,0,1\}$，集合 $B=\{y|y=|x|,x\in A\}$，则 $B=$_____.

8. 用描述法表示图中阴影部分的点构成的集合为_____.



三、解答题

9. 已知集合 $A=\left\{x\in\mathbf{Z}\middle|\frac{4}{3-x}\in\mathbf{Z}\right\}$.

(1)用列举法表示集合 A；

(2)求集合 A 的所有元素之和.

10. **(2019·江西南昌二中月考)** 已知集合 $A=\{(x,y)|2x-y+m>0\}$，$B=\{(x,y)|x+y-n\leqslant 0\}$，若 $(2,3)\in A$，且 $(2,3)\notin B$，试求 m,n 的取值范围.

微信公众号
教辅资料站

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

1.1.2　集合间的基本关系

第3课时　集合间的基本关系

掌握几个要点

1. 关注2个易错点——对子集概念的理解

(1)“A 是 B 的子集”的含义是：集合 A 中的任何一个元素都是集合 B 的元素，即由任意 $x\in A$ 能推出 $x\in B$.

(2)不能把“$A\subseteq B$”理解成“A 是 B 中部分元素组成的集合”，因为当 $A=\varnothing$ 时，$A\subseteq B$，但 A 中不含任何元素；又当 $A=B$ 时，也有 $A\subseteq B$，但 A 中含有 B 中的所有元素，这两种情况都有 $A\subseteq B$.

2. 识别一组关系——0，$\{0\}$，$\varnothing$，$\{\varnothing\}$的区别与联系

(1)区别：0 不是一个集合，而是一个元素，而 $\{0\}$，$\varnothing$，$\{\varnothing\}$ 都为集合，其中 $\{0\}$ 是包含一个元素 0 的集合；

$\varnothing$ 为不含任何元素的集合；$\{\varnothing\}$ 为含有一个元素 $\varnothing$ 的集合，此时 $\varnothing$ 作为集合 $\{\varnothing\}$ 的一个元素.

(2)联系：$0\in\{0\}$，$0\notin\varnothing$，$0\notin\{\varnothing\}$，$\varnothing\subseteq\{0\}$，$\varnothing\subsetneq\{0\}$，$\varnothing\subseteq\{\varnothing\}$，$\varnothing\subsetneq\{\varnothing\}$，$\varnothing\in\{\varnothing\}$.

题点知识巩固

知识点一　子集、真子集、空集

1. 给出下列关系：

①$0\subsetneq\{0,1\}$；②$\varnothing\in\{0,1\}$；③$\varnothing\subsetneq\{0\}$；④$\{0\}\subseteq\{0\}$.

其中正确的是　(　　)

A. ①③　　B. ③④

C. ②③　　D. ①④

2. 下列集合：

①$\{0\}$；②$\{\varnothing\}$；③$\{x\mid 3m<x<m\}$；④$\{x\mid a+2<x<a\}$；⑤$\{x\mid x^2+1=0,x\in\mathbf{R}\}$.

其中一定是空集的是　(　　)

A. ①②　　B. ②⑤

C. ④⑤　　D. ③④⑤

3. 已知集合 $M=\{x\mid x^2-3x+2=0\}$，$N=\{0,1,2\}$，则集合 M 与 N 的关系是　(　　)

A. $M=N$　　B. $M\subseteq N$

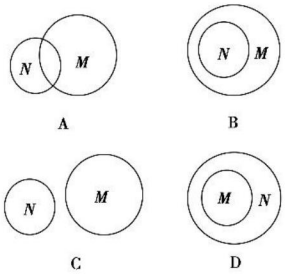
C. $M\subsetneq N$　　D. $N\subseteq M$

4. 满足 $\{a\}\subseteq M\subsetneq\{a,b,c,d\}$ 的集合 M 共有　(　　)

A. 6个　　B. 7个

C. 8个　　D. 15个

5. 下列表示集合 $M=\{-1,0,1\}$ 和 $N=\{x\mid x^2-x=0\}$ 的关系的 Venn 图正确的是　(　　)



知识点二　两集合相等的含义

6. 若 $\{1,2\}=\{x\mid x^2+bx+c=0\}$，则　(　　)

A. $b=-3,c=2$　　B. $b=3,c=-2$

C. $b=-2,c=3$　　D. $b=2,c=-3$

7. 已知集合 $A=\{2,-1\}$，集合 $B=\{m^2-m,-1\}$，且 $A=B$，则实数 m 等于　(　　)

A. 2　　B. -1

C. 2或-1　　D. 4

知识点三　子集关系的应用

8. 设集合 $A=\{x\mid 1<x<2\}$，$B=\{x\mid x<a\}$，若 $A\subsetneq B$，则实数 a 的取值范围为　(　　)

A. $\{a\mid a\geqslant 2\}$　　B. $\{a\mid a\leqslant 1\}$

C. $\{a\mid a\geqslant 1\}$　　D. $\{a\mid a\leqslant 2\}$

9. 已知 $A=\{x\mid x<-1$ 或 $x>2\}$，$B=\{x\mid 4x+a<0\}$，当 $B\subseteq A$ 时，求实数 a 的取值范围.

微信公众号
教辅资料站

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

提能达标过关

一、选择题

1. 已知集合 $M=\{x\mid y^2=2x,y\in\mathbf{R}\}$ 和集合 $P=\{(x,y)\mid y^2=2x,y\in\mathbf{R}\}$，则两个集合间的关系是　（　）

A. $M\subseteq P$　　B. $P\subseteq M$

C. $M=P$　　D. M,P 互不包含

2. 若集合 $A\subseteq\{1,2,3\}$，且 A 中至少含有一个奇数，则这样的集合 A 有　（　）

A. 3 个　　B. 4 个

C. 5 个　　D. 6 个

3. 若集合 $M=\left\{x\,\middle|\,x=m+\frac{1}{6},m\in\mathbf{Z}\right\}$，$N=\left\{x\,\middle|\,x=\frac{n}{2}-\frac{1}{3},n\in\mathbf{Z}\right\}$，$P=\left\{x\,\middle|\,x=\frac{p}{2}+\frac{1}{6},p\in\mathbf{Z}\right\}$，则 M,N,P 的关系是　（　）

A. $M=N\subsetneq P$　　B. $M\subsetneq N=P$

C. $M\subsetneq N\subsetneq P$　　D. $N\subsetneq P\subsetneq M$

4. **(2018·江西南昌二中期中)** 已知集合 $A=\{x\mid 0<ax+1\leqslant 5\}$，集合 $B=\left\{x\,\middle|\,-\frac{1}{2}<x\leqslant 2\right\}$，若 $A=B$，则实数 a 的值为　（　）

A. 0　　B. $-\frac{1}{2}$

C. 2　　D. 5

5. 已知集合 $A=\{1,2\}$，$B=\{x\mid ax-2=0\}$，若 $B\subseteq A$，则 a 的值不可能是　（　）

A. 0　　B. 1

C. 2　　D. 3

二、填空题

6. 已知集合 $A=\{a,0,-1\}$，$B=\left\{c+b,\frac{1}{a+b},1\right\}$，且 $A=B$，则 $a=$_____，$b=$_____，$c=$_____.

7. 已知集合 $A=\{x\mid x^2-3x+2=0,x\in\mathbf{R}\}$，$B=\{x\mid 0<x<5,x\in\mathbf{N}\}$，则满足条件 $A\subseteq C\subseteq B$ 的集合 C 有_____个.

8. 已知集合 $A=\{1,2,m^3\}$，$B=\{1,m\}$，$B\subseteq A$，则 $m=$_____.

三、解答题

9. 若集合 $A=\{x\mid x^2+x-6=0\}$，$B=\{x\mid x^2+x+a=0\}$，且 $B\subseteq A$，求实数 a 的取值范围.

10. 已知集合 $A=\{x\mid 1<ax<2\}$，$B=\{x\mid -1<x<1\}$，求满足 $A\subseteq B$ 的实数 a 的取值范围.

微信公众号 教辅资料站

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

1.1.3　集合的基本运算

第4课时　并集、交集

掌握几个要点

1. 关注2个易错点——对并集、交集概念的理解

(1)对于并集，要注意其中“或”的意义，“或”与通常所说的“非此即彼”有原则性的区别，它们是“相容”的.“$x\in A$，或$x\in B$”这一条件，包括下列三种情况：$x\in A$但$x\notin B$；$x\in B$但$x\notin A$；$x\in A$且$x\in B$.因此，$A\cup B$是由所有至少属于A，B两者之一的元素组成的集合.

(2)$A\cap B$中的元素是“所有”属于集合A且属于集合B的元素，而不是部分，特别地，当集合A和集合B没有公共元素时，不能说A与B没有交集，而是$A\cap B=\varnothing$.

2. 掌握2种技巧——集合运算方法的选择

(1)对于元素个数有限的集合，可直接根据集合的“交”“并”定义求解，但要注意集合元素的互异性.

(2)对于元素个数无限的集合，进行交、并运算时，可借助数轴，利用数轴分析法求解，但要注意端点值能否取到.

3. 熟记2组性质——并集、交集的性质

(1)并集的性质

$A\cup B=B\cup A$，$A\cup A=A$，$A\cup\varnothing=A$，$A\subseteq B\Leftrightarrow A\cup B=B$.

(2)交集的性质

$A\cap B=B\cap A$，$A\cap A=A$，$A\cap\varnothing=\varnothing$，$A\subseteq B\Leftrightarrow A\cap B=A$.

题点知识巩固

知识点一　并集

1.(**2019·成都高一检测**)设集合$A=\{x|-1<x<2\}$，集合$B=\{x|1<x<3\}$，则$A\cup B=$　(　)

A. $\{x|-1<x<3\}$　　B. $\{x|-1<x<1\}$

C. $\{x|1<x<2\}$　　D. $\{x|2<x<3\}$

2. 设集合$M=\{x|x^2+2x=0,x\in\mathbf{R}\}$，$N=\{x|x^2-2x=0,x\in\mathbf{R}\}$，则$M\cup N=$　(　)

A. $\{0\}$　　B. $\{0,2\}$

C. $\{-2,0\}$　　D. $\{-2,0,2\}$

3. 已知集合$A=\{x|x\geqslant 2\}$，$B=\{x|x\geqslant m\}$，且$A\cup B=A$，则实数m的取值范围是_____.

知识点二　交集

4. 已知集合$A=\{-1,0,1\}$，$B=\{x|-1\leqslant x<1\}$，则$A\cap B=$　(　)

A. $\{0\}$　　B. $\{-1,0\}$

C. $\{0,1\}$　　D. $\{-1,0,1\}$

5. 若集合$A=\{x|-5<x<2\}$，$B=\{x|-3<x<3\}$，则$A\cap B=$　(　)

A. $\{x|-3<x<2\}$　　B. $\{x|-5<x<2\}$

C. $\{x|-3<x<3\}$　　D. $\{x|-5<x<3\}$

6. 设集合$A=\{5,2a\}$，集合$B=\{a,b\}$，若$A\cap B=\{2\}$，则$a+b$等于　(　)

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

知识点三　利用集合交集、并集的性质求参数

7. 已知$A=\{x|2a<x\leqslant a+8\}$，$B=\{x|x<-1$或$x>5\}$，$A\cup B=\mathbf{R}$，求$a$的取值范围.

8. 已知集合$M=\{x|2x-4=0\}$，集合$N=\{x|x^2-3x+m=0\}$，若$M\cap N=M$，求实数m的值.

微信公众号 教辅资料站

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

提能达标过关

一、选择题

1. **(2019·保定高一检测)** 已知集合 $M=\{x|-3<x\leqslant 5\}$，$N=\{x|x<-5 \text{ 或 } x>5\}$，则 $M\cup N=$ (　　)

A. $\{x|x<-5 \text{ 或 } x>-3\}$　B. $\{x|-5<x<5\}$

C. $\{x|-3<x<5\}$　D. $\{x|x<-3 \text{ 或 } x>5\}$

2. 已知集合 $M=\{(x,y)|x+y=2\}$，$N=\{(x,y)|x-y=4\}$，则 $M\cap N=$ (　　)

A. $x=3,y=-1$　B. $(3,-1)$

C. $\{3,-1\}$　D. $\{(3,-1)\}$

3. 若集合 $A=\{0,1,2,x\}$，$B=\{1,x^2\}$，$A\cup B=A$，则满足条件的实数 x 有 (　　)

A. 1 个　B. 2 个

C. 3 个　D. 4 个

4. 设集合 $A=\{a,b\}$，$B=\{a+1,5\}$，若 $A\cap B=\{2\}$，则 $A\cup B=$ (　　)

A. $\{1,2\}$　B. $\{1,5\}$

C. $\{2,5\}$　D. $\{1,2,5\}$

5. 设集合 $A=\{x|-1\leqslant x\leqslant 2\}$，集合 $B=\{x|x\leqslant a\}$，若 $A\cap B=\varnothing$，则实数 a 的取值集合为 (　　)

A. $\{a|a<2\}$　B. $\{a|a\geqslant -1\}$

C. $\{a|a<-1\}$　D. $\{a|-1\leqslant a\leqslant 2\}$

二、填空题

6. 设 $M=\{0,1,2,4,5,7\}$，$N=\{1,4,6,8,9\}$，$P=\{4,7,9\}$，则 $(M\cap N)\cup(M\cap P)=$_____.

7. 已知集合 $A=\{x|x\geqslant 5\}$，集合 $B=\{x|x\leqslant m\}$，且 $A\cap B=\{x|5\leqslant x\leqslant 6\}$，则实数 $m=$_____.

8. 已知集合 $A=\{x|x^2-px-2=0\}$，$B=\{x|x^2+qx+r=0\}$，且 $A\cup B=\{-2,1,5\}$，$A\cap B=\{-2\}$，则 $p+q+r=$_____.

三、解答题

9. 设集合 $A=\{x|x^2-ax+a^2-19=0\}$，$B=\{x|x^2-5x+6=0\}$，$C=\{x|x^2+2x-8=0\}$.

(1) 若 $A\cap B=A\cup B$，求实数 a 的值；

(2) 若 $\varnothing\subsetneq(A\cap B)$，且 $A\cap C=\varnothing$，求实数 a 的值；

(3) 若 $A\cap B=A\cap C\neq\varnothing$，求实数 a 的值.

10. 已知集合 $A=\{x|2a+1\leqslant x\leqslant 3a-5\}$，$B=\{x|x<-1 \text{ 或 } x>16\}$，若 $A\subseteq(A\cap B)$，求实数 a 的取值范围.

微信公众号
教辅资料站

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

第5课时　全集与补集

掌握几个要点

1. 理解一组关系——全集与补集的相互依存关系

(1)全集并非是包罗万象，含有任何元素的集合，它是对于研究问题而言的一个相对概念，它仅含有所研究问题中涉及的所有元素，如研究整数，$\mathbf{Z}$ 就是全集，研究方程的实数解，$\mathbf{R}$ 就是全集. 因此，全集因研究问题而异.

(2)补集是集合之间的一种运算. 求集合 A 的补集的前提是 A 是全集 U 的子集，随着所选全集的不同，得到的补集也是不同的，因此，它们是互相依存、不可分割的两个概念.

(3) $\complement_U A$ 的数学意义包括两个方面：首先必须具备 $A\subseteq U$；其次是定义 $\complement_U A=\{x\mid x\in U,\text{且 } x\notin A\}$，补集是集合间的运算关系.

2. 掌握一种思想——补集思想

做题时“正难则反”策略运用的是补集思想，即已知全集 U，求子集 A，若直接求 A 困难，可先求 $\complement_U A$，再由 $\complement_U(\complement_U A)=A$，求 A.

题点知识巩固

知识点一　补集的简单运算

1. 设全集 $U=\{1,2,3,4,5\}$，集合 $A=\{1,2\}$，则 $\complement_U A$ 等于 (　　)

A. $\{1,2\}$　　B. $\{3,4,5\}$

C. $\{1,2,3,4,5\}$　　D. $\varnothing$

2. 若全集 $U=\mathbf{R}$，集合 $A=\{x\mid x\geqslant 1\}$，则 $\complement_U A=$_____.

3. 已知全集 $U=\{x\mid x\geqslant -3\}$，集合 $A=\{x\mid -3<x\leqslant 4\}$，则 $\complement_U A=$_____.

知识点二　集合交、并、补的综合运算

4. (**2019·宜昌高一检测**)若全集 $U=\{1,2,3,4\}$，集合 $M=\{x\mid x^2-4x+3=0\}$，$N=\{x\mid x^2-5x+6=0\}$，则 $\complement_U(M\cap N)=$ (　　)

A. $\{4\}$　　B. $\{1,2\}$

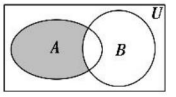
C. $\{1,2,4\}$　　D. $\{1,3,4\}$

5. (**2019·德州高一检测**)已知全集 $U=\mathbf{R}$，集合 $A=\{x\mid x\leqslant 0\}$，$B=\{x\mid x\geqslant 1\}$，则集合 $\complement_U(A\cup B)=$ (　　)

A. $\{x\mid x\geqslant 0\}$　　B. $\{x\mid x\leqslant 1\}$

C. $\{x\mid 0\leqslant x\leqslant 1\}$　　D. $\{x\mid 0<x<1\}$

6. 已知全集 $U=\mathbf{R}$，集合 $A=\{1,2,3,4,5\}$，$B=\{x\in\mathbf{R}\mid x\geqslant 3\}$，则图中阴影部分所表示的集合为 (　　)



A. $\{1\}$　　B. $\{1,2\}$

C. $\{1,2,3\}$　　D. $\{0,1,2\}$

知识点三　补集的综合应用

7. 已知集合 $A=\{x\mid x<a\}$，$B=\{x\mid 1<x<2\}$，且 $A\cup(\complement_{\mathbf{R}}B)=\mathbf{R}$，则实数 a 的取值范围为_____.

8. 设集合 $A=\{x\mid x+m\geqslant 0\}$，$B=\{x\mid -2<x<4\}$，全集 $U=\mathbf{R}$，且 $(\complement_U A)\cap B=\varnothing$，求实数 m 的取值范围.

微信公众号
教辅资料站

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

提能达标过关

一、选择题

1. 设全集 $U=\{1,2,3,4,5,6\}$，$A=\{1,2\}$，$B=\{2,3,4\}$，则 $A\cap(\complement_U B)=$　　(　　)

A. $\{1,2,5,6\}$　　B. $\{1\}$

C. $\{2\}$　　D. $\{1,2,3,4\}$

2. (**2019·洛阳高一检测**)已知 $A=\{x|x+1>0\}$，$B=\{-2,-1,0,1\}$，则 $(\complement_{\mathbf{R}}A)\cap B$ 等于　　(　　)

A. $\{-2,-1\}$　　B. $\{-2\}$

C. $\{-1,0,1\}$　　D. $\{0,1\}$

3. 已知 M,N 为集合 I 的非空真子集，且 M,N 不相等，若 $N\cap(\complement_I M)=\varnothing$，则 $M\cup N=$　　(　　)

A. M　　B. N

C. I　　D. $\varnothing$

4. (**2019·丹东高一检测**)已知全集 $U=\mathbf{R}$，集合 $A=\{x|x<3$ 或 $x\geqslant 7\}$，$B=\{x|x<a\}$. 若 $(\complement_U A)\cap B\neq\varnothing$，则实数 a 的取值范围为　　(　　)

A. $\{a|a>3\}$　　B. $\{a|a\geqslant 3\}$

C. $\{a|a\geqslant 7\}$　　D. $\{a|a>7\}$

5. 设全集 $U=\mathbf{R}$，集合 $A=\{x|x\leqslant 1$ 或 $x\geqslant 3\}$，集合 $B=\{x|k<x<k+1,k\in\mathbf{R}\}$，且 $B\cap(\complement_U A)\neq\varnothing$，则　　(　　)

A. $k<0$ 或 $k>3$　　B. $2<k<3$

C. $0<k<3$　　D. $-1<k<3$

二、填空题

6. 已知全集 $U=\{1,2,3,4,5,6\}$，集合 $A=\{1,2,5\}$，$\complement_U B=\{4,5,6\}$，则 $A\cap B=$_____.

7. 某班共 30 人，其中 15 人喜爱篮球运动，10 人喜爱乒乓球运动，8 人对这两项运动都不喜爱，则喜爱篮球运动但不喜爱乒乓球运动的人数为_____.

8. 已知集合 $A=\{1,3,x\}$，$B=\{1,x^2\}$，若 $B\cup(\complement_U B)=A$，则 $\complement_U B=$_____.

三、解答题

9. 设全集 $U=\mathbf{R}$，集合 $A=\{x|x^2+3x+2=0\}$，$B=\{x|x^2+(m+1)x+m=0\}$. 若 $(\complement_U A)\cap B=\varnothing$，求实数 m 的值.

10. 已知全集 $U=\mathbf{R}$，集合 $A=\{x|-2\leqslant x\leqslant 5\}$，$B=\{x|a+1\leqslant x\leqslant 2a-1\}$ 且 $A\subseteq\complement_U B$，求实数 a 的取值范围.

微信公众号 教辅资料站

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

SY素养提升 SUYANGTISHENG　核心素养归纳　素养培优提能

核心素养归纳

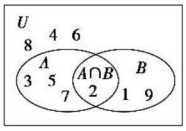
一、集合中的数形结合思想

数形结合思想，其实质是将抽象的数学语言与直观的图形结合起来，使抽象思维和形象思维结合，通过对图形的认识、数形结合的转化，可以培养思维的灵活性、形象性，使问题化难为易、化抽象为具体. 通过“形”往往可以解决用“数”很难解决的问题. 集合中常用的方法是数轴法和 Venn 图法.

【例 1】 已知全集为 U，$U=\{a\mid a\in\mathbf{N}^*\text{ 且 }a\leqslant 9\}$，且 $(\complement_U A)\cap B=\{1,9\}$，$A\cap B=\{2\}$，$(\complement_U A)\cap(\complement_U B)=\{4,6,8\}$，试确定集合 A，B.

［分析］ 若题设条件中所给出的各个集合中的元素都能在 Venn 图上表示出来，那么所要确定的集合 A，B 中的元素，将会从 Venn 图上一目了然的得出.

［解］ 将已知条件中的集合 $U=\{a\mid a\in\mathbf{N}^*\text{ 且 }a\leqslant 9\}=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$，



$(\complement_U A)\cap B=\{1,9\}$，

$A\cap B=\{2\}$，

$(\complement_U A)\cap(\complement_U B)=\{4,6,8\}$，

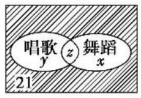
在 Venn 图上表示出来，如图所示.

由 Venn 图可以直观的得出 $A=\{2,3,5,7\}$，$B=\{1,2,9\}$.

【例 2】 某学校艺术班有 100 名学生，其中学舞蹈的学生有 67 人，学唱歌的学生有 45 人，而学乐器的学生既不能学舞蹈，又不能学唱歌，人数有 21 人，那么同时学舞蹈和唱歌的学生有多少人？

［解］ 设只学舞蹈的学生有 x 人，只学唱歌的学生有 y 人，既学舞蹈又学唱歌的学生有 z 人，Venn 图如图.

$$\begin{cases}x+z=67,\\ y+z=45,\\ x+y+z=79,\end{cases}\quad\text{解得}\quad\begin{cases}x=34,\\ y=12,\\ z=33,\end{cases}$$

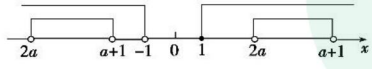


所以同时学舞蹈和唱歌的有 33 人.

【例 3】 已知集合 $A=\{x\mid x<-1,\text{或 }x\geqslant 1\}$，$B=\{x\mid 2a<x<a+1,a<1\}$，$B\subseteq A$，求实数 a 的取值范围.

［解］ $\because a<1$，$\therefore 2a<a+1$，$\therefore B\neq\varnothing$.

画出数轴分析，如图所示.



由图知要使 $B\subseteq A$，需 $2a\geqslant 1$ 或 $a+1\leqslant -1$，

即 $a\geqslant\frac{1}{2}$ 或 $a\leqslant -2$.

又 $\because a<1$，

$\therefore$ 实数 a 的取值范围是 $\left\{a\,\middle|\,a\leqslant -2\text{ 或 }\frac{1}{2}\leqslant a\leqslant 1\right\}$.

集合问题大都比较抽象，解题时要尽可能借助 Venn 图、数轴等工具利用数形结合思想将抽象问题直观化、形象化、明朗化，从而使问题获解.

二、集合易错点剖析

1. 符号意义不清致错

【例 1】 已知集合 $X=\{0,1\}$，$Y=\{x\mid x\subseteq X\}$，那么下列说法正确的是（　　）

A. X 是 Y 的子集　　B. X 是 Y 的真子集

C. Y 是 X 的真子集　　D. X 是 Y 的元素

［错解］ B

［剖析］ 集合中符号意义必须清楚.

［正解］ 因为 $Y=\{x\mid x\subseteq X\}=\{\{\varnothing\},\{0\},\{1\},\{0,1\}\}$，所以 $X\in Y$. 故选 D.

2. 代表元素意义不清致错

【例 2】 集合 $A=\{y\mid y=x^2,x\in\mathbf{R}\}$，$B=\{(x,y)\mid y=x+2,x\in\mathbf{R}\}$，则 $A\cap B$ 等于（　　）

A. $\{(-1,1),(2,4)\}$　　B. $\{(-1,1)\}$

C. $\{(2,4)\}$　　D. $\varnothing$

［错解］ 由 $\begin{cases}y=x^2,\\ y=x+2,\end{cases}$ 得 $\begin{cases}x=2,\\ y=4\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x=-1,\\ y=1.\end{cases}$ 故选 A.

［剖析］ 导致错误的原因是没有弄清集合中元素的意义，A 中的元素是实数 y，而 B 中的元素是实数对 (x,y)，也就是说，集合 A 为数集，集合 B 为点集，因此 A，B 两个集合中没有公共元素，从而这两个集合的交集为空集.

［正解］ D

3. 忽视集合元素的互异性致错

【例 3】 已知集合 $A=\{2,3,a^2+4a+2\}$，$B=\{0,7,a^2+4a-2,2-a\}$，且 $A\cap B=\{3,7\}$，求集合 B.

［错解］ 由 $A\cap B=\{3,7\}$ 得，$a^2+4a+2=7$，

解得 $a=1$ 或 $a=-5$. 当 $a=1$ 时，集合 $B=\{0,7,3,1\}$；

当 $a=-5$ 时，集合 $B=\{0,7,3\}$.

综上知集合 $B=\{0,7,3,1\}$ 或 $B=\{0,7,3\}$.

［剖析］ 由题设条件知集合 B 中有四个元素，集合中出现了相同的元素，与集合中元素的互异性矛盾，导致错解.

［正解］ 应将当 $a=-5$ 时的集合 $B=\{0,7,3\}$ 舍去，故集合 $B=\{0,7,3,1\}$.

4. 忽视空集致错

【例 4】 已知集合 $A=\{x\mid -2\leqslant x\leqslant 7\}$，$B=\{x\mid m+2\leqslant x\leqslant 2m-1\}$，若 $B\subseteq A$，求实数 m 的取值范围.

［错解］ 由 $B\subseteq A$，得 $\begin{cases}m+2\geqslant -2,\\ 2m-1\leqslant 7,\\ m+2\leqslant 2m-1,\end{cases}$

解得 $3\leqslant m\leqslant 4$.

［剖析］ 上述解法是初学者解此类问题的典型错误解法. 原因是考虑不全面，由集合 B 的含义及 $B\subseteq A$，忽略了集合为 $\varnothing$ 的可能而漏解. 因此题目若出现包含关系时，应首先想到有没有出现 $\varnothing$ 的可能.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

［正解］ $A=\{x|-2\leqslant x\leqslant 7\}$，$B=\{x|m+2\leqslant x\leqslant 2m-1\}$，且 $B\subseteq A$.

①若 $B=\varnothing$，则 $m+2>2m-1$，解得 $m<3$，此时有 $B\subseteq A$；

②若 $B\neq\varnothing$，则 $m+2\leqslant 2m-1$，即 $m\geqslant 3$，

由 $B\subseteq A$，得 $\begin{cases}m\geqslant 3,\\ m+2\geqslant -2,\\ 2m-1\leqslant 7,\end{cases}$ 解得 $3\leqslant m\leqslant 4$.

由①②得 $m\leqslant 4$.

∴实数 m 的取值范围是 $\{m|m\leqslant 4\}$.

素养培优提能

一、选择题

1.（**2019·南阳高一检测**）已知全集 $U=\{1,2,a^2-2a+3\}$，$A=\{1,a\}$，$\complement_U A=\{3\}$，则实数 a 等于（　　）

A. 0 或 2　　B. 0

C. 1 或 2　　D. 2

2. 已知集合 $M=\{(x,y)|(x+3)^2+(y-1)^2=0\}$，$N=\{-3,1\}$，则 M 与 N 的关系是（　　）

A. $M=N$　　B. $M\subseteq N$

C. $M\supseteq N$　　D. M,N 无公共元素

3. 设数集 $M=\left\{x\middle|m\leqslant x\leqslant m+\frac{3}{4}\right\}$，$N=\left\{x\middle|n-\frac{1}{3}\leqslant x\leqslant n\right\}$，且 M,N 都是集合 $\{x|0\leqslant x\leqslant 1\}$ 的子集，如果 $b-a$ 叫作集合 $\{x|a\leqslant x\leqslant b\}(b>a)$ 的“长度”，那么集合 $M\cap N$ 的“长度”的最小值是（　　）

A. $\frac{1}{3}$　　B. $\frac{2}{3}$

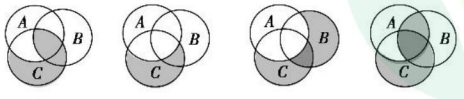
C. $\frac{1}{12}$　　D. $\frac{5}{12}$

4. 对于数集 M,N，定义 $M+N=\{x|x=a+b,a\in M,b\in N\}$，$M\div N=\left\{x\middle|x=\frac{a}{b},a\in M,b\in N\right\}$. 若集合 $P=\{1,2\}$，则集合 $(P+P)\div P$ 的所有元素之和为（　　）

A. $\frac{27}{2}$　　B. $\frac{15}{2}$

C. $\frac{21}{2}$　　D. $\frac{23}{2}$

5. 定义差集 $A-B=\{x|x\in A$，且 $x\notin B\}$，现有三个集合 A,B,C 分别用圆表示，则下图中阴影部分可用集合 $C-(A-B)$ 表示的为（　　）



A　　B　　C　　D

二、填空题

6. 若 $U=\{n|n$ 是小于 9 的正整数$\}$，$A=\{n\in U|n$ 是奇数$\}$，$B=\{n\in U|n$ 是 3 的倍数$\}$，则 $\complement_U(A\cup B)=$_____.

7. 已知集合 $M=\{1,m+2,m^2+4\}$，如果 $5\in M$，那么 m 的取值集合为_____.

8. 市场调查公司为了了解某小区居民在阅读报纸方面的取向，抽样调查了 500 户居民，调查的结果显示：订阅晨报的有 334 户，订阅晚报的有 297 户，其中两种都订的有 150 户，则两种都不订的有_____户.

三、解答题

9. 已知集合 $A=\{x|x^2-2x-3=0\}$，$B=\{x|ax-1=0\}$.

(1)若 $A\cap B=\{-1\}$，求实数 a 的值；

(2)若 $A\cap B=B$，求实数 a 的值.

10. 已知集合 $A=\{x|2-a\leqslant x\leqslant 2+a\}$，$B=\{x|x\leqslant 1$ 或 $x\geqslant 4\}$.

(1)当 $a=3$ 时，求 $A\cap B$；

(2)若 $A\cap B=\varnothing$，求实数 a 的取值范围.

微信公众号 教辅资料站

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

阶段质量评估 1

（时间：45 分钟　满分：100 分）

一、选择题（每小题 5 分，共 30 分）

1. 设全集 $U=\{x\in\mathbf{N}^*\mid x\leqslant 5\}$，$A=\{1,4\}$，$B=\{4,5\}$，则 $\complement_U(A\cap B)=$（　　）

A. $\{1,2,3,5\}$　　B. $\{1,2,4,5\}$

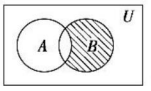
C. $\{1,3,4,5\}$　　D. $\{2,3,4,5\}$

2. 已知集合 $A=\{(x,y)\mid x+2y-4=0\}$，集合 $B=\{(x,y)\mid x=0\}$，则 $A\cap B=$（　　）

A. $\{0,2\}$　　B. $\{(0,2)\}$

C. $(0,2)$　　D. $\varnothing$

3. 如图，已知全集 $U=\mathbf{R}$，集合 $A=\{x\mid x<-1$ 或 $x>4\}$，$B=\{x\mid -2\leqslant x\leqslant 3\}$，则图中阴影部分表示的集合为（　　）



A. $\{x\mid -2\leqslant x<4\}$

B. $\{x\mid x\leqslant 3$ 或 $x\geqslant 4\}$

C. $\{x\mid -2\leqslant x\leqslant -1\}$

D. $\{x\mid -1\leqslant x\leqslant 3\}$

4. 已知集合 $A=\{x\mid ax^2+2x+a=0,a\in\mathbf{R}\}$，若集合 A 有且仅有两个子集，则实数 a 的值是（　　）

A. 1　　B. -1

C. 0 或 1　　D. -1 或 0 或 1

5. 已知 U 为全集，集合 M，N 是 U 的子集，若 $M\cap N=N$，则（　　）

A. $(\complement_U M)\supseteq(\complement_U N)$　　B. $(\complement_U M)\subseteq(\complement_U N)$

C. $M\supseteq(\complement_U N)$　　D. $M\subseteq(\complement_U N)$

6. 设 A，B 是非空集合，定义 $A\times B=\{x\mid x\in A\cup B$ 且 $x\notin A\cap B\}$，已知 $A=\{x\mid 0\leqslant x\leqslant 2\}$，$B=\{x\mid x\geqslant 0\}$，则 $A\times B$ 等于（　　）

A. $\{x\mid x>2\}$　　B. $\{x\mid 0\leqslant x\leqslant 1$ 或 $x\geqslant 2\}$

C. $\{x\mid 0\leqslant x<1$ 或 $x>2\}$　　D. $\{x\mid 0\leqslant x\leqslant 1$ 或 $x>2\}$

二、填空题（每小题 5 分，共 20 分）

7. 已知集合 $A=\{x\mid 1\leqslant x\leqslant 3\}$，$B=\{x\mid x<0$ 或 $x\geqslant 2\}$，则 $A\cap(\complement_{\mathbf{R}}B)=$_____.

8. 已知 $(1,2)\in A\cap B$，$A=\{(x,y)\mid y^2=ax+b\}$，$B=\{(x,y)\mid x^2-ay-b=0\}$，则 $a=$_____，$b=$_____.

9. 已知全集 $U=\{1,3,x^3+3x^2+2x\}$，$A=\{1,|2x-1|\}$，若 $\complement_U A=\{0\}$，则 x 的值为_____.

10. 某班有 36 名同学参加数学、物理、化学竞赛小组，每名同学至多参加两个小组，已知参加数学、物理、化学小组的人数分别为 26 人、15 人、13 人，同时参加数学和物理小组的有 6 人，同时参加物理和化学小组的有 4 人，则同时参加数学和化学小组的有_____人.

三、解答题（共 50 分）

11. （12 分）已知集合 $A=\{-4,2a-1,a^2\}$，$B=\{a-1,1-a,9\}$，已知 $A\cap B=\{9\}$，求实数 a 的值.

12. （12 分）已知全集 $U=\mathbf{R}$，集合 $A=\{x\mid 3\leqslant x<10\}$，$B=\{x\mid 2<x\leqslant 7\}$.

（1）求 $A\cap B$，$A\cup B$，$(\complement_U A)\cap(\complement_U B)$；

（2）若集合 $C=\{x\mid x>a\}$，$A\subseteq C$，求实数 a 的取值范围.

微信公众号 教辅资料站

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

13.(13 分)已知集合 $A=\{x|-2\leqslant x\leqslant 5\}$，$B=\{x|m+1\leqslant x\leqslant 2m-1\}$.

(1)若 $A\cap B=B$，求实数 m 的取值范围；

(2)当 $x\in\mathbf{Z}$ 时，求集合 A 的非空真子集的个数.

14.(13 分)已知集合 $A=\{x|x\leqslant -3 \text{ 或 } x\geqslant 2\}$，$B=\{x|1<x<5\}$，$C=\{x|m-1\leqslant x\leqslant 2m\}$.

(1)求 $A\cap B$，$(\complement_{\mathbf{R}}A)\cup B$；

(2)若 $B\cap C=C$，求实数 m 的取值范围.

微信公众号
教辅资料站

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

1.2　函数及其表示

1.2.1　函数的概念

第6课时　函数的概念

掌握几个要点

1. 理解1个概念——对函数概念的理解

(1)对数集的要求：集合 A，B 为非空数集.

(2)任意性和唯一性：集合 A 中的数具有任意性，集合 B 中的数具有唯一性.

(3)对符号“f”的认识：它表示对应关系，在不同的函数中 f 的具体含义不一样.

(4)一个区别：$f(x)$是一个符号，不表示 f 与 x 的乘积，而 $f(a)$表示函数 $f(x)$当自变量 x 取 a 时的一个函数值.

(5)函数三要素：定义域、对应关系和值域是函数的三要素，三者缺一不可.

2. 关注5个易错点——应用区间需注意的五个问题

(1)区间是一个连续数集，并非所有的数集都可用区间表示，如$\{1,2,3\}$.

(2)用到区间时，要特别注意是否包含区间的端点值，如$(1,2)$，$[1,2)$，$(1,2]$是不同的区间.

(3)区间符号里两个数(或字母)之间用“,”隔开.

(4)规定左端点值 a 必须小于右端点值 b.

(5)正确理解“∞”：“∞”是一个趋向符号，不是一个数，它表示数的变化趋势. 以“$-\infty$”和“$+\infty$”为区间的一端时，这一端点必须用小括号.

3. 掌握5种方法——函数定义域的求法

(1)若 $f(x)$是分式，则应考虑使分母不为零.

(2)若 $f(x)$是偶次根式，则被开方数大于或等于零.

(3)若 $f(x)$是指数幂，则函数的定义域是使幂运算有意义的实数集合.

(4)若 $f(x)$是由几个式子构成的，则函数的定义域是几个部分定义域的交集.

(5)若 $f(x)$是实际问题的解析式，则应符合实际问题，使实际问题有意义.

题点知识巩固

知识点一　函数的概念

1. 下列四种说法中，不正确的是　(　)

A. 在函数值域中的每一个数，在定义域中都至少有一个数与之对应

B. 函数的定义域和值域一定是无限集合

C. 定义域和对应关系确定后，函数的值域也就确定了

D. 若函数的定义域中只含有一个元素，则值域也只含有一个元素

2. 下列对应是从集合 M 到集合 N 的函数的是　(　)

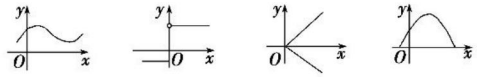
A. $M=\mathbf{R}$，$N=\{x\in\mathbf{R}\mid x>0\}$，$f:x\to|x|$

B. $M=\mathbf{N}$，$N=\mathbf{N}^*$，$f:x\to|x-1|$

C. $M=\{x\in\mathbf{R}\mid x>0\}$，$N=\mathbf{R}$，$f:x\to x^2$

D. $M=\mathbf{R}$，$N=\{x\in\mathbf{R}\mid x\geqslant 0\}$，$f:x\to\sqrt{x}$

3. 下列四个图中，不是以 x 为自变量的函数的图象是　(　)



A　　B　　C　　D

知识点二　区间的关系

4. 区间$(-3,2]$用集合可表示为　(　)

A. $\{-2,-1,0,1,2\}$　　B. $\{x\mid -3<x<2\}$

C. $\{x\mid -3<x\leqslant 2\}$　　D. $\{x\mid -3\leqslant x\leqslant 2\}$

5. 用区间表示下列集合：

(1)$\{x\mid x\geqslant 1\}=$_____；

(2)$\left\{x\left|\frac{x-2}{x+1}\geqslant 0\right.\right\}=$_____；

(3)$\{x\mid x=1$ 或 $2\leqslant x\leqslant 8\}=$_____；

(4)$\{x\mid x<-4$ 或 $-1<x\leqslant 2\}=$_____.

6. 已知集合 $A=\{x\mid 7-x\geqslant 0\}$，集合 $B=\{x\mid |x|-2\neq 0\}$，求 $A\cap B$，并用区间表示出来.

微信公众号 教辅资料站

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

知识点三　函数的定义域

7. 函数 $f(x)=x+\sqrt{2-x}$ 的定义域是　（　　）

A. $\{x|x\geqslant 2\}$　　B. $\{x|x>2\}$

C. $\{x|x\leqslant 2\}$　　D. $\{x|x<2\}$

8. 函数 $f(x)=\dfrac{\sqrt{x-1}}{x-2}$ 的定义域为　（　　）

A. $\{x|x\geqslant 1$ 且 $x\neq 2\}$　　B. $\{x|x>1\}$

C. $\{x|1\leqslant x\leqslant 2\}$　　D. $\{x|x\geqslant 1\}$

9. 求下列函数的定义域：

(1) $y=\dfrac{1}{|x|-x}$；

(2) $y=\sqrt{2+x}+\dfrac{x}{1-x}$；

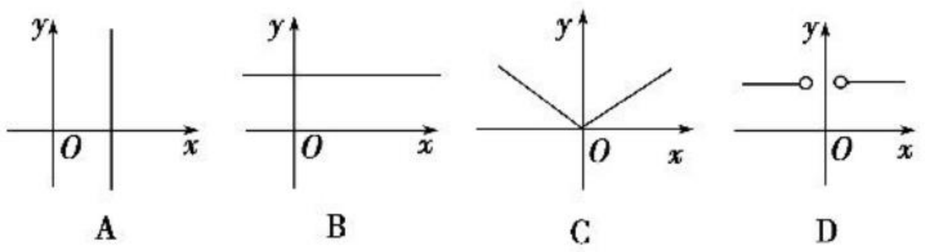
(3) $y=(x+1)^0+\sqrt{4-x^2}$；

(4) $y=\sqrt{5-x}+\sqrt{x-5}-\dfrac{1}{x^2-9}$.

提能达标过关

一、选择题

1. 各个图形中，不可能是函数 $y=f(x)$ 的图象的是　（　　）



A　　B　　C　　D

2. 集合 $A=\{x|0\leqslant x\leqslant 4\}$，$B=\{y|0\leqslant y\leqslant 2\}$，下列不能表示从 A 到 B 的函数的是　（　　）

A. $f:x\to y=\dfrac{1}{2}x$　　B. $f:x\to y=\dfrac{1}{3}x$

C. $f:x\to y=\dfrac{2}{3}x$　　D. $f:x\to y=\sqrt{x}$

3. 函数 $y=\sqrt{2-x}+\dfrac{1}{\sqrt{x+1}}$ 的定义域是　（　　）

A. $(-1,2]$　　B. $[-1,2]$　　C. $(-1,2)$　　D. $[-1,2)$

4. 函数 $y=f(x)$ 的图象与直线 $x=a$ 的交点个数有　（　　）

A. 必有一个　　B. 一个或两个

C. 至多一个　　D. 可能两个以上

5. (**2019·昆明高一检测**) 函数 $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{ax^2+3ax+1}}$ 的定义域是 **R**，则实数 a 的取值范围是　（　　）

A. $\left(0,\dfrac{4}{9}\right)$　　B. $\left[0,\dfrac{4}{9}\right]$

C. $\left[0,\dfrac{4}{9}\right)$　　D. $\left(0,\dfrac{4}{9}\right]$

二、填空题

6. 已知区间 $[-2a,3a+5]$，则 a 的取值范围为_____.

7. 函数 $y=\dfrac{\sqrt{6-x}}{|x|-4}$ 的定义域用区间表示为_____.

8. 给出下列两个集合间的对应：

①$A=\{-1,0,1\}$，$B=\{-1,0,1\}$，f：A 中的数求平方；

②$A=\{0,1\}$，$B=\{-1,0,1\}$，f：A 中的数开方；

③$A=\mathbf{Z}$，$B=\mathbf{Q}$，f：A 中的数求倒数；

④$A=\mathbf{R}$，$B=\{$正实数$\}$，f：A 中的数取绝对值；

⑤$A=\{1,2,3,4\}$，$B=\{2,4,6,8\}$，f：$n=2m$.

其中是 A 到 B 的函数的有_____个.

三、解答题

9. 已知集合 $A=\{1,2,3,k\}$，$B=\{4,7,a^4,a^2+3a\}$，$a\in\mathbf{N}^*$，$k\in\mathbf{N}^*$，$x\in A$，$y\in B$，$f:x\to y=3x+1$ 是从定义域 A 到值域 B 的一个函数，求 a，k，A，B.

10. 已知函数 $y=\sqrt{\dfrac{1}{a}x+1}$（$a<0$ 且 a 为常数）在区间 $(-\infty,1]$ 上有意义，求实数 a 的取值范围.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

第7课时　函数概念的综合应用

掌握几个要点

1. 关注3个易错点——函数相等问题

(1)函数值域是由定义域和对应关系决定的.因此判断两个函数是否相等,看定义域和对应关系即可.

(2)当两个函数的对应关系和值域分别相等时,这两个函数不一定相等.

(3)若两个函数只是自变量用的字母不同,则这两个函数相等.例如,函数 $f(x)=x^2,x\in\mathbf{R}$ 与函数 $f(t)=t^2,t\in\mathbf{R}$ 是相等函数.

2. 掌握4种方法——求函数值域的常用方法

(1)观察法:对于一些比较简单的函数,其值域可通过观察得到.

(2)配方法:此法是求"二次函数类"值域的基本方法,即把函数通过配方转化为能直接看出其值域的方法.

(3)分离常数法:此方法主要是针对有理分式,即将有理分式转化为"反比例函数类"的形式,便于求值域.

(4)换元法:即运用新元代换,将所给函数化成值域易确定的函数,从而求得原函数的值域.

题点知识巩固

知识点一　函数的三要素及相等函数

1. 下列各组函数中,是相等函数的是　(　　)

A. $f(x)=|x|,g(x)=\sqrt{x^2}$

B. $f(x)=2x,g(x)=2(x+1)$

C. $f(x)=\sqrt{(-x)^2},g(x)=(\sqrt{-x})^2$

D. $f(x)=\dfrac{x^2+x}{x+1},g(x)=x$

2. 与函数 $y=x$ 是相等函数的是　(　　)

A. $y=|x|$　　B. $y=\sqrt{x^2}$

C. $y=\dfrac{x^2}{x}$　　D. $y=t$

3. 判断下列函数是否为相等函数.

(1)$f(x)=x+1$ 与 $g(x)=x+x^0$;

(2)$f(x)=\sqrt{(2x+1)^2}$ 与 $g(x)=|2x+1|$;

(3)$f(n)=2n+1(n\in\mathbf{Z})$ 与 $g(n)=2n-1(n\in\mathbf{Z})$;

(4)$f(x)=3x+2$ 与 $g(t)=3t+2$.

知识点二　函数的值及值域

4. (**2019·绵阳高一检测**)已知函数 $f(x)=\dfrac{x^2}{1+|x-1|}$,则 $f(-2)=$　(　　)

A. -1　　B. 0

C. 1　　D. 2

5. 若函数 $y=x^2-3x$ 的定义域为 $\{-1,0,2,3\}$,则其值域为　(　　)

A. $\{-2,0,4\}$　　B. $\{-2,0,2,4\}$

C. $\left\{y\middle|y\leqslant-\dfrac{9}{4}\right\}$　　D. $\{y|0\leqslant y\leqslant3\}$

6. 下列函数中,值域为$[1,+\infty)$的是　(　　)

A. $y=\sqrt{x-1}$　　B. $y=\dfrac{1}{x-1}$

C. $y=\sqrt{x^2+1}$　　D. $y=\dfrac{1}{\sqrt{x-1}}$

7. 若 $f(x)=\dfrac{5x}{x^2+1}$,且 $f(a)=2$,则 $a=$_____.

8. 已知 $f(x)=\dfrac{1-x}{1+x}(x\in\mathbf{R}$,且 $x\neq-1),g(x)=x^2-1(x\in\mathbf{R})$.

(1)求 $f(2),g(3)$的值;

(2)求 $f[g(3)]$的值及 $f[g(x)]$.

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

提能达标过关

一、选择题

1. 下列各组函数表示同一函数的是　　(　　)

A. $y=\dfrac{x^2-9}{x-3}$ 与 $y=x+3$

B. $y=\sqrt{x^2}-1$ 与 $y=x-1$

C. $y=x^0(x\neq 0)$ 与 $y=1(x\neq 0)$

D. $y=2x+1,x\in\mathbf{Z}$ 与 $y=2x-1,x\in\mathbf{Z}$

2. $f(x)=(x-1)^0+\sqrt{\dfrac{2}{x+1}}$ 的定义域是　　(　　)

A. $(-1,+\infty)$　　B. $(-\infty,-1)$

C. $\mathbf{R}$　　D. $(-1,1)\cup(1,+\infty)$

3. 函数 $f(x)$ 的定义域是 $\left[\dfrac{1}{2},1\right]$，则 $y=f(3-x)$ 的定义域是　　(　　)

A. $[0,1]$　　B. $\left[0,\dfrac{5}{2}\right]$

C. $\left[2,\dfrac{5}{2}\right]$　　D. $(-\infty,3)$

4. 函数 $f(x)=\dfrac{1}{x^2+1}(x\in\mathbf{R})$ 的值域是　　(　　)

A. $(0,1)$　　B. $(0,1]$

C. $[0,1)$　　D. $[0,1]$

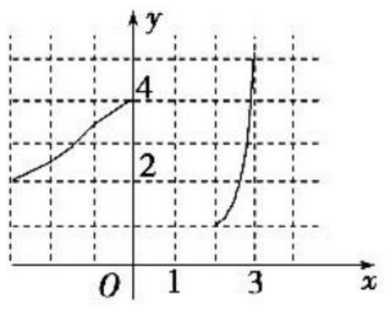
5. 若函数 $f(x)=ax^2-1$，a 为一个正常数，且 $f[f(-1)]=-1$，那么 a 的值是　　(　　)

A. 1　　B. 0

C. -1　　D. 2

二、填空题

6. 函数 $y=f(x)$ 的图象如图所示，那么 $f(x)$ 的定义域是_____；其中只与 x 的一个值对应的 y 值的范围是_____.



7. 函数 $y=\sqrt{16-x^2}$ 的值域是_____.

8. 已知函数 $f(x)=\dfrac{2}{\sqrt{kx^2-4kx+k+3}}$ 的定义域为 $\mathbf{R}$，则 k 的取值范围是_____.

三、解答题

9. 求下列函数的值域：

(1) $y=\dfrac{2x+1}{x-3}$；

(2) $y=\sqrt{-2x^2+x+3}$；

(3) $y=x-\sqrt{1-2x}$.

10. 已知函数 $f(x)=\dfrac{x^2}{1+x^2}$.

(1) 求 $f(2)+f\left(\dfrac{1}{2}\right)$，$f(3)+f\left(\dfrac{1}{3}\right)$ 的值；

(2) 求证：$f(x)+f\left(\dfrac{1}{x}\right)$ 是定值；

(3) 求 $2f(1)+f(2)+f\left(\dfrac{1}{2}\right)+f(3)+f\left(\dfrac{1}{3}\right)+\cdots+f(2\,017)+f\left(\dfrac{1}{2\,017}\right)+f(2\,018)+f\left(\dfrac{1}{2\,018}\right)$ 的值.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

1.2.2　函数的表示法

第8课时　函数的表示法

掌握几个要点

1. 掌握4种方法——求函数解析式的方法

(1)直接法(代入法):已知 $f(x)$ 的解析式,求 $f[g(x)]$ 的解析式,直接将 $g(x)$ 代入即可.

(2)待定系数法:若已知函数的类型,可用待定系数法求解,即由函数类型设出函数解析式,再根据条件列方程(或方程组),通过解方程(组)求出待定系数,进而求出函数解析式.

(3)换元法(有时可用"配凑法"):已知函数 $f[g(x)]$ 的解析式求 $f(x)$ 的解析式可用换元法(或"配凑法"),即令 $g(x)=t$,反解出 x,然后代入 $f[g(x)]$ 中求出 $f(t)$,从而求出 $f(x)$.

(4)解方程组法或消元法:在已知式子中,含有关于两个不同变量的函数,而这两个变量有着某种关系,这时就要依据两个变量的关系,建立一个新的关于两个变量的式子,由两个式子建立方程组,通过解方程组消去一个变量,得到目标变量的解析式,这种方法叫做解方程组法或消元法.

2. 注意3个关注点——描点法画函数图象的关注点

(1)画函数图象时首先关注函数的定义域,即在定义域内作图.

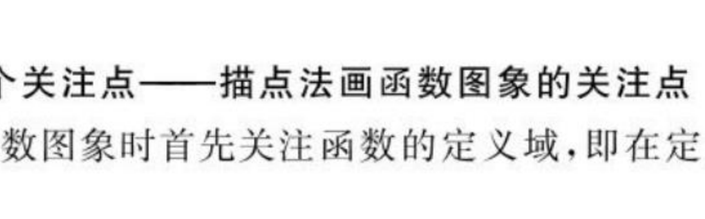
(2)图象是实线或实点,定义域外的部分有时可用虚线来衬托整个图象.

(3)要标出某些关键点,例如图象的顶点、端点、与坐标轴的交点等.要分清这些关键点是实心点还是空心点.

题点知识巩固

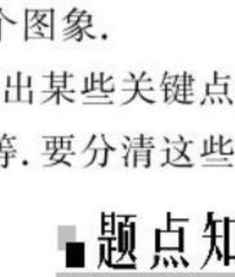
知识点一　函数的表示法

1. 汽车经过启动、加速行驶、匀速行驶、减速行驶之后停车,若把这一过程中汽车的行驶路程 s 看作时间 t 的函数,其图象可能是(　　)

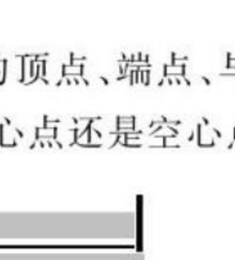


A

B



C



D

2. (**2019·合肥高一检测**)观察数表:

x	-3	-2	-1	1	2	3
$f(x)$	4	1	-1	-3	3	5
$g(x)$	1	4	2	3	-2	-4

则 $f[g(3)-f(-1)]=$_____.

3. 某商场新进了10台彩电,每台售价3 000元,试求售出彩电数量 x(台)与彩电销售总额 y(元)之间的函数关系,分别用列表法、图象法、解析法表示出来.

知识点二　函数的图象

4. 作出下列函数的图象:

(1)$f(x)=1-x(x\in\mathbf{Z}$ 且 $-2\leqslant x\leqslant 2)$;

(2)$y=x^2-2x(x\in[0,3))$.

5. 画出函数 $f(x)=-x^2+2x+3$ 的图象,并根据图象回答下列问题:

(1)比较 $f(0),f(1),f(3)$ 的大小;

(2)求函数 $f(x)$ 的值域.

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

知识点三　函数的解析式

6. 已知 $f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{1+x}$，那么函数 $f(x)$ 的解析式是　　(　　)

A. $f(x)=\frac{x}{1+x}(x\neq -1)$

B. $f(x)=\frac{x}{1+x}(x\neq -1$ 且 $x\neq 0)$

C. $f(x)=\frac{1}{1+x}$

D. $f(x)=1+x$

7. 若一个长方体的高为 80 cm，长比宽多 10 cm，则这个长方体的体积 $y(\text{cm}^3)$ 与长方体的宽 $x(\text{cm})$ 之间的表达式是_____.

8. (1)已知反比例函数 $f(x)$ 满足 $f(3)=-6$，求 $f(x)$ 的解析式；

(2)已知二次函数 $f(x)$ 满足 $f(0)=1, f(1)=2, f(2)=5$，求该二次函数的解析式.

提能达标过关

一、选择题

1. 由下表给出函数 $y=f(x)$，则 $f[f(1)]$ 等于　　(　　)

x	1	2	3	4	5
y	4	5	3	2	1

A. 1　　B. 2

C. 4　　D. 5

2. 设函数 $f(x)=2x+3, g(x+2)=f(x)$，则 $g(x)$ 的表达式是　　(　　)

A. $g(x)=2x+1$　　B. $g(x)=2x-1$

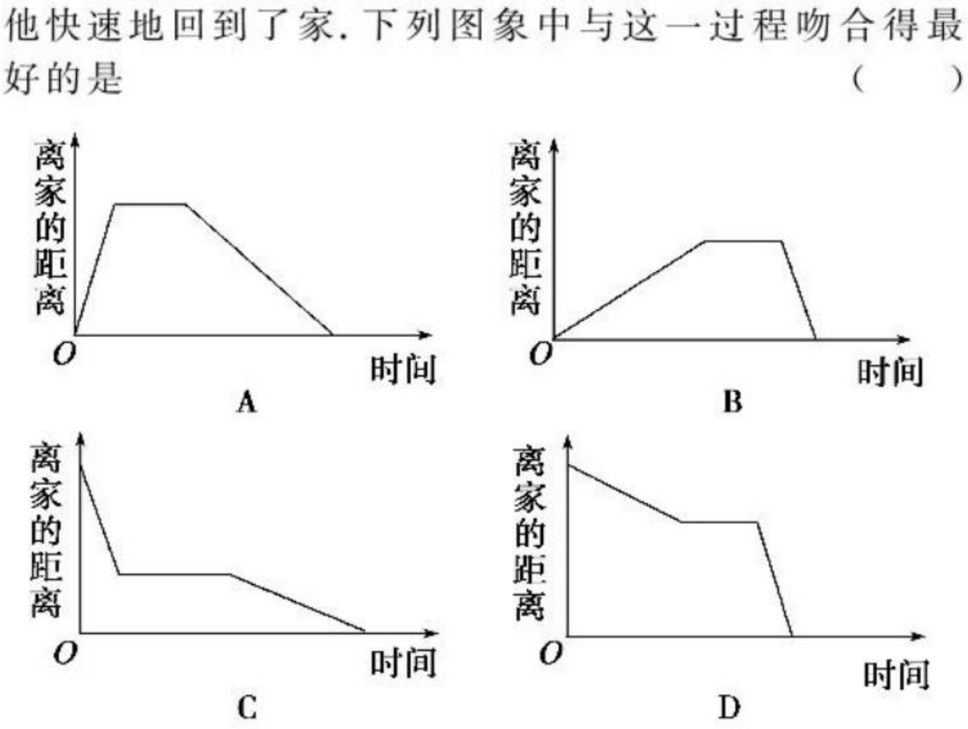
C. $g(x)=2x-3$　　D. $g(x)=2x+7$

3. 从甲城市到乙城市 t min 的电话费由函数 $g(t)=1.06\times(0.75[t]+1)$ 给出，其中 $t>0$，$[t]$ 为 t 的整数部分，则从甲城市到乙城市 5.5 min 的电话费为　　(　　)

A. 5.04 元　　B. 5.56 元

C. 5.84 元　　D. 5.38 元

4. 李明放学回家的路上，开始和同学边走边讨论问题，走得比较慢；然后他们索性停下来将问题彻底解决；最后他快速地回到了家. 下列图象中与这一过程吻合得最好的是　　(　　)



5. (**2019 · 临川高一检测**)设函数 $f(x)=2x+a, g(x)=\frac{1}{4}(x^2+3)$，且 $g[f(x)]=x^2-x+1$，则实数 a 的值为(　　)

A. 1　　B. −1

C. 1 或 −1　　D. 1 或 −2

二、填空题

6. 已知 $f(x+1)=x^2-2x$，则 $f(3)=$_____.

7. 若 $2f(x)+f\left(\frac{1}{x}\right)=2x+\frac{1}{2}(x\neq 0)$，则 $f(2)=$_____.

8. (**2019 · 金华高一检测**)已知函数 $f(x), g(x)$ 分别由下表给出：

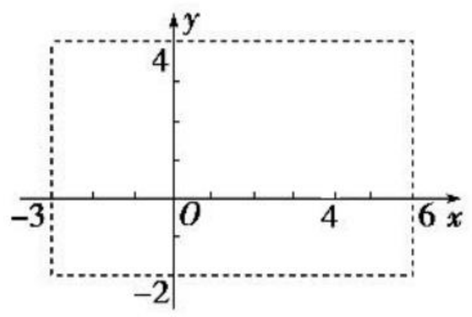
x	1	2	3
$f(x)$	1	3	1

x	1	2	3
$g(x)$	3	2	1

则满足 $f[g(x)]>g[f(x)]$ 的 x 的值是_____.

三、解答题

9. 若函数 $y=f(x)$ 的定义域为 $\{x\mid -3\leqslant x\leqslant 6$ 且 $x\neq 4\}$，值域为 $\{y\mid -2\leqslant y\leqslant 4$ 且 $y\neq 0\}$，试在下面图中画出此函数的图象.



10. (1)已知 $f(x)$ 是一次函数，且满足 $2f(x+3)-f(x-2)=2x+21$，求 $f(x)$ 的解析式；

(2)已知函数 $f(x)=x^2$，$g(x)$ 为一次函数，且一次项系数大于 0，若 $f[g(x)]=4x^2-20x+25$，求 $g(x)$ 的解析式；

(3)已知 $f(x)$ 满足 $3f(x)+2f(-x)=4x$，求 $f(x)$ 的解析式.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

第9课时　分段函数与映射

掌握几个要点

1. 辨明1组关系——函数与映射的关系

映射 $f:A\to B$，其中 A,B 是两个非空的集合；而函数 $y=f(x),x\in A$，A 为非空的数集，其值域也是数集. 于是，函数是数集到数集的映射. 由此可知，映射是函数的推广，函数是一种特殊的映射.

2. 关注2个易错点——对分段函数的理解

(1)分段函数是一个函数而非几个函数.

分段函数的定义域是各段上“定义域”的并集，其值域是各段上“值域”的并集.

(2)分段函数的图象应分段来作，特别注意各段的自变量取值区间端点处函数的取值情况，以决定这些点的虚实情况.

题点知识巩固

知识点一　分段函数求值问题

1. 设函数 $f(x)=\begin{cases}1-x^2,x\leqslant 1,\\ x^2+x-2,x>1,\end{cases}$ 则 $f\left[\dfrac{1}{f(2)}\right]=$ (　　)

A. $\dfrac{15}{16}$　　B. 4

C. 3　　D. -3

2. (**2019·深圳高一检测**)已知函数 $f(x)=\begin{cases}x+2,x\leqslant 0,\\ x^2,0<x\leqslant 3,\end{cases}$ 若 $f(x)=3$，则 x 的值是 (　　)

A. $\sqrt{3}$　　B. 9

C. -1 或 1　　D. $-\sqrt{3}$ 或 $\sqrt{3}$

3. 函数 $f(x)=\begin{cases}2x^2,0\leqslant x\leqslant 1,\\ 2,1<x<2,\\ 3,x\geqslant 2\end{cases}$ 的值域是 (　　)

A. $\mathbf{R}$　　B. $[0,+\infty)$

C. $[0,3]$　　D. $[0,2]\cup\{3\}$

4. 已知 $f(n)=\begin{cases}n-3,n\geqslant 10,\\ f[f(n+5)],n<10,\end{cases}$ 则 $f(8)=$ _____.

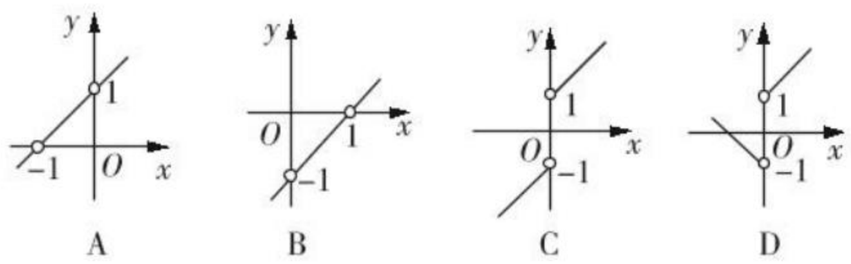
5. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}x+2,x\leqslant -1,\\ x^2,-1<x<2,\\ 2x,x\geqslant 2.\end{cases}$

(1)求 $f(-\pi)$ 及 $f\left[f\left(\dfrac{3}{2}\right)\right]$ 的值；

(2)若 $f(a)=\dfrac{1}{2}$，求 a 的值.

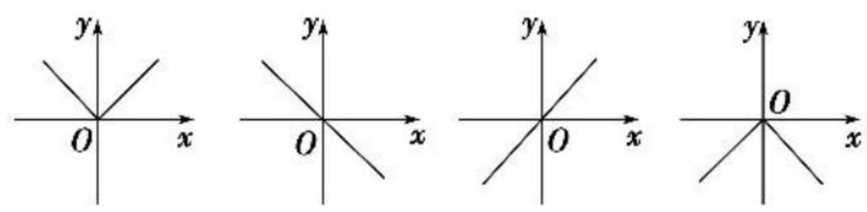
知识点二　分段函数的图象

6. 函数 $f(x)=x+\dfrac{|x|}{x}$ 的图象是 (　　)



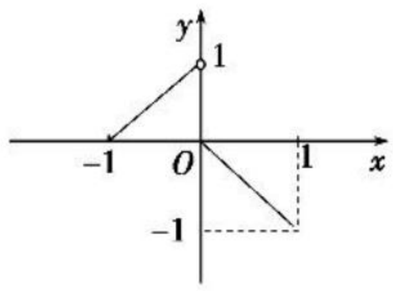
A　　B　　C　　D

7. 设 $x\in\mathbf{R}$，定义符号函数 $\operatorname{sgn}x=\begin{cases}1,x>0,\\ 0,x=0,\\ -1,x<0,\end{cases}$ 则函数 $f(x)=|x|\operatorname{sgn}x$ 的图象大致是 (　　)



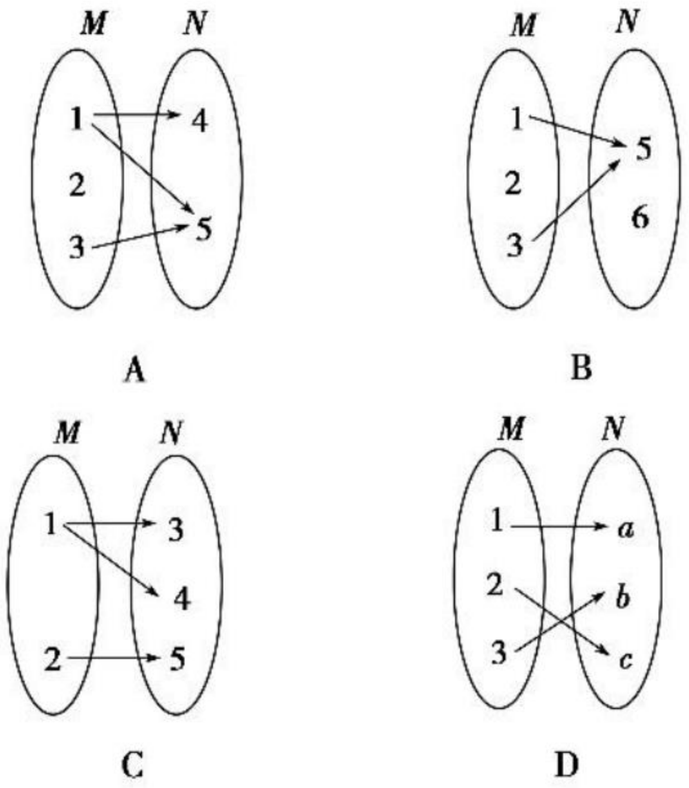
A　　B　　C　　D

8. 已知函数 $f(x)$ 的图象如图所示，则 $f(x)$ 的解析式是 _____.



知识点三　映射

9. 下列集合 M 到集合 N 的对应中，构成映射的是 (　　)



A　　B

C　　D

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

提能达标过关

一、选择题

1. 设集合 $A=\{x|1\leqslant x\leqslant 2\}$，$B=\{y|1\leqslant y\leqslant 4\}$，则下述对应关系 f 中，不能构成 A 到 B 的映射的是（　　）

A. $f:x\to y=x^2$　　B. $f:x\to y=3x-2$

C. $f:x\to y=-x+4$　　D. $f:x\to y=4-x^2$

2. 设 $f(x)=\begin{cases}1,x>0,\\0,x=0,\\-1,x<0,\end{cases}$ $g(x)=\begin{cases}1,x\text{ 为有理数},\\0,x\text{ 为无理数},\end{cases}$ 则 $f[g(\pi)]$ 的值为（　　）

A. 1　　B. 0

C. -1　　D. π

3. 设集合 $A=B=\{(x,y)|x\in\mathbf{R},y\in\mathbf{R}\}$，从 A 到 B 的映射 $f:(x,y)\to(x+y,x-y)$ 的映射下，B 中的元素为 $(4,2)$ 对应的 A 中元素为（　　）

A. $(4,2)$　　B. $(1,3)$

C. $(6,2)$　　D. $(3,1)$

4. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}x^2+1,x\geqslant 2,\\f(x+3),x<2,\end{cases}$ 则 $f(1)-f(3)=$（　　）

A. -2　　B. 7

C. 27　　D. -7

5. **（2019·山西实验中学高一期中）**下列对应是集合 A 到集合 B 上的映射的个数是（　　）

①$A=\mathbf{R}$，$B=\mathbf{N}$，对应关系 f：对集合 A 中的元素取绝对值，与 B 中的元素相对应；

②$A=\{1,-1,2,-2\}$，$B=\{1,4\}$，对应关系 $f:x\to y=x^2$，$x\in A$，$y\in B$；

③$A=\{\text{三角形}\}$，$B=\{x|x>0\}$，对应关系 f：对集合 A 中的三角形求面积，与集合 B 中的元素对应.

A. 0　　B. 1

C. 2　　D. 3

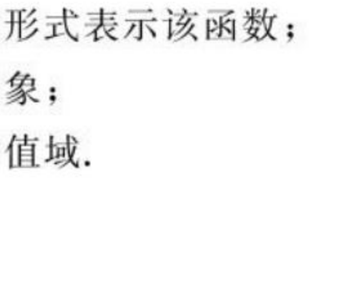
10. 已知集合 $A=\{1,2,3,\cdots,9\}$，$B=\mathbf{R}$，从集合 A 到集合 B 的映射 $f:x\to\dfrac{x}{2x+1}$.

(1)与 A 中的元素 1 相对应的 B 中的元素是什么？

(2)与 B 中的元素 $\dfrac{3}{7}$ 相对应的 A 中的元素是什么？

二、填空题

6. 如图所示，函数 $f(x)$ 的图象是折线段 ABC，其中 A,B,C,D 的坐标分别为 $(0,4),(2,0),(6,4),(4,2)$，则 $f\{f[f(2)]\}=$_____，函数 $f(x)$ 的解析式为_____.



7. **（2019·东莞高一检测）**已知函数 $f(x)=\begin{cases}3x+2,x<1,\\x^2-ax,x\geqslant 1,\end{cases}$ 若 $f[f(0)]=a$，则实数 $a=$_____.

8. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}2,x\in[-1,1],\\x,x\notin[-1,1],\end{cases}$ 若 $f[f(x)]=2$，则 x 的取值范围是_____.

三、解答题

9. 已知函数 $f(x)=1+\dfrac{|x|-x}{2}(-2<x\leqslant 2)$.

(1)用分段函数的形式表示该函数；

(2)画出函数的图象；

(3)写出该函数的值域.

10. 成都市出租车的现行计价标准是：路程在 2 km 以内（含 2 km）按起步价 8 元收取，超过 2 km 后的路程按 1.9 元/km 收取，但超过 10 km 后的路程需加收 50% 的返空费[即单价为 $1.9\times(1+50\%)=2.85$（元/km]].

(1)将某乘客搭乘一次出租车的费用 $f(x)$（单位：元）表示为行程 $x(0<x\leqslant 60$，单位：km）的分段函数；

(2)某乘客的行程为 16 km，他准备先乘一辆出租车行驶 8 km 后，再换乘另一辆出租车完成余下行程，请问：他这样做是否比只乘一辆出租车完成全部行程更省钱？（现实中要计等待时间且最终付费取整数，本题在计算时都不予考虑）

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

SY 素养提升 SUYANGTISHENG　核心素养归纳　素养培优提能

核心素养归纳

一、函数解析式求解的常用方法

1. 换元法

【例 1】 已知 $f(\sqrt{x}+1)=x+2\sqrt{x}$，求 $f(x)$.

［分析］ 采用整体思想，可把 $f(\sqrt{x}+1)$ 中的“$\sqrt{x}+1$”看做一个整体，然后采用另一参数替代.

［解］ 令 $t=\sqrt{x}+1$，则 $x=(t-1)^2(t\geqslant 1)$，

代入原式有 $f(t)=(t-1)^2+2(t-1)=t^2-1$.

$\therefore f(x)=x^2-1(x\geqslant 1)$.

［评注］ 将“$\sqrt{x}+1$”换作另一个元素(字母)“t”，然后从中解出 x 与 t 的关系，代入原式中便求出关于“t”的函数关系，此即为函数解析式，但在利用这种方法时应注意自变量取值范围的变化，否则就得不到正确的表达式. 此法是求函数解析式时常用的方法.

2. 待定系数法

【例 2】 已知 $f(x)$ 为二次函数，且 $f(x+1)+f(x-1)=2x^2-4x$，求 $f(x)$ 的表达式.

［解］ 设 $f(x)=ax^2+bx+c(a\neq 0)$，则

$f(x+1)+f(x-1)=a(x+1)^2+b(x+1)+c+a(x-1)^2+b(x-1)+c=2ax^2+2bx+2a+2c=2x^2-4x$.

故有 $\begin{cases}2a=2,\\2b=-4,\\2a+2c=0,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=1,\\b=-2,\\c=-1.\end{cases}$

所以 $f(x)=x^2-2x-1$.

［评注］ 若已知函数是某个基本函数，可设表达式的一般式，再利用已知条件求出系数.

3. 方程消元法

【例 3】 已知 $2f(x)+f\left(\frac{1}{x}\right)=3x,x\neq 0$，求 $f(x)$.

［解］ $2f(x)+f\left(\frac{1}{x}\right)=3x$，　①

用 $\frac{1}{x}$ 去代换①式中的 x 得，$2f\left(\frac{1}{x}\right)+f(x)=\frac{3}{x}$.　②

由①×2−②得，$f(x)=2x-\frac{1}{x},x\neq 0$.

［评注］ 方程消元法是指利用方程组通过消参、消元的途径达到求函数解析式的目的.

二、解读分段函数

1. 分段函数解读

在定义域中，对于自变量 x 的不同取值范围，相应的对应关系不同，这样的函数称之为分段函数. 分段函数是一个函数，而不是几个函数，它只是各段上的解析式(或对应关系)不同而已.

2. 常见的题型及其求解策略

(1)求分段函数的定义域、值域

【例 1】 求函数 $f(x)=\begin{cases}x^2+4x,x\leqslant -2,\\\frac{x}{2},x>-2\end{cases}$ 的值域.

［解］ 当 $x\leqslant -2$ 时，$\because f(x)=x^2+4x=(x+2)^2-4$，$\therefore f(x)\geqslant -4$；

当 $x>-2$ 时，$\because f(x)=\frac{x}{2}$，$\therefore f(x)>\frac{-2}{2}=-1$.

$\therefore$ 函数 $f(x)$ 的值域是 $[-4,+\infty)$.

［解题策略］ 分段函数的定义域是各段函数解析式中自变量取值集合的并集；分段函数的值域是各段函数值集合的并集.

(2)求分段函数的函数值

【例 2】 已知 $f(x)=\begin{cases}x-2,x>10,\\f[f(x+6)],x<10,\end{cases}$ 求 $f(5)$ 的值.

［解］ $\because 5<10$，

$\therefore f(5)=f[f(5+6)]=f[f(11)]$，

$\because 11>10$，$\therefore f[f(11)]=f(9)$，

又 $\because 9<10$，$\therefore f(9)=f[f(15)]=f(13)=11$.

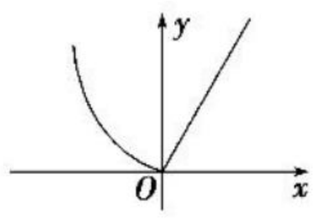
即 $f(5)=11$.

［解题策略］ 求分段函数的函数值时，关键是判断所给出的自变量所处的区间，再代入相应的解析式；另一方面，如果题目中含有复合函数的形式，则需要由里到外层层处理.

(3)画出分段函数的图象

【例 3】 已知函数 $f(x)=\begin{cases}2x,x\geqslant 0,\\x^2,x<0,\end{cases}$ 作出此函数的图象.

［解］ 由于分段函数有两段，所以这个函数的图象应该由两部分组成，一条是抛物线的左侧，另一条是射线，画出图象如图所示.



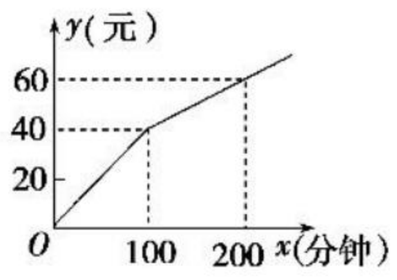
［解题策略］ 分段函数有几段，其图象就由几条曲线组成，作图的关键是根据定义域的不同分别由表达式作出其图象，作图时一要注意每段自变量的取值范围，二要注意判断函数图象每段端点的虚实.

(4)求解分段函数的解析式

【例 4】 某移动公司采用分段计费的方法来计算话费，月通话时间 x(分钟)与相应话费 y(元)之间的函数图象如图所示. 则：

(1)月通话为 50 分钟时，应交话费多少元；

(2)求 y 与 x 之间的函数关系式.



关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

［解］ (1)由题意可知当 $0<x\leqslant 100$ 时，设函数的解析式 $y=kx$，又因过点(100,40)，得解析式为 $y=\frac{2}{5}x$，当月通话为 50 分钟时，$0<50<100$，所以应交话费 $y=\frac{2}{5}\times 50=20$(元).

(2)当 $x>100$ 时，设 y 与 x 之间的函数关系式为 $y=kx+b(k\neq 0)$，由图知 $x=100$ 时，$y=40$；$x=200$ 时，$y=60$.

则有 $\begin{cases}40=100k+b,\\60=200k+b,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}k=\frac{1}{5},\\b=20,\end{cases}$

所以解析式为 $y=\frac{1}{5}x+20$，

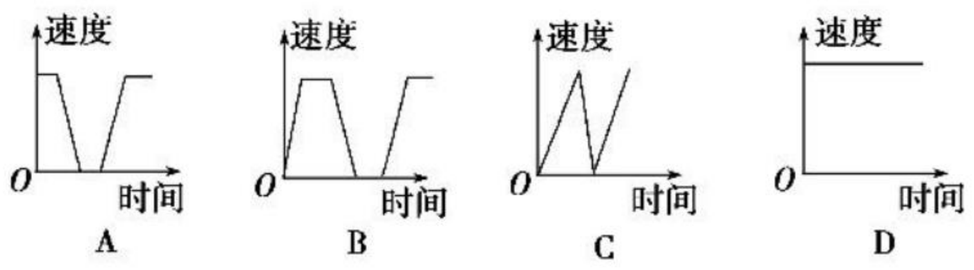
故所求函数关系式为 $y=\begin{cases}\frac{2}{5}x,0<x\leqslant 100,\\\frac{1}{5}x+20,x>100.\end{cases}$

［解题策略］ 以收费为题材的数学问题多以分段函数的形式出现在高考试题中，解决此类问题的关键是正确地理解题目(或图象)给出的信息，准确地确定自变量的分界点.

素养培优提能

一、选择题

1. 一列货运火车从某站出发，匀加速行驶一段时间后开始匀速行驶，过了一段时间，火车到达下一站停车，装完货以后，火车又匀加速行驶，一段时间后再次匀速行驶，下列图象可以近似地刻画出这列火车的速度变化情况的是 (　　)



2. 著名的 Dirichlet 函数 $D(x)=\begin{cases}1,x\text{ 为有理数},\\0,x\text{ 为无理数},\end{cases}$ 则 $D[D(x)]=$ (　　)

A. 0　　B. 1

C. $\begin{cases}1,x\text{ 为无理数},\\0,x\text{ 为有理数}\end{cases}$　　D. $\begin{cases}1,x\text{ 为有理数},\\0,x\text{ 为无理数}\end{cases}$

3. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}x^2-4x+6,x\geqslant 0,\\x+6,x<0,\end{cases}$ 则不等式 $f(x)>f(1)$的解集是 (　　)

A. $(-3,1)\cup(3,+\infty)$　　B. $(-3,1)\cup(2,+\infty)$

C. $(-1,1)\cup(3,+\infty)$　　D. $(-\infty,-3)\cup(1,3)$

4. 若 $f(x)$满足关系式 $f(x)+2f\left(\frac{1}{x}\right)=3x$，则 $f(2)$的值为 (　　)

A. 1　　B. -1

C. $-\frac{3}{2}$　　D. $\frac{3}{2}$

5. (**2019 · 新乡高一检测**)若函数 $f(x)$满足 $f(a+b)=\frac{f(a)+f(b)}{1-f(a)f(b)}$，且 $f(2)=\frac{1}{2}$，$f(3)=\frac{1}{3}$，则 $f(7)=$ (　　)

A. 1　　B. $\frac{8}{3}$

C. $\frac{4}{3}$　　D. 3

二、填空题

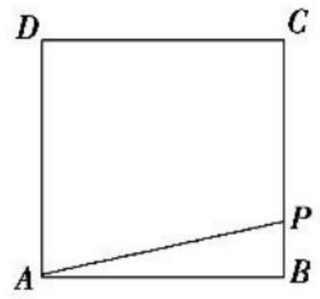
6. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}2x,x>0,\\x+1,x\leqslant 0,\end{cases}$ 若 $f(a)+f(1)=0$，则实数 a 的值等于_____.

7. 已知函数 $f(2x-1)=4x^2(x>0)$，则 $f(x)=$_____.

8. 已知函数 $y=f(n)$，满足 $f(1)=2$，且 $f(n+1)=3f(n)$，$n\in\mathbf{N}^*$，则 $f(3)=$_____.

三、解答题

9. 如图，动点 P 从单位正方形 $ABCD$ 的顶点 A 开始，顺次经 B,C,D 绕边界一周，当 x 表示点 P 的行程，y 表示 PA 之长时，求 y 关于 x 的解析式，并求 $f\left(\frac{5}{2}\right)$的值.

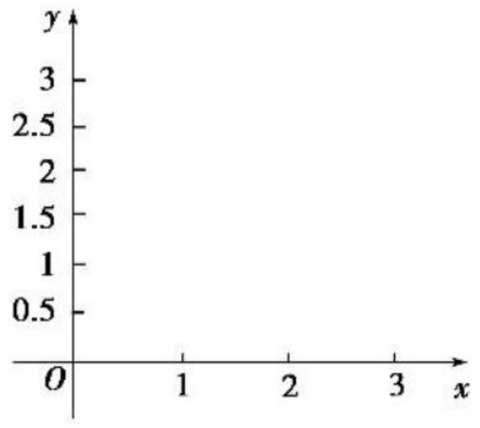


10. 已知 $f(x)=\begin{cases}1,x<0,\\2,x\geqslant 0,\end{cases}$ $g(x)=\frac{3f(x-1)-f(x-2)}{2}$.

(1)当 $1\leqslant x<2$ 时，求 $g(x)$的解析式；

(2)当 $x\in\mathbf{R}$ 时，求 $g(x)$的解析式，并画出其图象；

(3)求方程 $x^{f[g(x)]}=2g[f(x)]$的解.



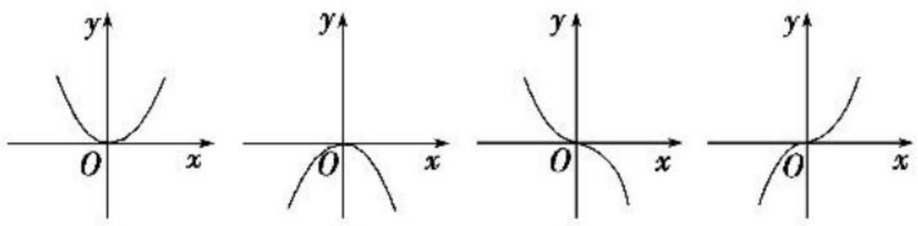
关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

阶段质量评估 2

（时间：45 分钟　满分：100 分）

一、选择题（每小题 5 分，共 30 分）

1. 下列图象是函数 $y=x|x|$ 的图象的是　　（　　）



A　　B　　C　　D

2. 下列函数中哪个与函数 $y=\sqrt{-2x^3}$ 相同　　（　　）

A. $y=x\sqrt{-2x}$　　B. $y=-x\sqrt{-2x}$

C. $y=-x\sqrt{-2x^3}$　　D. $y=x^2\sqrt{\dfrac{-2}{x}}$

3. 在自然数集 **N** 上定义函数 $f(n)=\begin{cases}n-3(n\geqslant 1\,000),\\ f(n+7)(n<1\,000),\end{cases}$ 则 $f(90)$ 的值是　　（　　）

A. 997　　B. 998

C. 999　　D. 1 000

4. 函数 $f(x)=\dfrac{|2-x|}{\sqrt{x+2}}+\left(x-\dfrac{3}{2}\right)^0$ 的定义域是　　（　　）

A. $\left(-2,\dfrac{3}{2}\right)$　　B. $(-2,+\infty)$

C. $\left(\dfrac{3}{2},+\infty\right)$　　D. $\left(-2,\dfrac{3}{2}\right)\cup\left(\dfrac{3}{2},+\infty\right)$

5. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}-x-4,x\leqslant -1,\\ x^2-5,x>-1,\end{cases}$ 则满足 $f(a)-11=0$ 的实数 a 的值为　　（　　）

A. -15 或 -4　　B. -4 或 4

C. -15 或 4　　D. -15 或 -4 或 4

6. 若函数 $f(x)=\begin{cases}2x+2,-1<x<0,\\ -\dfrac{1}{2}x,0\leqslant x<2,\\ 3,x\geqslant 2,\end{cases}$ 则 $f(x)$ 的值域是（　　）

A. $(-1,2)$　　B. $(-1,3]$

C. $(-1,2]$　　D. $(-1,2)\cup\{3\}$

二、填空题（每小题 5 分，共 20 分）

7. 设 $f:x\to ax-1$ 为从集合 A 到 B 的映射，若 $f(2)=3$，则 $f(3)=$_____.

8. 已知函数 $f(x)$ 的定义域为 $[-1,2)$，则函数 $g(x)=f\left(2x-\dfrac{3}{2}\right)$ 的定义域为_____.

9. 已知 $f(2x+1)=x^2+x$，则 $f(x)=$_____.

10. 设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$，$f(xy)=f(x)+f(y)$，若 $f(8)=3$，则 $f(\sqrt{2})=$_____.

三、解答题（共 50 分）

11.（12 分）求下列函数的定义域.

(1) $y=\dfrac{\sqrt{2-3x}}{2x-1}$；

(2) $y=\dfrac{\sqrt{6+4x}}{x+|x|}-\dfrac{1}{\sqrt{6-4x}}$.

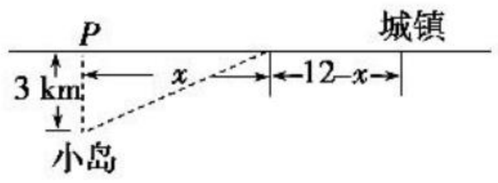
12.（12 分）已知二次函数 $f(x)$ 满足 $f(x+1)-f(x)=2x$，且 $f(0)=1$.

(1) 求 $f(x)$ 的解析式；

(2) 求函数 $y=f(x)$ 在区间 $[-1,1]$ 上的值域.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

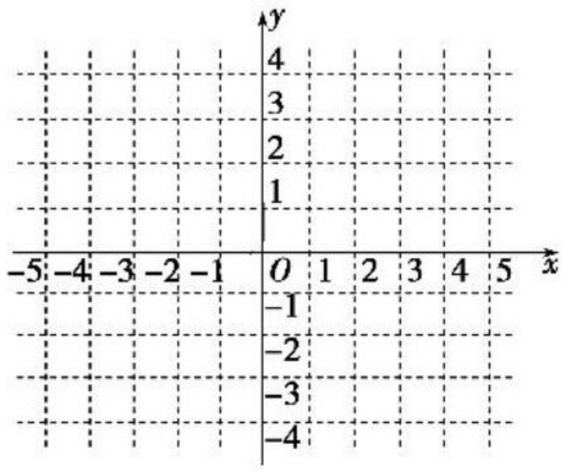
13.(13 分)如图所示,一座小岛距离海岸线最近的点 P 的距离是 3 km,从点 P 沿海岸正东 12 km 处有一个城镇.



(1)假设一个人驾驶的小船的平均速度为 3 km/h,步行的速度是 5 km/h,t(单位:h)表示他从小岛到城镇的时间,x(单位:km)表示此人将船停在海岸处距 P 点的距离,请将 t 表示为 x 的函数;

(2)如果将船停在距 P 点 4 km 处,那么从小岛到城镇要多长时间(精确到 0.1 h)?

14.(13 分)已知函数 $f(x)=|x+1|+ax(a\in\mathbf{R})$.



(1)画出当 $a=2$ 时的函数 $f(x)$的图象;

(2)求当 $a=2$ 时,函数 $f(x)$在$[-3,6]$上的值域.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

1.3　函数的基本性质

1.3.1　单调性与最大(小)值

第10课时　函数的单调性

掌握几个要点

1. 掌握2个等价关系——增(减)函数定义的等价变形

(1)对增函数的判断,对任意 $x_1<x_2$,都有 $f(x_1)<f(x_2)$,也可以用一个不等式来替代:

$(x_1-x_2)[f(x_1)-f(x_2)]>0$ 或 $\dfrac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}>0$.

(2)对减函数的判断,对任意 $x_1<x_2$,都有 $f(x_1)>f(x_2)$,相应地也可用一个不等式来替代:

$(x_1-x_2)[f(x_1)-f(x_2)]<0$ 或 $\dfrac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}<0$.

2. 会用3个结论——判断函数单调性的常用结论

若 $f(x)$,$g(x)$都是增函数,$h(x)$是减函数,则:①在定义域的交集(非空)上,$f(x)+g(x)$单调递增,$f(x)-h(x)$单调递增,②$-f(x)$单调递减,③$\dfrac{1}{f(x)}$单调递减($f(x)\neq0$).

3. 关注3个易错点——函数单调区间的易错点

(1)若 $f(x)$的定义域为 D,$A\subseteq D$,$B\subseteq D$,$f(x)$在 A 和 B 上都单调递减,未必有 $f(x)$在 $A\cup B$ 上单调递减.

(2)若在端点处有定义,用开区间或闭区间都可以.但若在端点处无定义,必须用开区间表示.

(3)函数不连续的单调区间只能用"和"或","连接,而不能用"∪"连接.

题点知识巩固

知识点一　函数单调性的判断

1. 对于函数 $y=f(x)$,在给定区间上有两个数 x_1,x_2,且 $x_1<x_2$,使 $f(x_1)<f(x_2)$成立,则 $y=f(x)$　　(　　)

A. 一定是增函数　　B. 一定是减函数

C. 可能是常数函数　　D. 单调性不能确定

2. 下列函数中,在区间(0,1)上是增函数的是　　(　　)

A. $y=|x|$　　B. $y=3-x$

C. $y=\dfrac{1}{x}$　　D. $y=-x^2+4$

3. 若 $y=f(x)$是 **R** 上的减函数,对于 $x_1<0$,$x_2>0$,则(　　)

A. $f(-x_1)>f(-x_2)$　　B. $f(-x_1)<f(-x_2)$

C. $f(-x_1)=f(-x_2)$　　D. 无法确定

4. 已知函数 $f(x)=\dfrac{x-1}{x+1}$,判断 $f(x)$在(0,+∞)上的单调性并用定义证明.

知识点二　求函数的单调区间

5. 函数 $y=-x^2$ 的单调递减区间为　　(　　)

A. $(-\infty,0]$　　B. $(-\infty,0)$

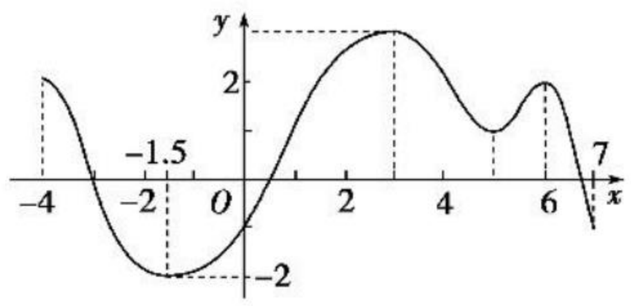
C. $(0,+\infty)$　　D. $(-\infty,+\infty)$

6. 函数 $y=x^2+x+1(x\in\mathbf{R})$的递减区间是　　(　　)

A. $\left[-\dfrac{1}{2},+\infty\right)$　　B. $[-1,+\infty)$

C. $\left(-\infty,-\dfrac{1}{2}\right]$　　D. $(-\infty,+\infty)$

7. 如图所示为函数 $y=f(x)$,$x\in[-4,7]$的图象,则函数 $f(x)$的单调递增区间是_____.



知识点三　函数单调性的简单应用

8. (**2019·滨州高一检测**)若函数 $f(x)=2x^2-mx+3$,当 $x\in[-2,+\infty)$时是增函数,当 $x\in(-\infty,-2)$时是减函数,则 $f(1)=$_____.

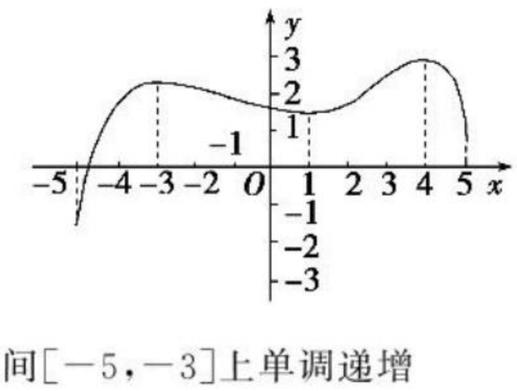
9. 已知函数 $f(x)=x-\dfrac{a}{x}+\dfrac{a}{2}$在(1,+∞)上是增函数,求实数 a 的取值范围.

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

提能达标过关

一、选择题

1. 如图是定义在区间$[-5,5]$上的函数 $y=f(x)$的图象，则下列关于函数 $f(x)$的说法错误的是　　(　　)



A. 函数在区间$[-5,-3]$上单调递增

B. 函数在区间$[1,4]$上单调递增

C. 函数在区间$[-3,1]\cup[4,5]$上单调递减

D. 函数在区间$[-5,5]$上没有单调性

2. 如果函数 $f(x)$在区间$[a,b]$上是增函数，对于任意的 x_1，$x_2\in[a,b]$(其中 $x_1<x_2$)，下列结论不正确的是　　(　　)

A. $\dfrac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}>0$

B. $(x_1-x_2)[f(x_1)-f(x_2)]>0$

C. $f(a)<f(x_1)<f(x_2)<f(b)$

D. $f(x_2)-f(x_1)>0$

3. 已知函数 $f(x)=\sqrt{x^2-2x-3}$，则该函数的单调递增区间为　　(　　)

A. $(-\infty,1]$　　B. $[3,+\infty)$

C. $(-\infty,-1]$　　D. $[1,+\infty)$

4. 若函数 $f(x)=-x^2+2ax$ 与 $g(x)=\dfrac{a}{x+1}$在区间$[1,2]$上都是减函数，则实数 a 的取值范围是　　(　　)

A. $(-1,0)\cup(0,1)$　　B. $(-1,0)\cup(0,1]$

C. $(0,1)$　　D. $(0,1]$

5. 定义在$[-2,2]$上的函数 $f(x)$满足$(x_1-x_2)[f(x_1)-f(x_2)]>0$，$x_1\neq x_2$，且 $f(a-1)>f(2a-3)$，则实数 a 的取值范围为　　(　　)

A. $(-\infty,2)$　　B. $[-1,3]$

C. $\left[\dfrac{1}{2},2\right)$　　D. $\left[\dfrac{1}{2},3\right]$

二、填空题

6. 设函数 $f(x)$满足：对任意的 $x_1,x_2\in\mathbf{R}$ 都有$(x_1-x_2)[f(x_1)-f(x_2)]>0$，则 $f(-3)$与 $f(-\pi)$的大小关系是_____.

7. 函数 $y=f(x)$在 $\mathbf{R}$ 上为增函数，且 $f(2m)>f(-m+9)$，则实数 m 的取值范围是_____.

8. 已知函数 $f(x)=\dfrac{ax-1}{x}\left(\text{其中 } x\in\left[\dfrac{1}{2},2\right]\right)$的值域为$\left[\dfrac{1}{2},2\right]$，则 $a=$_____.

三、解答题

9. 已知函数 $f(x)=2x-\dfrac{a}{x}$，且 $f\left(\dfrac{1}{2}\right)=3$.

(1)求 a 的值；

(2)判断函数 $f(x)$在$[1,+\infty)$上的单调性，并证明.

10. 若函数 $f(x)=\begin{cases}(2b-1)x+b-1,x>0,\\-x^2+(2-b)x,x\leqslant 0\end{cases}$在$(-\infty,+\infty)$上为增函数，求实数 b 的取值范围.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

第 11 课时　函数的最大(小)值

掌握几个要点

1. 关注 2 个关键词——“存在”与“任意”

函数最大值和最小值定义中的两个关键词

(1)“存在”

M 首先是一个函数值,它是值域中的一个元素,如函数 $y=x^2(x\in\mathbf{R})$ 的最小值是 0,有 $f(0)=0$.

(2)“任意”

最大(小)值定义中的“任意”是说对于定义域内的每一个值都必须满足不等式,即对于定义域内的全部元素,都有 $f(x)\leqslant M(f(x)\geqslant M)$ 成立,也就是说,函数 $y=f(x)$ 的图象不能位于直线 $y=M$ 的上(下)方.

2. 会用 1 组关系——函数最值与单调性的关系

(1)对一个函数来说,其值域是确定的,但它不一定有最值,如函数 $y=\frac{1}{x}$. 如果有最值,则最值一定是值域中的一个元素.

(2)若函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上单调,则 $f(x)$ 的最值必在区间端点处取得,即最大值是 $f(a)$ 或 $f(b)$,最小值是 $f(b)$ 或 $f(a)$.

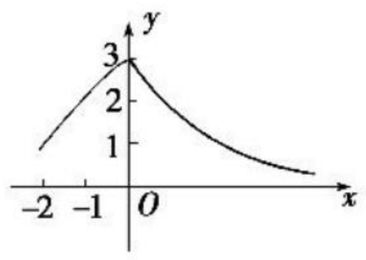
3. 掌握 1 种方法——求二次函数在闭区间上的最值

探求二次函数在给定区间上的最值问题,一般要先作出 $y=f(x)$ 的草图,然后根据图象的增减性进行研究. 特别要注意二次函数的对称轴与所给区间的位置关系,它是求解二次函数在已知区间上最值问题的主要依据,并且最大(小)值不一定在顶点处取得.

题点知识巩固

知识点一　利用图象求函数的最值

1. 函数 $f(x)$ 在 $[-2,+\infty)$ 上的图象如图所示,则此函数的最大、最小值分别为　(　　)



A. 3,0

B. 3,1

C. 3,无最小值

D. 3,−2

2. 设函数 $f(x)=\begin{cases}1,x>0,\\0,x=0,\\-1,x<0,\end{cases}$ $g(x)=x^2f(x-1)$,则函数 $g(x)$ 的值域为_____.

知识点二　利用函数的单调性求最值

3. 已知函数 $f(x)=\frac{2}{x-1}(x\in[2,6])$,则函数的最大值为　(　　)

A. 0.4　　B. 1

C. 2　　D. 2.5

4. 函数 $y=x+\sqrt{2x-1}$　(　　)

A. 有最小值 $\frac{1}{2}$,无最大值　　B. 有最大值 $\frac{1}{2}$,无最小值

C. 有最小值 $\frac{1}{2}$,最大值 2　　D. 无最小值,也无最大值

5. 已知函数 $f(x)=\frac{2x-1}{x+1},x\in[3,5]$.

(1)判断函数 $f(x)$ 的单调性,并证明;

(2)求函数 $f(x)$ 的最大值和最小值.

知识点三　二次函数在闭区间上的最值问题

6. 函数 $y=x^2+2x-1$ 在 $[0,3]$ 上的最小值为　(　　)

A. 0　　B. −4

C. −1　　D. −2

7. 求函数 $f(x)=x^2-2ax+a+1(a>0)$ 在区间 $[-4,4]$ 上的最大值.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

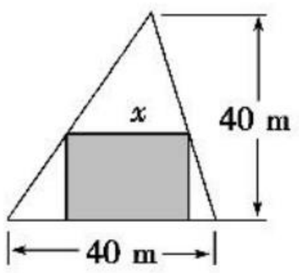
知识点四　函数最值的实际应用

8. 某公司在甲、乙两地同时销售一种品牌车，利润(单位：万元)分别为 $L_1=-x^2+21x$ 和 $L_2=2x$(其中销售量单位：辆)．若该公司在两地共销售 15 辆，则能获得的最大利润为　　(　　)

A. 90 万元　　B. 60 万元

C. 120 万元　　D. 120.25 万元

9. 在如图所示的锐角三角形空地中，欲建一个面积最大的内接矩形花园(阴影部分)，则其边长 x 为_____m.



提能达标过关

一、选择题

1. 函数 $y=\sqrt{(3-x)(x+6)}(-6\leqslant x\leqslant 3)$ 的最大值为(　　)

A. 9　　B. $\frac{9}{2}$

C. 3　　D. $\frac{3\sqrt{2}}{2}$

2. 设 $c<0$，$f(x)$ 是区间 $[a,b]$ 上的减函数，下列命题中正确的是　　(　　)

A. $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上有最小值 $f(a)$

B. $f(x)+c$ 在 $[a,b]$ 上有最小值 $f(a)+c$

C. $f(x)-c$ 在 $[a,b]$ 上有最小值 $f(a)-c$

D. $cf(x)$ 在 $[a,b]$ 上有最小值 $cf(a)$

3. 对于每一个实数 x，设 $f(x)$ 是 $y=4x+1$，$y=-2x+4$ 和 $y=x+2$ 三个函数中的最小值，则 $f(x)$ 的最大值是(　　)

A. $\frac{8}{3}$　　B. 3

C. $\frac{2}{3}$　　D. $\frac{1}{2}$

4. 函数 $f(x)=\frac{1}{1-x(1-x)}$ 的最大值为　　(　　)

A. $\frac{3}{4}$　　B. $\frac{4}{3}$

C. $\frac{4}{5}$　　D. $\frac{5}{4}$

5. 已知函数 $f(x)=x^2+ax+b$ 的图象过坐标原点，且满足 $f(-x)=f(-1+x)$，则函数 $f(x)$ 在 $[-1,3]$ 上的值域为　　(　　)

A. $[0,12]$　　B. $\left[-\frac{1}{4},12\right]$

C. $\left[-\frac{1}{2},12\right]$　　D. $\left[\frac{3}{4},12\right]$

二、填空题

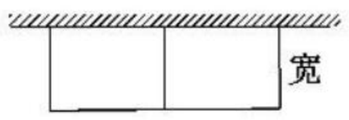
6. 函数 $y=\begin{cases}2x+3,x\leqslant 0,\\ x+3,0<x\leqslant 1,\\ -x+5,x>1\end{cases}$ 的最大值是_____.

7. 函数 $f(x)=\frac{1}{x}-x$ 在区间 $\left(0,\frac{1}{4}\right]$ 上的最小值是_____.

8. 已知函数 $f(x)=2x^2-mx+5$ 的增区间为 $[-2,+\infty)$，则函数 $f(x)$ 的最小值是_____.

三、解答题

9. 如图所示，动物园要建造一面靠墙的两间一样大小的长方形动物笼舍，可供建造围墙的材料总长为 30 m，问每间笼舍的宽度 x 为多少时，才能使得每间笼舍面积 y 达到最大？每间最大面积为多少？



10. 求 $f(x)=x^2-2ax-1$ 在区间 $[0,2]$ 上的最大值和最小值．

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

第 12 课时　函数单调性的应用

掌握几个要点

掌握 4 个应用——函数单调性的应用

函数的单调性是函数的重要性质，能利用函数的单调性解决以下相关问题：

(1)利用单调性比较大小：如由函数的单调性比较函数值的大小；

(2)利用单调性求函数的最值；

(3)利用单调性确定参数的取值或范围；

(4)利用单调性解不等式.

题点知识巩固

知识点一　比较大小

1. 已知 $m<-2$，点 $(m-1,y_1)$，(m,y_2)，$(m+1,y_3)$ 都在二次函数 $y=-x^2-2x$ 的图象上，则　(　　)

A. $y_1<y_2<y_3$　　B. $y_2<y_3<y_1$

C. $y_1<y_3<y_2$　　D. $y_3<y_1<y_2$

2. 已知函数 $f(x)$ 的图象关于直线 $x=1$ 对称，当 $x_2>x_1>1$ 时，$[f(x_2)-f(x_1)](x_2-x_1)<0$ 恒成立，设 $a=f\left(-\frac{1}{2}\right)$，$b=f(2)$，$c=f(\mathrm{e})$，则 a,b,c 的大小关系为　(　　)

A. $c>a>b$　　B. $c>b>a$

C. $a>c>b$　　D. $b>a>c$

3. (**2019·昆明高一检测**)已知函数 $f(x)=\sqrt{4-x^2}$，若 $0<x_1<x_2<x_3$，则 $\frac{f(x_1)}{x_1}$，$\frac{f(x_2)}{x_2}$，$\frac{f(x_3)}{x_3}$ 的大小关系是　(　　)

A. $\frac{f(x_1)}{x_1}<\frac{f(x_3)}{x_3}<\frac{f(x_2)}{x_2}$

B. $\frac{f(x_1)}{x_1}<\frac{f(x_2)}{x_2}<\frac{f(x_3)}{x_3}$

C. $\frac{f(x_3)}{x_3}<\frac{f(x_2)}{x_2}<\frac{f(x_1)}{x_1}$

D. $\frac{f(x_2)}{x_2}<\frac{f(x_3)}{x_3}<\frac{f(x_1)}{x_1}$

知识点二　求最值

4. 已知函数 $f(x)=-x^2+4x+a$，$x\in[0,1]$，若 $f(x)$ 有最小值 -2，则 $f(x)$ 的最大值为　(　　)

A. -1　　B. 0

C. 1　　D. 2

5. 求函数 $f(x)=x-\sqrt{x+1}$ 的最值.

知识点三　确定参数的取值范围

6. 函数 $f(x)=x^2-2ax+1$ 在 $(-\infty,2]$ 上是减函数，则 a 的取值范围是_____.

7. 已知一次函数 $f(x)=2x+3m+1$，若当 $x\in[-1,+\infty)$ 时，$f(x)\geqslant 0$ 恒成立，则实数 m 的取值范围是_____.

知识点四　解不等式

8. 已知定义在 $(0,+\infty)$ 上的函数 $f(x)$ 同时满足下列三个条件：

①$f(3)=-1$；②对任意正数 x,y 都有 $f(xy)=f(x)+f(y)$；③当 $x>1$ 时，$f(x)<0$.

(1)求 $f(9)$，$f(\sqrt{3})$ 的值；

(2)利用单调性定义证明：$f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上为减函数；

(3)解关于 x 的不等式 $f(6x)<f(x-1)-2$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

提能达标过关

一、选择题

1. 已知函数 $f(x)$ 在 **R** 上是减函数，则有　　(　　)

A. $f(\pi)<f(3)$　　B. $f(\pi)>f(3)$

C. $f(\pi)\leqslant f(3)$　　D. $f(\pi)\geqslant f(3)$

2. 下列说法中正确的有　　(　　)

①若 $x_1,x_2\in I$，当 $x_1<x_2$ 时，$f(x_1)<f(x_2)$，则 $y=f(x)$ 在 I 上是增函数；

②函数 $y=x^2$ 在 **R** 上是增函数；

③函数 $y=-\dfrac{1}{x}$ 在定义域上是增函数；

④$y=\dfrac{1}{x}$ 的单调减区间是 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$.

A. 0 个　　B. 1 个

C. 2 个　　D. 3 个

3. 对任意 $x\in\mathbf{R}$，函数 $f(x)$ 表示 $-x+3$，$\dfrac{3}{2}x+\dfrac{1}{2}$，$x^2-4x+3$ 中的最大的一个，则 $f(x)$ 的最小值是　　(　　)

A. 2　　B. 3

C. 8　　D. -1

4. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}(3a-1)x+4a,x<1,\\-ax,x\geqslant 1\end{cases}$ 满足对任意的实数 $x_1\neq x_2$，都有 $\dfrac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}<0$，则 a 的取值范围是　　(　　)

A. $\left[\dfrac{1}{8},\dfrac{1}{3}\right)$　　B. $\left(\dfrac{1}{8},+\infty\right)$

C. $\left(0,\dfrac{1}{3}\right)$　　D. $\left(-\infty,\dfrac{1}{3}\right]$

5. 函数 $f(x)$ 是定义在 $(0,+\infty)$ 上的增函数，则不等式 $f(x)>f[8(x-2)]$ 的解集为　　(　　)

A. $(0,+\infty)$　　B. $(0,2)$

C. $[2,+\infty)$　　D. $\left(2,\dfrac{16}{7}\right)$

二、填空题

6. 若函数 $f(x)=x^2+ax-1$ 在 $x\in[1,3]$ 上是单调递减函数，则实数 a 的取值范围是_____.

7. 函数 $y=-x^2+6x+9$ 在区间 $[a,b]$ $(a<b<3)$ 上有最大值 9，最小值 -7，则 $a=$_____，$b=$_____.

8. 函数 $f(x)=\sqrt{4+3x-x^2}$ 的单调递减区间是_____.

三、解答题

9. 已知函数 $f(x)=\dfrac{2x-1}{x+1}$.

(1)证明：函数 $f(x)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上是增函数；

(2)求函数 $f(x)$ 在区间 $[1,17]$ 上的最大值和最小值.

10. 设 $f(x)$ 是定义在 $(0,+\infty)$ 上的单调增函数，且满足 $f(xy)=f(x)+f(y)$，$f(3)=1$.

(1)求 $f(1)$；

(2)若 $f(x)+2\leqslant f(x+8)$，求 x 的取值范围.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

SY 素养提升 SUYANGTISHENG　核心素养归纳　素养培优提能

核心素养归纳

一、函数单调性的应用

1. 比较大小

【例 1】 若函数 $f(x)=x^2+mx+n$，对任意实数 x 都有 $f(2-x)=f(2+x)$ 成立，试比较 $f(-1)$，$f(2)$，$f(4)$ 的大小.

［解］ 依题意可知 $f(x)$ 的对称轴为 $x=2$，

$\therefore f(-1)=f(5)$.

$\because f(x)$ 在 $[2,+\infty)$ 上是增函数，

$\therefore f(2)<f(4)<f(5)$，即 $f(2)<f(4)<f(-1)$.

［评注］ (1)利用单调性可以比较函数值的大小，即增函数中自变量大函数值也大，减函数中自变量小函数值反而大；(2)利用函数单调性比较大小应注意将自变量放在同一单调区间.

2. 解不等式

【例 2】 已知 $y=f(x)$ 在定义域 $(-1,1)$ 上是增函数，且 $f(t-1)<f(1-2t)$，求实数 t 的取值范围.

［解］ 依题意可得 $\begin{cases}-1<t-1<1,\\-1<1-2t<1,\\t-1<1-2t,\end{cases}$ 解得 $0<t<\frac{2}{3}$.

［评注］ (1)利用单调性解不等式就是利用函数在某个区间内的单调性，推出两个变量的大小，然后去解不等式.

(2)利用单调性解不等式时应注意函数的定义域，即首先考虑使给出解析式有意义的未知数的取值范围.

3. 求参数的值或取值范围

【例 3】 已知 $a>0$，函数 $f(x)=x^3-ax$ 是区间 $[1,+\infty)$ 上的单调函数，求实数 a 的取值范围.

［解］ 任取 $x_1,x_2\in[1,+\infty)$，且 $x_1<x_2$，

则 $\Delta x=x_2-x_1>0$.

$\Delta y=f(x_2)-f(x_1)=(x_2^3-ax_2)-(x_1^3-ax_1)$

$=(x_2-x_1)(x_1^2+x_1x_2+x_2^2-a)$.

$\because 1\leqslant x_1<x_2$，$\therefore x_1^2+x_1x_2+x_2^2>3$.

显然不存在常数 a，使 $(x_1^2+x_1x_2+x_2^2-a)$ 恒为负值.

又 $f(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 上是单调函数，

$\therefore$ 必有一个常数 a，使 $x_1^2+x_1x_2+x_2^2-a$ 恒为正数，

即 $x_1^2+x_1x_2+x_2^2>a$.

当 $x_1,x_2\in[1,+\infty)$ 时，$x_1^2+x_1x_2+x_2^2>3$，

$\therefore a\leqslant 3$. 此时，$\because \Delta x=x_2-x_1>0$，$\therefore \Delta y>0$，

即函数 $f(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 上是增函数，

$\therefore a$ 的取值范围是 $(0,3]$.

4. 利用函数单调性求函数的最值

【例 4】 已知函数 $f(x)=\frac{x^2+2x+a}{x}$，$x\in[1,+\infty)$.

(1)当 $a=4$ 时，求 $f(x)$ 的最小值；

(2)当 $a=\frac{1}{2}$ 时，求 $f(x)$ 的最小值；

(3)若 a 为正常数，求 $f(x)$ 的最小值.

［解］ (1)当 $a=4$ 时，$f(x)=x+\frac{4}{x}+2$，

易知，$f(x)$ 在 $[1,2]$ 上是减函数，在 $[2,+\infty)$ 上是增函数，

$\therefore f(x)_{\min}=f(2)=6$.

(2)当 $a=\frac{1}{2}$ 时，$f(x)=x+\frac{1}{2x}+2$.

易知，$f(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 上为增函数.

$\therefore f(x)_{\min}=f(1)=\frac{7}{2}$.

(3)函数 $f(x)=x+\frac{a}{x}+2$ 在 $(0,\sqrt{a}\,]$ 上是减函数，

在 $[\sqrt{a},+\infty)$ 上是增函数.

当 $\sqrt{a}>1$，即 $a>1$ 时，$f(x)$ 在区间 $[1,+\infty)$ 上先减后增，

$\therefore f(x)_{\min}=f(\sqrt{a})=2\sqrt{a}+2$.

当 $\sqrt{a}\leqslant 1$，即 $0<a\leqslant 1$ 时，$f(x)$ 在区间 $[1,+\infty)$ 上是增函数，$\therefore f(x)_{\min}=f(1)=a+3$.

二、函数值域的求法

求函数值域的常用方法：配方法、换元法、单调性法、判别式法、不等式法、数形结合法、有界性法、分离常数法.

【例 1】 求下列函数的值域：

(1) $y=\frac{x^2-x}{x^2-x+1}$；

(2) $y=f(x)=2x-1-\sqrt{13-4x}$.

［解］ (1)解法一(配方法)：

$\because y=1-\frac{1}{x^2-x+1}$，

又 $x^2-x+1=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\geqslant\frac{3}{4}$，

$\therefore 0<\frac{1}{x^2-x+1}\leqslant\frac{4}{3}$，$\therefore -\frac{1}{3}\leqslant y<1$.

$\therefore$ 函数的值域为 $\left[-\frac{1}{3},1\right)$.

解法二(判别式法)：

由 $y=\frac{x^2-x}{x^2-x+1}$，$x\in\mathbf{R}$，得 $(y-1)x^2+(1-y)x+y=0$.

当 $y=1$ 时，$x\in\varnothing$；

当 $y\neq 1$ 时，$\because x\in\mathbf{R}$，

$\therefore \Delta=(1-y)^2-4y(y-1)\geqslant 0$，$\therefore -\frac{1}{3}\leqslant y<1$.

$\therefore$ 函数的值域为 $\left[-\frac{1}{3},1\right)$.

(2)解法一(换元法)：

设 $\sqrt{13-4x}=t$，则 $t\geqslant 0$，$x=\frac{13-t^2}{4}$，

于是 $g(t)=2\times\frac{13-t^2}{4}-1-t=-\frac{1}{2}t^2-t+\frac{11}{2}=-\frac{1}{2}(t+1)^2+6$，

显然函数 $g(t)$ 在 $[0,+\infty)$ 上是单调递减函数，

所以 $g(t)\leqslant g(0)=\frac{11}{2}$，因此原函数的值域是 $\left(-\infty,\frac{11}{2}\right]$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

解法二(单调性法)：

函数的定义域是$\left\{x\middle|x\leqslant\frac{13}{4}\right\}$，

当自变量 x 增大时，$2x-1$ 增大，$\sqrt{13-4x}$ 减小，

所以 $2x-1-\sqrt{13-4x}$ 增大，

因此函数 $f(x)=2x-1-\sqrt{13-4x}$ 在其定义域上是单调递增函数，

所以当 $x=\frac{13}{4}$ 时，函数取得最大值 $f\left(\frac{13}{4}\right)=\frac{11}{2}$，

故原函数的值域是 $\left(-\infty,\frac{11}{2}\right]$.

【例 2】 求函数 $y=\frac{10^x+10^{-x}}{10^x-10^{-x}}$ 的值域.

[解] (有界性)因为 $y=\frac{10^x+10^{-x}}{10^x-10^{-x}}=\frac{10^{2x}+1}{10^{2x}-1}$，

所以 $10^{2x}=\frac{y+1}{y-1}(y\neq1)$.

又因为 $10^{2x}>0$，所以 $\frac{y+1}{y-1}>0$.

解得 $y>1$ 或 $y<-1$，所以值域为 $(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$.

【例 3】 求函数 $y=\frac{3+x}{4-x}$ 的值域.

[解] $\because y=\frac{3+x}{4-x}=\frac{x-4+7}{4-x}=-1-\frac{7}{x-4}$，

又 $\because\frac{7}{x-4}\neq0$，$\therefore y=-1-\frac{7}{x-4}\neq-1$，

即函数的值域为 $(-\infty,-1)\cup(-1,+\infty)$.

素养培优提能

一、选择题

1. 函数 $y=|x|(1-x)$ 在区间 A 上是增函数，那么区间 A 是 (　　)

A. $(-\infty,0)$　　B. $\left[0,\frac{1}{2}\right]$

C. $[0,+\infty)$　　D. $\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$

2. (**2019 · 延安高一检测**)设 $f(x)=\begin{cases}-x+a,x\leqslant0,\\ x+\frac{1}{x},x>0.\end{cases}$ 若 $f(0)$ 是 $f(x)$ 的最小值，则实数 a 的取值范围是 (　　)

A. $(-\infty,2]$　　B. $(-\infty,2)$

C. $(2,+\infty)$　　D. $[2,+\infty)$

3. (**2019 · 中山高一检测**)定义域为 **R** 的函数 $f(x)$ 满足 $f(x+1)=2f(x)$，且当 $x\in(0,1]$ 时，$f(x)=x^2-x$，则当 $x\in(-1,0]$ 时，$f(x)$ 的最小值为 (　　)

A. $-\frac{1}{8}$　　B. $-\frac{1}{4}$

C. 0　　D. $\frac{1}{4}$

4. (**2019 · 长沙高一检测**)已知二次函数 $f(x)=4x^2-kx-8$ 在区间 $(5,20)$ 上既没有最大值也没有最小值，则实数 k 的取值范围是 (　　)

A. $[160,+\infty)$　　B. $(-\infty,40]$

C. $(-\infty,40]\cup[160,+\infty)$　　D. $(-\infty,20]\cup[80,+\infty)$

5. (**2019 · 成都高一检测**)定义新运算⊕：当 $a\geqslant b$ 时，$a\oplus b=a$；当 $a<b$ 时，$a\oplus b=b^2$，则函数 $f(x)=(1\oplus x)x-(2\oplus x)$，$x\in[-2,2]$ 的最大值等于 (　　)

A. -1　　B. 1

C. 6　　D. 12

二、填空题

6. 函数 $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{x},x\geqslant1,\\ -x^2+2,x<1\end{cases}$ 的最大值为_____.

7. 函数 $f(x)=\frac{x+1}{2x+1}$ 的单调递减区间为_____.

8. 在区间 $\left[\frac{1}{2},2\right]$ 上，函数 $f(x)=x^2+bx+c(b,c\in\mathbf{R})$ 与 $g(x)=\frac{x^2+x+1}{x}$ 在同一个点取得相同的最小值，那么 $f(x)$ 在区间 $\left[\frac{1}{2},2\right]$ 上的最大值为_____.

三、解答题

9. 已知函数 $f(x)=\frac{1}{a}-\frac{1}{x}(a>0,x>0)$.

(1)求证：$f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上是增函数；

(2)若 $f(x)$ 在 $\left[\frac{1}{2},2\right]$ 上的值域是 $\left[\frac{1}{2},2\right]$，求 a 的值.

10. 已知 $f(x)=\frac{x}{x-a}(x\neq a)$.

(1)若 $a=-2$，试证：$f(x)$ 在 $(-\infty,-2)$ 内单调递增；

(2)若 $a>0$ 且 $f(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 内单调递减，求 a 的取值范围.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

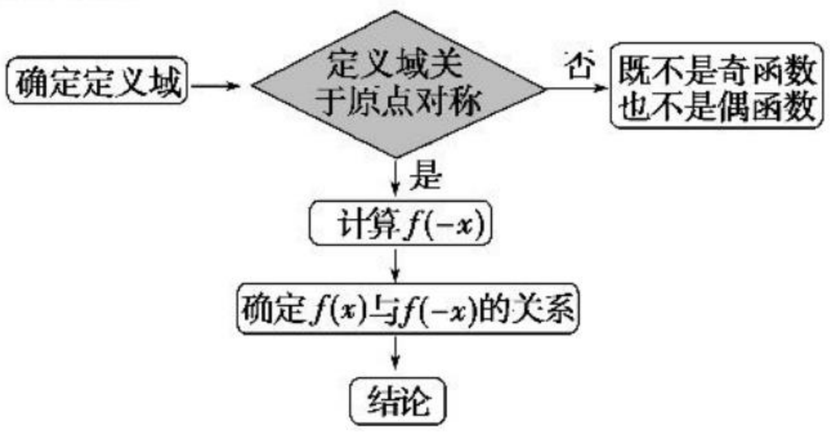
1.3.2　奇偶性

第13课时　函数的奇偶性

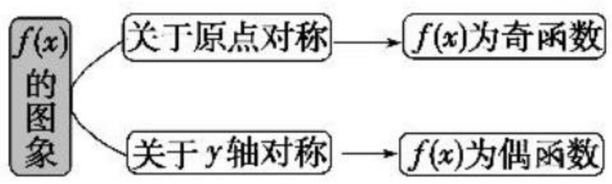
掌握几个要点

1. 掌握2种方法——判断函数奇偶性的方法

(1) 定义法



(2) 图象法



2. 掌握2个特征——奇、偶函数图象的特征

(1)奇函数：图象关于原点对称，反之，若一个函数的图象关于原点对称，则这个函数是奇函数.

(2)偶函数：图象关于y轴对称，反之，若一个函数的图象关于y轴对称，则这个函数是偶函数.

3. 关注3个易错点

(1)若奇函数在原点处有定义，则必有$f(0)=0$. 有时可以用这个结论来否定一个函数为奇函数.

(2)既是奇函数又是偶函数的函数只有一种类型，即$f(x)=0,x\in D$，其中定义域D是关于原点对称的非空集合.

(3)函数根据奇偶性可分为奇函数、偶函数、既奇且偶函数、非奇非偶函数.

题点知识巩固

知识点一　判断函数的奇偶性

1. 函数$f(x)=\sqrt{x^2+3}$的奇偶性是　　(　　)

A. 奇函数

B. 偶函数

C. 既是奇函数又是偶函数

D. 既不是奇函数又不是偶函数

2. 函数$f(x)=x^2(x<0)$的奇偶性为　　(　　)

A. 奇函数　　B. 偶函数

C. 既是奇函数又是偶函数　　D. 非奇非偶函数

3. 下列函数为奇函数的是　　(　　)

A. $y=-|x|$　　B. $y=2-x$

C. $y=\dfrac{1}{x^3}$　　D. $y=-x^2+8$

4. 判断下列函数的奇偶性.

(1)$f(x)=\begin{cases}1,x\text{是有理数},\\-1,x\text{是无理数};\end{cases}$

(2)$f(x)=x^2+|x+a|+1$.

知识点二　奇、偶函数的图象

5. 函数$f(x)=\dfrac{1}{x}-x$的图象关于　　(　　)

A. y轴对称　　B. 直线$y=-x$对称

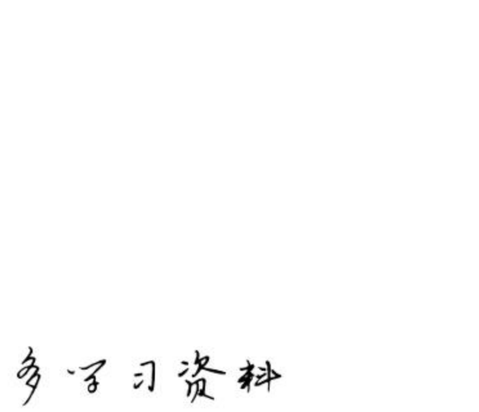
C. 坐标原点对称　　D. 直线$y=x$对称

6. 若函数$y=f(x)$为奇函数，则下列坐标表示的点一定在函数$f(x)$的图象上的是　　(　　)

A. $(a,-f(a))$　　B. $(-a,-f(-a))$

C. $(-a,f(a))$　　D. $(-a,-f(a))$

7. 定义在$[-3,-1]\cup[1,3]$上的函数$y=f(x)$是奇函数，其部分图象如图所示.



(1)请在坐标系中补全函数$f(x)$的图象；

(2)比较$f(1)$与$f(3)$的大小.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

知识点三　利用函数的奇偶性求参数

8. 已知 $f(x)$ 是定义在 **R** 上的奇函数，则 $f(0)$ 的值为　（　　）

A. -1　　B. 0

C. 1　　D. 无法确定

9. 已知函数 $f(x)=ax^2+bx$ 是定义在 $[a-1,2a]$ 上的偶函数，那么 $a+b=$　（　　）

A. 0　　B. $\frac{1}{2}$

C. $\frac{1}{3}$　　D. -1

10. 函数 $f(x)=x^3+ax$，$f(1)=3$，则 $f(-1)=$_____.

提能达标过关

一、选择题

1. (**2019·贵阳高一检测**) 已知 $y=f(x)$，$x\in(-a,a)$，$F(x)=f(x)+f(-x)$，则 $F(x)$ 是　（　　）

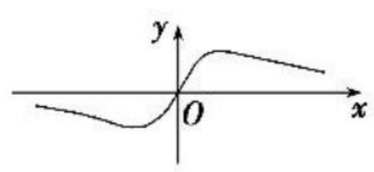
A. 奇函数　　B. 偶函数

C. 既是奇函数又是偶函数　　D. 非奇非偶函数

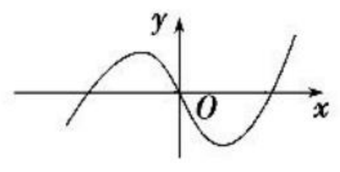
2. (**2019·长春高一检测**) 若函数 $f(x)=\frac{x}{(2x+1)(x-a)}$ 为奇函数，则 a 等于　（　　）

A. $\frac{1}{2}$　　B. $\frac{2}{3}$　　C. $\frac{3}{4}$　　D. 1

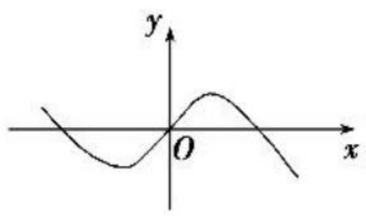
3. 函数 $y=\frac{2x}{x^2+1}$ 的大致图象是　（　　）



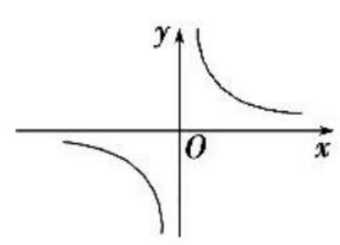
A



B



C



D

4. 已知函数 $f(x)$，$g(x)$ 都是 **R** 上的奇函数，且 $F(x)=f(x)+3g(x)+5$. 若 $F(a)=b$，则 $F(-a)=$　（　　）

A. $-b+10$　　B. $-b+5$

C. $b-5$　　D. $b+5$

5. 若函数 $f(x)=(ax+1)(x-a)$ 为偶函数，且函数 $y=f(x)$ 在 $x\in(0,+\infty)$ 上单调递增，则实数 a 的值为　（　　）

A. ±1　　B. -1

C. 1　　D. 0

二、填空题

6. (**2019·连云港高一检测**) 设 $f(x)$ 是定义在 **R** 上的奇函数，当 $x>0$ 时，$f(x)=x^2+1$，则 $f(-2)+f(0)=$_____.

7. 设 $f(x)$ 是 **R** 上的奇函数，且 $f(x+2)=-f(x)$，当 $0\leqslant x\leqslant1$ 时，$f(x)=x$，则 $f(7.5)=$_____.

8. 已知函数 $y=f(x)$ 是偶函数，其图象与 x 轴有四个交点，则方程 $f(x)=0$ 的所有实根之和是_____.

三、解答题

9. 判断下列函数的奇偶性：

(1) $f(x)=\frac{x^2+1}{x-1}$；

(2) $f(x)=\sqrt{1-x^2}+\sqrt{x^2-1}$；

(3) $f(x)=\frac{3x}{x^2+3}$；

(4) $f(x)=|x+1|+|x-1|$；

(5) $f(x)=\begin{cases}x^2-2x+3,x>0,\\0,x=0,\\-x^2-2x-3,x<0.\end{cases}$

10. 已知函数 $f(x)$ 对任意的 $x,y\in\mathbf{R}$，总有 $f(x+y)=f(x)+f(y)$，且当 $x>0$ 时，$f(x)<0$，$f(1)=-\frac{2}{3}$.

(1) 求 $f(0)$ 的值；

(2) 试判断 $f(x)$ 在 **R** 上的奇偶性和增减性；

(3) 求 $f(x)$ 在 $[-3,3]$ 上的最大值和最小值.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

第 14 课时　函数奇偶性的应用

掌握几个要点

1. 掌握 2 种应用——奇偶性与单调性的综合问题

(1)比较大小

看自变量是否在同一单调区间上.

①在同一单调区间上,直接利用函数的单调性比较大小;

②不在同一单调区间上,需利用函数的奇偶性把自变量转化到同一单调区间上,然后利用单调性比较大小.

(2)解不等式

①利用已知条件,结合函数的奇偶性,把已知不等式转化为 $f(x_1)<f(x_2)$ 或 $f(x_1)>f(x_2)$ 的形式;

②根据奇函数在对称区间上的单调性一致,偶函数在对称区间上单调性相反,脱掉不等式中的"f"转化为简单不等式求解.

2. 掌握 3 个特点——奇偶函数的单调性

(1)奇函数在 $[a,b]$ 和 $[-b,-a]$ 上具有相同的单调性.

(2)偶函数在 $[a,b]$ 和 $[-b,-a]$ 上具有相反的单调性.

(3)在公共定义域内,两奇函数之积或商为偶函数;两偶函数之积或商也为偶函数;一奇一偶函数之积或商为奇函数.(注意:取商时分母不为零)

题点知识巩固

知识点一　利用奇偶性求函数解析式

1. (**2019·石家庄高一检测**)已知 $x>0$ 时,$f(x)=x-2\,019$,且知 $f(x)$ 在定义域上是奇函数,则当 $x<0$ 时,$f(x)$ 的解析式是 (　　)

A. $f(x)=x+2\,019$　　B. $f(x)=-x+2\,019$

C. $f(x)=-x-2\,019$　　D. $f(x)=x-2\,019$

2. 已知 $f(x)$ 是定义在 **R** 上的奇函数,当 $x\geqslant 0$ 时,$f(x)=x^2-2x$,则 $f(x)$ 在 **R** 上的表达式是 (　　)

A. $y=x(x-2)$　　B. $y=x(|x|+2)$

C. $y=|x|(x-2)$　　D. $y=x(|x|-2)$

3. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}-x^2+2x,x>0,\\0,x=0,\\x^2+mx,x<0\end{cases}$ 是奇函数.

(1)求实数 m 的值;

(2)若函数 $f(x)$ 在区间 $[-1,a-2]$ 上单调递增,求实数 a 的取值范围.

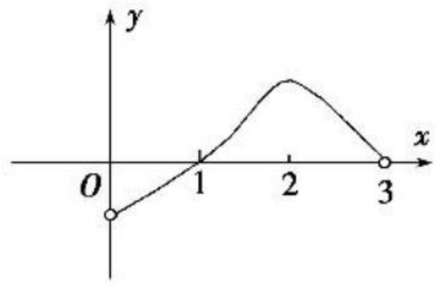
知识点二　利用奇偶性、单调性比较大小

4. 函数 $f(x)$ 是定义在 $[-6,6]$ 上的偶函数,且 $f(3)>f(1)$,则下列各式一定成立的是 (　　)

A. $f(6)>f(0)$　　B. $f(3)>f(2)$

C. $f(-1)<f(3)$　　D. $f(2)<f(0)$

5. 已知函数 $f(x)$ 是定义在 $(-3,3)$ 上的奇函数,当 $0<x<3$ 时,$f(x)$ 的图象如图所示,则不等式 $\dfrac{f(x)-f(-x)}{x}>0$ 的解集是 (　　)



A. $(-3,-1)\cup(0,1)$　　B. $(-1,0)\cup(0,1)$

C. $(-3,-1)\cup(1,3)$　　D. $(-1,0)\cup(1,3)$

知识点三　函数的单调性与奇偶性的综合应用

6. 已知定义在 **R** 上的偶函数 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调递增,且 $f(1)=0$,则不等式 $f(x-2)\geqslant 0$ 的解集是_____.

7. 已知函数 $f(x)$ 为奇函数,在定义域 $(-2,2)$ 上单调递增,且有 $f(2+a)+f(1-2a)>0$,求实数 a 的取值范围.

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

提能达标过关

一、选择题

1. 偶函数 $y=f(x)$ 在区间 $[0,4]$ 上单调递减，则有　（　　）

A. $f(-1)>f\left(\frac{\pi}{3}\right)>f(-\pi)$

B. $f\left(\frac{\pi}{3}\right)>f(-1)>f(-\pi)$

C. $f(-\pi)>f(-1)>f\left(\frac{\pi}{3}\right)$

D. $f(-1)>f(-\pi)>f\left(\frac{\pi}{3}\right)$

2. 已知 $y=f(x)$ 是奇函数，当 $x<0$ 时，$f(x)=x^2+ax$，且 $f(3)=6$，则实数 a 的值为　（　　）

A. 5　　B. 1

C. -1　　D. -3

3. 奇函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 上的解析式为 $f(x)=x(1+x)$，则 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上有　（　　）

A. 最大值 $-\frac{1}{4}$　　B. 最大值 $\frac{1}{4}$

C. 最小值 $-\frac{1}{4}$　　D. 最小值 $\frac{1}{4}$

4. 已知 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的偶函数，在 $(0,+\infty)$ 上单调递减，且 $f(2)=0$，则不等式 $xf(x)>0$ 的解集为　（　　）

A. $(0,2)$　　B. $(2,+\infty)$

C. $(-\infty,-2)\cup(0,2)$　　D. $(-\infty,-2)\cup(2,+\infty)$

5. $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数，且单调递减，若 $f(2-a)+f(4-a)<0$，则实数 a 的取值范围是　（　　）

A. $a<1$　　B. $a<3$

C. $a>1$　　D. $a>3$

二、填空题

6. 若函数 $f(x)=\frac{(a-1)x+a-2}{x+a^2-1}$ 为奇函数，则实数 $a=$_____.

7. 定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数 $f(x)$ 在区间 $[3,6]$ 上是增函数，在区间 $[3,6]$ 上的最大值为 8，最小值为 -1，则 $2f(-6)+f(-3)=$_____.

8. 已知 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数，当 $x>0$ 时，$f(x)=x^2-4x$，则当 $x<0$ 时，$f(x)$ 的解析式是_____，在定义域内满足 $f(x)>0$ 的 x 的取值范围是_____.

三、解答题

9. 已知函数 $f(x)=x+\frac{k}{x}$，且 $f(1)=2$.

(1)求 k 的值，并判断 $f(x)$ 的奇偶性；

(2)判断函数 $f(x)$ 的单调性，并证明你的结论；

(3)若 $f(a)>2$，求实数 a 的取值范围.

10. 若函数 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的偶函数，且当 $x\leqslant 0$ 时，$f(x)=x^2+2x$.

(1)写出函数 $f(x)(x\in\mathbf{R})$ 的解析式；

(2)若函数 $g(x)=f(x)-2ax+2(x\in[1,2])$，求函数 $g(x)$ 的最小值.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

SY 素养提升 SUYANGTISHENG　核心素养归纳　素养培优提能

核心素养归纳

一、函数奇偶性的判定方法

函数奇偶性是函数的一个重要性质，除了直接运用定义法判断外，下面再介绍几种判定方法.

1. 定义域判定法

【例 1】 判断函数 $f(x)=\sqrt{x+1}\cdot\sqrt{x-1}$ 的奇偶性.

[分析] 一个函数是奇(偶)函数，其定义域必须关于原点对称，这是函数具有奇偶性的前提条件. 若定义域不关于原点对称，则此函数既不是奇函数也不是偶函数.

[解] 要使函数 $f(x)$ 有意义，则 $\begin{cases}x-1\geqslant 0,\\ x+1\geqslant 0.\end{cases}$

解得 $x\geqslant 1$，即定义域是 $\{x|x\geqslant 1\}$.

因为定义域不关于原点对称，

所以函数 $f(x)$ 既不是奇函数也不是偶函数.

[评注] 用定义域虽不能判断一个函数是奇函数还是偶函数，但可以通过定义域不关于原点对称来说明一个函数不具有奇偶性.

2. 变式法

【例 2】 判断 $f(x)=\dfrac{\sqrt{1+x^2}+x-1}{\sqrt{1+x^2}+x+1}$ 的奇偶性.

[分析] 直接验证 $f(-x)=\pm f(x)$ 有困难，可转化为验证 $\dfrac{f(-x)}{f(x)}=\pm 1(f(x)\neq 0)$.

[解] $f(x)$ 的定义域为 **R**，关于原点对称.

当 $x=0$ 时，$f(x)=0$，图象过原点.

因为当 $x\neq 0$ 时，$\dfrac{f(-x)}{f(x)}=\dfrac{(1+x^2)-(x+1)^2}{(1+x^2)-(x-1)^2}=-1$，

所以 $f(-x)=-f(x)$.

又 $f(0)=0$，所以函数 $f(x)$ 为奇函数.

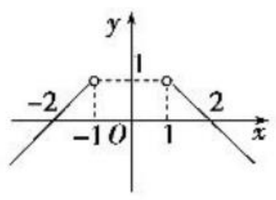
[评注] 为了运算上的方便或是直接运用定义判断较难进行时，常把验证 $f(-x)=\pm f(x)$ 转化为验证其变式：$f(x)\pm f(-x)=0$ 或 $\dfrac{f(-x)}{f(x)}=\pm 1(f(x)\neq 0)$.

3. 图象法

【例 3】 判断函数 $f(x)=\begin{cases}x+2,x<-1,\\ 0,-1\leqslant x\leqslant 1,\\ -x+2,x>1\end{cases}$ 的奇偶性.

[分析] 本题可用图象法较为直观地判断.

[解] 作出函数 $f(x)$ 的图象，如图所示. 因为函数 $f(x)$ 的图象关于 y 轴对称，所以函数 $f(x)$ 为偶函数.



[评注] 一些函数的奇偶性可用图象法解决，即图象关于原点对称的函数是奇函数，图象关于 y 轴对称的函数是偶函数，否则既不是奇函数也不是偶函数.

二、函数奇偶性的应用

函数的奇偶性是函数的重要性质，在各类考试中是考查的热点，下面对奇偶性的常见应用进行举例说明.

1. 求函数的解析式

【例 1】 已知 $f(x)$ 是 **R** 上的奇函数，且当 $x\in(0,+\infty)$ 时，$f(x)=x(1+\sqrt[3]{x})$，求 $f(x)$ 的解析式.

[分析] 要求 $f(x)$ 在 **R** 上的解析式，条件已给出 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上的解析式，还需求当 $x\leqslant 0$ 时，$f(x)$ 对应的解析式.

[解] 因为 $x\in(-\infty,0)$ 时，$-x\in(0,+\infty)$，

所以 $f(-x)=-x(1+\sqrt[3]{-x})=-x(1-\sqrt[3]{x})$.

因为 $f(x)$ 是 **R** 上的奇函数，

所以 $f(x)=-f(-x)=x(1-\sqrt[3]{x})$，$x\in(-\infty,0)$.

又 $f(0)=0$.

所以 $f(x)=\begin{cases}x(1+\sqrt[3]{x}),x>0,\\ 0,x=0,\\ x(1-\sqrt[3]{x}),x<0.\end{cases}$

[评注] 利用函数的奇偶性求函数的解析式是常见题型，其步骤为：(1)设，设出在未知区间上的自变量 x；(2)化，将 x 转化到已知区间上；(3)求，根据函数的奇偶性求出解析式.

2. 求参数的值

【例 2】 已知函数 $f(x)$ 是 **R** 上的奇函数，当 $x\geqslant 0$ 时，$f(x)=x(x+1)$，若给出一个实数 a，$a<0$，有 $f(a)=-2$，则实数 $a=$_____.

[分析] 根据已知条件当 $x\geqslant 0$ 时，函数 $f(x)=x(x+1)\geqslant 0$，由于 $f(a)=-2$，显然需要求得 $x<0$ 的解析式.

[解析] 令 $x<0$，则 $-x>0$.

所以 $f(-x)=-x(1-x)$.

又 $f(x)$ 为奇函数，所以当 $x<0$ 时，有 $f(x)=x(1-x)$.

令 $f(a)=a(1-a)=-2$，得 $a^2-a-2=0$.

解得 $a=-1$ 或 $a=2$(舍去).

[答案] -1

[评注] 解决本题首先根据自变量所在范围对函数的解析式进行判断，确定所求自变量对应的解析式是求解本题的关键.

3. 求参数的范围

【例 3】 定义在 $(-2,2)$ 上的偶函数 $f(x)$ 在区间 $[0,2)$ 上是减函数，若 $f(1-m)<f(m)$，求实数 m 的取值范围.

[解] 因为 $f(x)$ 是偶函数，

所以 $f(1-m)=f(|1-m|)$，$f(m)=f(|m|)$.

又 $f(1-m)<f(m)$，所以 $f(|1-m|)<f(|m|)$.

由 $f(x)$ 在区间 $[0,2)$ 上是减函数，

得 $0\leqslant|m|<|1-m|<2$，解得 $-1<m<\dfrac{1}{2}$.

故实数 m 的取值范围是 $\left(-1,\dfrac{1}{2}\right)$.

[评注] 本题利用了偶函数的性质：若函数 $f(x)$ 是偶函数，则恒有 $f(x)=f(|x|)$，从而达到简捷求解的目的.

三、函数奇偶性与单调性联袂解题

单调性和奇偶性是函数的两个重要基本性质，二者之间有下面的密切联系：

(1)奇函数在关于原点对称的区间上具有相同的单调性；

(2)偶函数在关于原点对称的区间上具有相反的单调性.

巧妙地运用单调性和奇偶性的联系，可以轻松解决很多函数问题.

下面分类举例说明.

1. 比较大小

【例 1】 已知函数 $f(x)$ 是偶函数，且在区间 $[0,1]$ 上是减函数，则 $f(-0.5)$，$f(-1)$，$f(0)$ 的大小关系是 (　　)

A. $f(-0.5)<f(0)<f(-1)$

B. $f(-1)<f(-0.5)<f(0)$

C. $f(0)<f(-0.5)<f(-1)$

D. $f(-1)<f(0)<f(-0.5)$

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

［解析］ 因为函数 $f(x)$是偶函数，

所以 $f(-0.5)=f(0.5)$，$f(-1)=f(1)$.

又因为 $f(x)$在区间$[0,1]$上是减函数，

所以 $f(1)<f(0.5)<f(0)$，

即 $f(-1)<f(-0.5)<f(0)$.

［答案］ B

［评注］ 比较两个函数值大小时，如果两个自变量的值不在同一单调区间上，则需要利用奇偶性来进行转化.

2. 求函数最值

【例 2】 若偶函数 $f(x)$在区间$[3,6]$上是增函数且 $f(6)=9$，则它在区间$[-6,-3]$上　　（　　）

A. 最小值是 9　　B. 最小值是 -9

C. 最大值是 -9　　D. 最大值是 9

［解析］ 因为 $f(x)$是偶函数且在区间$[3,6]$上是增函数，所以 $f(x)$在区间$[-6,-3]$上是减函数. 因此，$f(x)$在区间$[-6,-3]$上最大值为 $f(-6)=f(6)=9$.

［答案］ D

［评注］ 应用单调性和奇偶性的联系求最值时，一定要确定是最大值还是最小值.

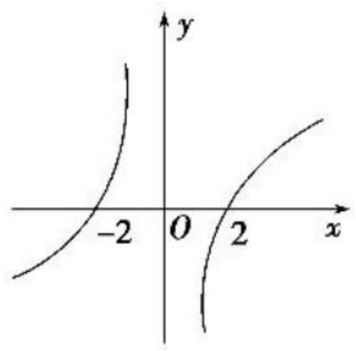
3. 解不等式

【例 3】 若函数 $f(x)$是奇函数，且在$(-\infty,0)$上是增函数，又 $f(-2)=0$，则 $xf(x)<0$ 的解集是　　（　　）

A. $(-2,0)\cup(0,2)$　　B. $(-\infty,-2)\cup(0,2)$

C. $(-\infty,-2)\cup(2,+\infty)$　　D. $(-2,0)\cup(2,+\infty)$

［解析］ 因为函数 $f(x)$是奇函数，且在$(-\infty,0)$上是增函数，又 $f(-2)=0$，所以可画出符合条件的奇函数 $f(x)$的图象如图所示.



因为 $xf(x)<0$，

所以 $\begin{cases}x>0,\\f(x)<0\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x<0,\\f(x)>0,\end{cases}$

结合图象，可知 A 正确.

［答案］ A

［评注］ 本题是单调性和奇偶性的综合应用，并且有较强的抽象性. 只要抓住其对称性，分析图象的特点，画出符合条件的图象，就不难使问题得到解决.

4. 求参数的取值范围

【例 4】 设定义在$(-1,1)$上的奇函数 $f(x)$在$[0,1)$上单调递增，且有 $f(1-m)+f\left(\frac{1}{2}-2m\right)<0$，求实数 m 的取值范围.

［解］ 由于函数 $f(x)$的定义域为$(-1,1)$，

则有 $\begin{cases}-1<1-m<1,\\-1<\frac{1}{2}-2m<1,\end{cases}$ 解得 $0<m<\frac{3}{4}$.

又 $f(1-m)+f\left(\frac{1}{2}-2m\right)<0$，

所以 $f(1-m)<-f\left(\frac{1}{2}-2m\right)$.

而函数 $f(x)$为奇函数，

则有 $f(1-m)<f\left(2m-\frac{1}{2}\right)$.

因为函数 $f(x)$是奇函数，且在$[0,1)$上单调递增，

所以函数 $f(x)$在定义域$(-1,1)$上单调递增，

则有 $1-m<2m-\frac{1}{2}$，解得 $m>\frac{1}{2}$，

故实数 m 的取值范围为 $\left(\frac{1}{2},\frac{3}{4}\right)$.

［评注］ 本题通过函数奇偶性和单调性的定义及其相关特征解决问题，这是比较常见的题型之一.

素养培优提能

一、选择题

1. 设 $f(x)$是 **R** 上的任意函数，则下列叙述正确的是（　　）

A. $f(x)f(-x)$是奇函数

B. $f(x)|f(-x)|$是奇函数

C. $f(x)-f(-x)$是偶函数

D. $f(x)+f(-x)$是偶函数

2. **（2019·广州高一检测）**已知 $f(x)=x^5+ax^3+bx-8$（a，b是常数），且 $f(-3)=5$，则 $f(3)=$　　（　　）

A. 21　　B. -21

C. 26　　D. -26

3. 已知定义在 **R** 上的函数 $f(x)$在$(-\infty,2)$内为减函数，且 $f(x+2)$为偶函数，则 $f(-1)$，$f(4)$，$f\left(\frac{11}{2}\right)$的大小关系为　　（　　）

A. $f(4)<f(-1)<f\left(\frac{11}{2}\right)$　　B. $f(-1)<f(4)<f\left(\frac{11}{2}\right)$

C. $f\left(\frac{11}{2}\right)<f(4)<f(-1)$　　D. $f(-1)<f\left(\frac{11}{2}\right)<f(4)$

4. 已知 **R** 上的奇函数 $f(x)$在区间$(-\infty,0)$内单调递增，且 $f(-2)=0$，则不等式 $f(x)\leqslant 0$ 的解集为　　（　　）

A. $[-2,2]$　　B. $(-\infty,-2]\cup[0,2]$

C. $(-\infty,-2]\cup[2,+\infty)$　　D. $[-2,0]\cup[2,+\infty)$

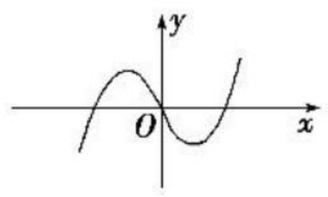
5. 设奇函数 $f(x)$在$(0,+\infty)$上为增函数，且 $f(1)=0$，则不等式 $\frac{f(x)-f(-x)}{x}<0$ 的解集为　　（　　）

A. $(-1,0)\cup(1,+\infty)$　　B. $(-\infty,-1)\cup(0,1)$

C. $(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$　　D. $(-1,0)\cup(0,1)$

二、填空题

6. 设函数 $f(x)=ax^3+bx+c$ 的图象如图所示，则 $f(a)+f(-a)=$ _____.



7. 函数 $f(x)$是定义在 **R** 上的奇函数，且它是减函数，若实数 a，b 满足 $f(a)+f(b)>0$，则 $a+b$ _____（填“$>$”“$<$”或“$=$”）0.

8. 已知函数 $f(x)$是 **R** 上的奇函数，且 $f(x+2)=-f(x)$，当 $x\in(0,2)$时，$f(x)=x^2$，则 $f(7)=$ _____.

三、解答题

9. 函数 $f(x)=\frac{ax+b}{1+x^2}$ 是定义在$(-1,1)$上的奇函数，且 $f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{2}{5}$.

(1)确定函数 $f(x)$的解析式；

(2)用定义证明：$f(x)$在$(-1,1)$上是增函数.

10. 已知 $y=f(x)$在定义域$(-1,1)$上是减函数且为奇函数，若 $f(1-a)+f(1-2a)<0$，求实数 a 的取值范围.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

阶段质量评估 3

（时间：45 分钟　满分：100 分）

一、选择题（每小题 5 分，共 30 分）

1. 如果函数 $f(x)=x^2+2(a-1)x+2$ 在区间 $(-\infty,4]$ 上单调递减，那么实数 a 的取值范围是（　　）

A. $a\leqslant -3$　　B. $a\geqslant -3$

C. $a\leqslant 5$　　D. $a\geqslant 5$

2. 下列函数是奇函数的是（　　）

A. $y=x+\frac{1}{x^2}$　　B. $y=|x-2|+|x+2|$

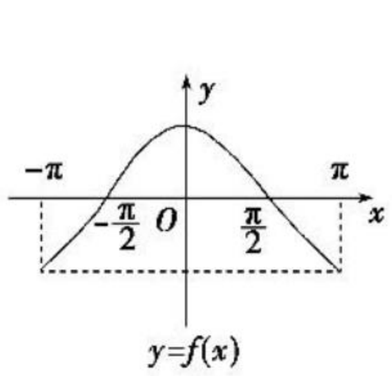
C. $y=x-x|x|$　　D. $y=\frac{x^2+x}{x+1}$

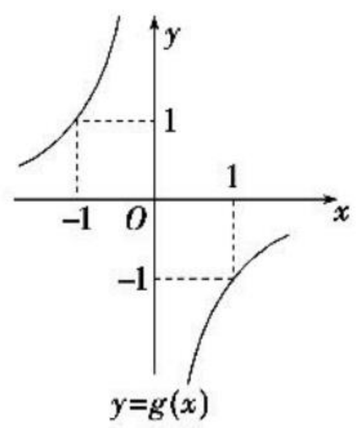
3. 已知函数 $f(x)$ 是定义在 **R** 上的奇函数，当 $x>0$ 时，$f(x)=-x^2-x$，则 $f(-2)=$（　　）

A. 6　　B. -6

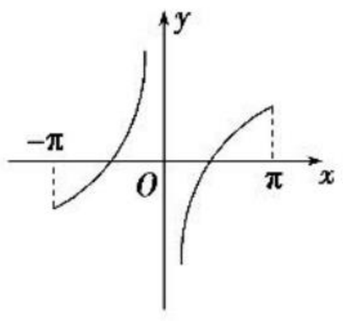
C. 2　　D. -2

4. 函数 $y=f(x)$ 与 $y=g(x)$ 的图象如图所示.

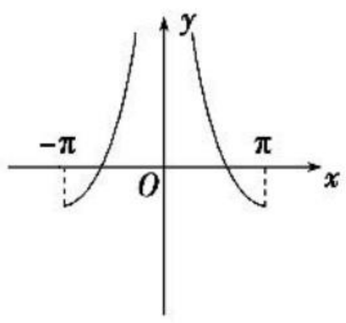




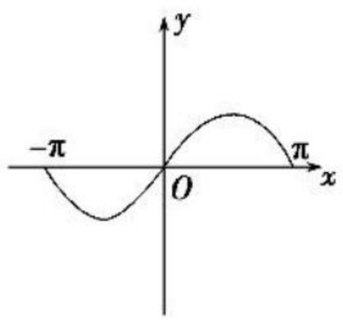
则函数 $y=f(x)\cdot g(x)$ 的图象可能是（　　）



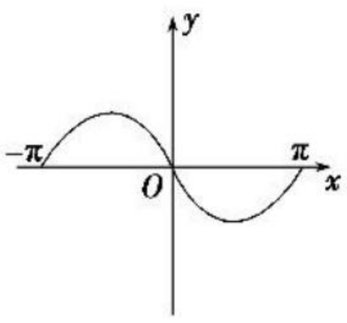
A



B



C



D

5. 定义在 **R** 上的偶函数 $f(x)$，对任意 $x_1,x_2\in[0,+\infty)(x_1\neq x_2)$，有 $\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}<0$，则（　　）

A. $f(3)<f(-2)<f(1)$　　B. $f(1)<f(-2)<f(3)$

C. $f(-2)<f(1)<f(3)$　　D. $f(3)<f(1)<f(-2)$

6. 已知 $f(x)$ 是定义域为 $(-1,1)$ 的奇函数，而且 $f(x)$ 是减函数，如果 $f(m-2)+f(2m-3)>0$，那么实数 m 的取值范围是（　　）

A. $\left(1,\frac{5}{3}\right)$　　B. $\left(-\infty,\frac{5}{3}\right)$

C. $(1,3)$　　D. $\left(\frac{5}{3},+\infty\right)$

二、填空题（每小题 5 分，共 20 分）

7. 若函数 $f(x)=(k-2)x^2+(k-1)x+3$ 是偶函数，则 $f(x)$ 的递增区间是_____.

8. 已知 **R** 上的奇函数 $f(x)$ 满足当 $x>0$ 时，$f(x)=x^2+x-1$，则 $f[f(-1)]=$_____.

9. 设函数 $f(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 上为增函数，$f(3)=0$，且 $g(x)=f(x+1)$ 为偶函数，则不等式 $g(2-2x)<0$ 的解集为_____.

10. 给出以下四个结论：

①若集合 $A=\{x,y\}$，$B=\{0,x^2\}$，$A=B$，则 $x=1$，$y=0$；

②若函数 $f(x)$ 的定义域为 $(-1,1)$，则函数 $f(2x+1)$ 的定义域为 $(-1,0)$；

③函数 $f(x)=\frac{1}{x}$ 的单调递减区间为 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$；

④若函数 $f(x)$ 满足 $f(x+y)=f(x)\cdot f(y)$，且 $f(1)=2$，则 $\frac{f(2)}{f(1)}+\frac{f(4)}{f(3)}+\cdots+\frac{f(2\,016)}{f(2\,015)}=2\,016$.

其中正确的有_____.（写出所有正确结论的序号）

三、解答题（共 50 分）

11.（12 分）已知函数 $f(x)=x-\frac{1}{x}(x\neq 0)$.

(1) 判断函数 $f(x)$ 的奇偶性；

(2) 求证：函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上是增函数；

(3) 求满足 $f(x)>0$ 的 x 的取值范围.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

12.(12 分)(**2019·湖北武汉二中高一月考**)已知函数 $f(x)$ 为定义在 **R** 上的奇函数,且当 $x>0$ 时,$f(x)=-x^2+4x$.

(1)求函数 $f(x)$ 的解析式;

(2)求函数 $f(x)$ 在区间 $[-2,a](a>-2)$ 上的最小值.

13.(13 分)已知函数 $f(x)=x^2+2ax+1(x\in[-5,5])$.

(1)若 $y=f(x)$ 在 $[-5,5]$ 上是单调函数,求实数 a 的取值范围;

(2)求函数 $y=f(x)$ 在 $[-5,5]$ 上的最小值.

14.(13 分)函数 $f(x)$ 的定义域为 $D=\{x|x\neq0\}$,且满足对于任意 $x_1,x_2\in D$,有 $f(x_1\cdot x_2)=f(x_1)+f(x_2)$.

(1)判断 $f(x)$ 的奇偶性并证明你的结论;

(2)如果 $f(4)=1$,$f(x-1)<2$,且 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上是增函数,求 x 的取值范围.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

第二章 基本初等函数(Ⅰ)

2.1 指数函数

2.1.1 指数与指数幂的运算

第15课时 根 式

掌握几个要点

1. 理解1个概念——根式的概念

一般地，如果 $x^n=a$，那么 x 叫做 a 的 n 次方根，其中 $n>1$，且 $n\in\mathbf{N}^*$. n 为奇数时，$x=\sqrt[n]{a}$，n 为偶数时，$x=\pm\sqrt[n]{a}(a>0)$；负数没有偶次方根，0的任何次方根都是0.

2. 掌握2个公式——$(\sqrt[n]{a})^n$ 及 $\sqrt[n]{a^n}$

(1)$(\sqrt[n]{a})^n=a$；(2)n 为奇数，$\sqrt[n]{a^n}=a$，n 为偶数，$\sqrt[n]{a^n}=|a|=\begin{cases}a,a\geqslant 0,\\-a,a<0.\end{cases}$

3. 关注1个易错点——关注 n 的奇偶性

一个数到底有没有 n 次方根，我们一定先考虑被开方数到底是正数还是负数，还要分清 n 为奇数或偶数这两种情况.

题点知识巩固

知识点一 根式的概念

1. 下列说法：①16的4次方根是2；② $\sqrt[4]{16}$ 的运算结果是 ±2；③当 n 为大于1的奇数时，$\sqrt[n]{a}$ 对任意 $a\in\mathbf{R}$ 都有意义；④当 n 为大于1的偶数时，$\sqrt[n]{a}$ 只有当 $a\geqslant0$ 时才有意义. 其中正确的是 ( )

A. ①③④　　B. ②③④

C. ③④　　D. ②③

2. 已知 $x^5=6$，则 x 等于 ( )

A. $\sqrt{6}$　　B. $\sqrt[5]{6}$

C. $-\sqrt[5]{6}$　　D. $\pm\sqrt[5]{6}$

3. 若 $\sqrt[4]{a-2}+(a-4)^0$ 有意义，则 a 的取值范围是 ( )

A. $[2,+\infty)$　　B. $[2,4)\cup(4,+\infty)$

C. $(-\infty,2)\cup(2,+\infty)$　　D. $(-\infty,4)\cup(4,+\infty)$

4. 有下列说法：

① $\sqrt[3]{-125}=5$；②16的4次方根是 ±2；③ $\sqrt[4]{81}=\pm3$；④ $\sqrt{(x+y)^2}=|x+y|$.

其中，正确的有_____.(填上正确说法的序号)

知识点二 根式性质的应用

5. 下列各式正确的是 ( )

A. $\sqrt{(-3)^2}=-3$　　B. $\sqrt[4]{a^4}=a$

C. $\sqrt{2^2}=2$　　D. $\sqrt[3]{(-2)^3}=2$

6. 若 $\sqrt[n]{a^n}+(\sqrt[n+1]{a})^{n+1}=0$，$a\neq0$，且 $n\in\mathbf{N}^*$，则 ( )

A. $a>0$，且 n 为偶数　　B. $a<0$，且 n 为偶数

C. $a>0$，且 n 为奇数　　D. $a<0$，且 n 为奇数

7. 已知 $xy\neq0$，且 $\sqrt{4x^2y^2}=-2xy$，则有 ( )

A. $xy<0$　　B. $xy>0$

C. $x>0,y>0$　　D. $x<0,y<0$

8. 化简 $\sqrt{(x+3)^2}-\sqrt[3]{(x-3)^3}$ 得 ( )

A. 6　　B. $2x$

C. 6或 $-2x$　　D. 6或 $2x$ 或 $-2x$

知识点三 根式的计算

9. 函数 $f(x)=\sqrt{(x-1)^2}+\sqrt[3]{(x+1)^3}$ 的值域是_____.

10. 求下列各式的值.

(1) $\sqrt[4]{(-4)^2}$；

(2) $\sqrt[5]{-32}$；

(3) $\sqrt[4]{(-\sqrt{2})^2}$；

(4) $(\sqrt[3]{-2})^3$；

(5) $\sqrt{(\pi-3)^2}$；

(6) $\sqrt[3]{(1+\sqrt{2})^3}+\sqrt{(1-\sqrt{2})^2}$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

提能达标过关

一、选择题

1. 下列等式中成立的个数是（　　）

①$(\sqrt[n]{a})^n=a(n\in\mathbf{N}^*$ 且 $n>1)$；②$\sqrt[n]{a^n}=a(n$ 为大于 1 的奇数)；③$\sqrt[n]{a^n}=|a|=\begin{cases}a(a\geqslant 0),\\-a(a<0)\end{cases}(n$ 为大于零的偶数).

A. 0 个　　B. 1 个

C. 2 个　　D. 3 个

2. 化简$\sqrt{(a-b)^2}+\sqrt[3]{(a-b)^3}$的结果是（　　）

A. 0　　B. $2(a-b)$

C. 0 或 $2(a-b)$　　D. $2a$

3. 当$\sqrt{2-x}$有意义时，化简$\sqrt{x^2-4x+4}-\sqrt{x^2-6x+9}$的结果为（　　）

A. -1　　B. $2x-5$

C. $5-2x$　　D. 1

4. 化简$\sqrt{6-2\sqrt{5}}-\sqrt{8-2\sqrt{15}}$的结果为（　　）

A. $1-\sqrt{3}$　　B. $\sqrt{3}-1$

C. $-1-\sqrt{3}$　　D. $1+\sqrt{3}$

5. 下列等式中，正确的是（　　）

A. $\sqrt[4]{a^4}=a$　　B. $\sqrt[6]{(-2)^2}=\sqrt[3]{-2}$

C. $a^0=1$　　D. $\sqrt[10]{(\sqrt{2}-1)^5}=(\sqrt{2}-1)^{\frac{1}{2}}$

二、填空题

6. 化简$\sqrt[3]{(1+\sqrt{2})^3}+\sqrt[4]{(1-\sqrt{2})^4}=$_____.

7. 化简$\sqrt{4x^6y^2}(x<0,y>0)=$_____.

8. 若 $n<m<0$，则$\sqrt{m^2+2mn+n^2}-\sqrt{m^2-2mn+n^2}=$_____.

三、解答题

9. 计算：

(1)$\sqrt{6\frac{1}{4}}-\sqrt{3\frac{3}{8}}+\sqrt[3]{0.125}$；

(2)$\sqrt[3]{(-8)^3}+\sqrt[4]{(\sqrt{3}-2)^4}-\sqrt[3]{(2-\sqrt{3})^3}$；

(3)$\sqrt{\left(\sqrt{\frac{3}{4}}-\sqrt{\frac{1}{4}}\right)^3}\cdot(\sqrt{3}+1)+(\sqrt{2\,017}-\sqrt{2\,016})^0$.

10. 已知 a,b 是方程 $x^2-6x+4=0$ 的两根，且 $a>b>0$，求$\frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$的值.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

第16课时　分数指数幂

掌握几个要点

1. 理解1个概念——分数指数幂的意义

(1)规定正数的正分数指数幂的意义是：

$a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m}(a>0,m,n\in\mathbf{N}^*,\text{且 }n>1)$.

(2)规定正数的负分数指数幂的意义是：

$a^{-\frac{m}{n}}=\dfrac{1}{a^{\frac{m}{n}}}(a>0,m,n\in\mathbf{N}^*,\text{且 }n>1)$.

(3)0的正分数指数幂等于0，0的负分数指数幂没有意义.

2. 掌握5个性质——有理数指数幂的运算性质

(1)$a^r\cdot a^s=a^{r+s}(a>0,r,s\in\mathbf{Q})$.

(2)$(a^r)^s=a^{rs}(a>0,r,s\in\mathbf{Q})$.

(3)$(ab)^r=a^rb^r(a>0,b>0,r\in\mathbf{Q})$.

(4)$a^r\div a^s=a^{r-s}(a>0,r,s\in\mathbf{Q})$.

(5)$\left(\dfrac{a}{b}\right)^r=\dfrac{a^r}{b^r}(a>0,b>0,r\in\mathbf{Q})$.

3. 会用4个常见结论——指数幂的几个结论

(1)当$a>0$时，$a^b>0$；

(2)当$a\neq0$时，$a^0=1$；而当$a=0$时，a^0无意义；

(3)若$a^r=a^s(a\neq0$且$a\neq1)$，则$r=s$；

(4)乘法公式仍适用于分数指数幂，如：

$(a^{\frac12}+b^{\frac12})(a^{\frac12}-b^{\frac12})=(a^{\frac12})^2-(b^{\frac12})^2=a-b(a>0,b>0)$.

题点知识巩固

知识点一　根式与分数指数幂的互化

1. 下列各等式中成立的是　(　　)

A. $a^{\frac32}=\sqrt[3]{a^2}$　　B. $a^{\frac23}=\sqrt[3]{a^2}$

C. $a^{\frac25}=\pm\sqrt[5]{a^2}$　　D. $a^{-\frac12}=-\sqrt{a}$

2. 若$a>0,b>0$，化简成指数幂的形式：$\dfrac{\sqrt[3]{a^2b}\cdot\sqrt{ab}}{\sqrt{ab^5}}=$_____.

3. 用分数指数幂表示下列各式$(a>0,b>0)$.

(1)$a^2\sqrt{a}$；

(2)$\sqrt{a\sqrt{a}}$；

(3)$\sqrt[3]{a^2}\cdot\sqrt{a^3}$；

(4)$(\sqrt[3]{a})^2\cdot\sqrt{ab^3}$.

知识点二　分数指数幂的运算

4. 计算$\left(\dfrac{16}{81}\right)^{-\frac14}$的值是　(　　)

A. $\dfrac23$　　B. $\dfrac32$

C. $\dfrac{4}{81}$　　D. $-\dfrac{81}{4}$

5. 计算$\left(1\dfrac12\right)^0-(1-0.5^{-2})\div\left(\dfrac{27}{8}\right)^{\frac23}$的值为　(　　)

A. $-\dfrac13$　　B. $\dfrac13$

C. $\dfrac43$　　D. $\dfrac73$

6. 计算下列各式的值：

(1)$(0.027)^{\frac13}-\left(6\dfrac14\right)^{\frac12}+256^{\frac34}+(2\sqrt{2})^{\frac23}-3^{-1}+\pi^0$；

(2)$(a^{\frac85}\cdot b^{-\frac65})^{-\frac12}\cdot\sqrt[5]{a^4}\div\sqrt[5]{b^3}(a>b>0)$.

知识点三　分数指数幂的综合应用

7. 计算$(2a^{-3}b^{-\frac23})\cdot(-3a^{-1}b)\div(4a^{-4}b^{-\frac53})$，得　(　　)

A. $-\dfrac32b^2$　　B. $\dfrac32b^2$

C. $-\dfrac32b^{\frac73}$　　D. $\dfrac32b^{\frac73}$

8. 设$a^{\frac12}-a^{-\frac12}=m$，则$\dfrac{a^2+1}{a}=$　(　　)

A. m^2-2　　B. $2-m^2$

C. m^2+2　　D. m^2

9. 设$f(x)=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$，$g(x)=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$. 证明：

(1)$[g(x)]^2-[f(x)]^2=1$；

(2)$f(2x)=2f(x)\cdot g(x)$；

(3)$g(2x)=[g(x)]^2+[f(x)]^2$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

提能达标过关

一、选择题

1. 下列根式与分数指数幂的互化中，正确的是　　(　　)

A. $-\sqrt{x}=(-x)^{\frac{1}{2}}$

B. $x^{-\frac{1}{3}}=-\sqrt[3]{x}$

C. $\left(\frac{x}{y}\right)^{-\frac{3}{4}}=\sqrt{\left(\frac{y}{x}\right)^{3}}(x,y\neq 0)$

D. $\sqrt[6]{x^{2}}=x^{\frac{1}{3}}(x<0)$

2. 化简$[(-\sqrt{3})^{2}]^{-\frac{1}{2}}$的结果是　　(　　)

A. $-\frac{\sqrt{3}}{3}$　　B. $\sqrt{3}$

C. $\frac{\sqrt{3}}{3}$　　D. $-\sqrt{3}$

3. 设 $2^{a}=5^{b}=m$，且$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=2$，则 m 等于　　(　　)

A. $\sqrt{10}$　　B. 10

C. 20　　D. 100

4. 方程 $4^{x}-3\cdot 2^{x}+2=0$ 的解集为　　(　　)

A. $\{0\}$　　B. $\{1\}$

C. $\{0,1\}$　　D. $\{1,2\}$

5. 若 $10^{2x}=25$，则 10^{-x} 等于　　(　　)

A. $-\frac{1}{5}$　　B. $\frac{1}{5}$

C. $\frac{1}{50}$　　D. $\frac{1}{6\ 205}$

二、填空题

6. 计算$\left(2\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{2}}-(-9.6)^{0}-\left(\frac{8}{27}\right)^{\frac{2}{3}}+\left(\frac{3}{2}\right)^{-2}=$_____.

7. 计算$\left(\frac{1}{500}\right)^{-\frac{1}{2}}-10\times(\sqrt{5}-2)^{-1}+20\times(\sqrt{5}-\sqrt{3})^{0}=$_____.

8. 已知 $2^{x}+2^{-x}=3$，则 $4^{x}+4^{-x}=$_____，$2^{x}-2^{-x}=$_____.

三、解答题

9. (1)求值：$\left(3\frac{3}{8}\right)^{-\frac{2}{3}}-\left(5\frac{4}{9}\right)^{0.5}+(0.008)^{-\frac{2}{3}}\times\frac{2}{25}$；

(2)已知 $x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}}=3$，计算$\frac{x^{2}+x^{-2}-7}{x+x^{-1}+3}$的值.

10. 化简下列各式：

(1)$\frac{a^{-1}+b^{-1}}{(ab)^{-1}}(a>0,b>0)$；

(2)$\frac{a^{2}}{\sqrt{a}\cdot\sqrt[3]{a^{2}}}(a>0)$；

(3)$a^{3}\cdot\sqrt[3]{a^{2}}$；

(4)$\frac{1-a^{-1}}{a^{\frac{1}{2}}-a^{-\frac{1}{2}}}-\frac{1+a^{-\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{2}}+1}(a>0)$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

2.1.2　指数函数及其性质

第17课时　指数函数的图象和性质

掌握几个要点

1. 牢记3个性质——指数函数的图象与性质

(1)当底数 a 大小不确定时,必须分 $a>1$ 或 $0<a<1$ 两种情况讨论函数的图象和性质.

(2)当 $a>1$ 时,x 的值越小,函数的图象越接近 x 轴;当 $0<a<1$ 时,x 的值越大,函数的图象越接近 x 轴.

(3)指数函数的图象都经过点(0,1),且图象都只经过第一、第二象限.

2. 明确1种思路——解决指数函数图象过定点问题的思路

指数函数 $y=a^x(a>0$ 且 $a\neq1)$ 的图象过定点(0,1),据此,可解决形如 $y=k\cdot a^{x+c}+b(k\neq0,a>0$,且 $a\neq1)$ 的函数图象过定点的问题,即令 $x=-c$,得 $y=k+b$,函数图象过定点 $(-c,k+b)$.

3. 掌握1种方法——求指数型函数 $y=a^{f(x)}(a>0$ 且 $a\neq1)$ 值域的方法

(1)换元,令 $t=f(x)$,并求出函数 $t=f(x)$ 的定义域;

(2)求 $t=f(x)$ 的值域 $t\in M$;

(3)利用 $y=a^t$ 的单调性求 $y=a^t$ 在 $t\in M$ 上的值域.

题点知识巩固

知识点一　指数函数的概念

1. 下列各函数中是指数函数的是 (　　)

A. $y=(-3)^x$　　B. $y=-3^x$

C. $y=3^{x-1}$　　D. $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$

2. 函数 $f(x)=(a^2-3a+3)a^x$ 是指数函数,则有 (　　)

A. $a=1$ 或 $a=2$　　B. $a=1$

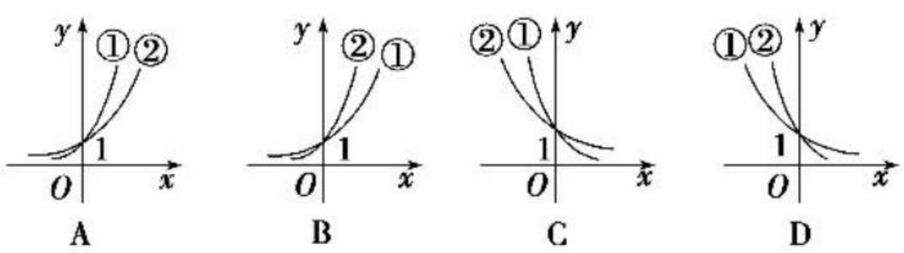
C. $a=2$　　D. $a>0$,且 $a\neq1$

3. 指数函数 $y=f(x)$ 的图象过点(2,4),那么 $f(2)\cdot f(4)=$ _____.

知识点二　指数函数的图象

4. 已知 $1>n>m>0$,则指数函数①$y=m^x$,②$y=n^x$ 的图象为 (　　)

A　　B　　C　　D

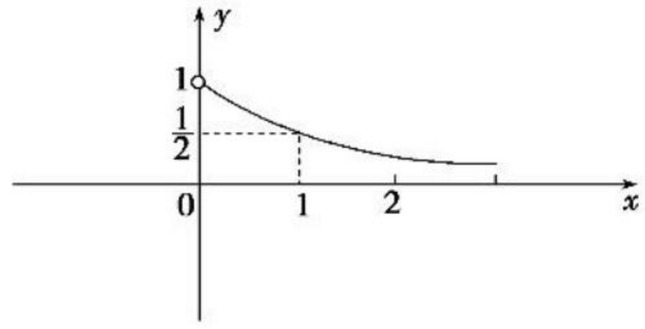


5. 不论 a 取何正实数,函数 $f(x)=a^{x+1}-2$ 恒过点 (　　)

A. $(-1,-1)$　　B. $(-1,0)$

C. $(0,-1)$　　D. $(-1,-3)$

6. 已知奇函数 $y=\begin{cases}f(x),x>0,\\g(x),x<0,\end{cases}$ 如果 $f(x)=a^x(a>0$,且 $a\neq1)$ 对应的图象如图所示,那么 $g(x)=$ _____.



知识点三　与指数函数有关的定义域、值域问题

7. 函数 $y=\sqrt{a^x-1}$ 的定义域是 $(-\infty,0]$,则 a 的取值范围为 (　　)

A. $a>0$　　B. $a<1$

C. $0<a<1$　　D. $a\neq1$

8. 已知函数 $f(x)=2^{-x^2+2x}$,则函数 $f(x)$ 的值域为 (　　)

A. $(-\infty,2]$　　B. $(0,2]$

C. $(-\infty,1]$　　D. $(0,1]$

9. 求下列函数的定义域与值域.

(1)$y=2^{\frac{1}{x-1}}$;

(2)$y=3^{\sqrt{5x-1}}$;

(3)$y=\left(\frac{1}{2}\right)^x-1$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

提能达标过关

一、选择题

1. 函数 $y=(a^2-4a+4)a^x$ 是指数函数，则 a 的取值范围是（　　）

A. $a>0$，$a\neq1$　　B. $a=1$

C. $a=3$　　D. $a=1$ 或 $a=3$

2. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}2^x,x<0,\\3^x,x>0,\end{cases}$ 则 $f[f(-1)]=$（　　）

A. 2　　B. $\sqrt{3}$

C. 0　　D. $\frac{1}{2}$

3. **(2019·温州高一检测)** 若 $a>1$，$-1<b<0$，则函数 $y=a^x+b$ 的图象一定在（　　）

A. 第一、二、三象限　　B. 第一、三、四象限

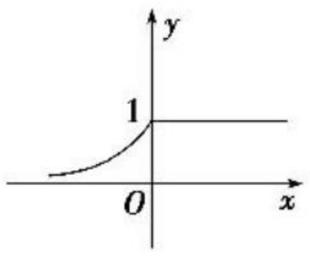
C. 第二、三、四象限　　D. 第一、二、四象限

4. 函数 $y=1-2^x$，$x\in[0,1]$ 的值域是（　　）

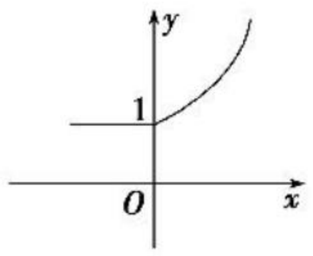
A. $[0,1]$　　B. $[-1,0]$

C. $\left[0,\frac{1}{2}\right]$　　D. $\left[-\frac{1}{2},0\right]$

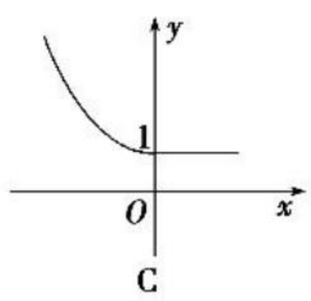
5. 定义运算 $a\oplus b=\begin{cases}a,a\leqslant b,\\b,a>b,\end{cases}$ 则函数 $f(x)=1\oplus2^x$ 的图象是（　　）



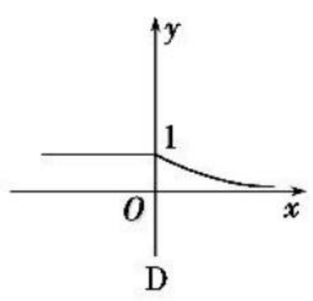
A



B



C



D

二、填空题

6. 函数 $y=-2^{-x}$ 的图象一定过第_____象限.

7. 方程 $|2^x-1|=a$ 有唯一实数解，则 a 的取值范围是_____.

8. 已知函数 $f(x)=a^x+a^{-x}$（$a>0$ 且 $a\neq1$），$f(1)=3$，则 $f(0)+f(1)+f(2)$ 的值为_____.

三、解答题

9. 已知函数 $f(x)=\frac{xa^x}{|x|}(a>1)$.

(1)求函数 $f(x)$ 的定义域和值域；

(2)画出函数 $f(x)$ 的图象；

(3)判断 $f(x)$ 的奇偶性；

(4)说出 $f(x)$ 的单调区间及在每一区间上是增函数还是减函数.

10. 已知函数 $f(x)=a^x(a>0$，且 $a\neq1)$ 在区间 $[1,2]$ 上的最大值为 m，最小值为 n.

(1)若 $m+n=6$，求实数 a 的值；

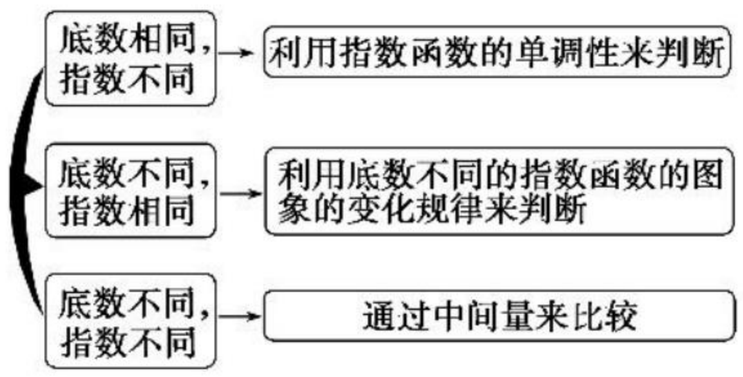
(2)若 $m=2n$，求实数 a 的值.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

第 18 课时　指数函数的性质及应用

掌握几个要点

1. 掌握 3 种方法——比较幂值大小的三种类型及方法



2. 关注 3 个易错点——指数型函数单调性问题

(1)解简单指数不等式问题的注意点

①形如 $a^x>a^y$ 的不等式，可借助 $y=a^x$ 的单调性求解. 如果 a 的值不确定，需分 $0<a<1$ 和 $a>1$ 两种情况进行讨论.

②形如 $a^x>b$ 的不等式，注意将 b 化为以 a 为底的指数幂的形式，再借助 $y=a^x$ 的单调性求解.

③形如 $a^x>b^x$ 的不等式，可借助图象求解.

(2)研究 $y=a^{f(x)}$ 型单调区间时，要注意 $a>1$ 还是 $0<a<1$.

①当 $a>1$ 时，$y=a^{f(x)}$ 与 $f(x)$ 单调性相同.

②当 $0<a<1$ 时，$y=a^{f(x)}$ 与 $f(x)$ 单调性相反.

(3)研究 $y=f(a^x)$ 型单调区间时，要注意 a^x 属于 $f(u)$ 的增区间还是减区间.

题点知识巩固

知识点一　比较大小问题

1. (**2019·宜宾高一检测**)下列判断正确的是　(　　)

A. $2.5^{2.5}>2.5^3$　　B. $0.8^2<0.8^3$

C. $\pi^2<\pi^{\sqrt{2}}$　　D. $0.9^{0.3}>0.9^{0.5}$

2. 比较下列各题中两个值的大小：

(1)$0.8^{-0.1}$，$0.8^{-0.2}$；

(2)$1.7^{0.3}$，$0.9^{3.1}$；

(3)$a^{1.3}$，$a^{2.5}$($a>0$ 且 $a\neq1$).

知识点二　解简单的指数不等式

3. 若 $2^{x+1}<1$，则 x 的取值范围是　(　　)

A. $(-1,1)$　　B. $(-1,+\infty)$

C. $(0,1)\cup(1,+\infty)$　　D. $(-\infty,-1)$

4. 若 $\left(\frac{1}{2}\right)^{2a+1}<\left(\frac{1}{2}\right)^{3-2a}$，则实数 a 的取值范围是(　　)

A. $(1,+\infty)$　　B. $\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$

C. $(-\infty,1)$　　D. $\left(-\infty,\frac{1}{2}\right)$

5. 已知 $a=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$，函数 $f(x)=a^x$. 若实数 m，n 满足 $f(m)>f(n)$，则 m，n 的大小关系为_____.

知识点三　指数型函数的单调性

6. 函数 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^{1-x}$ 的单调增区间为　(　　)

A. $(-\infty,+\infty)$　　B. $(0,+\infty)$

C. $(1,+\infty)$　　D. $(0,1)$

7. 已知 $f(x)=3^{x-b}$($2\leqslant x\leqslant4$，b 为常数)的图象经过点(2，1)，则 $f(x)$ 的值域是　(　　)

A. $[9,81]$　　B. $[3,9]$

C. $[1,9]$　　D. $[1,+\infty)$

知识点四　指数函数性质的综合应用

8. 函数 $f(x)=\frac{1}{2^x+1}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上　(　　)

A. 单调递减无最小值　　B. 单调递减有最小值

C. 单调递增无最大值　　D. 单调递增有最大值

9. 已知函数 $y=a^{2x}+2a^x-1$($a>0$ 且 $a\neq1$)，当 $x\geqslant0$ 时，求函数 $f(x)$ 的值域.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

提能达标过关

一、选择题

1. (**2019 · 济南高一检测**)设$\frac{1}{3}<\left(\frac{1}{3}\right)^{b}<\left(\frac{1}{3}\right)^{a}<1$,则 (　　)

A. $a^a<a^b<b^a$　　B. $a^a<b^a<a^b$

C. $a^b<a^a<b^a$　　D. $a^b<b^a<a^a$

2. 设函数 $f(x)=a^{-|x|}$($a>0$ 且 $a\neq1$),$f(2)=4$,则 (　　)

A. $f(-1)>f(-2)$　　B. $f(1)>f(2)$

C. $f(2)<f(-2)$　　D. $f(-3)>f(-2)$

3. 函数 $y=3^{x+1}-2$,$x\in[-2,0]$的值域是 (　　)

A. $(-2,+\infty)$　　B. $\left[-\frac{5}{3},+\infty\right)$

C. $[-1,1]$　　D. $\left[-\frac{5}{3},1\right]$

4. 某产品计划每年降低成本 $q\%$,若 3 年后的成本费为 a 元,则现在的成本费为 (　　)

A. $\frac{a}{(1-q\%)^3}$元　　B. $a(1-q\%)^3$ 元

C. $\frac{a}{(1+q\%)^3}$元　　D. $a(1+q\%)^3$ 元

5. 若函数 $f(x)=\begin{cases}a^x,x>1,\\(2-3a)x+1,x\leqslant1\end{cases}$是 **R** 上的减函数,则实数 a 的取值范围是 (　　)

A. $\left(\frac{2}{3},1\right)$　　B. $\left[\frac{3}{4},1\right)$

C. $\left(\frac{2}{3},\frac{3}{4}\right]$　　D. $\left(\frac{2}{3},+\infty\right)$

二、填空题

6. (**2019 · 杭州五校联考**)设函数 $f(x)=\begin{cases}\left(\frac{1}{2}\right)^x-7,x<0,\\\sqrt{x},x\geqslant0,\end{cases}$若 $f(a)<1$,则实数 a 的取值范围是_____.

7. 已知函数 $f(x)=\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$,若 $f(a)=\frac{1}{2}$,则 $f(-a)=$_____.

8. 已知函数 $f(x)=a^x$($a>0$ 且 $a\neq1$)在$[-1,2]$上的最大值为 8,最小值为 m,若函数 $g(x)=(3-10m)\sqrt{x}$是单调递增函数,则 $a=$_____.

三、解答题

9. 已知奇函数 $f(x)=\frac{a\cdot2^x+a+b}{2^x+1}$的图象经过点$(1,1)$.

(1)求 a,b 的值;

(2)判断函数的单调性,并给出证明.

10. 已知函数 $f(x)=2^x-2^{-x}$,若对任意 $x\in[1,3]$,不等式 $f(x^2+tx)+f(4-x)>0$ 恒成立,求实数 t 的取值范围.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

SY 素养提升 SUYANGTISHENG 核心素养归纳　素养培优提能

核心素养归纳

一、指数与指数运算疑点透析

1. 如何理解 n 次方根的概念

若一个数 x 的 n 次方等于 a，那么 x 怎么用 a 来表示呢？是 $x=\sqrt[n]{a}$ 吗？这个回答是不完整的. 正确表示应如下：

$$x=\begin{cases}\sqrt[n]{a},n\text{ 为奇数},\\ \pm\sqrt[n]{a},n\text{ 为偶数},a>0,\\ \text{不存在},n\text{ 为偶数},a<0,\\ 0,a=0.\end{cases}$$

主要性质

①当 n 为奇数时，$\sqrt[n]{a^n}=a$；

②当 n 为偶数时，$\sqrt[n]{a^n}=|a|=\begin{cases}a,a\geqslant 0,\\ -a,a<0.\end{cases}$

2. 如何理解分数指数幂的意义

分数指数幂 $a^{\frac{m}{n}}$ 不可以理解为 $\frac{m}{n}$ 个 a 相乘，它是根式的一种新的写法. 规定 $a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m}(a>0,m,n\in\mathbf{N}^*,\text{且 }n>1)$，$a^{-\frac{m}{n}}=\frac{1}{a^{\frac{m}{n}}}=\frac{1}{\sqrt[n]{a^m}}(a>0,m,n\in\mathbf{N}^*,\text{且 }n>1)$，在这样的规定下，根式与分数指数幂表示相同意义的量，它们只是形式上不同而已. 0 的正分数指数幂为 0，0 的负分数指数幂无意义，负数的分数指数幂是否有意义，应视 m,n 的具体数而定.

3. 分数指数幂和整数指数幂有什么异同

相同：分数指数幂与整数指数幂都是有理数指数幂，都可以利用有理数指数幂的运算性质进行运算. 其运算形式为 $a^r\cdot a^s=a^{r+s}$；$(a^r)^s=a^{rs}$；$(ab)^r=a^r\cdot b^r$，式中 $a>0,b>0,r,s\in\mathbf{Q}$，对于这三条性质，不要求证明，但需记准.

不同：整数指数幂表示的是相同因式的连乘积，而分数指数幂是根式的一种新的写法，它表示的是根式.

4. 指数幂的运算

在这里要注意的是，对于计算结果不能同时含有根号和分数指数，也不能既有分母又含有负指数.

二、解读指数函数的四个难点

难点之一：概念

指数函数 $y=a^x$ 有三个特征：①指数：指数只能是自变量 x，而不能是 x 的函数；②底数：底数为常数，大于 0 且不等于 1；③系数：系数只能是 1.

【例 1】 给出五个函数：①$y=2\times 6^x$；②$y=(-6)^x$；③$y=\pi^x$；④$y=x^x$；⑤$y=2^{2x+1}$.

以上函数中指数函数的个数是_____.

[分析] 根据所给的函数对系数、底数、指数三个方面进行考查，是否满足指数函数的定义.

[解析] 对于①，系数不是 1；对于②，底数小于 0；对于④，底数 x 不是常数；对于⑤，指数是 x 的一次函数，故①②④⑤都不是指数函数. 正确的是③，只有③符合指数函数的定义.

[答案] 1

难点之二：讨论

指数函数 $y=a^x(a>0,\text{且 }a\neq 1)$，当 $a>1$ 时，是增函数；当 $0<a<1$ 时，是减函数.

【例 2】 函数 $y=a^x(a>0,\text{且 }a\neq 1)$ 在 $[1,2]$ 上的最大值比最小值大 $\frac{a}{2}$，求 a 的值.

[分析] 遇到底数是参数时，应优先分类讨论，此题应先对 a 进行分类讨论，再列出方程并求出 a.

[解] 当 $a>1$ 时，函数 $y=a^x$ 在 $[1,2]$ 上的最大值是 a^2，最小值是 a，依题意得 $a^2-a=\frac{a}{2}$，即 $a^2=\frac{3a}{2}$，所以 $a=\frac{3}{2}$；当 $0<a<1$ 时，函数 $y=a^x$ 在 $[1,2]$ 上的最大值是 a，最小值是 a^2，依题意得 $a-a^2=\frac{a}{2}$，即 $a^2=\frac{a}{2}$，所以 $a=\frac{1}{2}$. 综上可知，$a=\frac{3}{2}$ 或 $a=\frac{1}{2}$.

难点之三：复合

指数函数 $y=a^x(a>0,\text{且 }a\neq 1)$ 与一次函数、反比例函数及二次函数等进行复合时，特别是研究单调性时，应掌握好“同增异减”法则.

【例 3】 求函数 $y=\left(\frac{1}{3}\right)^{\sqrt{-x^2+x+2}}$ 的单调递减区间.

[分析] 指数函数与指数型复合函数的区别在于指数自变量是 x 还是 x 的函数. 此题先求出函数的定义域，再利用复合函数的“同增异减”法则求解.

[解] 由 $-x^2+x+2\geqslant 0$ 知，函数的定义域是 $[-1,2]$. 令 $u=-x^2+x+2=-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{9}{4}$，则 $y=\left(\frac{1}{3}\right)^{\sqrt{u}}$，当 $x\in\left[-1,\frac{1}{2}\right]$ 时，随 x 的增大，u 增大，y 减小，故函数的递减区间为 $\left[-1,\frac{1}{2}\right]$.

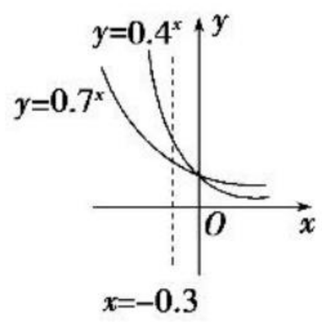
难点之四：图象

指数函数 $y=a^x(a>0,\text{且 }a\neq 1)$ 的图象特征是：当 $a>1$ 时，在 y 轴的右侧，a 越大，图象越往上排；在 y 轴左侧，a 越大，图象越往下排.

【例 4】 利用指数函数的图象比较 $0.7^{-0.3}$ 与 $0.4^{-0.3}$ 的大小.

[分析] 可在同一坐标系中作出 $y=0.7^x$ 及 $y=0.4^x$ 的图象，从图象中得出结果.

[解] 如图所示，作出 $y=0.7^x$、$y=0.4^x$ 及 $x=-0.3$ 的图象，



易知 $0.7^{-0.3}<0.4^{-0.3}$.

[评注] 图象应记忆准确，在第二象限中靠近 y 轴的函数应是 $y=0.4^x$，而不是 $y=0.7^x$，这一点应注意.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

素养培优提能

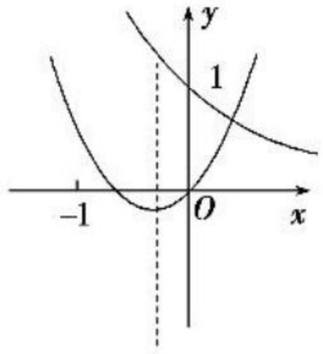
一、选择题

1. 已知 $a=0.86^{0.75}$，$b=0.86^{0.85}$，$c=1.3^{0.86}$，则 a,b,c 的大小关系是　（　）

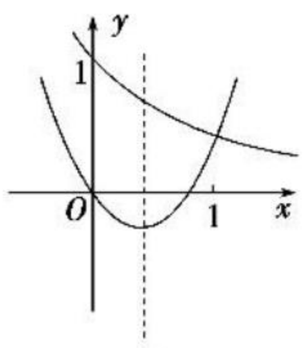
A. $a>b>c$　　B. $b>a>c$

C. $c>b>a$　　D. $c>a>b$

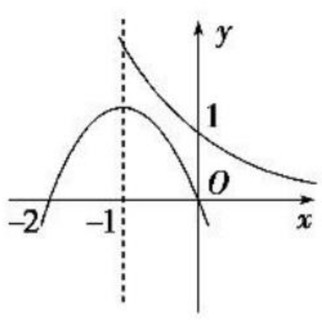
2. 在下列图象中，二次函数 $y=ax^2+bx$ 及指数函数 $y=\left(\frac{b}{a}\right)^x$ 的图象只可能是　（　）



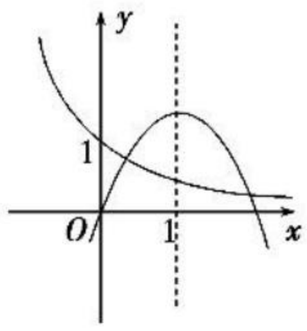
A



B



C



D

3. 定义运算 $*$：$a*b=\begin{cases}a,a\leqslant b,\\b,a>b,\end{cases}$ 如 $1*2=1$，则函数 $f(x)=|2^x*2^{-x}-1|$ 的值域为　（　）

A. $[0,1]$　　B. $[0,1)$

C. $[0,+\infty)$　　D. $[1,+\infty)$

4. 一批设备价值 a 万元，由于使用磨损，每年比上一年价值降低 $b\%$，则 n 年后这批设备的价值为　（　）

A. $na(1-b\%)$ 万元　　B. $a(1-nb\%)$ 万元

C. $a[1-(b\%)^n]$ 万元　　D. $a(1-b\%)^n$ 万元

5. 对于给定的正数 k，定义函数 $f_k(x)=\begin{cases}f(x),f(x)\leqslant k,\\k,f(x)>k.\end{cases}$ 若对于函数 $f(x)=2^{\sqrt{-x^2+x+2}}$ 的定义域内的任意实数 x，恒有 $f_k(x)=f(x)$，则　（　）

A. k 的最大值为 $2\sqrt{2}$　　B. k 的最小值为 $2\sqrt{2}$

C. k 的最大值为 1　　D. k 的最小值为 1

二、填空题

6. 满足 $\left(\frac{1}{4}\right)^{x-3}>16$ 的 x 的取值范围是_____.

7. **(2019·福建师大附中期末)** 设函数 $f(x)=2^x$，对任意的 $x_1,x_2(x_1\neq x_2)$，以下结论正确的是_____(填序号).

①$f(x_1\cdot x_2)=f(x_1)+f(x_2)$；

②$f(x_1+x_2)=f(x_1)\cdot f(x_2)$；

③$f(-x_1)=\frac{1}{f(x_1)}$；

④$\frac{f(x_1)-1}{x_1}<0(x_1\neq 0)$；

⑤$\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}>f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)$.

8. 已知实数 a,b 满足等式 $\left(\frac{1}{2}\right)^a=\left(\frac{1}{3}\right)^b$，给出下列五个关系式：①$0<b<a$；②$a<b<0$；③$0<a<b$；④$b<a<0$；⑤$a=b$. 其中不可能成立的关系式为_____(填序号).

三、解答题

9. 已知 $f(x)=\frac{a}{a^2-1}(a^x-a^{-x})(a>0$ 且 $a\neq 1)$.

(1)判断 $f(x)$ 的奇偶性；

(2)讨论 $f(x)$ 的单调性.

10. 设函数 $f(x)=3^x$，且 $f(a+2)=18$，函数 $g(x)=3^{ax}-4^x$.

(1)求 $g(x)$ 的解析式；

(2)若方程 $g(x)-b=0$ 在 $[-2,2]$ 内有两个不相等的实数根，求实数 b 的取值范围.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

阶段质量评估 4

(时间:45 分钟　满分:100 分)

一、选择题(每小题 5 分,共 30 分)

1. 化简 $a+\sqrt[4]{(1-a)^4}$ 的结果是 (　　)

A. 1　　B. $2a-1$

C. 1 或 $2a-1$　　D. 1 或 0

2. 已知 $a=\left(\frac{3}{5}\right)^{-\frac{1}{3}}$,$b=\left(\frac{3}{5}\right)^{-\frac{1}{2}}$,$c=\left(\frac{4}{3}\right)^{-\frac{1}{2}}$,则 (　　)

A. $c<a<b$　　B. $c<b<a$

C. $a<b<c$　　D. $b<a<c$

3. 若 $0<a<1$,$b>0$,$a^b+a^{-b}=2\sqrt{2}$,则 $a^b-a^{-b}=$ (　　)

A. $-\sqrt{6}$　　B. 2

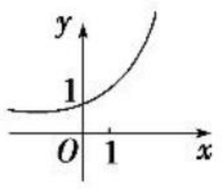
C. -2　　D. 2 或 -2

4. 函数 $f(x)=2ax-1$ 在 $[0,2]$ 上的最大值是 7,则指数函数 $y=a^x$ 在 $[0,2]$ 上的最大值与最小值的和为 (　　)

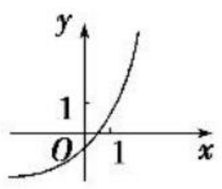
A. 6　　B. 5

C. 3　　D. 4

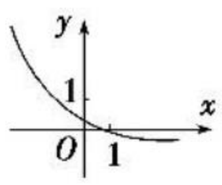
5. 函数 $y=a^x-\frac{1}{a}(a>0,a\neq1)$ 的图象可能是 (　　)



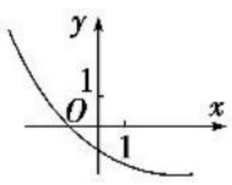
A



B

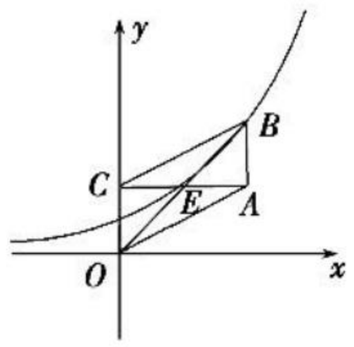


C



D

6. (**2019 · 绵阳高一检测**)如图所示,面积为 8 的平行四边形 $OABC$ 的对角线 AC 与 BO 交于点 E,且 $AC\perp CO$. 若指数函数 $y=a^x(a>0$,且 $a\neq1)$ 的图象经过点 E,B,则 a 等于 (　　)



A. $\sqrt{2}$　　B. $\sqrt{3}$

C. 2　　D. 3

二、填空题(每小题 5 分,共 20 分)

7. 已知函数 $f(x)=(9^x+1)\cdot9^{kx}(k\in\mathbf{R})$ 为偶函数,则实数 k 的值为_____.

8. 已知指数函数 $y=a^x(a>0$ 且 $a\neq1)$ 在区间 $[-1,1]$ 上的最大值比最小值大 1,则实数 a 的值为_____.

9. 计算 $\left(4\frac{1}{2}\right)^0-\left(3\frac{3}{8}\right)^{\frac{1}{3}}\times\left(2\frac{1}{4}\right)^{-\frac{1}{2}}+(0.01)^{-0.5}$ =_____.

10. 对于给定的函数 $f(x)=2^x-2^{-x}$,有下列四个结论,其中正确的是_____(填写正确的序号).

①$f(x)$的图象关于原点对称;②$f(x)$在 **R** 上是增函数;③$f(|x|)$的图象关于 y 轴对称;④$f(|x|)$的最小值为 0.

三、解答题(共 50 分)

11. (12 分)已知函数 $f(x)=\frac{cx-1}{x+1}$(c 为常数),且 $f(1)=0$.

(1)求 c 的值;

(2)证明:函数 $f(x)$ 在 $[0,2]$ 上是单调递增函数;

(3)已知函数 $g(x)=f(e^x)$,判断并证明:函数 $g(x)$ 的奇偶性.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

12.(12 分)已知函数 $f(x)=a-\frac{1}{2^x+1}$.

(1)求证:函数 $f(x)$在 **R** 上为增函数;

(2)当函数 $f(x)$为奇函数时,求 a 的值;

(3)当函数 $f(x)$为奇函数时,求 $f(x)$在$[-1,2]$上的值域.

13.(13 分)一个人喝了少量酒后,血液中酒精含量迅速上升到 0.3 mg/mL,在停止喝酒后,血液中的酒精含量以每小时 50%的速度减少.为了保障交通安全,某地交通规则规定,驾驶员血液酒精含量不得超过 0.08 mg/mL,那么喝了少量酒的驾驶员,至少要过几小时才能驾驶?(精确到 1 小时)

14.(13 分)已知函数 $f(x)=4^x-2\times2^{x+1}-6(x\in[0,3])$.

(1)求函数 $f(x)$的最大值和最小值;

(2)若实数 a 满足 $f(x)-a\geqslant0$ 恒成立,求 a 的取值范围.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

2.2　对数函数

2.2.1　对数与对数运算

第19课时　对　数

掌握几个要点

1. 掌握1组互化关系——指数式与对数式的互化

(1)指数式化为对数式：

将指数式的幂作为真数，指数作为对数，底数不变，写出对数式.

(2)对数式化为指数式：

将对数式的真数作为幂，对数作为指数，底数不变，写出指数式.

2. 明确3个特征——对数恒等式的特征

$$a^{\log_a N}=N$$

(1)指数中含有对数形式.

(2)它们是同底的.

(3)其值为对数的真数.

3. 掌握2个策略——利用指数与对数的互化求变量值的策略

(1)若已知的式子为指数式，则直接利用指数运算求值.

(2)若已知式子为对数式，则先把对数式化为指数式，再求值.

题点知识巩固

知识点一　对数的概念

1. 将对数式 $\log_5 b=2$ 化为指数式是　(　　)

A. $5^b=2$　　B. $b^5=2$

C. $5^2=b$　　D. $b^2=5$

2. 在 $b=\log_{(a-2)}(5-a)$ 中，实数 a 的取值范围是　(　　)

A. $a>5$ 或 $a<2$　　B. $2<a<3$ 或 $3<a<5$

C. $2<a<5$　　D. $3<a<4$

3. 已知 $\log_x 16=2$，则 x 等于　(　　)

A. 4　　B. ± 4

C. 256　　D. 2

4. 将下列指数式化为对数式，对数式化为指数式.

(1)$5^3=125$；

(2)$4^{-2}=\frac{1}{16}$；

(3)$\log_{\frac{1}{5}}125=-3$；

(4)$\log_3\frac{1}{27}=-3$.

知识点二　对数的性质及应用

5. 下列结论正确的是　(　　)

①$\lg(\lg 10)=0$；②$\lg(\ln e)=0$；③若 $10=\lg x$，则 $x=10$；④若 $e=\ln x$，则 $x=e^2$.

A. ①③　　B. ②④

C. ①②　　D. ③④

6. 计算 $\log_3\frac{1}{81}$ 等于　(　　)

A. 4　　B. -4

C. $\frac{1}{4}$　　D. $-\frac{1}{4}$

7. 方程 $\log_3(2x-1)=1$ 的解为 $x=$_____.

8. 若 $\log_3\frac{1-2x}{9}=0$，则 $x=$_____.

知识点三　对数恒等式的应用

9. 求值：(1)$9^{\frac{1}{2}\log_3 4}$；(2)$5^{1+\log_5 2}$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

10. 计算：$2^{3+\log_2 3}+3^{5-\log_3 9}$.

提能达标过关

一、选择题

1. 下列指数式与对数式互化不正确的一组是　　（　　）

A. $e^0=1$ 与 $\ln 1=0$　　B. $8^{-\frac{1}{3}}=\frac{1}{2}$ 与 $\log_8 \frac{1}{2}=-\frac{1}{3}$

C. $\log_3 9=2$ 与 $9^{\frac{1}{2}}=3$　　D. $\log_7 7=1$ 与 $7^1=7$

2. 方程 $2^{\log_3 x}=\frac{1}{4}$ 的解是　　（　　）

A. $x=\frac{1}{9}$　　B. $x=\frac{\sqrt{3}}{3}$

C. $x=\sqrt{3}$　　D. $x=9$

3. 已知 $\log_a x=2$，$\log_b x=1$，$\log_c x=4$（a，b，c，$x>0$ 且 $x\neq 1$），则 $\log_x(abc)=$　　（　　）

A. $\frac{4}{7}$　　B. $\frac{2}{7}$

C. $\frac{7}{2}$　　D. $\frac{7}{4}$

4. 设集合 $A=\{x\mid x>2\}$，若 $m=\ln e^e$（e 为自然对数底），则　　（　　）

A. $\varnothing\in A$　　B. $m\notin A$

C. $m\in A$　　D. $A\subseteq\{x\mid x>m\}$

5. 已知 $a=\log_2 \frac{1}{2}$，$b=1$，$c=\log_2 4$，则　　（　　）

A. $a<b<c$　　B. $b<a<c$

C. $c<a<b$　　D. $c<b<a$

二、填空题

6. 若 $a>0$，$a^2=\frac{4}{9}$，则 $\log_{\frac{2}{3}} a=$_____.

7. 已知 $2^x=3$，$\log_2 \frac{4}{3}=y$，则 $x+y$ 的值等于_____.

8. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}\log_3 x, x>0,\\ 3^x, x\leqslant 0,\end{cases}$ 则 $f\left[f\left(\frac{1}{9}\right)\right]=$_____.

三、解答题

9. 已知二次函数 $f(x)=(\lg a)x^2+2x+4\lg a$ 的最大值为 3，求 a 的值.

10. 已知 $\log_a b=\log_b a$（$a>0$ 且 $a\neq 1$；$b>0$ 且 $b\neq 1$）.

求证：$a=b$ 或 $a=\frac{1}{b}$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

第 20 课时　对数的运算

掌握几个要点

1. 熟记 3 个性质——对数的运算性质

若 $a>0$ 且 $a\neq1$，$M>0$，$N>0$，则有：

(1)$\log_a(M\cdot N)=\log_a M+\log_a N$.

(2)$\log_a\dfrac{M}{N}=\log_a M-\log_a N$.

(3)$\log_a M^n=n\log_a M(n\in\mathbf{R})$.

2. 掌握 2 种变形——对数换底公式的变形

(1)$\log_a b\cdot\log_b a=1$，即$\dfrac{1}{\log_a b}=\log_b a$，此公式表示真数与底数互换，所得的对数值与原对数值互为倒数.

(2)$\log_{N^n}M^m=\dfrac{m}{n}\log_N M$，此公式表示底数变为原来的 n 次方，真数变为原来的 m 次方，所得的对数值等于原来对数值的$\dfrac{m}{n}$倍.

3. 会用 4 个结论——换底公式的常见结论

(1)$\log_a b\cdot\log_b c\cdot\log_c a=1$. (2)$\log_{a^n}b^n=\log_a b$.

(3)$\log_{a^n}b^m=\dfrac{m}{n}\log_a b$. (4)$\log_{\frac{1}{a}}b=-\log_a b$.

题点知识巩固

知识点一　对数的运算性质

1. 若 $a>0$，且 $a\neq1$，$x\in\mathbf{R}$，$y\in\mathbf{R}$，且 $xy>0$，则下列各式不恒成立的是（　　）

①$\log_a x^2=2\log_a x$；②$\log_a x^2=2\log_a|x|$；③$\log_a(xy)=\log_a x+\log_a y$；④$\log_a(xy)=\log_a|x|+\log_a|y|$.

A. ②④　　B. ①③

C. ①④　　D. ②③

2. 计算 $2\log_5 10+\log_5 0.25=$（　　）

A. 0　　B. 1

C. 2　　D. 4

3. 计算 $\lg 8+3\lg 5$ 的值为（　　）

A. -3　　B. -1

C. 1　　D. 3

4. 若 $3^a=2$，则 $2\log_3 6-\log_3 8=$_____.

5. 已知 $\log_a 2=m$，$\log_a 3=n$，则 $\log_a 18=$_____.（用 m，n 表示）

知识点二　换底公式的应用

6. 求值：

(1)$\log_2 25\cdot\log_3\dfrac{1}{16}\cdot\log_5\dfrac{1}{9}$；

(2)$(\log_3 2+\log_9 2)\cdot(\log_4 3+\log_8 3)$；

(3)$\dfrac{\log_5\sqrt{2}\cdot\log_{49}81}{\log_{25}\frac{1}{3}\cdot\log_7\sqrt[3]{4}}$；

(4)$\ln(e\sqrt{e})+\log_2 6+\log_{\frac{1}{2}}3+\log_2 3\cdot\log_3 4$；

(5)$\log_5\sqrt{5}+[\log_7(\sqrt{5}-\sqrt{3})+\log_7(\sqrt{5}+\sqrt{3})]\cdot\log_4 7+9^{\log_9 2}$.

7. 已知 $2^m=3^n=36$，求$\dfrac{1}{m}+\dfrac{1}{n}$的值.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

知识点三　对数的综合应用

8.（**2019·湘潭一模**）设 $a=\log_3 6$，$b=\log_5 20$，则 $\log_2 15=$（　　）

A. $\dfrac{a+b-3}{(a-1)(b-1)}$　　B. $\dfrac{a+b-2}{(a-1)(b-1)}$

C. $\dfrac{a+2b-3}{(a-1)(b-1)}$　　D. $\dfrac{2a+b-3}{(a-1)(b-1)}$

9. 已知 $2^x=3^y=6^z\neq 1$，求证：$\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{z}$.

提能达标过关

一、选择题

1. 已知 $\lg 2=a$，$\lg 3=b$，则 $\log_3 6=$（　　）

A. $\dfrac{a+b}{a}$　　B. $\dfrac{a+b}{b}$

C. $\dfrac{a}{a+b}$　　D. $\dfrac{b}{a+b}$

2. 化简 $\sqrt{(\log_2 3)^2-4\log_2 3+4}+\log_2\dfrac{1}{3}$，得（　　）

A. 2　　B. $2-2\log_2 3$

C. -2　　D. $2\log_2 3-2$

3. 若 $2.5^x=1\,000$，$0.25^y=1\,000$，则 $\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{y}=$（　　）

A. $\dfrac{1}{3}$　　B. 3

C. $-\dfrac{1}{3}$　　D. -3

4. 已知 $2^x=3$，$\log_4\dfrac{8}{3}=y$，则 $x+2y$ 等于（　　）

A. 3　　B. 8

C. 4　　D. $\log_4 8$

5. 若 $\lg a$，$\lg b$ 是方程 $2x^2-4x+1=0$ 的两个根，则 $\left(\lg\dfrac{a}{b}\right)^2$ 的值等于（　　）

A. $\dfrac{1}{2}$　　B. 2

C. $\dfrac{1}{4}$　　D. 4

二、填空题

6. $\left(\dfrac{1}{25}\right)^{-\frac{1}{2}}+(\lg 25)^0+\lg 25+\lg 4=$_____.

7. 若 $\log_a x=2$，$\log_b x=3$，$\log_c x=6$，则 $\log_{(abc)} x=$_____.

8. 汶川里氏 8.0 级特大地震，给人民的生命财产造成了巨大的损失. 里氏地震的等级最早是在 1935 年由美国加州理工学院的地震学家里特判定的. 它与震源中心释放的能量（热能和动能）大小有关. 震级 $M=\dfrac{2}{3}\lg E-3.2$，其中 E（焦耳）为以地震波的形式释放出的能量. 如果里氏 6.0 级地震释放的能量相当于 1 颗美国在二战时投放在广岛的原子弹的能量，那么汶川大地震所释放的能量相当于_____颗广岛原子弹.

三、解答题

9. 计算：(1)$\log_{\sqrt{3}}27+\lg 4+\lg 25$；

(2)$\lg 5(\lg 8+\lg 1\,000)+(\lg 2^{\sqrt{3}})^2+\lg\dfrac{1}{6}+\lg 0.06$.

10. 已知 $\log_3 2=a$，$3^b=7$，用含有 a，b 的式子表示 $\log_{12}56$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

2.2.2　对数函数及其性质

第21课时　对数函数的图象及性质

掌握几个要点

1. 明确1个概念——对数函数的概念

(1)对数的底数:对数的底数 $a>0$ 且 $a\neq1$;

(2)形式上的严格性:对数函数的定义表达式 $y=\log_a x$ 中,$\log_a x$ 前面的系数必须是1,自变量 x 在真数位置上,且次数为1次,系数为1,否则不是对数函数.如 $y=\log_2(3x)$、$y=\log_3\sqrt{x}$ 都不是对数函数.

2. 掌握3组关系——底数 a 与函数图象的关系

(1)底数 a 与1的大小关系决定了对数函数图象的"升降";当 $a>1$ 时,对数函数的图象"上升";当 $0<a<1$ 时,对数函数的图象"下降".

(2)底数的大小决定了图象对应位置的高低:不论是 $a>1$ 还是 $0<a<1$,在第一象限内,自左向右,图象对应的对数函数的底数逐渐变大.

(3)函数 $y=\log_a x$ 与 $y=\log_{\frac{1}{a}}x$($a>0$ 且 $a\neq1$)的图象关于 x 轴对称.

3. 掌握1个定点——对数函数图象过定点问题

求函数 $y=m+\log_a f(x)$($a>0$,且 $a\neq1$)的图象过定点时,只需令 $f(x)=1$ 求出 x,即得定点为 (x,m).

题点知识巩固

知识点一　对数函数的概念

1. 下列函数是对数函数的是　　(　　)

A. $y=\log_a(2x)$　　B. $y=\log_2 2^x$

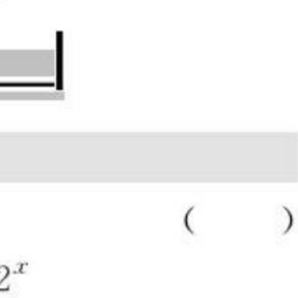
C. $y=\log_2 x+1$　　D. $y=\lg x$

2. 若函数 $y=(a^2-2a-2)\log_{(a+1)}x$ 是以 x 为自变量的对数函数,则实数 $a=$_____.

3. 已知对数函数 $f(x)$ 的图象过点 $P(8,3)$,则 $f\left(\frac{1}{32}\right)=$_____.

知识点二　对数函数的图象及应用

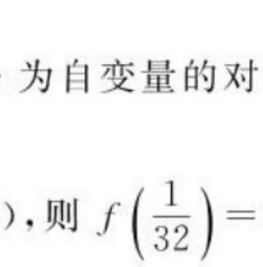
4. 函数 $y=\log_a x$ 的图象如图所示,则实数 a 的可能取值是　　(　　)



A. 5　　B. $\frac{1}{5}$

C. $\frac{1}{e}$　　D. $\frac{1}{2}$

5. 如图,若 C_1,C_2 分别为函数 $y=\log_a x$ 和 $y=\log_b x$ 的图象,则　　(　　)



A. $0<a<b<1$

B. $0<b<a<1$

C. $a>b>1$

D. $b>a>1$

6. 函数 $f(x)=-5\log_a(x-1)+2$($a>0$,$a\neq1$)的图象恒过定点 P,则点 P 的坐标是_____.

7. 已知 $f(x)=\log_3 x$.

(1)作出这个函数的图象;

(2)若 $f(a)<f(2)$,利用图象求 a 的取值范围.

知识点三　与对数函数有关的定义域问题

8. (**2019·衡阳高一检测**)函数 $f(x)=\frac{1}{1-x}+\lg(1+x)$ 的定义域是　　(　　)

A. $(-\infty,-1)$　　B. $(1,+\infty)$

C. $(-1,1)\cup(1,+\infty)$　　D. $(-\infty,+\infty)$

9. 求下列函数的定义域.

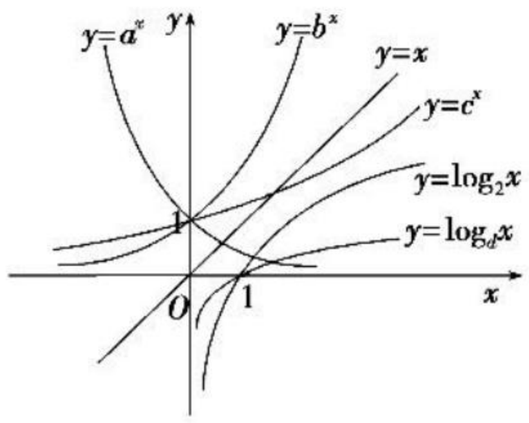
(1)$y=\log_2(x^2-4x-5)$;

(2)$y=\sqrt{\log_{0.5}(4x-3)}$.

提能达标过关

一、选择题

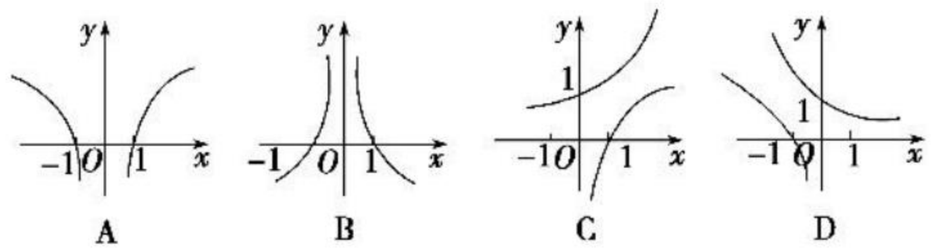
1. 下图中有六个函数的图象,依据图象用"<"表示出以下五个量 a,b,c,d,1 的大小关系,正确的是　　(　　)



A. $a<c<1<b<d$　　B. $a<1<d<c<b$

C. $a<1<c<b<d$　　D. $a<1<c<d<b$

2. 函数 $y=\log_2|x|$ 的图象大致是　　(　　)



关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

3.（**2019·兰州高一检测**）已知函数 $f(x)=\begin{cases}3^x(x\leqslant 0),\\ \log_2 x(x>0),\end{cases}$ 那么 $f\left[f\left(\frac{1}{8}\right)\right]$ 的值为（　　）

A. 27　　B. $\frac{1}{27}$

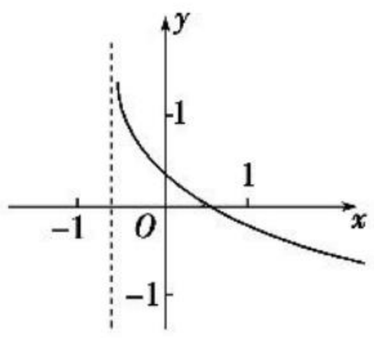
C. -27　　D. $-\frac{1}{27}$

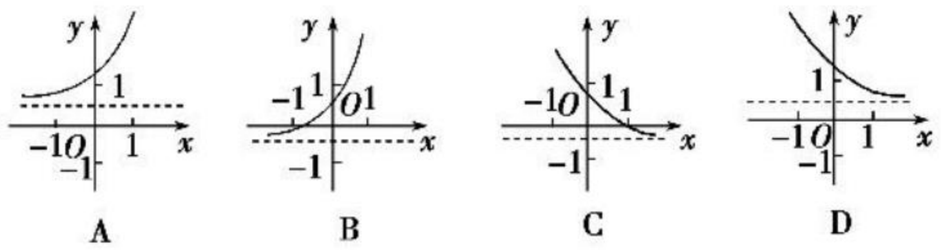
4. 已知函数 $f(x)=\ln x, g(x)=\lg x, h(x)=\log_3 x$，直线 $y=a(a<0)$ 与这三个函数的交点的横坐标分别是 x_1, x_2, x_3，则 x_1, x_2, x_3 的大小关系是（　　）

A. $x_2<x_3<x_1$　　B. $x_1<x_3<x_2$

C. $x_1<x_2<x_3$　　D. $x_3<x_2<x_1$

5.（**2019·唐山高一检测**）若函数 $f(x)=\log_a(x+b)$ 的图象如图，其中 a, b 为常数，则函数 $g(x)=a^x+b$ 的图象大致是（　　）



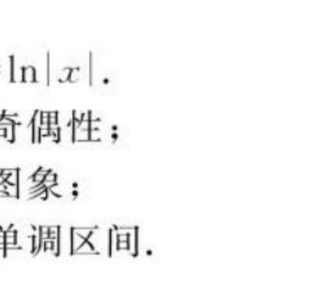


二、填空题

6. 函数 $f(x)=\sqrt{\log_{\frac{1}{2}}(3x-2)}$ 的定义域是_____.

7. 已知函数 $y=\log_a\frac{2x+1}{x-1}$ 的图象恒过定点 P，则点 P 的坐标为_____.

8. 函数 $f(x)=\begin{cases}ax+b(x\leqslant 0),\\ \log_c\left(x+\frac{1}{9}\right)(x>0)\end{cases}$ 的图象如图所示，则 $a+b+c=$_____.



三、解答题

9. 根据函数 $f(x)=\log_2 x$ 的图象和性质解决以下问题：

(1)若 $f(a)>f(2)$，求 a 的取值范围；

(2)求 $y=\log_2(2x-1)$ 在 $[2,14]$ 上的最值.

10. 已知函数 $f(x)=\ln|x|$.

(1)判断 $f(x)$ 的奇偶性；

(2)画出 $f(x)$ 的图象；

(3)写出 $f(x)$ 的单调区间.

第 22 课时　对数函数的性质及应用

掌握几个要点

1. 掌握 1 个步骤——求形如 $y=\log_a f(x)$ 的函数的单调区间的步骤

(1)求出函数的定义域；

(2)研究函数 $t=f(x)$ 和函数 $y=\log_a t$ 在定义域上的单调性；

(3)判断出函数的增减性求出单调区间.

[**注意**]　要注意对底数进行分类讨论.

2. 掌握 3 个应用——对数函数单调性的应用

(1)比较大小

比较两个对数值的大小及解对数不等式问题，其依据是对数函数的单调性. 若对数的底数是字母且范围不明确，一般要分 $a>1$ 和 $0<a<1$ 两类分别求解.

(2)形如 $y=\log_a f(x)$ 的函数的单调性

首先要确保 $f(x)>0$，

当 $a>1$ 时，$y=\log_a f(x)$ 的单调性在 $f(x)>0$ 的前提下与 $y=f(x)$ 的单调性一致.

当 $0<a<1$ 时，$y=\log_a f(x)$ 的单调性在 $f(x)>0$ 的前提下与 $y=f(x)$ 的单调性相反.

(3)求函数 $y=\log_a f(x)$ 的值域

对于形如 $y=\log_a f(x)(a>0$ 且 $a\neq 1)$ 的复合函数的值域的求法的步骤：

①将原函数分解成 $y=\log_a u(a>0$ 且 $a\neq 1), u=f(x)$ 两个函数；

②求函数 $f(x)$ 的定义域；

③求 u 的取值范围；

④利用函数 $y=\log_a u(a>0$ 且 $a\neq 1)$ 的单调性求解.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

题点知识巩固

知识点一　比较两数大小问题

1. 设 $a=\log_3 2, b=\log_5 2, c=\log_2 3$，则　(　　)

A. $a>c>b$　　B. $b>c>a$

C. $c>b>a$　　D. $c>a>b$

2. (**2019·郑州高一检测**)已知 $a=0.9^{3.1}, b=\log_3\pi, c=\log_2 0.7$，则 a,b,c 的大小关系是　(　　)

A. $b<a<c$　　B. $c<b<a$

C. $a<c<b$　　D. $c<a<b$

3. 若 $\log_m 8.1<\log_n 8.1<0$，那么 m,n 满足的条件是(　　)

A. $m>n>1$　　B. $n>m>1$

C. $0<n<m<1$　　D. $0<m<n<1$

知识点二　对数型函数的单调性

4. 函数 $y=\log_2(x^2-2x)$ 的单调增区间是_____.

5. 已知函数 $f(x)=\log_{\frac{1}{2}}(3x^2-ax+5)$ 在 $[-1,+\infty)$ 上是减函数，则实数 a 的取值范围是_____.

知识点三　对数函数性质的综合问题

6. 函数 $f(x)=\lg\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}\right)$ 的奇偶性是　(　　)

A. 奇函数　　B. 偶函数

C. 既是奇函数又是偶函数　　D. 非奇非偶函数

7. 已知函数 $y=f(x+2)$ 的图象关于直线 $x=-2$ 对称，则当 $x\in(0,+\infty)$ 时，$f(x)=|\log_2 x|$，若 $a=f(-3), b=f\left(\frac{1}{4}\right), c=f(2)$，则 a,b,c 的大小关系是　(　　)

A. $a>b>c$　　B. $b>a>c$

C. $c>a>b$　　D. $a>c>b$

8. 已知定义域为 **R** 的偶函数 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上是增函数，且 $f\left(\frac{1}{2}\right)=0$，则不等式 $f(\log_4 x)<0$ 的解集是_____.

9. 已知函数 $f(x)=\lg(x+1), g(x)=\lg(1-x), F(x)=f(x)+g(x)$.

(1)求函数 $F(x)$ 的定义域；

(2)判断函数 $F(x)$ 的奇偶性，并说明理由；

(3)判断函数 $F(x)$ 在区间 $(0,1)$ 上的单调性，并加以证明.

提能达标过关

一、选择题

1. 设 $a=\log_3 6, b=\log_5 10, c=\log_7 14$，则　(　　)

A. $c>b>a$　　B. $b>c>a$

C. $a>c>b$　　D. $a>b>c$

2. 函数 $y=\lg\left(\frac{2}{x+1}-1\right)$ 的图象　(　　)

A. 关于 x 轴对称　　B. 关于 y 轴对称

C. 关于原点对称　　D. 关于直线 $y=x$ 对称

3. 设函数 $f(x)=\begin{cases}2^{1-x}, x\leqslant 1,\\ 1-\log_2 x, x>1,\end{cases}$ 则满足 $f(x)\leqslant 2$ 的 x 的取值范围是　(　　)

A. $[-1,2]$　　B. $[0,2]$

C. $[1,+\infty)$　　D. $[0,+\infty)$

4. 已知函数 $f(x)=|\log_3 x|$，若 $a\neq b$ 时，有 $f(a)=f(b)$，则　(　　)

A. $a<b<1$　　B. $a>b>1$

C. $ab=3$　　D. $ab=1$

5. (**2019·厦门高一检测**)函数 $f(x)=\log_a|x-1|$ 在 $(0,1)$ 上是减函数，那么 $f(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上　(　　)

A. 递增且无最大值　　B. 递减且无最小值

C. 递增且有最大值　　D. 递减且有最小值

二、填空题

6. 函数 $f(x)=\log_a x$ ($a>0$ 且 $a\neq 1$) 在 $[2,3]$ 上的最大值为 1，则 $a=$_____.

7. 若函数 $f(x)=\begin{cases}-x+6, x\leqslant 2,\\ 3+\log_a x, x>2\end{cases}$ ($a>0$ 且 $a\neq 1$) 的值域为 $[4,+\infty)$，则实数 a 的取值范围是_____.

8. 已知函数 $f(x)$ 是定义在 **R** 上的奇函数，当 $x>0$ 时，$f(x)=1-\log_2 x$，则不等式 $f(x)<0$ 的解集为_____.

三、解答题

9. 设函数 $f(x)=\log_2(a^x-b^x)$，且 $f(1)=1, f(2)=\log_2 12$.

(1)求 a,b 的值；

(2)当 $x\in[1,2]$ 时，求 $f(x)$ 的最大值.

10. 已知函数 $f(x)=\log_a(x+1), g(x)=\log_a(4-2x)$ ($a>0$ 且 $a\neq 1$).

(1)求函数 $f(x)-g(x)$ 的定义域；

(2)求使 $f(x)-g(x)>0$ 的 x 的取值范围.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

SY 素养提升 SUYANGTISHENG　核心素养归纳　素养培优提能

核心素养归纳

一、换底公式的证明及其应用

1. 换底公式及证明

换底公式：$\log_b N=\dfrac{\log_a N}{\log_a b}$.

证明：设 $\log_b N=x$，则 $b^x=N$. 两边均取以 a 为底的对数，得 $\log_a b^x=\log_a N$，$\therefore x\log_a b=\log_a N$.

$\therefore x=\dfrac{\log_a N}{\log_a b}$，即 $\log_b N=\dfrac{\log_a N}{\log_a b}$.

2. 换底公式的应用举例

(1)乘积型

【例 1】 (1)计算：$\log_8 9\cdot\log_{27}32$；

(2)求证：$\log_a b\cdot\log_b c\cdot\log_c d=\log_a d$.

［分析］ 先化为以 10 为底的常用对数，通过约分即可解决.

［解］ (1)换为常用对数，得

$$\log_8 9\cdot\log_{27}32=\frac{\lg 9}{\lg 8}\cdot\frac{\lg 32}{\lg 27}$$

$$=\frac{2\lg 3}{3\lg 2}\cdot\frac{5\lg 2}{3\lg 3}=\frac{2}{3}\times\frac{5}{3}=\frac{10}{9}.$$

(2)证明：由换底公式，得

$$\log_a b\cdot\log_b c\cdot\log_c d=\frac{\lg b}{\lg a}\cdot\frac{\lg c}{\lg b}\cdot\frac{\lg d}{\lg c}=\log_a d.$$

［评注］ 此类型题通常换成以 10 为底的常用对数，再通过约分及逆用换底公式，即可解决.

(2)知值求值型

【例 2】 已知 $\log_{12}27=a$，求 $\log_6 16$ 的值.

［分析］ 本题可选择以 3 为底的对数进行求解.

［解］ $\log_{12}27=\dfrac{\log_3 27}{\log_3 12}=\dfrac{3}{2\log_3 2+1}=a$，解得 $\log_3 2=\dfrac{3-a}{2a}$.

故 $\log_6 16=\dfrac{\log_3 16}{\log_3 6}=\dfrac{4\log_3 2}{1+\log_3 2}=\dfrac{4\times\frac{3-a}{2a}}{1+\frac{3-a}{2a}}=\dfrac{4(3-a)}{3+a}$.

［评注］ 这类问题通常要选择适当的底数，结合方程思想加以解决.

(3)综合型

【例 3】 设 $A=\dfrac{1}{\log_5 19}+\dfrac{2}{\log_3 19}+\dfrac{3}{\log_2 19}$，$B=\dfrac{1}{\log_2\pi}+\dfrac{1}{\log_5\pi}$，试比较 A 与 B 的大小.

［分析］ 本题可选择以 19 及 π 为底数进行解题.

［解］ A 换成以 19 为底数，B 换成以 π 为底数，

则有 $A=\log_{19}5+2\log_{19}3+3\log_{19}2=\log_{19}360<2$，

$B=\log_\pi 2+\log_\pi 5=\log_\pi 10>\log_\pi\pi^2=2$. 故 $A<B$.

［评注］ 一般也有倒数关系式成立，即 $\log_a b\cdot\log_b a=1$，$\log_a b=\dfrac{1}{\log_b a}$.

二、巧解指数、对数函数综合题

指数函数 $y=a^x$ 和对数函数 $y=\log_a x$ 互为反函数，它们有共同的底数，且底数起了核心作用，其变化规律是：当 $a>1$ 时，它们在各自的定义域内都是增函数；当 $0<a<1$ 时，它们在各自的定义域内都是减函数，因此在解决指数、对数函数型问题时，以底数为突破口，往往能够快速解题.

1. 共享底数

对数式与指数式互化，其底数一致，即 $\log_a N=b$，$a^b=N$. 利用它可以解决指数、对数方程及互化等问题.

【例 1】 方程 $\log_3(1-2\times3^x)=2x+1$ 的解 $x=$_____.

［解析］ 将对数式化为指数式，得 $3^{2x+1}=1-2\times3^x$，

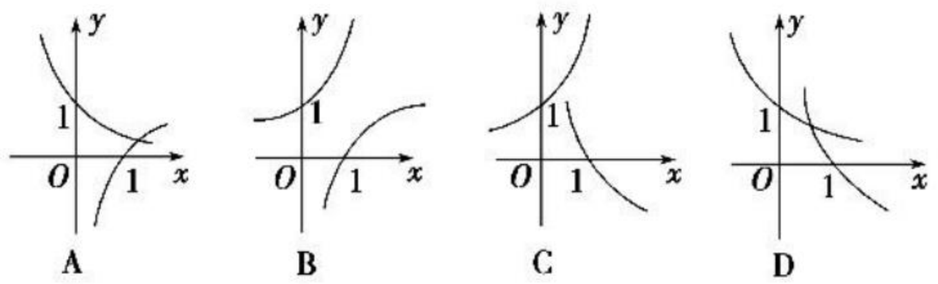
即 $3\times(3^x)^2+2\times3^x-1=0$，得 $3^x=\dfrac{1}{3}$，故 $x=-1$.

［答案］ -1

2. 亮出底数

在有些指数、对数函数问题，特别是图象问题中，只要突出底数作用，即亮出底数，根据函数的单调性，就可解决.

【例 2】 当 $a>1$ 时，在同一坐标系中，能表示函数 $y=a^{-x}$ 与 $y=\log_a x$ 的图象的是　(　　)



A　　B　　C　　D

［解析］ 由 $a>1$ 时，有 $0<\dfrac{1}{a}<1$，则指数函数 $y=a^{-x}=\left(\dfrac{1}{a}\right)^x$ 在 **R** 上是减函数，对数函数 $y=\log_a x$ 在 $(0,+\infty)$ 上是增函数，故排除 B、C、D.

［答案］ A

3. 变换底数

对数或指数运算最怕是不同底，这时可利用换底公式等手段变换底数.

【例 3】 若 $\log_a 2<\log_b 2<0$，则　(　　)

A. $0<a<b<1$　　B. $0<b<a<1$

C. $a>b>1$　　D. $b>a>1$

［解析］ 化为同底，有 $\dfrac{1}{\log_2 a}<\dfrac{1}{\log_2 b}<0$，

从而 $\log_2 b<\log_2 a<0$，即 $\log_2 b<\log_2 a<\log_2 1$.

$\because$ 对数函数 $y=\log_2 x$ 在 $(0,+\infty)$ 上是增函数，

$\therefore 0<b<a<1$.

［答案］ B

4. 讨论底数

当底数不定时，常分 $0<a<1$ 与 $a>1$ 两种情况进行讨论.

【例 4】 函数 $y=a^x$ 在 $[0,1]$ 上的最大值与最小值的差为 5，则 $a=$_____.

［解析］ 由题意知，$a>0$，且 $a\neq1$. ① 当 $a>1$ 时，有 $a^1-a^0=5$，即 $a=6$；② 当 $0<a<1$ 时，有 $a^0-a^1=5$，即 $a=-4$(舍去). 综上知，$a=6$.

［答案］ 6

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

5. 消去底数

有时候指数及对数问题的底数存在,会给解题带来一定的麻烦,我们还可利用转化的思想(如用同底法、换底法等)消去底数,使问题简化.

【例 5】 设 $0<x<1$,$a>0$ 且 $a\neq1$,试比较 $|\log_a(1-x)|$ 与 $|\log_a(1+x)|$ 的大小.

[解] 作商 $\left|\dfrac{\log_a(1-x)}{\log_a(1+x)}\right|=|\log_{(1+x)}(1-x)|$,

$\because 0<x<1$,

$\therefore 0<1-x<1$,$1<1+x<2$,$0<1-x^2<1$,

$\therefore |\log_{(1+x)}(1-x)|=-\log_{(1+x)}(1-x)$

$=\log_{(1+x)}\dfrac{1}{1-x}=\log_{(1+x)}\dfrac{1+x}{1-x^2}>\log_{(1+x)}(1+x)=1$.

$\therefore |\log_a(1-x)|>|\log_a(1+x)|$.

素养培优提能

一、选择题

1. (**2019·菏泽高一检测**)已知 $a=\ln\dfrac{2}{3}$,$b=\left(\dfrac{2}{3}\right)^2$,$c=\log_{\frac{1}{2}}\dfrac{1}{3}$,则 a,b,c 的大小关系是 (　　)

A. $a>b>c$　　B. $b>c>a$

C. $c>a>b$　　D. $c>b>a$

2. $\log_{\frac{1}{2}}(a^2+a+1)$ 与 $\log_{\frac{1}{2}}\dfrac{3}{4}$ 的大小关系为 (　　)

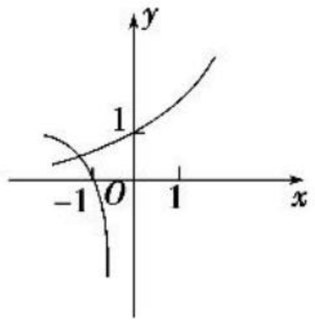
A. $\log_{\frac{1}{2}}(a^2+a+1)\geqslant\log_{\frac{1}{2}}\dfrac{3}{4}$

B. $\log_{\frac{1}{2}}(a^2+a+1)>\log_{\frac{1}{2}}\dfrac{3}{4}$

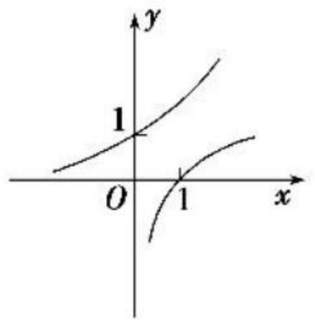
C. $\log_{\frac{1}{2}}(a^2+a+1)\leqslant\log_{\frac{1}{2}}\dfrac{3}{4}$

D. $\log_{\frac{1}{2}}(a^2+a+1)<\log_{\frac{1}{2}}\dfrac{3}{4}$

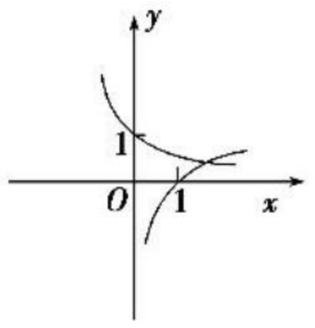
3. 已知 $\lg a+\lg b=0$,则函数 $f(x)=a^x$ 与函数 $g(x)=-\log_b x$ 的图象可能是 (　　)



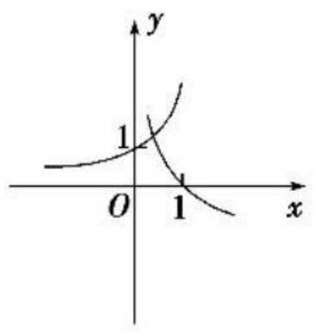
A



B



C



D

4. 若 $f(x)=\begin{cases}(3a-1)x+4a,x<1,\\ \log_a x,x\geqslant1\end{cases}$ 是 **R** 上的减函数,则实数 a 的取值范围是 (　　)

A. $(0,1)$　　B. $\left(0,\dfrac{1}{3}\right)$

C. $\left[\dfrac{1}{7},\dfrac{1}{3}\right)$　　D. $\left[\dfrac{1}{7},1\right)$

5. (**2019·桂林高一检测**)若两个函数的图象经过平移后能够重合,则称这两个函数为"同形函数".给出下列四个函数:$f_1(x)=2\log_2(x+1)$,$f_2(x)=\log_2(x+2)$,$f_3(x)=\log_2 x^2$,$f_4(x)=\log_2(2x)$,则是"同形函数"的是 (　　)

A. $f_2(x)$与 $f_4(x)$　　B. $f_1(x)$与 $f_3(x)$

C. $f_1(x)$与 $f_4(x)$　　D. $f_3(x)$与 $f_4(x)$

二、填空题

6. 函数 $f(x)=\log_{\frac{1}{2}}(-x^2-2x+3)$ 的值域为_____.

7. (**2019·成都高一检测**)函数 $y=\log_a(x+k)(a>0$ 且 $a\neq1)$ 的图象恒过点 $(0,0)$,则函数 $y=\log_{\frac{1}{a}}(x-k)$ 的图象恒过点_____.

8. 已知 $a=2\,016^{-0.2014}$,$b=\log_{2\,014}0.2016$,$c=\log_{0.2016}0.2014$,则 a,b,c 的大小关系是_____(用"$>$"连接).

三、解答题

9. 已知函数 $f(x)=\log_4(ax^2+2x+3)$.

(1)若 $f(1)=1$,求 $f(x)$ 的单调区间.

(2)是否存在实数 a,使 $f(x)$ 的最小值为 0?若存在,求出 a 的值;若不存在,请说明理由.

10. 已知函数 $f(x)=\lg\dfrac{a-x}{1+x}$.

(1)若 $f(x)$ 为奇函数,求 a 的值;

(2)若 $f(x)$ 在 $(-1,5]$ 内有意义,求 a 的取值范围;

(3)在(1)的条件下,若 $f(x)$ 在区间 (m,n) 上的值域为 $(-1,+\infty)$,求区间 (m,n).

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

阶段质量评估 5

（时间：45 分钟　满分：100 分）

一、选择题（每小题 5 分，共 30 分）

1. 设函数 $y=\sqrt{4-x^2}$ 的定义域为 A，函数 $y=\ln(1-x)$ 的定义域为 B，则 $A\cap B=$　　（　　）

A. $(1,2)$　　B. $(1,2]$

C. $(-2,1)$　　D. $[-2,1)$

2. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}-\ln x, x>0,\\ \left(\frac{1}{2}\right)^x, x\leqslant 0,\end{cases}$ 则 $f(1)+f(0)=$（　　）

A. 0　　B. 1

C. 3　　D. e

3. 函数 $f(x)=\log_a(2^x-3)-4$（$a>0$ 且 $a\neq 1$）的图象恒过定点　　（　　）

A. $(1,0)$　　B. $(1,-4)$

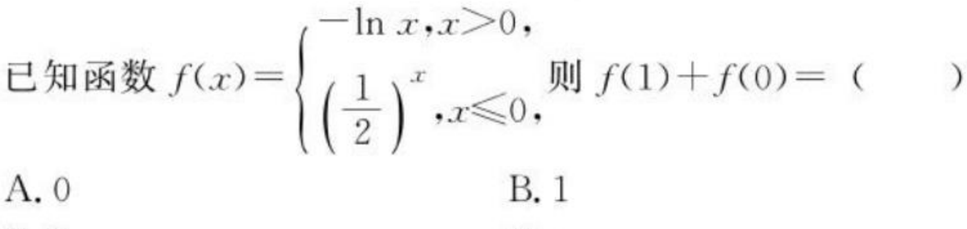
C. $(2,0)$　　D. $(2,-4)$

4. 已知 $x=\log_2 5-\log_2\sqrt{5}$，$y=\log_5 3$，$z=5^{-\frac{1}{2}}$，则下列关系正确的是　　（　　）

A. $z<y<x$　　B. $z<x<y$

C. $x<y<z$　　D. $y<z<x$

5. 若函数 $f(x)=a^{x-k}-1$（$a>0$ 且 $a\neq 1$）过定点 $(2,0)$，且 $f(x)$ 在定义域 $\mathbf{R}$ 上是减函数，则 $g(x)=\log_a(x+k)$ 的图象是　　（　　）



6. 若偶函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,0]$ 上单调递减，$a=f(\log_2 3)$，$b=f(\log_4 5)$，$c=f(2^{\frac{3}{2}})$，则 a,b,c 的大小关系是　　（　　）

A. $a<b<c$　　B. $b<a<c$

C. $c<a<b$　　D. $c<b<a$

二、填空题（每小题 5 分，共 20 分）

7. 若函数 $f(x)=\log_a(3x+m)+n$（$a>0$ 且 $a\neq 1$；$m,n\in\mathbf{R}$）的图象恒过定点 $(3,4)$，则 $m=$_____，$n=$_____.

8. 若函数 $f(x)=\lg(10^x+1)+ax$ 是偶函数，$g(x)=\dfrac{4^x-b}{2^x}$ 是奇函数，则 $a+b=$_____.

9. 已知 $f(x^5)=\lg x$，则 $f(2)=$_____.

10. 设函数 $f(x)=\log_a x$（$a>0$ 且 $a\neq 1$）. 若 $f(x_1\cdot x_2\cdot x_3\cdot\cdots\cdot x_{2\,017})=8$，则 $f(x_1^2)+f(x_2^2)+f(x_3^2)+\cdots+f(x_{2\,017}^2)=$_____.

三、解答题（共 50 分）

11.（12 分）（1）求值：$27^{\frac{2}{3}}-2^{\log_2 3}\times\log_2\frac{1}{8}+2\lg(\sqrt{3+\sqrt{5}}+\sqrt{3-\sqrt{5}})$；

（2）设 $4^a=5^b=m$，且 $\frac{1}{a}+\frac{2}{b}=1$，求 m 的值.

12.（12 分）已知集合 $A=\{x\mid 2\leqslant 2^x\leqslant 32\}$，$B=\{x\mid y=\log_2(3-x)\}$.

（1）求 $A\cap B$；

（2）若 $C=\{x\mid x\geqslant a+1\}$ 且 $(A\cap B)\subseteq C$，求实数 a 的取值范围.

13.（13 分）已知函数 $f(x)=\log_a(1+x)-\log_a(1-x)$（$a>0$ 且 $a\neq 1$）.

（1）若 $a=2$，试讨论 $f(x)$ 的奇偶性与单调性；

（2）若不等式 $f(x)<2$ 的解集为 $\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$，求实数 a 的值.

14.（13 分）已知函数 $f(x)=2+\log_2 x$，$x\in[1,4]$.

（1）求函数 $f(x)$ 的值域；

（2）设 $g(x)=[f(x)]^2-f(x^2)$，求 $g(x)$ 的最值及取得最值时相应的 x 的值.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

2.3　幂函数

第23课时　幂函数

掌握几个要点

1. 明确1个概念——幂函数的概念

判断一个函数是否为幂函数的依据是该函数是否为 $y=x^{\alpha}$(α 为常数)的形式,即函数的解析式为幂的形式,且需满足:

(1)指数为常数;

(2)底数为自变量;

(3)系数为1.

2. 掌握2个原则——解决幂函数图象问题应把握的两个原则

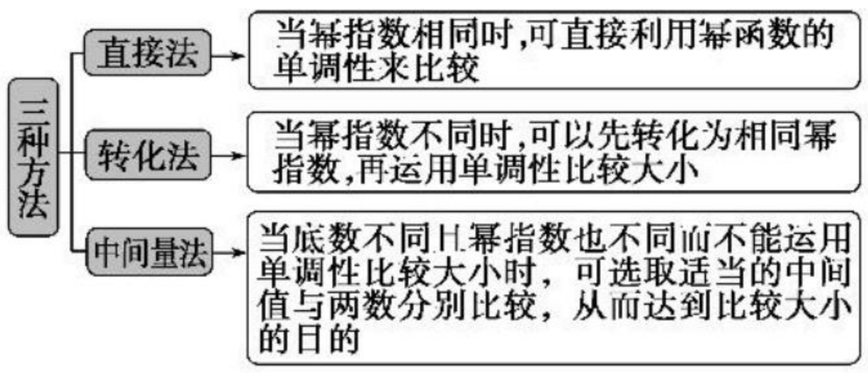
(1)依据图象高低判断幂指数大小,相关结论为:

①在(0,1)上,指数越大,幂函数图象越靠近 x 轴(简记为指大图低);

②在(1,+∞)上,指数越大,幂函数图象越远离 x 轴(简记为指大图高).

(2)依据图象确定幂指数 α 与0,1的大小关系,即根据幂函数在第一象限内的图象(类似于 $y=x^{-1}$ 或 $y=x^{\frac{1}{2}}$ 或 $y=x^3$)来判断.

3. 掌握3种方法——比较幂值大小的三种基本方法



题点知识巩固

知识点一　幂函数的概念

1. 已知点($\sqrt{2}$,2)在幂函数 $y=f(x)$ 的图象上,则该函数的解析式 $f(x)=$ _____.

2. 下列函数:①$y=x^{-1}$;②$y=2^{-x}$;③$y=3x^2$;④$y=x^3+1$;⑤$y=(x+1)^2$;⑥$y=x$.

其中幂函数有 _____.

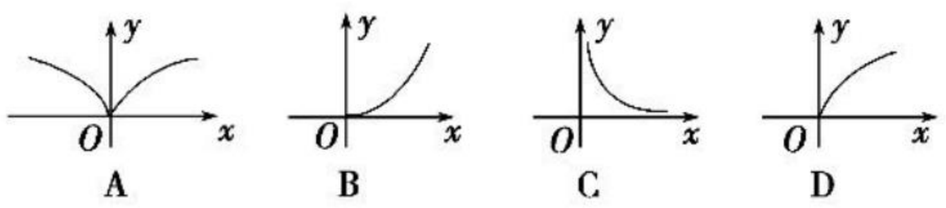
知识点二　幂函数的图象

3. 函数 $f(x)=x^3$ 的图象 (　　)

A. 关于直线 $y=x$ 对称　　B. 关于 x 轴对称

C. 关于原点对称　　D. 关于 y 轴对称

4. 幂函数 $y=f(x)$ 的图象经过点(8,$2\sqrt{2}$),则 $f(x)$ 的图象是 (　　)



5. 已知幂函数 $y=x^{m^2-2}(m\in\mathbf{N})$ 的图象与坐标轴无交点,且关于 y 轴对称,求 m 的值,并画出它的图象.

知识点三　幂函数的性质

6. (**2019·南宁高一检测**)函数 $f(x)=(m^2-m-1)x^m$ 是幂函数,且在 $x\in(0,+\infty)$ 上为增函数,则实数 m 的值是 (　　)

A. −1　　B. 2

C. 3　　D. −1或2

7. 设 $a=2^{0.3}$,$b=3^{0.2}$,$c=7^{0.1}$,则 a,b,c 的大小关系为 (　　)

A. $c<a<b$　　B. $a<c<b$

C. $a<b<c$　　D. $c<b<a$

8. 设 $a=\left(\frac{2}{5}\right)^{\frac{3}{5}}$,$b=\left(\frac{2}{5}\right)^{\frac{2}{5}}$,$c=\left(\frac{3}{5}\right)^{\frac{2}{5}}$,则 a,b,c 的大小关系是 (　　)

A. $a>b>c$　　B. $c>a>b$

C. $a<b<c$　　D. $b>c>a$

9. 已知幂函数 $f(x)=x^{\alpha}$ 的图象过点$\left(2,\frac{1}{2}\right)$,函数 $g(x)=(x-2)f(x)\left(\frac{1}{2}\leqslant x\leqslant 1\right)$,求函数 $g(x)$ 的最大值与最小值.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

提能达标过关

一、选择题

1. 下列命题中正确的是　　(　　)

A. 当 $\alpha=0$ 时，函数 $y=x^{\alpha}$ 的图象是一条直线

B. 幂函数的图象都经过(0,0),(1,1)两点

C. 若幂函数 $y=x^{\alpha}$ 的图象关于原点对称，则 $y=x^{\alpha}$ 在定义域上是增函数

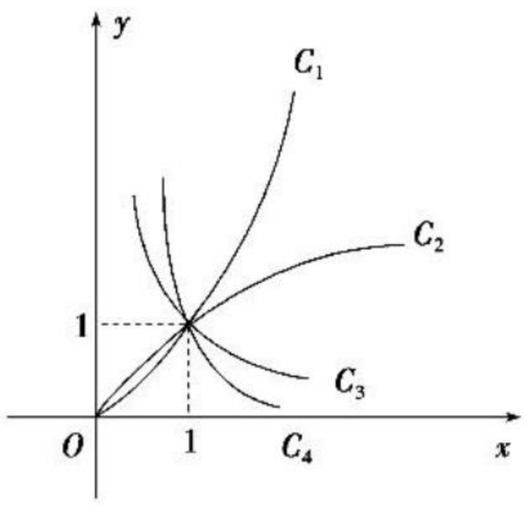
D. 幂函数的图象不可能在第四象限

2. (**2019·张家界高一检测**)已知幂函数 $f(x)=x^{3m-5}(m\in\mathbf{N})$ 在 $(0,+\infty)$ 上是减函数，且 $f(-x)=f(x)$，则 m 可能等于　　(　　)

A. 0　　B. 1

C. 2　　D. 3

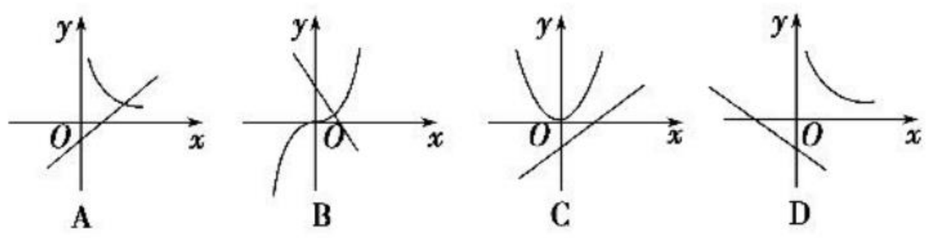
3. 图中曲线是幂函数 $y=x^{n}$ 在第一象限的图象，已知 n 取 $\pm3,\pm\frac{1}{3}$ 四个值，则相应于曲线 C_1,C_2,C_3,C_4 的 n 依次为　　(　　)



A. $-3,-\frac{1}{3},\frac{1}{3},3$　　B. $3,\frac{1}{3},-\frac{1}{3},-3$

C. $-\frac{1}{3},-3,3,\frac{1}{3}$　　D. $3,\frac{1}{3},-3,-\frac{1}{3}$

4. 在同一坐标系内，函数 $y=x^{a}(a\neq0)$ 和 $y=ax-\frac{1}{a}$ 的图象可能是　　(　　)



5. (**2019·大连高一检测**)已知 $a=2^{\frac{4}{3}},b=4^{\frac{2}{5}},c=25^{\frac{1}{3}}$，则(　　)

A. $b<a<c$　　B. $a<b<c$

C. $b<c<a$　　D. $c<a<b$

二、填空题

6. 若幂函数 $y=f(x)$ 的图象过点 $\left(2,\frac{1}{4}\right)$，若实数 m 满足 $f(m)=\frac{1}{2}$，则实数 m 的值为_____.

7. 设函数 $f(x)=\begin{cases}2^{-x}-2,x\leqslant0,\\ x^{\frac{1}{2}},x>0,\end{cases}$ 如果 $f(x_0)>1$，则 x_0 的取值范围是_____.

8. 已知幂函数 $f(x)=x^{-\frac{1}{2}}$，若 $f(a+1)<f(10-2a)$，则 a 的取值范围是_____.

三、解答题

9. 已知幂函数 $f(x)=(-2m^2+m+2)x^{m+1}$ 为偶函数.

(1)求 $f(x)$ 的解析式；

(2)若函数 $y=f(x)-2(a-1)x+1$ 在区间(2,3)上为单调函数，求实数 a 的取值范围.

10. 已知幂函数 $y=f(x)=x^{-2m^2-m+3}$，其中 $m\in\{x|-2<x<2,x\in\mathbf{Z}\}$，满足：

①是区间 $(0,+\infty)$ 上的增函数；

②对任意的 $x\in\mathbf{R}$，都有 $f(-x)+f(x)=0$.

求同时满足①②的幂函数 $f(x)$ 的解析式，并求 $x\in[0,3]$ 时 $f(x)$ 的值域.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

第三章 函数的应用

3.1 函数与方程

3.1.1 方程的根与函数的零点

第24课时 方程的根与函数的零点

掌握几个要点

1. 理解4点说明——对函数零点判断的说明

(1)存在性:“若 $f(a)\cdot f(b)<0$,则在区间(a,b)内方程 $f(x)=0$ 至少有一个实数根”指出方程 $f(x)=0$ 的实数根的存在性.

(2)唯一性:若 $f(a)\cdot f(b)<0$,且 $y=f(x)$在(a,b)内是单调函数,则方程 $f(x)=0$ 在(a,b)内有唯一实数解.

(3)两个条件:①在$[a,b]$上函数图象连续不断;②端点函数值异号即 $f(a)\cdot f(b)<0$,缺一不可.

(4)不可逆性:对函数零点的判断方法,反过来不成立,即$f(x)$在(a,b)内存在零点,不一定有图象连续不断,也不一定有 $f(a)\cdot f(b)<0$.

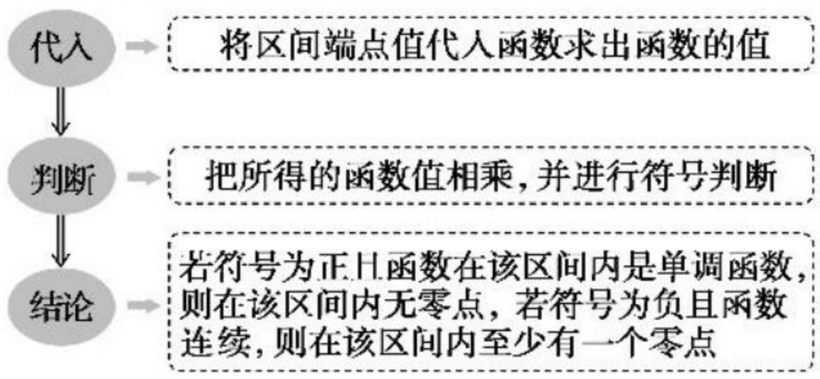
2. 掌握3种方法——判断函数零点个数的方法

(1)方程法:若方程 $f(x)=0$ 的解可求或能判断解的个数,可通过方程的解来判断函数是否存在零点或判定零点的个数.

(2)图象法:由 $f(x)=g(x)-h(x)=0$,得 $g(x)=h(x)$,在同一平面直角坐标系内作出 $y_1=g(x)$和 $y_2=h(x)$的图象,根据两个图象交点的个数来判定函数零点的个数.

(3)定理法:函数 $y=f(x)$的图象在区间$[a,b]$上是一条连续不断的曲线,由 $f(a)\cdot f(b)<0$ 即可判断函数 $y=f(x)$在区间(a,b)内至少有一个零点.若函数 $y=f(x)$在区间(a,b)上是单调函数,则函数 $f(x)$在区间(a,b)内只有一个零点.

3. 掌握3个步骤——判断函数零点所在区间的步骤



题点知识巩固

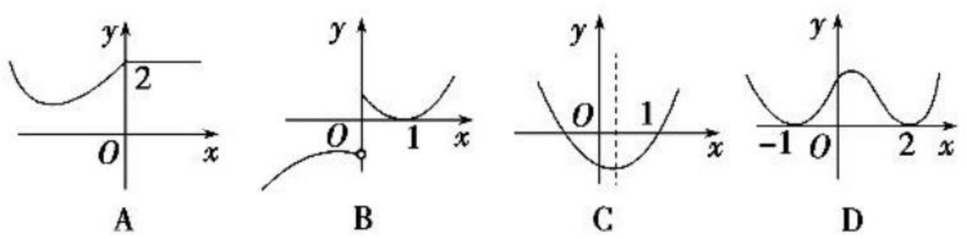
知识点一 函数零点的概念

1. 函数 $y=4x-2$ 的零点是 ( )

A. 2　　B. $(-2,0)$

C. $\left(\frac{1}{2},0\right)$　　D. $\frac{1}{2}$

2. 下列图象表示的函数中没有零点的是 ( )



3. 已知函数 $f(x)=x^2-ax-b$ 的两个零点是2和3,则函数 $g(x)=bx^2-ax-1$ 的零点是_____.

知识点二 判断函数零点所在区间

4. 已知 x_0 是函数 $f(x)=\ln x-\left(\frac{1}{2}\right)^{x-2}$ 的零点,则 x_0 所在的区间是 ( )

A. $(0,1)$　　B. $(1,2)$

C. $(2,3)$　　D. $(3,4)$

5. 方程 $2^x=2-x$ 的根所在区间是 ( )

A. $(-1,0)$　　B. $(2,3)$

C. $(1,2)$　　D. $(0,1)$

知识点三 函数零点个数的判断

6. 方程 $x^3-x-1=0$ 在$[1,1.5]$上实数解有 ( )

A. 3个　　B. 2个

C. 至少一个　　D. 0个

7. 对于函数 $f(x)$,若 $f(-1)\cdot f(3)<0$,则 ( )

A. 方程 $f(x)=0$ 一定有实数解

B. 方程 $f(x)=0$ 一定无实数解

C. 方程 $f(x)=0$ 一定有两实根

D. 方程 $f(x)=0$ 可能无实数解

8. 求函数 $f(x)=\log_2 x-x+2$ 的零点的个数.

知识点四 函数零点的应用

9. (**2019·泰安高一检测**)已知函数 $f(x)=2^x-\frac{2}{x}-a$ 的一个零点在区间$(1,2)$内,则实数 a 的取值范围是_____.

10. 已知函数 $f(x)=x^2-2x-3$,$x\in[-1,4]$.

(1)画出函数 $y=f(x)$的图象,并写出其值域;

(2)当 m 为何值时,函数 $g(x)=f(x)+m$ 在$[-1,4]$上有两个零点?

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

提能达标过关

一、选择题

1. 函数 $f(x)=2x^2-3x+1$ 的零点是　　(　　)

A. $-\frac{1}{2},-1$　　B. $\frac{1}{2},1$

C. $\frac{1}{2},-1$　　D. $-\frac{1}{2},1$

2. 函数 $f(x)=\ln x+x^2+a-1$ 有唯一的零点在区间$(1,e)$内，则实数 a 的取值范围是　　(　　)

A. $(-e^2,0)$　　B. $(-e^2,1)$

C. $(1,e)$　　D. $(1,e^2)$

3. 函数 $f(x)=\frac{9}{x}-\lg x$ 的零点所在的区间是　　(　　)

A. $(8,9)$　　B. $(7,8)$

C. $(9,10)$　　D. $(10,11)$

4. 函数 $f(x)=3^x+x^2-2$ 的零点个数为　　(　　)

A. 0　　B. 1

C. 2　　D. 3

5. 已知函数 $f(x)$ 是奇函数，且满足 $f(2-x)=f(x)(x\in\mathbf{R})$，当 $0<x\leqslant 1$ 时，$f(x)=\sqrt{x}-\frac{1}{2}$，则函数 $f(x)$ 在$(-2,2]$上零点的个数是　　(　　)

A. 5　　B. 6

C. 7　　D. 8

二、填空题

6. (**2019·贵阳高一检测**)方程 $\ln x=8-2x$ 的实数根 $x\in(k,k+1)$，$k\in\mathbf{Z}$，则 $k=$_____.

7. 若函数 $f(x)=|2^x-2|-b$ 有两个零点，则实数 b 的取值范围是_____.

8. (**2019·福州高一检测**)已知函数 $f(x)=\begin{cases}|x|,x\leqslant m,\\ x^2-2mx+4m,x>m,\end{cases}$ 其中 $m>0$. 若存在实数 b，使得关于 x 的方程 $f(x)=b$ 有三个不同的根，则 m 的取值范围是_____.

三、解答题

9. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}(x-2a)(a-x),x\leqslant 1,\\ \sqrt{x}+a-1,x>1.\end{cases}$

(1)若 $a=0$，$x\in[0,4]$，求 $f(x)$ 的值域；

(2)若 $f(x)$ 恰有三个零点，求实数 a 的取值范围.

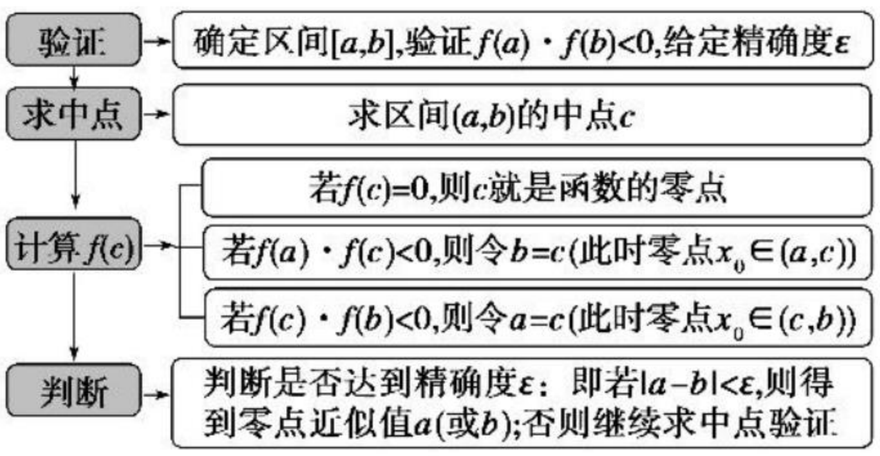
10. 若函数 $f(x)=x^2-2x+a$ 的一个零点在区间$(-2,0)$内，另一个在区间$(1,3)$内，求实数 a 的取值范围.

3.1.2　用二分法求方程的近似解

第 25 课时　用二分法求方程的近似解

掌握几个要点

1. 掌握 1 组步骤——二分法求函数零点近似值的步骤



2. 注意 2 个关键点——用二分法求函数零点的两个关键点

(1)初始区间的选取，符合条件(包括零点)，又要使其长度尽量小.

(2)进行精确度的判断，以决定是停止计算还是继续计算.

题点知识巩固

知识点一　二分法的概念

1. 下面关于二分法的叙述，正确的是　　(　　)

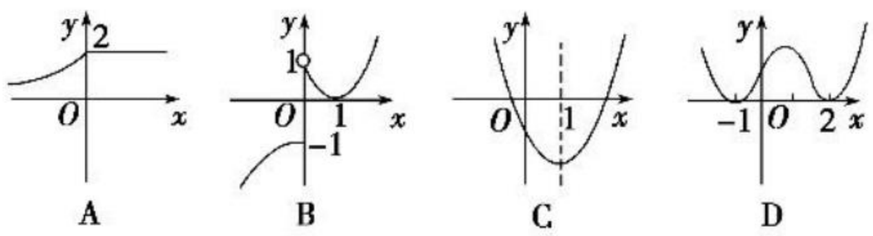
A. 用二分法可以求所有函数零点的近似值

B. 用二分法求方程的近似解时，可以精确到小数点后的任一位

C. 二分法无规律可循

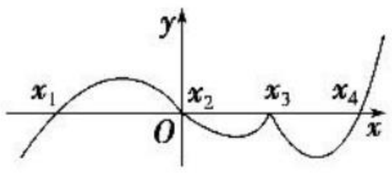
D. 只有在求函数的零点时才用二分法

2. 下列图象表示的函数中能用二分法求零点的是　　(　　)



关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

3. 用二分法求如图所示的函数 $f(x)$ 的零点时，不可能求出的零点是（　　）



A. x_1　　B. x_2

C. x_3　　D. x_4

知识点二　用二分法求函数的零点

4. 若函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续，且同时满足 $f(a)f(b)<0$，$f(a)f\left(\frac{a+b}{2}\right)>0$，则（　　）

A. $f(x)$ 在 $\left[a,\frac{a+b}{2}\right]$ 上有零点

B. $f(x)$ 在 $\left[\frac{a+b}{2},b\right]$ 上有零点

C. $f(x)$ 在 $\left[a,\frac{a+b}{2}\right]$ 上无零点

D. $f(x)$ 在 $\left[\frac{a+b}{2},b\right]$ 上无零点

5. 用二分法求函数 $y=f(x)$ 在区间 $(2,4)$ 上的唯一零点的近似值时，验证 $f(2)\cdot f(4)<0$，取区间 $(2,4)$ 的中点 $x_1=\frac{2+4}{2}=3$，计算得 $f(2)\cdot f(x_1)<0$，则此时零点 x_0 所在的区间是（　　）

A. $(2,4)$　　B. $(2,3)$

C. $(3,4)$　　D. 无法确定

知识点三　用二分法求方程的近似解

6. 用二分法求函数 $f(x)=3^x-x-4$ 的一个零点的近似值，其参考数据如下：

$f(1.600\ 0)=0.200$	$f(1.587\ 5)=0.133$	$f(1.575\ 0)=0.067$
$f(1.562\ 5)=0.003$	$f(1.556\ 2)=-0.029$	$f(1.550\ 0)=-0.060$

据此数据，可得方程 $3^x-x-4=0$ 的一个近似解（精确度 0.01）可取_____.

7. 用二分法求方程 $\ln x+2x-6=0$ 的近似解.（精确度 0.01）

提能达标过关

一、选择题

1. 若函数 $f(x)$ 的唯一零点同时在区间 $(0,15)$，$(0,7)$，$(0,4)$，$(1,3)$ 内，那么下列说法中正确的是（　　）

A. 函数 $f(x)$ 在区间 $(1,2)$ 内有零点

B. 函数 $f(x)$ 在区间 $(1,2)$ 或 $(2,3)$ 内有零点

C. 函数 $f(x)$ 在区间 $[3,15)$ 内无零点

D. 函数 $f(x)$ 在区间 $(2,15)$ 内无零点

2. 函数 $f(x)=ax^2+bx+c$，若 $f(1)>0$，$f(2)<0$，则 $f(x)$ 在 $(1,2)$ 上零点的个数为（　　）

A. 至多有一个　　B. 有一个或两个

C. 有且仅有一个　　D. 一个也没有

3. 若函数 $f(x)=x^3+x^2-2x-2$ 的一个零点（正数）附近的函数值用二分法逐次计算，参考数据如下表：

$f(1)=-2$	$f(1.5)=0.625$
$f(1.25)\approx-0.984$	$f(1.375)\approx-0.260$
$f(1.437\ 5)\approx0.162$	$f(1.406\ 25)\approx-0.054$

那么方程 $x^3+x^2-2x-2=0$ 的一个近似解（精确度 0.04）为（　　）

A. 1.5　　B. 1.25

C. 1.375　　D. 1.437 5

4. 下列函数中，有零点但不能用二分法求零点近似解的是（　　）

A. $y=3x^2-2x+5$　　B. $y=\frac{2}{x}+1$

C. $y=x^3-2x+3$　　D. $y=\frac{1}{2}x^2+4x+8$

5. 已知 $f(x)$ 的一个零点 $x_0\in(2,3)$，用二分法求精确度为 0.01 的 x_0 的近似值时，判断各区间中点的函数值的符号最多需要的次数为（　　）

A. 6　　B. 7

C. 8　　D. 9

二、填空题

6. 某同学在借助计算器求方程 $\lg x=2-x$ 的近似解（精确度为 0.1）时，设 $f(x)=\lg x+x-2$，算得 $f(1)<0$，$f(2)>0$；在以下过程中，他用二分法又取了 4 个 x 的值，计算了其函数值的正负，并得出判断，方程的近似解是 $x=1.8$，那么他再取的 x 的 4 个值依次是_____.

7. 方程 $x^3+2x=21$ 的解的个数为_____，若有解，则将其解按四舍五入精确到个位，得到的近似解为_____.

8. 在 26 枚崭新的金币中，有一枚外表与真金币完全相同的假币（质量小一点），现在只有一台天平，则应用二分法的思想，最多称_____次就可以发现这枚假币.

三、解答题

9. 借助计算器求方程 $2^x+3x=7$ 的近似解（精确度 0.1）.

10. 如果在一个风雨交加的夜里查找线路，从某水库闸门到防洪指挥部的电话线路发生了故障. 这是一条 10 km 长的线路，如何迅速查出故障所在？如果沿着线路一小段一小段查找，困难很多. 每查一个点要爬一次电线杆，10 km 长，大约有 200 多根电线杆. 假如你是维修线路的工人师傅，你应该怎样工作？想一想，维修线路的工人师傅怎样工作最合理？

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

3.2　函数模型及其应用

3.2.1　几类不同增长的函数模型

第 26 课时　几类不同增长的函数模型

掌握几个要点

1. 掌握 4 种函数模型——函数模型及增长特点

(1)线性函数模型:线性函数模型 $y=kx+b(k>0)$ 的增长特点是直线上升,其增长速度不变.

(2)指数函数模型:能用指数型函数 $f(x)=ab^x+c(a,b,c$ 为常数,$a>0,b>1)$ 表达的函数模型,其增长特点是随着自变量 x 的增大,函数值增长的速度越来越快,常称之为“指数爆炸”.

(3)对数函数模型:能用对数型函数 $f(x)=m\log_a x+n$ (m,n,a 为常数,$m>0,x>0,a>1$)表达的函数模型,其增长的特点是开始阶段增长得较快,但随着 x 的逐渐增大,其函数值变化得越来越慢,常称之为“蜗牛式增长”.

(4)幂函数模型:能用幂型函数 $f(x)=ax^\alpha+b(a,b,\alpha$ 为常数,$a\neq0,\alpha>0$ 且 $\alpha\neq1)$ 表达的函数模型,其增长情况由 a 和 α 的取值确定.

2. 理解 3 种增速——三种函数的增长速度比较

(1)在区间 $(0,+\infty)$ 上,函数 $y=a^x(a>1)$,$y=\log_a x(a>1)$ 和 $y=x^n(n>0)$ 都是增函数,但增长速度不同,且不在同一个“档次”上.

(2)随着 x 的增大,$y=a^x(a>1)$ 的增长速度越来越快,会超过并远远大于 $y=x^n(n>0)$ 的增长速度,而 $y=\log_a x$ ($a>1$)的增长速度越来越慢.

(3)存在一个 x_0,当 $x>x_0$,有 $\log_a x<x^n<a^x$.

题点知识巩固

知识点一　选择函数描述变化规律

1. 下列函数中,增长速度最慢的是　(　)

A. $y=e^x$　　B. $y=\ln x$

C. $y=x^{100}$　　D. $y=2^x$

2. 如图,下面的四个容器高度都相同,将水从容器顶部一个小孔中以相同的速度注入其中,注满为止.用下列对应的图象显示该容器中水面的高度 h 和时间 t 之间的关系,其中正确的有　(　)

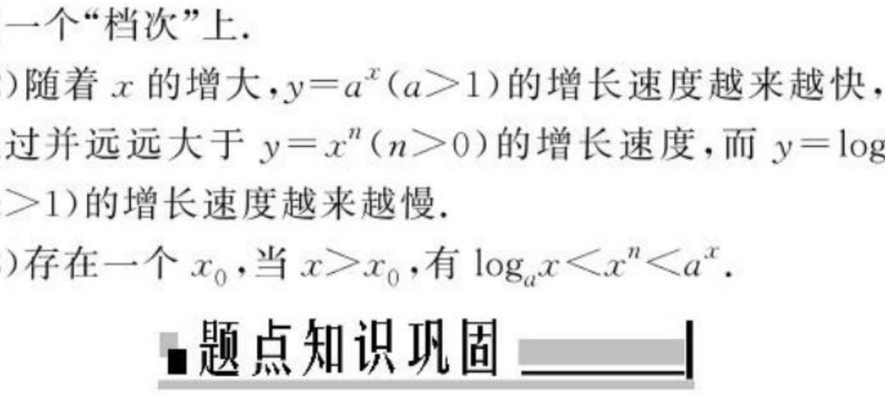


图1　图2　图3　图4

A. 1 个　　B. 2 个

C. 3 个　　D. 4 个

3. 下面对函数 $f(x)=\log_{\frac{1}{2}}x$,$g(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^x$,与 $h(x)=x^{-\frac{1}{2}}$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上的衰减情况说法正确的是　(　)

A. $f(x)$ 衰减速度越来越慢,$g(x)$ 衰减速度越来越快,$h(x)$ 衰减速度越来越慢

B. $f(x)$ 衰减速度越来越快,$g(x)$ 衰减速度越来越慢,$h(x)$ 衰减速度越来越快

C. $f(x)$ 衰减速度越来越慢,$g(x)$ 衰减速度越来越慢,$h(x)$ 衰减速度越来越慢

D. $f(x)$ 衰减速度越来越快,$g(x)$ 衰减速度越来越快,$h(x)$ 衰减速度越来越快

知识点二　指、对、幂三种函数模型比较

4. 有一组试验数据如表所示:

x	2.01	3	4.01	5.1	6.12
y	3	8.01	15	23.8	36.04

则最能体现这组数据关系的函数模型是　(　)

A. $y=2^{x+1}-1$　　B. $y=x^2-1$

C. $y=2\log_2 x$　　D. $y=x^3$

5. 以下是三个变量 y_1,y_2,y_3 随变量 x 变化的数值表:

x	1	2	3	4	5	6	7	8	…
y_1	2	4	8	16	32	64	128	256	…
y_2	1	4	9	16	25	36	49	64	…
y_3	0	1	1.585	2	2.322	2.585	2.807	3	…

其中关于 x 呈指数型函数变化的变量是_____,呈对数型函数变化的变量是_____,呈幂函数型变化的变量是_____.

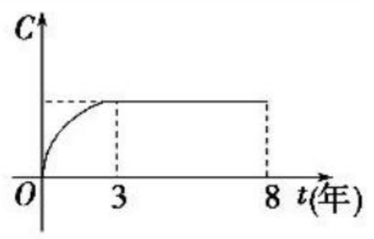
6. 已知函数 $f(x)$ 定义在 $(0,+\infty)$ 上,测得 $f(x)$ 的函数值如下表:

x	1	2	3	4	5	6
$f(x)$	1.00	1.54	1.93	2.21	2.43	2.62

试在函数 $y=\sqrt{x}$,$y=x$,$y=x^2$,$y=2^x-1$,$y=\ln x+1$ 中选择一个函数来描述,则这个函数应该是_____.

知识点三　函数模型增长差异的应用

7. 某工厂 8 年来某种产品的总产量 C 与时间 t(年)的函数关系如图所示.



以下四种说法:

①前三年产量增长的速度越来越快;

②前三年产量增长的速度越来越慢;

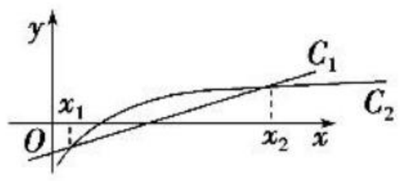
③第三年后这种产品停止生产;

④第三年后产量保持不变.

其中说法正确的序号是_____.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

8. 函数 $f(x)=\lg x, g(x)=0.3x-1$ 的图象如图.



(1)指出曲线 C_1, C_2 分别对应哪一个函数;

(2)比较两函数的增长差异(以两图象交点为分界点,对 $f(x), g(x)$ 的大小进行比较).

提能达标过关

一、选择题

1. 当 x 越来越大时,下列函数中,增长速度最快的应该是(　　)

A. $y=100x$　　B. $y=\log_{100}x$

C. $y=x^{100}$　　D. $y=100^x$

2. 某公司为了适应市场需求对产品结构做了重大调整,调整后初期利润增长迅速,后来增长越来越慢,若要建立恰当的函数模型来反映该公司调整后利润 y 与时间 x 的关系,可选用(　　)

A. 一次函数　　B. 二次函数

C. 指数型函数　　D. 对数型函数

3. 有一组实验数据如下表所示:

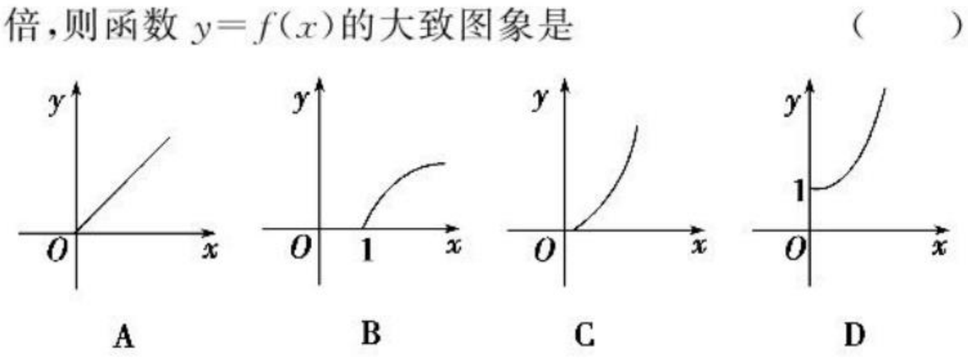
t	1	2	3	4	5
s	1.5	5.9	13.4	24.1	37

下列所给函数模型较适合的是(　　)

A. $y=\log_a x(a>1)$　　B. $y=ax+b(a>1)$

C. $y=ax^2+b(a>0)$　　D. $y=\log_a x+b(a>1)$

4. 某地为加强环境保护,决定使每年的绿地面积比上一年增长 10%,那么从今年起,x 年后绿地面积是今年的 y 倍,则函数 $y=f(x)$ 的大致图象是(　　)



A　　B　　C　　D

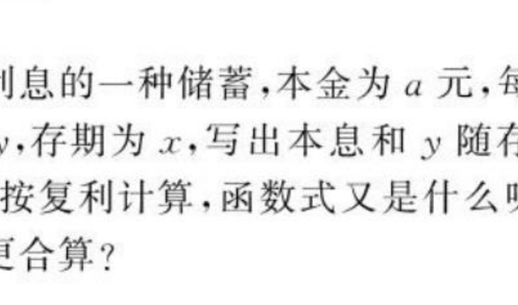
5. 某地区植被被破坏,土地沙化越来越严重,最近三年测得沙漠增加值分别为 0.2 万公顷、0.4 万公顷和 0.76 万公顷,则沙漠增加数 y(万公顷)关于年数 x(年)的函数关系较为近似的是(　　)

A. $y=0.2x$　　B. $y=\frac{1}{10}(x^2+2x)$

C. $y=\frac{2^x}{10}$　　D. $y=0.2+\log_{16}x$

二、填空题

6. 某航空公司规定,乘机所携带行李的重量(kg)与其运费(元)由图中的一次函数图象确定,那么乘客可免费携带行李的最大重量为_____.



7. 衣柜里的樟脑丸随着时间推移会挥发而体积变小,若它的体积 V 随时间 t 的变化规律是 $V=V_0e^{-\frac{1}{10}t}$(e 为自然对数的底数),其中 V_0 为初始值. 若 $V=\frac{V_0}{3}$,则 t 的值约为_____.(结果保留整数,参考数据:$\lg 3\approx0.4771$, $\lg e\approx0.4343$)

8. 某人从 A 地出发,开汽车以 80 千米/小时的速度经 2 小时到达 B 地,在 B 地停留 2 小时,则汽车离开 A 地的距离 y(单位:千米)是时间 t(单位:小时)的函数,该函数的解析式是_____.

三、解答题

9. 按复利计算利息的一种储蓄,本金为 a 元,每期利率为 r,设本息和为 y,存期为 x,写出本息和 y 随存期 x 变化的函数式. 若不按复利计算,函数式又是什么呢? 试比较哪种存款方式更合算?

10. 每年的 3 月 12 日是植树节,全国各地在这一天都会开展各种形式、各种规模的义务植树活动,某市现有树木面积 10 万平方米,计划今后 5 年内扩大树木面积,有两种方案如下:

方案一:每年植树 1 万平方米;

方案二:每年树木面积比上一年增加 9%.

你觉得哪种方案较好.(参考数据:$(1+9\%)^5\approx1.5386$)

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

3.2.2　函数模型的应用实例

第 27 课时　函数模型的应用实例(1)

掌握几个要点

掌握 7 种常用的函数模型

(1)一次函数模型:$y=ax+b(a\neq0)$;

(2)二次函数模型:$y=ax^2+bx+c(a\neq0)$;

(3)反比例函数模型:$y=\dfrac{k}{x+a}+b(k\neq0)$;

(4)指数函数模型:$y=ab^x+c(a\neq0,b>0$ 且 $b\neq1)$;

(5)对数函数模型:$y=m\log_a x+n(m\neq0,a>0$ 且 $a\neq1)$;

(6)幂函数模型:$y=ax^n+b(a\neq0,n\neq1)$;

(7)分段函数模型:这种模型是以上两种或两种以上函数模型的综合,应用也十分广泛.

题点知识巩固

知识点一　一次函数模型

1. 一名顾客计划到商场购物,他有三张优惠券,每张优惠券只能购买一件商品,根据购买商品的标价,三张优惠券的优惠方式不同,具体如下:

优惠券 1:若标价超过 50 元,则付款时减免标价的 10%;

优惠券 2:若标价超过 100 元,则付款时减免 20 元;

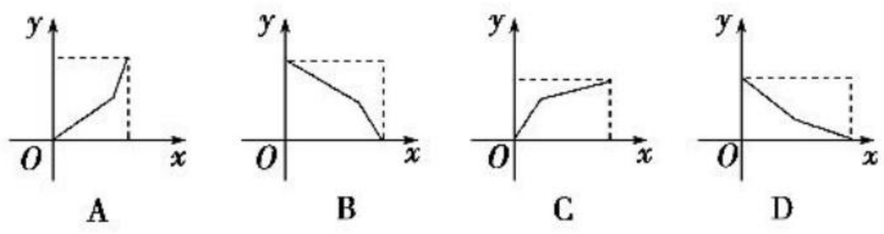
优惠券 3:若标价超过 100 元,则超过 100 元的部分减免 18%.

若顾客购买商品后,使用优惠券 1 比使用优惠券 2、优惠券 3 减免的都多,则他购买的商品的标价可能是 (　　)

A. 170 元　　B. 199 元

C. 219 元　　D. 239 元

2. 某学生离家去学校,为了锻炼身体,一开始跑步前进,跑累了再步行走余下的路程,下图中,纵轴表示离开家的距离,横轴表示出发后的时间,则下列四个图形中较符合该学生走法的是 (　　)



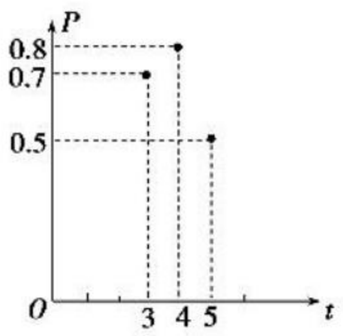
A　　B　　C　　D

知识点二　二次函数模型

3. 若某沙漠地区的某时段气温与时间的函数关系是 $f(t)=-t^2+24t-101(4\leqslant t\leqslant18)$,则该沙漠地区在该时段的最大温差是 (　　)

A. 54　　B. 62　　C. 64　　D. 68

4. 加工爆米花时,爆开且不糊的粒数占加工总粒数的百分比称为“可食用率”,在特定条件下,可食用率 P 与加工时间 t(单位:分钟)满足函数关系 $P=at^2+bt+c$(a,b,c 是常数),如图记录了三次实验数据,根据上述函数模型和实验数据,可得到最佳加工时间为 (　　)



A. 3.50 分钟　　B. 3.75 分钟

C. 4.00 分钟　　D. 4.25 分钟

知识点三　分段函数

5. 某市家庭煤气的使用量 $x(\mathrm{m}^3)$ 和煤气费 $f(x)$(元)满足

$$f(x)=\begin{cases}C,0<x\leqslant A,\\C+B(x-A),x>A.\end{cases}$$

已知某家庭 2019 年前三个月的煤气费如下:

月份	用气量	煤气费
一月份	4 m^3	4 元
二月份	25 m^3	14 元
三月份	35 m^3	19 元

若四月份该家庭使用了 20 m^3 的煤气,则其煤气费为(　　)

A. 11.5 元　　B. 11 元

C. 10.5 元　　D. 10 元

6. 某批发公司批发某商品,每件商品进价 80 元,批发价 120 元,该批发商为鼓励经销商批发,决定当一次批发量超过 100 个时,每多批发一个,批发的全部商品的单价就降低 0.04 元,但最低批发价不能低于 102 元.

(1)当一次订购量为多少个时,每件商品的实际批发价为 102 元?

(2)设一次订购量为 x 个,每件商品的实际批发价为 P 元,写出函数 $P=f(x)$ 的表达式;

(3)根据市场调查发现,经销商一次最大定购量为 500 个,则当经销商一次批发多少个商品时,该批发公司可获得最大利润.

提能达标过关

一、选择题

1. 某公司招聘员工,面试人数按拟录用人数分段计算,计算公式为:

$$y=\begin{cases}4x,1\leqslant x<10,x\in\mathbf{N}^*,\\2x+10,10\leqslant x<100,x\in\mathbf{N}^*,\\1.5x,x\geqslant100,x\in\mathbf{N}^*.\end{cases}$$

其中,x 代表拟录用人数,y 代表面试人数,若应聘的面试人数为 60,则该公司拟录用人数为 (　　)

A. 15　　B. 40

C. 25　　D. 130

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

2. 某单位为鼓励职工节约用水，作出了以下规定：每位职工每月用水不超过 10 立方米的，按每立方米 m 元水费收费；用水超过 10 立方米的，超过部分加倍收费. 某职工某月缴水费 $16m$ 元，则该职工这个月实际用水为　（　）

A. 13 立方米　　B. 14 立方米

C. 18 立方米　　D. 26 立方米

3. 我国为了加强对烟酒生产的宏观管理，除了应征税收外，还征收附加税，已知某种酒每瓶售价为 70 元，不收附加税时，每年大约销售 100 万瓶；若每销售 100 元国家要征附加税 x 元（即税率为 $x\%$），则每年销售量将减少 $10x$ 万瓶，如果要使每年在此项经营中所收取的附加税额不少于 112 万元，则 x 的最小值为　（　）

A. 2　　B. 6

C. 8　　D. 9

4. 某厂日产手套总成本 y（元）与手套日产量 x（副）的函数解析式为 $y=5x+4\ 000$，而手套出厂价格为每副 10 元，则该厂为了不亏本，日产手套至少为　（　）

A. 200 副　　B. 400 副

C. 600 副　　D. 800 副

5. 已知 A、B 两地相距 150 千米，某人开汽车以 60 千米/小时的速度从 A 地到达 B 地，在 B 地停留 1 小时后再以 50 千米/小时的速度返回 A 地，把汽车离开 A 地的距离 x 表示为时间 t（小时）的函数，则 $t=5$ 时，x 的值为　（　）

A. 300　　B. 150

C. -100　　D. 75

二、填空题

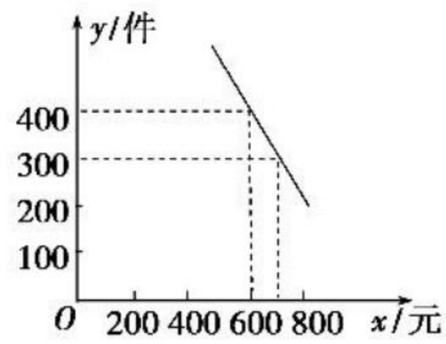
6. （**2019 · 西安高一检测**）拟定从甲地到乙地通话 m min 的电话费 $f(m)=1.06\times(0.50[m]+1)$，其中 $m>0$，$[m]$ 是大于或等于 m 的最小整数（如 $[3]=3$，$[3.7]=4$，$[5.2]=6$），则从甲地到乙地通话时间为 5.5 min 的通话费为_____.

7. 某不法商人将彩电先按原价提高 40%，然后在广告上写上“大酬宾，八折优惠”，结果是每台彩电比原价多赚了 270 元，那么每台彩电原价是_____元.

8. 把长为 12 cm 的细铁丝截成两段，各自围成一个正三角形，则这两个三角形面积之和的最小值为_____.

三、解答题

9. 某公司试销一种成本单价为 500 元的新产品，规定试销时销售单价不低于成本单价，又不高于 800 元. 经试销调查，发现销售量 y（件）与销售单价 x（元）之间的关系可近似看作一次函数 $y=kx+b(k\neq0)$，函数图象如图所示.



（1）根据图象，求一次函数 $y=kx+b(k\neq0)$ 的表达式；

（2）设公司获得的毛利润（毛利润＝销售总价－成本总价）为 S 元. 试问销售单价定为多少时，该公司可获得最大毛利润？最大毛利润是多少？此时的销售量是多少？

10. 某市有甲、乙两家乒乓球俱乐部，两家设备和服务都很好，但收费方式不同. 甲家每张球台每小时 5 元；乙家按月计费，一个月中 30 小时以内（含 30 小时）每张球台 90 元，超过 30 小时的部分每张球台每小时 2 元. 小张准备下个月从这两家中的一家租一张球台开展活动，其活动时间不少于 15 小时，但不能超过 40 小时. 设在甲家租一张球台开展活动 x 小时的收费为 $f(x)(15\leqslant x\leqslant40)$，在乙家租一张球台开展活动 x 小时的收费为 $g(x)(15\leqslant x\leqslant40)$.

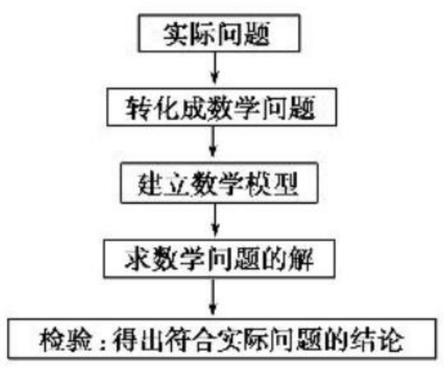
（1）求 $f(x)$ 和 $g(x)$；

（2）问：小张选择哪家比较合算？为什么？

第 28 课时　函数模型的应用实例（2）

掌握几个要点

掌握 1 个过程——应用函数模型解决问题的基本过程



题点知识巩固

知识点一　幂函数模型

1. 建造一个容积为 8 m^3，深为 2 m 的长方体无盖水池，如池底和池壁的造价分别为 120 元/m^2 和 80 元/m^2，则总造价 y 与一底面长 x 的函数关系式为　（　）

A. $y=320\left(x+\frac{4}{x}\right)$　　B. $y=320\left(x+\frac{4}{x}\right)+480$

C. $y=160\left(x+\frac{4}{x}\right)$　　D. $y=160\left(x+\frac{4}{x}\right)+240$

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

知识点二　指数函数模型

2. 某品牌汽车的月产量 y(万辆)与月份 x($3<x\leqslant 12$ 且 $x\in$ **N**)满足关系式 $y=a\left(\frac{1}{2}\right)^{x-3}+b$(其中 a,b 为常数),现已知该品牌汽车今年 4 月,5 月的产量分别是 1 万辆和 1.5 万辆,则该品牌汽车 7 月的产量为_____万辆.

3. 某种病毒经 30 分钟繁殖为原来的 2 倍,且知病毒的繁殖规律是 $y=e^{kt}$(其中 k 为常数,t 表示时间,单位:小时,y 表示病毒个数),则 $k=$_____,经过 5 小时,1 个病毒能繁殖为_____个.

知识点三　对数函数模型

4. 某种动物的繁殖数量 y(单位:只)与时间 x(单位:年)的关系式为 $y=a\log_2(x+1)$,若这种动物第一年有 100 只,则到第 7 年它们发展到　(　　)

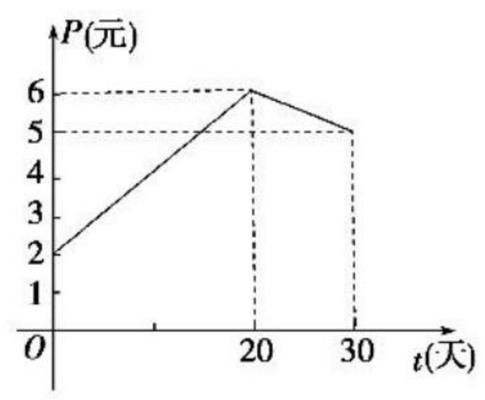
A. 300 只　　B. 400 只

C. 500 只　　D. 600 只

5. 近年来青海玉树多次发生地震,给当地居民带来了不少灾难,其中 2010 年 4 月 1 日的 7.1 级地震和 2016 年 10 月 17 日的 6.2 级地震带来的灾难较大,早在 20 世纪 30 年代,美国加州理工学院的地震物理学家家里克特就制定了我们常说的里氏震级 M,其计算公式为 $M=\lg A-\lg A_0$(其中 A 是被测地震的最大振幅,A_0 是"标准地震"的振幅),那么 7.1 级地震的最大振幅是 6.2 级地震的最大振幅的_____倍.

知识点四　构建函数模型解应用题

6. 某上市股票在 30 天内每股的交易价格 P(元)与时间 t(天)组成有序数对(t,P),如图,点(t,P)落在图中的两条线段上;该股票在 30 天内的日交易量 Q(万股)与时间 t(天)的部分数据如下表所示:



第 t 天	4	10	16	22
Q(万股)	36	30	24	18

(1)根据提供的图象,写出该种股票每股交易价格 P(元)与时间 t(天)所满足的函数关系式;

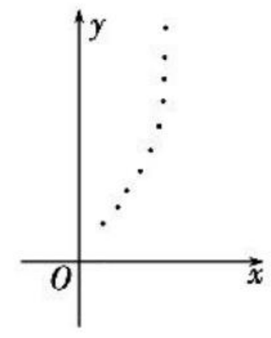
(2)根据表中数据确定日交易量 Q(万股)与时间 t(天)的一次函数关系式;

(3)用 y 表示该股票日交易额(万元),写出 y 关于 t 的函数关系式,并求在这 30 天中第几天日交易额最大,最大值是多少?

提能达标过关

一、选择题

1. 如图是某变量所对应的散点图,采用哪一种拟合函数较好　(　　)



A. 一次函数模型

B. 指数函数模型

C. 对数函数模型

D. 幂函数模型

2. 某物体一天中的温度 T 是时间 t 的函数,$T(t)=t^3-3t+60$,时间单位是小时,温度单位是℃,当 $t=0$ 时表示中午 12:00,其后 t 取正值,则上午 8:00 时的温度是　(　　)

A. 8 ℃　　B. 18 ℃

C. 58 ℃　　D. 112 ℃

3. 某品牌的笔记本电脑成本不断降低,若每隔 4 年价格就降低$\frac{1}{3}$,则现在价格为 8 100 元的笔记本电脑,12 年后的价格可降为　(　　)

A. 2 400 元　　B. 900 元

C. 300 元　　D. 3 600 元

4. 某林场计划第一年造林 10 000 亩,以后每年比前一年多造林 20%,则第四年造林　(　　)

A. 14 400 亩　　B. 17 280 亩

C. 20 736 亩　　D. 172 800 亩

5. 根据统计,一名工人组装第 x 件某产品所用的时间(单位:分钟)为 $f(x)=\begin{cases}\frac{c}{\sqrt{x}},x<A,\\ \frac{c}{\sqrt{A}},x\geqslant A\end{cases}$($A,c$ 为常数).已知工人组装第 4 件产品用时 30 min,组装第 A 件产品用时 15 min,那么 c 和 A 的值分别是　(　　)

A. 75,25　　B. 75,16

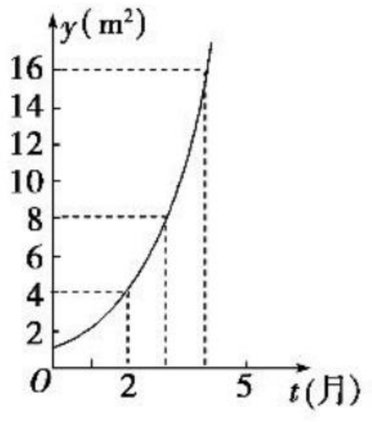
C. 60,25　　D. 60,16

二、填空题

6. 研究人员发现某种物质的温度 y(单位:摄氏度)随时间 x(单位:分钟)的变化规律是:$y=2\times 2^x+2^{1-x}(x\geqslant 0)$经过_____分钟,该物质温度为 5 摄氏度.

7. 某化工厂生产一种溶液,按市场要求杂质含量不超过 0.1%,若初始时含杂质 2%,每过滤一次可使杂质含量减少$\frac{1}{3}$,至少应过滤_____次才能达到市场要求.(已知 $\lg 2\approx 0.301\,0$,$\lg 3\approx 0.477\,1$)

8. 如图所示,某池塘中浮萍蔓延的面积 $y(m^2)$与时间 t(月)的关系为 $y=a^t$,有以下几种说法:



①这个指数函数的底数为 2;

②第 5 个月时,浮萍面积就会超过 30 m^2;

③浮萍从 4 m^2 蔓延到 12 m^2 需要经过 1.5 个月;

④浮萍每月增加的面积都相等.

其中正确的命题序号是_____.

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

三、解答题

9. 候鸟每年都要随季节的变化而进行大规模的迁徙，研究某种鸟类的专家发现，该种鸟类的飞行速度 v（单位：m/s）与其耗氧量 Q 之间的关系为 $v=a+b\log_3\frac{Q}{10}$（其中 a，b 是常数），据统计，该种鸟类在静止时其耗氧量为 30 个单位，而其耗氧量为 90 个单位时其飞行速度为 1 m/s.
(1)求出 a，b 的值；
(2)若这种鸟类为了赶路程，飞行速度不能低于 2 m/s，则其耗氧量至少要多少个单位？

10. 某公司制定了一个激励销售人员的奖励方案：当销售利润不超过 10 万元时，按销售利润的 15%进行奖励；当销售利润超过 10 万元时，若超出 A 万元，则超出部分按 $2\log_5(A+1)$ 进行奖励. 记奖金为 y（单位：万元），销售利润为 x（单位：万元）.
(1)写出该公司激励销售人员的奖励方案的函数模型；
(2)如果业务员小王获得了 3.5 万元的奖金，那么他的销售利润是多少万元？

阶段质量评估 6

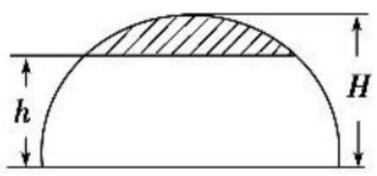
（时间：45 分钟　满分：100 分）

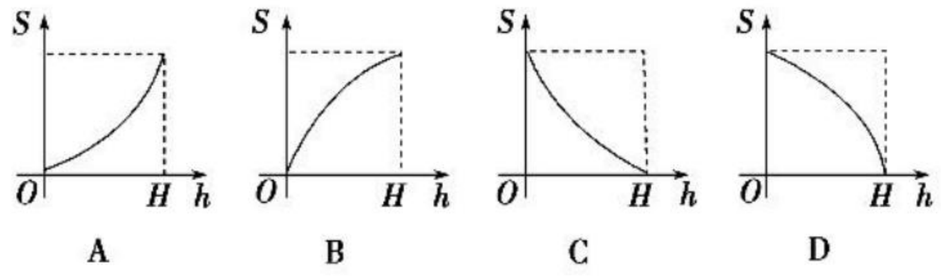
一、选择题（每小题 5 分，共 30 分）

1. 函数 $f(x)=\ln(x+1)-\frac{2}{x}$ 的零点所在的区间是　（　　）

A. $\left(\frac{1}{2},1\right)$　　B. $(1,e-1)$
C. $(e-1,2)$　　D. $(2,e)$

2. 如图所示，阴影部分的面积 S 是 h 的函数（$0\leqslant h\leqslant H$），则该函数的图象可能是　（　　）





A　　B　　C　　D

3. 若函数 $f(x)=x^3+x^2-2x-2$ 的一个正数零点附近的函数值用二分法计算，其参考数据如下：

$f(1)=-2$	$f(1.5)=0.625$	$f(1.25)=-0.984$
$f(1.375)=-0.260$	$f(1.437\ 5)=0.162$	$f(1.406\ 25)=-0.054$

那么方程 $x^3+x^2-2x-2=0$ 的一个近似根（精确到 0.1）为　（　　）

A. 1.2　　B. 1.3
C. 1.4　　D. 1.5

4. 小明在调查某班小学生每月的人均零花钱时，得到了下列一组数据：

t（月份）	2	3	4	5	6	…
y（元）	1.40	2.56	5.31	11	21.30	…

现用下列函数模型中的一个近似地模拟这些数据的规律，其中最接近的一个是　（　　）

A. $y=t^{\frac{1}{2}}$　　B. $y=\log_2 t$
C. $y=\frac{1}{3}\cdot 2^t$　　D. $y=\frac{1}{2}t^2$

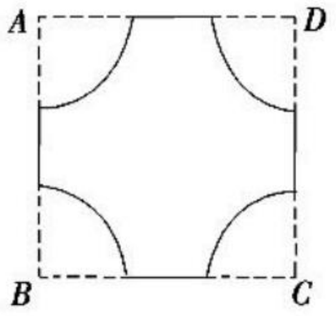
5. 西南大旱，为了保护水资源，提倡节约用水，某城市对居民生活用水，实行“阶梯水价”. 计算方法如下表：

每户每月用水量	水价
不超过 12 m^3 的部分	3 元/m^3
超过 12 m^3 但不超过 18 m^3 的部分	6 元/m^3
超过 18 m^3 的部分	9 元/m^3

若某户居民本月交纳的水费为 48 元，则此户居民本月用水量　（　　）

A. 比 12 m^3 少
B. 比 12 m^3 多，但不超过 18 m^3
C. 比 18 m^3 多
D. 恰为 12 m^3

6. 一位设计师在边长为 3 的正方形 $ABCD$ 中设计图案，他分别以 A，B，C，D 为圆心，$b\left(0<b\leqslant\frac{3}{2}\right)$ 为半径画圆，由正方形内的圆弧与正方形边上的线段构成了丰富多彩的图形，如图所示，则这些图形中实线部分总长度的最小值为　（　　）



A. π　　B. 2π
C. 3π　　D. 4π

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

二、填空题(每小题 5 分,共 20 分)

7. 设函数 $f(x)=\begin{cases}2x-2,x\in[1,+\infty),\\x^2,x\in(-8,1),\end{cases}$ 则 $y=f(x)-\frac{1}{4}$ 的零点为_____.

8. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}|x|,x>0,\\-x^2-2x+1,x\leqslant 0,\end{cases}$ 若函数 $g(x)=f(x)+2m$ 有三个零点,则实数 m 的取值范围是_____.

9. 要制作一个容积为 8 m^3,高为 2 m 的无盖长方体容器,若容器的底面造价是 200 元/m^2,侧面造价是 100 元/m^2,则该容器的最低总造价为_____.

10. 若函数 $f(x)=a^x-x-a(a>0$,且 $a\neq 1)$ 有两个零点,则实数 a 的取值范围是_____.

三、解答题(共 50 分)

11. (12 分)已知 a 是实数,函数 $f(x)=-x^2+ax-3$ 在区间(0,1)与(2,4)上各有一个零点,求 a 的取值范围.

12. (12 分)光线通过一块玻璃,其强度要损失 10%,把几块这样的玻璃重叠起来,设光线原来的强度为 a,通过 x 块玻璃后强度为 y.

(1)写出 y 关于 x 的函数关系式;

(2)通过多少块玻璃后,光线强度减弱到原来的 $\frac{1}{3}$ 以下?

($\lg 3\approx 0.477\ 1$)

13. (12 分)某地区西红柿从 2 月 1 日起开始上市,通过市场调查,得到西红柿的种植成本 Q(单位:元/100 kg)与上市时间 t(距 2 月 1 日的天数,单位:天)的数据如下表:

时间 t	50	110	250
成本 Q	150	108	150

(1)根据上表数据,从下列函数中选取一个函数描述西红柿的种植成本 Q 与上市时间 t 的变化关系,$Q=at+b$,$Q=at^2+bt+c$,$Q=a\cdot b^t$,$Q=a\cdot\log_b t$(简单说明理由),并求出你所选函数的表达式;

(2)利用你选取的函数,求西红柿种植成本最低时的上市天数及最低种植成本.

14. (13 分)我国是水资源比较贫乏的国家之一,各地采用价格调控等手段以达到节约用水的目的.某市用水收费标准是:水费=基本费+超额费+定额损耗费,且有如下三条规定:

①若每月用水量不超过最低限量 m 立方米时,只付基本费 9 元和每户每月定额损耗费 a 元;

②若每月用水量超过 m 立方米时,除了付基本费和定额损耗费外,超过部分每立方米付 n 元的超额费;

③每户每月的定额损耗费 a 不超过 5 元.

(1)求每户每月水费 y(元)与月用水量 x(立方米)的函数关系式;

(2)该市一家庭今年第一季度每月的用水量和支付的费用如下表所示:

月份	用水量(立方米)	水费(元)
一	4	17
二	5	23
三	2.5	11

试分析该家庭今年一、二、三各月份的用水量是否超过最低限量,并求 m,n,a 的值.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

阶段质量测试卷(一)

第一章 集合与函数概念

(时间:120 分钟 满分:150 分)

一、选择题(本大题共 12 小题,每小题 5 分,共 60 分. 在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的)

1. 已知全集 $U=\{0,1,2,3,4\}$,$M=\{0,1,2\}$,$N=\{2,3\}$,则$(\complement_U M)\cap N=$ (　　)

A. $\{2,3,4\}$　　B. $\{3\}$

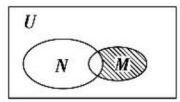
C. $\{2\}$　　D. $\{0,1,2,3,4\}$

2. 设全集 $U=\mathbf{R}$,集合 $M=\{y\mid y=x^2+2,x\in U\}$,集合 $N=\{y\mid y=3x,x\in U\}$,则 $M\cap N$ 等于 (　　)

A. $\{1,3,2,6\}$　　B. $\{(1,3),(2,6)\}$

C. M　　D. $\{3,6\}$

3. 已知全集 $U=\mathbf{R}$,集合 $M=\{x\in\mathbf{Z}\mid -1\leqslant x-1\leqslant 2\}$ 和 $N=\{x\mid x=2k+1,k\in\mathbf{N}^*\}$ 的关系的韦恩(Venn)图如图所示,则阴影部分所表示的集合的元素共有 (　　)



A. 2 个　　B. 3 个

C. 4 个　　D. 无穷多个

4. 下列四组函数中,表示相等函数的一组是 (　　)

A. $f(x)=\sqrt{x^2}$,$g(x)=(\sqrt{x})^2$　　B. $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x-1}$,$g(x)=x+1$

C. $f(x)=|x|$,$g(x)=\sqrt{x^2}$　　D. $f(x)=\sqrt{x+1}\sqrt{x-1}$,$g(x)=\sqrt{x^2-1}$

5. 已知 $f\left(\dfrac{1-x}{1+x}\right)=x$,则 (　　)

A. $f(x)=\dfrac{x+1}{x-1}$　　B. $f(x)=\dfrac{1-x}{1+x}$

C. $f(x)=\dfrac{1+x}{1-x}$　　D. $f(x)=\dfrac{2x}{x+1}$

6. 函数 $f(x)=\dfrac{1+x}{2+x}(x>0)$的值域是 (　　)

A. $(-\infty,1)$　　B. $(1,+\infty)$

C. $\left(\dfrac{1}{2},1\right)$　　D. $\left(0,\dfrac{1}{2}\right)$

7. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}1,x>0,\\0,x=0,\\-1,x<0,\end{cases}$ 设 $F(x)=x^2f(x)$,则对$F(x)$描述正确的是 (　　)

A. 是奇函数,在$(-\infty,+\infty)$上递减　　B. 是奇函数,在$(-\infty,+\infty)$上递增

C. 是偶函数,在$(-\infty,0)$上递减,在$(0,+\infty)$上递增　　D. 是偶函数,在$(-\infty,0)$上递增,在$(0,+\infty)$上递减

8. 二次函数 $f(x)=ax^2+2a$ 是区间$[-a,a^2]$上的偶函数,又 $g(x)=f(x-1)$,则 $g(0)$,$g\left(\dfrac{3}{2}\right)$,$g(3)$的大小关系为 (　　)

A. $g\left(\dfrac{3}{2}\right)<g(0)<g(3)$　　B. $g(0)<g\left(\dfrac{3}{2}\right)<g(3)$

C. $g\left(\dfrac{3}{2}\right)<g(3)<g(0)$　　D. $g(3)<g\left(\dfrac{3}{2}\right)<g(0)$

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

9. 已知函数 $f(x)$是定义在 **R** 上的奇函数，给出下列四个结论：

①$f(0)=0$；

②若 $f(x)$在$[0,+\infty)$上有最小值-1，则 $f(x)$在$(-\infty,0]$上有最大值 1；

③若 $f(x)$在$[1,+\infty)$上为增函数，则 $f(x)$在$(-\infty,-1]$上为减函数；

④若 $x>0$ 时，$f(x)=x^2-2x$，则 $x<0$ 时，$f(x)=-x^2-2x$.

其中正确结论的个数为 （　　）

A. 1　　B. 2

C. 3　　D. 4

10. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}-x-1(-1\leqslant x<0),\\-x+1(0<x\leqslant 1).\end{cases}$则 $f(x)-f(-x)>-1$ 的解集为 （　　）

A. $(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$　　B. $\left[-1,-\frac{1}{2}\right)\cup(0,1]$

C. $(-\infty,0)\cup(1,+\infty)$　　D. $\left[-1,-\frac{1}{2}\right]\cup(0,1)$

11. 某学校要召开学生代表大会，规定各班每 10 人推选一名代表，当各班人数除以 10 的余数大于 6 时再增选一名代表. 那么，各班可推选代表人数 y 与该班人数 x 之间的函数关系用取整函数 $y=[x]$（$[x]$表示不大于 x 的最大整数）可以表示为 （　　）

A. $y=\left[\frac{x}{10}\right]$　　B. $y=\left[\frac{x+3}{10}\right]$

C. $y=\left[\frac{x+4}{10}\right]$　　D. $y=\left[\frac{x+5}{10}\right]$

12. （**2019·广东东莞东华中学高一期中**）若定义在 **R** 上的函数 $f(x)$满足：对任意 $x_1,x_2\in\mathbf{R}$，有 $f(x_1+x_2)=f(x_1)+f(x_2)+a$（$a$ 为非零常数），则下列说法一定正确的是 （　　）

A. $f(x)$为偶函数　　B. $f(x)$为奇函数

C. $f(x)+a$ 为偶函数　　D. $f(x)+a$ 为奇函数

二、填空题（本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分，把答案填在题中横线上）

13. 若函数 $f(x)=\frac{1}{x-1}+\sqrt{2x+3}$，则 $f(x)$的定义域是_____.

14. 已知 $f(x)$为奇函数，$g(x)=f(x)+9$，$g(-2)=3$，则$f(2)=$_____.

15. 函数 $f(x)=\begin{cases}x,x\leqslant -2,\\x+1,-2<x<4,\\3x,x\geqslant 4.\end{cases}$若 $f(a)<-3$，则 a 的取值范围是_____.

16. 设函数 $f(x)=\frac{x^2+(a+1)x+a}{x}$为奇函数，则实数 $a=$_____.

三、解答题（本大题共 6 小题，共 70 分，解答时应写出必要的文字说明、证明过程或演算步骤）

17. （本小题满分 10 分）设 $A=\{x|2x^2+ax+2=0\}$，$B=\{x|x^2+3x+2a=0\}$，且 $A\cap B=\{2\}$.

(1)求 a 的值及集合 A，B；

(2)设全集 $U=A\cup B$，求$(\complement_U A)\cup(\complement_U B)$；

(3)写出$(\complement_U A)\cup(\complement_U B)$的所有子集.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

18.(本小题满分 12 分)若函数 $f(x)=x^2+4x+a$ 的定义域和值域均为$[-2,b](b>-2)$,求实数 a,b 的值.

19.(本小题满分 12 分)已知函数 $f(x)=\dfrac{2x+1}{x+1}$.

(1)判断函数在区间$[1,+\infty)$上的单调性,并用定义证明你的结论;

(2)求函数 $f(x)$在区间$[1,4]$上的最大值和最小值.

20.(本小题满分 12 分)某省两相近重要城市之间人员交流频繁,为了缓解交通压力,特修一条专用铁路,用一列火车作为交通车,已知该车每次拖挂 4 节车厢,一天能来回 16 次,如果该车每次拖挂 7 节车厢,则每天能来回 10 次.

(1)若每天来回的次数是车头每次拖挂车厢节数的一次函数,求此一次函数的解析式;

(2)在(1)的条件下,每节车厢能载乘客 110 人.问这列火车每天来回多少次才能使运营人数最多?并求出每天最多运营人数.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

21.(本小题满分 12 分)已知 a,b 为常数,且 $a\neq0$,$f(x)=ax^2+bx$,$f(2)=0$,方程 $f(x)=x$ 有两个相等实根.

(1)求函数 $f(x)$的解析式;

(2)当 $x\in[1,2]$时,求 $f(x)$的值域;

(3)若 $F(x)=f(x)-f(-x)$,试判断 $F(x)$的奇偶性,并证明你的结论.

22.(本小题满分 12 分)已知二次函数 $f(x)$的最小值为 1,且 $f(0)=f(2)=3$.

(1)求 $f(x)$的解析式;

(2)若 $f(x)$在区间$[2a,a+1]$上不单调,求实数 a 的取值范围;

(3)在区间$[-1,1]$上,$y=f(x)$的图象恒在 $y=2x+2m+1$ 图象的上方,试确定实数 m 的取值范围.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

阶段质量测试卷(二)

第二章 基本初等函数(Ⅰ)

(时间:120 分钟 满分:150 分)

一、选择题(本大题共 12 小题,每小题 5 分,共 60 分.在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的)

1. 若集合 $M=\{y|y=2^x\}$,$N=\{x|y=\log_{(2x-1)}\sqrt{3x-2}\}$,则 $M\cap N=$ (　　)

A. $\left\{x\left|x>\frac{2}{3}\right.\right\}$　　B. $\left\{x\left|\frac{1}{2}<x<1 \text{ 或 } x>1\right.\right\}$

C. $\left\{x\left|x>\frac{1}{2}\right.\right\}$　　D. $\left\{x\left|\frac{2}{3}<x<1 \text{ 或 } x>1\right.\right\}$

2. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}2^{x-1}-2(x\leqslant 1),\\-\log_2(x+1)(x>1),\end{cases}$ 且 $f(a)=-3$,则 $f(6-a)=$ (　　)

A. $-\frac{7}{4}$　　B. $-\frac{5}{4}$

C. $-\frac{3}{4}$　　D. $-\frac{1}{4}$

3. 设 $a=\log_3\pi$,$b=\log_2\sqrt{3}$,$c=\log_3\sqrt{2}$,则 a,b,c 的大小关系是 (　　)

A. $a<b<c$　　B. $a<c<b$

C. $c<b<a$　　D. $b<c<a$

4. 若 $0<b<1$,且 $\log_a b<1$,则 (　　)

A. $0<a<b$　　B. $0<b<a$

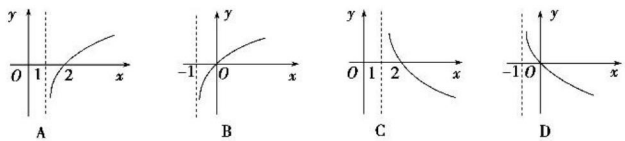
C. $0<b<a<1$　　D. $a>1$ 或 $0<a<b$

5. (**2019·浙江宁波高一期末**)已知函数 $f(x)=|x|\cdot\frac{1-2^x}{2^x+1}$,$x\in[-2\,018,2\,018]$ 的值域是 $[m,n]$,则 $f(m+n)=$ (　　)

A. $2^{2\,018}$　　B. $2\,018^2-\frac{1}{2\,018}$

C. 2　　D. 0

6. 已知函数 $f(x)=ka^x-a^{-x}$($a>0$ 且 $a\neq 1$)是定义在 **R** 的奇函数,且是增函数,则函数 $g(x)=\log_a(x-1)$ 的大致图象是 (　　)



7. 方程 $2^x=\frac{1}{x}$ 的解的个数是 (　　)

A. 0　　B. 1

C. 2　　D. 3

8. 函数 $f(x)=\log_a(6-ax)$ 在 $[0,2]$ 上是减函数,则 a 的取值范围是 (　　)

A. $(0,1)$　　B. $(1,3)$

C. $(1,3]$　　D. $(3,+\infty)$

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

9. 若函数 $f(x)=\begin{cases}\log_2 x(x>2),\\ -x^2+a(x\leqslant 2)\end{cases}$ 的值域为 $\mathbf{R}$，则实数 a 的取值范围是（　　）

A. $(-\infty,1]$　　B. $[1,+\infty)$

C. $(-\infty,5]$　　D. $[5,+\infty)$

10. 若函数 $y=f[\lg(x+1)]$ 的定义域为 $(0,99]$，则函数 $y=f[\log_2(x+2)]$ 的定义域为（　　）

A. $(-1,2]$　　B. $(-1,3)$

C. $(-2,1]$　　D. $(-1,2)$

11. 已知函数 $f(x)=\ln(\sqrt{1+9x^2}-3x)+1$，则 $f(\lg 2)+f\left(\lg\frac{1}{2}\right)=$（　　）

A. -1　　B. 0

C. 1　　D. 2

12. 若函数 $f(x)=\log_a(2x^2+x)(a>0$ 且 $a\neq 1)$ 在区间 $\left(0,\frac{1}{2}\right)$ 上恒有 $f(x)>0$，则函数 $f(x)$ 的单调增区间为（　　）

A. $\left(-\infty,\frac{1}{4}\right)$　　B. $\left(-\frac{1}{4},+\infty\right)$

C. $(0,+\infty)$　　D. $\left(-\infty,-\frac{1}{2}\right)$

二、填空题（本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分，把答案填在题中横线上）

13. 若 $\log_a 2=m$，$\log_a 3=n$，则 $a^{2m+n}=$_____.

14. 若 $f(x)=\frac{2^x-1}{2^x+1}$ 的反函数为 $g(x)$，则 $g\left(\frac{3}{5}\right)=$_____.

15. 若不等式 $3^{x^2-2ax}>\left(\frac{1}{3}\right)^{x+1}$ 对一切实数 x 恒成立，则实数 a 的取值范围是_____.

16. 若函数 $f(x)=e^{|x-a|}$（a 为常数）在区间 $[1,+\infty)$ 上是增函数，则 a 的取值范围是_____.

三、解答题（本大题共 6 小题，共 70 分，解答时应写出必要的文字说明、证明过程或演算步骤）

17.（本小题满分 10 分）计算：

(1) $\frac{1}{\sqrt{2}-1}-\left(\frac{3}{5}\right)^0+\left(\frac{9}{4}\right)^{-0.5}+\sqrt[4]{(\sqrt{2}-e)^4}$；

(2) $\lg 500+\lg\frac{8}{5}-\frac{1}{2}\lg 64+50\times(\lg 2+\lg 5)^2$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

18.(本小题满分 12 分)已知函数 $f(x)=a^{x-1}(x\geqslant 0)$的图象经过点(2,0.5),其中 $a>0$ 且 $a\neq 1$.

(1)求 a 的值;

(2)求函数 $f(x)=a^{x-1}(x\geqslant 0)$的值域.

19.(本小题满分 12 分)已知 $f(x)=\log_2(1+x)+\log_2(1-x)$.

(1)求 $f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$的值;

(2)判断函数 $f(x)$的奇偶性.

20.(本小题满分 12 分)已知定义域为 **R** 的奇函数 $f(x)=\frac{b-2^x}{2^x+a}$.

(1)求 $f(x)$的解析式;

(2)证明:$f(x)$在 **R** 上是减函数;

(3)若对于任意 $t\in\mathbf{R}$,不等式 $f(t^2-2t)+f(2t^2-k)<0$ 恒成立,求 k 的取值范围.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

21.(本小题满分 12 分)若函数 $f(x)$满足 $f(\log_a x)=\frac{a}{a^2-1}\cdot\left(x-\frac{1}{x}\right)$(其中 $a>0$ 且 $a\neq1$).

(1)求函数 $f(x)$的解析式,并判断其奇偶性和单调性;

(2)当 $x\in(-\infty,2)$时,$f(x)-4$ 的值恒为负数,求 a 的取值范围.

22.(本小题满分 12 分)已知函数 $f(x)=\log_9(9^x+1)+kx$ 是偶函数.

(1)求 k 的值;

(2)若方程 $f(x)=\frac{1}{2}x+b$ 有实数根,求实数 b 的取值范围;

(3)设 $h(x)=\log_9\left(a\cdot3^x-\frac{4}{3}a\right)$,若函数 $f(x)$与 $h(x)$的图象有且只有一个公共点,求实数 a 的取值范围.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

班级_____ 姓名_____ 考场号_____ 准考证号_____
密 封 线
数学 必修1A

阶段质量测试卷(三)

第三章 函数的应用

(时间:120 分钟 满分:150 分)

一、选择题(本大题共 12 小题,每小题 5 分,共 60 分.在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的)

1. 函数 $f(x)=\lg|x|$ 的零点是 (　　)

A. (1,0)　　B. (1,0)和(−1,0)

C. 1　　D. 1 和−1

2. 若函数 $y=f(x)$ 在区间(−2,2)上的图象是连续不断的曲线,且方程 $f(x)=0$ 在(−2,2)上仅有一个实数根,则 $f(-1)\cdot f(1)$ 的值 (　　)

A. 大于 0　　B. 小于 0

C. 无法判断　　D. 等于 0

3. 函数 $f(x)=x^2+x+b$ 的零点个数是 (　　)

A. 0　　B. 1

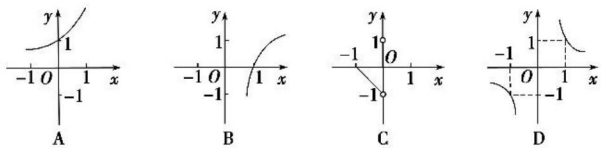
C. 2　　D. 以上均有可能

4. 函数 $f(x)=2^x+3x$ 的零点所在的一个区间是 (　　)

A. (−2,−1)　　B. (−1,0)

C. (0,1)　　D. (1,2)

5. 下列给出的四个函数 $f(x)$ 的图象中能使函数 $y=f(x)-1$ 没有零点的是 (　　)



6. 以半径为 R 的半圆上任意一点 P 为顶点,直径 AB 为底边的△PAB 的面积 S 与高 $PD=x$ 的函数关系式是 (　　)

A. $S=Rx$　　B. $S=2Rx(x>0)$

C. $S=Rx(0<x\leqslant R)$　　D. $S=\pi R^2$

7. 设函数 $f(x)=\ln x-\frac{1}{2}x^2+1(x>0)$,则函数 $y=f(x)$ (　　)

A. 在区间(0,1),(1,2)内均有零点　　B. 在区间(0,1)内有零点,在区间(1,2)内无零点

C. 在区间(0,1),(1,2)内均无零点　　D. 在区间(0,1)内无零点,在区间(1,2)内有零点

8. 若函数 $f(x)$ 的唯一零点同时在(0,4),(0,2),(1,2),$\left(1,\frac{3}{2}\right)$ 内,则与 $f(0)$ 符号相同的是 (　　)

A. $f(4)$　　B. $f(2)$

C. $f(1)$　　D. $f\left(\frac{3}{2}\right)$

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

9. 某城市出租汽车的收费标准是：起步价为 6 元，行程不超过 2 千米者均按此价收费；行程超过 2 千米，超过部分按3 元/千米收费(不足 1 千米按 1 千米计价)；另外，遇到堵车或等候时，汽车虽没有行驶，但仍按 6 分钟折算 1 千米计算(不足 1 千米按 1 千米计价). 陈先生坐了趟这种出租车，车费 24 元，车上仪表显示等候时间为 11 分 30 秒，那么陈先生此趟行程的取值范围是 (　　)

A. $[5,6)$　　B. $(5,6]$

C. $[6,7)$　　D. $(6,7]$

10. (**2019 · 哈尔滨高一检测**)在物价飞速上涨的今天，某商品 2018 年零售价比 2017 年上涨 25%，欲控制 2019 年比 2017 年只上涨 10%，则 2019 年应比 2018 年降价 (　　)

A. 15%　　B. 12%

C. 10%　　D. 8%

11. 若 $x\in(0,1)$，则下列结论正确的是 (　　)

A. $2^x>x^{\frac{1}{2}}>\lg x$　　B. $2^x>\lg x>x^{\frac{1}{2}}$

C. $x^{\frac{1}{2}}>2^x>\lg x$　　D. $\lg x>x^{\frac{1}{2}}>2^x$

12. (**2019 · 唐山高一检测**)已知函数 $f(x)=\left(\frac{1}{3}\right)^x-\log_2 x$，若实数 x_0 是函数 $f(x)$的零点，且 $0<x_1<x_0$，则 $f(x_1)$的值为 (　　)

A. 恒为正值　　B. 等于 0

C. 恒为负值　　D. 不大于 0

二、填空题(本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分. 请把正确答案填在题中横线上)

13. 若函数 $f(x)=ax^2-x-1$ 仅有一个零点，则 $a=$_____.

14. 若 $f(x)$为 **R** 上的奇函数，且 1 是该函数的一个零点，则$f(0)+f(-1)=$_____.

15. 2018 年年底某市人口数达到 54.8 万，若人口的年平均增长率为 $x\%$，设 2039 年年底人口数为 y(万)，那么 y 与 x 的函数解析式为_____.

16. 已知函数 $f(x)=\log_a x+x-b(a>0$ 且 $a\neq1)$. 当 $2<a<3<b<4$ 时，函数 $f(x)$的零点 $x_0\in(n,n+1)$，$n\in\mathbf{N}^*$，则 $n=$_____.

三、解答题(本大题共 6 小题，共 70 分，解答时应写出必要的文字说明、证明过程或演算步骤)

17. (本小题满分 10 分)设 $f(x)=ax^2+(b-8)x-a-ab$ 的两个零点分别是 -3，2.

(1)求 $f(x)$；

(2)当函数 $f(x)$的定义域为$[0,1]$时，求其值域.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

18.(本小题满分 12 分)m 为何值时，$f(x)=x^2+2mx+3m+4$.

(1)有且仅有一个零点；

(2)有两个零点且均比-1大.

19.(本小题满分 12 分)沙市中学“习坎服务部”对某种新上市的品牌商品进行促销活动，已知此品牌的一个水杯定价 20 元，一个钥匙扣定价 5 元，且该服务部推出两种优惠活动方式：

(1)买一个水杯赠送一个钥匙扣；

(2)按购买两种商品的总费用 90%付款.

若某宿舍 4 位同学需集体购买水杯 4 个，钥匙扣 x 个(不低于 4 个)，试按两种不同优惠方式写出实付款 y 元关于 x 的函数关系式，并讨论选择哪种购买优惠方式更划算？

20.(本小题满分 12 分)定义在 **R** 上的偶函数 $y=f(x)$ 在$(-\infty,0]$上递增，函数 $f(x)$ 的一个零点为$-\frac{1}{2}$，求满足 $f(\log_{\frac{1}{4}}x)\geqslant 0$ 的 x 的取值集合.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

21.（本小题满分 12 分）我国是水资源比较贫乏的国家之一，各地采用价格调控等手段来达到节约用水的目的，某市用水收费的方法是：水费＝基本费＋超额费＋损耗费.

若每月用水量不超过最低限量 $a\ \mathrm{m}^3$，只付基本费 8 元和每户每月定额损耗费 c 元；若用水量超过 $a\ \mathrm{m}^3$ 时，除了付以上的基本费和损耗费外，超过部分每 $1\ \mathrm{m}^3$ 付 b 元的超额费，已知每户每月的定额损耗费不超过 5 元.

该市一个家庭某年第一季度的用水量和支付费用如下表：

月份	用水量/m^3	水费/元
1	9	9
2	15	19
3	22	33

根据上表中的数据，求 a，b，c 的值.

22.（本小题满分 12 分）小张周末自己驾车旅游，早上 8 点从家出发，驾车 3 h 后到达景区停车场，期间由于交通等原因，小张的车所走的路程 s（单位：km）与离家的时间 t（单位：h）的函数关系式为 $s(t)=-5t(t-13)$.

由于景区内不能驾车，小张把车停在景区停车场. 在景区玩到 16 点，小张开车从停车场以 60 km/h 的速度沿原路返回.

(1)求这天小张的车所走的路程 s（单位：km）与离家时间 t（单位：h）的函数解析式；

(2)在距离小张家 60 km 处有一加油站，求这天小张的车途经该加油站的时间.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

班级＿＿＿＿ 姓名＿＿＿＿ 考场号＿＿＿＿ 准考证号＿＿＿＿
密 封 线
数学 必修1A

模块综合质量测试卷

（时间：120 分钟　满分：150 分）

一、选择题（本大题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分. 在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的）

1. 设 $U=\{1,2,3,4,5\}$，$A=\{1,2,3\}$，$B=\{2,3,4\}$，则下列结论中正确的是 （　）

A. $A\subseteq B$　　B. $A\cap B=\{2\}$

C. $A\cup B=\{1,2,3,4,5\}$　　D. $A\cap(\complement_U B)=\{1\}$

2. 已知集合 $A=\{x\mid y=\sqrt{1-x^2},x\in\mathbf{Z}\}$，$B=\{y\mid y=x^2+1,x\in A\}$，则 $A\cap B$ 为 （　）

A. $\varnothing$　　B. $\{1\}$

C. $[0,+\infty)$　　D. $\{(0,1)\}$

3. **（2019·郑州高一检测）**设 $f(x)=\begin{cases}2e^{x-1},x<2,\\ \log_3(2^x-1),x\geqslant 2,\end{cases}$ 则 $f[f(2)]=$ （　）

A. 0　　B. 1

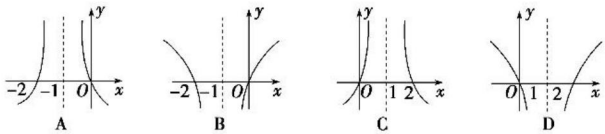
C. 2　　D. 3

4. 下列函数中，既是偶函数，又在区间 $(0,+\infty)$ 上单调递减的函数是 （　）

A. $y=x^{-2}$　　B. $y=x^{-1}$

C. $y=x^2-2$　　D. $y=\log_{\frac{1}{2}}x$

5. 函数 $y=\log_2|1-x|$ 的图象是 （　）



6. 已知幂函数 $y=f(x)$ 的图象过点 $\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$，则 $\log_2 f(2)$ 的值为 （　）

A. $\frac{1}{2}$　　B. $-\frac{1}{2}$

C. 2　　D. -2

7. 函数 $f(x)=\lg x-\frac{1}{x}$ 的零点所在的区间是 （　）

A. $(0,1)$　　B. $(1,10)$

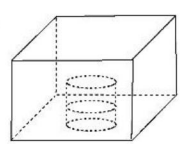
C. $(10,100)$　　D. $(100,+\infty)$

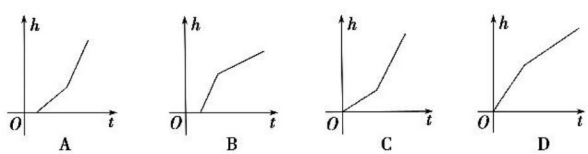
8. **（2019·大连高一检测）**已知 $a=0.3^2$，$b=\log_2 0.3$，$c=2^{0.3}$，则 a,b,c 之间的大小关系是 （　）

A. $a<c<b$　　B. $a<b<c$

C. $b<c<a$　　D. $b<a<c$

9. 如图，向放在水槽底部的烧杯注水（流量一定），注满烧杯后，继续注水，直至注满水槽，水槽中整体水面上升高度 h 与注水时间 t 之间的函数关系大致是下列图象中的 （　）





关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

10.（**2019·长春高一检测**）已知函数 $f(x)=\dfrac{1+x^2}{1-x^2}$，则有 （　　）

A. $f(x)$是奇函数，且 $f\left(\dfrac{1}{x}\right)=-f(x)$　　B. $f(x)$是奇函数，且 $f\left(\dfrac{1}{x}\right)=f(x)$

C. $f(x)$是偶函数，且 $f\left(\dfrac{1}{x}\right)=-f(x)$　　D. $f(x)$是偶函数，且 $f\left(\dfrac{1}{x}\right)=f(x)$

11. 已知函数 $f(x)=m+\log_2 x^2$ 的定义域是$[1,2]$，且$f(x)\leqslant 4$，则实数 m 的取值范围是 （　　）

A. $(-\infty,2]$　　B. $(-\infty,2)$

C. $[2,+\infty)$　　D. $(2,+\infty)$

12. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}|\lg x|,0<x\leqslant 10,\\ -\dfrac{1}{2}x+6,x>10,\end{cases}$ 若 a,b,c 互不相等，且 $f(a)=f(b)=f(c)$，则 abc 的取值范围是 （　　）

A. $(1,10)$　　B. $(5,6)$

C. $(10,12)$　　D. $(20,24)$

二、填空题（本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分，把答案填在题中横线上）

13. 设 $U=\mathbf{R}$，已知集合 $A=\{x|x>1\}$，$B=\{x|x>a\}$，且$(\complement_U A)\cup B=\mathbf{R}$，则实数 a 的取值范围是_____.

14. $\lg\dfrac{4\sqrt{2}}{7}-\lg 8^{\frac{2}{3}}+\lg 7\sqrt{5}=$_____.

15. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}2^x+1,x<1,\\ x^2+ax,x\geqslant 1,\end{cases}$ 若 $f[f(0)]=4a$，则实数 a 等于_____.

16. 已知函数 $f(x)=\lg(2^x-b)$（b 为常数），若 $x\in[1,+\infty)$时，$f(x)\geqslant 0$ 恒成立，则 b 的取值范围是_____.

三、解答题（本大题共 6 小题，共 70 分. 解答时应写出必要的文字说明、证明过程或演算步骤）

17.（本小题满分 10 分）已知集合 $A=\{x|2<2^x<8\}$，$B=\{x|a\leqslant x\leqslant a+3\}$.

（1）当 $a=2$ 时，求 $A\cap B$；

（2）若 $B\subseteq\complement_{\mathbf{R}}A$，求实数 a 的取值范围.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

18.(本小题满分 12 分)已知 $f(x)=\log_a x(a>0$ 且 $a\neq 1)$的图象过点$(4,2)$.

(1)求 a 的值;

(2)若 $g(x)=f(1-x)+f(1+x)$,求 $g(x)$的解析式及定义域;

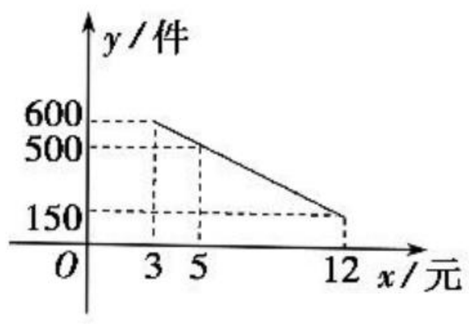
(3)在(2)的条件下,求 $g(x)$的单调减区间.

19.(本小题满分 12 分)(**2019·南宁高一检测**)若 $f(x)$是定义在$(0,+\infty)$上的增函数,且对一切 $x,y>0$,满足 $f\left(\frac{x}{y}\right)=f(x)-f(y)$.

(1)求 $f(1)$的值;

(2)若 $f(6)=1$,解不等式 $f(x+3)-f\left(\frac{1}{3}\right)<2$.

20.(本小题满分 12 分)某商品经营部每天的房租、人员工资等固定成本为 300 元,已知该商品进价为 3 元/件,并规定其销售单价不低于商品进价,且不高于 12 元,该商品日均销售量 y(件)与销售单价 x(元)的关系如图所示.



(1)试求 y 关于 x 的函数解析式;

(2)当销售单价定为多少元时,该商品每天的利润最大?

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

21.(本小题满分 12 分)已知 $f(x)$是定义在 **R** 上的奇函数,当 $x\geqslant 0$ 时,$f(x)=2^x-1$.

(1)求 $f(3)+f(-1)$;

(2)求 $f(x)$的解析式;

(3)若 $x\in A$,$f(x)\in[-7,3]$,求区间 A.

22.(本小题满分 12 分)(**2019·平顶山高一检测**)对于函数 $f(x)=a-\dfrac{2}{b^x+1}$($a\in\mathbf{R}$,$b>0$,且 $b\neq 1$).

(1)探索函数 $y=f(x)$的单调性;

(2)求实数 a 的值,使函数 $y=f(x)$为奇函数;

(3)在(2)的条件下,令 $b=2$,求使 $f(x)=m(x\in[0,1])$有解的实数 m 的取值范围.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

骄子之路®
the Road to Pride
让 学习更快乐，人生更精彩

答案与解析

与45分钟课时作业与单元测试配套使用



数学

必修 1 RJ·A

班级：_____

姓名：_____

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

第一部分　课时作业

第一章　集合与函数概念

1.1　集　合

1.1.1　集合的含义与表示

第1课时　集合的含义

题点知识巩固

1. 选C　①“一中高一年级聪明的学生”的标准不确定，因而不能构成集合；②“直角坐标系中横、纵坐标相等的点”的标准确定，能构成集合；③“不小于3的正整数”的标准确定，能构成集合；④“$\sqrt{3}$的近似值”的标准不确定，不能构成集合. 故选C.
2. 选D　因为集合中的元素是互异的，所以l,m,n互不相等，即$\triangle ABC$不可能是等腰三角形. 故选D.
3. 选C　根据集合中元素的互异性，“notebooks”中的不同字母为“n,o,t,e,b,k,s”，共7个，故该集合中的元素个数是7. 故选C.
4. 选B　①$\frac{1}{2}\in\mathbf{R}$，正确；②$\sqrt{2}\notin\mathbf{R}$，错误；③$|-3|\in\mathbf{N}$，正确；④$|-\sqrt{3}|\in\mathbf{Q}$，错误. 所以正确的个数为2，故选B.
5. 选D　考查元素与集合的关系，即3与-3是否在一元一次不等式$x-1<\sqrt{3}$的解集中. 故选D.
6. **解析**：(1)因为$\mathbf{N}^*$为正整数集，所以$0\notin\mathbf{N}^*$. (2)因为$\mathbf{N}$为自然数集，所以$1\in\mathbf{N}$. (3)因为$\mathbf{Z}$为整数集，所以$1.5\notin\mathbf{Z}$. (4)因为$\mathbf{Q}$为有理数集，所以$2\sqrt{2}\notin\mathbf{Q}$. (5)因为$\mathbf{R}$为实数集，所以$2+\sqrt{3}\in\mathbf{R}$.
答案：(1)$\notin$　(2)$\in$　(3)$\notin$　(4)$\notin$　(5)$\in$
7. **解**：(1)根据集合中元素的互异性，可知$\begin{cases}x\neq3,\\x\neq x^2-2x,\\x^2-2x\neq3,\end{cases}$
即$x\neq0$且$x\neq3$且$x\neq-1$.
(2)因为$x^2-2x=(x-1)^2-1\geqslant-1$，且$-2\in A$，所以$x=-2$.
8. **解**：(1)A中有且只有一个元素，即$ax^2+2x+1=0$有且只有一个根或有两个相等的实根. ①当$a=0$时，方程的根为$-\frac{1}{2}$，符合题意；②当$a\neq0$时，由$\Delta=4-4a=0$，得$a=1$，此时方程的两个相等的根为-1. 综上，当$a=0$时，集合A中的元素为$-\frac{1}{2}$；当$a=1$时，集合A中的元素为-1.
(2)A中至少有一个元素，即方程$ax^2+2x+1=0$有两个不等实根或有两个相等实根或有一个实根.
①当方程有两个不等实根时，$a\neq0$，且$\Delta=4-4a>0$，
$\therefore a<1$且$a\neq0$；
②当方程有两个相等实根时，$a\neq0$，且$\Delta=4-4a=0$，
$\therefore a=1$；
③当方程有一个实根时，$a=0$，
$\therefore 2x+1=0$，$\therefore x=-\frac{1}{2}$，符合题意.
由①②③，得当A中至少有一个元素时，a满足的条件是$a\leqslant1$.

提能达标过关

1. 选B　B选项中“成绩优秀”的标准不明确，不符合确定性，故选B.
2. 选D　由题意知a应为无理数，故a可以为$\sqrt{7}$. 故选D.
3. 选A　$\mathbf{N}$中最小的数为0，所以①错；由$-(-2)\in\mathbf{N}$，而$-2\notin\mathbf{N}$可知②错；若$a\in\mathbf{N}$，$b\in\mathbf{N}$，则$a+b$的最小值为0，所以③错；“小”的正数没有明确的标准，所以④错，故选A.
4. 选A　解法一：因为$|x|=\pm x$，$\sqrt{x^2}=|x|$，$-\sqrt[3]{x^3}=-x$，所以不论x取何值，最多只能写成两种形式：x、$-x$，故集合中最多含有2个元素.
解法二：令$x=2$，则以上实数分别为：2，-2，2，2，-2，由元素互异性知集合最多含有2个元素. 故选A.
5. 选C　若$a=0\in\mathbf{N}$，则$4-a=4\in\mathbf{N}$，符合题意；
若$a=1\in\mathbf{N}$，则$4-a=3\in\mathbf{N}$，符合题意；
若$a=2\in\mathbf{N}$，则$4-a=2\in\mathbf{N}$，不符合题意；
若$a=3\in\mathbf{N}$，则$4-a=1\in\mathbf{N}$，符合题意；
若$a=4\in\mathbf{N}$，则$4-a=0\in\mathbf{N}$，符合题意；
当$a>4$且$a\in\mathbf{N}$时，均不符合题意.
综上，集合A的个数是2，故选C.
6. **解析**：矩形是平行四边形，梯形不是平行四边形，故$p\in M$，$q\notin M$.
答案：$\in$　$\notin$
7. **解析**：方程$x^2-5x+6=0$的根是2，3，方程$x^2-x-2=0$的根是-1，2. 根据集合中元素的互异性知，以两方程的根为元素的集合中共有3个元素.
答案：3
8. **解析**：由题意，知$t\in\mathbf{N}$且$t=-x^2+1\leqslant1$，故$t=0$或1.
答案：0或1
9. **解**：由$-3\in A$，可得$-3=a-2$或$-3=2a^2+5a$，$\therefore a=-1$或$a=-\frac{3}{2}$.
当$a=-1$时，$a-2=-3$，
$2a^2+5a=-3$，不满足集合中元素的互异性，故$a=-1$舍去.
当$a=-\frac{3}{2}$时，$a-2=-\frac{7}{2}$，
$2a^2+5a=-3$，满足题意.
$\therefore$实数a的值为$-\frac{3}{2}$.
10. **解**：(1)$2\in A$，则$\frac{1}{1-2}\in A$，
即$-1\in A$，则$\frac{1}{1+1}\in A$，即$\frac{1}{2}\in A$，则$\frac{1}{1-\frac{1}{2}}\in A$，
即$2\in A$，所以A中其他所有元素为-1，$\frac{1}{2}$.
(2)如：若$3\in A$，则A中其他所有元素为$-\frac{1}{2}$，$\frac{2}{3}$(答案不唯一).
(3)分析以上结果可以得出：A中只能有3个元素，它们分别是a，$\frac{1}{1-a}$，$\frac{a-1}{a}$，且三个数的乘积为-1.
证明如下：
若$a\in A$，$a\neq1$，则有$\frac{1}{1-a}\in A$且$\frac{1}{1-a}\neq1$，
所以又有$\frac{1}{1-\frac{1}{1-a}}=\frac{a-1}{a}\in A$且$\frac{a-1}{a}\neq1$，
进而有$\frac{1}{1-\frac{a-1}{a}}=a\in A$.
又因为$a\neq\frac{1}{1-a}$（因为若$a=\frac{1}{1-a}$，则$a^2-a+1=0$，而方程$a^2-a+1=0$无解），且$\frac{1}{1-a}\neq\frac{a-1}{a}$，所以$A$中只能有3个元素，它们分别是$a$，$\frac{1}{1-a}$，$\frac{a-1}{a}$，且三个数的乘积为$-1$.

第2课时　集合的表示

题点知识巩固

1. 选C　①中“0”不能表示集合，而“{0}”可以表示集合，①错误；根据集合中元素的无序性可知②正确；根据集合的互异性可知③错误；④不能用列举法表示，原因是集合中有无数个元素不能一一列举，④错误. 故选C.
2. 选B　由$x-2<3$，得$x<5$，又$x\in\mathbf{N}^*$，所以$x=1,2,3,4$，即集合的另一种表示形式是$\{1,2,3,4\}$. 故选B.
3. **解析**：由$A=B$得$\begin{cases}4=ab,\\a=2,\end{cases}$故$\begin{cases}a=2,\\b=2,\end{cases}$
$\therefore a+b=4$.
答案：4
4. 选D　集合$\{(x,y)|y=2x-1\}$的代表元素是(x,y)，x,y满足的关系式为$y=2x-1$，因此集合表示的是函数$y=2x-1$的图象上的所有点组成的集合，故选D.
5. 选C　因为$xy>0$，所以x与y同号，即x与y同正同负，故该集合表示第一、三象限内的点集. 故选C.
6. 选D　偶数集为$\{x|x=2k,k\in\mathbf{Z}\}$，则大于$-3$且小于11的偶数所组成的集合为$\{x|-3<x<11,x=2k,k\in\mathbf{Z}\}$. 故选D.
7. 选C　原方程组的解为$\begin{cases}x=1,\\y=2,\end{cases}$其解集中只含有一个元素，可表示为A、B、D，C不符合，故选C.
8. **解析**：对于①，在平面直角坐标系中，第一象限内的点的横、纵坐标均大于0，且集合中的代表元素为点(x,y)，所以①正确；对于②，方程$\sqrt{x-2}+|y+2|=0$的解为$\begin{cases}x=2,\\y=-2,\end{cases}$解集为$\{(2,-2)\}$或$\left\{(x,y)\middle|\begin{cases}x=2\\y=-2\end{cases}\right\}$，所以②不正确；对于③，集合$\{y|y=x^2-1,x\in\mathbf{R}\}=\{y|y\geqslant-1\}$，集合$\{y|y=x-1,x\in\mathbf{R}\}=\mathbf{R}$，这两个集合不相等，所以③正确.
答案：①③
9. **解**：(1)方程的实数根为-1，0，3，故可以用列举法表示为$\{-1,0,3\}$，当然也可以用描述法表示为$\{x|x(x^2-2x-3)=0\}$.
(2)由于大于2且小于6的有理数有无数个，故不能用列举法表示该集合，但可以用描述法表示该集合为$\{x\in\mathbf{Q}|2<x<6\}$.
(3)用描述法表示该集合为
$M=\{(x,y)|y=-x+4,x\in\mathbf{N},y\in\mathbf{N}\}$；
或用列举法表示该集合为
$\{(0,4),(1,3),(2,2),(3,1),(4,0)\}$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

提能达标过关

1. 选 A　由于$\sqrt{2}+\sqrt{3}<10$，所以$a\in A$. 故选 A.
2. 选 B　$\{x=2\}$表示的是由一个等式组成的集合. 故选 B.
3. 选 D　列举得集合 $B=\{(2,1),(3,1),(4,1),(5,1),(3,2),(4,2),(5,2),(4,3),(5,3),(5,4)\}$，共 10 个元素. 故选 D.
4. 选 B　由题意，不妨令$\begin{cases}a+b=1,\\b+c=2,\\c+a=3,\end{cases}$解得$\begin{cases}a=1,\\b=0,\\c=2.\end{cases}$所以集合 $A=\{0,1,2\}$，则集合 A 中任意 2 个元素的差的绝对值是 1，2，故集合 A 中任意 2 个元素的差的绝对值构成的集合是 $\{1,2\}$. 故选 B.
5. 选 C　当 $x>0,y>0$ 时，$m=3$；当 $x<0,y<0$ 时，$m=-1-1+1=-1$；若 x,y 异号，不妨设 $x>0,y<0$，则 $m=1+(-1)+(-1)=-1$，综上，$m=3$ 或 -1，即 $M=\{-1,3\}$. 故选 C.
6. **解析**：集合 $\{x|x^2-8x+16=0\}=\{4\}$.
   答案：4
7. **解析**：$\because x\in A$，$\therefore$ 当 $x=-1$ 时，$y=|x|=1$；
   当 $x=0$ 时，$y=|x|=0$；当 $x=1$ 时，$y=|x|=1$.
   答案：$\{0,1\}$
8. **解析**：依题设知，该集合为点集，且其横坐标满足 $0\leqslant x\leqslant 2$，纵坐标满足 $0\leqslant y\leqslant 1$，所以该集合为 $\{(x,y)|0\leqslant x\leqslant 2,0\leqslant y\leqslant 1\}$.
   答案：$\{(x,y)|0\leqslant x\leqslant 2,0\leqslant y\leqslant 1\}$
9. **解**：(1)由$\frac{4}{3-x}\in\mathbf{Z}$，得 $3-x=\pm1,\pm2,\pm4$.
   解得 $x=-1,1,2,4,5,7$.
   又$\because x\in\mathbf{Z}$，$\therefore A=\{-1,1,2,4,5,7\}$.
   (2)由(1)得，集合 A 中的所有元素之和为 $-1+1+2+4+5+7=18$.
10. **解**：$\because(2,3)\in A$，$\therefore 2\times2-3+m>0$，$\therefore m>-1$.
    $\because(2,3)\notin B$，$\therefore 2+3-n>0$，$\therefore n<5$.

1.1.2　集合间的基本关系

第 3 课时　集合间的基本关系

题点知识巩固

1. 选 B　“$\in$”用于表示元素与集合之间的关系，“$\subseteq$”和“$\subsetneq$”用于表示集合与集合之间的关系，所以①②错误. 易知③④正确. 故选 B.
2. 选 C　①和②是常见的空集的错误表示方法；对于③，不要误认为 $3m>m$ 而断定 $\{x|3m<x<m\}$ 是空集，当 $m<0$ 时，显然 $3m<m$ 成立；对于④，不论 a 为何值，总有 $a+2>a$，故④是空集；对于⑤，在实数范围内找不到平方等于 -1 的数，故⑤是空集. 故选 C.
3. 选 C　解方程 $x^2-3x+2=0$ 得 $x=2$ 或 $x=1$，则 $M=\{1,2\}$，$\because 1\in M$ 且 $1\in N$，$2\in M$ 且 $2\in N$，$\therefore M\subseteq N$. 又$\because 0\in N$，但 $0\notin M$，$\therefore M\subsetneq N$，故选 C.
4. 选 B　符合题意的集合 M 有 $\{a\},\{a,b\},\{a,c\},\{a,d\},\{a,b,c\},\{a,b,d\},\{a,c,d\}$，共 7 个. 故选 B.
5. 选 B　由 $N=\{1,0\}$，知 $N\subsetneq M$，故选 B.
6. 选 A　由题意知 1，2 为方程 $x^2+bx+c=0$ 的两个根，所以$\begin{cases}1+2=-b,\\1\times2=c,\end{cases}$解得 $b=-3,c=2$. 故选 A.
7. 选 C　$\because A=B$，$\therefore m^2-m=2$，$\therefore m=2$ 或 $m=-1$. 故选 C.
8. 选 A　在数轴上表示出两个集合(图略)，因为 $A\subsetneq B$，所以 $a\geqslant2$. 故选 A.
9. **解**：$\because A=\{x|x<-1$ 或 $x>2\}$，
   $B=\{x|4x+a<0\}=\left\{x\middle|x<-\frac{a}{4}\right\}$，
   又 $B\subseteq A$，$\therefore -\frac{a}{4}\leqslant-1$，即 $a\geqslant4$，
   $\therefore a$ 的取值范围是 $\{a|a\geqslant4\}$.

提能达标过关

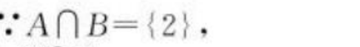
1. 选 D　由于集合 A 为数集，集合 B 为点集，因此 M 与 P 互不包含，故选 D.
2. 选 D　集合 $\{1,2,3\}$ 的子集共有 8 个，其中至少含有一个奇数的有 $\{1\},\{3\},\{1,2\},\{1,3\},\{2,3\},\{1,2,3\}$，共 6 个. 故选 D.
3. 选 B　$M=\left\{x\middle|x=\frac{6m+1}{6},m\in\mathbf{Z}\right\}$.
   $N=\left\{x\middle|x=\frac{3n-2}{6},n\in\mathbf{Z}\right\}$
   $=\left\{x\middle|x=\frac{3q+1}{6},q\in\mathbf{Z}\right\}$，
   $P=\left\{x\middle|x=\frac{3p+1}{6},p\in\mathbf{Z}\right\}$.
   $\therefore M\subsetneq N=P$. 故选 B.
4. 选 C　因为 $B=\left\{x\middle|-\frac{1}{2}<x\leqslant2\right\}$，且 $A=B$，所以当 $x=2$ 时，$2a+1=5$，解得 $a=2$. 故选 C.
5. 选 D　由题意，知当 $a=0$ 时，$B=\varnothing$，满足题意；当 $a\neq0$ 时，由 $\frac{2}{a}\in A$，可得 $a=1$ 或 2，所以 a 的值不可能是 3. 故选 D.
6. **解析**：$\because A=\{a,0,-1\}$，$B=\left\{c+b,\frac{1}{a+b},1\right\}$，$A=B$，
   $\therefore a=1$，$c+b=0$，$\frac{1}{a+b}=-1$，$\therefore b=-2$，$c=2$.
   答案：1　-2　2
7. **解析**：因为集合 $A=\{1,2\}$，$B=\{1,2,3,4\}$，所以当满足 $A\subseteq C\subseteq B$ 时，集合 C 可以为 $\{1,2\},\{1,2,3\},\{1,2,4\},\{1,2,3,4\}$，故满足条件 $A\subseteq C\subseteq B$ 的集合 C 有 4 个.
   答案：4
8. **解析**：由 $B\subseteq A$ 得 $m\in A$，所以 $m=m^3$ 或 $m=2$，所以 $m=2$ 或 $m=-1$ 或 $m=1$ 或 $m=0$，又由集合中元素的互异性知 $m\neq1$，所以 $m=0$ 或 2 或 -1.
   答案：0 或 2 或 -1
9. **解**：$A=\{-3,2\}$. 对于 $x^2+x+a=0$，
   ①当 $\Delta=1-4a<0$，即 $a>\frac{1}{4}$ 时，$B=\varnothing$，$B\subseteq A$ 成立；
   ②当 $\Delta=1-4a=0$，即 $a=\frac{1}{4}$ 时，$B=\left\{-\frac{1}{2}\right\}$，$B\subseteq A$ 不成立；
   ③当 $\Delta=1-4a>0$，即 $a<\frac{1}{4}$ 时，若 $B\subseteq A$ 成立，
   则 $B=\{-3,2\}$，$\therefore a=-3\times2=-6$.
   综上，a 的取值范围为 $\left\{a\middle|a>\frac{1}{4}\text{或}a=-6\right\}$.
10. **解**：①当 $a=0$ 时，$A=\varnothing$，满足 $A\subseteq B$；
    ②当 $a>0$ 时，$A=\left\{x\middle|\frac{1}{a}<x<\frac{2}{a}\right\}$.
    又$\because B=\{x|-1<x<1\}$，$A\subseteq B$，
    $\therefore\begin{cases}\frac{1}{a}\geqslant-1,\\\frac{2}{a}\leqslant1,\end{cases}$$\therefore a\geqslant2$；
    ③当 $a<0$ 时，$A=\left\{x\middle|\frac{2}{a}<x<\frac{1}{a}\right\}$.
    $\because A\subseteq B$，$\therefore\begin{cases}\frac{2}{a}\geqslant-1,\\\frac{1}{a}\leqslant1,\end{cases}$$\therefore a\leqslant-2$.
    综上所述，a 的取值范围为 $\{a|a\geqslant2$ 或 $a\leqslant-2$ 或 $a=0\}$.

1.1.3　集合的基本运算

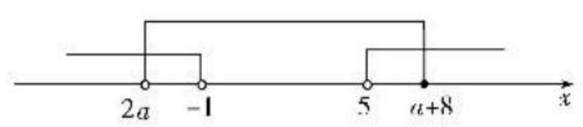
第 4 课时　并集、交集

题点知识巩固

1. 选 A　结合数轴分析可知 $A\cup B=\{x|-1<x<3\}$. 故选 A.
2. 选 D　$M=\{x|x^2+2x=0,x\in\mathbf{R}\}=\{0,-2\}$，$N=\{x|x^2-2x=0,x\in\mathbf{R}\}=\{0,2\}$，故 $M\cup N=\{-2,0,2\}$，故选 D.
3. **解析**：$\because A\cup B=A$，$\therefore B\subseteq A$，$\therefore m\geqslant2$.
   答案：$\{m|m\geqslant2\}$
4. 选 B　因为 $A=\{-1,0,1\}$，$B=\{x|-1\leqslant x<1\}$，所以 $A\cap B=\{-1,0\}$. 故选 B.
5. 选 A　在数轴上表示集合 A,B，如图所示，则 $A\cap B=\{x|-3<x<2\}$，故选 A.



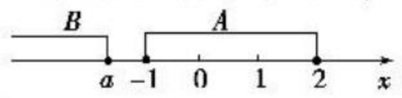
6. 选 C　依题意，由 $A\cap B=\{2\}$ 知，$2a=2$，所以，$a=1$，$b=2$，$a+b=3$，故选 C.
7. **解**：$\because B=\{x|x<-1$ 或 $x>5\}$，$A\cup B=\mathbf{R}$，
   在数轴上表示集合 A,B，如图所示，



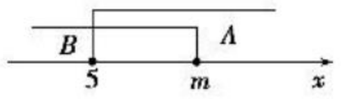
   $\therefore\begin{cases}2a<-1,\\a+8\geqslant5,\end{cases}$解得 $-3\leqslant a<-\frac{1}{2}$.
8. **解**：$\because M\cap N=M$，$\therefore M\subseteq N$.
   $\because M=\{2\}$，$\therefore 2\in N$，
   $\therefore 2$ 是关于 x 的方程 $x^2-3x+m=0$ 的解，即 $4-6+m=0$，解得 $m=2$.

提能达标过关

1. 选 A　在数轴上表示集合 M,N，可知 $M\cup N=\{x|x<-5$ 或 $x>-3\}$. 故选 A.
2. 选 D　集合 M,N 中的元素是平面上的点，故 $M\cap N$ 中的元素也是平面上的点，解$\begin{cases}x+y=2,\\x-y=4,\end{cases}$得$\begin{cases}x=3,\\y=-1.\end{cases}$所以 $M\cap N=\{(3,-1)\}$. 故选 D.
3. 选 B　$\because A\cup B=A$，$\therefore B\subseteq A$. $\because A=\{0,1,2,x\}$，$B=\{1,x^2\}$，$\therefore x^2=0$ 或 $x^2=2$ 或 $x^2=x$，解得 $x=0$ 或$\sqrt{2}$或$-\sqrt{2}$或 1. 经检验，当 $x=\sqrt{2}$或$-\sqrt{2}$时满足题意，故选 B.
4. 选 D　$\because A\cap B=\{2\}$，
   $\therefore 2\in A,2\in B$，
   $\therefore a+1=2$，即 $a=1$，
   $\therefore A=\{1,b\}$，从而 $b=2$.
   $\therefore A=\{1,2\}$，$B=\{2,5\}$，
   $\therefore A\cup B=\{1,2,5\}$. 故选 D.
5. 选 C　如图，要使 $A\cap B=\varnothing$，应有 $a<-1$.



   故选 C.
6. **解析**：因为 $M\cap N=\{1,4\}$，$M\cap P=\{4,7\}$，所以 $(M\cap N)\cup(M\cap P)=\{1,4,7\}$.
   答案：$\{1,4,7\}$
7. **解析**：用数轴表示集合 A,B 如图所示. 由 $A\cap B=\{x|5\leqslant x\leqslant6\}$，得 $m=6$.



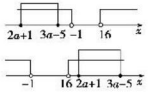
   答案：6

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

8. **解析**：∵$A\cap B=\{-2\}$，∴$-2\in A$ 且 $-2\in B$，将 $x=-2$ 代入方程 $x^2-px-2=0$，得 $4+2p-2=0$，解得 $p=-1$，
∴$A=\{1,-2\}$．又 $A\cup B=\{-2,1,5\}$，
∴$B=\{-2,5\}$，
∴$q=-[(-2)+5]=-3$，$r=(-2)\times5=-10$，
∴$p+q+r=-14$．
答案：-14

9. **解**：(1)$B=\{x|x^2-5x+6=0\}=\{2,3\}$，因为 $A\cap B=A\cup B$，所以 $A=B$，则 $A=\{2,3\}$，
所以 $\begin{cases}2+3=a,\\2\times3=a^2-19,\end{cases}$ 解得 $a=5$．
(2)因为 $\varnothing\subsetneqq(A\cap B)$，且 $A\cap C=\varnothing$，$B=\{2,3\}$，$C=\{x|x^2+2x-8=0\}=\{-4,2\}$，
所以 $-4\notin A$，$2\notin A$，$3\in A$，所以 $3^2-3a+a^2-19=0$，
即 $a^2-3a-10=0$，解得 $a=5$ 或 $a=-2$．
当 $a=-2$ 时，$A=\{-5,3\}$，满足题意；
当 $a=5$ 时，$A=\{2,3\}$，不满足题意，舍去．
综上，可知 $a=-2$．
(3)因为 $A\cap B=A\cap C\neq\varnothing$，$B=\{2,3\}$，$C=\{-4,2\}$，
所以 $2\in A$，则 $2^2-2a+a^2-19=0$，
即 $a^2-2a-15=0$，解得 $a=5$ 或 $a=-3$．
当 $a=5$ 时，$A=\{2,3\}$，不满足题意，舍去；
当 $a=-3$ 时，$A=\{-5,2\}$，满足题意．
综上，可知 $a=-3$．

10. **解**：因为 $A\subseteq(A\cap B)$，且 $(A\cap B)\subseteq A$，所以 $A\cap B=A$，即 $A\subseteq B$．
显然 $A=\varnothing$ 满足条件，此时 $a<6$．
若 $A\neq\varnothing$，如图所示，



则 $\begin{cases}2a+1\leqslant3a-5,\\3a-5<-1\end{cases}$
或 $\begin{cases}2a+1\leqslant3a-5,\\2a+1>16.\end{cases}$
由 $\begin{cases}2a+1\leqslant3a-5,\\3a-5<-1\end{cases}$
解得 $a\in\varnothing$；
由 $\begin{cases}2a+1\leqslant3a-5,\\2a+1>16\end{cases}$ 解得 $a>\frac{15}{2}$．
综上，满足条件 $A\subseteq(A\cap B)$ 的实数 a 的取值范围是 $\left\{a\middle|a<6\text{ 或 }a>\frac{15}{2}\right\}$．

第 5 课时　全集与补集

题点知识巩固

1. 选 B　∵$U=\{1,2,3,4,5\}$，$A=\{1,2\}$，
∴ $\complement_U A=\{3,4,5\}$．故选 B．

2. **解析**：由补集的定义，结合数轴可得 $\complement_U A=\{x|x<1\}$．
答案：$\{x|x<1\}$

3. **解析**：借助数轴得 $\complement_U A=\{x|x=-3\text{ 或 }x>4\}$．
答案：$\{x|x=-3\text{ 或 }x>4\}$

4. 选 C　集合 $M=\{1,3\}$，$N=\{2,3\}$，
∴$M\cap N=\{3\}$，∴ $\complement_U(M\cap N)=\{1,2,4\}$，故选 C．

5. 选 D　由已知，得 $A\cup B=\{x|x\leqslant0\text{ 或 }x\geqslant1\}$，
故 $\complement_U(A\cup B)=\{x|0<x<1\}$．故选 D．

6. 选 B　由题意，得 $A\cap B=\{3,4,5\}$，阴影部分所表示的集合为集合 A 中的元素去掉集合 $A\cap B$ 中的元素所组成的集合，所以为 $\{1,2\}$．故选 B．

7. **解析**：由已知，得 $\complement_R B=\{x|x\leqslant1\text{ 或 }x\geqslant2\}$，又 $A\cup(\complement_R B)=\mathbf{R}$，所以 $a\geqslant2$．
答案：$\{a|a\geqslant2\}$

8. **解**：因为 $A=\{x|x\geqslant-m\}$，
所以 $\complement_U A=\{x|x<-m\}$，
又 $B=\{x|-2<x<4\}$，$(\complement_U A)\cap B=\varnothing$，
结合数轴分析可知 $-m\leqslant-2$，即 $m\geqslant2$，
所以 m 的取值范围是 $\{m|m\geqslant2\}$．

提能达标过关

1. 选 B　∵ $\complement_U B=\{1,5,6\}$，∴$A\cap(\complement_U B)=\{1\}$，故选 B．

2. 选 A　因为集合 $A=\{x|x>-1\}$，所以 $\complement_R A=\{x|x\leqslant-1\}$，则 $(\complement_R A)\cap B=\{x|x\leqslant-1\}\cap\{-2,-1,0,1\}=\{-2,-1\}$．
故选 A．

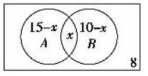
3. 选 A　因为 $N\cap(\complement_I M)=\varnothing$，所以 $N\subseteq M$，所以 $M\cup N=M$．故选 A．

4. 选 A　因为 $A=\{x|x<3\text{ 或 }x\geqslant7\}$，所以 $\complement_U A=\{x|3\leqslant x<7\}$．又 $(\complement_U A)\cap B\neq\varnothing$，所以 $a>3$．故选 A．

5. 选 C　$\complement_U A=\{x|1<x<3\}$，
借助于数轴可得 $\begin{cases}k+1>1,\\k<3,\end{cases}$ ∴$0<k<3$．
故选 C．

6. **解析**：因为 $\complement_U B=\{4,5,6\}$，所以 $B=\{1,2,3\}$，
所以 $A\cap B=\{1,2,5\}\cap\{1,2,3\}=\{1,2\}$．
答案：$\{1,2\}$

7. **解析**：设两项运动都喜欢的人数为 x，画出 Venn 图得到方程 $15-x+x+10-x+8=30\Rightarrow x=3$，所以喜爱篮球运动但不喜爱乒乓球运动的人数为 $15-3=12$(人)．



答案：12

8. **解析**：因为 $B\cup(\complement_U B)=A$，所以 $A=U$．
①当 $x^2=3$ 时，$x=\pm\sqrt{3}$，$B=\{1,3\}$，$\complement_U B=\{\sqrt{3}\}$或$\{-\sqrt{3}\}$．
②当 $x^2=x$ 时，$x=0$ 或 1．
当 $x=0$ 时，$B=\{0,1\}$，$\complement_U B=\{3\}$；而当 $x=1$ 时不合题意，舍去．
答案：$\{-\sqrt{3}\}$或$\{\sqrt{3}\}$或$\{3\}$

9. **解**：由已知，得 $A=\{-2,-1\}$，
由 $(\complement_U A)\cap B=\varnothing$，得 $B\subseteq A$，
∵方程 $x^2+(m+1)x+m=0$ 的判别式 $\Delta=(m+1)^2-4m=(m-1)^2\geqslant0$，
∴$B\neq\varnothing$．
∴$B=\{-1\}$或 $B=\{-2\}$或 $B=\{-1,-2\}$．
①若 $B=\{-1\}$，则 $m=1$；
②若 $B=\{-2\}$，则应有 $-(m+1)=(-2)+(-2)=-4$，且 $m=(-2)\times(-2)=4$，这两式不能同时成立，
∴$B\neq\{-2\}$；
③若 $B=\{-1,-2\}$，则应有 $-(m+1)=(-1)+(-2)=-3$，且 $m=(-1)\times(-2)=2$，由这两式得 $m=2$．
经检验，知 $m=1$，$m=2$ 均符合条件，
∴$m=1$ 或 2．

10. **解**：若 $B=\varnothing$，则 $a+1>2a-1$，
则 $a<2$，
此时 $\complement_U B=\mathbf{R}$，∴$A\subseteq\complement_U B$；
若 $B\neq\varnothing$，则 $a+1\leqslant2a-1$，即 $a\geqslant2$，
此时 $\complement_U B=\{x|x<a+1\text{ 或 }x>2a-1\}$，
由于 $A\subseteq\complement_U B$，若 $a+1>5$，如图 1，
∴$a>4$；若 $2a-1<-2$，如图 2，
∴$a<-\frac{1}{2}$(舍去)．

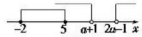


图 1

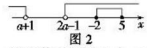


图 2

∴实数 a 的取值范围为 $\{a|a<2\text{ 或 }a>4\}$．

素养提升

素养培优提能

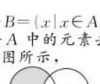
1. 选 D　由题意，知 $\begin{cases}a=2,\\a^2-2a+3=3,\end{cases}$
得 $a=2$．故选 D．

2. 选 D　M 为点集，N 为数集，所以 M，N 无公共元素．故选 D．

3. 选 C　解法一：由已知可得
$\begin{cases}m\geqslant0,\\m+\frac{3}{4}\leqslant1,\end{cases}$ 和 $\begin{cases}n-\frac{1}{3}\geqslant0,\\n\leqslant1,\end{cases}$
解得 $0\leqslant m\leqslant\frac{1}{4}$，$\frac{1}{3}\leqslant n\leqslant1$．
取 $m=0$，$n=1$，或 $m=\frac{1}{4}$，$n=\frac{1}{3}$ 时，
$M=\left\{x\middle|0\leqslant x\leqslant\frac{3}{4}\right\}$，
$N=\left\{x\middle|\frac{2}{3}\leqslant x\leqslant1\right\}$
或 $M=\left\{x\middle|\frac{1}{4}\leqslant x\leqslant1\right\}$，
$N=\left\{x\middle|0\leqslant x\leqslant\frac{1}{3}\right\}$，
所以 $M\cap N=\left\{x\middle|\frac{2}{3}\leqslant x\leqslant\frac{3}{4}\right\}$ 或 $M\cap N=\left\{x\middle|\frac{1}{4}\leqslant x\leqslant\frac{1}{3}\right\}$，
此时集合 $M\cap N$ 的“长度”的最小值为 $\frac{3}{4}-\frac{2}{3}=\frac{1}{3}-\frac{1}{4}=\frac{1}{12}$．
解法二：集合 M 的“长度”为 $\frac{3}{4}$，集合 N 的“长度”为 $\frac{1}{3}$．
由于 M，N 都是集合 $\{x|0\leqslant x\leqslant1\}$ 的子集，
又 $\{x|0\leqslant x\leqslant1\}$ 的“长度”为 1，
所以集合 $M\cap N$ 的“长度”的最小值是 $\left(\frac{3}{4}+\frac{1}{3}\right)-1=\frac{1}{12}$．故选 C．

4. 选 D　由题意得 $P+P=\{2,3,4\}$，$(P+P)\div P=\{2,3,4\}\div\{1,2\}=\left\{1,\frac{3}{2},2,3,4\right\}$，所以集合 $(P+P)\div P$ 的所有元素之和为 $1+\frac{3}{2}+2+3+4=\frac{23}{2}$．故选 D．

5. 选 A　∵$A-B=\{x|x\in A,\text{且 }x\notin B\}$，即 $A-B$ 是集合 A 中的元素去掉 $A\cap B$，记作集合 D，如图所示，



∴集合 $C-(A-B)$ 就是 C 中的元素去掉集合 $C\cap D$．故选 A．

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

6. **解析**：因为$U=\{n|n$是小于9的正整数$\}$，
所以$U=\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$，
则$A=\{1,3,5,7\}$，$B=\{3,6\}$，
所以$A\cup B=\{1,3,5,6,7\}$，
所以$\complement_U(A\cup B)=\{2,4,8\}$.
答案：$\{2,4,8\}$

7. **解析**：因为$5\in\{1,m+2,m^2+4\}$，所以$m+2=5$或$m^2+4=5$，即$m=3$或$m=\pm1$.
当$m=3$时，$M=\{1,5,13\}$，符合题意；
当$m=1$时，$M=\{1,3,5\}$，符合题意；
当$m=-1$时，$M=\{1,1,5\}$，不满足集合元素的互异性，舍去. 所以m的取值集合为$\{1,3\}$.
答案：$\{1,3\}$

8. **解析**：由题意得两种报纸至少订阅一种的有$334+297-150=481$(户)，从而两种都不订的有$500-481=19$(户).
答案：19

9. **解**：$A=\{x|x^2-2x-3=0\}=\{-1,3\}$.
(1)$\because A\cap B=\{-1\}$，$\therefore -1\in B$，
$\therefore -a-1=0$，$\therefore a=-1$.
(2)$\because A\cap B=B$，$\therefore B\subseteq A$.
当$B=\varnothing$时，方程$ax-1=0$无解，
故$a=0$；
当$B\neq\varnothing$时，则$B=\left\{\frac{1}{a}\right\}$.
若$\frac{1}{a}=-1$，则$a=-1$；若$\frac{1}{a}=3$，
则$a=\frac{1}{3}$.
综上所述，实数a的值为0，-1或$\frac{1}{3}$.

10. **解**：(1)当$a=3$时，$A=\{x|-1\leqslant x\leqslant 5\}$，$B=\{x|x\leqslant 1$或$x\geqslant 4\}$，
$\therefore A\cap B=\{x|-1\leqslant x\leqslant 1$或$4\leqslant x\leqslant 5\}$.
(2)①若$A=\varnothing$，则$2-a>2+a$，
解得$a<0$，满足$A\cap B=\varnothing$；
②当$a\geqslant 0$时，$A=\{x|2-a\leqslant x\leqslant 2+a\}\neq\varnothing$，
$\because A\cap B=\varnothing$，$\therefore\begin{cases}2-a>1,\\2+a<4,\end{cases}$
解得$0\leqslant a<1$.
综上，实数a的取值范围是$\{a|a<1\}$.

阶段质量评估 1

1. 选A　$\because U=\{1,2,3,4,5\}$，$A\cap B=\{4\}$，
$\therefore\complement_U(A\cap B)=\{1,2,3,5\}$. 故选A.

2. 选B　由$\begin{cases}x+2y-4=0,\\x=0,\end{cases}$得$\begin{cases}x=0,\\y=2,\end{cases}$
$\therefore A\cap B=\{(0,2)\}$，故选B.

3. 选D　图中阴影部分表示的集合为$B\cap(\complement_{\mathbf{R}}A)=\{x|-2\leqslant x\leqslant 3\}\cap\{x|-1\leqslant x\leqslant 4\}=\{x|-1\leqslant x\leqslant 3\}$. 故选D.

4. 选D　因为集合A有且仅有两个子集，所以集合A中有且仅有一个元素. 当$a=0$时，原方程化为$2x=0$，此时$A=\{0\}$，符合题意；当$a\neq 0$时，由$\Delta=2^2-4\times a\times a=0$，得$a^2=1$，即$a=\pm1$，此时$A=\{-1\}$或$A=\{1\}$，符合题意. 综上所述，$a=0$或$a=\pm1$. 故选D.

5. 选B　若$M\cap N=N$，$\therefore N\subseteq M$，
$\therefore(\complement_U M)\subseteq(\complement_U N)$，故选B.

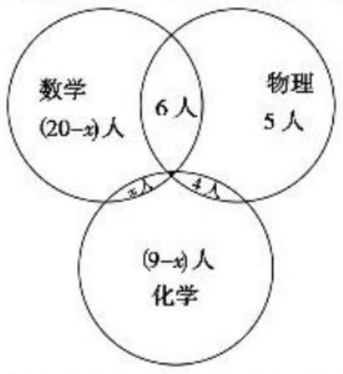
6. 选A　$\because A=\{x|0\leqslant x\leqslant 2\}$，$B=\{x|x\geqslant 0\}$，
$\therefore A\cup B=\{x|x\geqslant 0\}$，
$A\cap B=\{x|0\leqslant x\leqslant 2\}$.
$\therefore A\times B=\{x|x\in A\cup B$且$x\notin A\cap B\}=\{x|x>2\}$. 故选A.

7. **解析**：$\because B=\{x|x<0$或$x\geqslant 2\}$，
$\therefore\complement_{\mathbf{R}}B=\{x|0\leqslant x<2\}$，
$\therefore A\cap(\complement_{\mathbf{R}}B)=\{x|1\leqslant x<2\}$.
答案：$\{x|1\leqslant x<2\}$

8. **解析**：$\because(1,2)\in A\cap B$，
$\therefore(1,2)\in A$，且$(1,2)\in B$，
$\therefore\begin{cases}2^2=a+b,\\1^2-2a-b=0,\end{cases}\therefore\begin{cases}a=-3,\\b=7.\end{cases}$
答案：-3　7

9. **解析**：由题可知$\begin{cases}x^3+3x^2+2x=0,\\|2x-1|=3,\end{cases}$解得$x=-1$.
答案：-1

10. **解析**：依题意画出Venn图，如图所示.



设同时参加数学和化学小组的有x人，
则$(20-x)+x+(9-x)+15=36$，
解得$x=8$.
答案：8

11. **解**：由$A\cap B=\{9\}$，得$9\in A$，$\therefore 2a-1=9$或$a^2=9$，
解得$a=5$或$a=\pm3$.
当$a=5$时，$1-a=-4$，
当$a=-3$时，$a-1=-4$，此时，不满足$A\cap B=\{9\}$，
$\therefore a\neq 5$且$a\neq -3$.
当$a=3$时，$A=\{-4,5,9\}$，$B=\{2,-2,9\}$，满足$A\cap B=\{9\}$，故实数a的值为3.

12. **解**：(1)$A\cap B=\{x|3\leqslant x\leqslant 7\}$，$A\cup B=\{x|2<x<10\}$.
解法一：$(\complement_U A)\cap(\complement_U B)=\{x|x<3$或$x\geqslant 10\}\cap\{x|x\leqslant 2$或$x>7\}=\{x|x\leqslant 2$或$x\geqslant 10\}$.
解法二：$(\complement_U A)\cap(\complement_U B)=\complement_U(A\cup B)=\{x|x\leqslant 2$或$x\geqslant 10\}$.
(2)$\because A\subseteq C$，$\therefore a<3$.

13. **解**：(1)$\because A\cap B=B$，$\therefore B\subseteq A$.
当$m+1>2m-1$时，即$m<2$时，$B=\varnothing$，满足$B\subseteq A$；
当$m+1\leqslant 2m-1$时，即$m\geqslant 2$时.
$\because B\subseteq A$，
$\therefore\begin{cases}m+1\geqslant -2,\\2m-1\leqslant 5,\end{cases}$解得$-3\leqslant m\leqslant 3$.
又$m\geqslant 2$，$\therefore 2\leqslant m\leqslant 3$.
综上所述，实数m的取值范围是$\{m|m\leqslant 3\}$.
(2)当$x\in\mathbf{Z}$时，$A=\{-2,-1,0,1,2,3,4,5\}$.
集合A中共有8个元素，$\therefore$集合A的非空真子集的个数为$2^8-2=254$.

14. **解**：(1)$\because A=\{x|x\leqslant -3$或$x\geqslant 2\}$，
$B=\{x|1<x<5\}$，
$\therefore A\cap B=\{x|2\leqslant x<5\}$，
$\complement_{\mathbf{R}}A=\{x|-3<x<2\}$，
$\therefore(\complement_{\mathbf{R}}A)\cup B=\{x|-3<x<5\}$.
(2)$\because B\cap C=C$，$\therefore C\subseteq B$.
①当$C=\varnothing$时，$\therefore m-1>2m$，
$\therefore m<-1$；
②当$C\neq\varnothing$时，$\therefore\begin{cases}m-1\leqslant 2m,\\m-1>1,\\2m<5,\end{cases}$
解得$2<m<\frac{5}{2}$.
综上m的取值范围是
$\left\{m\middle|m<-1$或$0<m<\frac{5}{2}\right\}$.

1.2　函数及其表示

1.2.1　函数的概念

第6课时　函数的概念

题点知识巩固

1. 选B　根据函数的概念可知B不正确. 故选B.

2. 选C　对于A，集合M中$x=0$时，$|x|=0$，但集合N中没有0；对于B，集合M中$x=1$时，$|x-1|=0$，但集合N中没有0；对于D，集合M中x为负数时，集合N中没有元素与之对应；分析知C中对应是集合M到集合N的函数. 故选C.

3. 选C　根据函数定义，知对自变量x的任意一个值，都有唯一确定的实数(函数值)与之对应. 显然选项A，B，D满足函数的定义，而选项C不满足. 故选C.

4. 选C　由区间和集合的关系，可得区间$(-3,2]$可表示为$\{x|-3<x\leqslant 2\}$，故选C.

5. **解析**：(1)$\{x|x\geqslant 1\}=[1,+\infty)$.
(2)$\left\{x\middle|\frac{x-2}{x+1}\geqslant 0\right\}=\{x|x<-1$或$x\geqslant 2\}=(-\infty,-1)\cup[2,+\infty)$.
(3)$\{x|x=1$或$2\leqslant x\leqslant 8\}=\{1\}\cup[2,8]$.
(4)$\{x|x<-4$或$-1<x\leqslant 2\}=(-\infty,-4)\cup(-1,2]$.
答案：(1)$[1,+\infty)$　(2)$(-\infty,-1)\cup[2,+\infty)$　(3)$\{1\}\cup[2,8]$　(4)$(-\infty,-4)\cup(-1,2]$

6. **解**：因为$A=\{x|7-x\geqslant 0\}=\{x|x\leqslant 7\}$，
$B=\{x||x|-2\neq 0\}=\{x|x\neq\pm2\}$，
所以$A\cap B=\{x|x<-2$或$-2<x<2$或$2<x\leqslant 7\}$，
用区间表示为
$A\cap B=(-\infty,-2)\cup(-2,2)\cup(2,7]$.

7. 选C　要使函数式有意义，则$2-x\geqslant 0$，即$x\leqslant 2$. 所以函数的定义域为$\{x|x\leqslant 2\}$. 故选C.

8. 选A　要使函数有意义，需$\begin{cases}x-1\geqslant 0,\\x-2\neq 0,\end{cases}$解得$x\geqslant 1$，且$x\neq 2$，所以函数的定义域是$\{x|x\geqslant 1$且$x\neq 2\}$. 故选A.

9. **解**：(1)因为$|x|-x\neq 0$，即$|x|\neq x$，所以$x<0$，
所以该函数的定义域为$(-\infty,0)$.
(2)由$\begin{cases}2+x\geqslant 0,\\1-x\neq 0,\end{cases}$得$\begin{cases}x\geqslant -2,\\x\neq 1.\end{cases}$
所以该函数的定义域为$[-2,1)\cup(1,+\infty)$.
(3)由$\begin{cases}x+1\neq 0,\\4-x^2\geqslant 0,\end{cases}$得$\begin{cases}x\neq -1,\\-2\leqslant x\leqslant 2.\end{cases}$
所以该函数的定义域为$[-2,-1)\cup(-1,2]$.
(4)由$\begin{cases}5-x\geqslant 0,\\x-5\geqslant 0,\\x^2-9\neq 0,\end{cases}$得$\begin{cases}x\leqslant 5,\\x\geqslant 5,\\x\neq\pm3,\end{cases}$
所以$x=5$，
所以该函数的定义域为$\{5\}$.

提能达标过关

1. 选A　A中一个x对应无数个y值，故不是函数图象，故选A.

2. 选C　对于选项C，当$x=4$时，$y=\frac{8}{3}>2$，不合题意. 故选C.

3. 选A　依题意有$\begin{cases}2-x\geqslant 0,\\x+1>0,\end{cases}$
解得$-1<x\leqslant 2$. 故选A.

4. 选C　当a在$f(x)$定义域内时，有一个交点，否则无交点. 故选C.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

5. 选C　由题知定义域为$\mathbf{R}$，则有$ax^2+3ax+1>0$恒成立. 当$a=0$时，结论成立；当$a\neq0$时，需满足$a>0$且$\Delta<0$，即$0<a<\frac{4}{9}$. 综上可得实数a的取值范围是$\left[0,\frac{4}{9}\right)$. 故选C.

6. **解析**：由题意可知$3a+5>-2a$，解得$a>-1$，故a的取值范围是$(-1,+\infty)$.
答案：$(-1,+\infty)$

7. **解析**：要使函数有意义，需满足$\begin{cases}6-x\geqslant0,\\|x|-4\neq0,\end{cases}$即$\begin{cases}x\leqslant6,\\x\neq\pm4,\end{cases}$
∴定义域为$(-\infty,-4)\cup(-4,4)\cup(4,6]$.
答案：$(-\infty,-4)\cup(-4,4)\cup(4,6]$

8. **解析**：①中，可构成函数关系. ②中，对于集合A中元素1，在集合B中有两个元素与之对应，因此不是函数关系. ③中，A中元素0取倒数没有意义，在集合B中没有元素与之对应，因此不是函数关系. ④中，A中元素0在集合B中没有元素与之对应，因此不是函数关系. ⑤中，可构成函数关系.
答案：2

9. **解**：根据对应关系f，有：$1\to4$；$2\to7$；$3\to10$；$k\to3k+1$.
若$a^4=10$，则$a\notin\mathbf{N}^*$，不符合题意，舍去；
若$a^2+3a=10$，则$a=2$（$a=-5$不符合题意，舍去）.
故$3k+1=a^4=16$，得$k=5$.
综上，$a=2$，$k=5$，集合$A=\{1,2,3,5\}$，$B=\{4,7,10,16\}$.

10. **解**：已知函数$y=\sqrt{\frac{1}{a}x+1}$（$a<0$且a为常数），
∵$\frac{1}{a}x+1\geqslant0$，$a<0$，∴$x\leqslant-a$，
即函数的定义域为$(-\infty,-a]$.
∵函数在区间$(-\infty,1]$上有意义，
∴$(-\infty,1]\subseteq(-\infty,-a]$，∴$-a\geqslant1$，
即$a\leqslant-1$，
∴实数a的取值范围是$(-\infty,-1]$.

第7课时　函数概念的综合应用

题点知识巩固

1. 选A　A中两函数定义域相同，对应关系相同，所以是同一函数；B中对应关系不同；C中定义域不同；D中定义域不同. 故选A.

2. 选D　A不正确，因为对应关系不同；B不正确，因为对应关系不同；C不正确，因为定义域不同；D正确，因为定义域及对应关系均相同. 故选D.

3. **解**：(1)中$f(x)=x+1$，$x\in\mathbf{R}$，而$g(x)=x+x^0$中$x\neq0$，它们的定义域不相同，所以不是相等函数.
(2)中两个函数的定义域都是$\mathbf{R}$，并且$f(x)=\sqrt{(2x+1)^2}=|2x+1|$，所以它们是相等函数.
(3)中$f(n)=2n+1(n\in\mathbf{Z})$与$g(n)=2n-1(n\in\mathbf{Z})$的定义域都是$\mathbf{Z}$，但对应关系不同，所以不是相等函数.
(4)中$f(x)=3x+2$与$g(t)=3t+2$的定义域都是$\mathbf{R}$，尽管它们表示自变量的字母不同，但是，对应关系都是“乘3加2”，是相同的对应关系，所以是相等函数.

4. 选C　由题意知$f(-2)=\frac{(-2)^2}{1+|-2-1|}=\frac{4}{4}=1$. 故选C.

5. 选A　依题意，当$x=-1$时，$y=4$；当$x=0$时，$y=0$；当$x=2$时，$y=-2$；当$x=3$时，$y=0$，所以函数$y=x^2-3x$的值域为$\{-2,0,4\}$. 故选A.

6. 选C　因为$y=\sqrt{x-1}\geqslant0$，值域为$[0,+\infty)$，所以A不满足题意；因为$y=\frac{1}{x-1}\neq0$，值域为$(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$，所以B不满足题意；因为$y=\sqrt{x^2+1}\geqslant1$，值域为$[1,+\infty)$，所以C满足题意；因为$y=\frac{1}{\sqrt{x-1}}>0$，值域为$(0,+\infty)$，所以D不满足题意. 故选C.

7. **解析**：令$\frac{5x}{x^2+1}=2$，即$2x^2-5x+2=0$，解得$x=\frac{1}{2}$或$x=2$，故a的值为$\frac{1}{2}$或2.
答案：$\frac{1}{2}$或2

8. **解**：(1)因为$f(x)=\frac{1-x}{1+x}$，所以$f(2)=\frac{1-2}{1+2}=-\frac{1}{3}$.
因为$g(x)=x^2-1$，所以$g(3)=3^2-1=8$.
(2)依题意，知$f[g(3)]=f(8)=\frac{1-8}{1+8}=-\frac{7}{9}$，
$f[g(x)]=\frac{1-g(x)}{1+g(x)}=\frac{1-(x^2-1)}{1+(x^2-1)}=\frac{2-x^2}{x^2}(x\neq0)$.

提能达标过关

1. 选C　A项中两函数的定义域不同；B项中对应关系不同；D项中也是两函数对应关系不同. 故选C.

2. 选D　要使函数$f(x)$有意义，需满足$\begin{cases}x-1\neq0,\\\frac{2}{x+1}\geqslant0,\\x+1\neq0,\end{cases}$
所以$x>-1$且$x\neq1$，所以定义域为$(-1,1)\cup(1,+\infty)$. 故选D.

3. 选C　函数$f(x)$的定义域是$\left[\frac{1}{2},1\right]$，所以$y=f(3-x)$要有意义，则$3-x\in\left[\frac{1}{2},1\right]$，解得$x\in\left[2,\frac{5}{2}\right]$. 故选C.

4. 选B　由于$x\in\mathbf{R}$，所以$x^2+1\geqslant1$，$0<\frac{1}{x^2+1}\leqslant1$，即$0<y\leqslant1$. 故选B.

5. 选A　∵$f(-1)=a(-1)^2-1=a-1$，
∴$f[f(-1)]=a(a-1)^2-1=a^3-2a^2+a-1=-1$，
∴$a^3-2a^2+a=0$，∴$a=1$或$a=0$（舍去），故选A.

6. **解析**：观察函数图象可知$f(x)$的定义域是$[-3,0]\cup[2,3]$，只与x的一个值对应的y值的范围是$[1,2)\cup(4,5]$.
答案：$[-3,0]\cup[2,3]$　$[1,2)\cup(4,5]$

7. **解析**：∵$0\leqslant16-x^2\leqslant16$，∴$\sqrt{16-x^2}\in[0,4]$.
答案：$[0,4]$

8. **解析**：由题意可得$kx^2-4kx+k+3>0$对任意$x\in\mathbf{R}$恒成立.
①当$k=0$时，$3>0$恒成立，所以满足题意；
②当$k\neq0$时，须使$\begin{cases}k>0,\\\Delta=(4k)^2-4k(k+3)<0,\end{cases}$
解得$0<k<1$.
综上所得，k的取值范围为$0\leqslant k<1$.
答案：$[0,1)$

9. **解**：(1)因为$y=\frac{2x+1}{x-3}=\frac{2(x-3)+7}{x-3}=2+\frac{7}{x-3}$，且$\frac{7}{x-3}\neq0$，
所以$y\neq2$，
所以原函数的值域为$(-\infty,2)\cup(2,+\infty)$.
(2)因为$y=\sqrt{-2x^2+x+3}=\sqrt{-2\left(x-\frac{1}{4}\right)^2+\frac{25}{8}}$，
所以$0\leqslant y\leqslant\frac{5\sqrt{2}}{4}$，
所以原函数的值域为$\left[0,\frac{5\sqrt{2}}{4}\right]$.
(3)设$t=\sqrt{1-2x}$，则$t\geqslant0$
且$x=-\frac{1}{2}t^2+\frac{1}{2}$，
得$y=-\frac{1}{2}t^2-t+\frac{1}{2}=-\frac{1}{2}(t+1)^2+1$.
因为$t\geqslant0$，
所以$y\leqslant\frac{1}{2}$，即该函数的值域为$\left(-\infty,\frac{1}{2}\right]$.

10. **解**：(1)因为$f(x)=\frac{x^2}{1+x^2}$，
所以$f(2)+f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{2^2}{1+2^2}+\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^2}{1+\left(\frac{1}{2}\right)^2}=1$，
$f(3)+f\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{3^2}{1+3^2}+\frac{\left(\frac{1}{3}\right)^2}{1+\left(\frac{1}{3}\right)^2}=1$.
(2)证明：$f(x)+f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{x^2}{1+x^2}+\frac{\left(\frac{1}{x}\right)^2}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2}=\frac{x^2}{1+x^2}+\frac{1}{x^2+1}=\frac{x^2+1}{x^2+1}=1$，是定值.
(3)由(2)，知$f(x)+f\left(\frac{1}{x}\right)=1$.
所以$f(1)+f(1)=1$，
$f(2)+f\left(\frac{1}{2}\right)=1$，
$f(3)+f\left(\frac{1}{3}\right)=1$，
$f(4)+f\left(\frac{1}{4}\right)=1$，
…
$f(2\,018)+f\left(\frac{1}{2\,018}\right)=1$，
所以$2f(1)+f(2)+f\left(\frac{1}{2}\right)+f(3)+f\left(\frac{1}{3}\right)+\cdots+f(2\,017)+f\left(\frac{1}{2\,017}\right)+f(2\,018)+f\left(\frac{1}{2\,018}\right)=2\,018$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

1.2.2 函数的表示法

第8课时 函数的表示法

题点知识巩固

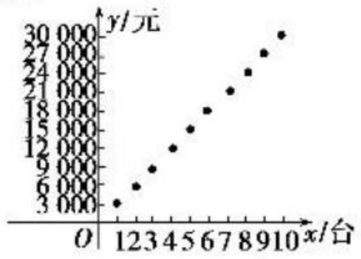
1. 选A 汽车经过启动、加速行驶、匀速行驶、减速行驶直至停车，在行进过程中s随时间t的增大而增大，故排除C，D；因为汽车在加速行驶的过程中行驶路程s随时间t的变化越来越快，在减速行驶直至停车的过程中行驶路程s随时间t的变化越来越慢，排除B，故选A.

2. **解析**：由数表，可得$g(3)=-4$，$f(-1)=-1$，
$\therefore g(3)-f(-1)=-3$，
$\therefore f[g(3)-f(-1)]=f(-3)=4$.
答案：4

3. **解**：①列表法：

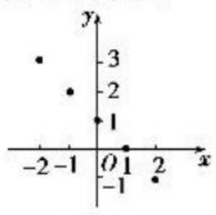
x/台	1	2	3	4	5
y/元	3 000	6 000	9 000	12 000	15 000
x/台	6	7	8	9	10
y/元	18 000	21 000	24 000	27 000	30 000

②图象法：

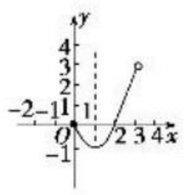


③解析法：$y=3\,000x(x\in\mathbf{N}^*$且$1\leqslant x\leqslant 10)$.

4. **解**：(1)$f(x)=1-x(x\in\mathbf{Z}$且$-2\leqslant x\leqslant 2)$的图象如图(1)所示.
(2)$\because x\in[0,3)$，$\therefore$这个函数的图象是抛物线$y=x^2-2x$在$0\leqslant x<3$之间的一段弧，如图(2)所示.



图(1)

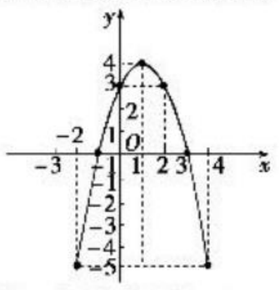


图(2)

5. **解**：因为函数$f(x)=-x^2+2x+3$的定义域为$\mathbf{R}$，列表：

x	…	−2	−1	0	1	2	3	4	…
y	…	−5	0	3	4	3	0	−5	…

描点，连线，得函数图象如图：



(1)根据图象，容易发现$f(0)=3$，
$f(1)=4$，$f(3)=0$，
所以$f(3)<f(0)<f(1)$.
(2)根据图象，可以看出函数的图象是以(1，4)为顶点，开口向下的抛物线，因此，函数的值域为$(-\infty,4]$.

6. 选B 令$t=\dfrac{1}{x}$，则$x=\dfrac{1}{t}(t\neq 0$且$t\neq -1)$，
$\therefore f(t)=\dfrac{1}{1+\frac{1}{t}}=\dfrac{t}{t+1}(t\neq 0$且$t\neq -1)$，
$\therefore f(x)=\dfrac{x}{x+1}(x\neq -1$且$x\neq 0)$. 故选B.

7. **解析**：由题意可知，长方体的长为$(x+10)$cm，从而长方体的体积$y=80x(x+10)$，$x>0$.
答案：$y=80x(x+10)$，$x\in(0,+\infty)$

8. **解**：(1)设$f(x)=\dfrac{k}{x}(k\neq 0)$，则$f(3)=\dfrac{k}{3}=-6$，
解得$k=-18$，
所以$f(x)$的解析式为$f(x)=-\dfrac{18}{x}(x\neq 0)$.
(2)由题意设$f(x)=ax^2+bx+c(a\neq 0)$，
所以$\begin{cases}f(0)=c=1,\\f(1)=a+b+c=2,\\f(2)=4a+2b+c=5,\end{cases}$
解得$\begin{cases}a=1,\\b=0,\\c=1.\end{cases}$
所以$f(x)=x^2+1$.

提能达标过关

1. 选B 由题意得$f(1)=4$，所以$f[f(1)]=f(4)=2$. 故选B.

2. 选B 解法一：$\because g(x+2)=2x+3=2(x+2)-1$，
$\therefore g(x)=2x-1$.
解法二：$g(x)=f(x-2)=2(x-2)+3=2x-1$. 故选B.

3. 选A $g(5.5)=1.06(0.75\times 5+1)=5.035\approx 5.04$. 故选A.

4. 选D 由题意知当时间$t=0$时，离家的距离不应为0，故排除A、B；又因为一开始慢，到最后快，比较C、D，只有D符合题意. 故选D.

5. 选B 因为$f(x)=2x+a$，$g(x)=\dfrac{1}{4}(x^2+3)$，所以$g[f(x)]=\dfrac{1}{4}[(2x+a)^2+3]=\dfrac{1}{4}(4x^2+4ax+a^2+3)=x^2+ax+\dfrac{a^2+3}{4}=x^2-x+1$，解得$a=-1$. 故选B.

6. **解析**：令$x+1=3$，得$x=2$，由$f(x+1)=x^2-2x$可得，$f(3)=4-4=0$.
答案：0

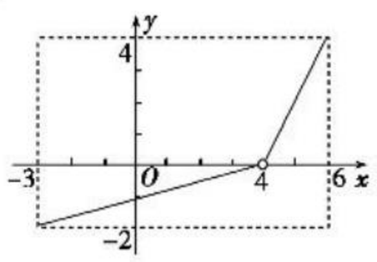
7. **解析**：令$x=2$得，$2f(2)+f\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{9}{2}$，
令$x=\dfrac{1}{2}$得，$2f\left(\dfrac{1}{2}\right)+f(2)=\dfrac{3}{2}$，
消去$f\left(\dfrac{1}{2}\right)$得，$f(2)=\dfrac{5}{2}$.
答案：$\dfrac{5}{2}$

8. **解析**：由题意，得

x	1	2	3
$f[g(x)]$	1	3	1
$g[f(x)]$	3	1	3

故满足$f[g(x)]>g[f(x)]$的x的值为2.
答案：2

9. **解**：本题答案不唯一，函数图象可画为如图所示.



10. **解**：(1)设$f(x)=ax+b(a\neq 0)$，
则$2f(x+3)-f(x-2)$
$=2[a(x+3)+b]-[a(x-2)+b]$
$=2ax+6a+2b-ax+2a-b$
$=ax+8a+b$
$=2x+21$，
所以$a=2$，$8a+b=21$，
所以$b=5$，
所以$f(x)=2x+5$.
(2)因为$g(x)$为一次函数，且一次项系数大于0，所以设$g(x)=ax+b(a>0)$.
因为$f(x)=x^2$，$f[g(x)]=4x^2-20x+25$，所以$(ax+b)^2=4x^2-20x+25=(2x-5)^2(a>0)$，对照可得$a=2$，$b=-5$，所以$g(x)=2x-5$.
(3)$\because 3f(x)+2f(-x)=4x$，①
用$-x$代换x，
得$3f(-x)+2f(x)=-4x$，②
$\therefore$①$\times 3-$②$\times 2$，得$5f(x)=20x$，所以$f(x)=4x$.

第9课时 分段函数与映射

题点知识巩固

1. 选A 依题意知$f(2)=2^2+2-2=4$，
则$f\left[\dfrac{1}{f(2)}\right]=f\left(\dfrac{1}{4}\right)=1-\left(\dfrac{1}{4}\right)^2=\dfrac{15}{16}$. 故选A.

2. 选A 依题意，若$x\leqslant 0$，则$x+2=3$，解得$x=1$，不合题意，舍去. 若$0<x\leqslant 3$，则$x^2=3$，解得$x=-\sqrt{3}$(舍去)或$x=\sqrt{3}$. 故选A.

3. 选D 当$x\in[0,1]$时，$f(x)=2x^2\in[0,2]$，所以函数$f(x)$的值域为$[0,2]\cup\{2,3\}=[0,2]\cup\{3\}$. 故选D.

4. **解析**：因为$8<10$，所以代入$f(n)=f[f(n+5)]$，即$f(8)=f[f(13)]$. 因为$13>10$，所以代入$f(n)=n-3$，得$f(13)=10$，故得$f(8)=f(10)=10-3=7$.
答案：7

5. **解**：(1)因为$-\pi<-1$，所以$f(-\pi)=-\pi+2$.
因为$-1<\dfrac{3}{2}<2$，所以$f\left(\dfrac{3}{2}\right)=\left(\dfrac{3}{2}\right)^2=\dfrac{9}{4}>2$，
所以$f\left[f\left(\dfrac{3}{2}\right)\right]=f\left(\dfrac{9}{4}\right)=2\times\dfrac{9}{4}=\dfrac{9}{2}$.
(2)分三种情况：
①当$a\leqslant -1$时，$a+2=\dfrac{1}{2}$，
解得$a=-\dfrac{3}{2}$，满足题意；
②当$-1<a<2$时，$a^2=\dfrac{1}{2}$，
解得$a=\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，满足题意；
③当$a\geqslant 2$时，$2a=\dfrac{1}{2}$，解得$a=\dfrac{1}{4}<2$，不满足题意.
综上所述，a的值为$-\dfrac{3}{2}$或$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$或$-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

6. 选C 依题意，知$f(x)=x+\dfrac{|x|}{x}=\begin{cases}x+1,x>0,\\x-1,x<0,\end{cases}$所以函数$f(x)$的图象为选项C中的图象. 故选C.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

7. 选 C　函数 $f(x)=|x|\operatorname{sgn} x=\begin{cases}x,x>0,\\0,x=0,\\x,x<0,\end{cases}$ 故函数 $f(x)=|x|\operatorname{sgn} x$ 的图象为 $y=x$ 所在的直线，故选 C.

8. **解析**：结合函数图象和一次函数的解析式的求法，

可得 $f(x)=\begin{cases}x+1,x\in[-1,0),\\-x,x\in[0,1].\end{cases}$

答案：$f(x)=\begin{cases}x+1,x\in[-1,0),\\-x,x\in[0,1]\end{cases}$

9. 选 D　在选项 A，B 中，由于集合 M 中的元素 2 在集合 N 中没有对应的元素，故构不成映射；在选项 C 中，集合 M 中的元素 1 在集合 N 中的对应元素不唯一，故构不成映射；选项 D 符合映射的定义. 故选 D.

10. **解**：(1) A 中的元素 1，即 $x=1$，代入对应关系得 $\frac{x}{2x+1}=\frac{1}{2\times1+1}=\frac{1}{3}$，

即与 A 中的元素 1 相对应的 B 中的元素是 $\frac{1}{3}$.

(2) B 中的元素为 $\frac{3}{7}$，即 $\frac{x}{2x+1}=\frac{3}{7}$，解得 $x=3$，

即与 B 中的元素 $\frac{3}{7}$ 相对应的 A 中的元素是 3.

提能达标过关

1. 选 D　对于 D，当 $x=2$ 时，由对应关系 $y=4-x^2$，得 $y=0$，在集合 B 中没有元素与之对应，所以 D 选项不能构成 A 到 B 的映射. 故选 D.

2. 选 B　由题设，$g(\pi)=0$，$f[g(\pi)]=0$，故选 B.

3. 选 D　∵从 A 到 B 的映射 $f:(x,y)\to(x+y,x-y)$，B 中元素为 $(4,2)$，

∴$\begin{cases}x+y=4,\\x-y=2,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x=3,\\y=1.\end{cases}$ ∴集合 A 中的元素为 $(3,1)$. 故选 D.

4. 选 B　$f(1)=f(1+3)=f(4)=4^2+1=17$，$f(3)=3^2+1=10$，∴$f(1)-f(3)=7$. 故选 B.

5. 选 C　由题意，对于①：A 中元素 0.5 取绝对值后还是 0.5，B 中元素全部是自然数，没有对应元素，故不是 A 到 B 上的映射；对于②：A 中四个元素分别平方后所得值，都有 B 中元素与之对应，故是 A 到 B 上的映射；对于③：A 中每个三角形的面积，都有 B 中的一个正数与之对应，故是 A 到 B 上的映射，故选 C.

6. **解析**：由图可知 $f(2)=0$，$f(0)=4$，$f(4)=2$，因此 $f\{f[f(2)]\}=f[f(0)]=f(4)=2$. 设 AB 段所对应的函数解析式为 $y=ax+b(0\leqslant x\leqslant2)$，将 $(0,4)$ 与 $(2,0)$ 代入 $y=ax+b$，得 $\begin{cases}b=4,\\2a+b=0,\end{cases}$ 所以 $\begin{cases}b=4,\\a=-2.\end{cases}$ 所以 $y=-2x+4(0\leqslant x\leqslant2)$. 同理，可得 BC（不包括点 B）段所对应的函数解析式为 $y=x-2(2<x\leqslant6)$. 所以函数 $f(x)$ 的解析式为 $f(x)=\begin{cases}-2x+4,0\leqslant x\leqslant2,\\x-2,2<x\leqslant6.\end{cases}$

答案：2　$f(x)=\begin{cases}-2x+4,0\leqslant x\leqslant2,\\x-2,2<x\leqslant6\end{cases}$

7. **解析**：依题意知 $f(0)=3\times0+2=2$，则 $f[f(0)]=f(2)=2^2-2a=a$，

求得 $a=\frac{4}{3}$.

答案：$\frac{4}{3}$

8. **解析**：设 $f(x)=t$，∴$f(t)=2$，当 $t\in[-1,1]$ 时，满足 $f(t)=2$，此时 $-1\leqslant f(x)\leqslant1$，无解，当 $t=2$ 时，满足 $f(t)=2$，此时 $f(x)=2$，即 $-1\leqslant x\leqslant1$ 或 $x=2$.

答案：$\{2\}\cup[-1,1]$

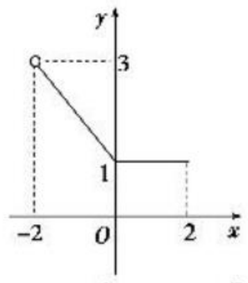
9. **解**：(1)当 $0\leqslant x\leqslant2$ 时，

$f(x)=1+\frac{x-x}{2}=1$，

当 $-2<x<0$ 时，$f(x)=1+\frac{-x-x}{2}=1-x$.

∴$f(x)=\begin{cases}1,0\leqslant x\leqslant2,\\1-x,-2<x<0.\end{cases}$

(2)函数 $f(x)$ 的图象如图所示：



(3)由(2)知，$f(x)$ 在 $(-2,2]$ 上的值域为 $[1,3)$.

10. **解**：(1)由题意得，车费 $f(x)$ 关于路程 x 的函数为

$f(x)=\begin{cases}8,0<x\leqslant2,\\8+1.9(x-2),2<x\leqslant10,\\8+1.9\times8+2.85(x-10),10<x\leqslant60\end{cases}$

$=\begin{cases}8,0<x\leqslant2,\\4.2+1.9x,2<x\leqslant10,\\2.85x-5.3,10<x\leqslant60.\end{cases}$

(2)只乘一辆车的车费为

$f(16)=2.85\times16-5.3=40.3$(元)；

换乘 2 辆车的车费为

$2f(8)=2\times(4.2+1.9\times8)=38.8$(元).

∵$40.3>38.8$，

∴该乘客换乘比只乘一辆车更省钱.

素养提升

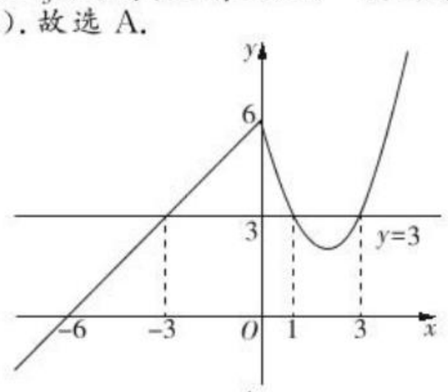
素养培优提能

1. 选 B　根据题意，知这列火车从静止开始匀加速行驶，所以排除 A，D，然后匀速行驶一段时间后又停止了一段时间，排除 C，故选 B.

2. 选 B　∵$D(x)\in\{0,1\}$，∴$D(x)$ 为有理数，

∴$D[D(x)]=1$. 故选 B.

3. 选 A　画出函数 $f(x)$ 的图象如图所示，令 $f(x)=f(1)$，得 $x=-3,1,3$，所以当 $f(x)>f(1)$ 时，必有 $x\in(-3,1)\cup(3,+\infty)$. 故选 A.



4. 选 B　$\begin{cases}f(2)+2f\left(\frac{1}{2}\right)=6,①\\f\left(\frac{1}{2}\right)+2f(2)=\frac{3}{2},②\end{cases}$

①－②×2 得 $-3f(2)=3$，

∴$f(2)=-1$，故选 B.

5. 选 D　因为函数 $f(x)$ 满足 $f(a+b)=\frac{f(a)+f(b)}{1-f(a)f(b)}$，所以 $f(4)=f(2+2)=\frac{f(2)+f(2)}{1-f(2)f(2)}=\frac{4}{3}$，所以 $f(7)=f(4+3)=\frac{f(4)+f(3)}{1-f(4)f(3)}=3$，故选 D.

6. **解析**：$f(a)+f(1)=0$，∴$f(a)=-f(1)=-2$，当 $a>0$ 时，$2a=-2$，∴$a=-1$，舍去，当 $a\leqslant0$ 时，$a+1=-2$，∴$a=-3$.

答案：-3

7. **解析**：设 $t=2x-1$，∴$x=\frac{t+1}{2}$. ∵$x>0$，

∴$t>-1$，

∴$f(t)=4\left(\frac{t+1}{2}\right)^2=t^2+2t+1$，

∴$f(x)=x^2+2x+1(x>-1)$.

答案：$x^2+2x+1(x>-1)$

8. **解析**：由题意 $f(2)=f(1+1)=3f(1)=6$，

∴$f(3)=f(2+1)=3f(2)=18$.

答案：18

9. **解**：当点 P 在 AB 上运动时，$y=x$；

当点 P 在 BC 上运动时，

$y=\sqrt{1+(x-1)^2}$，

当点 P 在 CD 上运动时，

$y=\sqrt{1+(3-x)^2}$，

当点 P 在 DA 上运动时，$y=4-x$，

∴$y=\begin{cases}x,0\leqslant x\leqslant1,\\\sqrt{1+(x-1)^2},1<x\leqslant2,\\\sqrt{1+(3-x)^2},2<x\leqslant3,\\4-x,3<x\leqslant4.\end{cases}$

∴$f\left(\frac{5}{2}\right)=\sqrt{1+\left(3-\frac{5}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{5}}{2}$.

10. **解**：(1)当 $1\leqslant x<2$ 时，$x-1\geqslant0$，$x-2<0$，

∴$g(x)=\frac{6-1}{2}=2.5$.

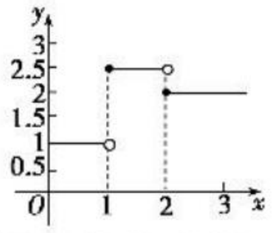
(2)当 $x<1$ 时，$x-1<0$，$x-2<0$，

∴$g(x)=\frac{3-1}{2}=1$.

当 $x\geqslant2$ 时，$x-1>0$，$x-2\geqslant0$，

∴$g(x)=\frac{6-2}{2}=2$.

故 $y=g(x)=\begin{cases}1,x<1,\\2.5,1\leqslant x<2,\\2,x\geqslant2.\end{cases}$ 其图象如图.



(3)∵$g(x)>0$，∴$f[g(x)]=2$，$x\in\mathbf{R}$.

当 $x<0$ 时，$g[f(x)]=g(1)=2.5$；

当 $x\geqslant0$ 时，$g[f(x)]=g(2)=2$.

所以，方程 $x^{f[g(x)]}=2g[f(x)]$，

即 $x^2=\begin{cases}5,x<0,\\4,x\geqslant0,\end{cases}$

解得 $x=-\sqrt{5}$ 或 $x=2$.

阶段质量评估 2

1. 选 D　函数 $y=x|x|=\begin{cases}x^2,x\geqslant0,\\-x^2,x<0,\end{cases}$ 故选 D.

2. 选 B　由 $-2x^3\geqslant0$ 解得，$x\leqslant0$，

∴$y=\sqrt{-2x^3}$ 的定义域为 $(-\infty,0]$.

D 中函数定义域为 $(-\infty,0)$，排除 D；

A、C 中的函数与 $y=\sqrt{-2x^3}$ 的对应关系不同，排除 A、C，故选 B.

3. 选 A　当 $n<1\,000$ 时，有 $f(n)=f(n+7)$，

∴$f(90)=f(97)=f(104)=\cdots=f(1\,000)=1\,000-3=997$，故选 A.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

4. 选 D　由 $\begin{cases}x+2>0,\\ x-\frac{3}{2}\neq 0,\end{cases}$

解得 $x>-2$ 且 $x\neq\frac{3}{2}$. 故选 D.

5. 选 C　当 $a\leqslant -1$ 时，$-a-4-11=0$，解得 $a=-15$；当 $a>-1$ 时，$a^2-5-11=0$，解得 $a=4$，$\therefore a=-15$ 或 $a=4$. 故选 C.

6. 选 D　对于 $f(x)$，当 $-1<x<0$ 时，$f(x)=2x+2\in(0,2)$；当 $0\leqslant x<2$ 时，$f(x)=-\frac{1}{2}x\in(-1,0]$；当 $x\geqslant 2$ 时，$f(x)=3$，因此函数 $f(x)$ 的值域为 $(-1,2)\cup\{3\}$. 故选 D.

7. **解析**：由 $f(2)=3$，得 $2a-1=3$，$\therefore a=2$.
$\therefore$ 从集合 A 到 B 的映射确定函数 $f(x)=2x-1$，$\therefore f(3)=2\times 3-1=5$.
答案：5

8. **解析**：由 $-1\leqslant 2x-\frac{3}{2}<2$，

解得 $\frac{1}{4}\leqslant x<\frac{7}{4}$，

$\therefore g(x)$ 的定义域为 $\left[\frac{1}{4},\frac{7}{4}\right)$.

答案：$\left[\frac{1}{4},\frac{7}{4}\right)$

9. **解析**：令 $2x+1=t$，$\therefore x=\frac{t-1}{2}$，

$\therefore f(t)=\left(\frac{t-1}{2}\right)^2+\frac{t-1}{2}=\frac{1}{4}t^2-\frac{1}{4}$，

$\therefore f(x)=\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{4}$.

答案：$\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{4}$

10. **解析**：$f(8)=f(2\times 4)=f(2)+f(4)=f(2)+f(2)+f(2)=3f(2)$，$\therefore f(2)=1$，又 $f(2)=2f(\sqrt{2})$，

$\therefore f(\sqrt{2})=\frac{1}{2}$.

答案：$\frac{1}{2}$

11. **解**：(1)由 $\begin{cases}2-3x\geqslant 0,\\ 2x-1\neq 0,\end{cases}$

得 $x\leqslant\frac{2}{3}$ 且 $x\neq\frac{1}{2}$.

$\therefore$ 函数的定义域是

$\left\{x\,\middle|\, x\leqslant\frac{2}{3}\text{且 }x\neq\frac{1}{2}\right\}$.

(2)由 $\begin{cases}6+4x\geqslant 0,\\ 6-4x>0,\\ x+|x|\neq 0,\end{cases}$ 得 $\begin{cases}x\geqslant-\frac{3}{2},\\ x<\frac{3}{2},\\ x>0,\end{cases}$

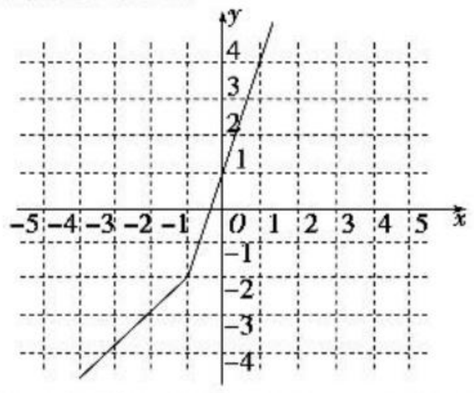
$\therefore 0<x<\frac{3}{2}$.

$\therefore$ 函数的定义域是 $\left(0,\frac{3}{2}\right)$.

12. **解**：(1)设 $f(x)=ax^2+bx+c(a\neq 0)$，
$\because f(0)=1$，$\therefore c=1$.
由 $f(x+1)-f(x)=2x$，得
$a(x+1)^2+b(x+1)+1-(ax^2+bx+1)=2x$，
即 $2ax+a+b=2x$，
$\therefore\begin{cases}2a=2,\\ a+b=0,\end{cases}$ $\therefore a=1,b=-1$，
$\therefore f(x)=x^2-x+1$.
(2)由(1)知，$y=x^2-x+1=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}$，$\because$ 此二次函数开口向上，对称轴为 $x=\frac{1}{2}$，
$\therefore$ 当 $x=-1$ 时，$y_{max}=3$；
当 $x=\frac{1}{2}$ 时，$y_{min}=\frac{3}{4}$.
$\therefore$ 函数 $y=f(x)$ 在区间 $[-1,1]$ 上的值域为 $\left[\frac{3}{4},3\right]$.

13. **解**：(1)依题意有 $t=\frac{\sqrt{x^2+9}}{3}+\frac{12-x}{5}$.
又 $x\geqslant 0$ 且 $12-x\geqslant 0$，$\therefore 0\leqslant x\leqslant 12$.
于是，$t=\frac{\sqrt{x^2+9}}{3}-\frac{x}{5}+\frac{12}{5}(0\leqslant x\leqslant 12)$.
(2)由(1)知，当 $x=4$ 时，$t=\frac{5}{3}+\frac{8}{5}\approx 3.3$(h)，
$\therefore$ 从小岛到城镇要 3.3 h.

14. **解**：(1)当 $a=2$ 时，$f(x)=|x+1|+2x=\begin{cases}3x+1,x\geqslant -1,\\ x-1,x<-1,\end{cases}$
其图象如图所示.



(2)由图可知，在 $[-3,6]$ 上函数分为 $[-3,-1)$，$[-1,6]$ 两段，当 $x=-3$ 时，$f(-3)=-4$，当 $x=6$ 时，$f(6)=19$.
由图象的大致趋势可得，此函数在 $[-3,6]$ 上的值域为 $[-4,19]$.

1.3　函数的基本性质

1.3.1　单调性与最大(小)值

第 10 课时　函数的单调性

题点知识巩固

1. 选 D　由单调性定义可知，不能用特殊值代替一般值. 故选 D.

2. 选 A　B 在 **R** 上为减函数；C 在 $(-\infty,0)$ 上和 $(0,+\infty)$ 上为减函数；D 在 $(-\infty,0)$ 上为增函数，在 $(0,+\infty)$ 上为减函数. 故选 A.

3. 选 B　因为 $x_1<0$，$x_2>0$，所以 $-x_1>-x_2$，
又 $y=f(x)$ 是 **R** 上的减函数，所以 $f(-x_1)<f(-x_2)$. 故选 B.

4. **解**：$f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增.
证明如下：任取 $x_1>x_2>0$，
$f(x_1)-f(x_2)=\frac{x_1-1}{x_1+1}-\frac{x_2-1}{x_2+1}=\frac{2(x_1-x_2)}{(x_1+1)(x_2+1)}$，
由 $x_1>x_2>0$ 知，$x_1+1>0$，$x_2+1>0$，$x_1-x_2>0$，
故 $f(x_1)-f(x_2)>0$，即 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增.

5. 选 C　画出函数 $y=-x^2$ 的图象，由图象可知函数 $y=-x^2$ 的单调减区间为 $(0,+\infty)$. 故选 C.

6. 选 C　$y=x^2+x+1=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}$，其对称轴为 $x=-\frac{1}{2}$，在对称轴左侧单调递减，$\therefore$ 当 $x\in\left(-\infty,-\frac{1}{2}\right]$ 时单调递减. 故选 C.

7. **解析**：结合函数单调递增函数的概念及单调区间的概念可知，此函数的单调递增区间是 $[-1.5,3]$，$[5,6]$.
答案：$[-1.5,3]$，$[5,6]$

8. **解析**：由条件知 $x=-2$ 是函数 $f(x)$ 图象的对称轴，所以 $\frac{m}{4}=-2$，$m=-8$，则 $f(1)=13$.
答案：13

9. **解**：设 $1<x_1<x_2$，则 $x_1x_2>1$.
因为函数 $f(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上是增函数，
所以 $f(x_1)-f(x_2)=x_1-\frac{a}{x_1}+\frac{a}{2}-\left(x_2-\frac{a}{x_2}+\frac{a}{2}\right)$
$=(x_1-x_2)\left(1+\frac{a}{x_1x_2}\right)<0$.
因为 $x_1-x_2<0$，所以 $1+\frac{a}{x_1x_2}>0$，
即 $a>-x_1x_2$.
因为 $x_1x_2>1$，即 $-x_1x_2<-1$，所以 $a\geqslant -1$，
故实数 a 的取值范围是 $[-1,+\infty)$.

提能达标过关

1. 选 C　若一个函数出现两个或两个以上的单调区间时，不能用“∪”连接. 如 $0<5$，但 $f(0)>f(5)$，故选 C.

2. 选 C　$\because x_1$，$x_2\in[a,b]$ 且 $x_1<x_2$，$\therefore a\leqslant x_1<x_2\leqslant b$. 又 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上为增函数，
$\therefore f(a)\leqslant f(x_1)<f(x_2)\leqslant f(b)$，故 C 错误. 故选 C.

3. 选 B　设 $t=x^2-2x-3$，由 $t\geqslant 0$，得 $x\leqslant -1$ 或 $x\geqslant 3$，所以函数的定义域为 $(-\infty,-1]\cup[3,+\infty)$. 当 $x\geqslant 3$ 时，$t=x^2-2x-3$ 是增函数，$\therefore f(x)=\sqrt{x^2-2x-3}$ 是增函数，故选 B.

4. 选 D　$\because f(x)=-x^2+2ax$ 在 $[1,2]$ 上是减函数，
$\therefore$ 对称轴 $x=a$ 应满足 $a\leqslant 1$.
$\because g(x)=\frac{a}{x+1}$ 在区间 $[1,2]$ 上是减函数，
$\therefore a>0$.
$\therefore 0<a\leqslant 1$. 故选 D.

5. 选 C　由题可知 $f(x)$ 在 $[-2,2]$ 上单调递增，

$\therefore\begin{cases}-2\leqslant a-1\leqslant 2,\\ -2\leqslant 2a-3\leqslant 2,\\ a-1>2a-3,\end{cases}$ $\therefore\begin{cases}-1\leqslant a\leqslant 3,\\ \frac{1}{2}\leqslant a\leqslant\frac{5}{2},\\ a<2,\end{cases}$

$\therefore\frac{1}{2}\leqslant a<2$，故选 C.

6. **解析**：由 $(x_1-x_2)[f(x_1)-f(x_2)]>0$，可知函数 $f(x)$ 为增函数. 又 $-3>-\pi$，所以 $f(-3)>f(-\pi)$.
答案：$f(-3)>f(-\pi)$

7. **解析**：因为函数 $y=f(x)$ 在 **R** 上为增函数，且 $f(2m)>f(-m+9)$，所以 $2m>-m+9$，即 $m>3$.
答案：$(3,+\infty)$

8. **解析**：$\because f(x)=\frac{ax-1}{x}=a-\frac{1}{x}$，
$\therefore f(x)$ 在 $\left[\frac{1}{2},2\right]$ 上为增函数.
$\therefore\begin{cases}a-2=\frac{1}{2},\\ a-\frac{1}{2}=2.\end{cases}$ $\therefore a=\frac{5}{2}$.
答案：$\frac{5}{2}$

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

9. **解**：(1)由 $f\left(\frac{1}{2}\right)=1-2a=3$，解得 $a=-1$.

(2)由(1)知，$f(x)=2x+\frac{1}{x}$.

$f(x)$在$[1,+\infty)$上是增函数.

证明如下：设 x_1,x_2 是$[1,+\infty)$上任意两个实数，且 $x_1<x_2$，

则 $f(x_1)-f(x_2)=2x_1+\frac{1}{x_1}-2x_2-\frac{1}{x_2}$

$=2(x_1-x_2)+\frac{x_2-x_1}{x_1x_2}$

$=(x_1-x_2)\left(2-\frac{1}{x_1x_2}\right)$.

$\because 1\leqslant x_1<x_2$，$\therefore x_1-x_2<0$，$2-\frac{1}{x_1x_2}>0$，

$\therefore f(x_1)-f(x_2)<0$，

$\therefore f(x_1)<f(x_2)$，$\therefore f(x)$在$[1,+\infty)$上是增函数.

10. **解**：由题意得 $\begin{cases}2b-1>0,\\2-b\geqslant 0,\\b-1\geqslant 0,\end{cases}$

即 $\begin{cases}b>\frac{1}{2},\\b\leqslant 2,\\b\geqslant 1.\end{cases}$ $\therefore 1\leqslant b\leqslant 2$.

即实数 b 的取值范围是 $1\leqslant b\leqslant 2$.

第 11 课时　函数的最大(小)值

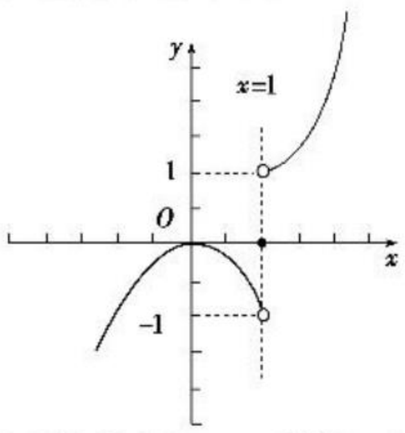
题点知识巩固

1. 选 C　观察图象可以知道，图象的最高点坐标是(0,3)，从而其最大值是3；另外从图象看，无最低点，即该函数不存在最小值. 故选 C.

2. **解析**：由题可知 $f(x-1)=\begin{cases}1,x>1,\\0,x=1,\\-1,x<1,\end{cases}$

$\therefore g(x)=\begin{cases}x^2,x>1,\\0,x=1,\\-x^2,x<1,\end{cases}$

$\therefore g(x)$的图象如图所示：



$\therefore g(x)$的值域为$(-\infty,0]\cup(1,+\infty)$.

答案：$(-\infty,0]\cup(1,+\infty)$

3. 选 C　$\because$ 函数 $f(x)=\frac{2}{x-1}$在$[2,6]$上是单调递减函数，$\therefore f(x)_{\max}=f(2)=\frac{2}{2-1}=2$. 故选 C.

4. 选 A　$\because$ 当 $x\geqslant\frac{1}{2}$ 时，$y=x+\sqrt{2x-1}$ 为增函数，

$\therefore$ 函数 $y=x+\sqrt{2x-1}$ 有最小值 $\frac{1}{2}$，无最大值. 故选 A.

5. **解**：(1)函数 $f(x)$在$[3,5]$上是增函数，证明如下：设 $3\leqslant x_1<x_2\leqslant 5$，

$f(x_1)-f(x_2)=\frac{2x_1-1}{x_1+1}-\frac{2x_2-1}{x_2+1}$

$=\frac{3(x_1-x_2)}{(x_1+1)(x_2+1)}$，

$\because 3\leqslant x_1<x_2\leqslant 5$，

$\therefore x_1-x_2<0$，$x_1+1>0$，$x_2+1>0$，

$\therefore f(x_1)-f(x_2)<0$，

$\therefore f(x_1)<f(x_2)$，

$\therefore$ 函数 $f(x)=\frac{2x-1}{x+1}$ 在$[3,5]$上是增函数.

(2)由(1)知，当 $x=3$ 时，$f(x)_{\min}=\frac{5}{4}$；

当 $x=5$ 时，$f(x)_{\max}=\frac{3}{2}$.

6. 选 C　$\because y=x^2+2x-1=(x+1)^2-2$ 在$[0,3]$上是增函数，$\therefore$ 当 $x=0$ 时，$y_{\min}=-1$，故选 C.

7. **解**：$\because f(x)=x^2-2ax+a+1=(x-a)^2+a-a^2+1$，

$\therefore f(x)$的图象是开口向上，对称轴为 $x=a$ 的抛物线.

①当 $0<a<4$ 时，$f(x)$在$[-4,a]$上是减函数，在$[a,4]$上是增函数，

$\therefore$ 最大值为 $f(-4)=9a+17$；

②当 $a\geqslant 4$ 时，$f(x)$在$[-4,4]$上是减函数，

$\therefore f(x)$的最大值为 $f(-4)=9a+17$.

综上知，$f(x)$在$[-4,4]$上的最大值为 $9a+17$.

8. 选 C　设公司在甲地销售 x 辆，则在乙地销售$(15-x)$辆，公司获利为 $L=-x^2+21x+2(15-x)=-x^2+19x+30=-\left(x-\frac{19}{2}\right)^2+30+\frac{19^2}{4}$，

$\therefore$ 当 $x=9$ 或 10 时，L 最大为 120 万元. 故选 C.

9. **解析**：设矩形花园的宽为 y m，

则 $\frac{x}{40}=\frac{40-y}{40}$，

即 $y=40-x$，矩形花园的面积 $S=x(40-x)=-x^2+40x=-(x-20)^2+400$，当 $x=20$ 时，面积最大.

答案：20

提能达标过关

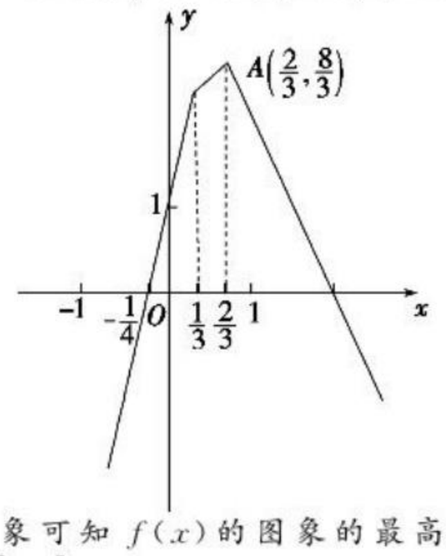
1. 选 B　$y=\sqrt{(3-x)(x+6)}=\sqrt{-x^2-3x+18}=\sqrt{-\left(x+\frac{3}{2}\right)^2+\frac{81}{4}}$，$\therefore$ 当 $x=-\frac{3}{2}$ 时，$y_{\max}=\frac{9}{2}$，故选 B.

2. 选 D　$\because f(x)$是区间$[a,b]$上的减函数，

$\therefore f(x)$在$[a,b]$上有最大值 $f(a)$，最小值 $f(b)$.

又 $c<0$，$\therefore cf(x)$在$[a,b]$上有最小值 $cf(a)$. 故选 D.

3. 选 A　依题意 $f(x)$的图象如图所示，



由图象可知 $f(x)$的图象的最高点为 $A\left(\frac{2}{3},\frac{8}{3}\right)$，

$\therefore f(x)$的最大值为 $\frac{8}{3}$. 故选 A.

4. 选 B　$\because f(x)=\frac{1}{1-x(1-x)}=\frac{1}{x^2-x+1}=\frac{1}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}$，而 $\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\geqslant\frac{3}{4}$，$\therefore 0<f(x)\leqslant\frac{4}{3}$. 故选 B.

5. 选 B　由题可知 $f(x)$关于 $x=-\frac{1}{2}$ 对称，

$\therefore -\frac{a}{2}=-\frac{1}{2}$，$\therefore a=1$，

又 $f(x)$的图象过坐标原点，

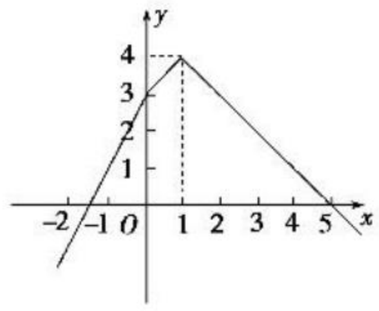
$\therefore f(0)=b=0$，

$\therefore f(x)=x^2+x$，$\because x\in[-1,3]$，

$\therefore$ 当 $x=-\frac{1}{2}$ 时，$f(x)_{\min}=-\frac{1}{4}$；

当 $x=3$ 时，$f(x)_{\max}=12$，故 $f(x)$的值域为 $\left[-\frac{1}{4},12\right]$，故选 B.

6. **解析**：作出函数的图象如图所示，由图象知，函数的最大值为 4.



答案：4

7. **解析**：$\because f(x)=\frac{1}{x}-x$ 在 $\left(0,\frac{1}{4}\right]$ 上是减函数，

$\therefore f(x)_{\min}=f\left(\frac{1}{4}\right)=\frac{15}{4}$.

答案：$\frac{15}{4}$

8. **解析**：依题意得 $-\frac{-m}{2\times 2}=-2$，

$\therefore m=-8$.

$\therefore f(x)=2x^2+8x+5$ 的最小值为 $f(-2)=2\times(-2)^2+8\times(-2)+5=-3$.

答案：-3

9. **解**：由题意知笼舍的宽为 x m，

则笼舍的长为$(30-3x)$m，每间笼舍的面积为 $y=\frac{1}{2}x(30-3x)=-\frac{3}{2}(x-5)^2+37.5$，$x\in(0,10)$.

当 $x=5$ 时，y 取得最大值 37.5，

即每间笼舍的宽度为 5 m 时，每间笼舍面积 y 达到最大，最大面积为 37.5 m^2.

10. **解**：$\because f(x)=(x-a)^2-a^2-1$，对称轴为 $x=a$.

当 $a\leqslant 0$ 时，$f(x)$在$[0,2]$上是增函数，

$\therefore f(x)_{\min}=f(0)=-1$，$f(x)_{\max}=f(2)=3-4a$；

当 $a\geqslant 2$ 时，$f(x)$在$[0,2]$上是减函数，

$\therefore f(x)_{\min}=f(2)=3-4a$，$f(x)_{\max}=f(0)=-1$；

当 $0<a<2$ 时，$f(x)$在$[0,a]$上是减函数，在$[a,2]$上是增函数，

$\therefore f(x)_{\min}=f(a)=-a^2-1$.

又当 $0<a\leqslant 1$ 时，$f(2)\geqslant f(0)$，

$\therefore f(x)_{\max}=f(2)=3-4a$；

当 $1<a\leqslant 2$ 时，$f(2)<f(0)$，

$\therefore f(x)_{\max}=f(0)=-1$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

综上所述，$f(x)_{\max}=\begin{cases}3-4a,a\leqslant 1,\\-1,a>1,\end{cases}$

$f(x)_{\min}=\begin{cases}-1,a\leqslant 0,\\-a^2-1,0<a<2,\\3-4a,a\geqslant 2.\end{cases}$

第 12 课时　函数单调性的应用

题点知识巩固

1. 选 A　$\because y=-(x+1)^2+1$，

$\therefore y=-x^2-2x$ 在 $(-\infty,-1]$ 上是增函数，

在 $[-1,+\infty)$ 上是减函数.

$\because m<-2$，

$\therefore m-1<m<m+1<-1$，

$\therefore f(m-1)<f(m)<f(m+1)$，

即 $y_1<y_2<y_3$. 故选 A.

2. 选 D　$\because f(x)$ 的图象关于直线 $x=1$ 对称，

$\therefore f\left(-\frac{1}{2}\right)=f\left(\frac{5}{2}\right)$.

由题可知 $f(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递减，

$\because 1<2<\frac{5}{2}<e$，

$\therefore f(2)>f\left(\frac{5}{2}\right)>f(e)$，

$\therefore b>a>c$，故选 D.

3. 选 C　由题意可得 $0<x_1<x_2<x_3\leqslant 2$，

而 $\frac{f(x)}{x}=\frac{\sqrt{4-x^2}}{x}=\sqrt{\frac{4}{x^2}-1}$，$\therefore \frac{f(x)}{x}$ 在 $(0,2]$ 上单调递减，$\therefore \frac{f(x_3)}{x_3}<\frac{f(x_2)}{x_2}<\frac{f(x_1)}{x_1}$，故选 C.

4. 选 C　$\because f(x)=-(x^2-4x+4)+a+4=-(x-2)^2+4+a$.

$\therefore$ 函数 $f(x)$ 图象的对称轴为 $x=2$，

$\therefore f(x)$ 在 $[0,1]$ 上单调递增.

又 $\because f(x)_{\min}=-2$，

$\therefore f(0)=-2$，即 $a=-2$.

$\therefore f(x)_{\max}=f(1)=-1+4-2=1$. 故选 C.

5. **解**：令 $\sqrt{x+1}=t(t\geqslant 0)$，则 $x=t^2-1$，

所以 $y=t^2-t-1(t\geqslant 0)$.

又 $y=t^2-t-1(t\geqslant 0)$ 的图象是对称轴为直线 $t=\frac{1}{2}$，开口向上的抛物线的一部分，

所以 $y_{\min}=\left(\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{2}-1=-\frac{5}{4}$，无最大值.

故函数 $f(x)$ 的最小值为 $-\frac{5}{4}$，无最大值.

6. **解析**：因为二次函数 $f(x)=x^2-2ax+1$ 的图象是开口向上的抛物线，其对称轴为 $x=a$，且在 $(-\infty,2]$ 上是减函数，所以 $(-\infty,2]\subseteq(-\infty,a]$，故 $a\geqslant 2$.

答案：$[2,+\infty)$

7. **解析**：依题意，问题可转化为当 $x\in[-1,+\infty)$ 时，$f(x)_{\min}\geqslant 0$. 因为 $f(x)=2x+3m+1$ 在 $[-1,+\infty)$ 上单调递增，所以 $f(x)_{\min}=f(-1)=3m-1$，则 $3m-1\geqslant 0$，解得 $m\geqslant\frac{1}{3}$，所以实数 m 的取值范围是 $\left[\frac{1}{3},+\infty\right)$.

答案：$\left[\frac{1}{3},+\infty\right)$

8. **解**：(1)由 $f(xy)=f(x)+f(y)$，知 $f(9)=2f(3)=-2$，$f(3)=2f(\sqrt{3})=-1$，$f(\sqrt{3})=-\frac{1}{2}$.

(2)由 $f(xy)=f(x)+f(y)$，

得 $f(xy)-f(x)=f(y)$.

设 $x_1>x_2>0$，则 $\frac{x_1}{x_2}>1$，故 $f\left(\frac{x_1}{x_2}\right)<0$，

即 $f(x_1)-f(x_2)=f\left(\frac{x_1}{x_2}\right)<0$，

$\therefore f(x_1)<f(x_2)$，

$\therefore f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上为减函数.

(3)$f(6x)<f(x-1)-2$，

即 $f(6x)<f(x-1)+f(9)$，

$\therefore f(6x)<f(9x-9)$，

$\therefore \begin{cases}6x>9x-9,\\6x>0,\\x-1>0,\end{cases}$ $\therefore 1<x<3$.

$\therefore$ 原不等式的解集为 $\{x|1<x<3\}$.

提能达标过关

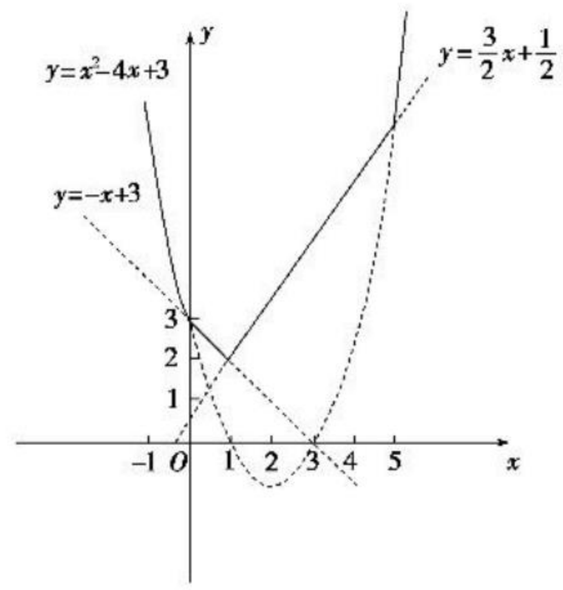
1. 选 A　$\because f(x)$ 是 **R** 上的减函数，

又 $\pi>3$.

$\therefore f(\pi)<f(3)$. 故选 A.

2. 选 A　函数的单调性的定义是指定义在区间 I 上的任意两个值 x_1,x_2，强调的是任意，从而①不对；②$y=x^2$ 在 $[0,+\infty)$ 上是增函数，在 $(-\infty,0)$ 上是减函数，从而 $y=x^2$ 在整个定义域上不具有单调性；③$y=-\frac{1}{x}$ 在整个定义域内不是单调递增函数. 如 $-3<5$，而 $f(-3)>f(5)$；④$y=\frac{1}{x}$ 的单调递减区间不是 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$，而是 $(-\infty,0)$ 和 $(0,+\infty)$，注意写法. 故选 A.

3. 选 A　画出函数 $y=-x+3$，$y=\frac{3}{2}x+\frac{1}{2}$，$y=x^2-4x+3$ 在同一坐标系中的图象，如图所示：



$f(x)$ 的图象为图中实线部分，

$\therefore$ 当 $x=1$ 时，$f(x)$ 取最小值 2. 故选 A.

4. 选 A　由对任意的 $x_1\neq x_2$，都有 $\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}<0$，可知 $f(x)$ 为减函数.

$\therefore \begin{cases}3a-1<0,\\-a<0,\\3a-1+4a\geqslant -a,\end{cases}$ $\therefore \frac{1}{8}\leqslant a<\frac{1}{3}$，故选 A.

5. 选 D　依题意有 $x>8(x-2)>0$，解得 $2<x<\frac{16}{7}$. 故选 D.

6. **解析**：由题可知 $-\frac{a}{2}\geqslant 3$，$\therefore a\leqslant -6$.

答案：$a\leqslant -6$

7. **解析**：$y=-(x-3)^2+18$，

$\because a<b<3$，

$\therefore$ 函数在区间 $[a,b]$ 上单调递增，

即 $-b^2+6b+9=9$，

得 $b=0$，$-a^2+6a+9=-7$，

得 $a=-2$（$a=8$ 舍去）.

答案：-2　0

8. **解析**：由 $4+3x-x^2\geqslant 0$，

解得 $-1\leqslant x\leqslant 4$.

又 $-x^2+3x+4=-\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{25}{4}$，

$\therefore f(x)$ 的单调递减区间是 $\left[\frac{3}{2},4\right]$.

答案：$\left[\frac{3}{2},4\right]$

9. **解**：(1)证明：$f(x)=\frac{2x-1}{x+1}=2-\frac{3}{x+1}$；

任取 $x_1>x_2>0$，则 $f(x_1)-f(x_2)=\frac{3}{x_2+1}-\frac{3}{x_1+1}=\frac{3(x_1-x_2)}{(x_1+1)(x_2+1)}$，

$\because x_1>x_2>0$，

$\therefore x_1-x_2>0$，$x_1+1>0$，$x_2+1>0$，

$\therefore \frac{3(x_1-x_2)}{(x_1+1)(x_2+1)}>0$，

$\therefore f(x_1)>f(x_2)$，

$\therefore f(x)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上是增函数.

(2)$\because f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上是增函数，

$\therefore f(x)$ 在区间 $[1,17]$ 上的最小值为 $f(1)=\frac{1}{2}$，最大值为 $f(17)=\frac{11}{6}$.

10. **解**：(1)$\because$ 当 $x,y\in(0,+\infty)$ 时，$f(xy)=f(x)+f(y)$，

$\therefore f(3)=f(1\times 3)=f(1)+f(3)$，

$\therefore f(1)=0$.

(2)$\because f(3)=1$，

$\therefore f(9)=f(3\times 3)=f(3)+f(3)=2$.

$\therefore f(x)+f(9)\leqslant f(x+8)$.

即 $f(9x)\leqslant f(x+8)$.

又 $\because f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上是增函数，

$\therefore \begin{cases}x>0,\\x+8>0,\\9x\leqslant x+8.\end{cases}$

$\therefore 0<x\leqslant 1$.

素养提升

素养培优提能

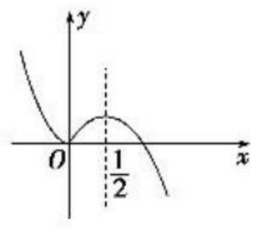
1. 选 B　$y=|x|(1-x)$

$=\begin{cases}x(1-x),x\geqslant 0,\\-x(1-x),x<0,\end{cases}$

$=\begin{cases}-x^2+x,x\geqslant 0,\\x^2-x,x<0,\end{cases}$

$=\begin{cases}-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4},x\geqslant 0,\\\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4},x<0.\end{cases}$

画出函数的大致图象如图所示.



由图易知原函数在 $\left[0,\frac{1}{2}\right]$ 上单调递增. 故选 B.

2. 选 A　由题意，当 $x>0$ 时，$f(x)$ 的最小值为 $f(1)=2$，当 $x\leqslant 0$ 时，$f(x)$ 的最小值为 $f(0)=a$. 若 $f(0)$ 是 $f(x)$ 的最小值，则 $a\leqslant 2$. 故选 A.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

3. 选 A　若 $x\in(-1,0]$，则 $x+1\in(0,1]$. 因为当 $x\in(0,1]$ 时，$f(x)=x^2-x$，所以 $f(x+1)=(x+1)^2-(x+1)=x^2+x$. 又 $f(x+1)=2f(x)$，则 $f(x)=\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}x=\frac{1}{2}\left(x+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{8}$，所以当 $x=-\frac{1}{2}$ 时，$f(x)$ 取得最小值 $-\frac{1}{8}$. 故选 A.

4. 选 C　因为二次函数 $f(x)=4x^2-kx-8$ 在区间 $(5,20)$ 上既没有最大值也没有最小值，所以函数 $f(x)=4x^2-kx-8$ 在区间 $(5,20)$ 上是单调函数. 易知二次函数 $f(x)=4x^2-kx-8$ 的图象的对称轴方程为 $x=\frac{k}{8}$，因此 $\frac{k}{8}\leqslant 5$ 或 $\frac{k}{8}\geqslant 20$，所以 $k\leqslant 40$ 或 $k\geqslant 160$. 故选 C.

5. 选 C　由已知得当 $-2\leqslant x\leqslant 1$ 时，$f(x)=x-2$，

当 $1<x\leqslant 2$ 时，$f(x)=x^3-2$.

因为 $f(x)=x^3-2$，$f(x)=x-2$ 在定义域内都为增函数，

且 $f(1)<f(2)$，

所以 $f(x)$ 的最大值为 $f(2)=2^3-2=6$. 故选 C.

6. **解析**：当 $x\geqslant 1$ 时，函数 $f(x)=\frac{1}{x}$ 为减函数，所以 $f(x)$ 在 $x=1$ 处取得最大值，为 $f(1)=1$；当 $x<1$ 时，易知函数 $f(x)=-x^2+2$ 在 $x=0$ 处取得最大值，为 $f(0)=2$. 故函数 $f(x)$ 的最大值为 2.

答案：2

7. **解析**：函数 $f(x)$ 的定义域为 $\left(-\infty,-\frac{1}{2}\right)\cup\left(-\frac{1}{2},+\infty\right)$，且

$$f(x)=\frac{x+1}{2x+1}=\frac{\frac{1}{2}(2x+1)+\frac{1}{2}}{2x+1}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2(2x+1)},$$

所以，函数 $f(x)$ 的单调递减区间为 $\left(-\infty,-\frac{1}{2}\right)$ 和 $\left(-\frac{1}{2},+\infty\right)$.

答案：$\left(-\infty,-\frac{1}{2}\right)$ 和 $\left(-\frac{1}{2},+\infty\right)$

8. **解析**：由 $g(x)=\frac{x^2+x+1}{x}=x+\frac{1}{x}+1$，易知 $g(x)$ 在 $\left[\frac{1}{2},1\right]$ 上单调递减，在 $(1,2]$ 上单调递增，则 $g(x)_{\min}=g(1)=3$. 于是 $f(x)$ 也在 $x=1$ 处取得最小值 3，则 $b=-2$，$c=4$，即 $f(x)=x^2-2x+4=(x-1)^2+3$，所以 $f(x)$ 在区间 $\left[\frac{1}{2},2\right]$ 上的最大值为 $f(2)=4$.

答案：4

9. **解**：(1)证明：任取 $x_1>x_2>0$，

则 $f(x_1)-f(x_2)=\frac{1}{a}-\frac{1}{x_1}-\frac{1}{a}+\frac{1}{x_2}=\frac{x_1-x_2}{x_1x_2}$，

$\because x_1>x_2>0$，

$\therefore x_1-x_2>0$，$x_1x_2>0$，

$\therefore f(x_1)-f(x_2)>0$，

即 $f(x_1)>f(x_2)$，

$\therefore f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上是增函数.

(2)由(1)可知，$f(x)$ 在 $\left[\frac{1}{2},2\right]$ 上为增函数，

$$\therefore\begin{cases}f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{a}-2=\frac{1}{2},\\ f(2)=\frac{1}{a}-\frac{1}{2}=2,\end{cases}$$

解得 $a=\frac{2}{5}$.

10. **解**：(1)证明：当 $a=-2$ 时，

$f(x)=\frac{x}{x+2}$.

任取 $x_1,x_2\in(-\infty,-2)$，且 $x_1<x_2$，

则 $f(x_1)-f(x_2)=\frac{x_1}{x_1+2}-\frac{x_2}{x_2+2}=\frac{2(x_1-x_2)}{(x_1+2)(x_2+2)}$.

因为 $(x_1+2)(x_2+2)>0$，$x_1-x_2<0$，

所以 $f(x_1)-f(x_2)<0$，即 $f(x_1)<f(x_2)$，

所以 $f(x)$ 在 $(-\infty,-2)$ 内单调递增.

(2)任取 $x_1,x_2\in(1,+\infty)$，且 $x_1<x_2$，

则 $f(x_1)-f(x_2)=\frac{x_1}{x_1-a}-\frac{x_2}{x_2-a}=\frac{a(x_2-x_1)}{(x_1-a)(x_2-a)}$.

因为 $a>0$，$x_2-x_1>0$，又由题意知 $f(x_1)-f(x_2)>0$，

所以 $(x_1-a)(x_2-a)>0$ 恒成立，所以 $a\leqslant 1$.

所以 $0<a\leqslant 1$.

所以 a 的取值范围为 $(0,1]$.

1.3.2　奇偶性

第13课时　函数的奇偶性

题点知识巩固

1. 选 B　函数 $f(x)=\sqrt{x^2+3}$ 的定义域为 $\mathbf{R}$，$f(-x)=\sqrt{(-x)^2+3}=\sqrt{x^2+3}=f(x)$，所以该函数是偶函数. 故选 B.

2. 选 D　$\because$ 函数 $f(x)=x^2(x<0)$ 的定义域为 $(-\infty,0)$，不关于原点对称，$\therefore$ 函数 $f(x)=x^2(x<0)$ 为非奇非偶函数. 故选 D.

3. 选 C　A、D 两项，函数均为偶函数，B 项中函数为非奇非偶函数，而 C 项中函数为奇函数. 故选 C.

4. **解**：(1) $f(x)$ 为偶函数. 因为 $x\in\mathbf{Q}$ 时，$-x\in\mathbf{Q}$，

所以 $f(-x)=1=f(x)$.

同理，x 为无理数时，$-x$ 也为无理数.

所以 $f(-x)=-1=f(x)$，所以 $f(x)$ 为偶函数.

(2)①当 $a=0$ 时，$f(x)$ 为偶函数.

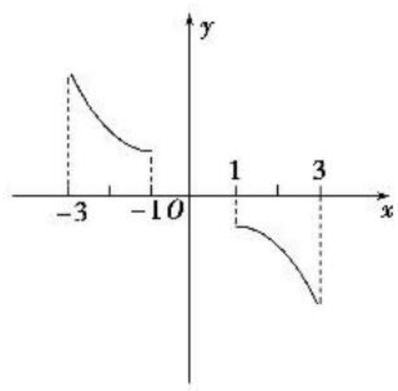
②当 $a\neq 0$ 时，因为对所有 $x\in\mathbf{R}$ 而言 $|x+a|\neq|-x+a|$.

所以 $f(x)$ 既不是奇函数又不是偶函数.

5. 选 C　$f(x)$ 的定义域为 $\{x\mid x\neq 0\}$，$f(-x)=-\frac{1}{x}+x=-f(x)$，$\therefore f(x)$ 为奇函数，故 $f(x)$ 的图象关于坐标原点对称，故选 C.

6. 选 D　因为 $-f(a)=f(-a)$，所以点 $(-a,-f(a))$ 一定在 $y=f(x)$ 的图象上，故选 D.

7. **解**：(1)$\because f(x)$ 是奇函数，$\therefore f(x)$ 的图象关于原点对称，根据对称性，作出 $f(x)$ 的图象如图所示.



(2)由(1)知，$f(1)>f(3)$.

8. 选 B　$\because f(x)$ 为 $\mathbf{R}$ 上的奇函数，$\therefore f(-x)=-f(x)$，$\therefore f(0)=-f(0)$，$\therefore f(0)=0$. 故选 B.

9. 选 C　依题意有 $\begin{cases}a-1+2a=0,\\ -\frac{b}{2a}=0,\end{cases}$

解得 $\begin{cases}a=\frac{1}{3},\\ b=0.\end{cases}$

$\therefore a+b=\frac{1}{3}$. 故选 C.

10. **解析**：显然 $f(x)$ 是奇函数，所以 $f(-1)=-f(1)=-3$.

答案：-3

提能达标过关

1. 选 B　$\because x\in(-a,a)$ 关于原点对称，且 $F(-x)=f(-x)+f(x)=F(x)$.

$\therefore F(x)$ 是偶函数. 故选 B.

2. 选 A　函数 $f(x)$ 的定义域为 $\left\{x\,\middle|\,x\neq-\frac{1}{2}\text{ 且 }x\neq a\right\}$.

又 $f(x)$ 为奇函数，定义域应关于原点对称，$\therefore a=\frac{1}{2}$. 故选 A.

3. 选 A　当 $x=0$ 时，$y=0$，排除 D；当 $x>0$ 时，$y>0$，排除 B，C，故选 A.

4. 选 A　依题意有 $F(a)=f(a)+3g(a)+5=b$，

$\therefore f(a)+3g(a)=b-5$.

$\therefore F(-a)=f(-a)+3g(-a)+5$

$=-[f(a)+3g(a)]+5$

$=-(b-5)+5$

$=-b+10$.

故选 A.

5. 选 C　$\because f(x)=(ax+1)(x-a)=ax^2+(1-a^2)x-a$ 为偶函数，$\therefore f(-x)=f(x)$，即 $f(-x)=ax^2-(1-a^2)x-a=ax^2+(1-a^2)x-a$，$\therefore 2(1-a^2)x=0$.

$\because x$ 不恒为 0，$\therefore 1-a^2=0$. $\therefore a=\pm 1$.

当 $a=1$ 时，$f(x)=x^2-1$，在 $x\in(0,+\infty)$ 上单调递增，满足题意；当 $a=-1$ 时，$f(x)=1-x^2$，在 $x\in(0,+\infty)$ 上单调递减，不符合题意，故 $a=1$ 即为所求. 故选 C.

6. **解析**：由题意知 $f(-2)=-f(2)=-(2^2+1)=-5$，

又 $f(0)=0$，$\therefore f(-2)+f(0)=-5$.

答案：-5

7. **解析**：依题意得 $f(7.5)=f(5.5+2)=-f(5.5)=-f(3.5+2)=f(3.5)=f(1.5+2)=-f(1.5)=-f(-0.5+2)=f(-0.5)=-f(0.5)=-0.5$.

答案：-0.5

8. **解析**：由题意，知函数 $y=f(x)$ 的图象关于 y 轴对称，所以其图象与 x 轴的四个交点也两两成对关于 y 轴对称. 即方程 $f(x)=0$ 的实根两两互为相反数，故其所有实根之和是 0.

答案：0

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

9. **解**：(1) $f(x)$ 的定义域是 $(-\infty,1)\cup(1,+\infty)$，不关于原点对称，$\therefore f(x)$ 是非奇非偶函数.

(2) $f(x)$ 的定义域是 $\{-1,1\}$，关于原点对称，且 $f(-1)=f(1)=0$，$\therefore f(-1)=f(1)$，且 $f(-1)=-f(1)$，

$\therefore$ 函数 $f(x)$ 既是奇函数又是偶函数.

(3) $f(x)$ 的定义域为 **R**，关于原点对称，

又 $f(-x)=\dfrac{3(-x)}{(-x)^2+3}=-\dfrac{3x}{x^2+3}=-f(x)$，

$\therefore f(x)$ 是奇函数.

(4) $f(x)$ 的定义域为 **R**.

又 $f(-x)=|-x+1|+|-x-1|=|x-1|+|x+1|=f(x)$，

$\therefore f(x)$ 是偶函数.

(5) 若 $x>0$，则 $-x<0$，

$f(-x)=-(-x)^2-2(-x)-3=-x^2+2x-3$；

若 $x=0$，则 $-x=0$，$f(-x)=f(0)=0$；

若 $x<0$，则 $-x>0$，$f(-x)=(-x)^2-2(-x)+3=x^2+2x+3$.

综上所述，

$$f(-x)=\begin{cases}-x^2+2x-3,x>0,\\0,x=0,\\x^2+2x+3,x<0,\end{cases}$$

$\therefore f(-x)=-f(x)$，$\therefore f(x)$ 是奇函数.

10. **解**：(1) 令 $x=y=0$，

则 $f(0)=f(0)+f(0)$，

$\therefore f(0)=0$.

(2) 令 $y=-x$，

则 $f(0)=f(x)+f(-x)$，

$\therefore 0=f(x)+f(-x)$，

$\therefore f(-x)=-f(x)$，$\therefore f(x)$ 为奇函数.

任取 $x_1<x_2$，则 $x_2-x_1>0$，

$\therefore f(x_2-x_1)<0$，

$\therefore f(x_2)-f(x_1)=f(x_2-x_1)<0$，

$\therefore f(x_2)<f(x_1)$，

$\therefore f(x)$ 为 **R** 上的减函数.

(3) 由(2)可知

$f(x)_{\min}=f(3)=3f(1)=-2$，

$f(x)_{\max}=f(-3)=-f(3)=2$.

第 14 课时　函数奇偶性的应用

题点知识巩固

1. 选 A　设 $x<0$，则 $-x>0$，所以 $f(-x)=-x-2\,019$，又因为 $f(x)$ 是奇函数，所以 $f(x)=-f(-x)=x+2\,019$，故选 A.

2. 选 D　由 $x\geqslant 0$ 时，$f(x)=x^2-2x$，$f(x)$ 是定义在 **R** 上的奇函数得，当 $x<0$ 时，$-x>0$，$f(x)=-f(-x)=-(x^2+2x)=x(-x-2)$.

$\therefore f(x)=\begin{cases}x(x-2),x\geqslant 0,\\x(-x-2),x<0,\end{cases}$ 即 $f(x)=x(|x|-2)$. 故选 D.

3. **解**：(1) 当 $x<0$ 时，$-x>0$，

$\therefore f(-x)=-(-x)^2+2(-x)=-x^2-2x$.

$\because f(x)$ 是奇函数，

$\therefore f(-x)=-f(x)$，

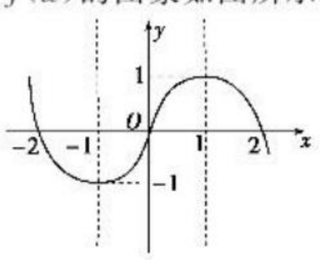
$\therefore -f(x)=-x^2-2x$，

即 $f(x)=x^2+2x$，

$\therefore m=2$.

(2) 由(1)知，$f(x)=\begin{cases}-x^2+2x,x>0,\\0,x=0,\\x^2+2x,x<0.\end{cases}$

作出函数 $f(x)$ 的图象如图所示.



由 $f(x)$ 的图象可知，若 $f(x)$ 在 $[-1,a-2]$ 上单调递增，则 $-1<a-2\leqslant 1$，

解得 $1<a\leqslant 3$.

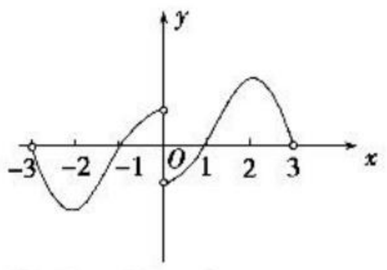
$\therefore$ 实数 a 的取值范围是 $(1,3]$.

4. 选 C　$\because f(x)$ 是定义在 $[-6,6]$ 上的偶函数，

$\therefore f(-1)=f(1)$，又 $f(3)>f(1)$，

$\therefore f(-1)<f(3)$. 故选 C.

5. 选 C　由题可知 $f(x)$ 的图象如图所示：



不等式 $\dfrac{f(x)-f(-x)}{x}>0$ 可化为 $\dfrac{2f(x)}{x}>0$，

故当 $x>0$ 时，$f(x)>0$ 的解为 $1<x<3$；

当 $x<0$ 时，$f(x)<0$ 的解为 $-3<x<-1$，

$\therefore$ 不等式的解集是 $(-3,-1)\cup(1,3)$，故选 C.

6. **解析**：由题意知，不等式 $f(x-2)\geqslant 0$ 可化为 $x-2\leqslant -1$ 或 $x-2\geqslant 1$，解得 $x\leqslant 1$ 或 $x\geqslant 3$.

答案：$\{x|x\leqslant 1$ 或 $x\geqslant 3\}$

7. **解**：$\because f(x)$ 是定义在 $(-2,2)$ 上的奇函数，

且 $f(2+a)+f(1-2a)>0$，

$\therefore f(2+a)>f(2a-1)$，又 $f(x)$ 为增函数，

$\therefore\begin{cases}-2<2+a<2,\\-2<1-2a<2,\\2+a>2a-1,\end{cases}$ 解得 $-\dfrac{1}{2}<a<0$.

故实数 a 的取值范围是 $\left(-\dfrac{1}{2},0\right)$.

提能达标过关

1. 选 A　$\because f(x)$ 是偶函数，

$\therefore f(-1)=f(1)$，$f(-\pi)=f(\pi)$.

又 $f(x)$ 在 $[0,4]$ 上单调递减，

$\therefore f(1)>f\left(\dfrac{\pi}{3}\right)>f(\pi)$.

$\therefore f(-1)>f\left(\dfrac{\pi}{3}\right)>f(-\pi)$. 故选 A.

2. 选 A　$\because f(x)$ 是奇函数，当 $x<0$ 时，$f(x)=x^2+ax$，且 $f(3)=6$，$\therefore f(-3)=-f(3)=-6$，即 $f(-3)=9-3a=-6$，$\therefore 3a=15$，解得 $a=5$，故选 A.

3. 选 B　解法一：当 $x<0$ 时 $f(x)=x^2+x=\left(x+\dfrac{1}{2}\right)^2-\dfrac{1}{4}$，$\therefore f(x)$ 有最小值 $-\dfrac{1}{4}$，

$\because f(x)$ 是奇函数，$\therefore f(x)$ 的图象关于原点对称，

$\therefore$ 当 $x>0$ 时，$f(x)$ 有最大值 $\dfrac{1}{4}$.

解法二：当 $x>0$ 时，$-x<0$，

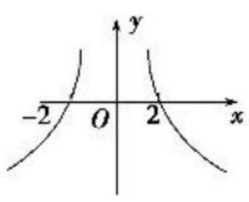
$\therefore f(-x)=-x(1-x)$.

又 $f(-x)=-f(x)$，

$\therefore f(x)=x(1-x)=-x^2+x=-\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{1}{4}$，

$\therefore f(x)$ 有最大值 $\dfrac{1}{4}$. 故选 B.

4. 选 C　由题可得 $f(x)$ 的图象如图所示.



不等式 $xf(x)>0$ 可化为

$\begin{cases}x>0,\\f(x)>0\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x<0,\\f(x)<0,\end{cases}$

$\therefore 0<x<2$ 或 $x<-2$，$\therefore$ 不等式的解集为 $(-\infty,-2)\cup(0,2)$，故选 C.

5. 选 B　由题意得 $f(2-a)+f(4-a)<0\Rightarrow f(2-a)<-f(4-a)\Rightarrow f(2-a)<f(a-4)\Rightarrow 2-a>a-4\Rightarrow a<3$. 故选 B.

6. **解析**：解法一：$\because f(x)$ 为奇函数，$\therefore f(-x)=-f(x)$ 对定义域内任意 x 都成立，

$\therefore \dfrac{-(a-1)x+a-2}{-x+a^2-1}+\dfrac{(a-1)x+a-2}{x+a^2-1}=0$ 对定义域内任意 x 恒成立，

即 $\dfrac{-2(a-1)x^2+2(a-2)(a^2-1)}{(-x+a^2-1)(x+a^2-1)}=0$

对定义域内任意 x 恒成立，

$\therefore\begin{cases}-2(a-1)=0,\\2(a-2)(a^2-1)=0,\end{cases}$ 解得 $a=1$.

解法二：由 $x+a^2-1\neq 0$ 解得 $x\neq 1-a^2$.

$\therefore f(x)$ 的定义域为 $\{x\in\mathbf{R}|x\neq 1-a^2\}$.

$\because f(x)$ 是奇函数，

$\therefore f(x)$ 的定义域关于原点对称.

$\therefore 1-a^2=0$，解得 $a=\pm 1$.

若 $a=1$，则 $f(x)=\dfrac{-1}{x}$，符合题意；

若 $a=-1$，则 $f(x)=\dfrac{-2x-3}{x}$，不合题意.

于是 $a=1$.

答案：1

7. **解析**：依题意有 $2f(-6)+f(-3)=-2f(6)-f(3)=-2\times 8-(-1)=-15$.

答案：-15

8. **解析**：当 $x<0$ 时，$-x>0$，$f(-x)=x^2+4x$，

$\because f(x)$ 是奇函数，$\therefore f(x)=-f(-x)=-x^2-4x$.

当 $x>0$ 时，由 $x^2-4x>0$，得 $x>4$；

当 $x<0$ 时，由 $-x^2-4x>0$，得 $-4<x<0$；

当 $x=0$ 时，$f(0)=0$，$\therefore f(x)>0$ 的 x 的取值范围是 $(-4,0)\cup(4,+\infty)$.

答案：$f(x)=-x^2-4x$　$(-4,0)\cup(4,+\infty)$

9. **解**：(1) $\because f(1)=1+k=2$，$\therefore k=1$.

$\therefore f(x)=x+\dfrac{1}{x}$.

$\because f(x)$ 的定义域是 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$，关于原点对称，

又 $f(-x)=-x+\dfrac{1}{-x}=-\left(x+\dfrac{1}{x}\right)=-f(x)$，

$\therefore f(x)$ 是奇函数.

(2) $f(x)$ 在 $(-\infty,-1]$ 上是增函数，在 $[-1,0)$ 上是减函数，在 $(0,1]$ 上是减函数，在 $[1,+\infty)$ 上是增函数.

下面证明 $f(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 上是增函数.

设 x_1,x_2 是 $[1,+\infty)$ 上任意两个实数，且 $x_1<x_2$，

则 $f(x_1)-f(x_2)=x_1+\dfrac{1}{x_1}-x_2-\dfrac{1}{x_2}$

$=(x_1-x_2)+\dfrac{x_2-x_1}{x_1x_2}=(x_1-x_2)\cdot\dfrac{x_1x_2-1}{x_1x_2}$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

∵$1\leqslant x_1<x_2$，∴$x_1-x_2<0$，$x_1x_2>0$，$x_1x_2-1>0$，
∴$f(x_1)-f(x_2)<0$，∴$f(x_1)<f(x_2)$，
∴$f(x)$在$[1,+\infty)$上是增函数.
同理可证其他结论.
(3)由(2)知，由$f(a)>2=f(1)$可得，$0<a<1$或$a>1$.
∴实数a的取值范围是$(0,1)\cup(1,+\infty)$.

10. **解**：(1)依题意，当$x>0$时，$f(x)=f(-x)=(-x)^2+2(-x)=x^2-2x$，

$$\therefore f(x)=\begin{cases}x^2-2x(x>0),\\x^2+2x(x\leqslant 0).\end{cases}$$

(2)$g(x)=x^2-2x-2ax+2$，对称轴方程为$x=a+1$，
当$a+1\leqslant 1$，即$a\leqslant 0$时，$g(1)=1-2a$为最小值；
当$1<a+1\leqslant 2$，即$0<a\leqslant 1$时，$g(a+1)=-a^2-2a+1$为最小值；
当$a+1>2$，即$a>1$时，$g(2)=2-4a$为最小值.
综上，$g(x)_{\min}=$

$$\begin{cases}1-2a(a\leqslant 0),\\-a^2-2a+1(0<a\leqslant 1),\\2-4a(a>1).\end{cases}$$

素养提升

素养培优提能

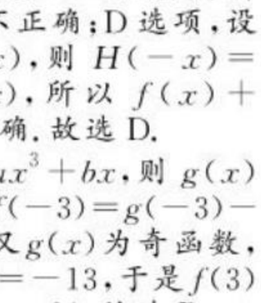
1. 选D　A选项，设$F(x)=f(x)f(-x)$，则$F(-x)=f(-x)f(x)=F(x)$，故$F(x)$为偶函数，A不正确；B选项，$f(x)|f(-x)|$奇偶性不能确定，B不正确；C选项，设$G(x)=f(x)-f(-x)$，则$G(-x)=f(-x)-f(x)=-G(x)$，所以$G(x)$为奇函数，C不正确；D选项，设$H(x)=f(x)+f(-x)$，则$H(-x)=f(-x)+f(x)=H(x)$，所以$f(x)+f(-x)$是偶函数，D正确. 故选D.

2. 选B　设$g(x)=x^5+ax^3+bx$，则$g(x)$为奇函数. 由题设可得$f(-3)=g(-3)-8=5$，得$g(-3)=13$. 又$g(x)$为奇函数，所以$g(3)=-g(-3)=-13$，于是$f(3)=g(3)-8=-13-8=-21$. 故选B.

3. 选A　函数$y=f(x+2)$为偶函数，则函数$y=f(x+2)$的图象关于$x=0$对称，则函数$y=f(x)$的图象关于$x=2$对称，$f\left(\frac{11}{2}\right)=f\left(-\frac{3}{2}\right)$，$f(4)=f(0)$，
∵$-\frac{3}{2}<-1<0$，∴$f\left(-\frac{3}{2}\right)>f(-1)>f(0)$，
即$f(4)<f(-1)<f\left(\frac{11}{2}\right)$. 故选A.

4. 选B　根据条件可知函数在$(-\infty,0)$上是增函数，并且$f(-2)=0$，所以当$x\in(-\infty,-2]$时，$f(x)\leqslant 0$，当$x\in(-2,0)$时，$f(x)>0$. 又函数是奇函数，奇函数的图象关于原点对称，$f(0)=0$且$f(2)=0$，所以当$x\in(0,2]$时，$f(x)\leqslant 0$，当$x\in(2,+\infty)$时，$f(x)>0$，所以$f(x)\leqslant 0$的解集是$(-\infty,-2]\cup[0,2]$，故选B.

5. 选D　奇函数$f(x)$在$(0,+\infty)$上为增函数，且$f(1)=0$，画出$f(x)$的大致图象如图所示.



因为$\frac{f(x)-f(-x)}{x}=\frac{2f(x)}{x}<0$，所以由函数的图象得不等式的解集为$(-1,0)\cup(0,1)$. 故选D.

6. **解析**：由图象知$f(x)$是奇函数，$f(-a)=-f(a)$，所以$f(a)+f(-a)=0$.
答案：0

7. **解析**：$f(a)+f(b)>0$，∴$f(a)>-f(b)$，
∴$f(a)>f(-b)$，$f(x)$为减函数，
∴$a<-b$，∴$a+b<0$.
答案：<

8. **解析**：因为函数满足$f(x+2)=-f(x)$，所以，以$x+2$代换x可得$f(x+4)=-f(x+2)=f(x)$. 又因为函数$f(x)$为奇函数，所以$f(7)=f(7-8)=f(-1)=-f(1)=-1$.
答案：-1

9. **解**：(1)根据题意得

$$\begin{cases}f(0)=0,\\f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{2}{5},\end{cases}\text{即}\begin{cases}\frac{b}{1}=0,\\\frac{\frac{a}{2}+b}{1+\frac{1}{4}}=\frac{2}{5},\end{cases}$$

解得$\begin{cases}a=1,\\b=0,\end{cases}$∴$f(x)=\frac{x}{1+x^2}$.
(2)证明：任取$x_1,x_2\in(-1,1)$，且令$x_1<x_2$，

$$f(x_1)-f(x_2)=\frac{x_1}{1+x_1^2}-\frac{x_2}{1+x_2^2}=\frac{(x_1-x_2)(1-x_1x_2)}{(1+x_1^2)(1+x_2^2)}.$$

∵$-1<x_1<x_2<1$，
∴$x_1-x_2<0$，$1+x_1^2>0$，$1+x_2^2>0$，$1-x_1x_2>0$，
∴$f(x_1)-f(x_2)<0$，即$f(x_1)<f(x_2)$，
∴$f(x)$在$(-1,1)$上是增函数.

10. **解**：∵$f(1-a)+f(1-2a)<0$，
∴$f(1-a)<-f(1-2a)$.
∵$f(x)$在定义域$(-1,1)$上为减函数且为奇函数，
∴$f(1-a)<f(2a-1)$，

$$\therefore\begin{cases}1-a>2a-1,\\-1<1-a<1,\\-1<2a-1<1,\end{cases}\therefore\begin{cases}a<\frac{2}{3},\\0<a<2,\\0<a<1,\end{cases}$$

∴$0<a<\frac{2}{3}$.
故实数a的取值范围为$\left(0,\frac{2}{3}\right)$.

阶段质量评估3

1. 选A　由题可知$-\frac{2(a-1)}{2}\geqslant 4$，
∴$a\leqslant -3$，故选A.

2. 选C　令$f(x)=x-x|x|$，其定义域为**R**，又$f(-x)=-x+x|-x|=-x+x|x|=-(x-x|x|)=-f(x)$，∴$f(x)=x-x|x|$为奇函数，故选C.

3. 选A　$f(-2)=-f(2)=-(-4-2)=6$，故选A.

4. 选A　由图象的对称性可知B不可能，由函数值的正负分析可知C、D不可能，故可能是A.

5. 选A　依题意知$f(x)$在$[0,+\infty)$上是减函数，所以$f(3)<f(2)<f(1)$.
又$f(x)$为偶函数，所以$f(-2)=f(2)$.
则$f(3)<f(-2)<f(1)$成立. 故选A.

6. 选A　由题可得$\begin{cases}-1<m-2<1,\\-1<2m-3<1,\\m-2<-2m+3,\end{cases}$解得$1<m<\frac{5}{3}$，故选A.

7. **解析**：由$f(-x)=f(x)$，知$k=1$，∴$f(x)=-x^2+3$. 其图象是开口向下的抛物线，对称轴为$x=0$，∴$f(x)$的递增区间是$(-\infty,0]$.
答案：$(-\infty,0]$

8. **解析**：$f(-1)=-f(1)=-(1^2+1-1)=-1$，
∴$f[f(-1)]=f(-1)=-1$.
答案：-1

9. **解析**：∵$g(x)=f(x+1)$，又$f(x)$在$[1,+\infty)$上为增函数，且$f(3)=0$，
∴$g(x)$在$[0,+\infty)$上为增函数，且$g(2)=0$.
∵$g(x)$为偶函数，
∴不等式$g(2-2x)<0$可化为$g(|2-2x|)<g(2)$.
∴$|2-2x|<2$，即$-2<2x-2<2$，解得$0<x<2$.
∴不等式的解集为$(0,2)$.
答案：$(0,2)$

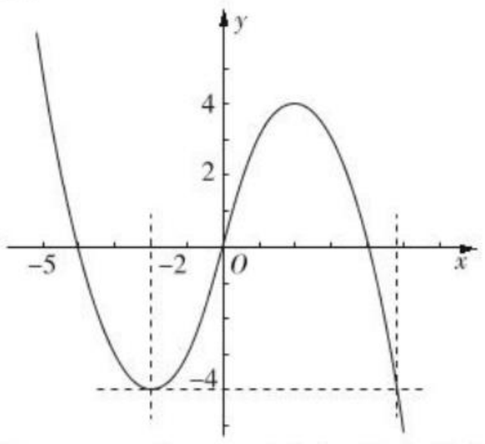
10. **解析**：①中，由集合中元素的互异性可知$x\neq y$且$x\neq 0$.
∵$A=B$，∴$\begin{cases}y=0,\\x=x^2,\end{cases}$解得$\begin{cases}x=1,\\y=0.\end{cases}$
∴正确；
②中，由$-1<2x+1<1$，解得$-1<x<0$，∴正确；
③中，由函数单调性的定义可知，$f(x)=\frac{1}{x}$的单调递减区间有两个：$(-\infty,0)$，$(0,+\infty)$，而不是$(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$，∴错误；
④中，取$y=1$，可得$f(x+1)=f(x)\cdot f(1)$.
即$\frac{f(x+1)}{f(x)}=f(1)=2$.
∴$\frac{f(2)}{f(1)}+\frac{f(4)}{f(3)}+\cdots+\frac{f(2\,016)}{f(2\,015)}=2\times 1\,008=2\,016$.
∴正确.
答案：①②④

11. **解**：(1)∵$f(x)$的定义域为$(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$，关于原点对称，
又$f(-x)=-x-\frac{1}{-x}=-x+\frac{1}{x}=-\left(x-\frac{1}{x}\right)=-f(x)$，
∴$f(x)$是奇函数.
(2)证明：设x_1,x_2是$(0,+\infty)$上任意两个实数，且$x_1<x_2$，
则$f(x_1)-f(x_2)=x_1-\frac{1}{x_1}-x_2+\frac{1}{x_2}=(x_1-x_2)+\frac{x_1-x_2}{x_1x_2}=(x_1-x_2)\cdot\frac{x_1x_2+1}{x_1x_2}$.
∵$0<x_1<x_2$，∴$x_1-x_2<0$，$x_1x_2>0$，$x_1x_2+1>0$，
∴$f(x_1)-f(x_2)<0$，∴$f(x_1)<f(x_2)$，
∴$f(x)$在$(0,+\infty)$上是增函数.
(3)由(1)(2)知，$f(x)$在$(-\infty,0)$上是增函数.
由$f(1)=0$，$f(-1)=0$，
∴$f(x)>0$可化为$\begin{cases}x>0,\\x>1\end{cases}$或$\begin{cases}x<0,\\x>-1,\end{cases}$
解得$x>1$或$-1<x<0$.
∴满足$f(x)>0$的x的取值范围是$(-1,0)\cup(1,+\infty)$.

12. **解**：(1)当$x>0$时，$f(x)=-x^2+4x$，又$f(x)$为奇函数，
则当$x<0$时，$f(x)=-f(-x)=-(-x^2-4x)=x^2+4x$. 又$f(0)=0$，
故$f(x)$解析式为$f(x)=\begin{cases}-x^2+4x,x>0,\\0,x=0,\\x^2+4x,x<0.\end{cases}$

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

(2)根据函数解析式画出函数 $f(x)$ 的图象,如图所示可得 $f(-2)=-4$,当 $x>0$ 时,由 $f(x)=-4$,解得 $x=2+2\sqrt{2}$,



①当 $-2<a\leqslant 2+2\sqrt{2}$ 时,观察图象可得函数最小值为 $f(-2)=-4$;

②当 $a>2+2\sqrt{2}$ 时,函数在 $[-2,2]$ 上单调递增,在 $[2,a]$ 上单调递减,由图象可得函数的最小值为 $f(a)=-a^2+4a$.

综上所述,当 $-2<a\leqslant 2+2\sqrt{2}$ 时,最小值为 -4;当 $a>2+2\sqrt{2}$ 时,最小值为 $-a^2+4a$.

13. **解**:(1)$\because f(x)=(x+a)^2+1-a^2$,

$\therefore f(x)$ 的对称轴是 $x=-a$.

且 $f(x)$ 的减区间是 $(-\infty,-a]$,

$f(x)$ 的增区间是 $[-a,+\infty)$.

$\because y=f(x)$ 在 $[-5,5]$ 上是单调函数,

$\therefore y=f(x)$ 在 $[-5,5]$ 上是增函数或是减函数,

$\therefore -a\leqslant -5$ 或 $-a\geqslant 5$,

$\therefore a\geqslant 5$ 或 $a\leqslant -5$,

$\therefore$ 实数 a 的取值范围是 $(-\infty,-5]\cup[5,+\infty)$.

(2)由(1)知,当 $-a\leqslant -5$ 时,即 $a\geqslant 5$ 时,$f(x)$ 在区间 $[-5,5]$ 上是增函数,

$\therefore f(x)_{\min}=f(-5)=-10a+26$;

当 $-a\geqslant 5$ 时,即 $a\leqslant -5$ 时,$f(x)$ 在区间 $[-5,5]$ 上是减函数,

$\therefore f(x)_{\min}=f(5)=10a+26$;

当 $-5<-a<5$ 时,即 $-5<a<5$ 时.

$f(x)$ 在区间 $[-5,-a]$ 上是减函数,在区间 $[-a,5]$ 上是增函数,

$\therefore f(x)_{\min}=f(-a)=1-a^2$.

综上所述,$f(x)_{\min}=$

$$\begin{cases}10a+26, & a\leqslant -5,\\ 1-a^2, & -5<a<5,\\ -10a+26, & a\geqslant 5.\end{cases}$$

14. **解**:(1)$f(x)$ 为偶函数.证明如下:

令 $x_1=x_2=1$,得 $f(1)=2f(1)$,

$\therefore f(1)=0$.

令 $x_1=x_2=-1$,

得 $f(1)=f(-1)+f(-1)$,

$\therefore f(-1)=\frac{1}{2}f(1)=0$.

令 $x_1=-1$,$x_2=x$,

有 $f(-x)=f(-1)+f(x)$,

$\therefore f(-x)=f(x)$,$\therefore$ 结论得证.

(2)由 $f(4)=1$,可得 $f(16)=2f(4)=2$.

$\therefore 0<|x-1|<16$,$\therefore -15<x<17$ 且 $x\neq 1$,

$\therefore x$ 的取值范围是 $\{x|-15<x<17$ 且 $x\neq 1\}$.

第二章　基本初等函数(Ⅰ)

2.1　指数函数

2.1.1　指数与指数幂的运算

第15课时　根　式

题点知识巩固

1. 选 C　①16 的 4 次方根是 ± 2,② $\sqrt[4]{16}=2$,所以①②不正确,③④都正确.故选 C.

2. 选 B　由 $x^5=6$ 可知 $x=\sqrt[5]{6}$.故选 B.

3. 选 B　由题意可知,$a-2\geqslant 0$ 且 $a-4\neq 0$,$\therefore a$ 的取值范围是 $a\geqslant 2$ 且 $a\neq 4$,故选 B.

4. **解析**:n 为奇数时,负数的 n 次方根是一个负数,$\sqrt[3]{-125}=-5$,故①错误;16 的 4 次方根有两个,为 ± 2,故②正确;$\sqrt[4]{81}=3$,故③错误;$\sqrt{(x+y)^2}$ 是正数,故 $\sqrt{(x+y)^2}=|x+y|$,故④正确.

答案:②④

5. 选 C　由于 $\sqrt{(-3)^2}=3$,$\sqrt[4]{a^4}=|a|$,$\sqrt[3]{(-2)^3}=-2$,故 A、B、D 错误.故选 C.

6. 选 B　由 $(\sqrt[n+1]{a})^{n+1}=a$,得 $\sqrt[n]{a^n}=-a$,故 n 为偶数且 $a<0$.故选 B.

7. 选 A　$\because \sqrt{4x^2y^2}=\sqrt{(2xy)^2}=|2xy|=-2xy$,

$\therefore 2xy<0$,$\therefore xy<0$.故选 A.

8. 选 C　原式 $=|x+3|-(x-3)$,当 $x\geqslant -3$ 时,原式 $=6$;当 $x<-3$ 时,原式 $=-2x$,故选 C.

9. **解析**:原函数可化为 $f(x)=|x-1|+x+1=\begin{cases}2, & x<1,\\ 2x, & x\geqslant 1.\end{cases}$

当 $x<1$ 时,$f(x)=2$;当 $x\geqslant 1$ 时,$f(x)=2x$ 为增函数,则 $f(x)\geqslant f(1)=2$.

$\therefore f(x)$ 的值域是 $[2,+\infty)$.

答案:$[2,+\infty)$

10. **解**:(1) $\sqrt[4]{(-4)^2}=\sqrt[4]{16}=2$.

(2) $\sqrt[5]{-32}=-\sqrt[5]{2^5}=-2$.

(3) $\sqrt[4]{(-\sqrt{2})^2}=\sqrt[4]{2}$.

(4) $(\sqrt[3]{-2})^3=-2$.

(5) $\sqrt{(\pi-3)^2}=|\pi-3|=\pi-3$.

(6) $\sqrt[3]{(1+\sqrt{2})^3}+\sqrt{(1-\sqrt{2})^2}=1+\sqrt{2}+\sqrt{2}-1=2\sqrt{2}$.

提能达标过关

1. 选 D　由 n 次根式的运算性质可得.故选 D.

2. 选 C　原式 $=|a-b|+(a-b)=\begin{cases}2(a-b), & a\geqslant b,\\ 0, & a<b.\end{cases}$ 故选 C.

3. 选 A　当 $\sqrt{2-x}$ 有意义时,$x\leqslant 2$,

则原式 $=\sqrt{(x-2)^2}-\sqrt{(x-3)^2}=|x-2|-|x-3|=2-x+x-3=-1$.

故选 A.

4. 选 B　原式 $=\sqrt{(\sqrt{5}-1)^2}-\sqrt{(\sqrt{5}-\sqrt{3})^2}=\sqrt{5}-1-(\sqrt{5}-\sqrt{3})=\sqrt{3}-1$.

故选 B.

5. 选 D　$\sqrt[4]{a^4}=|a|$,A 错;$\sqrt[6]{(-2)^2}=\sqrt[3]{2}$,B 错;$a^0=1(a\neq 0)$,C 错;D 正确.故选 D.

6. **解析**:原式 $=1+\sqrt{2}+\sqrt{2}-1=2\sqrt{2}$.

答案:$2\sqrt{2}$

7. **解析**:$\sqrt{4x^6y^2}=|2x^3y|=-2x^3y$.

答案:$-2x^3y$

8. **解析**:原式 $=|m+n|-|m-n|=-m-n-m+n=-2m$.

答案:$-2m$

9. **解**:(1)原式 $=\sqrt{\frac{25}{4}}-\sqrt[3]{\frac{27}{8}}+\sqrt[3]{\frac{1}{8}}=\frac{5}{2}-\frac{3}{2}+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$.

(2)原式 $=-8+|\sqrt{3}-2|-(2-\sqrt{3})=-8+2-\sqrt{3}-2+\sqrt{3}=-8$.

(3)原式 $=\left(\sqrt{\frac{3}{4}}-\sqrt{\frac{1}{4}}\right)\cdot(\sqrt{3}+1)+1=\frac{1}{2}(\sqrt{3}-1)\cdot(\sqrt{3}+1)+1=\frac{1}{2}(3-1)+1=1+1=2$.

10. **解**:解法一:$\because a,b$ 是方程 $x^2-6x+4=0$ 的两根,

$\therefore a+b=6$ 且 $ab=4$.

$\therefore \left(\frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}\right)^2=\frac{a+b-2\sqrt{ab}}{a+b+2\sqrt{ab}}=\frac{6-2\sqrt{4}}{6+2\sqrt{4}}=\frac{1}{5}$.

$\because a>b>0$,

$\therefore \sqrt{a}>\sqrt{b}>0$,

$\therefore \sqrt{a}-\sqrt{b}>0$,$\sqrt{a}+\sqrt{b}>0$,

$\therefore \frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}=\frac{\sqrt{5}}{5}$.

解法二:$\because a,b$ 是方程 $x^2-6x+4=0$ 的两根,且 $a>b>0$,

$\therefore a=3+\sqrt{5}$,$b=3-\sqrt{5}$.

$\therefore \frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}=\frac{a+b-2\sqrt{ab}}{a-b}=\frac{6-2\sqrt{9-5}}{2\sqrt{5}}=\frac{2}{2\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{5}}{5}$.

第16课时　分数指数幂

题点知识巩固

1. 选 B　$a^{\frac{3}{2}}=\sqrt{a^3}$,$a^{\frac{2}{3}}=\sqrt[3]{a^2}$,$a^{\frac{2}{5}}=\sqrt[5]{a^2}$,$a^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{\sqrt{a}}$,所以 A、C、D 都不成立,B 成立.故选 B.

2. **解析**:$\frac{\sqrt[3]{a^2b}\cdot\sqrt{ab}}{\sqrt{ab^5}}=\frac{(a^2b)^{\frac{1}{3}}(ab)^{\frac{1}{2}}}{(ab^5)^{\frac{1}{2}}}=a^{\frac{2}{3}+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}\cdot b^{\frac{1}{3}+\frac{1}{2}-\frac{5}{2}}=a^{\frac{2}{3}}b^{-\frac{5}{3}}$.

答案:$a^{\frac{2}{3}}b^{-\frac{5}{3}}$

3. **解**:(1)$a^2\sqrt{a}=a^2\cdot a^{\frac{1}{2}}=a^{\frac{5}{2}}$.

(2) $\sqrt{a\sqrt{a}}=(a\cdot a^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}}=(a^{\frac{3}{2}})^{\frac{1}{2}}=a^{\frac{3}{4}}$.

(3) $\sqrt[3]{a^2}\cdot\sqrt{a^3}=a^{\frac{2}{3}}\cdot a^{\frac{3}{2}}=a^{\frac{2}{3}+\frac{3}{2}}=a^{\frac{13}{6}}$.

(4) $(\sqrt[3]{a})^2\cdot\sqrt{ab^3}=a^{\frac{2}{3}}\cdot(ab^3)^{\frac{1}{2}}=a^{\frac{2}{3}+\frac{1}{2}}\cdot b^{\frac{3}{2}}=a^{\frac{7}{6}}b^{\frac{3}{2}}$.

4. 选 B　$\left(\frac{16}{81}\right)^{-\frac{1}{4}}=\left[\left(\frac{2}{3}\right)^4\right]^{-\frac{1}{4}}=\left(\frac{2}{3}\right)^{-1}=\frac{3}{2}$.

故选 B.

5. 选 D　原式 $=1-(1-4)\div\sqrt{\left(\frac{27}{8}\right)^2}=1+3\times\frac{4}{9}=\frac{7}{3}$.故选 D.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

6. **解**：(1)原式$=(0.3^3)^{\frac{1}{3}}-\left[\left(\frac{5}{2}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}+(4^4)^{\frac{3}{4}}+(2^{\frac{3}{2}})^{\frac{2}{3}}-\frac{1}{3}+1=0.3-\frac{5}{2}+4^3+2-\frac{1}{3}+1=64\frac{7}{15}$.

(2)原式$=a^{\frac{8}{5}\times\left(-\frac{1}{2}\right)}\cdot b^{\left(-\frac{6}{5}\right)\times\left(-\frac{1}{2}\right)}\cdot a^{\frac{4}{5}}\div b^{\frac{3}{5}}$

$=a^{-\frac{4}{5}}\cdot b^{\frac{3}{5}}\cdot a^{\frac{4}{5}}\div b^{\frac{3}{5}}=a^{-\frac{4}{5}+\frac{4}{5}}\cdot b^{\frac{3}{5}-\frac{3}{5}}=a^0b^0=1$.

7. 选 A　原式$=[2\times(-3)\div4]\times a^{-3-1+4}\cdot b^{-\frac{2}{3}+1+\frac{5}{3}}=-\frac{3}{2}a^0b^2=-\frac{3}{2}b^2$. 故选 A.

8. 选 C　将$a^{\frac{1}{2}}-a^{-\frac{1}{2}}=m$平方得，$(a^{\frac{1}{2}}-a^{-\frac{1}{2}})^2=m^2$，即$a-2+a^{-1}=m^2$ 所以$a+a^{-1}=m^2+2$，即$a+\frac{1}{a}=m^2+2\Rightarrow\frac{a^2+1}{a}=m^2+2$. 故选 C.

9. **证明**：(1)∵$[g(x)]^2-[f(x)]^2=[g(x)+f(x)]\cdot[g(x)-f(x)]$

$=\left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}+\frac{e^x-e^{-x}}{2}\right)\cdot\left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}-\frac{e^x-e^{-x}}{2}\right)$

$=e^x\cdot e^{-x}=e^0=1$，

∴等式成立.

(2)∵$f(2x)=\frac{e^{2x}-e^{-2x}}{2}$

$=\frac{(e^x)^2-(e^{-x})^2}{2}$

$=\frac{(e^x+e^{-x})\cdot(e^x-e^{-x})}{2}$

$=2\cdot\frac{e^x+e^{-x}}{2}\cdot\frac{e^x-e^{-x}}{2}$

$=2f(x)\cdot g(x)$，

∴等式成立.

(3)∵$g(2x)=\frac{e^{2x}+e^{-2x}}{2}$，

$[g(x)]^2+[f(x)]^2=\left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right)^2+\left(\frac{e^x-e^{-x}}{2}\right)^2$

$=\frac{e^{2x}+e^{-2x}+2}{4}+\frac{e^{2x}+e^{-2x}-2}{4}$

$=\frac{e^{2x}+e^{-2x}}{2}$，

∴等式成立.

提能达标过关

1. 选 C　$\left(\frac{x}{y}\right)^{-\frac{3}{4}}=\left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{3}{4}}=\sqrt[4]{\left(\frac{y}{x}\right)^3}$. 故选 C.

2. 选 C　$[(-\sqrt{3})^2]^{-\frac{1}{2}}=(\sqrt{3})^{-1}=\frac{\sqrt{3}}{3}$. 故选 C.

3. 选 A　∵$2^a=m,5^b=m$，∴$2=m^{\frac{1}{a}}$，$5=m^{\frac{1}{b}}$，∵$2\times5=m^{\frac{1}{a}}\cdot m^{\frac{1}{b}}=m^{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}$，∴$m^2=10$，∴$m=\sqrt{10}$. 故选 A.

4. 选 C　由$4^x-3\cdot2^x+2=0$，得$(2^x-1)(2^x-2)=0$，

∴$2^x=1$或$2^x=2$，

∴$x=0$或$x=1$，故选 C.

5. 选 B　∵$10^{2x}=25$，∴$(10^{2x})^{\frac{1}{2}}=25^{\frac{1}{2}}$，

∴$10^x=(5^2)^{\frac{1}{2}}=5$，∴$10^{-x}=\frac{1}{10^x}=\frac{1}{5}$.

故选 B.

6. **解析**：原式$=\left(\frac{9}{4}\right)^{\frac{1}{2}}-1-\left(\frac{2}{3}\right)^{3\times\frac{2}{3}}+\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{3}{2}-1-\frac{4}{9}+\frac{4}{9}=\frac{1}{2}$.

答案：$\frac{1}{2}$

7. **解析**：原式$=\sqrt{500}-10\times\frac{1}{\sqrt{5}-2}+20=10\sqrt{5}-10\times(\sqrt{5}+2)+20=0$.

答案：0

8. **解析**：由$2^x+2^{-x}=3$，得$4^x+2+4^{-x}=9$，

∴$4^x+4^{-x}=7$，$4^x+4^{-x}-2=5$，∴$(2^x-2^{-x})^2=5$，

∴$2^x-2^{-x}=\pm\sqrt{5}$.

答案：7　$\pm\sqrt{5}$

9. **解**：(1)原式$=\left(\frac{27}{8}\right)^{-\frac{2}{3}}-\left(\frac{49}{9}\right)^{\frac{1}{2}}+\left(\frac{8}{1\,000}\right)^{-\frac{2}{3}}\times\frac{2}{25}$

$=\left(\frac{3}{2}\right)^{3\times\left(-\frac{2}{3}\right)}-\left(\frac{7}{3}\right)^{2\times\frac{1}{2}}+\left(\frac{2}{10}\right)^{3\times\left(-\frac{2}{3}\right)}\times\frac{2}{25}$

$=\frac{4}{9}-\frac{7}{3}+2$

$=\frac{1}{9}$.

(2)∵$x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}}=3$，

∴$(x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}})^2=x+x^{-1}+2=9$，

即$x+x^{-1}=7$，∴$(x+x^{-1})^2=x^2+x^{-2}+2=49$，

即$x^2+x^{-2}=47$. ∴原式$=\frac{47-7}{7+3}=4$.

10. **解**：(1)解法一：$\frac{a^{-1}+b^{-1}}{(ab)^{-1}}=\frac{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}{\frac{1}{ab}}=a+b$.

解法二：$\frac{a^{-1}+b^{-1}}{(ab)^{-1}}=\frac{(a^{-1}+b^{-1})ab}{(ab)^{-1}ab}=a+b$.

(2)$\frac{a^2}{\sqrt{a}\cdot\sqrt[3]{a^2}}=\frac{a^2}{a^{\frac{1}{2}}\cdot a^{\frac{2}{3}}}=a^{2-\frac{1}{2}-\frac{2}{3}}=a^{\frac{5}{6}}=\sqrt[6]{a^5}(a>0)$.

(3)$a^3\cdot\sqrt[3]{a^2}=a^3\cdot a^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{11}{3}}$.

(4)$\frac{1-a^{-1}}{a^{\frac{1}{2}}-a^{-\frac{1}{2}}}-\frac{1+a^{-\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{2}}+1}=\frac{a^{-\frac{1}{2}}(a^{\frac{1}{2}}-a^{-\frac{1}{2}})}{a^{\frac{1}{2}}-a^{-\frac{1}{2}}}-\frac{a^{-\frac{1}{2}}(a^{\frac{1}{2}}+1)}{a^{\frac{1}{2}}+1}$

$=a^{-\frac{1}{2}}-a^{-\frac{1}{2}}=0$.

2.1.2　指数函数及其性质

第17课时　指数函数的图象和性质

题点知识巩固

1. 选 D　根据指数函数的定义，$y=a^x(a>0$且$a\neq1)$，可知只有 D 项正确，故选 D.

2. 选 C　由题意得$\begin{cases}a^2-3a+3=1,\\a>0,\text{且}a\neq1.\end{cases}$解得$a=2$. 故选 C.

3. **解析**：设$f(x)=a^x(a>0$，且$a\neq1)$，又$f(2)=a^2=4$，

∴$f(2)\cdot f(4)=a^2\cdot a^4=4\cdot4^2=4^3=64$.

答案：64

4. 选 C　由于$0<m<n<1$，所以$y=m^x$与$y=n^x$都是减函数，故排除 A、B 项，作直线$x=1$与两个曲线相交，交点在下面的是函数$y=m^x$的图象，故选 C.

5. 选 A　$f(-1)=-1$，所以函数$f(x)=a^{x+1}-2$的图象一定过点$(-1,-1)$. 故选 A.

6. **解析**：由$f(x)$的图象可知$f(1)=\frac{1}{2}$，

∴$a=\frac{1}{2}$，∴$f(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^x$.

当$x<0$时，$-x>0$，

∴$f(-x)=\left(\frac{1}{2}\right)^{-x}=2^x$.

∵$y=\begin{cases}f(x),x>0,\\g(x),x<0\end{cases}$是奇函数，

∴$-g(x)=2^x$，∴$g(x)=-2^x$.

答案：-2^x

7. 选 C　由$a^x-1\geqslant0$，得$a^x\geqslant a^0$.

∵函数的定义域为$(-\infty,0]$，∴$0<a<1$. 故选 C.

8. 选 B　令$t=-x^2+2x=-(x-1)^2+1\leqslant1$，

∴$0<2^t\leqslant2^1=2$，∴$f(x)$的值域为$(0,2]$，故选 B.

9. **解**：(1)由$x-1\neq0$，得$x\neq1$.

∴函数的定义域为$\{x|x\in\mathbf{R}$且$x\neq1\}$.

∵$x\neq1$，∴$\frac{1}{x-1}\neq0$，∴$2^{\frac{1}{x-1}}>0$，且$2^{\frac{1}{x-1}}\neq1$.

∴函数的值域为$\{y|y>0$且$y\neq1\}$.

(2)由$5x-1\geqslant0$，得$x\geqslant\frac{1}{5}$.

∴函数的定义域为$\left\{x\,\middle|\,x\geqslant\frac{1}{5}\right\}$.

∵$5x-1\geqslant0$，∴$3^{\sqrt{5x-1}}\geqslant1$.

∴函数的值域为$\{y|y\geqslant1\}$.

(3)$y=\left(\frac{1}{2}\right)^x-1$的定义域是$\mathbf{R}$，值域是$\{y|y>-1\}$.

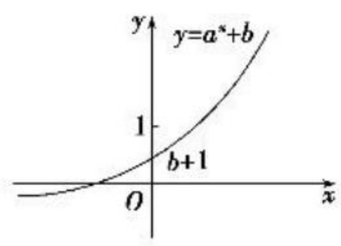
提能达标过关

1. 选 C　$\begin{cases}a^2-4a+4=1,\\a>0,\\a\neq1\end{cases}\Rightarrow a=3$. 故选 C.

2. 选 B　∵$f(-1)=2^{-1}=\frac{1}{2}$，

∴$f[f(-1)]=f\left(\frac{1}{2}\right)=3^{\frac{1}{2}}=\sqrt{3}$. 故选 B.

3. 选 A　∵$a>1$，且$-1<b<0$，∴其图象如图所示.



故选 A.

4. 选 B　∵$0\leqslant x\leqslant1$，∴$1\leqslant2^x\leqslant2$，

∴$-1\leqslant1-2^x\leqslant0$，故选 B.

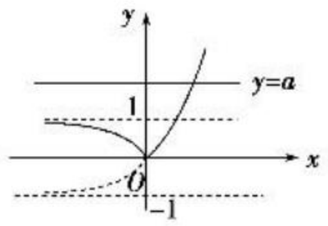
5. 选 A　由题意$f(x)=1\oplus2^x=\begin{cases}1,x\geqslant0,\\2^x,x<0.\end{cases}$故选 A.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

6. **解析**：$y=-2^{-x}=-\left(\frac{1}{2}\right)^{x}$ 与 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^{x}$ 关于 x 轴对称，一定过第三、四象限.

答案：三、四

7. **解析**：作出 $y=|2^{x}-1|$ 的图象，如图，要使直线 $y=a$ 与图象的交点只有一个，$\therefore a\geqslant 1$ 或 $a=0$.



答案：$\{a|a\geqslant 1$ 或 $a=0\}$

8. **解析**：$f(0)=a^{0}+a^{0}=2$，$f(1)=a+a^{-1}=3$，$f(2)=a^{2}+a^{-2}=(a+a^{-1})^{2}-2=3^{2}-2=7$，$\therefore f(0)+f(1)+f(2)=2+3+7=12$.

答案：12

9. **解**：(1)由 $|x|\neq 0$ 得，$x\neq 0$，

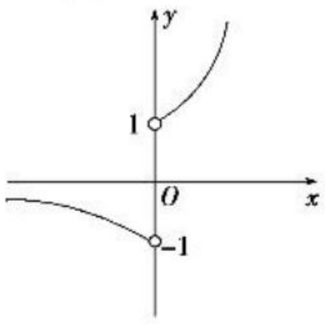
$\therefore f(x)$ 的定义域为 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$.

又 $f(x)=\begin{cases}a^{x},x>0,\\-a^{x},x<0\end{cases}$ 且 $a>1$，

$\therefore$ 当 $x>0$ 时，$a^{x}>1$；当 $x<0$ 时，$-1<-a^{x}<0$.

$\therefore f(x)$ 的值域为 $(-1,0)\cup(1,+\infty)$.

(2) $f(x)$ 的图象如图所示.



(3)由(2)知，$f(x)$ 既不是奇函数也不是偶函数.

(4)由(2)知，$f(x)$ 的单调区间有 $(-\infty,0)$，$(0,+\infty)$，其中 $f(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 上是减函数，$f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上是增函数.

10. **解**：(1)$\because$ 无论 $0<a<1$ 还是 $a>1$，函数 $f(x)$ 的最大值和最小值都是 a^{2} 和 a，

$\therefore a^{2}+a=6$，解得 $a=2$ 或 $a=-3$(舍)，故 a 的值为 2.

(2)当 $0<a<1$ 时，函数 $f(x)$ 在区间 $[1,2]$ 上是减函数，其最小值为 $f(2)=a^{2}$，最大值为 $f(1)=a$.

由 $a=2a^{2}$，解得 $a=0$(舍)或 $a=\frac{1}{2}$，

$\therefore a=\frac{1}{2}$.

当 $a>1$ 时，函数 $f(x)$ 在区间 $[1,2]$ 上是增函数，其最小值为 $f(1)=a$，最大值为 $f(2)=a^{2}$.

由 $a^{2}=2a$，解得 $a=0$(舍)或 $a=2$.

$\therefore a=2$.

综上知，实数 a 的值为 $\frac{1}{2}$ 或 2.

第 18 课时　指数函数的性质及应用

题点知识巩固

1. 选 D　函数 $y=0.9^{x}$ 在 **R** 上为减函数，所以 $0.9^{0.3}>0.9^{0.5}$. 故选 D.

2. **解**：(1)$\because 0<0.8<1$，

$\therefore$ 指数函数 $y=0.8^{x}$ 在 **R** 上为减函数，

$\therefore 0.8^{-0.1}<0.8^{-0.2}$.

(2)$\because 1.7^{0.3}>1$，$0.9^{3.1}<1$，

$\therefore 1.7^{0.3}>0.9^{3.1}$.

(3)当 $a>1$ 时，函数 $y=a^{x}$ 是增函数，此时 $a^{1.3}<a^{2.5}$；

当 $0<a<1$ 时，函数 $y=a^{x}$ 是减函数，此时 $a^{1.3}>a^{2.5}$.

综上，当 $0<a<1$ 时，$a^{1.3}>a^{2.5}$；当 $a>1$ 时，$a^{1.3}<a^{2.5}$.

3. 选 D　由 $2^{x+1}<2^{0}$，函数 $y=2^{t}$ 在 **R** 上是增函数，所以 $x+1<0$，得 $x<-1$，故选 D.

4. 选 B　$\because$ 函数 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^{x}$ 在 **R** 上为减函数，$\therefore 2a+1>3-2a$，$\therefore a>\frac{1}{2}$. 故选 B.

5. **解析**：因为 $a=\frac{\sqrt{5}-1}{2}\in(0,1)$，所以函数 $f(x)=a^{x}$ 在 **R** 上是减函数. 由 $f(m)>f(n)$，得 $m<n$.

答案：$m<n$

6. 选 A　设 $t=1-x$，则 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^{t}$，则函数 $t=1-x$ 的递减区间为 $(-\infty,+\infty)$，即为 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^{1-x}$ 的递增区间. 故选 A.

7. 选 C　由题意可知 $f(2)=1$，即 $3^{2-b}=1$，解得 $b=2$，$\therefore f(x)=3^{x-2}$，又 $2\leqslant x\leqslant 4$，故 $0\leqslant x-2\leqslant 2$，$\therefore f(x)\in[1,9]$，故 $f(x)$ 的值域为 $[1,9]$. 故选 C.

8. 选 A　$u=2^{x}+1$ 为 **R** 上的增函数且 $u>0$，$\therefore y=\frac{1}{u}$ 在 $(0,+\infty)$ 上为减函数，即 $f(x)=\frac{1}{2^{x}+1}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上为减函数，无最小值. 故选 A.

9. **解**：$\because y=a^{2x}+2a^{x}-1$，令 $t=a^{x}$，

$\therefore y=g(t)=t^{2}+2t-1=(t+1)^{2}-2$.

当 $a>1$ 时，$\because x\geqslant 0$，$\therefore t\geqslant 1$，

$\therefore$ 当 $a>1$ 时，$y\geqslant 2$.

当 $0<a<1$ 时，$\because x\geqslant 0$，$\therefore 0<t\leqslant 1$.

$\because g(0)=-1$，$g(1)=2$，

$\therefore$ 当 $0<a<1$ 时，$-1<y\leqslant 2$.

综上所述，当 $a>1$ 时，函数的值域是 $[2,+\infty)$；

当 $0<a<1$ 时，函数的值域是 $(-1,2]$.

提能达标过关

1. 选 C　由已知条件得 $0<a<b<1$，

$\therefore a^{b}<a^{a}$，$a^{a}<b^{a}$，$\therefore a^{b}<a^{a}<b^{a}$. 故选 C.

2. 选 D　由 $f(2)=4$ 得，$a^{-2}=4$，又 $\because a>0$，

$\therefore a=\frac{1}{2}$，即 $f(x)=2^{|x|}$，$\therefore$ 函数 $f(x)$ 为偶函数，在 $(-\infty,0)$ 上单调递减，在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，故选 D.

3. 选 D　$\because x\in[-2,0]$，$\therefore x+1\in[-1,1]$，而 $y=3^{x}$ 在 **R** 上为增函数，$\therefore y=3^{x+1}\in\left[\frac{1}{3},3\right]$，$\therefore$ 函数 $y=3^{x+1}-2$ 在 $x\in[-2,0]$ 上的值域为 $\left[-\frac{5}{3},1\right]$. 故选 D.

4. 选 A　设现在的成本费为 x，则 3 年后的成本为 $x(1-q\%)^{3}=a\Rightarrow x=\frac{a}{(1-q\%)^{3}}$. 故选 A.

5. 选 C　若 $f(x)$ 在 **R** 上为减函数，则 $\begin{cases}0<a<1,\\2-3a<0,\\(2-3a)+1\geqslant a,\end{cases}$ 解得 $\frac{2}{3}<a\leqslant\frac{3}{4}$. 故选 C.

6. **解析**：由题意可得，

$\begin{cases}a<0,\\\left(\frac{1}{2}\right)^{a}-7<1\end{cases}$ 或 $\begin{cases}a\geqslant 0,\\\sqrt{a}<1,\end{cases}$

解得 $-3<a<0$ 或 $0\leqslant a<1$.

$\therefore -3<a<1$.

答案：$(-3,1)$

7. **解析**：$\because f(x)=\frac{e^{x}-e^{-x}}{e^{x}+e^{-x}}$，

$\therefore f(-x)=\frac{e^{-x}-e^{x}}{e^{-x}+e^{x}}=-f(x)$，

即 $f(x)$ 是奇函数.

$\because f(a)=\frac{1}{2}$，

$\therefore f(-a)=-f(a)=-\frac{1}{2}$.

答案：$-\frac{1}{2}$

8. **解析**：当 $a>1$ 时，$y=a^{x}$ 在 $[-1,2]$ 上是增函数，

$\therefore \begin{cases}a^{-1}=m,\\a^{2}=8,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=2\sqrt{2},\\m=\frac{\sqrt{2}}{4}.\end{cases}$

此时 $g(x)=\left(3-10\times\frac{\sqrt{2}}{4}\right)\sqrt{x}$，

$\because 3-\frac{5\sqrt{2}}{2}<0$，

$\therefore g(x)$ 是单调递减函数，不合题意；

当 $0<a<1$ 时，$y=a^{x}$ 在 $[-1,2]$ 上是减函数，

$\therefore \begin{cases}a^{-1}=8,\\a^{2}=m,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=\frac{1}{8},\\m=\frac{1}{64}.\end{cases}$

此时 $g(x)=\left(3-10\times\frac{1}{64}\right)\sqrt{x}$，

$\because 3-\frac{5}{32}>0$，

$\therefore g(x)$ 是单调递增函数，符合题意.

综上所述，$a=\frac{1}{8}$.

答案：$\frac{1}{8}$

9. **解**：(1)$\because$ 奇函数 $f(x)$ 的定义域为 **R**，

$\therefore f(0)=0$，即 $\frac{2a+b}{2}=0$.　①

又 $\because$ 函数 $f(x)$ 的图象经过点 $(1,1)$，

$\therefore \frac{3a+b}{3}=1$.　②

由①②解得 $a=3$，$b=-6$.

(2)由(1)得，$f(x)=\frac{3\times 2^{x}-3}{2^{x}+1}=3-\frac{6}{2^{x}+1}$，

知函数 $f(x)$ 在定义域 **R** 上为增函数.

证明：设 $x_1,x_2\in\mathbf{R}$，且 $x_1>x_2$，

则 $f(x_1)-f(x_2)=3-\frac{6}{2^{x_1}+1}-3+\frac{6}{2^{x_2}+1}=\frac{6(2^{x_1}-2^{x_2})}{(2^{x_1}+1)(2^{x_2}+1)}$，

$\because x_1>x_2$，$\therefore 2^{x_1}>2^{x_2}$，$(2^{x_1}+1)(2^{x_2}+1)>0$，

$\therefore f(x_1)-f(x_2)>0$，即 $f(x_1)>f(x_2)$.

$\therefore f(x)$ 在 **R** 上为增函数.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

10. **解**：解法一：∵ $f(x)$的定义域为 **R**，且 $f(-x)=2^{-x}-2^{x}=-(2^{x}-2^{-x})=-f(x)$，
∴ $f(x)$是奇函数.
∴不等式 $f(x^2+tx)+f(4-x)>0$ 可化为 $f(x^2+tx)>f(x-4)$.
又 $f(x)$在 **R** 上是增函数，
∴原不等式可化为 $x^2+tx>x-4$，对任意 $x\in[1,3]$恒成立.
即 $x^2+(t-1)x+4>0$ 对任意 $x\in[1,3]$ 恒成立.
令 $g(x)=x^2+(t-1)x+4(x\in[1,3])$，则 $g(x)$的最小值大于零.
当 $-\frac{t-1}{2}\leqslant 1$ 时，即 $t\geqslant -1$ 时，$g(x)$在 $[1,3]$上是增函数，∴ $g(x)_{\min}=g(1)=t+4>0$，得 $t>-4$，∴ $t\geqslant -1$；
当 $-\frac{t-1}{2}\geqslant 3$ 时，即 $t\leqslant -5$ 时，$g(x)$在 $[1,3]$上是减函数，∴ $g(x)_{\min}=g(3)=9+3t-3+4>0$，
得 $t>-\frac{10}{3}$，∴ $t\in\varnothing$；
当 $1<-\frac{t-1}{2}<3$ 时，
即 $-5<t<-1$ 时，
$g(x)$在 $\left[1,-\frac{t-1}{2}\right]$ 上是减函数，在 $\left[-\frac{t-1}{2},3\right]$ 上是增函数，
∴ $g(x)_{\min}=g\left(-\frac{t-1}{2}\right)=\left(-\frac{t-1}{2}\right)^2+(t-1)\cdot\left(-\frac{t-1}{2}\right)+4>0$，得 $-3<t<5$，
∴ $-3<t<-1$.
综上所述，t 的取值范围是 $\{t|t>-3\}$.
解法二：同解法一得，$x^2+tx>x-4$ 对任意 $x\in[1,3]$恒成立.
即 $t>-\left(x+\frac{4}{x}\right)+1$ 对任意 $x\in[1,3]$恒成立.
令 $h(x)=x+\frac{4}{x}(x\in[1,3])$，
设 x_1,x_2 是区间 $[1,2]$内任意两个实数，且 $x_1<x_2$，则 $h(x_1)-h(x_2)=x_1+\frac{4}{x_1}-x_2-\frac{4}{x_2}=(x_1-x_2)\cdot\frac{x_1x_2-4}{x_1x_2}$，
∵ $1\leqslant x_1<x_2\leqslant 2$，∴ $x_1-x_2<0$，$x_1x_2-4<0$，$x_1x_2>0$.
∴ $h(x_1)-h(x_2)>0$，∴ $h(x_1)>h(x_2)$，
∴ $h(x)$在 $[1,2]$上是减函数，
同理可证 $h(x)$在 $[2,3]$上是增函数，
∴ $h(x)_{\min}=h(2)=4$，∴ $-\left(x+\frac{4}{x}\right)+1$ 的最大值为 -3，
∴ $t>-3$，t 的取值范围是 $\{t|t>-3\}$.

素养提升
素养培优提能

1. 选 D　∵函数 $y=0.86^{x}$ 在 **R** 上是减函数，
∴ $0<0.86^{0.85}<0.86^{0.75}<1$. 又 $1.3^{0.86}>1$，
∴ $c>a>b$. 故选 D.

2. 选 A　根据指数函数可知 a,b 同号且不相等，∴ $-\frac{b}{2a}<0$，可排除 B、D；由选项 C 中的二次函数的图象，可知 $a-b>0$，$a<0$，∴ $\frac{b}{a}>1$，∴指数函数 $y=\left(\frac{b}{a}\right)^{x}$ 单调递增，故 C 不正确，排除 C. 故选 A.

3. 选 B　新定义函数的运算结果是取 a,b 中的较小值，则 $2^{x}*2^{-x}=\left(\frac{1}{2}\right)^{|x|}\in(0,1]$，所以 $f(x)=|2^{x}*2^{-x}-1|=\left|\left(\frac{1}{2}\right)^{|x|}-1\right|\in[0,1)$. 故选 B.

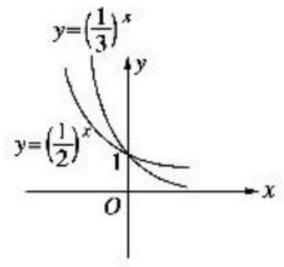
4. 选 D　1 年后价值为 $a(1-b\%)$ 万元，2 年后价值为 $a(1-b\%)^2$ 万元，…，n 年后价值为 $a(1-b\%)^n$ 万元，故选 D.

5. 选 B　由题意，知 $k\geqslant f(x)_{\max}$. 函数 $f(x)=2^{\sqrt{-x^2+x+2}}$ 的定义域为 $[-1,2]$. 令 $t=\sqrt{-x^2+x+2}$，则 $t\in\left[0,\frac{3}{2}\right]$，$2^{t}\in[1,2\sqrt{2}]$，所以 $f(x)_{\max}=2\sqrt{2}$，因此 $k\geqslant 2\sqrt{2}$. 故选 B.

6. **解析**：$\left(\frac{1}{4}\right)^{x-3}>16$，即 $\left(\frac{1}{4}\right)^{x-3}>\left(\frac{1}{4}\right)^{-2}$，由指数函数的单调性，得 $x-3<-2$，即 $x<1$.
答案：$(-\infty,1)$

7. **解析**：$2^{x_1\cdot x_2}=(2^{x_1})^{x_2}\neq 2^{x_1}+2^{x_2}$，①错误；根据指数式的运算性质可知同底数幂相乘，底数不变，指数相加，知②正确；根据 $2^{-x}=\frac{1}{2^{x}}$，知③正确；当 $x>0$ 时，$f(x)>1$，当 $x<0$ 时，$0<f(x)<1$，所以 $\frac{f(x_1)-1}{x_1}>0$，故④错误；因为函数 $f(x)=2^{x}$ 的图象是下凸的，结合图象可以判定两个自变量对应的函数值的平均值大于这两个自变量的平均值所对应的函数值，故⑤正确. 综上，填②③⑤.
答案：②③⑤

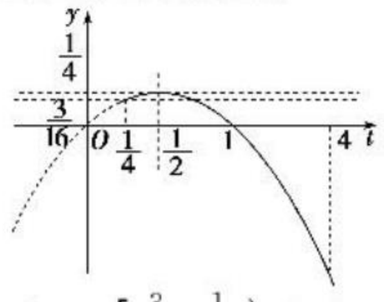
8. **解析**：画出函数 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^{x}$ 和 $y=\left(\frac{1}{3}\right)^{x}$ 的图象，如图所示，借助图象进行分析.



由于实数 a,b 满足等式 $\left(\frac{1}{2}\right)^{a}=\left(\frac{1}{3}\right)^{b}$，所以若 a,b 均为正数，则 $a>b>0$；若 a,b 均为负数，则 $a<b<0$；若 $a=b=0$，则 $\left(\frac{1}{2}\right)^{a}=\left(\frac{1}{3}\right)^{b}=1$，故③④不可能成立.
答案：③④

9. **解**：(1)函数 $f(x)$的定义域为 **R**，关于原点对称.
又 $f(-x)=\frac{a}{a^2-1}(a^{-x}-a^{x})=-f(x)$，
所以 $f(x)$为奇函数.
(2)当 $a>1$ 时，$a^2-1>0$，$y=a^{x}$ 为增函数，$y=a^{-x}$为减函数，
从而 $y=a^{x}-a^{-x}$为增函数，所以 $f(x)$为增函数.
当 $0<a<1$ 时，$a^2-1<0$，$y=a^{x}$ 为减函数，$y=a^{-x}$为增函数，
从而 $y=a^{x}-a^{-x}$为减函数，所以 $f(x)$为增函数.
故当 $a>0$，且 $a\neq 1$ 时，$f(x)$在定义域内单调递增.

10. **解**：(1)∵ $f(x)=3^{x}$，且 $f(a+2)=18$，
∴ $3^{a+2}=18$，∴ $3^{a}=2$.
∵ $g(x)=3^{ax}-4^{x}=(3^{a})^{x}-4^{x}$，
∴ $g(x)=2^{x}-4^{x}$.
(2)解法一：由(1)知，方程为 $2^{x}-4^{x}-b=0$.
令 $t=2^{x}$，$x\in[-2,2]$，则 $\frac{1}{4}\leqslant t\leqslant 4$，
且方程 $t-t^2-b=0$ 在 $\left[\frac{1}{4},4\right]$ 上有两个不相等的实数根，
即函数 $y=t-t^2=-\left(t-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}$ 的图象与函数 $y=b$ 的图象在 $\left[\frac{1}{4},4\right]$ 上有两个交点.
作出大致图象，如图所示：



由图知当 $b\in\left[\frac{3}{16},\frac{1}{4}\right)$ 时，方程 $g(x)-b=0$ 在 $[-2,2]$内有两个不相等的实数根.
故实数 b 的取值范围为 $\left[\frac{3}{16},\frac{1}{4}\right)$.
解法二：由(1)知方程为 $2^{x}-4^{x}-b=0$.
令 $t=2^{x}$，$x\in[-2,2]$，则 $\frac{1}{4}\leqslant t\leqslant 4$，且方程 $t-t^2-b=0$ 在 $\left[\frac{1}{4},4\right]$ 上有两个不相等的实数根，
令 $h(t)=-t^2+t-b$，$t\in\left[\frac{1}{4},4\right]$，
则 $\begin{cases}\Delta=1-4b>0,\\ h\left(\frac{1}{4}\right)\leqslant 0,\\ h(4)\leqslant 0,\end{cases}$ 解得 $\frac{3}{16}\leqslant b<\frac{1}{4}$.
故实数 b 的取值范围为 $\left[\frac{3}{16},\frac{1}{4}\right)$.

阶段质量评估 4

1. 选 C　$a+\sqrt[4]{(1-a)^4}=a+|1-a|=\begin{cases}1,a\leqslant 1,\\ 2a-1,a>1.\end{cases}$ 故选 C.

2. 选 A　∵ $y=\left(\frac{3}{5}\right)^{x}$ 是减函数，
又 $-\frac{1}{3}>-\frac{1}{2}$，
∴ $\left(\frac{3}{5}\right)^{-\frac{1}{3}}<\left(\frac{3}{5}\right)^{-\frac{1}{2}}$，
∴ $b>a>1$. 又 $c=\left(\frac{4}{3}\right)^{-\frac{1}{2}}=\left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{1}{2}}=\frac{\sqrt{3}}{2}<1$，
∴ $b>a>c$. 故选 A.

3. 选 C　∵ $a^{b}+a^{-b}=2\sqrt{2}$，∴ $(a^{b}+a^{-b})^2=(2\sqrt{2})^2$，
∴ $(a^{b})^2+(a^{-b})^2+2=8$，
即 $(a^{b})^2+(a^{-b})^2=6$.
∴ $(a^{b}-a^{-b})^2=(a^{b})^2+(a^{-b})^2-2=4$.
∵ $b>0$，∴ $-b<0$，∴ $-b<b$.
∵ $0<a<1$，∴ $a^{-b}>a^{b}$.
∴ $a^{b}-a^{-b}<0$.
∴ $a^{b}-a^{-b}=-2$.
故选 C.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

4. 选 B　$f(x)=2ax-1$ 在$[0,2]$上是单调函数，当 $x=0$ 时，$f(0)=-1$；∴当 $x=2$ 时，$f(2)=4a-1=7$，∴$a=2$. ∴$y=2^x$ 在$[0,2]$上的最大值为 $2^2=4$，最小值为 $2^0=1$，∴$4+1=5$，故选 B.

5. 选 D　当 $a>1$ 时，$0<\frac{1}{a}<1$，A、B 错误；当 $0<a<1$ 时，$\frac{1}{a}>1$，C 错误，D 正确. 故选 D.

6. 选 A　设点 $C(0,m)$，则由已知可得 $A\left(\frac{8}{m},m\right)$，$E\left(\frac{4}{m},m\right)$，$B\left(\frac{8}{m},2m\right)$. 又点 E,B 在指数函数 $y=a^x$ 的图象上，所以 $\begin{cases}m=a^{\frac{4}{m}},\\2m=a^{\frac{8}{m}},\end{cases}$ 所以 $a^{\frac{4}{m}}=2$，所以 $m=2$，所以 $a=-\sqrt{2}$（舍去）或 $a=\sqrt{2}$. 故选 A.

7. **解析**：∵函数 $f(x)$ 为偶函数，
∴$f(-x)=f(x)$ 对于 $f(x)$ 的定义域内的任意 x 都成立.
又 $f(x)$ 的定义域为 **R**，
∴取 $x=1$ 有 $f(-1)=f(1)$ 成立.
即 $(9^{-1}+1)\cdot 9^{-k}=(9^1+1)\cdot 9^k$，
∴$9^{2k}=9^{-1}$，∴$2k=-1$，即 $k=-\frac{1}{2}$.

答案：$-\frac{1}{2}$

8. **解析**：若 $a>1$，则 $a-\frac{1}{a}=1$，∴$a=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$；若 $0<a<1$，则 $\frac{1}{a}-a=1$，∴$a=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$，故 $a=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ 或 $a=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

答案：$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ 或 $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$

9. **解析**：$\left(4\frac{1}{2}\right)^0-\left(3\frac{3}{8}\right)^{\frac{1}{3}}\times\left(2\frac{1}{4}\right)^{-\frac{1}{2}}+(0.01)^{-0.5}=1-\frac{3}{2}\times\frac{2}{3}+10=10$.

答案：10

10. **解析**：$f(x)=2^x-2^{-x}$，定义域为 **R**，$f(-x)=2^{-x}-2^x=-f(x)$，∴$f(x)$ 是奇函数，且 $f(x)$ 在 **R** 上是增函数，①②正确；$f(|x|)=2^{|x|}-2^{-|x|}$ 是偶函数，∴$f(|x|)$ 的图象关于 y 轴对称，③正确；当 $x\geqslant 0$ 时，$f(|x|)=2^x-2^{-x}$ 是增函数，∴$f(|x|)\geqslant f(0)=0$，又 $f(|x|)$ 是偶函数，∴$f(|x|)$ 有最小值为 0，④正确.

答案：①②③④

11. **解**：(1)由 $f(1)=0$，得 $\frac{c-1}{2}=0$，∴$c=1$.

(2)证明：由(1)知，$f(x)=\frac{x-1}{x+1}$，
设 $0\leqslant x_1<x_2\leqslant 2$.
∴$f(x_1)-f(x_2)=\frac{x_1-1}{x_1+1}-\frac{x_2-1}{x_2+1}=\frac{2(x_1-x_2)}{(x_1+1)(x_2+1)}$.
∵$0\leqslant x_1<x_2\leqslant 2$，∴$x_1-x_2<0$，$x_1+1>0$，$x_2+1>0$，
∴$f(x_1)-f(x_2)<0$，
即 $f(x_1)<f(x_2)$，
∴$f(x)$ 在$[0,2]$上是单调递增函数.

(3)$g(x)$ 为奇函数. 证明如下：由(2)知，$g(x)=\frac{e^x-1}{e^x+1}$，
且 $g(x)$ 的定义域为 **R**，
$g(-x)=\frac{e^{-x}-1}{e^{-x}+1}=\frac{1-e^x}{1+e^x}=-g(x)$.
∴$g(x)$ 为奇函数.

12. **解**：(1)证明：设 x_1,x_2 是任意两个实数，且 $x_1<x_2$，则
$f(x_1)-f(x_2)=a-\frac{1}{2^{x_1}+1}-a+\frac{1}{2^{x_2}+1}$
$=\frac{2^{x_1}+1-2^{x_2}-1}{(2^{x_1}+1)(2^{x_2}+1)}$
$=\frac{2^{x_1}-2^{x_2}}{(2^{x_1}+1)(2^{x_2}+1)}$.
∵$x_1<x_2$，∴$2^{x_1}<2^{x_2}$，∴$2^{x_1}-2^{x_2}<0$.
又 $2^{x_1}+1>0$，$2^{x_2}+1>0$，
∴$f(x_1)-f(x_2)<0$，
∴$f(x_1)<f(x_2)$.
∴$f(x)$ 在 **R** 上为增函数.
(2)∵$f(x)$ 为奇函数，且 $f(x)$ 的定义域为 **R**，
∴$f(0)=a-\frac{1}{2^0+1}=a-\frac{1}{2}=0$，
∴$a=\frac{1}{2}$.
(3)由(2)知，$f(x)=\frac{1}{2}-\frac{1}{2^x+1}$.
由(1)知，$f(x)$ 在$[-1,2]$上为增函数.
∴$f(-1)\leqslant f(x)\leqslant f(2)$，
即 $-\frac{1}{6}\leqslant f(x)\leqslant\frac{3}{10}$.
∴$f(x)$ 在$[-1,2]$上的值域为 $\left[-\frac{1}{6},\frac{3}{10}\right]$.

13. **解**：1 小时后驾驶员血液中的酒精含量为 $0.3(1-50\%)$ mg/mL，…，x 小时后其酒精含量为 $0.3(1-50\%)^x$ mg/mL，由题意知 $0.3(1-50\%)^x\leqslant 0.08$，即 $\left(\frac{1}{2}\right)^x\leqslant\frac{4}{15}$.
采用估算法，$x=1$ 时，$\left(\frac{1}{2}\right)^1=\frac{1}{2}>\frac{4}{15}$；
$x=2$ 时，$\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}=\frac{4}{16}<\frac{4}{15}$，由于 $\left(\frac{1}{2}\right)^x$ 是减函数，
所以满足要求的 x 的最小整数为 2. 故至少要过 2 小时驾驶员才能驾驶.

14. **解**：(1)$f(x)=(2^x)^2-4\times 2^x-6=(2^x-2)^2-10$.
∵$0\leqslant x\leqslant 3$，
∴$1\leqslant 2^x\leqslant 8$.
∴当 $2^x=2$ 时，即 $x=1$ 时，$f(x)$ 取得最小值，且最小值为 -10；
当 $2^x=8$ 时，即 $x=3$ 时，$f(x)$ 取得最大值，且最大值为 26.
(2)∵实数 a 满足 $f(x)-a\geqslant 0$ 恒成立，
∴$a\leqslant f(x)$ 恒成立，
∴$a\leqslant f(x)_{\min}$，
由(1)知，$f(x)_{\min}=-10$，
∴$a\leqslant -10$.

2.2　对数函数

2.2.1　对数与对数运算

第 19 课时　对　数

题点知识巩固

1. 选 C　由对数的概念可知 $\log_5 b=2\Leftrightarrow 5^2=b$，故选 C.

2. 选 B　要使式子 $\log_{(a-2)}(5-a)$ 有意义，则 $\begin{cases}a-2>0,\\a-2\neq 1,\\5-a>0,\end{cases}$ 即 $2<a<3$ 或 $3<a<5$，故选 B.

3. 选 A　改写为指数式 $x^2=16$，但 x 作为对数的底数，必须取正值，∴$x=4$. 故选 A.

4. **解**：(1)∵$5^3=125$，∴$\log_5 125=3$.
(2)∵$4^{-2}=\frac{1}{16}$，∴$\log_4\frac{1}{16}=-2$.
(3)∵$\log_{\frac{1}{5}}125=-3$，∴$\left(\frac{1}{5}\right)^{-3}=125$.
(4)∵$\log_3\frac{1}{27}=-3$，∴$3^{-3}=\frac{1}{27}$.

5. 选 C　∵$\lg 10=1$，∴$\lg(\lg 10)=0$，
∴①正确；
∵$\ln e=1$，∴$\lg(\ln e)=0$，∴②正确；
∵$10=\lg x$，∴$x=10^{10}$，∴③不正确；
∵$e=\ln x$，∴$x=e^e$，
∴④不正确，故选 C.

6. 选 B　$\log_3\frac{1}{81}=\log_3 3^{-4}=-4$. 故选 B.

7. **解析**：$2x-1=3$，∴$x=2$.
答案：2

8. **解析**：∵$\log_3\frac{1-2x}{9}=0$，∴$\frac{1-2x}{9}=1$，
∴$x=-4$.
答案：-4

9. **解**：(1)$9^{\frac{1}{2}\log_3 4}=(3^2)^{\frac{1}{2}\log_3 4}=3^{\log_3 4}=4$.
(2)$5^{1+\log_5 2}=5\times 5^{\log_5 2}=5\times 2=10$.

10. **解**：原式$=2^3\times 2^{\log_2 3}+\frac{3^5}{3^{\log_3 9}}=2^3\times 3+\frac{3^5}{9}=24+27=51$.

提能达标过关

1. 选 C　$\log_3 9=2$ 应转化为 $3^2=9$. 故选 C.

2. 选 A　$2^{\log_3 x}=2^{-2}$，∴$\log_3 x=-2$，∴$x=3^{-2}=\frac{1}{9}$. 故选 A.

3. 选 D　因为 $x=a^2=b=c^4$，所以 $(abc)^4=x^7$，所以 $abc=x^{\frac{7}{4}}$，即 $\log_x(abc)=\frac{7}{4}$. 故选 D.

4. 选 C　∵$m=\ln e^e=e\ln e=e>2$，
∴$m\in A$. 故选 C.

5. 选 A　$a=\log_2\frac{1}{2}=-1$，$c=\log_2 4=2$，
∴$a<b<c$. 故选 A.

6. **解析**：由 $a>0$，$a^2=\left(\frac{2}{3}\right)^2$，可知 $a=\frac{2}{3}$，
∴$\log_{\frac{2}{3}}a=\log_{\frac{2}{3}}\frac{2}{3}=1$.
答案：1

7. **解析**：由 $2^x=3$，可得 $x=\log_2 3$，
又 $\log_2\frac{4}{3}=y$，
则 $x+y=\log_2 3+\log_2\frac{4}{3}=\log_2 2^2=2$.
答案：2

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

8. **解析**：$\because f\left(\frac{1}{9}\right)=\log_3\frac{1}{9}=-2$，

$\therefore f\left[f\left(\frac{1}{9}\right)\right]=f(-2)=3^{-2}=\frac{1}{9}$.

答案：$\frac{1}{9}$

9. **解**：原函数式可化为

$f(x)=\left(x+\frac{1}{\lg a}\right)^2\lg a-\frac{1}{\lg a}+4\lg a$.

$\because f(x)$有最大值3，

$\therefore \lg a<0$，且$-\frac{1}{\lg a}+4\lg a=3$，

整理得$4(\lg a)^2-3\lg a-1=0$，

解得$\lg a=1$或$\lg a=-\frac{1}{4}$.

又$\because \lg a<0$，$\therefore \lg a=-\frac{1}{4}$.

$\therefore a=10^{-\frac{1}{4}}$.

10. **证明**：设$\log_a b=\log_b a=k$，

则$b=a^k$，$a=b^k$，$\therefore b=(b^k)^k=b^{k^2}$.

$\because b>0$，且$b\neq1$，$\therefore k^2=1$，

即$k=\pm1$. 当$k=-1$时，$a=\frac{1}{b}$；

当$k=1$时，$a=b$.

$\therefore a=b$或$a=\frac{1}{b}$，命题得证.

第20课时　对数的运算

题点知识巩固

1. 选B　$\because xy>0$，$\therefore$①中若$x<0$，则不成立；③中若$x<0$，$y<0$也不成立，故选B.

2. 选C　$2\log_5 10+\log_5 0.25=\log_5 100+\log_5 0.25=\log_5 25=2$. 故选C.

3. 选D　$\lg 8+3\lg 5=3\lg 2+3\lg 5=3(\lg 2+\lg 5)=3\lg 10=3$，故选D.

4. **解析**：$\because 3^a=2$，$\therefore a=\log_3 2$，$\therefore 2\log_3 6-\log_3 8=2(\log_3 2+\log_3 3)-3\log_3 2=-\log_3 2+2=2-a$.

答案：$2-a$

5. **解析**：$\log_a 18=\log_a(2\times3^2)=\log_a 2+\log_a 3^2=\log_a 2+2\log_a 3=m+2n$.

答案：$m+2n$

6. **解**：(1)原式$=2\log_2 5\times(-4)\log_3 2\times(-2)\log_5 3$

$=16\times\frac{\lg 5}{\lg 2}\times\frac{\lg 2}{\lg 3}\times\frac{\lg 3}{\lg 5}$

$=16$.

(2)原式$=\left(\frac{\lg 2}{\lg 3}+\frac{\lg 2}{\lg 9}\right)\left(\frac{\lg 3}{\lg 4}+\frac{\lg 3}{\lg 8}\right)$

$=\left(\frac{\lg 2}{\lg 3}+\frac{\lg 2}{2\lg 3}\right)\left(\frac{\lg 3}{2\lg 2}+\frac{\lg 3}{3\lg 2}\right)$

$=\frac{3\lg 2}{2\lg 3}\cdot\frac{5\lg 3}{6\lg 2}=\frac{5}{4}$.

(3)原式$=\frac{\log_5 2^{\frac{1}{2}}\cdot\log_{7^2}3^4}{\log_{5^2}3^{-1}\cdot\log_7 2^{\frac{2}{3}}}$

$=\frac{\frac{1}{2}\log_5 2\cdot\frac{4}{2}\log_7 3}{-\frac{1}{2}\log_5 3\cdot\frac{2}{3}\log_7 2}$

$=-3\log_3 2\cdot\log_2 3=-3$.

(4)原式$=\ln e^{\frac{3}{2}}+\log_2 6-\log_2 3+\log_2 3\cdot\log_3 2^2$

$=\frac{3}{2}+\log_2\frac{6}{3}+2\log_2 3\cdot\log_3 2$

$=\frac{3}{2}+1+2$

$=\frac{9}{2}$.

(5)原式$=\frac{1}{2}+\log_7 2\times\frac{1}{2}\log_2 7+2$

$=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+2$

$=3$.

7. **解**：由$2^m=3^n=36$，得$m=\log_2 36$，$n=\log_3 36$，

$\therefore \frac{1}{m}+\frac{1}{n}=\frac{1}{\log_2 36}+\frac{1}{\log_3 36}=\frac{1}{2\log_2 6}+\frac{1}{2\log_3 6}$

$=\frac{1}{2}(\log_6 2+\log_6 3)=\frac{1}{2}\log_6 6=\frac{1}{2}$.

8. 选D　$\because a=\log_3 6=\frac{\log_2 6}{\log_2 3}=\frac{1+\log_2 3}{\log_2 3}$，

$\therefore \log_2 3=\frac{1}{a-1}$，

$b=\log_5 20=\frac{\log_2 20}{\log_2 5}=\frac{2+\log_2 5}{\log_2 5}$，

$\therefore \log_2 5=\frac{2}{b-1}$，

$\therefore \log_2 15=\log_2 3+\log_2 5=\frac{1}{a-1}+\frac{2}{b-1}=\frac{2a+b-3}{(a-1)(b-1)}$.

故选D.

9. **证明**：设$2^x=3^y=6^z=k(k\neq1)$，

$\therefore x=\log_2 k$，$y=\log_3 k$，$z=\log_6 k$，

$\therefore \frac{1}{x}=\log_k 2$，$\frac{1}{y}=\log_k 3$，$\frac{1}{z}=\log_k 6=\log_k 2+\log_k 3$，

$\therefore \frac{1}{z}=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$.

提能达标过关

1. 选B　$\log_3 6=\frac{\lg 6}{\lg 3}=\frac{\lg 2+\lg 3}{\lg 3}=\frac{a+b}{b}$，故选B.

2. 选B　$\because\sqrt{(\log_2 3)^2-4\log_2 3+4}=\sqrt{(\log_2 3-2)^2}=2-\log_2 3$，$\therefore$原式$=2-\log_2 3+\log_2 3^{-1}=2-2\log_2 3$. 故选B.

3. 选A　$\because x=\log_{2.5}1\,000$，

$y=\log_{0.25}1\,000$，

$\therefore \frac{1}{x}=\frac{1}{\log_{2.5}1\,000}=\log_{1\,000}2.5$，

同理$\frac{1}{y}=\log_{1\,000}0.25$，

$\therefore \frac{1}{x}-\frac{1}{y}=\log_{1\,000}2.5-\log_{1\,000}0.25=\log_{1\,000}10=\frac{\lg 10}{\lg 1\,000}=\frac{1}{3}$.

故选A.

4. 选A　$\because 2^x=3$，

$\therefore x=\log_2 3$. 又$\log_4\frac{8}{3}=y$，

$\therefore x+2y=\log_2 3+2\log_4\frac{8}{3}=\log_2 3+2(\log_4 8-\log_4 3)$

$=\log_2 3+2\left(\frac{3}{2}\log_2 2-\frac{1}{2}\log_2 3\right)=\log_2 3+3-\log_2 3=3$. 故选A.

5. 选B　由韦达定理可得$\lg a+\lg b=2$，$\lg a\cdot\lg b=\frac{1}{2}$. $\left(\lg\frac{a}{b}\right)^2=(\lg a-\lg b)^2=(\lg a+\lg b)^2-4\lg a\lg b=2^2-4\times\frac{1}{2}=2$. 故选B.

6. **解析**：原式$=\left(\frac{1}{5}\right)^{-1}+1+\lg(25\times4)=5+1+2=8$.

答案：8

7. **解析**：$\because \log_a x=\frac{1}{\log_x a}=2$，$\therefore \log_x a=\frac{1}{2}$.

同理$\log_x c=\frac{1}{6}$，$\log_x b=\frac{1}{3}$.

$\therefore \log_{(abc)}x=\frac{1}{\log_x(abc)}=\frac{1}{\log_x a+\log_x b+\log_x c}=1$.

答案：1

8. **解析**：设里氏8.0级、6.0级地震释放的能量分别为E_2，E_1，

则$8-6=\frac{2}{3}(\lg E_2-\lg E_1)$，即$\lg\frac{E_2}{E_1}=3$.

$\therefore \frac{E_2}{E_1}=10^3=1\,000$，即汶川大地震所释放的能量相当于1 000颗广岛原子弹.

答案：1 000

9. **解**：(1)原式$=\log_{\sqrt{3}}(\sqrt{3})^6+2\lg 2+2\lg 5=6+2(\lg 2+\lg 5)=8$.

(2)原式$=\lg 5(3\lg 2+3)+3(\lg 2)^2-\lg 6+\lg 6-2$

$=3\lg 5\cdot\lg 2+3\lg 5+3(\lg 2)^2-2$

$=3\lg[2(\lg 5+\lg 2)]+3\lg 5-2$

$=3\lg 2+3\lg 5-2=3(\lg 2+\lg 5)-2$

$=1$.

10. **解**：由$3^b=7$得$\log_3 7=b$，

$\log_{12}56=\frac{\log_3(2^3\times7)}{\log_3(2^2\times3)}=\frac{3\log_3 2+\log_3 7}{2\log_3 2+\log_3 3}=\frac{3\log_3 2+\log_3 7}{2\log_3 2+1}=\frac{3a+b}{2a+1}$.

2.2.2　对数函数及其性质

第21课时　对数函数的图象及性质

题点知识巩固

1. 选D　选项A、B、C中的函数都不具有“$y=\log_a x$ ($a>0$且$a\neq1$)”的形式，只有D选项符合. 故选D.

2. **解析**：依题意得$\begin{cases}a^2-2a-2=1,\\a+1>0,\\a+1\neq1,\end{cases}$解得$a=3$.

答案：3

3. **解析**：设对数函数$f(x)=\log_a x$，

$\because f(x)$的图象过点$P(8,3)$，

$\therefore 3=\log_a 8$，

$\therefore a^3=8$，$a=2$，

$\therefore f(x)=\log_2 x$，

$f\left(\frac{1}{32}\right)=\log_2\frac{1}{32}=\log_2 2^{-5}=-5$.

答案：-5

4. 选A　$\because$函数$y=\log_a x$的图象逐渐上升，$\therefore$函数$y=\log_a x$为单调增函数，

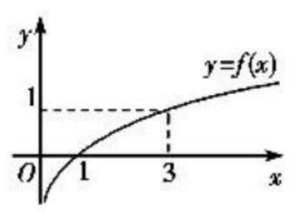
$\therefore a>1$，故选A.

5. 选B　作直线$y=1$，则直线与C_1，C_2的交点的横坐标分别为a，b，易知$0<b<a<1$. 故选B.

6. **解析**：令$x-1=1$，得$x=2$，即$f(2)=2$，故$P(2,2)$.

答案：(2,2)

7. **解**：(1)作出函数$y=\log_3 x$的图象如图所示.



(2)令$f(x)=f(2)$，

即$\log_3 x=\log_3 2$，

解得$x=2$.

由图象知，当$0<a<2$时，

恒有$f(a)<f(2)$.

$\therefore$所求a的取值范围为$(0,2)$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

8. 选 C　由题意知 $\begin{cases}1+x>0,\\1-x\neq0,\end{cases}$ 解得 $x>-1$ 且 $x\neq1$. 故选 C.

9. **解**：(1)要使函数有意义，
需 $x^2-4x-5>0$，
即 $(x-5)(x+1)>0$，
所以 $x<-1$ 或 $x>5$，
故所求函数的定义域为 $(-\infty,-1)\cup(5,+\infty)$.
(2)要使函数有意义，
需 $\log_{0.5}(4x-3)\geqslant0$，
即 $\log_{0.5}(4x-3)\geqslant\log_{0.5}1$，
故 $0<4x-3\leqslant1$，
解得 $\frac{3}{4}<x\leqslant1$，
故所求函数的定义域为 $\left(\frac{3}{4},1\right]$

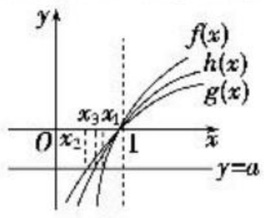
提能达标过关

1. 选 C　由指数函数与对数函数的图象可知，$a<1$，$b=2$，$1<c<2$，$d>2$，所以有 $a<1<c<b<d$. 故选 C.

2. 选 A　因为函数 $y=\log_2|x|$ 是偶函数，且在 $(0,+\infty)$ 上为增函数，结合图象可知 A 正确. 故选 A.

3. 选 B　$f\left(\frac{1}{8}\right)=\log_2\frac{1}{8}=\log_2 2^{-3}=-3$，
$f\left[f\left(\frac{1}{8}\right)\right]=f(-3)=3^{-3}=\frac{1}{27}$. 故选 B.

4. 选 A　分别作出三个函数的大致图象，如图所示. 由图可知，$x_2<x_3<x_1$.



故选 A.

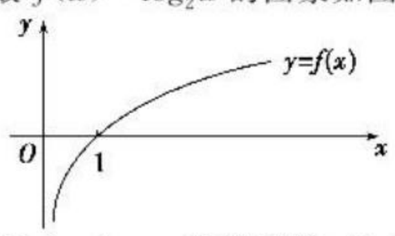
5. 选 D　由函数 $f(x)=\log_a(x+b)$ 的图象可知，函数 $f(x)=\log_a(x+b)$ 在 $(-b,+\infty)$ 上是减函数，所以 $0<a<1$ 且 $0<b<1$，所以 $g(x)=a^x+b$ 在 **R** 上是减函数，故排除 A，B；由 $g(x)$ 的值域为 $(b,+\infty)$，所以 $g(x)=a^x+b$ 的图象应在直线 $y=b$ 的上方，故排除 C. 故选 D.

6. **解析**：由 $\begin{cases}\log_{\frac{1}{2}}(3x-2)\geqslant0,\\3x-2>0,\end{cases}$ 解得 $\frac{2}{3}<x\leqslant1$.
$\therefore f(x)$ 的定义域是 $\left(\frac{2}{3},1\right]$.
答案：$\left(\frac{2}{3},1\right]$

7. **解析**：令 $\frac{2x+1}{x-1}=1$，得 $2x+1=x-1$，
$\therefore x=-2$.
$\therefore$ 函数 y 的图象过定点 $(-2,0)$.
答案：$(-2,0)$

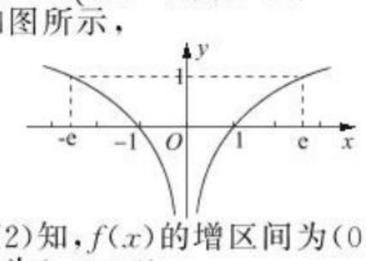
8. **解析**：由图象可求得直线的方程为 $y=2x+2$，又函数 $y=\log_c\left(x+\frac{1}{9}\right)$ 的图象过点 $(0,2)$，
将其坐标代入可得 $c=\frac{1}{3}$. 又 $a=b=2$，
所以 $a+b+c=2+2+\frac{1}{3}=\frac{13}{3}$.
答案：$\frac{13}{3}$

9. **解**：函数 $f(x)=\log_2x$ 的图象如图.



(1)$\because f(x)=\log_2x$ 为增函数，又 $f(a)>f(2)$，
$\therefore\log_2a>\log_22$.
$\therefore a>2$. 即 a 的取值范围是 $(2,+\infty)$.
(2)$\because 2\leqslant x\leqslant14$，$\therefore 3\leqslant2x-1\leqslant27$.
$\therefore\log_23\leqslant\log_2(2x-1)\leqslant\log_227$.
$\therefore$ 函数 $f(x)=\log_2(2x-1)$ 在 $[2,14]$ 上的最小值为 $\log_23$，最大值为 $\log_227$.

10. **解**：(1)由 $|x|>0$ 得 $x\neq0$.
$\therefore f(x)$ 的定义域是 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$，定义域关于原点对称.
又 $f(-x)=\ln|-x|=\ln|x|=f(x)$，
$\therefore f(x)$ 是偶函数.
(2)$f(x)=\begin{cases}\ln x,x>0,\\\ln(-x),x<0.\end{cases}$
图象如图所示，



(3)由(2)知，$f(x)$ 的增区间为 $(0,+\infty)$，减区间为 $(-\infty,0)$.

第 22 课时　对数函数的性质及应用

题点知识巩固

1. 选 D　$a=\log_32<\log_33=1$；$c=\log_23>\log_22=1$，由对数函数的性质可知 $\log_52<\log_32$，$\therefore b<a<c$，故选 D.

2. 选 D　$a=0.9^{3.1}\in(0,1)$，$b=\log_3\pi>\log_33=1$，$c=\log_20.7<0$，$\therefore c<a<b$，故选 D.

3. 选 C　由题意知 m,n 一定都是大于 0 且小于 1 的，根据函数图象知，当 $x>1$ 时，底数越大，函数值越小. 故选 C.

4. **解析**：由 $t=x^2-2x>0$ 得，$x>2$ 或 $x<0$，当 $x>2$ 时，$t=x^2-2x$ 单调递增，$\log_2t$ 单调递增，$\therefore$ 函数 $y=\log_2(x^2-2x)$ 为增函数；当 $x<0$ 时，$t=x^2-2x$ 单调递减，$\log_2t$ 单调递增，
$\therefore$ 函数 $y=\log_2(x^2-2x)$ 为减函数，$\therefore$ 函数 $y=\log_2(x^2-2x)$ 的增区间为 $(2,+\infty)$.
答案：$(2,+\infty)$

5. **解析**：依题意有
$\begin{cases}-\frac{-a}{2\times3}\leqslant-1,\\3\times(-1)^2-a\times(-1)+5>0.\end{cases}$
解得 $-8<a\leqslant-6$.
答案：$(-8,-6]$

6. 选 A　$f(x)$ 的定义域为 **R**，
$\because f(-x)+f(x)=\lg\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+1}-x}\right)+\lg\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}\right)=\lg\frac{1}{(x^2+1)-x^2}=\lg1=0$，$\therefore f(x)$ 为奇函数，故选 A.

7. 选 B　$\because$ 函数 $y=f(x+2)$ 的图象关于 $x=-2$ 对称，
$\therefore$ 函数 $y=f(x)$ 的图象关于 y 轴对称，
$\therefore$ 函数 $y=f(x)$ 是偶函数.
$\therefore a=f(-3)=f(3)=|\log_23|=\log_23$，
又 $b=f\left(\frac{1}{4}\right)=\left|\log_2\frac{1}{4}\right|=|-2|=2$，
$c=f(2)=|\log_22|=1$，$\therefore c<a<b$. 故选 B.

8. **解析**：由 $f(x)$ 是定义域为 $(-\infty,+\infty)$ 的奇函数，且 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上是增函数，$f(2)=0$，得 $f(x)$ 的大致图象如图所示.

$f(\log_4x)<0\Leftrightarrow-2<\log_4x<2\Leftrightarrow\log_44^{-\frac{1}{2}}<\log_4x<\log_44^{\frac{1}{2}}\Leftrightarrow\frac{1}{2}<x<2$.
答案：$\left\{x\,\middle|\,\frac{1}{2}<x<2\right\}$

9. **解**：(1)要使函数 $F(x)$ 有意义，则 $\begin{cases}x+1>0,\\1-x>0,\end{cases}$
解得 $-1<x<1$，即函数 $F(x)$ 的定义域为 $\{x|-1<x<1\}$.
(2)$F(x)=f(x)+g(x)=\lg(1-x^2)$，其定义域关于原点对称，
又 $F(-x)=\lg[1-(-x)^2]=\lg(1-x^2)=F(x)$，
$\therefore$ 函数 $F(x)$ 是偶函数.
(3)$F(x)$ 在区间 $(0,1)$ 上是减函数.
设 $x_1,x_2\in(0,1)$ 且 $x_1<x_2$，则
$F(x_1)-F(x_2)=\lg(1-x_1^2)-\lg(1-x_2^2)=\lg\frac{1-x_1^2}{1-x_2^2}$.
$\because x_1,x_2\in(0,1)$，且 $x_1<x_2$，
$\therefore(1-x_1^2)-(1-x_2^2)=(x_2+x_1)(x_2-x_1)>0$，
即 $1-x_1^2>1-x_2^2$.
$\because x_1,x_2\in(0,1)$，
$\therefore1-x_1^2>0$，$1-x_2^2>0$，
$\therefore\frac{1-x_1^2}{1-x_2^2}>1$，故 $\lg\frac{1-x_1^2}{1-x_2^2}>0$，
即 $F(x_1)>F(x_2)$，
故 $F(x)$ 在区间 $(0,1)$ 上是减函数.

提能达标过关

1. 选 D　$a=\log_36=\log_33+\log_32=1+\log_32$，
$b=\log_510=\log_55+\log_52=1+\log_52$，
$c=\log_714=\log_77+\log_72=1+\log_72$，
$\because\log_32>\log_52>\log_72$，
$\therefore a>b>c$，故选 D.

2. 选 C　$\because y=\lg\left(\frac{2}{x+1}-1\right)=\lg\frac{1-x}{1+x}$，
由 $\frac{1-x}{1+x}>0$，得 $\begin{cases}1-x>0,\\1+x>0\end{cases}$ 或 $\begin{cases}1-x<0,\\1+x<0.\end{cases}$
$\therefore-1<x<1$，其定义域为 $(-1,1)$，关于原点对称.
又 $f(-x)=\lg\frac{1+x}{1-x}=-\lg\frac{1-x}{1+x}=-f(x)$，
$\therefore$ 函数为奇函数，其图象关于原点对称. 故选 C.

3. 选 D　$f(x)\leqslant2\Leftrightarrow\begin{cases}x\leqslant1,\\2^{1-x}\leqslant2\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x>1,\\1-\log_2x\leqslant2\end{cases}\Leftrightarrow0\leqslant x\leqslant1$ 或 $x>1$，故选 D.

4. 选 D　$\because f(a)=f(b)$，$\therefore|\log_3a|=|\log_3b|$.
又 $\because a\neq b$，不妨设 $a>b$，则有 $\log_3a=-\log_3b$，
即 $\log_3a+\log_3b=0$.
$\therefore\log_3(ab)=0$，$\therefore ab=1$. 故选 D.

5. 选 A　由 $|x-1|>0$ 得，函数 $y=\log_a|x-1|$ 的定义域为 $\{x|x\neq1\}$. 设 $g(x)=|x-1|=\begin{cases}x-1,x>1,\\-x+1,x<1,\end{cases}$ 则有 $g(x)$ 在 $(-\infty,1)$ 上为减函数，在 $(1,+\infty)$ 上为增函数. $\because f(x)=\log_a|x-1|$ 在 $(0,1)$ 上是减函数，$\therefore a>1$.
$\therefore f(x)=\log_a|x-1|$ 在 $(1,+\infty)$ 上为增函数且无最大值. 故选 A.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

6. **解析**：当 $a>1$ 时，$f(x)_{\max}=f(3)=\log_a 3=1$，$\therefore a=3$.
当 $0<a<1$ 时，$f(x)_{\max}=f(2)=\log_a 2=1$，$\therefore a=2$(舍去). $\therefore a=3$.
答案：3

7. **解析**：$\because$ 当 $x\leqslant 2$ 时，$-x+6\geqslant 4$，
又 $f(x)$的值域为$[4,+\infty)$，
$\therefore$ 当 $x>2$ 时，$\begin{cases}3+\log_a 2\geqslant 4,\\ a>1,\end{cases}$
解得 $1<a\leqslant 2$.
答案：$(1,2]$

8. **解析**：$\because f(x)$是定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数，
$\therefore f(0)=0$，当 $x<0$ 时，$-x>0$，
$\therefore f(x)=-f(-x)=-[1-\log_2(-x)]=\log_2(-x)-1$.
$\therefore$ 当 $x>0$ 时，由 $1-\log_2 x<0$，得 $x>2$；
当 $x<0$ 时，由 $\log_2(-x)-1<0$，
得 $-2<x<0$.
$\therefore$ 不等式 $f(x)<0$ 的解集为$\{x|x>2$ 或 $-2<x<0\}$.
答案：$\{x|x>2$ 或 $-2<x<0\}$

9. **解**：(1)由 $\begin{cases}f(1)=1,\\ f(2)=\log_2 12,\end{cases}$
得 $\begin{cases}\log_2(a-b)=1,\\ \log_2(a^2-b^2)=\log_2 12,\end{cases}$
$\therefore\begin{cases}a-b=2,\\ a^2-b^2=12,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}a-b=2,\\ a+b=6,\end{cases}$
$\therefore a=4,b=2$.
(2)由(1)知，$f(x)=\log_2(4^x-2^x)$，
设 $t=2^x$，$\because x\in[1,2]$，$\therefore t\in[2,4]$.
令 $u=4^x-2^x=t^2-t=\left(t-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}$，
$\therefore$ 当 $t=4$，即 $x=2$ 时，$u_{\max}=12$.
故 $f(x)$的最大值为 $\log_2 12$.

10. **解**：(1)由题意知 $f(x)-g(x)=\log_a(x+1)-\log_a(4-2x)$，由 $\begin{cases}x+1>0,\\ 4-2x>0,\end{cases}$ 得 $-1<x<2$.
$\therefore$ 函数 $f(x)-g(x)$的定义域是$(-1,2)$.
(2)由 $f(x)-g(x)>0$，得 $f(x)>g(x)$，
即 $\log_a(x+1)>\log_a(4-2x)$. ①
当 $a>1$ 时，由①可得 $x+1>4-2x$，
解得 $x>1$. 又$\because -1<x<2$，
$\therefore 1<x<2$；
当 $0<a<1$ 时，由①可得 $x+1<4-2x$，解得 $x<1$.
又$\because -1<x<2$，$\therefore -1<x<1$.
综上知，当 $a>1$ 时，x 的取值范围是$(1,2)$；
当 $0<a<1$ 时，x 的取值范围是$(-1,1)$.

素养提升

素养培优提能

1. 选 D　由题易得 $a<\ln 1=0$，$0<b<1$，$c>\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{2}=1$，故 $c>b>a$，故选 D.

2. 选 C　$\because y=\log_{\frac{1}{2}}x$ 在$(0,+\infty)$上是减函数，而 $a^2+a+1=\left(a+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\geqslant\frac{3}{4}$，$\therefore\log_{\frac{1}{2}}(a^2+a+1)\leqslant\log_{\frac{1}{2}}\frac{3}{4}$. 故选 C.

3. 选 B　$\because\lg a+\lg b=0$，$\therefore ab=1$，$\because g(x)=-\log_b x$ 的定义域是$(0,+\infty)$，排除A；若 $a>1$，则 $0<b<1$，此时 $f(x)=a^x$ 是增函数，$g(x)=-\log_b x$ 是增函数；若 $0<a<1$，则 $b>1$，此时 $f(x)=a^x$ 是减函数，$g(x)=-\log_b x$ 是减函数. 结合图象知选 B.

4. 选 C　$\because f(x)=\begin{cases}(3a-1)x+4a,x<1,\\ \log_a x,x\geqslant 1\end{cases}$
是 $\mathbf{R}$ 上的减函数，
$\therefore\begin{cases}3a-1<0,\\ 0<a<1,\\ (3a-1)\times 1+4a\geqslant\log_a 1=0,\end{cases}$ 解得 $\frac{1}{7}\leqslant a<\frac{1}{3}$，即实数 a 的取值范围为$\left[\frac{1}{7},\frac{1}{3}\right)$. 故选 C.

5. 选 A　$\because f_4(x)=\log_2(2x)=1+\log_2 x$，$\therefore f_2(x)=\log_2(x+2)$的图象沿着 x 轴先向右平移 2 个单位长度，得到 $y=\log_2 x$ 的图象，然后再沿着 y 轴向上平移 1 个单位长度，得到 $f_4(x)=\log_2(2x)=1+\log_2 x$ 的图象，根据“同形函数”的定义，故选 A.

6. **解析**：设 $u=-x^2-2x+3$，
则 $u=-(x+1)^2+4\leqslant 4$，
$\because u>0$，$\therefore 0<u\leqslant 4$.
又 $y=\log_{\frac{1}{2}}u$ 在$(0,4]$上是减函数，
$\therefore\log_{\frac{1}{2}}u\geqslant\log_{\frac{1}{2}}4=-2$，即 $f(x)\geqslant -2$，
$\therefore$ 函数 $f(x)=\log_{\frac{1}{2}}(-x^2-2x+3)$的值域为$[-2,+\infty)$.
答案：$[-2,+\infty)$

7. **解析**：由题意，得 $\log_a k=0$，$\therefore k=1$，$\therefore y=\log_{\frac{1}{a}}(x-k)=\log_{\frac{1}{a}}(x-1)$的图象恒过点$(2,0)$.
答案：$(2,0)$

8. **解析**：$\because y=2\,016^x$ 在 $\mathbf{R}$ 上是增函数，
$\therefore 0<2\,016^{-0.201\,4}<2\,016^0=1$.
$\because y=\log_{2\,014}x$ 在$(0,+\infty)$上是增函数，
$\therefore\log_{2\,014}0.201\,6<\log_{2\,014}1=0$.
$\because y=\log_{0.201\,6}x$ 在$(0,+\infty)$上是减函数，
$\therefore\log_{0.201\,6}0.201\,4>\log_{0.201\,6}0.201\,6=1$.
$\therefore\log_{0.201\,6}0.201\,4>2\,016^{-0.201\,4}>\log_{2\,014}0.201\,6$，
即 $c>a>b$.
答案：$c>a>b$

9. **解**：(1)$\because f(1)=1$，$\therefore\log_4(a+5)=1$，
$\therefore a+5=4$，得 $a=-1$，
$\therefore f(x)=\log_4(-x^2+2x+3)$.
由 $-x^2+2x+3>0$，得 $-1<x<3$，
即函数 $f(x)$的定义域为$(-1,3)$.
令 $g(x)=-x^2+2x+3$，
则 $g(x)$在$(-1,1)$上单调递增，在$(1,3)$上单调递减.
又 $y=\log_4 x$ 在$(0,+\infty)$上单调递增，
所以 $f(x)$的单调递增区间是$(-1,1)$，单调递减区间是$(1,3)$.
(2)假设存在实数 a，使 $f(x)$的最小值为 0，
令 $h(x)=ax^2+2x+3$，则 $h(x)_{\min}=1$，
$\therefore\begin{cases}a>0,\\ \frac{3a-1}{a}=1,\end{cases}$ 解得 $a=\frac{1}{2}$.
$\therefore$存在实数 $a=\frac{1}{2}$，使 $f(x)$的最小值为0.

10. **解**：(1)$\because f(x)$为奇函数，$\therefore f(x)+f(-x)=0$，
$\therefore\lg\frac{a-x}{1+x}+\lg\frac{a+x}{1-x}=0$，$\therefore\frac{a^2-x^2}{1-x^2}=1$，
$\therefore a=1$($a=-1$ 舍去)，此时 $f(x)$的定义域为$(-1,1)$，关于原点对称.
(2)$\because$ 当 $x\in(-1,5]$ 内有意义，且 $f(x)$的定义域为$(-1,a)$，
$\therefore(-1,5]\subseteq(-1,a)$，$\therefore a>5$.
(3)由(1)知，$f(x)=\lg\frac{1-x}{1+x}$，定义域为$(-1,1)$，
当 $x\in(-1,1)$ 时，$t=\frac{1-x}{1+x}=-1+\frac{2}{1+x}$为减函数，
$\therefore f(x)=\lg\frac{1-x}{1+x}$ 在定义域内是减函数，
$\because f(x)$在区间(m,n)上的值域是$(-1,+\infty)$，
$\therefore f(n)=\lg\frac{1-n}{1+n}=-1$，$m=-1$，
$\therefore n=\frac{9}{11}$，
即所求区间(m,n)为$\left(-1,\frac{9}{11}\right)$.

阶段质量评估 5

1. 选 D　由 $4-x^2\geqslant 0$，得 $-2\leqslant x\leqslant 2$，$\therefore A=[-2,2]$. 由 $1-x>0$，得 $x<1$，$\therefore B=(-\infty,1)$. $\therefore A\cap B=[-2,1)$，故选 D.

2. 选 B　$f(1)+f(0)=-\ln 1+\left(\frac{1}{2}\right)^0=1$，故选 B.

3. 选 D　令 $2^x-3=1$，得 $2^x=4$，$\therefore x=2$，$f(2)=\log_a 1-4=-4$，$\therefore f(x)$的图象恒过定点$(2,-4)$，故选 D.

4. 选 A　$\because x=\log_2 5-\log_2\sqrt{5}=\log_2\sqrt{5}>1$，$y=\log_5 3<1$，
$z=5^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{\sqrt{5}}<\frac{1}{2}$，
因为 $\log_5 3>\log_5\sqrt{5}>\frac{1}{2}$，即 $y>z$，
$\therefore z<y<x$.
故选 A.

5. 选 A　$\because f(x)=a^{x-k}-1$ 过定点$(2,0)$，
$\therefore k=2$.
又 $f(x)$在 $\mathbf{R}$ 上为减函数，$\therefore 0<a<1$，
$\therefore g(x)=\log_a(x+2)$的图象是 A. 故选 A.

6. 选 B　$\because$偶函数 $f(x)$在$(-\infty,0]$上单调递减，
$\therefore f(x)$在$[0,+\infty)$上单调递增.
又 $0<\log_4 5=\log_2\sqrt{5}<\log_2 3<2<2^{\frac{3}{2}}$，
$\therefore f(\log_4 5)<f(\log_2 3)<f(2^{\frac{3}{2}})$，
即 $b<a<c$. 故选 B.

7. **解析**：令 $3x+m=1$，得 $x=\frac{1-m}{3}$，则函数 $f(x)$的图象恒过定点$\left(\frac{1-m}{3},n\right)$. 由已知条件得 $\begin{cases}\frac{1-m}{3}=3,\\ n=4,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}m=-8,\\ n=4.\end{cases}$
答案：-8　4

8. **解析**：$\because f(x)$是偶函数，且 $f(x)$的定义域是 $\mathbf{R}$，
$\therefore\lg(10^{-x}+1)-ax=\lg(10^x+1)+ax$ 对任意实数 x 恒成立.
即 $\lg\frac{1+10^x}{10^x}-ax=\lg(10^x+1)+ax$，
即 $-x-ax=ax$，
$\therefore(2a+1)x=0$ 对任意实数 x 恒成立.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

$\therefore 2a+1=0$，即 $a=-\frac{1}{2}$.

$\because g(x)$ 是奇函数，又 $g(x)$ 的定义域是 $\mathbf{R}$.

$\therefore g(0)=\frac{1-b}{1}=0$，得 $b=1$.

于是 $a+b=-\frac{1}{2}+1=\frac{1}{2}$.

答案：$\frac{1}{2}$

9. **解析**：令 $x^5=t$，则 $x=t^{\frac{1}{5}}$.

$\therefore f(t)=\lg t^{\frac{1}{5}}=\frac{1}{5}\lg t$.

$\therefore f(2)=\frac{1}{5}\lg 2$.

答案：$\frac{1}{5}\lg 2$

10. **解析**：$f(x_1^2)+f(x_2^2)+f(x_3^2)+\cdots+f(x_{2\,017}^2)=\log_a x_1^2+\log_a x_2^2+\log_a x_3^2+\cdots+\log_a x_{2\,017}^2$
$=2(\log_a x_1+\log_a x_2+\log_a x_3+\cdots+\log_a x_{2\,017})$
$=2\log_a(x_1\cdot x_2\cdot x_3\cdot\cdots\cdot x_{2\,017})$
$=2f(x_1\cdot x_2\cdot x_3\cdot\cdots\cdot x_{2\,017})=2\times 8=16$.

答案：16

11. **解**：(1)原式 $=(3^3)^{\frac{2}{3}}-3\times\log_2 2^{-3}+\lg(\sqrt{3+\sqrt{5}}+\sqrt{3-\sqrt{5}})^2$
$=3^{3\times\frac{2}{3}}-3\times(-3)+\lg 10$
$=9+9+1=19$.
(2)$\because 4^a=5^b=m$，$\therefore a=\log_4 m$，$b=\log_5 m$.
$\therefore \frac{1}{a}=\log_m 4$，$\frac{1}{b}=\log_m 5$.
$\because \frac{1}{a}+\frac{2}{b}=1$，$\therefore \log_m 4+2\log_m 5=1$，
$\therefore \log_m 100=1$，$\therefore m=100$.

12. **解**：(1)由 $2\leqslant 2^x\leqslant 32$，得 $2^1\leqslant 2^x\leqslant 2^5$，
$\therefore 1\leqslant x\leqslant 5$，
$\therefore A=\{x|1\leqslant x\leqslant 5\}$.
令 $3-x>0$，得 $x<3$，$\therefore B=\{x|x<3\}$.
$\therefore A\cap B=\{x|1\leqslant x<3\}$.
(2)$\because (A\cap B)\subseteq C$，
又 $C=\{x|x\geqslant a+1\}$，
$\therefore a+1\leqslant 1$，$\therefore a\leqslant 0$.

13. **解**：(1)当 $a=2$ 时，$f(x)=\log_2\frac{1+x}{1-x}=\log_2\left(\frac{-2}{x-1}-1\right)$，
$\because \begin{cases}1+x>0,\\1-x>0,\end{cases}$ 故 $-1<x<1$，
$\therefore f(x)$ 定义域为 $(-1,1)$.
由 $f(-x)=\log_2\frac{1-x}{1+x}=-\log_2\frac{1+x}{1-x}=-f(x)$，
即 $f(-x)=-f(x)$，故 $f(x)$ 是奇函数.
$\because$ 函数 $y=\frac{-2}{x-1}-1$ 在 $(-1,1)$ 上递增，
$\therefore f(x)$ 在定义域 $(-1,1)$ 内为增函数.
(2)①当 $a>1$ 时，$\because f(x)$ 在定义域内为增函数，
$\therefore f\left(\frac{1}{2}\right)=2$，得 $\log_a 3=2$，$\therefore a=\sqrt{3}$；
②当 $0<a<1$ 时，$\because f(x)$ 在定义域内为减函数，
$\therefore f\left(-\frac{1}{2}\right)=2$，得 $\log_a\frac{1}{3}=2$，$\therefore a=\frac{\sqrt{3}}{3}$，
故实数 a 的值为 $\sqrt{3}$ 或 $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

14. **解**：(1)$\because f(x)=2+\log_2 x$ 在 $[1,4]$ 上是增函数，
又 $f(1)=2+\log_2 1=2$，$f(4)=2+\log_2 4=2+2=4$.
$\therefore$ 函数 $f(x)$ 的值域是 $[2,4]$.
(2)$g(x)=[f(x)]^2-f(x^2)$
$=4+4\log_2 x+(\log_2 x)^2-(2+\log_2 x^2)$
$=(\log_2 x)^2+2\log_2 x+2=(\log_2 x+1)^2+1$.
由 $\begin{cases}1\leqslant x\leqslant 4,\\1\leqslant x^2\leqslant 4,\end{cases}$ 得 $1\leqslant x\leqslant 2$，
$\therefore g(x)$ 的定义域是 $[1,2]$.
$\therefore 0\leqslant\log_2 x\leqslant 1$.
$\therefore$ 当 $\log_2 x=0$，即 $x=1$ 时，$g(x)$ 有最小值 $g(1)=2$；
当 $\log_2 x=1$，即 $x=2$ 时，$g(x)$ 有最大值 $g(2)=5$.

2.3 幂函数

第 23 课时 幂函数

题点知识巩固

1. **解析**：设 $f(x)=x^\alpha$，则 $2=(\sqrt{2})^\alpha$，解得 $\alpha=2$，$\therefore f(x)=x^2$.
答案：x^2

2. **解析**：其中①⑥是幂函数；②$y=2^{-x}=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ 是指数函数；③$y=3x^2$ 的系数不是 1，④⑤不符合幂函数 $y=x^\alpha$ 的定义形式. 因此②③④⑤都不是幂函数.
答案：①⑥

3. 选 C　$\because f(x)=x^3$ 是奇函数，
$\therefore f(x)$ 的图象关于原点对称. 故选 C.

4. 选 D　设 $f(x)=x^\alpha$，将 $(8,2\sqrt{2})$ 代入得 $2\sqrt{2}=8^\alpha$，
$\therefore \alpha=\frac{1}{2}$，$\therefore f(x)=x^{\frac{1}{2}}$，故选 D.

5. **解**：$\because$ 图象与 x，y 轴都无交点，
$\therefore m-2\leqslant 0$，即 $m\leqslant 2$.
又 $m\in\mathbf{N}$，$\therefore m=0,1,2$.
$\because$ 幂函数图象关于 y 轴对称，
$\therefore m=0$ 或 $m=2$.
当 $m=0$ 时，函数为 $y=x^{-2}$，图象如图 1；
当 $m=2$ 时，函数为 $y=x^0=1(x\neq 0)$，图象如图 2.

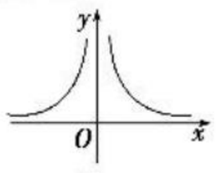


图1

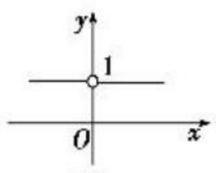


图2

6. 选 B　由题可知，$m^2-m-1=1$，解得 $m=2$ 或 $m=-1$. 当 $m=2$ 时，$f(x)=x^2$，在 $(0,+\infty)$ 上为增函数；当 $m=-1$ 时，$f(x)=x^{-1}$，在 $(0,+\infty)$ 上为减函数，不符合条件，故选 B.

7. 选 A　$a=2^{0.3}=8^{0.1}$，$b=3^{0.2}=9^{0.1}$，$c=7^{0.1}$，由幂函数 $y=x^{0.1}$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，可知 $c<a<b$. 故选 A.

8. 选 C　$\because$ 函数 $y=\left(\frac{2}{5}\right)^x$ 在 $\mathbf{R}$ 上是减函数，
又 $\frac{3}{5}>\frac{2}{5}$，$\therefore\left(\frac{2}{5}\right)^{\frac{3}{5}}<\left(\frac{2}{5}\right)^{\frac{2}{5}}$，
即 $a<b$.
又 $\because$ 函数 $y=x^{\frac{2}{5}}$ 在 $\mathbf{R}$ 上是增函数，且 $\frac{3}{5}>\frac{2}{5}$，
$\therefore\left(\frac{3}{5}\right)^{\frac{2}{5}}>\left(\frac{2}{5}\right)^{\frac{2}{5}}$，即 $c>b$，
$\therefore a<b<c$. 故选 C.

9. **解**：$\because f(x)$ 的图象过点 $\left(2,\frac{1}{2}\right)$，
$\therefore \frac{1}{2}=2^a$，
$\therefore a=-1$.
$\therefore f(x)=x^{-1}$，$\therefore g(x)=(x-2)\cdot x^{-1}=\frac{x-2}{x}=1-\frac{2}{x}$.
又 $g(x)=1-\frac{2}{x}$ 在 $\left[\frac{1}{2},1\right]$ 上是增函数，
$\therefore g(x)_{\max}=g(1)=-1$，
$g(x)_{\min}=g\left(\frac{1}{2}\right)=-3$.

提能达标过关

1. 选 D　当 $\alpha=0$ 时，函数 $y=x^\alpha$ 的定义域为 $\{x|x\neq 0,x\in\mathbf{R}\}$，其图象为两条射线，故 A 选项不正确；当 $\alpha<0$ 时，函数 $y=x^\alpha$ 的图象不过 $(0,0)$ 点，故选项 B 不正确；幂函数 $y=x^{-1}$ 的图象关于原点对称，但其在定义域内不是增函数，故选项 C 不正确；当 $x>0$，$\alpha\in\mathbf{R}$ 时，$y=x^\alpha>0$，则幂函数的图象都不在第四象限，故选项 D 正确. 故选 D.

2. 选 B　$\because f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上是减函数，
$\therefore 3m-5<0$，即 $m<\frac{5}{3}$，又 $m\in\mathbf{N}$，则 $m=0$ 或 $m=1$，当 $m=0$ 时，$f(x)=x^{-5}$ 是奇函数，不合题意. 当 $m=1$ 时，$f(x)=x^{-2}$ 是偶函数，因此 $m=1$，故选 B.

3. 选 B　特殊值法，取 $x=2$，得 $2^3=8$，$2^{-3}=\frac{1}{8}$，$2^{\frac{1}{3}}=\sqrt[3]{2}$，$2^{-\frac{1}{3}}=\frac{1}{\sqrt[3]{2}}>\frac{1}{2}$，于是 $2^3>\sqrt[3]{2}>\frac{1}{\sqrt[3]{2}}>\frac{1}{8}$，可见曲线 C_1，C_2，C_3，C_4 的 n 依次为 3，$\frac{1}{3}$，$-\frac{1}{3}$，-3. 故选 B.

4. 选 C　当 $a<0$ 时，函数 $y=ax-\frac{1}{a}$ 是减函数，且在 y 轴上的截距 $-\frac{1}{a}>0$，$y=x^a$ 在 $(0,+\infty)$ 上是减函数，$\therefore$ A，D 项均不正确；对于 B，C 项，若 $a>0$，则 $y=ax-\frac{1}{a}$ 是增函数，B 项不正确，C 项正确，故选 C.

5. 选 A　$\because a=2^{\frac{4}{3}}=4^{\frac{2}{3}}<5^{\frac{2}{3}}=c$，
$b=4^{\frac{2}{5}}<4^{\frac{2}{3}}=a$，
$\therefore b<a<c$. 故选 A.

6. **解析**：设 $f(x)=x^\alpha$，将 $\left(2,\frac{1}{4}\right)$ 代入得，
$2^\alpha=\frac{1}{4}$，$\therefore\alpha=-2$，
$\therefore f(x)=x^{-2}$，由 $f(m)=m^{-2}=\frac{1}{2}$ 得，
$m=\pm\sqrt{2}$.
答案：$\pm\sqrt{2}$

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

7. **解析**：由 $\begin{cases} x_0 \leqslant 0, \\ 2^{-x_0}-2>1, \end{cases}$ 得 $\begin{cases} x_0 \leqslant 0, \\ x_0 < -\log_2 3, \end{cases}$

∴$x_0 < -\log_2 3$.

由 $\begin{cases} x_0 > 0, \\ x_0^{\frac{1}{2}} > 1, \end{cases}$ 得 $x_0 > 1$.

综上知 $x_0 < -\log_2 3$ 或 $x_0 > 1$.

答案：$(-\infty, -\log_2 3) \cup (1, +\infty)$

8. **解析**：∵$f(x) = x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{x}}$，易知 $f(x)$ 在定义域 $(0, +\infty)$ 上是减函数，又 $f(a+1) < f(10-2a)$，

∴$\begin{cases} a+1>0, \\ 10-2a>0, \\ a+1>10-2a, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} a>-1, \\ a<5, \\ a>3. \end{cases}$

∴$3 < a < 5$.

∴a 的取值范围是 $(3,5)$.

答案：$(3,5)$

9. **解**：(1)由 $f(x)$ 为幂函数知 $-2m^2+m+2=1$，

得 $m=1$ 或 $m=-\frac{1}{2}$.

当 $m=1$ 时，$f(x)=x^2$，符合题意；

当 $m=-\frac{1}{2}$ 时，$f(x)=x^{\frac{1}{2}}$，不合题意，舍去.

∴$f(x)=x^2$.

(2)由(1)得，$y=x^2-2(a-1)x+1$，

此函数的对称轴为 $x=a-1$.

由题意知 $y=x^2-2(a-1)x+1$ 在 $(2,3)$ 上为单调函数，

所以 $a-1 \leqslant 2$ 或 $a-1 \geqslant 3$，

即 $a \leqslant 3$ 或 $a \geqslant 4$.

10. **解**：因为 $m \in \{x \mid -2 < x < 2, x \in \mathbf{Z}\}$，

所以 $m=-1,0,1$.

因为对任意 $x \in \mathbf{R}$，都有 $f(-x)+f(x)=0$，

即 $f(-x)=-f(x)$，

所以 $f(x)$ 是奇函数.

当 $m=-1$ 时，$f(x)=x^2$ 只满足条件①而不满足条件②；

当 $m=1$ 时，$f(x)=x^0$ 条件①②都不满足.

当 $m=0$ 时，$f(x)=x^3$ 条件①②都满足，且在区间 $[0,3]$ 上是增函数.

所以 $x \in [0,3]$ 时，函数 $f(x)$ 的值域为 $[0,27]$.

第三章　函数的应用

3.1　函数与方程

3.1.1　方程的根与函数的零点

第 24 课时　方程的根与函数的零点

题点知识巩固

1. 选 D　令 $y=4x-2=0$，得 $x=\frac{1}{2}$.

∴函数 $y=4x-2$ 的零点为 $\frac{1}{2}$. 故选 D.

2. 选 A　因为 B,C,D 项函数的图象均与 x 轴有交点，所以函数均有零点，A 项的图象与 x 轴没有交点，故函数没有零点，故选 A.

3. **解析**：由题意知，方程 $x^2-ax-b=0$ 的两根为 2,3，

∴$\begin{cases} 2+3=a, \\ 2\times 3=-b, \end{cases}$ 即 $a=5, b=-6$，

∴方程 $bx^2-ax-1=-6x^2-5x-1=0$ 的根为 $-\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}$，即为函数 $g(x)$ 的零点.

答案：$-\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}$

4. 选 C　$f(x)=\ln x-\left(\frac{1}{2}\right)^{x-2}$ 在 $(0,+\infty)$ 上是增函数，$f(1)=-2<0$，$f(2)=\ln 2-1<0$，$f(3)=\ln 3-\frac{1}{2}>0$，∴$x_0 \in (2,3)$，故选 C.

5. 选 D　令 $f(x)=2^x-2+x$.

∵$f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上是增函数，

且 $f(0)=-1<0$，$f(1)=1>0$.

∴$f(x)$ 的零点在 $(0,1)$ 内，

即方程 $2^x=2-x$ 的根在 $(0,1)$ 内. 故选 D.

6. 选 C　令 $f(x)=x^3-x-1$，则 $f(1)=-1<0$，$f(1.5)=1.5^3-1.5-1=1.5^3-2.5>0$，故选 C.

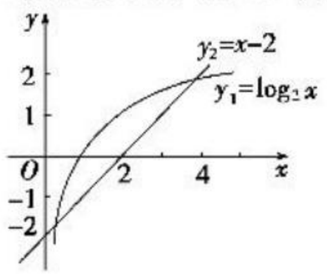
7. 选 D　∵函数 $f(x)$ 的图象在 $(-1,3)$ 上未必连续，故尽管 $f(-1)\cdot f(3)<0$，但方程 $f(x)=0$ 在 $(-1,3)$ 上未必有实数解. 故选 D.

8. **解**：令 $f(x)=0$，即 $\log_2 x-x+2=0$，

即 $\log_2 x=x-2$.

令 $y_1=\log_2 x$，$y_2=x-2$.

画出两个函数的大致图象，如图所示.



由图可知，两个函数有两个不同的交点.

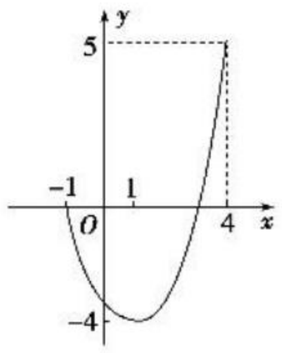
所以函数 $f(x)=\log_2 x-x+2$ 有两个零点.

9. **解析**：∵$f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上是增函数，且 $f(x)$ 的一个零点在区间 $(1,2)$ 内，

∴$\begin{cases} f(1)=2^1-2-a<0, \\ f(2)=2^2-1-a>0, \end{cases}$ 解得 $0<a<3$.

答案：$(0,3)$

10. **解**：(1)依题意，$f(x)=(x-1)^2-4$，$x \in [-1,4]$，其图象如图所示.



由图可知，函数 $f(x)$ 的值域为 $[-4,5]$.

(2)∵函数 $g(x)=f(x)+m$ 在 $[-1,4]$ 上有两个零点.

∴方程 $f(x)=-m$ 在 $x \in [-1,4]$ 上有两相异的实数根，即函数 $y=f(x)$ 与 $y=-m$ 的图象有两个交点.

由(1)所作图象可知，$-4<-m \leqslant 0$，

∴$0 \leqslant m < 4$.

∴当 $0 \leqslant m < 4$ 时，函数 $y=f(x)$ 与 $y=-m$ 的图象有两个交点，

即当 $0 \leqslant m < 4$ 时，函数 $g(x)=f(x)+m$ 在 $[-1,4]$ 上有两个零点.

提能达标过关

1. 选 B　方程 $2x^2-3x+1=0$ 的两根分别为 $x_1=1$，$x_2=\frac{1}{2}$，所以函数 $f(x)=2x^2-3x+1$ 的零点是 $\frac{1}{2}$，1. 故选 B.

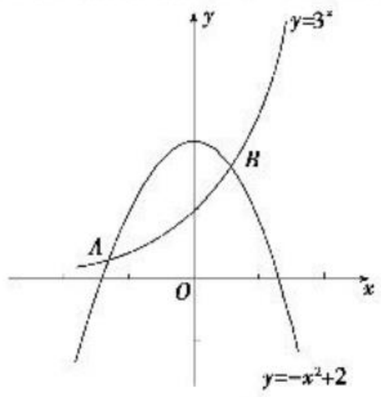
2. 选 A　∵$f(x)$ 在其定义域内是增函数，且 $f(x)$ 有唯一的零点在 $(1,e)$ 内，

∴$\begin{cases} f(1)=a<0, \\ f(e)=e^2+a>0, \end{cases}$ 解得 $-e^2<a<0$.

故选 A.

3. 选 C　∵$f(x)=\frac{9}{x}-\lg x$ 在 $(0,+\infty)$ 上为减函数，且 $f(8)=\frac{9}{8}-\lg 8>0$，$f(9)=1-\lg 9>0$，$f(10)=\frac{9}{10}-1<0$，∴函数 $f(x)$ 的零点在 $(9,10)$ 内，故选 C.

4. 选 C　函数 $f(x)=3^x+x^2-2$ 的零点，就是方程 $3^x+x^2-2=0$ 的根，即方程 $3^x=-x^2+2$ 的根，也就是 $y=3^x$ 与 $y=-x^2+2$ 的图象交点的横坐标，在同一坐标系中作出 $y=3^x$ 与 $y=-x^2+2$ 的图象，如图所示，由图可知，它们有两个交点，所以函数 $f(x)$ 有 2 个零点. 故选 C.



5. 选 B　解法一：由 $\sqrt{x}-\frac{1}{2}=0$，

解得 $x=\frac{1}{4}$，

∴$f\left(\frac{1}{4}\right)=0$.

∵$f(2-x)=f(x)$，

∴$f\left(\frac{1}{4}\right)=f\left(2-\frac{1}{4}\right)=f\left(\frac{7}{4}\right)=0$.

∵$f(x)$ 是奇函数，

∴$f\left(-\frac{7}{4}\right)=-f\left(\frac{7}{4}\right)=0$，

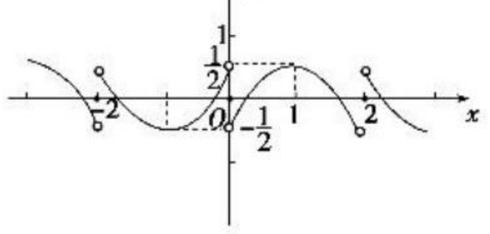
$f\left(-\frac{1}{4}\right)=-f\left(\frac{1}{4}\right)=0$，

$f(0)=0$，

$f(2)=f(0)=0$，

∴$f(x)$ 在 $(-2,2]$ 上零点为 $-\frac{7}{4}$，$-\frac{1}{4}$，0，$\frac{1}{4}$，$\frac{7}{4}$，2.

解法二：依题意，作出函数 $f(x)$ 的图象，如图所示.



由图象可知，$f(x)$ 的图象在 $(-2,2]$ 内与 x 轴的交点有 6 个.

∴$f(x)$ 在 $(-2,2]$ 上的零点有 6 个. 故选 B.

6. **解析**：令 $f(x)=\ln x+2x-8$，

则 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增.

∵$f(3)=\ln 3-2<0$，$f(4)=\ln 4>0$，

∴零点在 $(3,4)$ 上，∴$k=3$.

答案：3

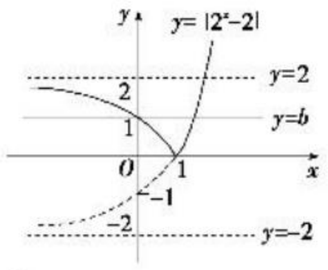
7. **解析**：由 $f(x)=|2^x-2|-b=0$，

得 $|2^x-2|=b$.

在同一平面直角坐标系中画出 $y=|2^x-2|$ 与 $y=b$ 的图象，如图所示，

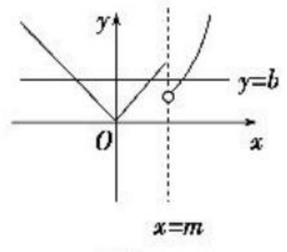
则当 $0<b<2$ 时，两函数图象有两个交点，从而函数 $f(x)=|2^x-2|-b$ 有两个零点.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料



答案:(0,2)

8. **解析**:∵$f(x)=b$有三个根等价于函数$y=f(x)$与$y=b$的图象有三个交点,
∴在同一坐标系中画出两个函数的图象,如图所示,



由图象可知,$\begin{cases}m>0,\\4m-m^2<m,\end{cases}$解得$m>3$.

答案:$(3,+\infty)$

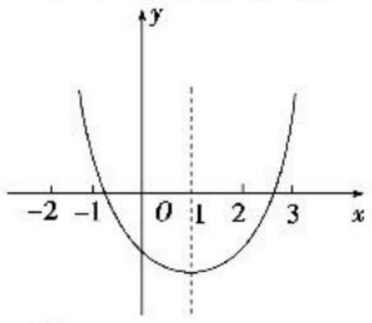
9. **解**:(1)若$a=0$,

则$f(x)=\begin{cases}-x^2,x\leqslant 1,\\\sqrt{x}-1,x>1.\end{cases}$

当$x\in[0,1]$时,$f(x)=-x^2$是减函数.
∴$-1\leqslant f(x)\leqslant 0$;
当$x\in(1,4]$时,$f(x)=\sqrt{x}-1$是增函数,
∴$0<f(x)\leqslant 1$.
于是,当$x\in[0,4]$时,$f(x)$的值域为$[-1,1]$.

(2)由$(x-2a)(a-x)=0$解得$x=a$或$x=2a$,
由$\sqrt{x}+a-1=0$解得$x=(1-a)^2$,
∵$f(x)$恰有三个零点.
∴$\begin{cases}a\leqslant 1,\\2a\leqslant 1,\\(1-a)^2>1,\end{cases}$解得$a<0$.
∴实数a的取值范围是$(-\infty,0)$.

10. **解**:作出函数$f(x)=x^2-2x+a=(x-1)^2+a-1$的图象,如图所示.



由图象可得
$\begin{cases}f(-2)=8+a>0,\\f(0)=a<0,\\f(1)=a-1<0,\\f(3)=3+a>0,\end{cases}$
解得$-3<a<0$.
所以实数a的取值范围是$(-3,0)$.

3.1.2 用二分法求方程的近似解

第25课时 用二分法求方程的近似解

题点知识巩固

1. 选B 只有函数的图象在零点附近连续不断且在该零点左右函数值异号,才可以用二分法求函数零点的近似值,所以A错;二分法是有规律可循的,可以用计算来进行,所以C错;求方程的近似值也可以用二分法,所以D错.故选B.

2. C

3. 选C 由二分法的原理可知,x_3不能用二分法求出,因为其左右两侧的函数值同负.故选C.

4. 选B ∵$f(a)f(b)<0$,
$f(a)f\left(\frac{a+b}{2}\right)>0$,
∴$f(b)f\left(\frac{a+b}{2}\right)<0$,
∴$f(x)$在$\left[\frac{a+b}{2},b\right]$上有零点.故选B.

5. 选B $f(2)\cdot f(3)<0$,∴$x_0\in(2,3)$,故选B.

6. **解析**:由表中数据知$f(1.562\ 5)=0.003>0$,$f(1.556\ 2)=-0.029<0$,又$|1.562\ 5-1.556\ 2|=0.006\ 3<0.01$,所以方程$3^x-x-4=0$的一个近似解可以取区间$(1.556\ 2,1.562\ 5)$上任一个值,一般取区间端点即可,所以近似解为1.562 5.

答案:1.562 5

7. **解**:令$f(x)=\ln x+2x-6$.
∵$f(x)$在$(0,+\infty)$上是增函数,
且$f(2)=\ln 2-2<0$,$f(3)=\ln 3>0$,
∴$f(x)$的唯一零点在区间$(2,3)$内.
用计算器算得$f(2.5)\approx-0.084<0$,
∴$f(x)$的零点在区间$(2.5,3)$内.
用计算器算得$f(2.75)\approx0.512>0$,
∴$f(x)$的零点在区间$(2.5,2.75)$内.
用计算器算得$f(2.625)\approx0.215>0$,
∴$f(x)$的零点在区间$(2.5,2.625)$内.
用计算器算得$f(2.562\ 5)\approx0.066>0$,
∴$f(x)$的零点在区间$(2.5,2.562\ 5)$内.
用计算器算得$f(2.531\ 25)\approx-0.009<0$,
∴$f(x)$的零点在区间$(2.531\ 25,2.562\ 5)$内.
用计算器算得$f(2.546\ 875)\approx0.029>0$,
∴$f(x)$的零点在区间$(2.531\ 25,2.546\ 875)$内.
用计算器算得$f(2.539\ 062\ 5)\approx0.010>0$,
∴$f(x)$的零点在区间$(2.531\ 25,2.539\ 062\ 5)$内.
∵$|2.539\ 062\ 5-2.531\ 25|=0.007\ 812\ 5<0.01$,
∴$f(x)$的零点的近似值可取2.531 25,即方程$\ln x+2x-6=0$的近似解为2.531 25.

提能达标过关

1. C 2. C

3. 选D 由参考数据知,$f(1.406\ 25)\approx-0.054$,$f(1.437\ 5)\approx0.162$,即$f(1.406\ 25)\cdot f(1.437\ 5)<0$,且$1.437\ 5-1.406\ 25=0.031\ 25<0.04$,所以方程的一个近似解可取为1.437 5,故选D.

4. 选D $y=\frac{1}{2}x^2+4x+8=\frac{1}{2}(x+4)^2\geqslant 0$有零点但不能用二分法求函数零点,故选D.

5. 选B 函数$f(x)$的零点所在的区间长度为1,将区间等分一次,其区间长度变为$\frac{1}{2}$,等分7次后区间长度变为$\frac{1}{2^7}<0.01$,故选B.

6. **解析**:第一次用二分法计算得区间(1.5,2);第二次用二分法得区间(1.75,2);第三次得区间(1.75,1.875);第四次用二分法得区间$(1.75,1.812\ 5)$,∴再取的x的值为1.5,1.75,1.875,1.812 5.

答案:1.5,1.75,1.875,1.812 5

7. **解析**:令$f(x)=x^3+2x-21$.则$f(x)$在**R**上单调递增,且仅有一个解.
∵$f(2)=8+4-21<0$,$f(3)=27+6-21>0$,$f(2.5)=2.5^3+5-21=15.625+5-21<0$,
∴方程在(2.5,3)内有一解.
且这个解精确到个位是3.

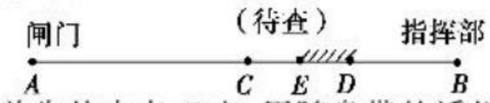
答案:1 3

8. **解析**:将26枚金币平均分成两份,分别放在天平两端,则假币一定在质量小的那13枚金币里面;从这13枚金币中拿出1枚,然后将剩下的12枚金币平均分成两份,分别放在天平两端,若天平平衡,则假币一定是拿出的那一枚,若不平衡,则假币一定在质量小的那6枚金币里面;将这6枚金币平均分成两份,分别放在天平两端,则假币一定在质量小的那3枚金币里面;从这3枚金币中任拿出2枚,分别放在天平两端,若天平平衡,则剩下的那一枚即是假币,若不平衡,则质量小的那一枚即是假币.综上可知,最多称4次就可以发现这枚假币.

答案:4

9. **解**:原方程化为$2^x+3x-7=0$.
令$f(x)=2^x+3x-7$.
∵$f(x)$在**R**上为增函数,
且$f(1)=-2<0$,
$f(2)=3>0$,
∴$f(x)$在(1,2)内有唯一零点,
用计算器算得$f(1.5)\approx0.33>0$,
∴$f(x)$的零点在(1,1.5)内.
用计算器算得$f(1.25)\approx-0.87<0$,
∴$f(x)$的零点在(1.25,1.5)内.
用计算器算得$f(1.375)\approx-0.28<0$,
∴$f(x)$的零点在(1.375,1.5)内.
用计算器算得$f(1.437\ 5)\approx0.02>0$,
∴$f(x)$的零点在(1.375,1.437 5)内.
∵$|1.437\ 5-1.375|=0.062\ 5<0.1$,
∴原方程的近似解可取1.437 5.

10. **解**:如图.



他首先从中点C查.用随身带的话机向两端测试时,如果发现AC段正常,则断定故障在BC段,再到BC段中点D,这次若发现BD段正常,则故障在CD段,再到CD中点E来查…
每查一次,可以把待查的线路长度缩减一半,算一算,要把故障可能发生的范围缩小到50 m~100 m左右,即两根电线杆附近,设需要排查n次,则有$50<\frac{10\ 000}{2^n}<100$,即$100<2^n<200$.因此只要7次就够了.

3.2 函数模型及其应用

3.2.1 几类不同增长的函数模型

第26课时 几类不同增长的函数模型

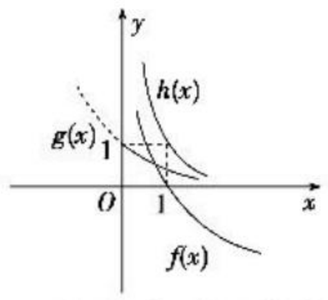
题点知识巩固

1. B

2. 选C 图1中正方体容器中水面面积是定值,故水面高度增加是匀速的,图象应是直线型的;图2中圆锥形容器中水面从下到上越来越大,故水高高度增长的越来越慢,图象是越来越平缓的;图3中球形容器中水面从下到上先是越来越大,到上半球后又越来越小,故水面高度先是增长的越来越慢,到上半球后又增长的越来越快,图象是先平缓,再变陡;图4中容器中水面从下到上先是越来越小,然后又越来越大,故水面高度先是增长的越来越快,然后又越来越慢,其图象是先陡再平缓.故图1错,图2、图3、图4都正确.故选C.

3. 选C 作出$f(x)=\log_{\frac{1}{2}}x$,$g(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^x$,$h(x)=x^{-\frac{1}{2}}$在$(0,+\infty)$上的图象,由图象知,当$x\in(0,1)$时,三个函数都递减较快,在$(1,+\infty)$时,递减越来越慢,故选C.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料



4. 选 B　当 $x=2.01$ 时，代入各式，B 中 $y=x^2-1\approx3$；当 $x=3$ 时，代入各式，B 中 $y=x^2-1=8$，最接近表中数据，故选 B.

5. y_1　y_3　y_2

6. **解析**：由表中数据可知，$f(x)$ 随 x 的增大而增大，而开始快些以后变慢，适合对数函数模型.
答案：$y=\ln x+1$

7. **解析**：由 $t\in[0,3]$ 的图象联想到幂函数 $y=x^a(0<a<1)$，反映了 C 随时间的变化而逐渐增长但速度越来越慢. 由 $t\in[3,8]$ 的图象可知，总产量 C 没有变化，即第三年后停产，所以②③正确.
答案：②③

8. **解**：(1)C_1 对应的函数为 $g(x)=0.3x-1$，
C_2 对应的函数为 $f(x)=\lg x$.
(2)当 $x\in(0,x_1)$ 时，$g(x)>f(x)$；
当 $x\in(x_1,x_2)$ 时，$g(x)<f(x)$；
当 $x\in(x_2,+\infty)$ 时，$g(x)>f(x)$.

提能达标过关

1. 选 D　几种函数模型中，指数函数增长速度最快，故选 D.

2. 选 D　一次函数保持均匀的增长，不能体现题意；二次函数在对称轴的两侧有增也有降；而指数函数是爆炸式增长，不符合“增长越来越慢”；因此，只有对数函数最符合题意，先快速增长，后来越来越慢. 故选 D.

3. 选 C　通过所给数据可知 s 随 t 增大，其增长速度越来越快，而 A，D 中的函数增长速度越来越慢，B 中的函数增长速度保持不变，故选 C.

4. 选 D　设今年绿地面积为 m，则有 $my=(1+10\%)^x m$，$\therefore y=1.1^x$，故选 D.

5. 选 C　将 $x=1,2,3$，$y=0.2,0.4,0.76$ 分别代入验算. 故选 C.

6. **解析**：设 $y=kx+b$，将点 $(30,330)$，$(40,630)$ 代入得 $y=30x-570$，令 $y=0$ 得 $x=19$ kg.
答案：19 kg

7. **解析**：由 $V=\frac{V_0}{3}$ 得，$V_0e^{-\frac{1}{10}t}=\frac{V_0}{3}$，
$\therefore e^{-\frac{1}{10}t}=\frac{1}{3}$，两边取以 10 为底的对数得 $-\frac{1}{10}t\lg e=\lg\frac{1}{3}$，$\therefore t=\frac{10\lg 3}{\lg e}\approx11$.
答案：11

8. **解析**：依题意汽车以 80 千米/小时的速度匀速行驶 2 个小时，到达 B 地后，停留 2 个小时，因此得函数关系式为 $y=\begin{cases}80t,0\leqslant t\leqslant2,\\160,2<t\leqslant4.\end{cases}$
答案：$y=\begin{cases}80t,0\leqslant t\leqslant2,\\160,2<t\leqslant4\end{cases}$

9. **解**：设 x 期后本息和为 y，若按复利计算，则 $y=a(1+r)^x$，若不按复利计算，则 $y=a(1+rx)$.
按复利计息，y 是 x 的指数型函数，而不按复利计息时，y 是 x 的一次函数. 当 x 较大时，指数函数增大较快，因此按复利计息的存款方式较合算.

10. **解**：方案一：5 年后树木面积是 $10+1\times5=15$(万平方米).
方案二：5 年后树木面积是 $10\times(1+9\%)^5\approx15.386$(万平方米).
$\because15.386>15$，
$\therefore$ 方案二较好.

3.2.2　函数模型的应用实例

第 27 课时　函数模型的应用实例(1)

题点知识巩固

1. 选 C　设该顾客购买商品的价格为 x 元，使用优惠券 1，优惠券 2，优惠券 3 的减免钱数分别为 y_1 元，y_2 元，y_3 元.
则依题意有 $y_1=0.1x$，
$y_2=20$，
$y_3=(x-100)\times0.18$.
由 $\begin{cases}0.1x>20,\\0.1x>(x-100)\times0.18,\end{cases}$ 解得 $200<x<225$.
所以他购买的商品的标价可能是 219 元. 故选 C.

2. 选 C　$x=0$ 时，$y=0$，$\therefore$ 排除 B、D 两项；而 A 项中刚开始时 y 随 x 变化的小，$\therefore$ A 是先慢后快，故选 C.

3. 选 C　$\because f(t)=-t^2+24t-101=-(t-12)^2+43$，$4\leqslant t\leqslant18$，
$\therefore$ 当 $t=4$ 时，$f(t)$ 取得最小值 $f(4)=-21$；
当 $t=12$ 时，$f(t)$ 取得最大值 $f(12)=43$.
$\therefore$ 最大温差为 $43-(-21)=64$. 故选 C.

4. 选 B　依题意有 $\begin{cases}0.7=9a+3b+c,\\0.8=16a+4b+c,\\0.5=25a+5b+c,\end{cases}$
解得 $a=-0.2$，$b=1.5$，$c=-2$.
$\therefore P=-0.2t^2+1.5t-2=-\frac{1}{5}\left(t-\frac{15}{4}\right)^2+\frac{13}{16}$.
$\therefore$ 当 $t=\frac{15}{4}=3.75$ 时，P 取得最大值.
即最佳加工时间为 3.75 分钟. 故选 B.

5. 选 A　依题意有
$\begin{cases}f(4)=C=4,\\f(25)=C+B(25-A)=14,\\f(35)=C+B(35-A)=19.\end{cases}$
解得 $A=5$，$B=\frac{1}{2}$，$C=4$.
$\therefore f(20)=4+\frac{1}{2}\times(20-5)=11.5$(元)，
即四月份该家庭的煤气费为 11.5 元. 故选 A.

6. **解**：(1)设一次订购量为 $100+n(n\in\mathbf{N})$，则批发价为 $120-0.04n$，令 $120-0.04n=102$，
$\therefore n=450$，
所以当一次订购量为 550 个时，每件商品的实际批发价为 102 元.
(2)由题意知
$f(x)=\begin{cases}120,0\leqslant x\leqslant100,x\in\mathbf{N},\\120-0.04(x-100),100<x\leqslant550,x\in\mathbf{N},\\102,x>550,x\in\mathbf{N}.\end{cases}$
(3)当经销商一次批发商品 x 个时，该批发公司可获得利润为 y，根据题意知，
$y=\begin{cases}40x,0\leqslant x\leqslant100,\\[40-0.04x(x-100)]x,100<x\leqslant500,\end{cases}$
设 $f_1(x)=40x$，在 $x=100$ 时，取得最大值为 4 000；
设 $f_2(x)=-0.04x^2+44x=-0.04(x-550)^2+0.04\times550^2$，所以当 $x=500$ 时，$f_2(x)$ 取最大值为 12 000.
所以当经销商一次批发 500 个商品时，该批发公司可获得最大利润.

提能达标过关

1. 选 C　令 $y=60$，由 $4x=60$，得 $x=15$ 不合题意舍去；由 $2x+10=60$，得 $x=25$；由 $1.5x=60$，得 $x=40<100$ 不合题意，舍去. 故选 C.

2. 选 A　$\because$ 缴水费 $16m$ 元，$\therefore$ 该职工用水超过了 10 立方米，其中 10 立方米应缴水费 $10m$ 元，另外 $6m$ 元的水费所对应的实际用水为 3 立方米，$\therefore$ 该职工这个月实际用水为 13 立方米，选 A 项. 故选 A.

3. 选 A　由题可得 $(100-10x)\times70\times\frac{x}{100}\geqslant112$，
$\therefore2\leqslant x\leqslant8$，$\therefore x$ 的最小值为 2，故选 A.

4. 选 D　由题意得 $5x+4\,000\leqslant10x$，解得 $x\geqslant800$. 所以日产手套至少 800 副时才不亏本. 故选 D.

5. 选 D　依题意知，从 A 地到 B 地所用时间为 $\frac{150}{60}=2.5$(小时)，从 B 地到 A 地所用时间为 $\frac{150}{50}=3$(小时)，因此可得函数 $x=\begin{cases}60t,0\leqslant t\leqslant2.5,\\150,2.5<t\leqslant3.5,\\150-50(t-3.5),3.5<t\leqslant6.5.\end{cases}$
则当 $t=5$ 时，$x=150-50\times1.5=75$. 故选 D.

6. **解析**：5.5 min 的通话费为 $f(5.5)=1.06\times(0.50\times[5.5]+1)=1.06\times(0.50\times6+1)=1.06\times4=4.24$.
答案：4.24

7. **解析**：设每台彩电的原价为 x 元，则 $x(1+40\%)\times0.8-x=270$，解得 $x=2\,250$(元).
答案：2 250

8. **解析**：设一个三角形的边长为 x cm，则另一个三角形的边长为 $(4-x)$ cm，两个三角形的面积和为 $S=\frac{\sqrt3}{4}x^2+\frac{\sqrt3}{4}(4-x)^2=\frac{\sqrt3}{2}[(x-2)^2+4]\geqslant2\sqrt3$ cm^2. 当 $x=2$ cm 时，$S_{\min}=2\sqrt3$ cm^2.
答案：$2\sqrt3$ cm^2

9. **解**：(1)由图象知，当 $x=600$ 时，$y=400$；当 $x=700$ 时，$y=300$，代入 $y=kx+b(k\neq0)$ 中，
得 $\begin{cases}400=600k+b,\\300=700k+b,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}k=-1,\\b=1\,000.\end{cases}$
所以 $y=-x+1\,000(500\leqslant x\leqslant800)$.
(2)销售总价 = 销售单价 × 销售量 $=xy$，
成本总价 = 成本单价 × 销售量 $=500y$，
代入求毛利润的公式，得
$S=xy-500y=x(-x+1\,000)-500(-x+1\,000)$
$=-x^2+1\,500x-500\,000$
$=-(x-750)^2+62\,500(500\leqslant x\leqslant800)$.
所以当销售单价定为 750 元时，可获得最大毛利润 62 500 元，此时销售量为 250 件.

10. **解**：(1)$f(x)=5x(15\leqslant x\leqslant40)$.
$g(x)=\begin{cases}90(15\leqslant x\leqslant30),\\2x+30(30<x\leqslant40).\end{cases}$
(2)由 $f(x)=g(x)$，得 $\begin{cases}15\leqslant x\leqslant30,\\5x=90\end{cases}$
或 $\begin{cases}30<x\leqslant40,\\5x=2x+30,\end{cases}$
解得 $x=18$ 或 $x=10$(舍).
当 $15\leqslant x<18$ 时，

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

$f(x)-g(x)=5x-90<0$，
$\therefore f(x)<g(x)$，即选甲家；
当 $x=18$ 时，$f(x)=g(x)$，即可以选甲家也可以选乙家；
当 $18<x\leqslant 40$ 时，$f(x)-g(x)>0$，
$\therefore f(x)>g(x)$，即选乙家.

第 28 课时　函数模型的应用实例(2)

题点知识巩固

1. 选 B　$\because$ 容积为 8 m^3，深为 2 m，$\therefore$ 底面积为 4 m^2，
$\therefore$ 池底造价为 480 元，又底面长为 x，
$\therefore$ 底面宽为 $\frac{4}{x}$.
$\therefore$ 池壁的面积为 $4\left(x+\frac{4}{x}\right)m^2$，
$\therefore$ 池壁的造价为 $320\left(x+\frac{4}{x}\right)$ 元，
$\therefore y=320\left(x+\frac{4}{x}\right)+480$，故选 B.

2. **解析**：依题意有 $\begin{cases}\frac{1}{2}a+b=1,\\ \frac{1}{4}a+b=1.5,\end{cases}$
解得 $\begin{cases}a=-2,\\ b=2.\end{cases}$
$\therefore y=-2\times\left(\frac{1}{2}\right)^{x-3}+2$.
$\therefore$ 当 $x=7$ 时，$y=-2\times\left(\frac{1}{2}\right)^4+2=1.875$.
答案：1.875

3. **解析**：当 $t=0.5$ 时，$y=2$，得 $2=e^{\frac{1}{2}k}$，
$\therefore k=2\ln 2$，
$\therefore y=e^{2t\ln 2}$. 当 $t=5$ 时，
$y=e^{10\ln 2}=e^{\ln 2^{10}}=2^{10}=1\,024$.
答案：$2\ln 2$　1 024

4. 选 A　由题得 $100=a\log_2 2$，解得 $a=100$，所以 $y=100\log_2(x+1)$，当 $x=7$ 时，$y=100\log_2 8=300$，故到第 7 年它们发展到 300 只，故选 A.

5. **解析**：设 7.1 级，6.2 级地震的最大振幅分别为 A_1，A_2，则依题意有 $7.1=\lg A_1-\lg A_0$，$6.2=\lg A_2-\lg A_0$，
$\therefore 0.9=\lg A_1-\lg A_2=\lg\frac{A_1}{A_2}$，
$\therefore \frac{A_1}{A_2}=10^{0.9}$，
即 7.1 级地震的最大振幅是 6.2 级地震的最大振幅的 $10^{0.9}$ 倍.
答案：$10^{0.9}$

6. **解**：(1)由图象知 $t\in\mathbf{N}$，$0\leqslant t\leqslant 20$，$20<t\leqslant 30$ 时，P 是 t 的一次函数，且过点 $(0,2)$，$(20,6)$，$(30,5)$，
由此可得，P(元)与时间 t(天)所满足的函数关系式为
$$P=\begin{cases}\frac{1}{5}t+2,0\leqslant t\leqslant 20,t\in\mathbf{N},\\ -\frac{1}{10}t+8,20<t\leqslant 30,t\in\mathbf{N}.\end{cases}$$
(2)Q 与 t 满足一次函数，
即 $Q=-t+40$，$0\leqslant t\leqslant 30$，$t\in\mathbf{N}$.
(3)由(1)(2)可知，
$$y=\begin{cases}\left(\frac{1}{5}t+2\right)(-t+40),0\leqslant t\leqslant 20,t\in\mathbf{N},\\ \left(-\frac{1}{10}t+8\right)(-t+40),20<t\leqslant 30,t\in\mathbf{N}\end{cases}$$
$$=\begin{cases}-\frac{1}{5}(t-15)^2+125,0\leqslant t\leqslant 20,t\in\mathbf{N},\\ \frac{1}{10}(t-60)^2-40,20<t\leqslant 30,t\in\mathbf{N}.\end{cases}$$
当 $0\leqslant t\leqslant 20$，$t=15$ 时，$y_{max}=125$，
当 $20<t\leqslant 30$，y 随 t 的增大而减小.
所以在这 30 天中的第 15 天，日交易额最大，最大值为 125 万元.

提能达标过关

1. 选 B　从散点图可以看出，随着 x 的增大，y 的值呈指数函数型“爆炸式”增大，故选 B.

2. 选 A　由题意知，上午 8 时相当于 $t=-4$ 时，
$\therefore T(-4)=(-4)^3-3\times(-4)+60=8$.
故选 A.

3. 选 A　由题可得 $8\,100\times\left(1-\frac{1}{3}\right)^3=2\,400$，故选 A.

4. 选 B　第一年造林 10 000 亩，则第二年造林 $10\,000(1+20\%)=12\,000$ 亩，第三年造林为 $12\,000(1+20\%)=14\,400$ 亩，第四年造林 $14\,400(1+20\%)=17\,280$ 亩. 故选 B.

5. 选 D　由题意知，组装第 A 件产品所需时间为 $\frac{c}{\sqrt{A}}=15$，故组装第 4 件产品所需时间为 $\frac{c}{\sqrt{4}}=30$，解得 $c=60$. 将 $c=60$ 代入 $\frac{c}{\sqrt{A}}=15$，得 $A=16$. 故选 D.

6. **解析**：某种物质的温度 y(单位：摄氏度)随时间 x(单位：分钟)的变化规律是：$y=2\times 2^x+2^{1-x}(x\geqslant 0)$，
当 $y=5$ 时，$2\times 2^x+2^{1-x}=5$，
由 $x\geqslant 0$，解得 $x=1$.
$\therefore$ 经过 1 分钟，该物质温度为 5 摄氏度.
答案：1

7. **解析**：依题意，该溶液中的杂质含量 y 与过滤次数 x 之间的函数关系为
$y=2\%\left(1-\frac{1}{3}\right)^x(x\in\mathbf{N})$.
由 $2\%\left(1-\frac{1}{3}\right)^x\leqslant 0.1\%$，得 $\left(\frac{2}{3}\right)^x\leqslant\frac{1}{20}$.
$\therefore x\geqslant\log_{\frac{2}{3}}\frac{1}{20}$.
又 $\log_{\frac{2}{3}}\frac{1}{20}=\frac{-\lg 20}{\lg 2-\lg 3}=\frac{1+\lg 2}{\lg 3-\lg 2}\approx 7.39$，
$\therefore x\geqslant 7.39$.
又 $x\in\mathbf{N}$，$\therefore x$ 的最小值为 8.
答案：8

8. **解析**：由图象知，$t=2$ 时，$y=4$，$\therefore a^2=4$，故 $a=2$，① 正确；当 $t=5$ 时，$y=2^5=32>30$，② 正确；当 $y=4$ 时，由 $4=2^{t_1}$ 知，$t_1=2$，当 $y=12$ 时，由 $12=2^{t_2}$ 知，$t_2=\log_2 12=2+\log_2 3$，$t_2-t_1=\log_2 3\neq 1.5$，③错误；浮萍每月增长的面积不相等，实际上增长速度越来越快，④错误.
答案：①②

9. **解**：(1)由题意可知 $\begin{cases}0=a+b\log_3\frac{30}{10},\\ 1=a+b\log_3\frac{90}{10},\end{cases}$
即 $\begin{cases}a+b=0,\\ a+2b=1,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=-1,\\ b=1.\end{cases}$
$\therefore a=-1$，$b=1$.
(2)由(1)知，$v=-1+\log_3\frac{Q}{10}$.
由 $-1+\log_3\frac{Q}{10}\geqslant 2$ 得，$\log_3\frac{Q}{10}\geqslant 3$.
$\therefore\frac{Q}{10}\geqslant 27$，$\therefore Q\geqslant 270$，
$\therefore$ 其耗氧量至少要 270 个单位.

10. **解**：(1)由题意得该公司激励销售人员的奖励方案的函数模型为
$$y=\begin{cases}0.15x,0\leqslant x\leqslant 10,\\ 1.5+2\log_5(x-9),x>10.\end{cases}$$
(2)由(1)知，当 $0\leqslant x\leqslant 10$ 时，$0\leqslant 0.15x\leqslant 1.5$，因为业务员小王获得 3.5 万元的奖金，即 $y=3.5$，所以 $x>10$. 因此 $1.5+2\log_5(x-9)=3.5$，解得 $x=14$.
所以业务员小王的销售利润是 14 万元.

阶段质量评估 6

1. 选 C　$\because f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上是增函数，
又 $f(e-1)=\ln e-\frac{2}{e-1}=1-\frac{2}{e-1}=\frac{e-3}{e-1}<0$，
$f(2)=\ln 3-1>\ln e-1=0$.
$\therefore f(x)$ 的零点在 $(e-1,2)$ 内. 故选 C.

2. 选 C　当 $h=H$ 时，$S=0$；当 $h=0$ 时，S 有最大值，排除 A、B；当 h 匀速增大时，S 减少的越来越慢，故选 C.

3. 选 C　由表中数据可知，$f(1.406\,25)=-0.054<0$，$f(1.437\,5)=0.162>0$，又 $|1.437\,5-1.406\,25|<0.1$，所以方程 $x^3+x^2-2x-2=0$ 的一个近似根为 1.4. 故选 C.

4. 选 C　由表中数据知，y 为增函数，且开始增长慢，以后越来越快，可排除选项 A、B；代 $t=3$ 验证可排除 D. 故选 C.

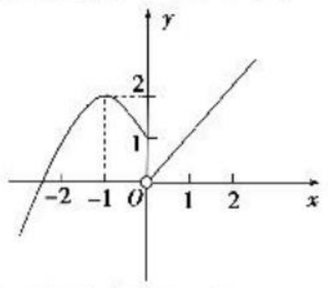
5. 选 B　用水 12 m^3 时，水费为 36 元，用水 18 m^3 时，水费为 $36+36=72$(元)，因此，当交纳水费 48 元时，用水量超过 12 m^3，但不超过 18 m^3. 故选 B.

6. 选 C　由题意知实线部分的总长度为 $l=4(3-2b)+2\pi b=(2\pi-8)b+12$，$l$ 是关于 b 的一次函数，一次项系数 $2\pi-8<0$，故 l 关于 b 的函数单调递减. 因此，当 b 取最大值时，l 取得最小值，结合图形知，b 的最大值为 $\frac{3}{2}$，代入上式得 $l_{min}=(2\pi-8)\times\frac{3}{2}+12=3\pi$. 故选 C.

7. **解析**：当 $x\geqslant 1$ 时，由 $2x-2-\frac{1}{4}=0$，得 $x=\frac{9}{8}$；
当 $-8<x<1$ 时，由 $x^2-\frac{1}{4}=0$，得 $x=-\frac{1}{2}$ 或 $x=\frac{1}{2}$.
$\therefore y=f(x)-\frac{1}{4}$ 的零点为 $-\frac{1}{2}$，$\frac{1}{2}$，$\frac{9}{8}$.
答案：$-\frac{1}{2}$，$\frac{1}{2}$，$\frac{9}{8}$

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

8. **解析**：$f(x)$的图象如图所示：



由 $g(x)=f(x)+2m=0$，
得 $f(x)=-2m$，
若 $g(x)$有三个零点，
则 $y=f(x)$与 $y=-2m$ 的图象有三个交点，

$\therefore 1\leqslant -2m<2$，$\therefore -1<m\leqslant -\frac{1}{2}$.

答案：$\left(-1,-\frac{1}{2}\right]$

9. **解析**：设容器底面一边长为 x m，总造价为 y 元，

则依题意有 $y=\frac{8}{2}\times 200+2\times 2\left(x+\frac{4}{x}\right)\times 100$，

即 $y=400\left(x+\frac{4}{x}\right)+800(x>0)$.

又$\because f(x)=x+\frac{4}{x}$在$(0,2]$上是减函数，在$[2,+\infty)$上是增函数，

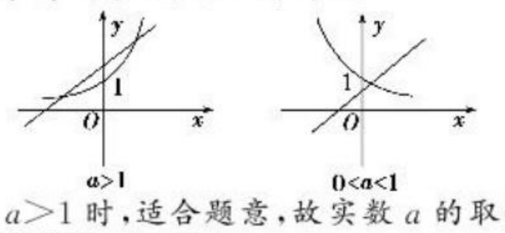
$\therefore$当 $x=2$ 时，$x+\frac{4}{x}$取得最小值 4，

此时 y 取得最小值 $400\times 4+800=2\,400$.

于是该容器的最低总造价为 2 400 元.

答案：2 400 元

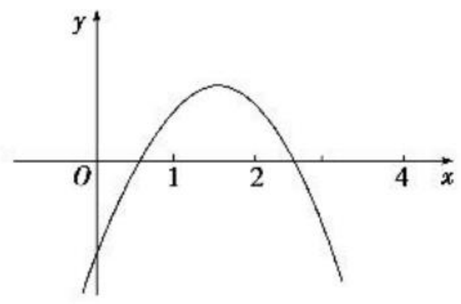
10. **解析**：函数 $f(x)=a^x-x-a$ 有两个零点，就是函数 $y=a^x$ 与函数 $y=x+a$ 的图象有两个交点，如图所示.



当 $a>1$ 时，适合题意，故实数 a 的取值范围是$(1,+\infty)$.

答案：$(1,+\infty)$

11. **解**：$\because$函数 $f(x)=-x^2+ax-3$ 的图象是开口向下的抛物线，在区间$(0,1)$与$(2,4)$上与 x 轴各有一个交点，结合图象.



可知，$\begin{cases}f(0)<0,\\f(1)>0,\\f(2)>0,\\f(4)<0,\end{cases}$即$\begin{cases}-3<0,\\a-4>0,\\2a-7>0,\\4a-19<0.\end{cases}$

解得 $4<a<\frac{19}{4}$.

$\therefore a$ 的取值范围是$\left(4,\frac{19}{4}\right)$.

12. **解**：(1)依题意，$y=a\cdot 0.9^x$，$x\in\mathbf{N}^*$.

(2)依题意，$y\leqslant\frac{1}{3}a$，即 $a\cdot 0.9^x\leqslant\frac{a}{3}$，

$0.9^x\leqslant\frac{1}{3}=0.9^{\log_{0.9}\frac{1}{3}}$，

得 $x\geqslant\log_{0.9}\frac{1}{3}=\frac{-\lg 3}{2\lg 3-1}\approx -\frac{0.477\,1}{0.954\,2-1}\approx 10.42$.

即至少通过 11 块玻璃后，光线强度减弱到原来的$\frac{1}{3}$以下.

13. **解**：(1)由表中数据可知，随着时间 t 的增大，种植成本 Q 先减后增，在给出的函数中 $Q=at+b$，$Q=a\cdot b^t$，$Q=a\cdot\log_b t$ 都是单调函数，都不适合描述 Q 与 t 的变化关系，所以应选择 $Q=at^2+bt+c$ 描述 Q 与 t 的变化关系.

由$\begin{cases}150=2\,500a+50b+c,\\108=12\,100a+110b+c,\\150=62\,500a+250b+c,\end{cases}$解得

$$\begin{cases}a=\frac{1}{200},\\b=-\frac{3}{2},\\c=\frac{425}{2}.\end{cases}$$

$\therefore Q=\frac{1}{200}t^2-\frac{3}{2}t+\frac{425}{2}(t\in\mathbf{N}^*)$.

(2)由(1)知，$Q=\frac{1}{200}(t-150)^2+100$.

$\therefore$当 $t=150$ 时，Q 取得最小值 100.

于是，西红柿种植成本最低时上市天数为 150 天，最低种植成本为 100 元/100 kg.

14. **解**：(1)依题意，得

$$y=\begin{cases}9+a,0<x\leqslant m,&①\\9+n(x-m)+a,x>m.&②\end{cases}$$

其中 $0<a\leqslant 5$.

(2)$\because 0<a\leqslant 5$，$\therefore 9<9+a\leqslant 14$.

由于该家庭今年一、二月份的水费均大于 14 元，故用水量 4 立方米，5 立方米都大于最低限量 m 立方米.

将$\begin{cases}x=4,\\y=17\end{cases}$和$\begin{cases}x=5,\\y=23\end{cases}$分别代入②，

得$\begin{cases}17=9+n(4-m)+a,&③\\23=9+n(5-m)+a.&④\end{cases}$

③－④，得 $n=6$.

代入 $17=9+n(4-m)+a$，

得 $a=6m-16$.

又三月份用水量为 2.5 立方米，

若 $m<2.5$，将$\begin{cases}x=2.5,\\y=11\end{cases}$代入②，得 $a=6m-13$，

这与 $a=6m-16$ 矛盾.

$\therefore m\geqslant 2.5$，即该家庭三月份用水量 2.5 立方米没有超过最低限量.

将$\begin{cases}x=2.5,\\y=11\end{cases}$代入①，得 $11=9+a$，

由$\begin{cases}a=6m-16,\\11=9+a,\end{cases}$解得$\begin{cases}a=2,\\m=3.\end{cases}$

$\therefore$该家庭今年一、二月份用水量超过最低限量，三月份用水量没有超过最低限量，且 $m=3$，$n=6$，$a=2$.

第二部分　阶段检测

阶段质量测试卷(一)

1. 选 B　全集 $U=\{0,1,2,3,4\}$，$M=\{0,1,2\}$，则 $\complement_U M=\{3,4\}$，又 $N=\{2,3\}$，所以 $(\complement_U M)\cap N=\{3\}$. 故选 B.

2. 选 C　$M=\{y\mid y\geqslant 2\}$，$N=\mathbf{R}$，$\therefore M\cap N=M$. 故选 C.

3. 选 B　阴影部分表示 $M\cap(\complement_U N)$，因为 $M=\{x\in\mathbf{Z}\mid -1\leqslant x-1\leqslant 2\}=\{x\in\mathbf{Z}\mid 0\leqslant x\leqslant 3\}=\{0,1,2,3\}$，则有 $M\cap(\complement_U N)=\{0,1,2\}$. 故选 B.

4. 选 C　A、B、D 中的两个函数的定义域均不同，只有 C 中的定义域及对应关系都相同，故选 C.

5. 选 B　令 $\frac{1-x}{1+x}=t$，则 $x=\frac{1-t}{1+t}$，$\therefore f(t)=\frac{1-t}{1+t}$，即 $f(x)=\frac{1-x}{1+x}$，故选 B.

6. 选 C　$\because f(x)=\frac{x+2-1}{x+2}=1-\frac{1}{x+2}$在$(0,+\infty)$上为增函数，$\therefore f(x)\in\left(\frac{1}{2},1\right)$. 故选 C.

7. 选 B　$\because f(-x)=\begin{cases}-1,x>0\\0,x=0\\1,x<0\end{cases}=-f(x)$，

$\therefore f(x)$为奇函数.

又 $F(x)=x^2f(x)$，

$\therefore F(-x)=(-x)^2f(-x)=-x^2f(x)=-F(x)$，

$\therefore F(x)$是奇函数，可排除 C，D；

又 $F(x)=x^2f(x)=\begin{cases}x^2,x>0,\\0,x=0,\\-x^2,x<0.\end{cases}$

$\therefore F(x)$在$(-\infty,+\infty)$上单调递增，可排除 A，故选 B.

8. 选 A　由题意得$\begin{cases}a\neq 0,\\-a=-a^2,\end{cases}$解得 $a=1$.

$\therefore f(x)=x^2+2$，

$\therefore g(x)=f(x-1)=(x-1)^2+2$.

$\because$函数 $g(x)$的图象关于直线 $x=1$ 对称，

$\therefore g(0)=g(2)$.

又$\because$函数 $g(x)=(x-1)^2+2$ 在区间$[1,+\infty)$上单调递增，

$\therefore g\left(\frac{3}{2}\right)<g(2)<g(3)$，

$\therefore g\left(\frac{3}{2}\right)<g(0)<g(3)$. 故选 A.

9. 选 C　由奇函数在 $x=0$ 处有定义知，$f(0)=0$，故①正确；

由图象的对称性可知②正确；

由于奇函数在关于原点对称的两个区间上的单调性相同，故③不正确；

对于④，当 $x<0$ 时，$-x>0$，则 $f(-x)=(-x)^2-2(-x)$，

$\therefore -f(x)=x^2+2x$，$\therefore f(x)=-x^2-2x$，故④正确.

综上可知，正确结论的序号为①②④，共 3 个. 故选 C.

10. 选 B　①当 $-1\leqslant x<0$ 时，$0<-x\leqslant 1$，此时，$f(x)=-x-1$，

$f(-x)=-(-x)+1=x+1$，

$\therefore f(x)-f(-x)>-1$ 可化为 $-2x-2>-1$，

解得 $x<-\frac{1}{2}$，

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

则$-1\leqslant x<-\frac{1}{2}$.

②当$0<x\leqslant 1$时，$-1\leqslant -x<0$，

此时，$f(x)=-x+1$，

$f(-x)=-(-x)-1=x-1$，

$\therefore f(x)-f(-x)>-1$可化为$-2x+2>-1$，解得$x<\frac{3}{2}$，

则$0<x\leqslant 1$.

故所求不等式的解集为$\left[-1,-\frac{1}{2}\right)\cup(0,1]$. 故选B.

11. 选B　解法一：当x除以10的余数为0，1，2，3，4，5，6时，由题设知$y=\left[\frac{x}{10}\right]$，且易验证此时$\left[\frac{x}{10}\right]=\left[\frac{x+3}{10}\right]$.

当x除以10的余数为7，8，9时，由题设知$y=\left[\frac{x}{10}\right]+1$，且易验证此时$\left[\frac{x}{10}\right]+1=\left[\frac{x+3}{10}\right]$.

综上知，必有$y=\left[\frac{x+3}{10}\right]$. 故选B.

解法二：由题意知：若$x=16$，则$y=1$，由此检验知选项C，D错误；若$x=17$，则$y=2$，由此检验知选项A错误. 故由排除法知，本题应选B.

12. 选D　$\because$对任意$x_1,x_2\in\mathbf{R}$有$f(x_1+x_2)=f(x_1)+f(x_2)+a$，

$\therefore$令$x_1=x_2=0$，得$f(0)=-a$，$\therefore$令$x_1=x$，$x_2=-x$，得$f(0)=f(x)+f(-x)+a$，$\therefore f(x)+a=-f(-x)-a=-[f(-x)+a]$，$\therefore f(x)+a$为奇函数. 故选D.

13. **解析**：由$\begin{cases}x-1\neq 0,\\ 2x+3\geqslant 0\end{cases}$可得$x\geqslant -\frac{3}{2}$且$x\neq 1$，故函数的定义域为$\left[-\frac{3}{2},1\right)\cup(1,+\infty)$.

答案：$\left[-\frac{3}{2},1\right)\cup(1,+\infty)$

14. **解析**：由题意得$g(-2)=f(-2)+9=-f(2)+9=3$，

$\therefore f(2)=6$.

答案：6

15. **解析**：当$a\leqslant -2$时，$f(a)=a<-3$，此时不等式的解集是$(-\infty,-3)$；

当$-2<a<4$时，$f(a)=a+1<-3$，此时不等式无解；

当$a\geqslant 4$时，$f(a)=3a<-3$，此时不等式无解.

所以a的取值范围是$(-\infty,-3)$.

答案：$(-\infty,-3)$

16. **解析**：$f(x)=\frac{x^2+(a+1)x+a}{x}=x+\frac{a}{x}+a+1$，因此有$f(-x)=-x+\frac{a}{-x}+a+1$. 又$f(x)$为奇函数，所以$f(-x)+f(x)=0$，即$2a+2=0$，所以$a=-1$.

答案：-1

17. **解**：(1)由交集的概念易得2是方程$2x^2+ax+2=0$和$x^2+3x+2a=0$的公共解，则$a=-5$，此时$A=\left\{\frac{1}{2},2\right\}$，$B=\{-5,2\}$.

(2)由并集的概念易得$U=A\cup B=\left\{-5,\frac{1}{2},2\right\}$.

由补集的概念易得$\complement_U A=\{-5\}$，$\complement_U B=\left\{\frac{1}{2}\right\}$.

所以$(\complement_U A)\cup(\complement_U B)=\left\{-5,\frac{1}{2}\right\}$.

(3)$(\complement_U A)\cup(\complement_U B)$的所有子集即为集合$\left\{-5,\frac{1}{2}\right\}$的所有子集：$\varnothing$，$\left\{\frac{1}{2}\right\}$，$\{-5\}$，$\left\{-5,\frac{1}{2}\right\}$.

18. **解**：因为函数$f(x)$的对称轴方程为$x=-2$，所以函数$f(x)$在定义域$[-2,b]$上单调递增，

所以函数$f(x)$的最小值为$f(-2)=a-4=-2$，

所以$a=2$.

函数$f(x)$的最大值为$f(b)=b^2+4b+2=b$.

所以$b^2+3b+2=0$，

解得$b=-1$或$b=-2$(舍去)，所以$b=-1$.

19. **解**：(1)函数$f(x)$在$[1,+\infty)$上是增函数. 证明如下：

任取$x_1,x_2\in[1,+\infty)$，且$x_1<x_2$，

$$f(x_1)-f(x_2)=\frac{2x_1+1}{x_1+1}-\frac{2x_2+1}{x_2+1}=\frac{x_1-x_2}{(x_1+1)(x_2+1)}.$$

$\because 1\leqslant x_1<x_2$，

$\therefore x_1-x_2<0$，$(x_1+1)(x_2+1)>0$，

$\therefore f(x_1)-f(x_2)<0$，

即$f(x_1)<f(x_2)$，

$\therefore$函数$f(x)$在$[1,+\infty)$上是增函数.

(2)由(1)知，函数$f(x)$在$[1,4]$上是增函数，

故最大值$f(4)=\frac{9}{5}$，最小值$f(1)=\frac{3}{2}$.

20. **解**：(1)设每天来回y次，每次拖挂x节车厢，由题意设$y=kx+b(k\neq 0)$，当$x=4$时，$y=16$，当$x=7$时，$y=10$，得到$16=4k+b$，$10=7k+b$，解得$k=-2$，$b=24$，$\therefore y=-2x+24$.

(2)设每天来回y次，每次拖挂x节车厢，由题意知，每天拖挂车厢最多时，运营人数最多，设每天拖挂S节车厢，则$S=xy=x(-2x+24)=-2x^2+24x=-2(x-6)^2+72$，所以当$x=6$时，$S_{\max}=72$，此时$y=12$，则每天最多运营人数为$110\times 72=7\ 920$(人).

故这列火车每天来回12次，才能使运营人数最多，每天最多运营人数为7 920.

21. **解**：(1)由$f(2)=0$，得$4a+2b=0$，即$2a+b=0$. ①

方程$f(x)=x$，即$ax^2+bx=x$，

即$ax^2+(b-1)x=0(a\neq 0)$有两个相等实根，

$\therefore(b-1)^2=0$，

$\therefore b=1$，代入①得，$a=-\frac{1}{2}$.

$\therefore f(x)=-\frac{1}{2}x^2+x$.

(2)由(1)知，

$f(x)=-\frac{1}{2}(x-1)^2+\frac{1}{2}$.

显然函数$f(x)$在$[1,2]$上是减函数，

$\therefore$当$x=1$时，$f(x)_{\max}=\frac{1}{2}$；当$x=2$时，$f(x)_{\min}=0$.

$\therefore x\in[1,2]$时，函数$f(x)$的值域是$\left[0,\frac{1}{2}\right]$.

(3)$F(x)$是奇函数.

证明如下：$F(x)=f(x)-f(-x)=\left(-\frac{1}{2}x^2+x\right)-\left[-\frac{1}{2}(-x)^2+(-x)\right]=2x$，

$\because F(-x)=2(-x)=-2x=-F(x)$，

$\therefore F(x)$是奇函数.

22. **解**：(1)由题意设$f(x)=a(x-1)^2+1(a\neq 0)$，

将点$(0,3)$的坐标代入得$a=2$，

所以$f(x)=2(x-1)^2+1=2x^2-4x+3$.

(2)由(1)知，$f(x)$的对称轴为直线$x=1$，

所以$2a<1<a+1$，

所以$0<a<\frac{1}{2}$.

(3)设$f(x)-2x-2m-1=2x^2-6x-2m+2$，

由题意得$2x^2-6x-2m+2>0$对于任意$x\in[-1,1]$恒成立，

所以$x^2-3x+1>m$对于任意$x\in[-1,1]$恒成立，

令$g(x)=x^2-3x+1$，$x\in[-1,1]$，

则$g(x)_{\min}=g(1)=-1$，

所以$m<-1$.

阶段质量测试卷(二)

1. 选D　$\because M=\{y\mid y=2^x\}=\{y\mid y>0\}=\{x\mid x>0\}$，$N=\{x\mid y=\log_{(2x-1)}\sqrt{3x-2}\}=\left\{x\,\middle|\,\begin{cases}3x-2>0\\ 2x-1>0\\ 2x-1\neq 1\end{cases}\right\}=\left\{x\,\middle|\,x>\frac{2}{3}\text{且}x\neq 1\right\}$，

$\therefore M\cap N=\left\{x\,\middle|\,\frac{2}{3}<x<1\text{或}x>1\right\}$. 故选D.

2. 选A　$\because f(a)=-3$，

$\therefore\begin{cases}a\leqslant 1,\\ 2^{a-1}-2=-3\end{cases}$

或$\begin{cases}a>1,\\ -\log_2(a+1)=-3\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a\leqslant 1,\\ a\in\varnothing\end{cases}$或$\begin{cases}a>1,\\ a=7\end{cases}\Rightarrow a=7$.

$\therefore f(6-a)=f(-1)=2^{-2}-2=\frac{1}{4}-2=-\frac{7}{4}$. 故选A.

3. 选C　$\because\log_3\sqrt{2}<\log_2\sqrt{2}<\log_2\sqrt{3}$，

$\therefore c<b$.

又$\because\log_2\sqrt{3}<\log_2 2=\log_3 3<\log_3\pi$，

$\therefore b<a$，$\therefore c<b<a$，故选C.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

4. 选 D　∵$0<b<1$，∴当 $a>1$ 时，$\log_a b<0<1$ 成立；当 $0<a<1$ 时，$\log_a b<1=\log_a a$，∴$0<a<b$，故选 D.

5. 选 D　$f(-x)=|-x|\cdot\dfrac{1-2^{-x}}{2^{-x}+1}=|x|\cdot\dfrac{2^x-1}{1+2^x}=-|x|\cdot\dfrac{1-2^x}{2^x+1}=-f(x)$，即函数 $f(x)$是奇函数，图象关于原点对称.
∵函数 $f(x)$的值域是$[m,n]$，∴$m+n=0$，则 $f(m+n)=f(0)=0$. 故选 D.

6. 选 A　∵$f(x)=ka^x-a^{-x}$是定义在 **R** 上的奇函数，∴$f(0)=k-1=0$，∴$k=1$，∴$f(x)=a^x-a^{-x}$. 又$f(x)=a^x-\dfrac{1}{a^x}$是增函数，∴$a>1$，∴$g(x)=\log_a(x-1)$的图象是将 $y=\log_a x$ 的图象向右平移 1 个单位得到的，故选 A.

7. 选 B　函数 $y=2^x$ 的图象与函数 $y=\dfrac{1}{x}$ 的图象只有 1 个交点，故选 B.

8. 选 B　∵$a>0$ 且 $a\neq1$，∴$u=6-ax$ 是减函数. ∵$f(x)$在$[0,2]$上是减函数，∴$y=\log_a u$ 是增函数，∴$a>1$. 又在$[0,2]$上需满足 $u=6-ax>0$，∴$u(2)=6-2a>0$，∴$a<3$. 综上，$1<a<3$. 故选 B.

9. 选 B　当 $x>2$ 时，$f(x)=\log_2 x>\log_2 2=1$，当 $x\leqslant2$ 时，$f(x)=-x^2+a$，且 $f(x)_{\max}=f(0)=a$，
∵$f(x)$的值域为 **R**，$f(0)=a\geqslant1$，故选 B.

10. 选 A　∵$y=f[\lg(x+1)]$的定义域为$(0,99]$，
即 $x\in(0,99]$，∴$x+1\in(1,100]$，
∴$\lg(x+1)\in(0,2]$. ∴在函数 $y=f[\log_2(x+2)]$中，$\log_2(x+2)\in(0,2]$，
∴$x+2\in(1,4]$，
∴$x\in(-1,2]$，即函数 $y=f[\log_2(x+2)]$的定义域为$(-1,2]$，故选 A.

11. 选 D　∵$f(x)=\ln(\sqrt{1+9x^2}-3x)+1$，
∴$f(x)+f(-x)=\ln(\sqrt{1+9x^2}-3x)+1+\ln(\sqrt{1+9x^2}+3x)+1=\ln 1+2=2$.
∴$f(\lg 2)+f\left(\lg\dfrac{1}{2}\right)=f(\lg 2)+f(-\lg 2)=2$. 故选 D.

12. 选 D　∵$x\in\left(0,\dfrac{1}{2}\right)$，∴$u=2x^2+x=2\left(x+\dfrac{1}{4}\right)^2-\dfrac{1}{8}\in(0,1)$，依题意，当 $u\in(0,1)$时，$\log_a u>0$ 恒成立，∴$0<a<1$，∴$y=\log_a u$ 在 $u\in(0,1)$上是减函数，
∴$f(x)$的单调增区间应为 $u(x)=2x^2+x$ 的单调减区间，且保证 $u(x)>0$. 故选 D.

13. **解析**：∵$2m+n=2\log_a 2+\log_a 3=\log_a 4+\log_a 3=\log_a 12$，
∴$a^{2m+n}=a^{\log_a 12}=12$.
答案：12

14. **解析**：设 $g\left(\dfrac{3}{5}\right)=t$，则 $f(t)=\dfrac{2^t-1}{2^t+1}=\dfrac{3}{5}$，解得 $t=2$.
∴$g\left(\dfrac{3}{5}\right)=2$.
答案：2

15. **解析**：$3^{x^2-2ax}>\left(\dfrac{1}{3}\right)^{x+1}\Leftrightarrow3^{x^2-2ax}>3^{-x-1}\Leftrightarrow x^2-2ax>-x-1\Leftrightarrow x^2-(2a-1)x+1>0$ 对一切实数 x 恒成立，
∴$\Delta=(2a-1)^2-4<0$，
∴$4a^2-4a-3<0$，解得$-\dfrac{1}{2}<a<\dfrac{3}{2}$.
答案：$\left(-\dfrac{1}{2},\dfrac{3}{2}\right)$

16. **解析**：∵$f(x)=e^{|x-a|}=\begin{cases}e^{x-a}(x\geqslant a),\\ e^{-x+a}(x<a)\end{cases}$在$[a,+\infty)$上是增函数，在$(-\infty,a)$上是减函数，又 $f(x)$在区间$[1,+\infty)$上是增函数，∴$[1,+\infty)\subseteq[a,+\infty)$，∴$a\leqslant1$.
答案：$(-\infty,1]$

17. **解**：(1)原式$=\sqrt{2}+1-1+\dfrac{2}{3}+e-\sqrt{2}=\dfrac{2}{3}+e$.
(2)原式$=\lg 5+\lg 10^2+\lg 2^3-\lg 5-\dfrac{1}{2}\lg 2^6+50\times(\lg 10)^2=\lg 5+2+3\lg 2-\lg 5-3\lg 2+50=52$.

18. **解**：(1)依题意 $f(2)=0.5$，即 $a=0.5=\dfrac{1}{2}$.
(2)$f(x)=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{x-1}(x\geqslant0)$，∵$x\geqslant0$，∴$x-1\geqslant-1$，
∴$0<\left(\dfrac{1}{2}\right)^{x-1}\leqslant\left(\dfrac{1}{2}\right)^{-1}=2$，即值域为$(0,2]$.

19. **解**：(1)∵$f(x)=\log_2(1+x)+\log_2(1-x)=\log_2(1-x^2)$，∴$f\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)=\log_2\left(1-\dfrac{1}{2}\right)=\log_2 2^{-1}=-1$.
(2)由$\begin{cases}1+x>0,\\1-x>0\end{cases}$得$-1<x<1$，即函数 $f(x)$的定义域为$(-1,1)$，是关于原点对称的区间.
又 $f(-x)-f(x)=\log_2(1-x)+\log_2(1+x)-\log_2(1+x)-\log_2(1-x)=0$，
∴$f(-x)=f(x)$，∴$f(x)$是偶函数.

20. **解**：(1)∵$f(x)$是 **R** 上的奇函数，
∴$f(-x)=-f(x)$，
即$\dfrac{b-2^{-x}}{2^{-x}+a}=-\dfrac{b-2^x}{2^x+a}\Rightarrow\dfrac{b\cdot2^x-1}{a\cdot2^x+1}=\dfrac{2^x-b}{2^x+a}$恒成立，比较系数得 $a=1$，$b=1$，
∴$f(x)=\dfrac{1-2^x}{2^x+1}$.
(2)证明：由(1)可知，$f(x)=\dfrac{1-2^x}{2^x+1}$.
设 $x_1,x_2\in\mathbf{R}$，且 $x_1<x_2$，
则 $f(x_1)-f(x_2)=\dfrac{1-2^{x_1}}{2^{x_1}+1}-\dfrac{1-2^{x_2}}{2^{x_2}+1}=\dfrac{2(2^{x_2}-2^{x_1})}{(2^{x_1}+1)(2^{x_2}+1)}$.
∵$x_1<x_2$，∴$2^{x_1}<2^{x_2}$，
∴$2^{x_2}-2^{x_1}>0$，$(2^{x_1}+1)(2^{x_2}+1)>0$，
∴$f(x_1)-f(x_2)>0$，
∴$f(x_1)>f(x_2)$，∴$f(x)$在 **R** 上是减函数.
(3)$f(t^2-2t)+f(2t^2-k)<0\Leftrightarrow f(t^2-2t)<-f(2t^2-k)=f(k-2t^2)$，由(2)知，$f(x)$是 **R** 上的减函数，∴$t^2-2t>k-2t^2\Leftrightarrow k<3t^2-2t$ 对任意 $t\in\mathbf{R}$ 恒成立. 令 $g(t)=3t^2-2t$，则只需 $k<g(t)_{\min}$，
∵$g(t)=3t^2-2t=3\left(t-\dfrac{1}{3}\right)^2-\dfrac{1}{3}\geqslant-\dfrac{1}{3}$，
∴$g(t)_{\min}=-\dfrac{1}{3}$，∴$k<-\dfrac{1}{3}$.

21. **解**：(1)设 $\log_a x=t$，则 $x=a^t$，且 $t\in\mathbf{R}$，
则 $f(t)=\dfrac{a}{a^2-1}\cdot\left(a^t-\dfrac{1}{a^t}\right)(t\in\mathbf{R})$，
∴$f(x)=\dfrac{a}{a^2-1}\cdot\left(a^x-\dfrac{1}{a^x}\right)=\dfrac{a}{a^2-1}\cdot(a^x-a^{-x})(x\in\mathbf{R})$.
∵$f(-x)=\dfrac{a}{a^2-1}\cdot(a^{-x}-a^x)=-\dfrac{a}{a^2-1}\cdot(a^x-a^{-x})=-f(x)$，
∴$f(x)$是奇函数.
①当 $a>1$ 时，$y=a^x$ 是增函数，$y=-a^{-x}$ 也是增函数，且 $\dfrac{a}{a^2-1}>0$，
∴$f(x)$是增函数；
②当 $0<a<1$ 时，$y=a^x$ 是减函数，$y=-a^{-x}$也是减函数，且$\dfrac{a}{a^2-1}<0$，
∴$f(x)$是增函数；
综上可知，$f(x)$是 **R** 上的增函数.
(2)令 $g(x)=f(x)-4$，由(1)知，$g(x)$也是 **R** 上的增函数. 依题意 $g(x)<0$ 在 $x\in(-\infty,2)$上恒成立，故只需$g(2)\leqslant0$，即 $f(2)-4=\dfrac{a}{a^2-1}\cdot(a^2-a^{-2})-4\leqslant0$，整理得 $a^2-4a+1\leqslant0$，解得 $2-\sqrt{3}\leqslant a\leqslant2+\sqrt{3}$，
又 $a\neq1$，∴$a\in[2-\sqrt{3},1)\cup(1,2+\sqrt{3}]$.

22. **解**：(1)∵$f(x)$的定义域是 **R**，且是偶函数，
∴$f(-1)=f(1)$，即 $\log_9\dfrac{10}{9}-k=\log_9 10+k$，
∴$k=-\dfrac{1}{2}$.
(2)由(1)知，$f(x)=\log_9(9^x+1)-\dfrac{1}{2}x$.
若方程 $f(x)=\dfrac{1}{2}x+b$ 有实数根，
即 $\log_9(9^x+1)-x=b$ 有实数根，

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

令 $g(x)=\log_9(9^x+1)-x=\log_9\frac{9^x+1}{9^x}=\log_9\left(1+\frac{1}{9^x}\right)$,

则函数 $y=g(x)$的图象与直线 $y=b$ 有交点,

$\because 1+\frac{1}{9^x}>1$,

$\therefore g(x)=\log_9\left(1+\frac{1}{9^x}\right)>0$,$\therefore b>0$.

(3)由(1)知,$f(x)=\log_9(9^x+1)-\frac{1}{2}x=\log_9(9^x+1)-\log_9 3^x=\log_9\left(3^x+\frac{1}{3^x}\right)$.

依题意,方程 $3^x+\frac{1}{3^x}=a\cdot 3^x-\frac{4}{3}a$ 有且只有一个实数根.

令 $3^x=t$,则 $t>0$,

$\therefore$关于 t 的方程 $3(a-1)t^2-4at-3=0(*)$ 有且只有一个正实根.

①当 $a=1$ 时,$t=-\frac{3}{4}$,不合题意,舍去;

②当 $a\neq 1$ 时,则方程$(*)$有两个相异实根或两个相等的正实根,

若方程$(*)$有两个相异实根,

则 $\begin{cases}\Delta=16a^2+36(a-1)>0,\\ x_1x_2=-\frac{1}{a-1}<0\end{cases}\Rightarrow$

$\begin{cases}4a^2+9a-9>0,\\ a>1\end{cases}$

$\Rightarrow\begin{cases}a<-3\text{ 或 }a>\frac{3}{4},\\ a>1\end{cases}\Rightarrow a>1$;

若方程$(*)$有两个相等的正实根,

则 $\begin{cases}\Delta=16a^2+36(a-1)=0,\\ x_1+x_2=\frac{4a}{3(a-1)}>0,\\ x_1x_2=-\frac{1}{a-1}>0\end{cases}\Rightarrow$

$\begin{cases}a=-3\text{ 或 }a=\frac{3}{4},\\ a<0\text{ 或 }a>1,\\ a<1\end{cases}$

$\Rightarrow a=-3$.

综上可知,$a\in\{-3\}\cup(1,+\infty)$.

阶段质量测试卷(三)

1. 选 D　由 $f(x)=0$,得 $\lg|x|=0$,所以 $|x|=1$,$x=\pm 1$. 故选D.
2. 选 C　由题意不能断定零点在区间$(-1,1)$内部还是外部. 故选 C.
3. 选 D　因为 $\Delta=1-4b$ 的符号不定,可正、可负、可为零,故 D 正确.
4. 选 B　因为 $f(-1)=\frac{1}{2}-3<0$,$f(0)=1>0$,所以$f(x)$在区间$(-1,0)$上存在零点. 故选 B.
5. 选 C　把 $y=f(x)$的图象向下平移 1 个单位长度后,只有选项 C 中图象与 x 轴无交点. 故选 C.
6. 选 C　$S_{\triangle PAB}=\frac{1}{2}\cdot AB\cdot PD=Rx$,

又 $0<PD\leqslant R$,$\therefore S=Rx(0<x\leqslant R)$. 故选 C.
7. 选 A　$f\left(\frac{1}{e}\right)=\ln\frac{1}{e}-\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{e}\right)^2+1<0$,$f(1)=\ln 1-\frac{1}{2}+1>0$,$f(2)=\ln 2-2+1<0$,故选 A.
8. 选 C　由函数零点的判断方法可知,$f(2)$,$f(4)$与$f(0)$符号相反,$f(1)$与$f(2)$符号相反,故 $f(1)$与 $f(0)$符号相同,故选 C.
9. 选 B　若按 x 千米$(x\in\mathbf{Z})$计价,则 $6+(x-2)\times 3+2\times 3=24$,得 $x=6$. 故实际行程应属于区间$(5,6]$. 故选 B.
10. 选 B　设 2019 年应比 2018 年降价 $x\%$,则$(1+25\%)(1-x\%)=1+10\%$,解得 $x=12$. 故选 B.
11. 选 A　结合 $y=2^x$,$y=x^{\frac{1}{2}}$及 $y=\lg x$ 的图象易知,当 $x\in(0,1)$时,$2^x>x^{\frac{1}{2}}>\lg x$. 故选 A.
12. 选 A　$\because$函数 $f(x)$在$(0,+\infty)$上为减函数,且$f(x_0)=0$,$\therefore$当 $x\in(0,x_0)$时,均有 $f(x)>0$,而 $0<x_1<x_0$,

$\therefore f(x_1)>0$. 故选 A.
13. **解析**:$a=0$ 时,$f(x)$只有一个零点 -1,

$a\neq 0$ 时,由 $\Delta=1+4a=0$,得 $a=-\frac{1}{4}$.

答案:0 或 $-\frac{1}{4}$
14. **解析**:由题意可知 $f(0)=f(1)=0$.

又 $f(-1)=-f(1)=0$,$\therefore f(0)+f(-1)=0$.

答案:0
15. **解析**:由题意,2019 年年底人口数为 $54.8(1+x\%)$,2020 年年底人口数为 $54.8(1+x\%)^2$,…,故 2039 年年底人口数为 $54.8(1+x\%)^{21}$.

答案:$y=54.8(1+x\%)^{21}$
16. **解析**:$\because 2<a<3<b<4$,

$\therefore f(2)=\log_a 2+2-b<1+2-b=3-b<0$,$f(3)=\log_a 3+3-b>1+3-b=4-b>0$,

即 $f(2)\cdot f(3)<0$,易知 $f(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增.

$\therefore$函数 $f(x)$在$(0,+\infty)$上存在唯一的零点 x_0,且 $x_0\in(2,3)$,$\therefore n=2$.

答案:2
17. **解**:(1)因为 $f(x)$的两个零点分别是 -3,2,

所以 $\begin{cases}f(-3)=0,\\ f(2)=0,\end{cases}$

即 $\begin{cases}9a-3(b-8)-a-ab=0,\\ 4a+2(b-8)-a-ab=0,\end{cases}$

解得 $a=-3$,$b=5$,$f(x)=-3x^2-3x+18$.

(2)由(1)知,$f(x)=-3x^2-3x+18$ 的对称轴 $x=-\frac{1}{2}$,函数开口向下,所以 $f(x)$在$[0,1]$上为减函数,$f(x)$的最大值 $f(0)=18$,最小值 $f(1)=12$,所以值域为$[12,18]$.
18. **解**:(1)$f(x)=x^2+2mx+3m+4$ 有且仅有一个零点$\Leftrightarrow$方程 $f(x)=0$ 有两个相等实根$\Leftrightarrow\Delta=0$,即 $4m^2-4(3m+4)=0$,即 $m^2-3m-4=0$,$\therefore m=4$ 或 $m=-1$.

(2)由题意知

$\begin{cases}\Delta>0,\\ -m>-1,\\ f(-1)>0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}m^2-3m-4>0,\\ m<1,\\ 1-2m+3m+4>0.\end{cases}$

$\therefore -5<m<-1$,$\therefore m$ 的取值范围为$(-5,-1)$.
19. **解**:优惠办法(1):$y_1=80+5(x-4)=60+5x$,$x\geqslant 4$,且 $x\in\mathbf{N}$,

优惠办法(2):$y_2=(80+5x)\cdot 90\%=72+4.5x$,$x\geqslant 4$ 且 $x\in\mathbf{N}$,

当 $y_1-y_2=0.5x-12=0$ 时,解得 $x=24$.

故当 $4\leqslant x<24$ 时用第一种方案,$x=24$ 时两方案一样,$x>24$ 时,采用第二种方案.
20. **解**:$\because -\frac{1}{2}$是函数的一个零点,

$\therefore f\left(-\frac{1}{2}\right)=0$.

$\because y=f(x)$是偶函数且在$(-\infty,0]$上递增,

$\therefore$当 $\log_{\frac{1}{4}}x\leqslant 0$,即 $x\geqslant 1$ 时,

若 $f(\log_{\frac{1}{4}}x)\geqslant 0$,

则 $\log_{\frac{1}{4}}x\geqslant-\frac{1}{2}$,解得 $x\leqslant 2$,即 $1\leqslant x\leqslant 2$.

由对称性可知,当 $\log_{\frac{1}{4}}x>0$ 时,$\frac{1}{2}\leqslant x<1$.

综上所述,x 的取值范围为 $\left[\frac{1}{2},2\right]$.
21. **解**:设每月用水量为 x m^3,支付水费为 y 元,

则 $y=\begin{cases}8+c,0<x\leqslant a,&①\\ 8+b(x-a)+c,x>a.&②\end{cases}$

由题意知 $0<c\leqslant 5$,$\therefore 8+c\leqslant 13$.

故用水量 15 m^3,22 m^3 均大于最低限量 a m^3.

将 $x=15$,$y=19$ 和 $x=22$,$y=33$ 分别代入②中,得 $\begin{cases}19=8+b(15-a)+c,\\ 33=8+b(22-a)+c,\end{cases}$

解得 $b=2$. $\therefore 2a=c+19$. ③

不妨设 1 月份用水量也超过最低限量,即 $9>a$.

这时,将 $x=9$ 代入②中得 $9=8+2\times(9-a)+c$,解得 $2a=c+17$,与③矛盾,

$\therefore 9\leqslant a$,则有 $8+c=9$,$\therefore c=1$,$a=10$.
22. **解**:(1)依题意得,当 $0\leqslant t\leqslant 3$ 时,$s(t)=-5t(t-13)$,

$\therefore s(3)=-5\times 3\times(3-13)=150$.

即小张家距离景点 150 km,

小张的车在景点逗留时间为 $16-8-3=5$(h).

$\therefore$当 $3<t\leqslant 8$ 时,$s(t)=150$,

小张从景点回家所花时间为 $\frac{150}{60}=2.5$(h),

故 $s(10.5)=2\times 150=300$.

$\therefore$当 $8<t\leqslant 10.5$ 时,

$s(t)=150+60(t-8)=60t-330$.

综上所述,这天小张的车所走的路程

$s(t)=\begin{cases}-5t(t-13),0\leqslant t\leqslant 3,\\ 150,3<t\leqslant 8,\\ 60t-330,8<t\leqslant 10.5.\end{cases}$

(2)当 $0\leqslant t\leqslant 3$ 时,

令 $-5t(t-13)=60$ 得 $t^2-13t+12=0$,

解得 $t=1$ 或 $t=12$(舍去),

当 $8<t\leqslant 10.5$ 时,

令 $60t-330=2\times 150-60=240$,

解得 $t=\frac{19}{2}$.

$\therefore$小张这天途经该加油站的时间分别为 9 点和 17 时 30 分.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

模块综合质量测试卷

1. 选D　A显然错误；$A\cap B=\{2,3\}$，B错；$A\cup B=\{1,2,3,4\}$，C错，故选D.

2. 选B　由$1-x^2\geqslant 0$得，$-1\leqslant x\leqslant 1$，
$\because x\in\mathbf{Z}$，$\therefore A=\{-1,0,1\}$.
当$x\in A$时，$y=x^2+1\in\{2,1\}$，即$B=\{1,2\}$，
$\therefore A\cap B=\{1\}$. 故选B.

3. 选C　$\because f(2)=\log_3(2^2-1)=1$.
$\therefore f[f(2)]=f(1)=2e^{1-1}=2$. 故选C.

4. 选A　$\because y=x^{-1}$是奇函数，$y=\log_{\frac{1}{2}}x$不具有奇偶性，故排除B、D；又函数$y=x^2-2$在区间$(0,+\infty)$上是单调递增函数，故排除C，只有选项A符合题意. 故选A.

5. 选D　函数$y=\log_2|1-x|$可由下列变换得到：
$y=\log_2 x\to y=\log_2|x|\to y=\log_2|x-1|\to y=\log_2|1-x|$. 故选D.

6. 选A　设$f(x)=x^\alpha$，则$\frac{\sqrt{2}}{2}=\left(\frac{1}{2}\right)^\alpha$，
$\therefore\alpha=\frac{1}{2}$，$f(2)=2^{\frac{1}{2}}$，所以$\log_2 f(2)=\log_2 2^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}$. 故选A.

7. 选B　$\because f(1)=-1<0$，$f(10)=1-\frac{1}{10}=\frac{9}{10}>0$，
$\therefore f(1)\cdot f(10)<0$，由函数零点存在性定理知，函数$f(x)=\lg x-\frac{1}{x}$的零点所在的区间为$(1,10)$. 故选B.

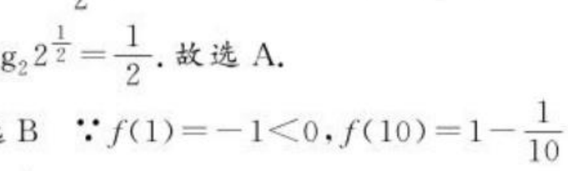
8. 选D　$\because a=0.3^2\in(0,1)$，$b=\log_2 0.3<0$，$c=2^{0.3}>1$. $\therefore c>a>b$. 故选D.

9. 选B　开始一段时间，水槽底部没有水，烧杯满了之后，水槽中水面上升先快后慢. 故选B.

10. 选C　$\because$定义域为$\{x|x\neq\pm1\}$，关于原点对称，且$f(-x)=f(x)$，
$\therefore f(x)$是偶函数，排除A、B；
又$f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2}{1-\left(\frac{1}{x}\right)^2}=\frac{1+x^2}{x^2-1}=-f(x)$，故选C.

11. 选A　因为$f(x)=m+2\log_2 x$在$[1,2]$是增函数，且由$f(x)\leqslant 4$，得$f(2)=m+2\leqslant 4$，得$m\leqslant 2$. 故选A.

12. 选C　作出$f(x)$的大致图象.



由图象知，要使$f(a)=f(b)=f(c)$，不妨设$a<b<c$，
则$-\lg a=\lg b=-\frac{1}{2}c+6$.
于是$\lg a+\lg b=0$.
故$ab=1$. 因而$abc=c$.
由图知$10<c<12$，故$abc\in(10,12)$. 故选C.

13. **解析**：$\because A=\{x|x>1\}$，$\therefore\complement_U A=\{x|x\leqslant 1\}$.
由$B=\{x|x>a\}$，$(\complement_U A)\cup B=\mathbf{R}$可知，$a\leqslant 1$.
答案：$(-\infty,1]$

14. **解析**：原式$=\lg 4+\frac{1}{2}\lg 2-\lg 7-\frac{2}{3}\lg 8+\lg 7+\frac{1}{2}\lg 5=2\lg 2+\frac{1}{2}(\lg 2+\lg 5)-2\lg 2=\frac{1}{2}$.
答案：$\frac{1}{2}$

15. **解析**：$\because f(0)=2^0+1=2$，
$f(2)=4+2a$，
$\therefore f[f(0)]=4+2a=4a$，$\therefore a=2$.
答案：2

16. **解析**：$\because$要使$f(x)=\lg(2^x-b)$在$x\in[1,+\infty)$上，恒有$f(x)\geqslant 0$，$\therefore$有$2^x-b\geqslant 1$在$x\in[1,+\infty)$上恒成立，即$2^x\geqslant b+1$恒成立，又$\because$指数函数$g(x)=2^x$在定义域上是增函数，$\therefore$只要$2\geqslant b+1$成立即可，解得$b\leqslant 1$.
答案：$(-\infty,1]$

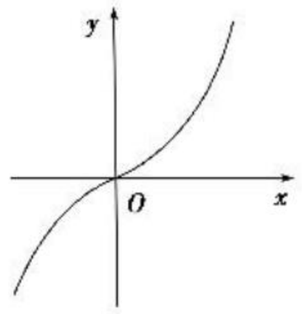
17. **解**：(1)当$a=2$时，$A=\{x|2<2^x<8\}=(1,3)$，$B=\{x|a\leqslant x\leqslant a+3\}=[2,5]$，故$A\cap B=[2,3)$.
(2)$\complement_{\mathbf{R}}A=(-\infty,1]\cup[3,+\infty)$.
故由$B\subseteq\complement_{\mathbf{R}}A$知，$a+3\leqslant 1$或$a\geqslant 3$，
故实数a的取值范围为$(-\infty,-2]\cup[3,+\infty)$.

18. **解**：(1)由已知$f(x)=\log_a x$($a>0$且$a\neq 1$)的图象过点$(4,2)$，
则$2=\log_a 4$，即$a^2=4$，
又$a>0$且$a\neq 1$，所以$a=2$.
(2)$g(x)=f(1-x)+f(1+x)=\log_2(1-x)+\log_2(1+x)$.
由$\begin{cases}1-x>0,\\1+x>0,\end{cases}$得$-1<x<1$，定义域为$(-1,1)$.
(3)$g(x)=\log_2(1-x)+\log_2(1+x)=\log_2(1-x^2)$，其单调减区间为$[0,1)$.

19. **解**：(1)在$f\left(\frac{x}{y}\right)=f(x)-f(y)$中，令$x=y=1$，
则有$f(1)=f(1)-f(1)$，$\therefore f(1)=0$.
(2)$\because f(6)=1$，$\therefore f(x+3)-f\left(\frac{1}{3}\right)<2=f(6)+f(6)$.
$\therefore f(3x+9)-f(6)<f(6)$，
即$f\left(\frac{x+3}{2}\right)<f(6)$.
$\because f(x)$是定义在$(0,+\infty)$上的增函数，
$\therefore\begin{cases}x+3>0,\\\frac{x+3}{2}<6.\end{cases}$
解得$-3<x<9$，即不等式的解集为$(-3,9)$.

20. **解**：(1)设日均销售量y与销售单价x(元)的函数关系为$y=kx+b(k\neq 0)$，把$(3,600)$，$(5,500)$代入上式，得
$\begin{cases}3k+b=600,\\5k+b=500,\end{cases}$
解得$k=-50$，$b=750$，
$\therefore$日均销售量y与销售单价x(元)的函数关系为$y=-50x+750$，$3\leqslant x\leqslant 12$.
(2)设销售单价为x元，日均获利W元，根据题意得，
$W=(x-3)(-50x+750)-300=-50(x-9)^2+1\,500$，
$\therefore$当$x=9$时，W有最大值，最大值为1 500元.

21. **解**：(1)$\because f(x)$是奇函数，
$\therefore f(3)+f(-1)=f(3)-f(1)=2^3-1-2+1=6$.
(2)设$x<0$，则$-x>0$，
$\therefore f(-x)=2^{-x}-1$，
$\because f(x)$为奇函数，
$\therefore f(x)=-f(-x)=-2^{-x}+1$，
$\therefore f(x)=\begin{cases}2^x-1,x\geqslant 0,\\-2^{-x}+1,x<0.\end{cases}$
(3)作出函数$f(x)$的图象，如图所示，根据函数图象可得$f(x)$在$\mathbf{R}$上单调递增，
当$f(x)=-7$时，由$-2^{-x}+1=-7$得，$x=-3$；
当$f(x)=3$时，由$2^x-1=3$得，$x=2$，
$\therefore$区间A为$[-3,2]$.



22. **解**：(1)函数$f(x)$的定义域为$\mathbf{R}$，
设$x_1<x_2$，
则$f(x_1)-f(x_2)=\left(a-\frac{2}{b^{x_1}+1}\right)-\left(a-\frac{2}{b^{x_2}+1}\right)=\frac{2(b^{x_1}-b^{x_2})}{(b^{x_1}+1)(b^{x_2}+1)}$.
当$b>1$时，由$x_1<x_2$，
得$b^{x_1}<b^{x_2}$，从而$b^{x_1}-b^{x_2}<0$，
于是$f(x_1)-f(x_2)<0$，
所以$f(x_1)<f(x_2)$，
此时函数$f(x)$在$\mathbf{R}$上是单调增函数；
当$0<b<1$时，由$x_1<x_2$，
得$b^{x_1}>b^{x_2}$，从而$b^{x_1}-b^{x_2}>0$，
于是$f(x_1)-f(x_2)>0$，所以$f(x_1)>f(x_2)$，
此时函数$f(x)$在$\mathbf{R}$上是单调减函数.
(2)函数$f(x)$的定义域为$\mathbf{R}$，由$f(0)=0$得，$a=1$.
当$a=1$时，
$f(x)=1-\frac{2}{b^x+1}=\frac{b^x-1}{b^x+1}$，
$f(-x)=1-\frac{2}{b^{-x}+1}=\frac{b^{-x}-1}{b^{-x}+1}=\frac{1-b^x}{1+b^x}$.
满足条件$f(-x)=-f(x)$，
故$a=1$时，函数$f(x)$为奇函数.
(3)$f(x)=1-\frac{2}{2^x+1}$，
$\because x\in[0,1]$，
$\therefore 2^x\in[1,2]$，$2^x+1\in[2,3]$，
$\frac{2}{2^x+1}\in\left[\frac{2}{3},1\right]$，
$\therefore f(x)\in\left[0,\frac{1}{3}\right]$，
要使$f(x)=m(x\in[0,1])$有解，
则$0\leqslant m\leqslant\frac{1}{3}$，即实数$m$的取值范围为$\left[0,\frac{1}{3}\right]$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

责任编辑 李 莉 周建图 刘晓冬
美术编辑 李 欣
封面设计 欣 羽

45 分钟
课时作业与单元测试

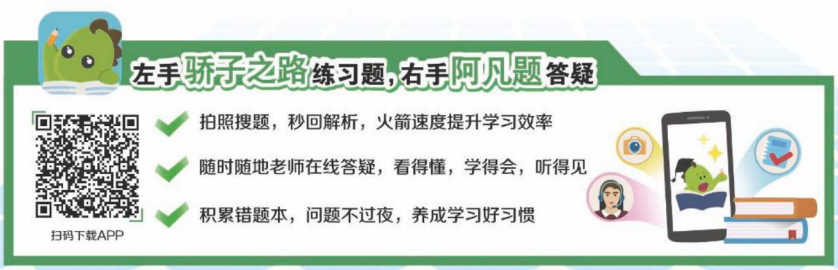
45FENZHONG KESHIZUOYEYUDANYUANCESHI SHUXUE

丛书科目

语文 数学 英语 物理 化学 生物 历史 地理 思想政治

同学们，你想了解丛书的更多信息吗？详情请登录 http://www.dfjc100.com

※ 各科配有教师用书及教学课件光盘 (word 文档可自主编辑)，英语配有原声磁带 / MP3 光盘。



ISBN 978-7-202-08017-7
05>
9 787202 080177
定价：36.00 元

手机扫一扫
获取配套学习资源

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料