东方杰创®
DONGFANG JIECHUANG
让 学习更快乐，人生更精彩

骄子之路®
the Road to Pride
主　编：邓保沧

45分钟

课时作业与单元测试

活页
可拆开使用

教辅资料站

电子教辅　试卷练习
知识总结　备课资源

扫码关注获取更多学习资料

提升＝基础＋能力＋方法
课时作业　基础自测·知能提升
阶段检测　梯度练习·评估达标
答案与解析　全解全析·点拨精准

数学

必修2　RJ·A

河北人民出版社

东方杰创®
DONGFANG JIECHUANG
让 学习更快乐，人生更精彩

骄子之路®
the Road to Pride
主　编：邓保沧

45分钟 课时作业与单元测试

活页
可拆开使用

提升＝基础＋能力＋方法
课时作业　基础自测·知能提升
阶段检测　梯度练习·评估达标
答案与解析　全解全析·点拨精准

数学

必修2　RJ·A

微信公众号
教辅资料站

河北人民出版社
石家庄

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

图书在版编目（CIP）数据

45分钟课时作业与单元测试：A版．数学．2：必修／邓保沧主编．－石家庄：河北人民出版社，2013.7（2019.6重印）
ISBN 978-7-202-08049-8

Ⅰ．①4… Ⅱ．①邓… Ⅲ．①中学数学课－高中－习题集
Ⅳ．①G634

中国版本图书馆CIP数据核字（2013）第194838号

编　委：李　越　张瑞霞　李　雅
天高云　蒋　敏　金剑飞

书　名　45分钟课时作业与单元测试　数学　必修2　A
主　编　邓保沧

责任编辑　李　莉　张艳茹
美术编辑　李　欣
封面设计　欣　羽

出版发行　河北人民出版社（石家庄市友谊北大街330号）
印　刷　河北伦洋印业有限公司
开　本　880毫米×1230毫米　1/16
印　张　9.5
字　数　304 000
版　次　2013年7月第1版　2019年6月第6次印刷
书　号　ISBN 978-7-202-08049-8
定　价　40.00元

版权所有　翻印必究

微信公众号
教辅资料站

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料



目录 CONTENTS

第一部分　课时作业

第一章　空间几何体 …… 1

1.1　空间几何体的结构 …… 1

第 1 课时　柱、锥、台、球的结构特征(1) …… 1

第 2 课时　柱、锥、台、球的结构特征(2)、简单组合体的结构特征 …… 3

1.2　空间几何体的三视图和直观图 …… 5

第 3 课时　中心投影与平行投影、空间几何体的三视图 …… 5

第 4 课时　空间几何体的直观图 …… 7

1.3　空间几何体的表面积与体积 …… 9

第 5 课时　柱体、锥体、台体的表面积 …… 9

第 6 课时　柱体、锥体、台体的体积 …… 11

第 7 课时　球的体积和表面积 …… 13

素养提升 …… 15

第二章　点、直线、平面之间的位置关系 …… 19

2.1　空间点、直线、平面之间的位置关系 …… 19

第 8 课时　平　面 …… 19

第 9 课时　空间中直线与直线之间的位置关系 …… 21

第 10 课时　空间中直线与平面、平面与平面之间的位置关系 …… 23

2.2　直线、平面平行的判定及其性质 …… 25

第 11 课时　直线与平面平行的判定 …… 25

第 12 课时　平面与平面平行的判定 …… 27

第 13 课时　直线与平面平行的性质 …… 29

第 14 课时　平面与平面平行的性质 …… 31

2.3　直线、平面垂直的判定及其性质 …… 33

第 15 课时　直线与平面垂直的判定 …… 33

第 16 课时　平面与平面垂直的判定 …… 35

第 17 课时　直线与平面垂直的性质 …… 37

第 18 课时　平面与平面垂直的性质 …… 39

素养提升 …… 41

第三章　直线与方程 …… 45

3.1　直线的倾斜角与斜率 …… 45

第 19 课时　倾斜角与斜率 …… 45

第 20 课时　两条直线平行与垂直的判定 …… 47

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料



目录 CONTENTS

3.2 直线的方程 …… 49
第 21 课时 直线的点斜式方程 …… 49
第 22 课时 直线的两点式方程 …… 51
第 23 课时 直线的一般式方程 …… 53
3.3 直线的交点坐标与距离公式 …… 55
第 24 课时 两条直线的交点坐标 …… 55
第 25 课时 两点间的距离 …… 56
第 26 课时 点到直线的距离、两条平行直线间的距离 …… 57
素养提升 …… 59
第四章 圆与方程 …… 62
4.1 圆的方程 …… 62
第 27 课时 圆的标准方程 …… 62
第 28 课时 圆的一般方程 …… 64
4.2 直线、圆的位置关系 …… 66
第 29 课时 直线与圆的位置关系 …… 66
第 30 课时 圆与圆的位置关系 …… 67
第 31 课时 直线与圆的方程的应用 …… 68
4.3 空间直角坐标系 …… 70
第 32 课时 空间直角坐标系 …… 70
第 33 课时 空间两点间的距离公式 …… 72
素养提升 …… 74

第二部分 阶段检测

阶段质量测试卷(一)(第一章 空间几何体) …… 77
阶段质量测试卷(二)(第二章 点、直线、平面之间的位置关系) …… 81
阶段质量测试卷(三)(第三章 直线与方程) …… 85
阶段质量测试卷(四)(第四章 圆与方程) …… 89
模块综合质量测试卷(一) …… 93
模块综合质量测试卷(二) …… 97

第三部分 答案与解析

答案与解析 …… 102～148

提示:全书包括课时作业、阶段检测、答案与解析三部分,共计 152 页。

(根据教师教学情况不同,课时作业部分可在书中作答,也可撕下使用。)

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

第一章 空间几何体

1.1 空间几何体的结构

第1课时 柱、锥、台、球的结构特征(1)

掌握几个要点

1. 牢记三个定义：在理解的基础上，要牢记棱柱、棱锥、棱台的定义，能够根据定义判断几何体的形状.
2. 理解一个关系图：棱柱、棱台、棱锥关系图.



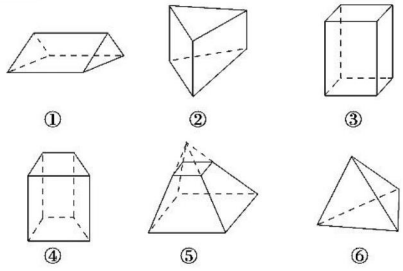
题点知识巩固

知识点一 棱柱的结构特征

1. 下列说法中正确的是 ( )
   A. 棱柱的面中，至少有两个面互相平行
   B. 棱柱中任意两个侧面都不可能互相平行
   C. 棱柱的侧棱就是棱柱的高
   D. 棱柱的侧面一定是平行四边形，但它的底面一定不是平行四边形
2. 下列说法正确的是 ( )
   A. 有两个面平行，其余各面都是四边形的几何体叫棱柱
   B. 有两个面平行，其余各面都是平行四边形的几何体叫棱柱
   C. 各侧面都是正方形的四棱柱一定是正方体
   D. 九棱柱有9条侧棱，9个侧面，侧面均为平行四边形
3. 下列命题中，正确的是 ( )
   A. 棱柱中所有的侧棱都相交于一点
   B. 棱柱中互相平行的两个面叫做棱柱的底面
   C. 棱柱的侧面是平行四边形，而底面不是平行四边形
   D. 棱柱的侧棱相等，侧面是平行四边形

知识点二 棱锥、棱台的结构特征

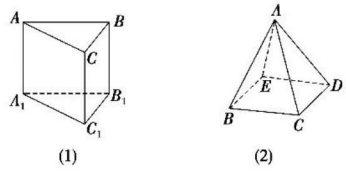
4. 下列说法中，正确的是 ( )
   ①棱锥的各个侧面都是三角形；
   ②有一个面是多边形，其余各面都是三角形，由这些面围成的几何体是棱锥；
   ③四面体的任何一个面都可以作为三棱锥的底面；
   ④棱锥的各侧棱长相等.
   A. ①② B. ①③
   C. ②③ D. ②④
5. 下列几何体中，_____是棱柱，_____是棱锥，_____是棱台(仅填相应序号).



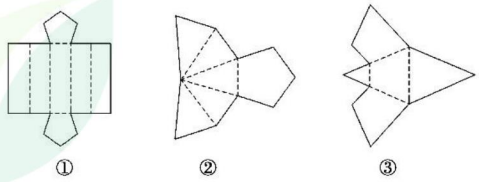
6. 下列关于棱锥、棱台的说法：
   ①棱台的侧面一定不会是平行四边形；②由四个平面围成的封闭图形只能是三棱锥；③棱锥被平面截成的两部分不可能都是棱锥.
   其中正确说法的序号是_____.

知识点三 空间几何体的平面展开图

7. 画出如图所示的几何体的表面展开图.



8. 如图是三个几何体的侧面展开图，请问各是什么几何体？



微信公众号 教辅资料站

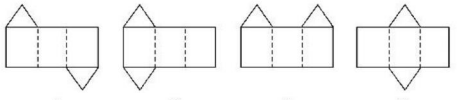
关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

9. 长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，$AB=4$，$BC=3$，$BB_1=5$，一只蚂蚁从点 A 出发沿表面爬行到点 C_1，求蚂蚁爬行的最短路线.

提能达标过关

一、选择题

1. 下列图形中，不是三棱柱的展开图的是（　　）



2. 有两个面平行的多面体不可能是（　　）
   A. 棱柱　　B. 棱锥
   C. 棱台　　D. 以上都错

3. 关于棱柱，下列说法正确的是（　　）
   A. 只有两个面平行
   B. 所有的棱都相等
   C. 所有的面都是平行四边形
   D. 两底面平行，侧棱也互相平行

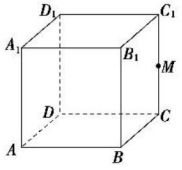
4. 正五棱柱中，不同在任何侧面且不同在任何底面的两顶点的连线称为它的对角线，那么一个正五棱柱对角线的条数共有（　　）
   A. 20　　B. 15
   C. 12　　D. 10

5. 下列命题中正确的是（　　）
   A. 用一个平面去截棱锥，棱锥底面和截面之间的部分是棱台
   B. 两个底面平行且相似，其余各面都是梯形的多面体是棱台
   C. 棱台的底面是两个相似的正方形
   D. 棱台的侧棱延长后必交于一点

二、填空题

6. 面数最少的棱柱为_____棱柱，共有_____个面围成.

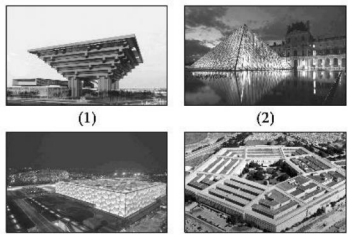
7. 如图，M 是棱长为 2 cm 的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱 CC_1 的中点，沿正方体表面从点 A 到点 M 的最短路程是_____cm.



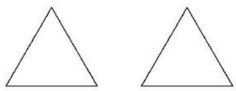
8. 侧棱垂直于底面的棱柱叫做直棱柱.
   侧棱不垂直于底面的棱柱叫做斜棱柱.
   底面是正多边形的直棱柱叫做正棱柱.
   底面是平行四边形的四棱柱叫做平行六面体.
   侧棱与底面垂直的平行六面体叫做直平行六面体.
   底面是矩形的直平行六面体叫做长方体.
   棱长都相等的长方体叫做正方体.
   请根据上述定义，回答下面的问题：
   (1)直四棱柱_____是长方体；
   (2)正四棱柱_____是正方体.（填“一定”“不一定”或“一定不”）

三、解答题

9. 观察下列四张图片，结合所学知识说出这四个建筑物主要的结构特征.



10. 给出两块正三角形纸片（如图所示），要求将其中一块剪拼成一个底面为正三角形的三棱锥模型，另一块剪拼成一个底面是正三角形的三棱柱模型，请设计一种剪拼方案，分别用虚线标示在图中，并作简要说明.



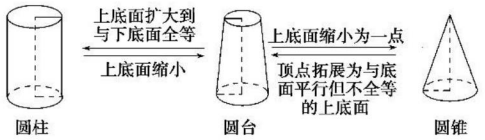
微信公众号
教辅资料站

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

第 2 课时　柱、锥、台、球的结构特征(2)、简单组合体的结构特征

掌握几个要点

1. 理解一个关系图：圆柱、圆锥、圆台的关系如图所示.



2. 区分两个概念：球面、球体的区别和联系

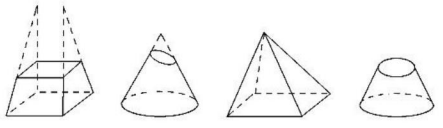
	区别	联系
球面	球的表面是球面，球面是旋转形成的曲面	球面是球体的表面
球体	球体是几何体，包括球面及所围的空间部分	

3. 关注三种思想：①处理台体问题常采用还台为锥的补体思想；②处理组合体问题常采用分割思想；③重视圆柱、圆锥、圆台的轴截面在解决几何量中的特殊作用，切实体会空间几何平面化的思想.

题点知识巩固

知识点一　旋转体的结构特征

1. 下列几何体是台体的是　　(　　)



2. 给出下列命题：

①圆柱的母线与它的轴可以不平行；②圆锥的顶点、底面圆的圆心与圆锥底面圆周上任意一点这三点的连线都可以构成直角三角形；③在圆台的上、下两底面圆周上各取一点，则这两点的连线是圆台的母线；④圆柱的任意两条母线所在的直线是互相平行的. 其中正确的是　　(　　)

A. ①②　　B. ②③

C. ①③　　D. ②④

3. 下列命题正确的是_____(只填序号).

①以直角三角形的一边所在直线为轴旋转一周所得的旋转体是圆锥；

②以直角梯形的一腰所在直线为轴旋转一周所得的旋转体是圆台；

③圆柱、圆锥、圆台的底面都是圆；

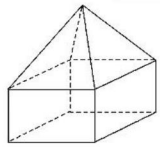
④以等腰三角形的底边上的高所在直线为旋转轴，其余各边旋转 180°形成的曲面围成的几何体是圆锥；

⑤球面上四个不同的点一定不在同一平面内；

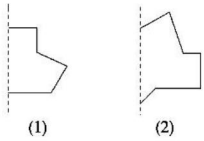
⑥球的半径是球面上任意一点和球心的连线段.

知识点二　简单组合体的结构特征

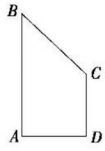
4. 如图所示的组合体的结构特征为_____.



5. 如图(1)(2)所示的图形绕虚线旋转一周后形成的几何体分别是由哪些简单几何体组成的？



6. 如图，将直角梯形 $ABCD$ 绕边 AB 所在的直线旋转一周，由此形成的几何体是由哪些简单几何体组成的？



知识点三　旋转体的有关计算

7. 若一个圆锥的轴截面是等边三角形，其面积为$\sqrt{3}$，则这个圆锥的母线长为_____.

8. 已知球的半径为 10 cm，若它的一个截面圆的面积为 36π cm^2，则球心与截面圆圆心的距离是_____ cm.

9. 用一个平行于圆锥底面的平面截这个圆锥，截得的圆台上、下底面的面积之比为 1∶16，截去的圆锥的母线长是 3 cm，求圆台的母线长.

微信公众号
教辅资料站

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

提能达标过关

一、选择题

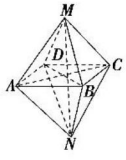
1. 下列命题中正确的是（　　）
①圆锥的轴截面是所有过顶点的截面中面积最大的一个；
②圆柱的所有平行于底面的截面都是圆；
③圆台的两个底面可以不平行.
A. ①②　　B. ②
C. ②③　　D. ①③

2. 将一个等腰梯形绕它的较长的底边所在的直线旋转一周，所得的几何体包括（　　）
A. 一个圆台、两个圆锥
B. 两个圆台、一个圆柱
C. 两个圆柱、一个圆台
D. 一个圆柱、两个圆锥

3. 以钝角三角形的较小边所在的直线为轴，其他两边旋转一周所得到的几何体是（　　）
A. 两个圆锥拼接而成的组合体
B. 一个圆台
C. 一个圆锥
D. 一个圆锥挖去一个同底的小圆锥

4. 下列叙述中正确的个数是（　　）
①以直角三角形的一边所在直线为轴旋转所得的旋转体是圆锥；
②以直角梯形的一腰所在直线为轴旋转所得的旋转体是圆台；
③圆柱、圆锥、圆台的底面都是圆面；
④用一个平面去截圆锥，得到一个圆锥和一个圆台.
A. 0　　B. 1
C. 2　　D. 3

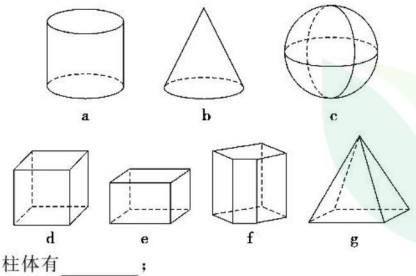
5. 如图所示的几何体，关于其结构特征，下列说法不正确的是（　　）



A. 该几何体是由两个同底的四棱锥组成的几何体
B. 该几何体有 12 条棱、6 个顶点
C. 该几何体有 8 个面，并且各面均为三角形
D. 该几何体有 9 个面，其中一个面是四边形，其余均为三角形

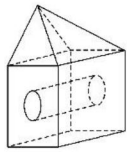
二、填空题

6. 下列 7 种几何体：

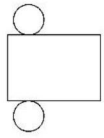


(1)柱体有_____；
(2)锥体有_____；
(3)球有_____；
(4)棱柱有_____；
(5)圆柱有_____；
(6)棱锥有_____；
(7)圆锥有_____.

7. 下面这个几何体的结构特征是_____.

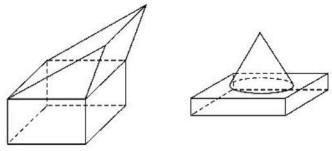


8. 如图是一个几何体的表面展成的平面图形，则这个几何体是_____.

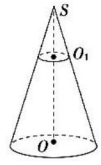


三、解答题

9. 指出如图(1)(2)所示的图形是由哪些简单几何体构成的.



10. 如图所示，用一个平行于圆锥 SO 底面的平面截这个圆锥，截得圆台上、下底面的半径分别为 2 cm 和 5 cm，圆台的母线长是 12 cm，求圆锥 SO 的母线长.



微信公众号
教辅资料站

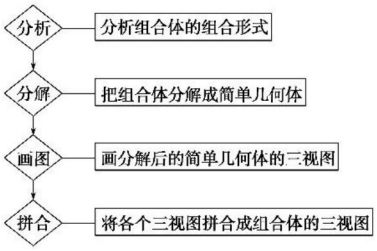
关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

1.2　空间几何体的三视图和直观图

第3课时　中心投影与平行投影、空间几何体的三视图

掌握几个要点

1. 明确一个要求：三视图的正视图、侧视图、俯视图是分别从几何体的正前方、正左方、正上方观察几何体画出的轮廓线，画几何体三视图的要求是正视图、俯视图长对正，正视图、侧视图高平齐，俯视图、侧视图宽相等，前后对应，画出的三视图要检验是否符合“长对正、高平齐、宽相等”的基本特征.
2. 掌握四个步骤：画组合体的三视图的步骤



3. 注意一个提醒：画几何体的三视图时，能看见的轮廓线和棱用实线表示，看不见的轮廓线和棱用虚线表示.

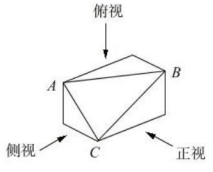
题点知识巩固

知识点一　中心投影与平行投影

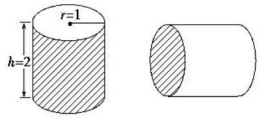
1. 中心投影的投影线（　　）
   A. 相互平行　　B. 交于一点
   C. 是异面直线　　D. 在同一平面内
2. 下列说法中：①平行投影的投影线互相平行，中心投影的投影线相交于一点；②空间图形经过中心投影后，直线还是直线，但平行线可能变成了相交的直线；③两条相交直线的平行投影是两条相交直线. 其中正确的个数为（　　）
   A. 0　　B. 1
   C. 2　　D. 3
3. 已知$\triangle ABC$，选定的投影面与$\triangle ABC$所在平面平行，则经过中心投影后所得的$\triangle A'B'C'$与$\triangle ABC$（　　）
   A. 全等　　B. 相似
   C. 不相似　　D. 以上都不对

知识点二　画空间几何体的三视图

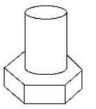
4. 如图所示是截去一角的长方体，画出它的三视图.



5. 如图是按不同方式放置的同一个圆柱，阴影面为正面，画出其三视图.

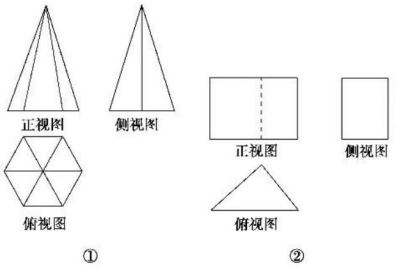


6. 螺栓是棱柱和圆柱构成的组合体，如图，画出它的三视图.

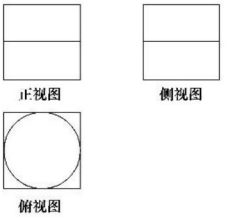


知识点三　由三视图联想实物图

7. 若一个几何体的正视图和侧视图都是等腰三角形，俯视图是带圆心的圆，则这个几何体可能是_____.
8. 根据下列图中所给出的几何体的三视图，试画出它们的形状.



9. 根据三视图（如图所示）想象物体原形，指出其结构特征并画出物体的实物草图.



微信公众号
教辅资料站

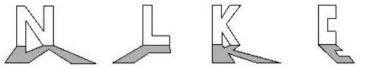
关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

提能达标过关

一、选择题

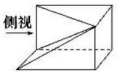
1. 下列说法正确的是（　　）
   A. 矩形的平行投影一定是矩形
   B. 梯形的平行投影一定是梯形
   C. 两条相交直线的平行投影可能平行
   D. 若一条线段的平行投影是一条线段，则中点的平行投影仍为这条线段投影的中点

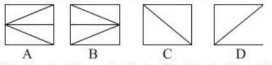
2. 四个直立在地面上的字母广告牌在不同情况下，在地面上的投影（阴影部分）效果如图，则在字母 L，K，C 的投影中，与字母 N 属同一种投影的有（　　）



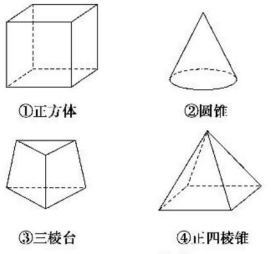
   A. L，K　　B. C
   C. K　　D. L，K，C

3. 将长方体截去一个四棱锥，得到的几何体如图所示，则该几何体的侧视图为（　　）



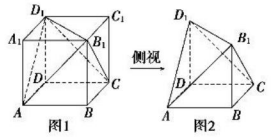


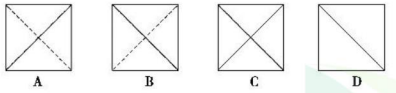
4. 如图所示，在这 4 个几何体各自的三视图中，有且仅有两个视图相同的是（　　）



   A. ①②　　B. ①③
   C. ①④　　D. ②④

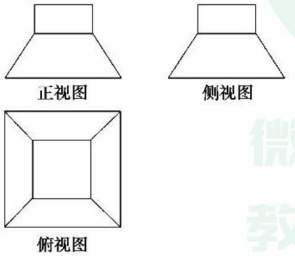
5. 将正方体（如图 1 所示）截去两个三棱锥，得到图 2 所示的几何体，则该几何体的侧视图为（　　）



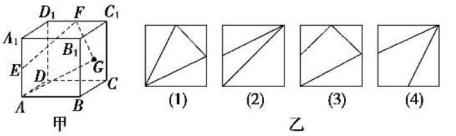


二、填空题

6. 若某几何体的三视图如图所示，则此几何体是由（简单几何体）_____与_____组成的.



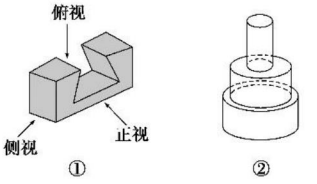
7. 如图甲所示，在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，E，F 分别是 AA_1，C_1D_1 的中点，G 是正方形 BCC_1B_1 的中心，则四边形 $AGFE$ 在该正方体的各个面上的投影可能是图乙中的_____.



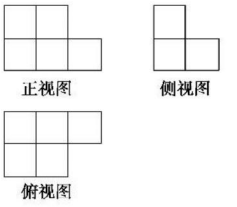
8. 两条平行线在一个平面内的正投影可能是_____.
   ①两条平行线；②两个点；③两条相交直线；④一条直线和直线外的一点；⑤一条直线.

三、解答题

9. 如图所示，画出下列组合体的三视图.



10. 某组合体的三视图如图所示，试画图说明此组合体的结构特征.



微信公众号
教辅资料站

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

第 4 课时　空间几何体的直观图

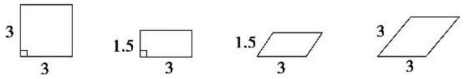
掌握几个要点

1. 掌握一种策略：画水平放置的平面图形的直观图，关键是确定直观图的顶点. 确定点的位置，可采用直角坐标系. 建立恰当的坐标系是迅速作出直观图的关键，常利用图形的对称性，并让顶点尽量多地落在坐标轴上或与坐标轴平行的直线上.
2. 熟记两个要点：用斜二测画法画图时要紧紧把握住“一斜”“二测”两点：(1)一斜：平面图形中互相垂直的 Ox，Oy 轴，在直观图中画成 $O'x'$，$O'y'$ 轴，使 $\angle x'O'y'=45°$ 或 $135°$. (2)二测：在直观图中平行于 x 轴的长度不变，平行于 y 轴的长度取一半，记为“横不变，纵折半”.

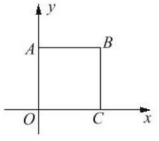
题点知识巩固

知识点一　平面图形的直观图

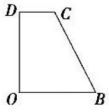
1. 利用斜二测画法画出边长为 3 cm 的正方形的直观图，正确的是图中的（　　）



2. 如图所示，为一个水平放置的正方形 $ABCO$，它在直角坐标系 xOy 中，点 B 的坐标为 $(2,2)$，则在用斜二测画法画出的正方形的直观图中，顶点 B' 到 x' 轴的距离为_____.

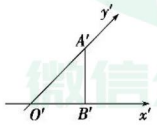


3. 画出如图水平放置的直角梯形的直观图.



知识点二　直观图的还原与计算

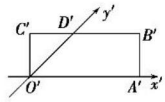
4. 如图所示，一个水平放置的三角形的斜二测直观图是等腰直角三角形 $A'B'O'$，若 $O'B'=1$，那么原三角形 ABO 的面积是（　　）



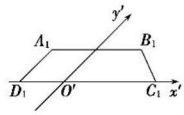
A. $\frac{1}{2}$　　B. $\frac{\sqrt{2}}{2}$

C. $\sqrt{2}$　　D. $2\sqrt{2}$

5. 如图所示，矩形 $O'A'B'C'$ 是水平放置的一个平面图形的直观图，其中 $O'A'=6$ cm，$C'D'=2$ cm，则原图形是_____.（填四边形的形状）

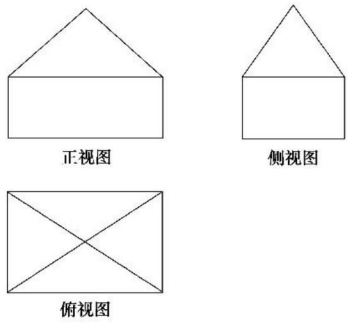


6. 如图所示，梯形 $A_1B_1C_1D_1$ 是一平面图形 $ABCD$ 的直观图. 若 $A_1D_1 \parallel O'y'$，$A_1B_1 \parallel C_1D_1$，$A_1B_1=\frac{2}{3}C_1D_1=2$，$A_1D_1=O'D_1=1$. 试画出原四边形的形状，并求出原图形的面积.



知识点三　空间几何体的直观图

7. 如图所示，已知几何体的三视图，用斜二测画法画出它的直观图.



8. 用斜二测画法画出六棱锥 $P-ABCDEF$ 的直观图，其中底面 $ABCDEF$ 为正六边形，点 P 在底面上的投影是正六边形的中心 O.（尺寸自定）

微信公众号
教辅资料站

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

提能达标过关

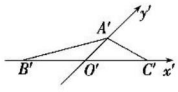
一、选择题

1. 根据斜二测画法的规则画直观图时，把 Ox，Oy，Oz 轴画成对应的 $O'x'$，$O'y'$，$O'z'$，则 $\angle x'O'y'$ 与 $\angle x'O'z'$ 的度数分别为（　　）

A. 90°，90°　　B. 45°，90°

C. 135°，90°　　D. 45°或 135°，90°

2. 水平放置的 $\triangle ABC$ 的直观图如图所示，其中 $B'O'=C'O'=1$，$A'O'=\frac{\sqrt{3}}{2}$，那么原 $\triangle ABC$ 是一个（　　）



A. 等边三角形

B. 直角三角形

C. 三边中只有两边相等的等腰三角形

D. 三边互不相等的三角形

3. 下列说法中正确的个数是（　　）

①相等的角在直观图中对应的角仍然相等；

②相等的线段在直观图中对应的线段仍然相等；

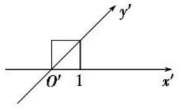
③互相垂直的线段在直观图中对应的线段仍然垂直；

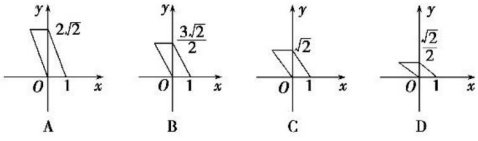
④线段的中点在直观图中仍然是线段的中点.

A. 1　　B. 2

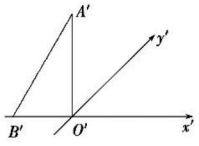
C. 3　　D. 4

4. 如图，用斜二测画法画一个水平放置的平面图形的直观图为一个正方形，则原来图形的形状是（　　）





5. 如图所示，$\triangle A'O'B'$ 表示水平放置的 $\triangle AOB$ 的直观图，B' 在 x' 轴上，$A'O'$ 与 x' 轴垂直，且 $A'O'=2$，则 $\triangle AOB$ 的边 OB 上的高为（　　）

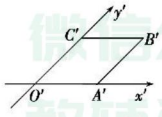


A. 2　　B. 4

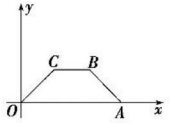
C. $2\sqrt{2}$　　D. $4\sqrt{2}$

二、填空题

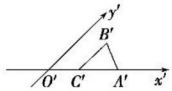
6. 在如图所示的直观图中，四边形 $O'A'B'C'$ 为菱形且边长为 2 cm，则在坐标系 xOy 中原四边形 $OABC$ 为_____（填形状），面积为_____ cm^2.



7. 如图所示，四边形 $OABC$ 是上底为 2，下底为 6，底角为 45°的等腰梯形，用斜二测画法画出这个梯形的直观图 $O'A'B'C'$，则直观图中梯形的高为_____.

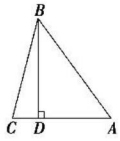


8. 水平放置的 $\triangle ABC$ 的斜二测直观图如图所示，已知 $B'C'=4$，$A'C'=3$，$B'C'\parallel y'$ 轴，则 $\triangle ABC$ 中 AB 边上的中线的长度为_____.

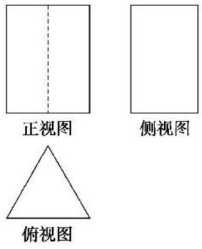


三、解答题

9. 如图所示，在 $\triangle ABC$ 中，$AC=12$ cm，AC 边上的高 $BD=12$ cm，求其水平放置的直观图的面积.



10. 由下列几何体的三视图画出直观图.



微信公众号
教辅资料站

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

1.3　空间几何体的表面积与体积

第5课时　柱体、锥体、台体的表面积

掌握几个要点

熟记两类面积公式：棱柱、棱锥、棱台的侧面积与表面积

(1)将棱柱、棱锥、棱台的侧面展开，其侧面展开图分别是由若干个平行四边形、若干个三角形、若干个梯形组成的平面图形，侧面展开图的面积就是棱柱、棱锥、棱台的侧面积.

(2)棱柱、棱锥、棱台的表面积等于它们的侧面积与各自的底面积的和.

题点知识巩固

知识点一　柱体的表面积

1. 圆柱的侧面展开图是邻边长分别为 6π 和 4π 的矩形，则圆柱的表面积为 (　　)

A. $6\pi(4\pi+3)$

B. $8\pi(3\pi+1)$

C. $6\pi(4\pi+3)$或 $8\pi(3\pi+1)$

D. $6\pi(4\pi+1)$或 $8\pi(3\pi+2)$

2. 一个圆柱的侧面展开图是一个正方形，则这个圆柱的表面积与侧面积的比是 (　　)

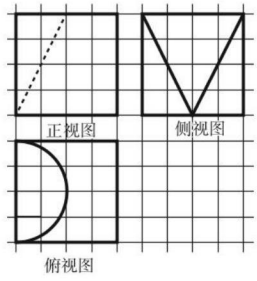
A. $\frac{1+2\pi}{2\pi}$　　B. $\frac{1+2\pi}{4\pi}$

C. $\frac{1+2\pi}{\pi}$　　D. $\frac{1+4\pi}{2\pi}$

3. 现有一个底面是菱形的直四棱柱，它的体对角线长为 9 和 15，高是 5，求该直四棱柱的侧面积.

知识点二　锥体的表面积

4. **(2019·辽宁凌源期末)** 如图所示，网格纸上小正方形的边长为 1，图中画出的是某几何体的三视图，则该几何体的表面积为 (　　)



A. $88+(2\sqrt{5}-2)\pi$　　B. $96+(2\sqrt{5}-4)\pi$

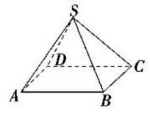
C. $88+(4\sqrt{5}-4)\pi$　　D. $88+(2\sqrt{5}-4)\pi$

5. 若正方体的棱长为 $\sqrt{2}$，则以该正方体各个面的中心为顶点的凸多面体的表面积为 (　　)

A. $\frac{\sqrt{2}}{3}$　　B. $2\sqrt{3}$

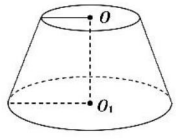
C. $\sqrt{3}$　　D. $\frac{\sqrt{2}}{6}$

6. 已知棱长均为 5，底面为正方形的四棱锥 $S-ABCD$，如图，求它的侧面积、表面积.



知识点三　台体的表面积

7. 如图所示，圆台的上、下底半径和高的比为 1∶4∶4，母线长为 10，则圆台的侧面积为 (　　)



A. 81π　　B. 100π

C. 14π　　D. 169π

微信公众号
教辅资料站

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

8. 一个四棱台的上、下底面都为正方形，且上底面的中心在下底面的投影为下底面中心（正四棱台），两底面边长分别为 1，2，侧面积等于两个底面积之和，则这个棱台的高为（　　）

A. $\frac{2}{3}$　　B. 2

C. $\frac{3}{2}$　　D. $\frac{1}{2}$

9. 圆台的母线长为 8 cm，母线与底面成 60°角，轴截面的两条对角线互相垂直，求圆台的表面积.

提能达标过关

一、选择题

1. 轴截面是正三角形的圆锥称作等边圆锥，则等边圆锥的侧面积是底面积的（　　）

A. 4 倍　　B. 3 倍

C. $\sqrt{2}$倍　　D. 2 倍

2. 长方体的高为 1，底面积为 2，垂直于底的对角面的面积是 $\sqrt{5}$，则长方体的侧面积等于（　　）

A. $2\sqrt{7}$　　B. $4\sqrt{3}$

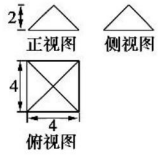
C. 6　　D. 3

3. 将一个棱长为 a 的正方体，切成 27 个全等的小正方体，则表面积增加了（　　）

A. $6a^2$　　B. $12a^2$

C. $18a^2$　　D. $24a^2$

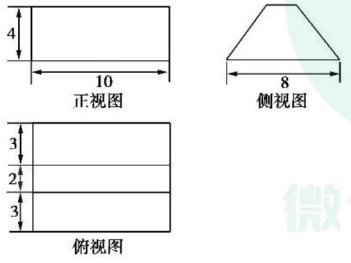
4. 某四棱锥的三视图如图所示，该四棱锥的表面积是（　　）



A. 32　　B. $16+16\sqrt{2}$

C. 48　　D. $16+32\sqrt{2}$

5. 某几何体的三视图如图所示，则该几何体的表面积为（　　）



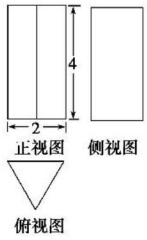
A. 180　　B. 200

C. 220　　D. 240

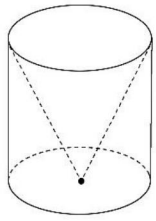
二、填空题

6. 已知圆柱 OO'的母线 $l=4$ cm，全面积为 42π cm^2，则圆柱 OO'的底面半径 $r=$_____ cm.

7. 一个几何体的三视图如图所示，其中俯视图为正三角形，则该几何体的表面积为_____.



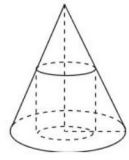
8. 如图所示，一圆柱内挖去一个圆锥，圆锥的顶点是圆柱底面的圆心，圆锥的底面是圆柱的另一个底面. 圆柱的母线长为 6，底面半径为 2，则该组合体的表面积等于_____.



三、解答题

9. 已知圆台的上、下底面半径分别是 2，5，且侧面积等于两底面面积之和，求该圆台的母线长.

10. 如图，在底面半径为 2，母线长为 4 的圆锥中内接一个高为$\sqrt{3}$的圆柱，求圆柱的表面积.



微信公众号
教辅资料站

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

第 6 课时　柱体、锥体、台体的体积

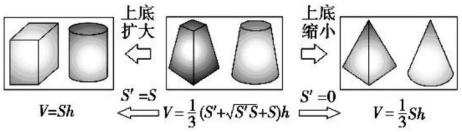
掌握几个要点

关注四点说明：对柱体、锥体、台体的体积公式的四点说明

(1)等底、等高的两个柱体的体积相同.

(2)等底、等高的锥体和柱体的体积之间的关系可以通过实验得出，等底、等高的柱体的体积是锥体的体积的 3 倍.

(3)柱体、锥体、台体的体积公式之间的关系



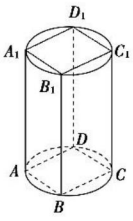
(4)求台体的体积转化为求锥体的体积. 根据台体的定义进行“补形”，还原为锥体，采用“大锥体”减去“小锥体”的方法求台体的体积.

题点知识巩固

知识点一　柱体的体积

1. 十棱柱的底面积为$\sqrt{3}$，高为$2\sqrt{3}$，则其体积等于_____.

2. 如图所示，圆柱有一个内接长方体 AC_1，长方体的体对角线长是 $10\sqrt{2}$ cm，圆柱的侧面展开图为矩形，此矩形的面积是 100π cm^2，求圆柱的体积.



知识点二　锥体的体积

3. 圆锥的轴截面是等腰直角三角形，侧面积是 $16\sqrt{2}\pi$，则圆锥的体积是　(　　)

A. $\frac{128\pi}{3}$　　B. $\frac{64\pi}{3}$

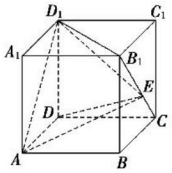
C. 64π　　D. $128\sqrt{2}\pi$

4. 三棱台 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，$AB:A_1B_1=1:2$，则三棱锥 A_1-ABC，$B-A_1B_1C$，$C-A_1B_1C_1$ 的体积之比为(　　)

A. 1∶1∶1　　B. 1∶1∶2

C. 1∶2∶4　　D. 1∶4∶4

5. 如图所示，正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 1，E 为线段 B_1C 上的一点，则三棱锥 $A-DED_1$ 的体积为_____.



6. 在 Rt△ABC 中，$AB=3$，$BC=4$，$\angle ABC=90°$，把△ABC 绕其斜边 AC 所在的直线旋转一周后，所形成的几何体的体积是多少？

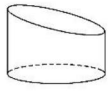
知识点三　台体的体积

7. 圆台 OO' 的上、下底面半径分别为 1 和 2，高为 6，则其体积等于_____.

8. 已知某圆台的上、下底面面积分别是 π，4π，侧面积是 6π，则这个圆台的体积是_____.

知识点四　组合体的体积

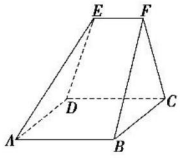
9. 如图，一个底面半径为 2 的圆柱被一平面所截，截得的几何体的最短和最长母线长分别为 2 和 3，则该几何体的体积为　(　　)



A. 5π　　B. 6π

C. 20π　　D. 10π

10. 如图，在多面体 $ABCDEF$ 中，已知平面 $ABCD$ 是边长为 4 的正方形，$EF/\!/AB$，$EF=2$，EF 上任意一点到平面 $ABCD$ 的距离均为 3，求该多面体的体积.



微信公众号
教辅资料站

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

提能达标过关

一、选择题

1. 长方体三个面的面积分别为 2、6 和 9，则长方体的体积是（　　）

A. $6\sqrt{3}$　　B. $3\sqrt{6}$

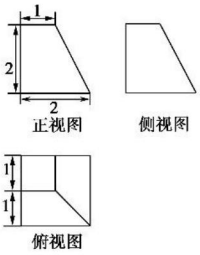
C. 11　　D. 12

2. 圆台的体积为 7π，上、下底面的半径分别为 1 和 2，则圆台的高为（　　）

A. 3　　B. 4

C. 5　　D. 6

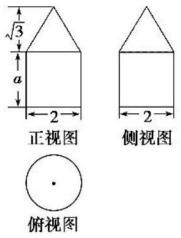
3. 某四棱台的三视图如图所示，则该四棱台的体积是（　　）



A. 4　　B. $\frac{14}{3}$

C. $\frac{16}{3}$　　D. 6

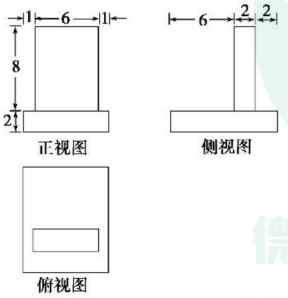
4. 如图是一个几何体的三视图，若该几何体的表面积为 9π，则该几何体的正视图中实数 a 的值为（　　）



A. 1　　B. 2

C. 3　　D. 4

5. 一个几何体的三视图如图所示，则该几何体的表面积为（　　）



A. 372　　B. 360

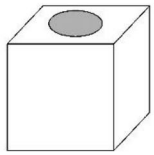
C. 292　　D. 280

二、填空题

6. 已知圆锥 SO 的高为 4，体积为 4π，则底面半径 $r=$_____.

7. 若圆锥的侧面展开图为一个半径为 2 的半圆，则圆锥的体积是_____.

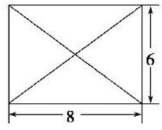
8. 如图所示，在棱长为 4 的正方体上底面中心位置打一个直径为 2、深为 4 的圆柱形孔，则打孔后的几何体的表面积为_____.



三、解答题

9. 已知圆台的高为 3，在轴截面中，母线 AA_1 与底面圆直径 AB 的夹角为 60°，轴截面中的一条对角线垂直于腰，求圆台的体积.

10. 已知某几何体的俯视图是如图所示的矩形，正视图是一个底边长为 8、高为 4 的等腰三角形，侧视图是一个底边长为 6、高为 4 的等腰三角形.



(1)求该几何体的体积 V；

(2)求该几何体的侧面积 S.

微信公众号
教辅资料站

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

第 7 课时　球的体积和表面积

掌握几个要点

1. 熟知一个变量：球的表面积、体积与半径之间的函数关系.

从公式看，球的表面积和体积的大小，只与球的半径相关，给定 R 都有唯一确定的 S 和 V 与之对应，故表面积和体积是关于 R 的函数.

2. 弄清三个特征：用一个平面截球所得截面的特征：(1)用一个平面去截球，截面是圆面.(2)球心和截面圆心的连线垂直于截面.(3)球心到截面的距离 d 与球的半径 R 以及截面的半径 r，有下面的关系：$r=\sqrt{R^2-d^2}$.

题点知识巩固

知识点一　球的体积和表面积

1. 若球的体积与其表面积数值相等，则球的半径等于　(　　)

A. $\frac{1}{2}$　　B. 1

C. 2　　D. 3

2. 一个球的表面积是 16π，则它的体积是　(　　)

A. 64π　　B. $\frac{64\pi}{3}$

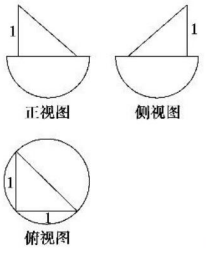
C. 32π　　D. $\frac{32\pi}{3}$

3. (1)已知球的表面积为 64π，求它的体积；

(2)已知球的体积为 $\frac{500}{3}\pi$，求它的表面积.

知识点二　由三视图求球的体积和表面积

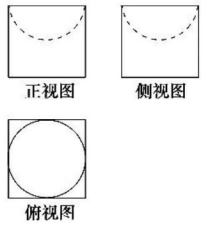
4. 已知某几何体的三视图如图所示，其中，正视图、侧视图均是由三角形与半圆构成，俯视图由圆与内接三角形构成，根据图中的数据可得此几何体的体积为　(　　)



A. $\frac{\sqrt{2}\pi}{3}+\frac{1}{2}$　　B. $\frac{4\pi}{3}+\frac{1}{6}$

C. $\frac{\sqrt{2}\pi}{6}+\frac{1}{6}$　　D. $\frac{2\pi}{3}+\frac{1}{2}$

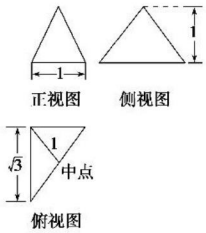
5. 如图是一个无盖器皿的三视图，正视图、侧视图和俯视图中的正方形边长为 2，正视图、侧视图中的虚线都是半圆，则该器皿的表面积是　(　　)



A. $\pi+24$　　B. $\pi+20$

C. $2\pi+24$　　D. $2\pi+20$

6. 已知三棱锥的三视图如图所示，则它的外接球的表面积为　(　　)



A. 4π　　B. 8π

C. 12π　　D. 16π

知识点三　球的截面及切、接问题

7. 用与球心距离为 2 的平面去截球，所得的截面面积为 π，则球的体积为　(　　)

A. $\frac{20\pi}{3}$　　B. $\frac{20\sqrt{5}\pi}{3}$

C. $20\sqrt{5}\pi$　　D. $\frac{100\pi}{3}$

8. 将一铜球放入底面半径为 16 cm 的圆柱形玻璃容器中，水面升高 9 cm，则这个铜球的半径为_____cm.

9. 在球面上有四个点 P、A、B、C，如果 PA、PB、PC 两两垂直且 $PA=PB=PC=a$，求这个球的体积.

微信公众号
教辅资料站

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

提能达标过关

一、选择题

1. 两个球的体积之比为 8∶27，那么这两个球的表面积之比为（　　）

A. 2∶3　　B. 4∶9

C. $\sqrt{2}:\sqrt{3}$　　D. $\sqrt{8}:\sqrt{27}$

2. 用与球心距离为 1 的平面去截球，所得截面圆的面积为 π，则球的表面积为（　　）

A. $\frac{8\pi}{3}$　　B. $\frac{32\pi}{3}$

C. 8π　　D. $\frac{8\sqrt{2}\pi}{3}$

3. 设长方体的长、宽、高分别为 $2a$、a、a，其顶点都在一个球面上，则该球的表面积为（　　）

A. $3\pi a^2$　　B. $6\pi a^2$

C. $12\pi a^2$　　D. $24\pi a^2$

4. 如果一个球的外切圆锥的高是这个球的半径的 3 倍，则圆锥的侧面面积和球的表面积之比为（　　）

A. 4∶3　　B. 3∶1

C. 3∶2　　D. 9∶4

5. 平面 α 截球 O 的球面所得圆的半径为 1，球心 O 到平面 α 的距离为 $\sqrt{2}$，则此球的体积为（　　）

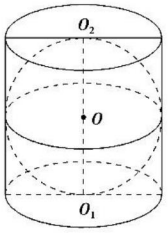
A. $\sqrt{6}\pi$　　B. $4\sqrt{3}\pi$

C. $4\sqrt{6}\pi$　　D. $6\sqrt{3}\pi$

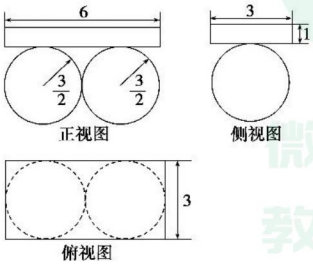
二、填空题

6. 圆柱形容器的内壁底半径是 10 cm，有一个实心铁球浸没于容器的水中，若取出这个铁球，测得容器的水面下降了 $\frac{5}{3}$ cm，则这个铁球的表面积为_____ cm^2.

7. **(2017·江苏卷)** 如图，在圆柱 O_1O_2 内有一个球 O，该球与圆柱的上、下底面及母线均相切，记圆柱 O_1O_2 的体积为 V_1，球 O 的体积为 V_2，则 $\frac{V_1}{V_2}$ 的值是_____.

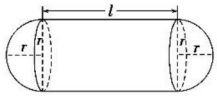


8. 一个几何体的三视图如图所示(单位：m)，则该几何体的体积为_____ m^3.



三、解答题

9. 某组合体的直观图如图所示，它的中间为圆柱形，左右两端均为半球形，若图中 $r=1$，$l=3$，试求该组合体的表面积和体积.



10. 用两个平行平面去截半径为 R 的球面，两个截面圆的半径为 $r_1=24$ cm，$r_2=15$ cm，两截面间的距离为 $d=27$ cm，求球的表面积.

微信公众号
教辅资料站

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

SY 素养提升 SUYANGTISHENG 重点深化理解　素养培优提能

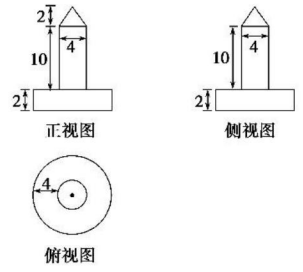
重点深化理解

一、关注空间几何体的三类问题

1. 三视图问题

解决识图问题，要根据三视图的画法及三视图的特点；解决计算问题，先将三视图还原成直观图，然后再根据有关公式计算.

【例 1】 已知一个组合体的三视图如图所示，请根据具体数据来求此几何体的体积(单位：cm).



［解］ 该几何体是由一个圆锥和两个圆柱组合而成的组合体.

由条件中尺寸可知

$V_{圆锥}=\frac{1}{3}Sh=\frac{1}{3}\pi\times2^2\times2=\frac{8}{3}\pi(cm^3)$.

$V_{圆柱中}=Sh=\pi\times2^2\times10=40\pi(cm^3)$，

$V_{圆柱下}=Sh=\pi\times6^2\times2=72\pi(cm^3)$.

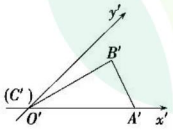
∴此组合体的体积 $V=V_{圆锥}+V_{圆柱中}+V_{圆柱下}=\frac{8}{3}\pi+40\pi+72\pi=\frac{344}{3}\pi(cm^3)$.

【点评】 先将三视图转化为直观图是解决问题的关键.

2. 直观图问题

由直观图还原为平面图形的关键是找与 x' 轴、y' 轴平行的直线或线段，且平行于 x' 轴的线段还原时长度不变，平行于 y' 轴的线段还原时放大为直观图中相应线段长的 2 倍，由此确定图形的各个顶点，顺次连接即可.

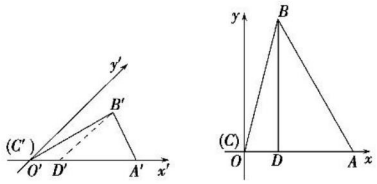
【例 2】 如图所示，$\triangle A'B'C'$ 是水平放置的平面图形的斜二测直观图，将其恢复成原图形.



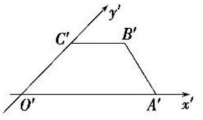
［解］ ①画直角坐标系 xOy，在 x 轴上取 $OA=O'A'$，即 $CA=C'A'$.

②过 B' 作 $B'D'\parallel y'$ 轴，交 x' 轴于 D'，在 x 上取 $OD=O'D'$，过 D 作 $DB\parallel y$ 轴，并使 $DB=2D'B'$；

③连接 AB，BC，$\triangle ABC$ 即为 $\triangle A'B'C'$ 原来的图形，如图.

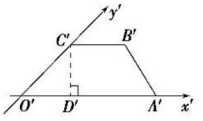


【例 3】 如图，四边形 $O'A'B'C'$ 是梯形 $OABC$ 的直观图，其直观图面积为 S，求梯形 $OABC$ 的面积 S'.



［解］ 设 $O'C'=h$，

则原梯形是一个直角梯形且高为 $2h$，$C'B'=CB$，$O'A'=OA$. 过 C' 作 $C'D'\perp O'A'$ 于 D'，则 $C'D'=\frac{\sqrt{2}}{2}h$.



由题意知 $\frac{1}{2}C'D'\cdot(C'B'+O'A')=S$，即 $\frac{\sqrt{2}}{4}h(C'B'+O'A')=S$.

原直角梯形面积为

$S'=\frac{1}{2}\cdot2h(CB+OA)=h(C'B'+O'A')=\frac{4S}{\sqrt{2}}=2\sqrt{2}S$.

即梯形 $OABC$ 的面积为 $2\sqrt{2}S$.

【点评】 解决问题时，可以利用直观图面积是原图形面积的 $\frac{\sqrt{2}}{4}$ 倍求解.

3. 空间几何体表面上的最短距离问题

一般地，多面体或旋转体绕侧面或表面最短距离的问题，除球外，基本都是通过展开图来解决，关键是找准剪开的线，准确用展开图中的某条线段来表示这个最短距离，另外这里的所谓最短距离，实质是沿多面体或旋转体侧(表)面的最短路径.

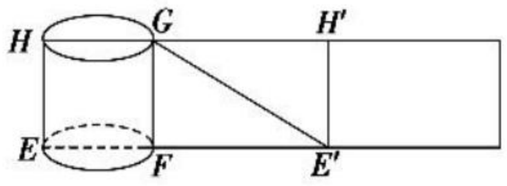
【例 4】 边长为 5 cm 的正方形 $EFGH$ 是圆柱的轴截面，则从 E 点沿圆柱的侧面到相对顶点 G 的最短距离是 (　　)

A. 10 cm　　B. $5\sqrt{2}$ cm

C. $5\sqrt{\pi^2+1}$ cm　　D. $\frac{5}{2}\sqrt{\pi^2+4}$ cm

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

［解析］　圆柱的侧面展开图如图所示，展开后 $E'F=\frac{1}{2}\cdot 2\pi\cdot\frac{5}{2}=\frac{5}{2}\pi(\mathrm{cm})$，$\therefore E'G=\sqrt{5^2+\left(\frac{5}{2}\pi\right)^2}=\frac{5}{2}\sqrt{\pi^2+4}(\mathrm{cm})$，即为所求最短距离.



［答案］　D

【点评】　利用展开图是解决空间几何体中最值问题一种常用的手段。

二、空间几何体的体积与表面积求解策略

几何体的表面积及体积的计算是现实生活中经常能够遇到的问题，在计算中应注意各数量之间的关系及各元素之间的位置关系，特别是特殊的柱、锥、台，要注意其中矩形、梯形及直角三角形等重要的平面图形的作用.

1. 公式法

根据题意直接套用表面积或体积公式求解.

【例 5】　已知轴截面是正方形的圆柱的高与球的直径相等. 求圆柱的表面积与球的表面积之比.

［解］　设球的半径为 R，由题意得圆柱的底面半径为 R，高为 $2R$.

$\therefore S_{圆柱表}=2\pi R(2R)+2\pi R^2=6\pi R^2$，$S_{球}=4\pi R^2$，

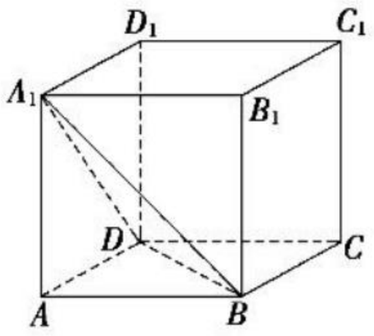
$\frac{S_{圆柱表}}{S_{球}}=\frac{6\pi R^2}{4\pi R^2}=\frac{3}{2}$，

$\therefore$ 圆柱的表面积与球的表面积之比为 3∶2.

2. 等体积变换法

等体积变换法的思想是从不同的角度看待原几何体，通过改变顶点和底面，利用体积不变的原理来求原几何体的体积.

【例 6】　如图，在棱长为 a 的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，求 A 到平面 A_1BD 的距离 d.



［解］　在三棱锥 A_1-ABD 中，$AA_1\perp$ 平面 ABD，$AB=AD=AA_1=a$，$A_1B=BD=A_1D=\sqrt{2}a$，

$\because V_{A_1-ABD}=V_{A-A_1BD}$，

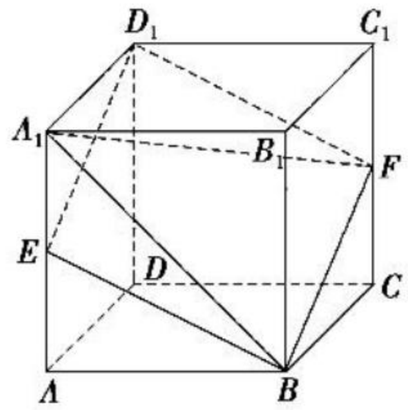
$\therefore\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}a^2\cdot a=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times\sqrt{2}a\times\frac{\sqrt{3}}{2}\times\sqrt{2}a\cdot d$.

$\therefore d=\frac{\sqrt{3}}{3}a$. $\therefore A$ 到平面 A_1BD 的距离为 $\frac{\sqrt{3}}{3}a$.

3. 割补法求体积

割补法的思想是通过分割或补形，将原几何体分割成或补成较易计算体积的几何体，从而求出原几何体的体积.

【例 7】　如图所示，已知 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 是棱长为 a 的正方体，E,F 分别为 AA_1,CC_1 的中点，求四棱锥 A_1-EBFD_1 的体积.



［解］　因为 $EB=BF=FD_1=D_1E=\sqrt{a^2+\left(\frac{a}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{5}}{2}a$，$D_1F/\!/EB$，

所以四边形 $EBFD_1$ 是菱形.

连接 EF，则 $\triangle EFB\cong\triangle EFD_1$.

易知三棱锥 A_1-EFB 与三棱锥 A_1-EFD_1 的高相等，

故 $V_{A_1-EBFD_1}=2V_{A_1-EFB}=2V_{F-EBA_1}$.

又因为 $S_{\triangle EBA_1}=\frac{1}{2}EA_1\cdot AB=\frac{1}{4}a^2$，

则 $V_{F-EBA_1}=\frac{1}{12}a^3$，

所以 $V_{A_1-EBFD_1}=2V_{A_1-EFB}=2V_{F-EBA_1}=\frac{1}{6}a^3$.

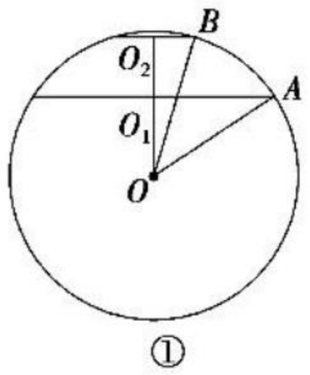
三、有关球的问题

1. 球的截面问题

设球的截面圆上一点 A，球心为 O，截面圆心为 O_1，则 $\triangle AO_1O$ 是以 O_1 为直角顶点的直角三角形，解答球的截面问题时，常用该直角三角形求解，并常用过球心和截面圆心的轴截面进行求解.

【例 8】　一个球内有相距 9 cm 的两个平行截面，它们的面积分别为 $49\pi\ \mathrm{cm}^2$ 和 $400\pi\ \mathrm{cm}^2$，求球的表面积.

［解］　当截面在球心的同侧时，如图①所示为球的轴截面，由球的截面性质知 $AO_1/\!/BO_2$，且 O_1,O_2 为两截面圆的圆心，则 $OO_1\perp AO_1$，$OO_2\perp BO_2$.



①

设球的半径为 R，

$\because\pi\cdot O_2B^2=49\pi$，$\therefore O_2B=7$ cm.

同理，得 $O_1A=20$ cm.

设 $OO_1=x$ cm，则 $OO_2=(x+9)$cm.

在 $\mathrm{Rt}\triangle O_1OA$ 中，$R^2=x^2+20^2$，

在 $\mathrm{Rt}\triangle OO_2B$ 中，$R^2=7^2+(x+9)^2$，

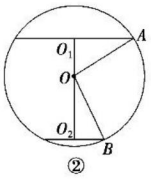
联立可得 $x=15$，$R=25$.

$\therefore S_{球}=4\pi R^2=2\ 500\pi(\mathrm{cm}^2)$，

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

故球的表面积为 2 500π cm².

当截面在球心的两侧时，如图②所示为球的轴截面，由球的截面性质知，$O_1A \parallel O_2B$，且 O_1，O_2 分别为两截面圆的圆心，则 $OO_1 \perp O_1A$，$OO_2 \perp O_2B$.



②

设球的半径为 R，

∵π·O_2B^2=49π，∴O_2B=7 cm.

∵π·O_1A^2=400π，∴O_1A=20 cm.

设 $O_1O=x$ cm，则 $OO_2=(9-x)$cm.

在 Rt△OO_1A 中，$R^2=x^2+400$.

在 Rt△OO_2B 中，$R^2=(9-x)^2+49$.

∴$x^2+400=(9-x)^2+49$，解得 $x=-15$，不合题意，舍去.

综上所述，球的表面积为 2 500π cm².

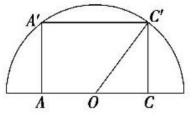
2. 外接球、内切球问题

处理有关几何体外接球或内切球的相关问题时，要注意球心的位置与几何体的关系，一般情况下，由于球的对称性，球心总在特殊位置，比如中心、对角线的中点等. 解决此类问题的实质就是根据几何体的相关数据求球的直径或半径，关键是根据“切点”和“接点”，作出轴截面图，把空间问题转化为平面问题来计算.

【例 9】 在半球内有一个内接正方体，试求这个半球的体积与正方体的体积之比.

［**解**］ 作正方体对角面的截面，如图所示，设半球的半径为 R，正方体的棱长为 a，

则 $CC'=a$，$OC=\frac{\sqrt{2}a}{2}$.



在 Rt△$C'CO$ 中，由勾股定理，得 $CC'^2+OC^2=OC'^2$，

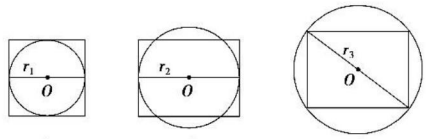
即 $a^2+\left(\frac{\sqrt{2}a}{2}\right)^2=R^2$，∴$R=\frac{\sqrt{6}}{2}a$.

从而 $V_{半球}=\frac{2}{3}\pi R^3=\frac{2}{3}\pi\left(\frac{\sqrt{6}}{2}a\right)^3=\frac{\sqrt{6}}{2}\pi a^3$，$V_{正方体}=a^3$.

因此 $V_{半球}:V_{正方体}=\frac{\sqrt{6}}{2}\pi a^3:a^3=\sqrt{6}\pi:2$.

【例 10】 有三个球，第一个球内切于正方体，第二个球与这个正方体各条棱相切，第三个球过这个正方体的各个顶点，求这三个球的表面积之比.

［**解**］ 设正方体的棱长为 a，这三个球的半径分别为 r_1，r_2，r_3，球的表面积分别为 S_1，S_2，S_3. 作出截面图，分别求出三个球的半径.



①　②　③

正方体的内切球球心是正方体的中心，切点是六个面的中心，经过四个切点及球心作截面，如图①所示，有 $2r_1=a$，∴$r_1=\frac{a}{2}$，∴$S_1=4\pi r_1^2=\pi a^2$.

球与正方体的各棱的切点为每条棱的中点，过球心作正方体的对角面得截面，如图②所示，有 $2r_2=\sqrt{2}a$，∴$r_2=\frac{\sqrt{2}}{2}a$，∴$S_2=4\pi r_2^2=2\pi a^2$.

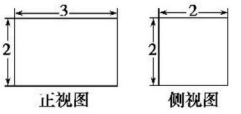
正方体的各个顶点在球面上，过球心作正方体的对角面得截面，如图③所示，有 $2r_3=\sqrt{3}a$，∴$r_3=\frac{\sqrt{3}}{2}a$，∴$S_3=4\pi r_3^2=3\pi a^2$.

综上可得，$S_1:S_2:S_3=1:2:3$.

素养培优提能

一、选择题

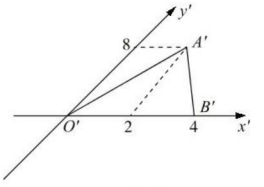
1. 一个简单几何体的正视图、侧视图如图所示，则其俯视图不可能为：①长方形；②正方形；③圆. 其中正确的是　（　）



A. ①②　　B. ②③

C. ①③　　D. ①②③

2. 如图是△AOB 用斜二测画法画出的直观图，则△AOB 的面积为　（　）



A. 16　　B. 32

C. 48　　D. 64

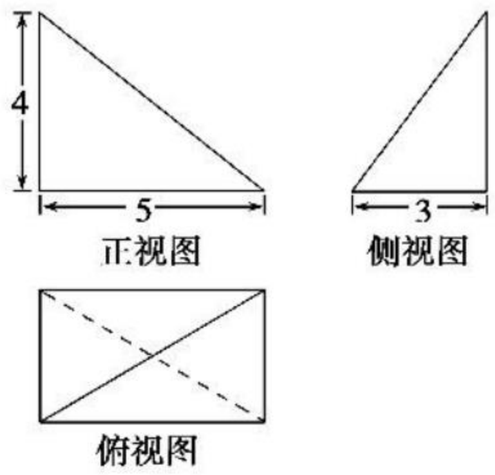
3. 已知圆柱的侧面展开图是边长分别为 $2a$、a 的矩形，则该圆柱的体积是　（　）

A. $\frac{a^3}{2\pi}$或$\frac{a^3}{\pi}$　　B. $\frac{a^3}{2\pi}$

C. $\frac{a^3}{\pi}$　　D. $\frac{a^3}{\pi}$或$\frac{2a^3}{\pi}$

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

4. 某三棱锥的三视图如图所示，则该三棱锥的体积为（　　）



A. 60　　B. 30

C. 20　　D. 10

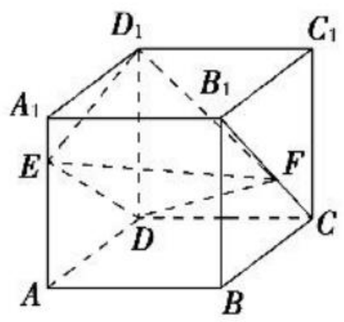
5. 底面半径为$\sqrt{3}$，母线长为 2 的圆锥的外接球 O 的表面积为（　　）

A. 6π　　B. 12π

C. 8π　　D. 16π

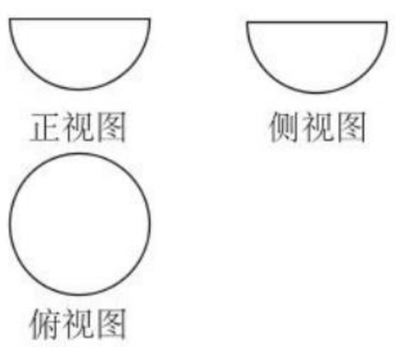
二、填空题

6. 如图，正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 1，E，F 分别为线段 AA_1 与 B_1C 上的点，则三棱锥 D_1-EDF 的体积为_____.



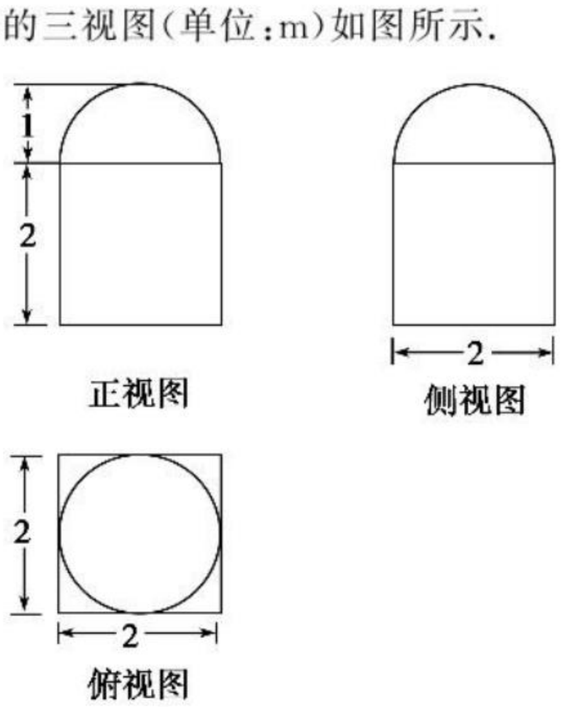
7. 一个圆柱的侧面展开图是一个边长为 1 的正方形，则该圆柱的体积是_____.

8. 如图是某几何体的三视图，其正视图、侧视图均是直径为 2 的半圆，俯视图是直径为 2 的圆，则该几何体的表面积为_____.



三、解答题

9. 某个几何体的三视图（单位：m）如图所示.



(1)求该几何体的表面积；(结果保留 π)

(2)求该几何体的体积.(结果保留 π)

10. 如图所示，半径为 R 的半圆内的阴影部分以直径 AB 所在直线为轴，旋转一周得到一几何体，求该几何体的体积.(其中$\angle BAC=30^\circ$)

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

第二章 点、直线、平面之间的位置关系

2.1 空间点、直线、平面之间的位置关系

第8课时 平 面

掌握几个要点

1. 熟记三个公理：公理1——判定直线在平面内的依据；
   公理2——判定点共面、线共面的依据；
   公理3——判定点共线、线共点的依据.
2. 掌握一个方法：证明几点共线的方法：先考虑两个平面的交线，再证有关的点都是这两个平面的公共点. 或先由某两点作一直线，再证明其他点也在这条直线上.

题点知识巩固

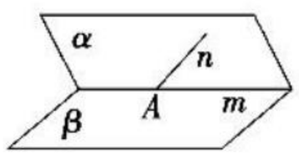
知识点一 三种语言的转换

1. 若点 A 在直线 b 上，b 在平面 β 内，则点 A，直线 b，平面 β 之间的关系可以记作 ( )

   A. $A\in b\in\beta$　　B. $A\in b\subset\beta$

   C. $A\subset b\subset\beta$　　D. $A\subset b\in\beta$

2. 如图所示，用符号语言可表述为 ( )



   A. $\alpha\cap\beta=m,n\subset\alpha,m\cap n=A$

   B. $\alpha\cap\beta=m,n\in\alpha,m\cap n=A$

   C. $\alpha\cap\beta=m,n\subset\alpha,A\subset m,A\subset n$

   D. $\alpha\cap\beta=m,n\in\alpha,A\in m,A\in n$

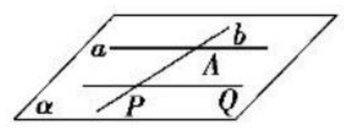
3. 用符号表示下列语句，并画出图形.

   (1)平面 α 与 β 相交于直线 l，直线 a 与 α，β 分别相交于点 A，B；

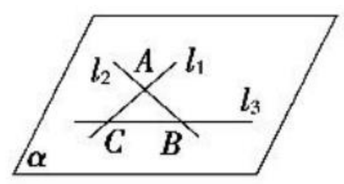
   (2)点 A，B 在平面 α 内，直线 a 与平面 α 交于点 C，点 C 不在直线 AB 上.

知识点二 点线共面问题

4. 如图，已知 $a\subset\alpha,b\subset\alpha,a\cap b=A,P\in b,PQ\parallel a$，求证：$PQ\subset\alpha$.

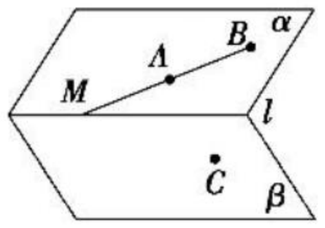


5. 如图所示，$l_1\cap l_2=A,l_2\cap l_3=B,l_1\cap l_3=C$. 求证：直线 l_1,l_2,l_3 在同一平面内.



知识点三 点共线、线共点、面共线问题

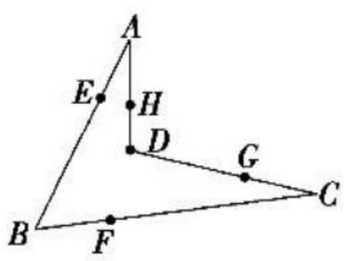
6. 如图所示，平面 $\alpha\cap\beta=l$，$A,B\in\alpha$，$C\in\beta$，且 $C\notin l$，直线 $AB\cap l=M$，过 A,B,C 三点的平面记作 γ，则 γ 与 β 的交线必通过 ( )



   A. 点 A　　B. 点 B

   C. 点 C 但不过点 M　　D. 点 C 和点 M

7. 如图所示，A,B,C,D 为不共面的四点，E,F,G,H 分别在线段 AB，BC，CD，DA 上.

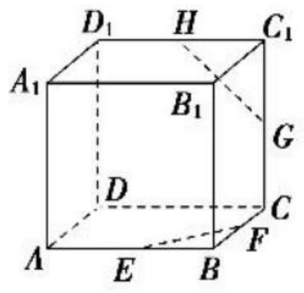


   (1)如果 $EH\cap FG=P$，那么点 P 在直线_____上.

   (2)如果 $EF\cap GH=Q$，那么点 Q 在直线_____上.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

8. 如图所示，已知 E,F,G,H 分别是正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱 AB,BC,CC_1,C_1D_1 的中点. 求证：FE,HG,DC 三线共点.



提能达标过关

一、选择题

1. 下列说法中正确的是（　　）

A. 三点确定一个平面

B. 四边形一定是平面图形

C. 梯形一定是平面图形

D. 两个不同平面 α 和 β 有不在同一条直线上的三个公共点

2. 如果空间四点 A,B,C,D 不共面，那么下列判断中正确的是（　　）

A. A,B,C,D 四点中必有三点共线

B. A,B,C,D 四点中不存在三点共线

C. 直线 AB 与 CD 相交

D. 直线 AB 与 CD 平行

3. 如果直线 $a\subset$ 平面 α，直线 $b\subset$ 平面 α，$M\in a$，$N\in b$，$M\in l$，$N\in l$，则（　　）

A. $l\subset\alpha$　　B. $l\not\subset\alpha$

C. $l\cap\alpha=M$　　D. $l\cap\alpha=N$

4. 三条两两相交的直线最多可确定的平面的个数为（　　）

A. 1　　B. 2

C. 3　　D. 无数

5. 一条直线和直线外的三点所确定的平面有（　　）

A. 1 个或 3 个　　B. 1 个或 4 个

C. 1 个，3 个或 4 个　　D. 1 个，2 个或 4 个

二、填空题

6. 若直线 l 上有两个点在平面 α 内，则下列说法中正确的序号为_____.

①直线 l 上至少有一个点在平面 α 外；

②直线 l 上有无穷多个点在平面 α 外；

③直线 l 上所有点都在平面 α 内；

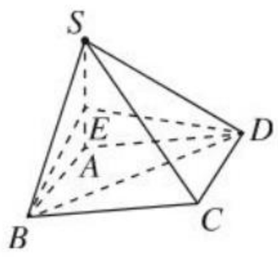
④直线 l 上至多有两个点在平面 α 内.

7. 已知空间四点中无任何三点共线，那么这四点可以确定平面的个数是_____.

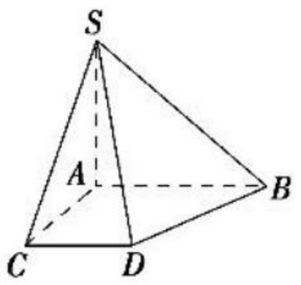
8. 若直线 l 与平面 α 相交于点 O，$A,B\in l$，$C,D\in\alpha$，且 $AC/\!/BD$，则 O,C,D 三点的位置关系是_____.

三、解答题

9. 如图，在四棱锥 $S-ABCD$ 中，四边形 $ABCD$ 为平行四边形，点 E 在棱 SA 上. 且 $SE=2EA$，请分别画出平面 EBD 与平面 SBC，平面 SCD 的交线，并说明理由.



10. 如图，在直角梯形 $ABDC$ 中，$AB/\!/CD$，$AB>CD$，S 是直角梯形 $ABDC$ 所在平面外一点，画出平面 SBD 和平面 SAC 的交线.



关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

第 9 课时　空间中直线与直线之间的位置关系

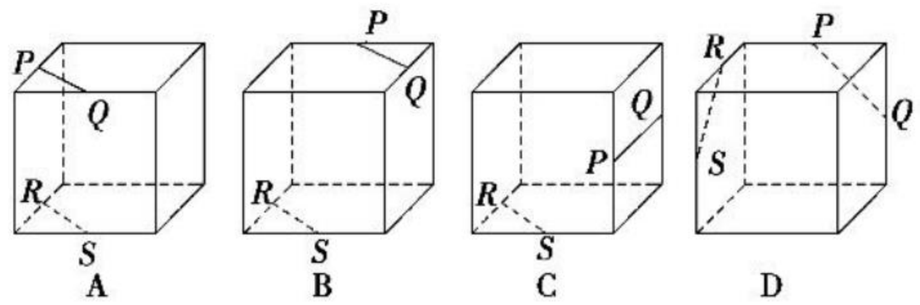
掌握几个要点

1. 学会一种方法：判定两直线的位置关系的依据就在于两直线平行、相交、异面的定义. 很多情况下，定义就是一种常用的判定方法.
2. 掌握一种转化：在研究异面直线所成角的大小时，通常把两条异面直线所成的角转化为两条相交直线所成的角. 将空间问题向平面问题转化，这是我们学习立体几何的一条重要的思维途径. 需要强调的是，两条异面直线所成角的范围为$(0°,90°]$，解题时经常结合这一点去求异面直线所成角的大小.

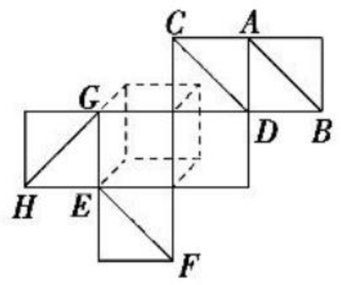
题点知识巩固

知识点一　空间两直线位置关系的判定

1. 如图所示，点 P,Q,R,S 分别在正方体的四条棱上，且是所在棱的中点，则直线 PQ 与 RS 是异面直线的是（　　）



2. 若 a 和 b 是异面直线，b 和 c 是异面直线，则 a 和 c 的位置关系是（　　）
   A. 平行　　B. 异面
   C. 相交　　D. 平行、相交或异面
3. 如图为正方体表面的一种展开图，则图中的四条线段 AB，CD，EF，GH 在原正方体中互为异面的对数为（　　）



   A. 1　　B. 2
   C. 3　　D. 4

知识点二　平行公理和等角定理的应用

4. 若 $OA\parallel O'A'$，$OB\parallel O'B'$，且 $\angle AOB=130°$，则 $\angle A'O'B'$ 为（　　）
   A. $130°$　　B. $50°$
   C. $130°$或 $50°$　　D. 不能确定
5. 对角线互相垂直的空间四边形 $ABCD$ 各边中点分别为 M,N,P,Q，则四边形 $MNPQ$ 是_____.
6. 在正方体 $ABCD-A'B'C'D'$ 中，E,F,E',F' 分别是 AB，BC，$A'B'$，$B'C'$ 的中点，求证：$EE'\parallel FF'$.

知识点三　求异面直线所成的角

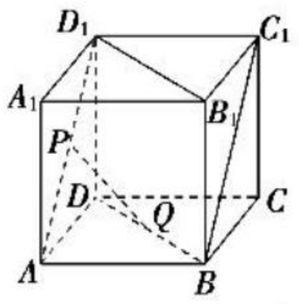
7. 在正方体 AC_1 中，E,F 分别是 A_1B_1，B_1C_1 的中点，求异面直线 DB_1 与 EF 所成角的大小.
8. 在空间四边形 $ABCD$ 中，$AB=CD$，且 AB 与 CD 所成锐角为 $30°$，E,F 分别为 BC，AD 的中点，求 EF 与 AB 所成角的大小.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

提能达标过关

一、选择题

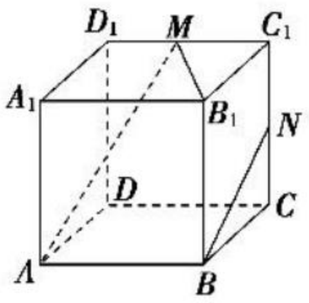
1. 若空间三条直线 a,b,c 满足 $a\perp b,b/\!/c$，则直线 a 与 c （　　）
   A. 一定平行　　B. 一定垂直
   C. 一定是异面直线　　D. 一定相交
2. 分别和两条异面直线平行的两条直线的位置关系是（　　）
   A. 一定平行　　B. 一定相交
   C. 一定异面　　D. 相交或异面
3. 两等角的一组对应边平行，则（　　）
   A. 另一组对应边平行
   B. 另一组对应边不平行
   C. 另一组对应边不可能垂直
   D. 以上都不对
4. 已知直线 a,b,c，下列三个命题：
   ①若 a 与 b 异面，b 与 c 异面，则 a 与 c 异面；
   ②若 $a/\!/b$，a 和 c 相交，则 b 和 c 也相交；
   ③若 $a\perp b$，$a\perp c$，则 $b/\!/c$.
   其中，正确命题的个数是（　　）
   A. 0　　B. 1
   C. 2　　D. 3
5. 如图，点 P,Q 分别是正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的面对角线 AD_1,BD 的中点，则异面直线 PQ 和 BC_1 所成的角为（　　）



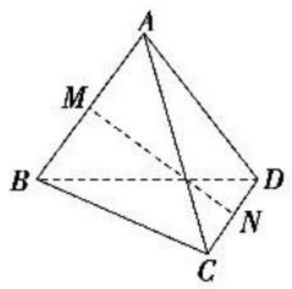
   A. 30°　　B. 45°
   C. 60°　　D. 90°

二、填空题

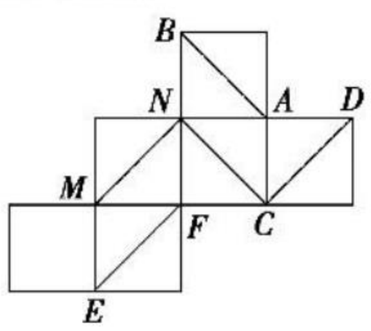
6. 如图所示，在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，M,N 分别为棱 C_1D_1,C_1C 的中点，有以下四个结论：



   ①直线 AM 与 CC_1 是相交直线；
   ②直线 AM 与 BN 是平行直线；
   ③直线 BN 与 MB_1 是异面直线；
   ④直线 AM 与 DD_1 是异面直线.
   其中正确的结论为_____.（填序号）
7. 如图，空间四边形 $ABCD$ 的对角线 $AC=8,BD=6,M,N$ 分别为 AB,CD 的中点，并且异面直线 AC 与 BD 所成的角为 90°，则 $MN=$_____.



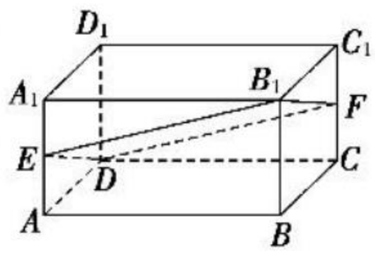
8. 一个正方体纸盒展开后如图所示，在原正方体纸盒中有如下结论：



   ①$AB\perp EF$；
   ②AB 与 CM 所成的角为 60°；
   ③EF 与 MN 是异面直线；
   ④$MN/\!/CD$.
   以上结论正确的为_____.（填序号）

三、解答题

9. 如图所示，E,F 分别是长方体 $A_1B_1C_1D_1-ABCD$ 的棱 A_1A，C_1C 的中点. 求证：四边形 B_1EDF 是平行四边形.



10. 如图，已知直三棱柱 $A_1B_1C_1-ABC$ 中，$AB=AC=AA_1=1$，$\angle BAC=90°$.

   (1)求异面直线 A_1B 与 B_1C_1 所成的角；
   (2)求点 B_1 到平面 A_1BC 的距离.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

第 10 课时　空间中直线与平面、平面与平面之间的位置关系

掌握几个要点

1. 关注两种位置关系：弄清直线与平面各种位置关系的特征，利用其定义作出判断，要有画图意识，并借助于空间想象能力进行细致的分析.

2. 掌握一个模型：长方体是一个特殊的图形，当点、线、面关系比较复杂时，可以寻找长方体作为载体，将它们置于其中，立体几何中的直线与平面的位置关系都可以在这个模型中得到反映. 因而人们给它以“百宝箱”之称.

题点知识巩固

知识点一　直线与平面的位置关系

1. 若直线 a 不平行于平面 α，则下列结论成立的是　（　　）

A. α 内的所有直线都与直线 a 异面

B. α 内不存在与 a 平行的直线

C. α 内的直线都与 a 相交

D. 直线 a 与平面 α 有公共点

2. 一条直线 l 上有相异的三个点 A，B，C 到平面 α 的距离相等，那么直线 l 与平面 α 的位置关系是　（　　）

A. $l\parallel\alpha$　　B. $l\perp\alpha$

C. l 与 α 相交但不垂直　　D. $l\parallel\alpha$ 或 $l\subset\alpha$

3. 若直线上有一点在平面外，则下列结论正确的是　（　　）

A. 直线上所有的点都在平面外

B. 直线上有无数多个点都在平面外

C. 直线上有无数多个点都在平面内

D. 直线上至少有一个点在平面内

4. 下列四个命题中正确命题的个数是　（　　）

①如果 a，b 是两条直线，$a\parallel b$，那么 a 平行于经过 b 的任何一个平面；

②如果直线 a 和平面 α 满足 $a\parallel\alpha$，那么 a 与平面 α 内的任何一条直线平行；

③如果直线 a，b 和平面 α 满足 $a\parallel b$，$a\parallel\alpha$，$b\not\subset\alpha$，那么 $b\parallel\alpha$；

④如果 a 与平面 α 上的无数条直线平行，那么直线 a 必平行于平面 α.

A. 0　　B. 1

C. 2　　D. 3

知识点二　平面与平面的位置关系

5. 一个平面内不共线的三点到另一个平面的距离相等且不为零，则这两个平面　（　　）

A. 平行　　B. 相交

C. 平行或重合　　D. 平行或相交

6. 已知两平面 α，β 平行，且 $a\subset\alpha$，下列四个命题：

①a 与 β 内的所有直线平行；②a 与 β 内无数条直线平行；③直线 a 与 β 内任何一条直线都不垂直；④a 与 β 无公共点.

其中正确命题的个数是　（　　）

A. 1　　B. 2

C. 3　　D. 4

7. 在以下三个命题中，正确的命题是　（　　）

①平面 α 内有两条直线和平面 β 平行，那么这两个平面平行；②平面 α 内有无数条直线和平面 β 平行，则 α 与 β 平行；③在平面 α，β 内分别有一条直线，这两条直线互相平行，那么这两个平面平行或相交.

A. ①②　　B. ②③

C. ③　　D. ①③

8. (1)画出两平行平面；

(2)画出两相交平面.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

提能达标过关

一、选择题

1. 三棱台的一条侧棱所在直线与其对面所在的平面之间的关系是（　　）

A. 相交　　B. 平行

C. 直线在平面内　　D. 平行或直线在平面内

2. 下列说法正确的是（　　）

A. 如果一条直线与一个平面内的无数条直线平行，则这条直线与这个平面平行

B. 两个平面相交于唯一的公共点

C. 如果一条直线与一个平面有两个不同的公共点，则它们必有无数个公共点

D. 平面外的一条直线必与该平面内无数条直线平行

3. 若直线 $a\perp b$，且直线 $a\parallel$ 平面 α，则直线 b 与平面 α 的位置关系是（　　）

A. $b\subset\alpha$　　B. $b\parallel\alpha$

C. $b\subset\alpha$ 或 $b\parallel\alpha$　　D. b 与 α 相交或 $b\subset\alpha$ 或 $b\parallel\alpha$

4. 下列命题中，正确的有（　　）

①平行于同一直线的两条直线平行；

②平行于同一个平面的两条直线平行；

③平行于同一条直线的两个平面平行；

④平行于同一个平面的两个平面平行.

A. 1 个　　B. 2 个

C. 3 个　　D. 4 个

5. 下列说法中正确的个数是（　　）

①平面 α 与平面 β,γ 都相交，则这三个平面有 2 条或 3 条交线；

②两个平面平行，各任取两平面的一条直线，它们不相交；

③直线 a 不平行于平面 α，则 a 不平行于 α 内任何一条直线；

④如果 $\alpha\parallel\beta,a\parallel\alpha$，那么 $a\parallel\beta$.

A. 0　　B. 1

C. 2　　D. 3

二、填空题

6. 已知下列说法：

①若两个平面 $\alpha\parallel\beta,a\subset\alpha,b\subset\beta$，则 $a\parallel b$；

②若两个平面 $\alpha\parallel\beta,a\subset\alpha,b\subset\beta$，则 a 与 b 是异面直线；

③若两个平面 $\alpha\parallel\beta,a\subset\alpha,b\subset\beta$，则 a 与 b 平行或异面；

④若两个平面 $\alpha\cap\beta=b,a\subset\alpha$，则 a 与 β 一定相交.

其中正确的序号是_____.

7. 若点 $A\in\alpha,B\notin\alpha,C\notin\alpha$，则平面 ABC 与平面 α 的位置关系是_____.

8. 下列说法中正确的是_____.（填序号）

①若直线 a 不在平面 α 内，则 $a\parallel\alpha$；

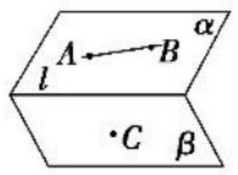
②若直线 l 上有无数个点不在平面 α 内，则 $l\parallel\alpha$；

③若直线 l 与平面 α 平行，则 l 与 α 内任何一条直线都没有公共点；

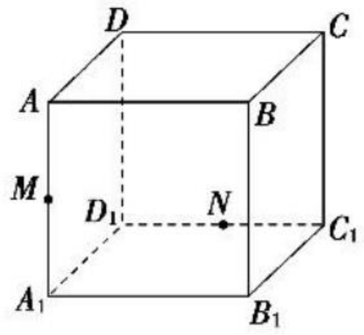
④平行于同一平面的两条直线可以相交.

三、解答题

9. 如图，已知平面 α 和 β 相交于直线 l，点 $A\in\alpha$，点 $B\in\alpha$，点 $C\in\beta$，且 $A\notin l,B\notin l$，直线 AB 与 l 不平行，那么平面 ABC 与平面 β 的交线与 l 有什么关系？证明你的结论.



10. 如图所示，在棱长为 a 的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，M,N 分别是 AA_1,D_1C_1 的中点，过 D,M,N 三点的平面与正方体的下底面相交于直线 l.



(1)画出 l 的位置；

(2)设 $l\cap A_1B_1=P$，求 PB_1 的长.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

2.2　直线、平面平行的判定及其性质

第 11 课时　直线与平面平行的判定

掌握几个要点

1. 掌握三种方法：判断或证明线面平行的常用方法
   (1)定义法：证明直线与平面无公共点(不易操作).
   (2)判定定理法：$a\not\subset\alpha$，$b\subset\alpha$，$a\parallel b\Rightarrow a\parallel\alpha$.
   (3)排除法：证明直线与平面不相交，直线也不在平面内.
2. 熟知三种策略：证明线线平行的常用策略
   (1)利用三角形、梯形中位线的性质.
   (2)利用平行四边形的性质.
   (3)利用平行线分线段成比例定理.

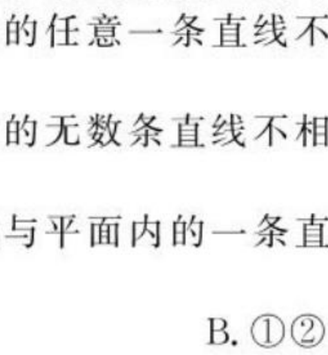
题点知识巩固

知识点一　线面平行判定定理的理解

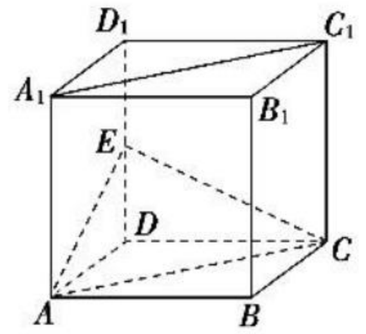
1. 如果两直线 $a\parallel b$，且 $a\parallel\alpha$，则 b 与 α 的位置关系是(　　)
   A. 相交　　B. $b\parallel\alpha$
   C. $b\subset\alpha$　　D. $b\parallel\alpha$ 或 $b\subset\alpha$
2. 下列说法正确的是(　　)
   A. 若直线 l 平行于平面 α 内的无数条直线，则 $l\parallel\alpha$
   B. 若直线 a 在平面 α 外，则 $a\parallel\alpha$
   C. 若直线 $a\cap b=\varnothing$，直线 $b\subset\alpha$，则 $a\parallel\alpha$
   D. 若直线 $a\parallel b$，$b\subset\alpha$，那么直线 a 就平行于平面 α 内的无数条直线
3. 有以下四个说法，其中正确的说法是(　　)
   ①若直线与平面没有公共点，则直线与平面平行；
   ②若直线与平面内的任意一条直线不相交，则直线与平面平行；
   ③若直线与平面内的无数条直线不相交，则直线与平面平行；
   ④若平面外的直线与平面内的一条直线平行，则直线与平面不相交.
   A. ①②　　B. ①②③
   C. ①③④　　D. ①②④

知识点二　直线与平面平行的证明

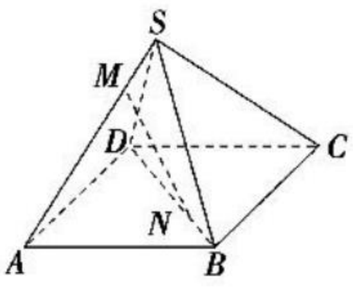
4. 若 M，N 分别是 $\triangle ABC$ 边 AB，AC 的中点，则 MN 与过直线 BC 的平面 β 的位置关系是(　　)
   A. $MN\parallel\beta$
   B. MN 与 β 相交或 $MN\subset\beta$
   C. $MN\parallel\beta$ 或 $MN\subset\beta$
   D. $MN\parallel\beta$ 或 MN 与 β 相交或 $MN\subset\beta$
5. 如图，在正方体 $ABCD-A'B'C'D'$ 中，E，F 分别为底面 $ABCD$ 和底面 $A'B'C'D'$ 的中心，则正方体的六个面中与 EF 平行的平面有(　　)



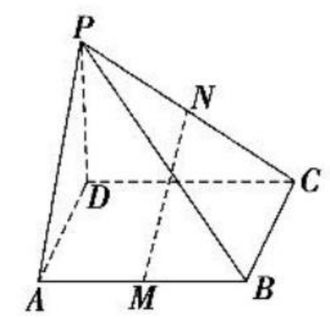
   A. 1 个　　B. 2 个
   C. 3 个　　D. 4 个
6. 如图，在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，E 是 DD_1 的中点，则 A_1C_1 与平面 ACE 的位置关系为_____.



7. 如图，S 是平行四边形 $ABCD$ 所在平面外一点，M，N 分别是 SA，BD 上的点，且 $\frac{AM}{SM}=\frac{DN}{NB}$. 求证：$MN\parallel$ 平面 SBC.



8. 如图，四边形 $ABCD$ 是平行四边形，P 是平面 $ABCD$ 外一点，M，N 分别是 AB，PC 的中点. 求证：$MN\parallel$ 平面 PAD.



关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

提能达标过关

一、选择题

1. 下列条件中能得出直线 m 与平面 α 平行的是　　(　　)

A. 直线 m 与平面 α 内所有直线平行

B. 直线 m 与平面 α 内无数条直线平行

C. 直线 m 与平面 α 没有公共点

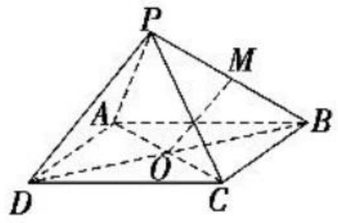
D. 直线 m 与平面 α 内的一条直线平行

2. 过直线 l 外两点，作与 l 平行的平面，则这样的平面　　(　　)

A. 不可能作出　　B. 只能作出一个

C. 能作出无数个　　D. 上述三种情况都存在

3. 如图所示，P 为矩形 $ABCD$ 所在平面外一点，矩形对角线交点为 O，M 为 PB 的中点，给出五个结论：



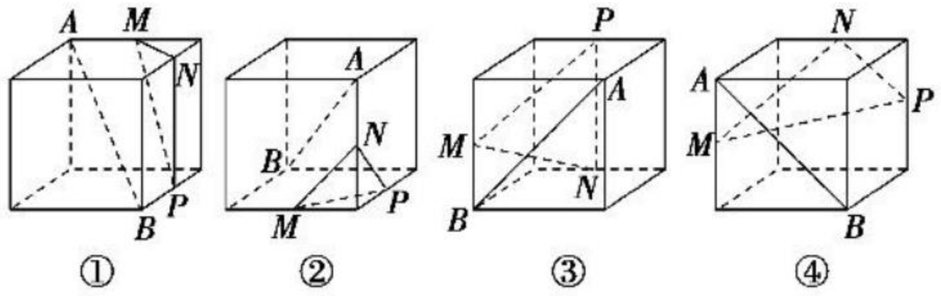
①$OM \parallel PD$；②$OM \parallel$ 平面 PCD；③$OM \parallel$ 平面 PDA；④$OM \parallel$ 平面 PBA；⑤$OM \parallel$ 平面 PBC.

其中正确的个数为　　(　　)

A. 1　　B. 2

C. 3　　D. 4

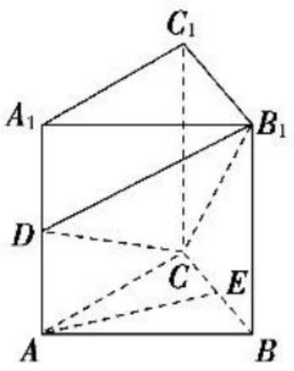
4. 下列四个正方体图形中，A，B 为正方体的两个顶点，M，N，P 分别为其所在棱的中点，能得出 $AB \parallel$ 平面 MNP 的图形的是　　(　　)



A. ①③　　B. ①④

C. ②③　　D. ②④

5. 如图，已知三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，E 是 BC 的中点，D 是 AA_1 上的动点，且 $\dfrac{AD}{DA_1}=m$，若 $AE \parallel$ 平面 DB_1C，则 m 的值为　　(　　)



A. $\dfrac{1}{2}$　　B. 1

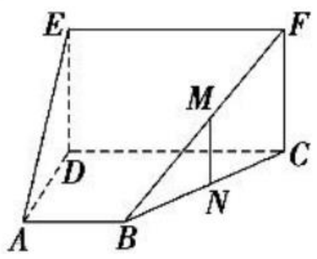
C. $\dfrac{3}{2}$　　D. 2

二、填空题

6. 已知 l，m 是两条直线，α 是平面，若要得到“$l \parallel \alpha$”，则需要在条件“$m \subset \alpha$，$l \parallel m$”中另外添加的一个条件是_____.

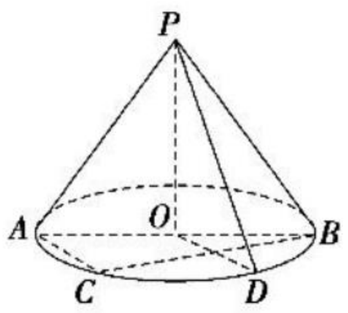
7. 三棱锥 $S-ABC$ 中，G 为 $\triangle ABC$ 的重心，E 在棱 SA 上，且 $AE=2ES$，则 EG 与平面 SBC 的关系为_____.

8. 如图，在五面体 $FE-ABCD$ 中，四边形 $CDEF$ 为矩形，M，N 分别是 BF，BC 的中点，则 MN 与平面 ADE 的位置关系是_____.



三、解答题

9. 如图，O 是圆锥底面圆的圆心，圆锥的轴截面 PAB 为等腰直角三角形，C 为底面圆周上一点.

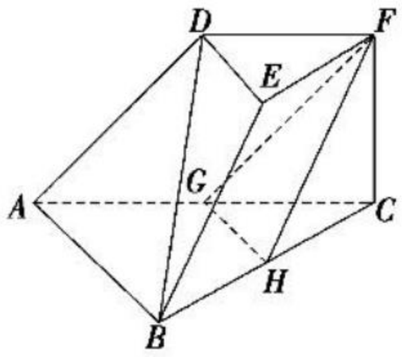


(1)若弧 BC 的中点为 D. 求证：$AC \parallel$ 平面 POD；

(2)如果 $\triangle PAB$ 的面积是 9，求此圆锥的表面积.

10. 如图，在三棱台 $DEF-ABC$ 中，$AB=2DE$，G，H 分别为 AC，BC 的中点.

求证：$BD \parallel$ 平面 FGH.



关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

第 12 课时　平面与平面平行的判定

掌握几个要点

掌握三种方法：证明面面平行的方法

(1)面面平行的定义.(2)面面平行的判定定理：如果一个平面内的两条相交直线与另一个平面平行，则这两个平面平行.(3)两个平面同时平行于第三个平面，那么这两个平面平行.

题点知识巩固

知识点一　面面平行判定定理的理解

1. 下列命题中正确的是　(　　)

A. 一个平面内两条直线都平行于另一平面，那么这两个平面平行

B. 如果一个平面内任何一条直线都平行于另一个平面，那么这两个平面平行

C. 平行于同一直线的两个平面一定相互平行

D. 如果一个平面内的无数多条直线都平行于另一平面，那么这两个平面平行

2. 在正方体中，相互平行的面不会是　(　　)

A. 前后相对侧面　　B. 上下相对底面

C. 左右相对侧面　　D. 相邻的侧面

3. α,β 是两个不重合的平面，在下列条件下，可判定 $\alpha\parallel\beta$ 的是　(　　)

A. α,β 都平行于直线 l,m

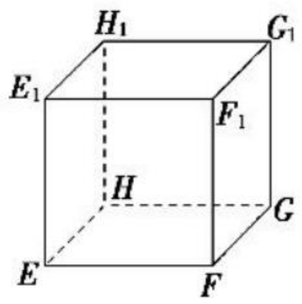
B. α 内有三个不共线的点到 β 的距离相等

C. l,m 是 α 内的两条直线且 $l\parallel\beta,m\parallel\beta$

D. l,m 是异面直线且 $l\parallel\alpha,m\parallel\alpha,l\parallel\beta,m\parallel\beta$

知识点二　平面与平面平行的证明

4. 在正方体 $EFGH-E_1F_1G_1H_1$ 中，下列四对截面彼此平行的一对是　(　　)



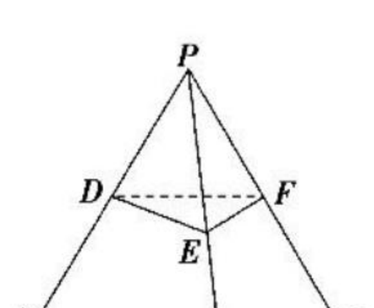
A. 平面 E_1FG_1 与平面 EGH_1

B. 平面 FHG_1 与平面 F_1H_1G

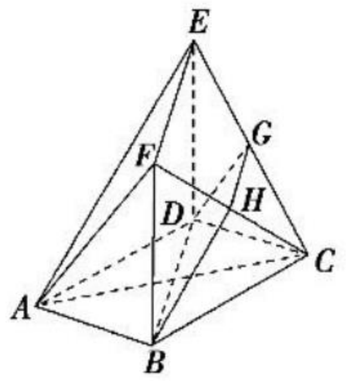
C. 平面 F_1H_1H 与平面 FHE_1

D. 平面 E_1HG_1 与平面 EH_1G

5. 如图，已知在三棱锥 $P-ABC$ 中，D,E,F 分别是棱 PA,PB,PC 的中点，则平面 DEF 与平面 ABC 的位置关系是_____.

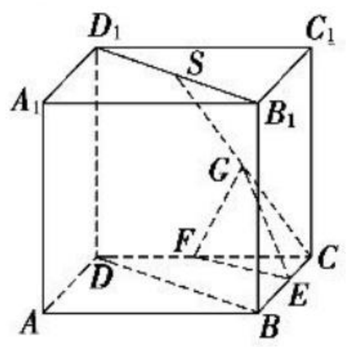


6. 如图，在多面体 $ABCDEF$ 中，底面 $ABCD$ 是平行四边形，点 G 和点 H 分别是 CE 和 CF 的中点.求证：平面 $BDGH\parallel$ 平面 AEF.



知识点三　线面平行与面面平行的综合应用

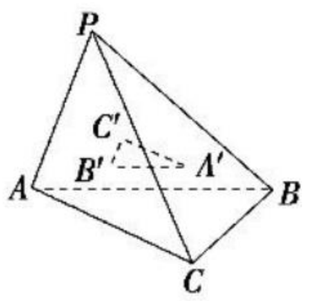
7. 如图，在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，点 S 是 B_1D_1 的中点，点 E,F,G 分别是 BC,DC 和 SC 的中点，求证：



(1)直线 $EG\parallel$ 平面 BDD_1B_1；

(2)平面 $EFG\parallel$ 平面 BDD_1B_1.

8. 如图所示，P 是 $\triangle ABC$ 所在平面外的一点，点 A',B',C' 分别是 $\triangle PBC,\triangle PCA,\triangle PAB$ 的重心.



(1)求证：平面 $ABC\parallel$ 平面 $A'B'C'$；

(2)求 $\triangle A'B'C'$ 与 $\triangle ABC$ 的面积之比.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

提能达标过关

一、选择题

1. 下列四个说法中正确的是（　　）

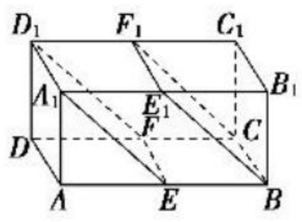
A. 平面 α 内有无数个点到平面 β 的距离相等，则 $\alpha /\!/ \beta$

B. $\alpha \cap \gamma = a$，$\alpha \cap \beta = b$，且 $a /\!/ b$（α，β，γ 分别表示平面，a，b 表示直线），则 $\gamma /\!/ \beta$

C. 平面 α 内一个三角形三边分别平行于另一平面 β 内的一个三角形的三条边，则 $\alpha /\!/ \beta$

D. 平面 α 内的一个平行四边形的两边与平面 β 内的一个平行四边形的两边对应平行，则 $\alpha /\!/ \beta$

2. 如图所示，设 E，F，E_1，F_1 分别是长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱 AB，CD，A_1B_1，C_1D_1 的中点，则平面 EFD_1A_1 与平面 BCF_1E_1 的位置关系是（　　）



A. 平行　　B. 相交

C. 异面　　D. 不确定

3. 经过平面 α 外两点，作与 α 平行的平面，则这样的平面可以作（　　）

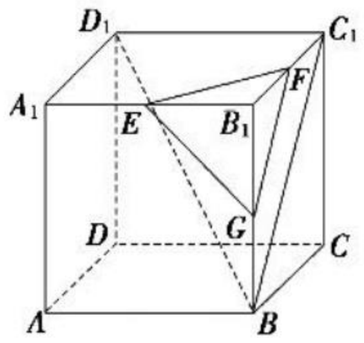
A. 1 个或 2 个　　B. 0 个或 1 个

C. 1 个　　D. 0 个

4. 在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，点 E，F，G 分别是棱 A_1B_1，B_1C_1，BB_1 的中点，给出下列四个推断：

①$FG /\!/$ 平面 AA_1D_1D；②$EF /\!/$ 平面 BC_1D_1；③$FG /\!/$ 平面 BC_1D_1；④平面 $EFG /\!/$ 平面 BC_1D_1.

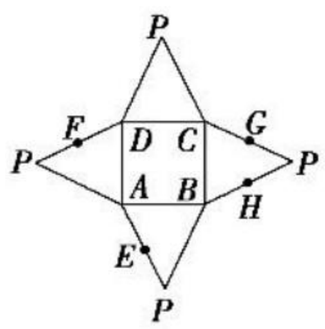
其中推断正确的序号是（　　）



A. ①③　　B. ①④

C. ②③　　D. ②④

5. 如图是四棱锥的平面展开图，其中四边形 $ABCD$ 为正方形，点 E，F，G，H 分别为 PA，PD，PC，PB 的中点，在此几何体中，给出下面四个结论：



①平面 $EFGH /\!/$ 平面 $ABCD$；

②$BC /\!/$ 平面 PAD；

③$AB /\!/$ 平面 PCD；

④平面 $PAD /\!/$ 平面 PAB.

其中正确的有（　　）

A. ①③　　B. ①④

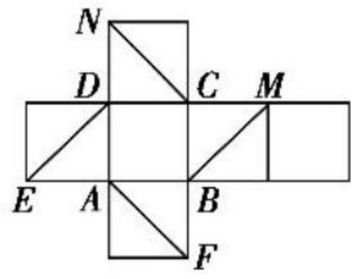
C. ①②③　　D. ②③

二、填空题

6. 已知平面 α，β 和直线 a，b，c，且 $a /\!/ b /\!/ c$，$a \subset \alpha$，b，$c \subset \beta$，则 α 与 β 的关系是_____.

7. 已知平面 α 和 β，在平面 α 内任取一条直线 a，在 β 内总存在直线 $b /\!/ a$，则 α 与 β 的位置关系是_____（填“平行”或“相交”）.

8. 如图是正方体的平面展开图. 在这个正方体中，

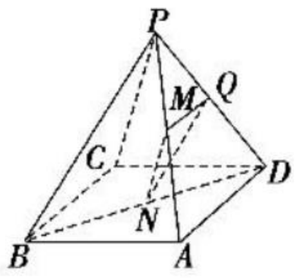


①$BM /\!/$ 平面 DE；②$CN /\!/$ 平面 AF；③平面 $BDM /\!/$ 平面 AFN；④平面 $BDE /\!/$ 平面 NCF.

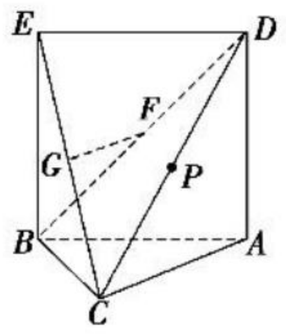
以上四个命题中，正确命题的序号是_____.

三、解答题

9. 如图，已知在四棱锥 $P-ABCD$ 中，底面 $ABCD$ 为平行四边形，点 M，N，Q 分别在 PA，BD，PD 上，且 $PM : MA = BN : ND = PQ : QD$. 求证：平面 $MNQ /\!/$ 平面 PBC.



10. 如图，在四棱锥 $C-ABED$ 中，四边形 $ABED$ 是正方形，点 G，F 分别是线段 EC，BD 的中点.



(1)求证：$GF /\!/$ 平面 ABC；

(2)若点 P 为线段 CD 的中点，平面 GFP 与平面 ABC 有怎样的位置关系？并证明.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

第 13 课时　直线与平面平行的性质

掌握几个要点

1. 掌握一种辅助平面：在遇到线面平行时，常需作出过已知直线与已知平面相交的辅助平面，以便运用线面平行的性质.
2. 学会一种转化思想：要灵活应用线线平行、线面平行的相互联系、相互转化. 在解决立体几何中的平行问题时，一般都要用到平行关系的转化. 转化思想是解决这类问题的最有效的方法.

题点知识巩固

知识点一　有关线面平行性质定理的证明

1. 在梯形 $ABCD$ 中，$AB\parallel CD$，$AB\subset$平面 α，$CD\not\subset$平面 α，则直线 CD 与平面 α 内的直线的位置关系只能是　（　）

A. 平行　　B. 平行或异面

C. 平行或相交　　D. 异面或相交

2. 若直线 $l\parallel$平面 α，则过 l 作一组平面与 α 相交，记所得的交线分别为 $a,b,c,\cdots$，那么这些交线的位置关系为　（　）

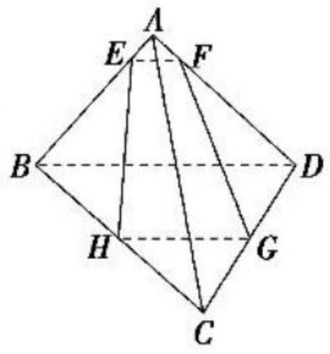
A. 都平行

B. 都相交且一定交于同一点

C. 都相交但不一定交于同一点

D. 都平行或交于同一点

3. 如图所示，在空间四边形 $ABCD$ 中，点 E,F 分别为边 AB,AD 上的点，且 $AE:EB=AF:FD=1:4$，又点 H,G 分别为 BC,CD 的中点，则　（　）



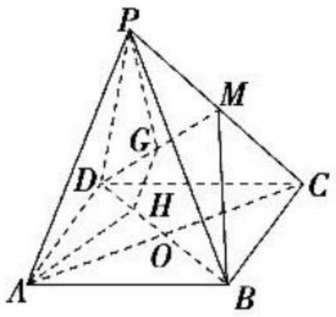
A. $BD\parallel$平面 $EFGH$，且四边形 $EFGH$ 是矩形

B. $EF\parallel$平面 BCD，且四边形 $EFGH$ 是梯形

C. $HG\parallel$平面 ABD，且四边形 $EFGH$ 是菱形

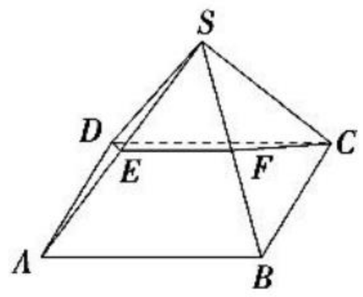
D. $EH\parallel$平面 ADC，且四边形 $EFGH$ 是平行四边形

4. 如图所示，在四棱锥 $P-ABCD$ 中，底面 $ABCD$ 是平行四边形，AC 与 BD 交于点 O，M 是 PC 的中点，在 DM 上取一点 G，过 G 和 AP 作平面交平面 BDM 于 GH，求证：$AP\parallel GH$.



知识点二　与线面平行性质定理有关的计算

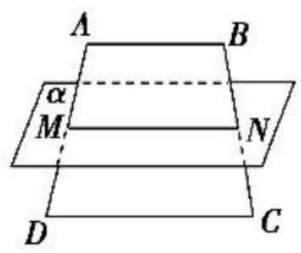
5. 如图，四棱锥 $S-ABCD$ 的所有的棱长都等于 2，点 E 是 SA 的中点，过 C,D,E 三点的平面与 SB 交于点 F，则四边形 $DEFC$ 的周长为　（　）



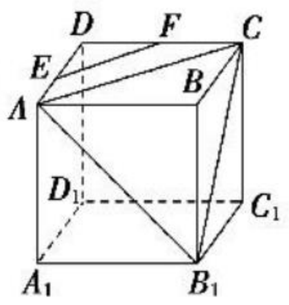
A. $2+\sqrt{3}$　　B. $3+\sqrt{3}$

C. $3+2\sqrt{3}$　　D. $2+2\sqrt{3}$

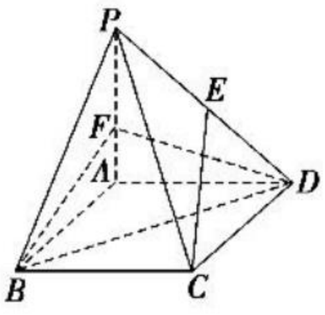
6. 如图所示，四边形 $ABCD$ 是梯形，$AB\parallel CD$，且 $AB\parallel$平面 α，AD,BC 与平面 α 分别交于点 M,N，且点 M 是 AD 的中点，$AB=4$，$CD=6$，则 $MN=$_____.



7. 如图，在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，$AB=2$，点 E 为 AD 的中点，点 F 在 CD 上，若 $EF\parallel$平面 AB_1C，求线段 FE 的长度.



8. 如图，在四棱锥 $P-ABCD$ 中，底面 $ABCD$ 是平行四边形，且 $PA=3$，点 F 在棱 PA 上，且 $AF=1$，点 E 在棱 PD 上，若 $CE\parallel$平面 BDF，求 $PE:ED$ 的值.

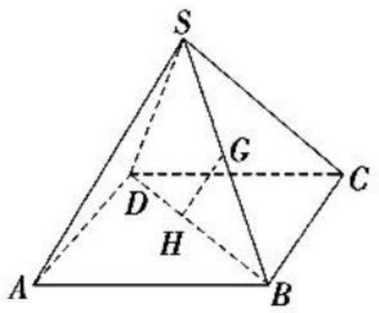


关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

提能达标过关

一、选择题

1. 如图，已知 S 为四边形 $ABCD$ 外一点，点 G,H 分别为 SB,BD 上的点，若 $GH\parallel$ 平面 SCD，则　（　）



A. $GH\parallel SA$

B. $GH\parallel SD$

C. $GH\parallel SC$

D. 以上均有可能

2. 直线 $a\parallel$ 平面 α，$P\in\alpha$，过点 P 平行于 a 的直线　（　）

A. 只有一条，不在平面 α 内

B. 有无数条，不一定在 α 内

C. 只有一条，且在平面 α 内

D. 有无数条，一定在 α 内

3. 对于直线 m,n 和平面 α，下列命题中正确的是　（　）

A. 如果 $m\subset\alpha$，$n\not\subset\alpha$，m,n 是异面直线，那么 $n\parallel\alpha$

B. 如果 $m\subset\alpha$，$n\not\subset\alpha$，m,n 是异面直线，那么 n 与 α 相交

C. 如果 $m\subset\alpha$，$n\parallel\alpha$，m,n 共面，那么 $m\parallel n$

D. 如果 $m\parallel\alpha$，$n\parallel\alpha$，m,n 共面，那么 $m\parallel n$

4. 在空间四边形 $ABCD$ 中，E,F,G,H 分别是 AB,BC,CD,DA 上的点，当 $BD\parallel$ 平面 $EFGH$ 时，下面结论正确的是　（　）

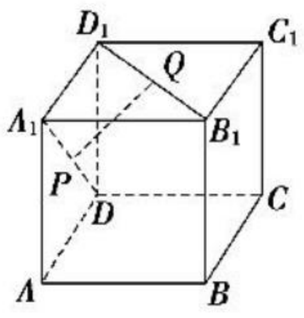
A. E,F,G,H 一定是各边的中点

B. G,H 一定是 CD,DA 的中点

C. $BE:EA=BF:FC$，且 $DH:HA=DG:GC$

D. $AE:EB=AH:HD$，且 $BF:FC=DG:GC$

5. 已知正方体 AC_1 的棱长为 1，点 P 是平面 AA_1D_1D 的中心，点 Q 是平面 $A_1B_1C_1D_1$ 的对角线 B_1D_1 上一点，且 $PQ\parallel$ 平面 AA_1B_1B，则线段 PQ 的长为　（　）

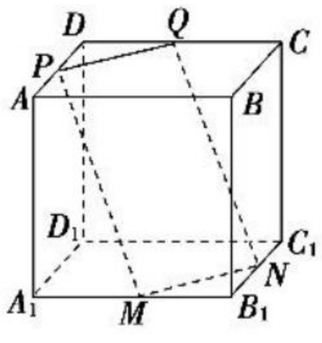


A. $\frac{\sqrt{2}}{2}$　　B. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

C. 1　　D. $\sqrt{2}$

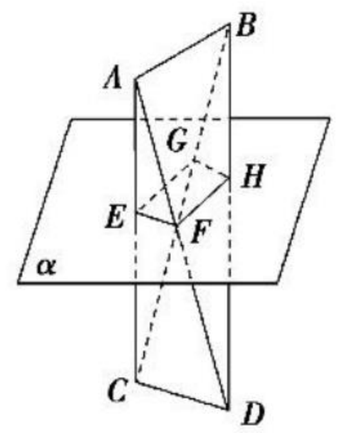
二、填空题

6. 如图所示，$ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 是棱长为 a 的正方体，M,N 分别是下底面的棱 A_1B_1,B_1C_1 的中点，P 是上底面的棱 AD 上的一点，$AP=\frac{a}{3}$，过 P,M,N 的平面交上底面于 PQ，Q 在 CD 上，则 $PQ=$_____.



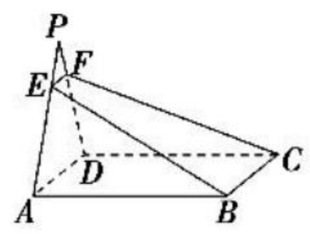
7. 直线 $a\parallel$ 平面 α，α 内有 n 条直线交于一点，则这 n 条直线中与直线 a 平行的直线有_____条.

8. 如图，已知 A,B,C,D 四点不共面，且 $AB\parallel\alpha$，$CD\parallel\alpha$，$AC\cap\alpha=E$，$AD\cap\alpha=F$，$BD\cap\alpha=H$，$BC\cap\alpha=G$，则四边形 $EFHG$ 的形状是_____.



三、解答题

9. 如图，四边形 $ABCD$ 是矩形，$P\notin$ 平面 $ABCD$，过 BC 作平面 $BCFE$ 交 AP 于点 E，交 DP 于点 F，求证：四边形 $BCFE$ 是梯形.



10. 如图，已知 E,F 分别是菱形 $ABCD$ 中边 BC,CD 的中点，EF 与 AC 交于点 O，点 P 在平面 $ABCD$ 之外，M 是线段 PA 上一动点，若 $PC\parallel$ 平面 MEF，试求 $PM:MA$ 的值.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

第 14 课时　平面与平面平行的性质

掌握几个要点

1. 熟记五个性质：常用的面面平行的其他几个性质

(1)两个平面平行，其中一个平面内的任意一条直线平行于另一个平面.

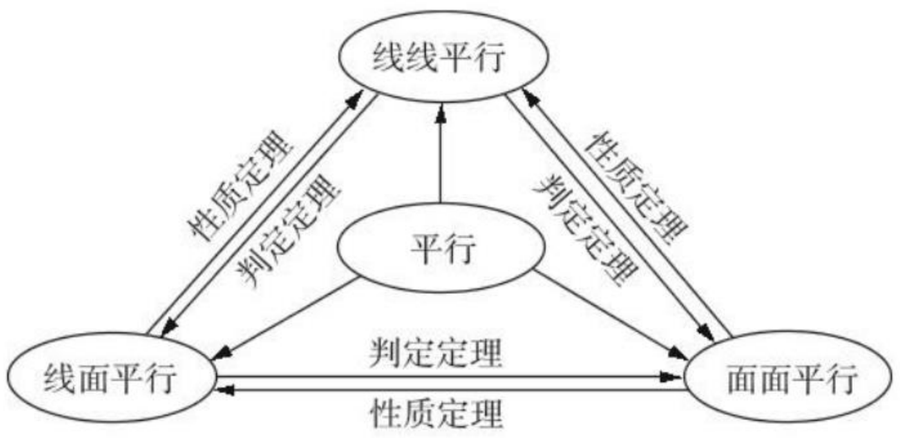
(2)夹在两个平行平面之间的平行线段长度相等.

(3)经过平面外一点有且只有一个平面与已知平面平行.

(4)两条直线被三个平行平面所截，截得的对应线段成比例.

(5)如果两个平面分别平行于第三个平面，那么这两个平面互相平行.

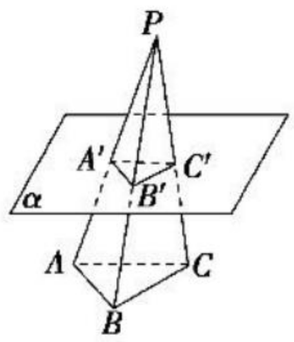
2. 理解一个关系：空间中各种平行关系相互转化关系的示意图.



题点知识巩固

知识点一　由面面平行的性质求解线段长度

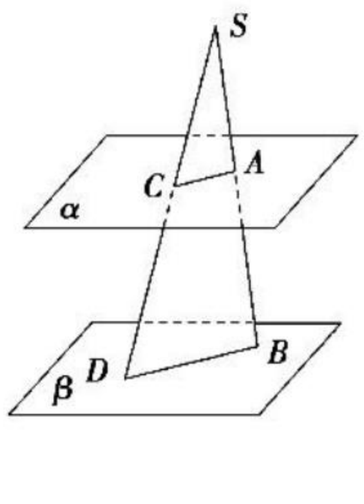
1. 如图所示，P 是三角形 ABC 所在平面外一点，平面 α // 平面 ABC，α 分别交线段 PA，PB，PC 于 A'，B'，C'，若 $PA' : AA' = 2 : 3$，则 $S_{\triangle A'B'C'} : S_{\triangle ABC}$ 等于　　(　　)



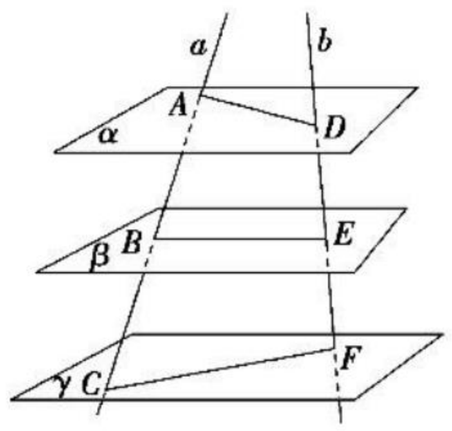
A. 2 : 25　　B. 4 : 25

C. 2 : 5　　D. 4 : 5

2. 如图，平面 α // β，A，$C \in \alpha$，B，$D \in \beta$，直线 AB 与 CD 交于点 S，且 $AS=3$，$BS=9$，$CD=34$，求 SC 的长.



3. 如图，平面 α // 平面 β // 平面 γ，两条直线 a，b 分别与平面 α，β，γ 相交于点 A，B，C 和点 D，E，F. 已知 $AC=15$ cm，$DE=5$ cm，$AB : BC=1 : 3$，求 AB，BC，EF 的长.



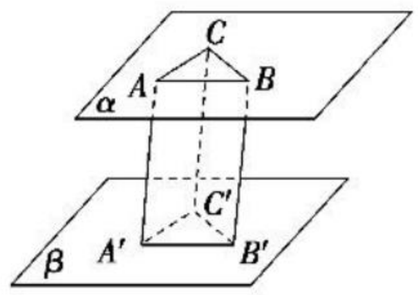
知识点二　面面平行证明线线平行

4. 已知长方体 $ABCD-A'B'C'D'$，平面 $\alpha \cap$ 平面 $ABCD=EF$，平面 $\alpha \cap$ 平面 $A'B'C'D'=E'F'$，则 EF 与 $E'F'$ 的位置关系是　　(　　)

A. 平行　　B. 相交

C. 异面　　D. 不确定

5. 如图，不同在一个平面内的三条平行直线和两个平行平面相交，每个平面内以交点为顶点的两个三角形是　　(　　)



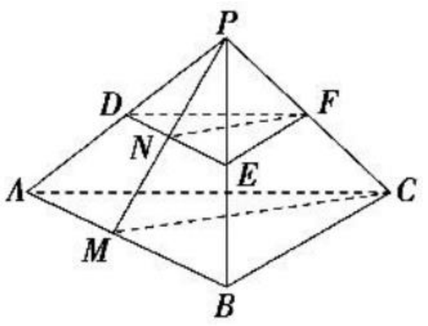
A. 相似但不全等的三角形

B. 全等三角形

C. 面积相等的不全等三角形

D. 以上结论都不对

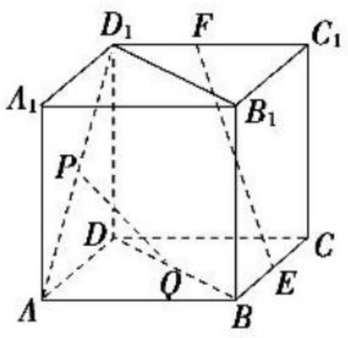
6. 如图，在三棱锥 $P-ABC$ 中，D，E，F 分别是 PA，PB，PC 的中点，M 是 AB 上一点，连接 MC，N 是 PM 与 DE 的交点，连接 NF，求证：NF // CM.



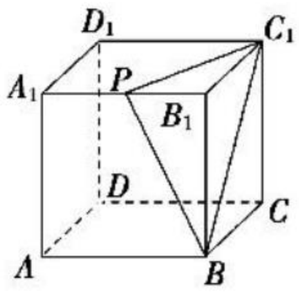
关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

知识点三　平行关系的综合应用

7. 如图，在棱长为 a 的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，E,F,P,Q 分别是 BC,C_1D_1,AD_1,BD 的中点.
(1)求证：$PQ\parallel$ 平面 DCC_1D_1；
(2)求 PQ 的长；
(3)求证：$EF\parallel$ 平面 BB_1D_1D.



8. 如图所示，在棱长为 2 的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，A_1B_1 的中点是 P，过点 A_1 作与截面 PBC_1 平行的截面，能否确定截面的形状？如果能，求出截面的面积.



提能达标过关

一、选择题

1. 两个平行平面与另两个平行平面相交所得四条直线的位置关系是　(　　)
A. 两两相互平行
B. 两两相交于同一点
C. 两两相交但不一定交于同一点
D. 两两相互平行或交于同一点

2. 下列命题：
①一条直线与两个平行平面中的一个平面相交，必与另外一个平面相交；
②如果一个平面平行于两个平行平面中的一个平面，必平行于另一个平面；
③夹在两个平行平面间的平行线段相等.
其中正确的命题的个数为　(　　)
A. 1　　B. 2
C. 3　　D. 0

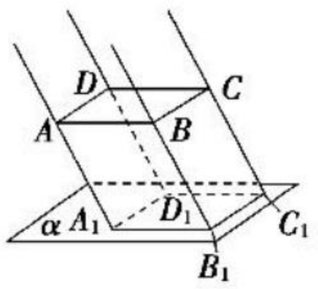
3. 平面 $\alpha\parallel$ 平面 β，点 $A,C\in\alpha,B,D\in\beta$，则直线 $AC\parallel$ 直线 BD 的充要条件是　(　　)
A. $AB\parallel CD$　　B. $AD\parallel CB$
C. AB 与 CD 相交　　D. A,B,C,D 四点共面

4. α,β,γ 为三个不重合的平面，a,b,c 为三条不同的直线，则下列命题中不正确的是　(　　)
①$\left.\begin{matrix}a\parallel c\\b\parallel c\end{matrix}\right\}\Rightarrow a\parallel b$；　②$\left.\begin{matrix}a\parallel\gamma\\b\parallel\gamma\end{matrix}\right\}\Rightarrow a\parallel b$；
③$\left.\begin{matrix}\alpha\parallel c\\\beta\parallel c\end{matrix}\right\}\Rightarrow\alpha\parallel\beta$；　④$\left.\begin{matrix}\alpha\parallel\gamma\\\beta\parallel\gamma\end{matrix}\right\}\Rightarrow\alpha\parallel\beta$；
⑤$\left.\begin{matrix}\alpha\parallel c\\a\parallel c\end{matrix}\right\}\Rightarrow\alpha\parallel a$；　⑥$\left.\begin{matrix}\alpha\parallel\gamma\\a\parallel\gamma\end{matrix}\right\}\Rightarrow a\parallel\alpha$.
A. ④⑥　　B. ②③⑥
C. ②③⑤⑥　　D. ②③

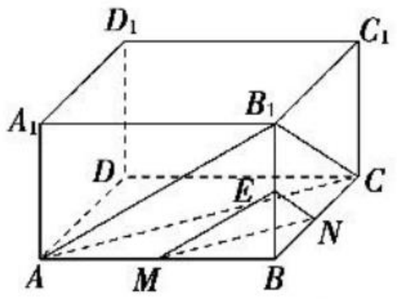
5. 在棱长为 2 的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，M 是棱 A_1D_1 的中点，过 C_1,B,M 作正方体的截面，则这个截面的面积为　(　　)
A. $\frac{3\sqrt{5}}{2}$　　B. $\frac{9}{2}$
C. $\frac{9}{8}$　　D. $\frac{3\sqrt{5}}{8}$

二、填空题

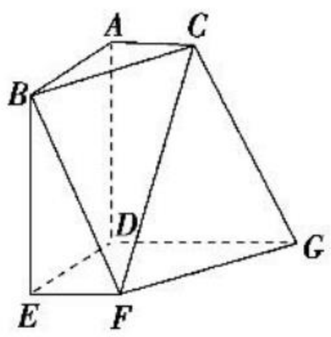
6. 如图所示，平面四边形 $ABCD$ 所在的平面与平面 α 平行，且四边形 $ABCD$ 在平面 α 内的平行投影 $A_1B_1C_1D_1$ 是一个平行四边形，则四边形 $ABCD$ 的形状一定是_____.



7. 如图，在长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，过 BB_1 的中点 E 作一个与平面 ACB_1 平行的平面交 AB 于 M，交 BC 于 N，则 $\frac{MN}{AC}=$_____.

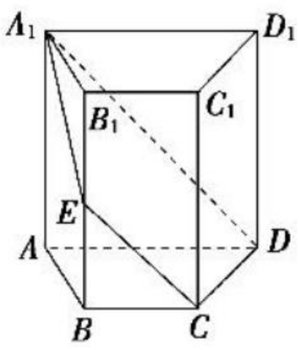


8. 如图，在多面体 $ABC-DEFG$ 中，平面 $ABC\parallel$ 平面 $DEFG$，$AD\parallel BE$，$AC\parallel DG\parallel EF$，且 $AB=DE$，$DG=2EF$，则下列说法中正确的是_____.(填序号)
①$BF\parallel$ 平面 $ACGD$；
②$CF\parallel$ 平面 $ABED$；
③$BC\parallel FG$；
④平面 $ABED\parallel$ 平面 CGF.

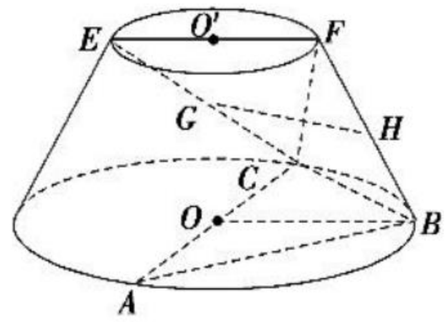


三、解答题

9. 如图，在四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，底面 $ABCD$ 为梯形，$AD\parallel BC$，平面 A_1DCE 与 B_1B 交于点 E. 求证：$EC\parallel A_1D$.



10. 在如图所示的圆台中，AC 是下底面圆 O 的直径，EF 是上底面圆 O' 的直径，FB 是圆台的一条母线. 已知 G,H 分别为 EC,FB 的中点，求证：$GH\parallel$ 平面 ABC.



关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

2.3　直线、平面垂直的判定及其性质

第 15 课时　直线与平面垂直的判定

掌握几个要点

1. 熟记三种方法：直线和平面垂直的判定方法

(1)利用线面垂直的定义.

(2)利用线面垂直的判定定理.

(3)利用下面两个结论：

①若 $a\parallel b$，$a\perp\alpha$，则 $b\perp\alpha$；②若 $\alpha\parallel\beta$，$a\perp\alpha$，则 $a\perp\beta$.

2. 掌握三种策略：求线面角的常用策略

(1)直接法(一作(或找)二证(或说)三计算).

(2)转移法(找过点与面平行的线或面).

(3)等积法(三棱锥变换顶点，属间接求法).

题点知识巩固

知识点一　线面垂直的定义及判定定理的理解

1. 若三条直线 OA，OB，OC 两两垂直，则直线 OA 垂直于（　　）

A. 平面 OAB　　B. 平面 OAC

C. 平面 OBC　　D. 平面 ABC

2. 如果一条直线垂直于一个平面内的：①三角形的两边；②梯形的两边；③圆的两条直径；④正五边形的两边. 能保证该直线与平面垂直的是_____.(填序号)

3. 下列命题中，正确的序号是_____.

①若直线 l 与平面 α 内的无数条直线垂直，则 $l\perp\alpha$；

②若直线 l 与平面 α 内的一条直线垂直，则 $l\perp\alpha$；

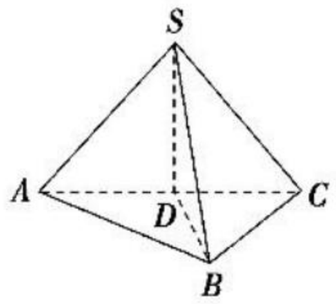
③若直线 l 不垂直于平面 α，则 α 内没有与 l 垂直的直线；

④若直线 l 不垂直于平面 α，则 α 内也可以有无数条直线与 l 垂直；

⑤过一点和已知平面垂直的直线有且只有一条.

知识点二　线面垂直的判定

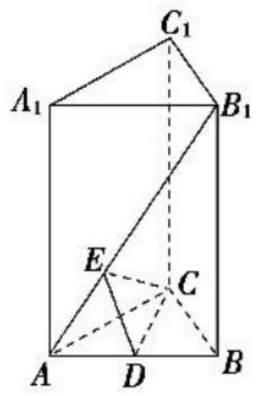
4. 如图，在三棱锥 $S-ABC$ 中，$\angle ABC=90^\circ$，D 是 AC 的中点，且 $SA=SB=SC$.



(1)求证：$SD\perp$ 平面 ABC；

(2)若 $AB=BC$，求证：$BD\perp$ 平面 SAC.

5. 如图所示，直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的底面 ABC 为等腰直角三角形，$\angle ACB=90^\circ$，C 点到 AB_1 的距离为 CE，D 为 AB 的中点.

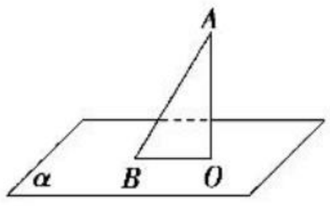


求证：(1)$CD\perp AA_1$；

(2)$AB_1\perp$ 平面 CED.

知识点三　直线与平面所成的角

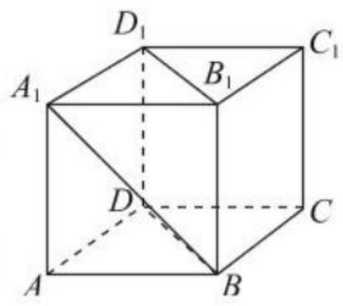
6. 如图所示，若斜线段 AB 是它在平面 α 上的射影 BO 的 2 倍，则 AB 与平面 α 所成的角是（　　）



A. 60°　　B. 45°

C. 30°　　D. 120°

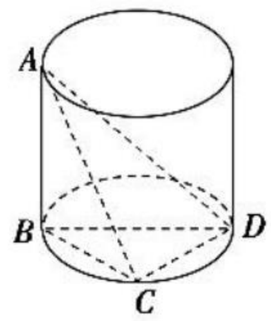
7. 如图，在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中.



(1)求 A_1B 与平面 AA_1D_1D 所成的角；

(2)求 A_1B 与平面 BB_1D_1D 所成的角.

8. 如图所示，AB 是圆柱的母线，BD 是圆柱底面圆的直径，C 是底面圆周上一点，且 $AB=BC=2$，$\angle CBD=45^\circ$，求直线 BD 与平面 ACD 所成角的大小.

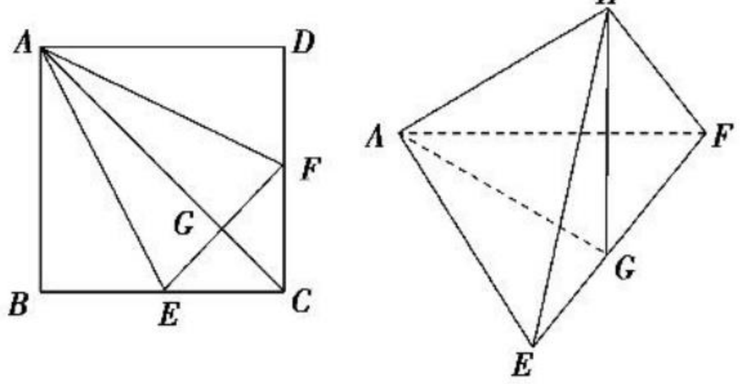


关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

提能达标过关

一、选择题

1. 如图，在正方形 $ABCD$ 中，E,F 分别是 BC,CD 的中点，G 是 EF 的中点，现在沿 AE,AF 及 EF 把这个正方形折成一个空间图形，使 B,C,D 三点重合，重合后的点记为 H，那么，在这个空间图形中必有　　（　　）



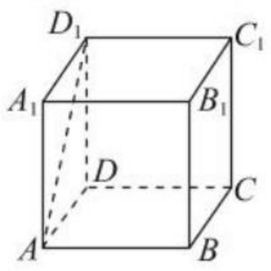
A. $AG\perp\triangle EFH$ 所在平面

B. $AH\perp\triangle EFH$ 所在平面

C. $HF\perp\triangle AEF$ 所在平面

D. $HG\perp\triangle AEF$ 所在平面

2. 正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中与 AD_1 垂直的平面是（　　）



A. 平面 DD_1C_1C

B. 平面 A_1DB

C. 平面 $A_1B_1C_1D_1$

D. 平面 A_1DB_1

3. 在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，下面结论错误的是（　　）

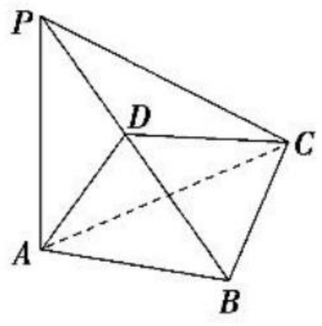
A. $BD\parallel$ 平面 CB_1D_1

B. $AC_1\perp BD$

C. $AC_1\perp$ 平面 CB_1D

D. 异面直线 AD 与 CB_1 所成的角为 $45°$

4. 如图，在三棱锥 $P-ABC$ 中，$PA\perp$ 平面 ABC，$AB\perp BC$，$PA=AB$，D 为 PB 的中点，则下列结论正确的有　　（　　）



①$BC\perp$ 平面 PAB；

②$AD\perp PC$；

③$AD\perp$ 平面 PBC；

④$PB\perp$ 平面 ADC.

A. 0 个　　B. 1 个

C. 2 个　　D. 3 个

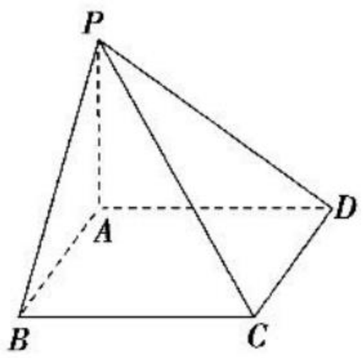
5. E,F,G 分别为正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中平面 A_1C_1，平面 B_1C，平面 CD_1 的对角线交点，则 AE 与 FG 所成的角为　　（　　）

A. $90°$　　B. $60°$

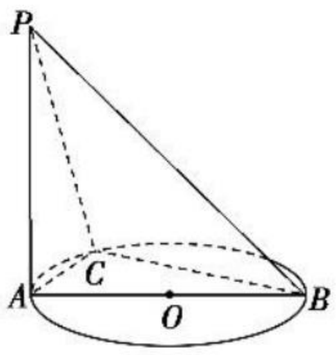
C. $45°$　　D. $30°$

二、填空题

6. 如图，已知四棱锥 $P-ABCD$ 中，底面 $ABCD$ 为矩形，$PA\perp$ 平面 $ABCD$，则图中共有直角三角形的个数为_____.



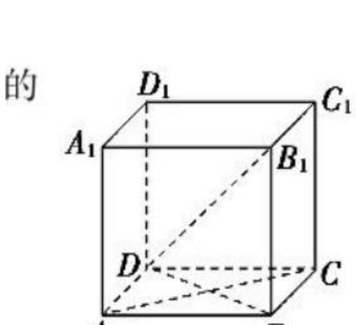
7. 如图所示，AB 是 $\odot O$ 的直径，$PA\perp\odot O$ 所在的平面，C 是圆上一点，且 $\angle ABC=30°$，$PA=AB$，则直线 PC 与平面 ABC 所成角的正切值为_____.



8. 在三棱锥 $P-ABC$ 中，$PA\perp PB$，$PA\perp PC$，$PC\perp PB$，则顶点 P 在底面上的投影是底面 $\triangle ABC$ 的_____心.

三、解答题

9. 如图所示，在四棱锥 $P-ABCD$ 中，底面 $ABCD$ 是矩形. 已知 $AD=2$，$PA=2$，$PD=2\sqrt{2}$，求证：$AD\perp$ 平面 PAB.



10. 如图，正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 2.

(1)求证：$AC\perp B_1D$；

(2)求三棱锥 $C-BDB_1$ 的体积.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

第 16 课时　平面与平面垂直的判定

掌握几个要点

1. 掌握一个步骤：求二面角大小的步骤

作 → 作出平面角

证 → 证明所作的角满足定义，即为所求二面角的平面角

求 → 将作出的角放在三角形中，计算出平面角的大小

简称为“一作二证三求”.

2. 熟悉一种思路：平面与平面垂直的判定定理的应用思路

(1)本质：通过直线与平面垂直来证明平面与平面垂直，即线面垂直⇒面面垂直.

(2)证题思路：处理面面垂直问题转化为处理线面垂直问题，进一步转化为处理线线垂直问题来解决.

题点知识巩固

知识点一　证明面面垂直

1. 下列命题中正确的是　(　　)

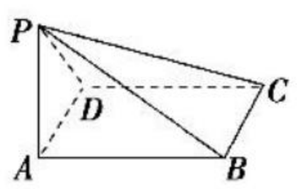
A. 平面 α 和 β 分别过两条互相垂直的直线，则 $\alpha\perp\beta$

B. 若平面 α 内的一条直线垂直于平面 β 内的两条平行直线，则 $\alpha\perp\beta$

C. 若平面 α 内的一条直线垂直于平面 β 内的两条相交直线，则 $\alpha\perp\beta$

D. 若平面 α 内的一条直线垂直于平面 β 内的无数条直线，则 $\alpha\perp\beta$

2. 如图，已知 $PA\perp$ 矩形 $ABCD$ 所在的平面，则图中互相垂直的平面有　(　　)

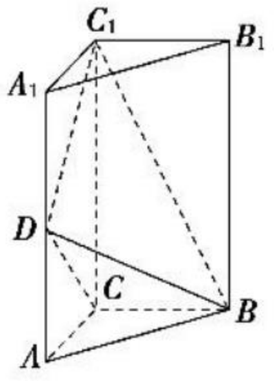


A. 2 对　　B. 3 对

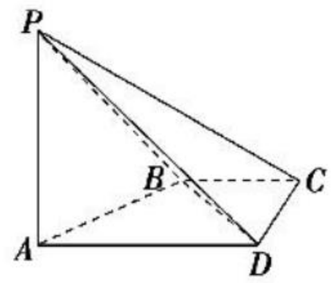
C. 4 对　　D. 5 对

3. 如图，在三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，侧棱垂直于底面，$\angle ACB=90^\circ$，$AC=\frac{1}{2}AA_1$，D 是棱 AA_1 的中点.

证明：平面 $BDC_1\perp$ 平面 BDC.



4. 如图，在四棱锥 $P-ABCD$ 中，$PA\perp CD$，$AD\parallel BC$，$\angle ADC=\angle PAB=90^\circ$，$BC=CD=\frac{1}{2}AD$.



(1)在平面 PAD 内找一点 M，使得直线 $CM\parallel$ 平面 PAB，并说明理由.

(2)证明：平面 $PAB\perp$ 平面 PBD.

知识点二　求二面角的大小

5. 有下列结论：

①两个相交平面组成的图形叫做二面角；

②异面直线 a，b 分别和一个二面角的两个面垂直，则 a，b 所成的角与这个二面角的平面角相等或互补；

③二面角的平面角是从棱上一点出发，分别在两个面内作射线所成的角；

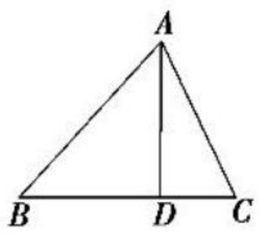
④二面角的大小与其平面角的顶点在棱上的位置没有关系.

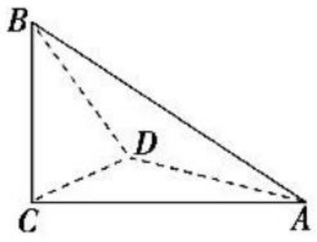
其中正确的是　(　　)

A. ①③　　B. ②④

C. ③④　　D. ①②

6. 如图所示，在 $\triangle ABC$ 中，$AD\perp BC$，$\triangle ABD$ 的面积是 $\triangle ACD$ 的面积的 2 倍，沿 AD 将 $\triangle ABC$ 翻折，使翻折后 $BC\perp$ 平面 ACD，此时二面角 $B-AD-C$ 的大小为　(　　)

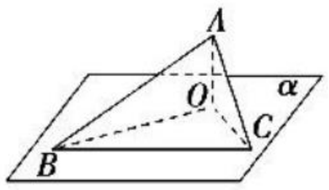




A. 30°　　B. 45°

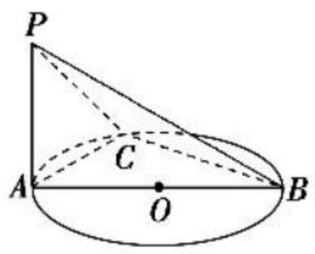
C. 60°　　D. 90°

7. 如图，已知 $Rt\triangle ABC$，斜边 $BC\subset\alpha$，点 $A\notin\alpha$，$AO\perp\alpha$，O 为垂足，$\angle ABO=30^\circ$，$\angle ACO=45^\circ$，求二面角 $A-BC-O$ 的大小.



关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

8. 如图，AB 是⊙O 的直径，PA 垂直于⊙O 所在的平面，C 是圆周上的一点，且 $PA=AC$，求二面角 $P-BC-A$ 的大小.

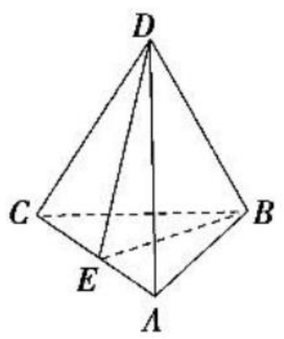


提能达标过关

一、选择题

1. 已知直线 m,n 与平面 α,β，给出下列三个结论：
①若 $m\parallel\alpha,n\parallel\alpha$，则 $m\parallel n$；②若 $m\parallel\alpha,n\perp\alpha$，则 $m\perp n$；
③若 $m\perp\alpha,m\parallel\beta$，则 $\alpha\perp\beta$.
其中正确结论的个数是（　　）
A. 0　　B. 1
C. 2　　D. 3

2. 如图所示，在四面体 $D-ABC$ 中，若 $AB=BC,AD=CD,E$ 是 AC 的中点，则下列命题中正确的是（　　）
A. 平面 $ABC\perp$ 平面 ABD
B. 平面 $ABD\perp$ 平面 BDC
C. 平面 $ABC\perp$ 平面 BDE，且平面 $ADC\perp$ 平面 BDE
D. 平面 $ABC\perp$ 平面 ADC，且平面 $ADC\perp$ 平面 BDE



3. 在四面体 $A-BCD$ 中，$AB=BC=CD=AD$，$\angle BAD=\angle BCD=90^\circ$，$A-BD-C$ 为直二面角，E 是 CD 的中点，则 $\angle AED$ 等于（　　）
A. 90°　　B. 45°
C. 60°　　D. 30°

4. 在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，截面 A_1BD 与底面 $ABCD$ 所成二面角 A_1-BD-A 的正切值为（　　）
A. $\frac{\sqrt{3}}{2}$　　B. $\frac{\sqrt{2}}{2}$
C. $\sqrt{2}$　　D. $\sqrt{3}$

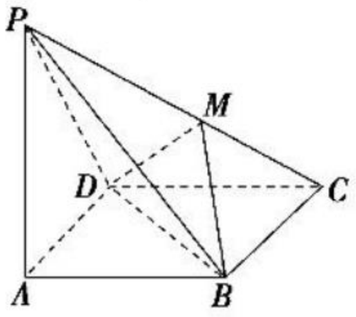
5. 在正四面体 $P-ABC$ 中，D,E,F 分别是 AB,BC,CA 的中点，下面四个结论中不成立的是（　　）
A. $BC\parallel$ 平面 PDF
B. $DF\perp$ 平面 PAE
C. 平面 $PDF\perp$ 平面 ABC
D. 平面 $PAE\perp$ 平面 ABC

二、填空题

6. α,β 是两个不同的平面，m,n 是平面 α 及 β 之外的两条不同直线，给出四个论断：
①$m\perp n$；②$\alpha\perp\beta$；③$n\perp\beta$；④$m\perp\alpha$.
以其中三个论断作为条件，余下一个论断作为结论，写出你认为正确的一个命题_____.

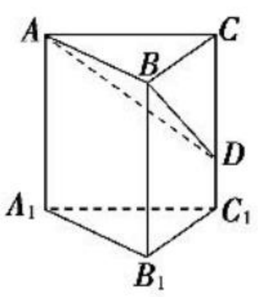
7. 如果规定：$x=y,y=z$，则 $x=z$，叫做 x,y,z 关于相等关系具有传递性，那么空间三个平面 α,β,γ 关于相交、垂直、平行这三种关系中具有传递性的是_____.

8. 如图所示，在四棱锥 $P-ABCD$ 中，$PA\perp$ 底面 $ABCD$，且底面各边都相等，M 是 PC 上的一动点，当点 M 满足_____时，平面 $MBD\perp$ 平面 PCD.（只要填写一个你认为是正确的条件即可）

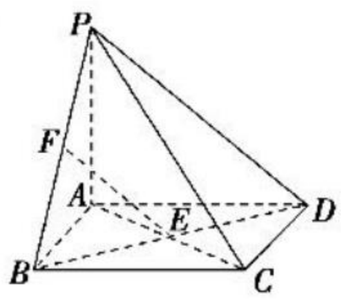


三、解答题

9. 在直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，$AB\perp BC$，D 为棱 CC_1 上任一点.
(1)求证：直线 $A_1B_1\parallel$ 平面 ABD；
(2)求证：平面 $ABD\perp$ 平面 BCC_1B_1.



10. 如图，四棱锥 $P-ABCD$ 的底面 $ABCD$ 为正方形，$PA\perp$ 底面 $ABCD$，AC,BD 交于点 E，F 是 PB 的中点. 求证：
(1)$EF\parallel$ 平面 PCD；
(2)平面 $PBD\perp$ 平面 PAC.



关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

第 17 课时　直线与平面垂直的性质

掌握几个要点

掌握一个内在联系：线面垂直的性质定理揭示了空间中“平行”与“垂直”关系的内在联系，提供了“垂直”与“平行”关系相互转化的依据.

题点知识巩固

知识点一　线面垂直的性质

1. 从圆柱的一个底面上任取一点(该点不在底面圆周上)，过该点作另一个底面的垂线，则这条垂线与圆柱的母线所在直线的位置关系是　(　　)

A. 相交　　B. 平行

C. 异面　　D. 相交或平行

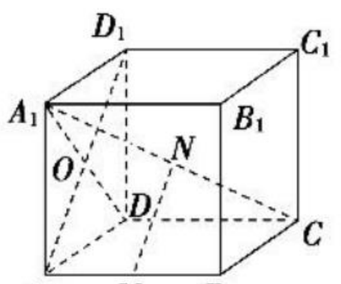
2. 下列命题：①垂直于同一条直线的两个平面互相平行；②垂直于同一个平面的两条直线互相平行；③一条直线在平面内，另一条直线与这个平面垂直，则这两条直线垂直.

其中正确的个数是　(　　)

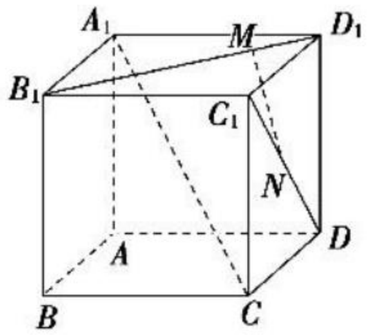
A. 0　　B. 1

C. 2　　D. 3

3. 如图所示，在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，M 是 AB 上一点，N 是 A_1C 的中点，$MN\perp$ 平面 A_1DC. 求证：$MN\parallel AD_1$.



4. 如图，已知正方体 A_1C.



(1)求证：$A_1C\perp B_1D_1$；

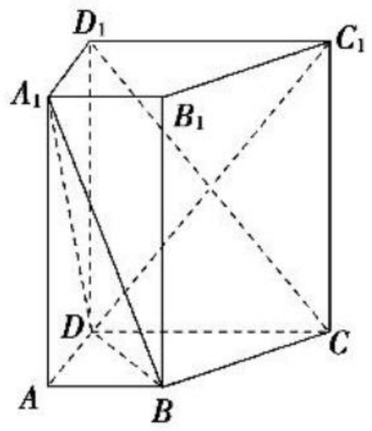
(2)M，N 分别为 B_1D_1 与 C_1D 上的点，且 $MN\perp B_1D_1$，$MN\perp C_1D$，求证：$MN\parallel A_1C$.

知识点二　线面垂直性质的综合应用

5. 如图所示，在直四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，已知 $DC=DD_1=2AD=2AB$，$AD\perp DC$，$AB\parallel DC$.

(1)求证：$D_1C\perp AC_1$；

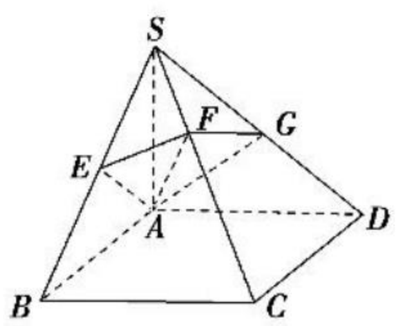
(2)设 E 是 DC 上一点，试确定 E 的位置，使 $D_1E\parallel$ 平面 A_1BD，并说明理由.



6. 如图，已知矩形 $ABCD$，过 A 作 $SA\perp$ 平面 AC，再过 A 作 $AE\perp SB$ 交 SB 于点 E，过 E 作 $EF\perp SC$ 交 SC 于点 F.

(1)求证：$AF\perp SC$；

(2)若平面 AEF 交 SD 于点 G，求证：$AG\perp SD$.



关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

提能达标过关

一、选择题

1. 直线 l 垂直于梯形 $ABCD$ 的两腰 AB 和 CD，直线 m 垂直于 AD 和 BC，则 l 与 m 的位置关系是　（　）

A. 相交　　B. 平行

C. 异面　　D. 不确定

2. 已知平面 α 与平面 β 相交，直线 $m\perp\alpha$，则　（　）

A. β 内必存在直线与 m 平行，且存在直线与 m 垂直

B. β 内不一定存在直线与 m 平行，不一定存在直线与 m 垂直

C. β 内不一定存在直线与 m 平行，必存在直线与 m 垂直

D. β 内必存在直线与 m 平行，不一定存在直线与 m 垂直

3. 设 m,n 是两条不同的直线，α,β 是两个不同的平面，则下列说法正确的是　（　）

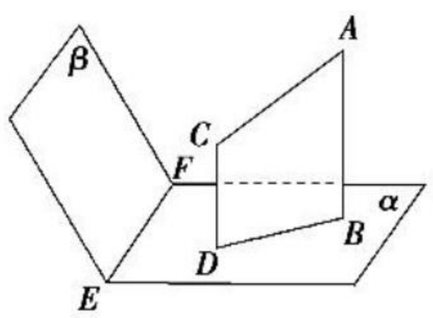
A. 若 $m/\!/\alpha,n/\!/\alpha$，则 $m/\!/n$

B. 若 $m/\!/\alpha,m/\!/\beta$，则 $\alpha/\!/\beta$

C. 若 $m/\!/n,m\perp\alpha$，则 $n\perp\alpha$

D. 若 $m/\!/\alpha,\alpha\perp\beta$，则 $m\perp\beta$

4. 如图，设平面 $\alpha\cap\beta=EF$，$AB\perp\alpha$，$CD\perp\alpha$，垂足分别是 B、D，如果增加一个条件，就能推出 $BD\perp EF$，这个条件不可能是下面四个选项中的　（　）



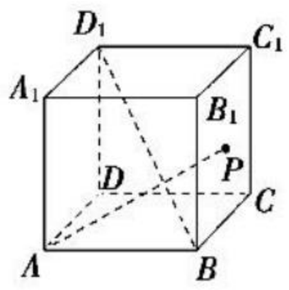
A. $AC\perp\beta$

B. $AC\perp EF$

C. AC 与 BD 在 β 内的射影在同一条直线上

D. AC 与 α、β 所成的角相等

5. 如图，正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，点 P 在侧面 BCC_1B_1 及其边界上运动，并且总是保持 $AP\perp BD_1$，则动点 P 的轨迹是　（　）



A. 线段 B_1C

B. 线段 BC_1

C. BB_1 中点与 CC_1 中点连成的线段

D. BC 中点与 B_1C_1 中点连成的线段

二、填空题

6. 已知直线 $m\subset$平面 α，直线 $n\subset$平面 α，$m\cap n=M$，直线 $a\perp m$，$a\perp n$，直线 $b\perp m$，$b\perp n$，则直线 a,b 的位置关系是_____.

7. AB 是 $\odot O$ 的直径，点 C 是 $\odot O$ 上的动点（点 C 不与 A，B 重合），过动点 C 的直线 VC 垂直于 $\odot O$ 所在的平面，D，E 分别是 VA，VC 的中点，则下列结论中正确的是_____（填写正确结论的序号）.

①直线 $DE/\!/$平面 ABC；

②直线 $DE\perp$平面 VBC；

③$DE\perp VB$；

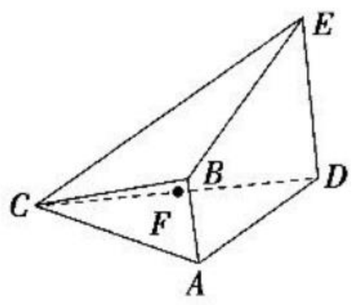
④$DE\perp AB$.

8. $\triangle ABC$ 的三个顶点 A、B、C 到平面 α 的距离分别为 2 cm、3 cm、4 cm，且它们在 α 的同侧，则 $\triangle ABC$ 的重心到平面 α 的距离为_____.

三、解答题

9. 如图，已知 $AB\perp$平面 ACD，$DE\perp$平面 ACD，$\triangle ACD$ 为等边三角形，$AD=DE=2AB$，F 为 CD 的中点.

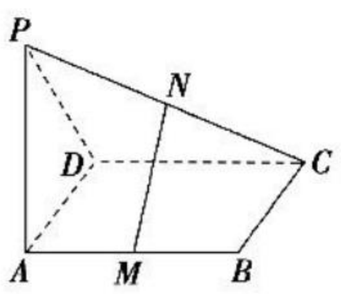
求证：平面 $BCE\perp$平面 CDE.



10. 如图，已知四边形 $ABCD$ 是矩形，$PA\perp$平面 $ABCD$，M、N 分别是 AB、PC 的中点.

(1)求证：$MN\perp AB$；

(2)若 $PA=AD$，求证：$MN\perp$平面 PCD.

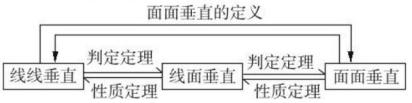


关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

第 18 课时　平面与平面垂直的性质

掌握几个要点

掌握一种关系：面面垂直的性质定理揭示了“面面垂直、线面垂直及线线垂直”间的内在联系，体现了数学中的转化与化归思想，其转化关系如下：



题点知识巩固

知识点一　面面垂直性质定理的应用

1. 已知平面 $\alpha\perp$ 平面 β，则下列命题中真命题的个数是（　　）

①α 内的任意直线必垂直于 β 内的无数条直线；

②在 β 内垂直于 α 与 β 的交线的直线必垂直于 α 内的任意一条直线；

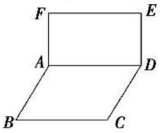
③α 内的任意一条直线必垂直于 β；

④过 β 内的任意一点作 α 与 β 交线的垂线，则这条直线必垂直于 α.

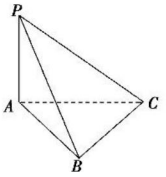
A. 4　　B. 3

C. 2　　D. 1

2. 如图所示，已知 $AF\perp$ 平面 $ABCD$，$DE\perp$ 平面 $ABCD$，且 $AF=DE$，$AD=6$，则 $EF=$_____.

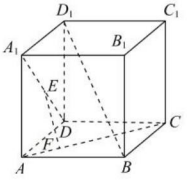


3. 如图，在三棱锥 $P-ABC$ 中，$PA\perp$ 平面 ABC，平面 $PAB\perp$ 平面 PBC. 求证：$BC\perp AB$.



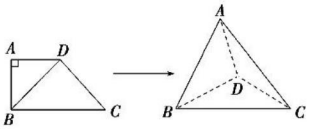
4. 如图，正方体 $A_1B_1C_1D_1-ABCD$ 中，EF 与异面直线 AC，A_1D 都垂直相交.

求证：$EF\parallel BD_1$.



知识点二　垂直关系的综合应用

5. 如图，四边形 $ABCD$ 中，$AD\parallel BC$，$AD=AB$，$\angle BCD=45°$，$\angle BAD=90°$，将 $\triangle ABD$ 沿 BD 折起，使平面 $ABD\perp$ 平面 BCD，构成四面体 $A-BCD$，则在四面体 $A-BCD$ 中，下列结论正确的是（　　）



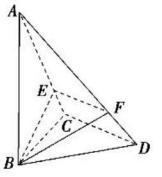
A. 平面 $ABD\perp$ 平面 ABC

B. 平面 $ADC\perp$ 平面 BDC

C. 平面 $ABC\perp$ 平面 BDC

D. 平面 $ADC\perp$ 平面 ABC

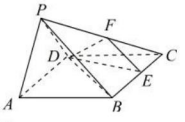
6. 如图，在 $\triangle BCD$ 中，$\angle BCD=90°$，$BC=CD=1$，$AB\perp$ 平面 BCD，$\angle ADB=60°$，E，F 分别是 AC，AD 上的动点，且 $\frac{AE}{AC}=\frac{AF}{AD}=\lambda(0<\lambda<1)$.



(1) 求证：无论 λ 为何值，总有平面 $BEF\perp$ 平面 ABC；

(2) 是否存在实数 λ，使得平面 $BEF\perp$ 平面 ACD.

7. 如图，在四棱锥 $P-ABCD$ 中，底面 $ABCD$ 是边长 a 的菱形，$\angle DAB=60°$，侧面 $\triangle PAD$ 为等边三角形，其所在平面垂直于底面 $ABCD$.



(1) 求证：$AD\perp PB$；

(2) 若 E 为 BC 边上的中点，能否在棱 PC 上找到一点 F，使平面 $DEF\perp$ 平面 $ABCD$？并证明你的结论.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

提能达标过关

一、选择题

1. 在空间中，下列命题正确的是　　（　　）

A. 若三条直线两两相交，则这三条直线确定一个平面

B. 若直线 m 与平面 α 内的一条直线平行，则 $m\parallel\alpha$

C. 若平面 $\alpha\perp\beta$，且 $\alpha\cap\beta=l$，则过 α 内一点 P 与 l 垂直的直线垂直于平面 β

D. 若直线 $a\parallel b$，且直线 $l\perp a$，则 $l\perp b$

2. 设 α,β 是两个不同的平面，l 是一条直线，以下命题正确的是　　（　　）

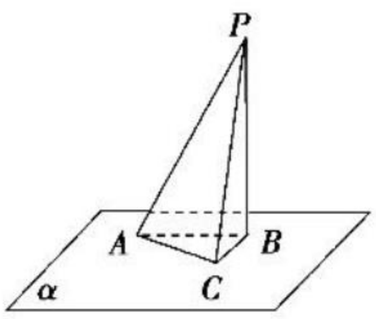
A. 若 $l\perp\alpha,\alpha\perp\beta$，则 $l\subset\beta$

B. 若 $l\parallel\alpha,\alpha\parallel\beta$，则 $l\subset\beta$

C. 若 $l\perp\alpha,\alpha\parallel\beta$，则 $l\perp\beta$

D. 若 $l\parallel\alpha,\alpha\perp\beta$，则 $l\perp\beta$

3. 如图所示，三棱锥 $P-ABC$ 的底面在平面 α 内，且 $AC\perp PC$，平面 $PAC\perp$ 平面 PBC，点 P,A,B 是定点，则动点 C 的轨迹是　　（　　）



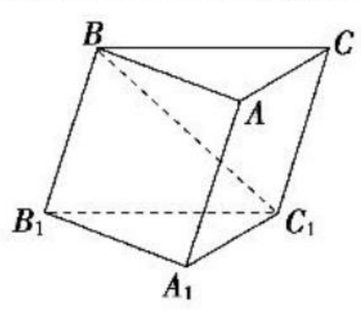
A. 一条线段

B. 一条直线

C. 一个圆

D. 一个圆，但要去掉两个点

4. 如图所示，在斜三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，$\angle BAC=90^\circ$，$BC_1\perp AC$，则 C_1 在底面 ABC 上的射影 H 必在　　（　　）



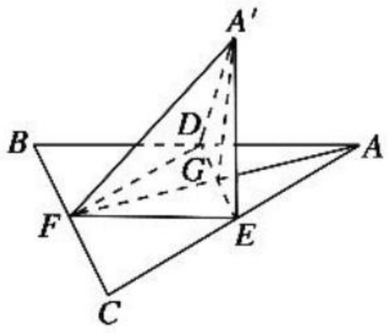
A. 直线 AB 上

B. 直线 BC 上

C. 直线 AC 上

D. $\triangle ABC$ 内部

5. 如图，边长为 a 的等边三角形 ABC 的中线 AF 与中位线 DE 交于点 G，已知 $\triangle A'DE$ 是 $\triangle ADE$ 绕 DE 旋转过程中的一个图形（A' 不与 A,F 重合），则下列命题中正确的是　　（　　）



①动点 A' 在平面 ABC 上的射影在线段 AF 上；

②$BC\parallel$ 平面 $A'DE$；

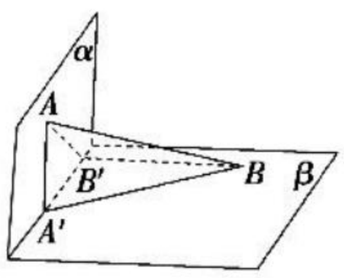
③三棱锥 $A'-FED$ 的体积有最大值.

A. ①　　B. ①②

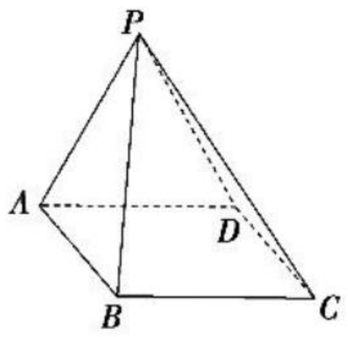
C. ①②③　　D. ②③

二、填空题

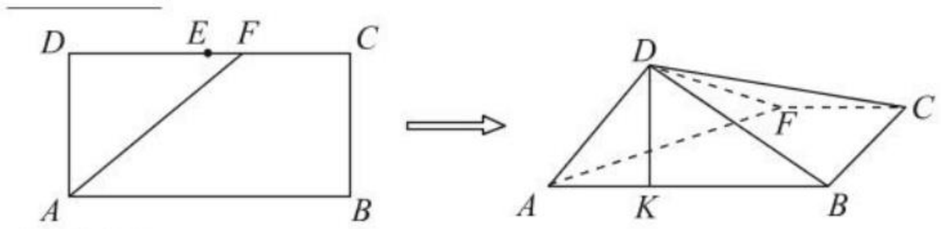
6. 如图所示，平面 $\alpha\perp$ 平面 β，$A\in\alpha$，$B\in\beta$，$AA'\perp A'B'$，$BB'\perp A'B'$，且 $AA'=3$，$BB'=4$，$A'B'=2$，则三棱锥 $A-A'BB'$ 的体积 $V=$_____.



7. 如图所示，P 是菱形 $ABCD$ 所在平面外的一点，且 $\angle DAB=60^\circ$，边长为 a. 侧面 PAD 为正三角形，其所在平面垂直于底面 $ABCD$，PB 与平面 AC 所成的角为 θ，则 $\theta=$_____.

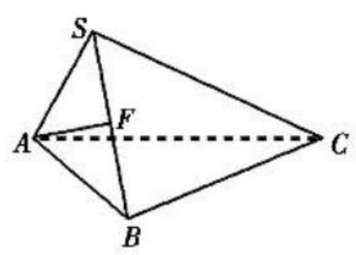


8. 如图，在长方形 $ABCD$ 中，$AB=2$，$BC=1$，E 为 DC 的中点，F 为线段 EC（端点除外）上一动点. 现将 $\triangle AFD$ 沿 AF 折起，使平面 $ABD\perp$ 平面 ABC. 在平面 ABD 内过点 D 作 $DK\perp AB$，K 为垂足. 设 $AK=t$，则 t 的取值范围是_____.

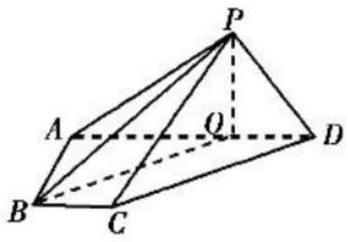


三、解答题

9. 如图，在三棱锥 $S-ABC$ 中，平面 $SAB\perp$ 平面 SBC，$AB\perp BC$. 过 A 作 $AF\perp SB$，垂足为 F. 求证：$BC\perp SA$.



10. 如图所示，在四棱锥 $P-ABCD$ 中，侧面 $PAD\perp$ 底面 $ABCD$，侧棱 $PA\perp PD$，底面 $ABCD$ 是直角梯形，其中 $BC\parallel AD$，$\angle BAD=90^\circ$，$AD=3BC$，O 是 AD 上一点.



(1) 若 $CD\parallel$ 平面 PBO，试指出点 O 的位置；

(2) 求证：平面 $PAB\perp$ 平面 PCD.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

SY 素养提升 SUYANGTISHENG 重点深化理解　素养培优提能

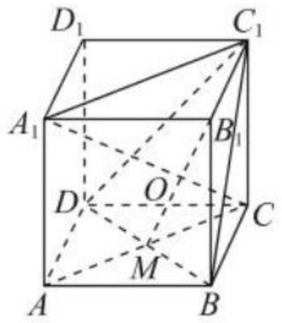
重点深化理解

一、破解立体几何中的三共问题

平面的基本性质是研究立体几何的基础，应用基本性质研究空间中的共点、共线、共面是立体几何中不容忽视的问题，下面就这类问题进行例析.

1. 点共线问题

【例 1】 如图所示，已知正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$，A_1C 与截面 DBC_1 交于点 O，AC 与 BD 交于点 M，求证：C_1，O，M 三点共线.



［证明］ 因为 $C_1\in$ 平面 DBC_1，且 $C_1\in$ 平面 A_1ACC_1，

所以 C_1 是平面 A_1ACC_1 与平面 DBC_1 的公共点.

又因为 $M\in AC$，所以 $M\in$ 平面 A_1ACC_1，

因为 $M\in BD$，所以 $M\in$ 平面 DBC_1，

所以 M 也是平面 A_1ACC_1 与平面 DBC_1 的公共点，

所以 C_1M 是平面 A_1ACC_1 与平面 DBC_1 的交线.

因为 O 为平面 A_1ACC_1 与平面 DBC_1 的交点，

所以 $O\in$ 平面 A_1ACC_1，$O\in$ 平面 DBC_1，

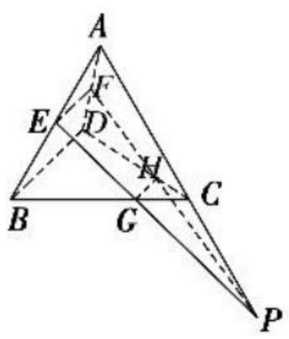
即 O 也是两个平面的公共点，

所以 $O\in C_1M$，即 C_1，M，O 三点共线.

【点评】 证明点共线，常常采用以下两种方法：①转化为证明这些点是某两个平面的公共点，然后根据公理 3 证得这些点都在这两个平面的交线上；②证明多点共线问题时，通常是过其中两点作一直线，然后证明其他的点都在这条直线上.

2. 线共点问题

【例 2】 如图，已知空间四边形 $ABCD$，E，F 分别是 AB，AD 的中点，G，H 分别是 BC，CD 上的点，且 $\frac{BG}{GC}=\frac{DH}{HC}=2$，求证：$EG$，$FH$，$AC$ 相交于同一点 P.



［证明］ 因为 E，F 分别是 AB，AD 的中点，所以 $EF/\!/BD$，且 $EF=\frac{1}{2}BD$.

又因为 $\frac{BG}{GC}=\frac{DH}{HC}=2$，

所以 $GH/\!/BD$，且 $GH=\frac{1}{3}BD$，

所以 $EF/\!/GH$，且 $EF>GH$.

所以四边形 $EFHG$ 是梯形，其两腰必相交，

设两腰 EG、FH 相交于一点 P，

因为 $EG\subset$ 平面 ABC，$FH\subset$ 平面 ACD，

所以 $P\in$ 平面 ABC，且 $P\in$ 平面 ACD，

又平面 $ABC\cap$ 平面 $ACD=AC$，所以 $P\in AC$.

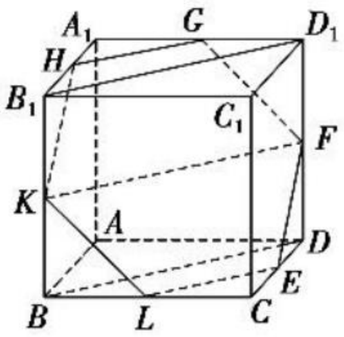
故 EG，FH，AC 相交于同一点 P.

【点评】 证明线共点的主要理论依据是公理 3，解答思路是首先确定一平面上的两条相交直线及交点位置；其次判断交点在另一条直线上，此种方法可以推广到多条直线共点问题.

3. 点共面问题

【例 3】 正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，E，F，G，H，K，L 分别是 CD，DD_1，A_1D_1，A_1B_1，BB_1，BC 的中点.

求证：这六点共面.



［证明］ 连接 BD，B_1D_1 和 KF，

因为 E，L 是 CD，BC 的中点，

所以 $EL/\!/BD$.

又矩形 BDD_1B_1 中 $KF/\!/BD$，

所以 $KF/\!/EL$，

所以 KF，EL 可确定平面 α，

所以 E，F，K，L 在平面 α 内，

同理 $EH/\!/KL$，

故 E，H，K，L 都在平面 β 内.

又平面 α 与平面 β 都经过不共线的三点 E，K，L，

故平面 α 与平面 β 重合，

所以 E，F，H，K，L 都在平面 α 内.

同理 $G\in\alpha$，

所以 E，F，G，H，K，L 六点共面.

【点评】 证明共面问题常有如下两个方法：①直接法：先确定一个平面，再证明其余元素均在这个平面上；②间接法：先证明这些元素分别在几个平面上，再证明这些平面重合.

通过上面的三例，同学们对这三类问题有所了解. 在今后解决同类问题时，需要根据问题的具体情况，进行逻辑划分，即分类讨论，运用平面的基本性质来求证.

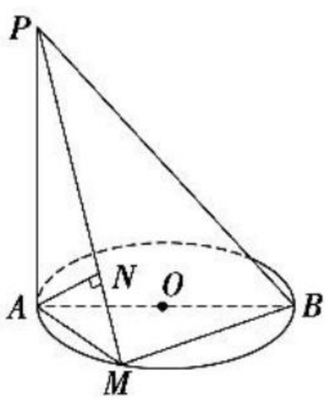
二、在转化中证明空间垂直关系

空间中的各种垂直关系是高中数学的重要内容. 在高考中着重考查线线垂直、线面垂直、面面垂直的证明，这就需要利用线面垂直、面面垂直的判定定理及其性质，运用三者之间的转化关系.

1. 证明线面垂直

证明线面垂直通常有两种方法：一是利用线面垂直的判定定理，由线线垂直得到线面垂直；二是利用面面垂直的性质定理，由面面垂直得到线面垂直.

【例 4】 如图，AB 是圆 O 的直径，PA 垂直于圆 O 所在的平面，M 是圆周上任意一点，$AN\perp PM$，垂足为点 N. 求证：$AN\perp$ 平面 PBM.



［证明］ 因为 PA 垂直于圆 O 所在的平面，所以 $PA\perp BM$.

因为 M 是圆周上一点，

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

所以 $BM\perp AM$.

又因为 $PA\cap AM=A$，所以 $BM\perp$ 平面 PAM. 所以 $BM\perp AN$.

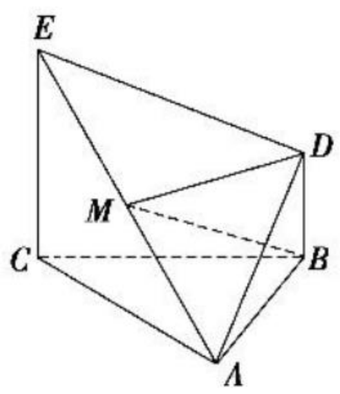
又因为 $AN\perp PM$，$PM\cap BM=M$，PM，$MB\subset$ 平面 PMB，所以 $AN\perp$ 平面 PBM.

【点评】 本题是考查线面垂直很好的载体，它融合了初中所学的圆的特征，在求解时要注意线线、线面垂直关系的转化.

2. 证明面面垂直

证明面面垂直一般有两种方法：一是利用面面垂直的定义，通过求二面角的平面角为直角而得到，这种方法在证明面面垂直时应用较少；二是利用面面垂直的判定定理由线面垂直得到面面垂直.

【例 5】 如图，$\triangle ABC$ 为等边三角形，$EC\perp$ 平面 ABC，$BD/\!/EC$，且 $EC=CA=2BD$，M 是 EA 的中点.



(1)求证：$DE=DA$；

(2)求证：平面 $BDM\perp$ 平面 ECA.

[证明] (1)如图，取 EC 的中点 F，连接 DF，易知 $DF/\!/BC$.

因为 $EC\perp BC$，所以 $DF\perp EC$.

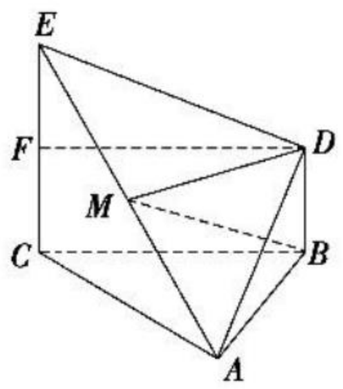
在 Rt$\triangle EFD$ 和 Rt$\triangle DBA$ 中，

因为 $EF=\frac{1}{2}EC=BD$，

$FD=BC=AB$，

所以 Rt$\triangle EFD\cong$Rt$\triangle DBA$.

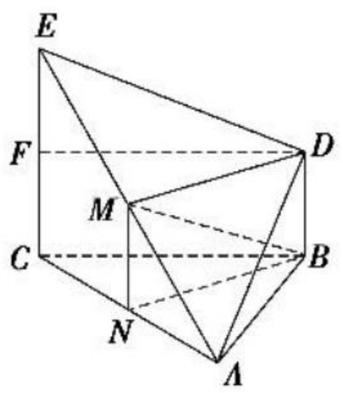
所以 $DE=DA$.



(2)如图，取 CA 的中点 N，连接 MN，BN，则 $MN/\!/EC$ 且 $MN=\frac{1}{2}EC$.

又 $EC/\!/BD$ 且 $BD=\frac{1}{2}EC$，

所以 $MN/\!/BD$ 且 $MN=BD$.



所以四边形 $BDMN$ 是平行四边形.

所以点 N 在平面 BDM 内.

因为 $EC\perp$ 平面 ABC，$BN\subset$ 平面 ABC，

所以 $EC\perp BN$.

又 $CA\perp BN$，$EC\cap CA=C$，

所以 $BN\perp$ 平面 ECA.

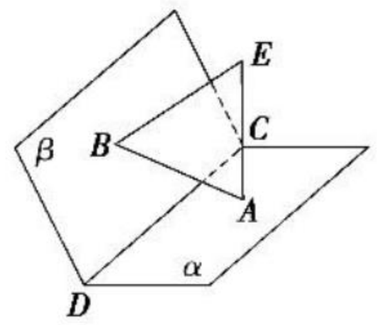
因为 $BN\subset$ 平面 $MNBD$，所以平面 $BDM\perp$ 平面 ECA.

【点评】 在证明面面垂直时通常转化为证明线面垂直的问题.

3. 证明线线垂直

证明线线垂直，往往根据线面垂直的性质，即如果一条直线垂直于一个平面，那么它和这个平面内的任意一条直线垂直.

【例 6】 如图，已知平面 $\alpha\cap$ 平面 $\beta=CD$，$EA\perp\alpha$，$EB\perp\beta$，垂足分别为 A，B，求证：$CD\perp AB$.



[证明] 因为 $EA\perp\alpha$，$CD\subset\alpha$，所以 $CD\perp EA$.

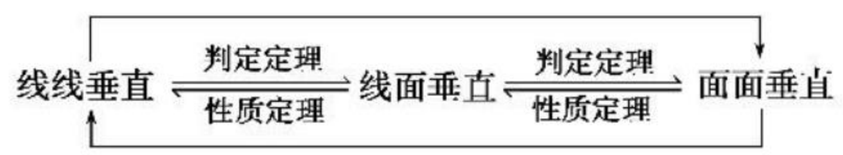
又因为 $EB\perp\beta$，$CD\subset\beta$，所以 $EB\perp CD$.

又因为 $EA\cap EB=E$，EA，$EB\subset$ 平面 ABE，所以 $CD\perp$ 平面 ABE.

因为 $AB\subset$ 平面 ABE，

所以 $CD\perp AB$.

【点评】 证明空间中的垂直关系的问题时，经常要用到转化与化归的数学思想，主要体现在线线垂直、线面垂直、面面垂直证明的相互转化过程之中. 其转化关系如下：



三、几何法求空间角

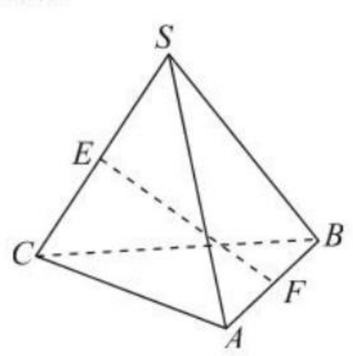
空间角的计算是对空间线与线、线与面、面与面位置关系的一种定量研究和精确的刻画. 利用几何法求解空间角的过程可以将逻辑推理与运算融为一体，能综合考查同学们的空间想象能力、逻辑推理能力、运算能力、分析问题及解决问题的能力. 下面就利用几何法求空间角的策略进行分析.

1. 求异面直线所成的角

求异面直线所成的角的解题思路是：把空间两异面直线通过平移，转化为平面内相交直线所成的角，具体的平移过程应视题而定. 主要有以下四种平移途径：

①利用三角形的中位线平移；②利用平行线分线段成比例的推论平移；③利用平行四边形平移；④利用补形平移.

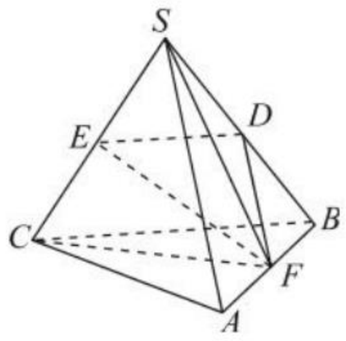
【例 7】 如图，在每个面都为等边三角形的四面体 $S-ABC$ 中，若点 E，F 分别为 SC，AB 的中点，试求异面直线 EF 与 SA 所成的角.



[分析] 要求异面直线 EF 与 SA 所成的角，首先依定义作出其所成角，为此取 SB 的中点 D，连接 ED，FD，根据三角形中位线性质知$\angle EFD$ 是异面直线 EF 与 SA 所成的角.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

［解］　如图，连接 CF，SF，设四面体 $S-ABC$ 的棱长为 a，



则 $SF=CF=\frac{\sqrt{3}}{2}a$.

因为 E 为 SC 的中点，所以 $EF\perp SC$.

在 Rt$\triangle SEF$ 中，$SE=\frac{1}{2}SC=\frac{1}{2}a$，

所以 $EF=\sqrt{SF^2-SE^2}=\frac{\sqrt{2}}{2}a$.

取 SB 的中点为 D，连接 ED，FD. 因为 $BC=SA=a$，

而 $FD/\!/SA$ 且 $FD=\frac{1}{2}SA$，$ED/\!/CB$ 且 $ED=\frac{1}{2}CB$，

所以 $FD=ED=\frac{1}{2}a$，于是 $FD^2+ED^2=EF^2$.

故$\triangle DEF$ 是等腰直角三角形，可得$\angle EFD=45°$，

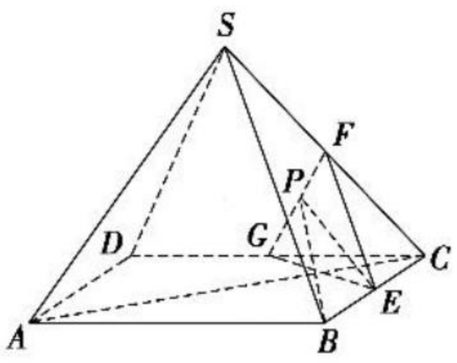
即异面直线 EF 与 SA 所成的角是 $45°$.

【点评】　本题以正四面体为依托，通过求异面直线所成的角，考查了异面直线的有关概念，明确了求异面直线所成角的具体求解方法，即“作—证—求”.

2. 求线面角

求线面角，要找出斜线在平面上的射影，其关键是作垂线找垂足，把线面角转化到一个三角形中求解.

【例 8】　如图，正四棱锥 $S-ABCD$ 中，$SA=AB=2$，E，F，G 分别为 BC，SC，CD 的中点. 设 P 为线段 FG 上任意一点.



(1)求证：$PE\perp AC$；

(2)当 P 为线段 FG 的中点时，求直线 BP 与平面 EFG 所成角的余弦值.

［解］　(1)证明：如图，连接 BD，交 AC 于 O，

∵ $S-ABCD$ 为正四棱锥，∴ $SO\perp$ 底面 $ABCD$，$BD\perp AC$，

又 $AC\subset$平面 $ABCD$，∴ $SO\perp AC$，

∵ $BD\cap SO=O$，BD，$SO\subset$平面 SBD，∴ $AC\perp$平面 SBD，

∵ E，F，G 分别为 BC，SC，CD 的中点，

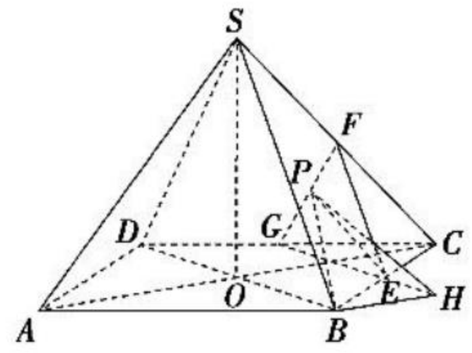
∴ $FG/\!/SD$，$BD/\!/EG$.

又 $FG\cap EG=G$，$SD\cap BD=D$，FG，$EG\subset$平面 EFG，SD，$BD\subset$平面 SBD，

∴平面 $EFG/\!/$平面 BSD，∴ $AC\perp$平面 GEF.

又∵ $PE\subset$平面 GEF，∴ $PE\perp AC$.

(2)过 B 作 $BH\perp GE$ 于 H，连接 PH，



∵ $BD\perp AC$，$BD/\!/GH$，∴ $BH/\!/AC$，

由(1)知 $AC\perp$平面 GEF，则 $BH\perp$平面 GEF.

∴$\angle BPH$ 就是直线 BP 与平面 EFG 所成的角.

在 Rt$\triangle BHP$ 中，$BH=\frac{\sqrt{2}}{2}$，$PH=\frac{\sqrt{13}}{2}$，$PB=\frac{\sqrt{15}}{2}$，

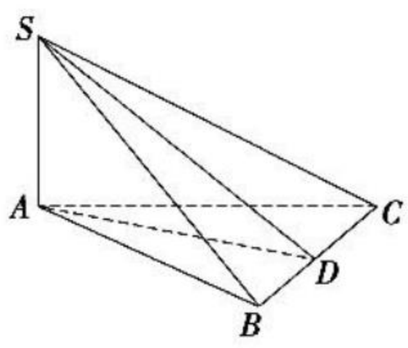
故 $\cos\angle BPH=\frac{PH}{PB}=\frac{\sqrt{195}}{15}$.

3. 求二面角

求二面角是通过求其平面角的大小实现的，而平面角的作法中必须强调“垂直”，其常见途径：(1)利用共底的两个等腰三角形；(2)利用共公共边的两个全等三角形；(3)利用线面垂直和面面垂直的性质；(4)对于“无棱”二面角一般须先确定棱，然后再利用上述方法作出平面角.

【例 9】　在三棱锥 $S-ABC$ 中，已知$\triangle ABC$ 是边长为 a 的等边三角形，且 $SA\perp$底面 ABC，$AS=\frac{1}{2}a$，求二面角 $A-BC-S$ 的大小.

［解］　如图所示，因为 $AB=AC=a$，$\angle BAS=\angle CAS=90°$，所以 $SB=SC$. 取 BC 的中点为 D，连接 AD，SD，则由等腰三角形的性质，可得 $SD\perp BC$，$AD\perp BC$. 于是由二面角的平面角的定义可知，$\angle ADS$ 为二面角 $A-BC-S$ 的平面角.



因为 $AS=\frac{1}{2}a$，$AD=\frac{\sqrt{3}}{2}BC=\frac{\sqrt{3}}{2}a$，

所以在 Rt$\triangle ASD$ 中，$\tan\angle ADS=\frac{\frac{1}{2}a}{\frac{\sqrt{3}}{2}a}=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

所以$\angle ADS=30°$，

即所求二面角 $A-BC-S$ 的大小为 $30°$.

【点评】　应用二面角的定义时，常常要先在二面角的棱上取一个适当的点(常取中点)，然后再过这一点在二面角的两个半平面内分别作棱的垂线，找出二面角的平面角，然后通过解三角形求得二面角的大小.

素养培优提能

一、选择题

1. 在空间四边形 $ABCD$ 的边 AB，BC，CD，DA 上分别取 E，F，G，H 四点，如果 EF，HG 交于一点 P，则　（　）

A. 点 P 一定在直线 BD 上

B. 点 P 一定在直线 AC 上

C. 点 P 一定在直线 AC 或 BD 上

D. 点 P 既不在直线 AC 上，也不在直线 BD 上

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

2. 给定下列四个命题：

①若一个平面内的两条直线与另一个平面都平行，则这两个平面相互平行；

②若一个平面经过另一个平面的垂线，则这两个平面相互垂直；

③垂直于同一直线的两条直线相互平行；

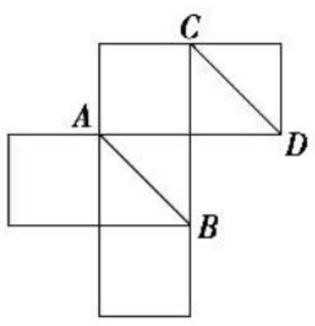
④若两个平面垂直，那么一个平面内与它们的交线不垂直的直线与另一个平面也不垂直.

其中，为真命题的是（　　）

A. ①和②　　B. ②和③

C. ③和④　　D. ②和④

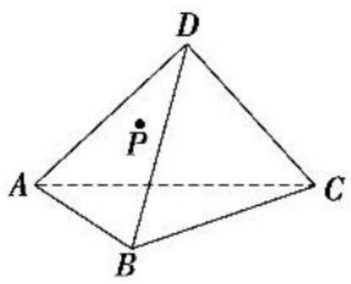
3. 如图所示，将无盖正方体纸盒展开，直线 AB，CD 在原正方体中的位置关系是（　　）



A. 平行　　B. 相交且垂直

C. 异面直线　　D. 相交成 60°角

4. 如图，在正四面体 $D-ABC$ 中，$P\in$ 平面 DBA，则在平面 DAB 内过点 P 与直线 BC 成 60°角的直线共有（　　）



A. 0 条　　B. 1 条

C. 2 条　　D. 3 条

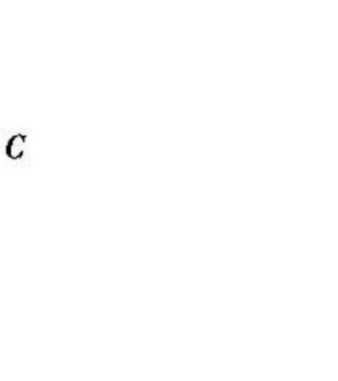
5. 在空间四边形 $ABCD$ 中，AB，BC，CD 的中点分别是 P，Q，R，且 $PQ=2$，$QR=\sqrt{5}$，$PR=3$，那么异面直线 AC 和 BD 所成的角是（　　）

A. 90°　　B. 60°

C. 45°　　D. 30°

二、填空题

6. 如图所示，在直四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，当底面四边形 $A_1B_1C_1D_1$ 满足条件_____时，有 $A_1C\perp B_1D_1$.（注：填上你认为正确的一种情况即可，不必考虑所有可能的情况）

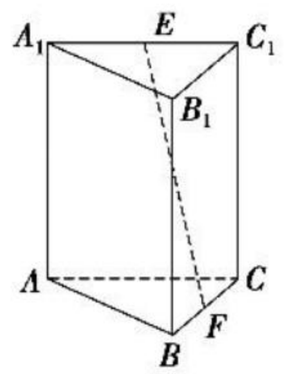


7. 已知三棱锥 $A-BCD$ 中，$AB=CD$，且直线 AB 与 CD 成 60°角，点 M，N 分别是 BC，AD 的中点，则直线 AB 和 MN 所成的角是_____.

8. 已知四面体 $P-ABC$ 中，$PA=PB=4$，$PC=2$，$AC=2\sqrt{5}$，$PB\perp$ 平面 PAC，则四面体 $P-ABC$ 外接球的体积为_____.

三、解答题

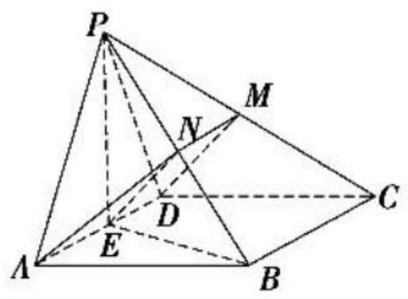
9. 如图，在直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，E，F 分别为 A_1C_1 和 BC 的中点.



(1)求证：EF // 平面 AA_1B_1B；

(2)若 $AA_1=3$，$AB=2\sqrt{3}$，求 EF 与平面 ABC 所成的角.

10. 如图，在四棱锥 $P-ABCD$ 中，侧面 PAD 是正三角形，且与底面 $ABCD$ 垂直，底面 $ABCD$ 是边长为 2 的菱形，$\angle BAD=60°$，N 是 PB 的中点，E 为 AD 的中点，过 A，D，N 的平面交 PC 于点 M.



求证：(1)EN // 平面 PDC；

(2)$BC\perp$ 平面 PEB；

(3)平面 $PBC\perp$ 平面 $ADMN$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

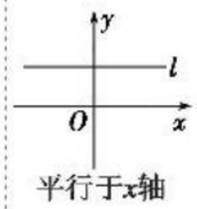
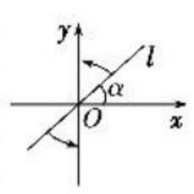
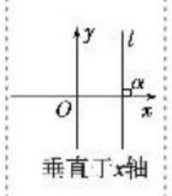
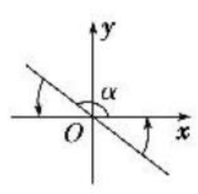
第三章 直线与方程

3.1 直线的倾斜角与斜率

第19课时 倾斜角与斜率

掌握几个要点

明辨两个概念：直线的斜率和倾斜角反映了直线的倾斜程度，二者紧密相连，如下表：

直线情况	 平行于x轴		 垂直于x轴	
α的大小	0°	0°<α<90°	90°	90°<α<180°
k的范围	0	k>0	不存在	k<0
k的增减情况		k随α的增大而增大		k随α的增大而增大

题点知识巩固

知识点一 直线的倾斜角

1. 设直线 l 过原点，其倾斜角为 α，将直线 l 绕坐标原点沿逆时针方向旋转 $40°$，得直线 l_1，则直线 l_1 的倾斜角为（　　）

   A. $\alpha+40°$

   B. $\alpha-140°$

   C. $140°-\alpha$

   D. 当 $0°\leqslant\alpha<140°$ 时，为 $\alpha+40°$；当 $140°\leqslant\alpha<180°$ 时，为 $\alpha-140°$

2. 已知直线 l 经过第二、四象限，则直线 l 的倾斜角 α 的取值范围是（　　）

   A. $0°\leqslant\alpha<90°$　　B. $90°\leqslant\alpha<180°$

   C. $90°<\alpha<180°$　　D. $0°<\alpha<180°$

3. 已知直线 l 向上方向与 y 轴正向所成的角为 $30°$，则直线 l 的倾斜角为_____.

知识点二 直线的斜率

4. 若直线的倾斜角为 $60°$，则直线的斜率为（　　）

   A. $\sqrt{3}$　　B. $-\sqrt{3}$

   C. $\frac{\sqrt{3}}{3}$　　D. $-\frac{\sqrt{3}}{3}$

5. 已知过点 $A(3,1)$，$B(m,-2)$ 的直线的斜率为 1，则 m 的值为_____.

6. 经过下列两点的直线的斜率是否存在？如果存在，求其斜率，并确定直线的倾斜角 α.

   (1) $A(2,3)$，$B(4,5)$；

   (2) $C(-2,3)$，$D(2,-1)$；

   (3) $P(-3,1)$，$Q(-3,10)$.

知识点三 直线的倾斜角及斜率的应用

7. 若三点 $A(2,3)$，$B(3,2)$，$C\left(\frac{1}{2},m\right)$ 共线，则实数 m 的值为_____.

8. 直线 l 过点 $P(1,0)$，且与以 $A(2,1)$，$B(0,\sqrt{3})$ 为端点的线段有公共点，求直线 l 的斜率和倾斜角的取值范围.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

提能达标过关

一、选择题

1. 已知直线 l 的斜率的绝对值为 $\sqrt{3}$，则直线 l 的倾斜角为　　(　　)

A. 60°　　B. 30°

C. 60°或 120°　　D. 30°或 150°

2. 已知经过点 $P(3,m)$ 和点 $Q(m,-2)$ 的直线的斜率为 2，则 m 的值为　　(　　)

A. -1　　B. 1

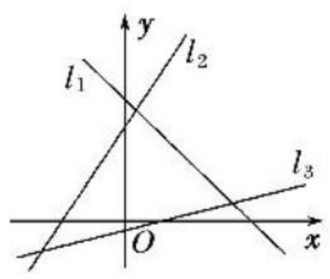
C. 2　　D. $\frac{4}{3}$

3. 直线 l 过原点(0,0)，且不过第三象限，那么 l 的倾斜角 α 的取值范围是　　(　　)

A. $[0°,90°]$　　B. $[90°,180°)$

C. $[90°,180°)$ 或 $\alpha=0°$　　D. $[90°,135°]$

4. 若图中直线 l_1,l_2,l_3 的斜率分别为 k_1,k_2,k_3，则　　(　　)



A. $k_1<k_2<k_3$

B. $k_3<k_1<k_2$

C. $k_3<k_2<k_1$

D. $k_1<k_3<k_2$

5. 已知直线 l 过点 $A(1,2)$，且不过第四象限，则直线 l 的斜率 k 的最大值是　　(　　)

A. 2　　B. 1

C. $\frac{1}{2}$　　D. 0

二、填空题

6. 若三点 $A(2,2),B(a,0),C(0,b)(ab\neq0)$ 共线，则 $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$ 的值为_____.

7. 已知点 $A(3,4)$，在 y 轴上有一点 B，若 $k_{AB}=2$，则 B 点的坐标为_____.

8. 已知直线 PQ 的斜率为 $-\sqrt{3}$，将直线绕点 P 顺时针旋转 60°所得的直线的斜率是_____.

三、解答题

9. 已知坐标平面内两点 $M(m+3,2m+5)$，$N(m-2,1)$.

(1)当 m 为何值时，直线 MN 的倾斜角为锐角？

(2)当 m 为何值时，直线 MN 的倾斜角为钝角？

(3)直线 MN 的倾斜角可能为直角吗？

10. 已知 $A(3,3)$，$B(-4,2)$，$C(0,-2)$. 若点 D 在线段 BC 上(包括端点)移动，求直线 AD 的斜率的变化范围.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

第 20 课时　两条直线平行与垂直的判定

掌握几个要点

掌握一种方法：两直线平行或垂直的判定方法

斜率		直线
斜率均不存在		平行或重合
一条直线的斜率为 0，另一条直线的斜率不存在		垂直
斜率均存在	相等	平行或重合
	积为 -1	垂直

题点知识巩固

知识点一　两条直线平行的判定

1. 若过点 $P(3,2m)$ 和点 $Q(-m,2)$ 的直线与过点 $M(2,-1)$ 和点 $N(-3,4)$ 的直线平行，则 m 的值是（　　）

A. $\frac{1}{3}$　　B. $-\frac{1}{3}$

C. 2　　D. -2

2. 已知 $A\left(1,-\frac{a+1}{3}\right)$，$B\left(0,-\frac{1}{3}\right)$，$C(2-2a,1)$，$D(-a,0)$ 四点，若直线 AB 与直线 CD 平行，则 $a=$_____.

3. 下列直线 l_1 与直线 l_2（l_1 与 l_2 不重合）平行的有_____.（填序号）

①l_1 经过点 $A(2,1)$，$B(-3,5)$，l_2 经过点 $C(3,-3)$，$D(8,-7)$；

②l_1 的斜率为 2，l_2 经过点 $A(1,1)$，$B(2,2)$；

③l_1 的倾斜角为 $60°$，l_2 经过点 $M(1,\sqrt{3})$，$N(-2,-2\sqrt{3})$；

④l_1 经过点 $E(-3,2)$，$F(-3,10)$，l_2 经过点 $P(5,-2)$，$Q(5,5)$.

知识点二　两条直线垂直的判定

4. 已知两条直线 l_1，l_2 的斜率是方程 $3x^2+mx-3=0(m\in\mathbf{R})$ 的两个根，则 l_1 与 l_2 的位置关系是（　　）

A. 平行　　B. 垂直

C. 可能重合　　D. 无法确定

5. 若不同两点 P，Q 的坐标分别为 (a,b)，$(3-b,3-a)$，则线段 PQ 的垂直平分线的斜率为_____.

6. 已知 $\triangle ABC$ 的顶点为 $A(5,-1)$，$B(1,1)$，$C(2,m)$，若 $\triangle ABC$ 为直角三角形，求 m 的值.

知识点三　垂直与平行的综合应用

7. 已知四边形 $ABCD$ 的顶点 $B(6,-1)$，$C(5,2)$，$D(1,2)$，若四边形 $ABCD$ 为直角梯形，求 A 点坐标.（A，B，C，D 按逆时针方向排列）

8. 已知$\square ABCD$ 中，$A(1,2)$，$B(5,0)$，$C(3,4)$.

(1)求点 D 的坐标；

(2)试判定$\square ABCD$ 是否为菱形？

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

提能达标过关

一、选择题

1. 若直线 l_1 的倾斜角为 $135°$，直线 l_2 经过点 $P(-2,-1)$，$Q(3,-6)$，则直线 l_1 与 l_2 的位置关系是　　(　　)

A. 垂直　　B. 平行

C. 重合　　D. 平行或重合

2. 如果直线 l_1 的斜率为 a，$l_1 \perp l_2$，那么直线 l_2 的斜率为　　(　　)

A. $\frac{1}{a}$　　B. a

C. $-\frac{1}{a}$　　D. $-\frac{1}{a}$或不存在

3. 已知直线 l 的倾斜角为 $20°$，直线 $l_1 /\!/ l$，直线 $l_2 \perp l$，则直线 l_1 与 l_2 的倾斜角分别是　　(　　)

A. $20°,110°$　　B. $70°,70°$

C. $20°,20°$　　D. $110°,20°$

4. 已知点 $A(m,3)$，$B(2m,m+4)$，$C(m+1,2)$，$D(1,0)$，且直线 AB 与直线 CD 平行，则 m 的值为　　(　　)

A. 1　　B. 0

C. 0 或 1　　D. 0 或 2

5. 已知$\triangle ABC$ 的顶点 $B(2,1)$，$C(-6,3)$，其垂心为 $H(-3,2)$，则其顶点 A 的坐标为　　(　　)

A. $(-19,-62)$　　B. $(19,-62)$

C. $(-19,62)$　　D. $(19,62)$

二、填空题

6. 已知直线 l_1 经过点 $A(0,-1)$和点 $B\left(\frac{4}{a},1\right)$，直线 l_2 经过点 $M(1,1)$和点 $N(0,-2)$，若 l_1 与 l_2 没有公共点，则实数 a 的值为_____.

7. 若点 $P(a,b)$与点 $Q(b-1,a+1)$关于直线 l 对称，则直线 l 的倾斜角 α 为_____.

8. 直线 l_1，l_2 的斜率 k_1，k_2 是关于 k 的方程 $2k^2-3k-b=0$ 的两根，若 $l_1 \perp l_2$，则 $b=$_____；若 $l_1 /\!/ l_2$，则 $b=$_____.

三、解答题

9. 当 m 为何值时，过两点 $A(1,1)$，$B(2m^2+1,m-2)$的直线：

(1)倾斜角为 $135°$；

(2)与过两点$(3,2)$，$(0,-7)$的直线垂直；

(3)与过两点$(2,-3)$，$(-4,9)$的直线平行.

10. 已知直线 l_1 经过点 $A(3,a)$，$B(a-1,2)$，直线 l_2 经过点 $C(1,2)$，$D(-2,a+2)$.

(1)若 $l_1 /\!/ l_2$，求 a 的值；

(2)若 $l_1 \perp l_2$，求 a 的值.

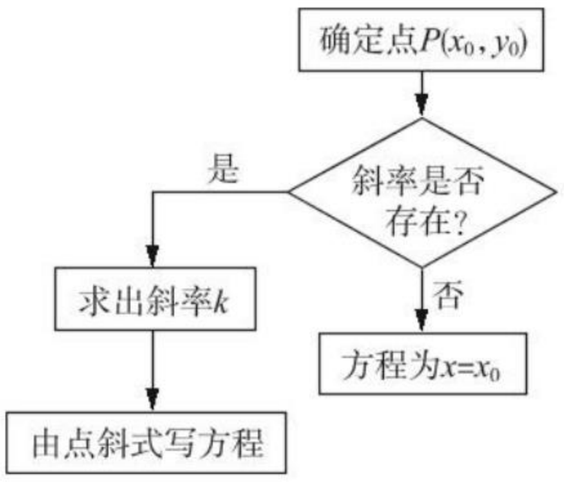
关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

3.2　直线的方程

第 21 课时　直线的点斜式方程

掌握几个要点

1. 掌握一个步骤：求直线的点斜式方程的方法步骤



2. 关注一种策略：直线的斜截式方程的求解策略

(1)用斜截式求直线方程，只要确定直线的斜率和截距即可，同时要特别注意截距和距离的区别.

(2)直线的斜截式方程 $y=kx+b$ 不仅形式简单，而且特点明显，k 是直线的斜率，b 是直线在 y 轴上的截距，只要确定了 k 和 b 的值，直线的图象就一目了然. 因此，在解决直线的图象问题时，常通过把直线方程化为斜截式方程，利用 k,b 的几何意义进行判断.

题点知识巩固

知识点一　直线的点斜式方程

1. 直线 $y=2x+1$ 绕着其上一点 $P(1,3)$ 逆时针旋转 $90°$ 后得到直线 l，则直线 l 的点斜式方程为_____.

2. 一直线 l_1 过点 $A(-1,-2)$，其倾斜角等于直线 $l_2:y=\frac{\sqrt{3}}{3}x$ 的倾斜角的 2 倍，则 l_1 的点斜式方程为_____.

3. 写出下列直线的点斜式方程.

(1)经过点 $A(2,5)$，且与直线 $y=2x+7$ 平行；

(2)经过点 $C(-1,-1)$，且与 x 轴平行；

(3)经过点 $D(1,2)$，且与 x 轴垂直；

(4)经过点 $P(-2,3)$，$Q(5,-4)$ 两点.

知识点二　直线的斜截式方程

4. 直线 $y=kx+b$ 通过第一、三、四象限，则有　(　)

A. $k>0,b>0$　　B. $k>0,b<0$

C. $k<0,b>0$　　D. $k<0,b<0$

5. 已知直线 l 过点 $P(2,1)$，且直线 l 的斜率为直线 $x-4y+3=0$ 的斜率的 2 倍，则直线 l 的点斜式方程为_____.

6. 倾斜角为 $60°$，与 y 轴的交点到坐标原点的距离为 3 的直线的斜截式方程是_____.

知识点三　平行与垂直的应用

7. 已知直线 $l_1:y=2x+3a$，$l_2:y=(a^2+1)x+3$，若 $l_1\parallel l_2$，则 $a=$_____.

8. 已知直线 $l:y=(a^2-2)x+2a+9$ 与直线 $y=-\frac{1}{2}x+1$ 垂直，且与直线 $y=3x+5$ 在 y 轴上的截距相同，求 a 的值.

9. (1)当 a 为何值时，直线 $l_1:y=-x+2a$ 与直线 $l_2:y=(a^2-2)x+2$ 平行？

(2)当 a 为何值时，直线 $l_1:y=(2a-1)x+3$ 与直线 $l_2:y=4x-3$ 垂直？

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

提能达标过关

一、选择题

1. 过点(4,−2),倾斜角为 150°的直线的点斜式方程为 (　　)

A. $y-2=-\frac{\sqrt{3}}{3}(x+4)$

B. $y-(-2)=-\frac{\sqrt{3}}{3}(x-4)$

C. $y-(-2)=\frac{\sqrt{3}}{3}(x-4)$

D. $y-2=\frac{\sqrt{3}}{3}(x+4)$

2. 与直线 $y=2x+1$ 垂直,且在 y 轴上的截距为 4 的直线的斜截式方程为 (　　)

A. $y=\frac{1}{2}x+4$　　B. $y=2x+4$

C. $y=-2x+4$　　D. $y=-\frac{1}{2}x+4$

3. 将直线 $y=3x$ 绕原点逆时针旋转 90°,再向右平移 1 个单位长度,所得到的直线为 (　　)

A. $y=-\frac{1}{3}x+\frac{1}{3}$　　B. $y=-\frac{1}{3}x+1$

C. $y=3x-3$　　D. $y=\frac{1}{3}x+1$

4. 下列四个结论:

①方程 $k=\frac{y-2}{x+1}$ 与方程 $y-2=k(x+1)$ 可表示同一直线;

②直线 l 过点 $P(x_1,y_1)$,倾斜角为 90°,则其方程是 $x=x_1$;

③直线 l 过点 $P(x_1,y_1)$,斜率为 0,则其方程是 $y=y_1$;

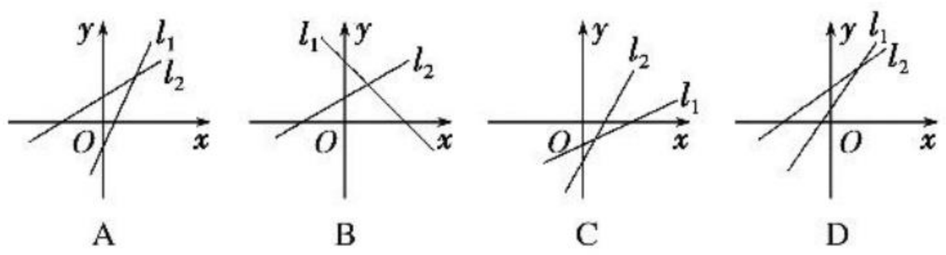
④所有的直线都有点斜式和斜截式方程.

其中正确的个数为 (　　)

A. 1　　B. 2

C. 3　　D. 4

5. 直线 $l_1:y=ax+b$ 与直线 $l_2:y=bx+a(ab\neq0,a\neq b)$ 在同一平面直角坐标系内的图象只可能是 (　　)



A　　B　　C　　D

二、填空题

6. 在 y 轴上的截距为 −6,且与 y 轴相交成 30°角的直线的斜截式方程是_____.

7. 已知直线 $y=(3-2k)x-6$ 不经过第一象限,则 k 的取值范围为_____.

8. 若原点在直线 l 上的射影是 $P(-2,1)$,则直线 l 的点斜式方程为_____.

三、解答题

9. 已知直线 l 的斜率与直线 $3x-2y=6$ 的斜率相等,且直线 l 在 x 轴上的截距比在 y 轴上的截距大 1,求直线 l 的斜截式方程.

10. 已知直线 l 的方程为 $3x+4y-12=0$,求 l' 的斜截式方程,使得:

(1)l' 与 l 平行,且过点(−1,3);

(2)l' 与 l 垂直,且 l' 与两坐标轴围成的三角形的面积为4.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

第 22 课时　直线的两点式方程

掌握几个要点

1. 掌握一个整式形式：当直线没有斜率($x_1=x_2$)或斜率为 0 ($y_1=y_2$)时，不能用两点式$\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{x-x_1}{x_2-x_1}$求它的方程，此时直线的方程分别是 $x=x_1$ 和 $y=y_1$，而它们都适合 $(x_2-x_1)(y-y_1)=(y_2-y_1)(x-x_1)$，即两点式的整式形式，因此过任意两点的直线的方程都可以写成$(x_2-x_1)(y-y_1)=(y_2-y_1)(x-x_1)$的形式.
2. 关注一个易错点：直线的截距式是两点式的一个特殊情形，用它来画直线以及判断直线经过的象限或求直线与坐标轴围成的三角形的面积比较方便. 注意直线过原点或与坐标轴平行时，没有截距式方程，但直线过原点时两截距存在且同时等于零.

题点知识巩固

知识点一　直线的两点式方程

1. 经过 $M(3,2)$与 $N(6,2)$两点的直线方程为　(　　)

A. $x=2$　　B. $y=2$

C. $x=3$　　D. $x=6$

2. 已知点 $A(3,2)$，$B(-1,4)$，则经过点 $C(2,5)$且经过线段 AB 的中点的直线方程为_____.
3. 若点 $P(3,m)$在过点 $A(2,-1)$，$B(-3,4)$的直线上，则 $m=$_____.
4. 已知 $A(-3,2)$，$B(5,-4)$，$C(0,-2)$，在$\triangle ABC$ 中，

(1)求 BC 边的方程；

(2)求 BC 边上的中线所在直线的方程.

知识点二　直线的截距式方程

5. 在 x 轴，y 轴上的截距分别是 -3，4 的直线方程是(　　)

A. $\frac{x}{-3}+\frac{y}{4}=1$　　B. $\frac{x}{3}+\frac{y}{-4}=1$

C. $\frac{x}{-3}-\frac{y}{4}=1$　　D. $\frac{x}{4}+\frac{y}{-3}=1$

6. 过点 $P(2,3)$且在两坐标轴上的截距的绝对值相等的直线有　(　　)

A. 1 条　　B. 2 条

C. 3 条　　D. 无数多条

7. 过点 $P(1,2)$且在两坐标轴上截距的和为 0 的直线方程为_____.
8. 求过点 $A(5,2)$，且在两坐标轴上的截距互为相反数的直线 l 的方程.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

提能达标过关

一、选择题

1. 直线 $\frac{x}{a^2}-\frac{y}{b^2}=1$ 在 y 轴上的截距是　　(　　)

A. $|b|$　　B. $-b^2$

C. b^2　　D. $\pm b$

2. 若直线 l 的横截距与纵截距都是负数，则　　(　　)

A. l 的倾斜角为锐角且不过第二象限

B. l 的倾斜角为钝角且不过第一象限

C. l 的倾斜角为锐角且不过第四象限

D. l 的倾斜角为钝角且不过第三象限

3. 以 $A(1,3)$，$B(-5,1)$ 为端点的线段的垂直平分线方程是　　(　　)

A. $3x-y-8=0$　　B. $3x+y+4=0$

C. $3x-y+6=0$　　D. $3x+y+2=0$

4. 若直线 l 过点 $(-1,-1)$ 和 $(2,5)$，且点 $(1\ 009,b)$ 在直线 l 上，则 b 的值为　　(　　)

A. 2 019　　B. 2 018

C. 2 017　　D. 2 016

5. 一条光线从点 $A\left(-\frac{1}{2},0\right)$ 处射到点 $B(0,1)$ 后被 y 轴反射，则反射光线所在直线的方程为　　(　　)

A. $y=2x+1$　　B. $y=-2x+1$

C. $y=\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}$　　D. $y=-\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}$

二、填空题

6. 过点 $P(1,3)$ 的直线 l 分别与两坐标轴交于 A，B 两点，若 P 为 AB 的中点，则直线 l 的截距式方程是_____.

7. 过点 $(1,3)$ 且在 x 轴上的截距为 2 的直线方程是_____.

8. 已知 $A(3,0)$，$B(0,4)$，直线 AB 上一动点 $P(x,y)$，则 xy 的最大值是_____.

三、解答题

9. 在 $\triangle ABC$ 中，已知 $A(5,-2)$，$B(7,3)$，且 AC 边的中点 M 在 y 轴上，BC 边的中点 N 在 x 轴上，求：

(1)顶点 C 的坐标；

(2)直线 MN 的截距式方程.

10. 已知 $\triangle ABC$ 的三个顶点分别为 $A(0,4)$，$B(-2,6)$，$C(-8,0)$.

(1)求边 AC 和 AB 所在直线的方程；

(2)求 AC 边上的中线 BD 所在直线的方程；

(3)求 AC 边上的中垂线的方程.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

第 23 课时　直线的一般式方程

掌握几个要点

1. 掌握 2 种平行方法：根据两直线的一般式方程判定两直线平行的方法

(1)判定斜率是否存在，若存在，化成斜截式后，则 $k_1=k_2$ 且 $b_1\neq b_2$；若都不存在，则还要判定不重合.

(2)可直接采用如下方法：一般地，设直线 $l_1:A_1x+B_1y+C_1=0$，$l_2:A_2x+B_2y+C_2=0$. $l_1\parallel l_2\Leftrightarrow A_1B_2-A_2B_1=0$，且 $B_1C_2-B_2C_1\neq0$ 或 $A_1C_2-A_2C_1\neq0$.

这种判定方法避开了斜率存在和不存在两种情况的讨论，可以减小因考虑不周而造成失误的可能性.

2. 学会 2 种垂直方法：根据两直线的一般式方程判定两直线垂直的方法

(1)若一个斜率为零，另一个不存在，则垂直；若两个都存在斜率，化成斜截式后，则 $k_1k_2=-1$.

(2)一般地，设 $l_1:A_1x+B_1y+C_1=0$，$l_2:A_2x+B_2y+C_2=0$，$l_1\perp l_2\Leftrightarrow A_1A_2+B_1B_2=0$. 这种判定方法可避免讨论，减小失误.

题点知识巩固

知识点一　直线的一般式方程

1. 在直角坐标系中，直线 $x+\sqrt{3}y-3=0$ 的倾斜角是（　　）

A. 30°　　B. 60°

C. 150°　　D. 120°

2. 过点 $A(2,3)$ 且垂直于直线 $2x+y-5=0$ 的直线方程为（　　）

A. $x-2y+4=0$　　B. $2x+y-7=0$

C. $x-2y+3=0$　　D. $x-2y+5=0$

3. 已知直线 l 经过点 $A(2,1)$，$B(3,3)$，求直线 l 的点斜式、斜截式和一般式方程，并根据方程指出直线在 x 轴、y 轴上的截距.

知识点二　根据直线特征求参数

4. 若方程 $Ax+By+C=0$ 表示直线，则 A，B 应满足的条件为（　　）

A. $A\neq0$　　B. $B\neq0$

C. $A\cdot B\neq0$　　D. $A^2+B^2\neq0$

5. 若方程 $(a^2+5a+6)x+(a^2+2a)y+1=0$ 表示一条直线，则实数 a 满足_____.

6. 设直线 l 的方程为 $(m^2-2m-3)x-(2m^2+m-1)y+6-2m=0$.

(1)若直线 l 在 x 轴上的截距为 -3，则 $m=$_____.

(2)若直线 l 的斜率为 1，则 $m=$_____.

知识点三　一般式下的平行与垂直问题

7. 如果直线 $l_1:x+2ay-1=0$ 与直线 $l_2:(3a-1)x-ay-1=0$ 平行，则 a 等于（　　）

A. 0　　B. $\frac{1}{6}$

C. 0 或 1　　D. 0 或 $\frac{1}{6}$

8. 已知直线 $l_1:x+my-2m-2=0$，直线 $l_2:mx+y-1-m=0$，则当 $l_1\perp l_2$ 时，$m=$_____；当 $l_1\parallel l_2$ 时，$m=$_____.

9. 已知点 $A(2,2)$ 和直线 $l:3x+4y-20=0$.

求：(1)过点 A 和直线 l 平行的直线方程；

(2)过点 A 和直线 l 垂直的直线方程.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

提能达标过关

一、选择题

1. 直线$(2m^2-5m+2)x-(m^2-4)y+5m=0$ 的倾斜角为 $45°$，则 m 的值为　　(　　)

A. -2　　B. 2

C. -3　　D. 3

2. 已知 $ab<0$，$bc<0$，则直线 $ax+by=c$ 通过　　(　　)

A. 第一、二、三象限　　B. 第一、二、四象限

C. 第一、三、四象限　　D. 第二、三、四象限

3. 两条直线 $mx+y-n=0$ 和 $x+my+1=0$ 互相平行的条件是　　(　　)

A. $m=1$　　B. $m=\pm1$

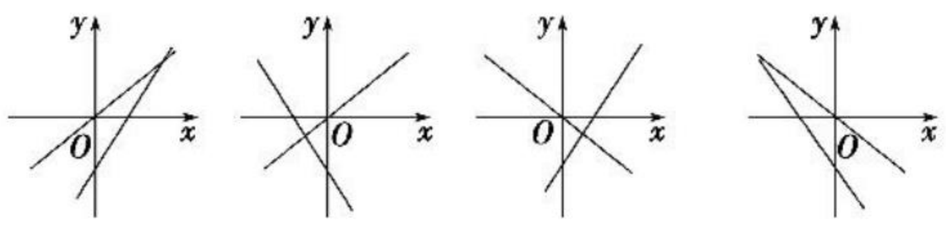
C. $\begin{cases}m=1,\\ n\neq-1\end{cases}$　　D. $\begin{cases}m=1,\\ n\neq-1\end{cases}$ 或 $\begin{cases}m=-1,\\ n\neq1\end{cases}$

4. 直线 $y=mx-3m+2(m\in\mathbf{R})$ 必过定点　　(　　)

A. $(3,2)$　　B. $(-3,2)$

C. $(-3,-2)$　　D. $(3,-2)$

5. 在同一直角坐标系中表示直线 $ax-y=0$ 与 $x-y+a=0$ $(a\neq0)$ 正确的是　　(　　)



A　　B　　C　　D

二、填空题

6. 已知直线$(a+2)x+(a^2-2a-3)y-2a=0$ 在 x 轴上的截距为 3，则该直线在 y 轴上的截距为_____.

7. 垂直于直线 $3x-4y-7=0$，且与两坐标轴围成的三角形的面积为 6 的直线 l 的方程为_____.

8. 已知两条直线 $a_1x+b_1y+4=0$ 和 $a_2x+b_2y+4=0$ 都过点 $A(2,3)$，则过两点 $P_1(a_1,b_1)$，$P_2(a_2,b_2)$ 的直线方程为_____.

三、解答题

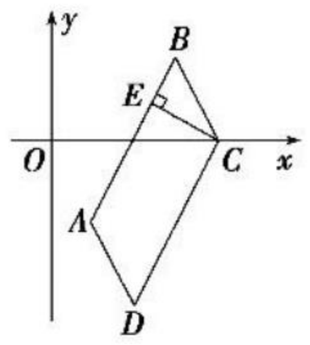
9. 求 m，n 的值，使直线 $l_1:y=(m-1)x-n+7$ 满足：

(1)平行于 x 轴；

(2)平行于直线 $l_2:7x-y+15=0$；

(3)垂直于直线 $l_2:7x-y+15=0$.

10. 如图，在平行四边形 $ABCD$ 中，边 AB 所在的直线方程为 $2x-y-2=0$，点 $C(2,0)$.



(1)求直线 CD 的方程；

(2)求 AB 边上的高 CE 所在的直线方程.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

3.3　直线的交点坐标与距离公式

第 24 课时　两条直线的交点坐标

掌握几个要点

熟记两个结论：方程组 $\begin{cases}A_1x+B_1y+C_1=0,\\A_2x+B_2y+C_2=0\end{cases}$ 有唯一解的等价条件是 $A_1B_2-A_2B_1\neq0$，亦即两条直线相交的等价条件是 $A_1B_2-A_2B_1\neq0$，直线 $A_1x+B_1y+C_1+\lambda(A_2x+B_2y+C_2)=0(\lambda\in\mathbf{R})$ 是过直线 $l_1:A_1x+B_1y+C_1=0$ 与 $l_2:A_2x+B_2y+C_2=0$ 交点的直线(不含 l_2).

题点知识巩固

知识点一　两直线的交点问题

1. 直线 $3x+2y+6=0$ 和 $2x+5y-7=0$ 的交点的坐标为　　(　　)

A. $(-4,-3)$　　B. $(4,3)$

C. $(-4,3)$　　D. $(3,4)$

2. 已知直线 l_1 的方程为 $Ax+3y+C=0$，直线 l_2 的方程为 $2x-3y+4=0$，若 l_1,l_2 的交点在 y 轴上，则 C 的值为　　(　　)

A. 4　　B. -4

C. ±4　　D. 与 A 有关

3. 已知直线 $5x+4y=2a+1$ 与直线 $2x+3y=a$ 的交点位于第四象限，则 a 的取值范围是_____.

知识点二　直线恒过定点问题

4. 直线 $(2m-1)x-(m+2)y+m=-3(m\in\mathbf{R})$ 恒过定点(　　)

A. $\left(\frac{1}{2},2\right)$　　B. $(2,-1)$

C. $\left(\frac{3}{5},\frac{4}{5}\right)$　　D. $\left(\frac{1}{5},\frac{7}{5}\right)$

5. 不论 λ 取何值，直线 $(2+\lambda)x+(1-2\lambda)y+4-3\lambda=0$ 过定点_____.

6. 求证：不论 m 为何实数，直线 $(m-1)x+(2m-1)y=m-5$ 恒过一个定点.

知识点三　两直线交点直线系方程的应用

7. 直线 l 经过原点，且经过另两条直线 $2x+3y+8=0$，$x-y-1=0$ 的交点，则直线 l 的方程为　　(　　)

A. $2x+y=0$　　B. $2x-y=0$

C. $x+2y=0$　　D. $x-2y=0$

8. 斜率为 -2，且过两条直线 $3x-y+4=0$ 和 $x+y-4=0$ 交点的直线方程为_____.

9. 求过两直线 $2x-3y-3=0$ 和 $x+y+2=0$ 的交点且与直线 $3x+y-1=0$ 平行的直线方程.

提能达标过关

一、选择题

1. 直线 $2x+3y+8=0$ 和直线 $x-y-1=0$ 的交点坐标是　　(　　)

A. $(-2,-1)$　　B. $(-1,-2)$

C. $(1,2)$　　D. $(2,1)$

2. 若三条直线 $2x+3y+8=0$，$x-y=1$ 和 $x+ky=0$ 相交于一点，则 k 的值等于　　(　　)

A. -2　　B. $-\frac{1}{2}$

C. 2　　D. $\frac{1}{2}$

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

3. 直线 $kx-y+1=3k$，当 k 变动时，所有直线都通过定点（　　）

A. $(0,0)$　　B. $(0,1)$

C. $(3,1)$　　D. $(2,1)$

4. 已知点 $M(0,-1)$，点 N 在直线 $x-y+1=0$ 上，若直线 MN 垂直于直线 $x+2y-3=0$，则 N 点的坐标是（　　）

A. $(-2,-3)$　　B. $(2,1)$

C. $(2,3)$　　D. $(-2,-1)$

5. 过两直线 $3x+y-1=0$ 与 $x+2y-7=0$ 的交点，并且与第一条直线垂直的直线方程是（　　）

A. $x-3y+7=0$　　B. $x-3y+13=0$

C. $2x-y+7=0$　　D. $3x-y-5=0$

二、填空题

6. 在$\triangle ABC$中，高线 AD 与 BE 的方程分别是 $x+5y-3=0$ 和 $x+y-1=0$，AB 边所在直线的方程是 $x+3y-1=0$，则 $\triangle ABC$ 的顶点坐标分别是 A _____；B _____；C _____.

7. 两条直线 $x+my+12=0$，$2x+3y+m=0$ 的交点在 y 轴上，则 m 的值是_____.

8. 已知直线 $mx+4y-2=0$ 与 $2x-5y+n=0$ 互相垂直，垂足为$(1,p)$，则 $m-n+p$ 的值为_____.

三、解答题

9. 直线 l 过定点 $P(0,1)$，且与直线 $l_1:x-3y+10=0$，$l_2:2x+y-8=0$ 分别交于 A、B 两点. 若线段 AB 的中点为 P，求直线 l 的方程.

10. m 为何值时，直线 $l_1:4x+y-4=0$，$l_2:mx+y=0$，$l_3:2x-3my-4=0$ 不能围成三角形？

第 25 课时　两点间的距离

掌握几个要点

牢记一个公式：两点 $P_1(x_1,y_1)$，$P_2(x_2,y_2)$间的距离公式 $|P_1P_2|=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$ 与两点的先后顺序无关，其反映了把几何问题代数化的思想.

题点知识巩固

知识点一　两点间的距离公式

1. 已知直角坐标平面上连接点$(-2,5)$和点 M 的线段的中点是$(1,0)$，那么点 M 到原点的距离为（　　）

A. 41　　B. $\sqrt{41}$

C. $\sqrt{39}$　　D. 39

2. 已知点 $A(3,6)$，在 x 轴上的点 P 与点 A 的距离等于 10，则点 P 的坐标为_____.

3. 已知 $A(a,3)$和 $B(3,3a+3)$的距离为 5，则 a 的值为_____.

4. 等腰$\triangle ABC$的顶点是 $A(3,0)$，底边长 $|BC|=4$，BC 边的中点是 $D(5,4)$，则此三角形的腰长为_____.

知识点二　两点间距离公式的应用

5. 以点 $A(-3,0)$，$B(3,-2)$，$C(-1,2)$为顶点的三角形是（　　）

A. 等腰三角形　　B. 等边三角形

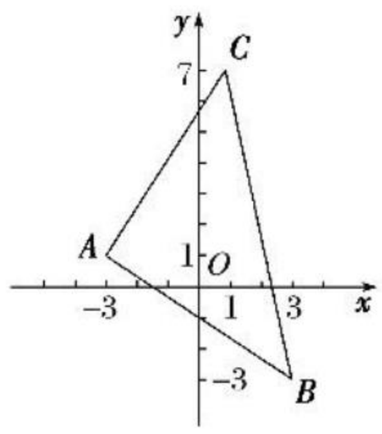
C. 直角三角形　　D. 以上都不是

6. 已知$\triangle ABC$的顶点坐标为 $A(-1,5)$，$B(-2,-1)$，$C(2,3)$，则 BC 边上的中线长为_____.

7. 已知点 $A(-1,2)$，$B(2,\sqrt{7})$，在 x 轴上求一点 P，使 $|PA|=|PB|$，并求 $|PA|$的值.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

8. 如图，已知△ABC的三顶点$A(-3,1)$，$B(3,-3)$，$C(1,7)$.



(1)判断△ABC的形状；

(2)求△ABC的面积.

提能达标过关

一、选择题

1. 一条平行于x轴的线段长是5个单位，它的一个端点是$A(2,1)$，则它的另一个端点B的坐标是（　　）

A. $(-3,1)$或$(7,1)$　　B. $(2,-3)$或$(2,7)$

C. $(-3,1)$或$(5,1)$　　D. $(2,-3)$或$(2,5)$

2. 设点A在x轴上，点B在y轴上，AB的中点是$P(2,-1)$，则$|AB|$等于（　　）

A. 5　　B. $4\sqrt{2}$

C. $2\sqrt{5}$　　D. $2\sqrt{10}$

3. △ABC三个顶点的坐标分别为$A(-4,-4)$，$B(2,2)$，$C(4,-2)$，则三角形AB边上的中线长为（　　）

A. $\sqrt{26}$　　B. $\sqrt{65}$

C. $\sqrt{29}$　　D. $\sqrt{13}$

4. 已知三点$A(3,2)$，$B(0,5)$，$C(4,6)$，则△ABC的形状是（　　）

A. 直角三角形　　B. 等边三角形

C. 等腰三角形　　D. 等腰直角三角形

5. 在直线$2x-3y+5=0$上求点P，使P点到$A(2,3)$距离为$\sqrt{13}$，则P点坐标是（　　）

A. $(5,5)$　　B. $(-1,1)$

C. $(5,5)$或$(-1,1)$　　D. $(5,5)$或$(1,-1)$

二、填空题

6. 两直线$3ax-y-2=0$和$(2a-1)x+5ay-1=0$分别过定点A、B，则$|AB|$等于_____.

7. 已知点$M(m,-1)$，$N(5,m)$，且$|MN|=2\sqrt{5}$，则实数$m=$_____.

8. 已知$A(1,-1)$，$B(a,3)$，$C(4,5)$，且$|AB|=|BC|$，则$a=$_____.

三、解答题

9. 已知直线$l_1:2x+y-6=0$和$A(1,-1)$，过点A作直线l_2与已知直线交于点B，且$|AB|=5$，求直线l_2的方程.

10. (1)已知点$A(1,-1)$，$B(2,2)$，点P在直线$y=x$上，求$|PA|^2+|PB|^2$取得最小值时点P的坐标；

(2)求过两直线$l_1:x=-2$与$l_2:2x+y=-3$的交点P，且在两坐标轴上的截距相等的直线l的方程.

第26课时　点到直线的距离、两条平行直线间的距离

掌握几个要点

1. 关注两个注意点：(1)点到直线的距离即是点与直线上的点连线的距离的最小值，利用点到直线的距离公式，解题时要注意把直线方程化为一般式. 当直线与坐标轴垂直时可直接求之. (2)利用点到直线的距离公式可求直线的方程，有时需结合图形，数形结合，使问题更清晰.

2. 熟记两个公式：已知两平行直线，其距离可利用公式$d=\dfrac{|C_1-C_2|}{\sqrt{A^2+B^2}}$求解，也可在已知直线上取一点，转化为点到直线的距离.

题点知识巩固

知识点一　点到直线的距离

1. 已知点$(a,1)$到直线$x-y+1=0$的距离为1，则a的值为（　　）

A. 1　　B. -1

C. $\sqrt{2}$　　D. $\pm\sqrt{2}$

2. 若点$(4,a)$到直线$4x-3y=0$的距离不大于3，则a的取值范围是_____.

3. 已知直线l过点$P(3,4)$且与点$A(-2,2)$，$B(4,-2)$等距离，则直线l的方程为_____.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

知识点二　两平行线间的距离

4. 两平行直线 $3x+4y+5=0$ 与 $6x+ay+30=0$ 间的距离为 d，则 $a+d=$_____.

5. 两直线 $3x+y-3=0$ 和 $6x+my-1=0$ 平行，则它们之间的距离为_____.

6. 已知直线 l 与两直线 $l_1:2x-y+3=0$ 和 $l_2:2x-y-1=0$ 的距离相等，则 l 的方程为_____.

知识点三　利用距离公式求最值

7. 已知 P,Q 分别是直线 $3x+4y-5=0$ 与 $6x+8y+5=0$ 上的动点，则 $|PQ|$ 的最小值为（　　）

A. 3　　B. $\sqrt{3}$

C. $\frac{\sqrt{3}}{2}$　　D. $\frac{3}{2}$

8. 已知实数 x,y 满足 $6x+8y-1=0$，则 $\sqrt{x^2+y^2-2y+1}$ 的最小值为_____.

9. 两条互相平行的直线分别过点 $A(6,2),B(-3,-1)$，并且各自绕着点 A,B 旋转，如果两条平行直线间的距离为 d.

(1)求 d 的取值范围；

(2)求 d 取最大值时，两条直线的方程.

提能达标过关

一、选择题

1. 点(1，−1)到直线 $y=1$ 的距离是（　　）

A. $\sqrt{2}$　　B. $\frac{\sqrt{2}}{2}$

C. 3　　D. 2

2. 到直线 $2x+y+1=0$ 的距离等于 $\frac{\sqrt{5}}{5}$ 的直线方程为（　　）

A. $2x+y=0$

B. $2x+y-2=0$

C. $2x+y=0$ 或 $2x+y-2=0$

D. $2x+y=0$ 或 $2x+y+2=0$

3. 过两直线 $x-y+1=0$ 和 $x+y-1=0$ 的交点，并与原点的距离等于 1 的直线共有（　　）

A. 0 条　　B. 1 条

C. 2 条　　D. 3 条

4. 已知点 $A(-3,-4),B(6,3)$ 到直线 $l:ax+y+1=0$ 的距离相等，则实数 a 的值等于（　　）

A. $\frac{7}{9}$　　B. $-\frac{1}{3}$

C. $-\frac{7}{9}$ 或 $-\frac{1}{3}$　　D. $-\frac{7}{9}$ 或 $\frac{1}{3}$

5. 若动点 $A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$ 分别在直线 $l_1:x+y-7=0$ 和 $l_2:x+y-5=0$ 上移动，则 AB 的中点 M 到原点距离的最小值是（　　）

A. $3\sqrt{2}$　　B. $2\sqrt{3}$

C. $3\sqrt{3}$　　D. $4\sqrt{2}$

二、填空题

6. 经过点 $P(-3,4)$，且与原点的距离等于 3 的直线 l 的方程为_____.

7. 设点 P 在直线 $x+3y=0$ 上，且点 P 到原点的距离与点 P 到直线 $x+3y-2=0$ 的距离相等，则点 P 的坐标是_____.

8. 点 $P(x,y)$ 在直线 $x+y-4=0$ 上，则 x^2+y^2 的最小值是_____.

三、解答题

9. (1)动点 $P(x,y)$ 在直线 $x+y-4=0$ 上，O 为原点，求 $|OP|$ 最小时 P 点的坐标；

(2)求过点 $P(1,2)$ 且与原点距离最大的直线方程.

10. 已知三角形的三个顶点分别是 $A(4,1),B(7,5),C(-4,7)$，求角 A 的平分线的方程.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

SY 素养提升 SUYANGTISHENG 重点深化理解　素养培优提能

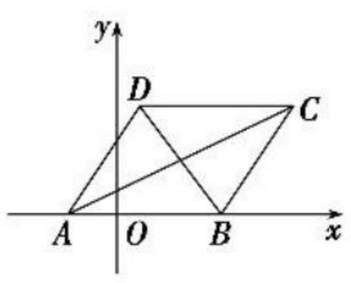
重点深化理解

一、直线斜率的三种求法

直线的斜率是用来衡量直线的倾斜程度的一个量，是确定直线方程的重要因素，还能为以后直线位置关系及直线与圆位置关系的进一步学习打好基础.

1. 根据倾斜角求斜率

【例 1】 如图，菱形 $ABCD$ 的 $\angle ADC=120°$，求两条对角线 AC 与 BD 所在直线的斜率.



［分析］ 由于题目背景是几何图形，因此可根据菱形的边角关系先确定 AC 与 BD 的倾斜角，再利用公式 $k=\tan\theta$.

［解］ ∵在菱形 $ABCD$ 中，$\angle ADC=120°$，

∴$\angle BAD=60°$，$\angle ABC=120°$.

又菱形的对角线互相平分，∴$\angle BAC=30°$，$\angle DBA=60°$.

∴$\angle DBx=180°-\angle DBA=120°$.

∴$k_{AC}=\tan 30°=\frac{\sqrt{3}}{3}$，$k_{BD}=\tan 120°=-\sqrt{3}$.

【点评】 本题解答的关键是根据几何图形中直线与其他直线的位置关系（如平行、垂直、两直线的夹角关系等），确定出所求直线的倾斜角，进而确定直线的斜率.

2. 利用两点斜率公式

【例 2】 直线 l 沿 y 轴正方向平移 3 个单位，再沿 x 轴的负方向平移 4 个单位，恰好与原直线 l 重合，求直线 l 的斜率 k.

［分析］ 由于直线是由点构成的，因此直线的平移变化可以通过点的平移来体现. 因此，本题可以采取在直线上取一点 P，经过相应的平移后得到一个新点 Q，它也在直线上，则直线 l 的斜率即为 PQ 的斜率.

［解］ 设 $P(x,y)$ 是直线 l 上任意一点，按平移后，P 点的坐标移动到 $Q(x-4,y+3)$.

∵Q 点也在直线 l 上，∴$k=\frac{(y+3)-y}{(x-4)-x}=-\frac{3}{4}$.

【点评】 ①本题解法利用点的移动去认识线的移动，体现了“整体”与“局部”间辩证关系在解题中的相互利用，同时要注意：点 (x,y) 沿 x 轴正方向平移 a 个单位，再沿 y 轴正方向移动 b 个单位，坐标由 (x,y) 变为 $(x+a,y+b)$.

②直线过两点 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，若 $x_1=x_2$，$y_1\neq y_2$，则倾斜角等于 90°，不能利用两点坐标的斜率公式，此时，斜率不存在.

3. 利用待定系数法

【例 3】 如果直线 l 沿 x 轴负方向平移 3 个单位，再沿 y 轴正方向平移 1 个单位后，又回到原来的位置，求直线 l 的斜率.

［分析］ 本题可以利用例 2 的解法进行求解，即考虑抓住点的变化求解. 除此之外，还可以考虑直线 l 的方程的变化，利用待定系数法，通过比较系数可得结果.

［解］ 设直线 l 的方程为 $y=kx+b$. 把直线左移 3 个单位，上移 1 个单位后直线方程为 $y-1=k(x+3)+b$，即 $y=kx+3k+b+1$. 由条件知，$y=kx+3k+b+1$ 与 $y=kx+b$ 为同一条直线的方程. 比较系数，得 $b=3k+b+1$，解得 $k=-\frac{1}{3}$.

【点评】 本题通过利用平移前与平移后的两个方程的同一性，进行相应系数的比较求得结果.

二、对称问题

中学数学涉及对称问题有两大类：一类是中心对称，另一类是轴对称. 本章中与对称有关的问题分为以下四种类型.

1. 点关于点对称

点 $P(a,b)$ 关于点 $M(x_0,y_0)$ 的对称点为 $P'(2x_0-a,2y_0-b)$.

事实上点关于点对称的本质是中点问题，由中点坐标公式即可求得对称点的坐标.

2. 直线关于点对称

直线 $l:Ax+By+C=0$ 关于点 $M(x_0,y_0)$ 的对称直线 l' 的方程是 $A(2x_0-x)+B(2y_0-y)+C=0$.

事实上，设对称直线 l' 上任一点为 $P'(x,y)$，则 P' 关于点 $M(x_0,y_0)$ 的对称点为 $P(2x_0-x,2y_0-y)$，而点 P 在直线 l 上，故将 P 的坐标 $(2x_0-x,2y_0-y)$ 代入 $Ax+By+C=0$ 得 $A(2x_0-x)+B(2y_0-y)+C=0$.

3. 点关于直线对称

求点 $P(a,b)$ 关于直线 $l:Ax+By+C=0$ 的对称点 $P'(a',b')$，要抓住其两个几何特征：

①$PP'\perp l$；②PP' 的中点在 l 上，

即由方程组 $\begin{cases}\frac{b'-b}{a'-a}\cdot\left(-\frac{A}{B}\right)=-1,\\ A\cdot\frac{a+a'}{2}+B\cdot\frac{b+b'}{2}+C=0,\end{cases}$ 解出 a'，b'.

但较特殊的对称情况可直接写出结果：

①$P(a,b)$ 关于 x 轴的对称点 $P'(a,-b)$；

②$P(a,b)$ 关于 y 轴的对称点 $P'(-a,b)$；

③$P(a,b)$ 关于直线 $x=x_0$ 的对称点 $P'(2x_0-a,b)$；

④$P(a,b)$ 关于直线 $y=y_0$ 的对称点 $P'(a,2y_0-b)$；

⑤$P(a,b)$ 关于直线 $x+y+c=0$ 的对称点 $P'(-b-c,-a-c)$；

⑥$P(a,b)$ 关于直线 $x-y+c=0$ 的对称点 $P'(b-c,a+c)$.

4. 直线关于直线对称

求直线 l_1 关于直线 l 对称的直线 l_2 的方程可以按以下方法求解：

①在 l_1 上任取相异两点 P_1，P_2，求出 P_1，P_2 关于直线 l 的对称点 P_1'，P_2'，再由 P_1'，P_2' 的坐标写出直线 l_2 的方程.

②任取 l_2 上一点 $P(x,y)$，用 x，y 表示出点 P 关于直线 l 的对称点 P' 的坐标 (x',y')，再将 (x',y') 代入直线 l_1 的方程整理可得 l_2 的方程.

特别地，若 $l_1/\!/l$，l_2 还有其他求法（请自己思考）.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

【例 4】 求直线 $3x-4y+5=0$ 关于点 $M(2,-3)$ 对称的直线的方程.

［解］ 解法一：由对称的直线 l 与 $3x-4y+5=0$ 平行，故设直线方程为 $3x-4y+m=0$，而 M 到两直线的距离相等，则 $\frac{|3\times2-4\times(-3)+m|}{\sqrt{3^2+4^2}}=\frac{|3\times2-4\times(-3)+5|}{\sqrt{3^2+4^2}}$，

解得 $m=-41$，$m=5$（舍去）.

所以直线 l 的方程为 $3x-4y-41=0$.

解法二：由方程 $3x-4y+5=0$，取该直线上两点 $A\left(0,\frac{5}{4}\right)$，$B\left(-\frac{5}{3},0\right)$，它们关于点 $M(2,-3)$ 的对称点为 $A'\left(4,-\frac{29}{4}\right)$，$B'\left(\frac{17}{3},-6\right)$. 过 A'，B' 的直线即为 l：$3x-4y-41=0$.

解法三：设所求直线 l 上任意一点为 $P(x,y)$，则 P 关于点 $(2,-3)$ 的对称点为 $P'(4-x,-6-y)$，将 P' 坐标代入 $3x-4y+5=0$，得 $3(4-x)-4(-6-y)+5=0$，即 $3x-4y-41=0$，这就是所求直线 l 的方程.

【点评】 通过三种解法的比较，这类问题采用方法三的解法更简捷.

【例 5】 已知直线 l_1：$2x+y-4=0$，求 l_1 关于直线 l：$3x+4y-1=0$ 对称的直线 l_2 的方程.

［解］ 解法一：由 $\begin{cases}2x+y-4=0,\\3x+4y-1=0,\end{cases}$ 得 l_1 与 l 的交点 $P(3,-2)$.

又取 l_1 上一点 $A(2,0)$，设 A 关于直线 l 的对称点为 $B(x_0,y_0)$，

则 $\begin{cases}\frac{y_0-0}{x_0-2}=\frac{4}{3},\\3\cdot\frac{2+x_0}{2}+4\cdot\frac{0+y_0}{2}-1=0,\end{cases}$ 解得 $B\left(\frac{4}{5},-\frac{8}{5}\right)$.

显然 $P(3,-2)$、$B\left(\frac{4}{5},-\frac{8}{5}\right)$ 都在 l_2 上，由此可得 l_2 的方程为 $2x+11y+16=0$.

解法二：设直线 l_2 上任一动点为 $M(x,y)$，它关于直线 l 的对称点为 $M'(x_0,y_0)$，

则 $\begin{cases}\frac{y_0-y}{x_0-x}=\frac{4}{3},\\3\cdot\frac{x_0+x}{2}+4\cdot\frac{y_0+y}{2}-1=0,\end{cases}$

解得 $x_0=\frac{7x-24y+6}{25}$，$y_0=\frac{-24x-7y+8}{25}$.

由 $M'(x_0,y_0)$ 在直线 l_1 上，

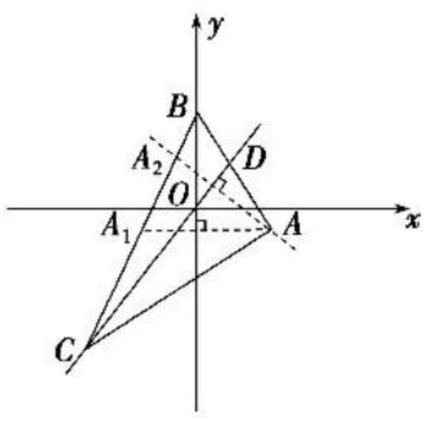
故 $2\cdot\frac{7x-24y+6}{25}+\frac{-24x-7y+8}{25}-4=0$，

化简为 $2x+11y+16=0$，这就是直线 l_2 的方程.

【点评】 本题也可在直线 l_1 上任取两点，求出它们关于直线 l：$3x+4y-1=0$ 的对称点，从而得出 l_2 的方程.

【例 6】 已知 $\triangle ABC$ 的顶点 $A(3,-1)$，$\angle B$，$\angle C$ 的角平分线方程分别是 $x=0$，$y=x$，求 BC 边所在的直线方程.

［解］ 如图，设点 A 关于直线 BO，CD 的对称点分别为 A_1，A_2.



因为 $A(3,-1)$，且 $\angle ABC$ 的平分线方程为 $x=0$，故点 A 关于直线 BO 的对称点 A_1 的坐标为 $(-3,-1)$.

又因为 $\angle ACB$ 的平分线 CD 的方程为 $y=x$，所以点 A 关于直线 CD 的对称点 A_2 的坐标为 $(-1,3)$.

而 $A_1(-3,-1)$，$A_2(-1,3)$ 两点都在直线 BC 上，

由此可得直线 BC 的方程为 $2x-y+5=0$.

【点评】 本题的解答抓住了角平分线的性质——对称性（AB，CB 两直线关于直线 BO 对称，AC，BC 两直线关于直线 CD 对称）求解.

三、直线方程中的“缺陷”

1. 斜截式中斜率“缺陷”

【例 7】 已知直线方程为 $3x+my-6=0$，求此直线的斜率与此直线在 y 轴上的截距.

［错解］ 由 $3x+my-6=0$，得 $my=-3x+6$，即直线的斜截式方程为 $y=-\frac{3}{m}x+\frac{6}{m}$，得出此直线的斜率为 $-\frac{3}{m}$，在 y 轴上的截距为 $\frac{6}{m}$.

［剖析］ 忘记讨论当 $m=0$ 时，直线的斜率并不存在.

［正解］ 当 $m=0$ 时，直线可化为 $x=2$，此时直线的斜率不存在，在 y 轴上的截距也不存在；当 $m\neq0$ 时，可得 $my=-3x+6$，即直线的斜截式方程为 $y=-\frac{3}{m}x+\frac{6}{m}$，得出此直线的斜率为 $-\frac{3}{m}$，在 y 轴上的截距为 $\frac{6}{m}$.

【点评】 在直线的斜截式方程 $y=kx+b$ 中，非常直观地表示了该直线的斜率为 k，在 y 轴上的截距为 b. 研究直线的斜率与在 y 轴上的截距问题，需要将一般式方程转化为直线的斜截式方程来处理. 但要注意当 y 的系数含有参数时要分系数为 0 和系数不为 0 两种情况进行讨论.

2. 两点式中分式“缺陷”

【例 8】 已知直线 l 过点 $A(1,2)$，$B(a,3)$，求直线 l 的方程.

［错解］ 由两点式，得直线 l 的方程为 $\frac{y-2}{3-2}=\frac{x-1}{a-1}$.

［剖析］ 忽视了 $a=1$，即直线与 x 轴垂直的情况，若 $a=1$，则 $\frac{y-2}{3-2}=\frac{x-1}{a-1}$ 不成立.

［正解］ 当 $a=1$ 时，直线 l 的方程为 $x=1$；

当 $a\neq1$ 时，直线 l 的方程为 $\frac{y-2}{3-2}=\frac{x-1}{a-1}$.

综上所述，直线 l 的方程为 $x=1$ 或 $x-(a-1)(y-2)-1=0$.

【点评】 一般地，过 $P(x_1,y_1)$，$Q(x_2,y_2)$ 两点的直线方程，不能写成 $\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{x-x_1}{x_2-x_1}$，而应写成 $(x_2-x_1)(y-y_1)-(y_2-y_1)(x-x_1)=0$.

3. 截距式中截距“缺陷”

【例 9】 求过点 $(2,4)$ 且在坐标轴上的截距之和为 0 的直线方程.

［错解］ 设直线的方程为 $\frac{x}{a}+\frac{y}{-a}=1$.

因为直线过点 $(2,4)$，所以 $\frac{2}{a}+\frac{4}{-a}=1$，解得 $a=-2$.

故所求的直线方程为 $\frac{x}{-2}+\frac{y}{2}=1$，即 $x-y+2=0$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

［剖析］　直线的截距式方程只适用于截距不为 0 和不平行于坐标轴的情形，本题由截距式求解时没有考虑截距为 0 的情形，导致漏解.

［正解］　当直线的截距均不为 0 时，同错解；

当直线的截距均为 0 时，直线过原点，

此时直线的斜率为 $k=2$，

直线的方程为 $y=2x$，即 $2x-y=0$.

故所求的直线方程为 $2x-y=0$ 或 $x-y+2=0$.

【点评】　事实上，当题中出现“截距相等”“截距的绝对值相等”“截距互为相反数”“在一坐标轴上的截距是另一坐标轴上的截距的 $m(m>0)$ 倍”等条件时，若采用截距式求直线方程，都要考虑“截距为 0”的情况.

4. 一般式中系数“缺陷”

【例 10】　如果直线 $(m-1)x+(m^2-4m+3)y-(m-1)=0$ 的斜率不存在，求 m 的值.

［错解］　因为直线的斜率不存在，所以 $m^2-4m+3=0$.

解得 $m=3$ 或 $m=1$.

所以当 $m=3$ 或 $m=1$ 时，直线的斜率不存在.

［剖析］　由于方程 $Ax+By+C=0$ 表示直线，本身隐含着“A，B 不同时为 0”这一条件. 当 $m=1$ 时，方程 $(m-1)x+(m^2-4m+3)y-(m-1)=0$ 即为 $0\cdot x+0\cdot y-0=0$，它不表示直线，应舍去.

［正解］　因为直线的斜率不存在，

所以 $m^2-4m+3=0$，且 $m-1\neq 0$，解得 $m=3$.

所以当 $m=3$ 时，直线的斜率不存在.

【点评】　方程 $Ax+By+C=0$（A，B 不同时为 0）才叫做直线的一般式方程，才表示一条直线.

素养培优提能

一、选择题

1. 若三条直线 $y=2x$，$x+y=3$，$mx+ny+5=0$ 相交于同一点，则点 (m,n) 可能是　（　）

A. $(1,-3)$　　B. $(3,-1)$

C. $(-3,1)$　　D. $(-1,3)$

2. 与直线 l：$x-y+1=0$ 关于 y 轴对称的直线的方程为（　）

A. $x+y-1=0$　　B. $x-y+1=0$

C. $x+y+1=0$　　D. $x-y-1=0$

3. 已知等边 $\triangle ABC$ 的两个顶点 $A(0,0)$，$B(4,0)$，且第三个顶点在第四象限，则 BC 边所在的直线方程是　（　）

A. $y=-\sqrt{3}x$　　B. $y=-\sqrt{3}(x-4)$

C. $y=\sqrt{3}(x-4)$　　D. $y=\sqrt{3}(x+4)$

4. 如果 $AB>0$，$BC>0$，则直线 $Ax-By-C=0$ 不经过的象限是　（　）

A. 第一象限　　B. 第二象限

C. 第三象限　　D. 第四象限

5. 已知点 $P(2,-3)$，$Q(3,2)$，直线 $ax-y+2=0$ 与线段 PQ 相交，则 a 的取值范围是　（　）

A. $a\geqslant\frac{4}{3}$　　B. $a\leqslant-\frac{4}{3}$

C. $-\frac{5}{2}\leqslant a\leqslant 0$　　D. $a\leqslant-\frac{4}{3}$ 或 $a\geqslant\frac{1}{2}$

二、填空题

6. 已知一个矩形的两边所在直线的方程分别为 $(m+1)x+y-2=0$ 和 $4m^2x+(m+1)y-4=0$，则实数 m 的值为_____.

7. 在直线方程 $y=kx+b$ 中，当 $x\in[-3,4]$ 时，恰好 $y\in[-8,13]$，则此直线方程为_____.

8. 设 $m\in\mathbf{R}$，过定点 A 的动直线 $x+my=0$ 和过定点 B 的动直线 $mx-y-m+3=0$ 交于点 P，若 AB 的中点为 C，则 $|PC|=$_____.

三、解答题

9. 在平面直角坐标系中，已知 $A(-1,2)$，$B(2,1)$，$C(1,0)$.

(1)判定 $\triangle ABC$ 的形状；

(2)求过点 A 且在 x 轴和 y 轴上的截距互为倒数的直线方程；

(3)已知 l 是过点 A 的直线，点 C 到直线 l 的距离为 2，求直线 l 的方程.

10. 已知一束光线经过直线 l_1：$3x-y+7=0$ 和 l_2：$2x+y+3=0$ 的交点 M，且射到 x 轴上一点 $N(1,0)$ 后被 x 轴反射.

(1)求点 M 关于 x 轴的对称点 P 的坐标；

(2)求反射光线所在的直线 l_3 的方程；

(3)求与直线 l_3 的距离为 $\sqrt{10}$ 的直线方程.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

第四章 圆与方程

4.1 圆的方程

第27课时 圆的标准方程

掌握几个要点

1. 学会一种方法：确定圆的方程主要方法是待定系数法，即列出关于 a,b,r 的方程组求 a,b,r 或直接求出圆心 (a,b) 和半径 r. 另外依据题意适时运用圆的几何性质解题可以化繁为简，提高解题效率.
2. 关注两个特征：讨论点与圆的位置关系可以从代数特征（点的坐标是否满足圆的方程）或几何特征（点到圆心的距离与半径的关系）去考虑，其中利用几何特征较为直观、快捷.

题点知识巩固

知识点一　直接法求圆的标准方程

1. 以两点 $A(-3,-1)$ 和 $B(5,5)$ 为直径端点的圆的方程是（　　）

A. $(x+1)^2+(y+2)^2=10$

B. $(x-1)^2+(y-2)^2=100$

C. $(x+1)^2+(y+2)^2=25$

D. $(x-1)^2+(y-2)^2=25$

2. 已知圆 C 的圆心在 x 轴的正半轴上，点 $M(0,\sqrt{5})$ 在圆 C 上，且圆心到直线 $2x-y=0$ 的距离为 $\frac{4\sqrt{5}}{5}$，则圆 C 的标准方程为_____.

3. 与 y 轴相切，且圆心坐标为 $(-5,-3)$ 的圆的标准方程为_____.

知识点二　待定系数法求圆的标准方程

4. 求经过点 $P(1,1)$ 和坐标原点，并且圆心在直线 $2x+3y+1=0$ 上的圆的标准方程.

5. 已知 $\triangle ABC$ 的三个顶点坐标分别为 $A(0,5),B(1,-2),C(-3,-4)$，求该三角形的外接圆的标准方程.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

知识点三　点与圆的位置关系

6. 点 $P(m^2,5)$ 与圆 $x^2+y^2=24$ 的位置关系是　　(　　)

A. 点 P 在圆内　　B. 点 P 在圆外

C. 点 P 在圆上　　D. 不确定

7. 已知点 $M(5\sqrt{a}+1,\sqrt{a})$ 在圆 $(x-1)^2+y^2=26$ 的内部，则 a 的取值范围为_____.

8. 已知点 $(1,1)$ 在圆 $(x-a)^2+(y+a)^2=4$ 的外部，则 a 的取值范围为_____.

提能达标过关

一、选择题

1. 方程 $(x-1)\sqrt{x^2+y^2-3}=0$ 所表示的曲线是　　(　　)

A. 一个圆　　B. 两个点

C. 一个点和一个圆　　D. 一条直线和一个圆

2. 已知一圆的圆心为点 $A(2,-3)$，一条直径的端点分别在 x 轴和 y 轴上，则圆的标准方程为　　(　　)

A. $(x+2)^2+(y-3)^2=13$

B. $(x-2)^2+(y+3)^2=13$

C. $(x-2)^2+(y+3)^2=52$

D. $(x+2)^2+(y-3)^2=52$

3. 若点 $(5a+1,12a)$ 在圆 $(x-1)^2+y^2=1$ 的内部，则实数 a 的取值范围是　　(　　)

A. $|a|<1$　　B. $a<\frac{1}{3}$

C. $|a|<\frac{1}{5}$　　D. $|a|<\frac{1}{13}$

4. 若直线 $y=ax+b$ 通过第一、二、四象限，则圆 $(x+a)^2+(y+b)^2=1$ 的圆心位于　　(　　)

A. 第一象限　　B. 第二象限

C. 第三象限　　D. 第四象限

5. 若圆心在 x 轴上，半径为 $\sqrt{5}$ 的圆 C 位于 y 轴左侧，且与直线 $x+2y=0$ 相切，则圆 C 的标准方程为　　(　　)

A. $(x-\sqrt{5})^2+y^2=5$

B. $(x+\sqrt{5})^2+y^2=5$

C. $(x-5)^2+y^2=5$

D. $(x+5)^2+y^2=5$

二、填空题

6. 设 $P(x,y)$ 是圆 $C:(x-2)^2+y^2=1$ 上任意一点，则 $(x-5)^2+(y+4)^2$ 的最大值为_____.

7. 已知圆 C 与圆 $(x-1)^2+y^2=1$ 关于直线 $y=-x$ 对称，则圆 C 的标准方程为_____.

8. 若圆 C 的半径为 1，圆心在第一象限，且与直线 $4x-3y=0$ 和 x 轴都相切，则该圆的标准方程是_____.

三、解答题

9. 求过点 $A(1,-1),B(-1,1)$ 且圆心在直线 $x+y-2=0$ 上的圆的标准方程.

10. 已知三点 $A(3,2),B(5,-3),C(-1,3)$，以点 $P(2,-1)$ 为圆心作一个圆，使 A,B,C 三点中一点在圆外，一点在圆上，一点在圆内，求这个圆的标准方程.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

第 28 课时　圆的一般方程

掌握几个要点

关注 2 个注意点：(1)圆的一般方程 $x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$ 是圆的另一种表示形式，其隐含着 $D^2+E^2-4F>0$，同圆的标准方程类似，求圆的一般式方程也需要三个独立的条件.(2)求轨迹的方法很多，注意合理选取，在求与圆有关的轨迹时，注意充分利用圆的性质.

题点知识巩固

知识点一　圆的一般方程的理解

1. 已知 $a\in\mathbf{R}$，方程 $a^2x^2+(a+2)y^2+4x+8y+5a=0$ 表示圆，则圆心坐标为_____，半径为_____.

2. 若点 M,N 在圆 $x^2+y^2+kx+2y-4=0$ 上，且点 M,N 关于直线 $x-y+1=0$ 对称，则该圆的面积为_____.

3. 若方程 $x^2+y^2+2mx-2y+m^2+5m=0$ 表示圆，求实数 m 的取值范围，并写出圆心坐标和半径.

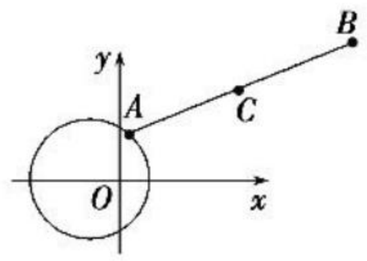
知识点二　求圆的一般方程

4. 已知一圆过 $P(4,-2)$，$Q(-1,3)$ 两点，且在 y 轴上截得的线段长为 $4\sqrt{3}$，求圆的方程.

5. 已知 $A(2,2)$，$B(5,3)$，$C(3,-1)$.
(1)求 $\triangle ABC$ 的外接圆的方程；
(2)若点 $M(a,2)$ 在 $\triangle ABC$ 的外接圆上，求 a 的值.

知识点三　与圆有关的轨迹方程

6. 如图，已知线段 AB 的中点 C 的坐标是 $(4,3)$，端点 A 在圆 $(x+1)^2+y^2=4$ 上运动，求线段 AB 的端点 B 的轨迹方程.



7. 等腰三角形的顶点是 $A(4,2)$，底边一个端点是 $B(3,5)$，求另一个端点 C 的轨迹方程，并说明它的轨迹是什么？

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

8. 已知圆心为 C 的圆经过点 $A(1,1)$ 和 $B(2,-2)$，且圆心 C 在直线 $l:x-y+1=0$ 上.

(1)求圆 C 的方程；

(2)线段 PQ 的端点 P 的坐标是 $(5,0)$，端点 Q 在圆 C 上运动，求线段 PQ 的中点 M 的轨迹方程.

提能达标过关

一、选择题

1. 圆 $x^2+y^2-2x+4y+3=0$ 的圆心到直线 $x-y=1$ 的距离为 (　　)

A. 2　　B. $\frac{\sqrt{2}}{2}$

C. 1　　D. $\sqrt{2}$

2. 方程 $x^2+y^2+2ax+2by+a^2+b^2=0$ 表示的图形为 (　　)

A. 以 (a,b) 为圆心的圆

B. 以 $(-a,-b)$ 为圆心的圆

C. 点 (a,b)

D. 点 $(-a,-b)$

3. 当 a 为任意实数时，直线 $(a-1)x-y+a+1=0$ 恒过定点 C，则以 C 为圆心，$\sqrt{5}$ 为半径的圆的方程为 (　　)

A. $x^2+y^2-2x+4y=0$

B. $x^2+y^2+2x+4y=0$

C. $x^2+y^2+2x-4y=0$

D. $x^2+y^2-2x-4y=0$

4. 若点 $(1,-1)$ 在圆 $x^2+y^2-x+y+m=0$ 外，则 m 的取值范围是 (　　)

A. $m>0$　　B. $m<\frac{1}{2}$

C. $0<m<\frac{1}{2}$　　D. $0\leqslant m\leqslant\frac{1}{2}$

5. 当点 P 在圆 $x^2+y^2=1$ 上变动时，它与定点 $Q(3,0)$ 的连线 PQ 的中点的轨迹方程是 (　　)

A. $(x+3)^2+y^2=4$

B. $(x-3)^2+y^2=1$

C. $(2x-3)^2+4y^2=1$

D. $(2x+3)^2+4y^2=1$

二、填空题

6. 已知圆 $C:x^2+y^2+2x+ay-3=0$（a 为实数）上任意一点关于直线 $l:x-y+2=0$ 的对称点都在圆 C 上，则 $a=$_____.

7. 由方程 $x^2+y^2+x+(m-1)y+\frac{1}{2}m^2=0$ 所确定的圆中，最大面积是_____.

8. 已知圆 $x^2+y^2+2x-4y+a=0$ 关于直线 $y=2x+b$ 成轴对称图形，则 $a-b$ 的取值范围是_____.

三、解答题

9. 已知圆 $C:x^2+y^2+Dx+Ey+3=0$，圆心在直线 $x+y-1=0$ 上，且圆心在第二象限，半径长为 $\sqrt{2}$，求圆的一般方程.

10. 已知方程 $x^2+y^2-2(t+3)x+2(1-4t^2)y+16t^4+9=0$（$t\in\mathbf{R}$）表示的图形是圆.

(1)求 t 的取值范围；

(2)求其中面积最大的圆的方程；

(3)若点 $P(3,4t^2)$ 恒在所给圆内，求 t 的取值范围.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

4.2　直线、圆的位置关系

第 29 课时　直线与圆的位置关系

掌握几个要点

1. 熟记两个途径：判断直线与圆位置关系的途径主要有两个：一是圆心到直线的距离与圆的半径进行大小比较；二是直线与圆的方程组成的方程组解的个数. 两者相比较，前者较形象、直观，便于运算.
2. 关注一个提醒：与圆有关的弦长、切线问题常利用几何法求解，但注意验证所求直线的斜率不存在的情形，避免漏解.

题点知识巩固

知识点一　直线与圆的位置关系的判断

1. 对任意的实数 k，直线 $y=kx+1$ 与圆 $x^2+y^2=2$ 的位置关系一定是（　　）

A. 相离　　B. 相切

C. 相交但直线不过圆心　　D. 相交且直线过圆心

2. 求实数 m 的取值范围，使直线 $x-my+3=0$ 与圆 $x^2+y^2-6x+5=0$ 分别满足：(1)相交；(2)相切；(3)相离.

知识点二　切线问题

3. 已知圆 C 与直线 $x-y=0$ 及 $x-y-4=0$ 都相切，圆心在直线 $x+y=0$ 上，则圆 C 的方程为（　　）

A. $(x+1)^2+(y-1)^2=2$

B. $(x-1)^2+(y+1)^2=2$

C. $(x-1)^2+(y-1)^2=2$

D. $(x+1)^2+(y+1)^2=2$

4. 若点 $P(1,2)$ 在以坐标原点为圆心的圆上，则该圆在点 P 处的切线方程为_____.

5. 过点 $A(4,1)$ 的圆 C 与直线 $x-y-1=0$ 相切于点 $B(2,1)$，则圆 C 的方程为_____.

知识点三　弦长问题

6. 过圆 $x^2+y^2=8$ 内的点 $P(-1,2)$ 作直线 l 交圆于 A,B 两点. 若直线 l 的倾斜角为 $135°$，则弦 AB 的长为_____.

7. 圆心为 $C(2,-1)$，截直线 $y=x-1$ 的弦长为 $2\sqrt{2}$ 的圆的方程为_____.

8. 已知直线 $l:kx-y+k+2=0$ 与圆 $C:x^2+y^2=8$.

(1)证明：直线 l 与圆相交；

(2)当直线 l 被圆截得的弦长最短时，求直线 l 的方程，并求出弦长.

提能达标过关

一、选择题

1. 若点 $M(x_0,y_0)$ 在圆 $x^2+y^2=R^2$ 外，则直线 $x_0x+y_0y=R^2$ 与圆的位置关系是（　　）

A. 相切　　B. 相交

C. 相离　　D. 不确定

2. 如果圆 $x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$ 与 x 轴相切于原点，则（　　）

A. $E\neq0,D=F=0$　　B. $D\neq0,E\neq0,F=0$

C. $D\neq0,E=F=0$　　D. $F\neq0,D=E=0$

3. 圆 $x^2+y^2=16$ 上的点到直线 $x-y=3$ 的距离的最大值为（　　）

A. $\frac{3}{2}\sqrt{2}$　　B. $4-\frac{3}{2}\sqrt{2}$

C. $\frac{3\sqrt{2}}{2}+4$　　D. 0

4. 与圆 $C:x^2+y^2-4x+2=0$ 相切，且在 x,y 轴上的截距相等的直线共有（　　）

A. 1 条　　B. 2 条

C. 3 条　　D. 4 条

5. 圆 $x^2+y^2+2x+4y-3=0$ 上到直线 $l:x+y+1=0$ 的距离为 $\sqrt{2}$ 的点有（　　）

A. 1 个　　B. 2 个

C. 3 个　　D. 4 个

二、填空题

6. 已知直线 $ax+y-2=0$ 与圆心为 C 的圆 $(x-1)^2+(y-a)^2=4$ 相交于 A,B 两点，且 $\triangle ABC$ 为等边三角形，则实数 $a=$_____.

7. 一条光线从点 $(-2,-3)$ 射出，经 y 轴反射后与圆 $(x+3)^2+(y-2)^2=1$ 相切，则反射光线所在直线的斜率为_____.

8. 已知圆 $x^2-2ax+y^2=0(a>0)$ 与直线 $l:x-\sqrt{3}y+3=0$ 相切，则 $a=$_____.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

三、解答题

9. 已知圆 C 和 y 轴相切，圆心 C 在直线 $x-3y=0$ 上，且被直线 $y=x$ 截得的弦长为 $2\sqrt{7}$，求圆 C 的方程.

10. 过点 $A(4,-3)$ 作圆 $(x-3)^2+(y-1)^2=1$ 的切线，求此切线方程.

第 30 课时　圆与圆的位置关系

掌握几个要点

1. 熟悉两种方法：判断两圆的位置关系的方法

(1)由两圆的方程组成的方程组有几个实数解确定，这种方法计算量比较大，一般不用.

(2)依据圆心距与两圆半径的和或两半径的差的绝对值的大小关系.

2. 掌握两个技巧：(1)当两圆相交时，把两圆的方程作差消去 x^2 和 y^2 就得到两圆的公共弦所在的直线方程.(2)求弦长时，常利用圆心到弦所在的直线的距离求弦心距，再结合勾股定理求弦长.

题点知识巩固

知识点一　两圆位置关系的判断

1. 已知圆 $M:x^2+y^2-2ay=0(a>0)$ 截直线 $x+y=0$ 所得线段的长度是 $2\sqrt{2}$，则圆 M 与圆 $N:(x-1)^2+(y-1)^2=1$ 的位置关系是　　(　　)

A. 内切　　B. 相交

C. 外切　　D. 外离

2. 已知圆 $C_1:x^2+y^2-2x+4y+4=0$ 和圆 $C_2:4x^2+4y^2-16x+8y+19=0$，则这两个圆的公切线的条数为　　(　　)

A. 1 或 3　　B. 4

C. 0　　D. 2

3. 当 a 为何值时，两圆 $C_1:x^2+y^2-2ax+4y+a^2-5=0$ 和 $C_2:x^2+y^2+2x-2ay+a^2-3=0$.

(1)外切；(2)相交；(3)外离.

知识点二　两圆的公共弦问题

4. 圆 $x^2+y^2-4x+6y=0$ 和圆 $x^2+y^2-6x=0$ 交于 A,B 两点，则 AB 的垂直平分线的方程是　　(　　)

A. $x+y+3=0$　　B. $2x-y-5=0$

C. $3x-y-9=0$　　D. $4x-3y+7=0$

5. 若圆 $x^2+y^2=4$ 与圆 $x^2+y^2+2ay-6=0(a>0)$ 的公共弦长为 $2\sqrt{3}$，则 $a=$ _____.

6. 圆 $C_1:x^2+y^2=1$ 与圆 $C_2:x^2+y^2-2x-2y+1=0$ 的公共弦所在的直线被圆 $C_3:(x-1)^2+(y-1)^2=\frac{25}{4}$ 所截得的弦长为　　.

知识点三　圆系方程及应用

7. 求过直线 $x+y+4=0$ 与圆 $x^2+y^2+4x-2y-4=0$ 的交点且与直线 $y=x$ 相切的圆的方程.

8. 求圆心在直线 $x-y-4=0$ 上，且过两圆 $x^2+y^2-4x-6=0$ 和 $x^2+y^2-4y-6=0$ 的交点的圆的方程.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

提能达标过关

一、选择题

1. 若圆 $C_1:(x+2)^2+(y-m)^2=9$ 与圆 $C_2:(x-m)^2+(y+1)^2=4$ 外切，则 m 的值为　　(　　)

A. 2　　B. -5

C. 2 或 -5　　D. 不确定

2. 设 $r>0$，圆 $(x-1)^2+(y+3)^2=r^2$ 与圆 $x^2+y^2=16$ 的位置关系不可能是　　(　　)

A. 内切　　B. 相交

C. 内切或内含　　D. 外切或外离

3. 若圆 $x^2+y^2-2x+F=0$ 和圆 $x^2+y^2+2x+Ey-4=0$ 的公共弦所在的直线方程是 $x-y+1=0$，则　　(　　)

A. $E=-4,F=8$　　B. $E=4,F=-8$

C. $E=-4,F=-8$　　D. $E=4,F=8$

4. 若圆 $x^2+y^2=r^2$ 与圆 $x^2+y^2+2x-4y+4=0$ 有公共点，则 r 满足的条件是　　(　　)

A. $r<\sqrt{5}+1$　　B. $r>\sqrt{5}+1$

C. $|r-\sqrt{5}|\leqslant 1$　　D. $|r-\sqrt{5}|<1$

5. 半径为 6 的圆与 x 轴相切，且与圆 $x^2+(y-3)^2=1$ 内切，则此圆的方程是　　(　　)

A. $(x-4)^2+(y-6)^2=6$

B. $(x+4)^2+(y-6)^2=6$ 或 $(x-4)^2+(y-6)^2=6$

C. $(x-4)^2+(y-6)^2=36$

D. $(x+4)^2+(y-6)^2=36$ 或 $(x-4)^2+(y-6)^2=36$

二、填空题

6. 若圆 $x^2+y^2-2ax+a^2=2$ 和 $x^2+y^2-2by+b^2=1$ 外离，则 a,b 满足的条件是_____.

7. 两圆相交于两点 $A(1,3)$ 和 $B(m,-1)$，两圆圆心都在直线 $x-y+c=0$ 上，则 $m+c$ 的值为_____.

8. 圆 $C_1:x^2+y^2-2x-8=0$ 与圆 $C_2:x^2+y^2+2x-4y-4=0$ 的公共弦长为_____.

三、解答题

9. 求过两圆 $C_1:x^2+y^2-4x+2y+1=0$ 与 $C_2:x^2+y^2-6x=0$ 的交点且过点 $(2,-2)$ 的圆的方程.

10. 已知圆 $O_1:x^2+(y+1)^2=4$，圆 O_2 的圆心 $O_2(2,1)$.

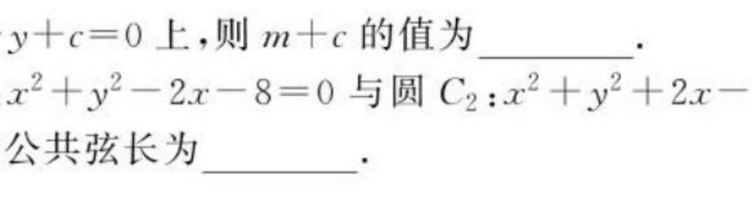
(1) 若圆 O_2 与圆 O_1 外切，求圆 O_2 的方程；

(2) 若圆 O_2 与圆 O_1 交于 A,B 两点，且 $|AB|=2\sqrt{2}$，求圆 O_2 的方程.

第 31 课时　直线与圆的方程的应用

掌握几个要点

1. 熟悉一个思维过程：直线与圆的方程在生产、生活实践以及数学研究中有着广泛的应用，要善于利用其解决一些实际问题，关键是把实际问题转化为数学问题；要有用坐标法解决几何问题的意识，用坐标法解决平面几何问题的思维过程：



2. 掌握一个思维方向：用直线与圆的方程解决最值问题的关键是由某些代数式的结构特征联想其几何意义，然后利用直线与圆的方程及解析几何的有关知识并结合图形的几何量值关系分析、解决问题.

题点知识巩固

知识点一　直线与圆的方程在实际问题中的应用

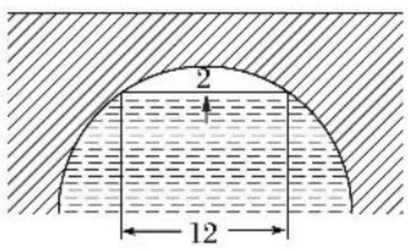
1. 一辆卡车宽 1.6 m，要经过一个半圆形隧道（半径为 3.6 m），则这辆卡车的平顶车篷篷顶距地面高度不得超过　　(　　)

A. 1.4 m　　B. 3.5 m

C. 3.6 m　　D. 2.0 m

2. 设村庄外围所在曲线的方程可用 $(x-2)^2+(y+3)^2=4$ 表示，村外一小路所在直线的方程可用 $x-y+2=0$ 表示，则从村庄外围到小路的最短距离为_____.

3. 如图为一座圆拱桥的截面图，当水面在某位置时，拱顶离水面 2 m，水面宽 12 m，当水面下降 1 m 后，水面宽为_____ m.



关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

知识点二　与圆有关的最值问题

4. 过点 $P(1,1)$ 的直线，将圆形区域 $\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 4\}$ 分为两部分，使得这两部分的面积之差最大，则该直线的方程为_____.

5. 如果圆的方程为 $x^2+y^2+kx+2y+k^2=0$，那么当圆的面积最大时，圆心坐标为_____.

6. 已知实数 x,y 满足方程 $(x-2)^2+y^2=3$.

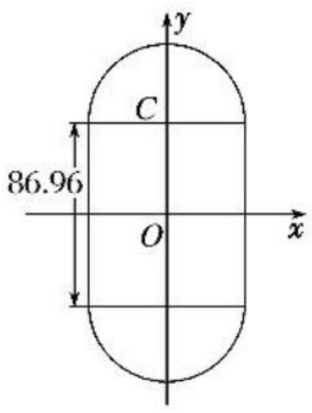
(1)求 $\frac{y}{x}$ 的最大值和最小值；

(2)求 $y-x$ 的最大值和最小值；

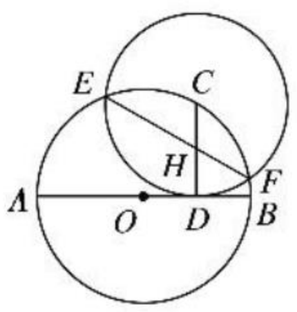
(3)求 x^2+y^2 的最大值和最小值.

知识点三　坐标法证明几何问题

7. 某操场 400 m 跑道的直道长为 86.96 m，弯道是两个半圆弧，半径为 36 m，以操场中心为坐标原点建立如图所示的平面直角坐标系，求弯道所在的圆的方程.



8. 如图所示，在圆 O 上任取 C 点为圆心，作圆 C 与圆 O 的直径 AB 相切于点 D，圆 C 与圆 O 交于点 E,F，且 EF 与 CD 相交于 H，求证：EF 平分 CD.



提能达标过关

一、选择题

1. $y=|x|$ 的图象和圆 $x^2+y^2=4$ 所围成的图形的面积是　　(　　)

A. $\frac{\pi}{4}$　　B. $\frac{3\pi}{4}$

C. $\frac{3\pi}{2}$　　D. π

2. 若实数 x,y 满足 $(x+5)^2+(y-12)^2=14^2$，则 x^2+y^2 的最小值为　　(　　)

A. 2　　B. 1

C. $\sqrt{3}$　　D. $\sqrt{2}$

3. 已知圆 $x^2+y^2+2x-2y+2a=0$ 截直线 $x+y+2=0$ 所得弦长为 4，则实数 a 的值是　　(　　)

A. -1　　B. -2

C. -3　　D. -4

4. 已知点 $A(-1,1)$ 和圆 $C:(x-5)^2+(y-7)^2=4$，一束光线从点 A 经 x 轴反射到圆 C 上的最短路程是　　(　　)

A. $6\sqrt{2}-2$　　B. 8

C. $4\sqrt{6}$　　D. 10

5. 已知两点 $A(-2,0),B(0,2)$，点 C 是圆 $x^2+y^2-2x=0$ 上任意一点，则 $\triangle ABC$ 的面积的最小值是　　(　　)

A. $3-\sqrt{2}$　　B. $3+\sqrt{2}$

C. $3-\frac{\sqrt{2}}{2}$　　D. $\frac{3-\sqrt{2}}{2}$

二、填空题

6. 已知实数 x,y 满足 $x^2+y^2=1$，则 $\frac{y+2}{x+1}$ 的取值范围为_____.

7. 已知圆 $C:(x-1)^2+y^2=1$，点 $A(-2,0)$ 及点 $B(3,a)$，从点 A 观察点 B，要使视线不被圆 C 挡住，则 a 的取值范围为_____.

8. 已知圆 $O:x^2+y^2=5$ 和点 $A(1,2)$，则过点 A 与圆 O 相切的直线与两坐标轴围成的三角形的面积为_____.

三、解答题

9. 已知圆 $C:(x+2)^2+y^2=1$，$P(x,y)$ 为圆 C 上任一点.

(1)求 $\frac{y-2}{x-1}$ 的最大值与最小值；

(2)求 $x-2y$ 的最大值与最小值.

10. 如图，已知一艘海监船 O 上配有雷达，其监测范围是半径为 25 km 的圆形区域，一艘外籍轮船从位于海监船正东 40 km 的 A 处出发，径直驶向位于海监船正北 30 km 的 B 处岛屿，速度为 28 km/h. 问：这艘外籍轮船能否被海监船监测到？若能，持续时间多长？（要求用坐标法）

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

4.3　空间直角坐标系

第 32 课时　空间直角坐标系

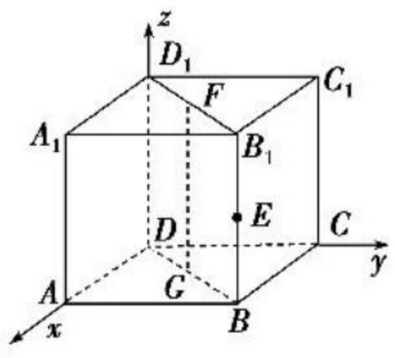
掌握几个要点

1. 掌握一个模型：结合长方体的长、宽、高理解点的坐标(x,y,z)，培养立体思维，增强空间想象力.
2. 把握一个原则：学会用类比联想的方法理解空间直角坐标系的建系原则.

题点知识巩固

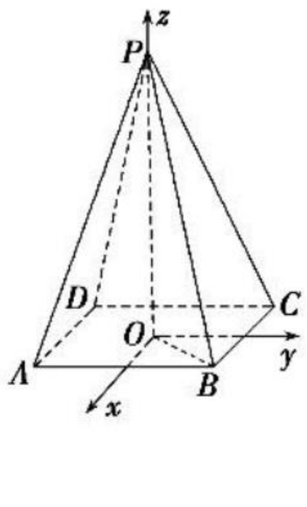
知识点一　空间点的坐标

1. 点$(2,0,3)$位于（　　）
   A. y 轴上　　B. x 轴上
   C. xOz 平面内　　D. yOz 平面内
2. 已知四边形 $ABCD$ 为平行四边形，且 $A(4,1,3)$，$B(2,-5,1)$，$C(3,7,-5)$，则顶点 D 的坐标为_____.
3. 如图所示，在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，E、F 分别是 BB_1、D_1B_1 的中点，棱长为 1，求 E、F 点的坐标.



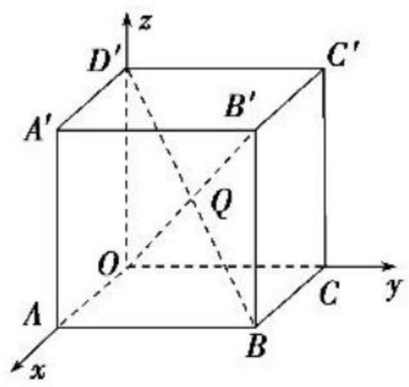
知识点二　空间直角坐标系

4. 已知正四棱锥 $P-ABCD$ 的底面边长为 $5\sqrt{2}$，侧棱长为 13，建立的空间直角坐标系如图，写出各顶点的坐标.



5. 已知 $V-ABCD$ 为正四棱锥，O 为底面中心，$AB=2$，$VO=3$，试建立空间直角坐标系，并求出各顶点的坐标.

6. 如图所示，棱长为 a 的正方体 $OABC-D'A'B'C'$ 中，对角线 OB' 与 BD' 相交于点 Q，顶点 O 为坐标原点，OA、OC 分别在 x 轴、y 轴的正半轴上，试写出点 Q 的坐标.



知识点三　空间点的对称

7. 在平面直角坐标系中，点 $P(x,y)$ 的几种特殊的对称点的坐标如下：①关于原点的对称点是 $P'(-x,-y)$，②关于 x 轴的对称点是 $P''(x,-y)$，③关于 y 轴的对称点是 $P'''(-x,y)$，那么，在空间直角坐标系内，点 $P(x,y,z)$ 的几种特殊的对称点坐标：
   (1)关于原点的对称点是 P_1 _____；
   (2)关于横轴(x 轴)的对称点是 P_2 _____；
   (3)关于纵轴(y 轴)的对称点是 P_3 _____；
   (4)关于竖轴(z 轴)的对称点是 P_4 _____；
   (5)关于 xOy 坐标平面的对称点是 P_5 _____；
   (6)关于 yOz 坐标平面的对称点是 P_6 _____；
   (7)关于 zOx 坐标平面的对称点是 P_7 _____.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

8. 已知点 $P(2,3,-1)$ 关于坐标平面 xOy 的对称点为 P_1，点 P_1 关于坐标平面 yOz 的对称点为 P_2，点 P_2 关于 z 轴的对称点为 P_3，则点 P_3 的坐标为_____.

9. 求点 $A(1,2,-1)$ 关于坐标平面 xOy 及 x 轴对称的点的坐标.

提能达标过关

一、选择题

1. 下列说法：①在空间直角坐标系中，在 x 轴上的点的坐标一定可记为 $(0,b,c)$；②在空间直角坐标系中，在 yOz 平面上的点的坐标一定可记为 $(0,b,c)$；③在空间直角坐标系中，在 z 轴上的点的坐标一定可记为 $(0,0,c)$；④在空间直角坐标系中，在 xOz 平面上的点的坐标一定可记为 $(a,0,c)$. 其中正确的个数是 (　　)

A. 1　　B. 2

C. 3　　D. 4

2. 点 $P(-1,2,0)$ 位于 (　　)

A. y 轴上　　B. z 轴上

C. xOy 平面上　　D. xOz 平面上

3. 空间直角坐标系中，点 $M(2,5,8)$ 关于 xOy 平面对称的点 N 的坐标为 (　　)

A. $(-2,5,8)$　　B. $(2,-5,8)$

C. $(2,5,-8)$　　D. $(-2,-5,8)$

4. 与点 $P(1,3,5)$ 关于原点成中心对称的点 P' 的坐标是 (　　)

A. $(-1,-3,-5)$　　B. $(-1,-3,5)$

C. $(-1,3,-5)$　　D. $(1,-3,-5)$

5. 在空间直角坐标系中，点 $(-2,1,4)$ 关于 x 轴对称点的坐标是 (　　)

A. $(-2,1,-4)$　　B. $(-2,-1,-4)$

C. $(-2,1,4)$　　D. $(2,1,-4)$

二、填空题

6. 点 $(1,1,-2)$ 关于 yOz 平面的对称点的坐标是_____.

7. 在空间直角坐标系中，点 $M(-2,4,-3)$ 在 xOz 平面上的射影为 M' 点，则 M' 关于原点对称点的坐标是_____.

8. 已知点 $A(-3,1,4)$、$B(5,-3,-6)$，则点 B 关于点 A 的对称点 C 的坐标为_____.

三、解答题

9. 在空间直角坐标系中，给定点 $M(1,-2,3)$，求它分别关于坐标平面，坐标轴和原点的对称点的坐标.

10. 四面体 $P-ABC$ 中，PA、PB、PC 两两垂直，$PA=PB=2$，$PC=1$，E 为 AB 的中点，建立适当的空间直角坐标系并写出 P、A、B、C、E 的坐标.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

第 33 课时　空间两点间的距离公式

掌握几个要点

1. 区分两个公式：切实体会空间中点的坐标及两点间的距离公式同平面内点的坐标及两点间的距离公式的区别和联系.
2. 体会一种思想：在导出空间两点间的距离公式中体会转化与化归思想的应用，突出了化空间为平面的解题思想.

题点知识巩固

知识点一　两点间的距离公式

1. 点 $P\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{3}}{3},-\frac{\sqrt{6}}{6}\right)$ 到原点的距离是（　　）

A. $\frac{\sqrt{30}}{6}$　　B. 1

C. $\frac{\sqrt{33}}{6}$　　D. $\frac{\sqrt{35}}{6}$

2. 点 $P(a,b,c)$ 到坐标平面 xOy 的距离是（　　）

A. $|a|$　　B. $|b|$

C. $|c|$　　D. 以上都不对

3. 已知点 $A(-3,1,5)$ 与点 $B(0,2,3)$，则 A、B 之间的距离为（　　）

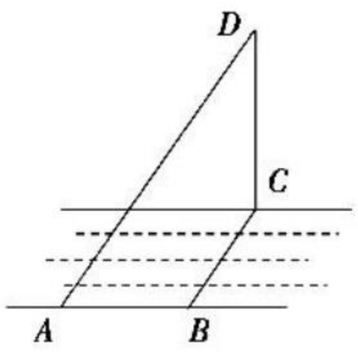
A. $\sqrt{10}$　　B. $\sqrt{14}$

C. 4　　D. $\sqrt{17}$

4. 证明以 $A(4,3,1)$、$B(7,1,2)$、$C(5,2,3)$ 为顶点的 $\triangle ABC$ 是等腰三角形.

知识点二　两点间距离公式的应用

5. 如图所示，在河的一侧有一塔 $CD=5$ m，河宽 $BC=3$ m，另一侧有点 A，$AB=4$ m，求点 A 与塔顶 D 的距离 AD.



6. 已知空间三点 $A(1,2,4)$、$B(2,4,8)$、$C(3,6,12)$，求证 A、B、C 三点在同一条直线上.

知识点三　空间中点的轨迹问题

7. 点 $P(x,y,z)$ 满足 $\sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2+(z+1)^2}=2$，则点 P 在（　　）

A. 以点 $(1,1,-1)$ 为球心以 $\sqrt{2}$ 为半径的球面上

B. 以点 $(1,1,-1)$ 为中心以 $\sqrt{2}$ 为棱长的正方体内

C. 以点 $(1,1,-1)$ 为球心以 2 为半径的球面上

D. 无法确定

8. (1)若点 $P(x,y,z)$ 到 $A(1,0,1)$、$B(2,1,0)$ 两点的距离相等，则 x,y,z 满足的关系式是_____；

(2)若点 $A(2,1,4)$ 与点 $P(x,y,z)$ 的距离为 5，则 x、y、z 满足的关系式是_____；

(3)已知空间两点 $A(-3,-1,1)$、$B(-2,2,3)$ 在 Oz 轴上有一点 C，它与 A、B 两点的距离相等，则 C 点的坐标是_____.

9. 求到两点 $A(2,3,0)$、$B(5,1,0)$ 距离相等的点 P 的坐标满足的条件.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

提能达标过关

一、选择题

1. 设点 B 是点 $A(2,-3,5)$ 关于 xOy 坐标平面的对称点，则 $|AB|$ 等于　　（　　）

A. 10　　B. $\sqrt{10}$

C. $\sqrt{38}$　　D. 38

2. 已知三点 $A(-1,0,1)$、$B(2,4,3)$、$C(5,8,5)$，则　　（　　）

A. 三点构成等腰三角形

B. 三点构成直角三角形

C. 三点构成等腰直角三角形

D. 三点构不成三角形

3. 已知 $A(1,0,2)$、$B(1,-3,1)$，点 M 在 z 轴上且到 A、B 两点的距离相等，则 M 点坐标为　　（　　）

A. $(-3,0,0)$　　B. $(0,-3,0)$

C. $(0,0,-3)$　　D. $(0,0,3)$

4. 已知正方体的每条棱都平行于坐标轴，两个顶点为 $A(-6,-6,-6)$、$B(8,8,8)$，且两点不在正方体的同一个面上，正方体的对角线长为　　（　　）

A. $14\sqrt{3}$　　B. $3\sqrt{14}$

C. $5\sqrt{42}$　　D. $42\sqrt{5}$

5. 一束光线自点 $P(1,1,1)$ 发出，遇到平面 xOy 被反射，到达点 $Q(3,3,6)$ 被吸收，那么光所走的路程是　　（　　）

A. $\sqrt{37}$　　B. $\sqrt{47}$

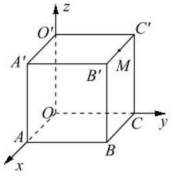
C. $\sqrt{33}$　　D. $\sqrt{57}$

二、填空题

6. 在空间直角坐标系中，已知点 $P(0,0,\sqrt{3})$ 和点 $C(-1,2,0)$，则在 y 轴上到点 P 和点 C 的距离相等的点 M 的坐标是_____.

7. 空间直角坐标系中点 $A(-2,1,3)$、$B(-1,2,1)$，点 P 在 x 轴上，且 $|PA|=|PB|$，则点 P 的坐标为_____.

8. 如图所示的是棱长为 $3a$ 的正方体 $OABC-O'A'B'C'$，点 M 在 $B'C'$ 上，且 $|C'M|=2|MB'|$，以 O 为坐标原点，建立空间直角坐标系，则点 M 的坐标为_____.



三、解答题

9. 已知一长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的对称中心在坐标原点 O，交于同一顶点的三个面分别平行于三个坐标平面，其中顶点 A_1、B_1、C_1、D_1 分别位于第Ⅰ、Ⅱ、Ⅲ、Ⅳ卦限，且棱长 $AA_1=2$，$AB=6$，$AD=4$. 求长方体各顶点的坐标.

10. 直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$，底面 $\triangle ABC$ 中，$CA=CB=1$，$\angle BCA=90°$，棱 $AA_1=2$，M、N 分别是 A_1B_1、A_1A 的中点. 求 $|MN|$ 的长.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

SY 素养提升 SUYANGTISHENG 重点深化理解　素养培优提能

重点深化理解

一、圆弦长的求法

1. 利用两点间的距离公式

若直线与圆相交的两个交点分别为 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，则弦长 $|AB|=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$.

【例 1】 求过原点且倾斜角为 $60°$ 的直线被圆 $x^2+y^2-4y=0$ 所截得的弦长.

［解］ 设直线与圆相交时的两个交点分别为 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，由题意可知直线的方程为 $y=\sqrt{3}x$.

解方程组 $\begin{cases}y=\sqrt{3}x,\\x^2+y^2-4y=0,\end{cases}$ 得 $\begin{cases}x_1=0,\\y_1=0\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x_2=\sqrt{3},\\y_2=3.\end{cases}$

$\therefore |AB|=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}=\sqrt{(0-\sqrt{3})^2+(0-3)^2}=2\sqrt{3}$.

【点评】 解由直线方程与圆方程联立的方程组得弦的两端点的坐标，再由两点间的距离公式求解. 这是一种最基本的方法，当方程组比较容易解时常用此法.

2. 利用勾股定理

若弦心距为 d，圆的半径为 r，则弦长 $|AB|=2\sqrt{r^2-d^2}$.

【例 2】 求直线 $x+2y=0$ 被圆 $x^2+y^2-6x-2y-15=0$ 所截得的弦长 $|AB|$.

［解］ 把圆 $x^2+y^2-6x-2y-15=0$ 化为标准方程为 $(x-3)^2+(y-1)^2=25$，

所以其圆心坐标为 $(3,1)$，半径为 $r=5$.

因为圆心 $(3,1)$ 到直线 $x+2y=0$ 的距离为 $d=\frac{|3+2\times1|}{\sqrt{1^2+2^2}}=\sqrt{5}$，所以弦长 $|AB|=2\sqrt{r^2-d^2}=4\sqrt{5}$.

3. 利用弦长公式

若直线 l 的斜率为 k，与圆相交时的两个交点分别为 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，则弦长 $|AB|=\sqrt{1+k^2}|x_1-x_2|=\sqrt{(1+k^2)[(x_1+x_2)^2-4x_1x_2]}$.

【例 3】 求直线 $2x-y-2=0$ 被圆 $(x-3)^2+y^2=9$ 所截得的弦长 $|AB|$.

［解］ 设直线与圆相交时的两个交点分别为 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$. 由 $\begin{cases}2x-y-2=0,\\(x-3)^2+y^2=9,\end{cases}$ 消去 y 整理得 $5x^2-14x+4=0$，则 $x_1+x_2=\frac{14}{5}$，$x_1x_2=\frac{4}{5}$.

$\therefore |AB|=\sqrt{(1+k^2)[(x_1+x_2)^2-4x_1x_2]}$

$=\sqrt{(1+2^2)\left[\left(\frac{14}{5}\right)^2-4\times\frac{4}{5}\right]}=\frac{2\sqrt{145}}{5}$.

【点评】 通常设出弦的两端点的坐标（不必求出，即设而不求），联立直线方程与圆方程消去 y（或 x）转化为关于 x（或 y）的一元二次方程，再结合根与系数的关系即可得解.

二、公共弦问题解析

两个圆相交，它们有两个交点，连接这两个交点，可得两圆的公共弦. 公共弦与两个圆的特征量（圆心和半径）都有联系，因此，它是沟通两圆的一个桥梁. 下面分类解析，供参考.

1. 求公共弦所在直线的方程问题

【例 4】 圆 $C_1:(x-1)^2+(y+1)^2=3$ 与圆 $C_2:x^2+y^2+2x-2y-3=0$ 的公共弦所在直线的方程为_____.

［分析］ 把圆的方程化为一般方程，然后两圆方程相减，所得方程即为公共弦所在的直线方程.

［解析］ 把圆 C_1 的方程化为一般式，得 $x^2+y^2-2x+2y-1=0$. 两圆方程相减，并整理得 $2x-2y-1=0$，即为两圆公共弦所在直线的方程.

［答案］ $2x-2y-1=0$

【点评】 两相交圆的一般方程相减后，会得到一个关于 x,y 的二元一次方程，它表示一条直线，又是两圆方程的公共解，即两圆交点的坐标一定是这个方程的解，所以这个方程表示的直线过两圆交点，所以它是两圆公共弦所在的直线方程.

2. 求公共弦长问题

【例 5】 求圆 $C_1:x^2+y^2-10x-10y=0$ 与圆 $C_2:x^2+y^2+6x+2y-40=0$ 的公共弦长.

［分析］ 求出两圆公共弦所在的直线方程，然后在一个圆中运用圆的弦长公式求两圆的公共弦长.

［解］ 两圆方程相减，并整理，得公共弦所在的直线方程为 $4x+3y-10=0$.

把圆 C_1 的方程化为标准方程是 $(x-5)^2+(y-5)^2=50$，它的圆心为 $C_1(5,5)$，半径为 $r_1=5\sqrt{2}$.

又圆心 C_1 到直线 $4x+3y-10=0$ 的距离为 $d=\frac{|4\times5+3\times5-10|}{\sqrt{4^2+3^2}}=5$，

所以公共弦长为 $2\sqrt{r_1^2-d^2}=2\sqrt{50-25}=10$.

【点评】 求两圆的公共弦长，需先求出公共弦所在的直线方程，然后在一个圆中运用圆的弦长公式求公共弦长，即把两圆的公共弦长转化为一个圆的弦长求解.

3. 公共弦的性质的应用问题

【例 6】 已知圆 $C_1:x^2+y^2=4$ 与圆 $C_2:(x-\sqrt{5})^2+(y-2)^2=r^2(r>0)$ 的公共弦长为 $\sqrt{7}$，求 r 的值.

［分析］ 利用两圆连心线垂直平分公共弦这一性质，分两圆圆心在公共弦的异侧和同侧两种情况，讨论求解.

［解］ 设两圆的公共弦的两个端点为 A,B.

如图，当两圆圆心在公共弦异侧时，连接 C_1A，C_2A，C_1C_2，则 $C_1C_2\perp AB$.

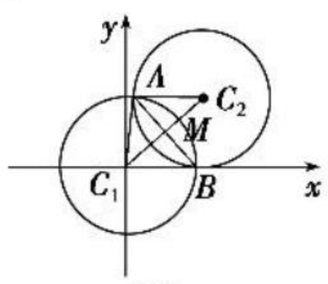


图1

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

设 $C_1C_2 \cap AB=M$，则 M 是 AB 的中点.

在 $\mathrm{Rt}\triangle C_1MA$ 中，可得

$$|C_1M|=\sqrt{|C_1A|^2-|AM|^2}=\sqrt{4-\left(\frac{\sqrt{7}}{2}\right)^2}=\frac{3}{2},$$

又 $|C_1C_2|=\sqrt{(\sqrt{5})^2+2^2}=3$，

所以 $|MC_2|=|C_1C_2|-|C_1M|=3-\frac{3}{2}=\frac{3}{2}$，

所以 $|AC_2|=|AC_1|=2$，即 $r=2$.

如图，当两圆圆心在公共弦同侧时，连接 C_1A，C_2A，C_1C_2，则 $C_1C_2 \perp AB$.

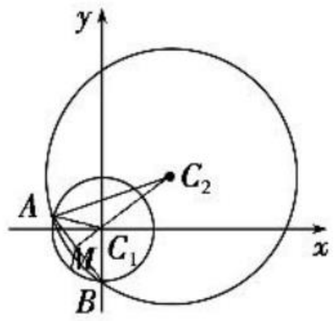


图2

设 $C_1C_2 \cap AB=M$，则 M 是 AB 的中点.

在 $\mathrm{Rt}\triangle C_1MA$ 中，可得

$$|C_1M|=\sqrt{|C_1A|^2-|AM|^2}=\sqrt{4-\left(\frac{\sqrt{7}}{2}\right)^2}=\frac{3}{2},$$

又 $|C_1C_2|=\sqrt{(\sqrt{5})^2+2^2}=3$，

所以 $|MC_2|=|C_1M|+|C_1C_2|=\frac{3}{2}+3=\frac{9}{2}$，

所以 $|AC_2|=\sqrt{|MA|^2+|MC_2|^2}=\sqrt{\left(\frac{\sqrt{7}}{2}\right)^2+\left(\frac{9}{2}\right)^2}$

$=\sqrt{22}$，即 $r=\sqrt{22}$.

【点评】 因为解答本题要同时在两个圆中展开计算，所以必须运用公共弦的性质，方可保证运算畅通. 忽视两圆圆心在公共弦同侧的情形是本题的一个易错点.

三、解析几何中数学思想的应用

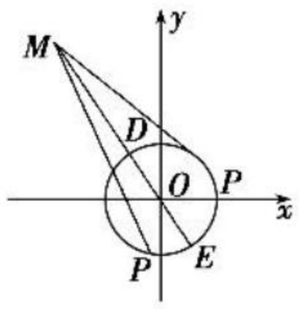
1. 数形结合思想

数形结合的思想，其实质就是将抽象的数学语言与直观的图形结合起来，实现代数问题几何化，几何问题代数化.

【例 7】 已知点 $P(x,y)$ 在圆 $O:x^2+y^2=1$ 上，求 $(x+2)^2+(y-3)^2$ 的最小值.

［**分析**］ 从 $(x+2)^2+(y-3)^2$ 的几何意义打开思维，通过数形结合，辅之以临界点来求解.

［**解**］ 如图，设点 $M(-2,3)$，



则 $(x+2)^2+(y-3)^2$ 表示 $|PM|^2$.

因为 $|MO|^2=(-2)^2+3^2=13>1$，所以点 M 在圆 O 外.

连接 MO 并延长，顺次交圆 O 于 D，E 两点，则 $|MD| \leqslant |PM| \leqslant |ME|$，

即 $|MO|-r \leqslant |PM| \leqslant |MO|+r$.

所以 $|PM|$ 的最小值为 $|MO|-r=\sqrt{13}-1$，即 $(x+2)^2+(y-3)^2$ 的最小值为 $(\sqrt{13}-1)^2=14-2\sqrt{13}$.

【点评】 本例题从运动变化的角度出发（让点 P 在圆上运动），在运动中寻找最值取得的条件，从而使问题获解.

2. 方程思想

通过观察、分析、判断将问题化归为方程的问题，利用方程的性质，实现问题与方程的互相转化，达到解决问题的目的.

【例 8】 已知过点 $(3,0)$ 的直线 l 与圆 $x^2+y^2+x-6y+3=0$ 相交于 P，Q 两点，且 $OP \perp OQ$（其中 O 为原点），求直线 l 的方程.

［**分析**］ 由条件 $OP \perp OQ$，若设 $P(x_1,y_1)$，$Q(x_2,y_2)$，则 $\frac{y_1-0}{x_1-0} \cdot \frac{y_2-0}{x_2-0}=-1$. 由 P，Q 在圆及直线上，可借助方程求解.

［**解**］ 设直线 l 的方程为 $x+ay-3=0(a \neq 0)$，

则点 $P(x_1,y_1)$，$Q(x_2,y_2)$ 的坐标满足方程组

$$\begin{cases} x^2+y^2+x-6y+3=0, \\ x+ay-3=0, \end{cases}$$

消去 y，得 $x^2+\left(\frac{3-x}{a}\right)^2+x-6 \cdot \frac{3-x}{a}+3=0$，

即 $\left(1+\frac{1}{a^2}\right)x^2+\left(-\frac{6}{a^2}+\frac{6}{a}+1\right)x+\frac{9}{a^2}-\frac{18}{a}+3=0$，

所以 $x_1x_2=\frac{3a^2-18a+9}{a^2+1}$. ①

由方程组消去 x，得 $(3-ay)^2+y^2+(3-ay)-6y+3=0$，

即 $(a^2+1)y^2-(7a+6)y+15=0$，所以 $y_1y_2=\frac{15}{a^2+1}$. ②

因为 $OP \perp OQ$，所以 $\frac{y_1}{x_1} \cdot \frac{y_2}{x_2}=-1$，即 $x_1x_2+y_1y_2=0$，

由①②，得 $\frac{3a^2-18a+9}{a^2+1}+\frac{15}{a^2+1}=0$.

整理得 $a^2-6a+8=0$，解得 $a=2$ 或 $a=4$.

故直线 l 的方程为 $x+2y-3=0$ 或 $x+4y-3=0$.

【点评】 本例题巧用根与系数的关系与方程思想，使问题得以顺利解决.

3. 转化思想

所谓转化思想，就是在研究和解决有关数学问题时，采用某种手段将问题通过变换使之转化，进而得到解决问题的一种方法. 一般地，总是将复杂的问题转化为简单的问题，将未知的问题转化为已知的问题.

【例 9】 求圆 $(x-2)^2+(y+3)^2=4$ 上的点到直线 $x-y+2=0$ 的最大距离与最小距离.

［**分析**］ 圆是一个对称图形，依其对称性，圆上的点到直线的最大（小）距离为圆心到直线的距离加上（减去）半径.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

［解］　由圆的方程$(x-2)^2+(y+3)^2=4$易知，其圆心坐标为$(2,-3)$，半径为$r=2$. 所以圆心$(2,-3)$到直线$x-y+2=0$的距离为$d=\frac{|2+3+2|}{\sqrt{2}}=\frac{7\sqrt{2}}{2}$.

故圆$(x-2)^2+(y+3)^2=4$上的点到直线$x-y+2=0$的最大距离为$\frac{7\sqrt{2}}{2}+2$，最小距离为$\frac{7\sqrt{2}}{2}-2$.

【点评】　凡是涉及与圆有关的距离问题，均可转化为圆心到直线的距离问题.

以上三例题告诉我们，在平面解析几何初步相关问题中，蕴含着丰富的数学思想，合理且正确地运用这些数学思想，对数学问题的有效解决意义重大. 因此在平时的学习中应注意这些数学思想的运用，并及时加以体会和总结.

素养培优提能

一、选择题

1. 直线$3x-4y+6=0$与圆$(x-2)^2+(y-3)^2=4$的位置关系是　（　　）

A. 相离　　B. 相切

C. 相交且过圆心　　D. 相交但不过圆心

2. 若$3a^2+3b^2-4c^2=0$，则直线$ax+by+c=0$被圆$x^2+y^2=1$所截得的弦长为　（　　）

A. $\frac{2}{3}$　　B. 1

C. $\frac{1}{2}$　　D. $\frac{3}{4}$

3. 已知直线$l:3x+4y+m=0(m>0)$被圆$C:x^2+y^2+2x-2y-6=0$截得的弦长是圆心C到直线l的距离的2倍，则m等于　（　　）

A. 6　　B. 8

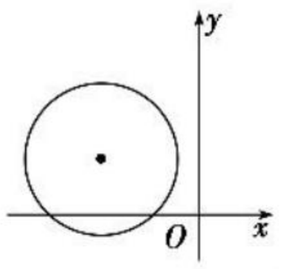
C. 11　　D. 9

4. 若方程$x^2+y^2+kx+2y+k^2=0$所表示的圆取得最大面积，则直线$y=(k-1)x+2$的倾斜角α等于　（　　）

A. 45°　　B. 135°

C. 60°　　D. 120°

5. 如图，定圆半径为a，圆心为(b,c)，则直线$ax+by+c=0$与直线$x-y+1=0$的交点在　（　　）



A. 第四象限　　B. 第三象限

C. 第二象限　　D. 第一象限

二、填空题

6. 若直线$l:ax+by=1$与圆$C:x^2+y^2=1$有两个不同的交点，则点$P(a,b)$与圆C的位置关系是_____.

7. 已知圆$x^2+y^2-2x+4y-20=0$上一点$P(a,b)$，则a^2+b^2的最小值是_____.

8. 已知直线$l:y=\frac{\sqrt{3}}{3}x+2\sqrt{3}$与圆$x^2+y^2=12$交于$A,B$两点，过$A,B$分别作$l$的垂线与$x$轴交于$C,D$两点，则$|CD|=$_____.

三、解答题

9. 已知圆心为$N(3,4)$的圆被直线$x=1$截得的弦长为$2\sqrt{5}$.

(1)求圆N的方程；

(2)点$B(3,-2)$与点C关于直线$x=-1$对称，求以C为圆心且与圆N外切的圆的方程.

10. 已知从圆外一点$P(4,6)$作圆$O:x^2+y^2=1$的两条切线，切点分别为A,B.

(1)求以OP为直径的圆的方程；

(2)求直线AB的方程.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

阶段质量测试卷(一)

第一章 空间几何体

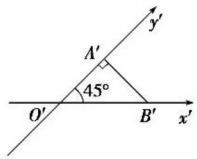
(时间:120 分钟 满分:150 分)

一、选择题(本题共 12 小题,每小题 5 分,共 60 分. 在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的)

1. 棱锥的侧面和底面可以都是 (　　)

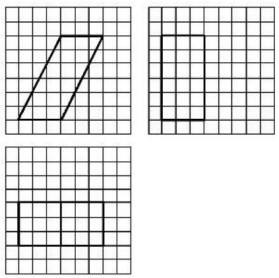
A. 三角形　　B. 四边形　　C. 五边形　　D. 六边形

2. 如图,Rt△$O'A'B'$是一平面图的直观图,斜边 $O'B'=2$,则这个平面图形的面积是 (　　)



A. $\frac{\sqrt{2}}{2}$　　B. 1　　C. $\sqrt{2}$　　D. $2\sqrt{2}$

3. 如图,网格纸上小正方形的边长为 1,粗实线画出的是某多面体的三视图,则该多面体的表面积为 (　　)

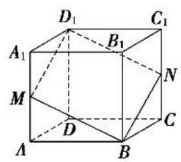


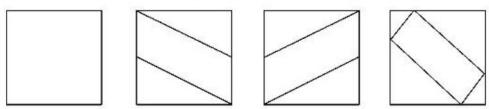
A. $18+36\sqrt{5}$　　B. $54+18\sqrt{5}$　　C. 90　　D. 81

4. 过球的一条半径的中点,作垂直于该半径的平面,则所得截面的面积与球的表面积的比为 (　　)

A. $\frac{3}{16}$　　B. $\frac{9}{16}$　　C. $\frac{3}{8}$　　D. $\frac{9}{32}$

5. 如图所示的正方体中,M,N 分别是 AA_1,CC_1 的中点,作四边形 D_1MBN,则四边形 D_1MBN 在正方体各个面上的正投影图形中,不可能出现的是 (　　)





A　　B　　C　　D

6. 如图,圆锥形容器的高为 h,圆锥内水面的高为 h_1,且 $h_1=\frac{1}{3}h$,若将圆锥形容器倒置,水面高为 h_2,则 h_2 等于 (　　)



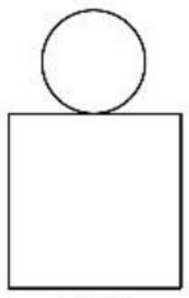
A. $\frac{2}{3}h$　　B. $\frac{19}{27}h$　　C. $\frac{\sqrt[3]{6}}{3}h$　　D. $\frac{\sqrt[3]{19}}{3}h$

7. 若在棱长为 1 的正方体上,分别用过共顶点的三条棱中点的平面去截该正方体,则截去 8 个三棱锥后,剩下的凸多面体的体积是 (　　)

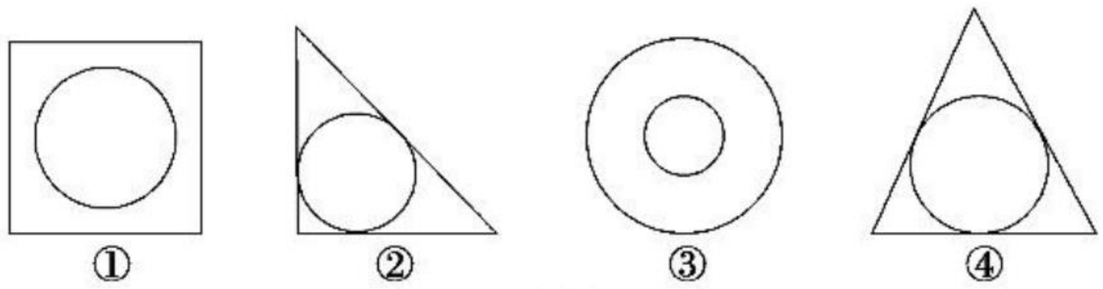
A. $\frac{2}{3}$　　B. $\frac{1}{6}$　　C. $\frac{5}{6}$　　D. $\frac{1}{3}$

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

8. 某几何体的正视图和侧视图均为图甲所示，则在图乙的四个图中可以作为该几何体的俯视图的是 （　　）



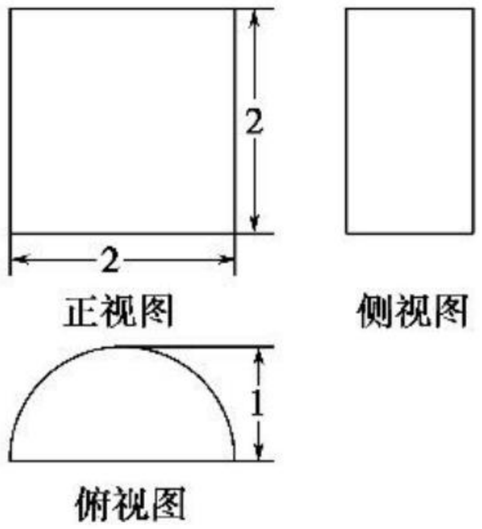
图甲



图乙

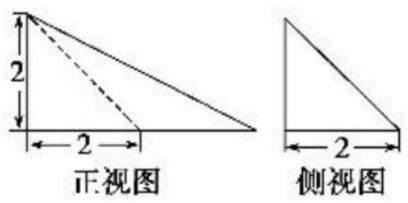
A. ①③　　B. ②　　C. ①③④　　D. ②③④

9. 一个几何体的三视图如图所示，则该几何体的表面积为 （　　）



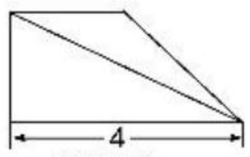
A. 3π　　B. 4π　　C. $2\pi+4$　　D. $3\pi+4$

10. 如图所示是某几何体的三视图，则这个几何体的体积等于 （　　）



A. 4　　B. 6　　C. 8　　D. 12

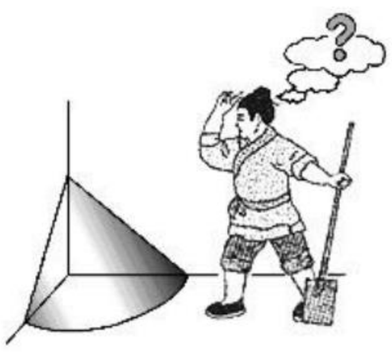
11. 若三棱锥的三条侧棱两两垂直，且其长度分别为 $1,\sqrt{2},\sqrt{3}$，则此三棱锥的外接球的表面积为 （　　）



A. 3π　　B. 6π

C. 18π　　D. 24π

12.《九章算术》是我国古代内容极为丰富的数学名著，书中有如下问题：“今有委米依垣内角，下周八尺，高五尺，问：积及为米几何？”其意思为：“在屋内墙角处堆放米（如图，米堆为一个圆锥的四分之一），米堆底部的弧长为 8 尺，米堆的高为 5 尺，问米堆的体积和堆放的米各为多少？”已知 1 斛米的体积约为 1.62 立方尺，圆周率约为 3，估算出堆放的米约有 （　　）

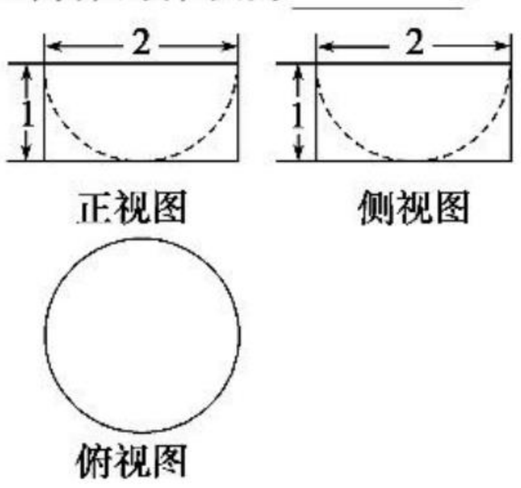


A. 14 斛　　B. 22 斛　　C. 36 斛　　D. 66 斛

二、填空题（本题共 4 小题，第小题 5 分，共 20 分. 把答案填在题中横线上）

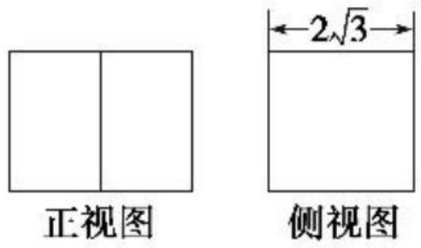
13. 一块正方形薄铁皮的边长为 4，以它的一个顶点为圆心，剪下一个最大的扇形，用这块扇形铁皮围成一个圆锥，则这个圆锥的容积为_____.（铁皮厚度忽略不计）

14. 若一个几何体的三视图如图所示，则该几何体的体积为_____.



关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

15. 一个体积为 $12\sqrt{3}$ 的正三棱柱(底面为正三角形,且侧棱垂直于底面)的三视图如图所示,则侧视图的面积为_____.



16. 已知一个球与一个正三棱柱的三个侧面和两个底面都相切,且这个球的体积是 $\frac{32}{3}\pi$,那么这个三棱柱的体积是_____.

三、解答题(本题共 6 小题,共 70 分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤)

17. (10 分)已知某几何体的三视图如图所示,其中俯视图的内外均为正方形,边长分别为 2 和 4,几何体的高为 3,求此几何体的表面积和体积.

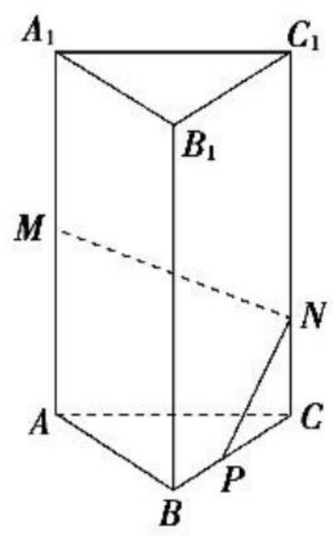


18. (12 分)有一个倒圆锥形容器,它的轴截面是一个正三角形,在容器内放一个半径为 r 的铁球,并注入水,使水面与球正好相切,然后将球取出,求这时容器中水的深度.

19. (12 分)如图所示,在正三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中,$AB=3$,$AA_1=4$,M 为 AA_1 的中点,P 是 BC 上的一点,且由 P 沿棱柱侧面经过棱 CC_1 到 M 的最短路线为 $\sqrt{29}$.设这条最短路线与 CC_1 的交点为 N,求:

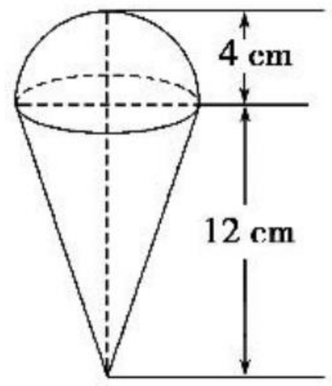
(1)该三棱柱的侧面展开图的对角线的长;

(2)PC 和 NC 的长.



关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

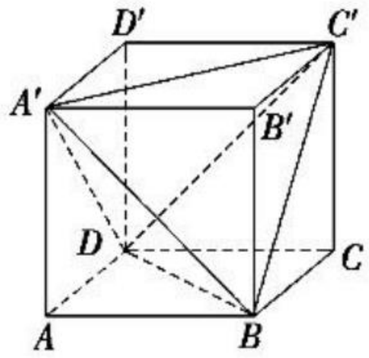
20.(12 分)如图所示,一个圆锥形的空杯子上面放着一个半球形的冰淇淋,如果冰淇淋融化了,会溢出杯子吗?请用你的计算数据说明理由.



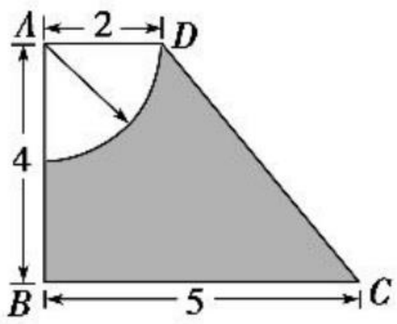
21.(12 分)如图,正方体 $ABCD-A'B'C'D'$ 的棱长为 a,连接 $A'C'$,$A'D$,$A'B$,BD,BC',$C'D$,得到一个三棱锥 $A'-BC'D$,求:

(1)三棱锥 $A'-BC'D$ 的表面积与正方体表面积的比值;

(2)三棱锥 $A'-BC'D$ 的体积.



22.(12 分)如图所示,四边形 $ABCD$ 是直角梯形(单位:cm),求图中阴影部分绕 AB 所在直线旋转一周所成几何体的表面积和体积.



关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

班级_____ 姓名_____ 考场号_____ 准考证号_____
密……封……线……
数学 必修2A

班级_____ 姓名_____ 考场号_____ 准考证号_____

密 封 线

阶段质量测试卷(二)

第二章 点、直线、平面之间的位置关系

(时间:120 分钟 满分:150 分)

一、选择题(本题共 12 小题,每小题 5 分,共 60 分.在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的)

1. 设 α,β 表示两个平面,l 表示直线,A,B,C 表示三个不同的点,给出下列命题:

①若 $A\in l,A\in\alpha,B\in l,B\in\alpha$,则 $l\subset\alpha$;

②α,β 不重合,若 $A\in\alpha,A\in\beta,B\in\alpha,B\in\beta$,则 $\alpha\cap\beta=AB$;

③若 $l\not\subset\alpha,A\in l$,则 $A\notin\alpha$;

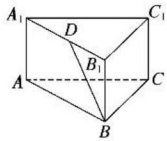
④若 $A,B,C\in\alpha,A,B,C\in\beta$,且 A,B,C 不共线,则 α 与 β 重合.

则上述命题中,正确的个数是 ( )

A. 1 B. 2

C. 3 D. 4

2. 如图,在直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中,D 为 A_1B_1 的中点,$AB=BC=2BB_1=2$,$AC=2\sqrt{2}$,则异面直线 BD 与 AC 所成的角为 ( )



A. 30° B. 45°

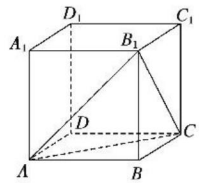
C. 60° D. 90°

3. 若直线 $a\perp$ 直线 b,且 $a\perp$ 平面 α,则 ( )

A. $b\perp\alpha$ B. $b\subset\alpha$

C. $b\parallel\alpha$ D. $b\parallel\alpha$ 或 $b\subset\alpha$

4. 如图,在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中,与平面 AB_1C 平行的直线是 ( )



A. DD_1 B. A_1D_1

C. C_1D_1 D. A_1D

5. 已知 $PA\perp$ 矩形 $ABCD$,则下列结论中不正确的是 ( )

A. $PB\perp BC$ B. $PD\perp CD$

C. $PD\perp BD$ D. $PA\perp BD$

6. 设 m,n 是两条不同的直线,α,β,γ 是三个不同的平面,下列命题中正确的是 ( )

A. 若 $m\subset\beta,\alpha\perp\beta$,则 $m\perp\alpha$ B. 若 $m\parallel\alpha,m\perp\beta$,则 $\alpha\perp\beta$

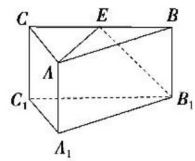
C. 若 $\alpha\perp\beta,\alpha\perp\gamma$,则 $\beta\perp\gamma$ D. 若 $\alpha\cap\gamma=m,\beta\cap\gamma=n,m\parallel n$,则 $\alpha\parallel\beta$

7. 已知 α,β,γ 是三个不同的平面,命题"若 $\alpha\parallel\beta$,且 $\alpha\perp\gamma$,则 $\beta\perp\gamma$"是真命题.若把 α,β,γ 中的任意两个平面换成直线,另一个保持不变,则在所得到的所有新命题中,真命题的个数是 ( )

A. 0 B. 1

C. 2 D. 3

8. 如图,在三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中,侧棱 $AA_1\perp$ 底面 $A_1B_1C_1$,底面三角形 $A_1B_1C_1$ 是正三角形,E 是 BC 的中点,则下列叙述正确的是 ( )



A. CC_1 与 B_1E 是异面直线 B. $AC\perp$ 平面 ABB_1A_1

C. AE,B_1C_1 为异面直线,且 $AE\perp B_1C_1$ D. $A_1C_1\parallel$ 平面 AB_1E

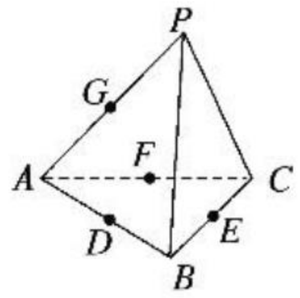
9. 已知平面 $\alpha\perp$ 平面 $\beta,\alpha\cap\beta=l$,点 $A\in\alpha,A\notin l$,直线 $AB\parallel l$,直线 $AC\perp l$,直线 $m\parallel\alpha,m\parallel\beta$,则下列四种位置关系中,不一定成立的是 ( )

A. $AB\parallel m$ B. $AC\perp m$

C. $AB\parallel\beta$ D. $AC\perp\beta$

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

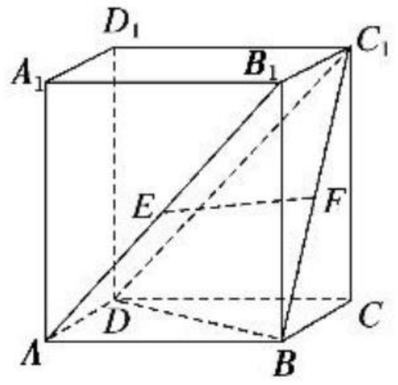
10. 如图所示，空间四边形 $PABC$ 的各边都相等，D,E,F,G 分别是 AB,BC,CA,AP 的中点，下列四个结论中正确的个数为（　　）



①DF // 平面 PBC；
②AB ⊥ 平面 PDC；
③平面 PEF ⊥ 平面 ABC；
④平面 PAE ⊥ 平面 PBC.

A. 3　　B. 2
C. 1　　D. 0

11. 如图所示，在长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，若 $AB=BC$，E,F 分别是 AB_1,BC_1 的中点，则下列结论中成立的是（　　）



①EF 与 BB_1 垂直；
②EF ⊥ 平面 BCC_1B_1；
③EF 与 C_1D 所成的角为 45°；
④EF // 平面 $A_1B_1C_1D_1$.

A. ②③　　B. ①④
C. ③　　D. ①②④

12. 把正方形 $ABCD$ 沿对角线 AC 折起，当以 A,B,C,D 四点为顶点的三棱锥体积最大时，直线 BD 和平面 ABC 所成的角的大小为（　　）

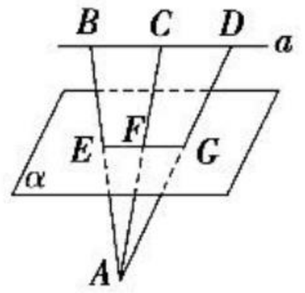
A. 90°　　B. 60°
C. 45°　　D. 30°

二、填空题（本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分. 把答案填在题中横线上）

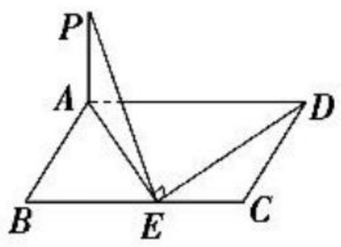
13. 已知平面 α,β 和直线 m，给出条件：①m // α；②m ⊥ α；③$m\subset\alpha$；④α // β. 当满足条件_____时，有 $m\perp\beta$.

14. 已知在 $\triangle ABC$ 中，$\angle BAC=90°$，P 为平面 ABC 外一点，且 $PA=PB=PC$，则平面 PBC 与平面 ABC 的位置关系是_____.

15. 如图所示，直线 a // 平面 α，点 A 在 α 另一侧，点 $B,C,D\in a$，线段 AB,AC,AD 分别交 α 于点 E,F,G. 若 $BD=4$，$CF=4$，$AF=5$，则 $EG=$_____.

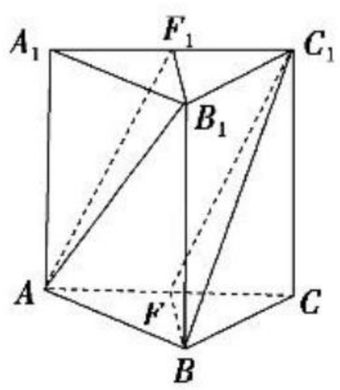


16. 如图所示，已知在矩形 $ABCD$ 中，$AB=3$，$BC=a$，若 PA ⊥ 平面 AC，在 BC 边上取点 E，使 $PE\perp DE$，则满足条件的 E 点有两个时，a 的取值范围是_____.



三、解答题（本题共 6 小题，共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤）

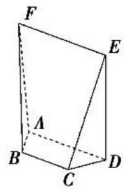
17.（10 分）如图，在三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，$\triangle ABC$ 与 $\triangle A_1B_1C_1$ 都为正三角形且 AA_1 ⊥ 平面 ABC，F,F_1 分别是 AC,A_1C_1 的中点.



求证：(1) 平面 AB_1F_1 // 平面 C_1BF；
(2) 平面 AB_1F_1 ⊥ 平面 ACC_1A_1.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

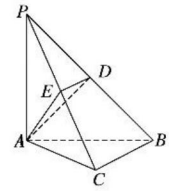
18.(12 分)如图所示,在五面体 $ABCDEF$ 中,四边形 $ADEF$ 是正方形,$FA\perp$ 平面 $ABCD$,$BC\parallel AD$,$CD=1$,$AD=2\sqrt{2}$,$\angle BAD=\angle CDA=45°$.



(1)求异面直线 CE 与 AF 所成角的余弦值;

(2)证明:$CD\perp$ 平面 ABF.

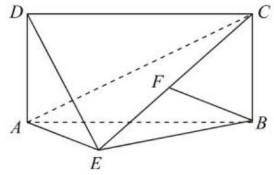
19.(12 分)如图,在三棱锥 $P-ABC$ 中,$PA\perp$ 底面 ABC,$\angle BCA=90°$,点 D,E 分别在棱 PB,PC 上,且 $DE\parallel BC$.



(1)求证:$BC\perp$ 平面 PAC;

(2)是否存在点 E 使得二面角 $A-DE-P$ 为直二面角?并说明理由.

20.(12 分)如图,四边形 $ABCD$ 为矩形,$DA\perp$ 平面 ABE,$AE=EB=BC=2$,$BF\perp$ 平面 ACE 于点 F,且点 F 在 CE 上.

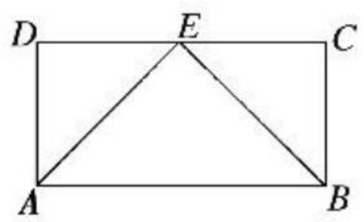


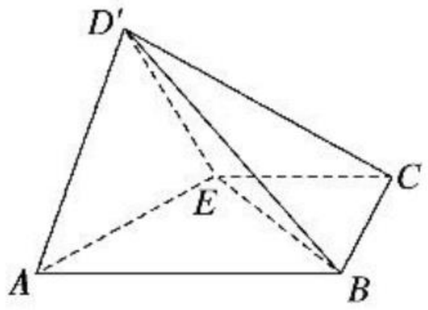
(1)求证:$AE\perp BE$;

(2)求三棱锥 $D-AEC$ 的体积.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

21.(12 分)如图所示,在长方形 $ABCD$ 中,$AB=2$,$AD=1$,E 为 CD 的中点,以 AE 为折痕,把△DAE 折起到△$D'AE$的位置,且平面 $D'AE\perp$平面 $ABCE$.





(1)求证:$AD'\perp BE$;

(2)求四棱锥 $D'-ABCE$ 的体积;

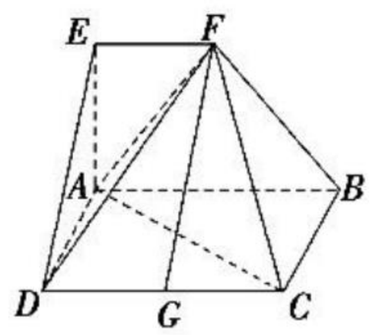
(3)在棱 ED' 上是否存在一点 P,使得 $D'B\parallel$平面 PAC,若存在,求出点 P 的位置,若不存在,请说明理由.

22.(12 分)如图所示,在多面体 $ABCDFE$ 中,四边形 $ABCD$ 是矩形,$AB\parallel EF$,$AB=2EF$,$\angle EAB=90°$,平面 $ABFE\perp$平面 $ABCD$.

(1)若 G 点是 DC 的中点,求证:$FG\parallel$平面 AED;

(2)求证:平面 $DAF\perp$平面 BAF;

(3)若 $AE=AD=1$,$AB=2$,求三棱锥 $D-AFC$ 的体积.



关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

班级_____ 姓名_____ 考场号_____ 准考证号_____

密 封 线

阶段质量测试卷(三)

第三章 直线与方程

(时间:120 分钟 满分:150 分)

一、选择题(本题共 12 小题,每上题 5 分,共 60 分.在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的)

1. 若直线过点$(1,2),(4,2+\sqrt{3})$,则此直线的倾斜角是 ( )

A. 30° B. 45°

C. 60° D. 90°

2. 如果直线 $ax+2y+2=0$ 与直线 $3x-y-2=0$ 平行,则系数 a 为 ( )

A. -3 B. -6

C. $-\frac{3}{2}$ D. $\frac{2}{3}$

3. 已知直线 l_1 的倾斜角为 60°,直线 l_2 经过点 $A(1,\sqrt{3}),B(-2,-2\sqrt{3})$,则直线 l_1,l_2 的位置关系是 ( )

A. 平行或重合 B. 平行

C. 垂直 D. 重合

4. 已知直线 $2x-my+1-3m=0$,当 m 变动时,所有直线都通过定点 ( )

A. $\left(-\frac{1}{2},3\right)$ B. $\left(\frac{1}{2},3\right)$

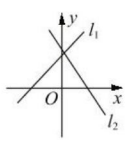
C. $\left(\frac{1}{2},-3\right)$ D. $\left(-\frac{1}{2},-3\right)$

5. 若直线 l 经过点 $A(1,2)$,在 y 轴上的截距的取值范围是$(-2,3)$,则其斜率的取值范围是 ( )

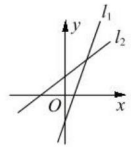
A. $\left(-1,\frac{1}{4}\right)$ B. $\left(-1,\frac{1}{2}\right)\cup(1,+\infty)$

C. $(-\infty,-1)\cup(4,+\infty)$ D. $(-1,4)$

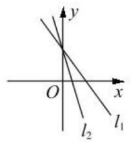
6. 已知直线 l_1 的方程是 $ax-y+b=0$,l_2 的方程是 $bx-y-a=0(ab\neq0,a\neq b)$,则下列各示意图中,正确的是 ( )



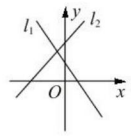
A



B



C



D

7. 已知$\square ABCD$ 的三个顶点的坐标分别是 $A(0,1),B(1,0),C(4,3)$,则顶点 D 的坐标为 ( )

A. $(3,4)$ B. $(4,3)$

C. $(3,1)$ D. $(3,8)$

8. 若直线 $x-2y+5=0$ 与直线 $2x+my-6=0$ 互相垂直,则实数 m 等于 ( )

A. -1 B. 1

C. $\frac{1}{2}$ D. $-\frac{1}{2}$

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

9. 已知直线 $x-2y+m=0(m>0)$ 与直线 $x+ny-3=0$ 互相平行，且两者之间的距离是 $\sqrt{5}$，则 $m+n$ 等于 （　　）

A. -1　　B. 0

C. 1　　D. 2

10. 若点 $(5,b)$ 在两条平行直线 $6x-8y+1=0$，$3x-4y+5=0$ 之间，则整数 b 的值为 （　　）

A. 5　　B. -5

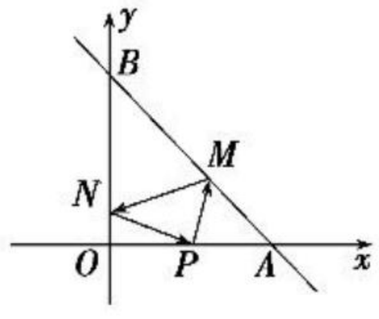
C. 4　　D. -4

11. 已知直线 $l_1:ax+4y-2=0$ 与直线 $l_2:2x-5y+b=0$ 互相垂直，垂足为 $(1,c)$，则 $a+b+c$ 的值为 （　　）

A. -4　　B. 20

C. 0　　D. 24

12. 如图，已知 $A(4,0)$，$B(0,4)$，从点 $P(2,0)$ 射出的光线经直线 AB 反射后再射到直线 OB 上，最后经直线 OB 反射后又回到 P 点，则光线所经过的路程是 （　　）



A. $2\sqrt{10}$　　B. 6

C. $3\sqrt{3}$　　D. $2\sqrt{5}$

二、填空题（本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分. 把答案填在题中横线上）

13. 过点 $(-2,-3)$ 且在 x 轴，y 轴上的截距相等的直线方程为_____.

14. 点 M 到 x 轴和到点 $N(-4,2)$ 的距离都等于 10，则点 M 的坐标为_____.

15. 若光线由点 $P(2,3)$ 射到 x 轴上，反射后过点 $Q(1,1)$，则反射光线所在直线方程是_____.

16. 已知点 $A(1,-1)$，点 $B(3,5)$，点 P 是直线 $y=x$ 上的动点，当 $|PA|+|PB|$ 的值最小时，点 P 的坐标是_____.

三、解答题（本题共 6 小题，共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤）

17. （10 分）已知点 M 是直线 $l:\sqrt{3}x-y+3=0$ 与 x 轴的交点，将直线 l 绕点 M 旋转 $30°$，求所得到的直线 l' 的方程.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

18.(12 分)已知直线 l 被两直线 $l_1:4x+y+6=0$ 和 $l_2:3x-5y-6=0$ 截得线段的中点为 $P(0,0)$,求直线 l 的方程.

19.(12 分)已知不交于同一点的三条直线 $l_1:4x+y-4=0$,$l_2:mx+y=0$,$l_3:x-my-4=0$.

(1)当这三条直线不能围成三角形时,求实数 m 的值;

(2)当 l_3 与 l_1,l_2 都垂直时,求两垂足间的距离.

20.(12 分)在平面直角坐标系内,已知 $A(1,a)$,$B(-5,-3)$,$C(4,0)$.

(1)当 $a\in(\sqrt{3},3)$时,求直线 AC 的倾斜角 α 的取值范围;

(2)当 $a=2$ 时,求 $\triangle ABC$ 的 BC 边上的高 AH 所在直线 l 的方程.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

21.(12 分)是否存在过点(−5,−4)的直线 l,使它与两坐标轴围成的三角形的面积为 5?若存在,求出直线 l 的方程(化成直线方程的一般式);若不存在,说明理由.

22.(12 分)已知直线 $l:y=4x$ 和点 $P(6,4)$,点 A 为第一象限内的点且在直线 l 上,直线 PA 交 x 轴的正半轴于点 B.

(1)当 $OP\perp AB$ 时,求 AB 所在直线的方程;

(2)求△OAB 面积的最小值,并求当△OAB 面积取最小值时点 B 的坐标.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

班级_____ 考场号_____ 准考证号_____
姓名_____
密……封……线……
数学 必修2A

班级_____ 姓名_____ 考场号_____ 准考证号_____

密 封 线

阶段质量测试卷(四)

第四章 圆与方程

(时间:120 分钟 满分:150 分)

一、选择题(本题共 12 小题,每小题 5 分,共 60 分.在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的)

1. 已知点 $A(x,1,2)$ 和点 $B(2,3,4)$,且 $|AB|=2\sqrt{6}$,则实数 x 的值是 (　　)

A. -3 或 4　　B. 6 或 2

C. 3 或 -4　　D. 6 或 -2

2. 若方程 $x^2+y^2-x+y+m=0$ 表示圆,则实数 m 的取值范围为 (　　)

A. $m<\frac{1}{2}$　　B. $m<0$

C. $m>\frac{1}{2}$　　D. $m\leqslant\frac{1}{2}$

3. 圆 $x^2+y^2+2x-4y=0$ 的圆心坐标和半径分别是 (　　)

A. $(1,-2),5$　　B. $(1,-2),\sqrt{5}$

C. $(-1,2),5$　　D. $(-1,2),\sqrt{5}$

4. 直线 $l:y=k\left(x+\frac{1}{2}\right)$ 与圆 $C:x^2+y^2=1$ 的位置关系是 (　　)

A. 相交或相切　　B. 相交或相离

C. 相切　　D. 相交

5. 直线 $x-2y-3=0$ 与圆 $(x-2)^2+(y+3)^2=9$ 交于 E,F 两点,则 $\triangle EOF$(O 是原点)的面积为 (　　)

A. $\frac{3}{2}$　　B. $\frac{3}{4}$

C. $2\sqrt{5}$　　D. $\frac{6\sqrt{5}}{5}$

6. 圆 $x^2+y^2-4x=0$ 在点 $P(1,\sqrt{3})$ 处的切线方程为 (　　)

A. $x+\sqrt{3}y-2=0$　　B. $x+\sqrt{3}y-4=0$

C. $x-\sqrt{3}y+4=0$　　D. $x-\sqrt{3}y+2=0$

7. 若直线 $x-y=2$ 被圆 $(x-a)^2+y^2=4$ 所截得的弦长为 $2\sqrt{2}$,则实数 a 的值为 (　　)

A. -1 或 $\sqrt{3}$　　B. 1 或 3

C. -2 或 6　　D. 0 或 4

8. 若直线 $y=kx+1$ 与圆 $x^2+y^2=1$ 相交于 P,Q 两点,且 $\angle POQ=120°$(其中 O 为原点),则 k 的值为 (　　)

A. $-\sqrt{3}$ 或 $\sqrt{3}$　　B. $\sqrt{3}$

C. $-\sqrt{2}$ 或 $\sqrt{2}$　　D. $\sqrt{2}$

9. 设 P 是圆 $(x-3)^2+(y+1)^2=4$ 上的动点,Q 是直线 $x=-3$ 上的动点,则 $|PQ|$ 的最小值为 (　　)

A. 6　　B. 4

C. 3　　D. 2

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

10. 已知过点 $P(2,2)$ 的直线与圆 $(x-1)^2+y^2=5$ 相切，且与直线 $ax-y+1=0$ 垂直，则 $a=$ （　　）

A. $-\frac{1}{2}$　　B. 1

C. 2　　D. $\frac{1}{2}$

11. 过点 $(3,1)$ 作圆 $(x-1)^2+y^2=1$ 的两条切线，切点分别为 A,B，则直线 AB 的方程为 （　　）

A. $2x+y-3=0$　　B. $2x-y-3=0$

C. $4x-y-3=0$　　D. $4x+y-3=0$

12. 若圆 $C:x^2+y^2-4x-4y-10=0$ 上至少有三个不同的点到直线 $l:x-y+c=0$ 的距离为 $2\sqrt{2}$，则 c 的取值范围是 （　　）

A. $[-2\sqrt{2},2\sqrt{2}]$　　B. $(-2\sqrt{2},2\sqrt{2})$

C. $[-2,2]$　　D. $(-2,2)$

二、填空题（本题共 4 小题，第小题 5 分，共 20 分. 把答案填在题中横线上）

13. 已知点 $A(1,2,3)$，$B(2,-1,4)$，点 P 在 y 轴上，且 $|PA|=|PB|$，则点 P 的坐标是_____.

14. 若圆 $x^2+y^2=4$ 与圆 $x^2+y^2+2ay-6=0(a>0)$ 的公共弦的长为 $2\sqrt{3}$，则 $a=$_____.

15. 已知圆 C 的方程为 $x^2+y^2-2y-3=0$，过点 $P(-1,2)$ 的直线 l 与圆 C 交于 A,B 两点，若使 $|AB|$ 最小，则直线 l 的方程是_____.

16. 由直线 $y=x+1$ 上一点向圆 $(x-3)^2+y^2=1$ 引切线，则切线长的最小值为_____.

三、解答题（本题共 6 小题，共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤）

17. （10 分）已知圆 C 的圆心坐标为 $(2,1)$，若圆 C 与圆 $O:x^2+y^2-3x=0$ 的公共弦所在直线过点 $(5,-2)$，求圆 C 的方程.

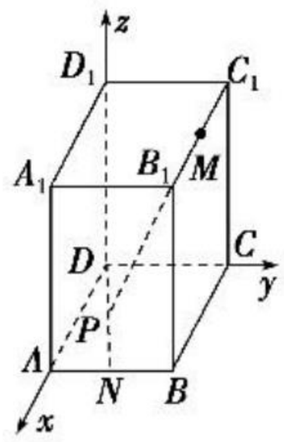
关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

18.(12 分)已知在长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，$AB=BC=2$，$D_1D=3$，点 M 是 B_1C_1 的中点，点 N 是 AB 的中点. 以 D 为坐标原点，建立如图所示的空间直角坐标系.

(1)写出点 D，N，M 的坐标；

(2)求线段 MD，MN 的长度；

(3)设点 P 是线段 DN 上的动点，求 $|MP|$ 的最小值.



19.(12 分)设半径为 3 的圆 C 被直线 $l:x+y-4=0$ 截得的弦 AB 的中点为 $P(3,1)$，且弦长 $|AB|=2\sqrt{7}$，求圆 C 的方程.

20.(12 分)已知以点 $C\left(t,\frac{2}{t}\right)(t\in\mathbf{R},t\neq0)$ 为圆心的圆与 x 轴交于点 O，A，与 y 轴交于点 O，B，其中 O 为原点.

(1)求证：$\triangle OAB$ 的面积为定值；

(2)设直线 $y=-2x+4$ 与圆 C 交于点 M，N，若 $|OM|=|ON|$，求圆 C 的方程.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

21.(12 分)已知点(0,1),(3+2$\sqrt{2}$,0),(3−2$\sqrt{2}$,0)在圆 C 上.

(1)求圆 C 的方程;

(2)若圆 C 与直线 $x-y+a=0$ 交于 A,B 两点,且 $OA\perp OB$,求 a 的值.

22.(12 分)在平面直角坐标系 xOy 中,已知圆心在第二象限,半径为 $2\sqrt{2}$的圆 C 与直线 $y=x$ 相切于坐标原点 O.

(1)求圆 C 的方程;

(2)试求圆 C 上是否存在异于原点的 Q,使 Q 到定点 $F(4,0)$的距离等于线段 OF 的长.若存在,请求出点 Q 的坐标;若不存在,请说明理由.

班级_____ 考场号_____

姓名_____ 准考证号_____

密 封 线

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

班级_____ 姓名_____ 考场号_____ 准考证号_____
密 封 线

模块综合质量测试卷(一)

(时间:120 分钟　满分:150 分)

一、选择题(本题共 12 题,每小题 5 分,共 60 分.在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的)

1. 直线 $x=\tan 60°$ 的倾斜角是 (　　)

A. 90°　　B. 60°

C. 30°　　D. 不存在

2. 给出下列四个命题:

①垂直于同一直线的两条直线互相平行;

②垂直于同一平面的两个平面互相平行;

③若直线 l_1,l_2 与同一平面所成的角相等,则 l_1,l_2 互相平行;

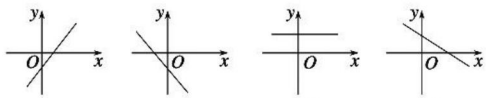
④若直线 l_1,l_2 是异面直线,则与 l_1,l_2 都相交的两条直线是异面直线.

其中假命题的个数是 (　　)

A. 1　　B. 2

C. 3　　D. 4

3. 方程 $y=ax+\frac{1}{a}$ 表示的直线可能是 (　　)



A　　B　　C　　D

4. 若 l、m、n 是互不相同的空间直线,α、β 是不重合的平面,则下列命题中为真命题的是 (　　)

A. 若 $\alpha /\!/ \beta$,$l\subset\alpha$,$n\subset\beta$,则 $l /\!/ n$　　B. 若 $\alpha\perp\beta$,$l\subset\alpha$,则 $l\perp\beta$

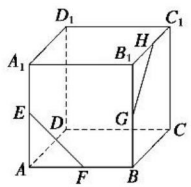
C. 若 $l\perp n$,$m\perp n$,则 $l /\!/ m$　　D. 若 $l\perp\alpha$,$l /\!/ \beta$,则 $\alpha\perp\beta$

5. 已知三棱锥 $S-ABC$ 的各顶点都在一个半径为 r 的球面上,球心 O 在 AB 上,$SO\perp$ 底面 ABC,$AC=\sqrt{2}r$,则球的体积与三棱锥体积之比是 (　　)

A. π　　B. 2π

C. 3π　　D. 4π

6. 如图,在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中,E、F、G、H 分别为 AA_1、AB、BB_1、B_1C_1 的中点,则异面直线 EF 与 GH 所成的角等于 (　　)



A. 45°　　B. 60°

C. 90°　　D. 120°

7. 直线 $x-2y+1=0$ 关于直线 $x=1$ 对称的直线方程是 (　　)

A. $x+2y-1=0$　　B. $2x+y-1=0$

C. $2x+y-3=0$　　D. $x+2y-3=0$

8. 以等腰直角三角形 ABC 斜边 BC 上的高 AD 为折痕,将 $\triangle ABC$ 折成二面角 $C-AD-B$ 为多大时,在折成的图形中,$\triangle ABC$ 为等边三角形 (　　)

A. 90°　　B. 60°

C. 45°　　D. 30°

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

9. 经过点 $M(1,1)$ 且在两坐标轴上截距相等的直线是 (　　)

A. $x+y=2$　　B. $x+y=1$

C. $x=1$ 或 $y=1$　　D. $x+y=2$ 或 $y=x$

10. 若圆 $x^2+y^2-2x-4y=0$ 的圆心到直线 $x-y+a=0$ 的距离为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$，则 a 的值为 (　　)

A. -2 或 2　　B. $\frac{1}{2}$ 或 $\frac{3}{2}$

C. 2 或 0　　D. -2 或 0

11. 直线 $\sqrt{3}x+y-2\sqrt{3}=0$ 截圆 $x^2+y^2=4$ 得的劣弧所对的圆心角是 (　　)

A. 30°　　B. 45°

C. 60°　　D. 90°

12. 在平面直角坐标系中，与点 $A(1,2)$ 距离为 1，且与点 $B(3,1)$ 的距离为 2 的直线共有 (　　)

A. 1 条　　B. 2 条

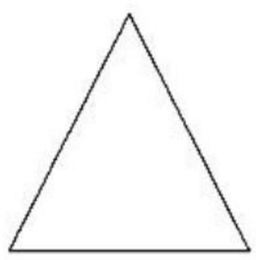
C. 3 条　　D. 4 条

二、填空题（本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分. 把答案填在题中横线上）

13. 已知点 $A(-2,3,4)$，在 y 轴上有一点 B，且 $|AB|=3\sqrt{5}$，则点 B 的坐标为_____.

14. 圆 $x^2+y^2+x-6y+3=0$ 上两点 P、Q 关于直线 $kx-y+4=0$ 对称，则 $k=$_____.

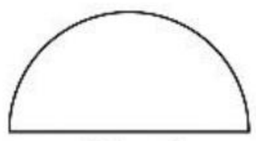
15. 如图，某几何体的三视图，其中正视图是腰长为 2 的等腰三角形，俯视图是半径为 1 的半圆，则该几何体的体积为_____.



正视图



侧视图



俯视图

16. 已知圆 $C:x^2+y^2-4x-6y+8=0$，若圆 C 和坐标轴的交点间的线段恰为圆 C' 直径，则圆 C' 的标准方程为_____.

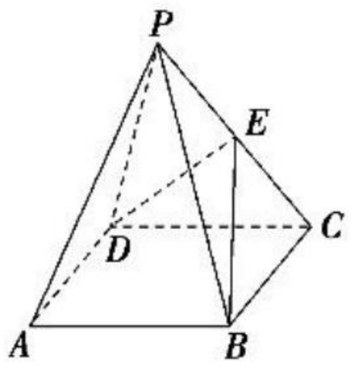
三、解答题（本题共 6 小题，共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤）

17. (10 分) 已知 $\triangle ABC$ 三边所在直线方程为 $AB:3x+4y+12=0$，$BC:4x-3y+16=0$，$CA:2x+y-2=0$. 求 AC 边上的高所在的直线方程.

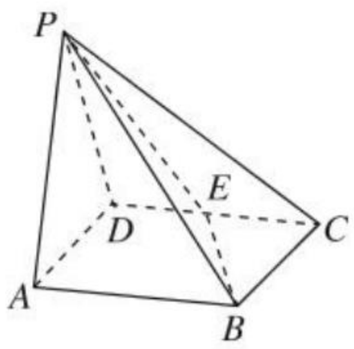
关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

18.(12 分)求经过点 $P(6,-4)$且被定圆 $O:x^2+y^2=20$ 截得的弦长为 $6\sqrt{2}$的直线 AB 的方程.

19.(12 分) 如图所示,在四棱锥 $P-ABCD$ 中,底面 $ABCD$ 为正方形,E 为侧棱 PC 的中点,求证 $PA\parallel$平面 EDB.



20.(12 分)如图,四棱锥 $P-ABCD$ 的底面$ABCD$是边长为 1 的菱形.$\angle BCD=60^\circ$,E 是CD 的中点.$PA\perp$底面 $ABCD$,$PA=\sqrt{3}$.



(1)求证:平面 $PBE\perp$平面 PAB;

(2)求二面角 $A-BE-P$ 的大小.

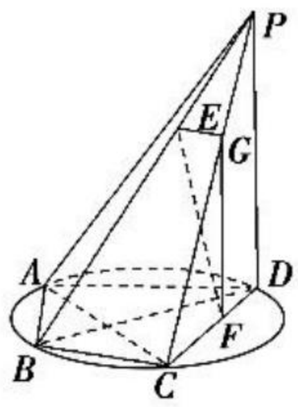
关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

21.(12 分)已知 M 与两定点 $O(0,0)$,$A(3,0)$的距离之比为$\frac{1}{2}$.

(1)求 M 点的轨迹方程;

(2)若 M 的轨迹为曲线 C,求 C 关于直线 $2x+y-4=0$ 对称的曲线 C'的方程.

22.(12 分) 如图所示,四棱锥 $P-ABCD$ 的底面 $ABCD$ 是半径为 R 的圆的内接四边形,其中 BD 是圆的直径,$\angle ABD=60°$,$\angle BDC=45°$. PD 垂直底面 $ABCD$,$PD=2\sqrt{2}R$,E,F 分别是 PB,CD 上的点,且$\frac{PE}{EB}=\frac{DF}{FC}$,过点 E 作 BC 的平行线交 PC 于 G.



(1)求 BD 与平面 ABP 所成角 θ 的正弦值;

(2)证明:$\triangle EFG$ 是直角三角形;

(3)当$\frac{PE}{EB}=\frac{1}{2}$时,求$\triangle EFG$ 的面积.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

班级_____ 考场号_____ 准考证号_____
姓名_____
密……封……线……
数学 必修2A

班级_____ 姓名_____ 考场号_____ 准考证号_____

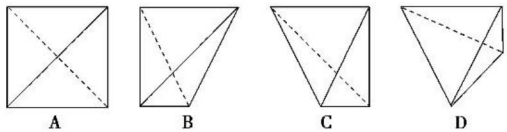
密 封 线

模块综合质量测试卷(二)

(时间:120 分钟　满分:150 分)

一、选择题(本题共 12 小题,每小题 5 分,共 60 分. 在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的)

1. 一个四面体的顶点在空间直角坐标系 $O-xyz$ 中的坐标分别是$(1,0,1),(1,1,0),(0,1,1),(0,0,0)$,画该四面体三视图中的正视图,以 zOx 平面为投影面,则得到的正视图可以为 (　　)



2. 已知两条直线 $y=ax-2$ 与 $y=(a+2)x+1$ 互相垂直,则 a 等于 (　　)

A. 2　　B. 1

C. 0　　D. -1

3. 已知正方体外接球的体积是 $\frac{32}{3}\pi$,那么正方体的棱长等于 (　　)

A. $2\sqrt{2}$　　B. $\frac{2\sqrt{2}}{3}$

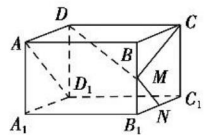
C. $\frac{4\sqrt{2}}{3}$　　D. $\frac{4\sqrt{3}}{3}$

4. 已知 m,n 是两条不同直线,α,β,γ 是三个不同平面,下列命题中正确的是 (　　)

A. 若 $m\parallel\alpha,n\parallel\alpha$,则 $m\parallel n$　　B. 若 $\alpha\perp\gamma,\beta\perp\gamma$,则 $\alpha\parallel\beta$

C. 若 $m\parallel\alpha,m\parallel\beta$,则 $\alpha\parallel\beta$　　D. 若 $m\perp\alpha,n\perp\alpha$,则 $m\parallel n$

5. 如图,在长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中,M,N 分别是棱 BB_1,B_1C_1 的中点,若$\angle CMN=90°$,则异面直线 AD_1 和 DM 所成角为 (　　)



A. 30°　　B. 45°

C. 60°　　D. 90°

6. 在三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中,各棱长相等,侧棱垂直于底面,点 D 是侧面 BB_1C_1C 的中心,则 AD 与平面 BB_1C_1C 所成角的大小是 (　　)

A. 30°　　B. 45°

C. 60°　　D. 90°

7. 过点 $M(-2,4)$作圆 $C:(x-2)^2+(y-1)^2=25$ 的切线 l,且直线 $l_1:ax+3y+2a=0$ 与 l 平行,则 l_1 与 l 间的距离是 (　　)

A. $\frac{8}{5}$　　B. $\frac{2}{5}$

C. $\frac{28}{5}$　　D. $\frac{12}{5}$

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

8. 点 $P(4,-2)$ 与圆 $x^2+y^2=4$ 上任一点连线的中点轨迹方程是 (　　)

A. $(x-2)^2+(y+1)^2=1$　　B. $(x-2)^2+(y-1)^2=4$

C. $(x-4)^2+(y-2)^2=1$　　D. $(x-2)^2+(y-1)^2=1$

9. 在空间直角坐标系中，O 为坐标原点，设 $A\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$，$B\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},0\right)$，$C\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)$，则 (　　)

A. $OA\perp AB$　　B. $AB\perp AC$

C. $AC\perp BC$　　D. $OB\perp OC$

10. 已知圆 $C:(x-3)^2+(y-4)^2=1$ 和两点 $A(-m,0)$，$B(m,0)(m>0)$，若圆 C 上存在点 P，使得 $\angle APB=90^\circ$，则 m 的最大值为 (　　)

A. 7　　B. 6

C. 5　　D. 4

11. 已知圆 $C_1:(x-2)^2+(y-3)^2=1$，圆 $C_2:(x-3)^2+(y-4)^2=9$，M,N 分别是圆 C_1,C_2 上的动点，P 为 x 轴上的动点，则 $|PM|+|PN|$ 的最小值为 (　　)

A. $5\sqrt{2}-4$　　B. $\sqrt{17}-1$

C. $6-2\sqrt{2}$　　D. $\sqrt{17}$

12. 过直线 $y=2x$ 上一点 P 作圆 $M:(x-3)^2+(y-2)^2=\frac{4}{5}$ 的两条切线 l_1,l_2，A,B 为切点，当直线 l_1,l_2 关于直线 $y=2x$ 对称时，则 $\angle APB$ 等于 (　　)

A. 30°　　B. 45°

C. 60°　　D. 90°

二、填空题(本题共 4 小题，第小题 5 分，共 20 分. 把答案填在题中横线上)

13. 顺次连接 $A(1,0)$，$B(1,4)$，$C(3,4)$，$D(5,0)$ 所得到的四边形绕 y 轴旋转一周，所得旋转体的体积是_____.

14. 经过点 $P(1,2)$ 的直线，且使 $A(2,3)$，$B(0,-5)$ 到它的距离相等的直线方程为_____.

15. 直线 $y=2x+3$ 被圆 $x^2+y^2-6x-8y=0$ 所截得的弦长等于_____.

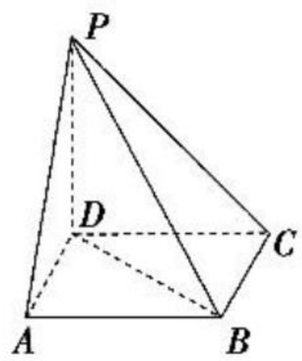
16. 已知圆 C 过点 $(1,0)$，且圆心在 x 轴的正半轴上，直线 $l:y=x-1$ 被圆 C 所截得的弦长为 $2\sqrt{2}$，则过圆心且与直线 l 垂直的直线的方程为_____.

三、解答题(本题共 6 小题，共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤)

17. (10 分)如图，四棱锥 $P-ABCD$ 中，底面 $ABCD$ 为平行四边形，$\angle DAB=60^\circ$，$AB=2AD$，$PD\perp$ 底面 $ABCD$.

(1)证明 $PA\perp BD$；

(2)设 $PD=AD=1$，求棱锥 $D-PBC$ 的高.



关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

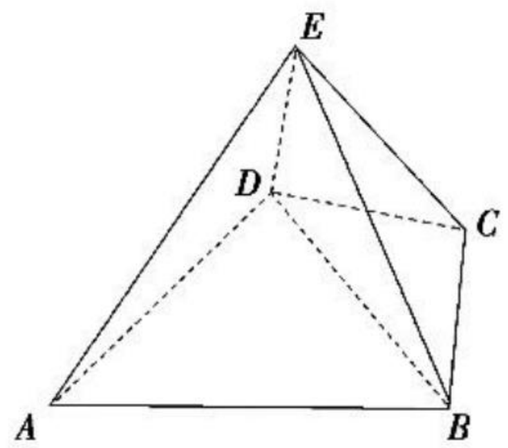
18.(12 分)已知△ABC 的顶点 $A(5,1)$，AB 边上的中线 CM 所在直线方程为 $2x-y-5=0$，AC 边上的高线 BH 所在直线方程为 $x-2y-5=0$，求：

(1)顶点 C 的坐标；

(2)直线 BC 的方程.

19.(12 分)已知圆 $C:x^2+y^2-24x-28y-36=0$ 内有一点 $Q(4,2)$，过 Q 作 $AQ\perp BQ$，交圆于点 A,B，求动弦 AB 的中点的轨迹方程.

20.(12 分)如图，几何体 $E-ABCD$ 是四棱锥，△ABD 为正三角形，$CB=CD$，$EC\perp BD$.



(1)求证：$BE=DE$；

(2)若∠$BCD=120°$，M 为线段 AE 的中点，求证：DM // 平面 BEC.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

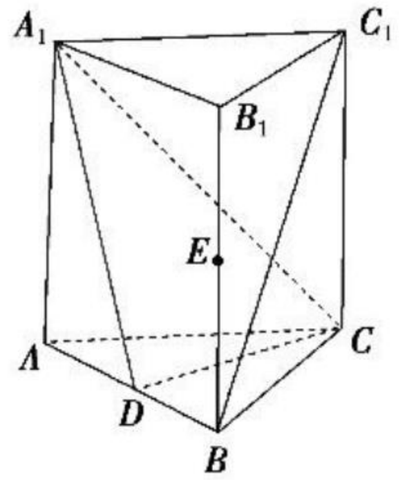
21.(12 分)已知圆 $C:x^2+y^2-2x+4y-4=0$,斜率为 1 的直线 l 与圆 C 交于 A、B 两点.

(1)化圆的方程为标准形式,并指出圆心和半径;

(2)是否存在直线 l,使以线段 AB 为直径的圆过原点?若存在,求出直线 l 的方程,若不存在,说明理由;

(3)当直线 l 平行移动时,求△CAB 面积的最大值.

22.(12 分)如图,已知直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中,D、E 分别是 AB、BB_1 的中点.



(1)证明:BC_1 // 平面 A_1CD;

(2)设 $AA_1=AC=CB=2$,$AB=2\sqrt{2}$,求三棱锥 $C-A_1DE$ 的体积.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

班级_____ 姓名_____ 考场号_____ 准考证号_____
密……封……线……
数学 必修2A

骄子之路®
the Road to Pride
让 学习更快乐，人生更精彩

答案与解析

与45分钟课时作业与单元测试配套使用

数学

必修2 RJ·A

班级：_____

姓名：_____

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

第一部分　课时作业

第一章　空间几何体

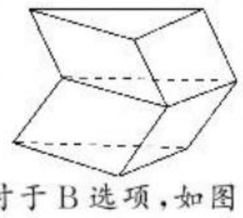
1.1　空间几何体的结构

第 1 课时　柱、锥、台、球的结构特征(1)

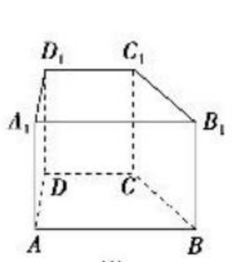
题点知识巩固

1. 选 A　棱柱的两底面互相平行，故 A 正确；棱柱的侧面也可能有平行的面(如正方体)，故 B 错误；立在一起的一摞书可以看成一个四棱柱，当把这摞书推倒斜时，它的侧棱就不是棱柱的高，故 C 错误；由棱柱的定义知，棱柱的侧面一定是平行四边形，但它的底面可以是平行四边形，也可以是其他多边形，故 D 错误.

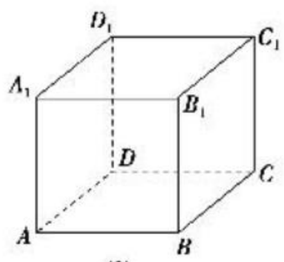
2. 选 D　选项 A、B 不正确，反例如图所示；选项 C 不正确，上、下底面是全等的菱形，各侧面是全等的正方形的四棱柱不是正方体；根据棱柱的定义知选项 D 正确.



3. 选 D　A 选项不符合棱柱的侧棱平行的特点；对于 B 选项，如图(1)，构造四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$，令四边形 $ABCD$ 是梯形，可知平面 ABB_1A_1 // 平面 DCC_1D_1，但这两个面不能作为棱柱的底面；选项 C 中，如图(2)，底面 $ABCD$ 可以是平行四边形；D 选项说明了棱柱的特点，故选 D.



(1)



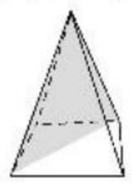
(2)

4. 选 B　由棱锥的定义，知棱锥的各侧面都是三角形，故①正确；有一个面是多边形，其余各面都是三角形，如果这些三角形没有一个公共顶点，那么这个几何体就不是棱锥，故②错误；四面体就是由四个三角形所围成的几何体，因此四面体的任何一个面作底面的几何体都是三棱锥，故③正确；棱锥的侧棱长可以相等，也可以不相等，故④错误.

5. **解析**：结合棱柱、棱锥和棱台的定义可知①③④是棱柱，⑥是棱锥，⑤是棱台.

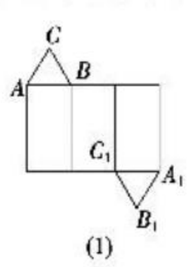
答案：①③④　⑥　⑤

6. **解析**：①正确，棱台的侧面一定是梯形，而不是平行四边形；②正确，由四个平面围成的封闭图形只能是三棱锥；③错误，如图所示四棱锥被平面截成的两部分都是棱锥.

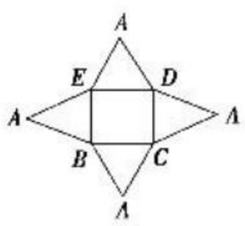


答案：①②

7. **解**：表面展开图如图所示：



(1)

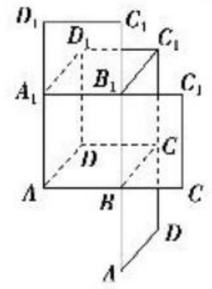


(2)

8. **解**：①为五棱柱；②为五棱锥；③为三棱台.


①　②　③

9. **解**：沿长方体的一条棱剪开，使 A 和 C_1 展在同一平面上，求线段 AC_1 的长即可，有如图所示的三种剪法：



(1)若将 C_1D_1 剪开，使面 AB_1 与面 A_1C_1 共面，可求得 $AC_1=\sqrt{4^2+(5+3)^2}=\sqrt{80}=4\sqrt{5}$.

(2)若将 AD 剪开，使面 AC 与面 BC_1 共面，可求得 $AC_1=\sqrt{3^2+(5+4)^2}=\sqrt{90}=3\sqrt{10}$.

(3)若将 CC_1 剪开，使面 BC_1 与面 AB_1 共面，可求得 $AC_1=\sqrt{(4+3)^2+5^2}=\sqrt{74}$.

相比较可得蚂蚁爬行的最短路线长为 $\sqrt{74}$.

提能达标过关

1. C

2. 选 B　棱柱、棱台的上、下底面是平行的，而棱锥的任意两面均不平行.

3. 选 D　对于 A，如正方体不仅只有两个面平行，故 A 错；对于 B，如长方体并不是所有的棱都相等，故 B 错；对于 C，如三棱柱的底面是三角形，故 C 错；对于 D，由棱柱的概念，知两底面平行，侧棱也互相平行，故 D 对. 故选 D.

4. 选 D　从正五棱柱的上底面 1 个顶点与下底面不与此点在同一侧面上的两个顶点相连可得 2 条对角线，故共有 $5\times2=10$ 条对角线.

5. 选 D　A 中的平面不一定平行于底面，故 A 错；B 中侧棱不一定交于一点，故 B 错；C 中底面不一定是正方形，故 C 错.

6. **解析**：棱柱有相互平行的两个底面，其侧面至少有 3 个，故面数最少的棱柱为三棱柱，共有 5 个面围成.

答案：三　5

7. **解析**：由题意，若以 BC 为轴展开，则 A，M 两点连成的线段所在的直角三角形的两直角边的长度分别为 2 cm，3 cm，故两点之间的距离是 $\sqrt{13}$ cm. 若以 BB_1 为轴展开，则 A，M 两点连成的线段所在的直角三角形的两直角边的长度分别为 1，4，故两点之间的距离是 $\sqrt{17}$ cm. 故沿正方体表面从点 A 到点 M 的最短路程是 $\sqrt{13}$ cm.

答案：$\sqrt{13}$

8. **解析**：根据上述定义知：长方体一定是直四棱柱，但是直四棱柱不一定是长方体；正方体一定是正四棱柱，但是正四棱柱不一定是正方体.

答案：(1)不一定　(2)不一定

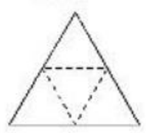
9. **解**：(1)是上海世博会中国馆，其主体结构是四棱台.

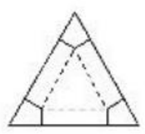
(2)是法国卢浮宫，其主体结构是四棱锥.

(3)是国家游泳中心“水立方”，其主体结构是四棱柱.

(4)是美国五角大楼，其主体结构是五棱柱.

10. **解**：如图(1)所示，沿正三角形三边中点连线折起，可拼得一个底面为正三角形的三棱锥.


(1)


(2)

如图(2)所示，正三角形三个角上剪出三个相同的四边形，其较长的一组邻边边长为三角形边长的 $\frac{1}{4}$，有一组对角为直角，余下部分按虚线折成，可成为一个缺上底的底面为正三角形的三棱柱，而剪出的三个相同的四边形恰好拼成这个底面为正三角形的棱柱的上底.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

第 2 课时　柱、锥、台、球的结构特征(2)、简单组合体的结构特征

题点知识巩固

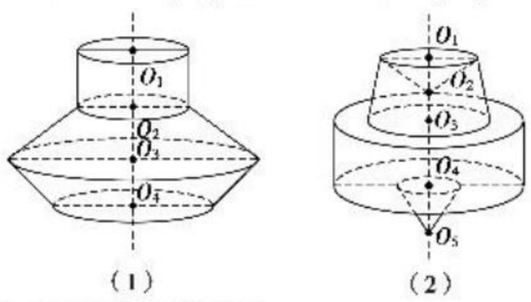
1. 选 D　台体包括棱台和圆台两种，A 的错误在于四条侧棱没有交于一点；B 的错误在于截面与圆锥底面不平行；C 是棱锥；结合棱台和圆台的定义可知 D 正确.

2. 选 D　由圆柱、圆锥、圆台的定义及母线的性质可知②④正确，①③错误.

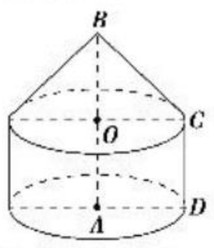
3. **解析**：①以直角三角形的一条直角边所在直线为轴旋转一周才可以得到圆锥；②以直角梯形垂直于底边的一腰所在直线为轴旋转一周才可以得到圆台；③它们的底面为圆面；④正确；作球的一个截面，在截面的圆周上任意取四个不同的点，则这四点就在球面上，故⑤错误；根据球的半径定义，知⑥正确.
答案：④⑥

4. **解析**：该组合体上面是一个四棱锥，下面是一个四棱柱，因此该组合体的结构特征是四棱锥和四棱柱的一个组合体.
答案：一个四棱锥和一个四棱柱的组合体

5. **解**：旋转后的图形如图所示. 其中图(1)是由一个圆柱 O_1O_2 和两个圆台 O_2O_3，O_3O_4 组成的；图(2)是由一个圆锥 O_5O_4，一个圆柱 O_3O_4 及一个圆台 O_1O_3 中挖去圆锥 O_2O_1 组成的.

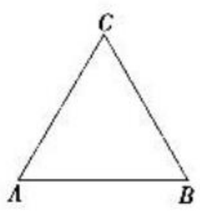


6. **解**：画出形成的几何体如图所示.



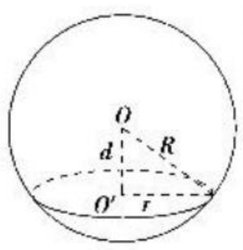
由图可知，旋转得到的几何体是由一个圆柱和一个圆锥组成的.

7. **解析**：如图所示，设等边三角形 ABC 为圆锥的轴截面，由题意知圆锥的母线长即为 $\triangle ABC$ 的边长，且 $S_{\triangle ABC}=\frac{\sqrt{3}}{4}AB^2$，$\therefore\sqrt{3}=\frac{\sqrt{3}}{4}AB^2$，$\therefore AB=2$.



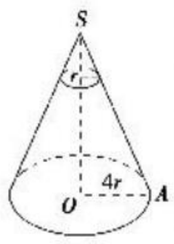
答案：2

8. **解析**：如图，设截面圆的半径为 r，球心与截面圆圆心之间的距离为 d，球半径为 R. 由示意图易构造出一个直角三角形，解该直角三角形即可.



由已知，$R=10$ cm，由 $\pi r^2=36\pi$ cm^2，
得 $r=6$ cm，
所以 $d=\sqrt{R^2-r^2}=\sqrt{100-36}=8$(cm).
答案：8

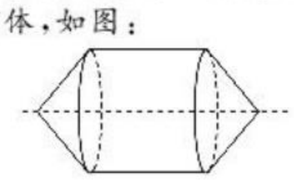
9. **解**：设圆台的母线长为 l cm，截得圆台的上底面的半径为 r cm.
根据题意，得圆台的下底面的半径为 $4r$ cm.
根据相似三角形的性质，得 $\frac{3}{3+l}=\frac{r}{4r}$. 解得 $l=9$.
所以圆台的母线长为 9 cm.



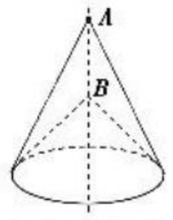
提能达标过关

1. 选 B　①中当圆锥过顶点的轴截面顶角大于 90°时，其面积不是最大的；③圆台的两个底面一定平行. 故①③错误.

2. 选 D　从较短的底边的端点向另一底边作垂线，两条垂线把等腰梯形分成了两个直角三角形，一个矩形，所以一个等腰梯形绕它的较长的底边所在直线旋转一周形成的是由一个圆柱，两个圆锥所组成的几何体，如图：



3. 选 D　如图以 AB 为轴所得的几何体是一个大圆锥挖去一个同底的小圆锥.



4. 选 B　①中应以直角三角形的直角边所在直线为轴；②中应以直角梯形中的直角腰所在直线为轴；④中应用平行于底面的平面去截；③正确.

5. 选 D　该几何体用平面 $ABCD$ 可分割成两个四棱锥，因此它是这两个四棱锥的组合体，因而四边形 $ABCD$ 是它的一个截面而不是一个面.

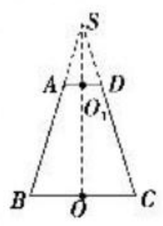
6. **解析**：由柱、锥、台及球的结构特点易于分析，柱体有 a、d、e、f；锥体有 b、g；球有 c；棱柱有 d、e、f；圆柱有 a；棱锥为 g；圆锥为 b.
答案：(1)a、d、e、f　(2)b、g　(3)c　(4)d、e、f　(5)a　(6)g　(7)b

7. **解析**：根据图形可知此几何体是由一个四棱锥、一个四棱柱拼接，又在四棱柱中挖去了一个圆柱而成.
答案：由一个四棱锥、一个四棱柱拼接，又在四棱柱中挖去了一个圆柱而成

8. 圆柱

9. **解**：分割原图，使它的每一部分都是简单几何体.
图(1)是由一个三棱柱和一个四棱柱拼接而成的简单组合体.
图(2)是由一个圆锥和一个四棱柱拼接而成的简单组合体.

10. **解**：如图，过圆台的轴作截面，截面为等腰梯形 $ABCD$，由已知可得上底半径 $O_1A=2$ cm，下底半径 $OB=5$ cm，且腰长 $AB=12$ cm. 设截得此圆台的圆锥的母线长为 l，则由 $\triangle SAO_1\backsim\triangle SBO$，可得 $\frac{l-12}{l}=\frac{2}{5}$，所以 $l=20$ cm，即截得此圆台的圆锥的母线长为 20 cm.



1.2　空间几何体的三视图和直观图

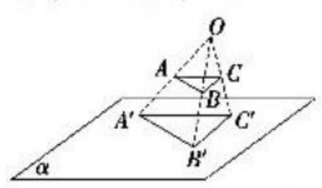
第 3 课时　中心投影与平行投影、空间几何体的三视图

题点知识巩固

1. 选 B　由中心投影的定义知，中心投影的投影线交于一点，故选 B.

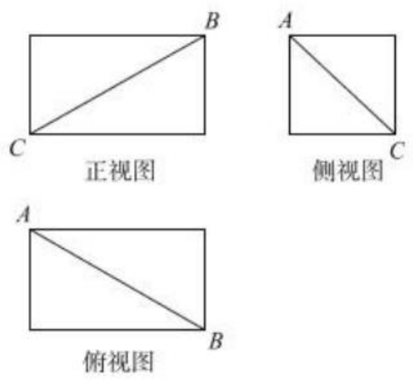
2. 选 B　由平行投影和中心投影的定义可知①正确；空间图形经过中心投影后，直线可能变成直线，也可能变成一个点，如当投影中心在直线上时，投影为点；平行线有可能变成相交线，如照片中由近到远物体之间的距离越来越近，最后相交于一点，②不正确；两条相交直线的平行投影是两条相交直线或一条直线，③不正确.

3. 选 B　根据题意画出图形，如图所示.



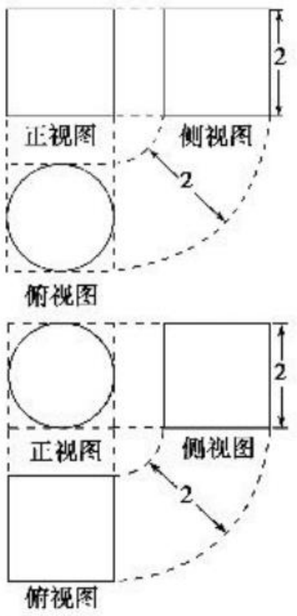
由图易得 $\frac{OA}{OA'}=\frac{AB}{A'B'}=\frac{OB}{OB'}=\frac{BC}{B'C'}=\frac{OC}{OC'}=\frac{AC}{A'C'}$，
则 $\triangle ABC\backsim\triangle A'B'C'$.

4. **解**：该长方体的三视图为如图所示：

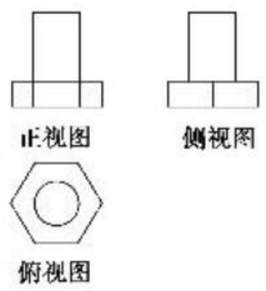


关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

5. **解**：三视图分别如图所示.

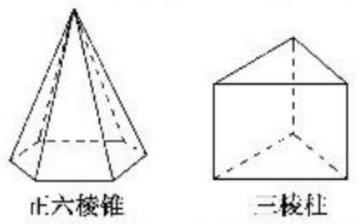


6. **解**：它的三视图如图所示.

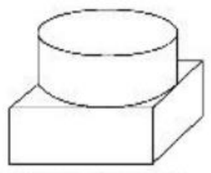


7. **解析**：由圆锥的三视图可知这个几何体可能是圆锥.
答案：圆锥

8. **解**：由三视图的特征，结合柱、锥、台、球及简单组合体的三视图逆推.
图①对应的几何体是一个正六棱锥，图②对应的几何体是一个三棱柱，则所对应的空间几何体的图形分别如下：

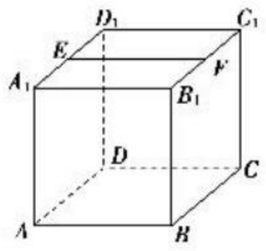


9. **解**：该几何体是由一个圆柱和一个底面为正方形的长方体组合而成，且圆柱下底面圆的直径等于长方体底面正方形的边长，其草图如图所示.

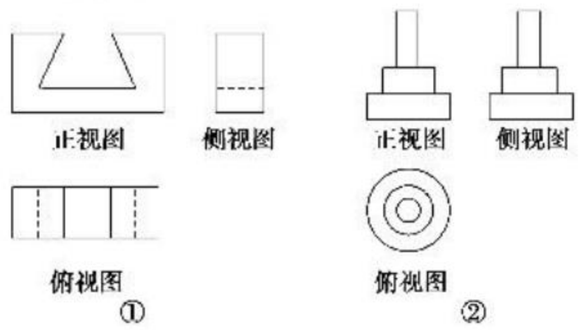


提能达标过关

1. 选 D　对于 A，矩形的平行投影可以是线段、矩形、平行四边形，主要与矩形的放置及投影面的位置有关；同理，对于 B，梯形的平行投影可以是梯形或线段；对于 C，平行投影把两条相交直线投射成两条相交直线或一条直线；D 正确.
2. 选 A　N 和 L，K 属中心投影，C 属平行投影.
3. 选 D　被截去的四棱锥的三条可见侧棱中有两条为长方体的面对角线，它们在右侧面上的投影与右侧面（长方形）的两条边重合，另一条为体对角线，它在右侧面上的投影与右侧面的对角线重合，对照各图可知选 D.
4. 选 D　①正方体的正视图、侧视图、俯视图都是正方形；②圆锥的正视图、侧视图、俯视图依次为：三角形、三角形、圆及圆心；③三棱台的正视图、侧视图、俯视图依次为：梯形、梯形（两梯形不同）、三角形（内外两个三角形，且对应顶点相连）；④正四棱锥的正视图、侧视图、俯视图依次为：三角形、三角形、正方形及对角线.
5. 选 B　侧视图中能够看到线段 AD_1，画为实线，看不到线段 B_1C，画为虚线，而且 AD_1 与 B_1C 不平行，投影为相交线.
6. **解析**：由三视图可得，几何体为一四棱台和长方体的组合体.
答案：四棱台　长方体
7. **解析**：在平面 $ABCD$ 和平面 $A_1B_1C_1D_1$ 上的投影是图乙(1)；在平面 ADD_1A_1 和平面 BCC_1B_1 上的投影是图乙(2)；在平面 ABB_1A_1 和平面 DCC_1D_1 上的投影是图乙(3).
答案：(1)(2)(3)
8. **解析**：如图，在正方体 $A_1B_1C_1D_1-ABCD$ 中，直线 $A_1B_1 \parallel C_1D_1$，它们在平面 $ABCD$ 内的投影为 AB，CD，且 $AB \parallel CD$，故①正确；它们在平面 BCC_1B_1 内的正投影是点 B_1 和点 C_1，故②正确；取 A_1D_1 的中点 E，B_1C_1 的中点 F，连接 EF，则 $EF \parallel D_1C_1$ 且 EF 与 D_1C_1 在平面 ABB_1A_1 内的投影是同一直线 A_1B_1，故⑤正确，故填①②⑤.



答案：①②⑤
9. **解**：三视图如图①②所示.



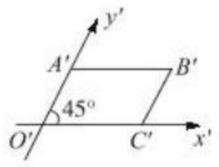
10. **解**：该三视图表示的是组合体，如图所示，是 7 个小正方体拼接而成的组合体.



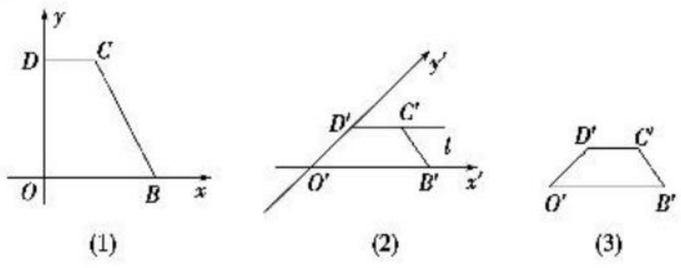
第 4 课时　空间几何体的直观图

题点知识巩固

1. 选 C　正方形的直观图应是平行四边形，且相邻两边的边长之比为 2∶1.
2. **解析**：画出直观图，则 B' 到 x' 轴的距离为 $\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2}OA=\frac{\sqrt{2}}{4}OA=\frac{\sqrt{2}}{2}$.



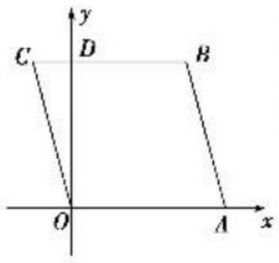
答案：$\frac{\sqrt{2}}{2}$
3. **解**：(1)在已知的直角梯形 $OBCD$ 中，以底边 OB 所在直线为 x 轴，垂直于 OB 的腰 OD 所在直线为 y 轴建立平面直角坐标系.画出相应的 x' 轴和 y' 轴，使 $\angle x'O'y'=45°$，如图(1)(2)所示.
(2)在 x' 轴上截取 $O'B'=OB$，在 y' 轴上截取 $O'D'=\frac{1}{2}OD$，过点 D' 作 x' 轴的平行线 l，在 l 上沿 x' 轴正方向取点 C' 使得 $D'C'=DC$. 连接 $B'C'$，如图(2)所示.
(3)所得四边形 $O'B'C'D'$ 就是直角梯形 $OBCD$ 的直观图，如图(3)所示.



4. 选 C　直观图中等腰直角三角形直角边长为 1，因此面积为 $\frac{1}{2}$，又直观图与原平面图形面积比为 $\sqrt{2}:4$，所以原图形的面积为 $\sqrt{2}$，故选 C.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

5. **解析**：如图所示，在原图形 $OABC$ 中，应有 $OA=O'A'=6(\text{cm})$，$OD=2O'D'=2\times2\sqrt{2}=4\sqrt{2}(\text{cm})$，$CD=C'D'=2(\text{cm})$，$\therefore OC=\sqrt{OD^2+CD^2}=\sqrt{(4\sqrt{2})^2+2^2}=6(\text{cm})$，$\therefore OA=OC$，故四边形 $OABC$ 是菱形.



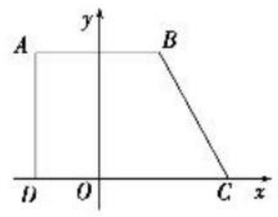
答案：菱形

6. **解**：如图，建立直角坐标系 xOy，在 x 轴上截取 $OD=O'D_1=1$，$OC=O'C_1=2$.

在过点 D 的 y 轴的平行线上截取 $DA=2D_1A_1=2$.

在过点 A 的 x 轴的平行线上截取 $AB=A_1B_1=2$.

连接 BC，即得到了原图形.



由作法可知，原四边形 $ABCD$ 是直角梯形，上、下底长度分别为 $AB=2$，$CD=3$，直角腰的长度 $AD=2$，

所以面积为 $S=\dfrac{2+3}{2}\times2=5$.

7. **解**：(1)作出长方体的直观图 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$，如图 1 所示.

(2)再以上底面 $A_1B_1C_1D_1$ 的对角线交点为原点建立 x' 轴、y' 轴、z' 轴，使 $\angle x'O'y'=45°$，如图 2 所示，在 z' 上取点 V'，使得 $V'O'$ 的长度为棱锥的高，连接 $V'A_1$，$V'B_1$，$V'C_1$，$V'D_1$，得到四棱锥的直观图，如图 2.

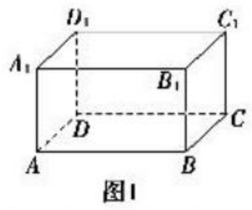


图1

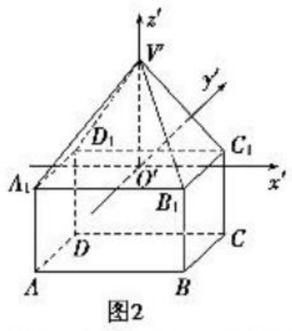


图2

(3)擦去辅助线和坐标轴，遮住部分用虚线表示，得到几何体的直观图，如图 3.

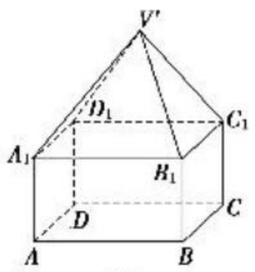


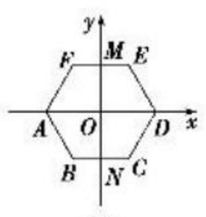
图3

8. **解**：画法：

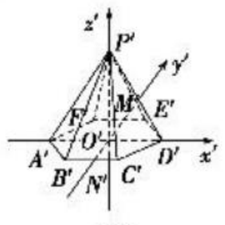
(1)画出六棱锥 $P-ABCDEF$ 的底面. ①在正六边形 $ABCDEF$ 中，取 AD 所在的直线为 x 轴，对称轴 MN 所在的直线为 y 轴，两轴相交于点 O，如图(1)，画出相应的 x' 轴、y' 轴、z' 轴，三轴相交于 O'，使 $\angle x'O'y'=45°$，$\angle x'O'z'=90°$，如图(2)；②在图(2)中，以 O' 为中点，在 x' 轴上取 $A'D'=AD$，在 y' 轴上取 $M'N'=\dfrac{1}{2}MN$，以点 N' 为中点，画出 $B'C'$ 平行于 x' 轴，并且等于 BC，再以 M' 为中点，画出 $E'F'$ 平行于 x' 轴，并且等于 EF；③连接 $A'B'$，$C'D'$，$D'E'$，$F'A'$ 得到正六边形 $ABCDEF$ 水平放置的直观图 $A'B'C'D'E'F'$.

(2)画出正六棱锥 $P-ABCDEF$ 的顶点，在 z' 轴正半轴上截取点 P'，点 P' 异于点 O'.

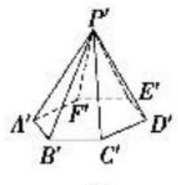
(3)成图. 连接 $P'A'$，$P'B'$，$P'C'$，$P'D'$，$P'E'$，$P'F'$，并擦去 x' 轴、y' 轴和 z' 轴，便可得到六棱锥 $P-ABCDEF$ 的直观图 $P'-A'B'C'D'E'F'$，如图(3).



(1)



(2)



(3)

提能达标过关

1. 选 D　根据斜二测画法的规则，$\angle x'O'y'$ 的度数应为 $45°$ 或 $135°$，$\angle x'O'z'$ 指的是画立体图形时的横轴与纵轴的夹角，所以度数为 $90°$.

2. 选 A　由题图，知在原 $\triangle ABC$ 中，$AO\perp BC$.

$\because A'O'=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，

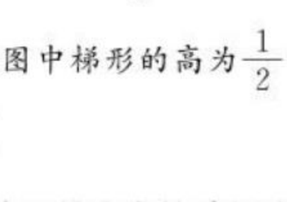
$\therefore AO=\sqrt{3}$.

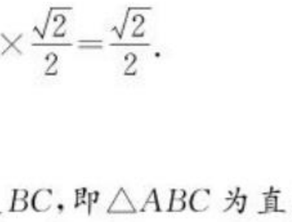
$\because B'O'=C'O'=1$，

$\therefore BC=2$，$AB=AC=2$，

$\therefore\triangle ABC$ 为等边三角形. 故选 A.

3. 选 A　如图，由正方形的直观图是平行四边形可知①②③错误；易知④正确，故选 A.





4. 选 A　直观图中正方形的对角线长为 $\sqrt{2}$，故在平面图形中平行四边形的高为 $2\sqrt{2}$，只有 A 项满足条件，故 A 正确.

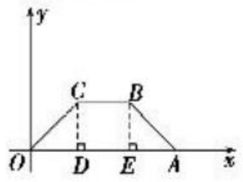
5. 选 D　设 $\triangle AOB$ 的边 OB 上的高为 h，因为 $S_{\text{原图形}}=2\sqrt{2}S_{\text{直观图}}$，所以 $\dfrac{1}{2}\times OB\times h=2\sqrt{2}\times\dfrac{1}{2}\times2\times O'B'$.

又 $OB=O'B'$，所以 $h=4\sqrt{2}$.

6. **解析**：由题意结合斜二测画法，可得四边形 $OABC$ 为矩形，其中 $OA=2$ cm，$OC=4$ cm，$\therefore$ 四边形 $OABC$ 的面积为 $S=2\times4=8(\text{cm}^2)$.

答案：矩形　8

7. **解析**：作 CD，$BE\perp OA$ 于点 D，E，



则 $OD=EA=\dfrac{OA-BC}{2}=2$，$\therefore CD=OD=2$，

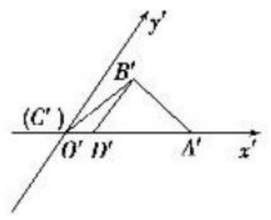
$\therefore$ 在直观图中梯形的高为 $\dfrac{1}{2}\times2\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

答案：$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

8. **解析**：由斜二测画法规则知 $AC\perp BC$，即 $\triangle ABC$ 为直角三角形，其中 $AC=3$，$BC=8$，所以 $AB=\sqrt{73}$，AB 边上的中线长度为 $\dfrac{\sqrt{73}}{2}$.

答案：$\dfrac{\sqrt{73}}{2}$

9. **解**：解法一：画 x' 轴，y' 轴，两轴交于 O'，使 $\angle x'O'y'=45°$，作 $\triangle ABC$ 的直观图如图所示，



则 $A'C'=AC=12$ cm，$B'D'=\dfrac{1}{2}BD=6$ cm，

故 $\triangle A'B'C'$ 的高为 $\dfrac{\sqrt{2}}{2}B'D'=3\sqrt{2}$ cm，

所以 $S_{\triangle A'B'C'}=\dfrac{1}{2}\times12\times3\sqrt{2}=18\sqrt{2}(\text{cm}^2)$.

即水平放置的直观图的面积为 $18\sqrt{2}$ cm^2.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

解法二：$\triangle ABC$ 的面积为 $\frac{1}{2}AC\cdot BD=\frac{1}{2}\times 12\times 12=72(\text{cm}^2)$.

由平面图形的面积与直观图的面积间的关系，可得$\triangle ABC$水平放置的直观图的面积是$\frac{\sqrt{2}}{4}\times 72=18\sqrt{2}(\text{cm}^2)$.

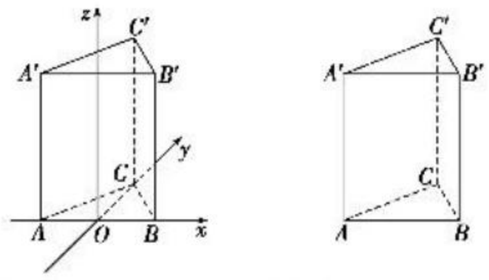
10. **解**：由几何体的三视图，知这个几何体是一个三棱柱.

(1)画轴. 如图，画出 x 轴，y 轴，z 轴，三轴相交于点 O，使 $\angle xOy=45^\circ$，$\angle xOz=90^\circ$.

(2)画底面. 作水平放置的三角形(俯视图)的直观图$\triangle ABC$.

(3)画侧棱. 过 A,B,C 各点分别作 z 轴的平行线，并在这些平行线上分别截取线段 AA',BB',CC'.

(4)成图. 顺次连接 A',B',C'，并擦去辅助线，将被遮住的部分改为虚线，得到的图形就是几何体的直观图.



1.3　空间几何体的表面积与体积

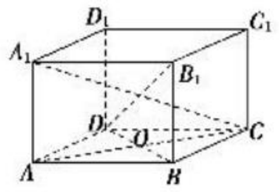
第5课时　柱体、锥体、台体的表面积

题点知识巩固

1. 选C　圆柱的侧面积 $S_{侧}=6\pi\times 4\pi=24\pi^2$. 由于圆柱的底面周长和母线长不明确，因此进行分类讨论：①长为6π的边为母线时，4π为圆柱的底面周长，则 $2\pi r=4\pi$，即 $r=2$，$\therefore S_{底}=4\pi$，$\therefore S_{表}=S_{侧}+2S_{底}=24\pi^2+8\pi=8\pi(3\pi+1)$；②长为$4\pi$的边为母线时，$6\pi$为圆柱的底面周长，则 $2\pi r=6\pi$，即 $r=3$. $\therefore S_{底}=9\pi$，$\therefore S_{表}=S_{侧}+2S_{底}=24\pi^2+18\pi=6\pi(4\pi+3)$.

2. 选A　设底面圆半径为 r，母线长为 h，$\therefore h=2\pi r$，则 $\frac{S_{表}}{S_{侧}}=\frac{2\pi r^2+2\pi rh}{2\pi rh}=\frac{r+h}{h}=\frac{r+2\pi r}{2\pi r}=\frac{1+2\pi}{2\pi}$.

3. **解**：如图，设底面对角线 $AC=a$，$BD=b$，交点为 O，



对角线 $A_1C=15$，$B_1D=9$，

$\therefore a^2+5^2=15^2$，$b^2+5^2=9^2$，

$\therefore a^2=200$，$b^2=56$.

∵该直四棱柱的底面是菱形，

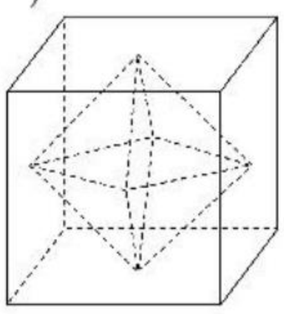
$\therefore AB^2=\left(\frac{AC}{2}\right)^2+\left(\frac{BD}{2}\right)^2=\frac{a^2+b^2}{4}=\frac{200+56}{4}=64$，

$\therefore AB=8$.

$\therefore$直四棱柱的侧面积 $S=4\times 8\times 5=160$.

4. 选A　由三视图可知，该几何体为一个正方体挖去一个半圆锥得到的几何体，故所求表面积为 $4\times 4\times 6-\frac{1}{2}\times 4\times 4-\frac{\pi\times 2^2}{2}+\frac{1}{2}\times\pi\times 2\times 2\sqrt{5}=88+(2\sqrt{5}-2)\pi$. 故选A.

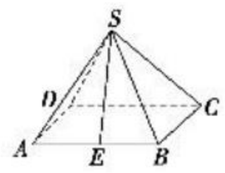
5. 选B　所求凸多面体的表面积是两个底面边长为1，高为$\frac{\sqrt{2}}{2}$的四棱锥的侧面积之和，如图，四棱锥的侧棱长 $l=\sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{1^2+1^2}}{2}\right)^2}=1$，



$\therefore$以该正方体各个面的中心为顶点的凸多面体的表面积：$S=8\times\frac{1}{2}\times 1\times 1\times\sin 60^\circ=2\sqrt{3}$. 故选B.

6. **解**：因为四棱锥 $S-ABCD$ 的各棱长均为5，所以各侧面都是全等的正三角形.

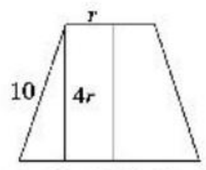
设 E 为 AB 中点，则 $SE\perp AB$，$S_{侧}=4S_{\triangle ABS}=4\times\frac{1}{2}AB\times SE=2\times 5\times\sqrt{5^2-\left(\frac{5}{2}\right)^2}=25\sqrt{3}$，



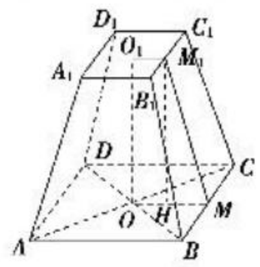
$S_{底}=5^2=25$，

所以 $S_{表面积}=25+25\sqrt{3}$.

7. 选B　圆台的轴截面如图，设上底半径为 r，则下底半径为 $4r$，高为 $4r$. 因为母线长为10，所以在轴截面等腰梯形中，有 $10^2=(4r)^2+(4r-r)^2$. 解得 $r=2$. 所以 $S_{圆台侧}=\pi(r+4r)\cdot 10=100\pi$，故选B.



8. 选A　如图所示，设 O_1、O 分别为棱台上、下底面中心，M_1、M 分别为 B_1C_1、BC 的中点，连接 O_1M_1、OM，则 M_1M 为斜高.



过 M_1 作 $M_1H\perp OM$ 于 H 点，

则 $M_1H=OO_1$，

$S_{侧}=4\times\frac{1}{2}\times(1+2)\cdot M_1M$，

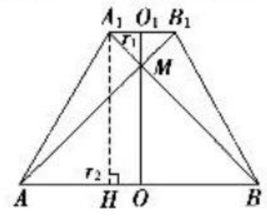
$S_{上底}+S_{下底}=5$.

$\therefore M_1M=\frac{5}{6}$.

在 $\text{Rt}\triangle M_1HM$ 中，$MH=OM-O_1M_1=\frac{1}{2}$.

$\therefore M_1H=O_1O=\sqrt{M_1M^2-MH^2}=\sqrt{\left(\frac{5}{6}\right)^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2}=\frac{2}{3}$.

9. **解**：如图所示的是圆台的轴截面 ABB_1A_1，其中 $\angle A_1AB=60^\circ$，O_1，O 分别为上、下底面圆的圆心，过 A_1 作 $A_1H\perp AB$ 于 H，则 $O_1O=A_1H=A_1A\cdot\sin 60^\circ=4\sqrt{3}(\text{cm})$，



$AH=A_1A\cdot\cos 60^\circ=4(\text{cm})$.

设 $O_1A_1=r_1$，$OA=r_2$，

则 $r_2-r_1=AH=4$. ①

设 A_1B 与 AB_1 的交点为 M，

则 $A_1M=B_1M$.

又∵$A_1B\perp AB_1$，

$\therefore\angle A_1MO_1=\angle B_1MO_1=45^\circ$.

$\therefore O_1M=O_1A_1=r_1$.

同理 $OM=OA=r_2$.

$\therefore O_1O=O_1M+OM=r_1+r_2=4\sqrt{3}$， ②

由①②可得 $r_1=2(\sqrt{3}-1)$，$r_2=2(\sqrt{3}+1)$.

$\therefore S_{表}=\pi r_1^2+\pi r_2^2+\pi(r_1+r_2)l=32(1+\sqrt{3})\pi(\text{cm}^2)$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

提能达标过关

1. 选 D　由已知得 $l=2r$，$\frac{S_{侧}}{S_{底}}=\frac{\pi rl}{\pi r^2}=\frac{l}{r}=2$，故选 D.

2. 选 C　设长方体的长、宽、高分别为 a、b、c，
则 $c=1$，$ab=2$，$\sqrt{a^2+b^2}\cdot c=\sqrt{5}$，
$\therefore a=2$，$b=1$，故 $S_{侧}=2(ac+bc)=6$.

3. 选 B　原来正方体表面积为 $S_1=6a^2$，切割成 27 个全等的小正方体后，每个小正方体的棱长为 $\frac{1}{3}a$，其表面积为 $6\times\left(\frac{1}{3}a\right)^2=\frac{2}{3}a^2$，总表面积 $S_2=27\times\frac{2}{3}a^2=18a^2$，$\therefore$增加了 $S_2-S_1=12a^2$.

4. 选 B　易知此四棱锥为正四棱锥，底面边长为 4，高为 2，则斜高为 $2\sqrt{2}$，故 $S_{侧}=4\times\frac{1}{2}\times4\times2\sqrt{2}=16\sqrt{2}$，$S_{底}=4\times4=16$，所以 $S_{表}=16+16\sqrt{2}$.

5. 选 D　几何体为直四棱柱，其高为 10，底面是上底为 2，下底为 8，高为 4，腰为 5 的等腰梯形，故两个底面面积的和为 $\frac{1}{2}\times(2+8)\times4\times2=40$，四个侧面面积的和为 $(2+8+5\times2)\times10=200$，所以直四棱柱的表面积为 $S=40+200=240$.

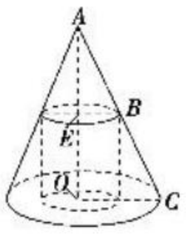
6. **解析**：圆柱 OO' 的侧面积为 $2\pi rl=8\pi r(\text{cm}^2)$，两底面积为 $2\times\pi r^2=2\pi r^2(\text{cm}^2)$，
$\therefore 2\pi r^2+8\pi r=42\pi$，
解得 $r=3$ 或 $r=-7$(舍去)，
$\therefore$圆柱的底面半径为 3 cm.
答案：3

7. **解析**：该几何体是三棱柱，且两个底面是边长为 2 的正三角形，侧面是全等的矩形，且矩形的长是 4，宽是 2，所以该几何体的表面积为 $2\times\left(\frac{1}{2}\times2\times\sqrt{3}\right)+3\times(4\times2)=24+2\sqrt{3}$.
答案：$24+2\sqrt{3}$

8. **解析**：挖去的圆锥的母线长为 $\sqrt{6^2+2^2}=2\sqrt{10}$，则圆锥的侧面积等于 $4\sqrt{10}\pi$. 圆柱的侧面积为 $2\pi\times2\times6=24\pi$，圆柱的一个底面面积为 $\pi\times2^2=4\pi$，所以组合体的表面积为 $4\sqrt{10}\pi+24\pi+4\pi=(4\sqrt{10}+28)\pi$.
答案：$(4\sqrt{10}+28)\pi$

9. **解**：设圆台的母线长为 l，则
圆台的上底面面积为 $S_{上}=\pi\times2^2=4\pi$，
圆台的下底面面积为 $S_{下}=\pi\times5^2=25\pi$，
所以圆台的底面面积为 $S=S_{上}+S_{下}=29\pi$.
又圆台的侧面积 $S_{侧}=\pi(2+5)l=7\pi l$，
则 $7\pi l=29\pi$，解得 $l=\frac{29}{7}$，即该圆台的母线长为 $\frac{29}{7}$.

10. **解**：设圆锥的底面半径为 R，圆柱的底面半径为 r，表面积为 S.
则 $R=OC=2$，$AC=4$，
$AO=\sqrt{4^2-2^2}=2\sqrt{3}$.
如图所示，易知 $\triangle AEB\backsim\triangle AOC$，



$\therefore\frac{AE}{AO}=\frac{EB}{OC}$，即 $\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}=\frac{r}{2}$，$\therefore r=1$，
$S_{底}=2\pi r^2=2\pi$，$S_{侧}=2\pi r\cdot h=2\sqrt{3}\pi$.
$\therefore S=S_{底}+S_{侧}=2\pi+2\sqrt{3}\pi=(2+2\sqrt{3})\pi$.

第 6 课时　柱体、锥体、台体的体积

题点知识巩固

1. **解析**：$V=Sh=\sqrt{3}\times2\sqrt{3}=6$.
答案：6

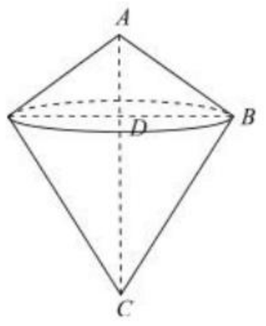
2. **解**：设圆柱底面半径为 r cm，高为 h cm，则圆柱轴截面长方形的对角线长等于它的内接长方体的体对角线长，
即 $\begin{cases}(2r)^2+h^2=(10\sqrt{2})^2,\\2\pi rh=100\pi,\end{cases}$ $\therefore\begin{cases}r=5,\\h=10.\end{cases}$
$\therefore V_{圆柱}=Sh=\pi r^2h=\pi\times5^2\times10=250\pi(\text{cm}^3)$.

3. 选 B　设圆锥的底面半径为 r，母线长为 l，
由题意知 $2r=\sqrt{l^2+l^2}$，即 $l=\sqrt{2}r$，
$\therefore S_{侧}=\pi rl=\sqrt{2}\pi r^2=16\sqrt{2}\pi$，解得 $r=4$.
$\therefore l=4\sqrt{2}$，圆锥的高 $h=\sqrt{l^2-r^2}=4$.
$\therefore$圆锥的体积为 $V=\frac{1}{3}Sh=\frac{1}{3}\pi\times4^2\times4=\frac{64\pi}{3}$.

4. 选 C　设棱台的高为 h，$S_{\triangle ABC}=S$，
则 $S_{\triangle A_1B_1C_1}=4S$.
$\therefore V_{A_1-ABC}=\frac{1}{3}S_{\triangle ABC}\cdot h=\frac{1}{3}Sh$，$V_{C-A_1B_1C_1}=\frac{1}{3}S_{\triangle A_1B_1C_1}\cdot h=\frac{4}{3}Sh$，
又 $V_{台}=\frac{1}{3}h(S+4S+2S)=\frac{7}{3}Sh$，
$\therefore V_{B-A_1B_1C}=V_{台}-V_{A_1-ABC}-V_{C-A_1B_1C_1}$
$=\frac{7}{3}Sh-\frac{Sh}{3}-\frac{4Sh}{3}=\frac{2}{3}Sh$.
$\therefore$体积比为 1∶2∶4，故选 C.

5. **解析**：$V_{三棱锥A-DED_1}=V_{三棱锥E-DD_1A}=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times1\times1\times1=\frac{1}{6}$.
答案：$\frac{1}{6}$

6. **解**：由题意，所形成的几何体为两个圆锥的组合体，如图所示，



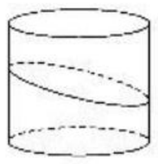
两个圆锥的底面半径为斜边上的高 BD，且 $BD=\frac{AB\cdot BC}{AC}=\frac{12}{5}$，
两个圆锥的高分别为 AD 和 DC，
所以 $V=V_1+V_2=\frac{1}{3}\pi BD^2\cdot AD+\frac{1}{3}\pi BD^2\cdot CD$
$=\frac{1}{3}\pi BD^2\cdot(AD+CD)=\frac{1}{3}\pi BD^2\cdot AC$
$=\frac{1}{3}\pi\times\left(\frac{12}{5}\right)^2\times5=\frac{48}{5}\pi$.
故所形成的几何体的体积是 $\frac{48}{5}\pi$.

7. **解析**：体积 $V=\frac{1}{3}\pi h(R^2+r^2+R\cdot r)=\frac{1}{3}\pi\times6\times(2^2+1^2+2\times1)=14\pi$.
答案：14π

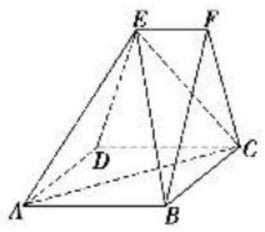
8. **解析**：设圆台的上、下底面半径分别为 r 和 R，母线长为 l，高为 h，
则 $S_{上}=\pi r^2=\pi$，$S_{下}=\pi R^2=4\pi$.
$\therefore r=1$，$R=2$，$S_{侧}=\pi(r+R)l=6\pi$，
$\therefore l=2$，$\therefore h=\sqrt{3}$，
$\therefore V=\frac{1}{3}\pi(1^2+2^2+1\times2)\times\sqrt{3}=\frac{7\sqrt{3}\pi}{3}$.
答案：$\frac{7\sqrt{3}\pi}{3}$

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

9. 选 D　用一个完全相同的几何体把题中几何体补成一个圆柱，如图，则圆柱的体积为 $\pi\times2^2\times5=20\pi$，故所求几何体的体积为 10π.



10. **解**：如图，连接 EB,EC,AC. $V_{四棱锥E-ABCD}=\frac{1}{3}\times4^2\times3=16$.



$\because AB=2EF,EF/\!/AB$，

$\therefore S_{\triangle EAB}=2S_{\triangle BEF}$.

$\therefore V_{三棱锥F-EBC}=V_{三棱锥C-EFB}$

$=\frac{1}{2}V_{三棱锥C-ABE}=\frac{1}{2}V_{三棱锥E-ABC}$

$=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}V_{四棱锥E-ABCD}=4$.

$\therefore$ 多面体的体积 $V=V_{四棱锥E-ABCD}+V_{三棱锥F-EBC}=16+4=20$.

提能达标过关

1. 选 A　设长方体长、宽、高分别为 a、b、c，则 $ab=2,ac=6,bc=9$，相乘得 $(abc)^2=108$，$\therefore V=abc=6\sqrt{3}$.

2. 选 A　由题意，$V=\frac{1}{3}(\pi+2\pi+4\pi)h=7\pi$，$\therefore h=3$.

3. 选 B　由四棱台的三视图可知，台体上底面积 $S_1=1\times1=1$，下底面积 $S_2=2\times2=4$，高 $h=2$，代入台体的体积公式 $V=\frac{1}{3}(S_1+\sqrt{S_1S_2}+S_2)h=\frac{1}{3}\times(1+\sqrt{1\times4}+4)\times2=\frac{14}{3}$.

4. 选 C　该几何体是一个圆柱上面叠加一个圆锥，

其表面积为 $S=2\pi\times1\times a+\pi\times1\times\sqrt{(\sqrt{3})^2+1^2}+\pi\times1^2=2\pi a+3\pi=9\pi$，

$\therefore a=3$.

5. 选 B　由三视图可知该几何体是由下面一个长方体，上面一个长方体组合而成的几何体.

$\because$ 下面长方体的表面积为 $8\times10\times2+2\times8\times2+10\times2\times2=232$，上面长方体的表面积为 $8\times6\times2+2\times8\times2+2\times6\times2=152$，

又 $\because$ 长方体表面积重叠一部分，

$\therefore$ 几何体的表面积为 $232+152-2\times6\times2=360$.

6. **解析**：底面半径为 r，则 $\frac{1}{3}\pi r^2\times4=4\pi$，解得 $r=\sqrt{3}$，即底面半径为 $\sqrt{3}$.

答案：$\sqrt{3}$

7. **解析**：圆锥的母线长 $l=2$，设圆锥的底面半径为 r，则 $2\pi r=\frac{1}{2}\times2\pi\times2$，

$\therefore r=1$，

$\therefore$ 圆锥的高 $h=\sqrt{l^2-r^2}=\sqrt{3}$，

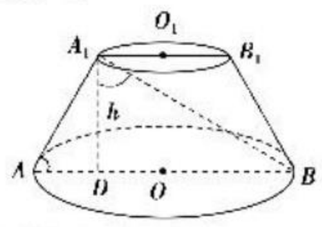
则圆锥的体积 $V=\frac{1}{3}\pi r^2h=\frac{\sqrt{3}}{3}\pi$.

答案：$\frac{\sqrt{3}}{3}\pi$

8. **解析**：由题意知，所打圆柱形孔穿透正方体，因此打孔后所得几何体的表面积等于正方体的表面积，再加上一个圆柱的侧面积，同时减去两个圆的面积，即 $S=6\times4^2+4\times2\pi-2\pi\times1^2=96+6\pi$.

答案：$96+6\pi$

9. **解**：如图所示，作轴截面 A_1ABB_1，设圆台的上、下底面半径和母线长分别为 r,R,l，高为 h.



作 $A_1D\perp AB$ 于点 D，则 $A_1D=3$.

又 $\because\angle A_1AB=60°$，$\therefore AD=A_1D\cdot\frac{1}{\tan60°}$，

即 $R-r=3\times\frac{\sqrt{3}}{3}$，$\therefore R-r=\sqrt{3}$.

又 $\because\angle BA_1A=90°$，$\therefore\angle BA_1D=60°$.

$\therefore BD=A_1D\cdot\tan60°$，即 $R+r=3\times\sqrt{3}$，

$\therefore R+r=3\sqrt{3}$，$\therefore R=2\sqrt{3}$，$r=\sqrt{3}$，而 $h=3$，

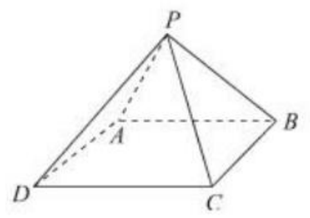
$\therefore V_{圆台}=\frac{1}{3}\pi h(R^2+Rr+r^2)$

$=\frac{1}{3}\pi\times3\times[(2\sqrt{3})^2+2\sqrt{3}\times\sqrt{3}+(\sqrt{3})^2]$

$=21\pi$.

$\therefore$ 圆台的体积为 21π.

10. **解**：由已知可得该几何体是一个底面为矩形、高为 4、顶点在底面的投影是矩形中心的四棱锥 $P-ABCD$.



(1) $V=\frac{1}{3}\times(8\times6)\times4=64$.

(2) 该四棱锥的两个侧面 PAD,PBC 是全等的等腰三角形，

且 BC 边上的高为 $h_1=\sqrt{4^2+\left(\frac{8}{2}\right)^2}=4\sqrt{2}$，

另两个侧面 PAB,PCD 也是全等的等腰三角形，

AB 边上的高为 $h_2=\sqrt{4^2+\left(\frac{6}{2}\right)^2}=5$.

因此侧面积 $S=2\times\left(\frac{1}{2}\times6\times4\sqrt{2}+\frac{1}{2}\times8\times5\right)=40+24\sqrt{2}$.

第 7 课时　球的体积和表面积

题点知识巩固

1. 选 D　设球的半径为 R，则 $4\pi R^2=\frac{4}{3}\pi R^3$，所以 $R=3$.

2. 选 D　设球的半径为 R，则由题意可知 $4\pi R^2=16\pi$，故 $R=2$. 所以球的体积 $V=\frac{4}{3}\pi R^3=\frac{32}{3}\pi$.

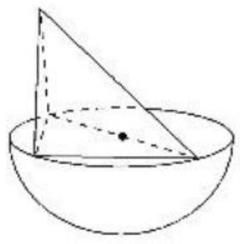
3. **解**：(1) 设球的半径为 R，则 $4\pi R^2=64\pi$，解得 $R=4$，

所以球的体积 $V=\frac{4}{3}\pi R^3=\frac{4}{3}\pi\cdot4^3=\frac{256}{3}\pi$.

(2) 设球的半径为 R，则 $\frac{4}{3}\pi R^3=\frac{500}{3}\pi$，解得 $R=5$，

所以球的表面积 $S=4\pi R^2=4\pi\times5^2=100\pi$.

4. 选 C　由三视图可得该几何体的上部分是一个三棱锥，下部分是半球，所以根据三视图中的数据可得：



$V=\frac{1}{2}\times\frac{4\pi}{3}\times\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^3+\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times1\times1\times1=\frac{\sqrt{2}\pi}{6}+\frac{1}{6}$，故选 C.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

5. 选 A　由三视图知该器皿的形状为一个正方体挖去半个球的组合体，故该器皿的表面积可分为两部分：去掉一个圆的正方体的表面积 S_1 和半球的表面积 S_2，$S_1=6\times2\times2-\pi\times1^2=24-\pi$，$S_2=\frac{1}{2}\times4\pi\times1^2=2\pi$，故 $S=S_1+S_2=\pi+24$，故选 A.

6. 选 A　由三视图知三棱锥的高为 1，底面为一个直角三角形. 由于底面斜边上的中线长为 1，则底面的外接圆半径为 1. 顶点在底面上的投影落在底面外接圆的圆心上. 由于顶点到底面的距离，与底面外接圆的半径相等，所以底面直角三角形斜边的中点就是外接球的球心，则三棱锥的外接球半径 R 为 1，三棱锥的外接球表面积 $S=4\pi R^2=4\pi$，故选 A.

7. 选 B　用一平面去截球所得截面的面积为 π，所以小圆的半径为 1. 已知球心到该截面的距离为 2，所以球的半径为 $r=\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt{5}$，所以球的体积为 $\frac{4}{3}\pi(\sqrt{5})^3=\frac{20\sqrt{5}\pi}{3}$. 故选 B.

8. **解析**：设铜球的半径为 R，由题意，得 $\frac{4}{3}\pi R^3=\pi\cdot16^2\cdot9$，解得 $R=12$.

答案：12

9. **解**：∵PA、PB、PC 两两垂直，且 $PA=PB=PC=a$，
∴以 PA、PB、PC 为相邻的三条棱可以构造正方体.
∵P、A、B、C 四点是球面上的四个点，
∴球是正方体的外接球，正方体的体对角线是球的直径，

$\therefore2R=\sqrt{3}a$，$\therefore R=\frac{\sqrt{3}}{2}a$，

$\therefore V=\frac{4}{3}\pi R^3=\frac{4}{3}\pi\left(\frac{\sqrt{3}}{2}a\right)^3=\frac{\sqrt{3}}{2}\pi a^3$.

提能达标过关

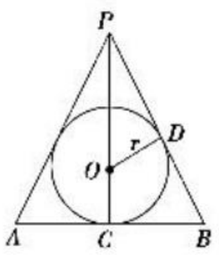
1. 选 B　设两个球的半径分别为 r_1，r_2，则 $\frac{V_1}{V_2}=\frac{r_1^3}{r_2^3}=\frac{8}{27}$.

$\therefore\frac{r_1}{r_2}=\frac{2}{3}$，$\frac{S_1}{S_2}=\frac{r_1^2}{r_2^2}=\frac{4}{9}$.

2. 选 C　设球的半径为 R，则截面圆的半径为 $\sqrt{R^2-1}$，∴截面圆的面积为 $S=\pi(\sqrt{R^2-1})^2=(R^2-1)\pi=\pi$，∴$R^2=2$，∴球的表面积 $S=4\pi R^2=8\pi$.

3. 选 B　由于长方体的长、宽、高分别为 $2a$、a、a，则长方体的体对角线为 $\sqrt{(2a)^2+a^2+a^2}=\sqrt{6}a$，又长方体的外接球的直径 $2R$ 等于长方体的体对角线，所以 $2R=\sqrt{6}a$，则 $S_{球}=4\pi R^2=4\pi\left(\frac{\sqrt{6}}{2}a\right)^2=6\pi a^2$.

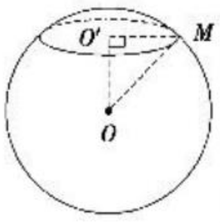
4. 选 C　作轴截面如图，则 $PO=2OD$，$\angle CPB=30°$，$CB=\frac{\sqrt{3}}{3}PC=\sqrt{3}r$，$PB=2\sqrt{3}r$，圆锥侧面面积 $S_1=6\pi r^2$，球的表面积 $S_2=4\pi r^2$，$S_1:S_2=3:2$.



5. 选 B　利用截面圆的性质先求得球的半径长.
如图，设截面圆的圆心为 O'，M 为截面圆上任一点，则 $OO'=\sqrt{2}$，$O'M=1$，

$\therefore OM=\sqrt{(\sqrt{2})^2+1}=\sqrt{3}$，即球的半径为 $\sqrt{3}$，

$\therefore V=\frac{4}{3}\pi(\sqrt{3})^3=4\sqrt{3}\pi$.



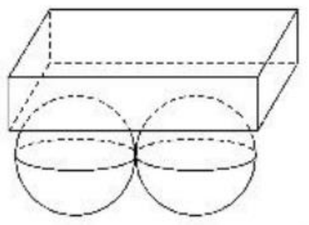
6. **解析**：设该铁球的半径为 r，则由题意得 $\frac{4}{3}\pi r^3=\pi\times10^2\times\frac{5}{3}$，解得 $r^3=5^3$，∴$r=5$，∴这个铁球的表面积 $S=4\pi\times5^2=100\pi(\text{cm}^2)$.

答案：100π

7. **解析**：设球 O 的半径为 R，
因为球 O 与圆柱 O_1O_2 的上、下底面及母线均相切，
所以圆柱 O_1O_2 的高为 $2R$，底面半径为 R.
所以 $\frac{V_1}{V_2}=\frac{\pi R^2\cdot2R}{\frac{4}{3}\pi R^3}=\frac{3}{2}$.

答案：$\frac{3}{2}$

8. **解析**：由三视图知原几何体是两个半径为 $\frac{3}{2}$ 的球体相切放置，上面放长、宽、高分别是 6、3、1 的长方体，直观图如图.



该几何体的体积 $V=2V_{球}+V_{长方体}=2\times\frac{4}{3}\pi\left(\frac{3}{2}\right)^3+6\times1\times3=18+9\pi$.

答案：$18+9\pi$

9. **解**：该组合体的表面积 $S=4\pi r^2+2\pi rl=4\pi\times1^2+2\pi\times1\times3=10\pi$，该组合体的体积 $V=\frac{4}{3}\pi r^3+\pi r^2l=\frac{4}{3}\pi\times1^3+\pi\times1^2\times3=\frac{13\pi}{3}$.

10. **解**：设垂直于截面的大圆面交两截面圆于 A_1B_1、A_2B_2，上述大圆的垂直于 A_1B_1 的直径交两截面圆于 O_1、O_2，设球心到两截面的距离分别为 d_1、d_2，则 $\begin{cases}d_1+d_2=27, & ①\\ d_1^2+24^2=R^2, & ②\\ d_2^2+15^2=R^2, & ③\end{cases}$

解得 $R=25$.
当 $|d_1-d_2|=27$ 时，其与②③组成的方程组无解.
∴$S_{球}=4\pi R^2=2\ 500\pi(\text{cm}^2)$.

素养提升

素养培优提能

1. 选 B　根据画三视图的规则“长对正，高平齐，宽相等”可知，几何体的俯视图不可能是圆和正方形.

2. 选 B　由△AOB 的直观图可知，△AOB 的底边长为 4，高为 16，故 $S_{\triangle AOB}=\frac{1}{2}\times4\times16=32$.

3. 选 A　当圆柱的底面周长为 $2a$ 时，设其底面半径为 R，则 $2\pi R=2a$，

$\therefore R=\frac{a}{\pi}$.

∴圆柱的体积 $V=\pi R^2a=\pi\cdot\frac{a^2}{\pi^2}\cdot a=\frac{a^3}{\pi}$；

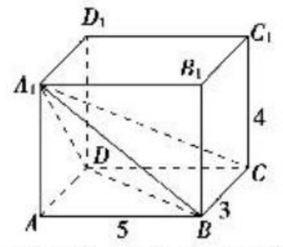
当圆柱的底面周长为 a 时，设其底面半径为 r，则 $2\pi r=a$，

$\therefore r=\frac{a}{2\pi}$.

∴圆柱的体积 $V=\pi r^2\cdot2a=\pi\cdot\frac{a^2}{4\pi^2}\cdot2a=\frac{a^3}{2\pi}$，故选 A.

4. 选 D　由三视图知可把三棱锥放在一个长方体内部，即三棱锥 A_1-BCD，

$V_{A_1-BCD}=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times3\times5\times4=10$，故选 D.



5. 选 D　由题意，圆锥轴截面的顶角为 120°，设该圆锥的底面圆心为 O'，球 O 的半径为 R，则 $O'O=R-1$，由勾股定理可得 $R^2=(R-1)^2+(\sqrt{3})^2$，∴$R=2$，∴球 O 的表面积为 $4\pi R^2=16\pi$. 故选 D.

6. **解析**：三棱锥的任何一个面都可以作为底面，所以此题可把 F 看作顶点，△DED_1 看成底面求解，棱 AB 可视作三棱锥 $F-DED_1$ 的高.

$\therefore V_{D_1-EDF}=V_{F-DED_1}=\frac{1}{3}\cdot S_{\triangle DED_1}\cdot AB$

$=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times1=\frac{1}{6}$.

答案：$\frac{1}{6}$

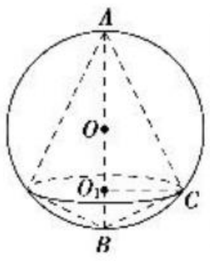
关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

7. **解析**：∵圆柱的侧面展开图是边长为 1 的正方形，
∴该圆柱的高 $h=1$，底面周长 $2\pi r=1$，
∴底面半径 $r=\frac{1}{2\pi}$，
∴该圆柱的体积 $V=\pi\cdot\frac{1}{4\pi^2}\cdot 1=\frac{1}{4\pi}$.
答案：$\frac{1}{4\pi}$

8. **解析**：由三视图可知，该几何体是半径为 1 的半球，其表面积为
$\frac{1}{2}\times 4\pi\times 1^2+\pi\times 1^2=3\pi$.
答案：3π

9. **解**：由三视图可知该几何体的下半部分是棱长为 2 m 的正方体，上半部分是半径为 1 m 的半球.
(1)几何体的表面积为
$S=\frac{1}{2}\times 4\pi\times 1^2+6\times 2^2-\pi\times 1^2=(24+\pi)(\mathrm{m}^2)$.
(2)几何体的体积为
$V=2^3+\frac{1}{2}\times\frac{4}{3}\pi\times 1^3=\left(8+\frac{2\pi}{3}\right)(\mathrm{m}^3)$.

10. **解**：如图所示，
过 C 作 $CO_1\perp AB$ 于 O_1.
在半圆中可得 $\angle BCA=90^\circ$，
$\angle BAC=30^\circ$，$AB=2R$，
∴$AC=\sqrt{3}R$，$CO_1=\frac{\sqrt{3}}{2}R$，



$\therefore V_{圆锥AO_1}+V_{圆锥BO_1}=\frac{1}{3}\pi\cdot CO_1^2\cdot AO_1+\frac{1}{3}\pi\cdot CO_1^2\cdot BO_1$
$=\frac{1}{3}\pi\cdot CO_1^2\cdot(AO_1+BO_1)=\frac{1}{3}\pi\times\left(\frac{\sqrt{3}}{2}R\right)^2\times 2R=\frac{\pi}{2}R^3$，
又 $V_{球}=\frac{4}{3}\pi R^3$，
∴所求几何体的体积 $V=\frac{4}{3}\pi R^3-\frac{\pi}{2}R^3=\frac{5}{6}\pi R^3$.

第二章　点、直线、平面之间的位置关系

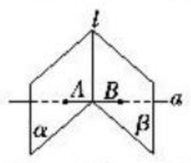
2.1　空间点、直线、平面之间的位置关系

第 8 课时　平　面

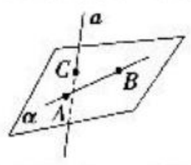
题点知识巩固

1. B　2. A

3. **解**：(1)用符号表示：$\alpha\cap\beta=l$，$a\cap\alpha=A$，$a\cap\beta=B$，如图.



(2)用符号表示：$A\in\alpha$，$B\in\alpha$，$a\cap\alpha=C$，$C\notin AB$，如图.



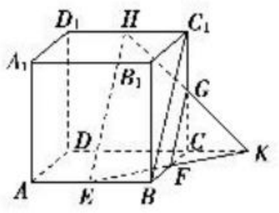
4. **证明**：因为 $PQ\parallel a$，所以 PQ 与 a 确定一个平面 β，所以直线 $a\subset\beta$，点 $P\in\beta$. 因为 $P\in b$，$b\subset\alpha$，所以 $P\in\alpha$. 又因为 $a\subset\alpha$，$P\notin a$，所以 α 与 β 重合，所以 $PQ\subset\alpha$.

5. **证明**：证法一：纳入平面法
∵$l_1\cap l_2=A$，∴l_1 和 l_2 确定一个平面 α.
∵$l_2\cap l_3=B$，∴$B\in l_2$.
又∵$l_2\subset\alpha$，∴$B\in\alpha$. 同理可证 $C\in\alpha$.
∵$B\in l_3$，$C\in l_3$，∴$l_3\subset\alpha$.
∴直线 l_1，l_2，l_3 在同一平面内.
证法二：辅助平面法
∵$l_1\cap l_2=A$，∴l_1 和 l_2 确定一个平面 α.
∵$l_2\cap l_3=B$，∴l_2，l_3 确定一个平面 β.
∵$A\in l_2$，$l_2\subset\alpha$，∴$A\in\alpha$.
∵$A\in l_2$，$l_2\subset\beta$，∴$A\in\beta$.
同理可证 $B\in\alpha$，$B\in\beta$，$C\in\alpha$，$C\in\beta$.
∴不共线的三个点 A，B，C 既在平面 α 内，又在平面 β 内，
∴平面 α 和 β 重合，即直线 l_1，l_2，l_3 在同一平面内.

6. 选 D　∵$AB\subset\gamma$，$M\in AB$，∴$M\in\gamma$.
又 $\alpha\cap\beta=l$，$M\in l$，∴$M\in\beta$.
根据公理 3 可知，M 在 γ 与 β 的交线上.
同理可知，点 C 也在 γ 与 β 的交线上.

7. **解析**：(1)若 $EH\cap FG=P$，
则点 $P\in$ 平面 ABD，$P\in$ 平面 BCD，
而平面 $ABD\cap$ 平面 $BCD=BD$，
∴$P\in BD$.
(2)若 $EF\cap GH=Q$，则 $Q\in$ 平面 ABC，$Q\in$ 平面 ACD，
而平面 $ABC\cap$ 平面 $ACD=AC$，
∴$Q\in AC$.
答案：(1)BD　(2)AC

8. **证明**：如图所示，连接 C_1B，GF，HE，由题意知



$HC_1\parallel EB$，且 $HC_1=EB$，
∴四边形 HC_1BE 是平行四边形，
∴$HE\parallel C_1B$.
又 $C_1G=GC$，$CF=BF$，
∴$GF\parallel C_1B$，且 $GF=\frac{1}{2}C_1B$.
∴$GF\parallel HE$，且 $GF\neq HE$，
∴HG 与 EF 相交. 设交点为 K，
∴$K\in HG$，$HG\subset$ 平面 D_1C_1CD，
∴$K\in$ 平面 D_1C_1CD.
∵$K\in EF$，$EF\subset$ 平面 $ABCD$，
∴$K\in$ 平面 $ABCD$，
∴$K\in$ 平面 $D_1C_1CD\cap$ 平面 $ABCD=DC$，
∴EF，HG，DC 三线共点.

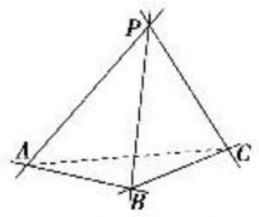
提能达标过关

1. 选 C　不共线的三点确定一个平面，故 A 不正确；四边形有时指空间四边形，故 B 不正确；梯形的上底和下底平行，可以确定一个平面，故 C 正确；两个平面如果相交，一定有一条交线，所有这两个平面的公共点都在这条交线上，故 D 不正确. 故选 C.

2. 选 B　两条平行直线、两条相交直线、直线及直线外一点都分别确定一个平面.

3. 选 A　∵$M\in a$，$a\subset\alpha$，
∴$M\in\alpha$，同理，$N\in\alpha$，又 $M\in l$，$N\in l$，故 $l\subset\alpha$.

4. 选 C　在空间中，两两相交的三条直线最多可以确定 3 个平面，如图所示：



PA，PB，PC 相交于一点 P，则 PA，PB，PC 不共面，则 PA，PB 确定一个平面 PAB，PB，PC 确定一个平面 PBC，PA，PC 确定一个平面 PAC. 故选 C.

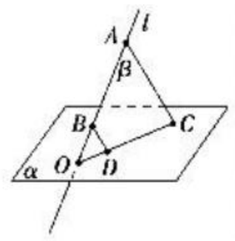
5. 选 C　若三点在同一直线上，且与已知直线平行或相交，或该直线在由该三点确定的平面内，则均确定 1 个平面；若三点有两点连线和已知直线平行时可确定 3 个平面；若三点不共线，且该直线在由该三点确定的平面外，则可确定 4 个平面.

6. ③

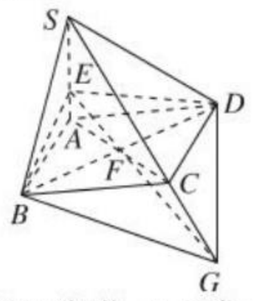
7. **解析**：其中三个点可确定唯一的平面，当第四个点在此平面内时，可确定 1 个平面，当第四个点不在此平面内时，则可确定 4 个平面.
答案：1 或 4

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

8. **解析**：$\because AC/\!/BD$，
$\therefore AC$ 与 BD 确定一个平面，记作平面 β，则 $\alpha\cap\beta=$ 直线 CD.
$\because l\cap\alpha=O$，$\therefore O\in\alpha$.
又 $\because O\in AB\subset\beta$，
$\therefore O\in$ 直线 CD，
$\therefore O,C,D$ 三点共线.
答案：三点共线

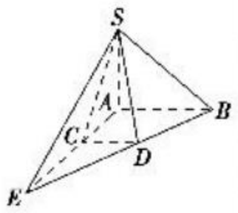


9. **解**：连接 AC 交 BD 于点 F.



$\because$ 四边形 $ABCD$ 为平行四边形，$\therefore F$ 为 BD 中点，
又 $SE=2EA$，$\therefore EF$ 与 SC 不平行.
延长 EF 交 SC 的延长线于点 G，
则 $G\in EF$，$EF\subseteq$ 平面 EBD，$\therefore G\in$ 平面 EBD，
$G\in SC$，$SC\subseteq$ 平面 SBC，$\therefore G\in$ 平面 SBC，
$\therefore G$ 是平面 EBD 与平面 SBC 的公共点，
连接 BG，直线 BG 即为平面 EBD 与平面 SBC 的交线，
同理，连接 DG，直线 DG 即为平面 EBD 与平面 SCD 的交线.

10. **解**：很明显，点 S 是平面 SBD 和平面 SAC 的一个公共点，即点 S 在交线上.
由于 $AB>CD$，则分别延长 AC 和 BD 交于点 E，如图所示，
$\because E\in AC$，$AC\subset$ 平面 SAC，
$\therefore E\in$ 平面 SAC.
同理，$E\in$ 平面 SBD.
$\therefore$ 点 E 在平面 SBD 和平面 SAC 的交线上，
则连接 SE，直线 SE 就是平面 SBD 和平面 SAC 的交线.

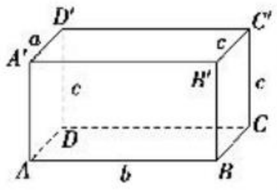


第 9 课时　空间中直线与直线之间的位置关系

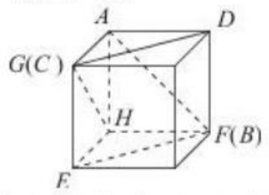
题点知识巩固

1. 选 C　不能严格根据异面直线的定义对两直线的位置关系作出正确判断，仅凭主观臆测和对图形的模糊认识作出选择. A，B 中，$PQ/\!/RS$；D 中，PQ 和 RS 相交. 故选 C.

2. 选 D　可借助长方体来判断.
如图，在长方体 $ABCD-A'B'C'D'$ 中，$A'D'$ 所在直线为 a，AB 所在直线为 b，已知 a 和 b 是异面直线，b 和 c 是异面直线，则 c 可以是长方体 $ABCD-A'B'C'D'$ 中的 $B'C'$，CC'，DD'. 故 a 和 c 可以平行、相交或异面.



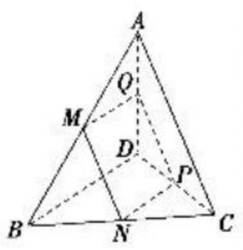
3. 选 C　还原的正方体如图所示.



是异面直线的共三对，分别为 AB 与 CD，AB 与 GH，EF 与 GH.

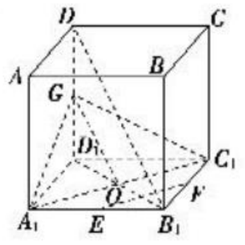
4. 选 C　根据定理，$\angle A'O'B'$ 与 $\angle AOB$ 相等或互补，即 $\angle A'O'B'=130°$ 或 $\angle A'O'B'=50°$.

5. **解析**：如图所示.
$\because$ 点 M,N,P,Q 分别是四条边的中点，
$\therefore MN/\!/AC$ 且 $MN=\frac{1}{2}AC$，
$PQ/\!/AC$ 且 $PQ=\frac{1}{2}AC$，
即 $MN/\!/PQ$ 且 $MN=PQ$，
$\therefore$ 四边形 $MNPQ$ 是平行四边形.
又 $\because BD/\!/MQ$，$AC\perp BD$，$MN/\!/AC$，
$\therefore MN\perp MQ$，
$\therefore$ 平行四边形 $MNPQ$ 是矩形.
答案：矩形

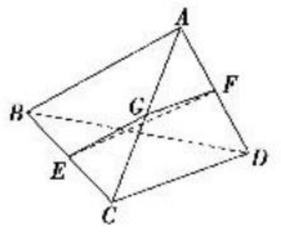


6. **证明**：因为 E,E' 分别是 AB，$A'B'$ 的中点，
所以 $BE/\!/B'E'$，且 $BE=B'E'$.
所以四边形 $EBB'E'$ 是平行四边形，
所以 $EE'/\!/BB'$，同理 $FF'/\!/BB'$.
所以 $EE'/\!/FF'$.

7. **解**：如图，连接 A_1C_1，B_1D_1，并设它们相交于点 O，取 DD_1 的中点 G，连接 OG，A_1G，C_1G.
则 $OG/\!/B_1D$，$EF/\!/A_1C_1$.
$\therefore\angle GOA_1$ 为异面直线 DB_1 与 EF 所成的角或其补角.
$\because GA_1=GC_1$，O 为 A_1C_1 的中点，
$\therefore GO\perp A_1C_1$.
$\therefore$ 异面直线 DB_1 与 EF 所成的角为 $90°$.



8. **解**：如图所示，取 AC 的中点 G，连接 EG，FG，
则 $EG/\!/AB$ 且 $EG=\frac{1}{2}AB$，
$GF/\!/CD$ 且 $GF=\frac{1}{2}CD$，
由 $AB=CD$ 知 $EG=FG$，
从而可知 $\angle GEF$ 为 EF 与 AB 所成角，$\angle EGF$ 或其补角为 AB 与 CD 所成角.
$\because AB$ 与 CD 所成角为 $30°$，
$\therefore\angle EGF=30°$ 或 $150°$，
由 $EG=FG$ 知 $\triangle EFG$ 为等腰三角形，
当 $\angle EGF=30°$ 时，$\angle GEF=75°$，
当 $\angle EGF=150°$ 时，$\angle GEF=15°$，
故 EF 与 AB 所成角的大小为 $15°$ 或 $75°$.



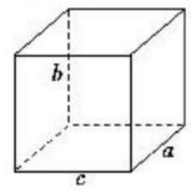
提能达标过关

1. 选 B　$\because a\perp b$，$b/\!/c$，$\therefore a\perp c$.

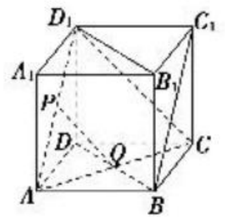
2. 选 D　可能相交也可能异面，但一定不平行（否则与条件矛盾）.

3. 选 D　另一组对应边可能平行，也可能不平行，也可能垂直. 注意和等角定理（若两个角的对应边平行，则这两个角相等或互补）的区别.

4. 选 A　①不正确，如图；②不正确，有可能相交，也有可能异面；③不正确，可能平行，可能相交，也可能异面.

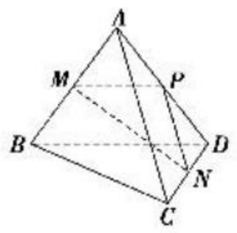


5. 选 C　连接 AC，D_1C.
由 P,Q 分别为 AD_1，AC 的中点，
得 $PQ/\!/CD_1$.
又 $BC_1/\!/AD_1$，
$\therefore\angle AD_1C$ 为异面直线 PQ 和 BC_1 所成的角.
$\because\triangle ACD_1$ 为等边三角形，
$\therefore\angle AD_1C=60°$.
即异面直线 PQ 和 BC_1 所成的角为 $60°$.



6. **解析**：直线 AM 与 CC_1 是异面直线，直线 AM 与 BN 也是异面直线，故①②错误；③④正确.
答案：③④

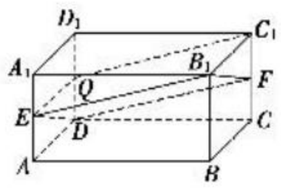
7. **解析**：取 AD 的中点 P，连接 PM，PN，
则 $BD/\!/PM$，$AC/\!/PN$，
$\therefore\angle MPN$ 即为异面直线 AC 与 BD 所成的角，
$\therefore\angle MPN=90°$，$PN=\frac{1}{2}AC=4$，$PM=\frac{1}{2}BD=3$，
$\therefore MN=5$.
答案：5



8. **解析**：把正方体的平面展开图还原成原来的正方体可知，$AB\perp EF$，EF 与 MN 是异面直线，$AB/\!/CM$，$MN\perp CD$，只有①③正确.
答案：①③

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

9. **证明**：设 Q 是 DD_1 的中点，连接 EQ，QC_1.



∵E 是 AA_1 的中点，

∴$EQ \parallel A_1D_1$ 且 $EQ=A_1D_1$.

又在矩形 $A_1B_1C_1D_1$ 中，

$A_1D_1 \parallel B_1C_1$ 且 $A_1D_1=B_1C_1$，

∴$EQ \parallel B_1C_1$ 且 $EQ=B_1C_1$.

∴四边形 EQC_1B_1 为平行四边形，

∴$B_1E \parallel C_1Q$ 且 $B_1E=C_1Q$.

又∵Q，F 是 DD_1，C_1C 两边的中点，

∴$QD \parallel C_1F$ 且 $QD=C_1F$，

∴四边形 $QDFC_1$ 为平行四边形，

∴$C_1Q \parallel DF$ 且 $C_1Q=DF$，

∴$B_1E \parallel DF$ 且 $B_1E=DF$，

∴四边形 B_1EDF 为平行四边形.

10. **解**：(1)在直三棱柱 $A_1B_1C_1-ABC$ 中，

$A_1B=A_1C=BC=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$.

因为 $BC \parallel B_1C_1$，

所以$\angle A_1BC$ 为异面直线 A_1B 与 B_1C_1 所成的角或其补角.

在$\triangle A_1BC$ 中，因为 $A_1B=A_1C=BC=\sqrt{2}$，

所以异面直线 A_1B 与 B_1C_1 所成的角为 $\frac{\pi}{3}$.

(2)设点 B_1 到平面 A_1BC 的距离为 h，

由(1)得 $S_{\triangle A_1BC}=\frac{1}{2}\times\sqrt{2}\times\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，

$S_{\triangle A_1B_1B}=\frac{1}{2}\times1\times1=\frac{1}{2}$，

因为 $V_{B_1-A_1BC}=V_{C-A_1B_1B}$，

所以 $\frac{1}{3}S_{\triangle A_1BC}\cdot h=\frac{1}{3}S_{\triangle A_1B_1B}\cdot CA$，解得 $h=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

所以点 B_1 到平面 A_1BC 的距离为 $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

第 10 课时　空间中直线与平面、平面与平面之间的位置关系

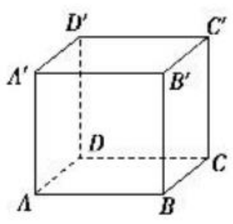
题点知识巩固

1. 选 D　直线 a 不平行于平面 α，则 a 与平面 α 相交或 $a\subset\alpha$，故选 D.

2. 选 D　当 $l \parallel \alpha$ 时，直线 l 上任意点到 α 的距离都相等；当 $l\subset\alpha$ 时，直线 l 上所有的点到 α 的距离都是 0；当 $l\perp\alpha$ 时，直线 l 上到 α 的距离相等且不为 0 的点有两个；当 l 与 α 斜交时，直线 l 上到 α 的距离相等且不为 0 的点有两个.

3. 选 B　直线上有一点在平面外，则直线不在平面内，故直线上有无数多个点在平面外.

4. 选 B　如图，在正方体 $ABCD-A'B'C'D'$ 中，$AA' \parallel BB'$，AA' 在过 BB' 的平面 $ABB'A'$ 内，故命题①不正确；$AA' \parallel$ 平面 $BCC'B'$，$BC\subset$ 平面 $BCC'B'$，但 AA' 不平行于 BC，故命题②不正确；假设 b 与 α 相交，因为 $a \parallel b$，所以 a 与 α 相交，这与 $a \parallel \alpha$ 矛盾，故 $b \parallel \alpha$，故命题③正确；显然命题④不正确，故选 B.



5. 选 D　当三点在平面 α 的同侧时，如图 1 所示，由点 A，B，C 到平面 α 的距离相等，设 $AD\perp\alpha$，$BE\perp\alpha$，$CF\perp\alpha$，垂足分别为 D，E，F，则可构成三个长方形 $ABED$，$BCFE$，$CADF$，于是就有 $AB \parallel DE$，$BC \parallel EF$，因为两相交直线平行，所以 $\alpha \parallel \beta$. 当三点在平面 β 的异侧时，如图 2 所示也成立.

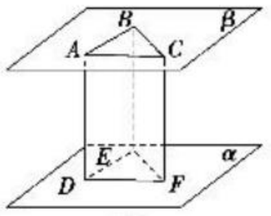


图1

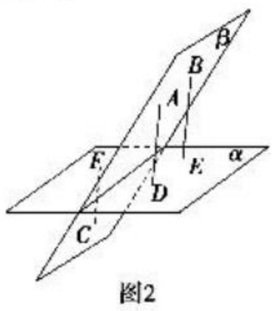
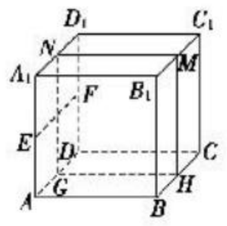


图2

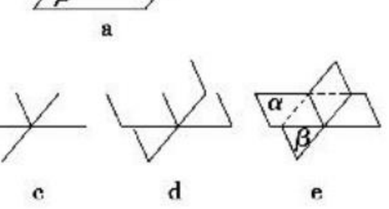
6. 选 B　①中 a 不能与 β 内的所有直线平行而是与无数条直线平行，有一些是异面；②正确；③中直线 a 与 β 内的无数条直线垂直；④根据定义 a 与 β 无公共点，正确.

7. 选 C　如图所示，在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，对于①，平面 AA_1D_1D 中，$AD \parallel$ 平面 $A_1B_1C_1D_1$，分别取 AA_1，DD_1 的中点 E，F，连接 EF，则 $EF \parallel$ 平面 $A_1B_1C_1D_1$，但平面 AA_1D_1D 与平面 $A_1B_1C_1D_1$ 是相交的，交线为 A_1D_1，故命题①错误；对于②，平面 AA_1D_1D 中，与平面 $A_1B_1C_1D_1$ 平行的直线有无数条，但平面 AA_1D_1D 与平面 $A_1B_1C_1D_1$ 不平行，而是相交于直线 A_1D_1，故命题②错误；命题③正确，故选 C.



8. **解**：(1)两个平行平面的画法：画两个平行平面时，要注意把表示平面的平行四边形画成对应边平行，如图 a 所示.

(2)两个相交平面的画法：第一步，先画表示平面的平行四边形的相交两边，如图 b 所示；第二步，再画出表示两个平面交线的线段，如图 c 所示；第三步，过 b 中线段的端点分别引线段，使它们平行且等于图 c 中表示交线的线段，如图 d 所示；第四步，画出表示平面的平行四边形的第四边(被遮住部分线段可画成虚线，也可不画)，如图 e 所示.



a

b　c　d　e

提能达标过关

1. 选 A　延长各侧棱可恢复成棱锥的形状，所以三棱台的一条侧棱所在直线与其对面所在的平面相交.

2. 选 C　在 A 中，如果一条直线与一个平面内的无数条直线平行，则这条直线与这个平面平行或这条直线在这个平面内，故 A 错误；在 B 中，两个平面相交于一条直线，故 B 错误；在 C 中，如果一条直线与一个平面有两个不同的公共点，则这条直线在平面内，它们必有无数个公共点，故 C 正确；在 D 中，当平面外的一条直线与平面相交时，则平面外的这条直线必与该平面内的直线不平行，故 D 错误. 故选 C.

3. 选 D　通过观察正方体，可知 b 与 α 相交或 $b\subset\alpha$ 或 $b \parallel \alpha$. 故选 D.

4. 选 B　②中，也有可能是相交或异面，故②错误；③中，存在平行于两个相交平面的交线，且不在两个平面内的直线，故③错误.

5. 选 B　①错误，平面 α 与平面 β，γ 都相交，则这三个平面有可能有 2 条或 3 条交线，还有可能只有 1 条交线；②正确，两平行平面无公共点，任取的直线也无公共点，即不相交；③错误，直线 a 不平行于平面 α，则 a 有可能在平面 α 内，此时可以与平面内无数条直线平行；④错误，如果 $\alpha \parallel \beta$，$a \parallel \alpha$，那么 $a \parallel \beta$ 或 $a\subset\beta$.

6. **解析**：①错，a 与 b 也可能异面；②错，a 与 b 也可能平行；③对，∵$\alpha \parallel \beta$，∴α 与 β 无公共点，又∵$a\subset\alpha$，$b\subset\beta$，∴a 与 b 无公共点，那么 $a \parallel b$ 或 a 与 b 异面；④错，a 与 β 也可能平行.

答案：③

7. **解析**：∵点 $A\in\alpha$，$B\notin\alpha$，$C\notin\alpha$，

∴平面 ABC 与平面 α 有公共点，且不重合，

∴平面 ABC 与平面 α 的位置关系是相交.

答案：相交

8. **解析**：当 $a\cap\alpha=A$ 时，$a\not\subset\alpha$，故①错误；当直线 l 与 α 相交时，l 上有无数个点不在 α 内，故②错误；若 $l \parallel \alpha$，则 l 与 α 无公共点，则 l 与 α 内任何一条直线都无公共点，故③正确；在长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，A_1C_1 与 B_1D_1 相交，且都与平面 $ABCD$ 平行，故④正确.

答案：③④

9. **解**：平面 ABC 与平面 β 的交线与 l 相交.

证明如下：

∵AB 与 l 不平行，且 $AB\subset\alpha$，$l\subset\alpha$，

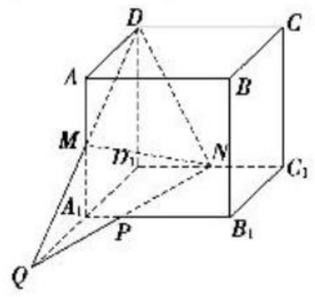
∴AB 与 l 是相交直线.

设 $AB\cap l=P$，则点 $P\in AB$，点 $P\in l$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

又∵$AB\subset$平面ABC，$l\subset\beta$，∴$P\in$平面ABC且$P\in$平面β，
即点P是平面ABC与平面β的一个公共点，
而点C也是平面ABC与平面β的一个公共点，
又∵P，C不重合，
∴直线PC就是平面ABC与平面β的交线，
即平面$ABC\cap$平面$\beta=$直线PC，而直线$PC\cap l=P$，
∴平面ABC与平面β的交线与l相交.

10. **解**：(1)如图所示，连接DN，MN，连接DM并延长交D_1A_1的延长线于点Q，连接QN，直线QN即为直线l.



(2)$QN\cap A_1B_1=P$，
由已知得$\triangle MA_1Q\cong\triangle MAD$，
∴$A_1Q=AD=a=A_1D_1$，
∴A_1是QD_1的中点.
又$A_1P\parallel D_1N$，
∴$A_1P=\frac{1}{2}D_1N=\frac{1}{4}C_1D_1=\frac{1}{4}a$，
∴$PB_1=A_1B_1-A_1P=a-\frac{1}{4}a=\frac{3}{4}a$.

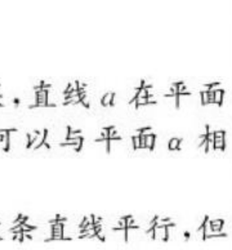
2.2 直线、平面平行的判定及其性质

第11课时 直线与平面平行的判定

题点知识巩固

1. 选D 由$a\parallel b$且$a\parallel\alpha$，知$b\parallel\alpha$或$b\subset\alpha$.
2. 选D A错误，直线l还可以在平面α内；B错误，直线a在平面α外，包括直线与平面平行和相交；C错误，a还可以与平面α相交或在平面α内，D正确. 故选D.
3. 选D ③中若直线在平面内，虽与平面内的无数条直线平行，但直线与平面不平行，故③不正确；①②④正确.
4. 选C 若平面β是$\triangle ABC$所在的平面，
则$MN\subset\beta$.
若$MN\not\subset\beta$，则$MN\parallel\beta$. 故选C.
5. 选D 由直线与平面平行的判定定理知，EF与平面AB'，平面BC'，平面CD'，平面AD'均平行. 故与EF平行的平面有4个.
6. **解析**：∵$A_1C_1\parallel AC$，$A_1C_1\not\subset$平面ACE，$AC\subset$平面ACE，
∴$A_1C_1\parallel$平面ACE.
答案：平行
7. **证明**：连接AN并延长交BC于P，连接SP.

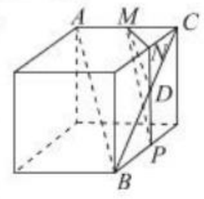
因为$AD\parallel BC$，所以$\frac{DN}{NB}=\frac{AN}{NP}$，
又因为$\frac{AM}{SM}=\frac{DN}{NB}$，所以$\frac{AM}{SM}=\frac{AN}{NP}$，所以$MN\parallel SP$，
又$MN\not\subset$平面SBC，$SP\subset$平面SBC，
所以$MN\parallel$平面SBC.
8. **证明**：如图，取PD的中点G，连接GA，GN.



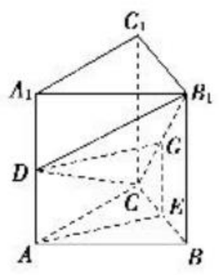
∵G，N分别是$\triangle PDC$的边PD，PC的中点，
∴$GN\parallel DC$，$GN=\frac{1}{2}DC$.
∵M为平行四边形$ABCD$的边AB的中点，
∴$AM=\frac{1}{2}DC$，$AM\parallel DC$，∴$AM\parallel GN$，$AM=GN$，
∴四边形$AMNG$为平行四边形，∴$MN\parallel AG$.
又∵$MN\not\subset$平面PAD，$AG\subset$平面PAD，
∴$MN\parallel$平面PAD.

提能达标过关

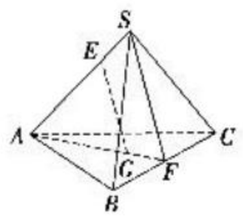
1. 选C A项，本身说法错误；B项，当直线m在平面α内时，m与α不平行；C项，能推出m与α平行；D项，当直线m在平面α内时，m与α不平行. 故选C.
2. 选D 设直线外两点为A，B，若直线$AB\parallel l$，则过A，B可作无数个平面与l平行；若直线AB与l异面，则只能作一个平面与l平行；若直线AB与l相交，则过A，B没有平面与l平行.
3. 选C 由题意知，OM是$\triangle BPD$的中位线，∴$OM\parallel PD$，故①正确；$PD\subset$平面PCD，$OM\not\subset$平面PCD，∴$OM\parallel$平面PCD，故②正确；同理可得$OM\parallel$平面PDA，故③正确；OM与平面PBA和平面PBC都相交，故④⑤不正确. 故共有3个结论正确.
4. 选B 对于①，如图，连接BC交PN于点D，连接MD.



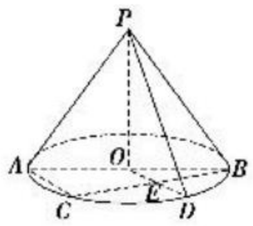
由$MD\parallel AB$，$AB\not\subset$平面MNP，$MD\subset$平面MNP，
得$AB\parallel$平面MNP.
对于④，由$AB\parallel NP$，$AB\not\subset$平面MNP，$NP\subset$平面MNP，
可得$AB\parallel$平面MNP.
5. 选B 如图，取CB_1的中点G，连接GE，DG，当$m=1$时，$AD=GE=\frac{1}{2}BB_1$且$AD\parallel GE$，∴四边形$ADGE$为平行四边形，则$AE\parallel DG$，又$AE\not\subset$平面DB_1C，$DG\subset$平面DB_1C，可得$AE\parallel$平面DB_1C.



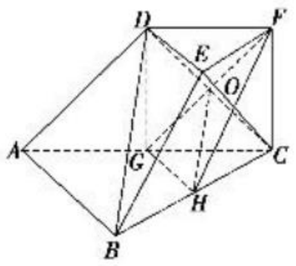
6. $l\not\subset\alpha$
7. **解析**：如图，延长AG交BC于F，连接SF，则由G为$\triangle ABC$的重心知$AG:GF=2$，
又$AE:ES=2$，∴$EG\parallel SF$，又$SF\subset$平面SBC，$EG\not\subset$平面SBC，
∴$EG\parallel$平面SBC.



答案：平行
8. **解析**：∵M，N分别是BF，BC的中点，
∴$MN\parallel CF$.
又四边形$CDEF$为矩形，
∴$CF\parallel DE$，
∴$MN\parallel DE$.
又$MN\not\subset$平面ADE，$DE\subset$平面ADE，
∴$MN\parallel$平面ADE.
答案：平行
9. **解**：(1)证明：设$BC\cap OD=E$，
∵D是弧BC的中点，
∴E是BC的中点，
又∵O是AB的中点，
∴$AC\parallel OE$，
又∵$AC\not\subset$平面POD，$OE\subset$平面POD，
∴$AC\parallel$平面POD.



(2)设圆锥底面半径为r，高为h，母线长为l，
∵圆锥的轴截面PAB为等腰直角三角形，
∴$h=r$，$l=\sqrt{2}r$，
∵$S_{\triangle PAB}=\frac{1}{2}\times2r\times h=r^2=9$，
∴$r=3$，
∴$S_{表}=\pi rl+\pi r^2=\pi r\times\sqrt{2}r+\pi r^2=9(1+\sqrt{2})\pi$.
10. **证明**：如图，连接DG，CD，设$CD\cap GF=O$，连接OH.



关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

在三棱台 $DEF-ABC$ 中，$AB=2DE$，G 为 AC 的中点，可得 $DF\parallel GC$ 且 $DF=GC$，
所以四边形 $DFCG$ 为平行四边形，
则 O 为 CD 的中点，
又 H 为 BC 的中点，所以 $OH\parallel BD$.
又 $OH\subset$ 平面 FGH，$BD\not\subset$ 平面 FGH，
所以 $BD\parallel$ 平面 FGH.

第 12 课时　平面与平面平行的判定

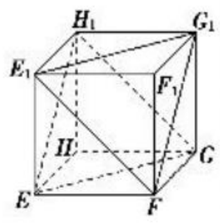
题点知识巩固

1. 选 B　如果一个平面内任何一条直线都平行于另一个平面，即两个平面没有公共点，则两平面平行，故选 B.

2. 选 D　由正方体的模型知前后面、上下面、左右面都相互平行，故选 D.

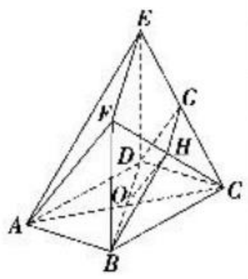
3. 选 D　对 A，当 $\alpha\cap\beta=a$，$l\parallel m\parallel a$ 时，不能推出 $\alpha\parallel\beta$；
对 B，当 $\alpha\cap\beta=a$，且在平面 α 内同侧有两点，另一侧有一个点，三点到平面 β 的距离相等时，不能推出 $\alpha\parallel\beta$；
对 C，当 $l\parallel m$ 时，不能推出 $\alpha\parallel\beta$；
对 D，$\because l,m$ 是两条异面直线，
且 $l\parallel\alpha$，$m\parallel\alpha$，$l\parallel\beta$，$m\parallel\beta$，
$\therefore\alpha$ 内存在两条相交直线与平面 β 平行，故可得 $\alpha\parallel\beta$.

4. 选 A　如图，$\because EG\parallel E_1G_1$，$EG\not\subset$ 平面 E_1FG_1，
$E_1G_1\subset$ 平面 E_1FG_1，
$\therefore EG\parallel$ 平面 E_1FG_1.
又 $G_1F\parallel H_1E$，
同理 $H_1E\parallel$ 平面 E_1FG_1，
又 $H_1E\cap EG=E$，H_1E，$EG\subset$ 平面 EGH_1，
$\therefore$ 平面 $E_1FG_1\parallel$ 平面 EGH_1.

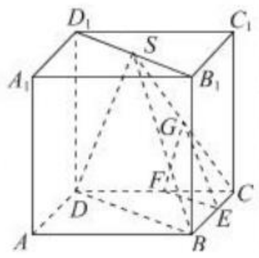


5. **解析**：在 $\triangle PAB$ 中，因为 D，E 分别是 PA，PB 的中点，所以 $DE\parallel AB$. 又 $DE\not\subset$ 平面 ABC，$AB\subset$ 平面 ABC，所以 $DE\parallel$ 平面 ABC.
同理 $EF\parallel$ 平面 ABC.
又 $DE\cap EF=E$，DE，$EF\subset$ 平面 DEF，所以平面 $DEF\parallel$ 平面 ABC.
答案：平行

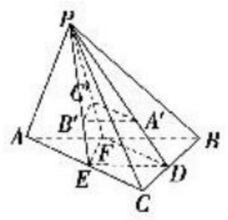
6. **证明**：在 $\triangle CEF$ 中，因为 G，H 分别是 CE，CF 的中点，
所以 $GH\parallel EF$，
又因为 $GH\not\subset$ 平面 AEF，$EF\subset$ 平面 AEF，
所以 $GH\parallel$ 平面 AEF.
设 $AC\cap BD=O$，连接 OH，在 $\triangle ACF$ 中，
因为 $OA=OC$，$CH=HF$，
所以 $OH\parallel AF$，
又因为 $OH\not\subset$ 平面 AEF，$AF\subset$ 平面 AEF，
所以 $OH\parallel$ 平面 AEF.
又因为 $OH\cap GH=H$，OH，$GH\subset$ 平面 $BDGH$，
所以平面 $BDGH\parallel$ 平面 AEF.



7. **证明**：(1)如图，连接 SB.
$\because$ 点 E，G 分别是 BC，SC 的中点，
$\therefore EG\parallel SB$.
又 $\because SB\subset$ 平面 BDD_1B_1，$EG\not\subset$ 平面 BDD_1B_1，
$\therefore EG\parallel$ 平面 BDD_1B_1.
(2)连接 SD.
$\because$ 点 F，G 分别是 DC，SC 的中点，
$\therefore FG\parallel SD$.
又 $\because SD\subset$ 平面 BDD_1B_1，$FG\not\subset$ 平面 BDD_1B_1，
$\therefore FG\parallel$ 平面 BDD_1B_1.
又 $EG\parallel$ 平面 BDD_1B_1，
且 $EG\subset$ 平面 EFG，$FG\subset$ 平面 EFG，$EG\cap FG=G$，
$\therefore$ 平面 $EFG\parallel$ 平面 BDD_1B_1.



8. **解**：(1)证明：分别连接 PA'，PB'，PC' 并延长交 BC，AC，AB 于点 D，E，F，连接 DE，EF，DF.
$\because$ 点 A'，C' 分别是 $\triangle PBC$，$\triangle PAB$ 的重心，
$\therefore PA'=\frac{2}{3}PD$，$PC'=\frac{2}{3}PF$，
$\therefore A'C'\parallel DF$.
$\because A'C'\not\subset$ 平面 ABC，$DF\subset$ 平面 ABC，
$\therefore A'C'\parallel$ 平面 ABC.
同理，$A'B'\parallel$ 平面 ABC.
又 $A'C'\cap A'B'=A'$，$A'C'$，$A'B'\subset$ 平面 $A'B'C'$，
$\therefore$ 平面 $ABC\parallel$ 平面 $A'B'C'$.



(2)由(1)知 $A'C'\parallel DF$ 且 $A'C'=\frac{2}{3}DF$，
又 $DF\parallel AC$ 且 $DF=\frac{1}{2}AC$，
$\therefore A'C'\parallel AC$ 且 $A'C'=\frac{1}{3}AC$.
同理，$A'B'\parallel AB$ 且 $A'B'=\frac{1}{3}AB$，$B'C'\parallel BC$ 且 $B'C'=\frac{1}{3}BC$，
$\therefore\triangle A'B'C'\backsim\triangle ABC$，
$\therefore S_{\triangle A'B'C'}:S_{\triangle ABC}=1:9$.

提能达标过关

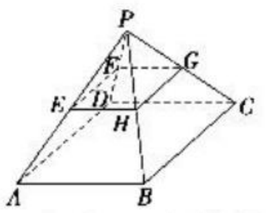
1. 选 C　由面面平行的判定定理知 C 正确.

2. 选 A　$\because A_1E\parallel BE_1$，$A_1E\not\subset$ 平面 BCF_1E_1，
$BE_1\subset$ 平面 BCF_1E_1，
$\therefore A_1E\parallel$ 平面 BCF_1E_1.
同理，$A_1D_1\parallel$ 平面 BCF_1E_1.
又 $A_1E\cap A_1D_1=A_1$，A_1E，$A_1D_1\subset$ 平面 EFD_1A_1，
$\therefore$ 平面 $EFD_1A_1\parallel$ 平面 BCF_1E_1.

3. 选 B　①当经过两点的直线与平面 α 平行时，可作出一个平面 β 使 $\beta\parallel\alpha$；②当经过两点的直线与平面 α 相交时，由于作出的平面与平面 α 至少有一个公共点，故经过两点的平面都与平面 α 相交，不能作出与平面 α 平行的平面. 故满足条件的平面有 0 个或 1 个.

4. 选 A　$\because$ 在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，点 E，F，G 分别是棱 A_1B_1，B_1C_1，BB_1 的中点，$\therefore FG\parallel BC_1$.
$\because BC_1\parallel AD_1$，$\therefore FG\parallel AD_1$，
又 $\because FG\not\subset$ 平面 AA_1D_1D，$AD_1\subset$ 平面 AA_1D_1D，
$\therefore FG\parallel$ 平面 AA_1D_1D，故①正确；
$\because EF\parallel A_1C_1$，$A_1C_1$ 与平面 BC_1D_1 相交，
$\therefore EF$ 与平面 BC_1D_1 相交，故②错误；
$\because FG\parallel BC_1$，$FG\not\subset$ 平面 BC_1D_1，$BC_1\subset$ 平面 BC_1D_1，
$\therefore FG\parallel$ 平面 BC_1D_1，故③正确；
$\because EF$ 与平面 BC_1D_1 相交，
$\therefore$ 平面 EFG 与平面 BC_1D_1 相交，故④错误. 故选 A.

5. 选 C　把平面展开图还原为四棱锥如图所示，则 $EH\parallel AB$，又 $EH\not\subset$ 平面 $ABCD$，$AB\subset$ 平面 $ABCD$，所以 $EH\parallel$ 平面 $ABCD$.
同理 $EF\parallel$ 平面 $ABCD$，又 $EF\cap EH=E$，EF，$EH\subset$ 平面 $EFGH$，所以平面 $EFGH\parallel$ 平面 $ABCD$；平面 PAD，平面 PBC，平面 PAB，平面 PDC 均是四棱锥的四个侧面，则它们两两相交.
$\because AB\parallel CD$，$AB\not\subset$ 平面 PCD，$CD\subset$ 平面 PCD，
$\therefore AB\parallel$ 平面 PCD.
同理 $BC\parallel$ 平面 PAD.

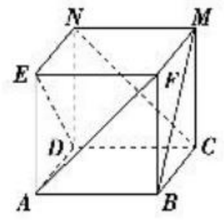


6. **解析**：b，$c\subset\beta$，$a\subset\alpha$，$a\parallel b\parallel c$，若 $\alpha\parallel\beta$，满足要求；若 α 与 β 相交，交线为 l，$b\parallel c\parallel l$，$a\parallel l$，满足要求，故答案为相交或平行.
答案：相交或平行

7. **解析**：若 $\alpha\cap\beta=l$，则在平面 α 内，与 l 相交的直线 a，设 $a\cap l=A$，对于 β 内的任意直线 b，若 b 过点 A，则 a 与 b 相交，若 b 不过点 A，则 a 与 b 异面，即 β 内不存在直线 $b\parallel a$，矛盾. 故 $\alpha\parallel\beta$.
答案：平行

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

8. **解析**：以 $ABCD$ 为下底面还原正方体，如图：



则易判定四个命题都是正确的.

答案：①②③④

9. **证明**：$\because PM:MA=BN:ND=PQ:QD$，

$\therefore MQ\parallel AD$，$NQ\parallel BP$，而 $BP\subset$ 平面 PBC，$NQ\not\subset$ 平面 PBC，

$\therefore NQ\parallel$ 平面 PBC.

又 $\because$ 四边形 $ABCD$ 为平行四边形，

$\therefore BC\parallel AD$，

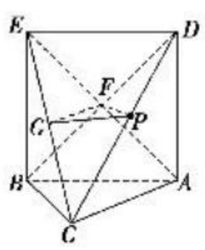
$\therefore MQ\parallel BC$，而 $BC\subset$ 平面 PBC，$MQ\not\subset$ 平面 PBC，

$\therefore MQ\parallel$ 平面 PBC.

又 $MQ\cap NQ=Q$，MQ，$NQ\subset$ 平面 MNQ，

$\therefore$ 平面 $MNQ\parallel$ 平面 PBC.

10. **解**：(1)证明：如图，连接 AE，由 F 是线段 BD 的中点，四边形 $ABED$ 为正方形得 F 为 AE 的中点，



$\therefore GF$ 为 $\triangle AEC$ 的中位线，

$\therefore GF\parallel AC$.

又 $\because AC\subset$ 平面 ABC，$GF\not\subset$ 平面 ABC，

$\therefore GF\parallel$ 平面 ABC.

(2)平面 $GFP\parallel$ 平面 ABC，

证明如下：

连接 FP，GP.

$\because$ 点 F，P 分别为 BD，CD 的中点，

$\therefore FP$ 为 $\triangle BCD$ 的中位线，$\therefore FP\parallel BC$.

又 $\because BC\subset$ 平面 ABC，$FP\not\subset$ 平面 ABC，$\therefore FP\parallel$ 平面 ABC，

又 $GF\parallel$ 平面 ABC，$FP\cap GF=F$，$FP\subset$ 平面 GFP，

$GF\subset$ 平面 GFP，

$\therefore$ 平面 $GFP\parallel$ 平面 ABC.

第 13 课时　直线与平面平行的性质

题点知识巩固

1. 选 B　由 $AB\parallel CD$，$AB\subset$ 平面 α，$CD\not\subset$ 平面 α，得 $CD\parallel\alpha$，所以直线 CD 与平面 α 内的直线的位置关系是平行或异面.

2. 选 A　因为直线 $l\parallel$ 平面 α，所以根据直线与平面平行的性质知 $l\parallel a$，$l\parallel b$，$l\parallel c$，…，所以 $a\parallel b\parallel c\parallel\cdots$，故选 A.

3. 选 B　由 $AE:EB=AF:FD=1:4$ 知，

$EF\parallel BD$，且 $EF=\frac{1}{5}BD$，

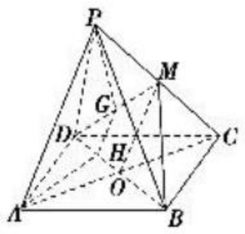
又 $\because EF\not\subset$ 平面 BCD，$BD\subset$ 平面 BCD，

$\therefore EF\parallel$ 平面 BCD，又点 H，G 分别为 BC，CD 的中点，

$\therefore HG\parallel BD$ 且 $HG=\frac{1}{2}BD$，

$\therefore EF\parallel HG$ 且 $EF\neq HG$，故选 B.

4. **证明**：连接 MO.



$\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形，

$\therefore O$ 是 AC 的中点.

又 $\because M$ 是 PC 的中点，$\therefore AP\parallel OM$.

又 $\because AP\not\subset$ 平面 BDM，$OM\subset$ 平面 BDM，

$\therefore AP\parallel$ 平面 BDM.

又 $\because AP\subset$ 平面 $APGH$，平面 $APGH\cap$ 平面 $BDM=GH$，

$\therefore AP\parallel GH$.

5. 选 C　$\because CD\parallel AB$，$CD\not\subset$ 平面 SAB，$AB\subset$ 平面 SAB，

$\therefore CD\parallel$ 平面 SAB.

又平面 $CDEF\cap$ 平面 $SAB=EF$，$\therefore CD\parallel EF$，

又 $CD\parallel AB$，$\therefore AB\parallel EF$.

$\because SE=EA$，$\therefore EF$ 为 $\triangle ABS$ 的中位线，

$\therefore EF=\frac{1}{2}AB=1$.

又 $DE=CF=\sqrt{3}$，

$\therefore$ 四边形 $DEFC$ 的周长为 $3+2\sqrt{3}$.

6. **解析**：因为 $AB\parallel$ 平面 α，$AB\subset$ 平面 $ABCD$，平面 $ABCD\cap$ 平面 $\alpha=MN$，所以 $AB\parallel MN$，又点 M 是 AD 的中点，所以 MN 是梯形 $ABCD$ 的中位线，故 $MN=5$.

答案：5

7. **解**：$\because EF\parallel$ 平面 AB_1C，

又平面 $ADC\cap$ 平面 $AB_1C=AC$，$EF\subset$ 平面 ADC，

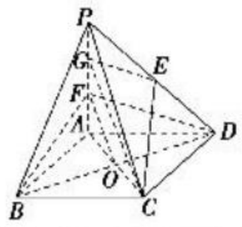
$\therefore EF\parallel AC$.

$\because E$ 是 AD 的中点，

$\therefore EF=\frac{1}{2}AC=\frac{1}{2}\times2\sqrt{2}=\sqrt{2}$.

8. **解**：过点 E 作 $EG\parallel FD$ 交 AP 于点 G，连接 CG，

连接 AC 交 BD 于点 O，连接 FO.



因为 $EG\parallel FD$，$EG\not\subset$ 平面 BDF，$FD\subset$ 平面 BDF，

所以 $EG\parallel$ 平面 BDF，又 $EG\cap CE=E$，$CE\parallel$ 平面 BDF，$EG\subset$ 平面 CGE，$CE\subset$ 平面 CGE，

所以平面 $CGE\parallel$ 平面 BDF，

又 $CG\subset$ 平面 CGE，所以 $CG\parallel$ 平面 BDF，

又平面 $BDF\cap$ 平面 $PAC=FO$，$CG\subset$ 平面 PAC，

所以 $FO\parallel CG$，又 O 为 AC 的中点，

所以 F 为 AG 的中点，所以 $FG=GP=1$，

所以 E 为 PD 的中点，$PE:ED=1:1$.

提能达标过关

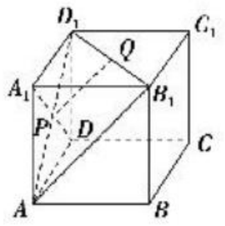
1. 选 B　因为 $GH\parallel$ 平面 SCD，$GH\subset$ 平面 SBD，平面 $SBD\cap$ 平面 $SCD=SD$，所以 $GH\parallel SD$，显然 GH 与 SA，SC 均不平行，故选 B.

2. 选 C　由线面平行性质定理知过点 P 平行于 a 的直线只有一条，且在平面 α 内，故选 C.

3. 选 C　由线面平行的性质定理知 C 正确.

4. 选 D　由于 $BD\parallel$ 平面 $EFGH$，所以有 $BD\parallel EH$，$BD\parallel FG$，则 $AE:EB=AH:HD$，且 $BF:FC=DG:GC$.

5. 选 A　如图，连接 AD_1，AB_1，



$\because PQ\parallel$ 平面 AA_1B_1B，平面 $AB_1D_1\cap$ 平面 $AA_1B_1B=AB_1$，$PQ\subset$ 平面 AB_1D_1，$\therefore PQ\parallel AB_1$，

$\therefore PQ=\frac{1}{2}AB_1=\frac{1}{2}\sqrt{1^2+1^2}=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

6. **解析**：$\because MN\parallel$ 平面 AC，平面 $PMN\cap$ 平面 $AC=PQ$，

$\therefore MN\parallel PQ$，易知 $DP=DQ=\frac{2a}{3}$，

故 $PQ=\sqrt{PD^2+DQ^2}=\sqrt{2}DP=\frac{2\sqrt{2}}{3}a$.

答案：$\frac{2\sqrt{2}}{3}a$

7. **解析**：过直线 a 与交点作平面 β，设平面 β 与 α 交于直线 b，则 $a\parallel b$，若所给 n 条直线中有 1 条是与 b 重合的，则此直线与直线 a 平行，若没有与 b 重合的，则与直线 a 平行的直线有 0 条.

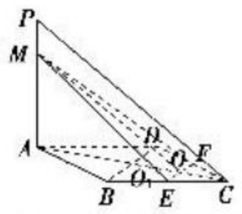
答案：0 或 1

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

8. **解析**：∵$AB\parallel\alpha$，
平面 $ABC\cap\alpha=EG$，
∴$EG\parallel AB$. 同理 $FH\parallel AB$，
∴$EG\parallel FH$. 又 $CD\parallel\alpha$，平面 $BCD\cap\alpha=GH$，
∴$GH\parallel CD$. 同理 $EF\parallel CD$，
∴$GH\parallel EF$，∴四边形 $EFHG$ 是平行四边形.
答案：平行四边形

9. **证明**：∵四边形 $ABCD$ 为矩形，
∴$BC\parallel AD$.
∵$AD\subset$平面 PAD，$BC\not\subset$平面 PAD，
∴$BC\parallel$平面 PAD.
∵平面 $BCFE\cap$平面 $PAD=EF$，
∴$BC\parallel EF$.
∵$AD=BC$，$AD\neq EF$，
∴$BC\neq EF$，∴四边形 $BCFE$ 是梯形.

10. **解**：如图，连接 BD 交 AC 于点 O_1，连接 OM.
因为 $PC\parallel$平面 MEF，平面 $PAC\cap$平面 $MEF=OM$，$PC\subset$平面 PAC，
所以 $PC\parallel OM$，所以 $\dfrac{PM}{PA}=\dfrac{OC}{AC}$.



在菱形 $ABCD$ 中，因为 E，F 分别是边 BC，CD 的中点，所以 $\dfrac{OC}{O_1C}=\dfrac{1}{2}$.
又 $AO_1=CO_1$，所以 $\dfrac{PM}{PA}=\dfrac{OC}{AC}=\dfrac{1}{4}$，故 $PM:MA=1:3$.

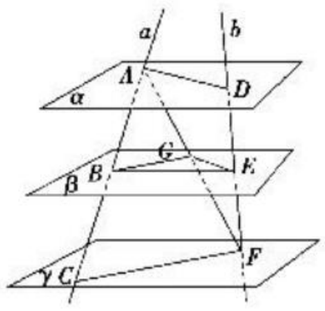
第 14 课时　平面与平面平行的性质

题点知识巩固

1. 选 B　∵平面 $\alpha\parallel$平面 ABC，平面 PAB 与它们的交线分别为 $A'B'$，AB，∴$AB\parallel A'B'$，
同理 $B'C'\parallel BC$，易得 $\triangle ABC\backsim\triangle A'B'C'$，
∴$S_{\triangle A'B'C'}:S_{\triangle ABC}=\left(\dfrac{A'B'}{AB}\right)^2=\left(\dfrac{PA'}{PA}\right)^2=\dfrac{4}{25}$.

2. **解**：设 AB，CD 共面于 γ，因为 $\gamma\cap\alpha=AC$，$\gamma\cap\beta=BD$，且 $\alpha\parallel\beta$，
所以 $AC\parallel BD$，
所以 $\triangle SAC\backsim\triangle SBD$，所以 $\dfrac{SC}{SC+CD}=\dfrac{SA}{SB}$，
即 $\dfrac{SC}{SC+34}=\dfrac{3}{9}$，所以 $SC=17$.

3. **解**：如图所示.



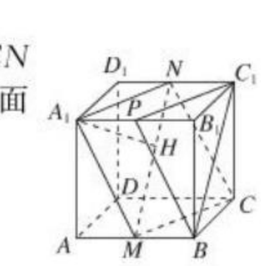
连接 AF，交 β 于点 G，
则点 A，B，C，G 共面.
∵$\beta\parallel\gamma$，平面 $ACF\cap\beta=BG$，平面 $ACF\cap\gamma=CF$，
∴$BG\parallel CF$，
∴$\triangle ABG\backsim\triangle ACF$.
∴$\dfrac{AB}{BC}=\dfrac{AG}{GF}$.
同理，有 $AD\parallel GE$，$\dfrac{AG}{GF}=\dfrac{DE}{EF}$，
∴$\dfrac{AB}{BC}=\dfrac{DE}{EF}$.
又 $\dfrac{AB}{BC}=\dfrac{1}{3}$，
∴$AB=\dfrac{1}{4}AC=\dfrac{15}{4}$ cm，$BC=\dfrac{3}{4}AC=\dfrac{45}{4}$ cm.
∴$EF=3DE=3\times5=15$ cm.

4. 选 A　由面面平行的性质定理易得.

5. 选 B　由面面平行的性质定理，得 $AC\parallel A'C'$，
则四边形 $ACC'A'$ 为平行四边形，
∴$AC=A'C'$.
同理 $BC=B'C'$，$AB=A'B'$，
∴$\triangle ABC\cong\triangle A'B'C'$.

6. **证明**：因为 D，E 分别是 PA，PB 的中点，
所以 $DE\parallel AB$.
又 $DE\not\subset$平面 ABC，$AB\subset$平面 ABC，
所以 $DE\parallel$平面 ABC，
同理 $DF\parallel$平面 ABC，且 $DE\cap DF=D$，DE，$DF\subset$平面 DEF，
所以平面 $DEF\parallel$平面 ABC.
又平面 $PCM\cap$平面 $DEF=NF$，
平面 $PCM\cap$平面 $ABC=CM$，
所以 $NF\parallel CM$.

7. **解**：(1)证明：如图，连接 AC，CD_1. 因为 $ABCD$ 是正方形，且 Q 是 BD 的中点，所以 Q 是 AC 的中点，又 P 是 AD_1 的中点，
所以 $PQ\parallel CD_1$.
又 $PQ\not\subset$平面 DCC_1D_1，$CD_1\subset$平面 DCC_1D_1，
所以 $PQ\parallel$平面 DCC_1D_1.



(2)由(1)易知 $PQ=\dfrac{1}{2}D_1C=\dfrac{\sqrt{2}}{2}a$.
(3)证明：证法一：取 B_1D_1 的中点 O_1，
连接 FO_1，BO_1，
则有 $FO_1\parallel B_1C_1$ 且 $FO_1=\dfrac{1}{2}B_1C_1$.
又 $BE\parallel B_1C_1$ 且 $BE=\dfrac{1}{2}B_1C_1$，
所以 $BE\parallel FO_1$，$BE=FO_1$.
所以四边形 $BEFO_1$ 为平行四边形，
所以 $EF\parallel BO_1$，
又 $EF\not\subset$平面 BB_1D_1D，$BO_1\subset$平面 BB_1D_1D，
所以 $EF\parallel$平面 BB_1D_1D.
证法二：取 B_1C_1 的中点 E_1，连接 EE_1，FE_1，
则有 $FE_1\parallel B_1D_1$，$EE_1\parallel BB_1$，
且 $FE_1\cap EE_1=E_1$，FE_1，$EE_1\subset$平面 EE_1F，B_1D_1，$BB_1\subset$平面 BB_1D_1D，
所以平面 $EE_1F\parallel$平面 BB_1D_1D.
又 $EF\subset$平面 EE_1F，
所以 $EF\parallel$平面 BB_1D_1D.

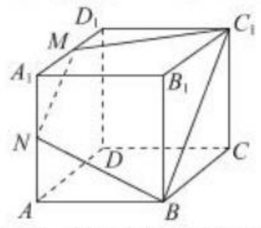
8. **解**：能. 分别取 AB，C_1D_1 的中点 M，N，连接 A_1M，MC，CN，NA_1.
∵平面 $A_1B_1C_1D_1\parallel$平面 $ABCD$，平面 $A_1MCN\cap$平面 $A_1B_1C_1D_1=A_1N$，平面 $ABCD\cap$平面 $A_1MCN=MC$，
∴$A_1N\parallel MC$.
同理 $A_1M\parallel NC$.
∴四边形 A_1MCN 是平行四边形.

∵$C_1N=\dfrac{1}{2}C_1D_1=\dfrac{1}{2}A_1B_1=A_1P$，$C_1N\parallel A_1P$，
∴四边形 A_1PC_1N 是平行四边形，
∴$A_1N\parallel PC_1$. 同理 $A_1M\parallel BP$.
又∵$A_1N\cap A_1M=A_1$，$C_1P\cap PB=P$，A_1N，$A_1M\subset$平面 A_1MCN，C_1P，$PB\subset$平面 PBC_1，
∴平面 $A_1MCN\parallel$平面 PBC_1.
故过点 A_1 与截面 PBC_1 平行的截面是平面 A_1MCN.
连接 MN，作 $A_1H\perp MN$ 于点 H. 由题意，
易得 $A_1M=A_1N=\sqrt{5}$，$MN=2\sqrt{2}$.
∴四边形 A_1MCN 是菱形，$MH=NH=\sqrt{2}$，
∴$A_1H=\sqrt{3}$.
故 $S_{\text{菱形}A_1MCN}=2S_{\triangle A_1MN}=2\times\dfrac{1}{2}\times2\sqrt{2}\times\sqrt{3}=2\sqrt{6}$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

提能达标过关

1. 选 A　可以想象四棱柱.由面面平行的性质定理可得.
2. 选 C　根据面面平行的性质知①②③正确,故选 C.
3. 选 D　充分性:A,B,C,D 四点共面,由平面与平面平行的性质知 $AC/\!/BD$,必要性显然成立.
4. 选 C　由公理 4 及平行平面的传递性知①④正确;举反例知②③⑤⑥不正确.②中 a,b 可以相交,还可以异面;③中 α,β 可以相交;⑤中 a 可以在 α 内;⑥中 a 可以在 α 内.
5. 选 B　取 AA_1 的中点 N,连接 MN,NB,MC_1,BC_1,

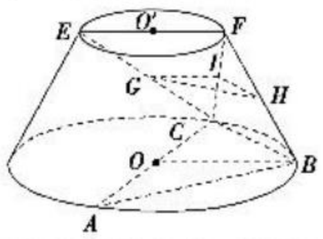


由于截面被平行平面所截,所以截面为梯形,

且 $MN=\frac{1}{2}BC_1=\sqrt{2}$,$MC_1=BN=\sqrt{5}$,

∴梯形的高为 $\frac{3\sqrt{2}}{2}$,∴梯形的面积为 $\frac{1}{2}(\sqrt{2}+2\sqrt{2})\times\frac{3\sqrt{2}}{2}=\frac{9}{2}$.

6. **解析**:由夹在两平行平面间的平行线段相等可得.
答案:平行四边形
7. **解析**:∵平面 $MNE/\!/$ 平面 ACB_1,
由面面平行的性质定理可得 $EN/\!/B_1C$,$EM/\!/B_1A$,
又∵E 为 BB_1 的中点,∴M,N 分别为 BA,BC 的中点,
∴$MN=\frac{1}{2}AC$,即 $\frac{MN}{AC}=\frac{1}{2}$.
答案:$\frac{1}{2}$
8. **解析**:∵$EF/\!/DG$,$BE/\!/AD$,$BE\cap EF=E$,$AD\cap DG=D$,
∴平面 $BEF/\!/$ 平面 $ADGC$.
∵$BF\subset$ 平面 BEF,∴$BF/\!/$ 平面 $ACGD$,故①正确;
由于 $DG=2EF$,则四边形 $EFGD$ 是梯形,
GF 的延长线必与直线 DE 相交,
故④不正确;
②③不能推出.
答案:①
9. **证明**:因为 $BE/\!/AA_1$,$AA_1\subset$ 平面 AA_1D,$BE\not\subset$ 平面 AA_1D,
所以 $BE/\!/$ 平面 AA_1D.
因为 $BC/\!/AD$,$AD\subset$ 平面 AA_1D,
$BC\not\subset$ 平面 AA_1D,
所以 $BC/\!/$ 平面 AA_1D.又 $BE\cap BC=B$,$BE\subset$ 平面 BCE,$BC\subset$ 平面 BCE,
所以平面 $BCE/\!/$ 平面 AA_1D.
又平面 $A_1DCE\cap$ 平面 $BCE=EC$,
平面 $A_1DCE\cap$ 平面 $AA_1D=A_1D$,
所以 $EC/\!/A_1D$.
10. **证明**:设 FC 的中点为 I,连接 GI,HI,



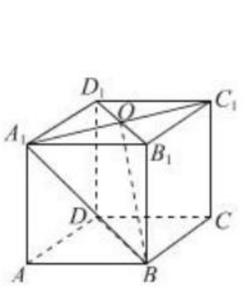
在△CEF 中,因为 G 是 CE 的中点,所以 $GI/\!/EF$,
又 $EF/\!/OB$,所以 $GI/\!/OB$,
在△CFB 中,因为 H 是 FB 的中点,
所以 $HI/\!/BC$,又 $HI\cap GI=I$,$OB\cap BC=B$,$HI,GI\subset$ 平面 GHI,$OB,BC\subset$ 平面 ABC,
所以平面 $GHI/\!/$ 平面 ABC,
因为 $GH\subset$ 平面 GHI,
所以 $GH/\!/$ 平面 ABC.

2.3　直线、平面垂直的判定及其性质

第 15 课时　直线与平面垂直的判定

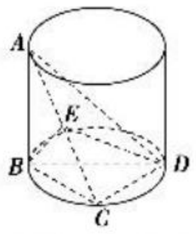
题点知识巩固

1. 选 C　∵$OA\perp OB$,$OA\perp OC$,$OB\cap OC=O$,$OB,OC\subset$ 平面 OBC,
∴$OA\perp$ 平面 OBC.
2. **解析**:根据直线与平面垂直的判定定理,平面内这两条直线必须是相交的,①③④中给定的两直线一定相交,能保证直线与平面垂直,而②梯形的两边可能是上、下底边,它们互相平行,不满足定理条件.
答案:①③④
3. **解析**:当直线 l 与平面 α 内的无数条直线垂直时,l 与 α 不一定垂直,所以①不正确;当 l 与 α 内的一条直线垂直时,不能保证 l 与平面 α 垂直,所以②不正确;当 l 与 α 不垂直时,l 可能与 α 内的无数条平行直线垂直,所以③不正确,④正确;过一点有且只有一条直线垂直于已知平面,所以⑤正确.
答案:④⑤
4. **证明**:(1)因为 $SA=SC$,D 是 AC 的中点,
所以 $SD\perp AC$.在 Rt△ABC 中,$AD=BD$,
由已知 $SA=SB$,
所以△$ADS\cong$△BDS,
所以 $SD\perp BD$.又 $AC\cap BD=D$,$AC,BD\subset$ 平面 ABC,
所以 $SD\perp$ 平面 ABC.
(2)因为 $AB=BC$,D 为 AC 的中点,
所以 $BD\perp AC$.由(1)知 $SD\perp BD$.
又因为 $SD\cap AC=D$,$SD,AC\subset$ 平面 SAC,所以 $BD\perp$ 平面 SAC.
5. **证明**:(1)由题意知 $AA_1\perp$ 平面 ABC,$CD\subset$ 平面 ABC,
所以 $CD\perp AA_1$.
(2)因为 D 是 AB 的中点,△ABC 为等腰直角三角形,$\angle ACB=90^\circ$,
所以 $CD\perp AB$.又 $CD\perp AA_1$,$AB\cap A_1A=A$,$AB,A_1A\subset$ 平面 A_1B_1BA,
所以 $CD\perp$ 平面 A_1B_1BA.因为 $AB_1\subset$ 平面 A_1B_1BA,
所以 $CD\perp AB_1$.又 $CE\perp AB_1$,$CD\cap CE=C$,$CD,CE\subset$ 平面 CED,
所以 $AB_1\perp$ 平面 CED.
6. 选 A　$\angle ABO$ 即是斜线 AB 与平面 α 所成的角,在 Rt△AOB 中,$AB=2BO$,所以 $\cos\angle ABO=\frac{1}{2}$,即 $\angle ABO=60^\circ$.故选 A.
7. **解**:(1)∵$AB\perp$ 平面 AA_1D_1D,
∴$\angle AA_1B$ 就是 A_1B 与平面 AA_1D_1D 所成的角,
在 Rt△AA_1B 中,$\angle BAA_1=90^\circ$,$AB=AA_1$,
∴$\angle AA_1B=45^\circ$,
∴A_1B 与平面 AA_1D_1D 所成的角是 45°.
(2)连接 A_1C_1 交 B_1D_1 于点 O,连接 BO.
∵$A_1O\perp B_1D_1$,$BB_1\perp A_1O$,$BB_1\cap B_1D_1=B_1$,$BB_1,B_1D_1\subset$ 平面 BB_1D_1D,
∴$A_1O\perp$ 平面 BB_1D_1D,
∴$\angle A_1BO$ 就是 A_1B 与平面 BB_1D_1D 所成的角.



设正方体的棱长为 1,则 $A_1B=\sqrt{2}$,$A_1O=\frac{\sqrt{2}}{2}$.
又∵$\angle A_1OB=90^\circ$,
∴$\sin\angle A_1BO=\frac{A_1O}{A_1B}=\frac{1}{2}$,又 $\angle A_1BO\in[0^\circ,90^\circ]$,
∴$\angle A_1BO=30^\circ$,
∴A_1B 与平面 BB_1D_1D 所成的角是 30°.
8. **解**:取 AC 的中点 E,连接 BE,DE.由题意知 $AB\perp$ 平面 BCD,故 $AB\perp CD$.又 BD 是底面圆的直径,
∴$\angle BCD=90^\circ$,即 $CD\perp BC$.
∵$AB\cap BC=B$,$AB,BC\subset$ 平面 ABC,
∴$CD\perp$ 平面 ABC,又∵$BE\subset$ 平面 ABC,∴$CD\perp BE$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料



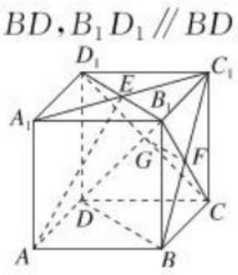
∵$AB=BC=2$，$AB\perp BC$，∴$BE\perp AC$且$BE=\sqrt{2}$，
又$AC\cap CD=C$，AC，$CD\subset$平面ACD，
∴$BE\perp$平面ACD，
∴$\angle BDE$即为BD与平面ACD所成的角，
又$BD=\sqrt{2}BC=2\sqrt{2}$，

∴$\sin\angle BDE=\dfrac{BE}{BD}=\dfrac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}=\dfrac{1}{2}$，

∴$\angle BDE=30°$，即BD与平面ACD所成的角为$30°$.

提能达标过关

1. 选B　根据折叠前、后$AH\perp HE$，$AH\perp HF$不变，∴$AH\perp$平面EFH，B正确.
2. 选D　∵$AD_1\perp A_1D$，$AD_1\perp A_1B_1$，$A_1D\cap A_1B_1=A_1$，
∴$AD_1\perp$平面A_1DB_1.
故选D.
3. 选C　由正方体的性质得$BD/\!/B_1D_1$，且$BD\not\subset$平面CB_1D_1，所以$BD/\!/$平面CB_1D_1，故A正确；因为$BD\perp$平面ACC_1A_1，所以$AC_1\perp BD$，故B正确；异面直线AD与CB_1所成的角即为AD与DA_1所成的角，故为$45°$，故D正确.
4. 选D　∵$PA\perp$平面ABC，
∴$PA\perp BC$，
又$BC\perp AB$，$PA\cap AB=A$，
∴$BC\perp$平面PAB，
故①正确；
由$BC\perp$平面PAB，
得$BC\perp AD$，
又$PA=AB$，D是PB的中点，
∴$AD\perp PB$，又$PB\cap BC=B$，PB，$BC\subset$平面PBC，
∴$AD\perp$平面PBC，
∴$AD\perp PC$，故②正确；
由$AD\perp$平面PBC，
故③正确. 故选D.
5. 选A　如图，易得$FG/\!/BD$，$B_1D_1/\!/BD$，$AE\perp B_1D_1$. 所以选A.



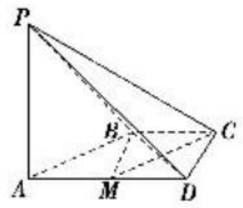
6. **解析**：∵$PA\perp$平面$ABCD$，
∴$PA\perp BC$，
又$BC\perp AB$，
∴$BC\perp$平面PAB.
∴$BC\perp PB$，
同理$CD\perp PD$，
故共有4个直角三角形.
答案：4
7. **解析**：因为$PA\perp$平面ABC，所以AC为斜线PC在平面ABC上的射影，所以$\angle PCA$即为PC与平面ABC所成的角. 在Rt△PAC中，$AC=\dfrac{1}{2}AB=\dfrac{1}{2}PA$，所以$\tan\angle PCA=\dfrac{PA}{AC}=2$.
答案：2
8. **解析**：设O是P在底面ABC上的投影，
∵$PB\perp PA$，$PB\perp PC$，$PA\cap PC=P$，
∴$PB\perp$平面PAC，
∴$PB\perp AC$.　①
又∵O是P在底面ABC上的投影，
∴$PO\perp$平面ABC，
∴$PO\perp AC$.　②
由①②可得，$AC\perp$平面PBO，
∴$AC\perp BO$. 同理$AO\perp BC$，
∴O是△ABC的垂心.
答案：垂

9. **证明**：在△PAD中，由$PA=2$，$AD=2$，$PD=2\sqrt{2}$，
可得$PA^2+AD^2=PD^2$，即$AD\perp PA$.
又$AD\perp AB$，$PA\cap AB=A$，PA，$AB\subset$平面PAB，
所以$AD\perp$平面PAB.
10. **解**：(1)证明：∵$ABCD-A_1B_1C_1D_1$为正方体，∴$BB_1\perp$平面$ABCD$.
又∵$AC\subset$平面$ABCD$，∴$BB_1\perp AC$.
又∵底面$ABCD$为正方形，∴$AC\perp BD$.
∵$BB_1\cap BD=B$，BB_1，$BD\subset$平面BB_1D，∴$AC\perp$平面BB_1D.
∵$B_1D\subset$平面BDB_1，∴$AC\perp B_1D$.
(2)$V_{C-BDB_1}=V_{B_1-BDC}$.
∵$B_1B\perp$平面$ABCD$，
∴B_1B是三棱锥B_1-BDC的高.
∵$V_{B_1-BDC}=\dfrac{1}{3}S_{\triangle BDC}\cdot BB_1=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{2}\times2\times2\times2=\dfrac{4}{3}$，
∴三棱锥$C-BDB_1$的体积为$\dfrac{4}{3}$.

第16课时　平面与平面垂直的判定

题点知识巩固

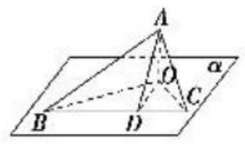
1. 选C　当平面α和β分别过两条互相垂直且异面的直线时，平面α和β有可能平行，A错误；由直线与平面垂直的判定定理知，B、D错误，C正确.
2. 选D　∵$PA\perp$平面$ABCD$，
∴平面$PAD\perp$平面$ABCD$，
平面$PAB\perp$平面$ABCD$.
又$CD\perp$平面PAD，$AB\perp$平面PAD，$BC\perp$平面PAB，
∴平面$PCD\perp$平面PAD，平面$PAB\perp$平面PAD，平面$PBC\perp$平面PAB，
∴共有5对互相垂直的平面.
3. **证明**：由题设知$BC\perp CC_1$，$BC\perp AC$，$CC_1\cap AC=C$，
所以$BC\perp$平面ACC_1A_1.
又$DC_1\subset$平面ACC_1A_1，
所以$DC_1\perp BC$.
由题设知$\angle A_1DC_1=\angle ADC=45°$，所以$\angle CDC_1=90°$，即$DC_1\perp DC$. 又$DC\cap BC=C$，所以$DC_1\perp$平面$BDC$. 又$DC_1\subset$平面$BDC_1$，故平面$BDC_1\perp$平面$BDC$.
4. **解**：(1)取棱AD的中点M($M\in$平面PAD)，点M即为所求的一个点，理由如下：



因为$AD/\!/BC$，$BC=\dfrac{1}{2}AD$，
所以$BC/\!/AM$，且$BC=AM$.
所以四边形$AMCB$是平行四边形，从而$CM/\!/AB$.
又$AB\subset$平面PAB，$CM\not\subset$平面PAB，所以$CM/\!/$平面PAB.
(说明：取棱PD的中点N，则所找的点可以是直线MN上任意一点)
(2)证明：由已知，$PA\perp AB$，$PA\perp CD$.
因为$AD/\!/BC$，$BC=\dfrac{1}{2}AD$，所以直线AB与CD相交，
所以$PA\perp$平面$ABCD$.
从而$PA\perp BD$.
又$BC/\!/MD$，且$BC=MD$，
所以四边形$BCDM$是平行四边形，
所以$BM=CD=\dfrac{1}{2}AD$，所以$BD\perp AB$.
又$AB\cap AP=A$，AB，$AP\subset$平面PAB，所以$BD\perp$平面PAB.
又$BD\subset$平面PBD，
所以平面$PAB\perp$平面PBD.
5. 选B　由二面角的定义：从一条直线出发的两个半平面所组成的图形叫做二面角，故①错误；易知②正确；③中所作的射线不一定垂直于二面角的棱，故③错误；由定义知④正确. 故选B.
6. 选C　由已知$BD=2CD$，翻折后，
在Rt△BCD中，$\angle BDC=60°$，
而$AD\perp BD$，$CD\perp AD$，
故$\angle BDC$是二面角$B-AD-C$的平面角，其大小为$60°$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

7. **解**：如图，在平面 α 内，



过 O 作 $OD\perp BC$，垂足为点 D，
连接 AD，
设 $CO=a$.
$\because AO\perp\alpha$，$BC\subset\alpha$，
$\therefore AO\perp BC$.
又 $AO\cap DO=O$，
$\therefore BC\perp$ 平面 AOD.
而 $AD\subset$ 平面 AOD，
$\therefore BC\perp AD$，
$\therefore\angle ADO$ 即为二面角 $A-BC-O$ 的平面角.
由 $AO\perp\alpha$，$OB\subset\alpha$，$OC\subset\alpha$，得
$AO\perp OB$，$AO\perp OC$，
又 $\angle ABO=30^\circ$，$\angle ACO=45^\circ$，
$\therefore AO=a$，则 $AC=\sqrt{2}a$，$AB=2a$.
在 Rt$\triangle ABC$ 中，$\angle BAC=90^\circ$，
$\therefore BC=\sqrt{AC^2+AB^2}=\sqrt{6}a$，
$\therefore AD=\dfrac{AB\cdot AC}{BC}=\dfrac{2a\cdot\sqrt{2}a}{\sqrt{6}a}=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}a$.
在 Rt$\triangle AOD$ 中，$\sin\angle ADO=\dfrac{AO}{AD}=\dfrac{a}{\frac{2\sqrt{3}}{3}a}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，
$\therefore\angle ADO=60^\circ$，即二面角 $A-BC-O$ 的大小为 60°.

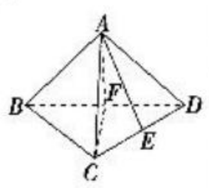
8. **解**：由已知 $PA\perp$ 平面 ABC，$BC\subset$ 平面 ABC，
$\therefore PA\perp BC$.
$\because AB$ 是 $\odot O$ 的直径，且点 C 在圆周上，
$\therefore AC\perp BC$.
又 $\because PA\cap AC=A$，PA，$AC\subset$ 平面 PAC，
$\therefore BC\perp$ 平面 PAC.
又 $PC\subset$ 平面 PAC，
$\therefore PC\perp BC$.
又 $\because BC$ 是二面角 $P-BC-A$ 的棱，
$\therefore\angle PCA$ 是二面角 $P-BC-A$ 的平面角.
由 $PA=AC$ 知 $\triangle PAC$ 是等腰直角三角形，
$\therefore\angle PCA=45^\circ$，即二面角 $P-BC-A$ 的大小是 45°.

提能达标过关

1. 选 C　①若 $m/\!/\alpha$，$n/\!/\alpha$，则 m 与 n 可能平行、相交或异面，故①错误；易知②③正确. 所以正确结论的个数是 2.

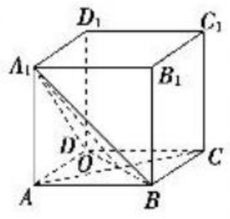
2. 选 C　因为 $AB=BC$，且 E 是 AC 的中点，所以 $BE\perp AC$. 同理 $DE\perp AC$. 又 $BE\cap DE=E$，所以 $AC\perp$ 平面 BDE.
因为 $AC\subset$ 平面 ABC，所以平面 $ABC\perp$ 平面 BDE.
因为 $AC\subset$ 平面 ACD，所以平面 $ACD\perp$ 平面 BDE.

3. 选 A　如图，设 $AB=BC=CD=AD=a$，取 BD 中点 F，连接 AF，CF.



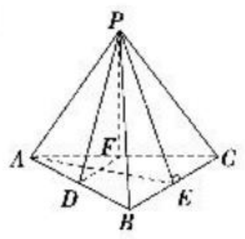
由题意可得 $AF=CF=\dfrac{\sqrt{2}}{2}a$，$\angle AFC=90^\circ$.
在 Rt$\triangle AFC$ 中，可得 $AC=a$，
$\therefore\triangle ACD$ 为正三角形.
$\because E$ 是 CD 的中点，
$\therefore AE\perp CD$，
$\therefore\angle AED=90^\circ$，故选 A.

4. 选 C　如图所示，连接 AC 交 BD 于点 O，连接 A_1O，O 为 BD 中点，



$\because A_1D=A_1B$，
$\therefore$ 在 $\triangle A_1BD$ 中，$A_1O\perp BD$.
又 $\because$ 在正方形 $ABCD$ 中，$AC\perp BD$.
$\therefore\angle A_1OA$ 为二面角 A_1-BD-A 的平面角.
设 $AA_1=1$，则 $AO=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.
$\therefore\tan\angle A_1OA=\dfrac{1}{\frac{\sqrt{2}}{2}}=\sqrt{2}$.

5. 选 C　如图所示，$\because BC/\!/DF$，$BC\not\subset$ 平面 PDF，$DF\subset$ 平面 PDF，



$\therefore BC/\!/$ 平面 PDF，$\therefore$ A 正确；
由 $BC\perp PE$，$BC\perp AE$，$PE\cap AE=E$，
得 $BC\perp$ 平面 PAE，
$\therefore DF\perp$ 平面 PAE，$\therefore$ B 正确；
$\therefore$ 平面 $ABC\perp$ 平面 PAE（$BC\perp$ 平面 PAE），
$\therefore$ D 正确.

6. **解析**：$m\perp n$，将 m 和 n 平移成相交直线，则确定一个平面，
$\because n\perp\beta$，$m\perp\alpha$，
$\therefore$ 该平面与平面 α 和平面 β 的交线也互相垂直，
从而平面 α 和平面 β 的二面角的平面角为 90°，
$\therefore\alpha\perp\beta$.
故正确命题为①③④⇒②.
答案：①③④⇒②

7. **解析**：由平面与平面的位置关系及两个平面平行、垂直的定义、判定定理，知平面平行具有传递性，相交、垂直都不具有传递性.
答案：平行

8. **解析**：由题意得 $BD\perp AC$，
$\because PA\perp$ 平面 $ABCD$，
$\therefore PA\perp BD$.
又 $PA\cap AC=A$，
$\therefore BD\perp$ 平面 PAC，
$\therefore BD\perp PC$，
$\therefore$ 当 $DM\perp PC$（或 $BM\perp PC$）时，即有 $PC\perp$ 平面 MBD，
而 $PC\subset$ 平面 PCD，
$\therefore$ 平面 $MBD\perp$ 平面 PCD.
答案：$DM\perp PC$（或 $BM\perp PC$ 等）

9. **证明**：(1)由直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$，得 $A_1B_1/\!/AB$.
因为 $A_1B_1\not\subset$ 平面 ABD，$AB\subset$ 平面 ABD，所以直线 $A_1B_1/\!/$ 平面 ABD.
(2)因为三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 为直三棱柱，所以 $AB\perp BB_1$.
又因为 $AB\perp BC$，$BB_1\subset$ 平面 BCC_1B_1，$BC\subset$ 平面 BCC_1B_1，且 $BB_1\cap BC=B$，
所以 $AB\perp$ 平面 BCC_1B_1.
又因为 $AB\subset$ 平面 ABD，所以平面 $ABD\perp$ 平面 BCC_1B_1.

10. **证明**：(1)$\because$ 四边形 $ABCD$ 是正方形，$\therefore E$ 是 BD 的中点.
又 F 是 PB 的中点，$\therefore EF/\!/PD$.
又 $\because EF\not\subset$ 平面 PCD，$PD\subset$ 平面 PCD，
$\therefore EF/\!/$ 平面 PCD.
(2)$\because$ 四边形 $ABCD$ 是正方形，$\therefore BD\perp AC$.
$\because PA\perp$ 平面 ABC，$BD\subset$ 平面 ABC，$\therefore PA\perp BD$.
又 $PA\cap AC=A$，PA，$AC\subset$ 平面 PAC，
$\therefore BD\perp$ 平面 PAC.
又 $BD\subset$ 平面 PBD，
$\therefore$ 平面 $PBD\perp$ 平面 PAC.

第 17 课时　直线与平面垂直的性质

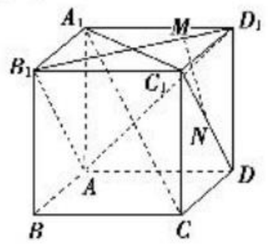
题点知识巩固

1. B

2. 选 D　①②③均正确.

3. **证明**：$\because$ 四边形 ADD_1A_1 为正方形，$\therefore AD_1\perp A_1D$.
又 $\because CD\perp$ 平面 ADD_1A_1，$\therefore CD\perp AD_1$.
$\because A_1D\cap CD=D$，$\therefore AD_1\perp$ 平面 A_1DC.
又 $\because MN\perp$ 平面 A_1DC，$\therefore MN/\!/AD_1$.

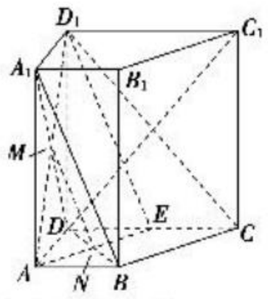
4. **证明**：(1)如图，连接 A_1C_1.



关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

∵$CC_1\perp$平面$A_1B_1C_1D_1$，
$B_1D_1\subset$平面$A_1B_1C_1D_1$，
∴$CC_1\perp B_1D_1$.
∵四边形$A_1B_1C_1D_1$是正方形，
∴$A_1C_1\perp B_1D_1$.
又∵$CC_1\cap A_1C_1=C_1$，A_1C_1，$CC_1\subset$平面A_1C_1C，
∴$B_1D_1\perp$平面A_1C_1C.
又∵$A_1C\subset$平面A_1C_1C，
∴$B_1D_1\perp A_1C$.
(2)连接B_1A，AD_1.
∵$B_1C_1\parallel AD$，且$B_1C_1=AD$，
∴四边形ADC_1B_1为平行四边形，
∴$C_1D\parallel AB_1$.
∵$MN\perp C_1D$，
∴$MN\perp AB_1$.
又∵$MN\perp B_1D_1$，$AB_1\cap B_1D_1=B_1$，AB_1，$B_1D_1\subset$平面AB_1D_1，
∴$MN\perp$平面AB_1D_1.
由(1)知$A_1C\perp B_1D_1$.
同理$A_1C\perp AB_1$.
又∵$AB_1\cap B_1D_1=B_1$，AB_1，$B_1D_1\subset$平面AB_1D_1，
∴$A_1C\perp$平面AB_1D_1.
∴$A_1C\parallel MN$.

5. **解**：(1)证明：连接C_1D.
∵$DC=DD_1$，∴四边形DCC_1D_1是正方形，
∴$DC_1\perp D_1C$.
∵$AD\perp DC$，$AD\perp DD_1$，$DC\cap DD_1=D$，
∴$AD\perp$平面DCC_1D_1，$D_1C\subset$平面DCC_1D_1，∴$AD\perp D_1C$.
又$AD\cap DC_1=D$，∴$D_1C\perp$平面ADC_1.
又$AC_1\subset$平面ADC_1，∴$D_1C\perp AC_1$.
(2)如图，连接AD_1、AE、D_1E，
设$AD_1\cap A_1D=M$，$BD\cap AE=N$，连接MN.



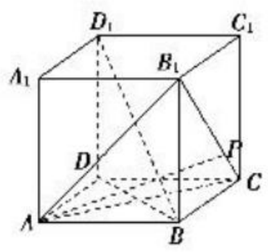
∵平面$AD_1E\cap$平面$A_1BD=MN$，
要使$D_1E\parallel$平面A_1BD，
须使$MN\parallel D_1E$，又M是AD_1的中点，
∴N是AE的中点.
又易知$\triangle ABN\cong\triangle EDN$，∴$AB=DE$，即$E$是$DC$的中点.
综上所述，当E是DC的中点时，可使$D_1E\parallel$平面A_1BD.

6. **证明**：(1)∵$SA\perp$平面AC，$BC\subset$平面AC，∴$SA\perp BC$.
∵四边形$ABCD$为矩形，∴$AB\perp BC$，∴$BC\perp$平面SAB，
∴$BC\perp AE$. 又$SB\perp AE$，∴$AE\perp$平面SBC，∴$AE\perp SC$.
又$EF\perp SC$，∴$SC\perp$平面AEF，∴$AF\perp SC$.
(2)∵$SA\perp$平面AC，∴$SA\perp DC$，
又$AD\perp DC$，∴$DC\perp$平面SAD. ∴$DC\perp AG$.
又由(1)有$SC\perp$平面AEF，$AG\subset$平面AEF，
∴$SC\perp AG$，∴$AG\perp$平面SDC，∴$AG\perp SD$.

提能达标过关

1. D　2. C　3. C　4. D

5. 选A　如图，连接BD，AC.
∵$DD_1\perp$平面$ABCD$，
∴$D_1D\perp AC$，
又$AC\perp BD$，∴$AC\perp$平面BDD_1，
∴$AC\perp BD_1$. 同理$BD_1\perp B_1C$.
又∵$B_1C\cap AC=C$，
∴$BD_1\perp$平面AB_1C.
而$AP\perp BD_1$，∴$AP\subset$平面AB_1C.

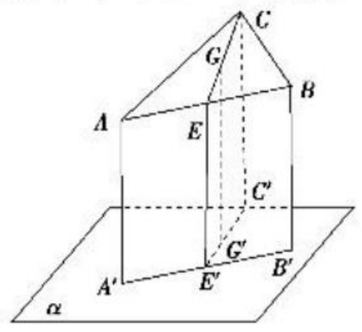


又$P\in$平面BB_1C_1C，∴P点轨迹为平面AB_1C与平面BB_1C_1C的交线B_1C. 故选A.

6. **解析**：由于直线a垂直于平面α内的两条相交直线m，n，则$a\perp\alpha$. 同理$b\perp\alpha$，则$a\parallel b$.
答案：平行

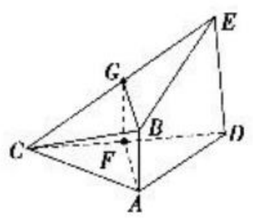
7. ①②③

8. **解析**：如图，设A、B、C在平面α上的射影分别为A'、B'、C'，



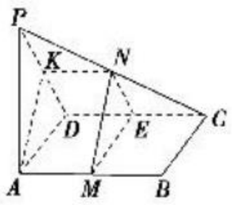
$\triangle ABC$的重心为G，连接CG并延长交AB于中点E，
又设E、G在平面α上的射影分别为E'、G'，
则$E'\in A'B'$，$G'\in C'E'$，$EE'=\frac{1}{2}(A'A+B'B)=\frac{5}{2}$ cm，$CC'=4$ cm，$CG:GE=2:1$，在直角梯形$EE'C'C$中，可求得$GG'=3$.
答案：3 cm

9. **证明**：取CE的中点G，连接FG，BG，AF.
∵F为CD的中点，
∴$GF\parallel DE$，且$GF=\frac{1}{2}DE$.
∵$AB\perp$平面ACD，$DE\perp$平面ACD，
∴$AB\parallel DE$. 则$GF\parallel AB$.
又∵$AB=\frac{1}{2}DE$，∴$GF=AB$.



则四边形$GFAB$为平行四边形. 于是$AF\parallel BG$.
∵$\triangle ACD$为等边三角形，F为CD的中点，
∴$AF\perp CD$.
∵$DE\perp$平面ACD，$AF\subset$平面ACD，∴$DE\perp AF$.
又∵$CD\cap DE=D$，CD，$DE\subset$平面CDE，
∴$AF\perp$平面CDE.
∵$BG\parallel AF$，∴$BG\perp$平面CDE.
∵$BG\subset$平面BCE，∴平面$BCE\perp$平面CDE.

10. **证明**：(1)取CD的中点E，连接EM、EN，
则$CD\perp EM$，且$EN\parallel PD$.
∵$PA\perp$平面$ABCD$，∴$PA\perp CD$，
又$AD\perp DC$，$PA\cap AD=A$，
∴$CD\perp$平面PAD，
∴$CD\perp PD$，从而$CD\perp EN$.
又$EM\cap EN=E$，∴$CD\perp$平面MNE.
因此$MN\perp CD$，而$CD\parallel AB$，∴$MN\perp AB$.
(2)在Rt$\triangle PAD$中有$PA=AD$，
取PD的中点K，连接AK，KN，



则$KN\parallel\!\!\!=\frac{1}{2}DC\parallel\!\!\!=AM$，且$AK\perp PD$.
∴四边形$AMNK$为平行四边形，从而$MN\parallel AK$.
因此$MN\perp PD$. 由(1)知$MN\perp DC$，又$PD\cap DC=D$，
∴$MN\perp$平面PCD.

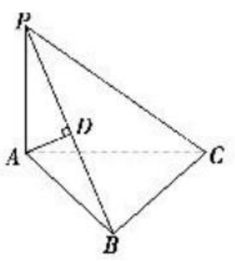
第18课时　平面与平面垂直的性质

题点知识巩固

1. 选C　①设$\alpha\cap\beta=l$，$a\subset\alpha$，$b\subset\beta$，$b\perp l$，则$a\perp b$，故β内与b平行的无数条直线均垂直于α内的任意直线，为真命题；②β内垂直于α与β交线的直线垂直于平面α，则它垂直于α内的任意直线，为真命题；③α内不与交线垂直的直线不垂直于β，为假命题；④垂直于交线的直线必须在平面β内才与平面α垂直，否则不垂直，为假命题.

2. **解析**：∵$AF\perp$平面$ABCD$，$DE\perp$平面$ABCD$，
∴$AF\parallel DE$.
又$AF=DE$，∴四边形$AFED$为平行四边形，
故$EF=AD=6$.
答案：6

3. **证明**：如图，在平面PAB内，作$AD\perp PB$于点D.



∵平面$PAB\perp$平面PBC，
且平面$PAB\cap$平面$PBC=PB$，
$AD\subset$平面PAB，
∴$AD\perp$平面PBC.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

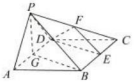
又 $BC\subset$平面 PBC，$\therefore AD\perp BC$.
又$\because PA\perp$平面 ABC，$BC\subset$平面 ABC，$\therefore PA\perp BC$，
又$\because PA\cap AD=A$，$\therefore BC\perp$平面 PAB.
又 $AB\subset$平面 PAB，$\therefore BC\perp AB$.

4. **证明**：如图所示，
连接 AB_1，B_1D_1，B_1C，BD，
$\because DD_1\perp$平面 $ABCD$，$AC\subset$平面 $ABCD$，
$\therefore DD_1\perp AC$.
又 $AC\perp BD$，$DD_1\cap BD=D$，
$\therefore AC\perp$平面 BDD_1B_1，
又 $BD_1\subset$平面 BDD_1B_1，
$\therefore AC\perp BD_1$.
同理可证 $BD_1\perp B_1C$，
又 $AC\cap B_1C=C$，
$\therefore BD_1\perp$平面 AB_1C.
$\because EF\perp A_1D$，$A_1D\parallel B_1C$，$\therefore EF\perp B_1C$.
又$\because EF\perp AC$，$AC\cap B_1C=C$，
$\therefore EF\perp$平面 AB_1C，$\therefore EF\parallel BD_1$.

5. 选 D　由题意得，$BD\perp CD$，
又平面 $ABD\perp$平面 BCD，
且平面 $ABD\cap$平面 $BCD=BD$，$CD\subset$平面 BCD，
$\therefore CD\perp$平面 ABD，
则 $CD\perp AB$，又 $AD\perp AB$，$AD\cap CD=D$，AD，$CD\subset$平面 ACD，
$\therefore AB\perp$平面 ADC，
$\therefore$平面 $ABC\perp$平面 ADC.

6. **解**：(1)证明：$\because AB\perp$平面 BCD，$CD\subset$平面 BCD，
$\therefore AB\perp CD$.
$\because CD\perp BC$，$AB\cap BC=B$，
$\therefore CD\perp$平面 ABC.
又$\because\dfrac{AE}{AC}=\dfrac{AF}{AD}=\lambda(0<\lambda<1)$，
$\therefore$无论 λ 为何值，恒有 $EF\parallel CD$，
$\therefore EF\perp$平面 ABC.
又$\because EF\subset$平面 BEF，
$\therefore$无论 λ 为何值，总有平面 $BEF\perp$平面 ABC.
(2)假设存在 λ，使得平面 $BEF\perp$平面 ACD.
由(1)知 $BE\perp EF$，
$\because$平面 $BEF\perp$平面 ACD，平面 $BEF\cap$平面 $ACD=EF$，$BE\subset$平面 BEF，
$\therefore BE\perp$平面 ACD.
又$\because AC\subset$平面 ACD，
$\therefore BE\perp AC$.
$\because BC=CD=1$，$\angle BCD=\angle ABD=90^\circ$，$\angle ADB=60^\circ$，
$\therefore BD=\sqrt{2}$，$\therefore AB=\sqrt{2}\tan 60^\circ=\sqrt{6}$，
$\therefore AC=\sqrt{AB^2+BC^2}=\sqrt{7}$.
由 Rt$\triangle AEB\backsim$Rt$\triangle ABC$，
得 $AB^2=AE\cdot AC$，
$\therefore AE=\dfrac{6}{\sqrt{7}}$，
$\therefore\lambda=\dfrac{AE}{AC}=\dfrac{6}{7}$.
故当 $\lambda=\dfrac{6}{7}$ 时，平面 $BEF\perp$平面 ACD.

7. **解**：(1)证明：设 G 为 AD 的中点，连接 PG，BG，如图.



因为$\triangle PAD$ 为等边三角形，
所以 $PG\perp AD$.
在菱形 $ABCD$ 中，$\angle DAB=60^\circ$，
G 为 AD 的中点，所以 $BG\perp AD$.
又因为 $BG\cap PG=G$，所以 $AD\perp$平面 PGB.
又因为 $BG\cap PG=G$，BG，$PG\subset$平面 PGB，
所以 $AB\perp$平面 PGB.
因为 $PB\subset$平面 PGB，所以 $AD\perp PB$.

(2)当 F 为 PC 的中点时，满足平面 $DEF\perp$平面 $ABCD$. 证明如下：
如图，设 F 为 PC 的中点，连接 DF，EF，DE，则在$\triangle PBC$ 中，$EF\parallel PB$.
在菱形 $ABCD$ 中，$GB\parallel DE$，则 $PB\cap GB=B$，$EF\cap DE=E$，PB，$GB\subset$平面 PGB，EF，$DE\subset$平面 DEF，
所以平面 $DEF\parallel$平面 PGB. 由(1)得，$PG\perp AD$. 又因为平面 $PAD\perp$平面 $ABCD$，平面 $PAD\cap$平面 $ABCD=AD$，$PG\subset$平面 PAD，所以 $PG\perp$平面 $ABCD$，而 $PG\subset$平面 PGB，所以平面 $PGB\perp$平面 $ABCD$，所以平面 $DEF\perp$平面 $ABCD$.

提能达标过关

1. 选 D　选项 A 中，若有 3 个交点，则确定一个平面，若三条直线交于一点，则不一定能确定一个平面，如正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，AA_1，AB，AD 两两相交，但由 AA_1，AB，AD 不能确定一个平面，所以 A 不正确；选项 B 中，缺少条件 m 是平面 α 外的一条直线，所以 B 不正确；选项 C 中，不满足面面垂直的性质定理的条件，必须是 α 内垂直于 l 的直线，所以 C 不正确；由于两条平行直线中的一条与第三条直线垂直，那么另一条也与第三条直线垂直，所以 D 正确.

2. 选 C　$l\perp\alpha$，$\alpha\perp\beta\Rightarrow l\parallel\beta$ 或 $l\subset\beta$，A 错误；
$l\parallel\alpha$，$\alpha\parallel\beta\Rightarrow l\parallel\beta$ 或 $l\subset\beta$，B 错误；
$l\perp\alpha$，$\alpha\perp\beta\Rightarrow l\perp\beta$，C 正确；
若 $l\parallel\alpha$，$\alpha\perp\beta$，则 l 与 β 位置关系不确定，D 错误.

3. 选 D　$\because$平面 $PAC\perp$平面 PBC，$AC\perp PC$，平面 $PAC\cap$平面 $PBC=PC$，$AC\subset$平面 PAC，$\therefore AC\perp$平面 PBC.
又$\because BC\subset$平面 PBC，$\therefore AC\perp BC$，$\therefore\angle ACB=90^\circ$.
$\therefore$动点 C 的轨迹是以 AB 为直径的圆，除去 A 和 B 两点.

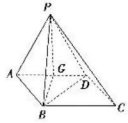
4. 选 A　$\because AC\perp AB$，$AC\perp BC_1$，$\therefore AC\perp$平面 ABC_1，
又$\because AC\subset$平面 ABC，$\therefore$平面 $ABC_1\perp$平面 ABC，
$\therefore C_1$ 在平面 ABC 上的射影 H 必在平面 ABC_1 与平面 ABC 的交线 AB 上，故选 A.

5. 选 C　注意折叠前 $DE\perp AF$，折叠后其位置关系没有改变.
①中由已知可得平面 $A'FG\perp$平面 ABC，
$\therefore$点 A' 在平面 ABC 上的射影在线段 AF 上；
②$BC\parallel DE$，$BC\not\subset$平面 $A'DE$，$DE\subset$平面 $A'DE$，
$\therefore BC\parallel$平面 $A'DE$；
③当平面 $A'DE\perp$平面 ABC 时，三棱锥 $A'-FED$ 的体积达到最大.

6. **解析**：$\because\alpha\perp\beta$，$\alpha\cap\beta=A'B'$，$AA'\subset\alpha$，$AA'\perp A'B'$，
$\therefore AA'\perp\beta$，
$\therefore V=\dfrac{1}{3}S_{\triangle A'BB'}\cdot AA'=\dfrac{1}{3}\times\left(\dfrac{1}{2}A'B'\cdot BB'\right)\cdot AA'=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{2}\times2\times4\times3=4$.

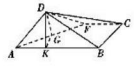
答案：4

7. **解析**：如图所示，取 AD 的中点 G，连接 PG，BG，BD.



$\because\triangle PAD$ 是等边三角形，
$\therefore PG\perp AD$，又平面 $PAD\perp$平面 AC，平面 $PAD\cap$平面 $AC=AD$，$PG\subset$平面 PAD，
$\therefore PG\perp$平面 AC，$\therefore\angle PBG$ 是 PB 与平面 AC 所成的角 θ.
在$\triangle PBG$ 中，$PG\perp BG$，$BG=PG$，
$\therefore\angle PBG=45^\circ$，即 $\theta=45^\circ$.
答案：45°

8. **解析**：如图，过 D 作 $DG\perp AF$，
垂足为 G，连接 GK，



$\because$平面 $ABD\perp$平面 ABC，
又 $DK\perp AB$，
$\therefore DK\perp$平面 ABC，$\therefore DK\perp AF$.
$\therefore AF\perp$平面 DKG，$\therefore AF\perp GK$.
容易得到，当 F 接近 E 点时，K 接近 AB 的中点，当 F 接近 C 点时，K 接近 AB 的四等分点. 所以 t 的取值范围是 $\left(\dfrac{1}{2},1\right)$.

答案：$\left(\dfrac{1}{2},1\right)$

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

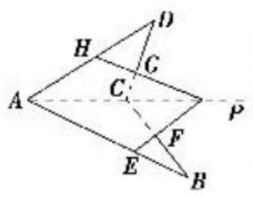
9. **证明**：因为平面 $SAB\perp$ 平面 SBC，且交线为 SB，
又 $AF\subset$ 平面 SAB，$AF\perp SB$，
所以 $AF\perp$ 平面 SBC，
因为 $BC\subset$ 平面 SBC，所以 $AF\perp BC$.
又 $AB\perp BC$，$AF\cap AB=A$，AF，$AB\subset$ 平面 SAB，
所以 $BC\perp$ 平面 SAB.
因为 $SA\subset$ 平面 SAB，所以 $BC\perp SA$.

10. **解**：(1)$\because CD\parallel$ 平面 PBO，$CD\subset$ 平面 $ABCD$，
且平面 $ABCD\cap$ 平面 $PBO=BO$，
$\therefore BO\parallel CD$.
又 $BC\parallel AD$，$\therefore$ 四边形 $BCDO$ 为平行四边形.
则 $BC=DO$，而 $AD=3BC$，
$\therefore AD=3OD$，即点 O 是靠近点 D 的线段 AD 的一个三等分点.
(2)证明：$\because$ 侧面 $PAD\perp$ 底面 $ABCD$，侧面 $PAD\cap$ 底面 $ABCD=AD$，$AB\subset$ 底面 $ABCD$，且 $AB\perp AD$，
$\therefore AB\perp$ 平面 PAD.
又 $PD\subset$ 平面 PAD，$\therefore AB\perp PD$.
又 $PA\perp PD$，且 $PA\subset$ 平面 PAB，$AB\subset$ 平面 PAB，$AB\cap PA=A$，$\therefore PD\perp$ 平面 PAB.
又 $PD\subset$ 平面 PCD，$\therefore$ 平面 $PAB\perp$ 平面 PCD.

素养提升

素养培优提能

1. 选 B　如图，
$\because P\in HG$，$HG\subset$ 平面 ACD，$\therefore P\in$ 平面 ACD.
同理 $P\in$ 平面 BAC. $\because$ 平面 $BAC\cap$ 平面 $ACD=AC$，
$\therefore P\in AC$. 故选 B.

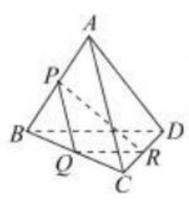


2. 选 D　当两个平面相交时，一个平面内的两条直线也可以平行于另一个平面，故①错误；由平面与平面垂直的判定可知②正确；空间中垂直于同一条直线的两条直线还可以相交或者异面，故③错误；若两个平面垂直，只有在一个平面内与它们的交线垂直的直线才与另一个平面垂直，故④正确. 综上，真命题是②④.

3. 选 D　折成正方体后，易知 $\triangle ABC$ 为等边三角形，所以 $\angle ABC=60^\circ$. 故选 D.

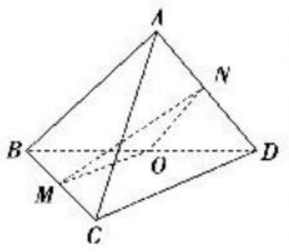
4. 选 C　过点 P 分别作 BD，AB 的平行线，这两条线都符合题意.

5. 选 A　根据题意画出图形，如图所示.
$\because \triangle BCD$ 中，Q、R 分别是 BC、CD 的中点，
$\therefore QR\parallel BD$.
同理可得 $\triangle ABC$ 中，$PQ\parallel AC$，
因此异面直线 AC 与 BD 所成的角为 $\angle PQR$.
$\because \triangle PQR$ 中，$PQ=2$，$QR=\sqrt{5}$，$PR=3$，
$\therefore PQ^2+QR^2=9=PR^2$，可得 $\angle PQR=90^\circ$，
$\therefore$ 异面直线 AC 与 BD 所成的角为 90°. 故选 A.

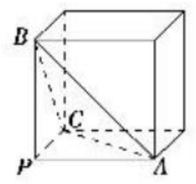


6. **解析**：由直四棱柱可知 $CC_1\perp$ 平面 $A_1B_1C_1D_1$，又 $B_1D_1\subset$ 平面 $A_1B_1C_1D_1$，所以 $CC_1\perp B_1D_1$，要使 $B_1D_1\perp A_1C$，只要 $B_1D_1\perp$ 平面 A_1CC_1，所以只要 $B_1D_1\perp A_1C_1$，还可以填写四边形 $A_1B_1C_1D_1$ 是菱形，正方形等条件.
答案：$B_1D_1\perp A_1C_1$（答案不唯一）

7. **解析**：取 BD 中点为 O，连接 NO，MO，则
$OM\parallel\frac{1}{2}CD$，$ON\parallel\frac{1}{2}AB$，
$\therefore \angle MON$ 为直线 AB 与 CD 所成角或其补角，
$\therefore \angle MON=60^\circ$ 或 $\angle MON=120^\circ$.
$\because AB=CD$，$\therefore NO=MO$.
当 $\angle MON=60^\circ$ 时，$\triangle MON$ 是等边三角形，
$\therefore \angle MNO=60^\circ$；
当 $\angle MON=120^\circ$ 时，$\triangle MON$ 是等腰三角形，$\angle MNO=30^\circ$.
综上所述，直线 AB 和 MN 所成的角是 60° 或 30°.
答案：60° 或 30°

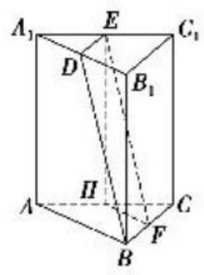


8. **解析**：$\because PA=4$，$PC=2$，$AC=2\sqrt{5}$，
$\therefore$ 在 $\triangle PAC$ 中，$PA^2+PC^2=20=AC^2$，可得 $AP\perp PC$，
又 $\because PB\perp$ 平面 PAC，PA，$PC\subset$ 平面 PAC，
$\therefore PB\perp PA$，$PA\perp PC$.
以 PA，PB，PC 为长、宽、高作长方体如图所示，
则该长方体的外接球就是四面体 $P-ABC$ 的外接球.



$\because$ 长方体的体对角线长为 $\sqrt{4^2+4^2+2^2}=6$，
$\therefore$ 长方体外接球的直径 $2R=6$，得 $R=3$，
因此，四面体 $P-ABC$ 的外接球体积为 $V=\frac{4\pi}{3}R^3=36\pi$.
答案：36π

9. **解**：(1)证明：如图，取 A_1B_1 的中点 D，连接 DE，BD.
因为 E 是 A_1C_1 的中点，所以 $DE\parallel\frac{1}{2}B_1C_1$.
又因为 $BC\parallel B_1C_1$，$BF=\frac{1}{2}BC$，
所以 $DE\parallel BF$.
所以四边形 $BDEF$ 为平行四边形.
所以 $BD\parallel EF$.
又因为 $BD\subset$ 平面 AA_1B_1B，$EF\not\subset$ 平面 AA_1B_1B，
所以 $EF\parallel$ 平面 AA_1B_1B.



(2)如图，取 AC 的中点 H，连接 HF，EH.
因为 $EH\parallel AA_1$，$AA_1\perp$ 平面 ABC，
所以 $EH\perp$ 平面 ABC.
所以 $\angle EFH$ 就是 EF 与平面 ABC 所成的角.
在 Rt$\triangle EHF$ 中，$FH=\sqrt{3}$，$EH=AA_1=3$，
所以 $\tan\angle EFH=\frac{EH}{FH}=\sqrt{3}$，
所以 $\angle EFH=60^\circ$.
故 EF 与平面 ABC 所成的角为 60°.

10. **证明**：(1)$\because AD\parallel BC$，$BC\subset$ 平面 PBC，$AD\not\subset$ 平面 PBC，
$\therefore AD\parallel$ 平面 PBC. 又平面 $ADMN\cap$ 平面 $PBC=MN$，
$\therefore AD\parallel MN$. 又 $\because AD\parallel BC$，$\therefore MN\parallel BC$.
又 $\because N$ 为 PB 的中点，$\therefore M$ 为 PC 的中点，$\therefore MN=\frac{1}{2}BC$.
$\because E$ 为 AD 的中点，$\therefore DE=\frac{1}{2}AD=\frac{1}{2}BC=MN$，
$\therefore DE\parallel MN$，$\therefore$ 四边形 $DENM$ 为平行四边形，
$\therefore EN\parallel DM$. 又 $\because EN\not\subset$ 平面 PDC，$DM\subset$ 平面 PDC，
$\therefore EN\parallel$ 平面 PDC.
(2)$\because$ 四边形 $ABCD$ 是边长为 2 的菱形，且 $\angle BAD=60^\circ$，E 为 AD 中点，
$\therefore BE\perp AD$. 又 $\because PE\perp AD$，$PE\cap BE=E$，$\therefore AD\perp$ 平面 PEB.
$\because AD\parallel BC$，$\therefore BC\perp$ 平面 PEB.
(3)由(2)知 $AD\perp PB$.
又 $\because PA=AB$，且 N 为 PB 的中点，$\therefore AN\perp PB$.
$\because AD\cap AN=A$，$\therefore PB\perp$ 平面 $ADMN$.
又 $\because PB\subset$ 平面 PBC，
$\therefore$ 平面 $PBC\perp$ 平面 $ADMN$.

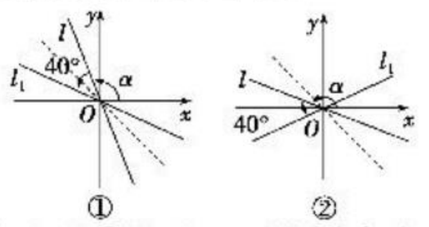
第三章　直线与方程

3.1　直线的倾斜角与斜率

第 19 课时　倾斜角与斜率

题点知识巩固

1. 选 D　因为 $0^\circ\leqslant\alpha<180^\circ$，显然 A，B，C 未分类讨论，均不全面，不合题意；通过画图（如图所示）可知，

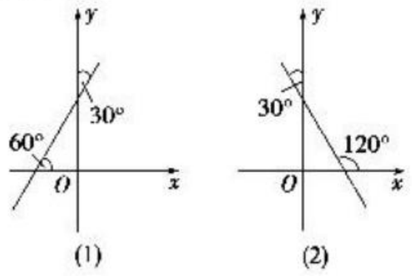


当 $0^\circ\leqslant\alpha<140^\circ$ 时，如图①所示，l_1 的倾斜角为 $\alpha+40^\circ$；
当 $140^\circ\leqslant\alpha<180^\circ$ 时，如图②所示，l_1 的倾斜角为 $40^\circ+\alpha-180^\circ=\alpha-140^\circ$. 故选 D.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

2. 选 C　直线倾斜角的取值范围是 $0°\leqslant\alpha<180°$，
又直线 l 经过第二、四象限，
所以直线 l 的倾斜角 α 的取值范围是 $90°<\alpha<180°$.

3. **解析**：有两种情况：①如图(1)，直线 l 向上方向与 x 轴正向所成的角为 $60°$，即直线 l 的倾斜角为 $60°$；
②如图(2)，直线 l 向上方向与 x 轴正向所成的角为 $120°$，即直线 l 的倾斜角为 $120°$.



答案：$60°$或 $120°$

4. A

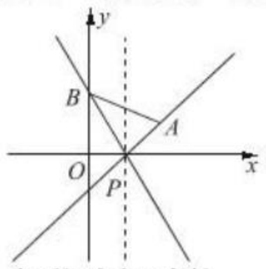
5. 0

6. **解**：(1)存在. 直线 AB 的斜率 $k_{AB}=\dfrac{5-3}{4-2}=1$，即 $\tan\alpha=1$，
又 $0°\leqslant\alpha<180°$，所以倾斜角 $\alpha=45°$.
(2)存在. 直线 CD 的斜率 $k_{CD}=\dfrac{-1-3}{2-(-2)}=-1$，
即 $\tan\alpha=-1$，又 $0°\leqslant\alpha<180°$，所以倾斜角 $\alpha=135°$.
(3)不存在. 因为 $x_P=x_Q=-3$，所以直线 PQ 的斜率不存在，所以倾斜角 $\alpha=90°$.

7. **解析**：设直线 AB，BC 的斜率分别为 k_{AB}，k_{BC}，则由斜率公式，得 $k_{AB}=\dfrac{3-2}{2-3}=-1$，$k_{BC}=\dfrac{m-2}{\frac{1}{2}-3}=-\dfrac{2}{5}(m-2)$. $\because A,B,C$ 三点共线，$\therefore k_{AB}=k_{BC}$，即 $-1=-\dfrac{2}{5}(m-2)$，解得 $m=\dfrac{9}{2}$.

答案：$\dfrac{9}{2}$

8. **解**：如图所示. $\because k_{AP}=\dfrac{1-0}{2-1}=1$，$k_{BP}=\dfrac{\sqrt{3}-0}{0-1}=-\sqrt{3}$，
$\therefore k\in(-\infty,-\sqrt{3}]\cup[1,+\infty)$，$\therefore 45°\leqslant\alpha\leqslant120°$.



提能达标过关

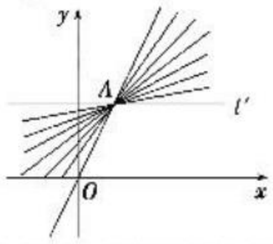
1. 选 C　由题意知 $|\tan\alpha|=\sqrt{3}$，
即 $\tan\alpha=\sqrt{3}$ 或 $\tan\alpha=-\sqrt{3}$，
$\therefore$ 直线 l 的倾斜角为 $60°$ 或 $120°$.

2. 选 D　由 $\dfrac{m-(-2)}{3-m}=2$，得 $m=\dfrac{4}{3}$.

3. C

4. 选 D　由题图可知，$k_1<0$，$k_2>0$，$k_3>0$，
且 l_2 比 l_3 的倾斜角大. $\therefore k_1<k_3<k_2$.

5. 选 A　如图，$k_{OA}=2$，$k_{l'}=0$，只有当直线落在图中所示位置时才符合题意，故 $k\in[0,2]$. 故直线 l 的斜率 k 的最大值为 2.



6. **解析**：由于 A,B,C 三点共线，所以此直线的斜率既可用 A,B 两点的坐标表示，也可用 A,C 两点的坐标表示，于是 $\dfrac{2}{2-a}=\dfrac{2-b}{2}$，
由此可得 $a+b=\dfrac{1}{2}ab$，两边同时除以 ab，得 $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}=\dfrac{1}{2}$.

答案：$\dfrac{1}{2}$

7. **解析**：设 $B(0,y)$，则 $\dfrac{y-4}{0-3}=2$，即 $y=-2$. 即 B 点的坐标为 $(0,-2)$.

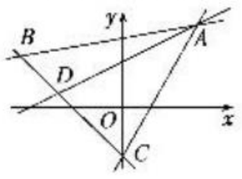
答案：$(0,-2)$

8. **解析**：设直线 PQ 的倾斜角为 θ，则 $0°\leqslant\theta<180°$，
$\because k_{PQ}=-\sqrt{3}$，
$\therefore\tan\theta=-\sqrt{3}$，则 $\theta=120°$.
将直线绕点 P 顺时针旋转 $60°$，所得直线的倾斜角为 $60°$，
$\therefore$ 其斜率为 $\tan 60°=\sqrt{3}$.

答案：$\sqrt{3}$

9. **解**：(1)若倾斜角为锐角，则斜率大于 0，
即 $k=\dfrac{2m+5-1}{m+3-(m-2)}=\dfrac{2m+4}{5}>0$，
解得 $m>-2$.
即当 $m>-2$ 时，直线 MN 的倾斜角为锐角.
(2)若倾斜角为钝角，则斜率小于 0，
即 $k=\dfrac{2m+5-1}{m+3-(m-2)}=\dfrac{2m+4}{5}<0$，
解得 $m<-2$.
即当 $m<-2$ 时，直线 MN 的倾斜角为钝角.
(3)当直线 MN 垂直于 x 轴时，直线的倾斜角为直角，此时 $m+3=m-2$，此方程无解，故直线 MN 的倾斜角不可能为直角.

10. **解**：如图所示.



当点 D 由点 B 运动到点 C 时，直线 AD 的斜率由 k_{AB} 增大到 k_{AC}. 由已知得，$k_{AB}=\dfrac{2-3}{-4-3}=\dfrac{1}{7}$，$k_{AC}=\dfrac{3+2}{3-0}=\dfrac{5}{3}$，所以直线 AD 的斜率的变化范围是 $\left[\dfrac{1}{7},\dfrac{5}{3}\right]$.

第 20 课时　两条直线平行与垂直的判定

题点知识巩固

1. 选 B　由 $k_{PQ}=k_{MN}$，即 $\dfrac{2m-2}{3-(-m)}=\dfrac{4-(-1)}{-3-2}$，得 $m=-\dfrac{1}{3}$.
经检验知，$m=-\dfrac{1}{3}$ 符合题意.

2. **解析**：$k_{AB}=\dfrac{-\frac{1}{3}+\frac{a+1}{3}}{0-1}=-\dfrac{a}{3}$，
当 $2-2a=-a$，即 $a=2$ 时，$k_{AB}=-\dfrac{2}{3}$，k_{CD} 不存在.
$\therefore AB$ 和 CD 不平行；
当 $a\neq2$ 时，
$k_{CD}=\dfrac{0-1}{-a-2+2a}=\dfrac{1}{2-a}$.
由 $k_{AB}=k_{CD}$，得 $-\dfrac{a}{3}=\dfrac{1}{2-a}$，即 $a^2-2a-3=0$.
$\therefore a=3$ 或 $a=-1$.
当 $a=3$ 时，$k_{AB}=-1$，$k_{BD}=\dfrac{0+\frac{1}{3}}{-3}=-\dfrac{1}{9}\neq k_{AB}$，
$\therefore AB$ 与 CD 平行.
当 $a=-1$ 时，$k_{AB}=\dfrac{1}{3}$，$k_{BC}=\dfrac{1+\frac{1}{3}}{4}=\dfrac{1}{3}$，$k_{CD}=\dfrac{1-0}{4-1}=\dfrac{1}{3}$，
$\therefore AB$ 与 CD 重合.
$\therefore$ 当 $a=3$ 时，直线 AB 和直线 CD 平行.

答案：3

3. **解析**：①$\because k_{AB}=\dfrac{5-1}{-3-2}=-\dfrac{4}{5}$，$k_{CD}=\dfrac{-7+3}{8-3}=-\dfrac{4}{5}$，
$\therefore k_{AB}=k_{CD}$，$\therefore l_1\parallel l_2$；
②$\because k_{l_2}=\dfrac{2-1}{2-1}=1\neq k_{l_1}=2$，
$\therefore l_1$ 不平行于 l_2；
③$\because k_{l_1}=\tan 60°=\sqrt{3}$，$k_{l_2}=\dfrac{\sqrt{3}+2\sqrt{3}}{1+2}=\sqrt{3}$，
$\therefore k_{l_1}=k_{l_2}$，$\therefore l_1\parallel l_2$；
④l_1，l_2 斜率均不存在，$\therefore l_1\parallel l_2$.

答案：①③④

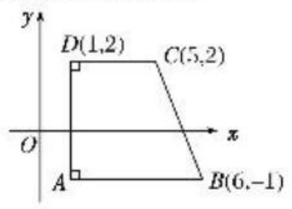
关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

4. 选 B　由方程 $3x^2+mx-3=0$，知 $\Delta=m^2-4\times3\times(-3)=m^2+36>0$ 恒成立.
故方程有两相异实根，即 l_1 与 l_2 的斜率 k_1,k_2 均存在. 设两根为 x_1,x_2，则 $k_1k_2=x_1x_2=-1$，所以 $l_1\perp l_2$，故选 B.

5. **解析**：由 $k_{PQ}=\dfrac{3-a-b}{3-b-a}=1$，
得线段 PQ 的垂直平分线的斜率为 -1.
答案：-1

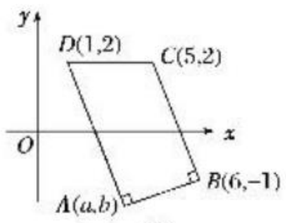
6. **解**：若 $\angle A$ 为直角，则 $AC\perp AB$，
$\therefore k_{AC}\cdot k_{AB}=-1$，
即 $\dfrac{m+1}{2-5}\cdot\dfrac{1+1}{1-5}=-1$，解得 $m=-7$；
若 $\angle B$ 为直角，则 $AB\perp BC$，
$\therefore k_{AB}\cdot k_{BC}=-1$，
即 $\dfrac{1+1}{1-5}\cdot\dfrac{m-1}{2-1}=-1$，解得 $m=3$；
若 $\angle C$ 为直角，则 $AC\perp BC$，
$\therefore k_{AC}\cdot k_{BC}=-1$，
即 $\dfrac{m+1}{2-5}\cdot\dfrac{m-1}{2-1}=-1$，解得 $m=\pm2$.
综上所述，$m=-7$ 或 $m=3$ 或 $m=\pm2$.

7. **解**：①若 $\angle A=\angle D=90^\circ$，如图(1)，



(1)

由已知 $AB/\!/DC$，$AD\perp AB$，而 $k_{CD}=0$，故 $A(1,-1)$；
②若 $\angle A=\angle B=90^\circ$，如图(2).



(2)

设 $A(a,b)$，则 $k_{BC}=-3$，$k_{AD}=\dfrac{b-2}{a-1}$，$k_{AB}=\dfrac{b+1}{a-6}$.
由 $AD/\!/BC$，得 $k_{AD}=k_{BC}$，即 $\dfrac{b-2}{a-1}=-3$；　①
由 $AB\perp BC$，得 $k_{AB}\cdot k_{BC}=-1$，即 $\dfrac{b+1}{a-6}\cdot(-3)=-1$.　②
由①②得 $\begin{cases}a=\dfrac{12}{5},\\ b=-\dfrac{11}{5},\end{cases}$ 故 $A\left(\dfrac{12}{5},-\dfrac{11}{5}\right)$.
综上所述，A 点坐标为 $(1,-1)$ 或 $\left(\dfrac{12}{5},-\dfrac{11}{5}\right)$.

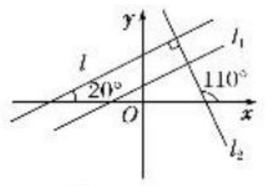
8. **解**：(1)设 D 点坐标为 (a,b)，因为四边形 $ABCD$ 为平行四边形，
所以 $k_{AB}=k_{CD}$，$k_{AD}=k_{BC}$，
所以 $\begin{cases}\dfrac{0-2}{5-1}=\dfrac{b-4}{a-3},\\ \dfrac{b-2}{a-1}=\dfrac{4-0}{3-5},\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=-1,\\ b=6.\end{cases}$
所以 $D(-1,6)$.
(2)因为 $k_{AC}=\dfrac{4-2}{3-1}=1$，$k_{BD}=\dfrac{6-0}{-1-5}=-1$，
所以 $k_{AC}\cdot k_{BD}=-1$，
所以 $AC\perp BD$，所以□$ABCD$ 为菱形.

提能达标过关

1. 选 D　∵直线 l_1 的斜率为 $\tan135^\circ=-1$，直线 l_2 的斜率为 $\dfrac{-6-(-1)}{3-(-2)}=-1$，∴直线 l_1 与 l_2 平行或重合.

2. 选 D　当 $a\neq0$ 时，由 $l_1\perp l_2$，得 $k_1\cdot k_2=a\cdot k_2=-1$，
$\therefore k_2=-\dfrac{1}{a}$；当 $a=0$ 时，l_1 与 x 轴平行或重合，则 l_2 与 y 轴平行或重合，k_2 不存在.

3. 选 A　如图，



∵$l/\!/l_1$，∴l_1 的倾斜角为 20°，
∵$l_2\perp l$，∴l_2 的倾斜角为 $90^\circ+20^\circ=110^\circ$.

4. 选 C　当 $m=0$ 时，直线 AB 与直线 CD 的斜率均不存在，此时 $AB/\!/CD$；
当 $m\neq0$ 时，$k_{AB}=\dfrac{(m+4)-3}{2m-m}$，$k_{CD}=\dfrac{2-0}{(m+1)-1}$，
则 $k_{AB}=k_{CD}$，即 $\dfrac{m+1}{m}=\dfrac{2}{m}$，得 $m=1$，
$\therefore m=0$ 或 1.

5. 选 A　设 $A(x,y)$，由已知，得 $AH\perp BC$，$BH\perp AC$，且直线 AH，BH 的斜率均存在，
所以 $\begin{cases}k_{AH}\cdot k_{BC}=-1,\\ k_{BH}\cdot k_{AC}=-1,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}\dfrac{y-2}{x+3}\times\left(-\dfrac{1}{4}\right)=-1,\\ \left(-\dfrac{1}{5}\right)\times\dfrac{y-3}{x+6}=-1,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x=-19,\\ y=-62,\end{cases}$ 即 $A(-19,-62)$.

6. **解析**：由题意得 $l_1/\!/l_2$，$\therefore k_1=k_2$.
∵$k_1=\dfrac{a}{2}$，$k_2=3$，
$\therefore\dfrac{a}{2}=3$，$\therefore a=6$.
答案：6

7. **解析**：由 $k_{PQ}=\dfrac{(a+1)-b}{(b-1)-a}=\dfrac{a-b+1}{b-a-1}=-1$，
由题意知 $PQ\perp l$，则 $k_{PQ}\cdot k_l=-1$，得 $k_l=1$，
∴直线 l 的倾斜角为 45°.
答案：45°

8. **解析**：若 $l_1\perp l_2$，则 $k_1k_2=-\dfrac{b}{2}=-1$，
$\therefore b=2$.
若 $l_1/\!/l_2$，则 $k_1=k_2$，$\Delta=9+8b=0$，
$\therefore b=-\dfrac{9}{8}$.
答案：2　$-\dfrac{9}{8}$

9. **解**：(1)由 $k_{AB}=\dfrac{m-3}{2m^2}=\tan135^\circ=-1$，
解得 $m=-\dfrac{3}{2}$ 或 $m=1$.
(2)由 $k_{AB}=\dfrac{m-3}{2m^2}$，且 $\dfrac{-7-2}{0-3}=3$，
则 $\dfrac{m-3}{2m^2}=-\dfrac{1}{3}$，解得 $m=\dfrac{3}{2}$ 或 $m=-3$.
(3)令 $\dfrac{m-3}{2m^2}=\dfrac{9+3}{-4-2}=-2$，
解得 $m=\dfrac{3}{4}$ 或 $m=-1$.
经检验，当 $m=\dfrac{3}{4}$ 或 $m=-1$ 时，均符合题意.

10. **解**：设直线 l_2 的斜率为 k_2，则 $k_2=\dfrac{2-(a+2)}{1-(-2)}=-\dfrac{a}{3}$.
(1)若 $l_1/\!/l_2$，则 l_1 的斜率 $k_1=-\dfrac{a}{3}$.
∵$k_1=\dfrac{2-a}{a-4}$，∴$\dfrac{2-a}{a-4}=-\dfrac{a}{3}$，
解得 $a=1$ 或 $a=6$.
经检验，当 $a=1$ 或 $a=6$ 时，$l_1/\!/l_2$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

(2)若 $l_1 \perp l_2$,

①当 $k_2=0$ 时,此时 $a=0$,$k_1=-\frac{1}{2}$,不符合题意;

②当 $k_2\neq 0$ 时,l_1 的斜率存在,此时 $k_1=\frac{2-a}{a-4}$.

由 $k_1k_2=-1$,可得 $\frac{2-a}{a-4}\cdot\left(-\frac{a}{3}\right)=-1$,

解得 $a=3$ 或 $a=-4$.

∴当 $a=3$ 或 $a=-4$ 时,$l_1 \perp l_2$.

3.2 直线的方程

第 21 课时 直线的点斜式方程

题点知识巩固

1. **解析**:由题意知,直线 l 与直线 $y=2x+1$ 垂直,则直线 l 的斜率为 $-\frac{1}{2}$.

由点斜式方程可得 l 的方程为 $y-3=-\frac{1}{2}(x-1)$.

答案:$y-3=-\frac{1}{2}(x-1)$

2. **解析**:∵直线 l_2 的方程为 $y=\frac{\sqrt{3}}{3}x$,

设其倾斜角为 α,则 $\tan\alpha=\frac{\sqrt{3}}{3}$,∴$\alpha=30°$.

那么直线 l_1 的倾斜角为 $2\times 30°=60°$,

∴l_1 的点斜式方程为 $y+2=\tan 60°(x+1)$,

即 $y+2=\sqrt{3}(x+1)$.

答案:$y+2=\sqrt{3}(x+1)$

3. **解**:(1)由题意知,直线的斜率为 2,

所以其点斜式方程为 $y-5=2(x-2)$.

(2)由题意知,直线的斜率 $k=\tan 0°=0$,

所以直线的点斜式方程为 $y-(-1)=0$.

(3)由题意可知直线的斜率不存在,

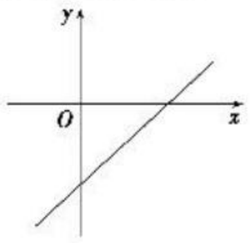
所以直线的方程为 $x=1$,该直线没有点斜式方程.

(4)$k_{PQ}=\frac{3-(-4)}{-2-5}=-1$,

所以该直线的点斜式方程为 $y-3=-(x+2)$.

4. 选 B ∵直线经过第一、三、四象限,

∴图形如图所示,由图知,$k>0$,$b<0$.



5. **解析**:由 $x-4y+3=0$,得 $y=\frac{1}{4}x+\frac{3}{4}$,其斜率为 $\frac{1}{4}$,

故所求直线 l 的斜率为 $\frac{1}{2}$,又直线 l 过点 $P(2,1)$,

所以直线 l 的点斜式方程为 $y-1=\frac{1}{2}(x-2)$.

答案:$y-1=\frac{1}{2}(x-2)$

6. **解析**:∵直线的倾斜角是 60°,

∴其斜率 $k=\tan 60°=\sqrt{3}$,

∵直线与 y 轴的交点到坐标原点的距离为 3,

∴直线在 y 轴上的截距是 3 或 −3,

∴所求直线的斜截式方程是 $y=\sqrt{3}x+3$ 或 $y=\sqrt{3}x-3$.

答案:$y=\sqrt{3}x+3$ 或 $y=\sqrt{3}x-3$

7. **解析**:因为 $l_1 /\!/ l_2$,所以 $a^2+1=2$,$a^2=1$,

所以 $a=\pm 1$.

又由于 $l_1 /\!/ l_2$,两直线 l_1 与 l_2 不能重合,

则 $3a\neq 3$,即 $a\neq 1$,

故 $a=-1$.

答案:−1

8. **解**:由题意知 $(a^2-2)\times\left(-\frac{1}{2}\right)=-1$,解得 $a=\pm 2$.

∴当 $a=2$ 时,直线 l:$y=2x+13$;

当 $a=-2$ 时,直线 l:$y=2x+5$.

又直线 l 与直线 $y=3x+5$ 在 y 轴上的截距相同,

∴$a=-2$.

9. **解**:(1)由题意可知,$k_{l_1}=-1$,$k_{l_2}=a^2-2$,

∵$l_1 /\!/ l_2$,∴$\begin{cases}a^2-2=-1,\\ 2a\neq 2,\end{cases}$解得 $a=-1$.

故当 $a=-1$ 时,直线 l_1:$y=-x+2a$ 与直线 l_2:$y=(a^2-2)x+2$ 平行.

(2)由题意可知,$k_{l_1}=2a-1$,$k_{l_2}=4$,

∵$l_1 \perp l_2$,

∴$4(2a-1)=-1$,解得 $a=\frac{3}{8}$.

故当 $a=\frac{3}{8}$ 时,直线 l_1:$y=(2a-1)x+3$ 与直线 l_2:$y=4x-3$ 垂直.

提能达标过关

1. 选 B 由题意知 $k=\tan 150°=-\frac{\sqrt{3}}{3}$,

所以直线的点斜式方程为 $y-(-2)=-\frac{\sqrt{3}}{3}(x-4)$.

2. 选 D 由题意可设所求直线方程为 $y=kx+4$,又由 $2k=-1$,得 $k=-\frac{1}{2}$,∴所求直线方程为 $y=-\frac{1}{2}x+4$.

3. 选 A 将直线 $y=3x$ 绕原点逆时针旋转 90°,得到直线 $y=-\frac{1}{3}x$,再向右平移 1 个单位长度,所得到的直线为 $y=-\frac{1}{3}(x-1)$,即 $y=-\frac{1}{3}x+\frac{1}{3}$.

4. 选 B ①中方程:$k=\frac{y-2}{x+1}$ 中 $x\neq -1$;④中斜率不存在的直线没有点斜式和斜截式方程,①④错误,②③正确.

5. 选 D 对于 A,由 l_1 得 $a>0$,$b<0$,而由 l_2 得 $a>0$,$b>0$,矛盾;对于 B,由 l_1 得 $a<0$,$b>0$,而由 l_2 得 $a>0$,$b>0$,矛盾;对于 C,由 l_1 得 $a>0$,$b<0$,而由 l_2 得 $a<0$,$b>0$,矛盾;对于 D,由 l_1 得 $a>0$,$b>0$,而由 l_2 得 $a>0$,$b>0$. 故选 D.

6. **解析**:因为直线与 y 轴相交成 30°角,

所以直线的倾斜角为 60°或 120°,

所以直线的斜率为 $\sqrt{3}$ 或 $-\sqrt{3}$,

又因为在 y 轴上的截距为 −6,

所以直线的斜截式方程为 $y=\sqrt{3}x-6$ 或 $y=-\sqrt{3}x-6$.

答案:$y=\sqrt{3}x-6$ 或 $y=-\sqrt{3}x-6$

7. **解析**:由题意知,需满足它在 y 轴上的截距不大于零,且斜率不大于零,则 $\begin{cases}-6\leqslant 0,\\ 3-2k\leqslant 0,\end{cases}$得 $k\geqslant\frac{3}{2}$.

答案:$\left[\frac{3}{2},+\infty\right)$

8. **解析**:∵直线 OP 的斜率为 $-\frac{1}{2}$,又 $OP\perp l$,∴直线 l 的斜率为 2,∴直线 l 的点斜式方程为 $y-1=2(x+2)$.

答案:$y-1=2(x+2)$

9. **解**:由题意知,直线 l 的斜率为 $\frac{3}{2}$,

故设直线 l 的方程为 $y=\frac{3}{2}x+b$,

l 在 x 轴上的截距为 $-\frac{2}{3}b$,在 y 轴上的截距为 b,

所以 $-\frac{2}{3}b-b=1$,$b=-\frac{3}{5}$,

所以直线 l 的斜截式方程为 $y=\frac{3}{2}x-\frac{3}{5}$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

10. **解**：∵直线 l 的方程为 $3x+4y-12=0$，

∴直线 l 的斜率为 $-\frac{3}{4}$.

(1)∵l' 与 l 平行，∴直线 l' 的斜率为 $-\frac{3}{4}$.

∴直线 l' 的方程为 $y-3=-\frac{3}{4}(x+1)$，

即 $y=-\frac{3}{4}x+\frac{9}{4}$.

(2)∵$l'\perp l$，∴$k_{l'}=\frac{4}{3}$.

设 l' 在 y 轴上的截距为 b，则 l' 在 x 轴上的截距为 $-\frac{3}{4}b$，

由题意可知，$S=\frac{1}{2}|b|\cdot\left|-\frac{3}{4}b\right|=4$，∴$b=\pm\frac{4\sqrt{6}}{3}$，

∴直线 l' 的方程为 $y=\frac{4}{3}x+\frac{4\sqrt{6}}{3}$ 或 $y=\frac{4}{3}x-\frac{4\sqrt{6}}{3}$.

第 22 课时　直线的两点式方程

题点知识巩固

1. B

2. **解析**：AB 的中点坐标为 $(1,3)$，

由直线的两点式方程可得 $\frac{y-3}{5-3}=\frac{x-1}{2-1}$，即 $2x-y+1=0$.

答案：$2x-y+1=0$

3. **解析**：由直线方程的两点式，得 $\frac{y-(-1)}{4-(-1)}=\frac{x-2}{-3-2}$，

即 $\frac{y+1}{5}=\frac{x-2}{-5}$.

∴直线 AB 的方程为 $y+1=-x+2$，

∵点 $P(3,m)$ 在直线 AB 上，

∴$m+1=-3+2$，得 $m=-2$.

答案：-2

4. **解**：(1)BC 边过两点 $B(5,-4)$，$C(0,-2)$，

由两点式，得 $\frac{y-(-4)}{-2-(-4)}=\frac{x-5}{0-5}$，即 $2x+5y+10=0$，

故 BC 边的方程是 $2x+5y+10=0(0\leqslant x\leqslant 5)$.

(2)设 BC 的中点为 $M(a,b)$，

则 $a=\frac{5+0}{2}=\frac{5}{2}$，$b=\frac{-4+(-2)}{2}=-3$，所以 $M\left(\frac{5}{2},-3\right)$，

又 BC 边的中线过点 $A(-3,2)$，

所以 $\frac{y-2}{-3-2}=\frac{x-(-3)}{\frac{5}{2}-(-3)}$，即 $10x+11y+8=0$，

所以 BC 边上的中线所在直线的方程为 $10x+11y+8=0$.

5. A

6. 选 C　当过原点时，有一条符合题意；当与坐标轴截距为正数时，有一条；当与坐标轴截距互为相反数且不为 0 时，有一条，共 3 条.

7. **解析**：当直线过原点时，得直线方程为 $2x-y=0$；

当在坐标上的截距不为零时，

可设直线方程为 $\frac{x}{a}-\frac{y}{a}=1$，

将 $x=1$，$y=2$ 代入方程可得 $a=-1$，

得直线方程为 $x-y+1=0$.

∴直线方程为 $2x-y=0$ 或 $x-y+1=0$.

答案：$2x-y=0$ 或 $x-y+1=0$

8. **解**：解法一：①当直线 l 在两坐标轴上的截距均为 0 时，方程为 $y=\frac{2}{5}x$，即 $2x-5y=0$；

②当直线 l 在两坐标轴上的截距不为 0 时，可设方程为 $\frac{x}{a}+\frac{y}{-a}=1$，即 $x-y=a$，

又∵l 过点 $A(5,2)$，∴$5-2=a$，解得 $a=3$，

∴l 的方程为 $x-y-3=0$.

综上所述，直线 l 的方程是 $2x-5y=0$ 或 $x-y-3=0$.

解法二：由题意知直线的斜率一定存在.

设直线的点斜式方程为 $y-2=k(x-5)$，

当 $x=0$ 时，$y=2-5k$，当 $y=0$ 时，$x=5-\frac{2}{k}$.

根据题意得 $2-5k=-\left(5-\frac{2}{k}\right)$，解方程得 $k=\frac{2}{5}$ 或 1.

当 $k=\frac{2}{5}$ 时，直线方程为 $y-2=\frac{2}{5}(x-5)$，即 $2x-5y=0$；

当 $k=1$ 时，直线方程为 $y-2=1\times(x-5)$，即 $x-y-3=0$.

综上，直线 l 的方程是 $2x-5y=0$ 或 $x-y-3=0$.

提能达标过关

1. 选 B　令 $x=0$，得 $y=-b^2$.

2. 选 B　依题意知，直线 l 的截距式方程为 $\frac{x}{-a}+\frac{y}{-b}=1(a>0,b>0)$，显然直线 l 只能过第二、三、四象限，而不会过第一象限，且倾斜角为钝角，故选 B.

3. 选 B　因为 $k_{AB}=\frac{1-3}{-5-1}=\frac{1}{3}$，

AB 的中点坐标为 $(-2,2)$，

所以所求直线方程为 $y-2=-3(x+2)$，

化简为 $3x+y+4=0$.

4. 选 A　由直线的两点式方程得直线 l 的方程为 $\frac{y-(-1)}{5-(-1)}=\frac{x-(-1)}{2-(-1)}$，

即 $y=2x+1$，令 $x=1\,009$，

则 $b=2\times 1\,009+1$，即 $b=2\,019$.

5. 选 B　由光的反射定律可得，点 $A\left(-\frac{1}{2},0\right)$ 关于 y 轴的对称点 $M\left(\frac{1}{2},0\right)$ 在反射光线所在的直线上. 再由点 $B(0,1)$ 也在反射光线所在的直线上，用两点式可求得反射光线所在的直线方程为 $\frac{y-0}{1-0}=\frac{x-\frac{1}{2}}{0-\frac{1}{2}}$，即 $y=-2x+1$.

6. **解析**：设 $A(m,0)$，$B(0,n)$，

由 $P(1,3)$ 是 AB 的中点可得 $m=2$，$n=6$，

即 A，B 的坐标分别为 $(2,0)$，$(0,6)$，

则 l 的截距式方程是 $\frac{x}{2}+\frac{y}{6}=1$.

答案：$\frac{x}{2}+\frac{y}{6}=1$

7. **解析**：由题意知直线过点 $(2,0)$，

又直线过点 $(1,3)$，

由两点式可得，

$\frac{y-0}{3-0}=\frac{x-2}{1-2}$，

整理得 $3x+y-6=0$.

答案：$3x+y-6=0$

8. **解析**：直线 AB 的方程为 $\frac{x}{3}+\frac{y}{4}=1$，

设 $P(x,y)$，则 $x=3-\frac{3}{4}y$，

∴$xy=3y-\frac{3}{4}y^2=\frac{3}{4}(-y^2+4y)$

$=\frac{3}{4}[-(y-2)^2+4]\leqslant 3$.

即当 P 点坐标为 $\left(\frac{3}{2},2\right)$ 时，xy 取得最大值 3.

答案：3

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

9. **解**:(1)设 $C(x_0,y_0)$,

则 AC 边的中点为 $M\left(\frac{x_0+5}{2},\frac{y_0-2}{2}\right)$,

BC 边的中点为 $N\left(\frac{x_0+7}{2},\frac{y_0+3}{2}\right)$,

因为 M 在 y 轴上,所以 $\frac{x_0+5}{2}=0$,解得 $x_0=-5$.

又因为 N 在 x 轴上,所以 $\frac{y_0+3}{2}=0$,解得 $y_0=-3$.

即 $C(-5,-3)$.

(2)由(1)可得 $M\left(0,-\frac{5}{2}\right)$,$N(1,0)$,

所以直线 MN 的截距式方程为 $\frac{x}{1}+\frac{y}{-\frac{5}{2}}=1$.

10. **解**:(1)由截距式,得边 AC 所在直线的方程为

$\frac{x}{-8}+\frac{y}{4}=1$,即 $x-2y+8=0$.

由两点式,得边 AB 所在直线的方程为 $\frac{y-4}{6-4}=\frac{x-0}{-2-0}$,

即 $x+y-4=0$.

(2)由题意,得点 D 的坐标为 $(-4,2)$,

由两点式,

得边 BD 所在直线的方程为 $\frac{y-2}{6-2}=\frac{x-(-4)}{-2-(-4)}$,

即 $2x-y+10=0$.

(3)由 $k_{AC}=\frac{1}{2}$,得 AC 边上的中垂线的斜率为 -2.

又 AC 的中点坐标为 $(-4,2)$,

由点斜式,得 AC 边上的中垂线方程为

$y-2=-2(x+4)$,即 $2x+y+6=0$.

第 23 课时　直线的一般式方程

题点知识巩固

1. 选 C　直线斜率 $k=-\frac{\sqrt{3}}{3}$,所以倾斜角为 $150°$,故选 C.

2. 选 A　过点 $A(2,3)$ 且垂直于直线 $2x+y-5=0$ 的直线的斜率为 $\frac{1}{2}$,由点斜式求得直线的方程为 $y-3=\frac{1}{2}(x-2)$,化简可得 $x-2y+4=0$,故选 A.

3. **解**:因为 $k_l=\frac{3-1}{3-2}=2$,所以点斜式方程为 $y-1=2(x-2)$,斜截式方程为 $y=2x-3$,一般式方程为 $2x-y-3=0$,直线 l 在 x 轴上的截距为 $\frac{3}{2}$,在 y 轴上的截距为 -3.

4. 选 D　方程 $Ax+By+C=0$ 表示直线的条件为 A,B 不能同时为 0,即 $A^2+B^2\neq0$.

5. **解析**:由 $\begin{cases}a^2+5a+6=0,\\a^2+2a=0,\end{cases}$ 得 $a=-2$,

∵方程 $(a^2+5a+6)x+(a^2+2a)y+1=0$ 表示一条直线,

∴$a\neq-2$.

答案:$a\neq-2$

6. **解析**:(1)由题意知 $m^2-2m-3\neq0$,即 $m\neq3$ 且 $m\neq-1$,

令 $y=0$,则 $x=\frac{2m-6}{m^2-2m-3}$,

∴$\frac{2m-6}{m^2-2m-3}=-3$,得 $m=-\frac{5}{3}$ 或 $m=3$(舍去).∴$m=-\frac{5}{3}$.

(2)由题意知,$2m^2+m-1\neq0$,即 $m\neq\frac{1}{2}$ 且 $m\neq-1$.

由直线 l 化为斜截式方程

得 $y=\frac{m^2-2m-3}{2m^2+m-1}x+\frac{6-2m}{2m^2+m-1}$,

则 $\frac{m^2-2m-3}{2m^2+m-1}=1$,得 $m=-2$ 或 $m=-1$(舍去).

∴$m=-2$.

答案:(1)$-\frac{5}{3}$　(2)-2

7. D

8. **解析**:若 $l_1\perp l_2$,则 $1\times m+m\times1=0$,

得 $m=0$;

若 $l_1/\!/l_2$,则 $m^2-1=0$,且 $(-1-m)\times1-m(-2m-2)\neq0$,

解得 $m=1$.

答案:0　1

9. **解**:(1)将与直线 l 平行的直线方程设为 $3x+4y+C_1=0$,又过点 $A(2,2)$,所以 $3\times2+4\times2+C_1=0$,所以 $C_1=-14$.

所以所求直线方程为 $3x+4y-14=0$.

(2)将与直线 l 垂直的直线方程设为 $4x-3y+C_2=0$,

又过点 $A(2,2)$,所以 $4\times2-3\times2+C_2=0$,所以 $C_2=-2$,

所以所求直线方程为 $4x-3y-2=0$.

提能达标过关

1. 选 D　由已知得 $m^2-4\neq0$,且 $\frac{2m^2-5m+2}{m^2-4}=1$,

解得 $m=3$ 或 $m=2$(舍去).

2. 选 C　由 $ax+by=c$,得 $y=-\frac{a}{b}x+\frac{c}{b}$,

∵$ab<0$,$bc<0$,

∴直线的斜率 $k=-\frac{a}{b}>0$,

直线在 y 轴上的截距 $\frac{c}{b}<0$.

由此可知直线通过第一、三、四象限.

3. 选 D　令 $m\cdot m=1\times1$,得 $m=\pm1$.

当 $m=1$ 时,要使 $x+y-n=0$ 与 $x+y+1=0$ 平行,

需 $n\neq-1$.

当 $m=-1$ 时,要使 $-x+y-n=0$ 与 $x-y+1=0$ 平行,需 $n\neq1$.

4. 选 A　由 $y=mx-3m+2$,得 $y-2=m(x-3)$,所以直线必过点 $(3,2)$.

5. 选 C　若 $a>0$,直线 $y=x+a$ 与 y 轴的交点在 y 轴正半轴上,直线 $x-y+a=0$ 过第一、二、三象限,而直线 $ax-y=0$ 过定点 $(0,0)$,倾斜角为锐角,此时各选项都不正确;若 $a<0$,则直线 $y=x+a$ 与 y 轴的交点在 y 轴负半轴上,直线过第一、三、四象限,而直线 $y=ax$ 过定点 $(0,0)$,且倾斜角为钝角,故 C 正确.

6. **解析**:把 $(3,0)$ 代入已知方程,得 $(a+2)\times3-2a=0$,

∴$a=-6$,

∴直线方程为 $-4x+45y+12=0$,

令 $x=0$,得 $y=-\frac{4}{15}$.

答案:$-\frac{4}{15}$

7. **解析**:由题意可设与直线 $3x-4y-7=0$ 垂直的直线的方程为 $4x+3y+c=0$,

令 $y=0$,得 $x=-\frac{c}{4}$,

令 $x=0$,得 $y=-\frac{c}{3}$,

则 $S=\frac{1}{2}\left|-\frac{c}{4}\right|\cdot\left|-\frac{c}{3}\right|=6$,

得 $c^2=12^2$,$c=\pm12$,

∴直线 l 的方程为 $4x+3y-12=0$ 或 $4x+3y+12=0$.

答案:$4x+3y-12=0$ 或 $4x+3y+12=0$

8. **解析**:由条件知 $\begin{cases}2a_1+3b_1+4=0,\\2a_2+3b_2+4=0,\end{cases}$ 易知两点 $P_1(a_1,b_1)$,$P_2(a_2,b_2)$ 都在直线 $2x+3y+4=0$ 上,

即 $2x+3y+4=0$ 为所求.

答案:$2x+3y+4=0$

9. **解**:(1)当 $m=1$ 且 $n\neq7$ 时,l_1 平行于 x 轴.

(2)$7x-y+15=0$ 化为斜截式为 $y=7x+15$,

当 $l_1/\!/l_2$ 时,应有 $m-1=7$ 且 $-n+7\neq15$,

所以 $m=8$ 且 $n\neq-8$.

即当 $m=8$ 且 $n\neq-8$ 时,$l_1/\!/l_2$.

(3)当 $(m-1)\cdot7=-1$,即 $m=\frac{6}{7}$,$n\in\mathbf{R}$ 时,$l_1\perp l_2$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

10. **解**：(1)因为四边形 $ABCD$ 为平行四边形，
所以 $AB/\!/CD$，
设直线 CD 的方程为 $2x-y+m=0$，
将点 $C(2,0)$ 代入上式得 $m=-4$，
所以直线 CD 的方程为 $2x-y-4=0$.
(2)设直线 CE 的方程为 $x+2y+n=0$，
将点 $C(2,0)$ 代入上式得 $n=-2$.
所以直线 CE 的方程为 $x+2y-2=0$.

3.3　直线的交点坐标与距离公式

第 24 课时　两条直线的交点坐标

题点知识巩固

1. 选 C　由题意 $\begin{cases}3x+2y+6=0,\\2x+5y-7=0,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x=-4,\\y=3.\end{cases}$

2. 选 B　由题意，l_2 与 y 轴的交点在 l_1 上，又 l_2 与 y 轴的交点为 $\left(0,\frac{4}{3}\right)$，所以 $A\times0+3\times\frac{4}{3}+C=0$，$C=-4$.

3. **解析**：由 $\begin{cases}5x+4y=2a+1,\\2x+3y=a,\end{cases}$ 得 $\begin{cases}x=\frac{2a+3}{7},\\y=\frac{a-2}{7},\end{cases}$
由 $\begin{cases}\frac{2a+3}{7}>0,\\\frac{a-2}{7}<0,\end{cases}$ 得 $\begin{cases}a>-\frac{3}{2},\\a<2.\end{cases}$ $\therefore -\frac{3}{2}<a<2$.
答案：$\left(-\frac{3}{2},2\right)$

4. 选 D　解法一：取 $m=\frac{1}{2}$ 得 $y=\frac{7}{5}$，
取 $m=-2$ 得 $x=\frac{1}{5}$，
故选 D.
解法二：直线方程变形为 $m(2x-y+1)-x-2y+3=0$，∵对任意 m 恒成立得 $\begin{cases}2x-y+1=0,\\x+2y-3=0,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x=\frac{1}{5},\\y=\frac{7}{5},\end{cases}$
故选 D.

5. **解析**：方程组 $\begin{cases}2x+y+4=0,\\x-2y-3=0,\end{cases}$ 得 $\begin{cases}x=-1,\\y=-2,\end{cases}$ 所以，不论 λ 取何值，直线 $(2+\lambda)x+(1-2\lambda)y+4-3\lambda=0$ 过定点 $(-1,-2)$.
答案：$(-1,-2)$

6. **证明**：证法一：取 $m=1$，得直线 $y=-4$. 取 $m=\frac{1}{2}$，得直线 $x=9$.
故两直线的交点为 $(9,-4)$，下面验证直线 $(m-1)x+(2m-1)y=m-5$ 恒过点 $(9,-4)$.
将 $x=9$，$y=-4$ 代入方程，左边 $=(m-1)\cdot9-4\cdot(2m-1)=m-5=$ 右边，直线恒过定点 $(9,-4)$.
证法二：直线方程可变形为 $(x+2y-1)m-(x+y-5)=0$.
∵对任意 m 该方程恒成立，
$\therefore \begin{cases}x+2y-1=0,\\x+y-5=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=9,\\y=-4.\end{cases}$ 故直线恒过定点 $(9,-4)$.

7. 选 B　设所求直线方程为 $2x+3y+8+\lambda(x-y-1)=0$，
即 $(2+\lambda)x+(3-\lambda)y+8-\lambda=0$，
因为 l 过原点，所以 $\lambda=8$.
则所求直线 l 的方程为 $2x-y=0$.

8. **解析**：设所求直线方程为 $3x-y+4+\lambda(x+y-4)=0$，
即 $(3+\lambda)x+(\lambda-1)y+4-4\lambda=0$，
$\therefore k=\frac{3+\lambda}{1-\lambda}=-2$，解得 $\lambda=5$.
$\therefore$ 所求直线方程为 $2x+y-4=0$.
答案：$2x+y-4=0$

9. **解**：解法一：解方程组 $\begin{cases}2x-3y-3=0,\\x+y+2=0,\end{cases}$ 得 $\begin{cases}x=-\frac{3}{5},\\y=-\frac{7}{5},\end{cases}$
所以两直线的交点坐标为 $\left(-\frac{3}{5},-\frac{7}{5}\right)$. 又所求直线与直线 $3x+y-1=0$ 平行，
所以所求直线的斜率为 -3. 故所求直线方程为 $y+\frac{7}{5}=-3\left(x+\frac{3}{5}\right)$，即 $15x+5y+16=0$.
解法二：设所求直线方程为 $(2x-3y-3)+\lambda(x+y+2)=0$，即 $(2+\lambda)x+(\lambda-3)y+(2\lambda-3)=0$. ①
由于所求直线与直线 $3x+y-1=0$ 平行，所以 $\begin{cases}(2+\lambda)\times1-(\lambda-3)\times3=0,\\(2+\lambda)\times(-1)-(2\lambda-3)\times3\neq0,\end{cases}$
得 $\lambda=\frac{11}{2}$. 代入 ① 式，得 $\left(2+\frac{11}{2}\right)x+\left(\frac{11}{2}-3\right)y+\left(2\times\frac{11}{2}-3\right)=0$，即 $15x+5y+16=0$.

提能达标过关

1. 选 B　解方程组 $\begin{cases}2x+3y+8=0,\\x-y-1=0,\end{cases}$
得 $\begin{cases}x=-1,\\y=-2,\end{cases}$ 即交点坐标是 $(-1,-2)$.

2. 选 B　由 $\begin{cases}x-y=1,\\2x+3y+8=0,\end{cases}$ 得交点 $(-1,-2)$，
代入 $x+ky=0$ 得 $k=-\frac{1}{2}$，故选 B.

3. 选 C　方程可化为 $y-1=k(x-3)$，即直线都通过定点 $(3,1)$.

4. 选 C　将 A、B、C、D 四个选项代入 $x-y+1=0$ 否定 A、B；又 MN 与 $x+2y-3=0$ 垂直，否定 D，故选 C.

5. 选 B　由 $\begin{cases}3x+y-1=0,\\x+2y-7=0,\end{cases}$ 得交点 $(-1,4)$.
∵所求直线与 $3x+y-1=0$ 垂直，
$\therefore$ 所求直线斜率 $k=\frac{1}{3}$，$\therefore y-4=\frac{1}{3}(x+1)$，
即 $x-3y+13=0$.

6. **解析**：高线 AD 与边 AB 的交点即为顶点 A，高线 BE 与边 AB 的交点即为顶点 B，顶点 C 通过垂直关系进行求解.
答案：$(-2,1)$　$(1,0)$　$(2,5)$

7. **解析**：设交点坐标为 $(0,b)$，则有 $\begin{cases}mb+12=0,\\3b+m=0,\end{cases}$ 解得 $m=\pm6$.
答案：±6

8. **解析**：∵两直线互相垂直，$\therefore k_1\cdot k_2=-1$，
$\therefore -\frac{m}{4}\cdot\frac{2}{5}=-1$，$\therefore m=10$. 又∵垂足为 $(1,p)$，
$\therefore$ 代入直线 $10x+4y-2=0$ 得 $p=-2$，
将 $(1,-2)$ 代入直线 $2x-5y+n=0$ 得 $n=-12$，
$\therefore m-n+p=20$.
答案：20

9. **解**：解法一：设 $A(x_0,y_0)$，由中点公式，有 $B(-x_0,2-y_0)$，
∵A 在 l_1 上，B 在 l_2 上，
$\therefore \begin{cases}x_0-3y_0+10=0,\\-2x_0+2-y_0-8=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_0=-4,\\y_0=2,\end{cases}$
$\therefore k_{AP}=\frac{1-2}{0+4}=-\frac{1}{4}$，
故所求直线 l 的方程为：$y=-\frac{1}{4}x+1$，
即 $x+4y-4=0$.
解法二：设所求直线 l 方程为：$y=kx+1$，l 与 l_1、l_2 分别交于 A、B.
解方程组 $\begin{cases}y=kx+1,\\x-3y+10=0\end{cases}\Rightarrow B\left(\frac{7}{3k-1},\frac{10k-1}{3k-1}\right)$，

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

解方程组$\begin{cases}y=kx+1,\\2x+y-8=0\end{cases}\Rightarrow A\left(\frac{7}{k+2},\frac{8k+2}{k+2}\right)$.

$\because A$、B的中点为$P(0,1)$,

$\therefore\frac{1}{2}\left(\frac{7}{3k-1}+\frac{7}{k+2}\right)=0\Rightarrow k=-\frac{1}{4}$.

故所求直线l的方程为$x+4y-4=0$.

解法三:设所求直线l与l_1、l_2分别交于$A(x_1,y_1)$、$B(x_2,y_2)$,$P(0,1)$为AB的中点,则有

$\begin{cases}x_1+x_2=0,\\y_1+y_2=2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_2=-x_1,\\y_2=2-y_1.\end{cases}$

代入l_2的方程,得

$2(-x_1)+2-y_1-8=0$,即$2x_1+y_1+6=0$.

解方程组$\begin{cases}x_1-3y_1+10=0,\\2x_1+y_1+6=0\end{cases}\Rightarrow A(-4,2)$,则$B$为$(4,0)$.

由两点式:所求直线l的方程为$x+4y-4=0$.

解法四:同解法三,设$A(x_0,y_0)$,

$\begin{cases}x_0-3y_0+10=0,\\2x_0+y_0+6=0,\end{cases}$两式相减得$x_0+4y_0-4=0$,①

考查直线$x+4y-4=0$,一方面由①知$A(x_0,y_0)$在该直线上;另一方面,$P(0,1)$也在该直线上,从而直线$x+4y-4=0$过点P、A.根据两点确定一条直线知,所求直线l的方程为$x+4y-4=0$.

10. **解**:(1)先考虑三条直线中有两条直线平行或重合的情况.

①若$m\neq0$,则$k_1=-4$,$k_2=-m$,$k_3=\frac{2}{3m}$,

当$m=4$时,$k_1=k_2$;当$m=-\frac{1}{6}$时,$k_1=k_3$;而k_2与k_3不可能相等;

②若$m=0$,则$l_1:4x+y-4=0$,$l_2:y=0$,$l_3:2x-4=0$,这时三条直线能围成三角形.

$\therefore$当$m=4$或$m=-\frac{1}{6}$时,三条直线不能围成三角形.

(2)再考虑三条直线共点的情况.

将$y=-mx$代入方程$4x+y-4=0$,得$(4-m)x=4$,当$m\neq4$时,$x=\frac{4}{4-m}$,即l_1与l_2交于点$P\left(\frac{4}{4-m},-\frac{4m}{4-m}\right)$,将$P$点坐标代入$l_3$的方程得$\frac{8}{4-m}+\frac{12m^2}{4-m}-4=0$,解得$m=-1$或$m=\frac{2}{3}$.

$\therefore m=-1$或$m=\frac{2}{3}$时,l_1,l_2,l_3交于一点,不能围成三角形.

综上所述,当$m=-1$,$-\frac{1}{6}$,$\frac{2}{3}$,4时,三条直线不能围成三角形.

第25课时　两点间的距离

题点知识巩固

1. 选B　设$M(x,y)$,由题意得$\begin{cases}1=\frac{-2+x}{2},\\0=\frac{5+y}{2},\end{cases}$解得$\begin{cases}x=4,\\y=-5,\end{cases}$

$\therefore M(4,-5)$.

则点M到原点的距离为$\sqrt{(4-0)^2+(-5-0)^2}=\sqrt{41}$.

2. **解析**:设点P的坐标为$(x,0)$,

由$|PA|=10$得$\sqrt{(x-3)^2+(0-6)^2}=10$,

解得$x=11$或$x=-5$.$\therefore$点P的坐标为$(-5,0)$或$(11,0)$.

答案:$(-5,0)$或$(11,0)$

3. **解析**:$\because|AB|=\sqrt{(a-3)^2+(3-3a-3)^2}=5$,即$5a^2-3a-8=0$,$\therefore a=-1$或$a=\frac{8}{5}$.

答案:-1或$\frac{8}{5}$

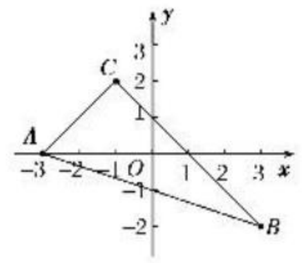
4. **解析**:$|BD|=\frac{1}{2}|BC|=2$,$|AD|=\sqrt{(5-3)^2+(4-0)^2}=2\sqrt{5}$.

在Rt$\triangle ADB$中,

由勾股定理得腰长$|AB|=\sqrt{2^2+(2\sqrt{5})^2}=2\sqrt{6}$.

答案:$2\sqrt{6}$

5. 选C　$|AB|=\sqrt{(-3-3)^2+2^2}=\sqrt{36+4}=\sqrt{40}=2\sqrt{10}$,



$|BC|=\sqrt{(-1-3)^2+(2+2)^2}=\sqrt{16+16}=\sqrt{32}=4\sqrt{2}$,

$|AC|=\sqrt{(-1+3)^2+2^2}=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$,

$\because|AC|^2+|BC|^2=|AB|^2$,

$\therefore\triangle ABC$为直角三角形.故选C.

6. **解析**:BC的中点坐标为$(0,1)$,

则BC的中线长为$\sqrt{(-1-0)^2+(5-1)^2}=\sqrt{17}$.

答案:$\sqrt{17}$

7. **解**:设$P(x,0)$,$|PA|=\sqrt{(x+1)^2+(-2)^2}$,

$|PB|=\sqrt{(x-2)^2+(-\sqrt{7})^2}$,

$\because|PA|=|PB|$,

$\therefore\sqrt{(x+1)^2+4}=\sqrt{(x-2)^2+7}$,

解得$x=1$,$\therefore P(1,0)$,

$\therefore|PA|=\sqrt{(1+1)^2+4}=2\sqrt{2}$.

8. **解**:(1)解法一:$\because|AB|=\sqrt{(3+3)^2+(-3-1)^2}=\sqrt{52}=2\sqrt{13}$,$|AC|=\sqrt{(1+3)^2+(7-1)^2}=\sqrt{52}=2\sqrt{13}$,又$|BC|=\sqrt{(1-3)^2+(7+3)^2}=\sqrt{104}=2\sqrt{26}$,

$\therefore|AB|^2+|AC|^2=|BC|^2$,且$|AB|=|AC|$,$\therefore\triangle ABC$是等腰直角三角形.

解法二:$\because k_{AC}=\frac{7-1}{1-(-3)}=\frac{3}{2}$,$k_{AB}=\frac{-3-1}{3-(-3)}=-\frac{2}{3}$,

$\therefore k_{AC}\cdot k_{AB}=-1$,$\therefore AC\perp AB$.

又$|AC|=\sqrt{(1+3)^2+(7-1)^2}=\sqrt{52}=2\sqrt{13}$,$|AB|=\sqrt{(3+3)^2+(-3-1)^2}=\sqrt{52}=2\sqrt{13}$,

$\therefore|AC|=|AB|$,$\therefore\triangle ABC$是等腰直角三角形.

(2)$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}|AC|\cdot|AB|=\frac{1}{2}(\sqrt{52})^2=26$,$\therefore\triangle ABC$的面积为26.

提能达标过关

1. 选A　$\because AB/\!/x$轴,$\therefore$设$B(a,1)$,又$|AB|=5$,$\therefore a=-3$或7.

2. 选C　设$A(x,0)$,$B(0,y)$,由中点公式得$x=4$,$y=-2$,则由两点间的距离公式得$|AB|=\sqrt{(0-4)^2+(-2-0)^2}=\sqrt{20}=2\sqrt{5}$.

3. 选A　AB的中点D的坐标为$D(-1,-1)$.

$\therefore|CD|=\sqrt{(-1-4)^2+[-1-(-2)]^2}=\sqrt{26}$,

故选A.

4. 选C　$|AB|=\sqrt{(3-0)^2+(2-5)^2}=3\sqrt{2}$,

$|BC|=\sqrt{(0-4)^2+(5-6)^2}=\sqrt{17}$,

$|AC|=\sqrt{(3-4)^2+(2-6)^2}=\sqrt{17}$,

$\therefore|AC|=|BC|\neq|AB|$,

且$|AB|^2\neq|AC|^2+|BC|^2$.

$\therefore\triangle ABC$是等腰三角形,不是直角三角形,也不是等边三角形.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

5. 选 C　设点 $P(x,y)$，则 $y=\frac{2x+5}{3}$，

由 $|PA|=\sqrt{13}$ 得 $(x-2)^2+\left(\frac{2x+5}{3}-3\right)^2=13$，

即 $(x-2)^2=9$，解得 $x=-1$ 或 $x=5$，

当 $x=-1$ 时，$y=1$；

当 $x=5$ 时，$y=5$，∴$P(-1,1)$ 或 $(5,5)$.

6. **解析**：易得 $A(0,-2)$，$B\left(-1,\frac{2}{5}\right)$，

∴$|AB|=\sqrt{[0-(-1)]^2+\left(-2-\frac{2}{5}\right)^2}=\frac{13}{5}$.

答案：$\frac{13}{5}$

7. **解析**：由题意得 $\sqrt{(m-5)^2+(-1-m)^2}=2\sqrt{5}$，解得 $m=1$ 或 $m=3$.

答案：1 或 3

8. **解析**：$\sqrt{(a-1)^2+(3+1)^2}=\sqrt{(4-a)^2+(5-3)^2}$，

解得 $a=\frac{1}{2}$.

答案：$\frac{1}{2}$

9. **解**：当直线 l_2 的斜率，存在时，设其为 k，则

$\begin{cases}y+1=k(x-1),\\2x+y-6=0\end{cases}\Rightarrow(k+2)x=k+7$，

而 $k\neq-2$，故解得 $x=\frac{k+7}{k+2}$，所以 $B\left(\frac{k+7}{k+2},\frac{4k-2}{k+2}\right)$，

又由 $|AB|=5$，利用两点间距离公式得

$\sqrt{\left(\frac{k+7}{k+2}-1\right)^2+\left(\frac{4k-2}{k+2}+1\right)^2}=5\Rightarrow k=-\frac{3}{4}$，

此时 l_2 的方程为 $3x+4y+1=0$；

而当 l_2 的斜率不存在时，l_2 的方程为 $x=1$.

此时点 B 坐标为 $(1,4)$，则 $|AB|=|4-(-1)|=5$，也满足条件. 综上，l_2 的方程为 $3x+4y+1=0$ 或 $x=1$.

10. **解**：(1)设 $P(t,t)$，则 $|PA|^2+|PB|^2=(t-1)^2+(t+1)^2+(t-2)^2+(t-2)^2=4t^2-8t+10=4(t-1)^2+6$，

∴当 $t=1$ 时，$|PA|^2+|PB|^2$ 取得最小值，此时 $P(1,1)$，

∴$|PA|^2+|PB|^2$ 取得最小值时点 P 的坐标为 $(1,1)$.

(2)由方程组 $\begin{cases}x=-2,\\2x+y=-3,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x=-2,\\y=1,\end{cases}$

即点 P 的坐标为 $(-2,1)$.

根据题意知，当截距为 0 时，

所求直线的方程为 $y=-\frac{1}{2}x$，即 $x+2y=0$；

当截距不为 0 时，设所求直线 l 的方程为 $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$，

根据题意可得 $\begin{cases}a=b,\\\frac{-2}{a}+\frac{1}{b}=1,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=-1,\\b=-1,\end{cases}$

所以所求直线的方程为 $\frac{x}{-1}+\frac{y}{-1}=1$，即 $x+y+1=0$.

综上所述，直线 l 的方程为 $x+2y=0$ 或 $x+y+1=0$.

第 26 课时　点到直线的距离、两条平行直线间的距离

题点知识巩固

1. 选 D　由题意知 $\frac{|a-1+1|}{\sqrt{1^2+1^2}}=1$，即 $|a|=\sqrt{2}$，∴$a=\pm\sqrt{2}$.

2. **解析**：由题意知 $\frac{|4\times4-3a|}{\sqrt{4^2+(-3)^2}}\leqslant3$，解得 $\frac{1}{3}\leqslant a\leqslant\frac{31}{3}$，故 a 的取值范围为 $\left[\frac{1}{3},\frac{31}{3}\right]$.

答案：$\left[\frac{1}{3},\frac{31}{3}\right]$

3. **解析**：过点 $P(3,4)$ 且斜率不存在时的直线方程为 $x=3$，与 A,B 两点的距离不相等，故可设所求直线方程为 $y-4=k(x-3)$，即 $kx-y+4-3k=0$，

由已知得 $\frac{|-2k-2+4-3k|}{\sqrt{1+k^2}}=\frac{|4k+2+4-3k|}{\sqrt{1+k^2}}$，∴$k=2$ 或 $k=-\frac{2}{3}$，

∴所求直线 l 的方程为 $2x-y-2=0$ 或 $2x+3y-18=0$.

答案：$2x-y-2=0$ 或 $2x+3y-18=0$

4. **解析**：由两直线平行知，$a=8$，$6x+8y+30=0$ 可化为 $3x+4y+15=0$，∴$d=\frac{|15-5|}{5}=2$，

∴$a+d=10$.

答案：10

5. **解析**：由题意，得 $\frac{6}{3}=\frac{m}{1}$，∴$m=2$，将直线 $3x+y-3=0$ 化为 $6x+2y-6=0$，

由两平行线间的距离公式，得 $\frac{|-1+6|}{\sqrt{6^2+2^2}}=\frac{5}{\sqrt{40}}=\frac{\sqrt{10}}{4}$.

答案：$\frac{\sqrt{10}}{4}$

6. **解析**：设直线 l 的方程为 $2x-y+C=0$，由题意，得 $\frac{|3-C|}{\sqrt{2^2+1^2}}=\frac{|C+1|}{\sqrt{2^2+1^2}}$，解得 $C=1$，

∴直线 l 的方程为 $2x-y+1=0$.

答案：$2x-y+1=0$

7. 选 D　两平行线间的距离就是 $|PQ|$ 的最小值，$3x+4y-5=0$ 可化为 $6x+8y-10=0$，则 $|PQ|=\frac{|5-(-10)|}{\sqrt{6^2+8^2}}=\frac{3}{2}$.

8. **解析**：∵$\sqrt{x^2+y^2-2y+1}=\sqrt{(x-0)^2+(y-1)^2}$，

∴上式可看成是一个动点 $M(x,y)$ 到定点 $N(0,1)$ 的距离，

即为点 N 到直线 l：$6x+8y-1=0$ 上任意一点 $M(x,y)$ 的距离，

∴$|MN|$ 的最小值应为点 N 到直线 l 的距离，

即 $|MN|_{\min}=d=\frac{|8-1|}{\sqrt{6^2+8^2}}=\frac{7}{10}$.

答案：$\frac{7}{10}$

9. **解**：(1)设经过 A 点和 B 点的直线分别为 l_1,l_2，

显然当 $\begin{cases}l_1\perp AB,\\l_2\perp AB\end{cases}$ 时，l_1 和 l_2 的距离最大，

且最大值为 $|AB|=\sqrt{(-3-6)^2+(-1-2)^2}=3\sqrt{10}$，

∴d 的取值范围为 $(0,3\sqrt{10}\,]$.

(2)由(1)知 $d_{\max}=3\sqrt{10}$，此时 $k=-3$，

两直线的方程分别为 $3x+y-20=0$ 或 $3x+y+10=0$.

提能达标过关

1. 选 D　$d=\frac{|-1-1|}{\sqrt{1+0}}=2$，故选 D.

2. 选 D　根据题意可设所求直线方程为 $2x+y+C=0$，

因为两直线间的距离等于 $\frac{\sqrt{5}}{5}$，所以 $d=\frac{|C-1|}{\sqrt{2^2+1^2}}=\frac{\sqrt{5}}{5}$，

解得 $C=0$ 或 $C=2$，故所求直线方程为 $2x+y=0$ 或 $2x+y+2=0$.

3. 选 B　联立 $\begin{cases}x-y+1=0,\\x+y-1=0,\end{cases}$

得 $\begin{cases}x=0,\\y=1.\end{cases}$

∴两直线交点坐标为 $(0,1)$，

∵交点到原点的距离为 1 可知，只有 1 条直线符合条件.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

4. 选 C　由点到直线的距离公式可得

$\frac{|-3a-4+1|}{\sqrt{a^2+1}}=\frac{|6a+3+1|}{\sqrt{a^2+1}}$，

化简得$|3a+3|=|6a+4|$，

解得实数 $a=-\frac{7}{9}$或$-\frac{1}{3}$. 故选 C.

5. 选 A　由题意知，M 点的轨迹为平行于直线 l_1，l_2 且到 l_1，l_2 距离相等的直线 l，其方程为 $x+y-6=0$，

$\therefore M$ 到原点的距离的最小值为 $d=\frac{6}{\sqrt{2}}=3\sqrt{2}$.

6. **解析**：①当直线 l 的斜率不存在时，原点到直线 l：$x=-3$ 的距离等于 3，满足题意；

②当直线 l 的斜率存在时，

设直线 l 的方程为 $y-4=k(x+3)$，

即 $kx-y+3k+4=0$.

原点到直线 l 的距离 $d=\frac{|3k+4|}{\sqrt{k^2+(-1)^2}}=3$，

解得 $k=-\frac{7}{24}$.

直线 l 的方程为 $7x+24y-75=0$.

综上可知，直线 l 的方程为 $x=-3$ 或 $7x+24y-75=0$.

答案：$x=-3$ 或 $7x+24y-75=0$

7. **解析**：设 $P(-3a,a)$，

由题意得 $\sqrt{(-3a)^2+a^2}=\frac{|-3a+3a-2|}{\sqrt{10}}$，

即 $10a^2=\frac{2}{5}$，解得 $a=\pm\frac{1}{5}$，

$\therefore P\left(-\frac{3}{5},\frac{1}{5}\right)$或$\left(\frac{3}{5},-\frac{1}{5}\right)$.

答案：$\left(-\frac{3}{5},\frac{1}{5}\right)$或$\left(\frac{3}{5},-\frac{1}{5}\right)$

8. **解析**：由 x^2+y^2 的实际意义可知，它代表直线 $x+y-4=0$ 上的点到原点的距离的平方，它的最小值即为原点到该直线的距离的平方，

所以$(x^2+y^2)_{\min}=\left(\frac{|1\times0+1\times0-4|}{\sqrt{2}}\right)^2=8$.

答案：8

9. **解**：(1)直线上的点到原点距离的最小值即为原点到直线的距离，此时 OP 垂直于已知直线，则 $k_{OP}=1$，

$\therefore OP$ 所在直线方程为 $y=x$.

由$\begin{cases}y=x,\\x+y-4=0,\end{cases}$解得$\begin{cases}x=2,\\y=2.\end{cases}$

$\therefore P$ 点坐标为(2,2).

(2)由题意知过点 P 且与 OP 垂直的直线到原点 O 的距离最大，

$\because k_{OP}=2$，$\therefore$所求直线方程为 $y-2=-\frac{1}{2}(x-1)$，

即 $x+2y-5=0$.

10. **解**：设 $P(x,y)$为角 A 的平分线上任一点，

则点 P 到直线 AB 与到直线 AC 的距离相等，因为直线 AB，AC 的方程分别是 $4x-3y-13=0$ 和 $3x+4y-16=0$，所以由点到直线的距离公式，

有$\frac{|4x-3y-13|}{\sqrt{4^2+(-3)^2}}=\frac{|3x+4y-16|}{\sqrt{3^2+4^2}}$，

即$|4x-3y-13|=|3x+4y-16|$，

即 $4x-3y-13=\pm(3x+4y-16)$，

整理得 $x-7y+3=0$ 或 $7x+y-29=0$.

易知 $x-7y+3=0$ 是角 A 的外角平分线的方程，$7x+y-29=0$ 是角 A 的平分线的方程.

素养提升

素养培优提能

1. 选 A　由已知可得直线 $y=2x$，$x+y=3$ 的交点为(1,2)，此点也在直线 $mx+ny+5=0$ 上，$\therefore m+2n+5=0$，再将四个选项代入，只有 A 满足此式.

2. 选 A　直线 l：$x-y+1=0$ 与两坐标轴的交点分别为$(-1,0)$和$(0,1)$，

因为这两点关于 y 轴的对称点分别为(1,0)和(0,1)，

所以直线 l：$x-y+1=0$ 关于 y 轴对称的直线方程为 $x+y-1=0$.

3. 选 C　由题意知$\angle BAC=\angle ABC=60°$，故直线 BC 的倾斜角为 $60°$，

$\therefore k_{BC}=\tan 60°=\sqrt{3}$，则 BC 边所在的直线方程为 $y=\sqrt{3}(x-4)$.

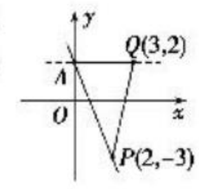
4. 选 B　直线 $Ax-By-C=0$ 化成斜截式方程 $y=\frac{A}{B}x-\frac{C}{B}$，

$\because AB>0$，$BC>0$，

$\therefore$斜率大于 0，纵截距小于 0，

$\therefore$直线不经过第二象限.

5. 选 C　直线 $ax-y+2=0$ 可化为 $y=ax+2$，斜率 $k=a$，恒过定点 $A(0,2)$，如图，直线与线段 PQ 相交，则 $0\geqslant k\geqslant k_{AP}$，即$-\frac{5}{2}\leqslant a\leqslant 0$，故选 C.



6. **解析**：由题意可知，两直线平行或垂直，

则$(m+1)(m+1)-4m^2=0$，$\frac{m+1}{4m^2}\neq\frac{-2}{-4}$或$(m+1)\cdot 4m^2+1\cdot(m+1)=0$，解得 $m=-\frac{1}{3}$或 -1 或 1(舍去).

答案：$-\frac{1}{3}$或-1

7. **解析**：当 $k>0$ 时，$\begin{cases}-8=-3k+b,\\13=4k+b,\end{cases}$解得$\begin{cases}k=3,\\b=1,\end{cases}$$\therefore y=3x+1$；

当 $k<0$ 时，$\begin{cases}13=-3k+b,\\-8=4k+b,\end{cases}$解得$\begin{cases}k=-3,\\b=4.\end{cases}$$\therefore y=-3x+4$. 此方程为 $y=3x+1$ 或 $y=-3x+4$.

答案：$y=3x+1$ 或 $y=-3x+4$

8. **解析**：由题意 $x+my=0$ 过定点 $A(0,0)$，动直线 $mx-y-m+3=0$，即 $m(x-1)-y+3=0$ 过定点 $B(1,3)$.

又直线 $x+my=0$ 与 $mx-y-m+3=0$ 始终垂直，又 P 为其交点，

则 $PA\perp PB$，$\therefore|PA|^2+|PB|^2=|AB|^2=10$.

$\therefore|PC|=\frac{\sqrt{10}}{2}$.

答案：$\frac{\sqrt{10}}{2}$

9. **解**：(1)$k_{AC}=-1$，$k_{BC}=1$，$k_{AC}\cdot k_{BC}=-1$，

$\therefore\triangle ABC$ 为直角三角形.

(2)设所求直线方程为$\frac{x}{a}+ay=1(a\neq0)$，

则$-\frac{1}{a}+2a=1$，即 $a=-\frac{1}{2}$或 $a=1$，

$\therefore-2x-\frac{1}{2}y=1$ 或 $x+y=1$，

$\therefore$所求直线方程为$-2x-\frac{1}{2}y=1$ 或 $x+y=1$，即 $4x+y+2=0$ 或 $x+y-1=0$.

(3)①当直线 l 的斜率不存在时，l 的方程为 $x=-1$，

此时点 C 到直线 l 的距离为 2，符合题意；

②当直线 l 的斜率存在时，设斜率为 k，则直线 l 的方程为 $y-2=k(x+1)$，即 $kx-y+k+2=0$，

则点 C 到直线 l 的距离 $d=\frac{|2k+2|}{\sqrt{k^2+1}}=2$，解得 $k=0$，

$\therefore$直线 l 的方程为 $y-2=0$.

综上可知，直线 l 的方程为 $x+1=0$ 或 $y-2=0$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

10. **解**：(1)由$\begin{cases}3x-y+7=0,\\2x+y+3=0,\end{cases}$得$\begin{cases}x=-2,\\y=1,\end{cases}$∴$M(-2,1)$.

∴点 M 关于 x 轴的对称点 P 的坐标为$(-2,-1)$.

(2)易知 l_3 经过点 P 与点 N，

∴l_3 的方程为$\frac{y-0}{-1-0}=\frac{x-1}{-2-1}$，

即 $x-3y-1=0$.

(3)设与 l_3 平行的直线为 $y=\frac{1}{3}x+b$.

根据两平行线之间的距离公式，得$\frac{\left|b+\frac{1}{3}\right|}{\sqrt{1+\frac{1}{9}}}=\sqrt{10}$，

解得 $b=3$ 或 $b=-\frac{11}{3}$，

∴与直线 l_3 的距离为 $\sqrt{10}$的直线方程为 $y=\frac{1}{3}x-\frac{11}{3}$或 $y=\frac{1}{3}x+3$，即 $x-3y-11=0$ 或 $x-3y+9=0$.

第四章　圆与方程

4.1　圆的方程

第 27 课时　圆的标准方程

题点知识巩固

1. 选 D　∵AB 为直径，∴AB 的中点$(1,2)$为圆心，

$\frac{1}{2}|AB|=\frac{1}{2}\sqrt{(5+3)^2+(5+1)^2}=5$ 为半径，

∴该圆的标准方程为$(x-1)^2+(y-2)^2=25$.

2. **解析**：设圆心 C 的坐标为$(a,0)(a>0)$，由题意知$\frac{|2a|}{\sqrt{5}}=\frac{4\sqrt{5}}{5}$，

解得 $a=2$，

则圆 C 的半径为$r=|CM|=\sqrt{2^2+(-\sqrt{5})^2}=3$. ∴圆的标准方程为$(x-2)^2+y^2=9$.

答案：$(x-2)^2+y^2=9$

3. **解析**：∵圆心坐标为$(-5,-3)$，又与 y 轴相切，∴该圆的半径为 5，

∴该圆的标准方程为$(x+5)^2+(y+3)^2=25$.

答案：$(x+5)^2+(y+3)^2=25$

4. **解**：解法一：待定系数法.

设圆的标准方程为$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$，则有$\begin{cases}a^2+b^2=r^2,\\(1-a)^2+(1-b)^2=r^2,\\2a+3b+1=0,\end{cases}$

解得$\begin{cases}a=4,\\b=-3,\\r=5.\end{cases}$∴圆的标准方程是$(x-4)^2+(y+3)^2=25$.

解法二：直接法.

由题意知 OP 是圆的弦，其垂直平分线为 $x+y-1=0$.

∵弦的垂直平分线过圆心，

∴由$\begin{cases}2x+3y+1=0,\\x+y-1=0,\end{cases}$得$\begin{cases}x=4,\\y=-3,\end{cases}$

即圆心坐标为$(4,-3)$，半径为 $r=\sqrt{4^2+(-3)^2}=5$.

∴圆的标准方程是$(x-4)^2+(y+3)^2=25$.

5. **解**：解法一：设所求圆的标准方程为$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$，

因为 $A(0,5)$，$B(1,-2)$，$C(-3,-4)$都在圆上，

所以它们的坐标都满足圆的标准方程，

于是有$\begin{cases}(0-a)^2+(5-b)^2=r^2,\\(1-a)^2+(-2-b)^2=r^2,\\(-3-a)^2+(-4-b)^2=r^2,\end{cases}$

解得$\begin{cases}a=-3,\\b=1,\\r=5.\end{cases}$　故所求圆的标准方程是$(x+3)^2+(y-1)^2=25$.

解法二：因为 $A(0,5)$，$B(1,-2)$，

所以线段 AB 的中点坐标为$\left(\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right)$，直线 AB 的斜率为$k_{AB}=\frac{-2-5}{1-0}=-7$，

因此线段 AB 的垂直平分线的方程是$y-\frac{3}{2}=\frac{1}{7}\left(x-\frac{1}{2}\right)$，

即 $x-7y+10=0$.

同理可得线段 BC 的垂直平分线的方程是 $2x+y+5=0$.

由$\begin{cases}x-7y+10=0,\\2x+y+5=0,\end{cases}$得圆心坐标为$(-3,1)$. 又圆的半径长 $r=\sqrt{(-3-0)^2+(1-5)^2}=5$，

故所求圆的标准方程是$(x+3)^2+(y-1)^2=25$.

6. 选 B　由$(m^2)^2+5^2=m^4+25>24$，得点 P 在圆外.

7. **解析**：由题意知$\begin{cases}a\geqslant 0,\\(5\sqrt{a}+1-1)^2+(\sqrt{a})^2<26,\end{cases}$

即$\begin{cases}a\geqslant 0,\\26a<26,\end{cases}$解得 $0\leqslant a<1$.

答案：$[0,1)$

8. **解析**：由题意知，$(1-a)^2+(1+a)^2>4$，$2a^2-2>0$，即$a<-1$或$a>1$.

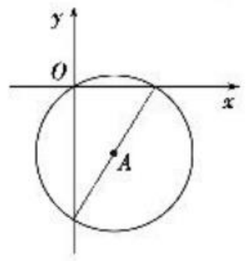
答案：$(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$

提能达标过关

1. 选 D　$(x-1)\sqrt{x^2+y^2-3}=0$ 可化为 $x-1=0$ 或 $x^2+y^2=3$，

∴方程$(x-1)\sqrt{x^2+y^2-3}=0$ 表示一条直线和一个圆.

2. 选 B　如图，结合圆的性质可知，原点在圆上，



圆的半径为 $r=\sqrt{(2-0)^2+(-3-0)^2}=\sqrt{13}$.

故所求圆的标准方程为$(x-2)^2+(y+3)^2=13$.

3. 选 D　依题意有$(5a)^2+144a^2<1$，

所以 $169a^2<1$，

所以 $a^2<\frac{1}{169}$，即$|a|<\frac{1}{13}$，故选 D.

4. 选 D　$(-a,-b)$为圆的圆心，由直线经过第一、二、四象限，得到 $a<0$，$b>0$，即 $-a>0$，$-b<0$. 再由各象限内点的坐标的性质，得圆心位于第四象限.

5. 选 D　设圆心坐标为$(a,0)$，由题意知$\frac{|a|}{\sqrt{5}}=\sqrt{5}$，

∴$|a|=5$.

∵圆 C 位于 y 轴左侧，∴$a=-5$，

∴圆 C 的标准方程为$(x+5)^2+y^2=5$.

6. **解析**：$(x-5)^2+(y+4)^2$ 的几何意义是点 $P(x,y)$ 到点 $Q(5,-4)$的距离的平方. 因为点 P 在圆$(x-2)^2+y^2=1$ 上，且点 Q 在圆外，所以其最大值为$(|QC|+1)^2=36$.

答案：36

7. **解析**：由已知圆$(x-1)^2+y^2=1$，得圆心 C_1 的坐标为$(1,0)$，半径长 $r_1=1$.

设圆心 $C_1(1,0)$关于直线 $y=-x$ 对称的点的坐标为(a,b)，即圆心 C 的坐标为(a,b)，

则$\begin{cases}\frac{b}{a-1}\cdot(-1)=-1,\\-\frac{a+1}{2}=\frac{b}{2},\end{cases}$解得$\begin{cases}a=0,\\b=-1.\end{cases}$所以圆 C 的标准方程为 $x^2+(y+1)^2=1$.

答案：$x^2+(y+1)^2=1$

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

8. **解析**：∵圆心在第一象限，而且与 x 轴相切，∴可设圆心坐标为 $(a,1)$，$a>0$，

则圆心到直线 $4x-3y=0$ 的距离为 1，即 $\frac{|4a-3|}{5}=1$，得 $a=2$ 或 $a=-\frac{1}{2}$（舍去），

∴该圆的标准方程是 $(x-2)^2+(y-1)^2=1$.

答案：$(x-2)^2+(y-1)^2=1$

9. **解**：设圆的标准方程为 $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$，

根据已知条件可得 $\begin{cases}(1-a)^2+(-1-b)^2=r^2,\\(-1-a)^2+(1-b)^2=r^2,\\a+b-2=0,\end{cases}$ 解此方程组得 $\begin{cases}a=1,\\b=1,\\r=2,\end{cases}$

所以所求圆的标准方程为 $(x-1)^2+(y-1)^2=4$.

10. **解**：要使 A,B,C 三点中一点在圆外，一点在圆上，一点在圆内，则圆的半径是 $|PA|,|PB|,|PC|$ 的中间值.

因为 $|PA|=\sqrt{10}$，$|PB|=\sqrt{13}$，$|PC|=5$，

所以 $|PA|<|PB|<|PC|$，

所以圆的半径 $r=|PB|=\sqrt{13}$.

故所求圆的标准方程为 $(x-2)^2+(y+1)^2=13$.

第 28 课时　圆的一般方程

题点知识巩固

1. **解析**：由圆的一般方程的形式知，

$a+2=a^2$，得 $a=2$ 或 -1.

当 $a=2$ 时，该方程可化为 $x^2+y^2+x+2y+\frac{5}{2}=0$，

∵$D^2+E^2-4F=1^2+2^2-4\times\frac{5}{2}<0$，

∴$a=2$ 不符合题意.

当 $a=-1$ 时，方程可化为 $x^2+y^2+4x+8y-5=0$，

即 $(x+2)^2+(y+4)^2=25$，

∴圆心坐标为 $(-2,-4)$，半径为 5.

答案：$(-2,-4)$　5

2. **解析**：圆 $x^2+y^2+kx+2y-4=0$ 的圆心坐标为 $\left(-\frac{k}{2},-1\right)$，

由圆的性质知，直线 $x-y+1=0$ 经过圆心，

∴$-\frac{k}{2}+1+1=0$，得 $k=4$，

∴圆 $x^2+y^2+4x+2y-4=0$ 的半径为 $\frac{1}{2}\sqrt{4^2+2^2+16}=3$，

∴该圆的面积为 9π.

答案：9π

3. **解**：由表示圆的条件，

得 $(2m)^2+(-2)^2-4(m^2+5m)>0$，

解得 $m<\frac{1}{5}$，

即实数 m 的取值范围为 $\left(-\infty,\frac{1}{5}\right)$.

圆心坐标为 $(-m,1)$，半径为 $\sqrt{1-5m}$.

4. **解**：解法一：待定系数法.

设圆的方程为 $x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$，

将 P,Q 的坐标分别代入上式，

得 $\begin{cases}4D-2E+F+20=0,&①\\D-3E-F-10=0.&②\end{cases}$

令 $x=0$，得 $y^2+Ey+F=0$，　③

由已知得 $|y_1-y_2|=4\sqrt{3}$，其中 y_1,y_2 是方程③的根，

∴$|y_1-y_2|^2=(y_1-y_2)^2=(y_1+y_2)^2-4y_1y_2=E^2-4F=48$.　④

联立①②④解得

$\begin{cases}D=-2,\\E=0,\\F=-12\end{cases}$ 或 $\begin{cases}D=-10,\\E=-8,\\F=4.\end{cases}$

故圆的方程为 $x^2+y^2-2x-12=0$ 或 $x^2+y^2-10x-8y+4=0$.

解法二：几何法.

由题意得线段 PQ 的垂直平分线方程为 $x-y-1=0$，

∴所求圆的圆心 C 在直线 $x-y-1=0$ 上，

设其坐标为 $(a,a-1)$.

又圆 C 的半径长

$r=|CP|=\sqrt{(a-4)^2+(a+1)^2}$.　（*）

由已知得圆 C 截 y 轴所得的线段长为 $4\sqrt{3}$，而圆心 C 到 y 轴的距离为 $|a|$，

∴$r^2=a^2+\left(\frac{4\sqrt{3}}{2}\right)^2$，

代入（*）式整理得 $a^2-6a+5=0$，

解得 $a_1=1,a_2=5$，

∴$r_1=\sqrt{13},r_2=\sqrt{37}$.

故圆的方程为 $(x-1)^2+y^2=13$ 或 $(x-5)^2+(y-4)^2=37$.

5. **解**：(1)设 $\triangle ABC$ 外接圆的方程为 $x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$，

由题意，得 $\begin{cases}2^2+2^2+2D+2E+F=0,\\5^2+3^2+5D+3E+F=0,\\3^2+(-1)^2+3D-E+F=0,\end{cases}$

解得 $\begin{cases}D=-8,\\E=-2,\\F=12.\end{cases}$

即 $\triangle ABC$ 的外接圆的方程为 $x^2+y^2-8x-2y+12=0$.

(2)由(1)知，$\triangle ABC$ 的外接圆的方程为 $x^2+y^2-8x-2y+12=0$，

∵点 $M(a,2)$ 在 $\triangle ABC$ 的外接圆上，

∴$a^2+2^2-8a-2\times2+12=0$，

即 $a^2-8a+12=0$，解得 $a=2$ 或 6.

6. **解**：设 B 点坐标是 (x,y)，点 A 的坐标是 (x_0,y_0)，由于点 C 的坐标是 $(4,3)$ 且点 C 是线段 AB 的中点，所以 $4=\frac{x_0+x}{2}$，

$3=\frac{y_0+y}{2}$，

于是有 $x_0=8-x$，$y_0=6-y$.　①

因为点 A 在圆 $(x+1)^2+y^2=4$ 上运动，

所以点 A 的坐标满足方程 $(x+1)^2+y^2=4$，

即 $(x_0+1)^2+y_0^2=4$，　②

把①代入②，得 $(8-x+1)^2+(6-y)^2=4$，

整理得 $(x-9)^2+(y-6)^2=4$.

所以点 B 的轨迹方程为 $(x-9)^2+(y-6)^2=4$.

7. **解**：设另一端点 C 的坐标为 (x,y).

依题意，得 $|AC|=|AB|$.

由两点间距离公式，得

$\sqrt{(x-4)^2+(y-2)^2}=\sqrt{(4-3)^2+(2-5)^2}$，

整理得 $(x-4)^2+(y-2)^2=10$，

这是以点 $A(4,2)$ 为圆心，以 $\sqrt{10}$ 为半径的圆，

又因为 A,B,C 为三角形的三个顶点，所以 A,B,C 三点不共线，即点 B,C 不能重合，且 B,C 不能为圆 A 的一条直径的两个端点. 因为 B,C 不能重合，所以点 C 不能为 $(3,5)$.

又因为 B,C 不能为一条直径的两个端点，

所以 $\frac{x+3}{2}\neq4$，且 $\frac{y+5}{2}\neq2$，即点 C 不能为 $(5,-1)$.

故端点 C 的轨迹方程是 $(x-4)^2+(y-2)^2=10$（除去点 $(3,5)$ 和 $(5,-1)$），它的轨迹是以点 $A(4,2)$ 为圆心，$\sqrt{10}$ 为半径的圆，但除去 $(3,5)$ 和 $(5,-1)$ 两点.

8. **解**：(1)设点 D 为线段 AB 的中点，直线 m 为线段 AB 的垂直平分线，则 $D\left(\frac{3}{2},-\frac{1}{2}\right)$.

又 $k_{AB}=-3$，所以 $k_m=\frac{1}{3}$，

所以直线 m 的方程为 $x-3y-3=0$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

由$\begin{cases}x-3y-3=0,\\x-y+1=0,\end{cases}$得圆心 $C(-3,-2)$，

则半径 $r=|CA|=\sqrt{(-3-1)^2+(-2-1)^2}=5$，

所以圆 C 的方程为 $(x+3)^2+(y+2)^2=25$.

(2)设点 $M(x,y)$，$Q(x_0,y_0)$.

因为点 P 的坐标为 $(5,0)$，

所以$\begin{cases}x=\dfrac{x_0+5}{2},\\y=\dfrac{y_0+0}{2},\end{cases}$即$\begin{cases}x_0=2x-5,\\y_0=2y.\end{cases}$

又点 $Q(x_0,y_0)$ 在圆 C：$(x+3)^2+(y+2)^2=25$ 上运动，

所以 $(x_0+3)^2+(y_0+2)^2=25$，

即 $(2x-5+3)^2+(2y+2)^2=25$.

整理得 $(x-1)^2+(y+1)^2=\dfrac{25}{4}$.

即所求线段 PQ 的中点 M 的轨迹方程为 $(x-1)^2+(y+1)^2=\dfrac{25}{4}$.

提能达标过关

1. 选 D　因为圆心坐标为 $(1,-2)$，所以圆心到直线 $x-y=1$ 的距离为 $d=\dfrac{|1+2-1|}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$.

2. 选 D　原方程可化为 $(x+a)^2+(y+b)^2=0$，

∴$\begin{cases}x+a=0,\\y+b=0,\end{cases}$即$\begin{cases}x=-a,\\y=-b.\end{cases}$

∴方程表示点 $(-a,-b)$.

3. 选 C　直线 $(a-1)x-y+a+1=0$ 可化为 $(-x-y+1)+a(1+x)=0$，

由$\begin{cases}-x-y+1=0,\\x+1=0,\end{cases}$得 $C(-1,2)$.

∴圆的方程为 $(x+1)^2+(y-2)^2=5$，

即 $x^2+y^2+2x-4y=0$.

4. 选 C　$x^2+y^2-x+y+m=0$ 可化为 $\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2+\left(y+\dfrac{1}{2}\right)^2=\dfrac{1}{2}-m$，

则 $\dfrac{1}{2}-m>0$，解得 $m<\dfrac{1}{2}$.

因为点 $(1,-1)$ 在圆外，所以 $1+1-1-1+m>0$，

即 $m>0$，所以 $0<m<\dfrac{1}{2}$. 故选 C.

5. 选 C　设 $P(x_1,y_1)$，PQ 的中点 M 的坐标为 (x,y)，

∵$Q(3,0)$，∴$\begin{cases}x=\dfrac{x_1+3}{2},\\y=\dfrac{y_1+0}{2},\end{cases}$

∴$x_1=2x-3$，$y_1=2y$.

又点 P 在圆 $x^2+y^2=1$ 上，

∴$(2x-3)^2+(2y)^2=1$，故选 C.

6. **解析**：由题意知，直线 l：$x-y+2=0$ 过圆心 $\left(-1,-\dfrac{a}{2}\right)$，则 $-1+\dfrac{a}{2}+2=0$，得 $a=-2$.

答案：-2

7. **解析**：$r^2=\dfrac{1+(m-1)^2-4\times\dfrac{1}{2}m^2}{4}=\dfrac{-m^2-2m+2}{4}$，

所以当 $m=-1$ 时，$r^2_{\max}=\dfrac{3}{4}$，所以 $S_{\max}=\dfrac{3}{4}\pi$.

答案：$\dfrac{3}{4}\pi$

8. **解析**：由题意知，直线 $y=2x+b$ 过圆心，而圆心坐标为 $(-1,2)$，代入直线方程，得 $b=4$，

所以圆的方程化为标准方程为 $(x+1)^2+(y-2)^2=5-a$，

所以 $a<5$，由此得 $a-b<1$.

答案：$(-\infty,1)$

9. **解**：圆心 C 的坐标为 $\left(-\dfrac{D}{2},-\dfrac{E}{2}\right)$，

因为圆心在直线 $x+y-1=0$ 上，

所以 $-\dfrac{D}{2}-\dfrac{E}{2}-1=0$，即 $D+E=-2$.　①

又 $r=\dfrac{\sqrt{D^2+E^2-12}}{2}=\sqrt{2}$，所以 $D^2+E^2=20$.　②

由①②可得$\begin{cases}D=2,\\E=-4\end{cases}$或$\begin{cases}D=-4,\\E=2.\end{cases}$

又圆心在第二象限，所以 $-\dfrac{D}{2}<0$，即 $D>0$，所以$\begin{cases}D=2,\\E=-4,\end{cases}$

所以圆的一般方程为 $x^2+y^2+2x-4y+3=0$.

10. **解**：(1)已知方程可化为 $(x-t-3)^2+(y+1-4t^2)^2=(t+3)^2+(1-4t^2)^2-16t^4-9$，

∴$r^2=-7t^2+6t+1>0$，

由二次函数的图象，解得 $-\dfrac{1}{7}<t<1$.

∴t 的取值范围为 $\left(-\dfrac{1}{7},1\right)$.

(2)由(1)知 $r=\sqrt{-7t^2+6t+1}=\sqrt{-7\left(t-\dfrac{3}{7}\right)^2+\dfrac{16}{7}}$，

∴当 $t=\dfrac{3}{7}\in\left(-\dfrac{1}{7},1\right)$ 时，$r_{\max}=\dfrac{4}{7}\sqrt{7}$，此时圆的面积最大，

所对应的圆的方程是 $\left(x-\dfrac{24}{7}\right)^2+\left(y+\dfrac{13}{49}\right)^2=\dfrac{16}{7}$.

(3)当且仅当 $3^2+(4t^2)^2-2(t+3)\times3+2(1-4t^2)\times(4t^2)+16t^4+9<0$ 时，点 P 恒在圆内，

∴$8t^2-6t<0$，∴$0<t<\dfrac{3}{4}$，满足圆的定义.

∴t 的取值范围为 $\left(0,\dfrac{3}{4}\right)$.

4.2　直线、圆的位置关系

第 29 课时　直线与圆的位置关系

题点知识巩固

1. 选 C　直线 $y=kx+1$ 恒过定点 $(0,1)$，由定点 $(0,1)$ 在圆 $x^2+y^2=2$ 内，则直线 $y=kx+1$ 与圆 $x^2+y^2=2$ 一定相交. 又直线 $y=kx+1$ 不过圆心 $(0,0)$，则位置关系是相交但直线不过圆心，故选 C.

2. **解**：圆的方程化为标准形式为 $(x-3)^2+y^2=4$，

故圆心 $(3,0)$ 到直线 $x-my+3=0$ 的距离为 $d=\dfrac{6}{\sqrt{m^2+1}}$，圆的半径为 $r=2$.

(1)若相交，则 $d<r$，即 $\dfrac{6}{\sqrt{m^2+1}}<2$，所以 $m<-2\sqrt{2}$ 或 $m>2\sqrt{2}$，故直线 $x-my+3=0$ 与圆 $x^2+y^2-6x+5=0$ 相交时，实数 m 的取值范围为 $(-\infty,-2\sqrt{2})\cup(2\sqrt{2},+\infty)$.

(2)若相切，则 $d=r$，即 $\dfrac{6}{\sqrt{m^2+1}}=2$，所以 $m=\pm2\sqrt{2}$，当 $m=\pm2\sqrt{2}$ 时，直线 $x-my+3=0$ 与圆 $x^2+y^2-6x+5=0$ 相切.

(3)若相离，则 $d>r$，即 $\dfrac{6}{\sqrt{m^2+1}}>2$，所以 $-2\sqrt{2}<m<2\sqrt{2}$，故直线 $x-my+3=0$ 与圆 $x^2+y^2-6x+5=0$ 相离时，实数 m 的取值范围为 $(-2\sqrt{2},2\sqrt{2})$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

3. 选 B　设圆心为 $C(a,-a)$，

则 $\frac{|a+a|}{\sqrt{2}}=\frac{|a+a-4|}{\sqrt{2}}$，解得 $a=1$，

所以 $r=\frac{|1+1|}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$，

圆 C 的方程为 $(x-1)^2+(y+1)^2=2$. 故选 B.

4. **解析**：点 $P(1,2)$ 在以坐标原点为圆心的圆上，可得此圆的方程为 $x^2+y^2=5$，所以该圆在点 P 处的切线方程为 $1\times x+2\times y=5$，即 $x+2y-5=0$.

答案：$x+2y-5=0$

5. **解析**：由已知 $k_{AB}=0$，

所以 AB 的中垂线方程为 $x=3$.　①

过 B 点且垂直于直线 $x-y-1=0$ 的直线方程为 $y-1=-(x-2)$，即 $x+y-3=0$，　②

联立①②，解得 $\begin{cases}x=3,\\y=0,\end{cases}$

所以圆心坐标为 $(3,0)$，

半径 $r=\sqrt{(4-3)^2+(1-0)^2}=\sqrt{2}$，

所以圆 C 的方程为 $(x-3)^2+y^2=2$.

答案：$(x-3)^2+y^2=2$

6. **解析**：由题意知直线 l 的方程为 $y-2=-(x+1)$，即 $x+y-1=0$，

圆心 $O(0,0)$ 到直线 l 的距离为 $d=\frac{|-1|}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，则有

$|AB|=2\sqrt{r^2-d^2}=2\sqrt{8-\frac{1}{2}}=\sqrt{30}$.

答案：$\sqrt{30}$

7. **解析**：设圆的半径为 r，由条件，得圆心到直线 $y=x-1$ 的距离为 $d=\frac{|2+1-1|}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$.

又直线 $y=x-1$ 被圆截得的弦长为 $2\sqrt{2}$，

即半弦长为 $\sqrt{2}$，$\therefore r^2=2+2=4$，得 $r=2$，$\therefore$ 所求圆的方程为 $(x-2)^2+(y+1)^2=4$.

答案：$(x-2)^2+(y+1)^2=4$

8. **解**：(1)证明：$\because l:kx-y+k+2=0$，直线 l 可化为 $y-2=k(x+1)$，

$\therefore$ 直线 l 经过定点 $(-1,2)$，$\because(-1)^2+2^2<8$，$\therefore(-1,2)$ 在圆 C 内，$\therefore$ 直线 l 与圆相交.

(2)由(1)知，直线 l 过定点 $P(-1,2)$，又圆 $C:x^2+y^2=8$ 的圆心为原点 O，

则与 OP 垂直的直线截得的弦长最短. $\because k_{OP}=-2$，

$\therefore k_l=\frac{1}{2}$，$\therefore$ 直线 $l:y-2=\frac{1}{2}(x+1)$，

即 $x-2y+5=0$. 圆心到直线 l 的距离 $d=\frac{|5|}{\sqrt{1^2+2^2}}=\sqrt{5}$，设直线 l 与圆交于 A,B 两点，

$|AB|=2\sqrt{r^2-d^2}=2\sqrt{8-5}=2\sqrt{3}$. $\therefore$ 直线 l 的方程为 $x-2y+5=0$，弦长为 $2\sqrt{3}$.

提能达标过关

1. 选 B　因为点 $M(x_0,y_0)$ 在圆 $x^2+y^2=R^2$ 外，所以 $x_0^2+y_0^2>R^2$，圆心到直线 $x_0x+y_0y=R^2$ 的距离为 $\frac{|R^2|}{\sqrt{x_0^2+y_0^2}}<\frac{R^2}{R}=R$，

所以直线与圆相交，故选 B.

2. 选 A　由题意得，圆心坐标为 $\left(-\frac{D}{2},-\frac{E}{2}\right)$，

在 y 轴上，$F=0$，且半径为 $\left|-\frac{E}{2}\right|=\frac{1}{2}\sqrt{D^2+E^2-4F}$，

化简可得 $E\neq0$，$D=F=0$.

3. 选 C　圆 $x^2+y^2=16$ 的圆心是 $(0,0)$，半径 $r=4$，圆心到直线 $x-y=3$ 的距离 $d=\frac{|0-0-3|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\frac{3\sqrt{2}}{2}<4$，

所以直线与圆相交，则圆上的点到直线 $x-y=3$ 的距离的最大值为圆心到直线的距离加上半径，即 $\frac{3\sqrt{2}}{2}+4$，故选 C.

4. 选 C　圆 C 的方程可化为 $(x-2)^2+y^2=2$. 可分两种情况讨论：

①直线在 x,y 轴上的截距均为 0，易知直线斜率必存在，设直线方程为 $y=kx$，则 $\frac{|2k|}{\sqrt{1+k^2}}=\sqrt{2}$，解得 $k=\pm1$；

②直线在 x,y 轴上的截距均不为 0，则可设直线方程为 $\frac{x}{a}+\frac{y}{a}=1(a\neq0)$，即 $x+y-a=0(a\neq0)$，则 $\frac{|2-a|}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$，解得 $a=4$（$a=0$ 舍去）. 因此满足条件的直线共有 3 条.

5. 选 C　圆的一般方程化为标准方程为 $(x+1)^2+(y+2)^2=8$. 圆心坐标为 $(-1,-2)$，圆的半径为 $2\sqrt{2}$，圆心到直线 l 的距离为 $\frac{|-1-2+1|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\frac{2}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$. 因此和直线 l 平行的圆的直径的两端点及与直线 l 同侧且与直线 l 平行的圆的切线的切点到直线 l 的距离都为 $\sqrt{2}$.

6. **解析**：圆心 $C(1,a)$ 到直线 $ax+y-2=0$ 的距离为 $\frac{|a+a-2|}{\sqrt{a^2+1}}$.

因为 $\triangle ABC$ 为等边三角形，所以 $|AB|=|BC|=2$，所以 $\left(\frac{|a+a-2|}{\sqrt{a^2+1}}\right)^2+1^2=2^2$，

解得 $a=4\pm\sqrt{15}$.

答案：$4\pm\sqrt{15}$

7. **解析**：由已知得点 $(-2,-3)$ 关于 y 轴的对称点为 $(2,-3)$，由入射光线与反射光线的对称性知，反射光线一定过点 $(2,-3)$. 设反射光线所在直线的斜率为 k，则反射光线所在直线的方程为 $y+3=k(x-2)$，即 $kx-y-2k-3=0$. 由反射光线与圆相切，则有 $d=\frac{|-3k-2-2k-3|}{\sqrt{k^2+1}}=1$，解得 $k=-\frac{4}{3}$ 或 $k=-\frac{3}{4}$.

答案：$-\frac{4}{3}$ 或 $-\frac{3}{4}$

8. **解析**：由题意得，圆心 $(a,0)$ 到直线 $x-\sqrt{3}y+3=0$ 的距离 $d=\frac{|a+3|}{\sqrt{1^2+(-\sqrt{3})^2}}=a$，又 $a>0$，得 $a=3$.

答案：3

9. **解**：设圆心坐标为 $(3m,m)$，

$\because$ 圆 C 和 y 轴相切，$\therefore$ 圆 C 的半径为 $3|m|$.

$\because$ 圆心到直线 $y=x$ 的距离为 $\frac{|2m|}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}|m|$，

由半径、弦心距、半弦长的关系，得 $9m^2=7+2m^2$，

$\therefore m=\pm1$. $\therefore$ 所求圆 C 的方程为 $(x-3)^2+(y-1)^2=9$ 或 $(x+3)^2+(y+1)^2=9$.

10. **解**：因为 $(4-3)^2+(-3-1)^2=17>1$，

所以点 A 在圆外.

①若所求直线的斜率存在，设切线斜率为 k，

则切线方程为 $y+3=k(x-4)$，即 $kx-y-4k-3=0$.

设圆心为 C，

因为圆心 $C(3,1)$ 到切线的距离等于半径 1，

所以 $\frac{|3k-1-3-4k|}{\sqrt{k^2+1}}=1$，即 $|k+4|=\sqrt{k^2+1}$，

所以 $k^2+8k+16=k^2+1$，解得 $k=-\frac{15}{8}$.

所以切线方程为 $-\frac{15}{8}x-y+\frac{15}{2}-3=0$，

即 $15x+8y-36=0$.

②若直线斜率不存在，

圆心 $C(3,1)$ 到直线 $x=4$ 的距离为 1，

这时直线 $x=4$ 与圆相切，所以另一条切线方程为 $x=4$.

综上，所求切线方程为 $15x+8y-36=0$ 或 $x=4$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

第30课时　圆与圆的位置关系

题点知识巩固

1. 选B　由$\begin{cases}x^2+y^2-2ay=0,\\x+y=0,\end{cases}$得两交点坐标分别为$(0,0),(-a,a)$.

∵圆M截直线所得线段的长度为$2\sqrt{2}$,

∴$\sqrt{a^2+(-a)^2}=2\sqrt{2}$,

又$a>0$,∴$a=2$.

∴圆M的方程为$x^2+y^2-4y=0$,

即$x^2+(y-2)^2=4$,圆心为$M(0,2)$,半径为$r_1=2$.

又圆N:$(x-1)^2+(y-1)^2=1$,圆心为$N(1,1)$,半径为$r_2=1$,

∴$|MN|=\sqrt{(0-1)^2+(2-1)^2}=\sqrt{2}$.

∵$r_1-r_2=1$,$r_1+r_2=3$,$1<|MN|<3$,

∴两圆相交.

2. 选D　由圆C_1:$(x-1)^2+(y+2)^2=1$,圆C_2:$(x-2)^2+(y+1)^2=\frac{1}{4}$,得$C_1(1,-2)$,$C_2(2,-1)$,∴$|C_1C_2|=\sqrt{(2-1)^2+(-1+2)^2}=\sqrt{2}$.又$r_1=1$,$r_2=\frac{1}{2}$,

则$r_1-r_2<|C_1C_2|<r_1+r_2$,∴圆C_1与圆C_2相交.故这两个圆的公切线有2条.

3. **解**:将两圆方程写成标准方程,则

C_1:$(x-a)^2+(y+2)^2=9$,C_2:$(x+1)^2+(y-a)^2=4$.

∴两圆的圆心和半径分别为$C_1(a,-2)$,$r_1=3$,

$C_2(-1,a)$,$r_2=2$.

设两圆的圆心距为d,则$d^2=(a+1)^2+(-2-a)^2=2a^2+6a+5$.

(1)当$d=5$,即$2a^2+6a+5=25$时,两圆外切,

此时$a=-5$或$a=2$.故当$a=-5$或$a=2$时,两圆外切.

(2)当$1<d<5$,即$1<2a^2+6a+5<25$时,两圆相交,此时$-5<a<-2$或$-1<a<2$.故当$\{a\mid -5<a<-2$或$-1<a<2\}$时,两圆相交.

(3)当$d>5$,即$2a^2+6a+5>25$时,两圆外离,

此时$a>2$或$a<-5$.故当$\{a\mid a>2$或$a<-5\}$时,两圆外离.

4. 选C　AB的垂直平分线过两圆的圆心,把圆心$(2,-3)$代入,即可排除A,B,D.

5. **解析**:将两圆的方程相减,得相交弦所在的直线方程为$y=\frac{1}{a}$,

圆心$(0,0)$到直线的距离为$d=\frac{1}{a}=\sqrt{2^2-(\sqrt{3})^2}=1$,所以$a=1$.

答案:1

6. **解析**:由题意将两圆的方程相减,可得圆C_1和圆C_2公共弦所在的直线l的方程为$x+y-1=0$.又圆C_3的圆心坐标为$(1,1)$,

其到直线l的距离为$d=\frac{|1+1-1|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$,

由条件知,$r^2-d^2=\frac{25}{4}-\frac{1}{2}=\frac{23}{4}$,所以弦长为$2\times\frac{\sqrt{23}}{2}=\sqrt{23}$.

答案:$\sqrt{23}$

7. **解**:设所求圆的方程为$x^2+y^2+4x-2y-4+\lambda(x+y+4)=0$.

联立$\begin{cases}y=x,\\x^2+y^2+4x-2y-4+\lambda(x+y+4)=0,\end{cases}$

得$x^2+(1+\lambda)x+2(\lambda-1)=0$.

因为所求圆与直线$y=x$相切,所以$\Delta=0$,即$(1+\lambda)^2-8(\lambda-1)=0$,解得$\lambda=3$,

故所求圆的方程为$x^2+y^2+7x+y+8=0$.

8. **解**:解法一:设经过两圆交点的圆系方程为

$x^2+y^2-4x-6+\lambda(x^2+y^2-4y-6)=0(\lambda\neq-1)$,

即$x^2+y^2-\frac{4}{1+\lambda}x-\frac{4\lambda}{1+\lambda}y-6=0$,所以圆心坐标为$\left(\frac{2}{1+\lambda},\frac{2\lambda}{1+\lambda}\right)$.

又圆心在直线$x-y-4=0$上,所以$\frac{2}{1+\lambda}-\frac{2\lambda}{1+\lambda}-4=0$,即$\lambda=-\frac{1}{3}$.

所以所求圆的方程为$x^2+y^2-6x+2y-6=0$.

解法二:由$\begin{cases}x^2+y^2-4x-6=0,\\x^2+y^2-4y-6=0,\end{cases}$得两圆公共弦所在直线的方程为$y=x$.

由$\begin{cases}y=x,\\x^2+y^2-4y-6=0,\end{cases}$解得$\begin{cases}x_1=-1,\\y_1=-1,\end{cases}\begin{cases}x_2=3,\\y_2=3.\end{cases}$

所以两圆$x^2+y^2-4x-6=0$和$x^2+y^2-4y-6=0$的交点坐标分别为$A(-1,-1)$,$B(3,3)$,

线段AB的垂直平分线所在的直线方程为$y-1=-(x-1)$.

由$\begin{cases}y-1=-(x-1),\\x-y-4=0,\end{cases}$得$\begin{cases}x=3,\\y=-1,\end{cases}$即所求圆的圆心坐标为$(3,-1)$,半径为$\sqrt{(3-3)^2+[3-(-1)]^2}=4$.所以所求圆的方程为$(x-3)^2+(y+1)^2=16$.

提能达标过关

1. 选C　两圆的圆心坐标分别为$(-2,m)$,$(m,-1)$,

两圆的半径分别为3,2,

由题意得$\sqrt{(m+2)^2+(-1-m)^2}=3+2$,

解得$m=2$或-5.

2. 选D　两圆的圆心距为$d=\sqrt{(1-0)^2+(-3-0)^2}=\sqrt{10}$,

两圆的半径之和为$r+4$,

因为$\sqrt{10}<r+4$,

所以两圆不可能外切或外离,故选D.

3. 选C　$\begin{cases}x^2+y^2-2x+F=0,&①\\x^2+y^2+2x+Ey-4=0,&②\end{cases}$

①-②可得$4x+Ey-F-4=0$,

即$x+\frac{E}{4}y-\frac{F+4}{4}=0$,

由两圆的公共弦所在的直线方程为$x-y+1=0$,

得$\begin{cases}\frac{E}{4}=-1,\\-\frac{F+4}{4}=1,\end{cases}$解得$\begin{cases}E=-4,\\F=-8.\end{cases}$

4. 选C　由$x^2+y^2+2x-4y+4=0$,得$(x+1)^2+(y-2)^2=1$,

两圆圆心之间的距离为$\sqrt{(-1)^2+2^2}=\sqrt{5}$.

∵两圆有公共点,

∴$|r-1|\leqslant\sqrt{5}\leqslant r+1$,

∴$\sqrt{5}-1\leqslant r\leqslant\sqrt{5}+1$,

即$-1\leqslant r-\sqrt{5}\leqslant1$,∴$|r-\sqrt{5}|\leqslant1$.

5. 选D　由题意可设圆的方程为$(x-a)^2+(y-6)^2=36$,由题意,得$\sqrt{a^2+9}=5$,所以$a^2=16$,所以$a=\pm4$.

6. **解析**:由题意可得两圆的圆心坐标和半径长分别为$(a,0)$,$\sqrt{2}$和$(0,b)$,1.因为两圆外离,所以$\sqrt{a^2+b^2}>\sqrt{2}+1$,

即$a^2+b^2>3+2\sqrt{2}$.

答案:$a^2+b^2>3+2\sqrt{2}$

7. **解析**:由题意知直线AB与直线$x-y+c=0$垂直,

∴$k_{AB}\times1=-1$,

即$\frac{3-(-1)}{1-m}=-1$,得$m=5$,

∴AB的中点坐标为$(3,1)$.

又AB的中点在直线$x-y+c=0$上,

∴$3-1+c=0$,∴$c=-2$,

∴$m+c=5-2=3$.

答案:3

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

8. **解析**：由圆 C_1 与圆 C_2 的公共弦所在的直线 l 的方程为 $x-y+1=0$，得点 $C_1(1,0)$ 到直线 l 的距离为 $d=\frac{|1-0+1|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\sqrt{2}$，圆 C_1 的半径为 $r_1=3$，所以圆 C_1 与圆 C_2 的公共弦长为 $2\sqrt{r_1^2-d^2}=2\sqrt{3^2-(\sqrt{2})^2}=2\sqrt{7}$.

答案：$2\sqrt{7}$

9. **解**：设过两圆 C_1：$x^2+y^2-4x+2y+1=0$ 与 C_2：$x^2+y^2-6x=0$ 的交点的圆系方程为 $x^2+y^2-4x+2y+1+\lambda(x^2+y^2-6x)=0$，

即 $(1+\lambda)x^2+(1+\lambda)y^2-(4+6\lambda)x+2y+1=0$.

把 $(2,-2)$ 代入，得 $4(1+\lambda)+4(1+\lambda)-2(4+6\lambda)-4+1=0$，

解得 $\lambda=-\frac{3}{4}$.

∴圆的方程为 $x^2+y^2+2x+8y+4=0$.

10. **解**：(1)设圆 O_2 半径为 r_2，

因为两圆外切，所以 $|O_1O_2|=r_2+2$.

又 $|O_1O_2|=\sqrt{2^2+[1-(-1)]^2}=2\sqrt{2}$，

所以 $r_2=|O_1O_2|-2=2(\sqrt{2}-1)$，

故圆 O_2 的方程为 $(x-2)^2+(y-1)^2=12-8\sqrt{2}$.

(2)设圆 O_2 的方程为 $(x-2)^2+(y-1)^2=r_2^2$，

因为圆 O_1 的方程为 $x^2+(y+1)^2=4$，

将两圆的方程相减，即得两圆公共弦 AB 所在的直线方程为 $4x+4y+r_2^2-8=0$，

作 $O_1H\perp AB$，H 为垂足，

则 $|AH|=\frac{1}{2}|AB|=\sqrt{2}$，

所以 $|O_1H|=\sqrt{r_1^2-|AH|^2}=\sqrt{4-2}=\sqrt{2}$.

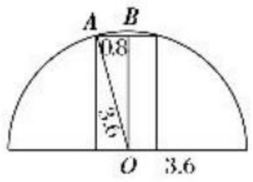
由圆心 $O_1(0,-1)$ 到直线 $4x+4y+r_2^2-8=0$ 的距离为 $\frac{|r_2^2-12|}{4\sqrt{2}}=\sqrt{2}$，得 $r_2^2=4$ 或 $r_2^2=20$，

故圆 O_2 的方程为 $(x-2)^2+(y-1)^2=4$ 或 $(x-2)^2+(y-1)^2=20$.

第 31 课时　直线与圆的方程的应用

题点知识巩固

1. 选 B　如图，圆的半径 $|OA|=3.6$ m，卡车宽 1.6 m，



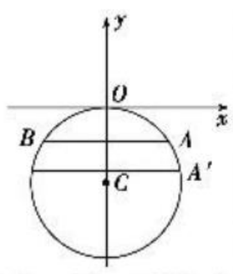
所以 $|AB|=0.8$ m，

所以弦心距 $|OB|=\sqrt{3.6^2-0.8^2}\approx3.5$(m).

2. **解析**：由圆心 $(2,-3)$ 到直线 $x-y+2=0$ 的距离为 $d=\frac{|2+3+2|}{\sqrt{2}}=\frac{7\sqrt{2}}{2}$，则从村庄外围到小路的最短距离为 $\frac{7\sqrt{2}}{2}-2$.

答案：$\frac{7\sqrt{2}}{2}-2$

3. **解析**：如图，以圆拱桥顶为坐标原点，以过圆拱顶点的竖直直线为 y 轴，建立平面直角坐标系.



设圆心为 C，圆的方程设为 $x^2+(y+r)^2=r^2$ $(r>0)$，水面所在弦的端点为 A,B，则 $A(6,-2)$. 将 $A(6,-2)$ 代入圆的方程，得 $r=10$，

∴圆的方程为 $x^2+(y+10)^2=100$. 当水面下降 1 m 后，可设点 $A'(x_0,-3)(x_0>0)$，

将 $A'(x_0,-3)$ 代入圆的方程，得 $x_0=\sqrt{51}$，

∴当水面下降 1 m 后，水面宽为 $2x_0=2\sqrt{51}$(m).

答案：$2\sqrt{51}$

4. **解析**：由题意知，点 $P(1,1)$ 在圆 $x^2+y^2=4$ 内，

则过点 P 截得的弦最短的直线将圆面分成的两部分面积之差最大，

则所求直线与圆心 O 和 $P(1,1)$ 的连线垂直，

∴该直线斜率为 -1，

由点斜式方程，得 $y-1=-(x-1)$，即 $x+y-2=0$.

答案：$x+y-2=0$

5. **解析**：因为 $r=\frac{1}{2}\sqrt{k^2+4-4k^2}=\frac{1}{2}\sqrt{4-3k^2}$，

所以当 $k=0$ 时，r 最大，此时圆的面积最大，

圆的方程可化为 $x^2+y^2+2y=0$，

即 $x^2+(y+1)^2=1$，圆心坐标为 $(0,-1)$.

答案：$(0,-1)$

6. **解**：原方程表示以点 $(2,0)$ 为圆心，以 $\sqrt{3}$ 为半径的圆.

(1)设 $\frac{y}{x}=k$，即 $y=kx$，当直线 $y=kx$ 与圆相切时，斜率 k 取最大值和最小值，此时 $\frac{|2k-0|}{\sqrt{k^2+1}}=\sqrt{3}$，解得 $k=\pm\sqrt{3}$，故 $\frac{y}{x}$ 的最大值为 $\sqrt{3}$，最小值为 $-\sqrt{3}$.

(2)设 $y-x=b$，即 $y=x+b$，当直线 $y=x+b$ 与圆相切时，纵截距 b 取得最大值和最小值，此时 $\frac{|2-0+b|}{\sqrt{2}}=\sqrt{3}$，即 $b=-2\pm\sqrt{6}$，故 $y-x$ 的最大值为 $-2+\sqrt{6}$，最小值为 $-2-\sqrt{6}$.

(3)x^2+y^2 表示圆上的点与原点间距离的平方，由平面几何知识知，

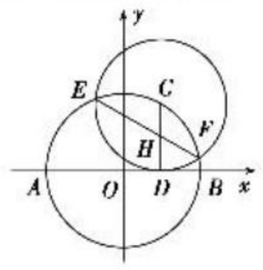
它在原点与圆心所连直线与圆的两个交点处取得最大值和最小值，

又圆心到原点的距离为 2，

故 $(x^2+y^2)_{max}=(2+\sqrt{3})^2=7+4\sqrt{3}$，$(x^2+y^2)_{min}=(2-\sqrt{3})^2=7-4\sqrt{3}$.

7. **解**：易知题干图中上半个弯道所在圆的圆心坐标为 $C(0,43.48)$，其所在圆的半径为 36，故上半个弯道所在圆的方程是 $x^2+(y-43.48)^2=36^2$. 同理下半个弯道所在圆的方程是 $x^2+(y+43.48)^2=36^2$.

8. **证明**：以 AB 所在直线为 x 轴，O 为坐标原点，建立平面直角坐标系，如图所示，设 $|AB|=2r$，$D(a,0)$，



则 $|CD|=\sqrt{r^2-a^2}$，

∴$C(a,\sqrt{r^2-a^2})$，

∴圆 O：$x^2+y^2=r^2$，

圆 C：$(x-a)^2+(y-\sqrt{r^2-a^2})^2=r^2-a^2$.

两方程作差，得直线 EF 的方程为

$2ax+2\sqrt{r^2-a^2}y=r^2+a^2$.

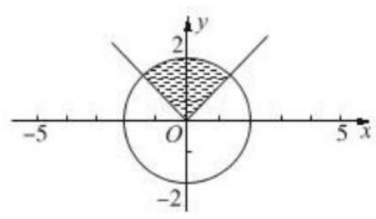
令 $x=a$，得 $y=\frac{1}{2}\sqrt{r^2-a^2}$，

∴$H\left(a,\frac{1}{2}\sqrt{r^2-a^2}\right)$，即 H 为 CD 的中点，

∴EF 平分 CD.

提能达标过关

1. 选 D　数形结合，所求面积是圆 $x^2+y^2=4$ 面积的 $\frac{1}{4}$.



关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

2. 选 B　x^2+y^2 表示圆上的点(x,y)与$(0,0)$间距离的平方，由几何意义可知最小值为$(14-\sqrt{5^2+12^2})^2=1$.

3. 选 B　圆 $x^2+y^2+2x-2y+2a=0$，即
$(x+1)^2+(y-1)^2=2-2a$，
故弦心距 $d=\dfrac{|-1+1+2|}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$，
再由弦长公式可得 $2-2a=2+4$，
$\therefore a=-2$.

4. 选 B　点 A 关于 x 轴的对称点 $A'(-1,-1)$，A' 与圆心$(5,7)$的距离为 $\sqrt{(5+1)^2+(7+1)^2}=10$.
∴所求最短路程为 $10-2=8$.

5. 选 A　直线 AB 的方程为 $x-y+2=0$，圆心到直线 AB 的距离为 $d=\dfrac{|1-0+2|}{\sqrt{2}}=\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$，

所以圆上任意一点到直线 AB 的最小距离为 $\dfrac{3\sqrt{2}}{2}-1$，

所以 $\triangle ABC$ 面积的最小值为

$$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}\times|AB|\times\left(\frac{3\sqrt{2}}{2}-1\right)=\frac{1}{2}\times2\sqrt{2}\times\left(\frac{3\sqrt{2}}{2}-1\right)$$
$$=3-\sqrt{2}.$$

6. **解析**：令 $k=\dfrac{y+2}{x+1}$，

即 $kx-y+k-2=0$，
则圆心$(0,0)$到直线 $kx-y+k-2=0$ 的距离小于或等于半径，
即 $\dfrac{|k-2|}{\sqrt{k^2+1}}\leqslant1$，即 $k\geqslant\dfrac{3}{4}$.

答案：$\left[\dfrac{3}{4},+\infty\right)$

7. **解析**：由题意知，AB 所在直线与圆 C 相切或相离时，视线不被挡住，

直线 AB 的方程为 $y=\dfrac{a}{5}(x+2)$，即 $ax-5y+2a=0$，

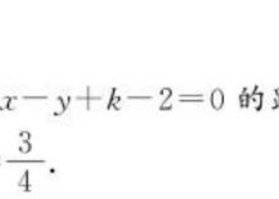
所以 $d=\dfrac{|3a|}{\sqrt{a^2+(-5)^2}}\geqslant1$，即 $a\geqslant\dfrac{5\sqrt{2}}{4}$ 或 $a\leqslant-\dfrac{5\sqrt{2}}{4}$.

答案：$\left(-\infty,-\dfrac{5\sqrt{2}}{4}\right]\cup\left[\dfrac{5\sqrt{2}}{4},+\infty\right)$

8. **解析**：∵点 $A(1,2)$ 在圆 $x^2+y^2=5$ 上，∴过点 A 与圆 O 相切的切线方程为 $x+2y=5$，易知切线在坐标轴上的截距分别为 5，$\dfrac{5}{2}$，∴切线与坐标轴围成的三角形的面积为 $\dfrac{25}{4}$.

答案：$\dfrac{25}{4}$

9. **解**：(1)显然 $\dfrac{y-2}{x-1}$ 可以看作是点 $P(x,y)$ 与点 $Q(1,2)$ 连线的斜率，令 $\dfrac{y-2}{x-1}=k$，如图所示，则其最大、最小值分别是过点$Q(1,2)$的圆 C 的两条切线的斜率.



对上式整理得 $kx-y-k+2=0$，

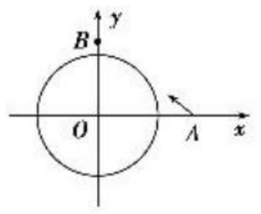
$\therefore\dfrac{|-2k+2-k|}{\sqrt{1+k^2}}=1$，∴$k=\dfrac{3\pm\sqrt{3}}{4}$.

故 $\dfrac{y-2}{x-1}$ 的最大值是 $\dfrac{3+\sqrt{3}}{4}$，最小值是 $\dfrac{3-\sqrt{3}}{4}$.

(2)令 $u=x-2y$，则 u 可视为一组平行线，当直线和圆 C 有公共点时，u 的范围即可确定，且最值在直线与圆相切时取得. 依题意，得 $\dfrac{|-2-u|}{\sqrt{5}}=1$，解得 $u=-2\pm\sqrt{5}$，

故 $x-2y$ 的最大值是 $-2+\sqrt{5}$，最小值是 $-2-\sqrt{5}$.

10. **解**：如图，以 O 为坐标原点，东西方向为 x 轴建立平面直角坐标系，



则 $A(40,0)$，$B(0,30)$，
圆 O 方程为 $x^2+y^2=25^2$.
直线 AB 方程为 $\dfrac{x}{40}+\dfrac{y}{30}=1$，
即 $3x+4y-120=0$. 设 O 到 AB 距离为 d，
则 $d=\dfrac{|-120|}{5}=24<25$，
所以外籍轮船能被海监船监测到.
设监测时间为 t，则 $t=\dfrac{2\sqrt{25^2-24^2}}{28}=0.5(\text{h})$.
故外籍轮船能被海监船监测到，持续时间为 0.5 h.

4.3　空间直角坐标系

第 32 课时　空间直角坐标系

题点知识巩固

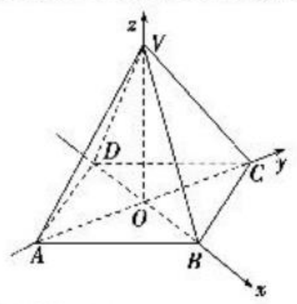
1. 选 C　点$(2,0,3)$位于 xOz 平面内.

2. **解析**：设顶点 D 的坐标为 (x,y,z)，∵四边形 $ABCD$ 为平行四边形，
∴对角线 AC 与 BD 相交于一点，且互相平分，设交点为 O.
由中点坐标公式得 $O\left(\dfrac{7}{2},4,-1\right)$，∴$\dfrac{7}{2}=\dfrac{2+x}{2}$，
∴$x=5$. $4=\dfrac{-5+y}{2}$，∴$y=13$. $-1=\dfrac{1+z}{2}$，∴$z=-3$. 故顶点 D 的坐标为$(5,13,-3)$.
答案：$(5,13,-3)$

3. **解**：建立如图所示的空间直角坐标系.
E 点在 xOy 面上的射影为 $B(1,1,0)$，
且 z 坐标为 $\dfrac{1}{2}$，∴$E\left(1,1,\dfrac{1}{2}\right)$.
F 点在 xOy 面上的射影为 BD 的中点 G，
$G\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2},0\right)$，且 z 坐标为 1，∴$F\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2},1\right)$.

4. **解**：因为 $|PO|=\sqrt{|PB|^2-|OB|^2}=\sqrt{169-25}=12$，
所以各顶点的坐标分别为 $P(0,0,12)$，$A\left(\dfrac{5\sqrt{2}}{2},-\dfrac{5\sqrt{2}}{2},0\right)$，
$B\left(\dfrac{5\sqrt{2}}{2},\dfrac{5\sqrt{2}}{2},0\right)$，$C\left(-\dfrac{5\sqrt{2}}{2},\dfrac{5\sqrt{2}}{2},0\right)$，$D\left(-\dfrac{5\sqrt{2}}{2},-\dfrac{5\sqrt{2}}{2},0\right)$.

5. **解**：因为所给几何体为正四棱锥，其底面为正方形，对角线相互垂直，故以 O 为原点，互相垂直的对角线 AC、BD 所在直线为 x 轴、y 轴，OV 为 z 轴建立如图所示坐标系.



∵正方形 $ABCD$ 边长 $AB=2$，
∴$AO=OC=OB=OD=\sqrt{2}$，又 $VO=3$，
∴$A(0,-\sqrt{2},0)$、$B(\sqrt{2},0,0)$、$C(0,\sqrt{2},0)$、$D(-\sqrt{2},0,0)$、$V(0,0,3)$.

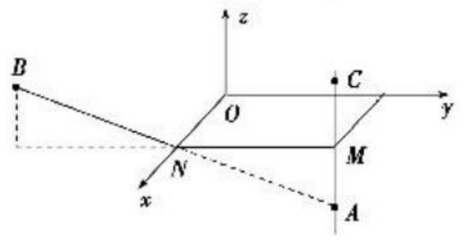
6. **解**：∵OB' 与 BD' 相交于 Q 点，
∴Q 点在 xOy 平面内的投影应为 OB 与 AC 的交点，
∴Q 点坐标为 $\left(\dfrac{1}{2}a,\dfrac{1}{2}a,z\right)$.
同理可知 Q 点在 xOz 平面内的投影也应为 AD' 与 OA' 的交点，
∴Q 点坐标为 $\left(\dfrac{1}{2}a,\dfrac{1}{2}a,\dfrac{1}{2}a\right)$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

7. (1)$(-x,-y,-z)$ (2)$(x,-y,-z)$ (3)$(-x,y,-z)$ (4)$(-x,-y,z)$ (5)$(x,y,-z)$ (6)$(-x,y,z)$ (7)$(x,-y,z)$

8. **解析**：点 $P(2,3,-1)$ 关于坐标平面 xOy 的对称点 P_1 的坐标为 $(2,3,1)$，点 P_1 关于坐标平面 yOz 的对称点 P_2 的坐标为 $(-2,3,1)$，点 P_2 关于 z 轴的对称点 P_3 的坐标是 $(2,-3,1)$.
答案：$(2,-3,1)$

9. **解**：如图所示，过 A 作 $AM\perp xOy$ 交平面于 M，并延长到 C，使 $AM=CM$，则 A 与 C 关于坐标平面 xOy 对称，且 $C(1,2,1)$.



过 A 作 $AN\perp x$ 轴于 N 并延长到点 B，使 $AN=NB$，
则 A 与 B 关于 x 轴对称，且 $B(1,-2,1)$.
$\therefore A(1,2,-1)$ 关于坐标平面 xOy 对称的点 $C(1,2,1)$；
$A(1,2,-1)$ 关于 x 轴对称的点 $B(1,-2,1)$.

提能达标过关

1. 选 C　由定义可知，在 x 轴上的点 (x,y,z)，有 $y=z=0$，所以 x 轴上点的坐标可记为 $(a,0,0)$，故①错误，②③④正确，故选 C.

2. 选 C　点 $P(-1,2,0)$ 位于 xOy 平面上.

3. 选 C　点 $M(2,5,8)$ 关于 xOy 平面对称的点 N 的坐标为 $(2,5,-8)$.

4. 选 A　点 $P(1,3,5)$ 关于原点对称的点 P' 的坐标为 $(-1,-3,-5)$.

5. 选 B　点 $(-2,1,4)$ 关于 x 轴对称点的坐标是 $(-2,-1,-4)$.

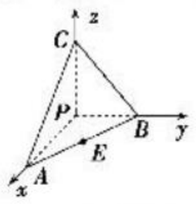
6. **解析**：点 $(1,1,-2)$ 关于 yOz 平面的对称点的坐标是 $(-1,1,-2)$.
答案：$(-1,1,-2)$

7. **解析**：M 在 xOz 平面上的射影为 $M'(-2,0,-3)$，$\therefore M'$ 关于原点对称点的坐标为 $(2,0,3)$.
答案：$(2,0,3)$

8. **解析**：设点 C 的坐标为 (x,y,z)，由中点坐标公式得 $\frac{x+5}{2}=-3$，$\frac{y-3}{2}=1$，$\frac{z-6}{2}=4$，所以 $x=-11$，$y=5$，$z=14$，所以点 C 的坐标为 $(-11,5,14)$.
答案：$(-11,5,14)$

9. **解**：$M(1,-2,3)$ 关于坐标平面 xOy 对称的点是 $(1,-2,-3)$，关于 xOz 平面对称的点是 $(1,2,3)$，关于 yOz 平面对称的点是 $(-1,-2,3)$；$M(1,-2,3)$ 关于 x 轴对称的点是 $(1,2,-3)$，关于 y 轴对称的点是 $(-1,-2,-3)$，关于 z 轴对称的点是 $(-1,2,3)$；$M(1,-2,3)$ 关于坐标原点的对称点是 $(-1,2,-3)$.

10. **解**：建立如图所示的空间直角坐标系，则 $P(0,0,0)$、$A(2,0,0)$、$B(0,2,0)$、$C(0,0,1)$，又因为点 E 是 AB 的中点，由中点坐标公式得点 E 的坐标是 $E(1,1,0)$.



第 33 课时　空间两点间的距离公式

题点知识巩固

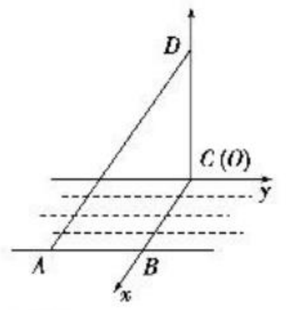
1. 选 B　$d(O,P)=\sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-0\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{3}-0\right)^2+\left(-\frac{\sqrt{6}}{6}-0\right)^2}=1$.

2. 选 C　点 $P(a,b,c)$ 在坐标平面 xOy 内的射影点 $P'(a,b,0)$，$\therefore$ 点 P 到坐标平面 xOy 的距离即为 $|PP'|=|c|$.

3. 选 B　$|AB|=\sqrt{(-3-0)^2+(1-2)^2+(5-3)^2}=\sqrt{14}$.

4. **证明**：由两点间距离公式：
$|AB|=\sqrt{(7-4)^2+(1-3)^2+(2-1)^2}=\sqrt{14}$，
$|BC|=\sqrt{(5-7)^2+(2-1)^2+(3-2)^2}=\sqrt{6}$，
$|AC|=\sqrt{(5-4)^2+(2-3)^2+(3-1)^2}=\sqrt{6}$，
$\because |BC|=|AC|$，$\therefore \triangle ABC$ 为等腰三角形.

5. **解**：以塔底 C 为坐标原点建立如图所示的坐标系.



则 $D(0,0,5)$，$A(3,-4,0)$，
$\therefore d(A,D)=\sqrt{3^2+(-4)^2+5^2}=5\sqrt{2}$，
即点 A 与塔顶 D 的距离为 $5\sqrt{2}$ 米.

6. **证明**：$d(A,B)=\sqrt{(2-1)^2+(4-2)^2+(8-4)^2}=\sqrt{21}$，
$d(B,C)=\sqrt{(3-2)^2+(6-4)^2+(12-8)^2}=\sqrt{21}$，
$d(A,C)=\sqrt{(3-1)^2+(6-2)^2+(12-4)^2}=2\sqrt{21}$，
$\therefore |AB|+|BC|=|AC|$，故 A、B、C 三点共线.

7. 选 C　由球面的定义可知，选 C.

8. **解析**：(1) 由 $|PA|=|PB|$，得 $\sqrt{(x-1)^2+y^2+(z-1)^2}=\sqrt{(x-2)^2+(y-1)^2+z^2}$.
化简得 $2x+2y-2z-3=0$.
(2) $\sqrt{(x-2)^2+(y-1)^2+(z-4)^2}=5$，
$\therefore (x-2)^2+(y-1)^2+(z-4)^2=25$.
(3) 设 C 点坐标为 $(0,0,z)$，则 $\sqrt{3^2+1^2+(z-1)^2}=\sqrt{2^2+(-2)^2+(z-3)^2}$.
$\therefore 10+(z-1)^2=8+(z-3)^2$. 解得 $z=\frac{3}{2}$.
答案：(1)$2x+2y-2z-3=0$
(2)$(x-2)^2+(y-1)^2+(z-4)^2=25$
(3)$\left(0,0,\frac{3}{2}\right)$

9. **解**：设 $P(x,y,z)$，则 $|PA|=\sqrt{(x-2)^2+(y-3)^2+z^2}$，$|PB|=\sqrt{(x-5)^2+(y-1)^2+z^2}$.
$\because |PA|=|PB|$，
$\therefore \sqrt{(x-2)^2+(y-3)^2+z^2}=\sqrt{(x-5)^2+(y-1)^2+z^2}$.
化简得 $6x-4y-13=0$. $\therefore$ 点 P 的坐标满足的条件为 $6x-4y-13=0$.

提能达标过关

1. 选 A　$A(2,-3,5)$ 关于 xOy 坐标平面的对称点 $B(2,-3,-5)$，
$\therefore |AB|=\sqrt{(2-2)^2+[-3-(-3)]^2+[5-(-5)]^2}=10$.

2. 选 D　$\because |AB|=\sqrt{29}$，$|AC|=2\sqrt{29}$，$|BC|=\sqrt{29}$，而 $|AB|+|BC|=|AC|$，$\therefore$ 三点 A、B、C 共线，构不成三角形.

3. 选 C　设 $M(0,0,c)$，由 $|AM|=|BM|$ 得 $\sqrt{1^2+0^2+(c-2)^2}=\sqrt{1^2+(-3)^2+(c-1)^2}$，
$\therefore c=-3$，选 C.

4. 选 A　$d(A,B)=\sqrt{(-6-8)^2+(-6-8)^2+(-6-8)^2}=14\sqrt{3}$.

5. 选 D　点 $P(1,1,1)$ 关于平面 xOy 的对称点 M 的坐标为 $(1,1,-1)$. 一束光线自点 $P(1,1,1)$ 发出，遇到平面 xOy 被反射，到达点 $Q(3,3,6)$ 被吸收，那么光所走的路程是 $\sqrt{(3-1)^2+(3-1)^2+(6+1)^2}=\sqrt{57}$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

6. **解析**：设 $M(0,y,0)$，由题意得 $y^2+(\sqrt{3})^2=1^2+(y-2)^2$，

$\therefore y=\frac{1}{2}$，故点 M 的坐标为 $\left(0,\frac{1}{2},0\right)$.

答案：$\left(0,\frac{1}{2},0\right)$

7. **解析**：设点 P 的坐标为 $(x,0,0)$，由题意得 $\sqrt{(x+2)^2+(0-1)^2+(0-3)^2}$

$=\sqrt{(x+1)^2+(0-2)^2+(0-1)^2}$，

解得 $x=-4$.

答案：$(-4,0,0)$

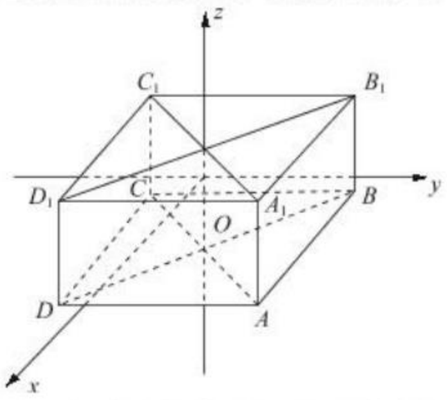
8. **解析**：$\because |C'M|=2|MB'|$，

$\therefore |C'M|=\frac{2}{3}|B'C'|=2a$，

$\therefore$ 点 M 的坐标为 $(2a,3a,3a)$.

答案：$(2a,3a,3a)$

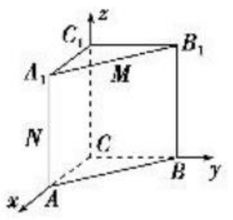
9. **解**：由题意，可建立如图所示的空间直角坐标系 $O-xyz$，



$\therefore A_1(3,2,1)$、$B_1(-3,2,1)$、$C_1(-3,-2,1)$、$D_1(3,-2,1)$，

$A(3,2,-1)$、$B(-3,2,-1)$、$C(-3,-2,-1)$、$D(3,-2,-1)$.

10. **解**：如图所示，以 C 为原点，以 CA、CB、CC_1 所在直线为坐标轴，建立空间直角坐标系 $C-xyz$，



$\because CA=CB=1$，$AA_1=2$，

$\therefore N(1,0,1)$、$M\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},2\right)$，

由两点间的距离公式得

$|MN|=\sqrt{\left(1-\frac{1}{2}\right)^2+\left(0-\frac{1}{2}\right)^2+(1-2)^2}=\frac{\sqrt{6}}{2}$.

故 $|MN|$ 的长为 $\frac{\sqrt{6}}{2}$.

素养提升

素养培优提能

1. 选 C　圆心 $(2,3)$ 在直线 $3x-4y+6=0$ 上，即直线与圆相交且过圆心.

2. 选 B　$\because 3a^2+3b^2-4c^2=0$，

$\therefore a^2+b^2=\frac{4}{3}c^2$，

则圆 $x^2+y^2=1$ 的圆心到直线 $ax+by+c=0$ 的距离 $d=\frac{|c|}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$；

则直线 $ax+by+c=0$ 被圆 $x^2+y^2=1$ 所截得的弦长 $l=2\sqrt{r^2-d^2}=1$. 故选 B.

3. 选 D　圆 $C:x^2+y^2+2x-2y-6=0$ 可化为 $(x+1)^2+(y-1)^2=8$，

圆心坐标为 $(-1,1)$，半径为 $2\sqrt{2}$，

由题意可知，圆心到直线的距离 $d=\frac{|1+m|}{5}=2$.

$\because m>0$，$\therefore m=9$.

4. 选 B　将圆 $x^2+y^2+kx+2y+k^2=0$ 化成标准方程，

得 $\left(x+\frac{k}{2}\right)^2+(y+1)^2=1-\frac{3k^2}{4}$，

$\therefore r^2=1-\frac{3k^2}{4}$，

当圆取得最大面积时，$k=0$，半径 $r=1$，

因此直线 $y=(k-1)x+2$，即 $y=-x+2$.

得直线的倾斜角 α 满足 $\tan\alpha=-1$，

$\therefore \alpha=135°$.

5. 选 B　由 $\begin{cases}ax+by+c=0,\\x-y+1=0,\end{cases}$ 解得交点坐标为 $\left(-\frac{b+c}{a+b},\frac{a-c}{a+b}\right)$.

由图可知，$-b>a>c>0$，

$\therefore -\frac{b+c}{a+b}<0$，$\frac{a-c}{a+b}<0$，

$\therefore$ 交点在第三象限，故选 B.

6. **解析**：$\because$ 直线 $l:ax+by=1$ 与圆 $C:x^2+y^2=1$ 有两个不同的交点，

$\therefore \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}<1$，即 $\sqrt{a^2+b^2}>1$，

$\therefore$ 点 $P(a,b)$ 在圆外.

答案：点 P 在圆外

7. **解析**：圆的标准方程为 $(x-1)^2+(y+2)^2=25$，

$\therefore$ 圆心坐标为 $(1,-2)$，半径 $r=5$，

$\therefore$ 原点到圆心的距离为 $\sqrt{5}$，

则 a^2+b^2 的最小值为 $(5-\sqrt{5})^2=30-10\sqrt{5}$.

答案：$30-10\sqrt{5}$

8. **解析**：由题意，得圆心到直线的距离 $d=\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{1+\frac{1}{3}}}=3$，

$\therefore |AB|=2\sqrt{12-9}=2\sqrt{3}$.

又易知直线 l 的倾斜角为 $30°$，

$\therefore |CD|=\frac{|AB|}{\cos 30°}=\frac{2\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=4$.

答案：4

9. **解**：(1) 由题意得，圆心 $N(3,4)$ 到直线 $x=1$ 的距离等于 $3-1=2$.

$\because$ 圆 N 被直线 $x=1$ 截得的弦长为 $2\sqrt{5}$，

$\therefore$ 圆 N 的半径 $r=\sqrt{(\sqrt{5})^2+2^2}=3$.

$\therefore$ 圆 N 的方程为 $(x-3)^2+(y-4)^2=9$.

(2) $\because$ 点 $B(3,-2)$ 与点 C 关于直线 $x=-1$ 对称，

$\therefore$ 点 C 的坐标为 $(-5,-2)$，

设所求圆的方程为 $(x+5)^2+(y+2)^2=r^2(r>0)$，

$\because$ 圆 C 与圆 N 外切，

$\therefore r+3=\sqrt{(3+5)^2+(4+2)^2}=10$，得 $r=7$.

$\therefore$ 圆 C 的方程为 $(x+5)^2+(y+2)^2=49$.

10. **解**：(1) $\because$ 所求圆的圆心为线段 OP 的中点 $(2,3)$.

半径为 $\frac{1}{2}|OP|=\frac{1}{2}\sqrt{(4-0)^2+(6-0)^2}=\sqrt{13}$，

$\therefore$ 以 OP 为直径的圆的方程为 $(x-2)^2+(y-3)^2=13$.

(2) $\because PA$，PB 是圆 $O:x^2+y^2=1$ 的两条切线，

$\therefore OA\perp PA$，$OB\perp PB$，

$\therefore A$，B 两点都在以 OP 为直径的圆上.

由 $\begin{cases}x^2+y^2=1,\\(x-2)^2+(y-3)^2=13,\end{cases}$

得直线 AB 的方程为 $4x+6y-1=0$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

第二部分　阶段检测

阶段质量测试卷(一)

1. 选 A　三棱锥的侧面和底面均为三角形.

2. 选 D　∵Rt$\triangle O'A'B'$是一平面图形的直观图,斜边$O'B'=2$,

∴直角三角形的直角边长是$\sqrt{2}$,

∴直角三角形的面积是$\frac{1}{2}\times\sqrt{2}\times\sqrt{2}=1$,

∴原平面图形的面积是$1\times2\sqrt{2}=2\sqrt{2}$.故选 D.

3. 选 B　由已知中的三视图可得:该几何体是一个以边长为 3 的正方形为底面的斜四棱柱,

其底面面积为:$3\times3\times2=18$,

前后侧面的面积为:$3\times6\times2=36$,

左右侧面的面积为:$3\times\sqrt{3^2+6^2}\times2=18\sqrt{5}$,

故棱柱的表面积为:$18+36+18\sqrt{5}=54+18\sqrt{5}$.故选 B.

4. 选 A　设球的半径为R,所得的截面为圆M,圆M的半径为r.

画图可知(图略),$R^2=\frac{1}{4}R^2+r^2$,∴$\frac{3}{4}R^2=r^2$.

∴$S_{球}=4\pi R^2$,截面圆M的面积为$\pi r^2=\frac{3}{4}\pi R^2$,

则所得截面的面积与球的表面积的比为$\frac{\frac{3}{4}\pi R^2}{4\pi R^2}=\frac{3}{16}$.故选 A.

5. 选 D　四边形D_1MBN在上下底面的正投影为选项 A;在前后面上的正投影为选项 B;在左右面上的正投影为选项 C.故选 D.

6. 选 D　设圆锥形容器的底面积为S,

则未倒置前液面的面积为$\frac{4}{9}S$,

∴水的体积$V=\frac{1}{3}Sh-\frac{1}{3}\times\frac{4}{9}S(h-h_1)=\frac{19}{81}Sh$,

设倒置后液面面积为S',则$\frac{S'}{S}=\left(\frac{h_2}{h}\right)^2$,

∴$S'=\frac{Sh_2^2}{h^2}$,∴水的体积$V=\frac{1}{3}S'h_2=\frac{Sh_2^3}{3h^2}$,

∴$\frac{19}{81}Sh=\frac{Sh_2^3}{3h^2}$,

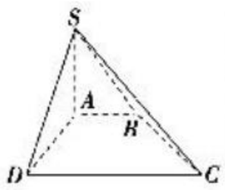
解得$h_2=\frac{\sqrt[3]{19}h}{3}$,故选 D.

7. 选 C　易知$V=1-8\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{5}{6}$.

8. 选 A　若图②是俯视图,则正视图和侧视图中矩形的竖边延长线有一条和圆相切,故图②不合要求;若图④是俯视图,则正视图和侧视图不相同,故图④不合要求;①③都是能符合要求的几何体,故选 A.

9. 选 D　由三视图可知原几何体为半圆柱,底面半径为 1,高为 2,则表面积为$S=2\times\frac{1}{2}\pi\times1^2+\frac{1}{2}\times2\pi\times1\times2+2\times2=\pi+2\pi+4=3\pi+4$.

10. 选 A　由三视图得该几何体为四棱锥$S-ABCD$,如图所示,



其中$SA\perp$平面$ABCD$,$SA=2$,$AB=2$,$AD=2$,$CD=4$,且$ABCD$为直角梯形,$\angle DAB=90°$.

∴$V=\frac{1}{3}SA\times\frac{1}{2}(AB+CD)\cdot AD=\frac{1}{3}\times2\times\frac{1}{2}\times(2+4)\times2=4$,故选 A.

11. 选 B　将三棱锥补成棱长分别为$1,\sqrt{2},\sqrt{3}$的长方体,则长方体的体对角线是外接球的直径,所以$2R=\sqrt{6}$,解得$R=\frac{\sqrt{6}}{2}$,故$S=4\pi R^2=6\pi$.

12. 选 B　米堆的体积即为四分之一的圆锥的体积,

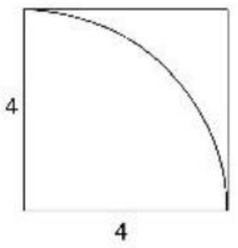
设圆锥底面半径为r,则$\frac{1}{4}\times2\pi r=8$,

得$r=\frac{16}{\pi}$,

所以米堆的体积为$\frac{1}{3}\times\frac{1}{4}\pi r^2\times5\approx\frac{320}{9}$(立方尺),

$\frac{320}{9}\div1.62\approx22$(斛).

13. **解析**:如图所示,剪下最大的扇形的半径即圆锥的母线长l等于正方形的边长 4,扇形的弧长$=\frac{1}{4}\times(2\pi\times4)=2\pi$,即为圆锥的底面周长,设圆锥的底面半径为$r$,高为$h$,则$2\pi r=2\pi$,所以$r=1$,所以$h=\sqrt{l^2-r^2}=\sqrt{15}$,所以圆锥的容积为$\frac{1}{3}\pi r^2h=\frac{\sqrt{15}\pi}{3}$.



答案:$\frac{\sqrt{15}\pi}{3}$

14. **解析**:该组合体为在一个圆柱内去掉一个半球,其体积$V=\pi\times1^2\times1-\frac{4}{3}\pi\times1^3\times\frac{1}{2}=\frac{\pi}{3}$.

答案:$\frac{\pi}{3}$

15. **解析**:由三视图可知底面正三角形的高为$2\sqrt{3}$,则底面边长为 4,所以底面面积为$4\sqrt{3}$,因此该三棱柱的高为$12\sqrt{3}\div4\sqrt{3}=3$,故侧视图的面积为$2\sqrt{3}\times3=6\sqrt{3}$.

答案:$6\sqrt{3}$

16. **解析**:设球的半径为r,则$\frac{4}{3}\pi r^3=\frac{32}{3}\pi$,

得$r=2$,柱体的高为$2r=4$.

又正三棱柱的底面三角形的内切圆半径与球的半径相等,

所以底面正三角形的边长为$4\sqrt{3}$,

所以正三棱柱的体积$V=\frac{\sqrt{3}}{4}\times(4\sqrt{3})^2\times4=48\sqrt{3}$.

答案:$48\sqrt{3}$

17. **解**:由已知得,该几何体为一个棱台,其侧面的高

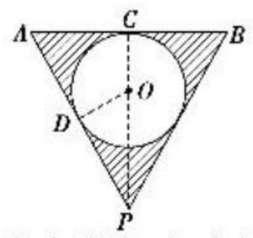
$h'=\sqrt{\left(\frac{4-2}{2}\right)^2+3^2}=\sqrt{10}$.

故$S=S_{上底}+S_{下底}+S_{侧面}=2^2+4^2+4\times\frac{1}{2}\times(2+4)\times\sqrt{10}=20+12\sqrt{10}$,

所以该几何体的表面积为$20+12\sqrt{10}$,

体积$V=\frac{1}{3}(4^2+2^2+2\times4)\times3=28$.

18. **解**:由题意知,圆锥的轴截面为正三角形,如图所示为圆锥的轴截面.



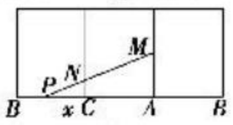
根据切线性质知,当球在容器内时,水深为$3r$,水面的半径为$\sqrt{3}r$,则容器内水的体积为$V=V_{圆锥}-V_{球}=\frac{1}{3}\pi\cdot(\sqrt{3}r)^2\cdot3r-\frac{4}{3}\pi r^3=\frac{5}{3}\pi r^3$,而将球取出后,设容器内水的深度为$h$,则水面圆的半径为$\frac{\sqrt{3}}{3}h$,从而容器内水的体积是$V'=\frac{1}{3}\pi\cdot\left(\frac{\sqrt{3}}{3}h\right)^2\cdot h=\frac{1}{9}\pi h^3$,

由$V=V'$,得$h=\sqrt[3]{15}r$.即容器中水的深度为$\sqrt[3]{15}r$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

19. **解**：(1)该三棱柱的侧面展开图是宽为 4，长为 9 的矩形，所以对角线的长为 $\sqrt{4^2+9^2}=\sqrt{97}$.

(2)将该三棱柱的侧面沿棱 BB_1 展开，如图所示.



设 PC 的长为 x，则 $MP^2=MA^2+(AC+x)^2$.

因为 $MP=\sqrt{29}$，$MA=2$，$AC=3$，所以 $x=2$(负值舍去)，即 PC 的长为 2.

又因为 $NC/\!/AM$，所以 $\frac{PC}{PA}=\frac{NC}{AM}$，即 $\frac{2}{5}=\frac{NC}{2}$，所以 $NC=\frac{4}{5}$.

20. **解**：由题图可知半球的半径为 4 cm，

所以 $V_{半球}=\frac{1}{2}\times\frac{4}{3}\pi R^3=\frac{1}{2}\times\frac{4}{3}\pi\times4^3=\frac{128}{3}\pi(\text{cm}^3)$，

$V_{圆锥}=\frac{1}{3}\pi r^2h=\frac{1}{3}\pi\times4^2\times12=64\pi(\text{cm}^3)$.

因为 $V_{半球}<V_{圆锥}$，所以如果冰淇淋融化了，不会溢出杯子.

21. **解**：(1)$\because ABCD-A'B'C'D'$ 是正方体，

$\therefore A'B=A'C'=A'D=BC'=BD=C'D=\sqrt{2}a$，

$\therefore$ 三棱锥 $A'-BC'D$ 的表面积为 $4\times\frac{1}{2}\times\sqrt{2}a\times\frac{\sqrt{3}}{2}\times\sqrt{2}a=2\sqrt{3}a^2$.

而正方体的表面积为 $6a^2$，故三棱锥 $A'-BC'D$ 的表面积与正方体表面积的比值为 $\frac{2\sqrt{3}a^2}{6a^2}=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

(2)三棱锥 $A'-ABD$，$C'-BCD$，$D-A'D'C'$，$B-A'B'C'$ 是完全一样的.

故 $V_{三棱锥A'-BC'D}=V_{正方体}-4V_{三棱锥A'-ABD}=a^3-4\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}a^2\cdot a=\frac{a^3}{3}$.

22. **解**：由题意知，所成几何体的表面积等于圆台下底面面积＋圆台的侧面积＋半球面面积.

因为 $S_{半球面}=\frac{1}{2}\times4\pi\times2^2=8\pi(\text{cm}^2)$，

$S_{圆台侧}=\pi(2+5)\sqrt{(5-2)^2+4^2}=35\pi(\text{cm}^2)$，

$S_{圆台下底}=\pi\times5^2=25\pi(\text{cm}^2)$，

所以表面积为 $8\pi+35\pi+25\pi=68\pi(\text{cm}^2)$.

又因为 $V_{圆台}=\frac{\pi}{3}\times(2^2+2\times5+5^2)\times4=52\pi(\text{cm}^3)$，

$V_{半球}=\frac{1}{2}\times\frac{4\pi}{3}\times2^3=\frac{16\pi}{3}(\text{cm}^3)$，

所以该几何体的体积为 $V_{圆台}-V_{半球}=\frac{140\pi}{3}(\text{cm}^3)$.

阶段质量测试卷(二)

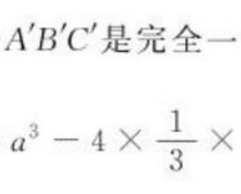
1. 选 C　根据公理 1 可知①正确；根据公理 3 可知②正确；根据公理 2 可知④正确；当点 A 为直线 l 与平面 α 的交点时，可知③错误.

2. 选 C　如图，取 B_1C_1 的中点 E，连接 BE，DE，则 $AC/\!/A_1C_1/\!/DE$，

则 $\angle BDE$ 即为异面直线 BD 与 AC 所成的角.

由条件可知 $BD=DE=EB=\sqrt{2}$，

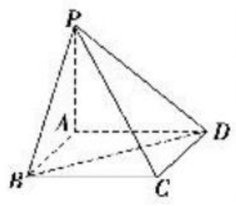
所以 $\angle BDE=60°$.



3. 选 D　当 $b\subset\alpha$ 时，$a\perp\alpha$，则 $a\perp b$；当 $b/\!/\alpha$ 时，$a\perp\alpha$，则 $a\perp b$；当 $b\perp\alpha$ 时，$a\perp\alpha$，则 $a/\!/b$. 所以直线 $a\perp b$，且 $a\perp\alpha$ 时，$b/\!/\alpha$ 或 $b\subset\alpha$，故选 D.

4. 选 D　$\because A_1B_1/\!/DC$，$A_1B_1=DC$，$\therefore$ 四边形 A_1B_1CD 是平行四边形，$\therefore A_1D/\!/B_1C$，$\because A_1D\not\subset$ 平面 AB_1C，$B_1C\subset$ 平面 AB_1C，$\therefore A_1D/\!/$ 平面 AB_1C，故选 D.

5. 选 C　如图所示，由于 $PA\perp$ 平面 $ABCD$，$BD\subset$ 平面 $ABCD$，所以 $PA\perp BD$，D 正确；$BC\perp PA$，$BC\perp BA$，而 $PA\cap AB=A$，所以 $BC\perp$ 平面 PAB，所以 $BC\perp PB$，A 正确；同理 $PD\perp CD$，B 正确；PD 与 BD 不垂直，C 不正确.



6. 选 B　若 $m\subset\beta$，$\alpha\perp\beta$，则 m 与 α 的关系不确定，故 A 错误；若 $m/\!/\alpha$，则存在直线 $n\subset\alpha$，使 $m/\!/n$，又由 $m\perp\beta$，可得 $n\perp\beta$，进而由面面垂直的判定定理得到 $\alpha\perp\beta$，故 B 正确；若 $\alpha\perp\beta$，$\alpha\perp\gamma$，则 β 与 γ 关系不确定，故 C 错误；若 $\alpha\cap\gamma=m$，$\beta\cap\gamma=n$，$m/\!/n$，则 α 与 β 可能平行，也可能相交(此时交线与 m，n 均平行)，故 D 错误. 故选 B.

7. 选 C　若 α，β 换为直线 a，b，则命题化为“若 $a/\!/b$，且 $a\perp\gamma$”，则 $b\perp\gamma$，此命题为真命题；若 α，γ 换为直线 a，b，则命题化为“若 $a/\!/\beta$，且 $a\perp b$，则 $b\perp\beta$”，此命题为假命题；若 β，γ 换为直线 a，b，则命题化为“若 $a/\!/\alpha$，且 $b\perp\alpha$，则 $a\perp b$”，此命题为真命题. 故真命题有 2 个.

8. 选 C　由已知 $AC=AB$，E 为 BC 的中点，得 $AE\perp BC$.

又 $\because BC/\!/B_1C_1$，$\therefore AE\perp B_1C_1$，C 正确.

9. 选 D　$\because m/\!/\alpha$，$m/\!/\beta$，$\alpha\cap\beta=l$，$\therefore m/\!/l$.

$\because AB/\!/l$，$\therefore AB/\!/m$. 故 A 一定成立；

$\because AC\perp l$，$m/\!/l$，$\therefore AC\perp m$. 故 B 一定成立；

$\because A\in\alpha$，$AB/\!/l$，$l\subset\alpha$，$\therefore B\in\alpha$.

$\therefore AB\not\subset\beta$，$l\subset\beta$，$\therefore AB/\!/\beta$. 故 C 一定成立；

$\because AC\perp l$，当点 C 在平面 α 内时，$AC\perp\beta$ 成立，

当点 C 不在平面 α 内时，$AC\perp\beta$ 不成立.

故 D 不一定成立.

10. 选 A　$\because BC/\!/DF$，$DF\not\subset$ 平面 PBC，$BC\subset$ 平面 PBC，

$\therefore DF/\!/$ 平面 PBC，故①正确；

$\because PD\perp AB$，$CD\perp AB$，$PD\cap CD=D$，

$\therefore AB\perp$ 平面 PDC，故②正确；

$\because PE\perp BC$，$AE\perp BC$，$PE\cap AE=E$，

$\therefore BC\perp$ 平面 PAE，

$\because BC\subset$ 平面 PBC，

$\therefore$ 平面 $PAE\perp$ 平面 PBC，故④正确；

只有③错误，故选 A.

11. 选 B　显然①④正确，②③错误.

12. 选 C　当三棱锥 $D-ABC$ 体积最大时，平面 $DAC\perp$ 平面 ABC，取 AC 的中点 O，则 $\triangle DBO$ 是等腰直角三角形，即 $\angle DBO=45°$.

13. ②④

14. **解析**：$\because PA=PB=PC$，

$\therefore P$ 在 $\triangle ABC$ 所在平面上的射影必落在 $\triangle ABC$ 的外心上. 又外心在 BC 上，设为 O，则 $PO\perp$ 平面 ABC.

又 $PO\subset$ 平面 PBC，$\therefore$ 平面 $PBC\perp$ 平面 ABC.

答案：垂直

15. **解析**：$A\notin\alpha$，则点 A 与直线 a 确定一个平面，即平面 ABD.

因为 $a/\!/\alpha$，且 $\alpha\cap$ 平面 $ABD=EG$，所以 $a/\!/EG$，即 $BD/\!/EG$，所以 $\frac{AF}{AC}=\frac{AE}{AB}$. 又 $\frac{EG}{BD}=\frac{AE}{AB}$，所以 $\frac{AF}{AC}=\frac{EG}{BD}$. 于是 $EG=\frac{AF\cdot BD}{AC}=\frac{5\times4}{5+4}=\frac{20}{9}$.

答案：$\frac{20}{9}$

16. **解析**：由题意知：$PA\perp DE$，

又 $PE\perp DE$，$PA\cap PE=P$，

$\therefore DE\perp$ 平面 PAE，又 $AE\subset$ 平面 PAE，

$\therefore DE\perp AE$.

易证 $\triangle ABE\backsim\triangle ECD$.

设 $BE=x$，则 $\frac{AB}{CE}=\frac{BE}{CD}$，即 $\frac{3}{a-x}=\frac{x}{3}$.

$\therefore x^2-ax+9=0$，由 $\Delta>0$，$a>0$，

解得 $a>6$.

答案：$(6,+\infty)$

17. **证明**：(1)在正三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，

$\because F$、F_1 分别是 AC、A_1C_1 的中点，

$\therefore B_1F_1/\!/BF$，$AF_1/\!/C_1F$.

又 $\because B_1F_1\cap AF_1=F_1$，$C_1F\cap BF=F$，

$\therefore$ 平面 $AB_1F_1/\!/$ 平面 C_1BF.

(2)在三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，$AA_1\perp$ 平面 $A_1B_1C_1$，

$\therefore B_1F_1\perp AA_1$.

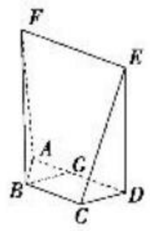
又 $B_1F_1\perp A_1C_1$，$A_1C_1\cap AA_1=A_1$，

$\therefore B_1F_1\perp$ 平面 ACC_1A_1，而 $B_1F_1\subset$ 平面 AB_1F_1，

$\therefore$ 平面 $AB_1F_1\perp$ 平面 ACC_1A_1.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

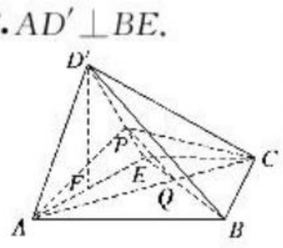
18. **解**：(1)因为四边形 $ADEF$ 是正方形，所以 $FA\parallel ED$，
故$\angle CED$ 为异面直线 CE 与 AF 所成的角.
因为 $FA\perp$ 平面 $ABCD$，所以 $FA\perp CD$，故 $ED\perp CD$.
在 Rt$\triangle CDE$ 中，因为 $CD=1$，$ED=2\sqrt{2}$，
所以 $CE=\sqrt{CD^2+ED^2}=3$，
所以 $\cos\angle CED=\dfrac{ED}{CE}=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$.
故异面直线 CE 与 AF 所成角的余弦值为$\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$.
(2)证明：如图，过点 B 作 $BG\parallel CD$ 交 AD 于点 G，
则$\angle BGA=\angle CDA=45°$.
由$\angle BAD=45°$可得 $BG\perp AB$，从而$CD\perp AB$.
又因为 $CD\perp FA$，$FA\cap AB=A$，FA，$AB\subset$ 平面 ABF，
所以 $CD\perp$ 平面 ABF.



19. **解**：(1)证明：$\because PA\perp$ 底面 ABC，$BC\subset$ 底面 ABC，
$\therefore PA\perp BC$. 又$\angle BCA=90°$，$\therefore AC\perp BC$.
又$\because AC\cap PA=A$，AC，$PA\subset$ 平面 PAC，$\therefore BC\perp$ 平面 PAC.
(2)存在，理由如下，
$\because DE\parallel BC$，又由(1)知，$BC\perp$ 平面 PAC，
$\therefore DE\perp$ 平面 PAC.
又$\because AE\subset$ 平面 PAC，$PE\subset$ 平面 PAC，
$\therefore DE\perp AE$，$DE\perp PE$.
$\therefore\angle AEP$ 为二面角 $A-DE-P$ 的平面角.
$\because PA\perp$ 底面 ABC，$\therefore PA\perp AC$，$\therefore\angle PAC=90°$.
$\therefore$在棱 PC 上存在一点 E，使得 $AE\perp PC$. 这时$\angle AEP=90°$，
故存在点 E，使得二面角 $A-DE-P$ 为直二面角.

20. **解**：(1)证明：由题意知，$AD\perp$ 平面 ABE，且 $AD\parallel BC$，
$\therefore BC\perp$ 平面 ABE. $\because AE\subset$ 平面 ABE，$\therefore AE\perp BC$.
$\because BF\perp$ 平面 ACE，且 $AE\subset$ 平面 ABE，
$\therefore BF\perp AE$，又 $BC\cap BF=B$，$\therefore AE\perp$ 平面 BCE，
又$\because BE\subset$ 平面 BCE，$\therefore AE\perp BE$.
(2)在$\triangle ABE$ 中，过点 E 作 $EH\perp AB$ 于点 H.
$\because AD\perp$ 平面 ABE，且 $AD\subset$ 平面 ACD，
$\therefore$平面 $ACD\perp$ 平面 ABE，又$\because$ 平面 $ACD\cap$ 平面 $ABE=AB$，
$EH\subset$ 平面 ABE，$\therefore EH\perp$ 平面 ACD.
由已知及(1)得 $EH=\dfrac{1}{2}AB=\sqrt{2}$，$S_{\triangle ADC}=2\sqrt{2}$.
故 $V_{D-AEC}=V_{E-ADC}=\dfrac{1}{3}\times2\sqrt{2}\times\sqrt{2}=\dfrac{4}{3}$.

21. **解**：(1)证明：根据题意可知，在长方形 $ABCD$ 中，$\triangle DAE$ 和 $\triangle CBE$ 为等腰直角三角形，
$\therefore\angle DEA=\angle CEB=45°$，
$\therefore\angle AEB=90°$，即 $BE\perp AE$.
$\because$平面 $D'AE\perp$ 平面 $ABCE$，且平面 $D'AE\cap$ 平面 $ABCE=AE$，$BE\subset$ 平面 $ABCE$，
$\therefore BE\perp$ 平面 $D'AE$，$\because AD'\subset$ 平面 $D'AE$，$\therefore AD'\perp BE$.
(2)取 AE 的中点 F，连接 $D'F$，
则 $D'F\perp AE$.
$\because$平面 $D'AE\perp$ 平面 $ABCE$，
且平面 $D'AE\cap$ 平面 $ABCE=AE$，$D'F\subset$ 平面 $D'AE$，
$\therefore D'F\perp$ 平面 $ABCE$，



$\therefore V_{D'-ABCE}=\dfrac{1}{3}S_{\text{四边形}ABCE}\cdot D'F=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{2}\times(1+2)\times1\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}=\dfrac{\sqrt{2}}{4}$.
(3)如图所示，连接 AC 交 BE 于 Q，假设在 $D'E$ 上存在点 P，使得 $D'B\parallel$ 平面 PAC，连接 PQ.
$\because D'B\subset$ 平面 $D'BE$，平面 $D'BE\cap$ 平面 $PAC=PQ$，$\therefore D'B\parallel PQ$，
$\therefore$在$\triangle EBD'$中，$\dfrac{EP}{PD'}=\dfrac{EQ}{QB}$.
$\because$在梯形 $ABCE$ 中，$\dfrac{EQ}{QB}=\dfrac{EC}{AB}=\dfrac{1}{2}$，
$\therefore\dfrac{EP}{PD'}=\dfrac{EQ}{QB}=\dfrac{1}{2}$，即 $EP=\dfrac{1}{3}ED'$，
$\therefore$在棱 ED' 上存在一点 P，且 $EP=\dfrac{1}{3}ED'$，使得 $D'B\parallel$ 平面 PAC.

22. **解**：(1)证明：$\because$点 G 是 DC 的中点，$AB=CD=2EF$，
$AB\parallel EF$，四边形 $ABCD$ 是矩形，
$\therefore EF\parallel DG$ 且 $EF=DG$，
$\therefore$四边形 $DEFG$ 是平行四边形，
$\therefore FG\parallel DE$，又 $FG\not\subset$ 平面 AED，$ED\subset$ 平面 AED，
$\therefore FG\parallel$ 平面 AED.
(2)证明：$\because$ 平面 $ABFE\perp$ 平面 $ABCD$，平面 $ABFE\cap$ 平面 $ABCD=AB$，$AD\perp AB$，$AD\subset$ 平面 $ABCD$，
$\therefore AD\perp$ 平面 BAF.
又 $AD\subset$ 平面 DAF，$\therefore$平面 $DAF\perp$ 平面 BAF.
(3)$\because$平面 $ABFE\perp$ 平面 $ABCD$，平面 $ABFE\cap$ 平面 $ABCD=AB$，$\angle EAB=90°$，$EA\subset$ 平面 $ABFE$，
$\therefore EA\perp$ 平面 $ABCD$.
$\because EF\parallel AB$，$EF\not\subset$ 平面 $ABCD$，$AB\subset$ 平面 $ABCD$，
$\therefore EF\parallel$ 平面 $ABCD$，
$\therefore F$ 到平面 $ABCD$ 的距离为 E 到平面 $ABCD$ 的距离 EA，
$\therefore V_{D-AFC}=V_{F-ADC}=\dfrac{1}{3}\cdot S_{\triangle ADC}\cdot EA=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{2}\times1\times2\times1=\dfrac{1}{3}$.

阶段质量测试卷(三)

1. 选 A　利用斜率公式 $k=\dfrac{2+\sqrt{3}-2}{4-1}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}=\tan\theta$，又 $0°\leqslant\theta<180°$，可得倾斜角为 $30°$.

2. 选 B　当两直线平行时有$\dfrac{a}{3}=\dfrac{2}{-1}\neq\dfrac{2}{-2}$，可求得$a=-6$.

3. 选 A　由题意可知直线 l_1 的斜率 $k_1=\tan60°=\sqrt{3}$，直线 l_2 的斜率 $k_2=\dfrac{-2\sqrt{3}-\sqrt{3}}{-2-1}=\sqrt{3}$，故 $k_1=k_2$，所以 $l_1\parallel l_2$ 或 l_1，l_2 重合.

4. 选 D　$\because(2x+1)-m(y+3)=0$ 恒成立，
$\therefore2x+1=0$ 且 $y+3=0$，$\therefore x=-\dfrac{1}{2}$，$y=-3$，
$\therefore$定点为$\left(-\dfrac{1}{2},-3\right)$.

5. 选 D　直线 l 的斜率存在，
设直线方程为 $y-2=k(x-1)$，
令 $x=0$，可得 $y=2-k$，
$\because$直线 l 在 y 轴上的截距的取值范围是$(-2,3)$，
$\therefore-2<2-k<3$，$\therefore-1<k<4$. 故选 D.

6. 选 D　l_1 的方程即 $y=ax+b$，斜率等于 a，在 y 轴上的截距为 b. l_2 的方程即 $y=bx-a$，斜率等于 b，在 y 轴上的截距为 $-a$. 假定 l_1 的位置，从而确定 l_2 的位置，故选 D.

7. 选 A　设 $D(m,n)$，由题意得 $AB\parallel DC$，$AD\parallel BC$，
则有 $k_{AB}=k_{DC}$，$k_{AD}=k_{BC}$，
$\therefore\begin{cases}\dfrac{0-1}{1-0}=\dfrac{3-n}{4-m},\\ \dfrac{n-1}{m-0}=\dfrac{3-0}{4-1},\end{cases}$ 解得$\begin{cases}m=3,\\ n=4,\end{cases}$
$\therefore$点 D 的坐标为$(3,4)$.

8. 选 B　由两直线垂直，得$\dfrac{1}{2}\times\left(-\dfrac{2}{m}\right)=-1$，解得$m=1$.

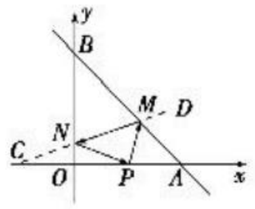
9. 选 B　由题意知，所给两条直线平行，$\therefore n=-2$.
由两条平行直线间的距离公式，得 $d=\dfrac{|m+3|}{\sqrt{1^2+(-2)^2}}=\dfrac{|m+3|}{\sqrt{5}}=\sqrt{5}$，解得 $m=2$ 或 $m=-8$(舍去)，$\therefore m+n=0$.

10. 选 C　将 $x=5$ 代入 $6x-8y+1=0$，得 $y=\dfrac{31}{8}$；代入 $3x-4y+5=0$，得 $y=5$. 由题意知$\dfrac{31}{8}<b<5$，又 b 是整数，则 $b=4$，故选 C.

11. 选 A　$\because l_1\perp l_2$，
故$-\dfrac{a}{4}\cdot\dfrac{2}{5}=-1$，
$\therefore a=10$. $\therefore l_1$：$10x+4y-2=0$.
将$(1,c)$代入，得 $c=-2$；
将$(1,-2)$代入 l_2：得 $b=-12$.
则 $a+b+c=10+(-12)+(-2)=-4$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

12. 选 A　由题意可求得



点 P 关于直线 AB 的对称点为 $D(4,2)$，关于 y 轴的对称点为 $C(-2,0)$，则光线所经过的路程的长为 $|PM|+|MN|+|NP|=|CD|=2\sqrt{10}$.

13. **解析**：当直线过原点时，所求直线的方程为 $3x-2y=0$；当直线不过原点时，所求直线的方程为 $x+y+5=0$.

答案：$x+y+5=0$ 或 $3x-2y=0$

14. **解析**：设 $M(x,y)$，

则 $|y|=\sqrt{(x+4)^2+(y-2)^2}=10$.

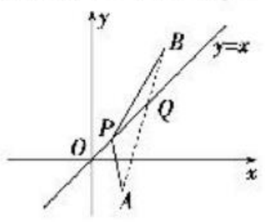
解得 $\begin{cases}x=2,\\y=10\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x=-10,\\y=10.\end{cases}$

答案：$(2,10)$ 或 $(-10,10)$

15. **解析**：点 $P(2,3)$ 关于 x 轴的对称点为 $P'(2,-3)$，则直线 $P'Q$ 的方程为 $\frac{y+3}{1+3}=\frac{x-2}{1-2}$，即反射光线所在直线方程为 $4x+y-5=0$.

答案：$4x+y-5=0$

16. **解析**：易知当点 P 为直线 AB 与直线 $y=x$ 的交点时，



$|PA|+|PB|$ 的值最小，直线 AB 的方程为 $y-5=\frac{5-(-1)}{3-1}(x-3)$，即 $3x-y-4=0$.

解方程组 $\begin{cases}3x-y-4=0,\\y=x,\end{cases}$ 得 $\begin{cases}x=2,\\y=2.\end{cases}$

所以当 $|PA|+|PB|$ 的值最小时，点 P 的坐标为 $(2,2)$.

答案：$(2,2)$

17. **解**：在 $\sqrt{3}x-y+3=0$ 中，令 $y=0$，得 $x=-\sqrt{3}$，

即 $M(-\sqrt{3},0)$.

∵直线 l 的斜率 $k=\sqrt{3}$，

∴其倾斜角 $\theta=60°$. 若直线 l 绕点 M 逆时针方向旋转 $30°$，则直线 l' 的倾斜角为 $60°+30°=90°$，此时斜率不存在，

故其方程为 $x=-\sqrt{3}$；

若直线 l 绕点 M 顺时针方向旋转 $30°$，则直线 l' 的倾斜角为 $60°-30°=30°$，此时斜率为 $\tan 30°=\frac{\sqrt{3}}{3}$，

故其方程为 $y=\frac{\sqrt{3}}{3}(x+\sqrt{3})$，即 $x-\sqrt{3}y+\sqrt{3}=0$.

综上所述，所求直线方程为 $x+\sqrt{3}=0$ 或 $x-\sqrt{3}y+\sqrt{3}=0$.

18. **解**：设所求直线 l 与两直线 l_1，l_2 分别交于 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，

则 $x_1+x_2=0$，且 $y_1+y_2=0$.

又因为点 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$ 分别在直线 l_1，l_2 上，

则 $\begin{cases}4x_1+y_1+6=0,\\3x_2-5y_2-6=0,\end{cases}$

即 $\begin{cases}4x_1+y_1+6=0,\\-3x_1+5y_1-6=0,\end{cases}$

解得 $\begin{cases}x_1=-\frac{36}{23},\\y_1=\frac{6}{23},\end{cases}$ ∴$A\left(-\frac{36}{23},\frac{6}{23}\right)$.

∴$k_{AP}=-\frac{1}{6}$，∴直线 AP 的方程为 $y=-\frac{1}{6}x$，即 $x+6y=0$，

即为所求直线 l 的方程.

19. **解**：(1)三条直线不能围成三角形时，至少有两直线平行，

当直线 l_1 和 l_2 平行时，$4-m=0$，解得 $m=4$；

当直线 l_2 和 l_3 平行时，$-m^2-1=0$，无解；

当直线 l_1 和 l_3 平行时，$-4m-1=0$，解得 $m=-\frac{1}{4}$.

综上可得 $m=4$ 或 $m=-\frac{1}{4}$.

(2)当 l_3 与 l_1，l_2 都垂直时，$m=4$，

两垂足间的距离即为平行线 $l_1:4x+y-4=0$ 和 $l_2:4x+y=0$ 的距离，

∴$d=\frac{4}{\sqrt{4^2+1}}=\frac{4\sqrt{17}}{17}$.

20. **解**：(1)$k_{AC}=\frac{a}{1-4}=-\frac{a}{3}$，$a\in(\sqrt{3},3)$，则 $k_{AC}\in\left(-1,-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$，

又∵$k=\tan\alpha$，$0°\leqslant\alpha<180°$，

∴$135°<\alpha<150°$，故直线 AC 的倾斜角 α 的取值范围为 $(135°,150°)$.

(2)$k_{BC}=\frac{0-(-3)}{4-(-5)}=\frac{1}{3}$，

∵AH 为高，∴$AH\perp BC$，

∴$k_{AH}\cdot k_{BC}=-1$，

∴$k_{AH}=-3$.

又∵l 过点 $A(1,2)$，

∴$l:y-2=-3(x-1)$，

即 $3x+y-5=0$.

21. **解**：假设存在过点 $(-5,-4)$ 的直线 l，使它与两坐标轴围成的三角形的面积为 5，

设直线 l 的方程为 $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$，

则 $\frac{-5}{a}+\frac{-4}{b}=1$，即 $4a+5b+ab=0$.

$S=\frac{1}{2}|ab|=5$，化为 $|ab|=10$.

联立 $\begin{cases}4a+5b+ab=0,\\|ab|=10,\end{cases}$

解得 $\begin{cases}a=-\frac{5}{2},\\b=4\end{cases}$ 或 $\begin{cases}a=5,\\b=-2.\end{cases}$

故存在直线 l，其方程为 $\frac{x}{-\frac{5}{2}}+\frac{y}{4}=1$ 或 $\frac{x}{5}+\frac{y}{-2}=1$，即 $8x-5y+20=0$ 或 $2x-5y-10=0$.

22. **解**：(1)∵点 $P(6,4)$，∴$k_{OP}=\frac{2}{3}$.

又∵$OP\perp AB$，∴$k_{AB}=-\frac{3}{2}$.

∵AB 过点 $P(6,4)$，

∴直线 AB 的方程为 $y-4=-\frac{3}{2}(x-6)$，化为一般式可得 $3x+2y-26=0$.

(2)设点 $A(a,4a)$，$a>0$，点 B 的坐标为 $(b,0)$，$b>0$，当直线 AB 的斜率不存在时，$a=b=6$，此时 $\triangle OAB$ 的面积 $S=\frac{1}{2}\times6\times24=72$；

当直线 AB 的斜率存在时，

有 $\frac{4a-4}{a-6}=\frac{0-4}{b-6}$，解得 $b=\frac{5a}{a-1}$，

故点 B 的坐标为 $\left(\frac{5a}{a-1},0\right)$，故 $\triangle OAB$ 的面积 $S=\frac{1}{2}\cdot\frac{5a}{a-1}\cdot4a=\frac{10a^2}{a-1}$，即 $10a^2-Sa+S=0$. ①

由题意可得方程 $10a^2-Sa+S=0$ 有解，

故判别式 $\Delta=S^2-40S\geqslant0$，∴$S\geqslant40$，

故 S 的最小值为 40，此时①为 $a^2-4a+4=0$，解得 $a=2$.

综上可得，$\triangle OAB$ 面积的最小值为 40，

当 $\triangle OAB$ 面积取最小值时，点 B 的坐标为 $(10,0)$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

阶段质量测试卷(四)

1. 选 D　由空间两点间的距离公式得 $\sqrt{(x-2)^2+(1-3)^2+(2-4)^2}=2\sqrt{6}$，解得 $x=6$ 或 $x=-2$.

2. 选 A　$(-1)^2+1^2-4m>0$，$\therefore m<\frac{1}{2}$，故选 A.

3. 选 D　圆的方程化为标准方程为 $(x+1)^2+(y-2)^2=5$，则圆心是 $(-1,2)$，半径为 $\sqrt{5}$.

4. 选 D　解法一：圆 C 的圆心 $(0,0)$ 到直线 $y=k(x+\frac{1}{2})$ 的距离 $d=\frac{\left|\frac{1}{2}k\right|}{\sqrt{k^2+1}}$，

$\because d^2=\frac{\frac{1}{4}k^2}{k^2+1}<\frac{1}{4}<1$，$\therefore$ 所判断的位置关系为相交.

解法二：直线 l：$y=k\left(x+\frac{1}{2}\right)$ 过定点 $\left(-\frac{1}{2},0\right)$，而点 $\left(-\frac{1}{2},0\right)$ 在圆 C：$x^2+y^2=1$ 内部，故直线 l 与圆 C 相交.

5. 选 D　圆 $(x-2)^2+(y+3)^2=9$ 的圆心为 $(2,-3)$，半径 $r=3$，圆心到直线的距离 $d=\frac{|2+6-3|}{\sqrt{1+4}}=\sqrt{5}$，弦长为 $2\sqrt{9-5}=4$，原点到直线的距离为 $\frac{|0+0-3|}{\sqrt{1+4}}=\frac{3\sqrt{5}}{5}$，所以 $S=\frac{1}{2}\times4\times\frac{3\sqrt{5}}{5}=\frac{6\sqrt{5}}{5}$.

6. 选 D　$\because$ 点 $(1,\sqrt{3})$ 在圆 $x^2+y^2-4x=0$ 上，

$\therefore$ 点 P 为切点，从而圆心与 P 的连线应与切线垂直. 设切线的斜率为 k，

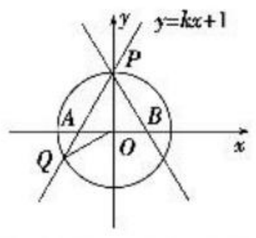
又 $\because$ 圆心为 $(2,0)$，$\therefore\frac{0-\sqrt{3}}{2-1}\cdot k=-1$，解得 $k=\frac{\sqrt{3}}{3}$，$\therefore$ 切线方程为 $x-\sqrt{3}y+2=0$.

7. 选 D　由半径、半弦长、圆心到直线的距离 d 所形成的直角三角形，可得 $d=\sqrt{2}$，故 $\frac{|a-2|}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$，解得 $a=4$ 或 $a=0$.

8. 选 A　解法一：$\because|PQ|=2\times1\times\sin60^\circ=\sqrt{3}$，圆心到直线的距离 $d=\sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}=\frac{1}{2}$，

$\therefore\frac{1}{\sqrt{k^2+1}}=\frac{1}{2}$，解得 $k=\pm\sqrt{3}$.

解法二：利用数形结合. 如图所示，$\because$ 直线 $y=kx+1$ 过定点 $(0,1)$，而点 $(0,1)$ 在圆 $x^2+y^2=1$ 上，故不妨设 $P(0,1)$，在等腰三角形 POQ 中，$\angle POQ=120^\circ$，$\therefore\angle QPO=30^\circ$，故 $\angle PAO=60^\circ$，$\therefore k=\sqrt{3}$，即直线 PA 的斜率为 $\sqrt{3}$. 同理可求得直线 PB 的斜率为 $-\sqrt{3}$.

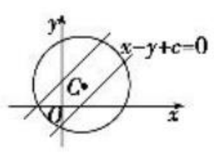


9. 选 B　$|PQ|$ 的最小值为圆心到直线的距离减去半径. 因为圆的圆心为 $(3,-1)$，半径为 2，所以 $|PQ|$ 的最小值 $d=3-(-3)-2=4$.

10. 选 C　易知点 $P(2,2)$ 在圆上，由切线与直线 $ax-y+1=0$ 垂直，得过点 $P(2,2)$ 与圆心 $(1,0)$ 的直线与直线 $ax-y+1=0$ 平行，所以 $\frac{2-0}{2-1}=a$，解得 $a=2$.

11. 选 A　根据平面几何知识，直线 AB 一定与点 $(3,1)$，$(1,0)$ 的连线垂直，这两点连线的斜率为 $\frac{1}{2}$，故直线 AB 的斜率一定是 -2，只有选项 A 中直线的斜率为 -2.

12. 选 C　圆 C：$x^2+y^2-4x-4y-10=0$ 整理为 $(x-2)^2+(y-2)^2=(3\sqrt{2})^2$，$\therefore$ 圆心坐标为 $C(2,2)$，半径长为 $3\sqrt{2}$，要使圆上至少有三个不同的点到直线 l：$x-y+c=0$ 的距离为 $2\sqrt{2}$，如图可知圆心到直线 l 的距离应小于等于 $\sqrt{2}$，$\therefore d=\frac{|2-2+c|}{\sqrt{1+1}}=\frac{|c|}{\sqrt{2}}\leqslant\sqrt{2}$，解得 $|c|\leqslant2$，即 $-2\leqslant c\leqslant2$.



13. 解析：设点 $P(0,b,0)$，

则 $\sqrt{(1-0)^2+(2-b)^2+(3-0)^2}=\sqrt{(2-0)^2+(-1-b)^2+(4-0)^2}$，解得 $b=-\frac{7}{6}$.

答案：$\left(0,-\frac{7}{6},0\right)$

14. 解析：由 $(x^2+y^2+2ay-6)-(x^2+y^2-4)=0$ 得两圆公共弦方程为 $ay-1=0$，又因公共弦长为 $2\sqrt{3}$，所以圆心 $(0,0)$ 到该公共弦的距离为 1，即 $\frac{|0-1|}{\sqrt{a^2}}=1$. 又 $a>0$，所以 $a=1$.

答案：1

15. 解析：$\because(-1)^2+2^2-2\times2-3=-2<0$，

$\therefore$ 点 P 在圆内，$\therefore$ 当 $AB\perp CP$ 时，$|AB|$ 最小.

$\because k_{CP}=-1$，$\therefore k_l=1$，则 $y-2=x+1$，即 $x-y+3=0$.

答案：$x-y+3=0$

16. 解析：当直线上的点到圆心的距离最小时切线长最短，直线 $y=x+1$ 上的点到 $(3,0)$ 的最短距离为 $\frac{|3+1|}{\sqrt{2}}=2\sqrt{2}$，此时切线长为 $\sqrt{(2\sqrt{2})^2-1}=\sqrt{7}$.

答案：$\sqrt{7}$

17. 解：设圆 C 的半径长为 r，则圆 C 的方程为 $(x-2)^2+(y-1)^2=r^2$，即 $x^2+y^2-4x-2y+5=r^2$，圆 C 与圆 O 的方程相减得公共弦所在直线的方程为 $x+2y-5+r^2=0$，因为该直线过点 $(5,-2)$，所以 $r^2=4$，则圆 C 的方程为 $(x-2)^2+(y-1)^2=4$.

18. 解：(1) $D(0,0,0)$，$N(2,1,0)$，$M(1,2,3)$.

(2) $|MD|=\sqrt{(1-0)^2+(2-0)^2+(3-0)^2}=\sqrt{14}$，

$|MN|=\sqrt{(1-2)^2+(2-1)^2+(3-0)^2}=\sqrt{11}$.

(3) $\because$ 点 P 在 xOy 平面上，$\therefore$ 设点 P 的坐标为 $(x,y,0)$，

$\because P$ 在 DN 上运动，

$\therefore\frac{x}{y}=\frac{|AD|}{|AN|}=2$，$\therefore x=2y$，$\therefore$ 点 P 的坐标为 $(2y,y,0)$，

$\therefore|MP|=\sqrt{(2y-1)^2+(y-2)^2+(0-3)^2}$

$=\sqrt{5y^2-8y+14}=\sqrt{5\left(y-\frac{4}{5}\right)^2+\frac{54}{5}}$，

$\because y\in[0,1]$，且 $0<\frac{4}{5}<1$，

$\therefore$ 当 $y=\frac{4}{5}$ 时，$|MP|$ 取得最小值 $\sqrt{\frac{54}{5}}$，即 $\frac{3\sqrt{30}}{5}$.

$\therefore|MP|$ 的最小值为 $\frac{3\sqrt{30}}{5}$.

19. 解：由题意，设所求圆的标准方程为 $(x-a)^2+(y-b)^2=9$，圆心到直线的距离为 $d=\sqrt{9-(\sqrt{7})^2}=\sqrt{2}$，则 $\frac{|a+b-4|}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$.

又因为弦 AB 所在直线的斜率为 -1，所以 $\frac{1-b}{3-a}=1$.

联立 $\begin{cases}\frac{|a+b-4|}{\sqrt{2}}=\sqrt{2},\\ \frac{1-b}{3-a}=1,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=4,\\ b=2\end{cases}$ 或 $\begin{cases}a=2,\\ b=0,\end{cases}$

故所求圆的标准方程为 $(x-4)^2+(y-2)^2=9$ 或 $(x-2)^2+y^2=9$.

20. 解：(1) 证明：$\because$ 圆 C 过原点 O，且 $|OC|^2=t^2+\frac{4}{t^2}$. $\therefore$ 圆 C 的方程是 $(x-t)^2+\left(y-\frac{2}{t}\right)^2=t^2+\frac{4}{t^2}$，

令 $x=0$，得 $y_1=0$，$y_2=\frac{4}{t}$；令 $y=0$，得 $x_1=0$，$x_2=2t$，

$\therefore S_{\triangle OAB}=\frac{1}{2}|OA|\cdot|OB|=\frac{1}{2}\times\left|\frac{4}{t}\right|\times|2t|=4$，即 $\triangle OAB$ 的面积为定值.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

(2)∵$|OM|=|ON|$,$|CM|=|CN|$,∴OC 垂直平分线段 MN.∵$k_{MN}=-2$,∴$k_{OC}=\frac{1}{2}$.

∴$\frac{2}{t}=\frac{1}{2}t$,解得 $t=2$ 或 $t=-2$.

当 $t=2$ 时,圆心 C 的坐标为(2,1),$|OC|=\sqrt{5}$,

此时 C 到直线 $y=-2x+4$ 的距离 $d=\frac{1}{\sqrt{5}}<\sqrt{5}$,

圆 C 与直线 $y=-2x+4$ 相交于两点;

当 $t=-2$ 时,圆心 C 的坐标为(-2,-1),$|OC|=\sqrt{5}$,

此时 C 到直线 $y=-2x+4$ 的距离 $d=\frac{9}{\sqrt{5}}>\sqrt{5}$.

圆 C 与直线 $y=-2x+4$ 不相交,

∴$t=-2$ 不符合题意,舍去.

∴圆 C 的方程为 $(x-2)^2+(y-1)^2=5$.

21. **解**:(1)由题意可设圆 C 的圆心为(3,t),则有 $3^2+(t-1)^2=(2\sqrt{2})^2+t^2$,解得 $t=1$.

则圆 C 的圆心为(3,1),半径长为 $\sqrt{(3-0)^2+(1-1)^2}=3$.

所以圆 C 的方程为 $(x-3)^2+(y-1)^2=9$.

(2)由 $\begin{cases}x-y+a=0,\\(x-3)^2+(y-1)^2=9\end{cases}$ 消去 y,

得 $2x^2+(2a-8)x+a^2-2a+1=0$,此时判别式 $\Delta=56-16a-4a^2$.

设 $A(x_1,y_1)$,$B(x_2,y_2)$,则有 $\begin{cases}x_1+x_2=4-a,\\x_1x_2=\frac{a^2-2a+1}{2},\end{cases}$ ①

由于 $OA\perp OB$,可得 $x_1x_2+y_1y_2=0$,又 $y_1=x_1+a$,$y_2=x_2+a$,所以 $2x_1x_2+a(x_1+x_2)+a^2=0$, ②

由①②得 $a=-1$,满足 $\Delta>0$,故 $a=-1$.

22. **解**:(1)设圆心为 $C(a,b)$,由 OC 与直线 $y=x$ 垂直,知斜率 $k_{OC}=\frac{b}{a}=-1$,故 $b=-a$.

又 $|OC|=2\sqrt{2}$,即 $\sqrt{a^2+b^2}=2\sqrt{2}$,

可解得 $a=-2$,$b=2$ 或 $a=2$,$b=-2$,

结合点 $C(a,b)$ 位于第二象限知 $a=-2$,$b=2$.

故圆 C 的方程为 $(x+2)^2+(y-2)^2=8$.

(2)假设存在 $Q(m,n)$ 符合题意,

则 $(m-4)^2+n^2=16$,$m^2+n^2\neq0$,$(m+2)^2+(n-2)^2=8$,

解得 $m=\frac{4}{5}$,$n=\frac{12}{5}$,

故圆 C 上存在异于原点的点 $Q\left(\frac{4}{5},\frac{12}{5}\right)$ 符合题意.

模块综合质量测试卷(一)

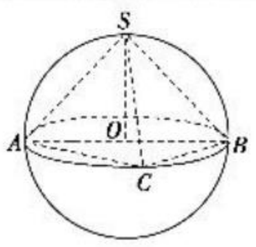
1. A

2. 选 D　①忽视两直线可以相交;②可以相交、平行;③l_1、l_2 可以异面、相交;④与 l_1、l_2 都相交的两直线可以相交,故选 D.

3. 选 B　注意到直线的斜率 a 与在 y 轴上的截距 $\frac{1}{a}$ 同号,故 B 正确.

4. D

5. 选 D　∵$SO\perp$ 底面 ABC,∴SO 为三棱锥的高线,



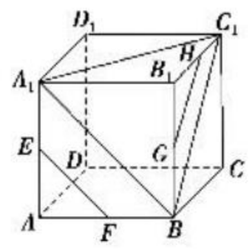
∴$SO=r$,

又∵O 在 AB 上,$AB=2r$,$AC=\sqrt{2}r$,$\angle ACB=90^\circ$,

∴$BC=\sqrt{2}r$,∴$V_{S-ABC}=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times\sqrt{2}r\times\sqrt{2}r\times r=\frac{1}{3}r^3$.

又∵球的体积 $V=\frac{4}{3}\pi r^3$,∴$\frac{V}{V_{S-ABC}}=\frac{\frac{4}{3}\pi r^3}{\frac{1}{3}r^3}=4\pi$.

6. 选 B　连接 A_1B,BC_1,A_1C_1,



∵E、F、G、H 分别为 AA_1、AB、BB_1、B_1C_1 的中点,

∴$EF\parallel\frac{1}{2}A_1B$,$GH\parallel\frac{1}{2}BC_1$,

∴$\angle A_1BC_1$ 即为异面直线 EF 与 GH 所成的角.

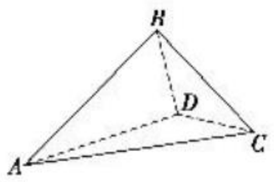
又∵$ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 是正方体,

∴$A_1B=BC_1=A_1C_1$,

∴$\angle A_1BC_1=60^\circ$.

7. 选 D　直线 $x-2y+1=0$ 与 $x=1$ 的交点为 $A(1,1)$,点(-1,0)关于 $x=1$ 的对称点为 $B(3,0)$也在所求直线上,∴所求直线方程为 $y-1=-\frac{1}{2}(x-1)$,即 $x+2y-3=0$.

8. 选 A　关键利用折叠前后不变的垂直关系,如图所示,可知 $\angle BDC$ 为二面角的平面角,设 $BD=CD=a$,则可求 $BC=AB=AC=\sqrt{2}a$,故 $\angle BDC=90^\circ$.



9. 选 D　截距相等问题关键不要忽略过原点的情况.

10. 选 C　圆的方程可化为 $(x-1)^2+(y-2)^2=5$,

则圆心为(1,2).

由点到直线的距离公式得 $d=\frac{|1-2+a|}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$,

解得 $a=2$ 或 0.

11. 选 C　可先求出圆心到直线的距离 $d=\sqrt{3}$,由于半径为 2,设圆心角为 θ,则知 $\cos\frac{\theta}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$,∴$\theta=60^\circ$.

12. 选 B　满足要求的直线应为圆心分别为 A、B,半径为 1 和 2 的两圆的公切线,而圆 A 与圆 B 相交,所以公切线有两条.

13. (0,8,0)或(0,-2,0)

14. **解析**:由已知可知 PQ 的垂直平分线为 $kx-y+4=0$,

∴直线 $kx-y+4=0$ 过圆心 $\left(-\frac{1}{2},3\right)$,∴$-\frac{1}{2}k+1=0$,

$k=2$.

答案:2

15. **解析**:由三视图可知,该几何体是半个圆锥,底面半径为 1,高为 $\sqrt{3}$,故体积为 $\frac{1}{6}\pi\times1^2\times\sqrt{3}=\frac{\sqrt{3}}{6}\pi$.

答案:$\frac{\sqrt{3}}{6}\pi$

16. **解析**:圆 C:$x^2+y^2-4x-6y+8=0$ 与 x 轴没有交点,只与 y 轴相交,取 $x=0$,得 $y^2-6y+8=0$,解得两交点分别为(0,2)和(0,4),由此得圆 C' 的圆心坐标为(0,3),半径为 1,所以标准方程为 $x^2+(y-3)^2=1$.

答案:$x^2+(y-3)^2=1$

17. **解**:由 $\begin{cases}3x+4y+12=0,\\4x-3y+16=0,\end{cases}$

解得交点 $B(-4,0)$,

∵$BD\perp AC$,∴$k_{BD}=-\frac{1}{k_{AC}}=\frac{1}{2}$,

∴AC 边上的高线 BD 的方程为

$y=\frac{1}{2}(x+4)$,即 $x-2y+4=0$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

18. **解**：由题意知，直线 AB 的斜率存在，且 $|AB|=6\sqrt{2}$，$OA=2\sqrt{5}$，作 $OC\perp AB$ 于 C.

在 Rt$\triangle OAC$ 中，$|OC|=\sqrt{20-(3\sqrt{2})^2}=\sqrt{2}$.

设所求直线的斜率为 k，

则直线的方程为 $y+4=k(x-6)$，

即 $kx-y-6k-4=0$.

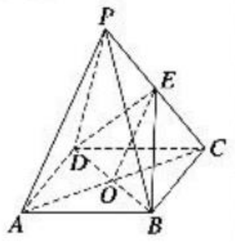
∵圆心到直线的距离为$\sqrt{2}$，

$\therefore\dfrac{|6k+4|}{\sqrt{1+k^2}}=\sqrt{2}$，即 $17k^2+24k+7=0$，

$\therefore k=-1$ 或 $k=-\dfrac{7}{17}$.

故所求直线的方程为 $x+y-2=0$ 或 $7x+17y+26=0$.

19. **证明**：如图所示，连接 AC，BD，交于点 O，连接 EO，因为四边形 $ABCD$ 为正方形，所以 O 为 AC 的中点，又 E 为 PC 的中点，所以 OE 为$\triangle PAC$ 的中位线，所以 $EO/\!/PA$，又 $EO\subset$ 平面 EDB，且 $PA\not\subset$ 平面 EDB，所以 $PA/\!/$ 平面 EDB.



20. **解**：(1)证明：

如图，连接 BD.

∵四边形 $ABCD$ 是菱形且$\angle BCD=60°$，

$\therefore\triangle BCD$ 为等边三角形.

∵E 为 CD 的中点，

$\therefore BE\perp CD$.

∵$AB/\!/CD$，

$\therefore BE\perp AB$.

∵$PA\perp$ 平面 $ABCD$，$BE\subset$ 平面 $ABCD$，

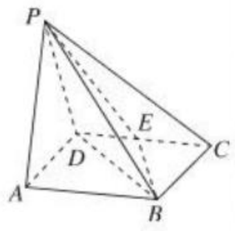
$\therefore PA\perp BE$.

∵$PA\cap AB=A$，

$\therefore BE\perp$ 平面 PAB.

∵$BE\subset$ 平面 PBE，

$\therefore$ 平面 $PBE\perp$ 平面 PAB.



(2)由(1)知 $BE\perp$ 平面 PAB，$PB\subset$ 平面 PAB，

故 $PB\perp BE$.

∵$AB\perp BE$，

$\therefore\angle PBA$ 是二面角 $A-BE-P$ 的平面角.

在 Rt$\triangle PAB$ 中，

$\tan\angle PBA=\dfrac{PA}{AB}=\sqrt{3}$，

$\therefore\angle PBA=60°$，$\therefore$二面角 $A-BE-P$ 的大小为 $60°$.

21. **解**：(1)设 M 坐标为(x,y)，由题意得 $\dfrac{\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{(x-3)^2+y^2}}=\dfrac{1}{2}$，整理得$(x+1)^2+y^2=4$.

所以 M 点的轨迹方程为$(x+1)^2+y^2=4$.

(2)因为曲线 C：$(x+1)^2+y^2=4$，

所以 C 关于直线 $2x+y-4=0$ 对称的曲线 C' 是与 C 半径相同的圆，故只需求 C' 的圆心坐标即可，设 C' 的圆心坐标(x_0,y_0).

由题意得 $\begin{cases}\dfrac{y_0}{x_0+1}=\dfrac{1}{2},\\ 2\cdot\dfrac{x_0-1}{2}+\dfrac{y_0}{2}-4=0,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x_0=\dfrac{19}{5},\\ y_0=\dfrac{12}{5}.\end{cases}$

故曲线 C' 的方程为 $\left(x-\dfrac{19}{5}\right)^2+\left(y-\dfrac{12}{5}\right)^2=4$.

22. **解**：(1)在 Rt$\triangle BAD$ 中，

∵$\angle ABD=60°$，$\therefore AB=R$，$AD=\sqrt{3}R$.

而 PD 垂直底面 $ABCD$，

$PA=\sqrt{PD^2+AD^2}=\sqrt{(2\sqrt{2}R)^2+(\sqrt{3}R)^2}=\sqrt{11}R$，

$PB=\sqrt{PD^2+BD^2}=\sqrt{(2\sqrt{2}R)^2+(2R)^2}=2\sqrt{3}R$.

在$\triangle PAB$ 中，$PA^2+AB^2=PB^2$，即$\triangle PAB$ 是以$\angle PAB$ 为直角的三角形，设点 D 到平面 PAB 的距离为 h，

由 $V_{P-ABD}=V_{D-PAB}$ 有 $PA\cdot AB\cdot h=AB\cdot AD\cdot PD$，

即 $h=\dfrac{AD\cdot PD}{PA}=\dfrac{\sqrt{3}R\cdot 2\sqrt{2}R}{\sqrt{11}R}=\dfrac{2\sqrt{66}}{11}R$，

$\therefore\sin\theta=\dfrac{h}{BD}=\dfrac{\sqrt{66}}{11}$.

(2)证明：∵$EG/\!/BC$，$\therefore\dfrac{PE}{EB}=\dfrac{PG}{GC}$. 而$\dfrac{PE}{EB}=\dfrac{DF}{FC}$，

$\therefore\dfrac{PG}{GC}=\dfrac{DF}{FC}$，$\therefore GF/\!/PD$，

$\therefore GF\perp BC$. 而 $BC/\!/EG$，

$\therefore GF\perp EG$，

$\therefore\triangle EFG$ 是直角三角形.

(3)当$\dfrac{PE}{EB}=\dfrac{1}{2}$时，$\dfrac{EG}{BC}=\dfrac{PE}{PB}=\dfrac{1}{3}$，$\dfrac{GF}{PD}=\dfrac{CF}{CD}=\dfrac{2}{3}$，

即 $EG=\dfrac{1}{3}BC=\dfrac{1}{3}\times 2R\times\sin 45°=\dfrac{\sqrt{2}}{3}R$，

$GF=\dfrac{2}{3}PD=\dfrac{2}{3}\times 2\sqrt{2}R=\dfrac{4\sqrt{2}}{3}R$，

$\therefore S_{\triangle EFG}=\dfrac{1}{2}EG\cdot GF=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{\sqrt{2}}{3}R\times\dfrac{4\sqrt{2}}{3}R=\dfrac{4}{9}R^2$.

模块综合质量测试卷(二)

1. 选 A　作出空间直角坐标系，在坐标系中标出各点的位置，然后进行投影，分析其正视图形状，易知选 A.

2. 选 D　由已知得$(a+2)a=-1$，故 $a^2+2a+1=0$，即$(a+1)^2=0$，解得 $a=-1$. 也可代入验证.

3. 选 D　设正方体的棱长为 a，球的半径为 R，则$\dfrac{4}{3}\pi R^3=\dfrac{32}{3}\pi$，

$\therefore R=2$. 又∵$\sqrt{3}a=2R=4$，$\therefore a=\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$.

4. 选 D　A 中还可能 m，n 相交或异面，所以 A 不正确；B、C 中还可能 α，β 相交，所以 B、C 不正确. 很明显 D 正确.

5. 选 D　因为 $MN\perp DC$，$MN\perp MC$，所以 $MN\perp$ 平面 DCM. 所以 $MN\perp DM$.

因为 $MN/\!/AD_1$，所以 $AD_1\perp DM$.

6. 选 C　过 A 作 $AE\perp BC$ 于点 E，则易知 $AE\perp$ 平面 BB_1C_1C，则 $\angle ADE$ 即为所求，

又 $\tan\angle ADE=\dfrac{AE}{DE}=\sqrt{3}$，故$\angle ADE=60°$. 故选 C.

7. 选 D　因为点 $M(-2,4)$在圆 C 上，

所以切线 l 的方程为$(-2-2)(x-2)+(4-1)(y-1)=25$，

即 $4x-3y+20=0$. 因为直线 l 与直线 l_1 平行，

所以$-\dfrac{a}{3}=\dfrac{4}{3}$，

即 $a=-4$，所以直线 l_1 的方程是 $-4x+3y-8=0$，

即 $4x-3y+8=0$. 所以直线 l_1 与直线 l 间的距离为$\dfrac{|20-8|}{\sqrt{4^2+(-3)^2}}=\dfrac{12}{5}$. 故选 D.

8. 选 A　设圆上任意一点为(x_1,y_1)，中点为(x,y)，则 $\begin{cases}x=\dfrac{x_1+4}{2},\\ y=\dfrac{y_1-2}{2},\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x_1=2x-4,\\ y_1=2y+2,\end{cases}$ 代入 $x^2+y^2=4$，得$(2x-4)^2+(2y+2)^2=4$，化简得$(x-2)^2+(y+1)^2=1$.

9. 选 C　$|AB|=\dfrac{1}{2}$，$|AC|=\dfrac{\sqrt{3}}{6}$，$|BC|=\dfrac{\sqrt{6}}{6}$，因为 $|AC|^2+|BC|^2=|AB|^2$，所以 $AC\perp BC$.

10. 选 B　点 P 在以 AB 为直径的圆上，因此两圆有公共点，应满足 $m-1\leqslant\sqrt{(3-0)^2+(4-0)^2}\leqslant m+1$，$\therefore 4\leqslant m\leqslant 6$，故选 B.

11. 选 A　两圆的圆心均在第一象限，先求 $|PC_1|+|PC_2|$ 的最小值，作点 C_1 关于 x 轴的对称点 $C_1'(2,-3)$，则$(|PC_1|+|PC_2|)_{\min}=|C_1'C_2|=5\sqrt{2}$，所以$(|PM|+|PN|)_{\min}=5\sqrt{2}-(1+3)=5\sqrt{2}-4$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

12. 选 C　过圆 M 的圆心(3,2)向直线 $y=2x$ 作垂线，设垂足为 N，易知当点 P 与点 N 重合时，l_1 与 l_2 关于 $y=2x$ 对称，此时，$|MP|=\dfrac{|2\times3-2|}{\sqrt{5}}=\dfrac{4}{\sqrt{5}}$，又圆 M 的半径长为 $\dfrac{2}{\sqrt{5}}$，故 $\sin\angle MPA=\dfrac{1}{2}$，则 $\angle MPA=30°$，故 $\angle APB=60°$.

13. **解析**：所得旋转体是上底、下底分别为 3,5，高为 4 的圆台，去掉一个半径为 1，高为 4 的圆柱. $V_{台}=\dfrac{1}{3}(9\pi+\sqrt{9\pi\times25\pi}+25\pi)\times4=\dfrac{196\pi}{3}$，$V_{柱}=4\pi$，则 $V=V_{台}-V_{柱}=\dfrac{184\pi}{3}$.

答案：$\dfrac{184\pi}{3}$

14. **解析**：$x=1$ 显然符合条件；当 $A(2,3)$，$B(0,-5)$ 在所求直线同侧时，所求直线与 AB 平行，

∵ $k_{AB}=4$，∴ $y-2=4(x-1)$，

即 $4x-y-2=0$.

答案：$4x-y-2=0$ 或 $x=1$

15. **解析**：已知圆的圆心为(3,4)，半径 r 为 5，圆心到直线 $y=2x+3$ 的距离为 $d=\dfrac{|2\times3-4+3|}{\sqrt{5}}=\sqrt{5}$，所以弦长 $l=2\sqrt{r^2-d^2}=4\sqrt{5}$.

答案：$4\sqrt{5}$

16. **解析**：设圆心 $(a,0)(a>0)$，

∴ $\left(\dfrac{|a-1|}{\sqrt{2}}\right)^2+(\sqrt{2})^2=|a-1|^2$. ∴ $a=3$.

∴ 圆心(3,0).

∴ 所求直线方程为 $x+y-3=0$.

答案：$x+y-3=0$

17. **解**：(1)证明：因为 $\angle DAB=60°$，$AB=2AD$，

由余弦定理得 $BD=\sqrt{3}AD$.

从而 $BD^2+AD^2=AB^2$，

故 $BD\perp AD$.

又 $PD\perp$ 底面 $ABCD$，可得 $BD\perp PD$.

所以 $BD\perp$ 平面 PAD. 故 $PA\perp BD$.

(2)如图，作 $DE\perp PB$，垂足为 E.

已知 $PD\perp$ 底面 $ABCD$，

则 $PD\perp BC$.

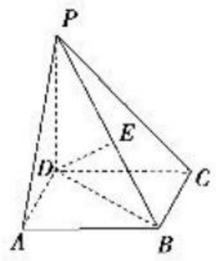
由(1)知 $BD\perp AD$，

又 $BC/\!/AD$，所以 $BC\perp BD$.

故 $BC\perp$ 平面 PBD，

所以 $BC\perp DE$.

则 $DE\perp$ 平面 PBC.



由题设知 $PD=1$，则 $BD=\sqrt{3}$，$PB=2$.

根据 $DE\cdot PB=PD\cdot BD$，得 $DE=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，

即棱锥 $D-PBC$ 的高为 $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

18. **解**：(1)由题意，得直线 AC 的方程为 $2x+y-11=0$.

解方程组 $\begin{cases}2x-y-5=0,\\2x+y-11=0,\end{cases}$

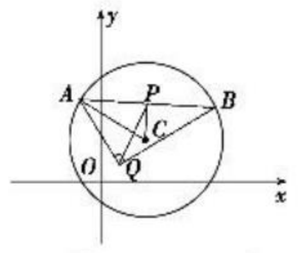
得点 C 的坐标为(4,3).

(2)设 $B(m,n)$，$M\left(\dfrac{m+5}{2},\dfrac{n+1}{2}\right)$.

于是有 $m+5-\dfrac{n+1}{2}-5=0$，

即 $2m-n-1=0$ 与 $m-2n-5=0$ 联立，解得 B 点坐标为 $(-1,-3)$，于是有 $l_{BC}:6x-5y-9=0$.

19. **解**：圆的方程可化为 $(x-12)^2+(y-14)^2=376$，如图所示，设 AB 的中点 $P(x,y)$，则 $CP\perp AB$，∴ $|AP|^2=|AC|^2-|CP|^2$. 在 Rt△ABQ 中，$|PQ|=\dfrac{1}{2}|AB|=|AP|$，∴ $|PQ|^2=|AC|^2-|CP|^2$，即 $(x-4)^2+(y-2)^2=376-[(x-12)^2+(y-14)^2]$，整理得 $x^2+y^2-16x-16y-8=0$. 故动弦 AB 的中点的轨迹方程为 $x^2+y^2-16x-16y-8=0$.



20. **证明**：(1)设 BD 中点为 O，连接 OC，OE，则由 $BC=CD$ 知，$CO\perp BD$，

又已知 $CE\perp BD$，所以 $BD\perp$ 平面 OCE.

所以 $BD\perp OE$，即 OE 是 BD 的垂直平分线，

所以 $BE=DE$.

(2)取 AB 的中点 N，连接 MN，DN，

∵ M 是 AE 的中点，

∴ $MN/\!/BE$，

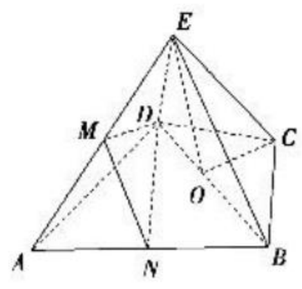
∵ △ABD 是等边三角形，

∴ $DN\perp AB$.

由 $\angle BCD=120°$ 知，$\angle CBD=30°$，所以 $\angle ABC=60°+30°=90°$，即 $BC\perp AB$，

所以 $ND/\!/BC$，

所以平面 $MND/\!/$ 平面 BEC，故 $DM/\!/$ 平面 BEC.



21. **解**：(1)$(x-1)^2+(y+2)^2=9$. 圆心 $C(1,-2)$，$r=3$.

(2)假设存在直线 l，设方程为 $y=x+m$，$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，

因为以 AB 为直径的圆过原点 O，

所以 $OA\perp OB$，即 $x_1x_2+y_1y_2=0$.

$\begin{cases}y=x+m,\\x^2+y^2-2x+4y-4=0,\end{cases}$

消去 y 得 $2x^2+2(m+1)x+m^2+4m-4=0$.

$\Delta>0$ 得 $-3\sqrt{2}-3<m<3\sqrt{2}-3$.

由根与系数关系得

$x_1+x_2=-(m+1)$，$x_1x_2=\dfrac{m^2+4m-4}{2}$，

$y_1y_2=(x_1+m)(x_2+m)=x_1x_2+m(x_1+x_2)+m^2$.

∴ $x_1x_2+y_1y_2=2x_1x_2+m(x_1+x_2)+m^2=0$.

解得 $m=1$ 或 -4.

直线 l 方程为 $y=x+1$ 或 $y=x-4$.

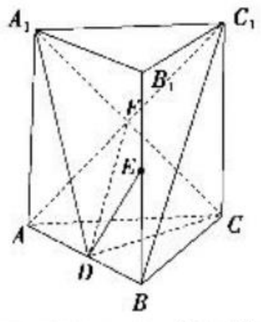
(3)设圆心 C 到直线 $l:y=x+m$ 的距离为 d，

$|AB|=2\sqrt{9-d^2}$，

$S_{\triangle CAB}=\dfrac{1}{2}\times2\sqrt{9-d^2}\times d=\sqrt{9d^2-d^4}=\sqrt{\dfrac{81}{4}-\left(d^2-\dfrac{9}{2}\right)^2}\leqslant\dfrac{9}{2}$，∴ △$CAB$ 面积的最大值是 $\dfrac{9}{2}$. 此时 $d=\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$，l 的方程为 $y=x$ 或 $y=x-6$.

22. **解**：(1)证明：连接 AC_1 交 A_1C 于点 F，则 F 为 AC_1 的中点，又 D 是 AB 中点，连接 DF，则 $BC_1/\!/DF$，因为 $DF\subset$ 平面 A_1CD，$BC_1\not\subset$ 平面 A_1CD，所以 $BC_1/\!/$ 平面 A_1CD.

(2)因为 $ABC-A_1B_1C_1$ 是直三棱柱，所以 $AA_1\perp CD$，由已知 $AC=CB$，D 为 AB 中点，所以 $CD\perp AB$，又 $AA_1\cap AB=A$，于是 $CD\perp$ 平面 ABB_1A_1，由 $AA_1=AC=CB=2$，$AB=2\sqrt{2}$，得 $\angle ACB=90°$，$CD=\sqrt{2}$，$A_1D=\sqrt{6}$，$DE=\sqrt{3}$，$A_1E=3$，故 $A_1D^2+DE^2=A_1E^2$，即 $DE\perp A_1D$，所以 $V_{C-A_1DE}=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{2}\times\sqrt{6}\times\sqrt{3}\times\sqrt{2}=1$.



关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

责任编辑 李 莉 张艳茹
美术编辑 李 欣
封面设计 欣 羽

45分钟
课时作业与单元测试

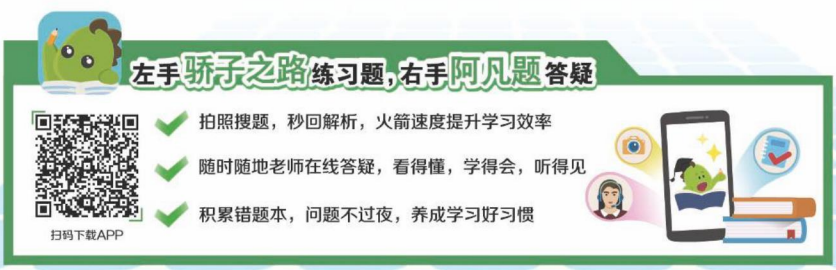
45FENZHONG KESHIZUOYEYUDANYUANCESHI SHUXUE

丛书科目

语文 数学 英语 物理 化学 生物 历史 地理 思想政治

同学们，你想了解丛书的更多信息吗？详情请登录 http://www.dfjc100.com

※ 各科配有教师用书及教学课件光盘 (word 文档可自主编辑)，英语配有原声磁带 / MP3 光盘。



ISBN 978-7-202-08049-8
定价：40.00元

手机扫一扫
获取配套学习资源

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料