东方杰创®
DONGFANG JIECHUANG
让 学习更快乐，人生更精彩

骄子之路®
the Road to Pride
主　编：邓保沧

45分钟

课时作业与单元测试

活页
可拆开使用

教辅资料站

电子教辅　试卷练习
知识总结　备课资源

扫码关注获取更多学习资料

提升＝基础＋能力＋方法
课时作业　基础自测·知能提升
阶段检测　梯度练习·评估达标
答案与解析　全解全析·点拨精准

数学

必修5　RJ·A

河北人民出版社

东方杰创®
DONGFANG JIECHUANG
让 学习更快乐，人生更精彩

骄子之路®
the Road to Pride
主　编：邓保沧

45分钟 课时作业与单元测试

活页
可拆开使用

提升＝基础＋能力＋方法
课时作业　基础自测·知能提升
阶段检测　梯度练习·评估达标
答案与解析　全解全析·点拨精准

数学

必修5　RJ·A

微信公众号
教辅资料站

河北人民出版社
石家庄

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

图书在版编目（CIP）数据

45分钟课时作业与单元测试：　数学．　必修5A　/　邓保沧主编．－2版．－石家庄：河北人民出版社，2015.6（2019.6重印）
ISBN 978-7-202-10743-0

Ⅰ．①4…　Ⅱ．①邓…　Ⅲ．①中学数学课－高中－习题集
Ⅳ．①G634

中国版本图书馆CIP数据核字（2015）第149745号

编　　委：李　越　张瑞霞　李　雅
天高云　蒋　敏　金剑飞

书　　名　45分钟课时作业与单元测试　数学　必修5　A
主　　编　邓保沧

责任编辑　李　莉　阴耀华
美术编辑　李　欣
封面设计　欣　羽

出版发行　河北人民出版社（石家庄市友谊北大街330号）
印　　刷　河北伦洋印业有限公司
开　　本　880毫米×1230毫米　1/16
印　　张　7.5
字　　数　240 000
版　　次　2015年6月第2版　2019年6月第6次印刷
书　　号　ISBN 978-7-202-10743-0
定　　价　35.00元

版权所有　翻印必究

微信公众号
教辅资料站

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料



目录 CONTENTS

第一部分　课时作业

第一章　解三角形 …… 1
1.1　正弦定理和余弦定理 …… 1
1.1.1　正弦定理 …… 1
第1课时　正弦定理(一) …… 1
第2课时　正弦定理(二) …… 3
1.1.2　余弦定理 …… 5
第3课时　余弦定理 …… 5
第4课时　正弦定理和余弦定理 …… 7
第5课时　素养提升——正弦定理与余弦定理 …… 9
1.2　应用举例 …… 11
第6课时　距离问题 …… 11
第7课时　高度、角度问题 …… 13
第8课时　几何计算问题 …… 15
第9课时　素养提升——正弦、余弦定理三应用 …… 17
阶段质量评估1 …… 19
第二章　数　列 …… 21
2.1　数列的概念与简单表示法 …… 21
第10课时　数列的概念与简单表示法 …… 21
第11课时　数列的通项公式与递推公式 …… 22
2.2　等差数列 …… 24
第12课时　等差数列的概念及通项公式 …… 24
第13课时　等差数列的性质 …… 25
第14课时　素养提升——数列与等差数列 …… 27
2.3　等差数列的前n项和 …… 29
第15课时　等差数列的前n项和 …… 29
第16课时　等差数列前n项和的性质及应用 …… 30
2.4　等比数列 …… 32
第17课时　等比数列的概念与通项公式 …… 32
第18课时　等比数列的性质 …… 33
2.5　等比数列的前n项和 …… 35
第19课时　等比数列的前n项和 …… 35
第20课时　等比数列前n项和的性质及应用 …… 36
第21课时　素养提升——等比数列的综合 …… 38
第22课时　数列求和 …… 40
阶段质量评估2 …… 42

微信公众号 教辅资料站

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料



目录 CONTENTS

第三章　不等式 …… 43

3.1　不等关系与不等式 …… 43

第 23 课时　不等关系与不等式 …… 43

3.2　一元二次不等式及其解法 …… 44

第 24 课时　一元二次不等式及其解法 …… 44

第 25 课时　一元二次不等式的应用 …… 46

第 26 课时　素养提升——不等式与一元二次不等式 …… 47

3.3　二元一次不等式(组)与简单的线性规划问题 …… 49

第 27 课时　二元一次不等式(组)与平面区域 …… 49

第 28 课时　简单的线性规划问题 …… 51

第 29 课时　素养提升——简单的线性规划 …… 53

3.4　基本不等式：$\sqrt{ab}\leqslant\frac{a+b}{2}$ …… 55

第 30 课时　基本不等式 …… 55

第 31 课时　基本不等式的应用 …… 56

第 32 课时　素养提升——不等式 …… 58

阶段质量评估 3 …… 60

第二部分　阶段检测

阶段质量测试卷(一)(第一章　解三角形) …… 61

阶段质量测试卷(二)(第二章　数　列) …… 65

阶段质量测试卷(三)(第三章　不等式) …… 69

综合质量测试卷 …… 73

第三部分　答案与解析

答案与解析 …… 78～116

提示：全书包括课时作业、阶段检测、答案与解析三部分，共计 120 页。

（根据教师教学情况不同，课时作业部分可在书中作答，也可撕下使用。）

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

第一章 解三角形

1.1 正弦定理和余弦定理

1.1.1 正弦定理

第1课时 正弦定理(一)

掌握几个要点

1. 掌握1个重点

正弦定理的表示形式：$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$，或 $a=k\sin A$，$b=k\sin B$，$c=k\sin C(k>0)$.

2. 关注2种应用

(1)已知两角和任一边，求其他两边和一角；

(2)已知两边和其中一边的对角，求另一边和两角.

3. 学会2种转化

利用正弦定理可以实现三角形中边角关系的相互转化：一方面可以化边为角，转化为三角函数问题来解决；另一方面，也可以化角为边，转化为代数问题来解决.

题点知识巩固

知识点一 已知两角及一边解三角形

1. (**2018·临沂高一联考**)一个三角形的两个角分别等于120°和45°，若45°角所对的边长是$4\sqrt{6}$，那么120°角所对的边长是 (　　)

A. 4　　B. $12\sqrt{3}$

C. $4\sqrt{3}$　　D. 12

2. 在△ABC中，$A=30°$，$C=45°$，$c=\sqrt{2}$，求a，b及$\cos B$.

知识点二 已知两边及一边的对角解三角形

3. 在△ABC中，$AB=2$，$AC=3$，$B=60°$，则$\cos C=$ (　　)

A. $\frac{\sqrt{3}}{3}$　　B. $\frac{\sqrt{6}}{3}$

C. $\frac{\sqrt{3}}{2}$　　D. $\frac{\sqrt{6}}{2}$

4. 已知△ABC中，角A，B，C的对边分别为a，b，c. 若$a=c=\sqrt{6}+\sqrt{2}$，$A=75°$，则$b=$ (　　)

A. 2　　B. $4+2\sqrt{3}$

C. $4-2\sqrt{3}$　　D. $\sqrt{6}-\sqrt{2}$

5. 在△ABC中，分别根据下列条件解三角形.

(1)$a=1$，$b=\sqrt{3}$，$A=30°$；

(2)$a=\sqrt{3}$，$b=1$，$A=60°$；

(3)$a=\sqrt{3}$，$b=1$，$B=120°$.

微信公众号
教辅资料站

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

知识点三　利用正弦定理判断三角形的形状

6.（2019·福建厦门月考）在△ABC中，内角A，B，C的对边分别为a，b，c. 若$c=2$，$b=\sqrt{2}$，$B=\frac{\pi}{4}$，则△ABC为（　　）

A. 等腰直角三角形　　B. 锐角三角形

C. 等边三角形　　D. 钝角三角形

7. 在△ABC中，角A，B，C的对边分别为a，b，c，且$a\cos B+a\cos C=b+c$，则△ABC的形状是（　　）

A. 等边三角形　　B. 锐角三角形

C. 钝角三角形　　D. 直角三角形

8. 已知方程$x^2-(b\cos A)x+a\cos B=0$的两根之积等于两根之和，且a，b为△ABC的两边，A，B为△ABC的两内角，试判断△ABC的形状.

提能达标过关

一、选择题

1.（2019·甘肃省兰州市高二月考）在△ABC中，已知$a=\sqrt{3}$，$b=1$，$A=130°$，则此三角形解的情况为（　　）

A. 无解　　B. 只有一解

C. 有两解　　D. 解的个数不确定

2. 在△ABC中，若角A，B，C的对边分别是a，b，c，则下列各式一定成立的是（　　）

A. $\frac{a}{\cos A}=\frac{b}{\cos B}$　　B. $\frac{a}{b}=\frac{\sin A}{\sin B}$

C. $a\sin B=b\cos A$　　D. $a=b\sin A$

3.（2019·河南郑州一中期末）在△ABC中，若$\sqrt{3}a=2b\sin A$，则$B=$（　　）

A. $\frac{\pi}{3}$　　B. $\frac{\pi}{6}$

C. $\frac{\pi}{3}$或$\frac{2\pi}{3}$　　D. $\frac{\pi}{6}$或$\frac{5\pi}{6}$

4. 在△ABC中，$\frac{\cos A}{a}=\frac{\sin B}{b}$，则$A=$（　　）

A. 30°　　B. 45°

C. 60°　　D. 90°

5. 已知△ABC的三个内角A，B，C所对的边分别为a，b，c，若$a\sin A\sin B+b\cos^2 A=\sqrt{2}a$，则$\frac{b}{a}=$（　　）

A. $2\sqrt{3}$　　B. $2\sqrt{2}$

C. $\sqrt{3}$　　D. $\sqrt{2}$

二、填空题

6.（2019·福建省宁德高二测试）在△ABC中，$B=45°$，$C=60°$，$c=1$，则最短的边长等于_____.

7.（2017·全国卷Ⅲ）△ABC的内角A，B，C的对边分别为a，b，c. 已知$C=60°$，$b=\sqrt{6}$，$c=3$，则$A=$_____.

8. 在△ABC中，a，b，c分别是内角A，B，C的对边，若$A=105°$，$B=45°$，$b=2\sqrt{2}$，则$c=$_____.

三、解答题

9. 在△ABC中，内角A，B，C所对的边分别为a，b，c，$2a=b+c$，$\sin^2 A=\sin B\sin C$，试判断△ABC的形状.

10. 已知在△ABC中，内角A，B，C所对的边分别为a，b，c，且$a\cos C+\frac{\sqrt{3}}{2}c=b$.

(1)求角A的大小；

(2)若$a=1$，$b=\sqrt{3}$，求c的值.

微信公众号 教辅资料站

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

第 2 课时　正弦定理(二)

掌握几个要点

1. 记牢 4 种常见变形

正弦定理的常见变形

(1)$a\sin B=b\sin A$,$a\sin C=c\sin A$,$b\sin C=c\sin B$.

(2)三角形的边长之比等于对应角的正弦比,即 $a:b:c=\sin A:\sin B:\sin C$.

(3)$a=2R\sin A$,$b=2R\sin B$,$c=2R\sin C$,$\sin A=\frac{a}{2R}$,

$\sin B=\frac{b}{2R}$,$\sin C=\frac{c}{2R}$(R 为$\triangle ABC$ 外接圆的半径).

(4)$\frac{a+b+c}{\sin A+\sin B+\sin C}=\frac{a}{\sin A}=2R$.

2. 辨析 1 个易错点

已知两边和其中一边的对角,求第三边和其他两个角,这时三角形解的情况可能无解,也可能一解或两解,首先求出另一边的对角的正弦值,当正弦值大于 1 或小于 0 时,这时三角形解的情况为无解;当正弦值大于 0 小于 1 时,再根据已知的两边的大小情况来确定该角有一个值或者两个值.

题点知识巩固

知识点一　正弦定理的灵活运用

1. 在$\triangle ABC$ 中,三个内角 A,B,C 的对边分别为 a,b,c,若 $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\cos B}$,则角 B 的大小为　(　)

A. $\frac{\pi}{6}$　　B. $\frac{\pi}{4}$

C. $\frac{\pi}{3}$　　D. $\frac{\pi}{2}$

2. 在$\triangle ABC$ 中,$A=\frac{\pi}{3}$,$BC=3$,$AB=\sqrt{6}$,则 $C=$　(　)

A. $\frac{\pi}{4}$或$\frac{3\pi}{4}$　　B. $\frac{3\pi}{4}$

C. $\frac{\pi}{4}$　　D. $\frac{\pi}{6}$

3. 在$\triangle ABC$ 中,$A:B:C=4:1:1$,则 $a:b:c$ 等于　(　)

A. $4:1:1$　　B. $2:1:1$

C. $\sqrt{2}:1:1$　　D. $\sqrt{3}:1:1$

4. 在单位圆上有三点 A,B,C,设$\triangle ABC$ 中,内角 A,B,C 所对的边分别为 a,b,c,则 $\frac{a}{\sin A}+\frac{b}{2\sin B}+\frac{2c}{\sin C}=$_____.

知识点二　正弦定理的综合应用

5. (**2018·辽宁六校协作体高二期末**)在$\triangle ABC$ 中,已知 $(b+c):(c+a):(a+b)=4:5:6$,则 $\sin A:\sin B:\sin C=$　(　)

A. $6:5:4$　　B. $7:5:3$

C. $3:5:7$　　D. $4:5:6$

6. 在$\triangle ABC$ 中,下列关系中一定成立的是　(　)

A. $a>b\sin A$　　B. $a=b\sin A$

C. $a<b\sin A$　　D. $a\geqslant b\sin A$

7. 在$\triangle ABC$ 中,角 A,B,C 的对边分别为 a,b,c,已知 $2B=A+C$,$a+\sqrt{2}b=2c$,求 $\sin C$ 的值.

提能达标过关

一、选择题

1. (**2019·辽宁省凌源市高二月考**)已知$\triangle ABC$ 的内角 A,B,C 的对边分别为 a,b,c,若 $\frac{a}{\sin A}=4$,则 $\frac{b+c-a}{\sin B+\sin C-\sin A}$ 等于　(　)

A. $\frac{1}{4}$　　B. 4

C. $\frac{1}{3}$　　D. 3

2. 在$\triangle ABC$ 中,已知 $\frac{a^2\sin B}{\cos B}=\frac{b^2\sin A}{\cos A}$,则$\triangle ABC$ 的形状为　(　)

A. 等腰直角三角形

B. 锐角三角形

C. 等边三角形

D. 等腰三角形或直角三角形

3. (**2019·江西临川一中月考**)在$\triangle ABC$ 中,下列判断不正确的是　(　)

A. $a=7,b=14,A=30°$,有两解

B. $a=30,b=25,A=150°$,有一解

C. $a=6,b=9,A=45°$,无解

D. $b=9,c=10,B=60°$,有两解

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

4. 在△ABC 中，$a=10$，$B=60°$，$\cos C=\frac{\sqrt{3}}{3}$，则 $c=$　（　）

A. $20(\sqrt{6}+2)$　　B. $20(\sqrt{6}-2)$

C. $\sqrt{6}+2$　　D. $20\sqrt{6}$

5. 在△ABC 中，角 A，B，C 的对边分别为 a，b，c，向量 $\boldsymbol{m}=(\sqrt{3},-1)$，$\boldsymbol{n}=(\cos A,\sin A)$，若 $\boldsymbol{m}\perp\boldsymbol{n}$，且 $a\cos B+b\cos A=c\sin C$，则角 A，B 的大小分别为　（　）

A. $\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3}$　　B. $\frac{2\pi}{3},\frac{\pi}{6}$

C. $\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{6}$　　D. $\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{3}$

二、填空题

6. 在△ABC 中，角 A，B，C 所对的边分别为 a，b，c，若 $a=1$，$c=\sqrt{3}$，$C=\frac{\pi}{3}$，则 $A=$_____，△ABC 外接圆的半径为_____.

7. 在△ABC 中，a，b，c 分别为内角 A，B，C 的对边，若 $b=2a$，$B=A+60°$，则 $A=$_____.

8. 在△ABC 中，$B=60°$，$AC=\sqrt{3}$，则 $AB+2BC$ 的最大值为_____.

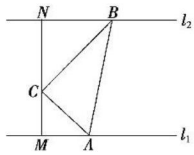
三、解答题

9. **(2019·浙江省温州中学高二测试)** 在△ABC 中，已知 $\frac{b+a}{a}=\frac{\sin B}{\sin B-\sin A}$，且 $2\sin A\sin B=2\sin^2 C$.

(1)试判断△ABC 的形状；

(2)求 $\frac{a+c}{b}$ 的取值范围.

10. **(2019·河南安阳林州一中高三月考)** 如图，在平面上，直线 $l_1/\!/l_2$，A，B 分别是 l_1，l_2 上的动点，C 是 l_1，l_2 之间的一定点，C 到 l_1 的距离 $CM=1$，C 到 l_2 的距离 $CN=\sqrt{3}$，△ABC 的内角 A，B，C 所对的边分别为 a，b，c，$a>b$，且 $b\cos B=a\cos A$.



(1)判断△ABC 的形状；

(2)记∠$ACM=\theta$，$f(\theta)=\frac{1}{b}+\frac{1}{a}$，求 $f(\theta)$ 的最大值.

微信公众号
教辅资料站

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

1.1.2　余弦定理

第3课时　余弦定理

掌握几个要点

1. 掌握1个重点

定理	定义式	变形式
三角形任何一边的平方等于其他两边的平方和减去这两边与它们夹角的余弦的积的两倍	$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$	$\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$
	$b^2=a^2+c^2-2ac\cos B$	$\cos B=\frac{c^2+a^2-b^2}{2ac}$
	$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$	$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$

2. 关注2类应用

利用余弦定理可以解决两类有关三角形的问题：

(1)已知两边和夹角或已知三边能直接利用余弦定理解三角形；

(2)若已知两边和一边的对角，既可以用正弦定理又可以用余弦定理解三角形.

3. 辨析1个易错点

利用余弦定理求三角形的边长时容易出现增解，原因是余弦定理中涉及的是边长的平方，通常转化为一元二次方程求正实数. 因此解题时需特别注意三角形三边长度所应满足的基本条件.

题点知识巩固

知识点一　已知两边与一角解三角形

1. (**2018·华东师大附中期中**)在$\triangle ABC$中，$a=9$，$b=2\sqrt{3}$，$C=150°$，则c等于　(　　)

A. $\sqrt{39}$　　B. $8\sqrt{3}$

C. $10\sqrt{2}$　　D. $7\sqrt{3}$

2. (**2019·长春一中期中**)在$\triangle ABC$中，若$a=3$，$c=7$，$C=60°$，则边长b为　(　　)

A. 5　　B. 8

C. 5或-8　　D. -5或8

3. 在$\triangle ABC$中，$A+C=2B$，$a+c=8$，$ac=15$，求b.

知识点二　已知三边解三角形

4. (**2019·广西桂林市秀峰区高二月考**)在$\triangle ABC$中，$a=3$，$b=\sqrt{7}$，$c=2$，那么B等于　(　　)

A. 30°　　B. 45°

C. 60°　　D. 120°

5. 在$\triangle ABC$中，已知$(b+c):(c+a):(a+b)=4:5:6$，求$\triangle ABC$的最大内角.

知识点三　判断三角形形状

6. 在$\triangle ABC$中，角A，B，C的对边分别为a，b，c，且$\cos^2\frac{A}{2}=\frac{b+c}{2c}$，则$\triangle ABC$是　(　　)

A. 直角三角形　　B. 锐角三角形

C. 等边三角形　　D. 等腰直角三角形

7. 如果将直角三角形的三边分别增加同样的长度组成新三角形，则新三角形的形状是　(　　)

A. 锐角三角形　　B. 直角三角形

C. 钝角三角形　　D. 由增加的长度确定

8. 在$\triangle ABC$中，若$(a+b+c)(a-b+c)=3ac$，且$2\sin A\cos C=\sin B$，试判断$\triangle ABC$的形状.

微信公众号
教辅资料站

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

提能达标过关

一、选择题

1. 已知在△ABC 中，$a=1$，$b=2$，$C=60°$，则 c 等于　（　）

A. $\sqrt{3}$　　B. $\sqrt{2}$

C. $\sqrt{5}$　　D. 5

2. （**2019·福建师大附中期末**）在△ABC 中，角 A，B，C 所对的边分别为 a，b，c，且 $a^2=b^2-c^2+\sqrt{2}ac$，则角 B 的大小是　（　）

A. 45°　　B. 60°

C. 90°　　D. 135°

3. 在△ABC 中，a，b，c 分别是角 A，B，C 所对的边，若 $a=7$，$b=8$，$\cos C=\frac{13}{14}$，则最大角的余弦值是　（　）

A. $-\frac{1}{5}$　　B. $-\frac{1}{6}$

C. $-\frac{1}{7}$　　D. $-\frac{1}{8}$

4. 在△ABC 中，$\sin A:\sin B:\sin C=3:2:3$，则 $\cos C$ 的值为　（　）

A. $\frac{1}{3}$　　B. $-\frac{2}{3}$

C. $\frac{1}{4}$　　D. $-\frac{1}{4}$

5. 在△ABC 中，$b\cos A=a\cos B$，则△ABC 是　（　）

A. 等边三角形　　B. 等腰三角形

C. 直角三角形　　D. 锐角三角形

二、填空题

6. 在△ABC 中，已知 $a=2$，$b=4$，$C=60°$，则 $A=$_____.

7. 在△ABC 中，若 $AB=\sqrt{5}$，$AC=5$，且 $\cos C=\frac{9}{10}$，则 $BC=$_____.

8. 在△ABC 中，a，b，c 分别是角 A，B，C 所对的边，且 a，b 是方程 $x^2-5x+2=0$ 的两个根，$C=60°$，则 $c=$_____.

三、解答题

9. （**2019·广东深圳中学月考**）若 $2a+1$，a，$2a-1$ 为钝角三角形的三边长，求实数 a 的取值范围.

10. （**2018·浙江温州中学高三期中**）已知 A，B，C 为△ABC 的三个内角，其所对的边分别为 a，b，c，且 $2\cos^2\frac{A}{2}+\cos A=0$.

(1)求角 A 的大小；

(2)若 $a=2\sqrt{3}$，$b=2$，求 c 的值.

微信公众号
教辅资料站

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

第 4 课时　正弦定理和余弦定理

掌握几个要点

1. 掌握 3 种常用结论

解三角形中的常用结论

(1)在△ABC 中，$A>B\Leftrightarrow a>b\Leftrightarrow \sin A>\sin B\Leftrightarrow \cos A<\cos B$.

(2)在△ABC 中，$A+B+C=\pi$，$A+B=\pi-C$，$\frac{A+B}{2}=\frac{\pi}{2}-\frac{C}{2}$，则 $\cos(A+B)=-\cos C$，$\sin(A+B)=\sin C$，$\sin\frac{A+B}{2}=\cos\frac{C}{2}$.

(3)在△ABC 中，$a^2+b^2<c^2\Leftrightarrow \cos C<0\Leftrightarrow C>\frac{\pi}{2}$；$a^2+b^2=c^2\Leftrightarrow \cos C=0\Leftrightarrow C=\frac{\pi}{2}$；$a^2+b^2>c^2\Leftrightarrow \cos C>0\Leftrightarrow 0<C<\frac{\pi}{2}$.

2. 关注 4 种类型

解三角形就是已知三角形中的三个独立元素(至少一条边)，求其他元素的过程，共包括四种类型：

(1)已知三角形的两角和一边(一般先用内角和求角或用正弦定理求边)；

(2)已知两边及夹角(一般先用余弦定理求第三边)；

(3)已知三边(先用余弦定理求角)；

(4)已知两边和一边的对角(先用正弦定理求另一边的对角或先用余弦定理求第三边，注意讨论解的个数).

在解决实际问题时，关键是弄清题意，画出示意图，转化为解三角形问题.

题点知识巩固

知识点一　正弦定理、余弦定理的综合应用

1. 设△ABC 的内角 A，B，C 的对边分别是 a，b，c，若 $b+c=2a$，$3\sin A=5\sin B$，则 C 的大小为　(　)

A. $\frac{\pi}{3}$　　B. $\frac{2\pi}{3}$

C. $\frac{3\pi}{4}$　　D. $\frac{5\pi}{6}$

2. 在△ABC 中，角 A，B，C 的对边分别是 a，b，c，已知 $b=c$，$a^2=2b^2(1-\sin A)$，则 $A=$　(　)

A. $\frac{3\pi}{4}$　　B. $\frac{\pi}{3}$

C. $\frac{\pi}{4}$　　D. $\frac{\pi}{6}$

3. 在△ABC 中，内角 A，B，C 对应的边分别为 a，b，c，且满足 $c\left(a\cos B-\frac{1}{2}b\right)=a^2-b^2$.

(1)求角 A 的大小；

(2)若 $a=\sqrt{3}$，求 $b+c$ 的取值范围.

知识点二　与三角形有关的综合问题

4. **(2019·湖北荆州中学期中)** 在直角梯形 $ABCD$ 中，$AB\parallel CD$，$\angle ABC=90^\circ$，$AB=2BC=2CD$，则 $\cos\angle DAC=$　(　)

A. $\frac{\sqrt{10}}{10}$　　B. $\frac{3\sqrt{10}}{10}$

C. $\frac{\sqrt{5}}{5}$　　D. $\frac{2\sqrt{5}}{5}$

5. 在△ABC 中，若 $(a^2+b^2)\sin(A-B)=(a^2-b^2)\sin(A+B)$，则△$ABC$ 的形状是　(　)

A. 等腰三角形

B. 直角三角形

C. 等腰直角三角形

D. 等腰三角形或直角三角形

6. **(2018·福建省南安一中阶段性考试)** 在△ABC 中，A，B，C 的对边分别为 a，b，c，且 $\frac{\sin A}{a}=\frac{\sqrt{3}\cos C}{c}$.

(1)求 C 的大小；

(2)如果 $a+b=6$，$\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}=4$，求 c 的值.

微信公众号 教辅资料站

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

提能达标过关

一、选择题

1.（2019·陕西省西安中学高三月考）$\triangle ABC$ 的内角 A，B，C 的对边分别为 a，b，c. 若 $B=2A$，$a=1$，$b=\sqrt{3}$，则 $c=$　　（　　）

A. 1 或 2　　B. 2

C. $\sqrt{2}$　　D. 1

2. 已知 $\triangle ABC$ 的内角 A，B，C 所对的边分别为 a，b，c，$\cos A=\frac{12}{13}$，且 $c-b=1$，$bc=156$，则 a 的值为　　（　　）

A. 3　　B. 5

C. $2\sqrt{6}$　　D. 4

3. 在 $\triangle ABC$ 中，角 A，B，C 的对边分别是 a，b，c，若 $c-a\cos B=(2a-b)\cos A$，则 $\triangle ABC$ 的形状是　　（　　）

A. 等腰三角形

B. 直角三角形

C. 等腰直角三角形

D. 等腰三角形或直角三角形

4. 在 $\triangle ABC$ 中，$\sin^2 A\leqslant\sin^2 B+\sin^2 C-\sin B\sin C$，则 A 的取值范围是　　（　　）

A. $\left(0,\frac{\pi}{6}\right]$　　B. $\left[\frac{\pi}{6},\pi\right)$

C. $\left(0,\frac{\pi}{3}\right]$　　D. $\left[\frac{\pi}{3},\pi\right)$

5. 在 $\triangle ABC$ 中，已知 a，b，c 分别是角 A，B，C 的对边，满足 $c=2b\sin C$，$a^2=b^2+c^2-\sqrt{3}bc$，则 $C=$　　（　　）

A. $\frac{\pi}{6}$　　B. $\frac{\pi}{3}$

C. $\frac{\pi}{2}$　　D. $\frac{2\pi}{3}$

二、填空题

6. 在 $\triangle ABC$ 中，内角 A，B，C 所对的边分别是 a，b，c. 已知 $b-c=\frac{1}{4}a$，$2\sin B=3\sin C$，则 $\cos A$ 的值为_____.

7. 在 $\triangle ABC$ 中，若 $a:b:c=3:3:5$，则 $\frac{2\sin A-\sin B}{\sin C}$ 的值为_____.

8.（2019·大连育才中学期中）对于 $\triangle ABC$，有如下四个命题：

①若 $\sin 2A=\sin 2B$，则 $\triangle ABC$ 为等腰三角形；

②若 $\sin B=\cos A$，则 $\triangle ABC$ 是直角三角形；

③若 $\sin^2 A+\sin^2 B>\sin^2 C$，则 $\triangle ABC$ 是钝角三角形；

④若 $\frac{a}{\cos\frac{A}{2}}=\frac{b}{\cos\frac{B}{2}}=\frac{c}{\cos\frac{C}{2}}$，则 $\triangle ABC$ 是等边三角形.

其中正确命题的序号是_____.

三、解答题

9. 在 $\triangle ABC$ 中，内角 A，B，C 的对边分别为 a，b，c，已知 $2a^2=2b^2+2c^2-bc$，且 $a=2b$.

(1)求 $\cos A$ 的值；

(2)求 $\cos(A-B)$ 的值.

10. 已知在 $\triangle ABC$ 中，角 A，B，C 所对的边分别是 a，b，c，且 $\frac{a}{\sqrt{3}\cos A}=\frac{c}{\sin C}$.

(1)求角 A 的大小；

(2)若 $a=6$，求 $b+c$ 的取值范围.

微信公众号 教辅资料站

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

第 5 课时　素养提升——正弦定理与余弦定理

掌握几个要点

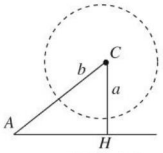
细说三角形中解的个数

解三角形时，处理“已知两边及其一边的对角，求第三边和其他两角”问题需判断解的个数，这是一个比较棘手的问题. 下面对这一问题进行深入探讨.

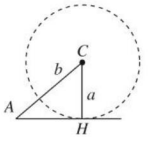
1. 出现问题的根源

我们作图来直观地观察一下. 不妨设已知△ABC 的两边 a，b 和角 A，作图步骤如下：①先作出已知角 A，把未知边 c 画为水平的，角 A 的另一条边为已知边 b；②以边 b 的不是 A 点的另外一个端点为圆心，边 a 为半径作圆 C；③观察圆 C 与边 c 交点的个数，便可得此三角形解的个数.

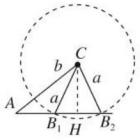
显然，当 A 为锐角时，有如图所示的四种情况：



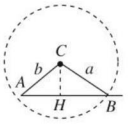
$a<CH=b\sin A$
无解



$a=CH=b\sin A$
仅有一个解

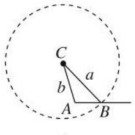


$CH=b\sin A<a<b$
有两个解

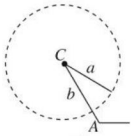


$a\geqslant b$
仅有一个解

当 A 为钝角或直角时，有如图所示的两种情况：



$a>b$
一解



$a\leqslant b$
无解

根据上面的分析可知，由于 a，b 长度关系的不同，导致了问题有不同个数的解. 若 A 为锐角，只有当 a 不小于 $b\sin A$ 时才有解，随着 a 的增大得到的解的个数也是不相同的. 当 A 为钝角时，只有当 a 大于 b 时才有解.

2. 解决问题的策略

(1)正弦定理法

已知△ABC 的两边 a，b 和角 A，求 B.

根据正弦定理 $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}$，可得 $\sin B=\frac{b\sin A}{a}$.

若 $\sin B>1$，三角形无解；

若 $\sin B=1$，三角形有且只有一解；若 $0<\sin B<1$，B 有两解，再根据 a，b 的大小关系确定 A，B 的大小关系(利用大边对大角)，从而确定 B 的两个解的取舍.

(2)余弦定理法

已知△ABC 的两边 a，b 和角 A，求 c.

利用余弦定理可得 $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$，

整理得 $c^2-2bc\cos A-a^2+b^2=0$.

适合问题的上述一元二次方程的解 c 便为此三角形的解.

(3)公式法

当已知△ABC 的两边 a，b 和角 A 时，通过前面的分析可总结三角形解的个数的判断公式如下表：

$A<90^\circ$				$A\geqslant 90^\circ$	
$a\geqslant b$	$a<b$			$a>b$	$a\leqslant b$
	$a>b\sin A$	$a=b\sin A$	$a<b\sin A$		
一解	二解	一解	无解	一解	无解

3. 典例分析

在△ABC 中，已知 $A=45^\circ$，$a=2$，$b=\sqrt{2}$(其中角 A，B，C 的对边分别为 a，b，c)，试判断符合上述条件的△ABC 有多少个？

［**分析**］ 此题为“已知两边和其中一边的对角”解三角形的问题，可以利用上述办法来判断△ABC 解的情况.

［**解**］ 解法一：由正弦定理 $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}$，

可得 $\sin B=\frac{\sqrt{2}}{2}\sin 45^\circ=\frac{1}{2}<1$.

又因为 $a>b$，所以 $A>B$，故 $B=30^\circ$，

所以符合条件的△ABC 只有一个.

解法二：由余弦定理，得

$2^2=c^2+(\sqrt{2})^2-2\times\sqrt{2}\times c\cos 45^\circ$，

即 $c^2-2c-2=0$，解得 $c=1\pm\sqrt{3}$. 而 $1-\sqrt{3}<0$，

故仅有一解，所以符合条件的△ABC 只有一个.

解法三：A 为锐角，$a>b$，故符合条件的△ABC 只有一个.

易错易混提示

挖掘三角形中的隐含条件

解三角形是高中数学的重要内容，也是高考的一个热点. 由于我们对三角公式比较熟悉，做题时比较容易入手. 但是公式较多且性质灵活，解题时稍有不慎，常会出现增解、错解现象，其根本原因是对题设中的隐含条件挖掘不够. 下面结合例子谈谈在解三角形时，题目中隐含条件的挖掘.

隐含条件 1　两边之和大于第三边

【例 1】 已知钝角三角形的三边 $a=k$，$b=k+2$，$c=k+4$，求 k 的取值范围.

［**错解**］ 设角 A，B，C 的对边分别为 a，b，c.

$\because c>b>a$ 且△ABC 为钝角三角形，$\therefore C$ 为钝角.

由余弦定理得

$$\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\frac{k^2+(k+2)^2-(k+4)^2}{2k(k+2)}$$

$$=\frac{k^2-4k-12}{2k(k+2)}<0.$$

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

$\therefore k^2-4k-12<0$，解得$-2<k<6$.

又$\because k$为三角形的边长，$\therefore k>0$.

综上所述，k的取值范围为$(0,6)$.

［点拨］　忽略了隐含条件：$k,k+2,k+4$构成一个三角形，需满足$k+(k+2)>k+4$.即$k>2$而不是$k>0$.

［正解］　设角A,B,C的对边分别为a,b,c.

$\because c>b>a$，且$\triangle ABC$为钝角三角形，$\therefore C$为钝角.

由余弦定理得$\cos C=\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\dfrac{k^2-4k-12}{2k(k+2)}<0$.

$\therefore k^2-4k-12<0$，解得$-2<k<6$.

由两边之和大于第三边得$k+(k+2)>k+4$，$\therefore k>2$，

综上所述，k的取值范围为$(2,6)$.

［点评］　虽然是任意两边之和大于第三边，但实际应用时通常不用都写上，只需最小两边之和大于最大边就行了.

隐含条件2　三角形的内角范围

【例2】　在$\triangle ABC$中，角A,B,C的对边分别为a,b,c.$B=3A$，求$\dfrac{b}{a}$的取值范围.

［错解］　由正弦定理得$\dfrac{b}{a}=\dfrac{\sin B}{\sin A}=\dfrac{\sin 3A}{\sin A}$

$=\dfrac{\sin(A+2A)}{\sin A}=\dfrac{\sin A\cos 2A+\cos A\sin 2A}{\sin A}$

$=\cos 2A+2\cos^2 A=4\cos^2 A-1$.

$\because 0\leqslant\cos^2 A<1$，$\therefore -1\leqslant 4\cos^2 A-1<3$，

$\because \dfrac{b}{a}>0$，$\therefore 0<\dfrac{b}{a}<3$.故$\dfrac{b}{a}$的取值范围为$(0,3)$.

［点拨］　忽略了三角形内角和为$180°$，及角A,B的取值范围，从而导致$\dfrac{b}{a}$取值范围求错.

［正解］　由正弦定理得$\dfrac{b}{a}=\dfrac{\sin B}{\sin A}=\dfrac{\sin 3A}{\sin A}=$

$\dfrac{\sin(A+2A)}{\sin A}=\dfrac{\sin A\cos 2A+\cos A\sin 2A}{\sin A}=$

$\cos 2A+2\cos^2 A=4\cos^2 A-1$.

$\because A+B+C=180°$，$B=3A$.

$\therefore A+B=4A<180°$，

$\therefore 0°<A<45°$.$\therefore \dfrac{\sqrt{2}}{2}<\cos A<1$，

$\therefore 1<4\cos^2 A-1<3$，

$\therefore 1<\dfrac{b}{a}<3$.故$\dfrac{b}{a}$的取值范围为$(1,3)$.

［点评］　解三角形问题，角的取值范围至关重要.一些问题，角的取值范围隐含在题目的条件中，若不仔细审题，深入挖掘，往往疏漏而导致解题失败.

素养培优提能

一、选择题

1. 已知在$\triangle ABC$中，$b=4\sqrt{3}$，$c=2$，$C=30°$，那么此三角形　（　）

A. 有一解　　B. 有两解

C. 无解　　D. 解的个数不确定

2.（**2019·江西赣州期末**）在$\triangle ABC$中，已知A,a,b，给出下列说法：

①若$A\geqslant 90°$，则此三角形最多有一解；

②若$A<90°$，且$a=b\sin A$，则此三角形为直角三角形，且$B=90°$；

③当$A<90°$，且$b\sin A<a\leqslant b$时，此三角形有两解.

其中正确说法的个数为　（　）

A. 0　　B. 1

C. 2　　D. 3

3. 在$\triangle ABC$中，内角A,B,C的对边分别是a,b,c，若$a^2-b^2=\sqrt{3}bc$，$\sin C=2\sqrt{3}\sin B$，则$A=$　（　）

A. $30°$　　B. $60°$

C. $120°$　　D. $150°$

4. 在$\triangle ABC$中，$AB=5$，$AC=3$，$BC=4$，那么$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$等于　（　）

A. 9　　B. 12

C. 15　　D. 20

5. 在$\triangle ABC$中，角A,B,C所对的边分别为a,b,c，若$C=120°$，$c=\sqrt{2}a$，则　（　）

A. $a>b$

B. $a<b$

C. $a=b$

D. a与b的大小关系不能确定

二、填空题

6. 在$\triangle ABC$中，$\cos A=\dfrac{5}{13}$，$\sin B=\dfrac{3}{5}$，$a=20$，则b的值为_____.

7.（**2019·河北石家庄一中月考**）在$\triangle ABC$中，BD为$\angle ABC$的平分线，$AB=3$，$BC=2$，$AC=\sqrt{7}$，则$\sin\angle ABD=$_____.

8. 在$\triangle ABC$中，角A,B,C的对边分别为a,b,c，且$\sin A\sin B+\sin B\sin C+\cos 2B=1$.若$C=\dfrac{2\pi}{3}$，则$\dfrac{a}{b}=$_____.

三、解答题

9.（**2018·广东中山一中等六校联考**）已知$\triangle ABC$的角A,B,C所对的边分别为a,b,c，若$\sin^2 A+\sin^2 B+\sin A\sin B=\sin^2 C$，求$\dfrac{a+b}{c}$的取值范围.

10.（**2019·湖南长沙市一中调研**）在锐角三角形ABC中，a,b,c分别为内角A,B,C所对的边，且满足$\sqrt{3}a-2b\sin A=0$.

(1)求角B的大小；

(2)若$a+c=5$，且$a>c$，$b=\sqrt{7}$，求$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$的值.

微信公众号 教辅资料站

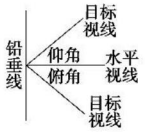
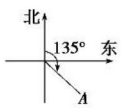
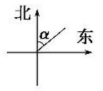
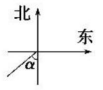
关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

1.2　应用举例

第6课时　距离问题

掌握几个要点

1. 记牢3种常用角

术语名称	术语意义	图形表示
仰角与俯角	在目标视线与水平视线所成的角中，目标视线在水平视线上方的叫做仰角，目标视线在水平视线下方的叫做俯角	
方位角	从某点的指北方向线起按顺时针方向到目标方向线之间的夹角叫做方位角．方位角θ的范围是$0°\leqslant\theta<360°$	
方向角	正北或正南方向线与目标方向线所成的锐角，通常表达为北(南)偏东(西)α	例：(1)北偏东α： (2)南偏西α：

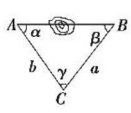
2. 掌握3类距离问题

当A,B两点之间的距离不能直接测量时，求AB的距离分为以下三类：

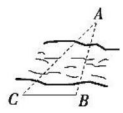
(1)两点间不可通又不可视(如图①)：可取某点C，使得A,B与C之间的距离可直接测量，测出$AC=b,BC=a$以及$\angle ACB=\gamma$，利用余弦定理得，$AB=\sqrt{a^2+b^2-2ab\cos\gamma}$.

(2)两点间可视但不可到达(如图②)：可选取与B同侧的点C，测出$BC=a$以及$\angle ABC$和$\angle ACB$，先使用内角和定理求出$\angle BAC$，再利用正弦定理求出AB.

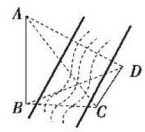
(3)两点都不可到达(如图③)：在河边测量对岸两个建筑物之间的距离，可先在一侧选取两点C,D，测出$CD=m$，$\angle ACB,\angle BCD,\angle ADC,\angle ADB$，再在$\triangle BCD$中求出$BC$，在$\triangle ADC$中求出$AC$，最后在$\triangle ABC$中，由余弦定理求出$AB$.



①



②

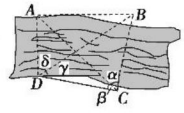


③

题点知识巩固

知识点一　两点都不可到达

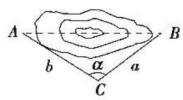
1. 如图，A,B两点在河的同侧，且A,B两点均不可到达，要测出A,B的距离，测量者可以在河岸边选定两点C,D，测得$CD=a$，同时在C,D两点分别测得$\angle BCA=\alpha$，$\angle ACD=\beta$，$\angle CDB=\gamma$，$\angle BDA=\delta$．在$\triangle ADC$和$\triangle BDC$中，由正弦定理分别计算出AC和BC，再在$\triangle ABC$中，应用余弦定理计算出AB.



若测得$CD=\frac{\sqrt{3}}{2}$ km，$\angle ADB=\angle CDB=30°$，$\angle ACD=60°$，$\angle ACB=45°$，则$A,B$两点间的距离为_____km.

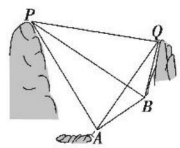
知识点二　两点不相通的距离

2. 如图所示，要测量一水塘两侧A,B两点间的距离，其方法先选定适当的位置C，用经纬仪测出角α，再分别测出AC,BC的长b,a，则可求出A,B两点间的距离．即$AB=\sqrt{a^2+b^2-2ab\cos\alpha}$．若测得$CA=400$ m，$CB=600$ m，$\angle ACB=60°$，则A,B两点的距离为_____m.



知识点三　两点可视但有一点不可到达

3. 如图，为了测量两座山峰P,Q两点之间的距离，选择山坡上一段长度为$300\sqrt{3}$ m且和P,Q两点在同一平面内的路段AB的两个端点作为观测点，现测得$\angle PAB=90°$，$\angle PAQ=\angle PBA=\angle PBQ=60°$，则$P,Q$两点间的距离为_____m.



提能达标过关

一、选择题

1. 某人从A处出发，沿北偏东60°行走$3\sqrt{3}$公里到B处，再沿正东方向行走2公里到C处，则AC两地的距离为　(　　)

A. 3公里　　B. 5公里

C. 7公里　　D. 8公里

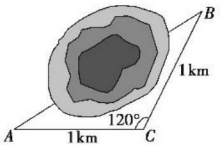
关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

2. 江岸边有一炮台高 30 米，江中有两条船，由炮台顶部测得俯角分别为 45°和 30°，而且两条船与炮台底部连线成 30°，则两条船相距　　（　　）

A. $10\sqrt{3}$ 米　　B. $100\sqrt{3}$ 米

C. $20\sqrt{30}$ 米　　D. 30 米

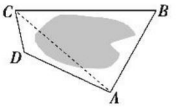
3. 如图，在高速公路建设中需要确定隧道的长度，工程技术人员已测得隧道两端的两点 A，B 到点 C 的距离 $AC=BC=1$ km，且 $C=120°$，则 A，B 两点间的距离为　　（　　）



A. $\sqrt{3}$ km　　B. $\sqrt{2}$ km

C. 1.5 km　　D. 2 km

4. 如图，为了测量 A，C 两点间的距离，选取同一平面上 B，D 两点，测出四边形 $ABCD$ 各边的长度（单位：km）：$AB=5$，$BC=8$，$CD=3$，$DA=5$，且 $\angle B$ 与 $\angle D$ 互补，则 AC 的长为　　（　　）



A. 7 km　　B. 8 km

C. 9 km　　D. 6 km

5. 甲船在湖中 B 岛的正南 A 处，$AB=3$ km，甲船以 8 km/h 的速度向正北方向航行，同时乙船自 B 岛出发，以 12 km/h 的速度向北偏东 60°方向驶去，则行驶 15 min 时，两船间的距离是　　（　　）

A. $\sqrt{7}$ km　　B. $\sqrt{13}$ km

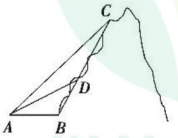
C. $\sqrt{19}$ km　　D. $\sqrt{10-3\sqrt{3}}$ km

二、填空题

6. 一艘船以 4 km/h 的速度沿着与水流方向成 120°的方向航行，已知河水流速为 2 km/h，则经过 $\sqrt{3}$ h，该船实际航程为_____km.

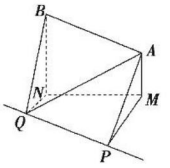
7. 已知 A 船在灯塔 C 北偏东 80°处，且 A 到 C 的距离为 2 km，B 船在灯塔 C 北偏西 40°处，A，B 两船的距离为 3 km，则 B 到 C 的距离为_____km.

8. （**2019·江苏淮安中学月考**）如图，某山上原有一条笔直的山路 BC，现在新架设了一条索道 AC，小李在山脚 B 处看索道 AC，测得 $\angle ABC=120°$，从 B 处攀登 400 米后到达 D 处，再看索道 AC，测得 $\angle ADC=150°$，从 D 处再攀登 800 米方到达 C 处，则索道 AC 的长为_____米.

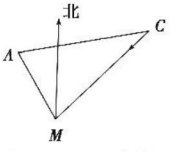


三、解答题

9. 如图，已知在东西走向上有 AM，BN 两个发射塔，且 $AM=100$ m，$BN=200$ m，一测量车在塔底 M 的正南方向的点 P 处测得发射塔顶 A 的仰角为 30°，该测量车向北偏西 60°方向行驶了 $100\sqrt{3}$ m 后到达点 Q，在点 Q 处测得发射塔顶 B 的仰角为 θ，且 $\angle BQA=\theta$，经计算，$\tan\theta=2$，求两发射塔顶 A，B 之间的距离.



10. （**2019·安徽师大附中高一测试**）如图所示，某人在 M 汽车站的北偏西 20°的方向上的 A 处，观测到点 C 处有一辆汽车沿公路向 M 站行驶，公路的走向是 M 站的北偏东 40°，开始时，汽车到 A 的距离为 31 km，汽车前进 20 km 后，到 A 的距离缩短了 10 km，问汽车还需行驶多远，才能到达 M 汽车站？



关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

第 7 课时　高度、角度问题

掌握几个要点

1. 关注高度问题的 3 个注意点

利用正、余弦定理求解高度问题应注意的 3 个点

(1)在处理有关高度问题时，要理解仰角、俯角(它是在铅垂面上所成的角)、方向(位)角(它是在水平面上所成的角)是关键.

(2)在实际问题中，可能会遇到空间与平面(地面)同时研究的问题，这时最好画两个图形，一个空间图形，一个平面图形，这样处理起来既清楚又不容易搞错.

(3)注意山或塔垂直于地面或海平面，把空间问题转化为平面问题.

2. 明确角度问题的 3 个注意点

解决测量角度问题的 3 个注意点

(1)明确方向角的含义.

(2)分析题意，分清已知与所求，再根据题意正确画出示意图，这是最关键、最重要的一步.

(3)将实际问题转化为可用数学方法解决的问题后，注意正、余弦定理的“联袂”使用.

题点知识巩固

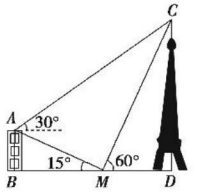
知识点一　高度问题

1. 要测量电视塔 AB 的高度，在 C 点测得塔顶的仰角是 $45°$，在 D 点测得塔顶的仰角是 $30°$，并测得水平面上的 $\angle BCD=120°$，$CD=40$ m，则电视塔的高度是　(　　)

A. 30 m　　B. 40 m

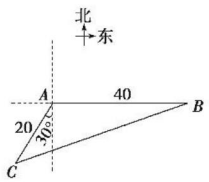
C. $40\sqrt{3}$ m　　D. $40\sqrt{2}$ m

2. (**2018 · 郑州模拟**)如图，一栋建筑物 AB 的高为 $(30-10\sqrt{3})$ 米，在该建筑物的正东方向有一个通信塔 CD，在它们之间的点 M(B，M，D 三点共线)处测得楼顶 A，塔顶 C 的仰角分别是 $15°$和 $60°$，在楼顶 A 处测得塔顶 C 的仰角是 $30°$，则通信塔 CD 的高为_____米.



知识点二　角度问题

3. 如图，位于 A 处的信息中心获悉：在其正东方向相距 40 海里的 B 处有一艘渔船遇险，在原地等待营救. 信息中心立即把消息告知在其南偏西 $30°$、相距 20 海里的 C 处的乙船，现乙船朝北偏东 θ 的方向沿直线 CB 前往 B 处救援，求 $\cos\theta$ 的值.



提能达标过关

一、选择题

1. (**2018 · 江西联考**)某位居民站在离地 20 m 高的阳台上观测到对面小高层房顶的仰角为 $60°$，小高层底部的俯角为 $45°$，那么这栋小高层的高度为　(　　)

A. $20\left(1+\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$m　　B. $20(1+\sqrt{3})$m

C. $10(\sqrt{2}+\sqrt{6})$m　　D. $20(\sqrt{2}+\sqrt{6})$m

2. 一个大型喷水池的中央有一个强大喷水柱，为了测量喷水柱喷出的水柱的高度，某人在喷水柱正西方向的点 A 测得水柱顶端的仰角为 $45°$，沿点 A 向北偏东 $30°$前进 100 m 到达点 B，在 B 点测得水柱顶端的仰角为 $30°$，则水柱的高度是　(　　)

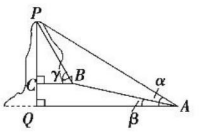
A. 50 m　　B. 100 m

C. 120 m　　D. 150 m

微信公众号
教辅资料站

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

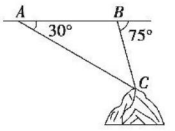
3. 如图，在山脚 A 测得山顶 P 的仰角为 $\alpha=30°$，沿倾斜角 $\beta=15°$ 的斜坡向上走 a 米到 B，在 B 处测得山顶 P 的仰角 $\gamma=60°$，则山高 $h=$　　（　　）



A. $\frac{\sqrt{2}}{2}a$ 米　　B. $\frac{a}{2}$ 米

C. $\frac{\sqrt{3}}{2}a$ 米　　D. a 米

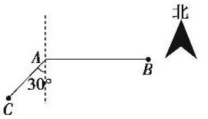
4. 如图，飞机的航线和山顶在同一个铅垂面内，若飞机的高度为海拔 18 km，速度为 1 000 km/h，飞行员先看到山顶的俯角为 30°，经过 1 min 后又看到山顶的俯角为 75°，则山顶的海拔高度为（精确到 0.1 km，参考数据：$\sqrt{3}\approx1.732$）（　　）



A. 8.4 km　　B. 6.6 km

C. 6.5 km　　D. 5.6 km

5. （**2019 · 南昌模拟**）如图所示，当甲船位于 A 处时获悉，在其正东方向相距 20 海里的 B 处有一艘渔船遇险等待营救，甲船立即前往营救，同时把消息告知在甲船的南偏西 30°相距 10 海里 C 处的乙船，乙船立即朝北偏东 $\theta+30°$ 角的方向沿直线前往 B 处营救，则 $\sin\theta$ 的值为　　（　　）

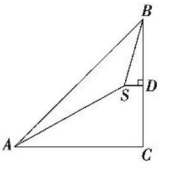


A. $\frac{\sqrt{21}}{7}$　　B. $\frac{\sqrt{2}}{2}$

C. $\frac{\sqrt{3}}{2}$　　D. $\frac{5\sqrt{7}}{14}$

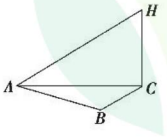
二、填空题

6. （**2019 · 郑州调研**）如图，在山底测得山顶仰角 $\angle CAB=45°$，沿倾斜角为 30°的斜坡走 1 000 m 至 S 点，又测得山顶仰角 $\angle DSB=75°$，则山高 BC 为_____m.



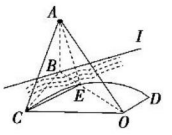
7. 某货轮在 A 处看灯塔 S 在北偏东 30°方向，它向正北方向航行 24 海里到达 B 处，看灯塔 S 在北偏东 75°方向. 则此时货轮到灯塔 S 的距离为_____海里.

8. 为了应对日益严重的气候问题，某气象仪器科研单位研究出一种新的“弹射型”气候仪器，这种仪器可以弹射到空中进行气候观测，如图所示，A，B，C 三地位于同一水平面上，这种仪器在 C 地进行弹射实验，观测点 A，B 两地相距 100 米，$\angle BAC=60°$，在 A 地听到弹射声音比 B 地晚 $\frac{2}{17}$ 秒（已知声音传播速度为 340 米/秒），在 A 地测得该仪器至高 H 处的仰角为 30°，则这种仪器的垂直弹射高度 $HC=$_____米.



三、解答题

9. 如图，有一段河流，河的一侧是以 O 为圆心，半径为 $10\sqrt{3}$ 米的扇形区域 OCD，河的另一侧是一段笔直的河岸 l，岸边有一烟囱 AB（不计 B 离河岸的距离），且 OB 的连线恰好与河岸 l 垂直，设 OB 与圆弧 CD 的交点为 E. 经测量，扇形区域和河岸处于同一水平面，在点 C、点 O 和点 E 处测得烟囱 AB 的仰角分别为 45°，30°和 60°.



(1)求烟囱 AB 的高度；

(2)如果要在 CE 间修一条直路，求 CE 的长.

10. 某渔轮在航行中不幸遇险，发出呼救信号，我海军舰艇在 A 处获悉后，立即测出该渔轮在方位角为 45°，距离为 10 n mile的 C 处，并测得渔轮正沿方位角为 105°的方向，以 9 n mile/h 的速度向某小岛靠拢，我海军舰艇立即以 21 n mile/h 的速度前去营救，求舰艇的航向和靠近渔轮所需的时间. $\left(\sin 21.8°\approx\frac{3\sqrt{3}}{14}\right)$

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

第 8 课时　几何计算问题

掌握几个要点

记住三角形面积的 4 种求法

三角形常用面积公式

(1)记△ABC 三边 a,b,c 上的高分别为 h_a,h_b,h_c,则 $S=\frac{1}{2}a\cdot h_a=\frac{1}{2}b\cdot h_b=\frac{1}{2}c\cdot h_c$.

(2)$S=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}ac\sin B$.

(3)$S=\frac{1}{2}r(a+b+c)$(r 为三角形内切圆的半径).

(4)$S=\frac{abc}{4R}$(R 为三角形外接圆半径).

题点知识巩固

知识点一　三角形的面积问题

1. 在△ABC 中,角 A,B,C 所对的边分别为 a,b,c. 若 $B=\frac{\pi}{2}$,$a=\sqrt{6}$,$\sin^2 B=2\sin A\sin C$,则△ABC 的面积 $S=$ (　　)

A. $\frac{3}{2}$　　B. 3

C. $\sqrt{6}$　　D. 6

2. 在锐角△ABC 中,角 A,B,C 所对的边分别为 a,b,c,若 $\sin A=\frac{2\sqrt{2}}{3}$,$a=3$,$S_{\triangle ABC}=2\sqrt{2}$,则 b 的值为 (　　)

A. 6　　B. 3

C. 2　　D. 2 或 3

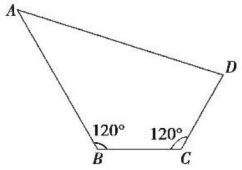
3. (**2019·贵州适应性考试**)设△ABC 的内角 A,B,C 所对的边分别为 a,b,c,且 $a\cos B=4$,$b\sin A=3$.

(1)求 $\tan B$ 及边长 a 的值;

(2)若△ABC 的面积 $S=9$,求△ABC 的周长.

知识点二　正、余弦定理在平面几何中的应用

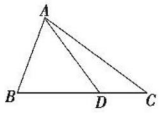
4. 如图,四边形 $ABCD$ 中,$\angle B=\angle C=120°$,$AB=4$,$BC=CD=2$,则该四边形的面积等于 (　　)



A. $\sqrt{3}$　　B. $5\sqrt{3}$

C. $6\sqrt{3}$　　D. $7\sqrt{3}$

5. 如图,在△ABC 中,$AB=2$,$\cos B=\frac{1}{3}$,点 D 在线段 BC 上.



(1)若 $\angle ADC=\frac{3\pi}{4}$,求 AD 的长;

(2)若 $BD=2DC$,△ACD 的面积为 $\frac{4\sqrt{2}}{3}$,求 $\frac{\sin\angle BAD}{\sin\angle CAD}$ 的值.

微信公众号
教辅资料站

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

提能达标过关

一、选择题

1.（**2019·南昌模拟**）在$\triangle ABC$中，角A,B,C所对的边分别为a,b,c，$\cos 2A=\sin A$，$bc=2$，则$\triangle ABC$的面积为（　　）

A. $\frac{1}{2}$　　B. $\frac{1}{4}$

C. 1　　D. 2

2. 已知在$\triangle ABC$中，若$AC=\sqrt{3}BC$，$C=\frac{\pi}{6}$，$\triangle ABC$的面积$S_{\triangle ABC}=\sqrt{3}\sin^2 A$，则$S_{\triangle ABC}=$（　　）

A. $\frac{\sqrt{3}}{4}$　　B. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

C. $\sqrt{3}$　　D. 2

3. 已知a,b,c分别是$\triangle ABC$的三个内角A,B,C所对的边，若$a=3$，$C=120°$，$S_{\triangle ABC}=\frac{15\sqrt{3}}{4}$，则$c=$（　　）

A. 4　　B. 5

C. 6　　D. 7

4.（**2019·江西新余期末**）设$\triangle ABC$的内角A,B,C所对的边分别为a,b,c，且$3a\cos C=4c\sin A$，若$\triangle ABC$的面积$S=10$，$b=4$，则a的值为（　　）

A. $\frac{23}{3}$　　B. $\frac{25}{3}$

C. $\frac{26}{3}$　　D. $\frac{28}{3}$

5. 在$\triangle ABC$中，$AB=3$，$BC=\sqrt{13}$，$AC=4$，则AC边上的高为（　　）

A. $\frac{3\sqrt{2}}{2}$　　B. $\frac{3\sqrt{3}}{2}$

C. $\frac{3}{2}$　　D. $3\sqrt{3}$

二、填空题

6. 在$\triangle ABC$中，a,b,c分别为角A,B,C所对的边，$A=\frac{\pi}{4}$，$b^2\sin C=4\sqrt{2}\sin B$，则$\triangle ABC$的面积为_____.

7.（**2019·河北张家口期末**）已知等腰三角形ABC的底边长为6，腰长为12，则它的内切圆的面积为_____.

8. 已知在$\triangle ABC$中，$B=2A$，$\angle ACB$的平分线CD把三角形分成面积比为4∶3的两部分，则$\cos A=$_____.

三、解答题

9. 在$\triangle ABC$中，D为边BC上一点，$BD=\frac{1}{2}CD$，$\angle ADB=120°$，$AD=2$，且$\triangle ADC$的面积为$3-\sqrt{3}$.

(1)求边BC的长；

(2)求$\angle BAC$的度数.

10.（**2019·武汉市模拟**）在$\triangle ABC$中，角A,B,C的对边分别为a,b,c，且满足$\frac{2c-b}{a}=\frac{\cos B}{\cos A}$.

(1)求角A的大小；

(2)若D为BC边上一点，且$CD=2DB$，$b=3$，$AD=\sqrt{21}$，求a.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

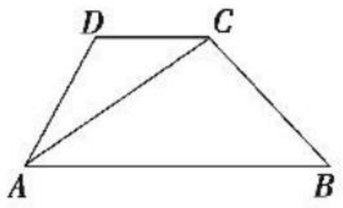
第 9 课时　素养提升——正弦、余弦定理三应用

重点深化理解

正弦、余弦定理多与三角恒等变换，在平面几何中多与向量交汇考查.

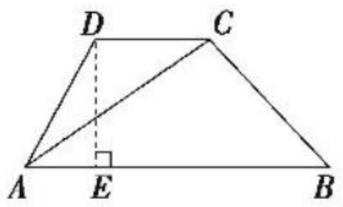
1. 与平面几何交汇考查

【例 1】 如图，在梯形 $ABCD$ 中，$CD=2$，$AC=\sqrt{19}$，$\angle BAD=60°$，求梯形的高.



［分析］ 如图，过点 D 作 $DE\perp AB$ 于点 E，则 DE 为所求的高. 由 $\angle BAD=60°$，知 $\angle ADC=120°$，又边 CD 与 AC 的长已知，故 $\triangle ACD$ 为已知两边和其中一边的对角，可解三角形. 解 Rt$\triangle ADE$，需先求 AD 的长，这只需在 $\triangle ACD$ 中应用余弦定理.

［解］ 过点 D 作 $DE\perp AB$ 于点 E，则 DE 为所求的高.



由 $\angle BAD=60°$，

得 $\angle ADC=120°$，

在 $\triangle ACD$ 中，由余弦定理得

$AC^2=AD^2+CD^2-2AD\cdot CD\cdot\cos\angle ADC$，

即 $19=AD^2+4-2AD\times2\times\left(-\frac{1}{2}\right)$，

解得 $AD=3$ 或 $AD=-5$（舍去）.

在 Rt$\triangle ADE$ 中，$DE=AD\cdot\sin 60°=\frac{3\sqrt{3}}{2}$.

［点评］ 依据余弦定理建立方程是余弦定理的一个妙用，也是函数与方程思想在解三角形中的体现.

2. 与三角恒等变换交汇考查

【例 2】 在 $\triangle ABC$ 中，角 A,B,C 对应的边分别是 a,b,c，已知 $3\cos B\cos C+2=3\sin B\sin C+2\cos^2 A$.

(1)求角 A 的大小；

(2)若 $\triangle ABC$ 的面积 $S=5\sqrt{3}$，$b=5$，求 $\sin B\sin C$ 的值.

［分析］ (1)变已知条件为统一角，建立角 A 的等量关系可求解.

(2)利用正、余弦定理及面积公式可求解.

［解］ (1)由 $3\cos B\cos C+2=3\sin B\sin C+2\cos^2 A$，得 $2\cos^2 A+3\cos A-2=0$，即 $(2\cos A-1)(\cos A+2)=0$，

解得 $\cos A=\frac{1}{2}$ 或 $\cos A=-2$（舍去）.

因为 $0<A<\pi$，所以 $A=\frac{\pi}{3}$.

(2)由 $S=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}bc\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{4}bc=5\sqrt{3}$，得 $bc=20$.

又 $b=5$，所以 $c=4$.

由余弦定理，得 $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A=25+16-20=21$，故 $a=\sqrt{21}$.

所以 $\sin B\sin C=\frac{b}{a}\sin A\cdot\frac{c}{a}\sin A=\frac{bc}{a^2}\cdot\sin^2 A=\frac{20}{21}\times\frac{3}{4}=\frac{5}{7}$.

3. 与向量交汇考查

【例 3】 在 $\triangle ABC$ 中，角 A,B,C 的对边分别为 a,b,c. 若 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=k(k\in\mathbf{R})$.

(1)判断 $\triangle ABC$ 的形状；

(2)若 $c=\sqrt{2}$，求 k 的值.

［分析］ (1)利用数量积建立关系后，可用正弦定理，也可用余弦定理求解.

(2)直接利用 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$ 及余弦定理建立 k 的关系式求解.

［解］ (1)$\because\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=cb\cos A$，$\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=ca\cos B$，又 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}$，$\therefore bc\cos A=ac\cos B$，

$\therefore b\cos A=a\cos B$.

解法一：由正弦定理，得 $\sin B\cos A=\sin A\cos B$，

即 $\sin A\cos B-\cos A\sin B=0$，

$\therefore\sin(A-B)=0$，

$\because-\pi<A-B<\pi$，$\therefore A=B$.

$\therefore\triangle ABC$ 为等腰三角形.

解法二：由余弦定理，

得 $b\cdot\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=a\cdot\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}$，

$\therefore b^2+c^2-a^2=a^2+c^2-b^2$，$\therefore a^2=b^2$，$\therefore a=b$.

$\therefore\triangle ABC$ 为等腰三角形.

(2)由(1)知，$a=b$.

$\therefore\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=bc\cos A=bc\cdot\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{c^2}{2}=k$，

$\because c=\sqrt{2}$，$\therefore k=1$.

素养培优提能

一、选择题

1. 在 $\triangle ABC$ 中，$B=120°$，$AB=\sqrt{2}$，角 A 的平分线 $AD=\sqrt{3}$，则 $AC=$（　　）

A. 1　　B. 2

C. $\sqrt{6}$　　D. $2\sqrt{2}$

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

2.（**2019・四川成都七中高一月考**）已知△ABC 的内角 A，B，C 所对的边分别为 a，b，c，且 $\frac{c-b}{c-a}=\frac{\sin A}{\sin C+\sin B}$，则 $B=$（　　）

A. $\frac{\pi}{6}$　　B. $\frac{\pi}{4}$

C. $\frac{\pi}{3}$　　D. $\frac{3\pi}{4}$

3.（**2019・湖南四校联考**）在△ABC 中，角 A，B，C 所对的边分别为 a，b，c，若 $(a^2+b^2-c^2)\tan C=ab$，则角 C 的大小为（　　）

A. $\frac{\pi}{6}$或$\frac{5\pi}{6}$　　B. $\frac{\pi}{3}$或$\frac{2\pi}{3}$

C. $\frac{\pi}{6}$　　D. $\frac{2\pi}{3}$

4. 设△ABC 的内角 A，B，C 所对的边分别为 a，b，c，且 $a\tan B=\frac{20}{3}$，$b\sin A=4$. 若△ABC 的面积 $S=10$，则 $\cos 4C$的值为（　　）

A. $-\frac{3}{5}$　　B. $-\frac{4}{5}$

C. $-\frac{24}{25}$　　D. $-\frac{7}{25}$

5. 在△ABC 中，角 A，B，C 所对的边分别为 a，b，c. 若 $a\cos A=b\sin A$，且 $B>\frac{\pi}{2}$，则 $\sin A+\sin C$ 的最大值是（　　）

A. $\sqrt{2}$　　B. $\frac{9}{8}$

C. 1　　D. $\frac{7}{8}$

二、填空题

6.（**2019・甘肃兰州四中高二期中**）已知△ABC 的三个内角 A，B，C 所对的边依次为 a，b，c，若 $\sin A:\sin B:\sin C=4:5:6$，$|\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BC}|=\sqrt{46}$，且 $\cos C=\frac{1}{8}$，则△ABC 的面积为_____.

7. 已知△ABC 的内角 A，B，C 的对边分别为 a，b，c，若 $b=\sqrt{2}c$，$\sin A+\sqrt{2}\sin C=2\sin B$，则 $\cos A=$_____.

8. 我国南宋著名数学家秦九韶在他的著作《数书九章》卷五“田域类”里有一个题目：“问有沙田一段，有三斜，其小斜一十三里，中斜一十四里，大斜一十五里. 里法三百步. 欲知为田几何.”这道题讲的是有一个三角形沙田，三边长分别为 13 里，14 里，15 里，假设 1 里按 0.5 km 计算，则该沙田的面积为_____km^2.

三、解答题

9. 已知函数 $f(x)=2\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\cos x$.

(1)若 $0\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2}$，求函数 $f(x)$的值域；

(2)设△ABC 的三个内角 A，B，C 所对的边分别为 a，b，c，若 A 为锐角，且 $f(A)=\frac{\sqrt{3}}{2}$，$b=2$，$c=3$，求 $\cos(A-B)$的值.

10.（**2019・江苏苏州中学期中**）在△ABC 中，内角 A，B，C 对应的边分别为 a，b，c（$a\leqslant b\leqslant c$），且 $b\cos C+c\cos B=2a\sin A$.

(1)求 A 的大小；

(2)求证：$a^2\geqslant(2-\sqrt{3})bc$；

(3)若 $a=b$，且 BC 边上的中线 AM 长为$\sqrt{7}$，求△ABC 的面积.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

阶段质量评估 1

（时间：60 分钟　满分：100 分）

一、选择题（每小题 5 分，共 30 分）

1. 在△ABC 中，若 $a=3$，$c=\sqrt{3}$，$A=\frac{\pi}{3}$，则 $b=$　　（　　）

A. 4　　B. 6

C. $2\sqrt{3}$　　D. $\sqrt{6}$

2. 科学家发现，两颗恒星 A 与 B 分别与地球相距 5 亿光年与 2 亿光年，且从地球上观测，它们的张角为 60°，则这两颗恒星之间的距离为_____亿光年.　　（　　）

A. $\sqrt{19}$　　B. $\sqrt{17}$

C. $2\sqrt{19}$　　D. $2\sqrt{17}$

3. 在△ABC 中，内角 A，B，C 所对的边分别为 a，b，c，若 $c^2=(a-b)^2+6$，$C=\frac{\pi}{3}$，则△ABC 的面积是　　（　　）

A. 3　　B. $\frac{9\sqrt{3}}{2}$

C. $\frac{3\sqrt{3}}{2}$　　D. $3\sqrt{3}$

4. 在△ABC 中，已知三边 a，b，c 满足 $a^2-\sqrt{2}ab=c^2-b^2$，则 C 等于　　（　　）

A. $\frac{\pi}{4}$　　B. $\frac{\pi}{3}$

C. $\frac{\pi}{2}$　　D. $\frac{3\pi}{4}$

5. （**2019 · 江苏模拟**）下列结论中：①在△ABC 中，若 $A>B$，则必有 $\sin A>\sin B$；

②在△ABC 中，若 $b^2+c^2>a^2$，则△ABC 为锐角三角形；

③在△ABC 中，若 $A=60°$，$a=4\sqrt{3}$，$b=4\sqrt{2}$，则 $B=45°$ 或 135°；

④在△ABC 中，$\frac{a}{\sin A}=\frac{a+b-c}{\sin A+\sin B-\sin C}$.

正确的个数为　　（　　）

A. 1　　B. 2

C. 3　　D. 4

6. 在△ABC 中，$\angle BAC=\frac{\pi}{6}$，$AB=3\sqrt{3}$，$AC=3$，点 D 在边 BC 上，且 $CD=2DB$，则 $AD=$　　（　　）

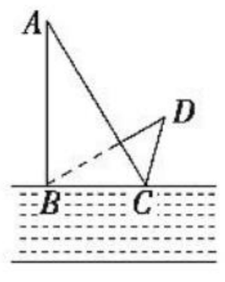
A. $\sqrt{19}$　　B. $\sqrt{21}$

C. 5　　D. $2\sqrt{7}$

二、填空题（每小题 5 分，共 20 分）

7. 在△ABC 中，内角 A，B，C 所对的边分别为 a，b，c. 已知△ABC 的面积为 $3\sqrt{15}$，$b-c=2$，$\cos A=-\frac{1}{4}$，则 a 的值为_____.

8. 如图，为测得河岸塔 AB 的高，先在河岸上选一点 C，使 C 在塔底 B 的正东方向上，测得点 A 的仰角为 60°，再由点 C 沿北偏东 15°方向走 10 m 到位置 D，测得 $\angle BDC=45°$，则塔 AB 的高是_____m.



9. 在△ABC 中，三边 a，b，c 与面积 S 的关系式为 $a^2+4S=b^2+c^2$，则 $A=$_____.

10. 已知△ABC 中，$AC=4$，$BC=2\sqrt{7}$，$\angle BAC=60°$，$AD\perp BC$ 于点 D，则 $\frac{BD}{CD}$ 的值为_____.

三、解答题（共 50 分）

11. （12 分）在△ABC 中，若 $B=60°$，$2b=a+c$，试判断△ABC 的形状.

12. （12 分）（**2019 · 河北衡水中学摸底考试**）已知在△ABC 中，$B=30°$，$AB=2\sqrt{3}$，$AC=2$，求△ABC 的面积.

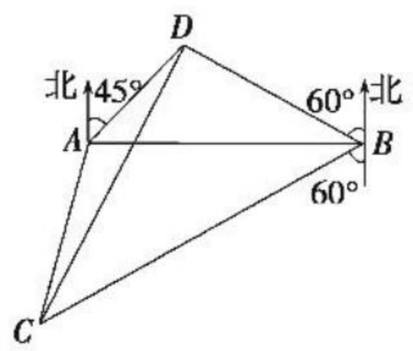
关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

13.（13 分）（**2019・东北师范大学附属中学月考**）在△ABC 中，角 A，B，C 的对边分别为 a，b，c，面积为 S，已知 $2a\cos^2\frac{C}{2}+2c\cos^2\frac{A}{2}=\frac{5}{2}b$.

（1）求证：$2(a+c)=3b$；

（2）若 $\cos B=\frac{1}{4}$，$S=\sqrt{15}$，求 b.

14.（13 分）（**2018・安徽六安一中月考**）如图所示，A，B 是海面上位于东西方向相距 $5(3+\sqrt{3})$ n mile的两个观测点. 现位于 A 点北偏东 45°方向、B 点北偏西 60°方向的 D 点有一艘轮船发出求救信号，位于 B 点南偏西 60°且与 B 点相距 $20\sqrt{3}$ n mile的 C 点的救援船立即前往营救，其航行速度为 30 n mile/h，则该救援船到达 D 点需要多长时间？



关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

第二章 数 列

2.1 数列的概念与简单表示法

第10课时 数列的概念与简单表示法

掌握几个要点

1. 把握1个重点

数列单调性的判断

判断数列的单调性，则需要从第2项起，观察每一项与它的前一项的大小关系，若满足 $a_n<a_{n+1}$，则是递增数列；若满足 $a_n>a_{n+1}$，则是递减数列；若满足 $a_n=a_{n+1}$，则是常数列；若 a_n 与 a_{n+1} 的大小不确定时，则是摆动数列.

2. 学会4种策略

由数列的前几项求通项公式的解题策略

(1)分式形式的数列，分子、分母分别求通项，较复杂的还要考虑分子、分母的关系.

(2)若 n 和 $n+1$ 项正负交错，那么符号用 $(-1)^n$ 或 $(-1)^{n+1}$ 或 $(-1)^{n-1}$ 来调控.

(3)熟悉一些常见数列的通项公式.

(4)对于复杂数列的通项公式，其项与序号之间的关系不容易发现，要将数列各项的结构形式加以变形，将数列的各项分解成若干个常见数列对应项的“和”“差”“积”“商”后再进行归纳.

3. 辨明2个易误点

(1)数列的通项公式实际上是一个以正整数集 $\mathbf{N}^*$ 或它的有限子集 $\{1,2,3,\cdots,n\}$ 为定义域的函数解析式.

(2)同所有的函数关系不一定都有解析式一样，并不是所有的数列都有通项公式.

题点知识巩固

知识点一 数列的概念与分类

1. 下列数列的关系是 ( )

①1,4,9,16,25 ②25,16,9,4,1 ③9,4,1,16,25

A. 都是同一个数列 B. 都不相同

C. ①②是同一数列 D. ②③是同一数列

2. 下列数列哪些是有穷数列？哪些是无穷数列？哪些是递增数列？哪些是递减数列？哪些是摆动数列？哪些是常数列？

(1)$1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\cdots,\frac{1}{n},\cdots$；

(2)$1,3^{-1},3^{-2},\cdots,3^{-63}$；

(3)$1,-0.1,0.1^2,\cdots,(-0.1)^{n-1},\cdots$；

(4)10,20,40,…,1 280；

(5)$-1,2,-1,2,\cdots$；

(6)6,6,6,….

知识点二 数列的通项公式

3. (2018·安徽省合肥市一中高一测试)数列 1,3,6,10,… 的一个通项公式为 ( )

A. $a_n=n^2-n+1$ B. $a_n=n^2-1$

C. $a_n=\frac{n(n+1)}{2}$ D. $a_n=\frac{n(n-1)}{2}$

4. 写出下面数列的一个通项公式，使它的前几项分别是下列各数：

(1)$\frac{2^2-1}{2},\frac{3^2-1}{3},\frac{4^2-1}{4},\frac{5^2-1}{5}$；

(2)$\frac{2}{3},\frac{4}{15},\frac{6}{35},\frac{8}{63},\frac{10}{99},\cdots$；

(3)$\frac{1}{2},2,\frac{9}{2},8,\frac{25}{2},\cdots$；

(4)5,55,555,5 555,….

知识点三 通项公式的应用

5. (2019·合肥一中月考)已知数列 $\{a_n\}$ 中，$a_n=\begin{cases}3n+1,n\text{为奇数},\\2n-2,n\text{为偶数},\end{cases}$ 则 a_2a_3 的值为 ( )

A. 70 B. 28

C. 20 D. 8

6. 在数列 $\{a_n\}$ 中，$a_1=1$，对所有的 $n\geqslant 2$，都有 $a_1\cdot a_2\cdot a_3\cdot\cdots\cdot a_n=n^2$.

(1)求 a_3+a_5；

(2)探究 $\frac{256}{225}$ 是否为此数列中的项；

(3)试比较 a_n 与 a_{n+1}($n\geqslant 2$)的大小.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

提能达标过关

一、选择题

1. 下列数列中，既是无穷数列又是递增数列的是　　(　　)

A. $1,\frac{1}{3},\frac{1}{3^2},\frac{1}{3^3},\cdots$

B. $\sin\frac{\pi}{13},\sin\frac{2\pi}{13},\sin\frac{3\pi}{13},\sin\frac{4\pi}{13},\cdots$

C. $-1,-\frac{1}{2},-\frac{1}{3},-\frac{1}{4},\cdots$

D. $1,2,3,4,\cdots,30$

2. (**2019·北京临川学校高一月考**)有下面四个结论：

①数列可以看作是一个定义在正整数集(或它的有限子集)上的函数；

②数列的项数一定是无限的；

③数列的通项公式的形式是唯一的；

④数列 1,3,2,6,3,9,4,12,5,15,…不存在通项公式.

其中正确的是　　(　　)

A. ①　　B. ①②

C. ③④　　D. ②④

3. 不能作为数列 2,0,2,0,…的通项公式的是　　(　　)

A. $a_n=1+(-1)^{n+1}$　　B. $a_n=1-(-1)^n$

C. $a_n=1+(-1)^n$　　D. $a_n=1-\cos n\pi$

4. 数列$\{a_n\}$的通项公式为 $a_n=25-2n$，在下列各数中，不是$\{a_n\}$的项的是　　(　　)

A. 1　　B. -1

C. 3　　D. 2

5. (**2018·安徽六安一中高二阶段检验**)已知数列$\{a_n\}$中，$a_1=3$，$a_{n+1}=-\frac{1}{a_n+1}(n\in\mathbf{N}^*)$，能使 $a_n=3$ 的 n 可以为　　(　　)

A. 17　　B. 16

C. 15　　D. 14

二、填空题

6. 数列$-1,1,-2,2,-3,3,\cdots$的一个通项公式为_____.

7. 若数列$\{a_n\}$满足 $a_1=1$，$a_n=a_{n-1}+(-1)^n(n\geqslant 2)$，则 $a_{199}=$_____.

8. 已知数列$\{a_n\}$的通项公式为 $a_n=n-\sqrt{n^2+2}$，则 a_n 的最小值为_____.

三、解答题

9. 根据数列的通项公式，写出下列数列的前 5 项，并用图象表示出来.

(1)$a_n=(-1)^n+2$；

(2)$a_n=\frac{2n}{n+1}$.

10. 已知数列$\{a_n\}$的通项公式是 $a_n=\frac{9n^2-9n+2}{9n^2-1}$.

(1)判断$\frac{98}{101}$是不是数列$\{a_n\}$中的项；

(2)试判断数列$\{a_n\}$中的项是否都在区间(0,1)内；

(3)在区间$\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)$内有没有数列$\{a_n\}$中的项？若有，是第几项；若没有，请说明理由.

第 11 课时　数列的通项公式与递推公式

掌握几个要点

1. 掌握 1 个重点

数列的表示方法：①图象法；②列表法；③通项公式法；④递推公式法.

2. 辨明 1 个区别

通项公式和递推公式的区别：通项公式直接反映 a_n 和 n 之间的关系，即 a_n 是 n 的函数，知道任意一个具体的 n 值，就可以求出该项的值 a_n；而递推公式则是间接反映数列的式子，它是数列任意两个(或多个)相邻项之间的推导关系，不能由 n 直接得出 a_n.

题点知识巩固

知识点一　数列的函数特征

1. 已知数列$\{a_n\}$满足 $a_n>0$，且 $a_{n+1}=\frac{1}{2}a_n$，则数列$\{a_n\}$是　　(　　)

A. 递增数列　　B. 递减数列

C. 常数列　　D. 摆动数列

2. 设 $a_n=-3n^2+15n-18$，则数列$\{a_n\}$中的最大项的值是(　　)

A. $\frac{16}{3}$　　B. $\frac{13}{3}$

C. 4　　D. 0

3. 已知在数列$\{a_n\}$中，$a_1=4$，$a_{n+1}=f(a_n)$，$n\in\mathbf{N}^*$，函数 $y=f(x)$的对应关系如下表，则 $a_{2\,019}=$_____.

x	1	2	3	4	5
$f(x)$	5	4	3	2	1

知识点二　数列的递推公式及应用

4. (**2018·辽宁省沈阳市五校高二期中**)已知数列$\{a_n\}$满足 $a_1=1$，$a_n=a_{n-1}+n(n\geqslant 2,n\in\mathbf{N}^*)$，则 $a_5=$　　(　　)

A. 6　　B. 10

C. 15　　D. 21

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

5. 已知数列$\{a_n\}$中，$a_1=1$，$a_2=2$，以后各项由公式$a_n=a_{n-1}+a_{n-2}(n\geqslant 3)$给出.

(1)写出此数列的前5项；

(2)通过公式$b_n=\dfrac{a_n}{a_{n+1}}$构造一个新数列$\{b_n\}$，写出数列$\{b_n\}$的前4项.

知识点三　由递推公式求通项公式

6. 设$\{a_n\}$是首项为1且$a_n>0$的数列，又$(n+1)a_{n+1}^2-na_n^2+a_{n+1}a_n=0(n=1,2,3,\cdots)$，求它的通项公式.

7. 已知数列$\{a_n\}$满足$a_1=\dfrac{2}{3}$，$a_{n+1}=\dfrac{n}{n+1}a_n$，求数列$\{a_n\}$的通项公式.

提能达标过关

一、选择题

1. 已知数列$\{a_n\}$的通项公式为$a_n=\dfrac{n}{2n-1}$，按项的变化趋势，该数列是　(　　)

A. 递增数列　　B. 递减数列

C. 摆动数列　　D. 常数列

2. 数列$\{a_n\}$满足$a_1=1$，$a_2=3$，$a_{n+1}=(2n-\lambda)a_n$，则a_3等于　(　　)

A. 5　　B. 9

C. 10　　D. 15

3. 由$1,3,5,\cdots,2n-1,\cdots$构成数列$\{a_n\}$，数列$\{b_n\}$满足$b_1=2$，当$n\geqslant 2$时，$b_n=a_{b_{n-1}}$，则b_6的值是　(　　)

A. 9　　B. 17

C. 33　　D. 65

4. 已知数列$\{a_n\}$的首项为$a_1=1$，且满足$a_{n+1}=\dfrac{1}{2}a_n+\dfrac{1}{2^n}$，则此数列的第4项是　(　　)

A. $\dfrac{5}{16}$　　B. $\dfrac{1}{2}$

C. $\dfrac{3}{4}$　　D. $\dfrac{5}{8}$

5. 在数列$\{a_n\}$中，$a_1=-2$，$a_{n+1}=\dfrac{1+a_n}{1-a_n}$，则$a_{2\,019}=$　(　　)

A. -2　　B. $\dfrac{1}{2}$

C. $-\dfrac{1}{2}$　　D. 3

二、填空题

6. 已知在数列$\{a_n\}$中，$a_1=1$，且对于任意正整数n，都有$a_{n+1}=a_n+n$，则$a_6=$_____.

7. 在数列$\{a_n\}$中，$a_1=1$，$a_{n+1}a_n=a_n^2+(-1)^{n+1}(n\in\mathbf{N}^*)$，则$\dfrac{a_4}{a_2}=$_____.

8. 已知数列$\{a_n\}$满足$a_{n+1}=\begin{cases}2a_n,0\leqslant a_n<\dfrac{1}{2},\\2a_n-1,\dfrac{1}{2}\leqslant a_n<1,\end{cases}$若$a_1=\dfrac{6}{7}$，则$a_{2\,018}=$_____.

三、解答题

9. 在数列$\{a_n\}$中，$a_1=2$，点(a_n,a_{n+1})在函数$f(x)=\dfrac{2x}{1+x}$的图象上.

(1)求a_2,a_3,a_4的值；

(2)猜想数列$\{a_n\}$的一个通项公式.

10. 已知数列$\{a_n\}$满足$a_{n+1}-a_n=n+2(n\in\mathbf{N}^*)$，且$a_1=1$.

(1)求a_2,a_3,a_4的值；

(2)令$b_n=4a_n-68n$，求数列$\{b_n\}$的前4项.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

2.2　等差数列

第 12 课时　等差数列的概念及通项公式

掌握几个要点

1. 掌握 1 种思想

方程思想在基本量计算中的应用

在等差数列$\{a_n\}$中，首项 a_1 与公差 d 是两个最基本的元素，有关等差数列的问题，如果条件与结论间的联系不明显，则均可化成有关 a_1，d 的关系列方程组求解，但是要注意公式的变形及整体计算，以减少计算量.

2. 把握 1 个应用

三数 a，b，c 成等差数列的条件是 $b=\frac{a+c}{2}$（或 $2b=a+c$），可用来进行等差数列的判定或有关等差中项的计算问题. 如若证$\{a_n\}$为等差数列，可证 $2a_{n+1}=a_n+a_{n+2}$（$n\in\mathbf{N}^*$）.

3. 记牢 2 种方法

等差数列判定的常用的 2 种方法

(1)定义法：$a_{n+1}-a_n=d$（常数）（$n\in\mathbf{N}^*$）$\Leftrightarrow\{a_n\}$为等差数列.

(2)等差中项法：$2a_{n+1}=a_n+a_{n+2}$（$n\in\mathbf{N}^*$）$\Leftrightarrow\{a_n\}$为等差数列.

题点知识巩固

知识点一　等差数列的通项公式

1. 已知等差数列$\{a_n\}$的通项公式为 $a_n=3-4n$，则数列$\{a_n\}$的首项与公差分别是　（　　）

A. 1，4　　B. −1，−4

C. 4，1　　D. −4，−1

2. 在等差数列$\{a_n\}$中，$a_1=\frac{1}{3}$，$a_2+a_5=4$，$a_n=33$，则 n 等于　（　　）

A. 50　　B. 49

C. 48　　D. 47

3. 在等差数列$\{a_n\}$中，

(1)已知 $a_4=10$，$a_{10}=4$，求 a_7 和 d 的值；

(2)已知 $a_2=12$，$a_n=-20$，$d=-2$，求 n 的值.

知识点二　等差中项

4. (**2018 · 长沙名校联考**)已知数列$\{a_n\}$是等差数列，$a_1+a_7=-8$，$a_2=2$，则数列$\{a_n\}$的公差 d 等于　（　　）

A. −1　　B. −2

C. −3　　D. −4

5. 各项均不为零的等差数列$\{a_n\}$中，$a_n^2=a_{n-1}+a_{n+1}$（$n\in\mathbf{N}^*$，$n\geqslant 2$），则数列$\{a_n\}$的通项公式为_____.

知识点三　等差数列的判定与证明

6. 已知$\frac{1}{a}$，$\frac{1}{b}$，$\frac{1}{c}$成等差数列，并且 $a+c$，$a-c$，$a+c-2b$ 均为正数，求证：$\lg(a+c)$，$\lg(a-c)$，$\lg(a+c-2b)$也成等差数列.

7. 已知数列$\{a_n\}$满足 $a_1=4$，$a_n=4-\frac{4}{a_{n-1}}$（$n>1$），记 $b_n=\frac{1}{a_n-2}$.

(1)求证：数列$\{b_n\}$是等差数列；

(2)求数列$\{a_n\}$的通项公式.

提能达标过关

一、选择题

1. 已知数列$\{a_n\}$满足 $a_1=2$，$a_{n+1}-a_n+1=0$，则数列的通项 a_n 等于　（　　）

A. n^2+1　　B. $n+1$

C. $1-n$　　D. $3-n$

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

2. 已知等差数列$\{a_n\}$的通项公式$a_n=3-2n$，则它的公差为（　　）

A. 2　　B. 3

C. -2　　D. -3

3. 等差数列的前3项依次是$x-1$，$x+1$，$2x+3$，则其通项公式为（　　）

A. $a_n=2n-5$　　B. $a_n=2n-3$

C. $a_n=2n-1$　　D. $a_n=2n+1$

4. 设$2^a=3$，$2^b=x$，$2^c=12$，且a，b，c成等差数列，则x的值为（　　）

A. 6　　B. -6

C. ±6　　D. $\frac{15}{2}$

5. 已知数列$\{a_n\}$满足：$a_1=1$，$a_n>0$，$a_{n+1}^2-a_n^2=1(n\in\mathbf{N}^*)$，那么使$a_n<5$成立的$n$的最大值为（　　）

A. 25　　B. 24

C. 5　　D. 4

二、填空题

6. 在等差数列$\{a_n\}$中，$a_3=5$，$a_7=13$，则公差d为_____.

7. 一个三角形的三个内角A，B，C成等差数列，则$\tan(A+C)=$_____.

8. 若等差数列$\{a_n\}$的公差为整数，首项为19，从第6项开始为负值，则公差为_____.

三、解答题

9. 已知数列$\{a_n\}$满足$a_1=2$，$a_{n+1}=\frac{2a_n}{a_n+2}$.

(1)数列$\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$是否为等差数列？说明理由；

(2)求a_n.

10. (**2018·广东惠州一中等六校高二月考**)已知等差数列$\{a_n\}$单调递减，且$a_3=1$，$a_2a_4=\frac{3}{4}$.

(1)求数列$\{a_n\}$的通项公式；

(2)判断数列$\{a_1a_n\}$是否为等差数列. 若是，求出公差；若不是，请说明理由.

第13课时　等差数列的性质

掌握几个要点

把握3类性质

等差数列的性质

(1)若$\{a_n\}$是公差为d的等差数列，正整数m，n，p，q满足$m+n=p+q$，则$a_m+a_n=a_p+a_q$.

特别地，当$m+n=2k(m,n,k\in\mathbf{N}^*)$时，$a_m+a_n=2a_k$.

对有穷等差数列，与首末两项“等距离”的两项之和等于首末两项的和，即$a_1+a_n=a_2+a_{n-1}=\cdots=a_k+a_{n-k+1}=\cdots$.

(2)若$\{a_n\}$是公差为d的等差数列，则

①$\{c+a_n\}$(c为任一常数)是公差为d的等差数列；

②$\{ca_n\}$(c为任一常数)是公差为cd的等差数列；

③$\{a_n+a_{n+k}\}$(k为常数，$k\in\mathbf{N}^*$)是公差为kd的等差数列.

(3)若$\{a_n\}$，$\{b_n\}$分别是公差为d_1，d_2的等差数列，则数列$\{pa_n+qb_n\}$(p，q是常数)是公差为pd_1+qd_2的等差数列.

题点知识巩固

知识点一　等差数列性质的应用

1. (**2019·陕西咸阳中学月考**)已知m和$2n$的等差中项是4，$2m$和n的等差中项是5，则m和n的等差中项是（　　）

A. 8　　B. 6

C. 4.5　　D. 3

2. 在等差数列$\{a_n\}$中，若$a_4+a_6+a_8+a_{10}+a_{12}=120$，则$2a_{10}-a_{12}$的值为（　　）

A. 20　　B. 22

C. 24　　D. 26

3. 在等差数列$\{a_n\}$中，已知$a_2+a_3+a_{10}+a_{11}=36$，则$a_5+a_8=$_____.

4. 在等差数列$\{a_n\}$中，若$a_1+a_4+a_7=39$，$a_2+a_5+a_8=33$，求$a_3+a_6+a_9$的值.

知识点二　等差数列的求解技巧

5. (**2018·浙江省临海市杜桥中学高二测试**)已知三个数成等差数列，它们的和为6，平方和为44，求这三个数.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

6. 已知有四个数成等差数列，它们的和为 28，中间两项的积为 40，求这四个数.

知识点三　等差数列的实际应用

7.《九章算术》是我国古代的数学名著，书中有如下问题："今有五人分五钱，令上二人所得与下三人等. 问各得几何？"其意思为："已知甲、乙、丙、丁、戊五人分 5 钱，甲、乙两人所得与丙、丁、戊三人所得相同，且甲、乙、丙、丁、戊所得依次成等差数列. 问五人各得多少钱？"（"钱"是古代的一种重量单位）这个问题中，甲所得为　（　　）

A. $\frac{5}{4}$ 钱　　B. $\frac{5}{3}$ 钱

C. $\frac{3}{2}$ 钱　　D. $\frac{4}{3}$ 钱

8. 某公司经销一种数码产品，第一年可获利 200 万元，从第二年起由于市场竞争方面的原因，其利润每年比上一年减少 20 万元，按照这一规律，如果公司不开发新产品，也不调整经营策略，从哪一年起，该公司经销这一产品将亏损？

提能达标过关

一、选择题

1. 在等差数列 $\{a_n\}$ 中，$a_1=2$，$a_3+a_5=10$，则 $a_7=$　（　　）

A. 5　　B. 8

C. 10　　D. 14

2. （**2019·河南省实验中学期末**）已知 $\{a_n\}$ 是公差为正数的等差数列，$a_1+a_2+a_3=15$，$a_1a_2a_3=80$，则 $a_{11}+a_{12}+a_{13}$ 的值为　（　　）

A. 105　　B. 120

C. 90　　D. 75

3. 设 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ 都是等差数列，且 $a_1=25$，$b_1=75$，$a_2+b_2=100$，则 $a_{37}+b_{37}=$　（　　）

A. 0　　B. 37

C. 100　　D. -37

4. 首项为 -24 的等差数列，从第 10 项开始为正数，则公差 d 的取值范围是　（　　）

A. $d>\frac{8}{3}$　　B. $d>3$

C. $\frac{8}{3}\leqslant d<3$　　D. $\frac{8}{3}<d\leqslant 3$

5.（**2018·安徽十大名校高三联考**）某县 2015 年 12 月末人口总数为 57 万，从 2016 年 1 月 1 日全面实施二孩政策后，人口总数每月按相同数目增加，到 2016 年 12 月末人口总数为 57.24 万，则 2016 年 10 月末的人口总数为　（　　）

A. 57.1 万　　B. 57.2 万

C. 57.22 万　　D. 57.23 万

二、填空题

6. 已知等差数列 $\{a_n\}$ 中，$a_9+a_{10}=a$，$a_{19}+a_{20}=b$，则 $a_{59}+a_{60}=$_____.

7. 在等差数列 $\{a_n\}$ 中，$a_1=8$，$a_5=2$，若在数列 $\{a_n\}$ 中每相邻两项之间插入一个数，使之成为新的等差数列，那么新的等差数列的公差是_____.

8. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_{n+1}^2=a_n^2+4$，且 $a_1=1$，$a_n>0$，则 $a_n=$_____.

三、解答题

9. 在数列 $\{a_n\}$ 中，$a_{n+1}+a_n=2n-44(n\in\mathbf{N}^*)$，$a_1=-23$，求 a_n.

10. 已知四个数构成等差数列，前三个数的和为 15，第一个数与第四个数的乘积为 27，求这四个数.

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

第 14 课时　素养提升——数列与等差数列

思想方法活用

如何研究数列的单调性和最大(小)项

研究数列的单调性和最大(小)项，首选作差，其次可以考虑借助函数的单调性.

【例 1】 已知数列$\{a_n\}$的通项公式为$a_n=n\left(\frac{7}{9}\right)^{n+1}$，则该数列是否有最大项，若有，求出最大项的项数；若无，说明理由.

[解] $\because a_{n+1}-a_n=(n+1)\left(\frac{7}{9}\right)^{n+2}-n\left(\frac{7}{9}\right)^{n+1}$

$=\left(\frac{7}{9}\right)^{n+1}\cdot\frac{7-2n}{9}$，

$\therefore$当$n>3$时，$a_{n+1}-a_n<0$；

当$1\leqslant n\leqslant 3$时，$a_{n+1}-a_n>0$；

综上，可知$\{a_n\}$在$n\in\{1,2,3,4\}$时，单调递增；在$n\in\{5,6,7,\cdots\}$时，单调递减. 所以存在最大项，且第 4 项为最大项.

[点评] 之所以首选作差，是因为研究数列的单调性和研究函数单调性不一样，函数单调性要设任意$x_1<x_2$，而数列只需研究相邻两项$a_{n+1}-a_n$，证明难度是不一样的.

【例 2】 在数列$\{a_n\}$中，$a_n=\frac{n-\sqrt{2\,006}}{n-\sqrt{2\,007}}$，则该数列前 100 项中的最大项与最小项分别是_____.

[分析] 可以先把$a_n=\frac{n-\sqrt{2\,006}}{n-\sqrt{2\,007}}$用分离常数法化简，然后再研究函数$f(x)=1+\frac{\sqrt{2\,007}-\sqrt{2\,006}}{x-\sqrt{2\,007}}$的性质，得出该数列前 100 项中的最大项与最小项.

[解析] $a_n=\frac{n-\sqrt{2\,006}}{n-\sqrt{2\,007}}=1+\frac{\sqrt{2\,007}-\sqrt{2\,006}}{n-\sqrt{2\,007}}$，

设$f(x)=1+\frac{\sqrt{2\,007}-\sqrt{2\,006}}{x-\sqrt{2\,007}}$，

则$f(x)$在区间$(-\infty,\sqrt{2\,007})$与$(\sqrt{2\,007},+\infty)$上为减函数.

因为$44<\sqrt{2\,007}<45$，

故数列$\{a_n\}$在$1\leqslant n\leqslant 44$时递减，在$n\geqslant 45$时递减，

借助$f(x)=1+\frac{\sqrt{2\,007}-\sqrt{2\,006}}{x-\sqrt{2\,007}}$的图象知数列$\{a_n\}$的最大值为$a_{45}$，最小值为$a_{44}$. 故答案为$a_{45}$，$a_{44}$.

[答案] a_{45}，a_{44}

[点评] 本题考查根据数列的单调性求数列的最大项和最小项，此类题一般借助相关函数的单调性来研究数列单调性，然后再判断数列的最大项与最小项.

易错易混提示

易错点 1　对等差数列的定义把握不准致误

【例 1】 已知数列$\{a_n\}$，$a_1=a_2=1$，$a_n=a_{n-1}+2(n\geqslant 3)$.

(1)判断数列$\{a_n\}$是否为等差数列，并说明理由；

(2)求$\{a_n\}$的通项公式.

[常见错误] 此题容易利用$a_n=a_{n-1}+2$得，$a_n-a_{n-1}=2$，得数列$\{a_n\}$是以 2 为公差的等差数列，故$a_n=2n-1$，这易忽略了$n\geqslant 3$这个条件，而判断错误，求解错误.

[解] (1)$\because a_n=a_{n-1}+2(n\geqslant 3)$，

$\therefore a_n-a_{n-1}=2(n\geqslant 3)$，

即数列$\{a_n\}$满足$a_3-a_2=2$，$a_4-a_3=2$，$a_5-a_4=2$，…，

即从第 3 项起每一项与前一项的差为同一个常数，

又$a_2-a_1=0\neq 2$，

$\therefore a_2,a_3,a_4,\cdots,a_n$构成公差为 2 的等差数列，

即$\{a_n\}$不是等差数列.

(2)由(1)知，$a_n=a_2+(n-2)d=1+(n-2)\times 2=2n-3(n\geqslant 2)$.

$$\therefore a_n=\begin{cases}1,n=1,\\2n-3,n\geqslant 2.\end{cases}$$

[防范措施] 在解决数列的问题时，要注意题目的已知条件，例如本题中$n\geqslant 3$，因此，该数列$\{a_n\}$从第 2 项起，以后各项组成等差数列，而数列$\{a_n\}$不是等差数列，$a_n=f(n)$应该表示为“分段函数”型，否则出错.

易错点 2　对项数 n 理解不准致误

【例 2】 已知两个等差数列$\{a_n\}$和$\{b_n\}$，且$\{a_n\}$为 2，5，8，…，$\{b_n\}$为 1，5，9，…，它们的项数均为 40 项，则它们有多少个彼此具有相同数值的项？

[错解] 由已知两等差数列的前三项，容易求得它们的通项公式分别为：

$a_n=3n-1$，$b_n=4n-3(1\leqslant n\leqslant 40$，且$n\in\mathbf{N}^*)$，

令$a_n=b_n$，得$3n-1=4n-3$，即$n=2$.

所以两数列只有 1 个数值相同的项，即第 2 项.

[错因分析] 本题所说的是数值相同的项，但它们的项数并不一定相同，也就是说，只看这个数在两个数列中有没有出现过，而并不是这两个数列的第几项.

[正解] 由已知两等差数列的前三项，容易求得它们的通项公式分别为：

$a_n=3n-1$，$b_m=4m-3(m,n\in\mathbf{N}^*$，且$1\leqslant n\leqslant 40$，$1\leqslant m\leqslant 40)$.

令$a_n=b_m$，得$3n-1=4m-3$，

即$n=\frac{4m-2}{3}=\frac{2(2m-1)}{3}$，

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

令 $2m-1=3t$，

$\because (2m-1)\in \mathbf{N}^*$ 且为奇数，

$\therefore t\in \mathbf{N}^*$ 且为奇数，$\therefore m=\dfrac{3t+1}{2}$，$n=2t$.

又 $\because 1\leqslant n\leqslant 40$，$1\leqslant m\leqslant 40$，

$$\therefore \begin{cases} 1\leqslant \dfrac{3t+1}{2}\leqslant 40, \\ 1\leqslant 2t\leqslant 40. \end{cases} \therefore \begin{cases} \dfrac{1}{3}\leqslant t\leqslant \dfrac{79}{3}, \\ \dfrac{1}{2}\leqslant t\leqslant 20, \end{cases}$$

故 $\dfrac{1}{2}\leqslant t\leqslant 20$，又 $t\in \mathbf{N}^*$ 且为奇数.

$\therefore$ 数列共有 10 个数值相同的项.

［**防范措施**］ 解题时一定要理解好所用字母的意义，否则会造成不必要的丢分，如本例中的两个数列中，a_n 与 b_n 的 n 表示的项数不同.

素养培优提能

一、选择题

1. 下列数列中，既是递增数列又是无穷数列的是　（　）

A. $1,\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{3},\dfrac{1}{4},\cdots$　　B. $-1,-2,-3,-4,\cdots$

C. $-1,-\dfrac{1}{2},-\dfrac{1}{4},-\dfrac{1}{8},\cdots$　　D. $1,\sqrt{2},\sqrt{3},\cdots,\sqrt{n}$

2. 在等差数列 $-5,-3\dfrac{1}{2},-2,-\dfrac{1}{2},\cdots$ 的每相邻两项之间插入一个数，使之成为一个新的等差数列，则新数列的通项为　（　）

A. $a_n=\dfrac{3}{4}n-\dfrac{23}{4}$　　B. $a_n=-5-\dfrac{3}{2}(n-1)$

C. $a_n=-5-\dfrac{3}{4}(n-1)$　　D. $a_n=\dfrac{5}{4}n^2-3n$

3. 设函数 $f(x)=(x-1)^2+n(x\in[-1,3],n\in \mathbf{N}^*)$ 的最小值为 a_n，最大值为 b_n，记 $c_n=b_n^2-a_n\cdot b_n$，则 $\{c_n\}$ 是　（　）

A. 常数列　　B. 摆动数列

C. 公差不为 0 的等差数列　　D. 递减数列

4. （**2018·湖南长沙一中高二期中**）设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d，若数列 $\{2a_1a_n\}$ 为递减数列，则　（　）

A. $d<0$　　B. $d>0$

C. $a_1d<0$　　D. $a_1d>0$

5. （**2019·上海徐汇南模中学开学考试**）已知 $\{a_n\}$ 是首项为 a，公差为 1 的等差数列，数列 $\{b_n\}$ 满足 $b_n=\dfrac{1+a_n}{a_n}$，若对任意的 $n\in \mathbf{N}^*$，都有 $b_n\geqslant b_8$ 成立，则实数 a 的取值范围是　（　）

A. $(-8,-7)$　　B. $(-7,-6)$

C. $(-8,-6)$　　D. $(-6,-5)$

二、填空题

6. 已知 $\{a_n\}$ 为等差数列，$a_5+a_7=4$，$a_6+a_8=-2$，则该数列的正数项共有_____项.

7. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_n=\dfrac{n+1}{3n-16}(n\in \mathbf{N}^*)$，则数列 $\{a_n\}$ 的最小项是第_____项.

8. 假设某市 2016 年新建住房 400 万平方米，预计在以后的若干年内，该市每年新建住房面积均比上一年增加 50 万平方米. 那么该市在_____年新建住房的面积开始大于 820 万平方米.

三、解答题

9. 已知等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为整数，且满足条件：(1) $a_1+a_5+a_9=93$；(2) $a_n>100$ 的 n 的最小值是 15. 求通项公式 a_n.

10. 某产品按质量分 10 个档次，生产最低档次的产品的利润是 8 元/件，每提高一个档次，利润每件增加 2 元，同时每提高一个档次，产量减少 3 件，在相同的时间内，最低档次的产品可生产 60 件.

试问：在相同的时间内，应选择生产第几档次的产品可获得最大利润？（设最低档次为第一档次）

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

2.3　等差数列的前 n 项和

第 15 课时　等差数列的前 n 项和

掌握几个要点

1. 掌握 1 个公式

等差数列的前 n 项和公式

已知量	首项，末项与项数	首项，公差与项数
选用公式	$S_n=\frac{n(a_1+a_n)}{2}$	$S_n=na_1+\frac{n(n-1)}{2}d$

2. 记住 1 个关系

a_n 与 S_n 的关系：$a_n=\begin{cases}S_1(n=1),\\ S_n-S_{n-1}(n\geqslant 2).\end{cases}$

3. 辨析 1 个易错点

已知 S_n 求 a_n，其方法是 $a_n=S_n-S_{n-1}(n\geqslant 2)$，这里常常因为忽略条件“$n\geqslant 2$”而出错.

题点知识巩固

知识点一　等差数列前 n 项和的基本运算

1. 在等差数列 $\{a_n\}$ 中，$a_1=0$，公差 $d\neq 0$，若 $a_m=a_1+a_2+\cdots+a_9$，则 m 的值为（　　）

A. 37　　B. 36

C. 20　　D. 19

2. 已知公差为 d 的等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，且满足 $S_5S_6+15=0$. 若 $S_5=5$，求 S_n.

3. （**2019·广西桂林市秀峰区高二月考**）已知等差数列 $\{a_n\}$ 满足：$a_3=7$，$a_5+a_7=26$. 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式及前 n 项和 S_n.

知识点二　利用 a_n 与 S_n 的关系求 a_n

4. 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 $S_n=n^2+1$，则 $a_n=$（　　）

A. $a_n=2n-1$　　B. $a_n=2n+1$

C. $a_n=\begin{cases}2,n=1,\\ 2n-1,n\geqslant 2\end{cases}$　　D. $a_n=\begin{cases}2,n=1,\\ 2n+1,n\geqslant 2\end{cases}$

5. （**2019·四川省开江县高一测试**）已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，求其通项公式.

(1) $S_n=3n^2-2n$；

(2) $S_n=2^n+3$.

提能达标过关

一、选择题

1. （**2019·甘肃省兰州市高二月考**）设 S_n 为等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和，若 $S_8=30$，$S_4=7$，则 a_4 的值等于（　　）

A. $\frac{1}{4}$　　B. $\frac{9}{4}$

C. $\frac{13}{4}$　　D. $\frac{17}{4}$

2. 已知 a_1,a_2,a_3,a_4 成等差数列，若 $S_4=32$，$a_2:a_3=1:3$，则公差 d 为（　　）

A. 8　　B. 16

C. 4　　D. 0

3. 在等差数列 $\{a_n\}$ 中，$d=2$，$a_n=11$，$S_n=35$，则 $a_1=$（　　）

A. 5 或 7　　B. 3 或 5

C. 7 或 −1　　D. 3 或 −1

4. 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 $S_n=-n^2$，则（　　）

A. $a_n=2n+1$　　B. $a_n=-2n+1$

C. $a_n=-2n-1$　　D. $a_n=2n-1$

5. （**2018·河南信阳高二期末**）在等差数列 $\{a_n\}$ 中，公差 $d\neq 0$，前 n 项和为 S_n，且 $S_{10}=4S_5$，则 $\frac{a_1}{d}=$（　　）

A. $\frac{1}{4}$　　B. 8

C. $\frac{1}{2}$　　D. 4

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

二、填空题

6. 已知在数列$\{a_n\}$中，$a_1=1$，$a_n=a_{n-1}+\frac{1}{2}(n\geqslant 2)$，则数列$\{a_n\}$的前 9 项和等于_____.

7. (**2019·广东潮州期末**)设数列$\{a_n\}$的前 n 项乘积为 T_n，对任意正整数 n 都有 $T_n=1-a_n$，则 $T_n=$_____.

8. 在等差数列$\{a_n\}$中，若 $S_9=18$，$S_n=240$，$a_{n-4}=30$，则 $n=$_____.

三、解答题

9. 已知在等差数列$\{a_n\}$中，其前 n 项和记为 S_n.

(1)$a_1=\frac{1}{2}$，$S_4=20$，求 S_6；

(2)$a_{10}=30$，$a_{20}=50$，$S_n=242$，求 n；

(3)$S_3=3$，$S_6=24$，求 a_9.

10. 已知等差数列$\{a_n\}$的前 3 项为 $a-1$，4，$2a$，记其前 n 项和为 S_n.

(1)设 $S_k=2\ 550$，求 a 和 k 的值；

(2)设 $b_n=\frac{S_n}{n}$，求 $b_3+b_7+b_{11}+\cdots+b_{4n-1}$的值.

第 16 课时　等差数列前 n 项和的性质及应用

掌握几个要点

1. 把握 4 组性质

等差数列前 n 项和的性质

(1)若数列$\{a_n\}$是公差为 d 的等差数列，则数列$\left\{\frac{S_n}{n}\right\}$也是等差数列，且公差为$\frac{d}{2}$.

(2)S_m，S_{2m}，S_{3m}分别为$\{a_n\}$的前 m 项，前 $2m$ 项，前 $3m$ 项的和，则 S_m，$S_{2m}-S_m$，$S_{3m}-S_{2m}$也成等差数列，公差为 m^2d.

(3)设两个等差数列$\{a_n\}$、$\{b_n\}$的前 n 项和分别为 S_n，T_n，则$\frac{a_n}{b_n}=\frac{S_{2n-1}}{T_{2n-1}}$.

(4)若 $S_{奇}$ 表示奇数项的和，$S_{偶}$ 表示偶数项的和，公差为 d，

①当项数为偶数 $2n$ 时，$S_{偶}-S_{奇}=nd$，$\frac{S_{奇}}{S_{偶}}=\frac{a_n}{a_{n+1}}$；

②当项数为奇数 $2n-1$ 时，$S_{奇}-S_{偶}=a_n$，$\frac{S_{奇}}{S_{偶}}=\frac{n}{n-1}$.

2. 掌握 2 种方法

求等差数列前 n 项和 S_n 最值的 2 种方法

(1)函数法：利用等差数列前 n 项和的函数表达式 $S_n=an^2+bn$，通过配方或借助图象求二次函数最值的方法求解.

(2)邻项变号法

①当 $a_1>0$，$d<0$ 时，满足$\begin{cases}a_m\geqslant 0,\\ a_{m+1}\leqslant 0\end{cases}$的项数 m 使得 S_n 取得最大值为 S_m；

②当 $a_1<0$，$d>0$ 时，满足$\begin{cases}a_m\leqslant 0,\\ a_{m+1}\geqslant 0\end{cases}$的项数 m 使得 S_n 取得最小值为 S_m.

题点知识巩固

知识点一　等差数列前 n 项和的性质

1. 设 S_n 是等差数列$\{a_n\}$的前 n 项和，已知 $a_2=3$，$a_6=11$，则 S_7 等于 (　　)

A. 13　　B. 35

C. 49　　D. 63

2. (**2019·山东德州高一月考**)已知等差数列共有 10 项，其中奇数项之和为 15，偶数项之和为 30，则其公差是 (　　)

A. 5　　B. 4

C. 3　　D. 2

3. 设 S_n 为等差数列$\{a_n\}$的前 n 项和，$a_1=-2\ 014$，$\frac{S_{2\ 007}}{2\ 007}-\frac{S_{2\ 005}}{2\ 005}=2$，则 $S_{2\ 016}$的值为 (　　)

A. 2 016　　B. −2 016

C. 2 015　　D. −2 015

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

知识点二　等差数列前 n 项和的最值

4.（**2018·合肥质检**）已知等差数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 S_n，$a_8=1$，$S_{16}=0$，当 S_n 取最大值时 n 的值为（　　）

A. 7　　B. 8

C. 9　　D. 10

5.（**2019·河北保定高一期中**）设等差数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 S_n，若 $a_1=-11$，$a_3+a_7=-6$，则当 S_n 取得最小值时，n 等于（　　）

A. 6　　B. 7

C. 8　　D. 9

知识点三　求数列$\{|a_n|\}$的前 n 项和

6. 已知数列$\{a_n\}$的前 n 项和 $S_n=-\frac{3}{2}n^2+\frac{205}{2}n$，求数列$\{|a_n|\}$的前 n 项和 T_n.

提能达标过关

一、选择题

1.（**2019·甘肃兰州十八中高二月考**）已知在等差数列$\{a_n\}$中，$a_1+a_2+a_3+a_4=10$，$a_{13}+a_{14}+a_{15}+a_{16}=70$，则数列$\{a_n\}$的前 16 项和等于（　　）

A. 140　　B. 160

C. 180　　D. 200

2. 在等差数列$\{a_n\}$中，$a_1=29$，$S_{10}=S_{20}$，则数列$\{a_n\}$的前 n 项和 S_n 的最大值为（　　）

A. S_{15}　　B. S_{16}

C. S_{15}或 S_{16}　　D. S_{17}

3.（**2018·东北四市高考模拟**）已知数列$\{a_n\}$满足 $a_{n+1}-a_n=2$，$a_1=-5$，则$|a_1|+|a_2|+\cdots+|a_6|=$（　　）

A. 9　　B. 15

C. 18　　D. 30

4. 在各项不全为零的等差数列$\{a_n\}$中，S_n 是其前 n 项和，且 $S_{2\,011}=S_{2\,014}$，$S_k=S_{2\,009}$，则正整数 k 为（　　）

A. 2 014　　B. 2 015

C. 2 016　　D. 2 017

5. 已知等差数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 S_n，且 $S_{10}=12$，$S_{20}=17$，则 S_{30} 为（　　）

A. 30　　B. 25

C. 20　　D. 15

二、填空题

6.（**2019·湖北黄石二中高二期中**）设等差数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 S_n，且 $S_m=-2$，$S_{m+1}=0$，$S_{m+2}=3$，则 $m=$_____.

7.（**2019·河北沧州一中高二期中**）在等差数列$\{a_n\}$中，前 m（m 为奇数）项和为 135，其中偶数项之和为 63，且 $a_m-a_1=14$，则 a_{100} 的值为_____.

8. 已知数列$\{a_n\}$为等差数列，$a_3=7$，$a_1+a_7=10$，S_n 为其前 n 项和，则使 S_n 取到最大值的 $n=$_____.

三、解答题

9. 已知数列$\{a_n\}$的前 n 项和公式为 $S_n=2n^2-30n$.

(1)求数列$\{a_n\}$的通项公式 a_n；

(2)求 S_n 的最小值及对应的 n 值.

10.（**2019·吉林省长春市高三期中**）已知正项数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 S_n，且 $4S_n=a_n(a_n+2)$.

(1)求数列$\{a_n\}$的通项公式；

(2)数列$\{b_n\}$满足 $b_n-a_n=\frac{1}{S_n}$，求数列$\{b_n\}$的前 n 项和 T_n.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

2.4　等比数列

第 17 课时　等比数列的概念与通项公式

掌握几个要点

1. 把握 1 个定义

等比数列定义的理解

(1)由于等比数列的每一项都可能作分母,故每一项均不能为零,因此 q 也不可能为零.

(2)$\frac{a_{n+1}}{a_n}$均为同一常数,由此体现了公比的意义,同时应注意分子、分母次序不能颠倒.

(3)如果一个数列不是从第 2 项起,而是从第 3 项或第 4 项起每一项与它的前一项之比是同一个常数,那么这个数列不是等比数列.

2. 掌握 1 个公式

等比数列的通项公式

(1)已知首项 a_1 和公比 q,可以确定一个等比数列.

(2)在公式 $a_n=a_1q^{n-1}$ 中有 a_n,a_1,q,n 四个量,已知其中任意三个量,可以求得第四个量.

3. 辨析 1 个易错点

等比中项的理解

(1)当 a,b 同号时,a,b 的等比中项有两个;当 a,b 异号时,没有等比中项.

(2)在一个等比数列中,从第 2 项起,每一项(有穷数列的末项除外)都是它的前一项与后一项的等比中项.

(3)"a,G,b 成等比数列"等价于"$G^2=ab$"(a,b 均不为 0),可以用它来判断或证明三数是否成等比数列.

题点知识巩固

知识点一　等比数列的通项公式

1.(**2019·重庆八中高一期中**)已知等比数列$\{a_n\}$的公比为正数,且 $a_3a_9=2a_5^2$,$a_2=1$,则 $a_1=$　(　　)

A. $\frac{1}{2}$　　B. 2

C. $\sqrt{2}$　　D. $\frac{\sqrt{2}}{2}$

2. 已知等比数列$\{a_n\}$的各项均为正数,公比 $q\neq1$,$\sqrt[k]{a_1a_2\cdots a_k}=a_{11}$,则 $k=$　(　　)

A. 12　　B. 15

C. 18　　D. 21

3.(**2019·陕西省西安电子科技中学高二月考**)在等比数列$\{a_n\}$中,$a_1=2$,$a_4=16$.

(1)求数列$\{a_n\}$的通项公式;

(2)若 a_3,a_5 分别是等差数列$\{b_n\}$的第 3 项和第 5 项,试求数列$\{b_n\}$的通项公式及前 n 项和公式.

知识点二　等比中项的应用

4. 如果 $-1,a,b,c,-9$ 成等比数列,那么　(　　)

A. $b=3,ac=9$　　B. $b=-3,ac=9$

C. $b=3,ac=-9$　　D. $b=-3,ac=-9$

5. 等比数列$\{a_n\}$的前三项之和为 168,$a_2-a_5=42$,求 a_5 与 a_7 的等比中项.

知识点三　等比数列的判定与证明

6. 下列数列为等比数列的是　(　　)

A. $0,0,0,0,\cdots$

B. $2^2,4^2,6^2,8^2,\cdots$

C. $q-1,(q-1)^2,(q-1)^3,(q-1)^4,\cdots$

D. $\frac{1}{a},\frac{1}{a^2},\frac{1}{a^3},\frac{1}{a^4},\cdots$

7. 已知数列$\{a_n\}$的前 n 项和 $S_n=2a_n+1$,求证:$\{a_n\}$是等比数列,并求出通项公式.

提能达标过关

一、选择题

1.(**2019·四川广安中学高一月考**)有下列 4 个说法:

①等比数列中的某一项可以为 0;

②等比数列中公比的取值范围是$(-\infty,+\infty)$;

③若一个常数列是等比数列,则这个常数列的公比为 1;

④若 $b^2=ac$,则 a,b,c 成等比数列.

其中正确说法的个数为　(　　)

A. 0　　B. 1

C. 2　　D. 3

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

2. 若数列$\{a_n\}$满足$a_{n+1}=4a_n+6(n\in\mathbf{N}^*)$且$a_1>0$，则下列数列中是等比数列的是　　(　　)

A. $\{a_n+6\}$　　B. $\{a_n+1\}$

C. $\{a_n+3\}$　　D. $\{a_n+2\}$

3. (**2019·东北育才学校高二期中**)已知等比数列$\{a_n\}$的前三项依次为$a-1,a+1,a+4$，则$a_n=$　　(　　)

A. $4\times\left(\frac{3}{2}\right)^n$　　B. $4\times\left(\frac{2}{3}\right)^n$

C. $4\times\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}$　　D. $4\times\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$

4. 若等比数列$\{a_n\}$满足$a_na_{n+1}=16^n$，则公比为　　(　　)

A. 2　　B. 4

C. 8　　D. 16

5. 已知在等差数列$\{a_n\}$中，$a_1=9,d=1$. 若a_k是a_1与a_{2k}的等比中项，则k等于　　(　　)

A. 2　　B. 4

C. 6　　D. 8

二、填空题

6. 已知三个数成等比数列，其积为512，若第一个数与第三个数各减去2，则新的三个数成等差数列，则原来的三个数的和等于_____.

7. 设$\{a_n\}$是等比数列，给出下列说法：

①$\{a_n^2\}$是等比数列；

②$\{a_n+a_{n+1}\}$是等比数列；

③$\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$是等比数列；

④$\{\lg|a_n|\}$是等差数列；

⑤$\{a_n\cdot a_{n+1}\}$是等比数列.

其中正确说法的个数是_____.

8. 数列$\{a_n\}$是等差数列，若a_1+1,a_3+3,a_5+5构成公比为q的等比数列，则$q=$_____.

三、解答题

9. 已知等比数列$\{a_n\}$为递增数列，且$a_5^2=a_{10}$，$2(a_n+a_{n-2})=5a_{n-1}$，求数列$\{a_n\}$的通项公式.

10. (**2018·浙江杭州七校联考高二期中**)在数列$\{a_n\}$中，$a_1=2,a_{n+1}=4a_n-3n+1,n\in\mathbf{N}^*$.

(1)证明：数列$\{a_n-n\}$是等比数列；

(2)求数列$\{a_n\}$的通项公式.

第18课时　等比数列的性质

掌握几个要点

1. 掌握3种设法

几个数成等比数列的设法

(1)三个数成等比数列设为$\frac{a}{q},a,aq$.

推广到一般：奇数个数成等比数列设为：

$\cdots,\frac{a}{q^2},\frac{a}{q},a,aq,aq^2,\cdots$

(2)四个符号相同的数成等比数列设为：

$\frac{a}{q^3},\frac{a}{q},aq,aq^3$.

推广到一般：偶数个符号相同的数成等比数列设为：

$\cdots,\frac{a}{q^5},\frac{a}{q^3},\frac{a}{q},aq,aq^3,aq^5,\cdots$

(3)四个数成等比数列，不能确定它们的符号相同时，可设为：a,aq,aq^2,aq^3.

2. 把握5条性质

等比数列的性质

(1)若数列$\{a_n\}$，$\{b_n\}$是项数相同的等比数列，则$\{a_n\cdot b_n\}$也是等比数列. 特别地，若$\{a_n\}$是等比数列，c是不等于0的常数，则$\{c\cdot a_n\}$也是等比数列.

(2)在等比数列$\{a_n\}$中，若$m+n=p+q$，则$a_ma_n=a_pa_q$.

(3)数列$\{a_n\}$是有穷数列，则与首末两项等距离的两项的积相等，且等于首末两项的积.

(4)在等比数列$\{a_n\}$中，每隔k项取出一项，按原来的顺序排列，所得新数列仍为等比数列，公比为q^k.

(5)在等比数列$\{a_n\}$中，当$m,n,p(m,n,p\in\mathbf{N}^*)$成等差数列时，$a_m,a_n,a_p$成等比数列.

题点知识巩固

知识点一　等比数列的性质

1. 等比数列$\{a_n\}$中，$a_2=3,a_7a_{10}=36$，则a_{15}等于　　(　　)

A. 12　　B. 6

C. -12　　D. -6

2. 将公比为q的等比数列$a_1,a_2,a_3,a_4,\cdots$依次取相邻两项的乘积组成新的数列$a_1a_2,a_2a_3,a_3a_4,\cdots$. 此数列是　　(　　)

A. 公比为q的等比数列　　B. 公比为q^2的等比数列

C. 公比为q^3的等比数列　　D. 不一定是等比数列

3. (**2019·唐山一中测试**)在正项等比数列$\{a_n\}$中，$3a_1,\frac{1}{2}a_3,2a_2$成等差数列，则$\frac{a_{2\,018}-a_{2\,017}}{a_{2\,016}-a_{2\,015}}=$　　(　　)

A. 3或-1　　B. 9或1

C. 1　　D. 9

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

知识点二　等比数列的设法技巧

4. 已知三个数成等比数列，其积为 1，第 2 项与第 3 项之和为 $-\frac{3}{2}$，则这三个数依次为_____.

5. 已知四个实数，前三个数依次成等比数列，它们的积是 -8，后三个数依次成等差数列，它们的积是 -80，求这四个数.

知识点三　等比数列的应用

6. (**2019 · 湖北宜昌高一期末**)已知甲、乙两车间的月产值在 2017 年 1 月份相同，甲以后每个月比前一个月增加的产值相同，乙以后每个月比前一个月增加产值的百分比相同. 而 2017 年 7 月份两车间的月产值又相同，比较甲、乙两个车间 2017 年 4 月份的月产值的大小，则有 (　　)

A. 甲大于乙　　B. 甲等于乙

C. 甲小于乙　　D. 不确定

7. 2018 年，某县甲、乙两个林场森林木材的存量分别为 $16a$ 和 $25a$，甲林场木材存量每年比上年递增 25%，而乙林场木材存量每年比上年递减 20%.

(1)哪一年两林场木材的总存量相等？

(2)问两林场木材的总量到 2022 年能否翻一番？

提能达标过关

一、选择题

1. (**2019 · 山东省菏泽高二测试**)已知数列 $\{a_n\}$ 是等比数列，对任意 $n\in\mathbf{N}^*$，都有 $a_n>0$. 若 $a_3(a_3+a_5)+a_4(a_4+a_6)=25$，则 $a_3+a_5=$ (　　)

A. 5　　B. 10

C. 15　　D. 20

2. 在等比数列 $\{a_n\}$ 中，已知 $a_1a_8^3a_{15}=243$，则 $\frac{a_9^3}{a_{11}}$ 的值为 (　　)

A. 3　　B. 9

C. 27　　D. 81

3. 已知等比数列 $\{a_n\}$ 的各项均为正数，且 $a_1+2a_2=4$，$a_4^2=4a_3a_7$，则 $a_5=$ (　　)

A. $\frac{1}{16}$　　B. $\frac{1}{8}$

C. 20　　D. 40

4. 随着市场的变化与生产成本的降低，每隔 5 年计算机的价格降低 $\frac{1}{3}$，则 2003 年价格为 8 100 元的计算机到 2018 年时的价格应为 (　　)

A. 900 元　　B. 2 200 元

C. 2 400 元　　D. 3 600 元

5. (**2019 · 江西吉安一中高一期中**)已知 a,b,c 均为正数，若 $a+b+c,b+c-a,c+a-b,a+b-c$ 成等比数列，且公比为 q，则 q^3+q^2+q 的值为 (　　)

A. 0　　B. 1

C. 3　　D. 不确定

二、填空题

6. (**2018 · 辽宁模拟**)在等比数列 $\{a_n\}$ 中，若 $a_7+a_8+a_9+a_{10}=\frac{15}{8}$，$a_8a_9=\frac{-9}{8}$，则 $\frac{1}{a_7}+\frac{1}{a_8}+\frac{1}{a_9}+\frac{1}{a_{10}}=$_____.

7. 若数列 $\{a_n\}$ 为等比数列，且 $a_1+a_2=1$，$a_3+a_4=4$，则 $a_9+a_{10}=$_____.

8. 已知 $-7,a_1,a_2,-1$ 四个实数成等差数列，$-4,b_1,b_2,b_3,-1$ 五个实数成等比数列，则 $\frac{a_2-a_1}{b_2}=$_____.

三、解答题

9. 已知在等差数列 $\{a_n\}$ 中，$a_3+a_6=17$，$a_1a_8=-38$，且 $a_1<a_8$.

(1)求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；

(2)调整数列 $\{a_n\}$ 的前三项 a_1,a_2,a_3 的顺序，使它们成为等比数列 $\{b_n\}$ 的前三项，求 $\{b_n\}$ 的通项公式.

10. (**2019 · 湖南师大附中月考**)为了治理沙尘暴，西部某地区政府经过多年努力，到 2015 年年底，将当地沙漠绿化了 40%. 从 2016 年开始，每年将出现这种现象：原有沙漠面积的 12%被绿化，即改造为绿洲(被绿化的部分叫绿洲)，同时原有绿洲面积的 8%又被侵蚀为沙漠，问至少经过几年的绿化，才能使该地区的绿洲面积超过 50%？(可参考数据 $\lg 2\approx 0.3$)

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

2.5　等比数列的前 n 项和

第 19 课时　等比数列的前 n 项和

掌握几个要点

1. 把握 1 个公式

等比数列前 n 项和公式

当 $q=1$ 时，$S_n=na_1$；

当 $q\neq1$ 时，$S_n=\dfrac{a_1(1-q^n)}{1-q}=\dfrac{a_1-a_nq}{1-q}$.

2. 掌握 3 种思想

等比数列中用到的数学思想

(1)分类讨论的思想：①利用等比数列前 n 项和公式时要分公比 $q=1$ 和 $q\neq1$ 两种情况讨论；

②研究等比数列的单调性时应进行讨论：当 $a_1>0,q>1$ 或 $a_1<0,0<q<1$ 时为递增数列；当 $a_1<0,q>1$ 或 $a_1>0,0<q<1$ 时为递减数列；当 $q<0$ 时为摆动数列；当 $q=1$ 时为常数列.

(2)函数的思想：等比数列的通项 $a_n=a_1q^{n-1}=\dfrac{a_1}{q}\cdot q^n$ ($q>0$ 且 $q\neq1$)常和指数函数相联系；等比数列的和 $S_n=\dfrac{a_1}{q-1}\cdot(q^n-1)(q\neq1)$. 设 $A=\dfrac{a_1}{q-1}$，则 $S_n=A(q^n-1)$ 也与指数函数相联系.

(3)整体思想：应用等比数列前 n 项和时，常把 q^n，$\dfrac{a_1}{1-q}$ 当成整体求解.

题点知识巩固

知识点一　等比数列前 n 项和的基本运算

1. 在等比数列 $\{a_n\}$ 中，$a_1=2,S_3=26$，则公比 $q=$　(　　)

A. 3　　B. -4

C. 3 或 -4　　D. -3 或 4

2. 在等比数列 $\{a_n\}$ 中，已知 $a_1=3,a_n=96,S_n=189$，则公比 $q=$_____.

3. (1)设等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，已知 $a_2=6,6a_1+a_3=30$. 求 a_n 和 S_n；

(2)在等比数列 $\{a_n\}$ 中，$S_3=\dfrac{7}{2},S_6=\dfrac{63}{2}$，求 a_n.

知识点二　等比数列前 n 项和的应用

4. (**2017·全国卷Ⅱ**)我国古代数学名著《算法统宗》中有如下问题："远望巍巍塔七层，红光点点倍加增，共灯三百八十一，请问尖头几盏灯？"意思是：一座 7 层塔共挂了 381 盏灯，且相邻两层中的下一层灯数是上一层灯数的 2 倍，则塔的顶层共有灯　(　　)

A. 1 盏　　B. 3 盏

C. 5 盏　　D. 9 盏

5. (**2019·黑龙江省哈尔滨市高三期中**)中国古代数学著作《算法统综》中有这样一个问题："三百七十八里关，初步健步，不为难，次次脚痛减一半，六朝才得到其关，要见次日行里数，请公子你旧算相还."其大意为："有一个人走 378 里路，第一次健步行走，从第二天起脚痛每天走的路程为前一天的一半，走了 6 天后到达目的地."则该人第五天走的路程为　(　　)

A. 48 里　　B. 24 里

C. 12 里　　D. 6 里

6. (**2018·全国卷Ⅲ**)等比数列 $\{a_n\}$ 中，$a_1=1,a_5=4a_3$.

(1)求 $\{a_n\}$ 的通项公式；

(2)记 S_n 为 $\{a_n\}$ 的前 n 项和. 若 $S_m=63$，求 m.

提能达标过关

一、选择题

1. 已知等比数列 $\{a_n\}$ 的各项都是正数，若 $a_1=81,a_5=16$，则它的前 5 项和是　(　　)

A. 179　　B. 211

C. 248　　D. 275

2. 在等比数列 $\{a_n\}$ 中，若 $a_1=1,a_4=\dfrac{1}{8}$，则该数列的前 10 项和 $S_{10}=$　(　　)

A. $2-\dfrac{1}{2^8}$　　B. $2-\dfrac{1}{2^9}$

C. $2-\dfrac{1}{2^{10}}$　　D. $2-\dfrac{1}{2^{11}}$

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

3. 已知等比数列$\{a_n\}$中，$a_1=2$，$q=2$，前 n 项和 $S_n=126$，则 $n=$　　(　　)

A. 9　　B. 8

C. 7　　D. 6

4. 已知数列$\{a_n\}$是首项为 1 的等比数列，S_n 是数列$\{a_n\}$的前 n 项和，且 $9S_3=S_6$，则数列$\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$的前 5 项和为(　　)

A. $\frac{15}{8}$或 5　　B. $\frac{31}{16}$或 5

C. $\frac{31}{16}$　　D. $\frac{15}{8}$

5. (**2019・河北正定一中高二期末**)已知数列$\{a_n\}$是以 2 为首项，1 为公差的等差数列，$\{b_n\}$是以 1 为首项，2 为公比的等比数列，则 $a_{b_1}+a_{b_2}+\cdots+a_{b_{10}}=$　　(　　)

A. 1 033　　B. 2 057

C. 1 034　　D. 2 058

二、填空题

6. 在 14 与$\frac{7}{8}$之间插入 n 个数，组成等比数列，若所有项的和为$\frac{77}{8}$，则此数列的项数为_____.

7. 已知数列$\{a_n\}$是等比数列，$a_2=2$，$a_5=\frac{1}{4}$，则 $a_1a_2+a_2a_3+\cdots+a_na_{n+1}=$_____.

8. 在等比数列$\{a_n\}$中，若 $a_1=\frac{1}{2}$，$a_4=-4$，则公比 $q=$_____；$|a_1|+|a_2|+\cdots+|a_n|=$_____.

三、解答题

9. (**2019・河北省唐山市高一期中**)在等差数列$\{a_n\}$中，$a_2=4$，$a_4+a_7=15$.

(1)求数列$\{a_n\}$的通项公式；

(2)设 $b_n=2^{a_n-2}+n$，求 $b_1+b_2+b_3+\cdots+b_{10}$的值.

10. (**2019・山东济宁高二期中**)已知等比数列$\{a_n\}$的通项公式为 $a_n=3^{n-1}$，数列$\{b_n\}$满足：对任意正整数 n，$\frac{b_1}{a_1}+\frac{b_2}{a_2}+\frac{b_3}{a_3}+\cdots+\frac{b_n}{a_n}=2n+1$ 恒成立.

(1)求数列$\{b_n\}$的通项公式；

(2)求 $b_1+b_2+b_3+\cdots+b_{2\,018}$的值.

第 20 课时　等比数列前 n 项和的性质及应用

掌握几个要点

把握 3 个性质

等比数列前 n 项和的性质

(1)在等比数列$\{a_n\}$中，连续相同项的和也成等比数列，即 S_k，$S_{2k}-S_k$，$S_{3k}-S_{2k}$，…仍为等比数列.

(2)当 n 为偶数时，偶数项之和与奇数项之和的比等于等比数列的公比，即$\frac{S_{偶}}{S_{奇}}=q$.

(3)当公比 $q=1$ 时，$S_n=na_1$ 是 n 的正比例函数；当 $q\neq1$ 时，$S_n=\frac{a_1(1-q^n)}{1-q}=\frac{a_1}{1-q}-\frac{a_1}{1-q}\cdot q^n$，令 $A=\frac{a_1}{1-q}$，则 $S_n=A-Aq^n$. 可见，若一个数列的前 n 项和为 $S_n=A-Aq^n(A\neq0,q\neq0,n\in\mathbf{N}^*)$，则$\{a_n\}$是等比数列.

题点知识巩固

知识点一　等比数列前 n 项和的性质

1. (**2018・云南 11 校跨区调研**)已知数列$\{a_n\}$是等比数列，S_n 为其前 n 项和，若 $a_1+a_2+a_3=4$，$a_4+a_5+a_6=8$，则 $S_{12}=$　　(　　)

A. 40　　B. 60

C. 32　　D. 50

2. 若等比数列$\{a_n\}$的公比为$\frac{1}{3}$，且 $a_1+a_3+\cdots+a_{99}=60$，则$\{a_n\}$的前 100 项和为_____.

3. 已知等比数列$\{a_n\}$共有 $2n$ 项，其和为 -240，且奇数项的和比偶数项的和大 80，则公比 $q=$_____.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

知识点二　数列的综合问题

4.（**2019·河南省郸城县一中高二月考**）设数列$\{x_n\}$满足$\log_2 x_{n+1}=1+\log_2 x_n$，且$x_1+x_2+\cdots+x_5=8$，则$x_{21}+x_{22}+\cdots+x_{25}=$（　　）

A. 2^{20}　　B. 16^{20}

C. 2^{23}　　D. 2^{24}

5. 设等比数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n. 若$S_3=2$，$S_6=18$，则$\dfrac{S_{10}}{S_5}$等于（　　）

A. -3　　B. 5

C. -31　　D. 33

6. 已知等比数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，$a_1=-1$，$\dfrac{S_{10}}{S_5}=\dfrac{31}{32}$.

(1)求等比数列$\{a_n\}$的公比q；

(2)求$a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2$.

提能达标过关

一、选择题

1. 各项均为正数的等比数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，若$S_n=2$，$S_{3n}=14$，则S_{4n}等于（　　）

A. 80　　B. 30

C. 26　　D. 16

2. 已知各项均为实数的等比数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，若$S_{10}=10$，$S_{30}=70$，则$S_{40}=$（　　）

A. 150　　B. 140

C. 130　　D. 120

3.（**2019·吉林省长春市高三期中**）已知等比数列$\{a_n\}$的前n项和$S_n=2^n+m$，则$a_3=$（　　）

A. 2　　B. 4

C. 8　　D. 16

4. 等比数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，若公比$q>1$，$a_3+a_5=20$，$a_2a_6=64$，则$S_5=$（　　）

A. 31　　B. 36

C. 42　　D. 48

5. 已知公比为$q(q\neq1)$的等比数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，则数列$\left\{\dfrac{1}{a_n}\right\}$的前$n$项和为（　　）

A. $\dfrac{q^n}{S_n}$　　B. $\dfrac{S_n}{q^n}$

C. $\dfrac{1}{S_nq^{n-1}}$　　D. $\dfrac{S_n}{a_1^2q^{n-1}}$

二、填空题

6. 在正项等比数列$\{a_n\}$中，已知$a_1a_2a_3=4$，$a_4a_5a_6=12$，$a_{n-1}a_na_{n+1}=324$，则$n=$_____.

7. 在正项等比数列$\{a_n\}$中，$a_2a_4+2a_3a_5+a_4a_6=25$，则$a_3+a_5=$_____.

8. 已知数列$\{a_n\}$中，$a_n=2n-1$，等比数列$\{b_n\}$的公比q满足$q=a_n-a_{n-1}(n\geqslant2)$，且$b_1=a_2$，则$b_1+b_2+b_3+b_4+b_5=$_____.

三、解答题

9. 已知数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，满足$S_n=4a_n-p$，其中p为非零常数.

(1)求证：数列$\{a_n\}$为等比数列；

(2)若$a_2=\dfrac{4}{3}$，求$\{a_n\}$的通项公式.

10. 已知等比数列$\{a_n\}$满足$a_3+a_4=12$，$a_1a_6=32$，前n项和为S_n，且公比$q>1$.

(1)求证：$S_n=2a_n-1$；

(2)求证：$\dfrac{1}{a_1}+\dfrac{1}{a_2}+\cdots+\dfrac{1}{a_n}<2$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

第 21 课时　素养提升——等比数列的综合

学科思想提能

分类讨论思想在等比数列中的应用

分类讨论思想在等比数列中应用较多，常见的分类讨论有：

(1)已知 S_n 与 a_n 的关系，要分 $n=1$，$n\geqslant 2$ 两种情况.

(2)等比数列中遇到求和问题要分公比 $q=1$，$q\neq 1$ 讨论.

(3)项数的奇、偶数讨论.

(4)等比数列的单调性的判断要注意与 a_1，q 的取值的讨论.

【典例】 已知$\{a_n\}$为等比数列，下面结论中正确的是(　　)

A. $a_1+a_3\geqslant 2a_2$

B. $a_1^2+a_3^2\geqslant 2a_2^2$

C. 若 $a_1=a_3$，则 $a_1=a_2$

D. 若 $a_3>a_1$，则 $a_4>a_2$

[分析]　设出等比数列$\{a_n\}$的首项与公比，利用等比数列的通项公式求解.

[解析]　设$\{a_n\}$的首项为 a_1，公比为 q，

则 $a_2=a_1q$，$a_3=a_1q^2$.

$\because a_1+a_3=a_1(1+q^2)$，又 $1+q^2\geqslant 2q$，

当 $a_1>0$ 时，$a_1(1+q^2)\geqslant 2a_1q$，即 $a_1+a_3\geqslant 2a_2$；

当 $a_1<0$ 时，$a_1(1+q^2)\leqslant 2a_1q$，即 $a_1+a_3\leqslant 2a_2$.

故 A 不正确；

$\because a_1^2+a_3^2=a_1^2(1+q^4)$，又 $1+q^4\geqslant 2q^2$ 且 $a_1^2>0$，

$\therefore a_1^2+a_3^2\geqslant 2a_2^2$. 故 B 正确；

若 $a_1=a_3$，则 $q^2=1$. $\therefore q=\pm 1$.

当 $q=1$ 时，$a_1=a_2$；当 $q=-1$ 时，$a_1\neq a_2$.

故 C 不正确；

若 $q>0$，则 $a_3q>a_1q$，即 $a_4>a_2$；

若 $q<0$，则 $a_3q<a_1q$，此时 $a_4<a_2$. 故 D 不正确，选 B.

[答案]　B

易错易混提示

易错点 1　对概念不理解致误

【例 1】 等比数列$\{a_n\}(a_n>0)$满足 $a_1-a_5=90$，$a_2-a_4=36$，求 a_5，a_7 的等比中项.

[错解]　设该等比数列的公比为 q，首项为 a_1，

由已知，得$\begin{cases}a_1-a_1q^4=90,\\ a_1q-a_1q^3=36,\end{cases}$

解得$\begin{cases}a_1=96,\\ q=\frac{1}{2}\end{cases}$ 或$\begin{cases}a_1=-6,\\ q=2\end{cases}$(舍去).

$\therefore a_6=a_1q^5=3$，

$\therefore a_5$，a_7 的等比中项是 3.

[错因分析]　对等比中项定义理解不到位，误认为 a_5，a_7 的等比中项是 a_6.

[正解]　设该等比数列的公比为 q，首项为 a_1，

由已知，得$\begin{cases}a_1-a_1q^4=90,\\ a_1q-a_1q^3=36,\end{cases}$

解得$\begin{cases}a_1=96,\\ q=\frac{1}{2}\end{cases}$ 或$\begin{cases}a_1=-6,\\ q=2\end{cases}$(舍去).

令 G 是 a_5，a_7 的等比中项，

则应有 $G^2=a_5a_7=a_1q^4\cdot a_1q^6=a_1^2q^{10}$

$=96^2\times\left(\frac{1}{2}\right)^{10}=9$，

所以 a_5，a_7 的等比中项是 ± 3.

[防范措施]　要明确同号两数的等比中项 G 有两个且互为相反数，若 G 为 a，b 的等比中项，则 $G=\pm\sqrt{ab}$.

易错点 2　利用等比数列求和公式忽视 $q=1$ 的情形而致错

【例 2】 已知等比数列$\{a_n\}$中，$a_3=4$，$S_3=12$，求数列$\{a_n\}$的通项公式.

[错解]　设等比数列的公比为 q，

则$\begin{cases}a_1q^2=4,\\ \frac{a_1(1-q^3)}{1-q}=12,\end{cases}$ 解得 $q=-\frac{1}{2}$.

所以 $a_n=a_3q^{n-3}=4\times\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-3}=\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-5}$.

[错因分析]　上述解法中忽视了等比数列前 n 项和公式中 $q=1$ 这一特殊情况.

[正解]　当 $q=1$ 时，$a_3=4$，$a_1=a_2=a_3=4$，

$S_3=a_1+a_2+a_3=12$，

所以 $q=1$ 符合题意，$a_n=4$.

当 $q\neq 1$ 时，$\begin{cases}a_1q^2=4,\\ \frac{a_1(1-q^3)}{1-q}=12,\end{cases}$

解得 $q=-\frac{1}{2}$，$a_n=a_3q^{n-3}=\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-5}$.

故数列通项公式为 $a_n=4$ 或 $a_n=\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-5}$.

[防范措施]　利用等比数列前 n 项和公式时，要注意判断公比 q 是否等于 1，防止漏掉 $q=1$ 这种情况.

思想方法活用

根据递推公式求通项公式

1. 形如 $a_{n+1}=a_n+f(n)(n\in\mathbf{N}_+)$的递推公式，可用累加法求通项公式，方法是：$a_n=a_1+(a_2-a_1)+(a_3-a_2)+\cdots+(a_n-a_{n-1})=a_1+f(1)+f(2)+\cdots+f(n-1)$.

2. 形如 $a_{n+1}=f(n)\cdot a_n(n\in\mathbf{N}_+)$的递推公式，可用累乘法求通项公式，方法是：$a_n=a_1\cdot\frac{a_2}{a_1}\cdot\frac{a_3}{a_2}\cdot\cdots\cdot\frac{a_n}{a_{n-1}}=a_1\cdot f(1)\cdot f(2)\cdot\cdots\cdot f(n-1)$.

3. 形如 $a_{n+1}=pa_n+q(pq\neq 0$，且 $p\neq 1)$的递推公式，可构造等比数列$\left\{a_n+\frac{q}{p-1}\right\}$，其中该等比数列的首项是 $a_1+\frac{q}{p-1}$，公比为 p.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

方法 1　累加法求通项公式

【例 1】 设数列$\{a_n\}$满足$a_1=1$，且$a_{n+1}-a_n=n+1(n\in\mathbf{N}^*)$，则数列$\{a_n\}$的通项公式为_____.

［解析］ 由题意有$a_2-a_1=2,a_3-a_2=3,\cdots,a_n-a_{n-1}=n(n\geqslant 2)$.

以上各式相加，得

$$a_n-a_1=2+3+\cdots+n=\frac{(n-1)(2+n)}{2}=\frac{n^2+n-2}{2}.$$

又$\because a_1=1,\therefore a_n=\frac{n^2+n}{2}(n\geqslant 2)$.

$\because$当$n=1$时也满足上式，

$\therefore a_n=\frac{n^2+n}{2}(n\in\mathbf{N}^*)$.

［答案］ $a_n=\frac{n^2+n}{2}(n\in\mathbf{N}^*)$

方法 2　累乘法求通项公式

【例 2】 在数列$\{a_n\}$中，$a_1=1,a_n=\frac{n-1}{n}a_{n-1}(n\geqslant 2)$，则数列$\{a_n\}$的通项公式为_____.

［解析］ $\because a_n=\frac{n-1}{n}a_{n-1}(n\geqslant 2)$，

$\therefore a_{n-1}=\frac{n-2}{n-1}a_{n-2},a_{n-2}=\frac{n-3}{n-2}a_{n-3},\cdots,a_2=\frac{1}{2}a_1$.

以上$(n-1)$个式子相乘得

$$a_n=a_1\times\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\times\cdots\times\frac{n-1}{n}=\frac{a_1}{n}=\frac{1}{n}.$$

当$n=1$时，$a_1=1$，上式也成立.

$\therefore a_n=\frac{1}{n}(n\in\mathbf{N}^*)$.

［答案］ $a_n=\frac{1}{n}(n\in\mathbf{N}^*)$

方法 3　构造法求通项公式

【例 3】 已知数列$\{a_n\}$满足$a_1=1,a_{n+1}=3a_n+2$，则数列$\{a_n\}$的通项公式为_____.

［解析］ $\because a_{n+1}=3a_n+2,\therefore a_{n+1}+1=3(a_n+1)$，

$\therefore\frac{a_{n+1}+1}{a_n+1}=3$，

$\therefore$数列$\{a_n+1\}$为等比数列，公比$q=3$，

又$a_1+1=2$，

$\therefore a_n+1=2\times 3^{n-1}$，

$\therefore a_n=2\times 3^{n-1}-1(n\in\mathbf{N}^*)$.

［答案］ $a_n=2\times 3^{n-1}-1(n\in\mathbf{N}^*)$

素养培优提能

一、选择题

1. 在等比数列$\{a_n\}$中，若$a_3a_5a_7=-3\sqrt{3}$，则$a_2a_8=$（　　）

A. 3　　B. $\sqrt{17}$

C. 9　　D. 13

2. 在等比数列$\{a_n\}$中，若$a_1<0,a_2=18,a_4=8$，则公比q等于（　　）

A. $\frac{3}{2}$　　B. $\frac{2}{3}$

C. $-\frac{2}{3}$　　D. $\frac{2}{3}$或$-\frac{2}{3}$

3. 设等比数列$\{a_n\}$中，前n项和为S_n，已知$S_3=8,S_6=7$，则$a_7+a_8+a_9$等于（　　）

A. $\frac{1}{8}$　　B. $-\frac{1}{8}$

C. $\frac{57}{8}$　　D. $\frac{55}{8}$

4. **(2019·山西太原五中高二月考)**已知在数列$\{a_n\}$中，$a_n=-4n+5$，等比数列$\{b_n\}$的公比q满足$q=a_n-a_{n-1}(n\geqslant 2)$，且$b_1=a_2$，则$|b_1|+|b_2|+\cdots+|b_n|=$（　　）

A. $1-4^n$　　B. 4^n-1

C. $\frac{1-4^n}{3}$　　D. $\frac{4^n-1}{3}$

5. **(2019·河北衡水中学月考)**等比数列$\{a_n\}$的前n项和为$S_n,S_5=2,S_{10}=6$，则$a_{16}+a_{17}+a_{18}+a_{19}+a_{20}$等于（　　）

A. 8　　B. 12

C. 16　　D. 24

二、填空题

6. 设数列$\{a_n\}$是等比数列，前n项和为S_n，若$S_3=3a_3$，则公比$q=$_____.

7. 等比数列的首项是-1，前n项和为S_n，如果$\frac{S_{10}}{S_5}=\frac{31}{32}$，则$S_4$的值是_____.

8. **(2019·成都诊断)**在数列$\{a_n\}$中，$a_1=1,a_n=\frac{n^2}{n^2-1}a_{n-1}(n\geqslant 2,n\in\mathbf{N}^*)$，则$a_n=$_____.

三、解答题

9. 已知公差不为0的等差数列$\{a_n\}$的前n项和为$S_n,S_3=a_4+6$，且a_1,a_4,a_{13}成等比数列.

(1)求数列$\{a_n\}$的通项公式；

(2)设$b_n=2^{a_n}+1$，求数列$\{b_n\}$的前n项和T_n.

10. 已知公比不为1的等比数列$\{a_n\}$的首项$a_1=\frac{1}{2}$，前n项和为S_n，且a_4+S_4,a_5+S_5,a_6+S_6成等差数列.

(1)求等比数列$\{a_n\}$的通项公式；

(2)对$n\in\mathbf{N}^*$，在a_n与a_{n+1}之间插入3^n个数，使这3^n+2个数成等差数列，记插入的这3^n个数的和为b_n，求数列$\{b_n\}$的前n项和T_n.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

第 22 课时　数列求和

掌握几个要点

1. 掌握 6 种常见求和方法

求数列的前 n 项和的方法

(1)公式法

①等差数列的前 n 项和公式

$$S_n=\frac{n(a_1+a_n)}{2}=na_1+\frac{n(n-1)}{2}d.$$

②等比数列的前 n 项和公式

(ⅰ)当 $q=1$ 时，$S_n=na_1$；

(ⅱ)当 $q\neq1$ 时，$S_n=\frac{a_1(1-q^n)}{1-q}=\frac{a_1-a_nq}{1-q}$.

(2)分组转化法

把数列的每一项分成两项或几项，使其转化为几个等差、等比数列，再求解.

(3)裂项相消法

把数列的通项拆成两项之差求和，正负相消剩下首尾若干项.

(4)倒序相加法

把数列分别正着写和倒着写再相加，即等差数列求和公式的推导过程的推广.

(5)错位相减法

主要用于一个等差数列与一个等比数列对应项相乘所得的数列的求和，即等比数列求和公式的推导过程的推广.

(6)并项求和法

一个数列的前 n 项和中，可两两结合求解，则称之为并项求和. 形如 $a_n=(-1)^nf(n)$ 类型，可采用两项合并求解.

例如，$S_n=100^2-99^2+98^2-97^2+\cdots+2^2-1^2=(100+99)+(98+97)+\cdots+(2+1)=5\ 050$.

2. 记住 4 个常用结论

常见数列的裂项方法

数列(n 为正整数)	裂项方法
$\left\{\frac{1}{n(n+k)}\right\}$ (k 为非零常数)	$\frac{1}{n(n+k)}=\frac{1}{k}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+k}\right)$
$\left\{\frac{1}{4n^2-1}\right\}$	$\frac{1}{4n^2-1}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)$
$\left\{\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}\right\}$	$\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}=\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$
$\left\{\log_a\left(1+\frac{1}{n}\right)\right\}$ ($a>0,a\neq1$)	$\log_a\left(1+\frac{1}{n}\right)=\log_a(n+1)-\log_an$

题点知识巩固

知识点一　公式法、分组转化法求和

1. 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 $S_n=\frac{n^2+n}{2}$，$n\in\mathbf{N}^*$.

(1)求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；

(2)设 $b_n=2^{a_n}+(-1)^na_n$，求数列 $\{b_n\}$ 的前 $2n$ 项和.

知识点二　裂项相消求和法

2. (**2017·全国卷Ⅱ**)等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，$a_3=3$，$S_4=10$，则 $\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{S_k}=$ _____.

3. 设等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，首项 $a_1=1$，且 $\frac{S_{2\ 018}}{2\ 018}-\frac{S_{2\ 017}}{2\ 017}=1$.

(1)求 S_n；

(2)求数列 $\left\{\frac{1}{\sqrt{S_nS_{n+1}}}\right\}$ 的前 n 项和 T_n.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

知识点三　错位相减求和法

4. 已知数列$\{a_n\}$的前n项和$S_n=3n^2+8n$，$\{b_n\}$是等差数列，且$a_n=b_n+b_{n+1}$.

(1)求数列$\{b_n\}$的通项公式；

(2)令$c_n=\dfrac{(a_n+1)^{n+1}}{(b_n+2)^n}$，求数列$\{c_n\}$的前$n$项和$T_n$.

提能达标过关

一、选择题

1. (**2019·长沙模拟**)已知数列$\{a_n\}$的通项公式是$a_n=(-1)^n\cdot(3n-2)$，则$a_1+a_2+\cdots+a_{10}$等于　　(　　)

A. 15　　B. 12

C. -12　　D. -15

2. 数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，已知$S_n=1-2+3-4+\cdots+(-1)^{n-1}\cdot n$，则$S_{17}=$　　(　　)

A. 9　　B. 8

C. 17　　D. 16

3. 数列$\{a_n\}$的通项$a_n=n\cdot 2^n$，则$\{a_n\}$的前n项和S_n为　　(　　)

A. $n\cdot 2^{n+1}$　　B. $n\cdot 2^{n+1}-2$

C. $(n-1)\cdot 2^{n+1}+2$　　D. $n\cdot 2^{n+1}+2$

4. 已知函数$y=\log_a(x-1)+3(a>0,a\neq 1)$的图象所过定点的横、纵坐标分别是等差数列$\{a_n\}$的第二项与第三项，若$b_n=\dfrac{1}{a_na_{n+1}}$，数列$\{b_n\}$的前$n$项和为$T_n$，则$T_{10}=$　　(　　)

A. $\dfrac{9}{11}$　　B. $\dfrac{10}{11}$

C. 1　　D. $\dfrac{12}{11}$

二、填空题

5. 已知数列$\{a_n\}$满足$a_1=1$，$a_{n+1}\cdot a_n=2^n(n\in\mathbf{N}^*)$，则$S_{2\,016}=$_____.

6. 数列$\{a_n\}$满足$a_{n+1}+(-1)^na_n=2n-1$，则$\{a_n\}$的前60项和为_____.

7. 已知首项都是1的两个数列$\{a_n\}$，$\{b_n\}(b_n\neq 0,n\in\mathbf{N}^*)$满足$a_nb_{n+1}-a_{n+1}b_n+2b_{n+1}b_n=0$. 若$b_n=3^{n-1}$，则数列$\{a_n\}$的前$n$项和$S_n=$_____.

三、解答题

8. 在等差数列$\{a_n\}$中，$a_2+a_7=-23$，$a_3+a_8=-29$.

(1)求数列$\{a_n\}$的通项公式；

(2)设数列$\{a_n+b_n\}$是首项为1，公比为q的等比数列，求$\{b_n\}$的前n项和S_n.

9. 已知数列$\{a_n\}$是递增的等比数列，且$a_1+a_4=9$，$a_2a_3=8$.

(1)求数列$\{a_n\}$的通项公式；

(2)设S_n为数列$\{a_n\}$的前n项和，$b_n=\dfrac{a_{n+1}}{S_nS_{n+1}}$，求数列$\{b_n\}$的前$n$项和$T_n$.

10. 已知等比数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，$a_1=1$，公比$q=3$.

(1)求证：$S_n=\dfrac{a_{n+1}-1}{2}$；

(2)求数列$\{2na_n\}$的前n项和T_n.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

阶段质量评估 2

（时间：60 分钟　满分：100 分）

一、选择题（每小题 5 分，共 30 分）

1. 首项为 a 的数列$\{a_n\}$既是等差数列，又是等比数列，则这个数列的前 n 项和为　（　　）

A. na　　B. a^{n-1}

C. a^n　　D. $(n-1)a$

2. 设数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 S_n，若 $a_1=1$，$a_{n+1}=3S_n$（$n\in\mathbf{N}^*$），则 $S_6=$　（　　）

A. 4^4　　B. 4^5

C. $\frac{1}{3}\times(4^6-1)$　　D. $\frac{1}{4}\times(4^5-1)$

3. 在首项 $a_1=1$，公比 $q=2$ 的等比数列$\{a_n\}$中，当 $a_n=64$ 时，序号 n 等于　（　　）

A. 4　　B. 5

C. 6　　D. 7

4. 已知数列$\{a_n\}$的前 n 项和 $S_n=n^2-9n$，第 k 项满足 $5<a_k<8$，则 k 等于　（　　）

A. 9　　B. 8

C. 7　　D. 6

5. （**2019·岳阳模拟**）在等差数列$\{a_n\}$中，如果 $a_1+a_2=40$，$a_3+a_4=60$，那么 $a_7+a_8=$　（　　）

A. 95　　B. 100

C. 135　　D. 80

6. 设等差数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 S_n，且 $a_1>0$，$a_3+a_{10}>0$，$a_6a_7<0$，则满足 $S_n>0$ 的最大自然数 n 的值为　（　　）

A. 6　　B. 7

C. 12　　D. 13

二、填空题（每小题 5 分，共 20 分）

7. 设等差数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 S_n，若 $S_3=9$，$S_6=36$，则 $a_7+a_8+a_9=$_____.

8. 在如下数表中，已知每行、每列中的数都成等比数列，那么位于表中的第 10 行第 11 列的数是_____.

	第 1 列	第 2 列	第 3 列	…
第 1 行	1	2	4	…
第 2 行	2	4	8	…
第 3 行	4	8	16	…
…	…	…	…	…

9. 一件家用电器，现价 2 000 元，实行分期付款，一年后还清，购买后一个月第一次付款，以后每月付款一次，每次付款数相同，共付 12 次，月利率为 0.8%，并按复利计息，那么每期应付款_____元（参考数据：$1.008^{11}\approx1.092$，$1.008^{12}\approx1.100$，$1.08^{11}\approx2.332$，$1.08^{12}\approx2.518$）.

10. 已知等差数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 S_n，满足 $S_8=S_{12}$，且 $a_1>0$，则 S_n 中最大的是_____.

三、解答题（50 分）

11. （12 分）设公差为 d 的等差数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 S_n，若 $S_4\geqslant10$，$S_5\leqslant15$，求 a_4 的最大值.

12. （12 分）已知数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 S_n，$a_n=3S_n+1(n\in\mathbf{N}^*)$.

（1）求 a_1，a_2；

（2）求数列$\{a_n\}$的通项公式.

13. （13 分）已知数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 S_n，且 $S_n=2a_n-2$（$n\in\mathbf{N}^*$）.

（1）求数列$\{a_n\}$的通项公式；

（2）求数列$\{S_n\}$的前 n 项和 T_n.

14. （13 分）在数列$\{a_n\}$中，$a_{n+1}-2a_n=2^n$，且 $a_1=1$.

（1）设 $b_n=\frac{a_n}{2^{n-1}}$，证明：数列$\{b_n\}$为等差数列；

（2）求数列$\{a_n\}$的前 n 项和 S_n.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

第三章 不等式

3.1 不等关系与不等式

第23课时 不等关系与不等式

掌握几个要点

1. 掌握2个方法

(1)作差法比较两个数大小的步骤及变形方法

①作差法比较的步骤:作差→变形→定号→结论.

②变形的方法:因式分解;配方;通分;对数与指数的运算性质;分母或分子有理化;分类讨论.

(2)作商法比较大小的步骤及适用范围

①作商法比较的三个步骤:作商→变形→与1比较→结论.

②作商法比较大小的适用范围:要比较的两个数同号;比较"幂、指数、对数、含绝对值"的两个数的大小时,常用作商法.

2. 记牢8个性质

常用的不等式的基本性质

(1)对称性:$a>b\Leftrightarrow b<a$;

(2)传递性:$a>b,b>c\Rightarrow a>c$;

(3)可加性:$a>b\Leftrightarrow a+c>b+c$;

(4)可乘性:$a>b,c>0\Rightarrow ac>bc$;$a>b,c<0\Rightarrow ac<bc$;

(5)加法法则:$a>b,c>d\Rightarrow a+c>b+d$;

(6)乘法法则:$a>b>0,c>d>0\Rightarrow ac>bd$;

(7)乘方法则:$a>b>0,n\in\mathbf{N},n\geqslant 1\Rightarrow a^n>b^n$;

(8)开方法则:$a>b>0,n\in\mathbf{N},n\geqslant 2\Rightarrow\sqrt[n]{a}>\sqrt[n]{b}$.

题点知识巩固

知识点一 用不等式(组)表示不等关系

1. 下列说法正确的是 ( )

A. 某人月收入x元不高于2 000元可表示为"$x<2\ 000$"

B. 小明的身高为x,小华的身高为y,则小明比小华矮可表示为"$x>y$"

C. 变量x不小于a可表示为"$x\geqslant a$"

D. 变量y不超过a可表示为"$y\geqslant a$"

2. 某工厂生产甲、乙两种图画纸,计划每种图画纸的生产量不少于8 t,已知生产甲种图画纸1 t要用芦苇7 t、黄麻3 t、枫树5 t;生产乙种图画纸1 t要用芦苇3 t、黄麻4 t、枫树8 t.现在仓库内有芦苇300 t、黄麻150 t、枫树200 t,试列出满足题意的不等式组.

知识点二 比较大小

3. 设$a=3x^2-x+1,b=2x^2+x$,则 ( )

A. $a>b$ B. $a<b$

C. $a\geqslant b$ D. $a\leqslant b$

4. 若$a=\frac{\ln 2}{2},b=\frac{\ln 3}{3},c=\frac{\ln 5}{5}$,则 ( )

A. $a<b<c$ B. $c<b<a$

C. $c<a<b$ D. $b<a<c$

5. 若$x<y<0$,求证:$(x^2+y^2)(x-y)>(x^2-y^2)(x+y)$.

知识点三 不等式的性质

6. 已知$b<2a,3d<c$,则下列不等式一定成立的是 ( )

A. $2a-c>b-3d$ B. $2ac>3bd$

C. $2a+c>b+3d$ D. $6ad>bc$

7. (**2019·山东泰安中学段考**)已知$a<b<0$,那么 ( )

A. $a^2<b^2$ B. $\frac{a}{b}<1$

C. $a^3>b^3$ D. $\frac{1}{a}>\frac{1}{b}$

8. 已知$x<-2,y>4$,则x^2+y的取值范围是_____.

提能达标过关

一、选择题

1. 某厂技术科组织工人参加某项技能测试,某职工参加完测试后对自己的成绩进行了如下估计:理论考试成绩x超过85分,技能操作成绩y不低于90分,答辩面试成绩z高于95分,用不等式组表示为 ( )

A. $\begin{cases}x>85,\\y\geqslant 90,\\z\geqslant 95,\end{cases}$ B. $\begin{cases}x\geqslant 85,\\y>90,\\z>95\end{cases}$

C. $\begin{cases}x>85,\\y\geqslant 90,\\z>95\end{cases}$ D. $\begin{cases}x\geqslant 85,\\y>90,\\z\geqslant 95\end{cases}$

2. (**2019·广西南宁二中期末**)已知$a>b>c$,且$a+b+c=0$,则下列不等式恒成立的是 ( )

A. $ab>bc$ B. $ac>bc$

C. $ab>ac$ D. $a|b|>|b|c$

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

3.（**2019·上海杨浦高级中学期中**）已知 $a_1\in(0,1)$，$a_2\in(0,1)$，记 $M=a_1a_2$，$N=a_1+a_2-1$，则 M 与 N 的大小关系是（　　）

A. $M<N$　　B. $M>N$

C. $M=N$　　D. 无法确定

4. 若 $\frac{1}{a}<\frac{1}{b}<0$，则下列结论中不正确的是（　　）

A. $a^2<b^2$　　B. $ab<b^2$

C. $a+b<0$　　D. $|a|+|b|>|a+b|$

5. 已知 $0<a<1$，且 $ab>1$，记 $M=\log_a\frac{1}{b}$，$N=\log_a b$，$P=\log_b\frac{1}{b}$，则 M,N,P 的大小关系为（　　）

A. $P<N<M$　　B. $N<P<M$

C. $N<M<P$　　D. $P<M<N$

二、填空题

6. 设 $a>0$，$b>0$ 且 $a\neq b$，则 $(ab)^{\frac{a+b}{2}}$ 与 a^ba^a 的大小关系为_____（用“>”连接）.

7. 已知 $\triangle ABC$ 的三边 a,b,c 满足 $b+c\leqslant 2a$，$c+a\leqslant 2b$，则 $\frac{b}{a}$ 的取值范围是_____.

8.（**2019·北京东城期末**）设 a,b 为正实数，有下列命题：

①若 $a^2-b^2=1$，则 $a-b<1$；

②若 $\frac{1}{b}-\frac{1}{a}=1$，则 $a-b<1$；

③若 $|\sqrt{a}-\sqrt{b}|=1$，则 $|a-b|<1$；

④若 $|a|\leqslant 1$，$|b|\leqslant 1$，则 $|a-b|\leqslant|1-ab|$.

其中正确的命题为_____（填序号）.

三、解答题

9. 试比较下列各组式子的大小：

(1) $\sqrt{x+1}-\sqrt{x}$ 与 $\sqrt{x}-\sqrt{x-1}$，其中 $x>1$；

(2) x^3-2y^3 与 xy^2-2x^2y，其中 $x>y>0$；

(3) a^{3-a} 和 a^{2a}（$a>0$）.

10.（**2019·湖南湘潭一中模拟**）若 $-1<a+b<3$，$2<a-b<4$，求 $2a+3b$ 的取值范围.

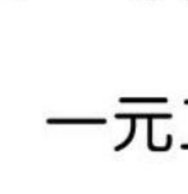
3.2　一元二次不等式及其解法

第 24 课时　一元二次不等式及其解法

掌握几个要点

掌握 1 个关系

一元二次不等式与相应的二次函数及一元二次方程的关系

判别式 $\Delta=b^2-4ac$	$\Delta>0$	$\Delta=0$	$\Delta<0$
二次函数 $y=ax^2+bx+c$（$a>0$）的图象			
一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$（$a>0$）的根	有两相异实数根 x_1,x_2（$x_1<x_2$）	有两相等实数根 $x_1=x_2=-\frac{b}{2a}$	没有实数根
一元二次不等式 $ax^2+bx+c>0$（$a>0$）的解集	$\{x\mid x<x_1$ 或 $x>x_2\}$	$\left\{x\middle\vert x\neq-\frac{b}{2a}\right\}$	**R**
一元二次不等式 $ax^2+bx+c<0$（$a>0$）的解集	$\{x\mid x_1<x<x_2\}$	$\varnothing$	$\varnothing$

题点知识巩固

知识点一　一元二次不等式的解法

1. 不等式 $-x^2-5x+6\geqslant 0$ 的解集为（　　）

A. $\{x\mid x\geqslant 6$ 或 $x\leqslant -1\}$　　B. $\{x\mid -1\leqslant x\leqslant 6\}$

C. $\{x\mid -6\leqslant x\leqslant 1\}$　　D. $\{x\mid x\leqslant -6$ 或 $x\geqslant 1\}$

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

2. 不等式$(3x-2)(2-x)\geqslant 0$的解集是　　(　　)

A. $\left[\frac{2}{3},2\right]$　　B. $\left(-\infty,\frac{2}{3}\right]\cup[2,+\infty)$

C. $\left[\frac{3}{2},2\right]$　　D. $\left[-\frac{2}{3},2\right]$

3. 解下列不等式(组)：

(1)$\begin{cases}x(x+2)>0,\\x^2<1;\end{cases}$

(2)$6-2x\leqslant x^2-3x<18$；

(3)$x^2-3|x|+2>0$.

知识点二　解含参数的一元二次不等式

4. 解关于x的不等式：$ax^2-(a+1)x+1<0(a\in\mathbf{R},a>0)$.

知识点三　三个“二次”关系的应用

5. 若关于x的不等式$ax^2-6x+a^2>0$的解集为$\{x|1<x<m\}$，则$a=$_____，$m=$_____.

6. 已知关于x的不等式$x^2+ax+b<0$的解集为$\{x|1<x<2\}$，求关于x的不等式$bx^2+ax+1>0$的解集.

提能达标过关

一、选择题

1. 下列四个不等式解集为$\mathbf{R}$的是　　(　　)

A. $-x^2+x+1\geqslant 0$　　B. $x^2-2\sqrt{3}x+\sqrt{3}>0$

C. $x^2+6x+10>0$　　D. $2x^2-3x+4<0$

2. 已知集合$M=\{x|x^2-3x-28\leqslant 0\}$，$N=\{x|x^2-x-6>0\}$，则$M\cap N$为　　(　　)

A. $\{x|-4\leqslant x<-2$或$3<x\leqslant 7\}$

B. $\{x|-4<x\leqslant -2$或$3\leqslant x<7\}$

C. $\{x|x\leqslant -2$或$x>3\}$

D. $\{x|x<-2$或$x\geqslant 3\}$

3. (**2019·重庆八中月考**)若$a<0$，则关于x的不等式$a(x+1)\left(x+\frac{1}{a}\right)<0$的解集为　　(　　)

A. $\left(-1,-\frac{1}{a}\right)$

B. $\left(-\frac{1}{a},-1\right)$

C. $\left(-\infty,-\frac{1}{a}\right)\cup(-1,+\infty)$

D. $(-\infty,-1)\cup\left(-\frac{1}{a},+\infty\right)$

4. (**2018·广东广州天河普通高中高二月考**)关于x的不等式$x^2+px-2<0$的解集是$(q,1)$，则$p+q$的值为　　(　　)

A. -2　　B. -1

C. 1　　D. 2

5. 关于x的不等式$ax^2+bx-2>0$的解集是$\left(-\infty,-\frac{1}{2}\right)\cup\left(\frac{1}{3},+\infty\right)$，则$ab$等于　　(　　)

A. -24　　B. 24

C. 14　　D. -14

二、填空题

6. 二次函数$f(x)=ax^2+bx+c(x\in\mathbf{R})$的部分对应值如下表：

x	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
y	6	0	-4	-6	-6	-4	0	6

则不等式$ax^2+bx+c\leqslant 0$的解集是_____.

7. 已知$f(x)=\begin{cases}x^2-4x,x>0,\\0,x=0,\\-x^2-4x,x<0,\end{cases}$则不等式$f(x)>x$的解集为_____.

8. 不等式组$\begin{cases}3x^2+x-2\geqslant 0,\\4x^2-15x+9>0\end{cases}$的解集是_____.

三、解答题

9. 设$m\in\mathbf{R}$，解关于x的不等式$m^2x^2+2mx-3<0$.

10. 已知$f(x)=ax^2+(b-3)x-a-ab$，当$x\in(-1,2)$时，$f(x)<0$；当$x\in(-\infty,-1)\cup(2,+\infty)$时，$f(x)>0$.

(1)求a,b的值；

(2)若$cx^2+cx-1<2x^2+ax+b$的解集为$\mathbf{R}$，求c的取值范围.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

第 25 课时　一元二次不等式的应用

掌握几个要点

1. 掌握 1 个解法

简单分式不等式的解法

$$\frac{ax+b}{cx+d}\geqslant 0(\leqslant 0)\Leftrightarrow\begin{cases}cx+d\neq 0,\\(ax+b)(cx+d)\geqslant 0(\leqslant 0).\end{cases}$$

2. 学会 2 种转化

一元二次不等式恒成立问题

(1)$ax^2+bx+c>0(a\neq 0)$恒成立$\Leftrightarrow\begin{cases}a>0,\\\Delta=b^2-4ac<0.\end{cases}$

$ax^2+bx+c<0(a\neq 0)$恒成立$\Leftrightarrow\begin{cases}a<0,\\\Delta=b^2-4ac<0.\end{cases}$

(2)分离系数，将恒成立问题转化为求最值问题，即 $k\geqslant f(x)$ 恒成立 $\Leftrightarrow k\geqslant f(x)_{\max}$；$k\leqslant f(x)$ 恒成立 $\Leftrightarrow k\leqslant f(x)_{\min}$.

题点知识巩固

知识点一　简单的分式不等式

1. 不等式$\frac{x^2-x-6}{x-1}>0$的解集为　(　　)

A. $\{x|x<-2$ 或 $x>3\}$

B. $\{x|x<-2$ 或 $1<x<3\}$

C. $\{x|-2<x<1$ 或 $x>3\}$

D. $\{x|-2<x<1$ 或 $1<x<3\}$

2. 解下列不等式：

(1)$\frac{2x-1}{3x+1}\geqslant 0$；(2)$\frac{2-x}{x+3}>1$.

知识点二　不等式恒成立问题

3. 若不等式 $2kx^2+kx-\frac{3}{8}<0$ 对一切实数 x 都成立，则 k 的取值范围为　(　　)

A. $(-3,0)$　　B. $[-3,0)$

C. $[-3,0]$　　D. $(-3,0]$

4. 对任意 $m\in[-1,1]$，函数 $f(x)=x^2+(m-4)x+4-2m$ 的值恒大于零，求 x 的取值范围.

知识点三　不等式的实际应用

5. 某地每年销售木材约 20 万立方米，每立方米价格为 2 400 元. 为了减少木材消耗，决定按销售收入的 $t\%$ 征收木材税，这样每年的木材销售量减少 $\frac{5}{2}t$ 万立方米. 为了既减少木材消耗又保证税金收入每年不少于 900 万元，则 t 的取值范围是_____.

6. 一服装厂生产某种风衣，月销售量 x(件)与售价 p(元/件)之间的关系为 $p=160-2x$，生产 x 件的总成本 $R=500+30x$(元).

(1)当月销售量为多少时，该厂的月获利不少于 1 300 元？

(2)当月销售量为多少时，该厂的月获利最大？最大月获利是多少？

提能达标过关

一、选择题

1. 不等式$\frac{1-x}{2+x}\geqslant 0$的解集为　(　　)

A. $[-2,1]$　　B. $(-2,1]$

C. $(-\infty,-2)\cup(1,+\infty)$　　D. $(-\infty,-2]\cup[1,+\infty)$

2. 不等式$\frac{x+2}{4x+1}\geqslant\frac{1}{3}$的解集为　(　　)

A. $\left\{x\middle|-\frac{1}{4}\leqslant x\leqslant 5\right\}$　　B. $\left\{x\middle|x\leqslant-\frac{1}{4}\text{或 }x>5\right\}$

C. $\left\{x\middle|x<-\frac{1}{4}\text{或 }x>5\right\}$　　D. $\left\{x\middle|-\frac{1}{4}<x\leqslant 5\right\}$

3. 不等式$\frac{5}{x+2}>1$的解集为　(　　)

A. $\{x|-2<x<3\}$　　B. $\{x|x<-2\}$

C. $\{x|x<-2$ 或 $x>3\}$　　D. $\{x|x>3\}$

4. 若不等式$(a-2)x^2+2(a-2)x-4<0$对一切 $x\in\mathbf{R}$ 恒成立，则实数 a 的取值范围是　(　　)

A. $(-\infty,2]$　　B. $[-2,2]$

C. $(-2,2]$　　D. $(-\infty,-2)$

5. 下列选项中，使不等式 $x<\frac{1}{x}<x^2$ 成立的 x 的取值范围是　(　　)

A. $(-\infty,-1)$　　B. $(-1,0)$

C. $(0,1)$　　D. $(1,+\infty)$

二、填空题

6. 不等式$\frac{2-x}{x+4}>0$的解集为_____.

7. 若不等式 $x^2+ax+4<0$ 的解集不是空集，则实数 a 的取值范围是_____.

8. 若不等式 $x^2+(a-6)x+9-3a>0$，对任意 $|a|\leqslant 1$ 恒成立，则 x 的取值范围是_____.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

三、解答题

9. 已知函数 $f(x)=-x^2+ax+b^2-b+1(a\in\mathbf{R},b\in\mathbf{R})$，对任意实数 x 都有 $f(1-x)=f(1+x)$ 成立，若当 $x\in[-1,1]$ 时，$f(x)>0$ 恒成立，求实数 b 的取值范围.

10. 若不等式 $(1-a)x^2-4x+6>0$ 的解集为 $\{x|-3<x<1\}$.
(1)解不等式 $2x^2+(2-a)x-a>0$；
(2)当 b 为何值时，$ax^2+bx+3\geqslant 0$ 的解集不为 $\mathbf{R}$.

第 26 课时　素养提升——不等式与一元二次不等式

重点深化理解

实数大小比较的方法知多少

实数比较大小除比较法(作差法、作商法)以外，解题思路较多，灵活多变，下面介绍几种比较大小的方法.

方法 1　构造中间值比较实数大小

方法链接：由传递性知 $a>b,b>c\Rightarrow a>c$，所以当两个数直接比较不容易时，我们可以找一个适当的中间值为媒介来间接地比较.

【例 1】 设 $a=\log_3\pi,b=\log_2\sqrt{3},c=\log_3\sqrt{2}$，则(　　)

A. $a>b>c$　　B. $a>c>b$

C. $b>a>c$　　D. $b>c>a$

[解析] $a=\log_3\pi>\log_3 3=1$，$\therefore a>1$，

$b=\log_2\sqrt{3}=\frac{1}{2}\log_2 3<\frac{1}{2}\log_2 4=1$，$\therefore b<1$，

$c=\log_3\sqrt{2}=\frac{1}{2}\log_3 2<\frac{1}{2}$，$\therefore a>b,a>c$.

又 $b=\log_2\sqrt{3}=\frac{1}{2}\log_2 3>\frac{1}{2}$，$\therefore b>c$，$\therefore a>b>c$，故选 A.

[答案] A

方法 2　特殊值法比较实数大小

方法链接：一些比较实数大小的客观性题目，先通过恰当地选取符合题目要求的一组特例，从而确定出问题的答案. 这种取特殊值法往往能避重就轻，避繁从简，快速获得问题的解. 一些解答题，也可以先通过特例为解答论证提供方向.

【例 2】 若 $0<a_1<a_2,0<b_1<b_2$，且 $a_1+a_2=b_1+b_2=1$，则下列代数式中值最大的是(　　)

A. $a_1b_1+a_2b_2$　　B. $a_1a_2+b_1b_2$

C. $a_1b_2+a_2b_1$　　D. $\frac{1}{2}$

[解析] 特殊值法.

令 $a_1=\frac{1}{4},a_2=\frac{3}{4},b_1=\frac{1}{4},b_2=\frac{3}{4}$，

则 $a_1b_1+a_2b_2=\frac{10}{16}=\frac{5}{8}$，$a_1a_2+b_1b_2=\frac{6}{16}=\frac{3}{8}$，

$a_1b_2+a_2b_1=\frac{6}{16}=\frac{3}{8}$.

$\because\frac{5}{8}>\frac{1}{2}>\frac{3}{8}$，$\therefore$ 最大的数应是 $a_1b_1+a_2b_2$，故选 A.

(注：本题还可以利用作差法比较大小，此答略)

[答案] A

方法 3　利用函数单调性比较实数大小

方法链接：有些代数式的大小比较很难直接利用不等式性质完成，可以考虑构建函数，借助函数的单调性加以判断.

【例 3】 当 $0<a<b<1$ 时，下列不等式中正确的是(　　)

A. $(1-a)^{\frac{1}{b}}>(1-a)^b$　　B. $(1+a)^a>(1+b)^b$

C. $(1-a)^b>(1-a)^{\frac{b}{2}}$　　D. $(1-a)^a>(1-b)^b$

[解析] 对于 A，$\because 0<a<b<1$，$\therefore$ 函数 $y=(1-a)^x$ 为 $\mathbf{R}$ 上的减函数，$\because\frac{1}{b}>b$，$\therefore(1-a)^{\frac{1}{b}}<(1-a)^b$，A 错误；

对于 B，$\because$ 函数 $y=(1+a)^x$ 为 $\mathbf{R}$ 上的增函数，

$\therefore(1+a)^a<(1+a)^b$，

又函数 $y=x^b$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，

$\therefore(1+a)^b<(1+b)^b$，从而 $(1+a)^a<(1+b)^b$，B 错误；

对于 C，$\because$ 函数 $y=(1-a)^x$ 为 $\mathbf{R}$ 上的减函数，且 $b>\frac{b}{2}$，

$\therefore(1-a)^b<(1-a)^{\frac{b}{2}}$，C 错误；

对于 D，$\because$ 函数 $y=(1-a)^x$ 为 $\mathbf{R}$ 上的减函数，且 $a<b$，

$\therefore(1-a)^a>(1-a)^b$，又函数 $y=x^b$ 为 $(0,+\infty)$ 上的增函数，且 $1-a>1-b>0$，从而 $(1-a)^b>(1-b)^b$，

所以 $(1-a)^a>(1-b)^b$，D 正确，故选 D.

[答案] D

方法 4　借助函数的图象比较实数大小

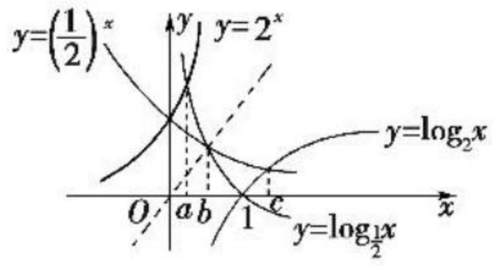
方法链接：借助函数的图象比较实数大小，要从题目的条件与结论出发，着重分析其几何含义，善于构造函数图象，从图象上找出问题的结论.

【例 4】 设 a,b,c 均为正数，且 $2^a=\log_{\frac{1}{2}}a$，$\left(\frac{1}{2}\right)^b=\log_{\frac{1}{2}}b$，$\left(\frac{1}{2}\right)^c=\log_2 c$，则(　　)

A. $a<b<c$　　B. $c<b<a$

C. $c<a<b$　　D. $b<a<c$

[解析] 由函数 $y=2^x$，$y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$，$y=\log_2 x$，$y=\log_{\frac{1}{2}}x$ 的图象(如图所示)知 $0<a<b<1<c$，故选 A.



[答案] A

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

方法技巧点拨

一元二次不等式恒成立问题的求解策略

含参数的一元二次不等式恒成立问题是高中阶段最简单、最常见的恒成立问题，是研究恒成立问题的典型素材，也是近几年高考考查的热点之一. 下面结合例子，介绍几种常用的求解策略.

1. 利用一元二次不等式的判别式求解

代数式 $ax^2+bx+c>0$ 的等价条件是

$$\begin{cases}a=b=0,\\c>0\end{cases}\text{或}\begin{cases}a>0,\\\Delta=b^2-4ac<0.\end{cases}$$

【例 1】 已知不等式 $\dfrac{kx^2+kx+6}{x^2+x+2}>2$ 对任意 $x\in\mathbf{R}$ 恒成立，求 k 的取值范围.

［解］ $\because x^2+x+2=\left(x+\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{7}{4}>0$，

$\therefore$ 原不等式等价于 $kx^2+kx+6>2x^2+2x+4$，

即 $(k-2)x^2+(k-2)x+2>0$.

当 $k=2$ 时，$2>0$，结论显然成立；

当 $k\neq2$ 时，k 满足不等式组

$$\begin{cases}k-2>0,\\\Delta=(k-2)^2-4\times2(k-2)<0.\end{cases}$$

解得 $2<k<10$.

综上所述，k 的取值范围是 $\{k\mid2\leqslant k<10\}$.

2. 转化为二次函数在闭区间上的最值问题求解

一般地，$f(x)\geqslant a,x\in D$ 恒成立$\Leftrightarrow f(x)_{\min}\geqslant a,x\in D$ 恒成立；$f(x)\leqslant a,x\in D$ 恒成立$\Leftrightarrow f(x)_{\max}\leqslant a,x\in D$ 恒成立.

【例 2】 已知不等式 $\sin^2x-2a\sin x+a^2-2a+2>0$ 对一切 $x\in\mathbf{R}$ 恒成立，求实数 a 的取值范围.

［解］ 设 $f(x)=\sin^2x-2a\sin x+a^2-2a+2$，

则 $f(x)=(\sin x-a)^2+2-2a$.

当 $a<-1$ 时，$f(x)$ 在 $\sin x=-1$ 处取到最小值，

$f(x)_{\min}=a^2+3$，$a^2+3>0$ 显然成立，$\therefore a<-1$.

当 $-1\leqslant a\leqslant1$ 时，$f(x)$ 在 $\sin x=a$ 处取到最小值，

$f(x)_{\min}=2-2a$，由 $2-2a>0$，解得 $a<1$.

$\because-1\leqslant a\leqslant1$，$\therefore-1\leqslant a<1$.

当 $a>1$ 时，$f(x)$ 在 $\sin x=1$ 处取到最小值，且 $f(x)_{\min}=a^2-4a+3$，由 $a^2-4a+3>0$，解得 $a<1$ 或 $a>3$，

$\because a>1$，$\therefore a>3$.

综上所述，a 的取值范围为 $a<1$ 或 $a>3$.

3. 利用直线型函数图象的保号性求解

函数 $f(x)=kx-b,x\in[\alpha,\beta]$ 的图象是一条线段，此线段恒在 x 轴上方的等价条件是 $\begin{cases}f(\alpha)>0,\\f(\beta)>0;\end{cases}$ 此线段恒在 x 下方的等价条件是 $\begin{cases}f(\alpha)<0,\\f(\beta)<0;\end{cases}$ 此线段与 x 轴有交点的等价条件是 $f(\alpha)\cdot f(\beta)\leqslant0$.

【例 3】 已知当 $x\in[0,1]$ 时，不等式 $2m-1<x(m^2-1)$ 恒成立，试求 m 的取值范围.

［解］ 设 $f(x)=(m^2-1)x-(1-2m)$，

则原不等式恒成立$\Leftrightarrow f(x)>0$，

$x\in[0,1]$ 恒成立$\Leftrightarrow\begin{cases}f(0)>0,\\f(1)>0\end{cases}\Leftrightarrow$

$\begin{cases}1-2m>0,\\m^2-2m>0\end{cases}\Leftrightarrow m<0$. 故 m 的取值范围为 $(-\infty,0)$.

4. 分离参数后，利用基本不等式求解

如果直接求参数的范围比较困难，而且参数容易从式子中分离出来，可以考虑分离参数后，再利用等价条件 $f(x)\geqslant a\Leftrightarrow a\leqslant f(x)_{\min}$ 或 $f(x)\leqslant a\Leftrightarrow a\geqslant f(x)_{\max}$ 求解.

【例 4】 已知函数 $f(x)=x^2+ax+3$，当 $x\in[-1,1]$ 时，不等式 $f(x)>a$ 恒成立，求 a 的取值范围.

［解］ 不等式 $f(x)>a\Leftrightarrow x^2+ax+3>a\Leftrightarrow$

$x^2+3>a(1-x),x\in[-1,1]$.

$\because-1\leqslant x\leqslant1$，$\therefore0\leqslant1-x\leqslant2$.

当 $x=1$ 时，$1-x=0$，$x^2+3>a(1-x)$ 对一切 $a\in\mathbf{R}$ 恒成立；当 $x\neq1$ 时，$0<1-x\leqslant2$，则 $a<\dfrac{x^2+3}{1-x}$.

$\because\dfrac{x^2+3}{1-x}=\dfrac{(1-x)^2-2(1-x)+4}{1-x}$

$=(1-x)+\dfrac{4}{1-x}-2\geqslant2\sqrt{(1-x)\cdot\dfrac{4}{1-x}}-2=2$.

当且仅当 $1-x=\dfrac{4}{1-x}$，即 $x=-1$ 时，取到等号.

$\therefore\left(\dfrac{x^2+3}{1-x}\right)_{\min}=2$. 从而 $a<2$.

综上所述，a 的取值范围为 $(-\infty,2)$.

素养培优提能

一、选择题

1. 已知 $0<a<1$，给出下列四个不等式：

①$\log_a(1+a)<\log_a\left(1+\dfrac{1}{a}\right)$；

②$\log_a(1+a)>\log_a\left(1+\dfrac{1}{a}\right)$；

③$a^{1+a}<a^{1+\frac{1}{a}}$；

④$a^{1+a}>a^{1+\frac{1}{a}}$.

其中正确的是（　　）

A. ①与③　　B. ①与④

C. ②与③　　D. ②与④

2. 若 $\dfrac{1}{a}<\dfrac{1}{b}<0$，给出下列不等式：①$\dfrac{1}{a+b}<\dfrac{1}{ab}$；②$|a|+b>0$；③$a-\dfrac{1}{a}>b-\dfrac{1}{b}$；④$\ln a^2>\ln b^2$. 其中正确的不等式的序号是（　　）

A. ①④　　B. ②③

C. ①③　　D. ②④

3. 已知 $f(x)$ 是定义在 $(-\infty,+\infty)$ 上的偶函数，且在 $(-\infty,0]$ 上是增函数. 设 $a=f(\log_47)$，$b=f(\log_{\frac{1}{2}}3)$，$c=f(2^{1.6})$，则 a,b,c 的大小关系是（　　）

A. $c<a<b$　　B. $c<b<a$

C. $b<c<a$　　D. $a<b<c$

4. **（2019·汕头模拟）**已知关于 x 的不等式 $kx^2-6kx+k+8\geqslant0$ 对任意的 $x\in\mathbf{R}$ 恒成立，则实数 k 的取值范围是（　　）

A. $[0,1]$　　B. $(0,1]$

C. $(-\infty,0)\cup(1,+\infty)$　　D. $(-\infty,0]\cup[1,+\infty)$

5. 若关于 x 的方程 $x^2+(m-1)x+m^2-2=0$ 的一个实根小于 -1，另一个实根大于 1，则实数 m 的取值范围是（　　）

A. $(-\sqrt{2},\sqrt{2})$　　B. $(-2,0)$

C. $(-2,1)$　　D. $(0,1)$

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

二、填空题

6. 若关于 x 的不等式 $(k-1)x^2+(k-1)x-1<0$ 恒成立，则实数 k 的取值范围是_____.

7. 若不等式 $a\cdot 4^x-2^x+1>0$ 对一切 $x\in\mathbf{R}$ 恒成立，则实数 a 的取值范围是_____.

8. 若不等式 $x^2+mx-1<0$ 对于任意 $x\in[m,m+1]$ 都成立，则实数 m 的取值范围是_____.

三、解答题

9. (**2019·山东省实验中学月考**)若不等式 $x^2+x-1<m^2x^2-mx$ 对任意的 $x\in\mathbf{R}$ 恒成立，求实数 m 的取值范围.

10. 已知不等式 $x^2+mx>4x+m-4$.

(1)若对任意实数 x，不等式恒成立，求实数 m 的取值范围；

(2)若对于 $0\leqslant m\leqslant 4$，不等式恒成立，求实数 x 的取值范围.

3.3　二元一次不等式(组)与简单的线性规划问题

第 27 课时　二元一次不等式(组)与平面区域

掌握几个要点

1. 学会 1 个画法

在画二元一次不等式组表示的平面区域时，应先画出每个不等式表示的区域，再取它们的公共部分即可. 其步骤为：①画线；②定侧；③求“交”；④表示.

2. 掌握 1 个求法

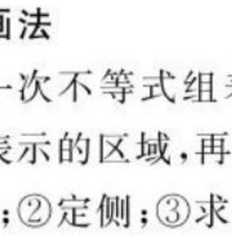
求平面区域的面积的方法：

求平面区域的面积，先画出不等式组表示的平面区域，然后根据区域的形状求面积. 若图形为规则的，则直接利用面积公式求解；若图形为不规则图形，可采取分割的方法，将平面区域分为几个规则图形求解.

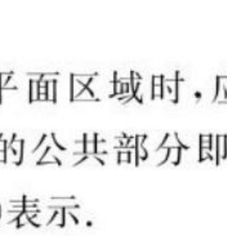
题点知识巩固

知识点一　二元一次不等式(组)表示的平面区域

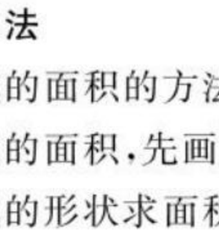
1. 不等式 $2x+y-1>0$ 表示的平面区域是　(　　)



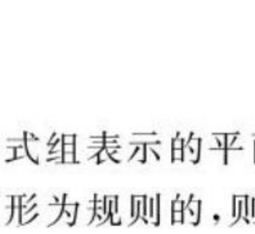
A



B

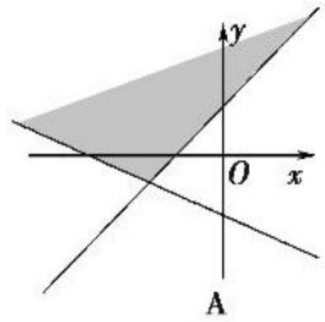


C

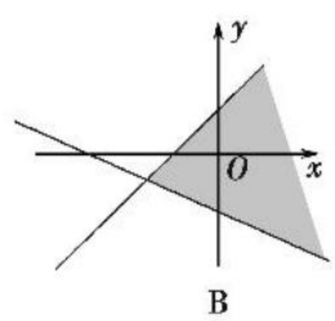


D

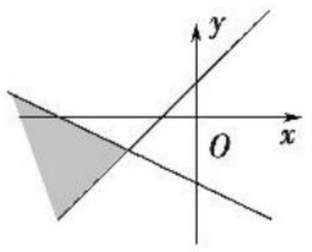
2. 不等式组 $\begin{cases}x+2y+4\leqslant 0,\\ x-y+1\leqslant 0\end{cases}$ 所表示的平面区域大致是　(　　)



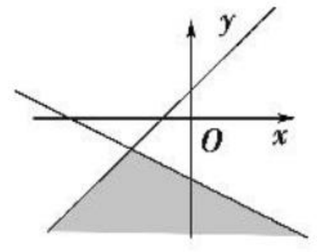
A



B



C



D

3. (**2019·北京八中高三月考**)若不等式组 $\begin{cases}x-y\geqslant 0,\\ 2x+y\leqslant 2,\\ y\geqslant 0,\\ x+y\leqslant a\end{cases}$ 表示的平面区域是一个三角形，则实数 a 的取值范围是　(　　)

A. $a\geqslant\frac{4}{3}$　　B. $0<a\leqslant 1$

C. $1\leqslant a\leqslant\frac{4}{3}$　　D. $0<a\leqslant 1$ 或 $a\geqslant\frac{4}{3}$

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

知识点二　二元一次不等式(组)表示的平面区域面积

4. 不等式组 $\begin{cases}x\geqslant 0,\\ x+3y\geqslant 4,\\ 3x+y\leqslant 4\end{cases}$ 所表示的平面区域的面积等于　(　　)

A. $\frac{3}{2}$　　B. $\frac{2}{3}$

C. $\frac{4}{3}$　　D. $\frac{3}{4}$

5. 不等式组 $\begin{cases}2x+y-6\leqslant 0,\\ x+y-3\geqslant 0,\\ y\leqslant 2\end{cases}$ 表示的平面区域的面积为　(　　)

A. 4　　B. 1

C. 5　　D. 无穷大

6. 已知不等式组 $\begin{cases}x\geqslant 1,\\ x+y-4\leqslant 0,\\ kx-y\leqslant 0\end{cases}$ 表示面积为 1 的直角三角形区域,则实数 k 的值为　(　　)

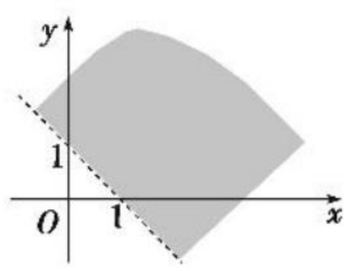
A. 1　　B. -1

C. 0　　D. -2

提能达标过关

一、选择题

1. 图中阴影部分表示的平面区域满足的不等式是　(　　)



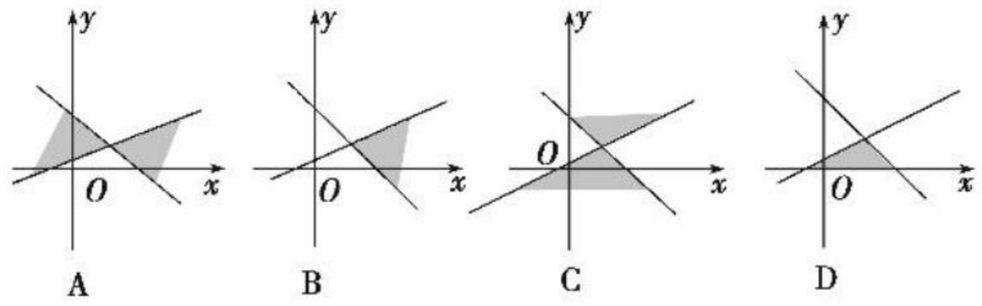
A. $x+y-1<0$

B. $x+y-1>0$

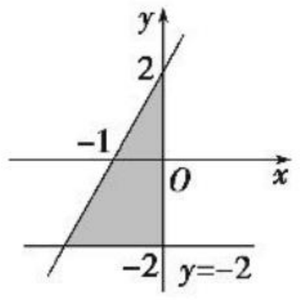
C. $x-y-1<0$

D. $x-y-1>0$

2. 不等式 $(x-2y+1)(x+y-3)\leqslant 0$ 在坐标平面内表示的区域(用阴影部分表示)应是　(　　)



3. 下列二元一次不等式组可表示图中阴影部分平面区域的是　(　　)



A. $\begin{cases}y\geqslant -1,\\ 2x-y+2\geqslant 0\end{cases}$

B. $\begin{cases}y\geqslant -1,\\ 2x-y+4\leqslant 0\end{cases}$

C. $\begin{cases}x\leqslant 0,\\ y\geqslant -2,\\ 2x-y+2\geqslant 0\end{cases}$

D. $\begin{cases}x\leqslant 0,\\ y\geqslant -2,\\ 2x-y+4\leqslant 0\end{cases}$

4. 不等式组 $\begin{cases}x>0,\\ y>0,\\ 2x+y<6\end{cases}$ 所表示的平面区域内的整点个数为　(　　)

A. 2　　B. 3

C. 4　　D. 5

5. 已知直线 $y=k(x+1)$ 与不等式组 $\begin{cases}x+y-4\leqslant 0,\\ 3x-y\geqslant 0,\\ x>0,y>0\end{cases}$ 表示的平面区域有公共点,则 k 的取值范围为　(　　)

A. $[0,+\infty)$　　B. $\left[0,\frac{3}{2}\right]$

C. $\left(0,\frac{3}{2}\right]$　　D. $\left(\frac{3}{2},+\infty\right)$

二、填空题

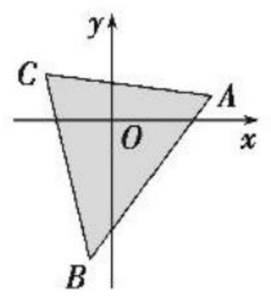
6. 点 $(-2,t)$ 在直线 $2x-3y+6=0$ 的上方,则 t 的取值范围是_____.

7. 不等式组 $\begin{cases}x-y+5\geqslant 0,\\ y\geqslant 2,\\ 0\leqslant x\leqslant 2\end{cases}$ 所表示的平面区域的面积为_____.

8. 直线 $2x+y-10=0$ 与不等式组 $\begin{cases}x-y\geqslant -2,\\ 4x+3y\leqslant 20,\\ x\geqslant 0,y\geqslant 0\end{cases}$ 表示的平面区域的公共点有_____个.

三、解答题

9. 已知 D 是以点 $A(4,1)$,$B(-1,-6)$,$C(-3,2)$ 为顶点的三角形区域(包括边界与内部),如图所示.



(1)写出表示区域 D 的不等式组;

(2)设点 $B(-1,-6)$,$C(-3,2)$ 在直线 $4x-3y-a=0$ 的异侧,求实数 a 的取值范围.

10. 设不等式组 $\begin{cases}x-y+8\geqslant 0,\\ x+y\geqslant 0,\\ x\leqslant 4\end{cases}$ 表示的平面区域是 Q.

(1)求平面区域 Q 的面积 S;

(2)若点 $M(t,1)$ 在平面区域 Q 内,求整数 t 的取值的集合.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

第 28 课时　简单的线性规划问题

掌握几个要点

把握 8 个概念

简单的线性规划中的基本概念

名称	意义
约束条件	由变量 x,y 组成的不等式(组)
线性约束条件	由变量 x,y 组成的一次不等式(组)
目标函数	关于 x,y 的函数解析式,如 $z=2x+3y$ 等
线性目标函数	关于 x,y 的一次函数解析式
可行解	满足线性约束条件的解(x,y)
可行域	所有可行解组成的集合
最优解	使目标函数取得最大值或最小值的可行解
线性规划问题	在线性约束条件下求线性目标函数的最大值或最小值问题

题点知识巩固

知识点一　求线性目标函数的最值

1. 设 x,y 满足约束条件 $\begin{cases}2x+3y-3\leqslant 0,\\2x-3y+3\geqslant 0,\\y+3\geqslant 0,\end{cases}$ 则 $z=2x+y$ 的最小值是　(　　)

A. -15　　B. -9

C. 1　　D. 9

2. (**2018·天津卷**)设变量 x,y 满足约束条件 $\begin{cases}x+y\leqslant 5,\\2x-y\leqslant 4,\\-x+y\leqslant 1,\\y\geqslant 0,\end{cases}$ 则目标函数 $z=3x+5y$ 的最大值为　(　　)

A. 6　　B. 19

C. 21　　D. 45

知识点二　已知目标函数的最值求参数

3. x,y 满足约束条件 $\begin{cases}x+y-2\leqslant 0,\\x-2y-2\leqslant 0,\\2x-y+2\geqslant 0,\end{cases}$ 若 $z=y-ax$ 取得最大值的最优解不唯一,则实数 a 的值为　(　　)

A. $\frac{1}{2}$或-1　　B. 2 或$\frac{1}{2}$

C. 2 或 1　　D. 2 或-1

4. 实数 x,y 满足条件 $\begin{cases}x\geqslant 2,\\x+y\leqslant 4,\\-2x+y+c\geqslant 0,\end{cases}$ 目标函数 $z=4x+y$ 的最小值为 3,则 c 的值为_____,该目标函数的最大值为_____.

知识点三　线性规划的实际应用

5. 投资人制定投资计划时,不仅要考虑可能获得的盈利,而且要考虑可能出现的亏损,一投资人打算投资甲、乙两项目.根据预测,甲、乙项目可能的最大盈利率分别为 50%和 40%,可能的最大亏损率分别为 30%和 20%.投资人计划投资金额不超过 10 万元,要求确保可能的资金亏损不超过 2.4 万元.设甲、乙两个项目投资额分别为 x,y 万元.

(1)写出 x,y 满足的约束条件;

(2)求可能盈利的最大值(单位:万元).

提能达标过关

一、选择题

1. 若实数 x,y 满足条件 $\begin{cases}x+y\geqslant 0,\\x-y\geqslant 0,\\1\leqslant x\leqslant 3,\end{cases}$ 则 $2x-y$ 的最大值为　(　　)

A. 9　　B. 3

C. 0　　D. -3

2. 若实数 x,y 满足条件 $\begin{cases}x+y-4\leqslant 0,\\x-2y+2\geqslant 0,\\x\geqslant 0,y\geqslant 0,\end{cases}$ 则 2^{x-y}的最小值为　(　　)

A. 16　　B. 4

C. 1　　D. $\frac{1}{2}$

3. 已知 x,y 满足 $\begin{cases}2x-y\leqslant 0,\\x-3y+5\geqslant 0,\\x\geqslant 0,\\y\geqslant 0,\end{cases}$ 则 $z=8^{-x}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{y}$ 的最小值为　(　　)

A. 1　　B. $\frac{\sqrt[3]{2}}{4}$

C. $\frac{1}{16}$　　D. $\frac{1}{32}$

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

4. 若变量 x,y 满足约束条件 $\begin{cases}y\leqslant x,\\ x+y\leqslant 1,\\ y\geqslant -1,\end{cases}$ 且 $z=2x+y$ 的最大值和最小值分别为 m 和 n，则 $m-n=$　　（　　）

A. 5　　B. 6

C. 7　　D. 8

5. 给出平面区域如图，其中 $A(1,1)$，$B(2,5)$，$C(4,3)$，若使目标函数 $z=ax-y(a>0)$ 取得最大值的最优解有无穷多个，则 a 的值是　　（　　）

A. $\frac{2}{3}$　　B. 1

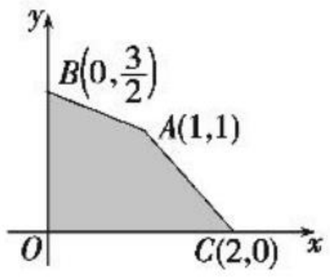
C. 4　　D. $\frac{3}{2}$

二、填空题

6. (**2019 · 湖北黄石模拟**) 已知变量 x,y 满足约束条件 $\begin{cases}x+2y\geqslant 1,\\ x-y\leqslant 1,\\ y-1\leqslant 0,\end{cases}$ 则 $z=x-2y$ 的最大值为_____.

7. 已知 O 是坐标原点，点 $A(-1,1)$，若点 $M(x,y)$ 为平面区域 $\begin{cases}x+y\geqslant 2,\\ x\leqslant 1,\\ y\leqslant 2\end{cases}$ 上的一个动点，则 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OM}$ 的取值范围是_____.

8. 给出平面区域为图中四边形 $ABOC$ 内部及其边界，目标函数为 $z=ax-y$，若当且仅当 $x=1,y=1$ 时，目标函数 z 取得最小值，则实数 a 的取值范围是_____.



三、解答题

9. 若 x,y 满足约束条件 $\begin{cases}x+y\geqslant 1,\\ x-y\geqslant -1,\\ 2x-y\leqslant 2.\end{cases}$

(1) 求目标函数 $z=\frac{1}{2}x-y+\frac{1}{2}$ 的最值；

(2) 若目标函数 $z=ax+2y$ 仅在点 $(1,0)$ 处取得最小值，求 a 的取值范围.

10. (**2019 · 江西上饶模拟**) 甲、乙两工厂根据赛事组委会要求为获奖者定做某工艺品作为奖品，其中一等奖奖品 3 件，二等奖奖品 6 件；制作一等奖、二等奖奖品所用原料完全相同，但工艺不同，故价格有所差异. 甲厂收费便宜，但原料有限，最多只能制作 4 件奖品，乙厂原料充足，但收费较贵. 两厂具体收费如下表所示，求组委会定做奖品的最低费用.

收费（元/件）　奖品 / 工厂	一等奖奖品	二等奖奖品
甲	500	400
乙	800	600

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

第 29 课时　素养提升——简单的线性规划

重点深化理解

非线性目标函数的最值

常见类型：

(1)距离型：形如 $z=(x-a)^2+(y-b)^2$.

(2)斜率型：形如 $z=\dfrac{y-b}{x-a}$.

【典例】 (1)已知实数 x,y 满足约束条件 $\begin{cases}3x+y+3\geqslant 0,\\2x-y+2\leqslant 0,\\x+2y-4\leqslant 0,\end{cases}$ 则 $z=x^2+y^2$ 的取值范围为　(　)

A. $[1,13]$　　B. $[1,4]$

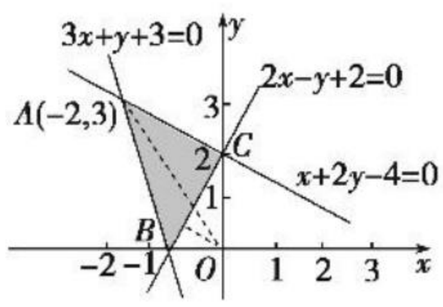
C. $\left[\dfrac{4}{5},13\right]$　　D. $\left[\dfrac{4}{5},4\right]$

(2)若实数 x,y 满足 $\begin{cases}x-y+1\leqslant 0,\\x>0,\\y\leqslant 2,\end{cases}$ 则 $z=\dfrac{2y}{2x+1}$ 的取值范围是　(　)

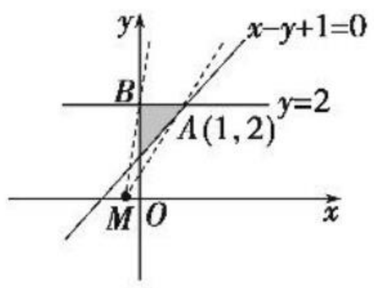
A. $\left[\dfrac{4}{3},4\right]$　　B. $\left[\dfrac{4}{3},4\right)$

C. $[2,4]$　　D. $(2,4]$

[**解析**] (1)画出不等式组表示的平面区域，如图中阴影部分所示，由此得 $z=x^2+y^2$ 的最小值为点 O 到直线 BC：$2x-y+2=0$ 的距离的平方，所以 $z_{\min}=\left(\dfrac{2}{\sqrt{5}}\right)^2=\dfrac{4}{5}$，最大值为点 O 与点 $A(-2,3)$ 的距离的平方，$z_{\max}=|OA|^2=(-2)^2+3^2=13$，故选 C.



(2)作出不等式组对应的平面区域如图中阴影部分所示，设 $z=\dfrac{2y}{2x+1}=\dfrac{y}{x+\frac{1}{2}}$，则 z 的几何意义是区域内的点 P 与点 $M\left(-\dfrac{1}{2},0\right)$ 连线的斜率.



又 $k_{MA}=\dfrac{4}{3}$，$k_{MB}=4$，且 $B(0,2)$ 不在平面区域内，

所以 $\dfrac{2y}{2x+1}$ 的取值范围是 $\left[\dfrac{4}{3},4\right)$，故选 B.

[**答案**] (1)C　(2)B

[**点评**] **常见的 2 种非线性目标函数及其意义**

(1)点到点的距离型：形如 $z=(x-a)^2+(y-b)^2$，表示区域内的动点 (x,y) 与定点 (a,b) 的距离的平方；

(2)斜率型：形如 $z=\dfrac{y-b}{x-a}$，表示区域内的动点 (x,y) 与定点 (a,b) 连线的斜率.

方法技巧点拨

求最优解为整点的方法

处理实际问题中的最优解时，有时需满足 $x,y\in\mathbf{N}$，这种最优解称为整点最优解，下面举例探讨整点最优解的方法.

1. 平移法

在可行域内找整点最优解，一般采用平移法，即打网格，描整点，平移直线，找出最优解. 先按“平移法”求出非整点最优解及最值，再调整最值，最后筛选出整点最优解.

【例 1】 某中学准备组织学生去“鸟巢”参观. 参观期间，校车每天至少要运送 480 名学生. 该中学后勤有 7 辆小巴、4 辆大巴，其中小巴能载 16 人、大巴能载 32 人. 已知每辆客车每天往返次数小巴为 5 次、大巴为 3 次，每次运输成本小巴为 48 元，大巴为 60 元. 请问每天应派出小巴、大巴各多少辆，才能使总费用最少？

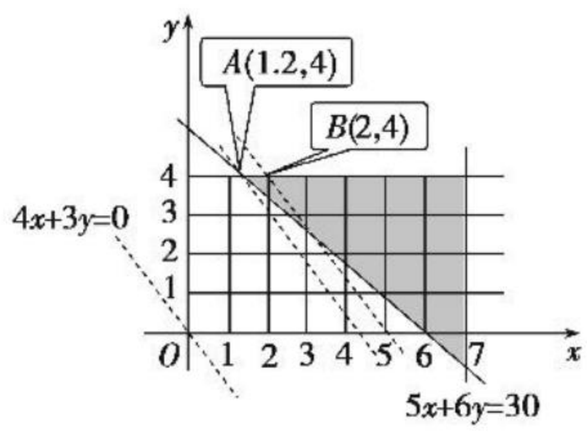
[**分析**] 可以填表理解题意，这样便于列约束条件和目标函数.

	辆数	载人数	往返次数	每次成本
大巴	y	32	3	60
小巴	x	16	5	48

[**解**] 设每天派出小巴 x 辆、大巴 y 辆，总运费为 z 元，

则 $\begin{cases}5\times 16x+3\times 32y\geqslant 480,\\0\leqslant x\leqslant 7,\\0\leqslant y\leqslant 4,\\x,y\in\mathbf{N},\end{cases}$　目标函数 $z=240x+180y$.

作出不等式组所表示的平面区域，即可行域，如图阴影部分的整点.



作出直线 l：$240x+180y=0$，即 $4x+3y=0$，把直线 l 向右上方平移，使其经过可行域上的整点，且使其在 y 轴上的截距最小. 观察图形，可知当直线 l 经过点 $B(2,4)$ 时，满足上述要求.

此时，$z=240x+180y$ 取得最小值，即 $x=2,y=4$ 时，

$z_{\min}=240\times 2+180\times 4=1\ 200$(元).

故派 2 辆小巴、4 辆大巴总费用最少.

[**点评**] 用平移法解线性规划题时，求整数最优解是个难点，对作图精度要求较高，平行直线系 $f(x,y)=t$ 的斜率要画准，可行域内的整点要找准，最好使用“网格法”先作出可行域中的各整点.

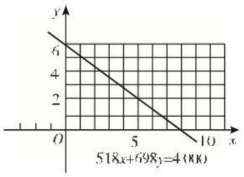
关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

2. 检验法

由于作图难免有误差，所以仅靠图象不一定能准确而迅速地找到最优解，此时可将若干个可能解逐一检验.

【例2】 现有一根长4 000 mm的条形高新材料，需要将其截成长分别为518 mm和698 mm的甲、乙两种零件毛坯，求高新材料的最大利用率.

［解］ 设甲种毛坯截x根，乙种毛坯截y根，高新材料的利用率为P，则线性约束条件为$518x+698y\leqslant 4\ 000$，其中$x,y\in\mathbf{N}$，目标函数为$P=\dfrac{518x+698y}{4\ 000}\times 100\%$，可行域是图中阴影部分的整点，目标函数表示与直线$518x+698y=4\ 000$平行的直线系. 所以使$P$取得最大值的最优解是阴影内最靠近直线$518x+698y=4\ 000$的整点坐标. 如图可得点(0,5)，(1,4)，(2,4)，(3,3)，(4,2)，(5,2)，(6,1)，(7,0)都可能是最优解，逐一代入目标函数，可知当$x=5,y=2$时，$P_{\max}=99.65\%$.



即当甲种毛坯截5根，乙种截2根，高新材料的利用率最大，且最大为99.65%.

［点评］ 解线性规划问题作图时应尽可能精确，但考虑到作图时必然会有误差，假如图上的最优解并不十分明显时，不妨将几个有可能是最优解的坐标都求出来，然后逐一进行检验，确定整点最优解.

素养培优提能

一、选择题

1. 设x,y满足约束条件$\begin{cases}2x+y-7\leqslant 0,\\ x-y-2\leqslant 0,\\ x-2\geqslant 0,\end{cases}$则$\dfrac{y}{x}$的最大值为　（　）

A. $\dfrac{3}{2}$　　B. 2

C. $\dfrac{1}{3}$　　D. 0

2.（**2019·广东广州调研**）若实数x,y满足$\begin{cases}x-2y+3\geqslant 0,\\ y\geqslant x\geqslant 1,\end{cases}$则$z=\sqrt{x^2+y^2}$的最小值为　（　）

A. 3　　B. $\sqrt{5}$

C. $\sqrt{3}$　　D. $\sqrt{2}$

3. 设实数x,y满足$\begin{cases}x-y-2\leqslant 0,\\ x+2y-5\geqslant 0,\\ y-2\leqslant 0,\end{cases}$则$z=\dfrac{y}{x}-\dfrac{x}{y}$的取值范围是　（　）

A. $\left[-\dfrac{8}{3},\dfrac{3}{2}\right]$　　B. $\left[-\dfrac{8}{3},-\dfrac{1}{2}\right]$

C. $\left[-\dfrac{1}{2},\dfrac{3}{2}\right]$　　D. $\left[\dfrac{1}{2},\dfrac{3}{2}\right]$

4. 若实数x,y满足条件$\begin{cases}x-y+1\geqslant 0,\\ 2x+y-2\geqslant 0,\\ x-1\leqslant 0,\end{cases}$则$z=-\dfrac{3}{4x+3y}$的最大值为　（　）

A. $-\dfrac{9}{16}$　　B. $-\dfrac{3}{4}$

C. $-\dfrac{3}{10}$　　D. $-\dfrac{1}{4}$

5. 实数x,y满足$\begin{cases}xy\geqslant 0,\\ |x+y|\leqslant 1,\end{cases}$使$z=ax+y$取得最大值的最优解有两个，则$ax+y+1$的最小值为　（　）

A. 0　　B. -2

C. 1　　D. -1

二、填空题

6.（**2019·河北唐山模拟**）设实数x,y满足约束条件$\begin{cases}x-2y-5\leqslant 0,\\ x+y-4\leqslant 0,\\ 3x+y-10\geqslant 0,\end{cases}$则$z=x^2+y^2$的最小值为_____.

7.（**2019·四川南充高中模拟**）若实数x,y满足约束条件$\begin{cases}x-y-2\leqslant 0,\\ x+2y-7\geqslant 0,\\ y-3\leqslant 0,\end{cases}$则$z=\dfrac{y}{x+1}$的最大值为_____.

8.（**2019·安徽安庆模拟**）若实数x,y满足$\begin{cases}y-2x\leqslant -2,\\ y\geqslant 1,\\ x+y\leqslant 4,\end{cases}$则$z=\dfrac{x^2+y^2}{xy}$的取值范围是_____.

三、解答题

9. 已知x,y满足约束条件$\begin{cases}3x+2y\leqslant 11,\\ y\leqslant x+2,\\ x-5y\leqslant 3,\end{cases}$目标函数为$z=3x+5y$.

(1) 使z取得最小值的最优解是否存在？若存在，请求出；

(2) 请你改动约束条件中的一个不等式，使目标函数只有最大值而无最小值.

10. 某工厂要制造A种电子装置45台，B种电子装置55台，需用薄钢板给每台装置配一个外壳，已知薄钢板的面积有两种规格：甲种薄钢板每张面积2 m^2，可做A、B的外壳分别为3个和5个，乙种薄钢板每张面积3 m^2，可做A、B的外壳分别为6个和6个，求两种薄钢板各用多少张，才能使总的面积最小.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

3.4　基本不等式：$\sqrt{ab}\leqslant\dfrac{a+b}{2}$

第30课时　基本不等式

掌握几个要点

1. 掌握2个不等式

(1)重要不等式：$a^2+b^2\geqslant 2ab$($a,b\in\mathbf{R}$，当且仅当$a=b$时等号成立).

(2)基本不等式：$\dfrac{a+b}{2}\geqslant\sqrt{ab}$($a>0,b>0$，当且仅当$a=b$时等号成立).

2. 记住4个常用不等式

(1)$ab\leqslant\left(\dfrac{a+b}{2}\right)^2\leqslant\dfrac{a^2+b^2}{2}$($a,b\in\mathbf{R}$).

(2)当$x>0$时，$x+\dfrac{1}{x}\geqslant 2$；当$x<0$时，$x+\dfrac{1}{x}\leqslant -2$.

(3)当$ab>0$时，$\dfrac{b}{a}+\dfrac{a}{b}\geqslant 2$；当$ab<0$时，$\dfrac{b}{a}+\dfrac{a}{b}\leqslant -2$.

(4)$a^2+b^2+c^2\geqslant ab+bc+ca$($a,b,c\in\mathbf{R}$).

题点知识巩固

知识点一　对基本不等式的理解

1. 下列结论正确的是　　(　　)

A. 当$x>0$且$x\neq 1$时，$\ln x+\dfrac{1}{\ln x}\geqslant 2$

B. 当$x>0$时，$\sqrt{x}+\dfrac{4}{\sqrt{x}}\geqslant 4$

C. 当$x\geqslant 2$时，$x+\dfrac{2}{x}$的最小值是$2\sqrt{2}$

D. 当$x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$时，$\sin x+\dfrac{1}{\sin x}$的最小值为2

2. 给出下列命题：

①若$x\in\mathbf{R}$，则$x+\dfrac{1}{x}\geqslant 2$；

②若$a>0,b>0$，则$\lg a+\lg b\geqslant 2\sqrt{\lg a\cdot\lg b}$；

③若$a<0,b<0$，则$ab+\dfrac{1}{ab}\geqslant 2$；

④不等式$\dfrac{y}{x}+\dfrac{x}{y}\geqslant 2$成立的条件是$x>0$且$y>0$.

其中正确命题的序号是_____.

知识点二　利用基本不等式求最值

3. 设$x>0$，则$y=3-3x-\dfrac{1}{x}$的最大值是　　(　　)

A. 3　　B. $3-2\sqrt{2}$

C. $3-2\sqrt{3}$　　D. -1

4. 若函数$f(x)=x+\dfrac{1}{x-2}$($x>2$)在$x=a$处取最小值，则a等于　　(　　)

A. $1+\sqrt{2}$　　B. $1+\sqrt{3}$

C. 3　　D. 4

5. 已知$0<x<1$，则$x(3-3x)$取得最大值时x的值为_____.

知识点三　利用基本不等式证明不等式

6. 已知$a,b,c\in(0,+\infty)$，且$a+b+c=1$，求证：$\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}\geqslant 9$.

7. 已知a,b,c均为正数，a,b,c不全相等.

求证：$\dfrac{bc}{a}+\dfrac{ac}{b}+\dfrac{ab}{c}>a+b+c$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

提能达标过关

一、选择题

1.（**2019·北京朝阳高二期末**）若 $x>0$，则函数 $y=12x+\frac{1}{3x}$ 的最小值为（　　）

A. 2　　B. $2\sqrt{2}$

C. 4　　D. 8

2. 已知 $x>0$，$y>0$，且 $x+2y=2$，则 xy（　　）

A. 有最大值为 1　　B. 有最小值为 1

C. 有最大值为 $\frac{1}{2}$　　D. 有最小值为 $\frac{1}{2}$

3.（**2019·江南十校联考**）设 $x,y\in\mathbf{R}$，$a>1$，$b>1$，若 $a^x=b^y=2$，$2a+b=8$，则 $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$ 的最大值为（　　）

A. 2　　B. 3

C. 4　　D. $\log_2 3$

4. 已知 $\lg a+\lg b=2$，则 $\lg(a+b)$ 的最小值为（　　）

A. $1+\lg 2$　　B. $2\sqrt{2}$

C. $1-\lg 2$　　D. 2

5. 若正数 x,y 满足 $4x^2+9y^2+3xy=30$，则 xy 的最大值为（　　）

A. $\frac{4}{3}$　　B. $\frac{5}{3}$

C. $\frac{5}{4}$　　D. 2

二、填空题

6. 设 $0<x<\frac{3}{2}$，则函数 $y=4x(3-2x)$ 的最大值为_____.

7. 当 $3<x<12$ 时，函数 $y=\frac{(x-3)(12-x)}{x}$ 的最大值为_____.

8. 已知函数 $f(x)=4x+\frac{a}{x}(x>0,a>0)$ 在 $x=3$ 时取得最小值，则 $a=$_____.

三、解答题

9.（1）求 $y=\frac{x^2+3x+4}{2x}(x>0)$ 的最小值；

（2）求 $y=\frac{x^2+2}{x-1}(x>1)$ 的最小值；

（3）求 $y=-x+\frac{1}{1-x}(x>1)$ 的最大值.

10. 已知 $x,y,z>0$，$x+y+z=3$.

（1）求 $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}$ 的最小值；

（2）求证：$3\leqslant x^2+y^2+z^2<9$.

第 31 课时　基本不等式的应用

掌握几个要点

1. 掌握 1 个方法

常数代换法求最值的步骤

（1）根据已知条件或其变形确定定值（常数）；

（2）把确定的定值（常数）变形为 1；

（3）把“1”的表达式与所求最值的表达式相乘或相除，进而构造和或积的形式；

（4）利用基本不等式求解最值.

2. 关注 3 个注意点

利用基本不等式求最大值或最小值时应注意：

（1）x,y 一定都是正数；

（2）求积 xy 最大值时，应看和 $x+y$ 是否为定值；求和 $x+y$ 最小值时，应看积 xy 是否为定值；

（3）等号是否能够成立.

以上三点可简记为“一正，二定，三相等”.

题点知识巩固

知识点一　常数代换法求最值

1. 若直线 $2mx-ny-2=0(m>0,n>0)$ 过点 $(1,-2)$，则 $\frac{1}{m}+\frac{2}{n}$ 的最小值为（　　）

A. 2　　B. 6

C. 12　　D. $3+2\sqrt{2}$

2. 若直线 $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1(a>0,b>0)$ 过点 $(1,2)$，则 $2a+b$ 的最小值为_____.

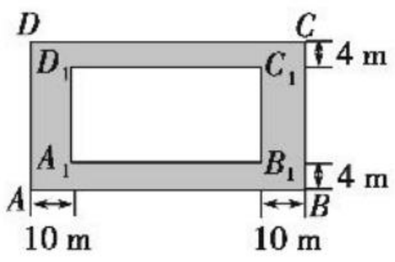
3. 已知正实数 a,b 满足 $a+b=4$，则 $\frac{1}{a+1}+\frac{1}{b+3}$ 的最小值为_____.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

知识点二　利用基本不等式解决实际问题

4.（**2017·江苏卷**）某公司一年购买某种货物600吨，每次购买x吨，运费为6万元/次，一年的总存储费用为$4x$万元.要使一年的总运费与总存储费用之和最小，则x的值是_____.

5.某房地产开发公司计划在一楼区内建造一个长方形公园$ABCD$，公园由形状为长方形的休闲区$A_1B_1C_1D_1$和人行道（阴影部分）组成.已知休闲区$A_1B_1C_1D_1$的面积为4 000 m^2，人行道的宽分别为4 m和10 m（如图所示）.



（1）若设休闲区的长和宽的比$\frac{|A_1B_1|}{|B_1C_1|}=x(x>1)$，求公园$ABCD$所占面积$S$关于$x$的函数$S(x)$的解析式；

（2）要使公园所占面积最小，则休闲区$A_1B_1C_1D_1$的长和宽该如何设计？

提能达标过关

一、选择题

1.设$a>0,b>0$，若$\sqrt{3}$是3^a与3^b的等比中项，则$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$的最小值为（　　）

A. 2　　B. $2\sqrt{2}$

C. 4　　D. 5

2.正数a,b满足$\frac{1}{a}+\frac{9}{b}=1$，若不等式$a+b\geqslant -x^2+4x+18-m$对任意实数$x$恒成立，则实数$m$的取值范围是（　　）

A. $[3,+\infty)$　　B. $(-\infty,3]$

C. $(-\infty,6]$　　D. $[6,+\infty)$

3.若对任意$x>0$，$\frac{x}{x^2+3x+1}\leqslant a$恒成立，则$a$的取值范围是（　　）

A. $a\geqslant\frac{1}{5}$　　B. $a>\frac{1}{5}$

C. $a<\frac{1}{5}$　　D. $a\leqslant\frac{1}{5}$

4.某商场中秋节前30天月饼销售总量$f(t)$与时间$t(0<t\leqslant 30)$的关系大致满足$f(t)=t^2+10t+16$，则该商场前t天平均销售量（如前10天的平均销售量为$\frac{f(10)}{10}$）的最小值为（　　）

A. 18　　B. 27

C. 20　　D. 16

5.（**2019·洛阳统考**）若正实数x,y,z满足$x^2+4y^2=z+3xy$，则当$\frac{xy}{z}$取最大值时，$\frac{1}{x}+\frac{1}{2y}-\frac{1}{z}$的最大值为（　　）

A. 2　　B. $\frac{3}{2}$

C. 1　　D. $\frac{1}{2}$

二、填空题

6.已知$x,y\in(0,+\infty)$，$2^{x-3}=\left(\frac{1}{2}\right)^y$，则$\frac{1}{x}+\frac{4}{y}$的最小值为_____.

7.若$b>a>1$，且$3\log_a b+6\log_b a=11$，则$a^3+\frac{2}{b-1}$的最小值为_____.

8.要挖一个面积为800平方米的矩形鱼池，并在鱼池的四周分别留出宽分别为2米，1米的小路，则鱼池与路的占地总面积的最小值是_____平方米.

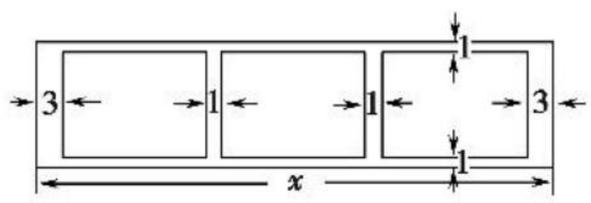
三、解答题

9.已知$x>0,y>0$，且$2x+8y-xy=0$，求：

（1）xy的最小值；

（2）$x+y$的最小值.

10.某学校为了支持生物课程基地研究植物生长，计划利用学校空地建造一间室内面积为900 m^2的矩形温室，在温室内划出三块全等的矩形区域，分别种植三种植物，相邻矩形区域之间间隔1 m，三块矩形区域的前、后与内墙各保留1 m宽的通道，左、右两块矩形区域分别与相邻的左右内墙保留3 m宽的通道，如图.设矩形温室的室内长为x（单位：m），三块种植植物的矩形区域的总面积为S（单位：m^2）.



（1）求S关于x的函数关系式；

（2）求S的最大值.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

第 32 课时　素养提升——不等式

方法技巧点拨

三元目标函数最值求法

在利用基本不等式求最大值或最小值时，为满足“一正、二定、三相等”的条件，需要做一些适当的变形，用到一些变换的技巧，下面举例说明.

1. 凑和为定值

【例 1】 若 $a,b,c>0$，且 $2a+b+c=\sqrt{6}$，则 $a(a+b+c)+bc$ 的最大值为（　　）

A. $\frac{3}{4}$　　B. $\sqrt{3}$

C. $\frac{3}{2}$　　D. 2

［分析］ 注意 $a(a+b+c)+bc=(a+b)(a+c)$，而 $2a+b+c=(a+b)+(a+c)$，从而沟通了问题与已知的联系，然后利用基本不等式求最值.

［解析］ $\because a(a+b+c)+bc=a^2+ab+ac+bc$

$=(a^2+ac)+(ab+bc)=a(a+c)+b(a+c)$

$=(a+b)(a+c)\leqslant\left[\frac{(a+b)+(a+c)}{2}\right]^2$

$=\left(\frac{2a+b+c}{2}\right)^2=\left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right)^2=\frac{3}{2}$.

当且仅当 $a+b=a+c=\frac{\sqrt{6}}{2}$，即 $b=c$ 时，取“=”，

$\therefore a(a+b+c)+bc$ 的最大值为 $\frac{3}{2}$，故选 C.

［答案］ C

2. 凑积为定值

【例 2】 设 $a>b>c>0$，则 $2a^2+\frac{1}{ab}+\frac{1}{a(a-b)}-10ac+25c^2$ 的最小值是（　　）

A. 2　　B. 4

C. $2\sqrt{5}$　　D. 5

［分析］ 注意到 $2a^2+\frac{1}{ab}+\frac{1}{a(a-b)}-10ac+25c^2$

$=a^2-ab+\frac{1}{a(a-b)}+ab+\frac{1}{ab}+a^2-10ac+25c^2$

$=\left[a(a-b)+\frac{1}{a(a-b)}\right]+\left(ab+\frac{1}{ab}\right)+(a-5c)^2$，然后分别利用基本不等式和平方数的性质求最值. 由于代数式比较复杂，要注意等号取到的条件.

［解析］ $\because a>b>c>0$，$\therefore$ 原式 $=a^2+\frac{1}{ab}+\frac{1}{a(a-b)}-10ac+25c^2+a^2=a^2-ab+\frac{1}{a(a-b)}+ab+\frac{1}{ab}+(a-5c)^2$

$=\left[a(a-b)+\frac{1}{a(a-b)}\right]+\left(ab+\frac{1}{ab}\right)+(a-5c)^2\geqslant 2+2+0=4$，当且仅当 $a(a-b)=1$，$ab=1$，$a-5c=0$ 时取等号. 即当 $a=\sqrt{2}$，$b=\frac{\sqrt{2}}{2}$，$c=\frac{\sqrt{2}}{5}$ 时，所求代数式的最小值为 4，故选 B.

［答案］ B

易错易混提示

易错点 1　忽视等号成立的条件

【例 1】 已知两正数 x,y 满足 $x+y=1$，则 $z=\left(x+\frac{1}{x}\right)\left(y+\frac{1}{y}\right)$ 的最小值为_____.

［错解］ 错解一：因为对 $a>0$，恒有 $a+\frac{1}{a}\geqslant 2$，

从而 $z=\left(x+\frac{1}{x}\right)\left(y+\frac{1}{y}\right)\geqslant 4$，

所以 z 的最小值是 4.

错解二：$z=\frac{2+x^2y^2-2xy}{xy}=\left(\frac{2}{xy}+xy\right)-2$

$\geqslant 2\sqrt{\frac{2}{xy}\cdot xy}-2=2(\sqrt{2}-1)$，

所以 z 的最小值是 $2(\sqrt{2}-1)$.

［错因分析］ 错解一和错解二的错误原因是等号成立的条件不具备，因此使用基本不等式一定要验证等号成立的条件，只有等号成立时，所求出的最值才是正确的.

［正解］ $z=\left(x+\frac{1}{x}\right)\left(y+\frac{1}{y}\right)=xy+\frac{1}{xy}+\frac{y}{x}+\frac{x}{y}$

$=xy+\frac{1}{xy}+\frac{(x+y)^2-2xy}{xy}=\frac{2}{xy}+xy-2$，

令 $t=xy$，则 $0<t=xy\leqslant\left(\frac{x+y}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$，

由 $f(t)=t+\frac{2}{t}$ 在 $\left(0,\frac{1}{4}\right]$ 上单调递减，

故当 $t=\frac{1}{4}$ 时，$f(t)=t+\frac{2}{t}$ 有最小值 $\frac{33}{4}$，

所以当 $x=y=\frac{1}{2}$ 时，z 有最小值 $\frac{25}{4}$.

［答案］ $\frac{25}{4}$

［防范措施］ 1. 在利用基本不等式求最值（值域）时，过多地关注形式上的满足，极容易忽视符号和等号成立条件的满足，这是造成解题失误的重要原因. 如函数 $y=1+2x+\frac{3}{x}(x<0)$ 有最大值 $1-2\sqrt{6}$，而不是有最小值 $1+2\sqrt{6}$.

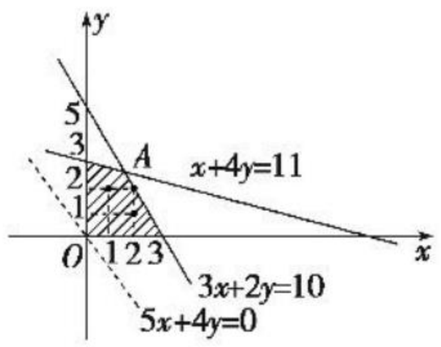
2. 当多次使用基本不等式时，一定要注意每次是否都能保证等号成立，并且要注意取等号条件的一致性，否则就会出错.

易错点 2　最优整数解判断不准而致错

【例 2】 设变量 x,y 满足条件 $\begin{cases}3x+2y\leqslant 10,\\ x+4y\leqslant 11,\\ x\in\mathbf{Z},y\in\mathbf{Z},\\ x>0,y>0,\end{cases}$ 求 $S=5x+4y$ 的最大值.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

［**错解**］ 依约束条件画出可行域如图中阴影部分所示，如先不考虑 x,y 为整数的条件，则当直线 $5x+4y=S$ 过点 $A\left(\frac{9}{5},\frac{23}{10}\right)$ 时，



$S=5x+4y$ 取最大值，$S_{\max}=18\frac{1}{5}$.

因为 x,y 为整数，所以当直线 $5x+4y=t$ 平行移动时，从点 A 起通过的可行域中的整点是(1,2)，

此时 $S_{\max}=13$.

［**错因分析**］ 上述错误是把(1,2)作为可行域内唯一整点，其实还有整点(0,2)，(2,1)，(2,2)，当过整点(2,2)时，$S=18$ 才是最大值.

［**正解**］ 依据已知条件作出图形如上图所示，在可行域内靠近 $A\left(\frac{9}{5},\frac{23}{10}\right)$ 的整点有(0,2)，(1,2)，(2,1)，(2,2)，分别验证可得(2,2)为最优解，此时 $S_{\max}=2\times5+2\times4=18$.

［**防范措施**］ 求最优整数解时，要结合可行域，对所有可能的整数解逐一检验，不要漏掉解.

素养培优提能

一、选择题

1. 已知 $a>0,b>0,a,b$ 的等比中项是 1，且 $m=b+\frac{1}{a},n=a+\frac{1}{b}$，则 $m+n$ 的最小值是（　　）

A. 3　　B. 4

C. 5　　D. 6

2. （**2019·福建厦门六中高二期中**）已知等差数列 $\{a_n\}$ 的各项均为正数，$a_9=5$，则 a_3a_{15} 的最大值为（　　）

A. 100　　B. 75

C. 50　　D. 25

3. （**2019·江西南昌二中高三月考**）若直线 $ax+by-1=0$ $(a>0,b>0)$ 过曲线 $y=1+\sin\pi x(0<x<2)$ 的对称中心，则 $\frac{1}{a}+\frac{2}{b}$ 的最小值为（　　）

A. $\sqrt{2}+1$　　B. $4\sqrt{2}$

C. $3+2\sqrt{2}$　　D. 6

4. 设 $m>1,P=m+\frac{4}{m-1},Q=5$，则 P,Q 的大小关系为（　　）

A. $P<Q$　　B. $P=Q$

C. $P\geqslant Q$　　D. $P\leqslant Q$

5. 若 $a,b,c\in(0,+\infty)$，且 $ab+ac+bc+2\sqrt{5}=6-a^2$，则 $2a+b+c$ 的最小值为（　　）

A. $\sqrt{5}-1$　　B. $\sqrt{5}+1$

C. $2\sqrt{5}+2$　　D. $2\sqrt{5}-2$

二、填空题

6. （**2018·全国卷Ⅰ**）若 x,y 满足约束条件 $\begin{cases}x-2y-2\leqslant0,\\x-y+1\geqslant0,\\y\leqslant0,\end{cases}$ 则 $z=3x+2y$ 的最大值为_____.

7. 周长为 $\sqrt{2}+1$ 的直角三角形面积的最大值为_____.

8. 如果点 P 在平面区域 $\begin{cases}2x-y+2\geqslant0,\\x-2y+1\leqslant0,\\x+y-2\leqslant0\end{cases}$ 内，点 Q 在曲线 $x^2+(y+2)^2=1$ 内，那么 $|PQ|$ 的最小值为_____.

三、解答题

9. 设函数 $f(x)=ax^2+bx+3(a\neq0)$.

(1)若不等式 $f(x)>0$ 的解集为 $(-1,3)$，求 a,b 的值；

(2)若 $f(1)=4,a>0,b>0$，求 $\frac{1}{a}+\frac{4}{b}$ 的最小值.

10. 某公司承担了每天至少搬运 280 t 水泥的任务，已知该公司有 6 辆 A 型卡车和 8 辆 B 型卡车. 又已知 A 型卡车每天每辆的运载量为 30 t，成本费为 0.9 千元；B 型卡车每天每辆的运载量为 40 t，成本费为 1 千元.

(1)如果你是公司的经理，为使公司所花的成本费最低，每天应派出 A 型卡车、B 型卡车各多少辆？

(2)在(1)所求的区域内，求目标函数 $m=\frac{y}{x+1}$ 的最大值和最小值.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

阶段质量评估 3

（时间：60 分钟　满分：100 分）

一、选择题（每小题 5 分，共 30 分）

1. 以下结论一定能推出 $a<b$ 的是（　　）

A. $(a-b)a^2<0$　　B. $a^2<b^2$

C. $\frac{1}{a}>\frac{1}{b}$　　D. $ac<bc$

2. （**2019 · 厦门一中检测**）设 $0<a<b$，则下列不等式中正确的是（　　）

A. $a<b<\sqrt{ab}<\frac{a+b}{2}$　　B. $a<\sqrt{ab}<\frac{a+b}{2}<b$

C. $a<\sqrt{ab}<b<\frac{a+b}{2}$　　D. $\sqrt{ab}<a<\frac{a+b}{2}<b$

3. （**2017 · 全国卷Ⅲ**）设 x,y 满足约束条件 $\begin{cases}3x+2y-6\leqslant 0,\\ x\geqslant 0,\\ y\geqslant 0,\end{cases}$ 则 $z=x-y$ 的取值范围是（　　）

A. $[-3,0]$　　B. $[-3,2]$

C. $[0,2]$　　D. $[0,3]$

4. 设 $a>b>0$，则 $a^2+\frac{1}{ab}+\frac{1}{a(a-b)}$ 的最小值是（　　）

A. 1　　B. 2

C. 3　　D. 4

5. （**2019 · 银川一中检测**）对一切实数 x，不等式 $x^2+a|x|+1\geqslant 0$ 恒成立，则实数 a 的取值范围是（　　）

A. $(-\infty,-2)$　　B. $[-2,+\infty)$

C. $[-2,2]$　　D. $[0,+\infty)$

6. 已知不等式 $x^2-2x+5\geqslant a^2-3a$ 对任意实数 x 恒成立，则实数 a 的取值范围为（　　）

A. $[-1,4]$

B. $(-\infty,-2]\cup[5,+\infty)$

C. $(-\infty,-1]\cup[4,+\infty)$

D. $[-2,5]$

二、填空题（每小题 5 分，共 20 分）

7. 关于 x 的不等式 $x^2-(2m+1)x+m^2+m<0$ 的解集是_____.

8. 已知 $a>0,b>0$，若不等式 $\frac{m}{3a+b}-\frac{3}{a}-\frac{1}{b}\leqslant 0$ 恒成立，则实数 m 的最大值为_____.

9. 若 x,y 满足约束条件 $\begin{cases}x-y+1\geqslant 0,\\ x-2y\leqslant 0,\\ x+2y-2\leqslant 0,\end{cases}$ 则 $z=x+y$ 的最大值为_____.

10. 要制作一个容积为 4 m^3，高为 1 m 的无盖长方体容器. 已知该容器的底面造价是每平方米 20 元，侧面造价是每平方米 10 元，则该容器的总造价最低是_____元.

三、解答题（共 50 分）

11. （12 分）已知不等式 $x^2-2x-3<0$ 的解集为 A，不等式 $x^2+x-6<0$ 的解集为 B.

(1) 求 $A\cap B$；

(2) 若不等式 $x^2+ax+b<0$ 的解集为 $A\cap B$，求不等式 $ax^2+x+b<0$ 的解集.

12. （12 分）不等式 $(m^2-2m-3)x^2-(m-3)x-1<0$ 对一切 $x\in\mathbf{R}$ 恒成立，求实数 m 的取值范围.

13. （13 分）(1) 若 $m+n=2,m>0,n>0$，求 $\frac{4}{m}+\frac{9}{n}$ 的最小值，并求此时的 m,n 的值；

(2) 若 $m+n+mn=4,m>0,n>0$，求 mn 的最大值和 $m+n$ 的最小值.

14. （13 分）某地区上年度电价为 0.8 元/kw · h，年用电量为 a kw · h. 本年度计划将电价降价到 0.55 元/kw · h 至 0.75 元/kw · h 之间，而用户期望电价为 0.4 元/kw · h. 经测算，下调电价后新增的用电量与实际电价和用户期望电价的差成反比（比例系数为 k）. 该地区电力的成本价为 0.3 元/kw · h.

(1) 写出本年度电价下调后，电力部门的收益 y 与实际电价 x 的函数关系式；

(2) 设 $k=0.2a$，当电价最低定为多少时仍可保证电力部门的收益比上年度至少增长 20%？

注：收益＝实际用电量×（实际电价－成本价）.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

班级_____ 姓名_____ 考场号_____ 准考证号_____

密 封 线

阶段质量测试卷(一)

第一章 解三角形

(时间:120分钟 满分:150分)

一、选择题(每小题5分,共60分)

1.(2018·全国卷Ⅱ)在△ABC中,$\cos\frac{C}{2}=\frac{\sqrt{5}}{5}$,$BC=1$,$AC=5$,则$AB=$ (　　)

A. $4\sqrt{2}$　　B. $\sqrt{30}$

C. $\sqrt{29}$　　D. $2\sqrt{5}$

2.(2019·西安质检)在△ABC中,若$A=60°$,$B=45°$,$BC=3\sqrt{2}$,则$AC=$ (　　)

A. $4\sqrt{3}$　　B. $2\sqrt{3}$

C. $\sqrt{3}$　　D. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

3. 在△ABC中,a,b,c分别是角A,B,C的对边,$a=\sqrt{3}$,$b=\sqrt{2}$,且$1+2\cos(B+C)=0$,则BC边上的高等于 (　　)

A. $\frac{\sqrt{2}+1}{3}$　　B. $\frac{\sqrt{3}+1}{2}$

C. $\frac{\sqrt{5}+1}{5}$　　D. $\frac{\sqrt{7}+1}{4}$

4. 在△ABC中,$A=60°$,$AB=2$,且△ABC的面积为$\frac{\sqrt{3}}{2}$,则BC的长为 (　　)

A. $\frac{\sqrt{3}}{2}$　　B. $\sqrt{3}$

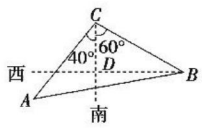
C. $2\sqrt{3}$　　D. 2

5. 已知△ABC的三个内角A,B,C的对边分别为a,b,c,若$\frac{\cos A}{\cos B}=\frac{b}{a}=\sqrt{2}$,则该三角形的形状是 (　　)

A. 直角三角形　　B. 等腰三角形

C. 等边三角形　　D. 钝角三角形

6. 如图,两座灯塔A和B与海岸观察站C的距离相等,灯塔A在观察站南偏西40°,灯塔B在观察站南偏东60°,则灯塔A在灯塔B的 (　　)



A. 北偏东10°　　B. 北偏西10°

C. 南偏东80°　　D. 南偏西80°

7.(2018·云南五市联考)在△ABC中,角A,B,C所对的边分别为a,b,c,已知$a=1$,$b=\sqrt{3}$,$A=30°$,B为锐角,那么$A:B:C$为 (　　)

A. 1∶1∶3　　B. 1∶2∶3

C. 1∶3∶2　　D. 1∶4∶1

8. 在△ABC中,角A,B,C所对边分别为a,b,c,若$a\sin A+b\sin B<c\sin C$,则△ABC的形状是 (　　)

A. 锐角三角形　　B. 直角三角形

C. 钝角三角形　　D. 不确定

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

9. 在$\triangle ABC$中，角A,B,C的对边分别为a,b,c，若$\frac{a-c}{b}=\frac{a-b}{a+c}$，则$C=$（　　）

A. $\frac{\pi}{3}$　　B. $\frac{\pi}{4}$

C. $\frac{\pi}{6}$　　D. $\frac{\pi}{8}$

10. 已知$\triangle ABC$的面积为$\sqrt{3}$，且$C=30^\circ$，$BC=2\sqrt{3}$，则$AB=$（　　）

A. 1　　B. $\sqrt{3}$

C. 2　　D. $2\sqrt{3}$

11. 从某电视塔的正东方向的A处，测得塔顶的仰角为60°，从电视塔的西偏南30°的B处，测得塔顶的仰角为45°，若A,B间的距离为35 m，则此电视塔的高度为（　　）

A. $5\sqrt{21}$ m　　B. $6\sqrt{26}$ m

C. $8\sqrt{21}$ m　　D. $10\sqrt{21}$ m

12. 在$\triangle ABC$中，三边上的高依次为$\frac{1}{13},\frac{1}{5},\frac{1}{11}$，则$\triangle ABC$为（　　）

A. 锐角三角形　　B. 直角三角形

C. 钝角三角形　　D. 不存在这样的三角形

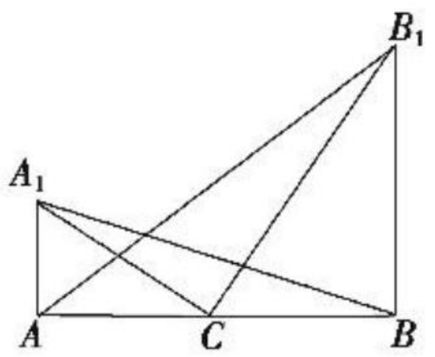
二、填空题（每小题5分，共20分）

13. 在$\triangle ABC$中，若$\tan A=\frac{1}{3}$，$C=150^\circ$，$BC=1$，则$AB=$_____.

14. （**2018·浙江卷**）在$\triangle ABC$中，角A,B,C所对的边分别为a,b,c. 若$a=\sqrt{7}$，$b=2$，$A=60^\circ$，则$\sin B=$_____，$c=$_____.

15. （**2019·湖北武汉二中期中**）在锐角三角形ABC中，角A,B,C所对的边分别为a,b,c，$A=2B$，则$\frac{a}{b}$的取值范围是_____.

16. 如图，在水平地面上有两座直立的相距60 m的铁塔AA_1和BB_1. 已知从塔AA_1的底部看塔BB_1顶部的仰角是从塔BB_1的底部看塔AA_1顶部的仰角的2倍，从两塔底部连线中点C分别看两塔顶部的仰角互为余角. 则从塔BB_1的底部看塔AA_1顶部的仰角的正切值为_____；塔BB_1的高为_____m.



三、解答题（共70分）

17. （10分）在$\triangle ABC$中，D是BC上的点，AD平分$\angle BAC$，$BD=2DC$.

（1）求$\frac{\sin B}{\sin C}$；

（2）若$\angle BAC=60^\circ$，求B.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

18.（12 分）（**2018 · 全国卷Ⅰ**）在平面四边形 $ABCD$ 中，$\angle ADC=90°$，$A=45°$，$AB=2$，$BD=5$.

（1）求 $\cos\angle ADB$；

（2）若 $DC=2\sqrt{2}$，求 BC.

19.（12 分）设△ABC 的内角 A，B，C 所对的边分别为 a，b，c，且 $\cos B=\frac{4}{5}$，$b=2$.

（1）当 $A=30°$ 时，求 a 的值；

（2）当△ABC 的面积为 3 时，求 $a+c$ 的值.

20.（12 分）（**2018 · 北京卷**）在△ABC 中，$a=7$，$b=8$，$\cos B=-\frac{1}{7}$.

（1）求 A；

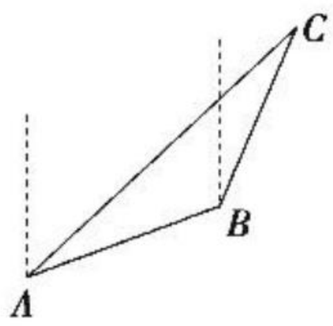
（2）求 AC 边上的高.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

21.(12 分)一艘海轮从 A 出发,沿北偏东 75°的方向航行($2\sqrt{3}-2$)n mile 到达海岛 B,然后从 B 出发,沿北偏东 15°的方向航行 4 n mile 到达海岛 C.

(1)求 AC 的长;

(2)如果下次航行直接从 A 出发到达 C,求$\angle CAB$ 的大小.



22.(12 分)(**2019 · 福建福州期中**)在$\triangle ABC$ 中,角 A,B,C 所对的边分别为 a,b,c,已知 $\cos C+(\cos A-\sqrt{3}\sin A)\cos B=0$.

(1)求 B 的大小;

(2)若 $a+c=1$,求 b 的取值范围.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

班级_____ 考场号_____ 准考证号_____
姓名_____
密……封……线……
数学 必修5A

班级_____ 姓名_____ 考场号_____ 准考证号_____

密 封 线

阶段质量测试卷(二)

第二章 数 列

(时间:120 分钟 满分:150 分)

一、选择题(每小题 5 分,共 60 分)

1. 数列 3,5,9,17,33,…的通项公式 a_n 等于 (　　)

A. 2^n　　B. 2^n+1

C. 2^n-1　　D. 2^{n+1}

2. 已知 a,b,c,d 成等比数列,且曲线 $y=x^2-4x+7$ 的顶点是(b,c),则 $ad=$ (　　)

A. 5　　B. 6

C. 7　　D. 12

3. 在等差数列$\{a_n\}$中,$a_4+a_8=10$,$a_{10}=6$,则 $a_{18}=$ (　　)

A. 8.5　　B. 8

C. 7.5　　D. 7

4. 已知等比数列$\{a_n\}$的公比为 2,前 4 项和是 1,则该数列的前 8 项和为 (　　)

A. 15　　B. 17

C. 19　　D. 21

5. 在等比数列$\{a_n\}$中,$a_n>0$,且 $a_2=1-a_1$,$a_4=9-a_3$,则a_4+a_5 的值为 (　　)

A. 16　　B. 27

C. 36　　D. 81

6. 在数列$\{a_n\}$中,$a_1=1$,点(a_n,a_{n+1})在直线 $y=2x$ 上,则 a_4 的值为 (　　)

A. 7　　B. 8

C. 9　　D. 16

7. 在单调递减的等比数列$\{a_n\}$中,若 $a_3=1$,$a_2+a_4=\frac{5}{2}$,则 a_1 等于 (　　)

A. 2　　B. 4

C. $\sqrt{2}$　　D. $2\sqrt{2}$

8. 在 3 与 27 之间插入 7 个数,使这 9 个数成等差数列,则插入的 7 个数中的第 4 个数为 (　　)

A. 18　　B. 9

C. 12　　D. 15

9. "今有垣厚一丈二尺半,两鼠对穿,大鼠日一尺,小鼠日半尺,大鼠日增半尺,小鼠前三日日倍增,后不变,问几日相逢?"意思是"今有土墙厚 12.5 尺,两鼠从墙两侧同时打洞,大鼠第一天打洞一尺,小鼠第一天打洞半尺,大鼠之后每天打洞长度比前一天多半尺,小鼠前三天每天打洞长度比前一天多一倍,三天之后小鼠每天打洞按第三天长度保持不变,问两鼠几天打通相逢?"则两鼠相逢最快需要的天数为 (　　)

A. 2　　B. 3

C. 4　　D. 5

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

10.（**2019·湖北部分重点中学高一期中**）设等差数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，若a_4，a_6是方程$x^2-8x+5=0$的两根，那么$S_9=$（　　）

A. 8　　B. 36

C. 45　　D. 72

11. 设$x\in\mathbf{R}$，记不超过x的最大整数为$[x]$，如$[2.5]=2$，$[-2.5]=-3$，令$\{x\}=x-[x]$，则$\left\{\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right\}$，$\left[\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right]$，$\frac{\sqrt{5}+1}{2}$三个数构成的数列（　　）

A. 是等比数列但不是等差数列　　B. 是等差数列但不是等比数列

C. 既是等差数列又是等比数列　　D. 既不是等差数列又不是等比数列

12. 对于正项数列$\{a_n\}$，定义$G_n=\frac{a_1+2a_2+3a_3+\cdots+na_n}{n}$为数列$\{a_n\}$的“匀称”值. 已知数列$\{a_n\}$的“匀称”值为$G_n=n+2$，则该数列中的$a_{10}$等于（　　）

A. $2\sqrt{3}$　　B. $\frac{4}{5}$

C. 1　　D. $\frac{21}{10}$

二、填空题（每小题5分，共20分）

13. 已知数列$\{a_n\}$的前n项和为$S_n=2^n-3$，则数列$\{a_n\}$的通项公式为_____.

14. 设等差数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，$S_{m-1}=-2$，$S_m=0$，$S_{m+1}=3$，则$m=$_____.

15. 若等比数列$\{a_n\}$的各项均为正数，且$a_{10}a_{11}+a_9a_{12}=2e^5$，则$\ln a_1+\ln a_2+\cdots+\ln a_{20}=$_____.

16. 若数列$\{a_n\}$是等差数列，首项$a_1<0$，$a_{203}+a_{204}>0$，$a_{203}\cdot a_{204}<0$，则使前n项和$S_n<0$的最大自然数n是_____.

三、解答题（共70分）

17.（10分）已知$\{a_n\}$是一个等差数列，且$a_2=1$，$a_5=-5$. 求：

（1）$\{a_n\}$的通项公式；

（2）$\{a_n\}$的前n项和S_n的最大值.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

18.(12 分)已知数列$\{a_n\}$是等差数列,$b_n=a_n^2-a_{n+1}^2$.

(1)证明:数列$\{b_n\}$是等差数列;

(2)若$a_1+a_3+a_5+\cdots+a_{25}=130$,$a_2+a_4+a_6+\cdots+a_{26}=143-13k$($k$为常数),求数列$\{b_n\}$的通项公式.

19.(12 分)在公差不为零的等差数列$\{a_n\}$中,$a_1=1$,a_2,a_4,a_8成等比数列.

(1)求数列$\{a_n\}$的通项公式;

(2)设$b_n=2^{a_n}$,$T_n=b_1+b_2+\cdots+b_n$,求T_n.

20.(12 分)(**2019·广西桂林市秀峰区高二月考**)已知等比数列$\{a_n\}$满足:$a_3a_4a_5=512$,$a_3+a_4+a_5=28$,且公比大于 1.

(1)求数列$\{a_n\}$的通项公式;

(2)设$b_n=\log_2 a_{n+1}$,求$\left\{\dfrac{1}{b_nb_{n+1}}\right\}$的前$n$项和$S_n$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

21.(12 分)已知数列$\{a_n\}$的首项为$a_1=1$,前n项和为S_n,且数列$\left\{\frac{S_n}{n}\right\}$是公差为 2 的等差数列.

(1)求数列$\{a_n\}$的通项公式;

(2)若$b_n=(-1)^n a_n$,求数列$\{b_n\}$的前n项和T_n.

22.(12 分)(**2019·河南南阳期中**)等比数列$\{a_n\}$中,a_1,a_2,a_3分别是表中第 1,2,3 行中的某一个数,且a_1,a_2,a_3中任何两个数不在表的同一列中.

	第 1 列	第 2 列	第 3 列
第 1 行	3	2	10
第 2 行	6	4	14
第 3 行	9	8	18

(1)求数列$\{a_n\}$的通项公式;

(2)设$b_n=3na_n$,求数列$\{b_n\}$的前n项和T_n.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

班级_____ 姓名_____ 考场号_____ 准考证号_____

密 封 线

阶段质量测试卷(三)

第三章 不等式

(时间:120 分钟 满分:150 分)

一、选择题(每小题 5 分,共 60 分)

1. 某校对高一美术生划定录取分数线,专业成绩 x 不低于 95 分,文化课总分 y 高于 380 分,体育成绩 z 超过 45 分,用不等式(组)表示就是 (　　)

A. $\begin{cases} x\geqslant 95, \\ y\geqslant 380, \\ z>45 \end{cases}$　　B. $\begin{cases} x\geqslant 95, \\ y>380, \\ z\geqslant 45 \end{cases}$

C. $\begin{cases} x>95, \\ y>380, \\ z>45 \end{cases}$　　D. $\begin{cases} x\geqslant 95, \\ y>380, \\ z>45 \end{cases}$

2. 若 a,b,c 为实数,且 $a<b<0$,则下列命题正确的是 (　　)

A. $ac^2<bc^2$　　B. $a^2>ab>b^2$

C. $\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$　　D. $\frac{b}{a}>\frac{a}{b}$

3. 若 $2^m+4^n<2\sqrt{2}$,则点 (m,n) 必在 (　　)

A. 直线 $x+y=1$ 的左下方

B. 直线 $x+y=1$ 的右上方

C. 直线 $x+2y=1$ 的左下方

D. 直线 $x+2y=1$ 的右上方

4. (**2019·河南省正阳县二中高二测试**)若集合 $A=\{x|x^2-7x+6<0\}$,$B=\{x|x^2-10x+16<0\}$,则 $A\cap B=$ (　　)

A. $\{x|x<6\}$　　B. $\{x|x>2\}$

C. $\{x|2<x<6\}$　　D. $\varnothing$

5. (**2019·湖南省益阳市高二测试**)若不等式 $x^2-2x-3<0$ 的解集为 A,不等式 $x^2+x-6<0$ 的解集为 B,不等式 $x^2+ax+b<0$ 的解集为 $A\cap B$,则 $a+b$ 等于 (　　)

A. -3　　B. 1

C. -1　　D. 3

6. 若正数 x,y 满足 $3x+y=5xy$,则 $4x+3y$ 的最小值是 (　　)

A. 2　　B. 3

C. 4　　D. 5

7. 设函数 $f(x)=\begin{cases} x^2-4x+6(x\geqslant 0), \\ x+6(x<0), \end{cases}$ 则不等式 $f(x)>f(1)$ 的解集是 (　　)

A. $(-3,1)\cup(3,+\infty)$　　B. $(-3,1)\cup(2,+\infty)$

C. $(-1,1)\cup(3,+\infty)$　　D. $(-\infty,-3)\cup(1,3)$

8. 若实数 a,b 满足 $\frac{1}{a}+\frac{2}{b}=\sqrt{ab}$,则 ab 的最小值为 (　　)

A. $\sqrt{2}$　　B. 2

C. $2\sqrt{2}$　　D. 4

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

9. 设实数 x,y 满足约束条件 $\begin{cases}x+y\geqslant a,\\x-y\leqslant -1,\end{cases}$ 且 $z=x+ay$ 的最小值为 7，则 $a=$ （　　）

A. -5　　B. 3

C. -5 或 3　　D. 5 或 -3

10. 在 **R** 上定义运算 $\odot$：$a\odot b=ab+2a+b$，则满足 $x\odot(x-2)<0$ 的实数 x 的取值范围为 （　　）

A. $(0,2)$　　B. $(-2,1)$

C. $(-\infty,-2)\cup(1,+\infty)$　　D. $(-1,2)$

11. 若关于 x 的二次不等式 $x^2+mx+1\geqslant 0$ 的解集为 **R**，则实数 m 的取值范围是 （　　）

A. $(-\infty,-2]\cup[2,+\infty)$

B. $[-2,2]$

C. $(-\infty,-2)\cup(2,+\infty)$

D. $(-2,2)$

12. （**2019·广东韶关高二期中**）若关于 x 的不等式 $x^2-(a+1)x+a<0$ 的解集中恰有两个整数，则实数 a 的取值范围是 （　　）

A. $(3,4)$　　B. $(-2,-1)\cup(3,4)$

C. $(3,4]$　　D. $[-2,-1)\cup(3,4]$

二、填空题（每小题 5 分，共 20 分）

13. 设 x,y 满足约束条件 $\begin{cases}2x-y+1\geqslant 0,\\x-2y-1\leqslant 0,\\x\leqslant 1,\end{cases}$ 则 $z=2x+3y-5$ 的最小值为_____.

14. 已知 $x>-1$，则函数 $y=\dfrac{(x+10)(x+2)}{x+1}$ 的最小值为_____.

15. 若不等式 $x^2-4x+m<0$ 的解集为空集，则不等式 $x^2-(m+3)x+3m<0$ 的解集是_____.

16. （**2019·安徽六安一中高一期中**）若直线 $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=1$ 经过点 $P(2,1)$，则其与两坐标轴的正半轴围成的三角形的面积的最小值为_____.

三、解答题（共 70 分）

17. （10 分）解关于 x 的不等式 $x^2-3ax-18a^2>0$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

18.(12 分)已知函数 $f(x)=ax^2+ax-1$,其中 $a\in\mathbf{R}$.

(1)当 $a=2$ 时,解不等式 $f(x)<0$;

(2)若不等式 $f(x)<0$ 的解集为 $\mathbf{R}$,求实数 a 的取值范围.

19.(12 分)(1)已知 $x<3$,求 $f(x)=\dfrac{4}{x-3}+x$ 的最大值;

(2)已知 $x>0,y>0,\lg x+\lg y=1$,求 $\dfrac{2}{x}+\dfrac{5}{y}$ 的最小值.

20.(12 分)已知 $f(x)=-3x^2+a(5-a)x+b$.

(1)当不等式 $f(x)>0$ 的解集为 $(-1,3)$ 时,求实数 a,b 的值;

(2)若对任意实数 a,$f(2)<0$ 恒成立,求实数 b 的取值范围.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

21.(12 分)已知函数 $f(x)=x^2-2ax-1+a$,$a\in\mathbf{R}$.

(1)若 $a=2$,试求函数 $y=\dfrac{f(x)}{x}(x>0)$的最小值;

(2)对于任意的 $x\in[0,2]$,不等式 $f(x)\leqslant a$ 成立,试求实数 a 的取值范围.

22.(12 分)某工厂某种产品的年固定成本为 250 万元,每生产 x 千件,需另投入成本为 $C(x)$,当年产量不足 80 千件时,$C(x)=\dfrac{1}{3}x^2+10x$(万元);当年产量不小于 80 千件时,$C(x)=51x+\dfrac{10\,000}{x}-1\,450$(万元).每件商品售价为 0.05 万元.通过市场分析,该厂生产的商品能全部售完.

(1)写出年利润 $L(x)$(万元)关于年产量 x(千件)的函数解析式;

(2)当年产量为多少千件时,该厂在这一商品的生产中所获利润最大?

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

班级_____ 姓名_____ 考场号_____ 座位号_____
密……封……线……
准考证号_____
数学 必修5A

班级_____ 姓名_____ 考场号_____ 准考证号_____

密 封 线

综合质量测试卷

（时间：120 分钟　满分：150 分）

一、选择题（每小题 5 分，共 60 分）

1. 已知 $a,b,c\in\mathbf{R}$，则下列命题正确的是 （　）

A. $a>b\Rightarrow ac^2>bc^2$　　B. $\dfrac{a}{c}>\dfrac{b}{c}\Rightarrow a>b$

C. $\left.\begin{matrix}a>b\\ab<0\end{matrix}\right\}\Rightarrow\dfrac{1}{a}>\dfrac{1}{b}$　　D. $\left.\begin{matrix}a>b\\ab>0\end{matrix}\right\}\Rightarrow\dfrac{1}{a}>\dfrac{1}{b}$

2. 已知数列 $\left\{\dfrac{a_n}{n}\right\}$ 是等差数列，且 $a_3=2$，$a_{15}=30$，则 $a_9=$ （　）

A. 12　　B. 24

C. 16　　D. 32

3. 若 $-4<x<1$，则 $f(x)=\dfrac{x^2-2x+2}{2x-2}$ （　）

A. 有最小值 1　　B. 有最大值 1

C. 有最小值 -1　　D. 有最大值 -1

4. 设 $x,y\in\mathbf{R}$，$a>1$，$b>1$. 若 $a^x=b^y=2$，$a^2+b=4$，则 $\dfrac{2}{x}+\dfrac{1}{y}$ 的最大值为 （　）

A. 1　　B. 2

C. 3　　D. 4

5. 在数列 $\{a_n\}$ 中，$a_{n+1}-a_n=2$，S_n 为 $\{a_n\}$ 的前 n 项和. 若 $S_{10}=50$，则数列 $\{a_n+a_{n+1}\}$ 的前 10 项和为 （　）

A. 100　　B. 110

C. 120　　D. 130

6. 不等式组 $\begin{cases}x+y\geqslant 2,\\ 2x-y\leqslant 4,\\ x-y\geqslant 0\end{cases}$ 所围成的平面区域的面积为 （　）

A. $3\sqrt{2}$　　B. $6\sqrt{2}$

C. 6　　D. 3

7. 已知关于 x 的不等式 $x^2-4x\geqslant m$ 对任意 $x\in(0,1]$ 恒成立，则有 （　）

A. $m\leqslant -3$　　B. $m\geqslant -3$

C. $-3\leqslant m<0$　　D. $m\geqslant -4$

8. 中国古代数学名著《九章算术》中有这样一个问题：今有牛、马、羊食人苗，苗主责之粟五斗，羊主曰：“我羊食半马.”马主曰：“我马食半牛.”今欲衰偿之，问各出几何？此问题的译文是：今有牛、马、羊吃了别人的禾苗，禾苗主人要求赔偿 5 斗粟. 羊主人说：“我的羊所吃的禾苗只有马的一半.”马主人说：“我的马所吃的禾苗只有牛的一半.”打算按此比例偿还，他们各应偿还多少？已知牛、马、羊的主人应偿还 a 升，b 升，c 升，1 斗为 10 升，则下列判断正确的是 （　）

A. a,b,c 依次成公比为 2 的等比数列，且 $a=\dfrac{50}{7}$

B. a,b,c 依次成公比为 2 的等比数列，且 $c=\dfrac{50}{7}$

C. a,b,c 依次成公比为 $\dfrac{1}{2}$ 的等比数列，且 $a=\dfrac{50}{7}$

D. a,b,c 依次成公比为 $\dfrac{1}{2}$ 的等比数列，且 $c=\dfrac{50}{7}$

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

9.（**2019·山东潍坊高二期中**）已知等差数列$\{a_n\}$和等差数列$\{b_n\}$的前n项和分别为S_n，T_n，且$(n+1)S_n=(7n+23)T_n$，则使$\frac{a_n}{b_n}$为整数的正整数n的个数是（　　）

A. 2　　B. 3

C. 4　　D. 5

10. 已知$x>0$，$y>0$，x，a，b，y成等差数列，x，c，d，y成等比数列，则$\frac{(a+b)^2}{cd}$的最小值为（　　）

A. 0　　B. 1

C. 2　　D. 4

11. 已知$\triangle ABC$的内角A，B，C的对边分别为a，b，c，且$\sin A-\sin B=\frac{c(\sin A-\sin C)}{a+b}$，$b=\sqrt{3}$，则$\triangle ABC$的面积的最大值为（　　）

A. $\frac{3\sqrt{3}}{4}$　　B. $\frac{\sqrt{3}}{4}$

C. $\frac{3\sqrt{3}}{2}$　　D. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

12.（**2019·吉林白城高三期中**）已知数列$\{a_n\}$为等差数列，若$\frac{a_{11}}{a_{10}}<-1$，且数列$\{a_n\}$的前n项和S_n有最大值，则使得$S_n>0$的n的最大值为（　　）

A. 11　　B. 19

C. 20　　D. 21

二、填空题（每小题5分，共20分）

13. 在$\triangle ABC$中，$a=4$，$b=5$，$c=6$，则$\frac{\sin 2A}{\sin C}=$_____.

14. 在等差数列$\{a_n\}$中，$a_1=7$，公差为d，前n项和为S_n，当且仅当$n=8$时，S_n取得最大值，则d的取值范围为_____.

15. 海上有A，B两个小岛相距10 n mile，从A岛望C岛和B岛成60°的视角，从B岛望C岛和A岛成75°的视角，那么B岛和C岛间的距离是_____n mile.

16. 在$\mathbf{R}$上定义运算$\otimes$：$x\otimes y=x(1-y)$. 若不等式$(x-a)\otimes(x+a)<1$对任意实数x都成立，则实数a的取值范围是_____.

三、解答题（共70分）

17.（10分）已知$a>0$，$b>0$，且$a\neq b$，比较$\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{a}$与$a+b$的大小.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

18.(12 分)已知等差数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 S_n,且 $a_3+a_5=a_4+7$,$S_{10}=100$.

(1)求数列$\{a_n\}$的通项公式;

(2)求满足不等式 $S_n<3a_n-2$ 的 n 的值.

19.(12 分)已知 $f(x)=2x^2+bx+c$,不等式 $f(x)<0$ 的解集是$(0,5)$.

(1)求 $f(x)$的解析式;

(2)若对于任意的 $x\in[-1,1]$,不等式 $f(x)+t\leqslant 2$ 恒成立,求 t 的取值范围.

20.(12 分)已知在$\triangle ABC$ 中,内角 A,B,C 的对边分别为 a,b,c,$a=1$,$\sqrt{3}(b^2-c^2)+2b+\sqrt{3}=0$,且$\triangle ABC$ 的面积为$\frac{\sqrt{2}}{2}$.

(1)求 b,c 的值;

(2)求 $\sin(B-A)$的值.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

21.(12 分)在△ABC 中,角 A,B,C 的对边分别为 a,b,c,且满足$(2\cos A-1)\sin B+2\cos A=1$.

(1)求 A 的大小;

(2)若 $5b^2=a^2+2c^2$,求$\dfrac{\sin B}{\sin C}$的值.

22.(12 分)(**2019·山东菏泽高二期中**)已知数列$\{a_n\}$是首项 $a_1=\dfrac{1}{4}$,公比 $q=\dfrac{1}{4}$的等比数列,设 $b_n+3\log_4 a_n+2=0$,数列$\{c_n\}$满足 $c_n=a_nb_n$.

(1)求数列$\{b_n\}$的通项公式;

(2)求数列$\{c_n\}$的前 n 项和 S_n.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

骄子之路®
the Road to Pride
让 学习更快乐，人生更精彩

答案与解析

与45分钟课时作业与单元测试配套使用

数学

必修5 RJ·A

班级：_____

姓名：_____

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

第一部分　课时作业

第一章　解三角形

1.1　正弦定理和余弦定理

1.1.1　正弦定理

第 1 课时　正弦定理(一)

题点知识巩固

1. 选 D　设 $120°$ 角所对的边长为 x，则由正弦定理，可得 $\frac{x}{\sin 120°}=\frac{4\sqrt{6}}{\sin 45°}$，于是 $x=\frac{4\sqrt{6}\sin 120°}{\sin 45°}=\frac{4\sqrt{6}\times\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}=12$，故选 D.

2. **解**：因为 $A=30°$，$C=45°$，$c=\sqrt{2}$，

所以由正弦定理，得 $a=\frac{c\sin A}{\sin C}=\frac{\sqrt{2}\sin 30°}{\sin 45°}=1$.

又 $B=180°-(30°+45°)=105°$，

所以 $\cos B=\cos 105°=\cos(45°+60°)=\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$，

$b=\frac{c\sin B}{\sin C}=\frac{\sqrt{2}\sin 105°}{\sin 45°}$

$=2\sin 105°=2\sin(45°+60°)=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}$.

3. 选 B　由正弦定理，得 $\frac{AB}{\sin C}=\frac{AC}{\sin B}$，即 $\frac{2}{\sin C}=\frac{3}{\sin 60°}$，解得 $\sin C=\frac{\sqrt{3}}{3}$，$\because AB<AC$，$\therefore C<B$，$\therefore\cos C=\sqrt{1-\sin^2 C}=\frac{\sqrt{6}}{3}$，故选 B.

4. 选 A　在 $\triangle ABC$ 中，$a=c$，$\therefore C=A=75°$，则 $B=180°-(A+C)=30°$. 由正弦定理，得 $\frac{b}{\sin B}=\frac{a}{\sin A}$，即 $\frac{b}{\sin 30°}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{\sin 75°}$，$\therefore b=2$，故选 A.

5. **解**：(1)根据正弦定理得，$\sin B=\frac{b\sin A}{a}=\frac{\sqrt{3}\sin 30°}{1}=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

$\because b>a$，$\therefore B>A=30°$，

$\therefore B=60°$ 或 $120°$.

当 $B=60°$ 时，$C=180°-(A+B)=180°-(30°+60°)=90°$，

$\therefore c=\frac{b}{\sin B}=\frac{\sqrt{3}}{\sin 60°}=2$；

当 $B=120°$ 时，$C=180°-(A+B)$

$=180°-(30°+120°)=30°$，

$\therefore c=\frac{b\sin C}{\sin B}=\frac{\sqrt{3}\sin 30°}{\sin 120°}=1$.

(2)根据正弦定理得，$\sin B=\frac{b\sin A}{a}=\frac{\sin 60°}{\sqrt{3}}=\frac{1}{2}$.

$\because b<a$，$\therefore B<A=60°$，$\therefore B=30°$，

$\therefore C=180°-(A+B)=180°-(60°+30°)=90°$.

$\therefore c=\frac{b}{\sin B}=\frac{1}{\frac{1}{2}}=2$.

(3)根据正弦定理得，$\sin A=\frac{a\sin B}{b}=\frac{\sqrt{3}\sin 120°}{1}=\frac{3}{2}>1$.

因为 $0<\sin A\leqslant 1$，所以 A 不存在，即此三角形无解.

6. 选 A　由正弦定理，得 $\sin C=\frac{c\sin B}{b}=\frac{2\sin\frac{\pi}{4}}{\sqrt{2}}=1$，$\therefore C=\frac{\pi}{2}$，

$\therefore\triangle ABC$ 是等腰直角三角形，故选 A.

7. 选 D　$\because a\cos B+a\cos C=b+c$，$\therefore$ 由正弦定理，得 $\sin A\cos B+\sin A\cos C=\sin B+\sin C=\sin(A+C)+\sin(A+B)$，化简得 $\cos A\cdot(\sin B+\sin C)=0$. 又 $\sin B+\sin C>0$，$\therefore\cos A=0$，即 $A=\frac{\pi}{2}$，$\therefore\triangle ABC$ 为直角三角形，故选 D.

8. **解**：设方程的两根分别为 x_1，x_2，由根与系数的关系，得 $\begin{cases}x_1+x_2=b\cos A,\\x_1x_2=a\cos B,\end{cases}$ $\therefore b\cos A=a\cos B$.

由正弦定理，得 $\sin B\cos A=\sin A\cos B$，

$\therefore\sin A\cos B-\cos A\sin B=0$，即 $\sin(A-B)=0$.

$\because A$，B 为 $\triangle ABC$ 的内角，$\therefore 0<A<\pi$，$0<B<\pi$，

$\therefore -\pi<A-B<\pi$.

$\therefore A-B=0$，即 $A=B$，故 $\triangle ABC$ 为等腰三角形.

提能达标过关

1. 选 B　由正弦定理 $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}$ 得 $\sin B=\frac{b\sin A}{a}=\frac{\sin 130°}{\sqrt{3}}$，又 $a>b$，且 $A=130°$，

$\therefore B$ 为锐角，

$\therefore$ 满足条件的三角形只有一解，故选 B.

2. 选 B　在 $\triangle ABC$ 中，由正弦定理 $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}$，

得 $\frac{a}{b}=\frac{\sin A}{\sin B}$，故选 B.

3. 选 C　由正弦定理，得 $\sqrt{3}\sin A=2\sin B\sin A$，

所以 $\sin A(2\sin B-\sqrt{3})=0$. 因为 $0<A<\pi$，$0<B<\pi$，

所以 $\sin A\neq 0$，$\sin B=\frac{\sqrt{3}}{2}$，所以 $B=\frac{\pi}{3}$ 或 $\frac{2\pi}{3}$，故选 C.

4. 选 B　因为 $\frac{\sin A}{a}=\frac{\sin B}{b}$，又 $\frac{\cos A}{a}=\frac{\sin B}{b}$，

所以 $\frac{\cos A}{a}=\frac{\sin A}{a}$，所以 $\sin A=\cos A$，$\tan A=1$.

又 $0°<A<180°$，所以 $A=45°$，故选 B.

5. 选 D　由正弦定理及 $a\sin A\sin B+b\cos^2 A=\sqrt{2}a$，

得 $\sin A\sin A\sin B+\sin B\cos^2 A=\sqrt{2}\sin A$，

即 $\sin B(\sin^2 A+\cos^2 A)=\sqrt{2}\sin A$，所以 $\sin B=\sqrt{2}\sin A$，

由正弦定理得 $\frac{b}{a}=\sqrt{2}$，故选 D.

6. **解析**：$\because B=45°$，$C=60°$，

$\therefore A=180°-45°-60°=75°$.

则 $B<C<A$，

$\therefore b<c<a$，由正弦定理 $\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$ 得

$b=\frac{c\sin B}{\sin C}=\frac{1\times\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{\sqrt{6}}{3}$，$\therefore$ 最短的边长等于 $\frac{\sqrt{6}}{3}$.

答案：$\frac{\sqrt{6}}{3}$

7. **解析**：$\because b<c$，$\therefore B<C$.

由正弦定理得 $\sin B=\frac{b\sin C}{c}=\frac{\sqrt{6}\sin 60°}{3}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，

$\therefore B=45°$，

$\therefore A=180°-60°-45°=75°$.

答案：75°

8. **解析**：由 $A+B+C=180°$，$A=105°$，$B=45°$，得 $C=30°$，

$\because\frac{c}{\sin C}=\frac{b}{\sin B}$，$\therefore c=\frac{b\sin C}{\sin B}=\frac{2\sqrt{2}\times\sin 30°}{\sin 45°}=2$.

答案：2

9. **解**：由正弦定理 $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R$（其中 R 为 $\triangle ABC$ 外接圆的半径），

得 $\sin A=\frac{a}{2R}$，$\sin B=\frac{b}{2R}$，$\sin C=\frac{c}{2R}$，

所以由 $\sin^2 A=\sin B\sin C$ 可得 $\left(\frac{a}{2R}\right)^2=\frac{b}{2R}\cdot\frac{c}{2R}$，

即 $a^2=bc$.

又 $2a=b+c$，所以 $4a^2=(b+c)^2$，所以 $4bc=(b+c)^2$，

即 $(b-c)^2=0$，所以 $b=c$，所以由 $2a=b+c$，

得 $2a=b+b=2b$，所以 $a=b$，所以 $a=b=c$，

故 $\triangle ABC$ 为等边三角形.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

10. **解**：(1)由正弦定理及 $a\cos C+\frac{\sqrt{3}}{2}c=b$，

得 $\sin A\cos C+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin C=\sin B$.

又 $\sin B=\sin(A+C)=\sin A\cos C+\cos A\sin C$，

$\therefore\frac{\sqrt{3}}{2}\sin C=\cos A\sin C$.

又 $\sin C\neq0$，$\therefore\cos A=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

又 $0<A<\pi$，$\therefore A=\frac{\pi}{6}$.

(2)由(1)及正弦定理得 $\frac{1}{\sin\frac{\pi}{6}}=\frac{\sqrt{3}}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$，

$\therefore\sin B=\sqrt{3}\sin\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，

又 $\frac{\pi}{6}<B<\pi$，$\therefore B=\frac{\pi}{3}$ 或 $B=\frac{2\pi}{3}$.

若 $B=\frac{\pi}{3}$，则 $C=\frac{\pi}{2}$，$\therefore c=\frac{\sin C}{\sin\frac{\pi}{6}}=2\sin\frac{\pi}{2}=2$；

若 $B=\frac{2\pi}{3}$，则 $C=\frac{\pi}{6}$，$\therefore c=a=1$.

$\therefore c=2$ 或 $c=1$.

第 2 课时　正弦定理(二)

题点知识巩固

1. 选 B　由 $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}$ 及 $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\cos B}$，

可得 $\sin B=\cos B$. 又 $0<B<\pi$，$\therefore B=\frac{\pi}{4}$，故选 B.

2. 选 C　由正弦定理，得 $\sin C=\frac{\sin A\cdot AB}{BC}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，

因为 $BC>AB$，所以 $A>C$，故 $C=\frac{\pi}{4}$，故选 C.

3. 选 D　$\because A+B+C=180°$，$A:B:C=4:1:1$，

$\therefore A=120°$，$B=30°$，$C=30°$.

由正弦定理得 $a:b:c=\sin A:\sin B:\sin C=\sin 120°:\sin 30°:\sin 30°=\frac{\sqrt{3}}{2}:\frac{1}{2}:\frac{1}{2}=\sqrt{3}:1:1$，故选 D.

4. **解析**：$\because\triangle ABC$ 的外接圆直径为 $2R=2$，$\therefore\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R=2$，$\therefore\frac{a}{\sin A}+\frac{b}{2\sin B}+\frac{2c}{\sin C}=2+1+4=7$.

答案：7

5. 选 B　$\because(b+c):(c+a):(a+b)=4:5:6$，

$\therefore\frac{b+c}{4}=\frac{c+a}{5}=\frac{a+b}{6}$. 令 $\frac{b+c}{4}=\frac{c+a}{5}=\frac{a+b}{6}=k(k>0)$，

则 $\begin{cases}b+c=4k,\\c+a=5k,\\a+b=6k,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=\frac{7}{2}k,\\b=\frac{5}{2}k,\\c=\frac{3}{2}k,\end{cases}$

$\therefore$ 根据正弦定理得

$\sin A:\sin B:\sin C=a:b:c=7:5:3$，故选 B.

6. 选 D　由正弦定理得 $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}$，$a=\frac{b\sin A}{\sin B}$，

在 $\triangle ABC$ 中，$0<\sin B\leqslant1$，$\therefore a\geqslant b\sin A$，故选 D.

7. **解**：$\because 2B=A+C$，$A+B+C=180°$，

$\therefore B=60°$，$\therefore A+C=120°$.

$\because a+\sqrt{2}b=2c$，由正弦定理得 $\sin A+\sqrt{2}\sin B=2\sin C$，

$\therefore\sin(120°-C)+\frac{\sqrt{6}}{2}=2\sin C$，

即 $\frac{\sqrt{3}}{2}\cos C+\frac{1}{2}\sin C+\frac{\sqrt{6}}{2}=2\sin C$，

$\therefore\frac{3}{2}\sin C-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos C=\frac{\sqrt{6}}{2}$，$\therefore\sin(C-30°)=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

$\because 0°<C<120°$，$\therefore -30°<C-30°<90°$，$\therefore C-30°=45°$，

$\therefore C=75°$，$\therefore\sin C=\sin(45°+30°)=\sin 45°\cos 30°+\cos 45°\sin 30°=\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$.

提能达标过关

1. 选 B　由正弦定理 $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$ 及 $\frac{a}{\sin A}=4$

得 $a=4\sin A$，$b=4\sin B$，$c=4\sin C$.

$\therefore\frac{b+c-a}{\sin B+\sin C-\sin A}=\frac{4\sin B+4\sin C-4\sin A}{\sin B+\sin C-\sin A}=4$，故选 B.

2. 选 D　$\because\frac{a^2\sin B}{\cos B}=\frac{b^2\sin A}{\cos A}$，$\therefore$ 根据正弦定理有，

$\frac{\sin^2A\sin B}{\cos B}=\frac{\sin^2B\sin A}{\cos A}$. 又 $\sin A\sin B\neq0$，

$\therefore\sin A\cos A=\sin B\cos B$，即 $\sin 2A=\sin 2B$，$\therefore 2A=2B$ 或 $2A+2B=\pi$，即 $A=B$ 或 $A+B=\frac{\pi}{2}$. 故 $\triangle ABC$ 是等腰三角形或直角三角形，故选 D.

3. 选 A　对于 A，由于 $a=b\sin A$，故应有一解；对于 B，$a>b$，$A=150°$，故应有一解；对于 C，$a<b\sin A$，故无解；对于 D，$c\sin B<b<c$，有两解，故选 A.

4. 选 B　由 $\cos C=\frac{\sqrt{3}}{3}$，得 $\sin C=\sqrt{1-\cos^2C}=\sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2}=\frac{\sqrt{6}}{3}$，所以 $\sin A=\sin(B+C)=\sin B\cos C+\cos B\sin C=\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{3}+\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{6}}{3}=\frac{3+\sqrt{6}}{6}$. 从而由正弦定理，得 $c=a\cdot\frac{\sin C}{\sin A}=10\times\frac{\frac{\sqrt{6}}{3}}{\frac{3+\sqrt{6}}{6}}=10\times\frac{\sqrt{6}}{3}\times\frac{6}{3+\sqrt{6}}=20(\sqrt{6}-2)$，故选 B.

5. 选 C　因为 $\boldsymbol{m}\perp\boldsymbol{n}$，所以 $\sqrt{3}\cos A-\sin A=0$，所以 $\tan A=\sqrt{3}$，则 $A=\frac{\pi}{3}$. 由正弦定理，得 $\sin A\cos B+\sin B\cos A=\sin^2C$，所以 $\sin(A+B)=\sin^2C$，所以 $\sin C=\sin^2C$. 因为 $0<C<\pi$，所以 $\sin C\neq0$，所以 $\sin C=1$，所以 $C=\frac{\pi}{2}$，$B=\frac{\pi}{6}$，故选 C.

6. **解析**：设 $\triangle ABC$ 外接圆的半径为 R，由正弦定理，得 $\sin A=\frac{a\sin C}{c}=\frac{1}{2}$. 又 A 为三角形的内角，且 $a<c$，$\therefore A=\frac{\pi}{6}$. 由正弦定理，得 $\frac{a}{\sin A}=\frac{1}{\frac{1}{2}}=2=2R$，$\therefore\triangle ABC$ 外接圆的半径为 1.

答案：$\frac{\pi}{6}$　1

7. **解析**：$\because b=2a$，$\therefore$ 根据正弦定理得，$\sin B=2\sin A$. 又 $B=A+60°$，$\therefore\sin(A+60°)=2\sin A$，即 $\sin A\cos 60°+\cos A\sin 60°=2\sin A$，化简得 $\sin A=\frac{\sqrt{3}}{3}\cos A$，

$\therefore\tan A=\frac{\sqrt{3}}{3}$，$\therefore A=30°$.

答案：30°

8. **解析**：由正弦定理，得 $\frac{\sqrt{3}}{\sin 60°}=\frac{BC}{\sin A}=\frac{AB}{\sin(120°-A)}$，故 $AB+2BC=2\sin(120°-A)+4\sin A=\sqrt{3}\cos A+5\sin A=\sqrt{(\sqrt{3})^2+5^2}\sin(A+\varphi)=2\sqrt{7}\sin(A+\varphi)$，其中 $\tan\varphi=\frac{\sqrt{3}}{5}$.

所以 $AB+2BC$ 的最大值为 $2\sqrt{7}$.

答案：$2\sqrt{7}$

9. **解**：(1)由正弦定理及 $\frac{b+a}{a}=\frac{\sin B}{\sin B-\sin A}$，

得 $\frac{b+a}{a}=\frac{b}{b-a}$，

$\therefore b^2-a^2=ab$.

由正弦定理及 $2\sin A\sin B=2\sin^2C$，得 $2ab=2c^2$，

$\therefore ab=c^2$.

$\therefore b^2-a^2=c^2$，即 $b^2=a^2+c^2$.

$\therefore\triangle ABC$ 为直角三角形.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

(2)由(1)知，$B=\frac{\pi}{2}$，

$\therefore \frac{a+c}{b}=\frac{a}{b}+\frac{c}{b}=\sin A+\cos A=\sqrt{2}\sin\left(A+\frac{\pi}{4}\right)$.

又 $0<A<\frac{\pi}{2}$，

$\therefore \frac{\pi}{4}<A+\frac{\pi}{4}<\frac{3\pi}{4}$，

$\therefore \frac{\sqrt{2}}{2}<\sin\left(A+\frac{\pi}{4}\right)\leqslant 1$，

$\therefore 1<\sqrt{2}\sin\left(A+\frac{\pi}{4}\right)\leqslant\sqrt{2}$，

$\therefore \frac{a+c}{b}$的取值范围是$(1,\sqrt{2}]$.

10. **解**：(1)由正弦定理及 $b\cos B=a\cos A$，得 $\sin 2B=\sin 2A$.

因为 $a>b$，所以 $A>B$，所以 $2A+2B=\pi$，所以 $C=\frac{\pi}{2}$，

所以$\triangle ABC$是直角三角形.

(2)由(1)得，$\angle BCN=\frac{\pi}{2}-\theta$，则在 Rt$\triangle ACM$ 中，$b=\frac{1}{\cos\theta}$，在 Rt$\triangle BCN$ 中，$a=\frac{\sqrt{3}}{\sin\theta}$，

$\therefore f(\theta)=\frac{1}{b}+\frac{1}{a}=\cos\theta+\frac{\sqrt{3}}{3}\sin\theta=\frac{2\sqrt{3}}{3}\cos\left(\theta-\frac{\pi}{6}\right)$，

所以当 $\theta=\frac{\pi}{6}$时，$f(\theta)$取得最大值，为$\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

1.1.2　余弦定理

第3课时　余弦定理

题点知识巩固

1. 选 D　由余弦定理得，

$c=\sqrt{9^2+(2\sqrt{3})^2-2\times 9\times 2\sqrt{3}\times\cos 150^\circ}=7\sqrt{3}$，故选 D.

2. 选 B　由余弦定理得 $c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$，

即 $49=9+b^2-3b$，所以$(b-8)(b+5)=0$.

又 $b>0$，所以 $b=8$，故选 B.

3. **解**：解法一：在$\triangle ABC$中，由 $A+C=2B$，$A+B+C=180^\circ$，

知 $B=60^\circ$.

由 $a+c=8$，$ac=15$，知 $a=5$，$c=3$ 或 $a=3$，$c=5$.

由余弦定理，得

$b^2=a^2+c^2-2ac\cos B=9+25-2\times 3\times 5\times\frac{1}{2}=19$.

所以 $b=\sqrt{19}$.

解法二：在$\triangle ABC$中，因为 $A+C=2B$，$A+B+C=180^\circ$，

所以 $B=60^\circ$.

由余弦定理，得 $b^2=a^2+c^2-2ac\cos B=(a+c)^2-2ac-2ac\cos B=8^2-2\times 15-2\times 15\times\frac{1}{2}=19$. 所以 $b=\sqrt{19}$.

4. 选 C　$\cos B=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=\frac{1}{2}$，又 $0^\circ<B<180^\circ$，

$\therefore B=60^\circ$，故选 C.

5. **解**：由已知可设 $b+c=4k$，$c+a=5k$，$a+b=6k(k>0)$，

则 $a+b+c=7.5k$，$\therefore a=3.5k$，$b=2.5k$，$c=1.5k$.

$\because k>0$，

$\therefore\triangle ABC$中，a是最大边，$\therefore A$是最大内角.

由余弦定理，得 $\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$

$=\frac{(2.5k)^2+(1.5k)^2-(3.5k)^2}{2\times 2.5k\times 1.5k}$

$=-\frac{1}{2}$.

$\because 0^\circ<A<180^\circ$，$\therefore A=120^\circ$，即$\triangle ABC$的最大内角为 120°.

6. 选 A　在$\triangle ABC$中，$\because\cos^2\frac{A}{2}=\frac{b+c}{2c}$，$\therefore\frac{1+\cos A}{2}=\frac{b}{2c}+\frac{1}{2}$，

$\therefore\cos A=\frac{b}{c}$. 由余弦定理，知$\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{b}{c}$，$\therefore b^2+c^2-a^2=2b^2$，即 $a^2+b^2=c^2$，$\therefore\triangle ABC$是直角三角形，故选 A.

7. 选 A　设直角三角形的三边长分别为 a,b,c，且$a^2+b^2=c^2$. 三边都增加 $x(x>0)$，则$(a+x)^2+(b+x)^2-(c+x)^2=a^2+b^2+2x^2+2(a+b)x-c^2-2cx-x^2=2(a+b-c)x+x^2>0$，所以新三角形中最大边所对的角是锐角，所以新三角形是锐角三角形，故选 A.

8. **解**：由$(a+b+c)(a-b+c)=3ac$，得 $a^2+c^2-b^2=ac$，

于是 $\cos B=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=\frac{1}{2}$，故 $B=60^\circ$.

又由 $2\sin A\cos C=\sin B$ 及正弦定理，得 $2\cdot a\cdot\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=b$，

所以 $a=c$，

故$\triangle ABC$是等边三角形.

提能达标过关

1. 选 A　由余弦定理，得 $c^2=1^2+2^2-2\times 1\times 2\cos 60^\circ=3$，

所以 $c=\sqrt{3}$，故选 A.

2. 选 A　由已知得 $a^2+c^2-b^2=\sqrt{2}ac$，所以 $\cos B=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=\frac{\sqrt{2}ac}{2ac}=\frac{\sqrt{2}}{2}$. 又 $0^\circ<B<180^\circ$，所以 $B=45^\circ$，故选 A.

3. 选 C　由余弦定理，得 $\cos C=\frac{7^2+8^2-c^2}{2\times 7\times 8}=\frac{13}{14}$，得 $c=3$，

所以 B 为最大角，则 $\cos B=\frac{7^2+3^2-8^2}{2\times 7\times 3}=-\frac{1}{7}$，故选 C.

4. 选 A　由正弦定理得

$a:b:c=\sin A:\sin B:\sin C=3:2:3$，

设 $a=3x$，$b=2x$，$c=3x$，

则 $\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\frac{9x^2+4x^2-9x^2}{2\times 3x\times 2x}=\frac{1}{3}$，故选 A.

5. 选 B　因为 $b\cos A=a\cos B$，

所以 $b\cdot\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=a\cdot\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}$，

所以 $b^2+c^2-a^2=a^2+c^2-b^2$，

则 $a^2=b^2$，即 $a=b$，故此三角形是等腰三角形，故选 B.

6. **解析**：由余弦定理得 $c^2=a^2+b^2-2ab\cos C=2^2+4^2-2\times 2\times 4\times\cos 60^\circ=12$，$\therefore c=2\sqrt{3}$.

由正弦定理$\frac{a}{\sin A}=\frac{c}{\sin C}$得，$\sin A=\frac{1}{2}$.

$\because a<c$，$\therefore A<C$，$\therefore A=30^\circ$.

答案：30°

7. **解析**：由题意，得$(\sqrt{5})^2=5^2+BC^2-2\times 5\times BC\times\frac{9}{10}$，

所以 $BC^2-9BC+20=0$，解得 $BC=4$ 或 5.

答案：4 或 5

8. **解析**：由题意得 $a+b=5$，$ab=2$. 由余弦定理，得 $c^2=a^2+b^2-2ab\cos C=a^2+b^2-ab=(a+b)^2-3ab=5^2-3\times 2=19$，所以 $c=\sqrt{19}$.

答案：$\sqrt{19}$

9. **解**：因为 $2a+1$，a，$2a-1$ 是三角形的三边长，

所以$\begin{cases}2a+1>0,\\ a>0,\\ 2a-1>0,\end{cases}$解得 $a>\frac{1}{2}$，此时 $2a+1$ 最大，

要使 $2a+1$，a，$2a-1$ 是三角形的三边长，

还需 $a+2a-1>2a+1$，解得 $a>2$.

设最大边 $2a+1$ 所对的角为 θ，则 $\theta>90^\circ$，

所以 $\cos\theta=\frac{a^2+(2a-1)^2-(2a+1)^2}{2a(2a-1)}=\frac{a(a-8)}{2a(2a-1)}<0$，

解得$\frac{1}{2}<a<8$.

综上可知实数 a 的取值范围是$(2,8)$.

10. **解**：(1)$\because\cos A=2\cos^2\frac{A}{2}-1$，$2\cos^2\frac{A}{2}+\cos A=0$，

$\therefore 2\cos A+1=0$，$\therefore\cos A=-\frac{1}{2}$，$\therefore A=120^\circ$.

(2)由余弦定理知，$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$，

又 $a=2\sqrt{3}$，$b=2$，$\cos A=-\frac{1}{2}$，

$\therefore(2\sqrt{3})^2=2^2+c^2-2\times 2\times c\times\left(-\frac{1}{2}\right)$，

化简，得 $c^2+2c-8=0$，解得 $c=2$ 或 $c=-4$(舍去).

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

第4课时　正弦定理和余弦定理

题点知识巩固

1. 选B　因为$3\sin A=5\sin B$，所以由正弦定理可得$3a=5b$，即$a=\frac{5}{3}b$，代入$b+c=2a$，得$c=\frac{7}{3}b$. 由余弦定理，得$\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=-\frac{1}{2}$. 又$0<C<\pi$，所以$C=\frac{2\pi}{3}$，故选B.

2. 选C　由余弦定理及已知得$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A=2b^2(1-\cos A)$，$\therefore 2b^2(1-\sin A)=2b^2(1-\cos A)$，

$\therefore \sin A=\cos A$，即$\tan A=1$. 又$0<A<\pi$，$\therefore A=\frac{\pi}{4}$，故选C.

3. **解**：(1)由$c\left(a\cos B-\frac{1}{2}b\right)=a^2-b^2$及余弦定理知，

$a^2+c^2-b^2-bc=2a^2-2b^2$，即$a^2=b^2+c^2-bc$.

$\because a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$，$\therefore \cos A=\frac{1}{2}$，$\therefore A=\frac{\pi}{3}$.

(2)由正弦定理，得$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2$，

$\therefore b=2\sin B$，$c=2\sin C$，

$\therefore b+c=2\sin B+2\sin C=2\sin B+2\sin(A+B)$

$=2\sin B+2\sin A\cos B+2\cos A\sin B$

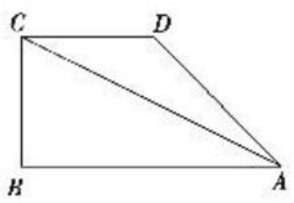
$=3\sin B+\sqrt{3}\cos B=2\sqrt{3}\sin\left(B+\frac{\pi}{6}\right)$.

$\because B\in\left(0,\frac{2\pi}{3}\right)$，$\therefore B+\frac{\pi}{6}\in\left(\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6}\right)$，

$\therefore \sin\left(B+\frac{\pi}{6}\right)\in\left(\frac{1}{2},1\right]$，

$\therefore b+c\in(\sqrt{3},2\sqrt{3}]$.

4. 选B　由已知条件可得图形如图所示.



设$CD=a$，在$\triangle ACD$中，$CD^2=AD^2+AC^2-2AD\times AC\times\cos\angle DAC$，$\therefore a^2=(\sqrt{2}a)^2+(\sqrt{5}a)^2-2\times\sqrt{2}a\times\sqrt{5}a\times\cos\angle DAC$，$\therefore\cos\angle DAC=\frac{3\sqrt{10}}{10}$，故选B.

5. 选D　因为$(a^2+b^2)\sin(A-B)=(a^2-b^2)\sin(A+B)$，所以$b^2[\sin(A+B)+\sin(A-B)]=a^2[\sin(A+B)-\sin(A-B)]$，化简整理得$a^2\cos A\sin B=b^2\sin A\cos B$. 由正弦定理、余弦定理得，$a^2b\cdot\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=b^2a\cdot\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}$，所以$a^2(b^2+c^2-a^2)=b^2(a^2+c^2-b^2)$，即$(a^2-b^2)(a^2+b^2-c^2)=0$，所以$a^2-b^2=0$或$a^2+b^2-c^2=0$，即$a=b$或$a^2+b^2=c^2$. 所以$\triangle ABC$为等腰三角形或直角三角形，故选D.

6. **解**：(1)由正弦定理及$\frac{\sin A}{a}=\frac{\sqrt{3}\cos C}{c}$得

$\frac{\sin A}{\sin A}=\frac{\sqrt{3}\cos C}{\sin C}$，$\therefore\tan C=\sqrt{3}$.

又$0<C<\pi$，$\therefore C=\frac{\pi}{3}$.

(2)由$\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}=4$及(1)得$ba\cos\frac{\pi}{3}=4$，$\therefore ab=8$.

由余弦定理及$a+b=6$得

$c^2=a^2+b^2-2ab\cos\frac{\pi}{3}=(a+b)^2-3ab=6^2-3\times8=12$，

$\therefore c=2\sqrt{3}$.

提能达标过关

1. 选B　由正弦定理及$B=2A$，$a=1$，$b=\sqrt{3}$，

得$\frac{1}{\sin A}=\frac{\sqrt{3}}{\sin B}=\frac{\sqrt{3}}{\sin 2A}=\frac{\sqrt{3}}{2\sin A\cos A}$，

$\therefore\cos A=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

又$0<A<\pi$，$\therefore A=\frac{\pi}{6}$，$\therefore B=\frac{\pi}{3}$，$\therefore C=\frac{\pi}{2}$，

$\therefore c=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{3+1}=2$，故选B.

2. 选B　由$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A=(c-b)^2+2bc(1-\cos A)=1^2+2\times156\times\left(1-\frac{12}{13}\right)=25$，得$a=5$，故选B.

3. 选D　已知$c-a\cos B=(2a-b)\cos A$，由正弦定理得$\sin C-\sin A\cos B=2\sin A\cos A-\sin B\cos A$，所以$\sin(A+B)-\sin A\cos B=2\sin A\cos A-\sin B\cos A$. 化简得$\cos A(\sin B-\sin A)=0$，所以$\cos A=0$或$\sin B-\sin A=0$，则$A=90°$或$A=B$，即$\triangle ABC$为直角三角形或等腰三角形，故选D.

4. 选C　由正弦定理，得$a^2\leqslant b^2+c^2-bc$，

$\therefore bc\leqslant b^2+c^2-a^2$，$\therefore\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\geqslant\frac{1}{2}$，$\therefore A\leqslant\frac{\pi}{3}$.

$\because A>0$，$\therefore A$的取值范围是$\left(0,\frac{\pi}{3}\right]$，故选C.

5. 选D　在$\triangle ABC$中，因为$a^2=b^2+c^2-\sqrt{3}bc$，所以$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，因为$A\in(0,\pi)$，所以$A=\frac{\pi}{6}$. 又$c=2b\sin C$，所以由正弦定理得$\sin C=2\sin B\sin C$，即$\sin C(2\sin B-1)=0$. 因为$\sin C\neq0$，所以$\sin B=\frac{1}{2}$，求得$B=\frac{\pi}{6}$或$B=\frac{5\pi}{6}$(舍去)，

于是$C=\pi-\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{6}=\frac{2\pi}{3}$，故选D.

6. **解析**：由已知及正弦定理得$2b=3c$，因为$b-c=\frac{1}{4}a$，所以不妨设$b=3$，$c=2$，则$a=4$，所以$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=-\frac{1}{4}$.

答案：$-\frac{1}{4}$

7. **解析**：由条件得$\frac{a}{c}=\frac{\sin A}{\sin C}=\frac{3}{5}$，所以$\sin A=\frac{3}{5}\sin C$，

同理可得$\sin B=\frac{3}{5}\sin C$.

所以$\frac{2\sin A-\sin B}{\sin C}=\frac{2\times\frac{3}{5}\sin C-\frac{3}{5}\sin C}{\sin C}=\frac{3}{5}$.

答案：$\frac{3}{5}$

8. **解析**：若$\sin 2A=\sin 2B$，则$2A=2B$或$2A+2B=\pi$，$\therefore A=B$或$A+B=\frac{\pi}{2}$，$\therefore\triangle ABC$为等腰三角形或直角三角形，故①错误；若$B=100°$，$A=10°$，则$\sin B=\cos A$，$\therefore\triangle ABC$不一定是直角三角形，故②错误；若$\sin^2A+\sin^2B>\sin^2C$，则$a^2+b^2>c^2$，$\therefore\cos C>0$，不能得出$\triangle ABC$是钝角三角形这一结论，故③错误；若$\frac{a}{\cos\frac{A}{2}}=\frac{b}{\cos\frac{B}{2}}=\frac{c}{\cos\frac{C}{2}}$，则$\frac{\sin A}{\cos\frac{A}{2}}=\frac{\sin B}{\cos\frac{B}{2}}=\frac{\sin C}{\cos\frac{C}{2}}$，

$\therefore\sin\frac{A}{2}=\sin\frac{B}{2}=\sin\frac{C}{2}$，又$A+B+C=\pi$，$\therefore\frac{A}{2}+\frac{B}{2}+\frac{C}{2}=\frac{\pi}{2}$，$\therefore\frac{A}{2}=\frac{B}{2}=\frac{C}{2}$，$\therefore A=B=C$，$\therefore\triangle ABC$是等边三角形，故④正确.

答案：④

9. **解**：(1)由$2a^2=2b^2+2c^2-bc$，可得$a^2=b^2+c^2-\frac{1}{2}bc$，

$\therefore\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{\frac{1}{2}bc}{2bc}=\frac{1}{4}$.

(2)$\because\cos A=\frac{1}{4}$，

$\therefore\sin A=\sqrt{1-\cos^2A}=\sqrt{1-\frac{1}{16}}=\frac{\sqrt{15}}{4}$.

由$a=2b$及正弦定理，可得$\sin A=2\sin B$，

即$\sin B=\frac{1}{2}\sin A=\frac{\sqrt{15}}{8}$，

$\because a=2b$，$\therefore A>B$，$\therefore0<B<\frac{\pi}{2}$，

$\therefore\cos B=\sqrt{1-\sin^2B}=\sqrt{1-\frac{15}{64}}=\frac{7}{8}$，

$\therefore\cos(A-B)=\cos A\cos B+\sin A\sin B$

$=\frac{1}{4}\times\frac{7}{8}+\frac{\sqrt{15}}{4}\times\frac{\sqrt{15}}{8}=\frac{11}{16}$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

10. **解**：(1)由正弦定理，得$\frac{a}{\sqrt{3}\cos A}=\frac{a}{\sin A}$，

整理得 $\sin A=\sqrt{3}\cos A$，即 $\tan A=\sqrt{3}$.

又 $0<A<\pi$，所以 $A=\frac{\pi}{3}$.

(2)因为$\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=\frac{6}{\sin\frac{\pi}{3}}=4\sqrt{3}$，

所以 $b=4\sqrt{3}\sin B$，$c=4\sqrt{3}\sin C$，

则 $b+c=4\sqrt{3}\sin B+4\sqrt{3}\sin C$

$=4\sqrt{3}\left[\sin B+\sin\left(\frac{2\pi}{3}-B\right)\right]=12\sin\left(B+\frac{\pi}{6}\right)$.

因为 $0<B<\frac{2\pi}{3}$，所以$\frac{\pi}{6}<B+\frac{\pi}{6}<\frac{5\pi}{6}$，

所以$\frac{1}{2}<\sin\left(B+\frac{\pi}{6}\right)\leqslant 1$（当且仅当 $B=\frac{\pi}{3}$ 时，等号成立），

得 $6<b+c\leqslant 12$，

于是 $b+c$ 的取值范围是$(6,12]$.

第 5 课时　素养提升——正弦定理与余弦定理

素养培优提能

1. 选 C　解法一：由正弦定理和已知条件，

得$\frac{4\sqrt{3}}{\sin B}=\frac{2}{\sin 30^\circ}$，∴$\sin B=\sqrt{3}$.

∵$\sqrt{3}>1$，∴此三角形无解，故选 C.

解法二：∵$c=2$，$b\sin C=2\sqrt{3}$，∴$c<b\sin C$，

∴此三角形无解，故选 C.

2. 选 C　由 $A\geqslant 90^\circ$，知 B 为锐角，则此三角形最多有一解，故①说法正确；若 $A<90^\circ$，且 $a=b\sin A$，则 $\sin B=1$，即 $B=90^\circ$，此三角形为直角三角形，故②说法正确；当 $A<90^\circ$，且 $a=b$ 时，$A=B$，此三角形为等腰三角形，只有一解，故③说法错误. 故正确说法的个数为 2，选 C.

3. 选 A　∵$\sin C=2\sqrt{3}\sin B$，∴$c=2\sqrt{3}b$. ∵$a^2-b^2=\sqrt{3}bc$，∴$a^2-b^2-c^2=\sqrt{3}bc-c^2$，∴$b^2+c^2-a^2=c^2-\sqrt{3}bc$，∴$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{c^2-\sqrt{3}bc}{2bc}=\frac{c}{2b}-\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{c}{2b}-\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{2\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，

∴$A=30^\circ$，故选 A.

4. 选 A　$\cos A=\frac{AB^2+AC^2-BC^2}{2AB\cdot AC}=\frac{25+9-16}{2\times5\times3}=\frac{3}{5}$，所以$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=AB\cdot AC\cos A=5\times3\times\frac{3}{5}=9$，故选 A.

5. 选 A　由余弦定理，知 $c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$，则$2a^2=a^2+b^2+ab$，即 $a^2=b^2+ab$，则$\left(\frac{b}{a}\right)^2+\frac{b}{a}-1=0$，所以$\frac{b}{a}=\frac{\sqrt{5}-1}{2}<1$，

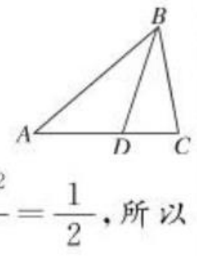
所以 $a>b$，故选 A.

6. **解析**：在$\triangle ABC$ 中，由 $\cos A=\frac{5}{13}$，得 $\sin A=\frac{12}{13}$，

所以 $b=\frac{a}{\sin A}\cdot\sin B=\frac{20}{\frac{12}{13}}\times\frac{3}{5}=13$.

答案：13

7. **解析**：如图所示，因为 BD 为$\angle ABC$ 的平分线，所以$\angle ABD=\frac{1}{2}\angle ABC$.



由余弦定理，

得 $\cos\angle ABC=\frac{AB^2+BC^2-AC^2}{2\times AB\times BC}=\frac{3^2+2^2-(\sqrt{7})^2}{2\times3\times2}=\frac{1}{2}$，所以$\angle ABC=60^\circ$，所以 $\sin\angle ABD=\sin 30^\circ=\frac{1}{2}$.

答案：$\frac{1}{2}$

8. **解析**：∵$\sin A\sin B+\sin B\sin C+\cos 2B=1$，

∴$\sin A\sin B+\sin B\sin C=2\sin^2 B$. 由正弦定理，可得 $ab+bc=2b^2$，即 $a+c=2b$，∴$c=2b-a$，∴由余弦定理，可得$(2b-a)^2=a^2+b^2-2ab\cos\frac{2\pi}{3}$，可得 $5a=3b$，∴$\frac{a}{b}=\frac{3}{5}$.

答案：$\frac{3}{5}$

9. **解**：由正弦定理及已知条件，得 $a^2+b^2-c^2=-ab$，

∵$\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=-\frac{1}{2}$，∴$C=\frac{2\pi}{3}$.

由正弦定理，得

$\frac{a+b}{c}=\frac{\sin A+\sin B}{\sin C}=\frac{2\sqrt{3}}{3}(\sin A+\sin B)$.

又 $A+B=\frac{\pi}{3}$，∴$B=\frac{\pi}{3}-A$，

∴$\sin A+\sin B=\sin A+\sin\left(\frac{\pi}{3}-A\right)=\sin\left(A+\frac{\pi}{3}\right)$.

∵$0<A<\frac{\pi}{3}$，∴$\frac{\pi}{3}<A+\frac{\pi}{3}<\frac{2\pi}{3}$，

∴$\sin A+\sin B\in\left(\frac{\sqrt{3}}{2},1\right]$，

∴$\frac{a+b}{c}\in\left(1,\frac{2\sqrt{3}}{3}\right]$，即$\frac{a+b}{c}$的取值范围为$\left(1,\frac{2\sqrt{3}}{3}\right]$.

10. **解**：(1)因为$\sqrt{3}a-2b\sin A=0$，根据正弦定理得$\sqrt{3}\sin A-2\sin B\sin A=0$，

因为 $\sin A\neq0$，所以 $\sin B=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

又 B 为锐角，所以 $B=\frac{\pi}{3}$.

(2)由(1)知，$B=\frac{\pi}{3}$.

因为 $b=\sqrt{7}$，

所以根据余弦定理，得 $7=a^2+c^2-2ac\cos\frac{\pi}{3}$，

整理得$(a+c)^2-3ac=7$.

又 $a+c=5$，所以 $ac=6$.

又 $a>c$，所以 $a=3$，$c=2$，

于是 $\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{7+4-9}{4\sqrt{7}}=\frac{\sqrt{7}}{14}$，

所以$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|\cos A=2\times\sqrt{7}\times\frac{\sqrt{7}}{14}=1$.

1.2　应用举例

第 6 课时　距离问题

题点知识巩固

1. **解析**：∵$\angle ADC=\angle ADB+\angle CDB=60^\circ$，$\angle ACD=60^\circ$，

∴$\angle DAC=60^\circ$，∴$AC=DC=\frac{\sqrt{3}}{2}$ km.

在$\triangle BCD$ 中，$\angle DBC=45^\circ$，

由正弦定理，得 $BC=\frac{DC}{\sin\angle DBC}\cdot\sin\angle BDC$

$=\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\sin 45^\circ}\cdot\sin 30^\circ=\frac{\sqrt{6}}{4}$.

在$\triangle ABC$ 中，由余弦定理，得 $AB^2=AC^2+BC^2-2AC\cdot BC\cos 45^\circ$

$=\frac{3}{4}+\frac{3}{8}-2\times\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{\sqrt{6}}{4}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{3}{8}$.

∴$AB=\frac{\sqrt{6}}{4}$ km，∴A，B 两点间的距离为$\frac{\sqrt{6}}{4}$ km.

答案：$\frac{\sqrt{6}}{4}$

2. **解析**：在$\triangle ABC$ 中，由余弦定理得

$AB^2=AC^2+BC^2-2AC\cdot BC\cos\angle ACB$，

∴$AB^2=400^2+600^2-2\times400\times600\cos 60^\circ=280\,000$.

∴$AB=200\sqrt{7}$ m.

即 A，B 两点间的距离为 $200\sqrt{7}$ m.

答案：$200\sqrt{7}$

3. **解析**：由已知，得$\angle QAB=\angle PAB-\angle PAQ=30^\circ$.

又$\angle PBA=\angle PBQ=60^\circ$，∴$\angle AQB=30^\circ$，∴$AB=BQ$.

又 PB 为公共边，∴$\triangle PAB\cong\triangle PQB$，∴$PQ=PA$.

在 Rt$\triangle PAB$ 中，$AP=AB\cdot\tan 60^\circ=900$，故 $PQ=900$，

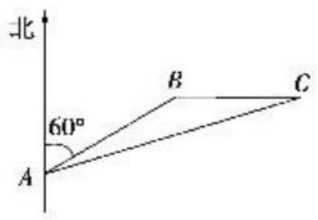
∴P，Q 两点间的距离为 900 m.

答案：900

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

提能达标过关

1. 选 C　如图所示，

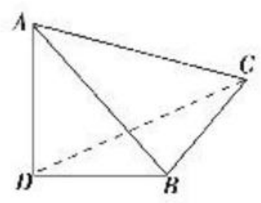


$AB=3\sqrt{3}$，$BC=2$，$\angle ABC=150°$，

在 $\triangle ABC$ 中，由余弦定理得 $AC^2=(3\sqrt{3})^2+2^2-2\times3\sqrt{3}\times2\times\cos 150°=27+4-2\times3\sqrt{3}\times2\times\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=49$.

$\therefore AC=7$ 公里，故选 C.

2. 选 D　设炮台顶部为 A，底部为 D，两条船分别为 B，C，如图所示，由题意知，$\angle BAD=45°$，$\angle CAD=60°$，$\angle BDC=30°$，



$AD=30$.

在 Rt$\triangle ABD$ 中，求得 $BD=30$.

在 Rt$\triangle ACD$ 中，求得 $DC=30\sqrt{3}$.

在 $\triangle BCD$ 中，由余弦定理得

$BC^2=BD^2+CD^2-2BD\cdot CD\cos 30°=30^2+(30\sqrt{3})^2-2\times30\times30\sqrt{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=900$，解得 $BC=30$，故选 D.

3. 选 A　在 $\triangle ABC$ 中，易得 $A=30°$，由正弦定理 $\frac{AB}{\sin C}=\frac{BC}{\sin A}$，得 $AB=\frac{BC\sin C}{\sin A}=2\times1\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}$ km，故选 A.

4. 选 A　在 $\triangle ACD$ 中，由余弦定理得，

$\cos D=\frac{AD^2+CD^2-AC^2}{2AD\cdot CD}=\frac{34-AC^2}{30}$.

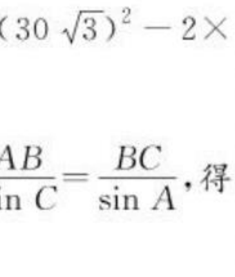
在 $\triangle ABC$ 中，由余弦定理得，

$\cos B=\frac{AB^2+BC^2-AC^2}{2AB\cdot BC}=\frac{89-AC^2}{80}$.

因为 $\angle B+\angle D=180°$，所以 $\cos B+\cos D=0$，

即 $\frac{34-AC^2}{30}+\frac{89-AC^2}{80}=0$，解得 $AC=7$，故选 A.

5. 选 B　如图，设行驶 15 min 时，甲船到达 M 点，乙船到达 N 点，由题意知 $AM=8\times\frac{1}{4}=2$ km，



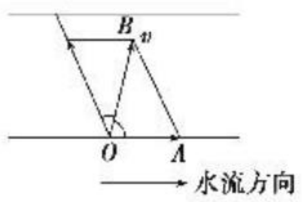
$BN=12\times\frac{1}{4}=3$ km，

$MB=AB-AM=3-2=1$ km，

由余弦定理得 $MN^2=MB^2+BN^2-2MB\cdot BN\cos 120°=1+9-2\times1\times3\times\left(-\frac{1}{2}\right)=13$，

所以 $MN=\sqrt{13}$ km，故选 B.

6. **解析**：如图，水流速和船速的合速度为 v km/h，在 $\triangle OAB$ 中，



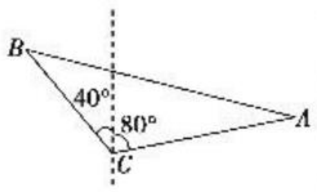
$OB^2=OA^2+AB^2-2OA\cdot AB\cdot\cos 60°$，

所以 $OB=v=2\sqrt{3}$，

所以航程为 $2\sqrt{3}\times\sqrt{3}=6$(km).

答案：6

7. **解析**：如图所示，在 $\triangle ABC$ 中，$\angle ACB=40°+80°=120°$，$AB=3$，$AC=2$.



设 $BC=a$.

由余弦定理，得 $\cos 120°=\frac{a^2+4-9}{4a}$，解得 $a=\sqrt{6}-1$ 或 $a=-\sqrt{6}-1$(舍去)，

即 B 到 C 的距离为 $(\sqrt{6}-1)$km.

答案：$\sqrt{6}-1$

8. **解析**：在 $\triangle ABD$ 中，$BD=400$，$\angle ABD=120°$.

$\because\angle ADB=180°-\angle ADC=30°$，$\therefore\angle DAB=30°$，

$\therefore AB=BD=400$ 米，

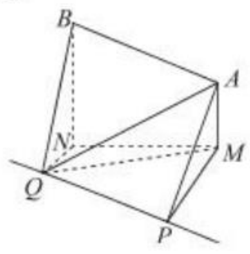
$AD=\sqrt{AB^2+BD^2-2AB\cdot BD\cos 120°}=400\sqrt{3}$.

在 $\triangle ADC$ 中，$DC=800$，$\angle ADC=150°$，$AC^2=AD^2+DC^2-2AD\cdot DC\cdot\cos\angle ADC=(400\sqrt{3})^2+800^2-2\times400\sqrt{3}\times800\times\cos 150°=400^2\times13$，

$\therefore AC=400\sqrt{13}$，故索道 AC 的长为 $400\sqrt{13}$ 米.

答案：$400\sqrt{13}$

9. **解**：在 Rt$\triangle AMP$ 中，$\angle APM=30°$，$AM=100$ m，



所以 $PM=100\sqrt{3}$ m，连接 QM，在 $\triangle PQM$ 中，

$\angle QPM=60°$，又 $PQ=100\sqrt{3}$ m，

所以 $\triangle PQM$ 为等边三角形，

所以 $QM=100\sqrt{3}$ m.

在 Rt$\triangle AMQ$ 中，由 $AQ^2=AM^2+QM^2$，

得 $AQ=200$ m.

在 Rt$\triangle BNQ$ 中，因为 $\tan\theta=2$，$BN=200$ m，

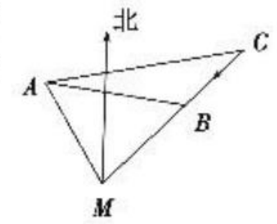
所以 $BQ=100\sqrt{5}$ m，$\cos\theta=\frac{\sqrt{5}}{5}$.

在 $\triangle BQA$ 中，$BA^2=BQ^2+AQ^2-2BQ\cdot AQ\cos\theta$，

所以 $BA=100\sqrt{5}$ m.

故两发射塔顶 A，B 之间的距离是 $100\sqrt{5}$ m.

10. **解**：设汽车前进 20 km 后到达 B 处，则在 $\triangle ABC$ 中，$AC=31$，$AB=21$，$BC=20$，由余弦定理得



$\cos\angle ABC=\frac{AB^2+BC^2-AC^2}{2AB\cdot BC}=\frac{21^2+20^2-31^2}{2\times21\times20}=-\frac{1}{7}$.

$\therefore\sin\angle ABC=\sqrt{1-\cos^2\angle ABC}=\frac{4\sqrt{3}}{7}$.

又 $\angle AMC=60°$，且 $\angle MAB=\angle ABC-\angle AMC$，

$\therefore\sin\angle MAB=\sin(\angle ABC-60°)=\frac{1}{2}\sin\angle ABC-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\angle ABC=\frac{1}{2}\times\frac{4\sqrt{3}}{7}-\frac{\sqrt{3}}{2}\times\left(-\frac{1}{7}\right)=\frac{5\sqrt{3}}{14}$.

在 $\triangle AMB$ 中，由正弦定理得

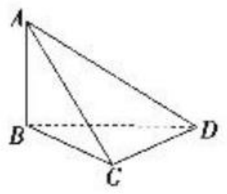
$MB=\frac{AB\cdot\sin\angle MAB}{\sin\angle AMB}=\frac{21\times\frac{5\sqrt{3}}{14}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=15$(km)，

$\therefore$汽车还需要行驶 15 km，才能到达 M 汽车站.

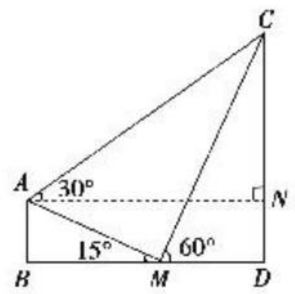
第 7 课时　高度、角度问题

题点知识巩固

1. 选 B　由题意，设 $AB=x$ m，则 $BD=\sqrt{3}x$ m，$BC=x$ m. 在 $\triangle DBC$ 中，$\angle BCD=120°$，$CD=40$，根据余弦定理，得 $BD^2=BC^2+CD^2-2BC\cdot CD\cdot\cos\angle BCD$，即 $(\sqrt{3}x)^2=x^2+40^2-2\times x\times40\times\cos 120°$，整理得 $x^2-20x-800=0$，解得 $x=40$ 或 $x=-20$(舍). 即所求电视塔的高度为 40 m，故选 B.



2. **解析**：如图，



在 Rt$\triangle ABM$ 中，$AM=\frac{AB}{\sin 15°}=\frac{30-10\sqrt{3}}{\sin 15°}=\frac{30-10\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}}=20\sqrt{6}$，

过点 A 作 $AN\perp CD$ 于点 N，在Rt$\triangle ACN$中，因为 $\angle CAN=30°$，所以 $\angle ACN=60°$，又在 Rt$\triangle CMD$ 中，$\angle CMD=60°$，所以 $\angle MCD=30°$，所以 $\angle ACM=30°$，在 $\triangle AMC$ 中，$\angle AMC=105°$，所以 $\frac{AC}{\sin 105°}=\frac{AM}{\sin\angle ACM}=\frac{20\sqrt{6}}{\sin 30°}$，所以 $AC=60+20\sqrt{3}$，所以 $CN=30+10\sqrt{3}$，所以 $CD=DN+CN=AB+CN=30-10\sqrt{3}+30+10\sqrt{3}=60$.

答案：60

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

3. **解**：如题中图所示，在$\triangle ABC$中，$AB=40$，$AC=20$，$\angle BAC=120°$，由余弦定理知，$BC^2=AB^2+AC^2-2AB\cdot AC\cdot\cos 120°=2\ 800\Rightarrow BC=20\sqrt{7}$.

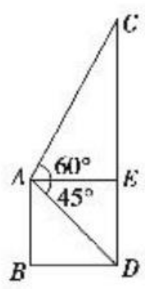
由正弦定理，得$\frac{AB}{\sin\angle ACB}=\frac{BC}{\sin\angle BAC}\Rightarrow\sin\angle ACB=\frac{AB}{BC}\cdot\sin\angle BAC=\frac{\sqrt{21}}{7}$.

由$\angle BAC=120°$，知$\angle ACB$为锐角，则$\cos\angle ACB=\frac{2\sqrt{7}}{7}$.

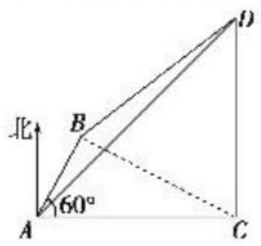
由$\theta=\angle ACB+30°$，得$\cos\theta=\cos(\angle ACB+30°)=\cos\angle ACB\cos 30°-\sin\angle ACB\sin 30°=\frac{\sqrt{21}}{14}$.

提能达标过关

1. 选 B　如图，设AB为阳台的高度，CD为小高层的高度，AE为水平线. 由题意知$AB=20$ m，$\angle DAE=45°$，$\angle CAE=60°$，故$DE=20$ m，$CE=AE\cdot\tan 60°=20\sqrt{3}$ m. 所以$CD=20(1+\sqrt{3})$m，故选 B.



2. 选 A　设水柱高度是h m，水柱底端为C，则在$\triangle ABC$中，由已知得$\angle BAC=60°$，$AC=h$，$AB=100$，$BC=\sqrt{3}h$，根据余弦定理得，$(\sqrt{3}h)^2=h^2+100^2-2\cdot h\cdot 100\cdot\cos 60°$，即$h^2+50h-5\ 000=0$，即$(h-50)(h+100)=0$，即$h=50$，故水柱的高度是 50 m，选 A.



3. 选 A　在$\triangle PAB$中，$\angle PAB=\alpha-\beta=15°$，$\angle BPA=\angle QPA-\angle CPB=30°$，所以$\frac{a}{\sin 30°}=\frac{PB}{\sin 15°}$，所以$PB=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}a$，

所以$PQ=PC+CQ=PB\cdot\sin\gamma+a\sin\beta=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}a\times\sin 60°+a\sin 15°=\frac{\sqrt{2}}{2}a$(米)，故选 A.

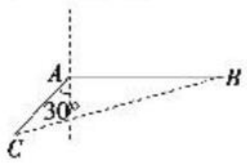
4. 选 B　因为$AB=1\ 000\times\frac{1}{60}=\frac{50}{3}$ km，

所以$BC=\frac{AB}{\sin 45°}\cdot\sin 30°=\frac{50}{3\sqrt{2}}$ km.

所以航线离山顶的高度$h=\frac{50}{3\sqrt{2}}\times\sin 75°=\frac{50}{3\sqrt{2}}\times\sin(45°+30°)\approx 11.4$ km. 所以山高为$18-11.4=6.6$ km，故选 B.

5. 选 A　如图，连接BC，在$\triangle ABC$中，$AC=10$，$AB=20$，$\angle BAC=120°$，由余弦定理，得$BC^2=AC^2+AB^2-2AB\cdot AC\cdot\cos 120°=700$，

$\therefore BC=10\sqrt{7}$，再由正弦定理，得$\frac{BC}{\sin\angle BAC}=\frac{AB}{\sin\theta}$，$\therefore\sin\theta=\frac{\sqrt{21}}{7}$，故选 A.



6. **解析**：由题图知$\angle BAS=45°-30°=15°$，$\angle ABS=45°-15°=30°$，$\therefore\angle ASB=135°$，在$\triangle ABS$中，由正弦定理可得$\frac{1\ 000}{\sin 30°}=\frac{AB}{\sin 135°}$，$\therefore AB=1\ 000\sqrt{2}$，$\therefore BC=\frac{AB}{\sqrt{2}}=1\ 000$.

答案：1 000

7. **解析**：根据题意知，在$\triangle ABS$中，$AB=24$，$\angle BAS=30°$，$\angle ASB=45°$，由正弦定理，得$\frac{BS}{\sin 30°}=\frac{24}{\sin 45°}$，$\therefore BS=\frac{12}{\frac{\sqrt{2}}{2}}=12\sqrt{2}$，故货轮到灯塔$S$的距离为$12\sqrt{2}$海里.

答案：$12\sqrt{2}$

8. **解析**：由题意，设$|AC|=x$，

则$|BC|=x-\frac{2}{17}\times 340=x-40$.

在$\triangle ABC$内，由余弦定理，

$|BC|^2=|BA|^2+|CA|^2-2|BA|\cdot|CA|\cdot\cos\angle BAC$，

即$(x-40)^2=10\ 000+x^2-100x$，解得$x=420$.

因为$\angle HAC=30°$，所以$\angle AHC=90°-30°=60°$.

在 Rt$\triangle ACH$中，$\frac{HC}{AC}=\tan 30°$，

则$HC=420\times\frac{\sqrt{3}}{3}=140\sqrt{3}$(米).

答案：$140\sqrt{3}$

9. **解**：(1)设烟囱AB的高度为h.

在$\triangle CAB$中，$\because\angle ACB=45°$，$\therefore CB=h$.

在$\triangle OAB$中，$\because\angle AOB=30°$，$\angle AEB=60°$，

$\therefore OB=\sqrt{3}h$，$EB=\frac{\sqrt{3}}{3}h$.

由题意得$OB-EB=OE$，

$\therefore\sqrt{3}h-\frac{\sqrt{3}}{3}h=10\sqrt{3}$，$\therefore h=15$.

即烟囱的高度为 15 米.

(2)在$\triangle OBC$中，$\cos\angle COB=\frac{OC^2+OB^2-CB^2}{2OC\cdot OB}=\frac{300+225\times 3-225}{2\times 10\sqrt{3}\times 15\sqrt{3}}=\frac{5}{6}$.

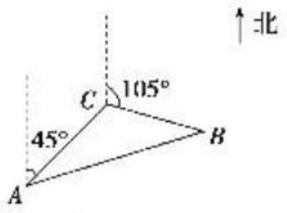
在$\triangle OCE$中，$CE^2=OC^2+OE^2-2OC\cdot OE\cos\angle COE$

$=300+300-2\times 10\sqrt{3}\times 10\sqrt{3}\times\frac{5}{6}$

$=600-500=100$. $\therefore CE=10$.

即CE的长为 10 米.

10. **解**：如图所示，根据题意可知$AC=10$，$\angle ACB=120°$，设舰艇靠近渔轮所需的时间为t h，并在B处与渔轮相遇，则$AB=21t$，$BC=9t$，在$\triangle ABC$中，根据余弦定理得$AB^2=AC^2+BC^2-2AC\cdot BC\cdot\cos 120°$，所以$21^2t^2=10^2+81t^2+2\times 10\times 9t\times\frac{1}{2}$，即$360t^2-90t-100=0$，解得$t=\frac{2}{3}$或$t=-\frac{5}{12}$(舍去).



所以舰艇靠近渔轮所需的时间为$\frac{2}{3}$ h.

此时$AB=14$，$BC=6$.

在$\triangle ABC$中，根据正弦定理，得$\frac{BC}{\sin\angle CAB}=\frac{AB}{\sin 120°}$，

所以$\sin\angle CAB=\frac{6\times\frac{\sqrt{3}}{2}}{14}=\frac{3\sqrt{3}}{14}$，

即$\angle CAB\approx 21.8°$或$\angle CAB\approx 158.2°$(舍去)，

即舰艇航行的方位角为$45°+21.8°=66.8°$.

所以舰艇以 66.8°的方位角航行，需$\frac{2}{3}$ h 才能靠近渔轮.

第 8 课时　几何计算问题

题点知识巩固

1. 选 B　由$\sin^2 B=2\sin A\sin C$及正弦定理，得$b^2=2ac$，①

又$B=\frac{\pi}{2}$，所以$a^2+c^2=b^2$. ②

联立①②解得$a=c=\sqrt{6}$，所以$S=\frac{1}{2}\times\sqrt{6}\times\sqrt{6}=3$，故选 B.

2. 选 D　因为$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}bc\sin A=2\sqrt{2}$，

所以$bc=6$，又因为$\sin A=\frac{2\sqrt{2}}{3}$，

所以$\cos A=\frac{1}{3}$，又$a=3$，

由余弦定理得$9=b^2+c^2-2bc\cos A\Rightarrow b^2+c^2=13$，

可得$b=2$或$b=3$，故选 D.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

3. **解**：(1)在$\triangle ABC$中，$a\cos B=4$，$b\sin A=3$，

两式相除，根据正弦定理有$\frac{b\sin A}{a\cos B}=\frac{\sin B\sin A}{\sin A\cos B}=\tan B=\frac{3}{4}$，

由$\sin^2 B+\cos^2 B=1$，$\frac{\sin B}{\cos B}=\frac{3}{4}$，

得$\cos B=\frac{4}{5}$，又因为$a\cos B=4$，所以$a=5$.

(2)由(1)知，$\sin B=\frac{3}{5}$，

由$S=\frac{1}{2}ac\sin B=\frac{1}{2}\times5\times\frac{3}{5}c=9$，得$c=6$.

由$b^2=a^2+c^2-2ac\cos B=25+36-2\times5\times6\times\frac{4}{5}=13$，

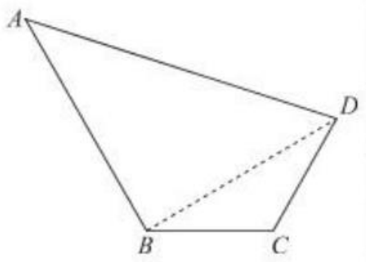
得$b=\sqrt{13}$.

故$\triangle ABC$的周长为$11+\sqrt{13}$.

4. 选 B　连接BD，在$\triangle BCD$中，由已知条件，知$\angle DBC=\frac{180°-120°}{2}=30°$，

$\therefore\angle ABD=90°$. 在$\triangle BCD$中，由余弦定理$BD^2=BC^2+CD^2-2BC\cdot CD\cos C$，

知$BD^2=2^2+2^2-2\times2\times2\cos 120°=12$，$\therefore BD=2\sqrt{3}$，$\therefore S_{四边形ABCD}=S_{\triangle ABD}+S_{\triangle BCD}=\frac{1}{2}\times4\times2\sqrt{3}+\frac{1}{2}\times2\times2\times\sin 120°=5\sqrt{3}$，故选 B.



5. **解**：(1)在$\triangle ABC$中，$\because\cos B=\frac{1}{3}$，$\therefore\sin B=\frac{2\sqrt{2}}{3}$.

在$\triangle ABD$中，$\frac{AB}{\sin\angle ADB}=\frac{AD}{\sin B}$，

又$AB=2$，$\angle ADB=\frac{\pi}{4}$，$\sin B=\frac{2\sqrt{2}}{3}$，$\therefore AD=\frac{8}{3}$.

(2)$\because BD=2DC$，

$\therefore S_{\triangle ABD}=2S_{\triangle ADC}$，$S_{\triangle ABC}=3S_{\triangle ADC}$，

又$S_{\triangle ADC}=\frac{4\sqrt{2}}{3}$，$\therefore S_{\triangle ABC}=4\sqrt{2}$，

$\because S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}AB\cdot BC\sin B$，

即$4\sqrt{2}=\frac{1}{2}\times2\times BC\times\frac{2\sqrt{2}}{3}$，$\therefore BC=6$.

$\because S_{\triangle ABD}=\frac{1}{2}AB\cdot AD\sin\angle BAD$，

$S_{\triangle ADC}=\frac{1}{2}AC\cdot AD\sin\angle CAD$，$S_{\triangle ABD}=2S_{\triangle ADC}$，

$\therefore\frac{\sin\angle BAD}{\sin\angle CAD}=2\cdot\frac{AC}{AB}$，

在$\triangle ABC$中，$AC^2=AB^2+BC^2-2AB\cdot BC\cos B$，

$\therefore AC=4\sqrt{2}$，

$\therefore\frac{\sin\angle BAD}{\sin\angle CAD}=2\cdot\frac{AC}{AB}=4\sqrt{2}$.

提能达标过关

1. 选 A　由$\cos 2A=\sin A$，得$1-2\sin^2 A=\sin A$，解得$\sin A=\frac{1}{2}$(负值舍去)，由$bc=2$，可得$\triangle ABC$的面积

$S=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}\times2\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$，故选 A.

2. 选 A　由余弦定理，可得$AB^2=BC^2+3BC^2-2\times BC\times\sqrt{3}BC\times\frac{\sqrt{3}}{2}=BC^2$，所以$AB=BC$，故$A=C=\frac{\pi}{6}$，所以$S_{\triangle ABC}=\sqrt{3}\sin^2 A=\frac{\sqrt{3}}{4}$，故选 A.

3. 选 D　由$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{15\sqrt{3}}{4}$可得，$ab=15$，又$a=3$，

$\therefore b=5$. 由余弦定理得$\cos C=\frac{b^2+a^2-c^2}{2ab}=\frac{5^2+3^2-c^2}{2\times15}=-\frac{1}{2}$，

$\therefore c=7$或$c=-7$(舍去)，故选 D.

4. 选 B　由$3a\cos C=4c\sin A$，得$\frac{a}{\sin A}=\frac{4c}{3\cos C}$.

又由正弦定理$\frac{a}{\sin A}=\frac{c}{\sin C}$，得$\frac{c}{\sin C}=\frac{4c}{3\cos C}$，

$\therefore\tan C=\frac{3}{4}$，$\therefore\sin C=\frac{3}{5}$.

又$S=\frac{1}{2}bc\sin A=10$，$b=4$，$\therefore c\sin A=5$.

根据正弦定理，得$a=\frac{c\sin A}{\sin C}=\frac{5}{\frac{3}{5}}=\frac{25}{3}$，故选 B.

5. 选 B　由$BC^2=AB^2+AC^2-2AB\cdot AC\cos A$，

可得$13=9+16-2\times3\times4\times\cos A$，得$\cos A=\frac{1}{2}$.

$\because A$为$\triangle ABC$的内角，$\therefore A=\frac{\pi}{3}$，

$\therefore AC$边上的高$h=AB\cdot\sin A=3\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{3\sqrt{3}}{2}$，故选 B.

6. **解析**：因为$b^2\sin C=4\sqrt{2}\sin B$，根据正弦定理得，

所以$b^2c=4\sqrt{2}b$，所以$bc=4\sqrt{2}$，

$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}\times4\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=2$.

答案：2

7. **解析**：在$\triangle ABC$中，不妨设$a=6$，$b=c=12$，

则$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{12^2+12^2-6^2}{2\times12\times12}=\frac{7}{8}$，

$\therefore\sin A=\sqrt{1-\left(\frac{7}{8}\right)^2}=\frac{\sqrt{15}}{8}$.

设$\triangle ABC$内切圆的半径为r，由$\frac{1}{2}(a+b+c)\cdot r=\frac{1}{2}bc\sin A$，

得$r=\frac{3\sqrt{15}}{5}$，$\therefore S_{内切圆}=\pi r^2=\frac{27\pi}{5}$.

答案：$\frac{27\pi}{5}$

8. **解析**：在$\triangle ADC$中，由正弦定理得$\frac{AC}{\sin\angle ADC}=\frac{\frac{4}{7}AB}{\sin\angle ACD}\Rightarrow\frac{AC}{\frac{4}{7}AB}=\frac{\sin\angle ADC}{\sin\angle ACD}$，同理，在$\triangle BCD$中，有$\frac{BC}{\sin\angle BDC}=\frac{\frac{3}{7}AB}{\sin\angle BCD}\Rightarrow\frac{BC}{\frac{3}{7}AB}=\frac{\sin\angle BDC}{\sin\angle BCD}$，又$\sin\angle ADC=\sin\angle BDC$，

$\sin\angle ACD=\sin\angle BCD$，所以有$\frac{AC}{\frac{4}{7}AB}=\frac{BC}{\frac{3}{7}AB}\Rightarrow AC=\frac{4}{3}BC$，

由正弦定理得$\sin B=\frac{4}{3}\sin A$，

又$B=2A$，所以$\sin B=2\sin A\cos A$，所以$\cos A=\frac{2}{3}$.

答案：$\frac{2}{3}$

9. **解**：(1)$\because\angle ADC=180°-120°=60°$，$AD=2$，

$\therefore S_{\triangle ADC}=\frac{1}{2}AD\cdot DC\sin 60°=3-\sqrt{3}$，

即$\frac{1}{2}\times2\times DC\times\frac{\sqrt{3}}{2}=3-\sqrt{3}$，

解得$DC=2(\sqrt{3}-1)$.

$\because BD=\frac{1}{2}DC$，$\therefore BD=\sqrt{3}-1$，$BC=3\sqrt{3}-3$.

(2)在$\triangle ABD$中，根据余弦定理，得

$AB=\sqrt{AD^2+BD^2-2AD\cdot BD\cos 120°}=\sqrt{6}$.

同理可得$AC=\sqrt{6}(\sqrt{3}-1)$.

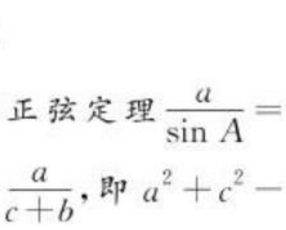
在$\triangle ABC$中，根据余弦定理，得

$\cos\angle BAC=\frac{6+6(\sqrt{3}-1)^2-(3\sqrt{3}-3)^2}{2\times\sqrt{6}\times\sqrt{6}(\sqrt{3}-1)}=\frac{1}{2}$，

$\therefore\angle BAC=60°$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

10. **解**：(1)由已知得$(2c-b)\cos A=a\cos B$，
由正弦定理，得$(2\sin C-\sin B)\cos A=\sin A\cos B$，
整理，得$2\sin C\cos A-\sin B\cos A=\sin A\cos B$，
即$2\sin C\cos A=\sin(A+B)=\sin C$.
又$\sin C\neq 0$，所以$\cos A=\frac{1}{2}$，所以$A=\frac{\pi}{3}$.
(2)如图，过点D作$DE\parallel AC$交AB于点E，又$CD=2DB$，$\angle BAC=\frac{\pi}{3}$，所以$ED=\frac{1}{3}AC=1$，$\angle DEA=\frac{2\pi}{3}$.

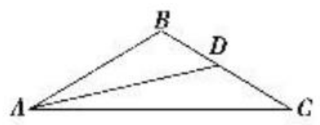


在$\triangle ADE$中，由余弦定理可知，
$AD^2=AE^2+ED^2-2AE\cdot ED\cdot\cos\frac{2\pi}{3}$，得$AE=4$，
则$AB=6$.
又$AC=3$，$\angle BAC=\frac{\pi}{3}$，
所以在$\triangle ABC$中，由余弦定理得$a=BC=3\sqrt{3}$.

第9课时　素养提升——正弦、余弦定理三应用

素养培优提能

1. 选C　如图，在$\triangle ABD$中，由正弦定理，得$\frac{AD}{\sin B}=\frac{AB}{\sin\angle ADB}$，$\therefore\sin\angle ADB=\frac{\sqrt{2}}{2}$. 由题意知$0^\circ<\angle ADB<60^\circ$，
$\therefore\angle ADB=45^\circ$，$\therefore\angle BAD=180^\circ-45^\circ-120^\circ=15^\circ$.
$\therefore\angle BAC=30^\circ$，$C=30^\circ$，$BC=AB=\sqrt{2}$. 在$\triangle ABC$中，由正弦定理，得$\frac{AC}{\sin B}=\frac{BC}{\sin\angle BAC}$，$\therefore AC=\sqrt{6}$，故选C.



2. 选C　设$\triangle ABC$的外接圆半径为R，根据正弦定理$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R$，得$\frac{c-b}{c-a}=\frac{\sin A}{\sin C+\sin B}=\frac{a}{c+b}$，即$a^2+c^2-b^2=ac$，所以$\cos B=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=\frac{1}{2}$，故$B=\frac{\pi}{3}$，故选C.

3. 选A　由题意知，$\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\frac{1}{2\tan C}\Rightarrow\cos C=\frac{\cos C}{2\sin C}$，
$\therefore\sin C=\frac{1}{2}$，又$C\in(0,\pi)$，$\therefore C=\frac{\pi}{6}$或$\frac{5\pi}{6}$，故选A.

4. 选D　由正弦定理及$b\sin A=4$，得$a\sin B=4$.
又$a\tan B=\frac{20}{3}$，
$\therefore\cos B=\frac{3}{5}>0$，且$\tan B>0$，$\therefore\sin B=\frac{4}{5}$，$\tan B=\frac{4}{3}$，
$\therefore a=5$. 由$S=\frac{1}{2}ac\sin B=10$，得$c=5$，
$\therefore A=C$，$\cos 4C=2\cos^2 2C-1=2\cos^2(A+C)-1=2\cos^2 B-1=2\times\left(\frac{3}{5}\right)^2-1=-\frac{7}{25}$，故选D.

5. 选B　因为$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\cos A}=\frac{b}{\sin B}$，所以$\sin B=\cos A=\sin\left(\frac{\pi}{2}+A\right)$，因为$B>\frac{\pi}{2}$，所以$B=\frac{\pi}{2}+A$，所以$\sin A+\sin C=\sin A+\sin(A+B)=\sin A+\sin\left(\frac{\pi}{2}+2A\right)=\sin A+\cos 2A=-2\sin^2 A+\sin A+1=-2\left(\sin A-\frac{1}{4}\right)^2+\frac{9}{8}$，所以当$\sin A=\frac{1}{4}$时，$\sin A+\sin C$取得最大值，为$\frac{9}{8}$，故选B.

6. **解析**：根据条件及正弦定理，得$a:b:c=4:5:6$，则设$a=4k$，$b=5k$，$c=6k(k>0)$，所以$|\overrightarrow{BC}|=4k$，$|\overrightarrow{AC}|=5k$. 由$|\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BC}|=\sqrt{46}$，得$|\overrightarrow{AC}|^2+2|\overrightarrow{AC}||\overrightarrow{BC}|\cos C+|\overrightarrow{BC}|^2=46$，可得$46k^2=46$，即$k=1$，所以$a=4$，$b=5$，$c=6$.
所以$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{1}{2}\times 4\times 5\times\sqrt{1-\left(\frac{1}{8}\right)^2}=\frac{15\sqrt{7}}{4}$.
答案：$\frac{15\sqrt{7}}{4}$

7. **解析**：$b=\sqrt{2}c$，$\sin A+\sqrt{2}\sin C=2\sin B\Rightarrow a+\sqrt{2}c=2b\Rightarrow a=\sqrt{2}c\Rightarrow\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{\sqrt{2}}{4}$.
答案：$\frac{\sqrt{2}}{4}$

8. **解析**：设在$\triangle ABC$中，$BC=13$，$AC=14$，$AB=15$，
$\therefore\cos C=\frac{13^2+14^2-15^2}{2\times 13\times 14}=\frac{5}{13}$，$\therefore\sin C=\frac{12}{13}$，故$\triangle ABC$的面积为$\frac{1}{2}\times 13\times 14\times\frac{12}{13}\times 0.5^2=21(\text{km}^2)$.
答案：21

9. **解**：(1)$\because f(x)=(\sin x+\sqrt{3}\cos x)\cos x=\sin x\cos x+\sqrt{3}\cos^2 x=\frac{1}{2}\sin 2x+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos 2x+\frac{\sqrt{3}}{2}=\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)+\frac{\sqrt{3}}{2}$.
由$0\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2}$，得$\frac{\pi}{3}\leqslant 2x+\frac{\pi}{3}\leqslant\frac{4\pi}{3}$，
$-\frac{\sqrt{3}}{2}\leqslant\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)\leqslant 1$，
$\therefore 0\leqslant\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)+\frac{\sqrt{3}}{2}\leqslant 1+\frac{\sqrt{3}}{2}$，
即函数$f(x)$的值域为$\left[0,1+\frac{\sqrt{3}}{2}\right]$.
(2)由$f(A)=\sin\left(2A+\frac{\pi}{3}\right)+\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，
得$\sin\left(2A+\frac{\pi}{3}\right)=0$，
$\because 0<A<\frac{\pi}{2}$，$\therefore\frac{\pi}{3}<2A+\frac{\pi}{3}<\frac{4\pi}{3}$，$\therefore 2A+\frac{\pi}{3}=\pi$，$A=\frac{\pi}{3}$.
在$\triangle ABC$中，由余弦定理$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$及$b=2$，$c=3$，得$a=\sqrt{7}$.
由正弦定理$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}$，得$\sin B=\frac{b\sin A}{a}=\frac{\sqrt{21}}{7}$，
$\because b<a$，$\therefore B<A$，$\therefore\cos B=\frac{2\sqrt{7}}{7}$，
$\therefore\cos(A-B)=\cos A\cos B+\sin A\sin B=\frac{1}{2}\times\frac{2\sqrt{7}}{7}+\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{\sqrt{21}}{7}=\frac{5\sqrt{7}}{14}$.

10. **解**：(1)$\because b\cos C+c\cos B=2a\sin A$，
$\therefore$根据正弦定理有，$\sin B\cos C+\sin C\cos B=2\sin A\sin A$，
即$\sin(B+C)=2\sin^2 A$，$\therefore\sin A=2\sin^2 A$.
$\because\sin A>0$，$\therefore\sin A=\frac{1}{2}$.
$\because a\leqslant b\leqslant c$，$\therefore 0<A\leqslant\frac{\pi}{3}$，$\therefore A=\frac{\pi}{6}$.
(2)证明：$\because a^2-(2-\sqrt{3})bc=b^2+c^2-2bc\cos\frac{\pi}{6}-(2-\sqrt{3})bc=b^2+c^2-2bc=(b-c)^2\geqslant 0$，$\therefore a^2\geqslant(2-\sqrt{3})bc$.
(3)由$a=b$及(1)，知$A=B=\frac{\pi}{6}$，$\therefore C=\frac{2\pi}{3}$.
在$\triangle AMC$中，由余弦定理，得$AC^2+MC^2-2AC\cdot MC\cos C=AM^2$，
即$a^2+\left(\frac{a}{2}\right)^2-2a\times\frac{a}{2}\times\cos\frac{2\pi}{3}=(\sqrt{7})^2$，$\therefore a=2$，
故$\triangle ABC$的面积为$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}a^2\sin\frac{2\pi}{3}=\sqrt{3}$.

阶段质量评估1

1. 选C　在$\triangle ABC$中，由$\frac{a}{\sin A}=\frac{c}{\sin C}$，
得$\sin C=\frac{c\sin A}{a}=\frac{\sqrt{3}\times\sin\frac{\pi}{3}}{3}=\frac{1}{2}$.
$\because c<a$，$\therefore C=\frac{\pi}{6}$，$\therefore B=\frac{\pi}{2}$，
$\therefore b=\sqrt{a^2+c^2}=\sqrt{9+3}=2\sqrt{3}$，故选C.

2. 选A　设地球为O，则根据条件，$OA=5$，$OB=2$，$\angle AOB=60^\circ$，由余弦定理可得，$AB^2=5^2+2^2-2\times 5\times 2\cos 60^\circ=19$，故$AB=\sqrt{19}$亿光年，选A.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

3. 选 C　$\because c^2=(a-b)^2+6$，$\therefore a^2+b^2-c^2=2ab-6$，

又 $\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\frac{2ab-6}{2ab}=\frac{1}{2}$，$\therefore ab=6$，

$\therefore S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{1}{2}\times6\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{3\sqrt{3}}{2}$，故选 C.

4. 选 A　由余弦定理及 $a^2-\sqrt{2}ab=c^2-b^2$ 得，

$\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，又 $0<C<\pi$，$\therefore C=\frac{\pi}{4}$，故选 A.

5. 选 B　①中，$A>B\Rightarrow a>b\Rightarrow 2R\sin A>2R\sin B\Rightarrow\sin A>\sin B$，故①正确；②中，$b^2+c^2>a^2\Rightarrow\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}>0\Rightarrow A$ 为锐角，但 $\triangle ABC$ 不一定是锐角三角形，故②错误；③中，由 $b<a$ 可知 $B<A$，故③错误；④中，由正弦定理得 $\frac{a}{\sin A}=2R$，$\frac{a+b-c}{\sin A+\sin B-\sin C}=\frac{2R\sin A+2R\sin B-2R\sin C}{\sin A+\sin B-\sin C}=2R$，故④正确，选 B.

6. 选 A　设 $AD=x$. 因为 $BC^2=AB^2+AC^2-2AB\times AC\times\cos\angle BAC=27+9-2\times3\sqrt{3}\times3\times\frac{\sqrt{3}}{2}=9$，所以 $BC=3$，所以 $BD=1$，$CD=2$.

解法一：因为 $\cos\angle ADB=\cos(\pi-\angle ADC)$，即 $\cos\angle ADB=-\cos\angle ADC$，所以 $\frac{x^2+1-27}{2x}=-\frac{x^2+4-9}{4x}$，解得 $x=\sqrt{19}$，即 $AD=\sqrt{19}$，故选 A.

解法二：因为 $AC=BC=3$，$\angle BAC=\frac{\pi}{6}$，所以 $\angle BCA=\frac{2\pi}{3}$，所以 $x^2=AC^2+CD^2-2AC\times CD\times\cos\angle BCA=3^2+2^2-2\times3\times2\times\cos\frac{2\pi}{3}=19$，$\therefore AD=\sqrt{19}$，故选 A.

7. **解析**：在 $\triangle ABC$ 中，由 $\cos A=-\frac{1}{4}$ 可得，$\sin A=\frac{\sqrt{15}}{4}$，

所以有 $\begin{cases}\frac{1}{2}bc\times\frac{\sqrt{15}}{4}=3\sqrt{15},\\ b-c=2,\\ a^2=b^2+c^2-2bc\times\left(-\frac{1}{4}\right),\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=8,\\ b=6,\\ c=4.\end{cases}$

答案：8

8. **解析**：在 $\triangle BCD$ 中，$CD=10$，$\angle BDC=45°$，$\angle BCD=15°+90°=105°$，$\angle DBC=30°$，

由正弦定理得，$\frac{BC}{\sin45°}=\frac{CD}{\sin30°}$，

所以 $BC=\frac{CD\sin45°}{\sin30°}=10\sqrt{2}$.

在 Rt$\triangle ABC$ 中，$\tan60°=\frac{AB}{BC}$，

$AB=BC\tan60°=10\sqrt{6}$(m).

答案：$10\sqrt{6}$

9. **解析**：$\because 4S=b^2+c^2-a^2=2bc\cos A$，

$\therefore4\times\frac{1}{2}bc\sin A=2bc\cos A$，$\therefore\tan A=1$.

又 $\because A\in(0°,180°)$，$\therefore A=45°$.

答案：45°

10. **解析**：在 $\triangle ABC$ 中，由余弦定理可得 $BC^2=AC^2+AB^2-2AC\cdot AB\cdot\cos\angle BAC$，即 $28=16+AB^2-4AB$，解得 $AB=6$（$AB=-2$ 舍去），则 $\cos\angle ABC=\frac{28+36-16}{2\times2\sqrt{7}\times6}=\frac{2\sqrt{7}}{7}$，$BD=AB\cdot\cos\angle ABC=6\times\frac{2\sqrt{7}}{7}=\frac{12\sqrt{7}}{7}$，$CD=BC-BD=2\sqrt{7}-\frac{12\sqrt{7}}{7}=\frac{2\sqrt{7}}{7}$，所以 $\frac{BD}{CD}=6$.

答案：6

11. **解**：解法一：由余弦定理及 $B=60°$ 得，

$\cos B=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=\frac{1}{2}$，

$\therefore a^2+c^2-b^2=ac$.

$\because 2b=a+c$，$\therefore b=\frac{a+c}{2}$，

$\therefore a^2+c^2-\left(\frac{a+c}{2}\right)^2=ac$，

即 $(a-c)^2=0$，$\therefore a=c$，

又 $B=60°$，$\therefore A=C=60°$.

$\therefore\triangle ABC$ 为等边三角形.

解法二：由正弦定理及 $2b=a+c$ 得，

$2\sin B=\sin A+\sin C$，

又 $B=60°$，$\therefore A+C=180°-60°=120°$，

$\therefore2\sin60°=\sin A+\sin(120°-A)$，

$\therefore\sqrt{3}=\sin A+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos A+\frac{1}{2}\sin A$，

$\therefore\frac{\sqrt{3}}{2}\sin A+\frac{1}{2}\cos A=1$，

$\therefore\sin(A+30°)=1$，

又 $30°<A+30°<150°$

$\therefore A+30°=90°$，

$\therefore A=60°$，$\therefore C=60°$，

$\therefore\triangle ABC$ 为等边三角形.

12. **解**：由正弦定理，得 $\sin C=\frac{AB\sin B}{AC}=\frac{2\sqrt{3}\sin30°}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

$\because AB>AC$，

$\therefore C=60°$或 $C=120°$.

当 $C=60°$时，$A=90°$，$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}AB\cdot AC=2\sqrt{3}$；

当 $C=120°$时，$A=30°$，$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}AB\cdot AC\sin A=\sqrt{3}$.

故 $\triangle ABC$ 的面积为 $2\sqrt{3}$或$\sqrt{3}$.

13. **解**：(1)证明：由条件，得 $a(1+\cos C)+c(1+\cos A)=\frac{5}{2}b$，

由于 $a\cos C+c\cos A=a\cdot\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}+c\cdot\frac{c^2+b^2-a^2}{2bc}=b$，

所以 $a+c=\frac{3}{2}b$，即 $2(a+c)=3b$.

(2)在 $\triangle ABC$ 中，因为 $\cos B=\frac{1}{4}$，所以 $\sin B=\frac{\sqrt{15}}{4}$.

由 $S=\frac{1}{2}ac\sin B=\frac{\sqrt{15}}{8}ac=\sqrt{15}$，得 $ac=8$，

又 $b^2=a^2+c^2-2ac\cos B=(a+c)^2-2ac(1+\cos B)$，

$2(a+c)=3b$，

所以 $\frac{5b^2}{4}=16\times\left(1+\frac{1}{4}\right)$，所以 $b=4$.

14. **解**：由题意，知 $AB=5(3+\sqrt{3})$，$\angle DBA=90°-60°=30°$，

$\angle DAB=90°-45°=45°$，

$\therefore\angle ADB=180°-(45°+30°)=105°$.

在 $\triangle DAB$ 中，由正弦定理 $\frac{BD}{\sin\angle DAB}=\frac{AB}{\sin\angle ADB}$，

得 $BD=\frac{AB\sin\angle DAB}{\sin\angle ADB}=\frac{5(3+\sqrt{3})\sin45°}{\sin105°}$

$=\frac{5(3+\sqrt{3})\sin45°}{\sin45°\cos60°+\cos45°\sin60°}=10\sqrt{3}$(n mile).

又 $\angle DBC=\angle DBA+\angle ABC=60°$，$BC=20\sqrt{3}$，

$\therefore$在 $\triangle DBC$ 中，由余弦定理，得

$CD=\sqrt{BD^2+BC^2-2BD\cdot BC\cos\angle DBC}$

$=\sqrt{300+1\ 200-2\times10\sqrt{3}\times20\sqrt{3}\times\frac{1}{2}}$

$=30$(n mile)，

则救援船到达 D 点需要的时间为 $\frac{30}{30}=1$(h).

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

第二章　数　列

2.1　数列的概念与简单表示法

第10课时　数列的概念与简单表示法

题点知识巩固

1. 选B　都不相同.数列①②③中,虽然数字相同,但数字排列的顺序不同,故不是同一个数列,选B.

2. **解**:(2)(4)是有穷数列,(1)(3)(5)(6)是无穷数列,(4)是递增数列,(1)(2)是递减数列,(3)(5)是摆动数列,(6)是常数列.

3. 选C　由$a_1=1$,排除B,D选项,由$a_3=6$排除A,故选C.

4. **解**:(1)

序号	1	2	3	4
项分母	$2=1+1$	$3=2+1$	$4=3+1$	$5=4+1$
项分子	2^2-1	3^2-1	4^2-1	5^2-1

即这个数列的前4项的分母都是序号加1,分子都是分母的平方减1,所以它的一个通项公式是$a_n=\frac{(n+1)^2-1}{n+1}(n\in\mathbf{N}^*)$.

(2)这是一个分数数列,其分子构成偶数数列,而分母可分解成$1\times3,3\times5,5\times7,7\times9,9\times11,\cdots$,每一项都是两个相邻奇数的乘积.经过组合,则所求数列的通项公式为$a_n=\frac{2n}{(2n-1)(2n+1)}$.

(3)数列的项,有的是分数,有的是整数,可将数列的各项都统一成分数再观察.$\frac{1}{2},\frac{4}{2},\frac{9}{2},\frac{16}{2},\frac{25}{2},\cdots$,可得通项公式为$a_n=\frac{n^2}{2}$.

(4)联想$\overbrace{99\cdots9}^{n个}=10^n-1$,

则$a_n=\overbrace{55\cdots5}^{n个}=\frac{5}{9}\times\overbrace{99\cdots9}^{n个}=\frac{5}{9}(10^n-1)$,即$a_n=\frac{5}{9}(10^n-1)$.

5. 选C　因为$a_2=2\times2-2=2$,$a_3=3\times3+1=10$,所以$a_2a_3=2\times10=20$,故选C.

6. **解**:$\because a_1\cdot a_2\cdot a_3\cdot\cdots\cdot a_n=n^2(n\in\mathbf{N}^*)$,①

$\therefore$当$n\geqslant2$时,$a_1\cdot a_2\cdot a_3\cdot\cdots\cdot a_{n-1}=(n-1)^2$.②

由①÷②,得$a_n=\frac{n^2}{(n-1)^2}(n\geqslant2)$,

(1)$\because a_n=\frac{n^2}{(n-1)^2}(n\geqslant2)$,

$\therefore a_3+a_5=\frac{9}{4}+\frac{25}{16}=\frac{61}{16}$.

(2)$\because\frac{256}{225}=\frac{16^2}{15^2}=a_{16}$,$\therefore\frac{256}{225}$是数列中的第16项.

(3)当$n\geqslant2$时,$a_n-a_{n+1}=\frac{n^2}{(n-1)^2}-\frac{(n+1)^2}{n^2}=\frac{n^4-(n^2-1)^2}{(n-1)^2n^2}$

$=\frac{2n^2-1}{n^2(n-1)^2}>0$,$\therefore a_n>a_{n+1}$.

提能达标过关

1. 选C　数列$1,\frac{1}{3},\frac{1}{3^2},\frac{1}{3^3},\cdots$是无穷数列,但它不是递增数列,而是递减数列;数列$\sin\frac{\pi}{13},\sin\frac{2\pi}{13},\sin\frac{3\pi}{13},\sin\frac{4\pi}{13},\cdots$是无穷数列,但它既不是递增数列,又不是递减数列;数列$-1,-\frac{1}{2},-\frac{1}{3},-\frac{1}{4},\cdots$是无穷数列,也是递增数列;数列$1,2,3,4,\cdots,30$是递增数列,但不是无穷数列,故选C.

2. 选A　结合数列的定义与函数的概念,可知①正确;有穷数列的项数是有限的,②错误;数列的通项公式的形式不一定唯一,③错误;数列$1,3,2,6,3,9,4,12,5,15,\cdots$存在通项公式$a_n=\begin{cases}\frac{n+1}{2},n为奇数,\\\frac{3n}{2},n为偶数,\end{cases}$④错误,故选A.

3. 选C　验证易知,只有C选项中的式子不能作为已知数列的通项公式,故选C.

4. 选D　$25-2n$不可能是偶数,经验证,$1,-1,3$均是$\{a_n\}$中的项,故选D.

5. 选B　由$a_1=3$,$a_{n+1}=-\frac{1}{a_n+1}$,得$a_2=-\frac{1}{4}$,$a_3=-\frac{4}{3}$,$a_4=3$,所以数列$\{a_n\}$是周期为3的数列,则由选项知$a_{16}=3$,故选B.

6. **解析**:注意到数列的奇数项与偶数项的特点即可得

$a_n=\begin{cases}-\frac{n+1}{2},n=2k-1(k\in\mathbf{N}^*),\\\frac{n}{2},n=2k(k\in\mathbf{N}^*).\end{cases}$

答案:$a_n=\begin{cases}-\frac{n+1}{2},n=2k-1(k\in\mathbf{N}^*),\\\frac{n}{2},n=2k(k\in\mathbf{N}^*)\end{cases}$

7. **解析**:由$a_n=a_{n-1}+(-1)^n(n\geqslant2)$,得$a_2=a_1+1$,$a_3=a_2-1$,$a_4=a_3+1,\cdots,a_{198}=a_{197}+1$,$a_{199}=a_{198}-1$,以上各式相加,得$a_{199}=a_1=1$.

答案:1

8. **解析**:因为$a_n=n-\sqrt{n^2+2}=\frac{(n-\sqrt{n^2+2})(n+\sqrt{n^2+2})}{n+\sqrt{n^2+2}}=-\frac{2}{n+\sqrt{n^2+2}}$,易知数列$\{a_n\}$为递增数列,则数列$\{a_n\}$的最小项为$a_1$,即最小值为$1-\sqrt{3}$.

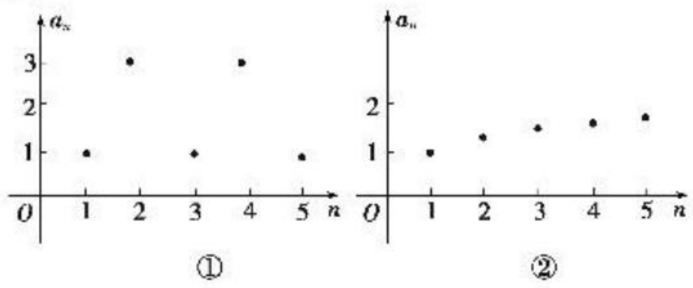
答案:$1-\sqrt{3}$

9. **解**:(1)$\because a_n=(-1)^n+2$,

$\therefore a_1=1$,$a_2=3$,$a_3=1$,$a_4=3$,$a_5=1$.

$\therefore$数列的前5项是1,3,1,3,1.

图象如图①.



(2)数列$\{a_n\}$的前5项依次是$1,\frac{4}{3},\frac{3}{2},\frac{8}{5},\frac{5}{3}$.图象如图②.

10. **解**:(1)$\because a_n=\frac{9n^2-9n+2}{9n^2-1}=\frac{(3n-1)(3n-2)}{(3n-1)(3n+1)}=\frac{3n-2}{3n+1}$,

$\therefore$由$a_n=\frac{3n-2}{3n+1}=\frac{98}{101}$,解得$n=\frac{100}{3}$,

$\because\frac{100}{3}$不是正整数,$\therefore\frac{98}{101}$不是数列$\{a_n\}$中的项.

(2)$\because a_n=\frac{3n-2}{3n+1}=\frac{3n+1-3}{3n+1}=1-\frac{3}{3n+1}$,$n\in\mathbf{N}^*$,

其中$0<\frac{3}{3n+1}<1$,

$\therefore0<a_n<1$,

$\therefore$数列$\{a_n\}$中的项都在区间$(0,1)$内.

(3)令$\frac{1}{3}<a_n<\frac{2}{3}$,即$\frac{1}{3}<\frac{3n-2}{3n+1}<\frac{2}{3}$,

则$\begin{cases}3n+1<9n-6,\\9n-6<6n+2,\end{cases}$解得$\frac{7}{6}<n<\frac{8}{3}$.

又$n\in\mathbf{N}^*$,$\therefore n=2$.

故在区间$\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)$内有数列$\{a_n\}$中的项,且只有一项,是第二项,$a_2=\frac{4}{7}$.

第11课时　数列的通项公式与递推公式

题点知识巩固

1. 选B　因为$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{1}{2}<1$,$a_n>0$,所以$a_{n+1}<a_n$,故数列$\{a_n\}$为递减数列,选B.

2. 选D　由题可知,$a_n=-3\left(n-\frac{5}{2}\right)^2+\frac{3}{4}$,由二次函数性质,得当$n=2$或3时,$a_n$最大,最大值为0,故选D.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

3. **解析**：由已知条件得 $a_1=4$，$a_2=f(a_1)=f(4)=2$，$a_3=f(a_2)=f(2)=4$，∴数列$\{a_n\}$为周期数列，且 $T=2$，∴$a_{2\,019}=a_{1+1\,009\times2}=a_1=4$.

答案：4

4. 选 C　∵$a_1=1$，$a_n=a_{n-1}+n(n\geqslant2,n\in\mathbf{N}^*)$，

∴$a_2=a_1+2=1+2=3$，

$a_3=a_2+3=3+3=6$，

$a_4=a_3+4=6+4=10$，

$a_5=a_4+5=10+5=15$，故选 C.

5. **解**：(1)∵$a_1=1$，$a_2=2$，$a_n=a_{n-1}+a_{n-2}(n\geqslant3)$，

∴$a_3=a_2+a_1=3$，$a_4=a_3+a_2=5$，$a_5=a_4+a_3=8$，

∴数列$\{a_n\}$的前 5 项依次是 1，2，3，5，8.

(2)∵$b_n=\dfrac{a_n}{a_{n+1}}$，$a_1=1$，$a_2=2$，$a_3=3$，$a_4=5$，$a_5=8$，

∴$b_1=\dfrac{a_1}{a_2}=\dfrac{1}{2}$，$b_2=\dfrac{a_2}{a_3}=\dfrac{2}{3}$，$b_3=\dfrac{a_3}{a_4}=\dfrac{3}{5}$，$b_4=\dfrac{a_4}{a_5}=\dfrac{5}{8}$.

∴数列$\{b_n\}$的前 4 项依次为 $\dfrac{1}{2}$，$\dfrac{2}{3}$，$\dfrac{3}{5}$，$\dfrac{5}{8}$.

6. **解**：∵$a_n>0$，等式两边同除 a_n^2 得，

$(n+1)\left(\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right)^2+\dfrac{a_{n+1}}{a_n}-n=0$，

即 $\left(\dfrac{a_{n+1}}{a_n}-\dfrac{n}{n+1}\right)\left(\dfrac{a_{n+1}}{a_n}+1\right)=0$.

解得 $\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=\dfrac{n}{n+1}$ 或 $\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=-1$(舍去).

解法一(叠乘法)：

∵$\dfrac{a_2}{a_1}=\dfrac{1}{2}$，$\dfrac{a_3}{a_2}=\dfrac{2}{3}$，…，$\dfrac{a_{n-1}}{a_{n-2}}=\dfrac{n-2}{n-1}$，$\dfrac{a_n}{a_{n-1}}=\dfrac{n-1}{n}(n\geqslant2)$，

将各式相乘，得 $\dfrac{a_2}{a_1}\cdot\dfrac{a_3}{a_2}\cdot\dfrac{a_4}{a_3}\cdot\cdots\cdot\dfrac{a_{n-1}}{a_{n-2}}\cdot\dfrac{a_n}{a_{n-1}}$

$=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{2}{3}\times\dfrac{3}{4}\times\cdots\times\dfrac{n-2}{n-1}\times\dfrac{n-1}{n}$，

∴$\dfrac{a_n}{a_1}=\dfrac{1}{n}(n\geqslant2)$，又 $a_1=1$，∴$a_n=\dfrac{1}{n}(n\geqslant2)$.

又∵$a_1=1$ 也适合，∴$a_n=\dfrac{1}{n}$.

解法二(迭代法)：

∵$a_{n+1}=\dfrac{n}{n+1}a_n$，

∴$a_n=\dfrac{n-1}{n}a_{n-1}=\dfrac{n-1}{n}\cdot\dfrac{n-2}{n-1}a_{n-2}$

$=\dfrac{n-1}{n}\cdot\dfrac{n-2}{n-1}\cdot\dfrac{n-3}{n-2}a_{n-3}$

$=\cdots$

$=\dfrac{n-1}{n}\cdot\dfrac{n-2}{n-1}\cdot\dfrac{n-3}{n-2}\cdot\cdots\cdot\dfrac{1}{2}\cdot a_1=\dfrac{1}{n}(n\geqslant2)$，

又 a_1 也适合上式，∴$a_n=\dfrac{1}{n}$.

7. **解**：由条件 $\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=\dfrac{n}{n+1}$，分别令 $n=1,2,3,\cdots,n-1$，代入上式得 $n-1$ 个等式，即 $\dfrac{a_2}{a_1}=\dfrac{1}{2}$，$\dfrac{a_3}{a_2}=\dfrac{2}{3}$，$\dfrac{a_4}{a_3}=\dfrac{3}{4}$，…，$\dfrac{a_n}{a_{n-1}}=\dfrac{n-1}{n}$.

将以上各式等号两边分别相乘，得 $\dfrac{a_2}{a_1}\cdot\dfrac{a_3}{a_2}\cdot\dfrac{a_4}{a_3}\cdot\cdots\cdot\dfrac{a_n}{a_{n-1}}=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{2}{3}\times\dfrac{3}{4}\times\cdots\times\dfrac{n-1}{n}$，

所以 $\dfrac{a_n}{a_1}=\dfrac{1}{n}$.

又因为 $a_1=\dfrac{2}{3}$，所以 $a_n=\dfrac{2}{3n}$.

提能达标过关

1. 选 B　∵$a_{n+1}-a_n=\dfrac{n+1}{2n+1}-\dfrac{n}{2n-1}$

$=\dfrac{-1}{(2n+1)(2n-1)}<0$，

∴$a_{n+1}<a_n$，故该数列是递减数列，故选 B.

2. 选 D　∵数列$\{a_n\}$满足 $a_1=1$，$a_2=3$，$a_{n+1}=(2n-\lambda)a_n$，

∴$3=(2-\lambda)\times1$，解得 $\lambda=-1$，即 $a_{n+1}=(2n+1)a_n$，

∴$a_3=(2\times2+1)a_2=5\times3=15$，故选 D.

3. 选 C　∵$b_n=a_{b_{n-1}}$，∴$b_2=a_{b_1}=a_2=3$，

$b_3=a_{b_2}=a_3=5$，$b_4=a_{b_3}=a_5=9$，$b_5=a_{b_4}=a_9=17$，$b_6=a_{b_5}=a_{17}=33$，故选 C.

4. 选 B　∵$a_1=1$，$a_{n+1}=\dfrac{1}{2}a_n+\dfrac{1}{2^n}$，

∴$a_2=\dfrac{1}{2}a_1+\dfrac{1}{2}=1$，$a_3=\dfrac{1}{2}a_2+\dfrac{1}{2^2}=\dfrac{3}{4}$，

$a_4=\dfrac{1}{2}a_3+\dfrac{1}{2^3}=\dfrac{3}{8}+\dfrac{1}{8}=\dfrac{1}{2}$，故选 B.

5. 选 B　由条件可得 $a_1=-2$，$a_2=-\dfrac{1}{3}$，$a_3=\dfrac{1}{2}$，$a_4=3$，$a_5=-2$，$a_6=-\dfrac{1}{3}$，…，所以数列$\{a_n\}$是以 4 为周期的周期数列，所以 $a_{2\,019}=a_3=\dfrac{1}{2}$，故选 B.

6. **解析**：由对于任意正整数 n，都有 $a_{n+1}=a_n+n$ 知，$a_{n+1}-a_n=n$，所以 $a_2-a_1=1$，$a_3-a_2=2$，$a_4-a_3=3$，$a_5-a_4=4$，$a_6-a_5=5$，累加得 $a_6-a_1=1+2+3+4+5=15$. 又$a_1=1$，所以 $a_6=16$.

答案：16

7. **解析**：$a_2=2$，$a_3=\dfrac{3}{2}$，$a_4=\dfrac{13}{6}$，$\dfrac{a_4}{a_2}=\dfrac{13}{12}$.

答案：$\dfrac{13}{12}$

8. **解析**：计算得 $a_2=2a_1-1=\dfrac{5}{7}$，$a_3=2a_2-1=\dfrac{3}{7}$，$a_4=2a_3=\dfrac{6}{7}$. 故数列$\{a_n\}$是以 3 为周期的周期数列，又因为 $2\,018=672\times3+2$，所以 $a_{2\,018}=a_2=\dfrac{5}{7}$.

答案：$\dfrac{5}{7}$

9. **解**：(1)因为点(a_n,a_{n+1})在函数 $f(x)=\dfrac{2x}{1+x}$ 的图象上，

所以 $a_{n+1}=\dfrac{2a_n}{1+a_n}$.

又 $a_1=2$，所以 $a_2=\dfrac{2a_1}{1+a_1}=\dfrac{4}{3}$，$a_3=\dfrac{2a_2}{1+a_2}=\dfrac{2\times\frac{4}{3}}{1+\frac{4}{3}}=\dfrac{8}{7}$，

$a_4=\dfrac{2a_3}{1+a_3}=\dfrac{2\times\frac{8}{7}}{1+\frac{8}{7}}=\dfrac{16}{15}$.

(2)观察(1)中数列$\{a_n\}$的前 4 项的规律，可猜想数列$\{a_n\}$的一个通项公式为 $a_n=\dfrac{2^n}{2^n-1}$.

10. **解**：(1)由 $a_{n+1}-a_n=n+2$，$a_1=1$ 得

$a_{n+1}=a_n+n+2$，则 $a_2=a_1+1+2=4$，$a_3=a_2+2+2=8$，$a_4=a_3+3+2=13$.

(2)由(1)及 $b_n=4a_n-68n$ 得

$b_1=4a_1-68\times1=-64$，$b_2=4a_2-68\times2=-120$，

$b_3=4a_3-68\times3=-172$，$b_4=4a_4-68\times4=-220$.

2.2　等差数列

第 12 课时　等差数列的概念及通项公式

题点知识巩固

1. 选 B　$n=1$ 时，$a_1=-1$，$n=2$ 时，$a_2=3-4\times2=-5$，所以公差 $d=a_2-a_1=-4$，故选 B.

2. 选 A　由题得 $2a_1+5d=4$，将 $a_1=\dfrac{1}{3}$ 代入得，$d=\dfrac{2}{3}$，则 $a_n=\dfrac{1}{3}+\dfrac{2}{3}(n-1)$. 令 $a_n=33$，得 $n=50$，故选 A.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

3. **解**：(1)设$\{a_n\}$的首项为a_1，
由$a_4=10$，$a_{10}=4$，
得$\begin{cases}a_1+3d=10,\\a_1+9d=4,\end{cases}\therefore\begin{cases}d=-1,\\a_1=13,\end{cases}\therefore a_n=-n+14$，
$\therefore a_7=-7+14=7$.
(2)$\because a_2=12$，$d=-2$，
$\therefore a_1=a_2-d=12-(-2)=14$，
$\therefore a_n=14-2(n-1)=16-2n=-20$，
$\therefore n=18$.

4. 选C　**解法一**：由题意可得$\begin{cases}a_1+(a_1+6d)=-8,\\a_1+d=2,\end{cases}$
解得$d=-3$，故选C.
解法二：$a_1+a_7=2a_4=-8$，$\therefore a_4=-4$，
$\therefore a_4-a_2=-4-2=2d$，$\therefore d=-3$，故选C.

5. **解析**：$\because$数列$\{a_n\}$是等差数列，
$\therefore 2a_n=a_{n-1}+a_{n+1}(n\geqslant 2,n\in\mathbf{N}^*)$.
$\because a_n^2=a_{n-1}+a_{n+1}(n\in\mathbf{N}^*,n\geqslant 2)$，
$\therefore a_n^2=2a_n$.
$\because a_n\neq 0$，
$\therefore a_n=2$.
答案：$a_n=2$

6. **证明**：$\because\frac{1}{a},\frac{1}{b},\frac{1}{c}$成等差数列，
$\therefore\frac{2}{b}=\frac{1}{a}+\frac{1}{c}$，$\therefore\frac{2}{b}=\frac{a+c}{ac}$，
即$2ac=b(a+c)$.
$(a+c)(a+c-2b)=(a+c)^2-2b(a+c)=(a+c)^2-2\times 2ac=a^2+c^2+2ac-4ac=(a-c)^2$.
$\because a+c$，$a+c-2b$，$a-c$均为正数，上式左右两边同时取以10为底的对数得，$\lg[(a+c)(a+c-2b)]=\lg(a-c)^2$，即$\lg(a+c)+\lg(a+c-2b)=2\lg(a-c)$，$\therefore\lg(a+c)$，$\lg(a-c)$，$\lg(a+c-2b)$成等差数列.

7. **解**：(1)证明：$\because b_{n+1}-b_n=\frac{1}{a_{n+1}-2}-\frac{1}{a_n-2}$
$=\frac{1}{\left(4-\frac{4}{a_n}\right)-2}-\frac{1}{a_n-2}=\frac{a_n}{2(a_n-2)}-\frac{1}{a_n-2}$
$=\frac{a_n-2}{2(a_n-2)}=\frac{1}{2}$，
又$b_1=\frac{1}{a_1-2}=\frac{1}{2}$，
$\therefore$数列$\{b_n\}$是首项为$\frac{1}{2}$，公差为$\frac{1}{2}$的等差数列.
(2)由(1)知，$b_n=\frac{1}{2}+(n-1)\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2}n$.
$\because b_n=\frac{1}{a_n-2}$，$\therefore a_n=\frac{1}{b_n}+2=\frac{2}{n}+2$.

提能达标过关

1. 选D　$\because a_{n+1}-a_n=-1$，
$\therefore\{a_n\}$为等差数列.
又$a_1=2$，$d=-1$，
$\therefore a_n=2+(n-1)\times(-1)=-n+3$，故选D.

2. 选C　$\because a_n=3-2n$，$\therefore a_1=1$，$a_2=-1$，
$d=a_2-a_1=-2$，故选C.

3. 选B　$\because x-1$，$x+1$，$2x+3$是等差数列的前3项，
$\therefore 2(x+1)=x-1+2x+3$，解得$x=0$.
$\therefore a_1=-1$，$a_2=1$，$a_3=3$，
$\therefore d=2$，$\therefore a_n=-1+2(n-1)=2n-3$，故选B.

4. 选A　$\because a$，b，c成等差数列，$\therefore a+c=2b$. $\because 2^{a+c}=2^a\cdot 2^c=3\times 12=36$，$2^{2b}=(2^b)^2=x^2$，$2^{a+c}=2^{2b}$，
$\therefore x^2=36$，
$\therefore x=\pm 6$. 又$\because x=2^b>0$，$\therefore x=6$，故选A.

5. 选B　因为$a_{n+1}^2-a_n^2=1$，所以数列$\{a_n^2\}$是以$a_1^2=1$为首项，1为公差的等差数列，所以$a_n^2=1+(n-1)\times 1=n$. 又$a_n>0$，所以$a_n=\sqrt{n}$. 由$\sqrt{n}<5$，解得$n<25$. 又$n\in\mathbf{N}^*$，故n的最大值为24，选B.

6. **解析**：因为$a_7=a_1+6d=a_1+2d+4d=a_3+4d$，
所以$d=\frac{a_7-a_3}{4}=2$.
答案：2

7. **解析**：$\because A$，B，C成等差数列，
$\therefore A+C=2B$，$\because A+B+C=\pi$，$\therefore B=\frac{\pi}{3}$，
$\therefore A+C=\frac{2\pi}{3}$，$\therefore\tan(A+C)=-\sqrt{3}$.
答案：$-\sqrt{3}$

8. **解析**：设等差数列$\{a_n\}$的公差为$d(d\in\mathbf{Z})$，依题意得$a_6=a_1+5d=19+5d<0$，即$d<-\frac{19}{5}$，$a_5=a_1+4d=19+4d\geqslant 0$，即$d\geqslant-\frac{19}{4}$，所以$-\frac{19}{4}\leqslant d<-\frac{19}{5}$. 又$d\in\mathbf{Z}$，所以$d=-4$.
答案：-4

9. **解**：(1)数列$\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$是等差数列，理由如下：
$\because a_1=2$，$a_{n+1}=\frac{2a_n}{a_n+2}$，$\therefore\frac{1}{a_{n+1}}=\frac{a_n+2}{2a_n}=\frac{1}{2}+\frac{1}{a_n}$，
$\therefore\frac{1}{a_{n+1}}-\frac{1}{a_n}=\frac{1}{2}$，
即$\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$是首项为$\frac{1}{a_1}=\frac{1}{2}$，公差为$d=\frac{1}{2}$的等差数列.
(2)由(1)可知，$\frac{1}{a_n}=\frac{1}{a_1}+(n-1)d=\frac{n}{2}$，$\therefore a_n=\frac{2}{n}$.

10. **解**：(1)由题意知，$a_2+a_4=2a_3=2$.
又$a_2a_4=\frac{3}{4}$，数列$\{a_n\}$单调递减，
$\therefore a_4=\frac{1}{2}$，$a_2=\frac{3}{2}$.
$\therefore$公差$d=\frac{a_4-a_2}{2}=-\frac{1}{2}$，$a_1=a_2-d=2$.
$\therefore a_n=2+(n-1)\times\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{2}n+\frac{5}{2}$.
(2)由(1)知，$a_1a_n=2a_n$，则
当$n\geqslant 2$时，$2a_n-2a_{n-1}=2(a_n-a_{n-1})=2\times\left(-\frac{1}{2}\right)=-1$，
当$n=1$时，$2a_1=4$，
$\therefore$数列$\{a_1a_n\}$是首项为4，公差为-1的等差数列.

第13课时　等差数列的性质

题点知识巩固

1. 选D　$\because m+2n=8$，$2m+n=10$，$\therefore 3m+3n=18$，
$\therefore m+n=6$，$\therefore m$和n的等差中项是$\frac{m+n}{2}=3$，故选D.

2. 选C　由已知，得$5a_8=120$，所以$a_8=24$，
所以$2a_{10}-a_{12}=a_8+a_{12}-a_{12}=a_8=24$，故选C.

3. **解析**：$\because 5+8=2+11=3+10$，
$\therefore a_2+a_3+a_{10}+a_{11}=2(a_5+a_8)$，
$\therefore a_5+a_8=\frac{1}{2}\times 36=18$.
答案：18

4. **解**：解法一：设公差为d. 由已知，可得
$\begin{cases}3a_1+9d=39,\\3a_1+12d=33,\end{cases}$即$\begin{cases}a_1+3d=13,\\a_1+4d=11.\end{cases}$所以$\begin{cases}d=-2,\\a_1=19.\end{cases}$
而$a_3+a_6+a_9=3a_1+15d=57-30=27$.
解法二：由已知，得
$\begin{cases}a_2+a_5+a_8=33,①\\a_1+a_4+a_7=39,②\end{cases}$
由①－②，得$3d=-6$.
从而$a_3+a_6+a_9=a_2+a_5+a_8+3d=33-6=27$.
解法三：由$a_1+a_7=2a_4$，$a_2+a_8=2a_5$，
可得$a_4=13$，$a_5=11$.
所以$a_6=2a_5-a_4=9$，
从而$a_3+a_6+a_9=3a_6=27$.

5. **解**：设这三个数为$a-d$，a，$a+d$，
则$\begin{cases}a-d+a+a+d=6,\\(a-d)^2+a^2+(a+d)^2=44,\end{cases}$整理得$\begin{cases}a=2,\\d=\pm 4.\end{cases}$
$\therefore$这三个数为-2，2，6或6，2，-2.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

6. **解**：设这四个数为 $a-3d,a-d,a+d,a+3d$，

则 $\begin{cases}a-3d+a-d+a+d+a+3d=28,\\(a-d)(a+d)=40,\end{cases}$

解得 $\begin{cases}a=7,\\d=3\end{cases}$ 或 $\begin{cases}a=7,\\d=-3.\end{cases}$

所以这四个数依次为 $-2,4,10,16$ 或 $16,10,4,-2$.

7. 选 D　设等差数列 $\{a_n\}$ 的首项为 a_1，公差为 d，依题意有 $\begin{cases}2a_1+d=3a_1+9d,\\2a_1+d=\frac{5}{2},\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a_1=\frac{4}{3},\\d=-\frac{1}{6},\end{cases}$ 即甲得 $\frac{4}{3}$ 钱，故选 D.

8. **解**：设从第一年起，第 n 年的利润为 a_n 万元，

则 $a_1=200,a_{n+1}-a_n=-20(n\in\mathbf{N}^*)$，

∴每年的利润构成一个等差数列 $\{a_n\}$，

从而 $a_n=a_1+(n-1)d=200+(n-1)\times(-20)=220-20n$.

若 $a_n<0$，则该公司经销这一产品将亏损.

∴由 $a_n=220-20n<0$，得 $n>11$，

即从第 12 年起，该公司经销此产品将亏损.

提能达标过关

1. 选 B　解法一：设等差数列的公差为 d，则 $a_3+a_5=2a_1+6d=4+6d=10$，所以 $d=1,a_7=a_1+6d=2+6=8$.

解法二：由等差数列的性质可得 $a_1+a_7=a_3+a_5=10$，又 $a_1=2$，所以 $a_7=8$，故选 B.

2. 选 A　由 $a_1+a_2+a_3=15$，得 $a_2=5$，所以 $a_1+a_3=10$. 又 $a_1a_2a_3=80$，所以 $a_1a_3=16$，所以 $a_1=2,a_3=8$ 或 $a_1=8,a_3=2$. 又等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为正数，所以 $\{a_n\}$ 是递增数列，所以 $a_1=2,a_3=8$，所以等差数列 $\{a_n\}$ 的公差 $d=a_2-a_1=5-2=3$，所以 $a_{11}+a_{12}+a_{13}=3a_{12}=3(a_1+11d)=105$，故选 A.

3. 选 C　设 $c_n=a_n+b_n$，由于 $\{a_n\},\{b_n\}$ 都是等差数列，则 $\{c_n\}$ 也是等差数列，且 $c_1=a_1+b_1=25+75=100$，

$c_2=a_2+b_2=100$，

∴$\{c_n\}$ 的公差 $d=c_2-c_1=0$.

∴$c_{37}=100$，故选 C.

4. 选 D　通项公式为 $a_n=-24+(n-1)d$.

则由 $\begin{cases}a_9\leqslant0,\\a_{10}>0,\end{cases}$ 得 $\begin{cases}-24+8d\leqslant0,\\-24+9d>0,\end{cases}$

解得 $\frac{8}{3}<d\leqslant3$，故选 D.

5. 选 B　由题意知人口总数可以看成是一个以 57 为首项，d 为公差的等差数列 $\{a_n\}$，则 $a_1=57,a_{13}=57.24$，则由 $a_{13}=a_1+12d$，得 $57.24=57+12d$，解得 $d=0.02$，于是 2016 年 10 月末的人口总数是 $a_{11}=a_1+10d=57+0.2=57.2$（万），故选 B.

6. **解析**：∵$a_{19}+a_{20}=a_9+10d+a_{10}+10d=a_9+a_{10}+20d$，

∴$20d=b-a$，∴$d=\frac{b-a}{20}$，

∴$a_{59}+a_{60}=a_9+50d+a_{10}+50d=a_9+a_{10}+100d=a+5(b-a)=5b-4a$.

答案：$5b-4a$

7. **解析**：设新的等差数列的公差为 d. 由 $a_1=8,a_5=2$，

得 $a_3=\frac{a_1+a_5}{2}=\frac{8+2}{2}=5,a_2=\frac{a_1+a_3}{2}=\frac{8+5}{2}=\frac{13}{2}$，

所以 $d=\frac{a_2-a_1}{2}=\frac{\frac{13}{2}-8}{2}=-\frac{3}{4}$.

答案：$-\frac{3}{4}$

8. **解析**：由 $a_{n+1}^2=a_n^2+4$，得 $a_{n+1}^2-a_n^2=4$，∴数列 $\{a_n^2\}$ 是首项为 1，公差为 4 的等差数列，∴$a_n^2=1+(n-1)\times4=4n-3$. ∵$a_n>0$，∴$a_n=\sqrt{4n-3}$.

答案：$\sqrt{4n-3}$

9. **解**：∵$a_{n+1}+a_n=2n-44,a_1=-23$，

∴$a_2=2\times1-44-a_1=-19$，

又 $a_n+a_{n-1}=2(n-1)-44$，

∴$a_{n+1}-a_{n-1}=2$.

∴$a_1,a_3,a_5,\cdots$ 组成以 -23 为首项，以 2 为公差的等差数列；

$a_2,a_4,a_6,\cdots$ 组成以 -19 为首项，以 2 为公差的等差数列.

∴$a_{2k-1}=-23+(k-1)\times2=(2k-1)-24$，

$a_{2k}=-19+(k-1)\times2=2k-21$，

∴$a_n=\begin{cases}n-24(n\text{ 为奇数}),\\n-21(n\text{ 为偶数}).\end{cases}$

10. **解**：设构成等差数列的这四个数分别为 $a-d,a,a+d,a+2d$.

由题意可得 $\begin{cases}a-d+a+a+d=15,\\(a-d)(a+2d)=27,\end{cases}$

解得 $\begin{cases}a=5,\\d=2\end{cases}$ 或 $\begin{cases}a=5,\\d=\frac{1}{2}.\end{cases}$

所以这四个数分别是 $3,5,7,9$ 或 $\frac{9}{2},5,\frac{11}{2},6$.

第 14 课时　素养提升——数列与等差数列

素养培优提能

1. 选 C　对于 A，$a_n=\frac{1}{n},n\in\mathbf{N}^*$，它是无穷递减数列；对于 B，$a_n=-n,n\in\mathbf{N}^*$，它也是无穷递减数列；D 是有穷数列；对于 C，$a_n=-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1},n\in\mathbf{N}^*$，它是无穷递增数列，故选 C.

2. 选 A　新数列的公差 $d=\frac{1}{2}\left(-3\frac{1}{2}+5\right)=\frac{3}{4}$，

∴$a_n=-5+(n-1)\times\frac{3}{4}=\frac{3}{4}n-\frac{23}{4}$，故选 A.

3. 选 C　∵$f(x)=(x-1)^2+n(x\in[-1,3])$，∴$a_n=n,b_n=n+4$，∴$c_n=b_n^2-a_n\cdot b_n=b_n(b_n-a_n)=4(n+4)=4n+16$. $c_{n+1}-c_n=4(n+1)+16-(4n+16)=4$，∴$\{c_n\}$ 为公差不为 0 的等差数列，故选 C.

4. 选 C　解法一：因为 $\{a_n\}$ 是等差数列，则 $a_n=a_1+(n-1)d$，所以 $2a_1a_n=2a_1^2+2a_1(n-1)d$. 又 $\{2a_1a_n\}$ 为递减数列，所以 $2a_1a_n-2a_1a_{n+1}=2a_1(a_n-a_{n+1})>0$，则 $2a_1\times(-d)>0$，即 $a_1d<0$，故选 C.

解法二：当 $a_1>0$ 时，若数列 $\{2a_1a_n\}$ 为递减数列，则数列 $\{a_n\}$ 为递减数列，所以 $d<0$，于是 $a_1d<0$；当 $a_1<0$ 时，若数列 $\{2a_1a_n\}$ 为递减数列，则数列 $\{a_n\}$ 为递增数列，所以 $d>0$，于是 $a_1d<0$，故选 C.

5. 选 A　因为对任意的 $n\in\mathbf{N}^*$，都有 $b_n\geqslant b_8$ 成立，且 $b_n=\frac{1+a_n}{a_n}$，所以 $\frac{1}{a_n}\geqslant\frac{1}{a_8}$. 又数列 $\{a_n\}$ 的公差为 1，所以数列 $\{a_n\}$ 为递增数列，所以 $\begin{cases}a_8<0,\\a_9>0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}a+7<0,\\a+8>0,\end{cases}$ 解得 $-8<a<-7$，故选 A.

6. **解析**：∵$a_5+a_7=2a_6=4,a_6+a_8=2a_7=-2$，

∴$a_6=2,a_7=-1$，∴$d=a_7-a_6=-3$，

∴$a_n=a_6+(n-6)d=2+(n-6)\times(-3)=-3n+20$.

令 $a_n\geqslant0$，解得 $n\leqslant\frac{20}{3}$，即 $n=1,2,3,\cdots,6$，

故该数列的正数项共有 6 项.

答案：6

7. **解析**：因为 $a_n=\frac{n+1}{3n-16}$，所以数列 $\{a_n\}$ 的最小项必为 $a_n<0$，即 $\frac{n+1}{3n-16}<0$，$3n-16<0$，从而 $n<\frac{16}{3}$. 又 $n\in\mathbf{N}^*$，所以当 $n=5$ 时，a_n 的值最小.

答案：5

8. **解析**：设从 2016 年年底开始，n 年后该市每年新建住房的面积为 a_n 万平方米. 由题意，得 $\{a_n\}$ 是等差数列，首项 $a_1=450$，公差 $d=50$，所以 $a_n=a_1+(n-1)d=400+50n$. 令 $400+50n>820$，解得 $n>\frac{42}{5}$. 由于 $n\in\mathbf{N}^*$，则 $n\geqslant9$. 所以该市在 2025 年新建住房的面积开始大于 820 万平方米.

答案：2025

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

9. **解**：设等差数列$\{a_n\}$的公差为d，

由已知得$\begin{cases}a_1+a_5+a_9=93,\\a_{15}>100,\\a_{14}\leqslant 100,\end{cases}$即$\begin{cases}a_1+4d=31,\\a_1+14d>100,\\a_1+13d\leqslant 100,\end{cases}$

解得$\frac{69}{10}<d\leqslant\frac{23}{3}$.

$\because d\in\mathbf{Z}$，$\therefore d=7$，

$\therefore a_1=3$，$\therefore a_n=3+(n-1)\times 7=7n-4$.

10. **解**：设在相同的时间内，从低到高每档产品的产量分别为a_1，a_2，…，a_{10}，每件利润分别为b_1，b_2，…，b_{10}，

则$\{a_n\}$，$\{b_n\}$均为等差数列，且$a_1=60$，$d_1=-3$，$b_1=8$，$d_2=2$，

则$a_n=60-3(n-1)=-3n+63$，

$b_n=8+2(n-1)=2n+6$，

所以利润$f(n)=a_nb_n=(-3n+63)(2n+6)=-6n^2+108n+378=-6(n-9)^2+864$.

显然，当$n=9$时，$f(n)_{\max}=f(9)=864$.

即在相同的时间内生产第9档次的产品可以获得最大利润.

2.3　等差数列的前n项和

第15课时　等差数列的前n项和

题点知识巩固

1. 选A　$a_m=a_1+a_2+\cdots+a_9=9a_1+\frac{9\times 8}{2}d=36d=a_{37}$，

$\therefore m=37$，故选A.

2. **解**：由题意知$S_6=-3$，$\therefore a_6=S_6-S_5=-8$，

$\therefore\begin{cases}5a_1+10d=5,\\a_1+5d=-8,\end{cases}$解得$\begin{cases}a_1=7,\\d=-3,\end{cases}$

$\therefore S_n=7n+\frac{n(n-1)}{2}\times(-3)=-\frac{3}{2}n^2+\frac{17}{2}n$.

3. **解**：设等差数列$\{a_n\}$的公差为d，

则$\begin{cases}a_1+2d=7,\\a_1+4d+a_1+6d=26,\end{cases}$即$\begin{cases}a_1+2d=7,\\a_1+5d=13,\end{cases}$

解得$\begin{cases}a_1=3,\\d=2.\end{cases}$

$\therefore$数列$\{a_n\}$的通项公式为$a_n=3+(n-1)\times 2=2n+1$，

数列$\{a_n\}$的前n项和为$S_n=n\times 3+\frac{n(n-1)}{2}\times 2=n^2+2n$.

4. 选C　$\because S_n=n^2+1$，$\therefore a_1=S_1=2$.

当$n\geqslant 2$时，$a_n=S_n-S_{n-1}=n^2+1-(n-1)^2-1=2n-1$.

当$n=1$时，$a_1=2$不适合.

$\therefore a_n=\begin{cases}2,n=1,\\2n-1,n\geqslant 2,\end{cases}$故选C.

5. **解**：(1)$\because S_n=3n^2-2n$，

$\therefore$当$n=1$时，$a_1=S_1=3-2=1$；

当$n\geqslant 2$时，$a_n=S_n-S_{n-1}=3n^2-2n-3(n-1)^2+2(n-1)=6n-5$，

又当$n=1$时，$a_n=6n-5$也成立，

$\therefore a_n=6n-5$.

(2)$\because S_n=2^n+3$，

$\therefore$当$n=1$时，$a_1=S_1=2+3=5$；

当$n\geqslant 2$时，$a_n=S_n-S_{n-1}=2^n+3-2^{n-1}-3=2^{n-1}$，

又当$n=1$时，$a_1=5$不适合.

$\therefore a_n=\begin{cases}5,n=1,\\2^{n-1},n\geqslant 2.\end{cases}$

提能达标过关

1. 选C　设等差数列$\{a_n\}$的公差为d，

则$\begin{cases}8a_1+\frac{8\times 7}{2}d=30,\\4a_1+\frac{4\times 3}{2}d=7,\end{cases}$

解得$\begin{cases}a_1=\frac{1}{4},\\d=1.\end{cases}$

$\therefore a_4=\frac{1}{4}+3\times 1=\frac{13}{4}$，故选C.

2. 选A　由$S_4=32$，得$2(a_2+a_3)=32$，$\therefore a_2+a_3=16$，又$\frac{a_2}{a_3}=\frac{1}{3}$，$\therefore a_2=4$，$a_3=12$，$\therefore d=a_3-a_2=8$，故选A.

3. 选D　由$a_n=a_1+(n-1)\times 2=11$，得$a_1+a_n=11-2(n-1)+11=22-2(n-1)$，又$S_n=\frac{n(a_1+a_n)}{2}=35$，则$\frac{n[22-2(n-1)]}{2}=35$，解得$n=5$或$n=7$. 当$n=5$时，$a_1=3$；当$n=7$时，$a_1=-1$，故选D.

4. 选B　$n=1$时，$a_1=S_1=-1$，

$n\geqslant 2$时，$a_n=S_n-S_{n-1}=(n-1)^2-n^2=1-2n$，$n=1$符合，故$a_n=1-2n$，故选B.

5. 选C　$\because 10a_1+\frac{10\times 9}{2}d=4\left(5a_1+\frac{5\times 4}{2}d\right)$，

$\therefore 5d=10a_1$，即$\frac{a_1}{d}=\frac{1}{2}$，故选C.

6. **解析**：由$a_1=1$，$a_n-a_{n-1}=\frac{1}{2}(n\geqslant 2)$，

可知数列$\{a_n\}$是首项为1，公差为$\frac{1}{2}$的等差数列，

故$S_9=9+\frac{9\times(9-1)}{2}\times\frac{1}{2}=9+18=27$.

答案：27

7. **解析**：对任意正整数n都有$T_n=1-a_n$，

$n\geqslant 2$时，$T_n=1-\frac{T_n}{T_{n-1}}$，化为$\frac{1}{T_n}-\frac{1}{T_{n-1}}=1$.

$n=1$时，$T_1=1-T_1$，可得$T_1=\frac{1}{2}$，$\frac{1}{T_1}=2$，

可得$\frac{1}{T_n}=2+(n-1)=n+1$，$\therefore T_n=\frac{1}{n+1}$.

答案：$\frac{1}{n+1}$

8. **解析**：因为$S_9=\frac{9(a_1+a_9)}{2}=9a_5=18$，所以$a_5=2$，

又$S_n=\frac{n(a_5+a_{n-4})}{2}=\frac{n(2+30)}{2}=240$，所以$n=15$.

答案：15

9. **解**：(1)$\because S_4=4a_1+\frac{4\times(4-1)}{2}d=4a_1+6d=2+6d=20$，

$\therefore d=3$.

故$S_6=6a_1+\frac{6\times(6-1)}{2}d=6a_1+15d=3+15\times 3=48$.

(2)设$\{a_n\}$的首项为a_1，公差为d，

则$\begin{cases}a_1+9d=30,\\a_1+19d=50,\end{cases}$解得$\begin{cases}a_1=12,\\d=2.\end{cases}$

由$S_n=na_1+\frac{n(n-1)}{2}d$，$S_n=242$，

得方程$12n+\frac{n(n-1)}{2}\times 2=242$，

解得$n=11$或$n=-22$(舍去). 故$n=11$.

(3)设等差数列公差为d，则

$S_3=3a_1+\frac{3\times 2}{2}d=3a_1+3d=3$，即$a_1+d=1$，①

$S_6=6a_1+\frac{6\times 5}{2}d=6a_1+15d=24$，即$2a_1+5d=8$. ②

联立①②两式，解得$a_1=-1$，$d=2$，

故$a_9=a_1+8d=-1+8\times 2=15$.

10. **解**：(1)由已知得$a_1=a-1$，$a_2=4$，$a_3=2a$，

又$a_1+a_3=2a_2$，$\therefore(a-1)+2a=8$，即$a=3$，

$\therefore a_1=2$，公差$d=a_2-a_1=2$.

由$S_k=ka_1+\frac{k(k-1)}{2}d$，得$2k+\frac{k(k-1)}{2}\times 2=2\ 550$，

即$k^2+k-2\ 550=0$，

解得$k=50$或$k=-51$(舍去)，

$\therefore a=3$，$k=50$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

(2)由 $S_n=na_1+\frac{n(n-1)}{2}d$,

得 $S_n=2n+\frac{n(n-1)}{2}\times 2=n^2+n$.

$\therefore b_n=\frac{S_n}{n}=n+1$,$\therefore\{b_n\}$是等差数列,

$\therefore b_3+b_7+b_{11}+\cdots+b_{4n-1}=(3+1)+(7+1)+(11+1)+\cdots+(4n-1+1)=\frac{n(4+4n)}{2}=2n^2+2n$.

第 16 课时　等差数列前 n 项和的性质及应用

题点知识巩固

1. 选 C　$S_7=\frac{7(a_1+a_7)}{2}=\frac{7(a_2+a_6)}{2}=\frac{7(3+11)}{2}=49$,故选 C.

2. 选 C　设等差数列的首项为 a_1,公差为 d,则 $\begin{cases}5a_1+20d=15,\\5(a_1+d)+20d=30,\end{cases}$即 $\begin{cases}5a_1+20d=15,\\5a_1+25d=30,\end{cases}$解得 $d=3$,故选 C.

3. 选 A　因为 S_n 为等差数列$\{a_n\}$的前 n 项和,所以数列$\left\{\frac{S_n}{n}\right\}$是等差数列.设数列$\left\{\frac{S_n}{n}\right\}$的公差为 d',则由$\frac{S_{2\,007}}{2\,007}-\frac{S_{2\,005}}{2\,005}=2$,得 $2d'=2$,解得 $d'=1$,所以$\frac{S_{2\,016}}{2\,016}=\frac{S_1}{1}+2\,015d'=a_1+2\,015d'=-2\,014+2\,015=1$,所以$S_{2\,016}=2\,016$,故选 A.

4. 选 B　解法一:由 $\begin{cases}a_8=a_1+7d=1,\\S_{16}=16a_1+\frac{16\times 15}{2}d=0,\end{cases}$解得 $\begin{cases}a_1=15,\\d=-2,\end{cases}$则 $S_n=-n^2+16n=-(n-8)^2+64$,则当 $n=8$ 时,S_n 取得最大值,故选 B.

解法二:因为$\{a_n\}$是等差数列,所以 $S_{16}=8(a_1+a_{16})=8(a_8+a_9)=0$,则 $a_9=-a_8=-1$,即数列$\{a_n\}$的前 8 项是正数,从第 9 项开始是负数,所以$(S_n)_{\max}=S_8$,故选 B.

5. 选 A　由题设,知 $\begin{cases}a_1=-11,\\2a_1+8d=-6,\end{cases}$解得 $d=2$,则 $S_n=-11n+\frac{n(n-1)}{2}\times 2=n^2-12n$,所以当 $n=6$ 时,S_n 取得最小值,故选 A.

6. 解:$a_1=S_1=-\frac{3}{2}\times 1^2+\frac{205}{2}\times 1=101$,

当 $n\geqslant 2$ 时,$a_n=S_n-S_{n-1}=-3n+104$,

$\because n=1$ 也适合上式,

$\therefore$数列$\{a_n\}$的通项公式为 $a_n=-3n+104(n\in\mathbf{N}_+)$.

由 $a_n=-3n+104\geqslant 0$,得 $n\leqslant 34\frac{2}{3}$,

即当 $n\leqslant 34$ 时,$a_n>0$;当 $n\geqslant 35$ 时,$a_n<0$.

当 $n\leqslant 34$ 时,

$T_n=|a_1|+|a_2|+\cdots+|a_n|=a_1+a_2+\cdots+a_n=S_n=-\frac{3}{2}n^2+\frac{205}{2}n$,

当 $n\geqslant 35$ 时,

$T_n=|a_1|+|a_2|+\cdots+|a_{34}|+|a_{35}|+\cdots+|a_n|$

$=(a_1+a_2+\cdots+a_{34})-(a_{35}+a_{36}+\cdots+a_n)$

$=2(a_1+a_2+\cdots+a_{34})-(a_1+a_2+\cdots+a_n)$

$=2S_{34}-S_n$

$=2\left(-\frac{3}{2}\times 34^2+\frac{205}{2}\times 34\right)-\left(-\frac{3}{2}n^2+\frac{205}{2}n\right)$

$=\frac{3}{2}n^2-\frac{205}{2}n+3\,502$.

故 $T_n=\begin{cases}-\frac{3}{2}n^2+\frac{205}{2}n,n\leqslant 34,\\\frac{3}{2}n^2-\frac{205}{2}n+3\,502,n\geqslant 35.\end{cases}$

提能达标过关

1. 选 B　根据等差数列的性质可知 $a_1+a_2+a_3+a_4$,$a_5+a_6+a_7+a_8$,$a_9+a_{10}+a_{11}+a_{12}$,$a_{13}+a_{14}+a_{15}+a_{16}$构成等差数列,则 $a_5+a_6+a_7+a_8+a_9+a_{10}+a_{11}+a_{12}=a_1+a_2+a_3+a_4+a_{13}+a_{14}+a_{15}+a_{16}=80$,所以数列$\{a_n\}$的前 16 项和等于 160,故选 B.

2. 选 A　解法一:$\because a_1=29$,$S_{10}=S_{20}$,

$\therefore 10a_1+\frac{10\times 9}{2}d=20a_1+\frac{20\times 19}{2}d$,解得 $d=-2$,

$\therefore S_n=29n+\frac{n(n-1)}{2}\times(-2)=-n^2+30n=-(n-15)^2+225$.

$\therefore$当 $n=15$ 时,S_n 取得最大值,故选 A.

解法二:由 $S_{10}=S_{20}$ 及 S_n 为关于 n 的二次函数可知,S_n 的对称轴为 $n=\frac{10+20}{2}=15$,$\therefore S_{15}$ 最大,故选 A.

3. 选 C　由 $a_{n+1}-a_n=2$ 可得数列$\{a_n\}$是等差数列,公差 $d=2$,又 $a_1=-5$,所以 $a_n=2n-7$,所以 $|a_1|+|a_2|+|a_3|+|a_4|+|a_5|+|a_6|=5+3+1+1+3+5=18$,故选 C.

4. 选 C　由 $S_{2\,011}=S_{2\,014}$,$S_k=S_{2\,009}$,可得 $\frac{2\,011+2\,014}{2}=\frac{2\,009+k}{2}$,解得 $k=2\,016$,故选 C.

5. 选 D　因为 S_n 是等差数列$\{a_n\}$的前 n 项和,所以 S_{10},$S_{20}-S_{10}$,$S_{30}-S_{20}$ 成等差数列,所以 $S_{10}+(S_{30}-S_{20})=2(S_{20}-S_{10})$,所以 $12+(S_{30}-17)=2\times(17-12)$,解得 $S_{30}=15$,故选 D.

6. **解析**:因为 S_n 是等差数列$\{a_n\}$的前 n 项和,所以数列$\left\{\frac{S_n}{n}\right\}$是等差数列,所以 $\frac{S_m}{m}+\frac{S_{m+2}}{m+2}=\frac{2S_{m+1}}{m+1}$,即 $\frac{-2}{m}+\frac{3}{m+2}=0$,解得 $m=4$.

答案:4

7. **解析**:$\because$在前 m 项中偶数项之和为 $S_{偶}=63$,$\therefore$奇数项之和为 $S_{奇}=135-63=72$,设等差数列$\{a_n\}$的公差为 d,则 $S_{奇}-S_{偶}=\frac{2a_1+(m-1)d}{2}=72-63=9$.又 $a_m=a_1+d(m-1)$,$\therefore\frac{a_1+a_m}{2}=9$,$\because a_m-a_1=14$,$\therefore a_1=2$,$a_m=16$.

$\because\frac{m(a_1+a_m)}{2}=135$,$\therefore m=15$,$\therefore d=\frac{14}{15-1}=1$,

$\therefore a_{100}=a_1+99d=101$.

答案:101

8. **解析**:设等差数列$\{a_n\}$的公差为 d,由题意得 $\begin{cases}a_3=7,\\2a_4=10,\end{cases}$故 $d=a_4-a_3=-2$,$a_n=a_3+(n-3)d=7-2(n-3)=13-2n$.令 $a_n>0$,得 $n<6.5$.所以在等差数列$\{a_n\}$中,其前 6 项均为正,其他各项均为负,于是使 S_n 取到最大值的 n 的值为 6.

答案:6

9. 解:(1)$\because S_n=2n^2-30n$,

$\therefore$当 $n=1$ 时,$a_1=S_1=-28$.

当 $n\geqslant 2$ 时,$a_n=S_n-S_{n-1}=(2n^2-30n)-[2(n-1)^2-30(n-1)]=4n-32$.

又 $a_1=-28$ 满足此式.

$\therefore a_n=4n-32$,$n\in\mathbf{N}^*$.

(2)解法一:$\because S_n=2n^2-30n=2\left(n-\frac{15}{2}\right)^2-\frac{225}{2}$,

$\therefore$当 $n=7$ 或 8 时,S_n 最小,且最小值为 $S_7=S_8=-112$.

解法二:$\because a_n=4n-32$,

$\therefore a_1<a_2<\cdots<a_7<0$,$a_8=0$,

当 $n\geqslant 9$ 时,$a_n>0$,

$\therefore$当 $n=7$ 或 8 时,S_n 最小,且最小值为 $S_7=S_8=-112$.

10. 解:(1)$\because 4S_n=a_n(a_n+2)$,

$\therefore$当 $n=1$ 时,$4a_1=a_1(a_1+2)$.

解得 $a_1=2$ 或 $a_1=0$(舍);

当 $n\geqslant 2$ 时,$4a_n=4S_n-4S_{n-1}=a_n(a_n+2)-a_{n-1}(a_{n-1}+2)=a_n^2+2a_n-a_{n-1}^2-2a_{n-1}$,

$\therefore a_n^2-2a_n-a_{n-1}^2-2a_{n-1}=0$,

$\therefore(a_n+a_{n-1})(a_n-a_{n-1}-2)=0$.

又 $a_n+a_{n-1}\neq 0$,

$\therefore a_n-a_{n-1}-2=0$,即 $a_n-a_{n-1}=2$,

$\therefore$数列$\{a_n\}$为首项为 2,公差为 2 的等差数列,

$\therefore a_n=2n$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

(2)由(1)知，$b_n=2n+\frac{1}{n(n+1)}=2n+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$，

$\therefore T_n=n^2+n+1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$

$=n^2+n+\frac{n}{n+1}$.

2.4　等比数列

第 17 课时　等比数列的概念与通项公式

题点知识巩固

1. 选 D　设数列$\{a_n\}$的公比为 q，则 $q>0$. 由已知，得 $a_1q^2\cdot a_1q^8=2(a_1q^4)^2$，即 $q^2=2$. 又 $q>0$，所以 $q=\sqrt{2}$，所以 $a_1=\frac{a_2}{q}=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，故选 D.

2. 选 D　$\sqrt[k]{a_1a_2\cdots a_k}=a_1q^{\frac{1+2+3+\cdots+(k-1)}{k}}=a_1q^{\frac{k-1}{2}}=a_1q^{10}$，

∵$a_1>0$，$q\neq1$，∴$\frac{k-1}{2}=10$，∴$k=21$，故选 D.

3. **解**：(1)设等比数列$\{a_n\}$的公比为 q，

则 $a_4=a_1q^3=2q^3=16$，解得 $q=2$.

∴数列$\{a_n\}$的通项公式为 $a_n=2^n$.

(2)由(1)知，$a_3=2^3=8$，$a_5=2^5=32$.

依题意，$b_3=8$，$b_5=32$.

设等差数列$\{b_n\}$的公差为 d，

则 $b_5=b_3+2d=8+2d=32$.

∴$d=12$，可得 $b_n=b_3+(n-3)d=8+12(n-3)=12n-28$，

∴$b_1=-16$，代入前 n 项和公式得，$S_n=6n^2-22n$.

4. 选 B　因为 b 是 -1，-9 的等比中项，所以 $b^2=9$，$b=\pm3$. 又由等比数列奇数项符号相同，得 $b<0$，故 $b=-3$，而 b 又是 a，c 的等比中项，故 $b^2=ac$，即 $ac=9$，故选 B.

5. **解**：设等比数列$\{a_n\}$的首项为 a_1，公比为 q.

因为 $a_2-a_5=42$，所以 $q\neq1$，

由已知得 $\begin{cases}a_1+a_1q+a_1q^2=168,\\ a_1q-a_1q^4=42,\end{cases}$

即 $\begin{cases}a_1(1+q+q^2)=168, & ①\\ a_1q(1-q^3)=42, & ②\end{cases}$

因为 $1-q^3=(1-q)(1+q+q^2)$，

所以由②除以①，得 $q(1-q)=\frac{1}{4}$.

所以 $q=\frac{1}{2}$. 所以 $a_1=\frac{42}{\frac{1}{2}-\left(\frac{1}{2}\right)^4}=96$.

设 G 是 a_5，a_7 的等比中项，

则 $G^2=a_5a_7=a_1q^4\cdot a_1q^6=a_1^2q^{10}=96^2\times\left(\frac{1}{2}\right)^{10}=9$，

即 $G=\pm3$.

所以 a_5 与 a_7 的等比中项是 ±3.

6. 选 D　A 选项中，由于等比数列中的各项都不能为 0，所以该数列不是等比数列；B 选项中，$\frac{4^2}{2^2}\neq\frac{6^2}{4^2}$，所以该数列不是等比数列；C 选项中，当 $q=1$ 时，数列为 0，0，0，0，…，不是等比数列；D 选项中的数列是首项为 $\frac{1}{a}$，公比为 $\frac{1}{a}$ 的等比数列，故选 D.

7. **解**：∵$S_n=2a_n+1$，

∴$S_{n+1}=2a_{n+1}+1$.

∴$a_{n+1}=S_{n+1}-S_n=(2a_{n+1}+1)-(2a_n+1)$

$=2a_{n+1}-2a_n$.

∴$a_{n+1}=2a_n$，

又∵$S_1=2a_1+1=a_1$，∴$a_1=-1\neq0$.

又由 $a_{n+1}=2a_n$ 知 $a_n\neq0$，

∴$\frac{a_{n+1}}{a_n}=2$，∴$\{a_n\}$是以 -1 为首项，2 为公比的等比数列.

其通项公式 $a_n=-1\times2^{n-1}=-2^{n-1}$.

提能达标过关

1. 选 B　对于①，因为等比数列中的各项都不为 0，所以①不正确；对于②，因为等比数列的公比不为 0，所以②不正确；对于③，若一个常数列是等比数列，则这个常数不为 0，根据等比数列的定义知此数列的公比为 1，所以③正确；对于④，只有当 a，b，c 都不为 0 时，a，b，c 才成等比数列，所以④不正确. 因此，正确的说法只有 1 个，故选 B.

2. 选 D　由 $a_{n+1}=4a_n+6$ 可得 $a_{n+1}+2=4a_n+8=4(a_n+2)$，因此 $\frac{a_{n+1}+2}{a_n+2}=4$，又 $a_1>0$，所以 $a_n>0$，从而 $a_n+2>0(n\in\mathbf{N}^*)$，故$\{a_n+2\}$是等比数列，故选 D.

3. 选 C　由题意，知 $(a+1)^2=(a-1)(a+4)$，解得 $a=5$，所以 $\frac{a+1}{a-1}=\frac{5+1}{5-1}=\frac{3}{2}$. 又 $a-1=4$，所以数列$\{a_n\}$是首项为 4，公比为 $\frac{3}{2}$ 的等比数列，所以 $a_n=4\times\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}$，故选 C.

4. 选 B　设数列$\{a_n\}$的公比为 q，由 $a_na_{n+1}=16^n$，得 $a_{n+1}a_{n+2}=16^{n+1}$，两式相除得，$\frac{a_{n+1}a_{n+2}}{a_na_{n+1}}=\frac{16^{n+1}}{16^n}=16$，

∴$q^2=16$，又 $a_na_{n+1}=16^n$，可知公比 q 为正数，∴$q=4$，故选 B.

5. 选 B　依题意 $a_k^2=a_1a_{2k}$，即$[9+(k-1)]^2=9\times[9+(2k-1)]$，整理得 $k^2-2k-8=0$，解得 $k=4(k=-2$ 舍去)，故选 B.

6. **解析**：依题意设原来的三个数依次为 $\frac{a}{q}$，a，aq. ∵$\frac{a}{q}\cdot a\cdot aq=512$，∴$a=8$. 又第一个数与第三个数各减去 2 后的三个数成等差数列，∴$\left(\frac{a}{q}-2\right)+(aq-2)=2a$，∴$2q^2-5q+2=0$，∴$q=2$ 或 $q=\frac{1}{2}$，∴原来的三个数为 4，8，16 或 16，8，4，∵$4+8+16=16+8+4=28$，∴原来的三个数的和等于 28.

答案：28

7. **解析**：①中，$\{a_n^2\}$是以 a_1^2 为首项，q^2 为公比的等比数列，故①正确；②中，当数列$\{a_n\}$的公比为 -1 时，$a_n+a_{n+1}=0$，而等比数列各项均不为 0，故②错误；③中，$\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$是以 $\frac{1}{a_1}$ 为首项，$\frac{1}{q}$ 为公比的等比数列，故③正确；④中，$\{\lg|a_n|\}$是以 $\lg|a_1|$ 为首项，$\lg|q|$ 为公差的等差数列，故④正确；⑤中，$\{a_n\cdot a_{n+1}\}$是以 a_1^2q 为首项，q^2 为公比的等比数列，故⑤正确. 故正确的说法有 4 个.

答案：4

8. **解析**：设数列$\{a_n\}$的公差为 d，则 $a_3=a_1+2d$，$a_5=a_1+4d$. 由已知得 $(a_3+3)^2=(a_1+1)(a_5+5)$，

∴$(a_1+2d+3)^2=(a_1+1)(a_1+4d+5)$.

解得 $d=-1$. ∴$q=\frac{a_3+3}{a_1+1}=\frac{a_1-2+3}{a_1+1}=1$.

答案：1

9. **解**：设数列$\{a_n\}$的公比为 q.

∵$a_5^2=a_{10}$，$2(a_n+a_{n-2})=5a_{n-1}$，

∴$\begin{cases}a_1^2\cdot q^8=a_1\cdot q^9, & ①\\ 2(q^2+1)=5q, & ②\end{cases}$

由①，得 $a_1=q$，由②，得 $q=2$ 或 $q=\frac{1}{2}$，

又数列$\{a_n\}$为递增数列，∴$a_1=q=2$，∴$a_n=2^n$.

10. **解**：(1)证明：由 $a_{n+1}=4a_n-3n+1$，

得 $a_{n+1}-(n+1)=4(a_n-n)$，$n\in\mathbf{N}^*$.

又 $a_1-1=1\neq0$，所以 $a_n-n\neq0$，所以 $\frac{a_{n+1}-(n+1)}{a_n-n}=4$，

所以数列$\{a_n-n\}$是首项为 1，公比为 4 的等比数列.

(2)由(1)，可知 $a_n-n=4^{n-1}$，

于是数列$\{a_n\}$的通项公式为 $a_n=4^{n-1}+n$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

第 18 课时　等比数列的性质

题点知识巩固

1. 选 A　由 $a_2a_{15}=a_7a_{10}$，得 $a_{15}=\dfrac{a_7a_{10}}{a_2}=\dfrac{36}{3}=12$，故选 A.

2. 选 B　$\dfrac{a_{n-1}a_n}{a_{n-2}a_{n-1}}=\dfrac{a_{n-1}}{a_{n-2}}\cdot\dfrac{a_n}{a_{n-1}}=q\cdot q=q^2(n\geqslant 3)$，所以新数列是公比为 q^2 的等比数列，故选 B.

3. 选 D　设正项等比数列$\{a_n\}$的公比为 $q(q>0)$.

∵$3a_1,\dfrac{1}{2}a_3,2a_2$ 成等差数列，

∴$a_1q^2=3a_1+2a_1q$.

又 $a_1\neq 0$，

∴$q^2-2q-3=0$，

解得 $q=3$ 或 $q=-1$(舍).

∴$\dfrac{a_{2\,018}-a_{2\,017}}{a_{2\,016}-a_{2\,015}}=\dfrac{q^2(a_{2\,016}-a_{2\,015})}{a_{2\,016}-a_{2\,015}}=q^2=9$，故选 D.

4. **解析**：设这三个数分别为 $\dfrac{a}{q},a,aq$，

则 $\begin{cases}\dfrac{a}{q}\cdot a\cdot aq=1,\\ a+aq=-\dfrac{3}{2},\end{cases}$ 解得 $a=1,q=-\dfrac{5}{2}$，

所以这三个数依次为 $-\dfrac{2}{5},1,-\dfrac{5}{2}$.

答案：$-\dfrac{2}{5},1,-\dfrac{5}{2}$

5. **解**：由题意设此四个数分别为 $\dfrac{b}{q},b,bq,a$，则 $b^3=-8$，

解得 $b=-2$. 由题可得方程组 $\begin{cases}2bq=a+b,\\ ab^2q=-80,\end{cases}$

即为 $\begin{cases}a=10,\\ q=-2\end{cases}$ 或 $\begin{cases}a=-8,\\ q=\dfrac{5}{2},\end{cases}$

所以此四个数为 $1,-2,4,10$ 或 $-\dfrac{4}{5},-2,-5,-8$.

6. 选 A　设甲以后每个月比前一个月增加的产值为 a，乙每个月比前一个月增加产值的百分比为 x，甲、乙两车间在 2017 年 1 月份的月产值均为 m，则 $m+6a=m\times(1+x)^6$　①. 在 2017 年 4 月份甲的产值为 $m+3a$，乙的产值为 $m\times(1+x)^3$，由①，知 $(1+x)^6=1+\dfrac{6a}{m}$，即在 2017 年 4 月份乙的产值为 $m\sqrt{1+\dfrac{6a}{m}}=\sqrt{m^2+6ma}$，因为 $(m+3a)^2-(m^2+6ma)=9a^2>0$，所以 $m+3a>\sqrt{m^2+6ma}$，即 2017 年 4 月份甲的产值大于乙的产值，故选 A.

7. **解**：(1)由题意可得 $16a(1+25\%)^{n-1}=25a(1-20\%)^{n-1}$，解得 $n=2$.

故到 2020 年两林场木材的总存量相等.

(2)令 $n=5$，

则 $a_5=16a\left(\dfrac{5}{4}\right)^4+25a\left(\dfrac{4}{5}\right)^4<2(16a+25a)$，

故到 2022 年不能翻一番.

提能达标过关

1. 选 A　由等比数列的性质及 $a_3(a_3+a_5)+a_4(a_4+a_6)=25$，得 $a_3(a_3+a_5)+a_4(a_3q+a_5q)=25$.

∴$(a_3+a_5)(a_3+a_4q)=25$，∴$(a_3+a_5)^2=25$.

∵对任意 $n\in\mathbf{N}^*$，都有 $a_n>0$，

∴$a_3+a_5>0$，

∴$a_3+a_5=5$，故选 A.

2. 选 B　设数列$\{a_n\}$的公比为 q，

∵$a_1a_8^3a_{15}=243,a_1a_{15}=a_8^2$，∴$a_8=3$，

∴$\dfrac{a_9^3}{a_{11}}=\dfrac{a_8^3q^3}{a_8q^3}=a_8^2=9$，故选 B.

3. 选 B　设公比为 q，则由题意，得 $\begin{cases}a_1+2a_1q=4,\\ a_1^2q^6=4a_1^2q^8,\end{cases}$

所以 $\begin{cases}a_1=2,\\ q=\dfrac{1}{2},\end{cases}$ 所以 $a_5=2\times\left(\dfrac{1}{2}\right)^4=\dfrac{1}{8}$，故选 B.

4. 选 C　$8\,100\times\left(\dfrac{2}{3}\right)^3=2\,400$，故选 C.

5. 选 B　依题意，有 $q^3+q^2+q=\dfrac{a+b-c}{a+b+c}+\dfrac{c+a-b}{a+b+c}+\dfrac{b+c-a}{a+b+c}=1$，故选 B.

6. **解析**：因为 $\dfrac{1}{a_7}+\dfrac{1}{a_{10}}=\dfrac{a_7+a_{10}}{a_7a_{10}},\dfrac{1}{a_8}+\dfrac{1}{a_9}=\dfrac{a_8+a_9}{a_8a_9}$，由等比数列的性质知 $a_7a_{10}=a_8a_9$，

所以 $\dfrac{1}{a_7}+\dfrac{1}{a_8}+\dfrac{1}{a_9}+\dfrac{1}{a_{10}}=\dfrac{a_7+a_8+a_9+a_{10}}{a_8a_9}=\dfrac{15}{8}\div\left(-\dfrac{9}{8}\right)=-\dfrac{5}{3}$.

答案：$-\dfrac{5}{3}$

7. **解析**：∵$\{a_n\}$是等比数列，∴$a_1+a_2,a_3+a_4,a_5+a_6,a_7+a_8$，$a_9+a_{10}$为等比数列，∴$a_9+a_{10}=1\times4^4=256$.

答案：256

8. **解析**：由题意，知 $a_2-a_1=\dfrac{-1-(-7)}{3}=2,b_2^2=(-4)\times(-1)=4$. 又 b_2 是等比数列中的第三项，所以 b_2 与第一项同号，即 $b_2=-2$，所以 $\dfrac{a_2-a_1}{b_2}=\dfrac{2}{-2}=-1$.

答案：-1

9. **解**：(1)由已知，得 $17=a_3+a_6=a_1+a_8$，

又 $a_1a_8=-38,a_1<a_8$，∴$a_1=-2,a_8=19$，

∴数列$\{a_n\}$的公差 $d=3$，∴$a_n=3n-5$.

(2)由(1)，得 $a_1=-2,a_2=1,a_3=4$.

依题意可得数列$\{b_n\}$的前三项为 $b_1=1,b_2=-2,b_3=4$ 或 $b_1=4,b_2=-2,b_3=1$.

①当等比数列$\{b_n\}$的前三项为 $b_1=1,b_2=-2,b_3=4$ 时，公比 $q=-2,b_n=(-2)^{n-1}$；

②当等比数列$\{b_n\}$的前三项为 $b_1=4,b_2=-2,b_3=1$ 时，公比 $q=-\dfrac{1}{2},b_n=\dfrac{(-1)^{n-1}}{2^{n-3}}$.

10. **解**：设该地区沙漠与绿洲的总面积为 1，2015 年年底绿洲面积为 $a_1=\dfrac{2}{5}$，经过 n 年后绿洲面积为 a_{n+1}，设 2015 年年底沙漠面积为 b_1，经过 n 年后沙漠面积为 b_{n+1}，则 $a_1+b_1=1,a_n+b_n=1$.

依题意，a_{n+1}由两部分组成：一部分是原有绿洲面积 a_n 减去被侵蚀的部分，即 $a_n-8\%a_n$；另一部分是新绿化的绿洲面积，即 $12\%b_n$.

∴$a_{n+1}=a_n-8\%a_n+12\%(1-a_n)=\dfrac{4}{5}a_n+\dfrac{3}{25}$，

即 $a_{n+1}-\dfrac{3}{5}=\dfrac{4}{5}\left(a_n-\dfrac{3}{5}\right)$.

又 $a_1-\dfrac{3}{5}=-\dfrac{1}{5}$，

∴$\left\{a_n-\dfrac{3}{5}\right\}$是以 $-\dfrac{1}{5}$ 为首项，$\dfrac{4}{5}$ 为公比的等比数列，

则 $a_{n+1}=\dfrac{3}{5}-\dfrac{1}{5}\times\left(\dfrac{4}{5}\right)^n$.

由 $a_{n+1}>50\%$，得 $\dfrac{3}{5}-\dfrac{1}{5}\times\left(\dfrac{4}{5}\right)^n>\dfrac{1}{2}$，

∴$\left(\dfrac{4}{5}\right)^n<\dfrac{1}{2}$，∴$n>\log_{\frac{4}{5}}\dfrac{1}{2}=\dfrac{\lg 2}{1-3\lg 2}\approx 3$.

则当 $n\geqslant 4$ 时，不等式 $\left(\dfrac{4}{5}\right)^n<\dfrac{1}{2}$ 恒成立.

∴至少需要 4 年才能使绿洲面积超过 50%.

2.5　等比数列的前 n 项和

第 19 课时　等比数列的前 n 项和

题点知识巩固

1. 选 C　∵$S_3=\dfrac{a_1(1-q^3)}{1-q}=\dfrac{2(1-q^3)}{1-q}=26$，

∴$q^2+q-12=0$，∴$q=3$ 或 -4，故选 C.

2. **解析**：因为 $a_1=3,a_n=96$，所以 $q\neq 1$. 由 $S_n=\dfrac{a_1-a_nq}{1-q}$，得 $189=\dfrac{3-96q}{1-q}$，解得 $q=2$.

答案：2

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

3. **解**：(1)设$\{a_n\}$的公比为q，

由题设得$\begin{cases}a_1q=6,\\6a_1+a_1q^2=30,\end{cases}$解得$\begin{cases}a_1=3,\\q=2\end{cases}$或$\begin{cases}a_1=2,\\q=3.\end{cases}$

当$a_1=3,q=2$时，$a_n=3\times2^{n-1}$，$S_n=3\times(2^n-1)$；

当$a_1=2,q=3$时，$a_n=2\times3^{n-1}$，$S_n=3^n-1$.

(2)设等比数列的公比为q，由已知$S_6\neq2S_3$，则$q\neq1$.

由$S_3=\frac{7}{2}$，$S_6=\frac{63}{2}$，

得$\begin{cases}\frac{a_1(1-q^3)}{1-q}=\frac{7}{2},&①\\\frac{a_1(1-q^6)}{1-q}=\frac{63}{2}.&②\end{cases}$

②÷①，得$1+q^3=9$，所以$q=2$.

将$q=2$代入①，解得$a_1=\frac{1}{2}$.

因此$a_n=a_1q^{n-1}=2^{n-2}$.

4. 选B　依题意，每层塔从上到下所挂的灯数构成等比数列，记为数列$\{a_n\}$，其中，$q=2$，$S_7=381$，由等比数列的前n项和公式得$\frac{a_1(1-2^7)}{1-2}=381$，解得$a_1=3$. 所以塔的顶层共有3盏灯，故选B.

5. 选C　依题意，此人每天走的路程构成一个公比为$\frac{1}{2}$的等比数列，记为$\{a_n\}$，

由$S_6=\frac{a_1\left(1-\frac{1}{2^6}\right)}{1-\frac{1}{2}}=378$，解得$a_1=192$.

$\therefore a_5=a_1\times q^4=192\times\frac{1}{2^4}=12$.

故此人第五天走的路程为12里，故选C.

6. **解**：(1)设$\{a_n\}$的公比为q，由题设得$a_n=q^{n-1}$.

由已知得$q^4=4q^2$，解得$q=0$(舍去)，$q=-2$或$q=2$.

故$a_n=(-2)^{n-1}$或$a_n=2^{n-1}$.

(2)若$a_n=(-2)^{n-1}$，则$S_n=\frac{1-(-2)^n}{3}$.

由$S_m=63$得$(-2)^m=-188$，此方程没有正整数解.

若$a_n=2^{n-1}$，则$S_n=2^n-1$.

由$S_m=63$得$2^m=64$，解得$m=6$. 综上，$m=6$.

提能达标过关

1. 选B　$\because a_5=a_1q^4$，$\therefore16=81\times q^4$. 又$\because a_n>0$，$\therefore q=\frac{2}{3}$.

$\therefore S_5=\frac{a_1(1-q^5)}{1-q}=\frac{81\times\left[1-\left(\frac{2}{3}\right)^5\right]}{1-\frac{2}{3}}=211$，故选B.

2. 选B　设等比数列$\{a_n\}$的公比为q，由$a_1=1$，$a_4=\frac{1}{8}$，得$q^3=\frac{1}{8}$，解得$q=\frac{1}{2}$，于是$S_{10}=\frac{a_1(1-q^{10})}{1-q}=\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{10}}{1-\frac{1}{2}}=2-\frac{1}{2^9}$，故选B.

3. 选D　由等比数列前n项和公式，知$\frac{2(1-2^n)}{1-2}=2^{n+1}-2=126$，$n=6$，故选D.

4. 选C　设数列$\{a_n\}$的公比为q，由$9S_3=S_6$，得$q\neq1$，则$\frac{9(1-q^3)}{1-q}=\frac{1-q^6}{1-q}$，即$1+q^3=9$，解得$q=2$，所以数列$\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$是首项为1，公比为$\frac{1}{2}$的等比数列，则数列$\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$的前5项和为$T_5=\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^5}{1-\frac{1}{2}}=\frac{31}{16}$，故选C.

5. 选A　由已知，得$a_n=n+1$，$b_n=2^{n-1}$，所以$a_{b_n}=2^{n-1}+1$，因此$a_{b_1}+a_{b_2}+\cdots+a_{b_{10}}=(2^0+1)+(2^1+1)+\cdots+(2^9+1)=(2^0+2^1+\cdots+2^9)+10=\frac{1-2^{10}}{1-2}+10=1\,033$，故选A.

6. **解析**：设此数列的公比为q，

则$\begin{cases}\frac{7}{8}=14q^{n+1},\\\frac{77}{8}=\frac{14-\frac{7}{8}q}{1-q}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}q=-\frac{1}{2},\\n=3,\end{cases}$

故此数列共有5项.

答案：5

7. **解析**：设数列$\{a_n\}$的公比为q，$\because\{a_n\}$是等比数列，且$a_2=2$，$a_5=\frac{1}{4}$，$\therefore\frac{a_5}{a_2}=q^3=\frac{1}{8}$，$\therefore q=\frac{1}{2}$，$\therefore a_1=4$. 又$\{a_n\}$是等比数列，$\therefore\{a_na_{n+1}\}$也是等比数列，且首项为$a_1a_2=8$，公比$q'=\frac{1}{4}$，

$\therefore a_1a_2+a_2a_3+\cdots+a_na_{n+1}=\frac{8\left[1-\left(\frac{1}{4}\right)^n\right]}{1-\frac{1}{4}}=\frac{32}{3}(1-4^{-n})$.

答案：$\frac{32}{3}(1-4^{-n})$

8. **解析**：$\because a_4=\frac{1}{2}q^3=-4$，$\therefore q=-2$，

$\therefore a_n=\frac{1}{2}\times(-2)^{n-1}$，$\therefore|a_n|=2^{n-2}$，

$\therefore|a_1|+|a_2|+\cdots+|a_n|=\frac{\frac{1}{2}(1-2^n)}{1-2}=2^{n-1}-\frac{1}{2}$.

答案：-2　$2^{n-1}-\frac{1}{2}$

9. **解**：(1)设等差数列$\{a_n\}$的公差为d，

则$\begin{cases}a_1+d=4,\\a_1+3d+a_1+6d=15,\end{cases}$解得$\begin{cases}a_1=3,\\d=1.\end{cases}$

$\therefore$数列$\{a_n\}$的通项公式为$a_n=3+(n-1)\times1$，

即$a_n=n+2$.

(2)由(1)知，$b_n=2^n+n$，

$\therefore b_1+b_2+b_3+\cdots+b_{10}$

$=(2^1+2^2+2^3+\cdots+2^{10})+(1+2+3+\cdots+10)$

$=\frac{2(1-2^{10})}{1-2}+\frac{10(1+10)}{2}$

$=2^{11}-2+55=2\,101$.

10. **解**：(1)$\because$对任意正整数n，

$\frac{b_1}{a_1}+\frac{b_2}{a_2}+\frac{b_3}{a_3}+\cdots+\frac{b_n}{a_n}=2n+1$恒成立，　①

$\therefore$当$n=1$时，$\frac{b_1}{a_1}=3$，又$a_1=1$，$\therefore b_1=3$；

当$n\geqslant2$时，$\frac{b_1}{a_1}+\frac{b_2}{a_2}+\frac{b_3}{a_3}+\cdots+\frac{b_{n-1}}{a_{n-1}}=2n-1$，　②

由①－②，得$\frac{b_n}{a_n}=2$，$\therefore b_n=2a_n=2\times3^{n-1}$.

又$b_1=3$不符合上式，

$\therefore b_n=\begin{cases}3,n=1,\\2\times3^{n-1},n\geqslant2.\end{cases}$

(2)$b_1+b_2+b_3+\cdots+b_{2\,018}=3+(2\times3+2\times3^2+\cdots+2\times3^{2\,017})=3+3\times(3^{2\,017}-1)=3^{2\,018}$.

第20课时　等比数列前n项和的性质及应用

题点知识巩固

1. 选B　由等比数列的性质可知，数列S_3，S_6-S_3，S_9-S_6，$S_{12}-S_9$是等比数列，即数列4，8，S_9-S_6，$S_{12}-S_9$是等比数列，因此$S_9-S_6=16$，又$S_6=12$，$\therefore S_9=28$，$S_{12}-S_9=32$，$S_{12}=32+28=60$，故选B.

2. **解析**：令$X=a_1+a_3+\cdots+a_{99}=60$，$Y=a_2+a_4+\cdots+a_{100}$，则$S_{100}=X+Y$. 由等比数列前$n$项和性质知，$\frac{Y}{X}=q=\frac{1}{3}$，所以$Y=20$，即$S_{100}=X+Y=80$.

答案：80

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

3. **解析**：由题意，得 $\begin{cases} S_{奇}+S_{偶}=-240, \\ S_{奇}-S_{偶}=80, \end{cases}$

解得 $\begin{cases} S_{奇}=-80, \\ S_{偶}=-160. \end{cases}$

所以 $q=\dfrac{S_{偶}}{S_{奇}}=\dfrac{-160}{-80}=2$.

答案：2

4. 选 C ∵$\log_2 x_{n+1}=1+\log_2 x_n$，

∴$\log_2 \dfrac{x_{n+1}}{x_n}=1$，

∴$\dfrac{x_{n+1}}{x_n}=2$.

∴数列$\{x_n\}$是公比为 2 的等比数列.

∵$x_1+x_2+\cdots+x_5=8$，

∴$x_{21}+x_{22}+\cdots+x_{25}=(x_1+x_2+\cdots+x_5)\cdot 2^{20}=8\times 2^{20}=2^{23}$，故选 C.

5. 选 D 设等比数列$\{a_n\}$的公比为 q，

∵$S_3=2$，$S_6=18$，

∴$S_6=S_3+S_3q^3=2+2q^3=18$，解得 $q=2$.

∴$\dfrac{S_{10}}{S_5}=\dfrac{S_5+S_5q^5}{S_5}=1+q^5=33$，故选 D.

6. **解**：(1)由$\dfrac{S_{10}}{S_5}=\dfrac{31}{32}$，$a_1=-1$，知公比 $q\neq 1$，$\dfrac{S_{10}-S_5}{S_5}=-\dfrac{1}{32}$.

由等比数列前 n 项和的性质知 S_5，$S_{10}-S_5$，$S_{15}-S_{10}$ 成等比数列，且公比为 q^5，故 $q^5=-\dfrac{1}{32}$，则 $q=-\dfrac{1}{2}$.

(2)由(1)得，$a_n=(-1)\times\left(-\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$，

所以 $a_n^2=\left(\dfrac{1}{4}\right)^{n-1}$，

所以数列$\{a_n^2\}$是首项为 1，公比为$\dfrac{1}{4}$的等比数列，

故 $a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2=\dfrac{1\times\left(1-\dfrac{1}{4^n}\right)}{1-\dfrac{1}{4}}=\dfrac{4}{3}\left(1-\dfrac{1}{4^n}\right)$.

提能达标过关

1. 选 B 由等比数列性质知 S_n，$S_{2n}-S_n$，$S_{3n}-S_{2n}$，$S_{4n}-S_{3n}$，…仍为等比数列. 即 2，$S_{2n}-2$，$14-S_{2n}$，$S_{4n}-14$. 成等比数列，由前三项知 $S_{2n}=6$（$S_{2n}=-4$ 舍去），所以前三项为 2，4，8，故 $S_{4n}-14=16$，所以 $S_{4n}=30$，故选 B.

2. 选 A 在等比数列$\{a_n\}$中，由 $S_{10}=10$，$S_{30}=70$ 可知 $q\neq -1$，所以 S_{10}，$S_{20}-S_{10}$，$S_{30}-S_{20}$，$S_{40}-S_{30}$ 构成公比为 q' 的等比数列.

所以$(S_{20}-S_{10})^2=S_{10}\cdot(S_{30}-S_{20})$，

即$(S_{20}-10)^2=10\cdot(70-S_{20})$，解得 $S_{20}=30$（负值舍去）.

因为$\dfrac{S_{20}-S_{10}}{S_{10}}=\dfrac{30-10}{10}=2=q'$，

所以 $S_{40}-S_{30}=2(S_{30}-S_{20})=80$，$S_{40}=S_{30}+80=150$，故选 A.

3. 选 B 由等比数列前 n 项和的性质 $S_n=A-Aq^n$ 及 $S_n=2^n+m$ 得，$m=-1$，∴$a_1=1$，$q=2$. ∴$a_3=1\times 2^2=4$，故选 B.

4. 选 A 由$\{a_n\}$为等比数列，得 $a_3a_5=a_2a_6=64$，

∴$\begin{cases} a_3+a_5=20, \\ a_3a_5=64. \end{cases}$∵$q>1$，∴$\begin{cases} a_3=4, \\ a_5=16, \end{cases}$

∴$\begin{cases} a_1q^2=4, \\ a_1q^4=16, \end{cases}$∴$\begin{cases} a_1=1, \\ q=2. \end{cases}$

∴$S_5=\dfrac{1\times(1-2^5)}{1-2}=31$，故选 A.

5. 选 D ∵数列$\{a_n\}$是公比为 $q(q\neq 1)$的等比数列，∴$\left\{\dfrac{1}{a_n}\right\}$也是等比数列，且公比为 $\dfrac{1}{q}$. ∴数列$\left\{\dfrac{1}{a_n}\right\}$的前 n 项和 $T_n=\dfrac{\dfrac{1}{a_1}\left[1-\left(\dfrac{1}{q}\right)^n\right]}{1-\dfrac{1}{q}}=\dfrac{a_1(q^n-1)}{a_1^2q^n\left(1-\dfrac{1}{q}\right)}=\dfrac{a_1(q^n-1)}{(q-1)a_1^2q^{n-1}}=\dfrac{S_n}{a_1^2q^{n-1}}$，故选 D.

6. **解析**：设数列$\{a_n\}$的公比为 q，由 $a_1a_2a_3=4=a_1^3q^3$ 与 $a_4a_5a_6=12=a_1^3q^{12}$，可得 $q^9=3$，$a_{n-1}a_na_{n+1}=a_1^3q^{3n-3}=324$，因此 $q^{3n-6}=81=3^4=q^{36}$，所以 $3n-6=36$，即 $n=14$.

答案：14

7. **解析**：根据等比数列的性质知，$a_3^2+2a_3a_5+a_5^2=25$，即$(a_3+a_5)^2=25$，又$\{a_n\}$各项为正数，所以 $a_3+a_5=5$.

答案：5

8. **解析**：由 $a_n=2n-1$ 知，$\{a_n\}$是等差数列，且公差 $d=2$，$a_2=3$，

∴$b_1=3$，$q=2$，∴$b_1+b_2+b_3+b_4+b_5=\dfrac{3(1-2^5)}{1-2}=93$.

答案：93

9. **解**：(1)证明：当 $n=1$ 时，$S_1=4a_1-p$，得 $a_1=\dfrac{p}{3}\neq 0$.

当 $n\geqslant 2$ 时，$a_n=S_n-S_{n-1}=(4a_n-p)-(4a_{n-1}-p)=4a_n-4a_{n-1}$，得 $3a_n=4a_{n-1}$，即$\dfrac{a_n}{a_{n-1}}=\dfrac{4}{3}$，

所以数列$\{a_n\}$是首项为$\dfrac{p}{3}$，公比为$\dfrac{4}{3}$的等比数列.

(2)由(1)知，数列$\{a_n\}$的通项公式为 $a_n=\dfrac{p}{3}\times\left(\dfrac{4}{3}\right)^{n-1}$，

又 $a_2=\dfrac{4}{3}$，可知 $p=3$，于是 $a_n=\left(\dfrac{4}{3}\right)^{n-1}$.

10. **证明**：(1)因为数列$\{a_n\}$为等比数列，

所以 $a_1a_6=a_3a_4=32$.

由$\begin{cases} a_3+a_4=12, \\ a_3a_4=32, \end{cases}$得$\begin{cases} a_3=4, \\ a_4=8 \end{cases}$或$\begin{cases} a_3=8, \\ a_4=4. \end{cases}$

由公比 $q>1$，得$\begin{cases} a_3=4, \\ a_4=8, \end{cases}$故$\begin{cases} a_1=1, \\ q=2, \end{cases}$

所以 $a_n=2^{n-1}$，$S_n=\dfrac{1-2^n}{1-2}=2^n-1=2a_n-1$.

(2)由(1)，知 $a_n=2^{n-1}$，

所以$\dfrac{1}{a_1}+\dfrac{1}{a_2}+\cdots+\dfrac{1}{a_n}$

$=1+\dfrac{1}{2}+\cdots+\dfrac{1}{2^{n-1}}$

$=\dfrac{1-\left(\dfrac{1}{2}\right)^n}{1-\dfrac{1}{2}}$

$=2\left[1-\left(\dfrac{1}{2}\right)^n\right]$

$=2-\dfrac{1}{2^{n-1}}<2$.

第 21 课时　素养提升——等比数列的综合

素养培优提能

1. 选 A 由 $a_3a_5a_7=-3\sqrt{3}$，∴$a_5^3=-3\sqrt{3}$，$a_2a_8=a_5^2=3$，故选 A.

2. 选 C 由$\begin{cases} a_1q=18, \\ a_1q^3=8, \end{cases}$解得$\begin{cases} a_1=27, \\ q=\dfrac{2}{3} \end{cases}$或$\begin{cases} a_1=-27, \\ q=-\dfrac{2}{3}. \end{cases}$

又 $a_1<0$，因此 $q=-\dfrac{2}{3}$，故选 C.

3. 选 A 因为 $a_7+a_8+a_9=S_9-S_6$，且 S_3，S_6-S_3，S_9-S_6 也成等比数列，即 8，-1，S_9-S_6 成等比数列，所以 $8(S_9-S_6)=1$，即 $S_9-S_6=\dfrac{1}{8}$. 所以 $a_7+a_8+a_9=\dfrac{1}{8}$，故选 A.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

4. 选B　因为$q=a_n-a_{n-1}=-4$，$b_1=a_2=-3$，所以$b_n=b_1q^{n-1}=-3\times(-4)^{n-1}$，所以$|b_n|=|-3\times(-4)^{n-1}|=3\times4^{n-1}$，即$\{|b_n|\}$是首项为3，公比为4的等比数列，所以$|b_1|+|b_2|+\cdots+|b_n|=\frac{3(1-4^n)}{1-4}=4^n-1$，故选B.

5. 选C　解法一：设等比数列$\{a_n\}$的公比为q，因为$S_{2n}-S_n=q^nS_n$，所以$S_{10}-S_5=q^5S_5$，所以$6-2=2q^5$，所以$q^5=2$，所以$a_{16}+a_{17}+a_{18}+a_{19}+a_{20}=a_1q^{15}+a_2q^{15}+a_3q^{15}+a_4q^{15}+a_5q^{15}=q^{15}(a_1+a_2+a_3+a_4+a_5)=q^{15}S_5=2^3\times2=16$，故选C.
解法二：由等比数列的性质知S_5，$S_{10}-S_5$，$S_{15}-S_{10}$，$S_{20}-S_{15}$成等比数列，其公比为2，所以这4项的值分别为2，4，8，16，故选C.

6. **解析**：当$q\neq1$时，由题意，$\frac{a_1(1-q^3)}{1-q}=3a_1q^2$，
即$1-q^3=3q^2-3q^3$，整理得$2q^3-3q^2+1=0$，解得$q=-\frac{1}{2}$.
当$q=1$时，$S_3=3a_3$，显然成立.
故$q=-\frac{1}{2}$或1.
答案：$-\frac{1}{2}$或1

7. **解析**：由已知得$\frac{S_{10}}{S_5}=\frac{1-q^{10}}{1-q^5}=1+q^5=\frac{31}{32}$，故$q^5=-\frac{1}{32}$，
解得$q=-\frac{1}{2}$，$S_4=\frac{(-1)\times\left(1-\frac{1}{16}\right)}{1+\frac{1}{2}}=-\frac{5}{8}$.
答案：$-\frac{5}{8}$

8. **解析**：由题意知$\frac{a_n}{a_{n-1}}=\frac{n^2}{n^2-1}=\frac{n^2}{(n-1)(n+1)}$，
所以$a_n=a_1\times\frac{a_2}{a_1}\times\frac{a_3}{a_2}\times\cdots\times\frac{a_n}{a_{n-1}}$
$=1\times\frac{2^2}{2^2-1}\times\frac{3^2}{3^2-1}\times\cdots\times\frac{n^2}{n^2-1}=$
$\frac{2^2\times3^2\times4^2\times\cdots\times n^2}{(2-1)\times(2+1)\times(3-1)\times(3+1)\times(4-1)\times(4+1)\times\cdots\times(n-1)\times(n+1)}$
$=\frac{2^2\times3^2\times4^2\times\cdots\times n^2}{1\times3\times2\times4\times3\times5\times\cdots\times(n-1)\times(n+1)}=\frac{2n}{n+1}$.
答案：$\frac{2n}{n+1}$

9. **解**：(1)设等差数列$\{a_n\}$的公差为d，则$d\neq0$，
因为$S_3=a_4+6$，所以$3a_1+\frac{3\times2d}{2}=a_1+3d+6$，
所以$a_1=3$.
因为a_1，a_4，a_{13}成等比数列，
所以$a_1(a_1+12d)=(a_1+3d)^2$，解得$d=2$或0(舍去)，
所以$a_n=2n+1$.
(2)由(1)知，$b_n=2^{2n+1}+1$，
设$c_n=2^{2n+1}$，则$\frac{c_{n+1}}{c_n}=\frac{2^{2(n+1)+1}}{2^{2n+1}}=4$，
所以数列$\{c_n\}$是以8为首项，4为公比的等比数列，
所以$T_n=\frac{8(1-4^n)}{1-4}+n=\frac{2^{2n+3}-8}{3}+n$.

10. **解**：(1)因为a_4+S_4，a_5+S_5，a_6+S_6成等差数列，
所以$a_5+S_5-a_4-S_4=a_6+S_6-a_5-S_5$，
即$2a_6-3a_5+a_4=0$，
所以$2q^2-3q+1=0$，
因为$q\neq1$，所以$q=\frac{1}{2}$，
所以等比数列$\{a_n\}$的通项公式为$a_n=\frac{1}{2^n}$.
(2)由题意得$b_n=\frac{a_n+a_{n+1}}{2}\cdot3^n=\frac{3}{4}\times\left(\frac{3}{2}\right)^n=\frac{9}{8}\times\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}$，
所以$T_n=\frac{9}{8}\times\frac{\left[1-\left(\frac{3}{2}\right)^n\right]}{1-\frac{3}{2}}=\frac{9}{4}\left[\left(\frac{3}{2}\right)^n-1\right]$.

第22课时　数列求和

题点知识巩固

1. **解**：(1)当$n=1$时，$a_1=S_1=1$；
当$n\geqslant2$时，
$a_n=S_n-S_{n-1}=\frac{n^2+n}{2}-\frac{(n-1)^2+(n-1)}{2}=n$.
$a_1=1$也满足$a_n=n$，故数列$\{a_n\}$的通项公式为$a_n=n$.
(2)由(1)知，$a_n=n$，故$b_n=2^n+(-1)^nn$.
记数列$\{b_n\}$的前$2n$项和为T_{2n}，
则$T_{2n}=(2^1+2^2+\cdots+2^{2n})+(-1+2-3+4-\cdots+2n)$.
记$A=2^1+2^2+\cdots+2^{2n}$，$B=-1+2-3+4-\cdots+2n$，
则$A=\frac{2(1-2^{2n})}{1-2}=2^{2n+1}-2$，
$B=(-1+2)+(-3+4)+\cdots+[-(2n-1)+2n]=n$.
故数列$\{b_n\}$的前$2n$项和$T_{2n}=A+B=2^{2n+1}+n-2$.

2. **解析**：设等差数列$\{a_n\}$的首项为a_1，公差为d，
依题意有$\begin{cases}a_1+2d=3,\\4a_1+6d=10,\end{cases}$解得$\begin{cases}a_1=1,\\d=1,\end{cases}$
所以$S_n=\frac{n(n+1)}{2}$，$\frac{1}{S_n}=\frac{2}{n(n+1)}=2\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$，
因此$\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{S_k}=2\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=\frac{2n}{n+1}$.
答案：$\frac{2n}{n+1}$

3. **解**：(1)设数列$\{a_n\}$的公差为d，
因为$\frac{S_n}{n}=\frac{na_1+\frac{n(n-1)}{2}d}{n}=a_1+(n-1)\frac{d}{2}$，
所以$\left\{\frac{S_n}{n}\right\}$为一个等差数列，所以$\frac{S_{2\,018}}{2\,018}-\frac{S_{2\,017}}{2\,017}=\frac{d}{2}=1$，
所以$d=2$，又$\frac{S_1}{1}=1$，故$\frac{S_n}{n}=n$，所以$S_n=n^2$.
(2)因为$\frac{1}{\sqrt{S_nS_{n+1}}}=\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$，
所以$T_n=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$
$=1-\frac{1}{n+1}=\frac{n}{n+1}$.

4. **解**：(1)由题意知，当$n\geqslant2$时，$a_n=S_n-S_{n-1}=6n+5$，
当$n=1$时，$a_1=S_1=11$，满足上式，
所以$a_n=6n+5$.
设数列$\{b_n\}$的公差为d.
由$\begin{cases}a_1=b_1+b_2,\\a_2=b_2+b_3,\end{cases}$即$\begin{cases}11=2b_1+d,\\17=2b_1+3d,\end{cases}$
可解得$\begin{cases}b_1=4,\\d=3.\end{cases}$
所以$b_n=3n+1$.
(2)由(1)知，$c_n=\frac{(6n+6)^{n+1}}{(3n+3)^n}=3(n+1)\times2^{n+1}$，
所以$T_n=3\times[2\times2^2+3\times2^3+\cdots+(n+1)\times2^{n+1}]$，
$2T_n=3\times[2\times2^3+3\times2^4+\cdots+(n+1)\times2^{n+2}]$，
两式作差，得
$-T_n=3\times[2\times2^2+2^3+2^4+\cdots+2^{n+1}-(n+1)\times2^{n+2}]$
$=3\times\left[4+\frac{4(1-2^n)}{1-2}-(n+1)\times2^{n+2}\right]$
$=-3n\times2^{n+2}$，
所以$T_n=3n\times2^{n+2}$.

提能达标过关

1. 选A　$\because a_n=(-1)^n\cdot(3n-2)$，$\therefore a_1+a_2+\cdots+a_{10}=-1+4-7+10-\cdots-25+28=(-1+4)+(-7+10)+\cdots+(-25+28)=3\times5=15$，故选A.
2. 选A　$S_{17}=1-2+3-4+5-6+\cdots+15-16+17=1+(-2+3)+(-4+5)+(-6+7)+\cdots+(-14+15)+(-16+17)=1+1+1+\cdots+1=9$，故选A.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

3. 选 C　由题可知，$S_n=1\times2+2\times2^2+3\times2^3+\cdots+n\times2^n$，$2S_n=1\times2^2+2\times2^3+3\times2^4+\cdots+n\cdot2^{n+1}$，相减得$-S_n=2+2^2+2^3+\cdots+2^n-n\times2^{n+1}=\dfrac{2-2^{n+1}}{1-2}-n\times2^{n+1}=-2+(1-n)\times2^{n+1}$，$\therefore S_n=(n-1)\cdot2^{n+1}+2$，故选 C.

4. 选 B　$\because$函数 $y=\log_a(x-1)+3$ 的图象过定点$(2,3)$，$\therefore a_2=2$，$a_3=3$，故 $a_n=n$，$\therefore b_n=\dfrac{1}{a_na_{n+1}}=\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}$，$\therefore T_{10}=1-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3}+\cdots+\dfrac{1}{10}-\dfrac{1}{11}=1-\dfrac{1}{11}=\dfrac{10}{11}$，故选 B.

5. **解析**：$\because$数列$\{a_n\}$满足 $a_1=1$，$a_{n+1}\cdot a_n=2^n$　①，$\therefore n=1$ 时，$a_2=2$，$n\geqslant2$ 时，$a_n\cdot a_{n-1}=2^{n-1}$　②，$\because$①÷②得$\dfrac{a_{n+1}}{a_{n-1}}=2$，$\therefore$数列$\{a_n\}$的奇数项、偶数项分别成等比数列，

$\therefore S_{2\,016}=\dfrac{1-2^{1\,008}}{1-2}+\dfrac{2\times(1-2^{1\,008})}{1-2}=3\times2^{1\,008}-3$.

答案：$3\times2^{1\,008}-3$

6. **解析**：当 $n=2k(k\in\mathbf{N}^*)$时，$a_{2k+1}+a_{2k}=4k-1$，

当 $n=2k-1(k\in\mathbf{N}^*)$时，$a_{2k}-a_{2k-1}=4k-3$，

$\therefore a_{2k+1}+a_{2k-1}=2$，

$\therefore a_{2k+3}+a_{2k+1}=2$，

$\therefore a_{2k-1}=a_{2k+3}$，

$\therefore a_1=a_5=\cdots=a_{61}$.

$\therefore a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{60}=(a_2+a_3)+(a_4+a_5)+\cdots+(a_{60}+a_{61})=3+7+11+\cdots+(2\times60-1)=\dfrac{30\times(3+119)}{2}=30\times61=1\,830$.

答案：1 830

7. **解析**：因为 $a_nb_{n+1}-a_{n+1}b_n+2b_{n+1}b_n=0$，$b_n\neq0$，所以$\dfrac{a_{n+1}}{b_{n+1}}-\dfrac{a_n}{b_n}=2$，所以数列$\left\{\dfrac{a_n}{b_n}\right\}$是以$\dfrac{a_1}{b_1}=1$为首项，2 为公差的等差数列，故$\dfrac{a_n}{b_n}=2n-1$. 由 $b_n=3^{n-1}$，得 $a_n=(2n-1)3^{n-1}$，于是数列$\{a_n\}$的前 n 项和 $S_n=1\times3^0+3\times3^1+5\times3^2+\cdots+(2n-1)\times3^{n-1}$，$3S_n=1\times3^1+3\times3^2+\cdots+(2n-3)\times3^{n-1}+(2n-1)\times3^n$，两式相减得$-2S_n=1+2\times(3^1+3^2+\cdots+3^{n-1})-(2n-1)\times3^n=-2-(2n-2)3^n$，所以 $S_n=(n-1)3^n+1$.

答案：$(n-1)3^n+1$

8. **解**：(1)设等差数列$\{a_n\}$的公差是 d.

$\because a_3+a_8-(a_2+a_7)=2d=-6$，$\therefore d=-3$，

$\therefore a_2+a_7=2a_1+7d=-23$，解得 $a_1=-1$，

$\therefore$数列$\{a_n\}$的通项公式为 $a_n=-3n+2$.

(2)$\because$数列$\{a_n+b_n\}$是首项为 1，公比为 q 的等比数列，

$\therefore a_n+b_n=q^{n-1}$，即$-3n+2+b_n=q^{n-1}$，

$\therefore b_n=3n-2+q^{n-1}$.

$\therefore S_n=[1+4+7+\cdots+(3n-2)]+(1+q+q^2+\cdots+q^{n-1})=\dfrac{n(3n-1)}{2}+(1+q+q^2+\cdots+q^{n-1})$，

故当 $q=1$ 时，$S_n=\dfrac{n(3n-1)}{2}+n=\dfrac{3n^2+n}{2}$；

当 $q\neq1$ 时，$S_n=\dfrac{n(3n-1)}{2}+\dfrac{1-q^n}{1-q}$.

9. **解**：(1)由题设知 $a_1a_4=a_2a_3=8$，

又 $a_1+a_4=9$，可解得$\begin{cases}a_1=1,\\a_4=8\end{cases}$或$\begin{cases}a_1=8,\\a_4=1\end{cases}$(舍去).

设等比数列$\{a_n\}$的公比为 q，由 $a_4=a_1q^3$ 得，$q=2$，

故 $a_n=a_1q^{n-1}=2^{n-1}$，$n\in\mathbf{N}^*$.

(2)因为 $S_n=\dfrac{a_1(1-q^n)}{1-q}=2^n-1$，

又 $b_n=\dfrac{a_{n+1}}{S_nS_{n+1}}=\dfrac{S_{n+1}-S_n}{S_nS_{n+1}}=\dfrac{1}{S_n}-\dfrac{1}{S_{n+1}}$，

所以 $T_n=b_1+b_2+\cdots+b_n$

$=\left(\dfrac{1}{S_1}-\dfrac{1}{S_2}\right)+\left(\dfrac{1}{S_2}-\dfrac{1}{S_3}\right)+\cdots+\left(\dfrac{1}{S_n}-\dfrac{1}{S_{n+1}}\right)$

$=\dfrac{1}{S_1}-\dfrac{1}{S_{n+1}}$

$=1-\dfrac{1}{2^{n+1}-1}$，$n\in\mathbf{N}^*$.

10. **解**：(1)证明：$\because$在等比数列$\{a_n\}$中，$a_1=1$，$q=3$，

$\therefore a_{n+1}=a_1q^n=3^n$，

又 $S_n=\dfrac{a_1(1-q^n)}{1-q}=\dfrac{1-3^n}{1-3}=\dfrac{3^n-1}{2}$，$\therefore S_n=\dfrac{a_{n+1}-1}{2}$.

(2)由(1)知，数列$\{2na_n\}$的通项公式为 $2na_n=2n\times3^{n-1}$，

则 $T_n=2(1\times3^0+2\times3^1+3\times3^2+\cdots+n\times3^{n-1})$，　①

$3T_n=2[1\times3^1+2\times3^2+\cdots+(n-1)\times3^{n-1}]+2n\times3^n$，　②

①－②得，$-2T_n=2(3^0+3^1+3^2+\cdots+3^{n-1})-2n\times3^n=2\times\dfrac{1-3^n}{1-3}-2n\times3^n=3^n-2n\times3^n-1=(1-2n)\times3^n-1$，

所以 $T_n=\dfrac{1}{2}[(2n-1)\times3^n+1]=\left(n-\dfrac{1}{2}\right)\times3^n+\dfrac{1}{2}$.

阶段质量评估 2

1. 选 A　依题意，该数列为非零常数列，且通项公式为$a_n=a(a\neq0)$. $\therefore$其前 n 项和 $S_n=na$，故选 A.

2. 选 B　由 $a_{n+1}=3S_n$ 得，$a_2=3S_1=3$. 当 $n\geqslant2$ 时，$a_n=3S_{n-1}$，则 $a_{n+1}-a_n=3a_n$，$n\geqslant2$，即 $a_{n+1}=4a_n$，$n\geqslant2$，则数列$\{a_n\}$从第二项起构成等比数列，

所以 $S_6=\dfrac{a_7}{3}=\dfrac{3\times4^5}{3}=4^5$，故选 B.

3. 选 D　因为 $a_n=a_1q^{n-1}$，所以 $1\times2^{n-1}=64$，

即 $2^{n-1}=2^6$，得 $n-1=6$，解得 $n=7$，故选 D.

4. 选 B　$\because S_n=n^2-9n$，$\therefore$当 $n\geqslant2$ 时，$a_n=S_n-S_{n-1}=2n-10$. 又 $a_1=S_1=-8$，符合上式，$\therefore a_n=2n-10(n\in\mathbf{N}^*)$，$\therefore5<2k-10<8$，解得 $7.5<k<9$，$\therefore k=8$，故选 B.

5. 选 B　由等差数列的性质可知，a_1+a_2，a_3+a_4，a_5+a_6，a_7+a_8构成新的等差数列，于是 $a_7+a_8=(a_1+a_2)+(4-1)[(a_3+a_4)-(a_1+a_2)]=40+3\times20=100$，故选 B.

6. 选 C　因为 $a_1>0$，$a_6a_7<0$，所以 $a_6>0$，$a_7<0$，等差数列的公差小于零，又 $a_3+a_{10}=a_1+a_{12}>0$，$a_1+a_{13}=2a_7<0$，所以 $S_{12}>0$，$S_{13}<0$，所以满足 $S_n>0$ 的最大自然数 n 的值为 12，故选 C.

7. **解析**：数列$\{a_n\}$为等差数列，则 S_3，S_6-S_3，S_9-S_6 为等差数列，即 $2(S_6-S_3)=S_3+(S_9-S_6)$. $\because S_3=9$，$S_6-S_3=27$，$\therefore S_9-S_6=45$，$\therefore a_7+a_8+a_9=S_9-S_6=45$.

答案：45

8. **解析**：由题意，知第 1 列的数是首项为 1，公比为 2 的等比数列，所以第 10 行的第一个数为 2^9. 又由题意，知第 10 行的数是首项为 2^9，公比为 2 的等比数列，所以第 10 行第 11 列的数是$2^9\times2^{10}=2^{19}$.

答案：2^{19}

9. **解析**：设每期应付款 x 元，第 n 期付款后欠款 A_n 元，

则 $A_1=2\,000(1+0.008)-x=2\,000\times1.008-x$，

$A_2=(2\,000\times1.008-x)\times1.008-x=2\,000\times1.008^2-1.008x-x$，

…

$A_{12}=2\,000\times1.008^{12}-(1.008^{11}+1.008^{10}+\cdots+1)x$，

因为 $A_{12}=0$，

所以 $2\,000\times1.008^{12}-(1.008^{11}+1.008^{10}+\cdots+1)x=0$，

解得 $x=\dfrac{2\,000\times1.008^{12}}{1+1.008+\cdots+1.008^{11}}=\dfrac{2\,000\times1.008^{12}}{\frac{1.008^{12}-1}{1.008-1}}\approx176$，

即每期应付款 176 元.

答案：176

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

10. **解析**：根据 $S_8=S_{12}$ 可得 $a_9+a_{10}+a_{11}+a_{12}=0$，再根据等差数列的性质可得 $a_{10}+a_{11}=0$，由 $a_1>0$ 可知，$a_{10}>0$，$a_{11}<0$. 从而可知所有正数相加时，S_n 可取得最大值，即前 10 项和最大.
答案：S_{10}

11. **解**：∵等差数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 S_n，且 $S_4\geqslant 10$，$S_5\leqslant 15$，

$$\therefore \begin{cases} 4a_1+\dfrac{4\times 3}{2}d\geqslant 10, \\ 5a_1+\dfrac{5\times 4}{2}d\leqslant 15, \end{cases} \text{即} \begin{cases} 2a_1+3d\geqslant 5, \\ a_1+2d\leqslant 3. \end{cases}$$

$\therefore \dfrac{5-3d}{2}\leqslant a_1\leqslant 3-2d$，$\therefore \dfrac{5-3d}{2}\leqslant 3-2d$，解得 $d\leqslant 1$，

$\therefore a_4=(a_1+2d)+d\leqslant 3+d\leqslant 3+1=4$，

$\therefore a_4$ 的最大值为 4.

12. **解**：(1)由题意，知 $a_1=3S_1+1$，即 $a_1=3a_1+1$，

所以 $a_1=-\dfrac{1}{2}$.

又 $a_2=3S_2+1$，即 $a_2=3(a_1+a_2)+1$，解得 $a_2=\dfrac{1}{4}$.

(2)由 $a_n=3S_n+1$，　①

得 $a_{n-1}=3S_{n-1}+1(n\geqslant 2)$，　②

由①－②，得 $a_n-a_{n-1}=3(S_n-S_{n-1})=3a_n$，

得 $\dfrac{a_n}{a_{n-1}}=-\dfrac{1}{2}$，

所以数列$\{a_n\}$是首项为 $-\dfrac{1}{2}$，公比为 $-\dfrac{1}{2}$ 的等比数列，

所以 $a_n=\left(-\dfrac{1}{2}\right)\times\left(-\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}=\left(-\dfrac{1}{2}\right)^n$.

13. **解**：(1)当 $n=1$ 时，$S_1=2a_1-2$，即 $a_1=2a_1-2$，

解得 $a_1=2$.

当 $n\geqslant 2$ 时，$a_n=S_n-S_{n-1}=(2a_n-2)-(2a_{n-1}-2)$

$=2a_n-2a_{n-1}$，即 $a_n=2a_{n-1}$，

所以数列$\{a_n\}$是首项为 2，公比为 2 的等比数列.

所以 $a_n=2\times 2^{n-1}=2^n(n\geqslant 2)$.

又 $n=1$ 时也符合上式，所以 $a_n=2^n(n\in\mathbf{N}^*)$.

(2)由(1)知，$S_n=2a_n-2=2^{n+1}-2$，

所以 $T_n=S_1+S_2+\cdots+S_n=2^2+2^3+\cdots+2^{n+1}-2n$

$=\dfrac{4\times(1-2^n)}{1-2}-2n=2^{n+2}-4-2n$.

14. **解**：(1)证明：由已知，得 $a_{n+1}=2a_n+2^n$，

$\therefore b_{n+1}=\dfrac{a_{n+1}}{2^n}=\dfrac{2a_n+2^n}{2^n}=\dfrac{a_n}{2^{n-1}}+1=b_n+1$，

$\therefore b_{n+1}-b_n=1$.

又 $a_1=1$，$\therefore b_1=1$，

$\therefore\{b_n\}$是首项为 1，公差为 1 的等差数列.

(2)由(1)知，$b_n=\dfrac{a_n}{2^{n-1}}=n$，$\therefore a_n=n\times 2^{n-1}$，

$\therefore S_n=1\times 2^0+2\times 2^1+3\times 2^2+\cdots+n\times 2^{n-1}$，

等式两边乘以 2，得

$2S_n=1\times 2^1+2\times 2^2+\cdots+(n-1)\times 2^{n-1}+n\times 2^n$，

两式相减得 $-S_n=1+2^1+2^2+\cdots+2^{n-1}-n\times 2^n=2^n-1-n\times 2^n=(1-n)\times 2^n-1$，

$\therefore S_n=(n-1)\times 2^n+1$.

第三章　不等式

3.1　不等关系与不等式

第 23 课时　不等关系与不等式

题点知识巩固

1. 选 C　对于 A，x 应满足 $x\leqslant 2\,000$，故 A 错误；对于 B，x，y 应满足 $x<y$，故 B 错误；C 正确；对于 D，y 与 a 的关系可表示为“$y\leqslant a$”，故 D 错误，选 C.

2. **解**：设甲、乙两种图画纸的生产量分别为 x t，y t，根据题意，应有如下的不等关系：
①生产甲、乙两种图画纸需要的芦苇不超过 300 t，用不等式表示为 $7x+3y\leqslant 300$；
②生产甲、乙两种图画纸需要的黄麻不超过 150 t，用不等式表示为 $3x+4y\leqslant 150$；
③生产甲、乙两种图画纸需要的枫树不超过 200 t，用不等式表示为 $5x+8y\leqslant 200$；
④甲、乙两种图画纸的生产量都不少于 8 t，用不等式表示为 $x\geqslant 8$，$y\geqslant 8$.

所以满足题意的不等式组为 $\begin{cases} 7x+3y\leqslant 300, \\ 3x+4y\leqslant 150, \\ 5x+8y\leqslant 200, \\ x\geqslant 8, y\geqslant 8. \end{cases}$

3. 选 C　$a-b=(3x^2-x+1)-(2x^2+x)=x^2-2x+1=(x-1)^2\geqslant 0$，

$\therefore a\geqslant b$，故选 C.

4. 选 C　易知 a，b，c 都是正数，$\dfrac{b}{a}=\dfrac{2\ln 3}{3\ln 2}=\log_8 9>1$，所以 $b>a$；

$\dfrac{a}{c}=\dfrac{5\ln 2}{2\ln 5}=\log_{25}32>1$，所以 $a>c$，于是 $c<a<b$，故选 C.

5. **证明**：$(x^2+y^2)(x-y)-(x^2-y^2)(x+y)=(x-y)[(x^2+y^2)-(x+y)^2]=-2xy(x-y)$.

∵$x<y<0$，$\therefore xy>0$，$x-y<0$，

$\therefore -2xy(x-y)>0$，

$\therefore (x^2+y^2)(x-y)>(x^2-y^2)(x+y)$.

6. 选 C　由于 $b<2a$，$3d<c$，则由不等式的性质得 $b+3d<2a+c$，故选 C.

7. 选 D　A 项，因为函数 $y=x^2$ 在 $(-\infty,0)$ 上单调递减，又 $a<b<0$，所以 $a^2>b^2$，故 A 不正确；B 项，因为 $a<b<0$，所以 $\dfrac{a}{b}>\dfrac{b}{b}=1$，故 B 不正确；C 项，因为函数 $y=x^3$ 为 **R** 上的增函数，又 $a<b$，所以 $a^3<b^3$，故 C 不正确；D 项，因为函数 $y=\dfrac{1}{x}$ 在 $(-\infty,0)$ 上单调递减，又 $a<b<0$，所以 $\dfrac{1}{a}>\dfrac{1}{b}$，故 D 正确，选 D.

8. **解析**：∵$x<-2$，$\therefore |x|>2$，$\therefore x^2>4$，$\therefore x^2+y>8$.
答案：$(8,+\infty)$

提能达标过关

1. 选 C　x 超过 85 分表示为 $x>85$，y 不低于 90 分表示为 $y\geqslant 90$，z 高于 95 分表示为 $z>95$，故选 C.

2. 选 C　因为 $a>b>c$，且 $a+b+c=0$，所以 $a>0$，$c<0$，所以 $ab>ac$，故选 C.

3. 选 B　∵$a_1\in(0,1)$，$a_2\in(0,1)$，$\therefore -1<a_1-1<0$，$-1<a_2-1<0$，$\therefore M-N=a_1a_2-(a_1+a_2-1)=a_1a_2-a_1-a_2+1=a_1(a_2-1)-(a_2-1)=(a_1-1)(a_2-1)>0$，

$\therefore M>N$，故选 B.

4. 选 D　∵$\dfrac{1}{a}<\dfrac{1}{b}<0$，$\therefore b<a<0$，$\therefore b^2>a^2$，$ab<b^2$，$a+b<0$，

$\therefore$ A，B，C 均正确，∵$b<a<0$，$\therefore |a|+|b|=|a+b|$，故 D 错误，故选 D.

5. 选 B　∵$0<a<1$，$ab>1$，$\therefore a>\dfrac{1}{b}>0$，$b>\dfrac{1}{a}>0$，

$\therefore M=\log_a\dfrac{1}{b}>\log_a a=1$，$N=\log_a b<\log_a\dfrac{1}{a}=-1$.

又 $P=\log_b\dfrac{1}{b}=-1$，$\therefore N<P<M$，故选 B.

6. **解析**：由 $a>0$，$b>0$ 且 $a\neq b$，得 $\dfrac{(ab)^{\frac{a+b}{2}}}{a^b b^a}=\left(\dfrac{a}{b}\right)^{\frac{a-b}{2}}$，

当 $a>b>0$ 时，$\dfrac{a}{b}>1$，$a-b>0$，则 $\left(\dfrac{a}{b}\right)^{\frac{a-b}{2}}>1$，

当 $b>a>0$ 时，$1>\dfrac{a}{b}>0$，$a-b<0$，则 $\left(\dfrac{a}{b}\right)^{\frac{a-b}{2}}>1$，

即 $(ab)^{\frac{a+b}{2}}>a^b b^a$.

答案：$(ab)^{\frac{a+b}{2}}>a^b b^a$

7. **解析**：∵$b+c\leqslant 2a$，$c+a\leqslant 2b$，且 $c>a-b$，$c>b-a$，

$\therefore$ 不等式组 $\begin{cases} a-b<c, \\ b-a<c, \\ c\leqslant 2a-b, \\ c\leqslant 2b-a \end{cases}$ 有解，$\therefore \begin{cases} a-b<2a-b, \\ a-b<2b-a, \\ b-a<2a-b, \\ b-a<2b-a. \end{cases}$

$\therefore \dfrac{2}{3}<\dfrac{b}{a}<\dfrac{3}{2}$，即 $\dfrac{b}{a}$ 的取值范围是 $\left(\dfrac{2}{3},\dfrac{3}{2}\right)$.

答案：$\left(\dfrac{2}{3},\dfrac{3}{2}\right)$

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

8. **解析**：对于①，由题意 a,b 为正实数，则 $a^2-b^2=1\Rightarrow a-b=\frac{1}{a+b}$ $\Rightarrow a-b>0\Rightarrow a>b>0$，故 $a+b>a-b>0$. 若 $a-b\geqslant 1$，则 $\frac{1}{a+b}\geqslant 1\Rightarrow a+b\leqslant 1$，这与 $a+b>a-b>0$ 矛盾，故 $a-b<1$ 成立，所以①正确；对于②，取 $a=5,b=\frac{5}{6}$，则 $\frac{1}{b}-\frac{1}{a}=1$，但 $a-b=5-\frac{5}{6}>1$，所以②不正确；对于③，取 $a=4,b=1$，则 $|\sqrt{a}-\sqrt{b}|=1$，但 $|a-b|=3<1$ 不成立，所以③不正确；对于④，$(a-b)^2-(1-ab)^2=a^2+b^2-1-a^2b^2=(a^2-1)(1-b^2)\leqslant 0$，即 $|a-b|\leqslant|1-ab|$，所以④正确. 综上可知，正确的命题为①④.

答案：①④

9. **解**：(1) $\sqrt{x+1}-\sqrt{x}=\frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}$，

$\sqrt{x}-\sqrt{x-1}=\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x-1}}$，

由于 $\sqrt{x+1}+\sqrt{x}>\sqrt{x}+\sqrt{x-1}>0$，

故 $\sqrt{x+1}-\sqrt{x}<\sqrt{x}-\sqrt{x-1}$.

(2)由题意，知 $(x^3-2y^3)-(xy^2-2x^2y)=x^3-xy^2+2x^2y-2y^3=x(x^2-y^2)+2y(x^2-y^2)=(x^2-y^2)(x+2y)=(x-y)(x+y)(x+2y)$.

$\because x>y>0$，$\therefore x-y>0,x+y>0,x+2y>0$，

$\therefore (x^3-2y^3)-(xy^2-2x^2y)>0$，

即 $x^3-2y^3>xy^2-2x^2y$.

(3)当 $a=1$ 时，$a^{3-a}=a^{2a}=1$；

当 $a>1$ 时，$y=a^x$ 为增函数，且 $3-a<2a$，

因此 $a^{3-a}<a^{2a}$；

当 $0<a<1$ 时，$y=a^x$ 为减函数，且 $3-a>2a$，

因此 $a^{3-a}<a^{2a}$.

综上，$a^{3-a}\leqslant a^{2a}$.

10. **解**：设 $2a+3b=x(a+b)+y(a-b)$，

则 $\begin{cases}x+y=2,\\x-y=3,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x=\frac{5}{2},\\y=-\frac{1}{2}.\end{cases}$

因为 $-\frac{5}{2}<\frac{5}{2}(a+b)<\frac{15}{2}$，$-2<-\frac{1}{2}(a-b)<-1$，

所以 $-\frac{9}{2}<\frac{5}{2}(a+b)-\frac{1}{2}(a-b)<\frac{13}{2}$，

即 $-\frac{9}{2}<2a+3b<\frac{13}{2}$.

所以 $2a+3b$ 的取值范围为 $\left(-\frac{9}{2},\frac{13}{2}\right)$.

3.2 一元二次不等式及其解法

第 24 课时 一元二次不等式及其解法

题点知识巩固

1. 选 C $-x^2-5x+6\geqslant 0$ 可化为 $x^2+5x-6\leqslant 0$. 方程 $x^2+5x-6=0$ 的两根为 $1,-6$，又 $y=x^2+5x-6$ 的图象开口向上，所以 $x^2+5x-6\leqslant 0$ 的解集为 $\{x|-6\leqslant x\leqslant 1\}$，故选 C.

2. 选 A 原不等式等价于 $\left(x-\frac{2}{3}\right)(x-2)\leqslant 0$，解得 $\frac{2}{3}\leqslant x\leqslant 2$，故选 A.

3. **解**：(1)原不等式组可化为 $\begin{cases}x<-2\text{ 或 }x>0,\\-1<x<1,\end{cases}$ 即 $0<x<1$，

所以原不等式组的解集为 $\{x|0<x<1\}$.

(2)原不等式等价于 $\begin{cases}6-2x\leqslant x^2-3x,\\x^2-3x<18,\end{cases}$

即 $\begin{cases}x^2-x-6\geqslant 0,\\x^2-3x-18<0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}(x-3)(x+2)\geqslant 0,\\(x-6)(x+3)<0.\end{cases}$

所以 $\begin{cases}x\leqslant -2\text{ 或 }x\geqslant 3,\\-3<x<6.\end{cases}$

所以 $-3<x\leqslant -2$ 或 $3\leqslant x<6$.

所以原不等式的解集为 $\{x|-3<x\leqslant -2\text{ 或 }3\leqslant x<6\}$.

(3)解法一：原不等式等价于

$\begin{cases}x^2-3x+2>0,\\x\geqslant 0\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x^2+3x+2>0,\\x<0.\end{cases}$

分别解这两个不等式组，得 $0\leqslant x<1$ 或 $x>2$ 或 $-1<x<0$ 或 $x<-2$，

故原不等式的解集为 $\{x|x<-2\text{ 或 }-1<x<1\text{ 或 }x>2\}$.

解法二：原不等式可化为 $|x|^2-3|x|+2>0$，

即 $(|x|-1)(|x|-2)>0$，

所以 $0\leqslant|x|<1$ 或 $|x|>2$，

即 $-1<x<1$ 或 $x>2$ 或 $x<-2$.

故原不等式的解集为 $\{x|x<-2\text{ 或 }-1<x<1\text{ 或 }x>2\}$.

4. **解**：因为 $a>0$，原不等式等价于 $\left(x-\frac{1}{a}\right)(x-1)<0$.

①当 $a=1$ 时，$\frac{1}{a}=1$，$\left(x-\frac{1}{a}\right)(x-1)<0$ 无解；

②当 $a>1$ 时，$\frac{1}{a}<1$，解 $\left(x-\frac{1}{a}\right)(x-1)<0$，得 $\frac{1}{a}<x<1$；

③当 $0<a<1$ 时，$\frac{1}{a}>1$，解 $\left(x-\frac{1}{a}\right)(x-1)<0$，得 $1<x<\frac{1}{a}$.

综上所述，

当 $0<a<1$ 时，原不等式的解集为 $\left\{x\,\middle|\,1<x<\frac{1}{a}\right\}$；

当 $a=1$ 时，原不等式的解集为 $\varnothing$；

当 $a>1$ 时，原不等式的解集为 $\left\{x\,\middle|\,\frac{1}{a}<x<1\right\}$.

5. **解析**：由题意得，$1,m$ 是方程 $ax^2-6x+a^2=0$ 的两个根，且 $a<0$，

$\therefore \begin{cases}1+m=\frac{6}{a},\\1\times m=a,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=-3,\\m=-3\end{cases}$ 或 $\begin{cases}a=2,\\m=2\end{cases}$（舍去）.

答案：-3 -3

6. **解**：$x^2+ax+b<0$ 的解集为 $\{x|1<x<2\}$，

$\therefore 1,2$ 是 $x^2+ax+b=0$ 的两根.

由韦达定理，有 $\begin{cases}-a=1+2,\\b=1\times 2,\end{cases}$ 得 $\begin{cases}a=-3,\\b=2,\end{cases}$

代入所求不等式，得 $2x^2-3x+1>0$.

即 $(2x-1)(x-1)>0$，

解得 $x<\frac{1}{2}$ 或 $x>1$.

$\therefore bx^2+ax+1>0$ 的解集为 $\left(-\infty,\frac{1}{2}\right)\cup(1,+\infty)$.

提能达标过关

1. 选 C A，B 中，$\Delta>0$，$\therefore$ 解集不可能为 $\mathbf{R}$；C 中，$1>0$，且 $\Delta<0$，$\therefore$ 解集为 $\mathbf{R}$；D 中，$2>0$，且 $\Delta<0$，$\therefore$ 解集为 $\varnothing$，故选 C.

2. 选 A 由 $M=\{x|-4\leqslant x\leqslant 7\}$，$N=\{x|x<-2\text{ 或 }x>3\}$，$\therefore M\cap N=\{x|-4\leqslant x<-2\text{ 或 }3<x\leqslant 7\}$，故选 A.

3. 选 D 因为 $a<0$，所以原不等式等价于 $(x+1)\left(x+\frac{1}{a}\right)>0$，方程 $(x+1)\left(x+\frac{1}{a}\right)=0$ 的两根为 $-1,-\frac{1}{a}$，显然 $-\frac{1}{a}>0>-1$，所以原不等式的解集为 $(-\infty,-1)\cup\left(-\frac{1}{a},+\infty\right)$，故选 D.

4. 选 B 依题意，得 $q,1$ 是方程 $x^2+px-2=0$ 的两根，$q+1=-p$，即 $p+q=-1$，故选 B.

5. 选 B 由已知可得 $-\frac{1}{2},\frac{1}{3}$ 是方程 $ax^2+bx-2=0$ 的两根，

由根与系数的关系得 $\begin{cases}-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=-\frac{b}{a},\\\left(-\frac{1}{2}\right)\times\frac{1}{3}=-\frac{2}{a},\end{cases}$

解得 $\begin{cases}a=12,\\b=2,\end{cases}$ 所以 $ab=24$，故选 B.

6. **解析**：由对应值表知，抛物线开口向上，$ax^2+bx+c\leqslant 0$ 的解集是 $[-2,3]$.

答案：$[-2,3]$

7. **解析**：由 $f(x)>x$，得 $\begin{cases}x^2-4x>x,\\x>0\end{cases}$ 或 $\begin{cases}-x^2-4x>x,\\x<0,\end{cases}$ 解得 $x>5$ 或 $-5<x<0$，所以原不等式的解集为 $(-5,0)\cup(5,+\infty)$.

答案：$(-5,0)\cup(5,+\infty)$

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

8. **解析**：由已知得 $\begin{cases} x\leqslant -1 \text{ 或 } x\geqslant \dfrac{2}{3}, \\ x<\dfrac{3}{4} \text{ 或 } x>3, \end{cases}$

即 $x\leqslant -1$ 或 $x>3$.

答案：$\{x\mid x\leqslant -1 \text{ 或 } x>3\}$

9. **解**：①当 $m=0$ 时，$-3<0$ 恒成立，所以 $x\in\mathbf{R}$.

②当 $m>0$ 时，不等式变为 $(mx+3)(mx-1)<0$，

即 $\left(x+\dfrac{3}{m}\right)\left(x-\dfrac{1}{m}\right)<0$，解得 $-\dfrac{3}{m}<x<\dfrac{1}{m}$.

③当 $m<0$ 时，原不等式变为 $\left(x+\dfrac{3}{m}\right)\left(x-\dfrac{1}{m}\right)<0$，

解得 $\dfrac{1}{m}<x<-\dfrac{3}{m}$.

综上知，当 $m=0$ 时，解集为 $\mathbf{R}$；

当 $m>0$ 时，解集为 $\left\{x\,\middle|\,-\dfrac{3}{m}<x<\dfrac{1}{m}\right\}$；

当 $m<0$ 时，解集为 $\left\{x\,\middle|\,\dfrac{1}{m}<x<-\dfrac{3}{m}\right\}$.

10. **解**：(1)依题意，得

$$\begin{cases} a>0, \\ -1+2=-\dfrac{b-3}{a}, \\ -1\times 2=\dfrac{-a-ab}{a}, \end{cases} \text{解得} \begin{cases} a=2, \\ b=1. \end{cases}$$

(2)由(1)知，$cx^2+cx-1<2x^2+2x+1$ 的解集为 $\mathbf{R}$，

即 $(c-2)x^2+(c-2)x-2<0$ 的解集为 $\mathbf{R}$，

当 $c=2$ 时，$-2<0$，符合题意；当 $c\neq 2$ 时，

$$\begin{cases} c-2<0, \\ \Delta=(c-2)^2+8(c-2)<0, \end{cases}$$

解得 $-6<c<2$.

综上所述，c 的取值范围是 $\{c\mid -6<c\leqslant 2\}$.

第25课时　一元二次不等式的应用

题点知识巩固

1. 选C　解法一：由题可得 $\begin{cases} x^2-x-6>0, \\ x-1>0 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x^2-x-6<0, \\ x-1<0. \end{cases}$ 解得 $x>3$ 或 $-2<x<1$.

解法二：原不等式等价于 $(x-3)(x+2)(x-1)>0$



根据穿针引线法，解集为 $\{x\mid -2<x<1 \text{ 或 } x>3\}$，故选C.

2. **解**：(1)不等式 $\dfrac{2x-1}{3x+1}\geqslant 0$ 即为 $\begin{cases} (2x-1)(3x+1)\geqslant 0, \\ 3x+1\neq 0, \end{cases}$ 从而

$$\begin{cases} x\leqslant -\dfrac{1}{3} \text{或 } x\geqslant \dfrac{1}{2}, \\ x\neq -\dfrac{1}{3}, \end{cases} \text{解得 } x<-\dfrac{1}{3} \text{或 } x\geqslant \dfrac{1}{2}.$$

所以原不等式的解集为 $\left\{x\,\middle|\,x<-\dfrac{1}{3} \text{或 } x\geqslant \dfrac{1}{2}\right\}$.

(2)原不等式可化为 $\begin{cases} x+3>0, \\ 2-x>x+3 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x+3<0, \\ 2-x<x+3 \end{cases}\Leftrightarrow$

$$\begin{cases} x>-3, \\ x<-\dfrac{1}{2} \end{cases} \text{或} \begin{cases} x<-3, \\ x>-\dfrac{1}{2}, \end{cases} \text{解得} -3<x<-\frac{1}{2}.$$

所以原不等式的解集为 $\left\{x\,\middle|\,-3<x<-\dfrac{1}{2}\right\}$.

3. 选D　当 $k=0$ 时，显然成立；

当 $k\neq 0$ 时，即一元二次不等式 $2kx^2+kx-\dfrac{3}{8}<0$ 对一切实数 x 都成立，则 $\begin{cases} k<0, \\ \Delta=k^2-4\times 2k\times\left(-\dfrac{3}{8}\right)<0, \end{cases}$ 解得 $-3<k<0$.

综上，满足不等式 $2kx^2+kx-\dfrac{3}{8}<0$ 对一切实数 x 都成立的 k 的取值范围是 $(-3,0]$，故选D.

4. **解**：由 $f(x)=x^2+(m-4)x+4-2m=(x-2)m+x^2-4x+4$，

令 $g(m)=(x-2)m+x^2-4x+4$.

由题意知在 $[-1,1]$ 上，$g(m)$ 的值恒大于零，

所以 $\begin{cases} g(-1)=(x-2)\times(-1)+x^2-4x+4>0, \\ g(1)=(x-2)+x^2-4x+4>0, \end{cases}$

解得 $x<1$ 或 $x>3$.

故当 $x\in(-\infty,1)\cup(3,+\infty)$ 时，对任意的 $m\in[-1,1]$，函数 $f(x)$ 的值恒大于零.

5. **解析**：设按销售收入的 $t\%$ 征收木材税时，税金收入为 y 万元，

则 $y=2\,400\times\left(20-\dfrac{5}{2}t\right)\times t\%=60(8t-t^2)$.

令 $y\geqslant 900$，即 $60(8t-t^2)\geqslant 900$，解得 $3\leqslant t\leqslant 5$.

答案：$[3,5]$

6. **解**：(1)设该厂月获利为 y 元，则 $y=(160-2x)x-(500+30x)$

$=-2x^2+130x-500$，$x\in\mathbf{N}^*$.

由题意 $y\geqslant 1\,300$，即 $-2x^2+130x-500\geqslant 1\,300$，

化简得 $x^2-65x+900\leqslant 0$，解得 $20\leqslant x\leqslant 45$，

∴当月销售量在20至45件之间时，月获利不少于1 300元.

(2)由(1)知 $y=-2\left(x-\dfrac{65}{2}\right)^2+1\,612.5$.

∵$x\in\mathbf{N}^*$，∴当 $x=32$ 或33时，y 取最大值为1 612，

∴当月销售量为32或33件时，月获利最大，且最大为1 612元.

提能达标过关

1. 选B　$\dfrac{1-x}{2+x}\geqslant 0\Leftrightarrow\dfrac{x-1}{x+2}\leqslant 0\Leftrightarrow\begin{cases} (x-1)(x+2)\leqslant 0, \\ x+2\neq 0. \end{cases}\Leftrightarrow -2<x\leqslant 1$，故选B.

2. 选D　由 $\dfrac{x+2}{4x+1}\geqslant\dfrac{1}{3}$ 得，$\dfrac{x+2}{4x+1}-\dfrac{1}{3}\geqslant 0$，

则 $\dfrac{-x+5}{3(4x+1)}\geqslant 0$，

可转化为 $3(-x+5)(4x+1)>0$ 或 $-x+5=0$，

解得 $-\dfrac{1}{4}<x\leqslant 5$.

此不等式的解集为 $\left\{x\,\middle|\,-\dfrac{1}{4}<x\leqslant 5\right\}$，故选D.

3. 选A　原不等式可化为 $\dfrac{5}{x+2}-1>0$，即 $\dfrac{-x+3}{x+2}>0$，解得 $-2<x<3$，∴不等式的解集为 $\{x\mid -2<x<3\}$，故选A.

4. 选C　当 $a-2=0$，即 $a=2$ 时，不等式为 $-4<0$，对一切 $x\in\mathbf{R}$ 恒成立.

当 $a\neq 2$ 时，则 $\begin{cases} a-2<0, \\ \Delta=4(a-2)^2+16(a-2)<0, \end{cases}$

即 $\begin{cases} a-2<0, \\ a^2<4, \end{cases}$ 解得 $-2<a<2$.

∴实数 a 的取值范围是 $(-2,2]$，故选C.

5. 选A　当 $x>0$ 时，原不等式可化为 $x^2<1<x^3$，解得 $x\in\varnothing$，当 $x<0$ 时，原不等式可化为 $\begin{cases} x^2>1, \\ x^3<1, \end{cases}$ 解得 $x<-1$，故选A.

6. **解析**：原不等式可化为 $(2-x)(x+4)>0$，

即 $(x-2)(x+4)<0$.

解得 $-4<x<2$.

∴不等式的解集为 $\{x\mid -4<x<2\}$.

答案：$\{x\mid -4<x<2\}$

7. **解析**：∵不等式 $x^2+ax+4<0$ 的解集不是空集，

∴$\Delta=a^2-4\times 4>0$，即 $a^2>16$.

∴$a>4$ 或 $a<-4$.

答案：$(-\infty,-4)\cup(4,+\infty)$

8. **解析**：将原不等式整理为形式上是关于 a 的不等式 $(x-3)a+x^2-6x+9>0$.

令 $f(a)=(x-3)a+x^2-6x+9$.

因为 $f(a)>0$ 在 $|a|\leqslant 1$ 时恒成立，所以

①若 $x=3$，则 $f(a)=0$，不符合题意，应舍去.

②若 $x\neq 3$，则由一次函数的单调性，可得 $\begin{cases} f(-1)>0, \\ f(1)>0, \end{cases}$

即 $\begin{cases} x^2-7x+12>0, \\ x^2-5x+6>0, \end{cases}$ 解得 $x<2$ 或 $x>4$.

答案：$(-\infty,2)\cup(4,+\infty)$

9. **解**：由 $f(1-x)=f(1+x)$ 知 $f(x)$ 的图象关于直线 $x=1$ 对称，

即 $\dfrac{a}{2}=1$，解得 $a=2$.

又因为 $f(x)$ 的图象开口向下，

所以当 $x\in[-1,1]$ 时，$f(x)$ 为增函数，

所以当 $x\in[-1,1]$ 时，$f(x)_{\min}=f(-1)=-1-2+b^2-b+1$

$=b^2-b-2$，

若当 $x\in[-1,1]$ 时，$f(x)>0$ 恒成立，

则 $b^2-b-2>0$ 恒成立，

解得 $b<-1$ 或 $b>2$.

所以实数 b 的取值范围为 $(-\infty,-1)\cup(2,+\infty)$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

10. **解**：(1)∵不等式$(1-a)x^2-4x+6>0$的解集为$\{x|-3<x<1\}$，

$$\therefore\begin{cases}1-a<0,\\-3+1=\dfrac{4}{1-a},\\-3\times1=\dfrac{6}{1-a},\end{cases}$$解得$a=3$.

∴不等式$2x^2+(2-a)x-a>0$化为$2x^2-x-3>0$，

解得$x<-1$或$x>\dfrac{3}{2}$.

∴不等式$2x^2+(2-a)x-a>0$的解集为

$$\left\{x\,\middle|\,x<-1\text{或}x>\frac{3}{2}\right\}.$$

(2)∵$3x^2+bx+3\geqslant0$的解集不为**R**.

∴$\Delta=b^2-4\times3\times3>0$，解得$b<-6$或$b>6$，

∴当$b<-6$或$b>6$时，$ax^2+bx+3\geqslant0$的解集不为**R**.

第26课时　素养提升——不等式与一元二次不等式

素养培优提能

1. 选D　由于$0<a<1$，所以函数$f(x)=\log_ax$和$g(x)=a^x$在定义域上都是单调递减函数，而且$1+a<1+\dfrac{1}{a}$，所以②与④是正确的，故选D.

2. 选C　解法一：因为$\dfrac{1}{a}<\dfrac{1}{b}<0$，故可取$a=-1$，$b=-2$. 显然$|a|+b=1-2=-1<0$，所以②错误；因为$\ln a^2=\ln(-1)^2=0$，$\ln b^2=\ln(-2)^2=\ln4>0$，所以④错误，综上所述，可排除A、B、D，故选C.

解法二：由$\dfrac{1}{a}<\dfrac{1}{b}<0$，可知$b<a<0$.

①中，因为$a+b<0$，$ab>0$，所以$\dfrac{1}{a+b}<\dfrac{1}{ab}$，故①正确；

②中，因为$b<a<0$，所以$-b>-a>0$，故$-b>|a|$，即$|a|+b<0$，故②错误；

③中，因为$b<a<0$，又$\dfrac{1}{a}<\dfrac{1}{b}<0$，则$-\dfrac{1}{a}>-\dfrac{1}{b}>0$，所以$a-\dfrac{1}{a}>b-\dfrac{1}{b}$，故③正确；

④中，因为$b<a<0$，根据$y=x^2$在$(-\infty,0)$上为减函数，可得$b^2>a^2>0$，而$y=\ln x$在定义域$(0,+\infty)$上为增函数，所以$\ln b^2>\ln a^2$，故④错误. 由以上分析，知①③正确，故选C.

3. 选B　∵$f(x)$是定义在$(-\infty,+\infty)$上的偶函数，

∴$b=f(\log_{\frac{1}{2}}3)=f(-\log_23)=f(\log_23)$.

∵$\log_23=\log_49>\log_47$，$2^{1.6}>2$，∴$\log_47<\log_49<2^{1.6}$.

∵$f(x)$在$(-\infty,0]$上是增函数，∴$f(x)$在$[0,+\infty)$上为减函数，

则$f(\log_47)>f(\log_49)>f(2^{1.6})$，即$c<b<a$，故选B.

4. 选A　当$k=0$时，不等式$kx^2-6kx+k+8\geqslant0$化为$8\geqslant0$，其对任意的$x\in\mathbf{R}$恒成立；当$k<0$时，不等式$kx^2-6kx+k+8\geqslant0$不能恒成立；当$k>0$时，要使不等式$kx^2-6kx+k+8\geqslant0$对任意的$x\in\mathbf{R}$恒成立，对于方程$kx^2-6kx+k+8=0$，需$\Delta=36k^2-4(k^2+8k)\leqslant0$，得$0<k\leqslant1$. 综上，实数$k$的取值范围是$[0,1]$，故选A.

5. 选D　令$f(x)=x^2+(m-1)x+m^2-2$，则由题意，可得

$$\begin{cases}f(-1)=m^2-m<0,\\f(1)=m^2+m-2<0,\end{cases}$$解得$0<m<1$，故选D.

6. **解析**：当$k=1$时，$-1<0$恒成立；当$k\neq1$时，由题意得

$$\begin{cases}k-1<0,\\(k-1)^2+4(k-1)<0,\end{cases}$$解得$-3<k<1$，因此实数k的取值范围为$(-3,1]$.

答案：$(-3,1]$

7. **解析**：不等式可变形为$a>\dfrac{2^x-1}{4^x}=\left(\dfrac{1}{2}\right)^x-\left(\dfrac{1}{4}\right)^x$. 令$\left(\dfrac{1}{2}\right)^x=t$，则$t>0$，所以$y=\left(\dfrac{1}{2}\right)^x-\left(\dfrac{1}{4}\right)^x=t-t^2=-\left(t-\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{1}{4}$，因此当$t=\dfrac{1}{2}$时，$y$取得最大值$\dfrac{1}{4}$，故实数$a$的取值范围是$\left(\dfrac{1}{4},+\infty\right)$.

答案：$\left(\dfrac{1}{4},+\infty\right)$

8. **解析**：由题意，得函数$f(x)=x^2+mx-1$在$[m,m+1]$上的最大值小于0，又抛物线$f(x)=x^2+mx-1$开口向上，

所以只需$\begin{cases}f(m)=m^2+m^2-1<0,\\f(m+1)=(m+1)^2+m(m+1)-1<0,\end{cases}$

即$\begin{cases}2m^2-1<0,\\2m^2+3m<0,\end{cases}$解得$-\dfrac{\sqrt{2}}{2}<m<0$.

答案：$\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2},0\right)$

9. **解**：原不等式可化为$(1-m^2)x^2+(1+m)x-1<0$.

①当$1-m^2=0$时，解得$m=1$或-1.

若$m=-1$，不等式化为$-1<0$，显然恒成立；

若$m=1$，不等式化为$2x-1<0$，解得$x<\dfrac{1}{2}$，故不等式的解集不是**R**，不合题意.

②当$1-m^2\neq0$时，由不等式恒成立可得

$$\begin{cases}1-m^2<0,\\\Delta=(1+m)^2-4(1-m^2)\times(-1)<0,\end{cases}$$

解得$m<-1$或$m>\dfrac{5}{3}$.

综上，实数m的取值范围为$(-\infty,-1]\cup\left(\dfrac{5}{3},+\infty\right)$.

10. **解**：(1)不等式变形为$x^2+(m-4)x+4-m>0$.

设$f(x)=x^2+(m-4)x+4-m$，

对任意实数x，不等式恒成立，等价于函数$f(x)$的函数值恒为正值，或函数$f(x)$的图象在x轴的上方.

∴$\Delta=(m-4)^2-4(4-m)=m^2-4m<0$，解得$0<m<4$.

∴实数m的取值范围是$(0,4)$.

(2)原不等式可化为$m(x-1)+x^2-4x+4>0$.

令$g(m)=m(x-1)+x^2-4x+4$，则$g(m)>0$对$0\leqslant m\leqslant4$恒成立，

可得$\begin{cases}g(0)>0,\\g(4)>0,\end{cases}$即$\begin{cases}x^2-4x+4>0,\\x^2>0,\end{cases}$解得$x\neq0$且$x\neq2$.

∴实数x的取值范围是$\{x|x\neq0\text{且}x\neq2,x\in\mathbf{R}\}$.

3.3　二元一次不等式(组)与简单的线性规划问题

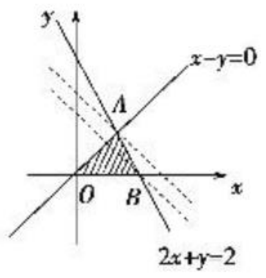
第27课时　二元一次不等式(组)与平面区域

题点知识巩固

1. 选D　代入点$(0,0)$，得$-1>0$，知点$(0,0)$不在$2x+y-1>0$表示的区域内. 又直线$2x+y-1=0$应画成虚线，故选D.

2. 选C　结合图形，故选C.

3. 选D　画出不等式组$\begin{cases}x-y\geqslant0,\\2x+y\leqslant2,\\y\geqslant0\end{cases}$表示的平面区域，如图中阴影部分所示，



由$\begin{cases}x-y=0,\\2x+y=2,\end{cases}$得$A\left(\dfrac{2}{3},\dfrac{2}{3}\right)$，

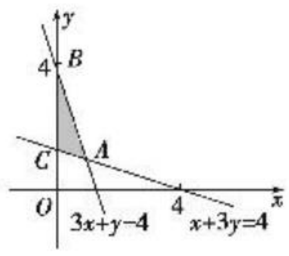
由$\begin{cases}y=0,\\2x+y=2,\end{cases}$得$B(1,0)$.

又$x+y=a$表示斜率为-1，在y轴上的截距为a的一族平行直线，且当直线经过点B时，$1+0=a$；当直线经过点A时，$\dfrac{2}{3}+\dfrac{2}{3}=a$.

∴若不等式组$\begin{cases}x-y\geqslant0,\\2x+y\leqslant2,\\y\geqslant0,\\x+y\leqslant a\end{cases}$表示的平面区域是一个三角形，则实数$a$的取值范围是$0<a\leqslant1$或$a\geqslant\dfrac{4}{3}$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

4. 选C　平面区域如图所示.

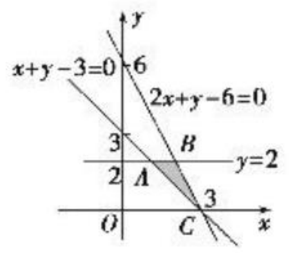


解$\begin{cases}x+3y=4,\\3x+y=4.\end{cases}$得$A(1,1)$,

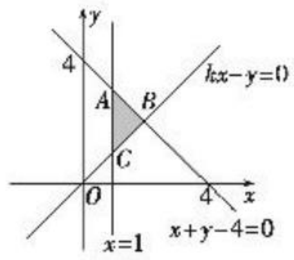
易得$B(0,4)$,$C\left(0,\frac{4}{3}\right)$,$|BC|=4-\frac{4}{3}=\frac{8}{3}$.

所以$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}\times\frac{8}{3}\times1=\frac{4}{3}$,故选C.

5. 选B　不等式组$\begin{cases}2x+y-6\leqslant0,\\x+y-3\geqslant0,\\y\leqslant2\end{cases}$表示的平面区域如图所示(阴影部分),$\triangle ABC$的面积即所求.求出点$A,B,C$的坐标分别为$A(1,2),B(2,2),C(3,0)$,则$\triangle ABC$的面积为$S=\frac{1}{2}\times(2-1)\times2=1$,故选B.



6. 选A　作出不等式组表示的平面区域如图中阴影部分所示,要使阴影部分为直角三角形,当$k=0$时,此三角形的面积为$\frac{1}{2}\times3\times3=\frac{9}{2}\neq1$,所以不成立,所以$k>0$,则必有$BC\perp AB$,因为$x+y-4=0$的斜率为$-1$,所以直线$kx-y=0$的斜率为1,即$k=1$,故选A.



提能达标过关

1. 选B　边界所在的直线为$x+y-1=0$,取点$O(0,0)$,代入得$-1<0$,则不等式$x+y-1>0$表示图中阴影部分,故选B.

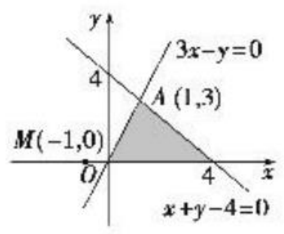
2. 选C　$(x-2y+1)(x+y-3)\leqslant0\Leftrightarrow\begin{cases}x-2y+1\geqslant0,\\x+y-3\leqslant0\end{cases}$

或$\begin{cases}x-2y+1\leqslant0,\\x+y-3\geqslant0.\end{cases}$结合图形可知选C.

3. 选C　将原点坐标$(0,0)$代入$2x-y+2$得$2x-y+2=2>0$,于是$2x-y+2\geqslant0$表示直线$2x-y+2=0$右下方的平面区域,再结合所给图形,可知C符合,故选C.

4. 选C　由不等式$2x+y<6$得$y<6-2x$,且$x>0,y>0$,则当$x=1$时,$0<y<4$,则$y=1,2,3$,此时整点有$(1,1),(1,2),(1,3)$;当$x=2$时,$0<y<2$,则$y=1$,此时整点有$(2,1)$;当$x=3$时,y无解.故平面区域内的整点个数为4.

5. 选C　画出不等式组表示的平面区域,如图中阴影(不含x轴)部分所示,直线$y=k(x+1)$过定点$M(-1,0)$,



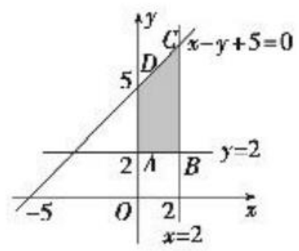
由$\begin{cases}x+y-4=0,\\3x-y=0,\end{cases}$解得$\begin{cases}x=1,\\y=3,\end{cases}$

过点$M(-1,0)$与$A(1,3)$的直线的斜率是$\frac{3}{2}$,根据题意可知$0<k\leqslant\frac{3}{2}$,故选C.

6. **解析**:因为直线$2x-3y+6=0$的上方区域可以用不等式$2x-3y+6<0$表示,所以由点$(-2,t)$在直线$2x-3y+6=0$的上方得$-4-3t+6<0$,解得$t>\frac{2}{3}$.

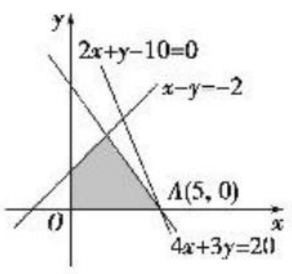
答案:$\left(\frac{2}{3},+\infty\right)$

7. **解析**:如图,平面区域为直角梯形,易得$A(0,2),B(2,2),C(2,7),D(0,5)$,所以$AD=3,AB=2,BC=5$.故所求区域的面积为$S=\frac{1}{2}\times(3+5)\times2=8$.



答案:8

8. **解析**:画出不等式组$\begin{cases}x-y\geqslant-2,\\4x+3y\leqslant20,\\x\geqslant0,y\geqslant0\end{cases}$表示的平面区域,如图中阴影部分所示.



因为直线$2x+y-10=0$过点$A(5,0)$,且其斜率为-2,小于直线$4x+3y=20$的斜率$-\frac{4}{3}$,故直线$2x+y-10=0$与不等式组表示的平面区域只有一个公共点$(5,0)$.

答案:1

9. **解**:(1)直线AB,AC,BC的方程分别为$7x-5y-23=0$,$x+7y-11=0$,$4x+y+10=0$.原点$(0,0)$在区域D内,故表示区域D的不等式组为$\begin{cases}7x-5y-23\leqslant0,\\x+7y-11\leqslant0,\\4x+y+10\geqslant0.\end{cases}$

(2)根据题意有

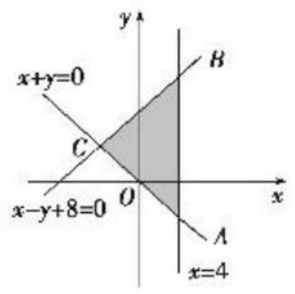
$[4\times(-1)-3\times(-6)-a][4\times(-3)-3\times2-a]<0$,

即$(14-a)(-18-a)<0$,

解得$-18<a<14$.

故实数a的取值范围是$(-18,14)$.

10. **解**:(1)作出平面区域Q,它是一个等腰直角三角形(如图中阴影部分).



由$\begin{cases}x+y=0,\\x=4\end{cases}$得$A(4,-4)$.

由$\begin{cases}x-y+8=0,\\x=4\end{cases}$得$B(4,12)$.

由$\begin{cases}x-y+8=0,\\x+y=0\end{cases}$得$C(-4,4)$.

于是可得$|AB|=16$,AB边上的高$d=8$.

$\therefore S=\frac{1}{2}\times16\times8=64$.

(2)由已知条件得$\begin{cases}t-1+8\geqslant0,\\t+1\geqslant0,\\t\leqslant4,\\t\in\mathbf{Z},\end{cases}$即$\begin{cases}t\geqslant-7,\\t\geqslant-1,\\t\leqslant4,\\t\in\mathbf{Z},\end{cases}$

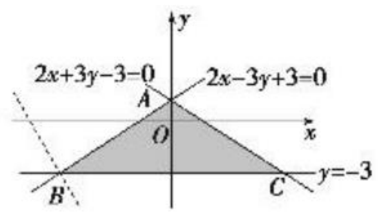
故$\begin{cases}-1\leqslant t\leqslant4,\\t\in\mathbf{Z},\end{cases}$得$t=-1,0,1,2,3,4$.

故整数t的取值集合是$\{-1,0,1,2,3,4\}$.

第28课时　简单的线性规划问题

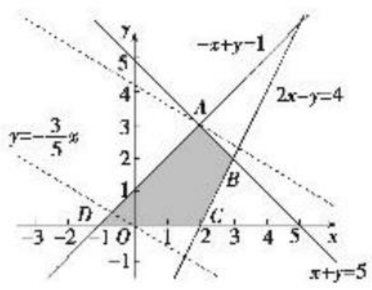
题点知识巩固

1. 选A　解法一:作出不等式组$\begin{cases}2x+3y-3\leqslant0,\\2x-3y+3\geqslant0,\\y+3\geqslant0\end{cases}$对应的可行域,如图中阴影部分所示.易求得可行域的顶点$A(0,1),B(-6,-3),C(6,-3)$,当直线$z=2x+y$过点$B(-6,-3)$时,z取得最小值,$z_{\min}=2\times(-6)-3=-15$,故选A.

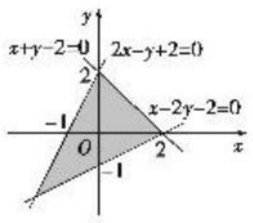


解法二:易求可行域顶点$A(0,1),B(-6,-3),C(6,-3)$,分别代入目标函数,求出对应的z的值依次为1,-15,9,故最小值为-15.

2. 选C　作出可行域如图中阴影部分所示.由$\begin{cases}x+y=5,\\-x+y=1\end{cases}$得$\begin{cases}x=2,\\y=3,\end{cases}$所以$A(2,3)$.由目标函数$z=3x+5y$可得$y=-\frac{3}{5}x+\frac{z}{5}$,$z$随着直线$y=-\frac{3}{5}x+\frac{z}{5}$在$y$轴上的截距的增大而增大.作出直线$l_0:y=-\frac{3}{5}x$,通过平移直线$l_0$可得点$A(2,3)$为$z$取得最大值的最优解,所以$z_{\max}=3\times2+5\times3=21$,故选C.



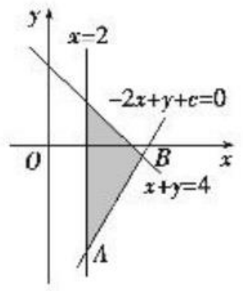
3. 选D　如图,由$y=ax+z$知z的几何意义是直线在y轴上的截距,



故当$a>0$时,要使$z=y-ax$取得最大值的最优解不唯一,则$a=2$;

当$a<0$时,要使$z=y-ax$取得最大值的最优解不唯一,则$a=-1$,故选D.

4. **解析**:画出满足条件的可行域,如图中阴影部分所示,可知目标函数$z=4x+y$在点$A(2,4-c)$处取得最小值3,所以$8+4-c=3$,求得$c=9$.从而目标函数$z=4x+y$在点$B\left(\frac{13}{3},-\frac{1}{3}\right)$处取得最大值,即$z_{\max}=4\times\frac{13}{3}-\frac{1}{3}=17$.

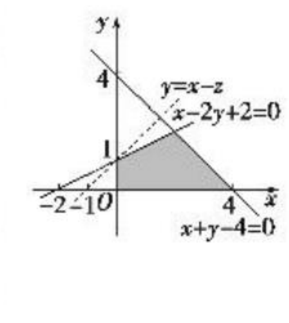


答案:9　17

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

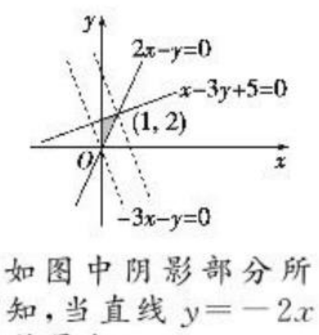
5. **解**：(1)x,y 满足约束条件为 $\begin{cases}x+y\leqslant 10,\\0.3x+0.2y\leqslant 2.4,\\x\geqslant 0,\\y\geqslant 0.\end{cases}$

(2)设目标函数 $z=0.5x+0.4y$，上述不等式组表示的平面区域如图中阴影部分所示，平移直线 $l_0:0.5x+0.4y=0$，当经过点 M 时，$z=0.5x+0.4y$ 取得最大值. 解方程组 $\begin{cases}x+y=10,\\0.3x+0.2y=2.4,\end{cases}$ 得 $x=4$，$y=6$. 此时 $z_{\max}=0.5\times 4+0.4\times 6=4.4$(万元).

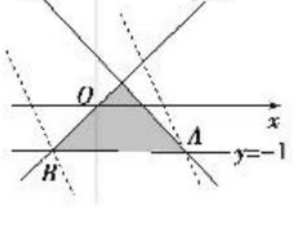


提能达标过关

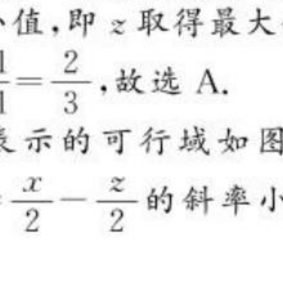
1. 选 A　作出不等式组 $\begin{cases}x+y\geqslant 0,\\x-y\geqslant 0,\\1\leqslant x\leqslant 3\end{cases}$ 表示的平面区域，如图中阴影部分所示. 从图中可以看出，平移直线 $2x-y=0$，当其经过点 $C(3,-3)$ 时，$2x-y$ 取得最大值，最大值为 $2\times 3-(-3)=9$，故选 A.



2. 选 D　作出满足条件的可行域，如图中阴影部分所示，令 $z=x-y$，则当 $y=x-z$ 过点 $(0,1)$ 时，z 取得最小值 -1，即 2^{x-y} 的最小值为 $2^{-1}=\frac{1}{2}$，故选 D.

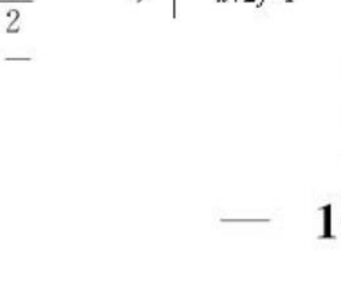


3. 选 D　不等式组表示的平面区域如图中阴影部分所示，而 $z=8^{-x}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{y}=2^{-3x-y}$，欲使 z 最小，只需使 $-3x-y$ 最小即可. 由图知当 $x=1$，$y=2$ 时，$-3x-y$ 的值最小，且 $-3\times 1-2=-5$，此时 2^{-3x-y} 最小，最小值为 $\frac{1}{32}$，故选 D.



4. 选 B　作出可行域(如图中阴影部分所示)，结合目标函数可知，当直线 $y=-2x+z$ 经过点 A 时，z 的值最大，

由 $\begin{cases}y=-1,\\x+y=1,\end{cases}$ 得 $\begin{cases}x=2,\\y=-1,\end{cases}$ 则 $m=z_{\max}=2\times 2-1=3$. 当直线 $y=-2x+z$ 经过点 B 时，z 的值最小，由 $\begin{cases}y=-1,\\y=x,\end{cases}$ 得 $\begin{cases}x=-1,\\y=-1,\end{cases}$ 则 $n=z_{\min}=2\times(-1)-1=-3$. 故 $m-n=6$，故选 B.

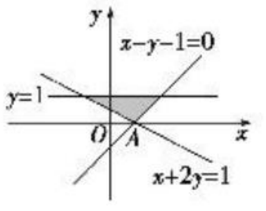


5. 选 A　目标函数 $z=ax-y(a>0)$，可变形为 $y=ax-z$，这是斜率为 $a(a>0)$，在 y 轴上截距为 $-z$ 的一族平行直线，由图象知，当直线 $y=ax-z(a>0)$ 一部分与边界 AC 重合时，线段 AC 上的点都使 $-z$ 取得最小值，即 z 取得最大值，此时最优解有无数个，所以 $a=k_{AC}=\frac{3-1}{4-1}=\frac{2}{3}$，故选 A.

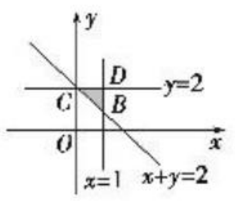
6. **解析**：作出不等式组表示的可行域如图所示，因为目标函数 $y=\frac{x}{2}-\frac{z}{2}$ 的斜率小于 $y=x-1$ 的斜率，

所以目标函数在点 $A(1,0)$ 时，纵截距 $-\frac{z}{2}$ 取到最小值，此时 z 取到最大值为 $z=1-0=1$.

答案：1



7. **解析**：由题中的线性约束条件作出可行域，如图. 其中 $C(0,2)$，$B(1,1)$，$D(1,2)$. 由 $z=\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OM}=-x+y$，得 $y=x+z$. 由图可知，当直线 $y=x+z$ 分别过点 C 和 B 时，z 分别取得最大值 2 和最小值 0，所以 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OM}$ 的取值范围为 $[0,2]$.



答案：$[0,2]$

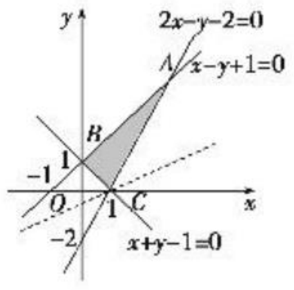
8. **解析**：由可行域可知，直线 AC 的斜率 $k_{AC}=\frac{1-0}{1-2}=-1$，直线 AB 的斜率 $k_{AB}=\frac{1-\frac{3}{2}}{1-0}=-\frac{1}{2}$. 因为当直线 $z=ax-y$ 的斜率介于 AC 与 AB 的斜率之间时，$A(1,1)$ 是目标函数 $z=ax-y$ 的唯一最优解，所以 $-1<a<-\frac{1}{2}$.

答案：$\left(-1,-\frac{1}{2}\right)$

9. **解**：(1)作出可行域如图，可求得 $A(3,4)$，$B(0,1)$，$C(1,0)$.

平移初始直线 $\frac{1}{2}x-y+\frac{1}{2}=0$，可知 $z=\frac{1}{2}x-y+\frac{1}{2}$，过 $A(3,4)$ 时取最小值 -2，过 $C(1,0)$ 时取最大值 1.

所以 z 的最大值为 1，最小值为 -2.

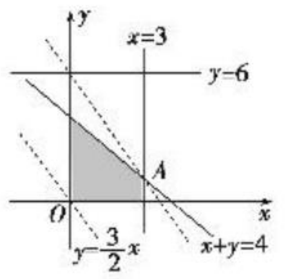


(2)直线 $ax+2y=z$ 仅在点 $(1,0)$ 处取得最小值，由图象可知 $-1<-\frac{a}{2}<2$，解得 $-4<a<2$.

故所求 a 的取值范围为 $(-4,2)$.

10. **解**：设甲厂生产一等奖奖品 x 件，二等奖奖品 y 件，$x,y\in\mathbf{N}$，则乙厂生产一等奖奖品 $(3-x)$ 件，二等奖奖品 $(6-y)$ 件. 由题意得 x 和 y 满足 $\begin{cases}x+y\leqslant 4,\\3-x\geqslant 0,\\6-y\geqslant 0,\\x\in\mathbf{N},y\in\mathbf{N}.\end{cases}$ 设所需费用为 z 元，则 $z=500x+400y+800(3-x)+600(6-y)=-300x-200y+6\,000$.

作出不等式组对应的平面区域如图中阴影部分的整点所示.

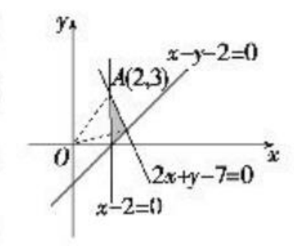


平移直线 $-300x-200y=0$，即 $y=-\frac{3}{2}x$，由图知当直线 $z=-300x-200y+6\,000$，即 $y=-\frac{3}{2}x+30-\frac{z}{200}$ 经过点 A 时，直线的纵截距最大，z 最小. 由 $\begin{cases}x=3,\\x+y=4,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x=3,\\y=1,\end{cases}$ 即 $A(3,1)$，满足 $x\in\mathbf{N},y\in\mathbf{N}$，所以组委会定做奖品的费用最低为 $z=-300\times 3-200+6\,000=4\,900$，故由甲厂生产一等奖奖品 3 件，二等奖奖品 1 件，其余都由乙厂生产，所需费用最低，最低费用为 4 900 元.

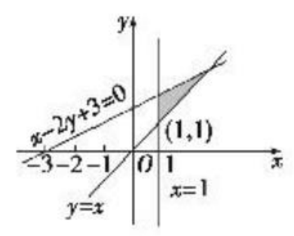
第 29 课时　素养提升——简单的线性规划

素养培优提能

1. 选 A　作出不等式组表示的平面区域，如图所示. 又因为 $\frac{y}{x}$ 表示区域内的点与原点连线的斜率，由图知连线 OA 的斜率最大，所以 $A(2,3)$ 是最优解，即 $\left(\frac{y}{x}\right)_{\max}=\frac{3-0}{2-0}=\frac{3}{2}$，故选 A.

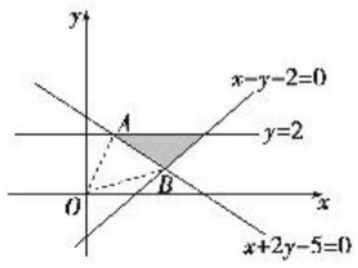


2. 选 D　作出不等式组 $\begin{cases}x-2y+3\geqslant 0,\\y\geqslant x\geqslant 1\end{cases}$ 表示的平面区域如图，$z=\sqrt{x^2+y^2}$ 表示可行域内的点到原点的距离，结合图形可知可行域内的点 $(1,1)$ 到原点的距离最短，即 z 的最小值为 $\sqrt{2}$，故选 D.

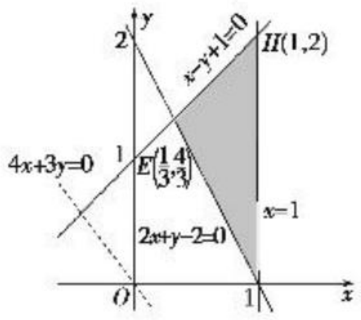


关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

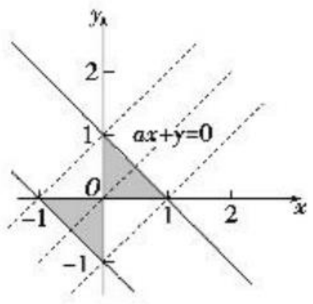
3. 选 A　设 $m=\frac{y}{x}$，则 $z=m-\frac{1}{m}$，作出约束条件所表示的平面区域，如图所示. 易知 $m=\frac{y}{x}$ 表示可行域内的点与原点连线的斜率，当过原点的直线经过点 $A(1,2)$ 时，$m=\frac{y}{x}$ 取得最大值 2，当经过点 $B(3,1)$ 时，$m=\frac{y}{x}$ 取得最小值 $\frac{1}{3}$，即实数 m 的取值范围是 $\left[\frac{1}{3},2\right]$. 又因为函数 $z=m-\frac{1}{m}$ 为单调递增函数，所以 $z_{\min}=\frac{1}{3}-3=-\frac{8}{3}$，$z_{\max}=2-\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$，故选 A.



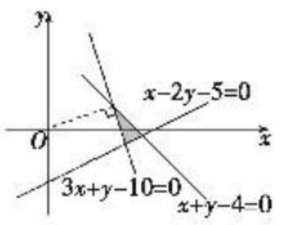
4. 选 C　根据约束条件画出可行域，如图. 引入新的目标函数 $t=4x+3y$，作出直线 $4x+3y=0$ 并平移，知当直线过点 $H(1,2)$ 时，$t=4x+3y$ 取最大值 10，此时 $z=-\frac{3}{t}$ 取最大值 $-\frac{3}{10}$，故选 C.



5. 选 A　画出不等式组所表示的区域，如图所示. 因为 $z=ax+y$ 取得最大值的最优解有两个，所以 $-a=1$，所以 $a=-1$，所以当 $x=1$，$y=0$ 或 $x=0$，$y=-1$ 时，$z=ax+y=-x+y$ 有最小值 -1，所以 $ax+y+1$ 的最小值是 0，故选 A.

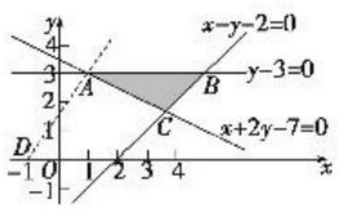


6. **解析**：作出不等式组表示的平面区域，如图所示. 因为 $z=x^2+y^2$ 表示区域内的点到原点距离的平方，由图知，当区域内的点与原点的连线与直线 $3x+y-10=0$ 垂直时，$z=x^2+y^2$ 取得最小值，所以 $z_{\min}=\left(\frac{|3\times0+0-10|}{\sqrt{3^2+1^2}}\right)^2=10$，垂足为点 $(3,1)$，在平面区域内，所以 $z=x^2+y^2$ 的最小值为 10.



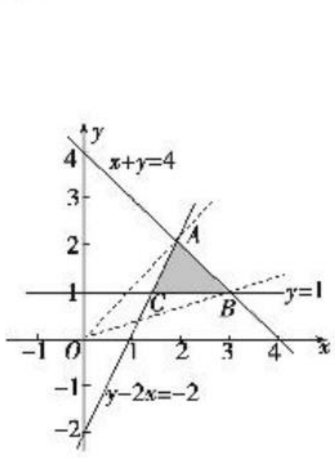
答案：10

7. **解析**：作出不等式组表示的平面区域，如图所示. $z=\frac{y}{x+1}$ 的几何意义是可行域内的点与点 $D(-1,0)$ 连线的斜率，由图象知直线 AD 的斜率最大. 由 $\begin{cases}x+2y-7=0,\\y=3,\end{cases}$ 得 $\begin{cases}x=1,\\y=3,\end{cases}$ 所以 $A(1,3)$，此时 $z=\frac{3}{1+1}=\frac{3}{2}$，即为要求的最大值.



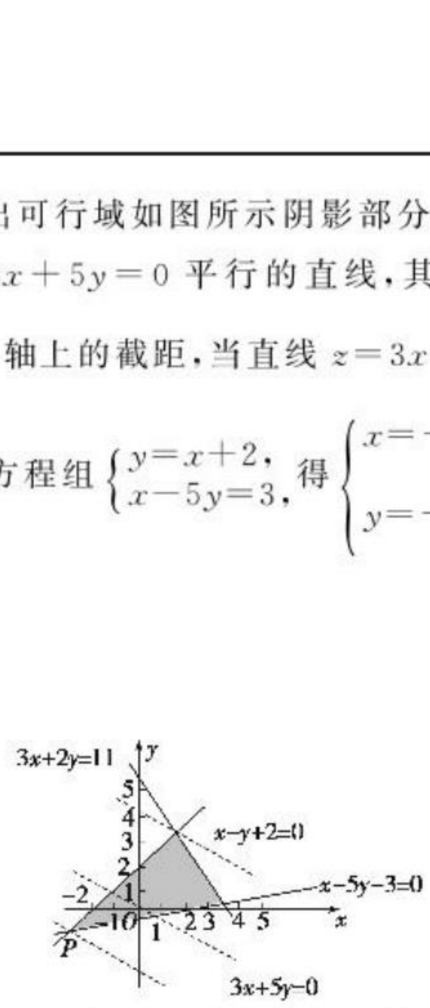
答案：$\frac{3}{2}$

8. **解析**：因为 $z=\frac{x^2+y^2}{xy}=\frac{x}{y}+\frac{y}{x}$，所以令 $k=\frac{y}{x}$，则 $z=k+\frac{1}{k}$，其中 k 表示可行域内的点与坐标原点连线的斜率. 根据不等式组画出可行域，则 $A(2,2)$，$B(3,1)$，$C\left(\frac{3}{2},1\right)$，如图. 由图形可知，$\frac{1}{3}\leqslant k\leqslant1$，根据函数 $z=\frac{1}{k}+k$ 的单调性得 $2\leqslant z\leqslant\frac{10}{3}$. 所以 $z\in\left[2,\frac{10}{3}\right]$.



答案：$\left[2,\frac{10}{3}\right]$

9. **解**：(1)存在. 作出可行域如图所示阴影部分. 直线 $z=3x+5y$ 是一组与直线 $3x+5y=0$ 平行的直线，其中 $\frac{z}{5}$ 是直线 $y=-\frac{3}{5}x+\frac{z}{5}$ 在 y 轴上的截距，当直线 $z=3x+5y$ 过 P 点时，z 取得最小值. 解方程组 $\begin{cases}y=x+2,\\x-5y=3,\end{cases}$ 得 $\begin{cases}x=-\frac{13}{4},\\y=-\frac{5}{4}.\end{cases}$ 故其最优解为 $\begin{cases}x=-\frac{13}{4},\\y=-\frac{5}{4}.\end{cases}$



(2)从图中分析，只要使可行域不存在最低点即可，因此，我们改动约束条件中的最后一个不等式，使约束条件变为 $\begin{cases}3x+2y\leqslant11,\\y\leqslant x+2,\\x-5y<3,\end{cases}$ 此时目标函数只有最大值而无最小值.

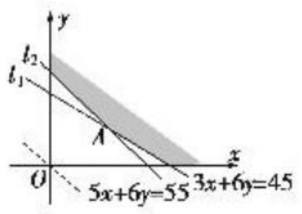
10. **解**：设用甲种薄钢板 x 张，乙种薄钢板 y 张，则可做 A 种产品外壳 $(3x+6y)$ 个，B 种产品外壳 $(5x+6y)$ 个，由题意可得 $\begin{cases}3x+6y\geqslant45,\\5x+6y\geqslant55,\\x\in\mathbf{N},y\in\mathbf{N},\end{cases}$

所有的薄钢板的总面积是 $z=2x+3y$.

可行域为如图所示的阴影部分(含边界)，其中 $l_1:3x+6y=45$，$l_2:5x+6y=55$，l_1 与 l_2 的交点为 $A(5,5)$，目标函数 $z=2x+3y$ 在可行域上的最小值在区域边界的 $A(5,5)$ 处取得，

此时 z 的最小值为 $2\times5+3\times5=25$.

即甲、乙两种薄钢板各用 5 张，能保证制造 A、B 的两种外壳的用量，同时又能使用料总面积最小.



3.4　基本不等式：$\sqrt{ab}\leqslant\frac{a+b}{2}$

第 30 课时　基本不等式

题点知识巩固

1. 选 B　A 项中，当 $x\in(0,1)$ 时，$\ln x<0$，此时 $\ln x+\frac{1}{\ln x}\leqslant-2$，故该项错误；B 项中，当 $x>0$ 时，$\sqrt{x}+\frac{4}{\sqrt{x}}\geqslant2\sqrt{\sqrt{x}\cdot\frac{4}{\sqrt{x}}}=4$，当且仅当 $\sqrt{x}=\frac{4}{\sqrt{x}}$，即 $x=4$ 时取等号，故该项正确；C 项中，$x+\frac{2}{x}\geqslant2\sqrt{x\cdot\frac{2}{x}}=2\sqrt{2}$，等号成立的条件是 $x=\frac{2}{x}$，即 $x=\sqrt{2}$，但已知 $x\geqslant2$，故该项错误；D 项中，当 $\sin x>0$ 时，$\sin x+\frac{1}{\sin x}\geqslant2\sqrt{\sin x\cdot\frac{1}{\sin x}}=2$，等号成立的条件是 $\sin x=\frac{1}{\sin x}$，即 $\sin x=1$，当 $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 时，$\sin x\in(0,1)$，显然该项错误，故选 B.

2. **解析**：只有当 $x>0$ 时，才有 $x+\frac{1}{x}\geqslant2$ 成立，故①错；当 $a>0$，$b>0$ 时，$\lg a,\lg b\in\mathbf{R}$，故②错；当 $a<0,b<0$ 时，$ab>0$，故③正确；不等式 $\frac{y}{x}+\frac{x}{y}\geqslant2$ 成立的条件是 $xy>0$，故④错.

答案：③

3. 选 C　$y=3-3x-\frac{1}{x}=3-\left(3x+\frac{1}{x}\right)\leqslant3-2\sqrt{3x\cdot\frac{1}{x}}=3-2\sqrt{3}$，当且仅当 $3x=\frac{1}{x}$，即 $x=\frac{\sqrt{3}}{3}$ 时取等号. 即 $y=3-3x-\frac{1}{x}$ 的最大值为 $3-2\sqrt{3}$，故选 C.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

4. 选 C　$f(x)=x+\frac{1}{x-2}=x-2+\frac{1}{x-2}+2$.

$\because x>2,\therefore x-2>0$.

$\therefore f(x)=x-2+\frac{1}{x-2}+2\geqslant 2\sqrt{(x-2)\cdot\frac{1}{x-2}}+2=4$，当且仅当 $x-2=\frac{1}{x-2}$，即 $x=3$ 时等号成立，又 $f(x)$ 在 $x=a$ 外取最小值，$\therefore a=3$，故选 C.

5. **解析**：$\because 0<x<1,\therefore x(3-3x)=3x(1-x)\leqslant 3\left[\frac{x+(1-x)}{2}\right]^2=\frac{3}{4}$.

当且仅当 $x=1-x$，即 $x=\frac{1}{2}$ 时，“=”成立.

答案：$\frac{1}{2}$

6. **证明**：$\because a,b,c>0$，且 $a+b+c=1$.

$\therefore \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)(a+b+c)$

$=1+\frac{a}{b}+\frac{a}{c}+\frac{b}{a}+1+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}+\frac{c}{b}+1$

$=3+\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)+\left(\frac{a}{c}+\frac{c}{a}\right)+\left(\frac{b}{c}+\frac{c}{b}\right)$

$\geqslant 3+2+2+2=9$

$\left(\text{当且仅当 } a=b=c=\frac{1}{3}\text{ 时取等号}\right)$.

7. **证明**：$\because a>0,b>0,c>0$，

$\therefore \frac{bc}{a}+\frac{ac}{b}\geqslant 2\sqrt{\frac{abc^2}{ab}}=2c$，

$\frac{ac}{b}+\frac{ab}{c}\geqslant 2\sqrt{\frac{a^2bc}{bc}}=2a$，

$\frac{bc}{a}+\frac{ab}{c}\geqslant 2\sqrt{\frac{ab^2c}{ac}}=2b$.

又 a,b,c 不全相等，故上述等号至少有一个不成立.

$\therefore \frac{bc}{a}+\frac{ac}{b}+\frac{ab}{c}>a+b+c$.

提能达标过关

1. 选 C　因为 $x>0$，所以 $y=12x+\frac{1}{3x}\geqslant 2\sqrt{12x\cdot\frac{1}{3x}}=4$，当且仅当 $12x=\frac{1}{3x}$，即 $x=\frac{1}{6}$ 时等号成立，故选 C.

2. 选 C　因为 $x>0,y>0,x+2y=2$，

所以 $x+2y\geqslant 2\sqrt{x\cdot 2y}$，即 $2\geqslant 2\sqrt{2xy},xy\leqslant\frac{1}{2}$，

当且仅当 $x=2y$，即 $x=1,y=\frac{1}{2}$ 时，等号成立.

所以 xy 有最大值，且最大值为 $\frac{1}{2}$，故选 C.

3. 选 B　$\because a^x=b^y=2,\therefore x=\log_a 2,y=\log_b 2$，

$\therefore \frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{\log_a 2}+\frac{1}{\log_b 2}=\log_2 a+\log_2 b=\log_2(ab)$.

又 $a>1,b>1,\therefore 8=2a+b\geqslant 2\sqrt{2ab}$，即 $ab\leqslant 8$，

当且仅当 $2a=b$，即 $a=2,b=4$ 时取等号，

$\therefore \frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\log_2(ab)\leqslant\log_2 8=3$. 故 $\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)_{\max}=3$，故选 B.

4. 选 A　由 $\lg a+\lg b=2$，可知 $a>0,b>0$，

则 $\lg(ab)=2$，即 $ab=100$.

所以 $a+b\geqslant 2\sqrt{ab}=2\sqrt{100}=20$，

当且仅当 $a=b=10$ 时取等号，

所以 $\lg(a+b)\geqslant\lg 20=1+\lg 2$.

故 $\lg(a+b)$ 的最小值为 $1+\lg 2$，故选 A.

5. 选 D　$30=4x^2+9y^2+3xy\geqslant 2\sqrt{36x^2y^2}+3xy$，

即 $30\geqslant 15xy$，所以 $xy\leqslant 2$，

当且仅当 $4x^2=9y^2$，即 $x=\sqrt{3},y=\frac{2\sqrt{3}}{3}$ 时等号成立.

故 xy 的最大值为 2，故选 D.

6. **解析**：$y=4x(3-2x)=2[2x(3-2x)]\leqslant 2\left[\frac{2x+(3-2x)}{2}\right]^2=\frac{9}{2}$，当且仅当“$2x=3-2x$，即 $x=\frac{3}{4}$”时，等号成立.

$\because \frac{3}{4}\in\left(0,\frac{3}{2}\right)$，

$\therefore$ 函数 $y=4x(3-2x)\left(0<x<\frac{3}{2}\right)$ 的最大值为 $\frac{9}{2}$.

答案：$\frac{9}{2}$

7. **解析**：$y=\frac{(x-3)(12-x)}{x}=\frac{-x^2+15x-36}{x}$

$=-\left(x+\frac{36}{x}\right)+15\leqslant -2\sqrt{x\cdot\frac{36}{x}}+15=3$，

当且仅当 $x=\frac{36}{x}$，即 $x=6$ 时，$y_{\max}=3$.

答案：3

8. **解析**：$\because x>0,a>0$，

$\therefore f(x)=4x+\frac{a}{x}\geqslant 2\sqrt{4x\cdot\frac{a}{x}}=4\sqrt{a}$，

当且仅当 $4x=\frac{a}{x}$，即 $4x^2=a$ 时，$f(x)$ 取得最小值.

又 $\because f(x)$ 在 $x=3$ 时取得最小值，

$\therefore a=4\times 3^2=36$.

答案：36

9. **解**：(1) 当 $x>0$ 时，$y=\frac{x^2+3x+4}{2x}=\frac{x}{2}+\frac{3}{2}+\frac{2}{x}\geqslant 2\sqrt{\frac{x}{2}\cdot\frac{2}{x}}+\frac{3}{2}=\frac{7}{2}$，当且仅当 $x=2$ 时等号成立，即 $y=\frac{x^2+3x+4}{2x}(x>0)$ 的最小值为 $\frac{7}{2}$.

(2) $y=\frac{x^2+2}{x-1}=x-1+\frac{3}{x-1}+2$，当 $x>1$ 时，$x-1>0$，

所以 $y\geqslant 2\sqrt{(x-1)\cdot\frac{3}{x-1}}+2=2\sqrt{3}+2$，当且仅当 $x-1=\frac{3}{x-1}$，即 $x=1+\sqrt{3}$ 时等号成立，即函数 $y=\frac{x^2+2}{x-1}(x>1)$ 的最小值为 $2\sqrt{3}+2$.

(3) 当 $x>1$ 时，$y=-x+\frac{1}{1-x}=1-x+\frac{1}{1-x}-1=-\left[(x-1)+\frac{1}{x-1}\right]-1\leqslant -2\sqrt{(x-1)\cdot\frac{1}{x-1}}-1=-3$，当且仅当 $x=2$ 时等号成立，即 $y=-x+\frac{1}{1-x}(x>1)$ 的最大值为 -3.

10. **解**：(1) $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{3}(x+y+z)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)$

$=\frac{1}{3}\left(1+\frac{x}{y}+\frac{x}{z}+\frac{y}{x}+1+\frac{y}{z}+\frac{z}{x}+\frac{z}{y}+1\right)$

$=\frac{1}{3}\left[3+\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)+\left(\frac{x}{z}+\frac{z}{x}\right)+\left(\frac{y}{z}+\frac{z}{y}\right)\right]$

$\geqslant\frac{1}{3}\left(3+2\sqrt{\frac{x}{y}\cdot\frac{y}{x}}+2\sqrt{\frac{x}{z}\cdot\frac{z}{x}}+2\sqrt{\frac{y}{z}\cdot\frac{z}{y}}\right)$

$=3$，

当且仅当 $x=y=z=1$ 时取等号，

$\therefore \frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}$ 的最小值为 3.

(2) 证明：$\because 9=(x+y+z)^2=x^2+y^2+z^2+2xy+2xz+2yz\leqslant 3(x^2+y^2+z^2)$，

$\therefore x^2+y^2+z^2\geqslant 3$，当且仅当 $x=y=z=1$ 时取等号.

又 $x,y,z>0,\therefore xy+xz+yz>0$，

$\therefore x^2+y^2+z^2=9-2(xy+xz+yz)<9$，

$\therefore 3\leqslant x^2+y^2+z^2<9$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

第 31 课时　基本不等式的应用

题点知识巩固

1. 选 D　因为直线 $2mx-ny-2=0(m>0,n>0)$ 过点 $(1,-2)$，所以 $2m+2n-2=0$，即 $m+n=1$，

所以 $\frac{1}{m}+\frac{2}{n}=\left(\frac{1}{m}+\frac{2}{n}\right)(m+n)=3+\frac{n}{m}+\frac{2m}{n}\geqslant 3+2\sqrt{2}$，

当且仅当“$\frac{n}{m}=\frac{2m}{n}$，即 $n=\sqrt{2}m$”时取等号，

所以 $\frac{1}{m}+\frac{2}{n}$ 的最小值为 $3+2\sqrt{2}$，故选 D.

2. **解析**：∵直线 $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1(a>0,b>0)$ 过点 $(1,2)$，

$\therefore \frac{1}{a}+\frac{2}{b}=1$，

∵$a>0,b>0$，

$\therefore 2a+b=(2a+b)\left(\frac{1}{a}+\frac{2}{b}\right)$

$=4+\frac{b}{a}+\frac{4a}{b}\geqslant 4+2\sqrt{\frac{b}{a}\cdot\frac{4a}{b}}=8$，

当且仅当 $\frac{b}{a}=\frac{4a}{b}$，即 $a=2,b=4$ 时等号成立，

$\therefore 2a+b$ 的最小值为 8.

答案：8

3. **解析**：∵$a+b=4$，$\therefore a+1+b+3=8$，

$\therefore \frac{1}{a+1}+\frac{1}{b+3}=\frac{1}{8}[(a+1)+(b+3)]\left(\frac{1}{a+1}+\frac{1}{b+3}\right)$

$=\frac{1}{8}\left(2+\frac{b+3}{a+1}+\frac{a+1}{b+3}\right)\geqslant\frac{1}{8}\times(2+2)=\frac{1}{2}$，

当且仅当 $a+1=b+3$，即 $a=3,b=1$ 时取等号，

$\therefore \frac{1}{a+1}+\frac{1}{b+3}$ 的最小值为 $\frac{1}{2}$.

答案：$\frac{1}{2}$

4. **解析**：依题意，一年购买货物 $\frac{600}{x}$ 次，所以一年的总运费与总存储费用之和为 $6\times\frac{600}{x}+4x=4\left(\frac{900}{x}+x\right)$.

又 $0<x\leqslant 600$，

$\therefore \frac{900}{x}+x\geqslant 2\sqrt{\frac{900}{x}\cdot x}=60$.

当且仅当 $\frac{900}{x}=x$ 时，即 $x=30$ 时等号成立.

$\therefore 4\left(\frac{900}{x}+x\right)\geqslant 240$，当且仅当 $x=3$ 时等号成立.

故要使一年的总运费与总存储费用之和最小，x 的值为 30.

答案：30

5. **解**：(1)设休闲区的宽为 a m，则长为 ax m，

由 $a^2x=4\ 000$，得 $a=\frac{20\sqrt{10}}{\sqrt{x}}$.

则 $S(x)=(a+8)(ax+20)=a^2x+(8x+20)a+160$

$=4\ 000+(8x+20)\cdot\frac{20\sqrt{10}}{\sqrt{x}}+160$

$=80\sqrt{10}\left(2\sqrt{x}+\frac{5}{\sqrt{x}}\right)+4\ 160(x>1)$.

(2) $S(x)=80\sqrt{10}\left(2\sqrt{x}+\frac{5}{\sqrt{x}}\right)+4\ 160\geqslant 80\sqrt{10}\times 2\sqrt{2\sqrt{x}\cdot\frac{5}{\sqrt{x}}}+4\ 160=1\ 600+4\ 160=5\ 760$，当且仅当 $2\sqrt{x}=\frac{5}{\sqrt{x}}$，即 $x=2.5$ 时，等号成立，此时 $a=40$，$ax=100$.

所以要使公园所占面积最小，休闲区 $A_1B_1C_1D_1$ 的长和宽应分别设计为 100 m，40 m.

提能达标过关

1. 选 C　由题意得 $3^a\cdot 3^b=3^{a+b}=3$，所以 $a+b=1$，所以 $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=(a+b)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)=2+\frac{b}{a}+\frac{a}{b}\geqslant 2+2\sqrt{\frac{b}{a}\cdot\frac{a}{b}}=4$，当且仅当 $\frac{b}{a}=\frac{a}{b}$，即 $a=b=\frac{1}{2}$ 时等号成立，故选 C.

2. 选 D　因为 $a>0,b>0$，$\frac{1}{a}+\frac{9}{b}=1$，

所以 $a+b=(a+b)\left(\frac{1}{a}+\frac{9}{b}\right)=10+\frac{b}{a}+\frac{9a}{b}\geqslant 10+2\sqrt{9}=16$，当且仅当 $\frac{b}{a}=\frac{9a}{b}$，即 $a=4,b=12$ 时，等号成立. 由题意，得 $16\geqslant -x^2+4x+18-m$，

即 $x^2-4x-2\geqslant -m$ 对任意实数 x 恒成立，

令 $f(x)=x^2-4x-2$，

则 $f(x)=x^2-4x-2=(x-2)^2-6$，

所以 $f(x)$ 的最小值为 -6，

所以 $-6\geqslant -m$，即 $m\geqslant 6$，故选 D.

3. 选 A　因为对任意 $x>0$，$\frac{x}{x^2+3x+1}\leqslant a$ 恒成立，

所以对 $x\in(0,+\infty)$，$a\geqslant\left(\frac{x}{x^2+3x+1}\right)_{\max}$，

而对 $x\in(0,+\infty)$，$\frac{x}{x^2+3x+1}=\frac{1}{x+\frac{1}{x}+3}\leqslant\frac{1}{2\sqrt{x\cdot\frac{1}{x}}+3}=\frac{1}{5}$，

当且仅当 $x=\frac{1}{x}$ 时等号成立，$\therefore a\geqslant\frac{1}{5}$，故选 A.

4. 选 A　由题意得平均销售量 $y=\frac{f(t)}{t}=t+10+\frac{16}{t}\geqslant 10+2\sqrt{t\cdot\frac{16}{t}}=18$，当且仅当 $t=\frac{16}{t}$，即 $t=4\in(0,30]$ 时等号成立，所以平均销售量的最小值为 18，故选 A.

5. 选 D　∵$z=x^2+4y^2-3xy,x,y,z\in(0,+\infty)$，

$\therefore \frac{xy}{z}=\frac{xy}{x^2+4y^2-3xy}=\frac{1}{\frac{x}{y}+\frac{4y}{x}-3}\leqslant\frac{1}{2\sqrt{\frac{x}{y}\cdot\frac{4y}{x}}-3}=1$（当且仅当 $x=2y$ 时等号成立），此时 $\frac{1}{x}+\frac{1}{2y}-\frac{1}{z}=\frac{1}{y}-\frac{1}{2y^2}$，令 $\frac{1}{y}=t>0$，则 $\frac{1}{x}+\frac{1}{2y}-\frac{1}{z}=t-\frac{1}{2}t^2=-\frac{1}{2}(t-1)^2+\frac{1}{2}\leqslant\frac{1}{2}$（当且仅当 $t=1$ 时等号成立），故选 D.

6. **解析**：$2^{x-3}=\left(\frac{1}{2}\right)^y=2^{-y}$，$\therefore x-3=-y$，$\therefore x+y=3$.

又 $x,y\in(0,+\infty)$，所以 $\frac{1}{x}+\frac{4}{y}=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{x}+\frac{4}{y}\right)(x+y)=\frac{1}{3}\left(5+\frac{y}{x}+\frac{4x}{y}\right)\geqslant\frac{1}{3}\left(5+2\sqrt{\frac{y}{x}\cdot\frac{4x}{y}}\right)=3$

$\left(\text{当且仅当}\frac{y}{x}=\frac{4x}{y}\text{，即 }y=2x\text{ 时取等号}\right)$.

答案：3

7. **解析**：因为 $b>a>1$，所以 $\log_a b>1$. 又 $3\log_a b+6\log_b a=3\log_a b+\frac{6}{\log_a b}=11$，解得 $\log_a b=3$，即 $a^3=b$，所以 $a^3+\frac{2}{b-1}=b+\frac{2}{b-1}=b-1+\frac{2}{b-1}+1\geqslant 2\sqrt{2}+1$（当且仅当 $b=\sqrt{2}+1$ 时等号成立），即 $a^3+\frac{2}{b-1}$ 的最小值为 $2\sqrt{2}+1$.

答案：$2\sqrt{2}+1$

8. **解析**：设鱼池的两边长分别为 x，$\frac{800}{x}$，占地总面积是 $(x+4)\cdot\left(\frac{800}{x}+2\right)=808+2\left(x+\frac{1\ 600}{x}\right)\geqslant 808+2\times 2\sqrt{x\cdot\frac{1\ 600}{x}}=968$. 当且仅当 $x=\frac{1\ 600}{x}$，即 $x=40$ 时，等号成立. 所以鱼池占地总面积的最小值为 968 平方米.

答案：968

9. **解**：(1)由 $2x+8y-xy=0$，得 $\frac{8}{x}+\frac{2}{y}=1$.

又 $x>0,y>0$，

则 $1=\frac{8}{x}+\frac{2}{y}\geqslant 2\sqrt{\frac{8}{x}\cdot\frac{2}{y}}=\frac{8}{\sqrt{xy}}$，得 $xy\geqslant 64$，

当且仅当 $x=16$ 且 $y=4$ 时，等号成立.

所以 xy 的最小值为 64.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

(2)由 $2x+8y-xy=0$,得 $\frac{8}{x}+\frac{2}{y}=1$,

则 $x+y=\left(\frac{8}{x}+\frac{2}{y}\right)(x+y)=10+\frac{2x}{y}+\frac{8y}{x}$

$\geqslant 10+2\sqrt{\frac{2x}{y}\cdot\frac{8y}{x}}=18$.

当且仅当 $x=12$ 且 $y=6$ 时等号成立,

所以 $x+y$ 的最小值为 18.

10. **解**:(1)由题设,得 $S=(x-8)\left(\frac{900}{x}-2\right)=-2x-\frac{7\,200}{x}+916$,$x\in(8,450)$.

(2)因为 $8<x<450$,

所以 $2x+\frac{7\,200}{x}\geqslant 2\sqrt{2x\cdot\frac{7\,200}{x}}=240$,

当且仅当 $2x=\frac{7\,200}{x}$,即 $x=60$ 时等号成立,

从而 $S\leqslant -240+916=676$.

故当矩形温室的室内长为 60 m 时,三块种植植物的矩形区域的总面积最大,最大为 676 m^2.

第 32 课时　素养提升——不等式

素养培优提能

1. 选 B　由题意知 $ab=1$,$\therefore m=b+\frac{1}{a}=2b$,$n=a+\frac{1}{b}=2a$,

$\therefore m+n=2(a+b)\geqslant 4\sqrt{ab}=4$,当且仅当 $a=b=1$ 时取等号,故 $m+n$ 的最小值为 4,故选 B.

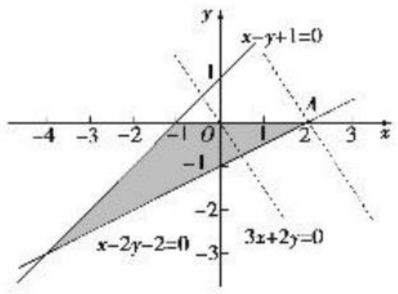
2. 选 D　由等差数列的性质,可得 $a_3+a_{15}=2a_9=10$. 又 $a_3>0$,$a_{15}>0$,所以 $a_3+a_{15}\geqslant 2\sqrt{a_3a_{15}}$(当且仅当 $a_3=a_{15}$ 时,等号成立),即 $a_3a_{15}\leqslant\left(\frac{a_3+a_{15}}{2}\right)^2=25$,故选 D.

3. 选 C　因为曲线 $y=1+\sin\pi x(0<x<2)$ 的对称中心是点(1,1),所以 $a+b=1$,$\frac{1}{a}+\frac{2}{b}=\left(\frac{1}{a}+\frac{2}{b}\right)\cdot(a+b)=3+\frac{b}{a}+\frac{2a}{b}\geqslant 3+2\sqrt{2}$,当且仅当 $\frac{b}{a}=\frac{2a}{b}$,即 $a=\sqrt{2}-1$,$b=\sqrt{2}a=2-\sqrt{2}$ 时取等号,因此 $\frac{1}{a}+\frac{2}{b}$ 的最小值是 $3+2\sqrt{2}$,故选 C.

4. 选 C　因为 $m>1$,所以 $P=m+\frac{4}{m-1}=m-1+\frac{4}{m-1}+1\geqslant 2\sqrt{(m-1)\cdot\frac{4}{m-1}}+1=5=Q$,当且仅当 $m-1=\frac{4}{m-1}$,即 $m=3$ 时等号成立,故选 C.

5. 选 D　由题意,得 $a^2+ab+ac+bc=6-2\sqrt{5}$,所以 $24-8\sqrt{5}=4(a^2+ab+ac+bc)\leqslant 4a^2+4ab+b^2+c^2+4ac+2bc=(2a+b+c)^2$,当且仅当 $b=c$ 时等号成立,所以 $2a+b+c\geqslant 2\sqrt{5}-2$,所以 $2a+b+c$ 的最小值为 $2\sqrt{5}-2$,故选 D.

6. **解析**:由约束条件画出可行域,如图中阴影部分及其边界.



$\because z=3x+2y$,$\therefore y=-\frac{3}{2}x+\frac{z}{2}$. 由图可知,当直线 $y=-\frac{3}{2}x+\frac{z}{2}$ 经过点 $A(2,0)$ 时纵截距 $\frac{z}{2}$ 最大,z 也最大. 把 $A(2,0)$ 的坐标代入目标函数 $z=3x+2y$,得 $z_{max}=3\times 2+2\times 0=6$.

答案:6

7. **解析**:设直角三角形的两条直角边边长分别为 a,b,

则 $\sqrt{2}+1=a+b+\sqrt{a^2+b^2}\geqslant 2\sqrt{ab}+\sqrt{2ab}$,解得 $ab\leqslant\frac{1}{2}$,

当且仅当 $a=b=\frac{\sqrt{2}}{2}$ 时取等号,

所以直角三角形的面积 $S=\frac{1}{2}ab\leqslant\frac{1}{4}$,

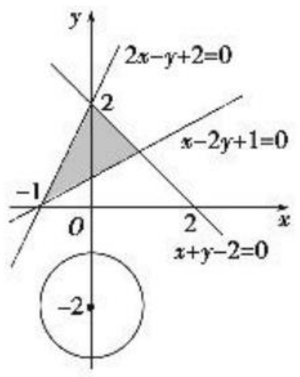
即 S 的最大值为 $\frac{1}{4}$.

答案:$\frac{1}{4}$

8. **解析**:分别作出平面区域

$\begin{cases}2x-y+2\geqslant 0,\\ x-2y+1\leqslant 0,\\ x+y-2\leqslant 0\end{cases}$ 与圆 $x^2+(y+2)^2=1$,

如图所示.



因为经过点(−1,0)与圆心(0,−2)的直线与直线 $x-2y+1=0$ 垂直,所以 $|PQ|$ 的最小值为圆心(0,−2)到直线 $x-2y+1=0$ 的距离减去 1,

即 $|PQ|_{min}=\frac{|0+4+1|}{\sqrt{5}}-1=\sqrt{5}-1$.

答案:$\sqrt{5}-1$

9. **解**:(1)因为不等式 $f(x)>0$ 的解集为(−1,3),

所以 −1 和 3 是方程 $f(x)=0$ 的两个实根,

从而有 $\begin{cases}f(-1)=a-b+3=0,\\ f(3)=9a+3b+3=0,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=-1,\\ b=2.\end{cases}$

所以 $a=-1$,$b=2$.

(2)由 $f(1)=4$,得 $a+b=1$.

又 $a>0$,$b>0$,

所以 $\frac{1}{a}+\frac{4}{b}=\left(\frac{1}{a}+\frac{4}{b}\right)(a+b)=5+\frac{b}{a}+\frac{4a}{b}\geqslant 5+2\sqrt{\frac{b}{a}\cdot\frac{4a}{b}}=9$,

当且仅当 $\begin{cases}\frac{b}{a}=\frac{4a}{b},\\ a+b=1,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}a=\frac{1}{3},\\ b=\frac{2}{3}\end{cases}$ 时等号成立.

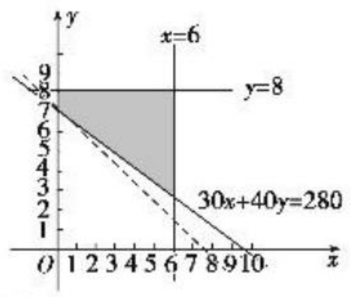
所以 $\frac{1}{a}+\frac{4}{b}$ 的最小值为 9.

10. **解**:(1)设公司每天派出 A 型卡车 x 辆,B 型卡车 y 辆,公司所花的成本费为 z 千元.

根据题意,得 $\begin{cases}30x+40y\geqslant 280,\\ 0\leqslant x\leqslant 6,\\ 0\leqslant y\leqslant 8,\end{cases}$

目标函数 $z=0.9x+y$,

作出该不等式组表示的可行域,如图中阴影部分所示.



把 $z=0.9x+y$ 变形为 $y=-0.9x+z$,这是以 −0.9 为斜率,z 为 y 轴上的截距的平行直线族.

当直线经过整点(0,7)时,直线在 y 轴上的截距最小,即 z 取最小值,$z_{min}=0.9\times 0+7=7$.

即公司每天派出 A 型卡车 0 辆,B 型卡车 7 辆时,所花的成本费最低,为 7 千元.

(2)因为 $m=\frac{y}{x+1}$ 表示可行域内的点 (x,y) 与点(−1,0)连线的斜率,且 $x\in\mathbf{N}$,$y\in\mathbf{N}$.

所以由(1)知,在点(0,8)处 m 取最大值 8,在点(6,3)处 m 取最小值 $\frac{3}{7}$.

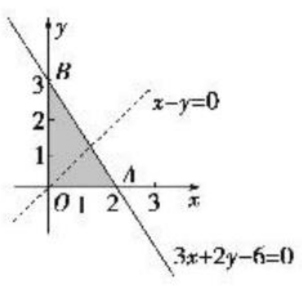
阶段质量评估 3

1. 选 A　对于 A 项,显然 $a^2>0$,必有 $a<b$;对于 B 项,$a^2<b^2\Leftrightarrow|a|<|b|$,当 a,b 均为负值时,有 $a>b$;对于 C 项,若 $a>0$,$b<0$,有 $\frac{1}{a}>\frac{1}{b}$,但不能推出 $a<b$;对于 D 项,若 $c<0$,显然有 $a>b$,故选 A.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

2. 选 B　因为 $0<a<b$，所以 $a-\sqrt{ab}=\sqrt{a}(\sqrt{a}-\sqrt{b})<0$，故 $a<\sqrt{ab}$；因为 $b-\frac{a+b}{2}=\frac{b-a}{2}>0$，故 $b>\frac{a+b}{2}$；由基本不等式知 $\frac{a+b}{2}>\sqrt{ab}$，综上所述，$a<\sqrt{ab}<\frac{a+b}{2}<b$，故选 B.

3. 选 B　不等式组 $\begin{cases}3x+2y-6\leqslant 0,\\ x\geqslant 0,\\ y\geqslant 0\end{cases}$ 表示的平面区域如图中阴影部分所示，作出直线 $l_0:y=x$，平移直线 l_0，当直线 $z=x-y$ 过点 $A(2,0)$ 时，z 取得最大值 2，当直线 $z=x-y$ 过点 $B(0,3)$ 时，z 取得最小值 -3，所以 $z=x-y$ 的取值范围是 $[-3,2]$，故选 B.



4. 选 D　$a^2+\frac{1}{ab}+\frac{1}{a(a-b)}=a^2-ab+ab+\frac{1}{ab}+\frac{1}{a(a-b)}=a(a-b)+\frac{1}{a(a-b)}+ab+\frac{1}{ab}\geqslant 2+2=4$.

当且仅当 $a(a-b)=1$ 且 $ab=1$，

即 $a=\sqrt{2}$，$b=\frac{\sqrt{2}}{2}$ 时取等号，故选 D.

5. 选 B　当 $x=0$ 时，不等式 $x^2+a|x|+1\geqslant 0$ 恒成立，此时 $a\in\mathbf{R}$，当 $x\neq 0$ 时，

则有 $a\geqslant\frac{-1-|x|^2}{|x|}=-\left(|x|+\frac{1}{|x|}\right)$，

设 $f(x)=-\left(|x|+\frac{1}{|x|}\right)$，则 $a\geqslant f(x)_{\max}$，由基本不等式得 $|x|+\frac{1}{|x|}\geqslant 2$（当且仅当 $|x|=1$ 时取等号），$\therefore f(x)\leqslant -2$，则 $f(x)_{\max}=-2$，故 $a\geqslant -2$，故选 B.

6. 选 A　$x^2-2x+5=(x-1)^2+4$ 的最小值为 4，所以要使 $x^2-2x+5\geqslant a^2-3a$ 对任意实数 x 恒成立，只需 $a^2-3a\leqslant 4$，解得 $-1\leqslant a\leqslant 4$，故选 A.

7. **解析**：解法一：∵方程 $x^2-(2m+1)x+m^2+m=0$ 的解为 $x_1=m$，$x_2=m+1$，且知 $m<m+1$.

∴二次函数 $y=x^2-(2m+1)x+m^2+m$ 的图象开口向上，且与 x 轴有两个交点.

∴不等式的解集为 $\{x|m<x<m+1\}$.

解法二：原不等式可化为 $(x-m)(x-m-1)<0$，

∵$m<m+1$，∴$m<x<m+1$.

∴不等式的解集为 $\{x|m<x<m+1\}$.

答案：$\{x|m<x<m+1\}$

8. **解析**：因为 $a>0$，$b>0$，所以 $\frac{m}{3a+b}-\frac{3}{a}-\frac{1}{b}\leqslant 0$ 恒成立等价于 $m\leqslant\frac{3(3a+b)}{a}+\frac{3a+b}{b}=10+\frac{3b}{a}+\frac{3a}{b}$ 恒成立. 因为 $10+\frac{3b}{a}+\frac{3a}{b}\geqslant 10+2\sqrt{\frac{3b}{a}\times\frac{3a}{b}}=16$（当且仅当 $\frac{a}{b}=\frac{b}{a}$ 时等号成立），所以 $m\leqslant 16$，即实数 m 的最大值为 16.

答案：16

9. **解析**：约束条件对应的平面区域是以点 $\left(1,\frac{1}{2}\right)$、$(0,1)$ 和 $(-2,-1)$ 为顶点的三角形，经检验当目标函数 $y=-x+z$ 经过点 $\left(1,\frac{1}{2}\right)$ 时，z 取得最大值 $\frac{3}{2}$.

答案：$\frac{3}{2}$

10. **解析**：设底面的相邻两边长分别为 x m，y m，总造价为 T 元，则 $V=xy\cdot 1=4\Rightarrow xy=4$. $T=4\times 20+(2x+2y)\times 1\times 10=80+20(x+y)\geqslant 80+20\times 2\sqrt{xy}=80+20\times 4=160$（当且仅当 $x=y$ 时取等号）.

故该容器的最低总造价是 160 元.

答案：160

11. **解**：(1)由 $x^2-2x-3<0$，

得 $-1<x<3$，∴$A=(-1,3)$.

由 $x^2+x-6<0$，得 $-3<x<2$.

∴$B=(-3,2)$，∴$A\cap B=(-1,2)$.

(2)由题意，得 $\begin{cases}1-a+b=0,\\ 4+2a+b=0,\end{cases}$

解得 $\begin{cases}a=-1,\\ b=-2.\end{cases}$

∴不等式 $ax^2+x+b<0$ 即为 $-x^2+x-2<0$，

∴$x^2-x+2>0$，

∵$\Delta<0$，

∴不等式 $x^2-x+2>0$ 的解集为 $\mathbf{R}$.

12. **解**：若 $m^2-2m-3=0$，则 $m=-1$ 或 $m=3$.

当 $m=-1$ 时，原不等式为 $4x-1<0$，对一切 $x\in\mathbf{R}$ 不恒成立，不合题意；

当 $m=3$ 时，原不等式为 $-1<0$，对一切 $x\in\mathbf{R}$ 恒成立，符合题意.

若 $m^2-2m-3\neq 0$，

设 $f(x)=(m^2-2m-3)x^2-(m-3)x-1$，

由题意得 $\begin{cases}m^2-2m-3<0,\\ \Delta=[-(m-3)]^2+4(m^2-2m-3)<0,\end{cases}$

解得 $-\frac{1}{5}<m<3$，

综上所述，实数 m 的取值范围是 $\left(-\frac{1}{5},3\right]$.

13. **解**：(1)由 $m+n=2$，

得 $\frac{4}{m}+\frac{9}{n}=\frac{1}{2}\left(\frac{4}{m}+\frac{9}{n}\right)(m+n)=\frac{1}{2}\left(4+9+\frac{4n}{m}+\frac{9m}{n}\right)\geqslant\frac{1}{2}\left(13+2\sqrt{\frac{4n}{m}\cdot\frac{9m}{n}}\right)=\frac{25}{2}$，当且仅当 $\frac{4n}{m}=\frac{9m}{n}$ 时等号成立.

又 $m+n=2$，所以 $m=\frac{4}{5}$，$n=\frac{6}{5}$.

(2)因为 $m+n\geqslant 2\sqrt{mn}$（当且仅当 $m=n$ 时等号成立），

所以 $2\sqrt{mn}+mn\leqslant 4$.

令 $t=\sqrt{mn}$，则 $t^2+2t-4\leqslant 0$，

解得 $-1-\sqrt{5}\leqslant t\leqslant -1+\sqrt{5}$.

又 $t>0$，故 $0<t\leqslant -1+\sqrt{5}$，故 mn 的最大值为 $6-2\sqrt{5}$.

因为 $mn\leqslant\left(\frac{m+n}{2}\right)^2$，所以 $m+n+\left(\frac{m+n}{2}\right)^2\geqslant 4$，

令 $s=m+n>0$，则 $s^2+4s-16\geqslant 0$，

解得 $s\geqslant -2+2\sqrt{5}$ 或 $s\leqslant -2-2\sqrt{5}$（舍去），

即 $m+n$ 的最小值为 $-2+2\sqrt{5}$.

14. **解**：(1)依题意知，用电量增至 $\frac{k}{x-0.4}+a$，电力部门的收益为 $y=\left(\frac{k}{x-0.4}+a\right)(x-0.3)(0.55\leqslant x\leqslant 0.75)$.

(2)依题意，有

$\begin{cases}\left(\frac{0.2a}{x-0.4}+a\right)(x-0.3)\geqslant[a\times(0.8-0.3)](1+20\%),\\ 0.55\leqslant x\leqslant 0.75.\end{cases}$

整理，得 $\begin{cases}x^2-1.1x+0.3\geqslant 0,\\ 0.55\leqslant x\leqslant 0.75.\end{cases}$

解此不等式，得 $0.60\leqslant x\leqslant 0.75$.

所以当电价最低定为 0.60 元/kw·h 时，仍可保证电力部门的收益比上年度至少增长 20%.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

第二部分　阶段检测

阶段质量测试卷(一)

1. 选 A　$\because \cos C=2\cos^2\frac{C}{2}-1=2\times\frac{1}{5}-1=-\frac{3}{5}$,

又 $\cos C=\frac{BC^2+AC^2-AB^2}{2BC\cdot AC}=\frac{1+25-AB^2}{2\times5}=-\frac{3}{5}$,

$\therefore AB=4\sqrt{2}$,故选 A.

2. 选 B　在$\triangle ABC$中,根据正弦定理,得$\frac{AC}{\sin B}=\frac{BC}{\sin A}$,

$\therefore AC=\frac{BC\cdot\sin B}{\sin A}=\frac{3\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=2\sqrt{3}$,故选 B.

3. 选 B　由正弦定理$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}$,得 $\sin B=\frac{b\sin A}{a}$,又 $\cos A=-\cos(B+C)=\frac{1}{2}$,$\therefore A=60°$,则 $\sin B=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

$\because b<a$,$\therefore B<A$,$\therefore B=45°$,$\therefore C=180°-45°-60°=75°$,$\therefore BC$边上的高为 $AC\cdot\sin C=\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}=\frac{\sqrt{3}+1}{2}$,故选 B.

4. 选 B　由题意 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}\cdot AB\cdot AC\cdot\sin A=\frac{\sqrt{3}}{2}$,则 $AC=1$,由余弦定理可得 $BC=\sqrt{4+1-2\times2\times1\times\cos 60°}=\sqrt{3}$,故选 B.

5. 选 A　因为$\frac{\cos A}{\cos B}=\frac{b}{a}$,由正弦定理得$\frac{\cos A}{\cos B}=\frac{\sin B}{\sin A}$,所以 $\sin 2A=\sin 2B$. 由$\frac{b}{a}=\sqrt{2}$,可知 $a\neq b$,所以$A\neq B$. 又 $A,B\in(0,\pi)$,所以 $2A=180°-2B$,即 $A+B=90°$,所以 $C=90°$,于是$\triangle ABC$是直角三角形,故选 A.

6. 选 D　由条件及图可知,$A=B=40°$,又$\angle BCD=60°$,所以$\angle CBD=30°$,所以$\angle DBA=10°$,因此灯塔 A 在灯塔 B 南偏西 80°,故选 D.

7. 选 B　由正弦定理$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}$,得 $\sin B=\frac{b\sin A}{a}=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

$\because B$ 为锐角,$\therefore B=60°$,则 $C=90°$,

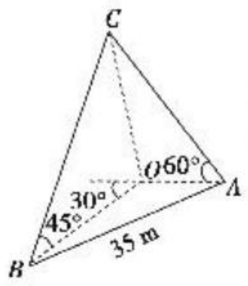
故 $A:B:C=1:2:3$,选 B.

8. 选 C　根据正弦定理可得 $a^2+b^2<c^2$. 由余弦定理得 $\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}<0$,所以角 C 是钝角,故选 C.

9. 选 A　由$\frac{a-c}{b}=\frac{a-b}{a+c}$,得 $a^2+b^2-c^2=ab$,由余弦定理得 $\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\frac{1}{2}$,所以 $C=\frac{\pi}{3}$,故选 A.

10. 选 C　由题意得,$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}AC\cdot BC\cdot\sin C=\frac{1}{2}AC\times2\sqrt{3}\times\frac{1}{2}=\sqrt{3}$,解得 $AC=2$. 由余弦定理得$AB^2=AC^2+BC^2-2AC\cdot BC\cos C=4+12-2\times2\times2\sqrt{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=4$,所以 $AB=2$,故选 C.

11. 选 A　如图,在$\triangle AOC$中,$OC=OA\tan 60°\Rightarrow OA=\frac{\sqrt{3}}{3}OC$. 在$\triangle BOC$中,$OB=OC$. 在$\triangle AOB$中,$AB=35$ m,$\angle AOB=180°-30°=150°$,由余弦定理,得 $AB^2=AO^2+BO^2-2AO\cdot BO\cos\angle AOB$,即$35^2=\frac{1}{3}OC^2+OC^2+OC^2\Rightarrow OC=5\sqrt{21}$ m,故选 A.



12. 选 C　设$\triangle ABC$的内角 A,B,C 所对的边分别为 a,b,c,$\frac{1}{13}$,$\frac{1}{5}$,$\frac{1}{11}$分别为 a,b,c 上的高. 因为 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}a\times\frac{1}{13}=\frac{1}{2}b\times\frac{1}{5}=\frac{1}{2}c\times\frac{1}{11}$,所以可设 $a=13k,b=5k,c=11k(k>0)$. 由余弦定理,得 $\cos A=\frac{(5k)^2+(11k)^2-(13k)^2}{2\times5k\times11k}=-\frac{23}{110}<0$,则 $A\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$,所以$\triangle ABC$为钝角三角形,故选 C.

13. **解析**:在$\triangle ABC$中,$\because\tan A=\frac{1}{3}$,$\therefore\sin A=\frac{1}{\sqrt{10}}$.

$\because\frac{AB}{\sin C}=\frac{BC}{\sin A}$,$\therefore AB=\frac{BC\cdot\sin C}{\sin A}=\frac{1\times\sin 150°}{\frac{1}{\sqrt{10}}}=\frac{\sqrt{10}}{2}$.

答案:$\frac{\sqrt{10}}{2}$

14. **解析**:由正弦定理得$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}$,$\therefore\sin B=\frac{b}{a}\sin A=\frac{2}{\sqrt{7}}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{21}}{7}$. $\because a>b$,$\therefore A>B$,$\therefore B$ 为锐角,$\therefore\cos B=\frac{2\sqrt{7}}{7}$.

$\therefore\sin C=\sin(A+B)=\sin A\cos B+\cos A\sin B=\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{2\sqrt{7}}{7}+\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{21}}{7}=\frac{3\sqrt{21}}{14}$. 由正弦定理得$\frac{a}{\sin A}=\frac{c}{\sin C}$,$\therefore c=\frac{a\sin C}{\sin A}=\frac{\sqrt{7}\times\frac{3\sqrt{21}}{14}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=3$.

答案:$\frac{\sqrt{21}}{7}$　3

15. **解析**:在锐角三角形 ABC 中,A,B,C 都为锐角,由题意,知$\begin{cases}B<90°,\\2B<90°,\\180°-3B<90°,\end{cases}$所以 $30°<B<45°$. 由正弦定理,知$\frac{a}{b}=\frac{\sin A}{\sin B}=\frac{\sin 2B}{\sin B}=2\cos B\in(\sqrt{2},\sqrt{3})$,故$\frac{a}{b}$的取值范围是$(\sqrt{2},\sqrt{3})$.

答案:$(\sqrt{2},\sqrt{3})$

16. **解析**:设从塔 BB_1 的底部看塔 AA_1 顶部的仰角为 α,则 $AA_1=60\tan\alpha$,$BB_1=60\tan 2\alpha$. $\because$从两塔底部连线中点 C 分别看两塔顶部的仰角互为余角,$\therefore\mathrm{Rt}\triangle A_1AC\backsim\mathrm{Rt}\triangle CBB_1$,$\therefore\frac{AA_1}{30}=\frac{30}{BB_1}$,$\therefore AA_1\cdot BB_1=900$,

$\therefore 3\ 600\tan\alpha\tan 2\alpha=900$,$\therefore\tan\alpha=\frac{1}{3}$(负值舍去),$\tan 2\alpha=\frac{3}{4}$,$BB_1=60\tan 2\alpha=45$.

答案:$\frac{1}{3}$　45

17. **解**:(1)由正弦定理得

$\frac{AD}{\sin B}=\frac{BD}{\sin\angle BAD}$,$\frac{AD}{\sin C}=\frac{DC}{\sin\angle CAD}$.

因为 AD 平分$\angle BAC$,$BD=2DC$,

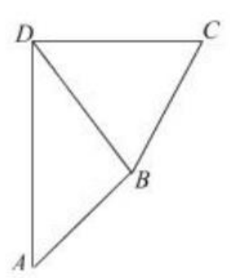
所以$\frac{\sin B}{\sin C}=\frac{DC}{BD}=\frac{1}{2}$.

(2)因为 $C=180°-(\angle BAC+B)$,$\angle BAC=60°$,

所以 $\sin C=\sin(\angle BAC+B)=\frac{\sqrt{3}}{2}\cos B+\frac{1}{2}\sin B$.

由(1)知,$2\sin B=\sin C$,所以 $\tan B=\frac{\sqrt{3}}{3}$,即 $B=30°$.

18. **解**:(1)如图,在$\triangle ABD$中,由正弦定理得



$\frac{BD}{\sin A}=\frac{AB}{\sin\angle ADB}$,

由题设知,$\frac{5}{\sin 45°}=\frac{2}{\sin\angle ADB}$,

所以 $\sin\angle ADB=\frac{\sqrt{2}}{5}$.

由题设知,$\angle ADB<90°$,

所以 $\cos\angle ADB=\sqrt{1-\frac{2}{25}}=\frac{\sqrt{23}}{5}$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

(2)由题设及(1)知，$\cos\angle BDC=\sin\angle ADB=\frac{\sqrt{2}}{5}$.

在$\triangle BCD$中，由余弦定理得

$BC^2=BD^2+DC^2-2\cdot BD\cdot DC\cdot\cos\angle BDC$

$=25+8-2\times5\times2\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{2}}{5}=25$，所以$BC=5$.

19. **解**：(1)因为$\cos B=\frac{4}{5}>0$，所以$B\in(0°,90°)$，

所以$\sin B=\frac{3}{5}$.

由正弦定理$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}$可得$\frac{a}{\sin 30°}=\frac{10}{3}$，

所以$a=\frac{5}{3}$.

(2)因为$\triangle ABC$的面积$S=\frac{1}{2}ac\sin B$，$\sin B=\frac{3}{5}$，

所以$\frac{3}{10}ac=3$，$ac=10$.

由余弦定理得$b^2=a^2+c^2-2ac\cos B$，

即$4=a^2+c^2-\frac{8}{5}ac=a^2+c^2-16$，即$a^2+c^2=20$.

所以$(a+c)^2-2ac=20$，$(a+c)^2=40$.

因为$a+c>0$，所以$a+c=2\sqrt{10}$.

20. **解**：(1)在$\triangle ABC$中，$\because\cos B=-\frac{1}{7}$，$\therefore B\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$，

$\therefore\sin B=\sqrt{1-\cos^2 B}=\frac{4\sqrt{3}}{7}$.

由正弦定理得$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}\Rightarrow\frac{7}{\sin A}=\frac{8}{\frac{4\sqrt{3}}{7}}$，$\therefore\sin A=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

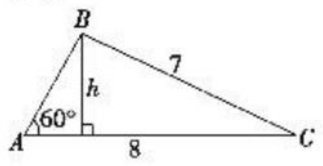
$\because B\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$，$\therefore A\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，$\therefore A=\frac{\pi}{3}$.

(2)在$\triangle ABC$中，

$\because\sin C=\sin(A+B)=\sin A\cos B+\cos A\sin B$

$=\frac{\sqrt{3}}{2}\times\left(-\frac{1}{7}\right)+\frac{1}{2}\times\frac{4\sqrt{3}}{7}=\frac{3\sqrt{3}}{14}$.

如图所示，在$\triangle ABC$中，



$\because\sin C=\frac{h}{BC}$，$\therefore h=BC\cdot\sin C=7\times\frac{3\sqrt{3}}{14}=\frac{3\sqrt{3}}{2}$，

$\therefore AC$边上的高为$\frac{3\sqrt{3}}{2}$.

21. **解**：(1)由题意，在$\triangle ABC$中，

$\angle ABC=180°-75°+15°=120°$，$AB=2\sqrt{3}-2$，$BC=4$，

根据余弦定理得

$AC^2=AB^2+BC^2-2AB\times BC\times\cos\angle ABC$

$=(2\sqrt{3}-2)^2+4^2+(2\sqrt{3}-2)\times4=24$，

所以$AC=2\sqrt{6}$.

(2)根据正弦定理得，$\sin\angle CAB=\frac{BC\cdot\sin\angle ABC}{AC}=\frac{4\times\frac{\sqrt{3}}{2}}{2\sqrt{6}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，所以$\angle CAB=45°$.

22. **解**：(1)由已知，

得$-\cos(A+B)+\cos A\cos B-\sqrt{3}\sin A\cos B=0$，

即有$\sin A\sin B-\sqrt{3}\sin A\cos B=0$.

因为$\sin A\neq0$，所以$\sin B-\sqrt{3}\cos B=0$，

又$\cos B\neq0$，所以$\tan B=\sqrt{3}$.

又$0<B<\pi$，所以$B=\frac{\pi}{3}$.

(2)因为$a+c=1$，$\cos B=\frac{1}{2}$，

所以$b^2=a^2+c^2-2ac\cos B=3\left(a-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}$.

又$0<a<1$，于是有$\frac{1}{4}\leqslant b^2<1$，即有$\frac{1}{2}\leqslant b<1$，

所以b的取值范围是$\left[\frac{1}{2},1\right)$.

阶段质量测试卷(二)

1. 选 B　由于$3=2+1$，$5=2^2+1$，$9=2^3+1$，…，所以通项公式是$a_n=2^n+1$，故选 B.

2. 选 B　将$y=x^2-4x+7$整理得，$y=(x-2)^2+3$，得到顶点坐标为$(2,3)$，即$b=2$，$c=3$，由a，b，c，d成等比数列，知$ad=bc=6$，故选 B.

3. 选 B　设等差数列$\{a_n\}$的公差为d，由题意可得$\begin{cases}(a_1+3d)+(a_1+7d)=10,\\ a_1+9d=6,\end{cases}$解得$a_1=\frac{15}{4}$，$d=\frac{1}{4}$，则$a_{18}=a_1+17d=\frac{15}{4}+17\times\frac{1}{4}=8$，故选 B.

4. 选 B　由题意得$\frac{a_1(1-2^4)}{1-2}=1$，解得$a_1=\frac{1}{15}$，所以该数列的前 8 项和为$\frac{\frac{1}{15}\times(1-2^8)}{1-2}=17$，故选 B.

5. 选 B　由已知得$\begin{cases}a_1+a_2=1,\\ a_3+a_4=9,\end{cases}$

$\therefore q^2(a_1+a_2)=9$，即$q^2=9$. $\because a_n>0$，$\therefore q=3$.

$\therefore a_4+a_5=q(a_3+a_4)=3\times9=27$，故选 B.

6. 选 B　因为点(a_n,a_{n+1})在直线$y=2x$上，所以$a_{n+1}=2a_n$. 因为$a_1=1\neq0$，所以$a_n\neq0$，所以$\{a_n\}$是首项为 1，公比为 2 的等比数列，所以$a_4=1\times2^3=8$，故选 B.

7. 选 B　由已知得，$a_1q^2=1$，$a_1q+a_1q^3=\frac{5}{2}$，

$\therefore\frac{q+q^3}{q^2}=\frac{5}{2}$，即$q^2-\frac{5}{2}q+1=0$，

$\therefore q=\frac{1}{2}$或$q=2$(舍去)，$\therefore a_1=\frac{a_3}{q^2}=4$，故选 B.

8. 选 D　设这 7 个数分别为a_1，a_2，…，a_7，公差为d，则$27=3+8d$，解得$d=3$，故$a_4=3+4\times3=15$，故选 D.

9. 选 C　由题意知大鼠每天打洞长度成等差数列，设其通项为a_n，公差为d，设小鼠每天打洞长度为数列$\{b_n\}$，则$a_1=1$，$d=\frac{1}{2}$，$b_1=\frac{1}{2}$，$b_2=\frac{1}{2}\times2=1$，$b_3=1\times2=2$，$b_4=b_5=\cdots=b_n=2$.

$\because a_1+a_2+a_3+b_1+b_2+b_3$

$=3\times1+\frac{3\times2}{2}\times\frac{1}{2}+\frac{\frac{1}{2}(1-2^3)}{1-2}=8$，

又$a_4=a_1+3d=\frac{5}{2}$，$b_4=b_3=2$，

$\therefore a_1+a_2+a_3+a_4+b_1+b_2+b_3+b_4=12.5$，

$\therefore$最快需要 4 天，故选 C.

10. 选 B　由一元二次方程根与系数的关系，可得$a_4+a_6=8$，所以$S_9=\frac{(a_1+a_9)}{2}\times9=\frac{(a_4+a_6)}{2}\times9=\frac{8}{2}\times9=36$，故选 B.

11. 选 A　因为$\left[\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right]=1$，所以$\left\{\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right\}=\frac{\sqrt{5}+1}{2}-\left[\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right]=\frac{\sqrt{5}+1}{2}-1=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$. 由于$\frac{\sqrt{5}-1}{2}\times\frac{\sqrt{5}+1}{2}=1^2$，$\frac{\sqrt{5}-1}{2}+\frac{\sqrt{5}+1}{2}=\sqrt{5}\neq2\times1$，所以$\frac{\sqrt{5}-1}{2}$，1，$\frac{\sqrt{5}+1}{2}$成等比数列，不成等差数列，即$\left\{\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right\}$，$\left[\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right]$，$\frac{\sqrt{5}+1}{2}$成等比数列，不成等差数列，故选 A.

12. 选 D　由已知得，$a_1+2a_2+3a_3+\cdots+na_n=n(n+2)$，当$n=9$时，$a_1+2a_2+\cdots+9a_9=9\times11=99$，①

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

当 $n=10$ 时，$a_1+2a_2+\cdots+9a_9+10a_{10}=10\times12=120$，②

②－①得 $10a_{10}=21$，$\therefore a_{10}=\dfrac{21}{10}$，故选 D.

13. **解析**：当 $n=1$ 时，$a_1=S_1=2^1-3=-1$；

当 $n\geqslant2$ 时，$a_n=S_n-S_{n-1}=(2^n-3)-(2^{n-1}-3)=2^{n-1}$，而 $2^{1-1}=1\neq-1$. 故数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n=\begin{cases}-1,n=1,\\2^{n-1},n\geqslant2.\end{cases}$

答案：$a_n=\begin{cases}-1,n=1,\\2^{n-1},n\geqslant2\end{cases}$

14. **解析**：因为等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，$S_{m-1}=-2$，$S_m=0$，$S_{m+1}=3$，

所以 $a_m=S_m-S_{m-1}=2$，$a_{m+1}=S_{m+1}-S_m=3$，数列的公差 $d=1$，$a_m+a_{m+1}=S_{m+1}-S_{m-1}=5$，

即 $2a_1+2m-1=5$，所以 $a_1=3-m$.

由 $S_m=(3-m)m+\dfrac{m(m-1)}{2}\times1=0$，解得 $m=5$.

答案：5

15. **解析**：因为 $\{a_n\}$ 为等比数列，所以 $a_1a_{20}=a_2a_{19}=\cdots=a_9a_{12}=a_{10}a_{11}$. 又 $a_{10}a_{11}+a_9a_{12}=2e^5$，所以 $a_{10}a_{11}=a_9a_{12}=e^5$，所以 $\ln a_1+\ln a_2+\cdots+\ln a_{20}=\ln(a_1a_2\cdots a_{20})=\ln[(a_1a_{20})\cdot(a_2a_{19})\cdot\cdots\cdot(a_{10}a_{11})]=\ln(a_{10}a_{11})^{10}=\ln(e^5)^{10}=\ln e^{50}=50$.

答案：50

16. **解析**：由 $a_{203}+a_{204}>0\Rightarrow a_1+a_{406}>0\Rightarrow S_{406}>0$，又由 $a_1<0$ 且 $a_{203}\cdot a_{204}<0$，知 $a_{203}<0$，$a_{204}>0$，所以公差 $d>0$，则数列 $\{a_n\}$ 的前 203 项都是负数，那么 $2a_{203}=a_1+a_{405}<0$，所以 $S_{405}<0$，所以使前 n 项和 $S_n<0$ 的最大自然数 $n=405$.

答案：405

17. **解**：(1)设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d，首项为 a_1.

由 $\begin{cases}a_2=1,\\a_5=-5,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}a_1+d=1,\\a_1+4d=-5,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a_1=3,\\d=-2,\end{cases}$

所以 $a_n=a_1+(n-1)d=-2n+5$.

(2)$S_n=na_1+\dfrac{n(n-1)}{2}d=-n^2+4n=-(n-2)^2+4$.

当 $n=2$ 时，S_n 取得最大值 4.

18. **解**：(1)证明：设 $\{a_n\}$ 的公差为 d，

则 $b_{n+1}-b_n=(a_{n+1}^2-a_{n+2}^2)-(a_n^2-a_{n+1}^2)$

$=2a_{n+1}^2-(a_{n+1}-d)^2-(a_{n+1}+d)^2=-2d^2$，

$\therefore$ 数列 $\{b_n\}$ 是以 $-2d^2$ 为公差的等差数列.

(2)$\because a_1+a_3+a_5+\cdots+a_{25}=130$，

$a_2+a_4+a_6+\cdots+a_{26}=143-13k$，

$\therefore13d=13-13k$，$\therefore d=1-k$.

又 $13a_1+\dfrac{13\times(13-1)}{2}\times2d=130$，$\therefore a_1=-2+12k$，

$\therefore a_n=a_1+(n-1)d=(-2+12k)+(n-1)(1-k)$

$=(1-k)n+13k-3$，

$\therefore b_n=a_n^2-a_{n+1}^2=(a_n+a_{n+1})(a_n-a_{n+1})$

$=-2(1-k)^2n+25k^2-30k+5$.

19. **解**：(1)设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d，

则依题意有 $\begin{cases}a_1=1,\\(a_1+3d)^2=(a_1+d)(a_1+7d),\end{cases}$

解得 $d=1$ 或 $d=0$(舍去)，

$\therefore a_n=1+(n-1)=n$.

(2)由(1)知，$a_n=n$，

$\therefore b_n=2^n$，$\therefore\dfrac{b_{n+1}}{b_n}=2$，

$\therefore\{b_n\}$ 是首项为 2，公比为 2 的等比数列，

$\therefore T_n=\dfrac{2(1-2^n)}{1-2}=2^{n+1}-2$.

20. **解**：(1)设等比数列 $\{a_n\}$ 的公比为 q，$q>1$.

则 $a_3a_4a_5=\dfrac{a_4}{q}\cdot a_4\cdot a_4q=a_4^3=512=8^3$，

$\therefore a_4=8$.

又 $a_3+a_4+a_5=28$，

$\therefore\dfrac{8}{q}+8+8q=28$，即 $2q^2-5q+2=0$.

解得 $q=2$ 或 $q=\dfrac{1}{2}$(舍)，

$\therefore$ 数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n=a_4q^{n-4}=8\times2^{n-4}=2^{n-1}$.

(2)由(1)知，$b_n=\log_22^n=n$，

$\therefore\dfrac{1}{b_nb_{n+1}}=\dfrac{1}{n(n+1)}=\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}$，

$\therefore S_n=\dfrac{1}{1}-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{4}+\cdots+\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}$

$=1-\dfrac{1}{n+1}=\dfrac{n}{n+1}$.

21. **解**：(1)由已知得 $\dfrac{S_n}{n}=1+(n-1)\times2=2n-1$，

所以 $S_n=2n^2-n$.

当 $n\geqslant2$ 时，$a_n=S_n-S_{n-1}=2n^2-n-[2(n-1)^2-(n-1)]=4n-3$.

而 $a_1=1$ 满足上式，

所以 $a_n=4n-3$，$(n\in\mathbf{N}^*)$.

(2)由(1)可得，$b_n=(-1)^n(4n-3)$.

当 n 为偶数时，$T_n=(-1+5)+(-9+13)+\cdots+[-(4n-7)+(4n-3)]=4\times\dfrac{n}{2}=2n$；

当 n 为奇数时，$n+1$ 为偶数，$T_n=T_{n+1}-b_{n+1}=2(n+1)-(4n+1)=-2n+1$.

综上，$T_n=\begin{cases}2n,n\text{ 为偶数},\\-2n+1,n\text{ 为奇数}.\end{cases}$

22. **解**：(1)由题知 $a_1=2$，$a_2=6$，$a_3=18$，

$\therefore$ 等比数列 $\{a_n\}$ 的公比 $q=3$，$\therefore a_n=2\times3^{n-1}$.

(2)由(1)可得，$b_n=3na_n=2n\times3^n$，

$\therefore T_n=b_1+b_2+b_3+\cdots+b_n=2\times1\times3^1+2\times2\times3^2+2\times3\times3^3+\cdots+2n\times3^n$，

$3T_n=2\times1\times3^2+2\times2\times3^3+\cdots+2(n-1)\times3^n+2n\times3^{n+1}$，

$\therefore-2T_n=2(3^1+3^2+3^3+\cdots+3^n)-2n\times3^{n+1}$

$=\dfrac{6(1-3^n)}{1-3}-2n\times3^{n+1}$

$=-3-(2n-1)\times3^{n+1}$，

$\therefore T_n=\dfrac{3+(2n-1)\times3^{n+1}}{2}$.

阶段质量测试卷(三)

1. 选 D　由题中 x 不低于 95 即 $x\geqslant95$，y 高于 380 即 $y>380$，z 超过 45 即 $z>45$，故选 D.

2. 选 B　$a^2-ab=a(a-b)$，$\because a<b<0$，$\therefore a-b<0$，

$\therefore a^2-ab>0$，$\therefore a^2>ab$.　①

又 $ab-b^2=b(a-b)>0$，$\therefore ab>b^2$，　②

由①②得 $a^2>ab>b^2$，故选 B.

3. 选 C　$\because2\sqrt{2}>2^m+4^n\geqslant2\sqrt{2^m\cdot4^n}=2^{\frac{m}{2}+n+1}$，

$\therefore\dfrac{m}{2}+n+1<\dfrac{3}{2}$，即 $m+2n<1$，

$\therefore(m,n)$ 在 $x+2y=1$ 的左下方，故选 C.

4. 选 C　由 $x^2-7x+6<0$ 解得 $1<x<6$，

$\therefore A=\{x|1<x<6\}$.

由 $x^2-10x+16<0$ 解得 $2<x<8$，

$\therefore B=\{x|2<x<8\}$.

$\therefore A\cap B=\{x|2<x<6\}$，故选 C.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

5. 选 A　由 $x^2-2x-3<0$ 解得 $-1<x<3$，
∴$A=(-1,3)$.
由 $x^2+x-6<0$ 解得 $-3<x<2$，
∴$B=(-3,2)$.
∴$A\cap B=(-1,2)$，
∴不等式 $x^2+ax+b<0$ 的解集为 $(-1,2)$.
∴$x^2+ax+b=0$ 的两根为 -1 和 2，
∴$\begin{cases}-1+2=-a,\\-1\times2=b,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}a=-1,\\b=-2.\end{cases}$
∴$a+b=-3$，故选 A.

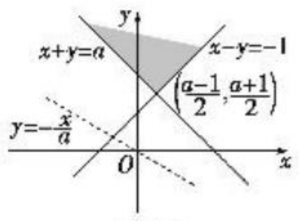
6. 选 D　由 $3x+y=5xy$，得 $\frac{3x+y}{xy}=\frac{3}{y}+\frac{1}{x}=5$，所以 $4x+3y=\frac{1}{5}(4x+3y)\left(\frac{3}{y}+\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{5}\left(4+9+\frac{3y}{x}+\frac{12x}{y}\right)\geqslant\frac{1}{5}(4+9+2\sqrt{36})=5$，当且仅当 $\frac{3y}{x}=\frac{12x}{y}$，即 $y=2x$ 时，“=”成立，故 $4x+3y$ 的最小值为 5，故选 D.

7. 选 A　$f(1)=1-4+6=3$，
则有 $\begin{cases}x\geqslant0,\\x^2-4x+6>3\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x<0,\\x+6>3,\end{cases}$
解得 $0\leqslant x<1$ 或 $x>3$ 或 $-3<x<0$，
即 $-3<x<1$ 或 $x>3$，故选 A.

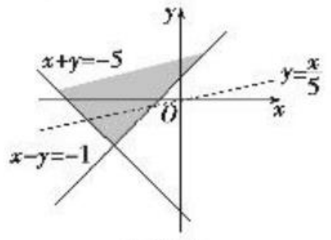
8. 选 C　解法一：由已知得 $\frac{1}{a}+\frac{2}{b}=\frac{b+2a}{ab}=\sqrt{ab}$，且 $a>0,b>0$，
∴$ab\sqrt{ab}=b+2a\geqslant2\sqrt{2}\sqrt{ab}$，当且仅当 $a=\sqrt[4]{2}$，$b=\sqrt[4]{2^5}$ 时取等号，∴$ab\geqslant2\sqrt{2}$，故选 C.

解法二：由题设易知 $a>0,b>0$，∴$\sqrt{ab}=\frac{1}{a}+\frac{2}{b}\geqslant2\sqrt{\frac{2}{ab}}$，即 $ab\geqslant2\sqrt{2}$，当且仅当 $a=\sqrt{2}$，$b=\sqrt{2^5}$ 时取等号，故选 C.

9. 选 B　根据约束条件画出可行域如图(1)所示.
由图(1)可知，在顶点处 z 有最小值，顶点为 $\left(\frac{a-1}{2},\frac{a+1}{2}\right)$，代入目标函数中，得 $z=\frac{a-1}{2}+a\cdot\frac{a+1}{2}=7$，解得 $a=3$ 或 -5.



图(1)



图(2)

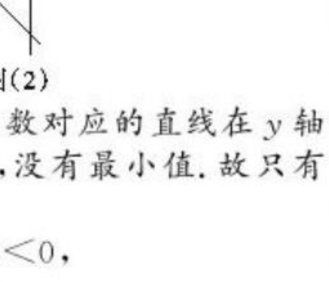
当 $a=-5$ 时，可行域如图(2)所示，目标函数对应的直线在 y 轴上的截距越大 z 越小，故 z 可以取无穷小，没有最小值. 故只有 $a=3$ 满足题意，故选 B.

10. 选 B　$x\odot(x-2)=x(x-2)+2x+x-2<0$，
即 $x^2+x-2<0$，解得 $-2<x<1$，故选 B.

11. 选 B　因为不等式 $x^2+mx+1\geqslant0$ 的解集为 **R**，所以 $\Delta=m^2-4\leqslant0$，解得 $-2\leqslant m\leqslant2$，故选 B.

12. 选 D　由题意，得原不等式可转化为 $(x-1)(x-a)<0$. 当 $a>1$ 时，解得 $1<x<a$，此时解集中的整数为 2，3，则 $3<a\leqslant4$；当 $a<1$ 时，解得 $a<x<1$，此时解集中的整数为 0，-1，则 $-2\leqslant a<-1$. 当 $a=1$ 时，不符合题意. 故实数 a 的取值范围是 $[-2,-1)\cup(3,4]$，故选 D.

13. **解析**：画出不等式组表示的平面区域如图中阴影部分所示.



由题意可知，当直线 $y=-\frac{2}{3}x+\frac{5}{3}+\frac{z}{3}$ 过点 A 时，z 取得最小值，联立 $\begin{cases}2x-y+1=0,\\x-2y-2=0,\end{cases}$
解得 $A(-1,-1)$，
即 $z_{\min}=2\times(-1)+3\times(-1)-5=-10$.
答案：-10

14. **解析**：由 $x>-1$，得 $x+1>0$，则 $y=\frac{[(x+1)+9][(x+1)+1]}{x+1}=\frac{(x+1)^2+10(x+1)+9}{x+1}=(x+1)+\frac{9}{x+1}+10\geqslant6+10=16$，当且仅当 $x+1=\frac{9}{x+1}$，即 $x=2$ 时等号成立，所以 $y_{\min}=16$.
答案：16

15. **解析**：由题意，知方程 $x^2-4x+m=0$ 的判别式 $\Delta=(-4)^2-4m\leqslant0$，解得 $m\geqslant4$. 又 $x^2-(m+3)x+3m<0$ 等价于 $(x-3)(x-m)<0$，所以 $3<x<m$.
答案：$(3,m)$

16. **解析**：由直线过点 $P(2,1)$，可知 $\frac{2}{a}+\frac{1}{b}=1$. 由已知，得 $a>0$，$b>0$，所以 $\frac{2}{a}+\frac{1}{b}\geqslant2\sqrt{\frac{2}{a}\cdot\frac{1}{b}}=\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{ab}}$，当且仅当 $\frac{2}{a}=\frac{1}{b}$，即 $a=4,b=2$ 时取等号，即 $\sqrt{ab}\geqslant2\sqrt{2}$，解得 $ab\geqslant8$. 故直线与两坐标轴的正半轴围成的三角形的面积 $S=\frac{1}{2}ab\geqslant4$，故最小值为 4.
答案：4

17. **解**：将 $x^2-3ax-18a^2>0$ 变形得 $(x-6a)(x+3a)>0$，
方程 $(x-6a)(x+3a)=0$ 的两根为 $6a$，$-3a$.
所以当 $a>0$ 时，$6a>-3a$，原不等式的解集为 $\{x\mid x<-3a$ 或 $x>6a\}$；
当 $a=0$ 时，$6a=-3a=0$，原不等式的解集为 $\{x\mid x\neq0\}$；
当 $a<0$ 时，$6a<-3a$，原不等式的解集为 $\{x\mid x<6a$ 或 $x>-3a\}$.

18. **解**：(1)当 $a=2$ 时，$f(x)=2x^2+2x-1$，令 $2x^2+2x-1=0$，得方程的根为 $x_{1,2}=\frac{-2\pm\sqrt{2^2+2\times4}}{4}=-\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$.
从而 $f(x)<0$ 的解集为
$\left\{x\,\middle|\,-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}<x<-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\right\}$.
(2)当 $a=0$ 时，不等式 $f(x)<0$ 即 $-1<0$，恒成立.
当 $a\neq0$ 时，易得 $\begin{cases}a<0,\\\Delta=a^2+4a<0,\end{cases}$ 解得 $-4<a<0$.
综上可得，实数 a 的取值范围是 $\{a\mid-4<a\leqslant0\}$.

19. **解**：(1)∵$x<3$，∴$x-3<0$，
∴$f(x)=\frac{4}{x-3}+x=\frac{4}{x-3}+(x-3)+3$
$=-\left[\frac{4}{3-x}+(3-x)\right]+3$
$\leqslant-2\sqrt{\frac{4}{3-x}\cdot(3-x)}+3=-1$，
当且仅当 $\frac{4}{3-x}=3-x$，即 $x=1$ 时等号成立，
∴$f(x)$ 的最大值为 -1.
(2)∵$\lg x+\lg y=1$，
∴$xy=10$，∴$\frac{2}{x}+\frac{5}{y}\geqslant2\sqrt{\frac{10}{xy}}=2$，
当且仅当 $\frac{2}{x}=\frac{5}{y}$，即 $x=2,y=5$ 时等号成立，
故 $\frac{2}{x}+\frac{5}{y}$ 的最小值为 2.

20. **解**：(1)由 $f(x)>0$，得 $-3x^2+a(5-a)x+b>0$，
∴$3x^2-a(5-a)x-b<0$.
又 $f(x)>0$ 的解集为 $(-1,3)$，
∴$\begin{cases}3+a(5-a)-b=0,\\27-3a(5-a)-b=0.\end{cases}$
∴$\begin{cases}a=2,\\b=9\end{cases}$ 或 $\begin{cases}a=3,\\b=9.\end{cases}$

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

(2)由 $f(2)<0$ 恒成立,得 $-12+2a(5-a)+b<0$,

即 $2a^2-10a+12-b>0$,对任意 $a\in\mathbf{R}$ 恒成立,

$\therefore\Delta=(-10)^2-4\times2(12-b)<0$,

$\therefore b<-\frac{1}{2}$,$\therefore$ 实数 b 的取值范围为 $\left(-\infty,-\frac{1}{2}\right)$.

21. **解**:(1)依题意得 $y=\frac{f(x)}{x}=\frac{x^2-4x+1}{x}=x+\frac{1}{x}-4$.

因为 $x>0$,所以 $x+\frac{1}{x}\geqslant2$,当且仅当 $x=\frac{1}{x}$ 时,即 $x=1$ 时,等号成立.所以 $y\geqslant-2$.

所以当 $x=1$ 时,$y=\frac{f(x)}{x}$ 的最小值为 -2.

(2)因为 $f(x)-a=x^2-2ax-1$,

所以要使"任意 $x\in[0,2]$,不等式 $f(x)\leqslant a$ 成立",

只要"$x^2-2ax-1\leqslant0$ 在 $[0,2]$ 上恒成立".

不妨设 $g(x)=x^2-2ax-1$,

则只要 $g(x)\leqslant0$ 在 $[0,2]$ 上恒成立即可.

所以 $\begin{cases}g(0)\leqslant0,\\g(2)\leqslant0,\end{cases}$

即 $\begin{cases}0-0-1\leqslant0,\\4-4a-1\leqslant0,\end{cases}$

解得 $a\geqslant\frac{3}{4}$.

则实数 a 的取值范围为 $\left[\frac{3}{4},+\infty\right)$.

22. **解**:(1)因为每件商品售价为 0.05 万元,

则 x 千件商品销售额为 $0.05\times1\ 000x=50x$ 万元,

依题意得,

当 $0<x<80$ 时,$L(x)=50x-\frac{1}{3}x^2-10x-250=-\frac{1}{3}x^2+40x-250$.

当 $x\geqslant80$ 时,$L(x)=50x-51x-\frac{10\ 000}{x}+1\ 450-250=1\ 200-\left(x+\frac{10\ 000}{x}\right)$.

所以 $L(x)=\begin{cases}-\frac{1}{3}x^2+40x-250,0<x<80,\\1\ 200-\left(x+\frac{10\ 000}{x}\right),x\geqslant80.\end{cases}$

(2)当 $0<x<80$ 时,$L(x)=-\frac{1}{3}(x-60)^2+950$.

故当 $x=60$ 时,$L(x)$ 取得最大值 $L(60)=950$ 万元.

当 $x\geqslant80$ 时,$L(x)=1\ 200-\left(x+\frac{10\ 000}{x}\right)$

$\leqslant1\ 200-2\sqrt{x\cdot\frac{10\ 000}{x}}=1\ 200-200=1\ 000$.

当 $x=\frac{10\ 000}{x}$,即 $x=100$ 时,$L(x)$ 取得最大值 1 000 万元.

由于 $950<1\ 000$,所以当年产量为 100 千件时,该厂在这一商品生产中所获利润最大,最大利润为 1 000 万元.

综合质量测试卷

1. 选 C　当 $c=0$ 时,$ac^2=0$,$bc^2=0$,故由 $a>b$ 不能得到 $ac^2>bc^2$,故 A 错误;当 $c<0$ 时,$\frac{a}{c}>\frac{b}{c}\Rightarrow a<b$,故 B 错误;当 $a=5$,$b=3$ 时,$\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$,故 D 错误,C 正确,故选 C.

2. 选 A　令 $b_n=\frac{a_n}{n}$,由题意可知 $b_3=\frac{a_3}{3}=\frac{2}{3}$,$b_{15}=\frac{a_{15}}{15}=2$,则等差数列 $\{b_n\}$ 的公差 $d=\frac{b_{15}-b_3}{15-3}=\frac{1}{9}$,则 $b_9=b_3+(9-3)d=\frac{4}{3}$,所以 $a_9=9b_9=12$,故选 A.

3. 选 D　$f(x)=\frac{x^2-2x+2}{2x-2}=\frac{1}{2}\left[(x-1)+\frac{1}{x-1}\right]$,

又 $\because-4<x<1$,$\therefore x-1<0$.$\therefore-(x-1)>0$.

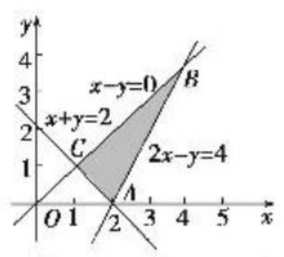
故 $f(x)=-\frac{1}{2}\left[-(x-1)+\frac{1}{-(x-1)}\right]\leqslant-1$.

当且仅当 $x-1=\frac{1}{x-1}$,即 $x=0$ 时等号成立,故选 D.

4. 选 B　由 $a^x=b^y=2$,得 $x=\log_a2=\frac{1}{\log_2a}$,$y=\log_b2=\frac{1}{\log_2b}$,$\frac{2}{x}+\frac{1}{y}=2\log_2a+\log_2b=\log_2(a^2b)\leqslant\log_2\left(\frac{a^2+b}{2}\right)^2=2$(当且仅当 $a^2=b=2$ 时取等号),故选 B.

5. 选 C　因为 $a_{n+1}-a_n=2$,所以 $\{a_n\}$ 为公差为 2 的等差数列,又 $\{a_n+a_{n+1}\}$ 的前 10 项和为 $a_1+a_2+a_2+a_3+\cdots+a_{10}+a_{10}+a_{11}=2(a_1+a_2+\cdots+a_{10})+a_{11}-a_1=2S_{10}+10\times2=120$,故选 C.

6. 选 D　如图,不等式组所围成的平面区域为 $\triangle ABC$,其中 $A(2,0)$,$B(4,4)$,$C(1,1)$,所求平面区域的面积为 $S_{\triangle ABO}-S_{\triangle ACO}=\frac{1}{2}(2\times4-2\times1)=3$,故选 D.



7. 选 A　令 $f(x)=x^2-4x=(x-2)^2-4$,在 $(0,1]$ 上为减函数,当 $x=1$ 时,$f(x)_{\min}=-3$,所以 $m\leqslant-3$,故选 A.

8. 选 D　由题意可知 $b=\frac{1}{2}a$,$c=\frac{1}{2}b$,$\therefore\frac{b}{a}=\frac{1}{2}$,$\frac{c}{b}=\frac{1}{2}$.

$\therefore a,b,c$ 成等比数列且公比为 $\frac{1}{2}$.$\because1$ 斗 $=10$ 升,$\therefore5$ 斗 $=50$ 升,$\therefore a+b+c=50$,又易知 $a=4c$,$b=2c$,$\therefore4c+2c+c=50$,$\therefore7c=50$,$\therefore c=\frac{50}{7}$,故选 D.

9. 选 C　由题意,可得 $\frac{S_n}{T_n}=\frac{7n+23}{n+1}$,则 $\frac{a_n}{b_n}=\frac{2a_n}{2b_n}=\frac{\frac{n(a_1+a_{2n-1})}{2}}{\frac{n(b_1+b_{2n-1})}{2}}=\frac{S_{2n-1}}{T_{2n-1}}=\frac{14n+16}{2n}=\frac{7n+8}{n}=7+\frac{8}{n}$,经验证,知当 $n=1,2,4,8$ 时,$\frac{a_n}{b_n}$ 为整数,即使 $\frac{a_n}{b_n}$ 为整数的正整数 n 的个数是 4,故选 C.

10. 选 D　由题意,知 $\begin{cases}a+b=x+y,\\cd=xy,\end{cases}$ 所以 $\frac{(a+b)^2}{cd}=\frac{(x+y)^2}{xy}=\frac{x^2+y^2+2xy}{xy}=\frac{x^2+y^2}{xy}+2\geqslant2+2=4$,当且仅当 $x=y$ 时,等号成立,故选 D.

11. 选 A　根据正弦定理由 $\sin A-\sin B=\frac{c(\sin A-\sin C)}{a+b}$ 可得,$a-b=\frac{c(a-c)}{a+b}$,得 $a^2-b^2=c(a-c)$,即 $a^2+c^2-b^2=ac$,故 $\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=\frac{1}{2}=\cos B$,$\because B\in(0,\pi)$,$\therefore B=\frac{\pi}{3}$.又由 $b=\sqrt{3}$,可得 $a^2+c^2=ac+3$,且 $a^2+c^2=ac+3\geqslant2ac$,即 $ac\leqslant3$,当且仅当 $a=c=\sqrt{3}$ 时取等号,故 ac 的最大值为 3,这时 $\triangle ABC$ 的面积取得最大值,为 $\frac{1}{2}\times3\times\sin\frac{\pi}{3}=\frac{3\sqrt{3}}{4}$,故选 A.

12. 选 B　等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 S_n 有最大值,所以等差数列 $\{a_n\}$ 的公差 $d<0$.因为 $S_n=\frac{n(a_1+a_n)}{2}$,所以使得 $S_n>0$ 的 n 的最大值,即是使 $a_1+a_n>0$ 的 n 的最大值.又由 $\frac{a_{11}}{a_{10}}<-1$,得 $\frac{a_{11}+a_{10}}{a_{10}}<0$,所以 $a_{10}>0$,$a_{10}+a_{11}<0$,得 $a_{11}<0$,所以 $a_1+a_{19}=2a_{10}>0$,$a_1+a_{20}=a_{10}+a_{11}<0$.故使 $a_1+a_n>0$ 的 n 的最大值为 19,即使得 $S_n>0$ 的 n 的最大值为 19,故选 B.

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

13. **解析**：由正弦定理得$\frac{\sin A}{\sin C}=\frac{a}{c}$，由余弦定理得$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$，∵$a=4,b=5,c=6$，

∴$\frac{\sin 2A}{\sin C}=\frac{2\sin A\cos A}{\sin C}=2\cdot\frac{\sin A}{\sin C}\cdot\cos A=2\times\frac{4}{6}\times\frac{5^2+6^2-4^2}{2\times5\times6}=1$.

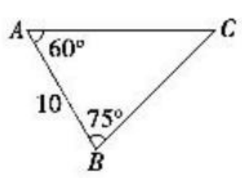
答案：1

14. **解析**：由题意，当且仅当$n=8$时S_n有最大值，

可得$\begin{cases}d<0,\\a_8>0,\\a_9<0,\end{cases}$即$\begin{cases}d<0,\\7+7d>0,\\7+8d<0,\end{cases}$解得$-1<d<-\frac{7}{8}$.

答案：$\left(-1,-\frac{7}{8}\right)$

15. **解析**：如图，在$\triangle ABC$中，



$AB=10,A=60°,B=75°,C=180°-60°-75°=45°$，

由正弦定理，得$\frac{AB}{\sin C}=\frac{BC}{\sin A}$，

所以$BC=\frac{AB\cdot\sin A}{\sin C}=\frac{10\times\sin 60°}{\sin 45°}=5\sqrt{6}$(n mile).

答案：$5\sqrt{6}$

16. **解析**：根据定义得$(x-a)\otimes(x+a)=(x-a)[1-(x+a)]=-x^2+x+a^2-a$，又$(x-a)\otimes(x+a)<1$对任意的实数$x$都成立，所以$x^2-x+a+1-a^2>0$对任意实数$x$都成立，所以$\Delta=1-4(a+1-a^2)<0$，解得$-\frac{1}{2}<a<\frac{3}{2}$.

答案：$\left(-\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right)$

17. **解**：∵$\left(\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{a}\right)-(a+b)=\frac{a^2}{b}-b+\frac{b^2}{a}-a$

$=\frac{a^2-b^2}{b}+\frac{b^2-a^2}{a}=(a^2-b^2)\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{a}\right)$

$=(a^2-b^2)\frac{a-b}{ab}=\frac{(a-b)^2(a+b)}{ab}$，

又∵$a>0,b>0,a\neq b$，

∴$(a-b)^2>0,a+b>0,ab>0$，

∴$\left(\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{a}\right)-(a+b)>0$，

∴$\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{a}>a+b$.

18. **解**：(1)设数列$\{a_n\}$的公差为d，

由$a_3+a_5=a_4+7$，得$2a_1+6d=a_1+3d+7$.　①

由$S_{10}=100$，得$10a_1+45d=100$，　②

由①②得$a_1=1,d=2$，所以$a_n=a_1+(n-1)d=2n-1$.

(2)因为$a_1=1,a_n=2n-1$，所以$S_n=\frac{n(a_1+a_n)}{2}=n^2$，

由不等式$S_n<3a_n-2$，得$n^2<3(2n-1)-2$，即$n^2-6n+5<0$，

结合$y=x^2-6x+5$的函数图象，可知$n^2-6n+5<0$的解集为$\{n|1<n<5\}$，又$n\in\mathbf{N}^*$，所以n的值为2,3,4.

19. **解**：(1)因为$f(x)=2x^2+bx+c$，不等式$f(x)<0$的解集是(0,5)，

所以$2x^2+bx+c<0$的解集是(0,5)，

所以0和5是方程$2x^2+bx+c=0$的两个根，

由根与系数的关系，知$-\frac{b}{2}=5,\frac{c}{2}=0$，

所以$b=-10,c=0$，

所以$f(x)=2x^2-10x$.

(2)对任意的$x\in[-1,1]$，$f(x)+t\leqslant2$恒成立等价于对任意的$x\in[-1,1]$，$2x^2-10x+t-2\leqslant0$恒成立.

设$g(x)=2x^2-10x+t-2$，

则由二次函数的图象可知$g(x)=2x^2-10x+t-2$在区间$[-1,1]$上为减函数，

所以$g(x)_{max}=g(-1)=10+t$，

所以$10+t\leqslant0$，即$t\leqslant-10$，

所以t的取值范围为$(-\infty,-10]$.

20. **解**：(1)由$\sqrt{3}(b^2-c^2)+2b+\sqrt{3}=0$，得$b^2-c^2=-\frac{2}{\sqrt{3}}b-1$，

所以$\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\frac{1-\frac{2}{\sqrt{3}}b-1}{2b}=-\frac{\sqrt{3}}{3}$，

所以$\sin C=\frac{\sqrt{6}}{3}$.

由$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{\sqrt{2}}{2}$，得$\frac{1}{2}b\times\frac{\sqrt{6}}{3}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，解得$b=\sqrt{3}$.

将$b=\sqrt{3}$代入$b^2-c^2=-\frac{2}{\sqrt{3}}b-1$中，得$c=\sqrt{6}$.

(2)由正弦定理$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=\frac{\sqrt{6}}{\frac{\sqrt{6}}{3}}$，

得$\frac{1}{\sin A}=\frac{\sqrt{3}}{\sin B}=3$，

所以$\sin A=\frac{1}{3},\sin B=\frac{\sqrt{3}}{3}$，

又$c>b>a$，所以$C>B>A$，

所以$\cos A=\frac{2\sqrt{2}}{3},\cos B=\frac{\sqrt{6}}{3}$，

所以$\sin(B-A)=\sin B\cos A-\cos B\sin A=\frac{\sqrt{3}}{3}\times\frac{2\sqrt{2}}{3}-\frac{\sqrt{6}}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{\sqrt{6}}{9}$.

21. **解**：(1)∵$(2\cos A-1)\sin B+2\cos A=1$，

∴$(2\cos A-1)(\sin B+1)=0$.

∵$0<B<\pi$，∴$\sin B>0$，

∴$\cos A=\frac{1}{2}$.∵$0<A<\pi$，∴$A=\frac{\pi}{3}$.

(2)在$\triangle ABC$中，由余弦定理得

$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A=b^2+c^2-bc$.

∵$5b^2=a^2+2c^2$，∴$5b^2=b^2+c^2-bc+2c^2$，

∴$4b^2+bc-3c^2=0$，∴$4\times\left(\frac{b}{c}\right)^2+\frac{b}{c}-3=0$，

解得$\frac{b}{c}=-1$(舍去)或$\frac{b}{c}=\frac{3}{4}$，

∴根据正弦定理得$\frac{\sin B}{\sin C}=\frac{b}{c}=\frac{3}{4}$.

22. **解**：(1)由题意，得$a_n=\left(\frac{1}{4}\right)^n$，

又$b_n=-3\log_4a_n-2$，故$b_n=3n-2$.

(2)由(1)知，$a_n=\left(\frac{1}{4}\right)^n,b_n=3n-2$，

所以$c_n=(3n-2)\left(\frac{1}{4}\right)^n$.

所以$S_n=1\times\frac{1}{4}+4\times\left(\frac{1}{4}\right)^2+7\times\left(\frac{1}{4}\right)^3+\cdots+(3n-5)\times\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}+(3n-2)\times\left(\frac{1}{4}\right)^n$，　①

于是$\frac{1}{4}S_n=1\times\left(\frac{1}{4}\right)^2+4\times\left(\frac{1}{4}\right)^3+7\times\left(\frac{1}{4}\right)^4+\cdots+(3n-5)\times\left(\frac{1}{4}\right)^n+(3n-2)\times\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}$.　②

①－②，得

$\frac{3}{4}S_n=\frac{1}{4}+3\times\left[\left(\frac{1}{4}\right)^2+\left(\frac{1}{4}\right)^3+\cdots+\left(\frac{1}{4}\right)^n\right]-(3n-2)\times\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}=\frac{1}{2}-(3n+2)\times\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}$.

所以$S_n=\frac{2}{3}-\frac{3n+2}{3}\times\left(\frac{1}{4}\right)^n$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

责任编辑 李 莉 阴耀华
美术编辑 李 欣
封面设计 欣 羽

45 分钟
课时作业与单元测试

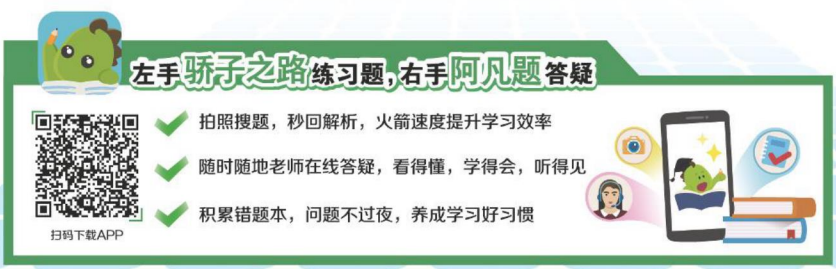
45FENZHONG KESHIZUOYEYUDANYUANCESHI SHUXUE

丛书科目

语文 数学 英语 物理 化学 生物 历史 地理 思想政治

同学们，你想了解丛书的更多信息吗？详情请登录 http://www.dfjc100.com

※ 各科配有教师用书及教学课件光盘 (word 文档可自主编辑)，英语配有原声磁带 / MP3 光盘。



ISBN 978-7-202-10743-0
9 787202 107430 03>
定价：35.00 元

手机扫一扫
获取配套学习资源

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料