东方杰创®
DONGFANG JIECHUANG
让 学习更快乐，人生更精彩

骄子之路®
the Road to Pride
主　编：邓保沧

45分钟

课时作业与单元测试

活页
可拆开使用

教辅资料站

电子教辅　试卷练习
知识总结　备课资源

扫码关注获取更多学习资料

提升＝基础＋能力＋方法
课时作业　基础自测·知能提升
阶段检测　梯度练习·评估达标
答案与解析　全解全析·点拨精准

数学

选修 1-1　RJ·A

河北人民出版社

东方杰创®
DONGFANG JIECHUANG
让 学习更快乐，人生更精彩

骄子之路®
the Road to Pride
主　编：邓保沧

45分钟 课时作业与单元测试

活页
可拆开使用

提升＝基础＋能力＋方法
课时作业　基础自测·知能提升
阶段检测　梯度练习·评估达标
答案与解析　全解全析·点拨精准

数学

选修1-1　RJ·A

微信公众号
教辅资料站

河北人民出版社
石家庄

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

图书在版编目（CIP）数据

45分钟课时作业与单元测试：A版．数学．1-1：选修／邓保沧主编．—石家庄：河北人民出版社，2013.8（2019.10重印）
ISBN 978-7-202-08026-9

Ⅰ．①4… Ⅱ．①邓… Ⅲ．①中学数学课—高中—习题集
Ⅳ．①G634

中国版本图书馆CIP数据核字（2013）第194921号

编　委：李　越　张瑞霞　李　雅
天高云　蒋　敏　金剑飞

书　名　45分钟课时作业与单元测试　数学　选修1-1　A
主　编　邓保沧

责任编辑　李　莉　周建图
美术编辑　李　欣
封面设计　欣　羽

出版发行　河北人民出版社（石家庄市友谊北大街330号）
印　刷　河北伦洋印业有限公司
开　本　880毫米×1230毫米　1/16
印　张　6
字　数　192 000
版　次　2013年8月第1版　2019年10月第5次印刷
书　号　ISBN 978-7-202-08026-9
定　价　30.00元

版权所有　翻印必究

微信公众号
教辅资料站

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料



目录 CONTENTS

第一部分　课时作业

第一章　常用逻辑用语 …… 1

1.1　命题及其关系 …… 1

第 1 课时　1.1.1　命题　1.1.2　四种命题　1.1.3　四种命题间的相互关系 …… 1

1.2　充分条件与必要条件 …… 3

第 2 课时　1.2.1　充分条件与必要条件　1.2.2　充要条件 …… 3

1.3　简单的逻辑联结词 …… 5

第 3 课时　1.3.1　且(and)　1.3.2　或(or)　1.3.3　非(not) …… 5

1.4　全称量词与存在量词 …… 7

第 4 课时　1.4.1　全称量词　1.4.2　存在量词 …… 7

第 5 课时　1.4.3　含有一个量词的命题的否定 …… 9

阶段评估 1 …… 11

第二章　圆锥曲线与方程 …… 13

2.1　椭　圆 …… 13

第 6 课时　2.1.1　椭圆及其标准方程 …… 13

第 7 课时　2.1.2　椭圆的简单几何性质 …… 15

第 8 课时　椭圆方程及几何性质的应用 …… 17

2.2　双曲线 …… 19

第 9 课时　2.2.1　双曲线及其标准方程 …… 19

第 10 课时　2.2.2　双曲线的简单几何性质 …… 21

2.3　抛物线 …… 23

第 11 课时　2.3.1　抛物线及其标准方程 …… 23

第 12 课时　2.3.2　抛物线的简单几何性质 …… 25

阶段评估 2 …… 27

微信公众号
教辅资料站

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料



目录 CONTENTS

第三章　导数及其应用 …… 29

3.1　变化率与导数 …… 29

第 13 课时　3.1.1　变化率问题　3.1.2　导数的概念 …… 29

第 14 课时　3.1.3　导数的几何意义 …… 31

3.2　导数的计算 …… 33

第 15 课时　3.2.1　几个常用函数的导数　3.2.2　基本初等函数的导数公式及导数的运算法则 …… 33

3.3　导数在研究函数中的应用 …… 35

第 16 课时　3.3.1　函数的单调性与导数 …… 35

第 17 课时　3.3.2　函数的极值与导数 …… 37

第 18 课时　3.3.3　函数的最大(小)值与导数 …… 39

3.4　生活中的优化问题举例 …… 41

第 19 课时　生活中的优化问题举例 …… 41

阶段评估 3 …… 43

第二部分　阶段检测

阶段测试一(第一章　常用逻辑用语) …… 45

阶段测试二(第二章　圆锥曲线与方程) …… 49

阶段测试三(第三章　导数及其应用) …… 53

综合测试 …… 57

第三部分　答案与解析

答案与解析 …… 62～92

提示:全书包括课时作业、阶段检测、答案与解析三部分,共计 96 页。

(根据教师教学情况不同,课时作业和阶段检测部分可在书中作答,也可撕下使用。)

微信公众号
教辅资料站

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

第一章 常用逻辑用语

1.1 命题及其关系

第1课时 1.1.1 命题

1.1.2 四种命题

1.1.3 四种命题间的相互关系

基础知识梳理

1. 命题的概念

(1)一般地,在数学中我们把用语言、符号或式子表达的,可以判断真假的陈述句叫做_____.其中判断为真的语句叫做_____,判断为假的语句叫做_____.

(2)一般地,用 p 和 q 分别表示一个命题的条件和结论.用 $\neg p$、$\neg q$ 表示 p 和 q 的否定.于是四种命题的形式就是:

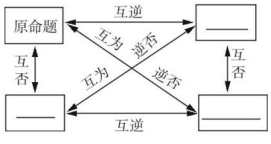
原命题:若 p 则 q($p\Rightarrow q$);

逆命题:若 q 则 p($q\Rightarrow p$);

否命题:若 $\neg p$ 则 $\neg q$($\neg p\Rightarrow \neg q$);

逆否命题:若 $\neg q$ 则 $\neg p$($\neg q\Rightarrow \neg p$).

2. 四种命题间的关系



题点知识巩固

知识点一 命题的概念

1.“红豆生南国,春来发几枝?愿君多采撷,此物最相思.”这是唐代诗人王维的《相思》诗,在这4句诗中,可作为命题的是 (　　)

A. 红豆生南国　　B. 春来发几枝

C. 愿君多采撷　　D. 此物最相思

2. 下列语句中,是命题的是 (　　)

A. $x^2+1>0$,$x\in\mathbf{R}$

B. 函数 $y=x^2$ 是偶函数吗?

C. $a^2=a$

D. 平行四边形

知识点二 命题的真假与四种命题

3.(2019·吉林白山期末)设 α,β 为两个不同的平面,l,m 为两条不同的直线,且 $l\subset\alpha$,$m\subset\beta$,则下列命题中为真命题的是 (　　)

A. 若 $l/\!/m$,则 $l/\!/\beta$　　B. 若 $l\perp m$,则 $\alpha\perp\beta$

C. 若 $\alpha/\!/\beta$,则 $l/\!/\beta$　　D. 若 $\alpha\perp\beta$,则 $l\perp m$

4.(2019·福建闽侯二中期末)有下列四个命题:

①“若 $a^2+b^2=0$,则 a,b 全为0”的逆否命题;

②“全等三角形的面积相等”的否命题;

③“若 $q\leqslant 1$,则 $x^2+2x+q=0$ 有实根”的逆否命题;

④“矩形的对角线相等”的逆命题.

其中真命题为 (　　)

A. ①②　　B. ①③

C. ②③　　D. ③④

知识点三 命题的应用

5.(2019·福建龙海月考)设函数 $f(x)=\sqrt{x^2-x-2}$ 的定义域为集合 A,函数 $g(x)=\lg\left(\frac{3}{x}-1\right)$ 的定义域为集合 B,已知 p:$x\in A\cap B$;q:x 满足 $2x+m<0$,且若 p 则 q 为真命题,求实数 m 的取值范围.

6. 证明:已知函数 $f(x)$ 是$(-\infty,+\infty)$上的增函数,a、$b\in\mathbf{R}$,若 $f(a)+f(b)\geqslant f(-a)+f(-b)$,则 $a+b\geqslant 0$.

微信公众号 教辅资料站

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

提能达标过关

一、选择题

1.（2019·甘肃永昌四中期末）命题“若 $a<b$，则 $a+c<b+c$”的逆否命题是（　　）

A. 若 $a+c<b+c$，则 $a>b$

B. 若 $a+c>b+c$，则 $a>b$

C. 若 $a+c\geqslant b+c$，则 $a\geqslant b$

D. 若 $a+c<b+c$，则 $a\geqslant b$

2. 在空间中，给出下面四个命题，则其中正确命题的个数为（　　）

①过平面 α 外的两点，有且只有一个平面与平面 α 垂直；

②若平面 β 内有不共线三点到平面 α 的距离都相等，则 $\alpha\parallel\beta$；

③若直线 l 与平面内的无数条直线垂直，则 $l\perp\alpha$；

④两条异面直线在同一平面内的射影一定是两平行线.

A. 3　　B. 2

C. 1　　D. 0

3.（2019·辽宁重点高中联考）有下列四个命题：

①“若 $xy=1$，则 x，y 互为倒数”的逆命题；

②“三角形的内角和是 180°”的否命题；

③“若 $m\leqslant 1$，则 $x^2-2x+m=0$ 的实根”的逆否命题；

④“若 $A\cap B=B$，则 $A\subseteq B$”的逆否命题.

其中真命题为（　　）

A. ①②　　B. ②③

C. ④　　D. ①②③

4.（2019·南山中学月考）已知命题 p：“若 $x\geqslant a^2+b^2$，则 $x\geqslant 2ab$”，则下列说法正确的是（　　）

A. 命题 p 的逆命题是“若 $x<a^2+b^2$，则 $x<2ab$”

B. 命题 p 的逆命题是“若 $x<2ab$，则 $x<a^2+b^2$”

C. 命题 p 的否命题是“若 $x<a^2+b^2$，则 $x<2ab$”

D. 命题 p 的否命题是“若 $x\geqslant a^2+b^2$，则 $x<2ab$”

5. 原命题为“若 $\frac{a_n+a_{n+1}}{2}<a_n$，$n\in\mathbf{N}_+$，则 $\{a_n\}$ 为递减数列”，关于其逆命题，否命题，逆否命题真假性的判断依次如下，正确的是（　　）

A. 真，真，真　　B. 假，假，真

C. 真，真，假　　D. 假，假，假

二、填空题

6.（2019·吉林通化期末）命题“当 $c>0$ 时，若 $a>b$，则 $ac>bc$”的逆命题是_____.

7. 下列命题中：

①若一个四边形的四条边不相等，则它不是正方形；

②若一个四边形对角互补，则它内接于圆；

③正方形的四条边相等；

④圆内接四边形对角互补；

⑤对角不互补的四边形不内接于圆；

⑥若一个四边形的四条边相等，则它是正方形.

其中互为逆命题的有_____；互为否命题的有_____；互为逆否命题的有_____.（填序号）

8. 关于原命题“在 $\triangle ABC$ 中，若 $\cos A=2\sin B\sin C$，则 $\triangle ABC$ 是钝角三角形”的叙述：

①原命题是假命题；②逆命题是假命题；③否命题是假命题；④逆否命题为真命题. 其中正确命题是_____.

三、解答题

9. 分别写出下列命题的逆命题、否命题、逆否命题，并判断它们的真假.

(1)面积相等的两个三角形是全等三角形；

(2)若 $m\leqslant 4$，则方程 $x^2+4x+m=0$ 有实根；

(3)若 $x^2+y^2=0$，则实数 x、y 全为零.

10.（2019·江西上饶期末）设命题 p：实数 x 满足 $(x-a)(x-3a)<0$，其中 $a>0$，命题 q：实数 x 满足 $2<x\leqslant 3$. 若 $a=1$，有 p 且 q 为真，求实数 x 的取值范围.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

1.2　充分条件与必要条件

第2课时　1.2.1　充分条件与必要条件

1.2.2　充要条件

基础知识梳理

1. 一般地，命题“若 p 则 q”为真，可记作“_____”；“若 p 则 q”为假，可记作“_____”.
2. 一般地，如果 $p\Rightarrow q$，那么称 p 是 q 的_____，同时称 q 是 p 的_____.
3. 如果_____且_____，那么称 p 是 q 的充分必要条件，简称 p 是 q 的_____，记作_____. 同时 q 也是 p 的_____.

题点知识巩固

知识点一　充分条件、必要条件的判断

1. (**2018·北京卷**)设 a,b,c,d 是非零实数，则“$ad=bc$”是“a,b,c,d 成等比数列”的　(　)
   A. 充分不必要条件
   B. 必要不充分条件
   C. 充分必要条件
   D. 既不充分也不必要条件
2. (**2019·云南曲靖月考**)设向量 $\boldsymbol{a}=(1,x-1)$，$\boldsymbol{b}=(x+1,3)$，则“$x=2$”是“$\boldsymbol{a}\parallel\boldsymbol{b}$”的　(　)
   A. 充分不必要条件
   B. 必要不充分条件
   C. 充要条件
   D. 既不充分也不必要条件

知识点二　充分条件、必要条件的应用

3. (**2019·江西上饶月考**)已知“$x>k$”是“$\frac{3}{x+1}<1$”的充分不必要条件，则 k 的取值范围是_____.
4. 是否存在实数 a，使 $4x+a<0$ 是 $x^2-x-2>0$ 的充分条件？如果存在，求出 a 的取值范围；否则，说明理由.

知识点三　充要条件的判定与证明

5. 设 $n\in\mathbf{N}^*$，一元二次方程 $x^2-4x+n=0$ 有整数根的充要条件是 $n=$_____.
6. 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 $S_n=2^n+t(n\in\mathbf{N}_+)$.
   证明：数列 $\{a_n\}$ 是等比数列的一个充要条件是 $t=-1$.

微信公众号
教辅资料站

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

提能达标过关

一、选择题

1.(**2019·浙江卷**)若 $a>0$,$b>0$,则“$a+b\leqslant 4$”是“$ab\leqslant 4$”的 (　　)

A. 充分不必要条件

B. 必要不充分条件

C. 充分必要条件

D. 既不充分也不必要条件

2.(**2019·海南海口月考**)设 m,n 表示不同的直线,α,β 表示不同的平面,且 m,$n\subset\alpha$,则“$\alpha\parallel\beta$”是“$m\parallel\beta$ 且 $n\parallel\beta$”的 (　　)

A. 充分不必要条件

B. 必要不充分条件

C. 充要条件

D. 既不充分也不必要条件

3.(**2019·湖北荆州期末**)设 $a\in\mathbf{R}$,则 $a>4$ 的一个必要不充分条件是 (　　)

A. $a>1$　　B. $a<1$

C. $a>5$　　D. $a<5$

4. 设甲、乙、丙是三个命题,如果甲是乙的必要条件,丙是乙的充分不必要条件,那么 (　　)

A. 丙是甲的充分条件,但不是甲的必要条件

B. 丙是甲的必要条件,但不是甲的充分条件

C. 丙是甲的充分条件及必要条件

D. 丙不是甲的充分条件,也不是甲的必要条件

5. 已知向量 $\boldsymbol{a}=(x,y)$,$\boldsymbol{b}=(\cos\alpha,\sin\alpha)$,其中 x,y,$\alpha\in\mathbf{R}$. 若 $|\boldsymbol{a}|=4|\boldsymbol{b}|$,则 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}<\lambda^2$ 成立的一个必要而不充分条件是 (　　)

A. $\lambda>3$ 或 $\lambda<-3$

B. $\lambda>1$ 或 $\lambda<-1$

C. $-3<\lambda<3$

D. $-1<\lambda<1$

二、填空题

6. 函数 $y=x^2+bx+c$ 在 $[0,+\infty)$ 上是单调函数的充要条件是_____.

7. 设 a,b,$c\in\mathbf{R}$,给出下列命题:

①“$a=b$”是“$ac=bc$”的充要条件;②“$a>b$”是“$|a|>|b|$”的充分条件;③“$a<5$”是“$a<3$”的必要条件;④“$a+5$ 为无理数”是“a 为无理数”的充要条件.

其中真命题的所有序号是_____.

8. 已知条件 p:$|x-1|>a$ 和条件 q:$2x^2-3x+1>0$,则使 p 是 q 的充分不必要条件的最小整数 $a=$_____.

三、解答题

9. 指出下列命题中,p 是 q 的什么条件(在“充分不必要条件”“必要不充分条件”“充要条件”或“既不充分也不必要条件”中选出一种作答).

(1)在 $\triangle ABC$ 中,p:$\angle A=\angle B$,q:$\sin A=\sin B$;

(2)对于实数 x、y,p:$x+y\neq 8$,q:$x\neq 2$ 或 $y\neq 6$;

(3)非空集合 A、B 中,p:$x\in A\cup B$,q:$x\in B$;

(4)已知 x、$y\in\mathbf{R}$,p:$(x-1)^2+(y-2)^2=0$,

q:$(x-1)(y-2)=0$.

10.(**2019·安徽阜阳期中**)设命题 p:实数 x 满足 $x^2-4ax+3a^2<0$,其中 $a<0$,命题 q:实数 x 满足 $x^2+2x-8>0$,且 q 是 p 的必要不充分条件,求实数 a 的取值范围.

微信公众号 教辅资料站

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

1.3　简单的逻辑联结词

第3课时　1.3.1　且(and)

1.3.2　或(or)

1.3.3　非(not)

基础知识梳理

1. 逻辑联结词

把两个命题联结而成新命题的常用逻辑联结词有_____.

2. 含有逻辑联结词的命题的真假

p	q	$p\wedge q$	$p\vee q$	$\neg p$
真	真	____	____	____
真	假	____	____	____
假	真	____	____	____
假	假	____	____	____

此表称为“真值表”,从表中易得:

(1)p 且 q 有一假即假,同真亦真;

(2)p 或 q 有一真即真,同假亦假;

(3)非 p 真假相反.

题点知识巩固

知识点一　含有逻辑联结词的命题的构成

1. 命题“平行四边形的对角线相等且互相平分”是　(　　)

A. 简单命题

B. “$p\vee q$”形式的复合命题

C. “$p\wedge q$”形式的复合命题

D. “$\neg p$”形式的复合命题

2. (**2019·河北邯郸月考**)“$p\wedge q$ 为假”是“$p\vee q$ 为假”的_____条件　(　　)

A. 充分不必要　　B. 必要不充分

C. 充要　　D. 既不充分也不必要

知识点二　复合命题的真假判断

3. (**2019·福建长乐二中期末**)命题 p:若 $\sin x>\sin y$,则 $x>y$;命题 q:$x^2+y^2\geqslant 2xy$. 下列命题为假命题的是　(　　)

A. p 或 q　　B. p 且 q

C. q　　D. $\neg p$

4. 由下列命题构成的“$p\vee q$”“$p\wedge q$”均为真命题的是(　　)

A. p:菱形是正方形,q:正方形是菱形

B. p:2 是偶数,q:2 不是质数

C. p:15 是质数,q:4 是 12 的约数

D. p:$a\in\{a,b,c\}$,q:$\{a\}\subseteq\{a,b,c\}$

知识点三　命题的否定与否命题

5. 写出下列命题的否定及其否命题,并判断它们的真假.

(1)若 x,y 都是奇数,则 $x+y$ 是偶数;

(2)若一个数是质数,则这个数是奇数;

(3)若两个角相等,则这两角是对顶角;

(4)如果 $m^2+n^2+a^2+b^2=0$,则实数 m,n,a,b 全为零.

知识点四　利用命题的真假求参数的范围

6. (**2019·四川棠湖中学月考**)已知 p:“直线 $x+y-m=0$ 与圆 $(x-1)^2+y^2=1$ 相交”;q:“$mx^2-x+m-4=0$ 有一正根和一负根”,若 $p\vee q$ 为真,$\neg p$ 为真,求 m 的取值范围.

微信公众号
教辅资料站

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

提能达标过关

一、选择题

1. 复合命题:平行线不相交的形式是 ( )

A. $p \vee q$　　B. $p \wedge q$

C. $\neg p$　　D. 都不是

2. (**2019·齐鲁名校联考**)已知命题 p:"27 不是 7 的倍数",命题 q:"27 是 3 的倍数",则命题"27 至少是 3 和 7 中某一个数的倍数"应该表示为 ( )

A. $(\neg p) \vee q$　　B. $(\neg p) \wedge q$

C. $p \wedge (\neg q)$　　D. $p \vee (\neg q)$

3. (**2019·湖北四校期中**)已知命题 p:"不等式 $-x^2+2x<0$ 的解集是 $\{x|x<0$ 或 $x>2\}$",命题 q:"在 $\triangle ABC$ 中,$A>B$ 是 $\sin A>\sin B$ 的充分条件".则 ( )

A. p 真 q 假　　B. $p \vee q$ 假

C. $p \wedge q$ 真　　D. p 假 q 真

4. (**2019·孝感八校联盟期末**)命题 p:若 $a \in \mathbf{R}$,则 $a>2$ 是 $a>1$ 的充分不必要条件;命题 q:函数 $y=\lg(|x|-3)$ 的定义域为 $(-\infty,-3] \cup [3,+\infty)$,则 ( )

A. $p \vee q$ 为假　　B. $p \wedge q$ 为假

C. $(\neg p) \wedge q$ 为真　　D. $p \vee (\neg q)$ 为假

5. 已知 α,β,γ 为互不重合的三个平面,命题 p:若 $\alpha \perp \beta,\beta \perp \gamma$,则 $\alpha /\!/ \gamma$;命题 q:若 α 内不共线的三点到 β 的距离相等,则 $\alpha /\!/ \beta$,对以上两个命题,下列结论中正确的是 ( )

A. 命题"p 且 q"为真

B. 命题"p 或 $\neg q$"为假

C. 命题"p 或 q"为假

D. 命题"$\neg p$ 或 $\neg q$"为假

二、填空题

6. 设命题 p:$2x+y=3$;q:$x-y=6$,若 $p \wedge q$ 为真命题,则 $x=$_____,$y=$_____.

7. 下列命题中:

①"$p \wedge q$"为真是"$p \vee q$"为真的充分不必要条件;

②"$p \wedge q$"为假是"$p \vee q$"为真的充分不必要条件;

③"$p \vee q$"为真是"$\neg p$"为假的必要不充分条件;

④"$\neg p$"为真是"$p \wedge q$"为假的必要不充分条件.

正确命题的序号是_____.

8. 已知命题 p:不等式 $\frac{x}{x-1}<0$ 的解集为 $\{x|0<x<1\}$;命题 q:在 $\triangle ABC$ 中,"$A>B$"是"$\sin A>\sin B$"成立的必要不充分条件.有下列四个结论:①p 真 q 假;②"$p \wedge q$"为真;③"$p \vee q$"为真;④p 假 q 真.其中正确结论的序号是_____.(请把正确结论的序号都填上)

三、解答题

9. 写出由下列各组命题构成的"$p \vee q$""$p \wedge q$""$\neg p$"形式的复合命题,并判断真假.

(1)p:1 是质数;q:1 是方程 $x^2+2x-3=0$ 的根;

(2)p:平行四边形的对角线相等;q:平行四边形的对角线互相垂直;

(3)p:$0 \in \varnothing$;q:$\{x|x^2-3x-5<0\} \subseteq \mathbf{R}$.

10. (**2019·湖北黄梅期中**)已知命题 p:"$\{m|2^m>\sqrt{2},m \in \mathbf{R}\}$";命题 q:"关于 x 的方程 $x^2-2x+m^2=0$ 有两个不同的实数根".

(1)若 $p \wedge q$ 为真命题,求实数 m 的取值范围;

(2)若 $p \vee q$ 为真命题,$p \wedge q$ 为假命题,求实数 m 的取值范围.

微信公众号 教辅资料站

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

1.4　全称量词与存在量词

第4课时　1.4.1　全称量词

1.4.2　存在量词

基础知识梳理

1. 全称量词

(1)短语“所有的”“任意一个”在逻辑中通常叫做_____,并用符号_____表示.

(2)_____的命题叫做全称命题.

(3)全称命题“对 M 中任意一个 x,有 $p(x)$ 成立”可用符号简记为_____,读作_____.

2. 存在量词

(1)短语“存在一个”,“至少有一个”在逻辑中通常叫做_____,并用符号_____表示.

(2)_____的命题,叫做特称命题.

(3)特称命题“存在 M 中的一个 x_0,使 $p(x_0)$ 成立”可用符号简记为_____,读作_____.

题点知识巩固

知识点一　全称命题与特称命题的判断

1. 下列命题为特称命题的是　(　　)

A. 偶函数的图象关于 y 轴对称

B. 正四棱柱都是平行六面体

C. 不相交的两条直线是平行直线

D. 存在实数大于等于3

2. 给出四个命题:①末位数是偶数的整数能被2整除;②有的菱形是正方形;③存在实数 x,$x>0$;④对于任意实数 x,$2x+1$ 是奇数.下列说法正确的是　(　　)

A. 四个命题都是真命题

B. ①②是全称命题

C. ②③是特称命题

D. 四个命题中有两个假命题

知识点二　全称命题与特称命题的真假判断

3. (**2019·鄱阳一中检测**)下列命题中的假命题是　(　　)

A. $\forall x\in\mathbf{R}$,$2^{x-1}>0$

B. $\forall x\in\mathbf{N}^*$,$(x-1)^2>0$

C. $\exists x_0\in\mathbf{R}$,$\lg x_0<1$

D. $\exists x_0\in\mathbf{R}$,$\tan x_0=2$

4. (**2019·福建三明期末**)给出下列三个命题:

①命题“$\forall x\in\mathbf{R}$,$x^2+3x+1>0$”是真命题;

②命题“若 $x^2=1$,则 $x=1$”的否命题为“若 $x^2=1$,则 $x\neq1$”;

③命题“若 $a>b$,则 $am^2>bm^2$”的逆否命题是真命题.

其中正确命题的个数为　(　　)

A. 0　　B. 1

C. 2　　D. 3

知识点三　求参数的取值范围

5. (**2019·宜昌月考**)若命题“$\exists x_0\in\mathbf{R}$,使得 $x_0^2+mx_0+2m+5<0$”为真命题,则实数 m 的取值范围是(　　)

A. $[-10,6]$

B. $(-6,2]$

C. $(-\infty,-2)\cup(10,+\infty)$

D. $(-\infty,-2]\cup[10,+\infty)$

6. 已知 $f(x)=x^2-2x+5$.

(1)是否存在实数 m,使不等式 $m+f(x)>0$ 对于任意 $x\in\mathbf{R}$ 成立,并说明理由;

(2)若存在一个 $x_0\in\mathbf{R}$,使不等式 $m-f(x_0)>0$ 成立,求实数 m 的取值范围.

微信公众号 教辅资料站

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

提能达标过关

一、选择题

1. 下列命题中是全称命题的是 ( )

A. 圆有内接四边形

B. $\exists x$，使 $x^2-4=0$

C. 有一个数列，既是等差数列，又是等比数列

D. 存在一个函数，既是偶函数，又是奇函数

2. (**2019·莆田一中月考**)已知定义域为 $\mathbf{R}$ 的函数 $f(x)$ 不是偶函数，则下列命题一定为真命题的是 ( )

A. $\forall x\in\mathbf{R}, f(-x)\neq f(x)$

B. $\forall x\in\mathbf{R}, f(-x)\neq -f(x)$

C. $\exists x_0\in\mathbf{R}, f(-x_0)\neq f(x_0)$

D. $\exists x_0\in\mathbf{R}, f(-x_0)\neq -f(x_0)$

3. (**2019·成都石室期末**)“$\forall x\in\mathbf{R}, x^2-bx+1>0$ 成立”是“$b\in[0,1]$”的 ( )

A. 充分不必要条件　　B. 必要不充分条件

C. 充分必要条件　　D. 既不充分也不必要条件

4. (**2019·云南曲靖月考**)有四个关于三角函数的命题：

p_1：$\exists x\in\mathbf{R}, \sin^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}=\frac{1}{2}$；

p_2：$\exists x, y\in\mathbf{R}, \sin(x-y)=\sin x-\sin y$；

p_3：$\forall x\in[0,\pi], \sqrt{\frac{1-\cos 2x}{2}}=\sin x$；

p_4：$\sin x=\cos y\Rightarrow x+y=\frac{\pi}{2}$.

其中的假命题是 ( )

A. p_1, p_4　　B. p_2, p_4

C. p_1, p_3　　D. p_2, p_3

5. (**2019·内蒙古北重三中调研**)已知函数 $f(x)=e^{|x-1|}$，则下列说法错误的是 ( )

A. $\exists x_0\in\mathbf{R}, f(1+x_0)\neq f(1-x_0)$

B. $\forall x\in\mathbf{R}, f(x)\geqslant 1$

C. 函数 $f(x+1)$ 是偶函数

D. $\forall x\in\mathbf{R}, f(x)\geqslant x$

二、填空题

6. 下列四个命题：

①$\forall n\in\mathbf{R}, n^2\geqslant n$；②$\forall n\in\mathbf{R}, n^2<n$；③$\forall n\in\mathbf{R}, \exists m\in\mathbf{R}, m^2<n$；④$\exists n\in\mathbf{R}, \forall m\in\mathbf{R}, m\cdot n=m$. 其中真命题的序号是_____.

7. (**2019·福建永泰二中期末**)已知命题 p：$\exists x_0\in\mathbf{R}, x_0^2+2x_0+a\leqslant 0$ 是真命题，则实数 a 的取值范围是_____.

8. (**2019·江阳期中**)已知命题 p：“$\forall x\in\mathbf{R}, \log_2(x^2+x+a)>0$ 恒成立”，命题 q：“$\exists x_0\in[-2,2]$，使得 $2^a\leqslant 2^{x_0}$”，若命题 $p\wedge q$ 为真命题，则实数 a 的取值范围为_____.

三、解答题

9. 判断下列命题是不是全称命题或特称命题，若是，试将其改写成含有符号“$\forall$”或“$\exists$”的形式，并判断其真假.

(1)有一个实数 x_0，使得函数 $f(x_0)=x_0+\frac{4}{x_0}$ 的值为 2；

(2)所有实数 α 都满足 $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$.

10. 命题 p：关于 x 的不等式 $x^2+2ax+4>0$ 对一切 $x\in\mathbf{R}$ 恒成立，q：函数 $f(x)=(3-2a)^x$ 是增函数，若 p 或 q 为真，p 且 q 为假，求实数 a 的取值范围.

微信公众号 教辅资料站

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

第5课时　1.4.3　含有一个量词的命题的否定

基础知识梳理

1. 全称命题 p：$\forall x\in M,p(x)$的否定 $\neg p$：_____；全称命题的否定是_____.

2. 特称命题 p：$\exists x\in M,p(x)$的否定 $\neg p$：_____；特称命题的否定是_____.

题点知识巩固

知识点一　全称命题的否定

1.（2019·广东蕉岭月考）命题“$\forall x>0,x-1-\ln x\geqslant 0$”的否定是（　　）

A. $\forall x>0,x-1-\ln x<0$

B. $\exists x_0\leqslant 0,x_0-1-\ln x_0\geqslant 0$

C. $\exists x_0>0,x_0-1-\ln x_0<0$

D. $\exists x_0\leqslant 0,x_0-1-\ln x_0<0$

2. 已知 $f(x)=3\sin x-\pi x$，命题 p：$\forall x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right),f(x)<0$，则（　　）

A. p 是假命题，$\neg p$：$\forall x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right),f(x)\geqslant 0$

B. p 是假命题，$\neg p$：$\exists x_0\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right),f(x_0)\geqslant 0$

C. p 是真命题，$\neg p$：$\forall x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right),f(x)>0$

D. p 是真命题，$\neg p$：$\exists x_0\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right),f(x_0)\geqslant 0$

知识点二　特称命题的否定

3.（2019·江西上饶期末）已知命题 p：“$\exists x_0\in\mathbf{R}$，使得 $\frac{x_0+2}{x_0}<0$”，则命题 $\neg p$ 是（　　）

A. $\exists x_0\in\mathbf{R}$，使得 $\frac{x_0+2}{x_0}\geqslant 0$

B. $\forall x\in\mathbf{R}$，都有 $\frac{x+2}{x}\geqslant 0$

C. $\exists x_0\in\mathbf{R}$，使得 $\frac{x_0+2}{x_0}\geqslant 0$ 或 $x=0$

D. $\forall x\in\mathbf{R}$，都有 $\frac{x+2}{x}\geqslant 0$ 或 $x=0$

4.（2019·山东实验中学质量检测）命题“存在实数 x_0，使 $\ln x_0<x_0^2-1$”的否定是（　　）

A. 对任意的实数 x，都有 $\ln x<x^2-1$

B. 对任意的实数 x，都有 $\ln x\geqslant x^2-1$

C. 不存在实数 x_0，使 $\ln x_0\geqslant x_0^2-1$

D. 存在实数 x_0，使 $\ln x_0\geqslant x_0^2-1$

知识点三　求参数的取值范围

5.（2019·福建三明期中）已知命题 p：$\exists x_0\in\mathbf{R},mx_0^2+2\leqslant 0$；命题 q：$\forall x\in\mathbf{R},x^2-2mx+1>0$. 若 p、q 都为假命题，则实数 m 的取值范围是（　　）

A. $[1,+\infty)$　　B. $(-\infty,-1]$

C. $(-\infty,-2]$　　D. $[-1,1]$

6.（2019·湖北荆州期末）若命题 p：“$\forall x\in\mathbf{R},ax^2+ax+1>0$”；命题 q：“$\exists x_0\in[-1,1],2^{x_0}>a$”，若 $(\neg q)\wedge p$ 为真命题，求实数 a 的取值范围.

微信公众号
教辅资料站

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

提能达标过关

一、选择题

1.（2019·福建三明期末）命题“$\forall x\in[0,+\infty),x^2+2x\geqslant 0$”的否定是 （ ）

A. $\forall x\in(-\infty,0),x^2+2x\geqslant 0$

B. $\forall x\in(-\infty,0),x^2+2x<0$

C. $\exists x_0\in[0,+\infty),x_0^2+2x_0\geqslant 0$

D. $\exists x_0\in[0,+\infty),x_0^2+2x_0<0$

2. 已知命题 p：$\forall x\in\mathbf{R},2x^2+2x+\frac{1}{2}<0$；命题 q：$\exists x\in\mathbf{R}$，$\sin x-\cos x=\sqrt{2}$，则下列判断正确的是 （ ）

A. p 是真命题　　B. q 是假命题

C. $\neg p$ 是假命题　　D. $\neg q$ 是假命题

3.（2019·河北邯郸大名一中月考）命题“$\forall x\in\mathbf{R},\exists n\in\mathbf{N}^*$，使得 $n\geqslant 2x+1$”的否定形式是 （ ）

A. $\forall x\in\mathbf{R},\exists n\in\mathbf{N}^*$，使得 $n<2x+1$

B. $\forall x\in\mathbf{R},\forall n\in\mathbf{N}^*$，使得 $n<2x+1$

C. $\exists x\in\mathbf{R},\exists n\in\mathbf{N}^*$，使得 $n<2x+1$

D. $\exists x\in\mathbf{R},\forall n\in\mathbf{N}^*$，使得 $n<2x+1$

4.（2019·湖南三湘名校联考）设 $a\in\mathbf{Z}$，函数 $f(x)=e^x+x-a$，若命题 p：“$\forall x\in(-1,1),f(x)\neq 0$”是假命题，则 a 的取值个数有 （ ）

A. 1 个　　B. 2 个

C. 3 个　　D. 4 个

5. 已知命题 p：“对 $\forall x\in\mathbf{R},\exists m\in\mathbf{R}$，使 $4^x+2^xm+1=0$”. 若命题 $\neg p$ 是假命题，则实数 m 的取值范围是 （ ）

A. $-2\leqslant m\leqslant 2$

B. $m\geqslant 2$

C. $m\leqslant -2$

D. $m\leqslant -2$ 或 $m\geqslant 2$

二、填空题

6. 命题“$\exists x\in\mathbf{R},x\leqslant 1$ 或 $x^2>4$”的否定是_____.

7. 已知命题 p：$\forall x\in[0,1],a\geqslant e^x$；命题 q：$\exists x\in\mathbf{R},x^2+4x+a=0$，若命题“$p\wedge q$”是真命题，则实数 a 的取值范围是_____.

8. 若命题 p：$\forall x\in\mathbf{R},ax^2+4x+a\geqslant -2x^2+1$ 是真命题，则实数 a 的取值范围是_____.

三、解答题

9. 写出下列命题的“否定”，并判断其真假.

(1) p：$\forall x\in\mathbf{R},x^2-x+\frac{1}{4}\geqslant 0$；

(2) q：所有的正方形都是矩形；

(3) r：$\exists x\in\mathbf{R},x^2+2x+2\leqslant 0$；

(4) s：至少有一个实数 x，使 $x^3+1=0$.

10. 已知 p：$|3x-4|>2$，q：$\frac{1}{x^2-x-2}>0$，求 $\neg p$ 和 $\neg q$ 对应的 x 的集合.

微信公众号 教辅资料站

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

阶段评估 1

（时间：60 分钟　满分：100 分）

一、选择题（每小题 5 分，共 30 分）

1.（2019·辽宁凌源期末）“$a=4$”是“$y=x^2-ax+1$ 在$(2,+\infty)$上是增函数”的（　　）

A. 充分不必要条件　　B. 必要不充分条件

C. 充要条件　　D. 既不充分也不必要条件

2. 已知命题 p：$\exists x\in\mathbf{R}$，$\cos x=\frac{5}{4}$；命题 q：$\forall x\in\mathbf{R}$，$x^2-x+1>0$. 则下列结论正确的是（　　）

A. 命题 $p\wedge q$ 是真命题

B. 命题 $p\wedge(\neg q)$是真命题

C. 命题$(\neg p)\wedge q$ 是真命题

D. 命题$(\neg p)\vee(\neg q)$是假命题

3.（2019·莆田六中期中）下列命题中错误的是（　　）

A. 命题“若 $x^2-5x+6=0$，则 $x=2$”的逆否命题是“若 $x\neq2$，则 $x^2-5x+6\neq0$”

B. 命题“角 α 的终边在第一象限，则 α 是锐角”的逆命题为真命题

C. 已知命题 p 和 q，若 $p\vee q$ 为假命题，则命题 p 与 q 中必一真一假

D. 命题“若 $x>y$，则 $x>|y|$”的逆命题是真命题

4.（2019·海南海口期末）命题“$\forall x>3$，$\ln x>1$”的否定是（　　）

A. $\exists x_0>3$，$\ln x_0\leqslant1$

B. $\forall x>3$，$\ln x\leqslant1$

C. $\exists x_0\leqslant3$，$\ln x_0\leqslant1$

D. $\forall x\leqslant3$，$\ln x>1$

5.（2019·湖南长沙月考）已知条件 p：$x^2-3x-4\leqslant0$，条件 q：$x^2-6x+9-m^2\leqslant0$. 若 p 是 q 的充分不必要条件，则 m 的取值范围是（　　）

A. $[-1,1]$

B. $[-4,4]$

C. $(-\infty,-4]\cup[4,+\infty)$

D. $(-\infty,-1]\cup[4,+\infty)$

6.（2019·阜阳一中月考）下列说法错误的是（　　）

A. “$a>1$”是“$\frac{1}{a}<1$”的充分不必要条件

B. “若 $x^2-3x+2=0$，则 $x=1$”的逆否命题为：“若 $x\neq1$，则 $x^2-3x+2\neq0$”

C. 若 $p\wedge q$ 为假命题，则 p，q 均为假命题

D. 命题 p：$\exists x_0\in\mathbf{R}$，使得 $x_0^2+x_0+1<0$，则 $\neg p$：$\forall x\in\mathbf{R}$，均有 $x^2+x+1\geqslant0$

二、填空题（每小题 5 分，共 20 分）

7. 命题“若 $a<b$，则 $2^a<2^b$”的否命题是_____，命题的否定是_____.

8.（2019·河北衡水调研）“$a=1$”是“函数 $f(x)=\frac{x+1}{x}+\sin x-a^2$ 为奇函数”的_____（填“充分不必要”“必要不充分”“充要”或“既不充分也不必要”）条件.

9. 若命题“$\exists x\in\mathbf{R}$，使得 $x^2+(a-1)x+1\leqslant0$”为假命题，则实数 a 的取值范围是_____.

10. 下列四个命题：

$①\exists x\in(0,+\infty)$，$\left(\frac{1}{2}\right)^x>\left(\frac{1}{3}\right)^x$；$②\exists x\in(0,+\infty)$，$\log_2x<\log_3x$；$③\forall x\in(0,+\infty)$，$\left(\frac{1}{2}\right)^x>\log_{\frac{1}{2}}x$；$④\forall x\in\left(0,\frac{1}{3}\right)$，$\left(\frac{1}{2}\right)^x<\log_{\frac{1}{3}}x$.

其中正确命题的序号是_____.

三、解答题（共 50 分）

11.（12 分）写出下列命题的逆命题、否命题和逆否命题，并判断其真假.

（1）若 m，n 都是奇数，则 $m+n$ 是奇数；

（2）若 $x+y=5$，则 $x=3$ 且 $y=2$.

微信公众号 教辅资料站

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

12.(12 分)已知 p:$x^2-4ax+3a^2<0(a>0)$,q:$\frac{8}{x-1}<1$,且 $\neg q$ 是 $\neg p$ 的充分不必要条件,求 a 的取值范围.

13.(13 分)已知 $a>0$,设命题 p:函数 $y=a^x$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增;命题 q:不等式 $ax^2-ax+1>0$ 对 $\forall x\in\mathbf{R}$ 恒成立,若 p 且 q 为假,p 或 q 为真,求 a 的取值范围.

14.(13 分)已知命题 p:对 $m\in[-1,1]$,不等式 $a^2-5a-3\geqslant\sqrt{m^2+8}$ 恒成立;命题 q:不等式 $x^2+ax+2<0$ 有解.若 p 是真命题,q 是假命题,求 a 的取值范围.

微信公众号
教辅资料站

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

第二章 圆锥曲线与方程

2.1 椭 圆

第6课时 2.1.1 椭圆及其标准方程

基础知识梳理

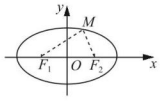
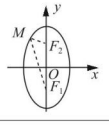
1. 椭圆的定义

(1)平面内与两个定点 F_1,F_2 的距离的和等于常数 $2a$ (_____)的点的轨迹叫做椭圆,这两个定点叫做椭圆的_____,两焦点间的距离叫做椭圆的_____.

应用定义解题时,不要漏掉 $|MF_1|+|MF_2|=2a>|F_1F_2|$ 这一个条件.

(2)集合的语言描述为 $P=\{M\mid |MF_1|+|MF_2|=2a,\ 2a>|F_1F_2|\}$.

2. 椭圆的标准方程

	焦点在 x 轴上	焦点在 y 轴上
标准方程	_____	_____
图形		
焦距	$\lvert F_1F_2\rvert=$____	
焦点坐标	_____	_____
a,b,c 的关系	_____	

题点知识巩固

知识点一 椭圆的定义

1. 椭圆 $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$ 上一点 P 到一个焦点的距离为 5,则 P 到另一个焦点的距离为 ( )

A. 5　　B. 6

C. 4　　D. 10

2. (**2019·江西上饶月考**)点 P 是椭圆 $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{5}=1$ 上的点,F_1,F_2 是椭圆的左、右焦点,则 $\triangle PF_1F_2$ 的周长是 ( )

A. 12　　B. 10

C. 8　　D. 6

知识点二 椭圆的标准方程

3. (**2019·福建三明期末**)若椭圆 $C:\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$ 的左焦点为 F,点 P 在椭圆 C 上,则 $|PF|$ 的最大值为 ( )

A. 1　　B. 3

C. 5　　D. 7

4. 求焦点在坐标轴上,且经过点 $A(-\sqrt{3},-2)$ 和 $B(-2\sqrt{3},1)$ 两点的椭圆的标准方程.

知识点三 利用椭圆的定义求轨迹方程

5. (**2019·福州八校联考**)已知两点 $F_1(-1,0)$,$F_2(1,0)$,且 $|F_1F_2|$ 是 $|PF_1|$ 与 $|PF_2|$ 的等差中项,则动点 P 的轨迹方程是 ( )

A. $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$　　B. $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{12}=1$

C. $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$　　D. $\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{4}=1$

6. (**2019·湖北荆州期末**)已知圆 $M:(x+2)^2+y^2=36$,圆 $N:(x-2)^2+y^2=4$,动圆 P 与圆 M 相切,与圆 N 外切,则圆心 P 的轨迹方程是_____.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

提能达标过关

一、选择题

1. 到点 $A(-4,0)$ 与点 $B(4,0)$ 的距离之和为 10 的点的轨迹方程是 ( )

A. $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$　　B. $\frac{y^2}{25}+\frac{x^2}{16}=1$

C. $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$　　D. $\frac{y^2}{25}+\frac{x^2}{9}=1$

2. (**2019·福建长乐二中期末**)设 $F_1(-4,0)$,$F_2(4,0)$ 为定点,动点 M 满足 $|MF_1|+|MF_2|=8$,则动点 M 的轨迹是 ( )

A. 椭圆　　B. 直线

C. 圆　　D. 线段

3. (**2019·浙江杭高期末**)已知椭圆 $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{4}=1$ 的左焦点为 F,则点 F 到直线 $x-y=0$ 的距离为 ( )

A. $\frac{\sqrt{6}}{2}$　　B. $\sqrt{3}$

C. $\sqrt{6}$　　D. $\sqrt{10}$

4. (**2019·福建闽侯一中期末**)椭圆 $\frac{x^2}{4}+y^2=1$ 的焦点为 F_1,F_2,点 P 在椭圆上,如果线段 PF_1 的中点在 y 轴上,那么 $|PF_1|$ 是 $|PF_2|$ 的 ( )

A. 3 倍　　B. 4 倍

C. 5 倍　　D. 7 倍

5. (**2019·全国卷Ⅰ**)已知椭圆 C 的焦点为 $F_1(-1,0)$,$F_2(1,0)$,过 F_2 的直线与 C 交于 A,B 两点,若 $|AF_2|=2|F_2B|$,$|AB|=|BF_1|$,则 C 的方程为 ( )

A. $\frac{x^2}{2}+y^2=1$　　B. $\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{2}=1$

C. $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$　　D. $\frac{x^2}{5}+\frac{y^2}{4}=1$

二、填空题

6. (**2019·四川成都月考**)若方程 $\frac{x^2}{a^2+5}+\frac{y^2}{2a^2+1}=1$ 表示焦点在 x 轴上的椭圆,则实数 a 的取值范围是_____.

7. 已知椭圆 C 经过点 $A(2,3)$,且 $F(2,0)$ 为右焦点,则椭圆 C 的标准方程为_____.

8. 如果椭圆 $\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{36}=1$ 上一点 P 到左焦点 F_1 的距离等于 6,F_2 是椭圆的右焦点,则 $\angle F_1PF_2$ 的余弦值为_____.

三、解答题

9. (**2019·棠湖中学期末**)在平面直角坐标系中,已知两点 $A(-3,0)$ 及 $B(3,0)$,动点 Q 到点 A 的距离为 10,线段 BQ 的垂直平分线交 AQ 于点 P.

(1)求 $|PA|+|PB|$ 的值;

(2)求点 P 的轨迹方程.

10. 已知 P 为椭圆 $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$ 上一点,F_1,F_2 为椭圆的左、右焦点.若 $\angle F_1PF_2=60°$,求 $\triangle F_1PF_2$ 的面积.

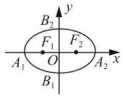
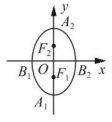
微信公众号 教辅资料站

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

第 7 课时　2.1.2　椭圆的简单几何性质

基础知识梳理

椭圆的简单几何性质

焦点的位置	焦点在 x 轴上	焦点在 y 轴上
图形		
标准方程	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ $(a>b>0)$	_____ _____
范围	$-a\leqslant x\leqslant a$， $-b\leqslant y\leqslant b$	_____ _____
顶点	$A(\pm a,0)$， $B(0,\pm b)$	_____
轴长	短轴长＝_____，长轴长＝_____	
焦点	$(\pm c,0)$	_____
焦距	$\lvert F_1F_2\rvert$＝_____	
对称性	对称轴_____，对称中心_____	
离心率	e＝_____	

题点知识巩固

知识点一　椭圆的简单几何性质

1.（2018·全国卷Ⅰ）已知椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{4}=1$ 的一个焦点为 $(2,0)$，则 C 的离心率为（　　）

A. $\frac{1}{3}$　　B. $\frac{1}{2}$

C. $\frac{\sqrt{2}}{2}$　　D. $\frac{2\sqrt{2}}{3}$

2.（2019·湖北荆州期末）已知椭圆 $\frac{x^2}{10-m}+\frac{y^2}{m-2}=1$ 长轴在 y 轴上，若焦距为 4，则 m 等于（　　）

A. 4　　B. 5

C. 7　　D. 8

知识点二　由椭圆的几何性质求标准方程

3.（2019·海南海口月考）焦点在 x 轴上，长、短半轴长之和为 10，焦距为 $4\sqrt{5}$，则椭圆的标准方程为_____.

4. 已知椭圆的对称轴为坐标轴，中心在原点，且过 $(3,0)$ 点，其离心率 $e=\frac{\sqrt{6}}{3}$，求椭圆的标准方程.

知识点三　求椭圆的离心率

5.（2019·云南曲靖期末）已知点 F_1,F_2 分别为椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的左、右焦点，点 M 在椭圆 C 上，线段 MF_1 的中点在 y 轴上，若 $\angle F_2MF_1=60°$，则椭圆的离心率为（　　）

A. $\frac{1}{6}$　　B. $\frac{1}{3}$

C. $\frac{\sqrt{3}}{6}$　　D. $\frac{\sqrt{3}}{3}$

6.（2019·成都外国语学校期中）已知 F_1,F_2 分别是椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的左、右焦点，若椭圆 C 上存在点 A，满足 $2\lvert AF_1\rvert-3\lvert AF_2\rvert=a$，则椭圆的离心率的取值范围是（　　）

A. $\left(\frac{1}{2},1\right)$　　B. $\left[\frac{1}{5},1\right)$

C. $\left(\frac{2}{5},1\right)$　　D. $\left[\frac{2}{5},1\right)$

微信公众号 教辅资料站

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

提能达标过关

一、选择题

1. 已知椭圆$\frac{x^2}{5}+\frac{y^2}{m}=1$的离心率$e=\frac{\sqrt{10}}{5}$,则$m$的值是(　　)

A. 3　　B. $\sqrt{15}$

C. 3 或$\frac{25}{3}$　　D. $\sqrt{15}$或$\frac{5\sqrt{15}}{3}$

2. 中心在坐标原点的椭圆,焦点在x轴上,焦距为 4,离心率为$\frac{\sqrt{2}}{2}$,则该椭圆的方程为(　　)

A. $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{12}=1$　　B. $\frac{x^2}{12}+\frac{y^2}{8}=1$

C. $\frac{x^2}{12}+\frac{y^2}{4}=1$　　D. $\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{4}=1$

3. 已知$F(c,0)$为椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$的右焦点,$F$与椭圆上点的距离的最大值为$M$,最小值为$m$,则椭圆上与点$F$距离等于$\frac{M+m}{2}$的点是(　　)

A. $\left(c,\pm\frac{b^2}{a}\right)$　　B. $\left(-c,\pm\frac{b^2}{a}\right)$

C. $(0,\pm b)$　　D. 不存在

4. 若椭圆$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}=1$上有一点$P$,$F_1$,$F_2$是椭圆的左、右焦点,$\triangle F_1PF_2$为直角三角形,则这样的点$P$共有(　　)

A. 3 个　　B. 4 个

C. 6 个　　D. 8 个

5. (**2019·河北邯郸月考**)已知椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的中心为$O$,一个焦点为$F$,若以$O$为圆心,$|OF|$为半径的圆与椭圆恒有公共点,则椭圆的离心率的取值范围是(　　)

A. $\left[\frac{\sqrt{2}}{2},1\right)$　　B. $\left(0,\frac{\sqrt{3}}{2}\right]$

C. $\left[\frac{\sqrt{3}}{2},1\right)$　　D. $\left(0,\frac{\sqrt{2}}{2}\right]$

二、填空题

6. (**2019·广州九十七中期末**)若椭圆$x^2+my^2=1$的离心率为$\frac{\sqrt{3}}{2}$,则它的长半轴长为_____.

7. (**2019·广州九十七中期末**)在$\triangle ABC$中,$\angle A=90°$,$\tan B=\frac{3}{4}$.若以A,B为焦点的椭圆经过点C,则该椭圆的离心率$e=$_____.

8. 已知椭圆$C:\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$,点$M$与$C$的焦点不重合.若$M$关于$C$的焦点的对称点分别为$A$,$B$,线段$MN$的中点在$C$上,则$|AN|+|BN|=$_____.

三、解答题

9. (**2019·吉林白山期末**)已知椭圆$W:\frac{x^2}{m}+\frac{y^2}{n}=1(m>0,n>0)$的离心率为$e$,长轴为$AB$,短轴为$CD$.

(1)若W的半焦距为 3,$|CD|=6$,求W的方程;

(2)若$|AB|=10$,$e=\frac{3}{5}$,求W的方程.

10. (**2019·全国卷Ⅱ**)已知F_1,F_2是椭圆$C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的两个焦点,$P$为$C$上一点,$O$为坐标原点.

(1)若$\triangle POF_2$为等边三角形,求C的离心率;

(2)如果存在点P,使得$PF_1\perp PF_2$,且$\triangle F_1PF_2$的面积等于 16,求b的值和a的取值范围.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

第 8 课时　椭圆方程及几何性质的应用

基础知识梳理

1. 点 $P(x_0,y_0)$ 与椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的位置关系

点 P 在椭圆上$\Leftrightarrow\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}$____1；

点 P 在椭圆内部$\Leftrightarrow\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}$____1；

点 P 在椭圆外部$\Leftrightarrow\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}$____1.

2. 直线和椭圆的位置关系

直线与椭圆方程联立方程组，消掉 y，得到 $Ax^2+Bx+C=0$ 的形式(这里的系数 A 一定不为 0)，设其判别式为 Δ，

(1)$\Delta>0\Leftrightarrow$直线与椭圆_____；

(2)$\Delta=0\Leftrightarrow$直线与椭圆_____；

(3)$\Delta<0\Leftrightarrow$直线与椭圆_____.

3. 弦长公式

(1)若直线 $y=kx+b$ 与椭圆相交于两点 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，则 $|AB|=$_____$=$_____.

(2)焦点弦(过焦点的弦)：最短的焦点弦为通径长_____，最长为____.

题点知识巩固

知识点一　点与椭圆位置关系

1. 若点 $(2,m)$ 在椭圆 $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{3}=1$ 外，则 m 的取值范围是(　　)

A. $-\frac{3}{2}<m<\frac{3}{2}$

B. $m>\frac{3}{2}$ 或 $m<-\frac{3}{2}$

C. $-\frac{3}{4}<m<\frac{3}{4}$

D. $m>\frac{3}{4}$ 或 $m<-\frac{3}{4}$

2. 已知点 (m,n) 在椭圆 $8x^2+3y^2=24$ 上，则 $2m+4$ 的取值范围是(　　)

A. $[4-2\sqrt{3},4+2\sqrt{3}]$

B. $[4-\sqrt{3},4+\sqrt{3}]$

C. $[4-2\sqrt{2},4+2\sqrt{2}]$

D. $[4-\sqrt{2},4+\sqrt{2}]$

知识点二　直线和椭圆的位置关系

3. **(2019·阜阳一中月考)** 已知直线 $l:x+y=3$ 与 x 轴，y 轴分别交于点 A,B，点 P 在椭圆 $\frac{x^2}{2}+y^2=1$ 上运动，则 $\triangle PAB$ 面积的最大值为(　　)

A. 6　　B. $\frac{3(3+\sqrt{2})}{2}$

C. $\frac{3(3-\sqrt{3})}{2}$　　D. $\frac{3(3+\sqrt{3})}{2}$

4. **(2019·湖北荆州期末)** 如果椭圆 $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{9}=1$ 的弦被点 $(4,2)$ 平分，则这条弦所在的直线方程是_____.

知识点三　弦长问题

5. 椭圆 $\frac{x^2}{3}+y^2=1$ 被直线 $x-y+1=0$ 所截得的弦长 $|AB|=$_____.

6. **(2019·湖南邵东月考)** 已知椭圆 C 的两焦点分别为 $F_1(-2\sqrt{2},0)$，$F_2(2\sqrt{2},0)$，其短半轴长为 1.

(1)求椭圆 C 的方程；

(2)设不经过点 $H(0,1)$ 的直线 $y=2x+t$ 与椭圆 C 相交于两点 M,N，若直线 HM 与 HN 的斜率之和为 1，求实数 t 的值.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

提能达标过关

一、选择题

1. k 为何值时，直线 $y=kx+2$ 与椭圆 $2x^2+3y^2=6$ 有两个交点 （　　）

A. $-\frac{\sqrt{6}}{3}<k<\frac{\sqrt{6}}{3}$

B. $k>\frac{\sqrt{6}}{3}$ 或 $k<-\frac{\sqrt{6}}{3}$

C. $-\frac{\sqrt{6}}{3}\leqslant k\leqslant\frac{\sqrt{6}}{3}$

D. $k\geqslant\frac{\sqrt{6}}{3}$ 或 $k\leqslant-\frac{\sqrt{6}}{3}$

2. 已知圆 $O:x^2+y^2=4$，从圆 O 上任意一点 P 向 y 轴作垂线段 PP_1（P_1 在 y 轴上），M 在直线 PP_1 上，且向量 $\overrightarrow{P_1M}=2\overrightarrow{P_1P}$，则动点 M 的轨迹方程是 （　　）

A. $4x^2+16y^2=1$　　B. $16x^2+4y^2=1$

C. $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{16}=1$　　D. $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{4}=1$

3. 若直线 $y=x+t$ 与椭圆 $\frac{x^2}{4}+y^2=1$ 相交于 A,B 两点，当 t 变化时，$|AB|$ 的最大值为 （　　）

A. 2　　B. $\frac{4\sqrt{5}}{5}$

C. $\frac{4\sqrt{10}}{5}$　　D. $\frac{8\sqrt{10}}{5}$

4. （**2019·内蒙古赤峰月考**）椭圆 $\frac{x^2}{4}+y^2=1$ 的焦点为 F_1,F_2，点 M 在椭圆上，且 $\overrightarrow{MF_1}\cdot\overrightarrow{MF_2}=0$，则 $\triangle MF_1F_2$ 的内切圆半径为 （　　）

A. $\sqrt{2}$　　B. $\sqrt{3}$

C. $\sqrt{3}-1$　　D. $2-\sqrt{3}$

5. （**2019·吉林白山期末**）点 P 在椭圆 $C_1:\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$ 上，C_1 的右焦点为 F，点 Q 在圆 $C_2:x^2+y^2+6x-8y+21=0$ 上，则 $|PQ|-|PF|$ 的最小值为 （　　）

A. $4\sqrt{2}-4$　　B. $4-4\sqrt{2}$

C. $6-2\sqrt{5}$　　D. $2\sqrt{5}-6$

二、填空题

6. 若椭圆的两焦点为 $F_1(-4,0),F_2(4,0)$，点 P 在椭圆上，且 $\triangle PF_1F_2$ 的最大面积是 12，则椭圆的短半轴长为_____.

7. 已知 F_1,F_2 是椭圆 $\frac{x^2}{k+2}+\frac{y^2}{k+1}=1$ 的左、右焦点，弦 AB 过点 F_1，若 $\triangle ABF_2$ 的周长为 8，则椭圆的离心率为_____.

8. （**2019·四川内江期末**）设椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的左、右顶点分别为 A,B，点 P 在椭圆上且异于 A,B 两点，O 为坐标原点. 若直线 PA 与 PB 的斜率之积为 $-\frac{1}{2}$，则椭圆的离心率为_____.

三、解答题

9. （**2019·辽宁沈阳期末**）在平面直角坐标系 xOy 中，中心在原点的椭圆 C 的上焦点为 $F(0,\sqrt{3})$，离心率等于 $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

(1)求椭圆 C 的方程；

(2)设过 $F(0,\sqrt{3})$ 且不垂直于坐标轴的动直线 l 交椭圆 C 于 A,B 两点，问：线段 OF 上是否存在一点 D，使得以 DA,DB 为邻边的平行四边形为菱形？作出判断并证明.

10. （**2019·安徽安庆一中联考**）已知椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的离心率为 $\frac{1}{2}$，且经过点 $P\left(1,\frac{3}{2}\right)$.

(1)求椭圆 C 的方程；

(2)过定点 $Q(-2,-3)$ 的直线 l 与椭圆 C 交于两点 M,N，直线 PM,PN 的斜率为 k_1,k_2，求证：k_1+k_2 为定值.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

2.2　双曲线

第9课时　2.2.1　双曲线及其标准方程

基础知识梳理

1. 双曲线的定义

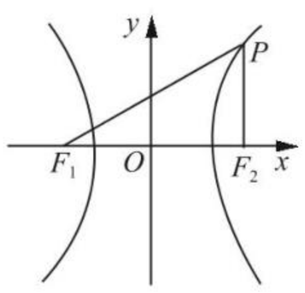
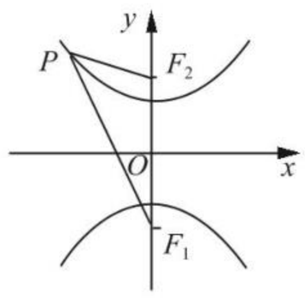
平面内与两个定点 F_1，F_2 的距离的差的绝对值等于非零常数(＿＿$|F_1F_2|$且大于零)的点的轨迹叫做双曲线.

这两个定点叫做双曲线的＿＿，两焦点间的距离叫做双曲线的＿＿.

2. 双曲线的集合描述

设点 M 是双曲线上任意一点，点 F_1，F_2 是双曲线的焦点，则由双曲线的定义可知，双曲线就是集合 $P=\{M|\,||MF_1|-|MF_2||=2a,0<2a<|F_1F_2|\}$.

3. 双曲线的标准方程

焦点位置	焦点在 x 轴上	焦点在 y 轴上
图形		
标准方程	$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ $(a>0,b>0)$	＿＿＿＿＿＿ ＿＿＿＿＿＿
焦点坐标	$F_1(-c,0)$； $F_2(c,0)$	F_1 ＿＿＿＿； F_2 ＿＿＿＿
a,b,c 的关系	＿＿＿＿＿＿	

题点知识巩固

知识点一　双曲线的定义及应用

1.(**2019·河南濮阳月考**)已知点 P 是双曲线 $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{5}=1$ 上一点，F_1，F_2 分别是左、右焦点，若 $PF_1\perp PF_2$，则 $\triangle PF_1F_2$ 的面积为　(　　)

A. $\frac{5}{4}$　　B. $\frac{5}{2}$　　C. 5　　D. 10

2.(**2019·四川棠湖中学月考**)已知 F_2 是双曲线 $C:x^2-\frac{y^2}{8}=1$ 的右焦点，P 是 C 左支上一点，$A(0,6\sqrt{6})$，则 $\triangle APF_2$ 周长的最小值为＿＿＿＿.

知识点二　双曲线的标准方程

3.(**2019·辽宁沈阳期末**)"$n>m$"是"方程 $\frac{x^2}{m}+\frac{y^2}{n}=1$ 表示焦点在 y 轴上的双曲线"的　(　　)

A. 充分不必要条件

B. 必要不充分条件

C. 既不充分也不必要条件

D. 充要条件

4. 已知双曲线中心在坐标原点且一个焦点为 $F_1(-\sqrt{5},0)$，点 P 位于该双曲线上，线段 PF_1 的中点坐标为(0,2)，则该双曲线的方程是　(　　)

A. $\frac{x^2}{4}-y^2=1$　　B. $x^2-\frac{y^2}{4}=1$

C. $\frac{x^2}{2}-\frac{y^2}{3}=1$　　D. $\frac{x^2}{3}-\frac{y^2}{2}=1$

知识点三　用双曲线的定义求轨迹方程

5.(**2019·绵阳月考**)已知圆 O_1 和圆 O_2 的半径分别为 2 和 4，且 $|O_1O_2|=8$，若动圆 M 与圆 O_1 内切，与圆 O_2 外切，则动圆圆心 M 的轨迹是　(　　)

A. 圆　　B. 椭圆

C. 双曲线　　D. 双曲线的一支

6. 已知定点 $A(3,0)$ 和定圆 $C:(x+3)^2+y^2=16$，动圆和圆 C 相外切，并且过点 A，求动圆圆心 P 的轨迹方程.

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

提能达标过关

一、选择题

1.(**2018·浙江卷**)双曲线$\frac{x^2}{3}-y^2=1$的焦点坐标是 (　　)

A.$(-\sqrt{2},0),(\sqrt{2},0)$　　B.$(-2,0),(2,0)$

C.$(0,-\sqrt{2}),(0,\sqrt{2})$　　D.$(0,-2),(0,2)$

2.若$k\in\mathbf{R}$,则"$k>3$"是"方程$\frac{x^2}{k-3}-\frac{y^2}{k+3}=1$表示双曲线"的 (　　)

A.充分不必要条件

B.必要不充分条件

C.充要条件

D.既不充分也不必要条件

3.(**2019·棠湖期末**)P为双曲线$C:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{9}=1(a>0)$上一点,$F_1,F_2$分别为双曲线的左、右焦点,$\angle F_1PF_2=60°$,则$|PF_1||PF_2|$的值为 (　　)

A.6　　B.9　　C.18　　D.36

4.(**2019·全国卷Ⅲ**)已知F是双曲线$C:\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{5}=1$的一个焦点,点$P$在$C$上,$O$为坐标原点,若$|OP|=|OF|$,则$\triangle OPF$的面积为 (　　)

A.$\frac{3}{2}$　　B.$\frac{5}{2}$

C.$\frac{7}{2}$　　D.$\frac{9}{2}$

5.(**2019·临川一中月考**)已知双曲线$\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{5}=1$上一点$P$到$F(3,0)$的距离为6,$O$为坐标原点,且$\overrightarrow{OQ}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OF}+\overrightarrow{OP})$,则$|\overrightarrow{OQ}|=$ (　　)

A.1　　B.2

C.2或5　　D.1或5

二、填空题

6.设双曲线C的两个焦点为$(-\sqrt{2},0),(\sqrt{2},0)$,一个顶点是$(1,0)$,则$C$的方程为_____.

7.已知双曲线$x^2-y^2=1$,点F_1,F_2为其两个焦点,点P为双曲线上一点,若$PF_1\perp PF_2$,则$|PF_1|+|PF_2|$的值为_____.

8.与圆$A:(x+5)^2+y^2=49$和圆$B:(x-5)^2+y^2=1$都外切的圆的圆心P的轨迹方程为_____.

三、解答题

9.已知命题$p:k^2-8k-20\leqslant 0$,命题q:方程$\frac{x^2}{4-k}+\frac{y^2}{1-k}=1$表示焦点在$x$轴上的双曲线.

(1)命题q为真命题,求实数k的取值范围;

(2)若命题"$p\vee q$"为真,命题"$p\wedge q$"为假,求实数k的取值范围.

10.已知双曲线过点$(3,-2)$且与椭圆$4x^2+9y^2=36$有相同的焦点.

(1)求双曲线的标准方程;

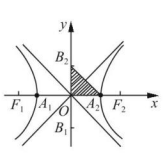
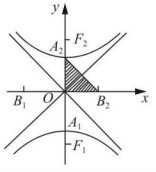
(2)若点M在双曲线上,F_1,F_2为左、右焦点,且$|MF_1|+|MF_2|=6\sqrt{3}$,试判断$\triangle MF_1F_2$的形状.

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

第 10 课时　2.2.2　双曲线的简单几何性质

基础知识梳理

1. 双曲线的几何性质

		$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ $(a>0,b>0)$	$\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1$ $(a>0,b>0)$
图形			
性质	焦点	$F_1(-c,0),F_2(c,0)$	_____
	焦距	_____	
	范围	$x\leqslant -a$ 或 $x\geqslant a$	_____
	对称性	_____	
	顶点	$A_1(-a,0),A_2(a,0)$	_____
	轴长	_____	
	离心率	_____	
	渐近线	$y=\pm\frac{b}{a}x$	_____

2. 等轴双曲线

实轴和虚轴等长的双曲线叫做等轴双曲线，它有以下性质：

(1)方程形式为_____($\lambda\neq 0$).

(2)渐近线方程为_____，它们互相垂直.

(3)离心率 $e=$_____.

题点知识巩固

知识点一　双曲线的简单几何性质

1.(**2018·全国卷Ⅱ**)双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的离心率为 $\sqrt{3}$，则其渐近线方程为　(　　)

A. $y=\pm\sqrt{2}x$　　B. $y=\pm\sqrt{3}x$

C. $y=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}x$　　D. $y=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}x$

2.(**2019·福建闽清期末**)若点 F_1,F_2 分别是双曲线 $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{m}=1$ 的左、右焦点，点 P 为双曲线上一点且满足 $\overrightarrow{PF_1}\cdot\overrightarrow{PF_2}=0$，$\triangle F_1PF_2$ 的面积为 5，则双曲线左焦点 F_1 到其中一条渐近线 l 的距离为_____.

知识点二　双曲线的离心率

3.(**2019·广东蕉岭月考**)已知双曲线 $C:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的一条渐近线与直线 $2x-y+1=0$ 垂直，则 C 的离心率 $e=$　(　　)

A. $\sqrt{5}$　　B. $\frac{\sqrt{5}}{2}$

C. $\sqrt{3}$　　D. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

4. 已知双曲线 $E:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$，矩形 $ABCD$ 的四个顶点在 E 上，AB,CD 的中点为 E 的两个焦点，且 $2|AB|=3|BC|$，则 E 的离心率是_____.

知识点三　与双曲线有关的综合问题

5.(**2019·福建长乐二中期末**)若点 O 和点 $F(-3,0)$ 分别是双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-y^2=1(a>0)$ 的中心和左焦点，点 P 为双曲线右支上的任意一点，则 $\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{FP}$ 的取值范围为　(　　)

A. $[8+6\sqrt{2},+\infty)$　　B. $[8-6\sqrt{2},+\infty)$

C. $\left[-\frac{9}{8},+\infty\right)$　　D. $\left[\frac{9}{8},+\infty\right)$

6. 一个椭圆，其中心在原点，焦点在坐标轴上，焦距为 $2\sqrt{13}$. 一双曲线和这椭圆有公共焦点，且双曲线的半实轴长比椭圆的半长轴长小 4，双曲线离心率与椭圆离心率之比为 7∶3，求椭圆和双曲线的方程.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

提能达标过关

一、选择题

1.(**2019·四川棠湖中学月考**)双曲线 $mx^2+y^2=1$ 的虚轴是实轴长的 2 倍,则 m 的值为 (　　)

A. 4　　B. -4

C. $-\frac{1}{4}$　　D. $\frac{1}{4}$

2.(**2019·浙江卷**)渐近线方程为 $x\pm y=0$ 的双曲线的离心率是 (　　)

A. $\frac{\sqrt{2}}{2}$　　B. 1

C. $\sqrt{2}$　　D. 2

3.(**2019·吉林白山联考**)已知双曲线 $C:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的一条渐近线的斜率为 $\frac{3}{4}$,焦距为 10,则双曲线 C 的方程为 (　　)

A. $\frac{x^2}{32}-\frac{y^2}{18}=1$　　B. $\frac{x^2}{3}-\frac{y^2}{4}=1$

C. $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$　　D. $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$

4. 设 F_1,F_2 分别为双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的左、右焦点. 若在双曲线右支上存在点 P,满足 $|PF_2|=|F_1F_2|$,且 F_2 到直线 PF_1 的距离等于双曲线的实轴长,则该双曲线的渐近线方程为 (　　)

A. $3x\pm4y=0$　　B. $3x\pm5y=0$

C. $4x\pm3y=0$　　D. $5x\pm4y=0$

5.(**2019·石家庄实验中学期末**)双曲线 $E:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的离心率是 $\sqrt{5}$,过右焦点 F 作渐近线 l 的垂线,垂足为 M,若 $\triangle OFM$ 的面积是 1,则双曲线 E 的实轴长是 (　　)

A. 1　　B. 2

C. $\sqrt{2}$　　D. $2\sqrt{2}$

二、填空题

6. 已知双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的一条渐近线为 $2x+y=0$,一个焦点为 $(\sqrt{5},0)$,则 $a=$_____,$b=$_____.

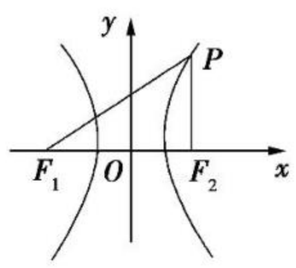
7. 已知双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的渐近线与圆 $(x-2)^2+y^2=1$ 相切,则双曲线的离心率 $e=$_____.

8. 已知点 $A(1,4)$,F_1 是双曲线 $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{12}=1$ 的左焦点,点 P 是双曲线右支上的动点,则 $|PA|+|PF_1|$ 的最小值为_____.

三、解答题

9. 已知双曲线中心在原点,且一个焦点为 $(\sqrt{7},0)$,直线 $y=x-1$ 与其相交于 M,N 两点,MN 的中点的横坐标为 $-\frac{2}{3}$,求此双曲线的方程.

10. 如图,已知 F_1,F_2 为双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的左、右焦点,过 F_2 作垂直于 x 轴的直线交双曲线于点 P,且 $\angle PF_1F_2=30°$. 求双曲线的渐近线方程.



关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

2.3　抛物线

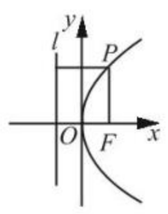
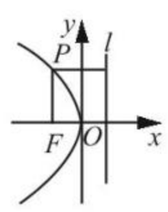
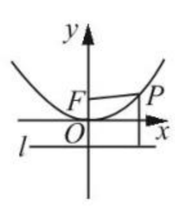
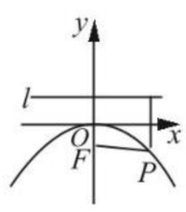
第 11 课时　2.3.1　抛物线及其标准方程

基础知识梳理

1. 抛物线定义

平面内与一个定点 F 和一条定直线 l 的距离相等的点的轨迹叫做_____. 定点 F 叫做抛物线的_____，定直线 l 叫做抛物线的_____.

2. 抛物线的标准方程的特点

抛物线标准方程	$y^2=2px$ $(p>0)$	$y^2=-2px$ $(p>0)$	$x^2=2py$ $(p>0)$	$x^2=-2py$ $(p>0)$
图形				
焦点	_____	_____	_____	_____
准线	_____	_____	_____	_____

题点知识巩固

知识点一　抛物线的定义

1.（**2019·辽宁沈阳期末**）抛物线 $y^2=4x$ 的准线方程为（　　）

A. $x=1$　　B. $x=2$

C. $x=-1$　　D. $x=-2$

2.（**2019·海口月考**）已知点 P 在抛物线 $x^2=4y$ 上，则当点 P 到点 $Q(1,2)$ 的距离与点 P 到抛物线焦点距离之和取得最小值时，点 P 的坐标为（　　）

A. $(2,1)$　　B. $(-2,1)$

C. $\left(-1,\frac{1}{4}\right)$　　D. $\left(1,\frac{1}{4}\right)$

知识点二　求抛物线的标准方程

3.（**2019·孝感八校期末**）已知抛物线 C 的开口向上，其焦点是双曲线 $\frac{y^2}{3}-x^2=1$ 的一个焦点，则 C 的标准方程为（　　）

A. $y^2=8x$　　B. $x^2=8y$

C. $y^2=\sqrt{2}x$　　D. $x^2=-\sqrt{2}y$

4. 已知双曲线 $C_1:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的离心率为 2. 若抛物线 $C_2:x^2=2py(p>0)$ 的焦点到双曲线 C_1 的渐近线的距离为 2，则抛物线 C_2 的方程为（　　）

A. $x^2=\frac{8\sqrt{3}}{3}y$　　B. $x^2=\frac{16\sqrt{3}}{3}y$

C. $x^2=8y$　　D. $x^2=16y$

知识点三　抛物线方程的应用

5.（**2019·浙江杭高期末**）设 O 为坐标原点，P 是以 F 为焦点的抛物线 $y^2=2px(p>0)$ 上任意一点，M 是线段 PF 上的点，且 $|PM|=2|MF|$，则直线 OM 的斜率的最大值为_____.

6. 某河上有座抛物线形拱桥，当水面距拱顶 5 m 时，水面宽 8 m，一木船宽 4 m，高 2 m，载货后木船露在水面上的部分高为 $\frac{3}{4}$ m，问水面上涨到与拱顶相距多少时，木船开始不能通航？

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

提能达标过关

一、选择题

1.(**2019·福建闽清二中期末**)抛物线 $y=8x^2$ 的焦点坐标是 (　　)

A.(0,2)　　B.(2,0)

C.$\left(0,\frac{1}{32}\right)$　　D.$\left(\frac{1}{32},0\right)$

2.(**2019·黑龙江佳木斯一中期末**)以 $x=-\frac{1}{4}$ 为准线的抛物线的标准方程为 (　　)

A.$y^2=x$　　B.$y^2=\frac{1}{2}x$

C.$x^2=\frac{1}{2}y$　　D.$x^2=y$

3.(**2019·安徽郎溪中学月考**)等轴双曲线 C 的中心在原点,焦点在 x 轴上,C 与抛物线 $y^2=16x$ 的准线交于 A,B 两点,$|AB|=4\sqrt{3}$,则 C 的实轴长为 (　　)

A.$\sqrt{2}$　　B.$2\sqrt{2}$

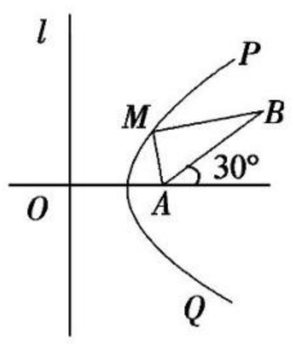
C.4　　D.8

4.(**2019·湖南永州月考**)已知抛物线 $y=px^2$(其中 p 为常数)经过点 $A(1,3)$,则抛物线的焦点到准线的距离等于 (　　)

A.$\frac{9}{2}$　　B.$\frac{3}{2}$

C.$\frac{1}{18}$　　D.$\frac{1}{6}$

5.如图,l 为南北方向的公路,A 地在公路正东 2 km 处,B 地在 A 地东偏北 30°方向 $2\sqrt{3}$ km 处,河流沿岸曲线 PQ 上任意一点到公路 l 和到 A 地距离相等.现要在曲线 PQ 上某处建一座码头 M,向 A,B 两地运货物,经测算,从 M 到 A,B 修建费用都为 a 万元/km,那么修建这条公路的总费用最低是 (　　)



A.$(2+\sqrt{3})a$ 万元　　B.$2(\sqrt{3}+1)a$ 万元

C.$5a$ 万元　　D.$6a$ 万元

二、填空题

6.(**2019·甘肃永昌四中月考**)顶点在原点,且过点(−4,4)的抛物线的标准方程是_____.

7.若抛物线 $y^2=-16x$ 上一点 P 到 x 轴的距离为 12,则点 P 到焦点的距离为_____.

8.已知离心率为 2 的双曲线 $\frac{x^2}{m}+\frac{y^2}{n}=1(m,n\in\mathbf{R})$ 的右焦点与抛物线 $y^2=4x$ 的焦点重合,则 $\frac{m}{n}=$_____.

三、解答题

9.若抛物线 $y^2=-2px(p>0)$ 上有一点 M,其横坐标为 −9,它到焦点的距离为 10,求抛物线方程和 M 点的坐标.

10.根据下列条件分别求抛物线的标准方程.

(1)抛物线的焦点是双曲线 $16x^2-9y^2=144$ 的左顶点;

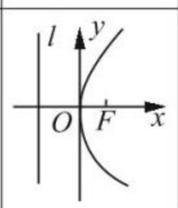
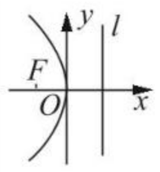
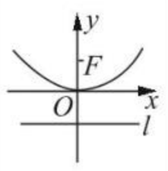
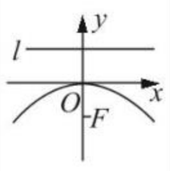
(2)抛物线的焦点 F 在 x 轴上,直线 $y=-3$ 与抛物线交于点 A,$|AF|=5$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

第 12 课时　2.3.2　抛物线的简单几何性质

基础知识梳理

四种标准形式的抛物线几何性质的比较

标准方程		$y^2=2px$ $(p>0)$	$y^2=-2px$ $(p>0)$	$x^2=2py$ $(p>0)$	$x^2=-2py$ $(p>0)$
图形					
性质	焦点坐标	_____	_____	_____	_____
	准线方程	$x=-\frac{p}{2}$	$x=\frac{p}{2}$	$y=-\frac{p}{2}$	$y=\frac{p}{2}$
	范围	_____	_____	_____	_____
	对称轴	x 轴		y 轴	
	顶点坐标	$O(0,0)$			
	离心率	$e=1$			
	开口方向	向右	向左	向上	向下

题点知识巩固

知识点一　抛物线的简单几何性质

1.（**2019·吉林白山期末**）已知直线 $y=-\sqrt{3}(x-2)$ 与抛物线 $C:y^2=2px(p>0)$ 的准线相交于 M，与 C 的其中一个交点为 N，若线段 MN 的中点在 x 轴上，则 $p=$（　　）

A. 2　　B. 4

C. $2\sqrt{3}$　　D. $4\sqrt{3}$

2.（**2019·石家庄实验中学期末**）若一动圆的圆心在抛物线 $x^2=16y$ 上，且与直线 $y+4=0$ 相切，则此圆恒过定点（　　）

A. $(0,-8)$　　B. $(0,4)$

C. $(0,-4)$　　D. $(0,8)$

知识点二　焦点弦问题

3. 设 F 为抛物线 $C:y^2=3x$ 的焦点，过 F 且倾斜角为 $30°$ 的直线交 C 于 A,B 两点，则 $|AB|=$（　　）

A. $\frac{\sqrt{30}}{3}$　　B. 6

C. 12　　D. $7\sqrt{3}$

4.（**2019·阜阳一中月考**）直线 $y=kx-k$ 与抛物线 $y^2=4x$ 交于 A,B 两点，若 $|AB|=4$，则弦 AB 的中点到准线的距离为_____.

知识点三　直线与抛物线的综合问题

5.（**2019·江西上饶期末**）已知抛物线 $C:y^2=4x$，直线 l 与抛物线 C 交于 A,B 两点，若 AB 中点 P 的坐标为 $(2,1)$，则原点 O 到直线 l 的距离为（　　）

A. 1　　B. $\frac{7}{17}\sqrt{7}$

C. $\frac{\sqrt{2}}{2}$　　D. $\frac{3}{5}\sqrt{5}$

6.（**2019·会泽一中月考**）已知动点 M 到点 $N(1,0)$ 和直线 $l:x=-1$ 的距离相等.

(1)求动点 M 的轨迹 E 的方程；

(2)已知不与 l 垂直的直线 l' 与曲线 E 有唯一公共点 A，且与直线 l 的交点为 P，以 AP 为直径作圆 C. 求证：N 在圆 C 上.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

提能达标过关

一、选择题

1. 已知点 P 在抛物线 $x^2=4y$ 上，且点 P 到 x 轴的距离与点 P 到此抛物线焦点的距离之比为 1∶3，则点 P 到 x 轴的距离是 （　　）

A. $\frac{1}{4}$　　B. $\frac{1}{2}$

C. 1　　D. 2

2. **(2019·福州期末)** 斜率为 1 的直线经过抛物线 $y^2=4x$ 的焦点，且与抛物线相交于 A,B 两点，则 $|AB|=$ （　　）

A. 8　　B. 6

C. 12　　D. $7\sqrt{3}$

3. **(2019·山东实验中学质量检测)** 已知抛物线 $C:y^2=4x$ 的焦点为 F，过 F 点的直线交抛物线于不同的两点 A,B，且 $|AB|=8$，点 A 关于 x 轴的对称点为 A'，线段 $A'B$ 的中垂线交 x 轴于点 D，则 D 点的坐标为 （　　）

A. $(2,0)$　　B. $(3,0)$

C. $(4,0)$　　D. $(5,0)$

4. 已知点 $M(-4,1)$，F 为抛物线 $C:y^2=-4x$ 的焦点，点 P 在抛物线上，若 $|PF|+|PM|$ 取最小值，则点 P 的坐标是 （　　）

A. $(0,0)$　　B. $(-1,2)$

C. $\left(-\frac{1}{4},1\right)$　　D. $(-2,2\sqrt{2})$

5. **(2019·湖南湘东五校联考)** 抛物线 $y^2=4x$ 的焦点为 F，点 $P(x,y)$ 为该抛物线上的动点，又已知点 $A(-1,0)$，则 $\frac{|PA|}{|PF|}$ 的最大值是 （　　）

A. 1　　B. $\sqrt{2}$　　C. $\frac{\sqrt{2}}{2}$　　D. $\sqrt{3}$

二、填空题

6. 过抛物线 $y^2=2px(p>0)$ 的焦点 F 作倾斜角为 45°的直线交抛物线于 A,B 两点，若线段 AB 的长为 8，则 p 的值为_____.

7. 抛物线 $y^2=4x$ 上的动点 P 与圆 $x^2+y^2-8x+15=0$ 上的动点 Q 距离的最小值为_____.

8. 对于顶点在原点的抛物线，给出下列条件：

①焦点在 y 轴上；

②焦点在 x 轴上；

③抛物线上横坐标为 1 的点到焦点的距离等于 6；

④抛物线的通径的长为 5；

⑤由原点向过焦点的某条直线作垂线，垂足坐标为 $(2,1)$.

能使该抛物线方程为 $y^2=10x$ 的条件是_____（要求填写合适条件的序号）.

三、解答题

9. **(2019·福建三明期末)** 已知抛物线 $C:y^2=2px(p>0)$ 上一点 $P(1,m)$ 到焦点 F 的距离为 2.

(1)求实数 p 的值；

(2)若直线 $l:x+y-1=0$ 与抛物线 C 交于 A,B 两点，求 $|AB|$.

10. **(2019·全国卷Ⅰ)** 已知点 A,B 关于坐标原点 O 对称，$|AB|=4$，$\odot M$ 过点 A,B 且与直线 $x+2=0$ 相切.

(1)若 A 在直线 $x+y=0$ 上，求 $\odot M$ 的半径；

(2)是否存在定点 P，使得当 A 运动时，$|MA|-|MP|$ 为定值，并说明理由.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

阶段评估 2

（时间：60 分钟　满分：100 分）

一、选择题（每小题 5 分，共 30 分）

1.（**2019 · 山西怀仁一中期末**）抛物线 $y=4x^2$ 的焦点坐标是（　　）

A. $\left(0,\frac{1}{16}\right)$　　B. $(1,0)$

C. $(0,1)$　　D. $\left(0,\frac{1}{8}\right)$

2.（**2019 · 山东淄川中学检测**）若双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ 的一条渐近线经过点 $(3,-4)$，则此双曲线的离心率为（　　）

A. $\frac{\sqrt{7}}{3}$　　B. $\frac{5}{4}$

C. $\frac{4}{3}$　　D. $\frac{5}{3}$

3.（**2019 · 石家庄月考**）以双曲线 $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{12}=1$ 的焦点为顶点，顶点为焦点的椭圆方程为（　　）

A. $\frac{y^2}{16}+\frac{x^2}{12}=1$　　B. $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{12}=1$

C. $\frac{x^2}{12}+\frac{y^2}{4}=1$　　D. $\frac{y^2}{12}+\frac{x^2}{4}=1$

4. 若 m 是 2 和 8 的等比中项，则圆锥曲线 $x^2+\frac{y^2}{m}=1$ 的离心率为（　　）

A. $\frac{\sqrt{3}}{2}$　　B. $\sqrt{5}$

C. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ 或 $\frac{\sqrt{5}}{2}$　　D. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ 或 $\sqrt{5}$

5. 已知抛物线 $y^2=4x$ 的焦点为 F，P 为抛物线上一点，过 P 作 y 轴的垂线，垂足为 M，若 $|PF|=4$，则 $\triangle PFM$ 的面积为（　　）

A. $3\sqrt{3}$　　B. $4\sqrt{3}$

C. 6　　D. 8

6.（**2019 · 安徽郎溪中学期末**）设椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的左、右焦点分别为 $F_1(-c,0)$，$F_2(c,0)$，点 $N\left(c,\frac{a}{2}\right)$ 在椭圆的外部，点 M 是椭圆上的动点，满足 $|MF_1|+|MN|<\frac{3}{2}|F_1F_2|$ 恒成立，则椭圆离心率 e 的取值范围是（　　）

A. $\left(0,\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$　　B. $\left(\frac{\sqrt{2}}{2},1\right)$

C. $\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{5}{6}\right)$　　D. $\left(\frac{5}{6},1\right)$

二、填空题（每小题 5 分，共 20 分）

7. 双曲线 $\frac{x^2}{4}-y^2=1$ 的离心率等于_____.

8.（**2019 · 辽宁沈阳月考**）直线 l 经过点 $A(t,0)$，且与曲线 $x^2=y$ 相切，若直线 l 的倾斜角为 $\frac{\pi}{4}$，则 $t=$_____.

9. 设 F_1、F_2 是椭圆 $\frac{x^2}{4}+y^2=1$ 的两个焦点，点 P 在椭圆上，且满足 $\angle F_1PF_2=\frac{\pi}{2}$，则 $\triangle F_1PF_2$ 的面积等于_____.

10. 设中心在原点的椭圆与双曲线 $2x^2-2y^2=1$ 有公共焦点，且它们的离心率互为倒数，则该椭圆的方程是_____.

三、解答题（共 50 分）

11.（12 分）（**2019 · 山东武城期末**）已知 p：方程 $\frac{x^2}{2m}-\frac{y^2}{m-1}=1$ 表示焦点在 y 轴上的椭圆，q：双曲线 $\frac{y^2}{5}-\frac{x^2}{m}=1$ 的离心率 $e\in(1,2)$，若 p，q 有且只有一个为真，求实数 m 的取值范围.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

12.(12 分)Rt△AOB 的三个顶点都在抛物线 $y^2=2px$ 上，其中直角顶点 O 为原点，OA 所在的直线方程为 $y=\sqrt{3}x$，△AOB 的面积为 $6\sqrt{3}$，求该抛物线的方程.

13.(13 分)已知椭圆 C 的中心为坐标原点，焦点在坐标轴上，且经过点 $M(4,1)$，$N(2,2)$.

(1)求椭圆 C 的方程；

(2)若斜率为 1 的直线与椭圆 C 交于不同的两点，且点 M 到直线 l 的距离为$\sqrt{2}$，求直线 l 的方程.

14.(13 分)(**2019·吉林白山联考**)在直角坐标系 xOy 中，曲线 $C:x^2=6y$ 与直线 $l:y=kx+3$ 交于 M,N 两点.

(1)当 $1<k<2$ 时，求△MON 的面积的取值范围；

(2)y 轴上是否存在点 P，使得当 k 变动时，总有∠OPM=∠OPN？若存在，求以线段 OP 为直径的圆的方程；若不存在，请说明理由.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

第三章 导数及其应用

3.1 变化率与导数

第13课时 3.1.1 变化率问题

3.1.2 导数的概念

基础知识梳理

1. 函数的变化率

	定义	实例
平均变化率	函数 $y=f(x)$ 从 x_1 到 x_2 的平均变化率为_____，简记作 $\frac{\Delta y}{\Delta x}$	①平均速度；②曲线割线的斜率
瞬时变化率	函数 $y=f(x)$ 在 $x=x_0$ 处的瞬时变化率是函数 $f(x)$ 从 x_0 到 $x_0+\Delta x$ 的平均变化率在 $\Delta x\to 0$ 时的极限，即_____ $=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$	①瞬时速度：物体在某一时刻的速度；②切线斜率

2. 函数 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处的导数

函数 $y=f(x)$ 在 $x=x_0$ 处的_____称为函数 $y=f(x)$ 在 $x=x_0$ 处的导数，记作 $f'(x_0)$ 或 $y'|_{x=x_0}$，即

$f'(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=$_____.

题点知识巩固

知识点一 求平均变化率

1.（**2019·辽宁实验中学月考**）函数 $f(x)=2x^2-1$ 在区间 $(1,1+\Delta x)$ 上的平均变化率 $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ 等于 （ ）

A. 4　　B. $4+2\Delta x$

C. $4+2(\Delta x)^2$　　D. $4x$

2.（**2019·黑龙江哈尔滨三中月考**）已知一质点的运动方程为 $s=2-t^2$，则该质点在一段时间 $[0,2]$ 内的平均速度为_____.

知识点二 求瞬时变化率

3. $y=f(x)=3x+1$ 在点 $x=2$ 处的瞬时变化率是 （ ）

A. 2　　B. 3

C. 4　　D. 5

4.（**2019·福建罗源月考**）一物体的运动方程为 $s=\frac{1}{t}+2t$（$t>1$），其中 s 的单位是米，t 的单位是秒，那么物体在2秒末的瞬时速度是 （ ）

A. $\frac{7}{4}$ 米/秒　　B. $\frac{9}{4}$ 米/秒

C. $\frac{3}{2}$ 米/秒　　D. $\frac{5}{2}$ 米/秒

知识点三 用定义求函数的导数

5.（**2018·银川检测**）已知 $f(x)=\frac{2}{x}$，且 $f'(m)=-\frac{1}{2}$，则 m 的值等于 （ ）

A. -4　　B. 2

C. -2　　D. ± 2

6. 利用导数的定义求：

（1）$y=\frac{2}{x^2}$ 在 $x=1$ 处的导数；

（2）$y=x^2+ax+b$（a,b 为常数）在 $x=-1$ 处的导数.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

提能达标过关

一、选择题

1. 在平均变化率的定义中，自变量 x 在 x_0 处的增量 Δx（　　）

A. 大于零　　B. 小于零

C. 等于零　　D. 不等于零

2.（**2019·马鞍山检测**）已知 $f(x)=-x^2+10$，则 $f(x)$ 在 $x=\frac{3}{2}$ 处的瞬时变化率是（　　）

A. 3　　B. -3

C. 2　　D. -2

3.（**2019·江西宜春月考**）设 $f(x)$ 在 x_0 可导，则 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x_0+x)-f(x_0-3x)}{x}$ 等于（　　）

A. $4f'(x_0)$　　B. $f'(x_0)$

C. $2f'(x_0)$　　D. $3f'(x_0)$

4. 设函数 $f(x)$ 在 $x=1$ 处可导，则 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(1+\Delta x)-f(1)}{2\Delta x}$ 等于（　　）

A. $f'(1)$　　B. $2f'(1)$

C. $\frac{1}{2}f'(1)$　　D. $f'(2)$

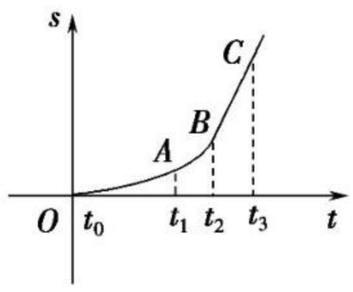
5. 已知函数 $f(x)$ 可导，则 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(1+\Delta x)-f(1)}{3\Delta x}$ 等于（　　）

A. $f'(1)$　　B. $f'(3)$

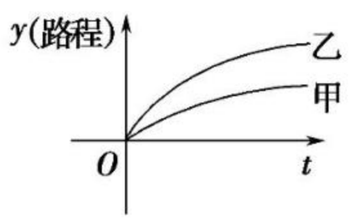
C. $\frac{1}{3}f'(1)$　　D. $3f'(1)$

二、填空题

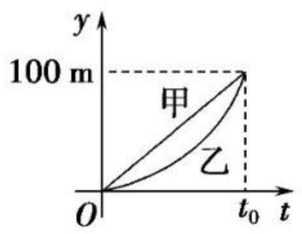
6. 汽车行驶的路程 s 和时间 t 之间的函数图象如图所示，在时间段 $[t_0,t_1]$，$[t_1,t_2]$，$[t_2,t_3]$ 上的平均速度分别为 $\overline{v}_1$，$\overline{v}_2$，$\overline{v}_3$，则三者的大小关系为_____.



7. 甲、乙二人慢跑的路程与时间关系以及百米赛跑路程和时间关系分别如图①②，试问：



图①



图②

(1)甲、乙二人慢跑时，_____跑得快；

(2)甲、乙二人百米赛跑，快到终点时，_____跑得较快.

8. 函数 $f(x)=(x-a)^2$ 的导数 $f'(x)=$_____，当 $x=a$ 时，导数 $f'(a)=$_____.

三、解答题

9. 已知 $f(x)=ax^2+2$，若 $f'(1)=4$，求 a 的值.

10.（**2019·安徽滁州月考**）在自行车比赛中，运动员的位移与比赛时间 t 存在关系 $s(t)=10t+5t^2$（s 的单位是 m，t 的单位是 s）.

(1)求 $t=20$，$\Delta t=0.1$ 时的 Δs 与 $\frac{\Delta s}{\Delta t}$；

(2)求 $t=20$ 时的速度.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

第 14 课时　3.1.3　导数的几何意义

基础知识梳理

1. 几何意义：$f(x)$在 $x=x_0$ 处的导数 $f'(x_0)$即为$f(x)$所表示的曲线在 $x=x_0$ 处的切线的斜率，即$k=f'(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$，过点$(x_0,f(x_0))$的切线方程为_____.

2. 物理意义：如果把函数 $y=f(x)$看作是物体的运动方程(或叫位移公式)，那么导数 $f'(x_0)$表示运动物体在时刻 t_0 的速度，即在 x_0 的_____，即$v_{x_0}=f'(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$.

3. 如果 $f(x)$在开区间(a,b)内每一点 x 的导数都存在，则称 $f(x)$在区间(a,b)内可导. 这样对开区间(a,b)内每一个值 x，都对应一个确定的导数$f'(x)$，于是在区间(a,b)内 $f'(x)$构成一个新的函数，我们把这个函数称为函数 $y=f(x)$的_____，记为_____，简称为_____. 今后，如不特别指明某一点的导数，求导数就是指求导函数.

题点知识巩固

知识点一　导数的几何意义

1. 下面说法正确的是　(　　)

A. 若 $f'(x_0)$不存在，则曲线 $y=f(x)$在点$(x_0,f(x_0))$处没有切线

B. 若曲线 $y=f(x)$在点$(x_0,f(x_0))$处有切线，则$f'(x_0)$必存在

C. 若 $f'(x_0)$不存在，则曲线 $y=f(x)$在点$(x_0,f(x_0))$处的切线的斜率不存在

D. 若曲线 $y=f(x)$在点$(x_0,f(x_0))$处没有切线，则$f'(x_0)$有可能存在

2. (**2019·重庆江津月考**)设 $f(x)$存在导函数且满足 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(1)-f(1-\Delta x)}{\Delta x}=-1$，则曲线 $y=f(x)$在点$(1,f(1))$处的切线斜率为　(　　)

A. -1　　B. -2

C. 1　　D. 2

知识点二　求曲线的切线方程

3. (**2019·蚌埠二中月考**)若曲线 $y=x^2+ax+b$ 在点$(0,b)$处的切线方程是 $x-y+1=0$，则　(　　)

A. $a=1,b=1$　　B. $a=-1,b=1$

C. $a=1,b=-1$　　D. $a=-1,b=-1$

4. (**2019·四川棠湖月考**)曲线 $y=-x^3+3x^2$ 在点$(1,2)$处的切线方程为　(　　)

A. $y=3x-1$　　B. $y=-3x+5$

C. $y=3x+5$　　D. $y=2x$

知识点三　导数几何意义的综合应用

5. (**2019·山东济南外国语学校期末**)设曲线 $y=x^2+x+\dfrac{1}{x}$在点$(1,3)$处的切线与直线 $ax+y+1=0$ 垂直，则 $a=$　(　　)

A. 2　　B. -2

C. $-\dfrac{1}{2}$　　D. $\dfrac{1}{2}$

6. (**2019·安徽六安检测**)设函数 $f(x)=ax-\dfrac{b}{x}$，若曲线 $y=f(x)$在点$(2,f(2))$处的切线方程为 $5x-4y-4=0$.

(1)求 $f(x)$的解析式；

(2)求证：在曲线 $y=f(x)$上任意一点处的切线与直线 $x=0$ 和 $y=x$ 所围成的三角形面积为定值，并求出此定值.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

提能达标过关

一、选择题

1. 设曲线 $y=f(x)$，若 $f'(3)=0$，则曲线在 $(3,f(3))$ 处的切线 （ ）

A. 与 x 轴平行　　B. 与 x 轴垂直

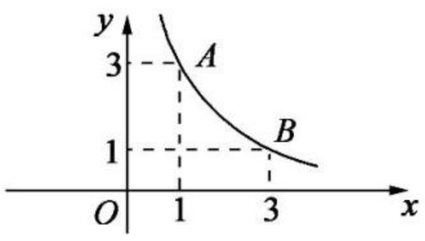
C. 与 x 轴斜交　　D. 与 x 轴平行或重合

2. **(2019·辽宁实验中学月考)** 设函数 $f(x)=x(x-6)$，则 $f(x)$ 在 $x=0$ 处的切线斜率为 （ ）

A. 0　　B. -1

C. -6　　D. 3

3. 如图，函数 $y=f(x)$ 在 A,B 两点间的平均变化率是（ ）



A. 1　　B. -1

C. 2　　D. -2

4. **(2019·山东泰安期末)** 设函数 $f(x)=x^3+(a-1)x^2+ax$，若 $f(x)$ 为奇函数，则曲线 $y=f(x)$ 在点 $(0,0)$ 处的切线方程为 （ ）

A. $y=-2x$　　B. $y=-x$

C. $y=2x$　　D. $y=x$

5. 已知 $f'(x)=2x-1$，则曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,f(1))$ 处的切线的倾斜角为 （ ）

A. $30°$　　B. $45°$

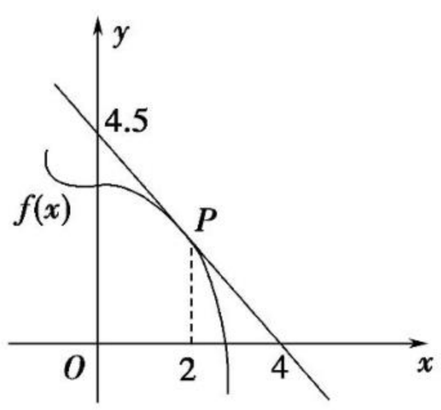
C. $60°$　　D. $120°$

二、填空题

6. 已知曲线 $y=2x^2$ 上一点 $A(2,8)$，则在点 A 处的切线方程为_____.

7. **(2019·山东东营期中)** 已知函数 $y=f(x)$ 的图象在点 $A(0,f(0))$ 处的切线方程是 $y=2x+1$，则 $f(0)+f'(0)=$_____.

8. 如图是函数 $f(x)$ 及 $f(x)$ 在点 P 处切线的图象，则 $f(2)+f'(2)=$_____.



三、解答题

9. **(2019·山西大学附中月考)** 已知 $f(x)=\frac{1}{3}x^3+\frac{4}{3}$，若直线 l 过点 $(2,4)$ 且与 $f(x)$ 图象相切，求直线 l 的方程.

10. 曲线 $y=x^2$ 上哪一点处的切线：

(1) 平行于直线 $y=4x-5$；

(2) 垂直于直线 $2x-6y+5=0$；

(3) 与 x 轴成 $135°$ 的倾斜角.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

3.2　导数的计算

第 15 课时　3.2.1　几个常用函数的导数

3.2.2　基本初等函数的导数公式及导数的运算法则

基础知识梳理

1. 基本初等函数的导数公式

原函数	导函数
(1) $f(x)=c$	$f'(x)=$_____
(2) $f(x)=x^{\alpha}(\alpha\in\mathbf{Q})$	$f'(x)=$_____
(3) $f(x)=\sin x$	$f'(x)=$_____
(4) $f(x)=\cos x$	$f'(x)=$_____
(5) $f(x)=a^x$	$f'(x)=$_____
(6) $f(x)=e^x$	$f'(x)=$_____
(7) $f(x)=\log_a x$	$f'(x)=$_____
(8) $f(x)=\ln x$	$f'(x)=$_____

2. 导数运算法则

(1) $[f(x)\pm g(x)]'=$_____；

(2) $[f(x)\cdot g(x)]'=$_____；

(3) $\left[\dfrac{f(x)}{g(x)}\right]'=$_____.

题点知识巩固

知识点一　利用导数公式求导

1. (**2019·安徽滁州月考**)下列运算正确的是　(　　)

A. $\left(\sin\dfrac{\pi}{6}\right)'=\cos\dfrac{\pi}{6}$　　B. $(\log_a x)'=\dfrac{\ln a}{x}$

C. $(3^x)'=x3^{x-1}$　　D. $\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)'=-\dfrac{1}{2x\sqrt{x}}$

2. (**2019·辽宁实验中学**)若函数 $f(x)=x^2+\dfrac{1}{x}$，则 $f'(-1)=$　(　　)

A. -1　　B. 1

C. -3　　D. 3

知识点二　利用运算法则求导数

3. (**2019·安徽定远月考**)函数 $f(x)=\sqrt{x}\cdot\sin x$ 的导数为　(　　)

A. $f'(x)=2\sqrt{x}\cdot\sin x+\sqrt{x}\cdot\cos x$

B. $f'(x)=\dfrac{\sin x}{2\sqrt{x}}+\sqrt{x}\cdot\cos x$

C. $f'(x)=2\dfrac{\sin x}{\sqrt{x}}+\sqrt{x}\cdot\cos x$

D. $f'(x)=\dfrac{\sin x}{\sqrt{x}}-\sqrt{x}\cdot\cos x$

4. 已知函数 $f(x)=ax^3+3x^2+2$，且 $f'(-1)=4$，则 $a=$_____.

知识点三　导数的应用

5. (**2019·莆田六中期末**)已知函数 $f(x)=ax^2-b\ln x$ 在点 $(1,f(1))$ 处的切线为 $y=1$，则 $a+b$ 的值为　(　　)

A. 1　　B. 2

C. 3　　D. 4

6. (**2019·山西大学附中月考**)已知函数 $f(x)=\dfrac{1}{2}e^x-\dfrac{3}{2}e^{-x}$，则曲线 $y=f(x)$ 上任意一点处的切线的倾斜角 α 的取值范围是　(　　)

A. $\left(0,\dfrac{\pi}{3}\right]$　　B. $\left(\dfrac{\pi}{2},\dfrac{2\pi}{3}\right]$

C. $\left[\dfrac{\pi}{3},\dfrac{\pi}{2}\right)$　　D. $\left[\dfrac{\pi}{3},\pi\right)$

提能达标过关

一、选择题

1. (**2019·吉林五十五中月考**)若函数 $f(x)=\sin x$，则 $f\left(\dfrac{\pi}{4}\right)+f'\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=$　(　　)

A. $-\sqrt{2}$　　B. $\sqrt{2}$

C. 1　　D. 0

2. (**2019·濮阳一中月考**)已知函数 $f(x)$ 的导函数为 $f'(x)$，且满足 $f(x)=2x\cdot f'(1)+\ln x$，则 $f'(1)$ 等于　(　　)

A. $-e$　　B. -1

C. 1　　D. e

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

3.(**2019·河北安平月考**)已知函数 $f(x)=\frac{\cos x}{x}+1$,$f(x)$ 的导函数为 $f'(x)$,则 $f'\left(\frac{\pi}{2}\right)=$ (　　)

A. $-\frac{2}{\pi}$　　B. $-\frac{1}{\pi}$

C. π　　D. 2π

4.(**2019·江西上饶期末**)曲线 $y=e^x$ 在点 $(2,e^2)$ 处的切线与坐标轴所围成的三角形的面积为 (　　)

A. $\frac{3}{2}e^2$　　B. $2e^2$

C. e^2　　D. $\frac{1}{2}e^2$

5.已知 $f(x)=x^2+2xf'(1)$,则 $f'(0)$ 的值为 (　　)

A. 0　　B. -2

C. 2　　D. -4

二、填空题

6.(**2019·全国卷Ⅰ**)曲线 $y=3(x^2+x)e^x$ 在点 $(0,0)$ 处的切线方程为_____.

7.与直线 $2x-y-4=0$ 平行且与曲线 $y=\sqrt{x}$ 相切的直线方程是_____.

8.已知直线 $y=kx+1$ 与曲线 $y=x^3+ax+b$ 切于点 $(1,3)$,则 b 的值为_____.

三、解答题

9.已知 $f(x)=x^3+ax^2+bx+1$,且 -2 和 1 是 $f'(x)=0$ 有两个根.

(1)求 a,b 的值;

(2)已知点 $P(2,f(2))$,求曲线在点 P 处的切线方程.

10.已知曲线 $y=x^3+x-2$ 在点 P 处的切线 l_1 与直线 $4x-y-1=0$ 平行,且点 P 在第三象限内.

(1)求 P 点的坐标;

(2)若直线 $l\perp l_1$,且 l 也过切点 P,求直线 l 的方程.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

3.3　导数在研究函数中的应用

第16课时　3.3.1　函数的单调性与导数

基础知识梳理

1. 设函数 $y=f(x)$ 在区间 (a,b) 内可导

(1)在某个区间 (a,b) 内，如果 $f'(x)>0$，那么函数 $y=f(x)$ 在这个区间内_____.

(2)在某个区间 (a,b) 内，如果 $f'(x)<0$，那么函数 $y=f(x)$ 在这个区间内_____.

2. 求函数单调区间的一般步骤

(1)确定函数 $f(x)$ 的_____.

(2)计算 $f'(x)$，令_____，求零点.

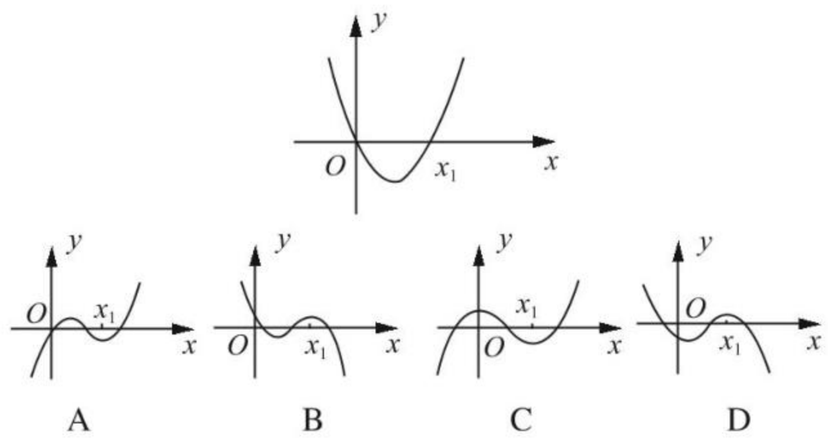
(3)用零点和不连续点(或不可导点)将定义域分成若干区间(若无不连续点或不可导点，则直接用零点划分区间).

(4)判断 $f'(x)$ 在每个区间的_____，确定函数 $f(x)$ 的_____和_____.

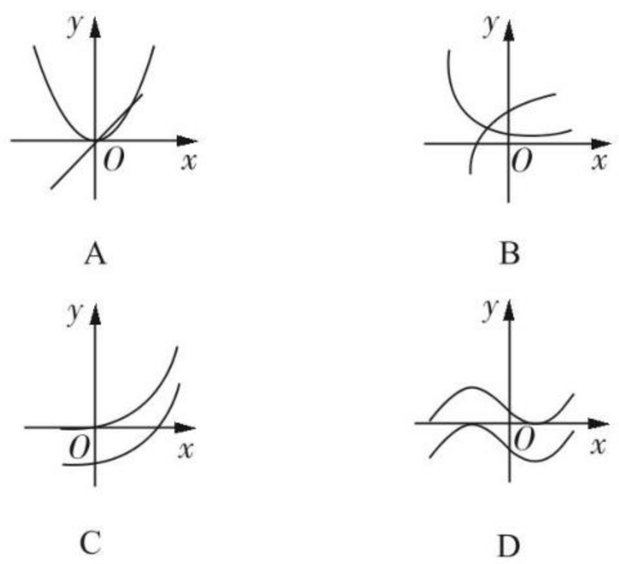
题点知识巩固

知识点一　函数与导函数图象间的关系

1.(**2019·吉林五十五中月考**)设 $f'(x)$ 是函数 $y=f(x)$ 的导函数，若 $y=f'(x)$ 的图象如图所示，则函数 $y=f(x)$ 的图象可能是　(　　)



2.(**2019·山西运城月考**)设 $f'(x)$ 是函数 $f(x)$ 的导函数，将 $y=f(x)$ 和 $y=f'(x)$ 的图象画在同一个直角坐标系中，不可能正确的是　(　　)



知识点二　函数的单调性与导数

3.(**2019·福建罗源月考**)函数 $y=2\sqrt{x}-x$ 的单调递增区间为　(　　)

A. $[0,1]$　　B. $(-\infty,1]$

C. $[1,+\infty)$　　D. $(0,+\infty)$

4.(**2019·广东佛山月考**)已知函数 $f(x)=\ln x-\frac{1}{2}ax^2+(1-a)x$，$a\in\mathbf{R}$，讨论 $f(x)$ 的单调性.

知识点三　已知函数的单调性求参数

5.(**2019·汕头月考**)函数 $f(x)=\frac{1}{3}x^3-x^2+ax$ 在 $[-1,2]$ 上单调递增，则 a 的取值范围是　(　　)

A. $a>0$　　B. $a\geqslant 0$

C. $a\geqslant 1$　　D. $a>1$

6. 若函数 $f(x)=\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}ax^2+(a-1)x+1$ 在区间 $(1,4)$ 上为减函数，在区间 $(6,+\infty)$ 上为增函数，试求实数 a 的取值范围.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

提能达标过关

一、选择题

1.(**2019·吉林月考**)函数 $f(x)=3+x\ln x$ 的单调递增区间是 (　　)

A. $\left(0,\frac{1}{e}\right)$　　B. $(e,+\infty)$

C. $\left(\frac{1}{e},+\infty\right)$　　D. $\left(\frac{1}{e},e\right)$

2.(**2019·山东淄川检测**)若函数 $f(x)=x^2+ax+\frac{1}{x}$ 在 $\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$ 是增函数,则 a 的取值范围是 (　　)

A. $[-1,0]$　　B. $[-1,+\infty)$

C. $[0,3]$　　D. $[3,+\infty)$

3. 若在区间 (a,b) 内有 $f'(x)>0$,且 $f(a)\geqslant 0$,则在 (a,b) 内有 (　　)

A. $f(x)>0$　　B. $f(x)<0$

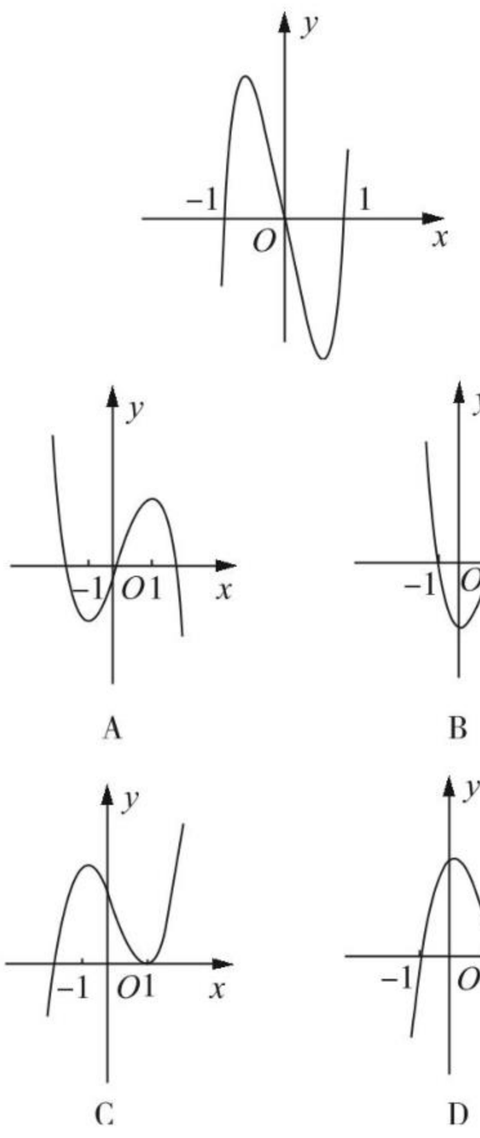
C. $f(x)=0$　　D. 不能确定

4.(**2019·内蒙古鄂尔多斯月考**)定义域为 **R** 的可导函数 $y=f(x)$ 的导函数 $f'(x)$,满足 $f(x)<f'(x)$,且 $f(0)=2$,则不等式 $f(x)>2e^x$ 的解集为 (　　)

A. $(-\infty,0)$　　B. $(-\infty,2)$

C. $(0,+\infty)$　　D. $(2,+\infty)$

5. 已知函数 $y=xf'(x)$ 的图象如图所示(其中 $f'(x)$ 是函数 $f(x)$ 的导函数).下面四个图象中 $y=f(x)$ 的图象大致是 (　　)



A

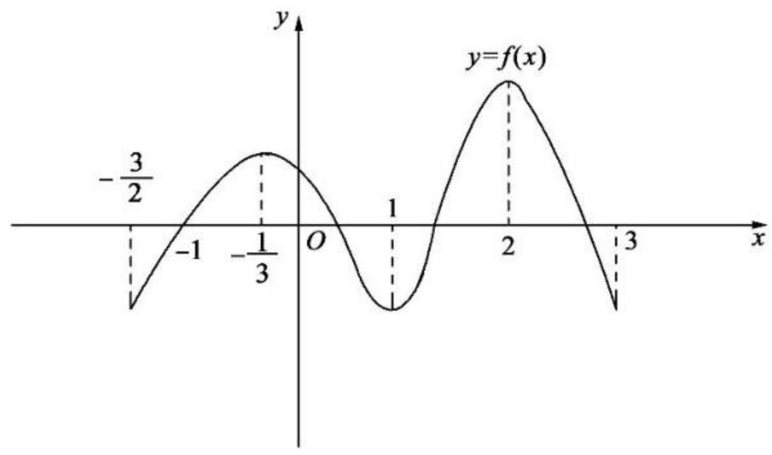
B

C

D

二、填空题

6. 函数 $y=f(x)$ 在其定义域 $\left(-\frac{3}{2},3\right)$ 内可导,其图象如图所示.记 $y=f(x)$ 的导函数为 $y=f'(x)$,则不等式 $f'(x)\leqslant 0$ 的解集是_____.



7. 函数 $f(x)=\frac{\ln x}{x}$,若 $a=f(3)$,$b=f(4)$,$c=f(5)$,则 a,b,c 的大小关系是_____.

8.(**2019·辽宁抚顺期中**)已知函数 $f(x)=\sin x-x+\frac{1}{2^x}-2^x$,则关于 x 的不等式 $f(1-x^2)+f(5x-7)<0$ 的解集为_____.

三、解答题

9. 已知 $f(x)=ax^4+bx^2+c$ 的图象经过点 $(0,1)$,且在 $x=1$ 处的切线方程是 $y=x-2$.

(1)求 $y=f(x)$ 的解析式;

(2)求 $y=f(x)$ 的单调递增区间.

10. 已知函数 $f(x)=\frac{\ln x+k}{e^x}$(k 为常数,e 是自然对数的底数),曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,f(1))$ 处的切线与 x 轴平行.

(1)求 k 的值;

(2)求 $f(x)$ 的单调区间.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

第 17 课时　3.3.2　函数的极值与导数

基础知识梳理

1. **极小值**：函数 $f(x)$在点 $x=a$ 处的函数值 $f(a)$比它在点 $x=a$ 附近其他点的函数值都小，$f'(a)=0$；而且在点 $x=a$ 附近的左侧 $f'(x)<0$，右侧 $f'(x)>0$，把 a 点叫做_____，$f(a)$叫做_____.

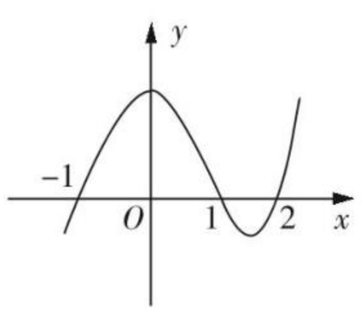
2. **极大值**：函数 $f(x)$在点 $x=b$ 处的函数 $f(b)$比它在 $x=b$ 附近的其他点的函数值都大，$f'(b)=0$；而且在点 $x=b$ 附近的左侧 $f'(x)>0$，右侧 $f'(x)<0$，把 b 点叫做_____，$f(b)$叫做_____.

3. **极值**：极小值点、极大值点统称为_____，极大值、极小值统称为_____.

题点知识巩固

知识点一　求函数的极值

1.（**2019·山东武城期中**）设函数 $f(x)$在 **R** 上可导，其导函数为 $f'(x)$，且函数 $y=(2-x)f'(x)$的图象如图所示，则下列结论中一定成立的是（　　）



A. 函数 $f(x)$有极大值 $f(1)$和极小值 $f(-1)$

B. 函数 $f(x)$有极大值 $f(1)$和极小值 $f(2)$

C. 函数 $f(x)$有极大值 $f(2)$和极小值 $f(1)$

D. 函数 $f(x)$有极大值 $f(-1)$和极小值 $f(2)$

2.（**2019·北京朝阳区期末**）已知函数 $f(x)=(x^2-x-1)e^x$.

(1)求曲线 $y=f(x)$在点$(1,f(1))$处的切线方程；

(2)求函数 $f(x)$的极值.

知识点二　已知函数的极值求参数

3.（**2019·四川棠湖月考**）已知函数 $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$，当 $x=-1$ 时，$f(x)$的极大值为 7；当 $x=3$ 时，$f(x)$有极小值. 求：

(1)a,b,c 的值；

(2)函数 $f(x)$的极小值.

4.（**2018·北京卷**）设函数 $f(x)=[ax^2-(3a+1)x+3a+2]e^x$.

(1)若曲线 $y=f(x)$在点$(2,f(2))$处的切线斜率为 0，求 a；

(2)若 $f(x)$在 $x=1$ 处取得极小值，求 a 的取值范围.

知识点三　函数极值的应用

5. 已知函数 $f(x)=x^3-ax^2+4$，若 $f(x)$的图象与 x 轴的正半轴有两个不同的交点，则实数 a 的取值范围是（　　）

A. $(1,+\infty)$　　B. $\left(\frac{3}{2},+\infty\right)$

C. $(2,+\infty)$　　D. $(3,+\infty)$

6.（**2019·安徽定远月考**）已知函数 $f(x)=ax^3+bx^2-3x$ $(a,b\in\mathbf{R})$，在点$(1,f(1))$处的切线方程为 $y+2=0$.

(1)求函数 $f(x)$的解析式；

(2)若方程 $f(x)=m$ 有三个根，求 m 的取值范围.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

提能达标过关

一、选择题

1.（**2019·山西大学附中月考**）函数 $y=x^3-3x^2-9x(-2<x<2)$ 有（　　）

A. 极大值 5，无极小值

B. 极小值 -27，无极大值

C. 极大值 5，极小值 -27

D. 极大值 5，极小值 -11

2.（**2019·四川遂宁月考**）函数 $f(x)=\frac{1}{2}x^2-a\ln x(a\in\mathbf{R})$，若 $f(x)$ 在 $x=2$ 处取得极值，则 a 的值为（　　）.

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

3.（**2019·吉林舒兰月考**）已知函数 $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$，下列结论中错误的是（　　）

A. $\exists x_0\in\mathbf{R}, f(x_0)=0$

B. 函数 $y=f(x)$ 的图象是中心对称图形

C. 若 x_0 是 $f(x)$ 的极小值点，则 $f(x)$ 在区间 $(-\infty,x_0)$ 上单调递减

D. 若 x_0 是 $f(x)$ 的极值点，则 $f'(x_0)=0$

4. 已知函数 $f(x)=x^3+ax^2+bx+a^2$ 在 $x=1$ 处有极值 10，则 $f(2)$ 等于（　　）

A. 11　　B. 18

C. 11 或 18　　D. 17 或 18

5.（**2019·山西新绛二中月考**）若函数 $f(x)=x^3-6bx+3b$ 在 $(0,1)$ 内有极小值，则实数 b 的取值范围是（　　）

A. $(0,1)$　　B. $(-\infty,1)$

C. $(0,+\infty)$　　D. $\left(0,\frac{1}{2}\right)$

二、填空题

6. 已知函数 $f(x)=\frac{1}{3}x^3-\frac{3}{2}x^2+2x-\frac{2}{3}$，则函数 $f(x)$ 的极小值为_____.

7. 已知函数 $f(x)=\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}(b-1)x^2+b^2x$（$b$ 为常数）在 $x=1$ 处取得极值，则 b 的值为_____.

8. 函数 $f(x)=x^3-3x^2+1$ 在 $x=$_____处取得极小值.

三、解答题

9.（**2019·泉港一中期末**）已知函数 $f(x)=x^3-3ax^2+2bx$ 在点 $x=1$ 处有极小值 -1；试确定 a,b 的值，并求出 $f(x)$ 的单调区间.

10.（**2019·辽宁沈阳期末**）设函数 $f(x)=\ln x+\frac{m}{x}, m\in\mathbf{R}$.

(1) 当 $m=\mathrm{e}$（e 为自然对数的底数）时，求 $f(x)$ 的极小值；

(2) 若 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上为单调增函数，求 m 的取值范围.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

第 18 课时　3.3.3　函数的最大(小)值与导数

基础知识梳理

1. 函数在闭区间$[a,b]$上的最值

如果在区间$[a,b]$上函数$y=f(x)$的图象是一条连续不断的曲线，则该函数在$[a,b]$上一定能够取得_____和_____，并且函数的最值必在_____或_____取得.

2. 求函数在$[a,b]$上最值的步骤

(1)求函数$y=f(x)$在_____；

(2)将函数$y=f(x)$的_____与_____$f(a)$，$f(b)$比较，其中最大的一个是_____，最小的一个是_____.

题点知识巩固

知识点一　求函数的最值

1.(**2019·吉林白山期末**)函数$f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$在$(0,e^2]$上的最大值是_____.

2.(**2018·江苏卷**)若函数$f(x)=2x^3-ax^2+1(a\in\mathbf{R})$在$(0,+\infty)$内有且只有一个零点，则$f(x)$在$[-1,1]$上的最大值与最小值的和为_____.

知识点二　含参数的最值问题

3.(**2019·广东潮州质检**)函数$f(x)=x^3-3x^2+m$在区间$[-1,1]$上的最大值是2，则常数$m=$　　(　　)

A. -2　　B. 0

C. 2　　D. 4

4. 函数$f(x)=x^2+2ax+1$在$[0,1]$上的最小值为$f(1)$，则a的取值范围是_____.

知识点三　与函数最值有关的综合问题

5.(**2019·福建罗源月考**)若函数$f(x)=x\ln x+1$的图象总在直线$y=ax$的上方，则实数a的取值范围是　　(　　)

A. $(-\infty,1)$　　B. $(0,+\infty)$

C. $(1,+\infty)$　　D. $(-\infty,0)$

6.(**2019·山东济南期末**)设函数$f(x)=2x^3+3ax^2+3bx+8c$在$x=1$及$x=2$时取得极值.

(1)求a,b的值；

(2)若对于任意的$x\in[0,3]$，都有$f(x)<c^2$成立，求c的取值范围.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

提能达标过关

一、选择题

1. 函数 $y=x^4-4x+5$ 在区间$[-2,3]$上的最小值为（　　）

A. 0　　B. 2

C. 37　　D. 74

2.（**2019·湖北孝感八校期末**）函数 $f(x)=-\frac{1}{3}x^3+4x-4$ 在$[0,3]$上的最大值和最小值分别为（　　）

A. $2,-\frac{28}{3}$　　B. $\frac{4}{3},-\frac{28}{3}$

C. $\frac{4}{3},-4$　　D. $2,-1$

3. 函数 $f(x)=x+2\cos x$ 在 $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$上取得最大值时，$x$ 的值为（　　）

A. 0　　B. $\frac{\pi}{6}$

C. $\frac{\pi}{3}$　　D. $\frac{\pi}{2}$

4.（**2019·六安一中月考**）已知函数 $f(x)=e^{2-x}+x$，$x\in[1,3]$，则下列说法正确的是（　　）

A. 函数 $f(x)$的最大值为 $3+\frac{1}{e}$

B. 函数 $f(x)$的最小值为 $3+\frac{1}{e}$

C. 函数 $f(x)$的最大值为 3

D. 函数 $f(x)$的最小值为 3

5.（**2019·重庆铜梁月考**）若 $x=1$ 是函数 $f(x)=ax^2+\ln x$ 的一个极值点，则当 $x\in\left[\frac{1}{e},e\right]$时，$f(x)$的最小值为（　　）

A. e^2-1　　B. $-e+\frac{1}{e}$

C. $-\frac{1}{2e^2}-1$　　D. $1-\frac{e^2}{2}$

二、填空题

6. 已知函数 $f(x)=\sin x+\cos x$，当 $x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$时，函数的最大值、最小值分别为_____.

7. 设函数 $f(x)=x^3-\frac{1}{2}x^2-2x+5$，当 $x\in[-1,2]$时，$f(x)<m$ 恒成立，则实数 m 的取值范围是_____.

8. 已知函数 $f(x)=(x^2-2x)e^x$，下列说法中正确的有_____.

①$f(x)$在 **R** 上有两个极值点；

②$f(x)$在 $x=\sqrt{2}$处取得最大值；

③$f(x)$在 $x=\sqrt{2}$处取得最小值；

④$f(x)$在 $x=\sqrt{2}$处取得极小值；

⑤函数 $f(x)$在 **R** 上有三个不同的零点.

三、解答题

9. 已知函数 $f(x)$的导数 $f'(x)=3x^2-2x$，$f(0)=1$，求函数 $f(x)$在$[-1,1]$上的最值.

10.（**2019·全国卷Ⅲ**）已知函数 $f(x)=2x^3-ax^2+2$.

(1)讨论 $f(x)$的单调性；

(2)当 $0<a<3$ 时，记 $f(x)$在区间$[0,1]$的最大值是 M，最小值为 m，求 $M-m$ 的取值范围.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

3.4　生活中的优化问题举例

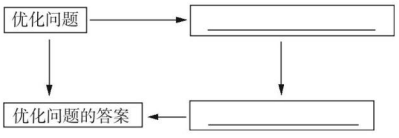
第 19 课时　生活中的优化问题举例

基础知识梳理

1. 优化问题

生活中经常遇到求_____、_____、_____等问题，这些问题通常称为优化问题.

2. 利用导数解决优化问题的基本思路

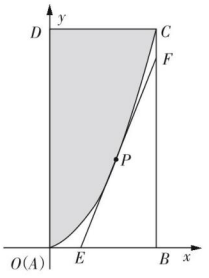


题点知识巩固

知识点一　面积、容积最大、最小问题

1.（**2019·广西桂林期末**）某箱子的容积与底面边长 x 的关系为 $V(x)=\frac{1}{2}x^2(60-x)(0<x<60)$，则当箱子的容积最大时，箱子的底面边长为_____.

2.（**2019·罗源一中月考**）如图，有一个长方形地块 $ABCD$，边 AB 为 2 km，AD 为 4 km，地块的一角是湿地（图中阴影部分），其边缘线 AC 是以直线 AD 为对称轴，以 A 为顶点的抛物线的一部分，现要铺设一条过边缘线 AC 上一点 P 的直线型隔离带 EF，E，F 分别在边 AB，BC 上（隔离带不能穿越湿地，且占地面积忽略不计），设点 P 到边 AD 的距离为 t（单位：km），$\triangle BEF$ 的面积为 S（单位：km^2）.



（1）求 S 关于 t 的函数解析式，并指出该函数的定义域；

（2）问：按上述要求隔离出的 $\triangle BEF$ 面积 S 能否达到 3 km^2？并说明理由.（说明：解答利用如图建立的平面直角坐标系）

知识点二　用料最省问题

3. 建一个面积为 512 平方米的矩形堆料场，为充分利用已有资源，可以利用原有的墙壁作为一边，其他三边需要砌新的墙壁. 要使砌墙壁所用的材料最省则长为_____米，宽为_____米.

4. 做一个无盖的圆柱形水桶，若要使水桶的体积是 27π，且用料最省，则水桶的底面半径为_____.

知识点三　利润最大问题

5. 某商场从生产厂家以每件 20 元购进一批商品，若该商品零售价为 P 元，销量 Q（单位：件）与零售价 P（单位：元）有如下关系：$Q=8\ 300-170P-P^2$，则该商品零售价定为_____元时利润最大，利润的最大值为_____元.

6.（**2019·安平中学月考**）某个体户计划经销 A，B 两种商品，据调查统计，当投资额为 $x(x\geqslant 0)$ 万元时，在经销 A，B 商品中所获得的收益分别为 $f(x)$ 万元与 $g(x)$ 万元，其中 $f(x)=a(x-1)+2$，$g(x)=6\ln(x+b)(a>0,b>0)$. 已知投资额为零时收益为零.

（1）求 a，b 的值；

（2）如果该个体户准备投入 5 万元经销这两种商品，请你帮他制定一个资金投入方案，使他能获得最大收益.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

提能达标过关

一、选择题

1. 已知某厂生产 x 件产品成本为 $C=25\,000+200x+\frac{1}{40}x^2$，要使平均成本最低，则应生产产品（　　）

A. 1 000 件　　B. 1 200 件

C. 1 500 件　　D. 1 800 件

2. 已知某生产厂家的年利润 y（单位：万元）与年产量 x（单位：万件）的函数关系式为 $y=-\frac{1}{3}x^3+81x-234$，则使该生产厂家获取最大年利润的年产量为（　　）

A. 13 万件　　B. 11 万件

C. 9 万件　　D. 7 万件

3. 某工厂要建造一个长方体状的无盖箱子，其容积为 48 m^3，高为 3 m，如果箱底每 1 m^2 的造价为 15 元，箱壁每 1 m^2 的造价为 12 元，则箱子的最低总造价为（　　）

A. 900 元　　B. 840 元

C. 818 元　　D. 816 元

4. 若一球的半径为 r，则内接于球的圆柱的侧面积最大为（　　）

A. $2\pi r^2$　　B. πr^2

C. $4\pi r^2$　　D. $\frac{1}{2}\pi r^2$

5. （**2019·湖北孝感期末**）某品牌小汽车在匀速行驶中每小时的耗油量 y（升）关于行驶速度 x（千米/时）的函数解析式为 $y=\frac{1}{81\,000}x^3-\frac{1}{10}x+18(0<x\leqslant 120)$. 若要使该汽车行驶 200 千米时的油耗最低，则汽车匀速行驶的速度应为（　　）

A. 60 千米/时　　B. 80 千米/时

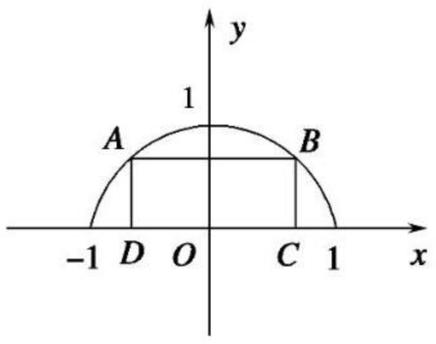
C. 90 千米/时　　D. 100 千米/时

二、填空题

6. 某公司一年购买某种货物 400 吨，每次都购买 x 吨，运费为 4 万元/次，一年的总存储费为 $4x$ 万元，要使一年的总运费与总存储费之和最小，则 $x=$_____吨.

7. 用边长为 120 cm 的正方形铁皮做一无盖水箱，先在四角处分别截去一个小正方形，然后把四边翻转 90°角，再焊接成水箱，则水箱的最大容积为_____ cm^3.

8. 如图，内接于抛物线 $y=1-x^2$ 的矩形 $ABCD$ 中，A，B 在抛物线上运动，C，D 在 x 轴上运动，此矩形的面积的最大值是_____.



三、解答题

9. （**2019·山西运城月考**）某地建一座桥，两端的桥墩已建好，这两墩相距 640 米，余下工程只需要建两端桥墩之间的桥面和桥墩，经预测，一个桥墩的工程费用为 256 万元，距离为 x 米的相邻两墩之间的桥面工程费用为 $(2+\sqrt{x})x$ 万元，假设桥墩等距离分布，所有桥墩都视为点，且不考虑其他因素，设需要新建 n 个桥墩，记余下工程的费用为 y 万元.

(1)试写出 y 关于 x 的函数关系式；(注意：$(n+1)x=640$)

(2)需新建多少个桥墩才能使 y 最小？

10. （**2019·广东佛山月考**）随着人们生活水平的不断提高，人们对餐饮服务行业的要求也越来越高，由于工作繁忙无法抽出时间来享受美味，这样网上外卖订餐应运而生. 若某商家的一款外卖便当每月的销售量 y（单位：千盒）与销售价格 x（单位：元/盒）满足关系式 $y=\frac{a}{x-12}+4(x-16)^2$，其中 $12<x<16$，a 为常数，已知销售价格为 14 元/盒时，每月可售出 21 千盒.

(1)求 a 的值；

(2)假设该款便当的食物材料、员工工资、外卖配送费等所有成本折合为每盒 12 元（只考虑销售出的便当盒数），试确定销售价格 x 的值，使该店每月销售便当所获得的利润最大（结果保留一位小数）.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

阶段评估 3

（时间：60 分钟　满分：100 分）

一、选择题（每小题 5 分，共 30 分）

1.（**2019·安徽定远月考**）设 $f(x)=x^2-2x-4\ln x$，则 $f(x)$ 的递减区间为（　　）

A. $(-1,2)$　　B. $(0,2)$

C. $(-\infty,-1),(2,+\infty)$　　D. $(2,+\infty)$

2.（**2019·安徽蚌埠期末**）曲线 $f(x)=2x-e^x$ 在点 $(0,f(0))$ 处的切线方程是（　　）

A. $x-y+1=0$　　B. $x-y-1=0$

C. $x-y=0$　　D. $2x-y-1=0$

3.（**2019·山西大学附中月考**）若函数 $f(x)=\sin x-kx$ 存在极值，则实数 k 的取值范围是（　　）

A. $(-1,1)$　　B. $[0,1)$

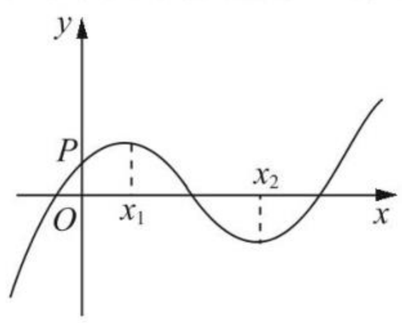
C. $(1,+\infty)$　　D. $(-\infty,-1)$

4.（**2019·河北安平月考**）设函数 $f(x)=\frac{1}{2}x^2-9\ln x$ 在区间 $[a-1,a+1]$ 上单调递减，则实数 a 的取值范围是（　　）

A. $(1,2]$　　B. $(1,3)$

C. $(1,2)$　　D. $(1,3]$

5.（**2019·黑龙江哈尔滨期末**）函数 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ 的图象如图所示，则下列结论成立的是（　　）



A. $a>0,b<0,c>0,d>0$

B. $a>0,b<0,c<0,d>0$

C. $a<0,b<0,c>0,d>0$

D. $a>0,b>0,c>0,d<0$

6. 已知对任意 $m\in\mathbf{R}$，直线 $x+y+m=0$ 都不是 $f(x)=x^3-3ax(a\in\mathbf{R})$ 的切线，则 a 的取值范围是（　　）

A. $a>\frac{1}{3}$　　B. $a<\frac{1}{3}$

C. $a\geqslant\frac{1}{3}$　　D. $a\leqslant\frac{1}{3}$

二、填空题（每小题 5 分，共 20 分）

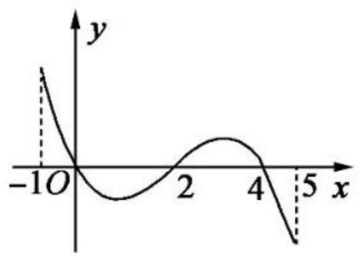
7.（**2019·河北邯郸月考**）曲线 $f(x)=\frac{1-2\ln x}{x}$ 在点 $P(1,f(1))$ 处的切线方程为_____.

8.（**2019·南山中学月考**）函数 $f(x)=x^3-3x-a$ 有三个不同的零点，则 a 的取值范围是_____.

9. 已知函数 $f(x)=2x^2-xf'(2)$，则函数 $f(x)$ 的图象在点 $(2,f(2))$ 处的切线方程是_____.

10. 已知函数 $f(x)$ 的定义域 $[-1,5]$，部分对应值如下表，$f(x)$ 的导函数 $y=f'(x)$ 的图象如图所示，

x	-1	0	2	4	5
$f(x)$	1	2	1.5	2	1



下列关于函数 $f(x)$ 的命题：

①函数 $f(x)$ 的值域为 $[1,2]$；

②函数 $f(x)$ 在 $[0,2]$ 上是减函数；

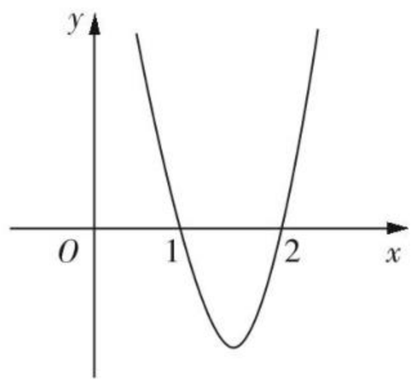
③如果当 $x\in[-1,t]$ 时，$f(x)$ 的最大值是 2，那么 t 的最大值为 4；

④当 $1<a<2$ 时，函数 $y=f(x)-a$ 最多有 4 个零点.

其中正确的序号是_____.

三、解答题（共 50 分）

11.（12 分）（**2019·民族中学月考**）已知函数 $f(x)=ax^3+bx^2+cx$ 在点 x_0 处取得极大值 5，其导函数 $y=f'(x)$ 的图象经过点 $(1,0),(2,0)$，如图所示.



（1）求 x_0 及 a,b,c 的值；

（2）求函数 $f(x)$ 在区间 $[0,3]$ 上的最大值和最小值.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

12.(12 分)已知函数 $f(x)=\frac{x}{4}+\frac{a}{x}-\ln x-\frac{3}{2}$,其中 $a\in\mathbf{R}$,且曲线 $y=f(x)$在点$(1,f(1))$处的切线垂直于直线 $y=\frac{1}{2}x$.

(1)求 a 的值;

(2)求函数 $f(x)$的单调区间与极值.

13.(13 分)已知函数 $f(x)=\frac{1}{2}x^2-a\ln x(a\in\mathbf{R})$.

(1)若函数 $f(x)$的图象在 $x=2$ 处的切线方程为$y=x+b$,求 a,b 的值;

(2)若函数 $f(x)$在$(1,+\infty)$上为增函数,求实数 a 的取值范围.

14.(13 分)(**2019·辽宁沈阳期末**)已知函数 $f(x)=2x+\frac{1}{x^2}$,直线 $l:y=kx-1$.

(1)求函数 $f(x)$的极值;

(2)求证:对于任意 $k\in\mathbf{R}$,直线 l 都不是曲线 $y=f(x)$的切线.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

阶段测试一

（第一章　常用逻辑用语）

时间：120 分钟　满分：150 分

一、选择题（本大题共 12 小题，每小题 5 分，共60 分）

1.（**2019·湖南邵东月考**）设 p：实数 x,y 满足 $x>1$ 且 $y>1$，q：实数 x,y 满足 $x+y>2$，则 p 是 q 的　（　）

A. 充分不必要条件　　B. 必要不充分条件

C. 充要条件　　D. 既不充分也不必要条件

2.（**2019·吉林白山期末**）命题“$\forall x>1, x^2-x>0$”的否定是　（　）

A. $\exists x_0\leqslant 1, x_0^2-x_0>0$　　B. $\exists x_0>1, x_0^2-x_0\leqslant 0$

C. $\forall x>1, x^2-x\leqslant 0$　　D. $\forall x\leqslant 1, x^2-x>0$

3.（**2019·江西宜春月考**）已知 $x,y\in\mathbf{R}$，那么“$x>y$”的充分必要条件是　（　）

A. $2^x>2^y$　　B. $\lg x>\lg y$

C. $\frac{1}{x}>\frac{1}{y}$　　D. $x^2>y^2$

4.（**2019·安徽阜阳三中期中**）下列有关命题的说法中错误的是　（　）

A. 若“$p\wedge q$”为真命题，则 p、q 均为真命题

B. 若命题 p：“$\exists x_0\in\mathbf{R}, x_0^2\geqslant 0$”，则命题 $\neg p$ 为“$\forall x\in\mathbf{R}, x^2<0$”

C. “$x>2$”是“$x\geqslant 0$”的充分不必要条件

D. “$\sin x=\frac{1}{2}$”的必要不充分条件是“$x=\frac{\pi}{6}$”

5.（**2019·河北张家口期末**）已知命题 p：$2^{|x-1|}\geqslant 4$，命题 q：$x>a$，且 $\neg q$ 是 $\neg p$ 的必要不充分条件，则实数 a 的取值范围是　（　）

A. $[3,+\infty)$　　B. $(-\infty,3]$

C. $[-1,+\infty)$　　D. $(-\infty,-1]$

6. 设 α、β 是两个不同的平面，l、m 为两条不同的直线，命题 p：若 $\alpha\parallel\beta, l\subset\alpha, m\subset\beta$，则 $l\parallel m$；命题 q：$l\parallel\alpha, m\perp l, m\subset\beta$，则 $\alpha\perp\beta$. 则下列命题为真命题的是　（　）

A. p 或 q　　B. p 且 q

C. 非 p 或 q　　D. p 且非 q

7. 下列有关命题的说法正确的是　（　）

A. 命题“若 $x^2=4$，则 $x=2$”的否命题为：“若 $x^2=4$，则 $x\neq 2$”

B. “$x=2$”是“$x^2-6x+8=0$”的必要不充分条件

C. 命题“若 $x=y$，则 $\cos x=\cos y$”的逆否命题为真命题

D. 命题“存在 $x\in\mathbf{R}$，使得 $x^2+x+3>0$”的否定是：“对于任意的 $x\in\mathbf{R}$，均有 $x^2+x+3<0$”

8. 已知命题 p：$\exists x\in(-\infty,0), 2^x<3^x$，命题 q：$\forall x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，$\tan x>\sin x$，则下列命题为真命题的是　（　）

A. $(\neg p)\wedge q$　　B. $p\wedge q$

C. $p\wedge(\neg q)$　　D. $p\vee(\neg q)$

9.（**2019·临汾一中期末**）下列命题中正确的是　（　）

A. 若“$p\vee q$”为真命题，则“$p\wedge q$”为真命题

B. 已知 $a,b,m\in\mathbf{R}$，命题“若 $am^2<bm^2$，则 $a<b$”为假命题

C. l 为直线，α,β 为两个不同的平面，若 $l\perp\beta,\alpha\perp\beta$，则 $l\parallel\alpha$

D. 命题“$\forall x\in\mathbf{R}, 2^x>0$”的否定是“$\exists x_0\in\mathbf{R}, 2^{x_0}\leqslant 0$”

10. 设 a,b,c 是空间三条直线，α,β 是空间两个平面，则下列命题中，逆命题不成立的是　（　）

A. 当 $c\perp\alpha$ 时，若 $c\perp\beta$，则 $\alpha\parallel\beta$

B. 当 $b\subset\alpha$ 时，若 $b\perp\beta$，则 $\alpha\perp\beta$

C. 当 $b\subset\alpha$，且 c 是 a 在 α 内的射影时，若 $b\perp c$，则 $a\perp b$

D. 当 $b\subset\alpha$，且 $c\not\subset\alpha$ 时，$c\parallel\alpha$，则 $b\parallel c$

11.（**2019·河北衡水调研**）“$(x+2)(x-a)<0$”是“$0<x<5$”的必要不充分条件，则实数 a 的取值范围是　（　）

A. $(-2,5)$　　B. $[-2,5]$

C. $[5,+\infty)$　　D. $(5,+\infty)$

12. 下列命题中错误的是　（　）

A. 命题“若 $x^2-5x+6=0$，则 $x=2$”的逆否命题是“若 $x\neq 2$，则 $x^2-5x+6\neq 0$”

B. 对命题 p：$\exists x\in\mathbf{R}$，使得 $x^2+x+1<0$，则 $\neg p$：$\forall x\in\mathbf{R}$，则 $x^2+x+1\geqslant 0$

C. 若实数 $x,y\in[0,1]$，则满足：$x^2+y^2>1$ 的概率是 $1-\frac{\pi}{4}$

D. 如果平面 $\alpha\perp$ 平面 β，过 α 内任意一点作交线的垂线，那么此垂线必垂直于 β

二、填空题（本大题共 4 小题，每小题 5 分，共20 分）

13.（**2019·辽宁沈阳期末**）命题“若 $x^2<1$，则 $-1<x<1$”的否命题为_____（填“真”或“假”）.

14. 已知两个命题 $r(x)$：$\sin x+\cos x>m$，$s(x)$：$x^2+mx+1>0$，如果对 $\forall x\in\mathbf{R}$，$r(x)\wedge s(x)$ 为假，$r(x)\vee s(x)$ 为真，那么实数 m 的取值范围是_____.

15. 已知下列四个命题：

p_1：若直线 l 和平面 α 内的无数条直线垂直，则 $l\perp\alpha$；

p_2：若 $f(x)=2^x-2^{-x}$，则 $\forall x\in\mathbf{R}, f(-x)=-f(x)$；

p_3：若 $f(x)=x+\frac{1}{x+1}$，则 $\exists x_0\in(0,+\infty), f(x_0)=1$；

p_4：在 $\triangle ABC$ 中，若 $A>B$，则 $\sin A>\sin B$.

其中真命题的个数是_____.

16. 有以下四个命题：

① $\exists x_0\in\mathbf{N}, x_0^{\frac{1}{2}}=x_0$ 成立；

② $\forall x>0, 2^x>x^2$ 恒成立；

③若 p：$m<-2$ 或 $m>6$；q：$y=x^2+mx+m+3$ 有两个不同的零点，则 p 是 q 的充要条件；

④若命题 $\neg p$：$\forall x\in\mathbf{R}$，$\sin x\leqslant 1$，则 p：$\forall x\in\mathbf{R}$，$\sin x>1$.

其中，所有真命题的序号是_____.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

三、解答题(本大题共 6 小题,共 70 分)

17.(10 分)(**2019·棠湖中学期末**)已知命题 $p:x^2-4x-5\leqslant 0$,命题 $q:x^2-2x+1-m^2\leqslant 0(m>0)$.

(1)若 p 是 q 的充分条件,求实数 m 的取值范围;

(2)若 $m=5$,$p\vee q$ 为真命题,$p\wedge q$ 为假命题,求实数 x 的取值范围.

18.(12 分)已知函数 $f(x)=\dfrac{x^2-x+1}{x-1}(x\geqslant 2)$,$g(x)=a^x$ $(a>1,x\geqslant 2)$.

(1)若 $\exists x_0\in[2,+\infty)$,使 $f(x_0)=m$ 成立,求实数 m 的取值范围;

(2)若 $\forall x_1\in[2,+\infty)$,$\exists x_2\in[2,+\infty)$,使得 $f(x_1)=g(x_2)$,求实数 a 的取值范围.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

19.(12 分)(**2019 · 湖北黄梅期中**)设 $p:\frac{3x-1}{x-2}\leqslant 1$,$q:x^2-(2a+1)x+a(a+1)<0$,若 $\neg q$ 是 $\neg p$ 的必要不充分条件,求实数 a 的取值范围.

20.(12 分)设 $x,y\in\mathbf{R}$,求证:$|x+y|=|x|+|y|$ 成立的充要条件是 $xy\geqslant 0$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

21.(12 分)老师上课时在黑板上写出了三个集合：$A=\left\{x\left|\frac{\square x-1}{x}<0\right.\right\}$，$B=\{x|x^2-3x-4\leqslant 0\}$，$C=\{x|\log_{\frac{1}{2}}x>1\}$，然后叫小明、小红、小强三位同学到讲台上，并将“□”中的数告诉了他们，要求他们各用一句话来描述，以便同学们能确定该数. 以下是他们三人的描述：

小明：此数为小于 6 的正整数；

小红：“$x\in A$”是“$x\in B$”的充分而不必要条件；

小强：“$x\in A$”是“$x\in C$”的必要而不充分条件.

若老师说三位同学说的都对，你能确定“□”中的数吗？

22.(12 分)已知命题：“$\exists x\in\{x|-1<x<1\}$，使不等式 $x^2-x-m=0$ 成立”是真命题.

(1)求实数 m 的取值集合 M；

(2)设不等式 $(x-a)(x+a-2)<0$ 的解集为 N，若 $x\in N$ 是 $x\in M$ 的必要条件，求 a 的取值范围.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

阶段测试二

（第二章　圆锥曲线与方程）

时间：120 分钟　满分：150 分

一、选择题（本大题共 12 小题，每小题 5 分，共60 分）

1.（**2019 · 福建长乐二中期末**）“$1<m<2$”是“方程$\frac{x^2}{m-1}+\frac{y^2}{3-m}=1$ 表示的曲线是焦点在 y 轴上的椭圆”的（　　）

A. 充分不必要条件

B. 必要不充分条件

C. 充要条件

D. 既不充分也不必要条件

2.（**2019 · 福建闽侯期末**）双曲线 $x^2-\frac{y^2}{4}=1$ 的渐近线方程和离心率分别是（　　）

A. $y=\pm 2x;e=\sqrt{5}$　　B. $y=\pm\frac{1}{2}x;e=\sqrt{5}$

C. $y=\pm\frac{1}{2}x;e=\sqrt{3}$　　D. $y=\pm 2x;e=\sqrt{34}$

3. 已知抛物线 $y=ax^2(a>0)$ 的焦点到准线的距离为 2，则 $a=$（　　）

A. 4　　B. 2

C. $\frac{1}{4}$　　D. $\frac{1}{2}$

4. 已知抛物线 $y^2=2px(p>0)$ 的焦点是双曲线$\frac{x^2}{5+p}-\frac{y^2}{7+p}=1$ 的一个焦点，则 p 的值为（　　）

A. 4　　B. 6　　C. 8　　D. 12

5.（**2019 · 汕头金山中学月考**）已知双曲线 $C:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ $(a>0,b>0)$ 的左、右焦点分别为 $F_1(-c,0),F_2(c,0)$，P 是双曲线 C 右支上一点，且 $|PF_2|=|F_1F_2|$，若直线 PF_1 与圆 $x^2+y^2=a^2$ 相切，则双曲线的离心率为（　　）

A. $\frac{4}{3}$　　B. $\frac{5}{3}$　　C. 2　　D. 3

6. 抛物线 $y=x^2$ 的一组斜率为 2 的平行弦中点的轨迹是（　　）

A. 圆　　B. 椭圆

C. 抛物线　　D. 射线（不含端点）

7.（**2019 · 辽宁凌源期末**）在以 F_1,F_2 为左、右焦点的椭圆 $\frac{x^2}{m^2}+\frac{y^2}{m^2-9}=1(m>0)$ 上有一点 P，且满足 $m=\frac{2\sin\angle PF_1F_2}{\sin\angle PF_2F_1}$，则实数 m 的取值范围为（　　）

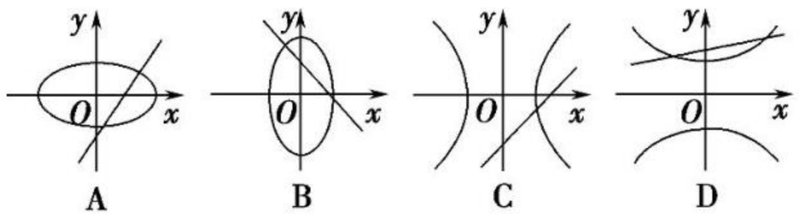
A. $3<m<6$　　B. $3<m\leqslant 4$

C. $m\geqslant 4$　　D. $m>3$

8.（**2019 · 衡水月考**）已知双曲线 $C:x^2-\frac{y^2}{3}=1$ 的右顶点为 A，过右焦点 F 的直线 l 与 C 的一条渐近线平行，交另一条渐近线于点 B，则 $S_{\triangle ABF}=$（　　）

A. $\sqrt{3}$　　B. $\frac{\sqrt{3}}{2}$　　C. $\frac{3\sqrt{3}}{4}$　　D. $\frac{3\sqrt{3}}{8}$

9. 已知 m,n 为两个不相等的非零实数，则方程 $mx-y+n=0$ 与 $nx^2+my^2=mn$ 所表示的曲线可能是（　　）



10.（**2019 · 江南十校月考**）已知 F_1,F_2 是椭圆和双曲线的公共焦点，P 是它们的一个公共点，且 $\angle F_1PF_2=\frac{\pi}{3}$，记椭圆和双曲线的离心率分别为 e_1,e_2，则 $\frac{1}{e_1}+\frac{\sqrt{3}}{e_2}$ 的最大值为（　　）

A. $\frac{2\sqrt{2}}{3}$　　B. $\frac{2\sqrt{3}}{3}$　　C. $2\sqrt{3}$　　D. $2\sqrt{2}$

11. 已知椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的离心率为$\frac{\sqrt{3}}{2}$，双曲线 $x^2-y^2=1$ 的渐近线与椭圆 C 有四个交点，以这四个交点为顶点的四边形的面积为 16，则椭圆 C 的方程为（　　）

A. $\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{2}=1$　　B. $\frac{x^2}{12}+\frac{y^2}{6}=1$

C. $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{4}=1$　　D. $\frac{x^2}{20}+\frac{y^2}{5}=1$

12. O 为坐标原点，双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 上有 A,B 两点满足 $OA\perp OB$，且点 O 到直线 AB 的距离为 c，则双曲线的离心率为（　　）

A. $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$　　B. $\sqrt{5}$　　C. $\frac{1+\sqrt{3}}{2}$　　D. $\sqrt{3}$

二、填空题（本大题共 4 小题，每小题 5 分，共20 分）

13.（**2019 · 山东武城期末**）双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的一条渐近线方程为 $4x-3y=0$，则双曲线的离心率为_____.

14. 若双曲线 $C:mx^2-y^2=1$（m 为常数）的一条渐近线与直线 $l:y=-3x-1$ 垂直，则双曲线 C 的焦距为_____.

15.（**2019 · 广东蕉岭月考**）抛物线 $C:y^2=4x$ 上到直线 $l:y=x$ 距离为$\frac{4}{5}$的点的个数为_____.

16.（**2019 · 湖南邵东月考**）有公共焦点 F_1,F_2 的椭圆和双曲线的离心率分别为 e_1,e_2，点 A 为两曲线的一个公共点，且满足 $\angle F_1AF_2=90°$，则$\frac{1}{e_1^2}+\frac{1}{e_2^2}$ 的值为_____.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

三、解答题(本大题共 6 小题,共 70 分)

17.(10 分)线段 AB 过 x 轴正半轴上一定点 $M(m,0)$,端点 A,B 到 x 轴的距离之积为 $2m$,以 x 轴为对称轴,过 A,O,B 三点作抛物线,求抛物线的方程.

18.(12 分)(**2019·绥德中学质检**)已知椭圆的两个焦点分别是 $F_1(-1,0)$和 $F_2(1,0)$,P 为椭圆上一点,且 $|F_1F_2|$ 是 $|PF_1|$ 和 $|PF_2|$ 的等差中项.

(1)求椭圆的方程;

(2)若点 P 在第三象限内,且 $\angle PF_1F_2=120°$,求 $\cos\angle F_1PF_2$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

19.(12 分)已知椭圆 Γ:$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的右焦点为 F,椭圆的上顶点和两焦点连线构成等边三角形且面积为$\sqrt{3}$.

(1)求椭圆 Γ 的标准方程;

(2)设 M 为椭圆 Γ 上一点,以 M 为圆心,MF 为半径作圆 M,若圆 M 与 y 轴相切,求点 M 的坐标.

20.(12 分)已知顶点在原点,焦点在 y 轴上的抛物线过点 $P(2,1)$.

(1)求抛物线的标准方程;

(2)过点 P 作直线 l 与抛物线有且只有一个公共点,求直线 l 的方程;

(3)过点 $Q(1,1)$作直线交抛物线于 A,B 两点,使得 Q 恰好平分线段 AB,求直线 AB 的方程.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

21.(12 分)(**2019·湖南湘东联考**)已知椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ $(a>b>0)$的左、右顶点分别为 A_1,A_2,以线段 A_1A_2 为直径的圆与直线 $bx-ay+2ab=0$ 相切,B 为上顶点.

(1)求椭圆 C 的离心率;

(2)当 $b=1$ 时,若不过 B 的动直线 l 与椭圆 C 交于 P,Q 两点,且 $\overrightarrow{BP}\cdot\overrightarrow{BQ}=0$,求证:直线 l 过定点,并求该定点的坐标.

22.(12 分)(**2019·内蒙古鄂尔多斯一中月考**)已知椭圆 C 的中心在坐标原点,左焦点为 $F_1(-1,0)$,点 $B\left(1,\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ 在椭圆 C 上.

(1)求椭圆 C 的方程;

(2)设过点 $F_2(1,0)$ 的斜率为 $k(k\neq0)$ 的直线 l 与椭圆 C 交于不同的两点 M,N,点 P 在 y 轴上,且 $|PM|=|PN|$,求点 P 纵坐标的取值范围.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

阶段测试三

（第三章　导数及其应用）

时间：120 分钟　满分：150 分

一、选择题（本大题共 12 小题，每小题 5 分，共60 分）

1.（**2019·四川棠湖月考**）若函数 $f(x)$ 满足 $f(x)=\frac{1}{3}x^3-f'(1)\cdot x^2-x$，则 $f'(1)$ 的值为　（　）

A. 1　　B. 2

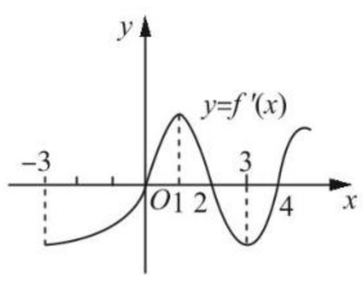
C. 0　　D. -1

2. 设 $f(x)$ 为可导函数，且 $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(3)-f(3+h)}{2h}=5$，则 $f'(3)=$　（　）

A. 5　　B. 10

C. -5　　D. -10

3. 如图所示是函数 $f(x)$ 的导函数 $f'(x)$ 的图象，则下列判断中正确的是　（　）



A. 函数 $f(x)$ 在区间 $(-3,0)$ 上是减函数

B. 函数 $f(x)$ 在区间 $(-3,2)$ 上是减函数

C. 函数 $f(x)$ 在区间 $(0,2)$ 上是减函数

D. 函数 $f(x)$ 在区间 $(-3,2)$ 上是单调函数

4.（**2019·临川一中月考**）直线 $y=kx+1$ 与曲线 $y=x^3+ax+b$ 相切于点 $A(1,3)$，则 a 的值等于　（　）

A. 2　　B. -1

C. 1　　D. -2

5.（**2019·广东蕉岭质检**）函数 $f(x)=x+\frac{1}{a\cdot x}$ 在 $(-\infty,-1)$ 上单调递增，则实数 a 的取值范围是　（　）

A. $(-\infty,0)\cup[1,+\infty)$　　B. $(-\infty,0)\cup(0,1]$

C. $(0,1]$　　D. $[1,+\infty)$

6.（**2019·黑龙江哈尔滨第三中学期末**）过点 $(0,-1)$ 作曲线 $f(x)=x\ln x$ 的切线，则切线方程为　（　）

A. $x+y+1=0$　　B. $x-y-1=0$

C. $x+2y+2=0$　　D. $2x-y-1=0$

7. 已知函数 $y=x^3-3x+c$ 的图象与 x 轴恰有两个公共点，则 $c=$　（　）

A. -2 或 2　　B. -9 或 3

C. -1 或 1　　D. -3 或 1

8.（**2019·山东淄博期末**）设 $f(x)$ 是定义在 **R** 上的奇函数，且 $f(2)=0$，当 $x>0$ 时，有 $\frac{xf'(x)-f(x)}{x^2}<0$ 恒成立，则不等式 $x^2f(x)>0$ 的解集是　（　）

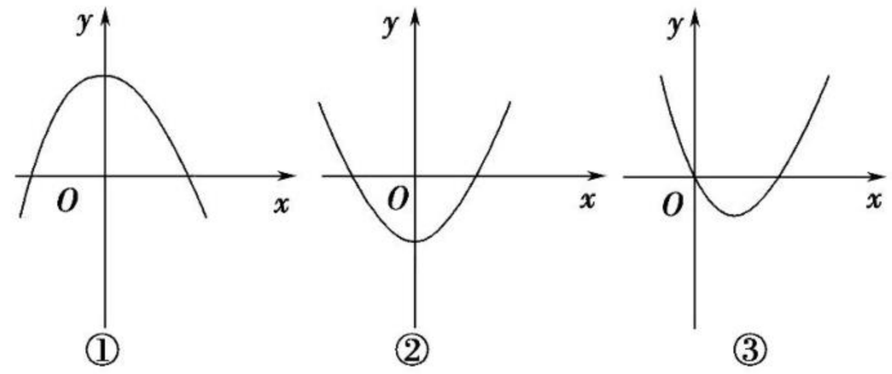
A. $(-2,0)\cup(2,+\infty)$

B. $(-2,0)\cup(0,2)$

C. $(-\infty,-2)\cup(2,+\infty)$

D. $(-\infty,-2)\cup(0,2)$

9. 下列图象中有一个是函数 $f(x)=\frac{1}{3}x^3+ax^2+(a^2-1)x+1$（$a\in\mathbf{R}$，$a\neq 0$）的导函数的图象，则 $f(-1)=$　（　）



A. $-\frac{1}{3}$　　B. $\frac{1}{3}$

C. $\frac{7}{3}$　　D. $-\frac{1}{3}$ 或 $\frac{5}{3}$

10. 做一个容积为 256 L 的方底无盖水箱，当它的高为多少分米时，最省材料　（　）

A. 4　　B. 5　　C. 6　　D. 8

11.（**2019·浙江联考**）设函数 $f(x)=\frac{2}{x}+\ln x$，则　（　）

A. $x=\frac{1}{2}$ 为 $f(x)$ 的极大值点

B. $x=\frac{1}{2}$ 为 $f(x)$ 的极小值点

C. $x=2$ 为 $f(x)$ 的极大值点

D. $x=2$ 为 $f(x)$ 的极小值点

12.（**2019·河南商丘月考**）设函数 $f(x)=e^x(\sin x-\cos x)$（$0\leqslant x\leqslant 4\pi$），则函数 $f(x)$ 的所有极大值之和为　（　）

A. e^{π}　　B. $e^{\pi}+e^{2\pi}$

C. $e^{\pi}-e^{3\pi}$　　D. $e^{\pi}+e^{3\pi}$

二、填空题（本大题共 4 小题，每小题 5 分，共20 分）

13.（**2019·南山中学月考**）函数 $y=x^2\cos x$ 在 $x=1$ 处的导数是_____.

14.（**2019·汕头金山月考**）曲线 $y=x^2+\frac{1}{x}$ 在点 $(1,2)$ 处的切线方程为_____.

15.（**2019·山东武城期中**）已知定义域为 **R** 的奇函数 $y=f(x)$ 的导函数为 $y=f'(x)$，当 $x\neq 0$ 时，$f'(x)+\frac{f(x)}{x}>0$，若 $a=\frac{1}{2}f\left(\frac{1}{2}\right)$，$b=-2f(-2)$，$c=\left(\ln\frac{1}{2}\right)f\left(\ln\frac{1}{2}\right)$，则 a,b,c 的大小关系正确的是_____.

16. 下列命题中正确的是_____.

①若 $f(x)$ 在 (a,b) 内是增函数，则对于任何 $x\in(a,b)$，都有 $f'(x)>0$；

②若在 (a,b) 内 $f'(x)$ 存在，则 $f(x)$ 必为单调函数；

③若在 (a,b) 内的任意 x 都有 $f'(x)>0$，则 $f(x)$ 在 (a,b) 内是增函数；

④若 $x\in(a,b)$，总有 $f'(x)<0$，则在 (a,b) 内 $f(x)<0$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

三、解答题(本大题共 6 小题,共 70 分)

17.(10 分)(**2019·四川遂宁月考**)设函数 $f(x)=\frac{e^x}{x}$.

(1)求 $f(x)$ 在点$(1,f(1))$处的切线方程;

(2)求函数 $f(x)$的单调区间.

18.(12 分)已知函数 $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ 在点 x_0 处取得极小值-5,其导函数$y=f'(x)$的图象经过点$(0,0)$,$(2,0)$.

(1)求 a,b 的值;

(2)求 x_0 及函数 $f(x)$的表达式.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

19.(12 分)(**2018 · 全国卷Ⅲ**)已知函数 $f(x)=\dfrac{ax^2+x-1}{e^x}$.

(1)求曲线 $y=f(x)$在点$(0,-1)$处的切线方程;

(2)证明:当 $a\geqslant 1$ 时,$f(x)+e\geqslant 0$.

20.(12 分)某种产品每件成本为 6 元,每件售价为 $x(x>6)$元,年销量为 u 万件.若已知$\dfrac{585}{8}-u$ 与$\left(x-\dfrac{21}{4}\right)^2$ 成正比,且售价为 10 元时,年销量为 28 万件.

(1)求年销售利润 y 关于 x 的函数关系式;

(2)求售价为多少时,年利润最大,并求出最大年利润.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

21.(12 分)(**2019·河北永年期末**)已知函数 $f(x)=\frac{4x^2-7}{2-x}$,$x\in[0,1]$.

(1)求 $f(x)$的单调区间和值域;

(2)设 $a\geqslant 1$,函数 $g(x)=x^3-3a^2x-2a$,$x\in[0,1]$.若对于任意 $x_1\in[0,1]$,总存在 $x_0\in[0,1]$,使得$g(x_0)=f(x_1)$成立,求 a 的取值范围.

22.(12 分)(**2019·湖南邵东月考**)已知函数 $f(x)=\frac{a\ln x}{x}$,$a\neq 0$.

(1)当 $a=1$ 时,求函数 $f(x)$的单调区间和极值;

(2)若不等式 $f(x)\leqslant 1-\frac{1}{x}$恒成立,求 a 的值.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

综合测试

时间：120 分钟　满分：150 分

一、选择题（本大题共 12 小题，每小题 5 分，共60 分）

1.（**2019 · 江西上饶月考**）已知 $a>0,b>0$，则“$\log_2 a>\log_2 b$”是“$\left(\frac{1}{3}\right)^a<\left(\frac{1}{3}\right)^b$”的　（　）

A. 充分不必要条件

B. 必要不充分条件

C. 充要条件

D. 既不充分也不必要条件

2.（**2019 · 河北张家口期末**）已知命题 p：$\exists x_0>0$，使得 $(x_0+2)e^{x_0}<1$，则 $\neg p$ 为　（　）

A. $\forall x\leqslant 0$，总有 $(x+2)e^x\geqslant 1$

B. $\exists x_0>0$，使得 $(x_0+2)e^{x_0}\leqslant 1$

C. $\forall x>0$，总有 $(x+2)e^x\geqslant 1$

D. $\exists x_0\leqslant 0$，使得 $(x_0+2)e^{x_0}\leqslant 1$

3. 曲线 $y=\frac{x}{x-2}$ 在点 $(1,-1)$ 处的切线方程为　（　）

A. $y=-2x+3$　　B. $y=-2x-3$

C. $y=-2x+1$　　D. $y=2x+1$

4.（**2019 · 安徽六安月考**）已知函数 $f(x)=\begin{cases}3^x,x<0,\\ m-x^2,x\geqslant 0,\end{cases}$ 给出下列两个命题：命题 p：“$\exists m\in(-\infty,0)$，方程 $f(x)=0$ 有解”，命题 q：“若 $m=\frac{1}{9}$，则 $f[f(-1)]=0$”，那么，下列命题为真命题的是　（　）

A. $p\wedge q$　　B. $(\neg p)\wedge q$

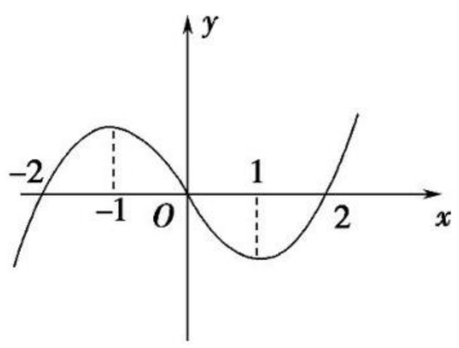
C. $p\wedge(\neg q)$　　D. $(\neg p)\wedge(\neg q)$

5. 双曲线 $x^2-\frac{y^2}{m}=1$ 的离心率大于 $\sqrt{2}$ 的充分必要条件是　（　）

A. $m>\frac{1}{2}$　　B. $m\geqslant 1$

C. $m>1$　　D. $m>2$

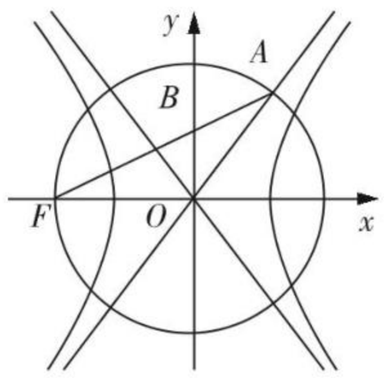
6. 在 **R** 上可导的函数 $f(x)$ 的图象如图所示，则关于 x 的不等式 $x\cdot f'(x)<0$ 的解集为　（　）



A. $(-\infty,-1)\cup(0,1)$　　B. $(-1,0)\cup(1,+\infty)$

C. $(-2,-1)\cup(1,2)$　　D. $(-\infty,-2)\cup(2,+\infty)$

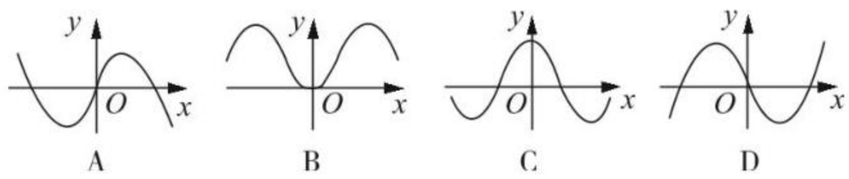
7.（**2019 · 湘北黄冈月考**）设双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的左焦点 $F(-2,0)$，圆 $x^2+y^2=c^2$ 与双曲线的一条渐近线交于点 A，直线 AF 交另一条渐近线于点 B，若 $\overrightarrow{FB}=\frac{1}{2}\overrightarrow{FA}$，则双曲线的方程为　（　）



A. $\frac{x^2}{3}-y^2=1$　　B. $\frac{x^2}{2}-\frac{y^2}{6}=1$

C. $\frac{x^2}{6}-\frac{y^2}{2}=1$　　D. $x^2-\frac{y^2}{3}=1$

8.（**2019 · 广东汕头期末**）设曲线 $f(x)=\sqrt{m^2+1}\cos x$ $(m\in\mathbf{R})$ 上任一点 (x,y) 处切线斜率为 $g(x)$，则函数 $y=x^2g(x)$ 的部分图象可以为　（　）



9. 设函数 $f(x)=ax^3+3x$，其图象在点 $(1,f(1))$ 处的切线 l 与直线 $x-6y-7=0$ 垂直，则直线 l 与坐标轴围成的三角形的面积为　（　）

A. 1　　B. 3

C. 9　　D. 12

10.（**2019 · 保定月考**）椭圆 C：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的离心率为 $\frac{1}{2}$，且过点 $\left(1,\frac{3}{2}\right)$，它的左右顶点分别为 A,B，若 P 点在椭圆上且 PA 斜率的取值范围是 $[-2,-1]$，则直线 PB 的斜率的取值范围是　（　）

A. $\left[\frac{1}{2},\frac{3}{4}\right]$　　B. $\left[\frac{3}{8},\frac{3}{4}\right]$

C. $\left[\frac{1}{2},1\right]$　　D. $\left[\frac{3}{4},1\right]$

11. 椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的离心率为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$，则双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的离心率为　（　）

A. $\frac{5}{4}$　　B. $\frac{\sqrt{5}}{2}$　　C. $\frac{2}{3}$　　D. $\frac{\sqrt{5}}{4}$

12.（**2019 · 广东佛山月考**）已知函数 $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{4}x+1(x\leqslant 1),\\ \ln x(x>1),\end{cases}$ 则方程 $f(x)=ax$ 恰有两个不同实数根时，实数 a 的取值范围是　（　）

A. $\left(0,\frac{1}{e}\right)$　　B. $\left(0,\frac{1}{4}\right)$

C. $\left[\frac{1}{4},\frac{1}{e}\right)$　　D. $\left[\frac{1}{4},e\right)$

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

二、填空题(本大题共 4 小题,每小题 5 分,共20 分)

13.(**2019·江苏省溧水月考**)记不等式 $x^2+x-6<0$ 的解集为集合 A,函数 $y=\lg(x-a)$ 的定义域为集合 B,若"$x\in A$"是"$x\in B$"的充分条件,则实数 a 的最大值为_____.

14.(**2019·安徽淮南二中月考**)已知点 A 是抛物线 $C:x^2=4y$ 的对称轴与准线的交点,点 B 是抛物线焦点,点 P 在抛物线上,且满足 $|PA|=m|PB|$,当 m 取最大值时,点 P 恰好在以 A,B 为焦点的双曲线上,则该双曲线的离心率为_____.

15.(**2019·福建罗源月考**)已知函数 $f(x)=\frac{1}{3}x^3+ax^2+(2a+3)x-1$ 在 **R** 上是增函数,则实数 a 的取值范围是_____.

16.曲线 C 是平面内与两个定点 $F_1(-1,0)$,$F_2(1,0)$ 的距离的积等于常数 $a^2(a>1)$ 的点的轨迹,给出下列三个结论:

①曲线 C 过坐标原点;

②曲线 C 关于坐标原点对称;

③若点 P 在曲线 C 上,则 $\triangle F_1PF_2$ 的面积不大于 $\frac{1}{2}a^2$.

其中,所有正确结论的序号是_____.

三、解答题(本大题共 6 小题,共 70 分)

17.(10 分)已知 k 为常数,命题 p:方程 $(k-1)x^2+(2k-1)y^2=(k-1)(2k-1)$ 表示椭圆;命题 q:方程 $(k-3)x^2+4y^2=4(k-3)$ 表示双曲线.

(1)若命题 p 为真命题,求 k 的取值范围;

(2)若命题 p、q 中恰有一个真命题,求 k 的取值范围.

18.(12 分)已知椭圆 $C:x^2+2y^2=4$.

(1)求椭圆 C 的离心率;

(2)设 O 为原点,若点 A 在直线 $y=2$ 上,点 B 在椭圆 C 上,且 $OA\perp OB$,求线段 AB 长度的最小值.

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

19.(12分)(**2019·吉林白山期末**)已知函数 $f(x)=(a-b)\cdot x^2-x-x\ln x$.

(1)若函数 $y=f(x)$ 在点 $(1,f(1))$ 处的切线与 x 轴平等,且 $f(1)=a$,求 a,b 的值;

(2)若 $a=1$,$f(x)\geqslant 0$ 对 $x\in(0,+\infty)$ 恒成立,求 b 的取值范围.

20.(12分)(**2018·全国卷Ⅱ**)已知函数 $f(x)=\frac{1}{3}x^3-a(x^2+x+1)$.

(1)若 $a=3$,求 $f(x)$ 的单调区间;

(2)证明:$f(x)$ 只有一个零点.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

21.(12 分)(**2019·唐山月考**)已知椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的左、右焦点分别为 F_1,F_2,过 F_1 任作一条与两坐标轴都不垂直的直线,与椭圆 C 交于 A,B 两点,且 $\triangle ABF_2$ 的周长为 8. 当直线 AB 的斜率为$\frac{3}{4}$时,AF_2 与 x 轴垂直.

(1)求椭圆 C 的标准方程;

(2)在 x 轴上是否存在定点 M,总能使 MF_1 平分 $\angle AMB$? 说明理由.

22.(12 分)已知函数 $f(x)=\ln x+x^2-ax,a\in\mathbf{R}$.

(1)若 $a=3$,求 $f(x)$的单调区间;

(2)若 $x>1,f(x)>0$,求 a 的取值范围.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

骄子之路®
the Road to Pride
让 学习更快乐，人生更精彩

答案与解析

与45分钟课时作业与单元测试配套使用

数学

选修1-1 RJ·A

班级：_____

姓名：_____

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

第一部分 课时作业

第一章 常用逻辑用语

1.1 命题及其关系

第 1 课时 1.1.1 命题 1.1.2 四种命题 1.1.3 四种命题间的相互关系

基础知识梳理

1.(1)命题 真命题 假命题
2.逆命题 否命题 逆否命题

题点知识巩固

1.A "红豆生南国"是陈述句,意思是"红豆生长在中国南方",这在唐代是事实,故本语句是命题,且是真命题;"春来发几枝"是疑问句,"愿君多采撷"是祈使句,"此物最相思"是感叹句,都不是命题.

2.A A 可以判断真假;B 不涉及真假;C 不能判断真假;D 也不涉及真假,故选 A.

3.C 由 α,β 为两个不同的平面,l,m 为两条不同的直线,且 $l\subset\alpha,m\subset\beta$,知:在 A 中,若 $l\parallel m$,则 $l\parallel\beta$ 或 $l\subset\beta$,故 A 错误;在 B 中,若 $l\perp m$,则 α 与 β 相交或平行,故 B 错误;在 C 中,若 $\alpha\parallel\beta$,则由面面平行的性质定理得 $l\parallel\beta$,故 C 正确;在 D 中,若 $\alpha\perp\beta$,则 l 与 m 相交、平行或异面,故 D 错误.故选 C.

4.B ①中,"若 $a^2+b^2=0$,则 a,b 全为 0"为真命题,则其逆否命题为真命题,①正确;②中,"全等三角形的面积相等"的否命题是:"不全等的三角形的面积不相等",是假命题,②错误;③中,"$x^2+2x+q=0$ 有实根"的条件为 $\Delta=4-4q\geqslant 0$,则 $q\leqslant 1$,所以原命题为真命题,则其逆否命题为真命题,③正确;④中,"矩形的对角线相等"的逆命题为"对角线相等的四边形是矩形"是假命题,④错误,故选 B.

5.**解**:由题意,$A=\{x|x^2-x-2\geqslant 0\}=\{x|x\leqslant -1 \text{ 或 } x\geqslant 2\}$,

$B=\left\{x\left|\frac{3}{x}-1>0\right.\right\}=\{x|0<x<3\}$,

$\therefore A\cap B=\{x|2\leqslant x<3\}$.

记 $C=\{x|2x+m<0\}=\left\{x\left|x<-\frac{m}{2}\right.\right\}$,若 p 则 q 为真命题,

则 $A\cap B\subseteq C$,

$\therefore 3\leqslant -\frac{m}{2}$,

$\therefore m\leqslant -6$,故实数 m 的取值范围为 $\{m|m\leqslant -6\}$.

6.**证明**:原命题的逆否命题为"已知函数 $f(x)$ 是 $(-\infty,+\infty)$ 上的增函数,$a,b\in\mathbf{R}$,若 $a+b<0$,

则 $f(a)+f(b)<f(-a)+f(-b)$".

若 $a+b<0$,则 $a<-b,b<-a$,

又 $\because f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上是增函数,

$\therefore f(a)<f(-b),f(b)<f(-a)$.

$\therefore f(a)+f(b)<f(-a)+f(-b)$,

即逆否命题为真命题.

$\therefore$ 原命题为真命题.

提能达标过关

1.C

2.D ①中当平面 α 外的两点确定的直线与 α 垂直时,有无数个平面与平面 α 垂直,所以①错;②中 α 与 β 也可能相交,所以②错;③错;④两条异面直线在同一平面内的射影也可能相交,所以④错.

3.D ①②③为真命题,④中"若 $A\cap B=B$,则 $A\subseteq B$"是假命题,则其逆否命题为假命题,故选 D.

4.C 命题 p 的逆命题是:"若 $x\geqslant 2ab$,则 $x\geqslant a^2+b^2$",否命题是:"若 $x<a^2+b^2$,则 $x<2ab$",故选 C.

5.A $\frac{a_n+a_{n+1}}{2}<a_n\Leftrightarrow a_{n+1}<a_n\Leftrightarrow\{a_n\}$ 是递减数列,所以原命题和逆命题都是真命题,又原命题与逆否命题等价,逆命题与否命题等价,所以否命题,逆否命题也是真命题.

6.当 $c>0$ 时,若 $ac>bc$,则 $a>b$

7.②④,③⑥ ②⑤,①⑥ ①③,④⑤

8.②③④

解析:在 $\triangle ABC$ 中,$\cos A=\cos[\pi-(B+C)]=-\cos(B+C)=-\cos B\cos C+\sin B\sin C$,

又 $\because \cos A=2\sin B\sin C$,

$\therefore \cos(B-C)=0$,

$\therefore B-C=\frac{\pi}{2}$ 或 $C-B=\frac{\pi}{2}$.

$\therefore\triangle ABC$ 为钝角三角形,故原命题是真命题,从而逆否命题为真命题.又逆命题是:在 $\triangle ABC$ 中,若 $\triangle ABC$ 是钝角三角形,则 $\cos A=2\sin B\sin C$,易知是假命题,从而否命题也是假命题.

9.**解**:(1)逆命题:全等的两个三角形的面积相等,真命题.

否命题:面积不相等的两个三角形不是全等三角形,真命题.

逆否命题:两个不全等的三角形的面积不相等,假命题.

(2)逆命题:若方程 $x^2+4x+m=0$ 有实根,则 $m\leqslant 4$,

$\because\Delta=16-4m\geqslant 0,\therefore m\leqslant 4,\therefore$ 是真命题.

否命题:若 $m>4$,则方程 $x^2+4x+m=0$ 无实根,是真命题.

逆否命题:若方程 $x^2+4x+m=0$ 无实根,则 $m>4$,是真命题.

(3)逆命题:若实数 x,y 全为零,则 $x^2+y^2=0$,真命题.

否命题:若 $x^2+y^2\neq 0$,则实数 x,y 不全为零,真命题.

逆否命题:若实数 x,y 不全为零,则 $x^2+y^2\neq 0$,真命题.

10.**解**:$\because (x-a)(x-3a)<0,a>0,\therefore a<x<3a$,

若 $a=1$,则 $p:1<x<3$,

若 p 且 q 为真,则 $2<x<3$,

$\therefore$ 实数 x 的取值范围为 $(2,3)$.

1.2 充分条件与必要条件

第 2 课时 1.2.1 充分条件与必要条件 1.2.2 充要条件

基础知识梳理

1.$p\Rightarrow q$ $p\not\Rightarrow q$
2.充分条件 必要条件
3.$p\Rightarrow q$ $q\Rightarrow p$ 充要条件 $p\Leftrightarrow q$ 充要条件

题点知识巩固

1.B a,b,c,d 是非零实数,若 $ad=bc$,则 $\frac{b}{a}=\frac{d}{c}$,此时 a,b,c,d 不一定成等比数列;反之,若 a,b,c,d 成等比数列,则 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$,所以 $ad=bc$,所以"$ad=bc$"是"a,b,c,d 成等比数列"的必要不充分条件,故选 B.

2.A 若 $\boldsymbol{a}\parallel\boldsymbol{b}$,则 $(x-1)(x+1)=3,\therefore x=2$ 或 $x=-2$,

$\therefore$"$x=2$"是"$\boldsymbol{a}\parallel\boldsymbol{b}$"的充分不必要条件,故选 A.

3.$[2,+\infty)$

解析:由 $\frac{3}{x+1}<1$ 得 $\frac{2-x}{x+1}<0,\therefore x<-1$ 或 $x>2$,

若"$x>k$"是"$\frac{3}{x+1}<1$"的充分不必要条件,则 $k\geqslant 2$.

4.**解**:由 $x^2-x-2>0$,解得 $x>2$ 或 $x<-1$.

令 $A=\{x|x>2 \text{ 或 } x<-1\}$,

由 $4x+a<0$,得 $x<-\frac{a}{4}$.

令 $B=\left\{x\left|x<-\frac{a}{4}\right.\right\}$,当 $B\subseteq A$ 时,即 $-\frac{a}{4}\leqslant -1$,

即 $a\geqslant 4$.

此时 $x<-\frac{a}{4}\leqslant -1\Rightarrow x^2-x-2>0$,

$\therefore$ 当 $a\geqslant 4$ 时,$4x+a<0$ 是 $x^2-x-2>0$ 的充分条件.

5.3 或 4

解析:由 $x^2-4x+n=0$,得 $(x-2)^2=4-n$.$\because$ 方程有整数根,且 $n\in\mathbf{N}^*$,$\therefore n=3$ 或 4.

6.**证明**:(1)充分性:$\because t=-1,\therefore S_n=2^n-1$,

当 $n\geqslant 2$ 时,$a_n=S_n-S_{n-1}=(2^n-1)-(2^{n-1}-1)=2^{n-1}$.

又 $a_1=S_1=1=2^0$,$a_n=2^{n-1}(n\in\mathbf{N}^*)$,

$\therefore\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{2^n}{2^{n-1}}=2$,故数列 $\{a_n\}$ 是等比数列.

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

(2)必要性：$\because S_n=2^n+t(n\in\mathbf{N}_+)$，
$\therefore a_1=S_1=2+t,a_2=S_2-S_1=2,a_3=S_3-S_2=4$，若数列$\{a_n\}$是等比数列，则$a_2^2=a_1\cdot a_3$，即$4(2+t)=4$，$\therefore t=-1$.
由(1)(2)知，数列$\{a_n\}$是等比数列的一个充要条件是$t=-1$.

提能达标过关

1. A　$\because a>0,b>0$，又$ab\leqslant\left(\frac{a+b}{2}\right)^2$，
若$a+b\leqslant4$，则$ab\leqslant4$，反之不成立，
故“$a+b\leqslant4$”是“$ab\leqslant4$”的充分不必要条件，故选 A.
2. A　若$m\subset\alpha,n\subset\alpha,\alpha/\!/\beta$，则$m/\!/\beta,n/\!/\beta$；
若$m/\!/\beta,n/\!/\beta,m\subset\alpha,n\subset\alpha$，但$m,n$不一定相交，$\alpha$与$\beta$平行或相交，
所以“$\alpha/\!/\beta$”是“$m/\!/\beta$且$n/\!/\beta$”的充分不必要条件，故选 A.
3. A　当$a>1$时，$a>4$不一定成立；当$a>4$时，$a>1$成立，
$\therefore a>1$是$a>4$的一个必要不充分条件，故选 A.
4. A　依题意知：丙$\Rightarrow$乙$\Rightarrow$甲，而乙$\not\Rightarrow$丙，所以丙$\Rightarrow$甲但甲$\not\Rightarrow$丙，故丙是甲的充分条件，但不是甲的必要条件.
5. B　由已知得$|\boldsymbol{b}|=1$，所以$|\boldsymbol{a}|=\sqrt{x^2+y^2}=4$，因此$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=x\cos\alpha+y\sin\alpha=\sqrt{x^2+y^2}\sin(\alpha+\varphi)=4\sin(\alpha+\varphi)\leqslant4$. 由于$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}<\lambda^2$成立，所以$\lambda^2>4$，解得$\lambda>2$或$\lambda<-2$. 这是$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}<\lambda^2$成立的充要条件，因此$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}<\lambda^2$成立的一个必要而不充分条件是$\lambda>1$或$\lambda<-1$.
6. $b\geqslant0$
解析：抛物线$y=x^2+bx+c$开口向上，要使$x\in[0,+\infty)$时为单调函数，只要对称轴$x=-\frac{b}{2}\leqslant0$，即$b\geqslant0$.
7. ③④
解析：①$a=b\Rightarrow ac=bc$，而$ac=bc\not\Rightarrow a=b$，所以①错；
②$a>b\not\Rightarrow|a|>|b|$，所以②错；
③$a<5\not\Rightarrow a<3$，而$a<3\Rightarrow a<5$，所以③正确；
④正确.
8. 1
解析：条件p：$|x-1|>a\Leftrightarrow x<1-a$或$x>1+a$；条件$q$：$2x^2-3x+1>0\Leftrightarrow x<\frac{1}{2}$或$x>1$. 若$p$是$q$的充分不必要条件，则$a=1$.
9. **解**：(1)在$\triangle ABC$中，$\angle A=\angle B\Rightarrow\sin A=\sin B$，反之，若$\sin A=\sin B$，因为$A$与$B$不可能互补(因为三角形三个内角和为$180°$)，所以只有$A=B$. 故$p$是$q$的充要条件.
(2)易知，$\neg p$：$x+y=8$，$\neg q$：$x=2$且$y=6$，显然$\neg q\Rightarrow\neg p$，但$\neg p\not\Rightarrow\neg q$，即$\neg q$是$\neg p$的充分不必要条件，根据原命题和逆否命题的等价性知，p是q的充分不必要条件.
(3)显然$x\in A\cup B$不一定有$x\in B$，但$x\in B$一定有$x\in A\cup B$，所以p是q的必要不充分条件.
(4)条件p：$x=1$且$y=2$，条件q：$x=1$或$y=2$，
所以$p\Rightarrow q$但$q\not\Rightarrow p$，故p是q的充分不必要条件.
10. **解**：设$A=\{x|x^2-4ax+3a^2<0,a<0\}=\{x|3a<x<a,a<0\}$，
$B=\{x|x^2+2x-8>0\}=\{x|x<-4$或$x>2\}$，
$\because q$是p的必要不充分条件，
$\therefore A\subsetneqq B$，
$\therefore 3a\geqslant2$或$a\leqslant-4$，又$a<0$，
$\therefore$实数a的取值范围是$(-\infty,-4]$.

1.3　简单的逻辑联结词

第3课时　1.3.1　且(and)　1.3.2　或(or)　1.3.3　非(not)

基础知识梳理

1. “且”“或”“非”
2. 真　真　假　假　真　假　假　真　真　假　假　真

题点知识巩固

1. C
2. B　若$p\wedge q$为假，则p与q至少有一个为假，
若$p\vee q$为假，则p与q都为假，
所以“$p\wedge q$为假”是“$p\vee q$为假”的必要不充分条件，故选 B.
3. B　命题p为假命题，命题q为真命题，则p且q为假命题，故选 B.
4. D　若“$p\vee q$”和“$p\wedge q$”均为真命题，则p和q均为真命题，故应选 D.
5. **解**：(1)命题的否定：若x,y都是奇数，则$x+y$不是偶数，是假命题；
否命题：若x,y不都是奇数，则$x+y$不是偶数，是假命题.
(2)命题的否定：若一个数是质数，则这个数不一定是奇数，是真命题；
否命题：若一个数不是质数，则这个数不是奇数，是假命题.
(3)命题的否定：若两个角相等，则这两个角不一定是对顶角，是真命题；
否命题：若两个角不相等，则这两个角不是对顶角，是真命题.
(4)命题的否定：如果$m^2+n^2+a^2+b^2=0$，则实数m,n,a,b不全为零，是假命题.
否命题：如果$m^2+n^2+a^2+b^2\neq0$，则实数m,n,a,b不全为零，是真命题.
6. **解**：$\because$直线$x+y-m=0$与圆$(x-1)^2+y^2=1$相交，
$\therefore\frac{|1-m|}{\sqrt{2}}<1$，$\therefore1-\sqrt{2}<m<1+\sqrt{2}$.
$\because mx^2-x+m-4=0$有一正根和一负根，
$\therefore\begin{cases}m>0,\\f(0)<0\end{cases}$或$\begin{cases}m<0,\\f(0)>0,\end{cases}$解得$0<m<4$.
$\because p\vee q$为真，$\neg p$为真，
$\therefore p$假q真，
$\therefore1+\sqrt{2}\leqslant m<4$.
$\therefore m$的取值范围为$[1+\sqrt{2},4)$.

提能达标过关

1. C　把平行线相交看成简单命题p，则复合命题：平行线不相交的形式是$\neg p$.
2. A
3. C　由$-x^2+2x<0$得$x(x-2)>0$，即$x>2$或$x<0$，
$\therefore$命题p为真命题.
在$\triangle ABC$中，由大边对大角知$A>B$是$\sin A>\sin B$的充分条件，$\therefore$命题q为真命题，$\therefore p\wedge q$真，故选 C.
4. B　由题可知p为真命题，q为假命题，故$p\vee q$为真，$p\wedge q$为假，$(\neg p)\wedge q$为假，$p\vee(\neg q)$为真，故选 B.
5. C　若$\alpha\perp\beta,\beta\perp\gamma$，则$\alpha$与$\gamma$可能平行也可能相交，所以$p$为假命题；对于命题$q$，$\alpha$与$\beta$也可能相交，所以$q$也是假命题，故命题“$p$或$q$”为假.
6. 3　−3
解析：若$p\wedge q$为真命题，则p、q均为真命题，
$\therefore\begin{cases}2x+y=3,\\x-y=6,\end{cases}$解得$\begin{cases}x=3,\\y=-3.\end{cases}$
7. ①③
解析：“$p\wedge q$”为真$\Leftrightarrow p$与q均为真$\Rightarrow$“$p\vee q$”为真，反之不成立，故①正确；“$p\wedge q$”为假是“$p\vee q$”为真的既不充分也不必要条件，故②不正确；“$\neg p$”为假时，p为真，从而“$p\vee q$”为真，反之不成立，故③正确；“$\neg p$”为真时，p为假，从而“$p\wedge q$”为假，反之不成立，故④不正确.
8. ①③
解析：命题p为真，命题q为假，$\because$在$\triangle ABC$中，$A>B\Leftrightarrow a>b\Leftrightarrow\sin A>\sin B$，$\therefore$在$\triangle ABC$中，“$A>B$”是“$\sin A>\sin B$”的充要条件. 故$p$真$q$假，“$p\wedge q$”为假，“$p\vee q$”为真.
9. **解**：(1)p为假命题，q为真命题.
$p\vee q$：1是质数或是方程$x^2+2x-3=0$的根. 真命题.
$p\wedge q$：1既是质数又是方程$x^2+2x-3=0$的根. 假命题.
$\neg p$：1不是质数. 真命题.
(2)p为假命题，q为假命题.
$p\vee q$：平行四边形的对角线相等或互相垂直. 假命题.
$p\wedge q$：平行四边形的对角线相等且互相垂直. 假命题.
$\neg p$：有些平行四边形的对角线不相等. 真命题.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

(3)∵$0\notin\varnothing$,∴p 为假命题,

又∵$x^2-3x-5<0$,∴$\frac{3-\sqrt{29}}{2}<x<\frac{3+\sqrt{29}}{2}$,

∴$\{x|x^2-3x-5<0\}=\left\{x\left|\frac{3-\sqrt{29}}{2}<x<\frac{3+\sqrt{29}}{2}\right.\right\}\subseteq\mathbf{R}$ 成立.

∴q 为真命题.

∴$p\vee q$:$0\in\varnothing$ 或 $\{x|x^2-3x-5<0\}\subseteq\mathbf{R}$,真命题.

$p\wedge q$:$0\in\varnothing$ 且 $\{x|x^2-3x-5<0\}\subseteq\mathbf{R}$,假命题.

$\neg p$:$0\notin\varnothing$,真命题.

10. **解**:若命题 p 为真,则 $m>\frac{1}{2}$;

若命题 q 为真,则 $\Delta=4-4m^2>0$,即 $-1<m<1$.

(1)若 $p\wedge q$ 为真命题,则 $\begin{cases}m>\frac{1}{2},\\-1<m<1,\end{cases}$ 即 $\frac{1}{2}<m<1$.

所以实数 m 的取值范围为 $\left(\frac{1}{2},1\right)$.

(2)若 $p\vee q$ 为真命题,$p\wedge q$ 为假命题,则 p 与 q 一真一假,

若 p 真 q 假,则 $\begin{cases}m>\frac{1}{2},\\m\leqslant-1\text{ 或 }m\geqslant1,\end{cases}$

所以 $m\geqslant1$.

若 p 假 q 真,则 $\begin{cases}m\leqslant\frac{1}{2},\\-1<m<1,\end{cases}$ 所以 $-1<m\leqslant\frac{1}{2}$.

所以实数 m 的取值范围为 $\left(-1,\frac{1}{2}\right]\cup[1,+\infty)$.

1.4 全称量词与存在量词

第 4 课时 1.4.1 全称量词 1.4.2 存在量词

基础知识梳理

1.(1)全称量词 ∀ (2)含有全称量词 (3)$\forall x\in M,p(x)$ 对任意 x 属于 M,有 $p(x)$ 成立

2.(1)存在量词 ∃ (2)含有存在量词 (3)$\exists x_0\in M$,$p(x_0)$ 存在一个 x_0 属于 M,使 $p(x_0)$ 成立

题点知识巩固

1. D A、B、C 是全称命题,D 是特称命题,故选 D.

2. C ①④是全称命题,且①是真命题,④是假命题,②③是特称命题,且是真命题.

3. B B 中,当 $x=1$ 时,$(x-1)^2=0$,

∴命题 $\forall x\in\mathbf{N}^*$,$(x-1)^2>0$ 是假命题,故选 B.

4. A ①中:$\Delta=9-4=5>0$,

所以函数 $f(x)=x^2+3x+1$ 与 x 轴有两个交点,

即 $x^2+3x+1>0$ 不可能恒成立,故①错;

②中:命题"若 $x^2=1$,则 $x=1$"的否命题为"若 $x^2\neq1$,则 $x\neq1$",故②错;

③中:当 $m=0$ 时,若 $a>b$,但 $am^2=bm^2$,

所以"若 $a>b$,则 $am^2>bm^2$"为假命题,所以其逆否命题为假,故③错,故选 A.

5. C 由题可知 $\Delta=m^2-4(2m+5)>0$,∴$m<-2$ 或 $m>10$,故选 C.

6. **解**:(1)不等式 $m+f(x)>0$ 可化为 $m>-f(x)$,

即 $m>-x^2+2x-5=-(x-1)^2-4$.

要使 $m>-(x-1)^2-4$ 对于任意 $x\in\mathbf{R}$ 恒成立,只需 $m>-4$,

即存在实数 $m>-4$,使命题成立.

(2)不等式 $m-f(x_0)>0$ 可化为 $m>f(x_0)$,若存在一个实数 x_0,使 $m>f(x_0)$ 成立,只需 $m>f(x)_{\min}$.

又 $f(x)=x^2-2x+5=(x-1)^2+4$,

∴$f(x)_{\min}=4$,

∴$m>4$.故实数 m 的取值范围是 $(4,+\infty)$.

提能达标过关

1. A

2. C

3. B "$\forall x\in\mathbf{R},x^2-bx+1>0$"是真命题,

则 $b^2-4<0$,∴$-2<b<2$,

由 $b\in[0,1]\Rightarrow b\in(-2,2)$,反之不成立.

∴"$\forall x\in\mathbf{R},x^2-bx+1>0$ 成立"是"$b\in[0,1]$"的必要不充分条件,故选 B.

4. A 对任意 $x\in\mathbf{R}$,均有 $\sin^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}=1$ 而不是 $\frac{1}{2}$,故 p_1 为假命题.当 $x,y,x-y$ 有一个为 $2k\pi(k\in\mathbf{Z})$ 时,$\sin x-\sin y=\sin(x-y)$ 成立,故 p_2 是真命题.

∵$\cos 2x=1-2\sin^2x$,

∴$\frac{1-\cos 2x}{2}=\frac{1-1+2\sin^2x}{2}=\sin^2x$.

又 $x\in[0,\pi]$ 时,$\sin x\geqslant0$,∴对任意 $x\in[0,\pi]$,均有 $\sqrt{\frac{1-\cos 2x}{2}}=\sin x$,因此 p_3 是真命题.当 $\sin x=\cos y$,即 $\sin x=\sin\left(\frac{\pi}{2}-y\right)$ 时,$x=2k\pi+\frac{\pi}{2}-y$ 或 $x=2k\pi+\pi-\left(\frac{\pi}{2}-y\right)(k\in\mathbf{Z})$,即 $x+y=2k\pi+\frac{\pi}{2}$ 或 $x=2k\pi+\frac{\pi}{2}+y$ $(k\in\mathbf{Z})$,故 p_4 为假命题.综上分析知,p_1,p_4 是假命题.

5. A $f(x)=e^{|x-1|}$ 的图象关于 $x=1$ 对称,A 错,故选 A.

6. ④

解析:①②是假命题,③中的 $n<0$ 时,m 不存在,④中存在 $n=1$ 时,$\forall m\in\mathbf{R},m\cdot n=m$.

7. $(-\infty,1]$

解析:命题 p 为真命题,则 $\Delta=4-4a\geqslant0$,所以 $a\leqslant1$,则实数 a 的取值范围是 $(-\infty,1]$.

8. $\left(\frac{4}{5},2\right]$

解析:若命题 p 为真命题,则 $x^2+x+a>1$ 恒成立,

即 $\Delta=1-4(a-1)<0$,

∴$a>\frac{4}{5}$.

若 q 为真命题,则 $\exists x_0\in[-2,2]$,使得 $a\leqslant x_0$,

∴$a\leqslant2$,

若 $p\wedge q$ 为真命题,∴a 的取值范围为 $\left(\frac{4}{5},2\right]$.

9. **解**:(1)是特称命题,可改写成:$\exists x_0\in\mathbf{R}$,对于函数 $f(x)=x+\frac{4}{x}$,有 $f(x_0)=2$,该命题是假命题,

因为 $f(x)$ 的值域是 $(-\infty,-4]\cup[4,+\infty)$.

(2)是全称命题,可改写成:$\forall\alpha\in\mathbf{R}$,有 $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$,该命题是真命题.

10. **解**:设 $g(x)=x^2+2ax+4$,由于关于 x 的不等式 $x^2+2ax+4>0$ 对一切 $x\in\mathbf{R}$ 恒成立,所以函数 $g(x)$ 的图象开口向上且与 x 轴没有交点,

故 $\Delta=4a^2-16<0$,∴$-2<a<2$.

又∵函数 $f(x)=(3-2a)^x$ 是增函数,

∴$3-2a>1$,∴$a<1$.

又由于 p 或 q 为真,p 且 q 为假,可知 p 和 q 一真一假.

(1)若 p 真 q 假,则 $\begin{cases}-2<a<2,\\a\geqslant1,\end{cases}$

∴$1\leqslant a<2$;

(2)若 p 假 q 真,则 $\begin{cases}a\leqslant-2\text{ 或 }a\geqslant2,\\a<1,\end{cases}$

∴$a\leqslant-2$.

综上可知,实数 a 的取值范围是 $(-\infty,-2]\cup[1,2)$.

第 5 课时 1.4.3 含有一个量词的命题的否定

基础知识梳理

1. $\exists x\in M,\neg p(x)$ 特称命题

2. $\forall x\in M,\neg p(x)$ 全称命题

题点知识巩固

1. C 命题"$\forall x>0,x-1-\ln x\geqslant0$"的否定是:"$\exists x_0>0$,$x_0-1-\ln x_0<0$",故选 C.

2. D 由三角函数线的性质可知,

当 $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 时,$\sin x<x$,

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

所以 $3\sin x<3x<\pi x$，所以 $f(x)=3\sin x-\pi x<0$.

即命题 p：$\forall x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，$f(x)<0$ 为真命题.

根据全称命题的否定为特称命题可知：

$\neg p$：$\exists x_0\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，$f(x_0)\geqslant 0$.

3. D

4. B　命题“存在实数 x_0，使 $\ln x_0<x_0^2-1$”的否定是“对任意的实数 x，都有 $\ln x\geqslant x^2-1$”，故选 B.

5. A　若 p 为假命题，则 $\forall x\in\mathbf{R}$，$mx^2+2>0$ 成立，$\therefore m\geqslant 0$，若 q 为假命题，则 $\exists x_0\in\mathbf{R}$，$x_0^2-2mx_0+1\leqslant 0$ 成立，$\therefore 4m^2-4\geqslant 0$，$\therefore m\geqslant 1$ 或 $m\leqslant -1$，$\therefore p$、q 都为假命题，则实数 m 的取值范围是 $[1,+\infty)$，故选 A.

6. **解**：由题意，若 p 为真，则 $\begin{cases}a>0,\\ \Delta<0,\end{cases}$ 即 $0<a<4$，

当 $a=0$ 时，不等式成立，

$\therefore p$ 为真时，a 的取值范围为 $[0,4)$，

若 q 为真，$a<2$.

$\because$ 若 $(\neg q)\wedge p$ 为真命题，则 $\begin{cases}0\leqslant a<4,\\ a\geqslant 2,\end{cases}$

$\therefore 2\leqslant a<4$.

故实数 a 的取值范围是 $[2,4)$.

提能达标过关

1. D

2. D　$\because 2x^2+2x+\frac{1}{2}<0\Leftrightarrow(2x+1)^2<0$，$\therefore p$ 是假命题，又 $\because \sin x-\cos x=\sqrt{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\leqslant\sqrt{2}$，$\therefore q$ 是真命题，$\therefore \neg q$ 是假命题.

3. D

4. D　若 p 为假命题，则 $\neg p$：“$\exists x_0\in(-1,1)$，$f(x_0)=0$”为真命题，$\because f(x)$ 为增函数，且为连续函数，

$\therefore f(-1)\cdot f(1)<0$，即 $\frac{1}{\mathrm{e}}-1<a<1+\mathrm{e}$，又 $a\in\mathbf{Z}$，

$\therefore a$ 的取值为 0，1，2，3，共 4 个，故选 D.

5. C　$\because \neg p$ 是假命题，$\therefore p$ 是真命题，即 $\exists m\in\mathbf{R}$，$\forall x\in\mathbf{R}$，$4^x+2^xm+1=0$ 成立，即 $m=-\left(\frac{1}{2^x}+2^x\right)\leqslant -2$.

6. $\forall x\in\mathbf{R}$，$x>1$ 且 $x^2\leqslant 4$

解析：已知命题是特称命题，其否定是全称命题，“或”的否定是“且”，故命题“$\exists x\in\mathbf{R}$，$x\leqslant 1$ 或 $x^2>4$”的否定是“$\forall x\in\mathbf{R}$，$x>1$ 且 $x^2\leqslant 4$”.

7. $[\mathrm{e},4]$

解析：$\because$“$p\wedge q$”是真命题，$\therefore p$ 和 q 都是真命题. 当 p 是真命题时，$a\geqslant(\mathrm{e}^x)_{\max}=\mathrm{e}$；当 q 为真命题时，$\Delta=16-4a\geqslant 0$，$\therefore a\leqslant 4$. $\therefore \mathrm{e}\leqslant a\leqslant 4$.

8. $[2,+\infty)$

解析：依题意知，$\forall x\in\mathbf{R}$，$(a+2)x^2+4x+a-1\geqslant 0$ 恒成立，则 $\begin{cases}a+2>0,\\ \Delta=16-4(a+2)(a-1)\leqslant 0,\end{cases}$

即 $\begin{cases}a+2>0,\\ a^2+a-6\geqslant 0.\end{cases}$ 解得 $a\geqslant 2$.

9. **解**：(1) $\neg p$：$\exists x\in\mathbf{R}$，$x^2-x+\frac{1}{4}<0$，是假命题，因为 $\forall x\in\mathbf{R}$，$x^2-x+\frac{1}{4}=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2\geqslant 0$ 恒成立.

(2) $\neg q$：至少存在一个正方形不是矩形，是假命题.

(3) $\neg r$：$\forall x\in\mathbf{R}$，$x^2+2x+2>0$，是真命题，因为 $\forall x\in\mathbf{R}$，$x^2+2x+2=(x+1)^2+1\geqslant 1>0$ 恒成立.

(4) $\neg s$：$\forall x\in\mathbf{R}$，$x^3+1\neq 0$，是假命题. 由于当 $x=-1$ 时，$x^3+1=0$.

10. **解**：由 p：$|3x-4|>2$，得 p：$x<\frac{2}{3}$ 或 $x>2$.

$\therefore \neg p$：$\frac{2}{3}\leqslant x\leqslant 2$，即 $\neg p$：$\left\{x\,\middle|\,\frac{2}{3}\leqslant x\leqslant 2\right\}$.

由 q：$\frac{1}{x^2-x-2}>0$，即 $x^2-x-2>0$，

得 $x<-1$ 或 $x>2$.

$\therefore \neg q$：$-1\leqslant x\leqslant 2$，即 $\neg q$：$\{x|-1\leqslant x\leqslant 2\}$.

阶段评估 1

1. A　若 $y=x^2-ax+1$ 在 $(2,+\infty)$ 上是增函数，

则 $\frac{a}{2}\leqslant 2$，即 $a\leqslant 4$，

所以“$a=4$”是“$y=x^2-ax+1$ 在 $(2,+\infty)$ 上是增函数”的充分不必要条件，故选 A.

2. C　易知 p 是假命题，q 是真命题，$\therefore(\neg p)\wedge q$ 是真命题.

3. C　若 $p\vee q$ 为假命题，则 p 与 q 都是假命题，C 错.

4. A

5. C　p：$x^2-3x-4\leqslant 0$，得 $-1\leqslant x\leqslant 4$，

q：$x^2-6x+9-m^2\leqslant 0$，得 $(x-3-m)(x-3+m)\leqslant 0$，

$\therefore 3-|m|\leqslant x\leqslant 3+|m|$，

若 p 是 q 的充分不必要条件，则 $\begin{cases}3-|m|\leqslant -1,\\ 3+|m|\geqslant 4,\end{cases}$ 且等号不能同时成立，

$\therefore |m|\geqslant 4$，$\therefore m\geqslant 4$ 或 $m\leqslant -4$，故选 C.

6. C　A 中，$a>1\Rightarrow\frac{1}{a}<1$，当 $a=-1$ 时，$\frac{1}{a}<1$，但 $a<1$，故“$a>1$”是“$\frac{1}{a}<1$”的充分不必要条件，正确；B 正确；C 中，若 $p\wedge q$ 为假命题，则 p、q 至少有一个为假命题，错误；D 正确. 故选 C.

7. 若 $a\geqslant b$，则 $2^a\geqslant 2^b$　若 $a<b$，则 $2^a\geqslant 2^b$

8. 充分不必要

解析：$f(x)=\frac{x+1}{x}+\sin x-a^2=1+\frac{1}{x}+\sin x-a^2$，

若 $f(x)$ 为奇函数，则 $1-a^2=0$，$\therefore a=1$ 或 $a=-1$，

$\therefore$“$a=1$”是“函数 $f(x)$ 为奇函数”的充分不必要条件.

9. $(-1,3)$

解析：命题“$\exists x\in\mathbf{R}$，使得 $x^2+(a-1)x+1\leqslant 0$”为假命题，则命题的否定“$\forall x\in\mathbf{R}$，$x^2+(a-1)x+1>0$”是真命题.

$\therefore\Delta=(a-1)^2-4<0$，即 $a^2-2a-3<0$.

解得 $-1<a<3$.

10. ①②④

解析：取 $x=2$，$\frac{1}{4}>\frac{1}{9}$ 成立，故①是真命题；

取 $x=\frac{1}{2}$，$\log_2\frac{1}{2}=-1$，$\log_3\frac{1}{2}>\log_3\frac{1}{3}=-1$，

故②是真命题；

取 $x=\frac{1}{2}$，$\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{2}=1>\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}}$，故③是假命题；

$\forall x\in\left(0,\frac{1}{3}\right)$，$\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{3}}<\left(\frac{1}{2}\right)^x<\left(\frac{1}{2}\right)^0=1$，

$\log_{\frac{1}{3}}x>\log_{\frac{1}{3}}\frac{1}{3}=1$，故④是真命题.

综上可知，正确命题的序号是①②④.

11. **解**：(1) 逆命题：若 $m+n$ 是奇数，则 m，n 都是奇数，假命题.

否命题：若 m、n 不都是奇数，则 $m+n$ 不是奇数，假命题.

逆否命题：若 $m+n$ 不是奇数，则 m，n 不都是奇数，假命题.

(2) 逆命题：若 $x=3$ 且 $y=2$，则 $x+y=5$，真命题.

否命题：若 $x+y\neq 5$，则 $x\neq 3$ 或 $y\neq 2$，真命题.

逆否命题：若 $x\neq 3$ 或 $y\neq 2$，则 $x+y\neq 5$，假命题.

12. **解**：由 $x^2-4ax+3a^2<0(a>0)$，得 $a<x<3a$，$a>0$，由 $\frac{8}{x-1}<1$，得 $\frac{8}{x-1}-1<0$，即 $\frac{9-x}{x-1}<0$，

得命题 $(x-9)\cdot(x-1)>0$，得 $x>9$ 或 $x<1$，

因为 $\neg q$ 是 $\neg p$ 的充分不必要条件，所以 p 是 q 的充分不必要条件，

所以 $(a,3a)$ 是 $\{x|x>9$ 或 $x<1\}$ 的真子集，

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

所以 $0<3a\leqslant 1$ 或 $a\geqslant 9$，

得 $0<a\leqslant\frac{1}{3}$ 或 $a\geqslant 9$，

所以 a 的取值范围是 $\left\{a\left|0<a\leqslant\frac{1}{3}\text{或}a\geqslant 9\right.\right\}$.

13. **解**：$\because y=a^x$ 在 **R** 上单调递增，$\therefore a>1$，$\therefore p$：$a>1$，又不等式 $ax^2-ax+1>0$ 对 $\forall x\in\mathbf{R}$ 恒成立，

$\therefore\Delta=a^2-4a<0$，

$\therefore 0<a<4$，$\therefore q$：$0<a<4$.

$\because p\wedge q$ 为假，$p\vee q$ 为真，$\therefore p$ 与 q 中一真一假.

若 p 真 q 假，得 $a\geqslant 4$；

若 p 假 q 真，得 $0<a\leqslant 1$.

综上 a 的取值范围是 $(0,1]\cup[4,+\infty)$.

14. **解**：$\because m\in[-1,1]$，

$\therefore\sqrt{m^2+8}\in[2\sqrt{2},3]$.

$\because$ 对 $m\in[-1,1]$，不等式 $a^2-5a-3\geqslant\sqrt{m^2+8}$ 恒成立，

可得 $a^2-5a-3\geqslant 3$，

$\therefore a\geqslant 6$ 或 $a\leqslant -1$.

故命题 p 为真命题时，$a\geqslant 6$ 或 $a\leqslant -1$.

又命题 q：不等式 $x^2+ax+2<0$ 有解，

$\therefore\Delta=a^2-8>0$.

$\therefore a>2\sqrt{2}$ 或 $a<-2\sqrt{2}$.

从而命题 q 为假命题时，$-2\sqrt{2}\leqslant a\leqslant 2\sqrt{2}$，

$\therefore$ 命题 p 为真命题，q 为假命题时，

a 的取值范围为 $\{a|-2\sqrt{2}\leqslant a\leqslant -1\}$.

第二章 圆锥曲线与方程

2.1 椭 圆

第 6 课时 2.1.1 椭圆及其标准方程

基础知识梳理

1. (1) $2a>|F_1F_2|$ 焦点 焦距

2. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ $\frac{y^2}{a^2}+\frac{x^2}{b^2}=1(a>b>0)$ $2c$ $(\pm c,0)$ $(0,\pm c)$ $a^2=b^2+c^2$

题点知识巩固

1. A 由椭圆 $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$ 知，$|PF_1|+|PF_2|=2a=10$，

而 $10-5=5$，

$\therefore P$ 到另一个焦点的距离为 5.

2. B 由椭圆的定义知 $|PF_1|+|PF_2|=6$，$|F_1F_2|=4$，

$\therefore\triangle PF_1F_2$ 的周长为 $6+4=10$，故选 B.

3. B 设 $P(x,y)$，则 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$，且 $-2\leqslant x\leqslant 2$，

$\therefore y^2=3\left(1-\frac{x^2}{4}\right)$，又 $\because F(1,0)$，

$\therefore|PF|=\sqrt{(x-1)^2+y^2}=\sqrt{x^2-2x+1+3\left(1-\frac{x^2}{4}\right)}=\sqrt{\frac{1}{4}x^2-2x+4}=\frac{1}{2}(4-x)=2-\frac{1}{2}x$，

$\because -2\leqslant x\leqslant 2$，$\therefore|PF|$ 的最大值为 3，故选 B.

4. **解**：设所求椭圆的标准方程为 $mx^2+ny^2=1$，将两点 $A(-\sqrt{3},-2)$ 和 $B(-2\sqrt{3},1)$ 代入得

$\begin{cases}3m+4n=1,\\12m+n=1,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}m=\frac{1}{15},\\n=\frac{1}{5}.\end{cases}$

$\therefore$ 椭圆的标准方程为 $\frac{x^2}{15}+\frac{y^2}{5}=1$.

5. C $\because|F_1F_2|$ 是 $|PF_1|$ 与 $|PF_2|$ 的等差中项，

$\therefore|PF_1|+|PF_2|=2|F_1F_2|=4$，

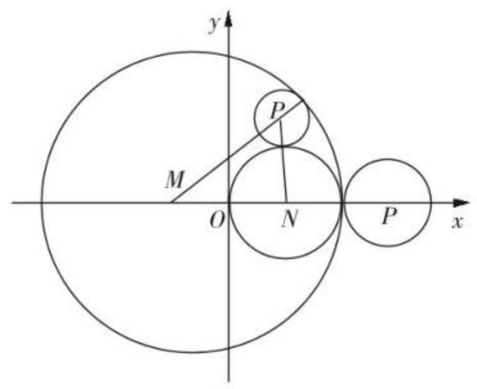
$\therefore P$ 点在以 F_1，F_2 为焦点的椭圆上，$\therefore 2a=4$，$a=2$，$c=1$，

$\therefore b^2=a^2-c^2=3$，

$\therefore$ 动点 P 的轨迹方程是 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$，故选 C.

6. $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{12}=1(x\neq 4)$ 或 $y=0(x>4)$

解析：如图所示，当圆 P 与圆 M 与圆 N 都相外切时，此时圆 P 的圆心的轨迹为 $y=0(x>4)$；



当圆 P 与圆 M 相内切，与圆 N 相外切时，此时满足 $|PM|=6-r$，

$|PN|=2+r$，

两式相加，可得 $|PM|+|PN|=8>|MN|=4$，

根据椭圆的定义可知，点 P 的轨迹是以 M、N 为焦点的椭圆，且 $2a=8$，$2c=4$，

所以 $a=4$，$c=2$，则 $b^2=a^2-c^2=12$，此时点 P 的轨迹方程为 $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{12}=1(x\neq 4)$，

综上所述，点 P 的轨迹方程为 $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{12}=1(x\neq 4)$ 或 $y=0(x>4)$.

提能达标过关

1. C 由椭圆的定义知，点的轨迹是椭圆，且 $2a=10$，$2c=8$，

$\therefore a=5$，$c=4$，$b^2=a^2-c^2=9$，又焦点在 x 轴上，

$\therefore$ 椭圆的方程为 $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$.

2. D $\because|MF_1|+|MF_2|=8=|F_1F_2|$，

$\therefore$ 动点 M 的轨迹是线段 F_1F_2，故选 D.

3. C 由题可知左焦点 $F(-2\sqrt{3},0)$，

$\therefore$ 点 F 到直线 $x-y=0$ 的距离 $d=\frac{|-2\sqrt{3}-0|}{\sqrt{2}}=\sqrt{6}$，故选 C.

4. D 由题可知 $PF_2\perp F_1F_2$，$a=2$，$c=\sqrt{3}$，

$\therefore\begin{cases}|PF_2|^2+|F_1F_2|^2=|PF_1|^2,\\|PF_1|+|PF_2|=4,\end{cases}$

$\therefore\begin{cases}|PF_1|^2-|PF_2|^2=12,\\|PF_1|+|PF_2|=4,\end{cases}$

$\therefore|PF_1|=\frac{7}{2}$，$|PF_2|=\frac{1}{2}$，

$\therefore|PF_1|=7|PF_2|$，故选 D.

5. B 设 $|F_2B|=t$，$\therefore|AF_2|=2t$，

$\because|AB|=|BF_1|$，$\therefore|BF_1|=3t$，

$\because|BF_2|+|BF_1|=2a$，

$\therefore 4t=2a$，$t=\frac{a}{2}$，

$\therefore|AF_1|=a$，$\therefore A(0,b)$，

由 $\overrightarrow{AF_2}=2\overrightarrow{F_2B}$，

可得 $B\left(\frac{3}{2},-\frac{1}{2}b\right)$，

将 $B\left(\frac{3}{2},-\frac{1}{2}b\right)$ 代入 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 中，

得 $\frac{9}{4a^2}+\frac{b^2}{4b^2}=1$，得 $a^2=3$，$b^2=a^2-c^2=2$，

$\therefore$ 椭圆的方程为 $\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{2}=1$，故选 B.

6. $(-2,2)$

解析：由题可知，$a^2+5>2a^2+1$，即 $a^2<4$，$\therefore -2<a<2$.

$\therefore$ 实数 a 的取值范围为 $(-2,2)$.

7. $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{12}=1$

解析：解法一：依题意，可设椭圆方程为 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$，

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

则 $\begin{cases}\frac{4}{a^2}+\frac{9}{b^2}=1,\\ a^2-b^2=4.\end{cases}$

解得 $\begin{cases}a^2=16,\\ b^2=12.\end{cases}$ 故椭圆方程为 $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{12}=1$.

解法二：依题意知，左焦点为 $F'(-2,0)$，由椭圆的定义得

$2a=\sqrt{(2+2)^2+3^2}+\sqrt{(2-2)^2+3^2}=8$，

$\therefore a=4$，又 $c=2$，$\therefore b^2=a^2-c^2=12$.

故椭圆方程为 $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{12}=1$.

8. $-\frac{1}{7}$

解析：$\because F_1(-8,0)$，$F_2(8,0)$，

$\therefore |F_1F_2|=16$.

由已知 $|PF_1|=6$，得 $|PF_2|=14$.

在 $\triangle F_1PF_2$ 中，由余弦定理得

$\cos\angle F_1PF_2=\frac{|PF_1|^2+|PF_2|^2-|F_1F_2|^2}{2|PF_1|\cdot|PF_2|}=\frac{36+196-256}{2\times6\times14}=-\frac{1}{7}$.

9. **解：**(1)由题可知 $|QA|=10$，

$\therefore$ 动点 Q 的轨迹是以 A 为圆心，10 为半径的圆.

$\because BQ$ 的垂直平分线交 AQ 于点 P，

$\therefore |PQ|=|PB|$，

$\therefore |PA|+|PB|=|PQ|+|PA|=10$.

(2)由(1)可知，P 点的轨迹是以 A、B 为焦点的椭圆，且 $2a=10$，$a=5$，$c=3$，$\therefore b=\sqrt{a^2-c^2}=4$.

$\therefore$ 点 P 的轨迹方程为 $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$.

10. **解：**由椭圆方程知 $a=5$，$b=3$，$\therefore c=4$.

设 $|PF_1|=m$，$|PF_2|=n$，则 $m+n=10$. ①

在 $\triangle F_1PF_2$ 中，由余弦定理得

$m^2+n^2-2mn\cos 60^\circ=8^2$，

即 $m^2+n^2-mn=64$. ②

①^2 −②得 $mn=12$.

$\therefore S_{\triangle F_1PF_2}=\frac{1}{2}mn\sin 60^\circ=\frac{1}{2}\times12\times\frac{\sqrt{3}}{2}=3\sqrt{3}$.

第 7 课时　2.1.2　椭圆的简单几何性质

基础知识梳理

$\frac{y^2}{a^2}+\frac{x^2}{b^2}=1(a>b>0)$　$-b\leqslant x\leqslant b$ 且 $-a\leqslant y\leqslant a$　$A(0,\pm a)$，$B(\pm b,0)$　$2b$　$2a$　$(0,\pm c)$　$2c$　x 轴，y 轴　$(0,0)$　$\frac{c}{a}(0<e<1)$

题点知识巩固

1. C　$\because$ 椭圆 C 的一个焦点为 $(2,0)$，$\therefore c=2$，焦点在 x 轴上，

$\therefore a^2-4=4$，$\therefore a^2=8$，$\therefore a=2\sqrt{2}$，

$\therefore e=\frac{c}{a}=\frac{2}{2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，故选 C.

2. D　由椭圆 $\frac{x^2}{10-m}+\frac{y^2}{m-2}=1$ 的长轴在 y 轴上，$m-2>10-m$ 且 $10-m>0$，得 $6<m<10$，

则 $a^2=m-2$，$b^2=10-m$，$c^2=a^2-b^2=2m-12$.

由焦距为 4，即 $2c=4$，即 $c=2$.

即有 $2m-12=4$，解得 $m=8$.

3. $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{16}=1$

解析：由题可知 $\begin{cases}a+b=10,\\ 2c=4\sqrt{5},\\ a^2=b^2+c^2,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=6,\\ b=4,\\ c=2\sqrt{5},\end{cases}$

$\therefore$ 椭圆的标准方程为 $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{16}=1$.

4. **解：**当焦点在 x 轴上时，$a=3$，$\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{6}}{3}$，$\therefore c=\sqrt{6}$.

$\therefore b^2=a^2-c^2=9-6=3$.

故椭圆的标准方程为 $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{3}=1$；

当焦点在 y 轴上时，$b=3$，$\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{6}}{3}$，即 $\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}=\frac{\sqrt{6}}{3}$，

$\therefore a^2=27$.

故椭圆的标准方程为 $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{27}=1$.

综上，所求椭圆的标准方程为 $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{3}=1$ 或 $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{27}=1$.

5. D　由题可知，$MF_2\perp x$ 轴，可知 $M\left(c,\frac{b^2}{a}\right)$，

在 Rt$\triangle F_2MF_1$ 中，$|F_1F_2|=2c$，且 $\angle F_2MF_1=60^\circ$，

$\therefore |F_1F_2|=\sqrt{3}|MF_2|$，

即 $2c=\sqrt{3}\cdot\frac{b^2}{a}$，整理得 $\sqrt{3}c^2+2ac-\sqrt{3}a^2=0$，

即 $\sqrt{3}e^2+2e-\sqrt{3}=0$，

解得 $e=\frac{\sqrt{3}}{3}$ 或 $e=-\sqrt{3}$(舍去)，故选 D.

6. D　$\because A$ 点在椭圆上，

$\therefore |AF_1|+|AF_2|=2a$，①

又 $2|AF_1|-3|AF_2|=a$，②

由①②可得 $|AF_1|=\frac{7}{5}a$，$|AF_2|=\frac{3}{5}a$，

$\because a-c\leqslant|AF_1|\leqslant a+c$，$\therefore a-c\leqslant\frac{7}{5}a\leqslant a+c$，

$\therefore \frac{2}{5}a\leqslant c$，$\therefore e\geqslant\frac{2}{5}$.

又 $e<1$，$\therefore$ 离心率的取值范围是 $\left[\frac{2}{5},1\right)$，故选 D.

提能达标过关

1. C　当焦点在 x 轴上时，$a=\sqrt{5}$，$c=\sqrt{5-m}$，

又 $e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{10}}{5}$，

$\therefore \frac{\sqrt{5-m}}{\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{10}}{5}$，解得 $m=3$.

当焦点在 y 轴上时，同理可求得 $m=\frac{25}{3}$.

2. D　由题可知 $\begin{cases}c=2,\\ \frac{c}{a}=\frac{\sqrt{2}}{2},\end{cases}$ $\therefore a=2\sqrt{2}$，

$\therefore b^2=a^2-c^2=4$，

$\therefore$ 椭圆的方程为 $\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{4}=1$，故选 D.

3. C　由椭圆的性质知 $M=a+c$，$m=a-c$，$\therefore \frac{M+m}{2}=a$，即椭圆上与点 F 距离等于 a 的点为 $(0,\pm b)$.

4. C　由椭圆方程 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}=1$ 知，$a=2$，$b=\sqrt{2}$，$c=\sqrt{2}$，

$\therefore$ 当 P 为短轴端点时，$\angle F_1PF_2=90^\circ$，这时有 2 个；当 $\angle PF_1F_2=90^\circ$ 时，有 2 个；当 $\angle PF_2F_1=90^\circ$ 时，也有 2 个，

$\therefore$ 适合题意的点 P 共有 6 个.

5. A　由题可知 $b\leqslant c$，即 $b^2\leqslant c^2$，$\therefore a^2-c^2\leqslant c^2$，

$\therefore a^2\leqslant 2c^2$，$\therefore e^2\geqslant\frac{1}{2}$，$\therefore e\geqslant\frac{\sqrt{2}}{2}$，

$\therefore$ 椭圆的离心率的取值范围是 $\left[\frac{\sqrt{2}}{2},1\right)$，故选 A.

6. 1 或 2

解析：当 $m>1$ 时，$\frac{x^2}{1}+\frac{y^2}{\frac{1}{m}}=1$，$a=1$，此时由 $1-\frac{1}{m}=\frac{3}{4}$，

得 $m=4$；

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

当 $0<m<1$ 时，$\frac{y^2}{\frac{1}{m}}+\frac{x^2}{1}=1$，$e^2=\frac{a^2-b^2}{a^2}=1-m=\frac{3}{4}$，$m=\frac{1}{4}$，$a^2=\frac{1}{m}=4$，$a=2$.

∴椭圆 $x^2+my^2=1$ 的长半轴长为 1 或 2.

7. $\frac{1}{2}$

解析：解法一：由题可知 $|AB|=2c$，$|AC|=\frac{b^2}{a}$，

∵$\tan B=\frac{3}{4}$，∴$\frac{|AC|}{|AB|}=\frac{b^2}{2ac}=\frac{3}{4}$，

∴$2c^2+3ac-2a^2=0$，

∴$2e^2+3e-2=0$，∴$e=\frac{1}{2}$或 $e=-2$(舍).

解法二：依题意，可设 $2c=|AB|=4k$，$|AC|=3k$，其中 $k>0$，

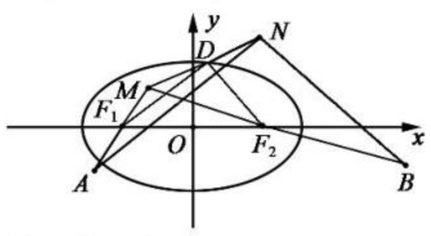
∴$|BC|=5k$，

∴$2a=|AC|+|BC|=8k$，

∴$e=\frac{c}{a}=\frac{1}{2}$.

8. 12

解析：取 MN 的中点 D，如图.



$|DF_1|+|DF_2|=2a=6$.

∵D，F_1，F_2 分别为 MN，MA，MB 的中点，

∴$|AN|+|BN|=2|DF_1|+2|DF_2|=2\times6=12$.

9. **解**：(1)由已知可得，$c=3$，$2b=6$，$b=3$.

∴$a^2=b^2+c^2=18$.

若椭圆焦点在 x 轴上，则椭圆方程为 $\frac{x^2}{18}+\frac{y^2}{9}=1$；

若椭圆焦点在 y 轴上，则椭圆方程为 $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{18}=1$.

(2)由已知可得，$2a=10$，则 $a=5$，

又 $e=\frac{c}{a}=\frac{3}{5}$，∴$c=3$，则 $b^2=a^2-c^2=16$.

若椭圆焦点在 x 轴上，则椭圆方程为 $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$；

若椭圆焦点在 y 轴上，则椭圆方程为 $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{25}=1$.

10. **解**：(1)连接 PF_1，由 $\triangle POF_2$ 为等边三角形可知在 $\triangle F_1PF_2$ 中，$\angle F_1PF_2=90°$，$|PF_2|=c$，$|PF_1|=\sqrt{3}c$，于是 $2a=|PF_1|+|PF_2|=(\sqrt{3}+1)c$，故 C 的离心率是 $e=\frac{c}{a}=\sqrt{3}-1$.

(2)由题意可知，满足条件的点 $P(x,y)$ 存在，当且仅当 $\frac{1}{2}|y|\cdot2c=16$，$\frac{y}{x+c}\cdot\frac{y}{x-c}=-1$，$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$，即 $c|y|=16$，　①

$x^2+y^2=c^2$，　②

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$，　③

由②③及 $a^2=b^2+c^2$ 得 $y^2=\frac{b^4}{c^2}$，又由①知 $y^2=\frac{16^2}{c^2}$，故 $b=4$.

由②③得 $x^2=\frac{a^2}{c^2}(c^2-b^2)$，所以 $c^2\geqslant b^2$，从而 $a^2=b^2+c^2\geqslant2b^2=32$，故 $a\geqslant4\sqrt{2}$.

当 $b=4$，$a\geqslant4\sqrt{2}$ 时，存在满足条件的点 P.

所以 $b=4$，a 的取值范围为 $[4\sqrt{2},+\infty)$.

第 8 课时　椭圆方程及几何性质的应用

基础知识梳理

1. = < >

2. (1)相交　(2)相切　(3)相离

3. (1) $\sqrt{1+k^2}|x_1-x_2|$　$\sqrt{1+\frac{1}{k^2}}|y_1-y_2|$　(2) $\frac{2b^2}{a}$　$2a$

题点知识巩固

1. B　依题意得 $\frac{4}{16}+\frac{m^2}{3}>1$，解得 $m>\frac{3}{2}$ 或 $m<-\frac{3}{2}$.

2. A　把点 (m,n) 代入方程 $8x^2+3y^2=24$，得 $8m^2+3n^2=24$，

∴$24-8m^2=3n^2\geqslant0$，即 $m^2\leqslant3$，

∴$-\sqrt{3}\leqslant m\leqslant\sqrt{3}$.

∴$4-2\sqrt{3}\leqslant2m+4\leqslant4+2\sqrt{3}$.

3. D　由题可知 $A(3,0)$，$B(0,3)$，∴$|AB|=3\sqrt{2}$.

设 $P(x,y)$，当 P 点在与 $x+y=3$ 平行的直线 l' 与椭圆相切时，P 到直线 l 的距离点最大.

设 l' 的方程为 $x+y+m=0$，

由 $\begin{cases}x+y+m=0,\\ \frac{x^2}{2}+y^2=1,\end{cases}$

消去 y 得 $3x^2+4mx+2m^2-2=0$，

由 $\Delta=0$ 得 $16m^2-12(2m^2-2)=0$，得 $m=\pm\sqrt{3}$，

易知，当 $m=\sqrt{3}$ 时，$l'=x+y+\sqrt{3}=0$ 与 l 的距离最大，

$d=\frac{|\sqrt{3}+3|}{\sqrt{2}}=\frac{3+\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$.

$S_{\triangle PAB}=\frac{1}{2}d\cdot|AB|=\frac{1}{2}\times\frac{3+\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\times3\sqrt{2}=\frac{3(3+\sqrt{3})}{2}$，故选 D.

4. $x+2y-8=0$

解析：设弦为 AB，$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，代入椭圆方程，得

$\begin{cases}\frac{x_1^2}{36}+\frac{y_1^2}{9}=1,\\ \frac{x_2^2}{36}+\frac{y_2^2}{9}=1,\end{cases}$

两式作差，得 $\frac{x_1^2-x_2^2}{36}+\frac{y_1^2-y_2^2}{9}=0$，

即 $\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=-\frac{x_1+x_2}{4(y_1+y_2)}=-\frac{1}{2}$，即 $k_{AB}=-\frac{1}{2}$，

∴弦所在的直线方程为 $y-2=-\frac{1}{2}(x-4)$，

即 $x+2y-8=0$.

5. $\frac{3\sqrt{2}}{2}$

解析：由 $\begin{cases}x-y+1=0,\\ \frac{x^2}{3}+y^2=1,\end{cases}$ 得 $A(0,1)$，$B\left(-\frac{3}{2},-\frac{1}{2}\right)$，

则 $|AB|=\sqrt{\left(-\frac{3}{2}-0\right)^2+\left(-\frac{1}{2}-1\right)^2}=\frac{3\sqrt{2}}{2}$.

6. **解**：(1)椭圆 C 的两焦点分别为 $F_1(-2\sqrt{2},0)$、$F_2(2\sqrt{2},0)$，$c=2\sqrt{2}$，短半轴长为 1，$b=1$，$a^2=b^2+c^2$，故得到曲线 C 的方程为 $\frac{x^2}{9}+y^2=1$.

(2)设 $M(x_1,y_1)$，$N(x_2,y_2)$，

由 $\begin{cases}y=2x+t,\\ \frac{x^2}{9}+y^2=1,\end{cases}$ 消去 y 得，

$37x^2+36tx+9(t^2-1)=0$，

由 $\Delta=(36t)^2-4\times37\times9(t^2-1)>0$，

可得 $-\sqrt{37}<t<\sqrt{37}$，

又直线 $y=2x+t$ 不经过点 $H(0,1)$，

且直线 HM 与 HN 的斜率存在，

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

$\therefore t\neq\pm1$,

又 $x_1+x_2=-\frac{36t}{37}$,$x_1x_2=\frac{9t^2-9}{37}$,

$\therefore k_{HM}+k_{HN}=\frac{y_1-1}{x_1}+\frac{y_2-1}{x_2}=\frac{4x_1x_2+(t-1)(x_1+x_2)}{x_1x_2}$

$=4-\frac{4t}{t+1}=1$,

解得 $t=3$,

故 t 的值为 3.

提能达标过关

1. B　由 $\begin{cases}y=kx+2,\\2x^2+3y^2=6,\end{cases}$ 得 $(2+3k^2)x^2+12kx+6=0$.

∵直线与椭圆有两个交点,$\therefore\Delta=(12k)^2-24(2+3k^2)>0$,解得 $k>\frac{\sqrt{6}}{3}$ 或 $k<-\frac{\sqrt{6}}{3}$.

2. D　由题意知,P 是 MP_1 的中点,设 $M(x,y)$,$P(x_0,y_0)$,则 $P_1(0,y_0)$,

$\therefore\begin{cases}\frac{x+0}{2}=x_0,\\\frac{y+y_0}{2}=y_0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}x_0=\frac{1}{2}x,\\y_0=y.\end{cases}$

又 $x_0^2+y_0^2=4$,$\therefore\frac{x^2}{4}+y^2=4$,即 $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{4}=1$.

3. C　由 $\begin{cases}y=x+t,\\x^2+4y^2=4,\end{cases}$ 消去 y,得 $5x^2+8tx+4(t^2-1)=0$.

设 $A(x_1,y_1)$,$B(x_2,y_2)$,则

$x_1+x_2=-\frac{8t}{5}$,$x_1x_2=\frac{4}{5}(t^2-1)$.

$\therefore|AB|^2=(1+k^2)\cdot[(x_1+x_2)^2-4x_1x_2]=$

$2\left[\left(-\frac{8t}{5}\right)^2-4\cdot\frac{4}{5}(t^2-1)\right]=\frac{32}{25}(5-t^2)$.

$\therefore$当 $t=0$ 时,$|AB|$ 有最大值 $\frac{4\sqrt{10}}{5}$.

4. D　由 $\overrightarrow{MF_1}\cdot\overrightarrow{MF_2}=0$,可知 $MF_1\perp MF_2$,

$\therefore\begin{cases}|MF_1|^2+|MF_2|^2=|F_1F_2|^2=12,\\|MF_1|+|MF_2|=4,\end{cases}$

$\therefore|MF_1||MF_2|=2$,

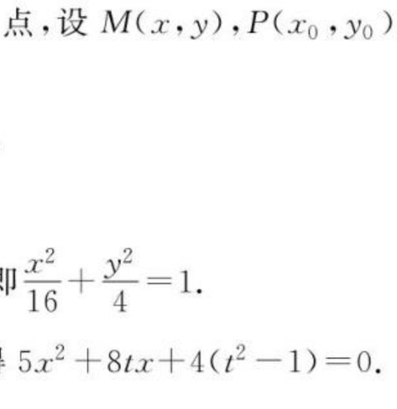
$\therefore S_{\triangle MF_1F_2}=\frac{1}{2}|MF_1||MF_2|=1$.

设$\triangle MF_1F_2$ 的内切圆的半径为 r,

则 $\frac{1}{2}r(|MF_1|+|MF_2|+|F_1F_2|)=1$,

$\therefore r=2-\sqrt{3}$,故选 D.

5. D　点 P 在椭圆 $C_1:\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$ 上,C_1 的右焦点为 $F(1,0)$,左焦点 $E(-1,0)$,如图:



由圆 $C_2:x^2+y^2+6x-8y+21=0$,可得:

$(x+3)^2+(y-4)^2=4$,圆心坐标$(-3,4)$,半径为 2.

由椭圆的定义可得:$|PE|+|PF|=2a=4$,$|PF|=4-|PE|$,

则 $|PQ|-|PF|=|PQ|+|PE|-4$,

由题意可得:$|PQ|-|PF|$的最小值为:

$|PQ|-|PF|=|PQ|+|PE|-4=|C_2E|-2-4=\sqrt{(-3+1)^2+(4-0)^2}-6=2\sqrt{5}-6$,故选 D.

6. 3

解析:由椭圆的性质知,当$\triangle PF_1F_2$ 面积最大时,P 应为短轴的一个端点,$\therefore\frac{1}{2}\times2c\times b=12$,又 $c=4$,$\therefore b=3$.

7. $\frac{1}{2}$

解析:易知$\triangle ABF_2$ 的周长为 $4a$,$\therefore4\sqrt{k+2}=8$,解得$k=2$.

$\therefore a=2$,$b=\sqrt{3}$,$\therefore c^2=a^2-b^2=1$. $\therefore c=1$. $\therefore e=\frac{c}{a}=\frac{1}{2}$.

8. $\frac{\sqrt{2}}{2}$

解析:设 $A(-a,0)$,$B(a,0)$,$P(x,y)$,

则 $k_{PA}=\frac{y}{x+a}$,$k_{PB}=\frac{y}{x-a}$,且$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$,

$\therefore k_{PA}\cdot k_{PB}=\frac{y}{x+a}\cdot\frac{y}{x-a}=\frac{y^2}{x^2-a^2}=$

$\frac{b^2\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)}{x^2-a^2}=-\frac{b^2}{a^2}$,

$\therefore-\frac{b^2}{a^2}=-\frac{1}{2}$,$\therefore b^2=\frac{1}{2}a^2$,$\therefore c^2=\frac{1}{2}a^2$,

$\therefore c=\frac{\sqrt{2}}{2}a$,$\therefore e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

9. **解**:(1)由题意可知椭圆的离心率 $e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{3}}{2}$,$c=\sqrt{3}$,

$\therefore a=2$,$b=1$,故椭圆 C 的方程为$\frac{y^2}{4}+x^2=1$.

(2)存在满足条件的 D 点.

设满足条件的点 $D(0,m)$,则 $0\leqslant m\leqslant\sqrt{3}$,

设 l 的方程为 $y=kx+\sqrt{3}$,$(k\neq0)$,代入椭圆方程,

$(k^2+4)x^2+2\sqrt{3}kx-1=0$,

设 $A(x_1,y_1)$,$B(x_2,y_2)$,则 $x_1+x_2=-\frac{2\sqrt{3}k}{k^2+4}$,

$\therefore y_1+y_2=k(x_1+x_2)+2\sqrt{3}=\frac{8\sqrt{3}}{k^2+4}$.

∵以 DA、DB 为邻边的平行四边形为菱形,

$\therefore(\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{DB})\perp\overrightarrow{AB}$,

∵$\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{DB}=(x_1,y_1-m)+(x_2,y_2-m)=(x_1+x_2,y_1+y_2-2m)=\left(-\frac{2\sqrt{3}k}{k^2+4},\frac{8\sqrt{3}}{k^2+4}-2m\right)$,

$\therefore(\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{DB})\cdot\overrightarrow{AB}=0$,且$\overrightarrow{AB}$的方向向量为$(1,k)$,

$\therefore-\frac{2\sqrt{3}k}{k^2+4}+\frac{8\sqrt{3}k}{k^2+4}-2mk=0$,即 $m=\frac{3\sqrt{3}}{k^2+4}$,

∵$k^2>0$,$\therefore m=\frac{3\sqrt{3}}{k^2+4}<\frac{3\sqrt{3}}{4}<\sqrt{3}$,

$\therefore0<m<\sqrt{3}$,

$\therefore$存在满足条件的点 D.

10. **解**:(1)由题可知 $\begin{cases}\frac{c}{a}=\frac{1}{2},\\\frac{1}{a^2}+\frac{9}{4b^2}=1,\\a^2=b^2+c^2,\end{cases}$ 解得 $a=2$,$b=\sqrt{3}$,

$\therefore$椭圆 C 的方程为$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$.

(2)证明:设直线 l 的方程为:$y+3=k(x+2)$,$M(x_1,y_1)$,$N(x_2,y_2)$,

由 $\begin{cases}y+3=k(x+2),\\\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1,\end{cases}$ 得

$(3+4k^2)x^2+8k(2k-3)x+4(2k-3)^2-12=0$,

$\Delta=[8k(2k-3)]^2-4(3+4k^2)[4(2k-3)^2-12]>0$,

得 $k>\frac{1}{2}$,

$x_1+x_2=-\frac{16k^2-24k}{3+4k^2}$,

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

$x_1x_2=\dfrac{16k^2-48k+24}{3+4k^2}$,

$k_1+k_2=\dfrac{y_1-\frac{3}{2}}{x_1-1}+\dfrac{y_2-\frac{3}{2}}{x_2-1}=$

$\dfrac{k(x_1+2)-3-\frac{3}{2}}{x_1-1}+\dfrac{k(x_2+2)-3-\frac{3}{2}}{x_2-1}=$

$\dfrac{2kx_1x_2+\left(k-\frac{9}{2}\right)(x_1+x_2)-(4k-9)}{x_1x_2-(x_1+x_2)+1}=$

$\dfrac{36k^2-72k+27}{36k^2-72k+27}=1$.

$\therefore k_1+k_2$ 为定值.

2.2 双曲线

第 9 课时 2.2.1 双曲线及其标准方程

基础知识梳理

1. 小于 焦点 焦距

3. $\dfrac{y^2}{a^2}-\dfrac{x^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ $(0,-c)$ $(0,c)$ $c^2=a^2+b^2$

题点知识巩固

1. C $\because PF_1\perp PF_2$,$\therefore\triangle PF_1F_2$ 为直角三角形.

由双曲线的方程可知 $a=2,b=\sqrt{5},c=3$,

$\therefore|F_1F_2|=6$,

$\therefore\begin{cases}|PF_1|^2+|PF_2|^2=|F_1F_2|^2=36,\\(|PF_1|-|PF_2|)^2=4a^2=16,\end{cases}$

$\therefore|PF_1||PF_2|=10$,

$\therefore S_{\triangle PF_1F_2}=\dfrac{1}{2}|PF_1||PF_2|=5$,故选 C.

2. 32

解析:由题可知 $F_2(3,0)$,设双曲线的左焦点为 $F_1(-3,0)$,

$\therefore|AF_1|=|AF_2|=\sqrt{(6\sqrt{6})^2+9}=15$,

$\triangle APF_2$ 的周长为 $|AF_2|+|PF_2|+|AP|=15+|AP|+|PF_2|=15+|AP|+|PF_1|+2\geqslant17+|AF_1|=32$,

故当 AF_1 与双曲线交于 P 点时,周长最小,最小值为 32.

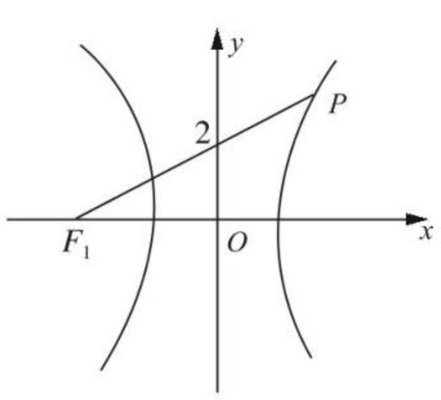
3. B 方程 $\dfrac{x^2}{m}+\dfrac{y^2}{n}=1$ 表示焦点在 y 轴上的双曲线,

则 $\begin{cases}n>0,\\m<0,\end{cases}$

$\because n>m\nRightarrow\begin{cases}n>0,\\m<0,\end{cases}\begin{cases}n>0,\\m<0\end{cases}\Rightarrow n>m$,

$\therefore n>m$ 是 $\begin{cases}n>0,\\m<0\end{cases}$ 的必要不充分条件,故选 B.

4. B 由题意可设双曲线方程为 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$,如图所示.



$\because c=\sqrt{5},c^2=a^2+b^2$,

$\therefore b^2=5-a^2$,

$\therefore$ 方程为 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{5-a^2}=1$,

$\because$ 线段 PF_1 的中点为 $(0,2)$,$\therefore$ 点 P 的坐标为 $(\sqrt{5},4)$,代入双曲线方程得 $\dfrac{5}{a^2}-\dfrac{16}{5-a^2}=1$,解得 $a^2=1$ 或 $a^2=25$(舍去),$\therefore$ 双曲线方程为 $x^2-\dfrac{y^2}{4}=1$.

5. D 设动圆 M 的半径为 R,由题意得 $|MO_1|=R-2$,$|MO_2|=R+4$,

$\therefore|MO_2|-|MO_1|=6$(常数),

且 $6<8$,

$\therefore$ 动圆圆心 M 的轨迹是以 O_1,O_2 为焦点的双曲线的一支,故选 D.

6. **解**:设 P 的坐标为 (x,y),

$\because$ 圆 P 与圆 C 外切且过点 A,

$\therefore|PC|-|PA|=4$.

又 $\because|AC|=|3-(-3)|=6>4$,

$\therefore$ 点 P 的轨迹是以 C,A 为焦点,实轴长 $2a=4$ 的双曲线的右支.

$\because a=2,c=3$,

$\therefore b^2=c^2-a^2=5$.

$\therefore$ 动圆圆心 P 的轨迹方程为 $\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{5}=1(x\geqslant2)$.

提能达标过关

1. B 由 $c^2=3+1=4$,$\therefore c=2$,$\therefore$ 双曲线的焦点坐标为 $(-2,0),(2,0)$,故选 B.

2. A 方程 $\dfrac{x^2}{k-3}-\dfrac{y^2}{k+3}=1$ 表示双曲线 $\Leftrightarrow(k-3)(k+3)>0\Leftrightarrow$ $k<-3$ 或 $k>3$. 因此,"$k>3$"是"方程 $\dfrac{x^2}{k-3}-\dfrac{y^2}{k+3}=1$ 表示双曲线"的充分不必要条件.

3. D 由题可得 $|F_1F_2|=2\sqrt{9+a^2}$,

$(|PF_1|-|PF_2|)^2=4a^2$,①

$|PF_1|^2+|PF_2|^2-2|PF_1||PF_2|\cos60^\circ=|F_1F_2|^2=4(9+a^2)$,②

$\therefore$②$-$①得 $|PF_1||PF_2|=36$,故选 D.

4. B 设 $P(x,y),F(3,0)$,

$\because|OP|=|OF|$,

$\therefore x^2+y^2=9$,

又 $\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{5}=1$,

解得 $y^2=\dfrac{25}{9}$,$\therefore|y|=\dfrac{5}{3}$,

$\therefore S_{\triangle OPF}=\dfrac{1}{2}|y|\cdot3=\dfrac{5}{2}$,故选 B.

5. D 由 $\overrightarrow{OQ}=\dfrac{1}{2}(\overrightarrow{OF}+\overrightarrow{OP})$ 知 Q 点为 FP 的中点,

设双曲线的左焦点为 $F_1(-3,0)$,

则 $|\overrightarrow{OQ}|=\dfrac{1}{2}|\overrightarrow{PF_1}|$,

若 P 点在双曲线的左支上,则 $|PF_1|=|PF|-2a=6-4=2$,$\therefore|\overrightarrow{OQ}|=1$;

若 P 点在双曲线的右支上,则 $|PF_1|=|PF|+2a=6+4=10$,$\therefore|\overrightarrow{OQ}|=5$.

故选 D.

6. $x^2-y^2=1$

解析:由题意知 $c=\sqrt{2},a=1$.

$\therefore b^2=c^2-a^2=1$.

又 $\because$ 焦点在 x 轴上,$\therefore C$ 的方程为 $x^2-y^2=1$.

7. $2\sqrt{3}$

解析:不妨设 $|PF_1|>|PF_2|$,由双曲线方程 $x^2-y^2=1$ 知,$a=1,b=1,c=\sqrt{2}$,由双曲线的定义得

$|PF_1|-|PF_2|=2a=2$. ①

$\because PF_1\perp PF_2$,

$\therefore|PF_1|^2+|PF_2|^2=|F_1F_2|^2=(2c)^2=8$. ②

由①②解得 $|PF_1|=\sqrt{3}+1$,$|PF_2|=\sqrt{3}-1$.

$\therefore|PF_1|+|PF_2|=2\sqrt{3}$.

8. $\dfrac{x^2}{9}-\dfrac{y^2}{16}=1(x\geqslant3)$

解析:圆心 $A(-5,0)$,$r_1=7$,圆心 $B(5,0)$,$r_2=1$,由题意知 $|PA|=r+7$,$|PB|=r+1$(r 为圆 P 的半径,)所以 $|PA|-$

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

$|PB|=6$，故点 P 轨迹是以 A,B 为焦点的双曲线的右支，且 $2a=6,2c=10$，所以 $a=3,c=5,b=4$，故圆心 P 的轨迹方程为 $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1\ (x\geqslant 3)$.

9. **解**：(1) 当命题 q 为真时，由已知得 $\begin{cases}4-k>0\\1-k<0\end{cases}$，解得 $1<k<4$，

∴当命题 q 为真命题时，实数 k 的取值范围是 $\{k|1<k<4\}$.

(2) 当命题 p 为真时，由 $k^2-8k-20\leqslant 0$ 解得 $-2\leqslant k\leqslant 10$.

由题意得命题 p、q 中有一真命题、有一假命题，

当命题 p 为真、命题 q 为假时，则 $\begin{cases}-2\leqslant k\leqslant 10,\\k\leqslant 1 \text{ 或 } k\geqslant 4,\end{cases}$ 解得 $-2\leqslant k\leqslant 1$ 或 $4\leqslant k\leqslant 10$.

当命题 p 为假、命题 q 为真时，则 $\begin{cases}k<-2 \text{ 或 } k>10,\\1<k<4,\end{cases}$ k 无解.

∴实数 k 的取值范围是 $\{k|-2\leqslant k\leqslant 1 \text{ 或 } 4\leqslant k\leqslant 10\}$.

10. **解**：(1) 椭圆方程可化为 $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$，焦点在 x 轴上，且 $c=\sqrt{9-4}=\sqrt{5}$，依据题意可设双曲线方程为 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$，则有 $\begin{cases}\frac{9}{a^2}-\frac{4}{b^2}=1,\\a^2+b^2=5.\end{cases}$

解得 $a^2=3,b^2=2$，故双曲线的标准方程为 $\frac{x^2}{3}-\frac{y^2}{2}=1$.

(2) 不妨设点 M 在双曲线的右支上，

则有 $|MF_1|-|MF_2|=2\sqrt{3}$.

又 $|MF_1|+|MF_2|=6\sqrt{3}$，

∴ $|MF_1|=4\sqrt{3},|MF_2|=2\sqrt{3}$.

又 $|F_1F_2|=2\sqrt{5}$，

∴在 $\triangle MF_1F_2$ 中，$|MF_1|$ 边最长.

由余弦定理得

$$\cos\angle MF_2F_1=\frac{|MF_2|^2+|F_1F_2|^2-|MF_1|^2}{2|MF_2|\cdot|F_1F_2|}=\frac{12+20-48}{2\times 2\sqrt{3}\times 2\sqrt{5}}<0,$$

∴ $\angle MF_2F_1$ 为钝角，故 $\triangle MF_1F_2$ 为钝角三角形.

第 10 课时　2.2.2　双曲线的简单几何性质

基础知识梳理

1. $F_1(0,-c),F_2(0,c)$　$|F_1F_2|=2c$　$y\leqslant -a$ 或 $y\geqslant a$　关于坐标轴、原点对称　$A_1(0,-a),A_2(0,a)$　实轴长 $2a$，虚轴长 $2b$　$e=\frac{c}{a}>1$　$y=\pm\frac{a}{b}x$

2. (1) $x^2-y^2=\lambda$　(2) $y=\pm x$　(3) $\sqrt{2}$

题点知识巩固

1. A　由题可知 $\frac{c}{a}=\sqrt{3}$，

∴ $c=\sqrt{3}a$，∴ $c^2=3a^2$，∴ $b^2=2a^2$，∴ $b=\sqrt{2}a$，

∴双曲线的渐近线方程为 $y=\pm\frac{b}{a}x=\pm\sqrt{2}x$，故选 A.

2. $\sqrt{5}$

解析：由 $\overrightarrow{PF_1}\cdot\overrightarrow{PF_2}=0$，可知 $PF_1\perp PF_2$，不妨设 P 点在双曲线的右支上，

∴ $|PF_1|-|PF_2|=2\times 3=6,|F_1F_2|=2c=2\sqrt{9+m}$，

∵ $|PF_1|^2+|PF_2|^2=|F_1F_2|^2$，

即 $(6+|PF_2|)^2+|PF_2|^2=36+4m$，

即 $2|PF_2|^2+12|PF_2|=4m$，∴ $|PF_2|^2+6|PF_2|=2m$，

又 $S_{\triangle F_1PF_2}=\frac{1}{2}|PF_1||PF_2|=\frac{1}{2}|PF_2|(|PF_2|+6)=\frac{1}{2}(|PF_2|^2+6|PF_2|)=5$，

∴ $|PF_2|^2+6|PF_2|=10$，∴ $2m=10$，∴ $m=5$.

∴双曲线的一条渐近线方程为 $y=\frac{\sqrt{5}}{3}x$，

∴ $F_1(-\sqrt{14},0)$ 到渐近线的距离为

$$d=\frac{\left|\frac{\sqrt{5}}{3}\cdot\sqrt{14}\right|}{\sqrt{\frac{5}{9}+1}}=\sqrt{5}.$$

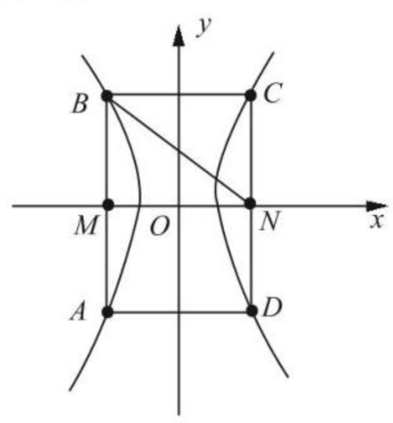
3. B　由题可得，双曲线的渐近线方程为 $y=\pm\frac{b}{a}x$，

则 $\left(-\frac{b}{a}\right)\times 2=-1$，∴ $\frac{2b}{a}=1$，∴ $a=2b$，

∴ $e=\frac{c}{a}=\sqrt{\frac{a^2+b^2}{a^2}}=\sqrt{1+\frac{1}{4}}=\frac{\sqrt{5}}{2}$，故选 B.

4. 2

解析：由题意不妨设 $|AB|=3$，则 $|BC|=2$. 设 AB,CD 的中点分别为 M,N，如图，



则在 Rt$\triangle BMN$ 中，$|MN|=2$，

故 $|BN|=\sqrt{|BM|^2+|MN|^2}=\sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2+2^2}=\frac{5}{2}$.

由双曲线的定义可得 $2a=|BN|-|BM|=\frac{5}{2}-\frac{3}{2}=1$，而 $2c=|MN|=2$，所以双曲线的离心率 $e=\frac{2c}{2a}=2$.

5. A　∵ $F(-3,0)$，∴ $a^2+1=9$，∴ $a^2=8$，

∴双曲线的方程为 $\frac{x^2}{8}-y^2=1$.

设 $P(x,y)(x\geqslant 2\sqrt{2})$，

则 $\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{FP}=(x,y)\cdot(x+3,y)=x(x+3)+y^2$

$=x^2+3x+\frac{x^2}{8}-1=\frac{9}{8}x^2+3x-1$，

∴当 $x=2\sqrt{2}$ 时，$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{FP}$ 有最小值为 $8+6\sqrt{2}$，

∴ $\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{FP}$ 的取值范围是 $[8+6\sqrt{2},+\infty)$，故选 A.

6. **解**：当焦点在 x 轴上时，可设椭圆方程为 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\ (a>b>0)$，

由 $2c=2\sqrt{13}$，得 $c=\sqrt{13}$.

设双曲线方程为 $\frac{x^2}{m^2}-\frac{y^2}{n^2}=1(m>0,n>0)$，

则 $m=a-4$.

又∵ $\frac{e_{双}}{e_{椭}}=\frac{7}{3}$，∴ $\frac{a}{m}=\frac{7}{3}$，解得 $a=7,m=3$.

∵椭圆和双曲线的半焦距均为 $\sqrt{13}$，

∴ $b^2=a^2-c^2=36,n^2=c^2-m^2=4$.

∴椭圆方程为 $\frac{x^2}{49}+\frac{y^2}{36}=1$，

双曲线方程为 $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{4}=1$；

当焦点在 y 轴上时，椭圆方程为 $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{49}=1$，双曲线方程为 $\frac{y^2}{9}-\frac{x^2}{4}=1$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

提能达标过关

1. C 由题可知 $a^2=1, b^2=-\frac{1}{m}$，∵虚轴长是实轴长的 2 倍，
∴$b=2a$，即 $b^2=4a^2$，
∴$-\frac{1}{m}=4$，
∴$m=-\frac{1}{4}$，故选 C.

2. C 由题可知 $\frac{b}{a}=1, a=b$，∴$e=\sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}}=\sqrt{2}$，故选 C.

3. D 由题可知 $\begin{cases} c=5, \\ \frac{b}{a}=\frac{3}{4}, \\ c^2=a^2+b^2, \end{cases}$ 解得 $a=4, b=3$.
故所求的双曲线方程为 $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$，故选 D.

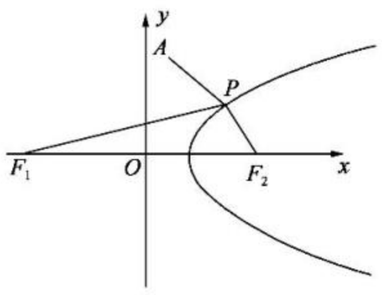
4. C 设 PF_1 的中点为 M，由 $|PF_2|=|F_1F_2|$，
故 $F_2M\perp PF_1$，即 $|F_2M|=2a$，
在 $\mathrm{Rt}\triangle F_1F_2M$ 中，$|F_1M|=\sqrt{(2c)^2-(2a)^2}=2b$，
故 $|PF_1|=4b$，则 $4b-2c=2a$，
即 $2b-a=c$，∴$(2b-a)^2=a^2+b^2$.
∴$3b^2-4ab=0$，即 $3b=4a$.
故双曲线的渐近线方程是 $y=\pm\frac{b}{a}x$，
即 $y=\pm\frac{4}{3}x$，故选 C.

5. B 双曲线 E 的离心率为 $e=\sqrt{5}$，∴$\frac{c}{a}=\sqrt{5}$，
∴$c=\sqrt{5}a$，∴$b=\sqrt{5a^2-a^2}=2a$，
∴双曲线的渐近线方程为 $y=\pm\frac{b}{a}x=\pm2x$，
过右焦点 F 作渐近线 $y=2x$ 的垂线，垂线的方程为
$y=-\frac{1}{2}(x-c)$，
由 $\begin{cases} y=2x, \\ y=-\frac{1}{2}(x-c), \end{cases}$ 得 $M\left(\frac{c}{5},\frac{2c}{5}\right)$.
∴$S_{\triangle FMO}=\frac{1}{2}c\cdot\frac{2}{5}c=1$，∴$c=\sqrt{5}$，∴$a=1$，故实轴长为 2，
故选 B.

6. 1 2
解析：∵双曲线方程为 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$，
∴渐近线方程为 $y=\pm\frac{b}{a}x$.
由题意可得 $\begin{cases} \frac{b}{a}=2, \\ c=\sqrt{5}, \\ c^2=a^2+b^2, \end{cases}$ ∴$\begin{cases} a=1, \\ b=2. \end{cases}$

7. $\frac{2\sqrt{3}}{3}$
解析：由 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$，得渐近线方程为 $bx\pm ay=0$. 依题意得 $\frac{2b}{\sqrt{a^2+b^2}}=1$，∴$a^2=3b^2$. $e^2=\frac{c^2}{a^2}=\frac{a^2+b^2}{a^2}=\frac{4}{3}$，
∴$e=\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

8. 9
解析：如图，



∵$|PF_1|-|PF_2|=4$，∴$|PF_1|=|PF_2|+4$.
∴$|PA|+|PF_1|=|PA|+|PF_2|+4$，当 A, P, F_2 三点共线时，$|PA|+|PF_2|$ 最小，最小值为 $\sqrt{(1-4)^2+(4-0)^2}=5$. ∴$|PA|+|PF_1|$ 的最小值为 9.

9. **解**：设双曲线方程为 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0, b>0)$，
依题意 $c=\sqrt{7}$，∴方程可以化为 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{7-a^2}=1$，
由 $\begin{cases} \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{7-a^2}=1, \\ y=x-1, \end{cases}$ 得
$(7-2a^2)x^2+2a^2x-8a^2+a^4=0$.
设 $M(x_1, y_1), N(x_2, y_2)$，则 $x_1+x_2=\frac{-2a^2}{7-2a^2}$，
∵$\frac{x_1+x_2}{2}=-\frac{2}{3}$，∴$\frac{-a^2}{7-2a^2}=-\frac{2}{3}$，解得 $a^2=2$.
∴双曲线的方程为 $\frac{x^2}{2}-\frac{y^2}{5}=1$.

10. **解**：由题易得 $|PF_1|=2|PF_2|$.
又由双曲线的定义，可知 $|PF_1|-|PF_2|=2a$，
从而 $|PF_2|=2a$.
在 $\mathrm{Rt}\triangle PF_1F_2$ 中，$|F_1F_2|=\sqrt{3}|PF_2|$，即 $2c=2\sqrt{3}a$.
所以 $c^2=3a^2, b^2=c^2-a^2=2a^2$，所以 $b=\sqrt{2}a$，
$\frac{b}{a}=\sqrt{2}$.
又双曲线的焦点在 x 轴上，所以双曲线的渐近线方程为 $y=\pm\frac{b}{a}x$.
故双曲线的渐近线方程为 $y=\pm\sqrt{2}x$.

2.3 抛物线

第 11 课时 2.3.1 抛物线及其标准方程

基础知识梳理

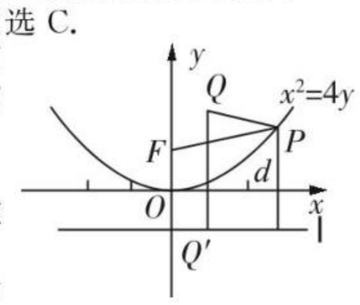
1. 抛物线 焦点 准线

2. $\left(\frac{p}{2},0\right)$ $\left(-\frac{p}{2},0\right)$ $\left(0,\frac{p}{2}\right)$ $\left(0,-\frac{p}{2}\right)$ $x=-\frac{p}{2}$ $x=\frac{p}{2}$ $y=-\frac{p}{2}$ $y=\frac{p}{2}$

题点知识巩固

1. C 由题可知 $2p=4$，∴$p=2$，抛物线的焦点在 x 轴上，
∴抛物线的准线方程是 $x=-1$，故选 C.

2. D 如图所示，由抛物线的定义可知 $|PF|$ 与 P 到准线 l 的距离 d 相等，
所以 $|PQ|+|PF|=|PQ|+d$，
∴$|PQ|+d$ 的最小值即为 Q 到准线 l 的距离 QQ'，
此时 QQ' 与抛物线的交点即为 P 点，
∴$P\left(1,\frac{1}{4}\right)$，故选 D.



3. B 双曲线 $\frac{y^2}{3}-x^2=1$ 的一个焦点为 $(0,2)$，
抛物线的开口向上，设其方程为 $x^2=2py$，
∴$\frac{p}{2}=2$，∴$p=4$，
∴抛物线 C 的标准方程为 $x^2=8y$. 故选 B.

4. D 依题意得 $e=\frac{c}{a}=2$，又 $c^2=a^2+b^2$，
∴$b^2=3a^2$.
又∵焦点 $F\left(0,\frac{p}{2}\right)$ 到 $bx\pm ay=0$ 的距离为 2，
∴$\frac{\frac{ap}{2}}{\sqrt{a^2+b^2}}=2$，整理得 $a^2p^2=16(a^2+b^2)$，

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

$\because b^2=3a^2$，

$\therefore p^2=64$. 又 $p>0$，$\therefore p=8$. $\therefore$ 抛物线 C_2 的方程为 $x^2=16y$.

5. $\frac{\sqrt{2}}{2}$

解析：由题可知 $F\left(\frac{p}{2},0\right)$，设 $P(x_0,y_0)$，若求 k_{OM} 的最大值，则 $y_0>0$，$M(x,y)$，

$\because |PM|=2|MF|$，

$\therefore \overrightarrow{PM}=2\overrightarrow{MF}$，$\therefore (x-x_0,y-y_0)=2\left(\frac{p}{2}-x,-y\right)$，

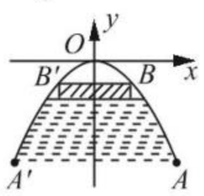
$$\therefore \begin{cases} x=\dfrac{x_0+p}{3}, \\ y=\dfrac{y_0}{3}, \end{cases}$$

$$\therefore k_{OM}=\frac{\frac{y_0}{3}}{\frac{x_0+p}{3}}=\frac{y_0}{x_0+p}=\frac{y_0}{\frac{y_0^2}{2p}+p}=\frac{1}{\frac{y_0}{2p}+\frac{p}{y_0}}\leqslant\frac{1}{2\sqrt{\frac{1}{2}}}=\frac{\sqrt{2}}{2},$$

当且仅当 $\frac{y_0}{2p}=\frac{p}{y_0}$ 时，取等号.

$\therefore k_{OM}$ 的最大值为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

6. **解**：以拱桥的拱顶为坐标原点，建立如图所示的平面直角坐标系，设抛物线方程为 $x^2=-2py(p>0)$，由题意知，点 $A(4,-5)$ 在抛物线上（设 AA' 为水面宽且 $AA'=8$ m），所以 $16=-2p\times(-5)$，$2p=\frac{16}{5}$，所以抛物线方程为 $x^2=-\frac{16}{5}y(-4\leqslant x\leqslant 4)$，设水面上涨到船面两侧与拱桥接触于 B,B'（B' 与 B 关于 y 轴对称）时，船开始不能通航，设 B 点坐标为 $(2,y)$，由 $2^2=-\frac{16}{5}y$，得 $y=-\frac{5}{4}$，



此时水面与抛物线拱顶相距 $|y|+\frac{3}{4}=\frac{5}{4}+\frac{3}{4}=2$(m).

$\therefore$ 水面上涨到与拱顶相距 2 m 时，船开始不能通航.

提能达标过关

1. C

2. A　以 $x=-\frac{1}{4}$ 为准线的抛物线开口向右，$\frac{p}{2}=\frac{1}{4}$，

$\therefore p=\frac{1}{2}$，$\therefore$ 抛物线的方程为 $y^2=x$.

3. C　设双曲线的方程为 $x^2-y^2=a^2$，抛物线的准线方程为 $x=-4$，

由 $\begin{cases} x=-4, \\ x^2-y^2=a^2, \end{cases}$ 得 $y^2=16-a^2$，

$\therefore |AB|=2|y|=2\sqrt{16-a^2}=4\sqrt{3}$，

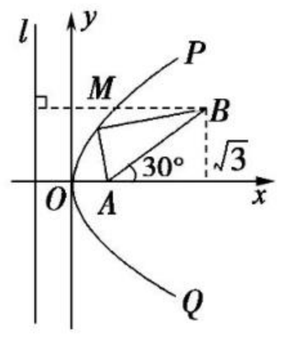
解得 $a^2=4$，$\therefore a=2$，$\therefore$ 双曲线 C 的实轴长为 4，故选 C.

4. D　抛物线经过点 $A(1,3)$，$\therefore 3=p\times 1^2$，$\therefore p=3$.

$\therefore$ 抛物线的方程为 $y=3x^2$，即 $x^2=\frac{1}{3}y$，

$\therefore$ 抛物线焦点到准线的距离为 $\frac{1}{6}$，故选 D.

5. C　如图，由抛物线的定义知，曲线 PQ 为抛物线，要使修建费用最低，可从 B 作 l 的垂线，其垂线段长为 5 km，所以最低费用为 $5a$ 万元.



6. $y^2=-4x$ 或 $x^2=4y$

解析：$\because$ 抛物线过点 $(-4,4)$，

$\therefore$ 抛物线的开口向左或向上，

当抛物线的开口向左时，设抛物线的方程为 $y^2=-2px(p>0)$，

将点 $(-4,4)$ 代入得 $16=-8p$，$\therefore -2p=4$，

$\therefore$ 抛物线的方程为 $y^2=-4x$.

当抛物线的开口向上时，设抛物线的方程为 $x^2=2py(p>0)$，

将点 $(-4,4)$ 代入得 $16=2p\times 4$，$\therefore 2p=4$，

$\therefore$ 抛物线的方程为 $x^2=4y$.

7. 13

解析：解法一：不妨设 $P(x_0,12)$，代入 $y^2=-16x$，得 $x_0=-9$.

$\therefore P(-9,12)$，又 $F(-4,0)$，

$\therefore |PF|=\sqrt{(-9+4)^2+(12-0)^2}=13$.

解法二：设 $P(x_0,12)$，代入 $y^2=-16x$，得 $x_0=-9$.

$\therefore P(-9,12)$，由抛物线定义，$|PF|=9+4=13$.

8. $-\frac{1}{3}$

解析：由抛物线 $y^2=4x$ 知，焦点 $F(1,0)$，$\therefore$ 双曲线的焦点在 x 轴上，且 $c=1$.

$\therefore m>0$，$n<0$.

又 $\because e=\frac{c}{a}=\frac{1}{\sqrt{m}}=2$，$\therefore m=\frac{1}{4}$.

又 $-n=1^2-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$，

$\therefore n=-\frac{3}{4}$. $\therefore \frac{m}{n}=-\frac{1}{3}$.

9. **解**：由抛物线 $y^2=-2px(p>0)$ 知，焦点 $F\left(-\frac{p}{2},0\right)$，准线为 $x=\frac{p}{2}$.

依题意得 $\frac{p}{2}-(-9)=10$，$\therefore p=2$.

故抛物线方程为 $y^2=-4x$.

将 $M(-9,y)$ 代入 $y^2=-4x$，得 $y=\pm 6$.

$\therefore M$ 点的坐标为 $(-9,-6)$ 或 $(-9,6)$.

10. **解**：(1) 双曲线方程化为 $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$，左顶点为 $(-3,0)$，

由题意设抛物线方程为 $y^2=-2px(p>0)$，

$\because \frac{-p}{2}=-3$，$\therefore p=6$，

$\therefore$ 抛物线的标准方程为 $y^2=-12x$.

(2) 设焦点在 x 轴上的抛物线的方程为 $y^2=2px(p\neq 0)$，由已知得 $A(m,-3)$，

由抛物线定义得 $5=|AF|=\left|m+\frac{p}{2}\right|$.

又 $(-3)^2=2pm$，

$\therefore p=\pm 1$ 或 $p=\pm 9$.

故抛物线的标准方程为 $y^2=\pm 2x$ 或 $y^2=\pm 18x$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

第 12 课时 2.3.2 抛物线的简单几何性质

基础知识梳理

$F\left(\frac{p}{2},0\right)$ $F\left(-\frac{p}{2},0\right)$ $F\left(0,\frac{p}{2}\right)$ $F\left(0,-\frac{p}{2}\right)$ $x\geqslant 0,y\in\mathbf{R}$ $x\leqslant 0,y\in\mathbf{R}$ $x\in\mathbf{R},y\geqslant 0$ $x\in\mathbf{R},y\leqslant 0$

题点知识巩固

1. B 直线 $y=-\sqrt{3}(x-2)$ 与 x 轴的交点为 $T(2,0)$，

抛物线 $C:y^2=2px(p>0)$ 的准线方程为 $x=-\frac{p}{2}$，

由 $\begin{cases}y=-\sqrt{3}(x-2),\\ x=-\frac{p}{2},\end{cases}$

得 $M\left(-\frac{p}{2},\sqrt{3}\left(2+\frac{p}{2}\right)\right)$，

因为 T 为 MN 的中点，所以 $N\left(4+\frac{p}{2},-\sqrt{3}\left(2+\frac{p}{2}\right)\right)$，

代入抛物线的方程可得 $3\left(2+\frac{p}{2}\right)^2=2p\left(4+\frac{p}{2}\right)$，

即 $p^2+8p-48=0$，解得 $p=4$ 或 $p=-12$（舍去），故选 B.

2. B 抛物线 $x^2=16y$ 的焦点 $F(0,4)$，准线方程为 $y=-4$，

∵圆心 C 在抛物线上，∴圆心 C 到准线的距离与到焦点的距离相等，∴圆恒过定点 $(0,4)$，故选 B.

3. C 抛物线 $C:y^2=3x$ 的焦点为 $F\left(\frac{3}{4},0\right)$，所以 AB 所在的直线方程为 $y=\frac{\sqrt{3}}{3}\left(x-\frac{3}{4}\right)$，将 $y=\frac{\sqrt{3}}{3}\left(x-\frac{3}{4}\right)$ 代入 $y^2=3x$，消去 y 整理得 $x^2-\frac{21}{2}x+\frac{9}{16}=0$. 设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，由根与系数的关系得 $x_1+x_2=\frac{21}{2}$，由抛物线的定义可得 $|AB|=x_1+x_2+p=\frac{21}{2}+\frac{3}{2}=12$.

4. 2

解析：∵抛物线 $y^2=4x$ 的焦点为 $(1,0)$，

∴直线 $y=kx-k$ 过焦点，

设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，

∴$|AB|=x_1+x_2+2=4$，

∴$x_1+x_2=2$，

弦 AB 的中点到准线的距离为 $\frac{x_1+x_2}{2}+1=2$.

5. D 设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，

则 $\begin{cases}y_1^2=4x_1,①\\ y_2^2=4x_2,②\\ x_1+x_2=4,③\\ y_1+y_2=2,④\end{cases}$

①－②得 $y_1^2-y_2^2=4(x_1-x_2)$，∴$(y_1-y_2)(y_1+y_2)=4(x_1-x_2)$，∴$y_1-y_2=2(x_1-x_2)$，∴$k_l=2$，

∴直线 l 的方程为 $y-1=2(x-2)$，

即 $2x-y-3=0$，

∴原点 O 到直线 l 的距离为 $d=\frac{|-3|}{\sqrt{2^2+1^2}}=\frac{3\sqrt{5}}{5}$，故选 D.

6. **解：**(1)设动点 $M(x,y)$，

由抛物线定义可知点 M 的轨迹 E 是以 $N(1,0)$ 为焦点，直线 $l:x=-1$ 为准线的抛物线，所以轨迹 E 的方程为 $y^2=4x$.

(2)证明：由题意可设直线 $l':x=my+n$，

由 $\begin{cases}x=my+n,\\ y^2=4x,\end{cases}$ 可得 $y^2-4my-4n=0$，（*）

因为直线 l' 与曲线 E 有唯一公共点 A，

所以 $\Delta=16m^2+16n=0$，即 $n=-m^2$.

所以（*）可化简为 $y^2-4my+4m^2=0$，

所以 $A(m^2,2m)$，

令 $x=-1$ 得 $P\left(-1,-\frac{1+n}{m}\right)$，

因为 $n=-m^2$，

所以 $\overrightarrow{NA}\cdot\overrightarrow{NP}=(m^2-1,2m)\cdot\left(-2,-\frac{1+n}{m}\right)=-2m^2+2-2-2n=0$，

所以 $NA\perp NP$，

所以点 N 在以 PA 为直径的圆 C 上.

提能达标过关

1. B 抛物线 $x^2=4y$ 的准线为 $y=-1$，设 P 到 x 轴的距离为 d，则 $|PF|=3d$，∴$3d=d+1$，∴$d=\frac{1}{2}$.

2. A 抛物线 $y^2=4x$ 的焦点为 $(1,0)$，

设直线 AB 的方程为 $y=x-1$，设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，

由 $\begin{cases}y=x-1,\\ y^2=4x\end{cases}$ 消去 y，得 $x^2-6x+1=0$，$x_1+x_2=6$，

∴$|AB|=x_1+x_2+2=8$，故选 A.

3. D 抛物线的焦点 $F(1,0)$，

若直线 AB 与 x 轴垂直，$|AB|=4$，不符合题意，所以直线 AB 的斜率存在，

设直线 AB 的方程为 $y=k(x-1)$，$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，$A'(x_1,-y_1)$，

由 $\begin{cases}y=k(x-1),\\ y^2=4x,\end{cases}$ 得 $k^2x^2-(2k^2+4)x+k^2=0$.

∴$x_1+x_2=\frac{2k^2+4}{k^2}$，$x_1x_2=1$，

∴$|AB|=x_1+x_2+2=8$，∴$\frac{2k^2+4}{k^2}=6$，∴$k^2=1$.

方程可化为 $x^2-6x+1=0$.

∴$x_1=3+2\sqrt{2}$，$x_2=3-2\sqrt{2}$，

∴$y_1=2+2\sqrt{2}$，$y_2=2-2\sqrt{2}$，

∴$A(3+2\sqrt{2},2+2\sqrt{2})$，$B(3-2\sqrt{2},2-2\sqrt{2})$，

$A'(3+2\sqrt{2},-2-2\sqrt{2})$，

∴$A'B$ 的中点为 $(3,-2\sqrt{2})$，

$k_{A'B}=\frac{2-2\sqrt{2}+2+2\sqrt{2}}{3-2\sqrt{2}-3-2\sqrt{2}}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$，

∴$A'B$ 的垂直平分线方程为 $y+2\sqrt{2}=\sqrt{2}(x-3)$，

令 $y=0$，得 $2\sqrt{2}=\sqrt{2}x-3\sqrt{2}$，

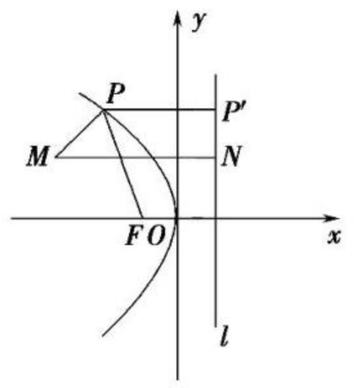
∴$x=5$，∴$D(5,0)$.

故选 D.

4. C 如图所示，l 为抛物线的准线，过 P 作 $PP'\perp l$ 于 P'，过 M 作 $MN\perp l$ 于 N，

∴$|PF|+|PM|=|PP'|+|PM|\geqslant|MN|$.

∴当 $|PF|+|PM|$ 取最小值时，P 的纵坐标为 1，代入抛物线方程可得 P 的坐标为 $\left(-\frac{1}{4},1\right)$.



5. B 抛物线 $y^2=4x$ 的焦点 $F(1,0)$，$A(-1,0)$，

当 P 与原点重合时，$\frac{|PA|}{|PF|}=1$；

当 P 与原点不重合时，过 P 作抛物线准线的垂线，垂足为 M，

则 $|PF|=|PM|$，

∴$\frac{|PA|}{|PF|}=\frac{1}{\sin\angle MAP}$，

设过点 A 的抛物线的切线方程为 $y=k(x+1)$，

由 $\begin{cases}y=k(x+1),\\ y^2=4x\end{cases}$ 消去 y，得 $k^2x^2+(2k^2-4)x+k^2=0$，

$\Delta=(2k^2-4)^2-4k^4=0$，∴$k=\pm1$，

∴$\angle PAF\in(0,45°]$，

∴$\angle MAP\in[45°,90°]$，

∴$\frac{1}{\sin\angle MAP}\in[1,\sqrt{2}]$，∴$\frac{|PA|}{|PF|}$ 的最大值为 $\sqrt{2}$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

6. 2

解析：由题意可知过焦点 $F\left(\frac{p}{2},0\right)$，倾斜角为 45°的直线方程为 $y=x-\frac{p}{2}$，代入 $y^2=2px$，得 $x^2-3px+\frac{p^2}{4}=0$. 又 $|AB|=\sqrt{1+1^2}\cdot\sqrt{(3p)^2-4\times\frac{p^2}{4}}=8$，∴ $p=2$.

7. $2\sqrt{3}-1$

解析：设 $P\left(\frac{y^2}{4},y\right)$，圆的标准方程为 $(x-4)^2+y^2=1$.

圆心 $C(4,0)$，半径 $r=1$，

则 $|PC|=\sqrt{\left(4-\frac{y^2}{4}\right)^2+(0-y)^2}=\frac{\sqrt{(y^2-8)^2+192}}{4}$，

∴当 $y^2=8$ 时，$|PC|$ 有最小值 $2\sqrt{3}$.

∴ $|PQ|$ 的最小值为 $2\sqrt{3}-1$.

8. ②⑤

解析：抛物线 $y^2=10x$ 的焦点 $F\left(\frac{5}{2},0\right)$，在 x 轴上，所以①不适合，②适合；当 $x=1$ 时，$y=\pm\sqrt{10}$，不妨设 $A(1,\sqrt{10})$，则 $|FA|=\sqrt{\left(1-\frac{5}{2}\right)^2+(0-\sqrt{10})^2}\neq 6$，所以③不适合；通径长为 $2p=10$，所以④不适合；由 $F\left(\frac{5}{2},0\right)$，设 $B(2,1)$，则 $k_{FB}=\frac{1-0}{2-\frac{5}{2}}=-2$，而 $k_{OB}=\frac{1}{2}$，所以 $k_{FB}\cdot k_{OB}=-1$，所以⑤适合.

9. **解**：(1)抛物线焦点为 $F\left(\frac{p}{2},0\right)$，准线方程为 $x=-\frac{p}{2}$，

因为点 $P(1,m)$ 到焦点 F 的距离为 2，所以 $1+\frac{p}{2}=2$，解得 $p=2$.

(2)抛物线 C 的焦点坐标为 $(1,0)$，满足直线 l 的方程 $x+y-1=0$. 故焦点 F 在直线 l 上.

联立 $\begin{cases}x+y-1=0,\\ y^2=4x,\end{cases}$ 得 $x^2-6x+1=0$.

显然 $\Delta>0$，设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，

则 $x_1+x_2=6$，

所以 $|AB|=x_1+x_2+p=6+2=8$，即 $|AB|=8$.

10. **解**：(1)因为⊙M 过点 A，B，所以圆心 M 在 AB 的垂直平分线上. 由已知 A 在直线 $x+y=0$ 上，且 A，B 关于坐标原点 O 对称，所以 M 在直线 $y=x$ 上，故可设 $M(a,a)$.

因为⊙M 与直线 $x+2=0$ 相切，所以⊙M 的半径为 $r=|a+2|$.

由已知得 $|AO|=2$，又 $\overrightarrow{MO}\perp\overrightarrow{AO}$，故可得 $2a^2+4=(a+2)^2$，解得 $a=0$ 或 $a=4$.

故⊙M 的半径 $r=2$ 或 $r=6$.

(2)存在定点 $P(1,0)$，使得 $|MA|-|MP|$ 为定值.

理由如下：

设 $M(x,y)$，由已知得⊙M 的半径为 $r=|x+2|$，$|AO|=2$.

由于 $\overrightarrow{MO}\perp\overrightarrow{AO}$，故可得 $x^2+y^2+4=(x+2)^2$，化简得 M 的轨迹方程为 $y^2=4x$.

因为曲线 $C:y^2=4x$ 是以点 $P(1,0)$ 为焦点，以直线 $x=-1$ 为准线的抛物线，所以 $|MP|=x+1$.

因为 $|MA|-|MP|=r-|MP|=x+2-(x+1)=1$，所以存在满足条件的定点 P.

阶段评估 2

1. A　抛物线 $y=4x^2$ 的标准方程为 $x^2=\frac{1}{4}y$，

∴抛物线的焦点为 $\left(0,\frac{1}{16}\right)$，故选 A.

2. D　双曲线的渐近线方程为 $y=\pm\frac{b}{a}x$，

将 $(3,-4)$ 代入 $y=-\frac{b}{a}x$，得 $\frac{b}{a}=\frac{4}{3}$，

∴ $e=\frac{c}{a}=\sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}}=\frac{5}{3}$，故选 D.

3. B　双曲线的焦点为 $(\pm4,0)$，顶点为 $(\pm2,0)$，

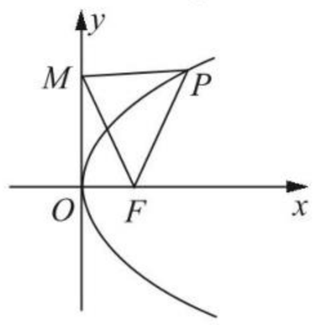
∴椭圆的焦点在 x 轴上，且 $a=4$，$c=2$，∴ $b^2=a^2-c^2=12$，

故椭圆的方程为 $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{12}=1$，故选 B.

4. D　由 m 是 2 和 8 的等比中项，得 $m^2=2\times8$，

∴ $m=\pm4$. 当 $m=4$ 时，曲线为椭圆 $x^2+\frac{y^2}{4}=1$，离心率 $e=\frac{\sqrt{3}}{2}$；当 $m=-4$ 时，曲线为双曲线 $x^2-\frac{y^2}{4}=1$，离心率 $e=\sqrt{5}$.

5. A　如图，由 $|PF|=4$ 知，点 P 的横坐标 $x=3$，∴ $y=\pm2\sqrt{3}$. ∴△PFM 的面积 $S=\frac{1}{2}\times3\times2\sqrt{3}=3\sqrt{3}$.



6. D　∵点 $N\left(c,\frac{a}{2}\right)$ 在椭圆的外部，

∴ $\frac{b^2}{a}<\frac{a}{2}$，即 $a^2>2b^2$，∴ $a^2>2a^2-2c^2$，∴ $a^2<2c^2$，

∴ $e=\frac{c}{a}>\frac{\sqrt{2}}{2}$，$|MF_1|+|MN|=2a-|MF_2|+|MN|\leqslant 2a+|NF_2|=\frac{5}{2}a$，∴ $\frac{5}{2}a<\frac{3}{2}\cdot2c$，∴ $e>\frac{5}{6}$，

∴ $\frac{5}{6}<e<1$.

∴椭圆离心率 e 的取值范围为 $\left(\frac{5}{6},1\right)$.

7. $\frac{\sqrt{5}}{2}$

解析：$e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}=\frac{\sqrt{5}}{2}$.

8. $\frac{1}{4}$

解析：设直线 l 的方程为 $y=x-t$，

联立 $\begin{cases}y=x-t,\\ x^2=y,\end{cases}$ 消去 y 得 $x^2-x+t=0$，

由 $\Delta=1-4t=0$，得 $t=\frac{1}{4}$.

9. 1

解析：由题设知 $|PF_1|^2+|PF_2|^2=|F_1F_2|^2=4c^2=12$.

又由椭圆的定义知 $|PF_1|+|PF_2|=4\Rightarrow|PF_1|\cdot|PF_2|=\frac{1}{2}(16-|PF_1|^2-|PF_2|^2)=2$.

故△F_1PF_2 的面积为 $\frac{1}{2}|PF_1|\cdot|PF_2|=\frac{1}{2}\times2=1$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

10. $\frac{x^2}{2}+y^2=1$

解析：由 $2x^2-2y^2=1$，得 $\frac{x^2}{\frac{1}{2}}-\frac{y^2}{\frac{1}{2}}=1$，

$\therefore c^2=1$，离心率 $e=\sqrt{2}$，$\therefore$ 椭圆的离心率为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

$\therefore \begin{cases} a^2-b^2=1, \\ \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2=1-\frac{b^2}{a^2}, \end{cases}$ 解得 $a^2=2, b^2=1$.

$\therefore$ 该椭圆的方程为 $\frac{x^2}{2}+y^2=1$.

11. **解**：若 p 为真，则 $\begin{cases} 2m>0, \\ 1-m>0, \\ 2m<1-m, \end{cases}$ $\therefore 0<m<\frac{1}{3}$.

若 q 为真，则 $1<\frac{5+m}{5}<4$，$\therefore 0<m<15$.

若 p, q 有且只有一个为真，则 $\frac{1}{3}\leqslant m<15$.

$\therefore$ 实数 m 的取值范围是 $\left[\frac{1}{3}, 15\right)$.

12. **解**：$\because OA\perp OB$，且 OA 所在直线的方程为 $y=\sqrt{3}x$，

$\therefore OB$ 所在直线的方程为 $y=-\frac{\sqrt{3}}{3}x$.

由 $\begin{cases} y^2=2px, \\ y=\sqrt{3}x, \end{cases}$ 得 A 点坐标 $\left(\frac{2p}{3}, \frac{2\sqrt{3}p}{3}\right)$，

由 $\begin{cases} y^2=2px, \\ y=-\frac{\sqrt{3}}{3}x, \end{cases}$ 得 B 点坐标 $(6p, -2\sqrt{3}p)$.

$|OA|=\frac{4}{3}|p|$，$|OB|=4\sqrt{3}|p|$，

$S_{\triangle OAB}=\frac{8\sqrt{3}}{3}p^2=6\sqrt{3}$，所以 $p=\pm\frac{3}{2}$.

即该抛物线的方程为 $y^2=3x$ 或 $y^2=-3x$.

13. **解**：(1)设椭圆 C 的方程为 $mx^2+ny^2=1(m>0, n>0, m\neq n)$，由题意得 $\begin{cases} 16m+n=1, \\ 4m+4n=1, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} m=\frac{1}{20}, \\ n=\frac{1}{5}. \end{cases}$ $\therefore$ 椭圆 C 的方程为 $\frac{x^2}{20}+\frac{y^2}{5}=1$.

(2)由题意可设直线 l 的方程为 $y=x+m$，

由 $\begin{cases} y=x+m, \\ \frac{x^2}{20}+\frac{y^2}{5}=1, \end{cases}$ 得 $5x^2+8mx+4m^2-20=0$.

则 $\Delta=(8m)^2-4\times5(4m^2-20)=-16m^2+400>0$，

$\therefore -5<m<5$.

又点 $M(4,1)$ 到直线 l 的距离为 $\frac{|4-1+m|}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$，

$\therefore m=-1$ 或 $m=-5$(舍去).

$\therefore$ 直线 l 的方程为 $x-y-1=0$.

14. **解**：(1)将 $y=kx+3$ 代入 $x^2=6y$，得 $x^2-6kx-18=0$.

设 $M(x_1, y_1)$，$N(x_2, y_2)$，则 $x_1+x_2=6k$，$x_1x_2=-18$，

从而 $|MN|=\sqrt{1+k^2}\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}=6\sqrt{1+k^2}\sqrt{2+k^2}$.

因为 O 到 l 的距离为 $d=\frac{3}{\sqrt{1+k^2}}$，所以 $\triangle MON$ 的面积 $S=\frac{1}{2}d|MN|=9\sqrt{2+k^2}$.

因为 $1<k<2$，所以 $S\in(9\sqrt{3}, 9\sqrt{6})$.

(2)存在符合题意的点，证明如下：

设 $P(0,b)$ 为符合题意的点，直线 PM，PN 的斜率分别为 k_1，k_2.

从而 $k_1+k_2=\frac{y_1-b}{x_1}+\frac{y_2-b}{x_2}=\frac{2kx_1x_2+(3-b)(x_1+x_2)}{x_1x_2}$

$=\frac{-36k+6k(3-b)}{x_1x_2}$.

当 $b=-3$ 时，有 $k_1+k_2=0$，则直线 PM 的倾斜角与直线 PN 的倾斜角互补，

故 $\angle OPM=\angle OPN$，所以点 $P(0,-3)$ 符合题意.

故以线段 OP 为直径的圆的方程为 $x^2+\left(y+\frac{3}{2}\right)^2=\frac{9}{4}$.

第三章 导数及其应用

3.1 变化率与导数

第 13 课时 3.1.1 变化率问题 3.1.2 导数的概念

基础知识梳理

1. $\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$ $\lim\limits_{\Delta x\to0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$

2. 瞬时变化率 $\lim\limits_{\Delta x\to0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$

题点知识巩固

1. B $\Delta y=2(1+\Delta x)^2-1-2\times1+1=4\Delta x+2\Delta x^2$，

$\therefore \frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{4\Delta x+2\Delta x^2}{\Delta x}=4+2\Delta x$，故选 B.

2. -2

解析：$\Delta s=(2-2^2)-(2-0^2)=-4$，

$\therefore \frac{\Delta s}{\Delta t}=\frac{-4}{2-0}=-2$.

$\therefore$ 该质点在 $[0,2]$ 内的平均速度为 -2.

3. B $\Delta y=f(2+\Delta x)-f(2)=3(2+\Delta x)+1-(3\times2+1)=3\Delta x$，

则 $\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{3\Delta x}{\Delta x}=3$.

4. A $\Delta s=\frac{1}{2+\Delta t}+2(2+\Delta t)-\frac{1}{2}-4=\frac{1}{2+\Delta t}-\frac{1}{2}+2\Delta t=\frac{-\Delta t}{2(2+\Delta t)}+2\Delta t$，

$\therefore \frac{\Delta s}{\Delta t}=\frac{-1}{2(2+\Delta t)}+2$，

$\therefore \lim\limits_{\Delta t\to0}\frac{\Delta s}{\Delta t}=\lim\limits_{\Delta t\to0}\left[\frac{-1}{2(2+\Delta t)}+2\right]=\frac{7}{4}$，

$\therefore$ 物体在 2 秒末的瞬时速度为 $\frac{7}{4}$ 米/秒，故选 A.

5. D $f'(x)=\lim\limits_{\Delta x\to0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to0}\frac{\frac{2}{x+\Delta x}-\frac{2}{x}}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to0}\frac{-2}{x(x+\Delta x)}=-\frac{2}{x^2}$，

$\therefore f'(m)=-\frac{2}{m^2}=-\frac{1}{2}$，$\therefore m=\pm2$. 故选 D.

6. **解**：(1)$\Delta y=\frac{2}{(1+\Delta x)^2}-2=\frac{-4\Delta x-2(\Delta x)^2}{(1+\Delta x)^2}$，

$\frac{\Delta y}{\Delta x}=-\frac{4+2\Delta x}{(1+\Delta x)^2}$.

由导数的定义，得

$y'|_{x=1}=\lim\limits_{\Delta x\to0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to0}\left[-\frac{4+2\Delta x}{(1+\Delta x)^2}\right]=-4$.

(2)$\Delta y=(-1+\Delta x)^2+a(-1+\Delta x)+b-(1-a+b)=(a-2)\Delta x+(\Delta x)^2$，

$\frac{\Delta y}{\Delta x}=a-2+\Delta x$，由导数的定义，得

$y'|_{x=-1}=\lim\limits_{\Delta x\to0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to0}(a-2+\Delta x)=a-2$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

提能达标过关

1. D　Δx 可正，可负就是不能等于零.

2. B　$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f\left(\frac{3}{2}+\Delta x\right)-f\left(\frac{3}{2}\right)}{\Delta x}=$

$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{-\left(\frac{3}{2}+\Delta x\right)^2+10+\left(\frac{3}{2}\right)^2-10}{\Delta x}=$

$\lim\limits_{\Delta x\to 0}(-3-\Delta x)=-3$. 故选 B.

3. A　$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x_0+x)-f(x_0-3x)}{x}=$

$4\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x_0+x)-f(x_0-3x)}{4x}=4f'(x_0)$，故选 A.

4. C　$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(1+\Delta x)-f(1)}{2\Delta x}=\dfrac{1}{2}\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(1+\Delta x)-f(1)}{\Delta x}=\dfrac{1}{2}f'(1)$.

5. C　$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(1+\Delta x)-f(1)}{3\Delta x}=\dfrac{1}{3}\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(1+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\dfrac{1}{3}f'(1)$.

6. $\bar{v}_3>\bar{v}_2>\bar{v}_1$

解析：$\bar{v}_1=\dfrac{s(t_1)-s(t_0)}{t_1-t_0}=k_{OA}$，

$\bar{v}_2=\dfrac{s(t_2)-s(t_1)}{t_2-t_1}=k_{AB}$，

$\bar{v}_3=\dfrac{s(t_3)-s(t_2)}{t_3-t_2}=k_{BC}$，

由题图知 $k_{BC}>k_{AB}>k_{OA}$，

$\therefore\bar{v}_3>\bar{v}_2>\bar{v}_1$.

7. (1)乙　(2)乙

8. $2(x-a)$　0

解析：$f'(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$

$=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{(x+\Delta x-a)^2-(x-a)^2}{\Delta x}$

$=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{(\Delta x)^2+2x\Delta x-2a\Delta x}{\Delta x}$

$=\lim\limits_{\Delta x\to 0}(\Delta x+2x-2a)=2(x-a)$，

$\therefore f'(a)=2(a-a)=0$.

9. **解**：$\Delta y=f(1+\Delta x)-f(1)$

$=a(1+\Delta x)^2+2-(a\times 1^2+2)$

$=2a\cdot\Delta x+a(\Delta x)^2$，

$\therefore f'(1)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}(2a+a\cdot\Delta x)=2a=4$，

$\therefore a=2$.

10. **解**：(1)当 $t=20$，$\Delta t=0.1$ 时，

$\Delta s=s(20+\Delta t)-s(20)$

$=10(20+0.1)+5(20+0.1)^2-(10\times 20+5\times 20^2)$

$=1+20+5\times 0.01=21.05$，

$\therefore\dfrac{\Delta s}{\Delta t}=\dfrac{21.05}{0.1}=210.5$.

(2)由导数的定义知，$t=20$ 时的速度即为

$v=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{\Delta s}{\Delta t}$

$=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{10(t+\Delta t)+5(t+\Delta t)^2-10t-5t^2}{\Delta t}$

$=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{5(\Delta t)^2+10\Delta t+10t\Delta t}{\Delta t}$

$=\lim\limits_{\Delta t\to 0}(5\Delta t+10+10t)$

$=10+10t$

$=10+10\times 20$

$=210(\mathrm{m/s})$.

第 14 课时　3.1.3　导数的几何意义

基础知识梳理

1. $y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)$

2. 瞬时速度

3. 导函数　$f'(x)$或$(y'_x、y')$　导数

题点知识巩固

1. C　曲线在点(x_0,y_0)处有导数，则切线一定存在；但有切线，切线的斜率不一定存在，即导数不一定存在，故选 C.

2. A　由题可知 $f'(1)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(1)-f(1-\Delta x)}{\Delta x}=-1$.

$\therefore y=f(x)$在点$(1,f(1))$处的切线斜率为-1，故选 A.

3. A　$f'(0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta x^2+a\Delta x+b-b}{\Delta x}=a$，

又 $f'(0)=1$，$\therefore a=1$.

$f(0)=b$，$\therefore 0-b+1=0$，$\therefore b=1$，故选 A.

4. A　$f'(1)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{-(1+\Delta x)^3+3(1+\Delta x)^2-2}{\Delta x}=3$.

$\therefore$切线方程为 $y-2=3(x-1)$，即 $y=3x-1$，故选 A.

5. D　$f'(1)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{(1+\Delta x)^2+1+\Delta x+\frac{1}{1+\Delta x}-3}{\Delta x}=$

$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta x^2+3\Delta x-\frac{\Delta x}{1+\Delta x}}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\left(\Delta x+3-\dfrac{1}{1+\Delta x}\right)=2$.

$\therefore -a\cdot 2=-1$，

$\therefore a=\dfrac{1}{2}$，故选 D.

6. **解**：(1)由 $f'(2)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{a(2+\Delta x)-\frac{b}{2+\Delta x}-2a+\frac{b}{2}}{\Delta x}=a+\dfrac{b}{4}=\dfrac{5}{4}$，$f(2)=2a-\dfrac{b}{2}=\dfrac{3}{2}$，

解得 $a=b=1$，

$\therefore f(x)=x-\dfrac{1}{x}$.

(2)证明：设 $P(x_0,y_0)$ 为曲线上任一点，$y_0=f(x_0)=x_0-\dfrac{1}{x_0}$，

则 $f'(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{(x_0+\Delta x)-\frac{1}{x_0+\Delta x}-x_0+\frac{1}{x_0}}{\Delta x}=1+\dfrac{1}{x_0^2}$，

$\therefore$曲线在点 $P(x_0,y_0)$ 处的切线方程为

$y-\left(x_0-\dfrac{1}{x_0}\right)=\left(1+\dfrac{1}{x_0^2}\right)(x-x_0)$，

令 $x=0$，得 $y_0=-\dfrac{2}{x_0}$，

令 $y=x$，得 $y=x=2x_0$，

所以点 $P(x_0,y_0)$ 处的切线与直线 $x=0$，$y=x$ 所围成的三角形的面积为

$S=\dfrac{1}{2}\left|-\dfrac{2}{x_0}\right||2x_0|=2$.

提能达标过关

1. D　由导数的几何意义知，曲线 $y=f(x)$ 在点$(3,f(3))$处的切线斜率为 0，所以切线与 x 轴平行或重合.

2. C　$f(x)=x(x-6)=x^2-6x$，

$\therefore f'(0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta x^2-6\Delta x-0}{\Delta x}=-6$.

$\therefore f(x)$ 在 $x=0$ 处的切线斜率为-6，故选 C.

3. B　由题图知 $A(1,3)$，$B(3,1)$，则 $k_{AB}=\dfrac{1-3}{3-1}=-1$.

由导数的定义及几何意义知，函数 $y=f(x)$ 在 A、B 两点间的平均变化率是-1.

4. D　$\because f(x)$为奇函数，$\therefore a-1=0$，$\therefore a=1$.

$\therefore f(x)=x^3+x$，

$f'(0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta x^3+\Delta x-0}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}(\Delta x^2+1)=1$.

$\therefore y=f(x)$在点$(0,0)$处的切线方程为 $y=x$，故选 D.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

5. B ∵$f'(x)=2x-1$，∴$f'(1)=2\times1-1=1$，由导数的几何意义知 $\tan\alpha=1$，又 $\alpha\in[0°,180°)$，∴$\alpha=45°$.

6. $8x-y-8=0$

解析：∵$y=2x^2$，∴$\Delta y=2(x+\Delta x)^2-2x^2=4x\Delta x+2(\Delta x)^2$，

∴$y'=\lim\limits_{\Delta x\to0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to0}(4x+2\Delta x)=4x$.

∴$k=y'|_{x=2}=4\times2=8$. 又过点 $A(2,8)$.

∴切线方程为 $y-8=8(x-2)$，即 $8x-y-8=0$.

7. 3

解析：由题可知 $f(0)=1$，$f'(0)=2$，

∴$f(0)+f'(0)=3$.

8. $\dfrac{9}{8}$

解析：由题意可得切线的方程为 $\dfrac{x}{4}+\dfrac{y}{4.5}=1$，其斜率为 $k=-\dfrac{4.5}{4}=-\dfrac{9}{8}$.

又点 $(2,f(2))$ 为切点，∴$f'(2)=-\dfrac{9}{8}$.

又 $\dfrac{2}{4}+\dfrac{f(2)}{4.5}=1$，∴$f(2)=\dfrac{9}{4}$.

∴$f(2)+f'(2)=\dfrac{9}{4}-\dfrac{9}{8}=\dfrac{9}{8}$.

9. **解**：设切点 $P(x_0,y_0)$，

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to0}\frac{\frac{1}{3}(x_0+\Delta x)^3+\frac{4}{3}-\frac{1}{3}x_0^3-\frac{4}{3}}{\Delta x}=x_0^2,$$

$y_0=f(x_0)=\dfrac{1}{3}x_0^3+\dfrac{4}{3}$，

∴切线方程为 $y-\left(\dfrac{1}{3}x_0^3+\dfrac{4}{3}\right)=x_0^2(x-x_0)$，

将点 $(2,4)$ 代入切线方程，

$4-\dfrac{1}{3}x_0^3-\dfrac{4}{3}=x_0^2(2-x_0)$，

即 $x_0^3-3x_0^2+4=0$，

即 $(x_0+1)(x_0-2)^2=0$，

∴$x_0=-1$ 或 $x_0=2$.

∴切线方程为 $4x-y-4=0$ 或 $x-y+2=0$.

10. **解**：$f'(x)=\lim\limits_{\Delta x\to0}\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to0}\dfrac{(x+\Delta x)^2-x^2}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to0}\dfrac{2x\Delta x+(\Delta x)^2}{\Delta x}=2x$，

设 $P(x_0,y_0)$ 是满足条件的点.

(1)∵切线与直线 $y=4x-5$ 平行，

∴$2x_0=4$，$x_0=2$，$y_0=4$. ∴$P(2,4)$.

(2)∵切线与直线 $2x-6y+5=0$ 垂直，∴$2x_0\times\dfrac{1}{3}=-1$，得 $x_0=-\dfrac{3}{2}$，$y_0=\dfrac{9}{4}$，∴$P\left(-\dfrac{3}{2},\dfrac{9}{4}\right)$.

(3)∵切线与 x 轴成 135°的倾斜角，∴斜率 $k=-1$. 即 $2x_0=-1$，$x_0=-\dfrac{1}{2}$，$y_0=\dfrac{1}{4}$，∴$P\left(-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{4}\right)$.

3.2 导数的计算

第 15 课时 3.2.1 几个常用函数的导数 3.2.2 基本初等函数的导数公式及导数的运算法则

基础知识梳理

1. 0 $\alpha x^{\alpha-1}$ $\cos x$ $-\sin x$ $a^x\ln a(a>0)$ e^x $\dfrac{1}{x\ln a}(a>0$ 且 $a\neq1)$ $\dfrac{1}{x}$

2. (1)$f'(x)\pm g'(x)$ (2)$f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$ (3)$\dfrac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}(g(x)\neq0)$

题点知识巩固

1. D $\left(\sin\dfrac{\pi}{6}\right)'=0$，$(\log_ax)'=\dfrac{1}{x\ln a}$，$(3^x)'=3^x\ln3$，$\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)'=-\dfrac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}=-\dfrac{1}{2x\sqrt{x}}$，D 正确.

2. C $f'(x)=2x-\dfrac{1}{x^2}$，$f'(-1)=-2-1=-3$，故选 C.

3. B $f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\cdot\sin x+\sqrt{x}\cos x$，故选 B.

4. $\dfrac{10}{3}$

解析：∵$f(x)=ax^3+3x^2+2$，∴$f'(x)=3ax^2+6x$.

∴$f'(-1)=3a-6=4$，∴$a=\dfrac{10}{3}$.

5. C $f'(x)=2ax-\dfrac{b}{x}$，

∴$\begin{cases}f'(1)=0,\\f(1)=1,\end{cases}$∴$\begin{cases}2a-b=0,\\a=1,\end{cases}$∴$a=1$，$b=2$，$a+b=3$，故选 C.

6. C $f(x)=\dfrac{1}{2}e^x-\dfrac{3}{2}e^{-x}=\dfrac{1}{2}e^x-\dfrac{3}{2e^x}$，

$f'(x)=\dfrac{1}{2}e^x-\dfrac{3}{2}\cdot\dfrac{0-e^x}{(e^x)^2}=\dfrac{1}{2}e^x+\dfrac{3}{2e^x}\geqslant2\sqrt{\dfrac{1}{2}e^x\cdot\dfrac{3}{2e^x}}=\sqrt{3}$.

∴倾斜角 α 的取值范围是 $\left[\dfrac{\pi}{3},\dfrac{\pi}{2}\right)$，故选 C.

提能达标过关

1. B ∵$f'(x)=\cos x$，

∴$f\left(\dfrac{\pi}{4}\right)+f'\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=\sin\dfrac{\pi}{4}+\cos\dfrac{\pi}{4}=\sqrt{2}$，故选 B.

2. B $f'(x)=2f'(1)+\dfrac{1}{x}$，

∴$f'(1)=2f'(1)+1$，∴$f'(1)=-1$，故选 B.

3. A $f'(x)=\dfrac{-x\sin x-\cos x}{x^2}$，

∴$f'\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=\dfrac{-\frac{\pi}{2}\sin\frac{\pi}{2}-\cos\frac{\pi}{2}}{\frac{\pi^2}{4}}=-\dfrac{2}{\pi}$，故选 A.

4. D ∵$y'=e^x$，$y'|_{x=2}=e^2$，

∴曲线 $y=e^x$ 在点 $(2,e^2)$ 处的切线方程为 $y-e^2=e^2(x-2)$，

令 $x=0$，$y=-e^2$；令 $y=0$，$x=1$，

∴$S=\dfrac{1}{2}\times|-e^2|\times1=\dfrac{e^2}{2}$，故选 D.

5. D ∵$f(x)=x^2+2xf'(1)$，∴$f'(x)=2x+2f'(1)$.

∴$f'(1)=2\times1+2f'(1)$，∴$f'(1)=-2$.

∴$f'(0)=2\times0+2f'(1)=-4$.

6. $y=3x$

解析：$y'=(6x+3)e^x+(3x^2+3x)e^x=(3x^2+9x+3)e^x$，$y'|_{x=0}=3$.

∴曲线 $y=3(x^2+x)e^x$ 在点 $(0,0)$ 处的切线方程为 $y=3x$.

7. $16x-8y+1=0$

解析：∵$y=\sqrt{x}=x^{\frac{1}{2}}$，∴$y'=\dfrac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$.

设切点 $P(x_0,y_0)$，则 $\dfrac{1}{2}x_0^{-\frac{1}{2}}=2$，∴$x_0=\dfrac{1}{16}$，∴切点坐标为 $\left(\dfrac{1}{16},\dfrac{1}{4}\right)$. ∴切线方程为 $y-\dfrac{1}{4}=2\left(x-\dfrac{1}{16}\right)$，

即 $16x-8y+1=0$.

8. 3

解析：∵点 $(1,3)$ 在直线 $y=kx+1$ 上，∴$k=2$.

又∵$y=x^3+ax+b$，∴$y'=3x^2+a$. ∴$y'|_{x=1}=3+a=2$，

∴$a=-1$.

又∵切点 $(1,3)$ 在曲线上，∴$3=1+a+b$，∴$b=3$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

9. **解**:(1)由题意知 $f'(x)=3x^2+2ax+b=0$ 的两根为 -2 和 1,所以 $a=\frac{3}{2}$,$b=-6$.

(2)$f(x)=x^3+\frac{3}{2}x^2-6x+1$,所以 $f(2)=3$,

点 P 在曲线 $y=f(x)$ 上,所以曲线在点 P 处的切线的斜率为 $f'(2)=12$,

所以曲线在点 P 处的切线方程为 $y-3=12(x-2)$,

即 $12x-y-21=0$.

10. **解**:(1)由 $y=x^3+x-2$,得 $y'=3x^2+1$.

由已知,得 $3x^2+1=4$,$\therefore x=\pm1$.

当 $x=1$ 时,$y=0$;当 $x=-1$ 时,$y=-4$.

又$\because$ 点 P 在第三象限,$\therefore$ 点 P 的坐标为 $(-1,-4)$.

(2)$\because$ 直线 $l\perp l_1$,l_1 的斜率为 4,

$\therefore$ 直线 l 的斜率为 $-\frac{1}{4}$.

又$\because l$ 过切点 $P(-1,-4)$,$\therefore$ 直线 l 的方程为 $y+4=-\frac{1}{4}(x+1)$,即 $x+4y+17=0$.

3.3 导数在研究函数中的应用

第 16 课时 3.3.1 函数的单调性与导数

基础知识梳理

1.(1)单调递增 (2)单调递减

2.(1)定义域 (2)$f'(x)=0$ (4)符号 增区间 减区间

题点知识巩固

1. C 由导函数 $f'(x)$ 的图象可知,当 $x<0$ 时,$f'(x)>0$,$y=f(x)$ 为增函数;当 $0<x<x_1$ 时,$f'(x)<0$,$y=f(x)$ 是减函数;当 $x>x_1$ 时,$f'(x)>0$,$y=f(x)$ 为增函数,故选 C.

2. D D 中,若 $f'(x)$ 的图象在 x 轴上方,则 $f(x)$ 为增函数,若 $f'(x)$ 的图象在 x 轴下方,则 $f(x)$ 为减函数,

$\therefore$ D 不可能正确,故选 D.

3. A 函数 $y=2\sqrt{x}-x$ 的定义域为 $[0,+\infty)$,

$y'=\frac{1}{\sqrt{x}}-1=\frac{1-\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$,由 $y'>0$,得 $1-\sqrt{x}\geqslant0$,$\therefore0\leqslant x\leqslant1$,

$\therefore$ 函数 $y=2\sqrt{x}-x$ 的单调递增区间为 $[0,1]$,故选 A.

4. **解**:$f(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$,

$f'(x)=\frac{1}{x}-ax+(1-a)=\frac{-ax^2+(1-a)x+1}{x}$

$=-\frac{(ax-1)(x+1)}{x}$,

当 $a\leqslant0$ 时,$f'(x)>0$,$f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增;

当 $a>0$ 时,$x\in\left(0,\frac{1}{a}\right)$ 时,$f'(x)>0$,$f(x)$ 为增函数;

$x\in\left(\frac{1}{a},+\infty\right)$ 时,$f'(x)<0$,$f(x)$ 为减函数.

综上,当 $a\leqslant0$ 时,$f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增;

当 $a>0$ 时,$f(x)$ 在 $\left(0,\frac{1}{a}\right)$ 上单调递增,在 $\left(\frac{1}{a},+\infty\right)$ 上单调递减.

5. C 由题可知,$f'(x)=x^2-2x+a\geqslant0$,当 $x\in[-1,2]$ 上恒成立,$\therefore f'(1)=1-2+a\geqslant0$,即 $a\geqslant1$,故选 C.

6. **解**:函数 $f(x)$ 的导数 $f'(x)=x^2-ax+a-1$.

令 $f'(x)=0$,解得 $x=1$ 或 $x=a-1$.

当 $a-1\leqslant1$ 即 $a\leqslant2$ 时,函数 $f(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上为增函数,不合题意.

当 $a-1>1$ 即 $a>2$ 时,函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,1)$ 上为增函数,在 $(1,a-1)$ 上为减函数,在 $(a-1,+\infty)$ 上为增函数.

依题意应有当 $x\in(1,4)$ 时,$f'(x)<0$,当 $x\in(6,+\infty)$ 时,$f'(x)>0$.

$\therefore4\leqslant a-1\leqslant6$,解得 $5\leqslant a\leqslant7$.

$\therefore a$ 的取值范围是 $[5,7]$.

提能达标过关

1. C $f(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$,

$\therefore f'(x)=\ln x+1$,

由 $f'(x)>0$,得 $x>\frac{1}{e}$,

$\therefore f(x)$ 的单调递增区间是 $\left(\frac{1}{e},+\infty\right)$,故选 C.

2. D 由题可知,$f'(x)=2x+a-\frac{1}{x^2}\geqslant0$ 在 $\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$ 恒成立,

即 $a\geqslant\frac{1}{x^2}-2x$ 在 $\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$ 恒成立,

$t=\frac{1}{x^2}-2x$,在 $\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$ 上为减函数,

$\therefore t<3$,

$\therefore a\geqslant3$,故选 D.

3. A $\because$ 在区间 (a,b) 内有 $f'(x)>0$,$\therefore f(x)$ 在 (a,b) 内为增函数,又$\because f(a)\geqslant0$,$\therefore f(x)$ 在 (a,b) 内有 $f(x)>0$.

4. C 设 $g(x)=\frac{f(x)}{e^x}$,

$g'(x)=\frac{f'(x)e^x-f(x)e^x}{(e^x)^2}=\frac{f'(x)-f(x)}{e^x}$,

$\because f(x)<f'(x)$,$\therefore g'(x)>0$,

$\therefore g(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上为增函数,

$g(0)=\frac{f(0)}{e^0}=2$,

不等式 $f(x)>2e^x$ 可化为 $\frac{f(x)}{e^x}>\frac{f(0)}{e^0}$,

即 $g(x)>g(0)$,$\because g(x)$ 为增函数,

$\therefore$ 不等式的解集为 $(0,+\infty)$,故选 C.

5. C 当 $x<-1$ 时,$xf'(x)<0$,$\therefore f'(x)>0$,$f(x)$ 为增函数;

当 $-1<x<0$ 时,$xf'(x)>0$,$\therefore f'(x)<0$,$f(x)$ 为减函数;

当 $0<x<1$ 时,$xf'(x)<0$,$\therefore f'(x)<0$,$f(x)$ 为减函数;

当 $x>1$ 时,$xf'(x)>0$,$\therefore f'(x)>0$,$f(x)$ 为增函数.

6. $\left[-\frac{1}{3},1\right]\cup[2,3)$

解析:由导数 $f'(x)\leqslant0$ 知,函数 $y=f(x)$ 的图象是下降的.

由图象知 $f'(x)\leqslant0$ 的解集是 $\left[-\frac{1}{3},1\right]\cup[2,3)$.

7. $a>b>c$

解析:$\because f'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}$,$\therefore$ 当 $x>e$ 时,$f'(x)<0$,

即 $f(x)$ 在 $(e,+\infty)$ 上单调递减,$\therefore f(3)>f(4)>f(5)$,即 $a>b>c$.

8. $(2,3)$

解析:$f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$,

$\because f(-x)=-\sin x+x+2^x-\frac{1}{2^x}=-f(x)$,

$\therefore f(x)$ 为奇函数,

$f'(x)=\cos x-1+\left(\frac{1}{2}\right)^x\times\ln\frac{1}{2}-2^x\ln2=\cos x-1-\frac{\ln2}{2^x}-2^x\ln2<0$,$\therefore f(x)$ 为减函数,

$f(1-x^2)+f(5x-7)<0$ 可化为

$f(1-x^2)<f(7-5x)$,

$\therefore1-x^2>7-5x$,即 $x^2-5x+6<0$,$\therefore2<x<3$,

$\therefore$ 不等式的解集为 $(2,3)$.

9. **解**:(1)$\because f(x)=ax^4+bx^2+c$ 的图象经过点 $(0,1)$,

$\therefore c=1$. $\therefore f'(x)=4ax^3+2bx$. 依题意得 $f'(1)=4a+2b=1$.

$\because$ 切点在切线 $y=x-2$ 上,$\therefore$ 切点为 $(1,-1)$.

又切点在函数 $f(x)$ 的图象上,$\therefore a+b+c=-1$.

解得 $a=\frac{5}{2}$,$b=-\frac{9}{2}$.

$\therefore f(x)=\frac{5}{2}x^4-\frac{9}{2}x^2+1$.

(2)令 $f'(x)=10x^3-9x>0$,得

$-\frac{3\sqrt{10}}{10}<x<0$ 或 $x>\frac{3\sqrt{10}}{10}$.

$\therefore$ 函数 $y=f(x)$ 的单调递增区间为 $\left(-\frac{3\sqrt{10}}{10},0\right)$,

$\left(\frac{3\sqrt{10}}{10},+\infty\right)$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

10. **解**:(1)由题意得 $f'(x)=\dfrac{\frac{1}{x}-\ln x-k}{e^x}$,

又 $f'(1)=\dfrac{1-k}{e}=0$,故 $k=1$.

(2)由(1)知,$f'(x)=\dfrac{\frac{1}{x}-\ln x-1}{e^x}$.

设 $h(x)=\dfrac{1}{x}-\ln x-1(x>0)$,

则 $h'(x)=-\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{x}<0$,即 $h(x)$在$(0,+\infty)$上是减函数.由 $h(1)=0$ 知,当 $0<x<1$ 时,
$h(x)>0$,从而 $f'(x)>0$;
当 $x>1$ 时,$h(x)<0$,从而 $f'(x)<0$.
综上可知,$f(x)$的单调递增区间是$(0,1)$,单调递减区间是$(1,+\infty)$.

第 17 课时 3.3.2 函数的极值与导数

基础知识梳理

1. 函数的极小值点 函数的极小值
2. 函数的极大值点 函数的极大值
3. 极值点 极值

题点知识巩固

1. A 由图象可知,
当 $x<-1$ 时,$2-x>0$,$(2-x)f'(x)<0$,$\therefore f'(x)<0$,$f(x)$为减函数;
当 $-1<x<1$ 时,$2-x>0$,$(2-x)f'(x)>0$,$\therefore f'(x)>0$,$f(x)$为增函数;
当 $1<x<2$ 时,$2-x>0$,$(2-x)f'(x)<0$,$f'(x)<0$,$f(x)$为减函数;
当 $x>2$ 时,$2-x<0$,$(2-x)f'(x)>0$,$f'(x)<0$,$f(x)$为减函数,
$\therefore f(x)$有极小值 $f(-1)$,极大值 $f(1)$,故选 A.

2. **解**:$f(x)$的定义域为 **R**,
$f'(x)=(2x-1)e^x+(x^2-x-1)e^x=(x^2+x-2)e^x=(x+2)(x-1)e^x$,
(1)$\because f'(1)=0$,$f(1)=-e$,
$\therefore f(x)$在点$(1,f(1))$处的切线方程为 $y=-e$.
(2)令 $f'(x)=0$,得 $x=-2$,$x=1$.
当 $x<-2$ 或 $x>1$ 时,$f'(x)>0$,$f(x)$为增函数;
当 $-2<x<1$ 时,$f'(x)<0$,$f(x)$为减函数,
$\therefore$当 $x=-2$ 时,$f(x)$有极大值,$f(-2)=5e^{-2}$.
当 $x=1$ 时,$f(x)$有极小值,$f(1)=-e$.

3. **解**:(1)$f'(x)=3x^2+2ax+b$,
$\because x=-1$ 时函数取得极大值,$x=3$ 时函数取得极小值,
$\therefore -1,3$ 是方程 $f'(x)=0$ 的根,即为方程 $3x^2+2ax+b=0$ 的两根,

$$\therefore\begin{cases}-1+3=-\dfrac{2a}{3},\\ -1\times3=\dfrac{b}{3},\end{cases}$$

解得 $\begin{cases}a=-3,\\ b=-9,\end{cases}$
$\therefore f(x)=x^3-3x^2-9x+c$,
又$\because x=-1$ 时取得极大值 7,
$\therefore(-1)^3-3(-1)^2-9\times(-1)+c=7$,
$\therefore c=2$.
(2)由(1)可知 $f(x)=x^3-3x^2-9x+2$,
$\therefore$函数 $f(x)$的极小值为 $f(3)=3^3-3\times3^2-9\times3+2=-25$.

4. **解**:(1)因为 $f(x)=[ax^2-(3a+1)x+3a+2]e^x$,
所以 $f'(x)=[ax^2-(a+1)x+1]e^x$.
$f'(2)=(2a-1)e^2$.
由题设知 $f'(2)=0$,即 $(2a-1)e^2=0$,解得 $a=\dfrac{1}{2}$.
(2)由(1)得 $f'(x)=[ax^2-(a+1)x+1]e^x=(ax-1)\cdot(x-1)e^x$.
若 $a>1$,则当 $x\in\left(\dfrac{1}{a},1\right)$时,$f'(x)<0$;
当 $x\in(1,+\infty)$时,$f'(x)>0$,
所以 $f(x)$在 $x=1$ 处取得极小值.
若 $a\leqslant1$,则当 $x\in(0,1)$时,$ax-1\leqslant x-1<0$,
所以 $f'(x)>0$.
所以 1 不是 $f(x)$的极小值点.
综上可知,a 的取值范围是$(1,+\infty)$.

5. D 由题意知 $f'(x)=3x^2-2ax=x(3x-2a)$,
当 $a\leqslant0$ 时,不合题意,
当 $a>0$ 时,$f(x)$在 $\left(0,\dfrac{2a}{3}\right)$上单调递减,在 $\left(\dfrac{2a}{3},+\infty\right)$上单调递增,所以在 $x=\dfrac{2a}{3}$处 $f(x)$取得极小值,令 $f\left(\dfrac{2a}{3}\right)<0$,得 $\left(\dfrac{2a}{3}\right)^3-a\left(\dfrac{2a}{3}\right)^2+4<0$,解得 $a>3$.

6. **解**:(1)函数 $f(x)=ax^3+bx^2-3x$ 的导数为 $f'(x)=3ax^2+2bx-3$,
根据在点$(1,f(1))$处的切线方程为 $y+2=0$.
得 $f(1)=-2$,$f'(1)=0$,即 $a+b-3=-2$,$3a+2b-3=0$,
解得 $a=1$,$b=0$,
则 $f(x)=x^3-3x$.
(2)令 $f'(x)=3x^2-3=0$,
解得 $x=-1$ 或 1,
令 $f'(x)>0$,得 $x>1$ 或 $x<-1$;
令 $f'(x)<0$,得 $-1<x<1$;
$\therefore f(x)$的单调增区间是$(-\infty,-1)$,$(1,+\infty)$,单调减区间是$(-1,1)$,$f(x)_{极大值}=f(-1)=2$,$f(x)_{极小值}=f(1)=-2$,
方程 $f(x)=m$ 有三个根,即为 $y=f(x)$和 $y=m$ 有三个交点.
$\therefore m$ 的取值范围是$\{m|-2<m<2\}$.

提能达标过关

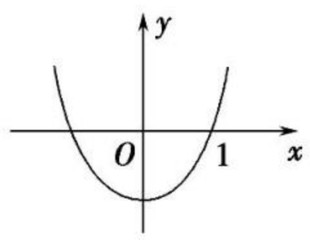
1. A $y'=3x^2-6x-9=3(x+1)(x-3)$,
$\therefore$当 $-2<x<-1$ 时,$y'>0$,
当 $-1<x<2$ 时,$y'<0$,
$\therefore$当 $x=-1$ 时,y 有极大值 5,无极小值,故选 A.

2. D $f'(x)=x-\dfrac{a}{x}$,
由题可知 $f'(2)=0$,即 $2-\dfrac{a}{2}=0$,$\therefore a=4$. 故选 D

3. C $f(x)=0$ 至少有一个零点,A 正确;$y=f(x)$的对称中心为 $\left(-\dfrac{a}{3},f\left(-\dfrac{a}{3}\right)\right)$,B 正确;若 x_0 是 $f(x)$的极值点,$f'(x_0)=0$,D 正确. 故选 C.

4. B $f'(x)=3x^2+2ax+b$,依题意得
$\begin{cases}f'(1)=3+2a+b=0,\\ f(1)=1+a+b+a^2=10.\end{cases}$
解得 $\begin{cases}a=-3,\\ b=3\end{cases}$或$\begin{cases}a=4,\\ b=-11.\end{cases}$
当 $a=-3$,$b=3$ 时,$f'(x)=3x^2-6x+3=3(x-1)^2\geqslant0$,$f(x)$为增函数,不合题意.
$\therefore a=4$,$b=-11$ 时,$f(x)=x^3+4x^2-11x+16$.
$\therefore f(2)=2^3+4\times2^2-11\times2+16=18$.

5. D $\because f(x)=x^3-6bx+3b$,$\therefore f'(x)=3x^2-6b$. 函数$f'(x)$的图象如图.



根据题意可得
$\begin{cases}f'(0)<0,\\ f'(1)>0,\end{cases}$即$\begin{cases}-6b<0,\\ 3-6b>0.\end{cases}$解得 $0<b<\dfrac{1}{2}$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

6. 0

解析：$f'(x)=x^2-3x+2=(x-1)(x-2)$，当 $x<1$ 时，$f'(x)>0$；当 $1<x<2$ 时，$f'(x)<0$；当 $x>2$ 时，$f'(x)>0$. 因此当 $x=2$ 时，$f(x)$ 取得极小值 $f(2)=\frac{1}{3}\times 2^3-\frac{3}{2}\times 2^2+2\times 2-\frac{2}{3}=0$.

7. 0

解析：$f'(x)=x^2+(b-1)x+b^2$，则 $f'(1)=1+(b-1)+b^2=b^2+b=0$，$\therefore b=0$ 或 $b=-1$. 验证：当 $b=0$ 时，$f'(x)=x^2-x=x(x-1)$，符合题意；当 $b=-1$ 时，$f'(x)=x^2-2x+1=(x-1)^2\geqslant 0$，$\therefore f(x)$ 为增函数，不合题意，故 $b=0$.

8. 2

解析：由 $f(x)=x^3-3x^2+1$，得 $f'(x)=3x^2-6x=3x(x-2)$，当 $x\in(0,2)$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 为减函数；当 $x\in(-\infty,0)$ 或 $x\in(2,+\infty)$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 在 $(-\infty,0)$，$(2,+\infty)$ 上为增函数，故当 $x=2$ 时，函数 $f(x)$ 取得极小值.

9. **解**：$f'(x)=3x^2-6ax+2b$，根据题意有 $x=1$ 是方程 $f'(x)=0$ 的一个根，则 $3-6a+2b=0$，又 $f(1)=1-3a+2b=-1$，解得 $a=\frac{1}{3}$，$b=-\frac{1}{2}$，此时 $f(x)=x^3-x^2-x$，$f'(x)=3x^2-2x-1$，由 $f'(x)>0$ 得 $x<-\frac{1}{3}$ 或 $x>1$；由 $f'(x)<0$ 得 $-\frac{1}{3}<x<1$，故 $f(x)$ 的单调递增区间为 $\left(-\infty,-\frac{1}{3}\right)$ 和 $(1,+\infty)$，单调递减区间为 $\left(-\frac{1}{3},1\right)$.

10. **解**：(1)由题设，当 $m=\mathrm{e}$ 时，$f(x)=\ln x+\frac{\mathrm{e}}{x}$，则 $f'(x)=\frac{x-\mathrm{e}}{x^2}(x>0)$，

$\therefore$ 当 $x\in(0,\mathrm{e})$，$f'(x)<0$，$f(x)$ 在 $(0,\mathrm{e})$ 上单调递减，

当 $x\in(\mathrm{e},+\infty)$，$f'(x)>0$，$f(x)$ 在 $(\mathrm{e},+\infty)$ 上单调递增，

$\therefore$ 当 $x=\mathrm{e}$ 时，$f(x)$ 取得极小值，$f(\mathrm{e})=\ln \mathrm{e}+\frac{\mathrm{e}}{\mathrm{e}}=2$，

$\therefore f(x)$ 的极小值为 2.

(2)因为 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上为单调增函数，

所以 $f'(x)=\frac{x-m}{x^2}\geqslant 0$ 对于 $\forall x\in(0,+\infty)$ 恒成立，

即 $m\leqslant x$ 对于 $\forall x\in(0,+\infty)$ 恒成立，

进而 $m\leqslant 0$. $\therefore m$ 的取值范围是 $\{m\mid m\leqslant 0\}$.

第 18 课时　3.3.3　函数的最大(小)值与导数

基础知识梳理

1. 最大值　最小值　极值点　区间端点

2. (1)(a,b) 内的极值　(2)各极值　端点处的函数值　最大值　最小值

题点知识巩固

1. $\frac{1}{\mathrm{e}}$

解析：函数 $f(x)=\frac{\ln x}{x}$，$f'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}$，

令 $f'(x)=0$，解得 $x=\mathrm{e}$.

$\therefore f(x)$ 在 $(0,\mathrm{e}]$ 上单调递增，在 $(\mathrm{e},\mathrm{e}^2]$ 上单调递减，

$\therefore x=\mathrm{e}$ 时，$f(x)$ 取得最大值，$f(\mathrm{e})=\frac{1}{\mathrm{e}}$.

2. -3

解析：$f'(x)=6x^2-2ax=2x(3x-a)(a\in\mathbf{R})$，当 $a\leqslant 0$ 时，$f'(x)>0$ 在 $(0,+\infty)$ 上恒成立，则 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，又 $f(0)=1$，所以此时 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内无零点，不符合题意. 当 $a>0$ 时，由 $f'(x)>0$ 得 $x>\frac{a}{3}$；由 $f'(x)<0$ 得 $0<x<\frac{a}{3}$，则 $f(x)$ 在 $\left(0,\frac{a}{3}\right)$ 上单调递减，在 $\left(\frac{a}{3},+\infty\right)$ 上单调递增，又 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内有且只有一个零点，所以 $f\left(\frac{a}{3}\right)=-\frac{a^3}{27}+1=0$，得 $a=3$，所以 $f(x)=2x^3-3x^2+1$，则 $f'(x)=6x(x-1)$，当 $x\in(-1,0)$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增，当 $x\in(0,1)$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 单调递减，则 $f(x)_{\max}=f(0)=1$，$f(-1)=-4$，$f(1)=0$，则 $f(x)_{\min}=-4$，所以 $f(x)$ 在 $[-1,1]$ 上的最大值与最小值的和为 -3.

3. C　$f'(x)=3x^2-6x=3x(x-2)$，

当 $-1<x<0$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 为增函数；

当 $0<x<1$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 为减函数，

$\therefore$ 当 $x=0$ 时，$f(x)$ 有最大值，$\therefore f(0)=m=2$，故选 C.

4. $(-\infty,-1]$

解析：$f'(x)=2x+2a$，$f(x)$ 在 $[0,1]$ 上的最小值为 $f(1)$，说明 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上单调递减，$\therefore x\in(0,1)$ 时，$f'(x)\leqslant 0$ 恒成立，即 $2x+2a\leqslant 0$，

$\therefore a\leqslant -x$，$\therefore a\leqslant -1$.

5. A　若 $f(x)=x\ln x+1$ 的图象总在直线 $y=ax$ 的上方，

$\therefore f(x)=x\ln x+1>ax$ 恒成立，

即 $a<\frac{x\ln x+1}{x}$ 恒成立，

令 $g(x)=\frac{x\ln x+1}{x}=\ln x+\frac{1}{x}$，$g'(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}=\frac{x-1}{x^2}$，

$\therefore$ 当 $0<x<1$ 时，$g'(x)<0$，$g(x)$ 为减函数；

当 $x>1$ 时，$g'(x)>0$，$g(x)$ 为增函数.

$\therefore$ 当 $x=1$ 时，$g(x)$ 有最小值，$g(1)=1$，$\therefore a<g(1)=1$，

$\therefore$ 实数 a 的取值范围是 $(-\infty,1)$，故选 A.

6. **解**：(1)$f'(x)=6x^2+6ax+3b$，因为函数 $f(x)$ 在 $x=1$ 及 $x=2$ 时取得极值，则有 $f'(1)=0$，$f'(2)=0$，即 $\begin{cases}6+6a+3b=0,\\24+12a+3b=0,\end{cases}$ 解得 $a=-3$，$b=4$.

(2)由(1)可知，$f(x)=2x^3-9x^2+12x+8c$，

$f'(x)=6x^2-18x+12=6(x-1)(x-2)$.

当 $x\in(0,1)$ 时，$f'(x)>0$；

当 $x\in(1,2)$ 时，$f'(x)<0$；

当 $x\in(2,3)$ 时，$f'(x)>0$.

所以，当 $x=1$ 时，$f(x)$ 取得极大值 $f(1)=5+8c$，又 $f(3)=9+8c$.

所以当 $x\in[0,3]$ 时，$f(x)$ 的最大值为 $f(3)=9+8c$.

因为对于任意的 $x\in[0,3]$，有 $f(x)<c^2$ 恒成立，

所以 $9+8c<c^2$，

解得 $c<-1$ 或 $c>9$，

因此 c 的取值范围为 $(-\infty,-1)\cup(9,+\infty)$.

提能达标过关

1. B　由 $y=x^4-4x+5$，得 $y'=4x^3-4$. 令 $y'=0$，得 $x=1$，当 $x\in[-2,1)$ 时，$y'<0$，当 $x\in(1,3]$ 时，$y'>0$，所以当 $x=1$ 时，函数 y 有最小值 2.

2. C　$f'(x)=-x^2+4=-(x-2)(x+2)$，

当 $0<x<2$ 时，$f'(x)>0$，当 $2<x<3$ 时，$f'(x)<0$.

$\therefore f(x)_{\max}=f(2)=\frac{4}{3}$，$f(0)=-4$，$f(3)=-1$，

$\therefore f(x)_{\min}=f(0)=-4$，故选 C.

3. B　$\because f(x)=x+2\cos x$，$\therefore$ 令 $f'(x)=1-2\sin x=0$，得 $x=\frac{\pi}{6}$. 又 $f(0)=2$，$f\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\pi}{6}+\sqrt{3}$，$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi}{2}$，

$\therefore$ 最大值为 $f\left(\frac{\pi}{6}\right)$，$\therefore x=\frac{\pi}{6}$.

4. D　$f(x)=\mathrm{e}^{2-x}+x=\frac{\mathrm{e}^2}{\mathrm{e}^x}+x$，

$f'(x)=\frac{-\mathrm{e}^2\mathrm{e}^x}{(\mathrm{e}^x)^2}+1=\frac{-\mathrm{e}^2}{\mathrm{e}^x}+1=\frac{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^2}{\mathrm{e}^x}$，

$\therefore$ 当 $1<x<2$ 时，$f'(x)<0$，当 $2<x<3$ 时，$f'(x)>0$，

$\therefore$ 当 $x=2$ 时，$f(x)$ 取得最小值. $f(2)=\mathrm{e}^0+2=3$，故选 D.

5. D　$\because x=1$ 是函数 $f(x)=ax^2+\ln x$ 的一个极值点，

$f'(x)=2ax+\frac{1}{x}$，

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

$\therefore f'(1)=2a+1=0,\therefore a=-\frac{1}{2}$,

$\therefore f'(x)=-x+\frac{1}{x}=\frac{(1-x)(1+x)}{x}$,

$\therefore$ 当 $\frac{1}{e}<x<1$ 时,$f'(x)>0$,$f(x)$ 为增函数,当 $1<x<e$ 时,$f'(x)<0$,$f(x)$ 为减函数,

$f(e)=1-\frac{e^2}{2}$,$f\left(\frac{1}{e}\right)=-\frac{1}{2e^2}-2$,

$f(e)<f\left(\frac{1}{e}\right)$,

$\therefore f(x)$ 的最小值为 $1-\frac{e^2}{2}$,故选 D.

6. $\sqrt{2},-1$

解析:$\because f(x)=\sin x+\cos x,\therefore f'(x)=\cos x-\sin x$,

$\because x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$,令 $f'(x)=0$,

得 $\tan x=1,\therefore x=\frac{\pi}{4}$.

$\because f\left(-\frac{\pi}{2}\right)=-1,f\left(\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2},f\left(\frac{\pi}{2}\right)=1,\therefore$ 最大值为 $\sqrt{2}$,最小值为 -1.

7. $(7,+\infty)$

解析:$\because f(x)=x^3-\frac{1}{2}x^2-2x+5$,

$\therefore f'(x)=3x^2-x-2=(3x+2)(x-1)$.

令 $f'(x)=0$,得 $x=-\frac{2}{3}$ 或 $x=1$.

$\because f(-1)=\frac{11}{2},f\left(-\frac{2}{3}\right)=\frac{157}{27},f(1)=\frac{7}{2},f(2)=7$.

$\therefore$ 当 $x\in[-1,2]$ 时,$f(x)$ 的最大值为 7.

$\therefore m>7$.

8. ①④⑤

解析:$f(x)=(x^2-2x)e^x$,$f'(x)=(x^2-2)e^x$. 令 $f'(x)=0$,得 $x=\pm\sqrt{2}$,当 $x<-\sqrt{2}$ 时,$f'(x)>0$;当 $-\sqrt{2}<x<\sqrt{2}$ 时,$f'(x)<0$;当 $x>\sqrt{2}$ 时,$f'(x)>0$. 所以函数在 $x=\sqrt{2}$ 处取得极小值,在 $x=-\sqrt{2}$ 处取得极大值. 又 $f(-\sqrt{2})=(2+2\sqrt{2})e^{-\sqrt{2}}>0$,$f(\sqrt{2})=(2-2\sqrt{2})e^{\sqrt{2}}<0$,故函数 $f(x)$ 在 **R** 上有三个不同的零点.

9. **解**:由已知得 $f(x)=x^3-x^2+b$,又 $f(0)=b=1$,所以 $f(x)=x^3-x^2+1$.

令 $f'(x)=3x^2-2x=0$,解得 $x=0$ 或 $x=\frac{2}{3}$.

当 x 变化时,$f'(x)$,$f(x)$ 的变化情况如下表:

x	-1	$(-1,0)$	0	$\left(0,\frac{2}{3}\right)$	$\frac{2}{3}$	$\left(\frac{2}{3},1\right)$	1
$f'(x)$		+	0	−	0	+	
$f(x)$	-1	↗	极大值	↘	极小值	↗	1

由上表,得函数 $f(x)$ 的极小值为 $f\left(\frac{2}{3}\right)=\frac{23}{27}$,极大值为 $f(0)=1$.

又 $f(-1)=-1,f(1)=1$,所以函数 $f(x)$ 在区间 $[-1,1]$ 上的最小值为 -1,最大值为 1.

10. **解**:(1)$f'(x)=6x^2-2ax=2x(3x-a)$,令 $f'(x)=0$,得 $x=0$ 或 $x=\frac{a}{3}$.

若 $a>0$,则当 $x\in(-\infty,0)\cup\left(\frac{a}{3},+\infty\right)$ 时,$f'(x)>0$;当 $x\in\left(0,\frac{a}{3}\right)$ 时,$f'(x)<0$,故 $f(x)$ 在 $(-\infty,0)$,$\left(\frac{a}{3},+\infty\right)$ 单调递增,在 $\left(0,\frac{a}{3}\right)$ 单调递减;若 $a=0$,$f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 单调递增;若 $a<0$,则当 $x\in\left(-\infty,\frac{a}{3}\right)\cup(0,+\infty)$ 时,$f'(x)>0$;当 $x\in\left(\frac{a}{3},0\right)$ 时,$f'(x)<0$,故 $f(x)$ 在 $\left(-\infty,\frac{a}{3}\right)$,$(0,+\infty)$ 单调递增,在 $\left(\frac{a}{3},0\right)$ 单调递减.

(2)当 $0<a<3$ 时,由(1)知,$f(x)$ 在 $\left(0,\frac{a}{3}\right)$ 单调递减,在 $\left(\frac{a}{3},1\right)$ 单调递增,所以 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 的最小值为 $f\left(\frac{a}{3}\right)=-\frac{a^3}{27}+2$,最大值为 $f(0)=2$ 或 $f(1)=4-a$,于是 $m=-\frac{a^3}{27}+2$,$M=\begin{cases}4-a,0<a<2,\\2,2\leqslant a<3.\end{cases}$

所以 $M-m=\begin{cases}2-a+\frac{a^3}{27},0<a<2,\\\frac{a^3}{27},2\leqslant a<3.\end{cases}$

当 $0<a<2$ 时,可知 $2-a+\frac{a^3}{27}$ 单调递减,所以 $M-m$ 的取值范围是 $\left(\frac{8}{27},2\right)$.

当 $2\leqslant a<3$ 时,$\frac{a^3}{27}$ 单调递增,所以 $M-m$ 的取值范围是 $\left[\frac{8}{27},1\right)$.

综上,$M-m$ 的取值范围是 $\left[\frac{8}{27},2\right)$.

3.4 生活中的优化问题举例

第 19 课时 生活中的优化问题举例

基础知识梳理

1. 利润最大 用料最省 效率最高
2. 用函数表示的数字问题 用导数解决数字问题

题点知识巩固

1. 40

解析:$V(x)=30x^2-\frac{1}{2}x^3$,$V'(x)=60x-\frac{3}{2}x^2$.

令 $V'(x)=0$,得 $x=0$,$x=40$,

当 $0<x<40$ 时,$V'(x)>0$,$V(x)$ 为增函数;

当 $40<x<60$ 时,$V'(x)<0$,$V(x)$ 为减函数,

$\therefore$ 当 $x=40$ 时,$V(x)$ 有最大值.

2. **解**:(1)C 点坐标为 $(2,4)$.

设边缘线 AC 所在抛物线的方程为 $y=ax^2$,

把 $(2,4)$ 代入,得 $4=a\times2^2$,解得 $a=1$,

所以抛物线的方程为 $y=x^2$,

因为 $y'=2x$,

所以过 $P(t,t^2)$ 的切线 EF 方程为 $y=2tx-t^2$.

令 $y=0$,得 $E\left(\frac{t}{2},0\right)$,令 $x=2$,得 $F(2,4t-t^2)$,

所以 $S=\frac{1}{2}\left(2-\frac{t}{2}\right)(4t-t^2)$,

所以 $S=\frac{1}{4}(t^3-8t^2+16t)$,定义域为 $(0,2]$.

(2)$S'=\frac{1}{4}(3t^2-16t+16)=\frac{3}{4}(t-4)\left(t-\frac{4}{3}\right)$,

由 $S'(t)>0$,得 $0<t<\frac{4}{3}$,由 $S'(t)<0$,得 $\frac{4}{3}<t\leqslant2$,

所以 $S'(t)$ 在 $\left(0,\frac{4}{3}\right)$ 上是增函数,在 $\left(\frac{4}{3},2\right]$ 上是减函数,

所以 S 在 $(0,2]$ 上有最大值 $S\left(\frac{4}{3}\right)=\frac{64}{27}$.

又因为 $\frac{64}{27}=3-\frac{17}{27}<3$,

所以隔离出的 $\triangle BEF$ 面积 S 不能达到 3 km^2.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

3. 32　16

解析：设矩形的堆料场中与原有的墙壁平行的一边为 x 米，其他两边的边长均为 $\frac{512}{x}$ 米，则所用材料 $l=x+\frac{512}{x}\times 2$ $(x>0)$，求导 $l'=1-\frac{1\,024}{x^2}$. 令 $l'=0$，得 $x=32$，$\frac{512}{32}=16$.

易知 $x=32$，适合题意.

4. 3

解析：用料最省，即水桶的表面积最小.

设圆柱形水桶的表面积为 S，底面半径为 $r(r>0)$，则水桶的高为 $\frac{27}{r^2}$.

所以 $S=\pi r^2+2\pi r\cdot\frac{27}{r^2}=\pi r^2+\frac{54\pi}{r}$.

则 $S'=2\pi r-\frac{54\pi}{r^2}$，令 $S'=0$，得 $r=3$.

易知 $r=3$ 为所求.

5. 30　23 000

解析：设商场销售该商品所获利润为 y 元，则 $y=(P-20)(8\,300-170P-P^2)=-P^3-150P^2+11\,700P-166\,000(P\geqslant 20)$.

$\therefore y'=-3P^2-300P+11\,700$.

令 $y'=0$，得 $P^2+100P-3\,900=0$，

解得 $P=30$ 或 $P=-130$(舍去).

则 P、y、y' 的变化关系如下表：

P	$(20,30)$	30	$(30,+\infty)$
y'	+	0	−
y	↗	极大值	↘

由表知，当 $P=30$ 时，y 取得最大值 23 000 元.

$\because y=-P^3-150P^2+11\,700P-166\,000$ 在 $[20,+\infty)$ 上只有一个极值点，

$\therefore$ 也是最大值，$\therefore$ 该商品零售价定为每件 30 元，所获利润最大为 23 000 元.

6. **解**：(1)由投资额为零时收益为零，

可知 $f(0)=-a+2=0$，$g(0)=6\ln b=0$，

解得 $a=2$，$b=1$.

(2)由(1)可得 $f(x)=2x$，$g(x)=6\ln(x+1)$.

设投入经销 B 商品的资金为 x 万元$(0<x\leqslant 5)$，

则投入经销 A 商品的资金为 $(5-x)$ 万元，

设所获得的收益为 $S(x)$ 万元，则 $S(x)=2(5-x)+6\ln(x+1)=6\ln(x+1)-2x+10(0<x\leqslant 5)$.

$S'(x)=\frac{6}{x+1}-2$，令 $S'(x)=0$，得 $x=2$.

当 $0<x<2$ 时，$S'(x)>0$，函数 $S(x)$ 单调递增；

当 $2<x\leqslant 5$ 时，$S'(x)<0$，函数 $S(x)$ 单调递减.

所以，当 $x=2$ 时，函数 $S(x)$ 取得最大值，$S(x)_{\max}=S(2)=6\ln 3+6$.

所以，当投入经销 A 商品 3 万元，B 商品 2 万元时，他可获得最大收益，收益的最大值为 $6\ln 3+6$ 万元.

提能达标过关

1. A　平均成本为 $\frac{C}{x}=\frac{25\,000}{x}+200+\frac{x}{40}$，令 $f(x)=\frac{25\,000}{x}+\frac{x}{40}+200$，则 $f'(x)=-\frac{25\,000}{x^2}+\frac{1}{40}$，令 $f'(x)=0$，得 $x=1\,000$ 或 $x=-1\,000$(舍去).

当 $x<1\,000$ 时，$f'(x)<0$；当 $x>1\,000$ 时，$f'(x)>0$.

故当 $x=1\,000$ 时，$f(x)$ 取得最小值.

2. C　$\because y'=-x^2+81$，

$\therefore$ 当 $x>9$ 时，$y'<0$，当 $0<x<9$ 时，$y'>0$.

$\therefore$ 函数 $y=-\frac{1}{3}x^3+81x-234$ 在 $(9,+\infty)$ 上单调递减，在 $(0,9)$ 上单调递增.

$\therefore x=9$ 是函数的极大值点.

又 $\because$ 函数在 $(0,+\infty)$ 上只有一个极大值点，

$\therefore$ 在 $x=9$ 处取得最大值.

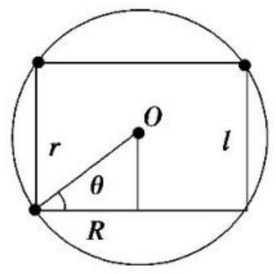
3. D　设箱底一边的长度为 x m，总造价为 y 元，依题意得

$y=12\times 3\left(2x+\frac{16}{x}\times 2\right)+15\times 16$，

$y'=72\left(1-\frac{16}{x^2}\right)$.

令 $y'=0$，得 $x=4$ 或 $x=-4$(舍去)，因为只有一个极值点，所以也是最值点，故当 $x=4$ 时，y 有最小值 816.

4. A　设内接圆柱的底面半径为 R，母线长为 l，如图.



$R=r\cos\theta$，$l=2r\sin\theta$.

$\therefore S_{侧}=2\pi Rl=2\pi r\cos\theta\cdot 2r\sin\theta=4\pi r^2\sin\theta\cos\theta$.

$\therefore S'_{侧}=4\pi r^2(\cos^2\theta-\sin^2\theta)=4\pi r^2\cos 2\theta$.

令 $S'_{侧}=0$，得 $2\theta=\frac{\pi}{2}$，$\theta=\frac{\pi}{4}$.

$\therefore$ 当 $\theta=\frac{\pi}{4}$，即 $R=\frac{\sqrt{2}}{2}r$ 时，$S_{侧}$ 有最大值 $2\pi r^2$.

5. C　设汽车行驶 200 千米时的耗油量为 S 升，

则 $S=\frac{200}{x}\left(\frac{1}{81\,000}x^3-\frac{1}{10}x+18\right)=\frac{2}{810}x^2-20+\frac{3\,600}{x}$，

$S'=\frac{4}{810}x-\frac{3\,600}{x^2}$，令 $S'=0$，得 $x=90$，

可知当 $x=90$ 时，S 有最小值，故选 C.

6. 20

解析：设一年的总运费与总存储费之和为 y 万元，则 $y=\frac{400}{x}\times 4+4x=\frac{1\,600}{x}+4x(x>0)$，$\therefore y\geqslant 2\sqrt{\frac{1\,600}{x}\cdot 4x}=2\times 80=160$，当且仅当 $\frac{1\,600}{x}=4x$，即 $x=20$ 时取等号.

7. 128 000

解析：设水箱的高为 $x(0<x<60)$ cm，则水箱底面边长为 $(120-2x)$ cm，水箱的容积 $V=(120-2x)^2\cdot x=(120^2-480x+4x^2)\cdot x$，

$\therefore V'=12x^2-960x+120\times 120$.

令 $V'=0$，得 $x=20$ 或 $x=60$(舍去).

当 $0<x<20$ 时，$V'>0$；当 $20<x<60$ 时，$V'<0$，

$\therefore$ 当 $x=20$ 时，V 有最大值，且最大值为 128 000 cm^3.

8. $\frac{4\sqrt{3}}{9}$

解析：设 $CD=x$，则点 $C\left(\frac{x}{2},0\right)$，$B\left(\frac{x}{2},1-\frac{x^2}{4}\right)$，

$\therefore$ 矩形 $ABCD$ 的面积 $S=f(x)=x\left(1-\frac{x^2}{4}\right)=-\frac{1}{4}x^3+x$，$x\in(0,2)$.

则 $f'(x)=-\frac{3}{4}x^2+1$. 令 $f'(x)=0$，得 $x=\frac{2\sqrt{3}}{3}$，

此时 $f(x)$ 有最大值 $\frac{4\sqrt{3}}{9}$.

9. **解**：(1)$\because(n+1)x=640$，即 $n=\frac{640}{x}-1$，

所以 $y=f(x)=256n+(n+1)(2+\sqrt{x})x=\frac{256\times 640}{x}+640\sqrt{x}+1\,024(0<x<640)$.

(2)由(1)知，$f'(x)=-\frac{256\times 640}{x^2}+\frac{640}{2\sqrt{x}}=\frac{640(x^{\frac{3}{2}}-512)}{2x^2}$，

令 $f'(x)=0$，得 $x^{\frac{3}{2}}=512$，所以 $x=64$，

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

当 $0<x<64$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 在区间 $(0,64)$ 内为减函数；
当 $64<x<640$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 在区间 $(64,640)$ 内为增函数.

所以 $f(x)$ 在 $x=64$ 处取得最小值，此时 $n=\frac{640}{x}-1=9$.

故需新建 9 个桥墩才能使 y 最小.

10. **解**：(1)因为 $x=14$ 时，$y=21$，代入关系式 $y=\frac{a}{x-12}+4(x-16)^2$，

得 $\frac{a}{2}+16=21$，解得 $a=10$.

(2)由(1)可知，外卖便当每月的销售量 $y=\frac{10}{x-12}+4(x-16)^2$，
所以每月销售便当所获得的利润

$f(x)=(x-12)\left[\frac{10}{x-12}+4(x-16)^2\right]=10+4(x-12)(x-16)^2$，$x\in(12,16)$，
所以 $f'(x)=4(x-16)(3x-40)$.

令 $f'(x)=0$，因为 $12<x<16$，得 $x=\frac{40}{3}$，

且当 $x\in\left(12,\frac{40}{3}\right)$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增；

当 $x\in\left(\frac{40}{3},16\right)$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 单调递减.

所以 $x=\frac{40}{3}$ 是函数 $f(x)$ 在 $(12,16)$ 内的极大值点，也是最大值点，

所以当 $x=\frac{40}{3}\approx13.3$ 时，函数 $f(x)$ 取得最大值.

即当销售价格为 13.3 元/盒时，该店每月销售所获得的利润最大.

阶段评估 3

1. B　$f(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$，

$f'(x)=2x-2-\frac{4}{x}=\frac{2x^2-2x-4}{x}=\frac{2(x+1)(x-2)}{x}$，

由 $f'(x)<0$ 得 $-1<x<2$，又 $x>0$，$\therefore 0<x<2$，
$\therefore f(x)$ 的递减区间为 $(0,2)$，故选 B.

2. B　$f'(x)=2-e^x$，
$\therefore f'(0)=2-e^0=1$，$f(0)=2\times0-e^0=-1$，
$\therefore f(x)$ 在点 $(0,f(0))$ 处的切线方程是 $x-y-1=0$，
故选 B.

3. A　若 $f(x)=\sin x-kx$ 存在极值，
则 $f'(x)=\cos x-k$ 有零点，
$\therefore k=\cos x\in(-1,1)$，
故选 A.

4. A　$f'(x)=x-\frac{9}{x}=\frac{x^2-9}{x}=\frac{(x+3)(x-3)}{x}(x>0)$.

由 $f'(x)<0$，得 $0<x<3$，
$\therefore f(x)$ 在 $(0,3)$ 上单调递减；

$\therefore\begin{cases}a-1>0,\\a+1\leqslant3,\end{cases}\therefore 1<a\leqslant2$，

故选 A.

5. A　$f'(x)=3ax^2+2bx+c$，
由题图可知，$f'(x)=0$ 有两个正根 x_1，x_2，
且 $f(0)>0$，$a>0$，

$\therefore\begin{cases}d>0,\\x_1+x_2=-\frac{2b}{3a}>0,\\x_1x_2=\frac{c}{3a}>0,\end{cases}$

$\therefore a>0$，$b<0$，$c>0$，$d>0$，故选 A.

6. B　由题意得 $f'(x)=3x^2-3a\neq-1$，即 $a\neq x^2+\frac{1}{3}$.

$\because x\in\mathbf{R}$，$\therefore x^2+\frac{1}{3}\geqslant\frac{1}{3}$，$\therefore a<\frac{1}{3}$.

7. $3x+y-4=0$

解析：$f'(x)=\frac{\left(-\frac{2}{x}\right)x-(1-2\ln x)}{x^2}=\frac{-2-1+2\ln x}{x^2}=\frac{2\ln x-3}{x^2}$，

$\therefore f'(1)=-3$，$f(1)=1$，
$\therefore f(x)$ 在点 $P(1,f(1))$ 处的切线方程为 $y-1=-3(x-1)$，
即 $3x+y-4=0$.

8. $(-2,2)$

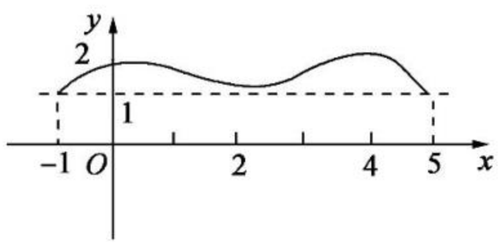
解析：$f'(x)=3x^2-3=3(x-1)(x+1)$，
令 $f'(x)=0$，得 $x=1$ 或 $x=-1$，
当 $-1<x<1$ 时，$f'(x)<0$；当 $x<-1$ 或 $x>1$ 时，$f'(x)>0$，
$\therefore$ 当 $x=-1$ 时，$f(x)$ 有极大值；当 $x=1$ 时，$f(x)$ 有极小值，
若 $f(x)$ 有三个不同零点，
则 $f(1)\cdot f(-1)=(-2-a)(2-a)<0$，
$\therefore -2<a<2$.

9. $4x-y-8=0$

解析：$\because f(x)=2x^2-xf'(2)$，
$\therefore f'(x)=4x-f'(2)$.
$\therefore f'(2)=4\times2-f'(2)$，
$f'(2)=4$. $\therefore f(2)=0$.
$\therefore$ 在点 $(2,0)$ 处的切线方程为 $y-0=4(x-2)$，即 $4x-y-8=0$.

10. ①②④

解析：由 $y=f'(x)$ 的图象知，$f(x)$ 在区间 $[-1,0]$ 和 $[2,4]$ 上是增函数，其最大值为 2；在区间 $[0,2]$ 和 $[4,5]$ 上是减函数，其最小值为 1. 故①②正确，③错，$f(x)$ 的图象大致如下：



由图象知④正确.

11. **解**：(1)由图象可知，在 $(-\infty,1)$ 上，$f'(x)>0$，
在 $(1,2)$ 上，$f'(x)<0$，在 $(2,+\infty)$ 上，$f'(x)>0$，
故 $f(x)$ 在 $(-\infty,1)$，$(2,+\infty)$ 上单调递增，在 $(1,2)$ 上单调递减.
因此 $f(x)$ 在 $x=1$ 处取得极大值，所以 $x_0=1$；
$f'(x)=3ax^2+2bx+c$，
由 $f'(1)=0$，$f'(2)=0$，$f(1)=5$，

得 $\begin{cases}3a+2b+c=0,\\12a+4b+c=0,\\a+b+c=5,\end{cases}$ 解得 $a=2$，$b=-9$，$c=12$.

(2)由(1)得 $f(x)=2x^3-9x^2+12x$，$f'(x)=6x^2-18x+12=6(x-1)(x-2)$，
所以 $f(x)$ 在 $[0,1)$ 上单调递增，在 $(1,2)$ 上单调递减，在 $(2,3]$ 上单调递增，
故 $f(x)_{\max}=\max\{f(1),f(3)\}=f(3)=9$，
$f(x)_{\min}=\min\{f(0),f(2)\}=f(0)=0$.
所以 $f(x)$ 在 $[0,3]$ 上的最大值是 9，最小值是 0.

12. **解**：(1)$\because f(x)=\frac{x}{4}+\frac{a}{x}-\ln x-\frac{3}{2}$，

$\therefore f'(x)=\frac{1}{4}-\frac{a}{x^2}-\frac{1}{x}$.

$\because f(x)$ 在点 $(1,f(1))$ 处的切线垂直于直线 $y=\frac{1}{2}x$，

$\therefore f'(1)=\frac{1}{4}-a-1=-2$，$\therefore a=\frac{5}{4}$.

(2)由(1)知 $f(x)=\frac{x}{4}+\frac{5}{4x}-\ln x-\frac{3}{2}$，

则 $f'(x)=\frac{1}{4}-\frac{5}{4x^2}-\frac{1}{x}=\frac{x^2-4x-5}{4x^2}=\frac{(x+1)(x-5)}{4x^2}$，

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

令 $f'(x)=0$,解得 $x=-1$ 或 $x=5$.
∵$x=-1$ 不在 $f(x)$的定义域$(0,+\infty)$内,故舍去.
当 $x\in(0,5)$时,$f'(x)<0$,故 $f(x)$在$(0,5)$内为减函数;
当 $x\in(5,+\infty)$时,$f'(x)>0$,故 $f(x)$在$(5,+\infty)$内为增函数.
由此知函数 $f(x)$在 $x=5$ 时取得极小值 $f(5)=-\ln 5$.

13. **解**:(1)∵$f'(x)=x-\frac{a}{x}(x>0)$,
又 $f(x)$在 $x=2$ 处的切线方程为 $y=x+b$,
∴$\begin{cases}2-a\ln 2=2+b,\\ 2-\frac{a}{2}=1,\end{cases}$ 解得 $a=2,b=-2\ln 2$.
(2)若函数 $f(x)$在$(1,+\infty)$上为增函数,
则 $f'(x)=x-\frac{a}{x}\geqslant 0$ 在$(1,+\infty)$上恒成立,
即 $a\leqslant x^2$ 在$(1,+\infty)$上恒成立.
∴有 $a\leqslant 1$.
即 a 的取值范围为$(-\infty,1]$.

14. **解**:(1)函数 $f(x)$定义域为$\{x|x\neq 0\}$,
求导,得 $f'(x)=2-\frac{2}{x^3}$,
令 $f'(x)=0$,解得 $x=1$.
当 x 变化时,$f'(x)$与 $f(x)$的变化情况如下表所示:

x	$(-\infty,0)$	$(0,1)$	1	$(1,+\infty)$
$f'(x)$	+	−	0	+
$f(x)$	↗	↘		↗

所以函数 $y=f(x)$的单调增区间为$(-\infty,0)$,$(1,+\infty)$,单调减区间为$(0,1)$,
所以函数 $y=f(x)$有极小值 $f(1)=3$,无极大值.
(2)证明:假设存在某个 $k\in\mathbf{R}$,使得直线 l 与曲线 $y=f(x)$相切,设切点为 $A\left(x_0,2x_0+\frac{1}{x_0^2}\right)$,又因为 $f'(x)=2-\frac{2}{x^3}$,
所以切线满足斜率 $k=2-\frac{2}{x_0^3}$,且过点 A,所以 $2x_0+\frac{1}{x_0^2}=\left(2-\frac{2}{x_0^3}\right)x_0-1$,
即 $\frac{3}{x_0^2}=-1$,此方程显然无解,所以假设不成立.
所以对于任意 $k\in\mathbf{R}$,直线 l 都不是直线 $y=f(x)$的切线.

第二部分 阶段检测

阶段测试一

1. A $x>1$ 且 $y>1\Rightarrow x+y>2$,反之不成立,
∴p 是 q 的充分不必要条件,故选 A.
2. B
3. A
4. D D中 $x=\frac{\pi}{6}$是 $\sin x=\frac{1}{2}$的充分不必要条件,故 D 错.
5. A 由 $2^{|x-1|}\geqslant 4$ 得 $x\leqslant -1$ 或 $x\geqslant 3$,
则 $\neg p:-1<x<3$,
$\neg q:x\leqslant a$,
∵$\neg q$ 是 $\neg p$ 的必要不充分条件,
∴$\neg p\Rightarrow\neg q$,∴$a\geqslant 3$. 故选 A.
6. C 易知 p 是假命题,q 也是假命题,
∴非 p 或 q 为真命题.
7. C 命题“若 $x^2=4$,则 $x=2$”的否命题为:“若 $x^2\neq 4$,则 $x\neq 2$”,故 A 错;“$x=2$”是“$x^2-6x+8=0$”的充分不必要条件,故 B 错;“若 $x=y$”,则“$\cos x=\cos y$”是真命题,其逆否命题也是真命题,故 C 正确;“存在 $x\in\mathbf{R}$,使得 $x^2+x+3>0$”的否定是“对于任意的 $x\in\mathbf{R}$,均有 $x^2+x+3\leqslant 0$”,故 D 错.
8. A 易知命题 p 为假,q 为真,所以$(\neg p)\wedge q$ 为真命题.
9. D A 中,若“$p\vee q$”为真命题,则 p 和 q 中至少有一个是真命题,但“$p\wedge q$”不一定是真命题,A 错;
B 中,若 $am^2<bm^2$,则 $a<b$,是真命题,B 错;
C 中,若 $l\perp\beta$,$\alpha\perp\beta$,则 $l/\!/\alpha$ 或 $l\subset\alpha$,C 错;
D 中,“$\forall x\in\mathbf{R}$,$2^x>0$”的否定是“$\exists x_0\in\mathbf{R}$,$2^{x_0}\leqslant 0$”,D 正确. 故选 D.
10. B 当 $b\subset\alpha$ 时,若 $b\perp\beta$,则 $\alpha\perp\beta$ 是真命题,其逆命题是:当 $b\subset\alpha$ 时,若 $\alpha\perp\beta$,则 $b\perp\beta$ 是假命题.
11. C 由“$(x+2)(x-a)<0$”是“$0<x<5$”的必要不充分条件,∴$\{x|0<x<5\}\subseteq\{x|-2<x<a\}$,
则 $a\geqslant 5$,故选 C.
12. D 易知 A、B、C 均正确,D 错,当点在交线上时,可能不垂直于 β.
13. 真
解析:“若 $x^2<1$,则 $-1<x<1$”的否命题为“若 $x^2\geqslant 1$,则 $x\leqslant -1$ 或 $x\geqslant 1$”,为真命题.
14. $(-\infty,-2]\cup[-\sqrt{2},2)$
解析:∵$\sin x+\cos x=\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\geqslant-\sqrt{2}$,∴当 $r(x)$ 为真时,$m<-\sqrt{2}$. 当 $s(x):x^2+mx+1>0$ 恒成立为真时,有 $\Delta=m^2-4<0$,∴$-2<m<2$.
∵$r(x)\wedge s(x)$为假,$r(x)\vee s(x)$为真,
∴$r(x)$与 $s(x)$一真一假.
当 $r(x)$为真,$s(x)$为假时,$m\leqslant -2$;
当 $r(x)$为假,$s(x)$为真时,$-\sqrt{2}\leqslant m<2$.
综上知,实数 m 的取值范围是$(-\infty,-2]\cup[-\sqrt{2},2)$.
15. 2
解析:若直线 l 和平面 α 内的任意直线垂直,则 $l\perp\alpha$,所以 p_1 是假命题;对于 $f(x)=2^x-2^{-x}$,其定义域为 $\mathbf{R}$,且 $f(-x)=2^{-x}-2^{-(-x)}=2^{-x}-2^x=-(2^x-2^{-x})=-f(x)$,所以 p_2 是真命题;由 $f(x_0)=1$,得 $x_0+\frac{1}{x_0+1}=1$,解得 $x_0=0$,即 $f(0)=1$,所以 p_3 是假命题;在 $\triangle ABC$ 中,大角对大边,故 $A>B\Leftrightarrow a>b$. 由正弦定理 $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=2R$(其中 R 为 $\triangle ABC$ 的外接圆半径)知,$a>b\Leftrightarrow 2R\sin A>2R\sin B\Leftrightarrow\sin A>\sin B$,所以 p_4 为真命题.
16. ①③
解析:当 $x_0=0$ 或 $x_0=1$ 时,$x_0^{\frac{1}{2}}=x_0$ 成立,①为真命题;
当 $x=2$ 时,$2^x>x^2$ 不成立,②是假命题;
函数 $y=x^2+mx+m+3$ 有两个不同零点的充要条件是 $\Delta=m^2-4(m+3)=m^2-4m-12=(m-6)(m+2)>0$.
解得 $m>6$ 或 $m<-2$. 故 p 是 q 的充要条件,③是真命题.
若 $\neg p:\forall x\in\mathbf{R},\sin x\leqslant 1$,则 $p:\exists x\in\mathbf{R},\sin x>1$,④是假命题.
17. **解**:$p:-1\leqslant x\leqslant 5$,$q:x^2-2x+1-m^2\leqslant 0$,
即 $1-m\leqslant x\leqslant 1+m$.
(1)若 $p\Rightarrow q$,则$\begin{cases}1-m\leqslant -1,\\ 1+m\geqslant 5,\end{cases}$∴$m\geqslant 4$. 故实数 m 的取值范围是$[4,+\infty)$.
(2)若 $m=5$,则 p 真:$-1\leqslant x\leqslant 5$,q 真:$-4\leqslant x\leqslant 6$,
若 $p\vee q$ 为真命题,$p\wedge q$ 为假命题,则 p,q 一真一假.
若 p 真 q 假,则$\begin{cases}-1\leqslant x\leqslant 5,\\ x<-4\text{ 或 }x>6,\end{cases}$无解.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

若 p 假 q 真，则 $\begin{cases} x<-1 \text{ 或 } x>5, \\ -4\leqslant x\leqslant 6, \end{cases}$

$\therefore -4\leqslant x<-1$ 或 $5<x\leqslant 6$.

$\therefore$ 实数 x 的取值范围是 $[-4,-1)\cup(5,6]$.

18. **解**：(1)$\because f(x)=\dfrac{x^2-x+1}{x-1}=x+\dfrac{1}{x-1}=x-1+\dfrac{1}{x-1}+1\geqslant 2+1=3$，当且仅当 $x=2$ 时取等号.

$\therefore \exists x_0\in[2,+\infty)$，使 $f(x_0)=m$ 成立，则实数 m 的取值范围是 $[3,+\infty)$.

(2)$\because$ 当 $x\geqslant 2$ 时，$f(x)\geqslant 3$，$g(x)\geqslant a^2$.

若 $\forall x_1\in[2,+\infty)$，$\exists x_2\in[2,+\infty)$，使得 $f(x_1)=g(x_2)$，

$\therefore \begin{cases} a^2\leqslant 3, \\ a>1, \end{cases} \therefore 1<a\leqslant\sqrt{3}$.

$\therefore$ 实数 a 的取值范围是 $(1,\sqrt{3}]$.

19. **解**：由 $\dfrac{3x-1}{x-2}\leqslant 1$ 得 $\dfrac{2x+1}{x-2}\leqslant 0$，即 $-\dfrac{1}{2}\leqslant x<2$，

$\therefore$ 若 p 为真，则 $-\dfrac{1}{2}\leqslant x<2$，

由 $x^2-(2a+1)x+a(a+1)<0$，得 $(x-a)(x-a-1)<0$，

即 $a<x<a+1$.

若 $\neg q$ 是 $\neg p$ 的必要不充分条件，则 $\neg p\Rightarrow\neg q$，

即 $q\Rightarrow p$，

$\therefore \begin{cases} a\geqslant -\dfrac{1}{2}, \\ a+1\leqslant 2, \end{cases}$

$\therefore -\dfrac{1}{2}\leqslant a\leqslant 1$，

$\therefore$ 实数 a 的取值范围为 $\left[-\dfrac{1}{2},1\right]$.

20. **证明**：①充分性：

如果 $xy=0$，那么 $x=0$，$y\neq 0$ 或 $x\neq 0$，$y=0$ 或 $x=0$，$y=0$，于是 $|x+y|=|x|+|y|$.

如果 $xy>0$，则 $x>0$，$y>0$ 或 $x<0$，$y<0$，

当 $x>0$，$y>0$ 时，$|x+y|=x+y=|x|+|y|$，

当 $x<0$，$y<0$ 时，$|x+y|=-x-y=(-x)+(-y)=|x|+|y|$，

总之，当 $xy\geqslant 0$ 时，$|x+y|=|x|+|y|$.

②必要性：

由 $|x+y|=|x|+|y|$ 及 $x,y\in\mathbf{R}$ 得

$(x+y)^2=(|x|+|y|)^2$，

即 $x^2+2xy+y^2=x^2+2|xy|+y^2$，

得 $|xy|=xy$，所以 $xy\geqslant 0$，故必要性成立，

综上，原命题成立.

21. **解**：设“□”中的数为 t，由小明的描述可知，t 为小于 6 的正整数，即 $t<6$ 且 $t\in\mathbf{N}_+$，

则 $A=\left\{x\middle|0<x<\dfrac{1}{t}\right\}$，$B=\{x|-1\leqslant x\leqslant 4\}$，

$C=\left\{x\middle|0<x<\dfrac{1}{2}\right\}$.

由小红的描述可知集合 A 是集合 B 的真子集，即 $\dfrac{1}{t}\leqslant 4$；

由小强的描述可知，集合 C 是集合 A 的真子集，即 $\dfrac{1}{t}>\dfrac{1}{2}$.

于是 $\begin{cases} t<6 \text{ 且 } t\in\mathbf{N}_+, \\ \dfrac{1}{t}\leqslant 4, \\ \dfrac{1}{t}>\dfrac{1}{2}, \end{cases}$

解得 $t=1$.

22. **解**：(1)由题意可知方程 $x^2-x-m=0$ 在 $(-1,1)$ 上有解，则 m 的取值范围就是函数 $f(x)=x^2-x$ 在 $(-1,1)$ 上的值域.

$\because f(x)=x^2-x=\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2-\dfrac{1}{4}$，

$\therefore$ 值域为 $\left[-\dfrac{1}{4},2\right)$，$\therefore M=\left\{m\middle|-\dfrac{1}{4}\leqslant m<2\right\}$.

(2)$\because x\in N$ 是 $x\in M$ 的必要条件，$\therefore M\subseteq N$.

当 $a=1$ 时，$N=\varnothing$，不满足题意；

当 $a>1$ 时，$N=\{x|2-a<x<a\}$，

$\therefore \begin{cases} 2-a<-\dfrac{1}{4}, \\ a\geqslant 2, \end{cases} \therefore a>\dfrac{9}{4}$；

当 $a<1$ 时，$a<2-a$，此时 $N=\{x|a<x<2-a\}$，

$\therefore \begin{cases} a<-\dfrac{1}{4}, \\ 2-a\geqslant 2, \end{cases} \therefore a<-\dfrac{1}{4}$. 综上知，$a$ 的取值范围是 $\left\{a\middle|a>\dfrac{9}{4}\text{或}a<-\dfrac{1}{4}\right\}$.

阶段测试二

1. C　若方程 $\dfrac{x^2}{m-1}+\dfrac{y^2}{3-m}=1$ 表示的曲线是焦点在 y 轴上的椭圆，

则 $\begin{cases} 3-m>m-1, \\ m-1>0, \\ 3-m>0, \end{cases} \therefore 1<m<2$，

$\therefore$“$1<m<2$”是“方程 $\dfrac{x^2}{m-1}+\dfrac{y^2}{3-m}=1$ 表示的曲线是焦点在 y 轴上的椭圆”的充要条件，故选 C.

2. A　由双曲线 $x^2-\dfrac{y^2}{4}=1$ 知 $a=1$，$b=2$，

$\therefore$ 渐近线方程为 $y=\pm 2x$，

离心率为 $\dfrac{c}{a}=\dfrac{\sqrt{1^2+2^2}}{1}=\sqrt{5}$，故选 A.

3. C　将抛物线方程 $y=ax^2$ 化为标准方程得 $x^2=\dfrac{1}{a}y(a>0)$，$\because$ 焦点到准线的距离为 2，$\therefore \dfrac{1}{2a}=2$，

$\therefore a=\dfrac{1}{4}$.

4. D　抛物线 $y^2=2px$ 的焦点为 $\left(\dfrac{p}{2},0\right)$，双曲线 $\dfrac{x^2}{5+p}-\dfrac{y^2}{7+p}=1$ 的半焦距 $c=\sqrt{12+2p}$，依题意得 $12+2p=\dfrac{p^2}{4}$，即 $p^2-8p-48=0$，$\because p>0$，$\therefore p=12$.

5. B　由题可得，$\triangle PF_1F_2$ 为等腰三角形.

取 PF_1 的中点为 M，

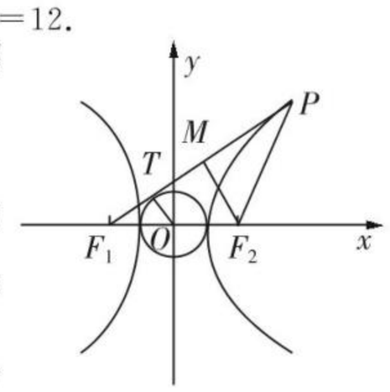
则 $MF_2\perp PF_1$，

设 PF_1 与圆 $x^2+y^2=a^2$ 相切的切点为 T，

则 $OT\parallel MF_2$，$\because O$ 为 F_1F_2 的中点，$OT=a$，$\therefore MF_2=2a$，

又 $|PF_2|=2c$，$|PF_1|=2a+2c$，

$\therefore PM=a+c$，



根据 $|PF_2|^2=|PM|^2+|MF_2|^2$，

得 $4c^2=(a+c)^2+4a^2$，

即 $3c^2-2ac-5a^2=0$，

$\therefore 3e^2-2e-5=0$.

$\therefore e=\dfrac{5}{3}$，故选 B.

6. D　设弦的中点为 $P(x,y)$，两端点为 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，则 $x_1+x_2=2x$. 由 $y_1=x_1^2$，$y_2=x_2^2$，得 $y_1-y_2=x_1^2-x_2^2=(x_1+x_2)(x_1-x_2)$，即 $\dfrac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=x_1+x_2$，得 $2=2x$，$x=1$(不含端点).

7. A　由正弦定理得 $m=\dfrac{2\sin\angle PF_1F_2}{\sin\angle PF_2F_1}=\dfrac{2|PF_2|}{|PF_1|}=\dfrac{2|PF_2|}{2m-|PF_2|}$，$\therefore |PF_2|=\dfrac{2m^2}{m+2}$.

又 $m-3<|PF_2|<m+3$，

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

$\therefore m-3<\frac{2m^2}{m+2}<m+3$,

解得$-1<m<6$,

又$\begin{cases}m^2-9>0,\\m>0,\end{cases}\therefore m>3.$

$\therefore 3<m<6$,故选 A.

8. B　由题可知 $A(1,0)$,$F(2,0)$,双曲线的渐近线为$y=\pm\sqrt{3}x$,

设 l 的直线方程为$y=\sqrt{3}(x-2)$,

由$\begin{cases}y=\sqrt{3}(x-2),\\y=-\sqrt{3}x,\end{cases}$得$\begin{cases}x=1,\\y=-\sqrt{3},\end{cases}\therefore B(1,-\sqrt{3}).$

$\therefore S_{\triangle ABF}=\frac{1}{2}\times|AF||y_B|=\frac{1}{2}\times1\times\sqrt{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$,故选 B.

9. C　将直线和曲线的方程分别变形为 $y=mx+n$　①,$\frac{x^2}{m}+\frac{y^2}{n}=1$　②. 当 $m>n>0$ 时,②表示焦点在 x 轴上的椭圆,此时直线与 y 轴的交点为$(0,n)$,在 x 轴上方,选项 A 不可能;同理选项 B 不可能;当 $m>0,n<0$ 时,②表示实轴为 x 轴的双曲线,此时直线 $y=mx+n$ 与 y 轴的交点$(0,n)$在 x 轴下方,选项 C 适合,故选 C.

10. D　设椭圆的方程为$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$,双曲线的方程为$\frac{x^2}{m^2}-\frac{y^2}{n^2}=1(m>0,n>0)$,

$\therefore a^2-b^2=m^2+n^2=c^2.$

不妨设 P 在第一象限,

$\therefore\begin{cases}|PF_1|+|PF_2|=2a,\\|PF_1|-|PF_2|=2m,\end{cases}$

$\therefore|PF_1|=a+m,|PF_2|=a-m.$

$\because\angle F_1PF_2=\frac{\pi}{3}$,

$\therefore|PF_1|^2+|PF_2|^2-2|PF_1||PF_2|\cos 60^\circ=4c^2$,

$\therefore(a+m)^2+(a-m)^2-(a+m)(a-m)=4c^2$,

$\therefore a^2+3m^2=4c^2$,$\therefore\frac{1}{e_1^2}+\frac{3}{e_2^2}=4.$

又$\frac{1}{e_1}+\frac{\sqrt{3}}{e_2}\leqslant\sqrt{2}\sqrt{\frac{1}{e_1^2}+\frac{3}{e_2^2}}=2\sqrt{2}$,

$\therefore\frac{1}{e_1}+\frac{\sqrt{3}}{e_2}$的最大值为 $2\sqrt{2}$.

11. D　双曲线 $x^2-y^2=1$ 的渐近线为 $y=\pm x$,由$y=\pm x$ 及椭圆的对称性可知,以这四个交点为顶点的四边形为正方形,因为四边形的面积为 16,所以边长为 4. 所以椭圆过点(2,2),因此,

得$\begin{cases}\frac{4}{a^2}+\frac{4}{b^2}=1,\\\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{3}}{2},\end{cases}$解得$\begin{cases}a^2=20,\\b^2=5.\end{cases}$

故椭圆 C 的方程为$\frac{x^2}{20}+\frac{y^2}{5}=1.$

12. A　当 A,B 所在直线斜率不存在时,AB 方程为 $x=c$,

由题意,$\frac{b^2}{ac}=1$,即 $b^2=c^2-a^2=ac$,

得 $e^2-e-1=0$,求得 $e=\frac{\sqrt{5}+1}{2}$;当 A,B 所在直线斜率存在时,设直线方程为 $y=kx+m$,

联立$\begin{cases}y=kx+m,\\\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1,\end{cases}$得$(b^2-a^2k^2)x^2-2a^2kmx-a^2m^2-a^2b^2=0.$

设 $A(x_1,y_1)$,$B(x_2,y_2)$,则 $x_1+x_2=\frac{2a^2km}{b^2-a^2k^2}$,

$x_1x_2=\frac{a^2m^2+a^2b^2}{a^2k^2-b^2}.$

$y_1y_2=(kx_1+m)(kx_2+m)=k^2x_1x_2+km(x_1+x_2)+m^2$

$=\frac{a^2k^2m^2+a^2k^2b^2}{a^2k^2-b^2}+\frac{2a^2k^2m^2}{b^2-a^2k^2}+m^2=\frac{a^2k^2b^2-b^2m^2}{a^2k^2-b^2}.$

由点 O 到直线 AB 的距离为 c,得$\frac{|m|}{\sqrt{k^2+1}}=c$,即 $m^2=k^2c^2+c^2$.

又 $OA\perp OB$,$\therefore x_1x_2+y_1y_2=\frac{a^2m^2+a^2b^2}{a^2k^2-b^2}+\frac{a^2k^2b^2-b^2m^2}{a^2k^2-b^2}=0$,

则$(a^2-b^2)(k^2c^2+c^2)+a^2b^2+a^2k^2b^2=0$,

整理得:$[(a^2-b^2)\cdot c^2+a^2b^2](1+k^2)=0$,

则$(a^2-b^2)\cdot c^2+a^2b^2=0$,

又 $a^2+b^2=c^2$,

整理得:$c^4+a^4-3a^2c^2=0.$

又 $e=\frac{c}{a}$,得 $e^4-3e^2+1=0.$

解得 $e^2=\frac{3+\sqrt{5}}{2}$或 $e^2=\frac{3-\sqrt{5}}{2}$(舍),

$\therefore e=\frac{\sqrt{5}+1}{2}.$

13. $\frac{5}{3}$

解析:由题可知 $\frac{b}{a}=\frac{4}{3}$,$\therefore e=\frac{c}{a}=\sqrt{\frac{a^2+b^2}{a^2}}=\sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}}=\frac{5}{3}.$

14. $2\sqrt{10}$

解析:双曲线 $mx^2-y^2=1$ 的一条渐近线方程为 $y=\sqrt{m}x$.

由题意得$-3\sqrt{m}=-1$,$\therefore m=\frac{1}{9}$,$\therefore$ 双曲线 $C:\frac{x^2}{9}-y^2=1$,$\therefore c=\sqrt{9+1}=\sqrt{10}$,$\therefore$ 焦距 $2c=2\sqrt{10}$.

15. 2

解析:设抛物线上点 $P(x,y)$,

设$\frac{|x-y|}{\sqrt{2}}=\frac{4}{5}$,即$|x-y|=\frac{4\sqrt{2}}{5}$,

$\therefore x-y=\frac{4\sqrt{2}}{5}$或 $y-x=\frac{4\sqrt{2}}{5}$,

由$\begin{cases}x-y=\frac{4\sqrt{2}}{5},\\y^2=4x,\end{cases}$

得$\frac{y^2}{4}-y-\frac{4\sqrt{2}}{5}=0$,$\Delta=1+4\times\frac{1}{4}\times\frac{4\sqrt{2}}{5}>0$,有两个解.

由$\begin{cases}y-x=\frac{4\sqrt{2}}{5},\\y^2=4x,\end{cases}$

得 $\frac{y^2}{4}-y+\frac{4\sqrt{2}}{5}=0$,

由 $\Delta=1-4\times\frac{1}{4}\times\frac{4\sqrt{2}}{5}=1-\frac{4\sqrt{2}}{5}<0$,无解.

$\therefore$抛物线 $y^2=4x$ 上到直线 $l:y=x$ 距离为$\frac{4}{5}$的点的个数为 2.

16. 2

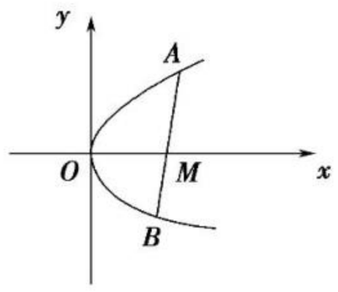
解析:设椭圆的长半轴为 a,双曲线的实半轴为 m,半焦距为 c,不妨设点 A 在第一象限,

设$\begin{cases}|AF_1|+|AF_2|=2a,\\|AF_1|-|AF_2|=2m,\end{cases}$

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

$\therefore |AF_1|=a+m, |AF_2|=a-m$,
$\because \angle F_1AF_2=90°, \therefore |AF_1|^2+|AF_2|^2=|F_1F_2|^2$,
即 $(a+m)^2+(a-m)^2=4c^2$,
即 $a^2+m^2=2c^2$,
$\therefore \frac{a^2}{c^2}+\frac{m^2}{c^2}=2$,
$\therefore \frac{1}{e_1^2}+\frac{1}{e_2^2}=2$.

17. **解**:画图可知抛物线方程为 $y^2=2px(p>0)$,



直线 AB 的方程为 $x=ky+m$,由 $\begin{cases}x=ky+m,\\y^2=2px,\end{cases}$ 消去 x,整理得 $y^2-2pky-2pm=0$.
由根与系数的关系得 $y_1y_2=-2pm$.
由题设知 $|y_1|\cdot|y_2|=2m$, $\therefore 2pm=2m$, $\therefore p=1$.
$\therefore$ 抛物线的方程为 $y^2=2x$.

18. **解**:(1)因为 $|PF_1|+|PF_2|=2a=2|F_1F_2|=4c=4$,
即 $2a=4$,解得 $a=2$,
所以 $b=\sqrt{2^2-1^2}=\sqrt{3}$,故椭圆的方程为 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$.
(2)设 $|PF_1|=m, |PF_2|=n$,则由椭圆定义和余弦定理得 $\begin{cases}m+n=4,\\n^2=m^2+4-4m\cos 120°,\end{cases}$
所以 $(4-m)^2=m^2+4+2m$,解得 $m=\frac{6}{5}, n=\frac{14}{5}$.
所以 $\cos\angle F_1PF_2=\frac{n^2+m^2-4}{2mn}=\frac{11}{14}$.

19. **解**:(1)由题意知 $a=2c, b=\sqrt{3}c, bc=\sqrt{3}$,
解得 $a=2, b=\sqrt{3}, c=1$.
$\therefore$ 椭圆 Γ 的标准方程是 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$.
(2)设 $M(x_0,y_0)$,右焦点 $F(1,0)$,则圆 M 的半径 $r=\sqrt{(x_0-1)^2+y_0^2}$,圆心 M 到 y 轴距离 $d=|x_0|$,圆 M 与 y 轴相切,则有 $r=d$,即 $\sqrt{(x_0-1)^2+y_0^2}=|x_0|$,
化简得 $y_0^2-2x_0+1=0$,又 M 为椭圆上的点,
$\therefore y_0^2=3-\frac{3}{4}x_0^2$,
两式联立消去 y_0 得 $3x_0^2+8x_0-16=0$,
解得 $x_0=-4$ 或 $x_0=\frac{4}{3}$,
又 $-2\leqslant x_0\leqslant 2$, $\therefore x_0=\frac{4}{3}$, $y_0=\pm\frac{\sqrt{15}}{3}$,即点 M 坐标是 $\left(\frac{4}{3},\pm\frac{\sqrt{15}}{3}\right)$.

20. **解**:(1)设抛物线的标准方程为 $x^2=2py$,把点 $P(2,1)$ 代入可得 $4=2p$,所以 $p=2$,故所求的抛物线的标准方程为 $x^2=4y$.
(2)①当斜率不存在时,直线方程为 $x=2$,符合题意;
②当斜率存在时,设直线方程为 $y-1=k(x-2)$,即 $y=kx-2k+1$,
联立方程可得 $\begin{cases}y=kx-2k+1,\\x^2=4y,\end{cases}$ 整理可得 $x^2-4kx+8k-4=0$.
因为直线与抛物线只有一个公共点,
所以 $\Delta=16k^2-32k+16=0$,
所以 $k=1$.
综上可得,直线 l 的方程为 $x-y-1=0$ 或 $x=2$.

(3)由题意可知,AB 的斜率存在,设 AB 的方程为 $y-1=k'(x-1)$,代入抛物线的标准方程 $x^2=4y$ 可得 $x^2-4k'x+4k'-4=0$,所以 $x_1+x_2=4k'=2$,
所以 $k'=\frac{1}{2}$,所以 AB 的方程为 $y-1=\frac{1}{2}(x-1)$,
即 $x-2y+1=0$.

21. **解**:(1)由已知,圆心 $(0,0)$ 到直线 $bx-ay+2ab=0$ 的距离 $d=\frac{|2ab|}{\sqrt{a^2+b^2}}=a$,可得 $3b^2=a^2$,
由 $b^2=a^2-c^2$ 得 $3(a^2-c^2)=a^2$,从而 $e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{6}}{3}$.
(2)证明:当 $b=1$ 时,椭圆 C 的方程为 $\frac{x^2}{3}+y^2=1$,
由 $\overrightarrow{BP}\cdot\overrightarrow{BQ}=0$ 知 $\overrightarrow{BP}\perp\overrightarrow{BQ}$,从而直线 PQ 与 x 轴不垂直,故可设直线 l 的方程为 $y=kx+t(t\neq 1)$,
联立 $\begin{cases}y=kx+t,\\\frac{x^2}{3}+y^2=1,\end{cases}$ 整理得
$(1+3k^2)x^2+6ktx+3(t^2-1)=0$.
设 $P(x_1,y_1), Q(x_2,y_2)$,则 $x_1+x_2=\frac{-6kt}{1+3k^2}$,①
$x_1x_2=\frac{3(t^2-1)}{1+3k^2}$,②
由 $\Delta=(6kt)^2-4(1+3k^2)\times 3(t^2-1)>0$,得 $3k^2>t^2-1$.
由 $\overrightarrow{BP}\cdot\overrightarrow{BQ}=0$,得
$\overrightarrow{BP}\cdot\overrightarrow{BQ}=(x_1,y_1-1)\cdot(x_2,y_2-1)=$
$(1+k^2)x_1x_2+k(t-1)(x_1+x_2)+(t-1)^2=0$,
将①②代入,得 $t=-\frac{1}{2}$,所以直线 l 过定点 $\left(0,-\frac{1}{2}\right)$.

22. **解**:(1)由题意知 $c=1$.
设其方程为 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$,
所以 $a^2-b^2=1$,①
将点 $B\left(1,\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ 代入方程得 $\frac{1}{a^2}+\frac{1}{2b^2}=1$,②
联立①②解得 $a=\sqrt{2}, b=1$,所以 C 的方程为 $\frac{x^2}{2}+y^2=1$.
(2)依题设直线 l 的方程为 $y=k(x-1)$,将 $y=k(x-1)$ 代入 $\frac{x^2}{2}+y^2=1$ 并整理得,
$(2k^2+1)x^2-4k^2x+2k^2-2=0$, $\Delta=8k^2+8>0$.
设 $M(x_1,y_1), N(x_2,y_2)$,
设 $x_1+x_2=\frac{4k^2}{2k^2+1}, x_1x_2=\frac{2k^2-2}{2k^2+1}$,
设 MN 的中点为 Q,则 $x_Q=\frac{2k^2}{2k^2+1}$, $y_Q=k(x_Q-1)=-\frac{k}{2k^2+1}$,即 $Q\left(\frac{2k^2}{2k^2+1},\frac{-k}{2k^2+1}\right)$.
因为 $k\neq 0$,
所以直线 MN 的垂直平分线的方程为 $y+\frac{k}{2k^2+1}=-\frac{1}{k}\left(x-\frac{2k^2}{2k^2+1}\right)$,
令 $x=0$ 解得,$y_P=\frac{k}{2k^2+1}=\frac{1}{2k+\frac{1}{k}}$,
当 $k>0$ 时,因为 $2k+\frac{1}{k}\geqslant 2\sqrt{2}$,所以 $0<y_P\leqslant\frac{\sqrt{2}}{4}$;
当 $k<0$ 时,因为 $2k+\frac{1}{k}\leqslant -2\sqrt{2}$,所以 $-\frac{\sqrt{2}}{4}\leqslant y_P<0$.
综上得点 P 纵坐标的取值范围是 $\left[-\frac{\sqrt{2}}{4},0\right)\cup\left(0,\frac{\sqrt{2}}{4}\right]$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

阶段测试三

1. C　$\because f'(x)=x^2-f'(1)\cdot 2x-1$，
$\therefore f'(1)=1-2f'(1)-1$，
$\therefore f'(1)=0$，故选 C.

2. D　$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(3)-f(3+h)}{2h}=-\dfrac{1}{2}\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(3+h)-f(3)}{h}=-\dfrac{1}{2}f'(3)=5$，$\therefore f'(3)=-10$.

3. A　由 $f'(x)$ 的图象知，当 $x\in(-3,0)$ 时，$f'(x)<0$，
$\therefore$ 函数 $f(x)$ 在 $(-3,0)$ 上是减函数.

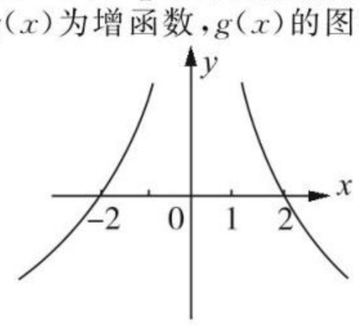
4. B　$y'=3x^2+a$，$y'|_{x=1}=3+a$，
则 $\begin{cases}1+a+b=3,\\3+a=k,\\k+1=3,\end{cases}$ 解得 $a=-1$，故选 B.

5. A　$f'(x)=1-\dfrac{1}{ax^2}$，
则 $f'(x)\geqslant 0$ 在 $(-\infty,-1)$ 上恒成立，
即 $1-\dfrac{1}{ax^2}\geqslant 0$，
即 $\dfrac{1}{a}\leqslant x^2$ 恒成立，
$\therefore\dfrac{1}{a}\leqslant 1$，
$\therefore a<0$ 或 $a\geqslant 1$，故选 A.

6. B　$f'(x)=\ln x+1$，
设切点为 (x_0,y_0)，$\therefore y_0=x_0\ln x_0$，
$\therefore\dfrac{y_0+1}{x_0}=\ln x_0+1$，
$\therefore x_0\ln x_0+1=x_0\ln x_0+x_0$，$\therefore x_0=1$，$\therefore y_0=0$，
$f'(x_0)=1$，$\therefore$ 切线方程为 $y=x-1$，
即 $x-y-1=0$，故选 B.

7. A　设 $f(x)=x^3-3x+c$，则 $f'(x)=3x^2-3$，令 $f'(x)=0$，得 $x=\pm 1$. 易知 $f(x)$ 在 $(-\infty,-1)$，$(1,+\infty)$ 上单调递增，在 $(-1,1)$ 上单调递减. 若 $f(-1)=-1+3+c=0$，得 $c=-2$；若 $f(1)=1-3+c=0$，得 $c=2$. 综上知 $c=-2$ 或 2.

8. D　设 $g(x)=\dfrac{f(x)}{x}$，$\because f(x)$ 是定义在 **R** 上的奇函数，
$\therefore g(x)$ 为偶函数，$g'(x)=\dfrac{xf'(x)-f(x)}{x^2}$.
当 $x>0$ 时，$g'(x)<0$，$\therefore g(x)$ 为减函数，
$\therefore$ 当 $x<0$ 时，$g(x)$ 为增函数，$g(x)$ 的图象如图示.



且 $g(2)=\dfrac{f(2)}{2}=0$，$\therefore g(-2)=0$，
$\therefore$ 当 $x<-2$ 或 $x>2$ 时，$g(x)<0$，
当 $-2<x<0$ 或 $0<x<2$ 时，$g(x)>0$，
$\therefore f(x)>0$ 的解为 $0<x<2$ 或 $x<-2$，
$\therefore x^2f(x)>0$ 的解集为 $(-\infty,-2)\cup(0,2)$，故选 D.

9. A　$f'(x)=x^2+2ax+a^2-1=(x+a)^2-1$，
$\because a\neq 0$，
$\therefore$ 对称轴 $x=-a\neq 0$，且 $f'(x)$ 是开口向上的抛物线，
$\therefore$ 图③是 $f'(x)$ 的图象，此时 $f'(0)=a^2-1=0$，
又 $-a>0$，
$\therefore a<0$，故 $a=-1$. $\therefore f(-1)=-\dfrac{1}{3}+a-a^2+1+1=-\dfrac{1}{3}$.

10. A　设水箱底面边长为 x，高为 y，则 $x^2y=256$.
设所用材料为 S，则 $S=x^2+4xy=x^2+4x\cdot\dfrac{256}{x^2}=x^2+\dfrac{1\,024}{x}$. 令 $S'=2x-\dfrac{1\,024}{x^2}=0$，得 $x^3=512$，$x=8$，此时 $y=4$.

11. D　$f'(x)=-\dfrac{2}{x^2}+\dfrac{1}{x}=\dfrac{x-2}{x^2}(x>0)$，
当 $0<x<2$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 为减函数；
当 $x>2$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 为增函数，
$\therefore x=2$ 为 $f(x)$ 的极小值点，故选 D.

12. D　$f'(x)=e^x(\sin x-\cos x)+e^x(\cos x+\sin x)=2e^x\sin x$.
由 $f'(x)>0$，得 $0<x<\pi$ 或 $2\pi<x<3\pi$，
由 $f'(x)<0$，得 $\pi<x<2\pi$ 或 $3\pi<x<4\pi$，
$\therefore$ 当 $x=\pi$ 与 $x=3\pi$ 时，$f(x)$ 有极大值.
$\therefore f(\pi)+f(3\pi)=e^{\pi}+e^{3\pi}$，故选 D.

13. $2\cos 1-\sin 1$
解析：$\because y'=2x\cos x-x^2\sin x$，
$\therefore y'|_{x=1}=2\cos 1-\sin 1$.

14. $x-y+1=0$.
解析：$y'=2x-\dfrac{1}{x^2}$，$y'|_{x=1}=2-1=1$，
$\therefore$ 切线方程为 $y-2=x-1$，即 $x-y+1=0$.

15. $a<c<b$
解析：令 $g(x)=xf(x)$，$\because f(x)$ 为奇函数，$\therefore g(x)$ 为偶函数，
$g'(x)=f(x)+xf'(x)$.
$\because$ 当 $x\neq 0$ 时，$f'(x)+\dfrac{f(x)}{x}>0$，
$\therefore\dfrac{xf'(x)+f(x)}{x}>0$，
$\therefore$ 当 $x>0$ 时，$xf'(x)+f(x)>0$，$g(x)$ 为增函数，
$a=\dfrac{1}{2}f\left(\dfrac{1}{2}\right)=g\left(\dfrac{1}{2}\right)$，
$b=-2f(-2)=g(-2)=g(2)$，
$c=\left(\ln\dfrac{1}{2}\right)f\left(\ln\dfrac{1}{2}\right)=g\left(\ln\dfrac{1}{2}\right)=g(-\ln 2)=g(\ln 2)$，
$\because\dfrac{1}{2}<\ln 2<2$.
$\therefore g\left(\dfrac{1}{2}\right)<g(\ln 2)<g(2)$.
$\therefore a<c<b$.

16. ③
解析：①错，举反例，如 $f(x)=x^3$ 在 **R** 上为增函数，但 $f'(x)=3x^2\geqslant 0$；②错，当 $f'(x)=0$ 在 (a,b) 内有解时，$f(x)$ 可能不是单调函数；③正确；④错，由 $f'(x)<0$ 只能判断 $f(x)$ 在 (a,b) 上为减函数，但不能判断 $f(x)<0$.

17. **解：**(1)由 $f'(x)=-\dfrac{1}{x^2}e^x+\dfrac{1}{x}e^x=\dfrac{x-1}{x^2}e^x$，则 $f'(1)=0$，
又 $f(1)=e$，故 $f(x)$ 在点 $(1,f(1))$ 处的切线方程为 $y=e$.
(2)由 $f'(x)=-\dfrac{1}{x^2}e^x+\dfrac{1}{x}e^x=\dfrac{x-1}{x^2}e^x$，
由 $f'(x)=0$，得 $x=1$. 因为当 $x<0$ 时，$f'(x)<0$；
当 $0<x<1$ 时，$f'(x)<0$；当 $x>1$ 时，$f'(x)>0$.
故 $f(x)$ 的单调递增区间是 $[1,+\infty)$；单调递减区间是 $(-\infty,0)$ 和 $(0,1]$.

18. **解：**(1)$\because f(x)=x^3+ax^2+bx+c$，
$\therefore f'(x)=3x^2+2ax+b$，由题意得
$\begin{cases}f'(0)=b=0,\\f'(2)=12+4a+b=0,\end{cases}$
解得 $a=-3$，$b=0$.
(2)由(1)知 $f(x)=x^3-3x^2+c$，
$f'(x)=3x^2-6x$.
$\because$ 在点 x_0 处 $f(x)$ 取得极小值 -5，

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

$\therefore f'(x_0)=3x_0^2-6x_0=0$，$\therefore x_0=0$ 或 $x_0=2$.
当 $x_0=0$ 时，$f(x)$有极大值，不合题意.
$\therefore x_0=2$，由 $f(2)=2^3-3\times2^2+c=-5$，
得 $c=-1$，$\therefore f(x)=x^3-3x^2-1$.

19. **解**：(1) $f'(x)=\dfrac{-ax^2+(2a-1)x+2}{e^x}$，$f'(0)=2$.
因此曲线 $y=f(x)$在点$(0,-1)$处的切线方程是
$2x-y-1=0$.
(2)证明：当 $a\geqslant1$ 时，$f(x)+e\geqslant(x^2+x-1+e^{x+1})e^{-x}$.
令 $g(x)=x^2+x-1+e^{x+1}$，
则 $g'(x)=2x+1+e^{x+1}$，$g'(-1)=2\times(-1)+1+e^0=0$，$g'(x)$为增函数，
$\therefore$当 $x<-1$ 时，$g'(x)<0$，$g(x)$单调递减；
当 $x>-1$ 时，$g'(x)>0$，$g(x)$单调递增，
所以 $g(x)\geqslant g(-1)=0$.
因此 $f(x)+e\geqslant0$.

20. **解**：(1)设 $\dfrac{585}{8}-u=k\left(x-\dfrac{21}{4}\right)^2$.
$\because$售价为 10 元时，年销量为 28 万件，
$\therefore\dfrac{585}{8}-28=k\left(10-\dfrac{21}{4}\right)^2$，解得 $k=2$.
$\therefore u=-2\left(x-\dfrac{21}{4}\right)^2+\dfrac{585}{8}=-2x^2+21x+18$.
$\therefore y=(-2x^2+21x+18)(x-6)=-2x^3+33x^2-108x-108(x>6)$.
(2) $y'=-6x^2+66x-108=-6(x-2)(x-9)$.
令 $y'=0$，得 $x=2$(舍去)或 $x=9$.
当 $x\in(6,9)$时，$y'>0$；当 $x\in(9,+\infty)$时，$y'<0$.
$\therefore$当 $x=9$ 时，y 取得极大值，也是最大值，最大值为 135.
故当售价为 9 元时，年利润最大，最大年利润为 135 万元.

21. **解**：(1)对函数 $f(x)$求导，得 $f'(x)=\dfrac{-4x^2+16x-7}{(2-x)^2}=-\dfrac{(2x-1)(2x-7)}{(2-x)^2}$，
令 $f'(x)=0$，解得 $x=\dfrac{1}{2}$或 $x=\dfrac{7}{2}$.
当 x 变化时，$f'(x)$，$f(x)$的变化情况如下表：

x	0	$\left(0,\frac{1}{2}\right)$	$\frac{1}{2}$	$\left(\frac{1}{2},1\right)$	1
$f'(x)$		−	0	+	
$f(x)$	$-\frac{7}{2}$	↘	−4	↗	−3

所以，当 $x\in\left(0,\dfrac{1}{2}\right)$时，$f(x)$是减函数；
当 $x\in\left(\dfrac{1}{2},1\right)$时，$f(x)$是增函数.
当 $x\in[0,1]$时，$f(x)$的值域为$[-4,-3]$.
(2)对函数 $g(x)$求导，得 $g'(x)=3(x^2-a^2)$.
因为 $a\geqslant1$，当 $x\in(0,1)$时，$g'(x)<3(1-a^2)\leqslant0$.
因此当 $x\in(0,1)$时，$g(x)$为减函数，从而当 $x\in[0,1]$时有 $g(x)\in[g(1),g(0)]$.
又 $g(1)=1-2a-3a^2$，$g(0)=-2a$，
即 $x\in[0,1]$时有 $g(x)\in[1-2a-3a^2,-2a]$.
任意 $x_1\in[0,1]$，$f(x_1)\in[-4,-3]$，
存在 $x_0\in[0,1]$，使得 $g(x_0)=f(x_1)$，
则$[1-2a-3a^2,-2a]\supseteq[-4,-3]$，
即 $\begin{cases}1-2a-3a^2\leqslant-4,①\\-2a\geqslant-3.\quad②\end{cases}$
解①式得 $a\geqslant1$ 或 $a\leqslant-\dfrac{5}{3}$；解②式得 $a\leqslant\dfrac{3}{2}$.
又 $a\geqslant1$，故 a 的取值范围为$\left\{a\,\middle|\,1\leqslant a\leqslant\dfrac{3}{2}\right\}$.

22. **解**：(1) $a=1$ 时，$f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$，$f'(x)=\dfrac{1-\ln x}{x^2}$，
令 $f'(x)=\dfrac{1-\ln x}{x^2}=0$，解得 $x=e$.

x	$(0,e)$	e	$(e,+\infty)$
$f'(x)$	+	0	−
$f(x)$	↗	极大值	↘

可得函数 $f(x)$的单调递增区间为$(0,e)$，单调递减区间为$(e,+\infty)$，可得极大值为 $f(e)=\dfrac{1}{e}$，无极小值.
(2)由题意可得：$x>0$，由不等式 $f(x)\leqslant1-\dfrac{1}{x}$恒成立，即 $x-1-a\ln x\geqslant0$ 恒成立.
令 $g(x)=x-1-a\ln x\geqslant0$，$g(1)=0$，$x\in(0,+\infty)$.
$g'(x)=1-\dfrac{a}{x}=\dfrac{x-a}{x}$.
①若 $a<0$，则函数 $g(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增，又 $g(1)=0$，$\therefore x\in(0,1)$时，$g(x)<0$，不符合题意，舍去.
②若 $0<a<1$，则函数 $g(x)$在$(a,+\infty)$上 $g'(x)>0$，即函数 $g(x)$单调递增，又 $g(1)=0$，$\therefore x\in(a,1)$时，$g(x)<0$，不符合题意，舍去.
③若 $a=1$，则函数 $g(x)$在$(1,+\infty)$上 $g'(x)>0$，即函数 $g(x)$单调递增，$x\in(a,1)$时，$g'(x)<0$，函数 $g(x)$单调递减.
$\therefore x=1$ 时，函数 $g(x)$取得极小值即最小值，又 $g(1)=0$，$\therefore x>0$ 时，$g(x)\geqslant0$ 恒成立.
④若 $1<a$，则函数 $g(x)$在$(0,a)$上 $g'(x)<0$，即函数$g(x)$单调递减，又 $g(1)=0$，$\therefore x\in(1,a)$时，$g(x)<0$，不符合题意，舍去.
综上可得：$a=1$.

综合测试

1. C
2. C
3. C $y'=\dfrac{x-2-x}{(x-2)^2}=\dfrac{-2}{(x-2)^2}$，$k=y'|_{x=1}=-2$，切线方程为 $y+1=-2(x-1)$，即 $y=-2x+1$.
4. B $\because f(x)=\begin{cases}3^x,x<0,\\m-x^2,x\geqslant0,\end{cases}$
当 $x<0$ 时，$f(x)=3^x\in(0,1)$，
当 $x\geqslant0$ 时，$f(x)=m-x^2\leqslant m$，若 $m\in(-\infty,0)$，
则 $f(x)<0$，
$\therefore$命题 p 为假命题；
若 $m=\dfrac{1}{9}$，$\therefore f[f(-1)]=f\left(\dfrac{1}{3}\right)=\dfrac{1}{9}-\dfrac{1}{9}=0$，
$\therefore$命题 q 为真命题，
$\therefore(\neg p)\wedge q$ 为真命题，故选 B.
5. C 由 $e=\dfrac{c}{a}>\sqrt{2}$，得 $e^2=\dfrac{c^2}{a^2}=\dfrac{1+m}{1}>2$，$m>1$.
6. A 从 $f(x)$的图象可知，$f(x)$在$(-\infty,-1)$，$(1,+\infty)$是增函数，在$(-1,1)$是减函数，
$\therefore$当 $x<-1$ 或 $x>1$ 时，$f'(x)>0$，
当 $-1<x<1$ 时，$f'(x)<0$，
$\therefore x\cdot f'(x)<0$ 的解集为$(-\infty,-1)\cup(0,1)$，故选 A.
7. D 双曲线的右焦点 $F_1(2,0)$，连接 AF_1，
$\therefore AF\perp AF_1$，
由题可知$|OF|=|\overrightarrow{OA}|$，$\therefore\triangle OFA$ 为等腰三角形，
又$\overrightarrow{FB}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{FA}$，
$\therefore B$ 为 FA 的中点，$\therefore OB\perp AF$.
由 $\begin{cases}y=\dfrac{b}{a}x,\\x^2+y^2=c^2,\end{cases}$ 得 $x=a$，$y=b$，
$\therefore A(a,b)$，

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

$\therefore \begin{cases} -\dfrac{b}{a+2}\cdot\dfrac{b}{a}=-1, \\ a^2+b^2=4, \end{cases}$

$\therefore \begin{cases} a=1, \\ b=\sqrt{3}, \end{cases}$

$\therefore$双曲线的方程为 $x^2-\dfrac{y^2}{3}=1$,故选 D.

8. D　$\because f'(x)=-\sqrt{m^2+1}\sin x$，$\therefore g(x)=-\sqrt{m^2+1}\sin x$，且 $g(x)$为奇函数，$\therefore$函数 $y=x^2g(x)$为奇函数，排除 B、C；当 $x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$时，$g(x)<0$，$y=x^2g(x)<0$，故选 D.

9. B　$f'(x)=3ax^2+3$，$f'(1)=3a+3$，

由题意得 $3a+3=-6$，$\therefore a=-3$.

$\therefore f(x)=-3x^3+3x$，$\therefore f(1)=0$，切线 l 的方程为 $y=-6(x-1)$，直线 l 与坐标轴的交点分别为 $(0,6)$，$(1,0)$，

$\therefore$所求三角形的面积 $S=\dfrac{1}{2}\times6\times1=3$.

10. B　由题知 $\begin{cases} \dfrac{c}{a}=\dfrac{1}{2}, \\ \dfrac{1}{a^2}+\dfrac{9}{4b^2}=1, \\ a^2=b^2+c^2, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} a=2, \\ b=\sqrt{3}, \\ c=1, \end{cases}$ $\therefore$椭圆的方程为 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$.

$\therefore A(-2,0)$，$B(2,0)$，设 $P(x,y)$，

$\therefore k_{PA}\cdot k_{PB}=\dfrac{y}{x+2}\cdot\dfrac{y}{x-2}=\dfrac{y^2}{x^2-4}=\dfrac{3\left(1-\frac{x^2}{4}\right)}{x^2-4}=-\dfrac{3}{4}$.

$\therefore k_{PA}=-\dfrac{3}{4k_{PB}}$，又 $k_{PA}\in[-2,-1]$，

$\therefore -2\leqslant-\dfrac{3}{4k_{PB}}\leqslant-1$，

$\therefore k_{PB}\in\left[\dfrac{3}{8},\dfrac{3}{4}\right]$，故选 B.

11. B　由椭圆的离心率 $e_1=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，得 $e_1^2=\dfrac{c^2}{a^2}=\dfrac{a^2-b^2}{a^2}=1-\dfrac{b^2}{a^2}=\dfrac{3}{4}$，$\therefore\dfrac{b^2}{a^2}=\dfrac{1}{4}$.

双曲线的离心率 $e_2=\sqrt{\dfrac{a^2+b^2}{a^2}}=\sqrt{1+\dfrac{b^2}{a^2}}=\sqrt{\dfrac{5}{4}}=\dfrac{\sqrt{5}}{2}$.

12. C　$\because y=\ln x(x>1)$，

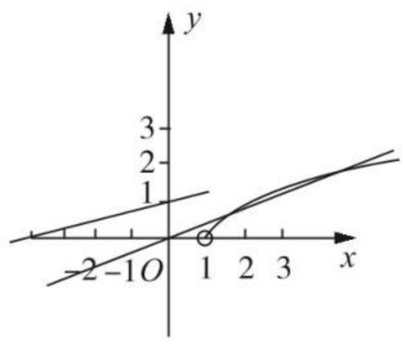
$\therefore y'=\dfrac{1}{x}$，设过点 $(0,0)$ 与 $y=\ln x(x>1)$ 相切的切点为 (x_0,y_0)，

$\therefore \begin{cases} y_0=\ln x_0, \\ a=\dfrac{1}{x_0}, \\ \dfrac{\ln x_0-0}{x_0-0}=\dfrac{1}{x_0}, \end{cases}$ $\therefore x_0=\mathrm{e}, a=\dfrac{1}{\mathrm{e}}$，

即过点 $(0,0)$ 与 $y=\ln x(x>1)$ 相切的切线方程为 $y=\dfrac{1}{\mathrm{e}}x$.

当直线 $y=ax$ 与直线 $y=\dfrac{1}{4}x+1$ 平行时，$a=\dfrac{1}{4}$，

$\therefore$若方程 $f(x)=ax$ 恰有两个不同实数根，则 $a\in\left[\dfrac{1}{4},\dfrac{1}{\mathrm{e}}\right)$，故选 C.



13. -3

解析：由题知 $A=(-3,2)$，$B=(a,+\infty)$，

若“$x\in A$”是“$x\in B$”的充分条件，

$\therefore a\leqslant-3$，$\therefore a$ 的最大值为 -3.

14. $\sqrt{2}+1$

解析：设 $P(x_0,y_0)$，不妨设 $x_0>0$，则 $x_0^2=4y_0$，

由 $y=\dfrac{1}{4}x^2$，$y'=\dfrac{1}{2}x$，

$\therefore y'|_{x=x_0}=\dfrac{1}{2}x_0$，

$\therefore \begin{cases} \dfrac{y_0+1}{x_0}=\dfrac{1}{2}x_0, \\ y_0=\dfrac{1}{4}x_0^2, \end{cases}$ $\therefore x_0=2$，$\therefore y_0=1$.

过点 P 作准线的垂线，垂足为 N，

则 $|PN|=|PB|$，

过点 P 的切线的斜率为 1，

$\therefore m=\dfrac{|PA|}{|PB|}=\dfrac{|PA|}{|PN|}\leqslant\sqrt{2}$，$\therefore$此时 $P(2,1)$.

由双曲线定义可知 $2a=|PA|-|PB|=2(\sqrt{2}-1)$，$\therefore a=\sqrt{2}-1$，$\therefore e=\dfrac{c}{a}=\sqrt{2}+1$.

15. $(-1,3)$

解析：$f'(x)=x^2+2ax+2a+3$，

$\because f(x)$在 $\mathbf{R}$ 上是增函数，$\therefore f'(x)\geqslant0$ 恒成立，

$\therefore\Delta=4a^2-4(2a+3)=4a^2-8a-12\leqslant0$，

$\therefore -1\leqslant a\leqslant3$，

$\therefore$实数 a 的取值范围是 $(-1,3)$.

16. ②③

解析：设点 $P(x,y)$ 是曲线 C 上任一点，由条件知 $|PF_1|\cdot|PF_2|=a^2$，即 $\sqrt{(x+1)^2+y^2}\cdot\sqrt{(x-1)^2+y^2}=a^2$. 对于①，代入 $(0,0)$，得 $a^2=1$，这与 $a>1$ 矛盾，$\therefore$①不正确；对于②，代入 $(-x,-y)$，得 $\sqrt{(-x+1)^2+(-y)^2}\cdot\sqrt{(-x-1)^2+(-y)^2}=\sqrt{(x-1)^2+y^2}\cdot\sqrt{(x+1)^2+y^2}=a^2$，$\therefore$②正确；对于③，$S_{\triangle F_1PF_2}=\dfrac{1}{2}|PF_1||PF_2|\sin\angle F_1PF_2=\dfrac{1}{2}a^2\sin\angle F_1PF_2\leqslant\dfrac{1}{2}a^2$，$\therefore$③正确. 故正确的结论是②③.

17. **解**：(1)若 p 为真命题，

则 $\begin{cases} 2k-1>0, \\ k-1>0, \\ 2k-1\neq k-1, \end{cases}$ 解得 $k>1$.

即 k 的取值范围是 $(1,+\infty)$.

(2)由(1)知 p 真则 $k>1$，

若 q 真，则 $k<3$.

当 p 真 q 假时，$\begin{cases} k>1, \\ k\geqslant3, \end{cases}$

$\therefore k\geqslant3$；

当 p 假 q 真时，$\begin{cases} k\leqslant1, \\ k<3, \end{cases}$

$\therefore k\leqslant1$.

综上知，k 的取值范围是 $(-\infty,1]\cup[3,+\infty)$.

18. **解**：(1)由题意，椭圆 C 的标准方程为 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{2}=1$，

所以 $a^2=4$，$b^2=2$，从而 $c^2=a^2-b^2=2$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

因此 $a=2,c=\sqrt{2}$.

故椭圆 C 的离心率 $e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

(2)设点 A,B 的坐标分别为 $(t,2),(x_0,y_0)$,其中 $x_0\neq 0$.

因为 $OA\perp OB$,所以 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=0$,即 $tx_0+2y_0=0$,解得 $t=-\frac{2y_0}{x_0}$. 又 $x_0^2+2y_0^2=4$,所以 $|AB|^2=(x_0-t)^2+(y_0-2)^2=\left(x_0+\frac{2y_0}{x_0}\right)^2+(y_0-2)^2=x_0^2+y_0^2+\frac{4y_0^2}{x_0^2}+4=x_0^2+\frac{4-x_0^2}{2}+\frac{2(4-x_0^2)}{x_0^2}+4=\frac{x_0^2}{2}+\frac{8}{x_0^2}+4\ (0<x_0^2\leqslant 4)$.

因为 $\frac{x_0^2}{2}+\frac{8}{x_0^2}\geqslant 4(0<x_0^2\leqslant 4)$,且当 $x_0^2=4$ 时等号成立,

所以 $|AB|^2\geqslant 8$.

故线段 AB 长度的最小值为 $2\sqrt{2}$.

19. **解**:(1)$f(x)=(a-b)x^2-x-x\ln x$,$f'(x)=2(a-b)x-\ln x-2$,

由 $\begin{cases}f(1)=a-b-1=a,\\ f'(1)=2(a-b)-2=0,\end{cases}$ 得 $\begin{cases}a=0,\\ b=-1,\end{cases}$

(2)因为 $a=1$,$f(x)=(1-b)x^2-x-x\ln x$,

$f(x)\geqslant 0$ 等价于 $b\leqslant 1-\frac{1}{x}-\frac{\ln x}{x}$,

令 $g(x)=1-\frac{1}{x}-\frac{\ln x}{x}$,$g'(x)=\frac{\ln x}{x^2}$,

当 $x\in(0,1)$ 时,$g'(x)<0$,所以 $g(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递减;

当 $x\in(1,+\infty)$ 时,$g'(x)>0$,所以 $g(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递增,

所以 $g(x)_{\min}=g(1)=0$,

所以 $b\in(-\infty,0]$.

20. **解**:(1)当 $a=3$ 时,$f(x)=\frac{1}{3}x^3-3x^2-3x-3$,

$f'(x)=x^2-6x-3$.

令 $f'(x)=0$ 解得 $x=3-2\sqrt{3}$ 或 $x=3+2\sqrt{3}$.

当 $x\in(-\infty,3-2\sqrt{3})\cup(3+2\sqrt{3},+\infty)$ 时,

$f'(x)>0$;

当 $x\in(3-2\sqrt{3},3+2\sqrt{3})$ 时,$f'(x)<0$.

故 $f(x)$ 在 $(-\infty,3-2\sqrt{3})$,$(3+2\sqrt{3},+\infty)$ 单调递增,在 $(3-2\sqrt{3},3+2\sqrt{3})$ 单调递减.

(2)证明:由于 $x^2+x+1>0$,所以 $f(x)=0$ 等价于 $\frac{x^3}{x^2+x+1}-3a=0$.

设 $g(x)=\frac{x^3}{x^2+x+1}-3a$,则 $g'(x)=\frac{x^2(x^2+2x+3)}{(x^2+x+1)^2}\geqslant 0$,

仅当 $x=0$ 时 $g'(x)=0$,所以 $g(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 单调递增.

故 $g(x)$ 至多有一个零点,从而 $f(x)$ 至多有一个零点.

又 $f(3a-1)=-6a^2+2a-\frac{1}{3}=-6\left(a-\frac{1}{6}\right)^2-\frac{1}{6}<0$,$f(3a+1)=\frac{1}{3}>0$,故 $f(x)$ 有一个零点.

综上,$f(x)$ 只有一个零点.

21. **解**:(1)因为 $|AB|+|AF_2|+|BF_2|=8$,即 $|AF_1|+|BF_1|+|AF_2|+|BF_2|=8$,

又 $|AF_1|+|AF_2|=|BF_1|+|BF_2|=2a$,所以 $4a=8$,$a=2$.

当直线 AB 的斜率为 $\frac{3}{4}$ 时,AF_2 与 x 轴垂直,所以 $\frac{|AF_2|}{|F_1F_2|}=\frac{3}{4}$,

由 $\frac{c^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$,且 $y>0$,解得 $y=\frac{b^2}{a}$,即 $A\left(c,\frac{b^2}{a}\right)$,

又因为 $a=2$,所以 $\frac{b^2}{4c}=\frac{3}{4}$,所以 $b^2=3c$.

结合 $c^2=a^2-b^2$,解得 $c=1$,$b=\sqrt{3}$.

所以,椭圆 C 的标准方程为 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$.

(2)由(1)得,$F_1(-1,0)$,设直线 AB 的方程为 $x=my-1$ $(m\neq 0)$,

$A(x_1,y_1)$,$B(x_2,y_2)$,$M(s,0)$,联立 $\begin{cases}x=my-1,\\ 3x^2+4y^2=12,\end{cases}$

消去 x,整理得 $(3m^2+4)y^2-6my-9=0$,

所以 $y_1+y_2=\frac{6m}{3m^2+4}$,$y_1y_2=-\frac{9}{3m^2+4}$,

如果 MF_1 平分 $\angle AMB$,则 $k_{AM}+k_{BM}=0$,即 $\frac{y_1}{x_1-s}+\frac{y_2}{x_2-s}=0$,

所以 $y_1(x_2-s)+y_2(x_1-s)=0$,

即 $y_1(my_2-1)+y_2(my_1-1)-s(y_1+y_2)=0$,

所以 $2my_1y_2-(1+s)(y_1+y_2)=0$,

即 $2m\cdot\frac{-9}{3m^2+4}-(1+s)\cdot\frac{6m}{3m^2+4}=0$,

所以 $1+s=-3$,即 $s=-4$,

所以 $M(-4,0)$ 为所求.

22. **解**:(1)当 $a=3$ 时,$f(x)=\ln x+x^2-3x$,定义域为 $(0,+\infty)$.

$f'(x)=\frac{1}{x}+2x-3=\frac{1+2x^2-3x}{x}=\frac{(x-1)(2x-1)}{x}$,

当 $0<x<\frac{1}{2}$ 或 $x>1$ 时,$f'(x)>0$;

当 $\frac{1}{2}<x<1$ 时,$f'(x)<0$.

$\therefore f(x)$ 的单调递增区间为 $\left(0,\frac{1}{2}\right)$,$(1,+\infty)$,单调递减区间为 $\left(\frac{1}{2},1\right)$.

(2)由 $f(x)>0$ 得 $a<\frac{\ln x+x^2}{x}$ 在 $(1,+\infty)$ 上恒成立,

令 $g(x)=\frac{\ln x+x^2}{x}(x>1)$,则 $g'(x)=\frac{1+x^2-\ln x}{x^2}$.

令 $h(x)=1+x^2-\ln x(x>1)$,则 $h'(x)=2x-\frac{1}{x}=\frac{2x^2-1}{x}>0$,

$\therefore h(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上为增函数,$h(x)>h(1)=2>0$,

$\therefore g'(x)$ 大于 0,$g(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上为增函数,

$\therefore g(x)>g(1)=1$,$\therefore a\leqslant 1$,即实数 a 的取值范围是 $(-\infty,1]$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

责任编辑 李 莉 周建图
美术编辑 李 欣
封面设计 欣 羽

45 分钟
课时作业与单元测试

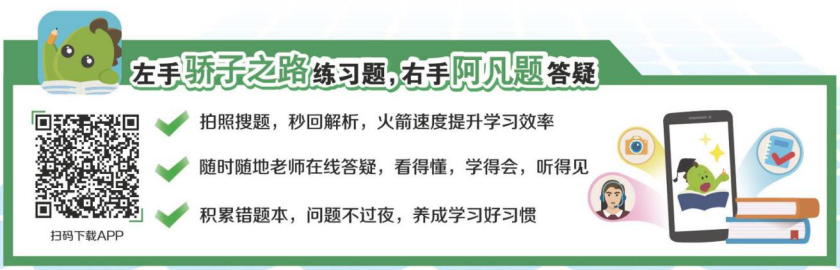
45FENZHONG KESHIZUOYEYUDANYUANCESHI SHUXUE

丛书科目

语文 数学 英语 物理 化学 生物 历史 地理 思想政治

同学们，你想了解丛书的更多信息吗？详情请登录 http://www.dfjc100.com

※ 各科配有教师用书及教学课件光盘 (word 文档可自主编辑)，英语配有原声磁带 / MP3 光盘。



手机扫一扫
获取配套学习资源

ISBN 978-7-202-08026-9
9 787202 080269
定价：30.00 元

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料