东方杰创®
DONGFANG JIECHUANG
让 学习更快乐，人生更精彩

骄子之路®
the Road to Pride
主　编：邓保沧

45分钟

课时作业与单元测试

活页
可拆开使用

教辅资料站

电子教辅　试卷练习
知识总结　备课资源

扫码关注获取更多学习资料

提升＝基础＋能力＋方法
课时作业　基础自测·知能提升
阶段检测　梯度练习·评估达标
答案与解析　全解全析·点拨精准

数学

选修 2-1　RJ·A

河北人民出版社

东方杰创®
DONGFANG JIECHUANG
让 学习更快乐，人生更精彩

骄子之路®
the Road to Pride
主　编：邓保沧

45分钟

课时作业与单元测试

活页
可拆开使用

提升＝基础＋能力＋方法
课时作业　基础自测·知能提升
阶段检测　梯度练习·评估达标
答案与解析　全解全析·点拨精准

数学

选修2-1　RJ·A

河北人民出版社
石家庄

微信公众号
教辅资料站

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

图书在版编目（CIP）数据

45分钟课时作业与单元测试：A版．数学．2-1：选修／邓保沧主编．—石家庄：河北人民出版社，2013.8（2019.10重印）
ISBN 978-7-202-08030-6

Ⅰ．①4… Ⅱ．①邓… Ⅲ．①中学数学课—高中—习题集
Ⅳ．①G634

中国版本图书馆CIP数据核字（2013）第194919号

编　委：李　越　张瑞霞　李　雅
天高云　蒋　敏　金剑飞

书　名	45分钟课时作业与单元测试　数学　选修2-1　A
主　编	邓保沧
责任编辑	李　莉　赵黎黎
美术编辑	李　欣
封面设计	欣　羽
出版发行	河北人民出版社（石家庄市友谊北大街330号）
印　刷	河北伦洋印业有限公司
开　本	880毫米×1230毫米　1/16
印　张	7.5
字　数	240 000
版　次	2013年8月第1版　2019年10月第5次印刷
书　号	ISBN 978-7-202-08030-6
定　价	35.00元

版权所有　翻印必究

微信公众号
教辅资料站

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料



目录 CONTENTS

第一部分　课时作业

第一章　常用逻辑用语 …… 1

1.1　命题及其关系 …… 1

第 1 课时　1.1.1　命题　1.1.2　四种命题 …… 1

第 2 课时　1.1.3　四种命题间的相互关系 …… 3

1.2　充分条件与必要条件 …… 5

第 3 课时　1.2.1　充分条件与必要条件　1.2.2　充要条件 …… 5

1.3　简单的逻辑联结词 …… 6

第 4 课时　1.3.1　且(and)　1.3.2　或(or)　1.3.3　非(not) …… 6

1.4　全称量词与存在量词 …… 8

第 5 课时　1.4.1　全称量词　1.4.2　存在量词 …… 8

第 6 课时　1.4.3　含有一个量词的命题的否定 …… 10

阶段评估 1 …… 12

第二章　圆锥曲线与方程 …… 14

2.1　曲线与方程 …… 14

第 7 课时　2.1.1　曲线与方程 …… 14

第 8 课时　2.1.2　求曲线的方程 …… 16

2.2　椭　圆 …… 18

第 9 课时　2.2.1　椭圆及其标准方程 …… 18

第 10 课时　2.2.2　椭圆的简单几何性质(一) …… 20

第 11 课时　2.2.2　椭圆的简单几何性质(二) …… 22

阶段评估 2 …… 24

2.3　双曲线 …… 26

第 12 课时　2.3.1　双曲线及其标准方程 …… 26

第 13 课时　2.3.2　双曲线的简单几何性质(一) …… 28

第 14 课时　2.3.2　双曲线的简单几何性质(二) …… 30

2.4　抛物线 …… 32

第 15 课时　2.4.1　抛物线及其标准方程 …… 32

第 16 课时　2.4.2　抛物线的简单几何性质(一) …… 34

第 17 课时　2.4.2　抛物线的简单几何性质(二) …… 36

阶段评估 3 …… 38

微信公众号
教辅资料站

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料



目录 CONTENTS

第三章　空间向量与立体几何 …… 40

3.1　空间向量及其运算 …… 40

第 18 课时　3.1.1　空间向量及其加减运算 …… 40

第 19 课时　3.1.2　空间向量的数乘运算 …… 42

第 20 课时　3.1.3　空间向量的数量积运算 …… 44

第 21 课时　3.1.4　空间向量的正交分解及其坐标表示 …… 46

第 22 课时　3.1.5　空间向量运算的坐标表示 …… 48

3.2　立体几何中的向量方法 …… 50

第 23 课时　空间向量与平行关系 …… 50

第 24 课时　空间向量与垂直关系 …… 52

第 25 课时　空间向量与空间角 …… 54

第 26 课时　空间向量与空间距离 …… 56

阶段评估 4 …… 58

第二部分　阶段检测

阶段测试一（第一章　常用逻辑用语） …… 61

阶段测试二（第二章　圆锥曲线与方程） …… 65

阶段测试三（第三章　空间向量与立体几何） …… 69

选修 2－1 综合测评 …… 73

第三部分　答案与解析

答案与解析 …… 78～116

提示：全书包括课时作业、阶段检测、答案与解析三部分，共计 120 页。

（根据教师教学情况不同，课时作业部分可在书中作答，也可撕下使用。）

微信公众号
教辅资料站

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

第一章 常用逻辑用语

1.1 命题及其关系

第1课时 1.1.1 命题 1.1.2 四种命题

基础知识梳理

1. 一般地，在数学中，我们把用语言、符号或式子表达的，可以判断真假的陈述句叫做_____，其中判断为真的语句叫做_____，判断为假的语句叫做_____.

2. 一般地，对于两个命题，如果一个命题的条件和结论分别是另一个命题的结论和条件，那么我们把这样的两个命题叫做_____，其中一个叫_____，另一个叫原命题的_____.

3. 对于两个命题，其中一个命题的条件和结论恰好是另一个命题的条件的否定和结论的否定，我们把这样的两个命题叫做_____. 如果把其中的一个叫做原命题，那么另一个叫做原命题的_____.

4. 对于两个命题，如果一个命题的条件和结论恰好是另一个命题的结论的否定和条件的否定，我们把这样的两个命题叫做_____. 如果把其中的一个命题叫做原命题，那么另一个叫做原命题的_____.

题点知识巩固

知识点一 命题的概念

1. 下列语句是命题的个数是 (　　)

(1)若 $a>b$，则 $ac>bc$；

(2)$x^2+1>2x$；

(3)空集是任何集合的真子集；

(4)一个整数不是偶数就是奇数；

(5)正弦函数的图象关于原点对称.

A. 1　　B. 2

C. 3　　D. 4

2. 下列语句不是命题的是_____.

①0 是自然数；

②求证：$\sqrt{3}$是无理数；

③你是高一的学生吗？

④$x^2+2x+1\geqslant 0$，$x\in\mathbf{R}$；

⑤单位向量的模是 1.

知识点二 命题的构成形式

3. **(2019·牡丹江高二检测)** 命题“垂直于同一条直线的两个平面平行”的条件是 (　　)

A. 两个平面

B. 一条直线

C. 垂直

D. 两个平面垂直于同一条直线

4. 把下列命题改写成“若 p 则 q”的形式.

(1)实数的平方是非负数；

(2)等底等高的两个三角形面积相等；

(3)能被 3 整除的数一定能被 6 整除；

(4)弦的垂直平分线经过圆心，并平分弦所对的弧.

知识点三 真命题与假命题的判断

5. **(2019·合肥高二月考)** 下列命题：①若 $xy=1$，则 x，y 互为倒数；②四条边相等的四边形是正方形；③平行四边形是梯形；④若 $ac^2>bc^2$，则 $a>b$. 其中真命题的序号是_____.

6. 若 a，b，$c\in\mathbf{R}$，写出命题“若 $ac<0$，则 $ax^2+bx+c=0$ 有两个相异实根”的逆命题、否命题、逆否命题，并判断它们的真假.

微信公众号 教辅资料站

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

提能达标过关

一、选择题

1. 下列命题是真命题的是 ( )

A. 若 $x=y$，则 $\sqrt{x}=\sqrt{y}$　　B. 若 $x<y$，则 $x^2<y^2$

C. 若 $x^2=1$，则 $x=1$　　D. 若 $\frac{1}{x}=\frac{1}{y}$，则 $x=y$

2. 命题“若 $A\cap B=A$，则 $A\cup B=B$”的逆否命题是 ( )

A. 若 $A\cup B=B$，则 $A\cap B=A$

B. 若 $A\cap B\neq A$，则 $A\cup B\neq B$

C. 若 $A\cup B\neq B$，则 $A\cap B\neq A$

D. 若 $A\cup B\neq B$，则 $A\cap B=A$

3. 下列命题是假命题的是 ( )

A. 若 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$，则 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$

B. 若 $|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|$，则 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$

C. 若 $ac^2>bc^2$，则 $a>b$

D. $\sin 45^\circ=\frac{\sqrt{2}}{2}$

4. 在下列给出的命题中，正确命题的个数为 ( )

①函数 $y=2x^3-3x+1$ 的图象关于点 $(0,1)$ 成中心对称；

②若实数 x,y 满足 $x^2+y^2=1$，则 $\frac{y}{x+2}$ 的最大值为 $\frac{\sqrt{3}}{3}$；

③若 $\triangle ABC$ 为锐角三角形，则 $\sin A<\cos B$.

A. 1 个　　B. 2 个

C. 3 个　　D. 0 个

5. 下列命题是真命题的是 ( )

A. 有两个面互相平行，其余各面都是平行四边形的多面体是棱柱

B. 过点 $P(x_0,y_0)$ 的所有直线的方程都可以表示为 $y-y_0=k(x-x_0)$

C. 已知点 $A(x_0,y_0)$ 是圆 $C:x^2+y^2=1$ 内一点，则直线 $x_0x+y_0y=1$ 与圆 C 相交

D. 圆柱的俯视图可能为矩形

二、填空题

6. (**2019·乾安县七中高二质量检测**)函数 $f(x)$ 的定义域为 A，若当 $x_1,x_2\in A$ 且 $f(x_1)=f(x_2)$ 时，总有 $x_1=x_2$，则称 $f(x)$ 为单函数. 例如，函数 $f(x)=2x+1(x\in\mathbf{R})$ 是单函数. 下列命题：①函数 $f(x)=x^2(x\in\mathbf{R})$ 是单函数；②指数函数 $f(x)=2^x(x\in\mathbf{R})$ 是单函数；③在定义域上具有单调性的函数一定是单函数. 其中的真命题是_____. (填序号)

7. 若“$x\in[2,5]$ 或 $x\in\{x|x<1$ 或 $x>5\}$”是假命题，则 x 的取值范围是_____.

8. 命题“存在 $x\in\mathbf{R}$，使 $ax^2-2ax-3>0$ 不成立”是真命题，则实数 a 的取值范围是_____.

三、解答题

9. 把下列命题改写成“若 p，则 q”的形式：

(1)末位是 0 的整数，可以被 5 整除；

(2)线段的垂直平分线上的点与这条线段两个端点的距离相等；

(3)等式两边都乘以同一个数，所得结果仍是等式.

10. (**2019·佛山三中高二段考**)已知 $p:x^2-2x+2\geqslant m$ 的解集为 $\mathbf{R}$；q：函数 $f(x)=-(7-3m)^x$ 是减函数. 若这两个命题中有且只有一个是真命题，求实数 m 的取值范围.

微信公众号 教辅资料站

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

第2课时　1.1.3　四种命题间的相互关系

基础知识梳理

四种命题之间的关系

1. 一般地，用 p 和 q 分别表示一个命题的条件和结论. 用 $\neg p$、$\neg q$ 表示 p 和 q 的否定. 于是四种命题的形式就是：

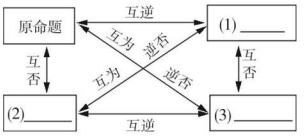
原命题：若 p 则 q（$p\Rightarrow q$）；

逆命题：若 q 则 p（$q\Rightarrow p$）；

否命题：若 $\neg p$ 则 $\neg q$（$\neg p\Rightarrow \neg q$）；

逆否命题：若 $\neg q$ 则 $\neg p$（$\neg q\Rightarrow \neg p$）.

2. 四种命题间的关系



题点知识巩固

知识点一　四种命题的相互关系

1. 已知 $a,b\in\mathbf{R}$，则命题“若 $a+b=1$，则 $a^2+b^2\geqslant\frac{1}{2}$”的逆否命题是　（　）

A. 若 $a+b\neq1$，则 $a^2+b^2<\frac{1}{2}$

B. 若 $a+b=1$，则 $a^2+b^2<1$

C. 若 $a^2+b^2<\frac{1}{2}$，则 $a+b\neq1$

D. 若 $a^2+b^2\geqslant\frac{1}{2}$，则 $a+b=1$

2. （**2019·安阳高二质检**）命题“若 $x\neq3$ 且 $x\neq2$，则 $x^2-5x+6\neq0$”的否命题是　（　）

A. 若 $x=3$ 且 $x=2$，则 $x^2-5x+6=0$

B. 若 $x\neq3$ 且 $x\neq2$，则 $x^2-5x+6=0$

C. 若 $x=3$ 或 $x=2$，则 $x^2-5x+6=0$

D. 若 $x=3$ 或 $x=2$，则 $x^2-5x+6\neq0$

知识点二　四种命题的真假判断

3. 关于原命题“在 $\triangle ABC$ 中，若 $\cos A=2\sin B\sin C$，则 $\triangle ABC$ 是钝角三角形”的叙述：

①原命题是假命题；②逆命题为假命题；③否命题是假命题；④逆否命题为真命题.

其中，正确的个数是　（　）

A. 1　　B. 2

C. 3　　D. 4

4. 已知下列命题：①若 $k>0$，则关于 x 的方程 $x^2+2x-k=0$ 无实根；②若 $a>b$，则 $a+c>b+c$；③“梯形的对角线相等”的逆命题；④若“$xy=0$，则 x,y 中至少有一个为 0”的否命题. 其中真命题的序号是_____.

知识点三　等价命题的应用

5. 与命题“若 $m\in M$，则 $n\notin M$”等价的命题是　（　）

A. 若 $m\notin M$，则 $n\notin M$

B. 若 $n\notin M$，则 $m\in M$

C. 若 $m\notin M$，则 $n\in M$

D. 若 $n\in M$，则 $m\notin M$

6. （**教材 P_8 练习改编**）证明：若 $a^2-4b^2-2a+1\neq0$，则 $a\neq2b+1$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

提能达标过关

一、选择题

1. 命题“若 $A\cup B=A$，则 $A\cap B=B$”的否命题是 （ ）
   A. 若 $A\cup B\neq A$，则 $A\cap B\neq B$
   B. 若 $A\cap B\neq B$，则 $A\cup B\neq A$
   C. 若 $A\cup B=A$，则 $A\cap B\neq B$
   D. 若 $A\cup B\neq A$，则 $A\cap B=B$

2. 已知命题 p：垂直于平面 α 内无数条直线的直线 l 垂直于平面 α，q 是 p 的否命题，下面结论正确的是 （ ）
   A. p 真，q 真　　B. p 假，q 假
   C. p 真，q 假　　D. p 假，q 真

3. 命题 p 的逆命题是 q，命题 p 的逆否命题是 r，则 q 是 r 的 （ ）
   A. 逆命题　　B. 否命题
   C. 逆否命题　　D. 以上判断都不对

4. 有下列四个命题：
   ①“若 $x+y=0$，则 x，y 互为相反数”的逆命题；②“相似三角形的周长相等”的否命题；③若“$b\leqslant 0$，则方程 $x^2-2bx+b^2+b=0$ 有实根”的逆否命题；④“若 $A\cup B=B$，则 $A\supseteq B$”的逆否命题.
   其中真命题是 （ ）
   A. ①②　　B. ②③
   C. ①③　　D. ③④

5. 设 $m\in\mathbf{R}$，命题“若 $m>0$，则方程 $x^2+x-m=0$ 有实根”的逆否命题是 （ ）
   A. 若方程 $x^2+x-m=0$ 有实根，则 $m>0$
   B. 若方程 $x^2+x-m=0$ 有实根，则 $m\leqslant 0$
   C. 若方程 $x^2+x-m=0$ 没有实根，则 $m>0$
   D. 若方程 $x^2+x-m=0$ 没有实根，则 $m\leqslant 0$

二、填空题

6. 甲、乙、丙三位同学被问到是否去过 A，B，C 三个城市时，
   甲说：我去过的城市比乙多，但没去过 B 城市；
   乙说：我没去过 C 城市；
   丙说：我们三人去过同一城市.
   由此可判断乙去过的城市为_____.

7. 命题“已知不共线的向量 $\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$，若 $\lambda\boldsymbol{e}_1+\mu\boldsymbol{e}_2=\boldsymbol{0}$，则 $\lambda=\mu=0$”的等价命题为_____，是_____（填“真”或“假”）命题.

8. 下列命题中：
   ①若一个四边形的四条边不相等，则它不是正方形；②若一个四边形对角互补，则它内接于圆；③正方形的四条边相等；④对角不互补的四边形不内接于圆；⑤圆内接四边形对角互补；⑥若一个四边形的四条边相等，则它是正方形.
   其中互为逆命题的有_____；互为否命题的有_____；互为逆否命题的有_____.（填序号）

三、解答题

9. 若方程 $x^2+2ax-b=0(a,b\in\mathbf{R})$ 没有实数根，则 $a+b<\frac{1}{4}$.
   (1)判断上述命题的真假，并说明理由；
   (2)试写出上述命题的逆命题，并判断真假，并说明理由.

10. （**2019·天水高二月考**）求证：若 $p^2+q^2=2$，则 $p+q\leqslant 2$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

1.2　充分条件与必要条件

第3课时　1.2.1　充分条件与必要条件　1.2.2　充要条件

基础知识梳理

1. 一般地，命题“若 p 则 q”为真，可记作“_____”；“若 p 则 q”为假，可记作“_____”.
2. 一般地，如果 $p\Rightarrow q$，那么称 p 是 q 的_____，同时称 q 是 p 的_____.
3. 如果_____且_____，那么称 p 是 q 的充分必要条件，简称 p 是 q 的_____，记作_____. 同时 q 也是 p 的_____.

题点知识巩固

知识点一　充分条件、必要条件的判断

1. (**2018·北京卷**)设 a,b,c,d 是非零实数，则“$ad=bc$”是“a,b,c,d 成等比数列”的　(　)
   A. 充分不必要条件
   B. 必要不充分条件
   C. 充要条件
   D. 既不充分也不必要条件
2. (**2018·天津卷**)设 $x\in\mathbf{R}$，则“$x^3>8$”是“$|x|>2$”的(　)
   A. 充分不必要条件
   B. 必要不充分条件
   C. 充要条件
   D. 既不充分也不必要条件

知识点二　充分条件、必要条件的应用

3. 已知命题 p：实数 x 满足 $-2\leqslant 1-\frac{x-1}{3}\leqslant 2$；命题 q：实数 x 满足 $x^2-2x+(1-m^2)\leqslant 0(m>0)$. 若 $\neg p$ 是 $\neg q$ 的必要不充分条件，则实数 m 的取值范围是_____.
4. 若“$x<a$”是“$x^2-2x-3\geqslant 0$”的充分不必要条件，则 a 的取值范围是_____.

知识点三　充要条件的判定与证明

5. 设 $n\in\mathbf{N}^*$，一元二次方程 $x^2-4x+n=0$ 有整数根的充要条件是 $n=$_____.
6. 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 $S_n=2^n+t(n\in\mathbf{N}_+)$，证明：数列 $\{a_n\}$ 是等比数列的一个充要条件是 $t=-1$.

提能达标过关

一、选择题

1. 设 $a,b,c\in\mathbf{R}$，则“$a+b>c$”是“$a>c$ 且 $b>c$”的　(　)
   A. 充分不必要条件
   B. 必要不充分条件
   C. 充要条件
   D. 既不充分也不必要条件
2. (**2019·湄潭求是高中月考**)给定空间中的点 P，直线 l，平面 α 与平面 β，若 $P\in l$，$P\in\alpha$，$\alpha\perp\beta$，则“$l\subset\alpha$”是“$l\perp\beta$”的　(　)
   A. 充分不必要条件
   B. 必要不充分条件
   C. 充要条件
   D. 既不充分也不必要条件
3. 设 $x\in\mathbf{R}$，则“$x<1$”是“$x|x|-2<0$”的　(　)
   A. 充分不必要条件
   B. 必要不充分条件
   C. 充要条件
   D. 既不充分也不必要条件
4. (**2019·浙江卷**)若 $a>0$，$b>0$，则“$a+b\leqslant 4$”是“$ab\leqslant 4$”的　(　)
   A. 充分不必要条件
   B. 必要不充分条件
   C. 充分必要条件
   D. 既不充分也不必要条件
5. (**2019·全国卷Ⅱ**)设 α,β 为两个平面，则 $\alpha\parallel\beta$ 的充要条件是　(　)
   A. α 内有无数条直线与 β 平行
   B. α 内有两条相交直线与 β 平行
   C. α,β 平行于同一条直线
   D. α,β 垂直于同一平面

二、填空题

6. 函数 $y=x^2+bx+c$ 在 $[0,+\infty)$ 上是单调函数的充要条件是_____.
7. (**2019·昆明模拟**)已知 $P=\{x|a-4<x<a+4\}$，$Q=\{x|1<x<3\}$，“$x\in P$”是“$x\in Q$”的必要条件，则实数 a 的取值范围是_____.
8. 给出下列几个结论：
   ①“$x^2\neq 1$”是“$x\neq 1$”的充分不必要条件；
   ②“$x>5$”是“$x>4$”的必要不充分条件；
   ③“$xy=0$”是“$x=0$ 且 $y=0$”的充要条件；
   ④“$x^2<4$”是“$x<2$”的既不充分也不必要条件.
   其中，正确的结论是_____.（把正确结论的序号都填上）

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

三、解答题

9. 给出以下命题，判断 p 是 q 的什么条件：

(1) p：$A=B$，q：$\sin A=\sin B$；

(2) p：$x>2$ 且 $y>3$，q：$x+y>5$；

(3) p：$a>b$，q：$\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$.

10. 已知条件 p：$A=\{x\mid 2a\leqslant x\leqslant a^2+1\}$，条件 q：$B=\{x\mid x^2-3(a+1)x+2(3a+1)\leqslant 0\}$. 若 p 是 q 的充分条件，求实数 a 的取值范围.

1.3 简单的逻辑联结词

第 4 课时 1.3.1 且(and) 1.3.2 或(or) 1.3.3 非(not)

基础知识梳理

1. 逻辑联结词

把两个命题联结而成新命题的常用逻辑联结词有_____.

2. 含有逻辑联结词的命题的真假

p	q	$p\wedge q$	$p\vee q$	$\neg p$
真	真	____	____	____
真	假	____	____	____
假	真	____	____	____
假	假	____	____	____

此表称为“真值表”，从表中易得：

(1) p 且 q 有一假即假，同真才真；

(2) p 或 q 有一真即真，同假才假；

(3) 非 p 真假相反.

题点知识巩固

知识点一 用逻辑联结词构造命题

1. 在一次跳伞训练中，甲、乙两位学员各跳一次，设命题 p 是“甲降落在指定范围”，q 是“乙降落在指定范围”，则命题“至少有一位学员没有降落在指定范围”可表示为 (　　)

A. $(\neg p)\vee(\neg q)$　　B. $p\vee(\neg q)$

C. $(\neg p)\wedge(\neg q)$　　D. $p\vee q$

2. “$xy\neq 0$”是指 (　　)

A. $x\neq 0$ 且 $y\neq 0$

B. $x\neq 0$ 或 $y\neq 0$

C. x，y 至少一个不为 0

D. x，y 不都是 0

知识点二 含有逻辑联结词的命题的真假

3. 命题 p：点 A 在直线 $y=2x-3$ 上；命题 q：点 A 在曲线 $y=-x^2$ 上，则使“$p\wedge q$”为真命题的一个点 $A(x,y)$ 是 (　　)

A. $(0,-3)$　　B. $(1,2)$

C. $(1,-1)$　　D. $(-1,1)$

4. (**2019·临沂高二检测**)命题 p：若不等式 $x^2+x+m>0$ 恒成立，则 $m>\frac{1}{4}$，命题 q：在 $\triangle ABC$ 中，$A>B$ 是 $\sin A>\sin B$ 的充要条件，则 (　　)

A. p 真 q 假　　B. “$p\wedge q$”为真

C. “$p\vee q$”为假　　D. “$(\neg p)\vee(\neg q)$”为真

知识点三 利用命题的真假求参数的取值范围

5. 已知命题 p：函数 $f(x)=2ax^2-x-1$ 在 $(0,1)$ 内恰有一个零点；命题 q：函数 $y=x^{2-a}$ 在 $(0,+\infty)$ 上是减函数，若 $p\wedge(\neg q)$ 为真命题，则实数 a 的取值范围是 (　　)

A. $(1,+\infty)$　　B. $(-\infty,2]$

C. $(1,2]$　　D. $(-\infty,1]$

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

6.（**2019·江口中学高二阶段测试**）设命题 p：方程 $x^2+(2m-4)x+m=0$ 有两个不等的实数根；命题 q：$\forall x\in[2,3]$，不等式 $x^2-4x+13\geqslant m^2$ 恒成立.

(1)若命题 p 为真命题，求实数 m 的取值范围；

(2)若命题 $p\vee q$ 为真命题，命题 $p\wedge q$ 为假命题，求实数 m 的取值范围.

提能达标过关

一、选择题

1. 若命题 p：若 $a\in\mathbf{R}$，则方程 $ax+1=0$ 有解；命题 q：若直线 $x+my=0$ 与直线 $2x+y+1=0$ 平行，则 $m<0$. 下列命题为真的是（　　）

A. $p\wedge q$　　B. $p\vee q$

C. $(\neg p)\vee q$　　D. $(\neg p)\wedge q$

2. 已知命题 p：若 $\alpha=\frac{\pi}{6}$，则 $\sin\alpha=\frac{1}{2}$；命题 q：若 $\sin\alpha=\frac{1}{2}$，则 $\alpha=\frac{\pi}{6}$. 下列四个结论中正确的是（　　）

A. $p\wedge q$ 为真命题　　B. $p\vee q$ 为真命题

C. $\neg p$ 是真命题　　D. $\neg q$ 是假命题

3. 若命题 p：$x\in A\cap B$，则“$\neg p$”表示（　　）

A. $x\in A\cup B$　　B. $x\notin A\cup B$

C. $x\notin A$ 且 $x\notin B$　　D. $x\notin A$ 或 $x\notin B$

4. 已知命题“正方形的对角线互相垂直平分”，则（　　）

A. 该命题是假命题

B. 该命题的条件是对角线互相垂直平分

C. 该命题的逆否命题是假命题

D. 该命题是“$p\wedge q$”形式的命题

5.（**2019·白城一中高二月考**）设 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 是非零向量，已知命题 p：若 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0,\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}=0$，则 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}=0$；命题 q：若 $\boldsymbol{a}\parallel\boldsymbol{b},\boldsymbol{b}\parallel\boldsymbol{c}$，则 $\boldsymbol{a}\parallel\boldsymbol{c}$，则下列命题中的真命题是（　　）

A. $p\vee q$　　B. $p\wedge q$

C. $(\neg p)\wedge(\neg q)$　　D. $p\vee(\neg q)$

二、填空题

6. 已知命题 p：若实数 x,y 满足 $x^2+y^2=0$，则 x,y 全为 0；命题 q：若 $a>b$，则 $\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$，给出下列四个命题：①$p\wedge q$；②$p\vee q$；③$\neg p$；④$\neg q$. 其中真命题是_____.

7.（**2019·淮北高二检测**）已知命题 p：$x^2+2x-3>0$，命题 q：$\frac{1}{3-x}>1$，若“$\neg q$ 且 p”为真，则 x 的取值范围是_____.

8. 已知命题 p：$m\in\mathbf{R}$ 且 $m+1\leqslant0$；命题 q：对于任意 $x\in\mathbf{R}$，$x^2+mx+1>0$ 恒成立. 若 $p\wedge q$ 为假命题，则 m 的取值范围是_____.

三、解答题

9. 分别指出下列命题的形式及构成它的命题，并判断真假.

(1)相似三角形周长相等或对应角相等；

(2)9 的算术平方根不是 -3；

(3)垂直于弦的直径平分这条弦，并且平分弦所对的两段弧.

10. 设命题 p：实数 x 满足 $x^2-4mx+3m^2\leqslant0$，其中 $m>0$；命题 q：$(x+2)(x-3)\leqslant0$.

(1)若 $m=2$，且 $p\wedge q$ 为真，求实数 x 的取值范围；

(2)若 $\neg q$ 是 $\neg p$ 的充分不必要条件，求实数 m 的取值范围.

微信公众号 教辅资料站

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

1.4 全称量词与存在量词

第 5 课时 1.4.1 全称量词 1.4.2 存在量词

基础知识梳理

1. 全称量词

(1)短语“所有的”“任意一个”在逻辑中通常叫做_____,并用符号____表示.

(2)_____的命题叫做全称命题.

(3)全称命题“对 M 中任意一个 x,有 $p(x)$ 成立”可用符号简记为_____,读作_____.

2. 存在量词

(1)短语“存在一个”,“至少有一个”在逻辑中通常叫做_____,并用符号_____表示.

(2)_____的命题,叫做特称命题.

(3)特称命题“存在 M 中的一个 x_0,使 $p(x_0)$ 成立”可用符号简记为_____,读作_____.

题点知识巩固

知识点一 全称命题与特称命题的判断

1. 下列命题中全称命题的个数为 (　　)

①至少有一个偶数是质数;

②平行四边形的对角线互相平分;

③对任意实数 α,有 $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$;

④存在一条直线,其斜率不存在.

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

2. (**2019·常州高二阶段测试**)以下四个命题既是特称命题又是真命题的是 (　　)

A. 锐角三角形的内角是锐角或钝角

B. 到少有一个实数 x,使 $x^2\leqslant 0$

C. 两个无理数的和必是无理数

D. 存在一个负数 x,使 $\frac{1}{x}>2$

知识点二 全称命题与特殊命题的真假判断

3. (**2018·江苏无锡模拟**)下列命题中的假命题是 (　　)

A. $\forall x\in\mathbf{R}$,$2^{x-1}>0$

B. $\forall x\in\mathbf{N}^*$,$(x-1)^2>0$

C. $\exists x_0\in\mathbf{R}$,$\lg x_0<1$

D. $\exists x_0\in\mathbf{R}$,$\tan x_0=2$

4. 判断下列命题是全称命题还是特称命题,用符号表示,并判断真假.

(1)任意一个实数乘以 -1 都等于它的相反数;

(2)有一个实数乘以任意一个实数都等于 0;

(3)圆 $x^2+y^2=1$ 上存在一点到直线 $y=x+1$ 的距离等于圆的半径.

知识点三 由命题的真假求参数的取值范围

5. 已知 $f(x)=\sin 2x-\sqrt{3}\cos 2x$,若对于任意实数 $x\in\left(0,\frac{\pi}{4}\right]$,都有 $|f(x)|<m$,则实数 m 的取值范围是_____.

6. 设命题 p:$\sin x+\cos x>m$,q:$x^2+mx+1>0$,如果对于 $\forall x\in\mathbf{R}$,p 为假命题且 q 为真命题,求实数 m 的取值范围.

微信公众号 教辅资料站

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

提能达标过关

一、选择题

1. 下列命题中，是真命题且是全称命题的是　　（　　）

A. 对任意实数 a，b，都有 $a^2+b^2-2a-2b+2<0$

B. 梯形的对角线不相等

C. $\exists x_0\in\mathbf{R}$，$\sqrt{x_0^2}=x_0$

D. 对数函数在定义域上是单调函数

2. 命题 p：$\exists x_0\in\mathbf{N}$，$x_0^3<x_0^2$；命题 q：$\forall a\in(0,1)\cup(1,+\infty)$，函数 $f(x)=\log_a(x-1)$ 的图象过定点 $(2,0)$，则　　（　　）

A. p 假 q 真　　B. p 真 q 假

C. p 假 q 假　　D. p 真 q 真

3. 给出四个命题：①末位数是偶数的整数能被 2 整除；②有的菱形是正方形；③存在实数 x，$x>0$；④对于任意实数 x，$2x+1$ 是奇数.

下列说法正确的是　　（　　）

A. 四个命题都是真命题

B. ①②是全称命题

C. ②③是特称命题

D. 四个命题中有两个假命题

4. 有四个关于三角函数的命题：

p_1：$\exists x_0\in\mathbf{R}$，$\sin^2\frac{x_0}{2}+\cos^2\frac{x_0}{2}=\frac{1}{2}$；

p_2：$\exists x_0,y_0\in\mathbf{R}$，$\sin(x_0-y_0)=\sin x_0-\sin y_0$；

p_3：$\forall x\in[0,\pi]$，$\sqrt{\frac{1-\cos 2x}{2}}=\sin x$；

p_4：$\sin x=\cos y\Rightarrow x+y=\frac{\pi}{2}$.

其中的假命题是　　（　　）

A. p_1，p_4　　B. p_2，p_4

C. p_1，p_3　　D. p_2，p_3

5. 已知 $a>0$，函数 $f(x)=ax^2+bx+c$，若 x_0 满足关于 x 的方程 $2ax+b=0$，则下列选项中的命题为假命题的是　　（　　）

A. $\exists x_0\in\mathbf{R}$，$f(x)\leqslant f(x_0)$

B. $\exists x_0\in\mathbf{R}$，$f(x)\geqslant f(x_0)$

C. $\forall x\in\mathbf{R}$，$f(x)\leqslant f(x_0)$

D. $\forall x\in\mathbf{R}$，$f(x)\geqslant f(x_0)$

二、填空题

6. 若命题“$\forall x\in\mathbf{R}$，$ax^2-ax-2<0$”是真命题，则实数 a 的取值范围是_____.

7. 已知命题 p：“$\exists x_0\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$，$\cos 2x_0+\sqrt{3}\sin 2x_0=k+1$”为真命题，则实数 k 的取值范围是_____.

8. 下列命题中，

①对于命题 p：$\exists x_0\in\mathbf{R}$，使得 $x_0^2+x_0-1<0$，则 $\neg p$：$\forall x\in\mathbf{R}$，均有 $x^2+x-1>0$；

②p 是 q 的必要不充分条件，则 $\neg p$ 是 $\neg q$ 的充分不必要条件；

③命题“若 $\sin x\neq\sin y$，则 $x\neq y$”为真命题；

④若 $a>b$，则 $2^a>2^b$.

所有正确命题的序号是_____.

三、解答题

9. 已知 $a>0$，设命题 p：函数 $y=\log_a x$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增；命题 q：不等式 $ax^2-ax+1>0$ 对 $\forall x\in\mathbf{R}$ 恒成立. 若 p 且 q 为假，p 或 q 为真，求 a 的取值范围.

10. 已知函数 $f(x)=x^2-2x+5$.

(1)是否存在实数 m，使不等式 $m+f(x)>0$ 对于任意 $x\in\mathbf{R}$ 恒成立，并说明理由；

(2)若存在一个实数 x_0，使不等式 $m-f(x_0)>0$ 成立，求实数 m 的取值范围.

微信公众号 教辅资料站

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

第 6 课时 1.4.3 含有一个量词的命题的否定

基础知识梳理

1. 全称命题 p：$\forall x\in M, p(x)$ 的否定 $\neg p$：_____；

全称命题的否定是_____.

2. 特称命题 p：$\exists x_0\in M, p(x_0)$ 的否定 $\neg p$：_____

____；特称命题的否定是_____.

题点知识巩固

知识点一 全称命题的否定

1. 命题“$\forall x\in[0,+\infty), x^3+x\geqslant 0$”的否定是 ( )

A. $\forall x\in(-\infty,0), x^3+x<0$

B. $\forall x\in(-\infty,0), x^3+x\geqslant 0$

C. $\exists x_0\in[0,+\infty), x_0^3+x_0<0$

D. $\exists x_0\in[0,+\infty), x_0^3+x_0\geqslant 0$

2. 命题“$\forall m\in[0,1], x+\frac{1}{x}\geqslant 2^m$”的否定形式是 ( )

A. $\forall m\in[0,1], x+\frac{1}{x}<2^m$

B. $\exists m_0\in[0,1], x+\frac{1}{x}\geqslant 2^{m_0}$

C. $\exists m_0\in(-\infty,0)\cup(0,+\infty), x+\frac{1}{x}\geqslant 2^{m_0}$

D. $\exists m_0\in[0,1], x+\frac{1}{x}<2^{m_0}$

知识点二 特称命题的否定

3. 命题“$\forall x\in\mathbf{R}, \exists n_0\in\mathbf{N}^*$，使得 $n_0\geqslant x^2$”的否定形式是 ( )

A. $\forall x\in\mathbf{R}, \exists n_0\in\mathbf{N}^*$，使得 $n_0<x^2$

B. $\forall x\in\mathbf{R}, \forall n\in\mathbf{N}^*$，使得 $n<x^2$

C. $\exists x_0\in\mathbf{R}, \exists n_0\in\mathbf{N}^*$，使得 $n_0<x_0^2$

D. $\exists x_0\in\mathbf{R}, \forall n\in\mathbf{N}^*$，使得 $n<x_0^2$

4. (**2017·山东卷**)已知命题 p：$\forall x>0, \ln(x+1)>0$；命题 q：若 $a>b$，则 $a^2>b^2$，下列命题为真命题的是 ( )

A. $p\wedge q$　　B. $p\wedge(\neg q)$

C. $(\neg p)\wedge q$　　D. $(\neg p)\wedge(\neg q)$

知识点三 含有一个量词的命题的否定的应用

5. 写出下列命题的否定，并判断真假.

(1) $\forall m\in\mathbf{R}$，方程 $x^2+x-m=0$ 必有实数根；

(2)所有末位数字是 0 或 5 的整数都能被 5 整除；

(3)某些梯形对角线互相平分；

(4)被 8 整除的整数能被 4 整除.

6. 已知函数 $f(x)=x^2, g(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^x-m$. 若对 $\forall x_1\in[-1,3], \exists x_0\in[0,2]$，使得 $f(x_1)\geqslant g(x_0)$，求实数 m 的取值范围.

微信公众号 教辅资料站

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

提能达标过关

一、选择题

1. 命题“$\exists x_0\in(0,+\infty)$，$\ln x_0=x_0-1$”的否定是　（　）

A. $\forall x\in(0,+\infty)$，$\ln x\neq x-1$

B. $\forall x\notin(0,+\infty)$，$\ln x\neq x-1$

C. $\exists x_0\in(0,+\infty)$，$\ln x_0\neq x_0-1$

D. $\exists x_0\notin(0,+\infty)$，$\ln x_0=x_0-1$

2. 对命题 p 的否定说法错误的是　（　）

A. p：能被 3 整除的整数是奇数；$\neg p$：存在一个能被 3 整除的整数不是奇数

B. p：每一个四边形的四个顶点共圆；$\neg p$：存在一个四边形的四个顶点不共圆

C. p：有的三角形为正三角形；$\neg p$：所有的三角形不都是正三角形

D. p：$\exists x_0\in\mathbf{R}$，$x_0^2+2x_0+2\leqslant 0$；$\neg p$：$\forall x\in\mathbf{R}$，$x^2+2x+2>0$

3. 设命题 p：$\exists n_0\in\mathbf{N}$，$n_0^2>2^{n_0}$，则 $\neg p$ 为　（　）

A. $\forall n\in\mathbf{N}$，$n^2>2^n$　　B. $\exists n_0\in\mathbf{N}$，$n_0^2\leqslant 2^{n_0}$

C. $\forall n\in\mathbf{N}$，$n^2\leqslant 2^n$　　D. $\exists n_0\in\mathbf{N}$，$n_0^2=2^{n_0}$

4. 已知命题 p_1：$\forall x\in(0,+\infty)$，有 $3^x>2^x$，p_2：$\exists\theta_0\in\mathbf{R}$，$\sin\theta_0+\cos\theta_0=\frac{3}{2}$，则命题 q_1：$p_1\vee p_2$，q_2：$p_1\wedge p_2$，q_3：$(\neg p_1)\vee p_2$ 和 q_4：$p_1\wedge(\neg p_2)$ 中，真命题是　（　）

A. q_1，q_3　　B. q_2，q_3

C. q_1，q_4　　D. q_3，q_4

5. 已知命题 p：“对 $\forall x\in\mathbf{R}$，$\exists m_0\in\mathbf{R}$，使 $4^x+2^xm_0+1=0$”. 若命题 $\neg p$ 是假命题，则实数 m_0 的取值范围是　（　）

A. $-2\leqslant m_0\leqslant 2$　　B. $m_0\geqslant 2$

C. $m_0\leqslant -2$　　D. $m_0\leqslant -2$ 或 $m_0\geqslant 2$

二、填空题

6. 命题“$\exists x_0\in\mathbf{R}$，$x_0\leqslant 1$ 或 $x_0^2>4$”的否定是_____.

7. 命题“$\forall x\in\mathbf{R}$，若 $y>0$，则 $x^2+y^2>0$”的否定为_____.

8. $\forall m\in[-1,1]$，不等式 $a^2-5a-3\geqslant\sqrt{m^2+8}$ 恒成立，则实数 a 的取值范围是_____.

三、解答题

9. 写出下列命题的否定和否命题.

(1)若 $b^2=ac$，则 a，b，c 成等比数列；

(2)垂直于同一条直线的两条直线平行；

(3)存在一个实数 x_0，使 $x_0^2+4x_0+4=0$.

10. 已知函数 $f(x)=2x^2-2ax+b$，$f(-1)=-8$. 对 $\forall x\in\mathbf{R}$，都有 $f(x)\geqslant f(-1)$ 成立，记集合 $A=\{x\mid f(x)>0\}$，$B=\{x\mid|x-t|\leqslant 1\}$.

(1)当 $t=1$ 时，求 $(\complement_{\mathbf{R}}A)\cup B$；

(2)设命题 p：$A\cap B\neq\varnothing$，若 $\neg p$ 为真命题，求实数 t 的取值范围.

微信公众号 教辅资料站

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

阶段评估 1

（时间：60 分钟 满分：100 分）

一、选择题（每小题 5 分，共 30 分）

1. “$x>3$ 且 $y>3$”是“$x+y>6$”成立的 （ ）

A. 充分不必要条件

B. 必要不充分条件

C. 充要条件

D. 既不充分也不必要条件

2. 已知命题 p：函数 $y=e^{|x-1|}$ 的图象关于直线 $x=1$ 对称，q：函数 $y=\cos\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$ 的图象关于点 $\left(\frac{\pi}{6},0\right)$ 对称，则下列命题中的真命题为 （ ）

A. $p\wedge q$　　B. $p\wedge(\neg q)$

C. $(\neg p)\wedge q$　　D. $(\neg p)\vee(\neg q)$

3. “$\forall x\in\mathbf{R}, x^2-bx+1>0$ 成立”是“$b\in[0,1]$”的 （ ）

A. 充分不必要条件

B. 必要不充分条件

C. 充要条件

D. 既不充分也不必要条件

4. 下列语句中，判断正确的个数是 （ ）

①全称命题“$\forall n\in\mathbf{Z}, 2n+1$ 是奇数”是真命题

②特称命题“$\exists x_0\in\mathbf{R}, x_0^2$ 是无理数”是真命题

③命题“$\forall n\in\mathbf{Z}, 2n+1$ 是奇数”的否定是“$\exists n_0\in\mathbf{Z}, 2n_0+1$ 不是奇数”

④命题“$\exists x_0\in\mathbf{R}, x_0^2$ 是无理数”的否定是“$\forall x\in\mathbf{R}, x^2$ 是有理数”

A. 1　　B. 2

C. 3　　D. 4

5. 已知 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 是平面向量，下列命题中真命题的个数是 （ ）

①$(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})$　　②$|\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|$

③$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|^2=(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})^2$　　④$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}\Rightarrow\boldsymbol{a}=\boldsymbol{c}$

A. 1　　B. 2

C. 3　　D. 4

6. 下列说法不正确的个数有 （ ）

①甲、乙两学生参与某考试，设命题 p：甲考试及格，q：乙考试及格，则命题“至少有一位学生不及格”可表示为 $(\neg p)\wedge(\neg q)$；

②命题“对 $\forall x\in\mathbf{R}$，都有 $x^2\geqslant 0$”的否定为“$\exists x_0\in\mathbf{R}$，使得 $x_0^2<0$”；

③“若 $\tan\alpha\neq\sqrt{3}$，则 $\alpha\neq\frac{\pi}{3}$”是假命题；

④“$a>b$”是“$ac^2>bc^2$”的必要不充分条件；

⑤函数 $y=\sin\left(\frac{3}{2}\pi+x\right)$ 是偶函数.

A. 0 个　　B. 1 个

C. 2 个　　D. 3 个

二、填空题（每小题 5 分，共 20 分）

7. 由命题“存在 $x_0\in\mathbf{R}$，使 $x_0^2+2x_0+m\leqslant 0$”是假命题，求得 m 的取值范围是 $(a,+\infty)$，则实数 a 的值是_____.

8. 若“$x^2-2x-3>0$”是“$x<a$”的必要不充分条件，则实数 a 的最大值为_____.

9. 已知在 xOy 平面内有一区域 M，p：点 $(a,b)\in\{(x,y)\mid|x|+|y|<1\}$，$q$：点 $(a,b)\in M$，如果 p 是 q 的必要条件，那么区域 M 的面积有最大值_____.

10. 已知集合 $A=\left\{x\left|\frac{1}{2}<2^x<8\right.\right\}$，$B=\{x\mid-1<x<m+1\}$. 若 $x\in B$ 成立的一个充分不必要条件是 $x\in A$，则实数 m 的取值范围是_____.

三、解答题（共 50 分）

11. （12 分）下列各题中，p 是 q 的什么条件？

（1）在 $\triangle ABC$ 中，p：$\angle A=\angle B$，q：$\sin A=\sin B$；

（2）p：$\frac{f(-x)}{f(x)}=1$，q：$y=f(x)$ 是偶函数；

（3）p：$|x|=x$，q：$x^2+x\geqslant 0$.

微信公众号 教辅资料站

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

12.(12 分)求证:方程 $mx^2-2x+3=0$ 有两个同号且不相等的实根的充要条件是 $0<m<\frac{1}{3}$.

13.(13 分)设函数 $f(x)=\sqrt{x^2-x-2}$ 的定义域为集合 A,函数 $g(x)=\ln\left(\frac{3}{x}-1\right)$ 的定义域为集合 B.已知 $p:x\in A\cap B$;$q:x$ 满足 $2x+m<0$,且若 p 则 q 为真命题,求实数 m 的取值范围.

14.(13 分)已知全集 $U=\mathbf{R}$,非空集合 $A=\left\{x\left|\frac{x-2}{x-3}<0\right.\right\}$,$B=\{x|(x-a)(x-a^2-2)<0\}$.

(1)当 $a=\frac{1}{2}$ 时,求 $(\complement_U B)\cap A$;

(2)命题 $p:x\in A$,命题 $q:x\in B$,若 q 是 p 的必要条件,求实数 a 的取值范围.

微信公众号
教辅资料站

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

第二章 圆锥曲线与方程

2.1 曲线与方程

第7课时 2.1.1 曲线与方程

基础知识梳理

在直角坐标系中，如果某曲线 C（看作点的集合或适合某种条件的点的轨迹）上的点与一个二元方程 $f(x,y)=0$ 的实数解建立了如下的关系：

①曲线上点的坐标都是这个_____；

②以这个方程的解为坐标的点都是_____.

那么，这个方程叫做曲线的方程，这条曲线叫做方程的曲线.

题点知识巩固

知识点一 曲线与方程的概念

1. 如果曲线 E 上的点的坐标满足 $F(x,y)=0$，则下列说法正确的是 （ ）

A. 曲线 E 的方程是 $F(x,y)=0$

B. 方程 $F(x,y)=0$ 的曲线是 E

C. 坐标不满足方程 $F(x,y)=0$ 的点不在曲线 E 上

D. 坐标满足方程 $F(x,y)=0$ 的点在曲线 E 上

2. 下列命题正确的是 （ ）

A. 方程 $\frac{x}{y-2}=1$ 表示斜率为 1，在 y 轴上的截距为 2 的直线

B. $\triangle ABC$ 三个顶点的坐标分别是 $A(0,3)$，$B(-2,0)$，$C(2,0)$，则 BC 中线的方程是 $x=0$

C. 到 x 轴的距离为 5 的点的轨迹方程为 $y=5$

D. 曲线 $2x^2-3y^2-2x+m=0$ 过原点的充要条件是 $m=0$

知识点二 曲线与方程的判定

3. （2019·威远中学月考）方程 $x^2+xy=x$ 表示的曲线是 （ ）

A. 两条直线　　B. 一条直线

C. 一个点　　D. 一个点和一条直线

4. 下列各组方程中表示相同曲线的是 （ ）

A. $x^2+y=0$ 与 $xy=0$

B. $\sqrt{x+y}=0$ 与 $x^2-y^2=0$

C. $y=\lg x^2$ 与 $y=2\lg x$

D. $x-y=0$ 与 $y=\lg 10^x$

知识点三 点与曲线的位置关系

5. 已知方程 $x^2+(y-1)^2=10$.

(1)判断点 $P(1,-2)$，$Q(\sqrt{2},3)$ 是否在此方程表示的曲线上；

(2)若点 $M\left(\frac{m}{2},-m\right)$ 在此方程表示的曲线上，求 m 的值.

6. 已知直线 $y=kx+1$ 与曲线 $x^2+y^2+kx-y-4=0$ 的两个交点关于直线 $y=x$ 对称，求这两个交点的坐标.

微信公众号 教辅资料站

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

提能达标过关

一、选择题

1. 已知圆 $C:(x-2)^2+(y+1)^2=4$ 及直线 $l:x+2y-2=0$，则点 $M(4,-1)$　　（　　）

A. 在圆 C 上，不在直线 l 上

B. 不在圆 C 上，在直线 l 上

C. 既在圆 C 上，也在直线 l 上

D. 既不在直线 C 上，也不在直线 l 上

2. “点 M 在曲线 $x^2+y^2=1$ 上”是“点 M 满足方程 $y=-\sqrt{1-x^2}$”的　　（　　）

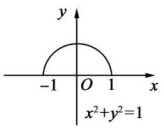
A. 充分不必要条件

B. 必要不充分条件

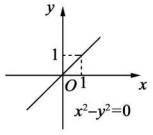
C. 充要条件

D. 既不充分也不必要条件

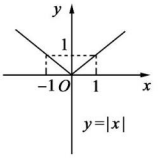
3. 下列选项中方程与曲线能够对应的是　　（　　）



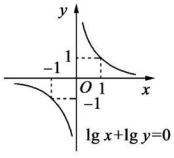
A



B



C



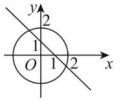
D

4. 方程 $xy^2+x^2y=1$ 所表示的曲线　　（　　）

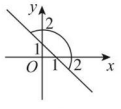
A. 关于 x 轴对称　　B. 关于 y 轴对称

C. 关于原点对称　　D. 关于直线 $y=x$ 对称

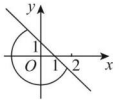
5. 方程 $(x+y-1)\sqrt{x^2+y^2-4}=0$ 所表示的曲线的轨迹是　　（　　）



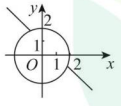
A



B



C



D

二、填空题

6. 若曲线方程 $ax^2+by^2=4$ 过点 $A(0,-2)$，$B\left(\frac{1}{2},\sqrt{3}\right)$，则 $a=$_____，$b=$_____.

7. 若曲线 $y^2-xy+2x+k=0$ 过点 $(a,-a)(a\in\mathbf{R})$，则实数 k 的取值范围是_____.

8. 如果直线 $l:x+y-b=0$ 与曲线 $C:y=\sqrt{1-x^2}$ 有公共点，那么 b 的取值范围是_____.

三、解答题

9. 说明下列方程表示的曲线.

(1) $(x+y-1)\sqrt{x-1}=0$；

(2) $2x^2+y^2-4x+2y+3=0$.

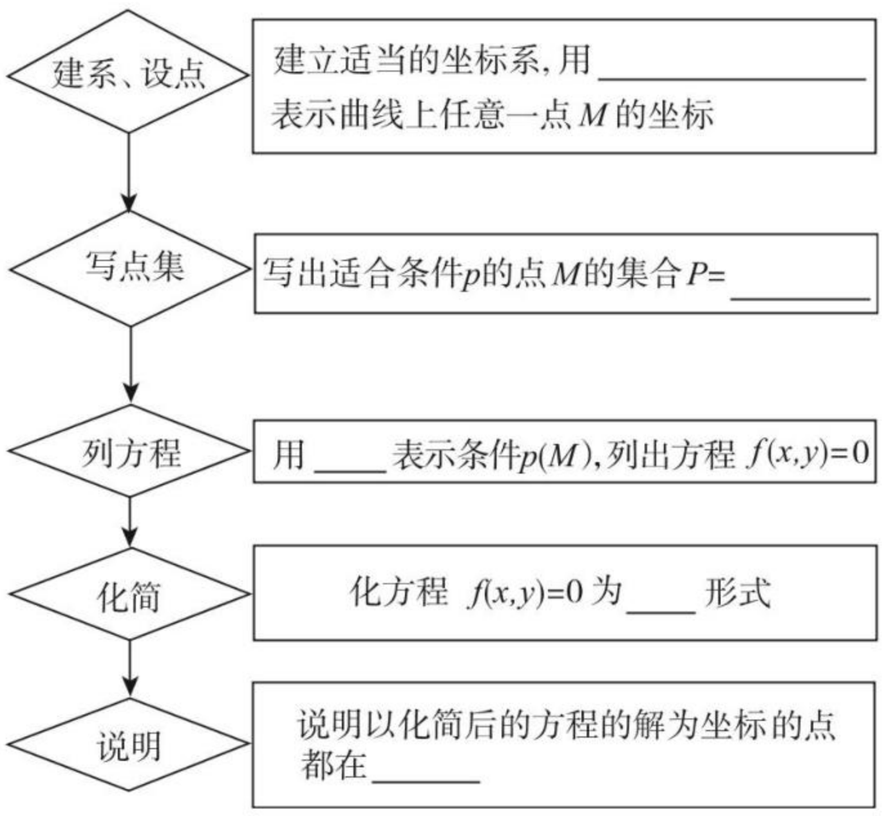
10. 已知直线 $y=(a+1)x-1$ 与曲线 $y^2=ax$ 恰有一个公共点，求实数 a 的值.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

第 8 课时 2.1.2 求曲线的方程

基础知识梳理

求曲线方程的一般步骤



题点知识巩固

知识点一 直接法求曲线方程

1. 圆 $x^2+y^2-2x-1=0$ 关于直线 $2x-y+3=0$ 对称的圆的方程为 ( )

A. $(x+3)^2+(y-2)^2=\frac{1}{2}$

B. $(x-3)^2+(y+2)^2=\frac{1}{2}$

C. $(x+3)^2+(y-2)^2=2$

D. $(x+3)^2+(y+2)^2=2$

2. (**2019·长春市第一三六中学月考**)在平面直角坐标系中，已知动点 $P(x,y)$，$PM\perp y$ 轴，垂足为 M，点 N 与点 P 关于 x 轴对称，且 $\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{MN}=4$，求动点 P 的轨迹方程.

知识点二 代入法求轨迹方程

3. 点 $P(4,-2)$ 与圆 $x^2+y^2=4$ 上任一点连线的中点的轨迹方程是 ( )

A. $(x-2)^2+(y+1)^2=1$

B. $(x-2)^2+(y+1)^2=4$

C. $(x+4)+(y-2)^2=4$

D. $(x+2)^2+(y-1)^2=1$

4. 已知直线 $l:\frac{x}{4}+\frac{y}{3}=1$，$M$ 是直线 l 的一个动点，过点 M 作 x 轴和 y 轴的垂线，垂足分别为 A,B，点 P 是线段 AB 的靠近点 A 的一个三等分点，点 P 的轨迹方程为_____.

5. 从曲线 $x^2-y^2=1$ 上一点 Q 引直线 $x+y=2$ 的垂线，垂足为 N，求线段 QN 的中点 P 的轨迹方程.

知识点三 定义法求轨迹方程

6. 已知圆 $C:x^2+(y-3)^2=9$，过原点 O 作圆 C 的弦 OP，求 OP 中点 Q 的轨迹方程.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

提能达标过关

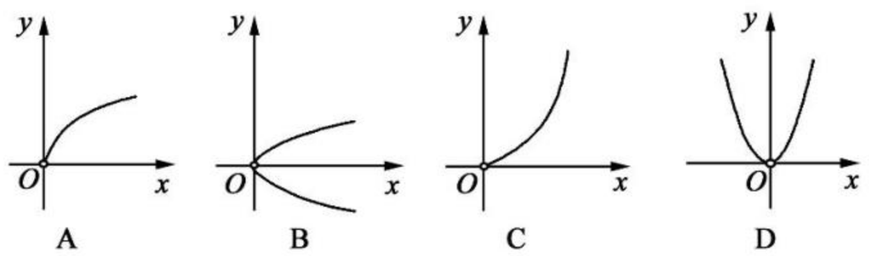
一、选择题

1. 已知两定点 $A(-2,0)$，$B(0,1)$，如果动点 P 满足 $|PA|=|AB|$，则点 P 的轨迹围成的图形的面积为　　(　　)

A. 5π　　B. 9π

C. 10π　　D. 25π

2. 已知 $\log_2 x$，$\log_2 y$，2 成等差数列，则在平面直角坐标系中，点 $M(x,y)$ 的轨迹为　　(　　)



3. 已知 $\lg(x-2)$，$\lg|2y|$，$\lg(16x)$ 成等差数列，则动点 $P(x,y)$ 的轨迹方程为　　(　　)

A. $y^2=4x^2-8x(x>2)$

B. $y^2=4x^2+8x(x>2)$

C. $y=\sqrt{4x^2-8x}(x>2)$

D. $y=-\sqrt{x^2+8x}(x>2)$

4. 在平面直角坐标系中，已知 $A(3,1)$，$B(-1,3)$，若点 C 满足 $\overrightarrow{OC}=\alpha\overrightarrow{OA}+\beta\overrightarrow{OB}$，其中 $\alpha,\beta\in\mathbf{R}$，且 $\alpha+\beta=1$，O 为坐标原点，则点 C 的轨迹为　　(　　)

A. 射线　　B. 直线

C. 圆　　D. 线段

5. 动点 $P(x,y)$ 到定点 $A(3,4)$ 的距离比 P 到 x 轴的距离多一个单位长度，则动点 P 的轨迹方程为　　(　　)

A. $x^2-6x-10y+24=0$

B. $x^2-6x-6y+24=0$

C. $x^2-6x-10y+24=0$ 或 $x^2-6x-6y=0$

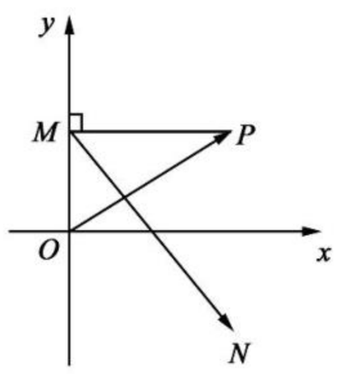
D. $x^2-8x-8y+24=0$

二、填空题

6. 到 $A(2,-3)$ 和 $B(4,-1)$ 的距离相等的点的轨迹方程是_____.

7. 已知 $\boldsymbol{a}=(x,0)$，$\boldsymbol{b}=(1,y)$，且 $(\boldsymbol{a}+\sqrt{3}\boldsymbol{b})\perp(\boldsymbol{a}-\sqrt{3}\boldsymbol{b})$，则 $P(x,y)$ 的轨迹方程是_____.

8. 如图，在平面直角坐标系中，已知动点 $P(x,y)$，$PM\perp y$ 轴，垂足为 M，点 N 与点 P 关于 x 轴对称，且 $\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{MN}=4$，则动点 P 的轨迹方程为_____.



三、解答题

9. 已知圆 C 的方程为 $x^2+y^2=1$，过圆外一点 $P(2,6)$ 作圆 C 的两条切线，切点分别为 A，B，试求直线 AB 的方程.

10. 已知点 $Q(2,0)$ 和圆 O：$x^2+y^2=1$，动点 M 到圆 O 的切线长等于圆 O 的半径与 $|MQ|$ 的和，求动点 M 的轨迹方程.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

2.2 椭 圆

第 9 课时 2.2.1 椭圆及其标准方程

基础知识梳理

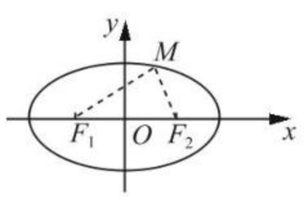
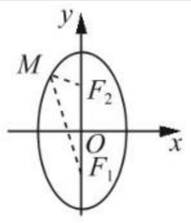
1. 椭圆的定义

(1)平面内与两个定点 F_1,F_2 的距离的和等于常数 $2a$(_____)的点的轨迹叫做椭圆,这两个定点叫做椭圆的_____,两焦点间的距离叫做椭圆的_____.

应用定义解题时,不要漏掉 $|MF_1|+|MF_2|=2a>|F_1F_2|$ 这一个条件.

(2)集合的语言描述为 $P=\{M\mid |MF_1|+|MF_2|=2a,2a>|F_1F_2|\}$.

2. 椭圆的标准方程

	焦点在 x 轴上	焦点在 y 轴上
标准方程	_____	_____
图形		
焦距	$\|F_1F_2\|=$_____	
焦点坐标	_____	_____
a,b,c 的关系	_____	

题点知识巩固

知识点一 椭圆的定义

1. 化简方程 $\sqrt{x^2+(y+3)^2}+\sqrt{x^2+(y-3)^2}=10$ 为不含根式的形式是 (　　)

A. $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$　　B. $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$

C. $\frac{y^2}{25}+\frac{x^2}{16}=1$　　D. $\frac{y^2}{25}+\frac{x^2}{9}=1$

2. 设 P 是椭圆 $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$ 上的点.若 F_1,F_2 是椭圆的两个焦点,则 $|PF_1|+|PF_2|$ 等于 (　　)

A. 4　　B. 5

C. 8　　D. 10

知识点二 椭圆的标准方程

3. 已知椭圆的焦点分别为 $F_1(-2,0)$,$F_2(2,0)$,椭圆上一点到两焦点的距离之和等于 6,则椭圆的方程为 (　　)

A. $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$　　B. $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{5}=1$

C. $\frac{x^2}{5}+\frac{y^2}{9}=1$　　D. $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$

4. 经过点(2,-3),且与椭圆 $9x^2+4y^2=36$ 有共同的焦点,则该椭圆的方程为_____.

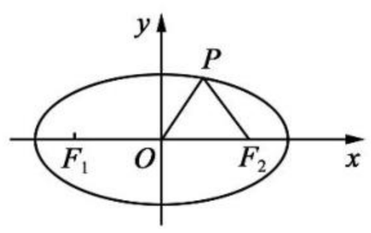
知识点三 与椭圆有关的轨迹问题

5. 已知两定点 $F_1(-1,0)$,$F_2(1,0)$ 且 $|F_1F_2|$ 是 $|PF_1|$ 与 $|PF_2|$ 的等差中项,则动点 P 的轨迹方程是 (　　)

A. $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$　　B. $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{12}=1$

C. $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$　　D. $\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{4}=1$

6. 如图所示,F_1,F_2 分别为椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 的左、右焦点,点 P 在椭圆上,若 $\triangle POF_2$ 为面积是 $\sqrt{3}$ 的正三角形,试求椭圆的方程.



关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

提能达标过关

一、选择题

1. 设 P 是椭圆 $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$ 上的一点，F_1，F_2 是椭圆的两个焦点，则 $|PF_1|+|PF_2|=$ （　　）

A. 10　　B. 8

C. 5　　D. 4

2. 已知 $k<4$，则曲线 $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$ 和 $\frac{x^2}{9-k}+\frac{y^2}{4-k}=1$ 有相同的 （　　）

A. 短轴　　B. 焦点

C. 离心率　　D. 长轴

3. 已知椭圆 $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$ 上的点 M 到该椭圆一个焦点 F 的距离为 2，N 是 MF 的中点，O 为坐标原点，那么线段 ON 的长是 （　　）

A. 2　　B. 4

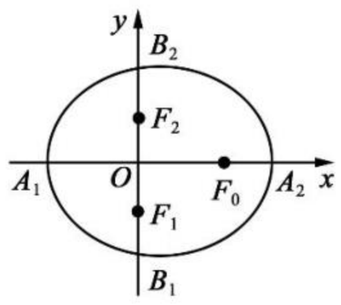
C. 8　　D. $\frac{3}{2}$

4. 椭圆 $\frac{x^2}{4}+y^2=1$ 的左、右焦点分别为 F_1，F_2，过 F_1 作垂直于 x 轴的直线与椭圆相交，一个交点为 P，则 $|PF_2|$ 等于 （　　）

A. $\frac{\sqrt{3}}{2}$　　B. $\sqrt{3}$

C. $\frac{7}{2}$　　D. 4

5. 我们把由半椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(x\geqslant 0)$ 与半椭圆 $\frac{y^2}{b^2}+\frac{x^2}{c^2}=1(x<0)$ 合成的曲线称作“果圆”（其中 $a^2=b^2+c^2$，$a>b>c>0$）. 如图所示，设点 F_0，F_1，F_2 是相应椭圆的焦点，A_1，A_2 和 B_1，B_2 是“果圆”与 x，y 轴的交点，若 $\triangle F_0F_1F_2$ 是边长为 1 的等边三角形，则 a，b 的值分别为 （　　）



A. $\frac{\sqrt{7}}{2}$，1　　B. $\sqrt{3}$，1

C. 5，3　　D. 5，4

二、填空题

6. 已知椭圆 $\frac{x^2}{10-m}+\frac{y^2}{m-2}=1$，焦点在 y 轴上，若焦距为 4，则 m 的值为_____.

7. 已知 $\triangle ABC$ 的两个顶点为 $B(-4,0)$，$C(4,0)$，若顶点 A 在椭圆 $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$ 上，则 $\frac{\sin B+\sin C}{\sin A}=$_____.

8. 已知椭圆 $C_1:\frac{x^2}{a_1^2}+\frac{y^2}{b_1^2}=1(a_1>b_1>0)$ 和椭圆 $C_2:\frac{x^2}{a_2^2}+\frac{y^2}{b_2^2}=1(a_2>b_2>0)$ 的焦点相同且 $a_1>a_2$. 给出如下四个结论：

①椭圆 C_1 和椭圆 C_2 一定没有公共点；②$a_1^2-a_2^2=b_1^2-b_2^2$；③$\frac{a_1}{a_2}>\frac{b_1}{b_2}$；④$a_1-a_2<b_1-b_2$.

其中，所有正确的结论是_____（填序号）.

三、解答题

9. 已知点 P 在以坐标轴为对称轴的椭圆上，且 P 到两焦点的距离分别为 5 和 3，过 P 且与长轴垂直的直线恰好过椭圆的一个焦点，求椭圆的方程.

10. 已知椭圆 C 与椭圆 $x^2+37y^2=37$ 的焦点 F_1，F_2 相同，且椭圆 C 过点 $\left(\frac{5\sqrt{7}}{2},-6\right)$.

(1)求椭圆 C 的标准方程；

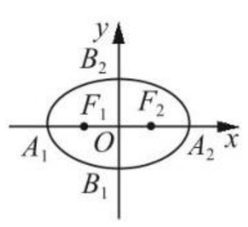
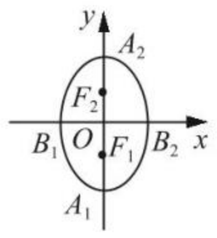
(2)若点 P 在椭圆 C 上，且 $\angle F_1PF_2=\frac{\pi}{3}$，求 $\triangle F_1PF_2$ 的面积.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

第 10 课时 2.2.2 椭圆的简单几何性质(一)

基础知识梳理

椭圆的简单几何性质

焦点的位置	焦点在 x 轴上	焦点在 y 轴上
图形		
标准方程	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ $(a>b>0)$	_____
范围	$-a\leqslant x\leqslant a$, $-b\leqslant y\leqslant b$	_____
顶点	$A(\pm a,0)$, $B(0,\pm b)$	_____
轴长	短轴长=_____,长轴长=_____	
焦点	$(\pm c,0)$	_____
焦距	$\lvert F_1F_2\rvert=$_____	
对称性	对称轴_____,对称中心_____	
离心率	$e=$_____	

题点知识巩固

知识点一 椭圆的简单几何性质

1. 过椭圆 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$ 的焦点的最长弦和最短弦的长分别为 ( )

A. 8,6　　B. 4,3

C. 2,$\sqrt{3}$　　D. 4,$2\sqrt{3}$

2. 已知椭圆 $x^2+my^2=1$ 的焦点在 x 轴上,且长轴长是短轴长的 2 倍,则 $m=$ ( )

A. $\frac{1}{4}$　　B. $\frac{1}{2}$

C. 2　　D. 4

知识点二 由椭圆的几何性质求标准方程

3. 已知椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的左、右焦点为 F_1、F_2,离心率为 $\frac{\sqrt{3}}{3}$,过 F_2 的直线 l 交 C 于 A,B 两点. 若 $\triangle AF_1B$ 的周长为 $4\sqrt{3}$,则 C 的方程为 ( )

A. $\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{2}=1$

B. $\frac{x^2}{3}+y^2=1$

C. $\frac{x^2}{12}+\frac{y^2}{8}=1$

D. $\frac{x^2}{12}+\frac{y^2}{4}=1$

4. 已知椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 与椭圆 $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$ 有相同的长轴,椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 的短轴长与椭圆 $\frac{y^2}{21}+\frac{x^2}{9}=1$ 的短轴长相等,则 ( )

A. $a^2=25,b^2=16$

B. $a^2=9,b^2=25$

C. $a^2=25,b^2=9$ 或 $a^2=9,b^2=25$

D. $a^2=25,b^2=9$

知识点三 与离心率有关的问题

5. (**2018·全国卷Ⅰ**)已知椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{4}=1$ 的一个焦点为 $(2,0)$,则 C 的离心率为 ( )

A. $\frac{1}{3}$　　B. $\frac{1}{2}$

C. $\frac{\sqrt{2}}{2}$　　D. $\frac{2\sqrt{2}}{3}$

6. 已知椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的左、右顶点分别为 A_1,A_2,且以线段 A_1A_2 为直径的圆与直线 $bx-ay+2ab=0$ 相切,则 C 的离心率为 ( )

A. $\frac{\sqrt{6}}{3}$　　B. $\frac{\sqrt{3}}{3}$

C. $\frac{\sqrt{2}}{3}$　　D. $\frac{1}{3}$

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

提能达标过关

一、选择题

1. 焦点在 x 轴上，长、短半轴长之和为 10，焦距为 $4\sqrt{5}$，则椭圆的方程为（　　）

A. $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{16}=1$　　B. $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{36}=1$

C. $\frac{x^2}{6}+\frac{y^2}{4}=1$　　D. $\frac{y^2}{6}+\frac{x^2}{4}=1$

2. 若椭圆 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}=1$ 上有一点 P，F_1，F_2 是椭圆的左、右焦点，$\triangle F_1PF_2$ 是直角三角形，则这样的点 P 共有（　　）

A. 3 个　　B. 4 个

C. 6 个　　D. 8 个

3. 已知椭圆的方程为 $2x^2+3y^2=m(m>0)$，则此椭圆的离心率为（　　）

A. $\frac{1}{3}$　　B. $\frac{\sqrt{3}}{3}$

C. $\frac{\sqrt{2}}{2}$　　D. $\frac{1}{2}$

4. 设椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的左、右焦点分别为 F_1，F_2. 点 $P(a,b)$ 满足 $|PF_2|=|F_1F_2|$，则椭圆的离心率为（　　）

A. $\frac{\sqrt{2}}{2}$　　B. $\frac{1}{2}$

C. $\frac{\sqrt{3}}{2}$　　D. $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$

5. 已知椭圆的长轴长是 8，离心率是 $\frac{3}{4}$，则此椭圆的标准方程是（　　）

A. $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{7}=1$

B. $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{7}=1$ 或 $\frac{x^2}{7}+\frac{y^2}{16}=1$

C. $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{25}=1$

D. $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{25}=1$ 或 $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$

二、填空题

6. 已知椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的左焦点为 F，右顶点为 A，上顶点为 B，若 $BF\perp BA$，则称其为“优美椭圆”，那么“优美椭圆”的离心率为_____.

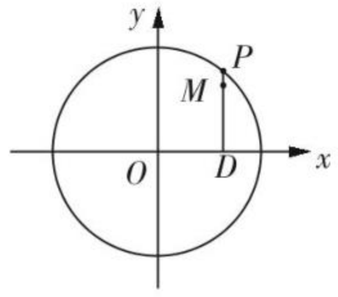
7. 已知动点 $P(x,y)$ 在椭圆 $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$ 上，若点 A 的坐标为 $(3,0)$，$|\overrightarrow{AM}|=1$，且 $\overrightarrow{PM}\cdot\overrightarrow{AM}=0$，则 $|\overrightarrow{PM}|$ 的最小值是_____.

8. 已知 F_1，F_2 是椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的两个焦点，P 为椭圆 C 上的一点，且 $\overrightarrow{PF_1}\perp\overrightarrow{PF_2}$，若 $\triangle PF_1F_2$ 的面积为 9，则其短轴长为_____.

三、解答题

9. 已知椭圆 $x^2+(m+3)y^2=m(m>0)$ 的离心率 $e=\frac{\sqrt{3}}{2}$，求 m 的值及椭圆长轴长、短轴长、焦点坐标及顶点坐标.

10. （**2019·武邑中学月考**）如图，设 P 是圆 $x^2+y^2=25$ 上的动点，点 D 是 P 在 x 轴上的射影，M 为 PD 上一点，且 $|MD|=\frac{4}{5}|PD|$.



(1) 当点 P 在圆上运动时，求点 M 的轨迹 C 的方程；

(2) 求过点 $(3,0)$ 且斜率为 $\frac{4}{5}$ 的直线被曲线 C 所截得线段的长度.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

第 11 课时 2.2.2 椭圆的简单几何性质(二)

基础知识梳理

1. 点 $P(x_0,y_0)$ 与椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的位置关系

点 P 在椭圆上 $\Leftrightarrow \frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}$ ____ 1;

点 P 在椭圆内部 $\Leftrightarrow \frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}$ ____ 1;

点 P 在椭圆外部 $\Leftrightarrow \frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}$ ____ 1.

2. 直线和椭圆的位置关系

直线与椭圆方程联立方程组,消掉 y,得到 $Ax^2+Bx+C=0$ 的形式(这里的系数 A 一定不为 0),设其判别式为 Δ,

(1)$\Delta>0\Leftrightarrow$直线与椭圆_____;

(2)$\Delta=0\Leftrightarrow$直线与椭圆_____;

(3)$\Delta<0\Leftrightarrow$直线与椭圆_____.

3. 弦长公式

(1)若直线 $y=kx+b$ 与椭圆相交于两点 $A(x_1,y_1)$,$B(x_2,y_2)$,则 $|AB|=$_____=_____.

(2)焦点弦(过焦点的弦):最短的焦点弦为通径长_____,最长为_____.

题点知识巩固

知识点一 直线与椭圆的位置关系

1. 已知中心在坐标原点的椭圆 C 的右焦点为 $F(\sqrt{15},0)$,直线 $y=x$ 与椭圆的一个交点的横坐标为 2,则椭圆的方程为 ( )

A. $\frac{x^2}{16}+y^2=1$ B. $x^2+\frac{y^2}{16}=1$

C. $\frac{x^2}{20}+\frac{y^2}{5}=1$ D. $\frac{x^2}{5}+\frac{y^2}{20}=1$

2. 直线 $l:x-2y+2=0$ 过椭圆的左焦点 F_1 和一个顶点 B,则该椭圆的离心率为 ( )

A. $\frac{1}{5}$ B. $\frac{2}{5}$

C. $\frac{\sqrt{5}}{5}$ D. $\frac{2\sqrt{5}}{5}$

知识点二 弦长问题

3. 经过椭圆 $\frac{x^2}{12}+\frac{y^2}{8}=1$ 的左焦点,倾斜角为 $\frac{3}{4}\pi$ 的直线被椭圆截得的线段长是 ( )

A. $\frac{8\sqrt{6}}{5}$ B. $\frac{16\sqrt{3}}{5}$

C. $\frac{32}{5}$ D. $\frac{48}{5}$

4. 已知 $F_1(-1,0)$,$F_2(1,0)$ 是椭圆 C 的两个焦点,过 F_2 且垂直于 x 轴的直线交 C 于 A,B 两点,且 $|AB|=3$,则 C 的方程为_____.

知识点三 中点弦问题

5. 已知椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的一条弦所在的直线方程是 $x-y+5=0$,弦的中点是 $M(-4,1)$,则椭圆的离心率是 ( )

A. $\frac{1}{2}$ B. $\frac{\sqrt{2}}{2}$

C. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ D. $\frac{\sqrt{5}}{5}$

6. 设椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,(a>b>0)$ 过点 $(0,4)$,离心率 $e=\frac{3}{5}$.

(1)求 C 的方程;

(2)求过点 $(3,0)$ 且斜率为 $\frac{4}{5}$ 的直线被 C 所截线段的中点坐标.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

提能达标过关

一、选择题

1. 设 F_1、F_2 分别是椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的左、右焦点，若椭圆 C 的离心率为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$，过 F_1 的直线交椭圆于 M,N 两点，且 $\triangle F_2MN$ 的周长为 8，则椭圆 C 的方程为（　　）

A. $\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{4}=1$　　B. $x^2+\frac{y^2}{3}=1$

C. $\frac{x^2}{4}+y^2=1$　　D. $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$

2. 已知 $|AB|=4$，点 P 在 A、B 所在的平面内运动且保持 $|PA|+|PB|=6$，则 $|PA|$ 的最大值和最小值分别是（　　）

A. $\sqrt{5}$；3　　B. 10；2　　C. 5；1　　D. 6；4

3. 椭圆 $\frac{x^2}{12}+\frac{y^2}{3}=1$ 的一个焦点为 F_1，点 P 在椭圆上，如果线段 PF_1 的中点 M 在 y 轴上，那么点 M 的纵坐标为（　　）

A. $\pm\frac{3}{4}$　　B. $\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$

C. $\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$　　D. $\pm\frac{\sqrt{3}}{4}$

4. 过椭圆 $\frac{x^2}{2}+y^2=1$ 的一个焦点作倾斜角为 45°的直线 l，交椭圆于 A,B 两点，设 O 为坐标原点，则 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=$（　　）

A. $-\frac{1}{3}$　　B. -3

C. $-\frac{1}{3}$ 或 -3　　D. $\pm\frac{1}{3}$

5. 已知椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 和圆 $O:x^2+y^2=b^2$，过椭圆 C 上一点 P 引圆 O 的两条切线，切点分别为 A,B. 若椭圆上存在点 P，使得 $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=0$，则椭圆 C 的离心率 e 的取值范围是（　　）

A. $\left[\frac{1}{2},1\right)$　　B. $\left(0,\frac{\sqrt{2}}{2}\right]$

C. $\left[\frac{\sqrt{2}}{2},1\right)$　　D. $\left[\frac{1}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right]$

二、填空题

6. 若椭圆的两焦点为 $F_1(-4,0)$，$F_2(4,0)$，点 P 在椭圆上，且 $\triangle PF_1F_2$ 的最大面积为 12，则椭圆的短轴长为_____.

7. 已知 F_1，F_2 为椭圆的两个焦点，以 F_1 为圆心，且经过椭圆中心的圆与椭圆有一个公共点为 P，若 PF_2 恰好与圆 F_1 相切，则该椭圆的离心率为_____.

8. 已知倾斜角为 $\frac{\pi}{4}$ 的直线 l 过椭圆 $\frac{x^2}{4}+y^2=1$ 的焦点，且与椭圆相交于 A,B 两点，则线段 AB 的长为_____.

三、解答题

9. 已知椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的一个顶点为 $A(2,0)$，离心率为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$. 直线 $y=k(x-1)$ 与椭圆 C 交于不同的两点 M,N.

(1)求椭圆 C 的方程；

(2)当 $\triangle AMN$ 的面积为 $\frac{\sqrt{10}}{3}$ 时，求 k 的值.

10. 已知椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的右焦点为(1,0)，离心率为 $\frac{1}{2}$.

(1)求椭圆 C 的标准方程；

(2)过点 $P(0,3)$ 的直线 m 与 C 交于 A,B 两点，若 A 是 PB 的中点，求直线 m 的方程.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

阶段评估 2

（时间：60 分钟 满分：100 分）

一、选择题（每小题 5 分，共 30 分）

1. 已知点(m,n)在椭圆$\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{8}=1$上，则$2m+4$的取值范围是 （ ）

A. $[4-2\sqrt{3},4+2\sqrt{3}]$

B. $[4-\sqrt{3},4+\sqrt{3}]$

C. $[4-2\sqrt{2},4+2\sqrt{2}]$

D. $[4-\sqrt{2},4+\sqrt{2}]$

2. 若直线$mx+ny=4$和圆$O:x^2+y^2=4$没有交点，则过点$P(m,n)$的直线与椭圆$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$的交点个数为 （ ）

A. 2　　B. 1

C. 0　　D. 0 或 1

3. 设椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的左、右焦点分别为$F_1,F_2$，$A$是椭圆上一点，$AF_2\perp AF_1$，原点$O$到直线$AF_1$的距离为$\frac{1}{2}|OF_1|$，则椭圆的离心率为 （ ）

A. $\frac{1}{3}$　　B. $\sqrt{2}-1$

C. $\frac{\sqrt{2}}{2}$　　D. $\sqrt{3}-1$

4. 已知椭圆的焦点分别为$F_1(0,-\sqrt{3}),F_2(0,\sqrt{3})$，离心率$e=\frac{\sqrt{3}}{2}$，若点$P$在椭圆上，且$\overrightarrow{PF_1}\cdot\overrightarrow{PF_2}=\frac{2}{3}$，则$\angle F_1PF_2$的大小为 （ ）

A. $\frac{\pi}{12}$　　B. $\frac{\pi}{6}$

C. $\frac{\pi}{4}$　　D. $\frac{\pi}{3}$

5. 已知椭圆$C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的离心率为$\frac{\sqrt{3}}{2}$，四个顶点构成的四边形的面积为 4，过原点的直线$l$（斜率不为零）与椭圆$C$交于$A,B$两点，$F_1,F_2$为椭圆的左、右焦点，则四边形$AF_1BF_2$的周长为 （ ）

A. 4　　B. $4\sqrt{3}$

C. 8　　D. $8\sqrt{3}$

6. 若点O和点F分别为椭圆$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$的中心和左焦点，点$P$为椭圆上的任意一点，则$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{FP}$的最大值为（ ）

A. 2　　B. 3

C. 6　　D. 8

二、填空题（每小题 5 分，共 20 分）

7. 设F_1,F_2分别为椭圆$C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的左、右焦点，经过$F_1$的直线交椭圆$C$于$A,B$两点，若$\triangle F_2AB$是面积为$4\sqrt{3}$的等边三角形，则椭圆$C$的方程为_____.

8. 已知点P在椭圆$\frac{x^2}{4}+y^2=1$上，则x^2+2x-y^2的最大值为_____.

9. 已知F_1,F_2分别为椭圆$\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{27}=1$的左、右焦点，$A$为椭圆上一点，且$\overrightarrow{OB}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OF_1})$，$\overrightarrow{OC}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OF_2})$，则$|\overrightarrow{OB}|+|\overrightarrow{OC}|=$_____.

10. 已知F_1,F_2是椭圆$x^2+2y^2=2$的左、右焦点，P是该椭圆上的一个动点，那么$|\overrightarrow{PF_1}+\overrightarrow{PF_2}|$的最小值是_____.

三、解答题（共 50 分）

11.（12 分）已知椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的左、右焦点为$F_1,F_2$，点$P$为椭圆上的任意一点，求$|PF_1|\cdot|PF_2|$的最大值和最小值.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

12.(12 分)椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的离心率是 $\frac{\sqrt{2}}{2}$，过点 $P(0,1)$ 的动直线 l 与椭圆 C 相交于 A,B 两点，当直线 l 与 x 轴平行时，直线 l 被椭圆 C 截得的线段长为 $2\sqrt{6}$.

(1)求椭圆 C 的方程；

(2)在 y 轴上是否存在异于点 P 的定点 Q，使得直线 l 变化时，总有 $\angle PQA=\angle PQB$？若存在，求出点 Q 的坐标；若不存在，请说明理由.

13.(13 分)已知点 $A(0,-2)$，椭圆 $E:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的离心率为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$，F 是椭圆的焦点，直线 AF 的斜率为 $\frac{2\sqrt{3}}{3}$，O 为坐标原点.

(1)求椭圆 E 的方程；

(2)设过点 A 的直线 l 与椭圆 E 交于 P,Q 两点，当 $\triangle OPQ$ 的面积最大时，求直线 l 的方程.

14.(13 分)(**2018 · 全国卷Ⅲ**)已知斜率为 k 的直线 l 与椭圆 $C:\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$ 交于 A,B 两点，线段 AB 的中点为 $M(1,m)(m>0)$.

(1)证明：$k<-\frac{1}{2}$；

(2)设 F 为 C 的右焦点，P 为 C 上一点，且 $\overrightarrow{FP}+\overrightarrow{FA}+\overrightarrow{FB}=\mathbf{0}$，证明：$2|\overrightarrow{FP}|=|\overrightarrow{FA}|+|\overrightarrow{FB}|$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

2.3 双曲线

第 12 课时 2.3.1 双曲线及其标准方程

基础知识梳理

1. 双曲线的定义

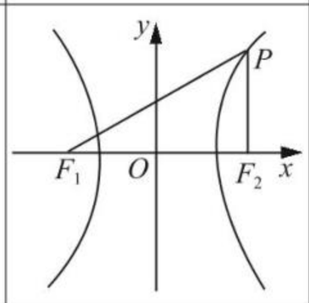
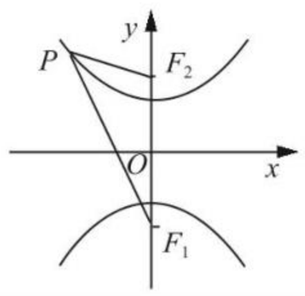
平面内与两个定点 F_1,F_2 的距离的差的绝对值等于常数(_____)$|F_1F_2|$ 且大于零的点的轨迹叫做双曲线.

这两个定点叫做双曲线的_____,两焦点间的距离叫做双曲线的_____.

2. 双曲线的集合描述

设点 M 是双曲线上任意一点,点 F_1,F_2 是双曲线的焦点,则由双曲线的定义可知,双曲线就是集合 $P=\{M|\,||MF_1|-|MF_2||=2a,0<2a<|F_1F_2|\}$.

3. 双曲线的标准方程

焦点位置	焦点在 x 轴上	焦点在 y 轴上
图形		
标准方程	$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ $(a>0,b>0)$	_____
焦点坐标	$F_1(-c,0)$; $F_2(c,0)$	F_1 _____; F_2 _____
a,b,c 的关系	_____	

题点知识巩固

知识点一 双曲线的定义及应用

1.(**2019·牡丹江市第一中学高二**)设 F_1,F_2 分别是双曲线 $x^2-\frac{y^2}{9}=1$ 的左、右焦点.若点 P 在双曲线上,且 $|PF_1|=5$,$|PF_2|=$ (　　)

A. 5　　B. 3

C. 7　　D. 3 或 7

2. 已知 F 为双曲线 $C:\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$ 的左焦点,P,Q 为 C 同一支上的点,若 $|PQ|=16$,点 $A(5,0)$ 在线段 PQ 上,则 $\triangle PQF$ 的周长为_____.

知识点二 双曲线的标准方程

3. 双曲线 $\frac{x^2}{12+m^2}-\frac{y^2}{4-m^2}=1$ 的焦距为_____.

4. 已知双曲线 $8kx^2-ky^2=8$ 的一个焦点为(0,3),则 $k=$_____.

知识点三 利用双曲线的定义求轨迹方程

5. 与圆 $A:(x+5)^2+y^2=49$ 和圆 $B:(x-5)^2+y^2=1$ 都外切的圆的圆心 C 的轨迹方程是_____.

6.(**2019·石嘴山市第三中学高二期末**)以下四个关于圆锥曲线的命题:

①设 A,B 是两个定点,k 为非零常数,若 $|PA|-|PB|=k$,则 P 的轨迹是双曲线;②过定圆 C 上一定点 A 作圆的弦 AB,O 为原点,若 $\overrightarrow{OP}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})$,则动点 P 的轨迹是椭圆;③方程 $2x^2-5x+2=0$ 的两根可以分别作为椭圆和双曲线的离心率;④双曲线 $\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{9}=1$ 与椭圆 $\frac{x^2}{35}+y^2=1$ 有相同的焦点.

其中正确命题的序号为_____.

提能达标过关

一、选择题

1. 椭圆 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{a^2}=1$ 与双曲线 $\frac{x^2}{a}-\frac{y^2}{2}=1$ 有相同的焦点,则 a 的值为 (　　)

A. $\frac{1}{2}$　　B. 1 或 -2

C. 1 或 $\frac{1}{2}$　　D. 1

2. 若 θ 为三角形的一个内角,且 $\sin\theta+\cos\theta=\frac{1}{3}$,则曲线 $x^2\sin\theta+y^2\cos\theta=1$ 是 (　　)

A. 焦点在 x 轴上的双曲线

B. 焦点在 y 轴上的双曲线

C. 焦点在 x 轴上的椭圆

D. 焦点在 y 轴上的椭圆

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

3.（**2019·晋中市高二期末调研**）已知 F_1,F_2 是双曲线 $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$ 的左，右焦点，P 是双曲线右支上一点，M 是 PF_1 的中点，若 $|OM|=1$，则 $|PF_1|$ 是（　　）

A. 10　　B. 8

C. 6　　D. 4

4. 已知 $\triangle ABP$ 的顶点 A,B 分别为双曲线 $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$ 的左、右焦点，顶点 P 在双曲线上，则 $\frac{|\sin A-\sin B|}{\sin P}$ 的值等于（　　）

A. $\sqrt{7}$　　B. $\frac{\sqrt{7}}{4}$

C. $\frac{5}{4}$　　D. $\frac{4}{5}$

5. 已知 F_1,F_2 为双曲线 $C:x^2-y^2=2$ 的左、右焦点，点 P 在 C 上，$|PF_1|=2|PF_2|$，则 $\cos\angle F_1PF_2=$（　　）

A. $\frac{1}{4}$　　B. $\frac{3}{5}$

C. $\frac{3}{4}$　　D. $\frac{4}{5}$

二、填空题

6. 双曲线的一个焦点坐标是 $(0,-6)$，经过点 $A(-5,6)$，则双曲线的标准方程为_____.

7.（**2019·乐山高二期末**）已知方程 $\frac{x^2}{4-t}+\frac{y^2}{t-1}=1$ 表示的曲线为 C. 给出以下四个判断：

①当 $1<t<4$ 时，曲线 C 表示椭圆；②当 $t>4$ 或 $t<1$ 时，曲线 C 表示双曲线；③若曲线 C 表示焦点在 x 轴上的椭圆，则 $1<t<\frac{5}{2}$；④若曲线 C 表示焦点在 y 轴上的双曲线，则 $t>4$.

其中判断正确的是_____（只填判断正确的序号）.

8.（**2019·辽阳高二期中测试**）已知双曲线的两个焦点分别是 $F_1(-\sqrt{5},0),F_2(\sqrt{5},0)$，$P$ 是双曲线上一点，且 $\overrightarrow{PF_1}\cdot\overrightarrow{PF_2}=0$，$|PF_1|\cdot|PF_2|=2$，则双曲线的标准方程为_____.

三、解答题

9. 已知定点 $A(3,0)$ 和定圆 $C:(x+3)^2+y^2=16$，动圆 P 和圆 C 外切，并且过点 A，求动圆圆心 P 的轨迹方程.

10. 已知双曲线过点 $(3,-2)$ 且与椭圆 $4x^2+9y^2=36$ 有相同的焦点.

(1)求双曲线的标准方程；

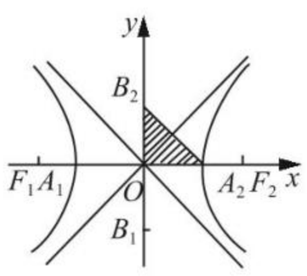
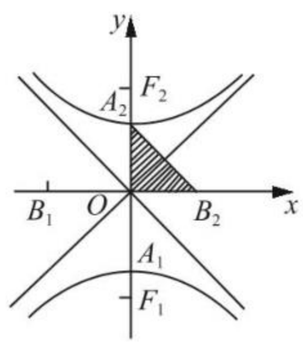
(2)若点 M 在双曲线上，F_1,F_2 为左、右两个焦点，且 $|MF_1|+|MF_2|=6\sqrt{3}$，试判断 $\triangle MF_1F_2$ 的形状.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

第 13 课时 2.3.2 双曲线的简单几何性质(一)

基础知识梳理

1. 双曲线的几何性质

标准方程		$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ $(a>0,b>0)$	$\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1$ $(a>0,b>0)$
图形			
性质	焦点	$F_1(-c,0),F_2(c,0)$	_____
	焦距	_____	
	范围	$x\leqslant -a$ 或 $x\geqslant a$	_____
	对称性	_____	
	顶点	$A_1(-a,0),A_2(a,0)$	_____
	轴长	_____	
	离心率	_____	
	渐近线	$y=\pm\frac{b}{a}x$	_____

2. 等轴双曲线

实轴和虚轴等长的双曲线叫做等轴双曲线,它有以下性质:

(1)方程形式为_____($\lambda\neq 0$);

(2)渐近线方程为_____,它们互相垂直;

(3)离心率 $e=$_____.

题点知识巩固

知识点一 双曲线的简单几何性质

1.(**2019·浙江卷**)渐近线方程为 $x\pm y=0$ 的双曲线的离心率是 ( )

A. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ B. 1

C. $\sqrt{2}$ D. 2

2.(**2019·东厦中学高二质量检测**)已知双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-y^2=1$ $(a>0)$ 的实轴长、虚轴长、焦距长成等差数列,则双曲线的渐近线方程为 ( )

A. $y=\pm\frac{3}{5}x$ B. $y=\pm\frac{5}{3}x$

C. $y=\pm\frac{3}{4}x$ D. $y=\pm\frac{4}{3}x$

知识点二 由双曲线的几何性质求标准方程

3.(**2019·天津市七校高二期中联考**)已知双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的右焦点为 F,点 A 在双曲线的渐近线上,$\triangle OAF$ 是腰长为 2 的等腰三角形(O 为原点),$\angle OFA=120°$,则双曲线的方程为 ( )

A. $\frac{x^2}{12}-\frac{y^2}{4}=1$ B. $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{12}=1$

C. $\frac{x^2}{3}-y^2=1$ D. $x^2-\frac{y^2}{3}=1$

4. 已知双曲线过点 $(4,\sqrt{3})$,且渐近线方程为 $y=\pm\frac{1}{2}x$,则双曲线的标准方程为_____.

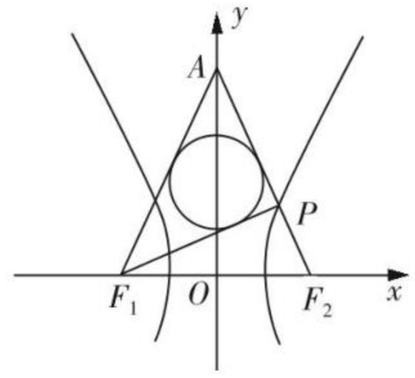
知识点三 双曲线的离心率问题

5.(**2018·全国卷Ⅱ**)双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的离心率为 $\sqrt{3}$,其渐近线方程为 ( )

A. $y=\pm\sqrt{2}x$ B. $y=\pm\sqrt{3}x$

C. $y=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}x$ D. $y=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}x$

6.(**2019·宜春市高二月考**)如图,已知双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的左右焦点分别为 F_1,F_2,$|F_1F_2|=2$,P 是双曲线右支上的一点,$PF_1\perp PF_2$,F_2P 的延长线与 y 轴交于点 A,$\triangle APF_1$ 的内切圆半径为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$,则双曲线的离心率是_____.



提能达标过关

一、选择题

1.(**2018·济南模拟**)双曲线 $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{5}=1$ 的离心率为( )

A. $\frac{3\sqrt{5}}{5}$ B. $\frac{3}{2}$

C. $\frac{\sqrt{5}}{3}$ D. $\frac{2}{3}$

2.(**2018·全国卷Ⅲ**)已知双曲线 $C:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的离心率为 $\sqrt{2}$,则点 $(4,0)$ 到 C 的渐近线的距离为 ( )

A. $\sqrt{2}$ B. 2

C. $\frac{3\sqrt{2}}{2}$ D. $2\sqrt{2}$

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

3. 设 F_1,F_2 分别为双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的左、右焦点，双曲线上存在一点 P 使得 $|PF_1|+|PF_2|=3b$，$|PF_1|\cdot|PF_2|=\frac{9}{4}ab$，则该双曲线的离心率为　（　　）

A. $\frac{4}{3}$　　B. $\frac{5}{3}$

C. $\frac{9}{4}$　　D. 3

4. （**2019·银川一中高二期中**）已知双曲线的方程为 $\frac{y^2}{4}-\frac{x^2}{9}=1$，则下列关于双曲线说法正确的是　（　　）

A. 虚轴长为 4

B. 焦距为 $2\sqrt{5}$

C. 离心率为 $\frac{\sqrt{23}}{3}$

D. 渐近线方程为 $2x\pm3y=0$

5. （**2019·安徽省马鞍山市第二中学段考**）已知中心在坐标原点的椭圆与双曲线有公共焦点，且左、右焦点分别为 F_1,F_2，这两条曲线在第一象限的交点为 P，$\triangle PF_1F_2$ 是以 PF_1 为底边的等腰三角形. 若 $|PF_1|=12$，记椭圆与双曲线的离心率分别为 e_1,e_2，则 $e_1\cdot e_2$ 的取值范围是　（　　）

A. $\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$　　B. $\left(\frac{1}{3},+\infty\right)$

C. $\left(\frac{1}{5},+\infty\right)$　　D. $\left(\frac{1}{9},+\infty\right)$

二、填空题

6. （**2018·北京卷**）若双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{4}=1(a>0)$ 的离心率为 $\frac{\sqrt{5}}{2}$，则 $a=$_____.

7. 已知双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 和椭圆 $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$ 有相同的焦点，且双曲线的离心率是椭圆离心率的 2 倍，则双曲线的方程为_____.

8. （**2019·龙岩一中高二月考**）已知双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的左、右焦点分别为 F_1、F_2，过 F_2 的直线交 C 的右支于 A、B 两点，$AF_1\perp AB$，$4|AF_1|=3|AB|$，则 C 的离心率为_____.

三、解答题

9. （**2019·大庆实验中学高二检测**）已知命题 p：方程 $\frac{x^2}{2m}-\frac{y^2}{m-1}=1$ 表示焦点在 y 轴上的椭圆；命题 q：双曲线 $\frac{y^2}{5}-\frac{x^2}{m}=1$ 的离心率 $e\in(1,2)$. 若 p,q 有且只有一个为真命题，求 m 的取值范围.

10. 一个椭圆，其中心在原点，焦点在坐标轴上，焦距为 $2\sqrt{13}$. 一个双曲线和这个椭圆有公共焦点，且双曲线的半实轴长比椭圆的半长轴长小 4，双曲线离心率与椭圆离心率之比为 7∶3，求椭圆和双曲线的方程.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

第 14 课时 2.3.2 双曲线的简单几何性质(二)

基础知识梳理

1. 直线与双曲线的位置关系

一般地,设直线 $l:y=kx+m(m\neq0)$, ①

双曲线 $C:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$, ②

把①代入②,得 $(b^2-a^2k^2)x^2-2a^2mkx-a^2m^2-a^2b^2=0$.

(1)当 $b^2-a^2k^2=0$,即 $k=\pm\frac{b}{a}$ 时,直线 l 与双曲线的渐近线平行,直线与双曲线 C 相交于一点.

(2)当 $b^2-a^2k^2\neq0$,即 $k\neq\pm\frac{b}{a}$ 时,

$\Delta=(-2a^2mk)^2-4(b^2-a^2k^2)(-a^2m^2-a^2b^2)$.

$\Delta>0\Rightarrow$直线与双曲线有两个公共点,此时称直线与双曲线相交;

$\Delta=0\Rightarrow$直线与双曲线有一个公共点,此时称直线与双曲线相切;

$\Delta<0\Rightarrow$直线与双曲线没有公共点,此时称直线与双曲线相离.

2. 弦长公式

斜率为 $k(k\neq0)$ 的直线 l 与双曲线相交于 $A(x_1,y_1)$,$B(x_2,y_2)$,则 $|AB|=\sqrt{1+k^2}|x_1-x_2|=\sqrt{1+k^2}\cdot\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}=\sqrt{1+\frac{1}{k^2}}\cdot\sqrt{(y_1+y_2)^2-4y_1y_2}$.

题点知识巩固

知识点一 直线与双曲线位置关系的判定

1. 直线 $y=\frac{1}{3}\left(x-\frac{7}{2}\right)$ 与双曲线 $x^2-9y^2=9$ 交点的个数是 ( )

A. 0 B. 1

C. 2 D. 4

2. (**2019·福州高三模拟**)已知直线 $y=kx-1$ 和双曲线 $x^2-y^2=1$ 的右支交于不同两点,则 k 的取值范围是_____.

知识点二 相交弦问题

3. 过双曲线 $\frac{x^2}{20}-\frac{y^2}{5}=1$ 的右焦点的直线被双曲线所截得的弦长为 $\sqrt{5}$,这样的直线有_____条.

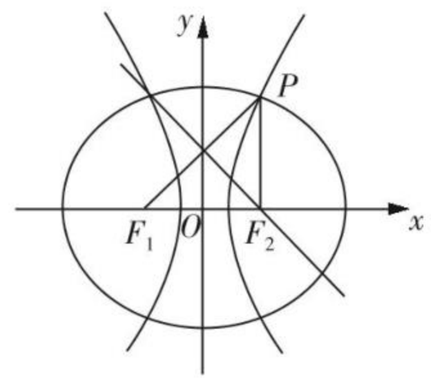
4. 经过点 $M(2,2)$ 作直线 l 交双曲线 $x^2-\frac{y^2}{4}=1$ 于 A,B 两点,且 M 为 AB 中点.

(1)求直线 l 的方程;

(2)求线段 AB 的长.

知识点三 与双曲线有关的综合问题

5. (**2019·鹤岗市第一中学高二期中**)已知 F_1,F_2 是椭圆与双曲线的公共焦点,P 是它们的一个公共点,且 $|PF_1|>|PF_2|$,线段 PF_1 的垂直平分线过点 F_2,若椭圆的离心率为 e_1,双曲线的离心率为 e_2,则 $\frac{2}{e_1}+\frac{e_2}{2}$ 的最小值为 ( )



A. 6 B. 3

C. $\sqrt{6}$ D. $\sqrt{3}$

6. 若在双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的右支上到原点 O 和右焦点 F 的距离相等的点有两个,则双曲线离心率的取值范围是_____.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

提能达标过关

一、选择题

1. 过双曲线 $x^2-\frac{y^2}{2}=1$ 的右焦点 F 作直线交双曲线于 A,B 两点，若 $|AB|=4$，则这样的直线 l 有　　（　　）

A. 1 条　　B. 2 条

C. 3 条　　D. 4 条

2. （**2018 · 天津卷**）已知双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的离心率为 2，过右焦点且垂直 x 轴的直线与双曲线交于 A,B 两点. 设 A,B 到双曲线的同一条渐近线的距离分别为 d_1 和 d_2，且 $d_1+d_2=6$，则双曲线的方程为　　（　　）

A. $\frac{x^2}{3}-\frac{y^2}{9}=1$　　B. $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{3}=1$

C. $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{12}=1$　　D. $\frac{x^2}{12}-\frac{y^2}{4}=1$

3. 若双曲线 $x^2-y^2=1$ 的左支上一点 $P(a,b)$ 到直线 $y=x$ 的距离为 $\sqrt{2}$，则 $a+b$ 的值为　　（　　）

A. $\frac{1}{2}$　　B. $-\frac{1}{2}$

C. 2　　D. -2

4. 双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的两个焦点为 F_1,F_2，若 P 为其上一点，且 $|PF_1|=2|PF_2|$，则双曲线离心率的取值范围为　　（　　）

A. $(1,3)$　　B. $(1,3]$

C. $(3,+\infty)$　　D. $[3,+\infty)$

5. （**2019 · 银川二中月考**）已知双曲线 E 的中心为坐标原点，$F(3,0)$ 是双曲线 E 的焦点，过点 F 的直线 l 与双曲线 E 分别相交于 A,B 两点，且 AB 的中点为 $N(-12,-15)$，则双曲线 E 的标准方程为　　（　　）

A. $\frac{x^2}{3}-\frac{y^2}{6}=1$　　B. $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{5}=1$

C. $\frac{x^2}{6}-\frac{y^2}{3}=1$　　D. $\frac{x^2}{5}-\frac{y^2}{4}=1$

二、填空题

6. 已知实数 $4,m,9$ 构成一个等比数列，则圆锥曲线 $\frac{x^2}{m}+y^2=1$ 的离心率为_____.

7. 双曲线 $C:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的离心率为 $\frac{5}{4}$，焦点到渐近线的距离为 3，则 C 的实轴长等于_____.

8. 若 O 为坐标原点，直线 $y=2b$ 与双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的左、右两支分别交于 A,B 两点，直线 OA 的斜率为 -1，则该双曲线的渐近线的方程为_____.

三、解答题

9. 设双曲线 $C:\frac{x^2}{a^2}-y^2=1(a>0)$，与直线 $x+y=1$ 相交于不同两点 A,B，试求双曲线离心率 e 的取值范围.

10. 已知双曲线的中心在原点，离心率为 2，一个焦点为 $F(-2,0)$.

(1) 求双曲线的方程；

(2) 设 Q 是双曲线上一点，且过点 F,Q 的直线 l 与 y 轴交于点 M. 若 $|\overrightarrow{MQ}|=2|\overrightarrow{QF}|$，求直线 l 的方程.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

2.4 抛物线

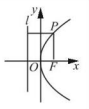
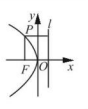
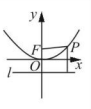
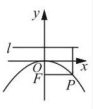
第 15 课时 2.4.1 抛物线及其标准方程

基础知识梳理

1. 抛物线定义

平面内与一个定点 F 和一条定直线 l（l 不经过点 F）的距离相等的点的轨迹叫做_____. 定点 F 叫做抛物线的_____，定直线 l 叫做抛物线的_____.

2. 抛物线的标准方程的特点

抛物线标准方程	$y^2=2px$ $(p>0)$	$y^2=-2px$ $(p>0)$	$x^2=2py$ $(p>0)$	$x^2=-2py$ $(p>0)$
图形				
焦点	_____	_____	_____	_____
准线	_____	_____	_____	_____

题点知识巩固

知识点一 抛物线的焦点与准线

1. 已知抛物线 $y^2=mx$ 的焦点坐标为 $(2,0)$，则 m 的值为 （ ）

A. $\frac{1}{2}$　　B. 2

C. 4　　D. 8

2. 若抛物线 $x^2=2py(p>0)$ 的焦点与椭圆 $\frac{y^2}{9}+\frac{x^2}{5}=1$ 的上焦点重合，则该抛物线的准线方程为 （ ）

A. $y=-1$　　B. $y=1$

C. $y=-2$　　D. $y=2$

知识点二 抛物线的标准方程

3. 抛物线 $y=-\frac{1}{8}x^2$ 的焦点坐标为 （ ）

A. $\left(-\frac{1}{2},0\right)$　　B. $(-4,0)$

C. $\left(0,-\frac{1}{4}\right)$　　D. $(0,-2)$

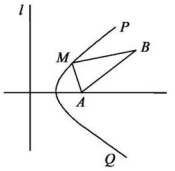
4. 抛物线 $y=-4x^2$ 的准线方程为 （ ）

A. $x=1$　　B. $y=1$

C. $x=\frac{1}{16}$　　D. $y=\frac{1}{16}$

知识点三 抛物线的应用

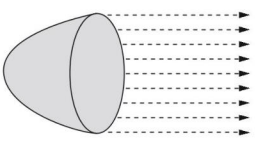
5. 如图，l 为南北方向的公路，A 地在公路正东 2 km 处，B 地在 A 地东偏北 30°方向 $2\sqrt{3}$ km 处，河流沿岸曲线 PQ 上任意一点到公路 l 和到 A 地距离相等. 现要在曲线 PQ 上某处建一座码头 M，向 A、B 两地运货物，经测算，从 M 到 A，B 修建费用都是 a 万元/km，那么修建这条公路的总费用最低是 （ ）

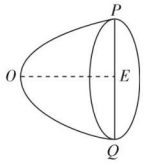


A. $(2+\sqrt{3})a$ 万元　　B. $2(\sqrt{3}+1)a$ 万元

C. $5a$ 万元　　D. $6a$ 万元

6. （**2019·北京东城区高二期末**）如图，探照灯反射镜的轴截面是抛物线的一部分，已知灯口截面圆的直径 PQ 为 60 cm，灯深 OE 为 40 cm，则抛物线 POQ 的标准方程可能是 （ ）





A. $y^2=\frac{25}{4}x$　　B. $y^2=\frac{45}{4}x$

C. $x^2=-\frac{45}{2}y$　　D. $x^2=-\frac{45}{4}y$

提能达标过关

一、选择题

1. 过点 $A(3,0)$ 且与 y 轴相切的圆的圆心轨迹为 （ ）

A. 圆　　B. 椭圆

C. 直线　　D. 抛物线

2. 抛物线 $y=\frac{1}{4}x^2$ 的焦点坐标为 （ ）

A. $\left(\frac{1}{16},0\right)$　　B. $\left(0,\frac{1}{16}\right)$

C. $(0,1)$　　D. $(1,0)$

3. 若抛物线 $y^2=2px$ 的焦点与椭圆 $\frac{x^2}{6}+\frac{y^2}{2}=1$ 的右焦点重合，则 p 的值为 （ ）

A. -2　　B. 2

C. -4　　D. 4

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

4.（**2019·晋中中学高二月考**）抛物线 $x^2=4y$ 上一点 A 的纵坐标为 4，则点 A 与抛物线焦点的距离为（　　）

A. 2　　B. 3

C. 4　　D. 5

5. 抛物线 $y^2=4x$ 的焦点为 F，点 P 为抛物线上的动点，点 M 为其准线 l 上的动点，当 $\triangle FPM$ 为等边三角形时，其面积为（　　）

A. $2\sqrt{3}$　　B. 4

C. 6　　D. $4\sqrt{3}$

二、填空题

6. 若抛物线 $y^2=2px(p>0)$ 的准线经过双曲线 $x^2-y^2=1$ 的焦点，则 $p=$_____.

7. 已知离心率为 2 的双曲线 $\frac{x^2}{m}+\frac{y^2}{n}=1(m,n\in\mathbf{R})$ 的右焦点与抛物线 $y^2=4x$ 的焦点重合，则 $\frac{m}{n}=$_____.

8. 某桥的桥洞成抛物线形，桥下水面宽 16 m，当水面上涨 2 m 时，水面宽度为 12 m，此时桥洞顶部距水面的高度为_____.

三、解答题

9. 根据下列条件分别求抛物线的标准方程.

(1) 抛物线的焦点是双曲线 $16x^2-9y^2=144$ 的左顶点；

(2) 抛物线的焦点 F 在 x 轴上，直线 $y=-3$ 与抛物线交于点 A，$|AF|=5$.

10. 已知抛物线 $C:y^2=2px(p>0)$ 的焦点为 F，C 上一点 $(3,m)$ 到焦点的距离为 5.

(1) 求 C 的方程；

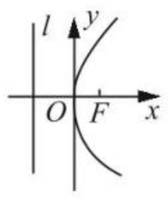
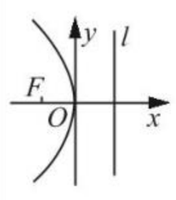
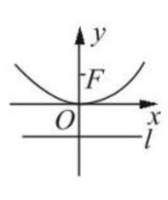
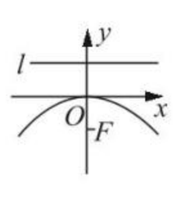
(2) 过 F 作直线 l，交 C 于 A，B 两点，若直线 AB 中点的纵坐标为 -1，求直线 l 的方程.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

第 16 课时 2.4.2 抛物线的简单几何性质(一)

基础知识梳理

四种标准形式的抛物线几何性质的比较

标准方程	$y^2=2px$ ($p>0$)	$y^2=-2px$ ($p>0$)	$x^2=2py$ ($p>0$)	$x^2=-2py$ ($p>0$)
图形				
性质 焦点坐标				
性质 准线方程	$x=-\frac{p}{2}$	$x=\frac{p}{2}$	$y=-\frac{p}{2}$	$y=\frac{p}{2}$
性质 范围				
性质 对称轴	x 轴		y 轴	
性质 顶点坐标	$O(0,0)$			
性质 离心率	$e=1$			
性质 开口方向	向右	向左	向上	向下

题点知识巩固

知识点一 抛物线的简单几何性质

1. (**2019·河南豫南九校期末**)抛物线 $x=\frac{1}{4}y^2$ 的焦点到双曲线 $x^2-\frac{y^2}{3}=1$ 的渐近线的距离是 ( )

A. $\sqrt{3}$ B. $\frac{\sqrt{2}}{2}$

C. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ D. $\frac{1}{2}$

2. (**2019·大庆中学高三模拟**)设抛物线 $y^2=8x$ 上一点 P 到 y 轴的距离是 4,则点 P 到该抛物线焦点的距离是 ( )

A. 4 B. 6

C. 8 D. 12

知识点二 焦点弦问题

3. 过抛物线 $y^2=4x$ 的焦点作直线交抛物线于 $A(x_1,y_1)$,$B(x_2,y_2)$ 两点,如果 $x_1+x_2=8$,那么 $|AB|=$ ( )

A. 10 B. 8

C. 6 D. 4

4. (**2019·邢台期末**)已知 AB 是过抛物线 $2x^2=y$ 的焦点的弦,若 $|AB|=4$,则 AB 的中点的纵坐标是 ( )

A. 1 B. 2

C. $\frac{5}{8}$ D. $\frac{15}{8}$

知识点三 抛物线性质的应用

5. 过抛物线 $x^2=2py(p>0)$ 焦点 F 作倾斜角为 30°的直线,与抛物线分别交于 A,B 两点(点 A 在 y 轴左侧),则 $\frac{|AF|}{|FB|}=$ ( )

A. $\frac{1}{3}$ B. $\frac{2}{5}$

C. $\frac{1}{2}$ D. $\frac{3}{5}$

6. (**2019·张家口一中高三模拟**)直线 l 过抛物线 $C:y^2=4x$ 的焦点 F,交抛物线 C 于 A,B 两点,则 $\frac{1}{|AF|}+\frac{1}{|BF|}$ 的取值范围为 ( )

A. $\{1\}$ B. $(0,1]$

C. $[1,+\infty)$ D. $\left[\frac{1}{2},1\right]$

提能达标过关

一、选择题

1. 设抛物线的焦点到顶点的距离为 3,则抛物线上的点到准线的距离的取值范围是 ( )

A. $(6,+\infty)$ B. $[6,+\infty)$

C. $(3,+\infty)$ D. $[3,+\infty)$

2. 已知点 P 在抛物线 $x^2=4y$ 上,且点 P 到 x 轴的距离与点 P 到此抛物线焦点的距离之比为 1∶3,则点 P 到 x 轴的距离是 ( )

A. $\frac{1}{4}$ B. $\frac{1}{2}$

C. 1 D. 2

3. 已知抛物线 $y^2=4x$ 的焦点为 F,准线 l 交 x 轴于 R,过抛物线上点 $P(4,-4)$ 作 $PQ\perp l$ 于 Q,则梯形 $PQRF$ 的面积是 ( )

A. 18 B. 16

C. 14 D. 12

4. 过抛物线 $y^2=4x$ 的焦点作一条直线与抛物线交于 A,B 两点,若它们的横坐标之和等于 5,则这样的直线 ( )

A. 有且仅有一条 B. 有且仅有两条

C. 有无穷多条 D. 不存在

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

5. 已知 A,B 两点均在焦点为 F 的抛物线 $y^2=2px(p>0)$ 上，若 $|AF|+|BF|=4$，线段 AB 的中点到直线 $x=\frac{p}{2}$ 的距离为 1，则 p 的值为（　　）

A. 1　　B. 2

C. 1 或 3　　D. 2 或 6

二、填空题

6. (**2019·保定模拟**)已知抛物线 $x^2=2py(p>0)$ 的焦点为 F，其准线与双曲线 $\frac{x^2}{3}-\frac{y^2}{3}=1$ 相交于 A,B 两点，若 $\triangle ABF$ 为等边三角形，则 $p=$_____.

7. 设抛物线 $x^2=12y$ 的焦点为 F，经过点 $P(2,1)$ 的直线 l 与抛物线相交于 A,B 两点，又知点 P 恰为线段 AB 的中点，则 $|AF|+|BF|=$_____.

8. 对于顶点在原点的抛物线，给出下列条件：

①焦点在 y 轴上；

②焦点在 x 轴上；

③抛物线上横坐标为 1 的点到焦点的距离等于 6；

④抛物线的通径的长为 5；

⑤由原点向过焦点的某条直线作垂线，垂足坐标为(2,1).

能使该抛物线方程为 $y^2=10x$ 的条件是_____(要求填写合适条件的序号).

三、解答题

9. 顶点在原点，焦点在 x 轴上的抛物线被直线 $y=2x+1$ 截得的弦长为 $\sqrt{15}$，求抛物线的方程.

10. (**2019·石嘴山市第三中学高二期中**)已知抛物线 $y^2=2px(p>0)$ 的焦点为 F，A 点在抛物线上，且 A 的横坐标为 4，$|AF|=5$.

(1)求抛物线的方程；

(2)设 l 为过(4,0)点的任意一条直线，若 l 交抛物线于 A,B 两点，求证：以 AB 为直径的圆必过坐标原点.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

第 17 课时 2.4.2 抛物线的简单几何性质(二)

基础知识梳理

直线与抛物线位置关系的判定

直线 $y=kx+m(m\neq0)$ 与抛物线 $y^2=2px(p>0)$ 联立方程组,消去 y 得 $k^2x^2+2(mk-p)x+m^2=0$ 的形式.

当 $k=0$ 时,直线与抛物线相交,且直线与抛物线的对称轴平行,此时与抛物线只有一个交点;

当 $k\neq0$ 时,设其判别式为 Δ,则

(1)相交:$\Delta>0\Leftrightarrow$直线与抛物线有两个交点;

(2)相切:$\Delta=0\Leftrightarrow$直线与抛物线只有一个交点;

(3)相离:$\Delta<0\Leftrightarrow$直线与抛物线没有交点.

题点知识巩固

知识点一 直线与抛物线的位置关系

1. 与直线 $2x-y+4=0$ 平行的抛物线 $y=x^2$ 的切线方程为 ( )

A. $2x-y+3=0$ B. $2x-y-3=0$

C. $2x-y+1=0$ D. $2x-y-1=0$

2. 已知抛物线的方程为 $y^2=2x$,直线 l 的方程为 $y=kx+1$ ($k\in\mathbf{R}$),当 k 分别为何值时,直线 l 与抛物线,只有一个公共点;有两个公共点;没有公共点.

知识点二 与弦长有关的问题

3. 过点(1,0)作斜率为 -2 的直线,与抛物线 $y^2=8x$ 交于 A,B 两点,则弦 $|AB|$ 的长为 ( )

A. $2\sqrt{13}$ B. $2\sqrt{15}$

C. $2\sqrt{17}$ D. $2\sqrt{19}$

4. (**2018·北京卷**)已知直线 l 过点(1,0)且垂直于 x 轴,若 l 被抛物线 $y^2=4ax$ 截得的线段长为 4,则抛物线的焦点坐标为_____.

知识点三 与抛物线有关的综合问题

5. 过点 $P(-2,0)$ 的直线与抛物线 $C:y^2=4x$ 相交于 A,B 两点,且 $|PA|=\frac{1}{2}|AB|$,则点 A 到抛物线 C 的焦点的距离为 ( )

A. $\frac{5}{3}$ B. $\frac{7}{5}$

C. $\frac{9}{7}$ D. 2

6. (**2019·四川乐山高二期末**)已知抛物线 $C:y^2=2px(p>0)$ 的焦点为 F,抛物线 C 与直线 $l_1:y=-x$ 的一个交点的横坐标为 4.

(1)求抛物线 C 的方程;

(2)不过原点的直线 l_2 与直线 l_1 垂直,且与抛物线 C 交于不同的两点 A,B,若线段 AB 的中点为 P,且 $|OP|=|PB|$,求 $\triangle FAB$ 的面积.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

提能达标过关

一、选择题

1. 设抛物线 $y^2=8x$ 的准线与 x 轴交于点 Q，若过点 Q 的直线 l 与抛物线有公共点，则直线 l 斜率的取值范围是（　　）

A. $\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$　　B. $[-2,2]$

C. $[-1,1]$　　D. $[-4,4]$

2. 过抛物线 $y^2=ax(a>0)$ 的焦点 F 作一直线交抛物线于 P,Q 两点，若 PF 与 FQ 的长分别为 p,q，则 $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}$ 等于（　　）

A. $2a$　　B. $\frac{1}{2a}$

C. $4a$　　D. $\frac{4}{a}$

3. 在抛物线 $y^2=8x$ 中，以 $(1,-1)$ 为中点的弦所在直线的方程是（　　）

A. $x-4y-3=0$　　B. $x+4y+3=0$

C. $4x+y-3=0$　　D. $4x+y+3=0$

4. 设 F 为抛物线 $C:y^2=3x$ 的焦点，过 F 且倾斜角为 $30°$ 的直线交 C 于 A,B 两点，O 为坐标原点，则 $\triangle OAB$ 的面积为（　　）

A. $\frac{3\sqrt{3}}{4}$　　B. $\frac{9\sqrt{3}}{8}$

C. $\frac{63}{32}$　　D. $\frac{9}{4}$

5. 已知 P 是抛物线 $y^2=4x$ 上一动点，则点 P 到直线 $l:2x-y+3=0$ 和 y 轴的距离之和的最小值是（　　）

A. $\sqrt{3}$　　B. $\sqrt{5}$

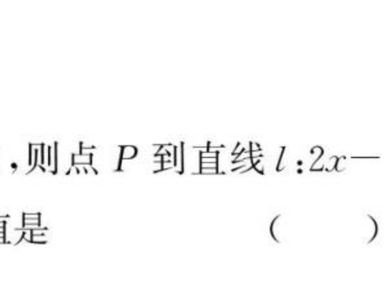
C. 2　　D. $\sqrt{5}-1$

二、填空题

6. 给定抛物线 $C:y^2=4x$，F 是抛物线 C 的焦点，过点 F 的直线 l 与抛物线 C 相交于 A,B 两点. 若 $|FA|=2|BF|$，则直线 l 的方程为_____.

7. 已知 M 是抛物线 $x^2=4y$ 上一点，F 为其焦点，点 A 在圆 $C:(x+1)^2+(y-5)^2=1$ 上，则 $|MA|+|MF|$ 的最小值是_____.

8. 如图，已知抛物线 $y^2=2px(p>0)$ 的焦点 F 恰好是椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ $(a>b>0)$ 的右焦点，且两曲线的公共点连线 AB 过 F，则椭圆的离心率是_____.



三、解答题

9. （**2019·银川一中高二期中**）已知点 $A(2,8)$ 在抛物线 $y^2=2px(p>0)$ 上，直线 l 和抛物线交于 B,C 两点，焦点 F 是 $\triangle ABC$ 的重心，M 是 BC 的中点（不在 x 轴上）.

(1) 求 M 点的坐标；

(2) 求直线 l 方程.

10. 已知定点 $F(1,0)$，动点 P（异于原点）在 y 轴上运动，连接 FP，过点 P 作 PM 交 x 轴于点 M，并延长 MP 到点 N，且 $\overrightarrow{PM}\cdot\overrightarrow{PF}=0$，$|\overrightarrow{PN}|=|\overrightarrow{PM}|$.

(1) 求动点 N 的轨迹 C 的方程；

(2) 若直线 l 与动点 N 的轨迹交于 A、B 两点，若 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=-4$ 且 $4\sqrt{6}\leqslant|AB|\leqslant4\sqrt{30}$，求直线 l 的斜率 k 的取值范围.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

阶段评估 3

（时间：60 分钟 满分：100 分）

一、选择题（每小题 5 分，共 30 分）

1. 若双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$的渐近线过点 $M(1,2)$，则双曲线的离心率为 （ ）

A. $\frac{\sqrt{5}}{2}$　　B. $\frac{\sqrt{6}}{2}$

C. $\sqrt{3}$　　D. $\sqrt{5}$

2. （**2019·陕西民族附中月考**）已知双曲线 C：$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$（$a>0,b>0$）的右焦点与抛物线 $y^2=20x$ 的焦点重合，且其渐近线方程为 $y=\pm\frac{4}{3}x$，则双曲线 C 的方程为 （ ）

A. $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$　　B. $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$

C. $\frac{x^2}{36}-\frac{y^2}{64}=1$　　D. $\frac{x^2}{64}-\frac{y^2}{36}=1$

3. 设双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$的渐近线与抛物线 $y=x^2+1$ 相切，则该双曲线的离心率等于 （ ）

A. $\sqrt{3}$　　B. 2

C. $\sqrt{5}$　　D. $\sqrt{6}$

4. （**2019·黄山市质检**）已知椭圆 C：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的一个焦点与抛物线 $y^2=4\sqrt{3}x$ 的焦点重合，长轴长等于圆 $x^2+y^2-2x-15=0$ 的半径，则椭圆 C 的方程为 （ ）

A. $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$　　B. $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{12}=1$

C. $\frac{x^2}{4}+y^2=1$　　D. $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{4}=1$

5. 过抛物线焦点 F 的直线与抛物线相交于 A,B 两点，若点 A,B 在抛物线准线上的射影分别为 A_1,B_1，则 $\angle A_1FB_1=$ （ ）

A. 45°　　B. 60°

C. 90°　　D. 120°

6. 已知抛物线 $y^2=2px(p>0)$的焦点为 F，其准线与双曲线 $\frac{y^2}{3}-x^2=1$ 相交于 M,N 两点，若$\triangle MNF$ 为直角三角形，其中 F 为直角顶点，则 $p=$ （ ）

A. $2\sqrt{3}$　　B. $\sqrt{3}$

C. $3\sqrt{3}$　　D. 6

二、填空题（每小题 5 分，共 20 分）

7. 已知对任意 $a\in\mathbf{R}$，直线 l：$x+(a-1)y-3a+1=0$ 都经过定点 M，且 M 又在一条以原点为顶点，以 y 轴为对称轴的抛物线上，则这条抛物线方程是_____.

8. 已知抛物线 C 的方程为$y^2=2px(p>0)$，$\odot M$ 的方程为 $x^2+y^2+8x+12=0$，如果抛物线 C 的准线与$\odot M$ 相切，那么 p 的值为_____.

9. 设抛物线 $y^2=2x$ 的焦点为 F，过点 $M(\sqrt{3},0)$的直线与抛物线相交于 A,B 两点，与抛物线的准线相交于点 C，$|BF|=2$，则$\frac{S_{\triangle BCF}}{S_{\triangle ACF}}=$_____.

10. 点 P 为双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$右支上的一点，其右焦点为 F_2，若直线 PF_2 的斜率为$\sqrt{3}$，M 为线段 PF_2 的中点，且$|OF_2|=|F_2M|$，则该双曲线的离心率为_____.

三、解答题（共 50 分）

11. （12 分）（**2019·郑州高三模拟**）已知过抛物线 $y^2=2px$（$p>0$）的焦点，斜率为 $2\sqrt{2}$ 的直线交抛物线于 $A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)(x_1<x_2)$两点，且$|AB|=9$.

（1）求该抛物线的方程；

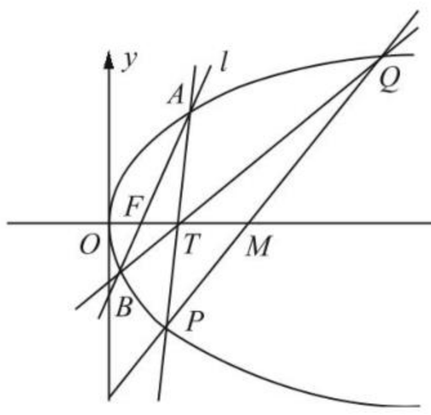
（2）O 为坐标原点，C 为抛物线上一点，若$\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OA}+\lambda\overrightarrow{OB}$，求 λ 的值.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

12.(12 分)设抛物线 $C:y^2=2px(p>0)$ 的焦点为 F,且过点 F 的直线交 C 于 A,B. 点 $T(t,0)(t>0)$.

(1)当 $t=2$ 时,若过 T 的直线交抛物线 C 于两点,且两交点的纵坐标乘积为 -4,求焦点 F 的坐标;

(2)如图,直线 AT、BT 分别交抛物线 C 于点 P、Q,连接 PQ 交 x 轴于点 M,证明:$|OF|$,$|OT|$,$|OM|$ 成等比数列.



13.(13 分)(**2019・凯里市第一中学高二期末**)已知椭圆 C:$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的离心率为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$,且椭圆上的一点与两个焦点构成的三角形周长为 $4+2\sqrt{2}$.

(1)求椭圆 C 的方程;

(2)已知直线 $y=k(x-1)$ 与椭圆 C 相交于 A,B 两点.

①若线段 AB 中点的横坐标为 $\frac{1}{2}$,求 k 的值;

②在 x 轴上是否存在点 Q,使 $\overrightarrow{QA}\cdot\overrightarrow{QB}$ 为定值?若是,求点 Q 的坐标;若不是,请说明理由.

14.(13 分)(**2017・北京卷**)已知抛物线 $C:y^2=2px$ 过点 $P(1,1)$. 过点 $\left(0,\frac{1}{2}\right)$ 作直线 l 与抛物线 C 交于不同的两点 M,N,过点 M 作 x 轴的垂线分别与直线 OP,ON 交于点 A,B,其中 O 为原点.

(1)求抛物线 C 的方程,并求其焦点坐标和准线方程;

(2)求证:A 为线段 BM 的中点.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

第三章 空间向量与立体几何

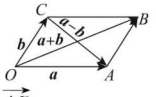
3.1 空间向量及其运算

第18课时 3.1.1 空间向量及其加减运算

基础知识梳理

1. 在空间，把具有_____和_____的量叫做空间向量，向量的_____叫做向量的长度或模. 空间向量常用有向线段表示，有向线段的_____表示向量的模，空间向量也可以用字母表示如 $\boldsymbol{a}$ 等.

2. 几类特殊向量及运算律

几类特殊向量	①零向量：规定_____的向量叫做零向量，记为_____. ②单位向量：_____的向量称为单位向量. ③相反向量：与向量 $\boldsymbol{a}$ 长度_____而方向_____的向量称为 $\boldsymbol{a}$ 的相反向量，记为_____. ④相等向量：方向_____且模_____的向量称为相等向量. 在空间，同向且等长的有向线段表示同一向量或相等向量.
空间向量的加减法	类似平面向量，定义空间向量的加、减法运算(如图)：  $\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB}=$_____； $\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OC}=$_____.
加法运算律	(1)交换律：$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=$_____； (2)结合律：$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=$_____.

题点知识巩固

知识点一 空间向量的概念

1. 下列说法中正确的是 ( )
   A. 若 $|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|$，则 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 的长度相同，方向相同或相反
   B. 若向量 $\boldsymbol{a}$ 是向量 $\boldsymbol{b}$ 的相反向量，则 $|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|$
   C. 空间向量的减法满足结合律
   D. 在四边形 $ABCD$ 中，一定有 $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}$

2. 给出以下命题：
   ①用分别在两条异面直线上的两条有向线段表示两个向量，则这两个向量一定不共面；
   ②已知空间四边形 $ABCD$，则由四条线段 AB，BC，CD，DA 分别确定的四个向量之和为零向量；
   ③若存在实数 x、y，使得 $\overrightarrow{OP}=x\overrightarrow{OA}+y\overrightarrow{OB}$，则 O、P、A、B 四点共面；
   ④若三个向量共面，则这三个向量的起点和终点一定共面.
   其中正确命题的序号是_____.

知识点二 空间向量的加减运算

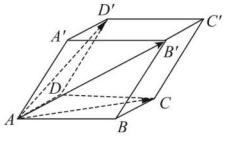
3. 在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，向量表达式 $\overrightarrow{DD_1}-\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}$ 化简后的结果是 ( )
   A. $\overrightarrow{BD_1}$　　B. $\overrightarrow{D_1B}$
   C. $\overrightarrow{B_1D}$　　D. $\overrightarrow{DB_1}$

4. 化简 $(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CD})-(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{BD})=$_____.

知识点三 空间向量的证明

5. 设 A，B，C 为空间任意三点，则下列命题为假命题的是 ( )
   A. $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$
   B. $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}=\boldsymbol{0}$
   C. $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{BC}$
   D. $\overrightarrow{AB}=-\overrightarrow{BA}$

6. 在如图所示的平行六面体中.
   求证：$\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AB'}+\overrightarrow{AD'}=2\overrightarrow{AC'}$.



关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

提能达标过关

一、选择题

1. 对于空间中任意四点 A,B,C,D，都有 $\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{CD}-\overrightarrow{CB}=$　　（　　）

A. $\overrightarrow{DB}$　　B. $\overrightarrow{AC}$

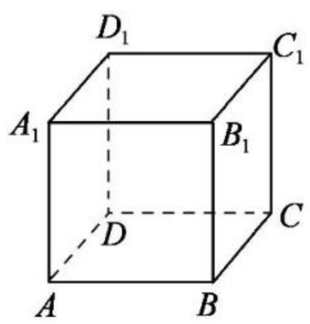
C. $\overrightarrow{AB}$　　D. $\overrightarrow{BA}$

2. 在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，下列选项中化简后为零向量的是　　（　　）

A. $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA_1}$　　B. $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BB_1}$

C. $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{A_1D_1}+\overrightarrow{C_1A_1}$　　D. $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB_1}-\overrightarrow{AB}$

3. 如图所示，在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，下列各式中运算结果为向量 $\overrightarrow{AC_1}$ 的是　　（　　）



①$(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC})+\overrightarrow{CC_1}$；

②$(\overrightarrow{AA_1}+\overrightarrow{A_1D_1})+\overrightarrow{D_1C_1}$；

③$(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BB_1})+\overrightarrow{B_1C_1}$；

④$(\overrightarrow{AA_1}+\overrightarrow{A_1B_1})+\overrightarrow{B_1C_1}$.

A. ①③　　B. ②④

C. ③④　　D. ①②③④

4. 在下列条件中，使 M 与 A、B、C 一定共面的是　　（　　）

A. $\overrightarrow{OM}=3\overrightarrow{OA}-2\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OC}$

B. $\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\mathbf{0}$

C. $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=\mathbf{0}$

D. $\overrightarrow{OM}=\frac{1}{4}\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{OC}$

5. 下列命题中正确的个数是　　（　　）

①若 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 共线，$\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{c}$ 共线，则 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{c}$ 共线；

②向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 共面即它们所在的直线共面；

③若 $\boldsymbol{a}\parallel\boldsymbol{b}$，则存在唯一的实数 λ，使 $\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{b}$.

A. 1　　B. 2

C. 3　　D. 0

二、填空题

6. 把所有单位向量的起点移到同一点，则这些向量的终点组成的图形是_____.

7. 已知空间向量 $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BC},\overrightarrow{CD},\overrightarrow{DA}$，则下列结论正确的是_____.

①$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}$；②$\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AD}$；

③$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{AD}$；④$\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BD}-\overrightarrow{DC}$.

8. 给出下列命题：

①方向相反的两个向量是相反向量；

②若 A,B,C,D 是不共线的四点，则 $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$ 是四边形 $ABCD$ 为平行四边形的充要条件；

③$|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|$ 是向量 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$ 的必要不充分条件；

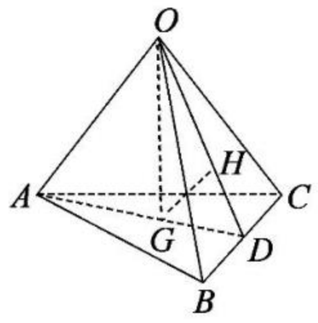
④$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$ 的充要条件是 A 与 C 重合，B 与 D 重合.

其中正确命题的序号为_____.

三、解答题

9. 设有空间四边形 $ABCD$，对角线 AC 和 BD 的中点分别是 E 和 F，求证：$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CD}=4\overrightarrow{EF}$.

10. 如图所示，在空间四边形 $OABC$ 中，G,H 分别是 $\triangle ABC$，$\triangle OBC$ 的重心，设 $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{OC}=\boldsymbol{c}$. 试用向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 表示向量 $\overrightarrow{OG}$ 和 $\overrightarrow{GH}$.



关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

第 19 课时 3.1.2 空间向量的数乘运算

基础知识梳理

1. 向量的数乘运算

定义	与平面向量一样，实数 λ 与空间向量 $\boldsymbol{a}$ 的乘积_____仍然是一个_____，称为向量的数乘运算		
几何意义	$\lambda>0$	$\lambda\boldsymbol{a}$ 与向量 $\boldsymbol{a}$ 的方向_____	$\lambda\boldsymbol{a}$ 的长度是 $\boldsymbol{a}$ 的长度的_____倍
	$\lambda<0$	$\lambda\boldsymbol{a}$ 与向量 $\boldsymbol{a}$ 的方向_____	
	$\lambda=0$	$\lambda\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$，其方向是任意的	
运算律	分配律	$\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=$_____	
	结合律	$\lambda(\mu\boldsymbol{a})=$_____	

2. 向量共线、共面定理

	共线(平行)向量	共面向量
定义	表示空间向量的有向线段所在的直线_____，则这些向量叫做_____或平行向量	平行于_____的向量，叫做共面向量
充要条件	对于空间任意两个向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}(\boldsymbol{b}\neq\boldsymbol{0})$，$\boldsymbol{a}\parallel\boldsymbol{b}$ 的充要条件是存在实数 λ，使_____	若两个向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 不共线，则向量 $\boldsymbol{p}$ 与向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 共面的充要条件是存在唯一的有序实数对 (x,y)，使_____

题点知识巩固

知识点一 向量的数乘运算

1. 已知 A,B,C 三点不共线，O 为平面 ABC 外一点，若 $\overrightarrow{OM}=-2\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\lambda\overrightarrow{OC}$ 确定的点 M 与 A,B,C 共面，则 $\lambda=$ （ ）

A. -2　　B. 2

C. -1　　D. 1

2. 在长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，$\overrightarrow{AC_1}=x\overrightarrow{AB}-2y\overrightarrow{BC}+3z\overrightarrow{AA_1}$，则 $x+y+z$ 的值为 （ ）

A. $\frac{7}{6}$　　B. $\frac{2}{3}$

C. $\frac{5}{6}$　　D. 1

知识点二 共线问题

3. 已知向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$，且 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{BC}=-5\boldsymbol{a}+6\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{CD}=7\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}$，则一定共线的三点是 （ ）

A. A,B,D　　B. A,B,C

C. B,C,D　　D. A,C,D

4. (**2019·安徽师范大学附中期末**)在四面体 $OABC$ 中，点 M 在 OA 上，且 $OM=2MA$，N 为 BC 的中点. 若 $\overrightarrow{OG}=\frac{1}{3}\overrightarrow{OA}+\frac{x}{4}\overrightarrow{OB}+\frac{x}{4}\overrightarrow{OC}$，则使 G,M,N 三点共线的 x 的值为 （ ）

A. 1　　B. 2

C. $\frac{2}{3}$　　D. $\frac{4}{3}$

知识点三 共面问题

5. 已知 V 为矩形 $ABCD$ 所在平面外一点，且 $VA=VB=VC=VD$，$\overrightarrow{VP}=\frac{1}{3}\overrightarrow{VC}$，$\overrightarrow{VM}=\frac{2}{3}\overrightarrow{VB}$，$\overrightarrow{VN}=\frac{2}{3}\overrightarrow{VD}$，则 VA 与平面 PMN 的位置关系是_____.

6. 已知非零向量 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2$ 不共线，如果 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2$，$\overrightarrow{AC}=2\boldsymbol{e}_1+8\boldsymbol{e}_2$，$\overrightarrow{AD}=3\boldsymbol{e}_1-3\boldsymbol{e}_2$，求证：$A,B,C,D$ 共面.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

提能达标过关

一、选择题

1. 已知向量 $\boldsymbol{a}=4\boldsymbol{e}_1-\frac{2}{5}\boldsymbol{e}_2$，$\boldsymbol{b}=\boldsymbol{e}_1-\frac{1}{10}\boldsymbol{e}_2$，则　　(　　)

A. $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 一定共线

B. $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 不一定共线

C. 只有当 $\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$ 不共线时，$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 才共线

D. 只有当 $\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$ 为不共线的非零向量时，$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 才共线

2. 已知向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 是两个非零向量，$\boldsymbol{a}_0$，$\boldsymbol{b}_0$ 是与 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 同方向的单位向量，那么下列各式中正确的是　　(　　)

A. $\boldsymbol{a}_0=\boldsymbol{b}_0$　　B. $\boldsymbol{a}_0=\boldsymbol{b}_0$ 或 $\boldsymbol{a}_0=-\boldsymbol{b}_0$

C. $\boldsymbol{a}_0=1$　　D. $|\boldsymbol{a}_0|=|\boldsymbol{b}_0|$

3. 已知 O 是空间任一点，A，B，C，D 四点满足任三点均不共线，但四点共面，且 $\overrightarrow{OA}=2x\overrightarrow{BO}+3y\overrightarrow{CO}+4z\overrightarrow{DO}$，则 $2x+3y+4z=$　　(　　)

A. 1　　B. -1

C. 2　　D. -2

4. (**2019·舒兰市一中高二月考**)给出下列命题：

①若 A，B，C，D 是空间任意四点，则有 $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DA}=\boldsymbol{0}$；

②$|\boldsymbol{a}|-|\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|$ 是 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 共线的充要条件；

③若 $\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{CD}$ 共线，则 $AB/\!/CD$；

④对空间任意一点 O 与不共线的三点 A，B，C，若 $\overrightarrow{OP}=x\overrightarrow{OA}+y\overrightarrow{OB}+z\overrightarrow{OC}$(其中 x，y，$z\in\mathbf{R}$)，则 P，A，B，C 四点共面.

其中不正确命题的个数是　　(　　)

A. 1　　B. 2

C. 3　　D. 4

5. 设 M 是 $\triangle ABC$ 的重心，记 $\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{CA}=\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{c}$，则 $\overrightarrow{AM}=$　　(　　)

A. $\frac{1}{2}(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c})$　　B. $\frac{1}{2}(\boldsymbol{c}-\boldsymbol{b})$

C. $\frac{1}{3}(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c})$　　D. $\frac{1}{3}(\boldsymbol{c}-\boldsymbol{b})$

二、填空题

6. 在空间四边形 $OABC$ 中，$\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{OC}=\boldsymbol{c}$，点 M 在 OA 上，且 $OM=2MA$，N 为 BC 的中点，给出以下向量：

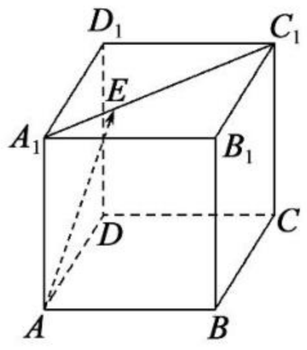
①$3\boldsymbol{a}-4\boldsymbol{b}+3\boldsymbol{c}$　　②$-4\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b}+3\boldsymbol{c}$

③$3\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b}-4\boldsymbol{c}$　　④$\frac{4}{3}\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}$

其中与 $\overrightarrow{MN}$ 平行的向量是_____(只填相应序号即可).

7. 已知 A，B，C 三点共线，则对空间任一点 O，存在三个不为零的实数 λ，m，n，使 $\lambda\overrightarrow{OA}+m\overrightarrow{OB}+n\overrightarrow{OC}=\boldsymbol{0}$，那么 $\lambda+m+n$ 的值为_____.

8. 如图，在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，$\overrightarrow{A_1E}=\frac{1}{4}\overrightarrow{A_1C_1}$，若 $\overrightarrow{AE}=x\overrightarrow{AA_1}+y(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD})$，则 $x=$_____，$y=$_____.

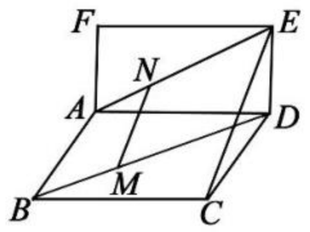


三、解答题

9. 如图所示，M，N 分别是空间四边形 $ABCD$ 的边 AB，CD 的中点. 试判断向量 $\overrightarrow{MN}$ 与向量 $\overrightarrow{AD}$，$\overrightarrow{BC}$ 是否共面.

10. 如图，已知四边形 $ABCD$ 和矩形 $ADEF$ 所在的平面互相垂直，点 M，N 分别在对角线 BD，AE 上，且 $BM=\frac{1}{3}BD$，$AN=\frac{1}{3}AE$.

求证：$MN/\!/$平面 CDE.



关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

第 20 课时 3.1.3 空间向量的数量积运算

基础知识梳理

1. 已知两个非零向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$，在空间任取一点 O，作 $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$，则_____叫做向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 的夹角，记作_____，向量夹角的范围是_____，若 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$，则 $\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=$_____.

2. 已知两个非零向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$，则_____叫做 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 的数量积，记作 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$.

3. $(\lambda\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b}=$_____，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=$_____（交换律）；$\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=$_____（分配律）.

4. 若 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 是非零向量，则 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}\Leftrightarrow\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$；$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|^2$；设 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为 θ，则 $\cos\theta=$_____.

题点知识巩固

知识点一 空间向量的数量积运算

1. 设 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 为空间非零向量，下列各式：

$①\boldsymbol{a}^2=|\boldsymbol{a}|^2$；$②\dfrac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{\boldsymbol{a}^2}=\dfrac{\boldsymbol{b}}{\boldsymbol{a}}$；$③(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})^2=\boldsymbol{a}^2\cdot\boldsymbol{b}^2$；

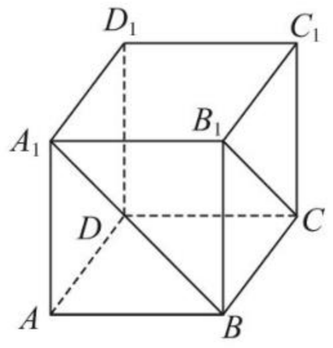
$④(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})^2=\boldsymbol{a}^2-2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}^2$.

其中正确的个数为 （ ）

A. 1 B. 2

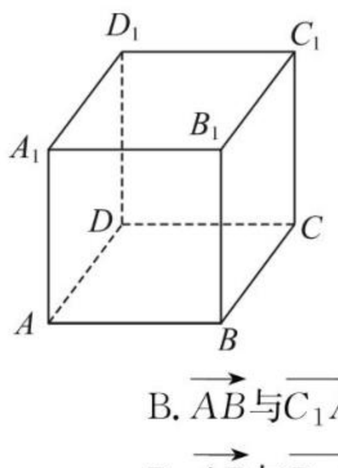
C. 3 D. 4

2. 如图，已知正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 a，则 $\overrightarrow{A_1B}\cdot\overrightarrow{B_1C}=$_____.



知识点二 利用数量积求夹角

3. 如图，在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，下列各对向量的夹角为 135°的是 （ ）



A. $\overrightarrow{AB}$ 与 $\overrightarrow{A_1C_1}$ B. $\overrightarrow{AB}$ 与 $\overrightarrow{C_1A_1}$

C. $\overrightarrow{AB}$ 与 $\overrightarrow{A_1D_1}$ D. $\overrightarrow{AB}$ 与 $\overrightarrow{B_1A_1}$

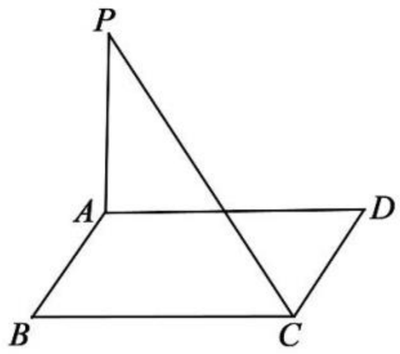
4. 已知 $|\boldsymbol{a}|=10$，$|\boldsymbol{b}|=12$，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=-60$，则向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为 （ ）

A. 60° B. 120°

C. 135° D. 150°

知识点三 利用数量积求距离

5. 如图，已知在平行四边形 $ABCD$ 中，$AD=4$，$CD=3$，$\angle D=60°$，$PA\perp$ 平面 $ABCD$，并且 $PA=6$，求 PC 的长.



知识点四 利用数量积证明垂直问题

6. 已知在空间四边形 $OABC$ 中，$\angle AOB=\angle BOC=\angle AOC$，且 $OA=OB=OC$. M,N 分别是 OA,BC 的中点，G 是 MN 的中点.

求证：$OG\perp BC$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

提能达标过关

一、选择题

1. 若 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 均为非零向量，则 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|$ 是 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 共线的　　（　　）

A. 充分不必要条件

B. 必要不充分条件

C. 充要条件

D. 既不充分也不必要条件

2. 下列命题中，正确的命题个数为　　（　　）

① $\sqrt{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}}=|\boldsymbol{a}|$；

② $m(\lambda\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b}=(m\lambda)\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}(m,\lambda\in\mathbf{R})$；

③ $\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})\cdot\boldsymbol{a}$；

④ $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})^2=\boldsymbol{a}^2+2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}^2$.

A. 1　　B. 2

C. 3　　D. 4

3. （**2019·蚌埠第二中学高二月考**）已知空间四边形 $ABCD$ 中，$\angle ACD=\angle BDC=90^\circ$，且 $AB=2$，$CD=1$，则 AB 与 CD 所成的角是　　（　　）

A. 30°　　B. 45°

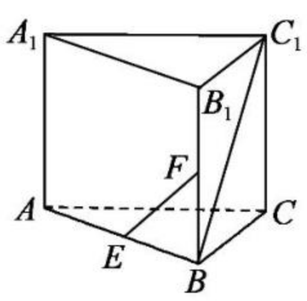
C. 60°　　D. 90°

4. 正三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的各棱长均为 2，E,F 分别是 AB,A_1C_1 的中点，则 EF 的长为　　（　　）

A. 2　　B. $\sqrt{3}$

C. $\sqrt{5}$　　D. $\sqrt{7}$

5. 如图，在直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，$AB=BC=AA_1$，$\angle ABC=90^\circ$，点 E,F 分别是棱 AB,BB_1 的中点，则直线 EF 和 BC_1 所成的角是　　（　　）

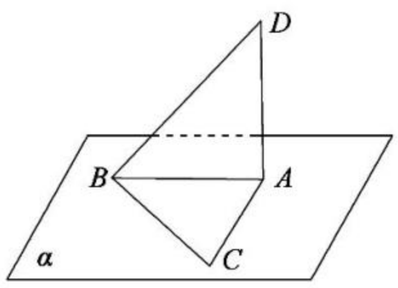


A. 45°　　B. 60°

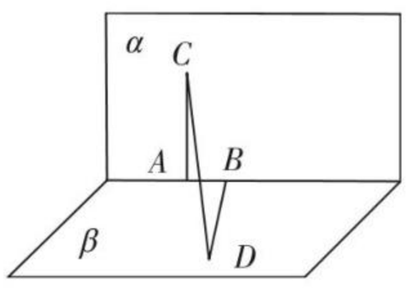
C. 90°　　D. 120°

二、填空题

6. 如图，已知 $\triangle ABC$ 在平面 α 内，$\angle BAC=90^\circ$，$DA\perp$ 平面 α，则直线 CA 与 DB 的位置关系是_____.



7. （**2019·晋中市高二期末**）如图所示，在一个直二面角 $\alpha-AB-\beta$ 的棱上有 A,B 两点，AC,BD 分别是这个二面角的两个面内垂直于 AB 的线段，且 $AB=4$，$AC=6$，$BD=8$，则 CD 的长为_____.

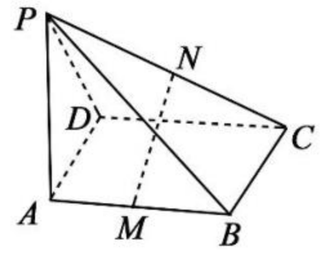


8. （**2019·鄂东南九校联考**）在四面体 $OABC$ 中，棱 OA，OB，OC 两两垂直，且 $OA=1$，$OB=2$，$OC=3$，G 为 $\triangle ABC$ 的重心，则 $\overrightarrow{OG}\cdot(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})=$_____.

三、解答题

9. （**2019·鄂东南九校联考**）已知在正四面体 $D-ABC$ 中，所有棱长都为 1，$\triangle ABC$ 的重心为 G，求 DG 的长.

10. 如图，PA 垂直于矩形 $ABCD$ 所在的平面，M,N 分别为 AB,PC 的中点.



(1) 求证：$MN\perp CD$；

(2) 若 $\angle PDA=45^\circ$，求证：$MN\perp$ 平面 PCD.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

第 21 课时 3.1.4 空间向量的正交分解及其坐标表示

基础知识梳理

1. 空间向量基本定理

定理：如果三个向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ _____，那么对空间任一向量 $\boldsymbol{p}$，存在有序实数组 $\{x,y,z\}$，使得 $\boldsymbol{p}=$_____，其中 $\{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}\}$ 叫做空间的一个_____，$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 都叫做_____.

2. 空间向量的正交分解及其坐标表示

(1)单位正交基底

三个有公共起点 O 的_____的单位向量 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3$，称为单位正交基底.

(2)空间直角坐标系

以 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3$ 的_____为原点，分别以_____的方向为 x 轴，y 轴，z 轴的正方向建立空间直角坐标系 $O-xyz$.

(3)空间向量的坐标表示

对于空间任意一个向量 $\boldsymbol{p}$，一定可以把它_____，使它的_____与原点 O 重合，得到向量 $\overrightarrow{OP}=\boldsymbol{p}$，由空间向量基本定理可知，存在有序实数组 $\{x,y,z\}$，使得 $\boldsymbol{p}=$_____，把_____称作向量 $\boldsymbol{p}$ 在单位正交基底 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3$ 下的坐标，记作_____.

题点知识巩固

知识点一 基底的概念

1. 已知向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 是不共面的三个向量，则下列选项中能构成基底的一组向量是 (　　)

A. $2\boldsymbol{a},\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b},\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}$　　B. $2\boldsymbol{b},\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}+2\boldsymbol{a}$

C. $\boldsymbol{c},\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c},\boldsymbol{a}-\boldsymbol{c}$　　D. $\boldsymbol{a},2\boldsymbol{b},\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}$

2. 若 $\{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}\}$ 构成空间的一个基底，且存在实数 x,y,z 使得 $x\boldsymbol{a}+y\boldsymbol{b}+z\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}$，则 x,y,z 应满足 (　　)

A. $x=y=z=1$　　B. $x+y+z=1$

C. $x+y+z=0$　　D. $x=y=z=0$

知识点二 用基底表示向量

3. 已知平行六面体 $OABC-O_1A_1B_1C_1$，$\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{OC}=\boldsymbol{c}$，$\overrightarrow{OO_1}=\boldsymbol{b}$，$D$ 是四边形 $OABC$ 的对角线交点，则 (　　)

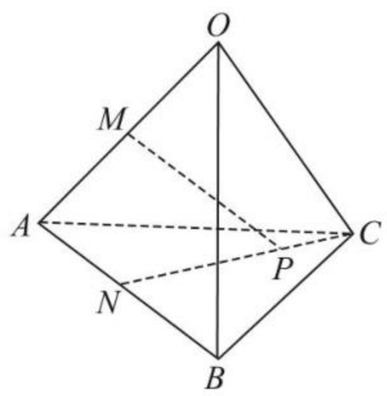
A. $\overrightarrow{O_1D}=-\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$

B. $\overrightarrow{O_1D}=-\boldsymbol{b}-\frac{1}{2}\boldsymbol{a}-\frac{1}{2}\boldsymbol{c}$

C. $\overrightarrow{O_1D}=\frac{1}{2}\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}-\frac{1}{2}\boldsymbol{c}$

D. $\overrightarrow{O_1D}=\frac{1}{2}\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}+\frac{1}{2}\boldsymbol{c}$

4. 如图所示，在空间四边形 $OABC$ 中，点 M 为 OA 的中点，N 为 AB 的中点，P 在 CN 上，且 $CP=\frac{1}{2}PN$. 若 $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{OC}=\boldsymbol{c}$，则 $\overrightarrow{MP}=$ (　　)



A. $-\frac{1}{3}\boldsymbol{a}+\frac{1}{6}\boldsymbol{b}+\frac{2}{3}\boldsymbol{c}$

B. $\frac{1}{3}\boldsymbol{a}+\frac{1}{6}\boldsymbol{b}-\frac{2}{3}\boldsymbol{c}$

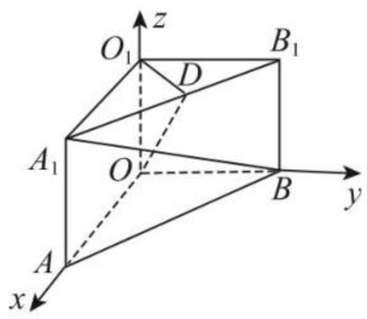
C. $-\frac{1}{3}\boldsymbol{a}-\frac{1}{6}\boldsymbol{b}+\frac{2}{3}\boldsymbol{c}$

D. $\frac{1}{3}\boldsymbol{a}-\frac{1}{6}\boldsymbol{b}+\frac{2}{3}\boldsymbol{c}$

知识点三 求向量的坐标

5. 设 $\{\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}\}$ 是空间向量的一组单位正交基底，且 $\boldsymbol{m}=2\boldsymbol{i}+3\boldsymbol{j}-4\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{n}=-\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}-3\boldsymbol{k}$，则向量 $\boldsymbol{m}$ 的坐标为_____，$\boldsymbol{n}$ 的坐标为_____.

6. 在直三棱柱 $ABO-A_1B_1O_1$ 中，$\angle AOB=\frac{\pi}{2}$，$AO=4$，$BO=2$，$AA_1=4$，D 为 A_1B_1 的中点，在如图所示的空间直角坐标系中，求 $\overrightarrow{DO}$，$\overrightarrow{A_1B}$ 的坐标.



关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

提能达标过关

一、选择题

1. 以下四个命题中正确的是　　(　　)

A. 空间的任何一个向量都可以用三个给定的向量表示

B. 若$\{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}\}$是空间的一个基底，则$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$全不是零向量

C. 若向量$\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$，则$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$与任何一个向量都不能构成空间的一个基底

D. 任何三个不共线的向量都可以构成空间的一个基底

2. 已知点A在基底$\{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}\}$下的坐标为$(8,6,4)$，基底$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j},\boldsymbol{b}=\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k},\boldsymbol{c}=\boldsymbol{k}+\boldsymbol{i}$，则点$A$在基底$\{\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}\}$下的坐标是　　(　　)

A. $(1,1,0)$　　B. $(10,12,14)$

C. $(1,0,1)$　　D. $(12,14,10)$

3. 若$\{\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3\}$是空间向量的一个基底，又$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2+\boldsymbol{e}_3$，$\boldsymbol{b}=\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2-\boldsymbol{e}_3$，$\boldsymbol{c}=\boldsymbol{e}_1-\boldsymbol{e}_2+\boldsymbol{e}_3$，$\boldsymbol{d}=\boldsymbol{e}_1+2\boldsymbol{e}_2+3\boldsymbol{e}_3$，$\boldsymbol{d}=x\boldsymbol{a}+y\boldsymbol{b}+z\boldsymbol{c}$，则$x,y,z$的值分别为　　(　　)

A. $\frac{5}{2},-1,-\frac{1}{2}$　　B. $\frac{5}{2},1,\frac{1}{2}$

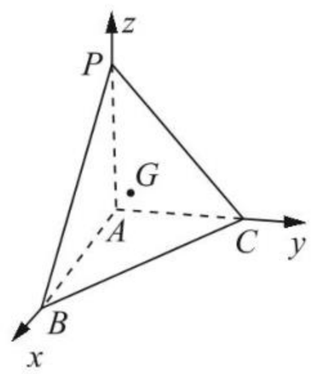
C. $-\frac{5}{2},1,-\frac{1}{2}$　　D. $\frac{5}{2},-1,\frac{1}{2}$

4. (**2019·陵川高二月考**)点P是矩形$ABCD$所在平面外一点，且$PA\perp$平面$ABCD$，M,N分别是PC,PD上的点，且$\overrightarrow{PM}=\frac{2}{3}\overrightarrow{PC}$，$\overrightarrow{PN}=\overrightarrow{ND}$，则满足$\overrightarrow{MN}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AD}+z\overrightarrow{AP}$的实数$x,y,z$的值分别为　　(　　)

A. $-\frac{2}{3},\frac{1}{6},\frac{1}{6}$　　B. $\frac{2}{3},-\frac{1}{6},\frac{1}{6}$

C. $-\frac{2}{3},\frac{1}{6},-\frac{1}{6}$　　D. $-\frac{2}{3},-\frac{1}{6},\frac{1}{6}$

5. 已知三棱锥$P-ABC$中，$PA\perp$平面ABC，$AB\perp AC$，且$PA=AB=AC=1$. 如图建立空间直角坐标系$A-xyz$. 设G为$\triangle PBC$的重心，则$\overrightarrow{BG}$的坐标为　　(　　)

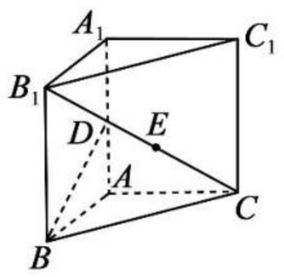


A. $\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)$　　B. $\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)$

C. $\left(\frac{2}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)$　　D. $\left(-\frac{2}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)$

二、填空题

6. 如图所示，直三棱柱$ABC-A_1B_1C_1$中，$AB\perp AC$，D,E分别为AA_1,B_1C的中点，若记$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{AA_1}=\boldsymbol{c}$，则$\overrightarrow{DE}=$_____. (用$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$表示)

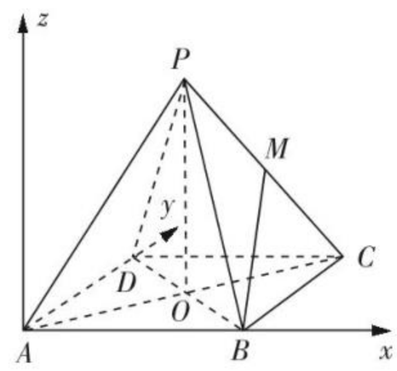


7. 已知空间一个基底$\{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}\}$，$\boldsymbol{m}=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$，$\boldsymbol{n}=x\boldsymbol{a}+y\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$，若$\boldsymbol{m}$与$\boldsymbol{n}$共线，则$x=$_____，$y=$_____.

8. 正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中，点E,F分别是底面A_1C_1和侧面CD_1的中心. 若$\overrightarrow{EF}+\lambda\overrightarrow{A_1D}=\boldsymbol{0}(\lambda\in\mathbf{R})$，则$\lambda=$_____.

三、解答题

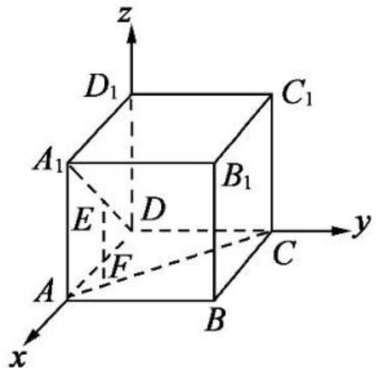
9. (**2019·孝感市七校联盟期末**)如图，在正四棱锥$P-ABCD$中，底面$ABCD$是边长为1的正方形，O是AC与BD的交点，$PO=1$，M是PC的中点. 设$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{AP}=\boldsymbol{c}$.



(1)用向量$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$表示$\overrightarrow{BM}$；

(2)在如图的空间直角坐标系中，求$\overrightarrow{BM}$的坐标.

10. 已知正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$的棱长为1，点E,F分别在线段A_1D，AC上，且$EF\perp A_1D$，$EF\perp AC$，以点D为坐标原点，DA,DC,DD_1分别作为x轴，y轴，z轴，建立空间直角坐标系$D-xyz$，如图.



(1)求向量$\overrightarrow{EF}$的坐标；

(2)求证：$EF\parallel BD_1$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

第 22 课时 3.1.5 空间向量运算的坐标表示

基础知识梳理

1. 空间向量运算的坐标表示

若 $\boldsymbol{a}=(a_1,a_2,a_3)$，$\boldsymbol{b}=(b_1,b_2,b_3)$，则：

(1)$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=$_____；

(2)$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=$_____；

(3)$\lambda\boldsymbol{a}=$_____$(\lambda\in\mathbf{R})$；

(4)$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=$_____；

(5)$\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}\Leftrightarrow\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{b}\Leftrightarrow$_____$(\lambda\in\mathbf{R})$；

(6)$\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}\Leftrightarrow\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0\Leftrightarrow$_____；

(7)$|\boldsymbol{a}|=\sqrt{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}}=$_____；

(8)$\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=\dfrac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}=$_____.

2. 空间中向量的坐标及两点间的距离公式

在空间直角坐标系中，设 $A(a_1,b_1,c_1)$，$B(a_2,b_2,c_2)$，则：

(1)$\overrightarrow{AB}=$_____；

(2)$d_{AB}=|\overrightarrow{AB}|=$_____.

题点知识巩固

知识点一 空间向量的坐标运算

1. 已知 $\boldsymbol{a}=(1,1,0)$，$\boldsymbol{b}=(0,1,1)$，$\boldsymbol{c}=(1,0,1)$，$\boldsymbol{p}=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{q}=\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}$，则 $\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{q}=$ (　　)

A. -1　　B. 1

C. 0　　D. -2

2. 已知向量 $\boldsymbol{a}=(2,-1,3)$，$\boldsymbol{b}=(0,-1,2)$，求：

(1)$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$；

(2)$2\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b}$；

(3)$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$；

(4)$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})$.

知识点二 坐标形式下的平行与垂直

3. 已知向量 $\boldsymbol{a}=\left(8,\dfrac{1}{2}x,x\right)$，$\boldsymbol{b}=(x,1,2)$，其中 $x>0$. 若 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$，则 x 的值为 (　　)

A. 8　　B. 4

C. 2　　D. 0

4. 已知向量 $\boldsymbol{a}=(1,1,0)$，$\boldsymbol{b}=(-1,0,2)$，且 $k\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 与 $2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ 互相垂直，则 k 的值为 (　　)

A. 1　　B. $\dfrac{1}{5}$

C. $\dfrac{3}{5}$　　D. $\dfrac{7}{5}$

知识点三 坐标形式下的夹角与距离

5. (**2019·鄂东南九校联考**)已知 $\boldsymbol{a}=(\cos\alpha,1,\sin\alpha)$，$\boldsymbol{b}=(\sin\alpha,1,\cos\alpha)$，则向量 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ 的夹角是_____.

6. 在棱长为 1 的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，E,F 分别是 D_1D,BD 的中点，G 在棱 CD 上，且 $CG=\dfrac{1}{4}CD$，H 是 C_1G 的中点. 利用空间向量解决下列问题：

(1)求 EF 与 B_1C 所成的角；

(2)求 EF 与 C_1G 所成角的余弦值；

(3)求 F,H 两点间的距离.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

提能达标过关

一、选择题

1. 在空间直角坐标系 $O-xyz$ 中，已知点 A 的坐标为 $(-1,2,1)$，点 B 的坐标为 $(1,3,4)$，则　　(　　)

A. $\overrightarrow{AB}=(-1,2,1)$

B. $\overrightarrow{AB}=(1,3,4)$

C. $\overrightarrow{AB}=(2,1,3)$

D. $\overrightarrow{AB}=(-2,-1,-3)$

2. 若向量 $\boldsymbol{a}=(1,1,x)$，$\boldsymbol{b}=(1,2,1)$，$\boldsymbol{c}=(1,1,1)$，满足条件 $(\boldsymbol{c}-\boldsymbol{a})\cdot 2\boldsymbol{b}=-2$，则 x 的值为　　(　　)

A. 2　　B. -2

C. 0　　D. 1

3. 设 $A(3,3,1)$，$B(1,0,5)$，$C(0,1,0)$，则 AB 的中点 M 到 C 的距离 $|CM|$ 的值为　　(　　)

A. $\frac{\sqrt{53}}{2}$　　B. $\frac{\sqrt{13}}{2}$

C. $\frac{\sqrt{53}}{4}$　　D. $\frac{53}{2}$

4. 向量 $\boldsymbol{a}=(-2,-3,1)$，$\boldsymbol{b}=(2,0,4)$，$\boldsymbol{c}=(-4,-6,2)$，下列结论正确的是　　(　　)

A. $\boldsymbol{a}\parallel\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$　　B. $\boldsymbol{a}\parallel\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{c}$

C. $\boldsymbol{a}\parallel\boldsymbol{c}$，$\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$　　D. 以上都不对

5. 已知 $A(1,2,3)$，$B(2,1,2)$，$C(1,1,2)$，O 为坐标原点，点 D 在直线 OC 上运动，则当 $\overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{DB}$ 取最小值时，点 D 的坐标为　　(　　)

A. $\left(\frac{4}{3},\frac{4}{3},\frac{4}{3}\right)$　　B. $\left(\frac{8}{3},\frac{4}{3},\frac{8}{3}\right)$

C. $\left(\frac{4}{3},\frac{4}{3},\frac{8}{3}\right)$　　D. $\left(\frac{8}{3},\frac{8}{3},\frac{4}{3}\right)$

二、填空题

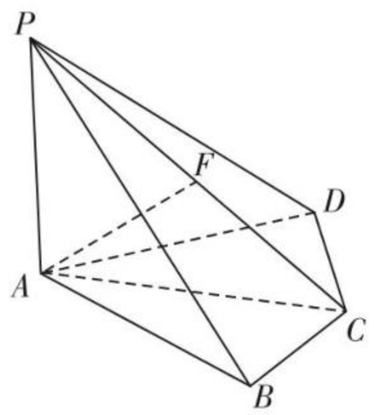
6. (**2019·泉州市泉港区一中期末**)设向量 $\boldsymbol{a}=(1,-2,2)$，$\boldsymbol{b}=(-3,x,4)$，已知 $\boldsymbol{a}$ 在 $\boldsymbol{b}$ 上的投影为 1，则 $x=$_____.

7. 已知向量 $\overrightarrow{OA}=(k,12,1)$，$\overrightarrow{OB}=(4,5,1)$，$\overrightarrow{OC}=(-k,10,1)$，且 A,B,C 三点共线，则 $k=$_____.

8. 已知 $\boldsymbol{a}=(3,-2,-3)$，$\boldsymbol{b}=(-1,x-1,1)$，且 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为钝角，则 x 的取值范围是_____.

三、解答题

9. (**2019·张家口市高二期末**)如图，四棱锥 $P-ABCD$ 中，$PA\perp$ 底面 $ABCD$，$BC=CD=2$，$AC=4$，$\angle ACB=\angle ACD=\frac{\pi}{3}$，$F$ 为 PC 的中点，$AF\perp PB$. 求 PA 的长.



10. (**2019·广州市仲元中学高二期中**)已知正三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$，底面边长 $AB=2$，$AB_1\perp BC_1$，点 O,O_1 分别是边 AC,A_1C_1 的中点.

(1)求三棱柱的侧棱长；

(2)求异面直线 AB_1 与 BC 所成角的余弦值.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

3.2 立体几何中的向量方法

第 23 课时 空间向量与平行关系

基础知识梳理

利用向量解决平行问题

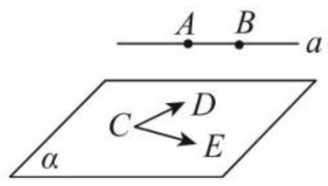
1. 设 a,b 是两条不重合的直线,它们的方向向量分别为 $\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$,那么 $a\parallel b\Leftrightarrow$_____.根据实数与向量积的定义:$\boldsymbol{a}\parallel\boldsymbol{b}\Leftrightarrow$_____.

2. 平面与平面平行可以转化为两个平面的法向量平行:设两个不重合的平面 α,β 的法向量分别为 $\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$,那么 $\alpha\parallel\beta\Leftrightarrow$_____.

3. **直线与平面平行**

(1)证明直线的方向向量与平面的法向量垂直:设直线 l 在平面 α 外,$\boldsymbol{a}$ 是 l 的一个方向向量,$\boldsymbol{b}$ 是平面 α 的一个法向量,那么 $l\parallel\alpha\Leftrightarrow$_____$\Leftrightarrow$_____.$\boldsymbol{a}\parallel$平面 $\alpha\Leftrightarrow$表示以 $\boldsymbol{a}$ 为方向向量的直线与 α 平行或在平面 α 内,因此也可用向量证明线面平行.

(2)已知直线 $a\not\subset\alpha$,A,$B\in a$,C,D,$E\in\alpha$,且 C,D,E 三点不共线,则 $a\parallel\alpha$ 的充要条件是存在有序实数对 λ,μ 使 $\overrightarrow{AB}=\lambda\overrightarrow{CD}+\mu\overrightarrow{CE}$(常先设 $\overrightarrow{AB}=\lambda\overrightarrow{CD}+\mu\overrightarrow{CE}$,再求解 λ,μ 的值.若 λ,μ 存在即证完;若 λ,μ 不存在,则直线 AB 与平面 α 相交).



题点知识巩固

知识点一 直线的方向向量,平面的法向量

1. 若点 $A\left(-\frac{1}{2},0,\frac{1}{2}\right)$,$B\left(\frac{1}{2},2,\frac{7}{2}\right)$ 在直线 l 上,则直线 l 的一个方向向量为 (　　)

A. $\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3},1\right)$　　B. $\left(\frac{1}{3},1,\frac{2}{3}\right)$

C. $\left(\frac{2}{3},\frac{1}{3},1\right)$　　D. $\left(1,\frac{2}{3},\frac{1}{3}\right)$

2. 已知 $\overrightarrow{AB}=(2,2,1)$,$\overrightarrow{AC}=(4,5,3)$,则平面 ABC 的一个法向量可以表示为 (　　)

A. $\boldsymbol{a}=(-1,2,2)$　　B. $\boldsymbol{a}=(1,-2,2)$

C. $\boldsymbol{a}=(1,2,2)$　　D. $\boldsymbol{a}=(-1,-2,2)$

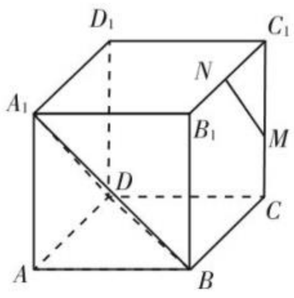
知识点二 证明线面平行

3. 直线 l 的方向向量 $\boldsymbol{v}=(-1,1,1)$,平面 α 的法向量 $\boldsymbol{n}=(2,x^2+x,-x)$,若 $l\parallel\alpha$,则 x 的值是 (　　)

A. $\sqrt{2}$　　B. $-\sqrt{2}$

C. 2　　D. $\pm\sqrt{2}$

4. 如图所示,在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中,M,N 分别是 C_1C,B_1C_1 的中点.求证:$MN\parallel$平面 A_1BD.



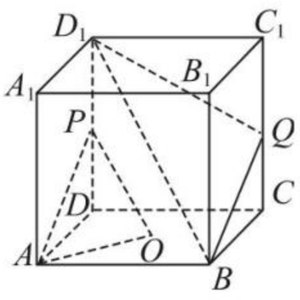
知识点三 证明面面平行

5. 若平面 α 的法向量 $\boldsymbol{m}=(1,2,-1)$,平面 β 的法向量 $\boldsymbol{n}=(-3,-6,3)$,则 α 与 β 的关系为 (　　)

A. $\alpha\parallel\beta$　　B. α 与 β 相交但不垂直

C. $\alpha\perp\beta$　　D. 以上均有可能

6. 如右图所示,O 是正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的底面中心,P 是 DD_1 的中点,Q 点在 CC_1 上,问:当点 Q 在 CC_1 的什么位置时,平面 $BD_1Q\parallel$平面 APO?



关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

提能达标过关

一、选择题

1. 空间直角坐标系中，$A(1,2,3)$，$B(-1,0,5)$，$C(3,0,4)$，$D(4,1,3)$，则直线 AB 与 CD 的位置关系是　　（　　）

A. 平行　　B. 垂直

C. 相交但不垂直　　D. 无法确定

2. 设平面 α 的法向量为 $\boldsymbol{m}$，直线 l 的方向向量为 $\boldsymbol{n}$，若 $\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}=0$，则 l 与 α 的关系是　　（　　）

A. $l\parallel\alpha$　　B. $l\subset\alpha$

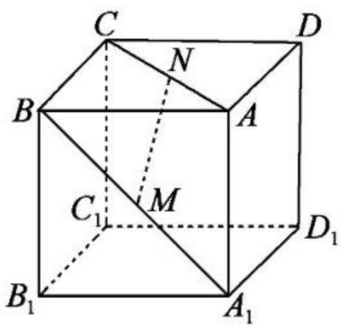
C. $l\perp\alpha$　　D. $l\subset\alpha$ 或 $l\parallel\alpha$

3. 如果直线 l 的方向向量是 $\boldsymbol{a}=(-2,0,1)$，平面 α 的法向量是 $\boldsymbol{b}=(-4,0,2)$，那么　　（　　）

A. $l\perp\alpha$　　B. $l\parallel\alpha$

C. $l\subset\alpha$　　D. l 与 α 斜交

4. 如图所示，在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，棱长为 a，M，N 分别为 A_1B，AC 的中点，则 MN 与平面 B_1BCC_1 的位置关系是　　（　　）



A. 相交

B. 平行

C. 垂直

D. 不能确定

5. 给定下列命题：

①若 $\boldsymbol{n}_1$，$\boldsymbol{n}_2$ 分别是平面 α，β 的法向量，则 $\boldsymbol{n}_1\parallel\boldsymbol{n}_2\Leftrightarrow\alpha\parallel\beta$；

②若 $\boldsymbol{n}_1$，$\boldsymbol{n}_2$ 分别是平面 α，β 的法向量，则 $\alpha\parallel\beta\Leftrightarrow\boldsymbol{n}_1\cdot\boldsymbol{n}_2=0$；

③若 $\boldsymbol{n}$ 是平面 α 的法向量，且向量 $\boldsymbol{a}$ 与平面 α 共面，则 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{n}=0$；

④若两个平面的法向量不垂直，则这两个平面一定不垂直.

其中正确命题的个数是　　（　　）

A. 1　　B. 2

C. 3　　D. 4

二、填空题

6. 已知直线 l 与平面 α 垂直，l 的一个方向向量为 $\boldsymbol{m}=(1,3,x)$，向量 $\boldsymbol{n}=(3,-2,1)$ 与平面 α 平行，则 $x=$_____.

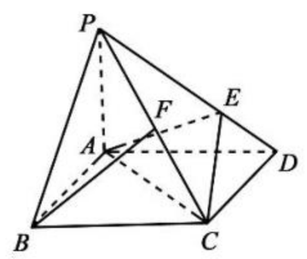
7. 在直三角棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，以下向量可以作为平面 ABC 法向量的是_____（填序号）.

①$\overrightarrow{AB}$；②$\overrightarrow{AA_1}$；③$\overrightarrow{B_1B}$；④$\overrightarrow{A_1C_1}$.

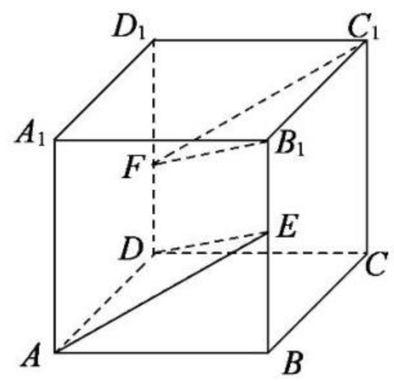
8. 已知 $\overrightarrow{AB}=(1,5,-2)$，$\overrightarrow{BC}=(3,1,2)$，$\overrightarrow{DE}=(x,-3,6)$，若 $DE\parallel$ 平面 ABC，则 $x=$_____.

三、解答题

9. 如图所示，在底面是菱形的四棱锥 $P-ABCD$ 中，$\angle ABC=60^\circ$，$PA\perp$ 平面 $ABCD$，$PA=AC=a$，$PB=PD=\sqrt{2}a$，点 E 在 PD 上，且 $PE:ED=2:1$. 在棱 PC 上是否存在一点 F，使 $BF\parallel$ 平面 ACE？并证明你的结论.



10. 如图，正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 2，E，F 分别是 BB_1，DD_1 的中点，求证：



(1) $FC_1\parallel$ 平面 ADE；

(2) 平面 $ADE\parallel$ 平面 B_1C_1F.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

第 24 课时 空间向量与垂直关系

基础知识梳理

利用向量解决垂直问题

1. 设 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 分别为直线 a,b 的方向向量，那么 $a\perp b\Leftrightarrow\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}\Leftrightarrow$ _____.

2. 设 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 分别为平面 α,β 的法向量，那么 $\alpha\perp\beta\Leftrightarrow\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}\Leftrightarrow$ _____.

3. 设直线 l 的方向向量为 $\boldsymbol{a}$，平面 α 的法向量为 $\boldsymbol{b}$，那么 $l\perp\alpha\Leftrightarrow$ _____. 此外，也可证明 l 的方向向量与平面 α 内两条相交直线所对应的方向向量垂直.

题点知识巩固

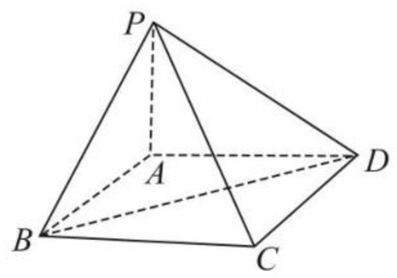
知识点一 利用空间向量证明线线垂直

1. 直线 a 和 b 的方向向量分别为 $\boldsymbol{m}=(1,2,-2)$，$\boldsymbol{n}=(-2,3,x)$，若 $a\perp b$，则 x 的值为 ( )

A. 1　　B. 2

C. 3　　D. 4

2. 如图所示，在四棱锥 $P-ABCD$ 中，底面 $ABCD$ 为正方形，$PA\perp$ 平面 $ABCD$，求证：$BD\perp PC$.



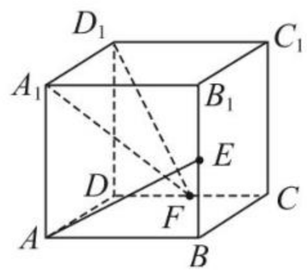
知识点二 利用空间向量证明线面垂直

3. (**2019·广州市仲元中学高二期中**) 已知 $\overrightarrow{AB}=(2,2,1)$，$\overrightarrow{AC}=(4,5,3)$，则平面 ABC 的一个单位法向量为 ( )

A. $\left(-\frac{1}{3},-\frac{2}{3},-\frac{2}{3}\right)$　　B. $\left(-\frac{1}{3},\frac{2}{3},-\frac{2}{3}\right)$

C. $\left(-\frac{1}{3},\frac{2}{3},\frac{2}{3}\right)$　　D. $\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3},\frac{2}{3}\right)$

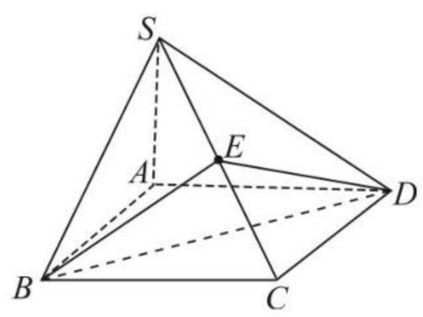
4. 如图所示，在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，E,F 分别是 B_1B,DC 的中点，求证：$AE\perp$ 平面 A_1D_1F.



知识点三 利用空间向量证明面面垂直

5. 已知 $\boldsymbol{a}=(0,1,1)$，$\boldsymbol{b}=(1,-1,1)$，$\boldsymbol{c}=(1,0,1)$ 分别是平面 α,β,γ 的法向量，则 α,β,γ 三个平面中互相垂直的有 _____.

6. 如图所示，底面 $ABCD$ 是正方形，$AS\perp$ 底面 $ABCD$，且 $AS=AB$，E 是 SC 的中点. 求证：平面 $BDE\perp$ 平面 $ABCD$.



关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

提能达标过关

一、选择题

1. 下列说法中不正确的是（　　）

A. 平面 α 的法向量垂直于与平面 α 共面的所有向量

B. 一个平面的所有法向量互相平行

C. 如果两个平面的法向量垂直，那么这两个平面也垂直

D. 如果 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 与平面 α 共面，且 $\boldsymbol{n}\perp\boldsymbol{a},\boldsymbol{n}\perp\boldsymbol{b}$，那么 $\boldsymbol{n}$ 就是平面 α 的一个法向量

2. 已知平面 α 的一个法向量为 $\boldsymbol{a}=(x,1,-2)$，直线 l 的一个方向向量为 $\boldsymbol{n}=\left(\frac{1}{2},y,-1\right)$，若 $l\perp\alpha$，则（　　）

A. $x+2y=-4$　　B. $x+y=3$

C. $x+2y=\frac{1}{2}$　　D. $x+y=\frac{3}{2}$

3. 设 A 是空间一定点，$\boldsymbol{n}$ 为空间内任一非零向量，则满足 $\overrightarrow{AM}\cdot\boldsymbol{n}=0$ 的点 M 构成的图形是（　　）

A. 圆　　B. 圆面

C. 直线　　D. 平面

4. 在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，若 E 为 A_1C_1 的中点，则 CE 垂直于（　　）

A. BD　　B. AC

C. A_1C　　D. AA_1

5. 设棱长为 a 的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，点 P 为棱 DD_1 所在直线上一点，且满足 $B_1D\perp$ 平面 PAC，则点 P 为（　　）

A. 棱 DD_1 的中点　　B. 点 D_1

C. DD_1 的延长线上一点　　D. 不存在

二、填空题

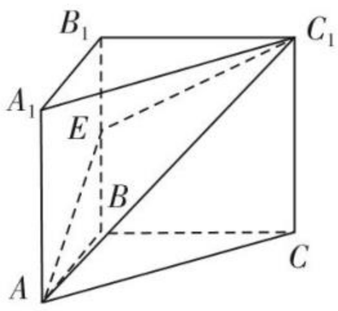
6. 若直线 a 与 b 是两条异面直线，它们的方向向量分别为 $\boldsymbol{a}=(1,1,-1)$ 和 $\boldsymbol{b}=(2,-3,2)$. 又 a 与 b 的公垂线的方向向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,5)$，则 $xy=$_____.

7. 已知 A,B,C 的坐标分别为 $(0,1,0),(-1,0,1),(2,1,1)$，点 P 的坐标为 $(x,0,z)$，若 $\overrightarrow{PA}\perp\overrightarrow{AB},\overrightarrow{PA}\perp\overrightarrow{AC}$，则 $\overrightarrow{PA}=$_____.

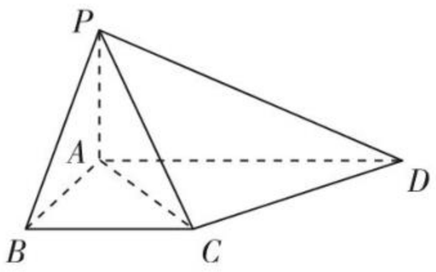
8. 已知平面 α 内有一点 $M(1,-1,2)$，平面 α 的一个法向量 $\boldsymbol{n}=(6,-3,6)$，则点 $P(2,3,3)$ 与平面 α 的关系是_____.

三、解答题

9. （**2019·蚌埠第二中学高二月考**）如图所示，在直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，$AB\perp BC$，$AB=BC=2$，$BB_1=1$，E 为 BB_1 的中点，证明：平面 $AEC_1\perp$ 平面 AA_1C_1C.



10. （**2019·上高县第二中学高二月考**）如图，在四棱锥 $P-ABCD$ 中，底面 $ABCD$ 为直角梯形，且 $AD/\!/BC$，$\angle ABC=\angle PAD=90^\circ$，侧面 $PAD\perp$ 底面 $ABCD$. 若 $PA=AB=BC=\frac{1}{2}AD$.



(1) 求证：$CD\perp$ 平面 PAC；

(2) 侧棱 PA 上是否存在点 E，使得 $BE/\!/$ 平面 PCD？若存在，指出点 E 的位置并证明，若不存在，请说明理由.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

第 25 课时 空间向量与空间角

基础知识梳理

1. 设两异面直线所成的角为 θ，它们的方向向量分别为 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，则 $\cos\theta=$_____.

2. 设直线 l 与平面 α 所成的角为 θ，直线 l 的方向向量为 $\boldsymbol{a}$，平面 α 的法向量为 $\boldsymbol{n}$，则 $\sin\theta=|\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{n}\rangle|=$_____.

3. 设二面角 $\alpha-l-\beta$ 的平面角为 θ，平面 α，β 的法向量分别为 $\boldsymbol{n}_1$，$\boldsymbol{n}_2$，则 $|\cos\theta|=$_____.

题点知识巩固

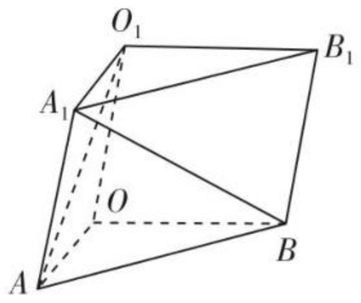
知识点一 异面直线所成的角

1. 若两条异面直线 l_1 与 l_2 的方向向量分别为 $\boldsymbol{a}=(0,4,-3)$，$\boldsymbol{b}=(1,2,0)$，则直线 l_1 与 l_2 的夹角的余弦值为 （ ）

A. $\frac{\sqrt{3}}{2}$　　B. $\frac{8\sqrt{5}}{25}$

C. $\frac{4\sqrt{3}}{15}$　　D. $\frac{\sqrt{3}}{3}$

2. （**2019·河北省张家口市高二期末**）如图，在三棱柱 $OAB-O_1A_1B_1$ 中，平面 $OBB_1O_1\perp$ 平面 OAB，$\angle O_1OB=60^\circ$，$\angle AOB=90^\circ$，且 $OB=OO_1=2$，$OA=\sqrt{3}$，求异面直线 A_1B 与 AO_1 所成角的余弦值的大小.



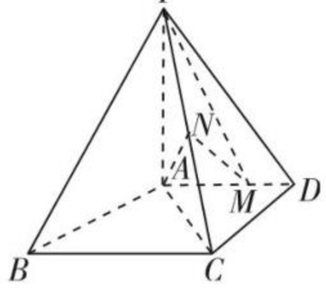
知识点二 直线与平面所成的角

3. 平面 α 的斜线 l 与它在这个平面上射影 l' 的方向向量分别为 $\boldsymbol{a}=(1,0,1)$，$\boldsymbol{b}=(0,1,1)$，则斜线 l 与平面 α 所成的角为 （ ）

A. 30°　　B. 45°

C. 60°　　D. 90°

4. （**2019·吉林省实验中学高二期中**）如图，四棱锥 $P-ABCD$ 中，$PA\perp$ 底面 $ABCD$，$AD/\!/BC$，$AB=AD=AC=3$，$PA=BC=4$，M 为线段 AD 上一点，$AM=2MD$，N 为 PC 的中点.



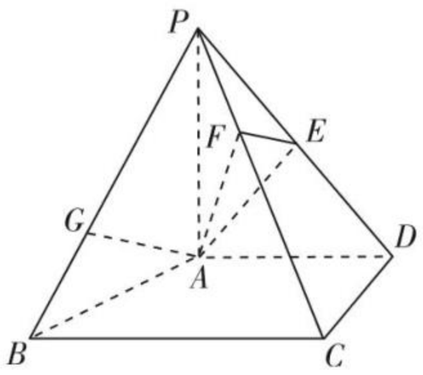
(1)证明：$MN/\!/$平面 PAB；

(2)求直线 AN 与平面 PMN 所成角的正弦值.

知识点三 二面角

5. 若一个平面角为锐角的两个平面分别与向量 $\boldsymbol{m}=(-1,2,0)$，$\boldsymbol{n}=(3,0,-1)$ 平行，且 $\boldsymbol{m}$，$\boldsymbol{n}$ 都与一二面角的棱垂直，则该二面角的余弦值为_____.

6. （**2019·北京卷**）如图，在四棱锥 $P-ABCD$ 中，$PA\perp$ 平面 $ABCD$，$AD\perp CD$，$AD/\!/BC$，$PA=AD=CD=2$，$BC=3$. E 为 PD 的中点，点 F 在 PC 上，且 $\frac{PF}{PC}=\frac{1}{3}$.



(1)求证：$CD\perp$平面 PAD；

(2)求二面角 $F-AE-P$ 的余弦值；

(3)设点 G 在 PB 上，且 $\frac{PG}{PB}=\frac{2}{3}$. 判断直线 AG 是否在平面 AEF 内，说明理由.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

提能达标过关

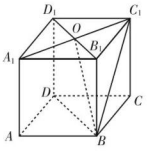
一、选择题

1. 设两条异面直线所成的角为 θ，则它们方向向量的夹角与 θ （　　）

A. 相等　　B. 互补

C. 互余　　D. 相等或互补

2. 如图，在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，BC_1 与对角面 BB_1D_1D 所成的角是 （　　）



A. $\angle C_1BB_1$

B. $\angle C_1BD$

C. $\angle C_1BD_1$

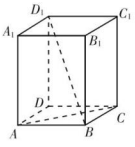
D. $\angle C_1BO$

3. 已知两平面的法向量分别为 $\boldsymbol{u}=(0,1,0)$，$\boldsymbol{v}=(0,1,1)$，则两平面所成的二面角为 （　　）

A. $45°$　　B. $135°$

C. $45°$ 或 $135°$　　D. $90°$

4. 如图，在长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，$AB=2$，$BC=2$，$DD_1=3$，则 AC 与 BD_1 所成角的余弦值为 （　　）



A. 0

B. $\frac{3}{70}\sqrt{70}$

C. $-\frac{3}{70}\sqrt{70}$

D. $\frac{\sqrt{70}}{70}$

5. 在直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，$\angle BCA=90°$，M，N 分别是 A_1B_1，A_1C_1 的中点，$BC=CA=CC_1$，则 BM 与 AN 所成角的余弦值为 （　　）

A. $\frac{1}{10}$　　B. $\frac{2}{5}$

C. $\frac{\sqrt{30}}{10}$　　D. $\frac{\sqrt{2}}{2}$

二、填空题

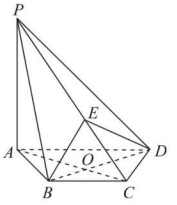
6. 若一个平面的法向量 $\boldsymbol{n}=(3,3,0)$，直线 l 的一个方向向量为 $\boldsymbol{v}=(1,1,1)$，则 l 与 α 所成角的余弦值为_____.

7. 向量 $\boldsymbol{a}=(0,-1,3)$，$\boldsymbol{b}=(2,2,4)$ 分别在二面角的两个半平面内，且都与二面角的棱垂直，则这个二面角的余弦值为_____.

8. 正三角形 ABC 与正三角形 BCD 所在平面垂直，则二面角 $A-BD-C$ 的正弦值为_____.

三、解答题

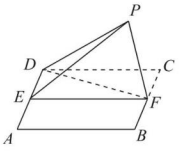
9. 如图，在四棱锥 $P-ABCD$ 中，$PA\perp$ 平面 $ABCD$，$AC\perp BD$ 于 O，E 为线段 PC 上一点，且 $AC\perp BE$.



(1) 求证：$PA\parallel$ 平面 BED；

(2) 若 $BC\parallel AD$，$BC=\sqrt{2}$，$AD=2\sqrt{2}$，$PA=3$ 且 $AB=CD$，求 PB 与面 PCD 所成角的正弦值.

10. (**2018 · 全国卷Ⅰ**) 如图，四边形 $ABCD$ 为正方形，E，F 分别为 AD，BC 的中点，以 DF 为折痕把 $\triangle DFC$ 折起，使点 C 到达点 P 位置，且 $PF\perp BF$.



(1) 证明：平面 $PEF\perp$ 平面 $ABFD$；

(2) 求 DP 与平面 $ABFD$ 所成角的正弦值.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

第 26 课时 空间向量与空间距离

基础知识梳理

1. 空间两点间的距离

设 $A(x_1,y_1,z_1)$，$B(x_2,y_2,z_2)$，则 $|AB|=|\overrightarrow{AB}|=$ _____.

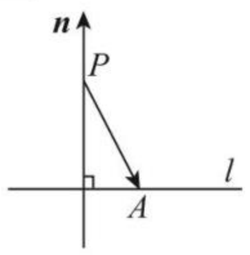
特别地，$|OA|=|\overrightarrow{OA}|=$ _____.

（其中 O 为坐标原点）

2. 点到直线的距离

(1)点 P 到直线 l 的距离，即由点 P 向 l 作垂线，所得垂线段的长，可通过解三角形获得.

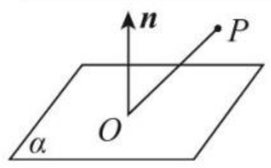
(2)如图，已知点 $P\notin l$，$A\in l$，向量 $\boldsymbol{n}\perp l$，则 P 到 l 的距离 $d=$ _____.



3. 点到平面的距离

(1)点 P 到平面 α 的距离，即为由 P 点向平面 α 作垂线所得垂线段的长，可通过解三角形或等体积法求解.

(2)如图，设 $P\notin\alpha$，$O\in\alpha$，$\boldsymbol{n}$ 为平面 α 的一个法向量，则 P 到平面 α 的距离 $d=$ _____.



题点知识巩固

知识点一 两点间的距离

1. 设一地球仪的球心为空间直角坐标系的原点 O，球面上有两个点 A，B 的坐标分别为 $A(1,2,2)$，$B(2,-2,1)$，则 $|AB|=$ （ ）

A. 18　　B. 12　　C. $3\sqrt{2}$　　D. $2\sqrt{3}$

2. 设 P 是 60°的二面角 $\alpha-l-\beta$ 内一点，$PA\perp$ 平面 α，$PB\perp$ 平面 β，A，B 为垂足，$PA=4$，$PB=2$，则 $|AB|$ 的长为 （ ）

A. $2\sqrt{3}$　　B. $2\sqrt{5}$

C. $2\sqrt{7}$　　D. $4\sqrt{2}$

知识点二 点到直线的距离

3. 在 $\triangle ABC$ 中，$AB=AC=5$，$BC=6$，$PA\perp$ 平面 ABC，$PA=8$，则点 P 到 BC 的距离是 （ ）

A. $\sqrt{5}$　　B. $2\sqrt{5}$

C. $3\sqrt{5}$　　D. $4\sqrt{5}$

4. 已知向量 $\boldsymbol{n}=(1,0,-1)$ 与直线 l 垂直，且 l 经过点 $A(2,3,1)$，则点 $P(4,3,2)$ 到 l 的距离为 （ ）

A. $\frac{3}{2}$　　B. $\frac{\sqrt{2}}{2}$

C. $\sqrt{2}$　　D. $\frac{3\sqrt{2}}{2}$

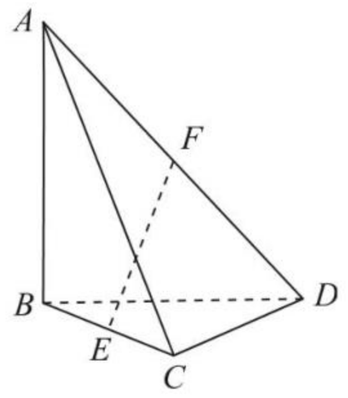
知识点三 点到平面的距离

5. (**2019·银川一中高二期中**)已知四棱锥 $P-ABCD$ 中，$\overrightarrow{AB}=(4,-2,3)$，$\overrightarrow{AD}=(-4,1,0)$，$\overrightarrow{AP}=(-6,2,-8)$，则点 P 到底面 $ABCD$ 的距离为 （ ）

A. $\frac{\sqrt{26}}{13}$　　B. $\frac{\sqrt{26}}{26}$

C. 1　　D. 2

6. 如图，在四面体 $ABCD$ 中，AB，BC，BD 两两垂直，$AB=BC=BD=4$，E，F 分别为棱 BC，AD 的中点.



(1)求异面直线 AB 与 EF 所成角的余弦值；

(2)求点 E 到平面 ACD 的距离；

(3)求 EF 与平面 ACD 所成角的正弦值.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

提能达标过关

一、选择题

1. 在空间直角坐标系中，已知点 $A(2,3,4)$，$B(-2,1,0)$，$C(1,1,1)$，那么点 C 到 AB 中点 M 的距离为　　(　　)

A. 1　　B. $\sqrt{3}$

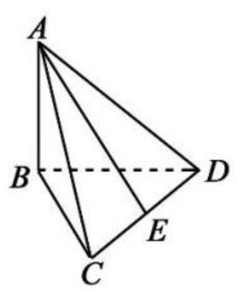
C. 2　　D. $\sqrt{5}$

2. 已知平面 α 的一个法向量 $\boldsymbol{n}=(-2,-2,1)$，点 $A(-1,3,0)$ 在平面 α 内，则点 $P(-2,1,4)$ 到平面 α 的距离是　　(　　)

A. $\frac{10}{3}$　　B. $\frac{8}{3}$

C. 3　　D. 10

3. 如图所示，在几何体 $A-BCD$ 中，$AB\perp$ 面 BCD，$BC\perp CD$，且 $AB=BC=1$，$CD=2$，点 E 为 CD 中点，则 AE 的长为　　(　　)



A. $\sqrt{2}$　　B. $\sqrt{3}$

C. 2　　D. $\sqrt{5}$

4. 若正四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的底面边长为 1，AB_1 与底面 $ABCD$ 成 60° 角，则 A_1C_1 到底面 $ABCD$ 的距离为　　(　　)

A. $\frac{\sqrt{3}}{3}$　　B. 1

C. $\sqrt{2}$　　D. $\sqrt{3}$

5. 在棱长为 2 的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，点 E，F 分别是棱 AB，BC 的中点，则点 C_1 到平面 B_1EF 的距离是　　(　　)

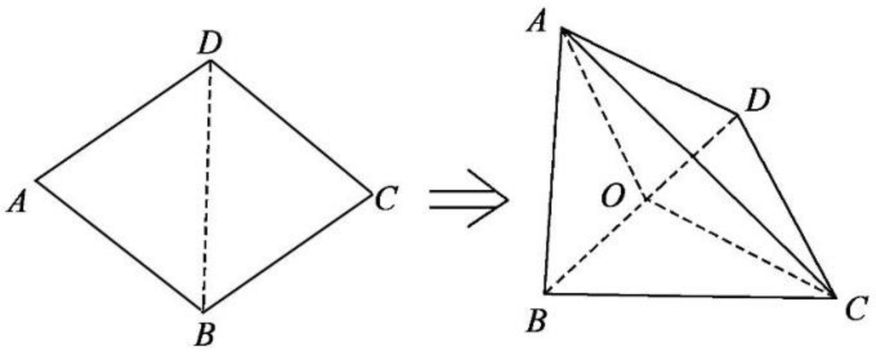
A. $\frac{2\sqrt{3}}{3}$　　B. $\frac{2\sqrt{2}}{3}$

C. $\frac{2}{3}$　　D. $\frac{4}{3}$

二、填空题

6. 设正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 2，则点 D_1 到平面 A_1BD 的距离是_____.

7. 如图，在边长为 2 的菱形 $ABCD$ 中，$\angle A=60^\circ$，将菱形沿 BD 折成一个 120° 的二面角 $A-BD-C$，则 A 与 C 两点间的距离为_____.



8. 在长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，$AB=4$，$BC=3$，$CC_1=2$，则平面 A_1BC_1 与平面 ACD_1 的距离是_____.

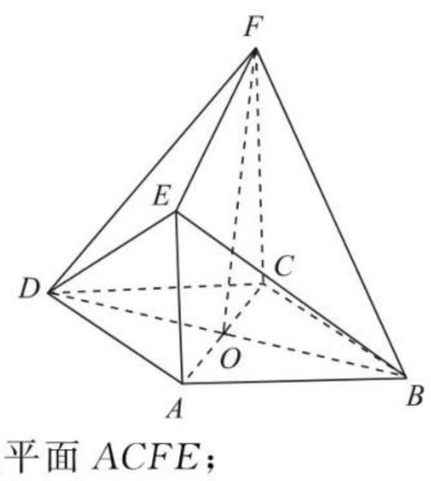
三、解答题

9. 已知正方形 $ABCD$ 的边长为 1，$PD\perp$ 平面 $ABCD$，且 $PD=1$，E，F 分别是 AB，BC 的中点.

(1) 求点 D 到平面 PEF 的距离；

(2) 求直线 AC 到平面 PEF 的距离.

10. 如图，菱形 $ABCD$ 中，$\angle ABC=60^\circ$，AC 与 BD 相交于点 O，$AE\perp$ 平面 $ABCD$，$CF/\!/AE$，$AB=AE=2$.



(1) 求证：$BD\perp$ 平面 $ACFE$；

(2) 当直线 FO 与平面 BED 所成角的大小为 45° 时，求 CF 的长度.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

阶段评估 4

（时间：60 分钟 满分：100 分）

一、选择题（每小题 5 分，共 30 分）

1. 已知向量$\overrightarrow{AB}=(2,3,4)$，点 A 的坐标是$(1,2,0)$，则点 B 的坐标是（　　）

A. $(1,1,4)$　　B. $(3,5,4)$

C. $(-1,1,-4)$　　D. $(3,6,3)$

2. 若平面 $\alpha\parallel\beta$，则下面可以是这两个平面法向量的是（　　）

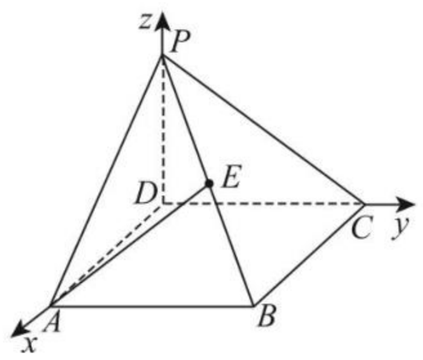
A. $\boldsymbol{n}_1=(1,2,3)$，$\boldsymbol{n}_2=(-3,2,1)$

B. $\boldsymbol{n}_1=(1,2,3)$，$\boldsymbol{n}_2=(-2,2,1)$

C. $\boldsymbol{n}_1=(1,1,1)$，$\boldsymbol{n}_2=(-2,2,0)$

D. $\boldsymbol{n}_1=(1,1,1)$，$\boldsymbol{n}_2=(-2,-2,-2)$

3. 如图所示，PD 垂直于正方形 $ABCD$ 所在的平面，$AB=2$，E 为 PB 的中点，$\cos\langle\overrightarrow{DP},\overrightarrow{AE}\rangle=\frac{\sqrt{3}}{3}$，若以 DA，DC，DP 所在的直线分别为 x，y，z 轴，建立空间直角坐标系，则点 E 的坐标为（　　）



A. $(1,0,1)$　　B. $(1,1,1)$

C. $(2,1,1)$　　D. $(2,0,1)$

4. 已知 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(2,\sqrt{2},2\sqrt{3})$，$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=(0,\sqrt{2},0)$，则 $\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=$（　　）

A. $\frac{\sqrt{6}}{3}$　　B. $\frac{\sqrt{6}}{6}$

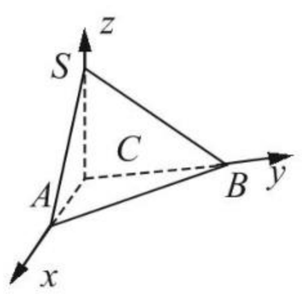
C. $\frac{1}{3}$　　D. $\frac{1}{6}$

5. 如果平面的一条斜线和它在平面上的射影的方向向量分别是 $\boldsymbol{a}=(0,2,1)$，$\boldsymbol{b}=(\sqrt{2},\sqrt{5},\sqrt{5})$，那么这条斜线与平面的夹角是（　　）

A. $90°$　　B. $60°$

C. $45°$　　D. $30°$

6. 在三棱锥 $S-ABC$ 中，CS，CA，CB 两两垂直，$CA=CB=3$，$CS=2$，在如图所示的坐标系中，下列向量中是平面 SAB 的一个法向量的是（　　）



A. $\left(-\frac{2}{3},\frac{2}{3},1\right)$

B. $\left(\frac{2}{3},\frac{2}{3},1\right)$

C. $\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2},0\right)$

D. $(-2,2,1)$

二、填空题（每小题 5 分，共 20 分）

7. 已知 AB，BC，CD 为两两垂直的三条线段，且它们的长度都为 2，则 AD 的长为_____.

8. 若直线 l 的方向向量 $\boldsymbol{a}=(-2,3,1)$，平面 α 的一个法向量 $\boldsymbol{n}=(4,0,1)$，则直线 l 与平面 α 所成的角的正弦值等于_____.

9. 已知$\overrightarrow{AB}=(1,5,-2)$，$\overrightarrow{BC}=(3,1,z)$，若$\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{BC}$，$\overrightarrow{BP}=(x-1,y,-3)$，且 $BP\perp$ 平面 ABC，则 x，y，z 分别为_____、_____、_____.

10. 已知下列命题：

①如果 $\lambda\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{b}(\lambda\neq0)$，那么 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$；②如果 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}$ $(\boldsymbol{c}\neq\boldsymbol{0})$，那么 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$；③如果 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$，那么 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$；④如果 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=-|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|\neq0$，那么 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的方向相反；⑤如果 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}<0$，那么 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为钝角.

其中假命题有_____.

三、解答题（共 50 分）

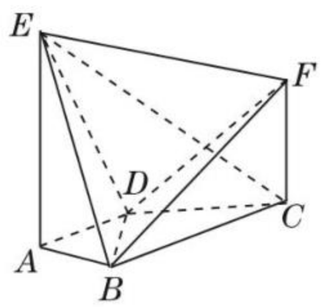
11.（12 分）已知空间三点 $A(0,2,3)$，$B(-2,1,6)$，$C(1,-1,5)$.

(1)求以 $\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AC}$ 为边的平行四边形的面积；

(2)若 $|\boldsymbol{a}|=\sqrt{3}$，且 $\boldsymbol{a}$ 分别与 $\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AC}$ 垂直，求向量 $\boldsymbol{a}$ 的坐标.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

12.（12 分）（**2019 · 天津卷**）如图，$AE\perp$平面 $ABCD$，$CF\parallel AE$，$AD\parallel BC$，$AD\perp AB$，$AB=AD=1$，$AE=BC=2$.

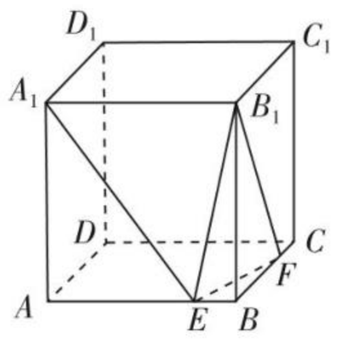


（1）求证：$BF\parallel$平面 ADE；

（2）求直线 CE 与平面 BDE 所成角的正弦值；

（3）若二面角 $E-BD-F$ 的余弦值为 $\frac{1}{3}$，求线段 CF 的长.

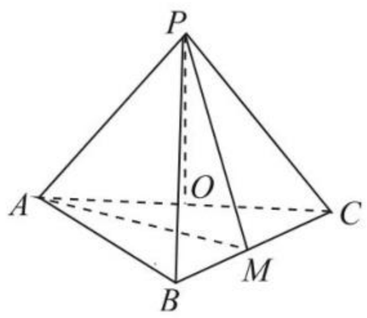
13.（13 分）（**2019 · 佛山市第一中学高二段考**）如图，正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 a，E、F 分别为 AB、BC 上的点，且 $AE=BF=x$.



（1）当 x 为何值时，三棱锥 B_1-BEF 的体积最大？

（2）求异面直线 A_1E 与 B_1F 所成的角的取值范围.

14.（13 分）（**2018 · 全国卷Ⅱ**）如图，在三棱锥 $P-ABC$ 中，$AB=BC=2\sqrt{2}$，$PA=PB=PC=AC=4$，O 为 AC 的中点.



（1）证明：$PO\perp$平面 ABC；

（2）若点 M 在棱 BC 上，且二面角 $M-PA-C$ 为 $30°$，求 PC 与平面 PAM 所成角的正弦值.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

班级_____ 姓名_____ 考场号_____ 准考证号_____

密 封 线

阶段测试一

第一章 常用逻辑用语

（时间：120 分钟 满分：150 分）

一、选择题（本大题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分）

1. 命题“$\overrightarrow{AB}$与$\overrightarrow{CD}$共线，则 A、B、C、D 四点共线”的逆命题为 （ ）

A. $\overrightarrow{AB}$与$\overrightarrow{CD}$不共线，则 A、B、C、D 四点不共线　　B. 若 A、B、C、D 四点共线，则$\overrightarrow{AB}$与$\overrightarrow{CD}$不共线

C. 若 A、B、C、D 四点共线，则$\overrightarrow{AB}$与$\overrightarrow{CD}$共线　　D. 若 A、B、C、D 四点不共线，则$\overrightarrow{AB}$与$\overrightarrow{CD}$不共线

2. 如果命题 $\neg p$ 与命题 $p \vee q$ 都是真命题，那么 （ ）

A. 命题 p 与命题 q 的真假相同　　B. 命题 q 一定是真命题

C. 命题 q 不一定是真命题　　D. 命题 p 不一定是真命题

3. （**2018 · 浙江卷**）已知平面 α，直线 m，n 满足 $m \not\subset \alpha$，$n \subset \alpha$，则“$m \parallel n$”是“$m \parallel \alpha$”的 （ ）

A. 充分不必要条件　　B. 必要不充分条件

C. 充分必要条件　　D. 既不充分也不必要条件

4. 对于原命题“周期函数不是单调函数”，下列陈述正确的是 （ ）

A. 逆命题为“单调函数不是周期函数”　　B. 否命题为“周期函数是单调函数”

C. 逆否命题为“单调函数是周期函数”　　D. 以上三者都不对

5. 命题 p：若 $\omega=2$，则函数 $f(x)=\sin(\omega x+\varphi)$ 的最小正周期为 π. 命题 p 的逆命题、否命题、逆否命题中，正确的个数是 （ ）

A. 0　　B. 1

C. 2　　D. 3

6. 已知命题 p：$\exists x_0 \in \mathbf{R}$，$x_0-2>\ln x_0$；命题 q：$\forall x \in \mathbf{R}$，$x^2>0$，则 （ ）

A. 命题 $p \vee q$ 是假命题　　B. 命题 $p \wedge q$ 是真命题

C. 命题 $p \vee (\neg q)$ 是假命题　　D. 命题 $p \wedge (\neg q)$ 是真命题

7. 已知命题 p：$\exists x_0 \in \mathbf{R}$，$x_0^2+ax_0+a<0$，若命题 p 是假命题，则实数 a 的取值范围是 （ ）

A. $[0,4]$　　B. $(0,4)$

C. $(-\infty,0) \cup (4,+\infty)$　　D. $(-\infty,0) \cup [4,+\infty)$

8. 若“$\dfrac{x-1}{x-3}<0$”是“$|x-a|<2$”的充分不必要条件，则实数 a 的取值范围是 （ ）

A. $(1,3]$　　B. $[1,3]$

C. $(-1,3]$　　D. $[-1,3]$

9. A，B，C 三个学生参加了一次考试，A，B 的得分均为 70 分，C 的得分为 65 分. 已知命题 p：若及格分低于 70 分，则 A，B，C 都没有及格. 在下列四个命题中，为 p 的逆否命题的是 （ ）

A. 若及格分不低于 70 分，则 A，B，C 都及格　　B. 若 A，B，C 都及格，则及格分不低于 70 分

C. 若 A，B，C 至少有 1 人及格，则及格分高于 70 分　　D. 若 A，B，C 至少有 1 人及格，则及格分不低于 70 分

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

10. 下列选项中，p 是 q 的必要不充分条件的是 （　　）

A. $p:a+c>b+d$，$q:a>b$，且 $c>d$

B. $p:a>1$，$b>1$，$q:f(x)=a^x-b(a>0$，且 $a\neq1)$的图象不过第二象限

C. $p:x=1$，$q:x^2=x$

D. $p:a>1$，$q:f(x)=\log_a x(a>0$，且 $a\neq1)$在$(0,+\infty)$上为增函数

11. 下列命题中正确的是 （　　）

A. 若 $p\vee q$ 为真命题，则 $p\wedge q$ 为真命题

B. “$a>0$，$b>0$”是“$\frac{b}{a}+\frac{a}{b}\geqslant2$”的充要条件

C. 命题“若 $x^2-3x+2=0$，则 $x=1$ 或 $x=2$”的逆否命题为“若 $x\neq1$ 或 $x\neq2$，则 $x^2-3x+2\neq0$”

D. 命题 $p:\exists x_0\in\mathbf{R}$，使得 $x_0^2+x_0-1<0$，则 $\neg p:\forall x\in\mathbf{R}$，使得 $x^2+x-1\geqslant0$

12. 以下判断正确的是 （　　）

A. 命题“负数的平方是正数”不是全称命题

B. 命题“$\forall x\in\mathbf{N}$，$x^3>x$”的否定是“$\exists x_0\in\mathbf{N}$，$x_0^3>x_0$”

C. “$a=1$”是“函数 $f(x)=\cos^2ax-\sin^2ax$ 的最小正周期为 π”的必要不充分条件

D. “$b=0$”是“函数 $f(x)=ax^2+bx+c$ 是偶函数”的充要条件

二、填空题（本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分）

13. 若命题 p：常数列是等差数列，则 $\neg p$ 为_____.

14. 若“$\forall x\in\left[0,\frac{\pi}{3}\right]$，$m\geqslant2\tan x$”是真命题，则实数 m 的最小值为_____.

15. 下列四个说法：

①一个命题的逆命题为真，则它的逆否命题一定为真；

②命题“设 $a,b\in\mathbf{R}$，若 $a+b\neq6$，则 $a\neq3$ 或 $b\neq3$”是一个真命题；

③“$x>2$”是“$\frac{1}{x}<\frac{1}{2}$”的充分不必要条件；

④一个命题的否命题为真，则它的逆命题一定为真.

其中说法不正确的序号有_____.

16. 在下列四个结论中，正确的有_____.（填序号）

①若 A 是 B 的必要不充分条件，则 $\neg B$ 也是 $\neg A$ 的必要不充分条件；

②“$\begin{cases}a>0,\\ \Delta=b^2-4ac\leqslant0\end{cases}$”是“一元二次不等式 $ax^2+bx+c\geqslant0$ 的解集为 $\mathbf{R}$”的充要条件；

③“$x\neq1$”是“$x^2\neq1$”的充分不必要条件；

④“$x\neq0$”是“$x+|x|>0$”的必要不充分条件.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

三、解答题(本大题共 6 小题,共 70 分)

17.(10 分)下面有五个命题,判断它们的真假.

(1)函数 $y=\sin^4 x-\cos^4 x$ 的最小正周期是 π;

(2)终边在 y 轴上的角的集合是 $\left\{\alpha \left| \alpha=\frac{k\pi}{2}, k\in \mathbf{Z}\right.\right\}$;

(3)在同一坐标系中,函数 $y=\sin x$ 的图象和函数 $y=x$ 的图象有三个公共点;

(4)把函数 $y=3\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$ 的图象向右平移 $\frac{\pi}{6}$,得到 $y=3\sin 2x$ 的图象;

(5)函数 $y=\sin\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$ 在 $[0,\pi]$ 上是减函数.

18.(12 分)已知 $f(x)=x^2+2x-m$,如果 $f(1)>0$ 是假命题,$f(2)>0$ 是真命题,求实数 m 的取值范围.

19.(12 分)已知函数 $f(x)=x^2-2ax+1$,若使得 $f(x)$ 没有零点的 a 的取值范围为集合 A,使得 $f(x)$ 在 $(m, m+3)$ 上不是单调函数的 a 的取值范围为集合 B.

(1)求 A,B;

(2)若 $x\in A$ 是 $x\in B$ 的充分不必要条件,求 m 的取值范围.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

20.(12 分)已知 $m\in\mathbf{R}$,设 p:$\forall x\in[-1,1]$,$x^2-2x-4m^2+8m-2\geqslant 0$ 成立;q:$\exists x_0\in[1,2]$,$\log_{\frac{1}{2}}(x_0^2-mx_0+1)<-1$ 成立.如果“$p\vee q$”为真,“$p\wedge q$”为假,求实数 m 的取值范围.

21.(12 分)老师上课时在黑板上写出了三个集合:$A=\left\{x\left|\frac{\square x-1}{x}<0\right.\right\}$,$B=\{x\mid x^2-3x-4\leqslant 0\}$,$C=\{x|\log_{\frac{1}{2}}x>1\}$,然后叫小明、小红、小强三位同学到讲台上,并将“$\square$”的数告诉了他们,要求他们各用一句话来描述,以便同学们能确定该数.以下是他们三人的描述:

小明:此数为小于 6 的正整数;

小红:“$x\in A$”是“$x\in B$”的充分而不必要条件;

小强:“$x\in A$”是“$x\in C$”的必要而不充分条件.

若老师说三位同学说的都对,你能确定“$\square$”中的数吗?

22.(12 分)设命题 p:实数 x 满足 $x^2-4ax+3a^2<0$,其中 $a>0$,命题 q:实数 x 满足 $\begin{cases}x^2-x-6\leqslant 0,\\ x^2+2x-8>0.\end{cases}$

(1)当 $a=1$,且 $p\wedge q$ 为真时,求实数 x 的取值范围;

(2)若 p 是 q 的必要不充分条件,求实数 a 的取值范围.

班级 姓名 考场号 准考证号
密 封 线
数学 选修2-1 RJ·A

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

班级_____ 姓名_____ 考场号_____ 准考证号_____

密 封 线

阶段测试二

第二章 圆锥曲线与方程

（时间：120 分钟 满分：150 分）

一、选择题（本大题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分）

1. 椭圆 $2x^2+3y^2=6$ 的长轴长是 （ ）

A. $\sqrt{2}$　　B. $2\sqrt{2}$

C. $\sqrt{3}$　　D. $2\sqrt{3}$

2. （**2019·张家口高三模拟**）设圆锥曲线 C 的两个焦点分别为 F_1，F_2，若曲线 C 上存在点 P 满足 $|PF_1|:|F_1F_2|:|PF_2|=4:3:2$，则曲线 C 的离心率可能等于 （ ）

A. $\frac{2}{3}$或$\frac{3}{2}$　　B. $\frac{2}{3}$或 2

C. $\frac{1}{2}$或 2　　D. $\frac{1}{2}$或$\frac{3}{2}$

3. 抛物线 $y^2=24ax(a>0)$ 上有一点 M，它的横坐标为 3，它到焦点的距离是 5，则抛物线的方程为 （ ）

A. $y^2=8x$　　B. $y^2=12x$

C. $y^2=16x$　　D. $y^2=20x$

4. （**2019·天津高三一模**）已知抛物线 C 的顶点是椭圆 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$ 的中心，焦点与该椭圆的右焦点 F_2 重合，若抛物线 C 与该椭圆在第一象限的交点为 P，椭圆的左焦点为 F_1，则 $|PF_1|=$ （ ）

A. $\frac{2}{3}$　　B. $\frac{7}{3}$

C. $\frac{5}{3}$　　D. 2

5. 已知双曲线 $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{b^2}=1$ 的右焦点与抛物线 $y^2=12x$ 的焦点重合，则该双曲线的焦点到其渐近线的距离等于（ ）

A. $\sqrt{5}$　　B. $4\sqrt{2}$

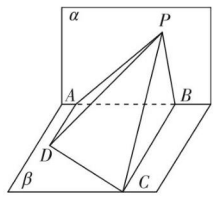
C. 3　　D. 5

6. 已知直线 l：$x-2y+2=0$ 过椭圆的左焦点 F 和上顶点 B（椭圆的对称中心在原点），则这个椭圆的离心率为（ ）

A. $\frac{2\sqrt{5}}{5}$　　B. $\frac{\sqrt{5}}{5}$

C. $\frac{\sqrt{3}}{2}$　　D. $\frac{1}{2}$

7. （**2019·黑龙江大庆中学高二期末**）如图，$\triangle PAB$ 所在的平面 α 和四边形 $ABCD$ 所在的平面 β 互相垂直，且 $AD\perp\alpha$，$BC\perp\alpha$，$AD=4$，$BC=8$，$AB=6$，若 $\tan\angle ADP+2\tan\angle BCP=10$，则点 P 在平面 α 内的轨迹是 （ ）



A. 圆的一部分　　B. 椭圆的一部分

C. 双曲线的一部分　　D. 抛物线的一部分

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

8. 若 m 是 2 和 8 的等比中项，则圆锥曲线 $x^2+\frac{y^2}{m}=1$ 的离心率为 （　　）

A. $\frac{\sqrt{3}}{2}$　　B. $\sqrt{5}$

C. $\frac{\sqrt{3}}{2}$或$\frac{\sqrt{5}}{2}$　　D. $\frac{\sqrt{3}}{2}$或$\sqrt{5}$

9. 已知 F_1，F_2 是椭圆和双曲线的公共焦点，P 是它们的一个公共点，且$\angle F_1PF_2=\frac{\pi}{3}$，椭圆的离心率为 e_1，双曲线的离心率 e_2，则$\frac{1}{e_1^2}+\frac{3}{e_2^2}=$ （　　）

A. 2　　B. $2\sqrt{3}$

C. 4　　D. $4\sqrt{2}$

10. 已知抛物线 $y^2=2px(p>0)$的焦点是双曲线$\frac{x^2}{5+p}-\frac{y^2}{7+p}=1$ 的一个焦点，则 p 的值为 （　　）

A. 4　　B. 6

C. 8　　D. 12

11. （**2019·太原高三一模**）已知抛物线 $y^2=2px(p>0)$的焦点为 F，若$\triangle ABC$ 的顶点都在抛物线上，且满足 $\overrightarrow{FA}+\overrightarrow{FB}+\overrightarrow{FC}=\mathbf{0}$，则$\frac{1}{k_{AB}}+\frac{1}{k_{BC}}+\frac{1}{k_{CA}}=$ （　　）

A. 0　　B. 1

C. 2　　D. $2p$

12. 已知点 $A(0,0)$，$B(2,0)$，若椭圆 W：$\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{m}=1$ 上存在点 C，使得$\triangle ABC$ 为等边三角形，则椭圆 W 的离心率是 （　　）

A. $\frac{1}{2}$　　B. $\frac{\sqrt{2}}{2}$

C. $\frac{\sqrt{6}}{3}$　　D. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

二、填空题（本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分）

13. 双曲线$\frac{x^2}{7}-\frac{y^2}{3}=1$ 的焦距是_____.

14. （**2018·浙江卷**）在平面直角坐标系 xOy 中，若双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$的右焦点 $F(c,0)$到一条渐近线的距离为$\frac{\sqrt{3}}{2}c$，则其离心率的值是_____.

15. 已知双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$的左、右焦点分别是 F_1，F_2，点 P 在双曲线右支上，且$|PF_1|=4|PF_2|$，则此双曲线的离心率 e 的取值范围是_____.

16. 在平面直角坐标系 xOy 中，设抛物线 $y^2=4x$ 的焦点为 F，准线为 l，P 为抛物线上一点，$PA\perp l$，A 为垂足，若直线 AF 的倾斜角为 120°，则$|PF|=$_____.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

三、解答题(本大题共 6 小题,共 70 分)

17.(10 分)(**2019·长沙高二月考**)已知抛物线 $C:y^2=2px(p>0)$ 的焦点为 $F(1,0)$,抛物线 $E:x^2=2py$ 的焦点为 M.若过点 M 的直线 l 与抛物线 C 有且只有一个交点.

(1)求直线 l 的方程;

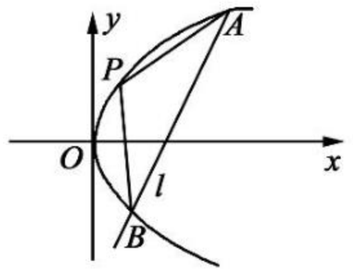
(2)若直线 MF 与抛物线 C 交于 A,B 两点,求 $\triangle OAB$ 的面积.

18.(12 分)(**2019·天津卷**)设椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的左焦点为 F,左顶点为 A,上顶点为 B.已知 $\sqrt{3}|OA|=2|OB|$(O 为原点).

(1)求椭圆的离心率;

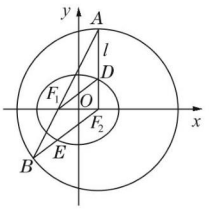
(2)设经过点 F 且斜率为 $\frac{3}{4}$ 的直线 l 与椭圆在 x 轴上方的交点为 P,圆 C 同时与 x 轴和直线 l 相切,圆心 C 在直线 $x=4$ 上,且 $OC/\!/AP$,求椭圆的方程.

19.(12 分)如图,已知直线 $l:y=2x-4$ 交抛物线 $y^2=4x$ 于 A,B 两点,试在抛物线 AOB 这段曲线上求一点 P,使 $\triangle PAB$ 的面积最大,并求出这个最大面积.



关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

20.（12 分）（**2019 · 江苏卷**）如图，在平面直角坐标系 xOy 中，椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的焦点为 $F_1(-1,0)$，$F_2(1,0)$. 过 F_2 作 x 轴的垂线 l，在 x 轴的上方，l 与圆 $F_2:(x-1)^2+y^2=4a^2$ 交于点 A，与椭圆 C 交于点 D. 连接 AF_1 并延长交圆 F_2 于点 B，连接 BF_2 交椭圆 C 于点 E，连接 DF_1. 已知 $DF_1=\frac{5}{2}$.



（1）求椭圆 C 的标准方程；

（2）求点 E 的坐标.

21.（12 分）设椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的离心率 $e=\frac{1}{2}$，左焦点为 F，右顶点为 A，过点 F 的直线交椭圆于 E，H 两点，若直线 EH 垂直于 x 轴时，有 $|EH|=\frac{3}{2}$.

（1）求椭圆的方程；

（2）设直线 $l:x=-1$ 上两点 P，Q 关于 x 轴对称，直线 AP 与椭圆相交于点 B（B 异于点 A），直线 BQ 与 x 轴相交于点 D. 若 $\triangle APD$ 的面积为 $\frac{\sqrt{6}}{2}$，求直线 AP 的方程.

22.（12 分）在平面直角坐标系 xOy 中，位于 x 轴上方的动圆与 x 轴相切，且与圆 $x^2+y^2-2y=0$ 相外切.

（1）求动圆圆心轨迹 C 的方程式；

（2）若点 $P(a,b)(a\neq 0,b\neq 0)$ 是平面上的一个动点，且满足条件：过点 P 可作曲线 C 的两条切线 PM 和 PN，切点 M，N 连线与 OP 垂直. 求证：直线 MN 过定点，并求出定点坐标.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

班级 姓名 考场号 准考证号
密 封 线
数学 选修2-1 RJ·A

班级_____ 姓名_____ 考场号_____ 准考证号_____

密 封 线

阶段测试三

第三章 空间向量与立体几何

（时间：120分钟 满分：150分）

一、选择题（本大题共12小题，每小题5分，共60分）

1. 设点 $M(5,-1,2)$，$A(4,2,-1)$，若 $\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{AB}$，则点 B 应为 （ ）

A. $(-1,3,-3)$　　B. $(9,1,1)$

C. $(1,-3,3)$　　D. $(-9,-1,-1)$

2. 已知 $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$ 是两两垂直的单位向量，$\boldsymbol{a}=2\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{b}=\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}-3\boldsymbol{k}$，则 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=$ （ ）

A. -2　　B. -1

C. 2　　D. ±1

3. 对于任意空间向量 $\boldsymbol{a}=(a_1,a_2,a_3)$，$\boldsymbol{b}=(b_1,b_2,b_3)$，给出下列三个命题：

①$\boldsymbol{a}\parallel\boldsymbol{b}\Leftrightarrow\dfrac{a_1}{b_1}=\dfrac{a_2}{b_2}=\dfrac{a_3}{b_3}$；

②若 $a_1=a_2=a_3=1$，则 $\boldsymbol{a}$ 为单位向量；

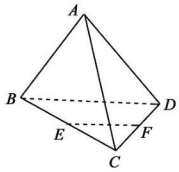
③$\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}\Leftrightarrow a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3=0$.

其中真命题的个数为 （ ）

A. 0　　B. 1

C. 2　　D. 3

4. 如图，在空间四边形 $ABCD$ 中，E,F 分别是 BC,CD 的中点，则 $\overrightarrow{AB}+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{BC}+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{BD}$ 等于 （ ）



A. $\overrightarrow{AD}$　　B. $\overrightarrow{FA}$

C. $\overrightarrow{AF}$　　D. $\overrightarrow{EF}$

5. 若 $\boldsymbol{a}=(2,2,0)$，$\boldsymbol{b}=(1,3,z)$，$\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=\dfrac{\pi}{3}$，则 $z=$ （ ）

A. $\sqrt{22}$　　B. $-\sqrt{22}$

C. $\pm\sqrt{22}$　　D. $\pm\sqrt{42}$

6. 已知 $A(3,0,-1)$，$B(0,-2,-6)$，$C(2,4,-2)$，则 $\triangle ABC$ 是 （ ）

A. 等边三角形　　B. 等腰三角形

C. 直角三角形　　D. 等腰直角三角形

7. 已知向量 $\boldsymbol{n}=(2,0,1)$ 为平面 α 的一个法向量，点 $A(-1,2,1)$ 在 α 内，则 $P(1,2,-2)$ 到 α 的距离为 （ ）

A. $\dfrac{\sqrt{5}}{10}$　　B. $\dfrac{\sqrt{5}}{5}$

C. $\sqrt{5}$　　D. $2\sqrt{5}$

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

8. 已知点 $A(-3,4,3)$，O 为坐标原点，则 OA 与坐标平面 yOz 所成角的正切值为 （　　）

A. $\frac{3}{4}$　　B. $\frac{3}{5}$

C. $\frac{5}{3}$　　D. 1

9. 两平行平面 α,β 分别经过原点 O 和点 $A(2,1,1)$，且两平面的一个法向量 $\boldsymbol{n}=(-1,0,1)$，则两平面间的距离是 （　　）

A. $\frac{3}{2}$　　B. $\frac{\sqrt{2}}{2}$

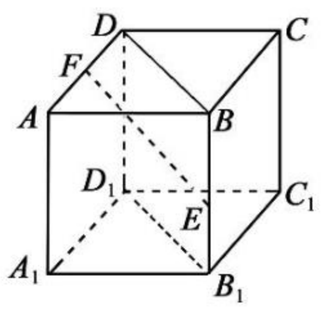
C. $\sqrt{3}$　　D. $3\sqrt{2}$

10. 在直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，$\angle ACB=90^\circ$，$\angle BAC=30^\circ$，$BC=1$，$AA_1=\sqrt{6}$，M 是 CC_1 的中点，则异面直线 AB_1 与 A_1M 所成的角为 （　　）

A. 30°　　B. 45°

C. 60°　　D. 90°

11. 已知 E,F 分别是正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱 BB_1，AD 的中点，则直线 EF 和平面 BDD_1B_1 所成角的正弦值为 （　　）



A. $\frac{\sqrt{2}}{6}$　　B. $\frac{\sqrt{3}}{6}$

C. $\frac{1}{3}$　　D. $\frac{\sqrt{6}}{6}$

12. 空间中有四点 A,B,C,D，其中 $\overrightarrow{AB}=(2m,m,2)$，$\overrightarrow{CD}=(m,m+1,-5)$，且 $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}=\left(5,\frac{13}{3},-3\right)$，则直线 AB 与 CD （　　）

A. 平行　　B. 相交

C. 异面　　D. 垂直

二、填空题（本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分）

13. 若向量 $\boldsymbol{a}=(2,-3,1)$，$\boldsymbol{b}=(2,0,3)$，$\boldsymbol{c}=(0,2,3)$，则 $\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=$_____.

14. 在空间直角坐标系 $O-xyz$ 中，已知 $A(1,-2,3)$，$B(2,1,-1)$，若直线 AB 交平面 xOz 于点 C，则点 C 的坐标为_____.

15. （**2019·南城县二中高二月考**）已知 $\overrightarrow{OA}=(1,2,3)$，$\overrightarrow{OB}=(2,1,2)$，$\overrightarrow{OP}=(1,1,2)$，点 Q 在直线 OP 上运动，则当 $\overrightarrow{QA}\cdot\overrightarrow{QB}$ 取得最小值时，点 Q 的坐标为_____.

16. 已知点 P 是平行四边形 $ABCD$ 所在的平面外一点，若 $\overrightarrow{AB}=(2,-1,-4)$，$\overrightarrow{AD}=(4,2,0)$，$\overrightarrow{AP}=(-1,2,-1)$，对于结论：①$AP\perp AB$；②$AP\perp AD$；③$\overrightarrow{AP}$ 是平面 $ABCD$ 的法向量；④$AP\parallel BD$. 其中正确的是_____.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

三、解答题(本大题共 6 小题,共 70 分)

17.(10 分)已知向量 $\boldsymbol{a}=(1,-3,2)$,$\boldsymbol{b}=(-2,1,1)$,点 $A(-3,-1,4)$,$B(-2,-2,2)$.

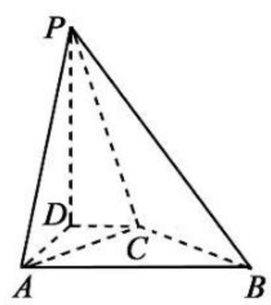
(1)求 $|2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|$;

(2)在直线 AB 上,是否存在一点 E,使得 $\overrightarrow{OE}\perp\boldsymbol{b}$?($O$ 为原点)

18.(12 分)如图,在四棱锥 $P-ABCD$ 中,$PD\perp$ 平面 $ABCD$,PA 与平面 $ABCD$ 所成的角为 $60°$,在四边形 $ABCD$ 中,$\angle ADC=\angle DAB=90°$,$AB=4$,$CD=1$,$AD=2$.

(1)建立适当的坐标系,并写出点 B,P 的坐标;

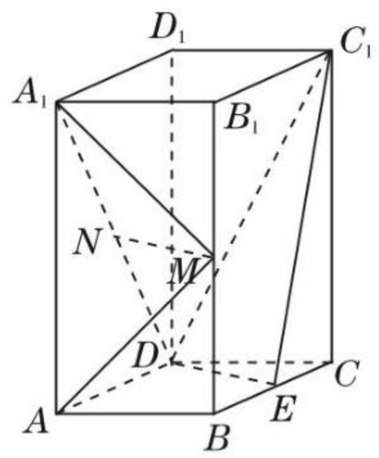
(2)求异面直线 PA 与 BC 所成的角的余弦值.



19.(12 分)(**2019 · 全国卷 Ⅰ**)如图,直四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的底面是菱形,$AA_1=4$,$AB=2$,$\angle BAD=60°$,E,M,N 分别是 BC,BB_1,A_1D 的中点.

(1)证明:$MN\parallel$ 平面 C_1DE;

(2)求二面角 $A-MA_1-N$ 的正弦值.

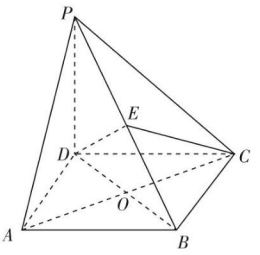


关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

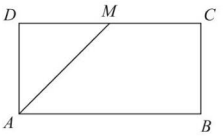
20.（12 分）（**2019 · 雅安中学高二期中**）如图，在四棱锥 $P-ABCD$ 中，$PD\perp$ 平面 $ABCD$，四边形 $ABCD$ 是菱形，$AC=2$，$BD=2\sqrt{3}$，且 AC，BD 交于点 O，E 是 PB 上任意一点.

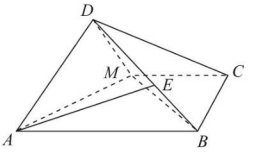
（1）求证：$AC\perp DE$；

（2）若 E 为 PB 的中点，且二面角 $A-PB-D$ 的余弦值为 $\frac{\sqrt{21}}{7}$，求 EC 与平面 PAB 所成角 θ 的正弦值.



21.（12 分）如图，已知长方形 $ABCD$ 中，$AB=2\sqrt{2}$，$AD=\sqrt{2}$，M 为 DC 的中点，将 $\triangle ADM$ 沿 AM 折起，使得平面 $ADM\perp$ 平面 $ABCM$.





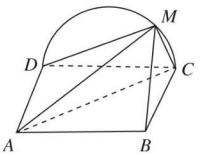
（1）求证：$AD\perp BM$；

（2）若点 E 是线段 DB 上的一动点，问点 E 在何位置时，二面角 $E-AM-D$ 的余弦值为 $\frac{2\sqrt{5}}{5}$.

22.（12 分）（**2018 · 全国卷Ⅲ**）如图，边长为 2 的正方形 $ABCD$ 所在的平面与半圆弧 $\overset{\frown}{CD}$ 所在平面垂直，M 是 $\overset{\frown}{CD}$ 上异于 C，D 的点.

（1）证明：平面 $AMD\perp$ 平面 BMC；

（2）当三棱锥 $M-ABC$ 体积最大时，求面 MAB 与面 MCD 所成二面角的正弦值.



关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

班级_____ 姓名_____ 考场号_____ 准考证号_____

密 封 线

选修2—1综合测评

（时间：120分钟　满分：150分）

一、选择题（本大题共12小题，每小题5分，共60分）

1. “$\forall x\geqslant 0, 2^x>x^2$”的否定$\neg p$为（　　）

A. $\exists x_0\geqslant 0, 2^{x_0}<2^{x_0}$　　B. $\forall x\geqslant 0, 2^x<x^2$

C. $\exists x_0\geqslant 0, 2^{x_0}\leqslant x_0^2$　　D. $\forall x\geqslant 0, 2^x\leqslant x^2$

2. 设曲线C是双曲线，则“C的方程为$x^2-\frac{y^2}{4}=1$”是“C的渐近线方程为$y=\pm 2x$”的（　　）

A. 充分不必要条件　　B. 必要不充分条件

C. 充要条件　　D. 既不充分也不必要条件

3. 下列说法错误的是（　　）

A. 已知两个命题p,q，若$p\wedge q$为假命题，则$p\vee q$也为假命题

B. 实数$a=0$是直线$ax-2y=1$与$2ax-2y=3$平行的充要条件

C. “$\exists x_0\in\mathbf{R}$，使得$x_0^2+2x_0+5=0$”的否定是“$\forall x\in\mathbf{R}$，都有$x^2+2x+5\neq 0$”

D. 命题p：$\forall x\in\mathbf{R}, x^2+1\geqslant 1$；命题$q$：$\exists x_0\in\mathbf{R}, x_0^2-x_0+1\leqslant 0$，则命题$p\wedge(\neg q)$是真命题

4. 设双曲线$\frac{x^2}{a^2}-y^2=1(a>0)$的一条渐近线的倾斜角为$\frac{\pi}{6}$，则$a=$（　　）

A. $\frac{\sqrt{3}}{3}$　　B. $\frac{2\sqrt{3}}{3}$

C. $\sqrt{3}$　　D. $2\sqrt{3}$

5. 设$x,y\in\mathbf{R}$，向量$\boldsymbol{a}=(x,1,0)$，$\boldsymbol{b}=(1,y,0)$，$\boldsymbol{c}=(2,-4,0)$，且$\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{c}$，$\boldsymbol{b}\parallel\boldsymbol{c}$，则$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=$（　　）

A. $\sqrt{5}$　　B. $\sqrt{10}$

C. $2\sqrt{5}$　　D. 10

6. 双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$的左、右焦点分别是$F_1,F_2$，过$F_1$作倾斜角为$30^\circ$的直线交双曲线右支于$M$点，若$MF_2$垂直于$x$轴，则双曲线的离心率为（　　）

A. $\sqrt{2}$　　B. $\sqrt{3}$

C. $\sqrt{5}$　　D. $\sqrt{6}$

7. 设F为抛物线$y^2=4x$的焦点，A,B为该抛物线上两点，若$x_A+x_B=7$，则$|AF|+|BF|$的值等于（　　）

A. 3　　B. 4

C. 6　　D. 9

8. 椭圆$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4+k}=1$的离心率为$\frac{4}{5}$，则$k$的值为（　　）

A. -21　　B. 21

C. $-\frac{19}{25}$或21　　D. $\frac{19}{25}$或21

9. 已知正三棱柱$ABC-A_1B_1C_1$的侧棱长与底面边长相等，则AB_1与侧面ACC_1A_1所成角的正弦值等于（　　）

A. $\frac{\sqrt{6}}{4}$　　B. $\frac{\sqrt{10}}{4}$

C. $\frac{\sqrt{15}}{5}$　　D. $\frac{\sqrt{10}}{5}$

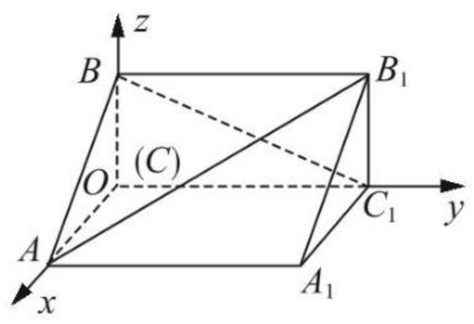
关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

10. 直线 $y=2b$ 与双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$的左支、右支分别交于 A,B 两点，O 为坐标原点，且$\triangle AOB$ 为等腰直角三角形，则该双曲线的离心率为 （　　）

A. $\frac{\sqrt{5}}{2}$　　B. $\frac{3}{2}$

C. $\frac{\sqrt{30}}{5}$　　D. $\frac{3\sqrt{5}}{5}$

11. 如图，在空间直角坐标系中有直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$，$CA=CC_1=2CB$，则直线 BC_1 与直线 AB_1 夹角的余弦值为 （　　）



A. $\frac{\sqrt{5}}{5}$　　B. $\frac{\sqrt{5}}{3}$

C. $\frac{2\sqrt{5}}{5}$　　D. $\frac{3}{5}$

12. 已知斜四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的各棱长均为 2，$\angle A_1AD=60°$，$\angle BAD=90°$，平面 $A_1ADD_1\perp$ 平面 $ABCD$，则直线 BD_1 与平面 $ABCD$ 所成的角的正切值为 （　　）

A. $\frac{\sqrt{3}}{4}$　　B. $\frac{\sqrt{13}}{4}$

C. $\frac{\sqrt{39}}{13}$　　D. $\frac{\sqrt{39}}{3}$

二、填空题（本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分）

13. 有下列命题：

①“若 $xy=1$，则 x,y 互为倒数”的逆命题；

②“面积相等的两个三角形全等”的否命题；

③“若 $m\leqslant 1$，则 $x^2-2x+m=0$ 有实数解”的逆否命题；

④“若 $A\cap B=B$，则 $A\subseteq B$”的逆否命题.

其中正确命题的序号为_____.

14. （**2019·铜仁市思南中学高二月考**）已知 F_1,F_2 是椭圆和双曲线的公共焦点，P 是它们的一个公共点，且 $\angle F_1PF_2=\frac{\pi}{3}$，记椭圆和双曲线的离心率分别为 e_1,e_2，则$\frac{1}{e_1e_2}$的最大值是_____.

15. 已知点 P 是抛物线 $x^2=4y$ 上的动点，点 P 在 x 轴上的射影是点 Q，点 A 的坐标是$(8,7)$，则$|PA|+|PQ|$的最小值为_____.

16. 方程$\frac{x^2}{4-t}+\frac{y^2}{t-1}=1$ 表示曲线 C，给出以下命题：

①曲线 C 不可能为圆；

②若 $1<t<4$，则曲线 C 为椭圆；

③若曲线 C 为双曲线，则 $t<1$ 或 $t>4$；

④若曲线 C 为焦点在 x 轴上的椭圆，则 $1<t<\frac{5}{2}$.

其中真命题的序号是_____（写出所有正确命题的序号）.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

三、解答题(本大题共 6 小题,共 70 分)

17.(10 分)已知 k 为实数,命题 p:方程 $(k-1)x^2+(2k-1)y^2=(k-1)(2k-1)$ 表示椭圆;命题 q:方程 $(k-3)x^2+4y^2=4(k-3)$ 表示双曲线.

(1)若命题 p 为真命题,求 k 的取值范围;

(2)若命题 p、q 中恰有一个为真命题,求 k 的取值范围.

18.(12 分)已知 p:$f(x)=\dfrac{1-x}{3}$,且 $|f(a)|<2$;q:集合 $A=\{x|x^2+(a+2)x+1=0,x\in\mathbf{R}\}$,且 $A\neq\varnothing$. 若 $p\vee q$ 为真命题,$p\wedge q$ 为假命题,求实数 a 的取值范围.

19.(12 分)已知椭圆 C:$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的离心率为 $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$,椭圆的一个顶点与两个焦点构成的三角形面积为 2.

(1)求椭圆 C 的方程;

(2)已知直线 $y=k(x-1)(k>0)$ 与椭圆 C 交于 A,B 两点,且与 x 轴,y 轴交于 M,N 两点.

①若 $\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{AN}$,求 k 的值;

②若点 Q 的坐标为 $\left(\dfrac{7}{4},0\right)$,求证:$\overrightarrow{QA}\cdot\overrightarrow{QB}$ 为定值.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

20.（12 分）（**2019 · 双流中学高二月考**）已知椭圆 C 的中心在坐标原点 O，焦点在 x 轴上，它的一个顶点恰好是抛物线 $y=\frac{1}{4}x^2$ 的焦点，它的离心率是双曲线 $\frac{x^2}{4}-y^2=1$ 的离心率的倒数.

（1）求椭圆 C 的标准方程；

（2）过椭圆 C 的右焦点 F 作直线 l 交椭圆 C 于 A、B 两点，交 y 轴于 M 点，若 $\overrightarrow{MA}=\lambda_1\overrightarrow{AF}$，$\overrightarrow{MB}=\lambda_2\overrightarrow{BF}$，求证：$\lambda_1+\lambda_2$ 为定值.

21.（12 分）（**2019 · 全国卷Ⅲ**）图 1 是由矩形 $ADEB$，Rt△ABC 和菱形 $BFGC$ 组成的一个平面图形，其中 $AB=1$，$BE=BF=2$，$\angle FBC=60°$. 将其沿 AB，BC 折起使得 BE 与 BF 重合，连接 DG，如图 2.

（1）证明：图 2 中的 A，C，G，D 四点共面，且平面 $ABC\perp$ 平面 $BCGE$；

（2）求图 2 中的二面角 $B-CG-A$ 的大小.

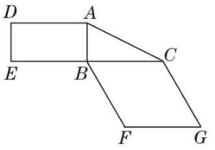


图 1

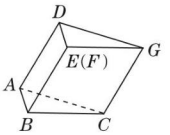


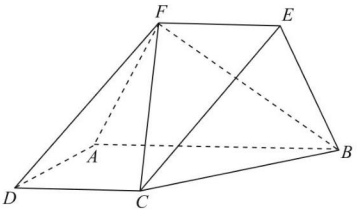
图 2

22.（12 分）如图，梯形 $ABCD$ 所在的平面与等腰梯形 $ABEF$ 所在的平面互相垂直，$AB\parallel CD\parallel EF$，$AB\perp AD$，$CD=DA=AF=FE=2$，$AB=4$.

（1）求证：$DF\parallel$ 平面 BCE；

（2）求二面角 $C-BF-A$ 的余弦值；

（3）线段 CE 上是否存在点 G，使得 $AG\perp$ 平面 BCF？请说明理由.



关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

班级 姓名 考场号 准考证号
密 封 线
数学 选修2-1 RJ·A

骄子之路®
the Road to Pride
让 学习更快乐，人生更精彩

答案与解析

与45分钟课时作业与单元测试配套使用

数学

选修2-1 RJ·A

班级：_____

姓名：_____

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

第一部分 课时作业

第一章 常用逻辑用语

1.1 命题及其关系

第 1 课时 1.1.1 命题 1.1.2 四种命题

基础知识梳理

1. 命题 真命题 假命题
2. 互逆命题 原命题 逆命题
3. 互否命题 否命题
4. 互为逆否命题 逆否命题

题点知识巩固

1. 选 D (2)不是命题，当 $x=1$ 时，$x^2+1>2x$ 不成立，当 $x\neq1$ 时，$x^2+1>2x$ 成立，由于不能判断其真假，所以不是命题. 其余 4 个都是陈述句，且分别能判断真假，所以(1)(3)(4)(5)是命题.
2. **解析**：①④⑤可以判断真假，是命题；②是祈使句，不是命题；③是疑问句，不是命题.
   答案：②③
3. 选 D 把命题改为“若 p 则 q”的形式为“若两个平面垂直于同一条直线，则这两个平面平行”，故条件为两个平面垂直于同一条直线，故选 D.
4. **解**：(1)原命题可以写成：如果一个数是实数，则它的平方是非负数.
   (2)原命题可以写成：若两个三角形等底等高，则这两个三角形面积相等.
   (3)原命题可以写成：如果一个数能被 3 整除，那么这个数也能被 6 整除.
   (4)原命题可以写成：若一条直线是弦的垂直平分线，则这条直线过圆心，且平分弦所对的弧.
5. **解析**：①④为真命题；②四条边相等的四边形可能是菱形，不一定是正方形，故为假命题；③显然为假命题.
   答案：①④
6. **解**：逆命题：若 $ax^2+bx+c=0$ 有两个相异实根，则 $ac<0$. 是假命题.
   否命题：若 $ac\geqslant0$，则 $ax^2+bx+c=0$ 至多有一个实根. 是假命题.
   逆否命题：若 $ax^2+bx+c=0$ 至多有一个实根，则 $ac\geqslant0$. 是真命题.

提能达标过关

1. D
2. 选 C “若 p，则 q”的逆否命题是“若 $\neg q$，则 $\neg p$”，故选 C.
3. 选 B 当 $|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|$ 时，$\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的模相等，方向不一定相同，故 B 是假命题.
4. 选 B ①中函数 $y=2x^3-3x+1$ 是由 $y=2x^3-3x$ 上移一个单位得到的，而 $y=x^3-3x$ 为奇函数，对称中心为(0,0). 故 $y=2x^3-3x+1$ 的图象关于(0,1)对称，故①正确；②中 $\frac{y}{x+2}$ 可以看成 (x,y) 与 $(-2,0)$ 连线的斜率，其中 (x,y) 在圆 $x^2+y^2=1$ 上运动，相切时取得最值. 由相切可得最大值为 $\frac{\sqrt{3}}{3}$，故②正确；③中 $\triangle ABC$ 为锐角，$\therefore A+B>90°$，$\therefore 90°>A>90°-B>0°$，$\sin A>\sin(90°-B)=\cos B$，即 $\sin A>\cos B$，故③不正确.
5. 选 D A 错，缺少条件各侧面的交线互相平行；B 错，不包括 $x=x_0$ 这条直线；C 错，圆心 $C(0,0)$ 到直线 $x_0x+y_0y-1=0$ 的距离 $d=\frac{1}{\sqrt{x_0^2+y_0^2}}>1$，所以直线与圆 C 相离；D 正确，当圆柱横放时，其俯视图是矩形.
6. **解析**：由 $x_1^2=x_2^2$，未必有 $x_1=x_2$，故①为假命题；
   对于 $f(x)=2^x$，当 $f(x_1)=f(x_2)$ 时一定有 $x_1=x_2$，故②为真命题；
   当函数在其定义域上单调时，一定有“若 $f(x_1)=f(x_2)$，则 $x_1=x_2$”，故③为真命题.
   故真命题是②③.
   答案：②③
7. **解析**：由题意知 $x\notin[2,5]$ 且 $x\notin\{x|x<1$ 或 $x>5\}$ 是真命题，即 $\begin{cases}x<2\text{ 或 }x>5,\\1\leqslant x\leqslant5\end{cases}$ 为真命题，$\therefore 1\leqslant x<2$.
   答案：[1,2)
8. **解析**：当 $a=0$ 时，$-3>0$ 不成立；当 $a\neq0$ 时，
   若 $ax^2-2ax-3>0$ 不成立，则有 $ax^2-2ax-3\leqslant0$ 恒成立.
   $\therefore\begin{cases}a<0,\\\Delta=4a^2+12a\leqslant0.\end{cases}$ 解得 $-3\leqslant a<0$. 综上知，a 的取值范围是 $-3\leqslant a\leqslant0$.
   答案：[-3,0]
9. **解**：(1)若一个整数的末位数是 0，则它可以被 5 整除.
   (2)若一个点在某线段的垂直平分线上，则它与这条线段两个端点的距离相等.
   (3)若一个式子是等式，则它的两边同乘以同一个数，所得结果仍为等式.
10. **解**：若命题 p 为真命题，由 $x^2-2x+2=(x-1)^2+1\geqslant m$，可知 $m\leqslant1$；
    若命题 q 为真命题，则 $7-3m>1$，即 $m<2$.
    命题 p 和 q 中有且只有一个是真命题，则 p 真 q 假或 p 假 q 真，
    即 $\begin{cases}m\leqslant1,\\m\geqslant2\end{cases}$ 或 $\begin{cases}m>1,\\m<2,\end{cases}$ 所以 $1<m<2$.
    故实数 m 的取值范围是(1,2).

第 2 课时 1.1.3 四种命题间的相互关系

基础知识梳理

2. (1)逆命题 (2)否命题 (3)逆否命题

题点知识巩固

1. 选 C 命题“若 $a+b=1$，则 $a^2+b^2\geqslant\frac{1}{2}$”的逆否命题是“若 $a^2+b^2<\frac{1}{2}$，则 $a+b\neq1$”. 故选 C.
2. 选 C 一个命题的否命题既要否定条件也要否定结论，而 $x\neq3$ 且 $x\neq2$ 要求同时成立的否定为至少有一个不成立即可，不一定需要同时不成立，它的否定是 $x=3$ 或 $x=2$. $\therefore$ 否命题为“若 $x=3$ 或 $x=2$，则 $x^2-5x+6=0$”.
3. 选 C 在 $\triangle ABC$ 中，$\cos A=\cos[\pi-(B+C)]=-\cos(B+C)=-\cos B\cos C+\sin B\sin C$，又 $\cos A=2\sin B\sin C$，
   $\therefore\cos(B-C)=0$，$\therefore B-C=\frac{\pi}{2}$ 或 $C-B=\frac{\pi}{2}$，则 $\triangle ABC$ 是钝角三角形. 故原命题是真命题，其逆否命题也为真命题. 其逆命题是“若 $\triangle ABC$ 是钝角三角形，则 $\cos A=2\sin B\sin C$”，显然是假命题，故其否命题也是假命题，综上知，②③④正确.
4. **解析**：①由 $\Delta=4+4k>0$，知①是假命题，②是真命题，③逆命题为“对角线相等的四边形是梯形”是假命题，④否命题“若 $xy\neq0$，则 x,y 都不为 0”是真命题.
   答案：②④
5. 选 D 因为原命题与逆否命题等价，所以命题“若 $m\in M$，则 $n\notin M$”的等价命题是“若 $n\in M$，则 $m\notin M$”.
6. **证明**：“若 $a^2-4b^2-2a+1\neq0$，则 $a\neq2b+1$”的逆否命题为“若 $a=2b+1$，则 $a^2-4b^2-2a+1=0$”.
   因为 $a=2b+1$，
   所以 $a^2-4b^2-2a+1=(2b+1)^2-4b^2-2(2b+1)+1=4b^2+1+4b-4b^2-4b-2+1=0$，
   所以命题“若 $a=2b+1$，则 $a^2-4b^2-2a+1=0$”为真命题.
   由原命题与其逆否命题具有相同的真假性可知，原结论正确.

提能达标过关

1. 选 A 命题“若 $A\cup B=A$，则 $A\cap B=B$”的否命题是“若 $A\cup B\neq A$，则 $A\cap B\neq B$”. 故选 A.
2. 选 D 当直线 l 垂直平面内无数条互相平行的直线时，直线与平面不一定垂直，故 p 假，p 的逆命题为真，所以它的否命题 q 也为真.
3. 选 B 特殊化：假设命题 p 为：“若 $a>b$，则 $a^2>b^2$”，则命题 q 为：“若 $a^2>b^2$，则 $a>b$”. 命题 r 为：“若 $a^2\leqslant b^2$，则 $a\leqslant b$”. 因此知，q 是 r 的否命题.
4. 选 C 写出相应的命题后并判断真假.
   ①“若 x,y 互为相反数，则 $x+y=0$”为真命题；
   ②“不相似的三角形的周长不相等”为假命题；
   ③“若方程 $x^2-2bx+b^2+b=0$ 没有实根，则 $b>0$”为真命题；
   ④因为“$A\cup B=B$，则 $A\supseteq B$”是假命题，所以它的逆否命题也是假命题.
5. 选 D 一个命题的逆否命题是将这个命题的条件和结论交换，同时加以否定，结合选项知，应选 D.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

6. **解析**：根据甲和丙的回答推测乙没有去过 B 城市，又知乙没有去过 C 城市，故乙去过 A 城市.
答案：A

7. **解析**：因为原命题与逆否命题等价，所以只要写出已知命题的逆否命题即可. 已知命题的逆否命题为“已知不共线的向量 $\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$，若 λ,μ 不同时为 0，则 $\lambda\boldsymbol{e}_1+\mu\boldsymbol{e}_2\neq\boldsymbol{0}$”是真命题.
答案：已知不共线的向量 $\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$，若 λ,μ 不同时为 0，则 $\lambda\boldsymbol{e}_1+\mu\boldsymbol{e}_2\neq\boldsymbol{0}$ 真

8. ②⑤，③⑥ ①⑥，②④ ①③，④⑤

9. **解**：(1)$\because x^2+2ax-b=0$ 没有实数根，
$\therefore\Delta=(2a)^2-4\times1\times(-b)=4a^2+4b<0$，即 $b<-a^2$.
$\therefore a+b<a-a^2=-\left(a-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}\leqslant\frac{1}{4}$.
$\therefore a+b<\frac{1}{4}$. 故原命题是真命题.
(2)逆命题为：若 $a,b\in\mathbf{R}$，$a+b<\frac{1}{4}$，则方程 $x^2+2ax-b=0$ 没有实根，该命题是假命题. 如当 $a=1$，$b=-1$ 时，方程有实数根 $x=-1$.

10. **证明**：“若 $p^2+q^2=2$，则 $p+q\leqslant2$”的逆否命题为“若 $p+q>2$，则 $p^2+q^2\neq2$”.
现证明逆否命题为真.
$\because p+q>2$，$\therefore(p+q)^2>4$.
$\therefore p^2+q^2+2pq>4$.
$\because 2pq\leqslant p^2+q^2$，
$\therefore p^2+q^2+2pq\leqslant2(p^2+q^2)$，
$\therefore 2(p^2+q^2)>4$，
$\therefore p^2+q^2>2$，
即 $p^2+q^2\neq2$.

1.2 充分条件与必要条件

第 3 课时 1.2.1 充分条件与必要条件 1.2.2 充要条件

基础知识梳理

1. $p\Rightarrow q$ $p\not\Rightarrow q$
2. 充分条件 必要条件
3. $p\Rightarrow q$ $q\Rightarrow p$ 充要条件 $p\Leftrightarrow q$ 充要条件

题点知识巩固

1. 选 B $\because a,b,c,d$ 是非零实数，$\therefore$ 若 a,b,c,d 成等比数列，则 $ad=bc$，反之若 $ad=bc$，a,b,c,d 不一定是等比数列，如 $a=1$，$d=-2$，$b=2$，$c=-1$，有 $ad=bc=-2$，但 a,b,c,d 不成等比数列.

2. 选 A $\because x\in\mathbf{R}$，$\therefore x^3>8\Rightarrow x>2\Rightarrow|x|>2$. 而 $|x|>2\Leftrightarrow x>2$ 或 $x<-2\not\Rightarrow x^3>8$，$\therefore$“$x^3>8$”是“$|x|>2$”的充分不必要条件.

3. **解析**：令 $A=\left\{x\,\middle|\,-2\leqslant1-\frac{x-1}{3}\leqslant2\right\}=\{x|-2\leqslant x\leqslant10\}$，
$B=\{x|x^2-2x+(1-m^2)\leqslant0,m>0\}=\{x|1-m\leqslant x\leqslant1+m,m>0\}$.
$\because\neg p$ 是 $\neg q$ 的必要不充分条件，$\therefore p$ 是 q 的充分不必要条件.
即 $A\subsetneqq B$，$\therefore\begin{cases}m>0,\\1-m\leqslant-2,\\1+m\geqslant10,\end{cases}$
$\therefore m\geqslant9$.
答案：$[9,+\infty)$

4. **解析**：$\because x^2-2x-3\geqslant0$，$\therefore x\geqslant3$ 或 $x\leqslant-1$. $\because$“$x<a$”是“$x^2-2x-3\geqslant0$”的充分不必要条件，$\therefore a\leqslant-1$. 即 a 的取值范围是 $(-\infty,-1]$.
答案：$(-\infty,-1]$

5. **解析**：由 $x^2-4x+n=0$，得 $(x-2)^2=4-n$.
$\because$ 方程有整数根，且 $n\in\mathbf{N}^*$，$\therefore n=3$ 或 4.
答案：3 或 4

6. **证明**：①充分性：$\because t=-1$，$\therefore S_n=2^n-1$.
当 $n\geqslant2$ 时，$a_n=S_n-S_{n-1}=(2^n-1)-(2^{n-1}-1)=2^{n-1}$.
又 $n=1$ 时，$a_1=1$，$\therefore n\in\mathbf{N}_+$ 时，$a_n=2^{n-1}$.
$\therefore\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{2^n}{2^{n-1}}=2$. $\therefore$ 数列 $\{a_n\}$ 是等比数列.
②必要性：$\because S_n=2^n+t(n\in\mathbf{N}_+)$，
$\therefore a_1=S_1=2+t$，$a_2=S_2-S_1=(2^2+t)-(2+t)=2$，
$a_3=S_3-S_2=(2^3+t)-(2^2+t)=4$，若 $\{a_n\}$ 是等比数列，
则 $a_2^2=a_1\cdot a_3$，即 $4=(2+t)\times4$，$\therefore t=-1$.
由①②知，数列 $\{a_n\}$ 是等比数列的一个充要条件是 $t=-1$.

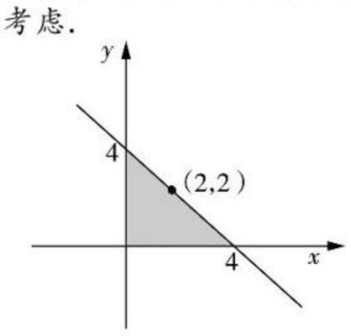
提能达标过关

1. 选 D 可以举例说明“$a+b>c$”是“$a>c$ 且 $b>c$”的既不充分也不必要条件.

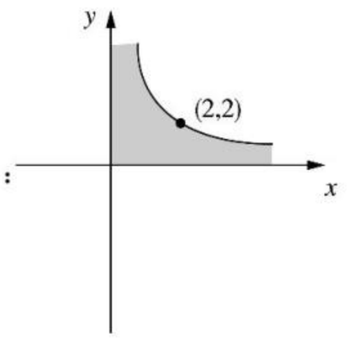
2. 选 B 两平面互相垂直，一平面中的线不一定垂直另一平面，
$\therefore l\subset\alpha\not\Rightarrow l\perp\beta$，所以“$l\subset\alpha$”是“$l\perp\beta$”的不充分条件.
过一点与一平面垂直的直线有且只有一条，过 P 作 α,β 的交线的直线垂直 β.
$\therefore l\perp\beta\Rightarrow l\subset\alpha$，
$\therefore$“$l\subset\alpha$”是“$l\perp\beta$”的必要条件，故选 B.

3. 选 A $\because x|x|-2<0\Rightarrow\begin{cases}x\geqslant0,\\x^2-2<0\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x<0,\\-x^2-2<0,\end{cases}$
解得 $x<\sqrt{2}$，$\therefore$“$x<1$”是“$x|x|-2<0$”的充分不必要条件.

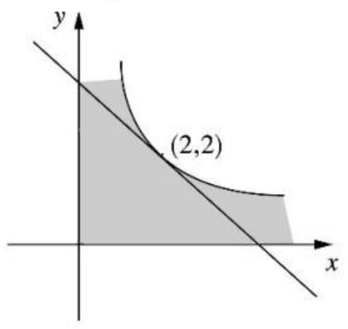
4. 选 A 解法一：数形结合考虑.
$a+b\leqslant4$ 表示的区域为：



$ab\leqslant4$，即 $b\leqslant\frac{4}{a}$ 表示的区域为：



画在同一坐标系下如图所示：



由图可知，$a+b\leqslant4$ 是 $ab\leqslant4$ 的真子集，
$\therefore$“$a+b\leqslant4$”是“$ab\leqslant4$”的充分不必要条件.
解法二：$4\geqslant a+b\geqslant2\sqrt{ab}$，$\therefore ab\leqslant4$，$\therefore a+b\leqslant4\Rightarrow ab\leqslant4$，
当 $ab\leqslant4$ 时，可令 $a=\frac{1}{2}$，$b=4$，
此时 $a+b\leqslant4$ 不成立.
$\therefore ab\leqslant4\not\Rightarrow a+b\leqslant4$，
$\therefore$“$a+b\leqslant4$”是“$ab\leqslant4$”的充分不必要条件.

5. 选 B A 中 α 与 β 相交时，α 内也可有无数条直线与交线平行，这些线均平行 β，A 不正确；B 选项即两平面平行的判定定理，α 内有两条相交直线与 β 平行能推出 $\alpha\parallel\beta$，反过来，$\alpha\parallel\beta$，α 与 β 没有公共点. α 内肯定有两相交直线与 β 平行，故 B 为充要条件，C、D 显然不正确.

6. **解析**：抛物线 $y=x^2+bx+c$ 开口向上，要使在 $x\in[0,+\infty)$ 时为单调函数，只要对称轴 $x=-\frac{b}{2}\leqslant0$，即 $b\geqslant0$.
答案：$b\geqslant0$

7. **解析**：$\because$“$x\in P$”是“$x\in Q$”的必要条件，$\therefore Q\subseteq P$，
$\therefore\begin{cases}a-4\leqslant1,\\a+4\geqslant3,\end{cases}\therefore-1\leqslant a\leqslant5$.
即实数 a 的取值范围是 $[-1,5]$.
答案：$[-1,5]$

8. **解析**：$x^2\neq1\Rightarrow x\neq1$，但 $x\neq1\not\Rightarrow x^2\neq1$. $\therefore$① 正确；“$x>5$”是“$x>4$”的充分不必要条件，$\therefore$②错；“$xy=0$”的充要条件是“$x=0$ 或 $y=0$”，$\therefore$③错；由 $x^2<4$ 可以推出 $x<2$. $\therefore$④错.
答案：①

9. **解**：(1)当 $A=B$ 时，$\sin A=\sin B$；反之，当 $\sin A=\sin B$ 时，$A=B$ 不一定成立，比如 $\sin\frac{\pi}{3}=\sin\frac{2\pi}{3}$，但 $\frac{\pi}{3}\neq\frac{2\pi}{3}$. 故 p 是 q 的充分不必要条件.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

(2)当 $x>2$ 且 $y>3$ 时,$x+y>5$ 成立;当 $x+y>5$ 时,不一定有 $x>2$ 且 $y>3$ 成立,比如 $x=1,y=6$.
故 p 是 q 的充分不必要条件.

(3)当 $a>b$ 时,$\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$不一定成立,比如 $a=1,b=-1$;

当$\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$时,$a>b$ 也不一定成立,比如 $a=-1,b=1$.

故 p 是 q 的既不充分也不必要条件.

10. **解**:对集合 B,由 $x^2-3(a+1)x+2(3a+1)\leqslant 0$ 得,
$(x-2)[x-(3a+1)]\leqslant 0$,

∴①当 $a\geqslant\frac{1}{3}$时,$B=\{x|2\leqslant x\leqslant 3a+1\}$;

②当 $a<\frac{1}{3}$时,$B=\{x|3a+1\leqslant x\leqslant 2\}$.

∵p 是 q 的充分条件,∴$A\subseteq B$,从而有

$$\begin{cases}a\geqslant\frac{1}{3},\\ a^2+1\leqslant 3a+1,\\ 2a\geqslant 2\end{cases}\text{或}\begin{cases}a<\frac{1}{3},\\ a^2+1\leqslant 2,\\ 2a\geqslant 3a+1,\end{cases}$$

解得 $1\leqslant a\leqslant 3$ 或 $a=-1$.
综上,所求实数 a 的取值范围是$\{a|1\leqslant a\leqslant 3$ 或 $a=-1\}$.

1.3 简单的逻辑联结词

第 4 课时 1.3.1 且(and) 1.3.2 或(or) 1.3.3 非(not)

基础知识梳理

1.“且”“或”“非”

2.真 真 假 假 真 假 假 真 真 假 假 真

题点知识巩固

1. 选 A 命题 p 是“甲降落在指定范围”,则 $\neg p$ 是“甲没有降落在指定范围”,同理 $\neg q$ 是“乙没有降落在指定范围”,则$(\neg p)\vee(\neg q)$表示“至少有一位学员没有降落在指定范围”.

2. 选 A “$xy\neq 0$”是指 $x\neq 0$ 且 $y\neq 0$.

3. 选 C 由已知得$\begin{cases}y=2x-3,\\ y=-x^2,\end{cases}$解得$\begin{cases}x=-3,\\ y=-9\end{cases}$或$\begin{cases}x=1,\\ y=-1.\end{cases}$则使“$p\wedge q$”为真命题的点 $A(1,-1)$.

4. 选 B 由 $x^2+x+m>0$ 恒成立,得 $\Delta=1-4m<0$,即 $m>\frac{1}{4}$,

∴命题 p 为真命题.
在$\triangle ABC$ 中,$A>B\Leftrightarrow a>b\Leftrightarrow 2R\sin A>2R\sin B\Leftrightarrow\sin A>\sin B$.
∴命题 q 为真命题.∴p 且 q 为真.

5. 选 C 若 $p\wedge(\neg q)$为真,则 p 真,q 假.
由 p 为真,得 $f(0)\cdot f(1)<0$,即 $-1\times(2a-2)<0$,
∴$a>1$.由 q 为真得,$2-a<0$,∴$a>2$.
∴$\neg q$ 为 $a\leqslant 2$.由 $p\wedge(\neg q)$为真,得 $1<a\leqslant 2$.

6. **解**:(1)由 p 真:$x^2+(2m-4)x+m=0$ 有两个不等的实数根得,
$\Delta=(2m-4)^2-4m>0$,
得 $m>4$ 或 $m<1$.
(2)若 $p\vee q$ 为真,$p\wedge q$ 为假,所以 p 与 q 一真一假.q 真:$x^2-4x+13=(x-2)^2+9$,最小值为 $x=2$ 时,得 $m^2\leqslant 9$,$-3\leqslant m\leqslant 3$.

当 p 真 q 假时,$\begin{cases}m>4\text{ 或 }m<1,\\ m<-3\text{ 或 }m>3,\end{cases}$得 $m<-3$ 或 $m>4$;

当 p 假 q 真时,$\begin{cases}1\leqslant m\leqslant 4,\\ -3\leqslant m\leqslant 3,\end{cases}$得 $1\leqslant m\leqslant 3$.

∴m 的取值范围为$(-\infty,-3)\cup[1,3]\cup(4,+\infty)$.

提能达标过关

1. 选 C 当 $a=0$ 时,方程 $ax+1=0$ 无解,故 p 是假命题.若直线 $x+my=0$ 与直线 $2x+y+1=0$ 平行,则 $m=\frac{1}{2}$,所以命题 q 为假命题,故$(\neg p)\vee q$ 为真命题.

2. 选 B 易知 p 为真命题,q 为假命题,则 $p\vee q$ 为真命题.

3. 选 D 由 $p\wedge q$ 的否定是 $\neg p$ 或 $\neg q$ 知,$x\in A\cap B$ 的否定是 $x\notin A$ 或 $x\notin B$.

4. 选 D 原命题是真命题,条件是四边形是正方形,结论是对角线互相垂直平分,它是“$p\wedge q$”形式的命题.

5. 选 A 对于命题 p:因为 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$,$\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}=0$,所以 $\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{b}$,$\boldsymbol{c}$ 的夹角都为 $90°$,但 $\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{c}$ 的夹角可以为 $0°$或 $180°$,故 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}\neq 0$,所以命题 p 是假命题;
对于命题 q:$\boldsymbol{a}\parallel\boldsymbol{b}$,$\boldsymbol{b}\parallel\boldsymbol{c}$,说明 $\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{b}$,$\boldsymbol{c}$ 都共线,可以得到 $\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{c}$ 的方向相同或相反,故 $\boldsymbol{a}\parallel\boldsymbol{c}$,所以命题 q 是真命题.
则 $p\vee q$ 是真命题,$p\wedge q$ 是假命题,$\neg p$ 是真命题,$\neg p$ 是假命题,所以$(\neg p)\wedge(\neg q)$是假命题,$p\vee(\neg q)$是假命题,故选 A.

6. **解析**:由已知得,p 真 q 假,所以 $p\vee q$,$\neg q$ 均为真.
答案:②④

7. **解析**:由 $x^2+2x-3>0$,得 $x<-3$ 或 $x>1$,
所以 p:$x<-3$ 或 $x>1$.
由$\frac{1}{3-x}>1$,得$\frac{x-2}{x-3}<0$,
所以 $2<x<3$.
所以 q:$2<x<3$,$\neg q$:$x\leqslant 2$ 或 $x\geqslant 3$.
若“$\neg q$ 且 p”为真,则有$\begin{cases}x<-3\text{ 或 }x>1,\\ x\leqslant 2\text{ 或 }x\geqslant 3.\end{cases}$
所以 $x<-3$ 或 $1<x\leqslant 2$ 或 $x\geqslant 3$.
答案:$(-\infty,-3)\cup(1,2]\cup[3,+\infty)$

8. **解析**:由题意知,若命题 p 为真,则 $m\leqslant -1$.
若命题 q 为真,则 $\Delta=m^2-4<0$,即 $-2<m<2$.
若 $p\wedge q$ 为假,有下列三种情况:
(1)当 p 真 q 假时,$m\leqslant -2$;
(2)当 p 假 q 真时,$-1<m<2$;
(3)当 p 假 q 假时,$m\geqslant 2$.
综上知,m 的取值范围是 $m\leqslant -2$ 或 $m>-1$.
答案:$(-\infty,-2]\cup(-1,+\infty)$

9. **解**:(1)这个命题是 $p\vee q$ 的形式,其中 p:相似三角形周长相等;q:相似三角形对应角相等,因为 p 假 q 真,所以 $p\vee q$ 为真.故原命题为真.
(2)这个命题是 $\neg p$ 的形式,其中 p:9 的算术平方根是 -3,因为 p 假,所以 $\neg p$ 为真.故原命题为真.
(3)这个命题是 $p\wedge q$ 的形式,其中 p:垂直于弦的直径平分这条弦;q:垂直于弦的直径平分这条弦所对的两段弧,因为 p 真 q 真,所以 $p\wedge q$ 为真.故原命题为真.

10. **解**:(1)$m=2$ 时,$x^2-8x+12\leqslant 0$,得 $2\leqslant m\leqslant 6$,
q:$-2\leqslant x\leqslant 3$,
由 $p\wedge q$ 为真,取交集得 $2\leqslant x\leqslant 3$.
即实数 x 的取值范围为$[2,3]$.
(2)$\neg q$ 是 $\neg p$ 的充分不必要条件,所以 p 是 q 的充分不必要条件,
p:$m\leqslant x\leqslant 3m$,q:$-2\leqslant x\leqslant 3$,
$m\geqslant -2$ 且 $3m\leqslant 3$,
∴$-2\leqslant m\leqslant 1$.
即实数 m 的取值范围为$[-2,1]$.

1.4 全称量词与存在量词

第 5 课时 1.4.1 全称量词 1.4.2 存在量词

基础知识梳理

1.(1)全称量词 ∀ (2)含有全称量词 (3)$\forall x\in M,p(x)$ 对任意 x 属于 M,有 $p(x)$成立

2.(1)存在量词 ∃ (2)含有存在量词 (3)$\exists x_0\in M,p(x_0)$ 存在一个 x_0 属于 M,使 $p(x_0)$成立

题点知识巩固

1. 选 B ①④是特称命题,②③是全称命题.

2. 选 B A 中锐角三角形的内角都是锐角,所以是假命题;B 中 $x=0$时,$x^2=0$,所以 B 既是特称命题又是真命题;C 中因为 $\sqrt{3}+(-\sqrt{3})=0$,所以 C 是假命题;D 中对于任意一个负数 x,都有$\frac{1}{x}<0$,所以 D 是假命题.

3. 选 B ∵当 $x=1$ 时,$(x-1)^2=0$,∴$\forall x\in\mathbf{N}^*$,$(x-1)^2>0$ 是假命题.

4. **解**:(1)含有全称量词,是全称命题,用符号表示为:
$\forall x\in\mathbf{R}$,$x\cdot(-1)=-x$,是真命题;
(2)含有存在量词,是特称命题,用符号表示为:
$\exists x_0\in\mathbf{R}$,$x_0\cdot a=0$(a 为任意实数),是真命题;
(3)含有存在量词,是特称命题,用符号表示为:
$\exists(x_0,y_0)\in\{(x,y)\mid x^2+y^2=1\}$,使$\frac{|x_0-y_0+1|}{\sqrt{2}}=1$,是真命题.

5. **解析**:∵$f(x)=\sin 2x-\sqrt{3}\cos 2x=2\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)$,

又 $0<x\leqslant\frac{\pi}{4}$,

∴$-\frac{\pi}{3}<2x-\frac{\pi}{3}\leqslant\frac{\pi}{6}$,

∴$-\sqrt{3}<2\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)\leqslant 1$,

∴$|f(x)|<\sqrt{3}$,∴$m\geqslant\sqrt{3}$.
答案:$[\sqrt{3},+\infty)$

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

6. **解**：由 $\sin x+\cos x=\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\in[-\sqrt{2},\sqrt{2}]$，又对于 $\forall x\in\mathbf{R}$，p 为假命题，即对于 $\forall x\in\mathbf{R}$，$\sin x+\cos x>m$ 恒不成立，所以 $m\geqslant\sqrt{2}$.
又对于 $\forall x\in\mathbf{R}$，q 为真命题，即对于 $\forall x\in\mathbf{R}$，$x^2+mx+1>0$ 恒成立，所以 $\Delta=m^2-4<0$，即 $-2<m<2$.
故对 $\forall x\in\mathbf{R}$，p 为假命题且 q 为真命题，应有 $\sqrt{2}\leqslant m<2$. 即实数 m 的取值范围是 $[\sqrt{2},2)$.

提能达标过关

1. 选 D　A 是全称命题，且 $a^2+b^2-2a-2b+2=(a-1)^2+(b-1)^2\geqslant0$，是假命题；B 中隐含量词“所有的”，是全称命题，但等腰梯形的对角线相等，是假命题；C 是特称命题；易知 D 是全称命题且是真命题.
2. 选 A　∵当 $x_0\in\mathbf{N}$ 时，$x_0^3-x_0^2=x_0^2(x_0-1)\geqslant0$，∴不存在 x_0 使 $x_0^3<x_0^2$，∴p 是假命题，命题 q 是真命题.
3. 选 C　①④为全称命题，②③为特称命题；其中①②③为真命题，④为假命题.
4. 选 A　$\forall x\in\mathbf{R}$，均有 $\sin^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}=1$，而不是 $\frac{1}{2}$，
∴p_1 为假命题；当 $x_0,y_0,x-y$ 有一个为 $2k\pi(k\in\mathbf{Z})$ 时，$\sin(x_0-y_0)=\sin x_0-\sin y_0$ 成立，∴p_2 是真命题；
∵$\forall x\in[0,\pi]$，$\sin x\geqslant0$，∴$\sqrt{\frac{1-\cos 2x}{2}}=\sqrt{\sin^2x}=\sin x$ 成立，∴p_3 是真命题；当 $\sin x=\cos y=\sin\left(\frac{\pi}{2}-y\right)$ 时，$x=2k\pi+\frac{\pi}{2}-y$，即 $x+y=2k\pi+\frac{\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$，∴ p_4 是假命题.
5. 选 C　依题意得 $x_0=-\frac{b}{2a}$. 又 $f(x)=ax^2+bx+c(a>0)$ 是开口向上的抛物线，且对称轴为 $x_0=-\frac{b}{2a}$，所以 $f(x_0)$ 是 $f(x)$ 的最小值. 故选项 C 是假命题.
6. **解析**：由题意得，$a=0$
或 $\begin{cases}a<0,\\ \Delta=(-a)^2-4a\times(-2)<0,\end{cases}$
即 $a=0$ 或 $-8<a<0$，∴$-8<a\leqslant0$.
答案：$(-8,0]$
7. **解析**：$k+1=\cos 2x_0+\sqrt{3}\sin 2x_0=2\sin\left(2x_0+\frac{\pi}{6}\right)$，
又∵$0\leqslant x_0\leqslant\frac{\pi}{2}$，∴$\frac{\pi}{6}\leqslant2x_0+\frac{\pi}{6}\leqslant\frac{7\pi}{6}$，
∴$-1\leqslant2\sin\left(2x_0+\frac{\pi}{6}\right)\leqslant2$. ∵$p$ 为真命题，
∴$-1\leqslant k+1\leqslant2$，∴$-2\leqslant k\leqslant1$.
答案：$[-2,1]$
8. **解析**：①中 $\neg p$：$\forall x\in\mathbf{R}$，均有 $x^2+x-1\geqslant0$，所以①不正确；②中，$q\Rightarrow p$ 且 $p\not\Rightarrow q$，则 $\neg p\Rightarrow\neg q$ 且 $\neg q\not\Rightarrow\neg p$，故②正确；易知③④正确.
答案：②③④
9. **解**：若 p 真，∵函数 $y=\log_ax$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，
∴p：$a>1$.
若 q 真，不等式 $ax^2-ax+1>0$ 对 $\forall x\in\mathbf{R}$ 恒成立，
∴$a>0$ 且 $a^2-4a<0$，解得 $0<a<4$，∴q：$0<a<4$.
∵“$p\wedge q$”为假，“$p\vee q$”为真，∴p，q 中必有一真一假.
①当 p 真 q 假时，$\begin{cases}a>1,\\ a\geqslant4,\end{cases}$解得 $a\geqslant4$；
②当 p 假 q 真时，$\begin{cases}0<a\leqslant1,\\ 0<a<4,\end{cases}$解得 $0<a\leqslant1$.
故 a 的取值范围为 $(0,1]\cup[4,+\infty)$.
10. **解**：(1)不等式 $m+f(x)>0$ 可化为 $m>-f(x)$，
即 $m>-x^2+2x-5=-(x-1)^2-4$.
要使 $m>-(x-1)^2-4$ 对于任意 $x\in\mathbf{R}$ 恒成立，只需 $m>-4$ 即可.
故存在实数 m，使不等式 $m+f(x)>0$ 对于任意 $x\in\mathbf{R}$ 恒成立，此时，只需 $m>-4$.
(2)不等式 $m-f(x_0)>0$ 可化为 $m>f(x_0)$，若存在一个实数 x_0，使不等式 $m>f(x_0)$ 成立，只需 $m>f(x)_{\min}$.
又 $f(x)=(x-1)^2+4$，∴$f(x)_{\min}=4$，∴$m>4$.
故所求实数 m 的取值范围是 $(4,+\infty)$.

第 6 课时　1.4.3　含有一个量词的命题的否定

基础知识梳理

1. $\exists x_0\in M,\neg p(x_0)$　特称命题
2. $\forall x\in M,\neg p(x)$　全称命题

题点知识巩固

1. 选 C　全称命题“$\forall x\in[0,+\infty),x^3+x\geqslant0$”的否定是特称命题：$\exists x_0\in[0,+\infty),x_0^3+x_0<0$.
2. 选 D　把全称量词改为特称量词，并否定结论. 故选 D.
3. 选 D　“$\forall$”的否定是“$\exists$”，“$\exists$”的否定是“$\forall$”，“$n\geqslant x^2$”的否定是“$n<x^2$”，∴命题“$\forall x\in\mathbf{R},\exists n_0\in\mathbf{N}^*$，使得 $n_0\geqslant x^2$”的否定形式是“$\exists x_0\in\mathbf{R},\forall n\in\mathbf{N}^*$，使得 $n<x_0^2$”.
4. 选 B　因为 $x>0$，所以 $x+1>1$，所以 $\ln(x+1)>0$，
则命题 p 为真命题，
由 $1>-2$，但 $1^2<(-2)^2$，所以命题 q 是假命题，则 $\neg q$ 是真命题，所以 $p\wedge(\neg q)$ 是真命题.
5. **解**：(1)原命题的否定 $\neg p$：$\exists m_0\in\mathbf{R}$，方程 $x^2+x-m_0=0$ 没有实数根. $\Delta=1+4m_0<0$，即 $m_0<-\frac{1}{4}$ 时，方程 $x^2+x-m=0$ 没有实数根，因此 $\neg p$ 是真命题.
(2)原命题的否定 $\neg p$：存在末位数字是 0 或 5 的整数，不能被 5 整除. 是假命题.
(3)原命题的否定 $\neg p$：任一个梯形的对角线都不互相平分. 是真命题.
(4)原命题的否定 $\neg p$：存在一个能被 8 整除，但不能被 4 整除的整数. 是假命题.
6. **解**：∵$x_1\in[-1,3]$，∴$f(x_1)\in[0,9]$.
又∵$\forall x_1\in[-1,3]$，$\exists x_0\in[0,2]$，
使得 $f(x_1)\geqslant g(x_0)$，即 $\exists x_0\in[0,2]$，使得 $g(x_0)\leqslant0$，
即 $\left(\frac{1}{2}\right)^{x_0}-m\leqslant0$，∴$m\geqslant\left(\frac{1}{2}\right)^{x_0}$.
∵$x_0\in[0,2]$，∴$m\geqslant\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$.
∴实数 m 的取值范围是 $\left[\frac{1}{4},+\infty\right)$.

提能达标过关

1. 选 A　特称命题的否定是全称命题，即把“$\exists x_0$”改为“$\forall x$”，把“$\ln x_0=x_0-1$”改为“$\ln x\neq x-1$”. 故选 A.
2. 选 C　易知选项 A、B、D 正确；对于选项 C，$\neg p$ 应为：所有的三角形都不是正三角形. 故 C 错.
3. C
4. 选 C　∵$y=\left(\frac{3}{2}\right)^x$ 在 $\mathbf{R}$ 上是增函数，∴当 $x\in(0,+\infty)$ 时，总有 $y=\left(\frac{3}{2}\right)^x>1$，∴$3^x>2^x$. ∴$p_1$ 是真命题. $\sin\theta_0+\cos\theta_0=\sqrt{2}\sin\left(\theta_0+\frac{\pi}{4}\right)\leqslant\sqrt{2}$，∴$p_2$ 是假命题，$\neg p_2$ 是真命题，$p_1\vee p_2$，$p_1\wedge(\neg p_2)$ 是真命题，即 q_1，q_4 是真命题.
5. 选 C　若 $\neg p$ 是假命题，则 p 为真命题，即对 $\forall x\in\mathbf{R},\exists m_0\in\mathbf{R}$，使 $4^x+2^xm_0+1=0$，即 $m_0=-\frac{4^x+1}{2^x}=-\left(2^x+\frac{1}{2^x}\right)$. 因为 $\forall x\in\mathbf{R}$，$2^x>0$，所以 $2^x+\frac{1}{2^x}\geqslant2$，故 $m_0\leqslant-2$.
6. $\forall x\in\mathbf{R},x>1$ 且 $x^2\leqslant4$
7. $\exists x_0\in\mathbf{R}$，若 $y>0$，则 $x_0^2+y^2\leqslant0$
8. **解析**：∵$m\in[-1,1]$，∴ $\sqrt{m^2+8}\in[2\sqrt{2},3]$. 由不等式 $a^2-5a-3\geqslant\sqrt{m^2+8}$ 恒成立，得 $a^2-5a-3\geqslant3$，即 $a^2-5a-6\geqslant0$，解得 $a\geqslant6$ 或 $a\leqslant-1$. ∴实数 a 的取值范围是 $(-\infty,-1]\cup[6,+\infty)$.
答案：$(-\infty,-1]\cup[6,+\infty)$
9. **解**：(1)命题的否定：若 $b^2=ac$，则 a,b,c 不成等比数列；否命题：若 $b^2\neq ac$，则 a,b,c 不成等比数列.
(2)命题的否定：垂直于同一条直线的两条直线不平行；否命题：若两条直线不垂直于同一条直线，则这两条直线不平行.
(3)命题的否定：对于任意实数 x，使 $x^2+4x+4\neq0$；否命题：不存在实数 x，使 $x^2+4x+4\neq0$.
10. **解**：由题意知，抛物线 $f(x)=2x^2-2ax+b$ 的顶点是 $(-1,-8)$. 于是得 $f(x)=2(x+1)^2-8=2(x^2+2x-3)$.
由 $f(x)>0$，得 $x<-3$ 或 $x>1$.
即 $A=\{x|x<-3$ 或 $x>1\}$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

(1)当 $t=1$ 时,$B=\{x|0\leqslant x\leqslant 2\}$.
所以$(\complement_{\mathbf{R}}A)\cup B=\{x|-3\leqslant x\leqslant 1\}\cup\{x|0\leqslant x\leqslant 2\}=\{x|-3\leqslant x\leqslant 2\}$.
(2)$B=\{x||x-t|\leqslant 1\}=\{x|t-1\leqslant x\leqslant t+1\}$,
又 $A\cap B=\varnothing$ 为真命题,得 $\begin{cases}t-1\geqslant -3,\\ t+1\leqslant 1,\end{cases}$ 所以 $-2\leqslant t\leqslant 0$.
故实数 t 的取值范围是$[-2,0]$.

阶段评估 1

1. A
2. 选 A 由 $y=e^{|x-1|}$ 的图象知,图象关于直线 $x=1$ 对称,∴命题 p 是真命题. 当 $x=\frac{\pi}{6}$ 时由 $y=\cos\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$,得 $y=\cos\left(2\times\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{6}\right)=\cos\frac{\pi}{2}=0$,
∴函数 $y=\cos\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$ 的图象关于点 $\left(\frac{\pi}{6},0\right)$ 对称,
∴q 是真命题,∴$p\wedge q$ 是真命题.
3. 选 B ∵$\forall x\in\mathbf{R},x^2-bx+1>0$ 成立,∴$\Delta=(-b)^2-4<0$,即 $b^2<4$,∴$-2<b<2$. ∵$[0,1]\subsetneqq[-2,2]$,
∴"$\forall x\in\mathbf{R},x^2-bx+1>0$ 成立"是"$b\in[0,1]$"的必要不充分条件.
4. D
5. 选 A ∵向量的数量积不满足结合律,∴①不正确;
又∵$|\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}||\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle|$,∴②不正确;③正确;
∵$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}\Rightarrow\boldsymbol{b}(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{c})=0\not\Rightarrow\boldsymbol{a}=\boldsymbol{c}$,∴④不正确.
6. C
7. **解析**:∵"$\exists x_0\in\mathbf{R}$,使 $x_0^2+2x_0+m\leqslant 0$"是假命题,
∴"$\forall x\in\mathbf{R}$,使 $x^2+2x+m>0$"是真命题,∴$\Delta=4-4m<0$,
∴$m>1$. ∴实数 m 的取值范围是$(1,+\infty)$,∴$a=1$.
答案:1
8. **解析**:由 $x^2-2x-3>0$,得 $x<-1$ 或 $x>3$. 由题意得$\{x|x<a\}\subseteq\{x|x<-1$ 或 $x>3\}$,所以 $a\leqslant -1$. ∴a 的最大值为 -1.
答案:-1
9. **解析**:设 $A=\{(x,y)||x|+|y|<1\}$,$B=\{(x,y)|(x,y)\in M\}$,由于 p 是 q 的必要条件,所以 $A\supseteq B$. 即区域 M 的面积不大于$\{(x,y)||x|+|y|<1\}$的面积,而区域$\{(x,y)||x|+|y|<1\}$的面积等于 2,故区域 M 的面积最大值为 2.
答案:2
10. **解析**:$A=\left\{x\left|\frac{1}{2}<2^x<8\right.\right\}=\{x|-1<x<3\}$,
∵$x\in B$ 成立的一个充分不必要条件是 $x\in A$,
∴$A\subsetneqq B$,∴$m+1>3$,∴$m>2$.
∴实数 m 的取值范围是$(2,+\infty)$.
答案:$(2,+\infty)$
11. **解**:(1)若$\angle A=\angle B$,则 $\sin A=\sin B$,即 $p\Rightarrow q$.
又若 $\sin A=\sin B$,则 $2R\sin A=2R\sin B$,即 $a=b$.
∴$\angle A=\angle B$,即 $q\Rightarrow p$.
∴p 是 q 的充要条件.
(2)∵$\frac{f(-x)}{f(x)}=1$,∴$f(-x)=f(x)$,
∴$y=f(x)$是偶函数,∴$p\Rightarrow q$.
取 $f(x)=x^2$ 为 $\mathbf{R}$ 上的偶函数,
但$\frac{f(-x)}{f(x)}$在 $x=0$ 时没有意义,∴$q\not\Rightarrow p$.
∴p 是 q 的充分不必要条件.
(3)$p:\{x||x|=x\}=\{x|x\geqslant 0\}=A$,
$q:\{x|x^2+x\geqslant 0\}=\{x|x\geqslant 0$ 或 $x\leqslant -1\}=B$,
∵$A\subsetneqq B$,∴p 是 q 的充分不必要条件.
12. **证明**:①充分性
∵$0<m<\frac{1}{3}$,∴方程 $mx^2-2x+3=0$ 的判别式$\Delta=4-12m>0$,且 $x_1+x_2=\frac{2}{m}>0$,$x_1x_2=\frac{3}{m}>0$.
∴方程 $mx^2-2x+3=0$ 有两个同号且不相等的实根.
②必要性
若方程 $mx^2-2x+3=0$ 有两个同号且不相等的实根,则有 $\begin{cases}\Delta=4-12m>0,\\ x_1x_2=\frac{3}{m}>0.\end{cases}$ ∴$0<m<\frac{1}{3}$.
综合①②可知,方程 $mx^2-2x+3=0$ 有两个同号且不相等的实根的充要条件是 $0<m<\frac{1}{3}$.
13. **解**:由题意得 $A=\{x|x^2-x-2\geqslant 0\}=\{x|x\leqslant -1$ 或 $x\geqslant 2\}$,
$B=\left\{x\left|\frac{3}{x}-1>0\right.\right\}=\{x|0<x<3\}$,
∴$A\cap B=\{x|2\leqslant x<3\}$.
设 $C=\{x|2x+m<0\}=\left\{x\left|x\leqslant -\frac{m}{2}\right.\right\}$,
又若 p 则 q 为真命题,即 $p\Rightarrow q$,
∴$A\cap B\subseteq C$,
∴$3\leqslant -\frac{m}{2}$,$m\leqslant -6$,
∴实数 m 的取值范围是$\{m|m\leqslant -6\}$.
14. **解**:(1)$A=\{x|2<x<3\}$,
当 $a=\frac{1}{2}$时,$B=\left\{x\left|\frac{1}{2}<x<\frac{9}{4}\right.\right\}$,
所以 $\complement_U B=\left\{x\left|x\leqslant\frac{1}{2}\text{或 }x\geqslant\frac{9}{4}\right.\right\}$,
所以$(\complement_U B)\cap A=\left\{x\left|\frac{9}{4}\leqslant x<3\right.\right\}$.
(2)由若 q 是 p 的必要条件,即 $p\Rightarrow q$,可知 $A\subseteq B$.
由 $a^2+2>a$ 得 $B=\{x|a<x<a^2+2\}$,
所以 $\begin{cases}a\leqslant 2,\\ a^2+2\geqslant 3,\end{cases}$ 解得 $a\leqslant -1$ 或 $1\leqslant a\leqslant 2$. 故 a 的取值范围是$\{a|a\leqslant 1$ 或 $1\leqslant a\leqslant 2\}$.

第二章 圆锥曲线与方程

2.1 曲线与方程

第 7 课时 2.1.1 曲线与方程

基础知识梳理

方程的解 曲线上的点

题点知识巩固

1. 选 C 从"曲线的方程"和"方程的曲线"判断知,A、B、D 都不正确,故选 C.
2. 选 D A 中$(0,2)$不在直线上,B 中 BC 中线的方程是一线段,$x=0(0\leqslant y\leqslant 3)$. C 中方程应为 $y=\pm 5$. A、B、C 均错,D 正确.
3. 选 A 由 $x^2+xy=x$,得 $x^2+xy-x=0$,即 $x(x+y-1)=0$,得 $x=0$ 或 $x+y-1=0$ 两条直线,故选 A.
4. 选 D ∵$y=\lg 10^x=x\lg 10=x$,∴$x-y=0$ 与 $y=\lg 10^x$ 表示相同的曲线.
5. **解**:(1)∵$1^2+(-2-1)^2=10$,
$(\sqrt{2})^2+(3-1)^2=2+4\neq 10$,
∴点 $P(1,-2)$在此方程表示的曲线上,而 $Q(\sqrt{2},3)$不在此方程表示的曲线上.
(2)∵$M\left(\frac{m}{2},-m\right)$在方程 $x^2+(y-1)^2=10$ 表示的曲线上,
∴$\left(\frac{m}{2}\right)^2+(-m-1)^2=10$,
即 $5m^2+8m-36=0$,
解得 $m=2$ 或$-\frac{18}{5}$.
6. **解**:设两个交点分别为$A(x_1,y_1)$,$B(x_2,y_2)$,则 $k_{AB}=k=-1$.
联立 $\begin{cases}y=-x+1,\\ x^2+y^2-x-y-4=0,\end{cases}$ 消去 y 得,$x^2-x-2=0$,
∴$x_1=-1$,$x_2=2$,∴$y_1=2$,$y_2=-1$.
故两个交点的坐标分别为$(-1,2)$和$(2,-1)$.

提能达标过关

1. 选 C 点 M 的坐标$(4,-1)$既满足圆 C 的方程,也满足直线 l 的方程,所以点 M 既在圆 C 上,也在直线 l 上.
2. 选 B 点 M 在曲线 $x^2+y^2=1$ 上,不一定满足方程 $y=-\sqrt{1-x^2}$,但点 M 满足方程 $y=-\sqrt{1-x^2}$,则点 M 一定在曲线 $x^2+y^2=1$ 上,故"点 M 在曲线$x^2+y^2=1$ 上"是"M 点满足方程 $y=-\sqrt{1-x^2}$"的必要不充分条件.
3. C
4. 选 D 用(y,x)代换(x,y),方程不变,所以曲线关于直线 $y=x$ 对称.
5. 选 D $(x+y-1)\sqrt{x^2+y^2-4}=0\Leftrightarrow\begin{cases}x+y-1=0,\\ x^2+y^2\geqslant 4\end{cases}$ 或 $x^2+y^2=4$. 其中当 $x+y-1=0$ 时,需 $x^2+y^2\geqslant 4$,此时它表示直线 $x+y-1=0$ 不在圆 $x^2+y^2=4$ 内的部分;当 $x^2+y^2=4$ 时,方程表示圆,因此应选 D.

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

6. **解析**：由题意得 $\begin{cases}4b=4,\\ \frac{1}{4}a+3b=4,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}b=1,\\ a=4.\end{cases}$

答案：4　1

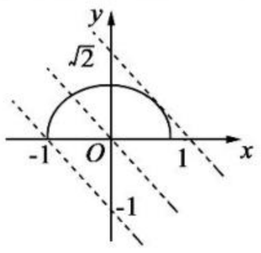
7. **解析**：由已知得，$a^2+a^2+2a+k=0$，

$\therefore k=-2a^2-2a=-2\left(a+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{2}\leqslant\frac{1}{2}$.

$\therefore$ 实数 k 的取值范围是 $\left(-\infty,\frac{1}{2}\right]$.

答案：$\left(-\infty,\frac{1}{2}\right]$

8. **解析**：利用数形结合法求解. 如图所示，$-1\leqslant b\leqslant\sqrt{2}$.



答案：$[-1,\sqrt{2}\,]$

9. **解**：(1)由方程 $(x+y-1)\sqrt{x-1}=0$，得

$\begin{cases}x-1\geqslant0,\\ x+y-1=0\end{cases}$ 或 $x-1=0$.

即 $x+y-1=0(x\geqslant1)$ 或 $x=1$.

所以方程表示直线 $x=1$ 或射线 $x+y-1=0(x\geqslant1)$.

(2)方程 $2x^2+y^2-4x+2y+3=0$，配方得

$2(x-1)^2+(y+1)^2=0$. $\because(x-1)^2\geqslant0,(y+1)^2\geqslant0$,

$\therefore\begin{cases}(x-1)^2=0,\\ (y+1)^2=0,\end{cases}\therefore\begin{cases}x=1,\\ y=-1.\end{cases}\therefore$ 方程表示的图形是坐标为 $(1,-1)$ 的点.

10. **解**：联立方程 $\begin{cases}y=(a+1)x-1,\\ y^2=ax.\end{cases}$

(1)当 $a=0$ 时，此方程组恰有一组解 $\begin{cases}x=1,\\ y=0.\end{cases}$

(2)当 $a\neq0$ 时，消去 x，得 $\frac{a+1}{a}y^2-y-1=0$；

①当 $\frac{a+1}{a}=0$，即 $a=-1$ 时，方程变为一元一次方程 $-y-1=0$，方程恰有一组解 $\begin{cases}x=-1,\\ y=-1.\end{cases}$

②若 $\frac{a+1}{a}\neq0$，即 $a\neq-1$ 时，令 $\Delta=0$，得 $1+\frac{4(a+1)}{a}=0$，解得 $a=-\frac{4}{5}$，此时直线与曲线相切，有且只有一个公共点. 综上所述，当 $a=0$，$a=-1$ 或 $a=-\frac{4}{5}$ 时，直线 $y=(a+1)x-1$ 与曲线 $y^2=ax$ 恰有一个公共点.

第 8 课时　2.1.2　求曲线的方程

基础知识梳理

有序实数对 (x,y)　$\{M|p(M)\}$　坐标　最简　曲线上

题点知识巩固

1. 选 C　将圆的方程化为标准形式 $(x-1)^2+y^2=2$，圆心坐标为 $(1,0)$，半径 $r=\sqrt{2}$，设圆心关于直线 $2x-y+3=0$ 的对称点为 (a,b)，则 $\begin{cases}2\times\frac{1+a}{2}-\frac{b}{2}+3=0,\\ \frac{b}{a-1}\times2=-1,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}2a-b+8=0,\\ b=\frac{1-a}{2},\end{cases}$

解得 $\begin{cases}a=-3,\\ b=2.\end{cases}\therefore$ 所求圆的方程为 $(x+3)^2+(y-2)^2=2$.

2. **解**：由已知得 $M(0,y)$，$N(x,-y)$，则 $\overrightarrow{MN}=(x,-2y)$，

故 $\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{MN}=(x,y)\cdot(x,-2y)=x^2-2y^2$，

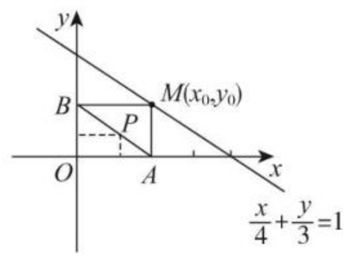
依题意知，$x^2-2y^2=4$，

因此动点 P 的轨迹方程为 $x^2-2y^2=4$.

3. 选 A　设 $Q(x_0,y_0)$ 为圆 $x^2+y^2=4$ 上任一点，

PQ 的中点 $M(x,y)$，则 $\begin{cases}\frac{4+x_0}{2}=x,\\ \frac{-2+y_0}{2}=y,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}x_0=2x-4,\\ y_0=2y+2.\end{cases}$ 代入 $x^2+y^2=4$，得 $(2x-4)^2+(2y+2)^2=4$，即 $(x-2)^2+(y+1)^2=1$.

4. **解析**：如图，设 $P(x,y)$，$M(x_0,y_0)$，则 $A(x_0,0)$，$B(0,y_0)$.



由题意得 $\begin{cases}x=\frac{2}{3}x_0,\\ y=\frac{1}{3}y_0,\end{cases}$

$\therefore\begin{cases}x_0=\frac{3}{2}x,\\ y_0=3y.\end{cases}$

$\because$ 点 $M(x_0,y_0)$ 在直线 $\frac{x}{4}+\frac{y}{3}=1$ 上，

$\therefore\frac{\frac{3x}{2}}{4}+\frac{3y}{3}=1$，

$\therefore$ 点 P 的轨迹方程为 $3x+8y-8=0$.

答案：$3x+8y-8=0$

5. **解**：设动点 $P(x,y)$，$Q(x_1,y_1)$，利用中点坐标公式可求得 N 的坐标为 $(2x-x_1,2y-y_1)$.

$\because$ 点 N 在直线 $x+y=2$ 上，$\therefore2x-x_1+2y-y_1=2$. ①

又 $\because PQ$ 垂直于直线 $x+y=2$，$\therefore\frac{y-y_1}{x-x_1}=1$，

即 $y-y_1=x-x_1$. ②

由①②解得，$x_1=\frac{3}{2}x+\frac{1}{2}y-1$，$y_1=\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}y-1$.

代入曲线方程，得

$\left(\frac{3}{2}x+\frac{1}{2}y-1\right)^2-\left(\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}y-1\right)^2=1$.

即 $(2x+2y-2)(x-y)=1$，

整理得 P 点的轨迹方程是 $2x^2-2y^2-2x+2y-1=0$.

6. **解**：解法一：(直接法)

如右图，因为 Q 是 OP 的中点，

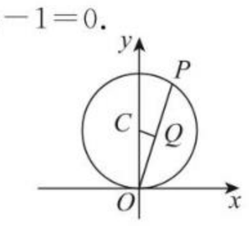
所以 $\angle OQC=90°$.

设 $Q(x,y)$，由题意，得圆心 $C(0,3)$，

$|OQ|^2+|QC|^2=|OC|^2$，

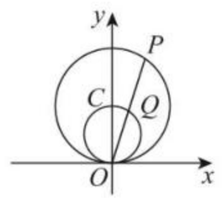
即 $x^2+y^2+[x^2+(y-3)^2]=9$，

所以 $x^2+\left(y-\frac{3}{2}\right)^2=\frac{9}{4}$（去掉原点）.



解法二：(定义法)

如右图所示，因为 Q 是 OP 的中点，所以 $\angle OQC=90°$，则 Q 在以 OC 为直径的圆上，故 Q 点的轨迹方程为 $x^2+\left(y-\frac{3}{2}\right)^2=\frac{9}{4}$（去掉原点）.



提能达标过关

1. 选 A　解法一：设 $P(x,y)$，$\because|PA|=|AB|$，

$\therefore|PA|^2=|AB|^2$，$\therefore(x+2)^2+y^2=5$. 其图形是以 $(-2,0)$ 为圆心，半径 $r=\sqrt{5}$ 的圆，其面积为 5π.

解法二：$\because|PA|=|AB|$，且 $|AB|=\sqrt{5}$，$\therefore$ 点 P 的轨迹是以 A 为圆心，$\sqrt{5}$ 为半径的圆，故其面积为 5π.

2. 选 A　依题意，得 $2\log_2y=\log_2x+2$，

$\therefore y^2=4x(x>0,y>0)$.

$\therefore$ 点 M 的轨迹方程为 $y=2\sqrt{x}(x>0)$.

3. 选 A　依题意，得 $2\lg|2y|=\lg(x-2)+\lg(16x)$，

即 $\lg(2y)^2=\lg[(x-2)\times16x]$，且 $\begin{cases}x>0,\\ x>2.\end{cases}$

$\therefore4y^2=16x(x-2)$，即 $y^2=4x^2-8x(x>2)$.

4. 选 B　设 $C(x,y)$，则由 $\overrightarrow{OC}=\alpha\overrightarrow{OA}+\beta\overrightarrow{OB}$，得 $(x,y)=(3\alpha,\alpha)+(-\beta,3\beta)=(3\alpha-\beta,\alpha+3\beta)$，

$\therefore\begin{cases}x=3\alpha-\beta,\\ y=\alpha+3\beta.\end{cases}\therefore\begin{cases}\alpha=\frac{1}{10}(3x+y),\\ \beta=\frac{1}{10}(3y-x).\end{cases}$

$\because\alpha+\beta=1$，$\therefore x+2y=5$.

5. 选 A　由题意，可得 $\sqrt{(x-3)^2+(y-4)^2}=|y|+1$，当 $y\geqslant0$ 时，平方整理，得 $x^2-6x-10y+24=0$；当 $y<0$ 时，平方整理得 $x^2-6x-6y+24=0$，变形为 $(x-3)^2+15=6y$，它不表示任何轨迹.

6. **解析**：依题意知，其轨迹为线段 AB 的中垂线，AB 的中点为 $(3,-2)$，斜率 $k=-\frac{1}{k_{AB}}=-1$，方程为 $y+2=-1(x-3)$，即 $x+y-1=0$.

答案：$x+y-1=0$

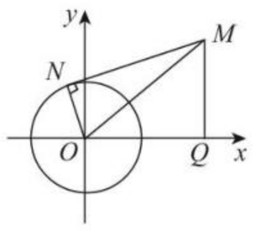
关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

7. **解析**：∵$(\boldsymbol{a}+\sqrt{3}\boldsymbol{b})\perp(\boldsymbol{a}-\sqrt{3}\boldsymbol{b})$，∴$(\boldsymbol{a}+\sqrt{3}\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}-\sqrt{3}\boldsymbol{b})=0$，即$\boldsymbol{a}^2-3\boldsymbol{b}^2=0$，∴$x^2-3(1+y^2)=0$，即$x^2-3y^2-3=0$.
答案：$x^2-3y^2-3=0$

8. **解析**：由题意，知$P(x,y)$，$M(0,y)$，$N(x,-y)$，则$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{MN}=(x,y)\cdot(x,-2y)=x^2-2y^2=4$. 即动点$P$的轨迹方程为$x^2-2y^2=4$.
答案：$x^2-2y^2=4$

9. **解**：连接CA，CB，又$CA\perp PA$，$CB\perp PB$，
∴P，A，C，B四点共圆，其所在圆的圆心为OP的中点，设为$C'(1,3)$，半径$r=\sqrt{10}$，该圆方程为C'：$(x-1)^2+(y-3)^2=10$，
即$x^2+y^2-2x-6y=0$，
联立$\begin{cases}x^2+y^2-2x-6y=0, & ①\\ x^2+y^2=1, & ②\end{cases}$
①－②得$-2x-6y=-1$.
故直线AB的方程为$2x+6y-1=0$.

10. **解**：如图，过M作圆的切线MN，N为切点，设$M(x,y)$. 由题意知$|MN|=|MQ|+|ON|$.



由于$|MN|=\sqrt{|OM|^2-|ON|^2}=\sqrt{x^2+y^2-1}$，
$|MQ|=\sqrt{(x-2)^2+y^2}$，$|ON|=1$，
∴$\sqrt{x^2+y^2-1}=\sqrt{(x-2)^2+y^2}+1$.
两边平方，整理得$2x-3=\sqrt{(x-2)^2+y^2}$，
再两边平方，整理得$3x^2-y^2-8x+5=0$.
即$9\left(x-\frac{4}{3}\right)^2-3y^2=1$.
∵$2x-3=\sqrt{(x-2)^2+y^2}$中，$2x-3\geqslant 0$，∴$x\geqslant\frac{3}{2}$.
∴点M的轨迹方程为$9\left(x-\frac{4}{3}\right)^2-3y^2=1\left(x\geqslant\frac{3}{2}\right)$.

2.2 椭 圆

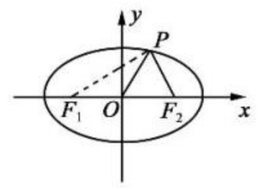
第 9 课时 2.2.1 椭圆及其标准方程

基础知识梳理

1. (1)$2a>|F_1F_2|$ 焦点 焦距
2. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ $\frac{y^2}{a^2}+\frac{x^2}{b^2}=1(a>b>0)$ $2c$ $(\pm c,0)$ $(0,\pm c)$ $a^2=b^2+c^2$

题点知识巩固

1. 选 C 由题意可知方程表示点(x,y)与两个定点$(0,3)$和$(0,-3)$之间的距离之和为10，又两定点之间的距离为6，且$6<10$，符合椭圆的定义，即$2a=10$，$2c=6$，从而可求得$b^2=16$，所以椭圆方程为$\frac{y^2}{25}+\frac{x^2}{16}=1$.
2. 选 D 由椭圆的定义知$|PF_1|+|PF_2|=2a=10$.
3. 选 B 由题意得$\begin{cases}2c=4,\\ 2a=6,\end{cases}$∴$a=3$，$c=2$，∴$b^2=a^2-c^2=5$，
∴椭圆的方程为$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{5}=1$.
4. **解析**：椭圆$9x^2+4y^2=36$化为标准形式为$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$，
则$a^2=9$，$b^2=4$，
∴$c^2=a^2-b^2=5$，
∴焦点坐标为$F_1(0,-\sqrt{5})$，$F_2(0,\sqrt{5})$.
又知椭圆过点$(2,-3)$，
∴$2a=\sqrt{(2-0)^2+(-3+\sqrt{5})^2}+\sqrt{(2-0)^2+(-3-\sqrt{5})^2}=\sqrt{18-6\sqrt{5}}+\sqrt{18+6\sqrt{5}}=\sqrt{3}(\sqrt{5}-1)+\sqrt{3}(\sqrt{5}+1)=2\sqrt{15}$，
∴$a=\sqrt{15}$，∴$b^2=a^2-c^2=15-5=10$，故所求的椭圆方程为$\frac{x^2}{10}+\frac{y^2}{15}=1$.
答案：$\frac{x^2}{10}+\frac{y^2}{15}=1$
5. 选 C ∵$|F_1F_2|$是$|PF_1|$与$|PF_2|$的等差中项，
∴$|PF_1|+|PF_2|=2|F_1F_2|=2\times2=4>|F_1F_2|$，
∴点P的轨迹是以F_1，F_2为焦点的椭圆，
且$c=1$，$a=2$，∴$b^2=a^2-c^2=3$.
∴动点P的轨迹方程是$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$.
6. **解**：由$\triangle POF_2$是面积为$\sqrt{3}$的正三角形，得$|PO|=|PF_2|=|OF_2|=2$，
∴$c=2$. 如图，连接PF_1，在$\triangle POF_1$中，$|PO|=|OF_1|=2$，$\angle POF_1=120°$，



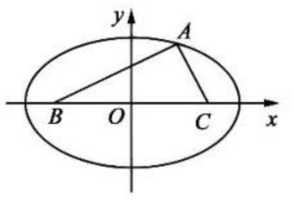
∴$|PF_1|=2\sqrt{3}$.
∴$2a=|PF_1|+|PF_2|=2+2\sqrt{3}$，∴$a=1+\sqrt{3}$.
∴$b^2=a^2-c^2=4+2\sqrt{3}-4=2\sqrt{3}$.
∴所求椭圆的方程为$\frac{x^2}{4+2\sqrt{3}}+\frac{y^2}{2\sqrt{3}}=1$.

提能达标过关

1. 选 A 由椭圆的定义，知$|PF_1|+|PF_2|=2a=2\times5=10$.
2. 选 B 由$c^2=a^2-b^2$知，当$k<4$时，则曲线$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$和$\frac{x^2}{9-k}+\frac{y^2}{4-k}=1$有相同的焦点，故选 B.
3. 选 B 如图，设椭圆左焦点为F，右焦点为F_1.



∵$2a=10$，$|MF|=2$，
∴$|MF_1|=8$.
∵N为MF的中点，O为FF_1的中点，
∴$|ON|=\frac{1}{2}|MF_1|=4$.
4. 选 C 由$\frac{x^2}{4}+y^2=1$，知$F_1(-\sqrt{3},0)$，$F_2(\sqrt{3},0)$，则P点的坐标为$\left(-\sqrt{3},\pm\frac{1}{2}\right)$，∴$|PF_1|=\frac{1}{2}$. ∵$|PF_1|+|PF_2|=4$，∴$|PF_2|=4-|PF_1|=4-\frac{1}{2}=\frac{7}{2}$.
5. 选 A 由题意知，$a^2-b^2=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2=\frac{3}{4}$，①
$b^2-c^2=\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$，②
∴$a^2-c^2=1$. 又$a^2=b^2+c^2$，∴与①式联立得$c^2=\frac{3}{4}$，
∴由②式得$b^2=1$，$b=1$.
∴$a^2=\frac{7}{4}$，$a=\frac{\sqrt{7}}{2}$.
6. **解析**：由$2c=4$，得$c=2$. 又焦点在y轴上，
∴$m-2=10-m+2^2$，∴$m=8$.
答案：8
7. **解析**：如图，由椭圆方程知$a=5$，$b=3$，



∴$c=4$.
∴B，C恰好为椭圆的两个焦点，
∴$|AB|+|AC|=2a=10$，
$|BC|=2c=8$. 由正弦定理得$\frac{\sin B+\sin C}{\sin A}=\frac{|AC|+|AB|}{|BC|}=\frac{5}{4}$.
答案：$\frac{5}{4}$
8. **解析**：由已知条件，可得$a_1^2-b_1^2=a_2^2-b_2^2$，∴$a_1^2-a_2^2=b_1^2-b_2^2$，而$a_1>a_2$，可知两椭圆无公共点，则①②正确；∵$a_1^2=b_1^2+c^2$，$a_2^2=b_2^2+c^2$，$a_1>a_2$，∴$\frac{c^2}{a_1^2}<\frac{c^2}{a_2^2}$，即$1-\frac{b_1^2}{a_1^2}<1-\frac{b_2^2}{a_2^2}$，即$\frac{b_1^2}{a_1^2}>\frac{b_2^2}{a_2^2}$，即$\frac{a_1}{a_2}<\frac{b_1}{b_2}$，则③不正确；∵$a_1>b_1>0$，$a_2>b_2>0$，∴$a_1+a_2>b_1+b_2>0$，而又由$(a_1+a_2)(a_1-a_2)=(b_1+b_2)(b_1-b_2)$，可得$a_1-a_2<b_1-b_2$，则④正确.
综上，正确的结论序号为①②④.
答案：①②④
9. **解**：设所求的椭圆方程为$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$或$\frac{y^2}{a^2}+\frac{x^2}{b^2}=1(a>b>0)$，由已知条件得$\begin{cases}2a=5+3,\\ 5^2=(2c)^2+3^2,\end{cases}$
∴$\begin{cases}a=4,\\ c=2.\end{cases}$∴$b^2=a^2-c^2=12$. 故所求的椭圆方程为$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{12}=1$或$\frac{y^2}{16}+\frac{x^2}{12}=1$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

10. **解**:(1)因为椭圆$\frac{x^2}{37}+y^2=1$的焦点坐标为$F_1(-6,0)$,$F_2(6,0)$,

所以设椭圆C的标准方程为$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2-36}=1(a^2>36)$.①

将点$\left(\frac{5\sqrt{7}}{2},-6\right)$代入①,

整理得$4a^4-463a^2+6\ 300=0$,

解得$a^2=100$或$a^2=\frac{63}{4}$(舍去),

所以椭圆C的标准方程为$\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{64}=1$.

(2)因为点P在椭圆C上,

所以$|PF_1|+|PF_2|=2a=20$.

由(1)知,$c=6$,在$\triangle PF_1F_2$中,$|F_1F_2|=2c=12$,

所以由余弦定理得

$|F_1F_2|^2=|PF_1|^2+|PF_2|^2-2|PF_1|\cdot|PF_2|\cos\frac{\pi}{3}$,

即$12^2=|PF_1|^2+|PF_2|^2-|PF_1|\cdot|PF_2|$.

因为$|PF_1|^2+|PF_2|^2=(|PF_1|+|PF_2|)^2-2|PF_1|\cdot|PF_2|$,

所以$12^2=(|PF_1|+|PF_2|)^2-3|PF_1|\cdot|PF_2|$,

即$12^2=20^2-3|PF_1|\cdot|PF_2|$.

所以$|PF_1|\cdot|PF_2|=\frac{20^2-12^2}{3}=\frac{32\times8}{3}=\frac{256}{3}$.

$S_{\triangle F_1PF_2}=\frac{1}{2}|PF_1|\cdot|PF_2|\sin\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}\times\frac{256}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{64\sqrt{3}}{3}$.

所以$\triangle F_1PF_2$的面积为$\frac{64\sqrt{3}}{3}$.

第10课时　2.2.2　椭圆的简单几何性质(一)

基础知识梳理

$\frac{y^2}{a^2}+\frac{x^2}{b^2}=1(a>b>0)$　$-b\leqslant x\leqslant b$且$-a\leqslant y\leqslant a$　$A(0,\pm a)$,$B(\pm b,0)$　$2b$　$2a$　$(0,\pm c)$　$2c$　x轴,y轴　$(0,0)$　$\frac{c}{a}(0<e<1)$

题点知识巩固

1. 选B　椭圆$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$的长轴长为4,即过焦点的最长弦为4,最短弦为过焦点垂直于x轴的那条弦,将$x=1$代入椭圆方程得$y=\frac{3}{2}$,∴最短弦长为$2\times\frac{3}{2}=3$.

2. 选D　化为标准方程得,$x^2+\frac{y^2}{\frac{1}{m}}=1$,所以长轴长为2,短轴长为$2\sqrt{\frac{1}{m}}$,由题意得$2=2\times2\sqrt{\frac{1}{m}}$,解得$m=4$.

3. 选A　由$\triangle AF_1B$的周长为$4a$,得$4a=4\sqrt{3}$,

∴$a=\sqrt{3}$.

又∵$e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{3}}{3}$,∴$c=1$.∴$b^2=a^2-c^2=2$.

∴椭圆的方程为$\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{2}=1$.

4. 选D　因为椭圆$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$的长轴长为10,焦点在$x$轴上,椭圆$\frac{y^2}{21}+\frac{x^2}{9}=1$的短轴长为6,所以$a^2=25$,$b^2=9$.

5. 选C　由题意得$c=2$,$b^2=4$,∴$a=\sqrt{b^2+c^2}=2\sqrt{2}$,

∴离心率$e=\frac{c}{a}=\frac{2}{2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

6. 选A　以线段A_1A_2为直径的圆的方程为$x^2+y^2=a^2$,由原点到直线$bx-ay+2ab=0$的距离$d=\frac{2ab}{\sqrt{b^2+a^2}}=a$,得$a^2=3b^2$,

所以C的离心率$e=\sqrt{1-\frac{b^2}{a^2}}=\frac{\sqrt{6}}{3}$,选A.

提能达标过关

1. 选A　由已知得$\begin{cases}a+b=10,\\2c=4\sqrt{5},\\a^2=b^2+c^2,\end{cases}$解得$\begin{cases}a=6,\\b=4,\\c=2\sqrt{5}.\end{cases}$

∵焦点在x轴上,∴椭圆的方程为$\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{16}=1$.

2. 选C　由$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}=1$,知$a=2$,$b=\sqrt{2}$,$c=\sqrt{2}$,∴当$P$为短轴的端点时,$\angle F_1PF_2=90°$,这样的点有2个;当$\angle PF_1F_2=90°$时,有2个;当$\angle PF_2F_1=90°$时,也有2个.因此适合题意的点共有6个.

3. 选B　$2x^2+3y^2=m(m>0)$化为标准方程得

$\frac{x^2}{\frac{m}{2}}+\frac{y^2}{\frac{m}{3}}=1$,∴$c^2=\frac{m}{2}-\frac{m}{3}=\frac{m}{6}$,

∴离心率$e=\frac{c}{a}=\sqrt{\frac{c^2}{a^2}}=\sqrt{\frac{\frac{m}{6}}{\frac{m}{2}}}=\sqrt{\frac{1}{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

4. 选B　设$F_1(-c,0)$,$F_2(c,0)(c>0)$,

∵$|PF_2|=|F_1F_2|$,$P(a,b)$,

∴$\sqrt{(a-c)^2+b^2}=2c$,平方整理得

$2\left(\frac{c}{a}\right)^2+\frac{c}{a}-1=0$,即$2e^2+e-1=0$.

解得$e=-1$(舍去)或$e=\frac{1}{2}$.

5. 选B　由$2a=8$,得$a=4$,又$e=\frac{c}{a}=\frac{3}{4}$,∴$c=3$,

∴$b^2=a^2-c^2=16-9=7$.∴当焦点在x轴上时,其方程为$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{7}=1$;当焦点在$y$轴上时,其方程为$\frac{x^2}{7}+\frac{y^2}{16}=1$.故选B.

6. **解析**:由题意知,$|BF|=a$,$|AF|=a+c$,

在$\triangle BAF$中,$|AB|=\sqrt{a^2+b^2}$,

∵$BF\perp BA$,∴$|BF|^2+|BA|^2=|AF|^2$,

即$a^2+a^2+b^2=(a+c)^2$.化简得$a^2-ac-c^2=0$,

∴$e^2+e-1=0$.解得$e=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$.

∵$0<e<1$,∴$e=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$.

答案:$\frac{\sqrt{5}-1}{2}$

7. **解析**:易知点$A(3,0)$是椭圆的右焦点.

∵$\overrightarrow{PM}\cdot\overrightarrow{AM}=0$,

∴$\overrightarrow{AM}\perp\overrightarrow{PM}$,

∴$|\overrightarrow{PM}|^2=|\overrightarrow{AP}|^2-|\overrightarrow{AM}|^2=|\overrightarrow{AP}|^2-1$.

∵椭圆的右顶点到右焦点A的距离最小,

∴$|\overrightarrow{AP}|_{\min}=2$,

∴$|\overrightarrow{PM}|_{\min}=\sqrt{3}$.

答案:$\sqrt{3}$

8. **解析**:依题意得$\begin{cases}|PF_1|+|PF_2|=2a,\\|PF_1|\cdot|PF_2|=18,\\|PF_1|^2+|PF_2|^2=4c^2,\end{cases}$

∴$|PF_1|^2+|PF_2|^2+2|PF_1|\cdot|PF_2|=4a^2$,

∴$4c^2+36=4a^2$,∴$a^2-c^2=9$,

即$b^2=9$,∴$b=3$,$2b=6$.

答案:6

9. **解**:椭圆方程可化为$\frac{x^2}{m}+\frac{y^2}{\frac{m}{m+3}}=1$,

∵$m-\frac{m}{m+3}=\frac{m(m+2)}{m+3}>0$,

∴$m>\frac{m}{m+3}$,即$a^2=m$,$b^2=\frac{m}{m+3}$,$c=\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{\frac{m(m+2)}{m+3}}$.

由$e=\frac{\sqrt{3}}{2}$得,$\sqrt{\frac{m+2}{m+3}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$,∴$m=1$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

∴椭圆的标准方程为 $x^2+\frac{y^2}{\frac{1}{4}}=1$.

∴$a=1,b=\frac{1}{2},c=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

∴椭圆的长轴长为 2，短轴长为 1，两焦点坐标分别为 $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2},0\right),\left(\frac{\sqrt{3}}{2},0\right)$；

四个顶点坐标分别为 $(-1,0),(1,0),\left(0,-\frac{1}{2}\right),\left(0,\frac{1}{2}\right)$.

10. **解**：(1)设点 M 的坐标为 (x,y)，点 P 的坐标为 (x_P,y_P)，

由已知得 $\begin{cases}x_P=x,\\ y_P=\frac{5}{4}y,\end{cases}$

∵P 在圆 $x^2+y^2=25$ 上，

∴$x^2+\left(\frac{5}{4}y\right)^2=25$，即轨迹 C 的方程为 $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$.

(2)过点(3,0)且斜率为 $\frac{4}{5}$ 的直线方程为 $y=\frac{4}{5}(x-3)$.

设直线与曲线 C 的交点为 $A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$，

将 $y=\frac{4}{5}(x-3)$ 代入曲线 C 的方程，得 $\frac{x^2}{25}+\frac{(x-3)^2}{25}=1$，

即 $x^2-3x-8=0$. $\Delta=9+32=41>0$.

∴$x_1=\frac{3-\sqrt{41}}{2},x_2=\frac{3+\sqrt{41}}{2}$，

∴线段 AB 的长度

$|AB|=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}=\sqrt{\frac{41}{25}\times41}=\frac{41}{5}$.

第 11 课时　2.2.2　椭圆的简单几何性质(二)

基础知识梳理

1. = < >

2. (1)相交　(2)相切　(3)相离

3. (1) $\sqrt{1+k^2}|x_1-x_2|$　$\sqrt{1+\frac{1}{k^2}}|y_1-y_2|$　(2) $\frac{2b^2}{a}$　$2a$

题点知识巩固

1. 选 C　∵右焦点为 $F(\sqrt{15},0)$，∴排除 B、D；由题意知点(2,2)在椭圆上，代入验证知应选 C.

2. 选 D　由直线 $l:x-2y+2=0$ 过椭圆的左焦点 F_1 和一个顶点 B，得 $F_1(-2,0),B(0,1)$，∴$c=2,b=1$，∴$a=\sqrt{b^2+c^2}=\sqrt{1+4}=\sqrt{5}$，∴$e=\frac{c}{a}=\frac{2}{\sqrt{5}}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$.

3. 选 B　由椭圆 $\frac{x^2}{12}+\frac{y^2}{8}=1$，得 $c^2=12-8=4$，∴$c=2$，

∴左焦点 $(-2,0)$. 又 $k=\tan\frac{3\pi}{4}=-1$，∴直线方程为 $y=-x-2$，代入椭圆方程得 $8x^2+12(-x-2)^2=12\times8$，即 $5x^2+12x-12=0$. 设直线与椭圆的交点为 $A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$，则 $x_1+x_2=-\frac{12}{5},x_1x_2=-\frac{12}{5}$，

∴$|AB|=\sqrt{2}\cdot\sqrt{\left(-\frac{12}{5}\right)^2-4\left(-\frac{12}{5}\right)}=\frac{16\sqrt{3}}{5}$.

4. **解析**：由题意，可得 $\begin{cases}a^2-b^2=1,\\ |AB|=\frac{2b^2}{a}=3,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a^2=4,\\ b^2=3.\end{cases}$

∴C 的方程为 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$.

答案：$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$

5. 选 C　设交点为 $(x_1,y_1),(x_2,y_2)$，则

$\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{y_1^2}{b^2}=1$，　①

$\frac{x_2^2}{a^2}+\frac{y_2^2}{b^2}=1$，　②

①－②得，$\frac{1}{a^2}(x_1^2-x_2^2)+\frac{1}{b^2}(y_1^2-y_2^2)=0$，

$\frac{1}{a_2}(x_1+x_2)+\frac{1}{b^2}\cdot\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}\cdot(y_1+y_2)=0$，

∴$\frac{-8}{a^2}+\frac{1}{b^2}\times1\times2=0$，

∴$\frac{8}{a^2}=\frac{2}{b^2}$，

∴$a^2=4b^2=4a^2-4c^2$，

∴$3a^2=4c^2$，

∴$\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，即 $e=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

6. **解**：(1)将(0,4)代入 C 的方程得 $b^2=16$.

∵$e=\frac{c}{a}=\frac{3}{5}$，

∴$\frac{c^2}{a^2}=\frac{a^2-b^2}{a^2}=1-\frac{b^2}{a^2}=\frac{9}{25}$，∴$\frac{b^2}{a^2}=\frac{16}{25}$. ∴$a^2=25$，

∴C 的方程为 $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$.

(2)过点(3,0)且斜率为 $\frac{4}{5}$ 的直线方程为 $y=\frac{4}{5}(x-3)$，

设直线与 C 的交点为 $A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$，

由 $\begin{cases}y=\frac{4}{5}(x-3),\\ \frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1,\end{cases}$ 得 $x^2-3x-8=0$. ∴$x_1+x_2=3$.

设 AB 的中点坐标为 $(\bar{x},\bar{y})$，则 $\bar{x}=\frac{x_1+x_2}{2}=\frac{3}{2}$，

$\bar{y}=\frac{1}{2}(y_1+y_2)=\frac{1}{2}\times\frac{4}{5}(x_1+x_2-6)=\frac{2}{5}\times(3-6)=-\frac{6}{5}$.

∴线段的中点坐标为 $\left(\frac{3}{2},-\frac{6}{5}\right)$.

提能达标过关

1. 选 C　∵$\triangle F_2MN$ 的周长为 8，故 $4a=8$，∴$a=2$.

又 $e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，∴$c=\sqrt{3}$，∴$b^2=a^2-c^2=4-3=1$，

∴椭圆方程为 $\frac{x^2}{4}+y^2=1$.

2. 选 C　∵$|AB|=4,|PA|+|PB|=6>4$，∴点 P 的轨迹是椭圆，且 $2c=4,2a=6$，∴$c=2,a=3$.

∴$|PA|$ 的最大值为 $a+c=5$，最小值为 $a-c=1$.

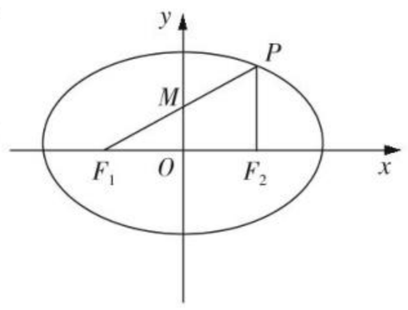
3. 选 C　如图，∵O,M 为 F_1F_2,F_1P 的中点，

∴$PF_2\parallel OM,PF_2\perp x$ 轴，

∴P 的横坐标为 3，代入椭圆方程得，$\frac{9}{12}+\frac{y^2}{3}=1$，

∴$\frac{y^2}{3}=\frac{1}{4},y^2=\frac{3}{4}$，

解得 $y=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$.



4. 选 A　不妨设直线 l 过椭圆 $\frac{x^2}{2}+y^2=1$ 的右焦点 $F(1,0)$，则直线 l 的方程为 $y=x-1$，代入 $\frac{x^2}{2}+y^2=1$，

并整理得 $3x^2-4x=0$. 解得 $x_1=0,x_2=\frac{4}{3}$.

∴$y_1=-1,y_2=\frac{1}{3}$. 设 $A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$，

则 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=(x_1,y_1)\cdot(x_2,y_2)=x_1x_2+y_1y_2=-\frac{1}{3}$.

5. 选 C　由 $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=0$，可得 $\angle APB=90^\circ$，

利用圆的性质，可得 $|OP|=\sqrt{2}b$.

∴$|OP|^2=2b^2\leqslant a^2$，∴$a^2\leqslant2c^2$.

∴$e^2\geqslant\frac{1}{2}$.

又∵$0<e<1$，∴$\frac{\sqrt{2}}{2}\leqslant e<1$. 故选 C.

6. **解析**：由椭圆的性质知，当 $\triangle PF_1F_2$ 面积最大时，点 P 应为短轴的一个端点，依题意得 $\frac{1}{2}\times2c\times b=12$，

∵$c=4$，∴$b=3$，∴短轴长 $2b=6$.

答案：6

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

7. **解析**：由已知得，圆 F_1 的半径 $r=c$，即 $|PF_1|=c$. 又 PF_2 与圆 F_1 相切，$\therefore PF_2\perp PF_1$. $\because |F_1F_2|=2c$，$\therefore |PF_2|=\sqrt{3}c$.

$\therefore |PF_1|+|PF_2|=c+\sqrt{3}c=2a$，

$\therefore e=\dfrac{c}{a}=\dfrac{2}{\sqrt{3}+1}=\sqrt{3}-1$.

答案：$\sqrt{3}-1$

8. **解析**：设直线 l 过椭圆 $\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$ 的右焦点 $F(\sqrt{3},0)$，则直线 l 的方程为 $y=x-\sqrt{3}$，代入 $\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$，

得 $5x^2-8\sqrt{3}x+8=0$. 设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，

则 $x_1+x_2=\dfrac{8\sqrt{3}}{5}$，$x_1x_2=\dfrac{8}{5}$.

由弦长公式得 $|AB|=\sqrt{2}\cdot\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}=\sqrt{2}\cdot\sqrt{\left(\dfrac{8\sqrt{3}}{5}\right)^2-\dfrac{32}{5}}=\sqrt{2}\cdot\dfrac{\sqrt{32}}{5}=\dfrac{8}{5}$.

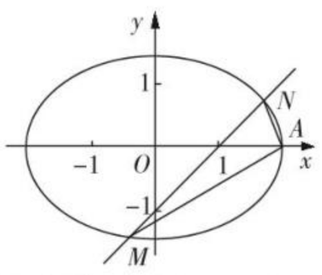
答案：$\dfrac{8}{5}$

9. **解**：(1)由题意得 $\begin{cases}a=2,\\ \dfrac{c}{a}=\dfrac{\sqrt{2}}{2},\\ a^2=b^2+c^2,\end{cases}$

解得 $b=\sqrt{2}$，

所以椭圆 C 的方程为 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{2}=1$.

(2)由 $\begin{cases}y=k(x-1),\\ \dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{2}=1\end{cases}$ 得 $(1+2k^2)x^2-4k^2x+2k^2-4=0$.



如图，设点 M,N 的坐标分别为 (x_1,y_1)，(x_2,y_2)，

则 $y_1=k(x_1-1)$，$y_2=k(x_2-1)$，$x_1+x_2=\dfrac{4k^2}{1+2k^2}$，

$x_1x_2=\dfrac{2k^2-4}{1+2k^2}$，

所以 $|MN|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$

$=\sqrt{(1+k^2)[(x_1+x_2)^2-4x_1x_2]}$

$=\dfrac{2\sqrt{(1+k^2)(4+6k^2)}}{1+2k^2}$.

又因为点 $A(2,0)$ 到直线 $y=k(x-1)$ 的距离 $d=\dfrac{|k|}{\sqrt{1+k^2}}$，

所以 $\triangle AMN$ 的面积 $S=\dfrac{1}{2}|MN|\cdot d=\dfrac{|k|\sqrt{4+6k^2}}{1+2k^2}$，

由 $\dfrac{|k|\sqrt{4+6k^2}}{1+2k^2}=\dfrac{\sqrt{10}}{3}$，解得 $k=\pm1$.

10. **解**：(1)椭圆 C：$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的焦点在 x 轴上，右焦点为 $(1,0)$，则 $c=1$，

由椭圆的离心率 $e=\dfrac{c}{a}=\dfrac{1}{2}$，得 $a=2$，则 $b^2=a^2-c^2=3$，

$\therefore$ 椭圆 C 的标准方程为 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$.

(2)若直线 m 的斜率不存在，可得点 A 的坐标为 $(0,\sqrt{3})$，点 B 的坐标为 $(0,-\sqrt{3})$，显然不满足条件，故此时方程不存在.

若直线 m 的斜率存在，设其方程为 $y=kx+3$，$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，

$\because A$ 是 PB 的中点，$\therefore x_1=\dfrac{x_2}{2}$，①

$y_1=\dfrac{y_2+3}{2}$，②

$\dfrac{x_1^2}{4}+\dfrac{y_1^2}{3}=1$，③

$\dfrac{x_2^2}{4}+\dfrac{y_2^2}{3}=1$，④

联立①②③④，解得 $\begin{cases}x_2=2,\\ y_2=0\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x_2=-2,\\ y_2=0,\end{cases}$

即点 B 的坐标为 $(2,0)$ 或 $(-2,0)$，

$\therefore$ 直线 m 的斜率为 $-\dfrac{3}{2}$ 或 $\dfrac{3}{2}$，

则直线 m 的方程为 $y=-\dfrac{3}{2}x+3$ 或 $y=\dfrac{3}{2}x+3$.

阶段评估 2

1. 选 A　由椭圆的几何性质知，$-\sqrt{3}\leqslant m\leqslant\sqrt{3}$.

$\therefore 4-2\sqrt{3}\leqslant 2m+4\leqslant 4+2\sqrt{3}$.

2. 选 A　由题意得 $\dfrac{4}{\sqrt{m^2+n^2}}>2$，所以 $m^2+n^2<4$.

又圆 $m^2+n^2=4$ 内切于椭圆，所以点 $P(m,n)$ 在椭圆 $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1$ 内部，则过点 $P(m,n)$ 的直线与椭圆 $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1$ 有 2 个交点.

故选 A.

3. 选 D　由已知条件，得 $|AF_2|=\dfrac{1}{2}|OF_1|\times2=c$，

$\therefore |AF_1|=\sqrt{(2c)^2-c^2}=\sqrt{3}c$. $\therefore 2a=(\sqrt{3}+1)c$，

$\therefore \dfrac{c}{a}=\dfrac{2}{\sqrt{3}+1}=\sqrt{3}-1$.

4. 选 D　由题意可设椭圆的标准方程为 $\dfrac{y^2}{a^2}+\dfrac{x^2}{b^2}=1(a>b>0)$，且 $c=\sqrt{3}$，

离心率 $e=\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{c}{a}$，$a^2=b^2+c^2$，得 $a=2$，$b=1$.

$\therefore$ 椭圆的标准方程为 $\dfrac{y^2}{4}+x^2=1$.

设 $|PF_1|=m$，$|PF_2|=n$，则 $m+n=4$，

$\because \overrightarrow{PF_1}\cdot\overrightarrow{PF_2}=\dfrac{2}{3}$，$\therefore mn\cos\angle F_1PF_2=\dfrac{2}{3}$，

又 $(2c)^2=(2\sqrt{3})^2=m^2+n^2-2mn\cos\angle F_1PF_2=(m+n)^2-2mn-2\times\dfrac{2}{3}$，

$\therefore 12=4^2-2mn-2\times\dfrac{2}{3}$，解得 $mn=\dfrac{4}{3}$.

$\therefore \dfrac{4}{3}\cos\angle F_1PF_2=\dfrac{2}{3}$，$\therefore \cos\angle F_1PF_2=\dfrac{1}{2}$，

$\therefore \angle F_1PF_2=\dfrac{\pi}{3}$.

5. 选 C　由题意可知，椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的焦点在 x 轴上，由椭圆的离心率 $e=\dfrac{c}{a}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，即 $4c^2=3a^2$，由四个顶点构成的四边形的面积为 4，根据菱形的面积公式，可知 $S=\dfrac{1}{2}\times2a\times2b=4$，即 $ab=2$，由 $a^2=c^2+b^2$，解得 $a=2$，$b=1$，则椭圆的标准方程为 $\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$，由椭圆的定义可知，四边形 AF_1BF_2 的周长为 $4a=8$.

6. 选 C　由椭圆 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$ 可得点 $F(-1,0)$，点 $O(0,0)$，设 $P(x,y)$，$-2\leqslant x\leqslant2$，则 $\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{FP}=x^2+x+y^2=x^2+x+3\left(1-\dfrac{x^2}{4}\right)=\dfrac{1}{4}x^2+x+3=\dfrac{1}{4}(x+2)^2+2$，当且仅当 $x=2$ 时，$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{FP}$ 取得最大值 6.

7. **解析**：由 $\triangle F_2AB$ 是面积为 $4\sqrt{3}$ 的等边三角形知 $AB\perp x$ 轴，得 $\dfrac{b^2}{a}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}\times2c$，$\dfrac{1}{2}\times2c\times\dfrac{2b^2}{a}=4\sqrt{3}$，$a^2=b^2+c^2$，解得 $a^2=9$，$b^2=6$，$c^2=3$. 所求的椭圆 C 的方程为 $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{6}=1$.

答案：$\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{6}=1$

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

8. **解析**：$x^2+2x-y^2=x^2+2x+\frac{x^2}{4}-1=\frac{5}{4}\left(x+\frac{4}{5}\right)^2-\frac{9}{5}$，

∵$-2\leqslant x\leqslant 2$，∴当 $x=2$ 时 x^2+2x-y^2 有最大值 8.

答案：8

9. **解析**：∵$\overrightarrow{OB}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OF_1})$，$\overrightarrow{OC}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OF_2})$，

∴B,C 分别为 AF_1,AF_2 的中点.

又∵O 为 F_1F_2 的中点，∴$|\overrightarrow{OB}|=\frac{1}{2}|AF_2|$，

$|\overrightarrow{OC}|=\frac{1}{2}|AF_1|$，∴$\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\frac{1}{2}|AF_1|+|AF_2|=\frac{1}{2}\times 2a=a=6$.

答案：6

10. **解析**：设 $P(x_0,y_0)$，又 $F_1(-1,0),F_2(1,0)$，

∴$\overrightarrow{PF_1}=(-1-x_0,-y_0)$，$\overrightarrow{PF_2}=(1-x_0,-y_0)$，

∴$\overrightarrow{PF_1}+\overrightarrow{PF_2}=(-2x_0,-2y_0)$，

∴$|\overrightarrow{PF_1}+\overrightarrow{PF_2}|=\sqrt{4x_0^2+4y_0^2}=2\sqrt{2-2y_0^2+y_0^2}=2\sqrt{2-y_0^2}$. ∵点 P 在椭圆上，∴$0\leqslant y_0^2\leqslant 1$，

∴当 $y_0^2=1$ 时，$|\overrightarrow{PF_1}+\overrightarrow{PF_2}|$ 有最小值 2.

答案：2

11. **解**：设 $|PF_1|=x$，由椭圆的定义知，

$|PF_2|=2a-x$.

∴$|PF_1|\cdot|PF_2|=x(2a-x)=-(x-a)^2+a^2$.

又由椭圆的几何性质可知，$a-c\leqslant x\leqslant a+c$.

∴当 $x=a$ 时，$|PF_1|\cdot|PF_2|$ 取得最大值 a^2.

当 $x=a+c$ 或 $x=a-c$ 时，$|PF_1|\cdot|PF_2|$ 取得最小值 $a^2-c^2=b^2$.

∴$|PF_1|\cdot|PF_2|$ 的最大值为 a^2，最小值为 b^2.

12. **解**：(1)∵$\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，∴$\frac{c^2}{a^2}=\frac{1}{2}$，$a^2=2c^2=b^2+c^2$，$b=c$，

∴$a^2=2b^2$，

椭圆 C 的方程化为 $\frac{x^2}{2b^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$，由题意知，椭圆 C 过点 $(\sqrt{6},1)$，

∴$\frac{6}{2b^2}+\frac{1}{b^2}=1$，解得 $b^2=4$，$a^2=8$，

∴椭圆 C 的方程为 $\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{4}=1$.

(2)当直线 l 斜率存在时，设直线 l：$y=kx+1$，

由 $\begin{cases}x^2+2y^2=8,\\ y=kx+1\end{cases}$ 得 $(2k^2+1)x^2+4kx-6=0$，

$\Delta=16k^2+24(2k^2+1)>0$，

设 $A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$，则 $\begin{cases}x_1+x_2=\frac{-4k}{2k^2+1},\\ x_1x_2=\frac{-6}{2k^2+1},\end{cases}$

假设存在定点 $Q(0,t)$ 符合题意，

∵$\angle PQA=\angle PQB$，∴$k_{QA}=-k_{QB}$，

∴$k_{QA}+k_{QB}=\frac{y_1-t}{x_1}+\frac{y_2-t}{x_2}=\frac{x_2y_1+x_1y_2-t(x_1+x_2)}{x_1x_2}$

$=\frac{x_2(kx_1+1)+x_1(kx_2+1)-t(x_1+x_2)}{x_1x_2}$

$=\frac{2kx_1x_2+(1-t)(x_1+x_2)}{x_1x_2}=2k+(1-t)\cdot\frac{-4k}{-6}=\frac{2k(4-t)}{3}$

$=0$，

∵上式对任意实数 k 恒等于零，

∴$4-t=0$，即 $t=4$，∴$Q(0,4)$；

当直线 l 斜率不存在时，A,B 两点分别为椭圆的上、下顶点 $(0,-2),(0,2)$，显然此时 $\angle PQA=\angle PQB$.

综上，存在定点 $Q(0,4)$ 满足题意.

13. **解**：(1)设点 $F(c,0)$，因为直线 AF 的斜率为 $\frac{2\sqrt{3}}{3}$，$A(0,-2)$，

所以 $\frac{2}{c}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$，$c=\sqrt{3}$.

又因为 $\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，$b^2=a^2-c^2$，解得 $a=2$，$b=1$，所以椭圆 E 的方程为 $\frac{x^2}{4}+y^2=1$.

(2)设 $P(x_1,y_1),Q(x_2,y_2)$，由题意可知直线 l 的斜率存在，设直线 l 的方程为 $y=kx-2$，

所以 $\begin{cases}\frac{x^2}{4}+y^2=1,\\ y=kx-2,\end{cases}$ 消去 y，得 $(1+4k^2)x^2-16kx+12=0$，

$\Delta=16(4k^2-3)>0$，即 $k<-\frac{\sqrt{3}}{2}$ 或 $k>\frac{\sqrt{3}}{2}$ 时，

$x_1+x_2=\frac{16k}{1+4k^2}$，$x_1x_2=\frac{12}{1+4k^2}$.

从而 $|PQ|=\sqrt{1+k^2}\cdot\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}=\sqrt{1+k^2}\cdot\sqrt{\left(\frac{16k}{1+4k^2}\right)^2-\frac{48}{1+4k^2}}=\frac{4\sqrt{1+k^2}\cdot\sqrt{4k^2-3}}{1+4k^2}$.

又点 O 到直线 l 的距离 $d=\frac{2}{\sqrt{k^2+1}}$，

所以 $S_{\triangle OPQ}=\frac{1}{2}d|PQ|=\frac{4\sqrt{4k^2-3}}{1+4k^2}$.

令 $\sqrt{4k^2-3}=t>0$，则 $4k^2=t^2+3$，$S_{\triangle OPQ}=\frac{4t}{t^2+4}=\frac{4}{t+\frac{4}{t}}\leqslant\frac{4}{2\sqrt{4}}=1$，

当且仅当 $t=2$，即 $\sqrt{4k^2-3}=2$，解得 $k=\pm\frac{\sqrt{7}}{2}$ 时取等号，满足 $k^2>\frac{3}{4}$，

所以 $\triangle OPQ$ 的面积最大时，直线 l 的方程为 $y=\frac{\sqrt{7}}{2}x-2$ 或 $y=-\frac{\sqrt{7}}{2}x-2$.

14. **证明**：(1)设 $A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$，则 $\frac{x_1^2}{4}+\frac{y_1^2}{3}=1$，$\frac{x_2^2}{4}+\frac{y_2^2}{3}=1$，两式相减，并由 $\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=k$，得 $\frac{x_1+x_2}{4}+\frac{y_1+y_2}{3}\cdot k=0$，由题设 $\frac{x_1+x_2}{2}=1$，$\frac{y_1+y_2}{2}=m$，于是 $k=-\frac{3}{4m}$. 由题设得 $0<m<\frac{3}{2}$，故 $k<-\frac{1}{2}$.

(2)由题意得 $F(1,0)$，设 $P(x_3,y_3)$，则 $(x_3-1,y_3)+(x_1-1,y_1)+(x_2-1,y_2)=(0,0)$，由(1)及题设得 $x_3=3-(x_1+x_2)=1$，$y_3=-(y_1+y_2)=-2m<0$.

又点 P 在 C 上，所以 $m=\frac{3}{4}$，从而 $P\left(1,-\frac{3}{2}\right)$，

$|\overrightarrow{FP}|=\frac{3}{2}$. 又 $|\overrightarrow{FA}|=\sqrt{(x_1-1)^2+y_1^2}=\sqrt{(x_1-1)^2+3\left(1-\frac{x_1^2}{4}\right)}=2-\frac{x_1}{2}$.

同理 $|\overrightarrow{FB}|=2-\frac{x_2}{2}$. 所以 $|\overrightarrow{FA}|+|\overrightarrow{FB}|=4-\frac{1}{2}(x_1+x_2)=3$.

故 $2|\overrightarrow{FP}|=|\overrightarrow{FA}|+|\overrightarrow{FB}|$.

2.3 双曲线

第 12 课时 2.3.1 双曲线及其标准方程

基础知识梳理

1. 小于 焦点 焦距

3. $\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ $(0,-c)$ $(0,c)$ $c^2=a^2+b^2$

题点知识巩固

1. 选 D 因为 $|PF_1|-|PF_2|=\pm 2a=\pm 2$，即 $5-|PF_2|=\pm 2$，所以 $|PF_2|=3$ 或 7，选 D.

2. **解析**：易知 $A(5,0)$ 为双曲线 $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$ 的右焦点，由题意得 $|PF|-|PA|=6$，$|QF|-|QA|=6$.

∴$|PF|+|FQ|=|PA|+6+|QA|+6=12+|PQ|=12+16=28$.

∴$\triangle PQF$ 的周长为 $|PF|+|FQ|+|PQ|=28+16=44$.

答案：44

3. **解析**：∵$12+m^2>0$，∴$a^2=12+m^2$，$b^2=4-m^2$，

∴$c^2=a^2+b^2=16$，∴$c=4$，∴焦距 $2c=8$.

答案：8

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

4. **解析**：将双曲线方程化为标准方程$\frac{x^2}{\frac{1}{k}}-\frac{y^2}{\frac{8}{k}}=1$，由焦点坐标为$(0,3)$，知焦点在$y$轴上，$\therefore a^2=-\frac{8}{k}$，

$b^2=-\frac{1}{k}$，$\therefore c^2=a^2+b^2=-\frac{8}{k}-\frac{1}{k}=-\frac{9}{k}=9$，

$\therefore k=-1$.

答案：-1

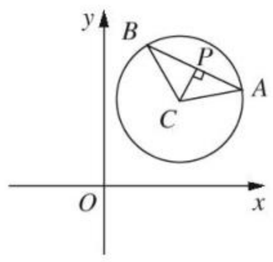
5. **解析**：圆$A(-5,0)$，圆$B(5,0)$，设圆C的半径为r，圆A的半径为r_1，圆B的半径为r_2，则$r_1=7$，$r_2=1$.

$|CA|=r+7$，$|CB|=r+1$，$|AB|=10$，

$\therefore |CA|-|CB|=6<10$，$\therefore$点$C$的轨迹是以$A$，$B$为焦点的双曲线的右支，其方程为$\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1(x\geqslant 3)$.

答案：$\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1(x\geqslant 3)$

6. **解析**：①不正确，若动点P的轨迹为双曲线，则$|k|$要小于A，B两个定点间的距离，当点P在顶点AB的延长线上时，$k=|AB|$，显然这种曲线是射线，而非双曲线；②不正确，根据平行四边形法则，易得P是AB的中点，根据垂径定理，圆心与弦的中点连线垂直于这条弦，设圆心为C，那么有$CP\perp AB$，即$\angle CPA$恒为直角，由于CA是圆的半径，是定长，而$\angle CPA$恒为直角，也就是说，P在以CA为直径的圆上运动，$\angle CPA$为直径所对的圆周角，所以P点的轨迹是一个圆，如图；③正确，方程$2x^2-5x+2=0$的两根分别为$\frac{1}{2}$和2，可分别作为椭圆和双曲线的离心率；④正确，双曲线$\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{9}=1$与椭圆$\frac{x^2}{35}+y^2=1$的焦点坐标都是$(\pm\sqrt{34},0)$.



答案：③④

提能达标过关

1. 选D　由双曲线方程$\frac{x^2}{a}-\frac{y^2}{2}=1$知，焦点在$x$轴上，$\therefore 4-a^2=a+2$，即$a^2+a-2=0$，$\therefore a=-2$或$a=1$. 当$a=-2$时，不合题意，应舍去. $\therefore a=1$.

2. 选A　由$\sin\theta+\cos\theta=\frac{1}{3}$知，$\theta$为钝角，$\therefore \sin\theta>0$，$\cos\theta<0$，

$\therefore$曲线$x^2\sin\theta+y^2\cos\theta=1$表示焦点在$x$轴上的双曲线.

3. 选A　因为M是PF_1的中点，O是F_1F_2的中点，

所以$|OM|=\frac{1}{2}|PF_2|$，因为$|OM|=1$，所以$|PF_2|=2$，

因为P在右支上，故$|PF_1|-|PF_2|=2\times 4=8$，

故$|PF_1|=8+2=10$，故选A.

4. 选D　在$\triangle ABP$中，由正弦定理，

知$\frac{|\sin A-\sin B|}{\sin P}=\frac{||PB|-|PA||}{|AB|}=\frac{2a}{2c}=\frac{4}{5}$.

5. 选C　由双曲线的定义知，$|PF_1|-|PF_2|=2\sqrt{2}$，

又$|PF_1|=2|PF_2|$，

$\therefore |PF_2|=2\sqrt{2}$，$|PF_1|=4\sqrt{2}$. 又$\because |F_1F_2|=2c=4$，

$\therefore \cos\angle F_1PF_2=\frac{|PF_1|^2+|PF_2|^2-|F_1F_2|^2}{2|PF_1|\cdot|PF_2|}=$

$\frac{(4\sqrt{2})^2+(2\sqrt{2})^2-4^2}{2\times 4\sqrt{2}\times 2\sqrt{2}}=\frac{3}{4}$.

6. **解析**：由双曲线的一个焦点为$(0,-6)$知，另一个焦点为$(0,6)$，又过点$(-5,6)$，

$\therefore 2a=|\sqrt{(-5-0)^2+(6+6)^2}-\sqrt{(-5-0)^2+(6-6)^2}|=|13-5|=8$，$\therefore a=4$，$c=6$，$\therefore b^2=c^2-a^2=36-16=20$. 又焦点在$y$轴上，$\therefore$双曲线方程为$\frac{y^2}{16}-\frac{x^2}{20}=1$.

答案：$\frac{y^2}{16}-\frac{x^2}{20}=1$

7. **解析**：①错误，当$t=\frac{5}{2}$时，曲线C表示圆；②正确，若C为双曲线，则$(4-t)(t-1)<0$，$\therefore t<1$或$t>4$；③正确，若曲线C为焦点在x轴上的椭圆，则$4-t>t-1>0$，$\therefore 1<t<\frac{5}{2}$；④正确，若曲线$C$为焦点在$y$轴上的双曲线，则$\begin{cases}4-t<0,\\ t-1>0,\end{cases}$$\therefore t>4$.

答案：②③④

8. **解析**：双曲线的焦点在x轴上，$|F_1F_2|=2c=2\sqrt{5}$.

由双曲线的定义$||PF_1|-|PF_2||=2a$，得$|PF_1|^2-2|PF_1|\cdot|PF_2|+|PF_2|^2=4a^2$. ①

$\because \overrightarrow{PF_1}\perp\overrightarrow{PF_2}$，$|PF_1|\cdot|PF_2|=2$，

$\therefore |PF_1|^2+|PF_2|^2=|F_1F_2|^2=20$. 代入①式，

解得$a^2=4$.

又$\because c=\sqrt{5}$，$\therefore b^2=c^2-a^2=1$，

$\therefore$双曲线的标准方程为$\frac{x^2}{4}-y^2=1$.

答案：$\frac{x^2}{4}-y^2=1$

9. **解**：设P的坐标为(x,y)，

$\because$圆P与圆C外切且过点$A(3,0)$，

$\therefore |PC|-|PA|=4$.

又$\because |AC|=|3-(-3)|=6>4$，

$\therefore$点P的轨迹是以C，A为焦点，实轴长$2a=4$的双曲线的右支.

$\because a=2$，$c=3$，$\therefore b^2=c^2-a^2=5$.

$\therefore$动圆圆心P的轨迹方程为$\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{5}=1(x\geqslant 2)$.

10. **解**：(1)化椭圆方程为标准形式：$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$，焦点在$x$轴上，且$c^2=9-4=5$. 依题意可设双曲线方程为

$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$. 则有$\begin{cases}a^2+b^2=5,\\ \frac{9}{a^2}-\frac{4}{b^2}=1.\end{cases}$

解得$a^2=3$，$b^2=2$. 故双曲线方程为$\frac{x^2}{3}-\frac{y^2}{2}=1$.

(2)不妨设M在双曲线的右支上，则有

$|MF_1|-|MF_2|=2\sqrt{3}$，又$|MF_1|+|MF_2|=6\sqrt{3}$，

$\therefore |MF_1|=4\sqrt{3}$，$|MF_2|=2\sqrt{3}$. 又$\because |F_1F_2|=2\sqrt{5}$，

$\therefore$在$\triangle MF_1F_2$中，$|MF_1|$是最长边. 由余弦定理得

$\cos\angle MF_2F_1=\frac{|MF_2|^2+|F_1F_2|^2-|MF_1|^2}{2|MF_2|\cdot|F_1F_2|}=$

$\frac{12+20-48}{2\times 2\sqrt{3}\times 2\sqrt{5}}=-\frac{2}{\sqrt{15}}<0$，$\therefore\angle MF_2F_1$是钝角，故$\triangle MF_1F_2$是钝角三角形.

第13课时　2.3.2　双曲线的简单几何性质(一)

基础知识梳理

1. $F_1(0,-c)$，$F_2(0,c)$　$|F_1F_2|=2c$　$y\leqslant -a$或$y\geqslant a$　关于坐标轴、原点对称　$A_1(0,-a)$，$A_2(0,a)$　实轴长$2a$，虚轴长$2b$　$e=\frac{c}{a}>1$　$y=\pm\frac{a}{b}x$

2. (1)$x^2-y^2=\lambda$　(2)$y=\pm x$　(3)$\sqrt{2}$

题点知识巩固

1. 选C　渐近线方程为$y=\pm x$，

$\therefore \frac{b}{a}=1$或$\frac{a}{b}=1$，

$\therefore a=b$，$a^2=b^2=c^2-a^2$

$\therefore c^2=2a^2$，$e=\sqrt{2}$.

2. 选D　由双曲线方程为$\frac{x^2}{a^2}-y^2=1$，知$b^2=1$，$c^2=a^2+1$，

$\therefore 2b=2$，$2c=2\sqrt{a^2+1}$.

$\because$实轴长、虚轴长、焦距长成等差数列，

$\therefore 2a+2c=4b=4$，$\therefore 2a+2\sqrt{a^2+1}=4$，解得$a=\frac{3}{4}$.

$\therefore$双曲线的渐近线方程为$y=\pm\frac{4}{3}x$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

3. 选C　由双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$的右焦点为$F$,点$A$在双曲线的渐近线上,$\triangle OAF$为腰长为2的等腰三角形,
可得$c=2$,$\frac{b}{a}=\frac{\sqrt{3}}{3}$,即$\frac{b^2}{a^2}=\frac{1}{3}$,$\frac{c^2-a^2}{a^2}=\frac{1}{3}$,解得$a=\sqrt{3}$,$b=1$,又双曲线的焦点坐标在$x$轴,所得双曲线方程为$\frac{x^2}{3}-y^2=1$.

4. **解析**:由双曲线的渐近线方程$y=\pm\frac{1}{2}x$,可设双曲线方程为$\frac{x^2}{4}-y^2=m$,把点$(4,\sqrt{3})$代入,得$m=1$,
∴双曲线方程为$\frac{x^2}{4}-y^2=1$.
答案:$\frac{x^2}{4}-y^2=1$

5. 选A　∵$e=\frac{c}{a}=\sqrt{\frac{c^2}{a^2}}=\sqrt{\frac{a^2+b^2}{a^2}}=\sqrt{1+\left(\frac{b}{a}\right)^2}=\sqrt{3}$.
∴$\left(\frac{b}{a}\right)^2=2$,∴$\frac{b}{a}=\sqrt{2}$,
∴渐近线方程为$y=\pm\sqrt{2}x$.

6. **解析**:由题意,直角三角形的内切圆半径$r=\frac{|PA|+|PF_1|-|AF_1|}{2}=\frac{|PF_1|-|PF_2|}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}$,
∴$2a=|PF_1|-|PF_2|=\sqrt{2}$,即$a=\frac{\sqrt{2}}{2}$,
∵$|F_1F_2|=2$,即$c=1$,
∴双曲线的离心率是$e=\frac{c}{a}=\frac{2}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$.
答案:$\sqrt{2}$

提能达标过关

1. 选B　∵$a=2$,$c^2=4+5=9\Rightarrow c=3$,∴$e=\frac{c}{a}=\frac{3}{2}$.

2. 选D　由$e=\frac{c}{a}=\sqrt{2}$,得$c=\sqrt{2}a$.又$c^2=a^2+b^2$,
∴$a=b$.∴双曲线的一条渐近线方程为$y=x$,则点$(4,0)$到C的渐近线的距离为$\frac{4}{\sqrt{2}}=2\sqrt{2}$.

3. 选B　由双曲线的定义知,$||PF_1|-|PF_2||=2a$,
又∵$|PF_1|+|PF_2|=3b$,∴$(|PF_1|+|PF_2|)^2-(|PF_1|-|PF_2|)^2=9b^2-4a^2$,即$4|PF_1|\cdot|PF_2|=9b^2-4a^2$.
又∵$|PF_1|\cdot|PF_2|=\frac{9}{4}ab$,∴$9b^2-4a^2=9ab$,∴$9\left(\frac{b}{a}\right)^2-9\left(\frac{b}{a}\right)-4=0$.
∴$\left(\frac{3b}{a}+1\right)\left(\frac{3b}{a}-4\right)=0$.∵$\frac{3b}{a}+1>0$,
∴$\frac{3b}{a}-4=0$,∴$\frac{b}{a}=\frac{4}{3}$.则双曲线的离心率$e=\frac{c}{a}=\sqrt{\frac{a^2+b^2}{a^2}}=\sqrt{1+\left(\frac{4}{3}\right)^2}=\frac{5}{3}$.

4. 选D　对于A,双曲线的方程为$\frac{y^2}{4}-\frac{x^2}{9}=1$,其中$b=3$,虚轴长为6,则A错误;对于B,双曲线的方程为$\frac{y^2}{4}-\frac{x^2}{9}=1$,其中$a=2$,$b=3$,则$c=\sqrt{4+9}=\sqrt{13}$,则焦距为$2\sqrt{13}$,则B错误;因为$a=2$,$c=\sqrt{13}$,所以离心率为$\frac{\sqrt{13}}{2}$,则C错误;对于D,双曲线的方程为$\frac{y^2}{4}-\frac{x^2}{9}=1$,其中$a=2$,$b=3$,则渐近线方程为$2x\pm3y=0$,则D正确.故选D.

5. 选B　设椭圆和双曲线的半焦距为c,$|PF_1|=m$,$|PF_2|=n$,$(m>n)$,
由于$\triangle PF_1F_2$是以PF_1为底边的等腰三角形.
若$|PF_1|=12$,即有$m=12$,$n=2c$,
由椭圆的定义可得$m+n=2a_1$,由双曲线的定义可得$m-n=2a_2$,即有$a_1=6+c$,$a_2=6-c$,$(c<6)$,
再由三角形的两边之和大于第三边,可得$2c+2c>12$,可得$c>3$,即有$3<c<6$.
由离心率公式可得$e_1\cdot e_2=\frac{c}{a_1}\cdot\frac{c}{a_2}=\frac{c^2}{36-c^2}=\frac{1}{\frac{36}{c^2}-1}$,由于$1<\frac{36}{c^2}<4$,则有$\frac{1}{\frac{36}{c^2}-1}>\frac{1}{3}$.
则$e_1\cdot e_2$的取值范围为$\left(\frac{1}{3},+\infty\right)$.故选B.

6. **解析**:由双曲线方程$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{4}=1$,知$c^2=a^2+4$,
又$e=\frac{c}{a}=\sqrt{\frac{c^2}{a^2}}=\sqrt{\frac{a^2+4}{a^2}}=\frac{\sqrt{5}}{2}$,∴$a^2=16$.又$a>0$,
∴$a=4$.
答案:4

7. **解析**:由椭圆方程$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$,知$c=\sqrt{16-9}=\sqrt{7}$,离心率$e=\frac{\sqrt{7}}{4}$,所以双曲线的离心率为$2\times\frac{\sqrt{7}}{4}=\frac{c}{a}$,
∴$a=2$.又$b^2=c^2-a^2=7-4=3$.
∴双曲线方程为$\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{3}=1$.
答案:$\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{3}=1$

8. **解析**:可设$|AF_1|=3t$,$t>0$,
由$4|AF_1|=3|AB|$,可得$|AB|=4t$,
由双曲线的定义,可得$|AF_2|=|AF_1|-2a=3t-2a$,
$|BF_2|=|AB|-|AF_2|=4t-(3t-2a)=t+2a$,
由双曲线的定义,可得$|BF_1|=|BF_2|+2a=t+4a$,
在直角三角形ABF_1中,可得$|BF_1|=\sqrt{|AB|^2+|AF_1|^2}=5t=t+4a$,即$t=a$,
在直角三角形AF_1F_2中,可得$|AF_1|^2+|AF_2|^2=|F_1F_2|^2$,
即为$9a^2+a^2=4c^2$,即$c=\frac{\sqrt{10}}{2}a$,
可得$e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{10}}{2}$.
答案:$\frac{\sqrt{10}}{2}$

9. **解**:将方程$\frac{x^2}{2m}-\frac{y^2}{m-1}=1$改写为$\frac{x^2}{2m}+\frac{y^2}{1-m}=1$,
只有当$1-m>2m>0$,即$0<m<\frac{1}{3}$时,
方程表示的曲线是焦点在y轴上的椭圆,
所以命题p等价于$0<m<\frac{1}{3}$;
因为双曲线$\frac{y^2}{5}-\frac{x^2}{m}=1$的离心率$e\in(1,2)$,
所以$m>0$,且$1<\frac{5+m}{5}<4$,解得$0<m<15$,
所以命题q等价于$0<m<15$.
若p真q假,则m不存在;
若p假q真,则$\frac{1}{3}\leqslant m<15$.
综上可知,m的取值范围为$\frac{1}{3}\leqslant m<15$.

10. **解**:当焦点在x轴上时,可设椭圆方程为$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$,
由$2c=2\sqrt{13}$,得$c=\sqrt{13}$.
设双曲线的方程为$\frac{x^2}{m^2}-\frac{y^2}{n^2}=1$,$(m>0,n>0)$,则$m=a-4$.①
又∵$\frac{e_{双}}{e_{椭}}=\frac{7}{3}$,∴$\frac{a}{m}=\frac{7}{3}$②.联立①②,解得$a=7$,$m=3$.
∵椭圆和双曲线的半焦距都为$\sqrt{13}$.
∴$b^2=a^2-c^2=7^2-13=36$,$n^2=c^2-m^2=13-3^2=4$.
∴椭圆的方程为$\frac{x^2}{49}+\frac{y^2}{36}=1$,双曲线方程为$\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{4}=1$;
当焦点在y轴上时,椭圆的方程为$\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{49}=1$,
双曲线方程为$\frac{y^2}{9}-\frac{x^2}{4}=1$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

第 14 课时　2.3.2　双曲线的简单几何性质(二)

题点知识巩固

1. 选 B　∵直线 $y=\frac{1}{3}\left(x-\frac{7}{2}\right)$ 过点 $\left(\frac{7}{2},0\right)$，且与双曲线的一条渐近线 $y=\frac{1}{3}x$ 平行，∴只有 1 个公共点.

2. **解析**：因为直线与双曲线右支交于不同两点，所以 $k>1$. 由直线 $y=kx-1$ 和双曲线 $x^2-y^2=1$ 联立方程组，消 y，得 $(1-k^2)x^2+2kx-2=0$，所以 $\begin{cases}1-k^2\neq 0,\\ \Delta=4k^2+8(1-k^2)>0,\end{cases}$ 解得 $1<k<\sqrt{2}$.

答案：$(1,\sqrt{2})$

3. **解析**：依题意得右焦点 $F(5,0)$，所以过点 F 且垂直于 x 轴的直线 $x=5$ 与双曲线 $\frac{x^2}{20}-\frac{y^2}{5}=1$ 的交点的纵坐标为 $\pm\frac{\sqrt{5}}{2}$，所以此时弦长为 $\frac{\sqrt{5}}{2}\times 2=\sqrt{5}$. 当直线不垂直于 x 轴时，若直线与双曲线的一支有两个交点，则弦长一定比 $\sqrt{5}$ 长. 因为双曲线的两顶点间的距离为 $4\sqrt{5}$，即左、右两支上的点的最短距离是 $4\sqrt{5}$，所以如果直线与双曲线的两支相交，弦长不可能为 $\sqrt{5}$，故满足条件的直线只有 1 条.

答案：1

4. **解**：(1)设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，代入双曲线方程，得 $x_1^2-\frac{y_1^2}{4}=1$，$x_2^2-\frac{y_2^2}{4}=1$，两式相减得 $x_1^2-x_2^2-\left(\frac{y_1^2}{4}-\frac{y_2^2}{4}\right)=0$，$(x_1+x_2)(x_1-x_2)-\frac{1}{4}(y_1+y_2)(y_1-y_2)=0$.

∵M 为 AB 的中点，

∴$x_1+x_2=4$，$y_1+y_2=4$，

∴$4(x_1-x_2)-(y_1-y_2)=0$，

$k_l=\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=4$，

∴l 的方程为 $y-2=4(x-2)$，

即 $y=4x-6$.

(2)将 $y=4x-6$ 代入到 $x^2-\frac{y^2}{4}=1$ 中，得 $3x^2-12x+10=0$，

故 $x_1+x_2=4$，$x_1x_2=\frac{10}{3}$，

∴$|AB|=\sqrt{(1+k^2)[(x_1+x_2)^2-4x_1x_2]}=\frac{2}{3}\sqrt{102}$.

5. 选 A　由题意可知，$|F_1F_2|=|F_2P|=2c$，

又∵$|F_1P|+|F_2P|=2a_1$，$|F_1P|-|F_2P|=2a_2$，

∴$|F_1P|+2c=2a_1$，$|F_1P|-2c=2a_2$，

两式相减，可得 $a_1-a_2=2c$，

∵$\frac{2}{e_1}+\frac{e_2}{2}=\frac{2a_1}{c}+\frac{c}{2a_2}=\frac{4a_1a_2+c^2}{2ca_2}=\frac{4(2c+a_2)a_2+c^2}{2ca_2}=\frac{8ca_2+4a_2^2+c^2}{2ca_2}=4+\frac{2a_2}{c}+\frac{c}{2a_2}$，

又 $\frac{2a_2}{c}+\frac{c}{2a_2}\geqslant 2\sqrt{\frac{2a_2}{c}\cdot\frac{c}{2a_2}}=2$，

当且仅当 $\frac{2a_2}{c}=\frac{c}{2a_2}$ 时等号成立，

∴$\frac{2}{e_1}+\frac{e_2}{2}$ 的最小值为 6，故选 A.

6. **解析**：由于到原点 O 和右焦点 F 距离相等的点在线段 OF 的垂直平分线上，其方程为 $x=\frac{c}{2}$，依题意直线 $x=\frac{c}{2}$ 与双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 右支有两个交点，所以应满足 $\frac{c}{2}>a$，即 $\frac{c}{a}>2$，得 $e>2$，则双曲线离心率的取值范围是 $(2,+\infty)$.

答案：$(2,+\infty)$

提能达标过关

1. 选 C　当直线 l 的斜率不存在时，$l\perp x$ 轴，又 $F(\sqrt{3},0)$，当 $x=\sqrt{3}$ 时，$y=\pm 2$，此时 $|AB|=4$；当直线 l 的斜率存在时，有 2 条，∴这样的直线 l 有 3 条.

2. 选 A　当 $x=c$ 时，$y=\pm\frac{b^2}{a}$，不妨设 $A\left(c,-\frac{b^2}{a}\right)$，$B\left(c,\frac{b^2}{a}\right)$，双曲线的一条渐近线方程为 $y=\frac{b}{a}x$，即 $bx-ay=0$. 则 $d_1=\frac{|bc+b^2|}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{|bc+b^2|}{c}$，$d_2=\frac{|bc-b^2|}{c}$，

∴$d_1+d_2=2b=6$，∴$b=3$，又 $e=\frac{c}{a}=2$，∴$c=2a$.

又 $c^2=a^2+b^2$，∴$a^2=3$，∴双曲线方程为 $\frac{x^2}{3}-\frac{y^2}{9}=1$.

3. 选 B　根据题意得 $\begin{cases}a^2-b^2=1,\\ \frac{|a-b|}{\sqrt{2}}=\sqrt{2},\end{cases}$ 即 $\begin{cases}a^2-b^2=1,\\ |a-b|=2.\end{cases}$

∵点 $P(a,b)$ 在双曲线的左支上，

∴$a<0$，$b>0$，且 $a+b<0$.

∴$a+b=-\frac{1}{2}$.

4. 选 B　∵$|PF_1|=2|PF_2|$，则 $|PF_1|-|PF_2|=2a$，

∴$|PF_2|=2a$，而双曲线右支上到右焦点距离最近的点为右顶点，∴有 $c-a\leqslant 2a$，∴$1<e\leqslant 3$.

5. 选 B　设双曲线 E 的标准方程为 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$，

由题意知 $c=3$，$a^2+b^2=9$.

设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，

则 $\begin{cases}\frac{x_1^2}{a^2}-\frac{y_1^2}{b^2}=1,\\ \frac{x_2^2}{a^2}-\frac{y_2^2}{b^2}=1,\end{cases}$

两式作差，得 $\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=\frac{b^2(x_1+x_2)}{a^2(y_1+y_2)}=\frac{-12b^2}{-15a^2}=\frac{4b^2}{5a^2}$.

又因为直线 AB 的斜率是 $\frac{-15-0}{-12-3}=1$，

所以 $4b^2=5a^2$，代入 $a^2+b^2=9$，得 $a^2=4$，$b^2=5$，

所以双曲线 E 的标准方程是 $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{5}=1$.

6. **解析**：因为 4，m，9 成等比数列，所以 $m^2=36$，$m=\pm 6$，

当 $m=6$ 时，$\frac{x^2}{6}+y^2=1$ 为焦点在 x 轴上的椭圆，$a=\sqrt{6}$，$b=1$，$c=\sqrt{5}$，

所以离心率为 $e=\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{6}}=\frac{\sqrt{30}}{6}$.

当 $m=-6$ 时，$y^2-\frac{x^2}{6}=1$ 为焦点在 y 轴上的双曲线，$a=1$，$b=\sqrt{6}$，$c=\sqrt{7}$，$e=\frac{\sqrt{7}}{1}=\sqrt{7}$，

∴离心率为 $\frac{\sqrt{30}}{6}$ 或 $\sqrt{7}$.

答案：$\frac{\sqrt{30}}{6}$ 或 $\sqrt{7}$

7. **解析**：设双曲线的一个焦点为 $F(c,0)$，一条渐近线为 $bx-ay=0$，由题意得 $\frac{|bc|}{\sqrt{a^2+b^2}}=3$，∴$b=3$.

又 $e=\frac{c}{a}=\sqrt{1+\left(\frac{b}{a}\right)^2}=\frac{5}{4}$，

∴$1+\left(\frac{3}{a}\right)^2=\frac{25}{16}$，∴$\left(\frac{3}{a}\right)^2=\frac{9}{16}$，

∴$a=4$，∴实轴长等于 8.

答案：8

8. **解析**：把 $y=2b$ 代入 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$，可得 $A(-\sqrt{5}a,2b)$.

因为直线 OA 的斜率为 -1，所以 $\frac{2b}{-\sqrt{5}a}=-1$，即得 $\frac{b}{a}=\frac{\sqrt{5}}{2}$，

故该双曲线的渐近线的方程为 $y=\pm\frac{\sqrt{5}}{2}x$.

答案：$y=\pm\frac{\sqrt{5}}{2}x$

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

9. **解**：由 C 与 l 相交于不同的两点知方程组 $\begin{cases}\frac{x^2}{a^2}-y^2=1,\\ x+y=1\end{cases}$ 有两个不同的实数解，消去 y，并整理得 $(1-a^2)x^2+2a^2x-2a^2=0$.

所以 $\begin{cases}1-a^2\neq0,\\ 4a^4+8a^2(1-a^2)>0.\end{cases}$

解得 $0<a<\sqrt{2}$ 且 $a\neq1$.

双曲线的离心率 $e=\frac{\sqrt{1+a^2}}{a}=\sqrt{\frac{1}{a^2}+1}$.

$\because 0<a<\sqrt{2}$ 且 $a\neq1$，$\therefore e>\frac{\sqrt{6}}{2}$ 且 $e\neq\sqrt{2}$.

即离心率 e 的取值范围为 $\left(\frac{\sqrt{6}}{2},\sqrt{2}\right)\cup(\sqrt{2},+\infty)$.

10. **解**：(1)由题意可设，所求双曲线的方程为 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$，

$\because \frac{c}{a}=2$，$c=2$，

$\therefore a=1$，$\therefore b=\sqrt{3}$，

$\therefore$ 所求双曲线的方程为 $x^2-\frac{y^2}{3}=1$.

(2)$\because$ 直线 l 与 y 轴相交于点 M 且过焦点 $F(-2,0)$，

$\therefore l$ 的斜率一定存在，设为 k，则直线 l：$y=k(x+2)$.

令 $x=0$，得 $M(0,2k)$.

$\because |\overrightarrow{MQ}|=2|\overrightarrow{QF}|$ 且 M,Q,F 共线于直线 l，

$\therefore \overrightarrow{MQ}=2\overrightarrow{QF}$ 或 $\overrightarrow{MQ}=-2\overrightarrow{QF}$.

设点 $Q(x_Q,y_Q)$，

当 $\overrightarrow{MQ}=2\overrightarrow{QF}$ 时，$x_Q=-\frac{4}{3}$，$y_Q=\frac{2}{3}k$，

$\therefore Q\left(-\frac{4}{3},\frac{2}{3}k\right)$.

$\because$ 点 Q 在双曲线 $x^2-\frac{y^2}{3}=1$ 上，

$\therefore \frac{16}{9}-\frac{4k^2}{27}=1$，$\therefore k=\pm\frac{\sqrt{21}}{2}$；

当 $\overrightarrow{MQ}=-2\overrightarrow{QF}$ 时，同理，求得 $Q(-4,-2k)$，代入双曲线方程，得 $16-\frac{4k^2}{3}=1$，

$\therefore k=\pm\frac{3\sqrt{5}}{2}$.

所求的直线 l 的方程为 $y=\pm\frac{\sqrt{21}}{2}(x+2)$ 或 $y=\pm\frac{3\sqrt{5}}{2}(x+2)$.

2.4 抛物线

第 15 课时 2.4.1 抛物线及其标准方程

基础知识梳理

1. 抛物线 焦点 准线

2. $\left(\frac{p}{2},0\right)$ $\left(-\frac{p}{2},0\right)$ $\left(0,\frac{p}{2}\right)$ $\left(0,-\frac{p}{2}\right)$ $x=-\frac{p}{2}$ $x=\frac{p}{2}$ $y=-\frac{p}{2}$ $y=\frac{p}{2}$

题点知识巩固

1. 选 D 由已知得 $\frac{m}{4}=2$，$\therefore m=8$.

2. 选 C $\because$ 椭圆 $\frac{y^2}{9}+\frac{x^2}{5}=1$ 的上焦点坐标为 $(0,2)$，

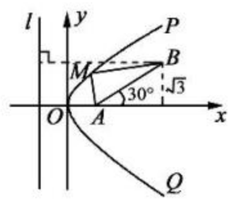
$\therefore$ 抛物线的焦点坐标为 $(0,2)$，

$\therefore$ 抛物线的准线方程为 $y=-2$.

3. 选 D 将抛物线方程 $y=-\frac{1}{8}x^2$ 转化为标准方程 $x^2=-8y$，得 $p=-4$，$\frac{p}{2}=-2$，焦点在 y 轴上，且开口向下，所以其焦点坐标为 $(0,-2)$.

4. 选 D 将抛物线方程化为标准方程 $x^2=-\frac{1}{4}y$，其准线方程为 $y=\frac{1}{16}$.

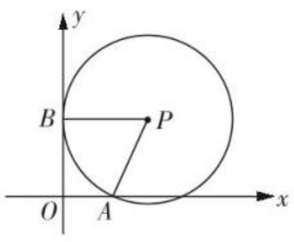
5. 选 C 如图建系，由抛物线的定义知，曲线 PQ 为抛物线，其方程式为 $y^2=8x$，$B(4,\sqrt{3})$，要使修建费用最低，可从 B 作 l 的垂线，其垂线段长为 5 km，所以最低费用为 $5a$ 万元.



6. 选 C 若抛物线标准方程为 $y^2=2px(p>0)$，则过点 $(40,30)$，所以 $2p=\frac{30^2}{40}=\frac{45}{2}$，因此标准方程可能是 $x^2=-\frac{45}{2}y$.

提能达标过关

1. 选 D 如图，设点 P 为满足条件的一点，因为点 P 到点 A 的距离等于点 P 到 y 轴的距离，所以点 P 在以点 A 为焦点，y 轴为准线的抛物线上，故点 P 的轨迹为抛物线.



2. 选 C 把抛物线 $y=\frac{1}{4}x^2$ 化为标准方程 $x^2=4y$，

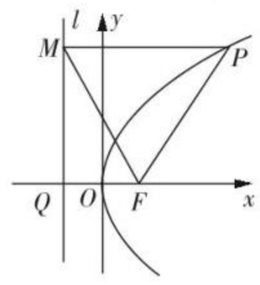
$\therefore$ 焦点在 y 轴上，其坐标为 $(0,1)$.

3. 选 D 椭圆 $\frac{x^2}{6}+\frac{y^2}{2}=1$ 的右焦点为 $(2,0)$，$\therefore \frac{p}{2}=2$，$p=4$.

4. 选 D $\because$ 抛物线的准线为 $y=-1$，$\therefore$ 点 A 到准线的距离为 5. 又 $\because$ 点 A 到准线的距离与点 A 到焦点的距离相等，

$\therefore$ 点 A 到焦点的距离为 5.

5. 选 D 如图，$\because \triangle FPM$ 是等边三角形，



$\therefore |PF|=|PM|=|FM|$，由抛物线的定义知 $PM\perp l$.

在 $\mathrm{Rt}\triangle MQF$ 中，$|QF|=2$，$\angle QMF=30°$，$\therefore |MF|=4$，

$\therefore S_{\triangle PMF}=\frac{\sqrt{3}}{4}\times4^2=4\sqrt{3}$. 故选 D.

6. **解析**：$\because$ 双曲线 $x^2-y^2=1$ 的焦点坐标为 $(\pm\sqrt{2},0)$，又 $p>0$，

$\therefore -\frac{p}{2}=-\sqrt{2}$，$\therefore p=2\sqrt{2}$.

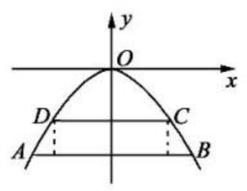
答案：$2\sqrt{2}$

7. **解析**：由 $y^2=4x$ 知，焦点 $F(1,0)$，$\therefore$ 双曲线的焦点在 x 轴上，且 $c=1$. $\therefore m>0$，$n<0$. $\because e=\frac{c}{\sqrt{m}}=2$，

$\therefore m=\frac{1}{4}$. 又 $-n=1^2-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$，$\therefore n=-\frac{3}{4}$，$\therefore \frac{m}{n}=-\frac{1}{3}$.

答案：$-\frac{1}{3}$

8. **解析**：建立平面直角坐标系如图，设抛物线方程为 $x^2=-2py(p>0)$，由题设知，$B(8,y_B)$，$C(6,y_C)$.



$\because$ 点 B,C 在抛物线上，

$\therefore y_B=-\frac{32}{p}$，$y_C=-\frac{18}{p}$，

$\therefore y_C-y_B=\frac{14}{p}=2$. $\therefore p=7$.

$\therefore y_C=-\frac{18}{7}$. 故此时桥洞顶部距水面的高度为 $\frac{18}{7}$ m.

答案：$\frac{18}{7}$ m

9. **解**：(1)双曲线方程化为 $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$，左顶点为 $(-3,0)$，由题意，可设抛物线方程为 $y^2=-2px(p>0)$，

$\because -\frac{p}{2}=-3$，$\therefore p=6$. $\therefore$ 方程为 $y^2=-12x$.

(2)设焦点在 x 轴上的抛物线方程为 $y^2=2px(p\neq0)$，$A(m,-3)$，由抛物线的定义，得 $5=|AF|=\left|m+\frac{p}{2}\right|$.

又 $(-3)^2=2pm$，$\therefore p=\pm1$ 或 $p=\pm9$.

$\therefore$ 所求抛物线方程为 $y^2=\pm2x$ 或 $y^2=\pm18x$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

10. **解**：(1)∵抛物线 $C:y^2=2px(p>0)$ 的准线方程为 $x=-\frac{p}{2}$，

由抛物线的定义，可知 $3+\frac{p}{2}=5$，解得 $p=4$，

∴C 的方程为 $y^2=8x$.

(2)由(1)得，抛物线 C 的方程为 $y^2=8x$，焦点 $F(2,0)$，

设 A,B 两点的坐标分别为 $A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$，

则 $\begin{cases}y_1^2=8x_1,\\y_2^2=8x_2,\end{cases}$

两式相减，整理得 $\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{8}{y_1+y_2}$，

∵线段 AB 中点的纵坐标为 -1，则 $y_1+y_2=-2$.

∴直线 l 的斜率 $k_{AB}=\frac{8}{y_2+y_1}=\frac{8}{-2}=-4$，

直线 l 的方程为 $y-0=-4(x-2)$，即 $4x+y-8=0$.

第 16 课时　2.4.2　抛物线的简单几何性质(一)

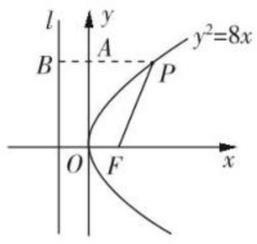
基础知识梳理

$F\left(\frac{p}{2},0\right)$　$F\left(-\frac{p}{2},0\right)$　$F\left(0,\frac{p}{2}\right)$　$F\left(0,-\frac{p}{2}\right)$　$x\geqslant 0$，$y\in\mathbf{R}$　$x\leqslant 0$，$y\in\mathbf{R}$　$x\in\mathbf{R}$，$y\geqslant 0$　$x\in\mathbf{R}$，$y\leqslant 0$

题点知识巩固

1. 选 C　抛物线方程转化成标准方程为 $y^2=4x$，焦点坐标为 $(1,0)$，双曲线的渐近线为 $\sqrt{3}x\pm y=0$，故焦点到渐近线的距离为 $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{(\sqrt{3})^2+1}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

2. 选 B　如图所示，抛物线的准线 l 的方程为 $x=-2$，F 是抛物线的焦点，过点 P 作 $PA\perp y$ 轴，垂足是 A，延长 PA 交准线 l 于点 B，则 $|AB|=2$. 由于点 P 到 y 轴的距离为 4，则点 P 到准线 l 的距离 $|PB|=4+2=6$，所以点 P 到焦点 F 的距离 $|PF|=|PB|=6$. 故选 B.



3. 选 A　由抛物线的定义，得 $|AB|=|AF|+|BF|=x_1+x_2+p=8+2=10$.

4. 选 D　如图所示，设线段 AB 的中点为 $P(x_0,y_0)$，

分别过 A,P,B 三点作准线 l 的垂线，垂足分别为 A',Q,B'，

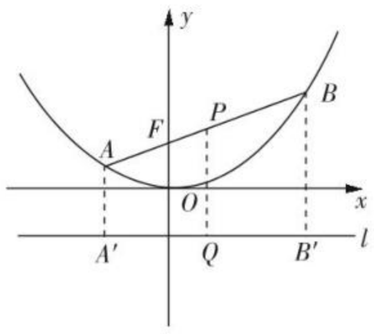
由题意，得 $|AA'|+|BB'|=|AF|+|BF|=|AB|=4$，

∴$|PQ|=\frac{|AA'|+|BB'|}{2}=2$.

又 $|PQ|=y_0+\frac{1}{8}$，

∴$y_0+\frac{1}{8}=2$，

∴$y_0=\frac{15}{8}$.



5. 选 A　设直线 l 的方程为 $x=\sqrt{3}\left(y-\frac{p}{2}\right)$，

$A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$，

将 $x=\sqrt{3}\left(y-\frac{p}{2}\right)$，代入 $x^2=2py$，

可得 $12y^2-20py+3p^2=0$，

∴$y_1=\frac{p}{6},y_2=\frac{3p}{2}$，

从而 $\frac{|AF|}{|FB|}=\frac{y_1+\frac{p}{2}}{y_2+\frac{p}{2}}=\frac{1}{3}$. 故选 A.

6. 选 A　易知焦点 $F(1,0)$，准线方程为 $x=-1$.

设直线 l 的方程为 $y=k(x-1)$，

代入抛物线方程，得 $k^2(x-1)^2=4x$.

化简为 $k^2x^2-(2k^2+4)x+k^2=0$.

设 $A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$，则有 $x_1x_2=1,x_1+x_2=\frac{2k^2+4}{k^2}$.

根据抛物线性质可知，$|AF|=x_1+1,|BF|=x_2+1$，

所以 $\frac{1}{|AF|}+\frac{1}{|BF|}=\frac{1}{x_1+1}+\frac{1}{x_2+1}=\frac{x_1+x_2+2}{x_1x_2+x_1+x_2+1}=1$.

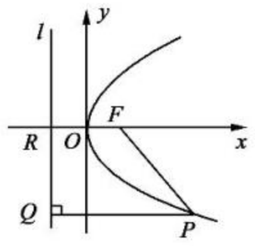
提能达标过关

1. 选 D　抛物线上顶点到准线的距离最短，为焦点到顶点的距离.

2. 选 B　抛物线 $x^2=4y$ 的准线为 $y=-1$，设 P 到 x 轴的距离为 d，则 $|PF|=3d$. ∴$3d=d+1$，∴$d=\frac{1}{2}$.

3. 选 C　如图，易知在梯形 $PQRF$ 中，$RF/\!/PQ$，由题意知，$|RF|=2,|PQ|=5,|RQ|=4$.

故梯形 $PQRF$ 的面积 $S=\frac{2+5}{2}\times 4=14$.



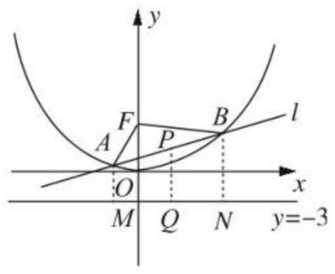
4. 选 B　由抛物线性质知 $|AB|=5+2=7$，∵当线段 AB 与 x 轴垂直时，$|AB|_{\min}=4$，∴这样的直线有两条.

5. 选 C　设 $A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$，则 $x_1+x_2=4-p$，∴$\frac{x_1+x_2}{2}=2-\frac{p}{2}$. 当线段 AB 的中点在直线 $x=\frac{p}{2}$ 的右侧时，$2-\frac{p}{2}-\frac{p}{2}=1$，∴$p=1$；当线段 AB 的中点在直线 $x=\frac{p}{2}$ 的左侧时，$\frac{p}{2}-\left(2-\frac{p}{2}\right)=1$，∴$p=3$. ∴$p$ 的值为 1 或 3.

6. **解析**：抛物线 $x^2=2py(p>0)$ 的准线为 $y=-\frac{p}{2}$，由于 $\triangle ABF$ 为等边三角形，可得 B 的坐标为 $\left(\frac{p}{\sqrt{3}},-\frac{p}{2}\right)$，代入方程 $\frac{x^2}{3}-\frac{y^2}{3}=1$，得 $p=6$.

答案：6

7. **解析**：分别过点 A,B,P 作准线的垂线，垂足分别为 M,N,Q，



由抛物线的定义得 $|AF|+|BF|=|AM|+|BN|=2|PQ|=2\times 4=8$.

答案：8

8. **解析**：抛物线 $y^2=10x$ 的焦点 $F\left(\frac{5}{2},0\right)$ 在 x 轴上，所以①不适合，②适合；当 $x=1$ 时，$y=\pm\sqrt{10}$，不妨设 $A(1,\sqrt{10})$，则 $|FA|=\sqrt{\left(1-\frac{5}{2}\right)^2+(0-\sqrt{10})^2}\neq 6$，所以③不适合；通径长为 $2p=10$，所以④不适合；由 $F\left(\frac{5}{2},0\right)$，设 $B(2,1)$，则 $k_{FB}=\frac{1-0}{2-\frac{5}{2}}=-2$，而 $k_{OP}=\frac{1}{2}$，所以 $k_{FB}\cdot k_{OP}=-1$，所以⑤适合.

答案：②⑤

9. **解**：设抛物线方程为 $y^2=mx(m\neq 0)$，联立方程组 $\begin{cases}y=2x+1,\\y^2=mx,\end{cases}$ 消去 y 并整理，得 $4x^2+(4-m)x+1=0$.

设 $A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$，则 $x_1+x_2=\frac{m-4}{4},x_1x_2=\frac{1}{4}$.

于是弦长 $|AB|=\sqrt{(1+k^2)[(x_1+x_2)^2-4x_1x_2]}=\sqrt{(1+2^2)\left[\left(\frac{m-4}{4}\right)^2-4\times\frac{1}{4}\right]}=\sqrt{15}$.

解得 $m=12$ 或 $m=-4$. 故所求的抛物线方程为 $y^2=12x$ 或 $y^2=-4x$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

10. **解**：(1)抛物线 $y^2=2px(p>0)$ 的焦点为 $F\left(\frac{p}{2},0\right)$，

准线为 $x=-\frac{p}{2}$，

由抛物线的定义可得，$|AF|=4+\frac{p}{2}=5$，解得 $p=2$，

即抛物线的方程为 $y^2=4x$.

(2)证明：设直线 $l:x=my+4$，$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，

代入抛物线方程 $y^2=4x$，

可得 $y^2-4my-16=0$，

$\Delta=16m^2+64>0$ 恒成立，

$y_1+y_2=4m$，$y_1y_2=-16$，$x_1x_2=\frac{y_1^2}{4}\cdot\frac{y_2^2}{4}=16$，

即有 $x_1x_2+y_1y_2=0$，

则 $\overrightarrow{OA}\perp\overrightarrow{OB}$，则以 AB 为直径的圆必过坐标原点.

第 17 课时　2.4.2　抛物线的简单几何性质(二)

题点知识巩固

1. 选 D　设切线方程为 $2x-y+m=0$，与 $y=x^2$ 联立，得 $x^2-2x-m=0$，根据题意得 $\Delta=4+4m=0$，解得 $m=-1$，即切线方程为 $2x-y-1=0$.

2. **解**：由 $\begin{cases}y=kx+1,\\y^2=2x,\end{cases}$ 可得 $k^2x^2+(2k-2)x+1=0$. ①

当 $k=0$ 时，方程①，得 $x=\frac{1}{2}$，代入 $y=kx+1$，得

$y=1$，这时直线 l 与抛物线只有一个公共点 $\left(\frac{1}{2},1\right)$；

当 $k\neq0$ 时，$\Delta=4(k-1)^2-4k^2=4(1-2k)$.

当 $\Delta=0$，即 $k=\frac{1}{2}$ 时，方程①有一个解，从而直线 l 与抛物线只有一个公共点.

当 $\Delta>0$ 且 $k\neq0$，即 $k<\frac{1}{2}$ 且 $k\neq0$ 时，方程①有两个解，从而直线 l 与抛物线有两个公共点.

当 $\Delta<0$ 且 $k\neq0$，即 $k>\frac{1}{2}$ 时，方程①没有实数解，从而直线 l 与抛物线没有公共点.

综上可得：当 $k=0$ 或 $k=\frac{1}{2}$ 时，直线 l 与抛物线只有一个公共点；当 $k<\frac{1}{2}$ 且 $k\neq0$ 时，直线 l 与抛物线有两个公共点；当 $k>\frac{1}{2}$ 时，直线 l 与抛物线没有公共点.

3. 选 B　设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$.

由题意，知 AB 的方程为 $y=-2(x-1)$，

即 $y=-2x+2$.

由 $\begin{cases}y^2=8x,\\y=-2x+2,\end{cases}$ 得 $x^2-4x+1=0$，

$\therefore x_1+x_2=4$，$x_1x_2=1$.

$\therefore|AB|=\sqrt{(1+k^2)[(x_1+x_2)^2-4x_1x_2]}$

$=\sqrt{(1+4)(16-4)}$

$=\sqrt{5\times12}=2\sqrt{15}$.

4. **解析**：由题意，知 $a>0$，当 $x=1$ 时，$y^2=4a$，

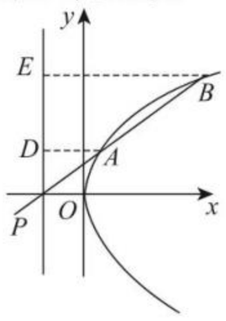
$\therefore y=\pm2\sqrt{a}$.

$\therefore2\sqrt{a}-(-2\sqrt{a})=4$，$\therefore a=1$.

$\therefore$ 抛物线方程为 $y^2=4x$，其焦点坐标为 $(1,0)$.

答案：$(1,0)$

5. 选 A　如图，设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，分别过 A，B 作直线 $x=-2$ 的垂线，垂足分别为 D，E，由 $|PA|=\frac{1}{2}|AB|$，知 $\frac{|AP|}{|BP|}=\frac{1}{3}$，由 $\triangle APD\backsim\triangle BPE$，



可得 $\begin{cases}3(x_1+2)=x_2+2,\\3y_1=y_2.\end{cases}$

又 $\begin{cases}y_1^2=4x_1,\\y_2^2=4x_2,\end{cases}$

从而得 $x_1=\frac{2}{3}$.

则点 A 到焦点 $F(1,0)$ 的距离为 $1+\frac{2}{3}=\frac{5}{3}$.

6. **解**：(1)由题意知直线 l_1 与抛物线 C 的交点坐标为 $(4,-4)$，

$\therefore(-4)^2=2p\times4$，$\therefore2p=4$，即 $p=2$，$\therefore$ 抛物线 C 的方程为 $y^2=4x$.

(2)$\because$ 直线 l_2 与直线 l_1 垂直，

$\therefore$ 可设直线 l_2 的方程为 $x=y+m(m\neq0)$，

$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，

且直线 l_2 与 x 轴的交点为 M.

由 $\begin{cases}y^2=4x,\\x=y+m\end{cases}$ 得 $y^2-4y-4m=0$，

$\Delta=16+16m>0$，$\therefore m>-1$.

$y_1+y_2=4$，$y_1y_2=-4m$，$\therefore x_1x_2=\frac{y_1^2y_2^2}{16}=m^2$.

由题意，可知 $OA\perp OB$，即 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=0$，

$\therefore x_1x_2+y_1y_2=m^2-4m=0$，

$\therefore m=4$ 或 $m=0$(舍)，

$\therefore$ 直线 $l_2:x=y+4$，$M(4,0)$.

$\therefore S_{\triangle FAB}=S_{\triangle FMB}+S_{\triangle FMA}=\frac{1}{2}\times|FM|\times|y_1-y_2|=\frac{1}{2}\times3\times\sqrt{(y_1+y_2)^2-4y_1y_2}=6\sqrt{5}$.

提能达标过关

1. 选 C　易知点 $Q(-2,0)$，设直线 l 的方程为 $y=k(x+2)$，

与 $y^2=8x$ 联立，消去 x 得关于 y 的方程 $ky^2-8y+16k=0$.

当 $k=0$ 时，$y=0$. 直线与抛物线有一个交点；

当 $k\neq0$ 时，令 $\Delta=64-64k^2\geqslant0$，得 $-1\leqslant k\leqslant1$ 且 $k\neq0$.

综上知，$-1\leqslant k\leqslant1$.

2. 选 D　由于方程 $y^2=ax(a>0)$ 具有一般性，所以可采用特例法. 假设 PQ 过点 $F\left(\frac{a}{4},0\right)$，且垂直 x 轴，则 $|PF|=|FQ|=\frac{a}{2}$. 即 $p=q=\frac{a}{2}$，$\therefore\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=\frac{4}{a}$.

3. 选 C　设两弦端点为 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，则 $y_1+y_2=-2$，

$\because$ 点 A，B 在抛物线 $y^2=8x$ 上，$\therefore y_1^2=8x_1$，$y_2^2=8x_2$，两式相减，得 $y_1^2-y_2^2=8(x_1-x_2)$，

$\therefore\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=\frac{8}{y_1+y_2}=-4$，$\therefore k_{AB}=-4$，

$\therefore$ 直线 AB 的方程为 $y+1=-4(x-1)$，

即 $4x+y-3=0$.

4. 选 D　由 $y^2=3x$ 知，$p=\frac{3}{2}$，焦点 $F\left(\frac{3}{4},0\right)$，直线 AB 的斜率 $k=\frac{\sqrt{3}}{3}$，故直线 AB：$y=\frac{\sqrt{3}}{3}\left(x-\frac{3}{4}\right)$. 代入 $y^2=3x$，得 $4y^2-12\sqrt{3}y-9=0$. 设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，则 $y_1+y_2=3\sqrt{3}$，$y_1y_2=-\frac{9}{4}$，$\therefore|y_1-y_2|=\sqrt{(y_1+y_2)^2-4y_1y_2}=6$.

$\therefore S_{\triangle OAB}=\frac{1}{2}|OF|\cdot|y_1-y_2|=\frac{1}{2}\times\frac{3}{4}\times6=\frac{9}{4}$.

5. 选 D　由题意知，抛物线的焦点为 $F(1,0)$. 设点 P 到直线 l 的距离为 d，由抛物线的定义可知，点 P 到 y 轴的距离为 $|PF|-1$，所以点 P 到直线 l 的距离与到 y 轴的距离之和为 $d+|PF|-1$. 易知 $d+|PF|$ 的最小值为点 F 到直线 l 的距离，故 $d+|PF|$ 的最小值为 $\frac{|2+3|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\sqrt{5}$，所以 $d+|PF|-1$ 的最小值为 $\sqrt{5}-1$.

6. **解析**：解法一：显然直线 l 的斜率存在且不为 0，

故可设直线 $l:y=k(x-1)(k\neq0)$，

联立 $\begin{cases}y=k(x-1),\\y^2=4x,\end{cases}$ 消去 y，得

$k^2x^2-(2k^2+4)x+k^2=0$，设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，

则 $x_1x_2=1$，故 $x_1=\frac{1}{x_2}$. ①

又 $|FA|=2|BF|$，

$\therefore\overrightarrow{FA}=2\overrightarrow{BF}$，则 $x_1-1=2(1-x_2)$，②

由①②，得 $x_2=\frac{1}{2}$($x_2=-1$ 舍去)，

$\therefore B\left(\frac{1}{2},\pm\sqrt{2}\right)$，

$\therefore$ 直线 l 的斜率 $k=k_{BF}=\pm2\sqrt{2}$，

$\therefore$ 直线 l 的方程为 $y=\pm2\sqrt{2}(x-1)$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

解法二：用结论$\frac{1}{|AF|}+\frac{1}{|BF|}=\frac{2}{p}=1$，

$\therefore\frac{1}{|AF|}+\frac{2}{|AF|}=1$，$|AF|=3$，$|BF|=\frac{3}{2}$，

$|AF|+|BF|=\frac{9}{2}=\frac{2p}{\sin^2\theta}$，

$\therefore\sin^2\theta=\frac{8}{9}$，$\cos^2\theta=\frac{1}{9}$，$\tan^2\theta=8$，则$k=\pm2\sqrt{2}$.

$\therefore$直线l：$y=\pm2\sqrt{2}(x-1)$.

答案：$y=\pm2\sqrt{2}(x-1)$

7. **解析**：抛物线$x^2=4y$的焦点为$F(0,1)$，准线为$y=-1$，由抛物线的定义，得$|MF|$等于M到准线的距离，所以$|MA|+|MF|$的最小值等于圆心C到准线的距离减去圆的半径，即$5+1-1=5$.

答案：5

8. **解析**：由题意知，AB是抛物线$y^2=2px(p>0)$的通径，

$\therefore|AB|=2p$. $\therefore A\left(\frac{p}{2},p\right)$，又$\frac{p}{2}=c$，$\therefore A(c,2c)$.

将A点代入椭圆方程，得$\frac{c^2}{a^2}+\frac{4c^2}{b^2}=1$，

$\therefore4a^2c^2=a^2b^2-b^2c^2=b^2(a^2-c^2)=b^4$，

$\therefore b^2=2ac$. 又$b^2=a^2-c^2$，

$\therefore a^2-c^2=2ac$，$\therefore e^2+2e-1=0$.

解得$e=\sqrt{2}-1$或$e=-\sqrt{2}-1$(舍去).

答案：$\sqrt{2}-1$

9. **解**：(1)由点$A(2,8)$在抛物线$y^2=2px$上，有$8^2=2p\cdot2$，

解得$p=16$，所以抛物线方程为$y^2=32x$，焦点F的坐标为$(8,0)$.

因为$F(8,0)$是$\triangle ABC$的重心，M是BC的中点，设点M的坐标为(x_0,y_0)，则$\overrightarrow{AF}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AM}$.

所以点M的坐标为$(11,-4)$.

(2)由于线段BC的中点M不在x轴上，所以BC所在直线不垂直于x轴.

设BC所在直线的方程为$y+4=k(x-11)(k\neq0)$.

由$\begin{cases}y+4=k(x-11),\\y^2=32x,\end{cases}$消去$x$，得$ky^2-32y-32(11k+4)=0$，

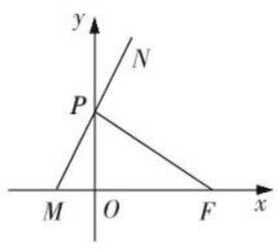
所以$y_1+y_2=\frac{32}{k}$，

由(2)的结论，得$\frac{y_1+y_2}{2}=-4$，解得$k=-4$.

因此BC所在直线的方程为$4x+y-40=0$.

即直线l的方程为$4x+y-40=0$.

10. **解**：(1)设动点$N(x,y)$，则$M(-x,0)$，$P\left(0,\frac{y}{2}\right)(x>0)$，



$\because PM\perp PF$，$\therefore k_{PM}\cdot k_{PF}=-1$，即$\frac{\frac{y}{2}}{x}\cdot\frac{\frac{y}{2}}{-1}=-1$，

$\therefore y^2=4x(x>0)$即为所求.

(2)设直线l方程为$y=kx+b$，l与抛物线交于点$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，

则由$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=-4$，得$x_1x_2+y_1y_2=-4$，

即$\frac{y_1^2\cdot y_2^2}{16}+y_1y_2=-4$，

$\therefore y_1y_2=-8$，

由$\begin{cases}y^2=4x,\\y=kx+b,\end{cases}$可得$ky^2-4y+4b=0$(其中$k\neq0$)，

$\therefore y_1y_2=\frac{4b}{k}=-8$，即$b=-2k$，$y_1+y_2=\frac{4}{k}$，

当$\Delta=16-16kb=16(1+2k^2)>0$时，

$|AB|=\sqrt{\left(1+\frac{1}{k^2}\right)[(y_1+y_2)^2-4y_1y_2]}$

$=\sqrt{\frac{(k^2+1)}{k^2}\left(\frac{16}{k^2}+32\right)}$，

又$\because4\sqrt{6}\leqslant|AB|\leqslant4\sqrt{30}$，

$\therefore16\times6\leqslant\frac{(k^2+1)}{k^2}\cdot\frac{16+32k^2}{k^2}\leqslant16\times30$，

$\therefore6\leqslant\frac{(k^2+1)(1+2k^2)}{k^4}\leqslant30$，解得$\frac{1}{4}\leqslant k^2\leqslant1$，

$\therefore k\in\left[-1,-\frac{1}{2}\right]\cup\left[\frac{1}{2},1\right]$.

阶段评估 3

1. 选D　依题意，渐近线$y=\frac{b}{a}x$过点$M(1,2)$，$\therefore b=2a$. 又$c^2=a^2+b^2=5a^2$，$\therefore e^2=5$，$e=\sqrt{5}$.

2. 选A　由题意得，抛物线的焦点坐标为$(5,0)$，则双曲线C的焦点在x轴上，且$c=5$.

$\because$渐近线方程为$y=\pm\frac{4}{3}x$，

$\therefore\frac{b}{a}=\frac{4}{3}$，即$b=\frac{4}{3}a$，则$b^2=\frac{16}{9}a^2=c^2-a^2=25-a^2$，

则$a^2=9$，$b^2=16$，故双曲线C的方程为$\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$.

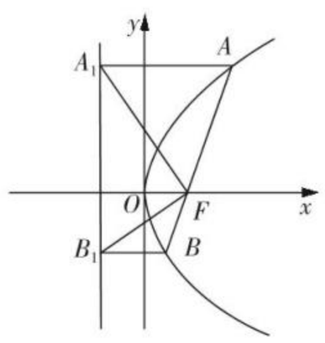
3. 选C　$\because$双曲线的渐近线为$y=\pm\frac{b}{a}x$，由$\begin{cases}y=x^2+1,\\y=\pm\frac{b}{a}x,\end{cases}$得$x^2\pm\frac{b}{a}x+1=0$. 由题意得，$\Delta=\left(\pm\frac{b}{a}\right)^2-4=0$，得$\frac{b}{a}=2$，

$\therefore\frac{c^2-a^2}{a^2}=4$，得$e=\sqrt{5}$.

4. 选C　抛物线$y^2=4\sqrt{3}x$的焦点坐标为$(\sqrt{3},0)$，即$c=\sqrt{3}$. 圆的方程配方，得$(x-1)^2+y^2=16$，$\therefore$半径$r=4$. $\therefore2a=4$，$a=2$.

$\therefore b^2=a^2-c^2=1$. 故椭圆方程为$\frac{x^2}{4}+y^2=1$.

5. 选C　设抛物线方程为$y^2=2px(p>0)$，如图.



$\because|AF|=|AA_1|$，$|BF|=|BB_1|$，

$\therefore\angle AA_1F=\angle AFA_1$，$\angle BFB_1=\angle FB_1B$.

又$AA_1\parallel Ox\parallel B_1B$，

$\therefore\angle A_1FO=\angle FA_1A$，$\angle B_1FO=\angle FB_1B$，

$\therefore\angle A_1FB_1=\frac{1}{2}\angle AFB=90^\circ$.

6. 选A　由题意知，抛物线$y^2=2px$的准线方程为$x=-\frac{p}{2}$，

将其代入双曲线方程$\frac{y^2}{3}-x^2=1$，

解得$y=\pm\sqrt{3+\frac{3p^2}{4}}$.

由双曲线的对称性，知$\triangle MNF$为等腰直角三角形，

$\therefore\angle FMN=\frac{\pi}{4}$，

$\therefore\tan\angle FMN=\frac{p}{\sqrt{3+\frac{3p^2}{4}}}=1$，解得$p=2\sqrt{3}$.

7. **解析**：直线l的方程可化为$x-y+1+a(y-3)=0$，

$\therefore M(2,3)$. 依题意可设抛物线方程为$x^2=2py(p>0)$，

$\therefore2p=\frac{4}{3}$. $\therefore$抛物线方程为$x^2=\frac{4}{3}y$.

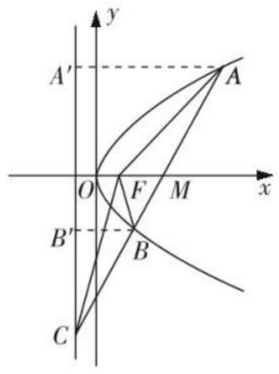
答案：$x^2=\frac{4}{3}y$

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

8. **解析**：把⊙M的方程化为$(x+4)^2+y^2=4$，则$M(-4,0)$，半径$R=2$. 又抛物线$y^2=2px(p>0)$的准线方程为$x=-\frac{p}{2}$，由题意，得$\left|-\frac{p}{2}+4\right|=2$，解得$p=12$或$4$.

答案：4 或 12

9. **解析**：由题意，可知直线AB的斜率存在且不为 0，



如图所示，过点A作$AA'\perp l$，$BB'\perp l$，垂足为A'，B'.

设过点$M(\sqrt{3},0)$的直线方程为$y=k(x-\sqrt{3})$，将其代入$y^2=2x$并整理，得$k^2x^2-(2\sqrt{3}k^2+2)x+3k^2=0$，

设$A(x_A,y_A)$，$B(x_B,y_B)$，则$x_Ax_B=3$.

因为$|BF|=2$，所以$|BB'|=2$.

所以$x_B=2-\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$.

由题意知，$x_A=2$.

所以$\frac{S_{\triangle BCF}}{S_{\triangle ACF}}=\frac{\frac{1}{2}\cdot|BC|\cdot d}{\frac{1}{2}\cdot|AC|\cdot d}=\frac{|BC|}{|AC|}=\frac{|BB'|}{|AA'|}=\frac{2}{2+\frac{1}{2}}=\frac{4}{5}$.

答案：$\frac{4}{5}$

10. **解析**：设左焦点为F_1，∵$|OF_2|=|F_2M|=c$，

∴$|OM|=\sqrt{3}c$.

∴$|PF_1|=2|OM|=2\sqrt{3}c$，$|PF_2|=2c$.

∵$|PF_1|-|PF_2|=2a$，

∴$2\sqrt{3}c-2c=2a$，

∴$e=\frac{c}{a}=\frac{1}{\sqrt{3}-1}=\frac{\sqrt{3}+1}{2}$.

答案：$\frac{\sqrt{3}+1}{2}$

11. **解**：(1)直线AB的方程可表示为$y=2\sqrt{2}\left(x-\frac{p}{2}\right)$，与抛物线$y^2=2px$联立，可得$4x^2-5px+p^2=0$.

由题意知，该方程必有两个不等实根.

所以$x_1+x_2=\frac{5p}{4}$.

由抛物线定义，知$|AB|=x_1+x_2+p=\frac{5p}{4}+p=9$，

所以$p=4$，从而抛物线方程为$y^2=8x$.

(2)将$p=4$代入$4x^2-5px+p^2=0$，

可得$x^2-5x+4=0$，解得$x_1=1$，$x_2=4$，

所以$y_1=-2\sqrt{2}$，$y_2=4\sqrt{2}$，

从而$A(1,-2\sqrt{2})$，$B(4,4\sqrt{2})$.

设$C(x_3,y_3)$，

则$\overrightarrow{OC}=(x_3,y_3)=(1,-2\sqrt{2})+\lambda(4,4\sqrt{2})=(4\lambda+1,4\sqrt{2}\lambda-2\sqrt{2})$.

又$y_3^2=8x_3$，即$[2\sqrt{2}(2\lambda-1)]^2=8(4\lambda+1)$，

整理得$(2\lambda-1)^2=4\lambda+1$，解得$\lambda=0$或$\lambda=2$.

12. **解**：(1)设过点$T(t,0)$的直线方程为$x=my+t$，代入$y^2=2px$，消去x，可得$y^2-2pmy-2pt=0$.

由韦达定理可得，两根之积为$-2pt$，

由题意知，$-2pt=-4$，$t=2$，所以$p=1$.

所以焦点F的坐标为$\left(\frac{1}{2},0\right)$.

(2)证明：设$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，$P(x_3,y_3)$，$Q(x_4,y_4)$，

由(1)同理，可得$y_1y_2=-p^2$，

$y_1y_3=-2pt$，$y_2y_4=-2pt$，

所以$y_3y_4=-4t^2$，

又$\begin{cases}y_3^2=2px_3,\\y_4^2=2px_4,\end{cases}$两式相减，可得直线$PQ$的斜率为$\frac{y_3-y_4}{x_3-x_4}=\frac{2p}{y_3+y_4}$，

所以直线PQ的方程为$y-y_3=\frac{2p}{y_3+y_4}(x-x_3)$.

令$y=0$，可得$x=\frac{-y_3y_4}{2p}=\frac{2t^2}{p}$，

即$|OM|=\frac{2t^2}{p}$.

又$|OF|=\frac{p}{2}$，$|OT|=t$，

所以有$|OF||OM|=|OT|^2$，所以$|OF|$，$|OT|$，$|OM|$成等比数列.

13. **解**：(1)由题意得，$e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，①

$2a+2c=4+2\sqrt{2}$，②

由①②解得，$a=2$，$c=\sqrt{2}$，

∴$b=\sqrt{2}$，

∴椭圆C的方程为$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}=1$.

(2)由$\begin{cases}y=k(x-1),\\x^2+2y^2=4,\end{cases}$消去$y$，得$(1+2k^2)x^2-4k^2x+2k^2-4=0$，

$\Delta=16k^4-4(1+2k^2)(2k^2-4)=24k^2+16>0$，

设$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，

则$x_1+x_2=\frac{4k^2}{1+2k^2}$，$x_1x_2=\frac{2k^2-4}{1+2k^2}$，

①∵线段AB的中点的横坐标为$\frac{1}{2}$，

所以$\frac{x_1+x_2}{2}=\frac{2k^2}{1+2k^2}=\frac{1}{2}$，

即$k^2=\frac{1}{2}$，所以$k=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$.

②假设存在定点Q，使$\overrightarrow{QA}\cdot\overrightarrow{QB}$得为定值，设点$Q(m,0)$，

$\overrightarrow{QA}=(x_1-m,y_1)$，$\overrightarrow{QB}=(x_2-m,y_2)$，

所以$\overrightarrow{QA}\cdot\overrightarrow{QB}=(x_1-m,y_1)\cdot(x_2-m,y_2)$

$=(x_1-m)(x_2-m)+y_1y_2$

$=(x_1-m)(x_2-m)+k^2(x_1-1)(x_2-1)$

$=(1+k^2)x_1x_2+(-m-k^2)(x_1+x_2)+k^2+m^2$

$=(1+k^2)\frac{2k^2-4}{1+2k^2}+(-m-k^2)\frac{4k^2}{1+2k^2}+k^2+m^2$

$=\frac{2k^2+2k^4-4-4k^2-4k^2m-4k^4+k^2+2k^4+m^2+2m^2k^2}{1+2k^2}$

$=\frac{(-4+m^2)+(2m^2-4m-1)k^2}{1+2k^2}$为定值，

即$\frac{-4+m^2}{2m^2-4m-1}=\frac{1}{2}$，

故$2\times(-4+m^2)=2m^2-4m-1$，

解得$m=\frac{7}{4}$，所以当$m=\frac{7}{4}$时，$\overrightarrow{QA}\cdot\overrightarrow{QB}$为定值，定值为$-\frac{15}{16}$.

14. **解**：(1)由抛物线C：$y^2=2px$过点$P(1,1)$，得$p=\frac{1}{2}$.

所以抛物线C的方程为$y^2=x$.

抛物线C的焦点坐标为$\left(\frac{1}{4},0\right)$，准线方程为$x=-\frac{1}{4}$.

(2)证明：由题意，设直线l的方程为$y=kx+\frac{1}{2}(k\neq0)$，l与抛物线C的交点为$M(x_1,y_1)$，$N(x_2,y_2)$.

由$\begin{cases}y=kx+\frac{1}{2},\\y^2=x\end{cases}$，得$4k^2x^2+(4k-4)x+1=0$.

则$x_1+x_2=\frac{1-k}{k^2}$，$x_1x_2=\frac{1}{4k^2}$.

因为点P的坐标为$(1,1)$，所以直线OP的方程为$y=x$，点A的坐标为(x_1,x_1).

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

因为直线 ON 的方程为 $y=\frac{y_2}{x_2}x$，所以点 B 的坐标为 $\left(x_1,\frac{y_2x_1}{x_2}\right)$.

因为 $y_1+\frac{y_2x_1}{x_2}-2x_1=\frac{y_1x_2+y_2x_1-2x_1x_2}{x_2}$

$=\frac{\left(kx_1+\frac{1}{2}\right)x_2+\left(kx_2+\frac{1}{2}\right)x_1-2x_1x_2}{x_2}$

$=\frac{(2k-2)x_1x_2+\frac{1}{2}(x_2+x_1)}{x_2}$

$=\frac{(2k-2)\times\frac{1}{4k^2}+\frac{1-k}{2k^2}}{x_2}$

$=0$，

所以 $y_1+\frac{y_2x_1}{x_2}=2x_1$.

故 A 为线段 BM 的中点.

第三章　空间向量与立体几何

3.1　空间向量及其运算

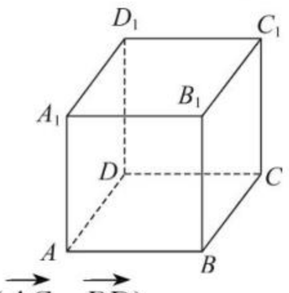
第 18 课时　3.1.1　空间向量及其加减运算

基础知识梳理

1. 大小　方向　大小　长度
2. ①长度为 0　$\mathbf{0}$　②模为 1　③相等　相反　$-\boldsymbol{a}$　④相同　相等　$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$　$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$　(1)$\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$　(2)$\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$

题点知识巩固

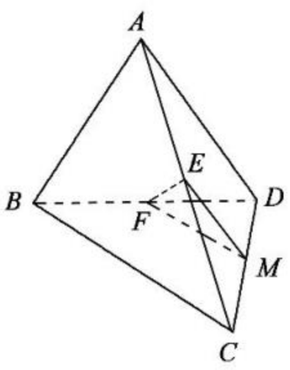
1. 选 B　选项 A 中，$|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|$，只说明 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 的长度相等，方向是不确定的；C 中空间向量的减法不满足结合律；D 中若四边形 $ABCD$ 是空间四边形，则 $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}$ 不成立.
2. **解析**：在空间，用有向线段表示的向量仍然是自由向量，而任意两个向量总是共面向量，故命题①错误；空间四边形的四条边确定的四条线段中每条线段都可以确定两个方向相反的向量，当它们不是首尾相接时，这四个向量的和就不是零向量，故命题②错误；命题③就是空间共面向量定理，所以是正确的；命题④也是错误的，向量的共面与点的共面是不同的两个概念，若其中两个向量是平行向量，第三个向量与其中一个向量有相同的起点，则这三个向量一定是共面向量，但这三个向量的起点与终点却可以不共面.
   答案：③
3. 选 A　如图，在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，$\overrightarrow{DD_1}-\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{DD_1}+\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{DD_1}+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{BD_1}$.



4. **解析**：$(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CD})-(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{BD})$
   $=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{CA}$
   $=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DA}=\mathbf{0}$.
   答案：$\mathbf{0}$
5. 选 C　$\because\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{CB}$，$\therefore$C 是假命题.
6. **证明**：$\because$平行六面体的六个面均为平行四边形，
   $\therefore\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$，$\overrightarrow{AB'}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AA'}$，
   $\overrightarrow{AD'}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA'}$.
   $\therefore\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AB'}+\overrightarrow{AD'}$
   $=(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD})+(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AA'})+(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA'})$
   $=2(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA'})$.
   又 $\overrightarrow{AA'}=\overrightarrow{CC'}$，$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}$，
   $\therefore\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA'}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CC'}$
   $=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CC'}=\overrightarrow{AC'}$.
   $\therefore\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AB'}+\overrightarrow{AD'}=2\overrightarrow{AC'}$.

提能达标过关

1. 选 D　$\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{CD}-\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{DA}=\overrightarrow{BA}$.
2. 选 C　$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{A_1D_1}+\overrightarrow{C_1A_1}=\overrightarrow{A_1B_1}+\overrightarrow{A_1D_1}+\overrightarrow{C_1A_1}=\overrightarrow{A_1C_1}-\overrightarrow{A_1C_1}=\mathbf{0}$.
3. 选 D　①$(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC})+\overrightarrow{CC_1}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CC_1}=\overrightarrow{AC_1}$.
   ②$(\overrightarrow{AA_1}+\overrightarrow{A_1D_1})+\overrightarrow{D_1C_1}=\overrightarrow{AD_1}+\overrightarrow{D_1C_1}=\overrightarrow{AC_1}$.
   ③$(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BB_1})+\overrightarrow{B_1C_1}=\overrightarrow{AB_1}+\overrightarrow{B_1C_1}=\overrightarrow{AC_1}$.
   ④$(\overrightarrow{AA_1}+\overrightarrow{A_1B_1})+\overrightarrow{B_1C_1}=\overrightarrow{AB_1}+\overrightarrow{B_1C_1}=\overrightarrow{AC_1}$.
4. 选 C　在选项 C 中，$\overrightarrow{MA}=-\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}$，故 M 与 A,B,C 四点共面.
5. 选 D　①中，$\boldsymbol{b}=\mathbf{0}$ 时，则 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{c}$ 不一定共线；②中，由共面向量的定义是平行于同一平面的向量，表示这些向量的有向线段所在的直线不一定共面；③中，当 $\boldsymbol{b}=\mathbf{0}$，$\boldsymbol{a}\neq\mathbf{0}$ 时，λ 不存在，故①②③均错.
6. **解析**：单位向量的长度都相等，起点移到同一点，则终点在以单位长度为半径的球面上.
   答案：球面
7. **解析**：$\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{BD}\neq\overrightarrow{AB}$，故①不正确；$\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AD}$，故②正确；③④不正确.
   答案：②
8. **解析**：模相等，方向相反的两个向量是相反向量，故①不正确，②③正确；模相等，方向相同的两个向量是相等向量，故④不正确.
   答案：②③
9. **证明**：如图，取 CD 中点 M.
   则 $\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{EM}+\overrightarrow{MF}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}+\frac{1}{2}\overrightarrow{CB}$，
   $\therefore\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CB}=2\overrightarrow{EF}$，①
   同理，可证 $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}=2\overrightarrow{EF}$，②
   由①+②得，$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CD}=4\overrightarrow{EF}$.



10. **解**：$\because G$ 为 $\triangle ABC$ 重心，
    $\therefore\overrightarrow{AG}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AD}$，$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OA}$.
    $\because D$ 为 BC 中点，
    $\therefore\overrightarrow{OD}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})$，
    $\therefore\overrightarrow{OG}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AG}=\overrightarrow{OA}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{OA}+\frac{2}{3}(\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OA})$
    $=\overrightarrow{OA}+\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})-\frac{2}{3}\overrightarrow{OA}$
    $=\frac{1}{3}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})=\frac{1}{3}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$.
    又 $\because\overrightarrow{OH}=\frac{2}{3}\overrightarrow{OD}=\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})=\frac{1}{3}(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$，
    $\therefore\overrightarrow{GH}=\overrightarrow{OH}-\overrightarrow{OG}=\frac{1}{3}(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})-\frac{1}{3}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=-\frac{1}{3}\boldsymbol{a}$.
    $\therefore\overrightarrow{OG}=\frac{1}{3}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$；$\overrightarrow{GH}=-\frac{1}{3}\boldsymbol{a}$.

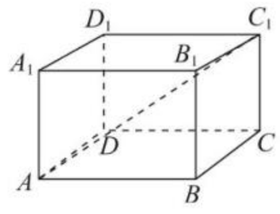
第 19 课时　3.1.2　空间向量的数乘运算

基础知识梳理

1. $\lambda\boldsymbol{a}$　向量　相同　相反　$|\lambda|$　$\lambda\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}$　$(\lambda\mu)\boldsymbol{a}$
2. 互相平行或重合　共线向量　同一平面　$\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{b}$　$\boldsymbol{p}=x\boldsymbol{a}+y\boldsymbol{b}$

题点知识巩固

1. 选 B　若 M 与 A,B,C 共面，则 $\overrightarrow{OM}=x\overrightarrow{OA}+y\overrightarrow{OB}+z\overrightarrow{OC}$，其中 $x+y+z=1$. 由已知，$\overrightarrow{OM}=-2\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\lambda\overrightarrow{OC}$，所以 $-2+1+\lambda=1$，即 $\lambda=2$.
2. 选 C　如图所示，$\because\overrightarrow{AC_1}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CC_1}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CC_1}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AA_1}$，又 $\overrightarrow{AC_1}=x\overrightarrow{AB}-2y\overrightarrow{BC}+3z\overrightarrow{AA_1}$，



$$\therefore\begin{cases}x=1,\\-2y=1,\\3z=1,\end{cases}\therefore\begin{cases}x=1,\\y=-\frac{1}{2},\\z=\frac{1}{3}.\end{cases}$$

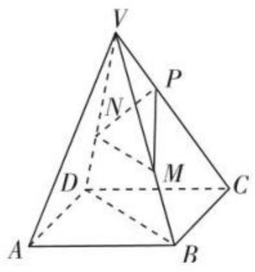
$\therefore x+y+z=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{5}{6}$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

3. 选 A ∵$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{BC}=-5\boldsymbol{a}+6\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{CD}=7\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}$，
∴$\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}=2\boldsymbol{a}+4\boldsymbol{b}=2\overrightarrow{AB}$，
即$\overrightarrow{BD}$，$\overrightarrow{AB}$是共线向量，∴A、B、D 三点共线.

4. 选 A $\overrightarrow{ON}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})$，$\overrightarrow{OM}=\frac{2}{3}\overrightarrow{OA}$，
假设 G，M，N 三点共线，
则存在实数 λ，使得$\overrightarrow{OG}=\lambda\overrightarrow{ON}+(1-\lambda)\overrightarrow{OM}=\frac{\lambda}{2}(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})+\frac{2(1-\lambda)}{3}\overrightarrow{OA}=\frac{2(1-\lambda)}{3}\overrightarrow{OA}+\frac{\lambda}{2}\overrightarrow{OB}+\frac{\lambda}{2}\overrightarrow{OC}$，
与原式比较后，可得$\begin{cases}\frac{2(1-\lambda)}{3}=\frac{1}{3},\\ \frac{\lambda}{2}=\frac{x}{4},\end{cases}$
解得 $x=1$，$\lambda=\frac{1}{2}$，故选 A.

5. **解析**：如图，设$\overrightarrow{VA}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{VB}=\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{VC}=\boldsymbol{c}$，则$\overrightarrow{VD}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c}-\boldsymbol{b}$.



由题意，知$\overrightarrow{PM}=\frac{2}{3}\boldsymbol{b}-\frac{1}{3}\boldsymbol{c}$，$\overrightarrow{PN}=\frac{2}{3}\overrightarrow{VD}-\frac{1}{3}\overrightarrow{VC}=\frac{2}{3}\boldsymbol{a}-\frac{2}{3}\boldsymbol{b}+\frac{1}{3}\boldsymbol{c}$.
∴$\overrightarrow{VA}=\frac{3}{2}\overrightarrow{PM}+\frac{3}{2}\overrightarrow{PN}$，
∴$\overrightarrow{VA}$，$\overrightarrow{PM}$，$\overrightarrow{PN}$共面.
∴$\overrightarrow{VA}$∥平面 PMN，又 VA⊄平面 PMN，∴VA∥平面 PMN.
答案：平行

6. **证明**：证法一：令 $x(\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2)+y(2\boldsymbol{e}_1+8\boldsymbol{e}_2)+z(3\boldsymbol{e}_1-3\boldsymbol{e}_2)=\boldsymbol{0}$，
则$(x+2y+3z)\boldsymbol{e}_1+(x+8y-3z)\boldsymbol{e}_2=\boldsymbol{0}$.
∵$\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$ 不共线，
∴$\begin{cases}x+2y+3z=0,\\ x+8y-3z=0.\end{cases}$易知$\begin{cases}x=-5,\\ y=1,\\ z=1\end{cases}$是其中一组解.
则$-5\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{0}$，∴A，B，C，D 共面.
证法二：∵$\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}=(2\boldsymbol{e}_1+8\boldsymbol{e}_2)+(3\boldsymbol{e}_1-3\boldsymbol{e}_2)=5(\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2)=5\overrightarrow{AB}$，
∴$\overrightarrow{AB}=\frac{1}{5}\overrightarrow{AC}+\frac{1}{5}\overrightarrow{AD}$. 由共面向量定理知，$\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AC}$，$\overrightarrow{AD}$共面.
又它们有公共点 A，∴A，B，C，D 四点共面.

提能达标过关

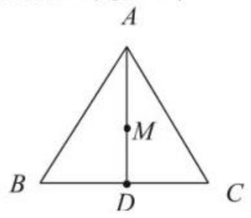
1. 选 A ∵$\boldsymbol{a}=4\boldsymbol{e}_1-\frac{2}{5}\boldsymbol{e}_2$，$\boldsymbol{b}=\boldsymbol{e}_1-\frac{1}{10}\boldsymbol{e}_2$，∴$\boldsymbol{a}=4\boldsymbol{b}$，∴$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 共线.

2. 选 D ∵$\boldsymbol{a}_0$，$\boldsymbol{b}_0$ 是单位向量，∴$|\boldsymbol{a}_0|=|\boldsymbol{b}_0|=1$.

3. 选 B $\overrightarrow{OA}=-2x\overrightarrow{OB}-3y\overrightarrow{OC}-4z\overrightarrow{OD}$，由 A，B，C，D 四点共面，
则有$-2x-3y-4z=1$，即 $2x+3y+4z=-1$.

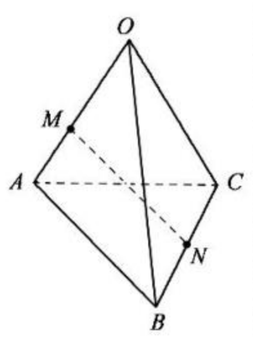
4. 选 C 显然①正确；若 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 共线，则$|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|$或$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=||\boldsymbol{a}|-|\boldsymbol{b}||$，故②错误；
若$\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{CD}$共线，则直线 AB，CD 可能重合，故③错误；
只有当 $x+y+z=1$ 时，P，A，B，C 四点才共面，故④错误.

5. 选 D 如图，∵M 是△ABC 的重心，



∴$\overrightarrow{AD}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CA})=\frac{1}{2}(\boldsymbol{c}-\boldsymbol{b})$，
∴$\overrightarrow{AM}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AD}=\frac{1}{3}(\boldsymbol{c}-\boldsymbol{b})$.

6. **解析**：如图，



∵$\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{ON}-\overrightarrow{OM}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})-\frac{2}{3}\overrightarrow{OA}=-\frac{2}{3}\boldsymbol{a}+\frac{1}{2}\boldsymbol{b}+\frac{1}{2}\boldsymbol{c}$.
∴$\overrightarrow{MN}=\frac{1}{6}(-4\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b}+3\boldsymbol{c})=-\frac{1}{2}\left(\frac{4}{3}\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}\right)$，
∴②④与$\overrightarrow{MN}$平行.
答案：②④

7. **解析**：∵A，B，C 三点共线，
∴存在一个实数 k，使$\overrightarrow{AB}=k\overrightarrow{AC}$，
即$\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=k(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA})$，
∴$(k-1)\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}-k\overrightarrow{OC}=\boldsymbol{0}$.
令 $\lambda=k-1$，$m=1$，$n=-k$，
则 $\lambda+m+n=0$.
答案：0

8. **解析**：∵$\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AA_1}+\overrightarrow{A_1E}=\overrightarrow{AA_1}+\frac{1}{4}\overrightarrow{A_1C_1}=\overrightarrow{AA_1}+\frac{1}{4}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD})$，又$\overrightarrow{AE}=x\overrightarrow{AA_1}+y(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD})$，
∴$x=1$，$y=\frac{1}{4}$.
答案：1 $\frac{1}{4}$

9. **解**：由题图，可得$\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DN}$，①
$\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CN}$，②
$\overrightarrow{MA}=-\overrightarrow{MB}$，$\overrightarrow{DN}=-\overrightarrow{CN}$，
∴①+②，得 $2\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC}$，
即$\overrightarrow{MN}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$，
∴向量$\overrightarrow{MN}$与向量$\overrightarrow{AD}$，$\overrightarrow{BC}$ 共面.

10. **证明**：∵$\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AN}$
$=\frac{1}{3}\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{BA}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AE}$
$=\frac{1}{3}(\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{CB})+\overrightarrow{BA}+\frac{1}{3}(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DE})$
$=\frac{1}{3}\overrightarrow{DC}+\frac{1}{3}\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{CD}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AD}+\frac{1}{3}\overrightarrow{DE}$
$=\frac{2}{3}\overrightarrow{CD}+\frac{1}{3}\overrightarrow{DE}$，
又∵$\overrightarrow{CD}$与$\overrightarrow{DE}$不共线，∴$\overrightarrow{MN}$，$\overrightarrow{CD}$，$\overrightarrow{DE}$共面，
∵MN⊄平面 CDE，∴MN∥平面 CDE.

第 20 课时 3.1.3 空间向量的数量积运算

基础知识梳理

1. ∠AOB 〈$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$〉 [0，π] $\frac{\pi}{2}$

2. $|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle$

3. $\lambda(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})$ $\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}$ $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}$

4. $\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}$

题点知识巩固

1. 选 B 只有①④正确.

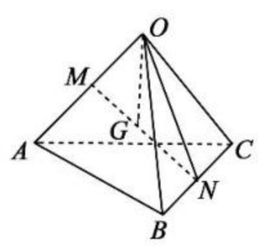
2. **解析**：由题图知，A_1B 与 B_1C 所成的角为 60°，
∴$\overrightarrow{A_1B}\cdot\overrightarrow{B_1C}=|\overrightarrow{A_1B}||\overrightarrow{B_1C}|\cos 60°=\sqrt{2}a\cdot\sqrt{2}a\times\frac{1}{2}=a^2$.
答案：a^2

3. 选 B 由题图知$\langle\overrightarrow{AB},\overrightarrow{A_1C_1}\rangle=45°$，$\langle\overrightarrow{AB},\overrightarrow{C_1A_1}\rangle=135°$，$\langle\overrightarrow{AB},\overrightarrow{A_1D_1}\rangle=90°$，$\langle\overrightarrow{AB},\overrightarrow{B_1A_1}\rangle=180°$.

4. 选 B $\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}=\frac{-60}{10\times12}=-\frac{1}{2}$，∴$\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为 120°.

5. **解**：∵$\overrightarrow{PC}=\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC}$，AD=4，CD=3，PA=6，∠D=60°，
∴$|\overrightarrow{PC}|^2=\overrightarrow{PC}\cdot\overrightarrow{PC}=(\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC})^2=|\overrightarrow{PA}|^2+|\overrightarrow{AD}|^2+|\overrightarrow{DC}|^2+2(\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{DC})=6^2+4^2+3^2+2\times4\times3\cos 120°=49$，
∴$|\overrightarrow{PC}|=7$.
即 PC 的长为 7.

6. **证明**：如图，连接 ON，



设∠AOB=∠BOC=∠AOC=θ，
又设$\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{OC}=\boldsymbol{c}$，
则$|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{c}|$.
∵$\overrightarrow{OG}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{ON})$
$=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}\overrightarrow{OA}+\frac{1}{2}(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})\right]$

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

$=\frac{1}{4}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$，又$\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{c}-\boldsymbol{b}$，

$\therefore\overrightarrow{OG}\cdot\overrightarrow{BC}=\frac{1}{4}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})\cdot(\boldsymbol{c}-\boldsymbol{b})$

$=\frac{1}{4}(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{c}^2-\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}-\boldsymbol{b}^2-\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})$

$=\frac{1}{4}(|\boldsymbol{a}|^2\cos\theta+|\boldsymbol{a}|^2-|\boldsymbol{a}|^2\cos\theta-|\boldsymbol{a}|^2)=0.$

$\therefore\overrightarrow{OG}\perp\overrightarrow{BC}$，即$OG\perp BC$.

提能达标过关

1. 选 A　若$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|$，则$\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=1$，$\therefore\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$共线，反之，若$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$共线也可能$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=-|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|$.

2. 选 D　由向量的数量积及其运算律可知，四个命题都正确.

3. 选 C　根据已知$\angle ACD=\angle BDC=90^\circ$，

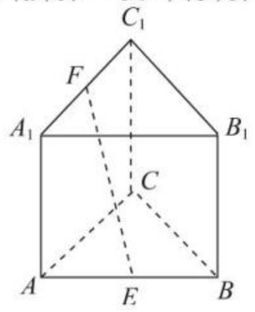
得$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{DB}\cdot\overrightarrow{CD}=0$，

$\therefore\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}=(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DB})\cdot\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{CD}+|\overrightarrow{CD}|^2+\overrightarrow{DB}\cdot\overrightarrow{CD}=|\overrightarrow{CD}|^2=1$，

$\therefore\cos\langle\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD}\rangle=\frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}}{|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{CD}|}=\frac{1}{2}$，

$\therefore AB$与CD所成的角为60°.

4. 选 D　如图所示，设$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{AA_1}=\boldsymbol{c}$，则$|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{c}|=2$，且$\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=60^\circ$，$\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{c}\rangle=90^\circ$，$\langle\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}\rangle=90^\circ$.



$\because\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{AA_1}+\overrightarrow{A_1F}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+AA_1+\frac{1}{2}\overrightarrow{A_1C_1}=-\frac{1}{2}\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c}+\frac{1}{2}\boldsymbol{b}$，

$\therefore|\overrightarrow{EF}|^2=\frac{1}{4}\boldsymbol{a}^2+\boldsymbol{c}^2+\frac{1}{4}\boldsymbol{b}^2+2\left(-\frac{1}{2}\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}+\frac{1}{2}\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}-\frac{1}{4}\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}\right)$

$=\frac{1}{4}\times4+4+\frac{1}{4}\times4+2\left(0+0-\frac{1}{4}\times2\times2\times\frac{1}{2}\right)$

$=1+4+1-1=5$，$\therefore|\overrightarrow{EF}|=\sqrt{5}$，故$EF$的长为$\sqrt{5}$.

5. 选 B　$\overrightarrow{EF}\cdot\overrightarrow{BC_1}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB_1}\cdot(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BB_1})$

$=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BB_1})\cdot(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BB_1})$

$=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BB_1}\cdot\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BB_1}+\overrightarrow{BB_1}\cdot\overrightarrow{BB_1})$

$=\frac{1}{2}(0+0+0+\overrightarrow{BB_1}^2)$

$=\frac{1}{2}|\overrightarrow{BB_1}|^2$.

设$|\overrightarrow{BB_1}|=1$，则$\overrightarrow{EF}\cdot\overrightarrow{BC_1}=\frac{1}{2}$，$|\overrightarrow{EF}|=\frac{\sqrt{2}}{2}$，$|\overrightarrow{BC_1}|=\sqrt{2}$，

$\therefore\cos\langle\overrightarrow{EF},\overrightarrow{BC_1}\rangle=\frac{\overrightarrow{EF}\cdot\overrightarrow{BC_1}}{|\overrightarrow{EF}||\overrightarrow{BC_1}|}=\frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}\times\sqrt{2}}=\frac{1}{2}$.

$\therefore$异面直线EF与BC_1所成的角是60°.

6. **解析**：$\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{CA}\cdot(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AD})$

$=\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{AD}=0+0=0$，$\therefore\overrightarrow{CA}\perp\overrightarrow{DB}$.

答案：垂直

7. **解析**：$\because\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}$，

$\therefore\overrightarrow{CD}^2=(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD})^2=\overrightarrow{AB}^2+\overrightarrow{AC}^2-2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}^2+2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BD}-2\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}=16+36+64=116$，

$\therefore|\overrightarrow{CD}|=2\sqrt{29}$.

答案：$2\sqrt{29}$

8. **解析**：$\overrightarrow{OG}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AG}=\overrightarrow{OA}+\frac{1}{3}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})$

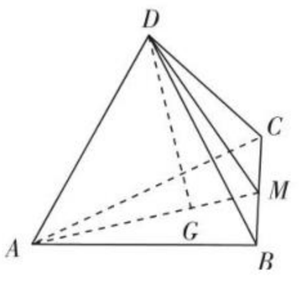
$=\overrightarrow{OA}+\frac{1}{3}[(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA})+(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA})]$

$=\frac{1}{3}\overrightarrow{OB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{OC}+\frac{1}{3}\overrightarrow{OA}$.

$\therefore\overrightarrow{OG}\cdot(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})=\left(\frac{1}{3}\overrightarrow{OB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{OC}+\frac{1}{3}\overrightarrow{OA}\right)\cdot(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})=\frac{1}{3}\overrightarrow{OB}^2+\frac{1}{3}\overrightarrow{OC}^2+\frac{1}{3}\overrightarrow{OA}^2=\frac{14}{3}$.

答案：$\frac{14}{3}$

9. **解**：如图，连接AG并延长交BC于点M，连接DM，



$\because G$是$\triangle ABC$的重心，

$\therefore\overrightarrow{AG}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AM}$，又$\overrightarrow{DG}=\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AG}=\overrightarrow{DA}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{DA}+\frac{2}{3}(\overrightarrow{DM}-\overrightarrow{DA})=\overrightarrow{DA}+\frac{2}{3}\left[\frac{1}{2}(\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{DC})-\overrightarrow{DA}\right]=\frac{1}{3}(\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{DC})$，而$(\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{DC})^2=\overrightarrow{DA}^2+\overrightarrow{DB}^2+\overrightarrow{DC}^2+2\overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{DB}+2\overrightarrow{DB}\cdot\overrightarrow{DC}+2\overrightarrow{DC}\cdot\overrightarrow{DA}=1+1+1+2(\cos60^\circ+\cos60^\circ+\cos60^\circ)=6$，

$\therefore|\overrightarrow{DG}|=\frac{\sqrt{6}}{3}$.

10. **证明**：(1)设$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{AP}=\boldsymbol{c}$，

则$\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CN}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}-\frac{1}{2}\overrightarrow{PC}$

$=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}-\frac{1}{2}(\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC})$

$=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AP})=\frac{1}{2}(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$，$\overrightarrow{CD}=-\overrightarrow{AB}=-\boldsymbol{a}$，

$\therefore\overrightarrow{MN}\cdot\overrightarrow{CD}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})\cdot(-\boldsymbol{a})=-\frac{1}{2}(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})$.

$\because$四边形$ABCD$是矩形，$PA\perp$平面$ABCD$，

$\therefore\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{c}$，$\therefore\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}=0$.

$\therefore\overrightarrow{MN}\cdot\overrightarrow{CD}=0$，$\therefore\overrightarrow{MN}\perp\overrightarrow{CD}$，即$MN\perp CD$.

(2)由(1)知，$MN\perp CD$，$\overrightarrow{MN}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$，

$\because\overrightarrow{PD}=\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AP}=\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}$，

$\therefore\overrightarrow{MN}\cdot\overrightarrow{PD}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})\cdot(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c})=\frac{1}{2}(|\boldsymbol{b}|^2-|\boldsymbol{c}|^2)$.

$\because PA\perp$平面$ABCD$，

$\therefore PA\perp AD$.

又$\angle PDA=45^\circ$，

$\therefore PA=AD$，即$|\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{c}|$.

$\therefore\overrightarrow{MN}\cdot\overrightarrow{PD}=0$，$\therefore\overrightarrow{MN}\perp\overrightarrow{PD}$，即$MN\perp PD$.

又$CD\cap PD=D$，且$CD,PD\subset$平面PCD，

$\therefore MN\perp$平面PCD.

第 21 课时　3.1.4　空间向量的正交分解及其坐标表示

基础知识梳理

1. 不共面　$x\boldsymbol{a}+y\boldsymbol{b}+z\boldsymbol{c}$　基底　基向量

2. (1)两两垂直　(2)公共起点O　$\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3$　(3)平移　起点　$x\boldsymbol{e}_1+y\boldsymbol{e}_2+z\boldsymbol{e}_3$　x,y,z　(x,y,z)

题点知识巩固

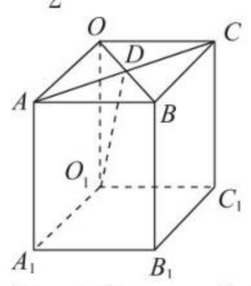
1. 选 D　A 中，设$2\boldsymbol{a}=x(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})+y(\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b})=(x+y)\boldsymbol{a}+(2y-x)\boldsymbol{b}$，对照可得，$\begin{cases}x=\frac{4}{3},\\y=\frac{2}{3}.\end{cases}$即$\frac{4}{3}(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})+\frac{2}{3}(\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b})=2\boldsymbol{a}$，故三个向量共面；同理，B 中，$\frac{3}{4}\times2\boldsymbol{b}-\frac{1}{2}\times(\boldsymbol{b}+2\boldsymbol{a})=\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}$，C 中，$\frac{1}{2}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c})-\frac{1}{2}(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{c})=\boldsymbol{c}$，

$\therefore$选项 A、B、C 中的三个向量都共面，因此不能够构成空间的一组基底，故选 D.

2. 选 D　$\because\{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}\}$构成空间的一个基底，$\therefore\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$都是空间的非零向量. $\because x\boldsymbol{a}+y\boldsymbol{b}+z\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}$，$\therefore x=y=z=0$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

3. 选 D　如图，$\overrightarrow{O_1D}=\overrightarrow{O_1O}+\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{O_1O}+\frac{1}{2}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC})=\frac{1}{2}\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OO_1}+\frac{1}{2}\overrightarrow{OC}=\frac{1}{2}\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}+\frac{1}{2}\boldsymbol{c}$.



4. 选 A　$\overrightarrow{MP}=\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{CP}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}+\frac{1}{3}\overrightarrow{CN}=-\frac{1}{2}\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c}+\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB})$

$=-\frac{1}{2}\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c}+\frac{1}{6}(\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OC})$

$=-\frac{1}{2}\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c}+\frac{1}{6}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}-2\boldsymbol{c})=-\frac{1}{3}\boldsymbol{a}+\frac{1}{6}\boldsymbol{b}+\frac{2}{3}\boldsymbol{c}$.

5. $(2,3,-4)$　$(-1,2,-3)$

6. **解**：设$\{\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3\}$是单位正交基底，

$\because\overrightarrow{DO}=-\overrightarrow{OD}=-(\overrightarrow{OO_1}+\overrightarrow{O_1D})$

$=-\left[\overrightarrow{OO_1}+\frac{1}{2}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})\right]$

$=-\overrightarrow{OO_1}-\frac{1}{2}\overrightarrow{OA}-\frac{1}{2}\overrightarrow{OB}$.

又$\because|\overrightarrow{OO_1}|=4,|\overrightarrow{OA}|=4,|\overrightarrow{OB}|=2$，

$\therefore\overrightarrow{DO}=-2\boldsymbol{e}_1-\boldsymbol{e}_2-4\boldsymbol{e}_3$，

$\therefore\overrightarrow{DO}=(-2,-1,-4)$.

$\because\overrightarrow{A_1B}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA_1}=\overrightarrow{OB}-(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AA_1})=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{AA_1}$.

又$\because|\overrightarrow{OB}|=2,|\overrightarrow{OA}|=4,|\overrightarrow{AA_1}|=4$，

$\therefore\overrightarrow{A_1B}=-4\boldsymbol{e}_1+2\boldsymbol{e}_2-4\boldsymbol{e}_3$，

$\therefore\overrightarrow{A_1B}=(-4,2,-4)$.

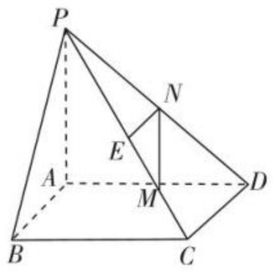
提能达标过关

1. B

2. 选 D　$\overrightarrow{OA}=8\boldsymbol{a}+6\boldsymbol{b}+4\boldsymbol{c}=8(\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j})+6(\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k})+4(\boldsymbol{k}+\boldsymbol{i})=12\boldsymbol{i}+14\boldsymbol{j}+10\boldsymbol{k}$，$\therefore$点 A 在基底$\{\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}\}$下的坐标为$(12,14,10)$.

3. 选 A　由题意，得 $x\boldsymbol{a}+y\boldsymbol{b}+z\boldsymbol{c}=x(\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2+\boldsymbol{e}_3)+y(\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2-\boldsymbol{e}_3)+z(\boldsymbol{e}_1-\boldsymbol{e}_2+\boldsymbol{e}_3)=(x+y+z)\boldsymbol{e}_1+(x+y-z)\boldsymbol{e}_2+(x-y+z)\boldsymbol{e}_3=\boldsymbol{e}_1+2\boldsymbol{e}_2+3\boldsymbol{e}_3$，由空间向量基本定理，得$\begin{cases}x+y+z=1,\\x+y-z=2,\\x-y+z=3,\end{cases}$解得$\begin{cases}x=\frac{5}{2},\\y=-1,\\z=-\frac{1}{2}.\end{cases}$

4. 选 D　如图所示，取 PC 的中点 E，连接 NE，

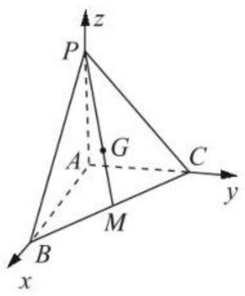


则$\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{EN}-\overrightarrow{EM}=\frac{1}{2}\overrightarrow{CD}-(\overrightarrow{PM}-\overrightarrow{PE})=\frac{1}{2}\overrightarrow{CD}-\left(\frac{2}{3}\overrightarrow{PC}-\frac{1}{2}\overrightarrow{PC}\right)=\frac{1}{2}\overrightarrow{CD}-\frac{1}{6}\overrightarrow{PC}$

$=-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}-\frac{1}{6}(-\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD})=-\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}-\frac{1}{6}\overrightarrow{AD}+\frac{1}{6}\overrightarrow{AP}$，

比较知，$x=-\frac{2}{3},y=-\frac{1}{6},z=\frac{1}{6}$.

5. 选 D　由题意，可知 $B(1,0,0),C(0,1,0),P(0,0,1)$.



取 BC 的中点为 M，则 $M\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},0\right)$.

$\because G$ 为$\triangle PBC$ 的重心，设 G 的坐标为(x,y,z)，

由 $\overrightarrow{PG}=\frac{2}{3}\overrightarrow{PM}$，得 $(x,y,z-1)=\frac{2}{3}\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},-1\right)$，从而得 $G\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)$，

$\therefore\overrightarrow{BG}=\left(-\frac{2}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)$.

6. **解析**：$\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CE}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{AA_1}+\overrightarrow{AC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{CB_1}$

$=-\frac{1}{2}\overrightarrow{AA_1}+\overrightarrow{AC}+\frac{1}{2}(\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BB_1})$

$=\overrightarrow{AC}+\frac{1}{2}(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AB})$

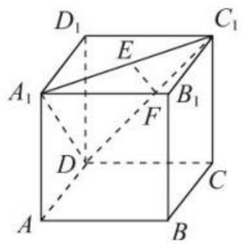
$=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}=\frac{1}{2}\boldsymbol{a}+\frac{1}{2}\boldsymbol{b}$.

答案：$\frac{1}{2}\boldsymbol{a}+\frac{1}{2}\boldsymbol{b}$

7. **解析**：$\because\boldsymbol{m}$ 与 $\boldsymbol{n}$ 共线，$\therefore$存在实数 λ，使 $\boldsymbol{m}=\lambda\boldsymbol{n}$，即 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=\lambda x\boldsymbol{a}+\lambda y\boldsymbol{b}+\lambda\boldsymbol{c}$，于是$\begin{cases}\lambda x=1,\\\lambda y=-1,\\\lambda=1.\end{cases}$解得$\begin{cases}x=1,\\y=-1,\\\lambda=1.\end{cases}$

答案：1　-1

8. **解析**：如图，连接 A_1C_1，C_1D，则 E 为 A_1C_1 的中点，F 为 C_1D 的中点. $\therefore$在 $\triangle A_1DC_1$ 中，$EF/\!/A_1D$，且 $EF=\frac{1}{2}A_1D$.



$\therefore\overrightarrow{EF}-\frac{1}{2}\overrightarrow{A_1D}=\boldsymbol{0}$，

$\therefore\lambda=-\frac{1}{2}$.

答案：$-\frac{1}{2}$

9. **解**：(1)$\because\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CM},\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AD},\overrightarrow{CM}=\frac{1}{2}\overrightarrow{CP},\overrightarrow{CP}=\overrightarrow{AP}-\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$，

$\therefore\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{AD}+\frac{1}{2}(\overrightarrow{AP}-\overrightarrow{AC})=\overrightarrow{AD}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AP}-\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD})=-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AP}=-\frac{1}{2}\boldsymbol{a}+\frac{1}{2}\boldsymbol{b}+\frac{1}{2}\boldsymbol{c}$.

(2)$\because A(0,0,0),O\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},0\right),P\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},1\right),B(1,0,0),D(0,1,0)$，

$\therefore\boldsymbol{a}=\overrightarrow{AB}=(1,0,0),\boldsymbol{b}=\overrightarrow{AD}=(0,1,0)$.

$\therefore\boldsymbol{c}=\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OA}=\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},1\right)$，

$\therefore\overrightarrow{BM}=-\frac{1}{2}\boldsymbol{a}+\frac{1}{2}\boldsymbol{b}+\frac{1}{2}\boldsymbol{c}=-\frac{1}{2}(1,0,0)+\frac{1}{2}(0,1,0)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},1\right)=\left(-\frac{1}{4},\frac{3}{4},\frac{1}{2}\right)$.

10. **解**：(1)$\because$正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 1，设$\overrightarrow{DA}=\boldsymbol{e}_1$，$\overrightarrow{DC}=\boldsymbol{e}_2,\overrightarrow{DD_1}=\boldsymbol{e}_3$，则$\{\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3\}$为单位正交基底.

$\because\overrightarrow{ED}$与$\overrightarrow{DA_1}$共线，$\overrightarrow{CF}$与$\overrightarrow{CA}$共线，

$\therefore$设$\overrightarrow{ED}=\lambda\overrightarrow{DA_1},\overrightarrow{CF}=\mu\overrightarrow{CA}$，则

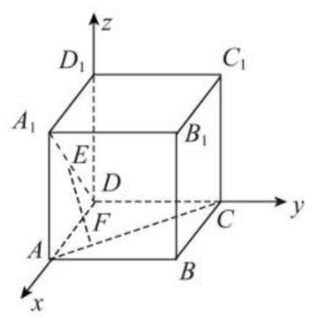
$\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{ED}+\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{CF}$

$=\lambda\overrightarrow{DA_1}+\overrightarrow{DC}+\mu\overrightarrow{CA}$

$=\lambda(\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AA_1})+\overrightarrow{DC}+\mu(\overrightarrow{DA}-\overrightarrow{DC})$

$=(\lambda+\mu)\overrightarrow{DA}+(1-\mu)\overrightarrow{DC}+\lambda\overrightarrow{DD_1}$

$=(\lambda+\mu)\boldsymbol{e}_1+(1-\mu)\boldsymbol{e}_2+\lambda\boldsymbol{e}_3$.



$\because EF\perp A_1D,EF\perp AC$，即$\overrightarrow{EF}\perp\overrightarrow{A_1D}$，$\overrightarrow{EF}\perp\overrightarrow{AC}$，

$\therefore\overrightarrow{EF}\cdot\overrightarrow{A_1D}=0,\overrightarrow{EF}\cdot\overrightarrow{AC}=0$.

又$\because\overrightarrow{A_1D}=\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AA_1}=-\boldsymbol{e}_1-\boldsymbol{e}_3,\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{DC}-\overrightarrow{DA}=\boldsymbol{e}_2-\boldsymbol{e}_1$.

$\therefore[(\lambda+\mu)\boldsymbol{e}_1+(1-\mu)\boldsymbol{e}_2+\lambda\boldsymbol{e}_3]\cdot(-\boldsymbol{e}_1-\boldsymbol{e}_3)=0$.

$[(\lambda+\mu)\boldsymbol{e}_1+(1-\mu)\boldsymbol{e}_2+\lambda\boldsymbol{e}_3]\cdot(\boldsymbol{e}_2-\boldsymbol{e}_1)=0$.

整理得$\begin{cases}-(\lambda+\mu)-\lambda=0,\\1-\mu-(\lambda+\mu)=0,\end{cases}$即$\begin{cases}2\lambda+\mu=0,\\\lambda+2\mu=1.\end{cases}$

解得 $\lambda=-\frac{1}{3},\mu=\frac{2}{3}$. $\therefore\overrightarrow{EF}=\frac{1}{3}\boldsymbol{e}_1+\frac{1}{3}\boldsymbol{e}_2-\frac{1}{3}\boldsymbol{e}_3$.

即$\overrightarrow{EF}=\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3},-\frac{1}{3}\right)$.

(2)证明：$\because\overrightarrow{BD_1}=\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{DD_1}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DD_1}=-\boldsymbol{e}_1-\boldsymbol{e}_2+\boldsymbol{e}_3$，

$\therefore\overrightarrow{EF}=-\frac{1}{3}\overrightarrow{BD_1}$，即$\overrightarrow{EF}$与$\overrightarrow{BD_1}$共线.

又 EF 与 BD_1 无公共点，$\therefore EF/\!/BD_1$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

第 22 课时　3.1.5　空间向量运算的坐标表示

基础知识梳理

1. (1)$(a_1+b_1,a_2+b_2,a_3+b_3)$　(2)$(a_1-b_1,a_2-b_2,a_3-b_3)$　(3)$(\lambda a_1,\lambda a_2,\lambda a_3)$　(4)$a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3$　(5)$a_1=\lambda b_1,a_2=\lambda b_2,a_3=\lambda b_3$　(6)$a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3=0$　(7)$\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}$　(8)$\dfrac{a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}\cdot\sqrt{b_1^2+b_2^2+b_3^2}}$

2. (1)$(a_2-a_1,b_2-b_1,c_2-c_1)$

(2)$\sqrt{(a_2-a_1)^2+(b_2-b_1)^2+(c_2-c_1)^2}$

题点知识巩固

1. 选 A　$\because \boldsymbol{a}=(1,1,0),\boldsymbol{b}=(0,1,1),\boldsymbol{c}=(1,0,1)$,

$\therefore \boldsymbol{p}=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=(1,0,-1),\boldsymbol{q}=(0,3,1)$,

$\therefore \boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{q}=1\times0+0\times3+(-1)\times1=-1$.

2. 解:(1)$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(2,-1,3)+(0,-1,2)=(2,-2,5)$.

(2)$2\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b}=2(2,-1,3)-3(0,-1,2)=(4,-2,6)-(0,-3,6)=(4,1,0)$.

(3)$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=(2,-1,3)\cdot(0,-1,2)=2\times0+(-1)\times(-1)+3\times2=0+1+6=7$.

(4)解法一:$\because \boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(2,-2,5),\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=(2,0,1)$,

$\therefore(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})=(2,-2,5)\cdot(2,0,1)=4-0+5=9$.

解法二:$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})=\boldsymbol{a}^2-\boldsymbol{b}^2=2^2+(-1)^2+3^2-[0^2+(-1)^2+2^2]=14-5=9$.

3. 选 B　因为 $\boldsymbol{a}\parallel\boldsymbol{b}$,所以$\dfrac{8}{x}=\dfrac{\frac{1}{2}x}{1}=\dfrac{x}{2}$,所以$\dfrac{1}{2}x^2=8$.

因为$x>0$,所以 $x=4$.

4. 选 D　$\because \boldsymbol{a}=(1,1,0),\boldsymbol{b}=(-1,0,2)$,$\therefore k\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(k-1,k,2)$,

$2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=(3,2,-2)$.$\because (k\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\perp(2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})$,

$\therefore(k-1)\times3+2k-4=0$.$\therefore k=\dfrac{7}{5}$.

5. 解析:$\because \boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(\cos\alpha+\sin\alpha,2,\sin\alpha+\cos\alpha)$,

$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=(\cos\alpha-\sin\alpha,0,\sin\alpha-\cos\alpha)$,

$\therefore(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})=0$,

$\therefore(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\perp(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})$.

所以夹角为 90°.

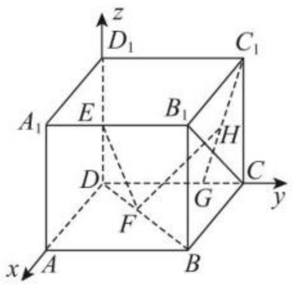
答案:90°

6. 解:如图所示,以$\overrightarrow{DA},\overrightarrow{DC},\overrightarrow{DD_1}$为 x 轴,y 轴,z 轴建立空间直角坐标系$D-xyz$,则

$D(0,0,0),E\left(0,0,\dfrac{1}{2}\right),F\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2},0\right)$,

$C(0,1,0),C_1(0,1,1),B_1(1,1,1)$,

$G\left(0,\dfrac{3}{4},0\right)$.



(1)$\because \overrightarrow{EF}=\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2},-\dfrac{1}{2}\right),\overrightarrow{B_1C}=(-1,0,-1)$,

$\therefore \overrightarrow{EF}\cdot\overrightarrow{B_1C}=\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2},-\dfrac{1}{2}\right)\cdot(-1,0,-1)=\dfrac{1}{2}\times(-1)+\dfrac{1}{2}\times0+\left(-\dfrac{1}{2}\right)\times(-1)=0$.

$\therefore EF\perp B_1C$,即 $EF\perp B_1C$.

$\therefore EF$ 与 B_1C 所成的角为 90°.

(2)$\because \overrightarrow{C_1G}=\left(0,-\dfrac{1}{4},-1\right)$,则$|\overrightarrow{C_1G}|=\dfrac{\sqrt{17}}{4}$.

又$|\overrightarrow{EF}|=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$,且$\overrightarrow{EF}\cdot\overrightarrow{C_1G}=\dfrac{3}{8}$,

$\therefore\cos\langle\overrightarrow{EF},\overrightarrow{C_1G}\rangle=\dfrac{\overrightarrow{EF}\cdot\overrightarrow{C_1G}}{|\overrightarrow{EF}||\overrightarrow{C_1G}|}=\dfrac{\sqrt{51}}{17}$.

即 EF 与 C_1G 所成角的余弦值为$\dfrac{\sqrt{51}}{17}$.

(3)$\because H$ 是 C_1G 的中点,

$\therefore H\left(0,\dfrac{7}{8},\dfrac{1}{2}\right)$.又 $F\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2},0\right)$,

$\therefore|FH|=|\overrightarrow{FH}|=\sqrt{\left(0-\dfrac{1}{2}\right)^2+\left(\dfrac{7}{8}-\dfrac{1}{2}\right)^2+\left(\dfrac{1}{2}-0\right)^2}=\dfrac{\sqrt{41}}{8}$.

提能达标过关

1. 选 C　$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=(1,3,4)-(-1,2,1)=(2,1,3)$.

2. 选 A　$\because \boldsymbol{c}-\boldsymbol{a}=(1,1,1)-(1,1,x)=(0,0,1-x)$,

$2\boldsymbol{b}=2(1,2,1)=(2,4,2)$,$\therefore(\boldsymbol{c}-\boldsymbol{a})\cdot(2\boldsymbol{b})=2-2x=-2$.

$\therefore x=2$.

3. 选 A　$\because AB$ 的中点$M\left(2,\dfrac{3}{2},3\right)$,$\overrightarrow{CM}=\left(2,\dfrac{1}{2},3\right)$.

$\therefore|\overrightarrow{CM}|=\sqrt{2^2+(\frac{1}{2})^2+3^2}=\dfrac{\sqrt{53}}{2}$.

4. 选 C　$\because \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=(-2,-3,1)\cdot(2,0,4)=-2\times2+(-3)\times0+1\times4=0$,$\therefore \boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$.又$\because \boldsymbol{a}=(-2,-3,1)=\dfrac{1}{2}(-4,-6,2)=\dfrac{1}{2}\boldsymbol{c}$,$\therefore \boldsymbol{a}\parallel\boldsymbol{c}$.

5. 选 C　$\because$ 点 D 在 OC 上运动,$\therefore$可设$\overrightarrow{OD}=(a,a,2a)$,

$\therefore\overrightarrow{DA}=(1-a,2-a,3-2a),\overrightarrow{DB}=(2-a,1-a,2-2a)$.

$\therefore\overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{DB}=(1-a)(2-a)+(2-a)(1-a)+(3-2a)(2-2a)=6a^2-16a+10$,

$\therefore$当 $a=-\dfrac{-16}{2\times6}=\dfrac{4}{3}$时,$\overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{DB}$有最小值$-\dfrac{2}{3}$,此时$\overrightarrow{OD}=\left(\dfrac{4}{3},\dfrac{4}{3},\dfrac{8}{3}\right)$,即点 D 的坐标为$\left(\dfrac{4}{3},\dfrac{4}{3},\dfrac{8}{3}\right)$.

6. 解析:$\because \boldsymbol{a}$ 在 $\boldsymbol{b}$ 上的投影为 1,

$\therefore|\boldsymbol{a}|\cdot\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=1$,

$\therefore\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|\cdot\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=|\boldsymbol{b}|$,

$\therefore-3-2x+8=\sqrt{9+x^2+16}\left(x\leqslant\dfrac{5}{2}\right)$.

解得 $x=0$ 或 $x=\dfrac{20}{3}$(舍去).

答案:0

7. 解析:$\because A,B,C$ 三点共线,$\therefore\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OA}+\lambda\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OA}+\lambda(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA})=(k,12,1)+\lambda(4-k,-7,0)=(k+\lambda(4-k),12-7\lambda,1)$.

又$\because\overrightarrow{OC}=(-k,10,1)$,

$\therefore\begin{cases}k+\lambda(4-k)=-k,\\12-7\lambda=10.\end{cases}$解得 $k=-\dfrac{2}{3}$.

答案:$-\dfrac{2}{3}$

8. 解析:$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=(3,-2,-3)\cdot(-1,x-1,1)=-3-2(x-1)-3=-2x-4$.$\because\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=\dfrac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}<0$,

$\therefore-2x-4<0$,$\therefore x>-2$.但当 $\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{b}(\lambda<0)$时,不合题意.

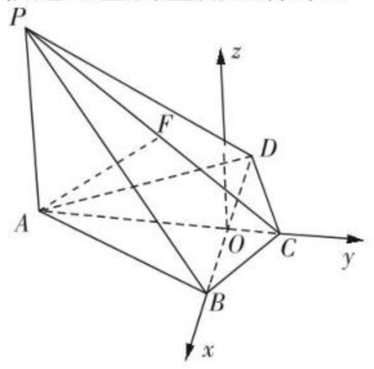
由 $\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{b}$,得$\begin{cases}3=-\lambda,\\-2=\lambda(x-1),\\-3=\lambda,\end{cases}$$\therefore x=\dfrac{5}{3}$.

综上知,x 的取值范围是$x>-2$且$x\neq\dfrac{5}{3}$.

答案:$\left(-2,\dfrac{5}{3}\right)\cup\left(\dfrac{5}{3},+\infty\right)$

9. 解:如图,连接 BD 交 AC 于 O,因为 $BC=CD$,即$\triangle BCD$ 为等腰三角形,又 AC 平分$\angle BCD$,故 $AC\perp BD$.

以 O 为坐标原点,分别以$\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OC}$,为 x 轴,y 轴,过 O 且垂直于平面 $ABCD$ 作 z 轴建立空间直角坐标系$O-xyz$.



因为 $OC=CD\cos\dfrac{\pi}{3}=1$,$AC=4$,

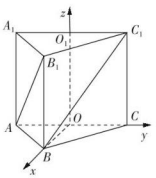
所以 $AO=AC-OC=3$,

又 $OB=OD=CD\sin\dfrac{\pi}{3}=\sqrt{3}$,

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

故 $A(0,-3,0)$，$B(\sqrt{3},0,0)$，$C(0,1,0)$，$D(-\sqrt{3},0,0)$.
由 $PA\perp$底面 $ABCD$，可设 $P(0,-3,z)$，其中 $z>0$.
由 F 为 PC 的中点，得 $F\left(0,-1,\frac{z}{2}\right)$，
所以 $\overrightarrow{AF}=\left(0,2,\frac{z}{2}\right)$，$\overrightarrow{PB}=(\sqrt{3},3,-z)$.
又 $AF\perp PB$，所以 $\overrightarrow{AF}\cdot\overrightarrow{PB}=0$，即 $6-\frac{z^2}{2}=0$，
解得 $z=2\sqrt{3}$ 或 $z=-2\sqrt{3}$（舍去）.
所以 $\overrightarrow{PA}=(0,0,-2\sqrt{3})$，则 $|\overrightarrow{PA}|=2\sqrt{3}$.
所以 PA 的长为 $2\sqrt{3}$.

10. **解**：(1)设正三棱柱的侧棱长为 h，建立如图所示的空间直角坐标系.



由题意，得 $A(0,-1,0)$，$B(\sqrt{3},0,0)$，$C(0,1,0)$，$B_1(\sqrt{3},0,h)$，$C_1(0,1,h)$，
则 $\overrightarrow{AB_1}=(\sqrt{3},1,h)$，$\overrightarrow{BC_1}=(-\sqrt{3},1,h)$，
因为 $AB_1\perp BC_1$，
所以 $\overrightarrow{AB_1}\cdot\overrightarrow{BC_1}=-3+1+h^2=0$，
所以 $h=\sqrt{2}$.
(2)由(1)可知，$\overrightarrow{AB_1}=(\sqrt{3},1,\sqrt{2})$，$\overrightarrow{BC}=(-\sqrt{3},1,0)$，
所以 $\overrightarrow{AB_1}\cdot\overrightarrow{BC}=-3+1=-2$.
因为 $|\overrightarrow{AB_1}|=\sqrt{6}$，$|\overrightarrow{BC}|=2$，
所以 $\cos\langle\overrightarrow{AB_1},\overrightarrow{BC}\rangle=\frac{-2}{2\sqrt{6}}=-\frac{\sqrt{6}}{6}$.
所以异面直线 AB_1 与 BC 所成角的余弦值为 $\frac{\sqrt{6}}{6}$.

3.2 立体几何中的向量方法

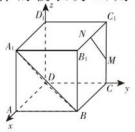
第 23 课时 空间向量与平行关系

基础知识梳理

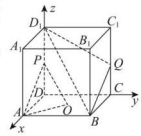
1. $\boldsymbol{a}\parallel\boldsymbol{b}$ $\boldsymbol{a}=k\boldsymbol{b}(k\in\mathbf{R},k\neq0)$
2. $\boldsymbol{a}\parallel\boldsymbol{b}$
3. (1)$\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$ $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$

题点知识巩固

1. 选 A $\overrightarrow{AB}=\left(\frac{1}{2},2,\frac{7}{2}\right)-\left(-\frac{1}{2},0,\frac{1}{2}\right)=(1,2,3)=3\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3},1\right)$.
2. 选 B 设平面 ABC 的法向量 $\boldsymbol{a}=(x,y,z)$，
则 $\begin{cases}\boldsymbol{a}\cdot\overrightarrow{AB}=0,\\ \boldsymbol{a}\cdot\overrightarrow{AC}=0,\end{cases}$
得 $\begin{cases}2x+2y+z=0,\\ 4x+5y+3z=0,\end{cases}$ 令 $z=2$，
得 $\boldsymbol{a}=(1,-2,2)$.
3. 选 D $\because l\parallel\alpha$，$\therefore\boldsymbol{v}\perp\boldsymbol{n}$，$\therefore(-1,1,1)\cdot(2,x^2+x,-x)=0$，
即 $-2+x^2+x-x=0$，$\therefore x=\pm\sqrt{2}$.
4. **证明**：如图，以 D 为原点，DA，DC，DD_1 所在直线分别为 x 轴、y 轴、z 轴，建立空间直角坐标系. 设正方体的棱长为 1，则 $D(0,0,0)$，$A_1(1,0,1)$，$M\left(0,1,\frac{1}{2}\right)$，



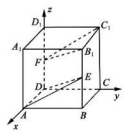
$N\left(\frac{1}{2},1,1\right)$，
于是 $\overrightarrow{DA_1}=(1,0,1)$，$\overrightarrow{MN}=\left(\frac{1}{2},0,\frac{1}{2}\right)$，
$\therefore\overrightarrow{DA_1}=2\overrightarrow{MN}$，$\therefore\overrightarrow{DA_1}\parallel\overrightarrow{MN}$，
$\therefore DA_1\parallel MN$.
而 $MN\subset$平面 A_1BD，$DA_1\subset$平面 A_1BD，
$\therefore MN\parallel$平面 A_1BD.
5. 选 A $\because\boldsymbol{m}=(1,2,-1)=-\frac{1}{3}(-3,-6,3)=-\frac{1}{3}\boldsymbol{n}$，
$\therefore\boldsymbol{m}\parallel\boldsymbol{n}$，$\therefore\alpha\parallel\beta$.
6. **解**：如图，以 D 为原点，分别以 DA，DC，DD_1 所在直线为 x，y，z 轴，建立空间直角坐标系.



设正方体的棱长为 2，则 $O(1,1,0)$，$P(0,0,1)$，$A(2,0,0)$，$B(2,2,0)$，$D_1(0,0,2)$.
设 $Q(0,2,z)(0\leqslant z\leqslant2)$，
那么 $\overrightarrow{OP}=(-1,-1,1)$，$\overrightarrow{BD_1}=(-2,-2,2)$，
$\therefore\overrightarrow{OP}\parallel\overrightarrow{BD_1}$. 又 $B\notin OP$，
$\therefore OP\parallel BD_1$.
又 $\overrightarrow{AP}=(-2,0,1)$，$\overrightarrow{BQ}=(-2,0,z)$，
显然当 $z=1$ 时，$\overrightarrow{AP}\parallel\overrightarrow{BQ}$，由于 $B\notin AP$，
$\therefore AP\parallel BQ$.
$\because OP$ 与 AP 是平面 APO 内的两条相交直线，
BD_1 与 BQ 是平面 BD_1Q 内的两条相交直线，
$\therefore$平面 $BD_1Q\parallel$平面 APO.
$\therefore$当 Q 为 CC_1 的中点时，平面 $BD_1Q\parallel$平面 APO.

提能达标过关

1. 选 A $\because\overrightarrow{AB}=(-1,0,5)-(1,2,3)=(-2,-2,2)$，
$\overrightarrow{CD}=(4,1,3)-(3,0,4)=(1,1,-1)$，
$\therefore\overrightarrow{AB}=-2(1,1,-1)=-2\overrightarrow{CD}$，$\therefore AB\parallel CD$.
2. 选 D $\because\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}=0$，$\therefore\boldsymbol{m}\perp\boldsymbol{n}$，$\therefore l\subset\alpha$ 或 $l\parallel\alpha$.
3. 选 A $\because\boldsymbol{a}=(-2,0,1)$，$\boldsymbol{b}=(-4,0,2)=2\boldsymbol{a}$，$\therefore\boldsymbol{a}\parallel\boldsymbol{b}$，
$\therefore l\perp\alpha$.
4. 选 B $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CN}$
$=\frac{1}{2}(\overrightarrow{A_1B}+\overrightarrow{CA})+\overrightarrow{BC}$
$=\frac{1}{2}(\overrightarrow{A_1B_1}+\overrightarrow{B_1B}+\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{CD})+\overrightarrow{BC}$
$=\frac{1}{2}(\overrightarrow{B_1B}+\overrightarrow{BC})$，
又 $MN\subset$平面 B_1BCC_1，$\therefore MN\parallel$平面 B_1BCC_1.
5. 选 C ①③④正确. ②中，$\alpha\parallel\beta\Leftrightarrow\boldsymbol{n}_1\parallel\boldsymbol{n}_2$.
6. **解析**：由题意得 $\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}=0$，
即 $(1,3,x)\cdot(3,-2,1)=3-6+x=0$，$\therefore x=3$.
答案：3
7. **解析**：由于直三棱柱的侧棱与底面垂直，所以平面 ABC 的法向量为 $\overrightarrow{AA_1}$，$\overrightarrow{B_1B}$.
答案：②③
8. **解析**：$\because DE\parallel$平面 ABC，$\therefore$存在实数 m，n，使 $\overrightarrow{DE}=m\overrightarrow{AB}+n\overrightarrow{BC}$，即 $(x,-3,6)=m(1,5,-2)+n(3,1,2)$，
$\therefore\begin{cases}x=m+3n,\\ -3=5m+n,\\ 6=-2m+2n.\end{cases}$
解得 $\begin{cases}m=-1,\\ n=2,\\ x=5.\end{cases}$
答案：5
9. **解**：当 F 是 PC 的中点时，$BF\parallel$平面 ACE.
证明：$\because\overrightarrow{BF}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CF}=\overrightarrow{BC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{CP}=\overrightarrow{BC}+\frac{1}{2}(\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DP})$
$=\overrightarrow{AD}+\frac{1}{2}(\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AC})+\frac{3}{2}\overrightarrow{DE}$
$=\frac{3}{2}\overrightarrow{AD}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}+\frac{3}{2}(\overrightarrow{AE}-\overrightarrow{AD})$
$=\frac{3}{2}\overrightarrow{AE}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$，
$\therefore\overrightarrow{BF}$，$\overrightarrow{AE}$，$\overrightarrow{AC}$ 共面.
又 $BF\subset$平面 ACE，$\therefore BF\parallel$平面 ACE.
10. **证明**：如图所示，建立空间直角坐标系 $D-xyz$，则有 $D(0,0,0)$，$A(2,0,0)$，$C(0,2,0)$，$C_1(0,2,2)$，$E(2,2,1)$，$F(0,0,1)$，$B_1(2,2,2)$，



$\therefore\overrightarrow{FC_1}=(0,2,1)$，$\overrightarrow{DA}=(2,0,0)$，
$\overrightarrow{AE}=(0,2,1)$.
(1)设 $\boldsymbol{n}_1=(x_1,y_1,z_1)$ 是平面 ADE 的法向量，则 $\boldsymbol{n}_1\perp\overrightarrow{DA}$，$\boldsymbol{n}_1\perp\overrightarrow{AE}$，

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

即$\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{DA}=2x_1=0,\\ \boldsymbol{n}_1\cdot\overrightarrow{AE}=2y_1+z_1=0.\end{cases}$

令$z_1=2$,则$y_1=-1$,$\therefore\boldsymbol{n}_1=(0,-1,2)$.

$\because\overrightarrow{FC_1}\cdot\boldsymbol{n}_1=-2+2=0$. $\therefore\overrightarrow{FC_1}\perp\boldsymbol{n}_1$.

$\because FC_1\not\subset$平面ADE,

$\therefore FC_1\parallel$平面ADE.

(2)$\because\overrightarrow{C_1B_1}=(2,0,0)$,

设$\boldsymbol{n}_2=(x_2,y_2,z_2)$是平面$B_1C_1F$的法向量.

由$\boldsymbol{n}_2\perp\overrightarrow{FC_1}$,$\boldsymbol{n}_2\perp\overrightarrow{C_1B_1}$,

得$\begin{cases}\boldsymbol{n}_2\cdot\overrightarrow{FC_1}=2y_2+z_2=0,\\ \boldsymbol{n}_2\cdot\overrightarrow{C_1B_1}=2x_2=0.\end{cases}$

令$z_2=2$,得$y_2=-1$,

$\therefore\boldsymbol{n}_2=(0,-1,2)$.

$\because\boldsymbol{n}_1=\boldsymbol{n}_2$,

$\therefore$平面$ADE\parallel$平面B_1C_1F.

第24课时　空间向量与垂直关系

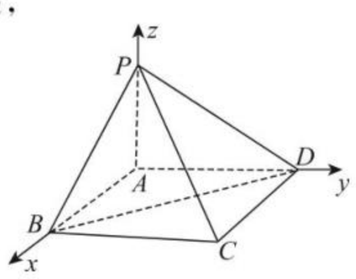
基础知识梳理

1. $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$
2. $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$
3. $\boldsymbol{a}\parallel\boldsymbol{b}$

题点知识巩固

1. 选B　$\because a\perp b$,$\therefore\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}=(1,2,-2)\cdot(-2,3,x)=-2+6-2x=0$,$\therefore x=2$.

2. **证明**:以A为原点,建立如图所示的空间直角坐标系$A-xyz$,设$PA=h$,$AB=a$,



则$B(a,0,0)$,$D(0,a,0)$,$C(a,a,0)$,$P(0,0,h)$,

$\therefore\overrightarrow{BD}=(-a,a,0)$,$\overrightarrow{PC}=(a,a,-h)$,

又$\overrightarrow{BD}\cdot\overrightarrow{PC}=-a^2+a^2+0=0$,

$\therefore\overrightarrow{BD}\perp\overrightarrow{PC}$,即$BD\perp PC$.

3. 选B　设平面ABC的法向量为$\boldsymbol{n}=(x,y,z)$,

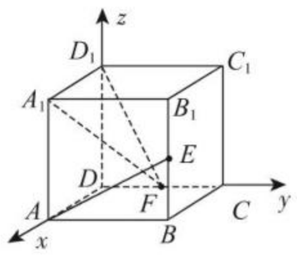
则有$\begin{cases}2x+2y+z=0,\\ 4x+5y+3z=0,\end{cases}$

取$x=1$,则$y=-2$,$z=2$.

所以$\boldsymbol{n}=(1,-2,2)$.

所以平面ABC的一个单位法向量可以是$\left(-\frac{1}{3},\frac{2}{3},-\frac{2}{3}\right)$.

4. **证明**:如图所示,建立空间直角坐标系,



设正方体的棱长为1,

则$A(1,0,0)$,$E\left(1,1,\frac{1}{2}\right)$,

$A_1(1,0,1)$,$D_1(0,0,1)$,$F\left(0,\frac{1}{2},0\right)$,

$\therefore\overrightarrow{AE}=\left(0,1,\frac{1}{2}\right)$,$\overrightarrow{A_1D_1}=(-1,0,0)$,

$\overrightarrow{D_1F}=\left(0,\frac{1}{2},-1\right)$.

证法一:设平面A_1D_1F的法向量为$\boldsymbol{n}=(x,y,z)$,

则$\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{A_1D_1}=0$,$\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{D_1F}=0$,

即$\begin{cases}-x=0,\\ \frac{1}{2}y-z=0,\end{cases}$

解得$x=0$,$y=2z$.

令$z=1$,则$\boldsymbol{n}=(0,2,1)$,

又$\overrightarrow{AE}=\left(0,1,\frac{1}{2}\right)$,$\therefore\boldsymbol{n}=2\overrightarrow{AE}$.

$\therefore\boldsymbol{n}\parallel\overrightarrow{AE}$,即$\overrightarrow{AE}\perp$平面$A_1D_1F$,

因此,$AE\perp$平面A_1D_1F.

证法二:由于$\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{A_1D_1}=\left(0,1,\frac{1}{2}\right)\cdot(-1,0,0)=0$,

所以$\overrightarrow{AE}\perp\overrightarrow{A_1D_1}$,所以$AE\perp A_1D_1$.

又$\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{D_1F}=\left(0,1,\frac{1}{2}\right)\cdot\left(0,\frac{1}{2},-1\right)=0$,

所以$AE\perp D_1F$,

又$A_1D_1\cap D_1F=D_1$,

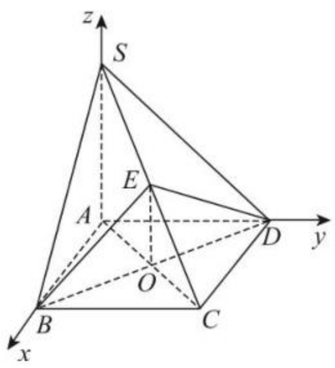
所以$AE\perp$平面A_1D_1F.

5. **解析**:$\because\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$,$\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}=2\neq0$,$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}=1\neq0$,$\therefore\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$,

$\therefore\alpha\perp\beta$.

答案:$\alpha\perp\beta$

6. **证明**:设$AB=BC=CD=DA=AS=1$,建立如图所示的空间直角坐标系$A-xyz$,则$B(1,0,0)$,$D(0,1,0)$,$A(0,0,0)$,$S(0,0,1)$,$E\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$.



证法一:连接AC,设AC与BD相交于点O,

连接OE,则点O的坐标为$\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},0\right)$.

$\because\overrightarrow{AS}=(0,0,1)$,$\overrightarrow{OE}=\left(0,0,\frac{1}{2}\right)$,

$\therefore\overrightarrow{OE}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AS}$,$\therefore OE\parallel AS$.

又$AS\perp$底面$ABCD$,$\therefore OE\perp$平面$ABCD$.

又$OE\subset$平面BDE,$\therefore$平面$BDE\perp$平面$ABCD$.

证法二:设平面BDE的法向量为$\boldsymbol{n}_1=(x,y,z)$.

$\because\overrightarrow{BD}=(-1,1,0)$,$\overrightarrow{BE}=\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$,

$\therefore\begin{cases}\boldsymbol{n}_1\perp\overrightarrow{BD},\\ \boldsymbol{n}_1\perp\overrightarrow{BE}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\boldsymbol{n}_1\cdot\overrightarrow{BD}=-x+y=0,\\ \boldsymbol{n}_1\cdot\overrightarrow{BE}=-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}y+\frac{1}{2}z=0.\end{cases}$

令$x=1$,可得平面BDE的一个法向量为$\boldsymbol{n}_1=(1,1,0)$.

$\because AS\perp$底面$ABCD$,

$\therefore$平面$ABCD$的一个法向量为$\boldsymbol{n}_2=\overrightarrow{AS}=(0,0,1)$.

$\because\boldsymbol{n}_1\cdot\boldsymbol{n}_2=0$,

$\therefore$平面$BDE\perp$平面$ABCD$.

提能达标过关

1. 选D　当$\boldsymbol{a}\parallel\boldsymbol{b}$时,$\boldsymbol{n}$不一定垂直平面$\alpha$.

2. 选D　$\because l\perp\alpha$,$\therefore\boldsymbol{a}\parallel\boldsymbol{n}$,$\therefore\frac{x}{\frac{1}{2}}=\frac{1}{y}=\frac{-2}{-1}$,

$\therefore y=\frac{1}{2}$,$x=1$. $\therefore x+y=\frac{3}{2}$.

3. 选D　由题意知,点M构成的图形是过点A,且以$\boldsymbol{n}$为法向量的平面.

4. 选A　建立如图所示的空间直角坐标系.

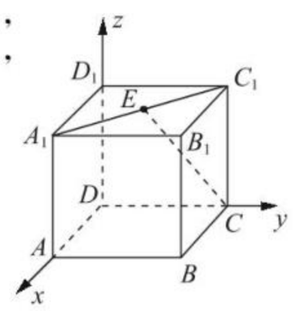
不妨设正方体的棱长为2,则$C(0,2,0)$,$B(2,2,0)$,$D(0,0,0)$,$A_1(2,0,2)$,$C_1(0,2,2)$,

$\therefore E(1,1,2)$,$\overrightarrow{DB}=(2,2,0)$,$\overrightarrow{CE}=(1,-1,2)$.

$\because\overrightarrow{DB}\cdot\overrightarrow{CE}=2-2+0=0$,

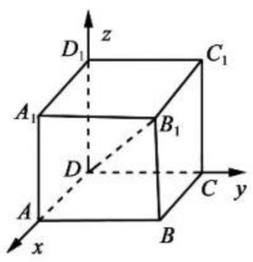
$\therefore\overrightarrow{DB}\perp\overrightarrow{CE}$,

$\therefore CE\perp BD$.



关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

5. 选 B　以 D 为原点，建立如图所示的空间直角坐标系，则 $A(a,0,0)$，$C(0,a,0)$，$D(0,0,0)$，$B_1(a,a,a)$.



设存在点 $P(0,0,z)$，则 $\overrightarrow{AP}=(-a,0,z)$，$\overrightarrow{AC}=(-a,a,0)$，$\overrightarrow{DB_1}=(a,a,a)$. $\because B_1D\perp$ 平面 PAC，

$\therefore \overrightarrow{DB_1}\cdot\overrightarrow{AP}=0$，$\overrightarrow{DB_1}\cdot\overrightarrow{AC}=0$，

$\therefore -a^2+az=0$，$-a^2+a^2=0$，

$\therefore z=a$. 即点 P 与 D_1 重合.

6. **解析**：由题意得

$$\begin{cases}\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{n}=x+y-5=0,\\ \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{n}=2x-3y+10=0,\end{cases}\text{解得}\begin{cases}x=1,\\ y=4.\end{cases}\therefore xy=4.$$

答案：4

7. **解析**：$\overrightarrow{PA}=(-x,1,-z)$，$\overrightarrow{AB}=(-1,-1,1)$，$\overrightarrow{AC}=(2,0,1)$，

$\because \overrightarrow{PA}\perp\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{PA}\perp\overrightarrow{AC}$，

$$\therefore\begin{cases}\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{AB}=x-1-z=0,\\ \overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{AC}=-2x-z=0.\end{cases}$$

$$\text{解得}\begin{cases}x=\dfrac{1}{3},\\ z=-\dfrac{2}{3},\end{cases}\therefore\overrightarrow{PA}=\left(-\frac{1}{3},1,\frac{2}{3}\right).$$

答案：$\left(-\frac{1}{3},1,\frac{2}{3}\right)$

8. **解析**：$\overrightarrow{MP}=(1,4,1)$，$\overrightarrow{MP}\cdot\boldsymbol{n}=6-12+6=0$，

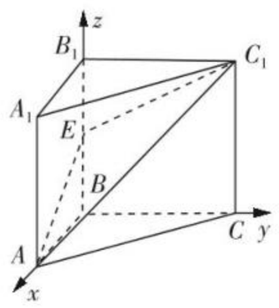
$\therefore\overrightarrow{MP}\perp\boldsymbol{n}$，

又 $\boldsymbol{n}\perp$ 平面 α，$M\in$ 平面 α，

$\therefore P\in$ 平面 α.

答案：$P\in$ 平面 α

9. **证明**：以 B 为原点，BA，BC，BB_1 分别为 x，y，z 轴，建立如图所示的空间直角坐标系 $B-xyz$.



则 $A(2,0,0)$，$A_1(2,0,1)$，$C(0,2,0)$，$C_1(0,2,1)$，$E\left(0,0,\frac{1}{2}\right)$，

则 $\overrightarrow{AA_1}=(0,0,1)$，$\overrightarrow{AC}=(-2,2,0)$，$\overrightarrow{AC_1}=(-2,2,1)$，$\overrightarrow{AE}=\left(-2,0,\frac{1}{2}\right)$.

设平面 AA_1C_1C 的法向量为 $\boldsymbol{n}_1=(x_1,y_1,z_1)$.

$$\text{则}\begin{cases}\boldsymbol{n}_1\cdot\overrightarrow{AA_1}=0,\\ \boldsymbol{n}_1\cdot\overrightarrow{AC}=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}z_1=0,\\ -2x_1+2y_1=0.\end{cases}$$

令 $x_1=1$，得 $y_1=1$，

$\therefore\boldsymbol{n}_1=(1,1,0)$.

设平面 AEC_1 的法向量为 $\boldsymbol{n}_2=(x_2,y_2,z_2)$.

$$\text{则}\begin{cases}\boldsymbol{n}_2\cdot\overrightarrow{AC_1}=0,\\ \boldsymbol{n}_2\cdot\overrightarrow{AE}=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-2x_2+2y_2+z_2=0,\\ -2x_2+\frac{1}{2}z_2=0,\end{cases}$$

令 $z_2=4$，得 $x_2=1$，$y_2=-1$.

$\therefore\boldsymbol{n}_2=(1,-1,4)$.

$\because\boldsymbol{n}_1\cdot\boldsymbol{n}_2=1\times1+1\times(-1)+0\times4=0$.

$\therefore\boldsymbol{n}_1\perp\boldsymbol{n}_2$，

$\therefore$ 平面 $AEC_1\perp$ 平面 AA_1C_1C.

10. **解**：因为 $\angle PAD=90^\circ$，

所以 $PA\perp AD$.

又因为侧面 $PAD\perp$ 底面 $ABCD$，

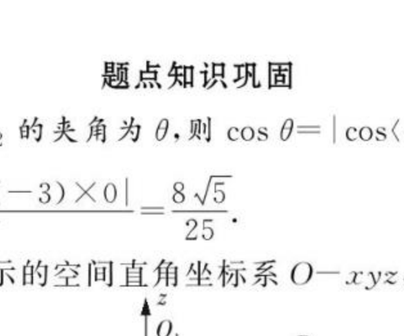
且侧面 $PAD\cap$ 底面 $ABCD=AD$，

所以 $PA\perp$ 底面 $ABCD$.

又因为 $\angle BAD=90^\circ$，

所以 AB，AD，AP 两两垂直.

分别以 AB，AD，AP 所在直线为 x 轴、y 轴、z 轴建立如图所示的空间直角坐标系 $A-xyz$.



(1)证明：设 $A(0,0,0)$，$P(0,0,1)$，$B(1,0,0)$，$C(1,1,0)$，$D(0,2,0)$，则 $\overrightarrow{AP}=(0,0,1)$，$\overrightarrow{AC}=(1,1,0)$，$\overrightarrow{CD}=(-1,1,0)$，

$\therefore\overrightarrow{CD}\cdot\overrightarrow{AP}=0$，$\overrightarrow{CD}\cdot\overrightarrow{AC}=0$，

$\therefore\overrightarrow{CD}\perp\overrightarrow{AP}$，$\overrightarrow{CD}\perp\overrightarrow{AC}$，

即 $CD\perp AP$，$CD\perp AC$.

又 $AP\cap AC=A$，$\therefore CD\perp$ 平面 PAC.

(2)因为 E 在 PA 上，设为 $(0,0,a)$，则 $\overrightarrow{BE}=(-1,0,a)$，$\overrightarrow{CD}=(-1,1,0)$，$\overrightarrow{DP}=(0,-2,1)$，

设平面 PCD 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，由 $\overrightarrow{DP}\cdot\boldsymbol{n}=0$，$\overrightarrow{CD}\cdot\boldsymbol{n}=0$，

得 $\begin{cases}-2y+z=0,\\ -x+y=0,\end{cases}$

令 $x=1$，得 $y=1$，$z=2$，$\therefore\boldsymbol{n}=(1,1,2)$，

$\because BE\parallel$ 平面 PCD，$\therefore\boldsymbol{n}\perp\overrightarrow{BE}$，$\therefore\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{BE}=0$，即 $-1+2a=0$，

$\therefore a=\frac{1}{2}$，所以存在 E 点，且为 PA 的中点.

第 25 课时　空间向量与空间角

基础知识梳理

1. $\dfrac{|\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}|}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}$

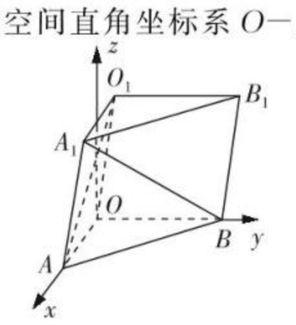
2. $\dfrac{|\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{n}|}$

3. $\dfrac{|\boldsymbol{n}_1\cdot\boldsymbol{n}_2|}{|\boldsymbol{n}_1||\boldsymbol{n}_2|}$

题点知识巩固

1. 选 B　设 l_1 与 l_2 的夹角为 θ，则 $\cos\theta=|\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle|=\dfrac{|\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}|}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}=\dfrac{|0\times1+4\times2+(-3)\times0|}{5\times\sqrt{5}}=\dfrac{8\sqrt{5}}{25}$.

2. **解**：建立如图所示的空间直角坐标系 $O-xyz$，



则 $O(0,0,0)$，$O_1(0,1,\sqrt{3})$，$A(\sqrt{3},0,0)$，$A_1(\sqrt{3},1,\sqrt{3})$，$B(0,2,0)$，

$\therefore\overrightarrow{A_1B}=(-\sqrt{3},1,-\sqrt{3})$，$\overrightarrow{O_1A}=(\sqrt{3},-1,-\sqrt{3})$.

$$\therefore|\cos\langle\overrightarrow{A_1B},\overrightarrow{O_1A}\rangle|=\frac{|\overrightarrow{A_1B}\cdot\overrightarrow{O_1A}|}{|\overrightarrow{A_1B}||\overrightarrow{O_1A}|}$$

$$=\frac{|(-\sqrt{3},1,-\sqrt{3})\cdot(\sqrt{3},-1,-\sqrt{3})|}{\sqrt{7}\times\sqrt{7}}=\frac{1}{7}.$$

$\therefore$ 异面直线 A_1B 与 AO_1 所成角的余弦值为 $\frac{1}{7}$.

3. 选 C　l 与 α 所成的角为 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 所成的角或其补角.

又 $\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=\dfrac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}=\dfrac{1}{2}$，$\therefore\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=60^\circ$.

4. **解**：(1)证明：由已知，得 $AM=\frac{2}{3}AD=2$.

如图，取 BP 的中点 T，连接 AT，TN，

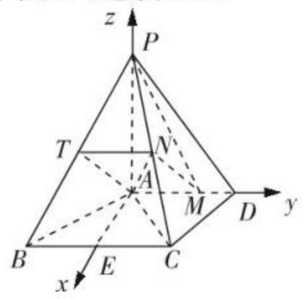
由 N 为 PC 的中点，知 $TN\parallel BC$，$TN=\frac{1}{2}BC=2$.

又 $AD\parallel BC$，故 $TN\parallel AM$，

所以四边形 $AMNT$ 为平行四边形，

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

于是 $MN/\!/AT$.
因为 $AT\subset$平面 PAB，$MN\not\subset$平面 PAB，
所以 $MN/\!/$平面 PAB.
(2)如图，取 BC 的中点 E，连接 AE.



由 $AB=AC$，得 $AE\perp BC$，从而 $AE\perp AD$，

且 $AE=\sqrt{AB^2-BE^2}=\sqrt{AB^2-\left(\frac{BC}{2}\right)^2}=\sqrt{5}$.

以 A 为坐标原点，以$\overrightarrow{AE}$，$\overrightarrow{AD}$，$\overrightarrow{AP}$的方向分别为 x 轴、y 轴、z 轴正方向，建立如图所示的空间直角坐标系 $A-xyz$.

由题意知 $P(0,0,4)$，$M(0,2,0)$，$C(\sqrt{5},2,0)$，$N\left(\frac{\sqrt{5}}{2},1,2\right)$，

所以$\overrightarrow{PM}=(0,2,-4)$，$\overrightarrow{PN}=\left(\frac{\sqrt{5}}{2},1,-2\right)$，$\overrightarrow{AN}=\left(\frac{\sqrt{5}}{2},1,2\right)$.

设 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$ 为平面 PMN 的法向量，

则 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{PM}=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{PN}=0,\end{cases}$

即 $\begin{cases}2y-4z=0,\\ \frac{\sqrt{5}}{2}x+y-2z=0,\end{cases}$

可取 $\boldsymbol{n}=(0,2,1)$.

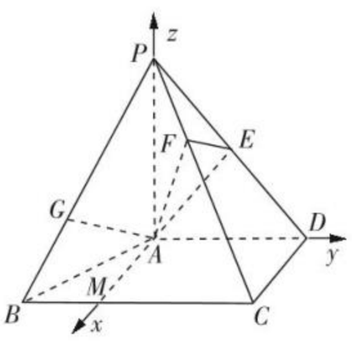
于是 $|\cos\langle\boldsymbol{n},\overrightarrow{AN}\rangle|=\dfrac{|\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AN}|}{|\boldsymbol{n}||\overrightarrow{AN}|}=\dfrac{8\sqrt{5}}{25}$.

所以直线 AN 与平面 PMN 所成角的正弦值为$\frac{8\sqrt{5}}{25}$.

5. **解析**：由 $\cos\langle\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}\rangle=\dfrac{\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{m}||\boldsymbol{n}|}=\dfrac{-3+0+0}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{10}}=-\dfrac{3\sqrt{2}}{10}$，得这个二面角的余弦值为$\frac{3\sqrt{2}}{10}$.

答案：$\frac{3\sqrt{2}}{10}$

6. **解**：(1)证明：因为 $PA\perp$平面 $ABCD$，所以 $PA\perp CD$.
又因为 $AD\perp CD$，$PA\cap AD=A$，所以 $CD\perp$平面 PAD.
(2)过 A 作 AD 的垂线交 BC 于点 M.
因为 $PA\perp$平面 $ABCD$，所以 $PA\perp AM$，$PA\perp AD$.
如图建立空间直角坐标系 $A-xyz$，
则 $A(0,0,0)$，$B(2,-1,0)$，$C(2,2,0)$，$D(0,2,0)$，$P(0,0,2)$.
因为 E 为 PD 的中点，所以 $E(0,1,1)$.
所以$\overrightarrow{AE}=(0,1,1)$，$\overrightarrow{PC}=(2,2,-2)$，$\overrightarrow{AP}=(0,0,2)$.



所以$\overrightarrow{PF}=\frac{1}{3}\overrightarrow{PC}=\left(\frac{2}{3},\frac{2}{3},-\frac{2}{3}\right)$，

$\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{PF}=\left(\frac{2}{3},\frac{2}{3},\frac{4}{3}\right)$.

设平面 AEF 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，

则 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AE}=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AF}=0,\end{cases}$即 $\begin{cases}y+z=0,\\ \frac{2}{3}x+\frac{2}{3}y+\frac{4}{3}z=0.\end{cases}$

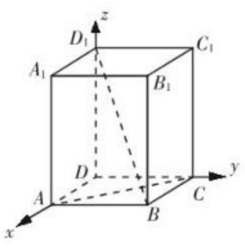
令 $z=1$，则 $y=-1$，$x=-1$.
于是 $\boldsymbol{n}=(-1,-1,1)$.
又因为平面 PAE 的法向量为 $\boldsymbol{p}=(1,0,0)$，
所以 $\cos\langle\boldsymbol{n},\boldsymbol{p}\rangle=\dfrac{\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{p}}{|\boldsymbol{n}||\boldsymbol{p}|}=-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

由题知，二面角 $F-AE-P$ 为锐角，所以其余弦值为$\frac{\sqrt{3}}{3}$.

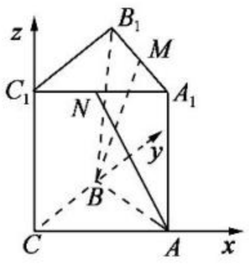
(3)直线 AG 在平面 AEF 内.
因为点 G 在 PB 上，且$\frac{PG}{PB}=\frac{2}{3}$，$\overrightarrow{PB}=(2,-1,-2)$
所以$\overrightarrow{PG}=\frac{2}{3}\overrightarrow{PB}=\left(\frac{4}{3},-\frac{2}{3},-\frac{4}{3}\right)$，
$\overrightarrow{AG}=\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{PG}=\left(\frac{4}{3},-\frac{2}{3},\frac{2}{3}\right)$.
由(2)知，平面 AEF 的法向量 $\boldsymbol{n}=(-1,-1,1)$.
所以$\overrightarrow{AG}\cdot\boldsymbol{n}=-\frac{4}{3}+\frac{2}{3}+\frac{2}{3}=0$.
所以直线 AG 在平面 AEF 内.

提能达标过关

1. 选 D　∵异面直线的夹角 $\theta\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right]$，而它们方向向量的夹角为 $\theta'\in[0,\pi]$，∴D 正确.
2. 选 D　设 $A_1C_1\cap B_1D_1=O$，易知 OC_1 垂直平面 BB_1D_1D，所以 $\angle C_1BO$ 为 BC_1 与对角面 BB_1D_1D 所成的角.
3. 选 C　∵$\cos\langle\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}\rangle=\dfrac{\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}}{|\boldsymbol{u}||\boldsymbol{v}|}=\dfrac{1}{1\times\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，
∴$\langle\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}\rangle=45°$. ∴二面角为 $45°$ 或 $180°-45°=135°$.
4. 选 A　建立空间直角坐标系如图所示，



∵$AB=BC=2$，$DD_1=3$，
∴$B(2,2,0)$，$A(2,0,0)$，$C(0,2,0)$，$D_1(0,0,3)$.
∴$\overrightarrow{AC}=(-2,2,0)$，$\overrightarrow{BD_1}=(-2,-2,3)$. 而
$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD_1}=4-4+0=0$，
∴$\cos\langle\overrightarrow{AC},\overrightarrow{BD_1}\rangle=0$.
5. 选 C　建立如图所示的空间直角坐标系 $C-xyz$，设 $BC=2$，则 $B(0,2,0)$，$A(2,0,0)$，$M(1,1,2)$，$N(1,0,2)$，所以$\overrightarrow{BM}=(1,-1,2)$，$\overrightarrow{AN}=(-1,0,2)$，故 BM 与 AN 所成角 θ 的余弦值 $\cos\theta=\dfrac{|\overrightarrow{BM}\cdot\overrightarrow{AN}|}{|\overrightarrow{BM}||\overrightarrow{AN}|}$



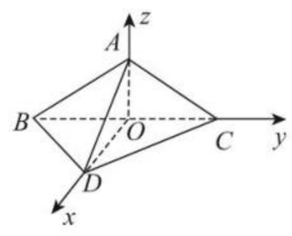
$=\dfrac{3}{\sqrt{6}\times\sqrt{5}}=\dfrac{\sqrt{30}}{10}$.
6. **解析**：设 l 与 α 所成的角为 θ，则 $\sin\theta=|\cos\langle\boldsymbol{n},\boldsymbol{v}\rangle|=\dfrac{|\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{v}|}{|\boldsymbol{n}||\boldsymbol{v}|}=\dfrac{6}{3\sqrt{2}\times\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$，∴$\cos\theta=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

答案：$\frac{\sqrt{3}}{3}$

7. **解析**：依题意知，设这个二面角为 θ，则 θ 为 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 所成的角或其补角.
又∵$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=(0,-1,3)\cdot(2,2,4)=0-2+12=10$，
$|\boldsymbol{a}|=\sqrt{10}$，$|\boldsymbol{b}|=2\sqrt{6}$.
∴$\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=\dfrac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}=\dfrac{10}{\sqrt{10}\times2\sqrt{6}}=\dfrac{\sqrt{15}}{6}$.
故所求二面角的余弦值为 $\pm\frac{\sqrt{15}}{6}$.

答案：$\pm\frac{\sqrt{15}}{6}$

8. **解析**：取 BC 的中点 O，连接 AO，DO，建立如图所示的空间直角坐标系 $O-xyz$.



设 $BC=1$，则 $A\left(0,0,\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$，$O(0,0,0)$，
$B\left(0,-\frac{1}{2},0\right)$，$D\left(\frac{\sqrt{3}}{2},0,0\right)$，
所以$\overrightarrow{OA}=\left(0,0,\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$，$\overrightarrow{BA}=\left(0,\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$，$\overrightarrow{BD}=\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2},0\right)$.
设平面 ABD 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，
则 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{BA}=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{BD}=0,\end{cases}$所以 $\begin{cases}\frac{1}{2}y+\frac{\sqrt{3}}{2}z=0,\\ \frac{\sqrt{3}}{2}x+\frac{1}{2}y=0,\end{cases}$

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

取 $x=1$，则 $y=-\sqrt{3}$，$z=1$，

所以平面 ABD 的一个法向量为 $\boldsymbol{n}=(1,-\sqrt{3},1)$，

由于 $\overrightarrow{OA}=\left(0,0,\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ 为平面 BCD 的法向量.

所以 $\cos\langle\boldsymbol{n},\overrightarrow{OA}\rangle=\frac{\sqrt{5}}{5}$，$\sin\langle\boldsymbol{n},\overrightarrow{OA}\rangle=\frac{2\sqrt{5}}{5}$.

答案：$\frac{2\sqrt{5}}{5}$

9. **解**：(1)证明：$\because AC\perp BD$，$AC\perp BE$，$BD\cap BE=B$，

$\therefore AC\perp$ 平面 BDE，连接 OE，所以 $AC\perp OE$.

又 $PA\perp$ 平面 $ABCD$，

$\therefore AC\perp PA$，又 OE、$PA\subset$ 平面 PAC，

$\therefore OE/\!/PA$.

又 $OE\subset$ 平面 BED，$PA\not\subset$ 平面 BED，

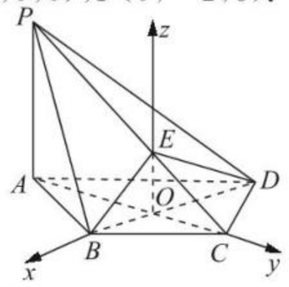
$\therefore PA/\!/$ 平面 BED.

(2)$\because BC/\!/AD$，$BC=\sqrt{2}$，$AD=2\sqrt{2}$，$AB=CD$，

且 $AC\perp BD$，

$\therefore$ 在等腰梯形 $ABCD$ 中，$OB=OC=1$，$OA=OD=2$，

由(1)知，$OE\perp$ 平面 $ABCD$，分别以射线 OB，OC，OE 为 x，y，z 轴的正半轴建立空间直角坐标系 $O-xyz$，如图所示，则 $B(1,0,0)$，$C(0,1,0)$，$D(-2,0,0)$，$P(0,-2,3)$.



设平面 PCD 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，

则 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{CD}=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{PC}=0,\end{cases}$

所以 $\begin{cases}-2x-y=0,\\ 3y-3z=0,\end{cases}$

取 $x=1$，则 $y=z=-2$，

$\therefore\boldsymbol{n}=(1,-2,-2)$.

又 $\overrightarrow{PB}=(1,2,-3)$，

$\therefore\cos\langle\overrightarrow{PB},\boldsymbol{n}\rangle=\frac{\overrightarrow{PB}\cdot\boldsymbol{n}}{|\overrightarrow{PB}||\boldsymbol{n}|}=\frac{\sqrt{14}}{14}$.

所以 PB 与平面 PCD 所成角的正弦值为 $\frac{\sqrt{14}}{14}$.

10. **解**：(1)证明：由已知可得，$BF\perp PF$，$BF\perp EF$，且 $PF\cap EF=F$，

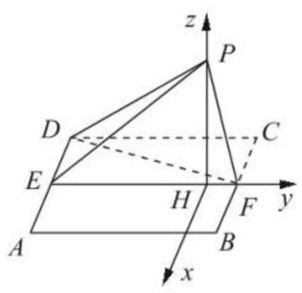
所以 $BF\perp$ 平面 PEF，

又 $BF\subset$ 平面 $ABFD$，

所以平面 $PEF\perp$ 平面 $ABFD$.

(2)作 $PH\perp EF$，垂足为 H，由(1)得，$PH\perp$ 平面 $ABFD$.

以 H 为坐标原点，$\overrightarrow{HF}$ 的方向为 y 轴正方向，$|\overrightarrow{BF}|$ 为单位长度，建立如图所示的空间直角坐标系 $H-xyz$.



由(1)可得，$DE\perp PE$，又 $DP=2$，$DE=1$，

所以 $PE=\sqrt{3}$，

又 $PF=1$，$EF=2$，所以 $PE\perp PF$.

从而可得，$PH=\frac{\sqrt{3}}{2}$，$EH=\frac{3}{2}$.

则 $H(0,0,0)$，$P\left(0,0,\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$，$D\left(-1,-\frac{3}{2},0\right)$，

$\overrightarrow{DP}=\left(1,\frac{3}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$，

$\overrightarrow{HP}=\left(0,0,\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ 为平面 $ABFD$ 的一个法向量.

设 DP 与平面 $ABFD$ 所成的角为 θ，则

$\sin\theta=\left|\frac{\overrightarrow{HP}\cdot\overrightarrow{DP}}{|\overrightarrow{HP}||\overrightarrow{DP}|}\right|=\frac{\frac{3}{4}}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{4}$.

所以 DP 与平面 $ABFD$ 所成角的正弦值为 $\frac{\sqrt{3}}{4}$.

第 26 课时　空间向量与空间距离

基础知识梳理

1. $\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+(z_1-z_2)^2}$　$\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}$

2. (2)$\frac{|\overrightarrow{PA}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{n}|}$

3. (2)$\frac{|\overrightarrow{PO}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{n}|}$

题点知识巩固

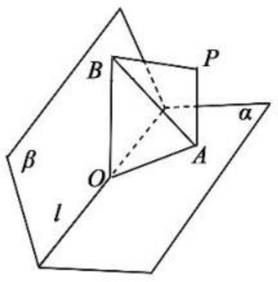
1. 选 C　$|AB|=\sqrt{(2-1)^2+(-2-2)^2+(1-2)^2}=3\sqrt{2}$.

2. 选 C　如图，$\because PA\perp\alpha$，$PB\perp\beta$，又二面角 $\alpha-l-\beta$ 的平面角为 $60°$，

$\therefore\langle\overrightarrow{PA},\overrightarrow{PB}\rangle=120°$，又 $|PA|=4$，$|PB|=2$，

$\therefore|AB|^2=|PA|^2+|PB|^2-2|PA|\cdot|PB|\cos\ 120°=4^2+2^2-2\times4\times2\times\left(-\frac{1}{2}\right)=28$.

$\therefore|AB|=2\sqrt{7}$.



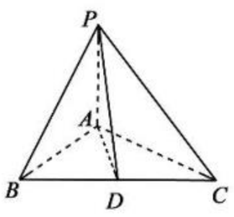
3. 选 D　如图，取 BC 的中点 D，连接 AD，PD，则 PD 为点 P 到 BC 的距离.

由 $AB=AC=5$，$BC=6$，

得 $AD=\sqrt{5^2-3^2}=4$.

又 $PA=8$，

$\therefore PD=\sqrt{8^2+4^2}=4\sqrt{5}$.



4. 选 B　$\because A(2,3,1)$，$P(4,3,2)$，

$\therefore\overrightarrow{PA}=(-2,0,-1)$.

又 $\boldsymbol{n}\perp l$，$\boldsymbol{n}=(1,0,-1)$，

$\therefore$ 点 P 到 l 的距离 $d=\frac{|\overrightarrow{PA}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{n}|}=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

5. 选 D　设 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$ 是平面 $ABCD$ 的法向量，

则由题设 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AB}=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AD}=0,\end{cases}$

即 $\begin{cases}4x-2y+3z=0,\\ -4x+y=0\end{cases}$，不妨取 $y=4$，则 $x=1$，$z=\frac{4}{3}$，

即取 $\boldsymbol{n}=\left(1,4,\frac{4}{3}\right)$，

由于 $\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AP}=-6+8-\frac{32}{3}=-\frac{26}{3}$，

$|\boldsymbol{n}|=\sqrt{1+16+\frac{16}{9}}=\frac{13}{3}$，

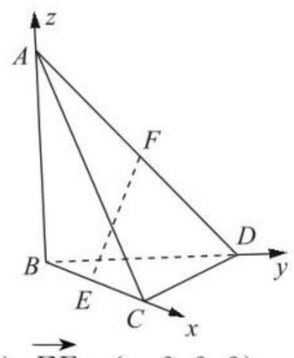
$|\overrightarrow{AP}|=\sqrt{104}=2\sqrt{26}$，

所以 $|\cos\langle\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AP}\rangle|=\frac{\sqrt{26}}{26}$，

故点 P 到平面 $ABCD$ 的距离

$d=|\overrightarrow{AP}|\cdot|\cos\langle\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AP}\rangle|=2\sqrt{26}\times\frac{\sqrt{26}}{26}=2$，故选 D.

6. **解**：如图，分别以 BC，BD，BA 所在直线为 x，y，z 轴建立空间直角坐标系 $B-xyz$，则 $B(0,0,0)$，$A(0,0,4)$，$C(4,0,0)$，$D(0,4,0)$，$E(2,0,0)$，$F(0,2,2)$.



(1)$\because\overrightarrow{AB}=(0,0,-4)$，$\overrightarrow{EF}=(-2,2,2)$，

$\therefore|\cos\langle\overrightarrow{AB},\overrightarrow{EF}\rangle|=\left|\frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{EF}}{|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{EF}|}\right|=\left|\frac{-8}{4\times2\sqrt{3}}\right|=\frac{\sqrt{3}}{3}$，

$\therefore$异面直线 AB 与 EF 所成角的余弦值为 $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

(2)设平面 ACD 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$,

则 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AC}=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{CD}=0.\end{cases}$ $\because\overrightarrow{AC}=(4,0,-4),\overrightarrow{CD}=(-4,4,0)$,

$\therefore\begin{cases}4x-4z=0,\\ -4x+4y=0,\end{cases}$ 令 $z=1$,得 $x=y=1$,

$\therefore\boldsymbol{n}=(1,1,1)$.

$\because F\in$ 平面 $ACD,\overrightarrow{EF}=(-2,2,2)$,

$\therefore E$ 到平面 ACD 的距离为 $d=\dfrac{|\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{EF}|}{|\boldsymbol{n}|}=\dfrac{2}{\sqrt{3}}=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$.

(3)由(2)知,EF 与平面 ACD 所成角的正弦值为

$$|\cos\langle\boldsymbol{n},\overrightarrow{EF}\rangle|=\left|\frac{\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{EF}}{|\boldsymbol{n}||\overrightarrow{EF}|}\right|=\frac{2}{\sqrt{3}\times2\sqrt{3}}=\frac{1}{3}.$$

提能达标过关

1. 选 B $\because M(0,2,2),C(1,1,1)$,

$\therefore|CM|=\sqrt{(0-1)^2+(2-1)^2+(2-1)^2}=\sqrt{3}$.

2. 选 A $\because\overrightarrow{PA}=(-1,3,0)-(-2,1,4)=(1,2,-4)$,又平面 α 的一个法向量 $\boldsymbol{n}=(-2,-2,1)$,$\therefore P$ 到 α 的距离是 $d=\dfrac{|\overrightarrow{PA}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{n}|}=\dfrac{|-2-4-4|}{\sqrt{4+4+1}}=\dfrac{10}{3}$.

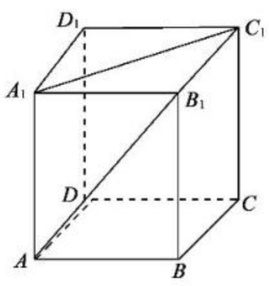
3. 选 B $\because\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CE}$,$|\overrightarrow{AB}|=|\overrightarrow{BC}|=1$,$|\overrightarrow{CE}|=1$,且 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CE}=\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{CE}=0$,

$\therefore\overrightarrow{AE}^2=(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CE})^2=\overrightarrow{AB}^2+\overrightarrow{BC}^2+\overrightarrow{CE}^2=3$,

$\therefore|\overrightarrow{AE}|=\sqrt{3}$.

4. 选 D 如图,$\because A_1C_1\parallel$ 平面 $ABCD$,$\therefore A_1C_1$ 到平面 $ABCD$ 的距离等于点 A_1 到平面 $ABCD$ 的距离,即正四棱柱的高,由已知 $\angle B_1AB=60^\circ$,$AB=1$,

$\therefore BB_1=AB\tan60^\circ=\sqrt{3}$.



5. 选 D 建立空间直角坐标系如图.

$B_1(2,2,2),E(2,1,0),F(1,2,0)$,

$C_1(0,2,2)$.

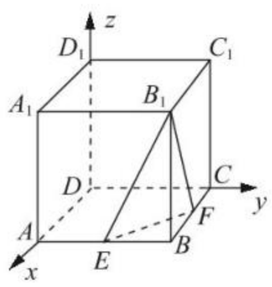
$\therefore\overrightarrow{B_1F}=(-1,0,-2),\overrightarrow{B_1E}=(0,-1,-2)$.

设平面 B_1EF 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$,

则由 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{B_1E}=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{B_1F}=0,\end{cases}$

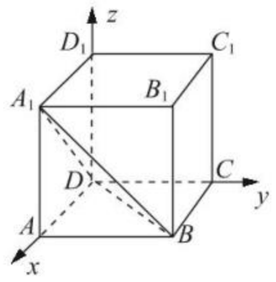
得 $\begin{cases}-y-2z=0,\\ -x-2z=0.\end{cases}$

令 $z=-1$,得 $\boldsymbol{n}=(2,2,-1)$.



又 $\because\overrightarrow{C_1B_1}=(2,0,0)$,$\therefore$ 点 C_1 到平面 B_1EF 的距离为 $d=\dfrac{|\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{C_1B_1}|}{|\boldsymbol{n}|}=\dfrac{4}{3}$.

6. **解析**:建立如图所示的空间直角坐标系,



则 $D_1(0,0,2),A_1(2,0,2),D(0,0,0),B(2,2,0)$,

$\therefore\overrightarrow{D_1A_1}=(2,0,0),\overrightarrow{DA_1}=(2,0,2),\overrightarrow{DB}=(2,2,0)$.

设平面 A_1BD 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$,

则 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{DA_1}=2x+2z=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{DB}=2x+2y=0.\end{cases}$

令 $x=1$,得 $\boldsymbol{n}=(1,-1,-1)$.

$\therefore$ 点 D_1 到平面 A_1BD 的距离为

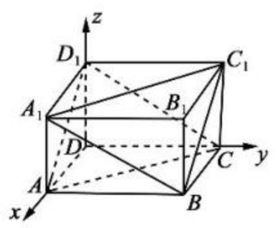
$d=\dfrac{|\overrightarrow{D_1A_1}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{n}|}=\dfrac{2}{\sqrt{3}}=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$.

答案:$\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$

7. **解析**:设 $AC\cap BD=O$,则 $\angle AOC=120^\circ$,在 $\triangle AOC$ 中,$AO=CO=\sqrt{3}$,由余弦定理,得 $AC^2=AO^2+CO^2-2AO\times CO\cos120^\circ=3+3-2\times\sqrt{3}\times\sqrt{3}\times\left(-\dfrac{1}{2}\right)=9$,$\therefore AC=3$.

答案:3

8. **解析**:建立如图所示的空间直角坐标系 $D-xyz$.



则 $A(3,0,0),A_1(3,0,2),B(3,4,0),C_1(0,4,2)$,

$\therefore\overrightarrow{A_1C_1}=(-3,4,0),\overrightarrow{A_1B}=(0,4,-2)$.

设平面 A_1BC_1 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$,

则 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{A_1C_1}=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{A_1B}=0,\end{cases}$ 得 $\begin{cases}-3x+4y=0,\\ 4y-2z=0.\end{cases}$

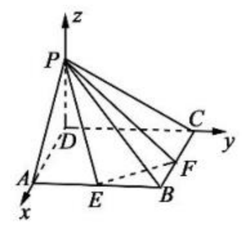
令 $z=2$,得 $\boldsymbol{n}=\left(\dfrac{4}{3},1,2\right)$.

又 $\overrightarrow{AA_1}=(0,0,2)$,$\therefore$ 点 A 到平面 A_1BC_1 的距离为 $d=\dfrac{|\overrightarrow{AA_1}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{n}|}=\dfrac{4}{\sqrt{\frac{61}{9}}}=\dfrac{12\sqrt{61}}{61}$.

易知平面 $A_1BC_1\parallel$ 平面 ACD_1,$\therefore$ 两平面之间的距离为 $\dfrac{12\sqrt{61}}{61}$.

答案:$\dfrac{12\sqrt{61}}{61}$

9. **解**:(1)以 D 为坐标原点,DA,DC,DP 所在直线分别为 x 轴,y 轴和 z 轴,建立空间直角坐标系 $O-xyz$,如图所示.



则 $P(0,0,1),A(1,0,0),C(0,1,0)$,

$E\left(1,\dfrac{1}{2},0\right),F\left(\dfrac{1}{2},1,0\right)$.

$\therefore\overrightarrow{EF}=\left(-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2},0\right),\overrightarrow{PE}=\left(1,\dfrac{1}{2},-1\right)$.

设平面 PEF 的法向量 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$,

则 $\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{EF}=0$,且 $\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{PE}=0$.

$\therefore\begin{cases}-\dfrac{1}{2}x+\dfrac{1}{2}y=0,\\ x+\dfrac{1}{2}y-z=0.\end{cases}$

令 $y=2$,得 $x=2,z=3$.

$\therefore\boldsymbol{n}=(2,2,3)$. 又 $\overrightarrow{DP}=(0,0,1)$,

$\therefore$ 点 D 到平面 PEF 的距离为 $d=\dfrac{|\overrightarrow{DP}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{n}|}=\dfrac{3}{\sqrt{17}}=\dfrac{3\sqrt{17}}{17}$.

因此,点 D 到平面 PEF 的距离为 $\dfrac{3\sqrt{17}}{17}$.

(2)$\because EF\parallel AC$,$AC\not\subset$ 平面 PEF,$\therefore AC\parallel$ 平面 PEF.

$\therefore AC$ 到平面 PEF 的距离即为点 A 到平面 PEF 的距离.

$\because\overrightarrow{AE}=\left(0,\dfrac{1}{2},0\right)$,$\therefore$ 点 A 到平面 PEF 的距离为 $d=\dfrac{|\overrightarrow{AE}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{n}|}=\dfrac{1}{\sqrt{17}}=\dfrac{\sqrt{17}}{17}$.

$\therefore$ 直线 AC 到平面 PEF 的距离为 $\dfrac{\sqrt{17}}{17}$.

10. **解**:(1)证明:$\because$ 四边形 $ABCD$ 是菱形,

$\therefore BD\perp AC$.

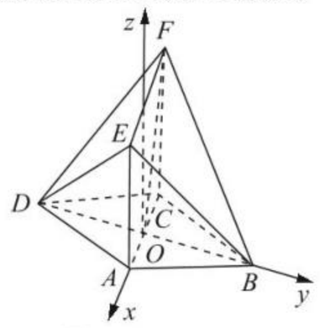
$\because AE\perp$ 平面 $ABCD$,$BD\subset$ 平面 $ABCD$,

$\therefore BD\perp AE$.

$\because AC\cap AE=A$,$\therefore BD\perp$ 平面 $ACFE$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

(2)如图,以 O 为原点,OA,OB 为 x 轴,y 轴的正方向,z 轴过点 O 且平行于 CF,建立空间直角坐标系,



则 $B(0,\sqrt{3},0)$,$D(0,-\sqrt{3},0)$,$E(1,0,2)$,

设 $F(-1,0,a)(a>0)$,

则$\overrightarrow{OF}=(-1,0,a)$,

设平面 EDB 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$,

则 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{OB}=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{OE}=0,\end{cases}$ 得 $\begin{cases}\sqrt{3}y=0,\\ x+2z=0.\end{cases}$

令 $z=1$,得 $\boldsymbol{n}=(-2,0,1)$.

由题意得 $\sin 45^\circ=|\cos\langle\overrightarrow{OF},\boldsymbol{n}\rangle|=\dfrac{|\overrightarrow{OF}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\overrightarrow{OF}||\boldsymbol{n}|}=\dfrac{|2+a|}{\sqrt{a^2+1}\cdot\sqrt{5}}$

$=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$,

解得 $a=3$ 或 $a=-\dfrac{1}{3}$,

$\because a>0$,$\therefore a=3$,

$\therefore CF$ 的长度为 3.

阶段评估 4

1. 选 B $\because\overrightarrow{AB}=(2,3,4)$,$\overrightarrow{OA}=(1,2,0)$,

$\therefore\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{OA}=(2,3,4)+(1,2,0)=(3,5,4)$.

2. 选 D 若 $\alpha/\!/\beta$,则 $\boldsymbol{n}_1/\!/\boldsymbol{n}_2$,故选 D.

3. 选 B 设 $PD=a(a>0)$,则 $A(2,0,0)$,$B(2,2,0)$,$P(0,0,a)$,

$E\left(1,1,\dfrac{a}{2}\right)$,$\therefore\overrightarrow{DP}=(0,0,a)$,$\overrightarrow{AE}=\left(-1,1,\dfrac{a}{2}\right)$,

$\cos\langle\overrightarrow{DP},\overrightarrow{AE}\rangle=\dfrac{\overrightarrow{DP}\cdot\overrightarrow{AE}}{|\overrightarrow{DP}||\overrightarrow{AE}|}=\dfrac{\frac{a^2}{2}}{a\sqrt{2+\frac{a^2}{4}}}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$,得 $a=2$.

$\therefore E(1,1,1)$.

4. 选 A $\because\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(2,\sqrt{2},2\sqrt{3})$,$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=(0,\sqrt{2},0)$,

$\therefore\boldsymbol{a}=(1,\sqrt{2},\sqrt{3})$,$\boldsymbol{b}=(1,0,\sqrt{3})$,

$\therefore\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=\dfrac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}=\dfrac{4}{\sqrt{6}\times 2}=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$.

5. 选 D 依题意,得 $\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=\dfrac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}=\dfrac{3\sqrt{5}}{\sqrt{5}\times\sqrt{12}}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$,所以这条斜线与平面的夹角为 30°.

6. 选 B 由题意,知$\overrightarrow{AS}=(-3,0,2)$,$\overrightarrow{AB}=(-3,3,0)$. 设平面 SAB 法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$,则由 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AS}=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AB}=0,\end{cases}$ 得 $\begin{cases}-3x+2z=0,\\ -3x+3y=0.\end{cases}$ 令 $x=2$,则 $z=3$,$y=2$,得 $\boldsymbol{n}=(2,2,3)$. 与 $\boldsymbol{n}$ 共线的向量都是平面 SAB 的法向量,因此选 B.

7. **解析**:由已知,得$|\overrightarrow{AB}|=|\overrightarrow{BC}|=|\overrightarrow{CD}|=2$,$\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{BC}$,$\overrightarrow{BC}\perp\overrightarrow{CD}$,$\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{CD}$,又$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}$,

$\therefore|\overrightarrow{AD}|^2=(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD})^2$

$=|\overrightarrow{AB}|^2+|\overrightarrow{BC}|^2+|\overrightarrow{CD}|^2+2(\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD})=4+4+4=12$,$\therefore|\overrightarrow{AD}|=2\sqrt{3}$.

答案:$2\sqrt{3}$

8. **解析**:设直线 l 与平面 α 所成的角为 θ,则 $\sin\theta=|\cos\langle\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{n}\rangle|=\dfrac{|\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{n}|}=\dfrac{(-2,3,1)\cdot(4,0,1)}{\sqrt{14}\times\sqrt{17}}=\dfrac{|-7|}{\sqrt{14}\times\sqrt{17}}=\dfrac{\sqrt{238}}{34}$.

答案:$\dfrac{\sqrt{238}}{34}$

9. **解析**:$\because\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{BC}$,$\therefore 3\times1+5\times1-2z=0$,

得 $z=4$. 又 $BP\perp$ 平面 ABC,

$\therefore\begin{cases}x-1+5y+6=0,\\ 3(x-1)+y-3\times4=0,\end{cases}$ 得 $\begin{cases}x=\dfrac{40}{7},\\ y=-\dfrac{15}{7},\end{cases}$

答案:$\dfrac{40}{7}$ $-\dfrac{15}{7}$ 4

10. **解析**:①④是真命题,②③⑤是假命题,在②中 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}(\boldsymbol{c}\neq\boldsymbol{0})\Rightarrow\boldsymbol{c}\cdot(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})=0\Rightarrow\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$ 或 $\boldsymbol{c}\perp(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})$. 在③中,当 $\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$ 为非零向量时,命题成立. 在⑤中,$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}<0$,那么 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 夹角的取值范围是 $\left(\dfrac{\pi}{2},\pi\right]$.

答案:②③⑤

11. **解**:$\overrightarrow{AB}=(-2,-1,3)$,$\overrightarrow{AC}=(1,-3,2)$.

(1)$\because\cos\langle\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\rangle=\dfrac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|}=\dfrac{-2+3+6}{\sqrt{14}\times\sqrt{14}}=\dfrac{1}{2}$,

$\therefore\sin\langle\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\rangle=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$,

$\therefore S=|\overrightarrow{AB}|\cdot|\overrightarrow{AC}|\sin\langle\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\rangle=\sqrt{14}\times\sqrt{14}\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=7\sqrt{3}$.

即以$\overrightarrow{AB}$,$\overrightarrow{AC}$为边的平行四边形的面积为 $7\sqrt{3}$.

(2)设 $\boldsymbol{a}=(x,y,z)$.

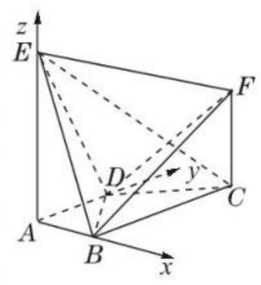
由 $|\boldsymbol{a}|=\sqrt{3}$,$\boldsymbol{a}\perp\overrightarrow{AB}$,$\boldsymbol{a}\perp\overrightarrow{AC}$,

得 $\begin{cases}x^2+y^2+z^2=3,\\ -2x-y+3z=0,\\ x-3y+2z=0.\end{cases}$

解得 $\begin{cases}x=1,\\ y=1,\\ z=1\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x=-1,\\ y=-1,\\ z=-1.\end{cases}$

$\therefore\boldsymbol{a}=(1,1,1)$或$(-1,-1,-1)$.

12. **解**:依题意,可以建立以 A 为原点,分别以$\overrightarrow{AB}$,$\overrightarrow{AD}$,$\overrightarrow{AE}$的方向为 x 轴,y 轴,z 轴正方向的空间直角坐标系(如图),可得 $A(0,0,0)$,$B(1,0,0)$,$C(1,2,0)$,$D(0,1,0)$,$E(0,0,2)$. 设 $CF=h(h>0)$,则 $F(1,2,h)$.



(1)证明:依题意,$\overrightarrow{AB}=(1,0,0)$是平面 ADE 的一个法向量,又$\overrightarrow{BF}=(0,2,h)$,可得$\overrightarrow{BF}\cdot\overrightarrow{AB}=0$,

又因为直线 $BF\not\subset$平面 ADE,

所以 $BF/\!/$平面 ADE.

(2)依题意,$\overrightarrow{BD}=(-1,1,0)$,$\overrightarrow{BE}=(-1,0,2)$,

$\overrightarrow{CE}=(-1,-2,2)$.

设 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$为平面 BDE 的法向量,则 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{BD}=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{BE}=0,\end{cases}$

即 $\begin{cases}-x+y=0,\\ -x+2z=0,\end{cases}$ 不妨令 $z=1$,可得 $\boldsymbol{n}=(2,2,1)$.

因此有 $\cos\langle\overrightarrow{CE},\boldsymbol{n}\rangle=\dfrac{\overrightarrow{CE}\cdot\boldsymbol{n}}{|\overrightarrow{CE}||\boldsymbol{n}|}=-\dfrac{4}{9}$.

所以,直线 CE 与平面 BDE 所成角的正弦值为$\dfrac{4}{9}$.

(3)设 $\boldsymbol{m}=(x_1,y_1,z_1)$为平面 BDF 的法向量,

则 $\begin{cases}\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{BD}=0,\\ \boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{BF}=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}-x_1+y_1=0,\\ 2y_1+hz_1=0,\end{cases}$

不妨令 $y_1=1$,可得 $\boldsymbol{m}=\left(1,1,-\dfrac{2}{h}\right)$.

由题意,有$|\cos\langle\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}\rangle|=\dfrac{|\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{m}||\boldsymbol{n}|}=\dfrac{\left|4-\frac{2}{h}\right|}{3\sqrt{2+\frac{4}{h^2}}}=\dfrac{1}{3}$,

解得 $h=\dfrac{8}{7}$. 经检验,符合题意.

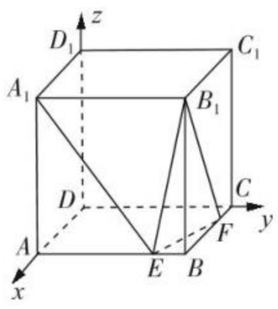
所以,线段 CF 的长为$\dfrac{8}{7}$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

13. **解**：(1)$V_{B_1-BEF}=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}(a-x)\cdot x\cdot a=\frac{a}{6}(a-x)x\leqslant\frac{a}{6}\left(\frac{a-x+x}{2}\right)^2=\frac{a^3}{24}$，

当 $x=\frac{a}{2}$ 时，三棱锥 B_1-BEF 的体积最大.

(2)建立如图坐标系 $D-xyz$. $A_1(a,0,a)$，$B_1(a,a,a)$，$E(a,x,0)$，$F(a-x,a,0)$，$\overrightarrow{A_1E}=(0,x,-a)$，$\overrightarrow{B_1F}=(-x,0,-a)$，设异面直线所成角为 θ，



$$\cos\theta=\left|\frac{a^2}{\sqrt{x^2+a^2}\cdot\sqrt{x^2+a^2}}\right|=\frac{a^2}{x^2+a^2},$$

$0<x\leqslant a$，$\therefore a^2<x^2+a^2\leqslant 2a^2$，$\frac{1}{2}\leqslant\frac{a^2}{x^2+a^2}<1$，

$\therefore$ 夹角范围为 $\left(0,\frac{\pi}{3}\right]$.

14. **解**：(1)证明：$\because AP=CP=AC=4$，O 为 AC 的中点，

$\therefore OP\perp AC$，且 $OP=2\sqrt{3}$.

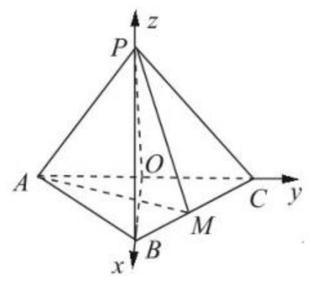
连接 OB，$\because AB=BC=2\sqrt{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}AC$，$\therefore\triangle ABC$ 为等腰直角三角形，且 $OB\perp AC$，$OB=\frac{1}{2}AC=2$.

由 $OP^2+OB^2=PB^2$ 知，$PO\perp OB$.

$\because AC\cap OB=O$，$AC\subset$ 平面 ABC，$OB\subset$ 平面 ABC，

$\therefore PO\perp$ 平面 ABC.

(2)如图，以 O 为坐标原点，$\overrightarrow{OB}$ 的方向为 x 轴的正方向，建立空间直角坐标系 $O-xyz$.



由已知得 $O(0,0,0)$，$B(2,0,0)$，$A(0,-2,0)$，$C(0,2,0)$，$P(0,0,2\sqrt{3})$，$\overrightarrow{AP}=(0,2,2\sqrt{3})$，取平面 PAC 的一个法向量 $\overrightarrow{OB}=(2,0,0)$，

设 $M(a,2-a,0)(0\leqslant a\leqslant 2)$，则 $\overrightarrow{AM}=(a,4-a,0)$.

设平面 PAM 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，

由 $\overrightarrow{AP}\cdot\boldsymbol{n}=0$，$\overrightarrow{AM}\cdot\boldsymbol{n}=0$，得

$\begin{cases}2y+2\sqrt{3}z=0,\\ ax+(4-a)y=0.\end{cases}$ 可取 $\boldsymbol{n}=(\sqrt{3}(a-4),\sqrt{3}a,-a)$.

$\therefore\cos\langle\overrightarrow{OB},\boldsymbol{n}\rangle=\frac{|2\sqrt{3}(a-4)|}{2\sqrt{3(a-4)^2+3a^2+a^2}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

解得 $a=-4$(舍去)，$a=\frac{4}{3}$.

$\therefore\boldsymbol{n}=\left(-\frac{8\sqrt{3}}{3},\frac{4\sqrt{3}}{3},-\frac{4}{3}\right)$.

又 $\because\overrightarrow{PC}=(0,2,-2\sqrt{3})$，$\therefore\cos\langle\overrightarrow{PC},\boldsymbol{n}\rangle=\frac{\sqrt{3}}{4}$.

$\therefore PC$ 与平面 PAM 所成角的正弦值为 $\frac{\sqrt{3}}{4}$.

第二部分　阶段检测

阶段测试一

1. 选 C　“若 p 则 q”的逆命题是“若 q 则 p”. 结合选项可知应选 C.
2. 选 B　若 $\neg p$ 是真命题，则 p 是假命题，又 $p\vee q$ 是真命题，所以 q 一定是真命题.
3. 选 A　$\because m\not\subset\alpha$，$n\subset\alpha$，且 $m\parallel n$，$\therefore m\parallel\alpha$. 若 $m\not\subset\alpha$，$n\subset\alpha$，$m\parallel\alpha$，则不一定能推出 $m\parallel n$，$\therefore$“$m\parallel n$”是“$m\parallel\alpha$”的充分不必要条件.
4. 选 D　原命题是“若一个函数是周期函数，则这个函数不是单调函数”，其逆命题是“不是单调函数的函数是周期函数”；否命题是“若一个函数不是周期函数，则这个函数是单调函数”；逆否命题是“若一个函数是单调函数，则这个函数不是周期函数”，所以 A、B、C 错误，故选 D.
5. 选 B　命题 p 是真命题，则它的逆否命题是真命题. 命题 p 的逆命题：“若 $f(x)=\sin(\omega x+\varphi)$ 的最小正周期为 π，则 $\omega=2$”是假命题，故它的否命题也是假命题.
6. 选 D　当 $x=3$ 时，$x-2>\ln x$ 成立，$\therefore p$ 是真命题. 当 $x=0$ 时，$x^2=0$，$\therefore q$ 是假命题，$\neg q$ 是真命题，$\therefore p\wedge(\neg q)$ 是真命题.
7. 选 A　$\because p$ 是假命题，$\therefore\neg p$ 是真命题，即 $\forall x\in\mathbf{R}$，$x^2+ax+a\geqslant 0$ 是真命题，$\therefore\Delta=a^2-4a\leqslant 0$，$\therefore 0\leqslant a\leqslant 4$.
8. 选 B　由 $\frac{x-1}{x-3}<0$，得 $1<x<3$.

由 $|x-a|<2$，得 $a-2<x<a+2$.

$\because$“$\frac{x-1}{x-3}<0$”是“$|x-a|<2$”的充分不必要条件，

$\therefore\begin{cases}a-2\leqslant 1,\\ a+2\geqslant 3,\end{cases}$ $\therefore 1\leqslant a\leqslant 3$，即实数 a 的取值范围是 $[1,3]$.
9. 选 D　“低于”的否定是“不低于”，“都没有及格”的否定是“至少有一个及格”，故选 D.
10. 选 A　在 A 中，$a+c>b+d\not\Rightarrow a>b$，且 $c>d$，而 $a>b$，且 $c>d\Rightarrow a+c>b+d$. 即 $p\not\Rightarrow q$，而 $q\Rightarrow p$. 所以 p 是 q 的必要不充分条件.
11. 选 D　若 $p\vee q$ 为真命题，则 p 与 q 中可以一真一假，$\therefore p\wedge q$ 不一定是真命题，$\therefore$A 错误；$a>0$，$b>0$ 是 $\frac{b}{a}+\frac{a}{b}\geqslant 2$ 的充分不必要条件，$\therefore$B 错误；$\because x=1$ 或 $x=2$ 的否定应是 $x\neq 1$ 且 $x\neq 2$，$\therefore$命题 $x^2-3x+2=0$ 的逆否命题为若 $x\neq 1$ 且 $x\neq 2$，则 $x^2-3x+2\neq 0$，$\therefore$C 错误，D 正确.
12. 选 D　$\because$“负数的平方是正数”即对 $\forall x<0$，则 $x^2>0$，是全称命题，$\therefore$A 不正确；$\because$对全称命题“$\forall x\in\mathbf{N}$，$x^3>x$”的否定是“$\exists x_0\in\mathbf{N}$，$x_0^3\leqslant x_0$”，$\therefore$B 不正确；$\because f(x)=\cos^2ax-\sin^2ax=\cos 2ax$，当最小正周期为 π 时，有 $\frac{2\pi}{|2a|}=\pi$，$\therefore|a|=1\not\Rightarrow a=1$，$\therefore a=1$ 是“函数 $f(x)=\cos^2ax-\sin^2ax$ 的最小正周期为 π”的充分不必要条件，$\therefore$C 不正确；D 正确.
13. 存在一个常数列，它不是等差数列
14. **解析**：$\because$ 当 $x\in\left[0,\frac{\pi}{3}\right]$ 时，$\tan x\in[0,\sqrt{3}]$，

$\therefore 2\tan x\in[0,2\sqrt{3}]$，$\therefore m$ 的最小值为 $2\sqrt{3}$.

答案：$2\sqrt{3}$
15. **解析**：原命题与逆否命题等价，否命题与逆命题等价，$\therefore$①错，④正确；

对于②可判断的它的逆否命题：若 $a=3$ 且 $b=3$，则 $a+b=6$，是真命题，$\therefore$②正确.

对于③，$\frac{1}{x}<\frac{1}{2}\Leftrightarrow\frac{1}{x}-\frac{1}{2}<0\Leftrightarrow\frac{2-x}{2x}<0\Leftrightarrow 2x(2-x)<0\Leftrightarrow x(x-2)>0\Leftrightarrow x<0$ 或 $x>2$.

$\therefore x>2$ 是 $\frac{1}{x}<\frac{1}{2}$ 的充分不必要条件，$\therefore$③正确.

答案：①
16. **解析**：$\because$ 原命题与其逆否命题等价，$\therefore$①正确，②正确；$\because x=-1$ 时，有 $x^2=1$. $\therefore$③不正确；$\because x\neq 0\not\Rightarrow x+|x|>0$，如 $x=-2$ 时，$x+|x|=-2+2=0$. 但 $x+|x|>0\Rightarrow x>0\Rightarrow x\neq 0$. $\therefore$④正确.

答案：①②④

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

17. **解**：(1)∵$y=\sin^4 x-\cos^4 x=-\cos 2x$，$T=\pi$，∴是真命题.

(2)终边在 y 轴上的角可表示为$\left\{\alpha \middle| \alpha=k\pi+\frac{\pi}{2},k\in\mathbf{Z}\right\}$，

∴是假命题.

(3)∵$y=\sin x$ 与 $y=x$ 的图象只有一个交点$(0,0)$，

∴是假命题.

(4)∵$y=3\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$的图象向右平移$\frac{\pi}{6}$得到$y=3\sin\left[2\left(x-\frac{\pi}{6}\right)+\frac{\pi}{3}\right]=3\sin 2x$的图象，∴是真命题.

(5)$y=\sin\left(x-\frac{\pi}{2}\right)=-\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=-\cos x$，在$[0,\pi]$上是增函数，∴是假命题.

18. **解**：∵$f(x)=x^2+2x-m$.

∴$f(1)=3-m$，$f(2)=8-m$.

又 $f(1)>0$ 是假命题，$f(2)>0$ 是真命题，

∴$\begin{cases}3-m\leqslant 0,\\8-m>0,\end{cases}$解得 $3\leqslant m<8$.

∴实数 m 的取值范围是$[3,8)$.

19. **解**：(1)若 $f(x)=x^2-2ax+1$ 没有零点，则 $\Delta=4a^2-4<0$，

∴$-1<a<1$，即 $A=\{a|-1<a<1\}$.

若 $f(x)$在$(m,m+3)$上不是单调函数，

则 $m<a<m+3$，即 $B=\{a|m<a<m+3\}$.

(2)若 $x\in A$ 是 $x\in B$ 的充分不必要条件，

则 $A\subsetneqq B$，∴$\begin{cases}m\leqslant -1,\\m+3\geqslant 1,\end{cases}$∴$-2\leqslant m\leqslant -1$.

故 m 的取值范围是$[-2,-1]$.

20. **解**：∵$x^2-2x-4m^2+8m-2\geqslant 0$，

∴$4m^2-8m+2\leqslant x^2-2x$.

当 $x\in[-1,1]$时，$x^2-2x\in[-1,3]$.

∵$4m^2-8m+2\leqslant x^2-2x$ 对 $\forall x\in[-1,1]$恒成立，

∴$4m^2-8m+2\leqslant -1$，解得$\frac{1}{2}\leqslant m\leqslant\frac{3}{2}$.

∴p 为真时，$\frac{1}{2}\leqslant m\leqslant\frac{3}{2}$.

当 q 为真时，则 $\exists x_0\in[1,2]$，$x_0^2-mx_0+1>2$ 成立，

即 $m<\frac{x_0^2-1}{x_0}$成立.

令 $g(x)=\frac{x_0^2-1}{x_0}=x_0-\frac{1}{x_0}$，

则 $g(x)$在$[1,2]$上为增函数，

∴$g(x)$的最大值为 $g(2)=\frac{3}{2}$，∴$m<\frac{3}{2}$.

∵“$p\vee q$”为真，“$p\wedge q$”为假，∴p 与 q 一真一假.

当 p 真 q 假时，$\begin{cases}\frac{1}{2}\leqslant m\leqslant\frac{3}{2},\\m\geqslant\frac{3}{2},\end{cases}$∴$m=\frac{3}{2}$；

当 p 假 q 真时，$\begin{cases}m<\frac{1}{2}\text{或 }m>\frac{3}{2},\\m<\frac{3}{2},\end{cases}$

∴$m<\frac{1}{2}$.

综上知，实数 m 的取值范围是$\left\{x \middle| x<\frac{1}{2}\text{或 }m=\frac{3}{2}\right\}$.

21. **解**：设“□”中的数为 t，由小明的描述可知，t 为小于 6 的正整数，即 $t<6$ 且 $t\in\mathbf{N}_+$，

则 $A=\left\{x \middle| 0<x<\frac{1}{t}\right\}$，$B=\{x|-1\leqslant x\leqslant 4\}$，

$C=\left\{x \middle| 0<x<\frac{1}{2}\right\}$.

由小红的描述可知，$A\subsetneqq B$，所以$\frac{1}{t}\leqslant 4$.

由小强的描述可知，$C\subsetneqq A$，所以$\frac{1}{2}<\frac{1}{t}$.

于是可得$\begin{cases}t<6\text{ 且 }t\in\mathbf{N}_+,\\\frac{1}{t}\leqslant 4,\\\frac{1}{t}>\frac{1}{2},\end{cases}$解得 $t=1$.

22. **解**：(1)由 $x^2-4ax+3a^2<0$，得 $a<x<3a(a>0)$.

当 $a=1$ 时，$1<x<3$，所以 p：$1<x<3$.

由$\begin{cases}x^2-x-6\leqslant 0,\\x^2+2x-8>0,\end{cases}$解得 $2<x\leqslant 3$，所以 q：$2<x\leqslant 3$.

若 $p\wedge q$ 为真，则 p 真且 q 真，所以实数 x 的取值范围是$\{x|2<x<3\}$.

(2)设 $A=\{x|x^2-4ax+3a^2<0,a>0\}=\{x|a<x<3a,a>0\}$，$B=\left\{x \middle| \begin{cases}x^2-x-6<0,\\x^2+2x-8>0\end{cases}\right\}=\{x|2<x\leqslant 3\}$.

根据题意可得 $B\subsetneqq A$，则$\begin{cases}0<a\leqslant 2,\\3a>3.\end{cases}$即 $1<a\leqslant 2$. 故实数 a 的取值范围是$\{a|1<a\leqslant 2\}$.

阶段测试二

1. 选 D　把椭圆方程 $2x^2+3y^2=6$ 化为标准形式为$\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{2}=1$. 所以长轴长为 $2\sqrt{3}$.

2. 选 D　因为$|PF_1|:|F_1F_2|:|PF_2|=4:3:2$，

所以设$|PF_1|=4x$，

则$|F_1F_2|=3x$，$|PF_2|=2x$，$x>0$.

因为$|F_1F_2|=3x=2c$，所以 $x=\frac{2}{3}c$.

若曲线为椭圆，则有 $2a=|PF_1|+|PF_2|=6x$，即 $a=3x$，

所以离心率 $e=\frac{c}{a}=\frac{c}{3x}=\frac{c}{3\times\frac{2}{3}c}=\frac{1}{2}$.

若曲线为双曲线，则有 $2a=|PF_1|-|PF_2|=2x$，

即 $a=x$，

所以离心率 $e=\frac{c}{a}=\frac{c}{x}=\frac{c}{\frac{2}{3}c}=\frac{3}{2}$.

3. 选 A　由 $y^2=24ax(a>0)$知，$F(6a,0)$，依题意，得$3-(-6a)=5$，∴$a=\frac{1}{3}$. ∴抛物线方程为 $y^2=8x$.

4. 选 B　由椭圆的方程，可得 $a^2=4$，$b^2=3$，

∴$c=\sqrt{a^2-b^2}=1$，

故椭圆的右焦点 F_2 为$(1,0)$，

即抛物线 C 的焦点为$(1,0)$，

∴$\frac{p}{2}=1$，即 $p=2$.

∴抛物线 C 的方程为 $y^2=4x$.

联立方程组$\begin{cases}\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1,\\y^2=4x,\end{cases}$解得，$x=\frac{2}{3}$，∴$|PF_2|=\frac{2}{3}+1=\frac{5}{3}$，$|PF_1|=2a-|PF_2|=4-\frac{5}{3}=\frac{7}{3}$.

5. 选 A　$y^2=12x$ 的焦点 $F(3,0)$，在双曲线 $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{b^2}=1$ 中，$a=2$，$c=3$，∴$b=\sqrt{c^2-a^2}=\sqrt{5}$. 又渐近线方程为$\sqrt{5}x\pm 2y=0$，故所求的距离为$\frac{3\sqrt{5}}{3}=\sqrt{5}$.

6. 选 A　对于直线 l：$x-2y+2=0$，令 $x=0$，解得 $y=1$；令 $y=0$，解得 $x=-2$，由题意得 $c=2$，$b=1$，∴$a=\sqrt{b^2+c^2}=\sqrt{5}$，

∴$e=\frac{c}{a}=\frac{2}{\sqrt{5}}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

7. 选 B　由题意知$\frac{PA}{AD}+2\cdot\frac{PB}{BC}=10$，

则 $PA+PB=40>AB=6$，

因为 P,A,B 三点不共线，

所以点 P 的轨迹是以 A,B 为焦点的椭圆的一部分.

8. 选 D　由题意得，$m^2=16$，$\therefore m=\pm4$. 当 $m=4$ 时，曲线为椭圆 $x^2+\frac{y^2}{4}=1$，其离心率 $e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{3}}{2}$；当 $m=-4$ 时，曲线为双曲线 $x^2-\frac{y^2}{4}=1$，其离心率 $e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{5}}{1}=\sqrt{5}$.

9. 选 C　设椭圆的长半轴长为 a，双曲线的实半轴长为 a'，半焦距为 c，在焦点三角形 F_1PF_2 中，由余弦定理，

得 $|PF_1|^2+|PF_2|^2-2|PF_1||PF_2|\cos\frac{\pi}{3}=|F_1F_2|^2=4c^2$，

$\therefore\frac{1}{e_1^2}+\frac{3}{e_2^2}=\frac{a^2}{c^2}+\frac{3a'^2}{c^2}=$

$\frac{(|PF_1|+|PF_2|)^2+3(|PF_1|-|PF_2|)^2}{4c^2}=$

$\frac{|PF_1|^2+|PF_2|^2-|PF_1|\cdot|PF_2|}{c^2}=\frac{4c^2}{c^2}=4$.

10. 选 D　$\because$ 抛物线 $y^2=2px$ 的焦点为 $F\left(\frac{p}{2},0\right)$，$\therefore$ 双曲线 $\frac{x^2}{5+p}-\frac{y^2}{7+p}=1$ 的半焦距 $c=\sqrt{12+2p}$，由题意，得 $\sqrt{12+2p}=\frac{p}{2}$，即 $p^2-8p-48=0$，解得 $p=12$ 或 $p=-4$（舍去）.

11. 选 A　设 $A(x_1,y_1),B(x_2,y_2),C(x_3,y_3)$.

$\because$ 抛物线 $y^2=2px(p>0)$ 的焦点为 F，

$\therefore F\left(\frac{p}{2},0\right)$，$\because\overrightarrow{FA}+\overrightarrow{FB}+\overrightarrow{FC}=\mathbf{0}$，

$\therefore\left(x_1-\frac{p}{2},y_1\right)+\left(x_2-\frac{p}{2},y_2\right)+\left(x_3-\frac{p}{2},y_3\right)=(0,0)$，

$\therefore y_1+y_2+y_3=0$，

$\because\frac{1}{k_{AB}}=\frac{x_2-x_1}{y_2-y_1}=\frac{\frac{1}{2p}(y_2^2-y_1^2)}{y_2-y_1}=\frac{y_2+y_1}{2p}$，

同理可知 $\frac{1}{k_{BC}}=\frac{y_3+y_2}{2p}$，$\frac{1}{k_{CA}}=\frac{y_3+y_1}{2p}$.

$\therefore\frac{1}{k_{AB}}+\frac{1}{k_{BC}}+\frac{1}{k_{CA}}=\frac{y_2+y_1}{2p}+\frac{y_3+y_2}{2p}+\frac{y_3+y_1}{2p}=\frac{2(y_1+y_2+y_3)}{2p}=0$.

12. 选 C　由 $\triangle ABC$ 为等边三角形，可求得 $C(1,\pm\sqrt{3})$，代入 $\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{m}=1$，得 $\frac{1}{2}+\frac{3}{m}=1$，$\therefore m=6$. 又 $c^2=m-2=4$，$\therefore c=2$. 又 $a=\sqrt{6}$，$\therefore e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{6}}{3}$.

13. **解析**：由双曲线 $\frac{x^2}{7}-\frac{y^2}{3}=1$，知 $c^2=7+3=10$，

$\therefore c=\sqrt{10}$，$\therefore$ 焦距 $2c=2\sqrt{10}$.

答案：$2\sqrt{10}$

14. **解析**：不妨设双曲线的一条渐近线方程为 $y=\frac{b}{a}x$，则 $\frac{|bc|}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{bc}{c}=b=\frac{\sqrt{3}}{2}c$，$\therefore b^2=c^2-a^2=\frac{3}{4}c^2$，

$\therefore4a^2=c^2$，$\therefore e^2=\frac{c^2}{a^2}=4$，$\therefore e=2$.

答案：2

15. **解析**：由题意得，$|PF_1|-|PF_2|=4|PF_2|-|PF_2|=3|PF_2|=2a$，$\therefore|PF_2|=\frac{2a}{3}$，

又 $|PF_2|\geqslant c-a$，即 $\frac{2}{3}a\geqslant c-a$，

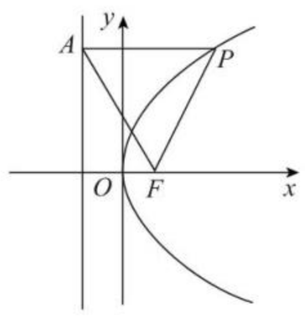
$\therefore e\leqslant\frac{5}{3}$，又 $e>1$，$\therefore1<e\leqslant\frac{5}{3}$.

答案：$\left(1,\frac{5}{3}\right]$

16. **解析**：$\because$ 直线 AF 的倾斜角为 $120°$，

$\therefore\angle AFO=60°$，$\therefore\triangle APF$ 为等边三角形.

$\therefore|PF|=|AF|=\frac{2|OF|}{\cos60°}=\frac{2}{\frac{1}{2}}=4$.



答案：4

17. **解**：(1)因为抛物线 $C:y^2=2px(p>0)$ 的焦点为 $F(1,0)$，抛物线 $E:x^2=2py$ 的焦点为 M，

所以 $p=2$，$M(0,1)$.

①当直线 l 的斜率不存在时，其方程为 $x=0$，满足题意.

②当直线 l 的斜率存在时，设方程为 $y=kx+1$，

代入 $y^2=4x$，得 $k^2x^2+(2k-4)x+1=0$.

当 $k=0$ 时，$x=\frac{1}{4}$，满足题意，直线 l 的方程为 $y=1$；

当 $k\neq0$ 时，令 $\Delta=(2k-4)^2-4k^2=0$，解得 $k=1$，所以直线 l 的方程为 $y=x+1$.

综上，直线 l 的方程为 $x=0$ 或 $y=1$ 或 $y=x+1$.

(2)结合(1)，知抛物线 C 的方程为 $y^2=4x$，

直线 MF 的方程为 $y=-x+1$.

联立 $\begin{cases}y^2=4x,\\y=-x+1,\end{cases}$ 得 $y^2+4y-4=0$，

设 $A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$，

则 $y_1+y_2=-4$，$y_1y_2=-4$，

所以 $|y_1-y_2|=4\sqrt{2}$，

所以 $S_{\triangle OAB}=\frac{1}{2}|OF|\cdot|y_1-y_2|=2\sqrt{2}$.

18. **解**：(1)设椭圆的半焦距为 c，由已知有 $\sqrt{3}a=2b$，又由 $a^2=b^2+c^2$，消去 b 得 $a^2=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}a\right)^2+c^2$，解得 $\frac{c}{a}=\frac{1}{2}$.

所以，椭圆的离心率为 $\frac{1}{2}$.

(2)由(1)知，$a=2c$，$b=\sqrt{3}c$，

故椭圆方程为 $\frac{x^2}{4c^2}+\frac{y^2}{3c^2}=1$.

由题意，$F(-c,0)$，则直线 l 的方程为 $y=\frac{3}{4}(x+c)$.

点 P 的坐标满足 $\begin{cases}\frac{x^2}{4c^2}+\frac{y^2}{3c^2}=1,\\y=\frac{3}{4}(x+c),\end{cases}$ 消去 y 并化简，

得 $7x^2+6cx-13c^2=0$，解得 $x_1=c$，$x_2=-\frac{13c}{7}$.

代入到 l 的方程，解得 $y_1=\frac{3}{2}c$，$y_2=-\frac{9}{14}c$.

因为点 P 在 x 轴上方，所以 $P\left(c,\frac{3}{2}c\right)$.

由圆心 C 在直线 $x=4$ 上，可设 $C(4,t)$.

因为 $OC/\!/AP$，且由(1)知 $A(-2c,0)$，

故 $\frac{t}{4}=\frac{\frac{3}{2}c}{c+2c}$，解得 $t=2$.

因为圆 C 与 x 轴相切，所以圆 C 的半径长为 2.

又由圆 C 与 l 相切，得 $\frac{\left|\frac{3}{4}(4+c)-2\right|}{\sqrt{1+\left(\frac{3}{4}\right)^2}}=2$，可得 $c=2$.

所以，椭圆的方程为 $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{12}=1$.

19. **解**：由 $\begin{cases}y=2x-4,\\y^2=4x,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x=4,\\y=4\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x=1,\\y=-2.\end{cases}$

$\therefore A(4,4),B(1,-2)$.

$\therefore|AB|=\sqrt{(4-1)^2+(4+2)^2}=3\sqrt{5}$.

设 $P(x_0,y_0)$ 为抛物线 AOB 这段曲线上一点，d 为点 P 到直线 AB 的距离，则 $d=\frac{|2x_0-y_0-4|}{\sqrt{4+1}}=\frac{1}{\sqrt{5}}\left|\frac{y_0^2}{2}-y_0-4\right|=\frac{1}{2\sqrt{5}}|(y_0-1)^2-9|$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

∵$-2<y_0<4$，∴当 $y_0=1$ 时，d 有最大值$\frac{9}{2\sqrt{5}}$.

从而△PAB 的最大面积为 $S=\frac{1}{2}\times3\sqrt{5}\times\frac{9}{2\sqrt{5}}=\frac{27}{4}$.

此时 $P\left(\frac{1}{4},1\right)$，因此，当取 $P\left(\frac{1}{4},1\right)$时，△$PAB$ 的面积取得最大值，最大值为$\frac{27}{4}$.

20. **解**：(1)设椭圆 C 的焦距为 $2c$.

因为 $F_1(-1,0)$，$F_2(1,0)$，

所以 $F_1F_2=2$，$c=1$.

又因为$|DF_1|=\frac{5}{2}$，$AF_2\perp x$ 轴，

所以$|DF_2|=\sqrt{|DF_1|^2-|F_1F_2|^2}=\sqrt{\left(\frac{5}{2}\right)^2-2^2}=\frac{3}{2}$，

因此 $2a=|DF_1|+|DF_2|=4$，从而 $a=2$.

由 $b^2=a^2-c^2$，得 $b^2=3$.

因此椭圆 C 的标准方程为$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$.

(2)解法一：由(1)知，椭圆 C：$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$，$a=2$.

因为 $AF_2\perp x$ 轴，所以点 A 的横坐标为 1.

将 $x=1$ 代入圆 F_2 的方程$(x-1)^2+y^2=16$，

解得 $y=\pm4$.

因为点 A 在 x 轴上方，所以 $A(1,4)$.

又 $F_1(-1,0)$，所以直线 AF_1：$y=2x+2$.

由$\begin{cases}y=2x+2,\\(x-1)^2+y^2=16,\end{cases}$得 $5x^2+6x-11=0$，

解得 $x=1$ 或 $x=-\frac{11}{5}$.

将 $x=-\frac{11}{5}$代入 $y=2x+2$，解得 $y=-\frac{12}{5}$.

因此 $B\left(-\frac{11}{5},-\frac{12}{5}\right)$.

又 $F_2(1,0)$，所以直线 BF_2：$y=\frac{3}{4}(x-1)$.

由$\begin{cases}y=\frac{3}{4}(x-1),\\\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1,\end{cases}$得 $7x^2-6x-13=0$，

解得 $x=-1$ 或 $x=\frac{13}{7}$.

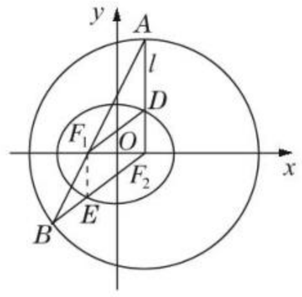
又因为 E 是线段 BF_2 与椭圆的交点，所以 $x=-1$.

将 $x=-1$ 代入 $y=\frac{3}{4}(x-1)$，得 $y=-\frac{3}{2}$.

因此 $E\left(-1,-\frac{3}{2}\right)$.

解法二：由(1)知，椭圆 C：$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$.

如图，连接 EF_1.



因为 $BF_2=2a$，$EF_1+EF_2=2a$，

所以 $EF_1=EB$，

从而$\angle BF_1E=\angle B$.

因为 $F_2A=F_2B$，所以$\angle A=\angle B$.

所以$\angle A=\angle BF_1E$，

从而 $EF_1/\!/F_2A$.

因为 $AF_2\perp x$ 轴，所以 $EF_1\perp x$ 轴.

因为 $F_1(-1,0)$，由$\begin{cases}x=-1,\\\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1,\end{cases}$得 $y=\pm\frac{3}{2}$.

又因为 E 是线段 BF_2 与椭圆的交点，所以 $y=-\frac{3}{2}$.

因此 $E\left(-1,-\frac{3}{2}\right)$.

21. **解**：(1)设 $F(-c,0)(c>0)$，因为 $e=\frac{1}{2}$，所以有 $a=2c$. 又由 $|EH|=\frac{3}{2}$，得$\frac{2b^2}{a}=\frac{3}{2}$，又 $a^2=b^2+c^2$，得 $a=1$，$b^2=\frac{3}{4}$，因此椭圆的方程为 $x^2+\frac{4y^2}{3}=1$.

(2)设直线 AP 的方程为 $x=my+1(m\neq0)$，与直线 l 的方程 $x=-1$ 联立，可得点 $P\left(-1,-\frac{2}{m}\right)$，故 $Q\left(-1,\frac{2}{m}\right)$. 将 $x=my+1$ 与 $x^2+\frac{4y^2}{3}=1$ 联立，消去 x，整理得$(3m^2+4)y^2+6my=0$，解得 $y=0$，或 $y=\frac{-6m}{3m^2+4}$.

由点 B 异于点 A，可得点 $B\left(\frac{-3m^2+4}{3m^2+4},\frac{-6m}{3m^2+4}\right)$. 由 $Q\left(-1,\frac{2}{m}\right)$，可得直线 BQ 的方程为$\left(\frac{-6m}{3m^2+4}-\frac{2}{m}\right)(x+1)-\left(\frac{-3m^2+4}{3m^2+4}+1\right)\left(y-\frac{2}{m}\right)=0$，令 $y=0$，

解得 $x=\frac{2-3m^2}{3m^2+2}$，故 $D\left(\frac{2-3m^2}{3m^2+2},0\right)$.

所以$|AD|=1-\frac{2-3m^2}{3m^2+2}=\frac{6m^2}{3m^2+2}$.

又因为△APD 的面积为$\frac{\sqrt{6}}{2}$，故$\frac{1}{2}\times\frac{6m^2}{3m^2+2}\times\frac{2}{|m|}=\frac{\sqrt{6}}{2}$，

整理得 $3m^2-2\sqrt{6}|m|+2=0$，解得$|m|=\frac{\sqrt{6}}{3}$，

所以 $m=\pm\frac{\sqrt{6}}{3}$.

所以，直线 AP 的方程为 $3x+\sqrt{6}y-3=0$ 或 $3x-\sqrt{6}y-3=0$.

22. **解**：(1)设动圆圆心 $C(x,y)(y>0)$，因为动圆与 x 轴相切，且与圆 $x^2+y^2-2y=0$ 相外切，所以 $\sqrt{x^2+(y-1)^2}-1=|y|$，又 $y>0$，化简得 $x^2=4y(y>0)$.

(2)证明：设 $P(a,b)(a\neq0,b\neq0)$，由方程 $x^2=4y(y>0)$得 $y=\frac{1}{4}x^2$，两边对 x 求导得 $y'=\frac{1}{2}x$.

设切点 $M(x_1,y_1)$，$N(x_2,y_2)$，则 M 点处切线方程为$y-y_1=\frac{x_1}{2}(x-x_1)$.

又 $y_1=\frac{1}{4}x_1^2$，整理得$\frac{1}{2}x_1x-y-y_1=0$，

又切线过 $P(a,b)$，所以$\frac{1}{2}x_1a-b-y_1=0$.

同理可得$\frac{1}{2}x_2a-b-y_2=0$，

所以过 M,N 的直线方程为$\frac{1}{2}ax-y-b=0$.

又 $MN\perp OP$，所以 $k_{MN}\cdot k_{OP}=-1$，

即$\frac{1}{2}a\cdot\frac{b}{a}=-1$，所以 $b=-2$.

所以直线 MN：$\frac{1}{2}ax-y+2=0$ 过 y 轴上的定点$(0,2)$.

阶段测试三

1. 选 B　∵$\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}$，∴$\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{OA}=(5,-1,2)+(4,2,-1)=(9,1,1)$.

2. 选 A　由已知，得 $\boldsymbol{a}=(2,-1,1)$，$\boldsymbol{b}=(1,1,-3)$，

∴$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=2\times1-1\times1+1\times(-3)=-2$.

3. 选 B　①中当 b_1,b_2,b_3 有等于 0 的值时，不成立.

②中$|\boldsymbol{a}|=\sqrt{3}\neq1$，是假命题. ③是真命题.

4. 选 C　$\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\times2\overrightarrow{BF}=\overrightarrow{AF}$.

5. 选 C　∵$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=2\times1+2\times3+0\times z=8$，$|\boldsymbol{a}|=2\sqrt{2}$，$|\boldsymbol{b}|=\sqrt{10+z^2}$，又$\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=\frac{\pi}{3}$，∴$\cos\frac{\pi}{3}=\frac{8}{2\sqrt{2}\times\sqrt{10+z^2}}=\frac{1}{2}$，即$4\sqrt{2}=\sqrt{10+z^2}$，解得 $z=\pm\sqrt{22}$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

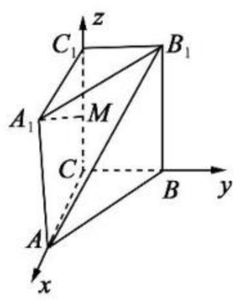
6. 选 C　$\because \overrightarrow{AB}=(-3,-2,-5)$，$\overrightarrow{AC}=(-1,4,-1)$，$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=3-8+5=0$，$\therefore \overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{AC}$，即 $AB\perp AC$，
$\therefore \triangle ABC$ 为直角三角形.

7. 选 B　$\overrightarrow{AP}=(2,0,-3)$，$\overrightarrow{AP}\cdot\boldsymbol{n}=1$，$|\boldsymbol{n}|=\sqrt{5}$，则点 P 到 α 的距离为 $d=\dfrac{|\overrightarrow{AP}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{n}|}=\dfrac{1}{\sqrt{5}}=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$.

8. 选 B　$A(-3,4,3)$ 在平面 yOz 上的射影为 $B(0,4,3)$，且 $|OB|=\sqrt{0^2+4^2+3^2}=5$，$|AB|=3$，设 OA 与平面 yOz 所成的角为 θ，则 $\tan\theta=\dfrac{|AB|}{|OB|}=\dfrac{3}{5}$.

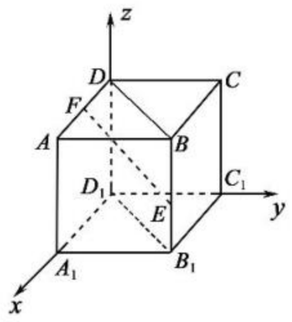
9. 选 B　两平面的一个单位法向量 $\boldsymbol{n}_0=\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2},0,\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$，故两平面间的距离为 $d=|\overrightarrow{OA}\cdot\boldsymbol{n}_0|=\left|-\sqrt{2}+\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right|=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

10. 选 D　建立空间直角坐标系 $C-xyz$ 如图，



则 $A(\sqrt{3},0,0)$，$B_1(0,1,\sqrt{6})$，$A_1(\sqrt{3},0,\sqrt{6})$，$M\left(0,0,\dfrac{\sqrt{6}}{2}\right)$.
于是 $\overrightarrow{AB_1}=(-\sqrt{3},1,\sqrt{6})$，
$\overrightarrow{A_1M}=\left(-\sqrt{3},0,-\dfrac{\sqrt{6}}{2}\right)$.
$\because \overrightarrow{A_1M}\cdot\overrightarrow{AB_1}=3+0-3=0$，
$\therefore \overrightarrow{A_1M}\perp\overrightarrow{AB_1}$. $\therefore$ 异面直线 AB_1 与 A_1M 垂直.

11. 选 B　建立空间直角坐标系 O_1-xyz 如图所示.



设正方体的棱长为 2，则 $D_1(0,0,0)$，$E(2,2,1)$，$F(1,0,2)$.
则 $\overrightarrow{EF}=(-1,-2,1)$，易知平面 BDD_1B_1 的一个法向量为 $\boldsymbol{n}=\overrightarrow{C_1A_1}=(1,-1,0)$，设直线 EF 与平面 BDD_1B_1 所成的角为 θ，则 $\sin\theta=|\cos\langle\overrightarrow{EF},\boldsymbol{n}\rangle|=\dfrac{|\overrightarrow{EF}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\overrightarrow{EF}|\cdot|\boldsymbol{n}|}=\dfrac{1}{\sqrt{6}\times\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{3}}{6}$.

12. 选 D　$\because \overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}=(3m,2m+1,-3)=\left(5,\dfrac{13}{3},-3\right)$，
$\therefore 3m=5$，且 $2m+1=\dfrac{13}{3}$，$\therefore m=\dfrac{5}{3}$.
从而 $\overrightarrow{AB}=\left(\dfrac{10}{3},\dfrac{5}{3},2\right)$，$\overrightarrow{CD}=\left(\dfrac{5}{3},\dfrac{8}{3},-5\right)$.
$\because \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}=\dfrac{10}{3}\times\dfrac{5}{3}+\dfrac{5}{3}\times\dfrac{8}{3}-2\times5=0$，
$\therefore \overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{CD}$.

13. 解析：$\because \boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=(2,2,6)$，又 $\boldsymbol{a}=(2,-3,1)$，
$\therefore \boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=2\times2+2\times(-3)+6\times1=4$.
答案：4

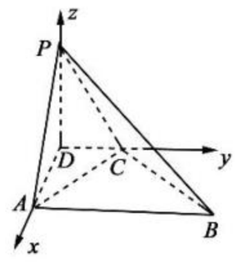
14. 解析：设 C 的坐标为 $(a,0,b)$，$\because A,B,C$ 三点共线，
又 $\overrightarrow{AB}=(1,3,-4)$，$\overrightarrow{AC}=(a-1,2,b-3)$.
$\therefore \dfrac{a-1}{1}=\dfrac{2}{3}=\dfrac{b-3}{-4}$，$\therefore a=\dfrac{5}{3}$，$b=\dfrac{1}{3}$.
$\therefore C$ 的坐标为 $\left(\dfrac{5}{3},0,\dfrac{1}{3}\right)$.
答案：$\left(\dfrac{5}{3},0,\dfrac{1}{3}\right)$

15. 解析：因为点 Q 在直线 OP 上，所以 $\overrightarrow{OQ}\parallel\overrightarrow{OP}$，
设 $\overrightarrow{OQ}=\lambda\overrightarrow{OP}=\lambda(1,1,2)=(\lambda,\lambda,2\lambda)$，
即 $Q(\lambda,\lambda,2\lambda)$，$\overrightarrow{QA}=(1-\lambda,2-\lambda,3-2\lambda)$，$\overrightarrow{QB}=(2-\lambda,1-\lambda,2-2\lambda)$，
所以 $\overrightarrow{QA}\cdot\overrightarrow{QB}=6\lambda^2-16\lambda+10=6\left(\lambda-\dfrac{4}{3}\right)^2-\dfrac{2}{3}$.
故当 $\lambda=\dfrac{4}{3}$ 时，$\overrightarrow{QA}\cdot\overrightarrow{QB}$ 取得最小值，此时点 $Q\left(\dfrac{4}{3},\dfrac{4}{3},\dfrac{8}{3}\right)$.
答案：$\left(\dfrac{4}{3},\dfrac{4}{3},\dfrac{8}{3}\right)$

16. 解析：$\because \overrightarrow{AB}=(2,-1,-4)$，$\overrightarrow{AD}=(4,2,0)$，
$\overrightarrow{AP}=(-1,2,-1)$，
$\therefore \overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AB}=2\times(-1)+(-1)\times2+(-4)\times(-1)=0$，
$\therefore AP\perp AB$，故①正确；
$\because \overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AD}=4\times(-1)+2\times2+0\times(-1)=0$，
$\therefore AP\perp AD$，故②正确；
由①②知，$\overrightarrow{AP}$ 是平面 $ABCD$ 的法向量，故③正确；
$\because BD\subset$ 平面 $ABCD$，$\therefore AP\perp BD$，故④不正确.
答案：①②③

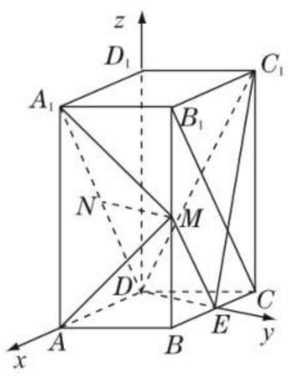
17. 解：(1)$2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=2(1,-3,2)+(-2,1,1)=(0,-5,5)$，
$\therefore |2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=\sqrt{0^2+(-5)^2+5^2}=5\sqrt{2}$.
(2)设存在 t，使 $\overrightarrow{OE}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{AB}=(-3,-1,4)+t(1,-1,-2)=(-3+t,-1-t,4-2t)$，
若 $\overrightarrow{OE}\perp\boldsymbol{b}$，则 $\overrightarrow{OE}\cdot\boldsymbol{b}=0$，
$\therefore -2(-3+t)+(-1-t)+(4-2t)=0$，
即 $5t=9$，$\therefore t=\dfrac{9}{5}$.
$\therefore$ 存在点 E，使得 $\overrightarrow{OE}\perp\boldsymbol{b}$，此时点 E 的坐标为 $\left(-\dfrac{6}{5},-\dfrac{14}{5},\dfrac{2}{5}\right)$.

18. 解：(1)建立空间直角坐标系 $D-xyz$，如图所示.



$\because \angle ADC=\angle DAB=90^\circ$，$AB=4$，$CD=1$，$AD=2$，
$\therefore A(2,0,0)$，$C(0,1,0)$，$B(2,4,0)$.
由 $PD\perp$ 平面 $ABCD$，得 $\angle PAD$ 为 PA 与平面 $ABCD$ 所成的角，$\therefore \angle PAD=60^\circ$. 在 $\mathrm{Rt}\triangle PAD$ 中，$PD=AD\tan60^\circ=2\sqrt{3}$.
$\therefore P(0,0,2\sqrt{3})$.
(2)$\because \overrightarrow{PA}=(2,0,-2\sqrt{3})$，$\overrightarrow{BC}=(-2,-3,0)$.
$\therefore \overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{BC}=-4+0+0=-4$，$|\overrightarrow{PA}|=4$，$|\overrightarrow{BC}|=\sqrt{13}$，
$\therefore \cos\langle\overrightarrow{PA},\overrightarrow{BC}\rangle=\dfrac{-4}{4\times\sqrt{13}}=-\dfrac{\sqrt{13}}{13}$.
$\therefore$ 异面直线 PA 与 BC 所成的角的余弦值为 $\dfrac{\sqrt{13}}{13}$.

19. 解：(1)证明：如图，连接 B_1C，ME.
因为 M,E 分别为 BB_1，BC 的中点，
所以 $ME\parallel B_1C$，且 $ME=\dfrac{1}{2}B_1C$.
又因为 N 为 A_1D 的中点，所以 $ND=\dfrac{1}{2}A_1D$.
由题设知 $A_1B_1\parallel\!\!\!/\, DC$，
可得 $B_1C\parallel\!\!\!/\, A_1D$，
故 $ME\parallel\!\!\!/\, ND$，
因此四边形 $MNDE$ 为平行四边形，
所以 $MN\parallel ED$.
又 $MN\not\subset$ 平面 C_1DE，
所以 $MN\parallel$ 平面 C_1DE.



(2)由已知，可得 $DE\perp DA$. 以 D 为坐标原点，$\overrightarrow{DA}$ 的方向为 x 轴正方向，建立如图所示的空间直角坐标系 $D-xyz$，
则 $A(2,0,0)$，$A_1(2,0,4)$，$M(1,\sqrt{3},2)$，$N(1,0,2)$，$\overrightarrow{A_1A}=(0,0,-4)$，$\overrightarrow{A_1M}=(-1,\sqrt{3},-2)$，$\overrightarrow{A_1N}=(-1,0,-2)$，$\overrightarrow{MN}=(0,-\sqrt{3},0)$.
设 $\boldsymbol{m}=(x,y,z)$ 为平面 A_1MA 的法向量，则 $\begin{cases}\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{A_1M}=0,\\ \boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{A_1A}=0,\end{cases}$
所以 $\begin{cases}-x+\sqrt{3}y-2z=0,\\ -4z=0,\end{cases}$ 可取 $\boldsymbol{m}=(\sqrt{3},1,0)$.
设 $\boldsymbol{n}=(p,q,r)$ 为平面 A_1MN 的法向量，

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

则 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{MN}=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{A_1N}=0,\end{cases}$ 所以 $\begin{cases}-\sqrt{3}q=0,\\ -p-2r=0,\end{cases}$

可取 $\boldsymbol{n}=(2,0,-1)$.

于是 $\cos\langle\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}\rangle=\dfrac{\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{m}||\boldsymbol{n}|}=\dfrac{2\sqrt{3}}{2\times\sqrt{5}}=\dfrac{\sqrt{15}}{5}$,

所以二面角 $A-MA_1-N$ 的正弦值为 $\dfrac{\sqrt{10}}{5}$.

20. **解**:(1)证明:因为 $PD\perp$ 平面 $ABCD$,所以 $PD\perp AC$,

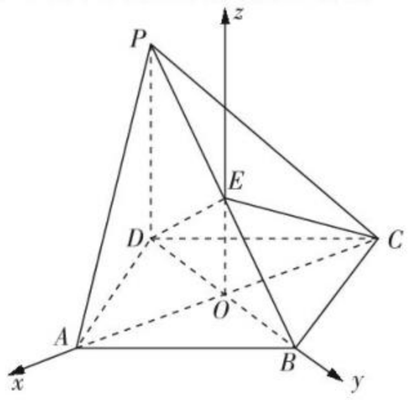
因为四边形 $ABCD$ 为菱形,所以 $BD\perp AC$,

又 $BD\cap PD=D$,所以 $AC\perp$ 平面 PBD,

因为 $DE\subset$ 平面 PBD,所以 $AC\perp DE$.

(2)连接 OE,在 $\triangle PBD$ 中,$EO/\!/PD$,

所以 $EO\perp$ 平面 $ABCD$,分别以 OA,OB,OE 所在直线为 x 轴,y 轴,z 轴,建立如图所示的空间直角坐标系 $O-xyz$,



设 $PD=t$,$(t>0)$,则 $A(1,0,0)$,$B(0,\sqrt{3},0)$,$C(-1,0,0)$,

$E\left(0,0,\dfrac{t}{2}\right)$,$P(0,-\sqrt{3},t)$.

设平面 PAB 的法向量为 $\boldsymbol{m}=(x,y,z)$,

则 $\begin{cases}\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{AB}=-x+\sqrt{3}y=0,\\ \boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{AP}=-x-\sqrt{3}y+tz=0,\end{cases}$

令 $y=1$,得 $\boldsymbol{m}=\left(\sqrt{3},1,\dfrac{2\sqrt{3}}{t}\right)$,

平面 PBD 的一个法向量为 $\boldsymbol{n}=(1,0,0)$,

因为二面角 $A-PB-D$ 的余弦值为 $\dfrac{\sqrt{21}}{7}$,

所以 $|\cos\langle\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}\rangle|=\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{4+\dfrac{12}{t^2}}}=\dfrac{\sqrt{21}}{7}$,

所以 $t=2$ 或 $t=-2$(舍),

则 $P(0,-\sqrt{3},2)$,$E(0,0,1)$,$\boldsymbol{m}=(\sqrt{3},1,\sqrt{3})$,

$\overrightarrow{EC}=(-1,0,-1)$,

所以 $\sin\theta=|\cos\langle\overrightarrow{EC},\boldsymbol{m}\rangle|=\dfrac{|-\sqrt{3}-\sqrt{3}|}{\sqrt{7}\times\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{42}}{7}$,

所以 EC 与平面 PAB 所成角 θ 的正弦值为 $\dfrac{\sqrt{42}}{7}$.

21. **解**:(1)证明:∵长方形 $ABCD$ 中,$AB=2\sqrt{2}$,$AD=\sqrt{2}$,M 为 DC 的中点,∴$AM=BM=2$,

则 $AM\perp BM$.

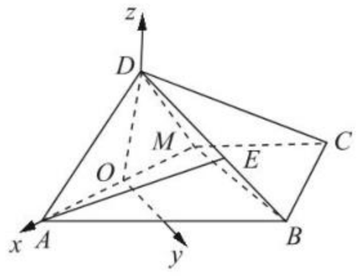
∵平面 $ADM\perp$ 平面 $ABCM$,平面 $ADM\cap$ 平面 $ABCM=AM$,$BM\subset$ 平面 $ABCM$,

∴$BM\perp$ 平面 ADM.

∵$AD\subset$ 平面 ADM,∴$AD\perp BM$.

(2)取 AM 中点 O,连接 DO,则 $DO\perp$ 平面 $ABCM$,

以 O 为原点,建立如图所示空间直角坐标系 $O-xyz$,则平面 ADM 的一个法向量为 $\boldsymbol{m}=(0,1,0)$.



设 $\overrightarrow{DE}=\lambda\overrightarrow{DB}$$(0<\lambda<1)$,$\overrightarrow{ME}=\overrightarrow{MD}+\lambda\overrightarrow{DB}=(1-\lambda,2\lambda,1-\lambda)$,

$\overrightarrow{AM}=(-2,0,0)$.

设平面 AME 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$,

则 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AM}=-2x=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{ME}=(1-\lambda)x+2\lambda y+(1-\lambda)z=0,\end{cases}$

取 $y=1$,得 $\boldsymbol{n}=\left(0,1,\dfrac{2\lambda}{\lambda-1}\right)$.

由 $\cos\langle\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}\rangle=\dfrac{\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{m}||\boldsymbol{n}|}=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$,解得 $\lambda=\dfrac{1}{5}$.

∴点 E 在 BD 上靠近 D 点的 $\dfrac{1}{5}$ 处.

22. **解**:(1)证明:由题设知,平面 $CMD\perp$ 平面 $ABCD$,交线为 CD.

∵$BC\perp CD$,$CD\subset$ 平面 CMD,

∴$BC\perp$ 平面 CMD,故 $BC\perp DM$.

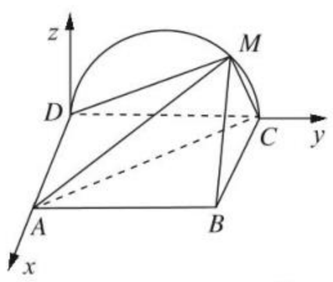
∵M 为 $\overset{\frown}{CD}$ 上异于 C,D 的点,且 DC 为直径,

∴$DM\perp CM$.

∵$BC\cap CM=C$,∴$DM\perp$ 平面 BMC,

∵$DM\subset$ 平面 AMD,∴平面 $AMD\perp$ 平面 BMC.

(2)以 D 为坐标原点,$\overrightarrow{DA}$ 的方向为 x 轴正方向,建立如图所示的空间直角坐标系 $D-xyz$.



当三棱锥 $M-ABC$ 体积最大时,M 为 $\overset{\frown}{CD}$ 的中点.

由题设得 $D(0,0,0)$,$A(2,0,0)$,$B(2,2,0)$,$M(0,1,1)$,

则 $\overrightarrow{AM}=(-2,1,1)$,$\overrightarrow{AB}=(0,2,0)$,$\overrightarrow{DA}=(2,0,0)$.

设平面 MAB 的法向量 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$,

则 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AM}=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AB}=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}-2x+y+z=0,\\ 2y=0.\end{cases}$

令 $x=1$,得 $\boldsymbol{n}=(1,0,2)$.

又 $\overrightarrow{DA}$ 是平面 MCD 的一个法向量,

∴$\cos\langle\boldsymbol{n},\overrightarrow{DA}\rangle=\dfrac{\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{DA}}{|\boldsymbol{n}||\overrightarrow{DA}|}=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$,

∴$\sin\langle\boldsymbol{n},\overrightarrow{DA}\rangle=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$.

∴平面 MAB 与平面 MCD 所成二面角的正弦值是 $\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$.

选修 2-1 综合测评

1. C

2. 选 A　双曲线 $x^2-\dfrac{y^2}{4}=1$ 的渐近线是 $y=\pm2x$,但渐近线方程为 $y=\pm2x$ 的双曲线有无数条,如 $\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{y^2}{8}=1$,所以不一定是 $x^2-\dfrac{y^2}{4}=1$. 故选 A.

3. 选 A　对于 A,若 p 为真命题,q 为假命题,则满足 $p\wedge q$ 为假命题,但是 $p\vee q$ 为真命题,A 错误;对于 B,直线 $ax-2y=1$ 与 $2ax-2y=3$ 平行的充要条件为 $-2a-(-2)\times2a=0$,解得 $a=0$,B 正确;对于 C,由特称命题的否定为全称命题可知 C 正确;对于 D,易知 p 为真命题,q 为假命题,所以 $p\wedge(\neg q)$ 为真命题,D 正确,综上所述,说法错误的为 A 选项,故选 A.

4. 选 C　双曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}-y^2=1(a>0)$ 的渐近线方程为 $y=\pm\dfrac{1}{a}x$.

$a>0$,∴$\dfrac{1}{a}=\tan\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$,∴$a=\sqrt{3}$.

5. 选 B　由 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{c}$,得 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}=(x,1,0)\cdot(2,-4,0)=2x-4=0$,∴$x=2$.

∴$\boldsymbol{a}=(2,1,0)$,由 $\boldsymbol{b}/\!/\boldsymbol{c}$,得 $\dfrac{1}{2}=\dfrac{y}{-4}$,∴$y=-2$,

∴$\boldsymbol{b}=(1,-2,0)$.∴$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(3,-1,0)$.

∴$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=\sqrt{10}$.

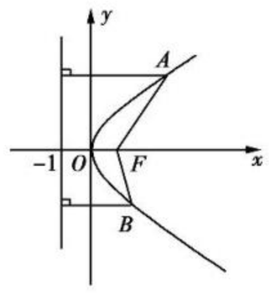
关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

6. 选 B　依题意，知 $F_1(-c,0)$，$F_2(c,0)$，$\because MF_2\perp x$ 轴，

$\therefore M\left(c,\frac{b^2}{a}\right)$．点 M 在直线 $y=\frac{\sqrt{3}}{3}(x+c)$ 上，$\therefore \frac{b^2}{a}=\frac{2\sqrt{3}}{3}c$．又 $b^2=c^2-a^2$，$\therefore 3(c^2-a^2)=2\sqrt{3}ac$，$\therefore 3e^2-2\sqrt{3}e-3=0$．

即 $(\sqrt{3}e-3)(\sqrt{3}e+1)=0$．$\because e>1$，$\therefore e=\sqrt{3}$．

7. 选 D　如图，由抛物线 $y^2=4x$ 知，准线方程是 $x=-1$，由抛物线的定义知，$|AF|+|BF|=x_A+1+x_B+1=7+2=9$．

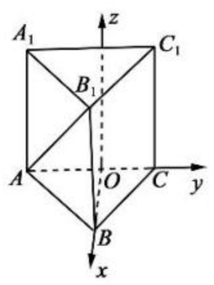


8. 选 C　当焦点在 x 轴上时，$a^2=9$，$b^2=4+k$，则 $c^2=a^2-b^2=5-k$，$\because e=\frac{c}{a}=\frac{4}{5}$，

$\therefore \frac{\sqrt{5-k}}{3}=\frac{4}{5}$，$\therefore k=-\frac{19}{25}$；当焦点在 y 轴上时，$a^2=4+k$，$b^2=9$，则 $c=\sqrt{k-5}$，

$\because e=\frac{c}{a}=\frac{4}{5}$，$\therefore \frac{\sqrt{k-5}}{\sqrt{4+k}}=\frac{4}{5}$，$\therefore k=21$．

9. 选 A　如图所示建立空间直角坐标系 $O-xyz$，设正三棱柱的棱长为 2，$A(0,-1,0)$，$B_1(\sqrt{3},0,2)$，$O(0,0,0)$，$B(\sqrt{3},0,0)$，则 $\overrightarrow{AB_1}=(\sqrt{3},1,2)$，$\overrightarrow{BO}=(-\sqrt{3},0,0)$ 为侧面 ACC_1A_1 的一个法向量，



$\therefore |\cos\langle\overrightarrow{AB_1},\overrightarrow{BO}\rangle|=\frac{|\overrightarrow{AB_1}\cdot\overrightarrow{BO}|}{|\overrightarrow{AB_1}||\overrightarrow{BO}|}=\frac{|-3|}{2\sqrt{2}\times\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{6}}{4}$．

10. 选 B　由 $\triangle AOB$ 为等腰直角三角形，得 $\angle ABO=45°$，

$\therefore k_{OB}=1$，联立 $y=2b$ 与 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$，得 $x=\pm\sqrt{5}a$，

$\therefore$ 点 B 的坐标为 $(\sqrt{5}a,2b)$，则 $\sqrt{5}a=2b$，

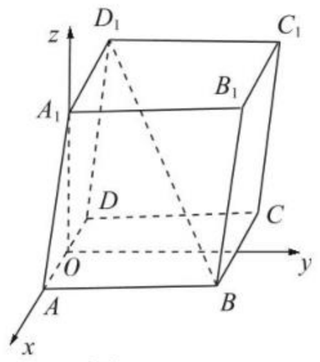
$\therefore e=\sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}}=\sqrt{1+\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2}=\frac{3}{2}$．

11. 选 A　不妨设 $CB=1$，则 $B=(0,0,1)$，$A(2,0,0)$，$C_1(0,2,0)$，$B_1(0,2,1)$．

$\therefore \overrightarrow{BC_1}=(0,2,-1)$，$\overrightarrow{AB_1}=(-2,2,1)$．

$\cos\langle\overrightarrow{BC_1},\overrightarrow{AB_1}\rangle=\frac{\overrightarrow{BC_1}\cdot\overrightarrow{AB_1}}{|\overrightarrow{BC_1}||\overrightarrow{AB_1}|}=\frac{0+4-1}{\sqrt{5}\times3}=\frac{\sqrt{5}}{5}$．

12. 选 C　依题意，取 AD 中点 O 建立如图所示空间直角坐标系 $O-xyz$，



则 $B(1,2,0)$，$D_1(-2,0,\sqrt{3})$，

$\therefore \overrightarrow{BD_1}=(-3,-2,\sqrt{3})$．

又平面 $ABCD$ 的法向量可取 $\boldsymbol{n}=(0,0,1)$．

$\therefore \cos\langle\overrightarrow{BD_1},\boldsymbol{n}\rangle=\frac{\sqrt{3}}{4}$．

设直线 BD_1 与平面 $ABCD$ 所成的角为 θ，

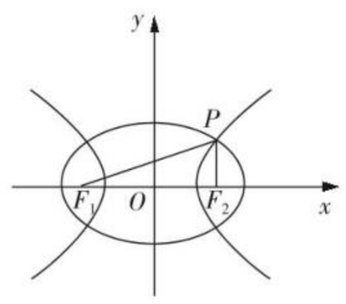
则 $\sin\theta=\frac{\sqrt{3}}{4}$，

$\therefore \cos\theta=\frac{\sqrt{13}}{4}$，$\tan\theta=\frac{\sqrt{39}}{13}$．

13. **解析**：①“若 x,y 互为倒数，则 $xy=1$”是真命题；②“面积不相等的两个三角形一定不全等”是真命题；③若 $m\leqslant1$，则 $\Delta=4-4m\geqslant0$，所以原命题是真命题，故其逆否命题也是真命题；④若 $A\cap B=B$，则 $B\subseteq A$，所以原命题是假命题，故其逆否命题也是假命题．

答案：①②③

14. **解析**：如图，设椭圆的长半轴长为 a_1，双曲线的半实轴长为 a_2，



则根据椭圆及双曲线的定义 $|PF_1|+|PF_2|=2a_1$，$|PF_1|-|PF_2|=2a_2$，

$\therefore |PF_1|=a_1+a_2$，

$|PF_2|=a_1-a_2$，

设 $|F_1F_2|=2c$，$\angle F_1PF_2=\frac{\pi}{3}$，

则在 $\triangle PF_1F_2$ 中，由余弦定理得，

$4c^2=(a_1+a_2)^2+(a_1-a_2)^2-2(a_1+a_2)(a_1-a_2)\cos\frac{\pi}{3}$，

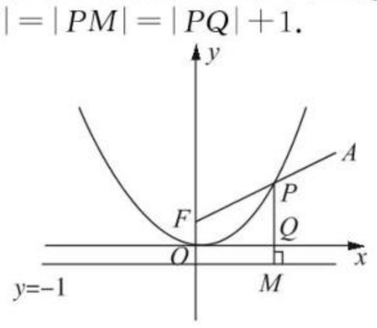
$\therefore$ 化简 $a_1^2+3a_2^2=4c^2$，该式变成 $\frac{1}{e_1^2}+\frac{3}{e_2^2}=4$，

$\therefore \frac{1}{e_1^2}+\frac{3}{e_2^2}=4\geqslant\frac{2\sqrt{3}}{e_1e_2}$，$\therefore \frac{1}{e_1e_2}\leqslant\frac{2\sqrt{3}}{3}$，

$\therefore \frac{1}{e_1e_2}$ 的最大值是 $\frac{2\sqrt{3}}{3}$．

答案：$\frac{2\sqrt{3}}{3}$

15. **解析**：抛物线的焦点为 $F(0,1)$，准线方程为 $y=-1$，根据抛物线的定义知，$|PF|=|PM|=|PQ|+1$．



$\therefore |PA|+|PQ|=|PA|+|PM|-1=|PA|+|PF|-1\geqslant|AF|-1=\sqrt{8^2+(7-1)^2}-1=10-1=9$．

当且仅当 A,P,F 三点共线时，等号成立，则 $|PA|+|PQ|$ 的最小值为 9．

答案：9

16. **解析**：若方程 $\frac{x^2}{4-t}+\frac{y^2}{t-1}=1$ 表示圆，则有 $4-t=t-1>0\Rightarrow t=\frac{5}{2}$；若该方程表示椭圆，则有 $\begin{cases}4-t>0,\\t-1>0,\\4-t\neq t-1,\end{cases}$

解得 $1<t<\frac{5}{2}$ 或 $\frac{5}{2}<t<4$；若该方程表示双曲线，则有 $(4-t)(t-1)<0$，即 $t>4$ 或 $t<1$；当 $1<t<\frac{5}{2}$ 时，$\frac{3}{2}<4-t<3$，而 $0<t-1<\frac{1}{2}$，$\therefore 4-t>t-1>0$，此时该方程表示焦点在 x 轴上的椭圆．综上分析知，正确命题有③④．

答案：③④

17. **解**：(1)若命题 p 为真命题，则 $\begin{cases}k-1>0,\\2k-1>0,\\k-1\neq2k-1.\end{cases}$ 解得 $k>1$．

即 k 的取值范围是 $(1,+\infty)$．

(2)由(1)知，当 p 为真时，$k>1$，当 q 为真时，$k<3$．

$\therefore$ 当 p 真 q 假时，$\begin{cases}k>1,\\k\geqslant3,\end{cases}$ $\therefore k\geqslant3$；

当 p 假 q 真时，$\begin{cases}k\leqslant1,\\k<3.\end{cases}$ $\therefore k\leqslant1$．

故 k 的取值范围是 $(-\infty,1]\cup[3,+\infty)$．

18. **解**：若 $|f(a)|<2$ 成立，则 $\left|\frac{1-a}{3}\right|<2$，即 $-6<1-a<6$，即 $-5<a<7$ 时，p 是真命题；若 $A\neq\varnothing$，则方程 $x^2+(a+2)x+1=0$ 有实数解，$\therefore\Delta=(a+2)^2-4\geqslant0$，解得 $a\leqslant-4$ 或 $a\geqslant0$，即当 $a\leqslant-4$ 或 $a\geqslant0$ 时，q 是真命题．

$\because p\vee q$ 为真命题，$p\wedge q$ 为假命题，$\therefore p$ 与 q 一真一假．

当 p 真 q 假时，有 $-4<a<0$；当 p 假 q 真时，有 $a\leqslant-5$ 或 $a\geqslant7$．

故实数 a 的取值范围是 $(-\infty,-5]\cup(-4,0)\cup[7,+\infty)$．

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

19. **解**：(1)由离心率为$\frac{\sqrt{2}}{2}$，得$\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，

$\therefore a^2=2c^2$，代入 $a^2=b^2+c^2$，得 $b^2=c^2$.

又椭圆 C 的顶点与其两个焦点构成的三角形的面积为 2，即$\frac{1}{2}\times b\times 2c=2$，得 $bc=2$，$b^2c^2=4$，以上各式联立解得 $a^2=4$，$b^2=2$，

$\therefore$椭圆 C 方程为$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}=1$.

(2)①直线 $y=k(x-1)$ 与 x 轴交点为 $M(1,0)$，与 y 轴交点为 $N(0,-k)$，

联立 $\begin{cases}y=k(x-1),\\x^2+2y^2=4\end{cases}$ 消去 y，得 $(1+2k^2)x^2-4k^2x+2k^2-4=0$，

$\Delta=16k^4-4(1+2k^2)(2k^2-4)=24k^2+16>0$.

设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，则 $x_1+x_2=\frac{4k^2}{1+2k^2}$.

又$\overrightarrow{MB}=(x_2-1,y_2)$，$\overrightarrow{AN}=(-x_1,-k-y_1)$，

由$\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{AN}$，得 $x_1+x_2=\frac{4k^2}{1+2k^2}=1$，

解得 $k=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$，由 $k>0$，得 $k=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

②证明：由①知，$x_1+x_2=\frac{4k^2}{1+2k^2}$，$x_1x_2=\frac{2k^2-4}{1+2k^2}$，

$\therefore\overrightarrow{QA}\cdot\overrightarrow{QB}=\left(x_1-\frac{7}{4},y_1\right)\cdot\left(x_2-\frac{7}{4},y_2\right)=\left(x_1-\frac{7}{4}\right)\cdot\left(x_2-\frac{7}{4}\right)+y_1y_2$

$=\left(x_1-\frac{7}{4}\right)\left(x_2-\frac{7}{4}\right)+k^2(x_1-1)(x_2-1)$

$=(1+k^2)x_1x_2+\left(-\frac{7}{4}-k^2\right)\frac{4k^2}{1+2k^2}+k^2+\frac{49}{16}$

$=\frac{2k^2-4+2k^4-4k^2-7k^2-4k^4+k^2+2k^4}{1+2k^2}+\frac{49}{16}$

$=\frac{-8k^2-4}{1+2k^2}+\frac{49}{16}=-4+\frac{49}{16}=-\frac{15}{16}$，

$\therefore\overrightarrow{QA}\cdot\overrightarrow{QB}$为定值.

20. **解**：(1)设椭圆 C 的方程为$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$，抛物线方程为 $x^2=4y$，其焦点为$(0,1)$，

则椭圆 C 的一个顶点为$(0,1)$，即 $b=1$，

由 $e=\frac{c}{a}=\sqrt{\frac{a^2-b^2}{a^2}}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$，

$\therefore a^2=5$，所以椭圆 C 的标准方程为$\frac{x^2}{5}+y^2=1$.

(2)证明：易求出椭圆 C 的右焦点为 $F(2,0)$，设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，$M(0,y_0)$，显然直线 l 的斜率存在，设直线 l 的方程为 $y=k(x-2)$，代入方程$\frac{x^2}{5}+y^2=1$，

整理得$(1+5k^2)x^2-20k^2x+20k^2-5=0$，

$\therefore x_1+x_2=\frac{20k^2}{1+5k^2}$，$x_1x_2=\frac{20k^2-5}{1+5k^2}$，

又$\overrightarrow{MA}=(x_1,y_1-y_0)$，$\overrightarrow{MB}=(x_2,y_2-y_0)$，

$\overrightarrow{AF}=(2-x_1,-y_1)$，$\overrightarrow{BF}=(2-x_2,-y_2)$，

而$\overrightarrow{MA}=\lambda_1\overrightarrow{AF}$，$\overrightarrow{MB}=\lambda_2\overrightarrow{BF}$，

即$(x_1-0,y_1-y_0)=\lambda_1(2-x_1,-y_1)$，

$(x_2-0,y_2-y_0)=\lambda_2(2-x_2,-y_2)$，

$\therefore\lambda_1=\frac{x_1}{2-x_1}$，$\lambda_2=\frac{x_2}{2-x_2}$，所以 $\lambda_1+\lambda_2=\frac{x_1}{2-x_1}+\frac{x_2}{2-x_2}=\frac{2(x_1+x_2)-2x_1x_2}{4-2(x_1+x_2)+x_1x_2}=-10$，为定值.

21. **解**：(1)证明：由已知得 $AD/\!/BE$，$CG/\!/BE$，

所以 $AD/\!/CG$，

所以 AD，CG 确定一个平面，从而 A，C，G，D 四点共面.

由已知，得 $AB\perp BE$，$AB\perp BC$，

所以 $AB\perp$平面 $BCGE$.

又因为 $AB\subset$平面 ABC，所以平面 $ABC\perp$平面 $BCGE$.

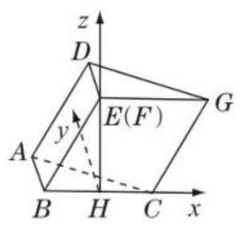
(2)作 $EH\perp BC$，垂足为 H.

因为 $EH\subset$平面 $BCGE$，平面 $BCGE\perp$平面 ABC，

所以 $EH\perp$平面 ABC.

由已知，菱形 $BCGE$ 的边长为 2，$\angle EBC=60^\circ$，可求得 $BH=1$，$EH=\sqrt{3}$.

以 H 为坐标原点，$\overrightarrow{HC}$的方向为 x 轴的正方向，建立如图所示的空间直角坐标系 $H-xyz$，则



$A(-1,1,0)$，$C(1,0,0)$，$G(2,0,\sqrt{3})$，

$\overrightarrow{CG}=(1,0,\sqrt{3})$，$\overrightarrow{AC}=(2,-1,0)$.

设平面 $ACGD$ 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，

则$\begin{cases}\overrightarrow{CG}\cdot\boldsymbol{n}=0,\\\overrightarrow{AC}\cdot\boldsymbol{n}=0,\end{cases}$即$\begin{cases}x+\sqrt{3}z=0,\\2x-y=0.\end{cases}$

所以可取 $\boldsymbol{n}=(3,6,-\sqrt{3})$.

又平面 $BCGE$ 的法向量可取为 $\boldsymbol{m}=(0,1,0)$，

所以 $\cos\langle\boldsymbol{n},\boldsymbol{m}\rangle=\frac{\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{m}}{|\boldsymbol{n}||\boldsymbol{m}|}=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

因此二面角 $B-CG-A$ 的大小为 30°.

22. **解**：(1)证明：$\because CD/\!/EF$，且 $CD=EF$，

$\therefore$四边形 $CDFE$ 为平行四边形，

$\therefore DF/\!/CE$.

$\because DF\not\subset$平面 BCE，$CE\subset$平面 BCE，

$\therefore DF/\!/$平面 BCE.

(2)在平面 $ABEF$ 内，过 A 作 $Az\perp AB$.

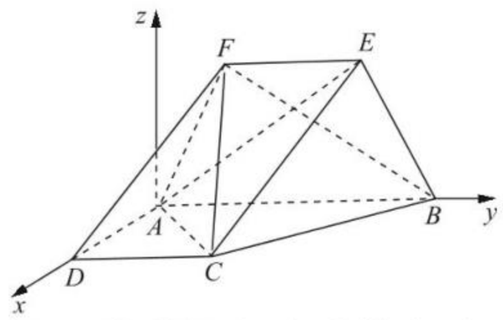
$\because$平面 $ABCD\perp$平面 $ABEF$，平面 $ABCD\cap$平面 $ABEF=AB$，

又 $Az\subset$平面 $ABEF$，$Az\perp AB$，

$\therefore Az\perp$平面 $ABCD$，

$\therefore AD\perp AB$，$AD\perp Az$，$Az\perp AB$.

如图建立空间直角坐标系 $A-xyz$.



由题意得，$A(0,0,0)$，$B(0,4,0)$，$C(2,2,0)$，$E(0,3,\sqrt{3})$，$F(0,1,\sqrt{3})$.

则$\overrightarrow{BC}=(2,-2,0)$，$\overrightarrow{BF}=(0,-3,\sqrt{3})$.

设平面 BCF 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，

则$\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{BC}=0,\\\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{BF}=0,\end{cases}$即$\begin{cases}2x-2y=0,\\-3y+\sqrt{3}z=0.\end{cases}$

令 $y=1$，则 $x=1$，$z=\sqrt{3}$，得 $\boldsymbol{n}=(1,1,\sqrt{3})$.

又平面 ABF 的一个法向量为 $\boldsymbol{v}=(1,0,0)$，

则 $\cos\langle\boldsymbol{n},\boldsymbol{v}\rangle=\frac{\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{v}}{|\boldsymbol{n}||\boldsymbol{v}|}=\frac{\sqrt{5}}{5}$.

又二面角 $C-BF-A$ 的平面角为锐角，

$\therefore$二面角 $C-BF-A$ 的余弦值为$\frac{\sqrt{5}}{5}$.

(3)线段 CE 上不存在点 G，使得 $AG\perp$平面 BCF，理由如下：

解法一：设平面 ACE 的法向量为 $\boldsymbol{m}=(x_1,y_1,z_1)$，

则$\begin{cases}\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{AC}=0,\\\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{AE}=0,\end{cases}$即$\begin{cases}2x_1+2y_1=0,\\3y_1+\sqrt{3}z_1=0.\end{cases}$

令 $y_1=1$，则 $x_1=-1$，$z_1=-\sqrt{3}$，

所以 $\boldsymbol{m}=(-1,1,-\sqrt{3})$.

$\because\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}\neq0$，$\therefore$平面 ACE 与平面 BCF 不可能垂直，

从而线段 CE 上不存在点 G，使得 $AG\perp$平面 BCF.

解法二：线段 CE 上不存在点 G，使得 $AG\perp$平面 BCF，理由如下：

假设线段 CE 上存在点 G，使得 $AG\perp$平面 BCF，

设$\overrightarrow{CG}=\lambda\overrightarrow{CE}$，其中 $\lambda\in[0,1]$.

设 $G(x_2,y_2,z_2)$，则有$(x_2-2,y_2-2,z_2)=(-2\lambda,\lambda,\sqrt{3}\lambda)$，

$\therefore x_2=2-2\lambda$，$y_2=2+\lambda$，$z_2=\sqrt{3}\lambda$，从而 $G(2-2\lambda,2+\lambda,\sqrt{3}\lambda)$，

$\therefore\overrightarrow{AG}=(2-2\lambda,2+\lambda,\sqrt{3}\lambda)$. $\because AG\perp$平面 BCF，$\therefore\overrightarrow{AG}/\!/\boldsymbol{n}$.

$\therefore$有$\frac{2-2\lambda}{1}=\frac{2+\lambda}{1}=\frac{\sqrt{3}\lambda}{\sqrt{3}}$，$\because$上述方程组无解，所以假设不成立.

$\therefore$线段 CE 上不存在点 G，使得 $AG\perp$平面 BCF.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

责任编辑 李 莉 赵黎黎
美术编辑 李 欣
封面设计 欣 羽

45 分钟
课时作业与单元测试

45FENZHONG KESHIZUOYEYUDANYUANCESHI SHUXUE

丛书科目

语文 数学 英语 物理 化学 生物 历史 地理 思想政治

同学们，你想了解丛书的更多信息吗？详情请登录 http://www.dfjc100.com

※ 各科配有教师用书及教学课件光盘 (word 文档可自主编辑)，英语配有原声磁带 / MP3 光盘。

左手骄子之路练习题，右手阿凡题答疑

扫码下载APP

拍照搜题，秒回解析，火箭速度提升学习效率

随时随地老师在线答疑，看得懂，学得会，听得见

积累错题本，问题不过夜，养成学习好习惯

ISBN 978-7-202-08030-6

9 787202 080306 02>

定价：35.00 元

手机扫一扫
获取配套学习资源

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料