东方杰创®
DONGFANG JIECHUANG
让 学习更快乐，人生更精彩

骄子之路®
the Road to Pride
主　编：邓保沧

45分钟

课时作业与单元测试

活页
可拆开使用

教辅资料站

电子教辅　试卷练习
知识总结　备课资源

扫码关注获取更多学习资料

提升＝基础＋能力＋方法
课时作业　基础自测·知能提升
阶段检测　梯度练习·评估达标
答案与解析　全解全析·点拨精准

数学

选修 2-2　RJ·A

河北人民出版社

东方杰创®
DONGFANG JIECHUANG
让 学习更快乐，人生更精彩

骄子之路®
the Road to Pride
主　编：邓保沧

45分钟

课时作业与单元测试

活页
可拆开使用

提升＝基础＋能力＋方法
课时作业　基础自测·知能提升
阶段检测　梯度练习·评估达标
答案与解析　全解全析·点拨精准

数学

选修2–2　RJ·A

河北人民出版社
石家庄

微信公众号
教辅资料站
关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

图书在版编目（CIP）数据

45分钟课时作业与单元测试．A版．数学．2-2：选修 / 邓保沧主编．－石家庄：河北人民出版社，2013.8(2019.10重印)
ISBN 978-7-202-08031-3

Ⅰ．①4… Ⅱ．①邓… Ⅲ．①中学数学课－高中－习题集
Ⅳ．①G634

中国版本图书馆CIP数据核字(2013)第194931号

编　委：李　越　张瑞霞　李　雅
天高云　蒋　敏　金剑飞

书　名　45分钟课时作业与单元测试　数学　选修2-2　A
主　编　邓保沧

责任编辑　李　莉　陈小彦
美术编辑　李　欣
封面设计　欣　羽

出版发行　河北人民出版社（石家庄市友谊北大街330号）
印　刷　河北伦洋印业有限公司
开　本　880毫米×1230毫米　1/16
印　张　6
字　数　192 000
版　次　2013年8月第1版　2019年10月第5次印刷
书　号　ISBN 978-7-202-08031-3
定　价　30.00元

版权所有　翻印必究

微信公众号
教辅资料站

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料



目录 CONTENTS

第一部分　课时作业

第一章　导数及其应用 …… 1

1.1　变化率与导数 …… 1

1.1.1　变化率问题 …… 1

1.1.2　导数的概念 …… 1

1.1.3　导数的几何意义 …… 3

1.2　导数的计算 …… 5

1.2.1　几个常用函数的导数 …… 5

1.2.2　基本初等函数的导数公式及导数的运算法则(一) …… 5

1.2.2　基本初等函数的导数公式及导数的运算法则(二) …… 7

1.3　导数在研究函数中的应用 …… 9

1.3.1　函数的单调性与导数 …… 9

1.3.2　函数的极值与导数 …… 11

1.3.3　函数的最大(小)值与导数 …… 13

1.4　生活中的优化问题举例 …… 15

1.5　定积分的概念 …… 17

1.5.1　曲边梯形的面积 …… 17

1.5.2　汽车行驶的路程 …… 17

1.5.3　定积分的概念 …… 19

1.6　微积分基本定理 …… 21

1.7　定积分的简单应用 …… 23

1.7.1　定积分在几何中的应用 …… 23

1.7.2　定积分在物理中的应用 …… 25

微信公众号
教辅资料站

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料



目录 CONTENTS

第二章　推理与证明 …… 27

2.1　合情推理与演绎推理 …… 27

2.1.1　合情推理 …… 27

2.1.2　演绎推理 …… 29

2.2　直接证明与间接证明 …… 31

2.2.1　综合法和分析法 …… 31

2.2.2　反证法 …… 33

2.3　数学归纳法 …… 35

第三章　数系的扩充与复数的引入 …… 37

3.1　数系的扩充和复数的概念 …… 37

3.1.1　数系的扩充和复数的概念 …… 37

3.1.2　复数的几何意义 …… 39

3.2　复数代数形式的四则运算 …… 41

3.2.1　复数代数形式的加、减运算及其几何意义 …… 41

3.2.2　复数代数形式的乘除运算 …… 43

第二部分　阶段检测

阶段测试一（第一章　导数及其应用） …… 45

阶段测试二（第二章　推理与证明） …… 49

阶段测试三（第三章　数系的扩充与复数的引入） …… 53

选修 2—2 综合测评 …… 57

第三部分　答案与解析

答案与解析 …… 62～92

提示：全书包括课时作业、阶段检测、答案与解析三部分，共计 96 页。

（根据教师教学情况不同，课时作业和阶段检测部分可在书中作答，也可撕下使用。）

微信公众号 教辅资料站

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

第一章 导数及其应用

1.1 变化率与导数

1.1.1 变化率问题
1.1.2 导数的概念

基础知识梳理

1. 平均变化率

对于函数 $f(x)$，当自变量 x 从 x_1 变到 x_2 时，函数值从 $f(x_1)$ 变到 $f(x_2)$，则称式子_____为函数 $f(x)$ 从 x_1 到 x_2 的平均变化率. 习惯上，自变量的改变量用 Δx 表示，即 $\Delta x=$_____，函数值的改变量用 Δy 表示，即 $\Delta y=$_____，于是平均变化率可以表示为_____.

2. 导数的概念

一般地，函数 $y=f(x)$ 在 $x=x_0$ 处的瞬时变化率是_____=_____，称它为函数 $y=f(x)$ 在 $x=x_0$ 处的导数. 记作_____或_____，即 $f'(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=$_____.

题点知识巩固

知识点一 平均变化率的求法

1. 设函数 $f(x)=x^2-2$，当自变量由 1 变为 1.1 时，函数的平均变化率为 ( )

A. 2.1　　B. 1.1

C. 2　　D. 1

2. 质点运动规律为 $s=2t^2+5$，则在时间 $(3,3+\Delta t)$ 中，相应的平均速度等于 ( )

A. $6+\Delta t$　　B. $12+\Delta t+\dfrac{9}{\Delta t}$

C. $12+2\Delta t$　　D. 12

知识点二 函数在某点处的导数

3. 设函数 $f(x)$ 在点 x_0 附近有定义，且有 $f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=a\Delta x+b(\Delta x)^2$（$a,b$ 为常数），则 ( )

A. $f'(x)=a$　　B. $f'(x)=b$

C. $f'(x_0)=a$　　D. $f'(x_0)=b$

4. 求函数 $f(x)=3x^2-x$ 在 $x=2$ 处的导数.

知识点三 函数变化率的应用

5. 质点 A 运动的位移与时间 t 的关系式为 $s=3t^2$，则在 $t=3$ 的瞬时速度为 ( )

A. 6　　B. 18

C. 54　　D. 81

6. 服药后，人体血液中药物的质量浓度 y（单位：$\mu g/mL$）是时间 t（单位：min）的函数 $y=f(t)$，假设函数 $y=f(t)$ 在 $t=10$ 和 $t=100$ 处的导数分别为 $f'(10)=1.5$ 和 $f'(100)=-0.6$，试解释它们的实际意义.

提能达标过关

一、选择题

1. 在平均变化率的定义中，自变量 x 在 x_0 处的增量 Δx ( )

A. 大于零　　B. 小于零

C. 等于零　　D. 不等于 0

2. 函数 $y=2x+1$ 在区间 $[x_0,x_0+\Delta x]$ 上的平均变化率为 ( )

A. 1　　B. 2

C. $2+\Delta x$　　D. $1+\Delta x$

3. 设 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处可导，则 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0-\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$ 等于 ( )

A. $-f'(x_0)$　　B. $f'(-x_0)$

C. $f'(x_0)$　　D. $2f'(x_0)$

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

4. 某质点的运动方程是 $s=t-(2t-1)^2$，则在 $t=1$ s 时的瞬时速度为（　　）

A. -1　　B. -3

C. 7　　D. 13

5. 若函数 $f(x)=ax-2$ 在 $x=3$ 处的导数等于 4，则 $a=$（　　）

A. 3　　B. -2

C. 4　　D. 2

二、填空题

6. 若 $f'(x_0)=3$，则 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+2\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=$_____.

7. 函数 $f(x)=(x-a)^2$，当 $x=a$ 时，导数 $f'(a)=$_____.

8. 已知函数 $f(x)=x^2+2xf'(0)$，则 $f'(0)=$_____.

三、解答题

9. 子弹在枪筒中运动可以看作是匀变速运动，如果它的加速度是 $a=5\times10^5$ m/s^2，子弹从出发到从枪口射出时所用的时间为 $t_0=1.6\times10^{-3}$ s. 求子弹射出枪口时的瞬时速度.

10. （**2019·蚌埠高二月考**）已知某一运动物体在 x s 时离出发点的距离为 $f(x)$ m，且满足 $f(x)=\dfrac{2}{3}x^3+x^2+2x$.

(1)求在第 1 s 内的平均速度；

(2)求在第 1 s 末的瞬时速度；

(3)经过多长时间该物体的速度达到 14 m/s?

微信公众号
教辅资料站

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

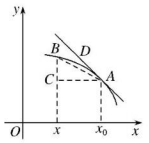
1.1.3　导数的几何意义

基础知识梳理

1. 导数的几何意义

(1)割线斜率与切线斜率

设函数 $y=f(x)$ 的图象如图所示，AB 是过点 $A(x_0,f(x_0))$ 与点 $B(x_0+\Delta x,f(x_0+\Delta x))$ 的一条割线，此割线的斜率是 $\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$.



当点 B 沿曲线趋近于点 A 时，割线 AB 绕点 A 转动，它的极限位置为直线 AD，这条直线 AD 叫做此曲线在点 A 处的_____.

于是，当 $\Delta x\to 0$ 时，割线 AB 的斜率无限趋近于过点 A 的切线 AD 的斜率 k，则 $k=$_____$=$_____.

(2)导数的几何意义

函数 $y=f(x)$ 在点 $x=x_0$ 处的导数的几何意义是曲线 $y=f(x)$ 在点 $P(x_0,f(x_0))$ 处的切线的_____. 也就是说，曲线 $y=f(x)$ 在点 $P(x_0,f(x_0))$ 处的切线的斜率是_____，相应地，切线方程为_____.

2. 函数的导数

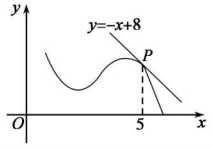
当 $x=x_0$ 时，$f'(x_0)$ 是一个确定的数，当 x 变化时，$f'(x)$ 是 x 的一个函数，称 $f'(x)$ 是 $f(x)$ 的导函数(简称导数). $f'(x)$ 也记作 y'，即 $f'(x)=y'=$_____.

题点知识巩固

知识点一　求函数在某点处的切线

1. 已知函数 $f(x)=x^3-4x$ $(x>0)$ 的零点为 x_0，则函数 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处的切线方程为_____.

2. **(2019·马鞍山高三模拟)** 如图，函数 $y=f(x)$ 的图象在点 P 处的切线方程是 $y=-x+8$，则 $f(5)+f'(5)$ 等于_____.



知识点二　求过某点的切线方程

3. 若曲线 $y=x^3+x-2$ 在点 P 处的切线平行于直线 $y=4x-1$，则切点 P 的坐标为　(　)

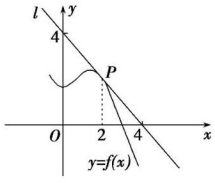
A. $(0,-1)$ 或 $(1,0)$　　B. $(1,0)$ 或 $(-1,-4)$

C. $(-1,-4)$ 或 $(0,2)$　　D. $(1,0)$ 或 $(2,8)$

4. 已知曲线 $y=2x^2-7$，求曲线过点 $P(3,9)$ 的切线方程.

知识点三　导数几何意义的综合运用

5. **(2019·邢台高三模拟)** 如图，函数 $y=f(x)$ 的图象在点 $P(2,y)$ 处的切线是 l，则 $f(2)+f'(2)$ 等于　(　)



A. -4　　B. 3

C. -2　　D. 1

6. **(2019·辽阳高二月考)** 过曲线 $y=x^2$ 上某点 P 的切线满足下列条件，分别求出 P 点.

(1)平行于直线 $y=4x-5$；

(2)垂直于直线 $2x-6y+5=0$；

(3)与 x 轴成 $135°$ 的倾斜角.

提能达标过关

一、选择题

1. 下列说法正确的是　(　)

A. 若 $f'(x_0)$ 不存在，则曲线 $y=f(x)$ 在点 $(x_0,f(x_0))$ 处就没有切线

B. 若曲线 $y=f(x)$ 在点 $(x_0,f(x_0))$ 处有切线，则 $f'(x_0)$ 必存在

C. 若 $f'(x_0)$ 不存在，则曲线 $y=f(x)$ 在点 $(x_0,f(x_0))$ 处的切线斜率不存在

D. 若曲线 $y=f(x)$ 在点 $(x_0,f(x_0))$ 处的切线斜率不存在，则曲线在该点处就没有切线

2. 设曲线 $y=f(x)$，若 $f'(3)=0$，则曲线在点 $(3,f(3))$ 处的切线　(　)

A. 与 x 轴平行　　B. 与 x 轴垂直

C. 与 x 轴斜交　　D. 与 x 轴平行或重合

3. 在曲线 $y=x^2$ 上切线的倾斜角为 $\frac{\pi}{4}$ 的点是　(　)

A. $(0,0)$　　B. $(2,4)$

C. $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{4}\right)$　　D. $(1,1)$

微信公众号 教辅资料站

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

4. 设曲线 $y=ax^2$ 在点$(1,a)$处的切线与直线 $2x-y-6=0$ 平行，则 a 等于　　(　　)

A. 1　　B. $\frac{1}{2}$

C. $-\frac{1}{2}$　　D. -1

5. 设点 P 是曲线 $y=x^3-\sqrt{3}x+\frac{3}{5}$ 上的任意一点，点 P 处切线的倾斜角为 α，则角 α 的取值范围是　　(　　)

A. $\left[0,\frac{2}{3}\pi\right]$　　B. $\left[0,\frac{\pi}{2}\right)\cup\left[\frac{2}{3}\pi,\pi\right)$

C. $\left(\frac{\pi}{2},\frac{2}{3}\pi\right]$　　D. $\left[\frac{\pi}{3},\frac{2\pi}{3}\right]$

二、填空题

6. 已知曲线 $y=2x^2+4x$ 在 P 处切线斜率为 16，则点 P 的坐标为_____.

7. 函数 $y=f(x)$ 的图象在点 P 处的切线方程为 $2x+y-9=0$. 若点 P 的横坐标为 4，则 $f(4)+f'(4)=$_____.

8. 已知函数 $f(x)=ax^2+bx(a>0,b>0)$ 的图象在点 $(1,f(1))$ 处的切线的斜率为 2，则 $\frac{8a+b}{ab}$ 的最小值为_____.

三、解答题

9. 已知曲线 $y=x^2-1$ 在 $x=x_0$ 处的切线与曲线 $y=1-x^3$ 在 $x=x_0$ 处的切线互相平行，试分别求出这两条平行的切线方程.

10. (**2019·陵川高二质检**)已知直线 $y=4x+a$ 和曲线 $y=x^3-2x^2+3$ 相切，求切点坐标及 a 的值.

微信公众号
教辅资料站

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

1.2　导数的计算

1.2.1　几个常用函数的导数
1.2.2　基本初等函数的导数公式及导数的运算法则(一)

基础知识梳理

1. 几个常用函数的导数

原函数	导函数
$f(x)=c$	$f'(x)=$____
$f(x)=x$	$f'(x)=$____
$f(x)=x^2$	$f'(x)=$____
$f(x)=\frac{1}{x}$	$f'(x)=$____
$f(x)=\sqrt{x}$	$f'(x)=$____

2. 基本初等函数的导数公式

原函数	导函数
$f(x)=c$(c 为常数)	$f'(x)=$_____
$f(x)=x^{\alpha}(\alpha\in\mathbf{Q}^*)$	$f'(x)=$_____
$f(x)=\sin x$	$f'(x)=$_____
$f(x)=\cos x$	$f'(x)=$_____
$f(x)=a^x$	$f'(x)=$_____
$f(x)=e^x$	$f'(x)=$_____
$f(x)=\log_a x$	$f'(x)=$_____
$f(x)=\ln x$	$f'(x)=$_____

题点知识巩固

知识点一　利用定义求函数的导数

1. 利用定义求函数 $y=\sqrt{x}$ 的导数.

知识点二　利用导数公式求函数的导数

2. 求下列函数的导数

(1) $y=\cos\frac{\pi}{3}$;

(2) $y=3^x$;

(3) $y=\sqrt{x^5}$;

(4) $y=\log_2 x$.

知识点三　导数的综合应用

3. 设曲线 $y=x^{n+1}(n\in\mathbf{N}^*)$ 在点(1,1)处的切线与 x 轴交点的横坐标为 x_n,则 $x_1\cdot x_2\cdot\cdots\cdot x_n$ 的值为 (　　)

A. $\frac{1}{n}$　　B. $\frac{1}{n+1}$

C. $\frac{n}{n+1}$　　D. 1

4. 曲线 $y=x^3$ 在点 $P(1,1)$ 处的切线与 y 轴交点的纵坐标是 (　　)

A. -2　　B. 2

C. -3　　D. 3

提能达标过关

一、选择题

1. 下列结论正确的是 (　　)

A. 若 $y=\cos x$,则 $y'=\sin x$

B. 若 $y=\sin x$,则 $y'=-\cos x$

C. 若 $y=\frac{1}{x}$,则 $y'=-\frac{1}{x^2}$

D. 若 $y=\sqrt{x}$,则 $y'=\frac{\sqrt{x}}{2}$

2. 函数 $y=e^x$ 在点(0,1)处的切线方程为 (　　)

A. $y=\frac{1}{e}x+1$　　B. $y=ex+1$

C. $y=x-1$　　D. $y=x+1$

微信公众号 教辅资料站

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

3. 正弦曲线 $y=\sin x$ 上一点 P，以点 P 为切点的切线为直线 l，则直线 l 的倾斜角的范围是（　　）

A. $\left[0,\frac{\pi}{4}\right]\cup\left[\frac{3\pi}{4},\pi\right)$

B. $[0,\pi)$

C. $\left[\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4}\right]$

D. $\left[0,\frac{\pi}{4}\right]\cup\left[\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{4}\right]$

4. **(2019·定州高三模拟)** 若函数 $y=f(x)$ 的图象上存在两点，使得函数的图象在这两点处的切线互相垂直，则称 $y=f(x)$ 具有T性质. 下列函数中具有T性质的是（　　）

A. $y=\sin x$　　B. $y=\ln x$

C. $y=e^x$　　D. $y=x^3$

5. 已知直线 $y=kx$ 与曲线 $y=\ln x$ 相切，则 k 的值为（　　）

A. e　　B. $-e$

C. $\frac{1}{e}$　　D. $-\frac{1}{e}$

二、填空题

6. 若 $f(x)=10^x$，则 $f'(1)=$_____.

7. 曲线 $y=\log_2 x$ 在点 $(1,0)$ 处的切线与坐标轴所围成三角形的面积等于_____.

8. **(2019·寿光高二月考)** 设 $f_0(x)=\sin x$，$f_1(x)=f_0'(x)$，$f_2(x)=f_1'(x)$，…，$f_{n+1}(x)=f_n'(x)$，$n\in\mathbf{N}$，则 $f_{2\,018}(x)=$_____.

三、解答题

9. **(2019·泉州高二月考)** 已知两条曲线 $y_1=\sin x$，$y_2=\cos x$，是否存在这两条曲线的一个公共点，使在这一点处，两条曲线的切线互相垂直？并说明理由.

10. 已知函数 $y=\frac{1}{2}x^2$ 的图象在点 $\left(x_0,\frac{1}{2}x_0^2\right)$ 处的切线为 l，若 l 也为函数 $y=\ln x\,(0<x<1)$ 的图象的切线，求证：$\sqrt{3}<x_0<2$.

微信公众号
教辅资料站

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

1.2.2　基本初等函数的导数公式及导数的运算法则(二)

基础知识梳理

1. 导数的运算法则

设两个函数分别为 $f(x)$ 和 $g(x)$

两个函数的和的导数	$[f(x)+g(x)]'=$_____
两个函数的差的导数	$[f(x)-g(x)]'=$_____
两个函数的积的导数	$[f(x)g(x)]'=$_____
两个函数的商的导数	$\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]'=$_____ $(g(x)\neq 0)$

2. 复合函数

复合函数的概念	一般地，对于两个函数 $y=f(u)$ 和 $u=g(x)$，如果通过变量 u，y 可以表示成_____，那么称这个函数为函数 $y=f(u)$ 和 $u=g(x)$ 的复合函数，记作_____
复合函数的求导法则	复合函数 $y=f(g(x))$ 的导数和函数 $y=f(u)$，$u=g(x)$ 的导数间的关系为 $y_x'=$_____，即 y 对 x 的导数等于_____

题点知识巩固

知识点一　利用导数的运算法则求导

1. (**2018·天津卷**)已知函数 $f(x)=e^x\ln x$，$f'(x)$ 为 $f(x)$ 的导函数，则 $f'(1)$ 的值为_____.

2. 求下列函数的导数

(1) $y=xe^x+\pi$；

(2) $y=2\cos\frac{x}{2}\left(\sin\frac{x}{2}-\cos\frac{x}{2}\right)+\frac{\sin x}{x}$.

知识点二　求复合函数的导数

3. 函数 $y=\sin(2x^2+x)$ 的导数是　(　)

A. $\cos(2x^2+x)$　　B. $2x\sin(2x^2+x)$

C. $4\cos(2x^2+x)$　　D. $(4x+1)\cos(2x^2+x)$

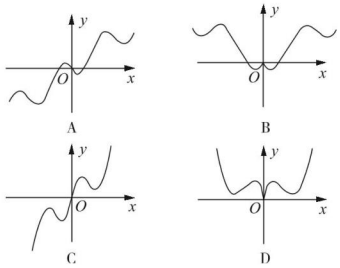
4. 求下列函数的导数

(1) $y=\ln(x^2+2x)$；

(2) $y=e^{2x+3}(x^2-2x-3)$.

知识点三　导数的综合应用

5. 已知函数 $f(x)=\frac{1}{4}x^2+\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)$，$f'(x)$ 为 $f(x)$ 的导函数，则 $f'(x)$ 的图象是　(　)



6. (**2019·龙岩高二月考**)已知函数 $f(x)=ax^2+bx+3(a\neq 0)$，其导函数 $f'(x)=2x-8$.

(1)求 a，b 的值；

(2)设函数 $g(x)=e^x\sin x+f(x)$，求曲线 $g(x)$ 在 $x=0$ 处的切线方程.

微信公众号
教辅资料站

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

提能达标过关

一、选择题

1. 下列求导正确的是　　(　　)

A. $\left(x+\frac{1}{x}\right)'=1+\frac{1}{x^2}$

B. $(\log_2 x)'=\frac{1}{x\ln 2}$

C. $(3^x+\ln 3)'=3^x\cdot\ln 3+\frac{1}{3}$

D. $(x^2\cos x)'=-2x\sin x$

2. 曲线 $y=\frac{x}{x-2}$在点(1,－1)处的切线方程为　　(　　)

A. $y=x-2$　　B. $y=-3x+2$

C. $y=2x-3$　　D. $y=-2x+1$

3. 设函数 $f(x)=\cos(\sqrt{3}x+\varphi)(0<\varphi<\pi)$，若 $f(x)+f'(x)$是奇函数，则 $\varphi=$　　(　　)

A. $\frac{\pi}{6}$　　B. $\frac{\pi}{3}$

C. $\frac{2\pi}{3}$　　D. $\frac{5\pi}{6}$

4. 设函数 $f(x)=g(x)+x^2$，曲线 $y=g(x)$在点$(1,g(1))$处的切线方程为 $y=2x+1$，则曲线 $y=f(x)$在点$(1,f(1))$处切线的斜率为　　(　　)

A. 4　　B. $-\frac{1}{4}$

C. 2　　D. $-\frac{1}{2}$

5. 设函数 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+1$ 的导函数为 $f'(x)$，若 $f'(x)$为奇函数，则有　　(　　)

A. $a\neq 0,c=0$　　B. $b=0$

C. $a=0,c\neq 0$　　D. $a=c=0$

二、填空题

6. (**2019・长庆高三模拟**)已知曲线 $y=e^{2x}\cdot\cos 3x$ 在点$(0,1)$处的切线与直线 l 的距离为$\sqrt{5}$，求直线 l 的方程_____.

7. 曲线 $y=x(3\ln x+1)$在点$(1,1)$处的切线方程为_____.

8. 若曲线 $f(x)=\ln x+ax^2$(a 为常数)不存在斜率为负数的切线，则实数 a 的取值范围是_____.

三、解答题

9. (**2019・石嘴山高二期末**)已知函数 $f(x)=ax^2+\ln x$ 的导数为 $f'(x)$.

(1)求 $f(1)+f'(1)$；

(2)若曲线 $y=f(x)$存在垂直于 y 轴的切线，求实数 a 的取值范围.

10. 已知函数 $f(x)=1+\ln x-ae^x$，若曲线 $y=f(x)$在 $x=1$处的切线与 x 轴平行，求实数 a 的值.

微信公众号
教辅资料站

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

1.3　导数在研究函数中的应用

1.3.1　函数的单调性与导数

基础知识梳理

1. 在区间(a,b)内函数的导数与单调性有如下关系

导数	函数的单调性
$f'(x)>0$	单调递_____
$f'(x)<0$	单调递_____
$f'(x)=0$	常函数

2. 函数单调性与导数值大小的关系

一般地，设函数$y=f(x)$，在区间(a,b)上

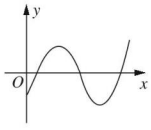
(1)如果$|f'(x)|$越大，函数在区间(a,b)上变化得_____，函数的图象就比较“陡峭”(向上或向下).

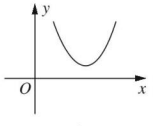
(2)如果$|f'(x)|$越小，函数在区间(a,b)上变化得_____，函数的图象就比较“平缓”(向上或向下).

题点知识巩固

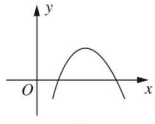
知识点一　导数与单调性的关系

1. 函数$f(x)$在其定义域内可导，$y=f(x)$的图象如图所示，则导函数$y=f'(x)$的图象为　(　)

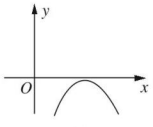




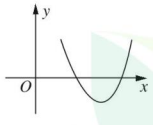
A



B

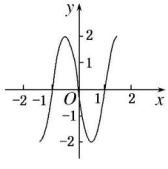


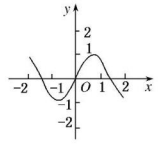
C



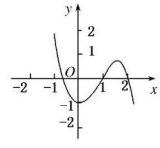
D

2. 已知函数$y=xf'(x)$的图象如下图所示(其中$f'(x)$是函数$f(x)$的导函数)，下面四个图象中$y=f(x)$的图象大致是　(　)

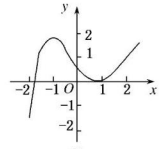




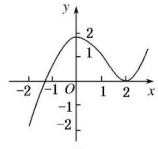
A



B



C



D

知识点二　求函数的单调区间

3. 已知函数$f(x)=x\ln x$，则$f(x)$　(　)

A. 在$(0,+\infty)$上单调递增

B. 在$(0,+\infty)$上单调递减

C. 在$\left(0,\frac{1}{e}\right)$上单调递增

D. 在$\left(0,\frac{1}{e}\right)$上单调递减

4. (**2018·天津卷**)已知函数$f(x)=a^x$，其中$a>1$，求函数$h(x)=f(x)-x\ln a$的单调区间.

知识点三　函数的单调性的综合应用

5. (**2019·张家口高三模拟**)已知函数$f(x)=\ln x-ax^2+(2-a)x$，讨论$f(x)$的单调递增区间.

6. (**2019·集美高二期中**)设函数$f(x)=x^2+ax-\ln x$，$a\in\mathbf{R}$，若$f(x)$在区间$(0,1]$上是减函数，求实数a的取值范围.

微信公众号
教辅资料站

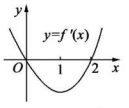
关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

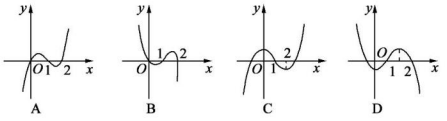
提能达标过关

一、选择题

1. 函数 $f(x)=x^3-3x$ 在$(1,+\infty)$上是　　(　　)
A. 减函数　　B. 增函数
C. 常数函数　　D. 不能确定

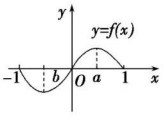
2. 设 $f'(x)$是函数 $f(x)$的导函数，$y=f'(x)$的图象如图所示，则 $y=f(x)$的图象最有可能的是　　(　　)

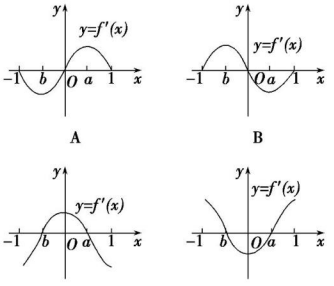




3. 已知函数 $f(x)=x^3-12x$，若 $f(x)$在区间$(2m,m+1)$上单调递减，则实数 m 的取值范围是　　(　　)
A. $[-1,1]$　　B. $[-1,1)$
C. $(-1,1)$　　D. $(-1,1]$

4. 已知函数 $y=f(x)$的图象如图所示，则函数 $y=f'(x)$的图象可能是图中的　　(　　)





5. 若定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数 $f(x)$满足 $f(x)+f'(x)>1$，$f(0)=4$，则不等式 $f(x)>\frac{3}{e^x}+1$（e 为自然对数的底数）的解集为　　(　　)
A. $(0,+\infty)$　　B. $(-\infty,0)\cup(3,+\infty)$
C. $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$　　D. $(3,+\infty)$

二、填空题

6. 函数 $f(x)=\frac{\ln x}{x}$的单调递减区间是_____.

7. 若函数 $f(x)=(x^2+mx)e^x$ 的单调减区间是$\left[-\frac{3}{2},1\right]$，则实数 m 的值为_____.

8. 过抛物线 $C:x^2=2y$ 的焦点 F 的直线 l 交抛物线 C 于 A，B 两点，若抛物线 C 在点 B 处的切线斜率为 1，则线段 $|AF|=$_____.

三、解答题

9.（2019·吉林实验中学高二检测）已知函数 $f(x)=ax^3-3x^2+1-\frac{3}{a}$，讨论函数 $f(x)$的单调性.

10. 设函数 $f(x)=x\ln x-\frac{a}{2}x^2+(a-1)x(a\in\mathbf{R})$，$f'(x)$是 $f(x)$的导函数.
(1) 令 $g(x)=f'(x)$，求 $g(x)$的单调区间；
(2) 若 $f(x)$在其定义域内为减函数，求实数 a 的取值集合.

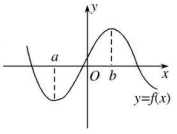
关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

1.3.2　函数的极值与导数

基础知识梳理

1. 极小值点与极小值

如图，函数 $y=f(x)$ 在点 $x=a$ 的函数值 $f(a)$ 比它在点 $x=a$ 附近其他点的函数值都小，$f'(a)=0$；而且在点 $x=a$ 附近的左侧_____，右侧_____，把点 a 叫做函数 $y=f(x)$ 的极小值点，$f(a)$ 叫做函数 $y=f(x)$ 的极小值.



2. 极大值点与极大值

如图，函数 $y=f(x)$ 在点 $x=b$ 的函数值 $f(b)$ 比它在点 $x=b$ 附近其他点的函数值都大，$f'(b)=0$；在点 $x=b$ 左侧_____，右侧_____，则把点 b 叫做函数 $y=f(x)$ 的极大值点，$f(b)$ 叫做函数 $y=f(x)$ 的极大值. _____、_____统称为极值点，_____和_____统称为极值.

题点知识巩固

知识点一　求函数的极值

1. 若 $x=-2$ 是函数 $f(x)=(x^2+ax-1)e^{x-1}$ 的极值点，则 $f(x)$ 的极小值为（　　）

A. $-2e^{-3}$　　B. 1

C. $5e^{-3}$　　D. -1

2. 求下列函数的极值

(1) $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$；

(2) $f(x)=\dfrac{2x}{x^2+1}-2$.

知识点二　根据函数的极值求字母的值

3. 若 $a>0,b>0$，且函数 $f(x)=4x^3-ax^2-2bx+a$ 在 $x=1$ 处有极值，则 ab 的最大值为（　　）

A. 2　　B. 3

C. 6　　D. 9

4. 已知函数 $f(x)=x^2-ax+\ln x$ 在区间 $(0,2)$ 内既有极大值又有极小值，则实数 a 的取值范围是（　　）

A. $\left(2\sqrt{2},\dfrac{9}{2}\right)$　　B. $\left[2\sqrt{2},\dfrac{9}{2}\right)$

C. $(2\sqrt{2},8)$　　D. $[2\sqrt{2},8)$

知识点三　极值的综合应用

5. 已知函数 $f(x)=-x^3+ax^2+b(a,b\in\mathbf{R})$.

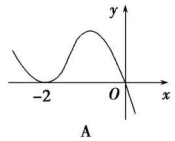
(1) 求函数 $f(x)$ 的单调递增区间；

(2) 若对任意 $a\in[3,4]$，函数 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上都有三个零点，求实数 b 的取值范围.

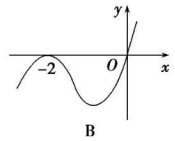
提能达标过关

一、选择题

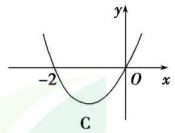
1. (**2019·平顶山高二调研**) 设函数 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上可导，其导函数为 $f'(x)$，且函数 $f(x)$ 在 $x=-2$ 处取得极小值，则函数 $y=xf'(x)$ 的图象可能是（　　）



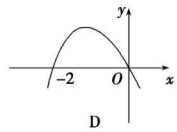
A



B



C



D

2. 函数 $f(x)=x^3+ax^2+3x-9$，已知 $f(x)$ 在 $x=-3$ 处取得极值，则实数 $a=$（　　）

A. 2　　B. 3

C. 4　　D. 5

3. 已知函数 $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$，下列结论中错误的是（　　）

A. $\exists x_0\in\mathbf{R}, f(x_0)=0$

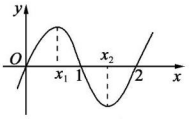
B. 函数 $y=f(x)$ 的图象是中心对称图形

C. 若 x_0 是 $f(x)$ 的极小值点，则 $f(x)$ 在区间 $(-\infty,x_0)$ 单调递减

D. 若 x_0 是 $f(x)$ 的极值点，则 $f'(x_0)=0$

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

4. 如图是函数 $f(x)=x^3+bx^2+cx+d$ 的大致图象，则 $x_1^2+x_2^2$ 等于（　　）



A. $\frac{2}{3}$　　B. $\frac{4}{3}$

C. $\frac{8}{3}$　　D. 4

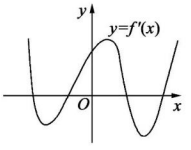
5. 若函数 $y=x^3-2ax+a$ 在(0,1)内有极小值，则实数 a 的取值范围是（　　）

A. (0,3)　　B. $(-\infty,3)$

C. $(0,+\infty)$　　D. $\left(0,\frac{3}{2}\right)$

二、填空题

6. 函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$，导函数 $f'(x)$ 的图象如图所示，给出关于函数 $f(x)$ 极值的四个命题：①无极大值点，有四个极小值点；②有三个极大值点，两个极小值点；③有两个极大值点，两个极小值点；④有四个极大值点，无极小值点. 其中正确命题的序号是_____.



7. (**2019·南阳高三模拟**)若 $f(x)=e^x-kx$ 的极小值为 0，则 $k=$_____.

8. 已知函数 $f(x)=\frac{m}{x-1}+\ln x$ 在$[e,+\infty)$上存在极值点，则实数 m 的取值范围为_____.

三、解答题

9. (**2018·天津卷**)设函数 $f(x)=(x-t_1)(x-t_2)(x-t_3)$，其中 $t_1,t_2,t_3\in\mathbf{R}$，且 t_1,t_2,t_3 是公差为 d 的等差数列.

(1)若 $t_2=0,d=1$，求曲线 $y=f(x)$ 在点 $(0,f(0))$ 处的切线方程；

(2)若 $d=3$，求 $f(x)$ 的极值.

10. (**2019·吉林实验中学高二检测**)已知函数 $f(x)=x-a\ln x(a\in\mathbf{R})$，求函数 $f(x)$ 的极值.

微信公众号
教辅资料站

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

1.3.3　函数的最大(小)值与导数

基础知识梳理

1. 如果在区间$[a,b]$上函数$y=f(x)$的图象是一条连续的曲线，则该函数在$[a,b]$上一定能够取得_____和_____，并且函数的最值必在_____或_____取得.

2. **求函数在$[a,b]$上的最值的步骤**

(1)求函数$y=f(x)$在(a,b)内的_____；

(2)将函数$y=f(x)$的各极值与端点处的函数值$f(a)$，$f(b)$比较，其中_____是最大值，_____是最小值.

题点知识巩固

知识点一　求函数的最值

1. 设$f(x)=(2-x)(x+2)^2$.

(1)求$f(x)$的单调区间；

(2)求$f(x)$在$\left[-5,\frac{3}{2}\right]$上的最大值与最小值.

知识点二　根据函数的最值求字母的值

2. 若函数$f(x)=\frac{1}{3}x^3-x+a$在区间$[0,1]$上的最大值为1，则a的值为　(　)

A. -1　　B. 1

C. $-\frac{2}{3}$　　D. $\frac{1}{3}$

知识点三　导数的综合应用

3. 已知函数$g(x)=a-x^2\left(\frac{1}{e}\leqslant x\leqslant e,e\text{为自然对数的底数}\right)$与$h(x)=2\ln x$的图象上存在关于$x$轴对称的点，则实数$a$的取值范围是　(　)

A. $\left[1,\frac{1}{e^2}+2\right]$　　B. $[1,e^2-2]$

C. $\left[\frac{1}{e^2}+2,e^2-2\right]$　　D. $[e^2-2,+\infty)$

4. 已知函数$f(x)=-x^3+3x^2+9x+a$.

(1)若$f(x)$在区间$[-2,2]$上的最大值为20，求它在该区间上的最小值；

(2)若函数$f(x)$有三个不同零点，求a的取值范围.

提能达标过关

一、选择题

1. 函数$f(x)=x^3-3x^2+2$在区间$[-1,1]$上的最大值是　(　)

A. -2　　B. 0

C. 2　　D. 4

2. 对于函数$f(x)=e^x-x$在区间$[1,2]$上的最值，下列描述正确的是　(　)

A. 最小值为$e-1$，没有最大值

B. 最大值为e^2-2，没有最小值

C. 既没有最大值，也没有最小值

D. 最小值为$e-1$，最大值为e^2-2

3. **(2019·广州伴元高二检测)**设直线$x=t$与函数$f(x)=x^2$，$g(x)=\ln x$的图象分别交于点M、N，则当$|MN|$取最小值时t的值为　(　)

A. 1　　B. $\frac{1}{2}$

C. $\frac{\sqrt{5}}{2}$　　D. $\frac{\sqrt{2}}{2}$

4. **(2019·自贡富顺高二月考)**已知$(a+1)x-1-\ln x\leqslant 0$对任意$x\in\left[\frac{1}{2},2\right]$恒成立，则实数$a$的最大值为　(　)

A. 0　　B. 1

C. $1-2\ln 2$　　D. $\frac{-1+\ln 2}{2}$

5. 设函数$f(x)=-x^3+3bx$，当$x\in[0,1]$时，$f(x)$的值域为$[0,1]$，则实数b的值是　(　)

A. $\frac{1}{2}$　　B. $\frac{\sqrt{2}}{2}$

C. $\frac{\sqrt[3]{2}}{2}$　　D. $\frac{\sqrt[3]{4}}{2}$

微信公众号 教辅资料站

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

二、填空题

6.（**2019·承德高三模拟**）定义在**R**上的函数$f(x)$满足$f'(x)>1-f(x)$，$f(0)=6$，其中$f'(x)$是$f(x)$的导函数，则不等式$e^x f(x)>e^x+5$（其中e为自然对数的底数）的解集为_____.

7.已知函数$f(x)=ax^3-6ax^2+b(a>0)$，使$f(x)$在$[-1,2]$上取得最大值3，最小值-29，则实数b的值为_____.

8.如果函数$f(x)=x^3-\frac{3}{2}x^2+a$在$[-1,1]$上的最大值是2，那么$f(x)$在$[-1,1]$上的最小值是_____.

三、解答题

9.设$a,b\in\mathbf{R}$，函数$f(x)=\frac{1}{3}x^3+ax^2+bx$在区间$(-1,1)$上单调递增，在区间$(1,3)$上单调递减.

(1)若$a=-2$，求b的值；

(2)求函数$f(x)$在区间$[1,4]$上的最小值（用b表示）.

10.（**2019·泉州二中高三模拟**）已知函数$f(x)=\frac{a(x-1)+be^x}{e^x}(a\neq0)$.

(1)当$a=-1,b=0$时，求函数$f(x)$的极值；

(2)当$b=1$时，若函数$f(x)$没有零点，求实数a的取值范围.

微信公众号
教辅资料站

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

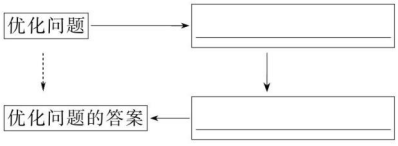
1.4　生活中的优化问题举例

基础知识梳理

1. 优化问题

生活中经常遇到求_____、_____、_____等问题，这些问题通常称为优化问题.

2. 利用导数解决优化问题的基本思路



题点知识巩固

知识点一　生活中的有关最值问题

1. 某银行准备新设一种定期存款业务，经预算，存款量与存款利率的平方成正比，比例系数为 $k(k>0)$. 已知贷款的利率为 0.048 6，且假设银行吸收的存款能全部放贷出去. 设存款利率为 x，$x\in(0,0.048\ 6)$，若使银行获得最大效益，则 x 的取值为　(　　)

A. 0.016 2　　B. 0.032 4

C. 0.024 3　　D. 0.048 6

2. 为了在夏季降温和冬季供暖时减少能源消耗，房屋的屋顶和外墙需要建造隔热层. 某幢建筑物要建造可使用 20 年的隔热层，每厘米厚的隔热层建造成本为 6 万元. 该建筑物每年的能源消耗费用 C(单位：万元)与隔热层厚度 x(单位：cm)满足关系：$C(x)=\dfrac{k}{3x+5}(0\leqslant x\leqslant 10)$，若不建隔热层，每年能源消耗费用为 8 万元. 设 $f(x)$ 为隔热层建造费用与 20 年的能源消耗费用之和.

(1)求 k 的值及 $f(x)$ 的表达式；

(2)隔热层修建多厚时，总费用 $f(x)$ 达到最小，并求最小值.

知识点二　几何中的最值问题

3. 如果圆柱截面的周长 l 为定值，则体积的最大值为(　　)

A. $\left(\dfrac{l}{6}\right)^3\pi$　　B. $\left(\dfrac{l}{3}\right)^3\pi$

C. $\left(\dfrac{l}{4}\right)^3\pi$　　D. $\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{l}{4}\right)^3\pi$

4. 将边长为 1 m 的正三角形薄片，沿一条平行于底边的直线剪成两块，其中一块是梯形，记 $S=\dfrac{(\text{梯形的周长})^2}{\text{梯形的面积}}$，则 S 的最小值是_____.

提能达标过关

一、选择题

1. 已知某生产厂家的年利润 y(单位：万元)与年产量 x(单位：万件)的函数关系式为 $y=-\dfrac{1}{3}x^3+81x-234$，则使该生产厂家获取最大年利润的年产量为　(　　)

A. 13 万件　　B. 11 万件

C. 9 万件　　D. 7 万件

2. 从边长为 10 cm×16 cm 的矩形纸板的四角截去四个相同的小正方形，作成一个无盖的盒子，则盒子容积的最大值为　(　　)

A. 24 cm^3　　B. 72 cm^3

C. 144 cm^3　　D. 288 cm^3

3. 某工厂要围建一个面积为 512 平方米的矩形堆料场，一边可以利用原有的墙壁，其他三边需要砌新的墙壁，当砌壁所用的材料最省时堆料场的长和宽分别为　(　　)

A. 32 米，16 米　　B. 30 米，15 米

C. 40 米，20 米　　D. 36 米，18 米

4. 某公司生产某种产品，固定成本为 20 000 元，每生产一单位产品，成本增加 100 元，已知总收益 R 与年产量 x 的关系是 $R=\begin{cases}400x-\dfrac{1}{2}x^2(0\leqslant x\leqslant 400),\\ 80\ 000(x>400),\end{cases}$ 则总利润最大时，每年生产的产品数量是　(　　)

A. 100　　B. 150

C. 200　　D. 300

5. 设有一个容积为 V，盖为铝合金的圆柱形铁桶，它的高为 h，底面半径为 r. 已知单位面积铝合金的价格是铁的价格的 3 倍，当铁桶的总造价最低时，h 与 r 的比值为　(　　)

A. $\dfrac{1}{2}$　　B. 2

C. 3　　D. 4

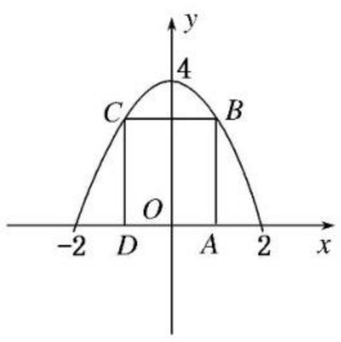
二、填空题

6. 某公司规定：对于小于或等于 150 件的订购合同，每件售价为 200 元，对于多于 150 件的订购合同，每超过 1 件，则每件的售价比原来减少 1 元. 若使公司的收益最大，则订购合同的件数为_____.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

7. 某公司租地建仓库，每月土地占用费 y_1（万元）与仓库到车站的距离成反比，而每月库存货物的运费 y_2（万元）与到车站的距离成正比，如果在距离车站 10 千米处建仓库，y_1 和 y_2 分别为 2 万元和 8 万元. 那么，要使这两项费用之和最小，仓库应建在离车站_____千米处.

8. 如图所示，已知矩形的两个顶点位于 x 轴上，另两个顶点位于抛物线 $y=4-x^2$ 在 x 轴上方的曲线上，则这个矩形面积最大时的边长为_____.



三、解答题

9. 某商场销售某种商品的经验表明，该商品每日的销售量 y（单位：千克）与销售价格 x（单位：元/千克）满足关系式 $y=\frac{a}{x-3}+10(x-6)^2$，其中 $3<x<6$，a 为常数. 已知销售价格为 5 元/千克时，每日可售出该商品 11 千克.

(1)求 a 的值；

(2)若该商品的成本为 3 元/千克，试确定销售价格 x 的值，使商场每日销售该商品所获得的利润最大.

10. 某村庄拟修建一个无盖的圆柱形蓄水池（不计厚度）. 设该蓄水池的底面半径为 r 米，高为 h 米，体积为 V 立方米. 假设建造成本仅与表面积有关，侧面的建造成本为 100 元/平方米，底面的建造成本为 160 元/平方米，该蓄水池的总建造成本为 12 000π 元（π 为圆周率）.

(1)将 V 表示成 r 的函数 $V(r)$，并求该函数的定义域；

(2)讨论函数 $V(r)$ 的单调性，并确定 r 和 h 为何值时该蓄水池的体积最大.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

1.5　定积分的概念

1.5.1　曲边梯形的面积
1.5.2　汽车行驶的路程

基础知识梳理

1. 如果函数 $f(x)$ 在某个区间 I 上的图象是一条_____的曲线，那么我们就把它称为区间 I 上的连续函数.
2. 由直线 $x=a$，$x=b(a\neq b)$，$y=0$ 和曲线 $y=f(x)$ 所围成的图形称为_____.
3. 如果物体做变速直线运动，速度函数 $v=v(t)$，那么也可以采用_____、_____、_____、_____的方法，求出它在 $a\leqslant t\leqslant b$ 内所作的位移 s.

题点知识巩固

知识点一　求曲边梯形的面积

1. 在等分区间的情况下，$f(x)=\frac{1}{1+x^2}(x\in[0,2])$ 及 x 轴所围成的曲边梯形的面积和式的极限形式正确的是（　　）

A. $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\left[\frac{1}{1+\left(\frac{i}{n}\right)^2}\cdot\frac{2}{n}\right]$

B. $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\left[\frac{1}{1+\left(\frac{2i}{n}\right)^2}\cdot\frac{2}{n}\right]$

C. $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\left[\frac{1}{1+i^2}\cdot\frac{1}{n}\right]$

D. $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\left[\frac{1}{1+\left(\frac{i}{n}\right)^2}\cdot n\right]$

2. 对于直线 $x=1$，$y=0$ 和曲线 $y=x^2$ 所围成的曲边三角形，把区间分成 3 等份，则曲边三角形面积的近似值（取每个区间的左端点）是（　　）

A. $\frac{1}{9}$　　B. $\frac{2}{9}$

C. $\frac{5}{27}$　　D. $\frac{4}{9}$

知识点二　求变速直线运动的路程

3. 已知某物体运动的速度 $v=2t-1$，$t\in[0,10]$，若把区间 10 等分，取每个小区间右端点处的函数值为近似小矩形的高，则物体运动的路程的近似值为_____.
4. 一辆汽车做变速直线运动，设汽车在时刻 t 的速度 $v(t)=\frac{6}{t^2}$，求汽车在 $t=1$ 到 $t=2$ 这段时间内运动的路程 s.

提能达标过关

一、选择题

1. 在“近似代替”中，函数 $f(x)$ 在区间 $[x_i,x_{i+1}]$ 上近似值等于（　　）

A. 只能是左端点的函数值 $f(x_i)$

B. 只能是右端点的函数值 $f(x_{i+1})$

C. 可以是该区间内任一点的函数值 $f(\xi_i)(\xi_i\in[x_i,x_{i+1}])$

D. 以上答案均正确

2. 求由曲线 $y=2x^2$ 与直线 $x=0$，$x=t(t>0)$，$y=0$ 所围成的曲边梯形的面积时，将区间 $[0,t]$ 等分成 n 个小区间，则第 i 个区间为（　　）

A. $\left[\frac{i-1}{n},\frac{i}{n}\right]$　　B. $\left[\frac{i}{n},\frac{i+1}{n}\right]$

C. $\left[\frac{t(i-1)}{n},\frac{it}{n}\right]$　　D. $\left[\frac{t(i-2)}{n},\frac{t(i-1)}{n}\right]$

3. 函数 $f(x)=x^2$ 在区间 $\left[\frac{i-1}{n},\frac{i}{n}\right]$ 上（　　）

A. $f(x)$ 的值变化很小

B. $f(x)$ 的值变化很大

C. $f(x)$ 的值不变化

D. 当 n 很大时，$f(x)$ 的值变化很小

4. 设函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续，用分点 $a=x_0<x_1<\cdots<x_{i-1}<x_i<\cdots<x_n=b$，把区间 $[a,b]$ 等分成 n 个小区间，在每个小区间 $[x_{i-1},x_i]$ 上任取一点 $\xi_i(i=1,2,\cdots,n)$，作和式 $S_n=\sum\limits_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x$（其中 Δx 为小区间的长度），那么 S_n 的大小（　　）

A. 与 $f(x)$ 和区间 $[a,b]$ 有关，与分点的个数 n 和 ξ_i 的取法无关

B. 与 $f(x)$ 和区间 $[a,b]$ 的分点的个数 n 有关，与 ξ_i 的取法无关

C. 与 $f(x)$ 和区间 $[a,b]$ 的分点的个数 n，ξ_i 的取法都有关

D. 与 $f(x)$ 和区间 $[a,b]$ 的 ξ_i 的取法有关，与分点的个数 n 无关

5. 在求由曲线 $y=\frac{1}{x}$ 与直线 $x=1$，$x=3$，$y=0$ 所围成图形的面积时，若将区间 n 等分，并用每个区间的右端点的函数值近似代替，则第 i 个小曲边梯形的面积 ΔS_i 约等于（　　）

A. $\frac{2}{n+2i}$　　B. $\frac{2}{n+2i-2}$

C. $\frac{2}{n(n+2i)}$　　D. $\frac{1}{n+2i}$

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

二、填空题

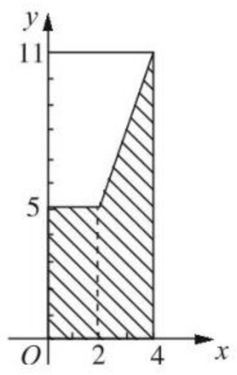
6.（**2019·郑州一中高二月考**）某物体在笔直的道路上做变速直线运动，设该物体在时刻 t 的速度为 $v(t)=7-t^2$（单位：km/h），试计算这个物体在 $0\leqslant t\leqslant 1$（单位：h）这段时间内运动的路程 s 为_____km.

7. 求由曲线 $y=x^2$ 与直线 $x=1,x=2,y=0$ 所围成的平面图形的面积时，把区间 5 等分，取每个小区间的左端点，则面积的不足近似值为_____.

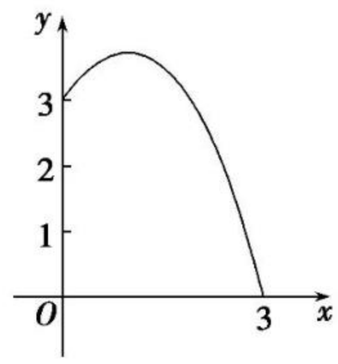
8. 若做变速直线运动的物体 $v(t)=t^2$ 在 $0\leqslant t\leqslant a$ 内经过的路程为 9，则 a 的值为_____.

三、解答题

9. 一物体在力 $F(x)=\begin{cases}5,0\leqslant x\leqslant 2,\\3x-1,x>2\end{cases}$（单位：N）的作用下沿与力 F 相同的方向，从 $x=0$ 处运动到 $x=4$（单位：m）处，求力 $F(x)$ 做的功.



10.（**2019·定州高二检测**）如图所示，求直线 $x=0,x=3$，$y=0$ 与二次函数 $f(x)=-x^2+2x+3$ 所围成的曲边梯形的面积.



关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

1.5.3　定积分的概念

基础知识梳理

1. 一般地，如果函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续，用分点 $a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_i<\cdots<x_n=b$，将区间 $[a,b]$ 等分成 n 个小区间，在每个小区间 $[x_{i-1},x_i]$ 上任取一点 ξ_i，$(i=1,2,\cdots,n)$，作和式_____，当 $n\to\infty$ 时，上述和式无限接近某个常数，这个常数叫做函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上的定积分，记作_____，这里 a 与 b 分别叫做_____与_____，区间 $[a,b]$ 叫做_____，函数 $f(x)$ 叫做_____，x 叫做_____，$f(x)\mathrm{d}x$ 叫做_____.

2. 如果在区间 $[a,b]$ 上函数 $f(x)$ 连续且恒有_____，那么定积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 表示由_____和_____所围成的曲边梯形的面积.

3. 定积分有如下性质

$\int_a^b kf(x)\mathrm{d}x=$_____（$k$ 为常数）；$\int_a^b[f_1(x)\pm f_2(x)]\mathrm{d}x=$_____$\pm$_____；$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=$_____（其中 $a<c<b$）.

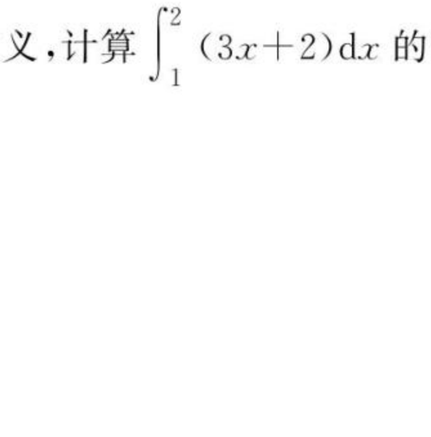
题点知识巩固

知识点一　利用定积分的定义求定积分

1. 利用定积分的定义，计算 $\int_1^2(3x+2)\mathrm{d}x$ 的值.

知识点二　定积分几何意义的应用

2. 如图所示阴影部分的面积用定积分表示为_____.



3. 利用定积分的几何意义，计算 $\int_{-3}^{3}\sqrt{9-x^2}\mathrm{d}x=$_____.

知识点三　定积分的性质及其应用

4. 已知 $\int_0^1 x^3\mathrm{d}x=\frac{1}{4}$，$\int_1^2 x^3\mathrm{d}x=\frac{15}{4}$，$\int_1^2 x^2\mathrm{d}x=\frac{7}{3}$，$\int_2^4 x^2\mathrm{d}x=\frac{56}{3}$. 求：

(1) $\int_0^2 3x^3\mathrm{d}x$；

(2) $\int_1^4 6x^2\mathrm{d}x$；

(3) $\int_1^2(3x^2-2x^3)\mathrm{d}x$.

提能达标过关

一、选择题

1. 对于 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$，下列说法错误的是　（　　）

A. 它是函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上的定积分

B. $f(x)$ 叫做被积函数，$f(x)\mathrm{d}x$ 叫做被积式

C. a 叫做积分下限，b 叫做积分上限

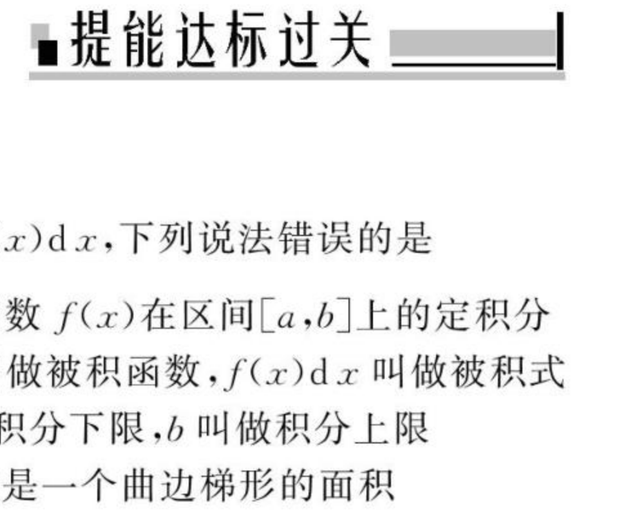
D. 它一定是一个曲边梯形的面积

2. 若 $\int_0^a(2x+1)\mathrm{d}x=2$，则实数 a 的值为　（　　）

A. 1　　B. -2

C. 2　　D. -2 或 1

3. 下面图形中阴影部分面积不可以用 $S=\int_a^b[f(x)-g(x)]\mathrm{d}x$ 求出的是　（　　）



关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

4. 下列等式不成立的是（　　）

A. $\int_a^b [mf(x)+ng(x)]\mathrm{d}x=m\int_a^b f(x)\mathrm{d}x+n\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$

B. $\int_a^b [f(x)+1]\mathrm{d}x=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x+b-a$

C. $\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\cdot\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$

D. $\int_{-2\pi}^{2\pi}\sin x\mathrm{d}x=\int_{-2\pi}^{0}\sin x\mathrm{d}x+\int_0^{2\pi}\sin x\mathrm{d}x$

5. （**2019・武邑高二月考**）若定积分 $\int_{-2}^{m}\sqrt{-x^2-2x}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{4}$，则 m 等于（　　）

A. -1　　B. 0

C. 1　　D. 2

二、填空题

6. 由 $y=\sin x, x=0, x=\frac{\pi}{2}, y=0$ 所围成图形的面积写成定积分的形式是_____.

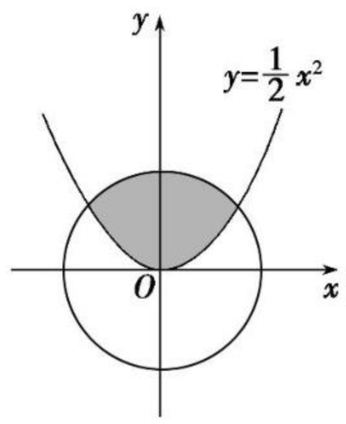
7. 若 $\int_a^b [f(x)-g(x)]\mathrm{d}x=10$，$\int_a^b g(x)\mathrm{d}x=6$，则 $\int_a^b [-f(x)]\mathrm{d}x=$_____.

8. （**2019・蚌埠高二月考**）$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{5\pi}{2}}(1+\sin x)\mathrm{d}x=$_____.

三、解答题

9. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}x^3, x\in[-1,1),\\ x, x\in[1,\pi),\\ \sin x, x\in[\pi,3\pi],\end{cases}$ 求 $f(x)$ 在区间 $[-1,3\pi]$ 上的定积分.

10. （**2019・安阳中学高二期末**）如图所示，抛物线 $y=\frac{1}{2}x^2$ 将圆面 $x^2+y^2\leqslant 8$ 分成两部分，现在向圆面上均匀投点，这些点落在圆中阴影部分的概率为 $\frac{1}{4}+\frac{1}{6\pi}$，试求 $\int_0^2\left(\sqrt{8-x^2}-\frac{1}{2}x^2\right)\mathrm{d}x$ 的值.



关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

1.6　微积分基本定理

基础知识梳理

微积分基本定理

1. 一般地，如果 $f(x)$是区间$[a,b]$上的连续函数，且 $F'(x)=f(x)$，那么 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=$_____，这个结论叫做微积分基本定理，又叫牛顿—莱布尼茨公式. 为书写方便，$F(b)-F(a)$可记为 $F(x)\Big|_a^b$，即 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=$_____ $=$_____.

2. 微积分基本定理揭示了_____与_____之间的内在联系，同时它也提供了计算_____的一种有效方法.

题点知识巩固

知识点一　利用微积分定理求定积分

1. 计算 $\int_0^{\frac{\pi}{3}}(2x+\sin x)\mathrm{d}x=$_____.

2. 计算下列定积分：

(1) $\int_{-3}^{3}(|2x+3|+|3-2x|)\mathrm{d}x$；

(2) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-\sin 2x}\mathrm{d}x$.

知识点二　利用微积分求字母的值

3. 若 $\int_0^1(x^2+mx)\mathrm{d}x=0$，则实数 m 的值为　　(　　)

A. $-\frac{1}{3}$　　B. $-\frac{2}{3}$

C. -1　　D. -2

4. 设 $f(x)=ax+b$，且 $\int_{-1}^{1}f^2(x)\mathrm{d}x=1$，求$f(a)$的取值范围.

提能达标过关

一、选择题

1. $\int_0^2(x^2+1)\mathrm{d}x=$　　(　　)

A. $\frac{14}{3}$　　B. 6

C. 8　　D. 10

2. $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 x\mathrm{d}x$ 等于　　(　　)

A. $\frac{\pi}{4}$　　B. $\frac{\pi}{2}-1$

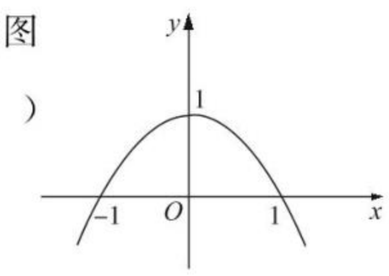
C. 2　　D. $\frac{\pi-2}{4}$

3. 设 $f(x)$是一次函数，且 $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=5$，$\int_0^1 xf(x)\mathrm{d}x=\frac{17}{6}$，则 $f(x)=$　　(　　)

A. $4x+3$　　B. $3x+4$

C. $-4x+2$　　D. $-3x+4$

4. 已知一个二次函数 $f(x)$的图象如图所示，那么 $\int_{-1}^{1}f(x)\mathrm{d}x=$　　(　　)



A. 1　　B. $\frac{\pi}{2}$

C. $\frac{4}{3}$　　D. 2

5. 已知 $a=\int_0^1 \mathrm{e}^x\mathrm{d}x$，$b=\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x$，$c=\int_1^{\mathrm{e}}\frac{2}{x}\mathrm{d}x$，则 a、b、c 的大小关系为　　(　　)

A. $b<c<a$　　B. $a<b<c$

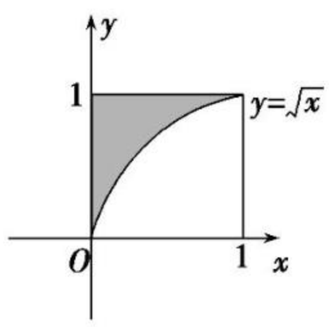
C. $b<a<c$　　D. $c<b<a$

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

二、填空题

6.（**2019·南昌第二中学高二期末**）$\int_{-4}^{4}\sqrt{16-x^2}\,\mathrm{d}x+\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}x^3\,\mathrm{d}x=$_____.

7.（**2019·西安高二期末**）如图，在边长为1的正方形中随机撒一粒黄豆，则它落在阴影部分的概率为_____.



8. 设 $f(x)=\begin{cases}\lg x(x>0),\\ x+\int_0^a 3t^2\,\mathrm{d}t(x\leqslant 0).\end{cases}$ 若 $f[f(1)]=1$，则 $a=$_____.

三、解答题

9.（**2019·山西沁县中学高二期中**）计算由直线 $y=6-x$，曲线 $y=\sqrt{8x}$ 以及 x 轴所围图形的面积.

10. 已知 $\int_{-1}^{1}(x^3+ax+3a-b)\,\mathrm{d}x=2a+6$ 且 $f(t)=\int_0^t(x^3+ax+3a-b)\,\mathrm{d}x$ 为偶函数，求 a,b 的值.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

1.7　定积分的简单应用

1.7.1　定积分在几何中的应用

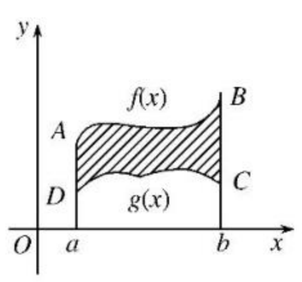
基础知识梳理

常见的平面图形面积的求法

1. 当 $x\in[a,b]$ 时，若 $f(x)>0$，由直线 $x=a$，$x=b(a\neq b)$，$y=0$ 和曲线 $y=f(x)$ 所围成的曲边梯形的面积 $S=$_____.

2. 当 $x\in[a,b]$ 时，若 $f(x)<0$，由直线 $x=a$，$x=b\ (a\neq b)$，$y=0$ 和曲线 $y=f(x)$ 围成的曲边梯形的面积 $S=$_____.

3. 当 $x\in[a,b]$ 时，若 $f(x)>g(x)>0$，由直线 $x=a$，$x=b(a\neq b)$ 和曲线 $y=f(x)$，$y=g(x)$ 围成的平面图形的面积 $S=$_____.（如图）



题点知识巩固

知识点一　求曲边多边形的面积

1.（**2019·大庆实验高二月考**）曲线 $y=x^3$ 与直线 $y=x$ 所围成图形的面积等于（　　）

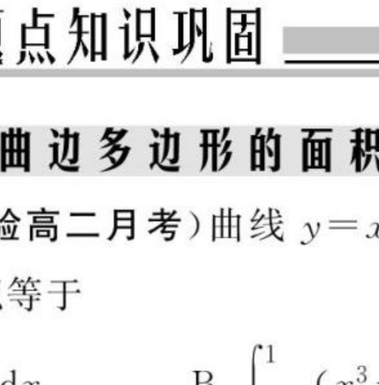
A. $\int_{-1}^{1}(x-x^3)\mathrm{d}x$　　B. $\int_{-1}^{1}(x^3-x)\mathrm{d}x$

C. $2\int_{0}^{1}(x-x^3)\mathrm{d}x$　　D. $2\int_{-1}^{0}(x-x^3)\mathrm{d}x$

2. 曲线 $f(x)=\sin\left(\frac{\pi}{6}-x\right)$ 与直线 $x=-\frac{\pi}{6}$，$x=\frac{\pi}{6}$，$y=0$ 所围成的平面图形的面积为_____.

知识点二　定积分的综合应用

3. 如图，阴影部分的面积是（　　）



A. $\frac{\sqrt{3}}{2}$　　B. $-2\sqrt{3}$

C. $\frac{35}{3}$　　D. $\frac{32}{3}$

4. 在曲线 $y=x^2(x\geqslant 0)$ 上某一点 A 处作一切线使之与曲线以及 x 轴所围的面积为 $\frac{1}{12}$，试求：

(1) 切点 A 的坐标；

(2) 在切点 A 处的切线方程.

提能达标过关

一、选择题

1. 由直线 $x=-\frac{\pi}{3}$，$x=\frac{\pi}{3}$，$y=0$ 与曲线 $y=\cos x$ 所围成的封闭图形的面积为（　　）

A. $\frac{1}{2}$　　B. 1

C. $\frac{\sqrt{3}}{2}$　　D. $\sqrt{3}$

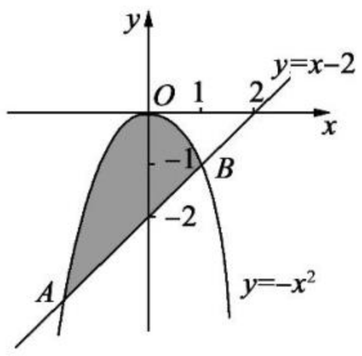
2. 直线 $y=x$ 与曲线 $y=x^2$ 围成的封闭图形的面积为（　　）

A. $\frac{1}{6}$　　B. $\frac{1}{3}$

C. $\frac{1}{2}$　　D. $\frac{2}{3}$

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

3. 如图，阴影部分的面积为　　（　　）



A. 9　　B. $\frac{13}{6}$

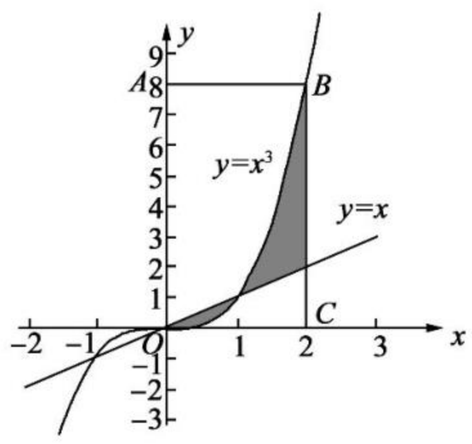
C. $\frac{9}{2}$　　D. $\frac{7}{3}$

4. 由曲线 $y=\sqrt{x}$，直线 $y=x-2$ 及 y 轴所围成的图形的面积为　　（　　）

A. $\frac{10}{3}$　　B. 4

C. $\frac{16}{3}$　　D. 6

5. 如图，在矩形 $OABC$ 内：记曲线 $y=x^3$ 与直线 $y=x$ 围成的区域为 M（图中阴影部分）. 随机往矩形 $OABC$ 内投一点 P，则点 P 落在区域 M 内的概率是　　（　　）



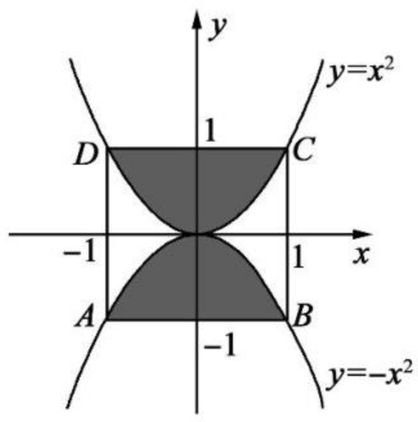
A. $\frac{1}{18}$　　B. $\frac{7}{32}$

C. $\frac{5}{32}$　　D. $\frac{1}{16}$

二、填空题

6. （**2019·宁波镇海中学高二月考**）由 $y=x^2$，$y=\frac{1}{4}x^2$ 及 $x=1$ 围成的图形的面积 $S=$_____.

7. 正方形的四个顶点 $A(-1,-1)$，$B(1,-1)$，$C(1,1)$，$D(-1,1)$ 分别在抛物线 $y=-x^2$ 和 $y=x^2$ 上，如图所示. 若将一个质点随机投入正方形 $ABCD$ 中，则质点落在图中阴影区域的概率是_____.



8. 由曲线 $y=e^x$，直线 $y=2x$，$x=0$，$x=1$ 围成的曲边四边形的面积为_____.

三、解答题

9. （**2019·陵川中学高二月考**）求正弦曲线 $y=\sin x$ 与余弦曲线 $y=\cos x$ 与直线 $x=-\frac{3\pi}{4}$，$x=\frac{5\pi}{4}$ 围成的图形的面积.

10. 计算由曲线 $y^2=2x$ 和直线 $y=x-4$ 所围成的图形的面积.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

1.7.2　定积分在物理中的应用

基础知识梳理

1. 做变速直线运动的物体所经过的路程 s 等于其速度 $v=v(t)(v(t)\geqslant 0)$ 在时间区间 $[a,b]$ 上的定积分，即 _____.

2. 如果物体在变力 $F(x)$ 的作用下做直线运动，并且物体沿着与力 $F(x)$ 相同的方向从 $x=a$ 移动到 $x=b(a<b)$，那么变力 $F(x)$ 所做的功为 $W=$ _____.

题点知识巩固

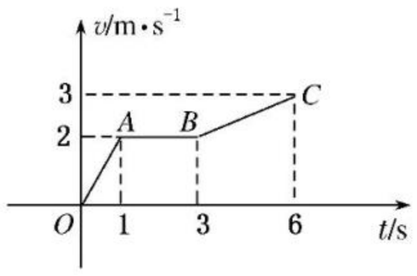
知识点一　变速直线运动的路程

1. 做变速运动的物体，初速度为 30 m/s，t s 后的速度为 $v=30-\frac{3}{2}t$，则物体停止时，物体运动的路程是（　　）

A. 30 m　　B. 600 m

C. 300 m　　D. 150 m

2. 一物体做变速直线运动，其 v-t 曲线如图所示，则该物体在 $\frac{1}{2}$～6 s 间的运动路程为 _____.



知识点二　求变力做的功

3. 弹簧伸长所需的拉力与弹簧的伸长量成正比，如果1 N力能拉长弹簧 1 cm，为了将弹簧拉长 6 cm，所耗费的功为（　　）

A. 0.30 J　　B. 0.18 J

C. 0.15 J　　D. 0.10 J

4. 在某一温度下，直径为 0.2 米，高为 0.8 米，上端为活塞的圆柱体内某空气的压强 p 与体积 V 的函数关系式为 $p=\frac{80}{V}$，而正压力 F 与压强 p 的函数关系为 $F=pS$，其中 S 为受力面积，设温度保持不变，要使气体的体积缩小为原来的一半，求活塞克服气体压力做功多少？

提能达标过关

一、选择题

1. 物体以速度 $v(t)=3t^2-2t+3$(m/s) 做直线运动，它在时刻 $t=0$(s) 到 $t=3$(s) 这段时间内的位移是（　　）

A. 9 m　　B. 18 m

C. 27 m　　D. 36 m

2. 一物体在力 $F(x)=4x-1$(单位：N) 的作用下，沿着与力 F 相同的方向，从 $x=1$ 运动到 $x=3$ 处(单位：m)，则力 $F(x)$ 所做的功为（　　）

A. 8 J　　B. 10 J

C. 12 J　　D. 14 J

3. (**2019·保定高三模拟**) 以初速度 40 m/s 向上抛一物体，t s 时刻的速度 $v=40-10t^2$，则此物体达到最高时的高度为（　　）

A. $\frac{160}{3}$ m　　B. $\frac{80}{3}$ m

C. $\frac{40}{3}$ m　　D. $\frac{20}{3}$ m

4. (**2019·无锡江阴高二期末**) 一物体在变力 $F(x)=5-x^2$(力单位：N，位移单位：m) 作用下，沿与 $F(x)$ 成 30°方向做直线运动，则由 $x=1$ 运动到 $x=2$ 时 $F(x)$ 做的功为（　　）

A. $\sqrt{3}$ J　　B. $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ J

C. $\frac{4\sqrt{3}}{3}$ J　　D. $2\sqrt{3}$ J

5. 若做变速运动的物体 $v(t)=t^2$，在 $0\leqslant t\leqslant a$ 内经过的路程为 9，则实数 a 的值为（　　）

A. 1　　B. 2

C. 3　　D. 4

二、填空题

6. 从空中自由下落的物体，在第一秒时刻恰经过电视塔顶，在第二秒时刻物体落地，已知自由落体的运动速度为 $v=gt$(g 为常数)，则电视塔高为 _____.

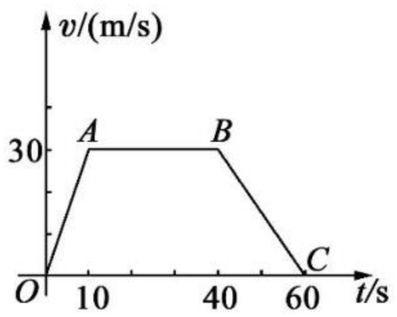
7. 做变速直线运动的物体的速度 $v(t)=4-t^2$，初始位置 $s(0)=1$，则 3 秒时所处的位置为 _____.

8. 物体按规律 $x=4t^2$ m 做直线运动，设介质的阻力与速度的大小成正比，且速度的大小为 10 m/s 时，阻力为 2 N，则物体从 $x=0$ 到 $x=4$，阻力所做的功的大小为 _____.

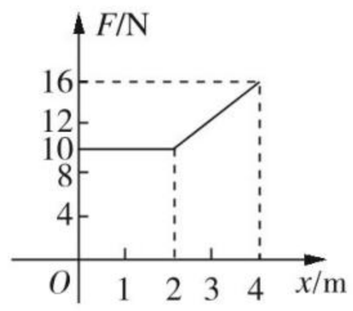
关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

三、解答题

9. 一辆汽车的速度—时间曲线如图所示，求汽车在这 1 min 内行驶的路程.



10. 一物体在力 $F(x)$(单位：N)的作用下，沿与力 F 相同的方向运动，力的位移曲线如图所示，求该物体从 $x=0$ 运动到 $x=4$(单位：m)处力 $F(x)$做的功.



关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

第二章 推理与证明

2.1 合情推理与演绎推理

2.1.1 合情推理

基础知识梳理

1. 归纳推理和类比推理

	归纳推理	类比推理
定义	由某类事物的_____具有某些特征，推出该类事物的_____都具有这些特征的推理，或者由_____概括出_____的推理，称为归纳推理（简称归纳）	由两类对象具有某些_____特征和其中一类对象的某些_____推出另一类对象也具有这些特征的推理，称为类比推理（简称类比）
特征	归纳推理是由_____，由_____的推理	类比推理是由_____的推理

2. 合情推理

含义	归纳推理和类比推理都是根据已有的事实，经过_____、_____、_____、_____，再进行_____、_____，然后提出_____的推理，我们把它们统称为合情推理
过程	从具体问题出发 → 观察、分析、比较、联想 → 归纳、类比 → 提出猜想

题点知识巩固

知识点一 归纳推理

1. 下列推理中属于归纳推理且结论正确的是（　　）

A. 设数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，由$a_n=2n-1$，求出$S_1=1^2$，$S_2=2^2$，$S_3=3^2$，…，推断：$S_n=n^2$

B. 由$f(x)=x\cos x$满足$f(-x)=-f(x)$对$\forall x\in\mathbf{R}$都成立，推断：$f(x)=x\cos x$为奇函数

C. 由圆$x^2+y^2=r^2$的面积$S=\pi r^2$，推断：椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$(a>b>0)$的面积$S=\pi ab$

D. 由$(1+1)^2>2^1$，$(2+1)^2>2^2$，$(3+1)^2>2^3$，…，推断：对一切$n\in\mathbf{N}_+$，$(n+1)^2>2^n$

2.（2019·淮北市中学高二月考）将正整数排成下表：

1

2　3　4

5　6　7　8　9

10　11　12　13　14　15　16

…

则在表中数字2 018出现在（　　）

A. 第44行第80列

B. 第45行第80列

C. 第44行第81列

D. 第45行第82列

知识点二 类比推理

3. 已知扇形的弧长为l，半径为r，类比三角形的面积公式$S=\frac{底\times高}{2}$，可知扇形面积公式为（　　）

A. $\frac{r^2}{2}$　　B. $\frac{l^2}{2}$

C. $\frac{lr}{2}$　　D. 无法确定

4. 已知$\sqrt{2+\frac{2}{3}}=2\sqrt{\frac{2}{3}}$，$\sqrt{3+\frac{3}{8}}=3\sqrt{\frac{3}{8}}$，$\sqrt{4+\frac{4}{15}}=4\sqrt{\frac{4}{15}}$，…，若$\sqrt{6+\frac{a}{t}}=6\sqrt{\frac{a}{t}}$（$a$，$t$均为正实数），则类比以上等式，可推测$a$，$t$的值，$a+t=$_____.

提能达标过关

一、选择题

1. 已知一列数按如下规律排列：1，3，−2，5，−7，12，−19，31，…，则第9个数是（　　）

A. −50　　B. 50　　C. 42　　D. −42

2. 观察下列事实：$|x|+|y|=1$的不同整数解(x,y)的个数为4，$|x|+|y|=2$的不同整数解(x,y)的个数为8，$|x|+|y|=3$的不同整数解(x,y)的个数为12，…，则$|x|+|y|=20$的不同整数解(x,y)的个数为（　　）

A. 76　　B. 80

C. 8　　D. 92

3. 在等差数列$\{a_n\}$中，如果$m,n,p,r\in\mathbf{N}^*$，且$m+n+p=3r$，那么必有$a_m+a_n+a_p=3a_r$，类比该结论，在等比数列$\{b_n\}$中，如果$m,n,p,r\in\mathbf{N}^*$，且$m+n+p=3r$，那么必有（　　）

A. $b_m+b_n+b_p=3b_r$

B. $b_m+b_n+b_p=b_r^3$

C. $b_mb_nb_p=3b_r$

D. $b_mb_nb_p=b_r^3$

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

4. 把数列$\{a_n\}$的各项按顺序排列成如下的三角形状，

$$\begin{array}{ccccc} & & a_1 & & \\ & a_2 & a_3 & a_4 & \\ a_5 & a_6 & a_7 & a_8 & a_9 \\ & & \cdots & & \end{array}$$

记$A(i,j)$表示第i行的第j个数，例如$A(3,3)=a_7$，若$A(i,j)=a_{2\,018}$，则$j-i=$（　　）

A. 36　　B. 37

C. 38　　D. 45

5. 一同学在电脑中打出如下若干个圈：○●○○●○○○●○○○○●○○○○ ○●…若将此若干个圈依此规律继续下去，得到一系列的圈，那么在前55个圈中的●个数是（　　）

A. 10　　B. 9　　C. 8　　D. 11

二、填空题

6. 在平面几何中有如下结论：正三角ABC的内切圆面积为S_1，外接圆面积为S_2，则$\frac{S_1}{S_2}=\frac{1}{4}$，推广到空间可以得到类似结论：正四面体$P-ABC$的内切球体积为$V_1$，外接球体积为$V_2$，则$\frac{V_1}{V_2}=$_____.

7. 观察等式：

$\frac{\sin 30^\circ+\sin 90^\circ}{\cos 30^\circ+\cos 90^\circ}=\sqrt{3}$，

$\frac{\sin 15^\circ+\sin 75^\circ}{\cos 15^\circ+\cos 75^\circ}=1$，

$\frac{\sin 20^\circ+\sin 40^\circ}{\cos 20^\circ+\cos 40^\circ}=\frac{\sqrt{3}}{3}$，

照此规律，对于一般的角α,β，有等式_____.

8. 观察下列式子：

$1+\frac{1}{2^2}<\frac{3}{2}$，

$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}<\frac{5}{3}$，

$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}<\frac{7}{4}$，

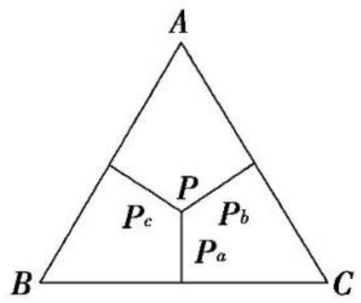
…

根据以上式子可以猜想：$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\cdots+\frac{1}{2\,018^2}<$_____.

三、解答题

9. （**2019・泉港一中高二检测**）已知$f(x)=\frac{1}{3^x+\sqrt{3}}$，分别求$f(0)+f(1)$，$f(-1)+f(2)$，$f(-2)+f(3)$，然后归纳猜想一般性结论，并证明你的结论.

10. （**2019・大庆实验高二检测**）如图所示，在平面上，设h_a，h_b，h_c分别是$\triangle ABC$三条边上的高，P为$\triangle ABC$内任意一点，P到相应三边的距离分别为P_a，P_b，P_c，可以得到结论$\frac{P_a}{h_a}+\frac{P_b}{h_b}+\frac{P_c}{h_c}=1$.



证明此结论，通过类比写出在空间中的类似结论，并加以证明.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

2.1.2　演绎推理

基础知识梳理

1. 演绎推理

(1)演绎推理的含义

从一般性的原理出发，推出_____的结论的推理称为演绎推理. 简言之，演绎推理是由_____到_____的推理.

(2)演绎推理的一般模式

三段论是演绎推理的一般模式，包括：

大前提：_____；

小前提：_____；

结论：_____.

(3)“三段论”的常用格式

大前提：M 是 P.

小前提：S 是 M.

结论：_____.

2. 演绎推理与合情推理

从推理形式上看，归纳是由_____到_____，_____到_____的推理，类比是由_____到_____的推理；而演绎推理是由_____到_____的推理. 从推理所得的结论来看，合情推理的结论_____，有待进一步证明；演绎推理在大前提、小前提和推理形式都正确的前提下，得到的结论_____.

题点知识巩固

知识点一　演绎推理与三段论

1. 下面几种推理中是演绎推理的是　　(　　)

A. 由金、银、铜、铁可导电，猜想：金属都可导电

B. 猜想数列$\{a_n\}$：$\frac{1}{1\times2},\frac{1}{2\times3},\frac{1}{3\times4},\cdots$的通项公式为 $a_n=\frac{1}{n(n+1)}(n\in\mathbf{N}_+)$

C. 半径为 r 的圆面积为 $S=\pi r^2$，则单位圆的面积为 $S=\pi$

D. 由平面直角坐标系中圆的方程为 $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$，推测空间直角坐标系中球的方程为 $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=r^2$

2. (**2019·泉港一中高二期中**)已知 a,b,c 是不全相等的正数，求证：$a(b^2+c^2)+b(c^2+a^2)+c(a^2+b^2)>6abc$.

知识点二　演绎推理的应用

3. (**2019·哈尔滨师大附中高二月考**)《论语·学路》篇中说：“名不正，则言不顺；言不顺，则事不成；事不成，则礼乐不兴；礼乐不兴，则刑罚不中；刑罚不中，则民无所措手足；所以，名不正，则民无所措手足.”上述推理用的是(　　)

A. 类比推理　　B. 归纳推理

C. 演绎推理　　D. 一次三段论

4. “指数函数是增函数，函数 $f(x)=2^x$ 是指数函数，所以函数 $f(x)=2^x$ 是增函数”，以上推理　　(　　)

A. 大前提不正确　　B. 小前提不正确

C. 结论不正确　　D. 正确

提能达标过关

一、选择题

1. 下列推理属于演绎推理的是　　(　　)

A. 由圆的性质可推出球的有关性质

B. 由等边三角形、等腰直角三角形的内角和是 180°，归纳出所有三角形的内角和都是 180°

C. 某次考试小明的数学成绩是满分，由此推出其它各科的成绩都是满分

D. 金属能导电，金、银、铜是金属，所以金、银、铜能导电

2. 命题“有理数是无限循环小数，整数是有理数，所以整数是无限循环小数”是假命题，推理错误的原因是　　(　　)

A. 使用了归纳推理

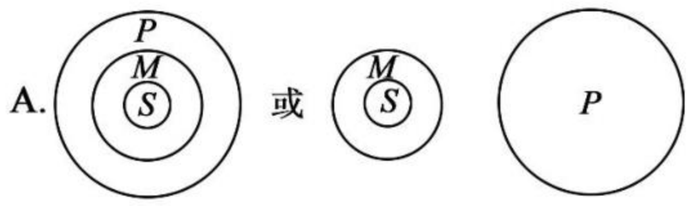
B. 使用了类比推理

C. 使用了“三段论”，但大前提错误

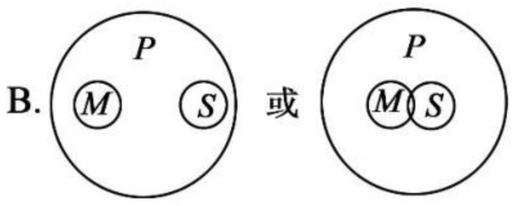
D. 使用了“三段论”，但小前提错误

3. 在三段论法中，M,P,S 的包含关系可表示为　　(　　)

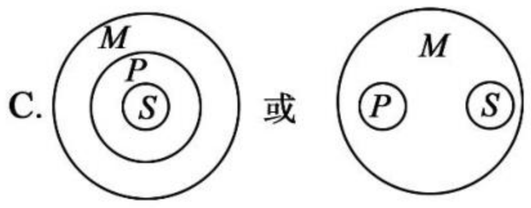
A.



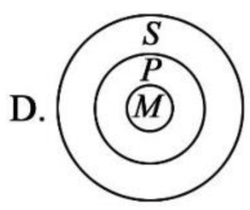
B.



C.



D.



4. 正弦函数是奇函数，$f(x)=\sin(x^2+1)$ 是正弦函数，因此 $f(x)=\sin(x^2+1)$ 是奇函数，以上推理　　(　　)

A. 结论正确　　B. 大前提不正确

C. 小前提不正确　　D. 全不正确

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

5. 下列四个推导过程符合演绎推理三段论形式且推理正确的是（　　）

A. 大前提——无限不循环小数是无理数，小前提——π是无限不循环小数，结论——π是无理数

B. 大前提——无限不循环小数是无理数，小前提——π是无理数，结论——π是无限不循环小数

C. 大前提——π是无限不循环小数，小前提——无限不循环小数是无理数，结论——π是无理数

D. 大前提——π是无限不循环小数，小前提——π是无理数，结论——无限不循环小数是无理数

二、填空题

6. “因为四边形 $ABCD$ 是矩形，所以四边形 $ABCD$ 的对角线相等”，补充以上推理的大前提是_____.

7. 指出三段论推理“自然数中没有最大的数字（大前提），9是最大的数字（小前提），所以9不是自然数（结论）.”错误的原因是_____.

8. （**2019·大庆中学高二期末**）已知函数 $f(x)=a-\dfrac{1}{2^x+1}$，若 $f(x)$ 为奇函数，则 $a=$_____.

三、解答题

9. 把下列演绎推理写成“三段论”的形式.

（1）直角三角形的内角和为180°；

（2）方程 $x^2+2x+3=0$ 无实根.

10. 已知 $y=f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上有意义，单调递增且满足 $f(2)=1$，$f(xy)=f(x)+f(y)$.

（1）求证：$f(x^2)=2f(x)$；

（2）求 $f(1)$ 的值；

（3）若 $f(x)+f(x+3)\leqslant 2$，求 x 的取值范围.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

2.2　直接证明与间接证明

2.2.1　综合法和分析法

基础知识梳理

1. 直接证明

从题目的条件或结论出发，根据已知的定义、定理、公理等，通过推理直接推导出所要证明的结论，这种证明方法称为直接证明. 常用的直接证明方法有_____和_____.

2. 综合法

(1)定义：一般地，利用_____和某些数学_____、_____、_____等，经过一系列的_____，最后推导出所要证明的结论成立，这种证明方法叫做综合法.

(2)框图表示：用 P 表示已知条件，已有的定义、公理、定理等，Q 表示所要证明的结论，则综合法可用框图表示为：

$$\boxed{P\Rightarrow Q_1}\rightarrow\boxed{Q_1\Rightarrow Q_2}\rightarrow\boxed{Q_2\Rightarrow Q_3}\rightarrow\cdots\rightarrow\boxed{Q_n\Rightarrow Q}$$

3. 分析法

(1)定义：一般地，从要证明的_____，逐步寻求使它成立的_____，直至最后，把要证明的结论归结为判定一个明显成立的条件(_____、_____、_____、_____等)为止，这种证明方法叫做分析法.

(2)框图表示：用 Q 表示要证明的结论，则分析法可用框图表示为：

$$\boxed{Q\Leftarrow P_1}\rightarrow\boxed{P_1\Leftarrow P_2}\rightarrow\boxed{P_2\Leftarrow P_3}\rightarrow\cdots\rightarrow\boxed{\text{得到一个明显成立的条件}}$$

题点知识巩固

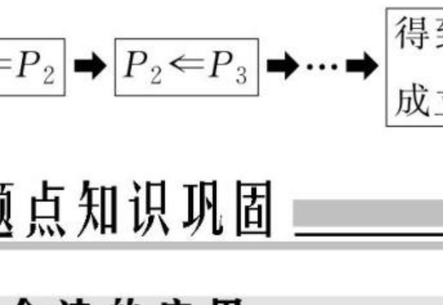
知识点一　综合法的应用

1. 已知 $\frac{\pi}{2}<\beta<\alpha<\frac{3}{4}\pi$，$\cos(\alpha-\beta)=\frac{12}{13}$，$\sin(\alpha+\beta)=-\frac{3}{5}$，则 $\sin 2\alpha=$　　(　　)

A. $\frac{56}{65}$　　B. $-\frac{56}{65}$

C. $\frac{65}{56}$　　D. $-\frac{65}{56}$

2. (**2018·江苏卷**)在平行六面体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，$AA_1=AB$，$AB_1\perp B_1C_1$.



求证：(1)AB // 平面 A_1B_1C；

(2)平面 $ABB_1A_1\perp$ 平面 A_1BC.

知识点二　分析法的应用

3. 已知直线 l,m，平面 α,β，且 $l\perp\alpha$，$m\subset\beta$，给出下列四个命题：①若 α // β，则 $l\perp m$；②若 $l\perp m$，则 α // β；③若 $\alpha\perp\beta$，则 $l\perp m$；④若 l // m，则 $\alpha\perp\beta$.

其中正确命题的个数是　　(　　)

A. 1　　B. 2

C. 3　　D. 4

4. 若 a,b,c 为不全相等的正数，求证：$\lg\frac{a+b}{2}+\lg\frac{b+c}{2}+\lg\frac{c+a}{2}>\lg a+\lg b+\lg c$.

知识点三　综合法与分析法的综合应用

5. 已知 a,b 是不等的正数，且 $a^3-b^3=a^2-b^2$.

求证：$1<a+b<\frac{4}{3}$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

提能达标过关

一、选择题

1. 已知 a,b,c 满足 $c<b<a$，且 $ac<0$，那么下列选项中一定成立的是（　　）

A. $ab>ac$　　B. $c(b-a)<0$

C. $cb^2<ab^2$　　D. $ac(a-c)>0$

2. 在 $\triangle ABC$ 中，若 $\sin A\sin B<\cos A\cos B$，则 $\triangle ABC$ 一定是（　　）

A. 直角三角形　　B. 锐角三角形

C. 钝角三角形　　D. 等边三角形

3. 要证明 $a^2+b^2-1-a^2b^2\leqslant 0$，只要证明（　　）

A. $2ab-1-a^2b^2\leqslant 0$

B. $a^2+b^2-1-\dfrac{a^4+b^4}{2}\leqslant 0$

C. $\dfrac{(a+b)^2}{2}-1-a^2b^2\leqslant 0$

D. $(a^2-1)(b^2-1)\geqslant 0$

4. 若 $P=\sqrt{a}+\sqrt{a+7}$，$Q=\sqrt{a+3}+\sqrt{a+4}(a\geqslant 0)$，则 P,Q 的大小关系是（　　）

A. $P>Q$　　B. $P=Q$

C. $P<Q$　　D. 不确定

5. 在等比数列 $\{a_n\}$ 中，首项 $a_1=1$，且 $4a_3,2a_4,a_5$ 成等差数列，若数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项之积为 T_n，则 T_{10} 的值为（　　）

A. 2^9-1　　B. 2^{36}

C. $2^{10}-1$　　D. 2^{45}

二、填空题

6. 若向量 $\overrightarrow{OA}=(1,-3)$，$|\overrightarrow{OA}|=|\overrightarrow{OB}|$，$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=0$，则 $|\overrightarrow{AB}|=$_____.

7. 已知不等式 $(x+y)\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{a}{y}\right)\geqslant 9$ 对任意正实数 x,y 恒成立，则正实数 a 的最小值为_____.

8. 若椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的离心率是 $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，则双曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 的离心率是_____.

三、解答题

9. 设 a,b 为实数，求证：$\sqrt{a^2+b^2}\geqslant\dfrac{\sqrt{2}}{2}(a+b)$.

10. 如图1，已知 $\triangle PAB$ 中，$PA\perp PB$，点 P 在斜边 AB 上的射影为点 H.

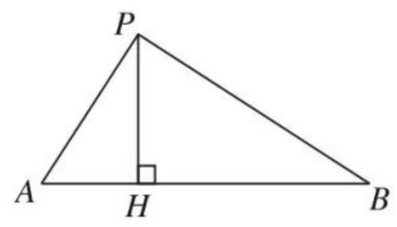


图1

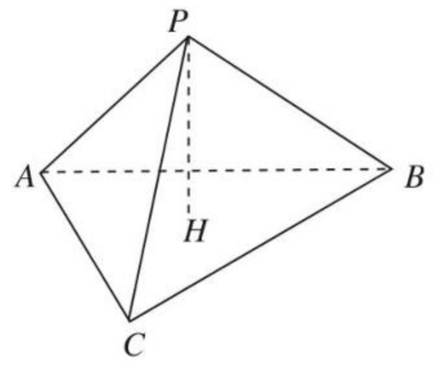


图2

(1)求证：$\dfrac{1}{PH^2}=\dfrac{1}{PA^2}+\dfrac{1}{PB^2}$；

(2)如图2，已知三棱锥 $P-ABC$ 中，侧棱 PA,PB,PC 两两互相垂直，点 P 在底面 ABC 内的射影为点 H. 类比(1)中的结论，猜想三棱锥 $P-ABC$ 中 PH 与 PA,PB,PC 的关系，并证明.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

2.2.2　反证法

基础知识梳理

1. 定义：假设原命题_____，经过正确的推理，最后得出矛盾，因此说明_____，从而证明了_____，这种证明方法叫做反证法.

2. 反证法常见的矛盾类型：反证法的关键是在正确的推理下得出矛盾. 这个矛盾可以是与_____矛盾，或与_____矛盾，或与_____矛盾等.

3. 反证法中常用的“结论词”与“反设词”如下：

结论词	至少有一个	_____	至少有 n 个	至多有____个
反设词	_____（不存在）	至少有两个	至多有_____个	至少有 $(n+1)$ 个
结论词	只有一个	对所有 x 成立	对_____ x 不成立	
反设词	没有或至少有两个	存在_____ x 不成立	存在某个 x 成立	
结论词	都是	_____	p 或 q	p ____ q
反设词	_____	不一定是	$\neg p$ ____ $\neg q$	$\neg p$ 或 $\neg q$

题点知识巩固

知识点一　用反证法证明否定（肯定）命题

1. 若 $a>0,b>0$，且 $ab=1$，用反证法证明：$a^2+a<2$ 与 $b^2+b<2$ 不可能同时成立.

知识点二　用反证法证明唯一性问题

2. 求证：过一点只有一条直线与已知平面垂直.

已知：平面 α 和一点 P.

求证：过点 P 与 α 垂直的直线只有一条.

知识点三　用反证法证明至多与至少问题

3. 若 m,n 都是正实数，$m+n>2$，证明：$\frac{1+m}{n}<2$ 和 $\frac{1+n}{m}<2$ 中至少有一个成立.

提能达标过关

一、选择题

1. 应用反证法推出矛盾的推导过程中可把下列哪些作为条件使用　（　）

①结论相反判断，即假设；②原命题的条件；③公理、定理、定义等；④原结论.

A. ①②　　B. ①②④

C. ①②③　　D. ②③

2. 用反证法证明命题“三角形的内角中至少有一个不大于60°”时，假设正确的是　（　）

A. 假设三个内角都不大于 60°

B. 假设三个内角都大于 60°

C. 假设三个内角至多有一个大于 60°

D. 假设三个内角至多有两个大于 60°

3. 设 x,y,z 都是正实数，$a=x+\frac{1}{y},b=y+\frac{1}{z},c=z+\frac{1}{x}$，则 a,b,c 三个数　（　）

A. 至少有一个不大于 2

B. 都小于 2

C. 至少有一个不小于 2

D. 都大于 2

4. （**2019·福建厦门二中高二月考**）用反证法证明命题：“已知 $a,b\in\mathbf{N}^*$，如果 ab 能被 11 整除，那么 a,b 中至少有一个能被 11 整除”，则应假设　（　）

A. a,b 都不能被 11 整除

B. a,b 中至多有一个能被 11 整除

C. a,b 中至多有一个不能被 11 整除

D. a,b 都能被 11 整除

5. （**2019·张家口中学高二期末**）若下列关于 x 的方程 $x^2+4ax-4a+3=0$（a 为常数），$x^2+(a-1)x+a^2=0$，$x^2+2ax-2a=0$ 中至少有一个方程有实根，则实数 a 的取值范围是　（　）

A. $\left(-\frac{3}{2},1\right)$

B. $\left(-\infty,-\frac{3}{2}\right]\cup[-1,+\infty)$

C. $(-2,0)$

D. $\left(-\infty,-\frac{3}{2}\right]\cup[0,+\infty)$

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

二、填空题

6. 用反证法证明命题“设 $a,b\in\mathbf{R}$，$|a|+|b|<1$，$a^2-4b\geqslant 0$，那么 $x^2+ax+b=0$ 的两根的绝对值都小于 1”时，应假设_____.

7. 某同学准备用反证法证明如下问题：函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上有意义，且 $f(0)=f(1)$，如果对于不同的 $x_1,x_2\in[0,1]$，都有 $|f(x_1)-f(x_2)|<|x_1-x_2|$，求证：$|f(x_1)-f(x_2)|<\frac{1}{2}$. 那么他的假设应该是_____.

8. 设 a,b 是两个实数，给出下列条件：

   ① $a+b>1$；② $a+b=2$；③ $a+b>2$；④ $a^2+b^2>2$；⑤ $ab>1$.

   其中能推出：“a,b 中至少有一个大于 1”的条件是_____（填序号）.

三、解答题

9. （**2019·中山一中高二统测**）请按要求完成下列两题的证明：

   （1）已知 $0<a<1$，$0<b<1$，用分析法证明：$\frac{a+b}{1+ab}\leqslant 1$；

   （2）用反证法证明：如果 $x<-1$，那么 $x^2-6x-4\neq 0$.

10. 设函数 $f(x)=ax^3-2bx^2+cx+4d(a,b,c,d\in\mathbf{R})$ 的图象关于原点对称，且 $x=1$ 时，$f(x)$ 取得极小值 $-\frac{2}{3}$.

    （1）求 $f(x)$；

    （2）当 $x\in[-1,1]$ 时，图象上是否存在两点，使得在此两点处的切线互相垂直，试证明你的结论.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

2.3　数学归纳法

基础知识梳理

数学归纳法

证明一个与正整数 n 有关的命题，可按下列步骤进行：

第一步，证明当 n 取_____时命题成立；

第二步，假设_____时命题成立，证明_____时命题也成立.

只要完成这两个步骤，就可以断定命题对从 n_0 开始的所有正整数 n 都成立. 上述证明方法叫做数学归纳法.

题点知识巩固

知识点一　用数学归纳法证明等式

1. 用数学归纳法证明：

$$\frac{1^2}{1\times3}+\frac{2^2}{3\times5}+\cdots+\frac{n^2}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{n(n+1)}{2(2n+1)}.$$

知识点二　用数学归纳法证明不等式

2. 用数学归纳法证明：

$$\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}<1-\frac{1}{n}(n\geqslant2,n\in\mathbf{N}^*).$$

知识点三　数学归纳法与数列问题

3. 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 $S_n=1-na_n(n\in\mathbf{N}^*)$.

(1)计算 a_1,a_2,a_3,a_4；

(2)猜想 a_n 的表达式，并用数学归纳法证明你的结论.

4. 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，且 $a_1=1$，$S_n=n^2a_n$ $(n\in\mathbf{N}^*)$.

(1)试计算 S_1,S_2,S_3,S_4，并猜想 S_n 的表达式；

(2)求出 a_n 的表达式，并证明(1)中你的猜想.

提能达标过关

一、选择题

1. 用数学归纳法证明 $1+a+a^2+\cdots+a^{n+1}=\frac{1-a^{n+2}}{1-a}$ $(n\in\mathbf{N}^*,a\neq1)$，在验证 $n=1$ 成立时，左边所得的项为（　　）

A. 1　　B. $1+a+a^2$

C. $1+a$　　D. $1+a+a^2+a^3$

2. 用数学归纳法证明“$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2^n-1}<n(n\in\mathbf{N}^*,n>1)$”时，由假设 $n=k(k>1,k\in\mathbf{N}^*)$ 不等式成立，推证 $n=k+1$ 不等式成立时，不等式左边应增加的项数是（　　）

A. 2^{k-1}　　B. 2^k-1

C. 2^k　　D. 2^k+1

3. (**2019·石嘴山中学高二检测**)用数学归纳法证明 $n+(n+1)+(n+2)+\cdots+(3n-2)=(2n-1)^2(n\in\mathbf{N}^*)$ 时，若记 $f(n)=n+(n+1)+(n+2)+\cdots+(3n-2)$，则 $f(k+1)-f(k)$ 等于（　　）

A. $3k-1$　　B. $3k+1$

C. $8k$　　D. $9k$

4. 证明等式 $1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ $(n\in\mathbf{N}^*)$ 时，某学生的证明过程如下

①当 $n=1$ 时，$1^2=\frac{1\times2\times3}{6}$，等式成立；

②假设 $n=k(k\in\mathbf{N}^*)$ 时，等式成立，

即 $1^2+2^2+3^2+\cdots+k^2=\frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$，

则当 $n=k+1$ 时，

$$\begin{aligned}&1^2+2^2+3^2+\cdots+k^2+(k+1)^2\\&=\frac{k(k+1)(2k+1)}{6}+(k+1)^2\\&=\frac{(k+1)[k(2k+1)+6(k+1)]}{6}\\&=\frac{(k+1)(2k^2+7k+6)}{6}\\&=\frac{(k+1)[(k+1)+1][2(k+1)+1]}{6},\end{aligned}$$

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

所以当 $n=k+1$ 时，等式也成立，故原式成立.

那么上述证明　　(　　)

A. 过程全都正确

B. 当 $n=1$ 时验证不正确

C. 归纳假设不正确

D. 从 $n=k$ 到 $n=k+1$ 的推理不正确

5. 已知 $1+2\times3+3\times3^2+4\times3^3+\cdots+n\times3^{n-1}=3^n(na-b)+c$ 对一切 $n\in\mathbf{N}^*$ 都成立，那么 a,b,c 的值为　　(　　)

A. $a=\frac{1}{2},b=c=\frac{1}{4}$　　B. $a=b=c=\frac{1}{4}$

C. $a=0,b=c=\frac{1}{4}$　　D. 不存在这样的 a,b,c

二、填空题

6. 用数学归纳法证明“当 n 为正奇数时，x^n+y^n 能被 $x+y$ 整除”，当第二步假设 $n=2k-1(k\in\mathbf{N}^*)$ 命题为真时，进而需证 $n=$_____ 时，命题亦真.

7. (**2019·南阳一中高二月考**)用数学归纳法证明“当 $n\in\mathbf{N}^*$ 时，求证：$1+2+2^2+2^3+\cdots+2^{5n-1}$ 是 31 的倍数”时，当 $n=1$ 时，原式为_____，从 $n=k$ 到 $n=k+1$ 时需增添的项是_____.

8. 用数学归纳法证明：“两两相交且不共点的 n 条直线把平面分为 $f(n)$ 部分，则 $f(n)=1+\frac{n(n+1)}{2}$.”证明第二步归纳递推时，用到 $f(k+1)=f(k)+$_____.

三、解答题

9. (**2019·泉州高二期末**)证明：$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}(n\in\mathbf{N}^*)$.

10. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_{n+1}=\frac{1}{2-a_n}(n\in\mathbf{N}^*)$，且 $a_1=0$.

(1)计算 a_2,a_3,a_4 的值，并猜想 a_n 的表达式；

(2)请用数学归纳法证明你在(1)中的猜想.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

第三章 数系的扩充与复数的引入

3.1 数系的扩充和复数的概念

3.1.1 数系的扩充和复数的概念

基础知识梳理

1. 复数的有关概念

(1)复数

①定义:形如 $a+bi$ 的数叫做复数,其中 $a,b\in$ _____,i 叫做_____,a 叫做复数的_____,b 叫做复数的_____.

②代数形式:复数通常用____表示,即_____.

(2)复数集

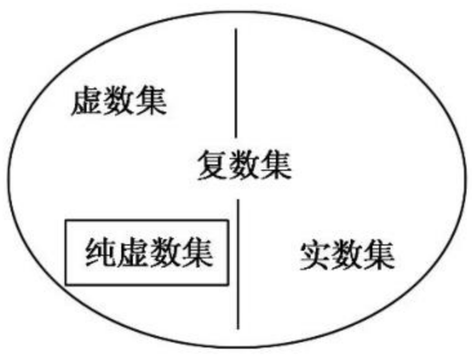
①定义:_____所构成的集合叫做复数集.

②表示:通常用大写字母____表示.

2. 复数的分类

(1)设 $z=a+bi(a,b\in\mathbf{R})$,则当且仅当_____时,z 为实数.当_____时,z 为虚数,当_____时,z 为纯虚数.

(2)复数集内的包含关系



3. 复数相等的充要条件

设 a,b,c,d 都是实数,则 $a+bi=c+di\Leftrightarrow$_____;$a+bi=0\Leftrightarrow$_____.

题点知识巩固

知识点一 复数的概念

1. "$x=0$"是"复数 $z=x^2-x+(x-1)i(x\in\mathbf{R})$ 为纯虚数"的 ( )

A. 充分不必要条件

B. 必要不充分条件

C. 充要条件

D. 既不充分也不必要条件

2. 下列命题正确的是 ( )

A. 纯虚数集相对于复数集的补集是虚数集

B. z_1,z_2 为复数,若 $z_1^2+z_2^2=0$,则 $z_1=z_2=0$

C. 复数 $2+3i$ 的虚部是 $3i$

D. 两个虚数不能比较大小

知识点二 复数的分类

3. 实数 m 为何值时,复数 $z=\frac{m(m+2)}{m-1}+(m^2+2m-3)i$ 是

(1)实数;(2)虚数;(3)纯虚数.

知识点三 复数相等

4. 已知命题 p:若复数 $z_1=a+bi(a,b\in\mathbf{R})$,$z_2=c+di(c,d\in\mathbf{R})$,则"$\begin{cases}a=c,\\b=d\end{cases}$"是"$z_1=z_2$"的充要条件;命题 q:若函数 $f(x)$ 可导,则"$f'(x_0)=0$"是"x_0 是函数 $f(x)$ 的极值点"的充要条件.则下列命题为真命题的是 ( )

A. $p\wedge q$ B. $(\neg p)\wedge q$

C. $p\wedge(\neg q)$ D. $(\neg p)\wedge(\neg q)$

提能达标过关

一、选择题

1. 设 a 为 $-i$ 的虚部,b 为 $2i$ 的实部,则 $a+b=$ ( )

A. -1 B. -2

C. -3 D. 0

2. 设 $C=\{$复数$\}$,$A=\{$实数$\}$,$B=\{$纯虚数$\}$,全集 $U=C$,那么下列结论正确的是 ( )

A. $A\cup B=C$ B. $\complement_U A=B$

C. $A\cap\complement_U B=\varnothing$ D. $B\cup\complement_U B=C$

3. (**2019·定州高三模拟**)若复数 $\cos\theta+i\sin\theta$ 和 $\sin\theta+i\cos\theta$ 相等,则 θ 值为 ( )

A. $\frac{\pi}{4}$ B. $\frac{\pi}{4}$或$\frac{5}{4}\pi$

C. $2k\pi+\frac{\pi}{4}(k\in\mathbf{Z})$ D. $k\pi+\frac{\pi}{4}(k\in\mathbf{Z})$

4. 已知集合 $M=\{1,2,(m^2-3m-1)+(m^2-5m-6)i\}$,集合 $P=\{-1,3\}$,$M\cap P=\{3\}$,则实数 m 的值为 ( )

A. -1 B. -1 或 4

C. 6 D. 6 或 -1

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

5.“$a=3$”是“复数 $z=(a^2-9)+(a+1)\mathrm{i}(a\in\mathbf{R})$ 为纯虚数”的（　　）

A. 充分不必要条件

B. 必要不充分条件

C. 充要条件

D. 既不充分也不必要条件

二、填空题

6. 若 $a,b\in\mathbf{R}$，且 $a-2\mathrm{i}=b\mathrm{i}+1$，则 $a^2+b^2=$_____.

7.（**2019·马鞍山二中高二检测**）已知 $z_1=(-4a+1)+(2a^2+3a)\mathrm{i}$，$z_2=2a+(a^2+a)\mathrm{i}$，其中 $a\in\mathbf{R}$. 若 $z_1>z_2$，则 a 的取值集合为_____.

8. 若 $\log_2(x^2-3x-2)+\mathrm{i}\log_2(x^2+2x+1)>1$，则实数 x 的取值范围是_____.

三、解答题

9. 已知复数 $z=\dfrac{a^2-7a+6}{a^2-1}+(a^2-5a-6)\mathrm{i}(a\in\mathbf{R})$，实数 a 取什么值时，z 是

(1)实数？

(2)虚数？

(3)纯虚数？

10.（**2019·无锡高二联考**）定义运算 $\begin{vmatrix}a & b\\ c & d\end{vmatrix}=ad-bc$，如果 $(x+y)+(x+3)\mathrm{i}=\begin{vmatrix}3x+2y & \mathrm{i}\\ -y & 1\end{vmatrix}$，求实数 x,y 的值.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

3.1.2　复数的几何意义

基础知识梳理

1. 建立直角坐标系来表示复数的平面叫做复平面.

x 轴叫做_____，y 轴叫做_____，虚轴上的点(0,0)不对应虚数.

2. 复数 $z=a+b\mathrm{i}$ $\xleftrightarrow{\text{一一对应}}$ _____；

复数 $z=a+b\mathrm{i}$ $\xleftrightarrow{\text{一一对应}}$ _____.

3. 向量$\overrightarrow{OZ}$的模 r 叫做复数 $z=a+b\mathrm{i}$ 的模，记作_____或_____，即 $|z|=|a+b\mathrm{i}|=$ _____.

题点知识巩固

知识点一　复数的几何意义

1. 复数 $(3+\mathrm{i})m-(2+\mathrm{i})$ 对应的点在第三象限内，则实数 m 的取值范围是_____.

2. 实数 m 取何值时，复数 $z=\dfrac{m^2+m-2}{m+3}+(m^2+5m+6)\mathrm{i}$ 在复平面内对应的点：

(1)位于第一象限；

(2)位于实轴上；

(3)位于直线 $2x+y=0$ 上.

知识点二　复数的模

3. 已知复数 z 满足 $|z|^2-2|z|-3=0$，则复数 z 对应点的轨迹为　(　)

A. 一个圆　　B. 线段

C. 两点　　D. 两个圆

4. 已知复数 $z_1=x+y\mathrm{i}$，$z_2=x-y\mathrm{i}(x,y\in\mathbf{R})$，若 $z_1+z_2=2$，且 $|z_1|=|z_2|=\sqrt{2}$，则复数 z_1 的虚部为　(　)

A. 1　　B. i

C. ±1　　D. $\pm\mathrm{i}$

提能达标过关

一、选择题

1. (**2019·全国卷Ⅰ**)设复数 z 满足 $|z-\mathrm{i}|=1$，z 在复平面内对应的点为 (x,y)，则　(　)

A. $(x+1)^2+y^2=1$　　B. $(x-1)^2+y^2=1$

C. $x^2+(y-1)^2=1$　　D. $x^2+(y+1)^2=1$

2. 在复平面内，与复数 $z=1+\mathrm{i}$ 所对应的点关于实轴对称的点为 A，则 A 对应的复数为　(　)

A. $1+\mathrm{i}$　　B. $1-\mathrm{i}$

C. $-1-\mathrm{i}$　　D. $-1+\mathrm{i}$

3. (**2019·长庆高中高二月考**)在复平面内，复数 z_1，z_2 对应点分别为 A，B. 已知 $A(1,2)$，$|AB|=2\sqrt{5}$，$|z_2|=\sqrt{41}$，则 $z_2=$　(　)

A. $4+5\mathrm{i}$　　B. $5+4\mathrm{i}$

C. $3+4\mathrm{i}$　　D. $5+4\mathrm{i}$ 或 $\dfrac{1}{5}+\dfrac{32}{5}\mathrm{i}$

4. 下面四个式子中，正确的个数有　(　)

①$3\mathrm{i}>2\mathrm{i}$；②$|2+3\mathrm{i}|=|1-4\mathrm{i}|$；③$|2-\mathrm{i}|>2\mathrm{i}^2$；④$\mathrm{i}^2>\mathrm{i}$.

A. 0　　B. 1

C. 2　　D. 3

5. 若复数 $z=(1+a)+(1-a)\mathrm{i}$ 在复平面内对应的点位于第二象限，则实数 a 的取值范围是　(　)

A. $(-\infty,1)$　　B. $(-\infty,-1)$

C. $(1,+\infty)$　　D. $(-1,+\infty)$

二、填空题

6. (**2019·阳平中学高二月考**)若复数 $z=(m^2-9)+(m^2+2m-3)\mathrm{i}$ 是纯虚数，其中 $m\in\mathbf{R}$，则 $|z|=$ _____.

7. 复平面内长方形 $ABCD$ 的四个顶点中，点 A，B，C 所对应的复数分别是 $2+3\mathrm{i}$，$3+2\mathrm{i}$，$-2-3\mathrm{i}$，则 D 点对应的复数为_____.

8. 设 $z=(k^2-k)+(k^2-1)\mathrm{i}$，$k\in\mathbf{R}$，且 z 对应复平面上的点在第三象限，则 k 的取值范围是_____.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

三、解答题

9. 已知复数 $z=a^2+ai(a\in\mathbf{R})$，若 $|z|=\sqrt{2}$，且 z 在复平面内对应的点位于第四象限. 求复数 z.

10. (**2019·辽阳集美高二期中**)已知复数 $z_0=a+bi(a,b\in\mathbf{R})$，$z=(a+3)+(b-2)i$，若 $|z_0|=2$，求复数 z 对应点的轨迹.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

3.2　复数代数形式的四则运算

3.2.1　复数代数形式的加、减运算及其几何意义

基础知识梳理

1. 设 $z_1=a+b\mathrm{i}, z_2=c+d\mathrm{i}(a,b,c,d\in\mathbf{R})$，则 $z_1+z_2=$_____，$z_1-z_2=$_____，即两个复数的和(或差)仍然是一个_____.

2. 复数的加法满足：(1)交换律_____；(2)结合律_____.

题点知识巩固

知识点一　复数的加减运算

1. 计算：(1)$(-7\mathrm{i}+5)-(9-8\mathrm{i})+(3-2\mathrm{i})$；

(2)$\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\mathrm{i}\right)+(2-\mathrm{i})-\left(\frac{4}{3}-\frac{3}{2}\mathrm{i}\right)$；

(3)已知 $z_1=2+3\mathrm{i}, z_2=-1+2\mathrm{i}$，求 z_1+z_2, z_1-z_2.

知识点二　复数加减法的几何意义

2. 在复平面内，复数 $z=(4-7\mathrm{i})+(2+3\mathrm{i})$(i 是虚数单位)，则 z 在复平面内对应的点位于　(　　)

A. 第一象限　　B. 第二象限

C. 第三象限　　D. 第四象限

3. 复数 $z_1=1+2\mathrm{i}, z_2=-2+\mathrm{i}, z_3=-1-2\mathrm{i}$，它们在复平面上的对应点是一个正方形的三个顶点，求这个正方形的第四个顶点对应的复数.

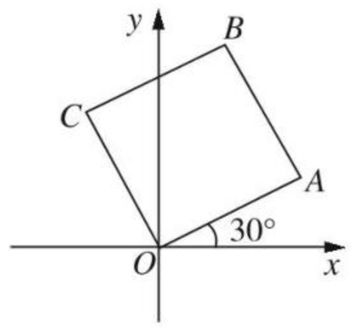
知识点三　复数加减法的综合应用

4. 设 $z=3-4\mathrm{i}$，则复数 $z-|z|+(1-\mathrm{i})$ 在复平面内的对应点在　(　　)

A. 第一象限　　B. 第二象限

C. 第三象限　　D. 第四象限

5. 如图，正方形 $OABC$ 的边长为 2，且 OA 边与 x 轴正方向的夹角为 30°，求：



(1)$\overrightarrow{OA}$、$\overrightarrow{OC}$所表示的复数；

(2)对角线$\overrightarrow{CA}$所表示的复数；

(3)点 B 对应的复数.

提能达标过关

一、选择题

1. 复数$(-1+3\mathrm{i})+(2+\mathrm{i})+(1-5\mathrm{i})=$　(　　)

A. $2+\mathrm{i}$　　B. $2-\mathrm{i}$

C. $1+2\mathrm{i}$　　D. $1-2\mathrm{i}$

2. $(-1+2\mathrm{i})-z=-5\mathrm{i}$，则 $|z|$ 的值为　(　　)

A. 10　　B. $\sqrt{10}$

C. 50　　D. $5\sqrt{2}$

3. 如果复数 $z=3+a\mathrm{i}$ 满足条件 $|z-2|<2$，那么实数 a 的取值范围是　(　　)

A. $(-2\sqrt{2},2\sqrt{2})$　　B. $(-2,2)$

C. $(-1,1)$　　D. $(-\sqrt{3},\sqrt{3})$

4. **(2019·高平中学高二检测)**设 $z\in C$，且 $|z+1|-|z-\mathrm{i}|=0$，则 $|z+\mathrm{i}|$ 的最小值为　(　　)

A. 0　　B. 1

C. $\frac{\sqrt{2}}{2}$　　D. $\frac{1}{2}$

5. 若复数 $z=(a+\mathrm{i})+(2-3\mathrm{i})(a\in\mathbf{R})$ 为纯虚数，其中 i 为虚数单位，则实数 $a=$　(　　)

A. 2　　B. 3

C. -2　　D. -3

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

二、填空题

6.（**2019·富顺一中高二期中**）设复数 z 满足 $z+|z|=2+\mathrm{i}$，则 $z=$_____.

7. i 为虚数单位，设复数 z 满足 $(3+4\mathrm{i})+z=-7\mathrm{i}$，则 z 的虚部为_____.

8. 设复数 $z=3+2\mathrm{i}$，其对应复平面内点为 A，若 $\overrightarrow{AB}=(0,-4)$，$O$ 为坐标原点，则 $\triangle AOB$ 的面积为_____.

三、解答题

9. 已知 $z_1=\frac{\sqrt{3}}{2}a+(a+1)\mathrm{i}$，$z_2=-3\sqrt{3}b+(b+2)\mathrm{i}$（$a,b\in\mathbf{R}$），若 $z_1-z_2=4\sqrt{3}$，求 z_1,z_2.

10.（**2019·平顶山高二联考**）在复平面内，A,B,C 三点对应的复数分别为 $1,2+\mathrm{i},-1+2\mathrm{i}$.

（1）求向量 $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{BC}$ 对应的复数；

（2）判断 $\triangle ABC$ 的形状；

（3）求 $\triangle ABC$ 的面积.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

3.2.2　复数代数形式的乘除运算

基础知识梳理

1. (1)复数的乘法法则

设 $z_1=a+b\mathrm{i}, z_2=c+d\mathrm{i}(a,b,c,d\in\mathbf{R})$,

则 $z_1\cdot z_2=(a+b\mathrm{i})(c+d\mathrm{i})=$_____.

(2)复数的乘法满足的运算律

复数的乘法满足交换律、结合律及乘法对加法的分配律,

即 $z_1\cdot z_2=$_____, $z_1\cdot(z_2\cdot z_3)=$_____, $z_1\cdot(z_2+z_3)=$_____.

2. 一般地,当两个复数的_____时,这两个复数叫做互为共轭复数,虚部不等于 0 的两个共轭复数也叫做_____, z 的共轭复数用_____表示.

若 $z=a+b\mathrm{i}(a,b\in\mathbf{R})$,则 $\bar{z}=$_____.

3. 设 $z_1=a+b\mathrm{i}, z_2=c+d\mathrm{i}(c+d\mathrm{i}\neq0)$,则 $\dfrac{z_1}{z_2}=\dfrac{a+b\mathrm{i}}{c+d\mathrm{i}}=$_____.

题点知识巩固

知识点一　复数代数形式的乘除运算

1. 复数 $z=\dfrac{\mathrm{i}}{1+2\mathrm{i}}$ 的虚部为　(　　)

A. $\dfrac{2}{5}$　　B. $\dfrac{2}{5}\mathrm{i}$　　C. $\dfrac{1}{5}$　　D. $\dfrac{1}{5}\mathrm{i}$

2. (**2019·全国卷Ⅲ**)若 $z(1+\mathrm{i})=2\mathrm{i}$,则 $z=$　(　　)

A. $-1-\mathrm{i}$　　B. $-1+\mathrm{i}$

C. $1-\mathrm{i}$　　D. $1+\mathrm{i}$

知识点二　共轭复数的概念

3. 已知复数 $z=\dfrac{1-3\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}$,则 $z\bar{z}=$　(　　)

A. $\sqrt{2}$　　B. 2　　C. $\sqrt{5}$　　D. 5

4. 若 $z=4+3\mathrm{i}$,则 $\dfrac{\bar{z}}{|z|}=$　(　　)

A. 1　　B. -1

C. $\dfrac{4}{5}+\dfrac{3}{5}\mathrm{i}$　　D. $\dfrac{4}{5}-\dfrac{3}{5}\mathrm{i}$

知识点三　复数的综合运算

5. 已知复数 z 满足 $|z|-\mathrm{i}=\bar{z}+2+3\mathrm{i}$(其中 i 为虚数单位).

(1)求 z;

(2)若 $\dfrac{a+2\mathrm{i}}{z}$ 为纯虚数,求实数 a 的值.

提能达标过关

一、选择题

1. 在复平面内,复数 $z=\dfrac{2}{1-\mathrm{i}}-\mathrm{i}^3$ 对应的点位于　(　　)

A. 第一象限　　B. 第二象限

C. 第三象限　　D. 第四象限

2. (**2019·全国卷Ⅱ**)设 $z=\mathrm{i}(2+\mathrm{i})$,则 $\bar{z}=$　(　　)

A. $1+2\mathrm{i}$　　B. $-1+2\mathrm{i}$

C. $1-2\mathrm{i}$　　D. $-1-2\mathrm{i}$

3. 已知 $\dfrac{4+(a-2)\mathrm{i}}{\mathrm{i}}$ 为纯虚数,则实数 a 的值为　(　　)

A. 4　　B. 2　　C. 1　　D. -2

4. 若复数 z 满足 $(3-4\mathrm{i})z=|4+3\mathrm{i}|$,则 z 的虚部为　(　　)

A. $\dfrac{4}{5}\mathrm{i}$　　B. $\dfrac{4}{5}$

C. $4\mathrm{i}$　　D. 4

5. 若复数 $z=\dfrac{1+\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}+m(1-\mathrm{i})$(i 为虚数单位)为纯虚数,则实数 m 的值为　(　　)

A. 0　　B. 1

C. -1　　D. 2

二、填空题

6. (**2019·天津卷**)i 是虚数单位,则 $\left|\dfrac{5-\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}\right|$ 的值为_____.

7. 已知 $\dfrac{2x}{1-\mathrm{i}}+1=y\mathrm{i}(x,y\in\mathbf{R})$,则 $x+y=$_____.

8. 设复数 z 满足 $\dfrac{1-z}{1+z}=\mathrm{i}$,则 $|1+z|=$_____.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

三、解答题

9.（**2019·镇海中学高二测试**）复数 $z=\dfrac{(1+\mathrm{i})^3(a+b\mathrm{i})}{1-\mathrm{i}}$ 且 $|z|=4$，z 对应的点在第一象限，若复数 0，z，$\bar{z}$ 对应的点是正三角形的三个顶点，求实数 a，b 的值.

10.（**2019·陵川高二月考**）设复数 $z=\dfrac{(1+\mathrm{i})^2+3(1-\mathrm{i})}{2+\mathrm{i}}$，若 $z^2+\dfrac{a}{z}<0$，求纯虚数 a.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

阶段测试一

第一章　导数及其应用

（时间：120 分钟　满分：150 分）

一、选择题（本大题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分）

1. 下列计算错误的是（　　）

A. $\int_{-\pi}^{\pi} \sin x\mathrm{d}x=0$

B. $\int_{0}^{1} \sqrt{x}\mathrm{d}x=\frac{2}{3}$

C. $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x\mathrm{d}x=2\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos x\mathrm{d}x$

D. $\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 x\mathrm{d}x=0$

2. 曲线 $f(x)=2x-\mathrm{e}^x$ 在点 $(0,f(0))$ 处的切线方程是（　　）

A. $x-y+1=0$　　B. $x-y-1=0$

C. $x-y=0$　　D. $2x-y-1=0$

3. 函数 $y=x^2\cos 2x$ 的导数为（　　）

A. $y'=2x\cos 2x-x^2\sin 2x$

B. $y'=2x\cos 2x-2x^2\sin 2x$

C. $y'=x^2\cos 2x-2x\sin 2x$

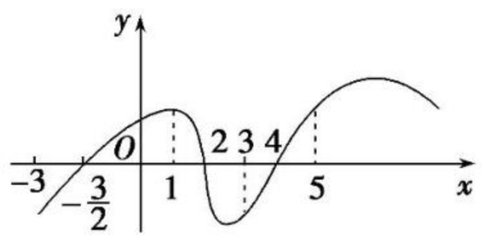
D. $y'=2x\cos 2x+2x^2\sin 2x$

4. （**2019·定州中学高二检测**）若 $\int_{0}^{a}(2-3x)\mathrm{d}x=-2(a>0)$，则 a 的值为（　　）

A. 2　　B. $\frac{2}{3}$

C. 2 或 $\frac{2}{3}$　　D. 2 或 $-\frac{2}{3}$

5. （**2019·自贡一中高二检测**）如图是函数 $y=f(x)$ 的导函数 $y=f'(x)$ 的图象，则下列哪一个判断是正确的（　　）



A. 在区间 $(-2,1)$ 内 $f(x)$ 是增函数

B. 在区间 $(1,3)$ 内 $f(x)$ 是减函数

C. 在区间 $(4,5)$ 内 $f(x)$ 是增函数

D. 在 $x=2$ 时，$f(x)$ 取到极小值

6. 函数 $f(x)=\frac{x}{\sqrt{x}+a}$ 在其定义域内有极值点，则实数 a 的取值范围是（　　）

A. $a\geqslant 0$　　B. $a>0$

C. $a\leqslant 0$　　D. $a<0$

7. 若函数 $f(x)=2x^3+ax^2+1$（a 为常数）在区间 $(-\infty,0)$ 和 $(2,+\infty)$ 上单调递增，且在区间 $(0,2)$ 上单调递减，则 a 的值为（　　）

A. 1　　B. 2

C. -6　　D. -12

8. （**2019·河北石家庄二中二模**）已知函数 $f(x)=\mathrm{e}^{x-1}+\mathrm{e}^{1-x}$，则满足 $f(x)<\mathrm{e}+\mathrm{e}^{-1}$ 的 x 的取值范围是（　　）

A. $1<x<3$　　B. $0<x<2$

C. $0<x<\mathrm{e}$　　D. $1<x<\mathrm{e}$

9. 已知函数 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上满足 $f(x)=2f(2-x)-x^2+8x-8$，则曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,f(1))$ 处的切线方程是（　　）

A. $y=2x-1$　　B. $y=x$

C. $y=3x-2$　　D. $y=-2x+3$

10. （**2019·辽阳集美高二月考**）等比数列 $\{a_n\}$ 中，$a_1=2$，$a_8=4$，函数 $f(x)=x(x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_8)$，则 $f'(0)=$（　　）

A. 2^6　　B. 2^9

C. 2^{12}　　D. 2^{15}

11. 已知曲线方程 $f(x)=\sin^2 x+2ax(a\in\mathbf{R})$，若对任意实数 m，直线 $l:x+y+m=0$ 都不是曲线 $y=f(x)$ 的切线，则 a 的取值范围是（　　）

A. $(-\infty,-1)\cup(-1,0)$

B. $(-\infty,-1)\cup(0,+\infty)$

C. $(-1,0)\cup(0,+\infty)$

D. $a\in\mathbf{R}$ 且 $a\neq 0$，$a\neq -1$

12. 设 $f'(x)$ 为函数 $f(x)$ 的导函数，已知 $x^2f'(x)+xf(x)=\ln x$，$f(1)=\frac{1}{2}$，则下列结论正确的是（　　）

A. $xf(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 单调递增

B. $xf(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 单调递减

C. $xf(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上有极大值 $\frac{1}{2}$

D. $xf(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上有极小值 $\frac{1}{2}$

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

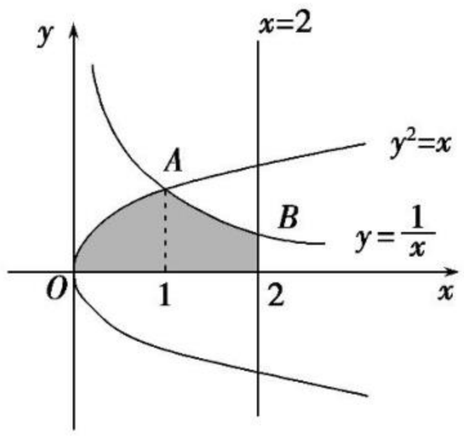
二、填空题(本大题共 4 小题,每小题 5 分,共 20 分)

13. 定积分 $\int_{-1}^{1}(|x|-1)\mathrm{d}x$ 的值为_____.

14. 若点 P 是曲线 $y=x^2-\ln x$ 上任意一点,则点 P 到直线 $y=x-4$ 的距离的最小值为_____.

15. 已知函数 $f(x)=\ln x-ax+1$ 恰有两个零点,则实数 a 的取值范围是_____.

16. (**2019·长庆高中高三模拟**)如图所示阴影部分是由曲线 $y=\frac{1}{x}$,$y^2=x$ 与直线 $x=2$,$y=0$ 围成,则其面积为_____.



三、解答题(本大题共 6 小题,共 70 分)

17. (10 分)已知函数 $f(x)=(x+b)(\mathrm{e}^x-a)(b>0)$ 在 $(-1,f(-1))$ 处的切线方程为 $(\mathrm{e}-1)x+\mathrm{e}y+\mathrm{e}-1=0$.

(1)求实数 a,b;

(2)若 $m\leqslant 0$,证明:$f(x)\geqslant mx^2+x$.

18. (12 分)(**2019·无锡江阴高三模拟**)已知函数 $f(x)=x^2-2(a+1)x+2a\ln x(a>0)$.

(1)当 $a=1$ 时,求曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,f(1))$ 处的切线方程;

(2)求 $f(x)$ 的单调区间;

(3)若 $f(x)\leqslant 0$ 在区间 $[1,\mathrm{e}]$ 上恒成立,求实数 a 的取值范围.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

19.(12 分)已知函数 $f(x)=\ln x-\frac{ax}{x+1}(a\in\mathbf{R})$.

(1)讨论函数 $f(x)$的单调性;

(2)若 $f(x)$有两个极值点 x_1,x_2,证明:$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)<\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$.

20.(12 分)(**2019·武邑高三模拟**)已知函数 $f(x)=ax^3+cx+d(a\neq0)$是 $\mathbf{R}$ 上的奇函数,当 $x=1$ 时,$f(x)$取得极值 -2.

(1)求函数 $f(x)$的解析式;

(2)求函数 $f(x)$的单调区间和极大值;

(3)证明:对任意 x_1、$x_2\in(-1,1)$,不等式 $|f(x_1)-f(x_2)|<4$ 恒成立.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

21.（12 分）（**2018·浙江卷**）已知函数 $f(x)=\sqrt{x}-\ln x$.

（1）若 $f(x)$ 在 $x=x_1,x_2(x_1\neq x_2)$ 处导数相等，证明：$f(x_1)+f(x_2)>8-8\ln 2$；

（2）若 $a\leqslant 3-4\ln 2$，证明：对于任意 $k>0$，直线 $y=kx+a$ 与曲线 $y=f(x)$ 有唯一公共点.

22.（12 分）（**2019·北京卷**）已知函数 $f(x)=\frac{1}{4}x^3-x^2+x$.

（1）求曲线 $y=f(x)$ 的斜率为 1 的切线方程；

（2）当 $x\in[-2,4]$ 时，求证：$x-6\leqslant f(x)\leqslant x$；

（3）设 $F(x)=|f(x)-(x+a)|(a\in\mathbf{R})$，记 $F(x)$ 在区间 $[-2,4]$ 上的最大值为 $M(a)$. 当 $M(a)$ 最小时，求 a 的值.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

阶段测试二

第二章　推理与证明

（时间：120 分钟　满分：150 分）

一、选择题（本大题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分）

1. 下列表述正确的是　　（　　）

①归纳推理是由部分到整体的推理；②归纳推理是由一般到一般的推理；③演绎推理是由一般到特殊的推理；④类比推理是由特殊到一般的推理；⑤类比推理是由特殊到特殊的推理.

A. ①②③　　B. ②③④

C. ②④⑤　　D. ①③⑤

2. 已知 $a>b,c\in\mathbf{R}$，则下列不等式一定成立的　　（　　）

A. $a|c|\geqslant bc$　　B. $|a|c\geqslant bc$

C. $a|c|\geqslant b|c|$　　D. $|a|c\geqslant b|c|$

3. 阅读下面的“三段论”推理：对于可导函数 $f(x)$，如果 $f'(x_0)=0$，那么 $x=x_0$ 是函数 $f(x)$ 的极值点；因为函数 $f(x)=x^3$ 在 $x=0$ 处的导数值 $f'(0)=0$，所以 $x=0$ 是函数 $f(x)=x^3$ 的极值点. 以上推理中　　（　　）

A. 大前提错误　　B. 小前提错误

C. 推理形式错误　　D. 结论正确

4. 用反证法证明命题“$\sqrt{2}+\sqrt{3}$ 是无理数”时，假设正确的是　　（　　）

A. 假设 $\sqrt{2}$ 是有理数　　B. 假设 $\sqrt{3}$ 是有理数

C. 假设 $\sqrt{2}$ 或 $\sqrt{3}$ 是有理数　　D. 假设 $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ 是有理数

5. 已知圆 $x^2+y^2=r^2(r>0)$ 的面积为 $S=\pi r^2$，由此类比椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的面积最有可能是　　（　　）

A. πa^2　　B. πb^2

C. πab　　D. $\pi(ab)^2$

6. 用数学归纳法证明不等式“$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}>\frac{13}{24}$ $(n>2)$”时的过程中，由 $n=k$ 到 $n=k+1$，不等式的左边增加的项为　　（　　）

A. $\frac{1}{2(k+1)}$

B. $\frac{1}{2k+1}+\frac{1}{2(k+1)}$

C. $\frac{1}{2k+1}+\frac{1}{2(k+1)}-\frac{1}{k+1}$

D. $\frac{1}{2(k+1)}-\frac{1}{k+1}$

7. （**2019·乾安中学高二月考**）已知 $f_1(x)=\cos x$，$f_2(x)=f_1'(x)$，$f_3(x)=f_2'(x)$，$f_4(x)=f_3'(x)$，…，$f_n(x)=f_{n-1}'(x)$，则 $f_{2\,016}(x)$ 等于　　（　　）

A. $\sin x$　　B. $-\sin x$

C. $\cos x$　　D. $-\cos x$

8. 有一个奇数列 1，3，5，7，9，…，现在进行如下分组：第一组有 1 个数{1}，第二组有 2 个数{3，5}，第三组有 3 个数{7，9，11}，…，依此类推，则每组内奇数之和 S_n 与其组的编号数 n 的关系是　　（　　）

A. $S_n=n^2$　　B. $S_n=n^3$

C. $S_n=n^4$　　D. $S_n=n(n+1)$

9. （**2019·吉林实验中学高二检测**）已知各项均不为零的数列 $\{a_n\}$，定义向量 $\boldsymbol{c}_n=(a_n,a_{n+1})$，$\boldsymbol{b}_n=(n,n+1)$，$n\in\mathbf{N}^*$. 下列命题中真命题是　　（　　）

A. 若 $\forall n\in\mathbf{N}^*$ 总有 $\boldsymbol{c}_n\parallel\boldsymbol{b}_n$ 成立，则数列 $\{a_n\}$ 是等差数列

B. 若 $\forall n\in\mathbf{N}^*$ 总有 $\boldsymbol{c}_n\parallel\boldsymbol{b}_n$ 成立，则数列 $\{a_n\}$ 是等比数列

C. 若 $\forall n\in\mathbf{N}^*$ 总有 $\boldsymbol{c}_n\perp\boldsymbol{b}_n$ 成立，则数列 $\{a_n\}$ 是等差数列

D. 若 $\forall n\in\mathbf{N}^*$ 总有 $\boldsymbol{c}_n\perp\boldsymbol{b}_n$ 成立，则数列 $\{a_n\}$ 是等比数列

10. 一名法官在审理一起珍宝盗窃案时，四名嫌疑人甲、乙、丙、丁供词如下，甲说：“罪犯在乙、丙、丁三人之中”；乙说：“我没有作案，是丙偷的”；丙说：“甲、乙两人中有一人是小偷”；丁说：“乙说的是事实”. 经过调查核实，四人中有两人说的是真话，另外两人说的是假话，且这四人中只有一人是罪犯，由此可判断罪犯是　　（　　）

A. 甲　　B. 乙

C. 丙　　D. 丁

11. （**2019·保定高三模拟**）已知 $f(x)=x^3+x$，a、b、$c\in\mathbf{R}$，且 $a+b>0$，$a+c>0$，$b+c>0$，则 $f(a)+f(b)+f(c)$ 的值　　（　　）

A. 一定大于零　　B. 一定等于零

C. 一定小于零　　D. 正负都有可能

12. 已知 $f(x)=\ln(1+x)-\ln(1-x)$，$x\in(-1,1)$. 现有下列命题：

①$f(-x)=-f(x)$；②$f\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)=2f(x)$；③$|f(x)|\geqslant 2|x|$.

其中的所有正确命题的序号是　　（　　）

A. ①②③　　B. ②③

C. ①③　　D. ①②

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

二、填空题(本大题共 4 小题,每小题 5 分,共 20 分)

13.(**2019·江阴高二联考**)设函数 $f(x)=\frac{x}{x+2}(x>0)$,观察:

$f_1(x)=f(x)=\frac{x}{x+2}$,

$f_2(x)=f[f_1(x)]=\frac{x}{3x+4}$,

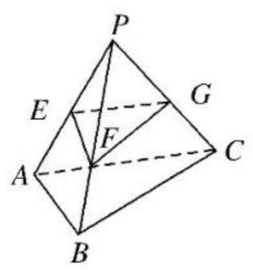
$f_3(x)=f[f_2(x)]=\frac{x}{7x+8}$,

$f_4(x)=f[f_3(x)]=\frac{x}{15x+16}$,

…

根据以上事实,由归纳推理可得:当 $n\in\mathbf{N}^*$ 且 $n\geqslant 2$ 时,$f_n(x)=f[f_{n-1}(x)]=$_____.

14. 如图,类比三角形中位线定理"如果 EF 是三角形的中位线,则 $EF\parallel\frac{1}{2}AB$",在空间四面体(三棱锥)$P-ABC$ 中,"如果_____,则_____".



15. 如图的三角形数阵中,满足:

1

2　2

3　4　3

4　7　7　4

5　11　14　11　5

6　16　25　25　16　6

…　…　…

(1)第 1 行的数为 1;

(2)第 $n(n\geqslant 2)$ 行首尾两数均为 n,其余的数都等于它肩上的两个数相加.

则第 10 行中第 2 个数是_____.

16.(**2019·吉林实验中学高二检测**)观察下列等式:

$1=1$	$1^3=1$
$1+2=3$	$1^3+2^3=9$
$1+2+3=6$	$1^3+2^3+3^3=36$
$1+2+3+4=10$	$1^3+2^3+3^3+4^3=100$
$1+2+3+4+5=15$	$1^3+2^3+3^3+4^3+5^3=225$
…	…

可以推测:$1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3=$_____.($n\in\mathbf{N}^*$,用含有 n 的代数式表示)

三、解答题(本大题共 6 小题,共 70 分)

17.(10 分)(**2019·寿光现代中学高三模拟**)等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n,$a_1=1+\sqrt{2}$,$S_3=9+3\sqrt{2}$.

(1)求数列 $\{a_n\}$ 的通项 a_n 与前 n 项和 S_n;

(2)设 $b_n=\frac{S_n}{n}(n\in\mathbf{N}_+)$,求证:数列 $\{b_n\}$ 中任意不同的三项都不可能成等比数列.

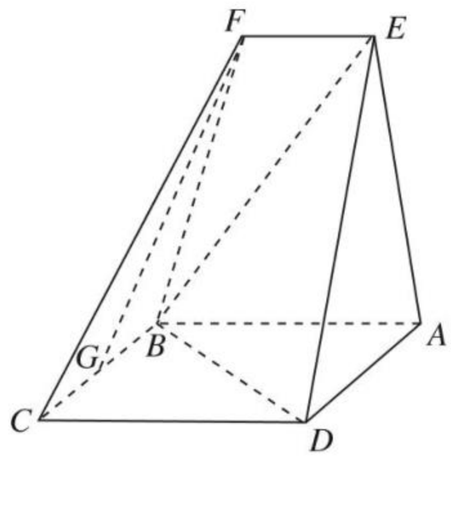
关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

18.(12 分)已知数列$\{a_n\}$满足 $a_1=1$,$a_{n+1}=2a_n+1$($n\in\mathbf{N}^*$).

(1)求 a_2,a_3,a_4,a_5;

(2)归纳猜想出通项公式 a_n,并且用数学归纳法证明.

19.(12 分)如图,四边形 $ABCD$ 是平行四边形,平面 $AED\perp$ 平面 $ABCD$,$EF\parallel AB$,$AB=2$,$BC=EF=1$,$\angle BAD=60°$,G 为 BC 的中点.



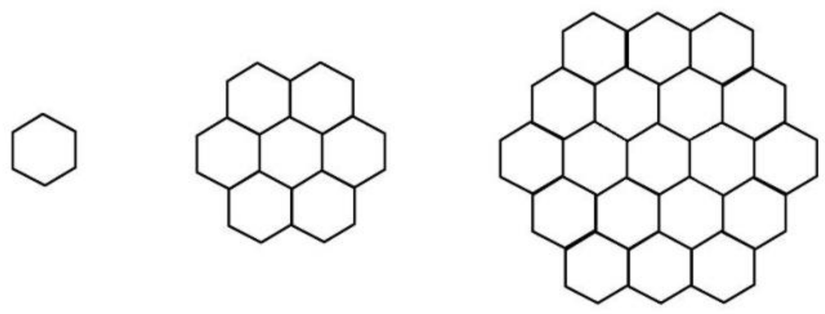
(1)求证:$FG\parallel$平面 BED;

(2)求证:平面 $BED\perp$平面 AED.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

20.(12 分)(**2019·蚌埠实验中学高二月考**)已知椭圆具有以下性质:若 M、N 是椭圆 C 上关于原点对称的两个点,点 P 是椭圆上任意一点,若直线 PM、PN 的斜率都存在,并记为 k_{PM}、k_{PN},那么 k_{PM} 与 k_{PN} 之积是与点 P 的位置无关的定值.试对双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$,写出具有类似的性质,并加以证明.

21.(12 分)蜜蜂被认为是自然界中最杰出的建筑师,单个蜂巢可以近似地看作是一个正六边形,如图为一组蜂巢的截面图.其中第一个图有 1 个蜂巢,第二个图有 7 个蜂巢,第三个图有 19 个蜂巢,按此规定,以 $f(n)$ 表示第 n 个图的蜂巢总数.



(1)试求出 $f(4)$,$f(5)$ 的值,并求 $f(n)$ 的表达式(不要求证明);

(2)证明:$\frac{1}{f(1)}+\frac{1}{f(2)}+\frac{1}{f(3)}+\cdots+\frac{1}{f(n)}<\frac{4}{3}$.

22.(12 分)函数 $f(x)=e^x-x-1$,$g(x)=e^x(ax+x\cos x+1)$.

(1)求函数 $f(x)$ 的极值;

(2)若 $a>-1$,证明:当 $x\in(0,1)$ 时,$g(x)>1$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

阶段测试三

第三章　数系的扩充与复数的引入

（时间：120 分钟　满分：150 分）

一、选择题（本大题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分）

1. 已知复数 $z=-1+\mathrm{i}$，则 $\dfrac{z+2}{z^2+z}=$　　（　　）

A. -1　　B. 1

C. $-\mathrm{i}$　　D. i

2. （**2019 · 全国卷Ⅱ**）设 $z=-3+2\mathrm{i}$，则在复平面内 $\bar{z}$ 对应的点位于　　（　　）

A. 第一象限　　B. 第二象限

C. 第三象限　　D. 第四象限

3. （**2019 · 北京卷**）已知复数 $z=2+\mathrm{i}$，则 $z\cdot\bar{z}=$　　（　　）

A. $\sqrt{3}$　　B. $\sqrt{5}$

C. 3　　D. 5

4. 复数 $z=(1-\mathrm{i})(2-\mathrm{i})$（$\mathrm{i}$ 为虚数单位），则 z 的共轭复数 $\bar{z}$ 的虚部是　　（　　）

A. $3\mathrm{i}$　　B. $-3\mathrm{i}$

C. 3　　D. -3

5. i 是虚数单位，复数 $\dfrac{7+\mathrm{i}}{3+4\mathrm{i}}=$　　（　　）

A. $1-\mathrm{i}$　　B. $-1+\mathrm{i}$

C. $\dfrac{17}{25}+\dfrac{31}{25}\mathrm{i}$　　D. $-\dfrac{17}{7}+\dfrac{25}{7}\mathrm{i}$

6. （**2019 · 全国卷Ⅰ**）设 $z=\dfrac{3-\mathrm{i}}{1+2\mathrm{i}}$，则 $|z|=$　　（　　）

A. 2　　B. $\sqrt{3}$

C. $\sqrt{2}$　　D. 1

7. 若复数 z 满足 $(1+\mathrm{i})z=2\mathrm{i}$，则 z 的共轭复数 $\bar{z}=$　　（　　）

A. $1-\mathrm{i}$　　B. $1+\mathrm{i}$

C. $\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}\mathrm{i}$　　D. $\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}\mathrm{i}$

8. 若复数 z 满足 $|z|-\bar{z}=\dfrac{10}{1-2\mathrm{i}}$，则 z 等于　　（　　）

A. $-3+4\mathrm{i}$　　B. $-3-4\mathrm{i}$

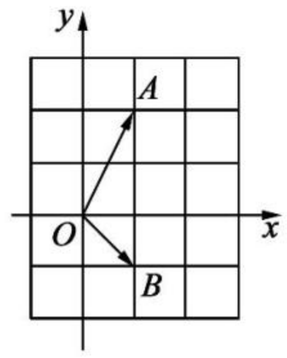
C. $3-4\mathrm{i}$　　D. $3+4\mathrm{i}$

9. 已知 i 为虚数单位，实数 x，y 满足 $(x+2\mathrm{i})\mathrm{i}=y-\mathrm{i}$，则 $|x-y\mathrm{i}|=$　　（　　）

A. 1　　B. $\sqrt{2}$

C. $\sqrt{3}$　　D. $\sqrt{5}$

10. 如图，在复平面内，若复数 z_1，z_2 对应的向量分别是 $\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB}$，则复数 z_1+z_2 所对应的点位于　　（　　）



A. 第一象限　　B. 第二象限

C. 第三象限　　D. 第四象限

11. 若复数 z 满足 $z(1-\mathrm{i})^2=1+\mathrm{i}$，其中 i 为虚数单位，则 z 在复平面内所对应的点位于　　（　　）

A. 第一象限　　B. 第二象限

C. 第三象限　　D. 第四象限

12. 复数 $z_1=3+2\mathrm{i}$（i 为虚数单位）是方程 $z^2-6z+b=0$（$b\in\mathbf{R}$）的根，则 b 的值为　　（　　）

A. $\sqrt{13}$　　B. 13

C. $\sqrt{5}$　　D. 5

二、填空题（本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分）

13. 设复数 $z=\dfrac{|3+4\mathrm{i}|-2\mathrm{i}}{2}$，则复数 z 的共轭复数是_____.

14. （**2019 · 江苏卷**）已知复数 $(a+2\mathrm{i})(1+\mathrm{i})$ 的实部为 0，其中 i 为虚数单位，则实数 a 的值是_____.

15. （**2019 · 浙江卷**）复数 $z=\dfrac{1}{1+\mathrm{i}}$（$\mathrm{i}$ 为虚数单位），则 $|z|=$_____.

16. 已知复数 z 满足 $\dfrac{1+\mathrm{i}}{z}=2\mathrm{i}^3+2\mathrm{i}^4$，其中 i 为虚数单位，则复数 $z=$_____.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

三、解答题(本大题共 6 小题,共 70 分)

17.(10 分)设 $z=x+y\mathrm{i}(x,y\in\mathbf{R})$,若 $1\leqslant|z|\leqslant\sqrt{2}$,试问复数 $\omega=x+y+(x-y)\mathrm{i}$ 的对应点的集合表示什么图形,并求其面积.

18.(12 分)(**2019·丹江口中学高二期末**)设复数 $z=\lg(m^2-2m-2)+(m^2+3m+2)\mathrm{i}$,当 m 为何值时,

(1)z 是实数?

(2)z 是纯虚数?

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

19.(12 分)(在复数范围内)解方程$|z|^2+(z+\bar{z})\mathrm{i}=\frac{3-\mathrm{i}}{2+\mathrm{i}}$(i 为虚数单位).

20.(12 分)设复数 $z=1+\mathrm{i}$,且$\frac{z^2+az+b}{z^2-z+1}=1-\mathrm{i}$,求实数 a,b 的值.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

21.（12 分）（**2019·上高中学月考**）已知 z 为虚数，$z+\frac{9}{z-2}$ 为实数.

（1）若 $z-2$ 为纯虚数，求虚数 z；

（2）若 $|z-4|$ 的取值范围.

22.（12 分）（**2019·福建三明高二月考**）已知 z 为复数，i 为虚数单位，且 $z+3-\mathrm{i}$ 和 $\frac{z}{1+\mathrm{i}}$ 均为实数.

（1）求复数 z；

（2）若复数 $z,\overline{z},z^2$ 在复平面上对应的点分别是 A,B,C，求 $\triangle ABC$ 的面积.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

选修2—2综合测评

（时间：120分钟　满分：150分）

一、选择题（本大题共12小题，每小题5分，共60分）

1. 已知复数 $z=\frac{2}{1-\mathrm{i}}$，则 $z^2-z\cdot\overline{z}$ 等于 （　　）

A. $-2+2\mathrm{i}$　　B. $2\mathrm{i}$

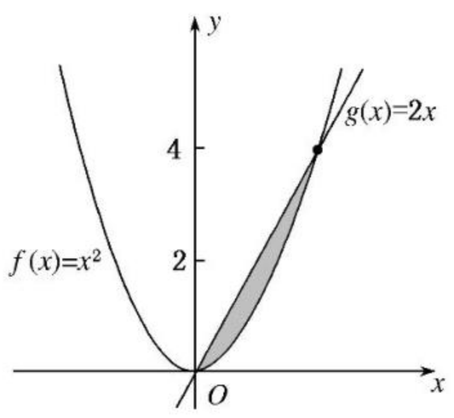
C. $-2-2\mathrm{i}$　　D. $-2\mathrm{i}$

2. （**2019·福建三明高二月考**）某演绎推理的“三段”分解如下：①函数 $f(x)=\frac{1}{3^x}$ 是减函数；②指数函数 $y=a^x(0<a<1)$ 是减函数；③函数 $f(x)=\frac{1}{3^x}$ 是指数函数，则按照演绎推理的三段论模式，排序正确的是 （　　）

A. ①→②→③　　B. ③→②→①

C. ②→①→③　　D. ②→③→①

3. 如图，曲线 $f(x)=x^2$ 和 $g(x)=2x$ 围成几何图形的面积是 （　　）



A. $\frac{1}{2}$

B. $\frac{2}{3}$

C. $\frac{4}{3}$

D. 4

4. 设 $z=(2t^2+5t-3)+(t^2-2t+2)\mathrm{i}$，$t\in\mathbf{R}$，则下列命题中正确的是 （　　）

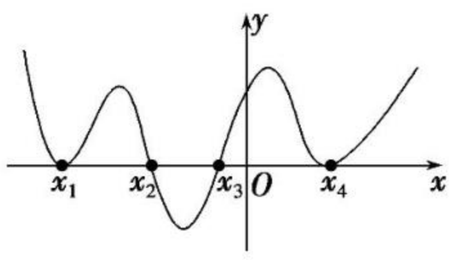
A. z 对应的点 Z 在第一象限

B. z 对应的点 Z 在第四象限

C. z 不是纯虚数

D. z 是虚数

5. （**2019·蚌埠二中高二检测**）已知函数 $y=f(x)$ 的导函数 $y=f'(x)$ 的图象如图所示，则 （　　）



A. 函数 $f(x)$ 有1个极大值点，1个极小值点

B. 函数 $f(x)$ 有2个极大值点，2个极小值点

C. 函数 $f(x)$ 有3个极大值点，1个极小值点

D. 函数 $f(x)$ 有1个极大值点，3个极小值点

6. 设函数 $f(x)=x\cos x+(a-2)x\sin x+ax$. 若 $f(x)$ 为奇函数，则曲线 $y=f(x)$ 在点 $(0,0)$ 处的切线方程为 （　　）

A. $y=x$　　B. $y=2x$

C. $y=4x$　　D. $y=3x$

7. （**2019·南阳一中高二月考**）定积分 $\int_{-1}^{2}|x|\mathrm{d}x=$ （　　）

A. $\frac{5}{2}$　　B. $-\frac{5}{2}$

C. $\frac{3}{2}$　　D. $-\frac{3}{2}$

8. 已知函数 $f(x)=x^3+ax^2+bx+a^2$ 在 $x=1$ 处取得极值10，则实数 $a=$ （　　）

A. 4或-3　　B. 4或-11

C. 4　　D. -3

9. 设 $f(x)=\frac{1}{3}x^3+ax^2+5x+6$ 在区间 $[1,3]$ 上为单调函数，则实数 a 的取值范围是 （　　）

A. $[-\sqrt{5},+\infty)$

B. $(-\infty,-3]$

C. $(-\infty,-3]\cup[-\sqrt{5},+\infty)$

D. $[-\sqrt{5},\sqrt{5}]$

10. 给出下面三个推理：

①由“若 a、b 是实数，则 $|a+b|\leqslant|a|+|b|$”推广到复数中，则有“若 z_1、z_2 是复数，则 $|z_1+z_2|\leqslant|z_1|+|z_2|$”；

②由“在半径为 R 的圆内接矩形中，正方形的面积最大”类比推出“在半径为 R 的球内接长方体中，正方体的体积最大”；

③以半径 R 为自变量，由“圆面积函数的导函数是圆的周长函数”类比推出“球体积函数的导函数是球的表面积函数”.

其中，推理得到的结论正确的个数有 （　　）

A. 0个　　B. 1个

C. 2个　　D. 3个

11. （**2019·哈尔滨师大附中月考**）已知函数 $f(x)=x^3-\ln(\sqrt{x^2+1}-x)$，则对于任意实数 $a,b(a+b>0)$，则 $\frac{f(a)+f(b)}{a+b}$ 的值为 （　　）

A. 恒正　　B. 恒等于0

C. 恒负　　D. 不确定

12. （**2019·江西赣州十四县（市）期中联考**）设 $f(x)=\mathrm{e}^x(x^2+2x)$，令 $f_1(x)=f'(x)$，$f_{n+1}(x)=f_n'(x)$，若 $f_n(x)=\mathrm{e}^x(A_nx^2+B_nx+C_n)$，则数列 $\left\{\frac{1}{C_n}\right\}$ 的前 n 项和为 S_n，当 $|S_n-1|\leqslant\frac{1}{2\,019}$ 时，n 的最小整数值为 （　　）

A. 2 017　　B. 2 018

C. 2 019　　D. 2 020

二、填空题（本大题共4小题，每小题5分，共20分）

13. 若复数 $z=\frac{3-\mathrm{i}}{|2-\mathrm{i}|}$，则 $|z|=$_____.

14. 对大于或等于2的正整数的幂运算有如下分解方式：

$2^2=1+3$

$3^2=1+3+5$

$4^2=1+3+5+7$

…

$2^3=3+5$

$3^3=7+9+11$

$4^3=13+15+17+19$

…

根据上述分解规律，若 $m^2=1+3+5+\cdots+11$，p^3 的分解中最小的正整数是21，则 $m+p=$_____.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

15. 已知 $z_1=m^2-(m^2-3m)\mathrm{i}$，$z_2=(m^2-4m+3)\mathrm{i}+10(m\in\mathbf{R})$，若 $z_1<z_2$，求实数 m 的取值为_____.

16. 对于三次函数 $y=ax^3+bx^2+cx+d(a\neq0)$，给出定义：设 $f'(x)$是函数$y=f(x)$的导数，$f''(x)$是 $f'(x)$的导数，若方程$f''(x)=0$ 有实数解 x_0，则称点$(x_0,f(x_0))$为函数 $y=f(x)$的“拐点”. 某同学经过探究发现：任何一个三次函数都有“拐点”；任何一个三次函数都有对称中心，且“拐点”就是对称中心，若 $f(x)=\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2+3x-\frac{5}{12}$，根据这一发现可得：

(1)函数 $f(x)=\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2+3x-\frac{5}{12}$ 的对称中心为_____.

(2)计算 $f\left(\frac{1}{7}\right)+f\left(\frac{2}{7}\right)+f\left(\frac{3}{7}\right)+f\left(\frac{4}{7}\right)+f\left(\frac{5}{7}\right)+f\left(\frac{6}{7}\right)=$_____.

三、解答题(本大题共 6 小题，共 70 分)

17. (10 分)某同学在一次研究性学习中发现，以下五个式子的值都等于同一个常数：

①$\sin^2 13^\circ+\cos^2 17^\circ-\sin 13^\circ\cos 17^\circ$；

②$\sin^2 15^\circ+\cos^2 15^\circ-\sin 15^\circ\cos 15^\circ$；

③$\sin^2 18^\circ+\cos^2 12^\circ-\sin 18^\circ\cos 12^\circ$；

④$\sin^2(-18^\circ)+\cos^2 48^\circ-\sin(-18^\circ)\cos 48^\circ$；

⑤$\sin^2(-25^\circ)+\cos^2 55^\circ-\sin(-25^\circ)\cos 55^\circ$.

(1)试从上述五个式子中选择一个，求出这个常数；

(2)根据(1)的计算结果，将该同学的发现推广为三角恒等式，并证明你的结论.

18. (12 分)(1)已知$x^2-y^2+2xy\mathrm{i}=2\mathrm{i}$，求实数 x，y 的值；

(2)关于 x 的方程 $3x^2-\frac{a}{2}x-1=(10-x-2x^2)\mathrm{i}$ 有实根，求实数 a 的值.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

19.(12 分)已知数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 S_n,$a_1=-\frac{2}{3}$,满足

$S_n+\frac{1}{S_n}+2=a_n(n\geqslant 2)$,

(1)求 S_2,S_3,S_4;

(2)根据(1)猜想 S_n 的表达式,并用数学归纳法证明.

20.(12 分)已知非零实数 a,b,c 成等差数列,且公差 $d\neq 0$,求证:$\frac{1}{a}$,$\frac{1}{b}$,$\frac{1}{c}$不可能是等差数列.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

21.（12 分）（**2019·乾安中学高三模拟**）在各项为正的数列$\{a_n\}$中，数列的前 n 项和 S_n 满足 $S_n=\frac{1}{2}\left(a_n+\frac{1}{a_n}\right)$.

（1）求 a_1,a_2,a_3；

（2）由（1）猜想到数列$\{a_n\}$的通项公式，并用数学归纳法证明你的猜想.

22.（12 分）（**2019·长庆高中高三阶段测试**）设函数 $f(x)=ae^x\ln x+\frac{be^{x-1}}{x}$，曲线 $y=f(x)$ 在点$(1,f(1))$处的切线方程为 $y=e(x-1)+2$.

（1）求 a,b；

（2）证明：$f(x)>1$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

骄子之路®
the Road to Pride
让 学习更快乐，人生更精彩

答案与解析

与45分钟课时作业与单元测试配套使用

数学

选修2-2 RJ·A

班级：_____

姓名：_____

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

第一部分　课时作业

第一章　导数及其应用

1.1　变化率与导数

1.1.1　变化率问题

1.1.2　导数的概念

基础知识梳理

1. $\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$　x_2-x_1　$f(x_2)-f(x_1)$　$\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$

2. $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$　$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$　$f'(x_0)$　$y'\Big|_{x=x_0}$

$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$

题点知识巩固

1. 选 A　$\Delta y=f(1.1)-f(1)=(1.1^2-2)-(1^2-2)=0.21$，

$\therefore \dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{0.21}{0.1}=2.1$，故选 A.

2. 选 C　$\dfrac{\Delta s}{\Delta t}=\dfrac{2(3+\Delta t)^2+5-2\times 3^2-5}{\Delta t}=12+2\Delta t$，故选 C.

3. 选 C　$f'(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}(a+b\cdot\Delta x)$

$=a$，故选 C.

4. **解**：$\because \Delta y=f(2+\Delta x)-f(2)$

$=3(2+\Delta x)^2-(2+\Delta x)-(3\times 2^2-2)$

$=12\Delta x+3\Delta x^2-\Delta x$

$=11\Delta x+3\Delta x^2$，

$\therefore \dfrac{\Delta y}{\Delta x}=11+3\Delta x$，

$\therefore \lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}(11+3\Delta x)=11$.

5. 选 B　$s'=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{s(3+\Delta t)-s(3)}{\Delta t}=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{3(3+\Delta t)^2-3\times 3^2}{\Delta t}=$

$\lim\limits_{\Delta t\to 0}(18+3\Delta t)=18$，故选 B.

6. **解**：$f'(10)=1.5$ 表示服药后 10 min 时，血液中药物的质量浓度上升的速度为 1.5 μg/(mL·min). 也就是说，如果保持这一速度，每经过 1 min，血液中药物的质量浓度将上升 1.5 μg/mL.

$f'(100)=-0.6$ 表示服药后 100 min 时，血液中药物的质量浓度下降的速度为 0.6 μg/(mL·min). 也就是说，如果保持这一速度，每经过 1 min，血液中药物的质量浓度将下降 0.6 μg/mL.

提能达标过关

1. 选 D　Δx 可正，可负，就是不能等于零.

2. 选 B　$\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{[2(x_0+\Delta x)+1]-(2x_0+1)}{\Delta x}=\dfrac{2\Delta x}{\Delta x}=2$.

3. 选 A　$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0-\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$

$=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0-\Delta x)-f(x_0)}{-[(x_0-\Delta x)-x_0]}$

$=-\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0-\Delta x)-f(x_0)}{(x_0-\Delta x)-x_0}=-f'(x_0)$，故选 A.

4. 选 B　$s=t-(2t-1)^2=-4t^2+5t-1$，$\because \Delta s=-4(1+\Delta t)^2+5(1+\Delta t)-1-[1-(2\times 1-1)^2]=-4(\Delta t)^2-3\Delta t$. $\therefore \lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{\Delta s}{\Delta t}=\lim\limits_{\Delta t\to 0}(-4\Delta t-3)=-3$.

5. 选 C　由题意知 $f'(3)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{[a(3+\Delta x)-2]-(3a-2)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}a=a=4$.

6. **解析**：$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+2\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$

$=2\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+2\Delta x)-f(x_0)}{(x_0+2\Delta x)-x_0}=2f'(x_0)=6$.

答案：6

7. **解析**：$f'(a)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}$

$=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{(a+\Delta x-a)^2-(a-a)^2}{\Delta x}$

$=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{(\Delta x)^2}{\Delta x}$

$=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta x=0$.

答案：0

8. **解析**：$f'(0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x}$

$=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{[(0+\Delta x)^2+2(0+\Delta x)f'(0)]-[0^2+2\times 0\times f'(0)]}{\Delta x}$

$=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{(\Delta x)^2+2\Delta x f'(0)}{\Delta x}$

$=\lim\limits_{\Delta x\to 0}[\Delta x+2f'(0)]$

$=\lim\limits_{\Delta x\to 0}[2f'(0)]=2f'(0)$. 即 $f'(0)=2f'(0)$.

$\therefore f'(0)=0$.

答案：0

9. **解**：由匀变速运动公式知 $s=\dfrac{1}{2}at^2$，

$\therefore \Delta s=s(t_0+\Delta t)-s(t_0)$

$=\dfrac{1}{2}a(t_0+\Delta t)^2-\dfrac{1}{2}at_0^2$

$=at_0\Delta t+\dfrac{1}{2}a(\Delta t)^2$.

则 $\dfrac{\Delta s}{\Delta t}=at_0+\dfrac{1}{2}a\Delta t$.

$\therefore \lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{\Delta s}{\Delta t}=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\left(at_0+\dfrac{1}{2}a\Delta t\right)=at_0$.

$\because a=5\times 10^5$，$t_0=1.6\times 10^{-3}$.

$\therefore at_0=8\times 10^2=800(\text{m/s})$.

$\therefore$ 子弹射出枪口时的瞬时速度为 800 m/s.

10. **解**：(1)物体在第 1 s 内的平均速度(即平均变化率)为

$\dfrac{f(1)-f(0)}{1-0}=\dfrac{11}{3}(\text{m/s})$.

(2)$\dfrac{f(1+\Delta x)-f(1)}{\Delta x}$

$=\dfrac{\frac{2}{3}(1+\Delta x)^3+(1+\Delta x)^2+2(1+\Delta x)-\frac{11}{3}}{\Delta x}$

$=6+3\Delta x+\dfrac{2}{3}(\Delta x)^2$.

当 $\Delta x\to 0$ 时，$6+3\Delta x+\dfrac{2}{3}(\Delta x)^2\to 6$，

所以物体在第 1 s 末的瞬时速度为 6 m/s.

(3)令 $y=f(x)=\dfrac{2}{3}x^3+x^2+2x$，

则 $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$

$=\dfrac{\frac{2}{3}(x+\Delta x)^3+(x+\Delta x)^2+2(x+\Delta x)-\left(\frac{2}{3}x^3+x^2+2x\right)}{\Delta x}$

$=2x^2+2x+2+\dfrac{2}{3}(\Delta x)^2+2x\cdot\Delta x+\Delta x$.

当 $\Delta x\to 0$ 时，$\dfrac{\Delta y}{\Delta x}\to 2x^2+2x+2$，

令 $2x^2+2x+2=14$，解得 $x=2$($x=-3$ 舍去)，

即经过 2 s 该物体的速度达到 14 m/s.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

1.1.3 导数的几何意义

基础知识梳理

1. (1)切线　$f'(x_0)$　$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$

(2)斜率　$f'(x_0)$　$y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)$

2. $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$

题点知识巩固

1. **解析**：函数 $f(x)=x^3-4x(x>0)$ 的零点 $x_0=2$，且 $f(2)=0$，

∴函数 $f(x)$ 在 $x=2$ 处的切线的斜率

$$k=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(2+\Delta x)^3-4(2+\Delta x)-0}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}(8+6\Delta x+\Delta x^2)=8,$$

∴切线方程为 $y-0=8(x-2)$，即 $y=8x-16$.

答案：$y=8x-16$

2. **解析**：易得切点 $P(5,3)$，所以 $f(5)=3$，$k=-1$，

即 $f'(5)=-1$.

所以 $f(5)+f'(5)=3-1=2$.

答案：2

3. 选 B　设 $P(x_0,y_0)$，

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(x_0+\Delta x)^3+(x_0+\Delta x)-2-x_0^3-x_0+2}{\Delta x}$$

$=3x_0^2+1$，∴$3x_0^2+1=4$，∴$x_0=1$ 或 $x_0=-1$，

当 $x_0=1$ 时，$y_0=0$；当 $x_0=-1$ 时，$y_0=-4$，

∴P 点的坐标为 $(1,0)$ 或 $(-1,-4)$，故选 B.

4. **解**：设切点 (x_0,y_0)，

$$k=f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{2(x_0+\Delta x)^2-7-2x_0^2+7}{\Delta x}=4x_0,$$

∴切线方程为 $y-y_0=4x_0(x-x_0)$.

将 $(3,9)$ 及 $y_0=2x_0^2-7$ 代入，得 $9-2x_0^2+7=4x_0(3-x_0)$，

解得 $x_0=2$ 或 $x_0=4$，所以切线的斜率为 8 或 16，

切线方程为 $y-9=8(x-3)$ 或 $y-9=16(x-3)$，

即 $8x-y-15=0$ 或 $16x-y-39=0$.

5. 选 D　切线 l 的方程为 $\dfrac{x}{4}+\dfrac{y}{4}=1$，即 $x+y-4=0$.

又由题意可知 $f(2)=2$，$f'(2)=-1$，

∴$f(2)+f'(2)=2-1=1$.

6. **解**：$f'(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(x+\Delta x)^2-x^2}{\Delta x}=2x,$$

设 $P(x_0,y_0)$ 是满足条件的点.

(1)∵切线与直线 $y=4x-5$ 平行，∴$2x_0=4$，$x_0=2$，$y_0=4$，

即 $P(2,4)$ 是满足条件的点.

(2)∵切线与直线 $2x-6y+5=0$ 垂直，

∴$2x_0\cdot\dfrac{1}{3}=-1$，得 $x_0=-\dfrac{3}{2}$，$y_0=\dfrac{9}{4}$，

即 $P\left(-\dfrac{3}{2},\dfrac{9}{4}\right)$ 是满足条件的点.

(3)∵切线与 x 轴成 135°的倾斜角，∴其斜率为 -1.

即 $2x_0=-1$，得 $x_0=-\dfrac{1}{2}$，$y_0=\dfrac{1}{4}$，

即 $P\left(-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{4}\right)$ 是满足条件的点.

提能达标过关

1. 选 C　若 $f'(x_0)$ 不存在，则曲线在点 $(x_0,f(x_0))$ 处的切线斜率不存在，此时切线与 x 轴垂直.

2. 选 D　由导数的几何意义知，曲线 $f(x)$ 在点 $(3,f(3))$ 处的切线的斜率等于 0，所以切线与 x 轴平行或重合.

3. 选 C　$\Delta y=(x+\Delta x)^2-x^2=2x\Delta x+(\Delta x)^2$，$y'=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{2x\Delta x+(\Delta x)^2}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}(2x+\Delta x)=2x$. 由 $2x=\tan\dfrac{\pi}{4}=1$，得 $x=\dfrac{1}{2}$，∴$y=\dfrac{1}{4}$，∴切点为 $\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{4}\right)$.

4. 选 A　$y'\Big|_{x=1}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{a(1+\Delta x)^2-a\times 1^2}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}(2a+a\Delta x)$

$=2a$，

∵曲线在点 $(1,a)$ 处的切线与直线 $2x-y-6=0$ 平行，

∴$2a=2$，$a=1$.

5. 选 B　依题意，曲线在点 P 处的切线的斜率

$$k=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(x+\Delta x)^3-\sqrt{3}(x+\Delta x)+\frac{3}{5}-\left(x^3-\sqrt{3}x+\frac{3}{5}\right)}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}(3x^2-\sqrt{3}+3x\Delta x+\Delta x^2)$$

$=3x^2-\sqrt{3}\geqslant-\sqrt{3}$，

∴$\tan\alpha\geqslant-\sqrt{3}$，∴$0\leqslant\alpha<\dfrac{\pi}{2}$ 或 $\dfrac{2}{3}\pi\leqslant\alpha<\pi$，故选 B.

6. **解析**：设 $P(x_0,y_0)$，由题意得

$$y'\Big|_{x=x_0}=$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{[2(x_0+\Delta x)^2+4(x_0+\Delta x)]-(2x_0^2+4x_0)}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}(2\Delta x+4x_0+4)$$

$=4x_0+4=16$，∴$x_0=3$.

当 $x_0=3$ 时，$y=2\times 3^2+4\times 3=30$，

∴点 P 的坐标为 $(3,30)$.

答案：$(3,30)$

7. **解析**：由题意知 $f(4)+f'(4)=9-2\times 4+(-2)=-1$.

答案：-1

8. **解析**：依题意，

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{a(1+\Delta x)^2+b(1+\Delta x)-(a+b)}{\Delta x}=$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}(2a+a\Delta x+b)=2a+b=2,$$

∴$\dfrac{8a+b}{ab}=\dfrac{1}{a}+\dfrac{8}{b}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{8}{b}\right)(2a+b)=$

$$\frac{1}{2}\left(10+\frac{b}{a}+\frac{16a}{b}\right)\geqslant\frac{1}{2}(10+2\sqrt{16})=9,$$

当且仅当 $\dfrac{b}{a}=\dfrac{16a}{b}$，即 $a=\dfrac{1}{3}$，$b=\dfrac{4}{3}$ 时，等式成立.

答案：9

9. **解**：曲线 $y=x^2-1$ 在 $x=x_0$ 处的切线的斜率

$$k_1=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(x_0+\Delta x)^2-1-(x_0^2-1)}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}(2x_0+\Delta x)=2x_0,$$

曲线 $y=1-x^3$ 在 $x=x_0$ 处的切线的斜率

$$k_2=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1-(x_0+\Delta x)^3-(1-x_0^3)}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}(-3x_0^2-3x_0\Delta x-\Delta x^2)=-3x_0^2,$$

∵$k_1=k_2$，∴$2x_0=-3x_0^2$，解得 $x_0=0$ 或 $x_0=-\dfrac{2}{3}$，

当 $x_0=0$ 时，$k_1=k_2=0$，曲线 $y=x^2-1$ 的切点为 $(0,-1)$，其切线方程为 $y=-1$，曲线 $y=1-x^3$ 的切点为 $(0,1)$，其切线方程为 $y=1$；

当 $x_0=-\dfrac{2}{3}$ 时，$k_1=k_2=-\dfrac{4}{3}$，曲线 $y=x^2-1$ 的切点为 $\left(-\dfrac{2}{3},-\dfrac{5}{9}\right)$，其切线方程为 $y+\dfrac{5}{9}=-\dfrac{4}{3}\left(x+\dfrac{2}{3}\right)$，即 $12x+9y+13=0$，曲线 $y=1-x^3$ 的切点为 $\left(-\dfrac{2}{3},\dfrac{35}{27}\right)$，其切线方程为 $y-\dfrac{35}{27}=-\dfrac{4}{3}\left(x+\dfrac{2}{3}\right)$，即 $36x+27y-11=0$.

综上所述，两曲线的切线方程分别为 $12x+9y+13=0$，$36x+27y-11=0$ 或 $y=-1$，$y=1$.

10. **解**：设直线 l 与曲线相切于点 $P(x_0,y_0)$，则

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(x+\Delta x)^3-2(x+\Delta x)^2+3-(x^3-2x^2+3)}{\Delta x}$$

$=3x^2-4x$.

由导数的几何意义，得 $k=f'(x_0)=3x_0^2-4x_0=4$，

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

解得 $x_0=-\frac{2}{3}$ 或 $x_0=2$，

∴切点坐标为 $\left(-\frac{2}{3},\frac{49}{27}\right)$ 或(2,3).

当切点为 $\left(-\frac{2}{3},\frac{49}{27}\right)$ 时，有 $\frac{49}{27}=4\times\left(-\frac{2}{3}\right)+a$，

∴$a=\frac{121}{27}$.

当切点为(2,3)时，有 $3=4\times2+a$，

∴$a=-5$.

即 a 的值为 $\frac{121}{27}$ 或 -5.

1.2　导数的计算

1.2.1　几个常用函数的导数

1.2.2　基本初等函数的导数公式及导数的运算法则(一)

基础知识梳理

1.0　1　$2x$　$-\frac{1}{x^2}$　$\frac{1}{2\sqrt{x}}$

2.0　$\alpha x^{\alpha-1}$　$\cos x$　$-\sin x$　$a^x\ln a$　e^x　$\frac{1}{x\ln a}$　$\frac{1}{x}$

题点知识巩固

1. **解**：$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\sqrt{x+\Delta x}-\sqrt{x}}{\Delta x}=\frac{\Delta x}{\Delta x(\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x})}$

$=\frac{1}{\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}}$，

∴$y'=\lim\limits_{\Delta x\to0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{1}{2\sqrt{x}}$.

2. **解**：(1)$y'=\left(\cos\frac{\pi}{3}\right)'=0$.

(2)$y'=(3^x)'=3^x\ln3$.

(3)∵$y=\sqrt{x^5}=x^{\frac{5}{2}}$，∴$y'=(x^{\frac{5}{2}})'=\frac{5}{2}x^{\frac{3}{2}}$.

(4)$y'=(\log_2x)'=\frac{1}{x\ln2}$.

3. 选 B　∵$y'=(x^{n+1})'=(n+1)x^n$，

∴$k=y'\Big|_{x=1}=(n+1)\times1^n=1+n$，

∴曲线在点(1,1)处的切线方程为 $y-1=(n+1)(x-1)$.

令 $y=0$，则 $x_n=\frac{n}{n+1}$，

∴$x_1\cdot x_2\cdot\cdots\cdot x_n=\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\times\frac{3}{4}\times\cdots\times\frac{n-1}{n}\times\frac{n}{n+1}=\frac{1}{n+1}$.

4. 选 A　$k=y'\Big|_{x=1}=3x^2\Big|_{x=1}=3$，

∴曲线在点 $P(1,1)$ 处的切线方程为 $y-1=3(x-1)$，

即 $y=3x-2$，

∴切线与 y 轴交点的纵坐标为 -2. 故选 A.

提能达标过关

1. 选 C　若 $y=\cos x$，则 $y'=-\sin x$，∴A 错；若 $y=\sin x$，则 $y'=\cos x$，∴B 错；若 $y=\frac{1}{x}=x^{-1}$，则 $y'=-1\cdot x^{-2}=-\frac{1}{x^2}$，∴C 正确；若 $y=\sqrt{x}=x^{\frac{1}{2}}$，则 $y'=\frac{1}{2}\cdot x^{\frac{1}{2}-1}=\frac{1}{2\sqrt{x}}$，∴D 错.

2. 选 D　∵$y'=e^x$，∴$k=f'(0)=e^0=1$，

∴切线方程为 $y-1=1\cdot(x-0)$，即 $y=x+1$，故选 D.

3. 选 A　设切点 P 的坐标为 (x_0,y_0)，切线的倾斜角为 α，

∵$y'=(\sin x)'=\cos x$，

∴$k=y'\Big|_{x=x_0}=\cos x_0=\tan\alpha$.

∵$-1\leqslant\cos x_0\leqslant1$，∴$-1\leqslant\tan\alpha\leqslant1$.

又∵$0\leqslant\alpha<\pi$，∴$0\leqslant\alpha\leqslant\frac{\pi}{4}$ 或 $\frac{3\pi}{4}\leqslant\alpha<\pi$.

4. 选 A　设函数 $y=f(x)$ 的图象上两点 $P(x_1,y_1)$，$Q(x_2,y_2)$，则由导数的几何意义可知，点 P，Q 处切线的斜率分别为 $k_1=f'(x_1)$，$k_2=f'(x_2)$，若函数具有 T 性质，则 $k_1\cdot k_2=f'(x_1)\cdot f'(x_2)=-1$. 对于 A 选项，$f'(x)=\cos x$，显然 $k_1\cdot k_2=\cos x_1\cdot\cos x_2=-1$ 有无数组解，所以该函数具有 T 性质；对于 B 选项，$f'(x)=\frac{1}{x}(x>0)$，显然 $k_1\cdot k_2=\frac{1}{x_1}\cdot\frac{1}{x_2}=-1$ 无解，故该函数不具有 T 性质；对于 C 选项，$f'(x)=e^x>0$，显然 $k_1\cdot k_2=e^{x_1}\cdot e^{x_2}=-1$ 无解，故该函数不具有 T 性质；对于 D 选项，$f'(x)=3x^2\geqslant0$，显然 $k_1\cdot k_2=3x_1^2\cdot3x_2^2=-1$ 无解，故该函数不具有 T 性质. 故选 A.

5. 选 C　∵$y=\ln x$，∴$y'=\frac{1}{x}$. 设切点为 (x_0,y_0)，则 $k=\frac{1}{x_0}$. 由 $\begin{cases}y_0=kx_0,\\y_0=\ln x_0,\end{cases}$ 得 $\begin{cases}x_0=e,\\y_0=1.\end{cases}$ ∴$k=\frac{1}{e}$.

6. **解析**：∵$f(x)=10^x$，∴$f'(x)=10^x\ln10$，

∴$f'(1)=10\ln10$.

答案：$10\ln10$

7. **解析**：$y'=\frac{1}{x\ln2}$，∴$k=y'\Big|_{x=1}=\frac{1}{\ln2}$，

∴切线方程为 $y=\frac{1}{\ln2}(x-1)$，

令 $x=0$，得 $y=-\frac{1}{\ln2}$，

令 $y=0$，得 $x=1$，

∴$S=\frac{1}{2}\times1\times\left|-\frac{1}{\ln2}\right|=\frac{1}{2\ln2}$.

答案：$\frac{1}{2\ln2}$

8. **解析**：由已知 $f_1(x)=\cos x$，$f_2(x)=-\sin x$，$f_3(x)=-\cos x$，$f_4(x)=\sin x$，$f_5(x)=\cos x$，…依次类推可得，函数呈周期变化，且周期为 4，则 $f_{2\,018}(x)=f_2(x)=-\sin x$.

答案：$-\sin x$

9. **解**：不存在. 理由如下：

由于 $y_1=\sin x$，$y_2=\cos x$，

设两条曲线的一个公共点为 $P(x_0,y_0)$，

所以两条曲线在 $P(x_0,y_0)$ 处切线的斜率分别为

$k_1=y_1'\Big|_{x=x_0}=\cos x_0$，$k_2=y_2'\Big|_{x=x_0}=-\sin x_0$.

若使两条切线互相垂直，必须使 $\cos x_0\cdot(-\sin x_0)=-1$，即 $\sin x_0\cdot\cos x_0=1$，也就是 $\sin2x_0=2$，这是不可能的，所以两条曲线不存在公共点，使在这一点处的两条切线互相垂直.

10. **证明**：函数 $y=\frac{1}{2}x^2$ 的导数为 $y'=x$，

在点 $\left(x_0,\frac{1}{2}x_0^2\right)$ 处的切线的斜率为 $k=x_0$，

切线方程为 $y-\frac{1}{2}x_0^2=x_0(x-x_0)$，

设切线与 $y=\ln x$ 相切的切点为 $(m,\ln m)$，$0<m<1$，

由 $y=\ln x$ 的导数为 $y'=\frac{1}{x}$，

可得 $x_0=\frac{1}{m}$，切线方程为 $y-\ln m=\frac{1}{m}(x-m)$，

令 $x=0$，可得 $y=\ln m-1=-\frac{1}{2}x_0^2$，

由 $0<m<1$，可得 $x_0>1$，

由 $m=\frac{1}{x_0}$，可得 $\frac{1}{2}x_0^2-\ln x_0-1=0$，

令 $f(x)=\frac{1}{2}x^2-\ln x-1$，$x>1$，

∴$f'(x)=x-\frac{1}{x}>0$，∴$f(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上递增，

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

且 $f(2)=1-\ln 2>0$，

$f(\sqrt{3})=\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\ln 3-1=\frac{1}{2}(1-\ln 3)<0$，

则有 $\frac{1}{2}x_0^2-\ln x_0-1=0$ 的根 $x_0\in(\sqrt{3},2)$.

$\therefore\sqrt{3}<x_0<2$.

1.2.2 基本初等函数的导数公式及导数的运算法则(二)

基础知识梳理

1. $f'(x)+g'(x)$　$f'(x)-g'(x)$　$f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$　$\frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}$

2. x 的函数　$y=f(g(x))$　$y_u'\cdot u_x'$　y 对 u 的导数与 u 对 x 的导数的乘积

题点知识巩固

1. **解析**：$\because f(x)=e^x\ln x$，$\therefore f'(x)=e^x\ln x+e^x\cdot\frac{1}{x}$，

$\therefore f'(1)=e$.

答案：e

2. **解**：(1)$y'=(x+1)e^x$.

(2)$y=2\cos\frac{x}{2}\left(\sin\frac{x}{2}-\cos\frac{x}{2}\right)+\frac{\sin x}{x}$

$=\sin x-(1+\cos x)+\frac{\sin x}{x}$

$=\sin x-\cos x-1+\frac{\sin x}{x}$，

$y'=\cos x+\sin x+\frac{x\cos x-\sin x}{x^2}$

$=\frac{(x^2+x)\cos x+(x^2-1)\sin x}{x^2}$.

3. 选 D　$y'=\cos(2x^2+x)\cdot(2x^2+x)'=(4x+1)\cos(2x^2+x)$. 故选 D.

4. **解**：(1)$y'=\frac{1}{x^2+2x}\cdot(x^2+2x)'=\frac{2x+2}{x^2+2x}$.

(2)$y'=(e^{2x+3})'(x^2-2x-3)+e^{2x+3}(x^2-2x-3)'$

$=2e^{2x+3}(x^2-2x-3)+e^{2x+3}(2x-2)$

$=e^{2x+3}(2x^2-2x-8)=2e^{2x+3}(x^2-x-4)$.

5. 选 A　$\because f(x)=\frac{1}{4}x^2+\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=\frac{1}{4}x^2+\cos x$，

$\therefore f'(x)=\frac{1}{2}x-\sin x$，

$\because f'(x)$ 为奇函数，$\therefore$ 排除 B、D 选项；

又 $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi}{4}-1<0$，排除 C 选项，故选 A.

6. **解**：(1)因为 $f(x)=ax^2+bx+3(a\neq0)$，

所以 $f'(x)=2ax+b$，又知 $f'(x)=2x-8$，

所以 $a=1$，$b=-8$.

(2)由(1)可知 $g(x)=e^x\sin x+x^2-8x+3$，

所以 $g'(x)=e^x\sin x+e^x\cos x+2x-8$，

所以 $g'(0)=e^0\sin 0+e^0\cos 0+2\times0-8=-7$，

又知 $g(0)=3$，

所以 $g(x)$ 在 $x=0$ 处的切线方程为 $y-3=-7(x-0)$.

即 $7x+y-3=0$.

提能达标过关

1. 选 B　$\left(x+\frac{1}{x}\right)'=x'+\left(\frac{1}{x}\right)'=1-\frac{1}{x^2}$，A 不正确；$(3^x+\ln 3)'=(3^x)'+(\ln 3)'=3^x\ln 3+0=3^x\ln 3$，C 不正确；$(x^2\cos x)'=(x^2)'\cos x+x^2(\cos x)'=2x\cos x-x^2\sin x$，D 不正确.

2. 选 D　$y'=\frac{x-2-x}{(x-2)^2}=\frac{-2}{(x-2)^2}$，曲线在点(1，−1)处的切线斜率 $k=y'\Big|_{x=1}=-2$. 故切线方程为 $y+1=-2(x-1)$，即 $y=-2x+1$.

3. 选 A　$f'(x)=-\sqrt{3}\sin(\sqrt{3}x+\varphi)$，

$\therefore f(x)+f'(x)=\cos(\sqrt{3}x+\varphi)-\sqrt{3}\sin(\sqrt{3}x+\varphi)=2\cos\left(\sqrt{3}x+\varphi+\frac{\pi}{3}\right)$，

$\because f(x)+f'(x)$ 为奇函数，则 $\varphi+\frac{\pi}{3}=k\pi+\frac{\pi}{2}$，$k\in\mathbf{Z}$，

$\therefore\varphi=k\pi+\frac{\pi}{6}$，$k\in\mathbf{Z}$，$\because0<\varphi<\pi$，$\therefore\varphi=\frac{\pi}{6}$，故选 A.

4. 选 A　由题意知 $g'(1)=2$，$\because f'(x)=[g(x)+x^2]'=g'(x)+2x$.

$\therefore k=f'(1)=g'(1)+2\times1=2+2=4$.

5. 选 D　$\because f(x)=ax^3+bx^2+cx+1$，

$\therefore f'(x)=3ax^2+2bx+c$，

$\because f'(x)$ 为奇函数，$\therefore a=c=0$，故选 D.

6. **解析**：因为 $y'=(e^{2x})'\cdot\cos 3x+e^{2x}\cdot(\cos 3x)'=2e^{2x}\cdot\cos 3x-3e^{2x}\cdot\sin 3x$，所以 $y'\Big|_{x=0}=2$，所以在点(0，1)的切线方程为 $y-1=2(x-0)$，即 $y=2x+1$.

设符合题意的直线方程为 $y=2x+b$，

根据题意，得 $\sqrt{5}=\frac{|b-1|}{\sqrt{5}}$，解得 $b=6$ 或 -4.

所以符合题意的直线方程为 $y=2x+6$ 或 $y=2x-4$.

答案：$y=2x+6$ 或 $y=2x-4$

7. **解析**：$\because y'=x'(3\ln x+1)+x(3\ln x+1)'=3\ln x+1+x\cdot\frac{3}{x}=3\ln x+4$.

$\therefore y'\Big|_{x=1}=3\ln 1+4=4$.

$\therefore$ 切线方程为 $y-1=4(x-1)$，即 $4x-y-3=0$.

答案：$4x-y-3=0$

8. **解析**：$y'=\frac{1}{x}+2ax$，$x\in(0,+\infty)$，

$\because$ 曲线 $y=\ln x+ax^2$（a 为常数）不存在斜率为负数的切线，

$\therefore y'=\frac{1}{x}+2ax\geqslant0$ 在(0，+∞)上恒成立，

$\therefore a\geqslant-\frac{1}{2x^2}$ 在(0，+∞)上恒成立.

令 $f(x)=-\frac{1}{2x^2}$，$x\in(0,+\infty)$，

则 $f(x)$ 在(0，+∞)上单调递增，

又 $f(x)=-\frac{1}{2x^2}<0$，

$\therefore a\geqslant0$，即实数 a 的取值范围是[0，+∞).

答案：[0，+∞)

9. **解**：(1)由题意，函数的定义域为(0，+∞)，

由 $f(x)=ax^2+\ln x$，得 $f'(x)=2ax+\frac{1}{x}$，

所以 $f(1)+f'(1)=3a+1$.

(2)因为曲线 $y=f(x)$ 存在垂直于 y 轴的切线，故此时切线斜率为 0，

问题转化为在 $x\in(0,+\infty)$ 内导函数 $f'(x)=2ax+\frac{1}{x}$ 存在零点，即 $f'(x)=0\Rightarrow2ax+\frac{1}{x}=0$ 有正实数解，

即 $2ax^2=-1$ 有正实数解，

故有 $a<0$，所以实数 a 的取值范围是(−∞，0).

10. **解**：$\because f(x)=1+\ln x-ae^x$，

$\therefore f'(x)=\frac{1}{x}-ae^x$，$x\in(0,+\infty)$.

由于曲线 $y=f(x)$ 在 $x=1$ 处的切线与 x 轴平行，

$\therefore f'(1)=1-ae=0$，解得 $a=\frac{1}{e}$.

$\therefore$ 实数 $a=\frac{1}{e}$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

1.3　导数在研究函数中的应用

1.3.1　函数的单调性与导数

基础知识梳理

1. 增　减
2. (1)越快　(2)越慢

题点知识巩固

1. 选 D　观察函数 $y=f(x)$ 的图象，从左到右单调性为先增，后减，再增，对应的导数符号为正、负、正，故选 D.
2. 选 C　由题图知，当 $x<-1$ 时，$xf'(x)<0$，
   $\therefore f'(x)>0$，$\therefore x<-1$ 时，函数 $y=f(x)$ 单调递增；
   当 $-1<x<0$ 时，$xf'(x)>0$，
   $\therefore f'(x)<0$，$\therefore -1<x<0$ 时，函数 $y=f(x)$ 单调递减；
   当 $0<x<1$ 时，$xf'(x)<0$，
   $\therefore f'(x)<0$，$\therefore 0<x<1$ 时，函数 $y=f(x)$ 单调递减；
   当 $x>1$ 时，$xf'(x)>0$，$\therefore f'(x)>0$，
   $\therefore x>1$ 时，$y=f(x)$ 单调递增. 故选 C.
3. 选 D　$f'(x)=\ln x+1(x>0)$，
   当 $0<x<\frac{1}{e}$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 为减函数，
   当 $x>\frac{1}{e}$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 为增函数，故选 D.
4. **解**：由已知 $h(x)=a^x-x\ln a$，得 $h'(x)=a^x\ln a-\ln a$.
   令 $h'(x)=0$，解得 $x=0$.
   由 $a>1$，可知当 x 变化时，$h'(x)$，$h(x)$ 的变化情况如下表：

x	$(-\infty,0)$	0	$(0,+\infty)$
$h'(x)$	−	0	+
$h(x)$	↘	极小值	↗

   所以函数 $h(x)$ 的单调递减区间为 $(-\infty,0)$，单调递增区间为 $(0,+\infty)$.
5. **解**：$f(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$.
   $f'(x)=\frac{1}{x}-2ax+(2-a)=-\frac{(2x+1)(ax-1)}{x}$，
   若 $a\leqslant 0$，则 $f'(x)>0$，所以 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增.
   若 $a>0$，则由 $f'(x)=0$ 得 $x=\frac{1}{a}$，
   且当 $x\in\left(0,\frac{1}{a}\right)$ 时，$f'(x)>0$；当 $x>\frac{1}{a}$ 时，$f'(x)<0$，
   所以 $f(x)$ 在 $\left(0,\frac{1}{a}\right)$ 上单调递增.
   综上所述，当 $a\leqslant 0$ 时，$f(x)$ 的单调递增区间为 $(0,+\infty)$；当 $a>0$ 时，$f(x)$ 的单调递增区间为 $\left(0,\frac{1}{a}\right)$.
6. **解**：$f'(x)=2x+a-\frac{1}{x}$.
   因为 $f(x)$ 在区间 $(0,1]$ 上是减函数，
   所以 $f'(x)\leqslant 0$ 对任意 $x\in(0,1]$ 恒成立，
   即 $2x+a-\frac{1}{x}\leqslant 0$ 对任意 $x\in(0,1]$ 恒成立，
   所以 $a\leqslant\frac{1}{x}-2x$ 对任意 $x\in(0,1]$ 恒成立.
   令 $g(x)=\frac{1}{x}-2x$，所以 $a\leqslant g(x)_{\min}$，
   已知 $g(x)$ 在 $(0,1]$ 上单调递减，
   所以 $g(x)_{\min}=g(1)=-1$，所以 $a\leqslant -1$. 故实数 a 的取值范围为 $(-\infty,-1]$.

提能达标过关

1. 选 B　$f'(x)=3x^2-3$，当 $x\in(1,+\infty)$ 时，$f'(x)>0$，
   $\therefore f(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上是增函数.
2. 选 C　由题意知，当 $x<0$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增；当 $0<x<2$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 单调递减；当 $x>2$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增. $\therefore$ C 符合题意.
3. 选 B　$\because f(x)=x^3-12x$，$\therefore f'(x)=3x^2-12$，
   由 $f'(x)<0$，得 $-2<x<2$，
   $\therefore f(x)$ 的单调递减区间为 $(-2,2)$，
   $\because f(x)$ 在区间 $(2m,m+1)$ 上单调递减，
   $\therefore (2m,m+1)\subseteq(-2,2)$，
   即 $\begin{cases}2m\geqslant -2,\\ m+1\leqslant 2,\\ 2m<m+1,\end{cases}$ 解得 $-1\leqslant m<1$，
   $\therefore$ 实数 m 的取值范围是 $[-1,1)$，故选 B.
4. 选 C　由函数 $y=f(x)$ 的图象的增减变化趋势可判断函数 $y=f'(x)$ 取值的正、负情况，如下表：

x	$(-1,b)$	(b,a)	$(a,1)$
$f(x)$	↘	↗	↘
$f'(x)$	−	+	−

   由表，可知当 $x\in(-1,b)$ 时，函数 $y=f'(x)$ 的图象在 x 轴下方；
   当 $x\in(b,a)$ 时，函数 $y=f'(x)$ 的图象在 x 轴上方；
   当 $x\in(a,1)$ 时，函数 $y=f'(x)$ 的图象在 x 轴下方.
   故选 C.
5. 选 A　不等式 $f(x)>\frac{3}{e^x}+1$ 可化为
   $f(x)\cdot e^x-e^x-3>0$，
   令 $h(x)=f(x)\cdot e^x-e^x-3$，
   $h'(x)=f'(x)\cdot e^x+f(x)\cdot e^x-e^x=e^x[f'(x)+f(x)-1]>0$，
   $\therefore h(x)$ 是增函数，
   $h(0)=f(0)e^0-e^0-3=4-1-3=0$，
   $\therefore h(x)>0$ 的解集为 $(0,+\infty)$，故选 A.
6. **解析**：$f(x)=\frac{\ln x}{x}$ 的定义域为 $(0,+\infty)$，
   由 $f'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}<0$，得 $x>e$，
   $\therefore$ 函数 $f(x)=\frac{\ln x}{x}$ 的单调递减区间是 $(e,+\infty)$.
   答案：$(e,+\infty)$
7. **解析**：$f'(x)=[x^2+(m+2)x+m]e^x$，
   因为 $f(x)$ 的单调减区间是 $\left[-\frac{3}{2},1\right]$，
   所以 $f'(x)=0$ 的两个根分别为 $x_1=-\frac{3}{2}$，$x_2=1$，
   即 $\begin{cases}f'\left(-\frac{3}{2}\right)=0,\\ f'(1)=0,\end{cases}$ 解得 $m=-\frac{3}{2}$.
   答案：$-\frac{3}{2}$
8. **解析**：设 $B(x_1,y_1)$，因为 $y=\frac{1}{2}x^2$，所以 $y'=x$，$y'\Big|_{x=x_1}=x_1=1$，可得 $B\left(1,\frac{1}{2}\right)$，因为 $F\left(0,\frac{1}{2}\right)$，所以直线 l 的方程为 $y=\frac{1}{2}$，故 $|AF|=|BF|=\frac{1}{2}-\left(-\frac{1}{2}\right)=1$.
   答案：1
9. **解**：由条件可知 $a\neq 0$.
   所以 $f'(x)=3ax^2-6x=3ax\left(x-\frac{2}{a}\right)$.
   所以当 $a>0$ 时，$f'(x)>0$，得 $x<0$ 或 $x>\frac{2}{a}$，
   $f'(x)<0$，得 $0<x<\frac{2}{a}$.
   所以 $f(x)$ 在 $(-\infty,0)$，$\left(\frac{2}{a},+\infty\right)$ 上是增函数，
   在 $\left(0,\frac{2}{a}\right)$ 上是减函数；
   当 $a<0$ 时，$f'(x)<0$，得 $x<\frac{2}{a}$ 或 $x>0$，
   $f'(x)>0$，得 $\frac{2}{a}<x<0$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

所以 $f(x)$在$\left(-\infty,\frac{2}{a}\right)$,$(0,+\infty)$上是减函数,

在$\left(\frac{2}{a},0\right)$上是增函数.

综上,$a>0$时,$f(x)$在$(-\infty,0)$,$\left(\frac{2}{a},+\infty\right)$上是增函数,

在$\left(0,\frac{2}{a}\right)$上是减函数;

$a<0$时,$f(x)$在$\left(-\infty,\frac{2}{a}\right)$,$(0,+\infty)$上是减函数,

在$\left(\frac{2}{a},0\right)$上是增函数.

10. **解**:(1)∵$f(x)=x\ln x-\frac{a}{2}x^2+(a-1)x$,

∴$g(x)=f'(x)=\ln x+1-ax+a-1=\ln x-ax+a$,
其定义域为$(0,+\infty)$,

∴$g'(x)=\frac{1}{x}-a$,

当$a\leqslant 0$时,$g'(x)>0$恒成立,
∴$g(x)$的单调递增区间为$(0,+\infty)$,无单调递减区间;

当$a>0$时,由$g'(x)>0$得$0<x<\frac{1}{a}$,

由$g'(x)<0$,得$x>\frac{1}{a}$,

∴$g(x)$的单调递减区间为$\left(\frac{1}{a},+\infty\right)$,单调递增区间为$\left(0,\frac{1}{a}\right)$.

(2)若$f(x)$在其定义域内为减函数,则$g(x)\leqslant 0$在$(0,+\infty)$上恒成立.
由(1)知,当$a\leqslant 0$时,$g(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增,且$g(1)=0$,
∴$x>1$时,$g(x)>0$,不符合题意;

当$a>0$时,$g(x)$在$\left(0,\frac{1}{a}\right)$上单调递增,在$\left(\frac{1}{a},+\infty\right)$上单调递减,

∴$x=\frac{1}{a}$时,$g(x)_{\max}=\ln\frac{1}{a}+a-1=a-\ln a-1\leqslant 0$在$(0,+\infty)$上恒成立即可.
令$h(a)=a-\ln a-1(a>0)$,

则$h'(a)=1-\frac{1}{a}=\frac{a-1}{a}$,

由$h'(a)>0$知$a>1$,
由$h'(a)<0$知$0<a<1$,∴$h(a)\geqslant h(1)=0$,
又$h(a)\leqslant 0$,∴$a=1$,
∴实数a的取值集合为$\{1\}$.

1.3.2 函数的极值与导数

基础知识梳理

1. $f'(x)<0$　$f'(x)>0$
2. $f'(x)>0$　$f'(x)<0$　极大值点　极小值点　极大值　极小值

题点知识巩固

1. 选 D　∵$f(x)=(x^2+ax-1)e^{x-1}$,
∴$f'(x)=(2x+a)e^{x-1}+(x^2+ax-1)e^{x-1}$
$=(x^2+2x+ax+a-1)e^{x-1}$.
∵$x=-2$是函数$f(x)$的极值点,
∴$f'(-2)=(4-4-2a+a-1)e^{-3}=0$,
解得$a=-1$,
∴$f(x)=(x^2-x-1)e^{x-1}$,
$f'(x)=(x^2+x-2)e^{x-1}$,
由$f'(x)>0$,得$x<-2$或$x>1$,由$f'(x)<0$,得$-2<x<1$,
∴$f(x)$的极小值为$f(1)=-1$,故选 D.

2. **解**:(1)函数$f(x)=\frac{\ln x}{x}$的定义域为$(0,+\infty)$,且$f'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}$. 令$f'(x)=0$,得$x=e$.

当x变化时,$f'(x)$与$f(x)$的变化情况如下表:

x	$(0,e)$	e	$(e,+\infty)$
$f'(x)$	+	0	−
$f(x)$	↗	$\frac{1}{e}$	↘

因此,$x=e$是函数的极大值点,极大值为$f(e)=\frac{1}{e}$,
函数$f(x)$没有极小值点.
(2)函数的定义域为 **R**.
$f'(x)=\frac{2(x^2+1)-4x^2}{(x^2+1)^2}=-\frac{2(x-1)(x+1)}{(x^2+1)^2}$.
令$f'(x)=0$,得$x=-1$或$x=1$.
当x变化时,$f'(x)$,$f(x)$变化情况如下表:

x	$(-\infty,-1)$	-1	$(-1,1)$	1	$(1,+\infty)$
$f'(x)$	−	0	+	0	−
$f(x)$	↘	极小值-3	↗	极大值-1	↘

由上表可以看出,
当$x=-1$时,函数有极小值,且极小值为$f(-1)=-3$;
当$x=1$时,函数有极大值,且极大值为$f(1)=-1$.

3. 选 D　$f'(x)=12x^2-2ax-2b$,
$f'(1)=12-2a-2b=0$,
∴$a+b=6$,∴$ab\leqslant\left(\frac{a+b}{2}\right)^2=9$,故选 D.

4. 选 A　∵$f(x)=x^2-ax+\ln x$,
∴$f'(x)=2x-a+\frac{1}{x}=\frac{2x^2-ax+1}{x}$.
∵$f(x)$在区间$(0,2)$内既有极大值又有极小值,
∴方程$2x^2-ax+1=0$在$(0,2)$内有两个相异实根.
令$g(x)=2x^2-ax+1$,$x\in(0,2)$,

则$\begin{cases}0<\frac{a}{4}<2,\\ \Delta=a^2-8>0,\\ g(0)=1>0,\\ g(2)=8-2a+1>0,\end{cases}$

解得$2\sqrt{2}<a<\frac{9}{2}$,故选 A.

5. **解**:(1)因为$f(x)=-x^3+ax^2+b$,
所以$f'(x)=-3x^2+2ax=-3x\left(x-\frac{2a}{3}\right)$.
当$a=0$时,$f'(x)=-3x^2\leqslant 0$,函数$f(x)$没有单调递增区间;当$a>0$时,令$f'(x)>0$,即$-3x\left(x-\frac{2a}{3}\right)>0$,解得$0<x<\frac{2a}{3}$,故函数$f(x)$的单调递增区间为$\left(0,\frac{2a}{3}\right)$;当$a<0$时,令$f'(x)>0$,即$-3x\left(x-\frac{2a}{3}\right)>0$,解得$\frac{2a}{3}<x<0$,故函数$f(x)$的单调递增区间为$\left(\frac{2a}{3},0\right)$.
(2)由(1)知,$a\in[3,4]$时,函数$f(x)$的单调递增区间为$\left(0,\frac{2a}{3}\right)$,单调递减区间为$(-\infty,0)$和$\left(\frac{2a}{3},+\infty\right)$.
所以$f(x)_{极大值}=f\left(\frac{2a}{3}\right)=\frac{4a^3}{27}+b$,
$f(x)_{极小值}=f(0)=b$.
由于对任意$a\in[3,4]$,函数$f(x)$在 **R** 上都有三个零点,
所以$\begin{cases}f(x)_{极大值}>0,\\ f(x)_{极小值}<0,\end{cases}$即$\begin{cases}\frac{4a^3}{27}+b>0,\\ b<0,\end{cases}$

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

解得$-\frac{4a^3}{27}<b<0$.

因为对任意$a\in[3,4]$,$b>-\frac{4a^3}{27}$恒成立,

所以$b>\left(-\frac{4a^3}{27}\right)_{\max}=-\frac{4\times3^3}{27}=-4$.

所以实数b的取值范围为$(-4,0)$.

提能达标过关

1. 选C　因为$f(x)$在$x=-2$处取得极小值,
所以当$x<-2$时,$f(x)$单调递减,即$f'(x)<0$;
当$x>-2$时,$f(x)$单调递增,即$f'(x)>0$.
所以当$x<-2$时,$y=xf'(x)>0$;
当$x=-2$时,$y=xf'(x)=0$;
当$-2<x<0$时,$y=xf'(x)<0$;
当$x=0$时,$y=xf'(x)=0$;
结合选项中图象知选C.

2. 选D　$\because f(x)=x^3+ax^2+3x-9$,
$\therefore f'(x)=3x^2+2ax+3$.
$\because f(x)$在$x=-3$处取得极值,
$\therefore f'(-3)=27-6a+3=0$,
解得$a=5$,故选D.

3. 选C　$f'(x)=3x^2+2ax+b$,其图象开口向上,若x_0是$f(x)$的极小值点,则$f(x)$先增,后减,再增.$f(x)$在$(-\infty,x_0)$上先增后减,C错.

4. 选C　由题意知$f(0)=d=0$,
$f(1)=1^3+b\times1^2+c\times1=b+c+1=0$,
$f(2)=2^3+b\times2^2+c\times2=4b+2c+8=0$.
则$b=-3$,$c=2$.
$\therefore f(x)=x^3-3x^2+2x$.$f'(x)=3x^2-6x+2$.
由图象可知x_1,x_2是方程$3x^2-6x+2=0$的两根,
$\therefore x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2=4-\frac{4}{3}=\frac{8}{3}$.

5. 选D　$y'=3x^2-2a$.$\because$有极值,$\therefore a>0$.
令$3x^2-2a=0$,
解得$x=\pm\sqrt{\frac{2a}{3}}$.
$\because$函数在$(0,1)$内有极小值.
$\therefore0<\sqrt{\frac{2a}{3}}<1$,解得$0<a<\frac{3}{2}$.

6. **解析**:由导函数$f'(x)$的图象知,从x轴上方到x轴下方,与x轴的交点是极大值点,从x轴下方到x轴上方,与x轴的交点是极小值点,因此函数$y=f(x)$有两个极大值点和两个极小值点.故只有③正确.
答案:③

7. **解析**:因为$f(x)=e^x-kx$的定义域为$\mathbf{R}$,
所以$f'(x)=e^x-k$,
当$k\leqslant0$时,$f'(x)>0$,
$f(x)$在$\mathbf{R}$上单调递增,所以$f(x)$无极值.
当$k>0$时,由$f'(x)=0$,得$x=\ln k$;
令$f'(x)>0$,得$x>\ln k$;
令$f'(x)<0$,得$x<\ln k$,
所以$f(x)_{极小}=f(\ln k)=e^{\ln k}-k\ln k=k(1-\ln k)=0$,
所以$1-\ln k=0$,即$k=e$.
答案:e

8. **解析**:$\because f(x)=\frac{m}{x-1}+\ln x$,
$\therefore f'(x)=-\frac{m}{(x-1)^2}+\frac{1}{x}$.
$\because$函数$f(x)$在$[e,+\infty)$上存在极值点,
$\therefore-\frac{m}{(x-1)^2}+\frac{1}{x}=0$成立,
即$m=\frac{(x-1)^2}{x}=x+\frac{1}{x}-2$,$x\in[e,+\infty)$,
$\because m=x+\frac{1}{x}-2$在$[e,+\infty)$上单调递增,
$\therefore m\geqslant e+\frac{1}{e}-2$,
即实数m的取值范围为$\left[e+\frac{1}{e}-2,+\infty\right)$.
答案:$\left[e+\frac{1}{e}-2,+\infty\right)$

9. **解**:(1)由已知,可得$f(x)=x(x-1)(x+1)=x^3-x$,
故$f'(x)=3x^2-1$.因此$f(0)=0$,$f'(0)=-1$,
又因为曲线$y=f(x)$在点$(0,f(0))$处的切线方程为$y-f(0)=f'(0)(x-0)$,故所求切线方程为$x+y=0$.
(2)由已知可得
$f(x)=(x-t_2+3)(x-t_2)(x-t_2-3)=(x-t_2)^3-9(x-t_2)=x^3-3t_2x^2+(3t_2^2-9)x-t_2^3+9t_2$.
故$f'(x)=3x^2-6t_2x+3t_2^2-9$.
令$f'(x)=0$,解得$x=t_2-\sqrt{3}$或$x=t_2+\sqrt{3}$.
当x变化时,$f'(x)$,$f(x)$的变化情况如下表:

x	$(-\infty,t_2-\sqrt{3})$	$t_2-\sqrt{3}$	$(t_2-\sqrt{3},t_2+\sqrt{3})$	$t_2+\sqrt{3}$	$(t_2+\sqrt{3},+\infty)$
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗	极大值	↘	极小值	↗

所以函数$f(x)$的极大值为$f(t_2-\sqrt{3})=(-\sqrt{3})^3-9\times(-\sqrt{3})=6\sqrt{3}$;
函数$f(x)$的极小值为$f(t_2+\sqrt{3})=(\sqrt{3})^3-9\times\sqrt{3}=-6\sqrt{3}$.

10. **解**:由$f'(x)=1-\frac{a}{x}=\frac{x-a}{x}(x>0)$知,
①当$a\leqslant0$时,$f'(x)>0$,
函数$f(x)$为$(0,+\infty)$上的增函数,函数$f(x)$无极值;
②当$a>0$时,由$f'(x)=0$,解得$x=a$,
又当$x\in(0,a)$时,$f'(x)<0$;
当$x\in(a,+\infty)$时,$f'(x)>0$,
从而函数$f(x)$在$x=a$处取得极小值,
且极小值为$f(a)=a-a\ln a$,无极大值.
综上,当$a\leqslant0$时,函数$f(x)$无极值;当$a>0$时,函数$f(x)$在$x=a$处取得极小值$a-a\ln a$,无极大值.

1.3.3　函数的最大(小)值与导数

基础知识梳理

1. 最大值　最小值　极值点　区间端点
2. (1)极值　(2)最大的一个　最小的一个

题点知识巩固

1. **解**:(1)$f'(x)=-(x+2)(3x-2)$,
当x变化时,$f'(x)$,$f(x)$的变化情况列表如下:

x	$(-\infty,-2)$	-2	$\left(-2,\frac{2}{3}\right)$	$\frac{2}{3}$	$\left(\frac{2}{3},+\infty\right)$
$f'(x)$	−	0	+	0	−
$f(x)$	单调递减	极小值0	单调递增	极大值$\frac{256}{27}$	单调递减

$\therefore f(x)$的单调增区间为$\left(-2,\frac{2}{3}\right)$,单调减区间为$(-\infty,-2)$和$\left(\frac{2}{3},+\infty\right)$.
(2)由单调性可知,
$f(x)_{极小}=f(-2)=0$,$f(x)_{极大}=f\left(\frac{2}{3}\right)=\frac{256}{27}$,
又$f(-5)=63>\frac{256}{27}$,$f\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{49}{8}>0$,
$\therefore f(x)$在$\left[-5,\frac{3}{2}\right]$上的最大值为63,最小值0.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

2. 选 B　∵$f(x)=\frac{1}{3}x^3-x+a$，∴$f'(x)=x^2-1$. 令$f'(x)=0$，得 $x=\pm1$. 又 $f(0)=a$，$f(1)=a-\frac{2}{3}$，∴$a=1$.

3. 选 B　问题转化为方程 $a-x^2=-2\ln x$ 即 $-a=2\ln x-x^2$ 在$\left[\frac{1}{e},e\right]$上有解.

设 $f(x)=2\ln x-x^2$，$x\in\left[\frac{1}{e},e\right]$，

$f'(x)=\frac{2}{x}-2x=\frac{2(1-x)(1+x)}{x}$，

∴当$\frac{1}{e}<x<1$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$为增函数，

当 $1<x<e$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$为减函数，

∴$f(1)=-1$ 为最大值，

$f\left(\frac{1}{e}\right)=-2-\frac{1}{e^2}$，$f(e)=2-e^2$，

$f\left(\frac{1}{e}\right)>f(e)$. ∴$f(e)$为最小值.

故方程 $-a=2\ln x-x^2$ 在$\left[\frac{1}{e},e\right]$上有解等价于 $2-e^2\leqslant-a\leqslant-1$，

∴$1\leqslant a\leqslant e^2-2$，故选 B.

4. **解**：(1)因为 $f(-2)=2+a$，$f(2)=22+a$，

∴$f(2)>f(-2)$，

$f'(x)=-3x^2+6x+9$. 令 $f'(x)<0$，解得 $x<-1$ 或 $x>3$.

所以函数 $f(x)$的单调减区间为$(-\infty,-1)$，$(3,+\infty)$.

又在$(-1,3)$上，$f'(x)>0$，∴在$(-1,2)$上 $f(x)$递增.

又 $f(x)$在$(-2,-1)$上递减，$f(x)$的最大值为$f(2)$，最小值为$f(-1)$，

由 $22+a=20$ 得 $a=-2$，

∴$f(x)$的最小值为 $f(-1)=-7$.

(2)由 $f(x)=0$ 得 $a=x^3-3x^2-9x$，

令 $g(x)=x^3-3x^2-9x$，

∴$g'(x)=3x^2-6x-9=0$，解得 $x=-1$，$x=3$，

∴$g(x)$在$(-\infty,-1)$，$(3,+\infty)$上递增，在$(-1,3)$上递减，

$g(x)_{极大值}=g(-1)=5$，$g(x)_{极小值}=g(3)=-27$，

∴$a\in(-27,5)$.

提能达标过关

1. 选 C　$f'(x)=3x^2-6x$，令 $f'(x)=0$，即 $3x^2-6x=0$，

解得 $x=0$ 或 $x=2$(舍).

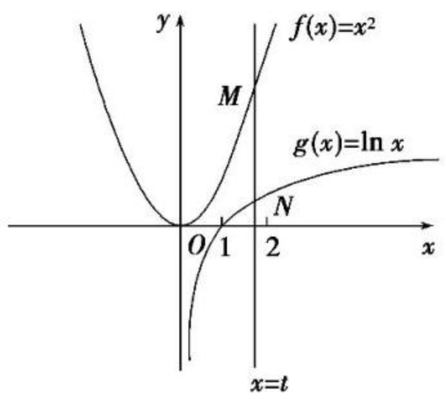
∵$f(-1)=(-1)^3-3\times(-1)^2+2=-2$，

$f(0)=2$，$f(1)=1^3-3\times1^2+2=0$，

∴$f(x)$的最大值是 $f(0)=2$.

2. 选 D　∵$f(x)=e^x-x$，∴$f'(x)=e^x-1$. 令 $f'(x)=0$，得 $x=0$. 易知当 $x>0$ 时，$f'(x)>0$，∴$f(x)$在$[1,2]$上为增函数，∴最小值 $f(1)=e-1$，最大值$f(2)=e^2-2$.

3. 选 D　由题意画出函数图象如图所示，



由图可以看出$|MN|=t^2-\ln t(t>0)$.

记 $h(t)=t^2-\ln t(t>0)$，

则 $h'(t)=2t-\frac{1}{t}=\frac{2t^2-1}{t}=\frac{2\left(t+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(t-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}{t}$.

当 $0<t<\frac{\sqrt{2}}{2}$ 时，$h'(t)<0$，$h(t)$在$\left(0,\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$上单调递减；

当 $t>\frac{\sqrt{2}}{2}$ 时，$h'(t)>0$，$h(t)$在$\left(\frac{\sqrt{2}}{2},+\infty\right)$上单调递增.

故当 $t=\frac{\sqrt{2}}{2}$ 时，$|MN|$有最小值.

4. 选 C　原问题等价于 $a+1\leqslant\frac{\ln x+1}{x}$ 对任意 $x\in\left[\frac{1}{2},2\right]$恒成立.

令 $h(x)=\frac{\ln x+1}{x}$，则 $h'(x)=-\frac{\ln x}{x^2}$.

令 $h'(x)=0$，得 $x=1$，

且当 $x\in\left[\frac{1}{2},1\right)$时，$h'(x)>0$；

当 $x\in(1,2]$时，$h'(x)<0$，

所以函数 $h(x)$在$\left[\frac{1}{2},1\right)$上单调递增，在$(1,2]$上单调递减，

所以最小值为 $\min\left\{h\left(\frac{1}{2}\right),h(2)\right\}=h\left(\frac{1}{2}\right)=2-2\ln2$，

所以 $a\leqslant2-2\ln2-1=1-2\ln2$，选 C.

5. 选 C　$f'(x)=-3x^2+3b$，若 $b\leqslant0$，则 $f'(x)\leqslant0$ 恒成立，

∴$f(x)$在$[0,1]$上是减函数，

∴$f(x)\leqslant f(0)=0$，不符合题意；

若 $b>0$，则 $x\in(0,\sqrt{b})$时，$f'(x)>0$，

$x\in(\sqrt{b},+\infty)$时，$f'(x)<0$.

∴$f(x)$在$(0,\sqrt{b})$上是增函数，在$(\sqrt{b},+\infty)$上是减函数，

当$\sqrt{b}\geqslant1$，即 $b\geqslant1$ 时，

$f(1)=-1+3b=1$，解得 $b=\frac{2}{3}<1$，不符合题意；

当 $0<\sqrt{b}<1$，即 $0<b<1$ 时，

$f(\sqrt{b})=-(\sqrt{b})^3+3b\sqrt{b}=1$，

解得 $b=\frac{\sqrt[3]{2}}{2}\in(0,1)$，故选 C.

6. **解析**：不等式 $e^xf(x)>e^x+5$ 可化为 $e^xf(x)-e^x-5>0$.

设 $g(x)=e^xf(x)-e^x-5$，

则 $g'(x)=e^xf(x)+e^xf'(x)-e^x=e^x[f(x)+f'(x)-1]>0$，

所以函数 $g(x)$在定义域 **R** 上单调递增.

又 $g(0)=0$，所以 $g(x)>0$ 的解集为$(0,+\infty)$.

答案：$(0,+\infty)$

7. **解析**：函数 $f(x)$的导数 $f'(x)=3ax^2-12ax=3ax(x-4)$，

∵$a>0$，∴由 $f'(x)<0$，解得 $0<x<4$，此时函数单调递减.

由 $f'(x)>0$，解得 $x>4$ 或 $x<0$，此时函数单调递增，

即函数在$[-1,0]$上单调递增，在$[0,2]$上单调递减，

即函数在 $x=0$ 处取得极大值同时也是最大值，则 $f(0)=b=3$.

答案：3

8. **解析**：$f'(x)=3x^2-3x$，$x\in[-1,1]$，

令 $f'(x)>0$，解得 $-1<x<0$；

令 $f'(x)<0$，解得 $0<x<1$.

∴$f(x)$在$(-1,0)$上单调递增，在$(0,1)$上单调递减，则最大值为 $f(0)=a=2$.

∴$f(x)=x^3-\frac{3}{2}x^2+2$.

又∵$f(-1)=(-1)^3-\frac{3}{2}\times(-1)^2+2=-\frac{1}{2}$，

$f(1)=1-\frac{3}{2}+2=\frac{3}{2}$.

∴$f(x)$在$[-1,1]$上的最小值是 $-\frac{1}{2}$.

答案：$-\frac{1}{2}$

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

9. **解**：(1)若 $a=-2$，则 $f(x)=\frac{1}{3}x^3-2x^2+bx$，

$\therefore f'(x)=x^2-4x+b$，
依题意，$x=1$ 时 $f(x)$取得极大值，
$\therefore f'(1)=0$，即 $1-4+b=0$，解得 $b=3$. 经检验，符合题意.

(2)$\because f(x)=\frac{1}{3}x^3+ax^2+bx$，

$\therefore f'(x)=x^2+2ax+b$.
又$\because f'(1)=0$，$\therefore 1+2a+b=0$，$\therefore 2a=-(b+1)$，
即 $f'(x)=x^2-(b+1)x+b=(x-b)(x-1)$.
当 $b\leqslant 1$ 时，$f'(x)>0$ 在$(1,+\infty)$上恒成立，此时$f(x)$在$(1,+\infty)$上单调递增，与题意不符；
当 $b>1$ 时，当 x 变化时，$f'(x)$、$f(x)$的变化情况如下表：

x	$(-\infty,1)$	1	$(1,b)$	b	$(b,+\infty)$
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗	极大值	↘	极小值	↗

所以函数 $f(x)$在$(-\infty,1)$，$(b,+\infty)$上单调递增，在$(1,b)$上单调递减，由题意，$b\geqslant 3$，
当 $3\leqslant b\leqslant 4$ 时，函数 $f(x)$在区间$[1,4]$上的最小值为$f(b)=-\frac{1}{6}b^3+\frac{1}{2}b^2$；
当 $b>4$ 时，函数 $f(x)$在区间$[1,4]$上的最小值为$f(4)=\frac{40}{3}-4b$.
综上所述函数 $f(x)$在区间$[1,4]$上的最小值

$$g(b)=\begin{cases}-\frac{1}{6}b^3+\frac{1}{2}b^2, 3\leqslant b\leqslant 4,\\ \frac{40}{3}-4b, b>4.\end{cases}$$

10. **解**：(1)当 $a=-1$，$b=0$ 时，$f(x)=\frac{-x+1}{e^x}$，

所以 $f'(x)=\frac{x-2}{e^x}$，
所以当 $x\in(-\infty,2)$时，$f'(x)<0$，$f(x)$单调递减；
当 $x\in(2,+\infty)$时，$f'(x)>0$，$f(x)$单调递增.
所以 $f(x)$的极小值为 $f(2)=-\frac{1}{e^2}$，无极大值.

(2)当 $b=1$ 时，$f(x)=\frac{ax-a+e^x}{e^x}$.

根据题意，知$\frac{ax-a+e^x}{e^x}=0$ 无实根，
即 $ax-a+e^x=0$ 无实根.
令 $h(x)=ax-a+e^x$，则 $h'(x)=a+e^x$.
若 $a>0$，则 $h'(x)>0$，$h(x)$在 $\mathbf{R}$ 上单调递增，
存在 x_0，使得 $h(x_0)=0$，不合题意；
若 $a<0$，令 $h'(x)>0$，得 $x>\ln(-a)$；
令 $h'(x)<0$，得 $x<\ln(-a)$，
所以 $h(x)_{\min}=h[\ln(-a)]=a\ln(-a)-2a$.
由题意，得 $h(x)_{\min}>0$，即 $a\ln(-a)-2a>0$，
解得 $-e^2<a<0$，符合题意.
综上所述，a 的取值范围为$(-e^2,0)$.

1.4　生活中的优化问题举例

基础知识梳理

1. 利润最大　用料最省　效率最高
2. 用函数表示的数学问题　用导数解决数学问题

题点知识巩固

1. 选 B　依题意，存款量是 kx^2，银行支付的利息是 kx^3，贷款的收益是 $0.048\,6kx^2$，其中 $x\in(0,0.048\,6)$，所以银行的收益是 $y=0.048\,6kx^2-kx^3(0<x<0.048\,6)$，
则 $y'=0.097\,2kx-3kx^2$.
令 $y'=0$，得 $x=0.032\,4$ 或 $x=0$(舍去).
当 $0<x<0.032\,4$ 时，$y'>0$；
当 $0.032\,4<x<0.048\,6$ 时，$y'<0$.
所以当 $x=0.032\,4$ 时，y 取得最大值，即
当存款利率为 $0.032\,4$ 时，银行获得最大收益.

2. **解**：(1)设隔热层厚度为 x cm，
由题意知每年能源消耗费用为 $C(x)=\frac{k}{3x+5}$，
由 $C(0)=8$，解得 $k=40$，故 $C(x)=\frac{40}{3x+5}$，
而建造费用为 $C_1(x)=6x$，
则隔热层建造费用与 20 年的能源消耗费用之和为
$f(x)=20C(x)+C_1(x)=20\times\frac{40}{3x+5}+6x=\frac{800}{3x+5}+6x(0\leqslant x\leqslant 10)$.

(2)$f'(x)=6-\frac{2\,400}{(3x+5)^2}$，
令 $f'(x)=0$，解得 $x=5$ 或 $x=-\frac{25}{3}$(舍去).
当 $0<x<5$ 时，$f'(x)<0$；
当 $5<x<10$ 时，$f'(x)>0$，
故 $x=5$ 是 $f(x)$的最小值点，对应的最小值是 $f(5)=30+\frac{800}{15+5}=70$.
故当隔热层修建 5 cm 厚时，总费用达到最小值 70 万元.

3. 选 A　设圆柱的底面半径为 r，高为 h，体积为 V，
则 $4r+2h=l$，$\therefore h=\frac{l-4r}{2}$，
$V=\pi r^2h=\frac{l}{2}\pi r^2-2\pi r^3\left(0<r<\frac{l}{4}\right)$.
则 $V'=l\pi r-6\pi r^2$，
令 $V'=0$，得 $r=0$ 或 $r=\frac{l}{6}$，而 $r>0$，
$\therefore r=\frac{l}{6}$是其唯一的极值点.
$\therefore$当 $r=\frac{l}{6}$时，V 取得最大值，最大值为$\left(\frac{l}{6}\right)^3\pi$.

4. **解析**：设剪成的小正三角形的边长为 x m，
则 $S=\frac{(3-x)^2}{\frac{1}{2}(x+1)\left[\frac{\sqrt{3}}{2}(1-x)\right]}$
$=\frac{4\sqrt{3}(3-x)^2}{3(1-x^2)}(0<x<1)$.
$S'(x)=\frac{-8\sqrt{3}(3x-1)(x-3)}{3(1-x^2)^2}$，令 $S'(x)=0$，则 $x=\frac{1}{3}$ 或 $x=3$(舍).
当 $x\in\left(0,\frac{1}{3}\right)$时，$S'(x)<0$，$S(x)$单调递减；
当 $x\in\left(\frac{1}{3},1\right)$时，$S'(x)>0$，$S(x)$单调递增.
$\therefore$当 $x=\frac{1}{3}$时，S 的最小值是$\frac{32\sqrt{3}}{3}$.

答案：$\frac{32\sqrt{3}}{3}$

提能达标过关

1. 选 C　$y'=-x^2+81$，令 $y'>0$，解得 $-9<x<9$；令 $y'<0$，解得 $x<-9$ 或 $x>9$.
又$\because x>0$，$\therefore$函数在$(0,9)$上单调递增，在$(9,+\infty)$上单调递减. 则 $x=9$ 时，年利润最大.
2. 选 C　设截去小正方形的边长为 x cm，则 $0<x<5$，
盒子的容积 $V=(16-2x)\cdot(10-2x)\cdot x$
$=4x^3-52x^2+160x$，
$\therefore V'=12x^2-104x+160=4(3x-20)(x-2)$，
当 $0<x<2$ 时，$V'>0$，
当 $2<x<5$ 时 $V'<0$，
$\therefore x=2$ 时，$V_{\max}=144\ \text{cm}^3$，故选 C.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

3. 选 A　设堆料厂一边长为 x 米，则邻边为 $\frac{512}{x}$ 米.

新砌墙壁周长为 $y=2x+\frac{512}{x}(x>0)$.

$y'=2-\frac{512}{x^2}$，令 $y'=0$，则 $x=16$.

当 $0<x<16$，$y'<0$，函数单调递减；当 $x>16$ 时，$y'>0$，函数单调递增.

∴当 $x=16$ 时，y 有最小值. 此时 $\frac{512}{x}=32$. 即堆料厂长 32 米，宽 16 米时，材料最省.

4. 选 D　由题意，总成本为 $C=20\ 000+100x$，

∴总利润 $y=R-C=\begin{cases}-\frac{x^2}{2}+300x-20\ 000(0\leqslant x\leqslant 400),\\ -100x+60\ 000(x>400).\end{cases}$

当 $0\leqslant x\leqslant 400$ 时，$y=-\frac{x^2}{2}+300x-20\ 000$，

通过求导 $y'=-x+300$ 知当 $x=300$ 时，y 有最大值，总利润最大；

当 $x>400$ 时，$y=-100x+60\ 000$，随着产量的增加，总利润逐渐减少.

综上，总利润最大时，每年生产的产品数量为 300.

5. 选 D　设单位面积的铁的价格为 1，则铝合金的价格为 3，依题意 $V=\pi r^2 h$，则 $h=\frac{V}{\pi r^2}$. 设铁桶的总造价为 y，则 $y=(2\pi rh+\pi r^2)\times 1+3\pi r^2=2\pi r\cdot\frac{V}{\pi r^2}+4\pi r^2=\frac{2V}{r}+4\pi r^2$. 令 $y'=-\frac{2V}{r^2}+8\pi r=0$，得 $\pi r^3=\frac{V}{4}$. 所以 $\frac{h}{r}=\frac{V}{\pi r^3}=\frac{V}{\frac{V}{4}}=4$.

6. **解析**：设销售件数为 x，公司的收益为 y，当 $x>150$ 时，$y=[200-(x-150)]x=-x^2+350x$.

$y'=-2x+350$. 令 $y'=0$，得 $x=175$.

当 $x\in(0,175)$ 时，$y'>0$，函数单调递增；当 $x\in(175,+\infty)$ 时，$y'<0$，函数单调递减.

∴当 $x=175$ 时，函数有最大值.

当 $x\leqslant 150$ 时，$y=200x$，

即当 $x=150$ 时，y 最大.

经检验，当 $x=175$ 时，y 最大.

答案：175

7. **解析**：设仓库与车站相距 x 千米，每月土地占用费 $y_1=\frac{k_1}{x}$，每月库存货物的运费 $y_2=k_2 x$.

由题意得 $2=\frac{k_1}{10}$，$k_1=20$；$8=10k_2$，$k_2=\frac{4}{5}$.

∴两项费用之和为 $y=\frac{20}{x}+\frac{4x}{5}(x>0)$.

$y'=-\frac{20}{x^2}+\frac{4}{5}(x>0)$.

令 $y'>0$，得 $x>5$；令 $y'<0$，得 $0<x<5$.

∴函数在 $(0,5)$ 上单调递减，在 $(5,+\infty)$ 上单调递增. 当 $x=5$ 时，函数取得极小值，也是最小值.

∴当仓库建在离车站 5 千米处时，两项费用之和最小.

答案：5

8. **解析**：设矩形边长 $AD=2x$，则 $|AB|=y=4-x^2$，则矩形面积为 $S=2x(4-x^2)(0<x<2)$，即 $S=8x-2x^3$，$S'=8-6x^2$，令 $S'=0$，解得 $x_1=\frac{2}{\sqrt{3}}$，$x_2=-\frac{2}{\sqrt{3}}$（舍去）.

当 $0<x<\frac{2}{\sqrt{3}}$ 时，$S'>0$；当 $x>\frac{2}{\sqrt{3}}$ 时，$S'<0$，

所以当 $x=\frac{2}{\sqrt{3}}$ 时，S 取得最大值，此时，$S_{最大值}=\frac{32\sqrt{3}}{9}$.

即矩形的边长分别为 $\frac{4\sqrt{3}}{3}$，$\frac{8}{3}$ 时，矩形的面积最大.

答案：$\frac{4\sqrt{3}}{3}$ 与 $\frac{8}{3}$

9. **解**：(1)∵$x=5$ 时，$y=11$，

∴$\frac{a}{2}+10=11$，∴$a=2$.

(2)由(1)可知，该商品每日的销售量 $y=\frac{2}{x-3}+10(x-6)^2$，

∴商场每日销售该商品所获得的利润

$f(x)=(x-3)\left[\frac{2}{x-3}+10(x-6)^2\right]$

$=2+10(x-3)(x-6)^2,(3<x<6)$.

从而，$f'(x)=10[(x-6)^2+2(x-3)(x-6)]$

$=30(x-4)(x-6)$.

于是，当 x 变化时，$f'(x)$，$f(x)$ 的变化情况如下表：

x	$(3,4)$	4	$(4,6)$
$f'(x)$	+	0	−
$f(x)$	单调递增	极大值 42	单调递减

由上表可得，$x=4$ 是函数 $f(x)$ 在区间 $(3,6)$ 内的极大值点，也是最大值点.

∴当 $x=4$ 时，函数 $f(x)$ 取得最大值，且最大值等于 42.

∴当销售价格为 4 元/千克时，商场每日销售该商品所获得的利润最大.

10. **解**：(1)因为蓄水池侧面的总成本为 $100\cdot 2\pi rh=200\pi rh$（元），底面的总成本为 $160\pi r^2$ 元，

所以蓄水池的总成本为 $(200\pi rh+160\pi r^2)$ 元.

又由题意得 $200\pi rh+160\pi r^2=12\ 000\pi$，

所以 $h=\frac{1}{5r}(300-4r^2)$，

从而 $V(r)=\pi r^2 h=\frac{\pi}{5}(300r-4r^3)$.

因为 $r>0$，又 $h>0$，所以可得 $0<r<5\sqrt{3}$，

故函数 $V(r)$ 的定义域为 $(0,5\sqrt{3})$.

(2)因为 $V(r)=\frac{\pi}{5}(300r-4r^3)(0<r<5\sqrt{3})$，

所以 $V'(r)=\frac{\pi}{5}(300-12r^2)$.

令 $V'(r)=0$，解得 $r_1=5$，$r_2=-5$（因为 $r_2=-5$ 不在定义域内，舍去）.

当 $r\in(0,5)$ 时，$V'(r)>0$，故 $V(r)$ 在 $(0,5)$ 上为增函数；

当 $r\in(5,5\sqrt{3})$ 时，$V'(r)<0$，故 $V(r)$ 在 $(5,5\sqrt{3})$ 上为减函数.

由此可知，$V(r)$ 在 $r=5$ 处取得最大值，此时 $h=8$，

即当 $r=5$，$h=8$ 时，该蓄水池的体积最大.

1.5　定积分的概念

1.5.1　曲边梯形的面积

1.5.2　汽车行驶的路程

基础知识梳理

1. 连续不断
2. 曲边梯形
3. 分割　近似代替　求和　取极限

题点知识巩固

1. 选 B　将区间 n 等分后，每个小区间的长度为 $\Delta x=\frac{2}{n}$，第 i 个小区间为 $\left[\frac{2(i-1)}{n},\frac{2i}{n}\right](i=1,2,3,\cdots,n)$，则由求曲边梯形的面积的步骤可得曲边梯形的面积为

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{1}{1+\left(\frac{2i}{n}\right)^2}\cdot\frac{2}{n}\right].$$

2. 选 C　依题意，曲边三角形面积的近似值为

$S=\frac{1}{3}\times 0^2+\frac{1}{3}\times\left(\frac{1}{3}\right)^2+\frac{1}{3}\times\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{5}{27}$，故选 C.

3. **解析**：若把区间 $[0,10]$ 进行 10 等分，则第 i 个小区间为 $[i-1,i](i=1,2,\cdots,10)$，其右端点为 i，那么物体运动的路程的近似值为 $S=\sum_{i=1}^{10}(2i-1)=2\sum_{i=1}^{10}i-10=2\times\frac{(1+10)\times 10}{2}-10=100$.

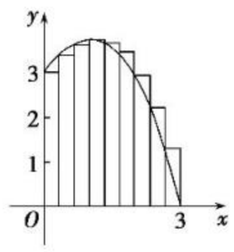
答案：100

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

4. **解**：把区间$[1,2]$等分成n个小区间$\left[\frac{n+i-1}{n},\frac{n+i}{n}\right]$$(i=1,2,\cdots,n)$，每个区间长度$\Delta t=\frac{1}{n}$，每个时间行驶的路程记为$\Delta s_i(i=1,2,\cdots,n)$，故路程和$s_n=\sum_{i=1}^{n}\Delta s_i$，$\Delta s_i\approx v\left(\frac{n+i-1}{n}\right)\cdot\Delta t=6\left(\frac{n}{n+i-1}\right)^2\frac{1}{n}=\frac{6n}{(n+i-1)^2}\approx\frac{6n}{(n+i-1)(n+i)}$
$=6n\left(\frac{1}{n+i-1}-\frac{1}{n+i}\right)$.
$\therefore s_n=\sum_{i=1}^{n}\Delta s_i=6n\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}\right)$
$=6n\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{2n}\right)=3$.
$s=\lim\limits_{n\to\infty}s_n=3$.
所以这段时间内运动的路程为3.

提能达标过关

1. C
2. 选C　把区间$[0,t]$等分成n个小区间后，每个小区间的长度为$\frac{t}{n}$，n个小区间分别为$\left[0,\frac{t}{n}\right]$，$\left[\frac{t}{n},\frac{2t}{n}\right]$，$\left[\frac{2t}{n},\frac{3t}{n}\right]$，…，$\left[\frac{t(i-1)}{n},\frac{it}{n}\right]$，…，$\left[\frac{(n-1)t}{n},t\right]$.
$\therefore$第i个区间为$\left[\frac{(i-1)t}{n},\frac{it}{n}\right]$.
3. 选D　当n很大时，区间长度$\left[\frac{i-1}{n},\frac{i}{n}\right]$很小，在此区间上，可以认为$f(x)$的值变化很小.
4. C
5. 选A　每个小区间长度为$\frac{2}{n}$，第i个小区间为$\left[\frac{n+2(i-1)}{n},\frac{n+2i}{n}\right]$，则第$i$个小曲边梯形的面积$\Delta S_i\approx\frac{1}{\frac{n+2i}{n}}\cdot\frac{2}{n}=\frac{2}{n+2i}$.
6. **解析**：将区间$[0,1]$进行n等分，得到n个小区间：
$\left[0,\frac{1}{n}\right]$，$\left[\frac{1}{n},\frac{2}{n}\right]$，…，$\left[\frac{i-1}{n},\frac{i}{n}\right]$，…，$\left[\frac{n-1}{n},1\right]$.
即$\xi_i=\frac{i}{n}(i=1,2,\cdots,n)$，
则物体的每个时间段内运动的路程
$\Delta s_i\approx v(\xi_i)\cdot\Delta t=\frac{1}{n}\left(7-\frac{i^2}{n^2}\right),i=1,2,\cdots,n$.
$s_n=\sum_{i=1}^{n}\Delta s_i=\frac{1}{n}\left(7-\frac{1}{n^2}+7-\frac{2^2}{n^2}+\cdots+7-\frac{n^2}{n^2}\right)$
$=\frac{1}{n}\left[7n-\frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^2}\right]$
$=7-\frac{1}{6}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right)$.
于是$s=\lim\limits_{n\to\infty}s_n=\lim\limits_{n\to\infty}\left[7-\frac{1}{6}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right)\right]=\frac{20}{3}$.
所以这个物体在$0\leqslant t\leqslant1$这段时间内运动的路程为$\frac{20}{3}$ km.
答案：$\frac{20}{3}$
7. **解析**：由题意知区间长度为1，5等分后，每个小矩形的底边长均为0.2，因此面积的不足近似值为$\sum_{i=1}^{5}\frac{1}{5}x_i^2=\frac{1}{5}(1^2+1.2^2+1.4^2+1.6^2+1.8^2)=\frac{1}{5}(1+1.44+1.96+2.56+3.24)=\frac{1}{5}\times10.2=2.04$.
答案：2.04
8. **解析**：将区间$[0,a]$$n$等分，记第$i$个区间为$\left[\frac{a(i-1)}{n},\frac{ai}{n}\right]$$(i=1,2,\cdots,n)$，此区间长为$\frac{a}{n}$，用小矩形面积$\left(\frac{ai}{n}\right)^2\cdot\frac{a}{n}$近似代替相应的小曲边梯形的面积，则$\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{ai}{n}\right)^2\cdot\frac{a}{n}=\frac{a^3}{n^3}\cdot(1^2+2^2+\cdots+n^2)=\frac{a^3}{3}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{1}{2n}\right)$近似地等于速度曲线$v(t)=t^2$与直线$t=0$，$t=a$，$t$轴围成的曲边梯形的面积.
依题意得$\lim\limits_{n\to\infty}\left[\frac{a^3}{3}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{1}{2n}\right)\right]=9$，$\therefore\frac{a^3}{3}=9$，解得$a=3$.
答案：3
9. **解**：依题意，力$F(x)$做的功为如图所示阴影部分的面积，
$\therefore W=5\times2+\frac{1}{2}\times(5+11)\times2=26$(J).
10. **解**：如图，分割，将区间$[0,3]$$n$等分，
则每个小区间$\left[\frac{3(i-1)}{n},\frac{3i}{n}\right]$$(i=1,2,\cdots,n)$的长度为$\Delta x=\frac{3}{n}$.
分别过各分点作x轴的垂线，把原曲边梯形分成n个小曲边梯形.



以每个小区间的左端点函数值为高作n个小矩形，
则当n很大时，用n个小矩形面积之和S_n近似代替曲边梯形的面积S.
$S_n=\sum_{i=1}^{n}f\left(\frac{3(i-1)}{n}\right)\Delta x$
$=\sum_{i=1}^{n}\left[-\frac{9(i-1)^2}{n^2}+2\times\frac{3(i-1)}{n}+3\right]\times\frac{3}{n}$
$=-\frac{27}{n^3}[1^2+2^2+\cdots+(n-1)^2]+\frac{18}{n^2}[1+2+3+\cdots+(n-1)]+9$
$=-\frac{27}{n^3}\times\frac{1}{6}(n-1)n(2n-1)+\frac{18}{n^2}\times\frac{n(n-1)}{2}+9$
$=-9\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{1}{2n}\right)+9\left(1-\frac{1}{n}\right)+9$.
$S=\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\lim\limits_{n\to\infty}\left[-9\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{1}{2n}\right)+9\left(1-\frac{1}{n}\right)+9\right]$
$=-9(1-0)(1-0)+9(1-0)+9=9$.
即所求曲边梯形面积为9.

1.5.3　定积分的概念

基础知识梳理

1. $\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x=\sum_{i=1}^{n}\frac{b-a}{n}f(\xi_i)$　$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\lim\limits_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{b-a}{n}f(\xi_i)$
积分下限　积分上限　积分区间　被积函数　积分变量　被积式
2. $f(x)\geqslant0$　直线$x=a$，$x=b(a\neq b)$，$y=0$　曲线$y=f(x)$
3. $k\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$　$\int_a^b f_1(x)\mathrm{d}x$　$\int_a^b f_2(x)\mathrm{d}x$　$\int_a^c f(x)\mathrm{d}x+\int_c^b f(x)\mathrm{d}x$

题点知识巩固

1. **解**：令$f(x)=3x+2$.
(1)分割
在区间$[1,2]$上等间隔地插入$n-1$个分点，把区间$[1,2]$等分成n个小区间$\left[\frac{n+i-1}{n},\frac{n+i}{n}\right]$$(i=1,2,\cdots,n)$，每个小区间的长度为$\Delta x=\frac{n+i}{n}-\frac{n+i-1}{n}=\frac{1}{n}$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

(2)近似代替,求和

取 $\xi_i=\frac{n+i-1}{n}(i=1,2,3,\cdots,n)$,

则 $S_n=\sum\limits_{i=1}^{n}f\left(\frac{n+i-1}{n}\right)\cdot\Delta x$

$=\sum\limits_{i=1}^{n}\left[\frac{3(n+i-1)}{n}+2\right]\times\frac{1}{n}$

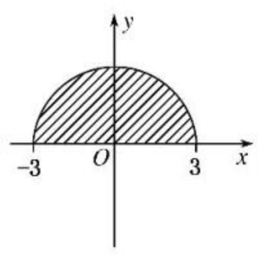
$=\sum\limits_{i=1}^{n}\left[\frac{3(i-1)}{n^2}+\frac{5}{n}\right]=5+\frac{3}{n^2}[0+1+2+\cdots+(n-1)]=\frac{13}{2}-\frac{3}{2n}$.

(3)取极限

$\int_1^2(3x+2)\mathrm{d}x=\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{13}{2}-\frac{3}{2n}\right)=\frac{13}{2}$.

2. $\int_{-4}^{2}\frac{1}{2}x^2\mathrm{d}x$

3. **解析**:$\int_{-3}^{3}\sqrt{9-x^2}$ 表示图中阴影所示半径为 3 的半圆的面积,其值为 $\frac{9\pi}{2}$,所以 $\int_{-3}^{3}\sqrt{9-x^2}\mathrm{d}x=\frac{9\pi}{2}$.



答案:$\frac{9\pi}{2}$

4. **解**:依题意,

(1) $\int_0^2 3x^3\mathrm{d}x=3\int_0^2 x^3\mathrm{d}x=3\left(\int_0^1 x^3\mathrm{d}x+\int_1^2 x^3\mathrm{d}x\right)=3\times\left(\frac{1}{4}+\frac{15}{4}\right)=12$.

(2) $\int_1^4 6x^2\mathrm{d}x=6\int_1^4 x^2\mathrm{d}x=6\left(\int_1^2 x^2\mathrm{d}x+\int_2^4 x^2\mathrm{d}x\right)=6\times\left(\frac{7}{3}+\frac{56}{3}\right)=126$.

(3) $\int_1^2(3x^2-2x^3)\mathrm{d}x=\int_1^2 3x^2\mathrm{d}x-\int_1^2 2x^3\mathrm{d}x=3\int_1^2 x^2\mathrm{d}x-2\int_1^2 x^3\mathrm{d}x=3\times\frac{7}{3}-2\times\frac{15}{4}=-\frac{1}{2}$.

提能达标过关

1. D

2. 选 A　由 $\int_0^a(2x+1)\mathrm{d}x=2$,得 $\frac{1}{2}(1+2a+1)\times a=a^2+a=2$,解得 $a=1$ 或 $a=-2$(舍),故选 A.

3. 选 D　在 D 中阴影部分的面积应为 $S=-\int_a^c[f(x)-g(x)]\mathrm{d}x+\int_c^b[f(x)-g(x)]\mathrm{d}x$.

4. 选 C　由定积分的性质可知 A、B、D 正确,C 不成立,故选 C.

5. 选 A　根据定积分的几何意义知,定积分 $\int_{-2}^{m}\sqrt{-x^2-2x}\mathrm{d}x$ 的值就是函数 $y=\sqrt{-x^2-2x}$ 的图象与 x 轴及直线 $x=-2$,$x=m$ 所围成的图形的面积.

$y=\sqrt{-x^2-2x}$ 是一个半径为 1 的半圆,其面积等于 $\frac{\pi}{2}$,

而 $\int_{-2}^{m}\sqrt{-x^2-2x}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{4}$,

所以 $m=-1$.

6. **解析**:$x=0$ 与 $x=\frac{\pi}{2}$ 分别对应积分下限与上限,被积函数为 $y=\sin x$.

$\therefore S=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\mathrm{d}x$.

答案:$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\mathrm{d}x$

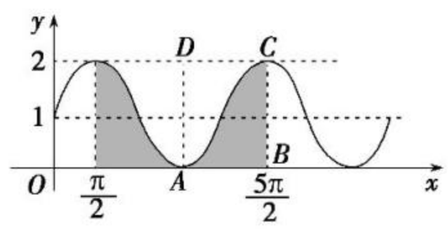
7. **解析**:$\because\int_a^b[f(x)-g(x)]\mathrm{d}x=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x-\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$,

$\therefore\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_a^b[f(x)-g(x)]\mathrm{d}x+\int_a^b g(x)\mathrm{d}x=10+6=16$.

则 $\int_a^b[-f(x)]\mathrm{d}x=-\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=-16$.

答案:-16

8. **解析**:函数 $y=1+\sin x$ 的图象如图所示.

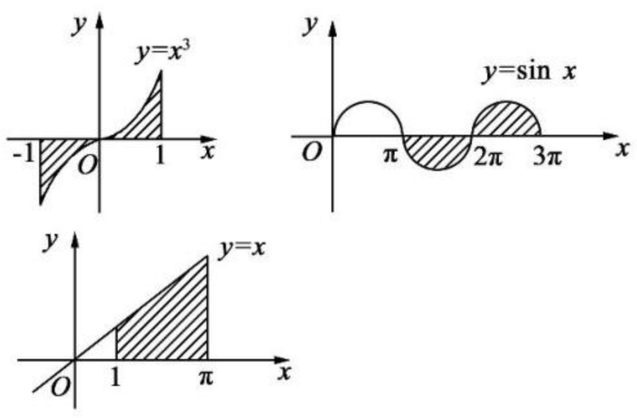


由定积分的几何意义可知阴影部分面积为所求函数的定积分.又由正弦型函数图象的对称性可知,

$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{5\pi}{2}}(1+\sin x)\mathrm{d}x=S_{矩形ABCD}=2\pi$.

答案:2π

9. **解**:如图所示.



由定积分的几何意义知,$\int_{-1}^{1}x^3\mathrm{d}x=0$,$\int_{\pi}^{3\pi}\sin x\mathrm{d}x=0$,

$\int_1^{\pi}x\mathrm{d}x=\frac{1}{2}(\pi^2-1)$,$\therefore\int_{-1}^{3\pi}f(x)\mathrm{d}x=\int_{-1}^{1}x^3\mathrm{d}x+\int_1^{\pi}x\mathrm{d}x+\int_{\pi}^{3\pi}\sin x\mathrm{d}x=0+\frac{1}{2}(\pi^2-1)+0=\frac{1}{2}(\pi^2-1)$.

10. **解**:解方程组 $\begin{cases}x^2+y^2=8,\\ y=\frac{1}{2}x^2,\end{cases}$ 得 $x=\pm2$.

所以阴影部分的面积为 $\int_{-2}^{2}\left(\sqrt{8-x^2}-\frac{1}{2}x^2\right)\mathrm{d}x$.

因为圆的面积为 8π,所以由几何概型的概率公式,可得阴影部分的面积是 $8\pi\times\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{6\pi}\right)=2\pi+\frac{4}{3}$,

即 $\int_{-2}^{2}\left(\sqrt{8-x^2}-\frac{1}{2}x^2\right)\mathrm{d}x=2\pi+\frac{4}{3}$.

由定积分的几何意义,

得 $\int_0^2\left(\sqrt{8-x^2}-\frac{1}{2}x^2\right)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_{-2}^{2}\left(\sqrt{8-x^2}-\frac{1}{2}x^2\right)\mathrm{d}x=\pi+\frac{2}{3}$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

1.6　微积分基本定理

基础知识梳理

1. $F(b)-F(a)$　$F(x)\Big|_a^b$　$F(b)-F(a)$

2. 导数　定积分　定积分

题点知识巩固

1. **解析**：$\int_0^{\frac{\pi}{3}}(2x+\sin x)\mathrm{d}x=(x^2-\cos x)\Big|_0^{\frac{\pi}{3}}=\left(\frac{\pi^2}{9}-\frac{1}{2}\right)-(-1)=\frac{\pi^2}{9}+\frac{1}{2}$.

答案：$\frac{\pi^2}{9}+\frac{1}{2}$

2. **解**：(1)设 $y=|2x+3|+|3-2x|=\begin{cases}-4x\left(x\leqslant-\frac{3}{2}\right),\\6\left(-\frac{3}{2}<x<\frac{3}{2}\right),\\4x\left(x\geqslant\frac{3}{2}\right).\end{cases}$

$\therefore\int_{-3}^{3}(|2x+3|+|3-2x|)\mathrm{d}x$

$=\int_{-3}^{-\frac{3}{2}}(-4x)\mathrm{d}x+\int_{-\frac{3}{2}}^{\frac{3}{2}}6\mathrm{d}x+\int_{\frac{3}{2}}^{3}4x\mathrm{d}x$

$=-2x^2\Big|_{-3}^{-\frac{3}{2}}+6x\Big|_{-\frac{3}{2}}^{\frac{3}{2}}+2x^2\Big|_{\frac{3}{2}}^{3}$

$=(-2)\times\left(-\frac{3}{2}\right)^2-(-2)\times(-3)^2+6\times\frac{3}{2}-6\times\left(-\frac{3}{2}\right)+2\times3^2-2\times\left(\frac{3}{2}\right)^2=45$.

(2)$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-\sin 2x}\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}|\sin x-\cos x|\mathrm{d}x$

$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\cos x-\sin x)\mathrm{d}x+\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}(\sin x-\cos x)\mathrm{d}x$

$=(\cos x+\sin x)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}+(-\sin x-\cos x)\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}=2\sqrt{2}-2$.

3. 选 B　由题意知，$\int_0^1(x^2+mx)\mathrm{d}x=\left(\frac{x^3}{3}+\frac{mx^2}{2}\right)\Big|_0^1$

$=\frac{1}{3}+\frac{m}{2}=0$，得 $m=-\frac{2}{3}$.

4. **解**：$\because f(x)=ax+b$，

$\therefore f^2(x)=a^2x^2+2abx+b^2$.

$\therefore\int_{-1}^{1}f^2(x)\mathrm{d}x=\int_{-1}^{1}(a^2x^2+2abx+b^2)\mathrm{d}x$

$=\left(\frac{a^2}{3}x^3+abx^2+b^2x\right)\Big|_{-1}^{1}$

$=\left(\frac{a^2}{3}+ab+b^2\right)-\left(-\frac{a^2}{3}+ab-b^2\right)$

$=\frac{2}{3}a^2+2b^2=1$.

$\therefore a^2=\frac{3}{2}-3b^2$.

$\because a^2\geqslant0$，$\therefore\frac{3}{2}-3b^2\geqslant0$，$-\frac{\sqrt{2}}{2}\leqslant b\leqslant\frac{\sqrt{2}}{2}$.

$\therefore f(a)=a^2+b$

$=\frac{3}{2}-3b^2+b$

$=-3\left(b-\frac{1}{6}\right)^2+\frac{19}{12}$.

$\therefore$当 $b=\frac{1}{6}$ 时，$f(a)$ 有最大值 $\frac{19}{12}$，

当 $b=-\frac{\sqrt{2}}{2}$ 时，$f(a)$ 有最小值 $-\frac{\sqrt{2}}{2}$，

$\therefore f(a)$ 的取值范围为 $\left[-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{19}{12}\right]$.

提能达标过关

1. 选 A　$\int_0^2(x^2+1)\mathrm{d}x=\left(\frac{1}{3}x^3+x\right)\Big|_0^2=\frac{8}{3}+2-0=\frac{14}{3}$，故选 A.

2. 选 A　$\sin^2x=\frac{1-\cos 2x}{2}$.

$\because\left(\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}\sin 2x\right)'=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos 2x$，

$\therefore\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2x\mathrm{d}x=\left(\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}\sin 2x\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}$

$=\left(\frac{1}{2}\times\frac{\pi}{2}-\frac{1}{4}\sin\pi\right)-\left(0-\frac{1}{4}\sin 0\right)=\frac{\pi}{4}$.

3. 选 A　设 $f(x)=ax+b(a\neq0)$，$\therefore\int_0^1f(x)\mathrm{d}x$

$=\left(\frac{1}{2}ax^2+bx\right)\Big|_0^1$，$\int_0^1xf(x)\mathrm{d}x=\left(\frac{1}{3}ax^3+\frac{1}{2}bx^2\right)\Big|_0^1$，

$\therefore\begin{cases}\frac{1}{2}a+b=5,\\\frac{1}{3}a+\frac{1}{2}b=\frac{17}{6},\end{cases}$ 解得 $a=4$，$b=3$，故 $f(x)=4x+3$.

4. 选 C　由图象可知二次函数 $f(x)=-x^2+1$，

$\therefore\int_{-1}^{1}f(x)\mathrm{d}x=\int_{-1}^{1}(-x^2+1)\mathrm{d}x=\left(-\frac{1}{3}x^3+x\right)\Big|_{-1}^{1}=\left(-\frac{1}{3}+1\right)-\left(\frac{1}{3}-1\right)=\frac{4}{3}$，故选 C.

5. 选 C　依题意，$a=\int_0^1\mathrm{e}^x\mathrm{d}x=\mathrm{e}^x\Big|_0^1=\mathrm{e}^1-\mathrm{e}^0=\mathrm{e}-1$，

$b=\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\times\pi\times1^2=\frac{\pi}{2}$，

$c=\int_1^{\mathrm{e}}\frac{2}{x}\mathrm{d}x=2\ln x\Big|_1^{\mathrm{e}}=2\ln\mathrm{e}-2\ln1=2$，

$\because\frac{\pi}{2}<\mathrm{e}-1<2$，$\therefore b<a<c$，故选 C.

6. **解析**：由于 $y=\sqrt{16-x^2}$ 表示圆心在原点，半径为 4 的圆的上半部分，

故 $\int_{-4}^{4}\sqrt{16-x^2}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\times\pi\times4^2=8\pi$. $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}x^3\mathrm{d}x=\left(\frac{x^4}{4}\right)\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}=0$.

故原式 $=8\pi$.

答案：8π

7. **解析**：由题意，结合定积分可得阴影部分的面积为

$S=\int_0^1(1-\sqrt{x})\mathrm{d}x=\left(x-\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right)\Big|_0^1=\frac{1}{3}$，

由几何概型的计算公式可得，

黄豆在阴影部分的概率为 $P=\frac{\frac{1}{3}}{1\times1}=\frac{1}{3}$.

答案：$\frac{1}{3}$

8. **解析**：$\because f(1)=\lg1=0$.

$\therefore f[f(1)]=f(0)=0+\int_0^a3t^2\mathrm{d}t=1$.

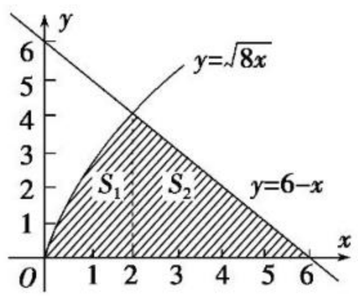
即 $\int_0^a3t^2\mathrm{d}t=1$.

$\therefore t^3\Big|_0^a=a^3=1$. $\therefore a=1$.

答案：1

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

9. **解**：作出直线 $y=6-x$，曲线 $y=\sqrt{8x}$ 的草图，所求面积为图中阴影部分的面积.



解方程组 $\begin{cases}y=6-x,\\ y=\sqrt{8x},\end{cases}$ 得直线 $y=6-x$ 与曲线 $y=\sqrt{8x}$ 交点的坐标为(2,4)，

直线 $y=6-x$ 与 x 轴的交点坐标为(6,0).

若选 x 为积分变量，所求图形的面积

$$S=S_1+S_2=\int_0^2\sqrt{8x}\,\mathrm{d}x+\int_2^6(6-x)\,\mathrm{d}x$$

$$=\left(\sqrt{8}\times\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right)\Big|_0^2+\left(6x-\frac{1}{2}x^2\right)\Big|_2^6$$

$$=\frac{16}{3}+\left[\left(6\times6-\frac{1}{2}\times6^2\right)-\left(6\times2-\frac{1}{2}\times2^2\right)\right]$$

$$=\frac{16}{3}+8=\frac{40}{3}.$$

10. **解**：$\because f(x)=x^3+ax$ 为奇函数，

$$\therefore\int_{-1}^1(x^3+ax)\,\mathrm{d}x=0,$$

$$\therefore\int_{-1}^1(x^3+ax+3a-b)\,\mathrm{d}x$$

$$=\int_{-1}^1(x^3+ax)\,\mathrm{d}x+\int_{-1}^1(3a-b)\,\mathrm{d}x$$

$$=0+(3a-b)[1-(-1)]=6a-2b.$$

$\therefore 6a-2b=2a+6$，即 $2a-b=3$，①

又 $\because f(t)=\left[\frac{x^4}{4}+\frac{a}{2}x^2+(3a-b)x\right]\Big|_0^t$

$=\frac{t^4}{4}+\frac{at^2}{2}+(3a-b)t$ 为偶函数，

$\therefore 3a-b=0$，②

由①②得 $a=-3$，$b=-9$.

1.7 定积分的简单应用

1.7.1 定积分在几何中的应用

基础知识梳理

1. $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$

2. $-\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$

3. $\int_a^b[f(x)-g(x)]\,\mathrm{d}x$

题点知识巩固

1. 选 C　由 $\begin{cases}y=x,\\ y=x^3,\end{cases}$ 求得直线 $y=x$ 与曲线 $y=x^3$ 的交点分别为(−1,−1)，(1,1)，(0,0)，由于两函数都是奇函数，根据对称性得 $S=2\int_0^1(x-x^3)\,\mathrm{d}x$.

2. **解析**：$f(x)=\sin\left(\frac{\pi}{6}-x\right)=\frac{1}{2}\cos x-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x$，

$\because f(x)=\sin\left(\frac{\pi}{6}-x\right)$ 在 $\left[-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{6}\right]$ 上的图象位于 x 轴上方，

$\therefore$ 曲线 $f(x)=\sin\left(\frac{\pi}{6}-x\right)$ 与直线 $x=-\frac{\pi}{6}$，$x=\frac{\pi}{6}$，$y=0$ 所围成的平面图形的面积 $S=\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}}f(x)\,\mathrm{d}x=$

$$\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}}\left(\frac{1}{2}\cos x-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x\right)\mathrm{d}x$$

$$=\left(\frac{1}{2}\sin x+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x\right)\Big|_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}}$$

$$=\left(\frac{1}{4}+\frac{3}{4}\right)-\left(-\frac{1}{4}+\frac{3}{4}\right)=\frac{1}{2}.$$

答案：$\frac{1}{2}$

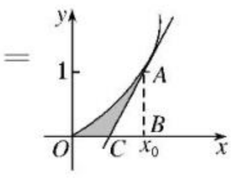
3. 选 D　依题意，可知图中阴影部分的面积为

$$S=\int_{-3}^1[(3-x^2)-2x]\,\mathrm{d}x$$

$$=\int_{-3}^1(3-2x-x^2)\,\mathrm{d}x=\left(3x-x^2-\frac{1}{3}x^3\right)\Big|_{-3}^1$$

$$=\left(3-1-\frac{1}{3}\right)-(-9-9+9)=\frac{32}{3}$$，故选 D.

4. **解**：如图，设切点 $A(x_0,y_0)$，其中 $x_0\neq0$，



由 $y'=2x$，得过点 A 的切线方程为 $y-y_0=2x_0(x-x_0)$，即 $y=2x_0x-x_0^2$，

令 $y=0$，得 $x=\frac{x_0}{2}$，即 $C\left(\frac{x_0}{2},0\right)$，

设由曲线和过点 A 的切线与 x 轴围成图形的面积为 S，

则 $S=S_{曲边\triangle AOB}-S_{\triangle ABC}$，

$\because S_{曲边\triangle AOB}=\int_0^{x_0}x^2\,\mathrm{d}x=\frac{1}{3}x^3\Big|_0^{x_0}=\frac{1}{3}x_0^3$，

$$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}|BC|\cdot|AB|=\frac{1}{2}\left(x_0-\frac{x_0}{2}\right)\cdot x_0^2=\frac{1}{4}x_0^3.$$

$$\therefore S=\frac{1}{3}x_0^3-\frac{1}{4}x_0^3=\frac{1}{12}x_0^3=\frac{1}{12}.$$

$\therefore x_0=1$，从而切点为 $A(1,1)$，切线方程为 $2x-y-1=0$.

提能达标过关

1. 选 D　所求图形的面积为 $\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}}\cos x\,\mathrm{d}x=\sin x\Big|_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}}=\sqrt{3}$.

2. 选 A　由 $\begin{cases}y=x,\\ y=x^2,\end{cases}$ 得 $\begin{cases}x=0,\\ y=0\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x=1,\\ y=1,\end{cases}$

$\therefore$ 直线 $y=x$ 与曲线 $y=x^2$ 围成的封闭图形的面积为

$$S=\int_0^1(x-x^2)\,\mathrm{d}x=\left(\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{3}x^3\right)\Big|_0^1=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=\frac{1}{6},$$

故选 A.

3. 选 C　由 $\begin{cases}y=x-2,\\ y=-x^2,\end{cases}$ 求得两曲线交点为 $A(-2,-4)$，$B(1,-1)$，结合图形可知阴影部分的面积为 $S=$

$$\int_{-2}^1[-x^2-(x-2)]\,\mathrm{d}x=\int_{-2}^1(-x^2-x+2)\,\mathrm{d}x=$$

$$\left(-\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2+2x\right)\Big|_{-2}^1=\frac{9}{2}.$$

4. 选 C　由 $\sqrt{x}=x-2$ 得 $x=4$，

$\therefore$ 曲线 $y=\sqrt{x}$ 与直线 $y=x-2$ 及 y 轴所围成图形的面积

$$S=\int_0^4[\sqrt{x}-(x-2)]\,\mathrm{d}x$$

$$=\int_0^4(\sqrt{x}-x+2)\,\mathrm{d}x=\left(\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{2}x^2+2x\right)\Big|_0^4$$

$$=\frac{2}{3}\times8-\frac{1}{2}\times16+8=\frac{16}{3}$$，故选 C.

5. 选 C　阴影部分的面积为

$$\int_0^1(x-x^3)\,\mathrm{d}x+\int_1^2(x^3-x)\,\mathrm{d}x$$

$$=\left(\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{4}x^4\right)\Big|_0^1+\left(\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{2}x^2\right)\Big|_1^2$$

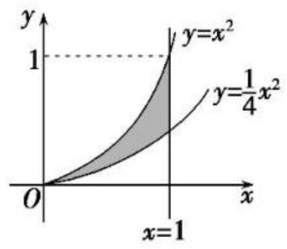
$$=\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)+(4-2)-\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\right)$$

$$=\frac{5}{2}.$$

故所求的概率为 $P=\frac{\frac{5}{2}}{2\times8}=\frac{5}{32}$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

6. **解析**：图形如图所示，



$S=\int_0^1 x^2\,\mathrm{d}x-\int_0^1 \frac{1}{4}x^2\,\mathrm{d}x$

$=\int_0^1 \frac{3}{4}x^2\,\mathrm{d}x$

$=\frac{1}{4}x^3\Big|_0^1=\frac{1}{4}$.

答案：$\frac{1}{4}$

7. **解析**：正方形内空白部分的面积 $S_1=\int_{-1}^1[x^2-(-x^2)]\mathrm{d}x$

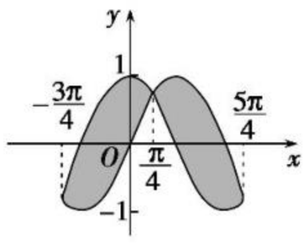
$=\int_{-1}^1 2x^2\,\mathrm{d}x=\frac{2}{3}x^3\Big|_{-1}^1=\frac{2}{3}-\left(-\frac{2}{3}\right)=\frac{4}{3}$. ∴阴影部分的面积 $S_2=2\times2-\frac{4}{3}=\frac{8}{3}$，∴所求的概率为 $\frac{\frac{8}{3}}{4}=\frac{2}{3}$.

答案：$\frac{2}{3}$

8. **解析**：依题意 $S=\int_0^1(\mathrm{e}^x-2x)\mathrm{d}x=(\mathrm{e}^x-x^2)\Big|_0^1=(\mathrm{e}-1)-(\mathrm{e}^0-0)=\mathrm{e}-2$.

答案：$\mathrm{e}-2$

9. **解**：如图，画出 $y=\sin x$ 与 $y=\cos x$ 在 $\left[-\frac{3\pi}{4},\frac{5\pi}{4}\right]$ 上的图象，



它们共有三个交点，

分别为 $\left(-\frac{3\pi}{4},-\frac{\sqrt{2}}{2}\right),\left(\frac{\pi}{4},\frac{\sqrt{2}}{2}\right),\left(\frac{5\pi}{4},-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

在 $\left(-\frac{3\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right)$ 上，$\cos x>\sin x$.

在 $\left(\frac{\pi}{4},\frac{5\pi}{4}\right)$ 上，$\sin x>\cos x$.

∴面积 $S=\int_{-\frac{3\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}(\cos x-\sin x)\mathrm{d}x+\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}}(\sin x-\cos x)\mathrm{d}x$

$=2\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}}(\sin x-\cos x)\mathrm{d}x$

$=-2(\sin x+\cos x)\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}}=4\sqrt{2}$.

10. **解**：由 $\begin{cases}y^2=2x,\\ y=x-4,\end{cases}$

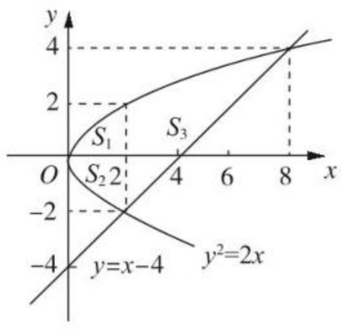
得 $\begin{cases}x=2,\\ y=-2\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x=8,\\ y=4,\end{cases}$

由图象可知，曲边多边形的面积

$S=2S_1+S_3$

$=2\int_0^2\sqrt{2x}\mathrm{d}x+\int_2^8(\sqrt{2x}-x+4)\mathrm{d}x$

$=\int_0^2 2\sqrt{2}x^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}x+\int_2^8(\sqrt{2}x^{\frac{1}{2}}-x+4)\mathrm{d}x$



$=\frac{4\sqrt{2}}{3}x^{\frac{3}{2}}\Big|_0^2+\left(\frac{2\sqrt{2}}{3}x^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{2}x^2+4x\right)\Big|_2^8$

$=\frac{16}{3}+\frac{64}{3}-\frac{26}{3}=18$.

1.7.2　定积分在物理中的应用

基础知识梳理

1. $s=\int_a^b v(t)\mathrm{d}t$

2. $\int_a^b F(x)\mathrm{d}x$

题点知识巩固

1. 选 C　物体停止时，$v=30-\frac{3}{2}t=0$，解得 $t=20$，所以物体从初始运动到停止，物体运动的路程 $s=\int_0^{20}\left(30-\frac{3}{2}t\right)\mathrm{d}t$

$=\left(30t-\frac{3}{4}t^2\right)\Big|_0^{20}=600-300=300(\mathrm{m})$，故选 C.

2. **解析**：由图可知，$v(t)=\begin{cases}2t(0\leqslant t\leqslant1),\\ 2(1<t\leqslant3),\\ \frac{1}{3}t+1(3<t\leqslant6).\end{cases}$

由变速直线运动的路程公式，可得

$s=\int_{\frac{1}{2}}^6 v(t)\,\mathrm{d}t=\int_{\frac{1}{2}}^1 2t\mathrm{d}t+\int_1^3 2\mathrm{d}t+\int_3^6\left(\frac{1}{3}t+1\right)\mathrm{d}t=$

$t^2\Big|_{\frac{1}{2}}^1+2t\Big|_1^3+\left(\frac{1}{6}t^2+t\right)\Big|_3^6=\frac{49}{4}(\mathrm{m})$.

所以物体在 $\frac{1}{2}$～6 s 间的运动路程是 $\frac{49}{4}$ m.

答案：$\frac{49}{4}$ m

3. 选 B　设 $F(x)=kx$，当 $F=1$ N 时，$x=0.01$ m，所以 $k=\frac{1}{0.01}=100$，即 $F(x)=100x$，于是拉长 6 cm 所耗费的功为

$W=\int_0^{0.06}F(x)\mathrm{d}x=\int_0^{0.06}100x\mathrm{d}x=50x^2\Big|_0^{0.06}=0.18(\mathrm{J})$.

4. **解**：设活塞运动距离为 x 米，则活塞受到的压强为

$p=\frac{80}{V}=\frac{80}{0.01\pi(0.8-x)}$，

从而活塞受到的压力为

$F=pS=\frac{80}{0.01\pi(0.8-x)}\times0.01\pi=\frac{80}{0.8-x}$，

∴活塞克服气体压力做功为

$W=\int_0^{0.4}\frac{80}{0.8-x}\mathrm{d}x=80\ln2(\mathrm{J})$.

提能达标过关

1. 选 C　$s=\int_0^3(3t^2-2t+3)\mathrm{d}t$

$=(t^3-t^2+3t)\Big|_0^3$

$=3^3-3^2+3\times3=27$.

2. 选 D　由变力做功公式有

$W=\int_1^3(4x-1)\mathrm{d}x=(2x^2-x)\Big|_1^3$

$=(2\times3^2-3)-(2\times1^2-1)$

$=15-1=14(\mathrm{J})$.

3. 选 A　令 $v=40-10t^2=0$，得物体到达最高时 $t=2$，此时高度 $h=\int_0^2(40-10t^2)\mathrm{d}t$

$=\left(40t-\frac{10}{3}t^3\right)\Big|_0^2=\frac{160}{3}(\mathrm{m})$. 故选 A.

4. 选 C　$W=\int_1^2 F(x)\cos30°\mathrm{d}x=\int_1^2\frac{\sqrt{3}}{2}(5-x^2)\mathrm{d}x$

$=\frac{\sqrt{3}}{2}\left(5x-\frac{1}{3}x^3\right)\Big|_1^2=\frac{4\sqrt{3}}{3}(\mathrm{J})$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

5. 选 C　依题意，$\int_0^a v(t)\mathrm{d}t=9$，即 $\int_0^a t^2\mathrm{d}t=\frac{1}{3}t^3\Big|_0^a=\frac{1}{3}a^3=9$，解得 $a=3$，故选 C.

6. **解析**：$h=\int_1^2 gt\mathrm{d}t=\frac{1}{2}gt^2\Big|_1^2=\frac{3}{2}g$.

答案：$\frac{3}{2}g$

7. **解析**：依题意得 $s(3)-s(0)=\int_0^3(4-t^2)\mathrm{d}t=\left(4t-\frac{t^3}{3}\right)\Big|_0^3=12-9=3$. 又∵$s(0)=1$，∴$s(3)=4$.

答案：4

8. **解析**：$v=(4t^2)'=8t=4\sqrt{x}(\mathrm{m/s})$，

$F(x)=kv=4k\sqrt{x}(\mathrm{N})$，

当 $v=10$ 时，$F(x)=2$，∴$k=\frac{1}{5}$.

∴$F(x)=\frac{4}{5}\sqrt{x}(\mathrm{W})$.

阻力所做的功为 $W=\int_0^4\frac{4}{5}\sqrt{x}\mathrm{d}x=\frac{8}{15}x^{\frac{3}{2}}\Big|_0^4=\frac{64}{15}(\mathrm{J})$.

答案：$\frac{64}{15}$ J

9. **解**：由已知曲线可得函数关系式：

$$v(t)=\begin{cases}3t(0\leqslant t\leqslant 10),\\30(10<t\leqslant 40),\\-1.5t+90(40<t\leqslant 60).\end{cases}$$

$$s=\int_0^{10}3t\mathrm{d}t+\int_{10}^{40}30\mathrm{d}t+\int_{40}^{60}(-1.5t+90)\mathrm{d}t$$

$$=\frac{3}{2}t^2\Big|_0^{10}+30t\Big|_{10}^{40}+\left(-\frac{3}{4}t^2+90t\right)\Big|_{40}^{60}=1\ 350(\mathrm{m}).$$

即汽车在这 1 min 行驶的路程为 1 350 m.

10. **解**：由图象可知 $F(x)=\begin{cases}10,0\leqslant x\leqslant 2,\\3x+4,2<x\leqslant 4,\end{cases}$

∴该物体从 $x=0$ 运动到 $x=4$ 处，力 $F(x)$ 做的功为

$$W=\int_0^2 10\mathrm{d}x+\int_2^4(3x+4)\mathrm{d}x$$

$$=10x\Big|_0^2+\left(\frac{3}{2}x^2+4x\right)\Big|_2^4$$

$$=20+26$$

$$=46(\mathrm{J}).$$

第二章　推理与证明

2.1　合情推理与演绎推理

2.1.1　合情推理

基础知识梳理

1. 部分对象　全部对象　个别事实　一般结论　类似　已知特征　个别到一般　部分到整体　特殊到特殊
2. 观察　分析　比较　联想　归纳　类比　猜想

题点知识巩固

1. 选 A　选项 A 由一些特殊事例得出一般性结论，且注意到数列 $\{a_n\}$ 是等差数列，其前 n 项和等于 $S_n=\frac{n(1+2n-1)}{2}=n^2$，选项 D 中的推理属于归纳推理，但结论不正确.

2. 选 D　因为每行的最后一个数分别为 1，4，9，16，…，所以由此归纳出第 n 行的最后一个数为 n^2.

因为 $44^2=1\ 936$，$45^2=2\ 025$，所以 2 018 出现在第 45 行上.

又由 $2\ 018-1\ 936=82$，故 2 018 出现在第 82 列，故选 D.

3. C

4. **解析**：根据前 3 个等式，可推测 $a=6$，

∴$\sqrt{6+\frac{6}{t}}=6\sqrt{\frac{6}{t}}$，

两边平方，得 $6+\frac{6}{t}=36\times\frac{6}{t}$，

解得 $t=35$，∴$a+t=41$.

答案：41

提能达标过关

1. 选 A　因为从第 3 个数起，每个数都等于前两个数之差，所以第 9 个数为 $-19-31=-50$，故选 A.

2. 选 B　分析已知可得：$|x|+|y|=n(n\in\mathbf{N}^*)$ 的不同整数 (x,y) 的个数为 $4n$，所以 $|x|+|y|=20$ 的不同整数解的个数为 80.

3. 选 D　由等差数列中的结论类比到等比数列中时，等差数列中的和类比到等比数列中变为积，因而等差数列中，$a_m+a_n+a_p=3a_r$，类比到等比数列中为 $b_mb_nb_p=b_r^3$，故选 D.

4. 选 B　由题图所示的三角形排列知，第 i 行的末位为 a_{i^2}，则第 i 行的首位为 $a_{(i-1)^2+1}$，若 $A(i,j)$ 表示第 i 行的第 j 个数，则 $A(i,j)=a_{(i-1)^2+j}$，

∴$a_{(i-1)^2+j}=a_{2\ 018}$，即 $(i-1)^2+j=2\ 018$，

∵$44^2<2\ 018<45^2$，

∴$i=45$，$j=2\ 018-(i-1)^2=2\ 018-44^2=82$，

∴$j-i=82-45=37$，故选 B.

5. 选 B　以黑色圈为界分组，则第 1 组 2 个圈，第 2 组 3 个圈，第 3 组 4 个圈，依此类推，第 n 组有 $n+1$ 个圈，前 n 组共有 $2+3+4+\cdots+(n+1)=\frac{n(n+3)}{2}$ 个圈，由 $\frac{n(n+3)}{2}\leqslant 55$ 知，n 最大为 9，即前 55 个圈中的●有 9 个，故选 B.

6. **解析**：正四面体的内切球的半径为 r_1，外接球的半径为 r_2，则 $\frac{r_1}{r_2}=\frac{1}{3}$，∴$\frac{V_1}{V_2}=\frac{1}{27}$.

答案：$\frac{1}{27}$

7. **解析**：∵$\sqrt{3}=\tan 60^\circ=\tan\frac{30^\circ+90^\circ}{2}$，

$1=\tan 45^\circ=\tan\frac{15^\circ+75^\circ}{2}$，

$\frac{\sqrt{3}}{3}=\tan 30^\circ=\tan\frac{20^\circ+40^\circ}{2}$，

∴对于一般的角 α,β 有 $\frac{\sin\alpha+\sin\beta}{\cos\alpha+\cos\beta}=\tan\frac{\alpha+\beta}{2}$.

答案：$\frac{\sin\alpha+\sin\beta}{\cos\alpha+\cos\beta}=\tan\frac{\alpha+\beta}{2}$

8. **解析**：根据前 3 个不等式可推测，不等式右侧为分式，分母与左侧最后一个分式中分母的底数相同，分子是分母的 2 倍减 1，

故 $1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\cdots+\frac{1}{2\ 018^2}<\frac{2\ 018\times 2-1}{2\ 018}=\frac{4\ 035}{2\ 018}$.

答案：$\frac{4\ 035}{2\ 018}$

9. **解**：$f(x)=\frac{1}{3^x+\sqrt{3}}$，

所以 $f(0)+f(1)=\frac{1}{3^0+\sqrt{3}}+\frac{1}{3^1+\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$，

$f(-1)+f(2)=\frac{1}{3^{-1}+\sqrt{3}}+\frac{1}{3^2+\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$，

$f(-2)+f(3)=\frac{1}{3^{-2}+\sqrt{3}}+\frac{1}{3^3+\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

归纳猜想一般性结论：$f(-x)+f(x+1)=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

证明如下：

$$f(-x)+f(x+1)=\frac{1}{3^{-x}+\sqrt{3}}+\frac{1}{3^{x+1}+\sqrt{3}}$$

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

$$=\frac{3^x}{1+\sqrt{3}\cdot 3^x}+\frac{1}{3^{x+1}+\sqrt{3}}$$
$$=\frac{\sqrt{3}\cdot 3^x}{\sqrt{3}+3^{x+1}}+\frac{1}{3^{x+1}+\sqrt{3}}$$
$$=\frac{\sqrt{3}\cdot 3^x+1}{\sqrt{3}+3^{x+1}}$$
$$=\frac{\sqrt{3}\cdot 3^x+1}{\sqrt{3}(1+\sqrt{3}\cdot 3^x)}=\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

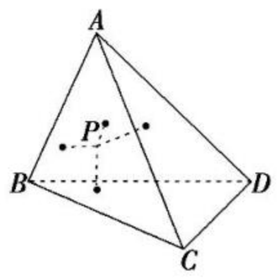
10. **解**：$\frac{P_a}{h_a}=\frac{\frac{1}{2}BC\cdot P_a}{\frac{1}{2}BC\cdot h_a}=\frac{S_{\triangle PBC}}{S_{\triangle ABC}}$，

同理，$\frac{P_b}{h_b}=\frac{S_{\triangle PAC}}{S_{\triangle ABC}}$，$\frac{P_c}{h_c}=\frac{S_{\triangle PAB}}{S_{\triangle ABC}}$.

$\because S_{\triangle PBC}+S_{\triangle PAC}+S_{\triangle PAB}=S_{\triangle ABC}$，

$\therefore \frac{P_a}{h_a}+\frac{P_b}{h_b}+\frac{P_c}{h_c}=\frac{S_{\triangle PBC}+S_{\triangle PAC}+S_{\triangle PAB}}{S_{\triangle ABC}}=1$.

类比上述结论得出以下结论：如图所示，在四面体$ABCD$中，设h_a,h_b,h_c,h_d分别是该四面体的四个顶点到对面的距离，P为该四面体内任意一点，P到相应四个面的距离分别为P_a,P_b,P_c,P_d，可以得到结论$\frac{P_a}{h_a}+\frac{P_b}{h_b}+\frac{P_c}{h_c}+\frac{P_d}{h_d}=1$.



证明如下：$\frac{P_a}{h_a}=\frac{\frac{1}{3}S_{\triangle BCD}\cdot P_a}{\frac{1}{3}S_{\triangle BCD}\cdot h_a}=\frac{V_{P-BCD}}{V_{A-BCD}}$，

同理，$\frac{P_b}{h_b}=\frac{V_{P-ACD}}{V_{A-BCD}}$，$\frac{P_c}{h_c}=\frac{V_{P-ABD}}{V_{A-BCD}}$，$\frac{P_d}{h_d}=\frac{V_{P-ABC}}{V_{A-BCD}}$.

$\because V_{P-BCD}+V_{P-ACD}+V_{P-ABD}+V_{P-ABC}=V_{A-BCD}$，

$\therefore \frac{P_a}{h_a}+\frac{P_b}{h_b}+\frac{P_c}{h_c}+\frac{P_d}{h_d}$
$=\frac{V_{P-BCD}+V_{P-ACD}+V_{P-ABD}+V_{P-ABC}}{V_{A-BCD}}=1$.

2.1.2　演绎推理

基础知识梳理

1.(1)某个特殊情况下　一般　特殊　(2)已知的一般原理　所研究的特殊情况　根据一般原理，对特殊情况做出判断　(3)S是P

2.部分　整体　个别　一般　特殊　特殊　一般　特殊　不一定正确　一定正确

题点知识巩固

1.选C　演绎推理，就是从一般性的前提出发，通过推导即“演绎”，得出具体陈述或个别结论的过程，结合定义可知只有C项为演绎推理.

2.**证明**：因为a,b,c是正数，
所以$b^2+c^2\geqslant 2bc$，
所以$a(b^2+c^2)\geqslant 2abc$.①
同理，$b(c^2+a^2)\geqslant 2abc$，②
$c(a^2+b^2)\geqslant 2abc$.③
因为a,b,c不全相等，
所以$b^2+c^2\geqslant 2bc$，$c^2+a^2\geqslant 2ca$，
$a^2+b^2\geqslant 2ab$三式中不能同时取到“=”.
所以①②③式相加得
$a(b^2+c^2)+b(c^2+a^2)+c(a^2+b^2)>6abc$.

3.选C　这是一个复合三段论，从“名不正”推出“民无所措手足”，连续运用五次三段论，属演绎推理形式.

4.选A　指数函数$y=a^x(a>0$且$a\neq 1)$，当$a>1$时，指数函数为增函数；当$0<a<1$时，指数函数为减函数，所以大前提“指数函数是增函数”错误，故选A.

提能达标过关

1.选D　演绎推理的形式是三段论，四个选项中，只有D的叙述符合三段论的形式，故选D.

2.选C　由题目可知满足“三段论”形式，但是大前提表述不正确而使结论错误.

3.选A　三段论中，S是M的子集，M可能是P的子集，即具备这种性质或M不是P的子集，即不具备这种性质.

4.选C　因为函数$f(x)=\sin(x^2+1)$不是正弦函数，所以小前提不正确，故选C.

5.选A　三段论的常用格式为大前提：M是P；小前提S是M；结论：S是P，四个选项中只有A符合三段论的格式，故选A.

6.**解析**：用三段论的形式推导一个结论成立时，大前提应该是结论成立的依据，所以由四边形$ABCD$为矩形，得到四边形$ABCD$的对角线互相相等的结论，所以大前提一定是矩形都是对角线相等的四边形.
答案：矩形都是对角线相等的四边形

7.**解析**：大前提中的数字泛指自然数，而小前提中的数字指的是一位的数字，因而得出的结论是错误的.
答案：大前提与小前提所表示的数字不是同一概念，因而得出的结论错误

8.**解析**：因为奇函数$f(x)$在$x=0$处有定义且$f(0)=0$(大前提)，而奇函数$f(x)=a-\frac{1}{2^x+1}$的定义域为$\mathbf{R}$(小前提)，所以$f(0)=a-\frac{1}{2^0+1}=0$(结论)，解得$a=\frac{1}{2}$.
答案：$\frac{1}{2}$

9.**解**：三段论形式：大前提…；小前提…；结论….
(1)大前提：三角形的内角和是180°，
小前提：直角三角形是三角形，
结论：直角三角形内角和是180°.
(2)大前提：$\Delta<0$的实系数一元二次方程无实根，
小前提：方程$x^2+2x+3=0$的判别式$\Delta=-8<0$，
结论：方程$x^2+2x+3=0$无实根.

10.**解**：(1)证明：$\because f(xy)=f(x)+f(y)$，
$\therefore f(x^2)=f(x\cdot x)=f(x)+f(x)=2f(x)$.
(2)$\because f(1)=f(1^2)=2f(1)$，
$\therefore f(1)=0$.
(3)$\because f(x)+f(x+3)=f[x(x+3)]$，
$2=2f(2)=f(4)$，
$\therefore$由已知可得$f[x(x+3)]\leqslant f(4)$.
又$\because y=f(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增.
$$\therefore\begin{cases}x>0,\\ x+3>0,\\ x(x+3)\leqslant 4.\end{cases}$$
解得$0<x\leqslant 1$，故x的取值范围为$(0,1]$.

2.2　直接证明与间接证明

2.2.1　综合法和分析法

基础知识梳理

1.综合法　分析法

2.(1)已知条件　定义　定理　公理　推理论证

3.(1)结论出发　充分条件　已知条件　定理　定义　公理

题点知识巩固

1.选B　$\because \frac{\pi}{2}<\beta<\alpha<\frac{3\pi}{4}$，
$\therefore \pi<\alpha+\beta<\frac{3\pi}{2}$，$0<\alpha-\beta<\frac{\pi}{4}$，
$\therefore \sin(\alpha-\beta)=\frac{5}{13}$，$\cos(\alpha+\beta)=-\frac{4}{5}$，
$\sin 2\alpha=\sin(\alpha-\beta+\alpha+\beta)=\sin(\alpha-\beta)\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)\sin(\alpha+\beta)=\frac{5}{13}\times\left(-\frac{4}{5}\right)+\frac{12}{13}\times\left(-\frac{3}{5}\right)=-\frac{56}{65}$，故选B.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

2. **证明**:(1)在平行六面体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中,
$AB/\!/A_1B_1$.
因为 $AB\not\subset$平面 A_1B_1C,$A_1B_1\subset$平面 A_1B_1C,
所以 $AB/\!/$平面 A_1B_1C.
(2)在平行六面体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中,四边形 ABB_1A_1 为平行四边形.
又因为 $AA_1=AB$,所以四边形 ABB_1A_1 为菱形,
因此 $AB_1\perp A_1B$.
又因为 $AB_1\perp B_1C_1$,$BC/\!/B_1C_1$,
所以 $AB_1\perp BC$.
又因为 $A_1B\cap BC=B$,$A_1B\subset$平面 A_1BC,
$BC\subset$平面 A_1BC,
所以 $AB_1\perp$平面 A_1BC.
因为 $AB_1\subset$平面 ABB_1A_1,
所以平面 $ABB_1A_1\perp$平面 A_1BC.

3. 选 B　若 $l\perp\alpha$,$m\subset\beta$,$\alpha/\!/\beta$,则 $l\perp\beta$,所以 $l\perp m$,①正确;
若 $l\perp\alpha$,$m\subset\beta$,$l\perp m$,α 与 β 可能相交,②不正确;
若 $l\perp\alpha$,$m\subset\beta$,$\alpha\perp\beta$,l 与 m 可能平行或异面,③不正确;
若 $l\perp\alpha$,$m\subset\beta$,$l/\!/m$,则 $m\perp\alpha$,所以 $\alpha\perp\beta$,④正确.

4. **证明**:要证 $\lg\frac{a+b}{2}+\lg\frac{b+c}{2}+\lg\frac{c+a}{2}>\lg a+\lg b+\lg c$,
只需证 $\lg\left(\frac{a+b}{2}\cdot\frac{b+c}{2}\cdot\frac{c+a}{2}\right)>\lg(a\cdot b\cdot c)$,
即证 $\frac{a+b}{2}\cdot\frac{b+c}{2}\cdot\frac{c+a}{2}>abc$.
因为 a,b,c 为不全相等的正数,
所以 $\frac{a+b}{2}\geqslant\sqrt{ab}>0$,$\frac{b+c}{2}\geqslant\sqrt{bc}>0$,$\frac{c+a}{2}\geqslant\sqrt{ac}>0$,
且上述三式中等号不能同时成立,
所以 $\frac{a+b}{2}\cdot\frac{b+c}{2}\cdot\frac{c+a}{2}>abc$ 成立,
所以 $\lg\frac{a+b}{2}+\lg\frac{b+c}{2}+\lg\frac{c+a}{2}>\lg a+\lg b+\lg c$ 成立.

5. **证明**:$\because a^3-b^3=a^2-b^2$,且 $a\neq b$,
$\therefore a^2+ab+b^2=a+b$.
$\therefore(a+b)^2=a^2+2ab+b^2>a^2+ab+b^2=a+b$,
$\because a+b>0$,$\therefore a+b>1$.
要证 $a+b<\frac{4}{3}$,需证 $3(a+b)<4$,
$\because a+b>0$,需证 $3(a+b)^2<4(a+b)=4(a^2+ab+b^2)$,
即证 $3a^2+6ab+3b^2<4a^2+4ab+4b^2$,
需证 $a^2-2ab+b^2>0$,即证 $(a-b)^2>0$,
$\because a,b$ 是不等的正数,$\therefore(a-b)^2>0$ 成立,
$\therefore a+b<\frac{4}{3}$,
综上所述,$1<a+b<\frac{4}{3}$.

提能达标过关

1. 选 A　$\because c<a$,$ac<0$,
$\therefore c<0$,$a>0$.
又$\because b>c$,
$\therefore ab>ac$.

2. 选 C　由已知得 $\cos A\cos B-\sin A\sin B>0$,即 $\cos(A+B)>0$,$-\cos C>0$,$\cos C<0$.
$\therefore$角 C 必为钝角,$\triangle ABC$ 一定为钝角三角形.

3. 选 D　$\because a^2+b^2-1-a^2b^2=(a^2-1)+b^2(1-a^2)=(a^2-1)(1-b^2)\leqslant0$,$\therefore$要证 $(a^2-1)(1-b^2)\leqslant0$,只要证明 $(a^2-1)(b^2-1)\geqslant0$.

4. 选 C　$\because P>0$,$Q>0$,要比较 P,Q 的大小,可以比较 P^2 与 Q^2 的大小,$P^2=2a+7+2\sqrt{a(a+7)}$,$Q^2=2a+7+2\sqrt{(a+3)(a+4)}$.$\because a(a+7)=a^2+7a<(a+3)(a+4)=a^2+7a+12$,$\therefore P^2<Q^2$,$\therefore P<Q$.

5. 选 D　由 $4a_3$,$2a_4$,a_5 成等差数列,
$\therefore 4a_4=4a_3+a_5$,
$\therefore 4q^3=4q^2+q^4$,解得 $q=2$,
$\therefore T_{10}=a_1\cdot a_2\cdot\cdots\cdot a_{10}=q\cdot q^2\cdot\cdots\cdot q^9=2^{1+2+\cdots+9}=2^{45}$,
故选 D.

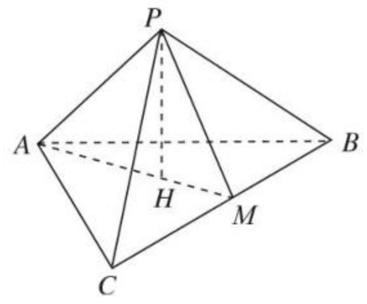
6. **解析**:由 $|\overrightarrow{OA}|=|\overrightarrow{OB}|$,$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=0$ 知,$\triangle AOB$ 是以 O 为顶点的等腰直角三角形,又$\because|\overrightarrow{OA}|=\sqrt{1^2+(-3)^2}=\sqrt{10}$,
$\therefore|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{10+10}=2\sqrt{5}$.
答案:$2\sqrt{5}$

7. **解析**:$(x+y)\left(\frac{1}{x}+\frac{a}{y}\right)=1+a+\frac{y}{x}+\frac{ax}{y}\geqslant1+a+2\sqrt{a}\geqslant9$.
即 $a+2\sqrt{a}-8\geqslant0$,解得 $a\geqslant4$.
答案:4

8. **解析**:椭圆的离心率为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$,$\therefore\frac{a^2-b^2}{a^2}=\frac{3}{4}$,$\therefore a^2=4b^2$,$\therefore$双曲线的离心率为 $e=\sqrt{\frac{a^2+b^2}{a^2}}=\sqrt{\frac{5b^2}{4b^2}}=\frac{\sqrt{5}}{2}$.
答案:$\frac{\sqrt{5}}{2}$

9. **证明**:当 $a+b\leqslant0$ 时,
$\because\sqrt{a^2+b^2}\geqslant0$,$\therefore\sqrt{a^2+b^2}\geqslant\frac{\sqrt{2}}{2}(a+b)$.
当 $a+b>0$ 时,用分析法证明.
要证 $\sqrt{a^2+b^2}\geqslant\frac{\sqrt{2}}{2}(a+b)$,
需证 $a^2+b^2\geqslant\frac{1}{2}(a^2+2ab+b^2)$,
需证 $2a^2+2b^2\geqslant a^2+2ab+b^2$.
需证 $a^2-2ab+b^2\geqslant0$,
即证 $(a-b)^2\geqslant0$.
$\because(a-b)^2\geqslant0$ 对任意实数 a,b 均成立.
$\therefore\sqrt{a^2+b^2}\geqslant\frac{\sqrt{2}}{2}(a+b)$成立.
综上所述,对任意实数 a、b,$\sqrt{a^2+b^2}\geqslant\frac{\sqrt{2}}{2}(a+b)$均成立.

10. **解**:(1)证明:由条件得 $\frac{1}{2}PA\cdot PB=\frac{1}{2}AB\cdot PH$,
所以 $AB=\frac{PA\cdot PB}{PH}$,
由勾股定理,$PA^2+PB^2=AB^2$,
所以 $PA^2+PB^2=\frac{PA^2\cdot PB^2}{PH^2}$,
所以 $\frac{1}{PH^2}=\frac{PA^2+PB^2}{PA^2\cdot PB^2}=\frac{1}{PA^2}+\frac{1}{PB^2}$.
(2)猜想:$\frac{1}{PH^2}=\frac{1}{PA^2}+\frac{1}{PB^2}+\frac{1}{PC^2}$.
证明如下:
如图所示,连接 AH 延长交 BC 于 M 点,连接 PM,



因为 $PA\perp PB$,$PA\perp PC$,$PB\cap PC=P$ 点,
所以 $PA\perp$平面 PBC,
又 $PM\subset$平面 PBC,得 $PA\perp PM$,
$PH\perp$平面 ABC,$AM\subset$平面 ABC,则 $PH\perp AM$.
在直角三角形 APM 中,由(1)中结论,
$\frac{1}{PH^2}=\frac{1}{PA^2}+\frac{1}{PM^2}$.
$PA\perp$平面 PBC,则 $PA\perp BC$,
又 $PH\perp$平面 ABC,所以 $PH\perp BC$,

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

而 $PH\cap PA=P$ 点，$PH\subset$平面 PAM，
所以 $BC\perp$平面 APM，$BC\perp PM$.
又 $PB\perp PC$，由(1)中结论，
得 $\frac{1}{PM^2}=\frac{1}{PC^2}+\frac{1}{PB^2}$.
所以 $\frac{1}{PH^2}=\frac{1}{PA^2}+\frac{1}{PB^2}+\frac{1}{PC^2}$.

2.2.2　反证法

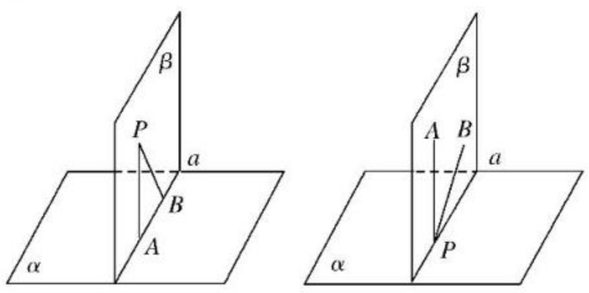
基础知识梳理

1. 不成立　假设错误　原命题成立
2. 已知条件　假设　定义、公理、定理、事实
3. 至多有一个　n　一个也没有　$(n-1)$　任意　某个　一定是　且　不都是　且

题点知识巩固

1. **证明**：假设 $a^2+a<2$ 与 $b^2+b<2$ 同时成立，
$\therefore -2<a<1,-2<b<1$，
又$\because a>0,b>0$，
$\therefore 0<a<1,0<b<1$，
$\therefore 0<ab<1$，这与 $ab=1$ 矛盾.
故 $a^2+a<2$ 与 $b^2+b<2$ 不可能同时成立.

2. **证明**：如图所示，不论点 P 在 α 内还是在 α 外，设 $PA\perp\alpha$，垂足为 A(或 P).



假设过点 P 不止有一条直线与 α 垂直，如还有另一条直线 $PB\perp\alpha$，设 PA,PB 确定的平面为 β，且 $\alpha\cap\beta=a$，于是在平面 β 内过点 P 有两条直线 PA,PB 垂直于 a，这与过一点有且只有一条直线与已知直线垂直相矛盾，$\therefore$假设不成立，原命题成立.

3. **证明**：假设 $\frac{1+m}{n}<2,\frac{1+n}{m}<2$ 都不成立.
即 $\begin{cases}\frac{1+m}{n}\geqslant 2,\\ \frac{1+n}{m}\geqslant 2,\end{cases}$ $\because m,n$ 都是正数，
$\therefore\begin{cases}1+m\geqslant 2n,\\ 1+n\geqslant 2m,\end{cases}$
$\therefore 2+m+n\geqslant 2n+2m$，从而 $m+n\leqslant 2$.
这与条件 $m+n>2$ 矛盾，
故假设不成立，所以原不等式成立.

提能达标过关

1. 选 C　原结论不能作为条件使用.
2. 选 B　“至少有一个”反设时应为“一个都没有”，所以“三角形的内角中至少有一个不大于 60°”假设为“三个内角都大于 60°”，故选 B.
3. 选 C　若 a,b,c 都小于 2，则 $a+b+c<6$，①
而 $a+b+c=x+\frac{1}{x}+y+\frac{1}{y}+z+\frac{1}{z}\geqslant 6$，②
显然①②矛盾，所以 C 正确.
4. 选 A　反证法在假设时，要对结论进行否定，所以是“a,b 都不能被 11 整除”，故选 A.
5. 选 B　假设三个方程都没有实数根，
则 $\begin{cases}16a^2+16a-12<0,\\ (a-1)^2-4a^2<0,\\ 4a^2+8a<0,\end{cases}$ 解得 $-\frac{3}{2}<a<-1$，
故三个方程 $x^2+4ax-4a+3=0,x^2+(a-1)x+a^2=0,x^2+2ax-2a=0$ 至少有一个方程有实数根时，
实数 a 的取值范围为 $a\leqslant-\frac{3}{2}$ 或 $a\geqslant -1$.
6. 方程 $x^2+ax+b=0$ 的两根的绝对值至少有一个大于等于 1
7. **解析**：对于全称命题否定时，全称量词改为存在量词，还要否定结论.
答案：存在 $x_1,x_2\in[0,1]$，使得当 $|f(x_1)-f(x_2)|<|x_1-x_2|$ 时，$|f(x_1)-f(x_2)|\geqslant\frac{1}{2}$
8. **解析**：若 $a=\frac{1}{2},b=\frac{2}{3}$，则 $a+b>1$.
但 $a<1,b<1$，故①推不出；
若 $a=b=1$，则 $a+b=2$，故②推不出；
若 $a=-2,b=-3$，则 $a^2+b^2>2$，故④推不出；
若 $a=-2,b=-3$，则 $ab>1$，故⑤推不出；
对于③，即 $a+b>2$，则 a,b 中至少有一个大于 1.
反证法：假设 $a\leqslant 1$ 且 $b\leqslant 1$，则 $a+b\leqslant 2$ 与 $a+b>2$ 矛盾，
因此假设不成立，故 a,b 中至少有一个大于 1.
答案：③
9. **证明**：(1)要证明 $\frac{a+b}{1+ab}\leqslant 1$，
因为 $0<a<1,0<b<1$，所以 $1+ab>0$，
只需证明 $a+b\leqslant 1+ab$，
只需证明 $a-ab+b-1\leqslant 0$，
只需证明 $a(1-b)-(1-b)\leqslant 0$，
只需证明 $(a-1)(1-b)\leqslant 0$，
只需证明 $(a-1)(b-1)\geqslant 0$，
因为 $0<a<1,0<b<1$，
所以上式恒成立，故原不等式得证.
(2)假设 $x^2-6x-4=0$，则 $x=3\pm\sqrt{13}$.
容易看出 $3+\sqrt{13}>-1$，下面证明 $3-\sqrt{13}>-1$.
$\because 3-\sqrt{13}-(-1)=4-\sqrt{13}=\sqrt{16}-\sqrt{13}>0$，
$\therefore 3-\sqrt{13}>-1$.
综上，$x>-1$，这与已知条件 $x<-1$ 矛盾.
因此假设不成立，即原命题成立.
10. **解**：(1)$\because$函数 $f(x)$ 的图象关于(0,0)对称，
$\therefore$对于 $\forall x\in\mathbf{R}$，有 $f(-x)=-f(x)$.
$\therefore -ax^3-2bx^2-cx+4d=-ax^3+2bx^2-cx-4d$，
即 $bx^2-2d=0$ 恒成立，$\therefore b=0,d=0$.
$\therefore f(x)=ax^3+cx,f'(x)=3ax^2+c$.
$\because x=1$ 时，$f(x)$ 取得极小值 $-\frac{2}{3}$，
$\therefore 3a+c=0$，且 $a+c=-\frac{2}{3}$，
$\therefore a=\frac{1}{3},c=-1$.
$\therefore f(x)=\frac{1}{3}x^3-x$.
(2)当 $x\in[-1,1]$时，图象上不存在两点使结论成立.
证明如下：
假设图象上存在两点 $A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$ 使得在此两点处的切线垂直，则由 $f'(x)=x^2-1$，知两点处的切线斜率分别为 $k_1=x_1^2-1,k_2=x_2^2-1$，
且 $(x_1^2-1)(x_2^2-1)=-1$.
$\because x_1,x_2\in[-1,1]$，
$\therefore x_1^2-1\leqslant 0,x_2^2-1\leqslant 0$，
$\therefore (x_1^2-1)(x_2^2-1)\geqslant 0$.
这与 $(x_1^2-1)(x_2^2-1)=-1$ 矛盾.
$\therefore$假设不成立. 故当 $x\in[-1,1]$时，图象上不存在两点使结论成立.

2.3　数学归纳法

基础知识梳理

初始值 $n_0(n_0\in\mathbf{N}^*)$　当 $n=k(k\geqslant n_0,k\in\mathbf{N}^*)$
当 $n=k+1$

题点知识巩固

1. **证明**：(1)当 $n=1$ 时，$\frac{1^2}{1\times 3}=\frac{1\times 2}{2\times 3}$ 成立；

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

(2)假设当 $n=k$ 时,等式成立,即有 $\frac{1^2}{1\times3}+\frac{2^2}{3\times5}+\cdots+\frac{k^2}{(2k-1)(2k+1)}=\frac{k(k+1)}{2(2k+1)}$,则当 $n=k+1$ 时,左边 $=\frac{k(k+1)}{2(2k+1)}+\frac{(k+1)^2}{(2k+1)(2k+3)}=\frac{(k+1)(k+2)}{2(2k+3)}$.

总之,由(1)(2)可得对于任意的 $n\in\mathbf{N}^*$ 等式都成立.

2. **证明**:(1)当 $n=2$ 时,左式 $=\frac{1}{2^2}=\frac{1}{4}$,右式 $=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$.

因为 $\frac{1}{4}<\frac{1}{2}$,所以不等式成立;

(2)假设 $n=k(k\geqslant2,k\in\mathbf{N}^*)$ 时,不等式成立,即 $\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\cdots+\frac{1}{k^2}<1-\frac{1}{k}$,

则当 $n=k+1$ 时,$\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\cdots+\frac{1}{k^2}+\frac{1}{(k+1)^2}<1-\frac{1}{k}+\frac{1}{(k+1)^2}=1-\frac{(k+1)^2-k}{k(k+1)^2}=1-\frac{k^2+k+1}{k(k+1)^2}<1-\frac{k(k+1)}{k(k+1)^2}=1-\frac{1}{k+1}$,

所以当 $n=k+1$ 时,不等式也成立.

综上所述,对任意 $n\geqslant2$ 的正整数,不等式都成立.

3. **解**:(1)依题设可得 $a_1=\frac{1}{2}=\frac{1}{1\times2}$,$a_2=\frac{1}{6}=\frac{1}{2\times3}$,

$a_3=\frac{1}{12}=\frac{1}{3\times4}$,$a_4=\frac{1}{20}=\frac{1}{4\times5}$.

(2)猜想:$a_n=\frac{1}{n(n+1)}$.

证明:①当 $n=1$ 时,猜想显然成立;

②假设 $n=k(k\in\mathbf{N}^*)$ 时,猜想成立,即 $a_k=\frac{1}{k(k+1)}$.

那么,当 $n=k+1$ 时,$S_{k+1}=1-(k+1)a_{k+1}$,

即 $S_k+a_{k+1}=1-(k+1)a_{k+1}$,

又 $S_k=1-ka_k=\frac{k}{k+1}$,

所以 $\frac{k}{k+1}+a_{k+1}=1-(k+1)a_{k+1}$,

从而 $a_{k+1}=\frac{1}{(k+1)(k+2)}=\frac{1}{(k+1)[(k+1)+1]}$.

即 $n=k+1$ 时,猜想也成立.

故由①和②,可知猜想成立.

4. **解**:(1)由 $a_1=1$,$S_n=n^2a_n(n\in\mathbf{N}^*)$ 得 $S_1=1$,$S_2=\frac{4}{3}$,$S_3=\frac{3}{2}$,$S_4=\frac{8}{5}$,猜想 $S_n=\frac{2n}{n+1}(n\in\mathbf{N}^*)$.

(2)$\because S_n=n^2a_n$,①

$\therefore S_{n-1}=(n-1)^2a_{n-1}$,②

由①-②得,$a_n=S_n-S_{n-1}=n^2a_n-(n-1)^2a_{n-1}$,

$\therefore(n^2-1)a_n=(n-1)^2a_{n-1}$,

即 $(n+1)a_n=(n-1)a_{n-1}$,

$\therefore\frac{a_n}{a_{n-1}}=\frac{n-1}{n+1}$,

$\therefore\frac{a_2}{a_1}=\frac{1}{3}$,$\frac{a_3}{a_2}=\frac{2}{4}$,$\frac{a_4}{a_3}=\frac{3}{5}$,$\cdots$,$\frac{a_n}{a_{n-1}}=\frac{n-1}{n+1}$,

把上面各式相乘得 $\frac{a_n}{a_1}=\frac{2}{n(n+1)}$,

$\therefore a_n=\frac{2}{n(n+1)}$.

猜想 $S_n=\frac{2n}{n+1}(n\in\mathbf{N}^*)$.

证明:①当 $n=1$ 时,猜想显然成立;

②假设 $n=k(k\in N^*)$ 时,猜想成立,即 $S_k=\frac{2k}{k+1}$.

那么当 $n=k+1$ 时,$S_{k+1}=\frac{2(k+1)}{k+1+1}$.

$\because a_n=\frac{2}{n(n+1)}$,$\therefore S_{k+1}=S_k+a_{k+1}=\frac{2k}{k+1}+\frac{2}{(k+1)(k+2)}=\frac{2(k+1)}{k+2}=\frac{2(k+1)}{k+1+1}$.

即 $n=k+1$ 时,猜想也成立.

故由①和②,可知猜想成立.

提能达标过关

1. 选 B　当 $n=1$ 时,左边 $=1+a+a^{1+1}=1+a+a^2$.

2. 选 C　当 $n=k$ 时,不等式左边含有 2^k-1 项,当 $n=k+1$ 时,不等式左边含有 $2^{k+1}-1$ 项,所以由 $n=k$ 推证 $n=k+1$ 时,不等式左边增加的项数为 $(2^{k+1}-1)-(2^k-1)=2^k$,故选 C.

3. 选 C　因为 $f(k)=k+(k+1)+(k+2)+\cdots+(3k-2)$,$f(k+1)=(k+1)+(k+2)+\cdots+(3k-2)+(3k-1)+3k+(3k+1)$,则 $f(k+1)-f(k)=3k-1+3k+3k+1-k=8k$.

4. 选 A　通过对上述证明的分析验证知全都正确,故选 A.

5. 选 A　令 $n=1,2,3$,

得 $\begin{cases}1=3(a-b)+c,\\1+2\times3=3^2(2a-b)+c,\\1+2\times3+3\times3^2=3^3(3a-b)+c,\end{cases}$

即 $\begin{cases}3a-3b+c=1,\\18a-9b+c=7,\\81a-27b+c=34.\end{cases}$

解得 $a=\frac{1}{2}$,$b=\frac{1}{4}$,$c=\frac{1}{4}$.

6. **解析**:$\because n$ 为正奇数,且与 $2k-1$ 相邻的下一个奇数是 $2k+1$.$\therefore$ 需证 $n=2k+1$ 时,命题成立.

答案:$2k+1$

7. **解析**:当 $n=1$ 时,原式应加到 $2^{5\times1-1}=2^4$,

所以原式为 $1+2+2^2+2^3+2^4$,

从 $n=k$ 到 $n=k+1$ 时需添 $2^{5k}+2^{5k+1}+\cdots+2^{5(k+1)-1}$.

答案:$1+2+2^2+2^3+2^4$

$2^{5k}+2^{5k+1}+2^{5k+2}+2^{5k+3}+2^{5k+4}$

8. **解析**:$f(k)=1+\frac{k(k+1)}{2}$,

$f(k+1)=1+\frac{(k+1)(k+2)}{2}$,

$\therefore f(k+1)-f(k)=\left[1+\frac{(k+1)(k+2)}{2}\right]-\left[1+\frac{k(k+1)}{2}\right]=k+1$,

$\therefore f(k+1)=f(k)+(k+1)$.

答案:$k+1$

9. **证明**:①当 $n=1$ 时,左边 $=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$,右边 $=\frac{1}{2}$,等式成立.

②假设当 $n=k(k\in\mathbf{N}^*$ 且 $k\geqslant1)$ 时等式成立.

即 $1-\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k}=\frac{1}{k+1}+\frac{1}{k+2}+\cdots+\frac{1}{2k}$.

则当 $n=k+1$ 时,

左边 $=1-\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k}+\frac{1}{2k+1}-\frac{1}{2k+2}=\frac{1}{k+1}+\frac{1}{k+2}+\cdots+\frac{1}{2k}+\frac{1}{2k+1}-\frac{1}{2k+2}$

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

$=\frac{1}{k+2}+\cdots+\frac{1}{2k}+\frac{1}{2k+1}+\left(\frac{1}{k+1}-\frac{1}{2k+2}\right)$

$=\frac{1}{(k+1)+1}+\frac{1}{(k+1)+2}+\cdots+\frac{1}{(k+1)+k}+\frac{1}{(k+1)+(k+1)}$,

所以当 $n=k+1$ 时等式也成立，

由①②知，对一切 $n\in\mathbf{N}^*$ 等式都成立.

10. **解**：(1)$a_2=\frac{1}{2-a_1}=\frac{1}{2}$，$a_3=\frac{1}{2-a_2}=\frac{2}{3}$，$a_4=\frac{1}{2-a_3}=\frac{3}{4}$.

由此猜想 $a_n=\frac{n-1}{n}(n\in\mathbf{N}^*)$.

(2)证明：①当 $n=1$ 时，$a_1=0$，结论成立；

②假设 $n=k(k\geqslant1$，且 $k\in\mathbf{N}^*)$时结论成立，

即 $a_k=\frac{k-1}{k}$.

当 $n=k+1$ 时，

$a_{k+1}=\frac{1}{2-a_k}=\frac{1}{2-\frac{k-1}{k}}=\frac{(k+1)-1}{k+1}$，

∴当 $n=k+1$ 时结论成立，

由①②知：对于任意的 $n\in\mathbf{N}^*$，$a_n=\frac{n-1}{n}$恒成立.

第三章　数系的扩充与复数的引入

3.1　数系的扩充和复数的概念

3.1.1　数系的扩充和复数的概念

基础知识梳理

1.(1)①**R**　虚数单位　实部　虚部　②z　$z=a+bi(a,b\in\mathbf{R})$

(2)①全体复数　②**C**

2.(1)$b=0$　$b\neq0$　$a=0$ 且 $b\neq0$

3.$a=c,b=d$　$a=b=0$

题点知识巩固

1.选 C　若复数 $z=x^2-x+(x-1)i(x\in\mathbf{R})$为纯虚数，

则 $\begin{cases}x^2-x=0,\\x-1\neq0,\end{cases}$解得 $x=0$，

所以“$x=0$”是“复数 $z=x^2-x+(x-1)i(x\in\mathbf{R})$为纯虚数”的充要条件，故选 C.

2.D

3.**解**：(1)要使 z 是实数，m 需满足 $m^2+2m-3=0$，且 $\frac{m(m+2)}{m-1}$有意义，即 $m-1\neq0$，解得 $m=-3$.

(2)要使 z 是虚数，m 需满足 $m^2+2m-3\neq0$，且$\frac{m(m+2)}{m-1}$有意义，即 $m-1\neq0$，解得 $m\neq1$ 且 $m\neq-3$.

(3)要使 z 是纯虚数，m 需满足$\frac{m(m+2)}{m-1}=0$，$m-1\neq0$，且 $m^2+2m-3\neq0$，解得 $m=0$ 或 $m=-2$.

4.选 C　因为两个复数相等的充要条件是它们的实部与实部相等、虚部与虚部相等，所以 p 为真命题；因为 $f'(x_0)=0$ 时 x_0 不一定是 $f(x)$ 的极值点，所以命题 q 为假命题，所以 $p\wedge(\neg q)$为真命题，故选 C.

提能达标过关

1.选 A　依题意，$a=-1,b=0$，∴$a+b=-1$，故选 A.

2.选 D　由复数的分类，复数$\begin{cases}\text{实数}\\\text{虚数}\begin{cases}\text{纯虚数}\\\text{非纯虚数}\end{cases}\end{cases}$，可知 A、B、C 均错，D 正确.

3.选 D　由复数相等定义得$\begin{cases}\cos\theta=\sin\theta,\\\sin\theta=\cos\theta,\end{cases}$

∴$\tan\theta=1$，∴$\theta=k\pi+\frac{\pi}{4}(k\in\mathbf{Z})$，故选 D.

4.选 A　由题意知$(m^2-3m-1)+(m^2-5m-6)i=3$.

∴$\begin{cases}m^2-3m-1=3,\\m^2-5m-6=0,\end{cases}$解得 $m=-1$.

5.选 A　由复数 $z=(a^2-9)+(a+1)i(a\in\mathbf{R})$为纯虚数，得$\begin{cases}a^2-9=0,\\a+1\neq0,\end{cases}$

所以 $a=\pm3$，所以“$a=3$”是“复数 $z=(a^2-9)+(a+1)i(a\in\mathbf{R})$为纯虚数”的充分不必要条件，故选 A.

6.**解析**：∵$a,b\in\mathbf{R}$，且 $a-2i=1+bi$，∴$a=1,b=-2$.

∴$a^2+b^2=1+4=5$.

答案：5

7.**解析**：∵$z_1>z_2$，∴$\begin{cases}2a^2+3a=0,\\a^2+a=0,\\-4a+1>2a,\end{cases}$

解得 $a=0$，∴a 的取值集合为$\{0\}$.

答案：$\{0\}$

8.**解析**：∵$\log_2(x^2-3x-2)+i\log_2(x^2+2x+1)>1$，

∴$\begin{cases}\log_2(x^2-3x-2)>1,\\\log_2(x^2+2x+1)=0,\end{cases}$∴$x=-2$.

答案：$\{-2\}$

9.**解**：(1)当 z 为实数时，

则有$\begin{cases}a^2-5a-6=0,\\a^2-1\neq0,\end{cases}$

所以$\begin{cases}a=-1\text{ 或 }a=6,\\a\neq\pm1,\end{cases}$

所以当 $a=6$ 时，z 为实数.

(2)当 z 为虚数时，则有$\begin{cases}a^2-5a-6\neq0,\\a^2-1\neq0,\end{cases}$

所以$\begin{cases}a\neq-1\text{ 且 }a\neq6,\\a\neq\pm1,\end{cases}$即 $a\neq\pm1$ 且 $a\neq6$.

所以当 $a\in(-\infty,-1)\cup(-1,1)\cup(1,6)\cup(6,+\infty)$时，$z$ 为虚数.

(3)当 z 为纯虚数时，

则有$\begin{cases}a^2-5a-6\neq0,\\a^2-7a+6=0,\\a^2-1\neq0,\end{cases}$

所以$\begin{cases}a\neq-1\text{ 且 }a\neq6,\\a=1\text{ 或 }a=6,\\a\neq\pm1,\end{cases}$

所以不存在实数 a 使得 z 为纯虚数.

10.**解**：由定义运算$\begin{vmatrix}a&b\\c&d\end{vmatrix}=ad-bc$，

得$\begin{vmatrix}3x+2y&i\\-y&1\end{vmatrix}=3x+2y+yi$，

故有$(x+y)+(x+3)i=3x+2y+yi$.

因为 x,y 为实数，所以有$\begin{cases}x+y=3x+2y,\\x+3=y,\end{cases}$

得$\begin{cases}2x+y=0,\\x+3=y,\end{cases}$得$\begin{cases}x=-1,\\y=2.\end{cases}$

3.1.2　复数的几何意义

基础知识梳理

1.实轴　虚轴

2.复平面内的点 $Z(a,b)$　平面向量$\overrightarrow{OZ}$

3.$|z|$　$|a+bi|$　$\sqrt{a^2+b^2}$

题点知识巩固

1.**解析**：$(3+i)m-(2+i)=(3m-2)+(m-1)i$，

依题意$\begin{cases}3m-2<0,\\m-1<0,\end{cases}$解得 $m<\frac{2}{3}$，

所以实数 m 的取值范围是$\left(-\infty,\frac{2}{3}\right)$.

答案：$\left(-\infty,\frac{2}{3}\right)$

2.**解**：(1)若点位于第一象限，

则$\begin{cases}\frac{m^2+m-2}{m+3}>0,\\m^2+5m+6>0,\end{cases}$

即$\begin{cases}-3<m<-2\text{ 或 }m>1,\\m<-3\text{ 或 }m>-2,\end{cases}$

∴$m>1$，即实数 m 的取值范围是$(1,+\infty)$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

(2)若点位于实轴上，

则 $\begin{cases} m^2+5m+6=0, \\ m+3\neq 0, \end{cases}$ 解得 $m=-2$.

(3)若点位于直线 $2x+y=0$ 上，

则 $2\times\dfrac{m^2+m-2}{m+3}+m^2+5m+6=0$，

解得 $m=-7$ 或 $m=-2$ 或 $m=-1$.

3. 选 A　$\because |z|^2-2|z|-3=0$，$\therefore (|z|-3)(|z|+1)=0$，

$\therefore |z|=3$，表示一个圆，故选 A.

4. 选 C　$\because z_1=x+y\mathrm{i}$，$z_2=x-y\mathrm{i}$，

$\therefore z_1+z_2=2x=2$，$\therefore x=1$.

$\because |z_1|=|z_2|=\sqrt{2}$，$\therefore \sqrt{1+y^2}=\sqrt{2}$，解得 $y=\pm 1$，故选 C.

提能达标过关

1. 选 C　设 $z=x+y_{\mathrm{i}}$，$x,y\in\mathbf{R}$，

则 $z-\mathrm{i}=x+(y-1)\mathrm{i}$，$|z-\mathrm{i}|=1$，

$\therefore x^2+(y-1)^2=1$，所以选 C.

2. 选 B　$\because$ 复数 $z=1+\mathrm{i}$ 对应点的坐标为(1,1)，

$\therefore$ 它关于实轴的对称点 A 的坐标为(1,−1)，

$\therefore$ 点 A 对应的复数为 $1-\mathrm{i}$，故选 B.

3. 选 D　设 $z_2=x+y\mathrm{i}(x,y\in\mathbf{R})$，

由条件得，$\begin{cases} (x-1)^2+(y-2)^2=20, \\ x^2+y^2=41. \end{cases}$

$\therefore \begin{cases} x=5, \\ y=4 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x=\dfrac{1}{5}, \\ y=\dfrac{32}{5}. \end{cases}$

则 $z_2=5+4\mathrm{i}$ 或 $\dfrac{1}{5}+\dfrac{32}{5}\mathrm{i}$. 故选 D.

4. 选 B　在复数中，除去实数外，是不能比较大小的，$\therefore$ ①④错；$\because |2+3\mathrm{i}|=\sqrt{2^2+3^2}=\sqrt{13}$，$|1-4\mathrm{i}|=\sqrt{1^2+(-4)^2}=\sqrt{17}$，$\therefore |2+3\mathrm{i}|<|1-4\mathrm{i}|$，$\therefore$ ②错；$\because |2-\mathrm{i}|=\sqrt{5}$，$2\mathrm{i}^2=-2$，$\therefore |2-\mathrm{i}|>2\mathrm{i}^2$，$\therefore$ ③正确.

5. 选 B　依题意，$\begin{cases} 1+a<0, \\ 1-a>0, \end{cases}$ 解得 $a<-1$，故选 B.

6. **解析**：由条件知 $\begin{cases} m^2+2m-3\neq 0, \\ m^2-9=0, \end{cases}$

$\therefore m=3$，$\therefore z=12\mathrm{i}$，$\therefore |z|=12$.

答案：12

7. **解析**：由题意知 $A(2,3)$，$B(3,2)$，$C(-2,-3)$，设 $D(x,y)$，则 $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}$，即 $(x-2,y-3)=(-5,-5)$，解得 $\begin{cases} x=-3, \\ y=-2. \end{cases}$ $\therefore D$ 点对应的复数为 $z=-3-2\mathrm{i}$.

答案：$-3-2\mathrm{i}$

8. **解析**：复数 z 在复平面内对应的点为 (k^2-k,k^2-1)，此点在第三象限，则 $\begin{cases} k^2-k<0, \\ k^2-1<0. \end{cases}$ 解得 $0<k<1$.

答案：(0,1)

9. **解**：因为 $|z|=\sqrt{2}$，所以 $a^4+a^2=2$，所以 $a^2=1$.

又因为 z 在复平面内对应的点位于第四象限，所以 $a=-1$，即 $z=1-\mathrm{i}$.

10. **解**：设 $z=x+y\mathrm{i}(x,y\in\mathbf{R})$，

则复数 z 的对应点为 $P(x,y)$，

由题意知 $\begin{cases} x=a+3, \\ y=b-2, \end{cases}$ $\therefore \begin{cases} a=x-3, \\ b=y+2. \end{cases}$ ①

$\because z_0=a+b\mathrm{i}$，$|z_0|=2$，$\therefore a^2+b^2=4$.

将①代入得 $(x-3)^2+(y+2)^2=4$.

$\therefore$ 点 P 的轨迹是以(3,−2)为圆心，2 为半径的圆.

3.2　复数代数形式的四则运算

3.2.1　复数代数形式的加、减运算及其几何意义

基础知识梳理

1. $a+c+(b+d)\mathrm{i}$　$a-c+(b-d)\mathrm{i}$　复数

2. (1)$z_1+z_2=z_2+z_1$　$(z_1+z_2)+z_3=z_1+(z_2+z_3)$

题点知识巩固

1. **解**：(1)$(-7\mathrm{i}+5)-(9-8\mathrm{i})+(3-2\mathrm{i})=-7\mathrm{i}+5-9+8\mathrm{i}+3-2\mathrm{i}=(5-9+3)+(-7+8-2)\mathrm{i}=-1-\mathrm{i}$.

(2)$\left(\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{2}\mathrm{i}\right)+(2-\mathrm{i})-\left(\dfrac{4}{3}-\dfrac{3}{2}\mathrm{i}\right)$

$=\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{2}\mathrm{i}+2-\mathrm{i}-\dfrac{4}{3}+\dfrac{3}{2}\mathrm{i}$

$=\left(\dfrac{1}{3}+2-\dfrac{4}{3}\right)+\left(\dfrac{1}{2}-1+\dfrac{3}{2}\right)\mathrm{i}=1+\mathrm{i}$.

(3)$z_1+z_2=2+3\mathrm{i}+(-1+2\mathrm{i})=1+5\mathrm{i}$，

$z_1-z_2=2+3\mathrm{i}-(-1+2\mathrm{i})=3+\mathrm{i}$.

2. 选 D　$\because z=(4-7\mathrm{i})+(2+3\mathrm{i})=6-4\mathrm{i}$，

$\therefore$ 复数 z 在复平面内对应的点为(6,−4)，位于第四象限，故选 D.

3. **解**：设正方形的第四个顶点 D 对应的复数 $z=x+y\mathrm{i}(x,y\in\mathbf{R})$，

由题意知 $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}$，$\because \overrightarrow{AD}$ 所表示的复数为 $x+y\mathrm{i}-(1+2\mathrm{i})=(x-1)+(y-2)\mathrm{i}$，

$\overrightarrow{BC}$ 所表示的复数为 $-1-2\mathrm{i}-(-2+\mathrm{i})=(-1+2)+(-2-1)\mathrm{i}=1-3\mathrm{i}$，$\therefore \begin{cases} x-1=1, \\ y-2=-3, \end{cases}$ $\therefore \begin{cases} x=2, \\ y=-1. \end{cases}$

则 D 对应的复数为 $2-\mathrm{i}$.

4. 选 C　$\because z=3-4\mathrm{i}$，$\therefore |z|=5$.

$\therefore z-|z|+(1-\mathrm{i})=3-4\mathrm{i}-5+1-\mathrm{i}$

$=-1-5\mathrm{i}$，对应的点为(−1,−5)在第三象限.

5. **解**：依题意，$|OA|=2$，$\angle xOA=30^\circ$，$\therefore A(\sqrt{3},1)$，

$\therefore \overrightarrow{OA}$ 所表示的复数为 $\sqrt{3}+\mathrm{i}$，

$\because$ 四边形 $OABC$ 为正方形，$\therefore C(-1,\sqrt{3})$，

$\therefore \overrightarrow{OC}$ 所表示的复数为 $-1+\sqrt{3}\mathrm{i}$.

(2)$\because \overrightarrow{CA}=\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OC}$，

$\therefore \overrightarrow{CA}$ 所表示的复数为

$(\sqrt{3}+\mathrm{i})-(-1+\sqrt{3}\mathrm{i})=(\sqrt{3}+1)+(1-\sqrt{3})\mathrm{i}$.

(3)在正方形 $OABC$ 中，$\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}$，

$\therefore$ 向量 $\overrightarrow{OB}$ 所表示的复数为

$(\sqrt{3}+\mathrm{i})+(-1+\sqrt{3}\mathrm{i})=(\sqrt{3}-1)+(\sqrt{3}+1)\mathrm{i}$，

即点 B 对应的复数为 $(\sqrt{3}-1)+(\sqrt{3}+1)\mathrm{i}$.

提能达标过关

1. 选 B　$(-1+3\mathrm{i})+(2+\mathrm{i})+(1-5\mathrm{i})=2-\mathrm{i}$，故选 B.

2. 选 D　$\because (-1+2\mathrm{i})-z=-5\mathrm{i}$，

$\therefore z=(-1+2\mathrm{i})+5\mathrm{i}=-1+7\mathrm{i}$，

$\therefore |z|=\sqrt{1+49}=5\sqrt{2}$. 故选 D.

3. 选 D　$z-2=3+a\mathrm{i}-2=1+a\mathrm{i}$.

$|z-2|=\sqrt{1+a^2}<2$，解得 $-\sqrt{3}<a<\sqrt{3}$.

4. 选 C　由 $|z+1|=|z-\mathrm{i}|$ 知，在复平面内，复数 z 对应的点的轨迹是以(−1,0)和(0,1)为端点的线段的垂直平分线，即直线 $y=-x$，而 $|z+\mathrm{i}|$ 表示直线 $y=-x$ 上的点到点(0,−1)的距离，其最小值等于点(0,−1)到直线 $y=-x$ 的距离即为 $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

5. 选 C　$\because z=(a+\mathrm{i})+(2-3\mathrm{i})=(a+2)-2\mathrm{i}$ 为纯虚数，

$\therefore a+2=0$，即 $a=-2$，故选 C.

6. **解析**：设 $z=x+y\mathrm{i}(x,y\in\mathbf{R})$，则 $|z|=\sqrt{x^2+y^2}$.

$\therefore x+y\mathrm{i}+\sqrt{x^2+y^2}=2+\mathrm{i}$.

$\therefore \begin{cases} x+\sqrt{x^2+y^2}=2, \\ y=1, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} x=\dfrac{3}{4}, \\ y=1. \end{cases}$ $\therefore z=\dfrac{3}{4}+\mathrm{i}$.

答案：$\dfrac{3}{4}+\mathrm{i}$

7. **解析**：$\because (3+4\mathrm{i})+z=-7\mathrm{i}$，$\therefore z=-7\mathrm{i}-(3+4\mathrm{i})=-3-11\mathrm{i}$，

$\therefore z$ 的虚部为 -11.

答案：-11

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

8. **解析**：$\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB}=(3,2)+(0,-4)=(3,-2)$，
∴B点坐标为$(3,-2)$且$AB\perp x$轴.
∴$\triangle AOB$为等腰三角形，其底边长为$|AB|=4$，
高为$x_A=3$.
∴$S_{\triangle AOB}=\frac{1}{2}\times4\times3=6$.
答案：6

9. **解**：$z_1-z_2=\frac{\sqrt{3}}{2}a+(a+1)\mathrm{i}-[-3\sqrt{3}b+(b+2)\mathrm{i}]$
$=\frac{\sqrt{3}}{2}a-(-3\sqrt{3}b)+[(a+1)-(b+2)]\mathrm{i}$
$=\frac{\sqrt{3}}{2}a+3\sqrt{3}b+(a-b-1)\mathrm{i}$
$=4\sqrt{3}$，
∴$\begin{cases}\frac{\sqrt{3}}{2}a+3\sqrt{3}b=4\sqrt{3},\\ a-b-1=0,\end{cases}$解得$\begin{cases}a=2,\\ b=1,\end{cases}$
∴$z_1=\sqrt{3}+3\mathrm{i}$，$z_2=-3\sqrt{3}+3\mathrm{i}$.

10. **解**：(1)$\overrightarrow{AB}$对应的复数为$2+\mathrm{i}-1=1+\mathrm{i}$，
$\overrightarrow{BC}$对应的复数为$-1+2\mathrm{i}-(2+\mathrm{i})=-3+\mathrm{i}$，
$\overrightarrow{AC}$对应的复数为$-1+2\mathrm{i}-1=-2+2\mathrm{i}$.
(2)∵$|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{2}$，$|\overrightarrow{BC}|=\sqrt{10}$，$|\overrightarrow{AC}|=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$，
∴$|\overrightarrow{AB}|^2+|\overrightarrow{AC}|^2=|\overrightarrow{BC}|^2$，∴$\triangle ABC$为直角三角形.
(3)$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}\times\sqrt{2}\times2\sqrt{2}=2$.

3.2.2　复数代数形式的乘除运算

基础知识梳理

1. (1)$(ac-bd)+(ad+bc)\mathrm{i}$　(2)$z_2\cdot z_1$　$(z_1\cdot z_2)\cdot z_3$　$z_1\cdot z_2+z_1\cdot z_3$
2. 实部相等，虚部互为相反数　共轭虚数　$\overline{z}$　$a-b\mathrm{i}$
3. $\frac{ac+bd}{c^2+d^2}+\frac{bc-ad}{c^2+d^2}\mathrm{i}$

题点知识巩固

1. 选C　∵$z=\frac{\mathrm{i}}{1+2\mathrm{i}}=\frac{\mathrm{i}(1-2\mathrm{i})}{(1+2\mathrm{i})(1-2\mathrm{i})}=\frac{2+\mathrm{i}}{5}=\frac{2}{5}+\frac{1}{5}\mathrm{i}$，
∴复数$z=\frac{\mathrm{i}}{1+2\mathrm{i}}$的虚部为$\frac{1}{5}$，故选C.

2. 选D　**解法一**：$z(1+\mathrm{i})=2\mathrm{i}$，∴$z=\frac{2\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}$，
$z=\frac{2\mathrm{i}(1-\mathrm{i})}{(1+\mathrm{i})(1-\mathrm{i})}=\frac{2\mathrm{i}-2\mathrm{i}^2}{2}=1+\mathrm{i}$，
∴选D.
解法二：设$z=a+b\mathrm{i}$，∵$z(1+\mathrm{i})=2\mathrm{i}$，
∴$(a+b\mathrm{i})(1+\mathrm{i})=2\mathrm{i}$，$a-b+(a+b)\mathrm{i}=2\mathrm{i}$，
∴$a-b=0$，$a+b=2$，∴$a=1$，$b=1$，
∴$z=1+\mathrm{i}$，选D.

3. 选D　$z=\frac{1-3\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}=\frac{(1-3\mathrm{i})(1+\mathrm{i})}{(1-\mathrm{i})(1+\mathrm{i})}=\frac{4-2\mathrm{i}}{2}=2-\mathrm{i}$.
∴$z\overline{z}=(2-\mathrm{i})(2+\mathrm{i})=5$. 故选D.

4. 选D　$\frac{\overline{z}}{|z|}=\frac{4-3\mathrm{i}}{5}=\frac{4}{5}-\frac{3}{5}\mathrm{i}$，故选D.

5. **解**：(1)设$z=x+y\mathrm{i}(x,y\in\mathbf{R})$，
由于$|z|-\mathrm{i}=\overline{z}+2+3\mathrm{i}$，
则$\sqrt{x^2+y^2}-\mathrm{i}=x-y\mathrm{i}+2+3\mathrm{i}$，
∴$\sqrt{x^2+y^2}-x-2+(y-4)\mathrm{i}=0$，
∴$\begin{cases}\sqrt{x^2+y^2}-x-2=0,\\ y-4=0,\end{cases}$
解得$\begin{cases}x=3,\\ y=4,\end{cases}$
∴$z=3+4\mathrm{i}$.
(2)由(1)知$\frac{a+2\mathrm{i}}{z}=\frac{a+2\mathrm{i}}{3+4\mathrm{i}}=\frac{(a+2\mathrm{i})(3-4\mathrm{i})}{(3+4\mathrm{i})(3-4\mathrm{i})}=\frac{3a+8+(6-4a)\mathrm{i}}{25}$，
又$\frac{a+2\mathrm{i}}{z}$为纯虚数，
∴$\begin{cases}3a+8=0,\\ 6-4a\neq0,\end{cases}$∴$a=-\frac{8}{3}$.

提能达标过关

1. 选A　$z=\frac{2}{1-\mathrm{i}}-\mathrm{i}^3=\frac{2(1+\mathrm{i})}{(1-\mathrm{i})(1+\mathrm{i})}+\mathrm{i}=1+\mathrm{i}+\mathrm{i}=1+2\mathrm{i}$，
其对应点的坐标为$(1,2)$，位于第一象限，故选A.

2. 选D　$z=\mathrm{i}(2+\mathrm{i})=2\mathrm{i}-1=-1+2\mathrm{i}$，$\overline{z}=-1-2\mathrm{i}$. 故选D.

3. 选B　$\frac{4+(a-2)\mathrm{i}}{\mathrm{i}}=(a-2)-4\mathrm{i}$，
因为$(a-2)-4\mathrm{i}$表示纯虚数，所以$a=2$.

4. 选B　∵$(3-4\mathrm{i})z=|4+3\mathrm{i}|$，∴$z=\frac{|4+3\mathrm{i}|}{3-4\mathrm{i}}=\frac{5(3+4\mathrm{i})}{25}=\frac{3}{5}+\frac{4}{5}\mathrm{i}$，∴$z$的虚部为$\frac{4}{5}$，故选B.

5. 选A　$z=\frac{1+\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}+m(1-\mathrm{i})=\mathrm{i}+m-m\mathrm{i}=m+(1-m)\mathrm{i}$，
∵z为纯虚数，∴$m=0$，故选A.

6. **解析**：$\frac{5-\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}=\frac{(5-\mathrm{i})(1-\mathrm{i})}{(1+\mathrm{i})(1-\mathrm{i})}=\frac{5+\mathrm{i}^2-6\mathrm{i}}{2}=\frac{4-6\mathrm{i}}{2}=2-3\mathrm{i}$，
$|2-3\mathrm{i}|=\sqrt{4+9}=\sqrt{13}$.
答案：$\sqrt{13}$

7. **解析**：$\frac{2x}{1-\mathrm{i}}+1=\frac{2x(1+\mathrm{i})}{(1-\mathrm{i})(1+\mathrm{i})}+1=x+x\mathrm{i}+1=y\mathrm{i}$，
∴$\begin{cases}x+1=0,\\ x=y,\end{cases}$解得$x=y=-1$，∴$x+y=-2$.
答案：-2

8. **解析**：∵$\frac{1-z}{1+z}=\mathrm{i}$，∴$1-z=(1+z)\mathrm{i}$，∴$1-z=\mathrm{i}+z\mathrm{i}$，
∴$(1+\mathrm{i})z=1-\mathrm{i}$，∴$z=\frac{1-\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}=\frac{(1-\mathrm{i})^2}{2}=\frac{-2\mathrm{i}}{2}=-\mathrm{i}$.
∴$|1+z|=|1-\mathrm{i}|=\sqrt{2}$.
答案：$\sqrt{2}$

9. **解**：$z=\frac{(1+\mathrm{i})^2\cdot(1+\mathrm{i})}{1-\mathrm{i}}(a+b\mathrm{i})$
$=2\mathrm{i}\cdot\mathrm{i}(a+b\mathrm{i})=-2a-2b\mathrm{i}$.
由$|z|=4$，得$a^2+b^2=4$，　①
∵复数0，z，$\overline{z}$对应的点构成正三角形，
∴$|z-\overline{z}|=|z|$.
把$z=-2a-2b\mathrm{i}$代入化简得$|b|=1$.　②
又∵z对应的点在第一象限，∴$a<0$，$b<0$.
由①②得$\begin{cases}a=-\sqrt{3},\\ b=-1.\end{cases}$
故所求值为$a=-\sqrt{3}$，$b=-1$.

10. **解**：由$z^2+\frac{a}{z}<0$可知$z^2+\frac{a}{z}$是实数且为负数.
$z=\frac{(1+\mathrm{i})^2+3(1-\mathrm{i})}{2+\mathrm{i}}=\frac{2\mathrm{i}+3-3\mathrm{i}}{2+\mathrm{i}}=\frac{3-\mathrm{i}}{2+\mathrm{i}}=1-\mathrm{i}$.
∵a为纯虚数，∴设$a=m\mathrm{i}(m\in\mathbf{R}$且$m\neq0)$，
则$z^2+\frac{a}{z}=(1-\mathrm{i})^2+\frac{m\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}=-2\mathrm{i}+\frac{m\mathrm{i}-m}{2}$
$=-\frac{m}{2}+\left(\frac{m}{2}-2\right)\mathrm{i}<0$，
∴$\begin{cases}-\frac{m}{2}<0,\\ \frac{m}{2}-2=0,\end{cases}$
∴$m=4$，∴$a=4\mathrm{i}$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

第二部分　阶段检测

阶段测试一

1. 选 D　$\int_{-\pi}^{\pi}\sin x\mathrm{d}x=-\cos x\Big|_{-\pi}^{\pi}=-\cos\pi+\cos(-\pi)=0$，

A 正确；

$\int_0^1\sqrt{x}\mathrm{d}x=\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\Big|_0^1=\frac{2}{3}$，B 正确；

$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos x\mathrm{d}x=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x\mathrm{d}x$，C 正确，故选 D.

2. 选 B　$\because f(x)=2x-\mathrm{e}^x$，$\therefore f'(x)=2-\mathrm{e}^x$，

$\therefore f(0)=-1$，$f'(0)=2-1=1$，

$\therefore$曲线 $f(x)=2x-\mathrm{e}^x$ 在点$(0,-1)$处的切线方程是$y+1=1\cdot(x-0)$，即 $x-y-1=0$. 故选 B.

3. 选 B　$y'=(x^2)'\cos 2x+x^2(\cos 2x)'$

$=2x\cos 2x-x^2\sin 2x\cdot(2x)'$

$=2x\cos 2x-2x^2\sin 2x$.

4. 选 A　$a>0$，$\int_0^a(2-3x)\mathrm{d}x=\left(2x-\frac{3}{2}x^2\right)\Big|_0^a=2a-\frac{3}{2}a^2$.

由题知 $2a-\frac{3}{2}a^2=-2$，解得 $a=2\left(a=-\frac{2}{3}\text{舍去}\right)$.

5. 选 C　由图象可知，当 $x\in(4,5)$时，$f'(x)>0$，

$\therefore f(x)$在$(4,5)$内为增函数.

6. 选 D　当 $a=0$ 时，$f(x)=\frac{x}{\sqrt{x}}=\sqrt{x}(x>0)$，在其定义域$(0,+\infty)$上单调递增，无极值点，排除 A、C 选项；

当 $a>0$ 时，$f(x)=\frac{x}{\sqrt{x}+a}$的定义域为$[0,+\infty)$，且$f'(x)=\frac{a+\frac{\sqrt{x}}{2}}{(\sqrt{x}+a)^2}>0$ 在其定义域上恒成立，$\therefore f(x)$在区间$[0,+\infty)$上单调递增，无极值点，排除 B 选项，故选 D.

7. 选 C　$f'(x)=6x^2+2ax$.

$\because f(x)$在$(-\infty,0)$上单调递增，在$(0,2)$上单调递减，在$(2,+\infty)$上单调递增.

$\therefore 6x^2+2ax=0$，即 $3x^2+ax=0$ 的两根为 0，2. 由根与系数的关系得 $0+2=-\frac{a}{3}$. $\therefore a=-6$.

8. 选 B　函数 $f(x)=\mathrm{e}^{x-1}+\mathrm{e}^{1-x}$，令 $g(x)=\mathrm{e}^{x-1}+\mathrm{e}^{1-x}-(\mathrm{e}+\mathrm{e}^{-1})$，$g'(x)=\mathrm{e}^{x-1}-\mathrm{e}^{1-x}$，令 $g'(x)=0$，解得 $x=1$. 可得函数 $g(x)$在$(-\infty,1)$上单调递减，$(1,+\infty)$上单调递增.

$g(x)_{\min}=g(1)=2-(\mathrm{e}+\mathrm{e}^{-1})<0$，又 $g(0)=g(2)=0$.

$\therefore 0<x<2$. 故选 B.

9. 选 A　由 $f(x)=2f(2-x)-x^2+8x-8$，　①

得 $f(2-x)=2f(x)-(2-x)^2+8(2-x)-8$，

即 $2f(x)-f(2-x)=x^2+4x-4$，　②

由①②可得

$f(x)=x^2$，$\therefore f'(x)=2x$，

$\therefore$切线方程为 $y-1=2(x-1)$，即 $y=2x-1$.

10. 选 C　$f'(x)=x'[(x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_8)]+[(x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_8)]'x$

$=(x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_8)+[(x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_8)]'x$，

所以 $f'(0)=(0-a_1)(0-a_2)\cdots(0-a_8)+[(0-a_1)(0-a_2)\cdots(0-a_8)]'0=a_1a_2\cdots a_8$.

因为数列$\{a_n\}$为等比数列，

所以 $a_2a_7=a_3a_6=a_4a_5=a_1a_8=8$，

所以 $f'(0)=8^4=2^{12}$.

11. 选 B　$f'(x)=2\sin x\cos x+2a=\sin 2x+2a$.

若存在实数 m，使直线 l 是曲线 $y=f(x)$的切线. 则方程 $\sin 2x+2a=-1$ 有解.

$\therefore -1\leqslant a\leqslant 0$.

由于对任意实数 m，l 都不是 $y=f(x)$的切线.

$\therefore a<-1$或 $a>0$.

12. 选 D　令 $g(x)=xf(x)(x>0)$，

则 $g'(x)=xf'(x)+f(x)$，

$\because x^2f'(x)+xf(x)=\ln x$，

$\therefore xf'(x)+f(x)=\frac{\ln x}{x}$，$\therefore g'(x)=\frac{\ln x}{x}$，

$\therefore$当 $0<x<1$ 时，$g'(x)<0$，

当 $x>1$ 时 $g'(x)>0$，

$\therefore g(x)$在$(0,1)$上单调递减，在$(1,+\infty)$上单调递增，

$\because f(1)=\frac{1}{2}$，$\therefore g(1)=\frac{1}{2}$，

$\therefore g(x)$在$(0,+\infty)$上有极小值$\frac{1}{2}$，即 $xf(x)$在$(0,+\infty)$上有极小值$\frac{1}{2}$，故选 D.

13. **解析**：$\int_{-1}^1(|x|-1)\mathrm{d}x=\int_{-1}^0(-x-1)\mathrm{d}x+\int_0^1(x-1)\mathrm{d}x=\left(-\frac{1}{2}x^2-x\right)\Big|_{-1}^0+\left(\frac{1}{2}x^2-x\right)\Big|_0^1=\frac{1}{2}-1+\frac{1}{2}-1=-1$.

答案：-1

14. **解析**：设 $P(x_0,y_0)(x_0>0)$，

$\because y=x^2-\ln x$，$\therefore y'=2x-\frac{1}{x}$，

$\therefore y'\Big|_{x=x_0}=2x_0-\frac{1}{x_0}=1$.

解得 $x_0=1$ 或 $x_0=-\frac{1}{2}$(舍).

$\therefore P(1,1)$，$\therefore$点 P 到直线 $y=x-4$ 的距离的最小值为 $\frac{|1-1-4|}{\sqrt{2}}=2\sqrt{2}$.

答案：$2\sqrt{2}$

15. **解析**：$f(x)$的定义域为$(0,+\infty)$，

$\because f(x)=\ln x-ax+1$，$\therefore f'(x)=\frac{1}{x}-a$，

$\because f(x)$恰有两个零点，$\therefore a>0$，

由 $f'(x)=0$，得 $x=\frac{1}{a}$，且 $x\in\left(0,\frac{1}{a}\right)$时，$f'(x)>0$，

$x\in\left(\frac{1}{a},+\infty\right)$时，$f'(x)<0$.

$\therefore f(x)$在 $x=\frac{1}{a}$处取得极大值

$f\left(\frac{1}{a}\right)=\ln\frac{1}{a}-1+1=-\ln a>0$，

解得 $0<a<1$，$\therefore$实数 a 的取值范围是$(0,1)$.

答案：$(0,1)$

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

16. **解析**：由$\begin{cases}y^2=x,\\y=\dfrac{1}{x},\end{cases}$得交点$A(1,1)$，

由$\begin{cases}x=2,\\y=\dfrac{1}{x},\end{cases}$得交点$B\left(2,\dfrac{1}{2}\right)$.

故所求面积$S=\int_0^1\sqrt{x}\mathrm{d}x+\int_1^2\dfrac{1}{x}\mathrm{d}x=\dfrac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\Big|_0^1+\ln x\Big|_1^2=\dfrac{2}{3}+\ln 2$.

答案：$\dfrac{2}{3}+\ln 2$

17. **解**：(1)由题意$f(-1)=0$，

所以$f(-1)=(-1+b)\left(\dfrac{1}{\mathrm{e}}-a\right)=0$，

又$f'(x)=(x+b+1)\mathrm{e}^x-a$，

所以$f'(-1)=\dfrac{b}{\mathrm{e}}-a=-1+\dfrac{1}{\mathrm{e}}$，

若$a=\dfrac{1}{\mathrm{e}}$，则$b=2-\mathrm{e}<0$，与$b>0$矛盾，故$a=1,b=1$.

(2)证明：由(1)可知

$f(x)=(x+1)(\mathrm{e}^x-1)$，$f(0)=0$，$f(-1)=0$，

由$m\leqslant 0$，可得$x\geqslant mx^2+x$，

令$g(x)=(x+1)(\mathrm{e}^x-1)-x$，

$g'(x)=(x+2)\mathrm{e}^x-2$，

令$t(x)=g'(x)$，则$t'(x)=(x+3)\mathrm{e}^x$，

当$x<-3$时，$t'(x)<0$，$g'(x)$单调递减，

且$g'(x)<0$；

当$x>-3$时，$t'(x)>0$，$g'(x)$单调递增，

且$g'(0)=0$，

所以$g(x)$在$(-\infty,0)$上单调递减，在$(0,+\infty)$上单调递增，且$g(0)=0$，

故$g(x)\geqslant g(0)=0$，$\therefore(x+1)(\mathrm{e}^x-1)\geqslant x\geqslant mx^2+x$，

故$f(x)\geqslant mx^2+x$.

18. **解**：(1)$\because a=1$，$\therefore f(x)=x^2-4x+2\ln x$，

$\therefore f'(x)=\dfrac{2x^2-4x+2}{x}(x>0)$，

$f(1)=-3$，$f'(1)=0$，$\therefore$切线方程为$y=-3$.

(2)$f'(x)=\dfrac{2x^2-2(a+1)x+2a}{x}=\dfrac{2(x-1)(x-a)}{x}(x>0)$，

令$f'(x)=0$得$x_1=a$，$x_2=1$，

当$0<a<1$时，在$x\in(0,a)$或$x\in(1,+\infty)$时，$f'(x)>0$，

在$x\in(a,1)$时，$f'(x)<0$，

$\therefore f(x)$的单调递增区间为$(0,a)$和$(1,+\infty)$，单调递减区间为$(a,1)$；

当$a=1$时，$f'(x)=\dfrac{2(x-1)^2}{x}\geqslant 0$，

$\therefore f(x)$的单调增区间为$(0,+\infty)$；

当$a>1$时，在$x\in(0,1)$或$x\in(a,+\infty)$时，$f'(x)>0$，

在$x\in(1,a)$时，$f'(x)<0$，

$\therefore f(x)$的单调增区间为$(0,1)$和$(a,+\infty)$，单调递减区间为$(1,a)$.

(3)由(2)可知，$f(x)$在区间$[1,\mathrm{e}]$上只可能有极小值点，

$\therefore f(x)$在区间$[1,\mathrm{e}]$上的最大值必在区间端点取到，

$\therefore f(1)=1-2(a+1)\leqslant 0$且$f(\mathrm{e})=\mathrm{e}^2-2(a+1)\mathrm{e}+2a\leqslant 0$，

解得$a\geqslant\dfrac{\mathrm{e}^2-2\mathrm{e}}{2\mathrm{e}-2}$.

故实数a的取值范围为$\left[\dfrac{\mathrm{e}^2-2\mathrm{e}}{2\mathrm{e}-2},+\infty\right)$.

19. **解**：(1)$f(x)$的定义域为$(0,+\infty)$，且$f'(x)=\dfrac{1}{x}-\dfrac{a(x+1)-ax}{(x+1)^2}=\dfrac{x^2+(2-a)x+1}{x(x+1)^2}$，

令$p(x)=x^2+(2-a)x+1$，

①$2-a\geqslant 0$即$a\leqslant 2$时，$p(x)>1$，

故$f'(x)>0$恒成立，所以$f(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增；

②当$\Delta=(2-a)^2-4\leqslant 0$即$0\leqslant a\leqslant 4$时，$f'(x)\geqslant 0$恒成立，所以$f(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增；

③当$a>4$时，由于$f'(x)=0$的两根为

$x=\dfrac{a-2\pm\sqrt{a^2-4a}}{2}>0$，

所以$f(x)$在$\left(0,\dfrac{a-2-\sqrt{a^2-4a}}{2}\right)$，

$\left(\dfrac{a-2+\sqrt{a^2-4a}}{2},+\infty\right)$上为增函数，

在$\left(\dfrac{a-2-\sqrt{a^2-4a}}{2},\dfrac{a-2+\sqrt{a^2-4a}}{2}\right)$上为减函数，

综上，$a\leqslant 4$时，函数$f(x)$在$(0,+\infty)$上为增函数；

$a>4$时，函数$f(x)$在$\left(0,\dfrac{a-2-\sqrt{a^2-4a}}{2}\right)$，

$\left(\dfrac{a-2+\sqrt{a^2-4a}}{2},+\infty\right)$上为增函数，

在$\left(\dfrac{a-2-\sqrt{a^2-4a}}{2},\dfrac{a-2+\sqrt{a^2-4a}}{2}\right)$上为减函数.

(2)证明：由(1)知$a>4$，且$x_1+x_2=a-2$，$x_1x_2=1$，

$\therefore f(x_1)+f(x_2)=\ln x_1-\dfrac{ax_1}{x_1+1}+\ln x_2-\dfrac{ax_2}{x_2+1}$

$=\ln(x_1x_2)-\dfrac{ax_1(x_2+1)+ax_2(x_1+1)}{(x_1+1)(x_2+1)}=-a$，

而$f\left(\dfrac{x_1+x_2}{2}\right)=f\left(\dfrac{a-2}{2}\right)$，

即$\ln\dfrac{a-2}{2}-\dfrac{a\cdot\frac{a-2}{2}}{\frac{a-2}{2}+1}=\ln\dfrac{a-2}{2}-(a-2)$，

$\therefore f\left(\dfrac{x_1+x_2}{2}\right)-\dfrac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$

$=\ln\dfrac{a-2}{2}-a+2+\dfrac{a}{2}=\ln\dfrac{a-2}{2}-\dfrac{a}{2}+2$，

设$h(a)=\ln\dfrac{a-2}{2}-\dfrac{a}{2}+2(a>4)$，

则$h'(a)=\dfrac{2}{a-2}\cdot\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}=\dfrac{4-a}{2(a-2)}<0$，

所以$h(a)$在$(4,+\infty)$上为减函数，

又$h(4)=0$，所以$h(a)<0$，

所以$f\left(\dfrac{x_1+x_2}{2}\right)<\dfrac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$.

20. **解**：(1)$\because f(x)$是**R**上的奇函数，$\therefore f(-x)=-f(x)$，

即$-ax^3-cx+d=-ax^3-cx-d$，$\therefore d=-d$，

$\therefore d=0$.

$\therefore f(x)=ax^3+cx$，$f'(x)=3ax^2+c$，

又当$x=1$时，$f(x)$取得极值-2，

$\therefore\begin{cases}f(1)=-2,\\f'(1)=0,\end{cases}$即$\begin{cases}a+c=-2,\\3a+c=0,\end{cases}$解得$\begin{cases}a=1,\\c=-3,\end{cases}$

$\therefore f(x)=x^3-3x$.

(2)$f'(x)=3x^2-3=3(x+1)(x-1)$，

令$f'(x)=0$，得$x=\pm 1$，

当$-1<x<1$时，$f'(x)<0$，函数$f(x)$单调递减；

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

当 $x<-1$ 或 $x>1$ 时，$f'(x)>0$，函数 $f(x)$ 单调递增，
∴函数 $f(x)$ 的递增区间是 $(-\infty,-1)$ 和 $(1,+\infty)$；
递减区间为 $(-1,1)$.
因此，$f(x)$ 在 $x=-1$ 处取得极大值，且极大值为 $f(-1)=2$.
(3)证明：由(2)知，函数 $f(x)$ 在区间 $[-1,1]$ 上单调递减，
且 $f(x)$ 在区间 $[-1,1]$ 上的最大值为 $M=f(-1)=2$.
最小值为 $m=f(1)=-2$.
∴对任意 x_1、$x_2\in(-1,1)$，
$|f(x_1)-f(x_2)|<M-m=4$ 成立.
即对任意 x_1、$x_2\in(-1,1)$，
不等式 $|f(x_1)-f(x_2)|<4$ 恒成立.

21. **证明**：(1)函数 $f(x)$ 的导函数 $f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}-\frac{1}{x}$，

由 $f'(x_1)=f'(x_2)$ 得

$$\frac{1}{2\sqrt{x_1}}-\frac{1}{x_1}=\frac{1}{2\sqrt{x_2}}-\frac{1}{x_2},$$

因为 $x_1\neq x_2$，所以 $\frac{1}{\sqrt{x_1}}+\frac{1}{\sqrt{x_2}}=\frac{1}{2}$.

由基本不等式得

$$\frac{1}{2}\sqrt{x_1x_2}=\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}\geqslant 2\sqrt[4]{x_1x_2},$$

因为 $x_1\neq x_2$，所以 $x_1x_2>256$.

由题意得 $f(x_1)+f(x_2)=\sqrt{x_1}-\ln x_1+\sqrt{x_2}-\ln x_2=\frac{1}{2}\sqrt{x_1x_2}-\ln(x_1x_2)$.

设 $g(x)=\frac{1}{2}\sqrt{x}-\ln x$，

则 $g'(x)=\frac{1}{4x}(\sqrt{x}-4)$，

所以

x	$(0,16)$	16	$(16,+\infty)$
$g'(x)$	$-$	0	$+$
$g(x)$	↘	$2-4\ln 2$	↗

所以 $g(x)$ 在 $[256,+\infty)$ 上单调递增，
故 $g(x_1x_2)>g(256)=8-8\ln 2$，
即 $f(x_1)+f(x_2)>8-8\ln 2$.

(2)令 $m=e^{-(|a|+k)}$，$n=\left(\frac{|a|+1}{k}\right)^2+1$，则

$f(m)-km-a>|a|+k-k-a\geqslant 0$，

$f(n)-kn-a<n\left(\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{a}{n}-k\right)\leqslant n\left(\frac{|a|+1}{\sqrt{n}}-k\right)<0$，

所以存在 $x_0\in(m,n)$ 使 $f(x_0)=kx_0+a$，
所以对于任意的 $a\in\mathbf{R}$ 及 $k\in(0,+\infty)$，
直线 $y=kx+a$ 与曲线 $y=f(x)$ 有公共点.

由 $f(x)=kx+a$ 得 $k=\frac{\sqrt{x}-\ln x-a}{x}$.

设 $h(x)=\frac{\sqrt{x}-\ln x-a}{x}$，

则 $h'(x)=\frac{\ln x-\frac{\sqrt{x}}{2}-1+a}{x^2}=\frac{-g(x)-1+a}{x^2}$，

其中 $g(x)=\frac{\sqrt{x}}{2}-\ln x$.

由(1)可知 $g(x)\geqslant g(16)$，又 $a\leqslant 3-4\ln 2$，
故 $-g(x)-1+a\leqslant -g(16)-1+a=-3+4\ln 2+a\leqslant 0$，
所以 $h'(x)\leqslant 0$，即函数 $h(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减，
因此方程 $f(x)-kx-a=0$ 至多 1 个实根.
综上，当 $a\leqslant 3-4\ln 2$ 时，对于任意 $k>0$，直线 $y=kx+a$ 与曲线 $y=f(x)$ 有唯一公共点.

22. **解**：(1)由 $f(x)=\frac{1}{4}x^3-x^2+x$ 得 $f'(x)=\frac{3}{4}x^2-2x+1$.

令 $f'(x)=1$，即 $\frac{3}{4}x^2-2x+1=1$，

得 $x=0$ 或 $x=\frac{8}{3}$.

又 $f(0)=0$，$f\left(\frac{8}{3}\right)=\frac{8}{27}$，

所以曲线 $y=f(x)$ 的斜率为 1 的切线方程是 $y=x$ 与 $y-\frac{8}{27}=x-\frac{8}{3}$，即 $y=x$ 与 $y=x-\frac{64}{27}$.

(2)证明：令 $g(x)=f(x)-x$，$x\in[-2,4]$.

由 $g(x)=\frac{1}{4}x^3-x^2$ 得 $g'(x)=\frac{3}{4}x^2-2x$.

令 $g'(x)=0$ 得 $x=0$ 或 $x=\frac{8}{3}$.

$g'(x)$，$g(x)$ 的变化情况如下：

x	-2	$(-2,0)$	0	$\left(0,\frac{8}{3}\right)$	$\frac{8}{3}$	$\left(\frac{8}{3},4\right)$	4
$g'(x)$		$+$		$-$		$+$	
$g(x)$	-6	↗	0	↘	$-\frac{64}{27}$	↗	0

所以 $g(x)$ 的最小值为 -6，最大值为 0.
故 $-6\leqslant g(x)\leqslant 0$，即 $x-6\leqslant f(x)\leqslant x$.
(3)由(2)知，
当 $a<-3$ 时，$M(a)\geqslant F(0)=|g(0)-a|=-a>3$；
当 $a>-3$ 时，$M(a)\geqslant F(-2)=|g(-2)-a|=6+a>3$；
当 $a=-3$ 时，$M(a)=3$.
综上，当 $M(a)$ 最小时，$a=-3$.

阶段测试二

1. 选 D　归纳推理是由部分到整体的推理；类比推理是由特殊到特殊的推理；演绎推理是由一般到特殊的推理.
2. 选 C　∵$a>b$，$|c|\geqslant 0$，∴$a|c|\geqslant b|c|$，故 C 正确.
3. A
4. 选 D　假设为“$\sqrt{2}+\sqrt{3}$ 不是无理数”，也就是“$\sqrt{2}+\sqrt{3}$ 是有理数”.
5. 选 C　圆的方程可以看作椭圆的特殊情况，即 $a=b$ 时，
∴可类比出椭圆的面积可能是 $S=\pi ab$.
6. 选 C　当 $n=k$ 时，左侧为 $\frac{1}{k+1}+\frac{1}{k+2}+\cdots+\frac{1}{2k}$，

当 $n=k+1$ 时，左侧为 $\frac{1}{k+2}+\frac{1}{k+3}+\cdots+\frac{1}{2k}+\frac{1}{2k+1}+\frac{1}{2(k+1)}$，

∴不等式的左侧增加的项为 $\frac{1}{2k+1}+\frac{1}{2(k+1)}-\frac{1}{k+1}$，故选 C.
7. 选 A　由已知，得 $f_1(x)=\cos x$，$f_2(x)=-\sin x$，$f_3(x)=-\cos x$，$f_4(x)=\sin x$，$f_5(x)=\cos x$，…，可以归纳出：
$f_{4n}=\sin x$，$f_{4n+1}(x)=\cos x$，$f_{4n+2}(x)=-\sin x$，$f_{4n+3}(x)=-\cos x(n\in\mathbf{N}^*)$.
∴$f_{2\,016}(x)=f_4(x)=\sin x$. 故选 A.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

8. 选 B　由已知可得 $S_1=1=1^3$，$S_2=8=2^3$，$S_3=27=3^3$，…，猜想 $S_n=n^3$.

9. 选 A　∵对 $\forall n\in\mathbf{N}^*$ 总有 $\boldsymbol{c}_n\parallel\boldsymbol{b}_n$，
则存在实数 $\lambda\neq0$，使 $\boldsymbol{c}_n=\lambda\boldsymbol{b}_n$，
∴$a_n=\lambda n$，∴$\{a_n\}$是等差数列. 故选 A.

10. 选 B　因为丁说“乙说的是事实”，所以乙与丁的说法一致，由于四人中有两人说真话，另外两人说的是假话，所以甲、丁相同，若乙说的是真话，可推测甲说的也是真的，所以甲、乙、丁三人说真话，与两人说真话不一致，因此乙说的是假的，即乙是小偷，甲、丙说法正确，乙、丁说法不正确. 故选 B.

11. 选 A　$f(x)=x^3+x$ 是奇函数，且在 $\mathbf{R}$ 上是增函数，
由 $a+b>0$ 得 $a>-b$，
∴$f(a)>f(-b)$，即 $f(a)+f(b)>0$，
同理 $f(a)+f(c)>0$，$f(b)+f(c)>0$，
∴$f(a)+f(b)+f(c)>0$. 故选 A.

12. 选 A　$f(-x)=\ln(1-x)-\ln(1+x)=-f(x)$，故①正确；因为 $f(x)=\ln(1+x)-\ln(1-x)=\ln\dfrac{1+x}{1-x}$，又当 $x\in(-1,1)$ 时，$\dfrac{2x}{1+x^2}\in(-1,1)$，所以 $f\left(\dfrac{2x}{1+x^2}\right)=\ln\dfrac{1+\dfrac{2x}{1+x^2}}{1-\dfrac{2x}{1+x^2}}=\ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)^2=2\ln\dfrac{1+x}{1-x}=2f(x)$，故②正确；当 $x\in[0,1)$ 时，$|f(x)|\geqslant2|x|\Leftrightarrow f(x)-2x\geqslant0$，令 $g(x)=f(x)-2x=\ln(1+x)-\ln(1-x)-2x(x\in[0,1))$，因为 $g'(x)=\dfrac{1}{1+x}+\dfrac{1}{1-x}-2=\dfrac{2x^2}{1-x^2}>0$，所以 $g(x)$ 在区间 $[0,1)$ 上单调递增，$g(x)=f(x)-2x\geqslant g(0)=0$，即 $f(x)\geqslant2x$，又 $f(x)$ 与 $y=2x$ 都为奇函数，所以 $|f(x)|\geqslant2|x|$ 成立，故③正确，故选 A.

13. **解析**：由已知可归纳如下：

$$f_1(x)=\frac{x}{(2^1-1)x+2^1},$$

$$f_2(x)=\frac{x}{(2^2-1)x+2^2},$$

$$f_3(x)=\frac{x}{(2^3-1)x+2^3},$$

$$f_4(x)=\frac{x}{(2^4-1)x+2^4},$$

…，

$$f_n(x)=\frac{x}{(2^n-1)x+2^n}.$$

答案：$\dfrac{x}{(2^n-1)x+2^n}$

14. **解析**：如果 $\triangle EFG$ 是三棱锥 $P-ABC$ 的中截面，则平面 $EFG\parallel$ 平面 ABC，且 $S_{\triangle EFG}=\dfrac{1}{4}S_{\triangle ABC}$.

答案：$\triangle EFG$ 是三棱锥 $P-ABC$ 的中截面　平面 $EFG\parallel$ 平面 ABC，且 $S_{\triangle EFG}=\dfrac{1}{4}S_{\triangle ABC}$

15. **解析**：从第三行起，每行第 2 个数都是上一行两个数的和，
∴第 7 行的第 2 个数是 $6+16=22$，
第 8 行的第 2 个数是 $7+22=29$，
第 9 行的第 2 个数是 $8+29=37$，
第 10 行的第 2 个数是 $9+37=46$.
答案：46

16. **解析**：根据所给等式 $1^3=1$，$1^3+2^3=3^2=(1+2)^2$，$1^3+2^3+3^3=6^2=(1+2+3)^2$，$1^3+2^3+3^3+4^3=10^2=(1+2+3+4)^2$，…，可以看出，等式左边各项幂的底数的和等于右边的幂的底数，推测：$1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3=(1+2+\cdots+n)^2=\dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$.
答案：$\dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$

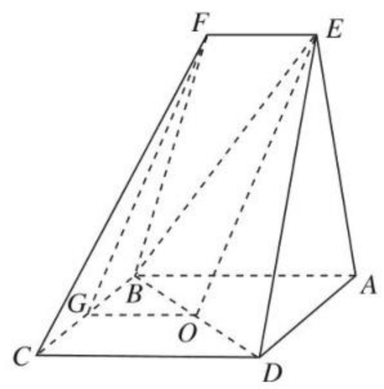
17. **解**：(1)设等差数列公差为 d，
则 $3a_1+\dfrac{3\times2}{2}d=9+3\sqrt{2}$，
解得 $d=2$，
∴$a_n=1+\sqrt{2}+(n-1)\times2=2n+\sqrt{2}-1$，
$S_n=\dfrac{1+\sqrt{2}+2n+\sqrt{2}-1}{2}n=n(n+\sqrt{2})$.

(2)$b_n=\dfrac{S_n}{n}=n+\sqrt{2}$. 用反证法证明如下：
设 b_n，b_m，b_k 成等比数列（m，n，k 互不相等），
则 $b_nb_k=b_m^2$，即 $(n+\sqrt{2})(k+\sqrt{2})=(m+\sqrt{2})^2$，
整理得 $nk-m^2=\sqrt{2}(2m-n-k)$，
易知 $2m\neq n+k$，所以左边为有理数，右边是无理数，矛盾，
故$\{b_n\}$中任意不同三项都不可能成等比数列.

18. **解**：(1)∵$a_1=1$，$a_{n+1}=2a_n+1(n\in\mathbf{N}^*)$，
∴$a_2=2a_1+1=3$，$a_3=2a_2+1=7$，$a_4=2a_3+1=15$，$a_5=2a_4+1=31$.

(2)由(1)归纳猜想 $a_n=2^n-1(n\in\mathbf{N}^*)$.
证明：①当 $n=1$ 时，$a_1=2^1-1=1$，等式成立；
②假设 $n=k$ 时，$a_k=2^k-1$，
那么，$n=k+1$ 时，
$a_{k+1}=2a_k+1=2(2^k-1)+1=2^{k+1}-2+1=2^{k+1}-1$，
∴$n=k+1$ 时，等式成立.
由①②可知，对任意 $n\in\mathbf{N}^*$，$a_n=2^n-1$ 恒成立.

19. **证明**：(1)如图所示取 BD 的中点为 O，连接 OE，OG.



在△BCD 中，因为 G 是 BC 的中点，
所以 $OG\parallel DC$，且 $OG=\dfrac{1}{2}DC=1$，
又因为 $EF\parallel AB$，$AB\parallel DC$，
所以 $EF\parallel OG$ 且 $EF=OG$，
所以四边形 $OGFE$ 是平行四边形，
所以 $FG\parallel OE$.
又 $FG\not\subset$平面 BED，$OE\subset$平面 BED，
所以 $FG\parallel$平面 BED.
(2)在△ABD 中，$AD=1$，$AB=2$，$\angle BAD=60^\circ$，
由余弦定理，可得 $BD=\sqrt{3}$，
所以 $\angle ADB=90^\circ$，即 $BD\perp AD$，
因为平面 $AED\perp$平面 $ABCD$，
$BD\subset$平面 $ABCD$，

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

平面 $AED\cap$平面 $ABCD=AD$,
所以 $BD\perp$平面 AED.
因为 $BD\subset$平面 BED,
所以平面 $BED\perp$平面 AED.

20. **解**:类似的性质为:若 M、N 是双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ 上关于原点对称的两个点,点 P 是双曲线上任意一点,若直线 PM、PN 的斜率都存在,并记为 k_{PM}、k_{PN},
那么 k_{PM} 与 k_{PN} 之积是与点 P 的位置无关的定值.
证明如下:设点 M、P 的坐标为 (m,n)、(x,y),则 $N(-m,-n)$.
∵点 $M(m,n)$ 在已知双曲线上,
$\therefore n^2=\frac{b^2}{a^2}m^2-b^2$.

同理 $y^2=\frac{b^2}{a^2}x^2-b^2$.

则 $k_{PM}\cdot k_{PN}=\frac{y-n}{x-m}\cdot\frac{y+n}{x+m}=\frac{y^2-n^2}{x^2-m^2}$

$=\frac{b^2}{a^2}\cdot\frac{x^2-m^2}{x^2-m^2}=\frac{b^2}{a^2}$(定值).

21. **解**:(1)$f(4)=37$,$f(5)=61$,由于 $f(2)-f(1)=7-1=6$,
$f(3)-f(2)=19-7=2\times6$,
$f(4)-f(3)=37-19=3\times6$,
$f(5)-f(4)=61-37=4\times6$,
…
$f(n)-f(n-1)=6(n-1)$.
∴上述等式左、右两侧分别相加得:
$f(n)-f(1)=6[1+2+3+\cdots+(n-1)]$,
$\therefore f(n)=1+6\times\frac{(n-1)n}{2}$,
即 $f(n)=3n^2-3n+1$.
(2)证明:由(1)知,当 $k\geqslant2$ 时,
$\frac{1}{f(k)}=\frac{1}{3k^2-3k+1}<\frac{1}{3k^2-3k}=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k}\right)$,
$\therefore\frac{1}{f(1)}+\frac{1}{f(2)}+\frac{1}{f(3)}+\cdots+\frac{1}{f(n)}<f(1)+\frac{1}{3}\left[\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)\right]$
$=1+\frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{n}\right)<1+\frac{1}{3}=\frac{4}{3}$.

22. **解**:(1)函数 $f(x)=e^x-x-1$ 的定义域为 $(-\infty,+\infty)$,
$f'(x)=e^x-1$,
由 $f'(x)<0$ 得 $x<0$,$f'(x)>0$ 得 $x>0$,
所以函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 上单调递减,在 $(0,+\infty)$ 上单调递增,
所以函数 $f(x)$ 有极小值 $f(0)=0$,无极大值.
(2)证明:由(1)可知,$e^x-x-1\geqslant0$,
当且仅当 $x=0$ 时等号成立,
而 $x\in(0,1)$,所以 $e^x-x-1>0$,
即 $e^x>x+1>1$,所以 $\frac{1}{e^x}<\frac{1}{x+1}$,
要证明 $g(x)=e^x(ax+x\cos x+1)>1$,
只需证明 $ax+x\cos x+1>\frac{1}{e^x}$,
而 $\frac{1}{e^x}<\frac{1}{x+1}$,
故只要证明 $ax+x\cos x+1>\frac{1}{x+1}$,
即证 $ax+x\cos x+\frac{x}{x+1}>0$,
又 $x\in(0,1)$,所以只要证明 $a+\cos x+\frac{1}{x+1}>0$.
令 $h(x)=a+\cos x+\frac{1}{x+1}$,$x\in(0,1)$,$a>-1$,
则 $h'(x)=-\sin x-\frac{1}{(x+1)^2}<0$,
所以 $h(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递减,
$h(x)>h(1)=a+\cos1+\frac{1}{2}>a+\cos\frac{\pi}{3}+\frac{1}{2}=a+1>0$,
即 $a+\cos x+\frac{1}{x+1}>0$,
所以证得 $g(x)>1$.

阶段测试三

1. 选 A $\frac{z+2}{z^2+z}=\frac{1+i}{-1-i}=-1$,故选 A.
2. 选 C $z=-3+2i$,$\bar{z}=-3-2i$,
$\bar{z}$ 对应点为 $(-3,-2)$,位于第三象限,选 C.
3. 选 D $z=2+i$,$\bar{z}=2-i$,$z\cdot\bar{z}=2^2-i^2=4+1=5$. 故选 D.
4. 选 C ∵$z=(1-i)(2-i)=1-3i$,∴$\bar{z}=1+3i$,∴$\bar{z}$ 的虚部为 3,故选 C.
5. 选 A $\frac{7+i}{3+4i}=\frac{(7+i)(3-4i)}{(3+4i)(3-4i)}=\frac{21+3i-28i+4}{25}=1-i$.
6. 选 C $z=\frac{3-i}{1+2i}=\frac{(3-i)(1-2i)}{(1+2i)(1-2i)}=\frac{3-2-7i}{5}=\frac{1}{5}-\frac{7}{5}i$,
$|z|=\sqrt{\frac{1}{25}+\frac{49}{25}}=\sqrt{2}$,故选 C.
7. 选 A $z=\frac{2i}{1+i}=\frac{2i(1-i)}{2}=i-i^2=1+i$,∴$\bar{z}=1-i$,故选 A.
8. 选 D 设 $z=a+bi(a,b\in\mathbf{R})$,则 $\sqrt{a^2+b^2}-(a-bi)=\frac{10}{1-2i}$.
即 $(\sqrt{a^2+b^2}-a)+bi=2+4i$.
$\therefore\begin{cases}\sqrt{a^2+b^2}-a=2,\\ b=4,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=3,\\ b=4,\end{cases}$ ∴$z=3+4i$.
9. 选 D 由已知 $(x+2i)i=-2+xi=y-i$,∴$\begin{cases}x=-1,\\ y=-2,\end{cases}$
∴$|x-yi|=|-1+2i|=\sqrt{(-1)^2+2^2}=\sqrt{5}$,故选 D.
10. 选 A 由图知 $z_1=1+2i$,$z_2=1-i$,则 $z_1+z_2=2+i$,其对应点为 $(2,1)$,位于第一象限.
11. 选 B ∵$z(1-i)^2=1+i$,
∴$z=\frac{1+i}{(1-i)^2}=\frac{1+i}{-2i}=\frac{(1+i)\cdot i}{-2i^2}=\frac{-1+i}{2}=-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i$,
∴z 在复平面内所对应的点的坐标为 $\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$,位于第二象限. 故选 B.
12. 选 B 因为复数 $z_1=3+2i$ 是方程 $z^2-6z+b=0(b\in\mathbf{R})$ 的根,由实系数一元二次方根虚根成对原理可知,$z_2=3-2i$ 为方程的另一根,则 $b=(3+2i)(3-2i)=13$,故选 B.
13. **解析**:因为 $z=\frac{|3+4i|-2i}{2}$,所以 $z=\frac{5-2i}{2}=\frac{5}{2}-i$,
所以复数 z 的共轭复数是 $\frac{5}{2}+i$.
答案:$\frac{5}{2}+i$
14. **解析**:$(a+2i)(1+i)=(a-2)+(a+2)i$,实部为 0,
∴$a-2=0$,解得 $a=2$.
答案:2

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

15. **解析**：$z=\dfrac{1}{1+\mathrm{i}}=\dfrac{1-\mathrm{i}}{(1+\mathrm{i})(1-\mathrm{i})}=\dfrac{1-\mathrm{i}}{2}=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}\mathrm{i}$，

$\therefore |z|=\sqrt{\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{4}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

答案：$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

16. **解析**：$\because \dfrac{1+\mathrm{i}}{z}=2\mathrm{i}^3+2\mathrm{i}^4=2-2\mathrm{i}$，

$\therefore z=\dfrac{1+\mathrm{i}}{2-2\mathrm{i}}=\dfrac{(1+\mathrm{i})^2}{2(1-\mathrm{i})(1+\mathrm{i})}=\dfrac{2\mathrm{i}}{4}=\dfrac{\mathrm{i}}{2}$.

答案：$\dfrac{\mathrm{i}}{2}$

17. **解**：$\because z=x+y\mathrm{i}$，且 $1\leqslant|z|\leqslant\sqrt{2}$，

$\therefore 1\leqslant\sqrt{x^2+y^2}\leqslant\sqrt{2}$，$\therefore 1\leqslant x^2+y^2\leqslant 2$，

令 $\omega=m+n\mathrm{i}(m,n\in\mathbf{R})$，

$\because \omega=x+y+(x-y)\mathrm{i}$，

$\therefore \begin{cases}x+y=m,\\ x-y=n,\end{cases}$ 两式平方相加，

得 $2(x^2+y^2)=m^2+n^2$，

$\therefore 2\leqslant m^2+n^2\leqslant 4$，

$\therefore \omega$ 的对应点的集合表示以原点为圆心，分别以 $\sqrt{2}$ 和 2 为半径的两圆所夹的圆环，

其面积 $S=\pi\cdot 2^2-\pi\cdot(\sqrt{2})^2=2\pi$.

18. **解**：(1)要使复数 z 为实数，需满足 $\begin{cases}m^2-2m-2>0,\\ m^2+3m+2=0,\end{cases}$

解得 $m=-2$ 或 -1.

即当 $m=-2$ 或 -1 时，z 是实数.

(2)要使复数 z 为纯虚数，需满足 $\begin{cases}m^2-2m-2=1,\\ m^2+3m+2\neq 0,\end{cases}$

解得 $m=3$. 即当 $m=3$ 时，z 是纯虚数.

19. **解**：设 $z=x+y\mathrm{i}(x,y\in\mathbf{R})$，

则 $|z|^2=x^2+y^2$，$\overline{z}=x-y\mathrm{i}$，

$\because |z|^2+(z+\overline{z})\mathrm{i}=\dfrac{3-\mathrm{i}}{2+\mathrm{i}}$

$=\dfrac{(3-\mathrm{i})(2-\mathrm{i})}{(2+\mathrm{i})(2-\mathrm{i})}=\dfrac{5-5\mathrm{i}}{5}=1-\mathrm{i}$，

$\therefore x^2+y^2+2x\mathrm{i}=1-\mathrm{i}$，

$\therefore \begin{cases}x^2+y^2=1,\\ 2x=-1,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x=-\dfrac{1}{2},\\ y=\pm\dfrac{\sqrt{3}}{2},\end{cases}$

$\therefore z=-\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$ 或 $z=-\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$.

20. **解**：$\because z=1+\mathrm{i}$，

$\therefore z^2=(1+\mathrm{i})^2=1+2\mathrm{i}+\mathrm{i}^2=2\mathrm{i}$.

$\therefore z^2+az+b=2\mathrm{i}+a(1+\mathrm{i})+b$

$=(a+b)+(a+2)\mathrm{i}$，

$z^2-z+1=2\mathrm{i}-(1+\mathrm{i})+1=\mathrm{i}$.

$\therefore$ 由已知可得 $\dfrac{(a+b)+(a+2)\mathrm{i}}{\mathrm{i}}=1-\mathrm{i}$.

则 $(a+b)+(a+2)\mathrm{i}=1+\mathrm{i}$.

$\therefore \begin{cases}a+b=1,\\ a+2=1,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=-1,\\ b=2.\end{cases}$

$\therefore$ 实数 a,b 的值分别为 $-1,2$.

21. **解**：(1)设 $z=x+y\mathrm{i}(x,y\in\mathbf{R},y\neq 0)$，

则 $z-2=x-2+y\mathrm{i}$，由 $z-2$ 为纯虚数得 $x=2$，所以 $z=2+y\mathrm{i}$，则 $z+\dfrac{9}{z-2}=2+y\mathrm{i}+\dfrac{9}{y\mathrm{i}}=2+\left(y-\dfrac{9}{y}\right)\mathrm{i}\in\mathbf{R}$，得 $y-\dfrac{9}{y}=0$，$y=\pm 3$，所以 $z=2+3\mathrm{i}$ 或 $z=2-3\mathrm{i}$.

(2)因为 $z+\dfrac{9}{z-2}=x+y\mathrm{i}+\dfrac{9}{x+y\mathrm{i}-2}=x+\dfrac{9(x-2)}{(x-2)^2+y^2}+\left[y-\dfrac{9y}{(x-2)^2+y^2}\right]\mathrm{i}\in\mathbf{R}$，所以 $y-\dfrac{9y}{(x-2)^2+y^2}=0$，

因为 $y\neq 0$，所以 $(x-2)^2+y^2=9$，

由 $(x-2)^2<9$ 得 $x\in(-1,5)$，

所以 $|z-4|=|x+y\mathrm{i}-4|=\sqrt{(x-4)^2+y^2}$

$=\sqrt{(x-4)^2+9-(x-2)^2}$

$=\sqrt{21-4x}\in(1,5)$.

22. **解**：(1)设复数 $z=a+b\mathrm{i}$，$(a,b\in\mathbf{R})$，则 $z+3-\mathrm{i}=3+a+(b-1)\mathrm{i}$，$\dfrac{z}{1+\mathrm{i}}=\dfrac{a+b\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}=\dfrac{a+b+(b-a)\mathrm{i}}{2}$，

$\because z+3-\mathrm{i}$ 和 $\dfrac{z}{1+\mathrm{i}}$ 均为实数，$\therefore \begin{cases}b-1=0,\\ \dfrac{b-a}{2}=0,\end{cases}$ 解得 $a=b=1$，则所求复数 $z=1+\mathrm{i}$.

(2)由(1)知 $z=1+\mathrm{i}$，所以 $\overline{z}=1-\mathrm{i}$，$z^2=(1+\mathrm{i})^2=2\mathrm{i}$，

则复数 $z,\overline{z},z^2$ 在复平面上对应的点分别是 $A(1,1)$，$B(1,-1)$，$C(0,2)$，

所以 $S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}\times 2\times 1=1$，即 $\triangle ABC$ 的面积为 1.

选修 2－2 综合测评

1. 选 A　$\because z=\dfrac{2}{1-\mathrm{i}}=\dfrac{2(1+\mathrm{i})}{(1-\mathrm{i})(1+\mathrm{i})}=1+\mathrm{i}$，$\therefore \overline{z}=1-\mathrm{i}$，

$\therefore z^2-z\cdot\overline{z}=(1+\mathrm{i})^2-(1+\mathrm{i})(1-\mathrm{i})=2\mathrm{i}-2=-2+2\mathrm{i}$.

2. 选 D　按照演绎推理的三段论模式可得，已知指数函数 $y=a^x(0<a<1)$ 是减函数，因为函数 $f(x)=\dfrac{1}{3^x}\left(0<\dfrac{1}{3}<1\right)$ 是指数函数，所以函数 $f(x)=\dfrac{1}{3^x}$ 是减函数，即排序正确的是②→③→①，故选 D.

3. 选 C　由 $f(x)=x^2$ 与 $g(x)=2x$ 得 $x^2=2x$，得 $x=0$ 或 $x=2$，

$\therefore S=\int_0^2(2x-x^2)\,\mathrm{d}x=\left(x^2-\dfrac{1}{3}x^3\right)\Big|_0^2=4-\dfrac{8}{3}=\dfrac{4}{3}$，故选 C.

4. 选 D　当 $t=\dfrac{1}{2}$ 或 $t=-3$ 时，$2t^2+5t-3=0$，此时 z 为纯虚数，C 不正确；

当 $-3<t<\dfrac{1}{2}$ 时，$2t^2+5t-3<0$，

又 $t^2-2t+2>0$，

此时 z 对应的点 Z 在第二象限，

当 $t<-3$ 或 $t>\dfrac{1}{2}$ 时，$2t^2+5t-3>0$，

又 $t^2-2t+2>0$，

此时 z 对应的点 Z 在第一象限，

A、B 不正确；

$\because t^2-2t+2>0$ 恒成立，$\therefore z$ 是虚数，D 正确. 故选 D.

5. 选 A　根据导函数的图象知，在 x_2 处导函数由大于 0 变为小于 0，此时原函数有极大值，在 x_3 处导函数由小于 0 变为大于 0，此时原函数有极小值，在 x_1，x_4 处导函数没有正负变化无极值点，故选 A.

6. 选 D　$\because$ 函数 $f(x)=x\cos x+(a-2)x\sin x+ax$ 为奇函数，

$\therefore a=2$.

$\therefore f(x)=x\cos x+2x$，

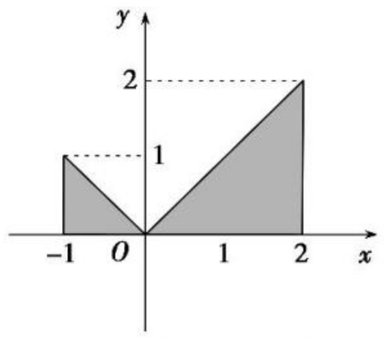
$\therefore f'(x)=\cos x-x\sin x+2$，

$\therefore f'(0)=\cos 0+2=3$，

$\therefore$ 曲线 $y=f(x)$ 在 $(0,0)$ 处的切线方程为 $y=3x$. 故选 D.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

7. 选 A　如图，$\int_{-1}^{2}|x|\mathrm{d}x=\frac{1}{2}+2=\frac{5}{2}$，故选 A.



8. 选 C　$\because f(x)=x^3+ax^2+bx+a^2$，

$\therefore f'(x)=3x^2+2ax+b$.

$\because f(x)$在 $x=1$ 处取得极值 10，

$\therefore \begin{cases} f'(1)=0, \\ f(1)=10, \end{cases}$ 即 $\begin{cases} 3+2a+b=0, \\ 1+a+b+a^2=10, \end{cases}$

解得 $\begin{cases} a=-3, \\ b=3 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} a=4, \\ b=-11, \end{cases}$

经检验 $\begin{cases} a=-3, \\ b=3 \end{cases}$ 时函数 $f(x)$在 **R** 上单调递增，无极值，不符合题意，

当 $\begin{cases} a=4, \\ b=-11 \end{cases}$ 时函数 $f(x)$在 $x=1$ 处取得极小值 10，

$\therefore \begin{cases} a=4, \\ b=-11, \end{cases}$ 故选 C.

9. 选 C　$f'(x)=x^2+2ax+5$.

由 $f'(x)\geqslant 0$ 在$[1,3]$上恒成立，或 $f'(x)\leqslant 0$ 在$[1,3]$上恒成立，得 $a\geqslant\frac{-x^2-5}{2x}$或 $a\leqslant\frac{-x^2-5}{2x}$，

设 $g(x)=\frac{-x^2-5}{2x}=-\left(\frac{x}{2}+\frac{5}{2x}\right)$，

则 $g(x)$ 在$[1,3]$上的值域为$[-3,-\sqrt{5}]$，

$\therefore a\leqslant -3$ 或 $a\geqslant -\sqrt{5}$.

10. 选 D　由复数的几何意义知，①正确；设球的内接长方体的长、宽、高分别为 a、b、c，则 $a^2+b^2+c^2=(2R)^2$，由基本不等式 $a^2+b^2+c^2\geqslant 3\sqrt[3]{a^2b^2c^2}$，即 $abc\leqslant\left(\frac{a^2+b^2+c^2}{3}\right)^{\frac{3}{2}}=\left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{3}{2}}\cdot R^3$，当且仅当$a=b=c$ 时，等式成立，即正方体的体积最大，②正确；球的体积 $V=\frac{4}{3}\pi R^3$，则 $V'=4\pi R^2$，③正确，综上所述，三个推理均正确. 故选 D.

11. 选 A　可知函数 $f(x)+f(-x)=x^3-\ln(\sqrt{x^2+1}-x)+(-x)^3-\ln(\sqrt{x^2+1}+x)=0$，所以函数为奇函数，同时 $f'(x)=3x^2+\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}>0$，$f(x)$是递增函数，

$\frac{f(a)+f(b)}{a+b}=\frac{f(a)-f(-b)}{a-(-b)}$，

所以 $\frac{f(a)+f(b)}{a+b}>0$，所以选 A.

12. 选 B　由题意得 $f_1(x)=(2x+2)\mathrm{e}^x+(x^2+2x)\mathrm{e}^x=(x^2+4x+2)\mathrm{e}^x$，

$f_2(x)=(2x+4)\mathrm{e}^x+(x^2+4x+2)\mathrm{e}^x=(x^2+6x+6)\mathrm{e}^x$，

$f_3(x)=(2x+6)\mathrm{e}^x+(x^2+6x+6)\mathrm{e}^x=(x^2+8x+12)\mathrm{e}^x$，

…

由此可得 $C_1=2$，$C_2=6$，$C_3=12$，故可归纳得 $C_n=n(n+1)$，

$\therefore\frac{1}{C_n}=\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$，

$\therefore S_n=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=1-\frac{1}{n+1}$，

由题意得$|S_n-1|=\frac{1}{n+1}\leqslant\frac{1}{2\,019}$，解得 $n\geqslant 2\,018$.

$\therefore n$ 的最小整数值为 2 018. 故选 B.

13. **解析**：$z=\frac{3-\mathrm{i}}{|2-\mathrm{i}|}=\frac{3-\mathrm{i}}{\sqrt{5}}$，

$\therefore|z|=\frac{|3-\mathrm{i}|}{\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{10}}{\sqrt{5}}=\sqrt{2}$.

答案：$\sqrt{2}$

14. **解析**：由所给等式推测 $m=6$，$p=5$，$\therefore m+p=11$.

答案：11

15. **解析**：$\because z_1<z_2$，$\therefore z_1$ 与 z_2 均为实数，

$\therefore \begin{cases} m^2-3m=0, \\ m^2-4m+3=0, \end{cases}$ $\therefore m=3$.

答案：3

16. **解析**：(1)依题意，$f'(x)=x^2-x+3$，

$\therefore f''(x)=2x-1$，

由 $2x-1=0$ 得 $x=\frac{1}{2}$，

又 $f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{3}\times\frac{1}{8}-\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}+3\times\frac{1}{2}-\frac{5}{12}=1$，

$\therefore$函数 $f(x)$的对称中心为 $\left(\frac{1}{2},1\right)$.

(2)由 $f(x)$的对称中心为 $\left(\frac{1}{2},1\right)$，

得 $f\left(\frac{1}{7}\right)+f\left(\frac{6}{7}\right)=2$，$f\left(\frac{2}{7}\right)+f\left(\frac{5}{7}\right)=2$，

$f\left(\frac{3}{7}\right)+f\left(\frac{4}{7}\right)=2$，

$\therefore f\left(\frac{1}{7}\right)+f\left(\frac{2}{7}\right)+f\left(\frac{3}{7}\right)+f\left(\frac{4}{7}\right)+f\left(\frac{5}{7}\right)+f\left(\frac{6}{7}\right)=6$.

答案：(1)$\left(\frac{1}{2},1\right)$　(2)6

17. **解**：(1)选择②式，计算如下：

$\sin^2 15^\circ+\cos^2 15^\circ-\sin 15^\circ\cos 15^\circ$

$=1-\frac{1}{2}\sin 30^\circ=1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$.

(2)三角恒等式为 $\sin^2\alpha+\cos^2(30^\circ-\alpha)-\sin\alpha\cos(30^\circ-\alpha)=\frac{3}{4}$.

证法一：

$\sin^2\alpha+\cos^2(30^\circ-\alpha)-\sin\alpha\cos(30^\circ-\alpha)$

$=\sin^2\alpha+(\cos 30^\circ\cos\alpha+\sin 30^\circ\sin\alpha)^2-\sin\alpha(\cos 30^\circ\cos\alpha+\sin 30^\circ\sin\alpha)$

$=\sin^2\alpha+\frac{3}{4}\cos^2\alpha+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\alpha\cos\alpha+\frac{1}{4}\sin^2\alpha-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\alpha\cos\alpha-\frac{1}{2}\sin^2\alpha$

$=\frac{3}{4}\sin^2\alpha+\frac{3}{4}\cos^2\alpha=\frac{3}{4}$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

证法二：

$\sin^2\alpha+\cos^2(30°-\alpha)-\sin\alpha\cos(30°-\alpha)$

$=\frac{1-\cos 2\alpha}{2}+\frac{1+\cos(60°-2\alpha)}{2}-\sin\alpha(\cos 30°\cos\alpha+\sin 30°\sin\alpha)$

$=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos 2\alpha+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}(\cos 60°\cos 2\alpha+\sin 60°\sin 2\alpha)-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\alpha\cos\alpha-\frac{1}{2}\sin^2\alpha$

$=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos 2\alpha+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\cos 2\alpha+\frac{\sqrt{3}}{4}\sin 2\alpha-\frac{\sqrt{3}}{4}\sin 2\alpha-\frac{1}{4}(1-\cos 2\alpha)$

$=1-\frac{1}{4}\cos 2\alpha-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\cos 2\alpha=\frac{3}{4}$.

18. **解**：(1)∵$x^2-y^2+2xy\mathrm{i}=2\mathrm{i}$，$x,y\in\mathbf{R}$，

$\therefore\begin{cases}x^2-y^2=0,\\2xy=2,\end{cases}$解得$\begin{cases}x=1,\\y=1\end{cases}$或$\begin{cases}x=-1,\\y=-1.\end{cases}$

(2)∵关于 x 的方程 $3x^2-\frac{a}{2}x-1=(10-x-2x^2)\mathrm{i}$ 有实根，且 $a\in\mathbf{R}$，

$\therefore\begin{cases}3x^2-\frac{a}{2}x-1=0,\\10-x-2x^2=0,\end{cases}$

解得$\begin{cases}x=2,\\a=11\end{cases}$或$\begin{cases}x=-\frac{5}{2},\\a=-\frac{71}{5}.\end{cases}$

19. **解**：(1)由 $a_1=-\frac{2}{3}$，及 $S_n+\frac{1}{S_n}+2=a_n(n\geqslant 2)$ 可算得

$S_1=-\frac{2}{3}$，$S_2=-\frac{3}{4}$，$S_3=-\frac{4}{5}$，$S_4=-\frac{5}{6}$.

(2)由此猜想 S_n 的表达式是 $S_n=-\frac{n+1}{n+2}$.

下面用数学归纳法证明：

①由 $a_1=S_1=-\frac{2}{3}=-\frac{1+1}{1+2}$知，当 $n=1$ 时，等式成立；

②当 $n\geqslant 2$ 时，假设 $n=k(k\geqslant 1)$ 时等式成立，即 $S_k=-\frac{k+1}{k+2}$，那么，当 $n=k+1$ 时，由 $S_n+\frac{1}{S_n}+2=a_n(n\geqslant 2)$ 得 $S_{k+1}+\frac{1}{S_{k+1}}+2=a_{k+1}$，得 $-\frac{1}{S_{k+1}}=(S_{k+1}-a_{k+1})+2$，而 $S_k=S_{k+1}-a_{k+1}$，$\therefore-\frac{1}{S_{k+1}}=S_k+2=-\frac{k+1}{k+2}+2=\frac{k+3}{k+2}$，

$\therefore S_{k+1}=-\frac{k+2}{k+3}=-\frac{(k+1)+1}{(k+1)+2}$.

所以当 $n=k+1$ 时，等式成立.

综合①②可知，对任意的正整数 n，有 $S_n=-\frac{n+1}{n+2}$成立.

20. **证明**：假设 $\frac{1}{a}$，$\frac{1}{b}$，$\frac{1}{c}$ 成等差数列，则 $\frac{1}{a}+\frac{1}{c}=\frac{2}{b}$，

又∵a,b,c 成等差数列，

$\therefore a+c=2b$，$\therefore b=\frac{a+c}{2}$，

把 $b=\frac{a+c}{2}$代入 $\frac{1}{a}+\frac{1}{c}=\frac{2}{b}$，得 $(a-c)^2=0$，

$\therefore a=c$，$\therefore c-a=2d=0$，这与公差 $d\neq 0$ 矛盾，

$\therefore\frac{1}{a}$，$\frac{1}{b}$，$\frac{1}{c}$不可能是等差数列.

21. **解**：(1)由 $S_1=a_1=\frac{1}{2}\left(a_1+\frac{1}{a_1}\right)$，得 $a_1^2=1$，

因为 $a_n>0$，所以 $a_1=1$.

由 $S_2=a_1+a_2=\frac{1}{2}\left(a_2+\frac{1}{a_2}\right)$，

得 $a_2^2+2a_2-1=0$，所以 $a_2=\sqrt{2}-1$，

由 $S_3=a_1+a_2+a_3=\frac{1}{2}\left(a_3+\frac{1}{a_3}\right)$，

得 $a_3^2+2\sqrt{2}a_3-1=0$，所以 $a_3=\sqrt{3}-\sqrt{2}$.

(2)猜想 $a_n=\sqrt{n}-\sqrt{n-1}(n\in\mathbf{N}_+)$.

证明：①当 $n=1$ 时，

$a_1=\sqrt{1}-\sqrt{0}=1$，命题成立；

②假设 $n=k(k\geqslant 1,k\in\mathbf{N}_+)$时，

$a_k=\sqrt{k}-\sqrt{k-1}$成立，

则 $n=k+1$ 时，

$a_{k+1}=S_{k+1}-S_k$

$=\frac{1}{2}\left(a_{k+1}+\frac{1}{a_{k+1}}\right)-\frac{1}{2}\left(a_k+\frac{1}{a_k}\right)$，

即 $a_{k+1}=\frac{1}{2}\left(a_{k+1}+\frac{1}{a_{k+1}}\right)-\frac{1}{2}\left(\sqrt{k}-\sqrt{k-1}+\frac{1}{\sqrt{k}-\sqrt{k-1}}\right)=\frac{1}{2}\left(a_{k+1}+\frac{1}{a_{k+1}}\right)-\sqrt{k}$，

所以 $a_{k+1}^2+2\sqrt{k}a_{k+1}-1=0$.

所以 $a_{k+1}=\sqrt{k+1}-\sqrt{k}$，

则 $n=k+1$ 时，命题成立.

由①②知，$n\in\mathbf{N}_+$，$a_n=\sqrt{n}-\sqrt{n-1}$.

22. **解**：(1)函数 $f(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$，

$f'(x)=ae^x\ln x+\frac{a}{x}e^x-\frac{b}{x^2}e^{x-1}+\frac{b}{x}e^{x-1}$.

由题意可得 $f(1)=2$，$f'(1)=e$.

故 $a=1$，$b=2$.

(2)证明：由(1)知，$f(x)=e^x\ln x+\frac{2}{x}e^{x-1}$，

从而 $f(x)>1$ 等价于 $x\ln x>xe^{-x}-\frac{2}{e}$.

设函数 $g(x)=x\ln x$，则 $g'(x)=1+\ln x$.

所以当 $x\in\left(0,\frac{1}{e}\right)$时，$g'(x)<0$；

当 $x\in\left(\frac{1}{e},+\infty\right)$时，$g'(x)>0$.

故 $g(x)$ 在 $\left(0,\frac{1}{e}\right)$ 上单调递减，在 $\left(\frac{1}{e},+\infty\right)$ 上单调递增，

从而 $g(x)$在$(0,+\infty)$上的最小值为 $g\left(\frac{1}{e}\right)=-\frac{1}{e}$.

设函数 $h(x)=xe^{-x}-\frac{2}{e}$，则 $h'(x)=e^{-x}(1-x)$.

所以当 $x\in(0,1)$时，$h'(x)>0$；当 $x\in(1,+\infty)$时，$h'(x)<0$.

故 $h(x)$在$(0,1)$上单调递增，在$(1,+\infty)$上单调递减，

从而 $h(x)$在$(0,+\infty)$上的最大值为 $h(1)=-\frac{1}{e}$.

所以 $g(x)\geqslant-\frac{1}{e}\geqslant h(x)$，又因为等号无法同时取到，所以 $g(x)>h(x)$，即 $f(x)>1$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

责任编辑 李 莉 陈小彦
美术编辑 李 欣
封面设计 欣 羽

45 分钟
课时作业与单元测试

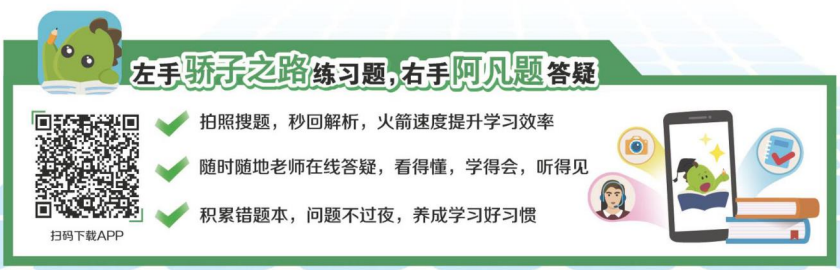
45FENZHONG KESHIZUOYEYUDANYUANCESHI SHUXUE

丛书科目

语文 数学 英语 物理 化学 生物 历史 地理 思想政治

同学们，你想了解丛书的更多信息吗？详情请登录 http://www.dfjc100.com

※ 各科配有教师用书及教学课件光盘 (word 文档可自主编辑)，英语配有原声磁带 / MP3 光盘。



手机扫一扫
获取配套学习资源

ISBN 978-7-202-08031-3
定价：30.00 元

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料