东方杰创®
DONGFANG JIECHUANG
让 学习更快乐，人生更精彩

骄子之路®
the Road to Pride
主　编：邓保沧

45分钟

课时作业与单元测试

活页
可拆开使用

教辅资料站

电子教辅　试卷练习
知识总结　备课资源

扫码关注获取更多学习资料

提升＝基础＋能力＋方法
课时作业　基础自测·知能提升
阶段检测　梯度练习·评估达标
答案与解析　全解全析·点拨精准

数学

选修 4-4　RJ·A

河北人民出版社

东方杰创®
DONGFANG JIECHUANG
让 学习更快乐，人生更精彩

骄子之路®
the Road to Pride
主　编：邓保沧

45分钟 课时作业与单元测试

活页
可拆开使用

提升＝基础＋能力＋方法
课时作业　基础自测·知能提升
阶段检测　梯度练习·评估达标
答案与解析　全解全析·点拨精准

数学

选修4-4　RJ·A

微信公众号
教辅资料站

河北人民出版社
石家庄

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

图书在版编目（CIP）数据

45分钟课时作业与单元测试．数学．选修4-4 ：RJA /
邓保沧主编．-- 石家庄：河北人民出版社，2017.7(2019.10重印)
ISBN 978-7-202-12299-0

Ⅰ．①4… Ⅱ．①邓… Ⅲ．①中学数学课－高中－习
题集 Ⅳ．①G634

中国版本图书馆CIP数据核字（2017）第197940号

编　委：李　雅　李　越　张瑞霞
天高云　蒋　敏　金剑飞

书　　名　45分钟课时作业与单元测试 数学 选修4-4 RJA
主　　编　邓保沧

责任编辑　李　莉　马慧芳
美术编辑　李　欣
封面设计　欣　羽

出版发行　河北人民出版社（石家庄市友谊北大街330号）
印　　刷　河北伦洋印业有限公司
开　　本　880毫米×1230毫米　1/16
印　　张　4.5
字　　数　144 000
版　　次　2017年7月第1版　2019年10月第3次印刷
书　　号　ISBN 978-7-202-12299-0
定　　价　26.00元

版权所有　翻印必究

微信公众号
教辅资料站

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料



目录 CONTENTS

第一部分　课时作业

第一讲　坐标系 …… 1

一　平面直角坐标系 …… 1

第 1 课时　平面直角坐标系 …… 1

二　极坐标系 …… 3

第 2 课时　极坐标系的概念 …… 3

第 3 课时　极坐标和直角坐标的互化 …… 5

三　简单曲线的极坐标方程 …… 7

第 4 课时　圆的极坐标方程 …… 7

第 5 课时　直线的极坐标方程 …… 9

四　柱坐标系与球坐标系简介 …… 11

第 6 课时　柱坐标系与球坐标系简介 …… 11

阶段评估一 …… 13

第二讲　参数方程 …… 15

一　曲线的参数方程 …… 15

第 7 课时　参数方程的概念及圆的参数方程 …… 15

第 8 课时　参数方程和普通方程的互化 …… 17

二　圆锥曲线的参数方程 …… 19

第 9 课时　椭圆的参数方程 …… 19

第 10 课时　双曲线与抛物线的参数方程 …… 21

三　直线的参数方程 …… 23

第 11 课时　直线的参数方程 …… 23

微信公众号 教辅资料站

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料



目录 CONTENTS

四　渐开线与摆线 …… 25

第 12 课时　渐开线与摆线 …… 25

阶段评估二 …… 27

第二部分　阶段检测

阶段测试一(第一讲　坐标系) …… 29

阶段测试二(第二讲　参数方程) …… 33

阶段测试三(本册综合测评一) …… 37

阶段测试四(本册综合测评二) …… 41

第三部分　答案与解析

答案与解析 …… 46～68

提示:全书包括课时作业、阶段检测、答案与解析三部分,共计 72 页。

(根据教师教学情况不同,课时作业和阶段检测部分可在书中作答,也可撕下使用。)

微信公众号
教辅资料站

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

第一讲 坐标系

一 平面直角坐标系

第1课时 平面直角坐标系

要点梳理

1. 平面直角坐标系

(1)平面直角坐标系的作用

通过直角坐标系,平面上的点与_____(有序实数对)、曲线与_____建立了联系,从而实现了数与形的结合.

(2)坐标法解决几何问题的"三部曲"

第一步:建立适当坐标系,用坐标和方程表示问题中涉及的几何元素,将几何问题转化为代数问题;第二步:通过代数运算解决代数问题;第三步:把代数运算结果翻译成几何结论.

2. 平面直角坐标系中的伸缩变换

设点 $P(x,y)$ 是平面直角坐标系中的任意一点,在变换 φ: $\begin{cases}x'=\lambda\cdot x(\lambda>0),\\ y'=\mu\cdot y(\mu>0)\end{cases}$ 的作用下,点 $P(x,y)$ 对应到点 $P'(x',y')$,称_____为平面直角坐标系中的坐标伸缩变换,简称伸缩变换.

对点训练

知识点一 用坐标法解决几何问题

1. 已知平行四边形 $ABCD$ 的三个顶点 A,B,C 的坐标分别为 $(-1,2),(3,0),(5,1)$,则 D 的坐标是 (　　)

A. $(9,-1)$　　B. $(-3,1)$

C. $(1,3)$　　D. $(2,3)$

2. 已知 M 为等腰 $\triangle ABC$ 底边 BC 上的任意一点,求证: $|AB|^2=|AM|^2+|BM|\cdot|MC|$.

知识点二 平面直角坐标系下的轨迹问题

3. 在 $\triangle ABC$ 中,$B(-2,0)$,$C(2,0)$,若 $\triangle ABC$ 的周长为 10,则 A 点的轨迹方程为 (　　)

A. $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{5}=1(y\neq0)$

B. $\frac{x^2}{5}+\frac{y^2}{9}=1(y\neq0)$

C. $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{5}=1(x\neq0)$

D. $\frac{x^2}{5}+\frac{y^2}{9}=1(x\neq0)$

4. 线段 AB 的两个端点分别在两条互相垂直的直线上滑动,且 $|AB|=4$,求 AB 中点 P 的轨迹方程.

知识点三 平面直角坐标系中的伸缩变换

5. 在同一平面直角坐标系中,经过伸缩变换 $\begin{cases}x'=5x,\\ y'=3y\end{cases}$ 后,曲线 C 变为曲线 $x'^2+y'^2=1$,则曲线 C 的方程为 (　　)

A. $25x^2+9y^2=1$　　B. $9x^2+25y^2=1$

C. $25x+9y=1$　　D. $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$

6. (**2019·河北保定月考**)双曲线 $C:x^2-\frac{y^2}{64}=1$ 经过伸缩变换 $\begin{cases}x'=3x,\\ 2y'=y\end{cases}$ 后,得到曲线 C',则曲线 C' 的焦点坐标为_____.

微信公众号 教辅资料站

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

课后训练 提能达标 KEHOUXUNLIANTINENGDABIAO 练速度练能力、学业达标没问题

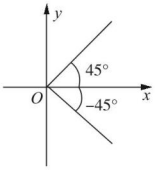
一、选择题

1. 通过伸缩变换，下列曲线形态可能发生变化的是 （ ）
①直线；②圆；③椭圆；④双曲线；⑤抛物线.
A. ②③ B. ①④⑤
C. ①②③ D. ②③④⑤

2. $y=\cos x$ 经过伸缩变换 $\begin{cases}x'=2x,\\y'=3y\end{cases}$ 后，曲线方程变为 （ ）
A. $y'=3\cos\dfrac{x'}{2}$ B. $y'=3\cos 2x'$
C. $y'=\dfrac{1}{3}\cos\dfrac{x'}{2}$ D. $y'=\dfrac{1}{3}\cos 2x'$

3. （**2019·宁夏育才中学月考**）在同一坐标系中，将曲线 $y=2\sin 3x$ 变为曲线 $y=\sin x$ 的伸缩变换公式是 （ ）
A. $\begin{cases}x=3x',\\y=2y'\end{cases}$ B. $\begin{cases}x'=3x,\\y'=2y\end{cases}$
C. $\begin{cases}x'=3x,\\y'=\dfrac{1}{2}y\end{cases}$ D. $\begin{cases}x=3x',\\y=\dfrac{1}{2}y'\end{cases}$

4. 如图所示的直角坐标系中的图形的方程是 （ ）



A. $|x|-y=0$ B. $x-|y|=0$
C. $\dfrac{x}{|y|}-1=0$ D. $\dfrac{|x|}{y}-1=0$

5. 将圆 $x^2+y^2=9$ 按 $\varphi:\begin{cases}x'=\lambda x(\lambda>0),\\y'=\mu y(\mu>0)\end{cases}$ 变换后得到椭圆 $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1$，则 （ ）
A. $\lambda=1,\mu=\dfrac{2}{3}$ B. $\lambda=1,\mu=\dfrac{3}{2}$
C. $\lambda=\dfrac{2}{3},\mu=1$ D. $\lambda=\dfrac{3}{2},\mu=1$

二、填空题

6. （**2019·山西芮城中学期中**）函数 $y=\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{4}\right)$ 经伸缩变换 $\begin{cases}x'=2x,\\y'=\dfrac{1}{2}y\end{cases}$ 后的解析式为_____.

7. 将椭圆 $\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{9}=1$ 按 $\varphi:\begin{cases}x'=\dfrac{1}{5}x,\\y'=\dfrac{1}{3}y\end{cases}$ 变换后的曲线所围成的面积为_____.

8. 已知点 $A(2,-1)$，$B(-1,1)$，O 为坐标原点，动点 M 满足 $\overrightarrow{OM}=m\overrightarrow{OA}+n\overrightarrow{OB}$，其中 $m,n\in\mathbf{R}$，且 $2m^2-n^2=2$，则 M 的轨迹方程为_____.

三、解答题

9. （**2019·河南渑池检测**）通过平面直角坐标系中的平移变换与伸缩变换，可以把椭圆 $\dfrac{(x+1)^2}{9}+\dfrac{(y-1)^2}{4}=1$ 变为中心在原点的单位圆，求上述平移变换与伸缩变换，以及这两种变换合成的变换.

10. （**2019·北京西城区月考**）已知常数 $m>0$，向量 $\boldsymbol{a}=(0,1)$，$\boldsymbol{b}=(m,0)$，经过点 $A(m,0)$，以 $\lambda\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 为方向向量的直线与经过点 $B(-m,0)$，以 $\lambda\boldsymbol{b}-4\boldsymbol{a}$ 为方向向量的直线交于点 P，其中 $\lambda\in\mathbf{R}$.
(1)求点 P 的轨迹方程，并指出其轨迹 E；
(2)若点 $C(1,0)$，当 $m=2\sqrt{2}$ 时，M 为轨迹 E 上任意一点，求 $|MC|$ 的最小值.

微信公众号 教辅资料站

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

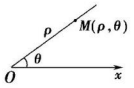
二　极坐标系

第 2 课时　极坐标系的概念

要点梳理

1. 极坐标系

在平面内取一个定点 O，叫做_____；自极点 O 引一条射线 Ox，叫做_____；再选定一个长度单位、一个角度单位（通常取弧度）及其正方向（通常取逆时针方向），就建立了极坐标系.



2. 点的极坐标

设 M 是平面内一点，极点 O 与点 M 的距离 $|OM|$ 叫做点 M 的_____，记为 ρ；以极轴 Ox 为始边，射线 OM 为终边的角 xOM 叫做点 M 的_____，记为 θ. 有序数对 (ρ,θ) 叫做点 M 的极坐标，记为 M _____. 一般地，不作特殊说明时，我们认为 $\rho\geqslant 0$，$\theta\in\mathbf{R}$.

对点训练

知识点一　极坐标的概念

1. 在极坐标系中，确定点 $M\left(-2,\frac{\pi}{6}\right)$ 的位置，下面方法正确的是（　　）

A. 作射线 OP，使 $\angle xOP=\frac{\pi}{6}$，再在射线 OP 上取点 M，使 $|OM|=2$

B. 作射线 OP，使 $\angle xOP=\frac{\pi}{6}$，再在射线 OP 的反向延长线上取点 M，使 $|OM|=2$

C. 作射线 OP，使 $\angle xOP=\frac{7\pi}{6}$，再在射线 OP 的反向延长线上取点 M，使 $|OM|=2$

D. 作射线 OP，使 $\angle xOP=-\frac{\pi}{6}$，再在射线 OP 上取点 M，使 $|OM|=2$

2. 下列关于极坐标的叙述：

①极轴是一条直线；②极点的极坐标为 $(0,0)$；③$(0,0)$ 表示极点；④极坐标 (ρ,θ) 表示的点不唯一；⑤极坐标 $(3,2k\pi)(k\in\mathbf{Z})$ 表示的点在极轴上；⑥点 $M\left(2,\frac{\pi}{4}\right)$ 与点 $N\left(2,\frac{5}{4}\pi\right)$ 表示同一个点. 其中正确的是_____（只填序号）.

知识点二　点与极坐标的对应关系

3. **（2019 · 安徽亳州一中期中）**已知 M 点的极坐标为 $\left(-2,-\frac{\pi}{6}\right)$，则 M 点关于直线 $\theta=\frac{\pi}{2}$ 的对称点坐标为（　　）

A. $\left(2,\frac{\pi}{6}\right)$　　B. $\left(2,-\frac{\pi}{6}\right)$

C. $\left(-2,\frac{\pi}{6}\right)$　　D. $\left(-2,\frac{11\pi}{6}\right)$

4. 极坐标系中，点 A 的极坐标是 $\left(3,\frac{\pi}{6}\right)$，则

(1)点 A 关于极轴对称的点的极坐标是_____；

(2)点 A 关于极点对称的点的极坐标是_____；

(3)点 A 关于过极点且与极轴垂直的直线对称点的极坐标是_____.（规定 $\rho\geqslant 0$，$0\leqslant\theta<2\pi$）

知识点三　两点间的距离

5. 在极坐标系中，点 $A(\pi,1)$ 到极点的距离为（　　）

A. π　　B. 1

C. $\sqrt{\pi^2+1}$　　D. $\pi\cos 1$

6. **（2019 · 河北保定月考）**极坐标系中，若 $\triangle ABC$ 的三个顶点为 $A\left(5,\frac{5\pi}{2}\right)$，$B\left(8,\frac{5\pi}{6}\right)$，$C\left(3,\frac{7\pi}{6}\right)$，判断三角形的形状.

微信公众号 教辅资料站

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

课后训练 提能达标 KEHOUXUNLIANTINENGDABIAO 练速度练能力、学业达标没问题

一、选择题

1.（2019·甘肃临夏中学期中）极坐标系中，点 $A\left(1,\frac{\pi}{12}\right)$，$B\left(2,\frac{13\pi}{12}\right)$，则 $|AB|$ 等于（　　）

A. 1　　B. 2

C. 3　　D. 4

2. 下列各点中与极坐标 $\left(5,\frac{\pi}{7}\right)$ 表示同一点的是（　　）

A. $\left(5,\frac{6\pi}{7}\right)$　　B. $\left(5,\frac{15\pi}{7}\right)$

C. $\left(5,-\frac{6\pi}{7}\right)$　　D. $\left(5,-\frac{\pi}{7}\right)$

3. 在极坐标系中，点 $A\left(1,\frac{\pi}{5}\right)$，$B\left(2,\frac{6}{5}\pi\right)$，则 A，B 两点之间的距离等于（　　）

A. 1　　B. 2

C. 3　　D. 4

4.（2019·天津市河北区模拟）已知 O 为极点，$A\left(2,\frac{\pi}{3}\right)$，$B\left(5,-\frac{7\pi}{6}\right)$，则 $S_{\triangle AOB}=$（　　）

A. 2　　B. 3

C. 4　　D. 5

5.（2019·人大附中期末）在极坐标系中，点 $\left(1,\frac{\pi}{4}\right)$ 与点 $\left(1,\frac{3\pi}{4}\right)$ 的距离为（　　）

A. 1　　B. $\sqrt{2}$

C. $\sqrt{3}$　　D. $\sqrt{5}$

二、填空题

6.（2019·辽宁德才高中期中）极坐标系中，若点 $A(1,0)$，$B(2,\pi)$，$C(3,\theta)$ 共线，则 $\theta=$_____.

7. 点 $P\left(4,\frac{5\pi}{6}\right)$ 到极轴的距离是_____.

8. 已知极坐标系中，极点为 O，$0\leqslant\theta<2\pi$，$M\left(3,\frac{\pi}{3}\right)$，在直线 OM 上与点 M 的距离为 4 的点的坐标为_____.

三、解答题

9. 已知 $Q\left(2,\frac{4}{15}\pi\right)$，分别求满足下列条件的点的极坐标.（$\rho\geqslant0$，$\theta\in[0,2\pi)$）

（1）P_1 是点 Q 关于极点的对称点；

（2）P_2 是点 Q 关于直线 $x=\frac{\pi}{2}(\rho\in\mathbf{R})$ 的对称点；

（3）P_3 是点 Q 关于极轴的对称点.

10.（2019·江西南昌二中第四次考试）已知极坐标系中，极点是 O，$A\left(3,\frac{\pi}{3}\right)$，$B\left(3,\frac{7\pi}{6}\right)$. 求：

（1）A、B 两点间的距离；

（2）$\triangle AOB$ 的面积.

微信公众号 教辅资料站

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

第3课时　极坐标和直角坐标的互化

要点梳理

1. 互化的前提条件

(1)极坐标系中的极点与直角坐标系中的原点重合；

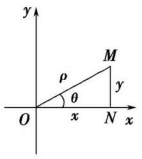
(2)极轴与 x 轴的正半轴重合；

(3)两种坐标取相同的长度单位.

2. 互化公式

(1)$\begin{cases} x=\rho\cos\theta, \\ _____; \end{cases}$

(2)$\begin{cases} \rho^2=x^2+y^2, \\ \tan\theta=\dfrac{y}{x}(x\neq 0). \end{cases}$



对点训练

知识点一　点的极坐标化为直角坐标

1. 在极坐标系中，极坐标$\left(\sqrt{2},\dfrac{5}{4}\pi\right)$化为直角坐标为　(　　)

A. $(1,1)$　　B. $(-1,1)$

C. $(1,-1)$　　D. $(-1,-1)$

2. (**2019·河南渑池检测**)已知 $\rho>0$，$0\leqslant\theta<2\pi$，若点 M 的极坐标与直角坐标相同，则 M 的直角坐标为_____.

知识点二　点的直角坐标化为极坐标

3. 将点 P 的直角坐标$(-2,2\sqrt{3})$化为极径 ρ 是正值，极角 $\theta\in[0,2\pi)$的极坐标是　(　　)

A. $\left(4,\dfrac{2\pi}{3}\right)$　　B. $\left(4,\dfrac{5\pi}{6}\right)$

C. $\left(4\sqrt{3},\dfrac{\pi}{6}\right)$　　D. $\left(4\sqrt{3},\dfrac{\pi}{3}\right)$

4. (**2019·安徽慧德高中月考**)点 M 的直角坐标是$(1,-\sqrt{3})$，则点 M 的极坐标为　(　　)

A. $\left(2,\dfrac{\pi}{3}\right)$　　B. $\left(2,-\dfrac{\pi}{3}\right)$

C. $\left(2,\dfrac{2\pi}{3}\right)$　　D. $\left(2,2k\pi+\dfrac{\pi}{3}\right)(k\in\mathbf{Z})$

知识点三　点的坐标互化的综合运用

5. 在极坐标系中，极点为 O，将点 $A\left(2,\dfrac{\pi}{6}\right)$对应的向量$\overrightarrow{OA}$绕极点 O 逆时针旋转$\dfrac{\pi}{2}$，得到向量$\overrightarrow{OB}$，求向量$\overrightarrow{OB}$的直角坐标.

6. 已知点 P 的直角坐标按伸缩变换$\begin{cases} x'=2x, \\ y'=\sqrt{3}y \end{cases}$变换为点 $P'(6,-3)$，限定 $\rho>0$，$0\leqslant\theta<2\pi$ 时，求点 P 的极坐标.

微信公众号
教辅资料站

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

课后训练 提能达标 KEHOUXUNLIANTINENGDABIAO 练速度练能力、学业达标没问题

一、选择题

1. 点 M 的直角坐标为 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，则点 M 的极坐标为（　　）

A. $\left(\frac{\pi}{2},0\right)$　　B. $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$

C. $\left(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$　　D. $\left(\frac{\pi}{2},-\frac{\pi}{2}\right)$

2. （**2019·黑龙江青冈实验中学测试**）将点的极坐标 $(\pi,-2\pi)$ 化为直角坐标为（　　）

A. $(\pi,0)$　　B. $(\pi,2\pi)$

C. $(-\pi,0)$　　D. $(-2\pi,0)$

3. 直角坐标系中的点 $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\pi,-\frac{\pi}{2}\right)$ 对应的极坐标可以是（　　）

A. $\left(\pi,\frac{5\pi}{6}\right)$　　B. $\left(\pi,\frac{7\pi}{6}\right)$

C. $\left(\pi,\frac{11\pi}{6}\right)$　　D. $\left(\pi,\frac{\pi}{2}\right)$

4. 在极坐标系中，已知 A,B 两点的极坐标分别为 $A\left(4,\frac{7\pi}{6}\right)$，$B\left(4,\frac{3\pi}{2}\right)$，则线段 AB 的长度为（　　）

A. $\frac{\pi}{3}$　　B. 2

C. $2\sqrt{3}$　　D. 4

5. 已知 A,B 两点的极坐标为 $\left(6,\frac{\pi}{3}\right)$ 和 $\left(8,\frac{4\pi}{3}\right)$，则线段 AB 中点的直角坐标为（　　）

A. $\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$　　B. $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2}\right)$

C. $\left(\frac{\sqrt{3}}{2},-\frac{1}{2}\right)$　　D. $\left(-\frac{1}{2},-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

二、填空题

6. （**2019·湖南邵东一中月考**）在直角坐标系 xOy 中，已知点 $C(-3,-\sqrt{3})$，若以 O 为极点，x 轴的正半轴为极轴，则点 C 的极坐标 $(\rho,\theta)(\rho>0,-\pi<\theta<0)$ 可写为_____.

7. 已知点 M 的极坐标为 $(5,\theta)$，且 $\tan\theta=-\frac{4}{3}$，$\frac{\pi}{2}<\theta<\pi$，则点 M 的直角坐标为_____.

8. 直线 l 过点 $A\left(3,\frac{\pi}{3}\right)$，$B\left(3,\frac{\pi}{6}\right)$，则直线 l 与极轴的夹角等于_____.

三、解答题

9. 将点 $A(-3,2)$ 按伸缩变换 $\varphi:\begin{cases}x'=2x,\\y'=3y\end{cases}$ 得到 A'，求点 A' 的极坐标.

10. 已知 $\triangle ABC$ 三个顶点的极坐标分别为 $A\left(2,\frac{\pi}{2}\right)$，$B\left(2,\frac{5\pi}{6}\right)$，$C\left(\sqrt{3},\frac{5\pi}{3}\right)$，极点 $O(0,0)$.

(1)判断 $\triangle OAB$ 的形状；

(2)求 $\triangle ABC$ 的面积.

微信公众号 教辅资料站

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

三　简单曲线的极坐标方程

第4课时　圆的极坐标方程

要点梳理

1. 曲线的极坐标方程

在极坐标系中，如果平面曲线 C 上任意一点的极坐标中_____满足方程 $f(\rho,\theta)=0$，并且坐标适合方程 $f(\rho,\theta)=0$ 的点都在_____，那么方程 $f(\rho,\theta)=0$ 叫做曲线 C 的极坐标方程.

2. 圆的极坐标方程

(1)圆心在极点 O，半径为 r 的圆的极坐标方程是_____.

(2)圆心在 $(a,0)$，$(a>0)$，半径为 a 的圆的极坐标方程是_____.

对点训练

知识点一　求圆的极坐标方程

1.(**2019·河南渑池检测**)在极坐标系中，以 $\left(\frac{a}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ 为圆心，$\frac{a}{2}$ 为半径的圆的方程是_____.

2. 在极坐标系中，已知圆 C 的圆心为 $\left(3,\frac{\pi}{3}\right)$，半径为 3，$Q$ 点在圆周上运动.

(1)求圆 C 的极坐标方程；

(2)若 P 是 OQ 中点，求 P 的轨迹.

知识点二　极坐标方程与直角坐标方程的互化

3.(**2019·辽宁德才期中**)曲线 C 的极坐标方程为 $\rho=6\sin\theta$ 化为直角坐标方程后为　(　)

A. $x^2+(y-3)^2=9$　　B. $x^2+(y+3)^2=9$

C. $(x+3)^2+y^2=9$　　D. $(x-3)^2+y^2=9$

4. 化直角坐标方程 $x^2+y^2-2y-1=0$ 为极坐标方程为_____.

知识点三　与圆相关的综合问题

5.(**2019·天津市河西区质量调查**)已知圆的极坐标方程为 $\rho=4\cos\theta$，圆心为 C，点 P 的极坐标为 $\left(2,\frac{2\pi}{3}\right)$，则 CP 的长度为_____.

6. 在极坐标系 xOy 中，圆 C_1：$x^2+y^2=4$，圆 C_2：$(x-2)^2+y^2=4$，在以 O 为极点，x 轴正半轴为极轴的极坐标系中，分别写出圆 C_1，C_2 的极坐标方程，并求圆 C_1，C_2 交点的极坐标.

微信公众号
教辅资料站

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

课后训练 提能达标 KEHOUXUNLIANTINENGDABIAO 练速度练能力、学业达标没问题

一、选择题

1.（2019·辽宁德才期中）在极坐标系中，圆$\rho=\cos\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)$的圆心的极坐标为（　　）

A. $\left(\frac{1}{2},-\frac{\pi}{3}\right)$　　B. $\left(\frac{1}{2},\frac{\pi}{3}\right)$

C. $\left(1,-\frac{\pi}{3}\right)$　　D. $\left(1,\frac{\pi}{3}\right)$

2. 圆的极坐标方程 $\rho=\cos\theta-2\sin\theta$ 对应的直角坐标方程为（　　）

A. $\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+(y+1)^2=\frac{5}{4}$

B. $\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+(y+1)^2=\frac{5}{4}$

C. $\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+(y-1)^2=\frac{5}{4}$

D. $\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+(y-1)^2=\frac{5}{4}$

3. 在极坐标系中有如下三个结论：

①点 P 在曲线 C 上，则点 P 的极坐标适合曲线 C 的极坐标方程；②$\tan\theta=\sqrt{3}$与$\theta=\frac{\pi}{3}$表示同一条曲线（ρ 允许取负值）；③$\rho=4$ 和 $\rho=-4$ 表示同一条曲线. 在这三个结论中，正确的是（　　）

A. ①③　　B. ①

C. ①②　　D. ②③

4. 在极坐标系中，圆 $\rho=2\sin\theta$ 与圆 $\rho=-2\sin\theta$ 的位置关系是（　　）

A. 相离　　B. 外切

C. 相交　　D. 内切

5.（2019·北京石景山区模拟）圆 $\rho=2$ 被直线 $y=1$ 截得的弦长为（　　）

A. $\sqrt{3}$　　B. 2

C. $2\sqrt{3}$　　D. 3

二、填空题

6.（2019·安徽慧德高中月考）圆心的极坐标为$C\left(3,\frac{\pi}{6}\right)$，半径为 3 的圆的极坐标方程是_____.

7. 在极坐标系$(\rho,\theta)(\rho\geqslant0,0\leqslant\theta<\pi)$中，曲线 $\rho=2\sin\theta$ 与 $\rho\cos\theta=-1$ 的交点的极坐标为_____.

8. 在极坐标系中，曲线 C 的方程是$\rho=4\sin\theta$，过点$P\left(4,\frac{\pi}{6}\right)$作曲线 C 的切线，则切线长为_____.

三、解答题

9.（2019·河北黄骅中学月考）已知圆的极坐标方程为 $\rho^2-4\sqrt{2}\rho\cos\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)+6=0$.

(1)将极坐标方程化为普通方程；

(2)若点 $P(x,y)$ 在该圆上，求 $x+y$ 的最大值和最小值.

10. 在极坐标系中，已知圆 C 的圆心 $C\left(3,\frac{\pi}{6}\right)$，半径 $r=1$，Q 点在圆 C 上运动.

(1)求圆 C 的极坐标方程；

(2)若 P 在直线 OQ 上，且$\overrightarrow{OQ}=\frac{2}{3}\overrightarrow{QP}$，求动点 P 的轨迹方程.

微信公众号 教辅资料站

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

第5课时　直线的极坐标方程

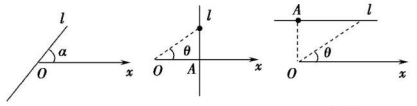
要点梳理

1. 几种特殊位置的直线的极坐标方程

(1)直线 l 过极点，且从极轴到直线 l 的角为 α，则直线 l 的极坐标方程是 _____ 或 $\theta=\pi+\alpha(\rho\in\mathbf{R})$.(如图①)

(2)直线 l 过点 $A(a,0)(a>0)$，且垂直于极轴，则直线 l 的极坐标方程是 _____.(如图②)

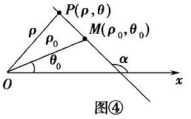
(3)直线 l 过点 $A\left(a,\frac{\pi}{2}\right)(a>0)$，且平行于极轴，则直线 l 的极坐标方程是 _____.(如图③)



图①　图②　图③

2. 直线极坐标方程的一般形式

直线 l 过点 $M(\rho_0,\theta_0)$，且与极轴所成的角为 α，则直线 l 的极坐标方程是 $\rho\sin(\theta-\alpha)=\rho_0\sin(\theta_0-\alpha)$.(如图④)



图④

对点训练

知识点一　求直线的极坐标方程

1. 过极点且倾斜角为 $\frac{\pi}{3}$ 的直线的极坐标方程为　(　)

A. $\theta=\frac{\pi}{3}$　　B. $\theta=\frac{\pi}{3},\rho\geqslant0$

C. $\theta=\frac{4\pi}{3},\rho\geqslant0$　　D. $\theta=\frac{\pi}{3}$ 和 $\theta=\frac{4\pi}{3},\rho\geqslant0$

2. (**2019·天津市杨村一中月考**)在极坐标系中，已知直线过点(1,0)，且其向上的方向与极轴的正方向所成的最小正角为 $\frac{\pi}{3}$，则直线的极坐标方程为 _____.

知识点二　直线的极坐标方程与直角坐标方程的互化

3. (**2018·北京丰台模拟**)极坐标方程 $\rho\cos\left(\theta-\frac{\pi}{6}\right)=1$ 表示直线的斜率为　(　)

A. $\frac{\sqrt{3}}{3}$　　B. $-\sqrt{3}$

C. $-\frac{\sqrt{3}}{3}$　　D. $\sqrt{3}$

4. (**2019·河北保定检测**)若以直角坐标系的原点为极点，x 轴的非负半轴为极轴建立极坐标系，则线段 $y=1-x(0\leqslant x\leqslant1)$ 的极坐标方程为 _____.

知识点三　直线与圆的极坐标方程的应用

5. (**2019·江苏姜堰、溧阳、前黄中学联考**)圆 $C:\rho=2\cos\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)$，与极轴交于点 A(异于极点 O)，求直线 CA 的极坐标方程.

6. 在极坐标系中，圆 $C:\rho=10\cos\theta$ 和直线 $l:3\rho\cos\theta-4\rho\sin\theta-30=0$ 相交于 A,B 两点，求线段 AB 的长.

微信公众号 教辅资料站

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

课后训练 提能达标 KEHOUXUNLIANTINENGDABIAO 练速度练能力、学业达标没问题

一、选择题

1.（2019·河南渑池检测）已知点 P 的极坐标为$(1,\pi)$，那么过点 P 且垂直于极轴的直线的极坐标方程为（　　）

A. $\rho=1$　　B. $\rho=\cos\theta$

C. $\rho=-\dfrac{1}{\cos\theta}$　　D. $\rho=\dfrac{1}{\cos\theta}$

2. 直线 $\theta=\alpha$ 和直线 $\rho\sin(\theta-\alpha)=1$ 的位置关系是（　　）

A. 垂直　　B. 平行

C. 相交但不垂直　　D. 重合

3. 已知直线 l 的极坐标方程为 $2\rho\sin\left(\theta-\dfrac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}$，点 A 的极坐标为 $\left(2\sqrt{2},\dfrac{7\pi}{4}\right)$，则点 A 到直线 l 的距离为（　　）

A. $\dfrac{5}{3}\sqrt{3}$　　B. $\dfrac{5}{2}\sqrt{3}$

C. $\dfrac{5}{3}\sqrt{2}$　　D. $\dfrac{5}{2}\sqrt{2}$

4. 极坐标方程 $\cos\theta=\dfrac{\sqrt{2}}{2}(\rho\geqslant 0)$ 表示的图形是（　　）

A. 余弦曲线　　B. 一条射线

C. 两条射线　　D. 一条直线

5.（2019·南昌二中月考）在极坐标系中，极点关于直线 $\rho\cos\theta-\rho\sin\theta+1=0$ 对称的点的极坐标为（　　）

A. $\left(\sqrt{2},\dfrac{3\pi}{4}\right)$　　B. $\left(\sqrt{2},-\dfrac{3\pi}{4}\right)$

C. $\left(\sqrt{2},\dfrac{\pi}{4}\right)$　　D. $\left(\sqrt{2},-\dfrac{\pi}{4}\right)$

二、填空题

6.（2019·江苏高考冲刺预测卷）在极坐标系中，点 $\left(2,\dfrac{\pi}{6}\right)$ 到直线 $\rho\sin\left(\theta-\dfrac{\pi}{6}\right)=1$ 的距离是_____.

7. 在直角坐标系中，过点$(-2,3)$，斜率为 2 的直线的极坐标方程为_____.

8. 在极坐标系中，由三条直线 $\theta=0$，$\theta=\dfrac{\pi}{3}$，$\rho\cos\theta+\rho\sin\theta=1$ 围成的图形的面积是_____.

三、解答题

9.（2018·江苏卷）在极坐标系中，直线 l 的方程为 $\rho\sin\left(\dfrac{\pi}{6}-\theta\right)=2$，曲线 C 的方程为 $\rho=4\cos\theta$，求直线 l 被曲线 C 截得的弦长.

10.（2019·宁夏银川一中模拟）在直角坐标系 xOy 中，圆 C_1 的方程为$(x+1)^2+y^2=1$，圆 C_2 与圆 C_1 外切于原点 O，且两圆圆心的距离$|C_1C_2|=3$，以坐标原点为极点，x 轴正半轴为极轴建立极坐标系.

(1)求圆 C_1 和圆 C_2 的极坐标方程；

(2)过点 O 的直线 l_1、l_2 与圆 C_2 异于点 O 的交点分别为点 A 和点 D，与圆 C_1 异于点 O 的交点分别为点 C 和点 B，且 $l_1\perp l_2$. 求四边形 $ABCD$ 面积的最大值.

微信公众号 教辅资料站

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

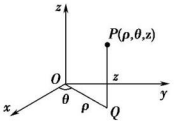
四　柱坐标系与球坐标系简介

第 6 课时　柱坐标系与球坐标系简介

要点梳理

1. 柱坐标系

(1)定义：如图所示，建立空间直角坐标系 $Oxyz$. 设 P 是空间任意一点. 它在 Oxy 平面上的射影为 Q，用 $(\rho,\theta)(\rho\geqslant 0,0\leqslant\theta<2\pi)$ 表示点 Q 在平面 Oxy 上的极坐标，这时点 P 的位置可用有序数组 $(\rho,\theta,z)(z\in\mathbf{R})$ 表示. 这样，建立了空间的点与有序数组 (ρ,θ,z) 之间的一种对应关系. 把建立上述对应关系的坐标系叫做柱坐标系，有序数组 (ρ,θ,z) 叫做点 P 的柱坐标，记作 $P(\rho,\theta,z)$，其中 $\rho\geqslant 0$，$0\leqslant\theta<2\pi$，$-\infty<z<+\infty$.

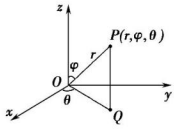


柱坐标系又称半极坐标系，它是由平面极坐标系及平面直角坐标系中的一部分建立起来的.

(2)空间点的直角坐标 (x,y,z) 与柱坐标 (ρ,θ,z) 之间的变换公式为_____.

2. 球坐标系

(1)定义：建立如图所示的空间直角坐标系 $Oxyz$. 设 P 是空间任意一点，连接 OP，记 $|OP|=r$，OP 与 Oz 轴正向所夹的角为 φ. 设 P 在 Oxy 平面上的射影为 Q，Ox 轴按逆时针方向旋转到 OQ 时所转过的最小正角为 θ. 这样点 P 的位置就可以用有序数组 (r,φ,θ) 表示. 这样，空间的点与有序数组 (r,φ,θ) 之间建立了一种对应关系. 把建立上述对应关系的坐标系叫做球坐标系(或空间极坐标系)，有序数组 (r,φ,θ) 叫做点 P 的球坐标，记做 $P(r,\varphi,\theta)$，其中 $r\geqslant 0$，$0\leqslant\varphi\leqslant\pi$，$0\leqslant\theta<2\pi$.



球坐标系在地理学、天文学中有着广泛应用. 在测量实践中，球坐标中的角 θ 称为被测点 $P(r,\varphi,\theta)$ 的方位角，$90^\circ-\varphi$ 称为高低角.

(2)空间点的直角坐标 (x,y,z) 与球坐标 (r,φ,θ) 之间的变换公式为_____.

对点训练

知识点一　直角坐标与柱坐标的互化

1. 点 B 的直角坐标为 $(1,\sqrt{3},4)$，则它的柱坐标是_____.

2. (**2019·辽宁德才期中**)(1)已知点 M 的直角坐标为 $(1,-\sqrt{3},4)$，求点 M 的柱坐标；

(2)已知点 N 的柱坐标为 $\left(2,\frac{7\pi}{6},-1\right)$，求点 N 的直角坐标.

知识点二　直角坐标与球坐标的互化

3. (**2019·云南昆明市黄冈实验学校检测**)(1)点 A 的球坐标是 $\left(2,\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right)$，则它的直角坐标是_____.

(2)点 B 的直角坐标是 $(-2,2,2\sqrt{2})$，则它的球坐标是_____.

4. 设点 M 的球坐标是 $\left(4,\frac{\pi}{2},\frac{5\pi}{3}\right)$，则它的直角坐标是_____.

知识点三　空间坐标系的应用

5. 已知球坐标系 $Oxyz$ 中，$M\left(6,\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{3}\right)$，$N\left(6,\frac{2\pi}{3},\frac{\pi}{3}\right)$，求 $|MN|$.

6. 在柱坐标系中，求满足 $\begin{cases}\rho=1,\\0\leqslant\theta<2\pi,\\0\leqslant z\leqslant 2\end{cases}$ 的动点 $M(\rho,\theta,z)$ 围成的几何体的体积.

微信公众号
教辅资料站

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

课后训练 提能达标 KEHOUXUNLIANTINENGDABIAO 练速度练能力、学业达标没问题

一、选择题

1. 空间直角坐标系 $Oxyz$ 中，下列柱坐标对应的点在平面 yOz 内的是 （　）

A. $\left(1,\frac{\pi}{2},2\right)$　　B. $\left(2,\frac{\pi}{3},0\right)$

C. $\left(3,\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{6}\right)$　　D. $\left(0,\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2}\right)$

2. 球坐标系中，满足 $\theta=\frac{\pi}{4}$，$r\in(0,+\infty)$，$\varphi\in[0,\pi]$ 的动点 $P(r,\varphi,\theta)$ 的轨迹为 （　）

A. 点　　B. 直线

C. 半平面　　D. 半球面

3. （**2019·山西阳高一中检测**）已知点 M 的球坐标为 $\left(4,\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4}\right)$，则点 M 到 Oz 轴的距离为 （　）

A. $2\sqrt{2}$　　B. $\sqrt{2}$

C. 2　　D. 4

4. （**2019·河北邢台二中月考**）已知点 P 的柱坐标为 $\left(\sqrt{2},\frac{\pi}{4},5\right)$，点 B 的球坐标为 $\left(\sqrt{6},\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{6}\right)$，则这两个点在空间直角坐标系中的点的坐标为 （　）

A. $P(5,1,1)$，$B\left(\frac{3\sqrt{6}}{4},\frac{3\sqrt{2}}{4},\frac{\sqrt{6}}{2}\right)$

B. $P(1,1,5)$，$B\left(\frac{3\sqrt{6}}{4},\frac{3\sqrt{2}}{4},\frac{\sqrt{6}}{2}\right)$

C. $P\left(\frac{3\sqrt{6}}{4},\frac{3\sqrt{2}}{4},\frac{\sqrt{6}}{2}\right)$，$B(1,1,5)$

D. $P(1,1,5)$，$B\left(\frac{\sqrt{6}}{2},\frac{3\sqrt{6}}{4},\frac{3\sqrt{2}}{4}\right)$

5. 已知点 P_1 的球坐标是 $\left(4,\frac{\pi}{2},\frac{5\pi}{3}\right)$，$P_2$ 的柱坐标是 $\left(2,\frac{\pi}{6},1\right)$，则 $|P_1P_2|=$ （　）

A. $\sqrt{21}$　　B. $\sqrt{29}$

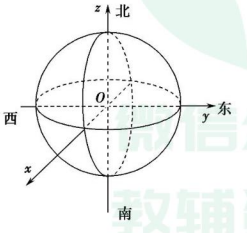
C. $\sqrt{30}$　　D. $4\sqrt{2}$

二、填空题

6. （**2019·重庆大学城第一中学月考**）已知 M 点的球坐标为 $\left(4,\frac{\pi}{4},\frac{3}{4}\pi\right)$，则它的直角坐标为_____，它的柱坐标为_____.

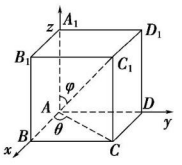
7. 已知点 M 的柱坐标为 $\left(2,\frac{\pi}{3},\sqrt{5}\right)$，则 $|OM|=$_____.

8. 以地球中心为坐标原点，地球赤道平面为 xOy 坐标面，由原点指向北极点的连线方向为 z 轴正向，本初子午线所在平面为 zOx 坐标面，如图所示，若某地在西经 60°，南纬 45°，地球的半径为 R，则该地的球坐标可表示为_____.



三、解答题

9. （**2019·天津市芦台一中模拟**）已知正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 1，如图所示，建立空间直角坐标系 $A-xyz$，以 Ax 为极轴.



(1)求点 C_1 的直角坐标、柱坐标以及球坐标；

(2)求点 C 和点 D 的直角坐标、柱坐标以及球坐标.

10. 已知球坐标系中，点 $M\left(4,\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3}\right)$，$N\left(4,\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{6}\right)$，求 $|MN|$ 的值.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

阶段评估一

（时间：60 分钟，满分：100 分）

一、选择题（每小题 5 分，共 30 分）

1. 极坐标方程为 $\rho=2\cos\theta$ 的圆的半径是（　　）

A. 1　　B. 2

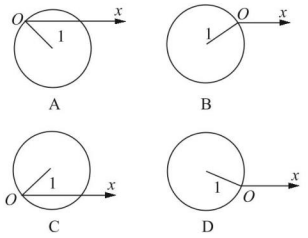
C. $\frac{1}{2}$　　D. 3

2. 直线 $2x+3y=0$ 经过伸缩变换后变为 $x'+y'=0$，则该伸缩变换为（　　）

A. $\begin{cases}x'=\frac{1}{2}x,\\y'=3y\end{cases}$　　B. $\begin{cases}x'=2x,\\y'=3y\end{cases}$

C. $\begin{cases}x'=2x,\\y'=\frac{1}{3}y\end{cases}$　　D. $\begin{cases}x'=\frac{1}{2}x,\\y'=\frac{1}{3}y\end{cases}$

3. 极坐标方程 $\rho=2\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)$ 的图形是（　　）



4. （**2019·黑龙江青冈实验中学测试**）在极坐标系中，圆 $\rho=2$ 的圆心到直线 $\rho\cos\theta+\rho\sin\theta=2$ 的距离为（　　）

A. $\frac{\sqrt{2}}{2}$　　B. 1

C. $\sqrt{2}$　　D. 2

5. 在极坐标系中，曲线 $\rho=2\cos\theta$ 上的动点 P 与定点 $Q\left(1,\frac{\pi}{2}\right)$ 的最近距离等于（　　）

A. $\sqrt{2}-1$　　B. $\sqrt{5}-1$

C. 1　　D. $\sqrt{2}$

6. 曲线 $\theta=\frac{2\pi}{3}$ 与 $\rho=6\sin\theta$ 的两个交点之间的距离为（　　）

A. 1　　B. $\sqrt{3}$

C. $3\sqrt{3}$　　D. 6

二、填空题（每小题 5 分，共 20 分）

7. （**2019·天津市耀华中学模拟**）极轴上与极点距离为 1 的点的极坐标为_____.

8. 在极坐标系中，曲线 $C_1:\rho(\sqrt{2}\cos\theta+\sin\theta)=1$ 与曲线 $C_2:\rho=a(a>0)$ 的一个交点在极轴上，则 $a=$_____.

9. 已知点 M 的柱坐标为 $\left(\frac{2\pi}{3},\frac{2\pi}{3},\frac{2\pi}{3}\right)$，则点 M 的直角坐标为_____，球坐标为_____.

10. 在平面直角坐标系中，以 $(1,1)$ 为圆心，$\sqrt{2}$ 为半径的圆在以直角坐标系的原点为极点，以 Ox 轴为极轴的极坐标系中，对应的极坐标方程为_____.

三、解答题（共 50 分）

11. （12 分）求满足下列图形变换的伸缩变换 φ：由曲线 $y=2\sin\frac{x}{4}$ 变为正弦曲线 $y=\sin x$.

12. （12 分）（**2019·江苏南京师大附中模拟**）在极坐标系中，已知圆 $C:\rho=2\sqrt{2}\cos\theta$ 和直线 $l:\theta=\frac{\pi}{4}(\rho\in\mathbf{R})$ 相交于 A,B 两点，求线段 AB 的长.

微信公众号 教辅资料站

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

13.（12 分）（**2019·辽宁沈阳阶段测试**）在直角坐标系 xOy 中，曲线 C_1：$y=x\tan\alpha$. 其中 $0\leqslant\alpha<\pi$，在以 O 为极点，x 轴正半轴为极轴的极坐标系中，曲线 C_2：$\rho=2\sin\theta$，C_3：$\rho=2\sqrt{3}\cos\theta$.

（1）求 C_2 与 C_3 交点的直角坐标；

（2）若 C_1 与 C_2 相交于点 A，C_1 与 C_3 相交于点 B，求 $|AB|$ 的最大值.

14.（14 分）（**2019·安徽慧德高中月考**）在极坐标系中，曲线 C_1，C_2 的极坐标方程分别为 $\rho=-2\cos\theta$，$\rho\cos\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)=1$.

（1）求曲线 C_1 和 C_2 的公共点的个数；

（2）过极点作动直线与曲线 C_2 相交于点 Q，在 OQ 上取一点 P，使 $|OP|\cdot|OQ|=2$，求点 P 的轨迹，并指出轨迹是什么图形.

微信公众号
教辅资料站

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

第二讲 参数方程

一 曲线的参数方程

第7课时 参数方程的概念及圆的参数方程

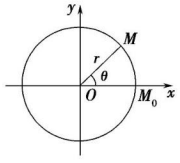
要点梳理

1. 参数方程的概念

一般地，在平面直角坐标系中，如果曲线上任意一点的坐标 x，y 都是某个变数 t 的函数_____①，并且对于 t 的每一个允许值，由方程组①所确定的点 $M(x,y)$ 都在这条曲线上，那么方程①就叫做这条曲线的参数方程，联系变数 x，y 的变数 t 叫做参变数，简称参数. 相对于参数方程而言，直接给出点的坐标间关系的方程叫做_____.

2. 圆的参数方程

(1)如图所示，设圆 O 的半径为 r，点 M 从初始位置 M_0 出发，按逆时针方向在圆 O 上作匀速圆周运动，设 $M(x,y)$，则_____. 这就是圆心在原点 O，半径为 r 的圆的参数方程，其中 θ 的几何意义是 OM_0 绕点 O 逆时针旋转到 OM 的位置时，OM_0 转过的角度.



(2)圆心为 $C(a,b)$，半径为 r 的圆的普通方程为 $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$，参数方程为_____.

对点训练

知识点一 参数方程的概念

1. 曲线 $\begin{cases}x=3-2t,\\y=1+2t\end{cases}$（$t$ 为参数）与坐标轴的交点是 (　　)

A. $(4,0),(0,4)$　　B. $(-4,0),(0,4)$

C. $(4,0),(0,-4)$　　D. $(-4,0),(0,-4)$

2. 曲线 $C:\begin{cases}x=t,\\y=t^2\end{cases}$（$t$ 为参数）过点 $P(\sqrt{2},m)$，则 $m=$ (　　)

A. $\sqrt{2}$　　B. 2

C. 4　　D. 16

知识点二 圆的参数方程

3. (**2019·黑龙江青冈实验中学测试**)参数方程 $\begin{cases}x=2\cos\theta,\\y=2\sin\theta\end{cases}$（$\theta$ 为参数，$0\leqslant\theta\leqslant\pi$）表示 (　　)

A. 上半圆　　B. 下半圆

C. 左半圆　　D. 右半圆

4. 已知圆的方程为 $x^2+y^2+2x-6y+9=0$，将它化为参数方程.

知识点三 圆的参数方程的应用

5. (**2019·北京海淀区期末**)圆 $\begin{cases}x=-1+\sqrt{2}\cos\theta,\\y=1+\sqrt{2}\sin\theta\end{cases}$（$\theta$ 为参数）被直线 $y=0$ 截得的劣弧长为 (　　)

A. $\frac{\sqrt{2}\pi}{2}$　　B. π

C. $2\sqrt{2}\pi$　　D. 4π

6. 已知点 $P(x,y)$ 是圆 $x^2+y^2-2y=0$ 上的动点.

(1)求 $2x+y$ 的取值范围；

(2)若 $x+y+a\geqslant0$ 恒成立，求实数 a 的取值范围.

微信公众号 教辅资料站

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

课后训练 提能达标 KEHOUXUNLIANTINENGDABIAO 练速度练能力、学业达标没问题

一、选择题

1. 圆$(x-1)^2+y^2=1$的参数方程是 （ ）

A. $\begin{cases}x=1+\cos\theta,\\ y=\sin\theta\end{cases}$（$\theta$为参数）

B. $\begin{cases}x=2+\cos\theta,\\ y=1-\sin\theta\end{cases}$（$\theta$为参数）

C. $\begin{cases}x=t+1,\\ y=t\end{cases}$（$t$为参数）

D. $\begin{cases}x=2+t,\\ y=1-t\end{cases}$（$t$为参数）

2.（**2019·河北邯郸检测**）直线$\begin{cases}x=-2+\sqrt{2}t,\\ y=3-\sqrt{2}t\end{cases}$（$t$为参数）上与点$A(-2,3)$的距离等于$\sqrt{2}$的点的坐标是 （ ）

A. $(-3,4)$　　B. $(-1,2)$

C. $(-3,4)$或$(-1,2)$　　D. $(3,4)$或$(-1,2)$

3. 曲线$xy=1$的参数方程是 （ ）

A. $\begin{cases}x=t^{\frac{1}{2}},\\ y=t^{-\frac{1}{2}}\end{cases}$（$t$为参数）　　B. $\begin{cases}x=\sin\alpha,\\ y=\dfrac{1}{\sin\alpha}\end{cases}$（$\alpha$为参数）

C. $\begin{cases}x=\cos\alpha,\\ y=\dfrac{1}{\cos\alpha}\end{cases}$（$\alpha$为参数）　　D. $\begin{cases}x=\tan\alpha,\\ y=\dfrac{1}{\tan\alpha}\end{cases}$（$\alpha$为参数）

4.（**2019·北京市东城区期中**）参数方程$\begin{cases}x=-1+\cos\theta,\\ y=2+\sin\theta\end{cases}$（$\theta$为参数）表示的曲线的对称中心 （ ）

A. 在直线$y=2x$上

B. 在直线$y=-2x$上

C. 在直线$y=x-1$上

D. 在直线$y=x+1$上

5. 设圆$\begin{cases}x=3+r\cos\theta,\\ y=-5+r\sin\theta\end{cases}$（$\theta$为参数）上有且仅有两点到直线$-4x+3y+2=0$的距离等于1，则$r$的取值范围是 （ ）

A. $4<r<6$　　B. $5<r<7$

C. $3<r<5$　　D. $6<r<7$

二、填空题

6. 在极坐标系中，曲线C的方程是$\rho=4\cos\theta$，则在直角坐标系中，曲线C的参数方程是_____.

7. 圆的参数方程为$\begin{cases}x=2+4\cos\theta,\\ y=-\sqrt{3}+4\sin\theta\end{cases}$（$\theta$为参数，$0\leqslant\theta<2\pi$），若圆上一点$P$对应的参数$\theta=\dfrac{4\pi}{3}$，则点$P$的坐标是_____.

8.（**2019·天津市杨柳青一中热身**）已知圆C：$\begin{cases}x=-3+2\sin\theta,\\ y=2\cos\theta\end{cases}$（$\theta\in[0,2\pi)$为参数）与$x$轴交于$A$、$B$两点，则$|AB|=$_____.

三、解答题

9. 已知x,y满足圆C的极坐标方程$\rho=2\cos\theta-4\sin\theta$.

(1)求圆C的参数方程；

(2)求$S=4y-3x$的最大值.

10.（**2019·河北保定月考**）长为3的线段两端点A、B分别在x轴正半轴和y轴正半轴上滑动，$\overrightarrow{AB}=3\overrightarrow{AP}$，点$P$的轨迹为曲线$C$.

(1)以直线AB的倾斜角α为参数，求曲线C的参数方程；

(2)求点P到点$D(0,-2)$的距离的最大值.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

第8课时　参数方程和普通方程的互化

要点梳理

1. 曲线的参数方程和普通方程是曲线方程的不同形式. 一般地，可以通过_____而从参数方程得到普通方程.

2. 如果知道变数 x，y 中的一个与参数 t 的关系，例如_____，把它代入普通方程，求出另一个变数与参数的关系_____，那么 $\begin{cases}x=f(t),\\y=g(t)\end{cases}$ 就是曲线的参数方程. 在参数方程与普通方程的互化中，必须使 x，y 的_____保持一致.

对点训练

知识点一　参数方程化为普通方程

1. 已知圆的参数方程为 $\begin{cases}x=2+\sqrt{2}\cos\theta,\\y=1+\sqrt{2}\sin\theta\end{cases}$（$\theta$ 为参数），那么该圆的普通方程是　　（　　）

A. $(x-2)^2+(y-1)^2=\sqrt{2}$

B. $(x+2)^2+(y+1)^2=\sqrt{2}$

C. $(x-2)^2+(y-1)^2=2$

D. $(x+2)^2+(y+1)^2=2$

2. 将参数方程 $\begin{cases}x=-2+\cos^2\theta,\\y=\cos^2\theta\end{cases}$（$\theta$ 为参数）化为普通方程为　　（　　）

A. $y=x-2$

B. $y=x-2(0\leqslant y\leqslant 1)$

C. $y=x+2$

D. $y=x+2(-2\leqslant x\leqslant -1)$

知识点二　普通方程化为参数方程

3. **(2019·天津市蓟州区联考)** 下列能化为普通方程 $x^2+y-1=0$ 的参数方程为　　（　　）

A. $\begin{cases}x=\sin t,\\y=\cos^2 t\end{cases}$（$t$ 为参数）

B. $\begin{cases}x=\tan\varphi,\\y=1-\tan^2\varphi\end{cases}$（$\varphi$ 为参数）

C. $\begin{cases}x=\sqrt{1-t},\\y=t\end{cases}$（$t$ 为参数）

D. $\begin{cases}x=\cos\theta,\\y=\sin 2\theta\end{cases}$（$\theta$ 为参数）

4. 根据下列条件求椭圆 $\frac{x^2}{4}+y^2=1$ 的参数方程：

(1) 设 $y=\sin\theta$，θ 为参数；

(2) 设 $x=2t$，t 为参数.

知识点三　参数方程的应用

5. **(2019·北京西城区模拟)** 已知圆 C 的参数方程为 $\begin{cases}x=2+\cos\theta,\\y=\sin\theta\end{cases}$（$\theta$ 为参数），则圆的面积为_____；圆心 C 到直线 l：$3x-4y=0$ 的距离为_____.

6. 已知曲线 C_1：$\begin{cases}x=-4+\cos t,\\y=3+\sin t\end{cases}$（$t$ 为参数），

C_2：$\begin{cases}x=8\cos\theta,\\y=3\sin\theta\end{cases}$（$\theta$ 为参数）.

(1) 化 C_1，C_2 的方程为普通方程，并说明它们分别表示什么曲线；

(2) 若 C_1 上的点 P 对应的参数为 $t=\frac{\pi}{2}$，Q 为 C_2 上的点，求 PQ 中点 M 到直线 $x-2y-7=0$ 距离的最小值.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

课后训练 提能达标 KEHOUXUNLIANTINENGDABIAO 练速度练能力、学业达标没问题

一、选择题

1. 参数方程 $\begin{cases} x=\sin\frac{\alpha}{2}+\cos\frac{\alpha}{2}, \\ y=\sqrt{2+\sin\alpha} \end{cases}$（$\alpha$ 为参数）的普通方程为 （　　）

A. $y^2-x^2=1$　　B. $x^2-y^2=1$

C. $y^2-x^2=1(|x|\leqslant\sqrt{2})$　　D. $x^2-y^2=1(|x|\leqslant\sqrt{2})$

2. 由方程 $x^2+y^2-4tx-2ty+5t^2-4=0$（t 为参数）所表示的一组圆的圆心轨迹是 （　　）

A. 一个定点　　B. 一个椭圆

C. 一条抛物线　　D. 一条直线

3. （**2019·河北衡水期中**）将参数方程 $\begin{cases} x=2+\sin^2\theta, \\ y=\sin^2\theta \end{cases}$（$\theta$ 为参数）化为普通方程是 （　　）

A. $y=x-2$

B. $y=x+2$

C. $y=x-2(2\leqslant x\leqslant 3)$

D. $y=x+2(0\leqslant y\leqslant 1)$

4. （**2019·安徽安庆月考**）若 $P(x,y)$ 是曲线 $\begin{cases} x=-1+\cos\alpha, \\ y=\sin\alpha \end{cases}$（$\alpha$ 为参数）上任意一点，则 $(x-2)^2+(y+4)^2$ 的最大值是 （　　）

A. 36　　B. 6

C. 26　　D. 25

5. 曲线 $\begin{cases} x=3\cos\theta, \\ y=3\sin\theta \end{cases}$（$\theta$ 为参数）与曲线 $\begin{cases} x=-3+2\cos\theta, \\ y=4+2\sin\theta \end{cases}$（$\theta$ 为参数）的位置关系是 （　　）

A. 内切　　B. 外切

C. 内含　　D. 相离

二、填空题

6. 参数方程 $\begin{cases} x=\sin\theta+\cos\theta, \\ y=1+\sin 2\theta \end{cases}$（$\theta$ 为参数）对应的普通方程为_____.

7. （**2019·北京四中高二月考**）在直角坐标系 xOy 中，以原点 O 为极点，x 轴的正半轴为极轴建立极坐标系. 若极坐标方程为 $\rho\cos\theta=4$ 的直线与曲线 $\begin{cases} x=t^2, \\ y=t^3 \end{cases}$（$t$ 为参数）相交于 A,B 两点，则 $|AB|=$_____.

8. 点 (x,y) 是曲线 $C:\begin{cases} x=-2+\cos\theta, \\ y=\sin\theta \end{cases}$（$\theta$ 为参数，$0\leqslant\theta<2\pi$）上任意一点，则 $\frac{y}{x}$ 的取值范围是_____.

三、解答题

9. （**2019·安徽慧德高中月考**）已知直线 l 的参数方程为 $\begin{cases} x=t+3, \\ y=3-t \end{cases}$（$t$ 为参数），圆 C 的参数方程为 $\begin{cases} x=2\cos\theta, \\ y=2\sin\theta+2 \end{cases}$（$\theta$ 为参数），求圆心到直线的距离.

10. 在平面直角坐标系 xOy 中，直线 l 的参数方程为 $\begin{cases} x=t+1, \\ y=2t \end{cases}$（$t$ 为参数），曲线 C 的参数方程为 $\begin{cases} x=2\tan^2\theta, \\ y=2\tan\theta \end{cases}$（$\theta$ 为参数）. 试求直线 l 与曲线 C 的普通方程，并求出它们的公共点的坐标.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

二　圆锥曲线的参数方程

第9课时　椭圆的参数方程

要点梳理

椭圆的参数方程

中心在原点，焦点在 x 轴上的椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的参数方程是_____（φ 为参数）.

中心在原点，焦点在 y 轴上的椭圆 $\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1(a>b>0)$ 的参数方程是_____（φ 为参数）.

对点训练

知识点一　椭圆的参数方程

1. 椭圆 $\begin{cases}x=4\cos\varphi,\\ y=5\sin\varphi\end{cases}$（$\varphi$ 为参数）的离心率为　　（　　）

A. $\frac{4}{5}$　　B. $\frac{3}{5}$

C. $\frac{3}{4}$　　D. $\frac{1}{5}$

2. （**2019·天津市杨村一中月考**）曲线 $\begin{cases}x=2\sqrt{3}\cos\theta,\\ y=3\sqrt{2}\sin\theta\end{cases}$（$\theta$ 为参数）中两焦点间的距离是_____.

知识点二　椭圆参数方程的应用

3. （**2019·河北衡水期中**）已知 $A(0,1)$ 是椭圆 $x^2+4y^2=4$ 上一定点，P 为椭圆上异于 A 的一动点，则 $|AP|$ 的最大值为　　（　　）

A. $3\sqrt{3}$　　B. $4\sqrt{3}$

C. $\frac{4\sqrt{3}}{3}$　　D. $\frac{8\sqrt{3}}{3}$

4. 已知曲线 $\begin{cases}x=3\cos\theta,\\ y=4\sin\theta\end{cases}$（$\theta$ 为参数，$0\leqslant\theta\leqslant\pi$）上一点 P，原点为 O，直线 OP 的倾斜角为 $\frac{\pi}{4}$，则点 P 的坐标为　　（　　）

A. $(3,4)$　　B. $(4,3)$

C. $(3\sqrt{2},2\sqrt{2})$　　D. $\left(\frac{12}{5},\frac{12}{5}\right)$

5. 若动点 $M(x,y)$ 在曲线 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$ 上运动，求 x^2+2y 的最大值.

6. （**2019·福建漳州质检**）已知曲线 C_1 的方程为 $\frac{x^2}{10}+\frac{y^2}{6}=1$，曲线 C_2 的参数方程为 $\begin{cases}x=-\frac{1}{2}t,\\ y=-8+\frac{\sqrt{3}}{2}t\end{cases}$（$t$ 为参数）.

(1)求 C_1 的参数方程和 C_2 的普通方程；

(2)设点 P 在 C_1 上，点 Q 在 C_2 上，求 $|PQ|$ 的最小值.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

课后训练 提能达标 KEHOUXUNLIANTINENGDABIAO 练速度练能力、学业达标没问题

一、选择题

1. 当参数 θ 变化时，动点 $P(2\cos\theta,3\sin\theta)$ 所确定的曲线必过点 （　　）

A. $(2,3)$　　B. $(2,0)$

C. $(1,3)$　　D. $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$

2. **(2019·海南文昌检测)** 点 $P(x,y)$ 为椭圆 $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$ 上一点，则 $x+y$ 的最大值为 （　　）

A. 3　　B. 4

C. 5　　D. 6

3. 设 O 是椭圆 $\begin{cases}x=3\cos\varphi,\\y=2\sin\varphi\end{cases}$（$\varphi$ 为参数）的中心，P 是椭圆上对应于 $\varphi=\frac{\pi}{6}$ 的点，那么直线 OP 的斜率为 （　　）

A. $\frac{\sqrt{3}}{3}$　　B. $\sqrt{3}$　　C. $\frac{3\sqrt{3}}{2}$　　D. $\frac{2\sqrt{3}}{9}$

4. 椭圆 $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$ 上的点到直线 $x+2y-4=0$ 的距离的最小值是 （　　）

A. $\frac{\sqrt{5}}{5}$　　B. $\sqrt{6}$

C. $\frac{6\sqrt{5}}{5}$　　D. 0

5. 椭圆 $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$ 的内接矩形面积的最大值是 （　　）

A. 16　　B. 25　　C. 40　　D. 80

二、填空题

6. **(2019·宁夏银川月考)** 在平面直角坐标系 xOy 中，若直线 $l:\begin{cases}x=t,\\y=t-a\end{cases}$（$t$ 为参数）过椭圆 $C:\begin{cases}x=3\cos\theta,\\y=2\sin\theta\end{cases}$（$\theta$ 为参数）的右顶点，则常数 a 的值为_____.

7. 已知椭圆的参数方程为 $\begin{cases}x=2\cos\theta,\\y=4\sin\theta\end{cases}$（$\theta$ 为参数），点 M,N 在椭圆上，对应参数分别为 $\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{6}$，则直线 MN 的斜率为_____.

8. **(2019·北京西城区月考)** 在直角坐标系 xOy 中，椭圆 C 的参数方程为 $\begin{cases}x=a\cos\varphi,\\y=b\sin\varphi\end{cases}$（$\varphi$ 为参数，$a>b>0$）. 在极坐标系（与直角坐标系 xOy 取相同的长度单位，且以原点 O 为极点，以 x 轴正半轴为极轴）中，直线 l 与圆 O 的极坐标方程分别为 $\rho\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}m$（$m$ 为非零常数）与 $\rho=b$. 若直线 l 经过椭圆 C 的焦点，且与圆 O 相切，则椭圆 C 的离心率为_____.

三、解答题

9. 求椭圆 $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{12}=1$ 上的点到直线 $l:x-2y-12=0$ 的最大距离和最小距离.

10. 已知圆锥曲线 $C:\begin{cases}x=5\cos\theta,\\y=4\sin\theta\end{cases}$（$\theta$ 为参数，$\theta\in\mathbf{R}$），点 F_1，F_2 分别是圆锥曲线 C 的左、右焦点，点 B 为圆锥曲线 C 的上顶点，求经过点 F_1 且垂直于直线 BF_2 的直线 l 的方程.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

第 10 课时　双曲线与抛物线的参数方程

要点梳理

1. 双曲线的参数方程

(1)中心在原点,焦点在 x 轴上的双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ 的参数方程是_____,规定参数 φ 的取值范围为 $\varphi\in[0,2\pi)$ 且 $\varphi\neq\frac{\pi}{2}$,$\varphi\neq\frac{3\pi}{2}$.

(2)中心在原点,焦点在 y 轴上的双曲线 $\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1$ 的参数方程是_____.

2. 抛物线的参数方程

(1)抛物线 $y^2=2px$ 的参数方程为_____,$t\in\mathbf{R}$.

(2)参数 t 的几何意义是抛物线上除顶点外的任意一点与原点连线的斜率的倒数.

对点训练

知识点一　双曲线的参数方程

1. 点 $M_0(0,2)$ 到双曲线 $x^2-y^2=1$ 的最小距离(即双曲线上任一点 M 到点 M_0 的距离的最小值)是 (　　)

A. 1　　B. 2　　C. $\sqrt{3}$　　D. 3

2. 若实数 x,y 满足 $\frac{x^2}{4}-y^2=1$,则 $\frac{2y-x}{y}$ 的取值范围是 (　　)

A. $[0,4]$　　B. $(0,4)$

C. $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$　　D. $(-\infty,0)\cup(4,+\infty)$

知识点二　抛物线的参数方程

3. (**2019·天津市南开区模拟**)已在直角坐标系 xOy 中,曲线 C 的参数方程为 $\begin{cases}x=2\sqrt{2}t^2,\\y=4t\end{cases}$($t$ 为参数).点 $M(\sqrt{2},0)$,P 为 C 上一点,若 $|PM|=4\sqrt{2}$,则 $\triangle POM$ 的面积为_____.

4. (**2019·湖南邵东一中月考**)已知直线 $l:\sqrt{3}x+2y-6=0$ 与抛物线 $y^2=2\sqrt{3}x$ 交于 A、B 两点,O 为原点,求 $\angle AOB$ 的值.

知识点三　圆锥曲线的参数方程的综合应用

5. 已知两曲线的参数方程分别为 $\begin{cases}x=\sqrt{5}\cos\theta,\\y=\sin\theta\end{cases}$($\theta$ 为参数,$0\leqslant\theta\leqslant\pi$)和 $\begin{cases}x=\frac{5}{4}t^2,\\y=t\end{cases}$($t$ 为参数,$t\in\mathbf{R}$),它们的交点坐标为_____.

6. 如果椭圆右焦点和右顶点分别是双曲线 $\begin{cases}x=\frac{4}{\cos\theta},\\y=3\tan\theta\end{cases}$($\theta$ 为参数)的右顶点和右焦点,求该椭圆上的点到双曲线渐近线的最大距离.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

课后训练 提能达标 KEHOUXUNLIANTINENGDABIAO 练速度练能力、学业达标没问题

一、选择题

1. 参数方程$\begin{cases}x=t,\\y=t^2+1\end{cases}$($t$ 为参数)表示的曲线是 （　　）

A. 直线　　B. 圆

C. 椭圆　　D. 抛物线

2. (**2019·黑龙江青冈实验中学测试**)双曲线：$\begin{cases}x=\dfrac{3}{\cos\theta},\\y=4\tan\theta\end{cases}$($\theta$ 为参数)的渐近线方程为 （　　）

A. $4x\pm3y=0$　　B. $3x\pm4y=0$

C. $16x\pm9y=0$　　D. $9x\pm16y=0$

3. 参数方程$\begin{cases}x=\left|\cos\dfrac{\theta}{2}+\sin\dfrac{\theta}{2}\right|,\\y=\dfrac{1}{2}(1+\sin\theta)\end{cases}$($\theta$ 为参数，$0<\theta<2\pi$)表示 （　　）

A. 双曲线的一支，这支过点$\left(1,\dfrac{1}{2}\right)$

B. 抛物线的一部分，这部分过点$\left(1,\dfrac{1}{2}\right)$

C. 双曲线的一支，这支过点$\left(-1,\dfrac{1}{2}\right)$

D. 抛物线的一部分，这部分过点$\left(-1,\dfrac{1}{2}\right)$

4. 方程$\begin{cases}x=2^t-2^{-t},\\y=2^t+2^{-t}\end{cases}$($t$ 为参数)表示的曲线是 （　　）

A. 双曲线　　B. 双曲线的上支

C. 双曲线的下支　　D. 抛物线

5. 已知双曲线的参数方程为$\begin{cases}x=2\tan\theta,\\y=\dfrac{4}{\cos\theta}\end{cases}$($\theta$ 为参数)，则双曲线的离心率 $e=$ （　　）

A. $\sqrt{5}$　　B. $\sqrt{3}$

C. $\dfrac{\sqrt{5}}{2}$　　D. 2

二、填空题

6. (**2019·山西太原高二月考**)已知曲线 C_1 的参数方程是$\begin{cases}x=\sqrt{t},\\y=\dfrac{\sqrt{3t}}{3}\end{cases}$($t$ 为参数)，以坐标原点为极点，x 轴的正半轴为极轴建立极坐标系，曲线 C_2 的极坐标方程是 $\rho=2$，则 C_1 与 C_2 交点的直角坐标为_____.

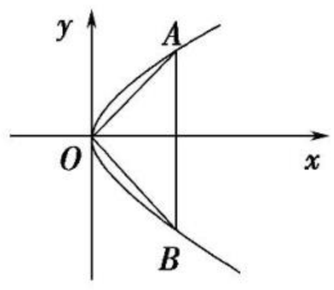
7. 已知曲线 C 的参数方程为$\begin{cases}x=\sqrt{t}-\dfrac{1}{\sqrt{t}},\\y=3\left(t+\dfrac{1}{t}\right)\end{cases}$($t$ 为参数，$t>0$)，则曲线 C 的普通方程为_____.

8. (**2019·天津七校期末联考**)已知抛物线 C 的参数方程为$\begin{cases}x=2pt^2,\\y=2pt\end{cases}$($t$ 为参数，$p>0$)，其焦点为 F，顶点为 O，准线为 l，过点 F 斜率为$\sqrt{3}$的直线 l' 与抛物线 C 交于点 A(A 在 x 轴的上方)，过 A 作 $AB\perp l$ 于点 B，若$\triangle BOF$ 的面积为$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，则 $p=$_____.

三、解答题

9. 已知 $x^2-y^2=1$，求$\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{y}{x}$的取值范围.

10. 如图，O 是直角坐标原点，A，B 是抛物线 $y^2=2px(p>0)$ 上异于顶点的两动点，且 $OA\perp OB$，点 A，B 在什么位置时，$\triangle AOB$ 的面积最小？最小值是多少？



关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

三　直线的参数方程

第 11 课时　直线的参数方程

要点梳理

1. 直线的参数方程

经过点 $M_0(x_0,y_0)$，倾斜角为 α 的直线 l 的参数方程为 （t 为参数）.

2. 直线的参数方程中参数 t 的几何意义

(1)参数 t 的绝对值表示参数 t _____ 到定点 M_0 的距离.

(2)当 $\overrightarrow{M_0M}$ 与 $\boldsymbol{e}$（直线的单位向量）同向时，t 取 _____，当 $\overrightarrow{M_0M}$ 与 $\boldsymbol{e}$ 反向时，t 取 _____，当 M 与 M_0 重合时，$t=0$.

对点训练

知识点一　直线参数方程的标准形式

1. 已知直线 l 的参数方程为 $\begin{cases}x=1+\frac{1}{2}t,\\ y=2+\frac{\sqrt{3}}{2}t\end{cases}$（$t$ 为参数），则其普通方程为 （　　）

A. $\sqrt{3}x+y+2-\sqrt{3}=0$

B. $\sqrt{3}x-y+2-\sqrt{3}=0$

C. $x-\sqrt{3}y+2-\sqrt{3}=0$

D. $x+\sqrt{3}y+2+\sqrt{3}=0$

2. 设直线的参数方程为 $\begin{cases}x=5+3t,\\ y=10-4t\end{cases}$（$t$ 为参数）.

(1)求直线的普通方程；

(2)化为直线参数方程的标准形式.

知识点二　直线参数方程的应用

3. (**2019 · 河北黄骅中学月考**)直线 $\begin{cases}x=1+\frac{1}{2}t,\\ y=-3\sqrt{3}+\frac{\sqrt{3}}{2}t\end{cases}$（$t$ 为参数）和圆 $x^2+y^2=16$ 交于 A,B 两点，则线段 AB 的中点坐标为 （　　）

A. $(3,-3)$　　B. $(3,-\sqrt{3})$

C. $(\sqrt{3},-3)$　　D. $(-\sqrt{3},3)$

4. 过点 $P\left(6,\frac{7}{2}\right)$ 的直线 $\begin{cases}x=6+2t,\\ y=\frac{7}{2}+t\end{cases}$（$t$ 为参数）与抛物线 $y^2=2x$ 相交于 A,B 两点，则点 P 到 A,B 的距离之积等于 _____.

知识点三　直线参数方程的综合应用

5. (**2019 · 天津市四十五中月考**)曲线 C 的极坐标方程是 $\rho=2\sin\theta$，设直线 l 的参数方程是 $\begin{cases}x=-\frac{3}{5}t+2,\\ y=\frac{4}{5}t\end{cases}$（$t$ 为参数），直线 l 与 x 轴的交点是 M，而 N 为曲线 C 上一动点，则 $|MN|$ 的最大值是 _____.

6. (**2019 · 山东日照校际联考**)已知平面直角坐标系 xOy 中，过点 $P(-1,-2)$ 的直线 l 的参数方程为 $\begin{cases}x=-1+t\cos 45^\circ,\\ y=-2+t\sin 45^\circ\end{cases}$（$t$ 为参数），以原点 O 为极点，x 轴的正半轴为极轴建立极坐标系，曲线 C 的极坐标方程为 $\rho\cdot\sin\theta\cdot\tan\theta=2a(a>0)$，直线 l 与曲线 C 相交于不同的两点 M,N.

(1)求曲线 C 的直角坐标方程和直线 l 的普通方程；

(2)若 $|PM|=|MN|$，求实数 a 的值.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

课后训练 提能达标 KEHOUXUNLIANTINENGDABIAO 练速度练能力、学业达标没问题

一、选择题

1. 已知 α 是锐角，直线 $\begin{cases}x=1+t\cos\left(\alpha+\frac{3\pi}{2}\right),\\ y=2+t\sin\left(\alpha+\frac{3\pi}{2}\right)\end{cases}$（$t$ 为参数）的倾斜角是 （　　）

A. α　　B. $\alpha-\frac{\pi}{2}$

C. $\alpha+\frac{\pi}{2}$　　D. $\alpha+\frac{3\pi}{2}$

2.（**2019·河北衡水期中**）下列可以作为直线 $2x-y+1=0$ 的参数方程的是 （　　）

A. $\begin{cases}x=1+t,\\ y=3+t\end{cases}$（$t$ 为参数）

B. $\begin{cases}x=1-t,\\ y=5-2t\end{cases}$（$t$ 为参数）

C. $\begin{cases}x=1-t,\\ y=3-2t\end{cases}$（$t$ 为参数）

D. $\begin{cases}x=2+\frac{2\sqrt{5}}{5}t,\\ y=5+\frac{\sqrt{5}}{5}t\end{cases}$（$t$ 为参数）

3. 若直线的参数方程为 $\begin{cases}x=1+2t,\\ y=2-3t\end{cases}$（$t$ 为参数），则直线的斜率为 （　　）

A. $\frac{2}{3}$　　B. $\frac{3}{2}$

C. $-\frac{2}{3}$　　D. $-\frac{3}{2}$

4.（**2019·北京市十一学校三模**）若直线 $\begin{cases}x=3t,\\ y=1-4t\end{cases}$（$t$ 为参数）与圆 $\begin{cases}x=3\cos\theta,\\ y=b+3\sin\theta\end{cases}$（$\theta$ 为参数）相切，则 $b=$ （　　）

A. -4 或 6　　B. -6 或 4

C. -1 或 9　　D. -9 或 1

5. 直线 $\begin{cases}x=t\cos\alpha,\\ y=1+t\sin\alpha\end{cases}$（$t$ 为参数）被圆 $x^2+(y-1)^2=9$ 所截得的弦长等于 （　　）

A. 3　　B. 6

C. 9　　D. 12

二、填空题

6.（**2019·天津市和平区质量调查**）在平面直角坐标系中，以坐标原点为极点，x 轴的非负半轴为极轴且单位长度相同建立极坐标系，若直线 $\begin{cases}x=1+t,\\ y=a-t\end{cases}$（$t$ 为参数）被曲线 $\rho=-4\cos\theta$ 截得的弦长为 $2\sqrt{2}$，则 a 的值为_____.

7.（**2019·天津模拟**）已知曲线 C 的极坐标方程是 $\rho=4\cos\theta$，以极点为平面直角坐标系的原点，极轴为 x 轴的非负半轴，建立平面直角坐标系，直线 l 的参数方程是 $\begin{cases}x=1+\frac{\sqrt{2}}{2}t,\\ y=\frac{\sqrt{2}}{2}t\end{cases}$（$t$ 为参数），若直线 l 与曲线 C 相交于 A,B 两点，则 $|AB|=$_____.

8. 已知直线 l 的参数方程为 $\begin{cases}x=-1+t,\\ y=1+t\end{cases}$（$t$ 为参数），以坐标原点为极点，x 轴的正半轴为极轴建立极坐标系，曲线 C 的极坐标方程为 $\rho^2\cos 2\theta=4\left(\rho>0,\frac{3\pi}{4}<\theta<\frac{5\pi}{4}\right)$，则直线 l 与曲线 C 的交点的极坐标为_____.

三、解答题

9.（**2019·广东汕头质检**）已知直线 $l_1:\begin{cases}x=1-2t,\\ y=2+kt\end{cases}$（$t$ 为参数）与直线 $l_2:\begin{cases}x=s,\\ y=1-2s\end{cases}$（$s$ 为参数）垂直，求 k 的值.

10.（**2019·长春模拟**）在直角坐标系 xOy 中，曲线 C_1 的参数方程为 $\begin{cases}x=-1-2t,\\ y=-1+2t\end{cases}$（$t$ 为参数），以原点为极点，以 x 轴正半轴为极轴，建立极坐标系，曲线 C_2 的极坐标方程为 $\rho=2\sqrt{2}\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)$.

(1) 求曲线 C_1 的普通方程与曲线 C_2 的直角坐标方程；

(2) P 为曲线 C_1 上任一点，过点 P 作曲线 C_2 的切线 PT（T 为切点），求 $|PT|$ 的最小值.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

四　渐开线与摆线

第 12 课时　渐开线与摆线

要点梳理

1. 渐开线

(1)渐开线的概念及产生过程

把一条没有弹性的细绳绕在一个圆盘上，在绳的外端系上一支铅笔，将绳子拉紧，保持绳子与圆相切，逐渐展开，铅笔头画出的曲线叫做圆的_____，相应的定圆叫做渐开线的_____.

(2)渐开线的参数方程

设基圆的半径为 r，则圆的渐开线的参数方程为_____(φ 为参数).

2. 摆线

(1)摆线的概念及产生过程

当一个圆沿着一条定直线无滑动地滚动时，圆周上的一个定点运动的轨迹叫做_____，简称摆线，又叫做_____.

(2)摆线的参数方程

设圆的半径为 r，圆滚动的角为 φ，那么摆线的参数方程是_____(φ 为参数).

对点训练

知识点一　圆的渐开线的参数方程

1.(**2019·福建东张中学期中**)圆心在原点，半径为 2 的圆的渐开线的参数方程是 (　　)

A. $\begin{cases}x=2(\cos\varphi+\varphi\sin\varphi),\\y=2(\sin\varphi-\varphi\cos\varphi)\end{cases}$($\varphi$ 为参数)

B. $\begin{cases}x=4(\cos\varphi+\varphi\sin\varphi),\\y=4(\sin\varphi-\varphi\cos\varphi)\end{cases}$($\varphi$ 为参数)

C. $\begin{cases}x=2(\varphi-\sin\varphi),\\y=2(1-\cos\varphi)\end{cases}$($\varphi$ 为参数)

D. $\begin{cases}x=4(\varphi-\sin\varphi),\\y=4(1-\cos\varphi)\end{cases}$($\varphi$ 为参数)

2. 已知圆的渐开线的参数方程为 $\begin{cases}x=3(\cos\varphi+\varphi\sin\varphi),\\y=3(\sin\varphi-\varphi\cos\varphi)\end{cases}$($\varphi$ 为参数)，点 M 是该渐开线上一点，则点 M 与原点距离的最小值是_____.

知识点二　平摆线的参数方程

3. 已知圆的平摆线的参数方程是 $\begin{cases}x=6(\theta-\sin\theta),\\y=6(1-\cos\theta)\end{cases}$($\theta$ 为参数)，则平摆线一拱的宽度和高度分别是 (　　)

A. 6，6　　B. 6π，12

C. 12，12　　D. 12π，12

4.(1)平面直角坐标系中，若圆的平摆线过点(1，0)，求这条平摆线的参数方程；

(2)求平摆线 $\begin{cases}x=2(t-\sin t),\\y=2(1-\cos t)\end{cases}$($t$ 为参数，且 $0\leqslant t\leqslant 2\pi$)与直线 $y=2$ 的交点坐标.

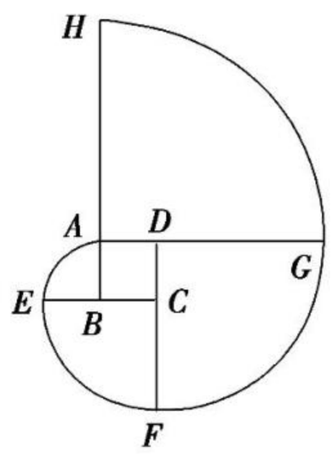
知识点三　渐开线与摆线的参数方程的应用

5. 已知圆的参数方程为 $\begin{cases}x=3\cos\varphi,\\y=3\sin\varphi\end{cases}$($\varphi$ 为参数)，那么圆的摆线方程中当参数 $\varphi=\frac{\pi}{2}$ 时，对应的点 A 与点 $B\left(\frac{3\pi}{2},2\right)$ 之间的距离是 (　　)

A. $\frac{\pi}{2}-1$　　B. $\sqrt{2}$

C. $\sqrt{\frac{3\pi}{2}-1}$　　D. $\sqrt{10}$

6. 如图 $ABCD$ 是边长为 1 的正方形，曲线 $AEFGH\cdots$ 叫做“正方形的渐开线”，其中 AE，EF，FG，$GH\cdots$ 的圆心依次按 B，C，D，A 循环，它们依次相连接，求曲线 $AEFGH$ 的长.



关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

课后训练 提能达标 KEHOUXUNLIANTINENGDABIAO 练速度练能力、学业达标没问题

一、选择题

1.（**2019·河北邢台二中月考**）关于渐开线和摆线的叙述，正确的是（　　）

A. 只有圆才有渐开线

B. 渐开线和摆线的定义是一样的，只是绘图的方法不一样，所以才得到了不同的图形

C. 正方形也可以有渐开线

D. 对于同一个圆，如果建立的直角坐标系的位置不同，画出的渐开线形状就不同

2. 圆$\begin{cases}x=3\cos\theta,\\y=3\sin\theta\end{cases}$（$\theta$为参数）的平摆线上一点的纵坐标为 0，那么其横坐标可能是（　　）

A. π　　B. 3π　　C. 6π　　D. 10π

3. 给出下列说法：①圆的渐开线的参数方程不能转化为普通方程；②圆的渐开线的参数方程也可以转化为普通方程，但是转化后的普通方程比较麻烦，且不容易看出坐标之间的关系，所以常使用参数方程研究圆的渐开线问题；③在求圆的摆线和渐开线方程时，如果建立的坐标系原点和坐标轴选取不同，可能会得到不同的参数方程；④圆的渐开线和 x 轴一定有交点而且是唯一的交点.

其中正确的说法有（　　）

A. ①③　　B. ②④

C. ②③　　D. ①③④

4. 已知圆的渐开线的参数方程为$\begin{cases}x=\cos\varphi+\varphi\sin\varphi,\\y=\sin\varphi-\varphi\cos\varphi\end{cases}$（$\varphi$为参数），则此渐开线对应的基圆的面积是（　　）

A. π　　B. 2π

C. 3π　　D. 4π

5. 已知圆的渐开线的参数方程为$\begin{cases}x=r(\cos\theta+\theta\sin\theta),\\y=r(\sin\theta-\theta\cos\theta)\end{cases}$（$\theta$为参数），点 $A\left(\frac{3}{2},0\right)$是渐开线上一点，则渐开线的基圆的半径是（　　）

A. $\frac{1}{2}$　　B. 1

C. $\frac{3}{2}$　　D. 2

二、填空题

6. 摆线$\begin{cases}x=4(t-\sin t),\\y=4(1-\cos t)\end{cases}$（$0\leqslant t\leqslant 2\pi$）与直线 $y=4$ 的交点的直角坐标为_____.

7. 渐开线$\begin{cases}x=6(\cos\varphi+\varphi\sin\varphi),\\y=6(\sin\varphi-\varphi\cos\varphi)\end{cases}$（$\varphi$为参数）的基圆的圆心在原点，把基圆的横坐标伸长为原来的 2 倍（纵坐标不变），得到的曲线的焦点坐标为_____.

8.（**2019·河北保定期中**）已知参数方程$\begin{cases}x=2\cos\alpha,\\y=2\sin\alpha\end{cases}$（$\alpha$为参数），则该圆的渐开线参数方程为_____，摆线参数方程为_____.

三、解答题

9.（**2019·河北大名期中**）当 $\varphi=\frac{\pi}{2}$，π 时，求出渐开线$\begin{cases}x=\cos\varphi+\varphi\sin\varphi,\\y=\sin\varphi-\varphi\cos\varphi\end{cases}$（$\varphi$为参数）上的对应点 A，B，并求出 A，B 间的距离.

10. 已知圆 C 的参数方程是$\begin{cases}x=1+6\cos\alpha,\\y=-2+6\sin\alpha\end{cases}$（$\alpha$为参数），直线 l 对应的普通方程是 $x-y-6\sqrt{2}=0$.

(1)如果把圆心平移到原点 O，请判断平移后圆和直线的位置关系；

(2)写出平移后圆的摆线方程；

(3)求摆线和 x 轴的交点.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

阶段评估二

（时间：60 分钟，满分：100 分）

一、选择题（每小题 5 分，共 30 分）

1. 方程 $\begin{cases}x=\sin\theta,\\y=\cos 2\theta\end{cases}$（$\theta$ 为参数）表示的曲线上的一个点的坐标是　　（　　）

A. $(2,-7)$　　B. $(1,0)$

C. $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$　　D. $\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)$

2. （**2019·北京西城区模拟**）方程组 $\begin{cases}x=2t(-1\leqslant t\leqslant 1),\\y=2\end{cases}$（$t$ 为参数）表示的图形是　　（　　）

A. 一条直线　　B. 两条射线

C. 一条线段　　D. 抛物线的一部分

3. （**2019·天津市九校联考**）圆的参数方程为 $\begin{cases}x=4\cos\theta,\\y=4\sin\theta\end{cases}$（$\theta$ 为参数，$0\leqslant\theta<2\pi$），若 $Q(-2,2\sqrt{3})$ 是圆上一点，则对应的参数 θ 的值是　　（　　）

A. $\frac{\pi}{3}$　　B. $\frac{2}{3}\pi$

C. $\frac{4}{3}\pi$　　D. $\frac{5}{3}\pi$

4. 已知直线 l：$\begin{cases}x=2+t,\\y=-2-t\end{cases}$（$t$ 为参数）与圆 C：$\begin{cases}x=2\cos\theta+1,\\y=2\sin\theta\end{cases}$（$\theta$ 为参数），则直线 l 的倾斜角及圆心 C 的直角坐标分别是　　（　　）

A. $\frac{\pi}{4}$，$(1,0)$　　B. $\frac{\pi}{4}$，$(-1,0)$

C. $\frac{3\pi}{4}$，$(1,0)$　　D. $\frac{3\pi}{4}$，$(-1,0)$

5. （**2019·河北邢台月考**）若直线 l：$\begin{cases}x=2t,\\y=1-4t\end{cases}$（$t$ 为参数）与曲线 C：$\begin{cases}x=\sqrt{5}\cos\theta,\\y=m+\sqrt{5}\sin\theta\end{cases}$（$\theta$ 为参数）相切，则实数 m 为　　（　　）

A. -4 或 6　　B. -6 或 4

C. -1 或 9　　D. -9 或 1

6. （**2019·张家口一中期末**）已知直线 $\begin{cases}x=x_0+at,\\y=y_0+bt\end{cases}$（$t$ 为参数）上两点 A，B 对应的参数值是 t_1，t_2，则 $|AB|$ 等于（　　）

A. $|t_1+t_2|$　　B. $|t_1-t_2|$

C. $\sqrt{a^2+b^2}|t_1-t_2|$　　D. $\frac{|t_1-t_2|}{\sqrt{a^2+b^2}}$

二、填空题（每小题 5 分，共 20 分）

7. 给出曲线的参数方程是 $\begin{cases}x=1-2t^2,\\y=3t+2\end{cases}$（$t$ 为参数），则曲线与 x 轴交点的坐标为_____.

8. 直线 $y=kx+1$ 与圆 $\begin{cases}x=2\cos\alpha,\\y=3+2\sin\alpha\end{cases}$（$\alpha$ 为参数）相交于 M，N 两点，若 $|MN|=2\sqrt{3}$，则 $k=$_____.

9. 以直角坐标系的原点为极点，x 轴的正半轴为极轴建立极坐标系，已知直线 l 的参数方程为 $\begin{cases}x=t,\\y=t-a\end{cases}$（$t$ 为参数），圆 C 的极坐标方程为 $\rho=2\cos\theta$，若直线 l 经过圆 C 的圆心，则常数 a 的值为_____.

10. （**2019·宁夏中卫一中月考**）参数方程 $\begin{cases}x=e^t+e^{-t},\\y=2(e^t-e^{-t})\end{cases}$（$t$ 为参数）的普通方程为_____.

三、解答题（共 50 分）

11. （12 分）（**2019·江苏模拟**）已知曲线 C_1：$\rho=2\sin\theta$，直线 C_2：$\begin{cases}x=-\frac{3}{5}t+2,\\y=\frac{4}{5}t\end{cases}$（$t$ 为参数）.

（1）化 C_1 为直角坐标方程，化 C_2 为普通方程；

（2）若 M 为 C_2 与 x 轴的交点，N 为曲线 C_1 上一动点，求 $|MN|$ 的最大值.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

12.(12 分)(**2019·天星教育大联考**)已知曲线 C 的极坐标方程 $\rho^2-2\sqrt{2}\rho\cos\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)-2=0$. 以极点为平面直角坐标系的原点,极轴为 x 轴的正半轴,建立平面直角坐标系 xOy.

(1)若直线 l 过原点,且被曲线 C 截得的弦长最小,求直线 l 的直角坐标方程;

(2)若 M 是曲线 C 上的动点,且点 M 的直角坐标为 (x,y),求 $x+y$ 的最大值.

13.(12 分)在直角坐标系 xOy 中,圆 C 的参数方程为 $\begin{cases}x=3+2\cos\theta,\\y=-4+2\sin\theta\end{cases}$($\theta$ 为参数).

(1)以原点为极点、x 轴正半轴为极轴建立极坐标系,求圆 C 的极坐标方程;

(2)已知 $A(-2,0)$,$B(0,2)$,圆 C 上任意一点 $M(x,y)$,求 $\triangle ABM$ 面积的最大值.

14.(14 分)(**2019·江西南昌模拟**)在平面直角坐标系 xOy 中,直线 l 的参数方程为 $\begin{cases}x=2+t,\\y=1+\sqrt{3}t\end{cases}$($t$ 为参数),曲线 C 的参数方程为 $\begin{cases}x=4+2\cos\alpha,\\y=3+2\sin\alpha\end{cases}$($\alpha$ 为参数),以坐标原点为极点,x 轴的正半轴为极轴建立极坐标系.

(1)求 C 的极坐标方程;

(2)设点 $M(2,1)$,直线 l 与曲线 C 相交于 A,B 两点,求 $|MA|\cdot|MB|$ 的值.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

阶段测试一

（第一讲　坐标系）

时间：120 分钟　满分：150 分

一、选择题（本大题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分. 在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的）

1. 曲线的极坐标方程 $\rho=4\sin\theta$ 化为直角坐标方程为　（　　）

A. $x^2+(y+2)^2=4$　　B. $x^2+(y-2)^2=4$

C. $(x-2)^2+y^2=4$　　D. $(x+2)^2+y^2=4$

2. 原点与极点重合，x 轴正半轴与极轴重合，则点 $(-2,-2\sqrt{3})$ 的极坐标是　（　　）

A. $\left(4,\frac{\pi}{3}\right)$　　B. $\left(4,\frac{4\pi}{3}\right)$

C. $\left(-4,-\frac{2\pi}{3}\right)$　　D. $\left(4,\frac{2\pi}{3}\right)$

3. 可以将椭圆 $\frac{x^2}{10}+\frac{y^2}{8}=1$ 变为圆 $x^2+y^2=4$ 的伸缩变换为　（　　）

A. $\begin{cases}5x'=2x,\\ \sqrt{2}y'=y\end{cases}$　　B. $\begin{cases}\sqrt{2}x'=\sqrt{5}x,\\ y'=\sqrt{2}y\end{cases}$

C. $\begin{cases}\sqrt{2}x'=x,\\ \sqrt{5}y'=\sqrt{2}x\end{cases}$　　D. $\begin{cases}\sqrt{5}x'=\sqrt{2}x,\\ \sqrt{2}y'=y\end{cases}$

4. 极坐标方程 $\sin\theta=\frac{1}{2}(\rho\in\mathbf{R})$ 表示的曲线是　（　　）

A. 两条相交直线　　B. 两条射线

C. 一条直线　　D. 一条射线

5. （**2019 · 湖南邵东一中月考**）在极坐标系中，已知两点 A，B 的极坐标分别为 $\left(3,\frac{\pi}{3}\right)$、$\left(4,\frac{\pi}{6}\right)$，则 $\triangle AOB$（其中 O 为极点）的面积为　（　　）

A. 6　　B. $6\sqrt{3}$　　C. 3　　D. $3\sqrt{3}$

6. 设点 A 的柱坐标为 $(1,\pi,0)$，则点 A 的直角坐标为　（　　）

A. $(-1,0,0)$　　B. $(1,0,0)$

C. $(0,0,-1)$　　D. $(-1,\pi,0)$

7. 在极坐标系中，点 $(1,0)$ 到直线 $\rho(\cos\theta+\sin\theta)=2$ 的距离为　（　　）

A. $\frac{\sqrt{2}}{2}$　　B. $\sqrt{2}$　　C. $\frac{\sqrt{3}}{2}$　　D. $\sqrt{3}$

8. 在极坐标系中，直线 $\rho\cos\theta=\frac{1}{2}$ 与曲线 $\rho=2\cos\theta$ 相交于 A，B 两点，O 为极点，则 $\angle AOB$ 的大小为　（　　）

A. $\frac{\pi}{3}$　　B. $\frac{\pi}{2}$　　C. $\frac{2\pi}{3}$　　D. $\frac{5\pi}{6}$

9. 直线 $l:y+kx+2=0$ 与曲线 $C:\rho=2\cos\theta$ 有交点，则 k 的取值范围是　（　　）

A. $k\leqslant-\frac{3}{4}$　　B. $k\geqslant-\frac{3}{4}$

C. $k\in\mathbf{R}$　　D. $k\in\mathbf{R}$ 但 $k\neq0$

10. （**2019 · 北京海淀区期末**）直线 $\rho\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)=4$ 与圆 $\rho=4\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)$ 的位置关系是　（　　）

A. 相交但不过圆心　　B. 相交且过圆心

C. 相切　　D. 相离

11. 在极坐标系中，圆 $\rho=2\cos\theta$ 的垂直于极轴的两条切线方程分别为　（　　）

A. $\theta=0(\rho\in\mathbf{R})$ 和 $\rho\cos\theta=2$

B. $\theta=\frac{\pi}{2}(\rho\in\mathbf{R})$ 和 $\rho\cos\theta=2$

C. $\theta=\frac{\pi}{2}(\rho\in\mathbf{R})$ 和 $\rho\cos\theta=1$

D. $\theta=0(\rho\in\mathbf{R})$ 和 $\rho\cos\theta=1$

12. 极坐标方程 $\theta=\frac{\pi}{3}(\rho\geqslant0)$，$\theta=\frac{2\pi}{3}(\rho\geqslant0)$ 和 $\rho=4$ 所表示的曲线围成的图形的面积是　（　　）

A. $\frac{2\pi}{3}$　　B. $\frac{4\pi}{3}$　　C. $\frac{8\pi}{3}$　　D. $\frac{16\pi}{3}$

二、填空题（本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分. 把答案填在题中横线上）

13. 在极坐标系中，若过点 $(3,0)$ 且与极轴垂直的直线交曲线 $\rho=4\cos\theta$ 于 A，B 两点，则 $|AB|=$_____.

14. （**2019 · 河南渑池检测**）在极坐标系中，过点 $\left(1,\frac{\pi}{8}\right)$ 和点 $\left(\sqrt{2},\frac{3\pi}{8}\right)$ 的直线的倾斜角是_____.

15. 极坐标系内，点 $\left(2,\frac{\pi}{2}\right)$ 关于直线 $\rho\cos\theta=1$ 对称点的极坐标为_____（其中 $\rho>0$，$0\leqslant\theta<2\pi$）.

16. 在极坐标系中，和极轴垂直且相交的直线 l 与圆 $\rho=4$ 相交于 A，B 两点，若 $|AB|=4$，则直线 l 的极坐标方程为_____.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

三、解答题(本大题共 6 小题,共 70 分.解答应写出必要的文字说明、证明过程或演算步骤)

17.(10 分)在同一直角坐标系中,经过伸缩变换 $\begin{cases}x'=2x,\\y'=2y\end{cases}$ 后,曲线 C 变为曲线 $(x'-5)^2+(y'+6)^2=1$,求曲线 C 的方程,并判断其形状.

18.(12 分)(**2019·江苏省南京模拟**)在极坐标系中,已知圆 C 经过点 $P\left(2,\frac{\pi}{3}\right)$,圆心 C 为直线 $\rho\sin\left(\theta-\frac{\pi}{3}\right)=-\sqrt{3}$ 与极轴的交点,求圆 C 的极坐标方程.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

19.(12 分)(**2019 · 全国卷Ⅱ**)在极坐标系中,O 为极点,点 $M(\rho_0,\theta_0)(\rho_0>0)$ 在曲线 $C:\rho=4\sin\theta$ 上,直线 l 过点 $A(4,0)$ 且与 OM 垂直,垂足为 P.

(1)当 $\theta_0=\frac{\pi}{3}$ 时,求 ρ_0 及 l 的极坐标方程;

(2)当 M 在 C 上运动且 P 在线段 OM 上时,求 P 点轨迹的极坐标方程.

20.(12 分)(**2019 · 河北唐山二模**)在直角坐标系 xOy 中,圆 $C_1:(x-1)^2+y^2=1$,圆 $C_2:(x+2)^2+y^2=4$. 以坐标原点 O 为极点,x 轴的正半轴为极轴建立极坐标系.

(1)求圆 C_1,C_2 的极坐标方程;

(2)设 A,B 分别为 C_1,C_2 上的点,若 $\triangle OAB$ 为等边三角形,求 $|AB|$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

21.(12 分)已知函数 $y=\sqrt{3}\sin x+\cos x, x\in\mathbf{R}$.

(1)当 y 取得最大值时,求自变量 x 取值的集合;

(2)该函数的图象可由 $y=\sin x(x\in\mathbf{R})$ 的图象经过怎样的平移和伸缩变换得到?

22.(12 分)(**2019·包头四中期末**)在直角坐标系 xOy 中,直线 $C_1: x=-2$,圆 $C_2:(x-1)^2+(y-2)^2=1$,以坐标原点为极点,x 轴正半轴为极轴建立极坐标系.

(1)求 C_1, C_2 的极坐标方程;

(2)若直线 C_3 的极坐标方程为 $\theta=\frac{\pi}{4}(\rho\in\mathbf{R})$,设 C_2 与 C_3 的交点为 M, N,求 $\triangle C_2MN$ 的面积.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

阶段测试二

（第二讲　参数方程）

时间：120 分钟　满分：150 分

一、选择题（本大题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分. 在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的）

1. 直线 $\begin{cases}x=1-\frac{1}{\sqrt{5}}t,\\ y=-1+\frac{2}{\sqrt{5}}t\end{cases}$（$t$ 为参数）的斜率是　　（　　）

A. 2　　B. $\frac{1}{2}$

C. -2　　D. $-\frac{1}{2}$

2. 直线 $3x+4y+10=0$ 和圆 $\begin{cases}x=2+5\cos\theta,\\ y=1+5\sin\theta\end{cases}$（$\theta$ 为参数）的位置关系是　　（　　）

A. 相切　　B. 相离

C. 相交但不过圆心　　D. 相交且过圆心

3. 若圆的参数方程为 $\begin{cases}x=-1+2\cos\theta,\\ y=3+2\sin\theta\end{cases}$（$\theta$ 为参数），直线的参数方程为 $\begin{cases}x=2t-1,\\ y=6t-1\end{cases}$（$t$ 为参数），则直线与圆的位置关系是　　（　　）

A. 过圆心　　B. 相交而不过圆心

C. 相切　　D. 相离

4. 曲线的参数方程是 $\begin{cases}x=1-\frac{1}{t},\\ y=1-t^2\end{cases}$（$t$ 为参数，$t\neq0$），它的普通方程是　　（　　）

A. $(x-1)^2(y-1)=1$

B. $y=\frac{x(x-2)}{(1-x)^2}$

C. $y=\frac{1}{(x-1)^2}-1$

D. $y=\frac{x}{1-x^2}+1$

5. （**2019 · 天津市和平区模拟**）已知两曲线参数方程分别为 $\begin{cases}x=\frac{5}{4}t^2,\\ y=t\end{cases}$（$t$ 为参数）和 $\begin{cases}x=\sqrt{5}\cos\theta,\\ y=\sin\theta\end{cases}$（$\theta$ 为参数，$0\leqslant\theta<\pi$），它们的交点坐标为　　（　　）

A. $\left(-5,\frac{2}{5}\sqrt{5}\right)$　　B. $\left(-5,-\frac{2}{5}\sqrt{5}\right)$

C. $\left(1,\frac{2}{5}\sqrt{5}\right)$　　D. $\left(1,-\frac{2}{5}\sqrt{5}\right)$

6. 若过点 $P(-1,2)$ 作直线 l，被圆 $O:\begin{cases}x=3\cos\theta,\\ y=3\sin\theta\end{cases}$（$\theta$ 为参数，$0\leqslant\theta<2\pi$）截得的弦最短，则该直线方程为　　（　　）

A. $x-2y+5=0$　　B. $x-2y-3=0$

C. $2x+y+5=0$　　D. $2x+y-3=0$

7. 半径为 3 的圆的摆线上某点的纵坐标为 0，那么其横坐标可能是　　（　　）

A. 2π　　B. 3π

C. 6π　　D. 10π

8. 已知 $A(4\sin\theta,6\cos\theta)$，$B(-4\cos\theta,6\sin\theta)$，当 θ 为一切实数时，线段 AB 的中点轨迹为　　（　　）

A. 直线　　B. 圆

C. 椭圆　　D. 双曲线

9. 设 F_1 和 F_2 是双曲线 $\begin{cases}x=\frac{2}{\cos\theta},\\ y=\tan\theta\end{cases}$（$\theta$ 为参数）的两个焦点，点 P 在双曲线上，且满足 $\angle F_1PF_2=90^\circ$，则 $\triangle F_1PF_2$ 的面积是　　（　　）

A. 1　　B. 2

C. $\frac{\sqrt{5}}{2}$　　D. 5

10. 曲线 C_1：$\begin{cases}x=\cos^2\theta,\\ y=2-\sin^2\theta\end{cases}$（$\theta$ 为参数）与曲线 C_2：$\begin{cases}x=2\cos\theta,\\ y=2\sin\theta\end{cases}$（$\theta$ 为参数）的交点个数为　　（　　）

A. 0　　B. 1

C. 2　　D. 3

11. 在直角坐标系 xOy 中，过点 $P(-1,2)$ 的直线 l 的参数方程为 $\begin{cases}x=-1-\frac{\sqrt{2}}{2}t,\\ y=2+\frac{\sqrt{2}}{2}t\end{cases}$（$t$ 为参数），直线 l 与抛物线 $y=x^2$ 交于点 A,B，则 $|PA|\cdot|PB|$ 的值是　　（　　）

A. $\sqrt{2}$　　B. 2

C. $3\sqrt{2}$　　D. 10

12. 设曲线 $\begin{cases}x=2\cos\theta,\\ y=\sqrt{3}\sin\theta\end{cases}$（$\theta$ 为参数）与 x 轴的交点为 M，N，点 P 在曲线上，则 PM 与 PN 所在直线的斜率之积为　　（　　）

A. $-\frac{3}{4}$　　B. $-\frac{4}{3}$

C. $\frac{3}{4}$　　D. $\frac{4}{3}$

二、填空题（本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分. 把答案填在题中横线上）

13. 已知点 P 的极坐标为 $\left(\sqrt{2},\frac{\pi}{4}\right)$，那么点 P 到直线 $\begin{cases}x=t+2,\\ y=-t-1\end{cases}$（$t$ 为参数）的距离是_____.

14. （**2019 · 天津卷**）设 $a\in\mathbf{R}$，直线 $ax-y+2=0$ 和圆 $\begin{cases}x=2+2\cos\theta,\\ y=1+2\sin\theta\end{cases}$（$\theta$ 为参数）相切，则 a 的值为_____.

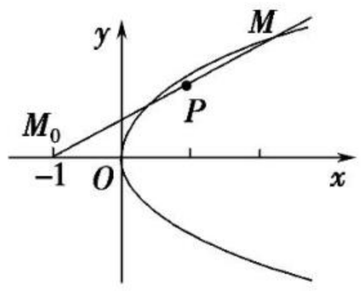
15. 直线 $y=2x-\frac{1}{2}$ 与曲线 $\begin{cases}x=\sin\varphi,\\ y=\cos 2\varphi\end{cases}$（$\varphi$ 为参数）的交点坐标是_____.

16. （**2019 · 江苏常辽阶段检测**）直线 $y=x+b$ 与曲线 $\begin{cases}x=\cos\theta,\\ y=\sin\theta\end{cases}\left(\theta\text{ 为参数，且 }-\frac{\pi}{2}\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}\right)$ 有两个不同的交点，则实数 b 的取值范围是_____.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

三、解答题(本大题共 6 小题,共 70 分.解答应写出必要的文字说明、证明过程或演算步骤)

17.(10 分)设 M 为抛物线 $y^2=2x$ 上的动点,定点 $M_0(-1,0)$,点 P 为线段 M_0M 的中点,求点 P 的轨迹方程(如图).



18.(12 分)(**2019·河北衡水期中**)曲线 C_1 的参数方程为 $\begin{cases}x=\cos\theta,\\y=\sin\theta\end{cases}$($\theta$ 为参数),将曲线 C_1 上所有点的横坐标伸长为原来的 2 倍,纵坐标伸长为原来的$\sqrt{3}$倍,得到曲线 C_2.以平面直角坐标系 xOy 的原点 O 为极点,x 轴的正半轴为极轴,取相同的单位长度建立极坐标系,已知直线 $l:\rho(\cos\theta-2\sin\theta)=6$.

(1)求曲线 C_2 和直线 l 的普通方程;

(2)P 为曲线 C_2 上任意一点,求点 P 到直线 l 的距离的最值.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

19.(12分)(**2019·沈阳模拟**)已知曲线C_1的参数方程为$\begin{cases}x=2+t,\\y=-1+mt\end{cases}$($t$为参数),曲线$C_2$的极坐标方程为$\frac{\rho}{4\sin\theta}=1$.

(1)写出曲线C_1,C_2的直角坐标方程;

(2)若曲线C_1和C_2有且只有一个公共点,求实数m的值.

20.(12分)(**2019·包头四中期末**)在极坐标系中,点M坐标是$\left(3,\frac{\pi}{2}\right)$,曲线$C$的方程为$\rho=2\sqrt{2}\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)$,以极点为坐标原点,极轴为$x$轴的正半轴建立平面直角坐标系,斜率是$-1$的直线$l$经过点$M$.

(1)写出直线l的参数方程和曲线C的直角坐标方程;

(2)求证:直线l和曲线C相交于两点A,B,并求$|MA|\cdot|MB|$的值.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

21.(12 分)(**2018·河南许昌模拟**)在直角坐标系 xOy 中，曲线 C 的参数方程为 $\begin{cases}x=\sqrt{2}\cos\theta,\\y=\sin\theta\end{cases}$($\theta$ 为参数)．在以 O 为极点，x 轴正半轴为极轴的极坐标系中，直线 l 的极坐标方程为 $\theta=\frac{\pi}{4}$．

(1)写出直线 l 的直角坐标方程与曲线 C 的普通方程；

(2)过点 M 且平行于直线 l 的直线与曲线 C 交于 A，B 两点，若 $|MA|\cdot|MB|=\frac{8}{3}$，求点 M 的轨迹．

22.(12 分)(**2019·河北唐山五校联考**)极坐标系的极点为直角坐标系 xOy 的原点，极轴为 x 轴的正半轴，两种坐标系的长度单位相同．已知圆 C_1 的极坐标方程为 $\rho=4(\cos\theta+\sin\theta)$，$P$ 是 C_1 上一动点，点 Q 在射线 OP 上且满足 $|OQ|=\frac{1}{2}|OP|$，点 Q 的轨迹为 C_2．

(1)求曲线 C_2 的极坐标方程，并化为直角坐标方程；

(2)已知直线 l 的参数方程为 $\begin{cases}x=2+t\cos\varphi,\\y=t\sin\varphi\end{cases}$($t$ 为参数，$0\leqslant\varphi<\pi$)，l 与曲线 C_2 有且只有一个公共点，求 φ 的值．

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

阶段测试三

（本册综合测评一）

时间：120 分钟　满分：150 分

一、选择题（本大题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分. 在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的）

1. 若直线 l 的参数方程为 $\begin{cases}x=1+3t,\\y=2-4t\end{cases}$（$t$ 为参数），则直线 l 的倾斜角的余弦值为　（　）

A. $-\frac{4}{5}$　　B. $-\frac{3}{5}$

C. $\frac{3}{5}$　　D. $\frac{4}{5}$

2. 已知三个方程：① $\begin{cases}x=t,\\y=t^2.\end{cases}$ ② $\begin{cases}x=\tan t,\\y=\tan^2 t.\end{cases}$ ③ $\begin{cases}x=\sin t,\\y=\sin^2 t.\end{cases}$ 它们都是以 t 为参数，那表示同一曲线的参数方程是（　）

A. ①②③　　B. ①②

C. ①③　　D. ②③

3. （**2019 · 湖北华师一附中调研**）圆锥曲线 $\rho=\frac{8\sin\theta}{\cos^2\theta}$ 的准线方程是　（　）

A. $\rho\cos\theta=-2$　　B. $\rho\cos\theta=2$

C. $\rho\sin\theta=2$　　D. $\rho\sin\theta=-2$

4. 已知极坐标系中，点 $A\left(2,\frac{\pi}{2}\right)$，$B\left(\sqrt{2},\frac{3\pi}{4}\right)$，$O(0,0)$，则 $\triangle ABO$ 为　（　）

A. 正三角形　　B. 直角三角形

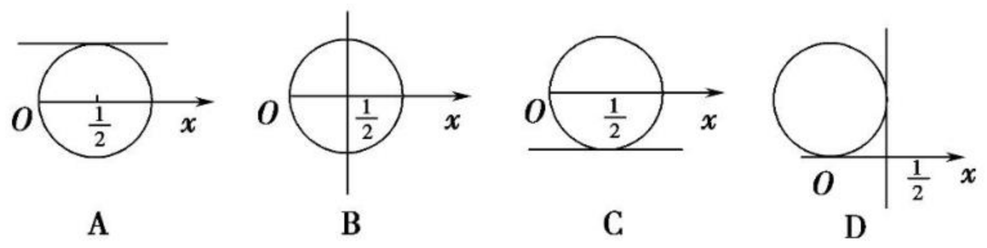
C. 等腰锐角三角形　　D. 等腰直角三角形

5. （**2019 · 北京四中高三检测**）实数 x,y 满足 $3x^2+2y^2=6x$，则 x^2+y^2 的最大值是　（　）

A. 2　　B. 4

C. $\frac{9}{2}$　　D. 5

6. 极坐标方程 $\rho=\cos\theta$ 与 $\rho\cos\theta=\frac{1}{2}$ 的图形是　（　）



7. 过点 $(3,-2)$ 且与曲线 $\begin{cases}x=3\cos\theta,\\y=2\sin\theta\end{cases}$（$\theta$ 为参数）有相同焦点的椭圆是　（　）

A. $\frac{x^2}{15}+\frac{y^2}{10}=1$　　B. $\frac{x^2}{225}+\frac{y^2}{100}=1$

C. $\frac{x^2}{10}+\frac{y^2}{15}=1$　　D. $\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{225}=1$

8. 已知双曲线 C 的参数方程为 $\begin{cases}x=\frac{3}{\cos\theta},\\y=4\tan\theta\end{cases}$（$\theta$ 为参数），则下列直线的参数方程中（t 为参数）

① $\begin{cases}x=-3t,\\y=4t;\end{cases}$　② $\begin{cases}x=1+\frac{\sqrt{3}}{2}t,\\y=1-\frac{1}{2}t;\end{cases}$　③ $\begin{cases}x=\frac{3}{5}t,\\y=-\frac{4}{5}t;\end{cases}$

④ $\begin{cases}x=1-\frac{\sqrt{2}}{2}t,\\y=1+\frac{\sqrt{2}}{2}t;\end{cases}$　⑤ $\begin{cases}x=3+3t,\\y=-4-4t.\end{cases}$

可以作为双曲线 C 的渐近线方程的是　（　）

A. ①③⑤　　B. ①⑤

C. ①②④　　D. ③④⑤

9. 直线 $\begin{cases}x=-2+t\cos 30^\circ,\\y=3-t\sin 60^\circ\end{cases}$（$t$ 为参数）的倾斜角 α 等于　（　）

A. 30°　　B. 60°

C. -45°　　D. 135°

10. （**2019 · 人大附中期末**）极坐标方程 $\rho=\frac{2}{\sin\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)}$ 和参数方程 $\begin{cases}x=2\cos\theta,\\y=3\sin\theta\end{cases}$（$\theta$ 为参数）所表示的图形分别是　（　）

A. 圆与直线　　B. 圆与椭圆

C. 直线与圆　　D. 直线与椭圆

11. 圆心是 (ρ_0,θ_0) 半径为 r 的圆的极坐标方程为　（　）

A. $\rho^2-2\rho_0\rho\cos(\theta-\theta_0)+\rho_0^2-r^2=0$

B. $\rho^2+2\rho_0\rho\cos(\theta-\theta_0)+\rho_0^2-r^2=0$

C. $\rho^2-2\rho_0\rho\cos(\theta+\theta_0)+\rho_0^2-r^2=0$

D. $\rho^2+2\rho_0\rho\cos(\theta+\theta_0)+\rho_0^2-r^2=0$

12. 已知直线 l_1 的极坐标方程为 $\sqrt{2}\rho\sin\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)=2\,018$，直线 l_2 的参数方程为 $\begin{cases}x=-2\,018+t\cos\frac{3\pi}{4},\\y=2\,018+t\sin\frac{3\pi}{4}\end{cases}$（$t$ 为参数），则 l_1 与 l_2 的位置关系是　（　）

A. 垂直　　B. 平行

C. 相交但不垂直　　D. 重合

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

二、填空题(本大题共 4 小题,每小题 5 分,共 20 分.把答案填在题中横线上)

13.(**2019·云南玉溪一中月考**)在极坐标系中,点$\left(3,\frac{\pi}{2}\right)$关于直线$\theta=\frac{\pi}{6}$的对称点的极坐标为_____.

14.(**2019·河北石家庄复兴中学测试**)在平面直角坐标系中,倾斜角为$\frac{\pi}{4}$的直线 l 与曲线 $C:\begin{cases}x=2+\cos\alpha,\\y=1+\sin\alpha\end{cases}$($\alpha$ 为参数)交于 A,B 两点,且$|AB|=2$,以坐标原点 O 为极点,x 轴正半轴为极轴建立极坐标系,则直线 l 的极坐标方程是_____.

15.在极坐标系$(\rho,\theta)(0\leqslant\theta<2\pi)$中,曲线 $\rho(2\cos\theta-\sin\theta)=3$ 与 $\rho(\cos\theta+2\sin\theta)=-1$ 的交点的极坐标为_____.

16.若直线$\begin{cases}x=t\cos\alpha-1,\\y=t\sin\alpha\end{cases}$($t$ 为参数)与曲线$\begin{cases}x=3+2\cos\varphi,\\y=2\sin\varphi\end{cases}$($\varphi$ 为参数)有公共点,则此直线的倾斜角 α 的取值范围是_____.

三、解答题(本大题共 6 小题,共 70 分.解答应写出必要的文字说明、证明过程或演算步骤)

17.(10 分)在平面直角坐标系 xOy 中,以 O 为极点,x 轴的正半轴为极轴建立极坐标系.已知曲线 M 的参数方程为$\begin{cases}x=1+\cos\varphi,\\y=1+\sin\varphi\end{cases}$($\varphi$ 为参数),l_1,l_2 为过点 O 的两条直线,l_1 交 M 于 A,B 两点,l_2 交 M 于 C,D 两点,且 l_1 的倾斜角为 α,$\angle AOC=\frac{\pi}{6}$.

(1)求 l_1 和 M 的极坐标方程;

(2)当$\alpha\in\left(0,\frac{\pi}{6}\right]$时,求点 O 到 A,B,C,D 四点距离之和的最大值.

18.(12 分)在直角坐标系 xOy 中,曲线 M 的参数方程为$\begin{cases}x=\sqrt{3}\cos\alpha+\sin\alpha,\\y=2\sqrt{3}\sin\alpha\cos\alpha-2\sin^2\alpha+2\end{cases}$($\alpha$ 为参数).若以直角坐标系中的原点 O 为极点,x 轴的正半轴为极轴建立极坐标系,曲线 N 的极坐标方程为$\rho\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}t$($t$ 为参数).

(1)求曲线 M 和 N 的直角坐标方程;

(2)若曲线 N 与曲线 M 有公共点,求 t 的取值范围.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

19.(12 分)(**2019 · 河北衡水期中**)已知曲线 $C:\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$,直线 $l:\begin{cases}x=2+t,\\y=2-2t\end{cases}$($t$ 为参数).

(1)写出曲线 C 的参数方程,直线 l 的普通方程;

(2)过曲线 C 上任一点 P 作出与 l 夹角为 30°的直线,交 l 于点 A,求 $|PA|$ 的最大值与最小值.

20.(12 分)(**2019 · 河北保定模拟**)已知在平面直角坐标系 xOy 中,O 为坐标原点,曲线 $C:\begin{cases}x=\sqrt{3}\cos\alpha+\sin\alpha,\\y=\sqrt{3}\sin\alpha-\cos\alpha\end{cases}$($\alpha$ 为参数),在以平面直角坐标系的原点为极点,x 轴的正半轴为极轴,有相同单位长度的极坐标系中,直线 l:$\rho\sin\left(\theta+\frac{\pi}{6}\right)=1$.

(1)求曲线 C 的普通方程和直线 l 的直角坐标方程;

(2)求与直线 l 平行且与曲线 C 相切的直线的直角坐标方程.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

21.（12 分）（**2019·安徽安庆市模拟**）在平面直角坐标系 xOy 中，曲线 C_1 过点 $P(a,1)$，其参数方程为 $\begin{cases}x=a+\frac{\sqrt{2}t}{2},\\ y=1+\frac{\sqrt{2}t}{2}\end{cases}$（$t$ 为参数，$a\in\mathbf{R}$）. 以 O 为极点，x 轴正半轴为极轴，建立极坐标系，曲线 C_2 的极坐标方程为 $\rho\cos^2\theta+4\cos\theta-\rho=0$.

（1）求曲线 C_1 的普通方程和曲线 C_2 的直角坐标方程；

（2）已知曲线 C_1 与曲线 C_2 交于 A,B 两点，且 $|PA|=2|PB|$，求实数 a 的值.

22.（12 分）（**2019·重庆开州区期末**）直线 l 的参数方程为 $\begin{cases}x=-1+\frac{\sqrt{2}}{2}t,\\ y=-2+\frac{\sqrt{2}}{2}t\end{cases}$（$t$ 为参数），以坐标原点 O 为极点，x 轴正半轴为极轴建立极坐标系，曲线 C 的极坐标方程为 $\rho\sin^2\theta=4a\cos\theta$，直线 l 与曲线 C 交于不同的两点 M,N.

（1）求实数 a 的取值范围；

（2）已知 $a>0$，设点 $P(-1,-2)$，若 $|PM|,|MN|,|PN|$ 成等比数列，求 a 的值.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

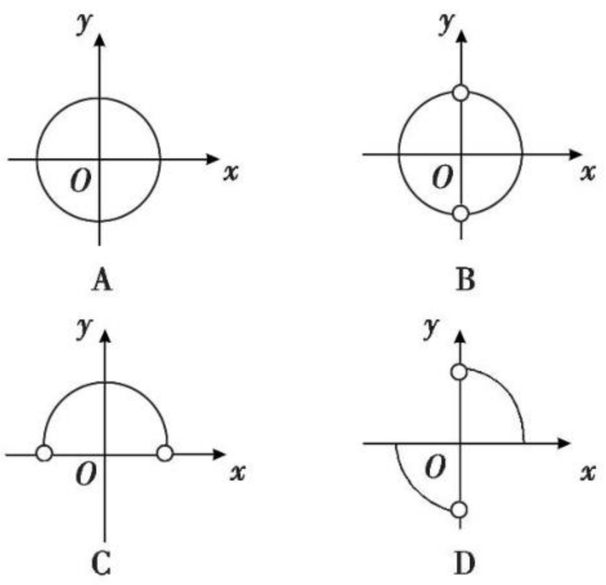
阶段测试四

（本册综合测评二）

时间：120 分钟　满分：150 分

一、选择题（本大题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分. 在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的）

1. 参数方程 $\begin{cases} x=\dfrac{1}{t}, \\ y=\dfrac{1}{t}\sqrt{t^2-1} \end{cases}$（$t$ 为参数）所表示的曲线是（　　）



2. 已知极坐标平面内的点 $P\left(2,-\dfrac{5\pi}{3}\right)$，则 P 关于极点的对称点的极坐标与直角坐标分别为（　　）

A. $\left(2,\dfrac{\pi}{3}\right),(1,\sqrt{3})$　　B. $\left(2,-\dfrac{\pi}{3}\right),(1,-\sqrt{3})$

C. $\left(2,\dfrac{2\pi}{3}\right),(-1,\sqrt{3})$　　D. $\left(2,-\dfrac{2\pi}{3}\right),(-1,-\sqrt{3})$

3. 对于参数方程 $\begin{cases} x=1-t\cos 30^\circ, \\ y=2+t\sin 30^\circ \end{cases}$（$t$ 为参数）和 $\begin{cases} x=1+t\cos 30^\circ, \\ y=2-t\sin 30^\circ \end{cases}$（$t$ 为参数），则下列结论正确的是（　　）

A. 倾斜角为 30°的两平行直线

B. 倾斜角为 150°的两重合直线

C. 两条互相垂直且相交于点(1,2)的直线

D. 两条不垂直且相交于点(1,2)的直线

4. （**2019 · 山东威海高二检测**）将点(2,3)变成点(3,2)的伸缩变换是（　　）

A. $\begin{cases} x'=\dfrac{2}{3}x \\ y'=\dfrac{3}{2}y \end{cases}$　　B. $\begin{cases} x'=\dfrac{3}{2}x \\ y'=\dfrac{2}{3}y \end{cases}$

C. $\begin{cases} x'=y \\ y'=x \end{cases}$　　D. $\begin{cases} x'=x+1 \\ y'=y-1 \end{cases}$

5. 方程 $\rho=-2\cos\theta$ 与 $\rho+\dfrac{4}{\rho}=4\sqrt{2}\sin\theta$ 的曲线的位置关系是（　　）

A. 相离　　B. 外切

C. 相交　　D. 内切

6. （**2019 · 上海长宁期中**）极坐标方程 $\theta=\dfrac{\pi}{3}$，$\theta=\dfrac{2}{3}\pi(\rho\geqslant 0)$ 和 $\rho=4$ 所表示的曲线围成的图形面积是（　　）

A. $\dfrac{16}{3}\pi$　　B. $\dfrac{8}{3}\pi$

C. $\dfrac{4}{3}\pi$　　D. $\dfrac{2}{3}\pi$

7. （**2019 · 北京卷**）已知直线 l 的参数方程为 $\begin{cases} x=1+3t, \\ y=2+4t \end{cases}$（$t$ 为参数），则点(1,0)到直线 l 的距离是（　　）

A. $\dfrac{1}{5}$　　B. $\dfrac{2}{5}$

C. $\dfrac{4}{5}$　　D. $\dfrac{6}{5}$

8. 过点 $P(4,3)$，且斜率为 $\dfrac{2}{3}$ 的直线的参数方程（t 为参数）为（　　）

A. $\begin{cases} x=4+\dfrac{3}{\sqrt{13}}t, \\ y=3+\dfrac{2}{\sqrt{13}}t \end{cases}$　　B. $\begin{cases} x=3+\dfrac{3}{\sqrt{13}}t, \\ y=4+\dfrac{2}{\sqrt{13}}t \end{cases}$

C. $\begin{cases} x=4+\dfrac{2}{\sqrt{13}}t, \\ y=3+\dfrac{3}{\sqrt{13}}t \end{cases}$　　D. $\begin{cases} x=3+\dfrac{2}{\sqrt{13}}t, \\ y=4+\dfrac{3}{\sqrt{13}}t \end{cases}$

9. （**2019 · 河南商丘高二检测**）直线 $y=\dfrac{\sqrt{3}}{3}x+\sqrt{2}$ 与圆心为 D 的圆 $\begin{cases} x=\sqrt{3}+\sqrt{3}\cos\theta, \\ y=1+\sqrt{3}\sin\theta \end{cases}$（$\theta\in[0,2\pi)$）交于 A,B 两点，则直线 AD 与 BD 的倾斜角之和为（　　）

A. $\dfrac{7\pi}{6}$　　B. $\dfrac{5\pi}{4}$

C. $\dfrac{4\pi}{3}$　　D. $\dfrac{5\pi}{3}$

10. 在极坐标系中，O 是极点，设点 $A\left(1,\dfrac{\pi}{2}\right)$，$B\left(\sqrt{3},-\dfrac{\pi}{3}\right)$，若圆 $\rho=r$ 与 AB 相切. 则 $r=$（　　）

A. $\dfrac{\sqrt{21}}{14}$　　B. $\dfrac{\sqrt{7}}{7}$

C. $\dfrac{\sqrt{21}}{7}$　　D. $\dfrac{\sqrt{7}}{14}$

11. 直线 $\begin{cases} x=-3+\dfrac{\sqrt{3}}{2}t, \\ y=\dfrac{1}{2}t \end{cases}$（$t$ 为参数）和曲线 $\begin{cases} x=m+\dfrac{1}{m}, \\ y=m-\dfrac{1}{m} \end{cases}$（$m$ 为参数）相交于 A,B 两点，则线段 AB 的长为（　　）

A. $\dfrac{4}{3}\sqrt{21}$　　B. $\sqrt{17}$

C. $\sqrt{51}$　　D. $2\sqrt{17}$

12. 设曲线 C 的参数方程为 $\begin{cases} x=2+3\cos\theta, \\ y=-1+3\sin\theta \end{cases}$（$\theta$ 为参数），直线 l 的方程为 $x-3y+2=0$，则曲线 C 上到直线 l 距离为 $\dfrac{7\sqrt{10}}{10}$ 的点的个数为（　　）

A. 1　　B. 2

C. 3　　D. 4

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

二、填空题(本大题共 4 小题,每小题 5 分,共 20 分. 把答案填在题中横线上)

13. 在极坐标系中,$\rho=2\theta+1(0\leqslant\theta<2\pi)$与$\theta=\frac{\pi}{2}$的交点的极坐标为_____.

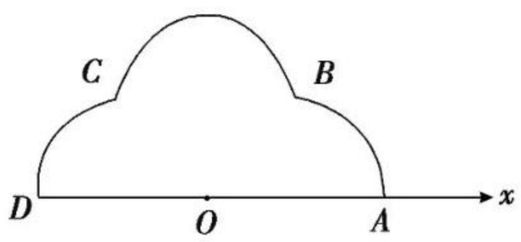
14. (**2019·辽宁大连检测**)已知直线$\begin{cases}x=2-\frac{1}{2}t,\\y=-1+\frac{1}{2}t\end{cases}$($t$ 为参数)与圆 $x^2+y^2=4$ 相交于 B,C 两点,则$|BC|$的值为_____.

15. (**2019·北京通州模拟**)已知直线 l 的参数方程为$\begin{cases}x=2+t,\\y=3+t\end{cases}$($t$ 为参数),以坐标原点为极点,x 轴的正半轴为极轴建立极坐标系,曲线 C 的极坐标方程为 $\rho\sin^2\theta-4\cos\theta=0(\rho\geqslant0,0\leqslant\theta<2\pi)$,则直线 l 与曲线 C 的公共点的极径 $\rho=$_____.

16. (**2019·天津市静海区四校联考**)直线 l 的参数方程为$\begin{cases}x=-3+t,\\y=\sqrt{3}t\end{cases}$($t$ 为参数),圆 C 的参数方程为$\begin{cases}x=3\cos\theta,\\y=3\sin\theta\end{cases}$($\theta$ 为参数),则直线 l 被圆 C 截得的弦长为_____.

三、解答题(本大题共 6 小题,共 70 分. 解答应写出必要的文字说明、证明过程或演算步骤)

17. (10 分)(**2019·全国卷Ⅲ**)如图,在极坐标系 Ox 中,$A(2,0)$,$B\left(\sqrt{2},\frac{\pi}{4}\right)$,$C\left(\sqrt{2},\frac{3\pi}{4}\right)$,$D(2,\pi)$,弧$\overset{\frown}{AB}$,$\overset{\frown}{BC}$,$\overset{\frown}{CD}$所在圆的圆心分别是$(1,0)$,$\left(1,\frac{\pi}{2}\right)$,$(1,\pi)$,曲线 M_1 是弧$\overset{\frown}{AB}$,曲线 M_2 是弧$\overset{\frown}{BC}$,曲线 M_3 是弧$\overset{\frown}{CD}$.



(1)分别写出 M_1,M_2,M_3 的极坐标方程;

(2)曲线 M 由 M_1,M_2,M_3 构成,若点 P 在 M 上,且$|OP|=\sqrt{3}$,求 P 的极坐标.

18. (12 分)(**2019·广西南宁模拟**)已知直线 l:$\begin{cases}x=m+t\cos\alpha,\\y=t\sin\alpha\end{cases}$($t$ 为参数,$\alpha\neq k\pi,k\in\mathbf{Z}$)经过椭圆 C:$\begin{cases}x=2\cos\varphi,\\y=\sqrt{3}\sin\varphi\end{cases}$($\varphi$ 为参数)的左焦点 F.

(1)求 m 的值;

(2)设直线 l 与椭圆 C 交于 A,B 两点,求$|FA|\cdot|FB|$的最小值.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

19.(12 分)(**2019·福建福州高三期末**)在平面直角坐标系 xOy 中,曲线 C:$\begin{cases}x=t\cos\alpha,\\y=\sin\alpha\end{cases}$($\alpha$ 为参数,$t>0$).在以 O 为极点,x 轴的正半轴为极轴的极坐标系中,直线 l:$\rho\cos\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}$.

(1)若 l 与曲线 C 没有公共点,求 t 的取值范围;

(2)若曲线 C 上存在点到 l 的距离的最大值为 $\frac{\sqrt{6}}{2}+\sqrt{2}$,求 t 的值.

20.(12 分)(**2019·全国卷Ⅰ**)在直角坐标系 xOy 中,曲线 C 的参数方程为 $\begin{cases}x=\frac{1-t^2}{1+t^2},\\y=\frac{4t}{1+t^2}\end{cases}$($t$ 为参数),以坐标原点 O 为极点,x 轴的正半轴为极轴建立极坐标系,直线 l 的极坐标方程为 $2\rho\cos\theta+\sqrt{3}\rho\sin\theta+11=0$.

(1)求 C 和 l 的直角坐标方程;

(2)求 C 上的点到 l 的距离的最小值.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

21.(12 分)在平面直角坐标系 xOy 中,已知曲线 $C_1:x^2+y^2=1$,以平面直角坐标系 xOy 的原点 O 为极点,x 轴的正半轴为极轴,取相同的单位长度建立极坐标系,已知直线 $l:\rho(2\cos\theta-\sin\theta)=6$.

(1)将曲线 C_1 上的所有点的横坐标、纵坐标分别伸长为原来的 $\sqrt{3}$、2 倍后得到曲线 C_2,试写出直线 l 的直角坐标方程和曲线 C_2 的参数方程;

(2)在曲线 C_2 上求一点 P,使点 P 到直线 l 的距离最大,并求出此最大值.

22.(12 分)(**2019·重庆一中期末**)在直角坐标系 xOy 中,曲线 C 的参数方程是 $\begin{cases}x=1+\sqrt{2}\cos\alpha,\\y=\sqrt{2}\sin\alpha\end{cases}$($\alpha$ 为参数),以该直角坐标系的原点 O 为极点,x 轴的正半轴为极轴建立极坐标系,直线 l 的极坐标方程为 $\sqrt{3}\rho\sin\theta-\rho\cos\theta+m=0$.

(1)写出曲线 C 的普通方程和直线 l 的直角坐标方程;

(2)设点 $P(m,0)$,直线 l 与曲线 C 相交于 A,B 两点,且 $|PA|\cdot|PB|=1$,求实数 m 的值.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

骄子之路®
the Road to Pride
让 学习更快乐，人生更精彩

答案与解析

与45分钟课时作业与单元测试配套使用

数学

选修4-4 RJ·A

班级：_____

姓名：_____

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

第一部分 课时作业

第一讲 坐标系

一 平面直角坐标系

第 1 课时 平面直角坐标系

要点梳理

1.(1)坐标 方程

2.φ

对点训练

1.C 解法一:设 $D(x,y)$,

$\because A(-1,2),B(3,0),C(5,1)$,

$\therefore \overrightarrow{AB}=(4,-2),\overrightarrow{DC}=(5-x,1-y)$.

由平行四边形的性质知,$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$,

$\therefore \begin{cases}5-x=4,\\1-y=-2,\end{cases}\therefore \begin{cases}x=1,\\y=3.\end{cases}$

$\therefore D$ 的坐标为(1,3).

解法二:设 $D(x,y)$,

$\because A(-1,2),B(3,0),C(5,1)$,

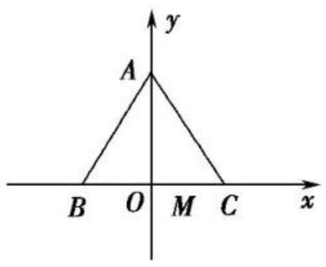
$\therefore AC$ 中点的坐标为 $\left(2,\frac{3}{2}\right)$.

$\because$ 平行四边形对角线互相平分,

$\therefore \frac{x+3}{2}=2,\frac{y+0}{2}=\frac{3}{2},\therefore x=1,y=3$.

$\therefore D$ 的坐标为(1,3).

2. **证明**:取 BC 的中点 O 为坐标原点,OA 所在的直线为 y 轴,建立平面直角坐标系,如图所示.



设 $A(0,b),B(-a,0)$,则 $C(a,0)$,

$|AB|^2=a^2+b^2$.

$\because$ 点 M 在 x 轴上,可设 $M(x,0)$ $(-a\leqslant x\leqslant a)$,则

$|AM|^2+|BM|\cdot|MC|$

$=x^2+b^2+(x+a)\cdot(a-x)$

$=x^2+b^2+a^2-x^2=a^2+b^2$,

$\therefore |AB|^2=|AM|^2+|BM|\cdot|MC|$.

3.A $\because \triangle ABC$ 的周长为 10,

$\therefore |AB|+|AC|+|BC|=10$.

又 $|BC|=4,\therefore |AB|+|AC|=6>|BC|$.

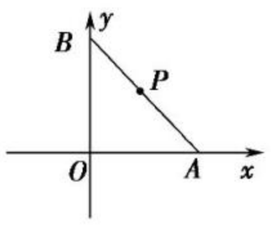
$\therefore A$ 点的轨迹是椭圆,但除去与 x 轴的两个交点,

又 $2a=6,2c=4,\therefore a=3,c=2$,

$\therefore b^2=a^2-c^2=5$.

故椭圆方程为 $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{5}=1(y\neq 0)$.

4. **解**:解法一:以这两条互相垂直的直线分别为 x 轴和 y 轴,建立直角坐标系,如图所示.



设点 P 的坐标为 (x,y),

$\because \triangle OAB$ 是直角三角形,且点 P 是斜边 AB 的中点,$\therefore |OP|=\frac{1}{2}|AB|=\frac{1}{2}\times 4=2$,即 $\sqrt{x^2+y^2}=2,\therefore x^2+y^2=4$. $\therefore$ 点 P 的轨迹方程是 $x^2+y^2=4$.

解法二:建立直角坐标系同解法一.

设点 P 的坐标为 (x,y),$A(x_A,0),B(0,y_B)$.

则有 $x_A^2+y_B^2=16$.

$\because$ 点 P 是 AB 的中点,

$\therefore x_A=2x,y_B=2y$.

代入 $x_A^2+y_B^2=16$,得 $x^2+y^2=4$.

即点 P 的轨迹方程是 $x^2+y^2=4$.

5.A 将 $\begin{cases}x'=5x,\\y'=3y\end{cases}$ 代入 $x'^2+y'^2=1$,得 $25x^2+9y^2=1$,故选 A.

6.$F_1(-5,0),F_2(5,0)$

解析:设曲线 C' 上任意一点 $P'(x',y')$,由 $\begin{cases}x'=3x,\\2y'=y\end{cases}$ 得 $\begin{cases}x=\frac{1}{3}x',\\y=2y',\end{cases}$ 代入双曲线 C:$x^2-\frac{y^2}{64}=1$,得 $\frac{x'^2}{9}-\frac{4y'^2}{64}=1$,化简得 $\frac{x'^2}{9}-\frac{y'^2}{16}=1$,$\therefore$ 曲线 C' 的方程为 $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$,所以曲线 C' 为双曲线,其焦点坐标为 $F_1(-5,0),F_2(5,0)$.

课后训练 提能达标

1.A

2.A 由 $\begin{cases}x'=2x,\\y'=3y,\end{cases}$ 得 $\begin{cases}x=\frac{1}{2}x',\\y=\frac{1}{3}y',\end{cases}$ 代入 $y=\cos x$,得 $\frac{1}{3}y'=\cos\frac{x'}{2}$,即 $y'=3\cos\frac{x'}{2}$.

3.C 设 $y'=\sin x'$,由 $y=2\sin 3x$,得 $\frac{y}{2}=\sin 3x$,则 $\begin{cases}x'=3x,\\y'=\frac{1}{2}y,\end{cases}$ 故选 C.

4.B 由题图知,一个 x 对应两个 y,且 $x\geqslant 0$,

$\therefore x=\pm y$,即 $x-|y|=0$.

5.A 由 φ:$\begin{cases}x'=\lambda x,\\y'=\mu y\end{cases}$ 得 $\frac{\lambda^2x^2}{9}+\frac{\mu^2y^2}{4}=1$,即 $\lambda^2x^2+\frac{9\mu^2}{4}y^2=9$,

$\therefore$ 它与 $x^2+y^2=9$ 表示同一曲线,

$\therefore \begin{cases}\lambda^2=1,\\\frac{9}{4}\mu^2=1,\end{cases}$

$\because \lambda>0,\mu>0,\therefore \begin{cases}\lambda=1,\\\mu=\frac{2}{3}.\end{cases}$

6.$y=\frac{1}{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$

解析:由 $\begin{cases}x'=2x,\\y'=\frac{1}{2}y,\end{cases}$ 得 $\begin{cases}x=\frac{1}{2}x',\\y=2y',\end{cases}$ ①

将①代入 $y=\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)$,得 $2y'=\sin\left(2\cdot\frac{1}{2}x'+\frac{\pi}{4}\right)$,即 $y'=\frac{1}{2}\sin\left(x'+\frac{\pi}{4}\right)$,所以函数 $y=\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)$ 经伸缩变换 $\begin{cases}x'=2x,\\y'=\frac{1}{2}y\end{cases}$ 后,得到的解析式为 $y=\frac{1}{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$.

7.π

解析:$\because \begin{cases}x'=\frac{x}{5},\\y'=\frac{y}{3},\end{cases}\therefore \begin{cases}x=5x',\\y=3y'.\end{cases}$ 将其代入 $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$,得 $x'^2+y'^2=1$,$\therefore$ 经过 φ 的变换后,对应的曲线表示的图形为圆,其面积 $S=\pi R^2=\pi$.

8.$\frac{x^2}{2}-y^2=1$

解析:设 $M(x,y)$,则由 $\overrightarrow{OM}=m\overrightarrow{OA}+n\overrightarrow{OB}$,

得 $(x,y)=m(2,-1)+n(-1,1)=(2m-n,-m+n)$,

$\therefore \begin{cases}x=2m-n,\\y=-m+n.\end{cases}$ 又 $2m^2-n^2=2$,消去 m,n 得 $2(x+y)^2-(x+2y)^2=2$,整理得 $\frac{x^2}{2}-y^2=1$.

9. **解**:先通过平移变换 $\begin{cases}x'=x+1,\\y'=y-1,\end{cases}$ 得到 $\frac{x'^2}{9}+\frac{y'^2}{4}=1$,即中心在原点的椭圆.

再由伸缩变换 $\begin{cases}x''=\frac{x'}{3},\\y''=\frac{y'}{2},\end{cases}$ 得到 $x''^2+y''^2=1$,即中心在原点的圆.

由上述两种变换合成的变换为 $\begin{cases}x'=\frac{x+1}{3},\\y'=\frac{y-1}{2}.\end{cases}$

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

10. **解**:(1)由题意得 $\lambda\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(m,\lambda)$,

$\therefore$直线 AP 的方程为 $y=\frac{\lambda}{m}(x-m)$. ①

又 $\lambda\boldsymbol{b}-4\boldsymbol{a}=(\lambda m,-4)$,

$\therefore$直线 BP 的方程为 $y=-\frac{4}{\lambda m}(x+m)$. ②

由①②消去参数 λ 得 $y^2=-\frac{4}{m^2}(x^2-m^2)$,

整理得 $\frac{x^2}{m^2}+\frac{y^2}{4}=1$,

故点 P 的轨迹方程为 $\frac{x^2}{m^2}+\frac{y^2}{4}=1(m>0)$.

当 $m=2$ 时,轨迹 E 是以 $(0,0)$ 为圆心,2 为半径的圆;

当 $m>2$ 时,轨迹 E 是以 $(\pm\sqrt{m^2-4},0)$ 为焦点,长轴长为 $2m$ 的椭圆;

当 $0<m<2$ 时,轨迹 E 是以 $(0,\pm\sqrt{4-m^2})$ 为焦点,长轴长为 4 的椭圆.

(2)当 $m=2\sqrt{2}$ 时,轨迹 E 的方程为 $\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{4}=1$,

$\because M$ 为轨迹 E 上任意一点,

$\therefore$设点 M 的坐标为 $(2\sqrt{2}\cos\theta,2\sin\theta)(\theta$ 为参数),

则 $|MC|=\sqrt{(2\sqrt{2}\cos\theta-1)^2+(2\sin\theta)^2}$

$=\sqrt{4\cos^2\theta-4\sqrt{2}\cos\theta+5}$

$=\sqrt{4\left(\cos\theta-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+3}$.

$\because\cos\theta\in[-1,1]$,

$\therefore$当 $\cos\theta=\frac{\sqrt{2}}{2}$ 时,$|MC|$ 取得最小值,且最小值为 $\sqrt{3}$.

二 极坐标系

第 2 课时 极坐标系的概念

要点梳理

1. 极点 极轴
2. 极径 极角 (ρ,θ)

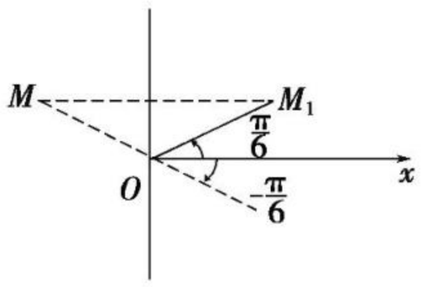
对点训练

1. B 本题涉及极径 ρ 取负值的坐标表示,当 $\rho<0$ 时,表示点 $M(\rho,\theta)$ 的方法如下:作射线 OP,使 $\angle xOP=\theta$,再在 OP 的反向延长线上取点 M,使 $|OM|=|\rho|$,由此可知,选项 B 正确.

2. ③⑤

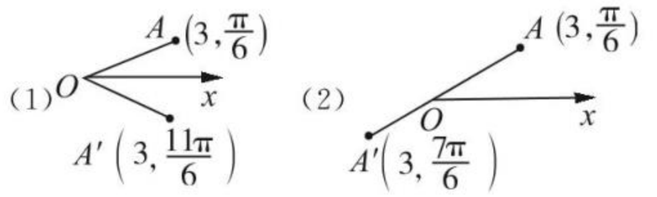
解析:由于在极坐标系中,设极点为 O,极轴是射线 Ox,故①不正确;由于极点 O 的极径 $\rho=0$,极角 θ 是任意实数,故极点的极坐标应为 $(0,\theta)$,故②不正确;③显然正确;当 ρ,θ 确定了,点也就确定了,$\therefore(\rho,\theta)$ 表示一个点,故④不正确;由于 $(3,2k\pi)(k\in\mathbf{Z})$ 与 $(3,0)$ 表示同一个点,而该点在极轴上,故⑤正确;对于⑥,由于 M,N 两点的极角分别为 $\theta_1=\frac{\pi}{4},\theta_2=\frac{5}{4}\pi$,二者的终边互为反向延长线,故⑥不正确.

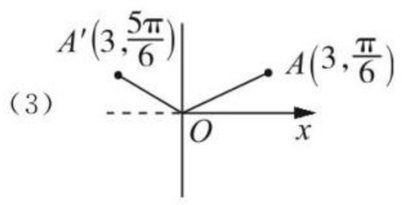
3. A 作出极坐标为 $\left(-2,-\frac{\pi}{6}\right)$ 的点 M,如图,它关于直线 $\theta=\frac{\pi}{2}$ 的对称点是 M_1,M_1 的极坐标为 $\left(2,\frac{\pi}{6}\right)$ 或 $\left(-2,\frac{7\pi}{6}\right)$,故选 A.



4. (1) $\left(3,\frac{11\pi}{6}\right)$ (2) $\left(3,\frac{7\pi}{6}\right)$ (3) $\left(3,\frac{5\pi}{6}\right)$

解析:画图求解.





5. A 在 $A(\pi,1)$ 中,$\rho=\pi,\theta=1$,则点 A 到极点 O 的距离为 π.

6. **解**:依题意,$|AB|^2=5^2+8^2-2\times5\times8\cos\left(\frac{5\pi}{2}-\frac{5\pi}{6}\right)=49$,

$|AC|^2=5^2+3^2-2\times5\times3\cos\left(\frac{5\pi}{2}-\frac{7\pi}{6}\right)=49$,

$|BC|^2=8^2+3^2-2\times8\times3\cos\left(\frac{7\pi}{6}-\frac{5\pi}{6}\right)=49$,

所以 $\triangle ABC$ 是等边三角形.

课后训练 提能达标

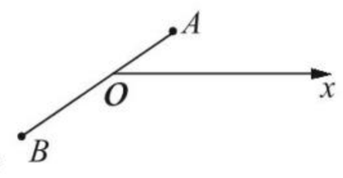
1. C 因为 $\frac{13\pi}{12}=\frac{\pi}{12}+\pi$,所以 A,O,B 三点共线,且 A,B 位于 O 的两侧,所以 $|AB|=|OA|+|OB|=1+2=3$,故选 C.

2. B 与 $\left(5,\frac{\pi}{7}\right)$ 表示同一点的坐标是 $\left(5,\frac{\pi}{7}+2k\pi\right)(k\in\mathbf{Z})$,知 $\left(5,\frac{15\pi}{7}\right)$ 与 $\left(5,\frac{\pi}{7}\right)$ 表示同一点.

3. C 如图,$\because\frac{6\pi}{5}=\pi+\frac{\pi}{5}$,

$\therefore A,B$ 关于极点对称,

$\therefore|AB|=1+2=3$.



4. D 因为 $A\left(2,\frac{\pi}{3}\right),B\left(5,-\frac{7\pi}{6}\right)$,所以 $\angle AOB=\frac{\pi}{2}$,所以 $\triangle AOB$ 为直角三角形,其面积 $S_{\triangle AOB}=\frac{1}{2}|OA||OB|=\frac{1}{2}\times2\times5=5$,故选 D.

5. B 解法一:点 $\left(1,\frac{\pi}{4}\right)$ 与点 $\left(1,\frac{3\pi}{4}\right)$ 的距离为 $\sqrt{1^2+1^2-2\times1\times1\times\cos\left(\frac{3\pi}{4}-\frac{\pi}{4}\right)}=\sqrt{2}$,故选 B.

解法二:设 $A\left(1,\frac{\pi}{4}\right)$,$B\left(1,\frac{3\pi}{4}\right)$,$\because\frac{3\pi}{4}-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}$,

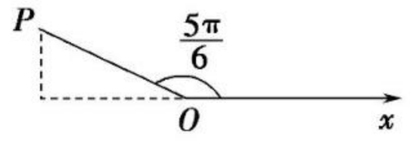
$\therefore\angle AOB$ 为直角,$\therefore|AB|=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$,故选 B.

6. $k\pi,k\in\mathbf{Z}$

解析:显然点 $A(1,0)$ 和点 $B(2,\pi)$ 在极轴所在的直线上,若 $C(3,\theta)$ 与 A,B 共线,则 $C(3,\theta)$ 也在极轴所在的直线上,故 $\theta=k\pi,k\in\mathbf{Z}$.

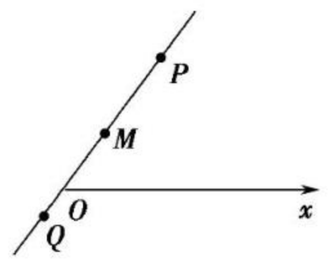
7. 2

解析:如图,点 $P\left(4,\frac{5\pi}{6}\right)$ 到极轴的距离为 $4\sin\frac{\pi}{6}=2$.



8. $\left(7,\frac{\pi}{3}\right)$ 或 $\left(1,\frac{4\pi}{3}\right)$

解析:如图,$|OM|=3,\angle xOM=\frac{\pi}{3}$,在直线 OM 上取点 P,Q,使 $|OP|=7$,$|OQ|=1$,则有 $|PM|=|OP|-|OM|=7-3=4$,$|QM|=|OQ|+|OM|=1+3=4$,点 P,Q 适合条件,且 $\angle xOP=\frac{\pi}{3}$,$\angle xOQ=\pi+\frac{\pi}{3}=\frac{4\pi}{3}$.



9. **解**:(1)由于 P_1,Q 关于极点对称,

得极径 $|OP_1|=|OQ|=2$,极角相差

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

π，

所以 P_1 的极坐标为 $\left(2,\frac{19}{15}\pi\right)$.

(2)由于 P_2，Q 关于直线 $x=\frac{\pi}{2}$ 对称，极径不变，

点 P_2 的极角为 $\theta'=\pi-\frac{4}{15}\pi=\frac{11}{15}\pi$，

所以 P_2 的极坐标为 $\left(2,\frac{11}{15}\pi\right)$.

(3)因为 P_3，Q 关于极轴对称，所以极径还是 2，

点 P_3 的极角 $\theta''=2\pi-\frac{4}{15}\pi=\frac{26}{15}\pi$.

所以 P_3 的极坐标为 $\left(2,\frac{26}{15}\pi\right)$.

10. **解**：(1)因为 $A\left(3,\frac{\pi}{3}\right)$，$B\left(3,\frac{7\pi}{6}\right)$，

所以 $|AB|=\sqrt{3^2+3^2-2\times3\times3\times\cos\left(\frac{7}{6}\pi-\frac{\pi}{3}\right)}$

$=\sqrt{18+9\sqrt{3}}$

$=\frac{3}{2}(\sqrt{2}+\sqrt{6})$.

(2)$\triangle AOB$ 的面积 $S=\frac{1}{2}|OA|\cdot|OB|\sin\angle AOB$

$=\frac{1}{2}\times3\times3\times\sin\frac{5\pi}{6}$

$=\frac{9}{4}$.

第 3 课时　极坐标和直角坐标的互化

要点梳理

2. (1)$y=\rho\sin\theta$

对点训练

1. D　$\because\rho=\sqrt{2}$，$\theta=\frac{5}{4}\pi$，

$\therefore x=\rho\cos\theta=\sqrt{2}\times\cos\frac{5\pi}{4}=-1$，

$y=\rho\sin\theta=\sqrt{2}\times\sin\frac{5\pi}{4}=-1$，

$\therefore$ 极坐标 $\left(\sqrt{2},\frac{5}{4}\pi\right)$ 化为直角坐标为 $(-1,-1)$.

2. $(\rho,0)$

解析：设点 M 的极坐标为 (ρ,θ)，由题意得 $\begin{cases}\rho\cos\theta=\rho,\\ \rho\sin\theta=\theta,\end{cases}\therefore\begin{cases}\cos\theta=1,\\ \sin\theta=0,\end{cases}\therefore\theta=0$，$\therefore$ 点 M 的直角坐标为 $(\rho,0)$.

3. A　$\rho=\sqrt{(-2)^2+(2\sqrt{3})^2}=4$，

$\because$ 点 $(-2,2\sqrt{3})$ 在第二象限，且 $\tan\theta=-\sqrt{3}$，

$\therefore\theta=\frac{2\pi}{3}$，

$\therefore$ 点 P 的极坐标为 $\left(4,\frac{2\pi}{3}\right)$.

4. B　$\because$ 点 M 的直角坐标是 $\left(1,-\sqrt{3}\right)$，$\therefore\rho=\sqrt{1^2+(-\sqrt{3})^2}=2$，$\tan\theta=\frac{-\sqrt{3}}{1}=-\sqrt{3}$，$\because$ 点 M 位于第四象限，$\therefore\theta=\frac{5\pi}{3}+2k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$，$\therefore$ 点 M 的极坐标可以是 $\left(2,-\frac{\pi}{3}\right)$，故选 B.

5. **解**：在极坐标系中，将向量 $\overrightarrow{OA}$ 按逆时针旋转 $\frac{\pi}{2}$，得到向量 $\overrightarrow{OB}$ 的极坐标为 $\left(2,\frac{2\pi}{3}\right)$，则 $x=2\cos\frac{2\pi}{3}=2\times\left(-\frac{1}{2}\right)=-1$，$y=2\sin\frac{2\pi}{3}=2\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}$，所以向量 $\overrightarrow{OB}$ 的直角坐标为 $(-1,\sqrt{3})$.

6. **解**：设点 P 的直角坐标为 (x,y)，由题意得 $\begin{cases}6=2x,\\ -3=\sqrt{3}y,\end{cases}$

$\therefore\begin{cases}x=3,\\ y=-\sqrt{3}.\end{cases}$

$\therefore$ 点 P 的直角坐标为 $(3,-\sqrt{3})$.

$\rho=\sqrt{3^2+(-\sqrt{3})^2}=2\sqrt{3}$，$\tan\theta=-\frac{\sqrt{3}}{3}$，

$\because0\leqslant\theta<2\pi$，$\therefore$ 点 P 在第四象限，

$\therefore\theta=\frac{11\pi}{6}$，$\therefore$ 点 P 的极坐标为 $\left(2\sqrt{3},\frac{11\pi}{6}\right)$.

课后训练　提能达标

1. C　$\because x=0$，$y=\frac{\pi}{2}$，

$\therefore\rho=\sqrt{x^2+y^2}=\frac{\pi}{2}$，$\theta=\frac{\pi}{2}$，

$\therefore M$ 的极坐标为 $\left(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$.

2. A　依题意，$\rho=\pi$，$\theta=-2\pi$，$\therefore x=\rho\cos\theta=\pi\cos(-2\pi)=\pi$，$y=\rho\sin\theta=\pi\sin(-2\pi)=0$，$\therefore$ 点 $(\pi,-2\pi)$ 化为直角坐标为 $(\pi,0)$，故选 A.

3. C　$\because x=\frac{\sqrt{3}}{2}\pi$，$y=-\frac{\pi}{2}$，$\therefore\rho=\sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\pi\right)^2+\left(-\frac{\pi}{2}\right)^2}=\pi$，

$\tan\theta=\frac{-\frac{\pi}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}\pi}=-\frac{\sqrt{3}}{3}$. 又 $\because$ 点 $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\pi,-\frac{\pi}{2}\right)$ 在第四象限，$\therefore\theta=\frac{11\pi}{6}$，$\therefore$ 点 $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\pi,-\frac{\pi}{2}\right)$ 对应的极坐标是 $\left(\pi,\frac{11\pi}{6}\right)$.

4. D　解法一：$\because A\left(4,\frac{7\pi}{6}\right)$，$B\left(4,\frac{3\pi}{2}\right)$. $\therefore\angle AOB=\frac{3\pi}{2}-\frac{7\pi}{6}=\frac{\pi}{3}$. 在 $\triangle AOB$ 中，由余弦定理得 $|AB|^2=4^2+4^2-2\times4\times4\cos\frac{\pi}{3}=16+16-16=16$，$\therefore|AB|=4$.

解法二：把点 $A\left(4,\frac{7\pi}{6}\right)$，$B\left(4,\frac{3\pi}{2}\right)$ 化为直角坐标为 $A(-2\sqrt{3},-2)$，$B(0,-4)$，则线段 AB 的长度为 $|AB|=\sqrt{(-2\sqrt{3}-0)^2+(-2+4)^2}=4$.

5. D　A 的极坐标 $\left(6,\frac{\pi}{3}\right)$ 化为直角坐标为 $(3,3\sqrt{3})$，B 的极坐标 $\left(8,\frac{4\pi}{3}\right)$ 化为直角坐标为 $(-4,-4\sqrt{3})$，则线段 AB 中点的直角坐标为 $\left(-\frac{1}{2},-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

6. $\left(2\sqrt{3},-\frac{5\pi}{6}\right)$

解析：$\because$ 点 $C(-3,-\sqrt{3})$，$\therefore\rho=\sqrt{(-3)^2+(-\sqrt{3})^2}=2\sqrt{3}$，$\tan\theta=\frac{-\sqrt{3}}{-3}=\frac{\sqrt{3}}{3}$，又 $\because$ 点 C 位于第三象限，且 $-\pi<\theta<0$，

$\therefore\theta=-\frac{5\pi}{6}$，$\therefore$ 点 C 的极坐标可写为 $\left(2\sqrt{3},-\frac{5\pi}{6}\right)$.

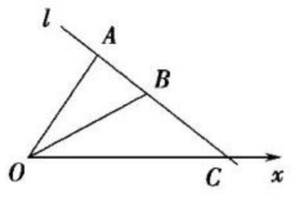
7. $(-3,4)$

解析：$\because\frac{\pi}{2}<\theta<\pi$，$\tan\theta=-\frac{4}{3}$，$\therefore\cos\theta=-\frac{3}{5}$，$\sin\theta=\frac{4}{5}$，又 $\rho=5$. $\therefore x=\rho\cos\theta=5\times\left(-\frac{3}{5}\right)=-3$，$y=\rho\sin\theta=5\times\frac{4}{5}=4$.

$\therefore$ 点 M 的直角坐标为 $(-3,4)$.

8. $\frac{\pi}{4}$

解析：解法一：如图所示. $\because|OA|=|OB|=3$. $\angle AOB=\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{6}$，



$\therefore\angle OAC=\frac{\pi-\frac{\pi}{6}}{2}=\frac{5\pi}{12}$，$\therefore\angle ACO=\pi-\frac{\pi}{3}-\frac{5\pi}{12}=\frac{\pi}{4}$，即直线 l 与极轴的夹角为 $\frac{\pi}{4}$.

解法二：点 $A\left(3,\frac{\pi}{3}\right)$，$B\left(3,\frac{\pi}{6}\right)$ 的直角坐标为 $A\left(\frac{3}{2},\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$，

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

$B\left(\frac{3\sqrt{3}}{2},\frac{3}{2}\right)$. 设直线 l 的倾斜角为 α，则 $\tan\alpha=\frac{\frac{3}{2}-\frac{3\sqrt{3}}{2}}{\frac{3\sqrt{3}}{2}-\frac{3}{2}}=-1$，

$\therefore\alpha=\frac{3\pi}{4}$. 又直线 l 与极轴的夹角为锐角，$\therefore$ 夹角为 $\frac{\pi}{4}$.

9. **解**：$\because x=-3,y=2$，
$\therefore x'=2x=-6,y'=3y=6$，
$\therefore A'$ 的直角坐标为 $(-6,6)$.
$\therefore\rho=\sqrt{(-6)^2+6^2}=6\sqrt{2},\tan\theta=\frac{6}{-6}=-1$，
又点 $(-6,6)$ 在第二象限，
$\therefore\theta=\frac{3\pi}{4}$，$\therefore A'$ 的极坐标为 $\left(6\sqrt{2},\frac{3\pi}{4}\right)$.

10. **解**：把所给点 $A\left(2,\frac{\pi}{2}\right),B\left(2,\frac{5\pi}{6}\right),C\left(\sqrt{3},\frac{5\pi}{3}\right)$ 化为直角坐标为 $A(0,2),B(-\sqrt{3},1),C\left(\frac{\sqrt{3}}{2},-\frac{3}{2}\right),O(0,0)$.

(1) $\because|AB|=\sqrt{(-\sqrt{3}-0)^2+(1-2)^2}=2$.
$|OA|=|OB|=2$，$\therefore\triangle OAB$ 为等边三角形.

(2) $\because|AC|=\sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-0\right)^2+\left(-\frac{3}{2}-2\right)^2}=\sqrt{13}$，

$|BC|=\sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\sqrt{3}\right)^2+\left(-\frac{3}{2}-1\right)^2}=\sqrt{13}$，
$|AB|=2$，$\therefore\triangle ABC$ 为等腰三角形.
设 AB 的中点为 D，则 $D\left(-\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{3}{2}\right)$，

$\therefore|CD|=\sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+\left(-\frac{3}{2}-\frac{3}{2}\right)^2}=2\sqrt{3}$.

$\therefore S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}|AB|\cdot|CD|=\frac{1}{2}\times2\times2\sqrt{3}=2\sqrt{3}$.

三　简单曲线的极坐标方程

第 4 课时　圆的极坐标方程

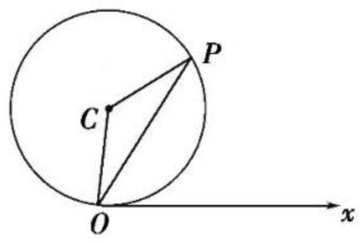
要点梳理

1. 至少有一个　曲线 C 上
2. (1)$\rho=r$　(2)$\rho=2a\cos\theta$

对点训练

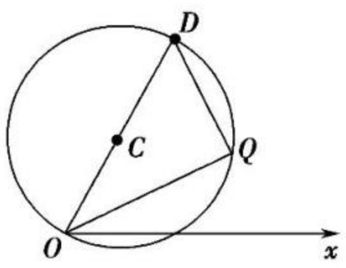
1. $\rho=a\sin\theta$

解析：记圆心为 $C\left(\frac{a}{2},\frac{\pi}{2}\right)$，
设 $P(\rho,\theta)$ 为圆 C 上任意一点，
则 $|OP|=\rho,\angle POx=\theta$，
$\therefore\angle COP=\frac{\pi}{2}-\theta,\angle PCO=2\theta$，
在 $\triangle COP$ 中，由余弦定理得：
$|OP|^2=|OC|^2+|CP|^2-2|OC||CP|\cos\angle PCO$，



即 $\rho^2=\left(\frac{a}{2}\right)^2+\left(\frac{a}{2}\right)^2-2\times\frac{a}{2}\times\frac{a}{2}\times\cos2\theta$，整理得 $\rho=a\sin\theta$，所以所求圆的方程为 $\rho=a\sin\theta$.

2. **解**：(1)如图，设 $Q(\rho,\theta)$ 为圆上任意一点，连接 DQ,OQ，
则 $|OD|=6,\angle DOQ=\frac{\pi}{3}-\theta$，
或 $\angle DOQ=\theta-\frac{\pi}{3},\angle DQO=\frac{\pi}{2}$.
在 $\mathrm{Rt}\triangle ODQ$ 中，$|OQ|=|OD|\cos\left(\theta-\frac{\pi}{3}\right)$，



即 $\rho=6\cos\left(\theta-\frac{\pi}{3}\right)$ 为圆 C 的极坐标方程.
(2)若 P 的极坐标为 (ρ,θ)，则 Q 点的极坐标为 $(2\rho,\theta)$.
$\therefore2\rho=6\cos\left(\theta-\frac{\pi}{3}\right)$，$\therefore\rho=3\cos\left(\theta-\frac{\pi}{3}\right)$.
$\therefore P$ 的轨迹是圆.

3. A　$\because\rho=6\sin\theta$，$\therefore\rho^2=6\rho\sin\theta$，又 $\because\rho^2=x^2+y^2,\rho\sin\theta=y$，$\therefore x^2+y^2=6y$，化为直角坐标系下的标准方程为 $x^2+(y-3)^2=9$，故选 A.

4. $\rho^2-2\rho\sin\theta-1=0$
解析：$\because\rho^2=x^2+y^2,y=\rho\sin\theta$，
$\therefore x^2+y^2-2y-1=0$ 化为极坐标方程为 $\rho^2-2\rho\sin\theta-1=0$.

5. $2\sqrt{3}$
解析：$\because$ 圆的极坐标方程为 $\rho=4\cos\theta$，$\therefore$ 圆心 C 的极坐标为 $(2,0)$，又点 P 的极坐标为 $\left(2,\frac{2\pi}{3}\right)$，$\therefore|CP|=\sqrt{2^2+2^2-2\times2\times2\times\cos\left(\frac{2\pi}{3}-0\right)}=2\sqrt{3}$.

6. **解**：由 $x^2+y^2=\rho^2$，$\begin{cases}x=\rho\cos\theta,\\y=\rho\sin\theta,\end{cases}$
可知圆 $C_1:x^2+y^2=4$ 的极坐标方程为 $\rho=2$.
圆 $C_2:(x-2)^2+y^2=4$，即 $x^2+y^2-4x=0$，
其极坐标方程为 $\rho=4\cos\theta$，
解 $\begin{cases}\rho=2,\\\rho=4\cos\theta,\end{cases}$ 得 $\rho=2,\theta=\pm\frac{\pi}{3}$.
所以圆 C_1,C_2 交点的极坐标为 $\left(2,\frac{\pi}{3}\right),\left(2,-\frac{\pi}{3}\right)$.

课后训练　提能达标

1. A　$\because\rho=\cos\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)$，$\therefore\rho^2=\rho\cos\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)=\rho\left(\cos\theta\cos\frac{\pi}{3}-\sin\theta\sin\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{2}\rho\cos\theta-\frac{\sqrt{3}}{2}\rho\sin\theta$，$\because\rho^2=x^2+y^2,\rho\cos\theta=x,\rho\sin\theta=y$，$\therefore x^2+y^2=\frac{1}{2}x-\frac{\sqrt{3}}{2}y$，化为直角坐标系下圆的标准方程为 $\left(x-\frac{1}{4}\right)^2+\left(y+\frac{\sqrt{3}}{4}\right)^2=\frac{1}{4}$，$\therefore$ 圆心的直角坐标为 $\left(\frac{1}{4},-\frac{\sqrt{3}}{4}\right)$，化为极坐标为 $\left(\frac{1}{2},-\frac{\pi}{3}\right)$，故选 A.

2. B　$\because\rho=\cos\theta-2\sin\theta$，$\therefore\rho^2=\rho\cos\theta-2\rho\sin\theta$，$\therefore x^2+y^2=x-2y$，即 $\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+(y+1)^2=\frac{5}{4}$.

3. D　对于①，点 P 在曲线 C 上，但点 P 的坐标不一定适合曲线 C 的极坐标方程，例如，点 $(0,\pi)$ 在曲线 $\rho=\cos\theta$ 上，但不适合方程 $\rho=\cos\theta$，故①错误；对于②，当 $\rho\in\mathbf{R}$ 时，$\tan\theta=\tan\frac{\pi}{3}=\sqrt{3}$，它们表示同一条直线 $y=\sqrt{3}x$，故②正确；对于③，$\rho=4$ 和 $\rho=-4$ 都表示圆 $x^2+y^2=16$，故③正确.

4. B　两圆化为直角坐标方程，
$\rho=2\sin\theta\Rightarrow\rho^2=2\rho\sin\theta\Rightarrow x^2+y^2=2y\Rightarrow x^2+(y-1)^2=1$，
其圆心 $(0,1)$，半径为 1，
同理 $\rho=-2\sin\theta$ 的直角坐标方程为 $x^2+(y+1)^2=1$.
$\because$ 圆心距为 2，且等于两半径之和，
$\therefore$ 两圆外切.

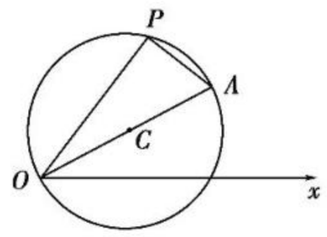
5. C　圆 $\rho=2$ 的直角坐标方程为 $x^2+y^2=4$，则圆心 $(0,0)$ 到直线 $y=1$ 的距离为 1，所以弦长为 $2\sqrt{4-1}=2\sqrt{3}$.

6. $\rho=6\sin\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)$ $\left(\text{或 }\rho=6\cos\left(\theta-\frac{\pi}{6}\right)\right)$

解析：解法一：将圆心的极坐标 $C\left(3,\frac{\pi}{6}\right)$ 化为直角坐标为 $\left(\frac{3\sqrt{3}}{2},\frac{3}{2}\right)$，所以所求圆的直角坐标方程为 $\left(x-\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)^2+\left(y-\frac{3}{2}\right)^2=9$，整理 $x^2+y^2-3\sqrt{3}x-3y=0$，$\because x=\rho\cos\theta,y=\rho\sin\theta$，$\therefore$ 化为极坐标方程为 $\rho^2-3\sqrt{3}\rho\cos\theta-3\rho\sin\theta=0$，即 $\rho=6\sin\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)$.
解法二：如图，设点 $P(\rho,\theta)$ 为圆上任意一点，OA 为圆的直径，则 $|OA|=6,\angle AOP=\theta-\frac{\pi}{6}$，在 $\mathrm{Rt}\triangle POA$ 中，
$|OP|=|OA|\cos\angle AOP$，

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

即 $\rho=6\cos\left(\theta-\frac{\pi}{6}\right)=6\sin\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)$.



7. $\left(\sqrt{2},\frac{3\pi}{4}\right)$

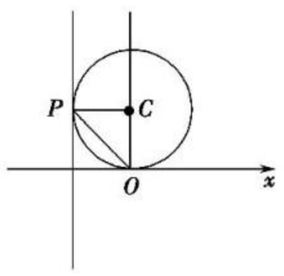
解析：解法一：曲线 $\rho=2\sin\theta$ 的直角坐标方程为 $x^2+y^2=2y$，$\rho\cos\theta=-1$ 的直角坐标方程为 $x=-1$，代入上式，得 $y^2-2y+1=0$，

$\therefore y=1$，故交点为 $(-1,1)$，

$\therefore\rho=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{2}$，$\tan\theta=\frac{y}{x}=-1$，且 $0\leqslant\theta<\pi$，

$\therefore\theta=\frac{3\pi}{4}$，$\therefore\left(\sqrt{2},\frac{3\pi}{4}\right)$ 为所求.

解法二：$\rho=2\sin\theta$ 表示圆心为 $C\left(1,\frac{\pi}{2}\right)$，半径为 1 的圆. $\rho\cos\theta=-1$ 表示直线，显然与圆相切，如图易得 $P\left(\sqrt{2},\frac{3\pi}{4}\right)$.



8. $2\sqrt{2}$

解析：曲线 C：$\rho=4\sin\theta$ 化为直角坐标方程为 $x^2+y^2=4y$，即 $x^2+(y-2)^2=4$，

点 $P\left(4,\frac{\pi}{6}\right)$ 化为直角坐标为 $(2\sqrt{3},2)$.

点 $P(2\sqrt{3},2)$ 到圆心 $C(0,2)$ 的距离

$|PC|=\sqrt{(2\sqrt{3}-0)^2+(2-2)^2}=2\sqrt{3}$.

$\therefore$ 切线长为 $\sqrt{|PC|^2-r^2}=\sqrt{(2\sqrt{3})^2-4}=2\sqrt{2}$.

9. **解**：(1)由 $\rho^2-4\sqrt{2}\rho\cos\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)+6=0$，得

$\rho^2-4\rho\cos\theta-4\rho\sin\theta+6=0$.

$\because\rho\cos\theta=x$，$\rho\sin\theta=y$，$\rho^2=x^2+y^2$，

$\therefore$ 圆的普通方程为 $x^2+y^2-4x-4y+6=0$.

(2)由(1)知圆的标准方程为 $(x-2)^2+(y-2)^2=2$，

令 $x+y=z$，即 $x+y-z=0$，

$\because$ 点 $P(x,y)$ 在圆上，

$\therefore$ 圆心到直线 $x+y-z=0$ 的距离 $d\leqslant r$，即 $\frac{|2+2-z|}{\sqrt{2}}\leqslant\sqrt{2}$，

解得 $2\leqslant z\leqslant6$，

$\therefore x+y$ 的最小值为 2，最大值为 6.

10. **解**：(1)圆 C 的圆心坐标化为平面直角坐标为 $\left(\frac{3\sqrt{3}}{2},\frac{3}{2}\right)$，所以圆 C 的平面直角坐标方程为 $\left(x-\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)^2+\left(y-\frac{3}{2}\right)^2=1$，

化为极坐标方程为 $\rho^2-6\rho\cos\left(\theta-\frac{\pi}{6}\right)+8=0$.

(2)设 P 点坐标为 (ρ,θ)，Q 点坐标为 (ρ_0,θ_0)，则由题意可知 $\begin{cases}\rho_0=\frac{2}{5}\rho,\\ \theta_0=\theta,\end{cases}$ 因为点 Q 在圆 C 上，所以点 Q 的坐标适合圆 C 的方程，代入得 $\left(\frac{2}{5}\rho\right)^2-6\times\frac{2}{5}\rho\cos\left(\theta-\frac{\pi}{6}\right)+8=0$，整理即得动点 P 的轨迹方程为 $\rho^2-15\rho\cos\left(\theta-\frac{\pi}{6}\right)+50=0$.

第 5 课时 直线的极坐标方程

要点梳理

1. (1)$\theta=\alpha(\rho\in\mathbf{R})$ (2)$\rho\cos\theta=a$ (3)$\rho\sin\theta=a$

对点训练

1. D 过极点倾斜角为 $\frac{\pi}{3}$ 的直线的极坐标方程为 $\theta=\frac{\pi}{3}$ 或 $\theta=\frac{\pi}{3}+\pi=\frac{4\pi}{3}$，$\rho\geqslant0$，故选 D.

2. $\rho\sin\left(\frac{\pi}{3}-\theta\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$

解析：设直线上任意一点的坐标是 (ρ,θ)，由正弦定理，得 $\frac{\rho}{\sin\frac{2\pi}{3}}=\frac{1}{\sin\left(\frac{\pi}{3}-\theta\right)}$，即 $\rho\sin\left(\frac{\pi}{3}-\theta\right)=\sin\frac{2\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，所以所求直线的极坐标方程为 $\rho\sin\left(\frac{\pi}{3}-\theta\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

3. B $\because\rho\cos\left(\theta-\frac{\pi}{6}\right)=1$，

$\therefore\rho\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta+\frac{1}{2}\sin\theta\right)=1$，

化为直角坐标方程为 $\frac{\sqrt{3}}{2}x+\frac{1}{2}y=1$，

即 $y=-\sqrt{3}x+2$，

$\therefore$ 斜率为 $-\sqrt{3}$.

4. $\rho=\frac{1}{\cos\theta+\sin\theta}$，$0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}$

解析：因为 $\rho\cos\theta=x$，$\rho\sin\theta=y$，$\rho>0$，$\theta\in[0,2\pi)$，且 $y=1-x$ $(0\leqslant x\leqslant1)$，得 $y\in[0,1]$，$\rho\sin\theta=1-\rho\cos\theta(0\leqslant\rho\cos\theta\leqslant1,0\leqslant\rho\sin\theta\leqslant1)$，解得 $\rho=\frac{1}{\cos\theta+\sin\theta}$，$0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}$.

5. **解**：$\because$ 圆 C：$\rho^2=2\rho\cos\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}\rho\cos\theta+\sqrt{2}\rho\sin\theta$，

$\therefore$ 圆 C 的直角坐标方程为 $x^2+y^2-\sqrt{2}x-\sqrt{2}y=0$，

$\therefore$ 圆心 $C\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ 与极轴交于点 $A(\sqrt{2},0)$，

$\therefore$ 直线 CA 的直角坐标方程为 $x+y=\sqrt{2}$，

转化为直线 CA 的极坐标方程为 $\rho\cos\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)=1$.

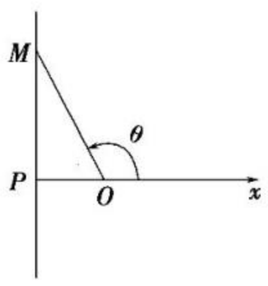
6. **解**：圆 C：$\rho=10\cos\theta$ 化为直角坐标方程为 $x^2+y^2=10x$，

即 $(x-5)^2+y^2=25$，圆心 $C(5,0)$，半径 $r=5$.

直线 l：$3\rho\cos\theta-4\rho\sin\theta-30=0$ 化为直角坐标方程为 $3x-4y-30=0$，圆心 C 到直线 l 的距离 $d=\frac{|3\times5-4\times0-30|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}=3$，所以 $|AB|=2\sqrt{r^2-d^2}=2\sqrt{25-9}=8$.

课后训练 提能达标

1. C 如图，设 $M(\rho,\theta)$ 为过点 $P(1,\pi)$ 垂直于极轴的直线上任意一点，则 $|OM|=\rho$，$\angle POM=\pi-\theta$，在 Rt$\triangle OPM$ 中，$|OP|=|OM|\cdot\cos\angle POM$，即 $1=\rho\cos(\pi-\theta)=-\rho\cos\theta$，$\therefore\rho=-\frac{1}{\cos\theta}$，故选 C.



2. B 直线 $\theta=\alpha$ 的直角坐标方程为 $\frac{y}{x}=\tan\alpha$，即 $y=x\cdot\tan\alpha$. 直线 $\rho\sin(\theta-\alpha)=1$ 的直角坐标方程为 $y\cos\alpha-x\sin\alpha=1$，即 $y=x\cdot\tan\alpha+\frac{1}{\cos\alpha}$，所以两直线平行.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

3. D　直线 l 的直角坐标方程为 $x-y+1=0$，点 A 的直角坐标为 $(2,-2)$，∴点 A 到直线 l 的距离 $d=\dfrac{|2-(-2)+1|}{\sqrt{2}}=\dfrac{5}{2}\sqrt{2}$，故选 D.

4. C　由 $\cos\theta=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，$\theta=\pm\dfrac{\pi}{4}+2k\pi(k\in\mathbf{Z})$，又∵$\rho\geqslant 0$，

∴$\cos\theta=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ 表示两条射线.

5. A　直线 $\rho\cos\theta-\rho\sin\theta+1=0$ 化为直角坐标方程为 $x-y+1=0$，极点 $(0,0)$ 关于直线 $x-y+1=0$ 的对称点的坐标为 $(-1,1)$，化为极坐标为 $\left(\sqrt{2},\dfrac{3\pi}{4}\right)$.

6. 1

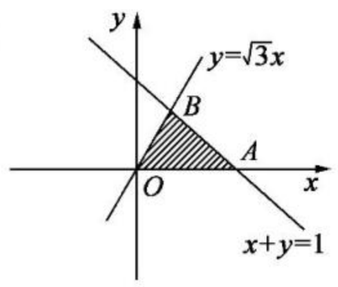
解析：点 $\left(2,\dfrac{\pi}{6}\right)$ 化为直角坐标为 $(\sqrt{3},1)$，直线 $\rho\sin\left(\theta-\dfrac{\pi}{6}\right)=1$ 化为直角坐标系下的方程为 $\dfrac{\sqrt{3}}{2}y-\dfrac{1}{2}x-1=0$，∴点 $(\sqrt{3},1)$ 到直线 $\dfrac{\sqrt{3}}{2}y-\dfrac{1}{2}x-1=0$ 的距离 $d=\dfrac{\left|\dfrac{\sqrt{3}}{2}\times 1-\dfrac{1}{2}\times\sqrt{3}-1\right|}{\sqrt{\left(-\dfrac{1}{2}\right)^2+\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}}=1$.

7. $2\rho\cos\theta-\rho\sin\theta+7=0$

解析：依题意得直线的直角坐标方程为 $y-3=2(x+2)$，即 $2x-y+7=0$，将 $x=\rho\cos\theta$，$y=\rho\sin\theta$ 代入得直线的极坐标方程为 $2\rho\cos\theta-\rho\sin\theta+7=0$.

8. $\dfrac{3-\sqrt{3}}{4}$

解析：∵三条直线 $\theta=0$，$\theta=\dfrac{\pi}{3}$，$\rho\cos\theta+\rho\sin\theta=1$ 在直角坐标系下对应的直线方程为 $y=0$，$y=\sqrt{3}x$，$x+y=1$.



三条直线围成的面积如图所示，

由 $\begin{cases}x+y=1,\\y=0,\end{cases}$ 得 $A(1,0)$；

由 $\begin{cases}x+y=1,\\y=\sqrt{3}x,\end{cases}$ 得 $B\left(\dfrac{\sqrt{3}-1}{2},\dfrac{3-\sqrt{3}}{2}\right)$.

∴$\triangle OAB$ 的面积 $S=\dfrac{1}{2}\times 1\times\dfrac{3-\sqrt{3}}{2}=\dfrac{3-\sqrt{3}}{4}$.

9. **解**：因为曲线 C 的极坐标方程为 $\rho=4\cos\theta$，

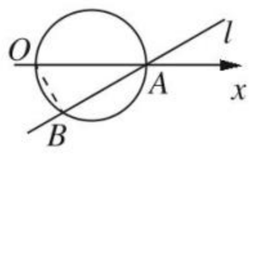
所以曲线 C 的圆心的极坐标为 $(2,0)$，半径为 2.

因为直线 l 的极坐标方程为 $\rho\sin\left(\dfrac{\pi}{6}-\theta\right)=2$，

所以直线 l 过点 $A(4,0)$，倾斜角为 $\dfrac{\pi}{6}$，

所以 A 为直线 l 与圆 C 的一个交点，

设另一个交点为 B，则 $\angle OAB=\dfrac{\pi}{6}$，



连接 OB，

因为 OA 为圆 C 的直径，所以 $\angle OBA=\dfrac{\pi}{2}$，

所以 $AB=4\cos\dfrac{\pi}{6}=2\sqrt{3}$，

所以直线 l 被曲线 C 截得的弦长为 $2\sqrt{3}$.

10. **解**：(1)由圆 C_1 的方程为 $(x+1)^2+y^2=1$，知 $C_1(-1,0)$，$r_1=1$.

又圆 C_2 与圆 C_1 外切于原点 O，

且两圆圆心的距离 $|C_1C_2|=3$，

所以 $C_2(2,0)$，$r_2=2$，

所以圆 C_2 的方程为 $(x-2)^2+y^2=4$.

因为 $x=\rho\cos\theta$，$y=\rho\sin\theta$，

所以圆 C_1 的极坐标方程为 $\rho=-2\cos\theta$，

圆 C_2 的极坐标方程为 $\rho=4\cos\theta$.

(2)由已知设 $A(\rho_1,\theta)$，

由 $l_1\perp l_2$ 可得 $B\left(\rho_2,\theta+\dfrac{\pi}{2}\right)$，$C(\rho_3,\theta+\pi)$，$D\left(\rho_4,\theta+\dfrac{3}{2}\pi\right)$.

由(1)得 $\begin{cases}\rho_1=4\cos\theta,\\ \rho_2=-2\cos\left(\theta+\dfrac{\pi}{2}\right)=2\sin\theta,\\ \rho_3=-2\cos(\theta+\pi)=2\cos\theta,\\ \rho_4=4\cos\left(\theta+\dfrac{3}{2}\pi\right)=4\sin\theta.\end{cases}$

所以 $S_{四边形ABCD}=\dfrac{1}{2}|AC|\cdot|BD|=\dfrac{1}{2}(\rho_1+\rho_3)(\rho_2+\rho_4)=18\sin\theta\cos\theta=9\sin 2\theta$.

所以当 $\sin 2\theta=1$，即 $\theta=\dfrac{\pi}{4}$ 时，$S_{四边形ABCD}$ 有最大值 9.

四　柱坐标系与球坐标系简介

第 6 课时　柱坐标系与球坐标系简介

要点梳理

1. (2) $\begin{cases}x=\rho\cos\theta,\\ y=\rho\sin\theta,\\ z=z\end{cases}$

2. (2) $\begin{cases}x=r\sin\varphi\cos\theta,\\ y=r\sin\varphi\sin\theta,\\ z=r\cos\varphi\end{cases}$

对点训练

1. $\left(2,\dfrac{\pi}{3},4\right)$

解析：$x=1=\rho\cos\theta$，$y=\sqrt{3}=\rho\sin\theta$，

∴$\tan\theta=\sqrt{3}$.

∵$0\leqslant\theta<2\pi$，$\rho>0$，∴$\theta=\dfrac{\pi}{3}$，∴$\rho=2$.

又∵$z=4$，∴点 B 的柱坐标为 $\left(2,\dfrac{\pi}{3},4\right)$.

2. **解**：(1)由公式 $\rho^2=1+3=4$，$\rho=2$，$\tan\theta=\dfrac{y}{x}=-\sqrt{3}$，且角 θ 的终边经过点 $(1,-\sqrt{3},0)$，所以 $\theta=\dfrac{5\pi}{3}$，

所以点 M 的柱坐标为 $\left(2,\dfrac{5\pi}{3},4\right)$.

(2)设点 N 的直角坐标为 (x,y,z)，柱坐标为 (ρ,θ,z)，

因为 $(\rho,\theta,z)=\left(2,\dfrac{7\pi}{6},-1\right)$，

由公式 $\begin{cases}x=\rho\cos\theta,\\ y=\rho\sin\theta,\\ z=z,\end{cases}$ 得 $\begin{cases}x=2\cos\dfrac{7\pi}{6},\\ y=2\sin\dfrac{7\pi}{6},\\ z=-1,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}x=-\sqrt{3},\\ y=-1,\\ z=-1.\end{cases}$

所以点 $\left(2,\dfrac{7\pi}{6},-1\right)$ 的直角坐标为 $(-\sqrt{3},-1,-1)$.

3. (1)$(1,1,\sqrt{2})$　(2)$\left(4,\dfrac{\pi}{4},\dfrac{3\pi}{4}\right)$

解析：(1)∵$r=2$，$\varphi=\dfrac{\pi}{4}$，$\theta=\dfrac{\pi}{4}$，

∴$x=r\sin\varphi\cos\theta=1$，$y=r\sin\varphi\sin\theta=1$，$z=r\cos\varphi=\sqrt{2}$，

∴点 A 的直角坐标为 $(1,1,\sqrt{2})$.

(2)∵$x=-2$，$y=2$，$z=2\sqrt{2}$，

∴$r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}=4$，$\tan\theta=\dfrac{y}{x}=-1$，$\cos\varphi=\dfrac{z}{r}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，

∵$x<0$，$y>0$，$z>0$，

∴$\theta=\dfrac{3\pi}{4}$，$\varphi=\dfrac{\pi}{4}$，

∴点 B 的球坐标为 $\left(4,\dfrac{\pi}{4},\dfrac{3\pi}{4}\right)$.

4. $(2,-2\sqrt{3},0)$

解析：由公式 $\begin{cases}x=r\sin\varphi\cos\theta,\\ y=r\sin\varphi\sin\theta,\\ z=r\cos\varphi,\end{cases}$

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

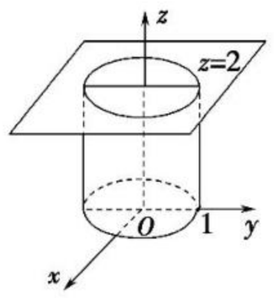
得 $\begin{cases} x=4\sin\frac{\pi}{2}\cos\frac{5\pi}{3}=4\times1\times\frac{1}{2}=2, \\ y=4\sin\frac{\pi}{2}\sin\frac{5\pi}{3}=4\times1\times\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=-2\sqrt{3}, \\ z=4\cos\frac{\pi}{2}=0. \end{cases}$

∴点 M 的直角坐标为 $(2,-2\sqrt{3},0)$.

5. **解**：由 $M\left(6,\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{3}\right)$，$N\left(6,\frac{2\pi}{3},\frac{\pi}{3}\right)$ 知 $|OM|=|ON|=6$，$\angle MON=\frac{2\pi}{3}-\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{3}$，∴$\triangle OMN$ 是等边三角形.

∴$|MN|=6$.

6. **解**：根据柱坐标系与点的柱坐标的意义可知，满足 $\rho=1$，$0\leqslant\theta<2\pi$，$0\leqslant z\leqslant2$ 的动点 $M(\rho,\theta,z)$ 的轨迹是以直线 Oz 为轴，轴截面为正方形的圆柱，如图所示，



圆柱的底面半径 $r=1$，$h=2$，

∴$V=Sh=\pi r^2h=2\pi$（体积单位）.

课后训练　提能达标

1. A　由点 P 的柱坐标 (ρ,θ,z) 知，当 $\theta=\frac{\pi}{2}$ 时，点 P 在平面 yOz 内，故选 A.

2. C　由球坐标的定义知，动点 $P(r,\varphi,\theta)$ 的轨迹是半平面.

3. A　点 M 到 Oz 轴的距离 $d=r\sin\varphi=4\times\sin\frac{\pi}{4}=2\sqrt{2}$，故选 A.

4. B　设 P 点的直角坐标为 (x,y,z)，

∴$x=\sqrt{2}\cos\frac{\pi}{4}=1$，$y=\sqrt{2}\sin\frac{\pi}{4}=1$，$z=5$.

∴点 P 的直角坐标为 $(1,1,5)$.

设点 B 的直角坐标为 (x',y',z')，

则 $x'=\sqrt{6}\sin\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{6}=\sqrt{6}\times\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{3\sqrt{6}}{4}$，

$y'=\sqrt{6}\sin\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{6}=\sqrt{6}\times\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{3\sqrt{2}}{4}$，

$z'=\sqrt{6}\cos\frac{\pi}{3}=\sqrt{6}\times\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{6}}{2}$.

∴点 B 的直角坐标为 $\left(\frac{3\sqrt{6}}{4},\frac{3\sqrt{2}}{4},\frac{\sqrt{6}}{2}\right)$.

故选 B.

5. A　设点 P_1 的直角坐标是 (x_1,y_1,z_1)，

∵P_1 的球坐标为 $\left(4,\frac{\pi}{2},\frac{5\pi}{3}\right)$，

∴$\begin{cases} x_1=4\sin\frac{\pi}{2}\cos\frac{5\pi}{3}, \\ y_1=4\sin\frac{\pi}{2}\sin\frac{5\pi}{3}, \\ z_1=4\cos\frac{\pi}{2}, \end{cases}$ ∴$\begin{cases} x_1=2, \\ y_1=-2\sqrt{3}, \\ z_1=0, \end{cases}$

∴P_1 的直角坐标是 $(2,-2\sqrt{3},0)$.

设 P_2 的直角坐标是 (x_2,y_2,z_2)，

∵P_2 的柱坐标是 $\left(2,\frac{\pi}{6},1\right)$，

∴$\begin{cases} x_2=2\cos\frac{\pi}{6}=\sqrt{3}, \\ y_2=2\sin\frac{\pi}{6}=1, \\ z_2=1. \end{cases}$

∴P_2 的直角坐标为 $(\sqrt{3},1,1)$.

∴$|P_1P_2|=\sqrt{(2-\sqrt{3})^2+(-2\sqrt{3}-1)^2+(0-1)^2}=\sqrt{21}$.

6. $(-2,2,2\sqrt{2})$　$\left(2\sqrt{2},\frac{3\pi}{4},2\sqrt{2}\right)$

解析：设点 M 的直角坐标为 (x,y,z)，

则 $x=4\sin\frac{\pi}{4}\cos\frac{3\pi}{4}=-2$，$y=4\sin\frac{\pi}{4}\sin\frac{3\pi}{4}=2$，$z=4\cos\frac{\pi}{4}=2\sqrt{2}$.

∴点 M 的直角坐标为 $(-2,2,2\sqrt{2})$，

又 $\rho=\sqrt{(-2)^2+2^2}=2\sqrt{2}$，$\tan\theta=\frac{2}{-2}=-1$，

∵$0\leqslant\theta<2\pi$，∴$\theta=\frac{3}{4}\pi$，

∴点 M 的柱坐标为 $\left(2\sqrt{2},\frac{3\pi}{4},2\sqrt{2}\right)$.

7. 3

解析：设点 M 的直角坐标为 (x,y,z)，

∵M 的柱坐标为 $\left(2,\frac{\pi}{3},\sqrt{5}\right)$，

∴$x=2\cos\frac{\pi}{3}=2\times\frac{1}{2}=1$，

$y=2\sin\frac{\pi}{3}=2\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}$，$z=\sqrt{5}$.

∴$|OM|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}=\sqrt{1+3+5}=3$.

8. $\left(R,\frac{3\pi}{4},\frac{5\pi}{3}\right)$

解析：由球坐标的定义可知，该地的球坐标为 $\left(R,\frac{3\pi}{4},\frac{5\pi}{3}\right)$.

9. **解**：(1)点 C_1 的直角坐标为 $(1,1,1)$，

设点 C_1 的柱坐标为 (ρ,θ,z)，球坐标为 (r,φ,θ)，其中 $\rho\geqslant0$，$r\geqslant0$，$0\leqslant\varphi\leqslant\pi$，$0\leqslant\theta<2\pi$.

由公式 $\begin{cases} x=\rho\cos\theta, \\ y=\rho\sin\theta, \\ z=z \end{cases}$ 及 $\begin{cases} x=r\sin\varphi\cos\theta, \\ y=r\sin\varphi\sin\theta, \\ z=r\cos\varphi, \end{cases}$

得 $\begin{cases} \rho=\sqrt{x^2+y^2}, \\ \tan\theta=\frac{y}{x}(x\neq0) \end{cases}$ 及 $\begin{cases} r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}, \\ \cos\varphi=\frac{z}{r}, \end{cases}$ 所以 $\begin{cases} \rho=\sqrt{2}, \\ \theta=\frac{\pi}{4} \end{cases}$ 及 $\begin{cases} r=\sqrt{3}, \\ \cos\varphi=\frac{\sqrt{3}}{3}. \end{cases}$

由 $\cos\varphi=\frac{\sqrt{3}}{3}$，得 $\tan\varphi=\sqrt{2}$，

所以点 C_1 的直角坐标为 $(1,1,1)$，柱坐标为 $\left(\sqrt{2},\frac{\pi}{4},1\right)$，球坐标为 $\left(\sqrt{3},\varphi,\frac{\pi}{4}\right)$，其中 $\tan\varphi=\sqrt{2}$，$0\leqslant\varphi\leqslant\pi$.

(2)同理可求得点 C 的直角坐标为 $(1,1,0)$，柱坐标为 $\left(\sqrt{2},\frac{\pi}{4},0\right)$，球坐标为 $\left(\sqrt{2},\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{4}\right)$，点 D 的直角坐标为 $(0,1,0)$，柱坐标为 $\left(1,\frac{\pi}{2},0\right)$，球坐标为 $\left(1,\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$.

10. **解**：设点 M 的直角坐标为 (x,y,z)，∵M 的球坐标为 $\left(4,\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3}\right)$，由公式得

$\begin{cases} x=r\sin\varphi\cos\theta=4\times\sin\frac{\pi}{6}\cos\frac{\pi}{3}=1, \\ y=r\sin\varphi\sin\theta=4\times\sin\frac{\pi}{6}\sin\frac{\pi}{3}=\sqrt{3}, \\ z=r\cos\varphi=4\times\cos\frac{\pi}{6}=2\sqrt{3}. \end{cases}$

∴M 的直角坐标为 $(1,\sqrt{3},2\sqrt{3})$.

同理可得 N 的直角坐标为 $(3,\sqrt{3},2)$.

∴$|MN|=\sqrt{(3-1)^2+(\sqrt{3}-\sqrt{3})^2+(2-2\sqrt{3})^2}=2\sqrt{5-2\sqrt{3}}$.

阶段评估一

1. A　由 $\rho=2\cos\theta$，得 $\rho^2=2\rho\cos\theta$，

∴圆的直角坐标方程为 $x^2+y^2=2x$，即 $(x-1)^2+y^2=1$，

∴圆的半径为 1.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

2. B　设变换为$\begin{cases}x'=\lambda x(\lambda>0),\\y'=\mu y(\mu>0),\end{cases}$

将其代入方程 $x'+y'=0$，得

$\lambda x+\mu y=0$，它与 $2x+3y=0$ 表示同一直线，

$\therefore\lambda=2,\mu=3.$

$\therefore\begin{cases}x'=2x,\\y'=3y.\end{cases}$

3. C　由 $\rho=2\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)$，

得 $\rho^2=2\rho\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\theta+\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\theta\right)=\sqrt{2}\rho\sin\theta+\sqrt{2}\rho\cos\theta$，

化为直角坐标方程为 $x^2+y^2=\sqrt{2}x+\sqrt{2}y$，

配方得 $\left(x-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\left(y-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2=1$，

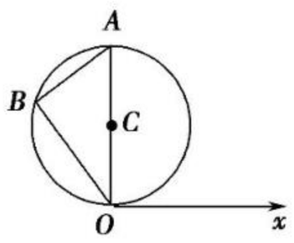
其图形是以 $\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ 为圆心，1 为半径的圆.

4. C　圆 $\rho=2$ 的直角坐标方程为 $x^2+y^2=4$，圆心为 $(0,0)$，直线 $\rho\cos\theta+\rho\sin\theta=2$ 化为直角坐标方程为 $x+y-2=0$，所以圆心 $(0,0)$ 到直线 $x+y-2=0$ 的距离 $d=\frac{|-2|}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$，故选 C.

5. A　$\because\rho=2\cos\theta$，$\therefore\rho^2=2\rho\cos\theta$，$\therefore$ 化为直角坐标方程为 $x^2+y^2=2x$，即 $(x-1)^2+y^2=1$. 点 $Q\left(1,\frac{\pi}{2}\right)$ 的直角坐标为 $(0,1)$，$\therefore$ 圆心 $(1,0)$ 到 $Q(0,1)$ 的距离 $d=\sqrt{2}$，

$\therefore$ 曲线 $\rho=2\cos\theta$ 上的动点 P 与定点 $Q\left(1,\frac{\pi}{2}\right)$ 的最近距离为 $\sqrt{2}-1$.

6. C　如图，$\rho=6\sin\theta$ 表示以点 $C\left(3,\frac{\pi}{2}\right)$ 为圆心，半径为 3 的圆，直线 $\theta=\frac{2\pi}{3}$ 与圆的交点分别为 O，B，则 $|OB|=|OA|\cos\frac{\pi}{6}=6\times\frac{\sqrt{3}}{2}=3\sqrt{3}$.



7. $(1,2k\pi),k\in\mathbf{Z}$

解析：因为极轴为射线，故极轴上与极点距离为 1 的点的极坐标为 $(1,2k\pi),k\in\mathbf{Z}$.

8. $\frac{\sqrt{2}}{2}$

解析：解法一：令 $\theta=0$，得 $\sqrt{2}\rho=1$，$\therefore\rho=\frac{\sqrt{2}}{2}$，$\therefore a=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

解法二：曲线 C_1 的直角坐标方程为 $\sqrt{2}x+y=1$，

令 $y=0$，得 $x=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

曲线 C_2 的直角坐标方程为 $x^2+y^2=a^2$.

$\because C_1$ 与 x 轴的交点 $\left(\frac{\sqrt{2}}{2},0\right)$ 也在 C_2 上，$\therefore\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+0^2=a^2$.

又 $a>0$，$\therefore a=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

9. $\left(-\frac{\pi}{3},\frac{\sqrt{3}\pi}{3},\frac{2\pi}{3}\right)$　$\left(\frac{2\sqrt{2}\pi}{3},\frac{\pi}{4},\frac{2\pi}{3}\right)$

解析：设点 M 的直角坐标为 (x,y,z)，球坐标为 (r,φ,θ)，又点 M 的柱坐标为 $\left(\frac{2\pi}{3},\frac{2\pi}{3},\frac{2\pi}{3}\right)$，

$$\therefore\begin{cases}x=\rho\cos\theta=\frac{2\pi}{3}\cdot\cos\frac{2\pi}{3}=-\frac{\pi}{3},\\y=\rho\sin\theta=\frac{2\pi}{3}\cdot\sin\frac{2\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}\pi}{3},\\z=\frac{2\pi}{3}.\end{cases}$$

由 $r^2=x^2+y^2+z^2=\left(-\frac{\pi}{3}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}\pi}{3}\right)^2+\left(\frac{2\pi}{3}\right)^2=\frac{8\pi^2}{9}$，

$\therefore r=\frac{2\sqrt{2}\pi}{3}$，$\cos\varphi=\frac{z}{r}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，$\therefore\varphi=\frac{\pi}{4}$.

$\therefore$ 点 M 的直角坐标为 $\left(-\frac{\pi}{3},\frac{\sqrt{3}\pi}{3},\frac{2\pi}{3}\right)$，球坐标为 $\left(\frac{2\sqrt{2}\pi}{3},\frac{\pi}{4},\frac{2\pi}{3}\right)$.

10. $\rho=2\sqrt{2}\cos\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)$

解析：由题意得圆的直角坐标方程为 $(x-1)^2+(y-1)^2=2$，即 $x^2+y^2-2x-2y=0$.

化为极坐标方程为 $\rho^2-2\rho\cos\theta-2\rho\sin\theta=0$，

即 $\rho=2\sqrt{2}\cos\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)$.

11. **解**：将变换后的曲线方程 $y=\sin x$ 改写为 $y'=\sin x'$，

设伸缩变换 $\varphi:\begin{cases}x'=\lambda x(\lambda>0),\\y'=\mu y(\mu>0).\end{cases}$

代入 $y'=\sin x'$，得 $\mu y=\sin\lambda x$，

即 $y=\frac{1}{\mu}\sin\lambda x$. 与原曲线方程 $y=2\sin\frac{x}{4}$ 比较，

得 $\begin{cases}\frac{1}{\mu}=2,\\\lambda=\frac{1}{4},\end{cases}\therefore\begin{cases}\lambda=\frac{1}{4},\\\mu=\frac{1}{2},\end{cases}$

$\therefore$ 伸缩变换 $\varphi:\begin{cases}x'=\frac{1}{4}x,\\y'=\frac{1}{2}y.\end{cases}$

12. **解**：圆 $C:\rho=2\sqrt{2}\cos\theta$ 转化为直角坐标方程为 $x^2+y^2-2\sqrt{2}x=0$，即 $(x-\sqrt{2})^2+y^2=2$.

直线 $l:\theta=\frac{\pi}{4}(\rho\in\mathbf{R})$ 转化为直角坐标方程为 $y=x$.

所以圆心 $C(\sqrt{2},0)$ 到直线 l 的距离 $d=\frac{|\sqrt{2}-0|}{\sqrt{2}}=1$.

$\therefore|AB|=2\sqrt{r^2-d^2}=2\sqrt{2-1}=2$.

13. **解**：(1)将曲线 $C_2:\rho=2\sin\theta$ 转化为直角坐标方程为 $x^2+y^2-2y=0$，

将曲线 $C_3:\rho=2\sqrt{3}\cos\theta$ 转化为直角坐标方程为 $x^2+y^2-2\sqrt{3}x=0$，

解方程组 $\begin{cases}x^2+y^2-2y=0,\\x^2+y^2-2\sqrt{3}x=0,\end{cases}$

得 $\begin{cases}x=0,\\y=0,\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x=\frac{\sqrt{3}}{2},\\y=\frac{3}{2}.\end{cases}$

所以 C_2 与 C_3 交点的直角坐标为 $(0,0)$，$\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{3}{2}\right)$.

(2)曲线 C_1 的极坐标方程为 $\theta=\alpha(\rho\in\mathbf{R},\rho\neq0)$，其中 $0\leqslant\alpha<\pi$.

因此点 A 的极坐标为 $(2\sin\alpha,\alpha)$，点 B 的极坐标为 $(2\sqrt{3}\cos\alpha,\alpha)$，

所以 $|AB|=|2\sin\alpha-2\sqrt{3}\cos\alpha|=4\left|\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{3}\right)\right|$，

所以当 $\alpha=\frac{5\pi}{6}$ 时，$|AB|$ 取得最大值 4.

14. **解**：(1)C_1 的直角坐标方程为 $(x+1)^2+y^2=1$，它表示圆心为 $(-1,0)$，半径为 1 的圆，

C_2 的直角坐标方程为 $x-\sqrt{3}y-2=0$，它表示一条直线.

因为圆心 $(-1,0)$ 到直线 $x-\sqrt{3}y-2=0$ 的距离

$d=\frac{|-1-2|}{2}=\frac{3}{2}>1$，

所以直线与圆相离，即曲线 C_1 和 C_2 没有公共点.

(2)设 $Q(\rho_0,\theta_0)$，$P(\rho,\theta)$，

则 $\begin{cases}\rho\rho_0=2,\\\theta=\theta_0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}\rho_0=\frac{2}{\rho},\\\theta_0=\theta.\end{cases}$　①

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

因为点 $Q(\rho_0,\theta_0)$ 在曲线 C_2 上，

所以 $\rho_0\cos\left(\theta_0+\frac{\pi}{3}\right)=1$，　②

将①代入②，得 $\frac{2}{\rho}\cos\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)=1$，即 $\rho=2\cos\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)$.

将其化为直角坐标方程为 $\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(y+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2=1$.

因此点 P 的轨迹是以 $\left(\frac{1}{2},-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ 为圆心，1 为半径的圆.

第二讲　参数方程

一　曲线的参数方程

第 7 课时　参数方程的概念及圆的参数方程

要点梳理

1. $\begin{cases}x=f(t),\\y=g(t)\end{cases}$　普通方程

2. (1) $\begin{cases}x=r\cos\theta,\\y=r\sin\theta\end{cases}$（$\theta$ 为参数）　(2) $\begin{cases}x=a+r\cos\theta,\\y=b+r\sin\theta\end{cases}$（$\theta$ 为参数）

对点训练

1. A　令 $x=0$，得 $t=\frac{3}{2}$，∴$y=1+2t=1+2\times\frac{3}{2}=4$.

∴与 y 轴的交点为 $(0,4)$，令 $y=0$，得 $t=-\frac{1}{2}$. ∴$x=3-2t=3-2\times\left(-\frac{1}{2}\right)=4$. ∴与 x 轴的交点为 $(4,0)$. 故选 A.

2. B　由题意得 $\begin{cases}x=\sqrt{2},\\y=m.\end{cases}$ 又 $\begin{cases}x=t,\\y=t^2,\end{cases}$ ∴$t=\sqrt{2}$，$m=t^2=2$.

3. A　由 $\begin{cases}x=2\cos\theta,\\y=2\sin\theta,\end{cases}$ 得 $x^2+y^2=4$，∵$0\leqslant\theta\leqslant\pi$，∴$0\leqslant y\leqslant2$，∴参数方程表示上半圆，故选 A.

4. **解**：将圆的方程 $x^2+y^2+2x-6y+9=0$ 化为标准方程为 $(x+1)^2+(y-3)^2=1$，

令 $\begin{cases}x+1=\cos\theta,\\y-3=\sin\theta,\end{cases}$

得参数方程为 $\begin{cases}x=-1+\cos\theta,\\y=3+\sin\theta\end{cases}$（$\theta$ 为参数）.

5. A　依题意，圆的标准方程为 $(x+1)^2+(y-1)^2=2$，又圆心到直线 $y=0$ 的距离为 1，所以圆心角为 $\frac{\pi}{2}$，所以劣弧长为 $\frac{\pi}{2}\times\sqrt{2}=\frac{\sqrt{2}\pi}{2}$，故选 A.

6. **解**：由 $x^2+y^2-2y=0$，得 $x^2+(y-1)^2=1$，则圆的参数方程为 $\begin{cases}x=\cos\theta,\\y=1+\sin\theta\end{cases}$（$\theta$ 为参数）.

(1) $2x+y=2\cos\theta+1+\sin\theta=1+\sqrt{5}\sin(\theta+\varphi)$，

其中 $\tan\varphi=2$. ∵$-1\leqslant\sin(\theta+\varphi)\leqslant1$，

∴$2x+y$ 的取值范围是 $[1-\sqrt{5},1+\sqrt{5}]$.

(2) $x+y+a\geqslant0$ 恒成立，只需 $a\geqslant-(x+y)_{\max}$.

∵$x+y=\cos\theta+1+\sin\theta=1+\sqrt{2}\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)\geqslant1-\sqrt{2}$.

∴$-(x+y)\leqslant\sqrt{2}-1$，∴$a\geqslant\sqrt{2}-1$，即实数 a 的取值范围为 $[\sqrt{2}-1,+\infty)$.

课后训练　提能达标

1. A

2. C　依题意，得 $(\sqrt{2}t)^2+(-\sqrt{2}t)^2=\sqrt{2}^2$，整理，得 $t^2=\frac{1}{2}$，∴$t=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$，代入 $\begin{cases}x=-2+\sqrt{2}t,\\y=3-\sqrt{2}t\end{cases}$（$t$ 为参数），得所求点的坐标为 $(-3,4)$ 或 $(-1,2)$，故选 C.

3. D　由 $xy=1$ 知，x 与 y 同号，且 $x\neq0$，$x\in\mathbf{R}$，$y\neq0$，$y\in\mathbf{R}$，满足此条件的只有 D.

4. B　曲线方程消参化为 $(x+1)^2+(y-2)^2=1$，其对称中心为 $(-1,2)$，经检验知其在直线 $y=-2x$ 上，故选 B.

5. A　参数方程表示的圆心坐标是 $(3,-5)$，它到直线 $-4x+3y+2=0$ 的距离是 5，当 $r=4$ 时圆上恰有一点到直线距离等于 1，当 $r=6$ 时有 3 个点到直线的距离等于 1. ∴r 的取值范围是 $4<r<6$.

6. $\begin{cases}x=2+2\cos\theta,\\y=2\sin\theta\end{cases}$（$\theta$ 为参数）

解析：由 $\rho=4\cos\theta$，得 $\rho^2=4\rho\cos\theta$，化为直角坐标方程为 $x^2+y^2=4x$，即 $(x-2)^2+y^2=4$，其参数方程为 $\begin{cases}x=2+2\cos\theta,\\y=2\sin\theta\end{cases}$（$\theta$ 为参数）.

7. $(0,-3\sqrt{3})$

解析：∵$\theta=\frac{4\pi}{3}$，

∴$x=2+4\cos\frac{4\pi}{3}=2+4\times\left(-\frac{1}{2}\right)=0$，

$y=-\sqrt{3}+4\sin\frac{4\pi}{3}=-\sqrt{3}+4\times\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=-3\sqrt{3}$.

∴点 P 的坐标为 $(0,-3\sqrt{3})$.

8. 4

解析：令 $y=2\cos\theta=0$，则 $\cos\theta=0$，因为 $\theta\in[0,2\pi)$，所以 $\theta=\frac{\pi}{2}$ 或 $\frac{3\pi}{2}$，当 $\theta=\frac{\pi}{2}$ 时，$x=-1$，当 $\theta=\frac{3\pi}{2}$ 时，$x=-5$，所以 $|AB|=|-1+5|=4$.

9. **解**：(1) 把 $\rho=2\cos\theta-4\sin\theta$ 两边同时乘以 ρ，得

$\rho^2=2\rho\cos\theta-4\rho\sin\theta$，

化为直角坐标方程为 $x^2+y^2=2x-4y$，即 $(x-1)^2+(y+2)^2=5$.

再利用同角三角函数的基本关系，令 $x-1=\sqrt{5}\cos\theta$，且 $y+2=\sqrt{5}\sin\theta$，

可得圆 C 的参数方程为 $\begin{cases}x=1+\sqrt{5}\cos\theta,\\y=-2+\sqrt{5}\sin\theta\end{cases}$（$\theta$ 为参数）.

(2) 由于 $S=4y-3x=-11+4\sqrt{5}\sin\theta-3\sqrt{5}\cos\theta=-11+5\sqrt{5}\sin(\theta-\varphi)$，其中，$\cos\varphi=\frac{4}{5}$，$\sin\varphi=\frac{3}{5}$，

再根据正弦函数的值域可得 $S_{\max}=5\sqrt{5}-11$.

10. **解**：(1) 设 $P(x,y)$ 为曲线 C 上任意一点.

依题意，得 $x=\frac{2}{3}|AB|\cos(\pi-\alpha)=-2\cos\alpha$，

$y=\frac{1}{3}|AB|\sin(\pi-\alpha)=\sin\alpha$，

所以曲线 C 的参数方程为

$\begin{cases}x=-2\cos\alpha,\\y=\sin\alpha\end{cases}\left(\alpha\text{ 为参数},\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi\right)$.

(2) 由(1)得 $|PD|^2=(-2\cos\alpha)^2+(\sin\alpha+2)^2$

$=4\cos^2\alpha+\sin^2\alpha+4\sin\alpha+4$

$=-3\sin^2\alpha+4\sin\alpha+8$

$=-3\left(\sin\alpha-\frac{2}{3}\right)^2+\frac{28}{3}$.

因为 $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$，所以 $-1<\sin\alpha<1$，

所以，当 $\sin\alpha=\frac{2}{3}$ 时，$|PD|$ 取得最大值 $\frac{2\sqrt{21}}{3}$.

第 8 课时　参数方程和普通方程的互化

要点梳理

1. 消去参数

2. $x=f(t)$　$y=g(t)$　取值范围

对点训练

1. C　由 $\begin{cases}x=2+\sqrt{2}\cos\theta,\\y=1+\sqrt{2}\sin\theta\end{cases}$（$\theta$ 为参数），得 $\begin{cases}x-2=\sqrt{2}\cos\theta,\\y-1=\sqrt{2}\sin\theta,\end{cases}$

二式平方相加得 $(x-2)^2+(y-1)^2=2$.

2. D　由 $\begin{cases}x=-2+\cos^2\theta,\\y=\cos^2\theta\end{cases}$（$\theta$ 为参数），得 $y=x+2$.

又∵$0\leqslant\cos^2\theta\leqslant1$，∴$-2\leqslant x\leqslant-1$，

故普通方程为 $y=x+2(-2\leqslant x\leqslant-1)$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

3. B　由 $x^2+y-1=0$，得 $y=1-x^2$，$\therefore y\leqslant 1$，$x\in\mathbf{R}$，排除 A、C、D；B 中把 $x=\tan\varphi$ 代入 $y=1-\tan^2\varphi$ 得 $y=1-x^2$，即 $x^2+y-1=0$，$x\in\mathbf{R}$ 符合题意，故选 B.

4. **解**：(1)把 $y=\sin\theta$ 代入椭圆方程，得 $\frac{x^2}{4}+\sin^2\theta=1$，于是 $x^2=4(1-\sin^2\theta)=4\cos^2\theta$，$\therefore x=\pm 2|\cos\theta|$. 由于 θ 具有任意性，因此可取 $x=2\cos\theta$. $\therefore$ 椭圆 $\frac{x^2}{4}+y^2=1$ 的参数方程为 $\begin{cases}x=2\cos\theta,\\ y=\sin\theta\end{cases}$($\theta$ 为参数).

(2)把 $x=2t$ 代入 $\frac{x^2}{4}+y^2=1$，得 $t^2+y^2=1$，即 $y^2=1-t^2$，

$\therefore y=\pm\sqrt{1-t^2}$. $\therefore$ 椭圆 $\frac{x^2}{4}+y^2=1$ 的参数方程为 $\begin{cases}x=2t,\\ y=\sqrt{1-t^2}\end{cases}$($t$ 为参数)和 $\begin{cases}x=2t,\\ y=-\sqrt{1-t^2}\end{cases}$($t$ 为参数).

5. π　$\frac{6}{5}$

解析：圆的参数方程化为普通方程为 $(x-2)^2+y^2=1$，

$\therefore$ 圆心 $(2,0)$，半径 $r=1$，$\therefore$ 圆 C 的面积为 π.

圆心 C 到直线的距离为 $\frac{|3\times 2-4\times 0|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}=\frac{6}{5}$.

6. **解**：(1)C_1 的普通方程为 $(x+4)^2+(y-3)^2=1$，

C_2 的普通方程为 $\frac{x^2}{64}+\frac{y^2}{9}=1$.

C_1 表示以 $(-4,3)$ 为圆心，半径为 1 的圆；

C_2 表示以原点为对称中心，焦点在 x 轴上，且长轴长为 16，短轴长为 6 的椭圆.

(2)当 $t=\frac{\pi}{2}$ 时，$P(-4,4)$，设 $Q(8\cos\theta,3\sin\theta)$，则

$M\left(-2+4\cos\theta,2+\frac{3}{2}\sin\theta\right)$.

M 到直线 $x-2y-7=0$ 的距离为 $d=\frac{|-2+4\cos\theta-4-3\sin\theta-7|}{\sqrt{1^2+(-2)^2}}=\frac{\sqrt{5}}{5}|4\cos\theta-3\sin\theta-13|=\frac{\sqrt{5}}{5}|5\cos(\theta+\varphi)-13|$，其中 $\tan\varphi=\frac{3}{4}$，从而当 $\cos(\theta+\varphi)=1$ 时，d 取最小值 $\frac{8\sqrt{5}}{5}$.

课后训练　提能达标

1. C　$x=\sqrt{2}\sin\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\in[-\sqrt{2},\sqrt{2}]$，

$\because x^2=1+\sin\alpha$，$y^2=2+\sin\alpha$，

$\therefore y^2-x^2=1(|x|\leqslant\sqrt{2})$.

2. D　设圆心坐标为 (x,y)，由题意得 $\begin{cases}x=2t,\\ y=t,\end{cases}$ 化为普通方程为 $x-2y=0$，它是一条直线.

3. C　把 $y=\sin^2\theta$ 代入 $x=2+\sin^2\theta$，得 $x=2+y$，即 $y=x-2$，

$\because 0\leqslant\sin^2\theta\leqslant 1$，$\therefore 2\leqslant x\leqslant 3$，故选 C.

4. A　依题意，把 $\begin{cases}x=-1+\cos\alpha,\\ y=\sin\alpha\end{cases}$($\alpha$ 为参数)代入 $(x-2)^2+(y+4)^2=(\cos\alpha-3)^2+(\sin\alpha+4)^2=8\sin\alpha-6\cos\alpha+26=10\sin(\alpha-\varphi)+26$（其中 $\tan\varphi=\frac{3}{4}$），当 $\sin(\alpha-\varphi)=1$ 时，$(x-2)^2+(y+4)^2$ 取得最大值 36，故选 A.

5. B　把两曲线的参数方程化为直角坐标方程得 $x^2+y^2=9$，$(x+3)^2+(y-4)^2=4$，圆心距 $\sqrt{(-3-0)^2+(4-0)^2}=5$，而两圆半径之和为 $3+2=5$. $\therefore$ 两圆相外切.

6. $y=x^2(-\sqrt{2}\leqslant x\leqslant\sqrt{2})$

解析：由 $\begin{cases}x=\sin\theta+\cos\theta,\\ y=1+\sin 2\theta\end{cases}$($\theta$ 为参数)得 $\begin{cases}x=\sin\theta+\cos\theta,\\ y=(\sin\theta+\cos\theta)^2,\end{cases}$

$\therefore y=x^2$. 又 $\because x=\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\theta+\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\theta\right)=\sqrt{2}\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)$，

$\therefore -\sqrt{2}\leqslant x\leqslant\sqrt{2}$.

$\therefore$ 普通方程为 $y=x^2(-\sqrt{2}\leqslant x\leqslant\sqrt{2})$.

7. 16

解析：直线 $\rho\cos\theta=4$ 化为直角坐标方程为 $x=4$，将 $x=4$ 代入 $x=t^2$，得 $t=\pm 2$.

当 $t=2$ 时，$y=8$；当 $t=-2$ 时，$y=-8$，即点 $A(4,8)$，$B(4,-8)$，所以 $|AB|=|8-(-8)|=16$.

8. $\left[-\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{3}}{3}\right]$

解析：由 $\begin{cases}x=-2+\cos\theta,\\ y=\sin\theta\end{cases}$ 得 $(x+2)^2+y^2=1$.

设 $\frac{y}{x}=k$，则 $y=kx$. 当 $y=kx$ 与圆相切时，k 取得最小值和最大值.

$\therefore$ 圆心 $(-2,0)$ 到直线 $kx-y=0$ 的距离

$d=\frac{|-2k-0|}{\sqrt{k^2+1}}=1$，即 $k^2=\frac{1}{3}$，$\therefore k=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}$.

$\therefore\frac{y}{x}$ 的取值范围是 $\left[-\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{3}}{3}\right]$.

9. **解**：将直线 l 的参数方程 $\begin{cases}x=t+3,\\ y=3-t\end{cases}$($t$ 为参数)化为普通方程为 $x+y-6=0$.

将圆 C 的参数方程 $\begin{cases}x=2\cos\theta,\\ y=2\sin\theta+2\end{cases}$($\theta$ 为参数)化为普遍方程为 $x^2+(y-2)^2=4$.

其圆心 $C(0,2)$，半径 $r=2$.

所以圆心 C 到直线 l 的距离 $d=\frac{|0+2-6|}{\sqrt{2}}=2\sqrt{2}$.

10. **解**：由 $\begin{cases}x=t+1,\\ y=2t\end{cases}$($t$ 为参数)得直线 l 的普通方程为 $y=2(x-1)$，

即 $2x-y-2=0$，

由 $\begin{cases}x=2\tan^2\theta,\\ y=2\tan\theta\end{cases}$($\theta$ 为参数)得曲线 C_2 的普通方程为 $y^2=2x$.

解方程组 $\begin{cases}y=2(x-1),\\ y^2=2x\end{cases}$ 得公共点的坐标为 $(2,2)$，$\left(\frac{1}{2},-1\right)$.

二　圆锥曲线的参数方程

第 9 课时　椭圆的参数方程

要点梳理

$\begin{cases}x=a\cos\varphi,\\ y=b\sin\varphi\end{cases}$　$\begin{cases}x=b\cos\varphi,\\ y=a\sin\varphi\end{cases}$

对点训练

1. B　将椭圆的参数方程 $\begin{cases}x=4\cos\varphi,\\ y=5\sin\varphi\end{cases}$($\varphi$ 为参数)化为普通方程为 $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{25}=1$，则 $a=5$，$b=4$，$\therefore c=\sqrt{a^2-b^2}=3$. $\therefore$ 离心率 $e=\frac{c}{a}=\frac{3}{5}$.

2. $2\sqrt{6}$

解析：由 $\begin{cases}x=2\sqrt{3}\cos\theta,\\ y=3\sqrt{2}\sin\theta\end{cases}$($\theta$ 为参数)化为普通方程为 $\frac{x^2}{12}+\frac{y^2}{18}=1$，$\therefore a^2=18$，$b^2=12$，$\therefore c^2=18-12=6$，$\therefore c=\sqrt{6}$，$\therefore$ 两焦点间的距离是 $2\sqrt{6}$.

3. C　椭圆 $x^2+4y^2=4$ 化为标准方程为 $\frac{x^2}{4}+y^2=1$，所以椭圆的参数方程为 $\begin{cases}x=2\cos\theta,\\ y=\sin\theta\end{cases}$($\theta$ 为参数). 设 $P(2\cos\theta,\sin\theta)$，

$\because A(0,1)$，$\therefore|AP|^2=(2\cos\theta)^2+(\sin\theta-1)^2=-3\sin^2\theta-2\sin\theta+5=-3\left(\sin\theta+\frac{1}{3}\right)^2+\frac{16}{3}$，$\therefore$ 当 $\sin\theta=-\frac{1}{3}$ 时，$|AP|$ 取得最大值 $\frac{4\sqrt{3}}{3}$，故选 C.

4. D　设点 $P(x,y)$，则 OP 的斜率 $k=\frac{y-0}{x-0}=\frac{4\sin\theta}{3\cos\theta}=\tan\frac{\pi}{4}=1$，

$\therefore\tan\theta=\frac{3}{4}$. 又 $0\leqslant\theta\leqslant\pi$，$\therefore\sin\theta=\frac{3}{5}$，$\cos\theta=\frac{4}{5}$. $\therefore x=3\cos\theta=\frac{12}{5}$，$y=4\sin\theta=\frac{12}{5}$，故点 P 的坐标为 $\left(\frac{12}{5},\frac{12}{5}\right)$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

5. **解**：曲线 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$ 的参数方程为 $\begin{cases}x=2\cos\theta,\\y=3\sin\theta\end{cases}$（$\theta$ 为参数）.

∵点 M 在曲线上，

∴$M(2\cos\theta,3\sin\theta)$，

则 $x^2+2y=4\cos^2\theta+6\sin\theta$

$=4(1-\sin^2\theta)+6\sin\theta$

$=-4\sin^2\theta+6\sin\theta+4$

$=-4\left(\sin\theta-\frac{3}{4}\right)^2+\frac{25}{4}$.

∴当 $\sin\theta=\frac{3}{4}$ 时，x^2+2y 有最大值 $\frac{25}{4}$.

6. **解**：(1)将曲线 C_1：$\frac{x^2}{10}+\frac{y^2}{6}=1$，转化为参数方程为

$\begin{cases}x=\sqrt{10}\cos\theta,\\y=\sqrt{6}\sin\theta\end{cases}$（$\theta$ 为参数）.

将曲线 C_2 的参数方程 $\begin{cases}x=-\frac{1}{2}t,\\y=-8+\frac{\sqrt{3}}{2}t\end{cases}$（$t$ 为参数）消去参数 t，

得到曲线 C_2 的普通方程为 $\sqrt{3}x+y+8=0$.

(2)∵点 P 在 C_1 上，可设 $P(\sqrt{10}\cos\theta,\sqrt{6}\sin\theta)$，

则点 P 到直线 C_2：$\sqrt{3}x+y+8=0$ 的距离

$d=\frac{|\sqrt{30}\cos\theta+\sqrt{6}\sin\theta+8|}{2}=|3\sin(\theta+\varphi)+4|$，

其中 $\tan\varphi=\sqrt{5}$，

∴$|PQ|$ 的最小值即为 d 的最小值.

∵当 $\sin(\theta+\varphi)=-1$ 时，d 取得最小值 1，

∴$|PQ|$ 的最小值为 1.

课后训练　提能达标

1. B　令 $P(x,y)$，则 $\begin{cases}x=2\cos\theta,\\y=3\sin\theta\end{cases}$，消去 θ 得普通方程为 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$，∴曲线必过点 $(2,0)$.

2. C　椭圆 $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$ 的参数方程为 $\begin{cases}x=4\cos\theta,\\y=3\sin\theta\end{cases}$（$\theta$ 为参数），则

$x+y=4\cos\theta+3\sin\theta=5\sin(\theta+\varphi)$，其中 $\tan\varphi=\frac{4}{3}$，

当 $\sin(\theta+\varphi)=1$ 时，$x+y$ 取得最大值 5，故选 C.

3. D　当 $\varphi=\frac{\pi}{6}$ 时，$x=3\cos\frac{\pi}{6}=\frac{3\sqrt{3}}{2}$，$y=2\sin\frac{\pi}{6}=1$，

∴$k_{OP}=\frac{y}{x}=\frac{2\sqrt{3}}{9}$.

4. D　设椭圆 $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$ 上的点 $P(3\cos\theta,2\sin\theta)$，则点 P 到直线 $x+2y-4=0$ 的距离 $d=\frac{|3\cos\theta+4\sin\theta-4|}{\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{5}}{5}|5\sin(\theta+\varphi)-4|$，其中 $\tan\varphi=\frac{3}{4}$，∵$-1\leqslant\sin(\theta+\varphi)\leqslant1$，∴$5\sin(\theta+\varphi)-4$ 可以等于 0，∴最小值为 0.

5. C　如图所示.

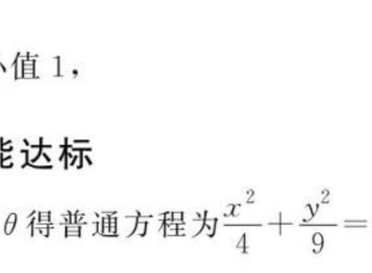
根据椭圆的对称性，

设 $A(5\cos\theta,4\sin\theta)$，

则 $S_{矩形ABCD}=10\cos\theta\cdot8\sin\theta=40\sin2\theta\leqslant40$.

当 $\theta=\frac{\pi}{4}$ 时，“=”成立.

∴矩形面积的最大值为 40.



6. 3

解析：直线 l：$\begin{cases}x=t,\\y=t-a\end{cases}$（$t$ 为参数）化为普通方程为 $y=x-a$，椭圆 C：$\begin{cases}x=3\cos\theta,\\y=2\sin\theta\end{cases}$（$\theta$ 为参数）化为普通方程为 $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$，椭圆的右顶点为 $(3,0)$，代入直线 l 的普通方程，得 $a=3$.

7. -2

解析：当 $\theta=\frac{\pi}{3}$ 时，得 $\begin{cases}x=2\cos\theta=1,\\y=4\sin\theta=2\sqrt{3},\end{cases}$ ∴$M(1,2\sqrt{3})$，当 $\theta=\frac{\pi}{6}$ 时，得 $N(\sqrt{3},2)$，∴$k_{MN}=\frac{2-2\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1}=-2$.

8. $\frac{\sqrt{6}}{3}$

解析：由已知可得，椭圆 C 的普通方程为 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$，直线 l 的直角坐标方程为 $x+y-m=0$，圆 O 的直角坐标方程为 $x^2+y^2=b^2$，又直线 l 经过椭圆 C 的焦点，所以 $c=|m|$. 由直线 l 与圆 O 相切，得 $\frac{|-m|}{\sqrt{2}}=b$，所以 $b=\frac{\sqrt{2}}{2}|m|$，又 $a^2=b^2+c^2$，所以 $a=\frac{\sqrt{6}}{2}|m|$，所以椭圆的离心率 $e=\frac{c}{a}=\frac{|m|}{\frac{\sqrt{6}}{2}|m|}=\frac{\sqrt{6}}{3}$.

9. **解**：由椭圆的参数方程，设椭圆上的任意一点为 $(4\cos\theta,2\sqrt{3}\sin\theta)$，则此点到直线 l 的距离为

$d=\frac{|4\cos\theta-4\sqrt{3}\sin\theta-12|}{\sqrt{5}}=\frac{\left|8\cos\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)-12\right|}{\sqrt{5}}$.

∴当 $\cos\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)=-1$ 时，d 取最大值 $4\sqrt{5}$，

当 $\cos\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)=1$ 时，d 取最小值 $\frac{4\sqrt{5}}{5}$.

∴椭圆上的点到直线的最大距离是 $4\sqrt{5}$，最小距离是 $\frac{4\sqrt{5}}{5}$.

10. **解**：把圆锥曲线 C：$\begin{cases}x=5\cos\theta,\\y=4\sin\theta\end{cases}$（$\theta$ 为参数，$\theta\in\mathbf{R}$）化为普通方程为 $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$，可得 $F_1(-3,0)$，$F_2(3,0)$，$B(0,4)$.

∴直线 BF_2 的斜率为 $-\frac{4}{3}$，

∴直线 l 的斜率为 $\frac{3}{4}$.

又直线 l 过点 $F_1(-3,0)$，

∴直线 l 的方程为 $y=\frac{3}{4}(x+3)$，

即 $3x-4y+9=0$.

第 10 课时　双曲线与抛物线的参数方程

要点梳理

1. (1) $\begin{cases}x=\frac{a}{\cos\varphi},\\y=b\tan\varphi\end{cases}$（$\varphi$ 为参数）　(2) $\begin{cases}x=b\tan\varphi,\\y=\frac{a}{\cos\varphi}\end{cases}$（$\varphi$ 为参数）

2. (1) $\begin{cases}x=2pt^2,\\y=2pt\end{cases}$（$t$ 为参数）

对点训练

1. C　双曲线 $x^2-y^2=1$ 的参数方程为 $\begin{cases}x=\frac{1}{\cos\alpha},\\y=\tan\alpha\end{cases}$（$\alpha$ 为参数），

设 $M\left(\frac{1}{\cos\alpha},\tan\alpha\right)$ 为双曲线上任一点，又 $M_0(0,2)$，

∴$|MM_0|^2=\left(\frac{1}{\cos\alpha}\right)^2+(\tan\alpha-2)^2=1+\tan^2\alpha+\tan^2\alpha-4\tan\alpha+4=2(\tan\alpha-1)^2+3$.

∴当 $\tan\alpha=1$ 时，$|MM_0|$ 有最小值 $\sqrt{3}$.

2. D　∵$\frac{x^2}{4}-y^2=1$，

∴可令 $x=\frac{2}{\cos\theta}$，$y=\tan\theta$，

则 $\frac{2y-x}{y}=\frac{2\tan\theta-\frac{2}{\cos\theta}}{\tan\theta}=2-\frac{2}{\sin\theta}$，

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

当$-1<\sin\theta<0$时，$2-\frac{2}{\sin\theta}>4$；

当$0<\sin\theta<1$时，$2-\frac{2}{\sin\theta}<0$，

$\therefore\frac{2y-x}{y}$的取值范围是$(-\infty,0)\cup(4,+\infty)$.

3. $2\sqrt{3}$

解析：将曲线C：$\begin{cases}x=2\sqrt{2}t^2\\y=4t\end{cases}$，($t$为参数)化为普通方程为$y^2=4\sqrt{2}x$，$\therefore$点$M(\sqrt{2},0)$为曲线$C$的焦点，设$P(x_0,y_0)$，则$|PM|=x_0+\sqrt{2}=4\sqrt{2}$，$\therefore x_0=3\sqrt{2}$，又$y_0^2=4\sqrt{2}x_0=24$，$\therefore y_0=\pm2\sqrt{6}$，$\therefore S_{\triangle POM}=\frac{1}{2}|OM|\cdot|y_0|=\frac{1}{2}\times\sqrt{2}\times2\sqrt{6}=2\sqrt{3}$.

4. **解**：设抛物线$y^2=2\sqrt{3}x$的参数方程为$\begin{cases}x=2\sqrt{3}t^2\\y=2\sqrt{3}t\end{cases}$，($t$为参数).

将抛物线的参数方程代入直线l：$\sqrt{3}x+2y-6=0$，得$3t^2+2\sqrt{3}t-3=0$ ①

因为A,B对应的参数t_1,t_2分别是方程①的两根，

所以$t_1t_2=-1$，

因为t表示抛物线上除顶点外任一点与原点连线的斜率的倒数，

所以$\frac{1}{k_{OA}}\cdot\frac{1}{k_{OB}}=-1$，即$k_{OA}\cdot k_{OB}=-1$，

$\therefore\angle AOB=90^\circ$.

5. $\left(1,\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)$

解析：由$\begin{cases}x=\sqrt{5}\cos\theta\\y=\sin\theta\end{cases}$，($\theta$为参数，$0\leqslant\theta\leqslant\pi$)，得$\frac{x^2}{5}+y^2=1$($y\geqslant0$).由$\begin{cases}x=\frac{5}{4}t^2\\y=t\end{cases}$，($t$为参数，$t\in\mathbf{R}$)，得$x=\frac{5}{4}y^2$.

联立方程可得$\begin{cases}\frac{x^2}{5}+y^2=1,\\x=\frac{5}{4}y^2,\end{cases}$消去$y$得$x^2+4x-5=0$.解得$x=-5$或$x=1$.$\because x=\frac{5}{4}t^2\geqslant0$，$\therefore x=1$.$\therefore\frac{5}{4}y^2=1$，$y^2=\frac{4}{5}$.又$y\geqslant0$，$\therefore y=\frac{2\sqrt{5}}{5}$.$\therefore$它们的交点坐标为$\left(1,\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)$.

6. **解**：由双曲线的参数方程$\begin{cases}x=\frac{4}{\cos\theta}\\y=3\tan\theta\end{cases}$，($\theta$为参数)得普通方程为$\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$，$\therefore$右焦点$(5,0)$，右顶点$(4,0)$.设椭圆方程为$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$，则$a=5,c=4,b=3$.$\therefore$椭圆方程为$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$.设椭圆上一点$P(5\cos\varphi,3\sin\varphi)$，又双曲线的一条渐近线为$3x-4y=0$，$\therefore$点$P$到渐近线的距离$d=\frac{|3\times5\cos\varphi-4\times3\sin\varphi|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}=\frac{3}{5}|\sqrt{41}\cos(\varphi+\alpha)|$.其中$\tan\alpha=\frac{4}{5}$.$\therefore d_{\max}=\frac{3\sqrt{41}}{5}$.

课后训练　提能达标

1. D　由$\begin{cases}x=t,\\y=t^2+1\end{cases}$($t$为参数)，得$y=x^2+1$，它是抛物线.

2. A　将双曲线：$\begin{cases}x=\frac{3}{\cos\theta}\\y=4\tan\theta\end{cases}$，($\theta$为参数)消去参数，得$\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$，所以双曲线的渐近线方程为$4x\pm3y=0$，故选A.

3. B　由参数方程得$x^2=\left|\cos\frac{\theta}{2}+\sin\frac{\theta}{2}\right|^2$

$=\cos^2\frac{\theta}{2}+2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}+\sin^2\frac{\theta}{2}=1+\sin\theta$，

$\therefore y=\frac{1}{2}(1+\sin\theta)=\frac{1}{2}x^2$，

$\therefore x^2=2y$，它表示抛物线.

又$x=\left|\cos\frac{\theta}{2}+\sin\frac{\theta}{2}\right|>0$，

$\therefore$它表示抛物线的一部分，这部分过点$\left(1,\frac{1}{2}\right)$.

4. B　将参数方程中的两个等式平方相减得$x^2-y^2=(2^t-2^{-t})-(2^t+2^{-t})^2=-4$，即$y^2-x^2=4$.又$\because y=2^t+2^{-t}\geqslant2\sqrt{2^t\cdot2^{-t}}=2$，$\therefore$它表示双曲线的上支.

5. C　由参数方程$\begin{cases}x=2\tan\theta,\\y=\frac{4}{\cos\theta}\end{cases}$知，双曲线的焦点在$y$轴上，且$a=4,b=2$，$\therefore c=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{16+4}=2\sqrt{5}$，

$\therefore e=\frac{c}{a}=\frac{2\sqrt{5}}{4}=\frac{\sqrt{5}}{2}$.

6. $(\sqrt{3},1)$

解析：由$\begin{cases}x=\sqrt{t},\\y=\frac{\sqrt{3t}}{3}\end{cases}$($t$为参数)消去$t$得$x^2=3y^2$($x\geqslant0,y\geqslant0$)，由$\rho=2$得$x^2+y^2=4$，解方程组$\begin{cases}x^2+y^2=4,\\x^2=3y^2\end{cases}$，得$C_1$与$C_2$的交点坐标为$(\sqrt{3},1)$.

7. $y=3x^2+6$

解析：$\because x^2=\left(\sqrt{t}-\frac{1}{\sqrt{t}}\right)^2=t+\frac{1}{t}-2$，又$y=3\left(t+\frac{1}{t}\right)$，

$\therefore t+\frac{1}{t}=\frac{y}{3}$，$\therefore x^2=\frac{y}{3}-2$，即曲线$C$的普通方程为$y=3x^2+6$.

8. $\sqrt{2}$

解析：依题意$F\left(\frac{p}{2},0\right)$，设$A(2pt^2,2pt)(t>0)$，$\because$直线$l'$的斜率为$\sqrt{3}$，

$\therefore\frac{2pt}{2pt^2-\frac{p}{2}}=\sqrt{3}$，解得$t=\frac{\sqrt{3}}{2}$或$t=-\frac{\sqrt{3}}{6}$(舍)，又$AB\perp l$，$l$为准线，$\therefore B\left(-\frac{p}{2},2pt\right)$，

$\therefore S_{\triangle BOF}=\frac{1}{2}|OF|\cdot2pt=\frac{1}{2}\times\frac{p}{2}\times2p\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，

解得$p=\sqrt{2}$.

9. **解**：$\because x^2-y^2=1$，

$\therefore\begin{cases}x=\frac{1}{\cos\theta}\\y=\tan\theta\end{cases}$，$\left(\theta$为参数，$\theta\neq k\pi+\frac{\pi}{2},k\in\mathbf{Z}\right)$.

$\therefore\frac{1}{x^2}+\frac{y}{x}=\cos^2\theta+\frac{\tan\theta}{\frac{1}{\cos\theta}}=1-\sin^2\theta+\sin\theta=-\left(\sin\theta-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{5}{4}$.

$\because\theta\neq k\pi+\frac{\pi}{2},k\in\mathbf{Z}$，$\therefore\sin\theta\in(-1,1)$，

$\because$当$\sin\theta=\frac{1}{2}$时，$-\left(\sin\theta-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{5}{4}=\frac{5}{4}$；

当$\sin\theta=-1$时，$-\left(\sin\theta-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{5}{4}=-1$，

$\therefore-1<\frac{1}{x^2}+\frac{y}{x}\leqslant\frac{5}{4}$，

即$\frac{1}{x^2}+\frac{y}{x}$的取值范围是$\left(-1,\frac{5}{4}\right]$.

10. **解**：根据题意，设A,B的坐标分别为$(2pt_1^2,2pt_1)$，$(2pt_2^2,2pt_2)$($t_1\neq t_2$，且$t_1t_2\neq0$).则$|OA|=\sqrt{(2pt_1^2)^2+(2pt_1)^2}=2p|t_1|\cdot\sqrt{t_1^2+1}$，

$|OB|=\sqrt{(2pt_2^2)^2+(2pt_2)^2}=2p|t_2|\cdot\sqrt{t_2^2+1}$.

$\because OA\perp OB$，$\therefore\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=0$，

即$2pt_1^2\cdot2pt_2^2+2pt_1\cdot2pt_2=0$，$\therefore t_1t_2=-1$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

$\triangle AOB$ 的面积为 $S_{\triangle AOB}=\frac{1}{2}|OA|\cdot|OB|$

$=\frac{1}{2}\cdot 2p|t_1|\cdot\sqrt{t_1^2+1}\cdot 2p|t_2|\cdot\sqrt{t_2^2+1}$

$=2p^2|t_1t_2|\cdot\sqrt{(t_1^2+1)(t_2^2+1)}$

$=2p^2\cdot\sqrt{t_1^2+t_2^2+2}$

$=2p^2\cdot\sqrt{t_1^2+\frac{1}{t_1^2}+2}\geqslant 2p^2\cdot\sqrt{2+2}=4p^2$.

当且仅当 $t_1^2=\frac{1}{t_1^2}$，即 $t_1^2=1$ 时，等号成立. ∴点 A,B 的坐标分别为 $(2p,2p),(2p,-2p)$，此时 $\triangle AOB$ 的面积最小，最小值为 $4p^2$.

三　直线的参数方程

第 11 课时　直线的参数方程

要点梳理

1. $\begin{cases}x=x_0+t\cos\alpha,\\ y=y_0+t\sin\alpha\end{cases}$

2. (1)所对应的点 M　(2)正数　负值

对点训练

1. B　由 l 的参数方程得 $\frac{x-1}{y-2}=\frac{\frac{1}{2}t}{\frac{\sqrt{3}}{2}t}$，

∴$\sqrt{3}(x-1)=y-2$，即 $\sqrt{3}x-y+2-\sqrt{3}=0$.

2. **解**：(1)由 $x=5+3t$，得 $t=\frac{x-5}{3}$，代入 $y=10-4t$，得 $y=10-4\cdot\frac{x-5}{3}$，即 $4x+3y-50=0$. ∴直线的普通方程为 $4x+3y-50=0$.

(2)把方程变形为

$$\begin{cases}x=5+\sqrt{3^2+4^2}\cdot\frac{3}{\sqrt{3^2+4^2}}t=5+\frac{3}{5}\cdot 5t,\\ y=10-\sqrt{3^2+4^2}\cdot\frac{4}{\sqrt{3^2+4^2}}t=10-\frac{4}{5}\cdot 5t,\end{cases}$$

令 $u=-5t$，则方程变为 $\begin{cases}x=5-\frac{3}{5}u,\\ y=10+\frac{4}{5}u\end{cases}$（$u$ 为参数），这就是直线参数方程的标准形式.

3. B　将直线的参数方程 $\begin{cases}x=1+\frac{1}{2}t,\\ y=-3\sqrt{3}+\frac{\sqrt{3}}{2}t\end{cases}$（$t$ 为参数）代入圆 $x^2+y^2=16$，得 $t^2-8t+12=0$，设 A,B 两点对应的参数分别为 t_1,t_2，则 $t_1+t_2=8$，∴线段 AB 的中点对应的参数为 $t=4$，

∴中心坐标为 $\begin{cases}x=1+\frac{1}{2}\times 4=3,\\ y=-3\sqrt{3}+\frac{\sqrt{3}}{2}\times 4=-\sqrt{3},\end{cases}$

即 $(3,-\sqrt{3})$，故选 B.

4. $\frac{5}{4}$

解析：将参数方程化为标准形式得

$$\begin{cases}x=6+\frac{2}{\sqrt{5}}t',\\ y=\frac{7}{2}+\frac{1}{\sqrt{5}}t'\end{cases}(t'\text{为参数}).\ ①$$

把①代入 $y^2=2x$，

得 $\left(\frac{7}{2}+\frac{1}{\sqrt{5}}t'\right)^2=2\left(6+\frac{2}{\sqrt{5}}t'\right)$，

即 $\frac{1}{5}t'^2+\frac{3}{\sqrt{5}}t'+\frac{1}{4}=0$.

设 A,B 对应的参数分别为 t_1',t_2'，则 $|PA|\cdot|PB|=|t_1'\cdot t_2'|=\frac{5}{4}$.

5. $\sqrt{5}+1$

解析：设直线 l 与 x 轴的交点是 $M(x_0,0)$，则 $\begin{cases}x_0=-\frac{3}{5}t+2,\\ 0=\frac{4}{5}t,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}t=0,\\ x_0=2.\end{cases}$ ∴$M(2,0)$.

又曲线 C 的极坐标方程是 $\rho=2\sin\theta$，转化为直角坐标系下的方程为 $x^2+(y-1)^2=1$，∴圆心 $C(0,1)$，半径 $r=1$，∴$|CM|=\sqrt{2^2+(-1)^2}=\sqrt{5}$，∴曲线 C 上动点 N 到 M 的距离的最大值为 $|CM|+r=\sqrt{5}+1$.

6. **解**：(1)∵$\begin{cases}x=-1+t\cos 45^\circ,\\ y=-2+t\sin 45^\circ\end{cases}$（$t$ 为参数），

∴直线 l 的普通方程为 $x-y-1=0$.

∵$\rho\sin\theta\tan\theta=2a$，∴$\rho^2\sin^2\theta=2a\rho\cos\theta$，

由 $\begin{cases}x=\rho\cos\theta,\\ y=\rho\sin\theta\end{cases}$（$\theta$ 为参数）得曲线 C 的直角坐标方程为 $y^2=2ax$.

(2)∵$y^2=2ax$，∴$x\geqslant 0$，

设直线 l 上的点 M,N 对应的参数分别是 $t_1,t_2(t_1>0,t_2>0)$，则 $|PM|=t_1,|PN|=t_2$，∵$|PM|=|MN|$，

∴$|PM|=\frac{1}{2}|PN|$，∴$t_2=2t_1$，

将 $\begin{cases}x=-1+t\cos 45^\circ,\\ y=-2+t\sin 45^\circ\end{cases}$（$t$ 为参数）代入 $y^2=2ax$，

得 $t^2-2\sqrt{2}(a+2)t+4(a+2)=0$，

∴$\begin{cases}t_1+t_2=2\sqrt{2}(a+2),\\ t_1\cdot t_2=4(a+2),\end{cases}$

又∵$t_2=2t_1$，∴$a=\frac{1}{4}$.

课后训练　提能达标

1. C　直线的斜率 $k=\tan\left(\alpha+\frac{3\pi}{2}\right)=\tan\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right)$. ∴倾斜角为 $\frac{\pi}{2}+\alpha$.

2. C　对于 A 选项，消去参数 t 后，得到 $x-y+2=0$，不符合题意；对于 B 选项，消去参数 t 后，得到 $2x-y+3=0$，不符合题意；对于 C 选项，消去参数 t 后，得到 $2x-y+1=0$，符合题意；对于 D 选项，消去参数 t 后，得到 $x-2y+8=0$，不符合题意. 故选 C.

3. D　由参数方程得 $k=\frac{y-2}{x-1}=\frac{-3t}{2t}=-\frac{3}{2}$.

4. A　把直线 $\begin{cases}x=3t,\\ y=1-4t\end{cases}$（$t$ 为参数）与圆 $\begin{cases}x=3\cos\theta,\\ y=b+3\sin\theta\end{cases}$（$\theta$ 为参数）的参数方程分别化为普通方程得直线：$4x+3y-3=0$；圆：$x^2+(y-b)^2=9$，∵直线 $4x+3y-3=0$ 与圆 $x^2+(y-b)^2=9$ 相切，

∴$\frac{|0+3b-3|}{\sqrt{4^2+3^2}}=3$，解得 $b=-4$ 或 6，故选 A.

5. B　把 $\begin{cases}x=t\cos\alpha,\\ y=1+t\sin\alpha\end{cases}$（$t$ 为参数）代入圆的方程，得 $t^2=9$，∴$t=\pm 3$. 由参数 t 的几何意义知弦长为 $|t_1-t_2|=|3-(-3)|=6$.

6. -1 或 -5

解析：将直线 $\begin{cases}x=1+t,\\ y=a-t\end{cases}$（$t$ 为参数）化为普通方程为 $x+y-a-1=0$，

将曲线 $\rho=-4\cos\theta$ 化为直角坐标方程为 $(x+2)^2+y^2=4$，其圆心坐标为 $(-2,0)$，半径 $r=2$，

∵直线被圆截得的弦长为 $2\sqrt{2}$，∴圆心到直线的距离 $d=\sqrt{4-(\sqrt{2})^2}=\sqrt{2}$，∴$\frac{|-2+0-a-1|}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$，解得 $a=-1$ 或 -5.

7. $\sqrt{14}$

解析：由 $\rho=4\cos\theta$，得 $\rho^2=4\rho\cos\theta$，

化为直角坐标方程为 $x^2+y^2-4x=0$.

把直线 l 的参数方程代入，

得 $\left(1+\frac{\sqrt{2}}{2}t\right)^2+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}t\right)^2-4\left(1+\frac{\sqrt{2}}{2}t\right)=0$，

即 $t^2-\sqrt{2}t-3=0$.

设 A,B 对应的参数分别为 t_1,t_2，则 $t_1+t_2=\sqrt{2}$，

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

$t_1t_2=-3$. $\therefore |AB|=|t_1-t_2|=\sqrt{(t_1+t_2)^2-4t_1t_2}=\sqrt{(\sqrt{2})^2-4\times(-3)}=\sqrt{14}$.

8. $(2,\pi)$

解析：直线 l 的普通方程为 $y=x+2$，由 $\rho^2\cos 2\theta=4$，得 $\rho^2(\cos^2\theta-\sin^2\theta)=4$，化为直角坐标方程为 $x^2-y^2=4$. 把 $y=x+2$ 代入 $x^2-y^2=4$，得 $x^2-(x+2)^2=4$，

$\therefore x=-2$. $\therefore$ 交点为 $(-2,0)$，化为极坐标为 $(2,\pi)$.

9. **解**：将直线 $l_1:\begin{cases}x=1-2t,\\y=2+kt\end{cases}$（$t$ 为参数）化为普通方程为 $y=-\frac{k}{2}x+\frac{4+k}{2}$，

$\therefore$ 直线 l_1 的斜率为 $-\frac{k}{2}$.

将直线 $l_2:\begin{cases}x=s,\\y=1-2s\end{cases}$（$s$ 为参数）化为普通方程为 $y=-2x+1$，

$\therefore$ 直线 l_2 的斜率为 -2.

$\because$ 直线 l_1 与 l_2 垂直.

$\therefore\left(-\frac{k}{2}\right)\times(-2)=-1$，

解得 $k=-1$.

10. **解**：(1)由已知 $x+y=-1-2t+(-1+2t)=-2$，

$\therefore C_1$ 的普通方程为 $x+y+2=0$，

由 $\rho=2\sqrt{2}\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)$

$=2\sqrt{2}\left(\sin\theta\cos\frac{\pi}{4}+\cos\theta\sin\frac{\pi}{4}\right)$

$=2\sin\theta+2\cos\theta$，

$\rho^2=2\rho\sin\theta+2\rho\cos\theta$，

$\therefore C_2$ 的直角坐标方程为 $x^2+y^2=2y+2x$，

即 $(x-1)^2+(y-1)^2=2$.

(2)由(1)知，曲线 C_2 为圆心 $M(1,1)$，半径为 $\sqrt{2}$ 的圆，

故 $|PT|=\sqrt{-(\sqrt{2})^2+|MP|^2}=\sqrt{-2+|MP|^2}$，

当且仅当 $|MP|$ 取得最小值时，$|PT|$ 取得最小值，

$|MP|_{\min}=\frac{|1+1+2|}{\sqrt{2}}=2\sqrt{2}$，

$\therefore |PT|_{\min}=\sqrt{6}$.

四　渐开线与摆线

第 12 课时　渐开线与摆线

要点梳理

1. (1)渐开线　基圆　(2)$\begin{cases}x=r(\cos\varphi+\varphi\sin\varphi),\\y=r(\sin\varphi-\varphi\cos\varphi)\end{cases}$

2. (1)平摆线　旋轮线　(2)$\begin{cases}x=r(\varphi-\sin\varphi),\\y=r(1-\cos\varphi)\end{cases}$

对点训练

1. A　根据圆心在原点，半径为 r 的圆的渐开线的参数方程为 $\begin{cases}x=r(\cos\varphi+\varphi\sin\varphi),\\y=r(\sin\varphi-\varphi\cos\varphi)\end{cases}$（$\varphi$ 为参数），可得圆心在原点，半径为 2 的圆的渐开线的参数方程为 A，故选 A.

2. 3

解析：由圆的渐开线的定义知，渐开线开始时的点 $(3,0)$ 与原点的距离最近，即为基圆的半径 3.

3. D　由圆的平摆线的参数方程 $\begin{cases}x=6(\theta-\sin\theta),\\y=6(1-\cos\theta)\end{cases}$（$\theta$ 为参数）知，圆的半径 $r=6$，所以平摆线的一拱的宽度为 $2\pi r=12\pi$，拱高为 $2r=12$.

4. **解**：(1)令 $r(1-\cos\alpha)=0$，得 $\cos\alpha=1$，

$\therefore\alpha=2k\pi(k\in\mathbf{Z})$. 又 $x=1$，代入 $x=r(\alpha-\sin\alpha)$ 可得

$r(2k\pi-\sin 2k\pi)=1$. $\therefore r=\frac{1}{2k\pi}(k\in\mathbf{Z})$.

又根据实际情况可知 r 是圆的半径，故 $r>0$.

$\therefore$ 应有 $k>0$，且 $k\in\mathbf{Z}$，即 $k\in\mathbf{N}_+$.

$\therefore$ 所求平摆线的参数方程为 $\begin{cases}x=\frac{1}{2k\pi}(\alpha-\sin\alpha),\\y=\frac{1}{2k\pi}(1-\cos\alpha)\end{cases}$（$\alpha$ 为参数），

其中 $k\in\mathbf{N}_+$.

(2)由 $y=2$，得 $2=2(1-\cos t)$，$\therefore\cos t=0$.

又 $\because 0\leqslant t\leqslant 2\pi$，$\therefore t=\frac{\pi}{2}$ 或 $\frac{3\pi}{2}$.

$\therefore$ 当 $t=\frac{\pi}{2}$ 时，$x=2\left(\frac{\pi}{2}-\sin\frac{\pi}{2}\right)=\pi-2$；

当 $t=\frac{3\pi}{2}$ 时，$x=2\left(\frac{3\pi}{2}-\sin\frac{3\pi}{2}\right)=3\pi+2$.

$\therefore$ 所求的交点的坐标为 $(\pi-2,2)$ 或 $(3\pi+2,2)$.

5. D　由圆的参数方程知圆的半径 $r=3$，$\therefore$ 对应摆线的参数方程为 $\begin{cases}x=3(\varphi-\sin\varphi),\\y=3(1-\cos\varphi)\end{cases}$（$\varphi$ 为参数），当 $\varphi=\frac{\pi}{2}$ 时，$\begin{cases}x=3\left(\frac{\pi}{2}-1\right)=\frac{3\pi}{2}-3,\\y=3,\end{cases}$ $\therefore A\left(\frac{3\pi}{2}-3,3\right)$.

又 $\because B\left(\frac{3\pi}{2},2\right)$，

$\therefore |AB|=\sqrt{\left(\frac{3\pi}{2}-3-\frac{3\pi}{2}\right)^2+(3-2)^2}=\sqrt{10}$.

6. **解**：根据已知及渐开线的定义可知，$\overset{\frown}{AE}$ 是半径为 1 的圆的周长的 $\frac{1}{4}$，其长度为 $\frac{\pi}{2}$；继续旋转可得 EF 是半径为 2 的圆的周长的 $\frac{1}{4}$，其长度为 π；$\overset{\frown}{FG}$ 是半径为 3 的圆的周长的 $\frac{1}{4}$，其长度为 $\frac{3\pi}{2}$；$\overset{\frown}{GH}$ 是半径为 4 的圆的周长的 $\frac{1}{4}$，其长度为 2π，所以曲线 $AEFGH$ 的长为 $\frac{\pi}{2}+\pi+\frac{3\pi}{2}+2\pi=5\pi$.

课后训练　提能达标

1. C　不止圆有渐开线，椭圆、正方形等也有渐开线，A 错误，C 正确；渐开线和摆线的定义是不一样的，得到了不同的图形，B 错误；对于同一个圆，如果建立的直角坐标系的位置不同，画出的渐开线形状相同，D 错误. 故选 C.

2. C　根据条件可知圆的平摆线的参数方程为 $\begin{cases}x=3\varphi-3\sin\varphi,\\y=3-3\cos\varphi\end{cases}$（$\varphi$ 为参数），把 $y=0$ 代入，得 $\cos\varphi=1$，所以 $\varphi=2k\pi(k\in\mathbf{Z})$. 而 $x=3\varphi-3\sin\varphi=6k\pi(k\in\mathbf{Z})$.

3. C　对于一个圆，只要半径确定，渐开线和摆线的形状就是确定的，但是随着选择坐标系的不同，其在坐标系中的位置也会不同，相应的参数方程也会有所区别，至于渐开线和坐标轴的交点要看选取的坐标系的位置.

4. A　由渐开线的参数方程知，基圆的半径为 1，所以基圆的面积为 π.

5. C　$\because$ 点 $A\left(\frac{3}{2},0\right)$ 是渐开线上一点，

$\therefore\begin{cases}\frac{3}{2}=r(\cos\theta+\theta\sin\theta),\\0=r(\sin\theta-\theta\cos\theta),\end{cases}$ 又 $\because\theta=0$ 时，$r(\sin\theta-\theta\cos\theta)=0$，

$\therefore r=\frac{3}{2}$.

6. $(2\pi-4,4)$，$(6\pi+4,4)$

解析：$\because y=4$，即 $4=4(1-\cos t)$，$\therefore\cos t=0$.

又 $0\leqslant t\leqslant 2\pi$ $\therefore t=\frac{\pi}{2}$ 或 $t=\frac{3\pi}{2}$.

当 $t=\frac{\pi}{2}$ 时，$x=4\left(\frac{\pi}{2}-1\right)=2\pi-4$；

当 $t=\frac{3\pi}{2}$ 时，$x=4\left(\frac{3\pi}{2}+1\right)=6\pi+4$.

$\therefore$ 所求交点的直角坐标为 $(2\pi-4,4)$，$(6\pi+4,4)$.

7. $(6\sqrt{3},0)$ 和 $(-6\sqrt{3},0)$

解析：根据圆的渐开线方程可知基圆的半径 $r=6$，其方程为 $x^2+y^2=36$，把基圆的横坐标伸长为原来的 2 倍（纵坐标不变），得到的曲线的方程为 $\left(\frac{1}{2}x\right)^2+y^2=36$，整理可得 $\frac{x^2}{144}+\frac{y^2}{36}=1$，这是一个焦点在 x 轴上的椭圆. $c=\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{144-36}=6\sqrt{3}$，故焦点坐标为 $(6\sqrt{3},0)$ 和 $(-6\sqrt{3},0)$.

8. $\begin{cases}x=2(\cos\theta+\theta\sin\theta),\\y=2(\sin\theta-\theta\cos\theta)\end{cases}$（$\theta$ 为参数）

$\begin{cases}x=2(\theta-\sin\theta),\\y=2(1-\cos\theta)\end{cases}$（$\theta$ 为参数）

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

解析：将参数方程 $\begin{cases}x=2\cos\alpha,\\y=2\sin\alpha\end{cases}$（$\alpha$ 为参数）化为普通方程为 $x^2+y^2=4$，它表示以原点为圆心，以 2 为半径的圆，所以该圆的渐开线的参数方程为 $\begin{cases}x=2(\cos\theta+\theta\sin\theta),\\y=2(\sin\theta-\theta\cos\theta)\end{cases}$（$\theta$ 为参数），该圆的摆线的参数方程为 $\begin{cases}x=2(\theta-\sin\theta),\\y=2(1-\cos\theta)\end{cases}$（$\theta$ 为参数）.

9. **解**：将 $\varphi=\frac{\pi}{2}$ 代入 $\begin{cases}x=\cos\varphi+\varphi\sin\varphi,\\y=\sin\varphi-\varphi\cos\varphi\end{cases}$（$\varphi$ 为参数），

得 $x=\cos\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\sin\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{2}$，

$y=\sin\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi}{2}=1$，

$\therefore A\left(\frac{\pi}{2},1\right)$.

将 $\varphi=\pi$ 代入 $\begin{cases}x=\cos\varphi+\varphi\sin\varphi,\\y=\sin\varphi-\varphi\cos\varphi\end{cases}$（$\varphi$ 为参数）

得 $x=\cos\pi+\pi\sin\pi=-1$，$y=\sin\pi-\pi\cos\pi=\pi$.

$\therefore B(-1,\pi)$，$\therefore A,B$ 间的距离 $|AB|=\sqrt{(1-\pi)^2+\left(\frac{\pi}{2}+1\right)^2}=\sqrt{\frac{5}{4}\pi^2-\pi+2}$.

10. **解**：(1)圆 C 平移后圆心为 $O(0,0)$，它到直线 $x-y-6\sqrt{2}=0$ 的距离为 $d=\frac{6\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=6$，恰好等于圆的半径，$\therefore$ 直线 l 与圆 C 相切.

(2)$\because$ 圆的半径是 6，

$\therefore$ 摆线的参数方程是 $\begin{cases}x=6(\varphi-\sin\varphi),\\y=6(1-\cos\varphi)\end{cases}$（$\varphi$ 为参数）.

(3)令 $y=0$，得 $6(1-\cos\varphi)=0$，$\therefore\cos\varphi=1$，

$\therefore\varphi=2k\pi(k\in\mathbf{Z})$，则 $x=12k\pi(k\in\mathbf{Z})$.

$\therefore$ 圆 C 的摆线和 x 轴的交点为 $(12k\pi,0)(k\in\mathbf{Z})$.

阶段评估二

1. C　由 $\begin{cases}x=\sin\theta,\\y=\cos2\theta=1-2\sin^2\theta,\end{cases}$ 得 $y=1-2x^2$. 当 $x=\frac{1}{2}$ 时，$y=1-2\times\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{2}$.

2. C　根据已知条件 $\begin{cases}x=2t(-1\leqslant t\leqslant1),\\y=2\end{cases}$（$t$ 为参数），

当 $x=2t(-1\leqslant t\leqslant1)$ 时，函数 $y=2$，它表示一条平行于 x 轴的线段.

3. B　$\because$ 点 $Q(-2,2\sqrt{3})$ 是圆 $\begin{cases}x=4\cos\theta,\\y=4\sin\theta\end{cases}$（$\theta$ 为参数）上一点，

$\therefore\begin{cases}4\cos\theta=-2,\\4\sin\theta=2\sqrt{3},\end{cases}$ 即 $\begin{cases}\cos\theta=-\frac{1}{2},\\\sin\theta=\frac{\sqrt{3}}{2}.\end{cases}$

$\because0\leqslant\theta<2\pi$，$\therefore\theta=\frac{2\pi}{3}$，故选 B.

4. C　$\because$ 直线 l 的普通方程为 $y=-x$，$\therefore$ 斜率 $k=-1$，倾斜角为 $\frac{3\pi}{4}$，将圆的参数方程 $\begin{cases}x=2\cos\theta+1,\\y=2\sin\theta\end{cases}$ 化为普通方程为 $(x-1)^2+y^2=4$，$\therefore$ 圆心 C 的直角坐标为 $(1,0)$.

5. A　将直线的参数方程 $\begin{cases}x=2t,\\y=1-4t\end{cases}$（$t$ 为参数）化为普通方程为 $2x+y-1=0$，将曲线 C 的参数方程 $\begin{cases}x=\sqrt{5}\cos\theta,\\y=m+\sqrt{5}\sin\theta\end{cases}$（$\theta$ 为参数）化为普通方程为 $x^2+(y-m)^2=5$，$\therefore$ 曲线 C 的圆心为 $(0,m)$，半径 $r=\sqrt{5}$，$\because$ 直线 l 与圆 C 相切，$\therefore\frac{|2\times0+m-1|}{\sqrt{2^2+1^2}}=\sqrt{5}$，解得 $m=-4$ 或 6，故选 A.

6. C　直线 $\begin{cases}x=x_0+at,\\y=y_0+bt\end{cases}$（$t$ 为参数）化为标准形式为 $\begin{cases}x=x_0+\frac{am}{\sqrt{a^2+b^2}},\\y=y_0+\frac{bm}{\sqrt{a^2+b^2}}\end{cases}$ $\left(t=\frac{m}{\sqrt{a^2+b^2}},m\text{ 为参数}\right)$，

由直线方程的几何意义得

$|AB|=|m_1-m_2|=\sqrt{a^2+b^2}\,|t_1-t_2|$.

7. $\left(\frac{1}{9},0\right)$

解析：令 $y=0$，得 $t=-\frac{2}{3}$，$\therefore x=1-2\times\left(-\frac{2}{3}\right)^2=1-\frac{8}{9}=\frac{1}{9}$，$\therefore$ 曲线与 x 轴交点的坐标为 $\left(\frac{1}{9},0\right)$.

8. $\pm\sqrt{3}$

解析：圆 $\begin{cases}x=2\cos\alpha,\\y=3+2\sin\alpha\end{cases}$（$\alpha$ 为参数）转换为直角坐标方程为 $x^2+(y-3)^2=4$，

则点 $(0,3)$ 到直线的距离 $d=\frac{|1-3|}{\sqrt{1+k^2}}=\frac{2}{\sqrt{1+k^2}}$，

所以 $\left(\frac{2}{\sqrt{1+k^2}}\right)^2+(\sqrt{3})^2=4$，

解得 $k=\pm\sqrt{3}$.

9. 1

解析：将直线 l 的参数方程 $\begin{cases}x=t,\\y=t-a\end{cases}$（$t$ 为参数）化为普通方程为 $y=x-a$. 由 $\rho=2\cos\theta$，得 $\rho^2=2\rho\cos\theta$，化为直角坐标方程为 $x^2+y^2=2x$，即 $(x-1)^2+y^2=1$，则圆心坐标为 $(1,0)$，代入直线 $y=x-a$，得 $a=1$.

10. $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{16}=1(x\geqslant2)$

解析：依题意，得 $x^2-\left(\frac{y}{2}\right)^2=(e^t+e^{-t})^2-(e^t-e^{-t})^2=(e^{2t}+2+e^{-2t})-(e^{2t}-2+e^{-2t})=4$，即 $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{16}=1$. 因为 $x=e^t+e^{-t}\geqslant2\sqrt{e^t\cdot e^{-t}}=2$，当且仅当 $t=0$ 时，等号成立，所以该参数方程的普通方程为 $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{16}=1(x\geqslant2)$.

11. **解**：(1)由 $\rho=2\sin\theta$，得 $\rho^2=2\rho\sin\theta$，

又 $x^2+y^2=1$，$x=\rho\cos\theta$，$y=\rho\sin\theta$，

$\therefore$ 曲线 C_1 的直角坐标方程为 $x^2+y^2-2y=0$.

由 C_2 的参数方程 $\begin{cases}x=-\frac{3}{5}t+2,\\y=\frac{4}{5}t\end{cases}$（$t$ 为参数）

消去参数 t，得直线 C_2 的普通方程为 $4x+3y-8=0$.

(2)对于 $4x+3y-8=0$，令 $y=0$，得 $x=2$，

$\therefore M$ 的坐标为 $(2,0)$.

曲线 C_1 为圆，其圆心 $C_1(0,1)$，半径 $r=1$，则 $|MC_1|=\sqrt{5}$，

$\therefore|MN|\leqslant|MC_1|+r=\sqrt{5}+1$，

$\therefore|MN|$ 的最大值为 $\sqrt{5}+1$.

12. **解**：(1)由 $\rho^2-2\sqrt{2}\rho\cos\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)-2=0$，得

$\rho^2-2\rho\cos\theta+2\rho\sin\theta-2=0$，

$\because x=\rho\cos\theta$，$y=\rho\sin\theta$，

$\therefore x^2+y^2-2x+2y-2=0$，即 $(x-1)^2+(y+1)^2=4$.

$\therefore$ 曲线 C 的直角坐标方程为 $(x-1)^2+(y+1)^2=4$，圆心 $C(1,-1)$.

若直线 l 被曲线 C 截得的弦长最小，则直线 l 与 OC 垂直，即 $k_l\cdot k_{OC}=-1$.

又 $k_{OC}=\frac{-1}{1}=-1$，$\therefore k_l=1$.

$\therefore$ 直线 l 的直角坐标方程为 $y=x$.

(2)$\because M$ 是曲线 C 上的动点，

将圆 C 的方程转化为参数方程为 $\begin{cases}x=1+2\cos\alpha,\\y=-1+2\sin\alpha\end{cases}$（$\alpha$ 为参数），

$\therefore M(1+2\cos\alpha,-1+2\sin\alpha)$，

$\therefore x+y=2\cos\alpha+2\sin\alpha=2\sqrt{2}\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)$，

$\therefore$ 当 $\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)=1$ 时，$x+y$ 取得最大值 $2\sqrt{2}$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

13. **解**：(1)圆 C 的参数方程为 $\begin{cases}x=3+2\cos\theta,\\y=-4+2\sin\theta\end{cases}$($\theta$ 为参数)，得普通方程为 $(x-3)^2+(y+4)^2=4$.

$\because x=\rho\cos\theta, y=\rho\sin\theta$,

$\therefore$ 圆 C 的极坐标方程为 $\rho^2-6\rho\cos\theta+8\rho\sin\theta+21=0$.

(2)$\because A(-2,0), B(0,2)$，$\therefore AB$ 的方程为 $y=1\times(x+2)$，即 $x-y+2=0$，$|AB|=2\sqrt{2}$.

点 $M(x,y)$ 到直线 AB：$x-y+2=0$ 的距离 $d=\dfrac{|2\cos\theta-2\sin\theta+9|}{\sqrt{2}}$，$\triangle ABM$ 的面积 $S=\dfrac{1}{2}\times|AB|\times d=|2\cos\theta-2\sin\theta+9|=\left|2\sqrt{2}\sin\left(\dfrac{\pi}{4}-\theta\right)+9\right|$，

$\therefore\triangle ABM$ 面积的最大值为 $9+2\sqrt{2}$.

14. **解**：(1)将参数方程 $\begin{cases}x=4+2\cos\alpha,\\y=3+2\sin\alpha\end{cases}$($\alpha$ 为参数)化为普通方程为 $(x-4)^2+(y-3)^2=4$,

$\because x=\rho\cos\theta, y=\rho\sin\theta$,

$\therefore(\rho\cos\theta-4)^2+(\rho\sin\theta-3)^2=4$,

即 $\rho^2-8\rho\cos\theta-6\rho\sin\theta+21=0$,

$\therefore$ 曲线 C 的极坐标方程为 $\rho^2-8\rho\cos\theta-6\rho\sin\theta+21=0$.

(2)设点 A,B 对应的参数分别为 t_1,t_2.

将 $\begin{cases}x=2+t,\\y=1+\sqrt{3}t\end{cases}$($t$ 为参数)代入 $(x-4)^2+(y-3)^2=4$，得 $t^2-(\sqrt{3}+1)t+1=0$.

$\therefore t_1t_2=1$.

直线 l：$\begin{cases}x=2+t,\\y=1+\sqrt{3}t\end{cases}$($t$ 为参数)，可化为 $\begin{cases}x=2+\dfrac{1}{2}\cdot2t,\\y=1+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cdot2t,\end{cases}$

$\therefore|MA|\cdot|MB|=|2t_1|\cdot|2t_2|=4|t_1t_2|=4$.

第二部分　阶段检测

阶段测试一

1. B　由 $\rho=4\sin\theta$，得 $\rho^2=4\rho\sin\theta$，化为直角坐标方程为 $x^2+y^2=4y$，即 $x^2+(y-2)^2=4$.

2. B　$\because$ 点 $(-2,-2\sqrt{3})$，$\therefore x=-2, y=-2\sqrt{3}$，且在第三象限.

$\therefore\rho^2=x^2+y^2=(-2)^2+(-2\sqrt{3})^2=16$，$\therefore\rho=4$.

$\tan\theta=\dfrac{y}{x}=\dfrac{-2\sqrt{3}}{-2}=\sqrt{3}$. $\therefore\theta=\dfrac{4\pi}{3}$. $\therefore$ 点 $(-2,-2\sqrt{3})$ 的极坐标是 $\left(4,\dfrac{4\pi}{3}\right)$.

3. D　解法一：将椭圆方程 $\dfrac{x^2}{10}+\dfrac{y^2}{8}=1$ 化为 $\dfrac{2x^2}{5}+\dfrac{y^2}{2}=4$，

$\therefore\left(\dfrac{\sqrt{2}x}{\sqrt{5}}\right)^2+\left(\dfrac{y}{\sqrt{2}}\right)^2=4$.

令 $\begin{cases}x'=\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}x,\\y'=\dfrac{y}{\sqrt{2}},\end{cases}$ 得 $x'^2+y'^2=4$，即 $x^2+y^2=4$.

$\therefore$ 伸缩变换 $\begin{cases}\sqrt{5}x'=\sqrt{2}x,\\\sqrt{2}y'=y\end{cases}$ 为所求.

解法二：将 $x^2+y^2=4$ 改写为 $x'^2+y'^2=4$，

设满足题意的伸缩变换为 $\begin{cases}x'=\lambda\cdot x(\lambda>0),\\y'=\mu\cdot y(\mu>0),\end{cases}$

代入 $x'^2+y'^2=4$ 得 $\lambda^2x^2+\mu^2y^2=4$，

即 $\dfrac{\lambda^2x^2}{4}+\dfrac{\mu^2y^2}{4}=1$.

与椭圆 $\dfrac{x^2}{10}+\dfrac{y^2}{8}=1$ 比较系数得 $\begin{cases}\dfrac{\lambda^2}{4}=\dfrac{1}{10},\\\dfrac{\mu^2}{4}=\dfrac{1}{8},\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}\lambda=\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}},\\\mu=\dfrac{1}{\sqrt{2}}.\end{cases}$ $\therefore$ 伸缩变换为 $\begin{cases}x'=\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}x,\\y'=\dfrac{1}{\sqrt{2}}y,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}\sqrt{5}x'=\sqrt{2}x,\\\sqrt{2}y'=y.\end{cases}$

4. A　由 $\sin\theta=\dfrac{1}{2}$，得 $\theta=2k\pi+\dfrac{\pi}{6}$ 或 $\theta=2k\pi+\dfrac{5\pi}{6}(k\in\mathbf{Z})$，

$\therefore\sin\theta=\dfrac{1}{2}$ 表示两条相交直线 $\theta=\dfrac{\pi}{6}$ 或 $\theta=\dfrac{5\pi}{6}(\rho\in\mathbf{R})$.

5. C　由题意知 A,B 的极坐标分别为 $\left(3,\dfrac{\pi}{3}\right)$、$\left(4,\dfrac{\pi}{6}\right)$，则 $\triangle AOB$ 的面积 $S=\dfrac{1}{2}OA\cdot OB\sin\angle AOB=\dfrac{1}{2}\times3\times4\times\sin\dfrac{\pi}{6}=3$，故选 C.

6. A　设 $A(x,y,z)$，由柱坐标与直角坐标的变换公式得 $x=1\times\cos\pi=-1$，$y=1\times\sin\pi=0$，$z=0$，$\therefore A$ 点的直角坐标为 $(-1,0,0)$.

7. A　点 $(1,0)$ 的直角坐标为 $(1,0)$，直线 $\rho(\cos\theta+\sin\theta)=2$ 的直角坐标方程为 $x+y-2=0$，点 $(1,0)$ 到直线 $x+y-2=0$ 的距离 $d=\dfrac{|1+0-2|}{\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

8. C　直线 $\rho\cos\theta=\dfrac{1}{2}$ 的直角坐标方程为 $x=\dfrac{1}{2}$，曲线 $\rho=2\cos\theta$ 的直角坐标方程为 $(x-1)^2+y^2=1$，当 $x=\dfrac{1}{2}$ 时，得 $y=\pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，$\therefore A\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$，$B\left(\dfrac{1}{2},-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$. $\therefore|AB|=\sqrt{3}$. 在 $\triangle AOB$ 中，$|OA|=|OB|=1$，$\therefore\cos\angle AOB=\dfrac{1^2+1^2-(\sqrt{3})^2}{2\times1\times1}=-\dfrac{1}{2}$，$\therefore\angle AOB=\dfrac{2\pi}{3}$.

9. A　由曲线 C：$\rho=2\cos\theta$ 化为 $\rho^2=2\rho\cos\theta$，$\therefore x^2+y^2=2x$，

联立 $\begin{cases}x^2+y^2=2x,\\y+kx+2=0,\end{cases}$ 化为 $(1+k^2)x^2+(4k-2)x+4=0$.

$\because$ 直线 l 与曲线 C 有交点，$\therefore\Delta\geqslant0$.

$\therefore(4k-2)^2-16(1+k^2)\geqslant0$，

化为 $16k\leqslant-12$，解得 $k\leqslant-\dfrac{3}{4}$.

$\therefore k$ 的取值范围是 $k\leqslant-\dfrac{3}{4}$.

10. C　直线 $\rho\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{4}\right)=4$ 转化为直角坐标系下的方程为 $x+y-4\sqrt{2}=0$，圆 $\rho=4\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{4}\right)$ 转化为直角坐标系下的方程为 $(x-\sqrt{2})^2+(y-\sqrt{2})^2=4$，因为圆心 $(\sqrt{2},\sqrt{2})$ 到直线 $x+y-4\sqrt{2}=0$ 的距离 $d=\dfrac{|\sqrt{2}+\sqrt{2}-4\sqrt{2}|}{\sqrt{2}}=2=r$，所以圆与直线相切，故选 C.

11. B　圆 $\rho=2\cos\theta$ 的直角坐标方程为 $x^2+y^2=2x$，即 $(x-1)^2+y^2=1$，则与 x 轴的两条切线方程为 $x=0$ 和 $x=2$，化为极坐标方程为 $\theta=\dfrac{\pi}{2}(\rho\in\mathbf{R})$ 和 $\rho\cos\theta=2$.

12. C　设两条射线 $\theta=\dfrac{\pi}{3}(\rho\geqslant0)$ 和 $\theta=\dfrac{2\pi}{3}(\rho\geqslant0)$ 与圆 $\rho=4$ 的交点为 A,B，则 $\angle AOB=\dfrac{2\pi}{3}-\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{\pi}{3}$，于是所求的面积为 $S=\dfrac{1}{6}\pi R^2=\dfrac{1}{6}\times\pi\times4^2=\dfrac{8\pi}{3}$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

13. $2\sqrt{3}$

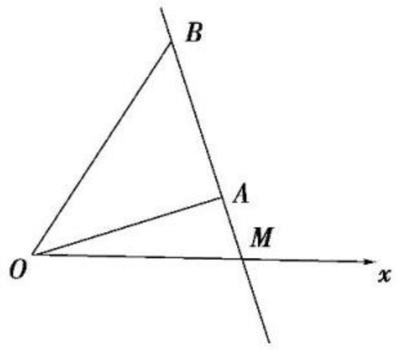
解析：极坐标方程 $\rho=4\cos\theta$ 化为直角坐标方程为 $x^2+y^2=4x$，即 $(x-2)^2+y^2=4$，则圆与直线 $x=3$ 相交于 A,B 两点，则 $|AB|=2\sqrt{3}$.

14. $\frac{5\pi}{8}$

解析：如图，记 $A\left(1,\frac{\pi}{8}\right)$，$B\left(\sqrt{2},\frac{3\pi}{8}\right)$，直线 AB 与极轴交点为 M，则 $\angle AOB=\frac{3\pi}{8}-\frac{\pi}{8}=\frac{\pi}{4}$，由余弦定理得 $AB^2=OA^2+OB^2-2OA\cdot OB\cos\angle AOB$，

即 $AB^2=1+2-2\times1\times\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=1$，$\therefore AB=1$，

$\therefore AB\perp OA$，$\therefore\angle OMB=\frac{3\pi}{8}$，$\therefore$ 直线 AB 的倾斜角为 $\frac{5\pi}{8}$.



15. $\left(2\sqrt{2},\frac{\pi}{4}\right)$

解析：点 $\left(2,\frac{\pi}{2}\right)$ 的直角坐标为 $(0,2)$，直线 $\rho\cos\theta=1$ 的直角坐标方程为 $x=1$，而点 $(0,2)$ 关于直线 $x=1$ 的对称点为 $(2,2)$，化为极坐标为 $\left(2\sqrt{2},\frac{\pi}{4}\right)$.

16. $\rho\cos\theta=\pm2\sqrt{3}$

解析：圆 $\rho=4$ 的直角坐标方程为 $x^2+y^2=16$，由 $|AB|=4$，得原点 $(0,0)$ 到直线 l 的距离 $d=\sqrt{16-4}=2\sqrt{3}$，$\therefore$ 直线 l 的方程为 $x=\pm2\sqrt{3}$，化为极坐标方程为 $\rho\cos\theta=\pm2\sqrt{3}$.

17. **解**：将 $\begin{cases}x'=2x,\\y'=2y\end{cases}$ 代入 $(x'-5)^2+(y'+6)^2=1$，得 $(2x-5)^2+(2y+6)^2=1$，化简得 $\left(x-\frac{5}{2}\right)^2+(y+3)^2=\frac{1}{4}$.

所以曲线 C 的方程为 $\left(x-\frac{5}{2}\right)^2+(y+3)^2=\frac{1}{4}$，它是以 $\left(\frac{5}{2},-3\right)$ 为圆心，$\frac{1}{2}$ 为半径的圆.

18. **解**：以极点为坐标原点，极轴为 x 轴建立平面直角坐标系，则直线方程为 $y=\sqrt{3}x-2\sqrt{3}$，P 的直角坐标为 $(1,\sqrt{3})$，

令 $y=0$，得 $x=2$，所以 $C(2,0)$，

所以圆 C 的半径 $PC=\sqrt{(2-1)^2+(0-\sqrt{3})^2}=2$，

所以圆 C 的方程为 $(x-2)^2+(y-0)^2=4$，即 $x^2+y^2-4x=0$，

所以圆 C 的极坐标方程为 $\rho=4\cos\theta$.

19. **解**：(1)因为点 $M(\rho_0,\theta_0)(\rho_0>0)$ 在曲线 $C:\rho=4\sin\theta$ 上，

所以 $\rho_0=4\sin\theta_0=4\sin\frac{\pi}{3}=2\sqrt{3}$.

所以 $M\left(2\sqrt{3},\frac{\pi}{3}\right)$，所以 $k_{OM}=\tan\frac{\pi}{3}=\sqrt{3}$.

因为直线 l 过点 $A(4,0)$ 且与 OM 垂直，

所以直线 l 的直角坐标方程为 $y=-\frac{\sqrt{3}}{3}(x-4)$，

即 $x+\sqrt{3}y-4=0$.

转化为极坐标方程为 $\rho\cos\theta+\sqrt{3}\rho\sin\theta=4$，

即 l 的极坐标方程为 $\rho\sin\left(\theta+\frac{\pi}{6}\right)=2$.

(2)设 $P(x,y)$，则 $k_{OP}=\frac{y}{x}$，$k_{AP}=\frac{y}{x-4}$，

由题意，$OP\perp AP$，所以 $k_{OP}\cdot k_{AP}=-1$.

所以 $\frac{y^2}{x^2-4x}=-1$，整理得 $x^2+y^2-4x=0$.

因为点 P 在线段 OM 上，M 在 C 上运动，

所以 $0\leqslant x\leqslant2$，$2\leqslant y\leqslant4$，

所以，P 点的轨迹的极坐标方程为 $\rho^2-4\rho\cos\theta=0$，

即 $\rho=4\cos\theta\left(\frac{\pi}{4}\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}\right)$.

20. **解**：(1)依题意，得圆 $C_1:(x-1)^2+y^2=1$，圆 $C_2:(x+2)^2+y^2=4$.

$\because x=\rho\cos\theta$，$y=\rho\sin\theta$.

$\therefore$ 圆 C_1 的极坐标方程为 $\rho=2\cos\theta$，

圆 C_2 的极坐标方程为 $\rho=-4\cos\theta$.

(2)因为 C_1、C_2 都关于 x 轴对称，$\triangle OAB$ 为等边三角形，

所以不妨设 $A(\rho_A,\theta)$，$B\left(\rho_B,\theta+\frac{\pi}{3}\right)\left(0<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$.

依题意，得 $\rho_A=2\cos\theta$，$\rho_B=-4\cos\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)$，

所以 $2\cos\theta=-4\cos\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)$，

整理，得 $2\cos\theta=\sqrt{3}\sin\theta$，所以 $\tan\theta=\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

因为 $0<\theta<\frac{\pi}{2}$，所以 $\cos\theta=\frac{\sqrt{21}}{7}$，

所以 $|AB|=|OA|=\rho_A=\frac{2\sqrt{21}}{7}$.

21. **解**：(1)$y=\sqrt{3}\sin x+\cos x=2\left(\sin x\cos\frac{\pi}{6}+\cos x\sin\frac{\pi}{6}\right)=2\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$，$x\in\mathbf{R}$.

y 取最大值必须且只需 $x+\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}+2k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$，

即 $x=\frac{\pi}{3}+2k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$.

所以当函数 y 取得最大值时，

自变量 x 的集合为 $\left\{x\,\middle|\,x=\frac{\pi}{3}+2k\pi,k\in\mathbf{Z}\right\}$.

(2)变换的步骤是：

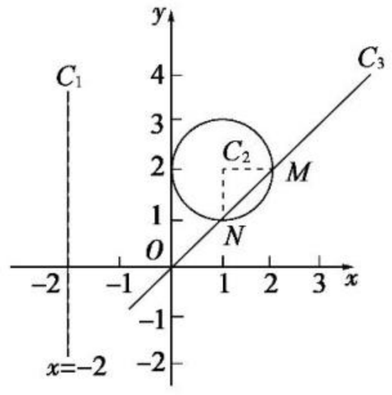
①把函数 $y=\sin x$ 的图象向左平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位，得到函数 $y=\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$ 的图象；

②令所得到的图象上各点横坐标不变，把纵坐标伸长到原来的 2 倍，得到函数 $y=2\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$ 的图象；经过这样的变换就得到函数 $y=\sqrt{3}\sin x+\cos x$ 的图象.

22. **解**：(1)因为 $x=\rho\cos\theta$，$y=\rho\sin\theta$.

所以直线 $C_1:x=-2$ 的极坐标方程为 $\rho\cos\theta=-2$，曲线 $C_2:(x-1)^2+(y-2)^2=1$ 的极坐标方程为 $(\rho\cos\theta-1)^2+(\rho\sin\theta-2)^2=1$.

化简得 $\rho^2-(2\rho\cos\theta+4\rho\sin\theta)+4=0$.



关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

(2)把直线 C_3 的极坐标方程 $\theta=\frac{\pi}{4}(\rho\in\mathbf{R})$ 代入圆 C_2 的极坐标方程,得 $\rho^2-3\sqrt{2}\rho+4=0$.

解得 $\rho_1=2\sqrt{2},\rho_2=\sqrt{2}$.

$\therefore|MN|=|\rho_1-\rho_2|=\sqrt{2}$.

因为圆 C_2 的半径为 1,

所以 $C_2M\perp C_2N$.

$\therefore\triangle C_2MN$ 的面积 $S=\frac{1}{2}C_2M\cdot C_2N=\frac{1}{2}\times1\times1=\frac{1}{2}$.

阶段测试二

1. C 由 $\begin{cases}x=1-\frac{1}{\sqrt{5}}t,\\ y=-1+\frac{2}{\sqrt{5}}t\end{cases}$ 消去 t,得 $2x+y-1=0$,$\therefore$ 斜率 $k=-2$.

2. C 圆的普通方程为 $(x-2)^2+(y-1)^2=25$,

$\therefore$ 圆的圆心为 $(2,1)$,半径 $r=5$.

圆心到直线的距离 $d=\frac{6+4+10}{\sqrt{9+16}}=4$.

$\because0<d<r$,

$\therefore$ 直线与圆相交但不过圆心.

3. B 圆的直角坐标方程为 $(x+1)^2+(y-3)^2=4$,直线的普通方程为 $3x-y+2=0$,圆心 $(-1,3)$ 到直线的距离 $d=\frac{|-3-3+2|}{\sqrt{9+1}}=\frac{4}{\sqrt{10}}<2$,所以直线与圆相交而不过圆心.

4. B 由 $x=1-\frac{1}{t}$,得 $t=\frac{1}{1-x}$,代入 $y=1-t^2$,

得 $y=1-\frac{1}{(1-x)^2}=\frac{x(x-2)}{(1-x)^2}$.

5. C 将曲线 $\begin{cases}x=\frac{5}{4}t^2,\\ y=t\end{cases}$($t$ 为参数)化为普通方程为 $y^2=\frac{4}{5}x$ $(x\geqslant0)$,将曲线 $\begin{cases}x=\sqrt{5}\cos\theta,\\ y=\sin\theta\end{cases}$($\theta$ 为参数,$0\leqslant\theta<\pi$)化为普通方程为 $\frac{x^2}{5}+y^2=1(y\geqslant0)$,解方程组 $\begin{cases}y^2=\frac{4}{5}x,\\ \frac{x^2}{5}+y^2=1\end{cases}(x\geqslant0,y\geqslant0)$,

得 $\begin{cases}x=1,\\ y=\frac{2\sqrt{5}}{5},\end{cases}$ $\therefore$ 它们的交点坐标为 $\left(1,\frac{2}{5}\sqrt{5}\right)$,故选 C.

6. A $\begin{cases}x=3\cos\theta,\\ y=3\sin\theta\end{cases}$($\theta$ 为参数,$0\leqslant\theta<2\pi$)可化为 $x^2+y^2=9$,又 $(-1,2)$ 在圆内,且直线被圆截得的弦长最短,$\therefore l$ 与 OP 垂直,又 $k_{OP}=\frac{2}{-1}$,$\therefore k_l=\frac{1}{2}$,$\therefore$ 直线 l 的方程为 $y-2=\frac{1}{2}(x+1)$,即 $x-2y+5=0$.

7. C 由已知可得摆线的参数方程为 $\begin{cases}x=3(\varphi-\sin\varphi),\\ y=3(1-\cos\varphi)\end{cases}$($\varphi$ 为参数),把 $y=0$ 代入得 $\cos\varphi=1$,$\therefore\varphi=2k\pi(k\in\mathbf{Z})$. 于是 $x=3(2k\pi-0)=6k\pi(k\in\mathbf{Z})$,$\therefore$ 其横坐标可能是 6π.

8. C 设线段 AB 的中点为 (x,y),

则 $\begin{cases}x=2\sin\theta-2\cos\theta,\\ y=3\sin\theta+3\cos\theta\end{cases}$($\theta$ 为参数).

$\therefore\begin{cases}3x+2y=12\sin\theta,\\ 3x-2y=-12\cos\theta.\end{cases}$

$\therefore(3x+2y)^2+(3x-2y)^2=144$,整理得 $\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{18}=1$.

这是椭圆的标准方程,故选 C.

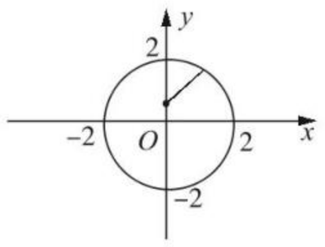
9. A 由 $\begin{cases}x=\frac{2}{\cos\theta},\\ y=\tan\theta\end{cases}$'($\theta$ 为参数)得 $\frac{x^2}{4}-y^2=1$,$\therefore a=2,b=1,c=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{5}$. 设 $|PF_1|=m$,$|PF_2|=n(m>n)$,则 $\begin{cases}m-n=2a=4,\\ m^2+n^2=4c^2=20.\end{cases}$ $\therefore mn=2$,

$\therefore\triangle F_1PF_2$ 的面积 $S=\frac{1}{2}mn=1$.

10. B $C_1:\begin{cases}x=\cos^2\theta,\\ y=2-\sin^2\theta\end{cases}$($\theta$ 为参数),消去参数得普通方程为 $x+2-y=1$,

即 $x-y+1=0(0\leqslant x\leqslant1)$.

$C_2:\begin{cases}x=2\cos\theta,\\ y=2\sin\theta\end{cases}$($\theta$ 为参数),消去参数得普通方程为 $x^2+y^2=4$.



如图所示,

$\therefore$ 曲线 C_1 和 C_2 只有一个交点.

11. B 依题意,将直线 l 的参数方程 $\begin{cases}x=-1-\frac{\sqrt{2}}{2}t,\\ y=2+\frac{\sqrt{2}}{2}t\end{cases}$($t$ 为参数)

代入抛物线 $y=x^2$,得 $t^2+\sqrt{2}t-2=0$,设 A,B 对应的参数分别为 t_1,t_2,则 $|PA|\cdot|PB|=|t_1|\cdot|t_2|=|t_1t_2|=|-2|=2$,故选 B.

12. A 令 $y=0$,得 $\sin\theta=0$,$\therefore\cos\theta=\pm1$,$\therefore x=\pm2$,

$\therefore M(-2,0),N(2,0)$,设 $P(2\cos\theta,\sqrt{3}\sin\theta)$,则 $k_{PM}\cdot k_{PN}=\frac{\sqrt{3}\sin\theta}{2\cos\theta+2}\cdot\frac{\sqrt{3}\sin\theta}{2\cos\theta-2}=\frac{3\sin^2\theta}{4\cos^2\theta-4}=\frac{3(1-\cos^2\theta)}{4(\cos^2\theta-1)}=-\frac{3}{4}$.

13. $\frac{\sqrt{2}}{2}$

解析:点 $P\left(\sqrt{2},\frac{\pi}{4}\right)$ 的直角坐标为 $P(1,1)$,直线 $\begin{cases}x=t+2,\\ y=-t-1\end{cases}$ 的普通方程为 $x+y-1=0$,由点到直线的距离公式,得 $d=\frac{|1+1-1|}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

14. $\frac{3}{4}$

解析:圆 $\begin{cases}x=2+2\cos\theta,\\ y=1+2\sin\theta\end{cases}$($\theta$ 为参数)表示以 $(2,1)$ 为圆心,$r=2$ 的圆. 因为直线 $ax-y+2=0$ 与圆相切,

所以 $\frac{|2a+1|}{\sqrt{a^2+1}}=2$. 解得 $a=\frac{3}{4}$.

15. $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$

解析:由曲线 $\begin{cases}x=\sin\varphi,\\ y=\cos2\varphi=1-2\sin^2\varphi,\end{cases}$

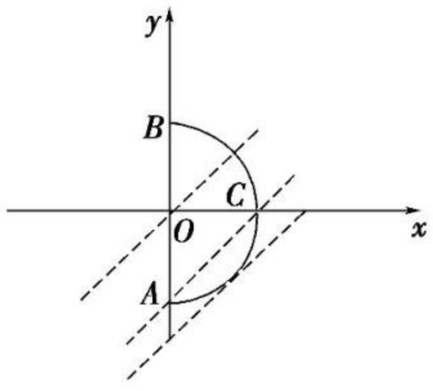
得 $y=1-2x^2(-1\leqslant x\leqslant1)$.

由 $\begin{cases}y=2x-\frac{1}{2},\\ y=1-2x^2,\end{cases}$ 得 $4x^2+4x-3=0$.

解得 $x=\frac{1}{2}$ 或 $x=-\frac{3}{2}$(舍去),$\therefore y=\frac{1}{2}$. $\therefore$ 交点坐标为 $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$.

16. $(-\sqrt{2},-1]$

解析:曲线 $\begin{cases}x=\cos\theta,\\ y=\sin\theta\end{cases}\left(\theta\text{ 为参数},\text{且}-\frac{\pi}{2}\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}\right)$ 的普通方程为 $x^2+y^2=1(x\geqslant0)$,它表示以原点为圆心,以 1 为半径,位于 y 轴右侧的半圆,作直线 $y=x+b$,如图,当直线过点 $A(0,-1)$ 时,$b=-1$,当直线在下方与半圆相切时,$b=-\sqrt{2}$,所以实数 b 的取值范围是 $(-\sqrt{2},-1]$.



关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

17. **解**：令 $y=2t$，则 $x=\frac{y^2}{2}=2t^2$，得抛物线的参数方程为 $\begin{cases}x=2t^2,\\y=2t\end{cases}$（$t$ 为参数），即动点 $M(2t^2,2t)$，定点 $M_0(-1,0)$，由中点的坐标公式得 $P(x,y)$：$\begin{cases}x=\frac{1}{2}(-1+2t^2),\\y=\frac{1}{2}(0+2t),\end{cases}$ 即 $\begin{cases}x=-\frac{1}{2}+t^2,\\y=t\end{cases}$（$t$ 为参数），这就是 P 点的轨迹的参数方程.

化为普通方程是 $y^2=x+\frac{1}{2}$，它是以 x 轴为对称轴，顶点为 $\left(-\frac{1}{2},0\right)$ 的抛物线.

18. **解**：(1)依题意，经过图示变换曲线 C_1：$\begin{cases}x=\cos\theta,\\y=\sin\theta\end{cases}$（$\theta$ 为参数）转化为 C_2：$\begin{cases}x=2\cos\theta,\\y=\sqrt{3}\sin\theta\end{cases}$（$\theta$ 为参数），

将其消去参数 θ，得到曲线 C_2 的普通方程：$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$.

直线 l：$\rho(\cos\theta-2\sin\theta)=6$ 转化为直角坐标方程为 $x-2y-6=0$.

(2)设点 $P(2\cos\theta,\sqrt{3}\sin\theta)$ 为曲线 C_2 上任意一点，

由点到直线的距离公式，得到点 P 到直线 l 的距离

$$d=\frac{|2\cos\theta-2\sqrt{3}\sin\theta-6|}{\sqrt{5}}$$

$$=\frac{\left|4\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta-\frac{1}{2}\cos\theta\right)+6\right|}{\sqrt{5}}$$

$$=\frac{\left|4\sin\left(\theta-\frac{\pi}{6}\right)+6\right|}{\sqrt{5}},$$

$$\therefore\frac{2\sqrt{5}}{5}\leqslant d\leqslant 2\sqrt{5}.$$

即点 P 到直线 l 的距离的最大值为 $2\sqrt{5}$，最小值为 $\frac{2\sqrt{5}}{5}$.

19. **解**：(1)曲线 C_1 的直角坐标方程：$y=mx-2m-1$.

曲线 C_2 的直角坐标方程：$x^2+y^2-4y=0(y\neq 0)$.

(2)由(1)知：C_2：$x^2+(y-2)^2=4$，

$\therefore$ 圆心 $C_2(0,2)$，半径 $r=2$.

当直线与圆相切时，$d=\frac{|-2-2m-1|}{\sqrt{m^2+1}}=2$，$\therefore m=-\frac{5}{12}$；

当直线过(0,0)点时，$-2m=1$，$\therefore m=-\frac{1}{2}$.

综上 $m=-\frac{5}{12}$ 或 $m=-\frac{1}{2}$.

20. **解**：(1)$\because$ 点 M 的直角坐标是(0,3)，直线 l 倾斜角是 135°，

$\therefore$ 直线 l 的参数方程是 $\begin{cases}x=t\cos 135°,\\y=3+t\sin 135°,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}x=-\frac{\sqrt{2}}{2}t,\\y=3+\frac{\sqrt{2}}{2}t,\end{cases}$

$\rho=2\sqrt{2}\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)$，即 $\rho=2(\sin\theta+\cos\theta)$，两边同乘以 ρ 得 $\rho^2=2(\rho\sin\theta+\rho\cos\theta)$，

$\therefore$ 曲线 C 的直角坐标方程为 $x^2+y^2-2x-2y=0$.

(2)证明：$\begin{cases}x=-\frac{\sqrt{2}}{2}t,\\y=3+\frac{\sqrt{2}}{2}t\end{cases}$ 代入 $x^2+y^2-2x-2y=0$，

得 $t^2+3\sqrt{2}t+3=0$，

$\because\Delta=6>0$，直线 l 和曲线 C 相交于两点 A，B，

设 $t^2+3\sqrt{2}t+3=0$ 的两个根是 t_1，t_2，$\therefore t_1t_2=3$，

$\therefore|MA|\cdot|MB|=|t_1t_2|=3$.

21. **解**：(1)直线 l 的直角坐标方程为 $y=x$，

曲线 C 的普通方程为 $\frac{x^2}{2}+y^2=1$.

(2)设过点 $M(x_0,y_0)$ 且平行于直线 l 的直线 l_1 的方程为 $\begin{cases}x=x_0+\frac{\sqrt{2}}{2}t,\\y=y_0+\frac{\sqrt{2}}{2}t\end{cases}$（$t$ 为参数）.

将直线 l_1 的参数方程代入曲线 C 的普通方程中，

可得 $\frac{3t^2}{2}+\sqrt{2}(x_0+y_0)t+x_0^2+2y_0^2-2=0$，

$$|MA|\cdot|MB|=\frac{8}{3}\Rightarrow\left|\frac{x_0^2+2y_0^2-2}{\frac{3}{2}}\right|=\frac{8}{3},$$

即 $x_0^2+2y_0^2=6$. $x^2+2y^2=6$ 表示一个椭圆.

取 $y=x+m$，代入 $\frac{x^2}{2}+y^2=1$，

得 $3x^2+4mx+2m^2-2=0$，

由 $\Delta\geqslant 0$ 得 $-\sqrt{3}\leqslant m\leqslant\sqrt{3}$，

故点 M 的轨迹是椭圆 $x^2+2y^2=6$ 夹在平行直线 $y=x\pm\sqrt{3}$ 之间的两段弧.

22. **解**：(1)设点 P，Q 的极坐标分别为 (ρ_0,θ)，(ρ,θ)，则

$\rho=\frac{1}{2}\rho_0=\frac{1}{2}\times 4(\cos\theta+\sin\theta)=2(\cos\theta+\sin\theta)$，

$\therefore$ 点 Q 的轨迹 C_2 的极坐标方程为 $\rho=2(\cos\theta+\sin\theta)$. 方程两边同乘以 ρ，得 $\rho^2=2(\rho\cos\theta+\rho\sin\theta)$，

$\because\rho\cos\theta=x$，$\rho\sin\theta=y$，

$\therefore$ 曲线 C_2 的直角坐标方程为 $x^2+y^2=2x+2y$，即 $(x-1)^2+(y-1)^2=2$.

(2)将直线 l 的参数方程代入曲线 C_2 的直角坐标方程，得 $(t\cos\varphi+1)^2+(t\sin\varphi-1)^2=2$，

整理得 $t^2+2(\cos\varphi-\sin\varphi)t=0$，

解得 $t_1=0$，$t_2=2(\sin\varphi-\cos\varphi)$，

由直线 l 与曲线 C_2 有且只有一个公共点，得 $\sin\varphi-\cos\varphi=0$，

$\because 0\leqslant\varphi<\pi$，$\therefore\varphi=\frac{\pi}{4}$.

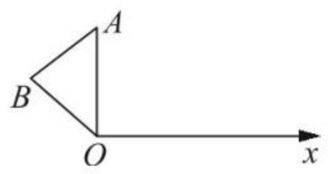
阶段测试三

1. B　由直线 l 的参数方程 $\begin{cases}x=1+3t,\\y=2-4t\end{cases}$ 可得普通方程为 $4x+3y-10=0$，设直线 l 的倾斜角为 α，则 $\tan\alpha=-\frac{4}{3}$，$\therefore\cos\alpha=-\frac{3}{5}$.

2. B　①②③化为普通方程均为 $y=x^2$，但在①②中，x，y 有相同的取值范围，故选①②.

3. D　由 $\rho=\frac{8\sin\theta}{\cos^2\theta}$，得 $\rho\cos^2\theta=8\sin\theta$，两边乘以 ρ，得 $\rho^2\cos^2\theta=8\rho\sin\theta$，化为直角坐标系下的方程为 $x^2=8y$，所以该曲线的准线方程为 $y=-2$，化为极坐标方程为 $\rho\sin\theta=-2$，故选 D.

4. D　如图，易知 $|OA|=\sqrt{2}|OB|$，$\angle AOB=\frac{\pi}{4}$，



$\therefore|AB|^2=|OB|^2+|OA|^2-2|OB|\cdot|OA|\cos\frac{\pi}{4}=3|OB|^2-2|OB|^2=|OB|^2$，

$\therefore|AB|=|OB|$.

$\therefore\triangle ABO$ 是等腰直角三角形.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

5. B　$3x^2+2y^2=6x$ 可化为 $(x-1)^2+\frac{2y^2}{3}=1$，转化为参数方程为 $\begin{cases}x=1+\cos\theta,\\ y=\frac{\sqrt{6}}{2}\sin\theta\end{cases}$（$\theta$ 为参数），

$\therefore x^2+y^2=(1+\cos\theta)^2+\left(\frac{\sqrt{6}}{2}\sin\theta\right)^2=-\frac{1}{2}\cos^2\theta+2\cos\theta+\frac{5}{2}=-\frac{1}{2}(\cos\theta-2)^2+\frac{9}{2}$，$\therefore$ 当 $\cos\theta=1$ 时，x^2+y^2 取得最大值 4，故选 B.

6. B　将 $\rho=\cos\theta$ 与 $\rho\cos\theta=\frac{1}{2}$ 化为直角坐标方程分别为 $\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+y^2=\frac{1}{4}$，$x=\frac{1}{2}$，结合选项知应选 B.

7. A　将 $\begin{cases}x=3\cos\theta,\\ y=2\sin\theta\end{cases}$（$\theta$ 为参数）化为直角坐标方程为 $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$，其焦点坐标为 $(-\sqrt{5},0)$，$(\sqrt{5},0)$，它与 $\frac{x^2}{15}+\frac{y^2}{10}=1$ 有相同的焦点.

8. A　由双曲线方程知，$a=3$，$b=4$，且焦点在 x 轴上，所以渐近线方程为 $y=\pm\frac{4}{3}x$，验证所给直线的参数方程知，①③⑤正确.

9. D　由直线的参数方程得 $\begin{cases}x=-2+\frac{\sqrt{3}}{2}t,\\ y=3-\frac{\sqrt{3}}{2}t\end{cases}$（$t$ 为参数），

$\therefore$ 直线的普通方程为 $x+y-1=0$，即 $y=-x+1$，

$\therefore$ 斜率 $k=-1$，倾斜角为 $135°$.

10. D　由 $\rho=\frac{2}{\sin\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)}$，得 $\rho\sin\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)=2$，即 $\rho\cos\theta=2$，化为直角坐标方程为 $x=2$，表示垂直 x 轴的一条直线. 把参数方程 $\begin{cases}x=2\cos\theta,\\ y=3\sin\theta\end{cases}$（$\theta$ 为参数）转化为普通方程为 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$，这所表示的图形是椭圆，故选 D.

11. A　设 $M(\rho,\theta)$ 为圆上任意一点，$M_0(\rho_0,\theta_0)$ 为圆心，

则 $|MM_0|=r$. 由余弦定理，

有 $|MM_0|=\sqrt{\rho^2+\rho_0^2-2\rho_0\rho\cos(\theta-\theta_0)}=r$，

得 $\rho^2+\rho_0^2-2\rho_0\rho\cos(\theta-\theta_0)-r^2=0$.

12. A　由 $\sqrt{2}\rho\sin\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)=2\,018$，

得 $\sqrt{2}\rho\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\theta-\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\theta\right)=2\,018$，

即 $\rho\sin\theta-\rho\cos\theta=2\,018$，

化为直角坐标方程为 $y-x=2\,018$，

即 $l_1:y=x+2\,018$，

l_2 的普通方程为 $y=-x$，

$\therefore k_{l_1}\cdot k_{l_2}=1\times(-1)=-1$，$\therefore l_1\perp l_2$.

13. $\left(3,-\frac{\pi}{6}\right)$

解析：设点 $\left(3,\frac{\pi}{2}\right)$ 关于直线 $\theta=\frac{\pi}{6}$ 的对称点为 $N(\rho,\theta)$，则 $\rho=3$，且 $\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{6}-\theta$，解得 $\theta=-\frac{\pi}{6}$，$\therefore$ 所求对称点的极坐标为 $\left(3,-\frac{\pi}{6}\right)$.

14. $\rho(\cos\theta-\sin\theta)=1$

解析：将曲线 C 的参数方程 $\begin{cases}x=2+\cos\alpha,\\ y=1+\sin\alpha\end{cases}$（$\alpha$ 为参数）化为普通方程为 $(x-2)^2+(y-1)^2=1$，它表示圆心为 $(2,1)$，半径 $r=1$ 的圆，因为直线 l 交圆的弦 $|AB|=2=2r$，$\therefore$ 直线 l 过圆心，又直线 l 的倾斜角为 $\frac{\pi}{4}$，$\therefore$ 其斜率是 1，所以直线 l 的直角坐标方程为 $y=x-1$，转化为极坐标方程为 $\rho\sin\theta=\rho\cos\theta-1$，即 $\rho(\cos\theta-\sin\theta)=1$.

15. $\left(\sqrt{2},\frac{7\pi}{4}\right)$

解析：曲线 $\rho(2\cos\theta-\sin\theta)=3$ 的直角坐标方程为 $2x-y=3$. 曲线 $\rho(\cos\theta+2\sin\theta)=-1$ 的直角坐标方程为 $x+2y=-1$. 由 $\begin{cases}2x-y=3,\\ x+2y=-1,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x=1,\\ y=-1.\end{cases}$ $\therefore$ 交点为 $(1,-1)$，化为极坐标是 $\left(\sqrt{2},\frac{7\pi}{4}\right)$.

16. $\left[0,\frac{\pi}{6}\right]\cup\left[\frac{5\pi}{6},\pi\right)$

解析：将直线 $\begin{cases}x=t\cos\alpha-1,\\ y=t\sin\alpha\end{cases}$（$t$ 为参数）化为普通方程为 $y=\tan\alpha(x+1)$.

曲线 $\begin{cases}x=3+2\cos\varphi,\\ y=2\sin\varphi\end{cases}$（$\varphi$ 为参数）化为普通方程为 $(x-3)^2+y^2=4$.

若直线与圆有公共点，则有圆心 $(3,0)$ 到直线 $\tan\alpha(x+1)-y=0$ 的距离 $d=\frac{|4\tan\alpha|}{\sqrt{\tan^2\alpha+1}}\leqslant 2$，即 $\tan^2\alpha\leqslant\frac{1}{3}$，

$\therefore -\frac{\sqrt{3}}{3}\leqslant\tan\alpha\leqslant\frac{\sqrt{3}}{3}$，$\therefore 0\leqslant\alpha\leqslant\frac{\pi}{6}$ 或 $\frac{5\pi}{6}\leqslant\alpha<\pi$.

17. **解**：(1)依题意，直线 l_1 的极坐标方程为 $\theta=\alpha(\rho\in\mathbf{R})$.

由 $\begin{cases}x=1+\cos\varphi,\\ y=1+\sin\varphi\end{cases}$ 消去 φ，

得 $(x-1)^2+(y-1)^2=1$.

将 $x=\rho\cos\theta$，$y=\rho\sin\theta$ 代入上式，

得 $\rho^2-2\rho\cos\theta-2\rho\sin\theta+1=0$，

故 M 的极坐标方程为 $\rho^2-2\rho\cos\theta-2\rho\sin\theta+1=0$.

(2)依题意可设 $A(\rho_1,\alpha)$，$B(\rho_2,\alpha)$，$C\left(\rho_3,\alpha+\frac{\pi}{6}\right)$，$D\left(\rho_4,\alpha+\frac{\pi}{6}\right)$，且 ρ_1 ρ_2，ρ_3，ρ_4 均为正数，

将 $\theta=\alpha$ 代入 $\rho^2-2\rho\cos\theta-2\rho\sin\theta+1=0$，得 $\rho^2-2(\cos\alpha+\sin\alpha)\rho+1=0$，

所以 $\rho_1+\rho_2=2(\cos\alpha+\sin\alpha)$，

同理可得，

$\rho_3+\rho_4=2\left[\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)+\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)\right]$.

所以点 O 到 A，B，C，D 四点的距离之和为

$\rho_1+\rho_2+\rho_3+\rho_4=2(\cos\alpha+\sin\alpha)+2\left[\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)+\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)\right]=(1+\sqrt{3})\sin\alpha+(3+\sqrt{3})\cos\alpha=2(1+\sqrt{3})\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)$.

因为 $\alpha\in\left(0,\frac{\pi}{6}\right]$，所以当 $\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)=1$，即 $\alpha=\frac{\pi}{6}$ 时，$\rho_1+\rho_2+\rho_3+\rho_4$ 取得最大值，且最大值为 $2+2\sqrt{3}$，

故点 O 到 A，B，C，D 四点距离之和的最大值为 $2+2\sqrt{3}$.

18. **解**：(1)由 $x=\sqrt{3}\cos\alpha+\sin\alpha$ 得 $x^2=(\sqrt{3}\cos\alpha+\sin\alpha)^2=2\cos^2\alpha+2\sqrt{3}\sin\alpha\cos\alpha+1$，

$\because y=2\cos^2\alpha+2\sqrt{3}\sin\alpha\cos\alpha$，

$\therefore$ 曲线 M 的直角坐标方程为 $y=x^2-1$，$x\in[-2,2]$.

由 $\rho\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}t$，得 $\rho\sin\theta+\rho\cos\theta=t$，

$\therefore$ 曲线 N 的直角坐标方程为 $x+y=t$.

(2)若曲线 M，N 有公共点，则当直线 N 过点 $(2,3)$ 时满足要求，此时 $t=5$，并且向左下方平行运动直到相切之前总有公共点，相切时仍有一个公共点，由 $\begin{cases}x+y=t,\\ y=x^2-1\end{cases}$ 得 $x^2+x-1-t=0$，$\Delta=1+4(1+t)=0$，得 $t=-\frac{5}{4}$，

$\therefore\frac{5}{4}\leqslant t\leqslant 5$，即 t 的取值范围是 $\left[-\frac{5}{4},5\right]$.

19. **解**：(1)把曲线 C：$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$ 化为参数方程为 $\begin{cases}x=2\cos\varphi,\\ y=3\sin\varphi\end{cases}$（$\varphi$ 为参数）.

把直线 l：$\begin{cases}x=2+t,\\ y=2-2t\end{cases}$（$t$ 为参数）消去 t，得到 l 的普通方程为 $2x+y-6=0$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

(2)设 $P(2\cos\varphi,3\sin\varphi)$ 为曲线 C 上任意一点，

则点 P 到 l 的距离 $d=\dfrac{|4\cos\varphi+3\sin\varphi-6|}{\sqrt{5}}=\dfrac{|5\sin(\varphi+\theta)-6|}{\sqrt{5}}$（其中 $\tan\theta=\dfrac{4}{3}$）.

$\therefore |PA|=\dfrac{d}{\sin 30^\circ}=\dfrac{2|5\sin(\varphi+\theta)-6|}{\sqrt{5}}$，

当 $\sin(\varphi+\theta)=-1$ 时，$|PA|_{\max}=\dfrac{22\sqrt{5}}{5}$，当 $\sin(\varphi+\theta)=1$ 时，$|PA|_{\min}=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$.

20. **解**：(1)曲线 C：$\begin{cases}x=\sqrt{3}\cos\alpha+\sin\alpha,\\ y=\sqrt{3}\sin\alpha-\cos\alpha\end{cases}$（$\alpha$ 为参数），

平方可得 $\begin{cases}x^2=3\cos^2\alpha+2\sqrt{3}\cos\alpha\sin\alpha+\sin^2\alpha,\\ y^2=3\sin^2\alpha-2\sqrt{3}\cos\alpha\sin\alpha+\cos^2\alpha.\end{cases}$

曲线 C 的普通方程为 $x^2+y^2=4$.

直线 l：$\rho\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{6}\right)=1$，$\dfrac{\sqrt{3}}{2}\rho\sin\theta+\dfrac{1}{2}\rho\cos\theta=1$，

由 $\begin{cases}x=\rho\cos\theta,\\ y=\rho\sin\theta,\end{cases}$ 得直线 l 的直角坐标方程为 $x+\sqrt{3}y-2=0$.

(2)设所求直线方程为 $x+\sqrt{3}y+m=0$，

∵圆心(0,0)，半径为 2，圆心 C 到直线 l 的距离 $d=\dfrac{|m|}{2}=2$，$\therefore m=\pm4$.

∴所求直线的直角坐标方程为 $x+\sqrt{3}y\pm4=0$.

21. **解**：(1)∵曲线 C_1 的参数方程为 $\begin{cases}x=a+\dfrac{\sqrt{2}t}{2},\\ y=1+\dfrac{\sqrt{2}t}{2}\end{cases}$（$t$ 为参数，$a\in\mathbf{R}$），

∴曲线 C_1 的普通方程为 $x-y-a+1=0$.

∵曲线 C_2 的极坐标方程为 $\rho\cos^2\theta+4\cos\theta-\rho=0$，

∴$\rho^2\cos^2\theta+4\rho\cos\theta-\rho^2=0$，

∴$x^2+4x-x^2-y^2=0$，

即曲线 C_2 的直角坐标方程为 $y^2=4x$.

(2)设 A,B 两点所对应的参数分别为 t_1,t_2，

由 $\begin{cases}y^2=4x,\\ x=a+\dfrac{\sqrt{2}t}{2},\\ y=1+\dfrac{\sqrt{2}t}{2},\end{cases}$ 得 $t^2-2\sqrt{2}t+2-8a=0$.

$\Delta=(2\sqrt{2})^2-4(2-8a)>0$，即 $a>0$，

$\therefore\begin{cases}t_1+t_2=2\sqrt{2},\\ t_1\cdot t_2=2-8a,\end{cases}$

根据参数方程的几何意义可知 $|PA|=|t_1|$，$|PB|=|t_2|$，

∴由 $|PA|=2|PB|$ 得 $t_1=2t_2$ 或 $t_1=-2t_2$，

∴当 $t_1=2t_2$ 时，有 $\begin{cases}t_1+t_2=3t_2=2\sqrt{2},\\ t_1t_2=2t_2^2=2-8a,\end{cases}$

解得 $a=\dfrac{1}{36}>0$，符合题意；

当 $t_1=-2t_2$ 时，有 $\begin{cases}t_1+t_2=-t_2=2\sqrt{2},\\ t_1t_2=-2t_2^2=2-8a,\end{cases}$

解得 $a=\dfrac{9}{4}>0$，符合题意.

综上所述，$a=\dfrac{1}{36}$ 或 $a=\dfrac{9}{4}$.

22. **解**：(1)将直线 l 的参数方程 $\begin{cases}x=-1+\dfrac{\sqrt{2}}{2}t,\\ y=-2+\dfrac{\sqrt{2}}{2}t\end{cases}$（$t$ 为参数）化为普通方程为 $y=x-1$，

将 $\rho\sin^2\theta=4a\cos\theta$ 两边都乘以 ρ，得 $\rho^2\sin^2\theta=4a\rho\cos\theta$，

∴曲线 C 的直角坐标方程为 $y^2=4ax$，

联立方程组 $\begin{cases}y=x-1,\\ y^2=4ax\end{cases}$ 消去 x，得 $y^2-4ay-4a=0$.

依题意，知 $\Delta=(-4a)^2+4\times4a=16a^2+16a>0$.

解得 $a<-1$ 或 $a>0$.

∴实数 a 的取值范围是 $(-\infty,-1)\cup(0,+\infty)$.

(2)将直线 l 的参数方程 $\begin{cases}x=-1+\dfrac{\sqrt{2}}{2}t,\\ y=-2+\dfrac{\sqrt{2}}{2}t\end{cases}$（$t$ 为参数）代入曲线 C 的直角坐标方程，得

$\left(-2+\dfrac{\sqrt{2}}{2}t\right)^2=4a\left(-1+\dfrac{\sqrt{2}}{2}t\right)$，

整理，得 $t^2-4\sqrt{2}(a+1)t+8a+8=0$.

设 M,N 对应的参数分别为 t_1,t_2，则

$\begin{cases}t_1+t_2=4\sqrt{2}(a+1),\\ t_1t_2=8a+8=8(a+1),\end{cases}$

又 $|MN|=|t_1-t_2|$，$|PM|=|t_1|$，$|PN|=|t_2|$，

若 $|PM|$，$|MN|$，$|PN|$ 成等比数到，则 $|MN|^2=|PM|\cdot|PN|$，

即 $|t_1-t_2|^2=|t_1||t_2|$，即 $(t_1+t_2)^2=5t_1t_2$，

∴$[4\sqrt{2}(a+1)]^2=5\times8(a+1)$，

解得 $a=\dfrac{1}{4}$.

阶段测试四

1. D ∵$\begin{cases}x=\dfrac{1}{t},\\ y=\dfrac{1}{t}\sqrt{t^2-1}\end{cases}$（$t$ 为参数），∴x 与 y 同号（$t=\pm1$ 除外），

将 $t=\dfrac{1}{x}$ 代入 $y=\dfrac{1}{t}\sqrt{t^2-1}$ 消掉参数 t 得：$x^2+y^2=1(xy\geqslant0,x\neq0)$.

2. D 点 $P\left(2,-\dfrac{5\pi}{3}\right)$ 关于极点的对称点为 $\left(2,\dfrac{4}{3}\pi+2k\pi\right)$（$k\in\mathbf{Z}$）. 当 $k=-1$ 时，得 $\left(2,-\dfrac{2\pi}{3}\right)$，又 $x=2\cos\left(-\dfrac{2\pi}{3}\right)=-1$，$y=2\sin\left(-\dfrac{2\pi}{3}\right)=-\sqrt{3}$.

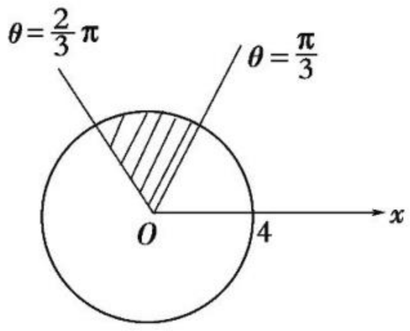
∴直角坐标为 $(-1,-\sqrt{3})$，故选 D.

3. B 参数方程 $\begin{cases}x=1-t\cos30^\circ,\\ y=2+t\sin30^\circ\end{cases}$（$t$ 为参数）可化为标准形式 $\begin{cases}x=1+t\cos150^\circ,\\ y=2+t\sin150^\circ\end{cases}$（$t$ 为参数），它表示过点(1,2)，倾斜角为 150°的直线，又 $\begin{cases}x=1+t\cos30^\circ,\\ y=2-t\sin30^\circ\end{cases}$（$t$ 为参数）过点(1,2)，由 $k=\dfrac{y-2}{x-1}=-\dfrac{\sin30^\circ}{\cos30^\circ}=-\tan30^\circ=\tan150^\circ$，知倾斜角也是 150°，故两直线重合.

4. B 设所求伸缩变换为 $\begin{cases}x'=\lambda x(\lambda>0),\\ y'=\mu y(\mu>0),\end{cases}$ 则 $\begin{cases}\lambda=\dfrac{x'}{x}=\dfrac{3}{2},\\ \mu=\dfrac{y'}{y}=\dfrac{2}{3},\end{cases}$ 所以所求伸缩变换为 $\begin{cases}x'=\dfrac{3}{2}x,\\ y'=\dfrac{2}{3}y,\end{cases}$ 故选 B.

5. B 方程 $\rho=-2\cos\theta$ 化为直角坐标方程为 $(x+1)^2+y^2=1$，方程 $\rho+\dfrac{4}{\rho}=4\sqrt{2}\sin\theta$ 化为直角坐标方程为 $x^2+(y-2\sqrt{2})^2=4$，两圆的圆心距 $d=\sqrt{(0+1)^2+(-2\sqrt{2}-0)^2}=3=2+1$，即等于两圆半径之和，所以两圆外切.

6. B 如图所示，射线 $\theta=\dfrac{\pi}{3}$，$\theta=\dfrac{2\pi}{3}$（$\rho\geqslant0$）和圆 $\rho=4$ 所围成的面积是阴影扇形的面积，该面积 $S=\dfrac{1}{2}\times4^2\times\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{8\pi}{3}$. 故选 B.



关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

7. D　直线 l 的普通方程为 $4(x-1)-3(y-2)=0$，即 $4x-3y+2=0$，点 $(1,0)$ 到直线 l 的距离 $d=\dfrac{|4-0+2|}{\sqrt{4^2+3^2}}=\dfrac{6}{5}$，故选 D.

8. A　设直线的倾斜角为 α，则 $\tan\alpha=\dfrac{2}{3}$，由 $0\leqslant\alpha<\pi$ 知，$\sin\alpha=\dfrac{2}{\sqrt{13}}$，$\cos\alpha=\dfrac{3}{\sqrt{13}}$.

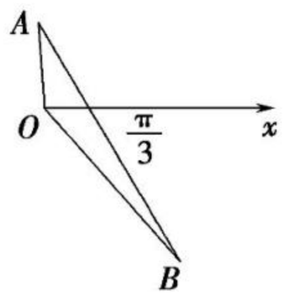
$\therefore$ 直线的参数方程为 $\begin{cases}x=4+t\cos\alpha=4+\dfrac{3}{\sqrt{13}}t,\\ y=3+t\sin\alpha=3+\dfrac{2}{\sqrt{13}}t\end{cases}$（$t$ 为参数），故选 A.

9. C　把 $\begin{cases}x=\sqrt{3}+\sqrt{3}\cos\theta,\\ y=1+\sqrt{3}\sin\theta\end{cases}$ 代入 $y=\dfrac{\sqrt{3}}{3}x+\sqrt{2}$，得 $\sin\left(\theta-\dfrac{\pi}{6}\right)=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，$\because\theta\in[0,2\pi)$，

$\therefore\theta=\dfrac{5\pi}{12}$ 或 $\theta=\dfrac{11\pi}{12}$，由参数的几何意义知直线 AD 与 BD 的倾斜角之和为 $\dfrac{5\pi}{12}+\dfrac{11\pi}{12}=\dfrac{4\pi}{3}$，故选 C.

10. A　解法一：A,B 的位置如图所示，$\angle AOB=\dfrac{\pi}{2}+\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{5\pi}{6}$，

$\therefore S_{\triangle AOB}=\dfrac{1}{2}\cdot1\cdot\sqrt{3}\cdot\sin\dfrac{5\pi}{6}=\dfrac{\sqrt{3}}{4}$，由余弦定理得 $AB^2=1^2+(\sqrt{3})^2-2\cdot1\cdot\sqrt{3}\cos\dfrac{5\pi}{6}=7$，$\therefore AB=\sqrt{7}$，由 $\dfrac{1}{2}AB\cdot r=S_{\triangle AOB}=\dfrac{\sqrt{3}}{4}$，得 $r=\dfrac{\sqrt{21}}{14}$.



解法二：以极点 O 为原点建立直角坐标系，得 $A(0,1)$，$B\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2},-\dfrac{3}{2}\right)$，则直线 AB 的方程为 $y-1=-\dfrac{5}{\sqrt{3}}x$，即 $5x+\sqrt{3}y-\sqrt{3}=0$，圆 $\rho=r$ 的方程为 $x^2+y^2=r^2$，由圆 $\rho=r$ 与 AB 相切，得圆心 $(0,0)$ 到直线 AB 距离 $d=\dfrac{|-\sqrt{3}|}{\sqrt{5^2+(\sqrt{3})^2}}$，$\therefore r=\dfrac{\sqrt{21}}{14}$，故选 A.

11. D　曲线 $\begin{cases}x=m+\dfrac{1}{m},\\ y=m-\dfrac{1}{m}\end{cases}$（$m$ 为参数）的普通方程为 $x^2-y^2=4$，

把直线 $\begin{cases}x=-3+\dfrac{\sqrt{3}}{2}t,\\ y=\dfrac{1}{2}t\end{cases}$（$t$ 为参数）代入 $x^2-y^2=4$，

得 $\left(-3+\dfrac{\sqrt{3}}{2}t\right)^2-\left(\dfrac{1}{2}t\right)^2=4$，

即 $t^2-6\sqrt{3}t+10=0$.

设 A,B 两点对应的参数分别为 t_1,t_2，

则 $t_1+t_2=6\sqrt{3}$，$t_1t_2=10$.

$\therefore|AB|=|t_1-t_2|=\sqrt{(t_1+t_2)^2-4t_1t_2}=\sqrt{(6\sqrt{3})^2-40}=2\sqrt{17}$.

12. B　$\begin{cases}x=2+3\cos\theta,\\ y=-1+3\sin\theta\end{cases}$（$\theta$ 为参数）可化为 $(x-2)^2+(y+1)^2=9$，其中圆心 $(2,-1)$ 到直线 $x-3y+2=0$ 的距离 $d=\dfrac{|2+3+2|}{\sqrt{1^2+3^2}}=\dfrac{7\sqrt{10}}{10}$，而 $3-\dfrac{7\sqrt{10}}{10}<\dfrac{7\sqrt{10}}{10}$，故曲线 C 上到直线 l 的距离为 $\dfrac{7\sqrt{10}}{10}$ 的点有 2 个.

13. $\left(\pi+1,\dfrac{\pi}{2}\right)$

解析：当 $\theta=\dfrac{\pi}{2}$ 时，$\rho=2\times\dfrac{\pi}{2}+1=\pi+1$，$\therefore$ 其交点坐标为 $\left(\pi+1,\dfrac{\pi}{2}\right)$.

14. $\sqrt{14}$

解析：$\begin{cases}x=2-\dfrac{1}{2}t=2-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{2}t,\\ y=-1+\dfrac{1}{2}t=-1+\dfrac{\sqrt{2}}{2}\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{2}t,\end{cases}$ 令 $\dfrac{\sqrt{2}}{2}t=s$，则 $\begin{cases}x=2-\dfrac{\sqrt{2}}{2}s,\\ y=-1+\dfrac{\sqrt{2}}{2}s\end{cases}$（$s$ 为参数）.

将 $\begin{cases}x=2-\dfrac{\sqrt{2}}{2}s,\\ y=-1+\dfrac{\sqrt{2}}{2}s\end{cases}$（$s$ 为参数）代入 $x^2+y^2=4$，得 $s^2-3\sqrt{2}s+1=0$，设 B,C 对应的参数分别为 s_1,s_2，则 $\begin{cases}s_1+s_2=3\sqrt{2},\\ s_1\cdot s_2=1.\end{cases}$

$\therefore|BC|=|s_1-s_2|=\sqrt{(s_1+s_2)^2-4s_1s_2}=\sqrt{(3\sqrt{2})^2-4}=\sqrt{14}$.

15. $\sqrt{5}$

解析：直线 l 的参数方程 $\begin{cases}x=2+t,\\ y=3+t\end{cases}$（$t$ 为参数）化为普通方程为 $y=x+1$，

由 $\rho\sin^2\theta-4\cos\theta=0$，得 $\rho^2\sin^2\theta-4\rho\cos\theta=0$，

化为直角坐标方程为 $y^2-4x=0$，即 $y^2=4x$.

由 $\begin{cases}y=x+1,\\ y^2=4x,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x=1,\\ y=2.\end{cases}$

则直线 l 与曲线 C 交点的直角坐标为 $(1,2)$，故交点的极径 $\rho=\sqrt{5}$.

16. 3

解析：将直线 l 的参数方程 $\begin{cases}x=-3+t,\\ y=\sqrt{3}t\end{cases}$（$t$ 为参数）消去参数 t，化为普通方程为 $\sqrt{3}x-y+3\sqrt{3}=0$，圆 C：$\begin{cases}x=3\cos\theta,\\ y=3\sin\theta\end{cases}$（$\theta$ 为参数）表示以 $(0,0)$ 为圆心，3 为半径的圆，$\therefore$ 圆心到直线 l 的距离 $d=\dfrac{|0-0+3\sqrt{3}|}{\sqrt{(\sqrt{3})^2+(-1)^2}}=\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$，

$\therefore$ 弦长为 $2\sqrt{r^2-d^2}=2\sqrt{9-\dfrac{27}{4}}=3$.

17. **解**：(1) 由题意得，这三个圆的直径都是 2，并且都过原点.

M_1 的极坐标方程：$\rho=2\cos\theta\left(\theta\in\left[0,\dfrac{\pi}{4}\right]\right)$，

M_2 的极坐标方程：$\rho=2\cos\left(\theta-\dfrac{\pi}{2}\right)=2\sin\theta\left(\theta\in\left[\dfrac{\pi}{4},\dfrac{3\pi}{4}\right]\right)$，

M_3 的极坐标方程：$\rho=2\cos(\theta-\pi)=-2\cos\theta\left(\theta\in\left[\dfrac{3\pi}{4},\pi\right]\right)$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

(2)若点 P 在 M_1 上,则 $2\cos\theta=\sqrt{3},\theta\in\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$,解得 $\theta=\frac{\pi}{6}$.

此时点 P 的极坐标为 $\left(\sqrt{3},\frac{\pi}{6}\right)$.

若点 P 在 M_2 上,则 $2\sin\theta=\sqrt{3},\theta\in\left[\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4}\right]$,解得 $\theta=\frac{\pi}{3}$ 或 $\theta=\frac{2\pi}{3}$,

此时点 P 的极坐标为 $\left(\sqrt{3},\frac{\pi}{3}\right)$ 或 $\left(\sqrt{3},\frac{2\pi}{3}\right)$.

若点 P 在 M_3 上,则 $-2\cos\theta=\sqrt{3},\theta\in\left[\frac{3\pi}{4},\pi\right]$,解得 $\theta=\frac{5\pi}{6}$,

此时点 P 的极坐标为 $\left(\sqrt{3},\frac{5\pi}{6}\right)$.

综上所述,点 P 的极坐标为 $\left(\sqrt{3},\frac{\pi}{6}\right)$,$\left(\sqrt{3},\frac{\pi}{3}\right)$,$\left(\sqrt{3},\frac{2\pi}{3}\right)$,$\left(\sqrt{3},\frac{5\pi}{6}\right)$.

18. **解**:(1)∵椭圆 $C:\begin{cases}x=2\cos\varphi,\\y=\sqrt{3}\sin\varphi\end{cases}$($\varphi$ 为参数),化为普通方程为 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$,

∴$F(-1,0)$.

∵直线 $l:\begin{cases}x=m+t\cos\alpha,\\y=t\sin\alpha\end{cases}$($t$ 为参数,$\alpha\neq k\pi,k\in\mathbf{Z}$),化为普通方程为 $y=\tan\alpha(x-m)$.

∵$\alpha\neq k\pi,k\in\mathbf{Z}$,∴$\tan\alpha\neq0$.

∵$0=\tan\alpha(-1-m)$,∴$m=-1$.

(2)将直线的参数方程 $\begin{cases}x=-1+t\cos\alpha,\\y=t\sin\alpha\end{cases}$($t$ 为参数,$\alpha\neq k\pi$,$k\in\mathbf{Z}$)代入椭圆 C 的普通方程 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$,并整理,得 $(3\cos^2\alpha+4\sin^2\alpha)t^2-6t\cos\alpha-9=0$.

设点 A,B 在直线参数方程中对应的参数分别为 t_1,t_2,

则 $|FA|\cdot|FB|=|t_1t_2|$,

即 $\frac{9}{3\cos^2\alpha+4\sin^2\alpha}=\frac{9}{3+\sin^2\alpha}$,

当 $\sin\alpha=\pm1$ 时,$|FA|\cdot|FB|$ 的最小值为 $\frac{9}{4}$.

19. **解**:(1)因为直线 l 的极坐标方程为 $\rho\cos\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}$,即 $\rho\cos\theta+\rho\sin\theta=2$,

所以直线 l 的直角坐标方程为 $x+y-2=0$.

因为 $\begin{cases}x=t\cos\alpha,\\y=\sin\alpha\end{cases}$($\alpha$ 为参数,$t>0$),

所以曲线 C 的普通方程为 $\frac{x^2}{t^2}+y^2=1(t>0)$,

由 $\begin{cases}x+y=2,\\\frac{x^2}{t^2}+y^2=1,\end{cases}$ 消去 x 得,$(1+t^2)y^2-4y+4-t^2=0$,

所以 $\Delta=16-4(1+t^2)(4-t^2)<0$,

解得 $0<t<\sqrt{3}$,故 t 的取值范围为 $(0,\sqrt{3})$.

(2)由(1)知直线 l 的方程为 $x+y-2=0$,

故曲线 C 上的点 $(t\cos\alpha,\sin\alpha)$ 到 l 的距离 $d=\frac{|t\cos\alpha+\sin\alpha-2|}{\sqrt{2}}$,

故 $d_{\max}=\frac{\sqrt{t^2+1}+2}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{6}}{2}+\sqrt{2}$,

解得 $t=\pm\sqrt{2}$.

又 $t>0$,所以 $t=\sqrt{2}$.

20. **解**:(1)由 $x=\frac{1-t^2}{1+t^2}$,得 $t^2=\frac{1-x}{1+x}$,

由 $y=\frac{4t}{1+t^2}$,得 $y^2=\frac{16t^2}{(1+t^2)^2}=\frac{16\cdot\frac{1-x}{1+x}}{\left(1+\frac{1-x}{1+x}\right)^2}=4(1-x)(1+x)=4-4x^2$.

整理得 $x^2+\frac{y^2}{4}=1$.

又 $x=\rho\cos\theta,y=\rho\sin\theta$,

∴直线 l 的直角坐标方程为 $2x+\sqrt{3}y+11=0$.

(2)设 C 上点的坐标为 $(\cos\theta,2\sin\theta)$,

则曲线 C 上的点到直线 l 的距离

$$d=\frac{|2\cos\theta+2\sqrt{3}\sin\theta+11|}{\sqrt{7}}=\frac{\left|4\sin\left(\theta+\frac{\pi}{6}\right)+11\right|}{\sqrt{7}}$$

∴当 $\sin\left(\theta+\frac{\pi}{6}\right)=-1$ 时,d 取最小值,$d_{\min}=\sqrt{7}$.

21. **解**:(1)由 $l:\rho(2\cos\theta-\sin\theta)=6$,得 l 的直角坐标方程为 $2x-y-6=0$.

由题意得 C_2 的直角坐标方程为 $\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right)^2+\left(\frac{y}{2}\right)^2=1$,化为参数方程为 $\begin{cases}x=\sqrt{3}\cos\theta,\\y=2\sin\theta\end{cases}$($\theta$ 为参数).

(2)设点 P 的坐标 $(\sqrt{3}\cos\theta,2\sin\theta)$,

则点 P 到直线 $l:2x-y-6=0$ 的距离为

$$d=\frac{|2\sqrt{3}\cos\theta-2\sin\theta-6|}{\sqrt{5}}=\frac{\left|4\cos\left(\theta+\frac{\pi}{6}\right)-6\right|}{\sqrt{5}},$$

∴当 $\cos\left(\theta+\frac{\pi}{6}\right)=-1$ 时,$d_{\max}=2\sqrt{5}$.

此时点 P 的坐标为 $\left(-\frac{3}{2},1\right)$.

故点 $P\left(-\frac{3}{2},1\right)$ 到直线 l 的距离最大,最大值为 $2\sqrt{5}$.

22. **解**:(1)$\begin{cases}x=1+\sqrt{2}\cos\alpha,\\y=\sqrt{2}\sin\alpha\end{cases}$($\alpha$ 为参数)$\Rightarrow(x-1)^2+y^2=2$,

故曲线 C 的普通方程为 $(x-1)^2+y^2=2$. 直线 l 的直角坐标方程为 $\sqrt{3}y-x+m\Rightarrow y=\frac{\sqrt{3}}{3}(x-m)$.

(2)直线 l 的参数方程可以写为 $\begin{cases}x=m+\frac{\sqrt{3}}{2}t,\\y=\frac{1}{2}t\end{cases}$($t$ 为参数).

设 A,B 两点对应的参数分别为 t_1,t_2,将直线 l 的参数方程代入曲线 C 的普通方程 $(x-1)^2+y^2=2$,可以得到 $\left(m+\frac{\sqrt{3}}{2}t-1\right)^2+\left(\frac{1}{2}t\right)^2=2$,即 $t^2+\sqrt{3}(m-1)t+(m-1)^2-2=0$,

所以 $|PA|\cdot|PB|=|t_1||t_2|=|(m-1)^2-2|=1\Rightarrow|m^2-2m-1|=1\Rightarrow m^2-2m-2=0$ 或 $m^2-2m=0$,

解得 $m=1\pm\sqrt{3}$ 或 $m=0$ 或 $m=2$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

责任编辑 李 莉 马慧芳
美术编辑 李 欣
封面设计 欣 羽

45 分钟
课时作业与单元测试

45FENZHONG KESHIZUOYEYUDANYUANCESHI SHUXUE

丛书科目

语文 数学 英语 物理 化学 生物 历史 地理 思想政治

同学们，你想了解丛书的更多信息吗？详情请登录 http://www.dfjc100.com

※ 各科配有教师用书及教学课件光盘 (word 文档可自主编辑)，英语配有原声磁带 / MP3 光盘。



ISBN 978-7-202-12299-0
9 787202 122990 01>
定价：26.00 元

手机扫一扫
获取配套学习资源

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料