东方杰创®
DONGFANG JIECHUANG
让 学习更快乐，人生更精彩

骄子之路®
the Road to Pride
主　编：邓保沧

45分钟

# 课时作业与单元测试

活页
可拆开使用

教辅资料站

电子教辅　试卷练习
知识总结　备课资源

扫码关注获取更多学习资料

提升＝基础＋能力＋方法

| | |
|---|---|
| 课时作业 | 基础自测·知能提升 |
| 阶段检测 | 梯度练习·评估达标 |
| 答案与解析 | 全解全析·点拨精准 |

## 数学

选修 4-5　RJ·A

河北人民出版社

东方杰创®
DONGFANG JIECHUANG
让 学习更快乐，人生更精彩

骄子之路®
the Road to Pride
主　编：邓保沧

# 45分钟 课时作业与单元测试

活页
可拆开使用

提升＝基础＋能力＋方法
课时作业　基础自测·知能提升
阶段检测　梯度练习·评估达标
答案与解析　全解全析·点拨精准

## 数学

选修4–5　RJ·A

微信公众号
教辅资料站

河北人民出版社
石家庄

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

**图书在版编目（CIP）数据**

45分钟课时作业与单元测试．数学．选修4-5：RJA／邓保沧主编．-- 石家庄：河北人民出版社，2017.7（2019.10重印）

ISBN 978-7-202-12300-3

Ⅰ．①4… Ⅱ．①邓… Ⅲ．①中学数学课－高中－习题集 Ⅳ．①G634

中国版本图书馆CIP数据核字（2017）第198622号

编　　委：李　雅　李　越　张瑞霞
天高云　蒋　敏　金剑飞

| | |
|---|---|
| 书　　名 | 45分钟课时作业与单元测试 数学 选修4-5 RJA |
| 主　　编 | 邓保沧 |
| 责任编辑 | 赵黎黎　刘一苇 |
| 美术编辑 | 李　欣 |
| 封面设计 | 欣　羽 |
| 出版发行 | 河北人民出版社（石家庄市友谊北大街330号） |
| 印　　刷 | 河北伦洋印业有限公司 |
| 开　　本 | 880毫米×1230毫米　1/16 |
| 印　　张 | 5.5 |
| 字　　数 | 176 000 |
| 版　　次 | 2017年7月第1版　2019年10月第3次印刷 |
| 书　　号 | ISBN 978-7-202-12300-3 |
| 定　　价 | 29.00元 |

**版权所有　翻印必究**

微信公众号 教辅资料站

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料



# 目录 CONTENTS

## 第一部分　课时作业


**第一讲　不等式和绝对值不等式** …… 1

一　不等式 …… 1

第 1 课时　不等式的基本性质 …… 1

第 2 课时　基本不等式 …… 3

第 3 课时　三个正数的算术—几何平均不等式 …… 5

二　绝对值不等式 …… 7

第 4 课时　绝对值三角不等式 …… 7

第 5 课时　绝对值不等式的解法 …… 9

阶段评估一 …… 11

**第二讲　证明不等式的基本方法** …… 13

一　比较法 …… 13

第 6 课时　比较法 …… 13

二　综合法与分析法 …… 15

第 7 课时　综合法与分析法 …… 15

三　反证法与放缩法 …… 17

第 8 课时　反证法与放缩法 …… 17

阶段评估二 …… 19

**第三讲　柯西不等式与排序不等式** …… 21

一　二维形式的柯西不等式 …… 21

第 9 课时　二维形式的柯西不等式 …… 21

二　一般形式的柯西不等式 …… 23

第 10 课时　一般形式的柯西不等式 …… 23



微信公众号
教辅资料站

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料



# 目录 CONTENTS


三　排序不等式 …… 25

第 11 课时　排序不等式 …… 25

阶段评估三 …… 27

**第四讲　用数学归纳法证明不等式** …… 29

一　数学归纳法 …… 29

第 12 课时　数学归纳法 …… 29

二　用数学归纳法证明不等式举例 …… 31

第 13 课时　用数学归纳法证明不等式举例 …… 31

阶段评估四 …… 33

阶段评估五 …… 35


## 第二部分　阶段检测


**阶段测试一**（第一讲　不等式和绝对值不等式） …… 37

**阶段测试二**（第二讲　证明不等式的基本方法） …… 41

**阶段测试三**（第三讲　柯西不等式与排序不等式） …… 45

**选修 4—5 综合测评** …… 49


## 第三部分　答案与解析


**答案与解析** …… 54～84


**提示：全书包括课时作业、阶段测试、答案与解析三部分，共计 88 页。**

（根据教师教学情况不同，课时作业和阶段检测部分可在书中作答，也可撕下使用。）


微信公众号
教辅资料站

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

# 第一讲 不等式和绝对值不等式

## 一 不等式

### 第1课时 不等式的基本性质

#### 基础知识梳理

**1. 两个实数的大小比较**

(1) $a>b\Leftrightarrow$ _____;

(2) _____ $\Leftrightarrow a-b=0$;

(3) $a<b\Leftrightarrow$ _____.

**2. 不等式的基本性质**

(1) 如果 $a>b\Leftrightarrow$ _____.

(2) $a>b,b>c\Rightarrow$ _____.

(3) _____ $\Leftrightarrow a+c>b+c$.

(4) $a>b,c>0\Rightarrow$ _____; $a>b,c<0\Rightarrow$ _____.

(5) $a>b>0\Rightarrow$ _____ $(n\in\mathbf{N},n\geqslant 2)$.

(6) _____ $\Rightarrow\sqrt[n]{a}>\sqrt[n]{b}(n\in\mathbf{N},n\geqslant 2)$.

**3. 求差比较法的步骤**

①作差;②变形;③确定符号;④得出结论.

**4. 求商法比较大小**

当 $a>0,b>0$ 时,$a$ 与 $b$ 的大小可以通过求商法比较,其步骤是:

①作商;②变形;③与1比较大小;④得出结论.

#### 题点知识巩固

**知识点一 比较大小**

1. (**2019·河北保定月考**)设 $a,b$ 为不等的正数,且 $M=(a^4+b^4)(a^2+b^2)$,$N=(a^3+b^3)^2$,则有 ( )

A. $M=N$ B. $M<N$

C. $M>N$ D. $M\geqslant N$

2. 试比较 $16^{18}$ 与 $18^{16}$ 的大小.

**知识点二 不等式性质的应用**

3. (**2019·河北衡水期中**)设 $a,b\in\mathbf{R}$,则"$(a-b)\cdot a^2<0$"是"$a<b$"的 ( )

A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件

C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件

4. 若 $a>b>0,c<d<0,e<0$.

求证:(1) $\frac{e}{a-c}>\frac{e}{b-d}$;(2) $\frac{e}{(a-c)^2}>\frac{e}{(b-d)^2}$.

**知识点三 利用不等式的性质求代数式的范围**

5. 设 $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$,$\frac{\pi}{2}<\beta<\pi$,则 $2\alpha-\frac{\beta}{3}$ 的取值范围是 _____;$\sin\alpha+\cos\beta$ 的取值范围是 _____.

6. 已知 $-3<a<b<1$,$-4<c<2$,求 $(a-b)\cdot c$ 的取值范围.

微信公众号 教辅资料站



关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

## 提能达标过关

### 一、选择题

1.(**2019·河南郑州月考**)已知 $t=a+2b$,$s=a+b^2+1$,则 $t$ 和 $s$ 的大小关系中正确的是 (　　)

A. $t>s$　　B. $t\geqslant s$

C. $t<s$　　D. $t\leqslant s$

2. 下列命题正确的是 (　　)

A. $a>b\Rightarrow ac^2>bc^2$

B. $\dfrac{a}{c}>\dfrac{b}{c}\Rightarrow a>b$

C. $\left.\begin{matrix}a^3>b^3,\\ ab>0\end{matrix}\right\}\Rightarrow\dfrac{1}{a}<\dfrac{1}{b}$

D. $\left.\begin{matrix}a^2>b^2,\\ ab>0\end{matrix}\right\}\Rightarrow\dfrac{1}{a}<\dfrac{1}{b}$

3.(**2019·包头四中期末**)设 $a>b>0$,$c<d<0$,则下列不等式中一定成立的是 (　　)

A. $ac>bd$　　B. $\dfrac{a}{d}<\dfrac{b}{c}$

C. $\dfrac{a}{d}>\dfrac{b}{c}$　　D. $ac^2<bd^2$

4.(**2019·全国卷Ⅱ**)若 $a>b$,则 (　　)

A. $\ln(a-b)>0$　　B. $3^a<3^b$

C. $a^3-b^3>0$　　D. $|a|>|b|$

5.(**2019·河北邢台测试**)若 $\log_2 a<0$,$\left(\dfrac{1}{2}\right)^b>1$,则 (　　)

A. $a>1$,$b>0$　　B. $a>1$,$b<0$

C. $0<a<1$,$b>0$　　D. $0<a<1$,$b<0$

### 二、填空题

6. 已知 $a>b>0$,$c>d>0$,则 $\sqrt[3]{\dfrac{a}{d}}$ 与 $\sqrt[3]{\dfrac{b}{c}}$ 的大小关系是_____.

7.(**2019·广东梅州检测**)若 $8<x<10$,$2<y<4$,则 $\dfrac{x}{y}$ 的取值范围是_____.

8. 设甲:$x$ 和 $y$ 满足 $\begin{cases}2<x+y<4,\\ 0<xy<3,\end{cases}$ 乙:$x$ 和 $y$ 满足 $\begin{cases}0<x<1,\\ 2<y<3,\end{cases}$ 那么甲是乙的_____条件.

### 三、解答题

9. 判断下列各命题的真假,并说明理由.

(1)若 $a<b$,$c<0$,则 $\dfrac{c}{a}<\dfrac{c}{b}$;

(2)若 $ac^{-3}>bc^{-3}$,则 $a>b$;

(3)若 $a>b$,且 $k\in\mathbf{N}_+$,则 $a^k>b^k$;

(4)若 $a>b$,$b>c$,则 $a-b>b-c$.

10. 已知 $-\dfrac{1}{2}<a<0$,$A=1+a^2$,$B=1-a^2$,$C=\dfrac{1}{1+a}$,$D=\dfrac{1}{1-a}$.

(1)通过某种“试验”,你能很快地猜测出 $A$,$B$,$C$,$D$ 的大小关系吗?

(2)试证明你的猜测.

微信公众号 教辅资料站



关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

# 第 2 课时　基本不等式

## 基础知识梳理

**1. 重要不等式**

定理 1：如果 $a,b\in\mathbf{R}$，那么 $a^2+b^2\geqslant 2ab$，

当且仅当_____时，等号成立.

**2. 基本不等式**

定理 2：如果 $a,b>0$，那么 $\frac{a+b}{2}\geqslant$_____，

当且仅当 $a=b$ 时，等号成立.

**3. 算术平均与几何平均**

如果 $a,b$ 都是正数，我们把 $\frac{a+b}{2}$ 称为 $a,b$ 的算术平均.

$\sqrt{ab}$ 称为 $a,b$ 的几何平均. 定理 2 称为基本不等式，可表述为：两个正数的_____不小于（即大于或等于）它们的_____.

## 题点知识巩固

### 知识点一　基本不等式

1.（**2019·天津杨村一中月考**）设 $x>0,y>0$ 且 $x+y\leqslant 4$，则下列不等式中恒成立的是　　（　　）

A. $\frac{1}{x+y}\leqslant\frac{1}{4}$　　B. $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\geqslant 1$

C. $\sqrt{xy}\geqslant 2$　　D. $\frac{1}{xy}\geqslant 1$

2.（**2019·河北石家庄二中月考**）下列不等式的证明过程：

①若 $a,b\in\mathbf{R}$，则 $\frac{b}{a}+\frac{a}{b}\geqslant 2\sqrt{\frac{b}{a}\cdot\frac{a}{b}}=2$；

②若 $x,y\in\mathbf{R}$，则 $\lg x+\lg y\geqslant 2\sqrt{xy}$；

③若 $x\in\mathbf{R}$，则 $\left|x+\frac{4}{x}\right|=|x|+\frac{4}{|x|}\geqslant 2\sqrt{|x|\cdot\frac{4}{|x|}}=4$；

④若 $a,b\in\mathbf{R}$，$ab<0$，则 $\frac{b}{a}+\frac{a}{b}=-\left(\frac{-b}{a}+\frac{-a}{b}\right)\leqslant -2\sqrt{\frac{-b}{a}\cdot\frac{-a}{b}}=-2$.

其中正确的序号是_____.

### 知识点二　求函数的最值

3.（**2019·天津卷**）设 $x>0$，$y>0$，$x+2y=5$，则 $\frac{(x+1)(2y+1)}{\sqrt{xy}}$ 的最小值为_____.

4.（1）已知正实数 $a,b$ 满足 $ab=1$，则 $(a+1)(b+2)$ 的最小值为_____；

（2）设 $0<x<\frac{3}{2}$，求函数 $y=4x(3-2x)$ 的最大值.

### 知识点三　证明不等式

5. 已知 $a,b,c\in\mathbf{R}$，求证：

$\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{b^2+c^2}+\sqrt{c^2+a^2}\geqslant\sqrt{2}(a+b+c)$.

### 知识点四　实际应用

6. 某商场预计全年分批购入每台价值 2 000 元的电视机共 3 600 台. 每批都购入 $x$ 台（$x$ 是正整数），且每批均需付运费 400 元. 储存购入的电视机全年所付保管费与每批购入电视机的总价值（不含运费）成正比. 若每批购入 400 台，则全年需用去运输和保管费用 43 600 元. 现在全年只有 24 000 元资金可以用于支付这笔费用. 在资金不超限额的前提下，怎样恰当安排每批进货的数量？

微信公众号 教辅资料站



关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

## 提能达标过关

### 一、选择题

1. 下列各式中，最小值等于 2 的是 （ ）

A. $\frac{x}{y}+\frac{y}{x}$　　B. $\frac{x^2+5}{\sqrt{x^2+4}}$

C. $\tan\theta+\frac{1}{\tan\theta}$　　D. $2^x+2^{-x}$

2. 下列说法正确的是 （ ）

A. 若 $\frac{1}{a}<1$，则 $a>1$

B. 若 $y=x+\frac{1}{x}$，则 $y$ 的最小值为 2

C. $y=3\sin(x+1)$ 是周期函数

D. 平面非零的向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$，满足 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}$，则 $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{c}$

3. **(2019·河北邢台测试)** 设正实数 $x,y$ 满足 $x+y=1$，则 $\frac{1}{x}+\frac{4x}{y}$ 的最小值为 （ ）

A. 4　　B. 5

C. 6　　D. $\frac{16}{3}$

4. 已知 $x,y$ 均为正数，且满足 $\frac{x}{3}+\frac{y}{4}=1$，则 $xy$ 的最大值为 （ ）

A. $2\sqrt{3}$　　B. 3

C. 12　　D. $\sqrt{3}$

5. 圆 $x^2+y^2+4x-2y-1=0$ 上存在两点关于直线 $ax-2by+2=0(a>0,b>0)$ 对称，则 $\frac{1}{a}+\frac{4}{b}$ 的最小值为 （ ）

A. 8　　B. 9

C. 16　　D. 18

### 二、填空题

6. **(2019·浙江杭高期末)** 已知 $a,b\in\mathbf{R}$，且 $a>b>0$，$a+b=1$，则 $a^2+2b^2$ 的最小值为_____，$\frac{4}{a-b}+\frac{1}{2b}$ 的最小值为_____.

7. 若对任意实数 $x>0$，$\frac{x}{x^2+3x+1}\leqslant a$ 恒成立，则 $a$ 的取值范围是_____.

8. **(2019·天津静海区四校联考)** 已知正实数 $a,b,c$ 满足 $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=1$，$\frac{1}{a+b}+\frac{1}{c}=1$，则 $c$ 的取值范围是_____.

### 三、解答题

9. **(2019·上海长宁检测)** 设向量 $\overrightarrow{OA}=(1,-2)$，$\overrightarrow{OB}=(a,-1)$，$\overrightarrow{OC}=(-b,0)$，其中 $O$ 为坐标原点，$a>0,b>0$，若 $A,B,C$ 三点共线，求 $\frac{1}{a}+\frac{2}{b}$ 的最小值.

10. 某国际化妆品生产企业为了占有更多的市场份额，拟在 2016 年期间进行一系列促销活动，经过市场调查和测算，化妆品的年销量 $x$(万件)与年促销费 $t$(万元)之间满足 $3-x$ 与 $t+1$ 成反比例的关系，如果不搞促销活动，化妆品的年销量只能是 1 万件，已知 2016 年生产化妆品的设备折旧、维修等固定费用为 3 万元，每生产 1 万件化妆品需要投入 32 万元的生产费用，若将每件化妆品的售价定为其生产成本的 150%与平均每件促销费的一半之和，则当年生产的化妆品正好能销完.

(1)将 2016 年的利润 $y$(万元)表示为促销费 $t$(万元)的函数；

(2)该企业 2016 年的促销费投入多少万元时，企业的年利润最大？

微信公众号 教辅资料站



关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

# 第3课时　三个正数的算术—几何平均不等式

## 基础知识梳理

定理3：如果 $a,b,c\in\mathbf{R}_+$，那么 $\frac{a+b+c}{3}\geqslant$ _____，当且仅当 $a=b=c$ 时，等号成立.

定理3的推广，一般形式的平均值不等式：对于 $n$ 个正数 $a_1,a_2,\cdots,a_n$，它们的算术平均不小于它们的几何平均，即 $\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}\geqslant$ _____，当且仅当 $a_1=a_2=\cdots=a_n$ 时，等号成立.

上述不等式称为平均值不等式，或简称 _____.

## 题点知识巩固

### 知识点一　求函数的最值

1. 已知 $x$ 为正数，下列求最值的过程正确的是　(　)

A. $y=x^2+2x+\frac{4}{x^3}\geqslant 3\sqrt[3]{x^2\cdot 2x\cdot\frac{4}{x^3}}=6$，$\therefore y_{\min}=6$

B. $y=2+x+\frac{1}{x}\geqslant 3\sqrt[3]{2\cdot x\cdot\frac{1}{x}}=3\sqrt[3]{2}$，$\therefore y_{\min}=3\sqrt[3]{2}$

C. $y=2+x+\frac{1}{x}\geqslant 4$，$\therefore y_{\min}=4$

D. $y=x(1-x)(1-2x)\leqslant\frac{1}{3}\left[\frac{3x+(1-x)+(1-2x)}{3}\right]^3=\frac{8}{81}$，$\therefore y_{\max}=\frac{8}{81}$

2. (**2019·安徽合肥高二检测**)若实数 $x,y$ 满足 $xy>0$，且 $x^2y=2$，则 $xy+x^2$ 的最小值是　(　)

A. 1　　B. 2

C. 3　　D. 4

### 知识点二　证明不等式

3. (**2019·全国卷Ⅰ**)已知 $a,b,c$ 为正数，且满足 $abc=1$，证明：

(1) $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\leqslant a^2+b^2+c^2$；

(2) $(a+b)^3+(b+c)^3+(c+a)^3\geqslant 24$.

4. 已知 $a,b,c>0$，求证：$(a+b+c)(ab+bc+ca)\geqslant 9abc$.

### 知识点三　实际问题中的最值

5. 用一张钢板制作一个容积为 4 $m^3$ 的无盖长方体水箱，可用的长方形钢板有四种不同规格(长×宽的尺寸如各选项所示，单位：m)．若既要够用，又要所剩最少，则应选择钢板的规格是　(　)

A. 2×5　　B. 2×5.5

C. 2×6.1　　D. 3×5

6. 已知球的半径为 $R$，球内接圆柱的半径为 $r$，高为 $h$，则 $r$ 与 $h$ 为何值时，球内接圆柱的体积最大？

## 提能达标过关

### 一、选择题

1. (**2019·河北衡水期中**)已知 $x+2y+3z=6$，则 $2^x+4^y+8^z$ 的最小值为　(　)

A. $3\sqrt[3]{6}$　　B. 2

C. 12　　D. $12\sqrt[3]{5}$

2. 设 $a>0,b>0$，且 $a+b=3$，则 $ab^2$ 的最大值为　(　)

A. 2　　B. 3

C. 4　　D. 6

3. 若 $x>0$，则 $6x+\frac{9}{x^2}$ 的最小值是　(　)

A. $9\sqrt[3]{3}$　　B. $3\sqrt[3]{36}$

C. 13　　D. 不存在

4. 若 $a>b>0$，则 $a+\frac{1}{b(a-b)}$ 的最小值为　(　)

A. 3　　B. 4

C. 6　　D. $3\sqrt{3}$

微信公众号 教辅资料站



关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

5.(**2019·山东潍坊检测**)已知 $x\in\mathbf{R}_+$,有不等式:$x+\frac{1}{x}\geqslant 2\sqrt{x\cdot\frac{1}{x}}=2$,$x+\frac{4}{x^2}=\frac{x}{2}+\frac{x}{2}+\frac{4}{x^2}\geqslant 3\sqrt[3]{\frac{x}{2}\cdot\frac{x}{2}\cdot\frac{4}{x^2}}=3$,….启发我们可以推广结论为:$x+\frac{a}{x^n}\geqslant n+1(n\in\mathbf{N}_+)$,则 $a$ 的值为 (　　)

A. $n^n$　　B. $2^n$

C. $n^2$　　D. $2^{n+1}$

## 二、填空题

6. 若 $x>0$,$y>0$,且 $xy=1$,则 $\left(\frac{x}{y}+y\right)\left(\frac{y}{x}+x\right)$ 的最小值是_____.

7. 函数 $y=4\sin^2x\cdot\cos x$ 的最大值为_____,最小值为_____.

8.(**2019·江苏无锡模拟**)已知 $a>0$,$b>0$,$c>0$,且 $a+b+c=1$,对于下列不等式:

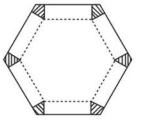
①$abc\leqslant\frac{1}{27}$;②$\frac{1}{abc}\geqslant 27$;③$a^2+b^2+c^2\geqslant\frac{1}{3}$.其中正确不等式的序号是_____.

## 三、解答题

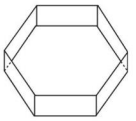
9. 已知 $a$,$b$,$c$ 均为正实数,证明:

$a^2+b^2+c^2+\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)^2\geqslant 6\sqrt{3}$,并确定 $a$,$b$,$c$ 为何值时,等号成立.

10.(**2019·河北唐山高二期中**)如图(1)所示,将边长为 1 的正六边形铁皮的六个角各切去一个全等的四边形,再沿虚线折起,做成一个无盖的正六棱柱容器,如图(2)所示,求这个正六棱柱容器容积的最大值.



(1)



(2)

微信公众号 教辅资料站



关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

# 二　绝对值不等式

## 第4课时　绝对值三角不等式

### 基础知识梳理

**1. 绝对值的几何意义**

(1)实数 $a$ 的绝对值 $|a|$ 表示数轴上坐标为 $a$ 的点 $A$ 到_____的距离.

(2)对于任意两个实数 $a,b$,设它们在数轴上的对应点分别为 $A,B$,那么 $|a-b|$ 的几何意义是数轴上 $A,B$ 两点之间的_____,即线段 $AB$ 的_____.

**2. 绝对值三角不等式**

(1)定理1:如果 $a,b$ 是实数,则 $|a+b|\leqslant|a|+|b|$,当且仅当_____时,等号成立.

(2)定理2:如果 $a,b,c$ 是实数,那么 $|a-c|\leqslant|a-b|+|b-c|$,当且仅当_____时,等号成立.

### 题点知识巩固

**知识点一　与绝对值相关命题的判断**

1. 若实数 $a,b,c$ 成公差不为0的等差数列,则下列不等式不成立的是(　　)

A. $\left|b-a+\dfrac{1}{c-b}\right|\geqslant 2$

B. $ab+bc+ca\geqslant a^2+b^2+c^2$

C. $b^2\geqslant ac$

D. $|b|-|a|\leqslant|c|-|b|$

2. **(2019·河北衡水期中)** 设 $ab>0$,下面四个不等式中,正确的是(　　)

①$|a+b|>|a|$　②$|a+b|<|b|$　③$|a+b|<|a-b|$　④$|a+b|>|a|-|b|$

A. ①和②　　B. ①和③

C. ①和④　　D. ②和④

**知识点二　利用绝对值不等式求最值或范围**

3. **(2019·山东潍坊检测)** 已知 $f(x)=\left|x+\dfrac{1}{x}-a\right|+\left|x-\dfrac{1}{x}-a\right|+2x-2a(x>0)$ 的最小值为 $\dfrac{3}{2}$,则实数 $a=$_____.

4. 已知函数 $f(x)=\left|\dfrac{1}{2}x\right|-\left|\dfrac{1}{2}x-m\right|$ 的最大值为4.

(1)求实数 $m$ 的值;

(2)若 $m>0,0<x<\dfrac{m}{2}$,求 $\dfrac{2}{|x|}+\dfrac{2}{|x-2|}$ 的最小值.

**知识点三　绝对值不等式的证明**

5. 下列四个不等式:

①$\dfrac{1}{\lg x}+\lg x\geqslant 2(x>1)$;

②$|a-b|<|a|+|b|$;

③$\left|\dfrac{b}{a}+\dfrac{a}{b}\right|\geqslant 2(ab\neq 0)$;

④$|x-1|+|x-2|\geqslant 1$.

其中恒成立的是_____(把你认为正确的序号都填上).

6. **(2019·安徽六安市高二二阶测试)** 设函数 $f(x)=|x+3|+|x-2|$ 的最小值为 $m$.

(1)求不等式 $|2x-1|+x<m$ 的解集;

(2)已知 $|a|<\dfrac{m}{5},|b|<\dfrac{m}{5}$,证明:$|ab-1|>|a-b|$.

### 提能达标过关

**一、选择题**

1. **(2018·北京一零一中学高三模拟)** 设 $a,b\in\mathbf{R}$,则"$a>b$"是"$a|a|>b|b|$"的(　　)

A. 充分不必要条件

B. 必要不充分条件

C. 充要条件

D. 既不充分又不必要条件

2. 设 $A,\varepsilon>0,|x-a|<\dfrac{\varepsilon}{2},|y-b|<\dfrac{\varepsilon}{2},|b|\leqslant A,|x|\leqslant A$,则成立的是(　　)

A. $|xy-ab|<A\varepsilon$　　B. $|xy-ab|>A\varepsilon$

C. $|xy-ab|<A$　　D. $|xy-ab|>\varepsilon$

3. **(2019·湖南长郡中学高二期末)** 若关于 $x$ 的不等式 $|x-1|+|x+m|>5$ 的解集为 $\mathbf{R}$,则实数 $m$ 的取值范围是(　　)

A. $(-\infty,-6)\cup(4,+\infty)$

B. $(-\infty,-4)\cup(6,+\infty)$

C. $(-6,4)$

D. $[-4,6]$

微信公众号 教辅资料站



关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

4. 若 $\alpha\in\left(\pi,\frac{5\pi}{4}\right)$，$M=|\sin\alpha|$，$N=|\cos\alpha|$，$P=\frac{1}{2}|\sin\alpha+\cos\alpha|$，$Q=\sqrt{\frac{1}{2}\sin 2\alpha}$，则它们之间的大小关系为 （ ）

A. $M>N>P>Q$　　B. $M>P>N>Q$

C. $M>P>Q>N$　　D. $N>P>Q>M$

5.（**2019·河南师大附中月考**）若不等式 $|2a-1|\leqslant\left|x+\frac{1}{x}\right|$ 对一切非零实数 $x$ 恒成立，则实数 $a$ 的取值范围是 （ ）

A. $[-1,2]$　　B. $[1,2]$

C. $\left[-\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right]$　　D. $\left[0,\frac{3}{2}\right]$

## 二、填空题

6.（**2019·河北黄骅中学月考**）若不等式 $|x-3|+|x+1|>a$ 恒成立，则 $a$ 的取值范围为_____.

7. 不等式 $\frac{|a+b|}{|a|-|b|}\geqslant 1$ 成立的充要条件是_____.

8. 已知 $p,q,x\in\mathbf{R}$，且 $pq\geqslant 0$，$x\neq 0$，则 $\left|px+\frac{q}{x}\right|$ 与 $2\sqrt{pq}$ 的大小关系是_____.

## 三、解答题

9.（**2019·云南大理一模**）已知函数 $f(x)=|x|+|x-3|$.

(1)解关于 $x$ 的不等式 $f(x)-5\geqslant x$；

(2)设 $m,n\in\{y|y=f(x)\}$，试比较 $mn+4$ 与 $2(m+n)$ 的大小.

10. 设 $a,b\in\mathbf{R}$，且 $|a+b+1|\leqslant 1$，$|a+2b+4|\leqslant 4$，求 $|a|+|b|$ 的最大值.

微信公众号 教辅资料站



关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

# 第5课时　绝对值不等式的解法

## 基础知识梳理

**1. 简单绝对值不等式的解法**

(1) $|x|<a \Leftrightarrow \begin{cases} _____, a>0, \\ \text{无解}, a\leqslant 0. \end{cases}$

(2) $|x|>a \Leftrightarrow \begin{cases} _____, a>0, \\ x\neq 0, a=0, \\ x\in \mathbf{R}, a<0. \end{cases}$

**2. $|ax+b|\leqslant c(c\geqslant 0)$，$|ax+b|\geqslant c(c>0)$型不等式的解法**

(1) $|ax+b|\leqslant c(c>0) \Leftrightarrow$ _____.

(2) $|ax+b|\geqslant c(c>0) \Leftrightarrow$ _____.

**3. $|x-a|+|x-b|\geqslant c$ 或 $|x-a|+|x-b|\leqslant c$ 型不等式的解法**

求解这类不等式，主要方法有如下三种：

(1)利用绝对值的几何意义，借助数轴求解；

(2)令绝对值符号内的式子为零，找出零点，这些零点把数轴分成几个区间，分区间去掉绝对值，转化为多组不等式组求解，最后取这些解集的并集为原不等式的解集；

(3)构造函数利用函数的图象求解.

求解这类不等式时，可根据不等式的特点而适当选用不同的方法求解.

## 题点知识巩固

### 知识点一　简单绝对值不等式的解法

1. 已知函数 $f(x)=e^{|x|}+\cos x$，若 $f(2x-1)\geqslant f(x)$，则 $x$ 的取值范围为 (　　)

A. $\left(-\infty,\frac{1}{3}\right]\cup[1,+\infty)$

B. $\left[\frac{1}{3},1\right]$

C. $\left(-\infty,\frac{1}{2}\right]$

D. $\left[\frac{1}{2},+\infty\right)$

2. **(2019·南宁二中、柳州中学联考)** 若不等式 $|kx-4|\leqslant 2$ 的解集为 $\{x|1\leqslant x\leqslant 3\}$，则实数 $k=$ _____.

### 知识点二　含多个绝对值的不等式的解法

3. 不等式 $\frac{|x+1|}{|x-1|}<1$ 的解集为 (　　)

A. $\{x|0<x<1\}\cup\{x|x>1\}$

B. $\{x|0<x<1\}$

C. $\{x|-1<x<0\}$

D. $\{x|x<0\}$

4. **(2019·银川二中期中)** 已知函数 $f(x)=|2x+1|+|x-2|$.

(1)画出函数 $f(x)$ 的图象；

(2)求不等式 $f(x)<3$ 的解集.

### 知识点三　含参数的绝对值不等式的解法

5. 若存在实数 $x$ 满足 $|x-3|+|x-m|<5$，则实数 $m$ 的取值范围是_____.

6. **(2019·山东武城期中)** 设函数 $f(x)=|2x+3|+|x-1|$.

(1)解不等式 $f(x)>4$；

(2)若存在 $x_0\in\left[-\frac{3}{2},1\right]$，使不等式 $a+1>f(x_0)$ 成立，求实数 $a$ 的取值范围.

## 提能达标过关

**一、选择题**

1. 不等式 $|x-1|<1$ 的解集为 (　　)

A. $(-\infty,2)$

B. $(0,2)$

C. $(-1,2)$

D. $(-\infty,0)\cup(2,+\infty)$

2. "$|x|>0$"是"$x-1>e^2$"的 (　　)

A. 充分不必要条件

B. 必要不充分条件

C. 充要条件

D. 既不充分也不必要条件

3. 已知 $a\in\mathbf{R}$，则"$a<2$"是"$|x-2|+|x|>a$ 恒成立"的 (　　)

A. 充分不必要条件

B. 必要不充分条件

C. 充要条件

D. 既不充分也不必要条件

微信公众号 教辅资料站



关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

4. 若关于 $x$ 的不等式 $|x-1|+|x-2|>a^2+a+1(x\in\mathbf{R})$ 恒成立，则实数 $a$ 的取值范围是 （ ）

A. $(0,1)$

B. $(-\infty,-1)\cup(0,+\infty)$

C. $(-\infty,-1)$

D. $(-1,0)$

5. **(2019·河北保定月考)** 若 $a>0$，使不等式 $|x-4|+|x-3|<a$ 在 $\mathbf{R}$ 上的解集不是空集的 $a$ 的取值范围是 （ ）

A. $0<a<1$　　B. $a=1$

C. $a\geqslant 1$　　D. $a>1$

## 二、填空题

6. **(2019·云南玉溪一中月考)** 不等式 $|x+1|-2|x-1|>0$ 的解集为_____.

7. 不等式 $(1+x)(1-|x|)>0$ 的解集为_____.

8. 已知 $a\in\mathbf{R}$，若关于 $x$ 的方程 $x^2+x+\left|a-\frac{1}{4}\right|+|a|=0$ 有实根，则 $a$ 的取值范围是_____.

## 三、解答题

9. **(2019·全国卷Ⅱ)** 已知 $f(x)=|x-a|x+|x-2|\cdot(x-a)$.

(1) 当 $a=1$ 时，求不等式 $f(x)<0$ 的解集；

(2) 若 $x\in(-\infty,1)$ 时，$f(x)<0$，求 $a$ 的取值范围.

10. 已知 $f(x)=\left|2x-\frac{3}{4}\right|+\left|2x+\frac{5}{4}\right|$.

(1) 关于 $x$ 的不等式 $f(x)\geqslant a^2-a$ 恒成立，求实数 $a$ 的取值范围；

(2) 设 $m,n\in(0,+\infty)$，且 $m+n=1$，求证：$\sqrt{2m+1}+\sqrt{2n+1}\leqslant 2\sqrt{f(x)}$.

微信公众号 教辅资料站



关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

# 阶段评估一

（时间：60 分钟，满分：100 分）

## 一、选择题（每小题 5 分，共 30 分）

1. 已知 $a+b>0$，$b<0$，那么 $a$，$b$，$-a$，$-b$ 的大小关系是（　　）

A. $a>b>-b>-a$　　B. $a>-b>-a>b$

C. $a>-b>b>-a$　　D. $a>b>-a>-b$

2. 不等式 $2<|2x+1|<3$ 的解集为（　　）

A. $(0,2)$

B. $(-2,0)\cup(2,4)$

C. $(-4,0)$

D. $\left(\frac{1}{2},1\right)\cup\left(-2,-\frac{3}{2}\right)$

3. （**2019 · 天津卷**）设 $x\in\mathbf{R}$，则“$x^2-5x<0$”是“$|x-1|<1$”的（　　）

A. 充分不必要条件　　B. 必要不充分条件

C. 充要条件　　D. 既不充分也不必要条件

4. $\frac{|2x-1|-2}{|x+3|}>0$ 的解集为（　　）

A. $\left\{x\middle|x>\frac{3}{2}\text{或}x<-\frac{1}{2}\right\}$

B. $\left\{x\middle|x>\frac{3}{2}\text{或}x<-\frac{1}{2}\text{且}x\neq-3\right\}$

C. $\left\{x\middle|-\frac{1}{2}<x<\frac{3}{2}\right\}$

D. $\{x|x\in\mathbf{R}\text{且}x\neq-3\}$

5. 函数 $y=4x-\frac{9}{2-4x}\left(x>\frac{1}{2}\right)$ 的最小值是（　　）

A. 8　　B. 6

C. 4　　D. 9

6. （**2019 · 河北衡水期中**）若 $\frac{1}{a}<\frac{1}{b}<0$，给出下列不等式：①$a+b<ab$；②$|a|>|b|$；③$a<b$；④$\frac{b}{a}+\frac{a}{b}>2$. 其中正确的有（　　）

A. 1 个　　B. 2 个

C. 3 个　　D. 4 个

## 二、填空题（每小题 5 分，共 20 分）

7. （**2019 · 安徽亳州一中期中**）不等式 $|3-x|+|x-7|\leqslant 8$ 的解集为_____.

8. （**2019 · 辽宁德才期中**）若关于 $x$ 的不等式 $|2x-a|+|x-1|\geqslant 5-x$ 在 $\mathbf{R}$ 上恒成立，则实数 $a$ 的取值范围为_____.

9. 已知 $x>0$，$y>0$，且 $\frac{2}{x}+\frac{1}{y}=1$，若 $x+2y>m^2+2m$ 恒成立，则实数 $m$ 的取值范围是_____.

10. 若函数 $f(x)=\frac{9^x+m\cdot 3^x+1}{9^x+3^x+1}$，若对任意不同的实数 $x_1$，$x_2$，$x_3$，不等式 $f(x_1)+f(x_2)>f(x_3)$ 恒成立，则实数 $m$ 的取值范围为_____.

## 三、解答题（共 50 分）

11. （12 分）求函数 $f(x)=\frac{-2x^2+x-3}{x}(x>0)$ 的最大值及此时 $x$ 的值.

12. （12 分）（**2019 · 银川二中期中**）（1）设函数 $f(x)=|x-1|-2|x+1|$ 的最大值为 $m$，求 $m$；

（2）已知 $a>0$，$b>0$，$c>0$，函数 $f(x)=|x+a|+|x-b|+c$ 的最小值为 4，求 $a+b+c$ 的值.

微信公众号 教辅资料站



关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

13.(12 分)设 $f(x)=|2x-1|+|1-x|$.

(1)解不等式 $f(x)\leqslant 3x+4$;

(2)对任意的 $x$,不等式 $f(x)\geqslant(m^2-3m+3)\cdot|x|$ 恒成立,求实数 $m$ 的取值范围.

14.(14 分)(**2019·福建莆田模拟**)设函数 $f(x)=\left|x+\frac{1}{2}\right|-\left|x-\frac{3}{2}\right|$.

(1)求函数 $f(x)$ 的值域;

(2)若函数 $f(x)$ 的最大值为 $m$,且实数 $a,b,c$ 满足 $a^2+b^2+c^2=m^2$,求证:$\frac{1}{a^2+1}+\frac{1}{b^2+3}+\frac{1}{c^2+4}\geqslant\frac{3}{4}$.

微信公众号
教辅资料站



关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

# 第二讲 证明不等式的基本方法

## 一 比较法

### 第6课时 比较法

#### 基础知识梳理

**1. 作差法**

作差法的理论依据是：$a-b>0\Rightarrow$_____；$a-b=0\Rightarrow$_____；$a-b<0\Rightarrow$_____. 其一般步骤是“作差→变形→_____→得出结论”.

**2. 作商法**

若 $a$ 和 $b$ 都是正数，则可以通过下面的方法确定 $a$ 与 $b$ 的大小关系：

$\frac{a}{b}>1\Rightarrow$_____；$\frac{a}{b}=1\Rightarrow$_____；$\frac{a}{b}<1\Rightarrow$_____. 其一般步骤是“作商→变形→_____→得出结论”.

#### 题点知识巩固

**知识点一 作差法证明不等式**

1. 设 $0<b<a<1$，则下列不等式成立的是 (　　)

A. $ab<b^2<1$　　B. $\log_{\frac{1}{2}}b<\log_{\frac{1}{2}}a<0$

C. $2^b<2^a<2$　　D. $a^2<ab<1$

2. (**2019·河南洛阳统考**)设 $x,y$ 均为正数，且 $x>y$，求证：$x+\frac{4}{x^2-2xy+y^2}\geqslant y+3$.

**知识点二 作商法证明不等式**

3. 比较大小：$\log_2\frac{1}{3}$_____(填“$<$”“$=$”或“$>$”)$\log_3\frac{1}{2}$.

4. (**2019·山东威海检测**)已知 $a>2$，求证：$\log_a(a-1)<\log_{(a+1)}a$.

**知识点三 用比较法证明不等式**

5. 设 $a>b>0$，$x=\sqrt{a+b}-\sqrt{a}$，$y=\sqrt{a}-\sqrt{a-b}$，则 $x$ 与 $y$ 的大小关系是_____.

6. 已知 $a>0,a\neq1$，$P=\log_a(1+a^3)$，$Q=\log_a(1+a^2)$，试比较 $P,Q$ 的大小.

#### 提能达标过关

**一、选择题**

1. $\sqrt{m-1}$与 $m$ 的大小关系是 (　　)

A. $\sqrt{m-1}>m$　　B. $\sqrt{m-1}<m$

C. $\sqrt{m-1}=m$　　D. 不确定

2. 设 $a>0,b>0$，下列不等式中不正确的是 (　　)

A. $a^2+b^2\geqslant2ab$　　B. $\frac{b}{a}+\frac{a}{b}\geqslant2$

C. $\frac{b^2}{a}+\frac{a^2}{b}\geqslant a+b$　　D. $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\leqslant\frac{1}{a+b}$

3. 在等比数列 $\{a_n\}$ 和等差数列 $\{b_n\}$ 中，$a_1=b_1>0$，$a_3=b_3>0$，$a_1\neq a_3$，则 $a_5$ 与 $b_5$ 的大小关系为 (　　)

A. $a_5>b_5$　　B. $a_5<b_5$

C. $a_5=b_5$　　D. 不确定

4. (**2019·安徽合肥一中月考**)已知 $a,b$ 都是正实数，则下列关系式成立的是 (　　)

A. $a^ab^b=a^bb^a$　　B. $a^ab^b\geqslant a^bb^a$

C. $a^ab^b<a^bb^a$　　D. $a^ab^b\leqslant a^bb^a$

5. 若 $a,b$ 为不相等的正数，则 $(ab^k+a^kb)-(a^{k+1}+b^{k+1})$ $(k\in\mathbf{N}^*)$ 的符号 (　　)

A. 恒正　　B. 恒负

C. 与 $k$ 的奇偶性有关　　D. 与 $a,b$ 大小无关

**二、填空题**

6. 已知实数 $a,b,c$ 满足 $b+c=6-4a+3a^2$，$c-b=4-4a+a^2$，则 $a,b,c$ 的大小关系是_____.

7. 设 $A=\frac{1}{2a}+\frac{1}{2b}$，$B=\frac{2}{a+b}$ $(a>0,b>0)$，则 $A,B$ 的大小关系是_____.



关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

8. 设 $m=\frac{|a|+|b|}{|a+b|}$，$n=\frac{|a-b|}{||a|-|b||}$，那么它们的大小关系是 $m$ _____ $n$.

**三、解答题**

9. (**2019·四川资阳期中**)若 $0<x<1$，证明：$|\log_a(1-x)|>|\log_a(1+x)|$($a>0$ 且 $a\neq1$).

10. (**2019·湖南长郡中学模拟**)已知函数 $f(x)=|x-1|$，关于 $x$ 的不等式 $f(x)<3-|2x+1|$ 的解集记为 $A$.

(1)求 $A$；

(2)已知 $a,b\in A$，求证：$f(ab)>f(a)-f(b)$.

微信公众号
教辅资料站



关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

# 二　综合法与分析法

## 第7课时　综合法与分析法

### 基础知识梳理

**1. 综合法**

从已知条件出发，利用定义、公理、定理、性质等，经过一系列的推理、论证而得出命题成立，这种证明方法叫做_____，又叫_____或_____.

**2. 分析法**

证明命题时，我们常常从要证的结论出发，逐步寻求使它成立的充分条件，直至所需条件为已知条件或一个明显成立的事实（定义、公理或已证明过的定理、性质等），从而得出要证的命题成立，这种证明方法叫做_____.这是一种_____的思考和证明方法.

### 题点知识巩固

**知识点一　用综合法证明不等式**

1. 设$\frac{1}{3}<\left(\frac{1}{3}\right)^b<\left(\frac{1}{3}\right)^a<1$，则　（　）

A. $a^a<a^b<b^a$　　B. $a^a<b^a<a^b$

C. $a^b<a^a<b^a$　　D. $a^b<b^a<a^a$

2. **（2019·湖南长沙期中）**设$a>0,b>0$，且$a^2b+ab^2=2$，求证：

(1)$a^3+b^3\geqslant 2$；

(2)$(a+b)(a^5+b^5)\geqslant 4$.

**知识点二　用分析法证明不等式**

3. 若$P=\sqrt{a}+\sqrt{a+7}$，$Q=\sqrt{a+3}+\sqrt{a+4}(a\geqslant 0)$，则$P,Q$的大小关系是　（　）

A. $P>Q$　　B. $P=Q$

C. $P<Q$　　D. 由$a$的取值确定

4. **（2019·天津南开区质量检测）**已知$a>0$，用分析法证明：$\sqrt{a^2+\frac{1}{a^2}}-\sqrt{2}\geqslant a+\frac{1}{a}-2$.

**知识点三　用分析综合法证明不等式**

5. 下列不等式中成立的个数为　（　）

①$\sqrt{(a^2+b^2)(c^2+d^2)}\geqslant ac+bd$；

②$\sqrt{(a^2+b^2)(c^2+d^2)}\geqslant -(ac+bd)$；

③$-(ac+bd)\leqslant\sqrt{(a^2+b^2)(c^2+d^2)}\leqslant ac+bd$；

④$\sqrt{(a^2+b^2)(c^2+d^2)}\geqslant|ac+bd|$.

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

6. 已知$a>b>c$，且$a+b+c=0$.求证：$\frac{\sqrt{b^2-ac}}{a}<\sqrt{3}$.

### 提能达标过关

**一、选择题**

1. **（2019·陕西黄陵高二期末）**分析法是从要证明的结论出发，逐步寻求使结论成立的　（　）

A. 充分条件　　B. 必要条件

C. 充要条件　　D. 等价条件

2. 已知$a,b,c$满足$c<b<a$且$ac<0$，则下列选项中一定成立的是　（　）

A. $ab>ac$　　B. $c(b-a)<0$

C. $cb^2<ab^2$　　D. $ac(a-c)>0$

3. 设$x_1,x_2$是方程$x^2+px+4=0$两个不相等的实数根，则　（　）

A. $|x_1|>2$且$|x_2|>2$

B. $|x_1+x_2|>4$

C. $|x_1+x_2|<4$

D. $|x_1|=4$且$|x_2|=1$

4. **（2019·湖南邵东一中月考）**要证：$a^2+b^2-1-a^2b^2\leqslant 0$，只要证明　（　）

A. $2ab-1-a^2b^2\leqslant 0$

B. $(a^2-1)(b^2-1)\geqslant 0$

C. $\frac{(a+b)^2}{2}-1-a^2b^2\leqslant 0$

D. $a^2+b^2-1-\frac{a^4+b^4}{2}\leqslant 0$

微信公众号
教辅资料站



关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

5. 如果正数 $a,b,c,d$ 满足 $a+b=cd=4$，那么 （ ）

A. $ab\leqslant c+d$，且等号成立时，$a,b,c,d$ 的取值唯一

B. $ab\geqslant c+d$，且等号成立时，$a,b,c,d$ 的取值唯一

C. $ab\leqslant c+d$，且等号成立时，$a,b,c,d$ 的取值不唯一

D. $ab\geqslant c+d$，且等号成立时，$a,b,c,d$ 的取值不唯一

## 二、填空题

6. 设 $a>b>c$，且 $\frac{1}{a-b}+\frac{1}{b-c}\geqslant\frac{m}{a-c}$ 恒成立，则 $m$ 的取值范围是_____.

7. （**2019·河南洛阳统考**）要证明“$\sqrt{2}+\sqrt{3}<\sqrt{10}$”可选择的方法有以下几种，其中最合理的是_____（填序号）.

①反证法 ②分析法 ③综合法

8. 若 $a\geqslant3$，则 $\sqrt{a}-\sqrt{a-1}$ 与 $\sqrt{a-2}-\sqrt{a-3}$ 的大小关系是_____.

## 三、解答题

9. （**2019·银川二中期中**）设 $a,b,c$ 均为正数，$a+b+c=1$，证明：

(1) $a^2+b^2+c^2\geqslant ab+bc+ac$；

(2) $ab+bc+ac\leqslant\frac{1}{3}$.

10. （**2019·山东潍坊三模**）已知函数 $f(x)=|x+4|$，不等式 $f(x)>8-|2x-2|$ 的解集 $M$.

(1) 求 $M$；

(2) 设 $a,b\in M$，证明：$f(ab)>f(2a)-f(-2b)$.



关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

# 三　反证法与放缩法

## 第 8 课时　反证法与放缩法

### 基础知识梳理

**1. 反证法**

先假设要证的_____，以此为出发点，结合已知条件，应用公理、定义、定理、性质等，进行正确的推理，得到和命题的条件（或已证明的定理、性质、明显成立的事实等）_____，以说明假设不正确，从而证明原命题成立，这种方法称为反证法.

**2. 放缩法**

证明不等式时，通过把不等式中的某些部分的值_____或_____，简化不等式，从而达到证明的目的，我们把这种方法称为_____.

### 题点知识巩固

**知识点一　反证法证明不等式**

1. 应用反证法推出矛盾的过程中，要把下列哪些作为条件使用（　　）

①假设；②原命题的条件；③公理，定理，定义等；④原命题的结论.

A. ①②　　B. ①②③

C. ①②③④　　D. ②③

2. (**2019·湖南邵东一中月考**)若实数 $a,b,c$ 满足 $a+b+c=1$，给出以下说法：①$a,b,c$ 中至少有一个大于 $\frac{1}{3}$；②$a,b,c$ 中至少有一个小于 $\frac{1}{3}$；③$a,b,c$ 中至少有一个不大于 $\frac{1}{3}$；④$a,b,c$ 中至少有一个不小于 $\frac{1}{4}$. 其中正确说法的个数是（　　）

A. 3　　B. 2

C. 1　　D. 0

3. 已知三个正数 $a,b,c$ 成等比数列，但不成等差数列.

求证：$\sqrt{a},\sqrt{b},\sqrt{c}$ 不成等差数列.

**知识点二　放缩法证明不等式**

4. 已知 $S=1+\frac{1}{1\times2}+\frac{1}{1\times2\times3}+\cdots+\frac{1}{1\times2\times3\times\cdots\times n}$（$n$ 是大于 2 的自然数），则有（　　）

A. $S<1$　　B. $2<S<3$

C. $1<S<2$　　D. $3<S<4$

5. 令 $P=1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}}$，$Q=\sqrt{n}$，则 $P$ 与 $Q$ 的大小关系是_____.

6. (**2019·辽宁德才期中**)求证：$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}<2$.

### 提能达标过关

**一、选择题**

1. 已知 $f(x)$ 在 **R** 上为增函数，且 $f(x_0)=f(1)$，则（　　）

A. $x_0>1$　　B. $x_0=1$

C. $x_0<1$　　D. $x_0\neq1$

2. 设 $a,b$ 是不相等的实数，且 $a+b=2$，则下列不等式成立的是（　　）

A. $ab\leqslant1\leqslant\frac{a^2+b^2}{2}$　　B. $ab\leqslant\frac{a^2+b^2}{2}\leqslant1$

C. $1<ab<\frac{a^2+b^2}{2}$　　D. $ab<1<\frac{a^2+b^2}{2}$

3. (**2019·福清东张中学期中**)设 $a,b,c$ 大于 0，$a+b+c=3$，则 3 个数：$a+\frac{1}{b},b+\frac{1}{c},c+\frac{1}{a}$ 的值（　　）

A. 都大于 2　　B. 至少有一个不大于 2

C. 都小于 2　　D. 至少有一个不小于 2

4. (**2019·辽宁德才期中**)用反证法证明某命题时，对结论："自然数 $a,b,c$ 中恰有一个偶数"正确的反设为（　　）

A. $a,b,c$ 中至少有两个偶数

B. $a,b,c$ 中至少有两个偶数或都是奇数

C. $a,b,c$ 都是奇数

D. $a,b,c$ 都是偶数

5. 设 $a,b\in\mathbf{R}$，给出下列条件：①$a+b>1$；②$a+b=2$；③$a+b>2$；④$a^2+b^2>2$；⑤$ab>1$. 其中能推出"$a,b$ 中至少有一个实数大于 1"的条件有（　　）

A. 1 个　　B. 2 个

C. 3 个　　D. 4 个



关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

## 二、填空题

6. 用反证法证明命题："一个三角形中不能有两个直角"的过程归纳为以下三个步骤：

①$\angle A+\angle B+\angle C=90^\circ+90^\circ+\angle C>180^\circ$，这与三角形内角和为 $180^\circ$ 矛盾，则 $\angle A=\angle B=90^\circ$ 不成立；

②所以一个三角形中不能有两个直角；

③假设 $\angle A$，$\angle B$，$\angle C$ 中有两个角是直角，不妨设 $\angle A=\angle B=90^\circ$.

正确顺序的序号排列为_____.

7. 已知 $M=\frac{1}{2^{10}}+\frac{1}{2^{10}+1}+\frac{1}{2^{10}+2}+\cdots+\frac{1}{2^{11}-1}$，则 $M$ 与 1 的大小关系是_____.

8. 若 $a>0$，则 $a+\frac{1}{a}+\sqrt{a^2+\frac{1}{a^2}}$ 的最小值为_____.

## 三、解答题

9. (**2019·山东聊城期中**)若 $x$，$y$ 都是正实数，且 $x+y>\frac{4}{3}$. 求证：$\frac{2+x}{y}<4$ 与 $\frac{2+y}{x}<4$ 中至少有一个成立.

10. (**2019·河北沧州七校联考**)等差数列 $\{a_n\}$ 的前 $n$ 项和为 $S_n$，$a_1=1+\sqrt{2}$，$S_3=9+3\sqrt{2}$.

(1)求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式 $a_n$ 与前 $n$ 项和 $S_n$；

(2)设 $b_n=\frac{S_n}{n}(n\in\mathbf{N}^*)$，求证：数列 $\{b_n\}$ 中任意不同的三项都不可能成为等比数列.



关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

# 阶段评估二

（时间：60 分钟，满分：100 分）

## 一、选择题（每小题 5 分，共 30 分）

1. 若 $x,y\in\mathbf{R}$，记 $w=x^2+3xy$，$u=4xy-y^2$，则　　（　　）

A. $w>u$　　B. $w<u$

C. $w\geqslant u$　　D. 无法确定

2. 用分析法证明：欲使①$A>B$，只需②$C<D$. 这里①是②的　　（　　）

A. 充分条件

B. 必要条件

C. 充要条件

D. 既不充分也不必要条件

3. （**2019·山东威海检测**）使不等式$\sqrt{3}+\sqrt{8}>1+\sqrt{a}$成立的正整数 $a$ 的最大值是　　（　　）

A. 10　　B. 11

C. 12　　D. 13

4. 已知 $a,b,c$ 为三角形的三边，且 $S=a^2+b^2+c^2$，$P=ab+bc+ca$，则　　（　　）

A. $S\geqslant 2P$　　B. $P<S<2P$

C. $S>P$　　D. $P\leqslant S<2P$

5. 已知 $x>0,k>0$，设 $f(x)=\dfrac{x^2+k+1}{\sqrt{x^2+k}}$，则　　（　　）

A. $f(x)\geqslant 2$　　B. $f(x)\geqslant 3$

C. $f(x)>2$　　D. $f(x)\geqslant 4$

6. （**2019·福建福州检测**）设 $0<x<1,a>0,b>0,a,b$ 为常数，$\dfrac{a^2}{x}+\dfrac{b^2}{1-x}$的最小值是　　（　　）

A. $4ab$　　B. $2(a^2+b^2)$

C. $(a+b)^2$　　D. $(a-b)^2$

## 二、填空题（每小题 5 分，共 20 分）

7. 用反证法证明命题：“若 $a,b,c,d\in\mathbf{R}$，$a+b=1$，$c+d=1$，且 $ac+bd>1$，则 $a,b,c,d$ 中至少有一个负数”的假设为_____.

8. （**2019·河南洛阳检测**）设实数 $x,y$ 满足 $x^2+(y-1)^2=1$，当 $x+y+d\geqslant 0$ 恒成立时，$d$ 的取值范围是_____.

9. 已知 $a,b,c$ 为 Rt$\triangle ABC$ 的三边，其中 $c$ 为斜边，则当 $n\in\mathbf{N}$，$n>2$ 时，$a^n+b^n$ 与 $c^n$ 的大小关系是_____.

10. 设有两个命题：(1)不等式 $|x|+|x-1|>m$ 的解集为 $\mathbf{R}$；(2)函数 $f(x)=(7-3m)^x$ 在 $\mathbf{R}$ 上是增函数；如果这两个命题中有且只有一个是真命题，则 $m$ 的取值范围是_____.

## 三、解答题（共 50 分）

11. （12 分）已知 $c>b>a$，证明：$a^2b+b^2c+c^2a<ab^2+bc^2+ca^2$.

12. （12 分）(1)求不等式 $|x-5|-|2x+3|\geqslant 1$ 的解集；

(2)若正实数 $a,b$ 满足 $a+b=\dfrac{1}{2}$，求证：$\sqrt{a}+\sqrt{b}\leqslant 1$.



关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

13.(12 分)已知$|x_1-2|<1$,$|x_2-2|<1$.

(1)求证:$2<x_1+x_2<6$,$|x_1-x_2|<2$;

(2)若 $f(x)=x^2-x+1$,求证:$|x_1-x_2|<|f(x_1)-f(x_2)|<5|x_1-x_2|$.

14.(14 分)(**2019·河北衡水信息卷**)已知函数 $f(x)=|x-2|+|m+x|$的图象的对称轴为 $x=1$.

(1)求不等式 $f(x)\geqslant x+2$ 的解集;

(2)若函数 $f(x)$的最小值为 $M$,正数 $a$,$b$ 满足 $a+b=M$,求证:$\frac{1}{2a}+\frac{2}{b}\geqslant\frac{9}{4}$.



关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

# 第三讲 柯西不等式与排序不等式

## 一　二维形式的柯西不等式

### 第 9 课时　二维形式的柯西不等式

## 基础知识梳理

**1. 二维形式的柯西不等式**

(1)定理 1:若 $a,b,c,d$ 都是实数,则$(a^2+b^2)(c^2+d^2)\geqslant$_____,当且仅当_____时,等号成立.

(2)二维形式的柯西不等式的推论:

$(a+b)(c+d)\geqslant$_____($a,b,c,d$ 为非负实数);

$\sqrt{a^2+b^2}\cdot\sqrt{c^2+d^2}\geqslant$_____($a,b,c,d\in\mathbf{R}$);

$\sqrt{a^2+b^2}\cdot\sqrt{c^2+d^2}\geqslant$_____($a,b,c,d\in\mathbf{R}$).

**2. 柯西不等式的向量形式**

定理 2:设 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ 是两个向量,则$|\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\beta}|\leqslant$_____,当且仅当 $\boldsymbol{\beta}$ 是_____,或存在实数 $k$,使 $\boldsymbol{\alpha}=k\boldsymbol{\beta}$ 时,等号成立.

**3. 二维形式的三角不等式**

(1)定理 3:设 $x_1,y_1,x_2,y_2\in\mathbf{R}$,那么 $\sqrt{x_1^2+y_1^2}+\sqrt{x_2^2+y_2^2}\geqslant$_____.

(2)二维形式的三角不等式的推论

用 $x_1-x_3$ 代替 $x_1$,用 $y_1-y_3$ 代替 $y_1$,用 $x_2-x_3$ 代替 $x_2$,用 $y_2-y_3$ 代替 $y_2$,代入定理 3,得

$\sqrt{(x_1-x_3)^2+(y_1-y_3)^2}+\sqrt{(x_2-x_3)^2+(y_2-y_3)^2}\geqslant$_____($x_1,x_2,x_3,y_1,y_2,y_3\in\mathbf{R}$).

## 题点知识巩固

### 知识点一　证明不等式

1. 已知 $a_1,a_2,b_1,b_2\in\mathbf{R}_+$,求证:

$$(a_1b_1+a_2b_2)\left(\frac{a_1}{b_1}+\frac{a_2}{b_2}\right)\geqslant(a_1+a_2)^2.$$

2. (**2019·福建泉州检测**)设 $\frac{m^2}{x^2}+\frac{n^2}{y^2}=1$,求证:$x^2+y^2\geqslant(m+n)^2$.

### 知识点二　求最值

3. 函数 $f(x)=\sqrt{1-\cos 2x}+\cos x$,则 $f(x)$的最大值是(　　)

A. $\sqrt{3}$　　B. $\sqrt{2}$　　C. 1　　D. 2

4. (**2019·河南师大附中月考**)设 $a,b,m,n\in\mathbf{R}$,且 $a^2+b^2=5$,$ma+nb=5$,则$\sqrt{m^2+n^2}$的最小值为_____.

### 知识点三　柯西不等式的向量形式的应用

5. 已知 $\theta$ 为锐角,$a>0$,$b>0$,用柯西不等式的向量形式证明:$(a+b)^2\leqslant\frac{a^2}{\cos^2\theta}+\frac{b^2}{\sin^2\theta}$.

6. 已知 $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$,求函数 $f(x)=3\cos x+4\sqrt{1+\sin^2 x}$的最大值.



关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

## 提能达标过关

### 一、选择题

1. 若 $a^2+b^2=1$，$x^2+y^2=2$，则 $ax+by$ 的最大值为（　　）

A. 1　　B. 2　　C. $\sqrt{2}$　　D. 4

2. （**2019·河北邢台训练**）设 $a,b,c,d,n,m\in\mathbf{R}_+$，且 $P=\sqrt{ab}+\sqrt{cd}$，$Q=\sqrt{ma+nc}\cdot\sqrt{\frac{b}{m}+\frac{d}{n}}$，则 $P,Q$ 之间的大小关系是（　　）

A. $P\geqslant Q$　　B. $P\leqslant Q$

C. $P=Q$　　D. $P,Q$ 大小关系不确定

3. 已知 $\frac{4}{x}+\frac{9}{y}=2$，$x>0$，$y>0$，则 $x+y$ 的最小值为（　　）

A. 5　　B. $\frac{5}{2}$　　C. $\frac{25}{2}$　　D. $\frac{25}{4}$

4. （**2019·南宁二中、柳州中学联考**）若 $a,b\in\mathbf{R}$，且 $a^2+b^2=10$，则 $a-b$ 的取值范围是（　　）

A. $[-2\sqrt{5},2\sqrt{5}]$　　B. $[-2\sqrt{10},2\sqrt{10}]$

C. $[-\sqrt{10},\sqrt{10}]$　　D. $(-\sqrt{5},\sqrt{5})$

5. 若直线 $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$，通过点 $M(\cos\alpha,\sin\alpha)$，则（　　）

A. $a^2+b^2\leqslant 1$　　B. $a^2+b^2\geqslant 1$

C. $\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\leqslant 1$　　D. $\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\geqslant 1$

### 二、填空题

6. 已知实数 $m,n>0$，则 $\frac{a^2}{m}+\frac{b^2}{n}$ _____ $\frac{(a+b)^2}{m+n}$.（填“$\geqslant$”“$>$”“$\leqslant$”或“$<$”）

7. 设 $\boldsymbol{a}=(-2,1)$，$|\boldsymbol{b}|=6$，则 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$ 的最小值为_____.

8. （**2019·广东揭阳一中期末**）若直线 $x\cos\theta+y\sin\theta=2(0\leqslant\theta\leqslant\pi)$ 和椭圆 $x^2+3y^2=6$ 有公共点，则 $\theta$ 的取值范围是_____.

### 三、解答题

9. （**2019·福建泉州质检**）已知关于 $x$ 的不等式 $|x+a|<b$ 的解集为 $\{x|2<x<4\}$.

(1) 求实数 $a,b$ 的值.

(2) 求 $\sqrt{at+12}+\sqrt{bt}$ 的最大值.

10. 设 $a>0$，$b>0$，且 $a+b=1$，求证：$\sqrt{2a+1}+\sqrt{b+\frac{1}{3}}\leqslant\frac{\sqrt{22}}{2}$.



关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

# 二　一般形式的柯西不等式

## 第 10 课时　一般形式的柯西不等式

### 基础知识梳理

**1. 三维形式的柯西不等式**

设 $a_1,a_2,a_3,b_1,b_2,b_3$ 是实数，则 $(a_1^2+a_2^2+a_3^2)(b_1^2+b_2^2+b_3^2)$ $\geqslant$ _____，当且仅当 _____ 或存在一个数 $k$，使得 $a_i=kb_i(i=1,2,3)$ 时等号成立.

**2. 一般形式的柯西不等式**

设 $a_1,a_2,a_3,\cdots,a_n,b_1,b_2,b_3,\cdots,b_n$ 是实数，则 $(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2)\cdot(b_1^2+b_n^2+\cdots+b_n^2)\geqslant$ _____. 当且仅当 $b_i=0(i=1,2,\cdots,n)$ 或存在一个数 $k$，使得 _____ $(i=1,2,\cdots,n)$ 时，等号成立.

### 题点知识巩固

**知识点一　三维形式的柯西不等式的应用**

1. 设 $a,b,c\in\mathbf{R}_+$，且 $a+b+c=1$，则 $\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}$ 的最大值是 (　　)

A. 1　　B. $\sqrt{3}$　　C. 3　　D. 9

2. (**2019·安徽合肥一中月考**)设 $a,b,c\in(0,+\infty)$，$a+b+4c^2=1$，则 $\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{2}c$ 的最大值为 (　　)

A. 5　　B. $\frac{\sqrt{10}}{2}$

C. 8　　D. $\frac{\sqrt{13}}{2}$

3. (**2019·全国卷Ⅲ**)设 $x,y,z\in\mathbf{R}$，且 $x+y+z=1$.

(1)求 $(x-1)^2+(y+1)^2+(z+1)^2$ 的最小值；

(2)若 $(x-2)^2+(y-1)^2+(z-a)^2\geqslant\frac{1}{3}$ 成立，证明：$a\leqslant-3$ 或 $a\geqslant-1$.

**知识点二　一般形式的柯西不等式的应用**

4. (**2019·广东梅州检测**)已知 $a,b,c$ 均大于 0，$A=\sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{3}}$，$B=\frac{a+b+c}{3}$，则 $A,B$ 的大小关系是 (　　)

A. $A>B$　　B. $A\geqslant B$

C. $A<B$　　D. $A\leqslant B$

5. 实数 $a_i(i=1,2,3,4,5,6)$ 满足 $(a_2-a_1)^2+(a_3-a_2)^2+(a_4-a_3)^2+(a_5-a_4)^2+(a_6-a_5)^2=1$，则 $(a_5+a_6)-(a_1+a_4)$ 的最大值为 (　　)

A. 3　　B. $2\sqrt{2}$　　C. $\sqrt{6}$　　D. 1

6. 设 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 都是正数，求证：

$\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\cdots+\frac{1}{x_n}\geqslant\frac{n^2}{x_1+x_2+\cdots+x_n}$.

### 提能达标过关

**一、选择题**

1. 已知 $4x^2+5y^2=1$，则 $2x+\sqrt{5}y$ 的最大值是 (　　)

A. $\sqrt{2}$　　B. 1　　C. 3　　D. 9

2. 设 $\boldsymbol{a}=(1,0,-2)$，$\boldsymbol{b}=(x,y,z)$，若 $x^2+y^2+z^2=16$，则 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$ 的最大值为 (　　)

A. 5　　B. 4　　C. $4\sqrt{5}$　　D. $-4\sqrt{5}$

3. 若 $2x+3y+5z=29$，则函数 $u=\sqrt{2x+1}+\sqrt{3y+4}+\sqrt{5z+6}$ 的最大值为 (　　)

A. $\sqrt{5}$　　B. $2\sqrt{15}$　　C. $2\sqrt{30}$　　D. $\sqrt{30}$

4. (**2019·山东武城期中**)已知 $a,b,c,d,e$ 是满足 $a+b+c+d+e=8$，$a^2+b^2+c^2+d^2+e^2=16$ 的实数，则 $e$ 的最大值为 (　　)

A. 3　　B. 4

C. 5　　D. $\frac{16}{5}$

5. (**2019·辽宁沈阳二阶考试**)已知 $a^2+b^2+c^2=1$，若 $a+b+\sqrt{2}c\leqslant|x+1|$ 对任意实数 $a,b,c$ 恒成立，则实数 $x$ 的取值范围是 (　　)

A. $x\geqslant1$ 或 $x\leqslant-3$　　B. $-3\leqslant x\leqslant1$

C. $x\geqslant-1$ 或 $x\leqslant3$　　D. $-1\leqslant x\leqslant3$



关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

## 二、填空题

6. 设 $x,y,z$ 为正数，且 $x+2y+3z=7$，则 $\frac{4}{x}+\frac{2}{y}+\frac{3}{z}$ 的最小值是_____.

7. 已知 $x^2+y^2+z^2=14$，则 $|x+2y+3z|$ 的最大值是_____.

8. (**2019·河北邢台训练**)设 $a,b,c,x,y,z$ 都是正数，且 $a^2+b^2+c^2=25$，$x^2+y^2+z^2=36$，$ax+by+cz=30$，则 $\frac{a+b+c}{x+y+z}=$_____.

## 三、解答题

9. 设 $x,y,z\in\mathbf{R}$，且 $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{5}+\frac{z^2}{4}=1$，求 $x+y+z$ 的取值范围.

10. (**2019·皖江八校联考**)若 $n$ 是不小于 2 的正整数，求证：$\frac{4}{7}<1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}<\frac{\sqrt{2}}{2}$.



关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

# 三　排序不等式

## 第 11 课时　排序不等式

### 基础知识梳理

**1. 基本概念**

设 $a_1<a_2<a_3<\cdots<a_n$，$b_1<b_2<b_3<\cdots<b_n$ 是两组实数，$c_1,c_2,c_3,\cdots,c_n$ 是数组 $b_1,b_2,\cdots,b_n$ 的任何一个排列，则 $S_1=a_1b_n+a_2b_{n-1}+\cdots+a_nb_1$ 叫做数组 $(a_1,a_2,\cdots,a_n)$ 和 $(b_1,b_2,\cdots,b_n)$ 的_____和；$S_2=a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n$ 叫做数组 $(a_1,a_2,\cdots,a_n)$ 和 $(b_1,b_2,\cdots,b_n)$ 的_____和；$S=a_1c_1+a_2c_2+\cdots+a_nc_n$ 叫做数组 $(a_1,a_2,\cdots,a_n)$ 和 $(b_1,b_2,\cdots,b_n)$ 的_____和.

**2. 排序原理或排序不等式**

设 $a_1\leqslant a_2\leqslant\cdots\leqslant a_n$，$b_1\leqslant b_2\leqslant\cdots\leqslant b_n$ 为两组实数，$c_1,c_2,\cdots,c_n$ 是 $b_1,b_2,\cdots,b_n$ 的任一排列，则_____$\leqslant$_____$\leqslant$_____.

当且仅当_____或_____时，反序和等于顺序和.

### 题点知识巩固

**知识点一　用排序不等式求最值**

1. 若 $a_2>a_1>0$，$b_2>b_1>0$，且 $a_1+a_2=b_1+b_2=1$，则下列代数式中最大的是　　(　　)

A. $a_1b_1+a_2b_2$　　B. $a_1a_2+b_1b_2$

C. $a_1b_2+a_2b_1$　　D. $\frac{1}{2}$

2. (**2019·辽宁德才期中**)等差数列：$1,2,3,\cdots,n$，等比数列：$1,a,a^2,a^3,\cdots,a^{n-1}(a>1)$，设 $c_1,c_2,\cdots,c_n$ 是等比数列的任一排列，则 $c_1+2c_2+3c_3+\cdots+nc_n$ 的最大值为_____.

3. 设 $a_1,a_2,a_3$ 为正整数，且各不相同，求 $a_1+\frac{a_2}{2^2}+\frac{a_3}{2^3}$ 的取值范围.

**知识点二　用排序不等式证明不等式**

4. (**2019·江西南昌二中月考**)已知 $a,b,c\in\mathbf{R}_+$，则 $a^2(a^2-bc)+b^2(b^2-ac)+c^2(c^2-ab)$ 的正负情况是　　(　　)

A. 大于零　　B. 大于等于零

C. 小于零　　D. 小于等于零

5. 设 $a>0,b>0$，且 $a\neq b$，$P=\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{a}$，$Q=a+b$，则　　(　　)

A. $P>Q$　　B. $P\geqslant Q$

C. $P<Q$　　D. $P\leqslant Q$

6. (**2019·江南十校联考**)在 $\triangle ABC$ 中，试证：$\frac{\pi}{3}\leqslant\frac{aA+bB+cC}{a+b+c}<\frac{\pi}{2}$.

### 提能达标过关

**一、选择题**

1. 有两组实数，其顺序和为 $A$，反序和为 $B$，乱序和为 $C$，则它们的大小关系是　　(　　)

A. $A\geqslant B\geqslant C$　　B. $A\geqslant C\geqslant B$

C. $A\leqslant B\leqslant C$　　D. $A\leqslant C\leqslant B$

2. (**2019·山东东营检测**)$(1+1)\left(1+\frac{1}{4}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{3n-2}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{61}\right)$ 的取值范围是　　(　　)

A. $(21,+\infty)$　　B. $(61,+\infty)$

C. $(4,+\infty)$　　D. $(3n-2,+\infty)$

3. 有三个房间需要粉刷，粉刷方案要求：每个房间只用一种颜色，且三个房间颜色各不相同. 已知三个房间的粉刷面积(单位：$m^2$)分别为 $x,y,z$，且 $x<y<z$，三种颜色涂料的粉刷费用(单位：元/$m^2$)分别为 $a,b,c$，且 $a<b<c$. 在不同的方案中，最低的总费用(单位：元)是　　(　　)

A. $ax+by+cz$　　B. $az+by+cx$

C. $ay+bz+cx$　　D. $ay+bx+cz$

4. 设 $a,b,c\geqslant 0$，且 $a^{\frac{3}{2}}+b^{\frac{3}{2}}+c^{\frac{3}{2}}=3$，则 $a\sqrt{b}+b\sqrt{c}+c\sqrt{a}$ 的最大值是　　(　　)

A. 1　　B. 2

C. 3　　D. $\frac{\sqrt[3]{3}}{3}$



关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

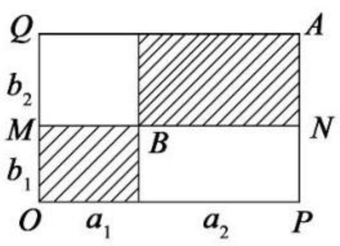
5. 设 $a,b,c$ 都是正数，则式子 $M=a^5+b^5+c^5-a^3bc-b^3ac-c^3ab$ 与 0 的大小关系是（　　）

A. $M\geqslant 0$　　B. $M\leqslant 0$

C. $M\neq 0$　　D. 不能确定

## 二、填空题

6. 如图所示，矩形 $OPAQ$ 中，$a_1\leqslant a_2$，$b_1\leqslant b_2$，则阴影部分的矩形面积和 $S_1$ 与空白部分的面积和 $S_2$ 的关系是_____.




7.（**2019·江苏常州高二检测**）在 Rt$\triangle ABC$ 中，$\angle C$ 为直角，$A,B$ 所对的边分别为 $a,b$，则 $aA+bB$ 与 $\frac{\pi}{4}(a+b)$ 的大小关系为_____.

8. 设 $a_1,a_2,a_3,a_4$ 是 1,2,3,4 的一个排序，则 $a_1+2a_2+3a_3+4a_4$ 的取值范围是_____.

## 三、解答题

9.（**2019·河南许昌期中**）已知 $a,b,c$ 都是正数，求 $\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}$ 的最小值.

10. 已知 $a,b,c,d$ 均为正数，求证：

$4(a^3+b^3+c^3+d^3)\geqslant(a^2+b^2+c^2+d^2)(a+b+c+d)$.



关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

# 阶段评估三

（时间：60 分钟，满分：100 分）

## 一、选择题（每小题 5 分，共 30 分）

1. 设 $a>0,b>0$，则 $a^3+b^3$ 与 $a^2b+b^2a$ 的大小关系是（　　）

A. $a^3+b^3\geqslant a^2b+b^2a$　　B. $a^3+b^3\leqslant a^2b+b^2a$

C. $a^3+b^3=a^2b+b^2a$　　D. 无法确定

2. （**2019·广西钦州月考**）已知 $a\geqslant 0,b\geqslant 0$，且 $a+b=2$，则（　　）

A. $ab\leqslant\frac{1}{2}$　　B. $ab\geqslant\frac{1}{2}$

C. $a^2+b^2\geqslant 2$　　D. $a^2+b^2\leqslant 3$

3. 已知实数 $x,y$ 满足 $x^2+y^2=1$，则 $(1-xy)(1+xy)$ 有（　　）

A. 最小值 $\frac{1}{2}$ 和最大值 1

B. 最小值 $\frac{3}{4}$ 和最大值 1

C. 最小值 $\frac{1}{2}$ 和最大值 $\frac{3}{4}$

D. 最小值 1

4. 函数 $y=\sqrt{x^2-2x+3}+\sqrt{x^2-6x+14}$ 的最小值是（　　）

A. $\sqrt{10}$　　B. $2\sqrt{10}$

C. $11+2\sqrt{10}$　　D. $\sqrt{10}+1$

5. 设 $m,n,a,b\in\mathbf{R}$，且 $a^2+b^2=5$，$ma+nb=5$，则 $\sqrt{m^2+n^2}$ 的最小值为（　　）

A. 2　　B. $\sqrt{5}$

C. $\sqrt{7}$　　D. $5\sqrt{5}$

6. 已知 $x,y,z$ 是正数，且 $\frac{1}{x}+\frac{2}{y}+\frac{3}{z}=1$，则 $x+\frac{y}{2}+\frac{z}{3}$ 的最小值是（　　）

A. 5　　B. 6

C. 8　　D. 9

## 二、填空题（每小题 5 分，共 20 分）

7. 有 $A,B,C,D$ 四个人同时去银行同一窗口排队办理业务，办理业务所需时间依次是：$A$ 需 2 分钟，$B$ 需 5 分钟，$C$ 需 4 分钟，$D$ 需 10 分钟，则四人全部办理完业务总的耗时最长为_____分钟，最短为_____分钟.

8. （**2019·河北邢台训练**）设 $xy>0$，则 $\left(x^2+\frac{4}{y^2}\right)\cdot\left(y^2+\frac{1}{x^2}\right)$ 的最小值为_____.

9. 若 $x_1^2+x_2^2+x_3^2=1,y_1^2+y_2^2+y_3^2=2$，则 $x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3$ 的最大值为_____.

10. （**2019·宁夏石嘴山月考**）已知 $a,b,c\in\mathbf{R}$，$a+2b+3c=6$，则 $a^2+4b^2+9c^2$ 的最小值为_____.

## 三、解答题（共 50 分）

11. （12 分）已知函数 $f(x)=|2x+1|+|x-1|$.

（1）解不等式 $f(x)\geqslant 3$；

（2）记函数 $f(x)$ 的最小值为 $m$，若 $a,b,c$ 均为正实数，且 $\frac{1}{2}a+b+2c=m$，求 $a^2+b^2+c^2$ 的最小值.

12. （12 分）（**2019·江西赣州期中**）设 $a,b,c$ 为正数，且不全相等. 求证：$\frac{2}{a+b}+\frac{2}{b+c}+\frac{2}{c+a}>\frac{9}{a+b+c}$.



关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

13.（12 分）已知 $a,b,c$ 为正数，求证：

$$\frac{b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2}{a+b+c}\geqslant abc.$$

14.（14 分）（**2019·福建福州检测**）设 $a,b,c$ 大于 0，求证：

（1）$a^3+b^3\geqslant ab(a+b)$；

（2）$\frac{1}{a^3+b^3+abc}+\frac{1}{b^3+c^3+abc}+\frac{1}{c^3+a^3+abc}\leqslant\frac{1}{abc}$.



关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

# 第四讲 用数学归纳法证明不等式

## 一 数学归纳法

### 第12课时 数学归纳法

## 基础知识梳理

一般地，当要证明一个命题对于不小于某个正整数 $n_0$ 的所有正整数 $n$ 都成立时，可以用以下两个步骤：

(1)证明当_____时命题成立；

(2)假设 $n=k(k\in\mathbf{N}_+$，且 $k\geqslant n_0)$ 时命题成立，证明_____时命题也成立.

在完成了这两个步骤后，就可以断定命题对于不小于 $n_0$ 的所有正整数都成立，这种证明方法称为_____.

## 题点知识巩固

### 知识点一 用数学归纳法证明恒等式

1. 已知 $f(n)=\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{n^2}$，则 ( )

A. $f(n)$中共有 $n$ 项，当 $n=2$ 时，$f(2)=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}$

B. $f(n)$中共有 $n+1$ 项，当 $n=2$ 时，$f(2)=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}$

C. $f(n)$中共有 $n^2-n$ 项，当 $n=2$ 时，$f(2)=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}$

D. $f(n)$中共有 $n^2-n+1$ 项，当 $n=2$ 时，$f(2)=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}$

2. (**2019·江西师大附中模拟**)用数学归纳法证明：$\left(1-\frac{1}{4}\right)\left(1-\frac{1}{9}\right)\left(1-\frac{1}{16}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{n^2}\right)=\frac{n+1}{2n}(n\geqslant 2,n\in\mathbf{N}_+)$.

### 知识点二 用数学归纳法证明整除问题

3. (**2019·湖南邵东一中月考**)用数学归纳法证明“$n^3+(n+1)^3+(n+2)^3(n\in\mathbf{N}^*)$能被9整除”，要利用归纳假设证 $n=k+1$ 时的情况，只需展开 ( )

A. $(k+3)^3$　　B. $(k+2)^3$

C. $(k+1)^3$　　D. $(k+1)^3+(k+2)^3$

4. 用数学归纳法证明“$5^n-2^n$ 能被3整除”时，在第二步中，当 $n=k+1$ 时，为了使用归纳假设应将 $5^{k+1}-2^{k+1}$ 变形为_____.

### 知识点三 用数学归纳法证明几何问题

5. (**2019·福清东张中学期中**)平面内原有 $k$ 条直线，他们的交点个数记为 $f(k)$，则增加一条直线 $l$ 后，它们的交点个数最多为 ( )

A. $f(k)+1$　　B. $f(k)+k$

C. $f(k)+k+1$　　D. $k\cdot f(k)$

6. 平面上有 $n(n\in\mathbf{N}_+$，且 $n\geqslant 2)$ 条直线，其中任意两条不平行，任意三条直线不过同一点，求证：这 $n$ 条直线共有 $f(n)=\frac{n(n-1)}{2}$ 个交点.



关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

## 提能达标过关

### 一、选择题

1.(**2019·河北保定月考**)如果命题 $P(n)$ 对于 $n=k$ 成立,则它对 $n=k+2$ 亦成立,又若 $P(n)$ 对 $n=2$ 成立,则下列结论正确的是 (　　)

A. $P(n)$ 对所有自然数 $n$ 成立

B. $P(n)$ 对所有偶自然数 $n$ 成立

C. $P(n)$ 对所有正自然数 $n$ 成立

D. $P(n)$ 对所有比 1 大的自然数 $n$ 成立

2. 设 $f(n)=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}+\cdots+\frac{1}{2n}(n\in\mathbf{N}_+)$,在利用数学归纳法证明时,从 $n=k$ 到 $n=k+1$ 需添的项为 (　　)

A. $\frac{1}{2k+1}$　　B. $\frac{1}{2k+2}$

C. $\frac{1}{2k+1}+\frac{1}{2k+2}$　　D. $\frac{1}{2k+1}-\frac{1}{2k+2}$

3.(**2019·吉林实验中学期末**)用数学归纳法证明 $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2^n-1}>\frac{n}{2}(n\in\mathbf{N}^*)$ 假设 $n=k(k\in\mathbf{N}^*)$ 时成立,当 $n=k+1$ 时,左端增加的项数是 (　　)

A. 1 项　　B. $k-1$ 项

C. $k$ 项　　D. $2^k$ 项

4. 下列四个选项中,正确的是 (　　)

A. 式子 $1+k+k^2+\cdots+k^n(n\in\mathbf{N}_+)$,当 $n=1$ 时恒为 1

B. 式子 $1+k+k^2+\cdots+k^{n-1}(n\in\mathbf{N}_+)$,当 $n=1$ 时恒为 $1+k$

C. 式子 $\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2n+1}(n\in\mathbf{N}_+)$,当 $n=1$ 时为 $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}$

D. 设 $f(n)=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{3n+1}(n\in\mathbf{N}_+)$,则 $f(k+1)=f(k)+\frac{1}{3k+2}+\frac{1}{3k+3}+\frac{1}{3k+4}$

5. 已知 $f(n)=(2n+7)\cdot3^n+9$,存在自然数 $m$,使得对任意 $n\in\mathbf{N}_+$,都能使 $m$ 整除 $f(n)$,则最大的 $m$ 的值为 (　　)

A. 36　　B. 30

C. 26　　D. 16

### 二、填空题

6. 用数学归纳法证明:"$1\times4+2\times7+3\times10+\cdots+n(3n+1)=n(n+1)^2,n\in N_+$",当 $n=1$ 时,左端为_____.

7.(**2019·广东珠海高二月考**)用数学归纳法证明"$1+2+2^2+\cdots+2^{n-1}=2^n-1(n\in\mathbf{N}_+)$"的过程中,第二步假设 $n=k$ 时等式成立,则当 $n=k+1$ 时应得到_____.

8. 设平面内有 $n$ 条直线($n\geqslant3$),其中有且仅有两条直线平行,任意三条直线不过同一点,若用 $f(n)$ 表示这 $n$ 条直线交点的个数,则 $f(4)=$_____;当 $n>4$ 时,$f(n)=$_____(用 $n$ 表示).

### 三、解答题

9. 用数学归纳法证明:$(3n+1)\cdot7^n-1$ 能被 9 整除($n\in\mathbf{N}_+$).

10.(**2019·广西钦州质检**)用数学归纳法证明:$\frac{1}{2\times4}+\frac{1}{4\times6}+\frac{1}{6\times8}+\cdots+\frac{1}{2n(2n+2)}=\frac{n}{4(n+1)}(n\in\mathbf{N}_+)$.



关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

# 二　用数学归纳法证明不等式举例

## 第 13 课时　用数学归纳法证明不等式举例

### 基础知识梳理

**1. 本节的有关结论**

(1)$n^2<2^n$($n\in\mathbf{N}_+$，_____).

(2)$|\sin n\theta|\leqslant$_____($n\in\mathbf{N}_+$).

(3)贝努利不等式：

如果 $x$ 是实数，且 $x>-1$，$x\neq0$，$n$ 为大于 1 的自然数，那么有_____.

贝努利不等式的一般形式：当 $\alpha$ 是实数，并且满足 $\alpha>1$ 或者 $\alpha<0$ 时，有_____；当 $\alpha$ 是实数，并且满足 $0<\alpha<1$ 时，有_____.

(4)如果 $n$($n$ 为正整数)个正数 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 的乘积 $a_1a_2\cdots a_n=1$，那么它们的和 $a_1+a_2+\cdots+a_n\geqslant$_____.

**2. 数学归纳法证明不等式的步骤**

(1)证明当 $n$ 取_____(如 $n_0=1$ 或 $n_0=2$ 等)时，命题正确；

(2)证明如下事实：假设 $n=k(k\in\mathbf{N}_+$，且 $k\geqslant n_0)$时，命题正确，由此推出当 $n=$_____时命题也正确.

完成了以上两步后，就可以判定命题对于从 $n_0$ 开始的_____都正确.

### 题点知识巩固

#### 知识点一　用数学归纳法证明不等式

1. 用数学归纳法证明 $2^n>2n+1$，$n$ 的第一个取值应是　(　　)

A. 1　　B. 2

C. 3　　D. 4

2. 已知 $f(x)$是定义域为正整数集的函数，对于定义域内任意的 $k$，若 $f(k)\geqslant k^2$ 成立，则 $f(k+1)\geqslant(k+1)^2$成立，下列命题成立的是　(　　)

A. 若 $f(3)\geqslant9$ 成立，且对于任意的 $k\geqslant1$，均有 $f(k)\geqslant k^2$ 成立

B. 若 $f(4)\geqslant16$ 成立，则对于任意的 $k\geqslant4$，均有 $f(k)<k^2$ 成立

C. 若 $f(7)\geqslant49$ 成立，则对于任意的 $k<7$，均有 $f(k)<k^2$ 成立

D. 若 $f(4)=25$ 成立，则对于任意的 $k\geqslant4$，均有 $f(k)\geqslant k^2$ 成立

3. (**2019·浙江卷**)设等差数列$\{a_n\}$的前 $n$ 项和为 $S_n$，$a_3=4$，$a_4=S_3$，数列$\{b_n\}$满足：对每个 $n\in\mathbf{N}^*$，$S_n+b_n$，$S_{n+1}+b_n$，$S_{n+2}+b_n$ 成等比数列.

(1)求数列$\{a_n\}$，$\{b_n\}$的通项公式；

(2)记 $c_n=\sqrt{\dfrac{a_n}{2b_n}}$，$n\in\mathbf{N}^*$，证明：$c_1+c_2+\cdots+c_n<2\sqrt{n}$，$n\in\mathbf{N}^*$.

#### 知识点二　归纳、猜想、证明

4. (**2019·河北邢台训练**)设 $0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$，已知 $a_1=2\cos\theta$，$a_{n+1}=\sqrt{2+a_n}$，则猜想 $a_n$ 为　(　　)

A. $2\cos\dfrac{\theta}{2^n}$　　B. $2\cos\dfrac{\theta}{2^{n-1}}$

C. $2\cos\dfrac{\theta}{2^{n+1}}$　　D. $2\sin\dfrac{\theta}{2^n}$

5. 观察下式：$1=1^2$，$2+3+4=3^2$，$3+4+5+6+7=5^2$，$4+5+6+7+8+9+10=7^2$，…，则得出的结论是_____.

6. (**2019·辽宁实验中学五校联考**)已知数列$\dfrac{1}{1\times4}$，$\dfrac{1}{4\times7}$，$\dfrac{1}{7\times10}$，…，$\dfrac{1}{(3n-2)(3n+1)}$，…，计算数列和 $S_1$，$S_2$，$S_3$，$S_4$，根据计算结果，猜想 $S_n$ 的表达式，并用数学归纳法进行证明.



关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

## 提能达标过关

### 一、选择题

1.(**2019·辽宁抚顺月考**)用数学归纳法证明不等式 $1+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^3}+\cdots+\frac{1}{n^3}<2-\frac{1}{n}(n\geqslant 2,n\in\mathbf{N}^*)$ 时,第一步应验证不等式 (　　)

A. $1+\frac{1}{2^3}<2-\frac{1}{2}$　　B. $1+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^3}<2-\frac{1}{3}$

C. $1+\frac{1}{2^3}<2-\frac{1}{3}$　　D. $1+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^3}<2-\frac{1}{4}$

2. 已知 $n$ 为正偶数,用数学归纳法证明 $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{n+1}=2\left(\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+4}+\cdots+\frac{1}{2n}\right)$ 时,若已假设 $n=k(k\geqslant 2,k$ 为偶数)时命题为真,则还需要用归纳假设再证 $n=$_____时命题为真 (　　)

A. $k+1$　　B. $k+2$

C. $2k+2$　　D. $2(k+2)$

3.(**2019·山东日照模拟**)若不等式 $(-1)^n a<2+\frac{(-1)^{n+1}}{n}$,对任意正整数 $n$ 恒成立,则实数 $a$ 的取值范围是 (　　)

A. $\left[-2,\frac{3}{2}\right)$　　B. $\left(-2,\frac{3}{2}\right)$

C. $\left[-3,\frac{3}{2}\right)$　　D. $\left(-3,\frac{3}{2}\right)$

4. 若不等式 $\frac{1}{4n+1}+\frac{1}{4n+5}+\frac{1}{4n+9}+\cdots+\frac{1}{8n+1}<\frac{m}{25}$ 对于一切 $n\in\mathbf{N}^*$ 恒成立,则自然数 $m$ 的最小值为 (　　)

A. 8　　B. 9

C. 10　　D. 12

5. 设 $f(x)$ 是定义在正整数集上的函数,且 $f(x)$ 满足:当 $f(k)\geqslant k+1$ 成立时,总能推出 $f(k+1)\geqslant k+2$ 成立,那么下列命题总成立的是 (　　)

A. 若 $f(1)<2$ 成立,则 $f(10)\leqslant 11$ 成立

B. 若 $f(3)\geqslant 4$ 成立,则当 $k\geqslant 1$ 时,均有 $f(k)\geqslant k+1$ 成立

C. 若 $f(2)<3$ 成立,则 $f(1)\geqslant 2$ 成立

D. 若 $f(4)\geqslant 5$ 成立,则当 $k\geqslant 4$ 时,均有 $f(k)\geqslant k+1$ 成立

### 二、填空题

6. 与贝努利不等式 $(1+x)^n>1+nx(x>-1,x\neq 0,$ 且 $n>1,n\in\mathbf{N}_+)$ 等价的不等式是_____(填序号).

①$(1-x)^n>1-nx(x<1$ 且 $x\neq 0,n>1,n\in\mathbf{N})$;

②$(1+x)^n>1-nx(x>-1$ 且 $x\neq 0,n>1,n\in\mathbf{N})$;

③$(1-x)^n>1+nx(x<1$ 且 $x\neq 0,n>1,n\in\mathbf{N})$;

④$(1+x)^n>1+nx(x>1,n>1,n\in\mathbf{N})$.

7.(**2019·河北黄骅中学月考**)已知数列 $\{a_n\}$ 中,$a_1=1$,$a_{n+1}=\frac{2a_n}{2+a_n}(n\in\mathbf{N}^*)$,则可归纳猜想 $\{a_n\}$ 的通项公式为_____.

8.(**2019·江西南昌期中**)设 $f(n)=\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{1}{n+1}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{n+n}\right)$,用数学归纳法证明 $f(n)\geqslant 3$,在假设 $n=k$ 时成立后,$f(k+1)$ 与 $f(k)$ 的关系是 $f(k+1)=f(k)\cdot$_____.

### 三、解答题

9.(**2019·黑龙江青冈模拟**)求证:$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{3n}>\frac{5}{6}(n\geqslant 2,n\in\mathbf{N}^*)$.

10.(**2019·辽宁抚顺期中**)已知数列 $\{a_n\}$ 的前 $n$ 项和为 $S_n$,且 $a_n=\frac{2}{n^2+n}$.

(1)试求出 $S_1,S_2,S_3,S_4$,并猜想 $S_n$ 的表达式;

(2)用数学归纳法证明你的猜想.



关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

# 阶段评估四

（时间：60 分钟，满分：100 分）

## 一、选择题（每小题 5 分，共 30 分）

1.（**2019 · 河北衡水检测**）设 $f(n)=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{3n-1}(n\in\mathbf{N}_+)$，则 $f(n+1)-f(n)$ 等于（　　）

A. $\frac{1}{3n+2}$　　B. $\frac{1}{3n}+\frac{1}{3n+1}$

C. $\frac{1}{3n+1}+\frac{1}{3n+2}$　　D. $\frac{1}{3n}+\frac{1}{3n+1}+\frac{1}{3n+2}$

2. 用数学归纳法证明“$2^n>n^2+1$ 对于 $n\geqslant n_0$ 的正整数 $n$ 都成立”时，第一步证明中的起始值 $n_0$ 应取（　　）

A. 2　　B. 3

C. 5　　D. 6

3. 用数学归纳法证明“$\sqrt{n^2+n}<n+1(n\in\mathbf{N}^*)$”. 第二步证 $n=k+1$ 时（$n=1$ 已验证，$n=k$ 已假设成立），这样证明：$\sqrt{(k+1)^2+(k+1)}=\sqrt{k^2+3k+2}<\sqrt{k^2+4k+4}=(k+1)+1$，所以当 $n=k+1$ 时，命题正确. 此种证法（　　）

A. 是正确的

B. 归纳假设写法不正确

C. 从 $k$ 到 $k+1$ 推理不严密

D. 从 $k$ 到 $k+1$ 推理过程未使用归纳假设

4. 用数学归纳法证明 $\frac{1}{2}+\cos\alpha+\cos 3\alpha+\cdots+\cos(2n-1)\alpha=\frac{\sin\frac{2n+1}{2}\alpha\cdot\cos\frac{2n-1}{2}\alpha}{\sin\alpha}(\alpha\neq k\pi,k\in\mathbf{Z},n\in\mathbf{N}_+)$，在验证 $n=1$ 时，左边计算所得的项是（　　）

A. $\frac{1}{2}$

B. $\frac{1}{2}+\cos\alpha$

C. $\frac{1}{2}+\cos\alpha+\cos 3\alpha$

D. $\frac{1}{2}+\cos\alpha+\cos 2\alpha+\cos 3\alpha$

5.（**2019 · 山西芮城月考**）下列代数式，$n\in\mathbf{N}_+$，能被 13 整除的是（　　）

A. $n^3+5n$　　B. $3^{4n+1}+5^{2n+1}$

C. $6^{2n-1}+1$　　D. $4^{2n+1}+3^{n+2}$

6.（**2019 · 山东青岛学段**）用数学归纳法证明 $1^2+2^2+\cdots+(n-1)^2+n^2+(n-1)^2+\cdots+2^2+1^2=\frac{n(2n^2+1)}{3}$ 时，由 $n=k$ 的假设到证明 $n=k+1$ 时，等式左边应添加的式子是（　　）

A. $(k+1)^2+k^2$

B. $(k+1)^2+2k^2$

C. $(k+1)^2$

D. $\frac{1}{3}(k+1)[2(k+1)^2+1]$

## 二、填空题（每小题 5 分，共 20 分）

7. 利用数学归纳法证明“$\left(1+\frac{1}{3}\right)\left(1+\frac{1}{5}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{2n-1}\right)>\frac{\sqrt{2n+1}}{2}$”时，$n$ 的最小值 $n_0$ 为_____.

8.（**2019 · 河北唐山期中**）设数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=2$，$a_{n+1}=2a_n+2$，用数学归纳法证明 $a_n=4\cdot 2^{n-1}-2$ 的第二步中，设 $n=k$ 时结论成立，即 $a_k=4\cdot 2^{k-1}-2$，那么当 $n=k+1$ 时，_____.

9. 设 $f(n)=6^{2n-1}+1$，则 $f(k+1)$ 用含有 $f(k)$ 的式子表示为_____.

10. 已知数列 $\{a_n\}$ 的各项均为自然数，$a_1=1$，且它的前 $n$ 项和为 $S_n$，若对所有的正整数 $n$，有 $S_{n+1}+S_n=(S_{n+1}-S_n)^2$ 成立，通过计算 $a_2,a_3,a_4$，可归纳出 $S_n=$_____.

## 三、解答题（共 50 分）

11.（12 分）看下面的证明是否正确，如果不正确，指出错误的原因，并加以改正.

用数学归纳法证明：

$1-2+4-8+\cdots+(-1)^{n-1}\cdot 2^{n-1}=(-1)^{n-1}\cdot\frac{2^n}{3}+\frac{1}{3}$.

证明：①当 $n=1$ 时，左边 $=1$，右边 $=\frac{2}{3}+\frac{1}{3}=1$，等式成立.

②假设 $n=k(k\in\mathbf{N}_+,k\geqslant 1)$ 时，等式成立，

即 $1-2+4-8+\cdots+(-1)^{k-1}\cdot 2^{k-1}=(-1)^{k-1}\cdot\frac{2^k}{3}+\frac{1}{3}$.

则当 $n=k+1$ 时，有

$$1-2+4-8+\cdots+(-1)^{k-1}\cdot 2^{k-1}+(-1)^k\cdot 2^k$$
$$=\frac{1-(-2)^{k+1}}{1-(-2)}=\frac{1}{3}-\frac{(-2)^{k+1}}{3}$$
$$=(-1)^k\cdot\frac{2^{k+1}}{3}+\frac{1}{3}.$$

这就是说当 $n=k+1$ 时，等式也成立.

由①②知，对任意的 $n\in\mathbf{N}_+$ 等式成立.



关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

12.(12 分)用数学归纳法证明：$f(n)=3\cdot 5^{2n+1}+2^{3n+1}$ ($n\in\mathbf{N}^*$)能被 17 整除.

13.(12 分)(**2019·广西桂林五市模拟**)如果数列$\{a_n\}$满足条件：$a_1=-4$，$a_{n+1}=\dfrac{-1+3a_n}{2-a_n}$($n=1,2,\cdots$)，证明：对任何自然数 $n$，都有 $a_{n+1}>a_n$ 且 $a_n<0$.

14.(14 分)(**2019·湖南长沙一中二模**)已知数列$\{x_n\}$满足，$x_1=\dfrac{1}{2}$，$x_{n+1}=\dfrac{1}{1+x_n}$，$n\in\mathbf{N}^*$.

(1)猜想数列$\{x_{2n}\}$的单调性，并证明你的结论；

(2)证明：$|x_{n+1}-x_n|\leqslant\dfrac{1}{6}\left(\dfrac{2}{5}\right)^{n-1}$.



关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

# 阶段评估五

（时间：60 分钟，满分：100 分）

## 一、选择题（每小题 5 分，共 30 分）

1.（**2019 · 河北黄骅中学月考**）对于 $x\in\mathbf{R}$，不等式 $|x+10|-|x-2|\geqslant 8$ 的解集为（　　）

A. $[0,+\infty)$　　B. $(0,2)$

C. $[0,2)$　　D. $(0,+\infty)$

2. 下面四个条件中，使 $a>b$ 成立的充分不必要条件是（　　）

A. $a>b+1$　　B. $a>b-1$

C. $a^2>b^2$　　D. $a^3>b^3$

3. 若 $x\in\mathbf{R}$，则“$|x|<2$”是“$|x+1|<1$”的（　　）

A. 充分不必要条件

B. 必要不充分条件

C. 充要条件

D. 既不充分也不必要条件

4. 函数 $y=x^2+\dfrac{2}{x}(x>0)$ 的最小值为（　　）

A. 1　　B. 2

C. 3　　D. 4

5.（**2019 · 山西太原五中检测**）若 $\dfrac{a}{1-a}>0$，且 $x>1$，则下列不等式成立的是（　　）

A. $a^x<x^{\frac{1}{a}}<\log_a x$　　B. $\log_a x<a^x<x^{\frac{1}{a}}$

C. $\log_a x<x^{\frac{1}{a}}<a^x$　　D. $a^x<\log_a x<x^{\frac{1}{a}}$

6. 若不等式 $(a-a^2)\cdot(x^2+1)+x\leqslant 0$ 对一切 $x\in(0,2]$ 恒成立，则实数 $a$ 的取值范围为（　　）

A. $\left(-\infty,\dfrac{1-\sqrt{3}}{2}\right]$

B. $\left[\dfrac{1+\sqrt{3}}{2},+\infty\right)$

C. $\left(-\infty,\dfrac{1-\sqrt{3}}{2}\right]\cup\left[\dfrac{1+\sqrt{3}}{2},+\infty\right)$

D. $\left[\dfrac{1-\sqrt{3}}{2},\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}\right]$

## 二、填空题（每小题 5 分，共 20 分）

7.（**2019 · 河北保定月考**）若关于 $x$ 的不等式 $|ax-2|<3$ 的解集为 $\left\{x\left|-\dfrac{5}{3}<x<\dfrac{1}{3}\right.\right\}$，则 $a=$_____.

8. 设 $a>0$，$b>0$，则 $(a+2b)\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{2}{b}\right)$ 的最小值是_____.

9. 若 $x<0$，则函数 $f(x)=x^2+\dfrac{1}{x^2}-x-\dfrac{1}{x}$ 的最小值是_____.

10.（**2019 · 北京卷**）李明自主创业，在网上经营一家水果店，销售的水果中有草莓、京白梨、西瓜、桃，价格依次为 60 元/盒、65 元/盒、80 元/盒、90 元/盒. 为增加销量，李明对这四种水果进行促销：一次购买水果的总价达到 120 元，顾客就少付 $x$ 元，每笔订单顾客网上支付成功后，李明会得到支付款的 80%.

（1）当 $x=10$ 时，顾客一次购买草莓和西瓜各 1 盒，需要支付_____元；

（2）在促销活动中，为保证李明每笔订单得到的金额均不低于促销前总价的七折，则 $x$ 的最大值为_____.

## 三、解答题（共 50 分）

11.（12 分）已知 $a>b$，且 $ax+b^2>bx+a^2$，求证：$x>a+b$.

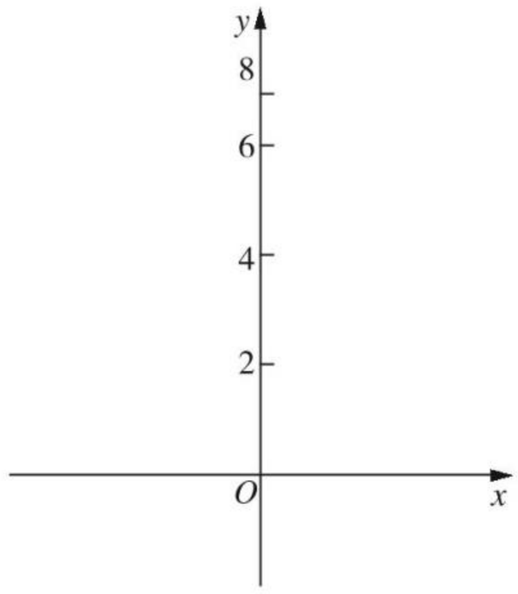


关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

12.(12 分)(**2019·河北省省级示范性高中联考**)设函数 $f(x)=|x-1|+||x|-1|$.

(1)画出 $y=f(x)$的图象;

(2)若过点 $A(2,0)$的直线 $l$ 与 $y=f(x)$的图象恰有 4 个交点,求 $l$ 斜率的取值范围.




13.(12 分)已知函数 $f(x)=|x-a|-2$.

(1)若 $a=1$,求不等式 $f(x)+|2x-3|>0$ 的解集;

(2)若关于 $x$ 的不等式 $f(x)<|x-3|$恒成立,求实数 $a$ 的取值范围.

14.(14 分)(**2019·四川绵阳诊断**)已知函数 $f(x)=|x-a|+|x-3|$.

(1)若 $f(x)$的最小值为 4,求 $a$ 的值;

(2)当 $x\in[2,4]$时,$f(x)<x$ 恒成立,求 $a$ 的取值范围.



关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

# 阶段测试一

## 第一讲　不等式和绝对值不等式

（时间：120 分钟　满分：150 分）

**一、选择题（本大题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分. 在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的）**

1. 如果 $a<b$，则下列不等式成立的是　　（　　）

A. $a^2<b^2$　　B. $\frac{a}{b}>1$

C. $|a|>-b$　　D. $\frac{1}{a}>\frac{1}{b}$

2. **（2019·河南林州一中调研）**不等式 $|3x-2|<4$ 的解集是　　（　　）

A. $\{x|x>2\}$

B. $\left\{x\middle|x<-\frac{2}{3}\right\}$

C. $\left\{x\middle|x<-\frac{2}{3}\text{或 }x>2\right\}$

D. $\left\{x\middle|-\frac{2}{3}<x<2\right\}$

3. 函数 $y=|x-4|+|x-6|$ 的最小值为　　（　　）

A. $\sqrt{2}$　　B. 2

C. 4　　D. 6

4. 已知定义在 **R** 上的函数 $f(x)$，若函数 $y=f(x+1)$ 为偶函数，且 $f(x)$ 对任意 $x_1,x_2\in[1,+\infty)(x_1\neq x_2)$ 都有 $\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}>0$，若 $f(a-1)\geqslant f(2a)$，则实数 $a$ 的取值范围是　　（　　）

A. $[-1,1]$

B. $(-\infty,-1]$

C. $[1,+\infty)$

D. $(-\infty,-1]\cup[1,+\infty)$

5. **（2019·天津十二重点中学高三联考）**设条件 $p$：函数 $f(x)=\log_3(x^2-2x)$ 在 $(a,+\infty)$ 上单调递增，条件 $q$：存在 $x\in\mathbf{R}$ 使得不等式 $|2x+1|+|2x-1|\leqslant a$ 成立，则 $p$ 是 $q$ 的　　（　　）

A. 充分不必要条件

B. 必要不充分条件

C. 充要条件

D. 既不充分也不必要条件

6. 函数 $f(x)=3x+\frac{12}{x^2}(x>0)$ 的最小值为　　（　　）

A. 8　　B. 9

C. 10　　D. 11

7. 设 $P=\frac{1}{a^2+a+1}$，$Q=a^2-a+1$，则 $P$ 与 $Q$ 的大小关系是　　（　　）

A. $P\geqslant Q$　　B. $P>Q$

C. $P\leqslant Q$　　D. $P<Q$

8. **（2019·北京平谷区质检）**已知 $a,b,c,d$ 均为实数，有下列命题：①若 $ab>0$，$bc-ad>0$，则 $\frac{c}{a}-\frac{d}{b}>0$；②若 $ab>0$，$\frac{c}{a}-\frac{d}{b}>0$，则 $bc-ad>0$；③若 $bc-ad>0$，$\frac{c}{a}-\frac{d}{b}>0$，则 $ab>0$. 其中正确命题的个数是　　（　　）

A. 0　　B. 1

C. 2　　D. 3

9. 设 $6<a<10$，$\frac{a}{2}\leqslant b\leqslant 2a$，$c=a+b$，那么 $c$ 的取值范围是　　（　　）

A. $9<c<30$　　B. $0\leqslant c\leqslant 18$

C. $0\leqslant c\leqslant 30$　　D. $15<c<30$



关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

10. 若 $x,y$ 是正数，则 $\left(x+\frac{1}{2y}\right)^2+\left(y+\frac{1}{2x}\right)^2$ 的最小值是 （ ）

A. 3　　B. $\frac{7}{2}$

C. 4　　D. $\frac{9}{2}$

11. 下列结论：① $\left|x+\frac{1}{x}\right|\geqslant 2$；② 若 $0<a<1<b$，则 $\log_a b+\log_b a\geqslant 2$；③ 若 $xy<0$，则 $|x+y|<|x-y|$；④“$|x-1|<2$”是“$x<3$”的充分不必要条件.

其中正确的结论是 （ ）

A. ①②④　　B. ②③④

C. ①②③　　D. ①③④

12. 设正数 $x,y,z$ 满足 $x^2-3xy+4y^2-z=0$，则当 $\frac{xy}{z}$ 取最大值时，$\frac{2}{x}+\frac{1}{y}-\frac{2}{z}$ 的最大值为 （ ）

A. 0　　B. 1

C. $\frac{9}{4}$　　D. 3

## 二、填空题（本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分. 把答案填在题中横线上）

13.（**2019·天津南开区期末**）若 $a,b$ 均为正实数，则 $\frac{ab+b}{a^2+b^2+1}$ 的最大值为_____.

14. 若关于 $x$ 的不等式 $|ax-2|<3$ 的解集为 $\left\{x\middle|-\frac{5}{3}<x<\frac{1}{3}\right\}$，则 $a=$_____.

15.（**2019·山西大学附中高二测试**）若适合不等式 $|x^2-4x+k|+|x-3|\leqslant 5$ 的 $x$ 的最大值为 3，则实数 $k$ 的值为_____.

16. 如果不等式 $|x-a|<1$ 成立的充分不必要条件是 $\frac{1}{2}<x<\frac{3}{2}$，则实数 $a$ 的取值范围是_____.

## 三、解答题（本大题共 6 小题，共 70 分. 解答时应写出必要的文字说明、证明过程或演算步骤）

17.（10 分）（**2019·东北师范大学附属中学模拟**）已知函数 $f(x)=|x+2|-|x-2|+m(m\in\mathbf{R})$.

(1) 若 $m=2$，求不等式 $f(x)\geqslant 0$ 的解集；

(2) 若 $m=4$，证明 $f(x)\geqslant 0$.

18.（12 分）（**2019·安徽蚌埠二中高三月考**）已知函数 $f(x)=|x+1|-2|x|$.

(1) 求不等式 $f(x)\leqslant -6$ 的解集；

(2) 若 $f(x)$ 的图象与直线 $y=a$ 围成的图形的面积不小于 14，求实数 $a$ 的取值范围.



关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

19.(12 分)已知 $\exists x_0 \in \mathbf{R}$ 使不等式 $|x-1|-|x-2| \geqslant t$ 成立.

(1)求满足条件的实数 $t$ 的集合 $T$;

(2)若 $m>1, n>1$,对 $\forall t \in T$,不等式 $\log_3 m \cdot \log_3 n \geqslant t$ 恒成立,求 $m+n$ 的最小值.

20.(12 分)(**2019·江西抚州七校联考**)设函数 $f(x)=|x+1|+|x-5|, x \in \mathbf{R}$.

(1)求不等式 $f(x) \leqslant x+10$ 的解集;

(2)如果关于 $x$ 的不等式 $f(x) \geqslant a-(x-2)^2$ 在 $\mathbf{R}$ 上恒成立,求实数 $a$ 的取值范围.



关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

21.(12 分)已知 $a,b,c\in\mathbf{R}_+$,求证:

(1)$(ab+a+b+1)(ab+ac+bc+c^2)\geqslant 16abc$;

(2)$\frac{b+c-a}{a}+\frac{c+a-b}{b}+\frac{a+b-c}{c}\geqslant 3$.

22.(12 分)(**2019·山东聊城期中**)已知函数 $f(x)=|2x+2|-5$.

(1)解不等式:$f(x)\geqslant|x-1|$;

(2)设函数 $g(x)=m+|2x-m|$,当 $x\in\mathbf{R}$ 时,$f(x)+g(x)\geqslant 3$,求 $m$ 的取值范围.



关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

# 阶段测试二

## 第二讲　证明不等式的基本方法

（时间：120 分钟　满分：150 分）

**一、选择题（本大题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分. 在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的）**

1.（**2019 · 河北保定月考**）以下方法不能用于证明不等式的是（　　）

A. 比较法　　B. 随机抽样法

C. 综合法与分析法　　D. 反证法与放缩法

2. 若 $a>b$，则必成立的不等关系是（　　）

A. $a^2>b^2$　　B. $\frac{b}{a}<1$

C. $\lg(a-b)>0$　　D. $\left(\frac{1}{3}\right)^a<\left(\frac{1}{3}\right)^b$

3.（**2019 · 山东东营检测**）若 $a,b,c\in\mathbf{R}$，且 $ab+bc+ac=1$，则下列不等式成立的是（　　）

A. $a^2+b^2+c^2\geqslant 2$

B. $(a+b+c)^2\geqslant 3$

C. $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\geqslant 2\sqrt{3}$

D. $a+b+c\leqslant\sqrt{3}$

4. 设 $a=0.5^{\frac{1}{2}}$，$b=0.9^{\frac{1}{4}}$，$c=\log_5 0.3$，则 $a,b,c$ 的大小关系是（　　）

A. $a>c>b$　　B. $c>a>b$

C. $a>b>c$　　D. $b>a>c$

5. 设 $a,b$ 是实数，则“$a>b>1$”是“$a+\frac{1}{a}>b+\frac{1}{b}$”的（　　）

A. 充分不必要条件　　B. 必要不充分条件

C. 充分必要条件　　D. 既不充分也不必要条件

6. 若 $\triangle ABC$ 的三边 $a,b,c$ 的倒数成等差数列，则（　　）

A. $\angle B=\frac{\pi}{2}$　　B. $\angle B<\frac{\pi}{2}$

C. $\angle B>\frac{\pi}{2}$　　D. $\angle B=\frac{\pi}{3}$

7. 设 $a=\lg 2+\lg 5$，$b=e^x(x<0)$，则 $a$ 与 $b$ 的大小关系是（　　）

A. $a<b$　　B. $a>b$

C. $a=b$　　D. $a\leqslant b$

8.（**2019 · 湖南邵东一中月考**）已知 $a>b>c>0$，$A=a^{2a}b^{2b}\cdot c^{2c}$，$B=a^{b+c}b^{c+a}c^{a+b}$，则 $A$ 与 $B$ 的大小关系是（　　）

A. $A>B$　　B. $A<B$

C. $A=B$　　D. 不确定

9. 对“$a,b,c$ 是不全相等的正数”，给出下列判断：

①$(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\neq 0$；

②$a>b$ 与 $a<b$ 及 $a\neq c$ 中至少有一个成立；

③$a\neq c$，$b\neq c$，$a\neq b$ 不能同时成立.

其中判断正确的个数为（　　）

A. 0　　B. 1

C. 2　　D. 3

10. 已知 $a,b\in\mathbf{R}$，$m=\frac{6^a}{36^{a+1}+1}$，$n=\frac{1}{3}b^2-b+\frac{5}{6}$，则下列结论正确的是（　　）

A. $m\leqslant n$　　B. $m\geqslant n$

C. $m>n$　　D. $m<n$

11. 若二次函数 $f(x)=4x^2-2(p-2)x-2p^2-p+1$ 在区间 $[-1,1]$ 内至少有一个值 $c$，使 $f(c)>0$，则实数 $p$ 的取值范围是（　　）

A. $\left(-3,\frac{3}{2}\right)$　　B. $\left(-2,\frac{1}{5}\right)$

C. $(-1,0)$　　D. $\left(-\frac{1}{2},\frac{2}{3}\right)$

12. 若 $0<x<1$，$a>0$ 且 $a\neq 1$，则 $|\log_a(1-x)|$ 与 $|\log_a(1+x)|$ 的大小关系是（　　）

A. $|\log_a(1-x)|>|\log_a(1+x)|$

B. $|\log_a(1-x)|<|\log_a(1+x)|$

C. 不确定，由 $a$ 的值决定

D. 不确定，由 $x$ 的值决定



关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

**二、填空题(本大题共 4 小题,每小题 5 分,共 20 分. 把答案填在题中横线上)**

13.(**2019·河北邢台检测**)设 $a>b>0$,$E=\dfrac{a^2-b^2}{a^2+b^2}$,$F=\dfrac{a-b}{a+b}$,则 $E$ 与 $F$ 的大小关系是_____.

14.若直线 $ax-by+2=0(a>0,b>0)$被圆 $x^2+y^2+4x-4y-1=0$ 所截得的弦长为 6,则$\dfrac{2}{a}+\dfrac{3}{b}$的最小值为_____.

15.设 $a=\sqrt{3}-\sqrt{2}$,$b=\sqrt{6}-\sqrt{5}$,$c=\sqrt{7}-\sqrt{6}$,则 $a,b,c$ 的大小顺序是_____.

16.(**2019·安徽合肥月考**)如果 $a\sqrt{a}+b\sqrt{b}>a\sqrt{b}+b\sqrt{a}$,则实数 $a,b$ 应满足的条件是_____.

**三、解答题(本大题共 6 小题,共 70 分. 解答时应写出必要的文字说明、证明过程或演算步骤)**

17.(10 分)(**2019·湖北襄阳模拟**)设函数 $f(x)=|x-a|$.

(1)当 $a=2$ 时,解不等式 $f(x)\geqslant 4-|x-1|$;

(2)若 $f(x)\leqslant 1$ 的解集为$[0,2]$,$\dfrac{1}{m}+\dfrac{1}{2n}=a(m>0,n>0)$,求证:$m+2n\geqslant 4$.

18.(12 分)设函数 $f(x)=ax^2+bx+c$,且 $f(1)=-\dfrac{a}{2}$,$3a>2c>2b$.求证:

(1)$a>0$ 且$-3<\dfrac{b}{a}<-\dfrac{3}{4}$;

(2)函数 $f(x)$在区间$(0,2)$内至少有一个零点.



关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

19.(12 分)(**2019·河北衡水信息卷**)已知不等式$|2x+1|<x+2$的解集为$A$.

(1)求集合$A$;

(2)设$a,b\in A$,求证:$2^{a-b}+2^{b-a}>|a+b|$.

20.(12 分)已知$a_n=\sqrt{1\times2}+\sqrt{2\times3}+\sqrt{3\times4}+\cdots+\sqrt{n(n+1)}(n\in\mathbf{N}_+)$,求证:$\frac{n(n+1)}{2}<a_n<\frac{(n+1)^2}{2}$.



关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

21.(12 分)已知函数 $f(x)=|x|(x\in\mathbf{R})$.

(1)求不等式 $f(x-1)+f(x+1)\leqslant 4$ 的解集 $M$;

(2)若 $a,b\in M$,证明:$2f(a+b)\leqslant f(ab)+4$.

22.(12 分)(**2019·河北金太阳联考**)已知等差数列$\{a_n\}$的公差为 $d(d\neq 0)$,等差数列$\{b_n\}$的公差为 $2d$,设 $A_n,B_n$ 分别是数列$\{a_n\}$,$\{b_n\}$的前 $n$ 项和,且 $b_1=3$,$A_2=3$,$A_5=B_3$.

(1)求数列$\{a_n\}$,$\{b_n\}$的通项公式;

(2)设 $c_n=b_n+\dfrac{1}{a_n\cdot a_{n+1}}$,数列$\{c_n\}$的前 $n$ 项和为 $S_n$,证明:$S_n<(n+1)^2$.



关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

# 阶段测试三

## 第三讲　柯西不等式与排序不等式

（时间：120 分钟　满分：150 分）

**一、选择题（本大题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分. 在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的）**

1.（**2019 · 河北保定月考**）若 $a+b=1$ 且 $a,b$ 同号，则 $\left(a+\frac{1}{a}\right)^2+\left(b+\frac{1}{b}\right)^2$ 的最小值为（　　）

A. 1　　B. 2

C. $\frac{25}{2}$　　D. $\frac{7}{2}$

2. 若 $x,y$ 为非负实数，且 $x^2+2y^2\leqslant 6$，则 $2x+y$ 的最大值是（　　）

A. $\sqrt{10}$　　B. $2\sqrt{3}$

C. $3\sqrt{2}$　　D. $3\sqrt{3}$

3. 已知 $3x^2+2y^2\leqslant 1$，则 $3x+2y$ 的取值范围是（　　）

A. $[0,\sqrt{5}\,]$　　B. $[-\sqrt{5},0]$

C. $[-\sqrt{5},\sqrt{5}\,]$　　D. $[-5,5]$

4.（**2019 · 河南郑州市月考**）已知 $a,b\in\mathbf{R}_+$，且 $a+b=1$，则 $P=(ax+by)^2$ 与 $Q=ax^2+by^2$ 的关系是（　　）

A. $P\leqslant Q$　　B. $P<Q$

C. $P\geqslant Q$　　D. $P>Q$

5. 已知 $x,y\in\mathbf{R}_+$，且 $xy=1$，则 $\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{1}{y}\right)$ 的最小值为（　　）

A. 4　　B. 3

C. 2　　D. 1

6. 设 $a,b,c$ 为正实数，$a+b+4c=1$，则 $\sqrt{a}+\sqrt{b}+2\sqrt{c}$ 的最大值是（　　）

A. $\sqrt{5}$　　B. $\sqrt{3}$

C. $2\sqrt{3}$　　D. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

7.（**2019 · 河北黄骅中学月考**）设 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 取不同的正整数，则 $m=\frac{x_1}{1^2}+\frac{x_2}{2^2}+\cdots+\frac{x_n}{n^2}$ 的最小值是（　　）

A. 1　　B. 2

C. $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}$　　D. $1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}$

8. 已知 $a,b$ 是给定的正数，则 $\frac{4a^2}{\sin^2\alpha}+\frac{b^2}{\cos^2\alpha}$ 的最小值为（　　）

A. $2a^2+b^2$　　B. $2ab$

C. $(2a+b)^2$　　D. $4ab$

9. 已知 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$，设 $A=a^2+b^2$，$B=(x+y)^2$，则 $A,B$ 间的大小关系是（　　）

A. $A\leqslant B$　　B. $A\geqslant B$

C. $A<B$　　D. $A>B$

10. 设 $a,b,c,d$ 都是正数，且 $a+b+c+d=8$，则 $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}$ 的最小值为（　　）

A. 2　　B. 4

C. 8　　D. 16

11.（**2019 · 安徽合肥月考**）若实数 $x+y+z=1$，则 $2x^2+y^2+3z^2$ 的最小值为（　　）

A. 1　　B. 6

C. 11　　D. $\frac{6}{11}$



关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

12. 若 $5x_1+6x_2-7x_3+4x_4=1$，则 $3x_1^2+2x_2^2+5x_3^2+x_4^2$ 的最小值是 （ ）

A. $\frac{78^2}{15}$　　B. $\frac{15}{782}$

C. 3　　D. $\frac{25}{3}$

**二、填空题（本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分. 把答案填在题中横线上）**

13.（**2019·江西南昌二中月考**）设 $a,b$ 都是正数，若 $P=\left(\frac{a}{b}\right)^2+\left(\frac{b}{a}\right)^2$，$Q=\frac{a}{b}+\frac{b}{a}$，则二者的关系是_____.

14. 已知 $a\sqrt{1-b^2}+b\sqrt{1-a^2}=1$，则 $a^2+b^2=$_____.

15. 函数 $y=\left(1+\frac{1}{\sin\alpha}\right)\left(1+\frac{1}{\cos\alpha}\right)\left(0<\alpha<\frac{\pi}{2}\right)$ 的最小值是_____.

16.（**2019·山东东营检测**）已知 $a,b,x,y>0$，且 $ab=4$，$x+y=1$，则 $(ax+by)(bx+ay)$ 的最小值为_____.

**三、解答题（本大题共 6 小题，共 70 分. 解答时应写出必要的文字说明、证明过程或演算步骤）**

17.（10 分）（**2019·河北衡水精选卷**）设 $a,b,c$ 为正数，且 $a+b+c=1$，求证：$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\geqslant 9$.

18.（12 分）（**2019·湖北黄冈期中**）求函数 $y=2\sqrt{1-2x}+\sqrt{4x+3}$ 的最大值.



关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

19.(12 分)(**2018·四川棠湖中学高三月考**)已知定义在 **R** 上的函数 $f(x)=|x+1|+|x-2|$ 的最小值为 $a$.

(1)求实数 $a$ 的值;

(2)若 $p,q,r$ 为正实数,且 $p+q+r=a$,求证:$p^2+q^2+r^2\geqslant 3$.

20.(12 分)$f(x)=|x|+|x+1|$ 的最小值为 $m$.

(1)求 $m$ 的值;

(2)$x,y,z\in\mathbf{R}$,且 $2x+3y+3z=m$,求 $x^2+y^2+z^2$ 的最小值.



关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

21.(12 分)设 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 为 1,2,…,$n$ 的一个排列,求证:

$$\frac{1}{2}+\frac{2}{3}+\cdots+\frac{n-1}{n}\leqslant\frac{a_1}{a_2}+\frac{a_2}{a_3}+\cdots+\frac{a_{n-1}}{a_n}.$$

22.(12 分)(**2019·福建泉州模拟**)已知 $a,b$ 为实数,且 $a>0,b>0$,

(1)求证:$\left(a+b+\frac{1}{a}\right)\left(a^2+\frac{1}{b}+\frac{1}{a^2}\right)\geqslant 9$;

(2)求 $(5-2a)^2+4b^2+(a-b)^2$ 的最小值.



关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

# 选修4—5综合测评

（时间：120分钟　满分：150分）

**一、选择题（本大题共12小题，每小题5分，共60分. 在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的）**

1. 若 $a,b\in\mathbf{R}$，则使 $|a|+|b|>1$ 成立的一个充分不必要条件是　　（　　）

A. $|a+b|\geqslant 1$　　B. $a<1$ 或 $b<1$

C. $a^2+b^2>1$　　D. $a\leqslant 1$ 或 $b\leqslant 1$

2. （**2019·浙江卷**）若 $a>0,b>0$，则“$a+b\leqslant 4$”是“$ab\leqslant 4$”的　　（　　）

A. 充分不必要条件　　B. 必要不充分条件

C. 充分必要条件　　D. 既不充分也不必要条件

3. 已知 $a>0,b>0$，$a,b$ 的等差中项是 $\frac{1}{2}$，且 $m=a+\frac{1}{a}$，$n=b+\frac{1}{b}$，则 $m+n$ 的最小值是　　（　　）

A. 3　　B. 4

C. 5　　D. 6

4. 若 $x>0$，则 $4x+\frac{9}{x^2}$ 的最小值为　　（　　）

A. 9　　B. $3\sqrt[3]{36}$

C. 13　　D. 12

5. （**2019·黑龙江青冈模拟**）若 $f(x)$ 是 $\mathbf{R}$ 上的减函数，且 $f(x)$ 的图象经过点 $A(0,4)$ 和点 $B(3,-2)$，则当不等式 $|f(x+t)-1|<3$ 的解集为 $(-1,2)$ 时，$t$ 的值为　　（　　）

A. 0　　B. 1

C. $-1$　　D. 2

6. 已知命题 $p$：不等式 $|x|+|x-1|>m$ 的解集为 $\mathbf{R}$，命题 $q$：$f(x)=-(5-2m)^x$ 是减函数，则 $p$ 是 $q$ 的　　（　　）

A. 充分不必要条件　　B. 必要不充分条件

C. 充要条件　　D. 既不充分也不必要条件

7. 设 $x,y,z\in\mathbf{R}_+$，则 $\frac{z^2-x^2}{x+y}+\frac{x^2-y^2}{y+z}+\frac{y^2-z^2}{z+x}$ 的最小值为　　（　　）

A. 0　　B. 1

C. 4　　D. 9

8. （**2019·重庆一中月考**）若 $A=x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2$，$B=x_1x_2+x_2x_3+\cdots+x_{n-1}x_n+x_nx_1$，其中 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 都是正数，则 $A$ 与 $B$ 的大小关系为　　（　　）

A. $A>B$　　B. $A<B$

C. $A\geqslant B$　　D. $A\leqslant B$

9. 已知正项等比数列 $\{a_n\}$（$n\in\mathbf{N}^*$）满足 $a_7=a_6+2a_5$，若存在两项 $a_m,a_n$ 使得 $\sqrt{a_ma_n}=4a_1$，则 $\frac{1}{m}+\frac{5}{n}$ 的最小值为　　（　　）

A. 2　　B. $1+\frac{\sqrt{5}}{3}$

C. $\frac{7}{4}$　　D. $\frac{11}{4}$

10. 设 $m,n,p$ 为正数，且 $m^2+n^2-p^2=0$，则 $\frac{p}{m+n}$ 的最小值为　　（　　）

A. $\sqrt{2}$　　B. 2

C. $\frac{\sqrt{2}}{2}$　　D. 1

11. （**2019·河北黄骅中学月考**）设 $f(x)=\frac{1}{a}x^2-bx+c$，不等式 $f(x)<0$ 的解集是 $(-1,3)$，若 $f(7+|t|)>f(1+t^2)$，则实数 $t$ 的取值范围是　　（　　）

A. $(-1,2)$　　B. $(-3,3)$

C. $(2,3)$　　D. $(-1,3)$



关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

12. 若正数 $m,n$ 满足 $\frac{9m+n+5mn}{mn}=\sqrt{mn}$，则 （ ）

A. $mn$ 有最小值 36，无最大值

B. $mn$ 有最大值 36，无最小值

C. $mn$ 有最小值 6，无最大值

D. $mn$ 有最大值 6，无最小值

**二、填空题（本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分. 把答案填在题中横线上）**

13. （**2019·江苏沭阳期中**）对任意 $x,y\in\mathbf{R}$，$|x-1|+|x|+|y-1|+|y+1|$ 的最小值为_____.

14. 若关于 $x$ 的不等式 $|x+3|-|x+2|\geqslant\log_2 a$ 有解，则实数 $a$ 的取值范围是_____.

15. （**2019·山东威海高二检测**）已知 $\alpha,\beta$ 是实数，给出三个论断：①$|\alpha+\beta|=|\alpha|+|\beta|$；②$|\alpha+\beta|>5$；③$|\alpha|>2\sqrt{2}$，$|\beta|>2\sqrt{2}$. 以其中的两个论断为条件，另一个论断作为结论，写出你认为正确的一个命题是_____.

16. （**2019·安徽蚌埠市二中月考**）在 $\triangle ABC$ 中，角 $A,B,C$ 的对边分别为 $a,b,c$，设 $\triangle ABC$ 的面积为 $S$，若 $3a^2=2b^2+c^2$，则 $\frac{S}{b^2+2c^2}$ 的最大值为_____.

**三、解答题（本大题共 6 小题，共 70 分. 解答时应写出必要的文字说明、证明过程或演算步骤）**

17. （10 分）若 $a>0,b>0$，且 $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\sqrt{ab}$.

(1) 求 $a^3+b^3$ 的最小值；

(2) 是否存在 $a,b$，使得 $2a+3b=6$？并说明理由.

18. （12 分）（**2019·皖南八校联考**）已知函数 $f(x)=|x-2|+|2x+4|$.

(1) 解不等式：$f(x)\geqslant-3x+4$；

(2) 若不等式 $f(x)$ 的最小值为 $a$，且 $m+n=a(m>0,n>0)$，求 $\frac{1}{m}+\frac{1}{n}$ 的最小值.



关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

19.(12 分)已知 $x,y,z$ 均为正数,且 $x+y+z=3$.

(1)求 $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}$ 的最小值;

(2)证明:$3\leqslant x^2+y^2+z^2<9$.

20.(12 分)(**2019·江西上高、新余联考**)已知函数 $f(x)=|2x-4|+|x+1|$.

(1)解不等式 $f(x)\leqslant 9$;

(2)若不等式 $f(x)<2x+a$ 的解集为 $A$,$B=\{x|x^2-3x<0\}$,且满足 $B\subseteq A$,求实数 $a$ 的取值范围.



关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

21.(12 分)设函数 $f(x)=2|x-1|+x-1$，$g(x)=16x^2-8x+1$. 记 $f(x)\leqslant 1$ 的解集为 $M$，$g(x)\leqslant 4$ 的解集为 $N$.

(1)求 $M$；

(2)当 $x\in M\cap N$ 时，证明：$x^2f(x)+x[f(x)]^2\leqslant\frac{1}{4}$.

22.(12 分)(**2019·北京卷**)已知数列 $\{a_n\}$，从中选取第 $i_1$ 项，第 $i_2$ 项，…，第 $i_m$ 项($i_1<i_2<\cdots<i_m$)，若 $a_{i_1}<a_{i_2}<\cdots<a_{i_m}$，则称新数列 $a_{i_1}$，$a_{i_2}$，…，$a_{i_m}$ 为 $\{a_n\}$ 的长度为 $m$ 的递增子列. 规定：数列 $\{a_n\}$ 的任意一项都是 $\{a_n\}$ 的长度为 1 的递增子列.

(1)写出数列 1，8，3，7，5，6，9 的一个长度为 4 的递增子列；

(2)已知数列 $\{a_n\}$ 的长度为 $p$ 的递增子列的末项的最小值为 $a_{m_0}$，长度为 $q$ 的递增子列的末项的最小值为 $a_{n_0}$. 若 $p<q$，求证：$a_{m_0}<a_{n_0}$；

(3)设无穷数列 $\{a_n\}$ 的各项均为正整数，且任意两项均不相等. 若 $\{a_n\}$ 的长度为 $s$ 的递增子列末项的最小值为 $2s-1$，且长度为 $s$ 末项为 $2s-1$ 的递增子列恰有 $2^{s-1}$ 个($s=1,2,\cdots$)，求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式.



关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

骄子之路®
the Road to Pride
让 学习更快乐，人生更精彩

# 答案与解析

与45分钟课时作业与单元测试配套使用

# 数学

选修4-5 RJ·A

班级：_____

姓名：_____

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

# 第一部分 课时作业

## 第一讲 不等式和绝对值不等式

### 一 不等式

#### 第 1 课时 不等式的基本性质

**基础知识梳理**

1. (1)$a-b>0$ (2)$a=b$ (3)$a-b<0$
2. (1)$b<a$ (2)$a>c$ (3)$a>b$ (4)$ac>bc$ $ac<bc$ (5)$a^n>b^n$ (6)$a>b>0$

**题点知识巩固**

1. 选 C $\because a,b$ 为不等的正数，$\therefore M-N=(a^6+a^4b^2+a^2b^4+b^6)-(a^6+2a^3b^3+b^6)=a^4b^2+a^2b^4-2a^3b^3=a^2b^2(a^2-2ab+b^2)=a^2b^2(a-b)^2>0$，$\therefore M>N$，故选 C.
2. **解**：$\because 16^{18}>0,18^{16}>0$，

$$\therefore \frac{16^{18}}{18^{16}}=\left(\frac{16}{18}\right)^{16}\times 16\times 16$$

$$=\left(\frac{8}{9}\right)^{16}\times 2^4\times 2^4$$

$$=\left(\frac{64}{81}\right)^{8}\times 2^8=\left(\frac{128}{81}\right)^{8}>1,$$

$\therefore 16^{18}>18^{16}$.

3. 选 A 由$(a-b)a^2<0\Rightarrow a\neq 0$ 且 $a<b$，$\therefore$ 充分性成立；由 $a<b\Rightarrow a-b<0$，当 $0=a<b\not\Rightarrow(a-b)\cdot a^2<0$，必要性不成立；故选 A.
4. **证明**：$\because c<d<0,\therefore -c>-d>0$.

$\because a>b>0,\therefore a-c>b-d>0$. (*)

(1)由(*)式知$\frac{1}{a-c}<\frac{1}{b-d}$，又 $e<0$，

$$\therefore \frac{e}{a-c}>\frac{e}{b-d}.$$

(2)由(*)式知$(a-c)^2>(b-d)^2>0$，

$$\therefore \frac{1}{(b-d)^2}>\frac{1}{(a-c)^2},\text{又 } e<0,$$

$$\therefore \frac{e}{(b-d)^2}<\frac{e}{(a-c)^2},\text{即}\frac{e}{(a-c)^2}>\frac{e}{(b-d)^2}.$$

5. **解析**：$\because 0<\alpha<\frac{\pi}{2},\therefore 0<2\alpha<\pi,0<\sin\alpha<1$.

$$\because \frac{\pi}{2}<\beta<\pi,\therefore -\frac{\pi}{3}<-\frac{\beta}{3}<-\frac{\pi}{6},-1<\cos\beta<0.$$

$$\therefore -\frac{\pi}{3}<2\alpha-\frac{\beta}{3}<\frac{5\pi}{6},-1<\sin\alpha+\cos\beta<1.$$

**答案**：$\left(-\frac{\pi}{3},\frac{5\pi}{6}\right)$ $(-1,1)$

6. **解**：$\because -3<b<1,\therefore -1<-b<3$.

又 $\because -3<a<1,\therefore -4<a-b<4$.

又 $a<b,\therefore a-b<0,\therefore -4<a-b<0$，

$\therefore 0<-(a-b)<4$.

而 $-4<c<2$，讨论：

①当 $-4<c<0$ 时，$0<-c<4,\therefore 0<[-(a-b)]\cdot(-c)<16$，

$\therefore 0<(a-b)\cdot c<16$；

②当 $c=0$ 时，$(a-b)\cdot c=0$；

③当 $0<c<2$ 时，$0<[-(a-b)]\cdot c<8$，

$\therefore -8<(a-b)\cdot c<0$.

综上，$-8<(a-b)\cdot c<16$.

**提能达标过关**

1. 选 D $t-s=(a+2b)-(a+b^2+1)=-(b^2-2b+1)=-(b-1)^2\leqslant 0,\therefore t\leqslant s$，故选 D.
2. 选 C 在选项 C 中，$\because ab>0,\therefore a,b$ 同号.

又 $\because a^3>b^3,\therefore a>b$.

$$\therefore \frac{a}{ab}>\frac{b}{ab}.\therefore \frac{1}{b}>\frac{1}{a}.$$

3. 选 B $\because c<d<0,\therefore -c>-d>0$，$\because a>b>0,\therefore -ac>-bd,\therefore ac<bd$，A 错误；$\because cd>0,\therefore \frac{ac}{cd}<\frac{bd}{cd}$，即 $\frac{a}{d}<\frac{b}{c}$，B 正确，C 错误；由 $c<d<0$，得 $c^2>d^2>0$，$\because a>b>0$，$\therefore ac^2>bd^2$，D 错误，故选 B.
4. 选 C 解法一：因为 $a>b$，所以 $a-b>0$，当 $a-b=1$ 时，$\ln(a-b)=0$，故 A 错；因为 $y=3^x$ 是增函数，所以 $3^a>3^b$，故 B 错；因为幂函数 $y=x^3$ 是增函数，$a>b$，所以 $a^3>b^3$，故 C 正确；取 $a=1,b=-2$，满足 $a>b,1=|a|<|b|=2$，故 D 错.

解法二：取 $a=2,b=1$，满足 $a>b,\ln(a-b)=0$，故 A 错；因为 $9=3^a>3^b=3$，故 B 错；取 $a=1,b=-2$，满足 $a>b,1=|a|<|b|=2$，故 D 错；因为幂函数 $y=x^3$ 是增函数，$a>b$，所以 $a^3>b^3$，故 C 正确，故选 C.

5. 选 D $\because \log_2 a<0,\therefore 0<a<1$. $\because \left(\frac{1}{2}\right)^b>1,\therefore b<0$，故选 D.
6. **解析**：因为 $c>d>0$，所以 $cd>0,c-d>0,\frac{1}{cd}>0$.

于是 $\frac{1}{d}-\frac{1}{c}=\frac{c-d}{cd}>0$，因此 $\frac{1}{d}>\frac{1}{c}>0$.

由 $a>0$，得 $\frac{a}{d}>\frac{a}{c}>0$.

由 $a>b>0,\frac{1}{c}>0$，得 $\frac{a}{c}>\frac{b}{c}>0$.

由不等式的性质 2，得 $\frac{a}{d}>\frac{b}{c}>0$，根据不等式的性质，得 $\sqrt[3]{\frac{a}{d}}>\sqrt[3]{\frac{b}{c}}$.

**答案**：$\sqrt[3]{\frac{a}{d}}>\sqrt[3]{\frac{b}{c}}$

7. **解析**：因为 $2<y<4$，所以 $\frac{1}{4}<\frac{1}{y}<\frac{1}{2}$，又因为 $8<x<10$，所以 $2<\frac{x}{y}<5$，即 $\frac{x}{y}$ 的取值范围是 $(2,5)$.

**答案**：$(2,5)$

8. **解析**：由不等式的性质知 $\begin{cases}0<x<1,\\2<y<3\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}2<x+y<4,\\0<xy<3.\end{cases}$

即乙⇒甲，但甲⇏乙，因此甲是乙的必要不充分条件.

**答案**：必要不充分

9. **解**：(1)因为 $a<b$，没有指出 $ab>0$，故 $\frac{1}{a}>\frac{1}{b}$ 不成立，因此推不出 $\frac{c}{a}<\frac{c}{b}$. 所以是假命题.

(2)当 $c<0$ 时，$c^{-3}<0$，有 $a<b$. 所以是假命题.

(3)当 $a=1,b=-2,k=2$ 时，显然命题不成立. 所以是假命题.

(4)取一些适当的数值加以说明，取 $a=2,b=0,c=-3$ 满足 $a>b,b>c$ 的条件. 但是 $a-b=2<b-c=3$. 所以是假命题. 两个同向不等式一般不能相减，相减后可能成立，也可能不成立，但两个同向不等式一定可以相加.



关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

10. **解**：(1)取特殊值 $a=-\frac{1}{3}$，则 $A=1+a^2=1+\frac{1}{9}=\frac{10}{9}$，

$B=1-a^2=1-\frac{1}{9}=\frac{8}{9}$，$C=\frac{1}{1+a}=\frac{1}{1-\frac{1}{3}}=\frac{3}{2}$，$D=\frac{1}{1-a}$

$=\frac{1}{1+\frac{1}{3}}=\frac{3}{4}$.

∴猜测 $C>A>B>D$.

(2)证明：$B-D=1-a^2-\frac{1}{1-a}=\frac{a^3-a^2-a}{1-a}$

$=\frac{a\left[\left(a-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{5}{4}\right]}{1-a}$.

∵$-\frac{1}{2}<a<0$，∴$1-a>0$.

又$-1<a-\frac{1}{2}<-\frac{1}{2}$，

∴$\frac{1}{4}<\left(a-\frac{1}{2}\right)^2<1$，

∴$\left(a-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{5}{4}<0$.

∴$\frac{a\left[\left(a-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{5}{4}\right]}{1-a}>0$，∴$B>D$.

∵$A-B=1+a^2-(1-a^2)=2a^2>0$，∴$A>B$.

∵$C-A=\frac{1}{1+a}-(1+a^2)=\frac{-a(a^2+a+1)}{1+a}$

$=\frac{-a\left[\left(a+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\right]}{1+a}$，

∵$-a>0$，$1+a>0$，$\left(a+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}>0$，

∴$\frac{-a\left[\left(a+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\right]}{1+a}>0$，

∴$C>A$.

综上可知，$C>A>B>D$.

## 第 2 课时　基本不等式

### 基础知识梳理

1. $a=b$

2. $\sqrt{ab}$

3. 算术平均　几何平均

### 题点知识巩固

1. 选 B　∵$x>0$，$y>0$ 且 $x+y\leqslant 4$，∴$\frac{1}{x+y}\geqslant\frac{1}{4}$，A 错误；

∵$x>0$，$y>0$ 且 $x+y\leqslant 4$，∴$0<\frac{1}{4}(x+y)\leqslant 1$，∴$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\geqslant$

$\frac{1}{4}(x+y)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)=\frac{1}{4}\left(1+\frac{y}{x}+\frac{x}{y}+1\right)\geqslant$

$\frac{1}{4}\left(2+2\sqrt{\frac{y}{x}\cdot\frac{x}{y}}\right)=1$，当且仅当$\begin{cases}x=y,\\x+y=4,\end{cases}$即 $x=y=2$

时，取等号，B 正确；由 $\sqrt{xy}\leqslant\frac{x+y}{2}\leqslant 2$，知 C 错误；当 $x=$

$y=2$ 时，$\frac{1}{xy}=\frac{1}{4}<1$，D 错误，故选 B.

2. **解析**：因为 $a,b\in\mathbf{R}$，所以当 $a<0$，$b>0$ 时，$\frac{b}{a}+\frac{a}{b}<0$，故

①不正确；当 $x=\frac{1}{2}$，$y=\frac{1}{2}$ 时，$\lg x$ 和 $\lg y$ 都等于 $-\lg 2<0$，故

②不正确；∵$\left|x+\frac{4}{x}\right|=|x|+\frac{4}{|x|}\geqslant 2\sqrt{|x|\cdot\frac{4}{|x|}}=4$，当

且仅当 $|x|=2$ 时，取等号，故③正确；若 $a,b\in\mathbf{R}$，$ab<0$，则

$\frac{b}{a}<0$，$\frac{a}{b}<0$，∴$\frac{b}{a}+\frac{a}{b}=-\left(\frac{-b}{a}+\frac{-a}{b}\right)\leqslant$

$-2\sqrt{\frac{-b}{a}\cdot\frac{-a}{b}}=-2$，当且仅当 $\frac{-b}{a}=\frac{-a}{b}$，即 $a=-b$ 时，等

号成立，故④正确. 综上所述，正确的序号是③④.

**答案**：③④

3. **解析**：$\frac{(x+1)(2y+1)}{\sqrt{xy}}=\frac{2xy+x+2y+1}{\sqrt{xy}}$，

∵$x>0$，$y>0$，$x+2y=5$，∴$xy>0$，

∴$\frac{(x+1)(2y+1)}{\sqrt{xy}}=\frac{2xy+6}{\sqrt{xy}}\geqslant\frac{2\sqrt{2xy\cdot 6}}{\sqrt{xy}}=4\sqrt{3}$，当且仅当

$2xy=6$，即 $x=3$，$y=1$ 时，等号成立.

∴$\frac{(x+1)(2y+1)}{\sqrt{xy}}$的最小值为 $4\sqrt{3}$.

**答案**：$4\sqrt{3}$

4. (1)**解析**：$(a+1)(b+2)=ab+2a+b+2=2a+b+3\geqslant 2\sqrt{2ab}$

$+3=2\sqrt{2}+3$，

当且仅当 $2a=b$ 且 $ab=1$，即 $a=\frac{\sqrt{2}}{2}$，$b=\sqrt{2}$ 时等号成立.

∴$(a+1)(b+2)$的最小值为 $2\sqrt{2}+3$.

**答案**：$3+2\sqrt{2}$

(2)**解**：∵$0<x<\frac{3}{2}$，∴$3-2x>0$，

∴$y=4x(3-2x)=2[2x(3-2x)]\leqslant 2\left[\frac{2x+(3-2x)}{2}\right]^2$

$=\frac{9}{2}$，

当且仅当 $2x=3-2x$，

即 $x=\frac{3}{4}$ 时，等号成立.

∴$y=4x(3-2x)$的最大值为 $\frac{9}{2}$.

5. **证明**：由 $a^2+b^2\geqslant 2ab$，

$2(a^2+b^2)\geqslant(a+b)^2$，

∴$\sqrt{a^2+b^2}\geqslant\frac{\sqrt{2}}{2}(a+b)$，　①

同理 $\sqrt{b^2+c^2}\geqslant\frac{\sqrt{2}}{2}(b+c)$，　②

$\sqrt{c^2+a^2}\geqslant\frac{\sqrt{2}}{2}(c+a)$，　③

①②③式两边分别相加，得

$\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{b^2+c^2}+\sqrt{c^2+a^2}\geqslant\frac{\sqrt{2}}{2}(a+b+b+c+c+a)$

$=\sqrt{2}(a+b+c)$，

∴原不等式成立.



关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

6. **解**：依题意，当每批购入 $x$ 台时，全年需用保管费 $S=2\,000x\cdot k$，

∴全年需用去运输和保管总费用为

$y=\frac{3\,600}{x}\cdot 400+2\,000x\cdot k$.

∵$x=400$ 时，$y=43\,600$，∴$k=\frac{1}{20}$.

∴$y=\frac{1\,440\,000}{x}+100x\geqslant 2\sqrt{\frac{1\,440\,000}{x}\cdot 100x}=24\,000$.

当且仅当$\frac{1\,440\,000}{x}=100x$，即 $x=120$ 时取等号.

∴只要安排每批进货 120 台即可.

## 提能达标过关

1. 选 D　因为 A 中 $x,y$ 异号时，$\frac{x}{y}+\frac{y}{x}$ 为负值，故 A 错；C 中 $\tan\theta$ 可能为负值，∴$\tan\theta+\frac{1}{\tan\theta}$ 可能为负值，故 C 错；B 中 $x$ 最小值为 $\frac{5}{2}$，故 B 错；D 中，∵$x\in\mathbf{R}$，$2^x>0$，$2^{-x}>0$，∴$2^x+2^{-x}\geqslant 2\sqrt{2^x\cdot 2^{-x}}=2$，当且仅当 $2^x=2^{-x}$，即 $x=0$ 时取等号，故 D 对.

2. 选 C　选项 A 中，当 $a=-1$ 时，$\frac{1}{a}<1$ 成立，但 $a>1$ 不成立，故 A 不正确；选项 B 中，当 $x<0$ 时，$y=x+\frac{1}{x}$ 无最小值，故 B 不正确；选项 C 中，根据正弦函数的周期性可得，函数的周期为 $2\pi$，故 C 正确；选项 D 中，向量的数量积不满足消去规律（或举反例），故 D 不正确. 故选 C.

3. 选 B　∵正实数 $x,y$ 满足 $x+y=1$，∴$\frac{1}{x}+\frac{4x}{y}=\frac{x+y}{x}+\frac{4x}{y}=1+\frac{y}{x}+\frac{4x}{y}\geqslant 1+2\sqrt{\frac{y}{x}\cdot\frac{4x}{y}}=5$，当且仅当 $\begin{cases}\frac{y}{x}=\frac{4x}{y},\\ x+y=1,\end{cases}$ 即 $x=\frac{1}{3}$，$y=\frac{2}{3}$ 时，等号成立，∴$\frac{1}{x}+\frac{4x}{y}$ 的最小值为 5，故选 B.

4. 选 B　∵$x>0,y>0$，∴$1=\frac{x}{3}+\frac{y}{4}\geqslant 2\sqrt{\frac{x}{3}\cdot\frac{y}{4}}=\sqrt{\frac{xy}{3}}$.

∴$\sqrt{xy}\leqslant\sqrt{3}$，∴$xy\leqslant 3$. 当且仅当 $\frac{x}{3}=\frac{y}{4}$，即 $x=\frac{3}{2}$，$y=2$ 时取等号，∴$xy$ 的最大值为 3.

5. 选 B　由圆的对称性可得，直线 $ax-2by+2=0$ 必过圆心 $(-2,1)$，所以 $a+b=1$. 所以 $\frac{1}{a}+\frac{4}{b}=\left(\frac{1}{a}+\frac{4}{b}\right)(a+b)=5+\frac{b}{a}+\frac{4a}{b}\geqslant 5+4=9$，当且仅当 $\frac{b}{a}=\frac{4a}{b}$，即 $2a=b$ 时取等号，故选 B.

6. **解析**：因为 $a+b=1$，所以 $a=1-b$，因 $a>b>0$，故 $0<b<\frac{1}{2}$.

$a^2+2b^2=(1-b)^2+2b^2=3b^2-2b+1=3\left(b-\frac{1}{3}\right)^2+\frac{2}{3}$，

当 $b=\frac{1}{3}$ 时，$a^2+2b^2$ 有最小值为 $\frac{2}{3}$.

$\frac{4}{a-b}+\frac{1}{2b}=\frac{4}{1-2b}+\frac{1}{2b}$，故 $\frac{4}{a-b}+\frac{1}{2b}$

$=\left(\frac{4}{1-2b}+\frac{1}{2b}\right)(1-2b+2b)$

$=5+\frac{8b}{1-2b}+\frac{1-2b}{2b}\geqslant 5+4=9$，

当且仅当 $b=\frac{1}{6}$ 时等号成立，故 $\frac{4}{a-b}+\frac{1}{2b}$ 的最小值为 9.

**答案**：$\frac{2}{3}$　9

7. **解析**：∵$x>0$，∴$\frac{x}{x^2+3x+1}=\frac{1}{x+\frac{1}{x}+3}\leqslant\frac{1}{2+3}=\frac{1}{5}$.

∴$a\geqslant\frac{1}{5}$.

**答案**：$\left[\frac{1}{5},+\infty\right)$

8. **解析**：∵正实数 $a,b$ 满足 $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=1$，∴$a+b=(a+b)\cdot\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)=2+\frac{b}{a}+\frac{a}{b}\geqslant 2+2\sqrt{\frac{b}{a}\cdot\frac{a}{b}}=4$，当且仅当 $\frac{b}{a}=\frac{a}{b}$，即 $a=b=2$ 时取等号，∴$0<\frac{1}{a+b}\leqslant\frac{1}{4}$，又 $\frac{1}{a+b}+\frac{1}{c}=1$，∴$\frac{1}{c}=1-\frac{1}{a+b}$，∴$\frac{3}{4}\leqslant\frac{1}{c}<1$，∴$1<c\leqslant\frac{4}{3}$，即 $c$ 的取值范围为 $\left(1,\frac{4}{3}\right]$.

**答案**：$\left(1,\frac{4}{3}\right]$

9. **解**：∵向量 $\overrightarrow{OA}=(1,-2)$，$\overrightarrow{OB}=(a,-1)$，$\overrightarrow{OC}=(-b,0)$，且 $A,B,C$ 三点共线，

∴可设 $\overrightarrow{OC}=\lambda\overrightarrow{OA}+(1-\lambda)\overrightarrow{OB}(\lambda\in\mathbf{R})$，

即 $(-b,0)=\lambda(1,-2)+(1-\lambda)\cdot(a,-1)$，

∴$\begin{cases}-b=\lambda+a(1-\lambda),①\\ 0=-2\lambda-(1-\lambda),②\end{cases}$

解②得 $\lambda=-1$，代入①得 $2a+b=1$.

∵$a>0,b>0$，

∴$\frac{1}{a}+\frac{2}{b}=\left(\frac{1}{a}+\frac{2}{b}\right)(2a+b)=2+\frac{b}{a}+\frac{4a}{b}+2\geqslant 4+2\sqrt{\frac{b}{a}\cdot\frac{4a}{b}}=8$.

当且仅当 $\frac{b}{a}=\frac{4a}{b}$，即 $a=\frac{1}{4}$，$b=\frac{1}{2}$ 时，等号成立.

∴$\frac{1}{a}+\frac{2}{b}$ 的最小值为 8.

10. **解**：(1)由题意可设 $3-x=\frac{k}{t+1}$，

将 $t=0,x=1$ 代入，得 $k=2$.

∴$3-x=\frac{2}{t+1}$.

当年生产 $x$ 万件时，

∵年生产成本＝年生产费用＋固定费用，

∴年生产成本为 $32x+3=32\left(3-\frac{2}{t+1}\right)+3$.

当销售 $x$ 万件时，

年销售收入为 $150\%\left[32\left(3-\frac{2}{t+1}\right)+3\right]+\frac{1}{2}t$.

由题意，生产 $x$ 万件化妆品正好销完，

由年利润＝年销售收入－年生产成本－促销费，

得年利润 $y=\frac{-t^2+98t+35}{2(t+1)}(t\geqslant 0)$.

(2)$y=\frac{-t^2+98t+35}{2(t+1)}=50-\left(\frac{t+1}{2}+\frac{32}{t+1}\right)\leqslant 50-2\sqrt{\frac{t+1}{2}\times\frac{32}{t+1}}=50-2\sqrt{16}=42$，

当且仅当 $\frac{t+1}{2}=\frac{32}{t+1}$，即 $t=7$ 时，

等号成立，$y_{\max}=42$，

∴当促销费定在 7 万元时，年利润最大.



关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

## 第3课时　三个正数的算术—几何平均不等式

### 基础知识梳理

$\sqrt[3]{abc}$　$\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}$　均值不等式

### 题点知识巩固

1. 选C　在A、B、D中，等号不成立，取不到最值；C正确，

∵$x>0$时，$y=2+x+\frac{1}{x}\geqslant 2+2\sqrt{x\cdot\frac{1}{x}}=4$，当且仅当$x=y=1$时取等号.

2. 选C　∵实数$x,y$满足$xy>0$，且$x^2y=2$，∴$xy+x^2=\frac{1}{2}xy+\frac{1}{2}xy+x^2\geqslant 3\sqrt[3]{\frac{1}{2}xy\cdot\frac{1}{2}xy\cdot x^2}=3\sqrt[3]{\frac{1}{4}(x^2y)^2}=3$，当且仅当$\frac{1}{2}xy=\frac{1}{2}xy=x^2$，即$x=1,y=2$时，等号成立，∴$xy+x^2$的最小值是3，故选C.

3. **证明**：(1)∵$abc=1$，

∴$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\cdot abc=bc+ac+ab$.

∵$2(a^2+b^2+c^2)=(a^2+b^2)+(b^2+c^2)+(c^2+a^2)\geqslant 2ab+2bc+2ac$，

当且仅当$a=b=c$时取等号，

∴$2(a^2+b^2+c^2)\geqslant 2\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)$，即$a^2+b^2+c^2\geqslant\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$.

(2)∵$(a+b)^3+(b+c)^3+(c+a)^3\geqslant 3(a+b)(b+c)(c+a)$，当且仅当$a=b=c$时取等号，

又$a+b\geqslant 2\sqrt{ab}$，$b+c\geqslant 2\sqrt{bc}$，$a+c\geqslant 2\sqrt{ac}$，(当且仅当$a=b=c$时等号同时成立)，

∴$(a+b)^3+(b+c)^3+(c+a)^3\geqslant 3\times 2\sqrt{ab}\times 2\sqrt{bc}\times 2\sqrt{ac}=24\sqrt{(abc)^2}$，

又$abc=1$，∴$(a+b)^3+(b+c)^3+(c+a)^3\geqslant 24$.

4. **证明**：∵$a,b,c>0$，

∴$(a+b+c)(ab+bc+ca)$

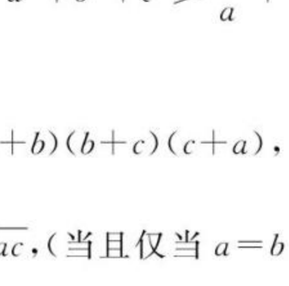
$\geqslant 3\sqrt[3]{abc}\cdot 3\sqrt[3]{ab\cdot bc\cdot ca}$

$=9\sqrt[3]{(abc)^3}=9abc$

(当且仅当$a=b=c$时取等号).

5. 选C　设长方体水箱长、宽、高分别为$x,y,z$，则$xyz=4$. 水箱的表面积$S=xy+2xz+2yz=xy+2x\cdot\frac{4}{xy}+2y\cdot\frac{4}{xy}=xy+\frac{8}{y}+\frac{8}{x}\geqslant 3\sqrt[3]{xy\cdot\frac{8}{x}\cdot\frac{8}{y}}=12$. 故要制作容积为4 $m^3$的无盖水箱，所需的钢板面积最小为12 $m^2$，所以A，B排除，而C，D均够用，但D剩较多，故选C.

6. **解**：轴截面如图，设球内接圆柱的体积为$V$，则$V=\pi r^2h$，




又$R^2=r^2+\left(\frac{h}{2}\right)^2$，

∴$r^2=R^2-\frac{h^2}{4}$.

∴$V=\pi r^2h=\pi\left(R^2-\frac{h^2}{4}\right)h$

$=\frac{\pi}{4}(4R^2-h^2)h=\frac{\pi}{4}\cdot\sqrt{(4R^2-h^2)^2\cdot h^2}$

$=\frac{\pi}{4}\cdot\sqrt{\frac{1}{2}(4R^2-h^2)(4R^2-h^2)\cdot 2h^2}$

$\leqslant\frac{\pi}{4}\cdot\sqrt{\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{4R^2-h^2+4R^2-h^2+2h^2}{3}\right)^3}$

$=\frac{\pi}{4}\cdot\sqrt{\frac{1}{2}\times\left(\frac{8R^2}{3}\right)^3}=\frac{4\sqrt{3}}{9}\pi R^3$.

当且仅当$4R^2-h^2=2h^2$，即$h=\frac{2\sqrt{3}}{3}R$时，等号成立，

此时$r=\frac{\sqrt{6}}{3}R$，

∴当$r=\frac{\sqrt{6}}{3}R$，$h=\frac{2\sqrt{3}}{3}R$时，球内接圆柱的体积最大，最大值为$\frac{4\sqrt{3}}{9}\pi R^3$.

### 提能达标过关

1. 选C　因为$x+2y+3z=6$，所以$2^x+4^y+8^z=2^x+2^{2y}+2^{3z}\geqslant 3\sqrt[3]{2^x\cdot 2^{2y}\cdot 2^{3z}}=3\sqrt[3]{2^{x+2y+3z}}=3\sqrt[3]{2^6}=12$，当且仅当$2^x=2^{2y}=2^{3z}$，即$x=2,y=1,z=\frac{2}{3}$时，等号成立，∴$2^x+4^y+8^z$的最小值为12，故选C.

2. 选C　∵$a>0,b>0,a+b=3$，

∴$ab^2=a\times\frac{b}{2}\times\frac{b}{2}\times 4\leqslant 4\left(\frac{a+\frac{b}{2}+\frac{b}{2}}{3}\right)^3=4\left(\frac{a+b}{3}\right)^3=4\times 1^3=4$，当且仅当$a=\frac{b}{2}$，即$a=1,b=2$时，等号成立，

∴$ab^2$的最大值为4.

3. 选A　∵$x>0$，∴$6x+\frac{9}{x^2}=3x+3x+\frac{9}{x^2}\geqslant 3\sqrt[3]{81}=9\sqrt[3]{3}$，

当且仅当$3x=\frac{9}{x^2}$，即$x=\sqrt[3]{3}$时取等号.

4. 选A　∵$a>b>0$，∴$a+\frac{1}{b(a-b)}=(a-b)+b+\frac{1}{b(a-b)}\geqslant 3\sqrt[3]{(a-b)b\cdot\frac{1}{b(a-b)}}=3$，当且仅当$a-b=b=\frac{1}{b(a-b)}$，即$a=2,b=1$时取等号.

5. 选A　∵$x+\frac{1}{x}\geqslant 2$，$x+\frac{4}{x^2}\geqslant 3$，$x+\frac{3^3}{x^3}\geqslant 4$，…，$x+\frac{n^n}{x^n}\geqslant n+1$，

∴$a=n^n$，故选A.

6. **解析**：∵$x>0,y>0,xy=1$，

∴$\left(\frac{x}{y}+y\right)\left(\frac{y}{x}+x\right)=1+\frac{y^2}{x}+\frac{x^2}{y}+xy\geqslant 1+3\sqrt[3]{\frac{y^2}{x}\cdot\frac{x^2}{y}\cdot xy}=1+3\sqrt[3]{x^2y^2}=1+3=4$.

当且仅当$x=y=1$时，等号成立.

**答案**：4

7. **解析**：∵$y^2=16\sin^2x\cdot\sin^2x\cdot\cos^2x$

$=8(\sin^2x\cdot\sin^2x\cdot 2\cos^2x)$

$\leqslant 8\left(\frac{\sin^2x+\sin^2x+2\cos^2x}{3}\right)^3=8\times\frac{8}{27}=\frac{64}{27}$，

∴$y^2\leqslant\frac{64}{27}$，当且仅当$\sin^2x=2\cos^2x$，即$\tan x=\pm\sqrt{2}$时取等号.

∴$y_{\max}=\frac{8}{9}\sqrt{3}$，$y_{\min}=-\frac{8}{9}\sqrt{3}$.

**答案**：$\frac{8}{9}\sqrt{3}$　$-\frac{8}{9}\sqrt{3}$



关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

8. **解析**：∵ $a>0,b>0,c>0$，且 $a+b+c=1$，∴ $abc\leqslant\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^3=\left(\frac{1}{3}\right)^3=\frac{1}{27}$，当且仅当 $a=b=c=\frac{1}{3}$ 时，等号成立，∴ ① 正确；∵ $0<abc\leqslant\frac{1}{27}$，∴ $\frac{1}{abc}\geqslant 27$，② 正确；∵ $a^2+b^2\geqslant 2ab,b^2+c^2\geqslant 2bc,a^2+c^2\geqslant 2ac$，相加得 $a^2+b^2+c^2\geqslant ab+bc+ac$，∵ $a+b+c=1$，∴ $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ac\leqslant 3(a^2+b^2+c^2)$，∴ $a^2+b^2+c^2\geqslant\frac{1}{3}$，③ 正确. 综上所述，正确不等式的序号是①②③.

**答案**：①②③

9. **证明**：证法一：因为 $a,b,c$ 均为正数，由均值不等式得

$a^2+b^2+c^2\geqslant 3(abc)^{\frac{2}{3}}$，①

$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\geqslant 3(abc)^{-\frac{1}{3}}$，

所以 $\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)^2\geqslant 9(abc)^{-\frac{2}{3}}$. ②

故 $a^2+b^2+c^2+\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)^2\geqslant 3(abc)^{\frac{2}{3}}+9(abc)^{-\frac{2}{3}}$.

又 $3(abc)^{\frac{2}{3}}+9(abc)^{-\frac{2}{3}}\geqslant 2\sqrt{27}=6\sqrt{3}$， ③

所以原不等式成立.

当且仅当 $a=b=c$ 时，①式和②式等号成立.

当且仅当 $3(abc)^{\frac{2}{3}}=9(abc)^{-\frac{2}{3}}$ 时，③式等号成立.

即当且仅当 $a=b=c=3^{\frac{1}{4}}$ 时，原式等号成立.

证法二：因为 $a,b,c$ 均为正数，由基本不等式得

$a^2+b^2\geqslant 2ab$，

$b^2+c^2\geqslant 2bc$，

$c^2+a^2\geqslant 2ac$.

所以 $a^2+b^2+c^2\geqslant ab+bc+ac$， ①

同理 $\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\geqslant\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ac}$， ②

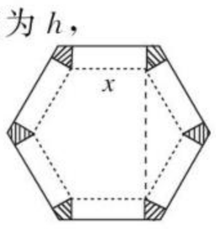
故 $a^2+b^2+c^2+\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)^2\geqslant ab+bc+ac+3\cdot\frac{1}{bc}+3\cdot\frac{1}{ab}+3\cdot\frac{1}{ac}\geqslant 6\sqrt{3}$. ③

所以原不等式成立.

当且仅当 $a=b=c$ 时，①式和②式等号成立，当且仅当 $a=b=c,(ab)^2=(bc)^2=(ac)^2=3$ 时，③式等号成立.

即当且仅当 $a=b=c=3^{\frac{1}{4}}$ 时，原式等号成立.

10. **解**：设正六棱柱容器底面边长为 $x(x>0)$，高为 $h$，




由图可知 $2h+\sqrt{3}x=\sqrt{3}$，

∴ $h=\frac{\sqrt{3}}{2}(1-x)$.

∴ 该六棱柱容器的容积

$V=S_{底}\cdot h=6\times\frac{\sqrt{3}}{4}x^2\cdot h$

$=\frac{3\sqrt{3}}{2}x^2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot(1-x)$

$=2\sqrt{3}\times\frac{3\sqrt{3}}{2}\times\frac{x}{2}\times\frac{x}{2}\times(1-x)$

$\leqslant 9\times\left[\frac{\frac{x}{2}+\frac{x}{2}+(1-x)}{3}\right]^3$

$=\frac{1}{3}$.

当且仅当 $\frac{x}{2}=\frac{x}{2}=1-x$，即 $x=\frac{2}{3}$ 时，等号成立.

所以当底面边长为 $\frac{2}{3}$ 时，该正六棱柱容器的容积最大，最大容积为 $\frac{1}{3}$.

# 二　绝对值不等式

## 第 4 课时　绝对值三角不等式

### 基础知识梳理

1. (1)原点　(2)距离　长度

2. (1)$ab\geqslant 0$　(2)$(a-b)(b-c)\geqslant 0$

### 题点知识巩固

1. 选 B　∵ $a,b,c$ 成公差不为 0 的等差数列，

∴ $2b=a+c$，∴ $c=2b-a$.

∴ $\left|b-a+\frac{1}{c-b}\right|=\left|b-a+\frac{1}{b-a}\right|\geqslant 2$.

$(b-a)^2=b^2-2ab+a^2=b^2-a(2b-a)=b^2-ac\geqslant 0$，

∴ $b^2\geqslant ac$. 由 $2b=a+c$，得 $2|b|=|a+c|\leqslant|a|+|c|$，

∴ $|b|-|a|\leqslant|c|-|b|$.

综上知，A，C，D 均正确；

而对于 B，当 $a,b$ 为正数，$c$ 为负数时，显然不成立.

2. 选 C　∵ $ab>0$，∴ $a,b$ 同号，∴ $|a+b|>|a|$，① 正确；$|a+b|>|b|$，② 错误；$|a+b|>|a-b|$，③ 错误；$|a+b|>|a|-|b|$，④ 正确，故选 C.

3. **解析**：$f(x)=\left|x+\frac{1}{x}-a\right|+\left|x-\frac{1}{x}-a\right|+2x-2a$

$\geqslant\left|\left(x+\frac{1}{x}-a\right)-\left(x-\frac{1}{x}-a\right)\right|+2x-2a$

$=\left|\frac{2}{x}\right|+2x-2a$

$=\frac{2}{x}+2x-2a\geqslant 2\sqrt{\frac{2}{x}\cdot 2x}-2a=4-2a$，

当且仅当 $\frac{2}{x}=2x$，即 $x=1$ 时，等号成立，

由 $4-2a=\frac{3}{2}$，解得 $a=\frac{5}{4}$.

**答案**：$\frac{5}{4}$

4. **解**：(1)由 $\left|\frac{1}{2}x\right|-\left|\frac{1}{2}x-m\right|\leqslant\left|\frac{1}{2}x-\left(\frac{1}{2}x-m\right)\right|=|m|$，当且仅当 $\frac{1}{2}x\left(\frac{1}{2}x-m\right)\geqslant 0$ 且当 $\left|\frac{1}{2}x\right|\geqslant\left|\frac{1}{2}x-m\right|$ 时取等号，此时 $f(x)$ 取最大值 $|m|=4$，

即 $m=\pm 4$.

(2)由(1)及 $m>0$ 可知 $m=4$，∴ $0<x<2$，

则 $\frac{2}{|x|}+\frac{2}{|x-2|}=2\left(\frac{1}{|x|}+\frac{1}{|x-2|}\right)=2\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{2-x}\right)=\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{2-x}\right)(x+2-x)=2+\frac{2-x}{x}+\frac{x}{2-x}\geqslant 2+2\sqrt{\frac{2-x}{x}\cdot\frac{x}{2-x}}=4$（当且仅当 $2-x=x$，即 $x=1$ 时，取“=”），

∴ $\frac{2}{|x|}+\frac{2}{|x-2|}$ 的最小值为 4.

5. **解析**：① ∵ $x>1$，∴ $\lg x>0$，

∴ $\frac{1}{\lg x}+\lg x\geqslant 2\sqrt{\frac{1}{\lg x}\cdot\lg x}=2$，

当且仅当 $x=10$ 时，等号成立. ∴ ① 恒成立；

② 当 $b=0$ 时，$|a-b|<|a|+|b|$ 不成立.

③ ∵ $\frac{b}{a}$ 与 $\frac{a}{b}$ 同号，

∴ $\left|\frac{b}{a}+\frac{a}{b}\right|=\left|\frac{b}{a}\right|+\left|\frac{a}{b}\right|\geqslant 2$.

∴ ③ 恒成立.

④ $|x-1|+|x-2|\geqslant|(x-1)-(x-2)|=1$，

∴ ④ 恒成立.

**答案**：①③④



关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

6. **解**：(1)因为$|x+3|+|x-2|\geqslant|(x+3)-(x-2)|=5$，
当$(x+3)(x-2)\leqslant0$，
即$-3\leqslant x\leqslant2$时取等号，则$f(x)$的最小值为5，所以$m=5$.
由$|2x-1|+x<5$，得$x-5<2x-1<5-x$，
即$-4<x<2$，所以不等式的解集是$(-4,2)$.
(2)证明：$(ab-1)^2-(a-b)^2=a^2b^2-a^2-b^2+1=(a^2-1)(b^2-1)$.
因为$m=5$，则$|a|<1$，得$a^2<1$同理$b^2<1$，
所以$(a^2-1)(b^2-1)>0$，即$(ab-1)^2>(a-b)^2$，
所以$|ab-1|>|a-b|$.

## 提能达标过关

1. C
2. 选A　$|xy-ab|=|xy-bx+bx-ab|$
$=|x(y-b)+b(x-a)|\leqslant|x(y-b)|+|b(x-a)|$
$\leqslant|x||y-b|+|b||x-a|<A\frac{\varepsilon}{2}+A\frac{\varepsilon}{2}=A\varepsilon$.
所以有$|xy-ab|<A\varepsilon$.
3. 选A　∵$|x-1|+|x+m|\geqslant|(x-1)-(x+m)|=|m+1|$
且不等式$|x-1|+|x+m|>5$恒成立，
∴$|m+1|>5$，解得$m<-6$或$m>4$，即实数$m$的取值范围为$(-\infty,-6)\cup(4,+\infty)$，故选A.
4. 选D　∵$\alpha\in\left(\pi,\frac{5\pi}{4}\right)$，∴$\cos\alpha<\sin\alpha<0$，
∴$|\cos\alpha|>|\sin\alpha|$，即$N>M$. 只有D符合，故选D.
5. 选C　因为$\left|x+\frac{1}{x}\right|=|x|+\frac{1}{|x|}\geqslant2\sqrt{|x|\cdot\frac{1}{|x|}}=2$，当且仅当$|x|=\frac{1}{|x|}$，即$x=\pm1$时，等号成立，所以$|2a-1|\leqslant2$，解得$-\frac{1}{2}\leqslant a\leqslant\frac{3}{2}$，故选C.
6. **解析**：因为$|x-3|+|x+1|\geqslant|(x-3)-(x+1)|=4$，所以$a<4$，即$a$的取值范围是$(-\infty,4)$.
**答案**：$(-\infty,4)$
7. **解析**：∵$|a+b|\geqslant|a|-|b|$，
∴当$|a|-|b|>0$，即$|a|>|b|$时，有$\frac{|a+b|}{|a|-|b|}\geqslant1$成立，
∴$|a|>|b|$是$\frac{|a+b|}{|a|-|b|}\geqslant1$的充分条件；
当$\frac{|a+b|}{|a|-|b|}\geqslant1$成立时，
∵$|a+b|>0$，∴$|a|-|b|>0$. 即$|a|>|b|$，
∴$|a|>|b|$是$\frac{|a+b|}{|a|-|b|}\geqslant1$的必要条件.
**答案**：$|a|>|b|$
8. **解析**：当$pq=0$时，$\left|px+\frac{q}{x}\right|\geqslant2\sqrt{pq}$，显然成立；
当$pq>0$时，$p$与$q$同号，则$px$与$\frac{q}{x}$也同号，
∴$\left|px+\frac{q}{x}\right|=|px|+\left|\frac{q}{x}\right|\geqslant2\sqrt{pq}$.
综上知$\left|px+\frac{q}{x}\right|\geqslant2\sqrt{pq}$.
**答案**：$\left|px+\frac{q}{x}\right|\geqslant2\sqrt{pq}$
9. **解**：(1)$f(x)=|x|+|x-3|=\begin{cases}3-2x,x<0,\\3,0\leqslant x\leqslant3,\\2x-3,x>3.\end{cases}$
$f(x)-5\geqslant x$，
即$\begin{cases}x<0,\\3-2x\geqslant x+5\end{cases}$或$\begin{cases}0\leqslant x\leqslant3,\\3\geqslant x+5\end{cases}$或$\begin{cases}x>3,\\2x-3\geqslant x+5,\end{cases}$
解得$x\leqslant-\frac{2}{3}$或$x\in\varnothing$或$x\geqslant8$，
所以不等式的解集为$\left(-\infty,-\frac{2}{3}\right]\cup[8,+\infty)$.
(2)由(1)易知$f(x)\geqslant3$，所以$m\geqslant3$，$n\geqslant3$.
由于$2(m+n)-(mn+4)$
$=2m-mn+2n-4=(m-2)(2-n)$，
且$m\geqslant3$，$n\geqslant3$，所以$m-2>0$，$2-n<0$，
即$(m-2)(2-n)<0$，所以$2(m+n)<mn+4$.
10. **解**：∵$|a+b+1|\leqslant1$，$|a+2b+4|\leqslant4$，
∴$|a+b|=|(a+b+1)-1|\leqslant|a+b-1|+|-1|=1+1=2$，
$|a-b|=|3(a+b+1)-2(a+2b+4)+5|$
$\leqslant3|a+b+1|+2|a+2b+4|+5$
$=3\times1+2\times4+5=16$.
①当$ab\geqslant0$时，$|a|+|b|=|a+b|\leqslant2$；
②当$ab<0$时，则$a(-b)>0$，
∴$|a|+|b|=|a|+|-b|=|a+(-b)|=|a-b|\leqslant16$.
由①②知，$|a|+|b|\leqslant16$.
而当$a=8$，$b=-8$时，
∴满足$|a+b+1|=1$，$|a+2b+4|=4$，且$|a|+|b|=16$，
∴$|a|+|b|$的最大值为16.

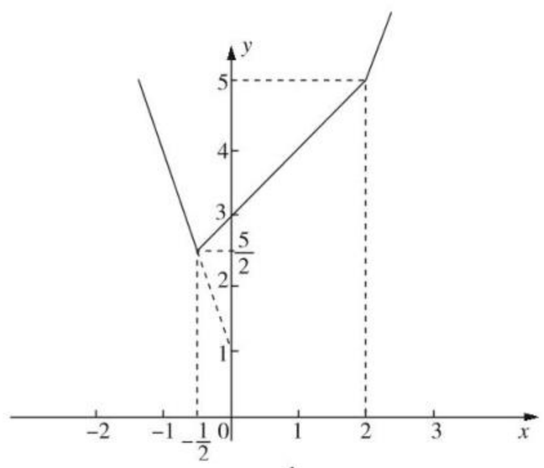
## 第5课时　绝对值不等式的解法

### 基础知识梳理

1. (1)$-a<x<a$　(2)$x<-a$或$x>a$
2. (1)$-c\leqslant ax+b\leqslant c$　$ax+b\leqslant-c$或$ax+b\geqslant c$

### 题点知识巩固

1. 选A　由$f(x)=e^{|x|}+\cos x$，知$f(x)$为**R**上的偶函数，且当$x\geqslant0$时，$f'(x)=e^x-\sin x\geqslant1-\sin x\geqslant0$，$f(x)$为增函数，故$f(2x-1)\geqslant f(x)$等价于不等式$|2x-1|\geqslant|x|$，解得$x$的取值范围为$\left(-\infty,\frac{1}{3}\right]\cup[1,+\infty)$，故选A.
2. **解析**：解法一：由$|kx-4|\leqslant2$，得$-2\leqslant kx-4\leqslant2$，
∴$2\leqslant kx\leqslant6$，∴$1\leqslant\frac{k}{2}x\leqslant3$，∴$\frac{k}{2}=1$，解得$k=2$.
解法二：依题知$|kx-4|=2$的两根为1和3，
∴$\begin{cases}|k-4|=2,\\|3k-4|=2,\end{cases}$解得$k=2$.
**答案**：2
3. 选D　$\frac{|x+1|}{|x-1|}<1\Leftrightarrow\frac{(x+1)^2}{(x-1)^2}<1\Leftrightarrow(x+1)^2<(x-1)^2$
$(x\neq1)\Leftrightarrow x^2+2x+1<x^2-2x+1(x\neq1)\Leftrightarrow4x<0\Leftrightarrow x<0$.
4. **解**：(1)$f(x)=|2x+1|+|x-2|$
$=\begin{cases}-3x+1,x\leqslant-\frac{1}{2},\\x+3,-\frac{1}{2}<x\leqslant2,\\3x-1,x>2.\end{cases}$
在直角坐标系内作出函数$f(x)$的图象，如下图：(图中的实线部分)




(2)由(1)中的图象知，$x\leqslant-\frac{1}{2}$时，由$-3x+1=3$，得$x=-\frac{2}{3}$；
当$-\frac{1}{2}<x\leqslant2$时，由$x+3=3$，解得$x=0$，
结合图象知$f(x)<3$的解集为$\left\{x\left|-\frac{2}{3}<x<0\right.\right\}$.



关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

5. **解析**：∵ $|x-3|+|x-m|=|x-3|+|m-x|\geqslant|x-3+m-x|=|m-3|$，
又存在实数 $x$ 满足 $|x-3|+|x-m|<5$，
∴ $|m-3|<5$，∴ $-5<m-3<5$，
即 $-2<m<8$.
**答案**：$(-2,8)$

6. **解**：(1)∵ $f(x)=|2x+3|+|x-1|$，

$$\therefore f(x)=\begin{cases}-3x-2, & x<-\frac{3}{2},\\ x+4, & -\frac{3}{2}\leqslant x\leqslant 1,\\ 3x+2, & x>1,\end{cases}$$

$$\therefore f(x)>4\Leftrightarrow\begin{cases}x<-\frac{3}{2},\\ -3x-2>4\end{cases}\text{或}\begin{cases}-\frac{3}{2}\leqslant x\leqslant 1,\\ x+4>4\end{cases}$$

或 $\begin{cases}x>1,\\ 3x+2>4,\end{cases}$

解得 $x<-2$ 或 $0<x\leqslant 1$ 或 $x>1$，
综上所述，不等式的解集为 $(-\infty,-2)\cup(0,+\infty)$.

(2)若存在 $x\in\left[-\frac{3}{2},1\right]$ 使不等式 $a+1>f(x)$ 成立，

$\Leftrightarrow a+1>f(x)_{\min}$，由(1)知，$x\in\left[-\frac{3}{2},1\right]$ 时，

$f(x)=x+4$，

$\therefore x=-\frac{3}{2}$ 时，$f(x)_{\min}=\frac{5}{2}$，

$a+1>\frac{5}{2}\Leftrightarrow a>\frac{3}{2}$，

∴实数 $a$ 的取值范围为 $\left(\frac{3}{2}+\infty\right)$.

## 提能达标过关

1. 选 B　由题得 $-1<x-1<1$，即 $0<x<2$. 故选 B.
2. 选 B　设 $A=\{x||x|>0\}=\{x|x<0$ 或 $x>0\}$，$B=\{x|x-1>e^2\}=\{x|x>e^2+1\}$，∴ $B\subseteq A$，∴“$|x|>0$”是“$x-1>e^2$”的必要不充分条件. 故选 B.
3. 选 C　∵ $|x-2|+|x|\geqslant|x-2-x|=2$，∴ $|x-2|+|x|>a$ 恒成立，得 $a<2$，故选 C.
4. 选 D　$|x-1|+|x-2|\geqslant|(x-1)-(x-2)|=1$，要使不等式恒成立，只要 $a^2+a+1<1$，即 $a(a+1)<0$，∴ $-1<a<0$.
5. 选 D　$|x-4|+|x-3|\geqslant|(x-4)-(x-3)|=1$，又不等式 $|x-4|+|x-3|<a$ 在 **R** 上的解集不是空集，∴ $a>1$，故选 D.
6. **解析**：①当 $x\leqslant-1$ 时，不等式可化为 $-(x+1)+2(x-1)>0$，解得 $x>3$，此时，不等式的解集为空集；
②当 $-1<x\leqslant 1$ 时，不等式可化为 $(x+1)+2(x-1)>0$，解得 $x>\frac{1}{3}$，此时，不等式的解集为 $\left\{x\left|\frac{1}{3}<x\leqslant 1\right.\right\}$；
③当 $x>1$ 时，不等式可化为 $(x+1)-2(x-1)>0$，
解得 $x<3$，此时，不等式的解集为 $\{x|1<x<3\}$.
综上所述，原不等式的解集为 $\left\{x\left|\frac{1}{3}<x<3\right.\right\}$.
**答案**：$\left\{x\left|\frac{1}{3}<x<3\right.\right\}$
7. **解析**：当 $x\geqslant 0$ 时，不等式化为 $(1+x)(1-x)>0$，
即 $(x+1)(x-1)<0$，解得 $-1<x<1$.
又 $x\geqslant 0$，∴ $0\leqslant x<1$.
当 $x<0$ 时，不等式化为 $(1+x)^2>0$，解得 $x\neq-1$.
又 $x<0$，∴ $x<0$ 且 $x\neq-1$.
综上知，原不等式的解集为 $\{x|x<-1$ 或 $-1<x<1\}$.
**答案**：$\{x|x<-1$ 或 $-1<x<1\}$
8. **解析**：当 $a<0$ 时，方程为 $x^2+x-2a+\frac{1}{4}=0$，若其有实根，则 $\Delta=1-4\left(-2a+\frac{1}{4}\right)\geqslant 0$，解得 $a\geqslant 0$，矛盾，此时无解；当 $0\leqslant a\leqslant\frac{1}{4}$ 时，方程化为 $x^2+x+\frac{1}{4}=0$，即 $\left(x+\frac{1}{2}\right)^2=0$，其解为 $x=-\frac{1}{2}$，满足题意，此时 $0\leqslant a\leqslant\frac{1}{4}$；当 $a>\frac{1}{4}$ 时，方程化为 $x^2+x+2a-\frac{1}{4}=0$，若方程有解，则 $\Delta=1-4\left(2a-\frac{1}{4}\right)\geqslant 0$，解得 $a\leqslant\frac{1}{4}$，矛盾，此时无解，综上知，$a$ 的取值范围是 $\left[0,\frac{1}{4}\right]$.
**答案**：$\left[0,\frac{1}{4}\right]$
9. **解**：(1)当 $a=1$ 时，原不等式可化为 $|x-1|x+|x-2|(x-1)<0$.
当 $x<1$ 时，上述不等式可化为 $(1-x)\cdot x+(2-x)\cdot(x-1)<0$，
整理，得 $(x-1)^2>0$，显然成立，
此时解集为 $(-\infty,1)$；
当 $1\leqslant x<2$ 时，上述不等式可化为 $(x-1)x+(2-x)(x-1)<0$，
解得 $x<1$，
此时解集为空集；
当 $x\geqslant 2$ 时，上述不等式可化为 $(x-1)x+(x-2)(x-1)<0$，
整理，得 $(x-1)^2<0$，显然不成立，
此时解集为空集；
综上所述，原不等式的解集为 $(-\infty,1)$.
(2)当 $a\geqslant 1$ 时，因为 $x\in(-\infty,1)$，所以由 $f(x)<0$，
可得 $(a-x)x+(2-x)(x-a)<0$，
整理，得 $(x-a)(x-1)>0$，显然成立，
所以 $a\geqslant 1$ 满足题意；
当 $a<1$ 时，$f(x)=\begin{cases}2(x-a), & a\leqslant x<1,\\ 2(x-a)(1-x), & x<a.\end{cases}$
因为 $a\leqslant x<1$ 时，$f(x)<0$，显然不能成立，
所以 $a<1$ 不满足题意，
综上所述，$a$ 的取值范围是 $[1,+\infty)$.
10. **解**：(1)依据绝对值的几何意义可知函数 $f(x)=\left|2x-\frac{3}{4}\right|+\left|2x+\frac{5}{4}\right|$ 表示数轴上点 $P(2x)$ 到点 $A\left(\frac{3}{4}\right)$ 和 $B\left(-\frac{5}{4}\right)$ 两点的距离，其最小值为 $f(x)_{\min}=2$，
∴不等式恒成立只需 $2\geqslant a^2-a$，解得 $-1\leqslant a\leqslant 2$.
(2)证明：∵ $f(x)_{\min}=2$，∴只需证明：$\sqrt{2m+1}+\sqrt{2n+1}\leqslant 2\sqrt{2}$ 成立即可.

$$\sqrt{2(2m+1)}\leqslant\frac{2+(2m+1)}{2}=m+\frac{3}{2};$$

$$\sqrt{2(2n+1)}\leqslant\frac{2+(2n+1)}{2}=n+\frac{3}{2}.$$

于是 $\sqrt{2(2m+1)}+\sqrt{2(2n+1)}\leqslant m+\frac{3}{2}+n+\frac{3}{2}=m+n+3=4$.
∴ $\sqrt{2m+1}+\sqrt{2n+1}\leqslant 2\sqrt{2}$，
故要证明的不等式成立.



关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

## 阶段评估一

1. 选 C　解法一：取 $a=2,b=-1$，则 $-a=-2,-b=1$，
$\therefore a>-b>b>-a$.
解法二：$\because b<0,a+b>0,\therefore a>-b>0$，
$\therefore 0>b>-a,\therefore a>-b>b>-a$.

2. 选 D　原不等式可化为 $\begin{cases}|2x+1|>2,\\|2x+1|<3,\end{cases}$
$\therefore \begin{cases}x>\frac{1}{2}\text{或 }x<-\frac{3}{2},\\-2<x<1,\end{cases}$
$\therefore \frac{1}{2}<x<1$ 或 $-2<x<-\frac{3}{2}$，故选 D.

3. 选 B　由 $x^2-5x<0$，得 $0<x<5$；得 $|x-1|<1$，得 $0<x<2$.
$\because (0,5)\supsetneq(0,2)$，$\therefore$“$x^2-5x<0$”是“$|x-1|<1$”的必要不充分条件，故选 B.

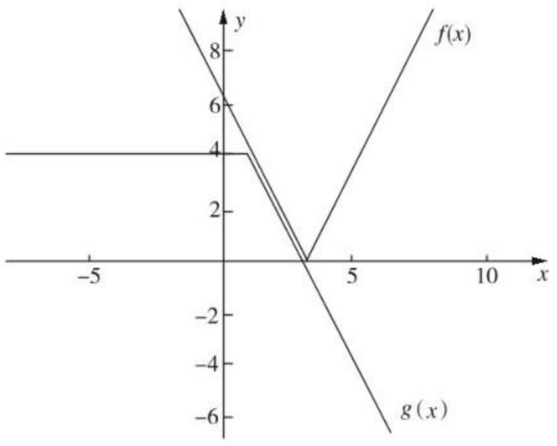
4. 选 B　$\frac{|2x-1|-2}{|x+3|}>0\Leftrightarrow\begin{cases}|2x-1|-2>0,\\x\neq-3\end{cases}\Leftrightarrow$
$\begin{cases}|2x-1|>2,\\x\neq-3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x>\frac{3}{2}\text{或 }x<-\frac{1}{2},\\x\neq-3.\end{cases}$

5. 选 A　$\because x>\frac{1}{2},\therefore 2x-1>0,\therefore 4x-2>0$.
$\therefore y=4x-\frac{9}{2-4x}=4x-2+\frac{9}{4x-2}+2\geqslant$
$2\sqrt{(4x-2)\times\frac{9}{4x-2}}+2=2\times3+2=8$，
当且仅当 $4x-2=\frac{9}{4x-2}$，即 $x=\frac{5}{4}$ 时，等号成立.
$\therefore y$ 的最小值是 8.

6. 选 B　因为 $\frac{1}{a}<\frac{1}{b}<0$，故 $b<a<0$，所以 $a+b<0<ab$，故①正确，③错误；又 $\frac{b}{a}>1$，故 $\frac{b}{a}+\frac{a}{b}>2$，故④正确；又 $b<a<0$，故 $|b|>|a|$，故②错误. 综上，①④正确，故选 B.

7. **解析**：①当 $x<3$ 时，不等式可化为 $(3-x)+(7-x)\leqslant8$，解得 $x\geqslant1$，此时不等式的解集为 $\{x|1\leqslant x<3\}$；
②当 $3\leqslant x\leqslant7$ 时，不等式可化为 $(x-3)+(7-x)\leqslant8$，即 $4\leqslant8$ 恒成立，此时不等式的解集为 $\{x|3\leqslant x\leqslant7\}$；
③当 $x>7$ 时，不等式可化为 $(x-3)+(x-7)\leqslant8$，解得 $x\leqslant9$，此时不等式的解集为 $\{x|7<x\leqslant9\}$.
综上所述，原不等式的解集为 $\{x|1\leqslant x\leqslant9\}$.
**答案**：$\{x|1\leqslant x\leqslant9\}$

8. **解析**：原不等式可转化为 $|2x-a|\geqslant5-x-|x-1|$ 在 **R** 上恒成立.
令 $f(x)=|2x-a|,g(x)=5-x-|x-1|=\begin{cases}4,x\leqslant1,\\6-2x,x>1.\end{cases}$
依题意 $f(x)$ 的图象应位于 $g(x)$ 图象的上方.
在平面直角坐标系内作出 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的图象，如图所示，




由图象可知 $f(1)\geqslant g(1)$，即 $|2-a|\geqslant4$，　①
由 $f(x)=0$，得 $x=\frac{a}{2}$，由 $g(x)=0$，得 $x=3$.
由图象知 $\frac{a}{2}\geqslant3$，　②
解①②得 $a\geqslant6$，
$\therefore$ 实数 $a$ 的取值范围是 $[6,+\infty)$.
**答案**：$[6,+\infty)$

9. **解析**：$\because x>0,y>0,\frac{2}{x}+\frac{1}{y}=1$，
$\therefore x+2y=(x+2y)\left(\frac{2}{x}+\frac{1}{y}\right)=2+2+\frac{4y}{x}+\frac{x}{y}\geqslant$
$4+2\times2=8$，
当且仅当 $\frac{4y}{x}=\frac{x}{y}$，$x=2y$，即 $x=4,y=2$ 时取等号，
$\therefore x+2y$ 的最小值为 8.
要使 $x+2y>m^2+2m$ 恒成立，只要 $m^2+2m<8$，
解得 $-4<m<2$.
**答案**：$(-4,2)$

10. **解析**：要使对任意的 $x_1,x_2,x_3,f(x_1)+f(x_2)>f(x_3)$ 成立，也即是 $f(x)$ 最小值的两倍要大于它的最大值. $f(x)=1+\frac{m-1}{3^x+\frac{1}{3^x}+1}$，当 $m-1\geqslant0$，即 $m\geqslant1$ 时，$f(x)\geqslant1$，由基本不等式得 $f(x)\leqslant1+\frac{m-1}{2+1}$，根据上面的分析，则有 $1\times2\geqslant1+\frac{m-1}{3}$，解得 $m\leqslant4$，即 $m\in[1,4]$；当 $m-1<0$，即 $m<1$ 时，$f(x)<1$，由基本不等式得 $f(x)\geqslant1+\frac{m-1}{2+1}$，根据上面的分析，则有 $\left(1+\frac{m-1}{3}\right)\times2\geqslant1$，解得 $m\geqslant-\frac{1}{2}$，即 $m\in\left[-\frac{1}{2},1\right)$. 综上所述 $m\in\left[-\frac{1}{2},4\right]$.
**答案**：$\left[-\frac{1}{2},4\right]$

11. **解**：$f(x)=\frac{-2x^2+x-3}{x}=1-\left(2x+\frac{3}{x}\right)$.
$\because x>0,\therefore 2x+\frac{3}{x}\geqslant2\sqrt{6}$，
$\therefore -\left(2x+\frac{3}{x}\right)\leqslant-2\sqrt{6}$，
$\therefore f(x)\leqslant1-2\sqrt{6}$.
当且仅当 $2x=\frac{3}{x}$，即 $x^2=\frac{3}{2}$ 时，等号成立.
$\because x>0,\therefore x=\frac{\sqrt{6}}{2}$.
$\therefore f(x)$ 的最大值为 $1-2\sqrt{6}$，此时 $x=\frac{\sqrt{6}}{2}$.

12. **解**：(1)当 $x\leqslant-1$ 时，$f(x)=(1-x)+2(x+1)=x+3\leqslant2$；
当 $-1<x<1$ 时，$f(x)=(1-x)-2(x+1)=-3x-1<2$；
当 $x\geqslant1$ 时，$f(x)=(x-1)-2(x+1)=-x-3\leqslant-4$.
$\therefore$ 当 $x=-1$ 时，$f(x)_{\max}=2$，
$\therefore m=2$.
(2)$f(x)=|x+a|+|x-b|+c$
$\geqslant|(x+a)-(x-b)|+c$
$=|a+b|+c$
$=a+b+c$，
当且仅当 $-a\leqslant x\leqslant b$ 时，等号成立.
$\therefore f(x)$ 的最小值为 $a+b+c$，
$\therefore a+b+c=4$.



关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

13. **解**：(1)① 当 $x<\frac{1}{2}$ 时，原不等式可化为 $1-2x+1-x\leqslant 3x+4$，

解得 $x\geqslant -\frac{1}{3}$，$\therefore -\frac{1}{3}\leqslant x<\frac{1}{2}$；

②当 $\frac{1}{2}\leqslant x<1$ 时，原不等式可化为 $2x-1+1-x\leqslant 3x+4$，

解得 $x\geqslant -2$，$\therefore \frac{1}{2}\leqslant x<1$；

③当 $x\geqslant 1$ 时，原不等式可化为 $2x-1+x-1\leqslant 3x+4$，不等式恒成立，

$\therefore x\geqslant 1$.

综上知，不等式的解集为 $\left\{x\left|x\geqslant -\frac{1}{3}\right.\right\}$.

(2)当 $x=0$ 时，得 $2\geqslant 0$ 恒成立，$\therefore m\in\mathbf{R}$；

当 $x\neq 0$ 时，原不等式可化为 $\frac{|2x-1|+|1-x|}{|x|}\geqslant m^2-3m+3$.

$\because \frac{|2x-1|+|1-x|}{|x|}\geqslant\frac{|2x-1+1-x|}{|x|}=1$，

$\therefore m^2-3m+3\leqslant 1$，

解得 $1\leqslant m\leqslant 2$. $\therefore$ 实数 $m$ 的取值范围是 $\{m|1\leqslant m\leqslant 2\}$.

14. **解**：(1)$\because f(x)=\left|x+\frac{1}{2}\right|-\left|x-\frac{3}{2}\right|$，$\therefore |f(x)|=\left|\left|x+\frac{1}{2}\right|-\left|x-\frac{3}{2}\right|\right|\leqslant\left|\left(x+\frac{1}{2}\right)-\left(x-\frac{3}{2}\right)\right|=2$（当且仅当 $\left(x+\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{3}{2}\right)\geqslant 0$，即 $x\leqslant -\frac{1}{2}$ 或 $x\geqslant\frac{3}{2}$ 时，等号成立），$\therefore -2\leqslant f(x)\leqslant 2$，

$\therefore$ 函数 $f(x)$ 的值域为 $[-2,2]$.

(2)证明：由(1)得，函数 $f(x)$ 的最大值 $m=2$，又 $a^2+b^2+c^2=m^2=4$，

$\therefore a^2+1+b^2+3+c^2+4=12$，

$\therefore \frac{1}{a^2+1}+\frac{1}{b^2+3}+\frac{1}{c^2+4}=\frac{1}{12}\left(\frac{1}{a^2+1}+\frac{1}{b^2+3}+\frac{1}{c^2+4}\right)(a^2+1+b^2+3+c^2+4)$

$=\frac{1}{12}\left(\frac{b^2+3}{a^2+1}+\frac{a^2+1}{b^2+3}+\frac{c^2+4}{a^2+1}+\frac{a^2+1}{c^2+4}+\frac{c^2+4}{b^2+3}+\frac{b^2+3}{c^2+4}+3\right)$

$\geqslant\frac{1}{12}(2+2+2+3)=\frac{3}{4}$（当且仅当 $a^2+1=b^2+3=c^2+4=4$，即 $a^2=3$，$b^2=1$，$c^2=0$ 时，等号成立），

$\therefore \frac{1}{a^2+1}+\frac{1}{b^2+3}+\frac{1}{c^2+4}\geqslant\frac{3}{4}$.

# 第二讲　证明不等式的基本方法

## 一　比较法

### 第 6 课时　比较法

#### 基础知识梳理

1. $a>b$　$a=b$　$a<b$　确定符号

2. $a>b$　$a=b$　$a<b$　与 1 比较大小

#### 题点知识巩固

1. 选 C　$\because 0<b<a<1$，

$\therefore ab>b\cdot b=b^2$，故 A 项不正确；

$\because 0<b<1$，$0<a<1$，

$\therefore \log_{\frac{1}{2}}b>0$，$\log_{\frac{1}{2}}a>0$，故 B 项不正确；

$\because 0<b<a<1$，$\therefore a^2>ab$，故 D 项不正确. 而选项 C 正确，故选 C.

2. **证明**：$x+\frac{4}{x^2-2xy+y^2}-y=(x-y)+\frac{4}{(x-y)^2}=\frac{x-y}{2}+\frac{x-y}{2}+\frac{4}{(x-y)^2}$.

因为 $x$，$y$ 均为正数，且 $x>y$，所以 $x-y>0$，

所以 $\frac{x-y}{2}+\frac{x-y}{2}+\frac{4}{(x-y)^2}\geqslant 3\sqrt[3]{\frac{x-y}{2}\cdot\frac{x-y}{2}\cdot\frac{4}{(x-y)^2}}=3$.

当且仅当 $\frac{x-y}{2}=\frac{x-y}{2}=\frac{4}{(x-y)^2}$，即 $x-y=2$ 时，等号成立.

即 $x+\frac{4}{x^2-2xy+y^2}-y\geqslant 3$，

$\therefore x+\frac{4}{x^2-2xy+y^2}\geqslant y+3$.

3. **解析**：$\frac{\log_2\frac{1}{3}}{\log_3\frac{1}{2}}=\log_2\frac{1}{3}\cdot\log_{\frac{1}{2}}3=\log_2\frac{1}{3}\cdot\frac{\log_2 3}{\log_2\frac{1}{2}}=\log_2\frac{1}{3}\cdot\log_2 3^{-1}=\left(\log_2\frac{1}{3}\right)^2$.

$\because \log_2\frac{1}{3}<\log_2\frac{1}{2}=-1$，$\therefore \left(\log_2\frac{1}{3}\right)^2>1$.

又 $\because \log_3\frac{1}{2}<\log_3 1=0$，$\therefore \log_2\frac{1}{3}<\log_3\frac{1}{2}$.

**答案**：$<$

4. **证明**：$\because a>2$，$\therefore a-1>1$，

$\therefore \log_a(a-1)>0$，$\log_{(a+1)}a>0$，

$\because \frac{\log_a(a-1)}{\log_{(a+1)}a}=\log_a(a-1)\cdot\log_a(a+1)$

$<\left[\frac{\log_a(a-1)+\log_a(a+1)}{2}\right]^2$

$=\left[\frac{\log_a(a^2-1)}{2}\right]^2$，

$\because a>2$，$\therefore 0<\log_a(a^2-1)<\log_a a^2=2$.

$\therefore \left[\frac{\log_a(a^2-1)}{2}\right]^2<1$.

即 $\frac{\log_a(a-1)}{\log_{(a+1)}a}<1$，

$\because \log_{(a+1)}a>0$，

$\therefore \log_a(a-1)<\log_{(a+1)}a$.

5. **解析**：$\because a>b>0$，$x=\sqrt{a+b}-\sqrt{a}=\frac{b}{\sqrt{a+b}+\sqrt{a}}$，

$y=\sqrt{a}-\sqrt{a-b}=\frac{b}{\sqrt{a}+\sqrt{a-b}}$. $\therefore \frac{x}{y}=\frac{\sqrt{a}+\sqrt{a-b}}{\sqrt{a}+\sqrt{a+b}}<1$，

$\therefore x<y$.

**答案**：$x<y$

6. **解**：$(1+a^3)-(1+a^2)=a^2(a-1)$.

当 $0<a<1$ 时，$a^2(a-1)<0$，

$\therefore 1+a^3<1+a^2$.

又 $y=\log_a x$ 为减函数，

$\therefore \log_a(1+a^3)>\log_a(1+a^2)$，即 $P>Q$；

当 $a>1$ 时，$a^2(a-1)>0$，$\therefore 1+a^3>1+a^2$.

又 $y=\log_a x$ 为增函数，$\therefore \log_a(1+a^3)>\log_a(1+a^2)$，

即 $P>Q$.

综上所述，$P>Q$.



关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

### 提能达标过关

1. 选 B　$\because m-1\geqslant 0$，$\therefore m\geqslant 1$，$\because m^2-(m-1)=m^2-m+1=\left(m-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}>0$，$\therefore m^2>m-1$，$\therefore m>\sqrt{m-1}$.

2. 选 D　$\because a>0,b>0$，

$\therefore \frac{b}{a}+\frac{a}{b}\geqslant 2\sqrt{\frac{b}{a}\cdot\frac{a}{b}}=2$，

$\frac{\frac{b^2}{a}+\frac{a^2}{b}}{a+b}=\frac{a^3+b^3}{ab(a+b)}=\frac{a^2-ab+b^2}{ab}\geqslant\frac{2ab-ab}{ab}=1$，

$\therefore \frac{b^2}{a}+\frac{a^2}{b}\geqslant a+b$.

$\therefore$B,C 正确，易知 A 正确.

3. 选 A　由等比数列的性质知，$a_5=\frac{a_3^2}{a_1}$，

由等差数列的性质知 $b_5=2b_3-b_1$，$\because a_1=b_1>0$，$a_3=b_3$，

$\therefore a_5-b_5=\frac{a_3^2}{a_1}-2b_3+b_1=\frac{a_3^2-2a_3a_1+a_1^2}{a_1}=\frac{(a_3-a_1)^2}{a_1}>0$，$\therefore a_5>b_5$.

4. 选 B　$\because a>0,b>0$，$\therefore a^ab^a>0$，

又 $\frac{a^ab^b}{a^bb^a}=\left(\frac{a}{b}\right)^a\cdot\left(\frac{b}{a}\right)^b=\left(\frac{a}{b}\right)^{a-b}$，

当 $a>b>0$ 时，$\frac{a}{b}>1$，且 $a-b>0$，$\therefore\left(\frac{a}{b}\right)^{a-b}>1$，$\therefore\frac{a^ab^b}{a^bb^a}>1$；

当 $b>a>0$ 时，$0<\frac{a}{b}<1$，且 $a-b<0$，$\therefore\left(\frac{a}{b}\right)^{a-b}>1$，

$\therefore\frac{a^ab^b}{a^bb^a}>1$；

当 $a=b$ 时，$\frac{a^ab^b}{a^bb^a}=1$.

综上所述 $\frac{a^ab^b}{a^bb^a}\geqslant 1$，$\therefore a^ab^b\geqslant a^bb^a$，故选 B.

5. 选 B　$(ab^k+a^kb)-a^{k+1}-b^{k+1}=b^k(a-b)+a^k(b-a)=(a-b)(b^k-a^k)$，

$\because a>0,b>0$，若 $a>b$，则 $a^k>b^k$，

$\therefore(a-b)(b^k-a^k)<0$；

若 $a<b$，则 $a^k<b^k$，$\therefore(a-b)(b^k-a^k)<0$.

6. **解析**：$\because c-b=4-4a+a^2=(2-a)^2\geqslant 0$，$\therefore c\geqslant b$. 已知两式作差得 $2b=2+2a^2$，即 $b=1+a^2$. $\because 1+a^2-a=\left(a-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}>0$，$\therefore 1+a^2>a$. $\therefore b=1+a^2>a$. $\therefore c\geqslant b>a$.

**答案**：$c\geqslant b>a$

7. **解析**：$A-B=\frac{1}{2a}+\frac{1}{2b}-\frac{2}{a+b}=\frac{a+b}{2ab}-\frac{2}{a+b}=\frac{(a+b)^2-4ab}{2ab(a+b)}=\frac{(a-b)^2}{2ab(a+b)}$，

$\because a>0,b>0$，$\therefore 2ab>0$，$a+b>0$，$(a-b)^2\geqslant 0$，

$\therefore A-B\geqslant 0$，即 $A\geqslant B$.

**答案**：$A\geqslant B$

8. **解析**：$\frac{m}{n}=\frac{\frac{|a|+|b|}{|a+b|}}{\frac{|a-b|}{||a|-|b||}}=\frac{(|a|+|b|)||a|-|b||}{|a+b|\cdot|a-b|}$

$=\frac{|a^2-b^2|}{|a^2-b^2|}=1$，$\therefore m=n$.

**答案**：=

9. **证明**：证法一：①当 $a>1$ 时，

因为 $0<1-x<1$，$1+x>1$.

所以 $|\log_a(1-x)|-|\log_a(1+x)|=-\log_a(1-x)-\log_a(1+x)=-\log_a(1-x^2)>0$；

②当 $0<a<1$ 时，

因为 $0<1-x<1$，$1+x>1$，

所以 $|\log_a(1-x)|-|\log_a(1+x)|=\log_a(1-x)+\log_a(1+x)=\log_a(1-x^2)>0$.

综合①②知 $|\log_a(1-x)|>|\log_a(1+x)|$.

证法二：$|\log_a(1-x)|-|\log_a(1+x)|$

$=\left|\frac{\lg(1-x)}{\lg a}\right|-\left|\frac{\lg(1+x)}{\lg a}\right|$

$=\frac{|\lg(1-x)|}{|\lg a|}-\frac{|\lg(1+x)|}{|\lg a|}$

$=\frac{|\lg(1-x)|-|\lg(1+x)|}{|\lg a|}$

$=\frac{-\lg(1-x)-\lg(1+x)}{|\lg a|}$

$=\frac{-\lg(1-x^2)}{|\lg a|}$，

$\because 0<x<1$，$\therefore 0<1-x^2<1$，$\therefore\lg(1-x^2)<0$，

$\therefore\frac{-\lg(1-x^2)}{|\lg a|}>0$，

$\therefore|\log_a(1-x)|>|\log_a(1+x)|$.

10. **解**：(1)由 $f(x)<3-|2x+1|$，得 $|x-1|+|2x+1|<3$，

即 $\begin{cases}x\leqslant-\frac{1}{2},\\1-x-2x-1<3\end{cases}$ 或 $\begin{cases}-\frac{1}{2}<x<1,\\1-x+2x+1<3\end{cases}$

或 $\begin{cases}x\geqslant 1,\\x-1+2x+1<3.\end{cases}$

解得 $-1<x\leqslant-\frac{1}{2}$ 或 $-\frac{1}{2}<x<1$，

所以，集合 $A=\{x\in\mathbf{R}\mid-1<x<1\}$.

(2)证明：$\because a,b\in A$，$\therefore -1<ab<1$，

$\therefore f(ab)=|ab-1|=1-ab$，$f(a)=|a-1|=1-a$，

$f(b)=|b-1|=1-b$，

$\because f(ab)-(f(a)-f(b))=1-ab-1+a+1-b=(1+a)(1-b)>0$，

$\therefore f(ab)>f(a)-f(b)$.

## 二　综合法与分析法

### 第 7 课时　综合法与分析法

#### 基础知识梳理

1. 综合法　顺推证法　由因导果法

2. 分析法　执果索因

#### 题点知识巩固

1. 选 C　$\because y=\left(\frac{1}{3}\right)^x$ 是减函数，又 $\frac{1}{3}<\left(\frac{1}{3}\right)^b<\left(\frac{1}{3}\right)^a<1$，$\therefore 0<a<b<1$，$\therefore b^a>a^a>a^b$.

2. **证明**：(1)$\because a>0,b>0,a^2b+ab^2=2$，

$\therefore(a^3+b^3)-2=a^3+b^3-a^2b-ab^2=a^2(a-b)+b^2(b-a)$

$=(a-b)(a^2-b^2)=(a-b)^2(a+b)\geqslant 0$，

$\therefore a^3+b^3\geqslant 2$.

(2)$(a+b)(a^5+b^5)=a^6+b^6+a^5b+ab^5=(a^3+b^3)^2-2a^3b^3+a^5b+ab^5$

$=(a^3+b^3)^2+ab(a^4-2a^2b^2+b^4)=(a^3+b^3)^2+ab(a^2-b^2)^2$，

$\because a>0,b>0,a^3+b^3\geqslant 2$，

$\therefore(a+b)(a^5+b^5)\geqslant 2^2=4$.



关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

3. 选 C 取 $a=1$ 得 $P=1+\sqrt{8}<4$，$Q=2+\sqrt{5}>4$，所以 $P<Q$，故选 C.
证明如下：要证 $P<Q$，只要证 $P^2<Q^2$，只要证 $2a+7+2\sqrt{a(a+7)}<2a+7+2\sqrt{(a+3)(a+4)}$，只要证 $a^2+7a<a^2+7a+12$，只要证 $0<12$，显然 $0<12$ 成立，所以 $P<Q$ 成立.

4. **证明**：$\because a>0$，
要证 $\sqrt{a^2+\frac{1}{a^2}}-\sqrt{2}\geqslant a+\frac{1}{a}-2$，
需证 $\sqrt{a^2+\frac{1}{a^2}}+2\geqslant a+\frac{1}{a}+\sqrt{2}$，
需证 $a^2+\frac{1}{a^2}+4\sqrt{a^2+\frac{1}{a^2}}+4\geqslant a^2+\frac{1}{a^2}+2\sqrt{2}\cdot\left(a+\frac{1}{a}\right)+4$，
即证 $2\sqrt{a^2+\frac{1}{a^2}}\geqslant\sqrt{2}\left(a+\frac{1}{a}\right)$，
需证 $4\left(a^2+\frac{1}{a^2}\right)\geqslant 2\left(a^2+\frac{1}{a^2}+2\right)$，
即证 $a^2+\frac{1}{a^2}\geqslant 2$，
由基本不等式可知 $a^2+\frac{1}{a^2}\geqslant 2$ 成立，
$\therefore$ 原不等式成立.

5. 选 C 分析四个不等式知，只要推证④就可以知正确命题的个数，下面用分析法证明④.
$\sqrt{(a^2+b^2)(c^2+d^2)}\geqslant|ac+bd|\Leftrightarrow(a^2+b^2)(c^2+d^2)\geqslant(ac+bd)^2\Leftrightarrow a^2c^2+b^2c^2+a^2d^2+b^2d^2\geqslant a^2c^2+b^2d^2+2abcd\Leftrightarrow(bc-ad)^2\geqslant 0$，显然成立，$\therefore$ ④成立，因而①②成立，③不成立.

6. **证明**：$\because a>b>c$，且 $a+b+c=0$，
$\therefore a>0$，且 $c<0$（否则与 $a+b+c=0$ 相矛盾）.
$\therefore\frac{\sqrt{b^2-ac}}{a}<\sqrt{3}\Leftrightarrow\sqrt{b^2-ac}<\sqrt{3}\,a\Leftrightarrow b^2-ac<3a^2\Leftrightarrow 3a^2+ac-b^2>0\Leftrightarrow 3a^2+ac-(a+c)^2>0\Leftrightarrow 2a^2-ac-c^2>0\Leftrightarrow(a-c)(2a+c)>0$.
$\because a>b>c$，$\therefore a-c>0$.
$2a+c=a+(a+c)=a-b>0$，
$\therefore(a-c)(2a+c)>0$.
故 $\frac{\sqrt{b^2-ac}}{a}<\sqrt{3}$.

## 提能达标过关

1. 选 A 由分析法的定义：“一般地，从要证明的结论出发，逐步寻求使它成立的充分条件，直至最后，把要证明的结论归结为判定一个明显成立的条件（已知条件、定理、定义、公理等）为止，这种证明方法叫做分析法.”可知 A 正确，故选 A.

2. 选 A $\because c<b<a$，且 $ac<0$，$\therefore a>0$，$c<0$.
$\therefore ab>ac$.

3. 选 B $\because x_1$，$x_2$ 是方程 $x^2+px+4=0$ 的两个不相等的实数根，
$\therefore x_1+x_2=-p$，$x_1x_2=4$.
又 $\because\Delta=p^2-4\times1\times4>0$，$\therefore p^2>16$，$|p|>4$.
$\therefore|x_1+x_2|=|-p|=|p|>4$.

4. 选 B 要证：$a^2+b^2-1-a^2b^2\leqslant 0$，只要证明 $(a^2-1)(1-b^2)\leqslant 0$，只要证明 $(a^2-1)(b^2-1)\geqslant 0$，故选 B.

5. 选 A 由于 $a$，$b$，$c$，$d$ 均为正数，且 $a+b=cd=4$，所以 $4=a+b\geqslant 2\sqrt{ab}$，$\therefore ab\leqslant 4$，当 $a=b$ 时等号成立，又 $4=cd\leqslant\left(\frac{c+d}{2}\right)^2$，$\therefore c+d\geqslant 4$，当 $c=d$ 时等号成立，所以 $ab\leqslant c+d$，且等号成立时，$a$，$b$，$c$，$d$ 的取值唯一，即当 $a=b=2$，$c=d=2$ 时，等号成立，故选 A.

6. **解析**：$\because a>b>c$，$\therefore a-b>0$，$b-c>0$，$a-c>0$.
又 $(a-c)\left(\frac{1}{a-b}+\frac{1}{b-c}\right)$
$=[(a-b)+(b-c)]\left(\frac{1}{a-b}+\frac{1}{b-c}\right)$
$\geqslant 2\sqrt{(a-b)(b-c)}\cdot 2\sqrt{\frac{1}{a-b}\cdot\frac{1}{b-c}}=4$.
$\therefore m\leqslant 4$.
**答案**：$(-\infty,4]$

7. **解析**：要证：$\sqrt{2}+\sqrt{3}<\sqrt{10}$，需证 $2+2\sqrt{6}+3<10$，即证 $2\sqrt{6}<5$，需证 $24<25$，$\because 24<25$ 显然成立，
$\therefore\sqrt{2}+\sqrt{3}<\sqrt{10}$ 成立，
由上述证明方法知最合理的是分析法.
**答案**：②

8. **解析**：取 $a=3$，得 $\sqrt{a}-\sqrt{a-1}=\sqrt{3}-\sqrt{2}$，
$\sqrt{a-2}-\sqrt{a-3}=1$，
得 $\sqrt{a}-\sqrt{a-1}<\sqrt{a-2}-\sqrt{a-3}$.
证明如下：要证 $\sqrt{a}-\sqrt{a-1}<\sqrt{a-2}-\sqrt{a-3}$，
只需证 $\sqrt{a}+\sqrt{a-3}<\sqrt{a-1}+\sqrt{a-2}$.
只需证 $(\sqrt{a}+\sqrt{a-3})^2<(\sqrt{a-1}+\sqrt{a-2})^2$，
即证 $\sqrt{a(a-3)}<\sqrt{(a-1)(a-2)}$，
只需证 $a(a-3)<(a-1)(a-2)$，
即证 $0<2$，显然 $0<2$，
故 $\sqrt{a}-\sqrt{a-1}<\sqrt{a-2}-\sqrt{a-3}$.
**答案**：$\sqrt{a}-\sqrt{a-1}<\sqrt{a-2}-\sqrt{a-3}$

9. **证明**：(1) $\because a^2+b^2\geqslant 2ab$，
$b^2+c^2\geqslant 2bc$，
$a^2+c^2\geqslant 2ac$，
三式相加，得 $2a^2+2b^2+2c^2\geqslant 2ab+2bc+2ac$，
即 $a^2+b^2+c^2\geqslant ab+bc+ac$.
(2) 由(1)知 $a^2+b^2+c^2\geqslant ab+bc+ac$，
$\therefore a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc\geqslant 3ab+3bc+3ac$，
即 $(a+b+c)^2\geqslant 3(ab+bc+ac)$
$\because a+b+c=1$，
$\therefore ab+bc+ac\leqslant\frac{1}{3}$.

10. **解**：(1) 将 $f(x)=|x+4|$ 代入不等式整理得 $|x+4|+|2x-2|>8$，
①当 $x\leqslant-4$，不等式转化为 $-x-4-2x+2>8$，
解得 $x<-\frac{10}{3}$，所以此时 $x\leqslant-4$；
②当 $-4<x<1$ 时，不等式转化为 $x+4+2-2x>8$，
解得 $x<-2$，所以此时 $-4<x<-2$；
③当 $x\geqslant 1$ 时，不等式转化为 $x+4+2x-2>8$，
解得 $x>2$，所以此时 $x>2$，
综上 $M=\{x|x<-2$ 或 $x>2\}$.
(2) 证明：因为 $f(2a)-f(-2b)=|2a+4|-|-2b+4|\leqslant|2a+4+2b-4|=|2a+2b|$，
所以要证 $f(ab)>f(2a)-f(-2b)$，只需证 $|ab+4|>|2a+2b|$，
即证 $(ab+4)^2>(2a+2b)^2$，
即证 $a^2b^2+8ab+16>4a^2+8ab+4b^2$，
即证 $a^2b^2-4a^2-4b^2+16>0$，
即证 $(a^2-4)(b^2-4)>0$，
因为 $a$，$b\in M$，所以 $a^2>4$，$b^2>4$，所以 $(a^2-4)(b^2-4)>0$ 成立，
所以原不等式成立.



关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

# 三　反证法与放缩法

## 第 8 课时　反证法与放缩法

### 基础知识梳理

1. 命题不成立　矛盾的结论
2. 放大　缩小　放缩法

### 题点知识巩固

1. 选 B　在用反证法证明命题时，要把假设，原命题中的条件，还有公理、定理、定义等作为条件使用，因此应选 B.

2. 选 B　∵实数 $a,b,c$ 满足 $a+b+c=1$，则在①②中，当 $a=b=c=\frac{1}{3}$ 时，满足 $a+b+c=1$，所以命题不正确；对于③中，假设 $a,b,c$ 三个数都大于 $\frac{1}{3}$，则 $a+b+c>1$，这与已知条件是矛盾的，所以假设不成立，则 $a,b,c$ 中至少有一个不大于 $\frac{1}{3}$，所以③是正确的；对于④中，假设 $a,b,c$ 三个数都小于 $\frac{1}{4}$，则 $a+b+c<1$，这与已知条件是矛盾的，所以假设不成立，则 $a,b,c$ 中至少有一个不小于 $\frac{1}{4}$，所以④是正确的.

综上所述，正确的命题有 2 个，故选 B.

3. **证明**：假设 $\sqrt{a}$，$\sqrt{b}$，$\sqrt{c}$ 成等差数列，则有

$\sqrt{a}+\sqrt{c}=2\sqrt{b}$，即 $a+c+2\sqrt{ac}=4b$.

又∵三个正数 $a,b,c$ 成等比数列.

∴$b^2=ac$，即 $b=\sqrt{ac}$.

∴$a+c+2\sqrt{ac}=4\sqrt{ac}$，即 $(\sqrt{a}-\sqrt{c})^2=0$，

∴$\sqrt{a}=\sqrt{c}$，即 $a=c$.

从而得 $a=b=c$.

∴$a,b,c$ 也成等差数列，这与已知矛盾.

故假设错误，∴$\sqrt{a}$，$\sqrt{b}$，$\sqrt{c}$ 不成等差数列.

4. 选 C　$S=\frac{1}{1}+\frac{1}{1\times2}+\frac{1}{1\times2\times3}+\cdots+\frac{1}{1\times2\times3\times\cdots\times n}<$

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}=\frac{1-\frac{1}{2^n}}{1-\frac{1}{2}}=2-\frac{1}{2^{n-1}}<2.$$

又因为 $S=1+\frac{1}{1\times2}+\cdots+\frac{1}{1\times2\times3\times\cdots\times n}>1$. 故选 C.

5. **解析**：$P=1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}}\geqslant\frac{1}{\sqrt{n}}+\frac{1}{\sqrt{n}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}}=$

$\frac{n}{\sqrt{n}}=\sqrt{n}$，当且仅当 $n=1$ 时取等号，∴$P\geqslant Q$.

**答案**：$P\geqslant Q$

6. **证明**：∵$\frac{1}{n^2}=\frac{1}{n\cdot n}<\frac{1}{n(n-1)}=\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}(n\geqslant2)$，

∴$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}$

$$<1+\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)$$

$$=1+1-\frac{1}{n}$$

$$=2-\frac{1}{n}<2.$$

∴原不等式成立.

### 提能达标过关

1. 选 B　①若 $x_0>1$，∵$f(x)$ 是增函数，

∴$f(x_0)>f(1)$，这与已知 $f(x_0)=f(1)$ 矛盾.

②若 $x_0<1$，∵$f(x)$ 是增函数，∴$f(x_0)<f(1)$，

这与已知 $f(x_0)=f(1)$ 矛盾.

综合①②知，$x_0=1$.

2. 选 D　由不等式 $\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}\geqslant\frac{a+b}{2}\geqslant\sqrt{ab}$，得 $\frac{a^2+b^2}{2}\geqslant\left(\frac{a+b}{2}\right)^2\geqslant ab$. 又∵$a+b=2$，且 $a\neq b$. ∴$ab<1<\frac{a^2+b^2}{2}$.

3. 选 D　假设 3 个数：$a+\frac{1}{b}<2$，$b+\frac{1}{c}<2$，$c+\frac{1}{a}<2$，则

$$\left(a+\frac{1}{b}\right)+\left(b+\frac{1}{c}\right)+\left(c+\frac{1}{a}\right)<6,$$

∵$a,b,c$ 大于 0，利用基本不等式 $\left(a+\frac{1}{b}\right)+\left(b+\frac{1}{c}\right)+\left(c+\frac{1}{a}\right)=\left(a+\frac{1}{a}\right)+\left(b+\frac{1}{b}\right)+\left(c+\frac{1}{c}\right)\geqslant2+2+2=6$，这与假设所得结论相矛盾，故假设不成立，所以 3 个数：$a+\frac{1}{b}$，$b+\frac{1}{c}$，$c+\frac{1}{a}$ 中至少有一个不小于 2，故选 D.

4. 选 B　因为结论：“自然数 $a,b,c$ 中恰有一个偶数”，可得题设为 $a,b,c$ 中恰有一个偶数，所以反设的内容是假设 $a,b,c$ 中至少有两个偶数或都是奇数，故选 B.

5. 选 A　对于①，$a,b$ 均可以小于 1；对于②，$a,b$ 均可以等于 1；对于③，若 $a,b$ 都不大于 1，则 $a+b\leqslant2$，这与③矛盾，则 $a,b$ 中至少有一个实数大于 1，对于④⑤，$a,b$ 可以是负数.

6. **解析**：由反证法证明的步骤，先假设，即③，再推出矛盾，即①，最后作出判断，肯定结论，即②，顺序应为③①②.

**答案**：③①②

7. **解析**：$M=\frac{1}{2^{10}}+\frac{1}{2^{10}+1}+\frac{1}{2^{10}+2}+\cdots+\frac{1}{2^{11}-1}<\frac{1}{2^{10}}+\frac{1}{2^{10}}+\frac{1}{2^{10}}+\cdots+\frac{1}{2^{10}}=\frac{2^{10}}{2^{10}}=1$，即 $M<1$.

**答案**：$M<1$

8. **解析**：∵$a>0$，∴$a+\frac{1}{a}+\sqrt{a^2+\frac{1}{a^2}}\geqslant2\sqrt{a\cdot\frac{1}{a}}+\sqrt{2a\cdot\frac{1}{a}}=2+\sqrt{2}$，当且仅当 $a=1$ 时取等号.

**答案**：$2+\sqrt{2}$

9. **证明**：假设 $\frac{2+x}{y}<4$ 和 $\frac{2+y}{x}<4$ 都不成立，

即 $\frac{2+x}{y}\geqslant4$ 和 $\frac{2+y}{x}\geqslant4$ 同时成立.

因为 $x>0$ 且 $y>0$，所以 $2+x\geqslant4y$，且 $2+y\geqslant4x$，

两式相加，得 $4+x+y\geqslant4x+4y$，

所以 $x+y\leqslant\frac{4}{3}$，这与已知条件 $x+y>\frac{4}{3}$ 相矛盾，

所以 $\frac{2+x}{y}<4$ 与 $\frac{2+y}{x}<4$ 中至少有一个成立.

10. **解**：(1)由已知得 $\begin{cases}a_1=\sqrt{2}+1,\\3a_1+3d=9+3\sqrt{2},\end{cases}$

解得 $d=2$，

∴$a_n=2n-1+\sqrt{2}$，$S_n=n(n+\sqrt{2})$.

(2)证明：由(1)知 $b_n=\frac{S_n}{n}=n+\sqrt{2}$.

假设数列 $\{b_n\}$ 中存在三项 $b_p,b_q,b_r$（$p,q,r\in\mathbf{N}^*$，且互不相等）成等比数列，

则 $b_q^2=b_pb_r$，

即 $(q+\sqrt{2})^2=(p+\sqrt{2})(r+\sqrt{2})$，

∴$(q^2-pr)+\sqrt{2}(2q-p-r)=0$.

∵$p,q,r\in\mathbf{N}^*$，

∴$\begin{cases}q^2-pr=0,\\2q-p-r=0,\end{cases}$

∴$\left(\frac{p+r}{2}\right)^2=pr$，即 $(p-r)^2=0$，

∴$p=r$，这与 $p\neq r$ 矛盾，

∴假设错误，

故数列 $\{b_n\}$ 中任意不同的三项不可能成等比数列.



关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

## 阶段评估二

1. 选 C $\because w-u=x^2-xy+y^2=\left(x-\frac{y}{2}\right)^2+\frac{3y^2}{4}\geqslant 0$，

$\therefore w\geqslant u$.

2. 选 B 分析法证明的本质是证明使结论成立的充分条件成立，即②⇒①，所以①是②的必要条件. 故选 B.

3. 选 C $\because \sqrt{3}+\sqrt{8}>1+\sqrt{a}$，$\therefore \sqrt{a}<\sqrt{3}+\sqrt{8}-1$，$\therefore a<(\sqrt{3}+\sqrt{8}-1)^2=12+2(2\sqrt{6}-\sqrt{3}-2\sqrt{2})<13$，$\therefore$ 不等式 $\sqrt{3}+\sqrt{8}>1+\sqrt{a}$ 成立的正整数 $a$ 的最大值是 12，故选 C.

4. 选 D $S-P=(a^2+b^2+c^2)-(ab+bc+ca)$

$=\frac{1}{2}(2a^2+2b^2+2c^2-2ab-2bc-2ca)$

$=\frac{1}{2}[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2]\geqslant 0$，

$\therefore S\geqslant P$.

$\because a,b,c$ 为三角形的三边，

$\therefore a-b<c,b-c<a,c-a<b$.

$\therefore S-2P=a^2+b^2+c^2-2ab-2bc-2ca$

$=(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2-a^2-b^2-c^2$

$<c^2+a^2+b^2-a^2-b^2-c^2=0$，

$\therefore S<2P$.

综上知 $P\leqslant S<2P$.

5. 选 A $\because x>0,k>0$，$f(x)=\frac{x^2+k+1}{\sqrt{x^2+k}}=\sqrt{x^2+k}+\frac{1}{\sqrt{x^2+k}}\geqslant 2$，当且仅当 $\sqrt{x^2+k}=\frac{1}{\sqrt{x^2+k}}$，即 $x^2+k=1$ 时取等号. $\because x^2=1-k>0$，$\therefore 0<k<1$.

$\therefore$ 当 $0<k<1$ 时，$f(x)_{\min}=2$，$\therefore f(x)\geqslant 2$ 成立.

6. 选 C $\because 0<x<1$，$\therefore 0<1-x<1$，$\because a>0,b>0$，

$\therefore \frac{a^2}{x}+\frac{b^2}{1-x}=\left(\frac{a^2}{x}+\frac{b^2}{1-x}\right)[x+(1-x)]=a^2+\frac{(1-x)a^2}{x}+\frac{xb^2}{1-x}+b^2\geqslant a^2+2\sqrt{a^2b^2}+b^2=(a+b)^2$，当且仅当 $\frac{(1-x)a^2}{x}=\frac{xb^2}{1-x}$ 时取等号，$\therefore \frac{a^2}{x}+\frac{b^2}{1-x}$ 的最小值是 $(a+b)^2$，故选 C.

7. **解析**：用反证法证明命题时，应先假设结论的否定成立，则结论“$a,b,c,d$ 中至少有一个负数”的否定是“$a,b,c,d$ 全都为非负数”.

**答案**：$a,b,c,d$ 全都为非负数

8. **解析**：要使 $x+y+d\geqslant 0$ 恒成立，则 $d\geqslant -x-y$ 恒成立，即 $d\geqslant(-x-y)_{\max}$，

$\because x^2+(y-1)^2=1$，令 $x=\cos\theta,y-1=\sin\theta$，则 $-x-y=-\cos\theta-(\sin\theta+1)=-\sin\theta-\cos\theta-1=\sqrt{2}\sin\left(\theta+\frac{5\pi}{4}\right)-1$，$\therefore$ 当 $\sin\left(\theta+\frac{5\pi}{4}\right)=1$ 时，$(-x-y)_{\max}=\sqrt{2}-1$，$\therefore d\geqslant\sqrt{2}-1$，即 $d$ 的取值范围是 $[\sqrt{2}-1,+\infty)$.

**答案**：$[\sqrt{2}-1,+\infty)$

9. **解析**：由题意知，$a^2+b^2=c^2$，$\therefore c>a>0,c>b>0$，

$\therefore 0<\frac{a}{c}<1,0<\frac{b}{c}<1$.

$\therefore$ 当 $n>2$ 时，$\left(\frac{a}{c}\right)^n+\left(\frac{b}{c}\right)^n<\left(\frac{a}{c}\right)^2+\left(\frac{b}{c}\right)^2=\frac{a^2+b^2}{c^2}=1$，

$\therefore a^n+b^n<c^n$.

**答案**：$a^n+b^n<c^n$

10. **解析**：(1) $\because$ 不等式 $|x|+|x-1|>m$ 的解集为 $\mathbf{R}$，而 $|x|+|x-1|$ 表示数轴上的 $x$ 到 0 和 1 的距离之和，最小值等于 1，$\therefore m<1$.

(2) $\because f(x)=(7-3m)^x$ 在 $\mathbf{R}$ 上是增函数，

$\therefore 7-3m>1$，$m<2$.

$\therefore$ 当 $1\leqslant m<2$ 时，(1)不正确，而(2)正确，两个命题有且只有一个正确，实数 $m$ 的取值范围为 $\{m|1\leqslant m<2\}$.

**答案**：$\{m|1\leqslant m<2\}$

11. **证明**：证法一：$ab^2+bc^2+ca^2-(a^2b+b^2c+c^2a)$

$=a(b^2-c^2)+b(c^2-a^2)+c(a^2-b^2)$

$=a(b^2-c^2)+b(c^2-b^2+b^2-a^2)+c(a^2-b^2)$

$=(c^2-b^2)(b-a)+(b^2-a^2)(b-c)$

$=(b-a)(c-b)[b+c-(b+a)]$

$=(b-a)(c-b)(c-a)$，

$\because c>b>a$，

$\therefore b-a>0,c-b>0,c-a>0$.

$\therefore ab^2+bc^2+ca^2>a^2b+b^2c+c^2a$，

即 $a^2b+b^2c+c^2a<ab^2+bc^2+ca^2$.

证法二：$ab^2+bc^2+ca^2-(a^2b+b^2c+c^2a)$

$=(c-b)a^2+(b^2-c^2)a+bc(c-b)$

$=(c-b)[a^2-(b+c)a+bc]$

$=(c-b)(a-b)(a-c)$.

$\because c>b>a$，$\therefore c-b>0,a-b<0,a-c<0$

从而 $(c-b)(a-b)(a-c)>0$，

$\therefore ab^2+bc^2+ca^2>a^2b+b^2c+c^2a$，

即 $a^2b+b^2c+c^2a<ab^2+bc^2+ca^2$.

12. **解**：(1) 当 $x\leqslant-\frac{3}{2}$ 时，$-x+5+2x+3\geqslant 1$，

解得 $x\geqslant -7$，$\therefore -7\leqslant x\leqslant-\frac{3}{2}$；

当 $-\frac{3}{2}<x<5$ 时，$-x+5-2x-3\geqslant 1$，

解得 $x\leqslant\frac{1}{3}$，$\therefore -\frac{3}{2}<x\leqslant\frac{1}{3}$；

当 $x\geqslant 5$ 时，$x-5-(2x+3)\geqslant 1$，解得 $x\leqslant -9$，舍去.

综上，$-7\leqslant x\leqslant\frac{1}{3}$.

故原不等式的解集为 $\left\{x\left|-7\leqslant x\leqslant\frac{1}{3}\right.\right\}$.

(2) 证明：要证 $\sqrt{a}+\sqrt{b}\leqslant 1$，只需证 $a+b+2\sqrt{ab}\leqslant 1$，

即证 $2\sqrt{ab}\leqslant\frac{1}{2}$，即证 $\sqrt{ab}\leqslant\frac{1}{4}$.

而 $a+b=\frac{1}{2}\geqslant 2\sqrt{ab}$，$\therefore \sqrt{ab}\leqslant\frac{1}{4}$ 成立.

$\therefore$ 原不等式成立.

13. **证明**：(1) $\because |x_1-2|<1$，$\therefore -1<x_1-2<1$，

即 $1<x_1<3$，

同理 $1<x_2<3$，$\therefore 2<x_1+x_2<6$.

$\because |x_1-x_2|=|(x_1-2)-(x_2-2)|\leqslant|x_1-2|+|x_2-2|$.

$\therefore |x_1-x_2|<2$.

(2) $|f(x_1)-f(x_2)|=|x_1-x_2||x_1+x_2-1|$，

$\because 2<x_1+x_2<6$，$\therefore 1<x_1+x_2-1<5$，

$\therefore |x_1-x_2|<|f(x_1)-f(x_2)|<5|x_1-x_2|$.

14. **解**：(1) $\because$ 函数 $f(x)$ 的对称轴为 $x=1$，

$\therefore m=0$，

$\therefore f(x)=|x|+|x-2|=\begin{cases}-2x+2,x\leqslant 0,\\2,0<x<2,\\2x-2,x\geqslant 2.\end{cases}$

由 $f(x)\geqslant x+2$，得 $\begin{cases}x\leqslant 0,\\-2x+2\geqslant x+2\end{cases}$



关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

或$\begin{cases}0<x<2,\\2\geqslant x+2\end{cases}$或$\begin{cases}x\geqslant 2,\\2x-2\geqslant x+2,\end{cases}$

解得 $x\leqslant 0$ 或 $x\geqslant 4$,

故不等式 $f(x)\geqslant x+2$ 的解集为$(-\infty,0]\cup[4,+\infty)$.

(2)证明:由绝对值不等式的性质,可知$|x-2|+|x|\geqslant|(x-2)-x|=2$,

$\therefore f(x)_{\min}=M=2$,

$\therefore a+b=2$,

$$\therefore \frac{1}{2a}+\frac{2}{b}=\frac{1}{2a}+\frac{4}{2b}=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{2a}+\frac{4}{2b}\right)(2a+2b)$$

$$=\frac{1}{4}\left(1+4+\frac{2b}{2a}+\frac{8a}{2b}\right)\geqslant\frac{1}{4}\times(5+4)=\frac{9}{4}$$

$\left(\text{当且仅当 } a=\frac{2}{3},b=\frac{4}{3}\text{时取等号}\right)$.

即$\frac{1}{2a}+\frac{2}{b}\geqslant\frac{9}{4}$.

# 第三讲　柯西不等式与排序不等式

## 一　二维形式的柯西不等式

### 第 9 课时　二维形式的柯西不等式

#### 基础知识梳理

1. (1)$(ac+bd)^2$　$ad=bc$　(2)$(\sqrt{ac}+\sqrt{bd})^2$　$|ac+bd|$　$|ac|+|bd|$

2. $|\boldsymbol{\alpha}||\boldsymbol{\beta}|$　零向量

3. (1)$\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$　(2)$\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$

#### 题点知识巩固

1. **证明**:$(a_1b_1+a_2b_2)\left(\frac{a_1}{b_1}+\frac{a_2}{b_2}\right)$

$$=[(\sqrt{a_1b_1})^2+(\sqrt{a_2b_2})^2]\left[\left(\sqrt{\frac{a_1}{b_1}}\right)^2+\left(\sqrt{\frac{a_2}{b_2}}\right)^2\right]$$

$$\geqslant\left(\sqrt{a_1b_1}\cdot\sqrt{\frac{a_1}{b_1}}+\sqrt{a_2b_2}\cdot\sqrt{\frac{a_2}{b_2}}\right)^2$$

$$=(a_1+a_2)^2.$$

2. **证明**:因为$\frac{m^2}{x^2}+\frac{n^2}{y^2}=1$,

所以 $x^2+y^2=(x^2+y^2)\left(\frac{m^2}{x^2}+\frac{n^2}{y^2}\right)$

$$\geqslant\left(x\cdot\frac{m}{x}+y\cdot\frac{n}{y}\right)^2$$

$$=(m+n)^2.$$

3. 选 A　$\because f(x)=\sqrt{2}\cdot\sqrt{\sin^2x}+\cos x$.

又$(\sqrt{2}\cdot\sqrt{\sin^2x}+\cos x)^2\leqslant(2+1)(\sin^2x+\cos^2x)=3$,

$\therefore f(x)=\sqrt{2}\sqrt{\sin^2x}+\cos x\leqslant\sqrt{(2+1)(\sin^2x+\cos^2x)}=\sqrt{3}$,当且仅当 $\cos x=\frac{\sqrt{3}}{3}$时取等号.

$\therefore f(x)$的最大值为$\sqrt{3}$.

4. **解析**:由柯西不等式得,$(a^2+b^2)(m^2+n^2)\geqslant(ma+nb)^2$,

所以 $5(m^2+n^2)\geqslant5^2$,得 $m^2+n^2\geqslant5$,所以 $\sqrt{m^2+n^2}\geqslant\sqrt{5}$.

**答案**:$\sqrt{5}$

5. **证明**:设 $\boldsymbol{m}=\left(\frac{a}{\cos\theta},\frac{b}{\sin\theta}\right)$,$\boldsymbol{n}=(\cos\theta,\sin\theta)$,

则 $\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}=\frac{a}{\cos\theta}\cdot\cos\theta+\frac{b}{\sin\theta}\cdot\sin\theta=a+b$.

$\therefore|a+b|=|\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}|\leqslant|\boldsymbol{m}|\cdot|\boldsymbol{n}|$

$$=\sqrt{\left(\frac{a}{\cos\theta}\right)^2+\left(\frac{b}{\sin\theta}\right)^2}\cdot\sqrt{1}$$

$$=\sqrt{\left(\frac{a}{\cos\theta}\right)^2+\left(\frac{b}{\sin\theta}\right)^2}.$$

$$\therefore(a+b)^2\leqslant\frac{a^2}{\cos^2\theta}+\frac{b^2}{\sin^2\theta}.$$

6. **解**:设 $\boldsymbol{m}=(3,4)$,$\boldsymbol{n}=(\cos x,\sqrt{1+\sin^2x})$,

则 $f(x)=3\cos x+4\sqrt{1+\sin^2x}=\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}$.

由柯西不等式,得

$|\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}|\leqslant|\boldsymbol{m}||\boldsymbol{n}|=\sqrt{3^2+4^2}\cdot\sqrt{\cos^2x+1+\sin^2x}=5\sqrt{2}$.

当且仅当 $\boldsymbol{m}$ 与 $\boldsymbol{n}$ 共线时取等号.

此时 $3\sqrt{1+\sin^2x}=4\cos x$,

解得 $\sin x=\frac{\sqrt{7}}{5}$,$\cos x=\frac{3\sqrt{2}}{5}$.

$\therefore f(x)$的最大值为 $5\sqrt{2}$.

#### 提能达标过关

1. 选 C　$\because(ax+bx)^2\leqslant(a^2+b^2)(x^2+y^2)=2$,

$\therefore ax+by\leqslant\sqrt{2}$.

2. 选 B　$Q=\sqrt{ma+nc}\cdot\sqrt{\frac{b}{m}+\frac{d}{n}}\geqslant\sqrt{(\sqrt{ab}+\sqrt{cd})^2}=\sqrt{ab}+\sqrt{cd}=P$,故选 B.

3. 选 C　由$\frac{4}{x}+\frac{9}{y}=2$,得

$$x+y=\frac{[(\sqrt{x})^2+(\sqrt{y})^2]\cdot\left[\left(\frac{2}{\sqrt{x}}\right)^2+\left(\frac{3}{\sqrt{y}}\right)^2\right]}{2}$$

$$\geqslant\frac{1}{2}\left(\sqrt{x}\cdot\frac{2}{\sqrt{x}}+\sqrt{y}\cdot\frac{3}{\sqrt{y}}\right)^2$$

$$=\frac{1}{2}(2+3)^2=\frac{25}{2},$$

当且仅当$\sqrt{x}\cdot\frac{3}{\sqrt{y}}=\sqrt{y}\cdot\frac{2}{\sqrt{x}}$,

即 $x=5$,$y=\frac{15}{2}$时,等号成立,

$\therefore x+y$ 的最小值为$\frac{25}{2}$.

4. 选 A　由柯西不等式,得$(a^2+b^2)[1^2+(-1)^2]\geqslant(a-b)^2$,因为 $a^2+b^2=10$,所以$(a-b)^2\leqslant20$,所以$-2\sqrt{5}\leqslant a-b\leqslant2\sqrt{5}$,故选 A.

5. 选 D　解法一:因为点 $M(\cos\alpha,\sin\alpha)$在单位圆 $x^2+y^2=1$ 上,依题意知,直线与单位圆相交,所以原点到直线的距离小于或等于 1,即$\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{1}{a}\right)^2+\left(\frac{1}{b}\right)^2}}\leqslant1$,

$$\therefore\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\geqslant1.$$

解法二:用柯西不等式的向量形式求解.

令 $\boldsymbol{m}=(\cos\alpha,\sin\alpha)$,$\boldsymbol{n}=\left(\frac{1}{a},\frac{1}{b}\right)$.

则 $\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}=\frac{\cos\alpha}{a}+\frac{\sin\alpha}{b}=1$,

$|\boldsymbol{m}|=1$,$|\boldsymbol{n}|=\sqrt{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}}$.

由 $\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}\leqslant|\boldsymbol{m}||\boldsymbol{n}|$,得$\sqrt{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}}\geqslant1$,

$$\therefore\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\geqslant1.$$

6. **解析**:因为 $m,n>0$,利用柯西不等式,

得$(m+n)\left(\frac{a^2}{m}+\frac{b^2}{n}\right)\geqslant(a+b)^2$,

所以$\frac{a^2}{m}+\frac{b^2}{n}\geqslant\frac{(a+b)^2}{m+n}$.

**答案**:$\geqslant$



关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

7. **解析**：根据柯西不等式的向量形式，有

$|\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}|\leqslant|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|=6\sqrt{5}$，当且仅当 $\boldsymbol{a}=k\boldsymbol{b}$ 时取等号，

$\therefore -6\sqrt{5}\leqslant\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}\leqslant 6\sqrt{5}$.

$\therefore\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$ 的最小值为 $-6\sqrt{5}$.

**答案**：$-6\sqrt{5}$

8. **解析**：由柯西不等式，得 $2^2=(x\cos\theta+y\sin\theta)^2=(x\cdot\cos\theta+\sqrt{3}y\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}\sin\theta)^2\leqslant(x^2+3y^2)\left(\cos^2\theta+\frac{1}{3}\sin^2\theta\right)=6\cos^2\theta+2\sin^2\theta$，解得 $\cos^2\theta\geqslant\frac{1}{2}$，$\therefore\cos\theta\leqslant-\frac{\sqrt{2}}{2}$ 或 $\cos\theta\geqslant\frac{\sqrt{2}}{2}$，

$\because 0\leqslant\theta\leqslant\pi$，$\therefore 0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{4}$ 或 $\frac{3}{4}\pi\leqslant\theta\leqslant\pi$.

**答案**：$\left\{\theta\,\middle|\,0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{4}\text{或}\frac{3\pi}{4}\leqslant\theta\leqslant\pi\right\}$

9. **解**：(1)由 $|x+a|<b$，得 $-b-a<x<b-a$，

则 $\begin{cases}-b-a=2,\\ b-a=4,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=-3,\\ b=1.\end{cases}$

(2)由(1)知 $a=-3$，$b=1$.

$\therefore\sqrt{-3t+12}+\sqrt{t}=\sqrt{3}\cdot\sqrt{4-t}+\sqrt{t}\leqslant\sqrt{(\sqrt{3})^2+1^2}\cdot\sqrt{(\sqrt{4-t})^2+(\sqrt{t})^2}=2\sqrt{4-t+t}=4$.

当且仅当 $\sqrt{3}\cdot\sqrt{t}=\sqrt{4-t}$，即 $t=1$ 时，等号成立，

$\therefore(\sqrt{-3t+12}+\sqrt{t})_{\max}=4$.

10. **证明**：令 $\boldsymbol{\alpha}=\left(\sqrt{a+\frac{1}{2}},\sqrt{b+\frac{1}{3}}\right)$，$\boldsymbol{\beta}=(\sqrt{2},1)$，则

$|\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\beta}|=\sqrt{2a+1}+\sqrt{b+\frac{1}{3}}$.

而 $|\boldsymbol{\alpha}|=\sqrt{a+\frac{1}{2}+b+\frac{1}{3}}=\sqrt{\frac{11}{6}}$，

又 $|\boldsymbol{\beta}|=\sqrt{3}$，

$\therefore|\boldsymbol{\alpha}||\boldsymbol{\beta}|=\frac{\sqrt{22}}{2}$.

由 $|\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\beta}|\leqslant|\boldsymbol{\alpha}||\boldsymbol{\beta}|$，得

$\sqrt{2a+1}+\sqrt{b+\frac{1}{3}}\leqslant\frac{\sqrt{22}}{2}$.

## 二　一般形式的柯西不等式

### 第 10 课时　一般形式的柯西不等式

#### 基础知识梳理

1. $(a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3)^2$　$b_i=0(i=1,2,3)$

2. $(a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n)^2$　$a_i=kb_i$

#### 题点知识巩固

1. 选 B　由柯西不等式，得

$(1^2+1^2+1^2)[(\sqrt{a})^2+(\sqrt{b})^2+(\sqrt{c})^2]\geqslant(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c})^2$，

$\therefore(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c})^2\leqslant3(a+b+c)=3\times1=3$，

当且仅当 $a=b=c=\frac{1}{3}$ 时，等号成立.

$\therefore\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}$ 的最大值为 $\sqrt{3}$.

2. 选 B　由柯西不等式，得 $\left[1^2+1^2+\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2\right](a+b+4c^2)\geqslant(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{2}c)^2$，$\therefore\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{2}c\leqslant\sqrt{\frac{5}{2}}$，当且仅当 $a=\frac{2}{5}$，$b=\frac{2}{5}$，$c=\frac{\sqrt{5}}{10}$ 时，等号成立，$\therefore\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{2}c$ 的最大值为 $\frac{\sqrt{10}}{2}$，故选 B.

3. **解**：(1)$[(x-1)^2+(y+1)^2+(z+1)^2](1^2+1^2+1^2)\geqslant[(x-1)+(y+1)+(z+1)]^2=(x+y+z+1)^2=4$，

故 $(x-1)^2+(y+1)^2+(z+1)^2\geqslant\frac{4}{3}$ 等号成立，当且仅当 $x-1=y+1=z+1$，而又因 $x+y+z=1$，解得 $\begin{cases}x=\frac{5}{3},\\ y=-\frac{1}{3},\\ z=-\frac{1}{3}\end{cases}$ 时等号成立. 所以 $(x-1)^2+(y+1)^2+(z+1)^2$ 的最小值为 $\frac{4}{3}$.

(2)证明：证法一：因为 $(x-2)^2+(y-1)^2+(z-a)^2\geqslant\frac{1}{3}$，所以 $[(x-2)^2+(y-1)^2+(z-a)^2](1^2+1^2+1^2)\geqslant1$.

根据柯西不等式等号成立条件，当 $x-2=y-1=z-a$，即 $\begin{cases}x=2-\frac{a+2}{3},\\ y=1-\frac{a+2}{3},\\ z=a-\frac{a+2}{3}\end{cases}$ 时有 $[(x-2)^2+(y-1)^2+(z-a)^2](1^2+1^2+1^2)=(x-2+y-1+z-a)^2=(a+2)^2$ 成立.

所以 $(a+2)^2\geqslant1$ 成立，所以有 $a\leqslant-3$ 或 $a\geqslant-1$.

证法二：若 $a\leqslant-3$ 或 $a\geqslant-1$ 不成立，那么 $-3<a<-1$ 成立，则 $(a+2)^2<1$，而 $[(x-2)^2+(y-1)^2+(z-a)^2]\cdot(1^2+1^2+1^2)=(x-2+y-1+z-a)^2$ 左面等号成立，当且仅当 $x-2=y-1=z-a$，又因为 $x+y+z=1$，所以 $x-2=y-1=z-a=-\frac{a+2}{3}$. 故此时 $[(x-2)^2+(y-1)^2+(z-a)^2](1^2+1^2+1^2)=(x-2+y-1+z-a)^2=(a+2)^2<1$，即 $(x-2)^2+(y-1)^2+(z-a)^2<\frac{1}{3}$，与原命题矛盾.

故假设错误，即 $a\leqslant-3$ 或 $a\geqslant-1$.

4. 选 B　因为 $(1^2+1^2+1^2)\cdot(a^2+b^2+c^2)\geqslant(a+b+c)^2$，所以 $\frac{a^2+b^2+c^2}{3}\geqslant\frac{(a+b+c)^2}{9}$，当且仅当 $a=b=c$ 时，等号成立，又 $a,b,c$ 均大于 0，所以 $a+b+c>0$，所以 $\sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{3}}\geqslant\frac{a+b+c}{3}$，即 $A\geqslant B$，故选 B.

5. 选 B　因为 $[(a_2-a_1)^2+(a_3-a_2)^2+(a_4-a_3)^2+(a_5-a_4)^2+(a_6-a_5)^2](1+1+1+4+1)\geqslant[(a_2-a_1)\times1+(a_3-a_2)\times1+(a_4-a_3)\times1+(a_5-a_4)\times2+(a_6-a_5)\times1]^2=[(a_6+a_5)-(a_1+a_4)]^2$，所以 $[(a_6+a_5)-(a_1+a_4)]^2\leqslant8$，即 $(a_6+a_5)-(a_1+a_4)\leqslant2\sqrt{2}$.

6. **证明**：$\because x_1,x_2,\cdots,x_n$ 都是正数，

$\therefore(x_1+x_2+\cdots+x_n)\left(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\cdots+\frac{1}{x_n}\right)$

$=[(\sqrt{x_1})^2+(\sqrt{x_2})^2+\cdots+(\sqrt{x_n})^2]\cdot\left[\left(\frac{1}{\sqrt{x_1}}\right)^2+\left(\frac{1}{\sqrt{x_2}}\right)^2+\cdots+\left(\frac{1}{\sqrt{x_n}}\right)^2\right]$

$\geqslant\left(\sqrt{x_1}\cdot\frac{1}{\sqrt{x_1}}+\sqrt{x_2}\cdot\frac{1}{\sqrt{x_2}}+\cdots+\sqrt{x_n}\cdot\frac{1}{\sqrt{x_n}}\right)^2$

$=n^2$，

$\therefore\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\cdots+\frac{1}{x_n}\geqslant\frac{n^2}{x_1+x_2+\cdots+x_n}$.



关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

**提能达标过关**

1. 选 A　$\because 2x+\sqrt{5}y=2x\cdot 1+\sqrt{5}y\cdot 1$

$\leqslant\sqrt{(2x)^2+(\sqrt{5}y)^2}\cdot\sqrt{1^2+1^2}$

$=\sqrt{1}\cdot\sqrt{2}=\sqrt{2}$,

$\therefore 2x+\sqrt{5}y$ 的最大值为$\sqrt{2}$.

2. 选 C　$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=(1,0,-2)\cdot(x,y,z)=x-2z$,

由柯西不等式,得

$[1^2+0^2+(-2)^2](x^2+y^2+z^2)\geqslant[1\times x+0\times y+(-2)\times z]^2$

$=(x-2z)^2$,当 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 共线时,等号成立.

$\therefore(x-2z)^2\leqslant 5\times 16$,$\therefore -4\sqrt{5}\leqslant x-2z\leqslant 4\sqrt{5}$,

即 $-4\sqrt{5}\leqslant\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}\leqslant 4\sqrt{5}$.

$\therefore\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$ 的最大值为 $4\sqrt{5}$.

3. 选 C　由柯西不等式得 $u^2=(\sqrt{2x+1}+\sqrt{3y+4}+\sqrt{5z+6})^2=(1\times\sqrt{2x+1}+1\times\sqrt{3y+4}+1\times\sqrt{5z+6})^2\leqslant(1^2+1^2+1^2)(2x+1+3y+4+5z+6)=3(2x+3y+5z+11)=3\times(29+11)=120$,

$\therefore u\leqslant 2\sqrt{30}$,故选 C.

4. 选 D　因为 $(a+b+c+d)^2\leqslant 4(a^2+b^2+c^2+d^2)$,所以 $(8-e)^2\leqslant 4(16-e^2)$,解得 $0\leqslant e\leqslant\frac{16}{5}$,所以 $e$ 的最大值为 $\frac{16}{5}$,故选 D.

5. 选 A　由柯西不等式,得$(a^2+b^2+c^2)[1^2+1^2+(\sqrt{2})^2]\geqslant(a+b+\sqrt{2}c)^2$,$\because a^2+b^2+c^2=1$,

$\therefore(a+b+\sqrt{2}c)^2\leqslant 4$,$\therefore a+b+\sqrt{2}c\leqslant 2$,又 $a+b+\sqrt{2}c\leqslant|x+1|$ 对任意实数 $a,b,c$ 恒成立,

$\therefore|x+1|\geqslant 2$,解得 $x\leqslant -3$ 或 $x\geqslant 1$,故选 A.

6. **解析**:$\because(x+2y+3z)\left(\frac{4}{x}+\frac{2}{y}+\frac{3}{z}\right)\geqslant(2+2+3)^2=49$,

$\therefore\frac{4}{x}+\frac{2}{y}+\frac{3}{z}\geqslant 7$. 当 $x=2,y=z=1$ 时取等号.

**答案**:7

7. **解析**:$\because(x+2y+3z)^2\leqslant(1^2+2^2+3^2)(x^2+y^2+z^2)=14^2$,

当且仅当 $\frac{x}{1}=\frac{y}{2}=\frac{z}{3}$ 时取等号.$\therefore|x+2y+3z|\leqslant 14$.

**答案**:14

8. **解析**:由柯西不等式知,$25\times 36=(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2)\geqslant(ax+by+cz)^2=30^2=25\times 36$.

当且仅当 $\frac{a}{x}=\frac{b}{y}=\frac{c}{z}=k$ 时取等号,$\therefore a=kx,b=ky,c=kz$,$\therefore a^2+b^2+c^2=k^2(x^2+y^2+z^2)$,即 $25=36k^2$,$\therefore k=\frac{5}{6}$,$\therefore\frac{a+b+c}{x+y+z}=\frac{k(x+y+z)}{x+y+z}=k=\frac{5}{6}$.

**答案**:$\frac{5}{6}$

9. **解**:由柯西不等式,得

$[4^2+(\sqrt{5})^2+2^2]\left[\left(\frac{x}{4}\right)^2+\left(\frac{y}{\sqrt{5}}\right)^2+\left(\frac{z}{2}\right)^2\right]\geqslant\left(4\times\frac{x}{4}+\sqrt{5}\times\frac{y}{\sqrt{5}}+2\times\frac{z}{2}\right)^2$,

即 $25\times 1\geqslant(x+y+z)^2$.

$\therefore|x+y+z|\leqslant 5$,$\therefore -5\leqslant x+y+z\leqslant 5$,

即 $x+y+z$ 的取值范围是$[-5,5]$.

10. **证明**:$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}$

$=\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2n-1}+\frac{1}{2n}\right)-2\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2n}\right)$

$=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}$.

所求证不等式转化为

$\frac{4}{7}<\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}<\frac{\sqrt{2}}{2}$.

由柯西不等式,得

$\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}\right)[(n+1)+(n+2)+\cdots+(2n)]\geqslant n^2$,

所以$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}\geqslant\frac{n^2}{(n+1)+(n+2)+\cdots+2n}=\frac{n^2}{\frac{n(3n+1)}{2}}=\frac{2n}{3n+1}=\frac{2}{3+\frac{1}{n}}\geqslant\frac{2}{3+\frac{1}{2}}=\frac{4}{7}$.

又由柯西不等式,得

$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}<\sqrt{\underbrace{(1^2+1^2+\cdots+1^2)}_{n\text{ 项}}\left[\frac{1}{(n+1)^2}+\frac{1}{(n+2)^2}+\cdots+\frac{1}{(2n)^2}\right]}$

$<\sqrt{n\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{2n}\right)}=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

综上所述,原不等式成立.

# 三　排序不等式

## 第 11 课时　排序不等式

### 基础知识梳理

1. 反序　顺序　乱序

2. $a_1b_n+a_2b_{n-1}+\cdots+a_nb_1$　$a_1c_1+a_2c_2+\cdots+a_nc_n$　$a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n$　$a_1=a_2=\cdots=a_n$　$b_1=b_2=\cdots=b_n$

### 题点知识巩固

1. 选 A　$\because a_2>a_1>0,b_2>b_1>0,a_1+a_2=b_1+b_2=1$.

$\therefore$由排序原理知 $a_1a_2+b_1b_2>a_1b_2+a_2b_1$,

$a_1b_1+a_2b_2>a_1a_2+b_1b_2$.

又 $1=(a_1+a_2)(b_1+b_2)=a_1b_1+a_1b_2+a_2b_1+a_2b_2<2(a_1b_1+a_2b_2)$,

$\therefore a_1b_1+a_2b_2>\frac{1}{2}$.

2. **解析**:因为 $a>1$,所以 $1<a<a^2<\cdots<a^{n-1}$,

由排序不等式,得 $c_1+2c_2+3c_3+\cdots+nc_n\leqslant 1+2a+3a^2+\cdots+na^{n-1}$,

设 $S_n=1+2a+3a^2+\cdots+na^{n-1}$,

则 $aS_n=a+2a^2+\cdots+(n-1)a^{n-1}+na^n$,

两式相减,得$(1-a)S_n=1+a+a^2+\cdots+a^{n-1}-na^n$

$=\frac{1-a^n}{1-a}-na^n$,

$\therefore S_n=\frac{1-a^n}{(1-a)^2}-\frac{na^n}{1-a}$.

$\therefore c_1+2c_2+3c_3+\cdots+nc_n$ 的最大值为$\frac{1-a^n}{(1-a)^2}-\frac{na^n}{1-a}$.

**答案**:$\frac{1-a^n}{(1-a)^2}-\frac{na^n}{1-a}$



关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

3. **解**：设 $a_1,a_2,a_3$ 按从小到大排成一列为 $b_1,b_2,b_3$，
即 $b_1<b_2<b_3$.
又 $a_1,a_2,a_3$ 为正整数，且各不相同，
$\therefore b_1\geqslant 1,b_2\geqslant 2,b_3\geqslant 3$.
又 $\because \frac{1}{3^2}<\frac{1}{2^2}<\frac{1}{1^2}$，
由排序不等式知，乱序和≥反序和，得
$a_1+\frac{a_2}{2^2}+\frac{a_3}{2^3}>\frac{b_3}{3^2}+\frac{b_2}{2^2}+\frac{b_1}{1^2}\geqslant\frac{1}{3}+\frac{1}{2}+1=\frac{11}{6}$.
$\because a_1,a_2,a_3$ 互不相等，
$\therefore a_1+\frac{a_2}{2^2}+\frac{a_3}{2^3}$ 的取值范围是 $\left(\frac{11}{6},+\infty\right)$.

4. 选 B　设 $a\geqslant b\geqslant c>0$，所以 $a^3\geqslant b^3\geqslant c^3$，根据排序不等式，得 $a^3\times a+b^3\times b+c^3\times c\geqslant a^3b+b^3c+c^3a$，又 $ab\geqslant ac\geqslant bc$，$a^2\geqslant b^2\geqslant c^2$，所以 $a^3b+b^3c+c^3a\geqslant a^2bc+b^2ca+c^2ab$，所以 $a^4+b^4+c^4\geqslant a^2bc+b^2ca+c^2ab$，即 $a^2(a^2-bc)+b^2(b^2-ca)+c^2(c^2-ab)\geqslant 0$，故选 B.

5. 选 A　不妨设 $a>b>0$，则 $\frac{a}{b}>\frac{b}{a}>0$.
由排序不等式，得 $a\cdot\frac{a}{b}+b\cdot\frac{b}{a}\geqslant a\cdot\frac{b}{a}+b\cdot\frac{a}{b}$，即 $\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{a}\geqslant a+b$. 又 $\because a\neq b$，$\therefore\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{a}>a+b$，即 $P>Q$.

6. **证明**：不妨设 $a\leqslant b\leqslant c$，则 $A\leqslant B\leqslant C$.
由排序不等式，得 $aA+bB+cC=aA+bB+cC$.
$aA+bB+cC\geqslant bA+cB+aC$，
$aA+bB+cC\geqslant bC+cA+aB$，
三式相加，得 $3(aA+bB+cC)\geqslant(a+b+c)(A+B+C)=(a+b+c)\cdot\pi$.
$\therefore\frac{aA+bB+cC}{a+b+c}\geqslant\frac{\pi}{3}$，①
由三角形两边之和大于第三边知，
$b+c-a>0,a+b-c>0,a+c-b>0$，
所以 $A(b+c-a)+C(a+b-c)+B(a+c-b)>0$，
即 $a(B+C-A)+b(C+A-B)+c(A+B-C)>0$，
$\therefore a(\pi-2A)+b(\pi-2B)+c(\pi-2C)>0$，
即 $(a+b+c)\pi-2(aA+bB+cC)>0$，
$\therefore\frac{aA+bB+cC}{a+b+c}<\frac{\pi}{2}$，②
综合①②知，$\frac{\pi}{3}\leqslant\frac{aA+bB+cC}{a+b+c}<\frac{\pi}{2}$.

## 提能达标过关

1. 选 B　由排序原理知，顺序和≥乱序和≥反序和.
$\therefore A\geqslant C\geqslant B$.

2. 选 C　令 $A=(1+1)\left(1+\frac{1}{4}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{3n-2}\right)=\frac{2}{1}\times\frac{5}{4}\times\frac{8}{7}\times\cdots\times\frac{3n-1}{3n-2}$，$B=\frac{3}{2}\times\frac{6}{5}\times\frac{9}{8}\times\cdots\times\frac{3n}{3n-1}$，$C=\frac{4}{3}\times\frac{7}{6}\times\frac{10}{9}\times\cdots\times\frac{3n+1}{3n}$，
$\because\frac{2}{1}>\frac{3}{2}>\frac{4}{3},\frac{5}{4}>\frac{6}{5}>\frac{7}{6},\frac{8}{7}>\frac{9}{8}>\frac{10}{9},\cdots,\frac{3n-1}{3n-2}>\frac{3n}{3n-1}>\frac{3n+1}{3n}>0$，
$\therefore A>B>C>0$，$\therefore A^3>ABC$，
依题意，$3n-2=61$，所以 $n=21$，又 $ABC=3n+1=3\times21+1=64$，$\therefore A^3>64$，
解得 $A>4$，故选 C.

3. 选 B　由顺序和≥乱序和≥反序和.
可得 $az+by+cx$ 最小.

4. 选 C　由 $a,b,c$ 的对称性，不妨设 $a\geqslant b\geqslant c\geqslant 0$，则 $\sqrt{a}\geqslant\sqrt{b}\geqslant\sqrt{c}$，由排序不等式，得 $a\sqrt{b}+b\sqrt{c}+c\sqrt{a}\leqslant a\sqrt{a}+b\sqrt{b}+c\sqrt{c}=3$.

5. 选 A　不妨设 $a\geqslant b\geqslant c>0$，则 $a^3\geqslant b^3\geqslant c^3$，且 $a^4\geqslant b^4\geqslant c^4$，
则 $a^5+b^5+c^5=a\cdot a^4+b\cdot b^4+c\cdot c^4\geqslant a\cdot c^4+b\cdot a^4+c\cdot b^4$.
$\because a^3\geqslant b^3\geqslant c^3$，且 $ab\geqslant ac\geqslant bc$，
$\therefore a^4b+b^4c+c^4a=a^3\cdot ab+b^3\cdot bc+c^3\cdot ca\geqslant a^3bc+b^3ac+c^3ab$.
$\therefore a^5+b^5+c^5\geqslant a^3bc+b^3ac+c^3ab$. $\therefore M\geqslant 0$.

6. **解析**：由图可知 $S_1=a_1b_1+a_2b_2$，$S_2=a_1b_2+a_2b_1$，
$\because a_1\leqslant a_2,b_1\leqslant b_2$，$\therefore a_1b_1+a_2b_2\geqslant a_1b_2+a_2b_1$，
即 $S_1\geqslant S_2$.
**答案**：$S_1\geqslant S_2$

7. **解析**：不妨设 $a\geqslant b>0$，则 $A\geqslant B>0$，由排序不等式，得 $aA+bB\geqslant aB+bA$.
$\therefore 2(aA+bB)\geqslant aB+bA+aA+bB=(a+b)(A+B)$，$\because C$ 为直角，$\therefore A+B=\frac{\pi}{2}$.
$\therefore 2(aA+bB)\geqslant(a+b)\cdot\frac{\pi}{2}$，$\therefore aA+bB\geqslant\frac{\pi}{4}(a+b)$.
**答案**：$aA+bB\geqslant\frac{\pi}{4}(a+b)$

8. **解析**：$a_1+2a_2+3a_3+4a_4$ 的最大值为 $1^2+2^2+3^2+4^2=30$，
最小值为 $1\times4+2\times3+3\times2+4\times1=20$，
$\therefore a_1+2a_2+3a_3+4a_4$ 的取值范围是 $[20,30]$.
**答案**：$[20,30]$

9. **解**：由对称性，不妨设 $0<c\leqslant b\leqslant a$，
则有 $a+b\geqslant a+c\geqslant b+c>0$，所以 $0<\frac{1}{a+b}\leqslant\frac{1}{a+c}\leqslant\frac{1}{b+c}$.
由排序不等式得 $\frac{a}{b+c}+\frac{b}{a+c}+\frac{c}{a+b}$
$\geqslant\frac{a}{a+c}+\frac{b}{a+b}+\frac{c}{b+c}$，①
$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{a+c}+\frac{c}{a+b}\geqslant\frac{c}{a+c}+\frac{a}{a+b}+\frac{b}{b+c}$. ②
由①②知 $2\left(\frac{a}{b+c}+\frac{b}{a+c}+\frac{c}{a+b}\right)\geqslant 3$，
$\therefore\frac{a}{b+c}+\frac{b}{a+c}+\frac{c}{a+b}\geqslant\frac{3}{2}$.
当且仅当 $a=b=c$ 时，$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}$ 取最小值 $\frac{3}{2}$.

10. **证明**：$\because a,b,c,d\in\mathbf{R}_+$，不妨设 $a\geqslant b\geqslant c\geqslant d>0$，
则有 $a^2\geqslant b^2\geqslant c^2\geqslant d^2$.
由排序不等式得
$a^3+b^3+c^3+d^3\geqslant a^2b+b^2c+c^2d+d^2a$，
$a^3+b^3+c^3+d^3\geqslant a^2c+b^2d+c^2a+d^2b$，
$a^3+b^3+c^3+d^3\geqslant a^2d+b^2a+c^2b+d^2c$，
$a^3+b^3+c^3+d^3=a^3+b^3+c^3+d^3$.
相加得：$4(a^3+b^3+c^3+d^3)\geqslant a^2(a+b+c+d)+b^2(a+b+c+d)+c^2(a+b+c+d)+d^2(a+b+c+d)$，
$\therefore 4(a^3+b^3+c^3+d^3)\geqslant(a^2+b^2+c^2+d^2)(a+b+c+d)$.
当且仅当 $a=b=c=d$ 时取等号.



关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

## 阶段评估三

1. 选 A　不妨设 $a\geqslant b>0$，则 $a^2\geqslant b^2$，由排序原理，得 $a^3+b^3\geqslant a^2b+b^2a$.

2. 选 C　由柯西不等式，得 $(1^2+1^2)(a^2+b^2)\geqslant(a+b)^2=4$，$\therefore a^2+b^2\geqslant 2$，故选 C.

3. 选 B　①$(1-xy)(1+xy)=1-x^2y^2\leqslant 1$，当 $x^2=0,y^2=1$ 或 $x^2=1,y^2=0$ 时，有最大值 1；

②$(1-xy)(1+xy)=1-x^2y^2\geqslant 1-\left(\frac{x^2+y^2}{2}\right)^2=1-\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{3}{4}$，当 $x^2=y^2=\frac{1}{2}$ 时，有最小值 $\frac{3}{4}$.

4. 选 D　$y=\sqrt{(x-1)^2+2}+\sqrt{(3-x)^2+5}$.

根据柯西不等式，得 $y^2=(x-1)^2+2+(3-x)^2+5+2\sqrt{[(x-1)^2+2][(3-x)^2+5]}\geqslant(x-1)^2+2+(3-x)^2+5+2[(x-1)(3-x)+\sqrt{10}\,]=[(x-1)+(3-x)]^2+2+5+2\sqrt{10}=11+2\sqrt{10}$，

当且仅当 $\frac{x-1}{3-x}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}$，

即 $x=\frac{2\sqrt{10}-1}{3}$ 时等号成立.

此时，$y_{\min}=\sqrt{11+2\sqrt{10}}=\sqrt{10}+1$.

5. 选 B　由柯西不等式，得 $(a^2+b^2)(m^2+n^2)\geqslant(am+bn^2)$，即 $5(m^2+n^2)\geqslant 25$，

$\therefore m^2+n^2\geqslant 5$，当且仅当 $an=bm$ 时，等号成立，

$\therefore\sqrt{m^2+n^2}$ 的最小值为 $\sqrt{5}$.

6. 选 D　$\because x,y,z$ 是正数，且 $\frac{1}{x}+\frac{2}{y}+\frac{3}{z}=1$，

$\therefore x+\frac{y}{2}+\frac{z}{3}=\left(x+\frac{y}{2}+\frac{z}{3}\right)\left(\frac{1}{x}+\frac{2}{y}+\frac{3}{z}\right)$

$\geqslant\left(\sqrt{x}\cdot\frac{1}{\sqrt{x}}+\sqrt{\frac{y}{2}}\cdot\sqrt{\frac{2}{y}}+\sqrt{\frac{z}{3}}\cdot\sqrt{\frac{3}{z}}\right)^2$

$=(1+1+1)^2=9$，

当且仅当 $x=3,y=6,z=9$ 时取等号.

$\therefore x+\frac{y}{2}+\frac{z}{3}$ 的最小值是 9.

7. **解析**：由排序原理知，最长的总耗时为 $4\times10+3\times5+2\times4+1\times2=65$（分钟），最短的总耗时为 $4\times2+3\times4+2\times5+1\times10=40$（分钟）.

**答案**：65　40

8. **解析**：$\left(x^2+\frac{4}{y^2}\right)\cdot\left(y^2+\frac{1}{x^2}\right)=\left(x^2+\frac{4}{y^2}\right)\left(\frac{1}{x^2}+y^2\right)$

$\geqslant\left(x\cdot\frac{1}{x}+\frac{2}{y}\cdot y\right)^2=9$，当且仅当 $xy=\sqrt{2}$ 时，等号成立，

所以 $\left(x^2+\frac{4}{y^2}\right)\cdot\left(y^2+\frac{1}{x^2}\right)$ 的最小值为 9.

**答案**：9

9. **解析**：由柯西不等式得

$(x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3)^2\leqslant(x_1^2+x_2^2+x_3^2)(y_1^2+y_2^2+y_3^2)=1\times2=2$，

$\therefore|x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3|\leqslant\sqrt{2}$，

当且仅当 $x_1=x_2=x_3=\sqrt{\frac{1}{3}}$，

$y_1=y_2=y_3=\sqrt{\frac{2}{3}}$ 时取等号.

**答案**：$\sqrt{2}$

10. **解析**：$\because a+2b+3c=6$，$\therefore(a^2+4b^2+9c^2)\cdot(1^2+1^2+1^2)\geqslant(a+2b+3c)^2$，即 $a^2+4b^2+9c^2\geqslant12$，当且仅当 $\frac{1}{a}=\frac{1}{2b}=\frac{1}{3c}$，即 $a=2,b=1,c=\frac{2}{3}$ 时取等号，$\therefore a^2+4b^2+9c^2$ 的最小值为 12.

**答案**：12

11. **解**：(1)$f(x)=|2x+1|+|x-1|=\begin{cases}-3x,x\leqslant-\frac{1}{2},\\ x+2,-\frac{1}{2}<x<1,\\ 3x,x\geqslant1,\end{cases}$

$\therefore f(x)\geqslant3$ 等价于 $\begin{cases}x\leqslant-\frac{1}{2},\\ -3x\geqslant3\end{cases}$ 或 $\begin{cases}-\frac{1}{2}<x<1,\\ x+2\geqslant3\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x\geqslant1,\\ 3x\geqslant3.\end{cases}$

解得 $x\leqslant-1$ 或 $x\geqslant1$.

$\therefore$ 原不等式的解集为 $(-\infty,-1]\cup[1,+\infty)$.

(2)由(1)，可知当 $x=-\frac{1}{2}$ 时，$f(x)$ 取最小值 $\frac{3}{2}$，即 $m=\frac{3}{2}$.

$\therefore\frac{1}{2}a+b+2c=\frac{3}{2}$.

由柯西不等式，有

$(a^2+b^2+c^2)\left[\left(\frac{1}{2}\right)^2+1^2+2^2\right]\geqslant\left(\frac{1}{2}a+b+2c\right)^2$.

$\therefore a^2+b^2+c^2\geqslant\frac{3}{7}$.

当且仅当 $2a=b=\frac{c}{2}$，即 $a=\frac{1}{7},b=\frac{2}{7},c=\frac{4}{7}$ 时，等号成立.

12. **证明**：构造两组数 $\sqrt{a+b},\sqrt{b+c},\sqrt{c+a}$；$\frac{1}{\sqrt{a+b}},\frac{1}{\sqrt{b+c}},\frac{1}{\sqrt{c+a}}$. 则由柯西不等式得

$(a+b+b+c+c+a)\left(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}\right)\geqslant(1+1+1)^2$，①

即 $2(a+b+c)\left(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}\right)\geqslant9$，

于是 $\frac{2}{a+b}+\frac{2}{b+c}+\frac{2}{c+a}>\frac{9}{a+b+c}$.

由柯西不等式知，①中有等号成立 $\Leftrightarrow\frac{\sqrt{a+b}}{\frac{1}{\sqrt{a+b}}}=\frac{\sqrt{b+c}}{\frac{1}{\sqrt{b+c}}}=\frac{\sqrt{c+a}}{\frac{1}{\sqrt{c+a}}}\Leftrightarrow a+b=b+c=c+a\Leftrightarrow a=b=c$.

因题设，$a,b,c$ 不全相等，故①中等号不成立，

于是 $\frac{2}{a+b}+\frac{2}{b+c}+\frac{2}{c+a}>\frac{9}{a+b+c}$.

13. **证明**：由于正数 $a,b,c$ 的对称性，不妨设 $a\geqslant b\geqslant c>0$，则 $\frac{1}{a}\leqslant\frac{1}{b}\leqslant\frac{1}{c}$，$bc\leqslant ca\leqslant ab$. 由排序不等式得 $\frac{1}{a}\cdot bc+\frac{1}{b}\cdot ca+\frac{1}{c}\cdot ab\geqslant\frac{1}{a}\cdot ab+\frac{1}{b}\cdot bc+\frac{1}{c}\cdot ca$. 即 $\frac{bc}{a}+\frac{ca}{b}+\frac{ab}{c}\geqslant a+b+c$，

$\therefore\frac{b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2}{abc}\geqslant a+b+c$，

$\therefore\frac{b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2}{a+b+c}\geqslant abc$.



关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

14. **证明**:(1)不妨设 $a\geqslant b\geqslant c>0$,则 $a^2\geqslant b^2\geqslant c^2>0$,

$\therefore a^3+b^3=a^2\cdot a+b^2\cdot b\geqslant a^2b+b^2a$,$\therefore a^3+b^3\geqslant ab(a+b)$.

(2)由(1)知,同理 $b^3+c^3\geqslant bc(b+c)$,$c^3+a^3\geqslant ac(c+a)$,

所以 $\dfrac{1}{a^3+b^3+abc}+\dfrac{1}{b^3+c^3+abc}+\dfrac{1}{c^3+a^3+abc}$

$\leqslant\dfrac{1}{ab(a+b)+abc}+\dfrac{1}{bc(b+c)+abc}+\dfrac{1}{ac(a+c)+abc}$

$=\dfrac{1}{a+b+c}\left(\dfrac{1}{ab}+\dfrac{1}{bc}+\dfrac{1}{ca}\right)$

$=\dfrac{1}{a+b+c}\cdot\dfrac{c+a+b}{abc}=\dfrac{1}{abc}$.

故原不等式得证.

# 第四讲 用数学归纳法证明不等式

## 一 数学归纳法

### 第 12 课时 数学归纳法

#### 基础知识梳理

(1)$n=n_0$ (2)$n=k+1$ 数学归纳法

#### 题点知识巩固

1. 选 D 观察分母知,首项为 $n$,末项为 $n^2$,公差为 1,共有 $n^2-n+1$ 项,且 $f(2)=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{4}$.

2. **证明**:①当 $n=2$ 时,左边 $=1-\dfrac{1}{4}=\dfrac{3}{4}$,右边 $=\dfrac{2+1}{2\times2}=\dfrac{3}{4}$.

$\therefore$ 等式成立.

②假设当 $n=k(k\geqslant2,k\in\mathbf{N}_+)$ 时,等式成立,

即 $\left(1-\dfrac{1}{4}\right)\left(1-\dfrac{1}{9}\right)\left(1-\dfrac{1}{16}\right)\cdots\left(1-\dfrac{1}{k^2}\right)=\dfrac{k+1}{2k}(k\geqslant2,k\in\mathbf{N}_+)$.

当 $n=k+1$ 时,

$\left(1-\dfrac{1}{4}\right)\left(1-\dfrac{1}{9}\right)\left(1-\dfrac{1}{16}\right)\cdots\left(1-\dfrac{1}{k^2}\right)\left[1-\dfrac{1}{(k+1)^2}\right]$

$=\dfrac{k+1}{2k}\cdot\dfrac{(k+1)^2-1}{(k+1)^2}=\dfrac{(k+1)k\cdot(k+2)}{2k\cdot(k+1)^2}$

$=\dfrac{k+2}{2(k+1)}=\dfrac{(k+1)+1}{2(k+1)}$,

$\therefore$ 当 $n=k+1$ 时,等式成立.

根据①和②知,对 $n\geqslant2,n\in\mathbf{N}_+$ 时,等式成立.

3. 选 A 假设 $n=k$ 时,即 $k^3+(k+1)^3+(k+2)^2$ 能被 9 整除,那么当 $n=k+1$ 时,则 $(k+1)^3+(k+2)^3+(k+3)^3=(k+1)^3+(k+2)^3+(k^3+3k^2\times3+3k\times3^2+3^3)=k^3+(k+1)^3+(k+2)^3+(9k^2+27k+27)$. 故只需展开 $(k+3)^3$ 即可,故选 A.

4. **解析**:假设 $n=k$ 时,应有 $5^k-2^k$ 能被 3 整除,当 $n=k+1$ 时,应变形为 $5^{k+1}-2^{k+1}=5(5^k-2^k)+3\cdot2^k$.

**答案**:$5(5^k-2^k)+3\cdot2^k$

5. 选 B 依题意,第 $k+1$ 条直线与前 $k$ 条直线都有不同的交点,因此,应比原先增加 $k$ 个交点,即 $f(k+1)=f(k)+k$,故选 B.

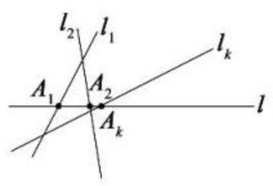
6. **证明**:①当 $n=2$ 时,

因为符合条件时两直线只有 1 个交点,

又 $f(2)=\dfrac{1}{2}\times2\times(2-1)=1$,

所以当 $n=2$ 时,命题成立;

②假设当 $n=k(k\geqslant2$,且 $k\in\mathbf{N}_+)$ 时命题成立,就是该平面内满足题设的任何 $k$ 条直线的交点个数为 $f(k)=\dfrac{1}{2}k(k-1)$,则当 $n=k+1$ 时,任取其中一条直线记为 $l$,如图,剩下的 $k$ 条直线为 $l_1,l_2,\cdots,l_k$.




由归纳假设知,它们之间的交点个数为 $f(k)=\dfrac{k(k-1)}{2}$.

由于 $l$ 与这 $k$ 条直线均相交且任意三条不过同一点,所以直线 $l$ 与 $l_1,l_2,l_3,\cdots,l_k$ 的交点共有 $k$ 个.

所以 $f(k+1)=f(k)+k=\dfrac{k(k-1)}{2}+k=\dfrac{k^2+k}{2}=\dfrac{k(k+1)}{2}=\dfrac{(k+1)[(k+1)-1]}{2}$.

所以当 $n=k+1$ 时命题成立.

由①②可知,命题对一切 $n\in\mathbf{N}_+$ 且 $n\geqslant2$ 都成立.

#### 提能达标过关

1. 选 B 若命题 $P(n)$ 对于 $n=k$ 成立,则这对 $n=k+2$ 亦成立,且 $P(n)$ 对 $n=2$ 成立,由递推关系,可得到 $n=4$ 时,$P(n)$ 成立,进而得到 $n=6$ 时,$P(n)$ 成立,依此类推,可知命题 $P(n)$ 对所有偶自然数 $n$ 成立,故选 B.

2. 选 D 当从 $n=k$ 到 $n=k+1$ 时,增加了 $\dfrac{1}{2k+1}+\dfrac{1}{2k+2}$,同时减少了 $\dfrac{1}{k+1}$,因此需添的项为 $\dfrac{1}{2k+1}+\dfrac{1}{2k+2}-\dfrac{1}{k+1}=\dfrac{1}{2k+1}-\dfrac{1}{2k+2}$.

3. 选 D 当 $n=k$ 时,不等式的左端为 $1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{4}+\cdots+\dfrac{1}{2^k-1}$,共有 $2^k-1$ 项,当 $n=k+1$ 时,不等式的左端为 $1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\cdots+\dfrac{1}{2^{k+1}-1}$,共有 $2^{k+1}-1$ 项,所以左端增加的项数为 $(2^{k+1}-1)-(2^k-1)=2^k$ 项.

4. 选 C A 中当 $n=1$ 时应为 $1+k$,$\therefore$A 不正确;

B 中当 $n=1$ 时,应为 1,$\therefore$B 不正确;

C 中当 $n=1$ 时,应为 $1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}$,$\therefore$C 正确;

D 中 $f(k+1)=\dfrac{1}{k+2}+\dfrac{1}{k+3}+\cdots+\dfrac{1}{3k+1}+\dfrac{1}{3k+2}+\dfrac{1}{3k+3}+\dfrac{1}{3k+4}$,

$\therefore f(k+1)=f(k)+\dfrac{1}{3k+2}+\dfrac{1}{3k+3}+\dfrac{1}{3k+4}-\dfrac{1}{k+1}$,

$\therefore$D 不正确.

5. 选 A $\because f(n)=(2n+7)\cdot3^n+9$,$\therefore f(1)=(2\times1+7)\times3+9=36$,$f(2)=(2\times2+7)\times3^2+9=108=36\times3$,$\therefore m=36$.

6. **解析**:在等式:"$1\times4+2\times7+3\times10+\cdots+n(3n+1)=n\cdot(n+1)^2$,$n\in\mathbf{N}_+$"中,当 $n=1$ 时,$3n+1=4$,而等式左边起始为 $1\times4$ 的连续的正整数积的和,故 $n=1$ 时,等式左端 $=1\times4=4$.

**答案**:4

7. **解析**:$\because n=k$ 时,命题为 $1+2+2^2+\cdots+2^{k-1}=2^k-1$,当 $n=k+1$ 时,使用归纳假设可写成,$1+2+2^2+\cdots+2^{k-1}+2^k=2^k-1+2^k=2^{k+1}-1$.

**答案**:$2^{k+1}-1$

8. **解析**:从特殊到一般进行归纳,$f(2)=0$,$f(3)=2$,$f(4)=5$,$f(5)=9$,$f(6)=14$,…,每增加一条直线,交点增加的个数等于原来直线的条数,$\therefore f(3)-f(2)=2$,$f(4)-f(3)=3$,$f(5)-f(4)=4$,$f(6)-f(5)=5$,…,$f(n)-f(n-1)=n-1$,将以上式子相加,得 $f(n)=2+3+4+5+\cdots+(n-1)=\dfrac{2+(n-1)}{2}(n-2)$,

$\therefore f(n)=\dfrac{1}{2}(n+1)(n-2)$.

**答案**:5 $\dfrac{1}{2}(n+1)(n-2)$



关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

9. **证明**：①当 $n=1$ 时，原式$=(3\times1+1)\times7-1=27$，
能被 9 整除，命题成立；
②假设当 $n=k(k\in\mathbf{N}_+,k\geqslant1)$时，$(3k+1)\cdot7^k-1$
能被 9 整除，则当 $n=k+1$ 时，
$[3(k+1)+1]\cdot7^{k+1}-1$
$=[21(k+1)+7]\cdot7^k-1$
$=[(3k+1)+(18k+27)]\cdot7^k-1$
$=[(3k+1)\cdot7^k-1]+9(2k+3)\cdot7^k$.
$\because[(3k+1)\cdot7^k-1]$和 $9(2k+3)\cdot7^k$ 都能被 9 整除，
$\therefore[(3k+1)\cdot7^k-1]+9(2k+3)\cdot7^k$ 能被 9 整除，
即$[3(k+1)+1]\cdot7^{k+1}-1$ 能被 9 整除，
$\therefore$当 $n=k+1$ 时命题成立.
由①②可知，对任何 $n\in\mathbf{N}_+$，命题都成立，
即$(3n+1)\cdot7^n-1$ 能被 9 整除$(n\in\mathbf{N}_+)$.

10. **证明**：①当 $n=1$ 时，
左边$=\dfrac{1}{2\times1\times(2+2)}=\dfrac{1}{8}$，
右边$=\dfrac{1}{4\times(1+1)}=\dfrac{1}{8}$，
左边$=$右边.
所以当 $n=1$ 时，等式成立.
②假设 $n=k(k\in\mathbf{N}_+)$时等式成立，即有
$\dfrac{1}{2\times4}+\dfrac{1}{4\times6}+\dfrac{1}{6\times8}+\cdots+\dfrac{1}{2k(2k+2)}=\dfrac{k}{4(k+1)}$，
则当 $n=k+1$ 时，$\dfrac{1}{2\times4}+\dfrac{1}{4\times6}+\dfrac{1}{6\times8}+\cdots+\dfrac{1}{2k(k+2)}+\dfrac{1}{2(k+1)[2(k+1)+2]}=\dfrac{k}{4(k+1)}+\dfrac{1}{4(k+1)(k+2)}=\dfrac{k(k+2)+1}{4(k+1)(k+2)}=\dfrac{(k+1)^2}{4(k+1)(k+2)}=\dfrac{k+1}{4(k+2)}=\dfrac{k+1}{4(k+1+1)}$.
所以当 $n=k+1$ 时，等式也成立.
由①②可知，对于一切 $n\in\mathbf{N}_+$ 等式都成立.

## 二　用数学归纳法证明不等式举例

### 第 13 课时　用数学归纳法证明不等式举例

#### 基础知识梳理

1. (1)$n\geqslant5$　(2)$n|\sin\theta|$　(3)$(1+x)^n>1+nx$　$(1+x)^\alpha\geqslant1+\alpha x(x>-1)$　$(1+x)^\alpha\leqslant1+\alpha x(x>-1)$　(4)$n$
2. (1)第一个值 $n_0$　(2)$k+1$　所有正整数

#### 题点知识巩固

1. 选 C　$\because n=1$ 时，$2^1=2,2\times1+1=3,2^n>2n+1$ 不成立；
$n=2$ 时，$2^2=4,2\times2+1=5,2^n>2n+1$ 不成立；
$n=3$ 时，$2^3=8,2\times3+1=7,2^n>2n+1$ 成立；
$\therefore n$ 的第一个取值应是 3.
2. 选 D　因为 $f(4)=25>4^2$，所以对于 $k\geqslant4$，均有 $f(k)\geqslant k^2$.
仅有 D 选项符合题意.
3. **解**：(1)设数列$\{a_n\}$的公差为 $d$，
由题意，得 $a_1+2d=4,a_1+3d=3a_1+3d$，
解得 $a_1=0,d=2$.
从而 $a_n=2n-2,S_n=n^2-n$，
由 $S_n+b_n,S_{n+1}+b_n,S_{n+2}+b_n$ 成等比数列，
得$(S_{n+1}+b_n)^2=(S_n+b_n)(S_{n+2}+b_n)$.
解得 $b_n=\dfrac{1}{d}(S_{n+1}^2-S_nS_{n+2})=n^2+n$.
(2)$c_n=\sqrt{\dfrac{a_n}{2b_n}}=\sqrt{\dfrac{2n-2}{2n(n+1)}}=\sqrt{\dfrac{n-1}{n(n+1)}}$，$n\in\mathbf{N}^*$.
下面用数学归纳法证明：
①当 $n=1$ 时，$c_1=0<2$，不等式成立；
②假设 $n=k(k\in\mathbf{N}^*)$时，不等式成立，
即 $c_1+c_2+\cdots+c_k<2\sqrt{k}$，
那么，当 $n=k+1$ 时，
$c_1+c_2+\cdots+c_k+c_{k+1}<2\sqrt{k}+\sqrt{\dfrac{k}{(k+1)(k+2)}}<2\sqrt{k}+\sqrt{\dfrac{k}{k+1}}<2\sqrt{k}+\dfrac{2}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}}=2\sqrt{k}+2(\sqrt{k+1}-\sqrt{k})=2\sqrt{k+1}$.
$\therefore$当 $n=k+1$ 时，不等式也成立.
由①②知，不等式 $c_1+c_2+\cdots+c_n<2\sqrt{n}$ 对任意 $n\in\mathbf{N}^*$ 成立.
4. 选 B　$\because a_1=2\cos\theta,a_{n+1}=\sqrt{2+a_n},0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$，
$\therefore a_2=\sqrt{2+a_1}=\sqrt{2+2\cos\theta}=\sqrt{2+2\left(2\cos^2\dfrac{\theta}{2}-1\right)}=2\cos\dfrac{\theta}{2}$，
$a_3=\sqrt{2+a_2}=\sqrt{2+2\cos\dfrac{\theta}{2}}=\sqrt{2+2\left(2\cos^2\dfrac{\theta}{4}-1\right)}=2\cos\dfrac{\theta}{4}$，
$a_4=\sqrt{2+a_3}=\sqrt{2+2\cos\dfrac{\theta}{4}}=\sqrt{2+2\left(2\cos^2\dfrac{\theta}{8}-1\right)}=2\cos\dfrac{\theta}{8}$.
…
以此类推，可猜想 $a_n=2\cos\dfrac{\theta}{2^{n-1}}$，故选 B.
5. **解析**：观察各等式知，左边是从第 $n$ 个正整数开始到第 $3n-2$ 个连续正整数的和，右边是项数的平方，得出的一般结论是：$n+(n+1)+(n+2)+\cdots+(3n-2)=(2n-1)^2$.
**答案**：$n+(n+1)+(n+2)+\cdots+(3n-2)=(2n-1)^2$
6. **解**：$S_1=\dfrac{1}{1\times4}=\dfrac{1}{4},S_2=\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{4\times7}=\dfrac{2}{7},S_3=\dfrac{2}{7}+\dfrac{1}{7\times10}=\dfrac{3}{10},S_4=\dfrac{3}{10}+\dfrac{1}{10\times13}=\dfrac{4}{13}$.
上面四个结果中，分子与项数 $n$ 一致，分母可用项数 $n$ 表示为 $3n+1$，于是可以猜想 $S_n=\dfrac{n}{3n+1}$.
证明：①当 $n=1$ 时，左边$=S_1=\dfrac{1}{4}$，右边$=\dfrac{1}{3\times1+1}=\dfrac{1}{4}$，
猜想成立.
②假设当 $n=k(k\in\mathbf{N}_+)$时猜想成立，即
$\dfrac{1}{1\times4}+\dfrac{1}{4\times7}+\cdots+\dfrac{1}{(3k-2)(3k+1)}=\dfrac{k}{3k+1}$成立.
则当 $n=k+1$ 时，
$\dfrac{1}{1\times4}+\dfrac{1}{4\times7}+\cdots+\dfrac{1}{(3k-2)(3k+1)}+\dfrac{1}{[3(k+1)-2][3(k+1)+1]}=\dfrac{k}{3k+1}+\dfrac{1}{[3(k+1)-2][3(k+1)+1]}=\dfrac{3k^2+4k+1}{(3k+1)(3k+4)}=\dfrac{(3k+1)(k+1)}{(3k+1)(3k+4)}=\dfrac{k+1}{3(k+1)+1}$.
所以当 $n=k+1$ 时，猜想也成立.
根据①②可知猜想对任何 $n\in\mathbf{N}^*$ 都成立.



关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

## 提能达标过关

1. 选 A ∵$n\geqslant 2$，且$n\in\mathbf{N}^*$，∴第一步应验证$n_0=2$，此时不等式为$1+\frac{1}{2^3}<2-\frac{1}{2}$，故选 A.

2. 选 B 由题意知，$n=k$ 为偶数，∴下一个偶数应为 $n=k+2$，故选 B.

3. 选 A 当 $n$ 为正偶数时，$a<2-\frac{1}{n}$恒成立，且关于 $n$ 的函数 $y=2-\frac{1}{n}$为增函数，其最小值为 $2-\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$，∴$a<\frac{3}{2}$；当 $n$ 为正奇数时，$-a<2+\frac{1}{n}$，即 $a>-2-\frac{1}{n}$恒成立，而函数 $y=-2-\frac{1}{n}$为增函数，对任意正整数都有$-2-\frac{1}{n}<-2$，∴$a\geqslant -2$，综上所述$-2\leqslant a<\frac{3}{2}$，故选 A.

4. 选 A 显然 $n=1$ 时，左边为$\frac{14}{45}<\frac{m}{25}$，∴$m$ 的最小值为 8，故选 A.

5. 选 D 当 $f(k)\geqslant k+1$ 成立时，总能推出 $f(k+1)\geqslant k+2$ 成立；也就是说当 $k=n$ 时，$f(n)\geqslant n+1$ 成立. 那么当 $k=n+1$ 时，$f(n+1)\geqslant n+2$ 也成立；所以当 $k=4$ 时，$f(4)\geqslant 5$ 成立；那么当 $k\geqslant 4$ 时，$f(k+1)\geqslant k+2$ 也成立.

6. **解析**：在贝努利不等式中，令 $x=-t$，则 $t=-x$，∵$x>-1$ 且 $x\neq 0$，∴$t<1$ 且 $t\neq 0$. ∴$(1-t)^n>1-nt(t<1$ 且 $t\neq 0, n>1, n\in\mathbf{N})$. 其他不等价，故填①.

**答案**：①

7. **解析**：∵$a_1=1, a_{n+1}=\frac{2a_n}{2+a_n}$，

∴$a_2=\frac{2a_1}{2+a_1}=\frac{2}{3}$，

$a_3=\frac{2a_2}{2+a_2}=\frac{1}{2}=\frac{2}{4}$，

$a_4=\frac{2a_3}{2+a_3}=\frac{2}{5}$，

…

以此类推，猜测 $a_n=\frac{2}{n+1}$.

**答案**：$a_n=\frac{2}{n+1}$

8. **解析**：当 $n=k$ 时，$f(k)=\left(1+\frac{1}{k}\right)\left(1+\frac{1}{k+1}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{k+k}\right)$.

当 $n=k+1$ 时，$f(k+1)=\left(1+\frac{1}{k+1}\right)\left(1+\frac{1}{k+2}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{k+k}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{k+k+1}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{k+k+2}\right)$.

∴$f(k+1)=f(k)\cdot\left(1+\frac{1}{2k+1}\right)\left(1+\frac{1}{2k+2}\right)\cdot\frac{k}{k+1}$.

**答案**：$\left(1+\frac{1}{2k+1}\right)\left(1+\frac{1}{2k+2}\right)\cdot\frac{k}{k+1}$

9. **证明**：①当 $n=2$ 时，左边$=\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}>\frac{5}{6}$，不等式成立.

②假设当 $n=k(k\geqslant 2, k\in\mathbf{N}^*)$时不等式成立. 即$\frac{1}{k+1}+\frac{1}{k+2}+\cdots+\frac{1}{3k}>\frac{5}{6}$.

则当 $n=k+1$ 时，

$$\frac{1}{(k+1)+1}+\frac{1}{(k+1)+2}+\cdots+\frac{1}{3k}+\frac{1}{3k+1}+\frac{1}{3k+2}+\frac{1}{3(k+1)}$$

$$=\frac{1}{k+1}+\frac{1}{k+2}+\cdots+\frac{1}{3k}+\left(\frac{1}{3k+1}+\frac{1}{3k+2}+\frac{1}{3k+3}-\frac{1}{k+1}\right)$$

$$>\frac{5}{6}+\left(\frac{1}{3k+1}+\frac{1}{3k+2}+\frac{1}{3k+3}-\frac{1}{k+1}\right)$$

$$>\frac{5}{6}+\left(3\times\frac{1}{3k+3}-\frac{1}{k+1}\right)=\frac{5}{6}.$$

所以当 $n=k+1$ 时不等式也成立.

由①②可知，原不等式对一切 $n\geqslant 2, n\in\mathbf{N}^*$ 均成立.

10. **解**：(1)$S_1=a_1=\frac{2}{2}=1$，

$S_2=S_1+a_2=1+\frac{2}{6}=\frac{4}{3}$，

$S_3=S_2+a_3=\frac{4}{3}+\frac{1}{6}=\frac{3}{2}$，

$S_4=S_3+a_4=\frac{3}{2}+\frac{1}{10}=\frac{8}{5}$，

猜测 $S_n=\frac{2n}{n+1}$.

(2)证明：当 $n=1$ 时，$S_1=\frac{2\times 1}{1+1}=1$，等式成立，

假设当 $n=k$ 时，等式成立，即 $S_k=\frac{2k}{k+1}$，

则当 $n=k+1$ 时，$S_{k+1}=S_k+a_{k+1}$

$$=\frac{2k}{k+1}+\frac{2}{(k+1)^2+(k+1)}$$

$$=\frac{2k}{k+1}+\frac{2}{(k+1)(k+2)}$$

$$=\frac{2k}{k+1}+\frac{2}{k+1}-\frac{2}{k+2}$$

$$=2-\frac{2}{k+2}=\frac{2k+2}{k+2}$$

$$=\frac{2(k+1)}{(k+1)+1},$$

即当 $n=k+1$ 时，等式也成立，

故对一切 $n\in\mathbf{N}^*$，$S_n=\frac{2n}{n+1}$.

## 阶段评估四

1. 选 D 因为 $f(n)=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{3n-1}$，所以 $f(n+1)=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{3n-1}+\frac{1}{3n}+\frac{1}{3n+1}+\frac{1}{3n+2}$，所以 $f(n+1)-f(n)=\frac{1}{3n}+\frac{1}{3n+1}+\frac{1}{3n+2}$，故选 D.

2. 选 C $n=4$ 时，$2^4=16, 4^2+1=17, 16<17$，$n=5$ 时，$2^5=32, n^2+1=26, 2^n>n^2+1$，故选 C.

3. 选 D 应该这样证明：假设当 $n=k\geqslant 2$ 时，$\sqrt{k^2+k}<k+1$ 成立，则当 $n=k+1$ 时，左边$=\sqrt{(k+1)^2+k+1}=\sqrt{k^2+k+2k+2}<\sqrt{(k+1)^2+1+2k+2}=(k+1)+1$，∴$n=k+1$时，不等式也成立. 而原证法只是应用了放缩法和不等式的性质，没有应用归纳假设，故不符合数学归纳法的要求. 故选 D.

4. 选 B 当 $n=1$ 时，左边$=\frac{1}{2}+\cos\alpha$.

5. 选 D 当 $n=1$ 时，$n^3+5n=6$；$3^{4n+1}+5^{2n+1}=3^5+5^3=368$；$6^{2n-1}+1=6^1+1=7$；$4^{2n+1}+3^{n+2}=4^3+3^3=91$，这四个数中，只有 91 能被 13 整除，故选 D.



关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

6. 选 A　当 $n=k$ 时，等式左边 $=1^2+2^2+\cdots+(k-1)^2+k^2+(k-1)^2+\cdots+2^2+1^1$，当 $n=k+1$ 时，等式左边 $=1^2+2^2+\cdots+(k-1)^2+k^2+(k+1)^2+k^2+(k-1)^2+\cdots+2^2+1^2$，所以等式左边添加的式子是 $(k+1)^2+k^2$. 故选 A.

7. **解析**：当 $n=1$ 时，不合题意；当 $n=2$ 时，不等式为 $1+\frac{1}{3}>\frac{\sqrt{5}}{2}$，不等式成立，所以 $n_0=2$.

**答案**：2

8. **解析**：依题意，$\because a_1=2, a_{n+1}=2a_n+2$，$\therefore$ 当 $n=k+1$ 时，$a_{k+1}=2a_k+2=2(4\cdot 2^{k-1}-2)+2=4\cdot 2^{(k+1)-1}-2$.

**答案**：$a_{k+1}=4\cdot 2^{(k+1)-1}-2$

9. **解析**：$\because f(n)=6^{2n-1}+1$，$\therefore f(k)=6^{2k-1}+1$，

$f(k+1)=6^{2(k+1)-1}+1=36\cdot 6^{2k-1}+1=36(6^{2k-1}+1)-35$，

$\therefore f(k+1)=36f(k)-35$.

**答案**：$36f(k)-35$

10. **解析**：由 $S_{n+1}+S_n=(S_{n+1}-S_n)^2=a_{n+1}^2$，

得 $S_n+S_{n-1}=a_n^2$，二式相减，

得 $S_{n+1}-S_{n-1}=a_{n+1}^2-a_n^2$，即

$a_{n+1}+a_n=(a_{n+1}+a_n)(a_{n+1}-a_n)$，

$\because a_{n+1}+a_n>0$，$\therefore a_{n+1}-a_n=1$.

又 $a_1=1$，$\therefore a_2=2, a_3=3, a_4=4, \cdots, a_n=n$.

$\therefore S_n=1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$.

**答案**：$\frac{n(n+1)}{2}$

11. **解**：从上面的证明过程可以看出，是用数学归纳法证明等式成立. 可是在第二步中，证明 $n=k+1$ 时没有用上假设，而是直接利用等比数列的求和公式导出的，这是错误的.

第二步正确的证法应为：

当 $n=k+1$ 时，

$1-2+4-8+\cdots+(-1)^{k-1}\cdot 2^{k-1}+(-1)^k\cdot 2^k$

$=(-1)^{k-1}\cdot\frac{2^k}{3}+\frac{1}{3}+(-1)^k\cdot 2^k$

$=-(-1)^k\cdot\frac{2^k}{3}+\frac{1}{3}+(-1)^k\cdot 2^k$

$=(-1)^k\cdot 2^k\left(1-\frac{1}{3}\right)+\frac{1}{3}$

$=(-1)^k\cdot\frac{2^{k+1}}{3}+\frac{1}{3}$.

这就是说，当 $n=k+1$ 时，等式也成立.

12. **证明**：①当 $n=1$ 时，$f(1)=3\times 5^3+2^4=391=17\times 23$，故 $f(1)$ 能被 17 整除；

②假设 $n=k$ 时，命题成立.

即 $f(k)=3\cdot 5^{2k+1}+2^{3k+1}$ 能被 17 整除，

则当 $n=k+1$ 时，

$f(k+1)=3\cdot 5^{2k+3}+2^{3k+4}$

$=5^2\cdot 3\cdot 5^{2k+1}+5^2\cdot 2^{3k+1}-5^2\cdot 2^{3k+1}+2^{3k+4}$

$=25f(k)-17\cdot 2^{3k+1}$.

由归纳假设，可知 $f(k)$ 能被 17 整除，又 $17\cdot 2^{3k+1}$ 显然可被 17 整除，

故 $f(k+1)$ 能被 17 整除.

综合①②可知，对任意正整数 $n$，$f(n)$ 能被 17 整除.

13. **证明**：①由于 $a_1=-4$，

$a_2=\frac{-1+3a_1}{2-a_1}=\frac{-1-12}{2+4}=\frac{-13}{6}>a_1$.

且 $a_1<0$，因此，当 $n=1$ 时不等式成立.

②假设当 $n=k(k\geqslant 1)$ 时，$a_{k+1}>a_k$ 且 $a_k<0$.

那么 $a_{k+1}=\frac{-1+3a_k}{2-a_k}<0$.

当 $n=k+1$ 时，

有 $a_{k+2}=\frac{-1+3a_{k+1}}{2-a_{k+1}}$，

$\therefore a_{k+2}-a_{k+1}=\frac{-1+3a_{k+1}}{2-a_{k+1}}-\frac{-1+3a_k}{2-a_k}$

$=\frac{5(a_{k+1}-a_k)}{(2-a_{k+1})(2-a_k)}>0$.

因此 $a_{k+2}>a_{k+1}$ 且 $a_{k+1}<0$，

这就是说，当 $n=k+1$ 时不等式也成立，根据①②，不等式对任何自然数 $n$ 都成立，

因此，对任何自然数 $n$，都有 $a_{n+1}>a_n$，且 $a_n<0$.

14. **解**：(1)由 $x_1=\frac{1}{2}$ 及 $x_{n+1}=\frac{1}{x_n+1}$，

得 $x_2=\frac{2}{3}, x_4=\frac{5}{8}, x_6=\frac{13}{21}$.

由 $x_2>x_4>x_6$，猜想：数列 $\{x_{2n}\}$ 是递减数列.

下面用数学归纳法证明：

①当 $n=1$ 时，已证命题成立.

②假设 $n=k$ 时命题成立，即 $x_{2k}>x_{2k+2}$，易知 $x_n>0$，那么

$x_{2k+2}-x_{2k+4}=\frac{1}{1+x_{2k+1}}-\frac{1}{1+x_{2k+3}}$

$=\frac{x_{2k+3}-x_{2k+1}}{(1+x_{2k+1})(1+x_{2k+3})}$

$=\frac{x_{2k}-x_{2k+2}}{(1+x_{2k})(1+x_{2k+1})(1+x_{2k+2})(1+x_{2k+3})}$

$>0$，

即 $x_{2(k+1)}>x_{2(k+1)+2}$，即 $n=k+1$ 时命题也成立.

由①②可知，命题成立.

(2)证明：当 $n=1$ 时，$|x_{n+1}-x_n|=|x_2-x_1|=\frac{1}{6}$，结论成立；$n\geqslant 2$ 时，易知 $0<x_{n-1}<1$，

$\therefore 1+x_{n-1}<2, x_n=\frac{1}{1+x_{n-1}}>\frac{1}{2}$.

$\therefore (1+x_n)(1+x_{n-1})=\left(1+\frac{1}{1+x_{n-1}}\right)(1+x_{n-1})$

$=2+x_{n-1}\geqslant\frac{5}{2}$.

$\therefore |x_{n+1}-x_n|=\left|\frac{1}{1+x_n}-\frac{1}{1+x_{n-1}}\right|$

$=\left|\frac{x_n-x_{n-1}}{(1+x_n)(1+x_{n-1})}\right|\leqslant\frac{2}{5}|x_n-x_{n-1}|$

$\leqslant\left(\frac{2}{5}\right)^2|x_{n-1}-x_{n-2}|\leqslant\cdots\leqslant\left(\frac{2}{5}\right)^{n-1}|x_2-x_1|$

$=\frac{1}{6}\left(\frac{2}{5}\right)^{n-1}$.

## 阶段评估五

1. 选 A　解法一：当 $x\leqslant -10$ 时，不等式可化为 $-(x+10)+(x-2)\geqslant 8$，无解；当 $-10<x<2$ 时，不等式可化为 $(x+10)+(x-2)\geqslant 8$，解得 $x\geqslant 0$，此时，不等式的解集为 $\{x|0\leqslant x<2\}$；当 $x\geqslant 2$ 时，不等式可化为 $(x+10)-(x-2)\geqslant 8$ 恒成立，此时不等式的解集为 $\{x|x\geqslant 2\}$，综上所述，原不等式的解集为 $\{x|x\geqslant 0\}$，故选 A.

解法二(特殊值检验)：$x=0$ 时，不等式为 $10-2\geqslant 8$ 成立，排除 B，D 选项；当 $x=2$ 时，不等式为 $12-0\geqslant 8$ 成立，排除 C 选项，故选 A.

2. 选 A　A 选项中，$a>b+1>b$，所以充分性成立，但必要性不成立，所以“$a>b+1$”为“$a>b$”成立的充分不必要条件.

3. 选 B　$|x|<2\Leftrightarrow -2<x<2$，$|x+1|<1\Leftrightarrow -1<x+1<1\Leftrightarrow -2<x<0$.

$\because \{x|-2<x<0\}\subsetneq\{x|-2<x<2\}$，

$\therefore$“$|x|<2$”是“$|x+1|<1$”的必要不充分条件.



关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

4. 选 C ∵ $x>0$，∴ $y=x^2+\frac{2}{x}=x^2+\frac{1}{x}+\frac{1}{x}\geqslant 3\sqrt[3]{x^2\cdot\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{x}}=3$. 当且仅当 $x^2=\frac{1}{x}$，即 $x=1$ 时等号成立.

5. 选 B 由 $\frac{a}{1-a}>0$，得 $0<a<1$，又 $x>1$，∴ $\log_a x<0$，$0<a^x<1$，$x^{\frac{1}{a}}>1$，∴ $\log_a x<a^x<x^{\frac{1}{a}}$，故选 B.

6. 选 C ∵ $x\in(0,2]$，∴ $a^2-a\geqslant\frac{x}{x^2+1}=\frac{1}{x+\frac{1}{x}}$.

要使 $a^2-a\geqslant\frac{1}{x+\frac{1}{x}}$ 在 $x\in(0,2]$ 时恒成立，

则 $a^2-a\geqslant\left(\frac{1}{x+\frac{1}{x}}\right)_{\max}$，由基本不等式得 $x+\frac{1}{x}\geqslant 2$，当且仅当 $x=1$ 时，等号成立，即 $\left(\frac{1}{x+\frac{1}{x}}\right)_{\max}=\frac{1}{2}$.

故 $a^2-a\geqslant\frac{1}{2}$，解得 $a\leqslant\frac{1-\sqrt{3}}{2}$ 或 $a\geqslant\frac{1+\sqrt{3}}{2}$. 故选 C.

7. **解析**：若关于 $x$ 的不等式 $|ax-2|<3$ 的解集为 $\left\{x\left|-\frac{5}{3}<x<\frac{1}{3}\right.\right\}$，则 $-\frac{5}{3}$，$\frac{1}{3}$ 是方程 $|ax-2|=3$ 的根，

所以 $\begin{cases}\left|-\frac{5}{3}a-2\right|=3,\\ \left|\frac{1}{3}a-2\right|=3,\end{cases}$ 解得 $a=-3$.

**答案**：$-3$

8. **解析**：解法一：$(a+2b)\left(\frac{1}{a}+\frac{2}{b}\right)=1+4+\frac{2b}{a}+\frac{2a}{b}\geqslant 5+2\sqrt{\frac{2b}{a}\cdot\frac{2a}{b}}=5+4=9$，当且仅当 $\frac{2b}{a}=\frac{2a}{b}$，即 $a=b$ 时取等号，∴ $(a+2b)\left(\frac{1}{a}+\frac{2}{b}\right)$ 的最小值为 9.

解法二：由柯西不等式得

$(a+2b)\left(\frac{1}{a}+\frac{2}{b}\right)\geqslant\left(\sqrt{a}\cdot\frac{1}{\sqrt{a}}+\sqrt{2b}\cdot\sqrt{\frac{2}{b}}\right)^2=9$，当且仅当 $a=b$ 时取等号，

∴ $(a+2b)\left(\frac{1}{a}+\frac{2}{b}\right)$ 的最小值为 9.

**答案**：9

9. **解析**：令 $t=x+\frac{1}{x}$，∵ $x<0$，∴ $-\left(x+\frac{1}{x}\right)\geqslant 2$，

∴ $t\leqslant -2$. ∵ $f(x)=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-\left(x+\frac{1}{x}\right)-2$，

∴ $g(t)=t^2-t-2=\left(t-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{9}{4}$.

∴ 当 $t=-2$ 时，$f(x)_{\min}=g(-2)=4$.

**答案**：4

10. **解析**：(1)顾客一次购买草莓和西瓜各 1 盒，总价为 60+80=140 元，又 140>120，所以优惠 10 元，顾客实际需付款 130 元.

(2)设顾客一次购买的水果总价为 $m$ 元，由题意易知，当 $0<m<120$ 时，$x=0$；当 $m\geqslant 120$ 时，$(m-x)\times 80\%\geqslant m\times 70\%$，得 $x\leqslant\frac{m}{8}$ 对任意 $m\geqslant 120$ 恒成立，又 $\frac{m}{8}\geqslant 15$，所以 $x$ 的最大值为 15.

**答案**：(1)130 (2)15

11. **证明**：∵ $ax+b^2>bx+a^2$，

∴ $ax-bx>a^2-b^2$，

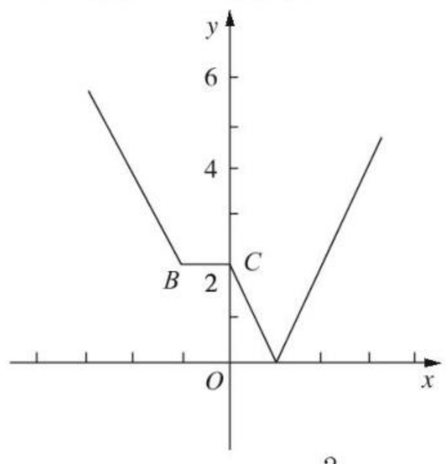
即 $x(a-b)>(a+b)(a-b)$.

∵ $a>b$，∴ $a-b>0$，

∴ $x>a+b$.

12. **解**：(1) $f(x)=\begin{cases}-2x,x\leqslant -1,\\ 2,-1<x<0,\\ 2-2x,0\leqslant x<1,\\ 2x-2,x\geqslant 1,\end{cases}$

所以 $y=f(x)$ 的图象如下图所示.




(2)当 $l$ 过点 $B(-1,2)$ 时，$k_l=-\frac{2}{3}$；

当 $l$ 过点 $C(0,2)$ 时，$k_l=-1$，

故 $l$ 斜率的取值范围为 $\left(-1,-\frac{2}{3}\right)$.

13. **解**：(1)函数 $f(x)=|x-a|-2$.

若 $a=1$，不等式 $f(x)+|2x-3|>0$，化为 $|x-1|+|2x-3|>2$.

当 $x\geqslant\frac{3}{2}$ 时，$3x>6$. 解得 $x>2$，

当 $x\in\left(1,\frac{3}{2}\right)$ 时，可得 $-x+2>2$，不等式无解；

当 $x\leqslant 1$ 时，不等式化为 $4-3x>2$，解得 $x<\frac{2}{3}$.

所以不等式的解集为 $\left(-\infty,\frac{2}{3}\right)\cup(2,+\infty)$.

(2)关于 $x$ 的不等式 $f(x)<|x-3|$ 恒成立，

可得 $|x-a|-2<|x-3|$，

设 $g(x)=|x-a|-|x-3|$，

因为 $|x-a|-|x-3|\leqslant|a-3|$，

所以 $g(x)_{\max}=|a-3|$，

即 $|a-3|<2$，所以 $a$ 的取值范围为 $(1,5)$.

14. **解**：(1) $f(x)$ 的最小值为 4，

∴ $f(x)=|x-a|+|x-3|\geqslant|a-3|$，

∴ $|a-3|=4$，

解得 $a=7$ 或 $-1$.

(2)①$3\leqslant x\leqslant 4$ 时，$f(x)<x$ 恒成立等价于 $|x-a|<3$ 恒成立，

即 $a-3<x<a+3$ 在 $3\leqslant x\leqslant 4$ 时恒成立，

即 $\begin{cases}a-3<3,\\ a+3>4,\end{cases}$

解得 $1<a<6$.

②$2\leqslant x<3$ 时，$f(x)<x$ 恒成立等价于 $|x-a|<2x-3$ 恒成立，

即 $\begin{cases}x>-a+3,\\ x>\frac{a+3}{3}\end{cases}$ 在 $2\leqslant x<3$ 时恒成立必有 $\begin{cases}-a+3<2,\\ \frac{a+3}{3}<2,\end{cases}$

解得 $1<a<3$，

综上，$a$ 的取值范围是 $(1,3)$.



关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

# 第二部分　阶段检测

## 阶段测试一

1. 选 C　当 $b=0$ 时，A，B，D 均不成立，故选 C，事实上，若 $a<b$，则 $-a>-b$. $\therefore |a|\geqslant -a>-b$，$\therefore |a|>-b$.

2. 选 D　由 $|3x-2|<4$，得 $-4<3x-2<4$，解得 $-\frac{2}{3}<x<2$，所以不等式 $|3x-2|<4$ 的解集是 $\left\{x\left|-\frac{2}{3}<x<2\right.\right\}$，故选 D.

3. 选 B　$y=|x-4|+|x-6|\geqslant|(x-4)-(x-6)|=2$.

4. 选 A　$\because$ 函数 $y=f(x+1)$ 为偶函数，

$\therefore f(x)$ 的图象关于 $x=1$ 对称，

$\because$ 对任意 $x_1,x_2\in[1,+\infty)(x_1\neq x_2)$ 都有 $\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}>0$，

$\therefore$ 函数 $f(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 上单调递增，在 $(-\infty,1]$ 上单调递减.

$\because f(a-1)\geqslant f(2a)$，

$\therefore |a-1-1|\geqslant|2a-1|$，

$\therefore -1\leqslant a\leqslant 1$. 故选 A.

5. 选 C　$p:\begin{cases}a\geqslant 1,\\ a^2-2a\geqslant 0\end{cases}\Rightarrow a\geqslant 2$.

$q:\because |2x+1|+|2x-1|\geqslant|2x+1-2x+1|=2$.

$\therefore$ 存在 $x\in\mathbf{R}$ 使 $|2x+1|+|2x-1|\leqslant a$ 成立，得 $a\geqslant 2$，

$\therefore p$、$q$ 互为充要条件，故选 C.

6. 选 B　$\because x>0$，$\therefore f(x)=3x+\frac{12}{x^2}=3\left(\frac{x}{2}+\frac{x}{2}+\frac{4}{x^2}\right)\geqslant 3\cdot 3\sqrt[3]{\frac{x}{2}\cdot\frac{x}{2}\cdot\frac{4}{x^2}}=9$，当且仅当 $\frac{x}{2}=\frac{4}{x^2}$，即 $x=2$ 时取等号.

7. 选 C　$P-Q=\frac{1}{a^2+a+1}-(a^2-a+1)$

$=\frac{1-(a^2+a+1)(a^2-a+1)}{a^2+a+1}$

$=\frac{1-[(a^2+1)^2-a^2]}{a^2+a+1}$

$=\frac{1-(a^4+2a^2+1-a^2)}{a^2+a+1}$

$=\frac{-a^2(a^2+1)}{a^2+a+1}$，

$\because a^2+a+1=\left(a+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}>0$，$-a^2(a^2+1)\leqslant 0$，

$\therefore P-Q\leqslant 0$，$\therefore P\leqslant Q$.

8. 选 D　①中，$\because ab>0$，$bc-ad>0$，$\therefore \frac{bc-ad}{ab}=\frac{c}{a}-\frac{d}{b}>0$，①正确；②中，$\because ab>0$，$\frac{c}{a}-\frac{d}{b}>0$，$\therefore ab\left(\frac{c}{a}-\frac{d}{b}\right)=bc-ad>0$，②正确；③中，$\because \frac{c}{a}-\frac{d}{b}=\frac{bc-ad}{ab}>0$，且 $bc-ad>0$，$\therefore ab>0$，③正确，综上所述，正确命题的个数是 3，故选 D.

9. 选 A　$\because \frac{a}{2}\leqslant b\leqslant 2a$，$\therefore \frac{3a}{2}\leqslant a+b\leqslant 3a$.

又 $\because 6<a<10$，$\therefore \frac{3a}{2}>9$，$3a<30$.

$\therefore 9<a+b<30$，即 $9<c<30$.

10. 选 C　$\because x>0$，$y>0$，

$\therefore \left(x+\frac{1}{2y}\right)^2+\left(y+\frac{1}{2x}\right)^2$

$=x^2+\frac{x}{y}+\frac{1}{4y^2}+y^2+\frac{y}{x}+\frac{1}{4x^2}$

$=\left(x^2+\frac{1}{4x^2}\right)+\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)+\left(\frac{1}{4y^2}+y^2\right)$

$\geqslant 2\times\frac{1}{2}+2+2\times\frac{1}{2}=4$，

当且仅当 $x=y=\frac{\sqrt{2}}{2}$ 时取等号.

11. 选 D　当 $x>0$ 时，$x+\frac{1}{x}\geqslant 2$，当 $x<0$ 时，$x+\frac{1}{x}\leqslant -2$，

$\therefore \left|x+\frac{1}{x}\right|\geqslant 2$，故①正确；若 $0<a<1<b$，则 $\log_a b<0$，

$\therefore \log_a b+\log_b a=\log_a b+\frac{1}{\log_a b}\leqslant -2$，故②不正确；若 $xy<0$，则 $|x+y|<|x-y|$，故③正确；$|x-1|<2\Leftrightarrow -1<x<3\Rightarrow x<3$，故④正确.

12. 选 B　由 $x^2-3xy+4y^2-z=0$，得

$\frac{x^2-3xy+4y^2}{z}=1\geqslant\frac{2\sqrt{x^2\cdot 4y^2}-3xy}{z}=\frac{xy}{z}$，

即 $\frac{xy}{z}\leqslant 1$，当且仅当 $x^2=4y^2$ 时等号成立.

又 $x$，$y$ 均为正数，$\therefore x=2y$.

将 $x=2y$ 代入 $x^2-3xy+4y^2-z=0$，得 $z=2y^2$，

$\therefore \frac{2}{x}+\frac{1}{y}-\frac{2}{z}=\frac{1}{y}+\frac{1}{y}-\frac{1}{y^2}=-\left(\frac{1}{y}-1\right)^2+1$.

$\therefore$ 当 $\frac{1}{y}=1$，即 $y=1$ 时，$\frac{2}{x}+\frac{1}{y}-\frac{2}{z}$ 有最大值 1.

13. **解析**：$\because a^2+\frac{1}{2}b^2\geqslant 2\sqrt{a^2\cdot\frac{1}{2}b^2}=\sqrt{2}ab$，

当且仅当 $a=\frac{\sqrt{2}}{2}b$ 时取等号，

$\because \frac{1}{2}b^2+1\geqslant 2\sqrt{\frac{1}{2}b^2}=\sqrt{2}b$，当且仅当 $b=\sqrt{2}$ 时取等号，

$\therefore \frac{ab+b}{a^2+b^2+1}=\frac{ab+b}{\left(a^2+\frac{1}{2}b^2\right)+\left(\frac{1}{2}b^2+1\right)}\leqslant\frac{ab+b}{\sqrt{2}ab+\sqrt{2}b}$

$=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，

当且仅当 $a=1$，$b=\sqrt{2}$ 时，等号成立.

$\therefore \frac{ab+b}{a^2+b^2+1}$ 的最大值为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

**答案**：$\frac{\sqrt{2}}{2}$

14. **解析**：由 $|ax-2|<3$，得 $-1<ax<5$.

若 $a>0$，则 $-\frac{1}{a}<x<\frac{5}{a}$，不合题意；

若 $a=0$，则解集为 $\mathbf{R}$，不合题意；

$\therefore a<0$，解集为 $\left\{x\left|\frac{5}{a}<x<-\frac{1}{a}\right.\right\}$.

又已知解集为 $\left\{x\left|-\frac{5}{3}<x<\frac{1}{3}\right.\right\}$，

$\therefore a=-3$.

**答案**：$-3$



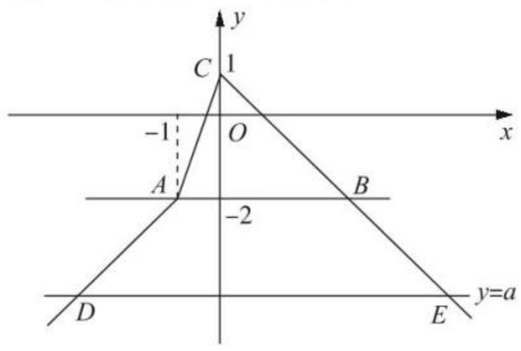
关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

15. **解析**：因为 $x$ 的最大值为 3，故 $x-3\leqslant 0$，
原不等式等价于 $|x^2-4x+k|-x+3\leqslant 5$，
即 $-x-2\leqslant x^2-4x+k\leqslant x+2$，
则 $x^2-5x+k-2\leqslant 0$ 且 $x^2-3x+k+2\geqslant 0$ 解的最大值为 3，
设 $x^2-5x+k-2=0$ 的根分别为 $x_1$ 和 $x_2$，$x_1<x_2$，
$x^2-3x+k+2=0$ 的根分别为 $x_3$ 和 $x_4$，$x_3<x_4$.
则 $x_2=3$，或 $x_4=3$.
若 $x_2=3$，则 $9-15+k-2=0$，$k=8$，
若 $x_4=3$，则 $9-9+k+2=0$，$k=-2$.
当 $k=-2$ 时，原不等式无解，
检验得 $k=8$ 符合题意.
**答案**：8

16. **解析**：由 $|x-a|<1$，得 $a-1<x<a+1$.
∵不等式 $|x-a|<1$ 成立的充分不必要条件是 $\frac{1}{2}<x<\frac{3}{2}$，
$$\therefore \begin{cases} a-1\leqslant \frac{1}{2}, \\ a+1\geqslant \frac{3}{2}, \end{cases} \therefore \frac{1}{2}\leqslant a\leqslant \frac{3}{2}.$$
**答案**：$\left[\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right]$

17. **解**：(1)若 $m=2$，$f(x)=|x+2|-|x-2|+2$.
∴当 $x\leqslant -2$ 时，$f(x)=-2$，不合题意；
当 $-2<x<2$ 时，$f(x)=2x+2$，由 $f(x)\geqslant 0$ 可解得 $x\geqslant -1$，所以 $-1\leqslant x<2$；
当 $x\geqslant 2$ 时，$f(x)=6>0$，恒成立，所以 $x\geqslant 2$.
所以不等式 $f(x)\geqslant 0$ 的解集为 $[-1,+\infty)$.
(2)证明：若 $m=4$，则 $f(x)=|x+2|-|x-2|+4$
$$=\begin{cases} 0, x\leqslant -2, \\ 2x+4, -2<x<2, \\ 8, x\geqslant 2. \end{cases}$$
当 $-2<x<2$ 时，$0<f(x)<8$，所以 $f(x)\geqslant 0$.

18. **解**：(1)$f(x)=|x+1|-2|x|=\begin{cases} x-1, x<-1, \\ 3x+1, -1\leqslant x\leqslant 0, \\ 1-x, x>0, \end{cases}$
则不等式 $f(x)\leqslant -6$ 等价于 $\begin{cases} x<-1, \\ x-1\leqslant -6 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} -1\leqslant x\leqslant 0, \\ 3x+1\leqslant -6 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x>0, \\ 1-x\leqslant -6, \end{cases}$
解得 $x\leqslant -5$ 或 $x\geqslant 7$.
故不等式 $f(x)\leqslant -6$ 的解集为 $\{x|x\leqslant -5$ 或 $x\geqslant 7\}$.
(2)作出函数 $f(x)$ 的图象，如图所示.




若 $f(x)$ 的图象与直线 $y=a$ 围成的图形是三角形，
则当 $a=-2$ 时，$\triangle ABC$ 的面积取得最大值
$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}\times 4\times 3=6$，
∴$f(x)$ 的图象与直线 $y=a$ 围成图形的面积不小于 14，该图形一定是四边形，即 $a<-2$，
∵$\triangle ABC$ 的面积是 6，∴梯形 $ABED$ 的面积不小于 8.
∵$|AB|=4$，$D(1+a,a)$，$E(1-a,a)$，$|DE|=-2a$，
$$\therefore \frac{1}{2}\times(4-2a)\times(-2-a)\geqslant 14-6=8, a^2\geqslant 12.$$
又 $a<-2$，则 $a\leqslant -2\sqrt{3}$.
故实数 $a$ 的取值范围是 $(-\infty,-2\sqrt{3}]$.

19. **解**：(1)令 $f(x)=|x-1|-|x-2|=\begin{cases} -1, x\leqslant 1, \\ 2x-3, 1<x<2, \\ 1, x\geqslant 2, \end{cases}$ 则
$-1\leqslant f(x)\leqslant 1$，由于 $\exists x_0\in \mathbf{R}$ 使不等式 $|x-1|-|x-2|\geqslant t$ 成立，有 $t\in T=\{t|t\leqslant 1\}$.
(2)由(1)知，$\log_3 m+\log_3 n\geqslant 2\sqrt{\log_3 m\log_3 n}\geqslant 2$，
从而 $mn\geqslant 3^2$，当且仅当 $m=n=3$ 时取等号，
再根据基本不等式 $m+n\geqslant 2\sqrt{mn}\geqslant 6$，
当且仅当 $m=n=3$ 时取等号，
所以 $m+n$ 的最小值为 6.

20. **解**：(1)$f(x)=\begin{cases} -2x+4, x<-1, \\ 6, -1\leqslant x\leqslant 5, \\ 2x-4, x>5. \end{cases}$
当 $x<-1$ 时，$-2x+4\leqslant x+10$，$x\geqslant -2$，则 $-2\leqslant x<-1$；
当 $-1\leqslant x\leqslant 5$ 时，$6\leqslant x+10$，$x\geqslant -4$，则 $-1\leqslant x\leqslant 5$；
当 $x>5$ 时，$2x-4\leqslant x+10$，$x\leqslant 14$，则 $5<x\leqslant 14$.
综上可得，不等式 $f(x)\leqslant x+10$ 的解集为 $[-2,14]$.
(2)设 $g(x)=a-(x-2)^2$，由函数 $f(x)$ 的图象与 $g(x)$ 的图象可知，
$f(x)$ 在 $x\in[-1,5]$ 上取最小值为 6，
$g(x)$ 在 $x=2$ 时取最大值为 $a$，
若 $f(x)\geqslant g(x)$ 恒成立，则 $a\leqslant 6$.

21. **证明**：(1)$ab+a+b+1=(a+1)(b+1)$，$ab+ac+bc+c^2=(a+c)(b+c)$.
∵$a>0$，$b>0$，$c>0$，∴$a+1\geqslant 2\sqrt{a}>0$，
$b+1\geqslant 2\sqrt{b}>0$，$a+c\geqslant 2\sqrt{ac}>0$，
$b+c\geqslant 2\sqrt{bc}>0$，
∴$(a+1)(b+1)\geqslant 4\sqrt{ab}>0$.
$(a+c)(b+c)\geqslant 4\sqrt{abc^2}$.
∴$(a+1)(b+1)(a+c)(b+c)\geqslant 16abc$.
因此，当 $a,b,c\in \mathbf{R}_+$，有
$(ab+a+b+1)(ab+ac+bc+c^2)\geqslant 16abc$.
(2)∵$a,b,c\in \mathbf{R}_+$，
$$\therefore \frac{b}{a}+\frac{c}{b}+\frac{a}{c}\geqslant 3\sqrt[3]{\frac{b}{a}\cdot\frac{c}{b}\cdot\frac{a}{c}}=3,$$
$$\frac{c}{a}+\frac{b}{c}+\frac{a}{b}\geqslant 3,$$
$$\therefore \frac{b}{a}+\frac{c}{b}+\frac{a}{c}+\frac{c}{a}+\frac{b}{c}+\frac{a}{b}\geqslant 6.$$
因此，$\left(\frac{b}{a}+\frac{c}{a}-1\right)+\left(\frac{c}{b}+\frac{a}{b}-1\right)+\left(\frac{a}{c}+\frac{b}{c}-1\right)\geqslant 3$，
即 $\frac{b+c-a}{a}+\frac{c+a-b}{b}+\frac{a+b-c}{c}\geqslant 3$.



关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

22. **解**：(1)依题意，$|2x+2|-5\geqslant|x-1|$；

当 $x<-1$ 时，原式化为 $-2x-2-5\geqslant1-x$，解得 $x\leqslant-8$；

当 $-1\leqslant x\leqslant1$ 时，原式化为 $2x+2-5\geqslant1-x$，解得 $x\geqslant\frac{4}{3}$，舍去；

当 $x>1$ 时，原式化为 $2x+2-5\geqslant x-1$，解得 $x\geqslant2$；

综上所述，不等式 $f(x)\geqslant|x-1|$ 的解集为 $(-\infty,-8]\cup[2,+\infty)$.

(2)当 $x\in\mathbf{R}$ 时，

$f(x)+g(x)=|2x+2|-5+m+|2x-m|\geqslant m-5+|m+2|$.

当 $x=-1$ 时，等号成立.

所以，$x\in\mathbf{R}$ 时，

$f(x)+g(x)\geqslant3\Leftrightarrow m-5+|m+2|\geqslant3$，

当 $m\geqslant-2$ 时，$m-5+|m+2|\geqslant3$ 等价于 $m-5+m+2\geqslant3$，解得 $m\geqslant3$；

当 $m<-2$ 时，$m-5+|m+2|\geqslant3$ 等价于 $m-5-m-2\geqslant3$，无解.

所以 $m$ 的取值范围为 $[3,+\infty)$.

## 阶段测试二

1. 选 B　随机抽样法属于统计中的抽样方法，不能用于证明不等式，故选 B.

2. 选 D　$\because a,b$ 正负不确定，而 $a>b\Rightarrow a^2>b^2$ 的条件是 $a,b$ 同正；$a>b\Rightarrow\frac{b}{a}<1$ 的条件是 $a>0$；$a>b\Rightarrow\lg(a-b)>0$ 成立条件是 $a>b+1$；因此 A、B、C 均不成立；$\frac{1}{3}<1$，$y=\left(\frac{1}{3}\right)^x$ 为减函数，$a>b\Rightarrow\left(\frac{1}{3}\right)^a<\left(\frac{1}{3}\right)^b$ 成立，故选 D.

3. 选 B　$\because a^2+b^2\geqslant2ab,b^2+c^2\geqslant2bc,c^2+a^2\geqslant2ac$，$\therefore2(a^2+b^2+c^2)\geqslant2ab+2bc+2ac$，即 $a^2+b^2+c^2\geqslant ab+bc+ac=1$，$\therefore(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ac=a^2+b^2+c^2+2\geqslant3$，故选 B.

4. 选 D　$\because a=0.5^{\frac{1}{2}}=0.25^{\frac{1}{4}},b=0.9^{\frac{1}{4}}$，$\therefore a<b<1$. 又 $\because c=\log_50.3<0$，$\therefore b>a>c$.

5. 选 A　$\because a+\frac{1}{a}-\left(b+\frac{1}{b}\right)=\frac{(a-b)(ab-1)}{ab}$，若 $a>b>1$，则 $a+\frac{1}{a}-\left(b+\frac{1}{b}\right)=\frac{(a-b)(ab-1)}{ab}>0$，$\therefore a+\frac{1}{a}>b+\frac{1}{b}$. 即充分性成立，当 $a=\frac{1}{2},b=\frac{2}{3}$ 时，显然 $a+\frac{1}{a}>b+\frac{1}{b}$ 成立，但 $a>b>1$ 不成立，即必要性不成立，故选 A.

6. 选 B　假设 $\angle B\geqslant\frac{\pi}{2}$，则 $b$ 为最大边，$\therefore b>a,b>c$.

$\therefore\frac{1}{b}<\frac{1}{a},\frac{1}{b}<\frac{1}{c}$. $\therefore\frac{1}{a}+\frac{1}{c}>\frac{2}{b}$. 这与题中 $\frac{1}{a}+\frac{1}{c}=\frac{2}{b}$ 矛盾. $\therefore\angle B<\frac{\pi}{2}$.

7. 选 B　$\because a=\lg2+\lg5=1,b=e^x(x<0)$，故 $b<1$，

$\therefore a>b$.

8. 选 A　$\because a>b>c>0$，$\therefore A>0,B>0$，

$$\therefore\frac{A}{B}=\frac{a^{2a}b^{2b}c^{2c}}{a^{b+c}b^{c+a}c^{a+b}}=\frac{a^a\cdot a^a\cdot b^b\cdot b^b\cdot c^c\cdot c^c}{a^b\cdot a^c\cdot b^c\cdot b^a\cdot c^a\cdot c^b}$$

$$=a^{a-b}\cdot a^{a-c}\cdot b^{b-c}\cdot b^{b-a}\cdot c^{c-a}\cdot c^{c-b}$$

$$=\left(\frac{a}{b}\right)^{a-b}\cdot\left(\frac{a}{c}\right)^{a-c}\cdot\left(\frac{b}{c}\right)^{b-c},$$

$\because a>b>0$，$\therefore\frac{a}{b}>1,a-b>0$，$\therefore\left(\frac{a}{b}\right)^{a-b}>1$，

同理 $\left(\frac{b}{c}\right)^{b-c}>1,\left(\frac{a}{c}\right)^{a-c}>1$，

$\therefore\frac{A}{B}>1$，$\therefore A>B$，故选 A.

9. 选 C　对于①，假设 $(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2=0$，这时 $a=b=c$，与已知矛盾，则 $(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\neq0$，故①正确；对于②，假设 $a>b$ 与 $a<b$ 及 $a\neq c$ 都不成立，这时 $a=b=c$，与已知矛盾，则 $a>b$ 与 $a<b$ 及 $a\neq c$ 中至少有一个成立，故②正确；对于③，取 $a=3,b=2,c=1$ 所以 $a\neq c$，$b\neq c$ 同时成立，故③错误.

10. 选 A　$m=\frac{6^a}{36^{a+1}+1}=\frac{6^a}{6^{2a+2}+1}=\frac{1}{6^2\,6^a+6^{-a}}\leqslant\frac{1}{2\sqrt{6^2}}=\frac{1}{12}$，$n=\frac{1}{3}b^2-b+\frac{5}{6}=\frac{1}{3}\left(b-\frac{2}{3}\right)^2+\frac{1}{12}\geqslant\frac{1}{12}$，

所以 $n\geqslant m$，故选 A.

11. 选 A　假设在 $[-1,1]$ 内没有一个值 $c$，使 $f(c)>0$.

则 $\begin{cases}f(-1)\leqslant0,\\f(1)\leqslant0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}2p^2-p-1\geqslant0,\\2p^2+3p-9\geqslant0,\end{cases}$

解得 $\begin{cases}p\leqslant-\frac{1}{2}\text{ 或 }p\geqslant1,\\p\leqslant-3\text{ 或 }p\geqslant\frac{3}{2}.\end{cases}$

$\therefore$ 此时 $p$ 的取值范围是 $\left\{p\,\middle|\,p\leqslant-3\text{ 或 }p\geqslant\frac{3}{2}\right\}$，

取补集即得所求实数 $p$ 的取值范围是 $\left\{p\,\middle|\,-3<p<\frac{3}{2}\right\}$.

故选 A.

12. 选 A　解法一(作差法)：$\because0<x<1$，

$\therefore0<1-x<1,0<1-x^2<1,1<1+x<2$.

$\therefore\lg(1-x)<0,\lg(1-x^2)<0,\lg(1+x)>0$，

$\therefore|\log_a(1-x)|-|\log_a(1+x)|$

$$=\left|\frac{\lg(1-x)}{\lg a}\right|-\left|\frac{\lg(1+x)}{\lg a}\right|$$

$$=-\frac{1}{|\lg a|}[\lg(1-x)+\lg(1+x)]$$

$$=-\frac{1}{|\lg a|}\cdot\lg(1-x^2)>0,$$

$\therefore|\log_a(1-x)|>|\log_a(1+x)|$.

解法二(作商法)：$\because0<x<1$，

$\therefore1<1+x<2,0<1-x<1,\frac{1}{1-x}=\frac{1+x}{1-x^2}>1+x>1$，

$\therefore\log_{(1+x)}(1-x)<0$.

$$\therefore\frac{|\log_a(1-x)|}{|\log_a(1+x)|}=|\log_{1+x}(1-x)|$$

$$=-\log_{(1+x)}(1-x)=\log_{(1+x)}\frac{1}{1-x}>\log_{(1+x)}(1+x)=1,$$

$\therefore|\log_a(1-x)|>|\log_a(1+x)|$.

13. **解析**：$\because a>b>0$，$\therefore a^2>b^2>0$，$\therefore E>0,F>0$，

$$\therefore\frac{E}{F}=\frac{\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}}{\frac{a-b}{a+b}}=\frac{(a+b)^2}{a^2+b^2}=1+\frac{2ab}{a^2+b^2}>1,$$

$\therefore E>F$.

**答案**：$E>F$



关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

14. **解析**：圆 $x^2+y^2+4x-4y-1=0$ 的标准方程为 $(x+2)^2+(y-2)^2=9$，由于弦长为 6，即为直径，所以 $-2a-2b+2=0$，即 $a+b=1$，则 $\frac{2}{a}+\frac{3}{b}=\left(\frac{2}{a}+\frac{3}{b}\right)(a+b)\geqslant 5+2\sqrt{\frac{2b}{a}\cdot\frac{3a}{b}}=5+2\sqrt{6}$，所以 $\frac{2}{a}+\frac{3}{b}$ 的最小值为 $5+2\sqrt{6}$.

**答案**：$5+2\sqrt{6}$

15. **解析**：若 $a>b$，则 $\sqrt{3}-\sqrt{2}>\sqrt{6}-\sqrt{5}\Leftrightarrow\sqrt{3}+\sqrt{5}>\sqrt{6}+\sqrt{2}\Leftrightarrow 8+2\sqrt{15}>8+2\sqrt{12}\Leftrightarrow\sqrt{15}>\sqrt{12}$，$\therefore a>b$ 成立，同理可证 $b>c$，$\therefore a>b>c$.

**答案**：$a>b>c$

16. **解析**：$\because a\sqrt{a}+b\sqrt{b}>a\sqrt{b}+b\sqrt{a}$，$\therefore(a\sqrt{a}+b\sqrt{b})-(a\sqrt{b}+b\sqrt{a})=a(\sqrt{a}-\sqrt{b})-b(\sqrt{a}-\sqrt{b})=(\sqrt{a}-\sqrt{b})(a-b)=(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2(\sqrt{a}+\sqrt{b})>0$，$\therefore a\geqslant 0$，$b\geqslant 0$ 且 $a\neq b$.

**答案**：$a\geqslant 0$，$b\geqslant 0$ 且 $a\neq b$

17. **解**：(1)当 $a=2$ 时，不等式为 $|x-2|+|x-1|\geqslant 4$，

若 $x<1$，则 $2-x+1-x\geqslant 4$，解得 $x\leqslant-\frac{1}{2}$；

若 $1\leqslant x\leqslant 2$，则 $2-x+x-1\geqslant 4$，即 $1\geqslant 4$，无解；

若 $x>2$，则 $x-2+x-1\geqslant 4$，解得 $x\geqslant\frac{7}{2}$.

所以不等式的解集为 $\left(-\infty,-\frac{1}{2}\right]\cup\left[\frac{7}{2},+\infty\right)$.

(2)证明：$f(x)\leqslant 1$ 即 $|x-a|\leqslant 1$，解得 $a-1\leqslant x\leqslant a+1$，

而 $f(x)\leqslant 1$ 的解集是 $[0,2]$，所以 $\begin{cases}a-1=0,\\a+1=2,\end{cases}$ 解得 $a=1$，

所以 $\frac{1}{m}+\frac{1}{2n}=1(m>0,n>0)$，

所以 $m+2n=(m+2n)\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{2n}\right)=2+\frac{2n}{m}+\frac{m}{2n}\geqslant 2+2\sqrt{\frac{2n}{m}\cdot\frac{m}{2n}}=4$，当且仅当 $\frac{2n}{m}=\frac{m}{2n}$，即 $m=2$，$n=1$ 时取等号.

18. **证明**：(1)$\because f(1)=a+b+c=-\frac{a}{2}$，

$\therefore 3a+2b+2c=0.$ ①

又 $3a>2c>2b$，$\therefore a>0$，$b<0$.

由①变形得 $c=-\frac{3}{2}a-b.$ ②

将②式代入 $3a>2c>2b$，得 $\begin{cases}b>-3a,\\4b<-3a.\end{cases}$

$\therefore -3<\frac{b}{a}<-\frac{3}{4}$.

(2)假设函数 $f(x)$ 在区间 $(0,2)$ 内没有零点.

$\because f(1)=-\frac{a}{2}<0$，

$\therefore f(0)=c\leqslant 0$，$f(2)=4a+2b+c=a-c\leqslant 0$.

$\therefore a\leqslant c\leqslant 0$. 这与已知 $a>0$ 矛盾，

$\therefore$ 函数 $f(x)$ 在区间 $(0,2)$ 内至少有一个零点.

19. **解**：(1)不等式 $|2x+1|<x+2$ 可化为 $-(x+2)<2x+1<x+2$，

解得 $-1<x<1$，

$\therefore$ 不等式 $|2x+1|<x+2$ 的解集 $A=\{x|-1<x<1\}$.

(2)证明：$\because a,b\in A$，

$\therefore -1<a<1$，$-1<b<1$，

$\therefore -2<a+b<2$

$\therefore 0\leqslant|a+b|<2.$

又 $2^{a-b}>0$，$2^{b-a}>0$，且 $2^{a-b}+2^{b-a}\geqslant 2\sqrt{2^{a-b}\cdot 2^{b-a}}=2.$

当且仅当 $2^{a-b}=2^{b-a}$，即 $a=b$ 时取等号，

$\therefore 2^{a-b}+2^{b-a}>|a+b|.$

20. **证明**：$\because\sqrt{n(n+1)}>n$，

$\therefore a_n=\sqrt{1\times 2}+\sqrt{2\times 3}+\sqrt{3\times 4}+\cdots+\sqrt{n(n+1)}>1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}.$

又 $\sqrt{n(n+1)}<\frac{n+n+1}{2}=n+\frac{1}{2}$，

$\therefore a_n=\sqrt{1\times 2}+\sqrt{2\times 3}+\sqrt{3\times 4}+\cdots+\sqrt{n(n+1)}<\left(1+\frac{1}{2}\right)+\left(2+\frac{1}{2}\right)+\left(3+\frac{1}{2}\right)+\cdots+\left(n+\frac{1}{2}\right)=\frac{n(n+1)}{2}+\frac{n}{2}=\frac{n^2+2n}{2}<\frac{(n+1)^2}{2}.$

$\therefore\frac{n(n+1)}{2}<a_n<\frac{(n+1)^2}{2}.$

21. **解**：(1)$|x-1|+|x+1|=\begin{cases}-2x,x<-1,\\2,-1\leqslant x<1,\\2x,x\geqslant 1,\end{cases}$

由 $|x-1|+|x+1|\leqslant 4\Rightarrow M=[-2,2]$.

(2)证明：证法一：要证 $2|a+b|\leqslant|ab|+4$，只需证 $4(a+b)^2\leqslant(|ab|+4)^2$，

即证 $4a^2+8ab+4b^2\leqslant(ab)^2+8|ab|+16$，

$\because 8ab\leqslant 8|ab|$，只需证 $4a^2+4b^2\leqslant(ab)^2+16$，

即证 $(a^2-4)(b^2-4)\geqslant 0$，

由(1)：$|a|\leqslant 2$，$|b|\leqslant 2$，上式显然成立，故原命题得证.

证法二：$\because|a|+|b|\geqslant|a+b|$，

$\therefore$ 要证 $2|a+b|\leqslant|ab|+4$，

只需证 $2|a|+2|b|\leqslant|ab|+4$，

即证 $(|a|-2)(|b|-2)\geqslant 0$，

由(1)：$|a|\leqslant 2$，$|b|\leqslant 2$，上式显然成立，故原命题得证.

22. **解**：(1)依题意，得 $\begin{cases}2a_1+d=3,\\5a_1+10d=3b_1+6d,\\b_1=3,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a_1=1,\\d=1,\\b_1=3,\end{cases}$

$\therefore a_n=n$，$b_n=3+(n-1)\times 2=2n+1.$

(2)证明：由(1)知 $a_n=n$，$b_n=2n+1$，

$\therefore c_n=(2n+1)+\frac{1}{n(n+1)}=(2n+1)+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right).$

$\therefore S_n=[3+5+7+\cdots+(2n+1)]+\left[\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)\right]$

$=\frac{n(3+2n+1)}{2}+\left(1-\frac{1}{n+1}\right)$

$=n^2+2n+1-\frac{1}{n+1}$

$=(n+1)^2-\frac{1}{n+1}$

$<(n+1)^2.$



关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

## 阶段测试三

1. 选 C $\left(a+\frac{1}{a}\right)^2+\left(b+\frac{1}{b}\right)^2=a^2+2+\frac{1}{a^2}+b^2+2+\frac{1}{b^2}$

$=(a^2+b^2)\left(1+\frac{1}{a^2b^2}\right)+4$,

$\because a+b=1$,$\therefore ab\leqslant\left(\frac{a+b}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$.

$\therefore a^2+b^2=\frac{1}{2}(a^2+b^2)(1^2+1^2)\geqslant\frac{1}{2}(a+b)^2=\frac{1}{2}$,

$1+\frac{1}{a^2b^2}\geqslant1+4^2=17$,$\therefore\left(a+\frac{1}{a}\right)^2+\left(b+\frac{1}{b}\right)^2\geqslant\frac{1}{2}\times17+4=\frac{25}{2}$,故选 C.

2. 选 D 由柯西不等式得$(2x+y)^2\leqslant(x^2+2y^2)\left[2^2+\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2\right]=6\times\left(4+\frac{1}{2}\right)=27$,$\therefore 2x+y\leqslant3\sqrt{3}$,即 $2x+y$ 的最大值为 $3\sqrt{3}$.

3. 选 C 由柯西不等式得$(3x+2y)^2\leqslant[(\sqrt{3})^2+(\sqrt{2})^2][(\sqrt{3}x)^2+(\sqrt{2}y)^2]\leqslant5$,$\therefore|3x+2y|\leqslant\sqrt{5}$,$\therefore-\sqrt{5}\leqslant3x+2y\leqslant\sqrt{5}$.

4. 选 A 设 $\boldsymbol{m}=(\sqrt{a}x,\sqrt{b}y)$,$\boldsymbol{n}=(\sqrt{a},\sqrt{b})$,则$|ax+by|=|\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}|\leqslant|\boldsymbol{m}|\cdot|\boldsymbol{n}|=\sqrt{(\sqrt{a}x)^2+(\sqrt{b}y)^2}\cdot\sqrt{(\sqrt{a})^2+(\sqrt{b})^2}=\sqrt{ax^2+by^2}\cdot\sqrt{a+b}=\sqrt{ax^2+by^2}$,

$\therefore(ax+by)^2\leqslant ax^2+by^2$,即 $P\leqslant Q$,故选 A.

5. 选 A $\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{1}{y}\right)$

$=\left[1^2+\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2\right]\left[1^2+\left(\frac{1}{\sqrt{y}}\right)^2\right]$

$\geqslant\left(1\times1+\frac{1}{\sqrt{x}}\cdot\frac{1}{\sqrt{y}}\right)^2$

$=\left(1+\frac{1}{\sqrt{xy}}\right)^2=2^2=4$,

当且仅当 $x=y=1$ 时取等号.

$\therefore\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{1}{y}\right)$的最小值为 4.

6. 选 B $1=a+b+4c$

$=(\sqrt{a})^2+(\sqrt{b})^2+(2\sqrt{c})^2$

$=\frac{1}{3}[(\sqrt{a})^2+(\sqrt{b})^2+(2\sqrt{c})^2]\cdot(1^2+1^2+1^2)$

$\geqslant(\sqrt{a}+\sqrt{b}+2\sqrt{c})^2\cdot\frac{1}{3}$,

$\therefore(\sqrt{a}+\sqrt{b}+2\sqrt{c})^2\leqslant3$,$\sqrt{a}+\sqrt{b}+2\sqrt{c}\leqslant\sqrt{3}$,当且仅当$a=\frac{1}{3}$,$b=\frac{1}{3}$,$c=\frac{1}{12}$时取等号.

7. 选 C 设 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 是 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的一个排列,且满足 $a_1<a_2<\cdots<a_n$,则 $a_1\geqslant1$,$a_2\geqslant2$,$\cdots$,$a_n\geqslant n$,又 $1>\frac{1}{2^2}>\frac{1}{3^2}>\cdots>\frac{1}{n^2}$,所以$\frac{x_1}{1^2}+\frac{x_2}{2^2}+\cdots+\frac{x_n}{n^2}\geqslant a_1+\frac{a_2}{2^2}+\frac{a_3}{3^2}+\cdots+\frac{a_n}{n^2}\geqslant1\times1+2\times\frac{1}{2^2}+3\times\frac{1}{3^2}+\cdots+n\times\frac{1}{n^2}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}$,故选 C.

8. 选 C $\frac{4a^2}{\sin^2\alpha}+\frac{b^2}{\cos^2\alpha}=(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)\left(\frac{4a^2}{\sin^2\alpha}+\frac{b^2}{\cos^2\alpha}\right)\geqslant\left(\sin\alpha\cdot\frac{2a}{\sin\alpha}+\cos\alpha\cdot\frac{b}{\cos\alpha}\right)^2=(2a+b)^2$,

当且仅当 $\sin\alpha\cdot\frac{b}{\cos\alpha}=\cos\alpha\cdot\frac{2a}{\sin\alpha}$时,等号成立.

所以$\frac{4a^2}{\sin^2\alpha}+\frac{b^2}{\cos^2\alpha}$的最小值为$(2a+b)^2$.

9. 选 B 由柯西不等式可得

$a^2+b^2=(a^2+b^2)\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)\geqslant\left(a\cdot\frac{x}{a}+b\cdot\frac{y}{b}\right)^2=(x+y)^2$,即 $A\geqslant B$.

10. 选 A $(a+b+c+d)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}\right)$

$=[(\sqrt{a})^2+(\sqrt{b})^2+(\sqrt{c})^2+(\sqrt{d})^2]\left[\left(\frac{1}{\sqrt{a}}\right)^2+\left(\frac{1}{\sqrt{b}}\right)^2+\left(\frac{1}{\sqrt{c}}\right)^2+\left(\frac{1}{\sqrt{d}}\right)^2\right]\geqslant\left(\sqrt{a}\cdot\frac{1}{\sqrt{a}}+\sqrt{b}\cdot\frac{1}{\sqrt{b}}+\sqrt{c}\cdot\frac{1}{\sqrt{c}}+\sqrt{d}\cdot\frac{1}{\sqrt{d}}\right)^2=(1+1+1+1)^2=16$,

当且仅当 $a=b=c=d=2$ 时,取等号.

又$\because a+b+c+d=8$,

$\therefore\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}$的最小值为 2.

11. 选 D $\because(2x^2+y^2+3z^2)\left(\frac{1}{2}+1+\frac{1}{3}\right)\geqslant\left(\sqrt{2}x\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}+y\cdot1+\sqrt{3}z\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2=x+y+z=1$,$\therefore 2x^2+y^2+3z^2\geqslant\frac{1}{\frac{1}{2}+1+\frac{1}{3}}=\frac{6}{11}$,当且仅当 $x=\frac{3}{11}$,$y=\frac{6}{11}$,$z=\frac{2}{11}$时等号成立,$\therefore 2x^2+y^2+3z^2$ 的最小值为$\frac{6}{11}$,故选 D.

12. 选 B $\because\left(\frac{25}{3}+\frac{36}{2}+\frac{49}{5}+16\right)(3x_1^2+2x_2^2+5x_3^2+x_4^2)\geqslant\left(\frac{5}{\sqrt{3}}\cdot\sqrt{3}x_1+3\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}x_2+\frac{-7}{\sqrt{5}}\cdot\sqrt{5}x_3+4x_4\right)^2=(5x_1+6x_2-7x_3+4x_4)^2=1$,

$\therefore 3x_1^2+2x_2^2+5x_3^2+x_4^2\geqslant\frac{15}{782}$.

13. **解析**:依题意,不妨取 $a\geqslant b>0$,则 $a^2\geqslant b^2$,$0<\frac{1}{a}\leqslant\frac{1}{b}$,由不等式性质得,$\frac{a^2}{b}\geqslant\frac{b^2}{a}$,由排序不等式得,$\frac{a^2}{b}\times\frac{1}{b}+\frac{b^2}{a}\times\frac{1}{a}\geqslant\frac{a^2}{b}\times\frac{1}{a}+\frac{b^2}{a}\times\frac{1}{b}$,即$\frac{a^2}{b^2}+\frac{b^2}{a^2}\geqslant\frac{a}{b}+\frac{b}{a}$,$\therefore P\geqslant Q$.

**答案**:$P\geqslant Q$

14. **解析**:由柯西不等式得

$(a\sqrt{1-b^2}+b\sqrt{1-a^2})^2\leqslant[a^2+(1-a^2)][(1-b^2)+b^2]=1$,

当且仅当$\frac{b}{\sqrt{1-a^2}}=\frac{\sqrt{1-b^2}}{a}$时,上式取等号,

$\therefore ab=\sqrt{1-a^2}\cdot\sqrt{1-b^2}$,$a^2b^2=(1-a^2)(1-b^2)$,

$\therefore a^2+b^2=1$.

**答案**:1



关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

15. **解析**：由柯西不等式，得

$$y=\left(1+\frac{1}{\sin\alpha}\right)\left(1+\frac{1}{\cos\alpha}\right)$$
$$=\left[1^2+\left(\frac{1}{\sqrt{\sin\alpha}}\right)^2\right]\left[1^2+\left(\frac{1}{\sqrt{\cos\alpha}}\right)^2\right]$$
$$\geqslant\left(1\times1+\frac{1}{\sqrt{\sin\alpha}}\cdot\frac{1}{\sqrt{\cos\alpha}}\right)^2$$
$$=\left(1+\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\sin 2\alpha}}\right)^2$$
$$\geqslant(1+\sqrt{2})^2=3+2\sqrt{2}.$$

当且仅当 $\alpha=\frac{\pi}{4}$，$\sin\alpha=\cos\alpha=\frac{\sqrt{2}}{2}$ 时，等号成立.

**答案**：$3+2\sqrt{2}$

16. **解析**：$(ax+by)(bx+ay)=[(\sqrt{ax})^2+(\sqrt{by})^2]\cdot[(\sqrt{bx})^2+(\sqrt{ay})^2]\geqslant(\sqrt{ab}x+\sqrt{ab}y)^2=ab(x+y)^2$，$\because ab=4$，$x+y=1$，$\therefore(ax+b)(bx+ay)\geqslant4$，即 $(ax+by)\cdot(bx+ay)$ 的最小值为 4.

**答案**：4

17. **证明**：构造两组数 $\sqrt{a}$，$\sqrt{b}$，$\sqrt{c}$；$\frac{1}{\sqrt{a}}$，$\frac{1}{\sqrt{b}}$，$\frac{1}{\sqrt{c}}$.

于是由柯西不等式有

$[(\sqrt{a})^2+(\sqrt{b})^2+(\sqrt{c})^2]\cdot\left[\left(\frac{1}{\sqrt{a}}\right)^2+\left(\frac{1}{\sqrt{b}}\right)^2+\left(\frac{1}{\sqrt{c}}\right)^2\right]\geqslant\left(\sqrt{a}\cdot\frac{1}{\sqrt{a}}+\sqrt{b}\cdot\frac{1}{\sqrt{b}}+\sqrt{c}\cdot\frac{1}{\sqrt{c}}\right)^2$，即 $(a+b+c)\cdot\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\geqslant3^2$. 因为 $a+b+c=1$，所以 $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\geqslant9$.

18. **解**：$y=\sqrt{2}\cdot\sqrt{2-4x}+\sqrt{4x+3}$
$\leqslant[(\sqrt{2})^2+1^2]^{\frac{1}{2}}\cdot(2-4x+4x+3)^{\frac{1}{2}}=\sqrt{3}\cdot\sqrt{5}=\sqrt{15}$，

等号成立 $\Leftrightarrow\frac{\sqrt{2-4x}}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{4x+3}}{1}\Leftrightarrow\frac{2-4x}{2}=4x+3\Leftrightarrow x=-\frac{1}{3}$.

当 $x=-\frac{1}{3}$ 时，$y=2\sqrt{1+\frac{2}{3}}+\sqrt{-\frac{4}{3}+3}$
$=\frac{2}{3}\sqrt{15}+\frac{1}{3}\sqrt{15}=\sqrt{15}$.

故当 $x=-\frac{1}{3}$ 时，$y$ 取得最大值 $\sqrt{15}$.

19. **解**：(1)因为 $|x+1|+|x-2|\geqslant|(x+1)-(x-2)|=3$，当且仅当 $-1\leqslant x\leqslant2$ 时，等号成立，所以 $f(x)$ 的最小值等于 3，即 $a=3$.

(2)证明：由(1)知 $p+q+r=3$，又因为 $p$，$q$，$r$ 是正实数，所以 $(p^2+q^2+r^2)(1^2+1^2+1^2)\geqslant(p\times1+q\times1+r\times1)^2=(p+q+r)^2=9$，即 $p^2+q^2+r^2\geqslant3$.

20. **解**：(1)$\because f(x)=|x|+|x+1|\geqslant|-x+x+1|=1$，
$\therefore f(x)$ 的最小值为 1，$\therefore m=1$.

(2)由柯西不等式得

$(2x+3y+3z)^2\leqslant(2^2+3^2+3^2)(x^2+y^2+z^2)$，

$\because2x+3y+3z=1$，

$\therefore x^2+y^2+z^2\geqslant\frac{1}{22}$，

当且仅当 $\frac{x}{2}=\frac{y}{3}=\frac{z}{3}$，

即 $x=\frac{1}{11}$，$y=z=\frac{3}{22}$ 时，等号成立.

$\therefore x^2+y^2+z^2$ 的最小值为 $\frac{1}{22}$.

21. **证明**：设 $b_1$，$b_2$，…，$b_{n-1}$ 是 $a_1$，$a_2$，…，$a_{n-1}$ 的一个排列，且 $b_1<b_2<\cdots<b_{n-1}$，$c_1$，$c_2$，…，$c_{n-1}$ 是 $a_2$，$a_3$，…，$a_n$ 的一个排列，且 $c_1<c_2<\cdots<c_{n-1}$，

于是 $\frac{1}{c_1}>\frac{1}{c_2}>\cdots>\frac{1}{c_{n-1}}$.

由排序原理：乱序和≥反序和，得

$$\frac{a_1}{a_2}+\frac{a_2}{a_3}+\cdots+\frac{a_{n-1}}{a_n}\geqslant\frac{b_1}{c_1}+\frac{b_2}{c_2}+\cdots+\frac{b_{n-1}}{c_{n-1}}.\quad①$$

由于 $b_1\geqslant1$，$b_2\geqslant2$，…，$b_{n-1}\geqslant n-1$，

$c_1\leqslant2$，$c_2\leqslant3$，…，$c_{n-1}\leqslant n$，

于是 $\frac{b_1}{c_1}+\frac{b_2}{c_2}+\cdots+\frac{b_{n-1}}{c_{n-1}}\geqslant\frac{1}{2}+\frac{2}{3}+\cdots+\frac{n-1}{n}.\quad②$

由①②可得

$$\frac{1}{2}+\frac{2}{3}+\cdots+\frac{n-1}{n}\leqslant\frac{a_1}{a_2}+\frac{a_2}{a_3}+\cdots+\frac{a_{n-1}}{a_n}.$$

22. **解**：(1)证明：因为 $a>0$，$b>0$，

所以 $\left(a+b+\frac{1}{a}\right)\left(a^2+\frac{1}{b}+\frac{1}{a^2}\right)\geqslant(2+b)\left(2+\frac{1}{b}\right)=5+2b+\frac{2}{b}\geqslant5+4=9$.

(2)$[(5-2a)^2+4b^2+(a-b)^2][1^2+1^2+2^2]\geqslant[(5-2a)\cdot1+2b\cdot1+(a-b)\cdot2]^2$，

所以 $(5-2a)^2+4b^2+(a-b)^2\geqslant\frac{25}{6}$.

当且仅当 $\frac{5-2a}{1}=\frac{2b}{1}=\frac{a-b}{2}$ 时取等号，解得 $a=\frac{25}{12}$，

$b=\frac{5}{12}$，

所以当 $a=\frac{25}{12}$，$b=\frac{5}{12}$ 时取最小值 $\frac{25}{6}$.

## 选修 4—5 综合测评

1. 选 C　由 $a^2+b^2>1$ 的几何意义知，$a^2+b^2>1\Rightarrow|a|+|b|>1$，充分性成立. 但当 $|a|+|b|>1$ 时，不一定有 $a^2+b^2>1$，如 $a=\frac{1}{2}$，$b=\frac{3}{4}$，有 $|a|+|b|>1$，但 $a^2+b^2=\frac{1}{4}+\frac{9}{16}=\frac{13}{16}<1$，故选 C.

2. 选 A　当 $a>0$，$b>0$ 时，$a+b\geqslant2\sqrt{ab}$，则当 $a+b\leqslant4$ 时，有 $2\sqrt{ab}\leqslant a+b\leqslant4$，解得 $ab\leqslant4$，充分性成立；当 $a=1$，$b=4$ 时，满足 $ab\leqslant4$，但此时 $a+b=5>4$，必要性不成立，综上所述，“$a+b\leqslant4$”是“$ab\leqslant4$”的充分不必要条件，故选 A.

3. 选 C　由 $a$，$b$ 的等差中项是 $\frac{1}{2}$，得 $a+b=1$.

$\therefore m+n=a+\frac{1}{a}+b+\frac{1}{b}=1+\frac{1}{ab}$.

又 $ab\leqslant\frac{(a+b)^2}{4}=\frac{1}{4}$，$\therefore\frac{1}{ab}\geqslant4$.

当且仅当 $a=b=\frac{1}{2}$ 时取等号.

$\therefore m+n\geqslant5$，$\therefore m+n$ 的最小值是 5.



关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

4. 选 B　$\because x>0$，$\therefore 4x+\frac{9}{x^2}=2x+2x+\frac{9}{x^2}\geqslant 3\sqrt[3]{2x\cdot 2x\cdot\frac{9}{x^2}}$

$=3\sqrt[3]{36}$，当且仅当 $2x=\frac{9}{x^2}$，即 $x=\sqrt[3]{\frac{9}{2}}$ 时，等号成立，故选 B.

5. 选 B　由 $|f(x+t)-1|<3$，得 $-3<f(x+t)-1<3$，$\therefore -2<f(x+t)<4$，$\because f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递减，且 $f(x)$ 的图象经过点 $A(0,4)$ 和点 $B(3,-2)$，$\therefore 0<x+t<3$，解得 $-t<x<3-t$，又不等式 $|f(x+t)-1|<3$ 的解集为 $(-1,2)$，$\therefore\begin{cases}-t=-1,\\3-t=2,\end{cases}$ 解得 $t=1$，故选 B.

6. 选 A　不等式 $|x|+|x-1|>m$ 的解集是 $\mathbf{R}$，

又 $|x|+|x-1|\geqslant|x+1-x|=1$，$\therefore m<1$.

若函数 $f(x)=-(5-2m)^x$ 是减函数，

则 $5-2m>1$，$\therefore m<2$.

$\therefore$ 命题 $p$：$m<1$，命题 $q$：$m<2$，

$\therefore p$ 是 $q$ 的充分不必要条件.

7. 选 A　解法一：由 $x,y,z$ 的对称性可知，当且仅当 $x=y=z$ 时，取得最小值，其最小值为 0.

解法二：不妨设 $0<x\leqslant y\leqslant z$，则 $x^2\leqslant y^2\leqslant z^2$，$x+y\leqslant x+z\leqslant y+z$，

$\therefore\frac{1}{x+y}\geqslant\frac{1}{x+z}\geqslant\frac{1}{y+z}$，

$\therefore\frac{z^2}{x+y}+\frac{y^2}{x+z}+\frac{x^2}{y+z}\geqslant\frac{x^2}{x+y}+\frac{z^2}{x+z}+\frac{y^2}{y+z}$，

即 $\frac{z^2-x^2}{x+y}+\frac{x^2-y^2}{y+z}+\frac{y^2-z^2}{z+x}\geqslant 0$.

8. 选 C　依序列 $\{x_n\}$ 的各项都是正数，不妨设 $0<x_1\leqslant x_2\leqslant\cdots\leqslant x_n$，则 $x_2,x_3,\cdots,x_n,x_1$ 为序列 $\{x_n\}$ 的一个排列. 依排序原理，得 $x_1x_1+x_2x_2+\cdots+x_nx_n\geqslant x_1x_2+x_2x_3+\cdots+x_nx_1$，即 $x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2\geqslant x_1x_2+x_2x_3+\cdots+x_nx_1$. 故选 C.

9. 选 C　$\because$ 正项等比数列 $\{a_n\}$ 满足：$a_7=a_6+2a_5$，

$\therefore a_1q^6=a_1q^5+2a_1q^4$，

又 $q>0$，解得 $q=2$，

$\because$ 存在两项 $a_m,a_n$ 使得 $\sqrt{a_ma_n}=4a_1$，

$\therefore a_1^2q^{m+n-2}=16a_1^2$，即 $2^{m+n-2}=16$，$m+n=6$，

$\therefore\frac{1}{m}+\frac{5}{n}=\frac{1}{6}(m+n)\left(\frac{1}{m}+\frac{5}{n}\right)=\frac{1}{6}\left(6+\frac{n}{m}+\frac{5m}{n}\right)\geqslant 1+\frac{\sqrt{5}}{3}$，

当且仅当 $\frac{n}{m}=\frac{5m}{n}$ 时取等号，但此时 $m,n\notin\mathbf{N}^*$.

又 $m+n=6$，所以只有当 $m=2$，$n=4$ 时，取得最小值 $\frac{7}{4}$，故选 C.

10. 选 C　$2p^2=2m^2+2n^2=(1^2+1^2)(m^2+n^2)\geqslant(m+n)^2$，当且仅当 $m=n$ 时等号成立，$\therefore\frac{p^2}{(m+n)^2}\geqslant\frac{1}{2}$.

$\because m,n,p$ 为正数，$\therefore\frac{p}{m+n}\geqslant\frac{\sqrt{2}}{2}$，

$\therefore\frac{p}{m+n}$ 的最小值为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

11. 选 B　$\because f(x)=\frac{1}{a}x^2-bx+c$，且不等式 $f(x)<0$ 的解集是 $(-1,3)$，$\therefore$ 函数 $f(x)=\frac{1}{a}x^2-bx+c$，开口向上，且对称轴为 $x=1$，$\therefore$ 函数 $f(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递增. $\because 7+|t|$ 与 $1+t^2$ 均大于 1，且 $f(7+|t|)>f(1+t^2)$，$\therefore 7+|t|>1+t^2$，即 $|t|^2-|t|-6<0$，解得 $-2<|t|<3$，解得 $-3<t<3$，$\therefore$ 实数 $t$ 的取值范围是 $(-3,3)$，故选 B.

12. 选 A　因为 $\frac{9m+n+5mn}{mn}=\sqrt{mn}$，所以 $\frac{1}{m}+\frac{9}{n}+5=\sqrt{mn}$，

因为 $\frac{1}{m}+\frac{9}{n}\geqslant 2\sqrt{\frac{1}{m}\cdot\frac{9}{n}}=\frac{6}{\sqrt{mn}}$，所以 $\sqrt{mn}\geqslant\frac{6}{\sqrt{mn}}+5$，解得 $\sqrt{mn}\geqslant 6$，即 $mn\geqslant 36$，

则 $mn$ 的最小值为 36，无最大值，故选 A.

13. **解析**：因为 $|x-1|+|x|+|y-1|+|y+1|\geqslant|x-(x-1)|+|(y-1)-(y+1)|=1+2=3$，当且仅当 $0\leqslant x\leqslant 1$，$-1\leqslant y\leqslant 1$ 时取等号，所以 $|x-1|+|x|+|y-1|+|y+1|$ 的最小值为 3.

**答案**：3

14. **解析**：$\because$ 关于 $x$ 的不等式 $|x+3|-|x+2|\geqslant\log_2 a$ 有解，又 $|x+3|-|x+2|$ 表示 $x$ 轴上的 $x$ 到 $-3$ 和 $-2$ 的距离之差，其最小值等于 $-1$，最大值等于 1，

$\therefore\log_2 a\leqslant 1$，$\therefore 0<a\leqslant 2$.

**答案**：$(0,2]$

15. **解析**：$\because|\alpha+\beta|=|\alpha|+|\beta|$，$|\alpha|>2\sqrt{2}$，$|\beta|>2\sqrt{2}$，

$\therefore|\alpha+\beta|=|\alpha|+|\beta|>2\sqrt{2}+2\sqrt{2}>5$，

即 $|\alpha+\beta|>5$.

$\therefore$①③⇒②.

**答案**：①③⇒②

16. **解析**：由题得 $3a^2=3b^2-b^2+3c^2-2c^2$，

$\therefore b^2+2c^2=3(b^2+c^2-a^2)=6bc\cos A$，

$\therefore\frac{S}{b^2+2c^2}=\frac{\frac{1}{2}bc\sin A}{6bc\cos A}=\frac{1}{12}\tan A$，

由题得 $a^2=\frac{2b^2+c^2}{3}$，$\therefore\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{b^2+c^2-\frac{2b^2+c^2}{3}}{2bc}=\frac{b^2+2c^2}{6bc}\geqslant\frac{2\sqrt{2}bc}{6bc}=\frac{\sqrt{2}}{3}$.

所以 $\tan A=\sqrt{\frac{1}{\cos^2 A}-1}\leqslant\sqrt{\frac{9}{2}-1}=\frac{\sqrt{14}}{2}$，

当且仅当 $b=\sqrt{2}c$ 时取等号.

所以 $\frac{S}{b^2+2c^2}$ 的最大值为 $\frac{\sqrt{14}}{24}$.

**答案**：$\frac{\sqrt{14}}{24}$

17. **解**：(1)由 $\sqrt{ab}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\geqslant\frac{2}{\sqrt{ab}}$，得 $ab\geqslant 2$，

当且仅当 $a=b=\sqrt{2}$ 时等号成立.

所以 $a^3+b^3\geqslant 2\sqrt{a^3b^3}\geqslant 4\sqrt{2}$，

当且仅当 $a=b=\sqrt{2}$ 时等号成立.

故 $a^3+b^3$ 的最小值为 $4\sqrt{2}$.

(2)由(1)知，$2a+3b\geqslant 2\sqrt{6ab}\geqslant 4\sqrt{3}$，

由于 $4\sqrt{3}>6$，从而不存在 $a,b$，使得 $2a+3b=6$.



关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

18. **解**：(1) $f(x)=|x-2|+|2x+4|=\begin{cases}-3x-2, x<-2,\\ x+6, -2\leqslant x\leqslant 2,\\ 3x+2, x>2,\end{cases}$

可得当 $x<-2$ 时，$-3x-2\geqslant 3x+4$，即 $-2\geqslant 4$，所以无解；

当 $-2\leqslant x\leqslant 2$ 时，$x+6\geqslant -3x+4$，得 $x\geqslant -\frac{1}{2}$，可得 $-\frac{1}{2}\leqslant x\leqslant 2$；

当 $x>2$ 时，$3x+2\geqslant -3x+4$，得 $x\geqslant\frac{1}{3}$，可得 $x>2$.

∴不等式的解集为 $\left\{x\middle| x\geqslant -\frac{1}{2}\right\}$.

(2)根据函数 $f(x)=\begin{cases}-3x-2, x<-2,\\ x+6, -2\leqslant x\leqslant 2,\\ 3x+2, x>2,\end{cases}$

可知当 $x=-2$ 时，函数取得最小值 $f(-2)=4$，可知 $a=4$，

∵$m+n=4, m>0, n>0$，

$\therefore \frac{1}{m}+\frac{1}{n}=\frac{1}{4}(m+n)\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{n}\right)$

$=\frac{1}{4}\left(1+1+\frac{n}{m}+\frac{m}{n}\right)\geqslant\frac{1}{4}(2+2)=1.$

当且仅当 $\frac{n}{m}=\frac{m}{n}$，即 $m=n=2$ 时，取“=”.

∴$\frac{1}{m}+\frac{1}{n}$ 的最小值为 1.

19. **解**：(1)∵$x, y, z\in(0,+\infty)$，

$\therefore x+y+z\geqslant 3\sqrt[3]{xyz}>0$，

$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\geqslant\frac{3}{\sqrt[3]{xyz}}>0$，

$\therefore (x+y+z)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)\geqslant 9.$

又∵$x+y+z=3$，∴$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\geqslant 3.$

当且仅当 $x=y=z=1$ 时，$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}$ 取得最小值 3.

(2)证明：$x^2+y^2+z^2=$

$\frac{x^2+y^2+z^2+(x^2+y^2)+(y^2+z^2)+(z^2+x^2)}{3}\geqslant$

$\frac{x^2+y^2+z^2+2(xy+yz+zx)}{3}=\frac{(x+y+z)^2}{3}=\frac{3^2}{3}=3.$

又 $x^2+y^2+z^2-9=x^2+y^2+z^2-(x+y+z)^2=-2(xy+yz+zx)<0$，∴$x^2+y^2+z^2<9$.

∴$3\leqslant x^2+y^2+z^2<9$.

20. **解**：(1) $f(x)\leqslant 9$ 可化为 $|2x-4|+|x+1|\leqslant 9$，

故 $\begin{cases}x>2,\\ 3x-3\leqslant 9\end{cases}$ 或 $\begin{cases}-1\leqslant x\leqslant 2,\\ 5-x\leqslant 9\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x<-1,\\ -3x+3\leqslant 9.\end{cases}$

即 $2<x\leqslant 4$ 或 $-1\leqslant x\leqslant 2$ 或 $-2\leqslant x<-1$，

所以不等式的解集为 $[-2,4]$.

(2)易知 $B=(0,3)$，所以 $B\subseteq A$，又 $|2x-4|+|x+1|<2x+a$ 在 $x\in(0,3)$ 上恒成立，

$\Rightarrow |2x-4|<x+a-1$ 在 $x\in(0,3)$ 上恒成立，

$\Rightarrow -x-a+1<2x-4<x+a-1$ 在 $x\in(0,3)$ 上恒成立，

故 $\begin{cases}a>x-3 \text{ 在 } x\in(0,3) \text{ 上恒成立},\\ a>-3x+5 \text{ 在 } x\in(0,3) \text{ 上恒成立}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a\geqslant 0,\\ a\geqslant 5\end{cases}\Rightarrow a\geqslant 5.$

21. **解**：(1) $f(x)=\begin{cases}3x-3, x\geqslant 1,\\ 1-x, x<1.\end{cases}$

当 $x\geqslant 1$ 时，则 $f(x)=3x-3\leqslant 1$，得 $x\leqslant\frac{4}{3}$，∴$1\leqslant x\leqslant\frac{4}{3}$；

当 $x<1$ 时，由 $f(x)=1-x\leqslant 1$，得 $x\geqslant 0$，∴$0\leqslant x<1$.

∴$f(x)\leqslant 1$ 的解集 $M=\left\{x\middle| 0\leqslant x\leqslant\frac{4}{3}\right\}$.

(2)证明：由 $g(x)=16x^2-8x+1\leqslant 4$，

得 $16\left(x-\frac{1}{4}\right)^2\leqslant 4$，

∴$\left|x-\frac{1}{4}\right|\leqslant\frac{1}{2}$，∴$-\frac{1}{4}\leqslant x\leqslant\frac{3}{4}$.

即 $N=\left\{x\middle| -\frac{1}{4}\leqslant x\leqslant\frac{3}{4}\right\}$.

∴$M\cap N=\left\{x\middle| 0\leqslant x\leqslant\frac{3}{4}\right\}$，

∴当 $x\in M\cap N$ 时，$f(x)=1-x$.

∴$x^2f(x)+x[f(x)]^2=xf(x)[x+f(x)]=xf(x)=x(1-x)=\frac{1}{4}-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2\leqslant\frac{1}{4}$.

22. **解**：(1)1,3,5,6.(答案不唯一)

(2)证明：设长度为 $q$，末项为 $a_{n_0}$ 的一个递增子列为 $a_{r_1}$，$a_{r_2}$，…，$a_{r_{q-1}}$，$a_{n_0}$，

由 $p<q$，得 $a_{r_p}\leqslant a_{r_{q-1}}<a_{n_0}$

因为 $\{a_n\}$ 的长度为 $p$ 的递增子列末项的最小值为 $a_{m_0}$，

又 $a_{r_1}, a_{r_2}, \cdots, a_{r_p}$ 是 $\{a_n\}$ 的长度为 $p$ 的递增子列，

所以 $a_{m_0}\leqslant a_{r_p}$，

所以 $a_{m_0}\leqslant a_{n_0}$.

(3)满足题意的一个数列的通项公式可以是

$a_n=\begin{cases}n-1, n \text{ 为偶数},\\ n+1, n \text{ 为奇数},\end{cases}$ 即 $a_n=2,1,4,3,6,5,8,7,\cdots,$

下列说明此数列满足题意.

显然数列 $\{a_n\}$ 为无穷数列，且各项均为正整数，任意两项均不相等，

长度为 $s$ 的递增子列末项的最小值为 $2s-1$.

下面用数学归纳法证明长度 $s$ 末项为 $2s-1$ 的递增子列恰有 $2^{s-1}$ 个($s=1,2,\cdots$)：

①$n=1$ 时，命题显然成立；

②假设当 $n=k$ 时命题成立，即长度为 $k$，末项为 $2k-1$ 的递增子列恰有 $2^{k-1}$ 个.

那么，当 $n=k+1$ 时，对 $n=k$ 时得到的每一个子列 $a_{s_1}, a_{s_2}, \cdots, a_{s_{k-1}}, 2k-1$，可构造：$a_{s_1}, a_{s_2}, \cdots, a_{s_{k-1}}, 2k-1, 2(k+1)-1$ 和 $a_{s_1}, a_{s_2}, \cdots, a_{s_{k-1}}, 2k, 2(k+1)-1$ 两个满足题意的递增子列.

则长度为 $k+1$，末项为 $2k+1$ 的递增子列恰有 $2\times 2^{k-1}=2^k=2^{(k+1)-1}$ 个.

综合①②，数列 $a_n=\begin{cases}n-1, n \text{ 为偶数},\\ n+1, n \text{ 为奇数},\end{cases}$ 即 $a_n=2,1,4,3,6,5,8,7,\cdots,$ 是一个满足题意的数列的通项公式.



关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

责任编辑　赵黎黎　刘一苇
美术编辑　李　欣
封面设计　欣　羽

# 45 分钟
# 课时作业与单元测试

45FENZHONG KESHIZUOYEYUDANYUANCESHI SHUXUE

## 丛书科目

语文　数学　英语　物理　化学　生物　历史　地理　思想政治

同学们，你想了解丛书的更多信息吗？详情请登录 http://www.dfjc100.com

※ 各科配有教师用书及教学课件光盘 (word 文档可自主编辑)，英语配有原声磁带 / MP3 光盘。

左手骄子之路练习题，右手阿凡题答疑

扫码下载APP

拍照搜题，秒回解析，火箭速度提升学习效率

随时随地老师在线答疑，看得懂，学得会，听得见

积累错题本，问题不过夜，养成学习好习惯

手机扫一扫
获取配套学习资源

ISBN 978-7-202-12300-3

定价：29.00 元

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料