东方杰创®
DONGFANG JIECHUANG
让 学习更快乐，人生更精彩

骄子之路®
the Road to Pride
主　编：邓保沧

45分钟

课时作业与单元测试

活页
可拆开使用

教辅资料站

电子教辅　试卷练习
知识总结　备课资源

扫码关注获取更多学习资料

提升＝基础＋能力＋方法
课时作业　基础自测·知能提升
阶段检测　梯度练习·评估达标
答案与解析　全解全析·点拨精准

数学

必修4　RJ·B

河北人民出版社

东方杰创®
DONGFANG JIECHUANG
让 学习更快乐，人生更精彩

骄子之路®
the Road to Pride
主　编：邓保沧

45分钟 课时作业与单元测试

活页
可拆开使用

提升＝基础＋能力＋方法
课时作业　基础自测·知能提升
阶段检测　梯度练习·评估达标
答案与解析　全解全析·点拨精准

数学

必修4　RJ·B

微信公众号
教辅资料站

河北人民出版社
石家庄

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

图书在版编目（CIP）数据

45分钟课时作业与单元测试：B版．数学．4 ：必修／邓保沧主编．－石家庄：河北人民出版社，2013.7（2019.6重印）
ISBN 978-7-202-08074-0

Ⅰ．①4… Ⅱ．①邓… Ⅲ．①中学数学课－高中－习题集
Ⅳ．①G634

中国版本图书馆CIP数据核字（2013）第194836号

编　委：李　雅　李　越　张瑞霞
天高云　蒋　敏　金剑飞

书　名　45分钟课时作业与单元测试　数学　必修4　B
主　编　邓保沧

责任编辑　李　莉　陈小彦　刘晓冬
美术编辑　李　欣
封面设计　欣　羽

出版发行　河北人民出版社（石家庄市友谊北大街330号）
印　刷　河北伦洋印业有限公司
开　本　880毫米×1230毫米　1/16
印　张　8
字　数　256 000
版　次　2013年7月第1版　2019年6月第7次印刷
书　号　ISBN 978-7-202-08074-0
定　价　38.00元

版权所有　翻印必究

微信公众号
教辅资料站

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料



目录 CONTENTS

第一部分　课时作业

第一章　基本初等函数(Ⅱ) …… 1

1.1　任意角的概念与弧度制 …… 1

1.1.1　角的概念的推广 …… 1

1.1.2　弧度制和弧度制与角度制的换算 …… 3

1.2　任意角的三角函数 …… 5

1.2.1　三角函数的定义 …… 5

1.2.2　单位圆与三角函数线 …… 7

1.2.3　同角三角函数的基本关系式 …… 9

1.2.4　诱导公式(一) …… 11

1.2.4　诱导公式(二) …… 13

1.3　三角函数的图象与性质 …… 15

1.3.1　正弦函数的图象与性质(一) …… 15

1.3.1　正弦函数的图象与性质(二) …… 17

1.3.1　正弦函数的图象与性质(三) …… 19

1.3.2　余弦函数、正切函数的图象与性质(一) …… 21

1.3.2　余弦函数、正切函数的图象与性质(二) …… 23

1.3.3　已知三角函数值求角 …… 25

章末检测 …… 27

第二章　平面向量 …… 29

2.1　向量的线性运算 …… 29

2.1.1　向量的概念 …… 29

2.1.2　向量的加法 …… 31

2.1.3　向量的减法 …… 33

2.1.4　数乘向量 …… 35

2.1.5　向量共线的条件与轴上向量坐标运算 …… 37

2.2　向量的分解与向量的坐标运算 …… 39

2.2.1　平面向量基本定理 …… 39

2.2.2　向量的正交分解与向量的直角坐标运算 …… 41

2.2.3　用平面向量坐标表示向量共线条件 …… 43

2.3　平面向量的数量积 …… 45

2.3.1　向量数量积的物理背景与定义 …… 45

2.3.2　向量数量积的运算律 …… 47

2.3.3　向量数量积的坐标运算与度量公式 …… 49

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料



目录 CONTENTS

2.4 向量的应用 …… 51

2.4.1 向量在几何中的应用 …… 51

2.4.2 向量在物理中的应用 …… 51

章末检测 …… 53

第三章 三角恒等变换 …… 55

3.1 和角公式 …… 55

3.1.1 两角和与差的余弦 …… 55

3.1.2 两角和与差的正弦 …… 57

3.1.3 两角和与差的正切 …… 59

3.2 倍角公式和半角公式 …… 61

3.2.1 倍角公式 …… 61

3.2.2 半角的正弦、余弦和正切 …… 63

3.3 三角函数的积化和差与和差化积 …… 65

章末检测 …… 67

第二部分 阶段检测

阶段测试一(第一章 基本初等函数(Ⅱ)) …… 69

阶段测试二(第二章 平面向量) …… 73

阶段测试三(第三章 三角恒等变换) …… 77

阶段测试四(本册综合测试) …… 81

第三部分 答案与解析

答案与解析 …… 86～124

提示:全书包括课时作业、阶段检测、答案与解析三部分,共计 128 页。

(根据教师教学情况不同,课时作业部分可在书中作答,也可撕下使用。)

微信公众号 教辅资料站

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

学习札记

第一章　基本初等函数(Ⅱ)

1.1　任意角的概念与弧度制

1.1.1　角的概念的推广

学习目标

1. 了解角的概念的推广及其实际意义；
2. 掌握象限角的概念；
3. 掌握终边相同的角的表示方法.

1 基础知识点对点

知识点一　角的概念

1. 下列说法正确的是　(　)

A. 小于 90°的角是锐角

B. 钝角是第二象限的角

C. 第二象限的角大于第一象限的角

D. 若角 α 与角 β 的终边相同，那么 $\alpha=\beta$

2. 若 α 为锐角，那么 2α 是　(　)

A. 钝角

B. 锐角

C. 小于 180°的正角

D. 第一或第二象限角

知识点二　终边相同的角

3. 在 0°～360°之间，与角 −150°终边相同的是　(　)

A. 150°　　B. −30°

C. 30°　　D. 210°

4. 若角 α 和角 β 的终边关于 y 轴对称，则必有　(　)

A. $\alpha+\beta=90°$

B. $\alpha+\beta=k\times 90°+360°(k\in\mathbf{Z})$

C. $\alpha+\beta=k\times 360°(k\in\mathbf{Z})$

D. $\alpha+\beta=(2k+1)\times 180°(k\in\mathbf{Z})$

知识点三　象限角

5. 如果角 α 的终边上有一个点 $P(0,-3)$，那么 α　(　)

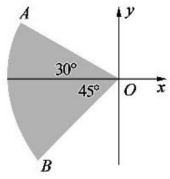
A. 是第三象限角

B. 是第四象限角

C. 是第三或第四象限角

D. 不是任何象限角

6. 如图，终边落在阴影部分(不包括边界)的角的集合是(　)



A. $\{\alpha\mid k\cdot 360°+30°<\alpha<k\cdot 360°+45°,k\in\mathbf{Z}\}$

B. $\{\alpha\mid k\cdot 180°+150°<\alpha<k\cdot 180°+225°,k\in\mathbf{Z}\}$

C. $\{\alpha\mid k\cdot 360°+150°<\alpha<k\cdot 360°+225°,k\in\mathbf{Z}\}$

D. $\{\alpha\mid k\cdot 360°+30°<\alpha<k\cdot 180°+45°,k\in\mathbf{Z}\}$

2 课后拔高提能练

一、选择题

1. 设 $A=\{$小于 90°的角$\}$，$B=\{$第一象限角$\}$，则 $A\cap B$ 等于　(　)

A. $\{$锐角$\}$

B. $\{$小于 90°的角$\}$

C. $\{$第一象限角$\}$

D. $\{\alpha\mid k\cdot 360°<\alpha<k\cdot 360°+90°,k\in\mathbf{Z}$，且 $k\leqslant 0\}$

2. 时针经过 1 小时，时针转动的角的大小为　(　)

A. 30°　　B. 60°

C. −30°　　D. −60°

3. 若 α 是第一象限角，则下列各角中属于第四象限角的是　(　)

A. 90°−α　　B. 90°+α

C. 360°−α　　D. 180°+α

4. 终边在直线 $y=-\sqrt{3}x$ 上的角的集合是　(　)

A. $\{\alpha\mid\alpha=k\cdot 360°+120°,k\in\mathbf{Z}\}$

B. $\{\alpha\mid\alpha=k\cdot 360°-60°,k\in\mathbf{Z}\}$

C. $\{\alpha\mid\alpha=k\cdot 180°+120°,k\in\mathbf{Z}\}$

D. $\{\alpha\mid\alpha=k\cdot 180°-120°,k\in\mathbf{Z}\}$

5. 下列四个命题中正确的是　(　)

A. α 是第一象限的角，则 $\frac{\alpha}{2}$ 必为第一象限的角

B. $\alpha+k\cdot 360°(k\in\mathbf{Z})$ 表示与 α 终边相同的角，则 α 是锐角

C. 终边相同的角不一定相等

D. 2α 与 α 的终边不可能相同

微信公众号 教辅资料站

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

学习札记

6. 在(−360°,0°)内与角 1 250°终边相同的角是（　　）

A. 170°　　B. −170°

C. 190°　　D. −190°

二、填空题

7. 若锐角 α 的终边与 7α 的终边相同，则 $\alpha=$_____.

8. 若 β 的终边与 60°角的终边相同，则在[0°,360°)内，终边与 $\frac{\beta}{3}$ 角的终边相同的角为_____.

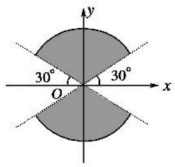
9. 以下说法中正确的有_____.

①−75°是第一象限角；②228°是第三象限角；

③670°是第二象限角；④−330°是第一象限角.

三、解答题

10. 已知角 α 的终边在右图中阴影部分所表示的范围内(不包括边界)，写出角 α 的集合.



11. 写出与下列各角的终边相同的角的集合 S，并把 S 中满足不等式 $-720°\leqslant\beta<360°$ 的元素 β 写出来.

(1)1 303°18′；(2)−225°.

12. 已知 $A=\{\alpha\mid k\cdot 360°<\alpha<120°+k\cdot 360°,k\in\mathbf{Z}\}$，$B=\{\beta\mid -45°+k\cdot 360°<\beta<45°+k\cdot 360°,k\in\mathbf{Z}\}$，求 $A\cap B$；$A\cup B$.

微信公众号
教辅资料站

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

学习札记

1.1.2　弧度制和弧度制与角度制的换算

学习目标

1. 了解弧度制的概念；
2. 能进行弧度与角度的互化；
3. 掌握弧度数的计算公式及应用.

1 基础知识点对点

知识点一　弧度与角度的互化

1. $-225°$化为弧度为　(　)

A. $\frac{3\pi}{4}$　　B. $-\frac{7\pi}{4}$

C. $-\frac{5\pi}{4}$　　D. $-\frac{3\pi}{4}$

2. 将下列角度与弧度进行互化.

(1)$\frac{7\pi}{12}$=_____;(2)$-690°$=_____;

(3)$\frac{15\pi}{4}$=_____;(4)$-1\,080°$=_____.

知识点二　用弧度制表示角

3. 始边与x轴正半轴重合,终边所在直线与y轴夹角为$\frac{\pi}{6}$的角的集合是　(　)

A. $\left\{\alpha\left|\alpha=k\pi\pm\frac{\pi}{6},k\in\mathbf{Z}\right.\right\}$

B. $\left\{\alpha\left|\alpha=k\pi\pm\frac{\pi}{3},k\in\mathbf{Z}\right.\right\}$

C. $\left\{\alpha\left|\alpha=2k\pi+\frac{\pi}{2}\pm\frac{\pi}{6},k\in\mathbf{Z}\right.\right\}$

D. $\left\{\alpha\left|\alpha=2k\pi\pm\frac{\pi}{3},k\in\mathbf{Z}\right.\right\}$

4. 终边在直线$y=-x$上角的集合可以表示为_____.

知识点三　与弧长、扇形面积有关的问题

5. 已知扇形的圆心角的弧度数为2,其弧长也是2,则该扇形的面积为_____.

6. 设扇形的周长为8 cm,面积为4 cm^2,则扇形的圆心角的弧度数是_____.

2 课后拔高提能练

一、选择题

1. 设$\alpha=\frac{2\pi}{3}$,则α的终边所在的象限是　(　)

A. 第一象限　　B. 第二象限

C. 第三象限　　D. 第四象限

2. 把$56°15'$化为弧度是　(　)

A. $\frac{5}{8}\pi$　　B. $\frac{5}{4}\pi$

C. $\frac{5}{6}\pi$　　D. $\frac{5}{16}\pi$

3. 下列各命题中,假命题是　(　)

A. "度"与"弧度"是度量角的两种不同的度量单位

B. 一度的角是周角的$\frac{1}{360}$,一弧度的角是周角的$\frac{1}{2\pi}$

C. 根据弧度的定义,$180°$一定等于π弧度

D. 不论是用角度制还是用弧度制度量角,它们均与圆的半径长短有关

4. 圆的一条弦的长度恰好等于圆的半径,则这条弦所对的圆心角的弧度数为　(　)

A. $\frac{\pi}{3}$　　B. $\frac{\pi}{6}$

C. 1　　D. π

5. 下列转化结果错误的是　(　)

A. $60°$化成弧度是$\frac{\pi}{3}$

B. $-\frac{10\pi}{3}$化成度是$-600°$

C. $-150°$化成弧度是$-\frac{7\pi}{6}$

D. $\frac{\pi}{12}$化成度是$15°$

6. 扇形周长为6 cm,面积为2 cm^2,则其圆心角的弧度数是　(　)

A. 1或4　　B. 1或2

C. 2或4　　D. 1或5

二、填空题

7. 下列各角中,终边相同的是_____.

①$\frac{3\pi}{2}$和$\frac{15\pi}{2}$;②$\frac{\pi}{5}$和$\frac{26\pi}{5}$;③$-\frac{7\pi}{8}$和$\frac{25\pi}{8}$;④$\frac{20\pi}{3}$和$-\frac{17\pi}{3}$.

8. 把$-1\,125°$化为$2k\pi+\alpha(k\in\mathbf{Z},0\leqslant\alpha<2\pi)$的形式是_____.

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

学习札记

9. 圆的半径变为原来的$\frac{1}{2}$，而弧长不变，该弧所对的圆心角是原来的_____倍.

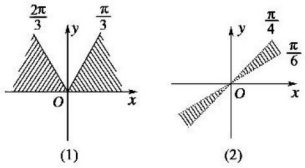
三、解答题

10. 将下列角度与弧度进行互化：

(1)20°；(2)−15°；(3)$\frac{17\pi}{12}$；(4)$-\frac{11}{5}\pi$.

11. 已知扇形的周长为 30 cm，当它的半径和圆心角各取什么值时，才能使扇形的面积最大？最大面积是多少？

12. 如下图，用弧度制表示终边落在下列阴影部分的角(虚线表示不包括边界).



微信公众号
教辅资料站

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

学习札记

1.2　任意角的三角函数

1.2.1　三角函数的定义

学习目标

1. 理解任意角的余弦、正弦和正切的定义，了解任意角的余切、正割、余割的定义；
2. 掌握三角函数值在各象限的符号.

1 基础知识点对点

知识点一　用三角函数定义求值

1. 已知角 θ 的终边在直线 $y=\sqrt{3}x$ 上，则 $\tan\theta$ 的值为　(　)

A. $-\frac{\sqrt{3}}{3}$　　B. $-\sqrt{3}$

C. $\sqrt{3}$　　D. $\pm\frac{\sqrt{3}}{3}$

2. 若 $\sin\alpha=\frac{3}{5}$，$\cos\alpha=-\frac{4}{5}$，则在角 α 终边上的点是　(　)

A. $(-4,3)$　　B. $(3,-4)$

C. $(4,-3)$　　D. $(-3,4)$

知识点二　三角函数值的符号问题

3. 如果点 $P(\cos\theta,\tan\theta)$ 位于第三象限，则 θ 是　(　)

A. 第一象限角　　B. 第二象限角

C. 第三象限角　　D. 第四象限角

4. 已知点 $P\left(\sin\frac{5\pi}{4},\cos\frac{3\pi}{4}\right)$ 落在角 θ 的终边上，且 $\theta\in[0,2\pi)$，则 θ 是第_____象限角.

知识点三　求函数的定义域

5. 函数 $y=\sqrt{\sin x}$ 的定义域为_____.

2 课后拔高提能练

一、选择题

1. 已知点 $P(4,-3)$ 是角 α 终边上一点，则下列三角函数值中正确的是　(　)

A. $\tan\alpha=-\frac{4}{3}$　　B. $\tan\alpha=-\frac{3}{4}$

C. $\sin\alpha=-\frac{4}{5}$　　D. $\cos\alpha=\frac{3}{5}$

2. 已知点 $P(-\sqrt{3},y)$ 为角 β 终边上一点，且 $\sin\beta=\frac{\sqrt{13}}{13}$，则 y 的值为　(　)

A. $\pm\frac{1}{2}$　　B. $\frac{1}{2}$

C. $-\frac{1}{2}$　　D. ±2

3. 点 P 从 $(-1,0)$ 出发，沿单位圆顺时针运动 $\frac{2}{3}\pi$ 弧长达到 Q 点，则 Q 点的坐标为　(　)

A. $\left(-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$　　B. $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2},-\frac{1}{2}\right)$

C. $\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$　　D. $\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2}\right)$

4. 已知下列四个命题：

①角 α 终边上一点 $P(x,y)$，则 $\sin\alpha$ 的值随 y 的增大而增大；

②若 α 为第一或第二象限角，则 $\sin\alpha>0$；

③若 $\sin\alpha=\sin\beta$，则 α 与 β 的终边一定相同；

④若 $\cos A<0$，则 $\triangle ABC$ 为钝角三角形.

其中正确的是　(　)

A. ①④　　B. ②④

C. ①②　　D. ①②④

5. 已知 $\alpha\in(0,2\pi)$，且 $\sin\alpha<0$，$\cos\alpha>0$，则角 α 的取值范围是　(　)

A. $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$　　B. $\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$

C. $\left(\pi,\frac{3\pi}{2}\right)$　　D. $\left(\frac{3\pi}{2},2\pi\right)$

6. 已知角 α 的终边在射线 $y=3x(x\geqslant0)$ 上，则 $2\sin\alpha+\cos\alpha$ 的值为　(　)

A. $\frac{2\sqrt{10}}{5}$　　B. $\frac{7\sqrt{10}}{5}$

C. $\frac{7\sqrt{10}}{10}$　　D. $\frac{\sqrt{10}}{2}$

二、填空题

7. $5\sin90^\circ+2\cos0^\circ-3\sin270^\circ+10\cos180^\circ=$_____.

8. 若角 α 的终边经过点 $P(1,-2)$，则 $\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$ 的值为_____.

9. 函数 $y=\frac{\tan x}{1+\sin x}$ 的定义域为_____.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

学习札记

三、解答题

10.(1)已知角α的终边经过点$P(4,-3)$,求$2\sin\alpha+\cos\alpha$的值;

(2)已知角α的终边上一点$P(-\sqrt{3},m)(m\neq0)$,且$\sin\alpha=\frac{\sqrt{2}m}{4}$,求$\cos\alpha$及$\tan\alpha$.

11.已知角α的终边上的点P和点$A(a,b)$关于x轴对称,β的终边上点Q与点A关于直线$y=x$对称,求$\sin\alpha+\cos\beta$的值.

12.已知角α的顶点在原点,始边在x轴的正半轴上.若角α的终边过点$P(-\sqrt{3},y)$,且$\sin\alpha=\frac{\sqrt{3}}{4}y(y\neq0)$,判断角$\alpha$是第几象限角,并求$\cos\alpha$和$\tan\alpha$的值.

微信公众号
教辅资料站

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

学习札记

1.2.2　单位圆与三角函数线

学习目标

1. 了解三角函数线的意义；
2. 会用三角函数线表示一个角的正弦、余弦和正切.

1 基础知识点对点

知识点一　三角函数线的概念

1. 下列说法中正确的是　(　)

A. 任何一个角都能分别作出正弦线、余弦线、正切线

B. α 一定时，单位圆中的正弦线一定

C. α 和 $\pi+\alpha$ 具有相同的正弦线

D. 角 α 的终边在 x 轴上时，角 α 的余弦线、正切线分别变成一个点

知识点二　利用三角函数线比较大小

2. 设 $\frac{\pi}{4}<\alpha<\frac{\pi}{2}$，$\sin\alpha=a$，$\cos\alpha=b$，$\tan\alpha=c$，则 a，b，c 的大小关系为　(　)

A. $a<b<c$　　B. $a>b>c$

C. $b>a>c$　　D. $b<a<c$

知识点三　利用三角函数线解不等式

3. 在 $[0,2\pi]$ 上满足 $\sin x\geqslant\frac{1}{2}$ 的 x 的取值范围是(　)

A. $\left[0,\frac{\pi}{6}\right]$　　B. $\left[\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6}\right]$

C. $\left[\frac{\pi}{6},\frac{2\pi}{3}\right]$　　D. $\left[\frac{5\pi}{6},\pi\right]$

2 课后拔高提能练

一、选择题

1. 在 $(0,2\pi)$ 内，使 $\sin x>\cos x$ 成立的 x 的取值范围是　(　)

A. $\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right)\cup\left(\pi,\frac{5}{4}\pi\right)$

B. $\left(\frac{\pi}{4},\pi\right)$

C. $\left(\frac{\pi}{4},\frac{5}{4}\pi\right)$

D. $\left(\frac{\pi}{4},\pi\right)\cup\left(\frac{5}{4}\pi,\frac{3}{2}\pi\right)$

2. 若角 α 的余弦线是单位长度的有向线段，那么角 α 的终边在　(　)

A. y 轴上　　B. x 轴上

C. 直线 $y=x$ 上　　D. 直线 $y=-x$ 上

3. 下列关系中正确的是　(　)

A. $\sin10^\circ<\cos10^\circ<\sin15^\circ$

B. $\sin10^\circ<\sin15^\circ<\cos10^\circ$

C. $\cos10^\circ<\sin15^\circ<\sin10^\circ$

D. $\cos10^\circ<\sin10^\circ<\sin15^\circ$

4. 有三个命题：① $\frac{\pi}{6}$ 和 $\frac{5\pi}{6}$ 的正弦线相等；② $\frac{\pi}{3}$ 和 $\frac{4\pi}{3}$ 的正切线相等；③ $\frac{\pi}{4}$ 和 $\frac{5\pi}{4}$ 的余弦线相等. 其中正确的说法有　(　)

A. 1 个　　B. 2 个

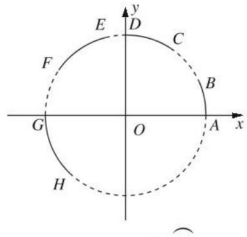
C. 3 个　　D. 0 个

5. 若 $-\frac{\pi}{8}<\theta<0$，则 $\sin\theta$，$\cos\theta$，$\tan\theta$ 的大小关系是　(　)

A. $\sin\theta<\cos\theta<\tan\theta$　　B. $\sin\theta<\tan\theta<\cos\theta$

C. $\tan\theta<\sin\theta<\cos\theta$　　D. 以上都不是

6. **(2018·北京卷)** 在平面坐标系中，$\overset{\frown}{AB}$，$\overset{\frown}{CD}$，$\overset{\frown}{EF}$，$\overset{\frown}{GH}$ 是圆 $x^2+y^2=1$ 上的四段弧(如图)，点 P 在其中一段上，角 α 以 Ox 为始边，OP 为终边，若 $\tan\alpha<\cos\alpha<\sin\alpha$，则 P 所在的圆弧是　(　)



A. $\overset{\frown}{AB}$　　B. $\overset{\frown}{CD}$

C. $\overset{\frown}{EF}$　　D. $\overset{\frown}{GH}$

二、填空题

7. 设 α，β 是第二象限角，若 $\sin\alpha>\sin\beta$，则 $\cos\alpha$ _____ (填“>”“<”“≥”或“≤”)$\cos\beta$.

8. $\sin\frac{2\pi}{5}$，$\cos\frac{6\pi}{5}$，$\tan\frac{7\pi}{5}$ 从小到大的顺序是_____.

9. 下列 4 个判断：

① $\alpha\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 时，$\sin\alpha+\cos\alpha>1$；

② $\alpha\in\left(0,\frac{\pi}{4}\right)$ 时，$\sin\alpha<\cos\alpha$；

③ $\alpha\in\left(\frac{5\pi}{4},\frac{3\pi}{2}\right)$ 时，$\sin\alpha>\cos\alpha$；

④ $\alpha\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$ 时，若 $\sin\alpha+\cos\alpha<0$，则 $|\sin\alpha|<|\cos\alpha|$.

其中判断正确的序号是_____(将正确的序号都填上).

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

学习札记

三、解答题

10. 利用单位圆中的三角函数线求同时满足 $\sin\alpha\leqslant\frac{\sqrt{3}}{2}$，$\cos\alpha\geqslant\frac{\sqrt{3}}{2}$的角 α 的取值范围.

11. 求下列函数的定义域.

(1) $y=\sqrt{4\cos x+2}$；

(2) $y=\lg(\tan x-1)$.

12. 已知 $\frac{\pi}{4}<x<\frac{\pi}{2}$，$a=2^{1-\sin x}$，$b=2^{\cos x}$，$c=2^{\tan x}$，试比较 a，b，c 的大小.

微信公众号
教辅资料站

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

学习札记

1.2.3　同角三角函数的基本关系式

学习目标

1. 理解同角三角函数的基本关系式；
2. 会用同角三角函数的基本关系式化简、求值和证明.

1 基础知识点对点

知识点一　利用同角三角函数关系求值

1. 已知 $\cos\alpha=\frac{4}{5}$，$\alpha\in\left(-\frac{\pi}{2},0\right)$，则 $\sin\alpha=$　(　)

A. $\frac{3}{5}$　　B. $-\frac{3}{5}$

C. $\pm\frac{3}{5}$　　D. 以上都不对

2. 已知 $\alpha\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$，$\tan\alpha=-\frac{3}{4}$，则 $\sin\alpha$ 为　(　)

A. $\frac{3}{5}$　　B. $-\frac{3}{5}$

C. $\frac{4}{5}$　　D. $-\frac{4}{5}$

知识点二　三角函数式的化简与证明

3. 化简 $\sqrt{1-\sin^2160^\circ}$ 的结果是　(　)

A. $\cos160^\circ$　　B. $-\cos160^\circ$

C. $\pm\cos160^\circ$　　D. $\pm|\cos160^\circ|$

4. 若角 $\alpha\in\left(-\pi,-\frac{\pi}{2}\right)$，则 $\sqrt{\frac{1+\sin\alpha}{1-\sin\alpha}}-\sqrt{\frac{1-\sin\alpha}{1+\sin\alpha}}=$　(　)

A. $-2\tan\alpha$　　B. $2\tan\alpha$

C. $-\tan\alpha$　　D. $\tan\alpha$

知识点三　给条件求值

5. 已知 $\tan\alpha=3$，则 $2\sin^2\alpha+4\sin\alpha\cos\alpha-9\cos^2\alpha$ 的值为　(　)

A. 3　　B. $\frac{21}{10}$

C. $\frac{1}{3}$　　D. $\frac{1}{30}$

6. 若 $\sin x+\cos x=\sqrt{2}$，则 $\sin^4x+\cos^4x$ 的值为_____.

2 课后拔高提能练

一、选择题

1. 已知 $\sin\alpha=-\frac{3}{5}$，$\alpha\in\left(\frac{3\pi}{2},2\pi\right)$，那么 $\tan\alpha$ 等于　(　)

A. $-\frac{4}{3}$　　B. $\frac{4}{3}$

C. $-\frac{3}{4}$　　D. $\frac{3}{4}$

2. 已知 $\sin\alpha=\frac{\sqrt{5}}{5}$，则 $\sin^4\alpha-\cos^4\alpha$ 的值为　(　)

A. $-\frac{3}{5}$　　B. $-\frac{1}{5}$

C. $\frac{1}{5}$　　D. $\frac{3}{5}$

3. 已知 $\tan\alpha=-\frac{1}{2}$，则 $\frac{2\sin\alpha\cos\alpha}{\sin^2\alpha-\cos^2\alpha}$ 的值是　(　)

A. $\frac{4}{3}$　　B. 3

C. $-\frac{4}{3}$　　D. -3

4. 已知 $5\sin\alpha+2\cos\alpha=0$，则 $\sqrt{(1-\sin^2\alpha)(1-\cos^2\alpha)}$ 的值是　(　)

A. $\frac{10}{29}$　　B. $\frac{\sqrt{10}}{29}$

C. $\frac{20}{29}$　　D. $\pm\frac{10}{29}$

5. 若 $\tan\alpha=-2$，则 $\frac{1}{4}\sin^2\alpha+\frac{2}{5}\cos^2\alpha$ 的值等于(　)

A. $\frac{17}{25}$　　B. $\frac{7}{25}$

C. $\frac{25}{7}$　　D. $\frac{25}{17}$

6. 已知 $\frac{1+\sin x}{\cos x}=-\frac{1}{2}$，那么 $\frac{\cos x}{\sin x-1}$ 的值是　(　)

A. $\frac{1}{2}$　　B. $-\frac{1}{2}$

C. 2　　D. -2

微信公众号 教辅资料站

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

学习札记

二、填空题

7. 已知 $\tan\alpha=2$，则 $\cos^2\alpha=$_____.

8. A 为三角形一内角，若 $\sin A+\cos A=\frac{1}{5}$，$\cos A-\sin A=$_____.

9. 化简 $\sqrt{1-2\sin 4\cos 4}=$_____.

三、解答题

10. 已知角 $\alpha\in(0,\pi)$ 且 $\sin\alpha+\cos\alpha=-\frac{1}{5}$，求 $\sin\alpha$，$\cos\alpha$，$\tan\alpha$ 的值.

11. 已知 $\cos\alpha+\cos^2\alpha=1$，求 $\sin^2\alpha+\sin^6\alpha+\sin^8\alpha$ 的值.

12. 已知 $\sin\theta$，$\cos\theta$ 是关于 x 的方程 $x^2-ax+a=0$ 的两个根.

(1)求 $\sin^3\theta+\cos^3\theta$ 的值；

(2)求 $\tan\theta+\frac{1}{\tan\theta}$ 的值.

微信公众号
教辅资料站

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

学习札记

1.2.4　诱导公式(一)

学习目标

1. 掌握公式(一)(二)(三),能正确运用这些公式求任意角的三角函数值;
2. 能利用诱导公式进行简单的化简、求值.

1 基础知识点对点

知识点一　角 α 与 $\alpha+k\cdot 2\pi(k\in\mathbf{Z})$ 的三角函数间的关系

1. 化简求值:

(1)$\sin\frac{17\pi}{4}$;(2)$\cos\frac{37}{6}\pi$;(3)$\tan\left(-\frac{15\pi}{4}\right)$.

知识点二　角 α 与 $-\alpha$ 的三角函数间的关系

2. 已知 $\sin\left(\frac{5\pi}{6}-\alpha\right)=\frac{1}{3}$,则 $\sin\left(\alpha+\frac{7\pi}{6}\right)=$_____.

3. 已知 $\tan(-\alpha)=\frac{3}{4}$,$\alpha$ 是第二象限角,则 $\sin\alpha=$_____.

知识点三　角 α 与 $\alpha+(2k+1)\pi(k\in\mathbf{Z})$ 的三角函数间的关系

4. 若 α 为第四象限角,则化简 $\sqrt{1-2\sin\alpha\cos\alpha}+\cos\alpha\cdot\tan(\pi+\alpha)$ 的结果是 (　　)

A. $2\cos\alpha-\sin\alpha$　　B. $\cos\alpha-2\sin\alpha$

C. $\cos\alpha$　　D. $\sin\alpha$

5. 已知 $\sin(\pi+\alpha)=\frac{3}{5}$ 且 α 是第三象限角,则 $\cos(\alpha-2\pi)$ 的值是 (　　)

A. $-\frac{4}{5}$　　B. $\frac{4}{5}$

C. $\pm\frac{4}{5}$　　D. $\frac{3}{5}$

2 课后拔高提能练

一、选择题

1. 已知 α 为锐角,且 $\tan(\pi-\alpha)+3=0$,则 $\sin\alpha$ 的值是 (　　)

A. $\frac{1}{3}$　　B. $\frac{3\sqrt{10}}{10}$

C. $\frac{3\sqrt{7}}{7}$　　D. $\frac{3\sqrt{5}}{5}$

2. 若 $\sin(-\alpha)=\frac{2}{3}$,且 $\alpha\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$,则 $\cos(\pi+\alpha)$ 的值为 (　　)

A. $\frac{\sqrt{5}}{3}$　　B. $-\frac{\sqrt{5}}{3}$

C. $\pm\frac{\sqrt{5}}{3}$　　D. 以上都不对

3. 设 A,B,C 是一个三角形的三个内角 $\left(C\neq\frac{\pi}{2}\right)$,则在

①$\sin(A+B)-\sin C$;

②$\cos(A+B)+\cos C$;

③$\tan(A+B)+\tan C$;

④$\cot(A+B)-\cot C$.

这四个式子中,值为常数的有 (　　)

A. 1 个　　B. 2 个

C. 3 个　　D. 4 个

4. 设 $\tan(5\pi+\alpha)=m$,则 $\frac{\sin(\alpha-3\pi)+\cos(\pi-\alpha)}{\sin(-\alpha)-\cos(\pi+\alpha)}$ 的值为 (　　)

A. $\frac{m+1}{m-1}$　　B. $\frac{m-1}{m+1}$

C. -1　　D. 1

5. 已知 $f(x)=\begin{cases}\sin\pi x(x<0),\\ f(x-1)-1(x>0),\end{cases}$ 则 $f\left(-\frac{11}{6}\right)+f\left(\frac{11}{6}\right)$ 的值为 (　　)

A. -1　　B. $-\sqrt{3}-2$

C. -2　　D. -3

6. 化简:$\frac{\tan(2\pi-\alpha)\cos(-4\pi-\alpha)\cos(6\pi-\alpha)}{\sin(\alpha-2\pi)\cos(\alpha-4\pi)}=$ (　　)

A. -1　　B. 1

C. 2　　D. -2

微信公众号 教辅资料站

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

学习札记

二、填空题

7. $\sin 750^\circ=$_____.

8. 已知 $\cos\left(\frac{\pi}{6}+\alpha\right)=\frac{\sqrt{3}}{3}$，则 $\cos\left(\frac{5\pi}{6}-\alpha\right)$ 的值为_____.

9. 设 $f(x)=a\sin(\pi x+\alpha)+b\cos(\pi x+\beta)$，其中 a,b,α,β 为非零常数，且 $f(2\ 016)=1$，则 $f(2\ 017)=$_____.

三、解答题

10. 已知 $\tan\alpha$，$\frac{1}{\tan\alpha}$ 是关于 x 的方程 $x^2-kx+k^2-3=0$ 的两实根，且 $3\pi<\alpha<\frac{7}{2}\pi$，求 $\cos(3\pi+\alpha)-\sin(\pi+\alpha)$ 的值.

11. 若 $a=\frac{\cot(4\pi+\alpha)\cdot\cos(\alpha+\pi)\cdot\sin^2(3\pi+\alpha)}{\tan(\pi+\alpha)\cdot\cos^3(-\alpha-\pi)}$，求 a^2+a+1 的值.

12. 已知 $f(\alpha)=\frac{\sin^2(\pi-\alpha)\cdot\cos(2\pi-\alpha)\cdot\tan(-\pi+\alpha)}{\sin(\pi+\alpha)\cdot\tan(-\alpha+3\pi)}$.

(1)化简 $f(\alpha)$；

(2)若 $f(\alpha)=\frac{1}{8}$，且 $\frac{\pi}{4}<\alpha<\frac{\pi}{2}$，求 $\cos\alpha-\sin\alpha$ 的值.

微信公众号
教辅资料站

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

学习札记

1.2.4　诱导公式(二)

学习目标

1. 掌握公式(四)(五),能正确运用这些公式求任意角的三角函数值;
2. 能熟练运用诱导公式进行化简、求值.

1 基础知识点对点

知识点一　角 α 与 $\alpha+\frac{\pi}{2}$ 的三角函数间的关系

1. $\sin(\pi-2)-\cos\left(\frac{\pi}{2}-2\right)=$ (　　)

A. 0　　B. -1

C. $2\sin 2$　　D. $-2\sin 2$

2. 已知 $\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=\frac{3}{5}$,且 $\alpha\in\left(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right)$,则 $\tan\alpha=$ (　　)

A. $\frac{4}{3}$　　B. $\frac{3}{4}$

C. $-\frac{3}{4}$　　D. $\pm\frac{3}{4}$

知识点二　利用诱导公式化简

3. 化简:

$$\frac{\sin(2\pi+\alpha)\cos(\pi+\alpha)\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\cos\left(\frac{7\pi}{2}-\alpha\right)}{\cos(\pi-\alpha)\sin(3\pi-\alpha)\sin(-\pi+\alpha)\sin\left(\frac{5\pi}{2}+\alpha\right)}.$$

4. 已知关于 α 的函数表达式为 $f(\alpha)=$

$$\frac{\sin(2\pi-\alpha)\cos(\pi+\alpha)\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)\cos\left(\frac{9\pi}{2}-\alpha\right)}{\cos(\pi-\alpha)\sin(3\pi-\alpha)\sin(-\alpha)\sin\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)}$$

(1)将 $f(\alpha)$ 化为最简形式;

(2)若 $f(\alpha)=2$,求 $\sin^2\alpha-\sin\alpha\cos\alpha-2\cos^2\alpha$ 的值.

知识点三　给条件求值

5. 已知角 α 终边上一点 $P(-4,3)$,求 $\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)\sin(-\pi-\alpha)}{\cos\left(\frac{11\pi}{2}-\alpha\right)\sin\left(\frac{9\pi}{2}+\alpha\right)}$ 的值.

2 课后拔高提能练

一、选择题

1. 已知点 $P\left(\sin(\pi+\theta),\sin\left(\frac{3\pi}{2}-\theta\right)\right)$ 在第三象限,则角 θ 所在的象限是 (　　)

A. 第一象限　　B. 第二象限

C. 第三象限　　D. 第四象限

2. 已知 $\cos(75^\circ+\alpha)=\frac{1}{3}$,且 $-180^\circ<\alpha<-90^\circ$,则 $\cos(15^\circ-\alpha)$ 的值为 (　　)

A. $-\frac{2\sqrt{2}}{3}$　　B. $\frac{2\sqrt{2}}{3}$

C. $-\frac{\sqrt{2}}{3}$　　D. $\frac{\sqrt{2}}{3}$

3. 已知 $\tan\theta=2$,则 $\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)-\cos(\pi-\theta)}{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)-\sin(\pi-\theta)}=$ (　　)

A. 2　　B. -2

C. 0　　D. $\frac{2}{3}$

微信公众号 教辅资料站

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

学习札记

4. 已知 $\cos\left(\frac{\pi}{6}-\alpha\right)=\frac{2}{3}$，则 $\sin\left(\alpha-\frac{2\pi}{3}\right)$ 等于（　　）

A. $\frac{2}{3}$　　B. $-\frac{2}{3}$

C. $\frac{1}{3}$　　D. $-\frac{1}{3}$

5. 在△ABC 中，下列等式一定成立的是（　　）

A. $\sin\frac{A+B}{2}=-\cos\frac{C}{2}$　　B. $\cos\frac{A+B}{2}=-\sin\frac{C}{2}$

C. $\sin(A+B)=\sin C$　　D. $\cos(A+B)=\cos C$

6. 化简 $\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)}{\cos(\pi+\alpha)}+\frac{\sin(\pi-\alpha)\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)}{\sin(\pi+\alpha)}$ 为（　　）

A. 0　　B. $2\sin\alpha$

C. $-2\sin\alpha$　　D. $\cos\alpha+\sin\alpha$

二、填空题

7. 已知 θ 是第四象限角，且 $\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{3}{5}$，则 $\tan\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)=$_____.

8. 已知下列各式：

①$\tan\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=\tan\left(\frac{3}{2}\pi-\alpha\right)$；

②$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\sin(\pi-\alpha)$；

③$\sin\left(\frac{3}{2}\pi+\alpha\right)=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$；

④$\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=\sin\left(\frac{3}{2}\pi+\alpha\right)$.

其中正确的命题是_____.

9. 已知 $\cos\alpha=\frac{1}{3}$，且 $-\frac{\pi}{2}<\alpha<0$，则 $\frac{\cos(-\alpha-\pi)\sin(2\pi+\alpha)\tan(2\pi-\alpha)}{\sin\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)}=$_____.

三、解答题

10. 已知角 α 的终边经过点 $P\left(\frac{4}{5},-\frac{3}{5}\right)$.

(1)求 $\sin\alpha$ 的值；

(2)求 $\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)}{\sin(\alpha+\pi)}\cdot\frac{\tan(\alpha-\pi)}{\cos(3\pi-\alpha)}$ 的值.

11. 已知 $\cos\left(\frac{\pi}{6}-\alpha\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$，求 $\cos\left(\frac{5\pi}{6}+\alpha\right)-\sin^2\left(\alpha-\frac{\pi}{6}\right)$ 的值.

12. 已知 $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$，$\cos(2\pi-\alpha)-\sin(\pi-\alpha)=-\frac{\sqrt{5}}{5}$.

(1)求 $\sin\alpha+\cos\alpha$ 的值；

(2)求 $\frac{2\sin\alpha\cos\alpha-\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)+1}{1-\cot\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)}$ 的值.

微信公众号 教辅资料站

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

学习札记

1.3　三角函数的图象与性质

1.3.1　正弦函数的图象与性质(一)

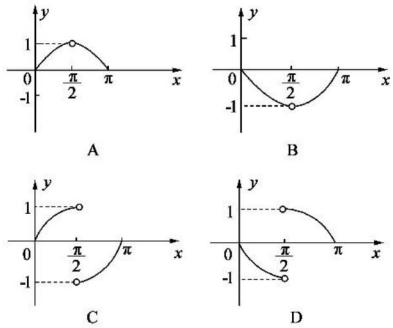
学习目标

1. 能正确使用“五点法”和“几何法”作出正弦函数的图象，掌握“五点法”作图的技巧；
2. 理解正弦函数的性质，会求正弦函数的定义域及最值.

1 基础知识点对点

知识点一　五点法作图

1. 函数 $y=\cos x|\tan x|\left(0\leqslant x\leqslant\pi\text{ 且 }x\neq\frac{\pi}{2}\right)$ 的图象为　(　)



2. 函数 $f(x)=\sin x+2|\sin x|(x\in[0,2\pi])$ 的图象与直线 $y=k$ 有且仅有两个不同的交点，则 k 的范围是_____.

知识点二　函数的定义域

3. 函数 $y=\sqrt{\log_{\frac{1}{2}}\sin x}$ 的定义域是_____.

知识点三　函数的值域

4. 函数 $f(x)=1+\sin x$ 在区间 $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 上的最小值为　(　)

A. -1　　B. 0

C. 1　　D. 2

5. 如果 $|x|\leqslant\frac{\pi}{4}$，那么函数 $y=\cos^2x+\sin x$ 的最小值为　(　)

A. $\frac{\sqrt{2}-1}{2}$　　B. $\frac{1-\sqrt{2}}{2}$

C. $-\frac{\sqrt{2}+1}{2}$　　D. -1

2 课后拔高提能练

一、选择题

1. 用“五点法”作 $y=\sin x$ 的图象，选用的五个点正确的是　(　)

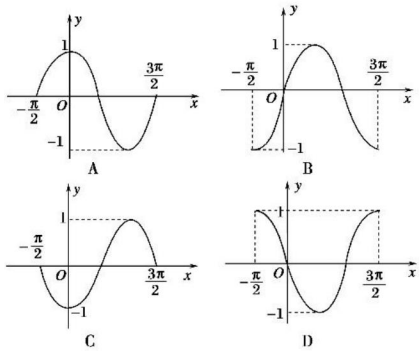
A. $(0,1),\left(\frac{\pi}{2},0\right),(\pi,-1),\left(\frac{3\pi}{2},0\right),(2\pi,1)$

B. $(0,0),\left(\frac{\pi}{4},1\right),\left(\frac{\pi}{2},0\right),\left(\frac{3\pi}{4},-1\right),(\pi,0)$

C. $(0,0),\left(\frac{\pi}{2},1\right),(\pi,0),\left(\frac{3\pi}{2},-1\right),(2\pi,0)$

D. $(0,1),\left(\frac{\pi}{4},0\right),\left(\frac{\pi}{2},-1\right),\left(\frac{3\pi}{4},0\right),(\pi,1)$

2. 函数 $y=-\sin x,x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right]$ 的简图是　(　)



3. 函数 $y=\sqrt{2\sin x+1}$ 的定义域为　(　)

A. $\left[-\frac{\pi}{6},\frac{7\pi}{6}\right]$

B. $\left[-\frac{\pi}{6}+2k\pi,\frac{7\pi}{6}+2k\pi\right](k\in\mathbf{Z})$

C. $\left[-\frac{\pi}{6}+2k\pi,\frac{5\pi}{6}+2k\pi\right](k\in\mathbf{Z})$

D. $\left[\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6}\right]$

4. 函数 $y=\sin x,x\in\left[\frac{\pi}{6},\frac{2\pi}{3}\right]$，则 y 的范围是　(　)

A. $[-1,1]$　　B. $\left[\frac{1}{2},1\right]$

C. $\left[\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right]$　　D. $\left[\frac{\sqrt{3}}{2},1\right]$

微信公众号 教辅资料站

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

学习札记

5. 函数 $y=-3\sin 3x$ 的最大值与取得最大值时相应的一个 x 的值为　　(　　)

A. $1,\frac{\pi}{2}$　　B. $1,-\frac{\pi}{2}$

C. $3,\frac{\pi}{6}$　　D. $3,-\frac{\pi}{6}$

6. 下列所给各组函数中，关于 y 轴对称的是　　(　　)

①$y=\sin x$ 与 $y=-\sin x$；②$y=\sin x$ 与 $y=\sin(-x)$；

③$y=\sin x$ 与 $y=\sin|x|$；④$y=|\sin x|$ 与 $y=\sin x$.

A. ①②　　B. ③④

C. ②④　　D. ①③

二、填空题

7. 函数 $f(x)=|\lg x|-\sin x$ 的零点个数为_____.

8. $y=2\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\left(x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]\right)$ 时值域为_____.

9. 函数 $y=\frac{5}{4}-\cos^2 x-3\sin x$ 的最小值是_____.

三、解答题

10. 求下列函数的值域.

(1)$y=2\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right),x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$；

(2)$y=\sin^2 x+4\sin x,x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$.

11. 作出函数 $y=3-2\sin x,x\in[0,2\pi]$ 的简图.

12. 函数 $y=a\sin x+b$ 的最大值是 4，最小值为 -2，求 a,b 的值.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

学习札记

1.3.1　正弦函数的图象与性质(二)

学习目标

1. 掌握正弦函数的性质、单调性、奇偶性、周期性；
2. 能利用正弦函数的性质，解决一些简单的问题.

1 基础知识点对点

知识点一　正弦函数的周期性

1. 若函数 $f(x)=\sqrt{2}\sin\left(ax+\frac{\pi}{4}\right)(a>0)$ 的最小正周期为1，且 $g(x)=\begin{cases}\sin ax, x<0,\\ g(x-1), x\geqslant 0,\end{cases}$ 则 $g\left(\frac{5}{6}\right)$ 等于（　　）

A. $-\frac{1}{2}$　　B. $\frac{1}{2}$

C. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$　　D. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

2. 已知 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的偶函数，且 $f(x+2)=-\frac{1}{f(x)}$，当 $2\leqslant x\leqslant 3$ 时，$f(x)=x$，则 $f(105.5)=$（　　）

A. 0　　B. 2.5

C. $-\frac{1}{2}$　　D. 3.5

知识点二　正弦函数的单调性

3. **(2018·天津卷)** 将函数 $y=\sin\left(2x+\frac{\pi}{5}\right)$ 的图象向右平移 $\frac{\pi}{10}$ 个单位长度，所得图象对应的函数（　　）

A. 在区间 $\left[\frac{3\pi}{4},\frac{5\pi}{4}\right]$ 上单调递增

B. 在区间 $\left[\frac{3\pi}{4},\pi\right]$ 上单调递减

C. 在区间 $\left[\frac{5\pi}{4},\frac{3\pi}{2}\right]$ 上单调递增

D. 在区间 $\left[\frac{3\pi}{2},2\pi\right]$ 上单调递减

4. 函数 $y=\sin\left(\frac{\pi}{3}-\frac{1}{2}x\right)$，$x\in[-2\pi,2\pi]$ 的单调递增区间为_____.

知识点三　正弦函数的奇偶性和对称性

5. 设函数 $f(x)=\sin(\omega x+\varphi)\left(\omega>0,-\frac{\pi}{2}<\varphi<\frac{\pi}{2}\right)$ 的最小正周期为 π，且图象关于直线 $x=\frac{2\pi}{3}$ 对称，则它的一个对称中心的坐标是（　　）

A. $\left(-\frac{\pi}{12},0\right)$　　B. $\left(\frac{\pi}{12},0\right)$

C. $\left(-\frac{\pi}{6},0\right)$　　D. $\left(\frac{\pi}{6},0\right)$

6. 关于函数 $f(x)=4\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)(x\in\mathbf{R})$，有下列命题：

①函数 $y=f(x)$ 的表达式可改写为 $y=4\cos\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)$；

②函数 $y=f(x)$ 是以 2π 为最小正周期的周期函数；

③函数 $y=f(x)$ 的图象关于点 $\left(-\frac{\pi}{6},0\right)$ 对称；

④函数 $y=f(x)$ 的图象关于直线 $x=-\frac{\pi}{6}$ 对称.

其中正确的是_____.

2 课后拔高提能练

一、选择题

1. 函数 $y=\sqrt{2}\sin 2x$ 的奇偶性为（　　）

A. 奇函数

B. 偶函数

C. 既是奇函数又是偶函数

D. 非奇非偶函数

2. **(2017·全国卷Ⅱ)** 函数 $f(x)=\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$ 的最小正周期为（　　）

A. 4π　　B. 2π

C. π　　D. $\frac{\pi}{2}$

3. 函数 $f(x)=\sin\left(\pi x-\frac{\pi}{2}\right)-1$，则下列命题中正确的是（　　）

A. $f(x)$ 是周期为1的奇函数

B. $f(x)$ 是周期为2的偶函数

C. $f(x)$ 是周期为1的非奇非偶函数

D. $f(x)$ 是周期为2的非奇非偶函数

4. 使函数 $y=\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)$ 为增函数的区间为（　　）

A. $\left[0,\frac{\pi}{3}\right]$　　B. $\left[\frac{\pi}{12},\frac{7\pi}{12}\right]$

C. $\left[\frac{\pi}{3},\frac{5\pi}{6}\right]$　　D. $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$

5. 下列命题中正确的是（　　）

A. 函数 $y=\sin\left(\frac{1}{2}x+\pi\right)$ 是奇函数

B. 若 α,β 是第一象限角，且 $\alpha>\beta$，则 $\sin\alpha>\sin\beta$

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

学习札记

C. 函数 $y=\sin\left(\frac{1}{2}x-\frac{\pi}{3}\right)$ 在区间 $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 上的最小值为 -1

D. 函数 $y=\sin 2x$ 在 $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 上递增

6. 下列各组数的大小关系正确的是　（　）

A. $\sin 1<\cos 1$

B. $\sin\left(-\frac{3\pi}{2}\right)<\sin\frac{\pi}{2}$

C. $\sin\frac{\pi}{4}<\sin\frac{3\pi}{4}$

D. $\sin\left(-\frac{\pi}{10}\right)<\sin\left(-\frac{\pi}{18}\right)$

二、填空题

7. 函数 $y=\sin\left(\frac{1}{2}x+\frac{\pi}{3}\right)$ 的单调递增区间为_____.

8. 已知函数 $f(x)=x+\sin\pi x$，则 $f\left(\frac{1}{2\,017}\right)+f\left(\frac{2}{2\,017}\right)+f\left(\frac{3}{2\,017}\right)+\cdots+f\left(\frac{4\,033}{2\,017}\right)$ 的值为_____.

9. 函数 $f(x)=\sin x$ 在区间 (a,b) 上是增函数，且 $f(a)=-1$，$f(b)=1$，则 $\cos\frac{a+b}{2}=$_____.

三、解答题

10. 已知函数 $y=3\sin\left(\frac{1}{2}x-\frac{\pi}{3}\right)$，$x\in[0,2\pi]$.

(1)求函数的值域；

(2)求函数的单调增区间.

11. 求函数 $y=\sin\left(\frac{\pi}{3}+4x\right)+\cos\left(4x-\frac{\pi}{6}\right)$ 的最小正周期、单调区间及最大、最小值.

12. 已知函数 $f(x)=a\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)+b(x\in\mathbf{R})$.

(1)求出函数 $f(x)$ 的对称轴方程；

(2)设 $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$，$f(x)$ 的最小值为 -2，最大值为 $\sqrt{3}$，求实数 a,b 的值.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

学习札记

1.3.1　正弦函数的图象与性质(三)

学习目标

1. 了解正弦型函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ 的实际意义及其参数 A、ω、φ 对函数图象变化的影响；
2. 会求正弦型函数的周期、频率；
3. 利用函数的图象研究函数的性质.

1 基础知识点对点

知识点一　正弦型函数的图象变换

1. 要得到 $y=\sin\left(2x-\frac{2\pi}{3}\right)$ 的图象，需将函数 $y=\sin 2x$ 的图象　(　)

A. 向左平移 $\frac{2\pi}{3}$ 个单位

B. 向右平移 $\frac{2\pi}{3}$ 个单位

C. 向左平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位

D. 向右平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位

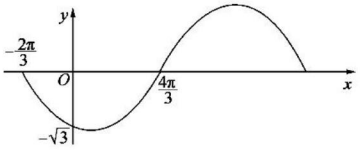
2. 将函数 $y=4\sin\left(4x+\frac{\pi}{6}\right)$ 的图象上各点的横坐标伸长为原来的 2 倍(纵坐标不变)，再将所得图象向右平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位，则所得函数图象的一个对称中心为　(　)

A. $(0,0)$　　B. $\left(\frac{\pi}{3},0\right)$

C. $\left(\frac{\pi}{12},0\right)$　　D. $\left(\frac{5}{8}\pi,0\right)$

知识点二　求函数的解析式

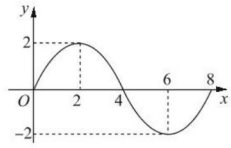
3. 已知函数 $f(x)=A\sin(\omega x+\varphi)$ $(A>0,\omega>0)$ 在一个周期内的图象如图所示，则 $f(2\,018\pi)$ 的值为　(　)



A. $\sqrt{3}$　　B. $-\sqrt{3}$

C. 1　　D. -1

4. 函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)(A>0,\omega>0)$ 的部分图象如图所示，则 $f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(11)$ 的值等于　(　)

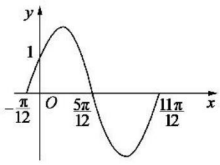


A. 2　　B. $2+\sqrt{2}$

C. $2+2\sqrt{2}$　　D. $-2-2\sqrt{2}$

知识点三　正弦型函数的性质应用

5. 函数 $f_1(x)=A\sin(\omega x+\varphi)\left(A>0,\omega>0,|\varphi|<\frac{\pi}{2}\right)$ 的一段图象过点 $(0,1)$，如图所示.



(1)求函数 $f_1(x)$ 的表达式；

(2)把 $f_1(x)$ 的图象向右平移 $\frac{\pi}{4}$ 个单位长度得到 $f_2(x)$ 的图象，求 $f_2(x)$ 的对称轴方程.

2 课后拔高提能练

一、选择题

1. 若将函数 $y=2\sin 2x$ 的图象向左平移 $\frac{\pi}{12}$ 个单位长度，则平移后图象的对称轴为　(　)

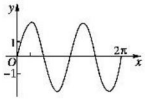
A. $x=\frac{k\pi}{2}-\frac{\pi}{6}(k\in\mathbf{Z})$

B. $x=\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{6}(k\in\mathbf{Z})$

C. $x=\frac{k\pi}{2}-\frac{\pi}{12}(k\in\mathbf{Z})$

D. $x=\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{12}(k\in\mathbf{Z})$

2. 已知函数 $y=2\sin(\omega x+\varphi)(\omega>0)$ 在区间 $[0,2\pi]$ 上的图象如右图所示，那么 $\omega=$　(　)



A. 1　　B. 2

C. $\frac{1}{2}$　　D. $\frac{1}{3}$

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

学习札记

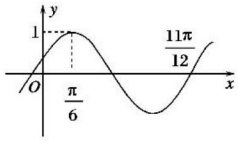
3. 下列四种变换方式，其中能将 $y=\sin x$ 的图象变为 $y=\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)$ 的图象的是　（　）

①向左平移 $\frac{\pi}{4}$，再将横坐标缩短为原来的 $\frac{1}{2}$；②横坐标缩短为原来的 $\frac{1}{2}$，再向左平移 $\frac{\pi}{8}$；③横坐标缩短为原来的 $\frac{1}{2}$，再向左平移 $\frac{\pi}{4}$；④向左平移 $\frac{\pi}{8}$，再将横坐标缩短为原来的 $\frac{1}{2}$.

A. ①和②　　B. ①和③

C. ②和③　　D. ②和④

4. 函数 $f(x)=A\sin(\omega x+\varphi)\left(A>0,\omega>0,|\varphi|<\frac{\pi}{2}\right)$ 的部分图象如图所示，则将 $y=f(x)$ 的图象向右平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位后，得到的图象解析式为　（　）



A. $y=\sin 2x$　　B. $y=\cos 2x$

C. $y=\sin\left(2x+\frac{2\pi}{3}\right)$　　D. $y=\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)$

5. 将函数 $f(x)=\sin\omega x$（其中 $\omega>0$）的图象向右平移 $\frac{\pi}{4}$ 个单位长度，所得图象经过点 $\left(\frac{3\pi}{4},0\right)$，则 ω 的最小值是　（　）

A. $\frac{1}{3}$　　B. 1　　C. $\frac{5}{3}$　　D. 2

6. 若函数 $f(x)=\sin\left(\omega x+\frac{\pi}{6}\right)-1(\omega>0)$ 的最小正周期为 $\frac{2\pi}{3}$，则 $f(x)$ 图象的一条对称轴方程是　（　）

A. $x=\frac{\pi}{9}$　　B. $x=\frac{\pi}{6}$

C. $x=\frac{\pi}{3}$　　D. $x=\frac{\pi}{2}$

二、填空题

7. 如果 $y=\sin 2x+a\cos 2x$ 的图象关于直线 $x=-\frac{\pi}{8}$ 对称，那么 a 的值为_____.

8. 函数 $y=3\sin\left(4x+\frac{\pi}{3}\right)$ 的图象与 x 轴的所有交点中，距原点最近的点的坐标是_____.

9. 函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)\left(A>0,\omega>0,\frac{3\pi}{2}<\varphi<2\pi\right)$ 的最小值是 -3，周期为 $\frac{\pi}{3}$，且它的图象经过点 $\left(0,-\frac{3}{2}\right)$，则这个函数的解析式是_____.

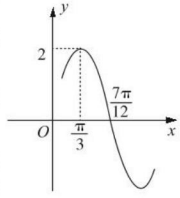
三、解答题

10. 已知函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)(A>0,\omega>0)$.

(1) 若 $A=3,\omega=\frac{1}{2},\varphi=-\frac{\pi}{3}$，作出该函数在一个周期内的草图；

(2) 若 y 表示一个振动量，其振动频率是 $\frac{2}{\pi}$，当 $x=\frac{\pi}{24}$ 时，相位是 $\frac{\pi}{3}$，求 ω 与 φ.

11. 已知函数 $f(x)=A\sin(\omega x+\varphi)(A>0,\omega>0,-\pi<\varphi<0)$.



(1) 若 $f(x)$ 的部分图象如图所示，求 $f(x)$ 的解析式；

(2) 在(1)的条件下，求最小正实数 m，使得函数 $f(x)$ 的图象向左平移 m 个单位后所对应的函数是偶函数；

(3) 若 $f(x)$ 在 $\left[0,\frac{\pi}{3}\right]$ 上是单调递增函数，求 ω 的最大值.

12. 已知函数 $f(x)=2\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$.

(1) 求 $f(x)$ 的振幅和最小正周期；

(2) 求当 $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 时，函数 $f(x)$ 的值域；

(3) 当 $x\in[-\pi,\pi]$ 时，求 $f(x)$ 的单调递减区间.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

学习札记

1.3.2　余弦函数、正切函数的图象与性质(一)

学习目标

1. 会用"五点法"作余弦函数的图象；
2. 理解余弦函数的性质，会求余弦函数的周期、单调区间及最值.

1 基础知识点对点

知识点一　余弦函数的定义域与值域

1. 函数 $y=\sqrt{2\cos x+1}$ 的定义域是　(　)

A. $\left[2k\pi-\frac{\pi}{6},2k\pi+\frac{\pi}{6}\right](k\in\mathbf{Z})$

B. $\left[2k\pi-\frac{\pi}{3},2k\pi+\frac{\pi}{3}\right](k\in\mathbf{Z})$

C. $\left[2k\pi+\frac{\pi}{3},2k\pi+\frac{2\pi}{3}\right](k\in\mathbf{Z})$

D. $\left[2k\pi-\frac{2\pi}{3},2k\pi+\frac{2\pi}{3}\right](k\in\mathbf{Z})$

2. 函数 $y=2\cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right),x\in\left[-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{6}\right]$ 的值域为_____.

知识点二　余弦函数的性质

3. 下列函数中，以 π 为最小正周期的偶函数，且在 $\left(0,\frac{\pi}{4}\right)$ 上单调递增的函数是　(　)

A. $y=\sin x$　　B. $y=\sin 2|x|$

C. $y=-\cos 2x$　　D. $y=\cos 2x$

4. 如果函数 $y=3\cos(2x+\varphi)$ 的图象关于点 $\left(\frac{4\pi}{3},0\right)$ 中心对称，那么 $|\varphi|$ 的最小值为　(　)

A. $\frac{\pi}{6}$　　B. $\frac{\pi}{4}$

C. $\frac{\pi}{3}$　　D. $\frac{\pi}{2}$

知识点三　余弦函数的图象及图象变换

5. 要得到函数 $y=\cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$ 的图象，只需将函数 $y=\cos 2x$ 的图象　(　)

A. 向左平行移动 $\frac{\pi}{3}$ 个单位长度

B. 向右平行移动 $\frac{\pi}{3}$ 个单位长度

C. 向左平行移动 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度

D. 向右平行移动 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度

6. 为得到函数 $y=\cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$ 的图象，只需将函数 $y=\sin 2x$ 的图象　(　)

A. 向右平移 $\frac{5\pi}{6}$ 个长度单位

B. 向左平移 $\frac{5\pi}{6}$ 个长度单位

C. 向右平移 $\frac{5\pi}{12}$ 个长度单位

D. 向左平移 $\frac{5\pi}{12}$ 个长度单位

2 课后拔高提能练

一、选择题

1. 若函数 $f(x)=\cos(2x+\varphi)$ 是奇函数，则 φ 可取一个值为　(　)

A. $-\pi$　　B. $-\frac{\pi}{2}$

C. $\frac{\pi}{4}$　　D. 2π

2. 函数 $y=2\cos\left(\omega x+\frac{\pi}{3}\right)$ 的最小正周期为 $\frac{\pi}{2}$，则 ω 的值为　(　)

A. 4　　B. $\pm\frac{1}{2}$

C. $\frac{1}{4}$　　D. ± 4

3. 函数 $y=\cos 2x$ 的单调递增区间是　(　)

A. $\left[2k\pi+\frac{\pi}{2},2k\pi+\pi\right](k\in\mathbf{Z})$

B. $\left[2k\pi-\frac{\pi}{2},2k\pi+\pi\right](k\in\mathbf{Z})$

C. $\left[k\pi,k\pi+\frac{\pi}{2}\right](k\in\mathbf{Z})$

D. $\left[k\pi-\frac{\pi}{2},k\pi\right](k\in\mathbf{Z})$

4. 设 $\omega>0$，函数 $f(x)=2\cos\omega x$ 在 $\left[0,\frac{2\pi}{3}\right]$ 上单调递减，那么 ω 的值可以是　(　)

A. $\frac{1}{2}$　　B. 2

C. 3　　D. 4

5. 函数 $y=\cos^2x-3\cos x+2$ 的最小值是　(　)

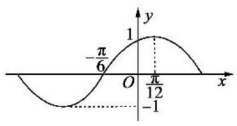
A. 2　　B. $-\frac{1}{4}$

C. 6　　D. 0

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

学习札记

6. 下列函数中，图象的一部分如图所示的是　（　　）



A. $y=\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$　　B. $y=\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)$

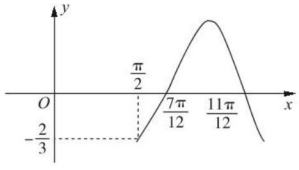
C. $y=\cos\left(4x-\frac{\pi}{3}\right)$　　D. $y=\cos\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)$

二、填空题

7. **(2018·北京卷)** 设函数 $f(x)=\cos\left(\omega x-\frac{\pi}{6}\right)(\omega>0)$，若 $f(x)\leqslant f\left(\frac{\pi}{4}\right)$ 对任意的实数 x 都成立，则 ω 的最小值为_____.

8. 定义在 **R** 上的偶函数 $f(x)$ 满足 $f(\pi+x)=f(\pi-x)$，若 $x\in[0,\pi]$ 时解析式为 $f(x)=\cos x$，则 $f(x)>0$ 的解集是_____.

9. 已知函数 $f(x)=A\cos(\omega x+\varphi)$ 的图象如下图所示. $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=-\frac{2}{3}$，则 $f(0)=$_____.



三、解答题

10. 设函数 $f(x)=\cos\left(3x+\varphi-\frac{\pi}{6}\right)(0<\varphi<\pi)$ 是奇函数.

(1) 求 φ；

(2) 求函数 $y=f\left(x+\frac{\pi}{12}\right)$ 的单调减区间.

11. 已知函数 $f(x)=\sqrt{2}\cos\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)$，$x\in\mathbf{R}$.

(1) 求函数 $f(x)$ 的最小正周期和单调递增区间；

(2) 求函数 $f(x)$ 在区间 $\left[-\frac{\pi}{8},\frac{\pi}{2}\right]$ 上的最小值和最大值，并求出取得最值时 x 的值.

12. 已知函数 $f(x)=2\cos\omega x(\omega>0)$，且函数 $y=f(x)$ 图象的两相邻对称轴间的距离为 $\frac{\pi}{2}$.

(1) 求 $f\left(\frac{\pi}{8}\right)$ 的值；

(2) 将函数 $y=f(x)$ 的图象向右平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位后，再将得到的函数图象上各点的横坐标伸长到原来的4倍，纵坐标不变，得到函数 $y=g(x)$ 的图象，求 $y=g(x)$ 的单调递减区间.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

学习札记

1.3.2　余弦函数、正切函数的图象与性质(二)

学习目标

1. 能借助单位圆中的正切线画出 $y=\tan x$ 的图象；
2. 理解正切函数的定义域、值域、周期性、奇偶性及单调性，并掌握其应用.

1 基础知识点对点

知识点一　正切函数的定义域与值域

1. 函数 $f(x)=\sqrt{\tan x-1}+\sqrt{4-x^2}$ 的定义域为_____.

2. 函数 $y=\tan\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)$，$x\in\left[0,\frac{\pi}{8}\right)$ 的值域为_____.

知识点二　正切函数的性质

3. 函数 $y=\tan x$ 的最小正周期是　(　)

A. $\frac{\pi}{4}$　　B. $\frac{\pi}{2}$

C. π　　D. 2π

4. 下列不等式正确的是　(　)

A. $\tan\frac{4\pi}{7}>\tan\frac{3\pi}{7}$

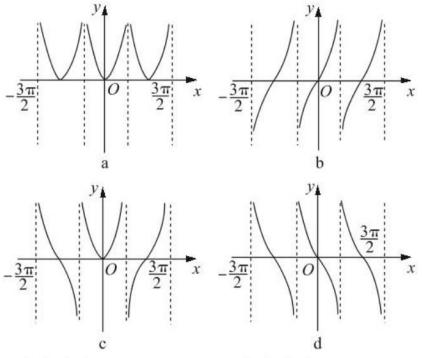
B. $\tan\frac{2\pi}{5}<\tan\frac{3\pi}{5}$

C. $\tan\left(-\frac{13\pi}{7}\right)<\tan\left(-\frac{15\pi}{8}\right)$

D. $\tan\left(-\frac{13\pi}{4}\right)>\tan\left(-\frac{12\pi}{5}\right)$

知识点三　正切函数的图象

5. 下列图形分别是①$y=|\tan x|$；②$y=\tan x$；③$y=\tan(-x)$；④$y=\tan|x|$ 在 $x\in\left(-\frac{3\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right)$ 内的大致图象，那么由 a 到 d 对应的函数关系式应是(　)



A. ①②③④　　B. ①③④②

C. ③②④①　　D. ①②④③

6. 函数 $f(x)=\tan\omega x(\omega>0)$ 的图象的相邻两支截直线 $y=\frac{\pi}{4}$ 所得线段长为 2，则 $f\left(-\frac{4}{3}\right)$ 的值是　(　)

A. -1　　B. 0

C. $\sqrt{3}$　　D. $-\frac{\sqrt{3}}{3}$

2 课后拔高提能练

一、选择题

1. 函数 $f(x)=\sqrt{3}\tan\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{4}\right)$，$x\in\mathbf{R}$ 的最小正周期为　(　)

A. $\frac{\pi}{2}$　　B. π　　C. 2π　　D. 4π

2. 函数 $y=\tan\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\left(x\in\left[-\frac{\pi}{4},0\right)\cup\left(0,\frac{\pi}{4}\right]\right)$ 的值域为　(　)

A. $[-1,1]$

B. $(-\infty,-1]\cup[1,+\infty)$

C. $(-\infty,1]$

D. $[-1,+\infty)$

3. $y=\tan x\left(x\neq k\pi+\frac{\pi}{2},k\in\mathbf{Z}\right)$ 在定义域上的单调性为　(　)

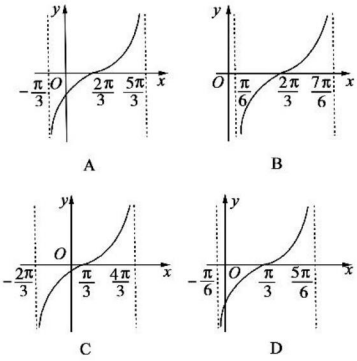
A. 在整个定义域上为增函数

B. 在整个定义域上为减函数

C. 在每一个开区间 $\left(-\frac{\pi}{2}+k\pi,\frac{\pi}{2}+k\pi\right)(k\in\mathbf{Z})$ 上为增函数

D. 在每一个开区间 $\left(-\frac{\pi}{2}+2k\pi,\frac{\pi}{2}+2k\pi\right)(k\in\mathbf{Z})$ 上为增函数

4. 函数 $y=\tan\left(\frac{1}{2}x-\frac{\pi}{3}\right)$ 在一个周期内的图象是　(　)



5. 函数 $y=3\tan\left(\frac{1}{2}x+\frac{\pi}{3}\right)$ 的一个对称中心是(　)

A. $\left(\frac{\pi}{6},0\right)$　　B. $\left(\frac{2\pi}{3},-3\sqrt{3}\right)$

C. $\left(-\frac{2\pi}{3},0\right)$　　D. $(0,0)$

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

学习札记

6. 若将函数 $y=\tan\left(\omega x+\frac{\pi}{4}\right)(\omega>0)$ 的图象向右平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度后，与函数 $y=\tan\left(\omega x+\frac{\pi}{6}\right)$ 的图象重合，则 ω 的最小值为　　(　　)

A. $\frac{1}{6}$　　B. $\frac{1}{4}$

C. $\frac{1}{3}$　　D. $\frac{1}{2}$

二、填空题

7. 函数 $y=2\tan\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)$ 的定义域是_____.

8. 函数 $y=-\tan^2x-\tan x-3$，$x\in\left[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{3}\right]$ 的值域为_____.

9. 若 $\alpha\in\left(0,\frac{\pi}{6}\right)$，则 $\tan(\sin\alpha)$，$\tan(\tan\alpha)$，$\tan(\cos\alpha)$ 的大小为_____.

三、解答题

10. 求函数 $y=\tan\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{3}\right)$，$x\in\left[0,\frac{\pi}{3}\right)\cup\left(\frac{\pi}{3},\pi\right]$ 的值域.

11. 若函数 $f(x)=\tan^2x-a\tan x\left(|x|\leqslant\frac{\pi}{4}\right)$ 的最小值为 -6，求实数 a 的值.

12. 设函数 $f(x)=a\sin\left(kx+\frac{\pi}{3}\right)$ 和 $g(x)=b\cdot\tan\left(kx-\frac{\pi}{3}\right)(a>0,b>0,k>0)$. 若它们的最小正周期之和为 $\frac{3}{2}\pi$，且 $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=g\left(\frac{\pi}{2}\right)$，$f\left(\frac{\pi}{4}\right)=-\sqrt{3}g\left(\frac{\pi}{4}\right)+1$. 求两函数的解析式.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

学习札记

1.3.3　已知三角函数值求角

学习目标

1. 理解反正弦、反余弦、反正切的意义；
2. 会用反三角符号表示角；
3. 会由已知三角函数值求角.

1 基础知识点对点

知识点一　已知正弦值求角

1. 若 $\sin x=-\frac{\sqrt{3}}{2}$，$\frac{\pi}{2}<x<\frac{3\pi}{2}$，则 x 等于　(　)

A. $\frac{\pi}{3}$　　B. $\frac{2\pi}{3}$

C. $\frac{4\pi}{3}$　　D. $\frac{5\pi}{3}$

2. 使 $\arcsin(x-2)$ 有意义的 x 的取值范围是　(　)

A. $[1-\pi,1]$　　B. $[1,3]$

C. $[-\infty,1]$　　D. $[-1,1]$

知识点二　已知余弦值求角

3. 设 $\cos\alpha=-\frac{1}{4}$，$\alpha\in(0,\pi)$，则 α 的取值可表示为(　)

A. $\arccos\frac{1}{4}$　　B. $-\arccos\frac{1}{4}$

C. $\arccos\left(-\frac{1}{4}\right)$　　D. $\pi+\arccos\frac{1}{4}$

4. 已知 $\cos x=\frac{1}{2}$，$x\in[0,2\pi]$，则 $x=$_____.

知识点三　已知正切值求角

5. 计算 $\arctan 1+\arctan(-\sqrt{3})=$_____.

6. 已知 $\tan x=-\sqrt{3}$，在区间 $[-2\pi,0]$ 内，则角 $x=$_____.

2 课后拔高提能练

一、选择题

1. 下列各式中错误的是　(　)

A. $\arcsin 1=\frac{\pi}{2}$　　B. $\arccos(-1)=\pi$

C. $\arctan 0=0$　　D. $\arccos 1=2\pi$

2. $\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)$ 的值是　(　)

A. $\frac{11\pi}{6}$　　B. $\frac{7\pi}{6}$

C. $\frac{5\pi}{6}$　　D. $-\frac{\pi}{6}$

3. 设角 A 是三角形的一个内角，当 $\tan A=\frac{\sqrt{3}}{3}$ 时，A 等于　(　)

A. 60°　　B. 120°

C. 30°　　D. 150°

4. 使得等式 $2\cos\frac{x}{2}=1$ 成立的 x 的集合是　(　)

A. $\left\{x\mid x=4k\pi+\frac{\pi}{3},k\in\mathbf{Z}\right\}$

B. $\left\{x\mid x=4k\pi+\frac{\pi}{6},k\in\mathbf{Z}\right\}$

C. $\left\{x\mid x=4k\pi\pm\frac{2\pi}{3},k\in\mathbf{Z}\right\}$

D. $\left\{x\mid x=2k\pi\pm\frac{\pi}{3},k\in\mathbf{Z}\right\}$

5. 已知 $\sin x=-\frac{1}{3}$，且 $x\in\left(-\pi,-\frac{\pi}{2}\right)$，则 x 可以表示为　(　)

A. $\arcsin\frac{1}{3}$

B. $-\frac{\pi}{2}-\arcsin\left(-\frac{1}{3}\right)$

C. $-\pi+\arcsin\left(-\frac{1}{3}\right)$

D. $-\pi-\arcsin\left(-\frac{1}{3}\right)$

6. 若 $f(\cos x)=2\sin x+1$，则 $f\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ 的值为　(　)

A. -1　　B. 1

C. ±1　　D. 2 或 0

二、填空题

7. 若 $\alpha\in(0,2\pi)$，$\tan\alpha=-1$，$\cos\alpha=\frac{\sqrt{2}}{2}$，则角 α 的值是_____.

8. 若 $a=\arcsin\frac{1}{4}$，$b=\arctan\frac{\sqrt{5}}{5}$，$c=\arccos\frac{4}{5}$，则 a，b，c 的大小关系是_____.

9. 若 $\arccos(2x-1)$ 有意义，则 x 的取值范围是_____.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

学习札记

三、解答题

10. 已知 $\tan\alpha=-2$，若分别满足：(1)$\alpha\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$；

(2)$\alpha\in[0,2\pi]$，求各个角 α.

11. 比较大小.

(1)$\arctan(-1)$ 与 $\arctan(-\sqrt{3})$；

(2)$\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ 与 $\arctan\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$.

12. 已知 $\cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)=-\frac{1}{2}$，$x\in\left[0,\frac{\pi}{3}\right]$，求角 x.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

学习札记

章末检测

时间:45 分钟　满分:100 分

一、选择题(每小题 5 分,共 40 分)

1. 若点(4,a)在 $y=x^{\frac{1}{2}}$ 的图象上,则 $\tan\frac{a}{6}\pi$ 的值为　(　)

A. 0　　B. $\frac{\sqrt{3}}{3}$

C. 1　　D. $\sqrt{3}$

2. 函数 $y=\sin\left(3x-\frac{\pi}{4}\right)$ 的图象的一个对称中心是　(　)

A. $\left(-\frac{\pi}{12},0\right)$　　B. $\left(-\frac{7}{12}\pi,0\right)$

C. $\left(\frac{7}{12}\pi,0\right)$　　D. $\left(\frac{11}{12}\pi,0\right)$

3. 设 $f(x)$ 是定义域为 $\mathbf{R}$ 且最小正周期为 2π 的函数,且有 $f(x)=\begin{cases}\sin x, 0\leqslant x\leqslant\pi,\\ \cos x, -\pi<x<0,\end{cases}$ 则 $f\left(-\frac{13\pi}{4}\right)=$　(　)

A. 0　　B. 1

C. $\frac{\sqrt{2}}{2}$　　D. $-\frac{\sqrt{2}}{2}$

4. 下列函数中,周期为 π,且在 $\left[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right]$ 上为减函数的是　(　)

A. $y=\sin\left(2x+\frac{\pi}{2}\right)$

B. $y=\cos\left(2x+\frac{\pi}{2}\right)$

C. $y=\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$

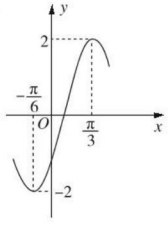
D. $y=\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$

5. 已知 $\sin\alpha-\cos\alpha=\sqrt{2}$,$\alpha\in(0,\pi)$,则 $\tan\alpha=$　(　)

A. -1　　B. $-\frac{\sqrt{2}}{2}$

C. $\frac{\sqrt{2}}{2}$　　D. 1

6. 函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ 的部分图象如图所示,则　(　)



A. $y=2\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)$

B. $y=2\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)$

C. $y=2\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$

D. $y=2\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$

7. (2017·全国卷Ⅲ)设函数 $f(x)=\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$,则下列结论错误的是　(　)

A. $f(x)$ 的一个周期为 -2π

B. $y=f(x)$ 的图象关于直线 $x=\frac{8\pi}{3}$ 对称

C. $f(x+\pi)$ 的一个零点为 $x=\frac{\pi}{6}$

D. $f(x)$ 在 $\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$ 上单调递减

8. 函数 $\sin^2x+\sin x-1=a$ 有解,则 a 的取值范围是　(　)

A. $[-1,1]$　　B. $\left[-\frac{5}{4},-1\right]$

C. $\left[-\frac{5}{4},1\right]$　　D. $\left[-1,\frac{5}{4}\right]$

二、填空题(每小题 5 分,共 15 分)

9. 已知角 α 的终边经过点 $P(3,-4)$,则 $\cos\alpha$ 的值为_____.

10. 将函数 $y=\cos2x$ 的图象向左平移 $\frac{\pi}{4}$ 个单位后,得到函数 $y=g(x)$ 的图象,则 $y=g(x)$ 的图象关于点_____对称(填坐标).

11. 化简:$\frac{\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)\tan(\pi-\alpha)}{\tan(-\alpha-\pi)\sin(\pi+\alpha)}=$_____.

三、解答题(每小题 15 分,共 45 分)

12. 已知 $\tan\alpha$ 是关于 x 的方程 $2x^2-x-1=0$ 的一个实根,且 α 是第三象限角.

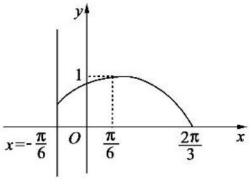
(1)求 $\frac{2\sin\alpha-\cos\alpha}{\sin\alpha+\cos\alpha}$ 的值;

(2)求 $3\sin^2\alpha-\sin\alpha\cos\alpha+2\cos^2\alpha$ 的值.

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

学习札记

13. 已知定义在区间$\left[-\pi,\frac{2\pi}{3}\right]$上的函数$y=f(x)$的图象关于直线$x=-\frac{\pi}{6}$对称，当$x\in\left[-\frac{\pi}{6},\frac{2\pi}{3}\right]$时，函数$f(x)=A\sin(\omega x+\varphi)\left(A>0,\omega>0,-\frac{\pi}{2}<\varphi<\frac{\pi}{2}\right)$的图象如图所示.



(1)求函数$y=f(x)$在$\left[-\pi,\frac{2\pi}{3}\right]$上的表达式；

(2)求方程$f(x)=\frac{\sqrt{3}}{2}$的解.

14. 已知函数$f(x)=A\sin\omega x$的周期是π，最大值是2，最小值是-2.

(1)求函数$f(x)$的解析式；

(2)求函数$f(x)$的单调增区间；

(3)求函数$f(x)$取的最大值时x的取值集合.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

学习札记

第二章　平面向量

2.1　向量的线性运算

2.1.1　向量的概念

学习目标

1. 理解向量、零向量、基线、向量模的意义；
2. 掌握向量的几何表示，了解平行向量、共线向量和相等向量的意义，并会判断向量间平行、相等的关系.

1 基础知识点对点

知识点一　向量的有关概念

1. 下列说法正确的有（　　）

①方向相同的向量叫相等向量；②零向量的长度为0；③共线向量是在同一条直线上的向量；④零向量是没有方向的向量；⑤共线向量不一定相等；⑥平行向量方向相同.

A. 2个　　B. 3个

C. 4个　　D. 5个

2. 判断正误

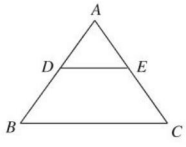
(1)若$|\boldsymbol{a}|=0$，则$\boldsymbol{a}=0$.（　　）

(2)若$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$，则$A,B,C,D$四点是平行四边形的四个顶点.（　　）

(3)若$|\boldsymbol{a}|>|\boldsymbol{b}|$，则$\boldsymbol{a}>\boldsymbol{b}$.（　　）

知识点二　相等向量与共线向量

3. 在$\triangle ABC$中，$AB=AC$，D，E分别是AB，AC的中点，则（　　）



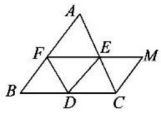
A. $\overrightarrow{AB}$与$\overrightarrow{AC}$共线

B. $\overrightarrow{DE}$与$\overrightarrow{CB}$共线

C. $\overrightarrow{AD}$与$\overrightarrow{AE}$相等

D. $\overrightarrow{AD}$与$\overrightarrow{BD}$相等

4. 如图，D,E,F分别是$\triangle ABC$各边上的中点，四边形$BCMF$是平行四边形，则与$\overrightarrow{CM}$模相等且共线的向量的个数是_____个.



2 课后拔高提能练

一、选择题

1. 两列火车从同一站台沿相反方向开去，走了相同的路程，设两列火车的位移向量分别为$\boldsymbol{a}$和$\boldsymbol{b}$，则下列说法中错误的是（　　）

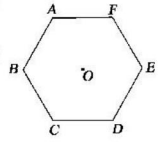
A. $\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$为平行向量

B. $\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$为模相等的向量

C. $\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$为共线向量

D. $\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$为相等向量

2. 如右图，O是正六边形$ABCDEF$的中心，下列结论正确的是（　　）



A. $\overrightarrow{OA}$与$\overrightarrow{EF}$不相等

B. $\overrightarrow{OB}$与$\overrightarrow{OE}$方向相反

C. $\overrightarrow{AE}$与$\overrightarrow{DB}$模不相等

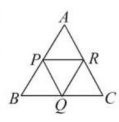
D. $\overrightarrow{BE}$与$\overrightarrow{EF}$相等

3. 已知$A=\{$与$\boldsymbol{a}$共线的向量$\}$，$B=\{$与$\boldsymbol{a}$长度相等的向量$\}$，$C=\{$与$\boldsymbol{a}$长度相等，方向相反的向量$\}$，其中$\boldsymbol{a}$为非零向量，则下列说法中错误的是（　　）

A. $C\subsetneq A$　　B. $A\cap B=\{\boldsymbol{a}\}$

C. $C\subsetneq B$　　D. $A\cap B\supsetneq\{\boldsymbol{a}\}$

4. 如图，在正$\triangle ABC$中，P,Q,R分别是AB,BC,AC的中点，则与向量$\overrightarrow{PQ}$相等的向量是（　　）



A. $\overrightarrow{PR}$与$\overrightarrow{QR}$

B. $\overrightarrow{AR}$与$\overrightarrow{RC}$

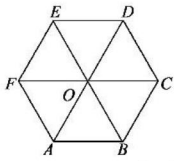
C. $\overrightarrow{RA}$与$\overrightarrow{CR}$

D. $\overrightarrow{PA}$与$\overrightarrow{QR}$

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

学习札记

5. 如图，在正六边形 $ABCDEF$ 中，点 O 为其中心，则下列判断错误的是（　　）



A. $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OC}$　　B. $\overrightarrow{AB}/\!/\overrightarrow{DE}$

C. $|\overrightarrow{AD}|=|\overrightarrow{BE}|$　　D. $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{FC}$

6. 在四边形 $ABCD$ 中，$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$，且 $|\overrightarrow{AB}|=|\overrightarrow{BC}|$，那么四边形 $ABCD$ 是（　　）

A. 平行四边形　　B. 矩形

C. 菱形　　D. 梯形

二、填空题

7. 若对任意向量 $\boldsymbol{b}$，均有 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$，则 $\boldsymbol{a}$ 为_____.

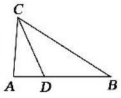
8. 给出下列四个命题：

①若 $|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|$，则 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$；②向量不可以比较大小；

③若 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{b}=\boldsymbol{c}$，则 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{c}$；④$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}\Leftrightarrow|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|$，$\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$.

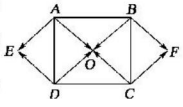
其中正确的命题为_____.（填正确命题的序号）

9. 如右图，$\triangle ABC$ 的内角 C 的角平分线 CD 交 AB 于 D，$\overrightarrow{AC}$ 的模为 2，$\overrightarrow{BC}$ 的模为 3，$\overrightarrow{AD}$ 的模为 1，那么 $\overrightarrow{DB}$ 的模为_____.



三、解答题

10. 如右图，O 是正方形 $ABCD$ 对角线的交点，四边形 $OAED$，$OCFB$ 都是正方形，在图中所示的向量中：



(1) 分别找出与 $\overrightarrow{AO}$，$\overrightarrow{BO}$ 相等的向量；

(2) 找出与 $\overrightarrow{AO}$ 共线的向量；

(3) 找出与 $\overrightarrow{AO}$ 模相等的向量；

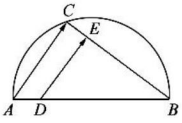
(4) 向量 $\overrightarrow{AO}$ 与 $\overrightarrow{CO}$ 是否相等.

11. 某人从 A 点出发向西走 10 m 到达 B 点，然后改变方向按北偏西 30°方向走 15 m 到达 C 点，最后又向东走 10 m 到达 D 点.

(1) 作出向量 $\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{BC}$，$\overrightarrow{CD}$；（用 1 cm 的线段表示 10 m 的长）

(2) 求向量 $\overrightarrow{DA}$ 的模.

12. 如图，半圆的直径 $AB=6$，C 是半圆上的一点，D，E 分别是 AB，BC 上的点，且 $AD=1$，$BE=4$，$DE=3$.



(1) 求证：向量 $\overrightarrow{AC}/\!/\overrightarrow{DE}$；

(2) 求 $|\overrightarrow{AC}|$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

学习札记

2.1.2　向量的加法

学习目标

1. 掌握向量加法的定义，会用向量加法的三角形法则和平行四边形法则作两个向量的和向量；
2. 掌握向量加法的交换律和结合律，并会用它们进行向量计算.

1 基础知识点对点

知识点一　向量的加法运算

1. 已知四边形 $ABCD$ 为菱形，则下列等式中成立的是（　　）

A. $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{CA}$　　B. $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{BC}$

C. $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{AD}$　　D. $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{DC}$

2. 化简：①$\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AB}=$_____.

②$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DF}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{FA}=$_____.

知识点二　向量加法的几何意义

3. 若向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 为非零向量，且 $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|$，则（　　）

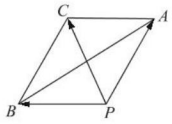
A. $\boldsymbol{a}\parallel\boldsymbol{b}$ 且 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 方向相同

B. $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 是共线向量

C. $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$

D. 无论什么关系都可以

4. 如图所示，若 P 为 $\triangle ABC$ 的外心，且 $\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}=\overrightarrow{PC}$，则 $\angle ACB=$_____.



2 课后拔高提能练

一、选择题

1. 化简 $\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{PQ}+\overrightarrow{PS}+\overrightarrow{SP}$ 的结果等于（　　）

A. $\overrightarrow{QP}$　　B. $\overrightarrow{OQ}$

C. $\overrightarrow{SP}$　　D. $\overrightarrow{SQ}$

2. 已知正方形 $ABCD$ 的边长为 1，$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{c}$，$\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{b}$，则 $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}|$ 等于（　　）

A. 0　　B. 3

C. $2\sqrt{2}$　　D. $\sqrt{2}$

3. 下列各式中结果为 $\boldsymbol{0}$ 的个数为（　　）

①$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}$；②$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{CA}$；③$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{BO}+\overrightarrow{CO}$；④$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{DC}$.

A. 1　　B. 2

C. 3　　D. 4

4. 已知平行四边形 $ABCD$，设 $(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD})+(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{DA})=\boldsymbol{a}$，而 $\boldsymbol{b}$ 是一非零向量，则下列结论正确的有（　　）

①$\boldsymbol{a}\parallel\boldsymbol{b}$；②$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}$；③$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}$；④$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|<|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|$.

A. ①③　　B. ②③

C. ②④　　D. ①②

5. 已知向量 $\boldsymbol{a}\parallel\boldsymbol{b}$，且 $|\boldsymbol{a}|>|\boldsymbol{b}|>0$，则向量 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 的方向（　　）

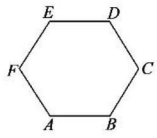
A. 与向量 $\boldsymbol{a}$ 方向相同

B. 与向量 $\boldsymbol{a}$ 方向相反

C. 与向量 $\boldsymbol{b}$ 方向相同

D. 与向量 $\boldsymbol{b}$ 方向相反

6. 在正六边形 $ABCDEF$ 中，若 $AB=1$，则 $|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{FE}+\overrightarrow{CD}|=$（　　）



A. 1　　B. $\sqrt{3}$

C. 2　　D. 3

二、填空题

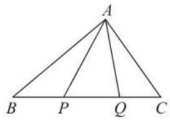
7. 已知 $|\overrightarrow{OA}|=|\overrightarrow{OB}|=1$，且 $\angle AOB=60°$，则 $|\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}|=$_____.

8. 设 $|\boldsymbol{a}|=8$，$|\boldsymbol{b}|=12$，则 $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|$ 的最大值为_____，最小值为_____.

9. $\boldsymbol{a}$ 表示向西走 2 km，$\boldsymbol{b}$ 表示向北走 2 km，则 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 表示_____.

三、解答题

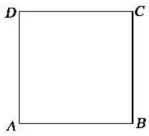
10. 如图所示，P,Q 是 $\triangle ABC$ 的边 BC 上两点，且 $BP=QC$. 求证：$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{AQ}$.



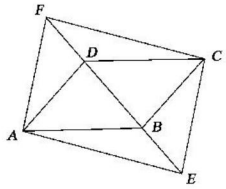
关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

学习札记

11. 如右图，在正方形 $ABCD$ 中，设边长为 1，求 $|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC}|$ 的值.



12. 如下图，在平行四边形 $ABCD$ 的对角线 DB、BD 的延长线上分别取点 E、F，使 $BE=DF$，用向量的方法证明，四边形 $AECF$ 也是平行四边形.



关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

学习札记

2.1.3　向量的减法

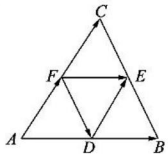
学习目标

1. 掌握向量减法的定义，理解相反向量的意义；
2. 掌握向量减法及几何意义，能作出两个向量的差向量.

1 基础知识点对点

知识点一　向量减法的几何意义

1. 如图，D,E,F 分别是 $\triangle ABC$ 的边 AB,BC,CA 的中点，则 $\overrightarrow{AF}-\overrightarrow{DB}$ 等于（　　）



A. $\overrightarrow{FD}$

B. $\overrightarrow{FC}$

C. $\overrightarrow{FE}$

D. $\overrightarrow{DF}$

2. 已知 $|\overrightarrow{AB}|=8,|\overrightarrow{AC}|=5$，则 $|\overrightarrow{BC}|$ 的取值范围为（　　）

A. $[3,8]$　　B. $(3,8)$

C. $[3,13]$　　D. $(3,13)$

知识点二　向量加减法的混合运算

3. 化简 $\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{CD}-\overrightarrow{AB}$ 得（　　）

A. $\overrightarrow{AB}$　　B. $\overrightarrow{DA}$

C. $\overrightarrow{BC}$　　D. $\mathbf{0}$

4. 若 O,E,F 是不共线的任意三点，则下列各式中成立的是_____.

①$\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{OF}+\overrightarrow{OE}$；②$\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{OF}-\overrightarrow{OE}$；③$\overrightarrow{EF}=-\overrightarrow{OF}+\overrightarrow{OE}$；④$\overrightarrow{EF}=-\overrightarrow{OF}-\overrightarrow{OE}$.

2 课后拔高提能练

一、选择题

1. 下列等式：

①$\boldsymbol{a}+\mathbf{0}=\boldsymbol{a}$；

②$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$；

③$-(-\boldsymbol{a})=\boldsymbol{a}$；

④$\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{a})=\mathbf{0}$；

⑤$\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{b})=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$.

其中正确的命题的个数是（　　）

A. 2　　B. 3

C. 4　　D. 5

2. 下列向量的运算中，正确的是（　　）

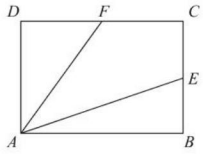
A. $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$

B. $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{CA}$

C. $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{CB}$

D. $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{BC}$

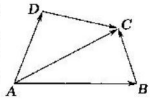
3. 如图，E,F 分别是矩形 $ABCD$ 的边 BC,CD 的中点，$|\overrightarrow{AB}|=4,|\overrightarrow{BC}|=3$，则向量 $\overrightarrow{AE}-\overrightarrow{AF}$ 的模等于（　　）



A. 2.5　　B. 3

C. 4　　D. 5

4. 在如右图所示的四边形 $ABCD$ 中，设 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a},\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{b},\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{c}$，则 $\overrightarrow{DC}$ 等于（　　）



A. $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$

B. $\boldsymbol{b}-(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c})$

C. $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$

D. $\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c}$

5. 若 O 是 $\triangle ABC$ 所在平面内一点，且满足 $|\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OC}|=|\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OA}|$，则 $\triangle ABC$ 的形状是（　　）

A. 等腰直角三角形　　B. 直角三角形

C. 等腰三角形　　D. 等边三角形

6. 平面内有四边形 $ABCD$ 和点 O，若 $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OD}$，则四边形 $ABCD$ 的形状是（　　）

A. 梯形　　B. 平行四边形

C. 矩形　　D. 菱形

二、填空题

7. 已知 $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a},\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$，若 $|\overrightarrow{OA}|=12,|\overrightarrow{OB}|=5$，且 $\angle AOB=90°$，则 $|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$ 的值为_____.

8. 已知 $|\boldsymbol{a}|=2,|\boldsymbol{b}|=8$，则 $|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$ 的最小值为_____.

9. 设 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 是非零向量，下列命题中：

①若 $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$，则 $|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|$；

②若 $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|$，则 $\boldsymbol{a}\parallel\boldsymbol{b}$；

③若 $|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$，则 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 方向相反；

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

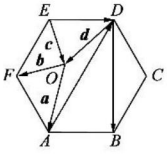
学习札记

④若$|\boldsymbol{a}|-|\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|$，则$|\boldsymbol{a}|>|\boldsymbol{b}|$，且$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$方向相反.

其中正确的是_____.

三、解答题

10. 如图所示，在正六边形$ABCDEF$中，点O是正六边形中一点，若已知$\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{OF}=\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{EO}=\boldsymbol{c}$，$\overrightarrow{DO}=\boldsymbol{d}$，试用向量$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$，$\boldsymbol{d}$表示$\overrightarrow{ED}$，$\overrightarrow{AD}$，$\overrightarrow{DB}$.



11. 已知$|\boldsymbol{a}|=6$，$|\boldsymbol{b}|=8$，$|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=10$，求$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|$的值.

12. 点D，E，F分别是$\triangle ABC$三边AB，AC，BC的中点，求证：

(1)$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BF}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CF}$；

(2)$\overrightarrow{FA}+\overrightarrow{EB}+\overrightarrow{DC}=\boldsymbol{0}$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

学习札记

2.1.4　数乘向量

学习目标

1. 掌握向量数乘的定义；
2. 理解两向量共线的含义；
3. 掌握向量数乘的运算法则，会应用运算法则进行有关的运算.

1 基础知识点对点

知识点一　数乘向量的概念

1. 设 $\boldsymbol{a}$ 是非零向量，λ 是非零实数，下列结论正确的是（　　）

A. $\boldsymbol{a}$ 与 $-\lambda\boldsymbol{a}$ 的方向相反

B. $|-\lambda\boldsymbol{a}|\geqslant|\boldsymbol{a}|$

C. $\boldsymbol{a}$ 与 $\lambda^2\boldsymbol{a}$ 的方向相同

D. $|-\lambda\boldsymbol{a}|=|\lambda|\boldsymbol{a}$

知识点二　数乘向量的运算

2. 已知 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 是两个非零向量，且 $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|$，则下列说法正确的是（　　）

A. $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$

B. $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$

C. $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 共线反向

D. 存在正实数 λ，使 $\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{b}$

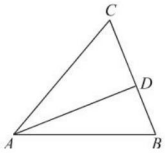
3. $\frac{1}{3}\left[\frac{1}{2}(2\boldsymbol{a}+8\boldsymbol{b})-(4\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b})\right]=$（　　）

A. $2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$　　B. $2\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}$

C. $\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}$　　D. $-(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a})$

知识点三　数乘向量的应用

4. 如图，在 $\triangle ABC$ 中，点 D 满足 $CD=2BD$，则 $\overrightarrow{AD}=$（　　）



A. $\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}-\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$

B. $\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$

C. $\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$

D. $\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}-\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$

5. 已知 O 是 $\triangle ABC$ 所在平面内一点，D 为 BC 边中点，且 $2\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\boldsymbol{0}$，那么（　　）

A. $\overrightarrow{AO}=\overrightarrow{OD}$　　B. $\overrightarrow{AO}=2\overrightarrow{OD}$

C. $\overrightarrow{AO}=3\overrightarrow{OD}$　　D. $2\overrightarrow{AO}=\overrightarrow{OD}$

6. 设 $\boldsymbol{x}$ 是未知向量，$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 是已知向量，且满足 $3(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{a})+2(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a})+\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$，则 $\boldsymbol{x}=$_____.

2 课后拔高提能练

一、选择题

1. 下列各式中计算正确的是（　　）

A. $2(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$

B. $3(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+3(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a})=\boldsymbol{0}$

C. $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BA}=2\overrightarrow{AB}$

D. $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+3\boldsymbol{a}-5\boldsymbol{b}=4\boldsymbol{a}-4\boldsymbol{b}$

2. 下面给出四个命题：

①对于实数 m 和向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 恒有：$m(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})=m\boldsymbol{a}-m\boldsymbol{b}$；

②对于实数 m,n 和向量 $\boldsymbol{a}$ 恒有：$(m-n)\boldsymbol{a}=m\boldsymbol{a}-n\boldsymbol{a}$；

③若 $m\boldsymbol{a}=m\boldsymbol{b}(m\in\mathbf{R},m\neq0)$，则 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$；

④若 $m\boldsymbol{a}=n\boldsymbol{a}(m,n\in\mathbf{R},\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0})$，则 $m=n$.

其中正确命题的个数是（　　）

A. 1　　B. 2

C. 3　　D. 4

3. 设 D,E,F 分别为 $\triangle ABC$ 的三边 BC,CA,AB 的中点，则 $\overrightarrow{EB}+\overrightarrow{FC}=$（　　）

A. $\overrightarrow{AD}$　　B. $\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$

C. $\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$　　D. $\overrightarrow{BC}$

4. **(2018·全国卷Ⅰ)** 在 $\triangle ABC$ 中，AD 为 BC 边上的中线，E 为 AD 的中点，则 $\overrightarrow{EB}=$（　　）

A. $\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}-\frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$　　B. $\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}-\frac{3}{4}\overrightarrow{AC}$

C. $\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$　　D. $\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}+\frac{3}{4}\overrightarrow{AC}$

5. 已知 O,A,M,B 为平面上四点，且 $\overrightarrow{OM}=\lambda\overrightarrow{OB}+(1-\lambda)\overrightarrow{OA},\lambda\in(1,2)$，则（　　）

A. 点 M 在线段 AB 上

B. 点 B 在线段 AM 上

C. 点 A 在线段 BM 上

D. O,A,M,B 四点共线

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

学习札记

6. 在△ABC中，已知D是AB边上一点，若$\overrightarrow{AD}=2\overrightarrow{DB}$，$\overrightarrow{CD}=\frac{1}{3}\overrightarrow{CA}+\lambda\overrightarrow{CB}$，则$\lambda$等于　　(　　)

A. $\frac{1}{3}$　　B. $-\frac{1}{3}$

C. $\frac{2}{3}$　　D. $-\frac{2}{3}$

二、填空题

7. 化简$\frac{2}{3}\left[(4\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b})+\frac{1}{3}\boldsymbol{b}-\frac{1}{4}(6\boldsymbol{a}-7\boldsymbol{b})\right]$的结果为_____.

8. O为平行四边形$ABCD$的对角线的交点，$\overrightarrow{AB}=4\boldsymbol{e}_1$，$\overrightarrow{BC}=6\boldsymbol{e}_2$，则$3\boldsymbol{e}_2-2\boldsymbol{e}_1=$_____.

9. 设$\boldsymbol{a}_0$为单位向量，下述命题中：①若$\boldsymbol{a}$为平面内的某个向量，则$\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|\boldsymbol{a}_0$；②若$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{a}_0$平行，则$\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|\boldsymbol{a}_0$；③若$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{a}_0$平行且$|\boldsymbol{a}|=1$，则$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}_0$，其中不正确的有_____.

三、解答题

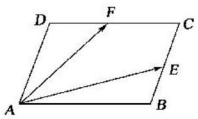
10. 计算下列各式：

(1) $4(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})-3(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})$；

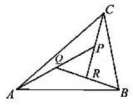
(2) $3(\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})-(2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}-3\boldsymbol{c})$；

(3) $\frac{2}{5}(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})-\frac{1}{3}(2\boldsymbol{a}+4\boldsymbol{b})+\frac{2}{15}(2\boldsymbol{a}+13\boldsymbol{b})$.

11. 如右图，在平行四边形$ABCD$中，E、F分别为BC和CD的中点，记$\overrightarrow{AE}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{AF}=\boldsymbol{b}$，试用$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$表示$\overrightarrow{AB}$和$\overrightarrow{AD}$.



12. 如图，在△ABC中，设$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{b}$，$AP$的中点为$Q$，$BQ$的中点为$R$，$CR$的中点恰为$P$，试用$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$表示$\overrightarrow{AP}$.



关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

学习札记

2.1.5　向量共线的条件与轴上向量坐标运算

学习目标

1. 掌握平行向量基本定理并理解两个向量共线的条件及单位向量的含义；
2. 掌握轴上向量的坐标公式、数轴上两点间的距离公式，并能解决实际问题.

1 基础知识点对点

知识点一　平行向量基本定理

1. 设 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 是两个不共线向量，且向量 $\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}$ 与 $-(\boldsymbol{b}-2\boldsymbol{a})$ 共线，则 $\lambda=$　　(　　)

A. 0　　B. $-\frac{1}{2}$

C. -2　　D. $\frac{1}{2}$

2. 下列各组向量中，能推出 $\boldsymbol{a}\parallel\boldsymbol{b}$ 的是　　(　　)

①$\boldsymbol{a}=-3\boldsymbol{e},\boldsymbol{b}=2\boldsymbol{e}$；②$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{e}_1-\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{b}=\frac{\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2}{2}-\boldsymbol{e}_1$；

③$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{e}_1-\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{b}=\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2+\frac{\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2}{2}$.

A. ①　　B. ①②

C. ②③　　D. ①②③

知识点二　轴上向量坐标及长度计算

3. 已知数轴上两点 A,B 的坐标分别是 $-4,-1$，则 AB 与 $|\overrightarrow{AB}|$ 分别是　　(　　)

A. $-3,-3$　　B. $3,3$

C. $3,-3$　　D. $-6,6$

4. 已知数轴上点 A,B,C 的坐标分别为 $1,-4,-3$，则 $|\overrightarrow{AC}|+|\overrightarrow{BC}|=$_____，$|\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BC}|=$_____.

2 课后拔高提能练

一、选择题

1. 已知非零向量是 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$，且 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b},\overrightarrow{BC}=-5\boldsymbol{a}+6\boldsymbol{b},\overrightarrow{CD}=7\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}$，则一定共线的三点是　　(　　)

A. A,B,D　　B. A,B,C

C. B,C,D　　D. A,C,D

2. 在四边形 $ABCD$ 中，$\overrightarrow{AB}=\frac{1}{2}\overrightarrow{DC}$，则四边形 $ABCD$ 是　　(　　)

A. 平行四边形　　B. 梯形

C. 菱形　　D. 矩形

3. 设 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2$ 是两个不共线的向量，若向量 $\boldsymbol{m}=\boldsymbol{e}_1+k\boldsymbol{e}_2$ $(k\in\mathbf{R})$ 与向量 $\boldsymbol{n}=\boldsymbol{e}_2-\boldsymbol{e}_1$ 共线，则　　(　　)

A. $k=0$　　B. $k=-1$

C. $k=2$　　D. $k=\frac{1}{2}$

4. 设 P 是 $\triangle ABC$ 所在平面内的一点，$\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{BA}=2\overrightarrow{BP}$，则　　(　　)

A. P,A,C 三点共线

B. P,A,B 三点共线

C. P,B,C 三点共线

D. 以上均不正确

5. 已知 $\triangle ABC$ 的三个顶点 A,B,C 及平面内一点 P 满足：$\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}=\overrightarrow{AB}$，则点 P 与 $\triangle ABC$ 的关系为　　(　　)

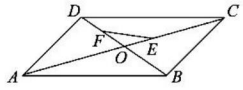
A. P 在 $\triangle ABC$ 的内部

B. P 在 $\triangle ABC$ 的外部

C. P 在边 AB 所在直线上

D. P 是 AC 边上的一个三等分点

6. 已知平行四边形 $ABCD$ 的对角线分别为 AC,BD，且 $\overrightarrow{AE}=2\overrightarrow{EC}$，且 $\overrightarrow{BF}=3\overrightarrow{FD}$，则　　(　　)



A. $\overrightarrow{FE}=-\frac{1}{12}\overrightarrow{AB}-\frac{1}{12}\overrightarrow{AD}$

B. $\overrightarrow{FE}=-\frac{1}{12}\overrightarrow{AB}-\frac{5}{12}\overrightarrow{AD}$

C. $\overrightarrow{FE}=\frac{5}{12}\overrightarrow{AB}-\frac{1}{12}\overrightarrow{AD}$

D. $\overrightarrow{FE}=\frac{5}{12}\overrightarrow{AB}-\frac{5}{12}\overrightarrow{AD}$

二、填空题

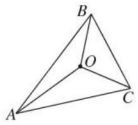
7. 在数轴上，已知 $\overrightarrow{AB}=3,\overrightarrow{BC}=10,\overrightarrow{CD}=-6$，则 $\overrightarrow{AC}=$_____，$\overrightarrow{BD}=$_____.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

学习札记

8. 已知数轴上三点 A,B,C 的坐标分别为 $3,-2,4$，则 $\overrightarrow{AB}=$_____，$|\overrightarrow{CA}|=$_____.

9. 如图，设 O 是 $\triangle ABC$ 内部一点，且 $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}=-2\overrightarrow{OB}$，则 $\triangle ABC$ 与 $\triangle AOC$ 的面积之比为_____.



三、解答题

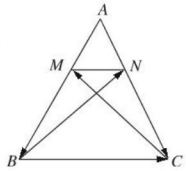
10. 已知数轴上三点 A,B,C 的坐标分别为 x_1,x_2,x_3，求 $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}$ 的坐标和长度.

(1) $x_1=3,x_2=-4,x_3=6$；

(2) $x_1=-14,x_2=8,x_3=-7$.

11. 设 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2$ 是两个不共线的向量，已知 $\overrightarrow{AB}=2\boldsymbol{e}_1+k\boldsymbol{e}_2,\overrightarrow{CB}=\boldsymbol{e}_1+3\boldsymbol{e}_2,\overrightarrow{CD}=2\boldsymbol{e}_1-\boldsymbol{e}_2$，若三点 A,B,D 共线，求 k 的值.

12. 如图所示，已知在 $\triangle ABC$ 中，$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a},\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{b}$，$M,N$ 分别在边 AB,AC 上，且 $\overrightarrow{BN}=-\boldsymbol{a}+\frac{1}{3}\boldsymbol{b},\overrightarrow{CM}=\frac{1}{3}\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$，求证：$MN\parallel BC$，且 $MN=\frac{1}{3}BC$.



关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

学习札记

2.2　向量的分解与向量的坐标运算

2.2.1　平面向量基本定理

学习目标

1. 了解平面向量的基本定理及其意义；
2. 会用平面向量基本定理解决简单的几何问题；
3. 掌握直线的向量参数方程，尤其是线段中点的向量的表达式.

1 基础知识点对点

知识点一　基底的概念

1. 已知向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 非零不共线，则下列各组向量中，可作为平面向量的一组基底的是　（　）

A. $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$　　B. $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}$

C. $\boldsymbol{a}+\frac{1}{2}\boldsymbol{b}$ 与 $2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$　　D. $2\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$

2. 下面三种说法，其中正确的是　（　）

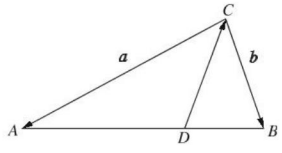
①一个平面内只有一对不共线向量可作为表示该平面的基底；②一个平面内有无数多对不共线向量可作为该平面所有向量的基底；③零向量不可以作为基底中的向量.

A. ①②　　B. ②③

C. ①③　　D. ①②③

知识点二　平面向量基本定理的应用

3. 如图，已知 $\overrightarrow{CA}=\boldsymbol{a},\overrightarrow{CB}=\boldsymbol{b},\overrightarrow{AD}=2\overrightarrow{DB}$，用 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 表示 $\overrightarrow{DC}$ 为　（　）



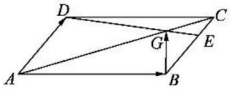
A. $\overrightarrow{DC}=-\frac{5}{3}\boldsymbol{a}+\frac{2}{3}\boldsymbol{b}$

B. $\overrightarrow{DC}=-\frac{1}{2}\boldsymbol{a}-\frac{1}{3}\boldsymbol{b}$

C. $\overrightarrow{DC}=-\frac{2}{3}\boldsymbol{a}-\frac{1}{3}\boldsymbol{b}$

D. $\overrightarrow{DC}=-\frac{1}{3}\boldsymbol{a}-\frac{2}{3}\boldsymbol{b}$

4. 如右图，平行四边形 $ABCD$ 中，E 是边 BC 上一点，G 为 AC 与 DE 的交点，且 $\overrightarrow{AG}=3\overrightarrow{GC}$，若 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{b}$，则用 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 表示 $\overrightarrow{BG}=$ _____.



知识点三　直线向量参数方程式的应用

5. 已知平面内不共线的四点 O,A,B,C 满足 $\overrightarrow{OB}=\frac{1}{3}\overrightarrow{OA}+\frac{2}{3}\overrightarrow{OC}$，则 $|\overrightarrow{AB}|:|\overrightarrow{BC}|=$　（　）

A. 1∶3　　B. 3∶1

C. 1∶2　　D. 2∶1

6. 在△ABC 中，点 D 在线段 BC 的延长线上，且 $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{CD}$，点 O 在线段 CD 上（点 O 与点 C,D 不重合），若 $\overrightarrow{AO}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}$，则 x 的取值范围是　（　）

A. $(0,1)$　　B. $\left(0,\frac{1}{3}\right)$

C. $(-1,0)$　　D. $\left(-\frac{1}{3},0\right)$

2 课后拔高提能练

一、选择题

1. 设 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2$ 是平面内所有向量的一组基底，则下列向量中不能作为基底的是　（　）

A. $\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2$ 与 $\boldsymbol{e}_1-3\boldsymbol{e}_2$　　B. $4\boldsymbol{e}_1-\boldsymbol{e}_2$ 与 $2\boldsymbol{e}_1$

C. $\boldsymbol{e}_1-2\boldsymbol{e}_2$ 与 $4\boldsymbol{e}_2-2\boldsymbol{e}_1$　　D. $\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2$ 与 $\boldsymbol{e}_1-\boldsymbol{e}_2$

2. 已知向量 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2$ 不共线，实数 x,y 满足 $(3x-4y)\boldsymbol{e}_1+(2x-3y)\boldsymbol{e}_2=6\boldsymbol{e}_1+3\boldsymbol{e}_2$，则 $x-y$ 的值为　（　）

A. 3　　B. −3　　C. 0　　D. 2

3. 已知 A,B,C 三点共线，O 是该直线外的一点，且满足 $m\overrightarrow{OA}-2\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\boldsymbol{0}$，则 m 的值为　（　）

A. 1　　B. 2　　C. −3　　D. −4

4. 设 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2$ 为一组基底，$\boldsymbol{a}=-\boldsymbol{e}_1+2\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{b}=\boldsymbol{e}_1-\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{c}=3\boldsymbol{e}_1-2\boldsymbol{e}_2$，且 $\boldsymbol{c}=p\boldsymbol{a}+q\boldsymbol{b}$，则 $p+q$ 的值为　（　）

A. 3　　B. −3　　C. 5　　D. −5

5. 已知△ABC 的三个顶点 A,B,C 及平面内一点 P 满足 $\overrightarrow{PA}-\overrightarrow{PB}-\overrightarrow{PC}=\overrightarrow{AB}$，则点 P 与△ABC 的关系是　（　）

A. P 在△ABC 的内部

B. P 在△ABC 的外部

C. P 是 AB 边上的一个三等分点

D. P 是 AC 边上的一个三等分点

6. 在△ABC 中，点 G 是△ABC 的重心，若存在实数 λ,μ，使 $\overrightarrow{AG}=\lambda\overrightarrow{AB}+\mu\overrightarrow{AC}$，则　（　）

A. $\lambda=\frac{1}{3},\mu=\frac{1}{3}$　　B. $\lambda=\frac{2}{3},\mu=\frac{1}{3}$

C. $\lambda=\frac{1}{3},\mu=\frac{2}{3}$　　D. $\lambda=\frac{2}{3},\mu=\frac{2}{3}$

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

学习札记

二、填空题

7. 设 D,E,F 分别为 $\triangle ABC$ 的边 BC,CA,AB 的中点，且 $\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{a},\overrightarrow{CA}=\boldsymbol{b}$，给出下列命题：

①$\overrightarrow{AD}=-\frac{1}{2}\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$；

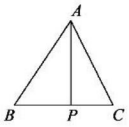
②$\overrightarrow{BE}=\boldsymbol{a}+\frac{1}{2}\boldsymbol{b}$；

③$\overrightarrow{CF}=-\frac{1}{2}\boldsymbol{a}+\frac{1}{2}\boldsymbol{b}$；

④$\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{CF}=\boldsymbol{0}$.

其中正确命题的序号为_____.

8. 如图，在 $\triangle ABC$ 中，P 为 BC 边上一点，且 $\overrightarrow{BP}=\frac{4}{3}\overrightarrow{PC}$，则用 $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}$ 为基底表示 $\overrightarrow{AP}=$_____.

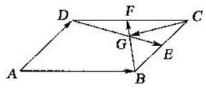


9. 在 $\triangle ABC$ 中，M 为边 BC 上任意一点，N 为 AM 的中点，$\overrightarrow{AN}=\lambda\overrightarrow{AB}+\mu\overrightarrow{AC}$，则 $\lambda+\mu=$_____.

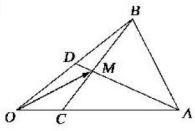
三、解答题

10. 已知 $\boldsymbol{a}=2\boldsymbol{e}_1-3\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{b}=2\boldsymbol{e}_1+3\boldsymbol{e}_2$，其中 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2$ 不共线，向量 $\boldsymbol{c}=2\boldsymbol{e}_1-9\boldsymbol{e}_2$，问是否存在这样的实数 λ,μ，使 $\boldsymbol{d}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{c}$ 共线？

11. 如右图，$\square ABCD$ 中，E,F 分别是 BC,DC 的中点，G 为 DE 与 BF 的交点，若 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a},\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{b}$，选择基底 $\{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\}$，试写出下列向量在此基底下的分解式：$\overrightarrow{DE},\overrightarrow{BF},\overrightarrow{CG}$.



12. 如右图所示，在 $\triangle ABO$ 中，$\overrightarrow{OC}=\frac{1}{4}\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OD}=\frac{1}{2}\overrightarrow{OB}$，$AD$ 与 BC 相交于点 M，设 $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a},\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$. 试用 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 表示向量 $\overrightarrow{OM}$.



关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

学习札记

2.2.2　向量的正交分解与向量的直角坐标运算

学习目标

1. 理解向量的直角坐标的概念，会写出给定向量的坐标；
2. 掌握向量的直角坐标运算，能够准确运用向量的加法、减法，实数与向量的积的坐标运算.

1 基础知识点对点

知识点一　平面向量的坐标表示

1. 已知点 $M(5,-6)$ 和向量 $\boldsymbol{a}=(1,-2)$，若 $\overrightarrow{MN}=-3\boldsymbol{a}$，则点 N 的坐标为　（　）

A. $(2,0)$　　B. $(-3,6)$

C. $(6,2)$　　D. $(-2,0)$

2. 给出下面几种说法：

①相等向量的坐标相同；②平面上一个向量对应于平面上唯一的坐标；③一个坐标对应于唯一的一个向量；④平面上一个点与以原点为始点，该点为终点的向量一一对应.

其中正确说法的个数是　（　）

A. 1 个　　B. 2 个

C. 3 个　　D. 4 个

知识点二　平面向量的坐标运算

3. 已知 $\boldsymbol{a}=(5,-2)$，$\boldsymbol{b}=(-4,-3)$，$\boldsymbol{c}=(x,y)$，若 $\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}$，则 $\boldsymbol{c}$ 等于　（　）

A. $(-13,4)$　　B. $(13,-4)$

C. $(-13,-4)$　　D. $(13,4)$

4. 已知向量 $\boldsymbol{a}=(2,4)$，$\boldsymbol{b}=(-1,1)$，则 $2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=$（　）

A. $(5,7)$　　B. $(5,9)$

C. $(3,7)$　　D. $(3,9)$

5. 已知 $A(2,3)$，$B(4,-3)$，且 $\overrightarrow{AP}=2\overrightarrow{BP}$，则 P 点的坐标为　（　）

A. $(6,9)$　　B. $(3,0)$

C. $(6,-9)$　　D. $(2,3)$

2 课后拔高提能练

一、选择题

1. 已知点 $A(0,1)$，$B(3,2)$，向量 $\overrightarrow{AC}=(-4,-3)$，则向量 $\overrightarrow{BC}=$　（　）

A. $(-1,-4)$　　B. $(-7,-4)$

C. $(1,4)$　　D. $(1,4)$

2. 在平行四边形 $ABCD$ 中，AC 为一条对角线，$\overrightarrow{AB}=(2,4)$，$\overrightarrow{AC}=(1,3)$，则 $\overrightarrow{DA}=$　（　）

A. $(2,4)$　　B. $(3,5)$

C. $(1,1)$　　D. $(-1,-1)$

3. 已知 $\boldsymbol{a}=\overrightarrow{AB}$，$B(1,0)$，$\boldsymbol{b}=(-3,4)$，$\boldsymbol{c}=(-1,1)$，且 $\boldsymbol{a}=3\boldsymbol{b}-2\boldsymbol{c}$，则点 A 的坐标为　（　）

A. $(8,-10)$　　B. $(-8,10)$

C. $(-10,8)$　　D. $(10,-8)$

4. 若向量 $\boldsymbol{a}=(1,1)$，$\boldsymbol{b}=(1,-1)$，$\boldsymbol{c}=(-1,2)$，则 $\boldsymbol{c}$ 用 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 表示为　（　）

A. $-\frac{1}{2}\boldsymbol{a}+\frac{3}{2}\boldsymbol{b}$　　B. $\frac{1}{2}\boldsymbol{a}-\frac{3}{2}\boldsymbol{b}$

C. $\frac{3}{2}\boldsymbol{a}-\frac{1}{2}\boldsymbol{b}$　　D. $-\frac{3}{2}\boldsymbol{a}+\frac{1}{2}\boldsymbol{b}$

5. 若向量 $\boldsymbol{a}=(x+3,x^2-3x-4)$ 与 $\overrightarrow{AB}$ 相等，已知 $A(1,2)$，$B(3,2)$，则 x 的值为　（　）

A. -1　　B. -1 或 4

C. 4　　D. 1 或 -4

6. 已知平面向量 $\boldsymbol{a}=(x,1)$，$\boldsymbol{b}=(-x,x^2)$，则 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$　（　）

A. 平行于 x 轴

B. 平行于第一、三象限的角平分线

C. 平行于 y 轴

D. 平行于第二、四象限的角平分线

二、填空题

7. 已知 $M(3,-2)$，$N(-5,-1)$，$\overrightarrow{MP}=\frac{1}{2}\overrightarrow{MN}$，则 P 点的坐标为_____.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

学习札记

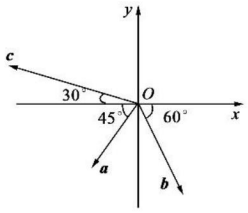
8. 平面上有 $A(2,-1)$，$B(1,4)$，$D(4,-3)$，点 C 在直线 AB 上，且 $\overrightarrow{AC}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$，连接 DC，延长至 E，使 $|\overrightarrow{CE}|=\frac{1}{4}|\overrightarrow{ED}|$，则点 E 的坐标为_____.

9. 已知 $A(2,3)$，$B(5,4)$，$C(7,10)$，$\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{AB}+\lambda\overrightarrow{AC}(\lambda\in\mathbf{R})$，点 P 在第三象限，则 λ 的取值范围为_____.

三、解答题

10. 已知 $A(-2,4)$，$B(3,-1)$，$C(-3,-4)$，且 $\overrightarrow{CM}=3\overrightarrow{CA}$，$\overrightarrow{CN}=2\overrightarrow{CB}$，求 M，N 的坐标及 $\overrightarrow{MN}$.

11. 已知 $|\boldsymbol{a}|=3$，$|\boldsymbol{b}|=4$，$|\boldsymbol{c}|=8$，它们的方向如图所示，分别求它们的坐标.



12. 已知点 $O(0,0)$，$A(1,2)$，$B(4,5)$ 及 $\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{AB}$，求：

(1) t 为何值时，P 在 x 轴上？P 在 y 轴上？P 在第二象限？

(2) 四边形 $OABP$ 能否成为平行四边形？若能，求出相应的 t 值；若不能，请说明理由.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

学习札记

2.2.3　用平面向量坐标表示向量共线条件

学习目标

1. 理解用坐标表示的平面向量共线的条件；
2. 会根据平面向量坐标判断向量是否共线.

1 基础知识点对点

知识点一　向量共线的判断与证明

1. 下列各组向量中：①$\boldsymbol{e}_1=(-1,2)$，$\boldsymbol{e}_2=(5,7)$；②$\boldsymbol{e}_1=(3,5)$，$\boldsymbol{e}_2=(6,10)$；③$\boldsymbol{e}_1=(2,3)$，$\boldsymbol{e}_2=\left(\frac{1}{2},-\frac{3}{4}\right)$，其中能作为表示它们所在平面内所有向量的基底的是（　　）

A. ①　　B. ①③

C. ②③　　D. ①②③

2. 已知$A(-1,1)$，$B(1,3)$，$C(2,5)$，试判断A，B，C三点之间的关系.

知识点二　由向量共线确定参数

3. 已知$\boldsymbol{a}=(4,2)$，$\boldsymbol{b}=(6,y)$，若$\boldsymbol{a}\parallel\boldsymbol{b}$，则$y$等于（　　）

A. -12　　B. 3

C. -3　　D. 12

4. 已知向量$\boldsymbol{a}=(1,2)$，$\boldsymbol{b}=(1,0)$，$\boldsymbol{c}=(3,4)$，若λ为实数，$(\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b})\parallel\boldsymbol{c}$，则$\lambda=$_____.

5. 已知$\boldsymbol{a}=(2,3)$与$\boldsymbol{b}=(-4,y)$共线，则$y=$_____.

2 课后拔高提能练

一、选择题

1. 已知向量$\boldsymbol{a}=(4,2)$，$\boldsymbol{b}=(x,3)$，且$\boldsymbol{a}\parallel\boldsymbol{b}$，则$x$的值等于（　　）

A. 6　　B. -6

C. 9　　D. 12

2. 若向量$\boldsymbol{a}=(2\cos\alpha,-1)$，$\boldsymbol{b}=(\sqrt{2},\tan\alpha)$，且$\boldsymbol{a}\parallel\boldsymbol{b}$，则$\sin\alpha=$（　　）

A. $\frac{\sqrt{2}}{2}$　　B. $-\frac{\sqrt{2}}{2}$

C. $\frac{\pi}{4}$　　D. $-\frac{\pi}{4}$

3. 已知$A(2,-2)$，$B(4,3)$，向量$\boldsymbol{p}=(2k-1,7)$，$\boldsymbol{p}\parallel\overrightarrow{AB}$，则$k$的值为（　　）

A. $-\frac{9}{10}$　　B. $\frac{9}{10}$

C. $-\frac{19}{10}$　　D. $\frac{19}{10}$

4. 已知平行四边形$OABC$（O为坐标原点），$\overrightarrow{OA}=(2,0)$，$\overrightarrow{OB}=(3,1)$，则$\overrightarrow{OC}$等于（　　）

A. $(1,1)$　　B. $(1,-1)$

C. $(-1,-1)$　　D. $(-1,1)$

5. 已知$\overrightarrow{OA}=(1,-3)$，$\overrightarrow{OB}=(2,-1)$，$\overrightarrow{OC}=(k+1,k-2)$，若$A$，$B$，$C$三点不能构成三角形，则$k$的值为（　　）

A. -2　　B. $\frac{1}{2}$

C. 1　　D. -1

6. 已知向量$\boldsymbol{a}=(1,3)$，$\boldsymbol{b}=(m-1,2m+3)$在同一平面内，若对于这一平面内的任意向量，都有且只有一对实数λ，μ，使得$\boldsymbol{c}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b}$，则实数$m$满足（　　）

A. $m\neq-2$　　B. $m\neq6$

C. $m\neq-\frac{8}{7}$　　D. $m\neq-6$

二、填空题

7. 已知向量$\boldsymbol{a}=(m,4)$，$\boldsymbol{b}=(3,-2)$，且$\boldsymbol{a}\parallel\boldsymbol{b}$，则$m=$_____.

8. 已知点$A(-1,2)$，$B(2,3)$，$C(3,-1)$，且$\overrightarrow{AD}=2\overrightarrow{AB}-3\overrightarrow{BC}$，则点$D$的坐标为_____.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

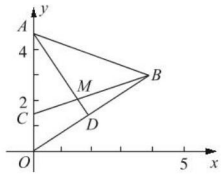
学习札记

9. 若对于 n 个向量 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_n$ 存在 n 个不全为零的实数 $k_1,k_2,\cdots,k_n$，使得 $k_1\boldsymbol{a}_1+k_2\boldsymbol{a}_2+\cdots+k_n\boldsymbol{a}_n=\boldsymbol{0}$ 成立，则称向量 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_n$“线性相关”. 依此规定：能说明 $\boldsymbol{a}_1=(1,0),\boldsymbol{a}_2=(1,-1),\boldsymbol{a}_3=(2,2)$，“线性相关”的实数 k_1,k_2,k_3 依次可取_____.（写成一组数值即可，不必考虑所有情况）

三、解答题

10. 已知 $P(2,3),Q(5,2)$，过 P、Q 的直线上有一点 A，使 $|\overrightarrow{PA}|:|\overrightarrow{AQ}|=3:1$，求点 A 的坐标.

11. 如图所示，已知 $\triangle AOB$ 中，$A(0,5),O(0,0),B(4,3)$，$\overrightarrow{OC}=\frac{1}{4}\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OD}=\frac{1}{2}\overrightarrow{OB}$，$AD$ 与 BC 相交于点 M，求点 M 的坐标.



12. 已知 A,B,C 三点的坐标分别为 $(-1,0),(3,-1),(1,2)$，并且 $\overrightarrow{AE}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$，$\overrightarrow{BF}=\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$，求证：$\overrightarrow{EF}\parallel\overrightarrow{AB}$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

学习札记

2.3　平面向量的数量积

2.3.1　向量数量积的物理背景与定义

学习目标

1. 理解平面向量数量积的含义及其物理意义；
2. 会求平面向量的数量积及向量的射影.

1 基础知识点对点

知识点一　平面向量的数量积的定义

1. 给出下面四个命题：

①$\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}\Leftrightarrow\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$；②若$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$且$\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{b}$，则$\boldsymbol{b}=0$；③若$\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0},\boldsymbol{b}\neq\boldsymbol{0}$，则$|\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|$；④当$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$反向时，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=-|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|$.

正确命题的个数是　（　）

A. 1　　B. 2

C. 3　　D. 4

2. 若$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$满足$|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|=1$，$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$的夹角为$60°$，则$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$等于　（　）

A. $\frac{1}{2}$　　B. $\frac{3}{2}$

C. $1+\frac{\sqrt{3}}{2}$　　D. 2

知识点二　正射影

3. 已知$|\boldsymbol{a}|=6$，$|\boldsymbol{b}|=3$，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=-12$，则$\boldsymbol{a}$在$\boldsymbol{b}$方向上的投影是_____.

知识点三　求夹角

4. 已知向量$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$满足$|\boldsymbol{a}|=1$，$|\boldsymbol{b}|=4$，且$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=2$，则$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$的夹角为　（　）

A. $\frac{\pi}{6}$　　B. $\frac{\pi}{4}$

C. $\frac{\pi}{3}$　　D. $\frac{\pi}{2}$

5. 若$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}>0$，则$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$的夹角$\theta$的取值范围是　（　）

A. $\left[0,\frac{\pi}{2}\right)$　　B. $\left[\frac{\pi}{2},\pi\right)$

C. $\left(\frac{\pi}{2},\pi\right]$　　D. $\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$

2 课后拔高提能练

一、选择题

1. 下列结论正确的是　（　）

A. 单位向量都相等

B. 对于任意$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$，必有$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|\leqslant|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|$

C. 若$\boldsymbol{a}\parallel\boldsymbol{b}$，则一定存在实数$\lambda$，使$\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{b}$

D. 若$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$，则$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$或$\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$

2. 下列命题中正确的是　（　）

A. 若$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$，则$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$或$\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$

B. 若$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$，则对任何一个非零向量$\boldsymbol{b}$，有$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$

C. 若向量$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$满足$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}>0$，则$\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle$为锐角

D. 若$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$的夹角为$\theta$，则$|\boldsymbol{b}|\cos\theta$表示向量$\boldsymbol{b}$在向量$\boldsymbol{a}$方向上的射影长

3. 在$\mathrm{Rt}\triangle ABC$中，$\angle C=90°$，$AC=4$，则$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$等于　（　）

A. -16　　B. -8

C. 8　　D. 16

4. 已知等边$\triangle ABC$的边长为4，则$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}$等于　（　）

A. 8　　B. -8

C. $8\sqrt{3}$　　C. $-8\sqrt{3}$

5. 在$\triangle ABC$中，$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{b}$，当$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}<0$时，$\triangle ABC$为　（　）

A. 直角三角形　　B. 锐角三角形

C. 钝角三角形　　D. 等腰直角三角形

6. 若两个非零向量$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$满足$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=2|\boldsymbol{a}|$，则向量$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$与$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$的夹角是　（　）

A. $\frac{\pi}{6}$　　B. $\frac{\pi}{3}$

C. $\frac{2\pi}{3}$　　D. $\frac{5\pi}{6}$

二、填空题

7. 已知向量$\boldsymbol{a}$和向量$\boldsymbol{b}$的夹角为$30°$，$|\boldsymbol{a}|=2$，$|\boldsymbol{b}|=\sqrt{3}$，则向量$\boldsymbol{a}$和向量$\boldsymbol{b}$的数量积$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=$_____.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

学习札记

8. 已知$|\boldsymbol{a}|=4$，且$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=16$，若$\boldsymbol{a}$在$\boldsymbol{b}$方向上的射影数量为4，则$|\boldsymbol{b}|=$_____.

9. 已知$|\boldsymbol{a}|=3$，$|\boldsymbol{b}|=5$，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=12$，则$\boldsymbol{a}$在$\boldsymbol{b}$上的正射影的数量为_____.

三、解答题

10. 已知向量$\boldsymbol{a}$与向量$\boldsymbol{b}$的夹角为θ，$|\boldsymbol{a}|=2$，$|\boldsymbol{b}|=3$，分别在下列条件下求$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$.

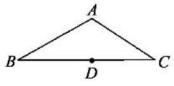
(1)$\theta=135°$；(2)$\boldsymbol{a}\parallel\boldsymbol{b}$；(3)$\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$.

11. 边长为1的正三角形ABC中，设$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{c}$，$\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{CA}=\boldsymbol{b}$，求$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a}$的值.

12. 如图所示，在等腰三角形ABC中，$AB=AC=2$，$\angle ABC=30°$，D为BC的中点，求：

(1)$\overrightarrow{BA}$在$\overrightarrow{CD}$方向上正射影的数量；

(2)$\overrightarrow{CD}$在$\overrightarrow{BA}$方向上正射影的数量.



关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

学习札记

2.3.2　向量数量积的运算律

学习目标

1. 掌握平面向量数量积的运算性质及常用公式，并会用这些公式进行计算或证明；
2. 掌握平面向量数量积的运算律及常用公式.

1 基础知识点对点

知识点一　数量积的运算律

1. 设 a,b,c 是非零向量，则下列说法中正确的是（　　）

A. $(a\cdot b)\cdot c=(c\cdot b)\cdot a$

B. $|a-b|\leqslant|a+b|$

C. 若 $a\cdot b=a\cdot c$，则 $b=c$

D. 若 $a\parallel b$，$a\parallel c$，则 $b\parallel c$

2. 在边长为 1 的正方形 $ABCD$ 中，M 为 BC 的中点，点 E 在线段 AB 上运动，则 $\overrightarrow{EC}\cdot\overrightarrow{EM}$ 的取值范围是（　　）

A. $\left[\frac{1}{2},2\right]$　　B. $\left[0,\frac{3}{2}\right]$

C. $\left[\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right]$　　D. $[0,1]$

知识点二　求向量的模与夹角的问题

3. 已知向量 $a\cdot(a+2b)=0$，$|a|=|b|=2$，则向量 a,b 的夹角为（　　）

A. $\frac{\pi}{6}$　　B. $\frac{\pi}{3}$

C. $\frac{2\pi}{3}$　　D. $\frac{5\pi}{6}$

4. 已知向量 a,b 的夹角为 $45°$，且 $|a|=1$，$|2a-b|=\sqrt{10}$，则 $|b|=$（　　）

A. $\sqrt{2}$　　B. $2\sqrt{2}$

C. $3\sqrt{2}$　　D. $4\sqrt{2}$

知识点三　有关垂直问题

5. 设向量 a,b,c 满足 $a+b+c=0$，$(a-b)\perp c$，$a\perp b$，若 $|a|=1$，则 $|a|^2+|b|^2+|c|^2$ 的值是_____.

6. 已知 a,b 都是非零向量，且 $a+3b$ 与 $7a-5b$ 垂直，$a-4b$ 与 $7a-2b$ 垂直，求 $\langle a,b\rangle$.

2 课后拔高提能练

一、选择题

1. 已知向量 a,b 均为单位向量，若它们的夹角 $60°$，则 $|a-3b|=$（　　）

A. $\sqrt{7}$　　B. $\sqrt{10}$

C. $\sqrt{13}$　　D. 4

2. 已知 $|a|=|b|=1$，a 与 b 的夹角是 $90°$，$c=2a+3b$，$d=ka-4b$，c 与 d 垂直，则 k 的值为（　　）

A. -6　　B. 6

C. 3　　D. -3

3. 已知平面上三点 A,B,C 满足 $|\overrightarrow{AB}|=3$，$|\overrightarrow{BC}|=4$，$|\overrightarrow{CA}|=5$，则 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{AB}$ 的值等于（　　）

A. 25　　B. 24

C. -25　　D. -24

4. 已知单位向量 $\boldsymbol{\alpha}$、$\boldsymbol{\beta}$ 满足 $(\boldsymbol{\alpha}+2\boldsymbol{\beta})\cdot(2\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta})=1$，则 $\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{\beta}$ 夹角的余弦值为（　　）

A. $-\frac{1}{3}$　　B. $\frac{1}{3}$

C. $\frac{1}{2}$　　D. $\frac{1}{5}$

5. 设 a,b,c 是三个向量，以下命题中真命题的序号是（　　）

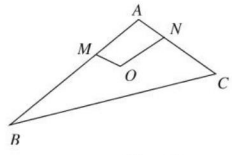
A. 若 $a\cdot b=a\cdot c$，且 $a\neq0$，则 $b=c$

B. 若 $a\cdot b=0$，则 $a=0$ 或 $b=0$

C. 若 a,b,c 互不共线，则 $(a\cdot b)\cdot c=a\cdot(b\cdot c)$

D. $(3a+2b)\cdot(3a-2b)=9|a|^2-4|b|^2$

6. **(2018·天津卷)** 在如图的平面图形中，已知 $OM=1$，$ON=2$，$\angle MON=120°$，$\overrightarrow{BM}=2\overrightarrow{MA}$，$\overrightarrow{CN}=2\overrightarrow{NA}$，则 $\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{OM}$ 的值为（　　）

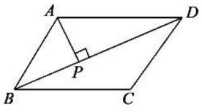


A. -15　　B. -9

C. -6　　D. 0

二、填空题

7. 如图，在平行四边形 $ABCD$ 中，$AP\perp BD$，垂足为 P，且 $AP=3$，则 $\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AC}=$_____.



关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

学习札记

8. 在直角坐标系 xOy 中，$\boldsymbol{i}$，$\boldsymbol{j}$ 分别是与 x 轴，y 轴平行的单位向量，若在直角三角形 ABC 中，$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}$，$\overrightarrow{AC}=2\boldsymbol{i}+m\boldsymbol{j}$，则实数 $m=$_____.

9. 已知正方形 $ABCD$ 的边长为 1，点 E 是 AB 边上的动点，则 $\overrightarrow{DE}\cdot\overrightarrow{CB}$ 的值为_____，$\overrightarrow{DE}\cdot\overrightarrow{DC}$ 的最大值为_____.

三、解答题

10. 若平面向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 满足 $|\boldsymbol{a}|=\sqrt{2}$，$|\boldsymbol{b}|=2$，$(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\perp\boldsymbol{a}$.

(1)求 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角；

(2)求 $|2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|$.

11. 在 $\triangle ABC$ 中，中线 $AM=2$.

(1)若 $\overrightarrow{OA}=-2\overrightarrow{OM}$，求证：$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\boldsymbol{0}$；

(2)若 P 为中线 AM 上的一个动点，求 $\overrightarrow{PA}\cdot(\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC})$ 的最小值.

12. 已知 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 是两个非零向量，当 $\boldsymbol{a}+t\boldsymbol{b}$（$t\in\mathbf{R}$）的模取得最小值时，

(1)求 t 的值（用 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 表示）；

(2)求证：$\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}+t\boldsymbol{b}$ 垂直.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

学习札记

2.3.3　向量数量积的坐标运算与度量公式

学习目标

1. 掌握平面向量数量积的坐标表示；
2. 会用向量垂直的坐标表示充要条件.

1 基础知识点对点

知识点一　向量数量积的坐标运算

1. 已知向量 $\boldsymbol{a}=(1,3)$，$\boldsymbol{b}=(-2,m)$，若 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}$ 垂直，则 m 的值为（　　）

A. $\frac{1}{2}$　　B. $-\frac{1}{2}$

C. -1　　D. 1

2. 已知 $A(1,2)$，$B(3,4)$，$C(-2,2)$，$D(-3,5)$，则向量 $\overrightarrow{AB}$ 在向量 $\overrightarrow{CD}$ 上的投影为（　　）

A. $\frac{\sqrt{10}}{5}$　　B. $\frac{2\sqrt{10}}{5}$

C. $\frac{3\sqrt{10}}{5}$　　D. $\frac{4\sqrt{10}}{5}$

知识点二　向量的模与夹角的坐标运算

3. 平面向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为 $\frac{\pi}{3}$，$\boldsymbol{a}=(0,2)$，$|\boldsymbol{b}|=1$，则 $|\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}|=$（　　）

A. $2\sqrt{3}$　　B. $\sqrt{3}$

C. 4　　D. 2

4. 设向量 $\boldsymbol{a}=(m,1)$，$\boldsymbol{b}=(1,2)$，且 $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|^2=|\boldsymbol{a}|^2+|\boldsymbol{b}|^2$，则实数 $m=$_____.

知识点三　向量数量积坐标运算的综合应用

5. 设 $\boldsymbol{a}=(-1,1)$，$\boldsymbol{b}=(x,3)$，$\boldsymbol{c}=(5,y)$，$\boldsymbol{d}=(8,6)$，且 $\boldsymbol{b}\parallel\boldsymbol{d}$，$(4\boldsymbol{a}+\boldsymbol{d})\perp\boldsymbol{c}$.

(1)求 $\boldsymbol{b}$ 和 $\boldsymbol{c}$；

(2)求 $\boldsymbol{c}$ 在 $\boldsymbol{a}$ 方向上的投影；

(3)求 λ_1 和 λ_2，使 $\boldsymbol{c}=\lambda_1\boldsymbol{a}+\lambda_2\boldsymbol{b}$.

6. 已知 O 为平面直角坐标系的原点，设 $\overrightarrow{OA}=(2,5)$，$\overrightarrow{OB}=(3,1)$，$\overrightarrow{OC}=(6,3)$. 在线段 OC 上是否存在点 M，使 $MA\perp MB$. 若存在，求出点 M 的坐标；若不存在，请说明理由.

2 课后拔高提能练

一、选择题

1. 已知平面向量 $\boldsymbol{a}=(\lambda,-3)$ 与 $\boldsymbol{b}=(3,-2)$ 垂直，则 λ 的值是（　　）

A. -2　　B. 2

C. -3　　D. 3

2. (2018·全国卷Ⅱ)已知向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 满足 $|\boldsymbol{a}|=1$，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=-1$，则 $\boldsymbol{a}\cdot(2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})=$（　　）

A. 4　　B. 3

C. 2　　D. 0

3. 若平面向量 $\boldsymbol{a}=(1,3)$，$\boldsymbol{b}=(-2,-1)$，则 $(3\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b})\cdot(2\boldsymbol{a}+5\boldsymbol{b})$ 等于（　　）

A. $10\sqrt{5}+6\sqrt{10}-95$　　B. 55

C. 15　　D. 205

4. 若平面向量 $\boldsymbol{a}=(2,1)$，$\boldsymbol{b}=(2x+4,-x)$ 互相平行，其中 $x\in\mathbf{R}$，则 $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=$（　　）

A. 2　　B. $2\sqrt{5}$

C. $\sqrt{5}$　　D. 10

5. 设 $x,y\in\mathbf{R}$，向量 $\boldsymbol{a}=(x,1)$，$\boldsymbol{b}=(1,y)$，$\boldsymbol{c}=(2,-4)$ 且 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{c}$，$\boldsymbol{b}\parallel\boldsymbol{c}$，则 $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=$（　　）

A. $\sqrt{5}$　　B. $2\sqrt{5}$

C. $\sqrt{10}$　　D. 10

6. 若 $\boldsymbol{a}=(x,2)$，$\boldsymbol{b}=(-3,5)$，且 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角是钝角，则实数 x 的取值范围是（　　）

A. $\left(-\infty,\frac{10}{3}\right)$　　B. $\left(-\infty,\frac{10}{3}\right]$

C. $\left(\frac{10}{3},+\infty\right)$　　D. $\left[\frac{10}{3},+\infty\right)$

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

学习札记

二、填空题

7.(2018·北京卷)设向量 $\boldsymbol{a}=(1,0)$，$\boldsymbol{b}=(-1,m)$，若 $\boldsymbol{a}\perp(m\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})$，则 $m=$_____.

8.已知平面向量 $\boldsymbol{a}=(2,4)$，$\boldsymbol{b}=(-1,2)$，若 $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{b}$，则 $|\boldsymbol{c}|=$_____.

9.设 E,F 分别是 Rt$\triangle ABC$ 的斜边 BC 上的两个三等分点，已知 $AB=6$，$AC=3$，则 $\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{AF}=$_____.

三、解答题

10.已知向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 同向，$\boldsymbol{b}=(1,2)$，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=10$.

(1)求向量 $\boldsymbol{a}$ 的坐标；

(2)若 $\boldsymbol{c}=(2,-1)$，求 $(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})\cdot\boldsymbol{a}$.

11.已知向量 $|\boldsymbol{a}|=2$，$\boldsymbol{b}=\left(-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$，且 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为 $\frac{2\pi}{3}$.

(1)求 $|\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}|$；

(2)若 $(\boldsymbol{a}+k\boldsymbol{b})\perp(2\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a})$，求实数 k 的值.

12.已知在$\triangle ABC$中，$A(2,4)$，$B(-1,-2)$，$C(4,3)$，BC 边上的高为 AD.

(1)求证：$AB\perp AC$；

(2)求点 D 和向量 $\overrightarrow{AD}$ 的坐标；

(3)设$\angle ABC=\theta$，求 $\cos\theta$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

学习札记

2.4　向量的应用

2.4.1　向量在几何中的应用

2.4.2　向量在物理中的应用

学习目标

1. 会用向量法证明平面几何中的问题；
2. 会用向量法解决解析几何中求直线方程的问题；
3. 会用向量解决简单的物理问题.

1 基础知识点对点

知识点一　向量在平面几何中的应用

1. 已知$\triangle ABC$的三个内角A,B,C所对的边长分别为a,b,c，G为三角形的重心，且满足$a\overrightarrow{GA}+b\overrightarrow{GB}+c\overrightarrow{GC}=\mathbf{0}$，则角$C=$（　　）

A. 30°　　B. 45°

C. 60°　　D. 120°

2. 已知非零向量$\overrightarrow{AB}$与$\overrightarrow{AC}$满足$\left(\frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|}+\frac{\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|}\right)\cdot\overrightarrow{BC}=0$，且$\frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|}\cdot\frac{\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|}=\frac{1}{2}$，则$\triangle ABC$为（　　）

A. 三边均不相等的三角形

B. 直角三角形

C. 等腰非等边三角形

D. 等边三角形

知识点二　向量在解析几何中的应用

3. 在平面直角坐标系中，若$A(1,2)$，动点$P(x,y)$满足$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OA}=4$，则点$P$的坐标所满足的关系式为_____.

4. 已知$\triangle ABC$的三个顶点为$A(0,-4)$，$B(4,0)$，$C(-6,2)$，点D,E,F分别为BC,CA,AB的中点.

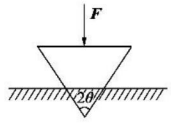
(1)求直线DE,EF,FD的方程；

(2)求AB边上的高CH所在直线的方程.

知识点三　向量在物理中的应用

5. 某物体做斜抛运动，初速度$|\boldsymbol{v}_0|=10$ m/s，与水平方向成60°角，不计空气阻力，则该物体在水平方向上的速度是_____m/s.

6. 如图所示的是顶角为2θ的等腰劈，今有力$|\boldsymbol{F}|=100$ N作用于劈背上将物体劈开，试分析力$\boldsymbol{F}$的分力的大小与θ的关系.



2 课后拔高提能练

一、选择题

1. 已知直线$l:mx+2y+6=0$，向量$(1-m,1)$与l平行，则实数m的值为（　　）

A. -1　　B. 1

C. 2　　D. -1或2

2. 设A,B,C,D是平面上四个不同的点，其中任意三点不共线，若$(\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{DC}+2\overrightarrow{AD})\cdot(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC})=0$，则$\triangle ABC$是（　　）

A. 等腰三角形　　B. 直角三角形

C. 等腰直角三角形　　D. 等边三角形

3. 已知向量$\overrightarrow{AB}$与$\overrightarrow{AC}$的夹角为120°，且$|\overrightarrow{AB}|=2$，$|\overrightarrow{AC}|=3$，若$\overrightarrow{AP}=\lambda\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$，且$\overrightarrow{AP}\perp\overrightarrow{BC}$，则实数$\lambda$的值为（　　）

A. $\frac{3}{7}$　　B. 13

C. 6　　D. $\frac{12}{7}$

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

学习札记

4. 在△ABC中，M是BC的中点，$AM=1$，点P在AM上且满足$\overrightarrow{AP}=2\overrightarrow{PM}$，则$\overrightarrow{PA}\cdot(\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC})$等于（　　）

A. $-\frac{4}{9}$　　B. $-\frac{4}{3}$

C. $\frac{4}{3}$　　D. $\frac{4}{9}$

5. 已知三个力$\boldsymbol{f}_1=(-2,-1)$，$\boldsymbol{f}_2=(-3,2)$，$\boldsymbol{f}_3=(4,-3)$，同时作用于某物体上一点，为使物体保持平衡，再加上一个力$\boldsymbol{f}_4$，则$\boldsymbol{f}_4=$（　　）

A. $(-1,-2)$　　B. $(1,-2)$

C. $(-1,2)$　　D. $(1,2)$

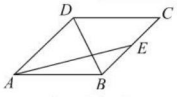
6. 在△ABC中，$\angle A=90°$，$AB=1$，$AC=2$，设点P，Q满足$\overrightarrow{AP}=\lambda\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AQ}=(1-\lambda)\overrightarrow{AC}$，$\lambda\in\mathbf{R}$，若$\overrightarrow{BQ}\cdot\overrightarrow{CP}=-2$，则$\lambda=$（　　）

A. $\frac{1}{3}$　　B. $\frac{2}{3}$

C. $\frac{4}{3}$　　D. 2

二、填空题

7. 如图，在边长为2的菱形$ABCD$中，$\angle BAD=60°$，E为BC中点，则$\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{BD}=$_____.

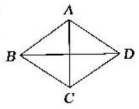


8. 在直角坐标系xOy中，已知点$A(0,1)$和点$B(-3,4)$，若点C在$\angle AOB$的平分线上且$|\overrightarrow{OC}|=2$，则$\overrightarrow{OC}=$_____.

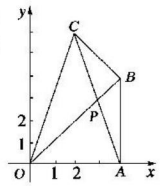
9. **(2018·江苏卷)**在平面直角坐标系xOy中，A为直线$l:y=2x$上在第一象限内的点，$B(5,0)$，以AB为直径的圆C与直线l交于另一点D. 若$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}=0$，则点$A$的横坐标为_____.

三、解答题

10. 如右图所示，已知四边形$ABCD$是菱形，AC和BD是它的两条对角线. 用向量法证明：$AC\perp BD$.



11. 如右图，已知点$A(4,0)$，$B(4,4)$，$C(2,6)$，求AC和OB的交点P的坐标.



12. 在风速为$75(\sqrt{6}-\sqrt{2})$ km/h的西风中，飞机以150 km/h的航速向西北方向飞行，求没有风时飞机的航速和航向.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

学习札记

章末检测

时间：45 分钟　满分：100 分

一、选择题（每小题 5 分，共 40 分）

1. 已知向量 $\overrightarrow{BA}=(2,-1)$，$\overrightarrow{AC}=(-4,1)$，向量 $\overrightarrow{BC}$ 的坐标是　（　）

A. $(-6,2)$　　B. $(6,-2)$

C. $(-2,0)$　　D. $(2,0)$

2. 已知平面向量 $\boldsymbol{a}=(3,1)$，$\boldsymbol{b}=(x,-3)$，且 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$，则 $x=$　（　）

A. -3　　B. -1

C. 1　　D. 3

3. 在菱形 $ABCD$ 中，若 $AC=2$，则 $\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{AB}$ 等于　（　）

A. 2　　B. -2

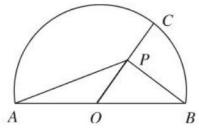
C. $|\overrightarrow{AB}|\cos A$　　D. 与菱形的边长有关

4. 已知向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 满足 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$，$|\boldsymbol{a}|=1$，$|\boldsymbol{b}|=2$，则 $|2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=$　（　）

A. 0　　B. $2\sqrt{2}$

C. 4　　D. 8

5. 如图，$AB=2$，O 为圆心，C 为半圆上不同于 A，B 的任意一点，若 P 为半径 OC 上的动点，则 $(\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB})\cdot\overrightarrow{PC}$ 的最小值等于　（　）



A. $-\frac{1}{2}$　　B. -2

C. -1　　D. $-\frac{1}{4}$

6. 下面给出的关系式中正确的个数是　（　）

①$0\cdot\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$；②$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}$；③$\boldsymbol{a}^2=|\boldsymbol{a}|^2$；④$(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})$；⑤$|\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}|\leqslant\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$.

A. 0　　B. 1

C. 2　　D. 3

7. 在边长为 1 的正三角形 ABC 中，设 $\overrightarrow{BC}=2\overrightarrow{BD}$，$\overrightarrow{CA}=\lambda\overrightarrow{CE}$，若 $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BE}=-\frac{1}{4}$，则 λ 的值为　（　）

A. $\frac{1}{2}$　　B. 2

C. $\frac{1}{3}$　　D. 3

8. 已知 $\boldsymbol{i}$ 与 $\boldsymbol{j}$ 为互相垂直的单位向量，向量 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{j}$，向量 $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{i}+\lambda\boldsymbol{j}$，且向量 $\boldsymbol{a}$ 与向量 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为锐角，则实数 λ 的取值范围是　（　）

A. $(-\infty,-2)\cup\left(-2,\frac{1}{2}\right)$

B. $\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$

C. $\left(-2,\frac{2}{3}\right)\cup\left(\frac{2}{3},+\infty\right)$

D. $\left(-\infty,\frac{1}{2}\right)$

二、填空题（每小题 5 分，共 15 分）

9. 已知 $|\boldsymbol{a}|=2\sqrt{5}$，$\boldsymbol{b}=(-1,3)$，若 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$，则 $\boldsymbol{a}=$_____.

10. **（2018 · 全国卷Ⅲ）**已知向量 $\boldsymbol{a}=(1,2)$，$\boldsymbol{b}=(2,-2)$，$\boldsymbol{c}=(1,\lambda)$. 若 $\boldsymbol{c}\parallel(2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$，则 $\lambda=$_____.

11. 已知向量 $\boldsymbol{a}=\left(-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$，$\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$，若 $\triangle OAB$ 是以 O 为直角顶点的等腰直角三角形，则 $\triangle OAB$ 的面积为_____.

三、解答题（每小题 15 分，共 45 分）

12. 已知 $|\boldsymbol{a}|=\sqrt{3}$，$|\boldsymbol{b}|=2$，向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为 $150°$.

(1)求：$|\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}|$；

(2)若 $(\boldsymbol{a}+3\lambda\boldsymbol{b})\perp(\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b})$，求实数 λ 的值.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

学习札记

13. 在四边形 $ABCD$（A、B、C、D 顺时针排列）中，$\overrightarrow{AB}=(6,1)$，$\overrightarrow{CD}=(-2,-3)$，若有 $\overrightarrow{BC}\parallel\overrightarrow{DA}$，又有 $\overrightarrow{AC}\perp\overrightarrow{BD}$，求 $\overrightarrow{BC}$ 的坐标.

14. 在四边形 $ABCD$ 中，$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{CD}=\boldsymbol{c}$，$\overrightarrow{DA}=\boldsymbol{d}$，且 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}=\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{d}=\boldsymbol{d}\cdot\boldsymbol{a}$，试判断四边形 $ABCD$ 的形状.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

学习札记

第三章　三角恒等变换

3.1　和角公式

3.1.1　两角和与差的余弦

学习目标

1. 掌握两角和与差的余弦公式，并会利用公式进行三角函数式的化简求值；
2. 掌握常用角的变换，并注意公式的灵活应用.

1 基础知识点对点

知识点一　化简求值

1. $\cos42^\circ\cos78^\circ+\sin42^\circ\cos168^\circ=$（　　）

A. $-\frac{1}{2}$　　B. $\frac{1}{2}$

C. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$　　D. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

2. $\frac{\cos7^\circ-\sin15^\circ\sin8^\circ}{\cos8^\circ}=$_____.

知识点二　给值求值

3. 已知 $\cos\alpha=\frac{12}{13}$，$\alpha\in\left(\frac{3\pi}{2},2\pi\right)$，则 $\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)=$（　　）

A. $\frac{5\sqrt{2}}{13}$　　B. $\frac{7\sqrt{2}}{13}$

C. $\frac{17\sqrt{2}}{26}$　　D. $\frac{7\sqrt{2}}{26}$

4. $\triangle ABC$ 中，$3\cos(B-C)-1=6\cos B\cos C$，则 $\cos A=$_____.

知识点三　给值求角

5. 已知 α,β 都是锐角，$\cos\alpha=\frac{1}{7}$，$\cos(\alpha+\beta)=-\frac{11}{14}$，则 β 为（　　）

A. 60°　　B. 45°

C. 30°　　D. 15°

2 课后拔高提能练

一、选择题

1. $\cos15^\circ+\cos75^\circ$ 的值等于（　　）

A. $\frac{\sqrt{6}}{2}$　　B. $-\frac{\sqrt{6}}{2}$

C. $-\frac{\sqrt{2}}{2}$　　D. $\frac{\sqrt{2}}{2}$

2. 已知 $\sin\alpha+\sin\beta=\frac{4}{5}$，$\cos\alpha+\cos\beta=\frac{3}{5}$，则 $\cos(\alpha-\beta)$ 的值为（　　）

A. $\frac{9}{25}$　　B. $\frac{16}{25}$

C. $\frac{1}{2}$　　D. $-\frac{1}{2}$

3. 已知 $\cos\left(\theta+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{5}{13}$，$0<\theta<\frac{\pi}{3}$，则 $\cos\theta$ 等于（　　）

A. $\frac{5\sqrt{3}+12}{26}$　　B. $\frac{12-5\sqrt{3}}{13}$

C. $\frac{5+12\sqrt{3}}{26}$　　D. $\frac{6+5\sqrt{3}}{13}$

4. 已知 $\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)=\frac{1}{3}$，则 $\cos\alpha\cos\beta$ 的值为（　　）

A. $\frac{1}{2}$　　B. $\frac{1}{3}$

C. $\frac{1}{4}$　　D. $\frac{1}{6}$

5. 函数 $y=\cos x\cos\left(3x-\frac{\pi}{4}\right)+\sin x\sin\left(3x-\frac{\pi}{4}\right)$ 的最小正周期是（　　）

A. $\frac{\pi}{4}$　　B. $\frac{\pi}{2}$

C. π　　D. 2π

6. 若 $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$，$-\frac{\pi}{2}<\beta<0$，$\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{3}$，$\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\beta}{2}\right)=\frac{\sqrt{3}}{3}$，则 $\cos\left(\alpha+\frac{\beta}{2}\right)$ 等于（　　）

A. $\frac{\sqrt{3}}{3}$　　B. $-\frac{\sqrt{3}}{3}$

C. $\frac{5\sqrt{3}}{9}$　　D. $-\frac{\sqrt{6}}{9}$

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

学习札记

二、填空题

7. $\frac{1}{2}\cos 15^\circ+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 15^\circ=$_____.

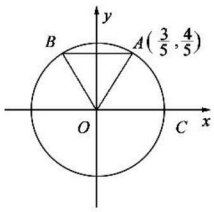
8. 若 $\theta\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$，$\boldsymbol{a}=(1,\sin\theta)$，$\boldsymbol{b}=(3\sin\theta,1)$，且 $\boldsymbol{a}\parallel\boldsymbol{b}$，则 $\cos\left(\theta+\frac{\pi}{6}\right)=$_____.

9. 已知 α,β 为锐角，$\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{10}}$，$\cos\beta=\frac{1}{\sqrt{5}}$，则 $\alpha+\beta$ 的值为_____.

三、解答题

10. 已知 $\cos(\alpha-\beta)\cos\alpha+\sin(\alpha-\beta)\sin\alpha=m$，且 β 为第三象限角，求 $\sin\beta$ 的值.

11. 如图所示，A,B 是单位圆 O 上的点，且 B 在第二象限，C 是圆与 x 轴正半轴的交点，A 点的坐标为 $\left(\frac{3}{5},\frac{4}{5}\right)$，$\triangle AOB$ 为正三角形.



(1)求 $\sin\angle COA$；

(2)求 $\cos\angle COB$.

12. 已知向量 $\boldsymbol{a}=(\cos\alpha,\sin\alpha)$，$\boldsymbol{b}=(\cos\beta,\sin\beta)$，$|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=\frac{2\sqrt{5}}{5}$.

(1)求 $\cos(\alpha-\beta)$；

(2)若 $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$，$-\frac{\pi}{2}<\beta<0$，且 $\sin\beta=-\frac{5}{13}$，求 $\sin\alpha$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

学习札记

3.1.2　两角和与差的正弦

学习目标

1. 理解两角和与差的正弦公式的结构特征，体会诱导公式在推导 $S_{\alpha+\beta}$ 中的作用；
2. 掌握并能运用两角和与差的正弦公式化简或求值.

1 基础知识点对点

知识点一　化简求值

1. $\sin15^\circ\cos75^\circ-\sin75^\circ\cos15^\circ$ 的值是　(　　)

A. $\frac{1}{2}$　　B. $-\frac{1}{2}$

C. $\frac{\sqrt{3}}{2}$　　D. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

2. 化简：$\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)+2\sin\alpha\sin\left(\frac{3\pi}{2}-\beta\right)=$_____.

知识点二　给值求值

3. 若 α,β 为锐角，且满足 $\cos\alpha=\frac{4}{5}$，$\cos(\alpha+\beta)=\frac{5}{13}$，则 $\sin\beta$ 的值为　(　　)

A. $-\frac{16}{65}$　　B. $\frac{63}{65}$

C. $\frac{56}{65}$　　D. $\frac{33}{65}$

4. 已知 α,β 为锐角，且 $\sin\alpha=\frac{4\sqrt{3}}{7}$，$\cos(\alpha+\beta)=-\frac{11}{14}$，求 $\sin\beta$ 的值.

知识点三　辅助角公式的应用

5. 已知 $\sin\left(\frac{\pi}{6}+\alpha\right)=\frac{1}{4}$，则 $\cos\alpha+\sqrt{3}\sin\alpha$ 的值为(　　)

A. $-\frac{1}{4}$　　B. $\frac{1}{2}$

C. 2　　D. -1

6. 已知 $\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{6}\right)+\sin\alpha=\frac{4\sqrt{3}}{5}$，求 $\sin\left(\alpha+\frac{7\pi}{6}\right)$ 的值.

2 课后拔高提能练

一、选择题

1. 计算：$\sin72^\circ\cos18^\circ+\cos72^\circ\sin18^\circ=$　(　　)

A. $\frac{1}{2}$　　B. $\frac{\sqrt{2}}{2}$

C. 1　　D. -1

2. 若角 α 的终边过点 $P(-3,-4)$，则 $\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)$ 的值为　(　　)

A. $-\frac{7\sqrt{2}}{10}$　　B. $\frac{7\sqrt{2}}{10}$

C. $-\frac{\sqrt{2}}{10}$　　D. $\frac{\sqrt{2}}{10}$

3. (2017·全国卷Ⅲ)函数 $f(x)=\frac{1}{5}\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)+\cos\left(x-\frac{\pi}{6}\right)$ 的最大值为　(　　)

A. $\frac{6}{5}$　　B. 1

C. $\frac{3}{5}$　　D. $\frac{1}{5}$

4. 设 $a=2\sin24^\circ$，$b=\sin85^\circ-\sqrt{3}\cos85^\circ$，$c=2(\sin47^\circ\sin66^\circ-\sin24^\circ\sin43^\circ)$，则　(　　)

A. $a>b>c$　　B. $b>c>a$

C. $c>b>a$　　D. $b>a>c$

5. 函数 $f(x)=\sin x-\sqrt{3}\cos x\ (x\in[-\pi,0])$ 的单调增区间是　(　　)

A. $\left[-\pi,-\frac{5\pi}{6}\right]$　　B. $\left[-\frac{5\pi}{6},-\frac{\pi}{6}\right]$

C. $\left[-\frac{\pi}{3},0\right]$　　D. $\left[-\frac{\pi}{6},0\right]$

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

学习札记

6. 在△ABC中，已知 $\sin(A-B)\cos B+\cos(A-B)\sin B\geqslant 1$，则△$ABC$是　　(　　)

A. 锐角三角形　　B. 钝角三角形

C. 直角三角形　　D. 等腰非直角三角形

二、填空题

7. **(2018·全国卷Ⅱ)** 已知 $\sin\alpha+\cos\beta=1$，$\cos\alpha+\sin\beta=0$，则 $\sin(\alpha+\beta)=$_____.

8. 已知 $\cos\alpha=\frac{3}{5}$，$\cos(\alpha-\beta)=\frac{4}{5}$，且 α，β 均为锐角，则 $\sin\beta=$_____.

9. 设 $f(x)=\sqrt{3}\sin 3x+\cos 3x$，若对任意实数 x 都有 $|f(x)|\leqslant a$，则实数 a 的取值范围是_____.

三、解答题

10. 化简下列各式：

(1) $\sin(x+26^\circ)\cos(19^\circ-x)-\cos(x+26^\circ)\sin(x-19^\circ)$；

(2) $\sin\frac{7\pi}{18}\cos\frac{2\pi}{9}-\sin\frac{\pi}{9}\sin\frac{2\pi}{9}$；

(3) $\dfrac{\sin(\alpha+\beta)-2\cos\alpha\sin\beta}{2\cos\alpha\cos\beta-\cos(\alpha+\beta)}$.

11. 已知函数 $f(x)=\sin x-\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$.

求：(1) $f\left(\frac{\pi}{2}\right)$ 的值；

(2) $f(x)$ 的单调递增区间.

12. 已知函数 $f(x)=\sin 2x+\cos\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)$.

(1) 求 $f(x)$ 的最大值；

(2) 设 $g(x)=\sqrt{3}\sin\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)$，问：把 $y=f(x)$ 的图象沿 x 轴至少向左平移多少个单位，可得到 $y=g(x)$ 的图象.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

学习札记

3.1.3　两角和与差的正切

学习目标

掌握两角和与差的正切公式的结构特征，并能运用公式进行化简、求值.

1 基础知识点对点

知识点一　化简求值

1. $(1+\tan 18^\circ)(1+\tan 27^\circ)$的值是　（　）

A. $\sqrt{3}$　　B. $1+\sqrt{2}$

C. 2　　D. $2(\tan 18^\circ+\tan 27^\circ)$

2. $\dfrac{\sqrt{3}\tan 15^\circ+1}{\sqrt{3}-\tan 15^\circ}=$_____.

知识点二　给值求值

3. 已知 $\tan(\alpha-\beta)=\dfrac{2}{3}$，$\tan\left(\dfrac{\pi}{6}-\beta\right)=\dfrac{1}{2}$，则 $\tan\left(\alpha-\dfrac{\pi}{6}\right)$等于　（　）

A. $\dfrac{1}{4}$　　B. $\dfrac{7}{8}$

C. $\dfrac{1}{8}$　　D. $\dfrac{7}{9}$

4. 在$\triangle ABC$中，A,B,C是其内角，若 $\sin A=\dfrac{5}{13}$，$\cos B=\dfrac{3}{5}$，则 $\tan C$的值为　（　）

A. $-\dfrac{33}{56}$或$-\dfrac{63}{16}$　　B. $\dfrac{33}{56}$或$\dfrac{63}{16}$

C. $-\dfrac{63}{16}$　　D. $-\dfrac{33}{56}$

知识点三　公式的综合应用

5. 在三角形ABC中，$\angle A,\angle B,\angle C$分别是三角形的内角.

(1)求证：$\tan A+\tan B+\tan C=\tan A\cdot\tan B\cdot\tan C$；

(2)求证：$\tan\dfrac{A}{2}\tan\dfrac{B}{2}+\tan\dfrac{B}{2}\tan\dfrac{C}{2}+\tan\dfrac{C}{2}\tan\dfrac{A}{2}$为定值.

2 课后拔高提能练

一、选择题

1. $\tan 70^\circ+\tan 50^\circ-\sqrt{3}\tan 70^\circ\tan 50^\circ=$　（　）

A. $\sqrt{3}$　　B. $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

C. $-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$　　D. $-\sqrt{3}$

2. 已知 $\alpha\in\left(\dfrac{\pi}{2},\pi\right)$，$\cos\alpha=-\dfrac{4}{5}$，则 $\tan\left(\alpha+\dfrac{\pi}{4}\right)=$　（　）

A. $\dfrac{1}{7}$　　B. 7

C. $-\dfrac{1}{7}$　　D. -7

3. 在$\triangle ABC$中，$C=45^\circ$，则$(1-\tan A)(1-\tan B)$等于　（　）

A. 1　　B. -1

C. 2　　D. -2

4. 若 $\tan\left(\dfrac{\pi}{4}-\alpha\right)=3$，则 $\cot\alpha$ 等于　（　）

A. -2　　B. $-\dfrac{1}{2}$

C. $\dfrac{1}{2}$　　D. 2

5. 在$\triangle ABC$中，已知 $\tan A,\tan B$ 是方程 $3x^2+8x-1=0$的两根，则 $\tan C$ 等于　（　）

A. 2　　B. -2

C. 4　　D. -4

6. 已知 $\cos\left(\dfrac{\pi}{4}+x\right)=-\dfrac{3}{5}$，且 x 是第三象限角，则 $\dfrac{1+\tan x}{1-\tan x}$的值为　（　）

A. $-\dfrac{3}{4}$　　B. $-\dfrac{4}{3}$

C. $\dfrac{3}{4}$　　D. $\dfrac{4}{3}$

二、填空题

7. **(2018·全国卷Ⅱ)**已知 $\tan\left(\alpha-\dfrac{5\pi}{4}\right)=\dfrac{1}{5}$，则 $\tan\alpha=$_____.

8. **(2017·江苏卷)**若 $\tan\left(\alpha-\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{1}{6}$，则 $\tan\alpha=$_____.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

学习札记

9. 在$\triangle ABC$中，$\angle C=120^\circ$，$\tan A+\tan B=\frac{2\sqrt{3}}{3}$，则$\tan A\cdot\tan B=$_____.

三、解答题

10. 已知$\tan\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)=-\frac{1}{2}$，求$\frac{2\cos\alpha(\sin\alpha-\cos\alpha)}{1+\tan\alpha}$的值.

11. 已知锐角$\triangle ABC$中，$\sin(A+B)=\frac{3}{5}$，$\sin(A-B)=\frac{1}{5}$.

(1)求证：$\tan A=2\tan B$；

(2)设$AB=3$，求AB边上的高.

12. 已知$\tan\alpha$，$\tan\beta$是方程$6x^2-5x+1=0$的两根，且$0<\alpha<\frac{\pi}{2}$，$\pi<\beta<\frac{3\pi}{2}$.

(1)求$\tan(\alpha+\beta)$的值；

(2)求$\alpha+\beta$的值.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

学习札记

3.2　倍角公式和半角公式

3.2.1　倍角公式

学习目标

1. 理解二倍角公式的推导，熟练掌握二倍角公式及变形公式；
2. 灵活运用二倍角公式进行有关化简、求值、证明等问题.

1 基础知识点对点

知识点一　化角求值

1. $\frac{1}{2}\sin 15^\circ\cos 15^\circ=$（　　）

A. $\frac{1}{4}$　　B. $\frac{1}{2}$

C. 1　　D. $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

2. $\sin^2\left(\alpha-\frac{\pi}{6}\right)+\sin^2\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)-\sin^2\alpha=$_____.

知识点二　给值求值

3. 已知 $\sin x+\cos x=\frac{3\sqrt{2}}{5}$，则 $\sin 2x=$（　　）

A. $\frac{18}{25}$　　B. $\frac{7}{25}$

C. $-\frac{7}{25}$　　D. $-\frac{16}{25}$

4. 已知 $\cos\alpha=\frac{1}{3}$，$\alpha\in(0,\pi)$，则 $\cos\left(\frac{3}{2}\pi+2\alpha\right)$ 等于（　　）

A. $-\frac{4\sqrt{2}}{9}$　　B. $-\frac{7}{9}$

C. $\frac{4\sqrt{2}}{9}$　　D. $\frac{7}{9}$

知识点三　二倍角公式的综合应用

5. 求证 $\frac{1+\sin 4\theta-\cos 4\theta}{2\tan\theta}=\frac{1+\sin 4\theta+\cos 4\theta}{1-\tan^2\theta}$.

6. 已知函数 $f(x)=\sin^2 x+2\sin x\cdot\cos x+3\cos^2 x$，$x\in\mathbf{R}$，求：
(1) 函数 $f(x)$ 的最大值及取得最大值时自变量 x 的集合；
(2) 函数 $f(x)$ 的单调增区间.

2 课后拔高提能练

一、选择题

1. 已知 α 是第二象限角，且 $\tan\alpha=-\frac{1}{3}$，则 $\sin 2\alpha=$（　　）

A. $-\frac{3\sqrt{10}}{10}$　　B. $\frac{3\sqrt{10}}{10}$

C. $-\frac{3}{5}$　　D. $\frac{3}{5}$

2. (2017·全国卷Ⅲ) 已知 $\sin\alpha-\cos\alpha=\frac{4}{3}$，则 $\sin 2\alpha=$（　　）

A. $-\frac{7}{9}$　　B. $-\frac{2}{9}$

C. $\frac{2}{9}$　　D. $\frac{7}{9}$

3. 已知 $\sin\alpha=\frac{\sqrt{5}}{5}$，$\sin(\alpha-\beta)=-\frac{\sqrt{10}}{10}$，$\alpha$，$\beta$ 均为锐角，则 $\cos 2\beta=$（　　）

A. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$　　B. -1

C. 0　　D. 1

4. (2018·全国卷Ⅲ) 若 $\sin\alpha=\frac{1}{3}$，则 $\cos 2\alpha=$（　　）

A. $\frac{8}{9}$　　B. $\frac{7}{9}$

C. $-\frac{7}{9}$　　D. $-\frac{8}{9}$

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

学习札记

5.（2018·全国卷Ⅲ）函数 $f(x)=\dfrac{\tan x}{1+\tan^2 x}$ 的最小正周期为　　（　　）

A. $\dfrac{\pi}{4}$　　B. $\dfrac{\pi}{2}$

C. π　　D. 2π

6.（2018·全国卷Ⅰ）已知角 α 的顶点为坐标原点，始边与 x 轴的非负半轴重合，终边上有两点 $A(1,a)$，$B(2,b)$，且 $\cos 2\alpha=\dfrac{2}{3}$，则 $|a-b|=$　　（　　）

A. $\dfrac{1}{5}$　　B. $\dfrac{\sqrt{5}}{5}$

C. $\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$　　D. 1

二、填空题

7. 设 $\sin 2\alpha=-\sin\alpha$，$\alpha\in\left(\dfrac{\pi}{2},\pi\right)$，则 $\tan 2\alpha=$_____.

8. 若 $\alpha\in(0,\pi)$，且 $\dfrac{1}{2}\cos 2\alpha=\sin\left(\dfrac{\pi}{4}+\alpha\right)$，则 $\sin 2\alpha$ 的值为_____.

9. 设 α 为锐角，若 $\cos\left(\alpha+\dfrac{\pi}{6}\right)=\dfrac{4}{5}$，则 $\sin\left(2\alpha+\dfrac{\pi}{12}\right)$ 的值为_____.

三、解答题

10. 已知 $\tan\theta=2$.

(1)求 $\tan\left(\dfrac{\pi}{4}-\theta\right)$ 的值；

(2)求 $\cos 2\theta$ 的值.

11. 已知 A,B,C 三点的坐标分别是 $A(3,0)$、$B(0,3)$、$C(\cos\alpha,\sin\alpha)$，其中 $\dfrac{\pi}{2}<\alpha<\dfrac{3\pi}{2}$.

(1)若 $|\overrightarrow{AC}|=|\overrightarrow{BC}|$，求角 α 的值；

(2)若 $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BC}=-1$，求 $\dfrac{2\sin^2\alpha+\sin 2\alpha}{1+\tan\alpha}$ 的值.

12. 已知 $f(x)=\cos^4 x-2\sin x\cos x-\sin^4 x$.

(1)求 $f(x)$ 的最小正周期；

(2)求 $f(x)$ 在区间 $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$ 上的最大值和最小值.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

学习札记

3.2.2　半角的正弦、余弦和正切

学习目标

1. 了解半角公式的推导过程；
2. 能正确运用半角公式进行三角函数式的化简求值和恒等式的证明.

1 基础知识点对点

知识点一　半角公式

1. 判断正误(正确的“√”,错误的打“×”)

(1)$\cos\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}$.　(　)

(2)存在$\alpha\in\mathbf{R}$,使得$\cos\frac{\alpha}{2}=\frac{1}{2}\cos\alpha$.　(　)

(3)对于任意$\alpha\in\mathbf{R}$,$\sin\frac{\alpha}{2}=\frac{1}{2}\sin\alpha$都不成立.　(　)

(4)若α是第一象限角,则$\tan\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}$.　(　)

知识点二　化简求值

2. 化简$\sqrt{1+\sin10^\circ}+\sqrt{1-\sin10^\circ}$得到　(　)

A. $2\sin5^\circ$　　B. $-2\cos5^\circ$

C. $-2\sin5^\circ$　　D. $2\cos5^\circ$

3. 化简$\frac{1+\sin4\alpha-\cos4\alpha}{1+\sin4\alpha+\cos4\alpha}$的结果是　(　)

A. $\frac{1}{\tan2\alpha}$　　B. $\tan2\alpha$

C. $\frac{1}{\tan\alpha}$　　D. $\tan\alpha$

知识点三　半角公式的综合应用

4. 已知α为锐角,且$\sin\alpha:\sin\frac{\alpha}{2}=3:2$,则$\tan\frac{\alpha}{2}$的值为　(　)

A. $\frac{\sqrt{7}}{4}$　　B. $\frac{\sqrt{5}}{3}$

C. $\frac{\sqrt{7}}{3}$　　D. $\frac{\sqrt{5}}{4}$

5. 已知函数$f(x)=\cos^2\left(\frac{\pi}{4}+x\right)-\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-x\right)$,则$f\left(\frac{\pi}{12}\right)$等于　(　)

A. $\frac{\sqrt{3}}{2}$　　B. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

C. $\frac{1}{2}$　　D. $-\frac{1}{2}$

2 课后拔高提能练

一、选择题

1. 已知$\cos\alpha=\frac{2}{3}$,$270^\circ<\alpha<360^\circ$,那么$\cos\frac{\alpha}{2}$的值为　(　)

A. $\frac{\sqrt{6}}{6}$　　B. $-\frac{\sqrt{6}}{6}$

C. $\frac{\sqrt{30}}{6}$　　D. $-\frac{\sqrt{30}}{6}$

2. 函数$y=\cos^2\left(x+\frac{\pi}{4}\right)-\sin^2\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$是　(　)

A. 最小正周期为π的奇函数

B. 最小正周期为π的偶函数

C. 最小正周期为2π的奇函数

D. 最小正周期为2π的偶函数

3. 设$a=\frac{1}{2}\cos2^\circ-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin2^\circ$,$b=\frac{2\tan14^\circ}{1-\tan^214^\circ}$,$c=\sqrt{\frac{1-\cos50^\circ}{2}}$,则有　(　)

A. $a<c<b$　　B. $a<b<c$

C. $b<c<a$　　D. $c<a<b$

4. 设$(2\cos x-\sin x)(\sin x+\cos x+3)=0$,则$\frac{2\cos^2x+\sin2x}{1+\tan x}$的值为　(　)

A. $\frac{8}{5}$　　B. $\frac{5}{8}$

C. $\frac{2}{5}$　　D. $\frac{5}{2}$

5. $\frac{3-\sin70^\circ}{1+\sin^210^\circ}=$　(　)

A. $\frac{1}{2}$　　B. $\sqrt{2}$

C. $\sqrt{3}$　　D. 2

6. 已知$\sin2\alpha=\frac{2}{3}$,则$\tan\alpha+\frac{1}{\tan\alpha}=$　(　)

A. 1　　B. 2

C. 4　　D. 3

二、填空题

7. 已知$\sin\frac{\alpha}{2}-\cos\frac{\alpha}{2}=-\frac{\sqrt{5}}{5}$,$450^\circ<\alpha<540^\circ$,则$\tan\frac{\alpha}{2}=$_____.

8. 已知$\tan\alpha=2$,则$\sin\left(\frac{2\,017\pi}{2}-2\alpha\right)=$_____.

9. $\frac{\sin4x}{1+\cos4x}\cdot\frac{\cos2x}{1+\cos2x}\cdot\frac{\cos x}{1+\cos x}=$_____.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

学习札记

三、解答题

10. 化简：$\dfrac{(1+\sin\alpha+\cos\alpha)\left(\cos\dfrac{\alpha}{2}-\sin\dfrac{\alpha}{2}\right)}{\sqrt{2+2\cos\alpha}}(0<\alpha<\pi)$.

11. 已知$-\dfrac{\pi}{2}<x<0$，$\sin x+\cos x=\dfrac{1}{5}$.

(1)求 $\sin x-\cos x$ 的值；

(2)求$\dfrac{3\sin^2\dfrac{x}{2}-2\sin\dfrac{x}{2}\cos\dfrac{x}{2}+\cos^2\dfrac{x}{2}}{\tan x+\cot x}$的值.

12. 函数 $f(x)=\cos^2\dfrac{x}{2}-\sin\dfrac{x}{2}\cos\dfrac{x}{2}-\dfrac{1}{2}$.

(1)求 $f(x)$的最小正周期和值域；

(2)若 $f(x)=\dfrac{3\sqrt{2}}{10}$，求 $\sin 2x$ 的值.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

学习札记

3.3　三角函数的积化和差与和差化积

学习目标

1. 熟记和差化积、积化和差公式；
2. 进一步体会三角变换的特点，提高推理、运算的能力.

1 基础知识点对点

知识点一　积化和差公式

1. 计算 $\sin105^\circ\cos75^\circ$ 的值是　（　）

A. $\frac{1}{2}$　　B. $\frac{1}{4}$

C. $-\frac{1}{4}$　　D. $-\frac{1}{2}$

2. 函数 $y=\cos2x\cos\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)$ 的最小值为_____.

知识点二　和差化积公式

3. $\sin75^\circ-\sin15^\circ$ 的值为　（　）

A. $\frac{1}{2}$　　B. $\frac{\sqrt{2}}{2}$

C. $\frac{\sqrt{3}}{2}$　　D. $-\frac{1}{2}$

4. 化简求值：$\frac{\sin20^\circ-\sin40^\circ}{\cos20^\circ-\cos40^\circ}$ 的值是_____.

2 课后拔高提能练

一、选择题

1. 下列等式错误的是　（　）

A. $\sin(A+B)+\sin(A-B)=2\sin A\cos B$

B. $\sin(A+B)-\sin(A-B)=2\cos A\sin B$

C. $\cos(A+B)+\cos(A-B)=2\cos A\cos B$

D. $\cos(A+B)-\cos(A-B)=2\sin A\cos B$

2. 若 $\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)=\frac{1}{3}$，则 $\cos^2\alpha-\sin^2\beta$ 等于　（　）

A. $-\frac{2}{3}$　　B. $-\frac{1}{3}$

C. $\frac{1}{3}$　　D. $\frac{2}{3}$

3. 计算 $\frac{\sin10^\circ+\sin50^\circ}{\sin35^\circ\cdot\sin55^\circ}=$　（　）

A. $\frac{1}{4}$　　B. $\frac{1}{2}$

C. 2　　D. 4

4. 已知 $\alpha-\beta=\frac{\pi}{3}$ 且 $\cos\alpha-\cos\beta=\frac{1}{3}$，则 $\cos(\alpha+\beta)$ 等于　（　）

A. $\frac{1}{3}$　　B. $\frac{2}{3}$

C. $\frac{7}{9}$　　D. $\frac{8}{9}$

5. $\sin70^\circ\cos20^\circ-\sin10^\circ\sin50^\circ$ 的值为　（　）

A. $\frac{3}{4}$　　B. $\frac{\sqrt{7}}{2}$

C. $\frac{1}{2}$　　D. $\frac{\sqrt{3}}{4}$

6. 设 $\sin\alpha+\sin\beta=\frac{12}{13}$，$\cos\alpha+\cos\beta=\frac{6}{13}$，则 $\tan\frac{\alpha+\beta}{2}$ 的值为　（　）

A. 2　　B. $\frac{1}{2}$

C. -2　　D. $-\frac{1}{2}$

二、填空题

7. 在 $\triangle ABC$ 中，若 $B=30^\circ$，则 $\cos A\sin C$ 的取值范围是_____.

8. 若 $\cos^2\alpha-\cos^2\beta=m$，则 $\sin(\alpha+\beta)\cdot\sin(\alpha-\beta)=$_____.

9. 计算 $\frac{1}{\tan10^\circ}-4\cos10^\circ=$_____.

三、解答题

10. 求值：$\sin^220^\circ+\cos^280^\circ+\sqrt{3}\sin20^\circ\cos80^\circ$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

学习札记

11. 已知△ABC的三个内角A、B、C满足(1)$A+C=2B$;(2)$\frac{1}{\cos A}+\frac{1}{\cos C}=-\frac{\sqrt{2}}{\cos B}$,求$\cos\frac{A-C}{2}$的值.

12. 已知向量$\boldsymbol{a}=(1-\tan x,1)$,$\boldsymbol{b}=(1+\sin 2x+\cos 2x,-3)$,记$f(x)=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$.

(1)求$f(x)$的定义域、值域及最小正周期;

(2)若$f\left(\frac{\alpha}{2}\right)-f\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{6}$,其中$\alpha\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$,求$\alpha$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

学习札记

章末检测

时间：45 分钟　满分：100 分

一、选择题（每小题 5 分，共 40 分）

1. $\left(\cos\frac{\pi}{12}-\sin\frac{\pi}{12}\right)\left(\cos\frac{\pi}{12}+\sin\frac{\pi}{12}\right)$ 等于　（　）

A. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$　　B. $-\frac{1}{2}$

C. $\frac{1}{2}$　　D. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

2. 若点 $P(\cos\alpha,\sin\alpha)$ 在直线 $y=-2x$ 上，则 $\tan\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)=$　（　）

A. $-\frac{1}{2}$　　B. $\frac{1}{2}$

C. $-\frac{1}{3}$　　D. $\frac{1}{3}$

3. 已知 $2\tan\alpha\cdot\sin\alpha=3$，$-\frac{\pi}{2}<\alpha<0$，则 $\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{6}\right)$ 的值是　（　）

A. 0　　B. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

C. 1　　D. $\frac{1}{2}$

4. **（2018·全国卷Ⅱ）**若 $f(x)=\cos x-\sin x$ 在 $[-a,a]$ 是减函数，则 a 的最大值是　（　）

A. $\frac{\pi}{4}$　　B. $\frac{\pi}{2}$

C. $\frac{3\pi}{4}$　　D. π

5. $(1+\tan1^\circ)(1+\tan2^\circ)\cdots(1+\tan44^\circ)(1+\tan45^\circ)=$　（　）

A. 10^{23}　　B. 2^{23}

C. 2^{22}　　D. 2^{21}

6. 将函数 $f(x)=\frac{\sqrt{2}}{2}\sin2x+\frac{\sqrt{6}}{2}\cos2x$ 的图象向右平移 $\frac{\pi}{4}$ 个单位后得到函数 $g(x)$ 的图象，则 $g\left(\frac{\pi}{4}\right)$ 的值为　（　）

A. $\frac{\sqrt{6}}{2}$　　B. -1

C. $\sqrt{2}$　　D. 2

7. 已知将函数 $f(x)=\sqrt{3}\sin x\cos x+\cos^2x-\frac{1}{2}$ 的图象向左平移 $\frac{5\pi}{12}$ 个单位长度后得到 $y=g(x)$ 的图象，则 $g(x)$ 在 $\left[-\frac{\pi}{12},\frac{\pi}{3}\right]$ 上的值域为　（　）

A. $\left[-\frac{1}{2},1\right]$　　B. $\left[-1,\frac{1}{2}\right]$

C. $\left[-\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2}\right]$　　D. $\left[-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right]$

8. 若 $\cos\alpha=-\frac{4}{5}$，α 是第三象限角，则 $\frac{1+\tan\frac{\alpha}{2}}{1-\tan\frac{\alpha}{2}}=$　（　）

A. $-\frac{1}{2}$　　B. $\frac{1}{2}$

C. 2　　D. -2

二、填空题（每小题 5 分，共 15 分）

9. 若 $\frac{\cos2\alpha}{\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)}=\frac{1}{2}$，则 $\sin2\alpha$ 的值为_____.

10. 设 α,β 都是锐角，且 $\cos\alpha=\frac{\sqrt{5}}{5}$，$\sin(\alpha+\beta)=\frac{3}{5}$，则 $\cos\beta=$_____.

11. 有如下 4 种说法：

①若 $\sin\alpha\cos\beta=-\frac{1}{3}$，则 $\cos\alpha\sin\beta$ 的取值范围是 $\left[-\frac{2}{3},\frac{4}{3}\right]$；

②若 $\cos\alpha-2\cos\beta=2$，则 $\sin\alpha+2\sin\beta$ 的取值范围是 $[-\sqrt{5},\sqrt{5}]$；

③设 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数，且 $f(x)=f(2-x)$（任意 $x\in\mathbf{R}$），则 $f(x)$ 的一个周期为 4；

④设 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数，且 $f(x)=f(2+x)$（任意 $x\in\mathbf{R}$），则 $f(1)=0$.

其中正确说法的序号是_____（请把你认为正确说法的序号都填在横线上）.

三、解答题（每小题 15 分，共 45 分）

12. 已知函数 $f(x)=A\sin(x+\varphi)(A>0,0<\varphi<\pi,x\in\mathbf{R})$ 的最大值是 1，其图象经过点 $M\left(\frac{\pi}{3},\frac{1}{2}\right)$.

(1)求 $f(x)$ 的解析式；

(2)已知 $\alpha,\beta\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，且 $f(\alpha)=\frac{3}{5}$，$f(\beta)=\frac{12}{13}$，求 $f(\alpha-\beta)$ 的值.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

学习札记

13. 已知函数$f(x)=\sin x(1+\sin x)+\cos^2 x$.

(1)求$f(x)$在$\left[-\frac{\pi}{6},\frac{2\pi}{3}\right]$上的最大值和最小值；

(2)在$\triangle ABC$中，已知$\cos A=\frac{7}{25}$，$\cos B=\frac{3}{5}$，求$f(C)$.

14. 已知$\sin\frac{\alpha}{2}-\cos\frac{\alpha}{2}=\frac{\sqrt{10}}{5}$，$\alpha\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$，$\tan(\pi-\beta)=\frac{1}{2}$，求$\tan(\alpha-2\beta)$的值.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

班级_____ 姓名_____ 考场号_____ 准考证号_____

密 封 线

阶段测试一

（第一章　基本初等函数(Ⅱ)）

时间：120 分钟　满分：150 分

答题卡

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
答案												

一、选择题(本大题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分)

1. 半径为 π cm，中心角为 120°的弧长为 (　　)

A. $\frac{\pi}{3}$ cm　　B. $\frac{\pi^2}{3}$ cm　　C. $\frac{2\pi}{3}$ cm　　D. $\frac{2\pi^2}{3}$ cm

2. 若 $\cos\alpha>0$，$\sin\alpha<0$，则角 α 的终边在 (　　)

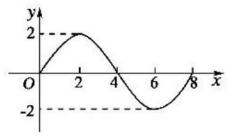
A. 第一象限　　B. 第二象限　　C. 第三象限　　D. 第四象限

3. 下列函数中，最小正周期为 π，且图象关于直线 $x=\frac{\pi}{3}$ 对称的是 (　　)

A. $y=\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)$　　B. $y=\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)$

C. $y=\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$　　D. $y=\sin\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{6}\right)$

4. 右图是函数 $f(x)=A\sin\omega x\,(A>0,\omega>0)$ 一个周期的图象，则 $f(1)+f(2)+f(3)+f(4)+f(5)+f(6)$ 的值等于 (　　)



A. $\sqrt{2}$　　B. $\frac{\sqrt{2}}{2}$

C. $2+\sqrt{2}$　　D. $2\sqrt{2}$

5. 给出下列各函数值：①$\sin100°$；②$\cos(-100°)$；③$\tan(-100°)$；④$\frac{\sin\frac{7\pi}{10}\cos\pi}{\tan\frac{17\pi}{9}}$．其中符号为负的是 (　　)

A. ①　　B. ②　　C. ③　　D. ④

6. 记 $\cos(-80°)=k$，那么 $\tan100°=$ (　　)

A. $\frac{\sqrt{1-k^2}}{k}$　　B. $-\frac{\sqrt{1-k^2}}{k}$　　C. $\frac{k}{\sqrt{1-k^2}}$　　D. $-\frac{k}{\sqrt{1-k^2}}$

7. 若 $0<\alpha<2\pi$，且 $\sin\alpha<\frac{\sqrt{3}}{2}$，$\cos\alpha>\frac{1}{2}$，利用三角函数线得到角 α 的取值范围是 (　　)

A. $\left(-\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{3}\right)$　　B. $\left(0,\frac{\pi}{3}\right)$　　C. $\left(\frac{5\pi}{3},2\pi\right)$　　D. $\left(0,\frac{\pi}{3}\right)\cup\left(\frac{5\pi}{3},2\pi\right)$

8. 化简 $\frac{2\sin\alpha\cos\alpha-\cos\alpha}{1+\sin^2\alpha-\sin\alpha-\cos^2\alpha}$ 等于 (　　)

A. $\tan\alpha$　　B. $\frac{1}{\tan\alpha}$　　C. $-\tan\alpha$　　D. $-\frac{1}{\tan\alpha}$

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

9. 如果函数 $f(x)=\sin\left(\omega x+\frac{\pi}{6}\right)(\omega>0)$的最小正周期为$\frac{\pi}{2}$，则 ω 的值为 （　　）

A. 1　　B. 2　　C. 4　　D. 8

10. 将函数 $y=\sin x$ 的图象上所有的点向右平移$\frac{\pi}{10}$个单位长度，再把所得各点的横坐标伸长到原来的 2 倍（纵坐标不变），所得图象的函数解析式是 （　　）

A. $y=\sin\left(2x-\frac{\pi}{10}\right)$　　B. $y=\sin\left(2x-\frac{\pi}{5}\right)$

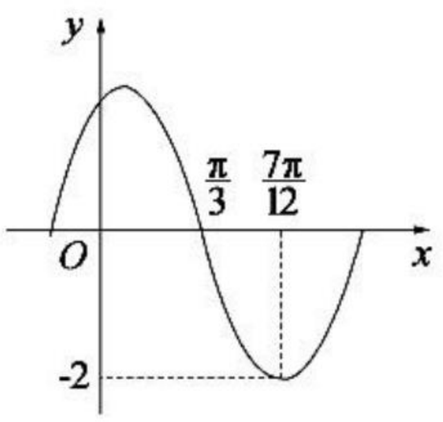
C. $y=\sin\left(\frac{1}{2}x-\frac{\pi}{10}\right)$　　D. $y=\sin\left(\frac{1}{2}x-\frac{\pi}{20}\right)$

11. 已知函数 $f(x)=A\sin(\omega x+\varphi)+m(A>0,\omega>0)$的最大值是 4，最小值是 0，该函数的图象与直线 $y=2$ 的两个相邻交点之间的距离为$\frac{\pi}{4}$，对任意的 $x\in\mathbf{R}$，满足 $f(x)\leqslant\left|A\sin\left(\frac{\pi}{12}\omega+\varphi\right)\right|+m$，且 $f(\pi)<f\left(\frac{\pi}{4}\right)$，则下列符合条件的函数的解析式是 （　　）

A. $f(x)=2\sin\left(4x+\frac{\pi}{6}\right)+2$　　B. $f(x)=2\sin\left(2x+\frac{7\pi}{6}\right)+2$

C. $f(x)=2\sin\left(4x+\frac{\pi}{3}\right)+2$　　D. $f(x)=2\sin\left(4x+\frac{7\pi}{6}\right)+2$

12. 函数 $f(x)=A\sin(\omega x+\varphi)$（$A,\omega,\varphi$ 是常数，$A>0,\omega>0$）的部分图象如图所示，下列结论：



①最小正周期为 π；

②将 $f(x)$的图象向左平移$\frac{\pi}{6}$个单位，所得到的函数是偶函数；

③$f(0)=1$；

④$f\left(\frac{12\pi}{11}\right)<f\left(\frac{14\pi}{13}\right)$；

⑤$f(x)=-f\left(\frac{5\pi}{3}-x\right)$.

其中正确的是 （　　）

A. ①②③　　B. ②③④　　C. ①④⑤　　D. ②③⑤

二、填空题（本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分）

13. 已知 $\sin\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)=m$，则 $\cos\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)=$_____.

14. 已知函数 $f(x)=3\sin\left(\omega x-\frac{\pi}{6}\right)(\omega>0)$和 $g(x)=2\cos(2x+\varphi)+1$ 的图象的对称轴完全相同，若 $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$，则 $f(x)$的取值范围是_____.

15. 函数 $y=f(\cos x)$的定义域为$\left[2k\pi-\frac{\pi}{6},2k\pi+\frac{2\pi}{3}\right](k\in\mathbf{Z})$，则函数 $y=f(x)$的定义域为_____.

16. 关于函数 $f(x)=4\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right),x\in\mathbf{R}$ 有下列命题：

①函数 $y=f(x)$的最小正周期是 π；②函数 $y=f(x)$的振幅是 4；③函数 $y=f(x)$的图象关于直线 $x=\frac{\pi}{12}$对称. 其中正确的是_____.

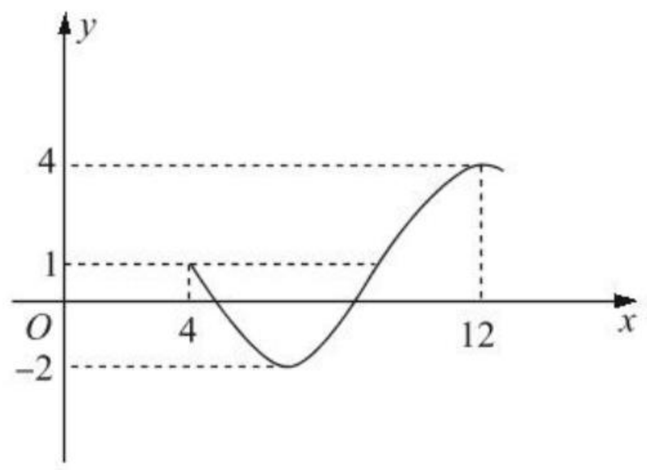
关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

三、解答题(本大题共 6 小题,共 70 分)

17.(10 分)(1)已知角 α 终边上一点 $P(-4,3)$,求 $\dfrac{\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)\sin(-\pi-\alpha)}{\cos\left(\frac{11\pi}{2}-\alpha\right)\sin\left(\frac{9\pi}{2}+\alpha\right)}$ 的值;

(2)设 k 为整数,化简 $\dfrac{\sin(k\pi-\alpha)\cos[(k+1)\pi-\alpha]}{\sin[(k-1)\pi+\alpha]\cos(k\pi+\alpha)}$.

18.(12 分)下图为函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)+c\left(A>0,\omega>0,0<\varphi<\frac{\pi}{2}\right)$ 图象的一部分.



(1)求此函数的解析式;

(2)求此函数的单调增区间及对称中心.

19.(12 分)已知 α 是一个三角形的内角,且 $\sin\alpha+\cos\alpha=\dfrac{1}{5}$.

(1)求 $\tan\alpha$ 的值;

(2)用 $\tan\alpha$ 表示 $\dfrac{1}{\sin^2\alpha-\cos^2\alpha}$ 并求其值.

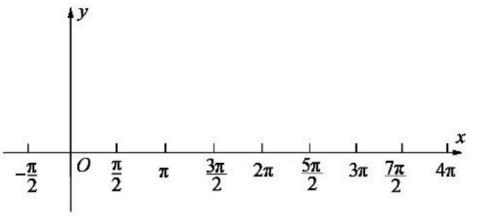
关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

20.(12 分)已知函数 $f(x)=3\sin\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{6}\right)+3$.

(1)用五点法画出这个函数在一个周期内的图象;(必须列表)

(2)求它的振幅、周期、初相、对称轴方程;

(3)说明此函数图象可由 $y=\sin x$ 在$[0,2\pi]$上的图象经怎样的变换得到.



21.(12 分)设函数 $f(x)=\sin\left(2\omega x+\frac{\pi}{3}\right)+\frac{\sqrt{3}}{2}+a$(其中 $\omega>0$,$a\in\mathbf{R}$),且 $f(x)$的图象在 y 轴右侧的第一个最低点的横坐标为$\frac{7\pi}{6}$.

(1)求 ω 的值;

(2)如果 $f(x)$在区间$\left[-\frac{\pi}{3},\frac{5\pi}{6}\right]$上的最小值为$\sqrt{3}$,求 a 的值.

22.(12 分)已知函数 $f(x)=\log_a\cos\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)$(其中 $a>0$,且 $a\neq1$).

(1)求它的定义域;

(2)求它的单调区间;

(3)判断它的奇偶性;

(4)判断它的周期性,如果是周期函数,求出它的周期.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

班级_____ 姓名_____ 考场号_____ 准考证号_____
密 封 线
数学 必修4B

班级_____ 姓名_____ 考场号_____ 准考证号_____

密 封 线

阶段测试二

(第二章　平面向量)

时间:120 分钟　满分:150 分

答题卡

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
答案												

一、选择题(本大题共 12 小题,每小题 5 分,共 60 分)

1. 已知向量 $\boldsymbol{a}=(2,3)$,$\boldsymbol{b}=(-1,2)$,若 $\mu\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}$ 平行,则 μ 等于 (　　)

A. -2　　B. 2　　C. $-\frac{1}{2}$　　D. $\frac{1}{2}$

2. 已知点 $A(1,3)$,$B(4,-1)$,则与向量 $\overrightarrow{AB}$ 的方向相反的单位向量是 (　　)

A. $\left(-\frac{3}{5},\frac{4}{5}\right)$　　B. $\left(-\frac{4}{5},\frac{3}{5}\right)$　　C. $\left(\frac{3}{5},-\frac{4}{5}\right)$　　D. $\left(\frac{4}{5},-\frac{3}{5}\right)$

3. 已知向量 $\overrightarrow{BA}=\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$,$\overrightarrow{BC}=\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2}\right)$,则 $\angle ABC=$ (　　)

A. $30°$　　B. $45°$　　C. $60°$　　D. $120°$

4. 设 $\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$ 不共线,$\overrightarrow{AB}=2\boldsymbol{a}+p\boldsymbol{b}$,$\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$,$\overrightarrow{CD}=\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}$,若 A,B,D 三点共线,则实数 p 的值为 (　　)

A. -2　　B. -1　　C. 1　　D. 2

5. 下列说法正确的是 (　　)

A. 单位向量都相等

B. 若 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 是共线向量,$\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{c}$ 是共线向量,则 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{c}$ 是共线向量

C. $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$,则 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$

D. 若 $\boldsymbol{a}_0$ 与 $\boldsymbol{b}_0$ 是单位向量,则 $\boldsymbol{a}_0\cdot\boldsymbol{b}_0=1$

6. 已知 $\boldsymbol{a}=(x,3)$,$\boldsymbol{b}=(3,1)$,且 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$,则 $x=$ (　　)

A. 1　　B. -9　　C. 9　　D. -1

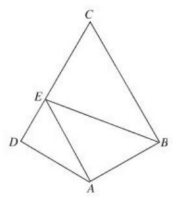
7. 在 $\triangle ABC$ 中,$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$,$\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{b}$,且 $\overrightarrow{BD}=\frac{1}{2}\overrightarrow{DC}$,则 $\overrightarrow{AD}=$ (　　)

A. $\frac{4}{3}\boldsymbol{a}-\frac{1}{3}\boldsymbol{b}$　　B. $\frac{2}{3}\boldsymbol{a}+\frac{1}{3}\boldsymbol{b}$　　C. $\frac{1}{3}\boldsymbol{a}-\frac{4}{3}\boldsymbol{b}$　　D. $\frac{1}{3}\boldsymbol{a}+\frac{2}{3}\boldsymbol{b}$

8. 已知向量 $\boldsymbol{a}=(1,1)$,$2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(4,2)$,则向量 $\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$ 的夹角为 (　　)

A. $\frac{\pi}{6}$　　B. $\frac{\pi}{4}$　　C. $\frac{\pi}{3}$　　D. $\frac{\pi}{2}$

9. **(2018·天津卷)**如图,在平面四边形 $ABCD$ 中,$AB\perp BC$,$AD\perp CD$,$\angle BAD=120°$,$AB=AD=1$. 若点 E 为边 CD 上的动点,则 $\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{BE}$ 的最小值为 (　　)



A. $\frac{21}{16}$　　B. $\frac{3}{2}$

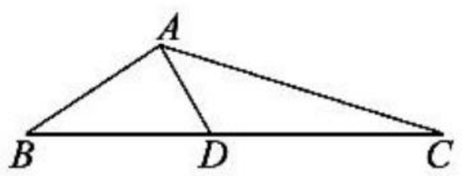
C. $\frac{25}{16}$　　D. 3

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

10. 若 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ 是一组基底，向量 $\boldsymbol{\gamma}=x\boldsymbol{\alpha}+y\boldsymbol{\beta}(x,y\in\mathbf{R})$，则称 (x,y) 为向量 $\boldsymbol{\gamma}$ 在基底 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ 下的坐标，现已知向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 在基底 $\boldsymbol{p}=(1,-1),\boldsymbol{q}=(2,1)$ 下的坐标为 $(-2,2)$，则 $\boldsymbol{\alpha}$ 在另一组基底 $\boldsymbol{m}=(-1,1),\boldsymbol{n}=(1,2)$ 下的坐标为（　　）

A. $(2,0)$　　B. $(0,-2)$　　C. $(-2,0)$　　D. $(0,2)$

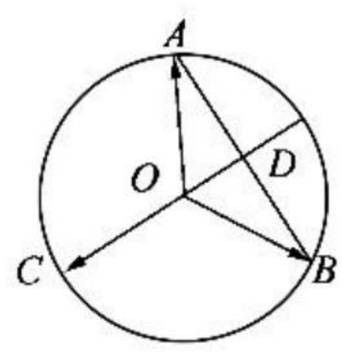
11. 如图，在 $\triangle ABC$ 中，$AD\perp AB,\overrightarrow{BC}=\sqrt{3}\,\overrightarrow{BD},|\overrightarrow{AD}|=1$，则 $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD}=$（　　）



A. 3　　B. $\sqrt{3}$

C. $\sqrt{3}-1$　　D. $2-\sqrt{3}$

12. 如图所示，A,B,C 是圆 O 上的三个点，CO 的延长线与线段 AB 交于圆内一点 D，若 $\overrightarrow{OC}=x\overrightarrow{OA}+y\overrightarrow{OB}$，则（　　）



A. $0<x+y<1$　　B. $x+y>1$

C. $x+y<-1$　　D. $-1<x+y<0$

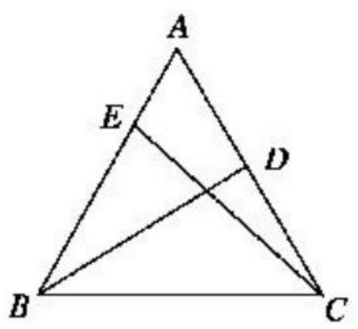
二、填空题（本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分）

13. 若 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 为两个不共线的向量，且 $\overrightarrow{AB}=3\boldsymbol{a}+k\boldsymbol{b},\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b},\overrightarrow{CD}=-2\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}$，若 A,B,D 三点共线，则 $k=$_____.

14. 已知向量 $\boldsymbol{a}=(1,3),\boldsymbol{a}\perp(\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}),|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=2\sqrt{6}$，则 $|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=$_____.

15. 在正三角形 ABC 中，D 是 BC 上的点，$AB=1,BD=\dfrac{1}{3}$，则 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}=$_____.

16. 如图，在等腰三角形 ABC 中，底边 $BC=2,\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{DC},\overrightarrow{AE}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{EB}$，若 $\overrightarrow{BD}\cdot\overrightarrow{AC}=-\dfrac{1}{2}$，则 $\overrightarrow{CE}\cdot\overrightarrow{AB}=$_____.



三、解答题（本大题共 6 小题，共 70 分）

17.（10 分）已知平面向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$，其中 $\boldsymbol{a}=(1,2),\boldsymbol{b}=(-2,3),\boldsymbol{c}=(-2,m)$.

(1) 若 $\boldsymbol{a}\perp(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$，求 $|\boldsymbol{c}|$；

(2) 若 $k\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 与 $2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ 共线，求实数 k 的值.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

18.(12 分)已知 $\boldsymbol{a}=(3,-2)$,$\boldsymbol{b}=(-1,0)$.

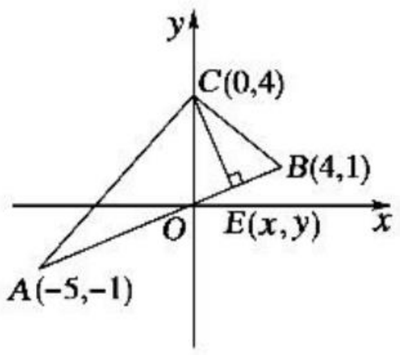
(1)求向量 $\boldsymbol{c}=3\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}$ 的单位向量 $\boldsymbol{c}_0$;

(2)求 x 的值,使 $x\boldsymbol{a}+(3-x)\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{c}$ 为平行向量.

19.(12 分)如右图,已知△ABC 的三个顶点的坐标为 $A(-5,-1)$,$B(4,1)$,$C(0,4)$.

(1)求△ABC 的面积;

(2)若四边形 $ABCD$ 为平行四边形,求 D 点的坐标.



20.(12 分)在△ABC 中,$\overrightarrow{AD}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$,$DE\parallel BC$,与边 AC 相交于点 E,△ABC 的中线 AM 与 DE 相交于点 N.

设 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$,$\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{b}$,试用 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 表示 $\overrightarrow{DN}$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

21.(12 分)已知 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 是同一平面内的三个向量,其中 $\boldsymbol{a}=(1,2)$.

(1)若 $|\boldsymbol{c}|=2\sqrt{5}$,且 $\boldsymbol{c}\parallel\boldsymbol{a}$,求 $\boldsymbol{c}$ 的坐标;

(2)若 $|\boldsymbol{b}|=\frac{\sqrt{5}}{2}$,且 $(\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b})\perp(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})$,求 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角 θ.

22.(12 分)已知 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2$ 是平面内两个不共线的非零向量,$\overrightarrow{AB}=2\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2$,$\overrightarrow{BE}=-\boldsymbol{e}_1+\lambda\boldsymbol{e}_2$,$\overrightarrow{EC}=-2\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2$,且 A,E,C 三点共线.

(1)求实数 λ 的值;

(2)若 $\boldsymbol{e}_1=(2,1)$,$\boldsymbol{e}_2=(2,-2)$,求 $\overrightarrow{BC}$ 的坐标;

(3)已知点 $D(3,5)$,在(2)的条件下,若 A,B,C,D 四点按逆时针顺序构成平行四边形,求点 A 的坐标.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

班级_____ 姓名_____ 考场号_____ 准考证号_____
密 封 线
数学 必修4B

班级_____ 姓名_____ 考场号_____ 准考证号_____

密 封 线

阶段测试三

(第三章　三角恒等变换)

时间:120 分钟　满分:150 分

答题卡

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
答案												

一、选择题(本大题共 12 小题,每小题 5 分,共 60 分)

1. 函数 $f(x)=\sin 2x\cdot\cos 2x$ 是 (　　)

A. 周期为 π 的偶函数　　B. 周期为 π 的奇函数

C. 周期为 $\frac{\pi}{2}$ 的奇函数　　D. 周期为 $\frac{\pi}{2}$ 的偶函数

2. 已知 α 为锐角,$\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{2}{3}$,则 $\sin\alpha=$ (　　)

A. $\frac{2+\sqrt{15}}{6}$　　B. $\frac{2\sqrt{3}+\sqrt{5}}{6}$　　C. $\frac{2\sqrt{3}-\sqrt{5}}{6}$　　D. $\frac{\sqrt{15}-2}{6}$

3. 下列函数中,以 $\frac{\pi}{2}$ 为最小正周期的偶函数是 (　　)

A. $y=\sin 2x+\cos 2x$　　B. $y=\sin 2x\cos 2x$

C. $y=\cos\left(4x+\frac{\pi}{2}\right)$　　D. $y=\sin^2 2x-\cos^2 2x$

4. 已知 $x\in(0,\pi)$,$\cos x=\frac{4}{5}$,则 $\frac{1}{\tan 2x}=$ (　　)

A. $\frac{7}{24}$　　B. $-\frac{7}{24}$　　C. $\frac{24}{7}$　　D. $-\frac{24}{7}$

5. 若 $(4\tan\alpha+1)(1-4\tan\beta)=17$,则 $\tan(\alpha-\beta)$ 的值为 (　　)

A. $\frac{1}{4}$　　B. $\frac{1}{2}$　　C. 4　　D. 12

6. 已知 α,β 都是锐角,若 $\sin\alpha=\frac{\sqrt{5}}{5}$,$\sin\beta=\frac{\sqrt{10}}{10}$,则 $\alpha+\beta=$ (　　)

A. $\frac{\pi}{4}$　　B. $\frac{3\pi}{4}$　　C. $\frac{\pi}{4}$ 和 $\frac{3\pi}{4}$　　D. $-\frac{\pi}{4}$ 和 $-\frac{3\pi}{4}$

7. 已知 $\frac{\sin\alpha\cos\alpha}{\cos 2\alpha+1}=1$,$\tan(\alpha-\beta)=3$,则 $\tan\beta=$ (　　)

A. $-\frac{1}{7}$　　B. $\frac{1}{7}$　　C. -1　　D. 1

8. 已知 $\cos 2\theta=\frac{\sqrt{2}}{3}$,则 $\sin^4\theta+\cos^4\theta$ 的值为 (　　)

A. $\frac{13}{18}$　　B. $\frac{11}{18}$　　C. $\frac{7}{9}$　　D. -1

9. 函数 $f(x)=(1+\sqrt{3}\tan x)\cos x$ 的最小正周期为 (　　)

A. 2π　　B. $\frac{3\pi}{2}$　　C. π　　D. $\frac{\pi}{2}$

10. 已知向量 $\boldsymbol{a}=(\cos\theta,\sin\theta)$,向量 $\boldsymbol{b}=(\sqrt{3},-1)$,则 $|2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$ 的最大值、最小值分别是 (　　)

A. $4\sqrt{2},0$　　B. $4,4\sqrt{2}$　　C. $16,0$　　D. $4,0$

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

11. 已知 $\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{3}$，$\frac{\pi}{3}<\alpha<\pi$，则 $\sin\left(\frac{\pi}{12}-\alpha\right)=$ （　　）

A. $-\frac{4+\sqrt{2}}{8}$　　B. $-\frac{4-\sqrt{2}}{8}$　　C. $-\frac{4-\sqrt{2}}{6}$　　D. $-\frac{4+\sqrt{2}}{6}$

12. 设$\triangle ABC$的三个内角为A，B，C，向量$\boldsymbol{m}=(\sqrt{3}\sin A,\sin B)$，$\boldsymbol{n}=(\cos B,\sqrt{3}\cos A)$，若$\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}=1+\cos(A+B)$，则$C=$ （　　）

A. $\frac{\pi}{6}$　　B. $\frac{\pi}{3}$　　C. $\frac{2\pi}{3}$　　D. $\frac{5\pi}{6}$

二、填空题(本大题共4小题，每小题5分，共20分)

13. **(2018·全国卷Ⅲ)**函数 $f(x)=\cos\left(3x+\frac{\pi}{6}\right)$在$[0,\pi]$的零点个数为_____.

14. **(2018·江苏卷)**已知函数 $y=\sin(2x+\varphi)\left(-\frac{\pi}{2}<\varphi<\frac{\pi}{2}\right)$的图象关于直线 $x=\frac{\pi}{3}$对称，则 φ 的值是_____.

15. 若 $\sin\left(\frac{\pi}{6}-\alpha\right)=\frac{1}{3}$，则 $\cos\left(\frac{2\pi}{3}+2\alpha\right)=$_____.

16. 设 $f(x)=a\sin 2x+b\cos 2x$，其中 $a,b\in\mathbf{R}$，$ab\neq 0$. 若 $f(x)\leqslant\left|f\left(\frac{\pi}{6}\right)\right|$对一切 $x\in\mathbf{R}$ 恒成立，则

①$f\left(\frac{11\pi}{12}\right)=0$；

②$\left|f\left(\frac{7\pi}{10}\right)\right|<\left|f\left(\frac{\pi}{5}\right)\right|$；

③$f(x)$既不是奇函数也不是偶函数；

④$f(x)$的单调递增区间是$\left[k\pi+\frac{\pi}{6},k\pi+\frac{2\pi}{3}\right](k\in\mathbf{Z})$；

⑤存在经过点(a,b)的直线与函数 $f(x)$的图象不相交.

以上结论正确的是_____(写出所有正确结论的编号).

三、解答题(本大题共6小题，共70分)

17. (10分)**(2018·浙江卷)**已知角 α 的顶点与原点 O 重合，始边与 x 轴的非负半轴重合，它的终边过点 $P\left(-\frac{3}{5},-\frac{4}{5}\right)$.

(1)求 $\sin(\alpha+\pi)$的值；

(2)若角 β 满足 $\sin(\alpha+\beta)=\frac{5}{13}$，求 $\cos\beta$ 的值.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

18.(12 分)已知 $\tan\frac{\alpha}{2}=\frac{1}{2}$,求$\frac{1+\sin 2\alpha}{1+\sin 2\alpha+\cos 2\alpha}$的值.

19.(12 分)已知 $\sin\left(A+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{7\sqrt{2}}{10}$,$A\in\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right)$.

(1)求 $\cos A$ 的值;

(2)求函数 $f(x)=\cos 2x+\frac{5}{2}\sin A\sin x$ 的值域.

20.(12 分)已知 $\cos\alpha=\frac{1}{7}$,$\cos(\alpha-\beta)=\frac{13}{14}$,且 $0<\beta<\alpha<\frac{\pi}{2}$.

(1)求 $\tan 2\alpha$ 的值;

(2)求 β.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

21.(12 分)已知函数 $f(x)=2\sqrt{3}\sin x\cos x-2\sin^2 x$.

(1)若角 α 的终边与单位圆交于点 $P\left(\frac{3}{5},\frac{4}{5}\right)$,求 $f(\alpha)$的值;

(2)若 $x\in\left[-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3}\right]$,求 $f(x)$的最小正周期和值域.

22.(12 分)设 $f(x)=2\sqrt{3}\sin(\pi-x)\sin x-(\sin x-\cos x)^2$.

(1)求 $f(x)$的单调递增区间;

(2)把 $y=f(x)$的图象上所有点的横坐标伸长到原来的 2 倍(纵坐标不变),再把得到的图象向左平移$\frac{\pi}{3}$个单位,得到函数 $y=g(x)$的图象,求 $g\left(\frac{\pi}{6}\right)$的值.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

班级_____ 姓名_____ 考场号_____ 准考证号_____
密 封 线
数学 必修4B

班级_____ 姓名_____ 考场号_____ 准考证号_____

密 封 线

阶段测试四

（本册综合测试）

时间：120 分钟　满分：150 分

答题卡

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
答案												

一、选择题（本大题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分）

1. $\sin 780°$的值为（　　）

A. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$　　B. $\frac{\sqrt{3}}{2}$　　C. $-\frac{1}{2}$　　D. $\frac{1}{2}$

2. 下列函数中，既为偶函数又在$(0,\pi)$上单调递增的是（　　）

A. $y=\sin|x|$　　B. $y=\cos(-x)$

C. $y=-\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$　　D. $y=|\tan x|$

3. 下列命题正确的个数是（　　）

①$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BA}=\mathbf{0}$；②$\mathbf{0}\cdot\overrightarrow{AB}=\mathbf{0}$；③$\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{BC}$；④$0\cdot\overrightarrow{AB}=0$；⑤$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}$，则$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{c}$；⑥$\boldsymbol{a}\parallel\boldsymbol{b}$且$\boldsymbol{b}\parallel\boldsymbol{c}$，则$\boldsymbol{a}\parallel\boldsymbol{c}$.

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

4. 已知$\triangle ABC$是锐角三角形，$P=\sin A+\sin B$，$Q=\cos A+\cos B$，则（　　）

A. $P<Q$　　B. $P>Q$　　C. $P=Q$　　D. P与Q的大小不能确定

5. 已知向量$\boldsymbol{a}=(1,n)$，$\boldsymbol{b}=(-1,n)$，若$2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$与$\boldsymbol{b}$垂直，则$|\boldsymbol{a}|$等于（　　）

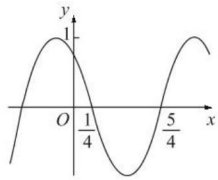
A. 1　　B. $\sqrt{2}$　　C. 2　　D. 4

6. 设D为$\triangle ABC$所在平面内一点，$\overrightarrow{BC}=3\overrightarrow{CD}$，则（　　）

A. $\overrightarrow{AD}=-\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{4}{3}\overrightarrow{AC}$　　B. $\overrightarrow{AD}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}-\frac{4}{3}\overrightarrow{AC}$

C. $\overrightarrow{AD}=\frac{4}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$　　D. $\overrightarrow{AD}=\frac{4}{3}\overrightarrow{AB}-\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$

7. 函数$f(x)=\cos(\omega x+\varphi)$的部分图象如图所示，则$f(x)$的单调递减区间为（　　）



A. $\left[k\pi-\frac{1}{4},k\pi+\frac{3}{4}\right](k\in\mathbf{Z})$　　B. $\left[2k\pi-\frac{1}{4},2k\pi+\frac{3}{4}\right](k\in\mathbf{Z})$

C. $\left[k-\frac{1}{4},k+\frac{3}{4}\right](k\in\mathbf{Z})$　　D. $\left[2k-\frac{1}{4},2k+\frac{3}{4}\right](k\in\mathbf{Z})$

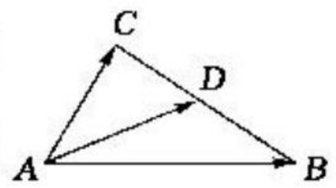
8. **（2018·全国卷Ⅰ）**已知函数$f(x)=2\cos^2x-\sin^2x+2$，则（　　）

A. $f(x)$的最小正周期为π，最大值为 3　　B. $f(x)$的最小正周期为π，最大值为 4

C. $f(x)$的最小正周期为2π，最大值为 3　　D. $f(x)$的最小正周期为2π，最大值为 4

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

9. 已知$|\boldsymbol{p}|=2\sqrt{2}$，$|\boldsymbol{q}|=3$，$\boldsymbol{p}$，$\boldsymbol{q}$的夹角为$\frac{\pi}{4}$，如右图，若$\overrightarrow{AB}=5\boldsymbol{p}+2\boldsymbol{q}$，$\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{p}-3\boldsymbol{q}$，$D$为$BC$的中点，则$|\overrightarrow{AD}|$为（　　）



A. $\frac{15}{2}$　　B. $\frac{\sqrt{15}}{2}$　　C. 7　　D. 18

10. 设向量$\boldsymbol{a}=(1,\cos\theta)$与$\boldsymbol{b}=(-1,2\cos\theta)$垂直，则$\cos2\theta$等于（　　）

A. $\frac{\sqrt{2}}{2}$　　B. $\frac{1}{2}$　　C. 0　　D. -1

11. 已知$\cos\left(\frac{5\pi}{12}+\alpha\right)=\frac{1}{3}$，且$-\pi<\alpha<-\frac{\pi}{2}$，则$\cos\left(\frac{\pi}{12}-\alpha\right)$等于（　　）

A. $\frac{2\sqrt{2}}{3}$　　B. $\frac{1}{3}$　　C. $-\frac{1}{3}$　　D. $-\frac{2\sqrt{2}}{3}$

12. **(2018·浙江卷)**已知$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{e}$是平面向量，$\boldsymbol{e}$是单位向量. 若非零向量$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{e}$的夹角为$\frac{\pi}{3}$，向量$\boldsymbol{b}$满足$\boldsymbol{b}^2-4\boldsymbol{e}\cdot\boldsymbol{b}+3=0$，则$|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$的最小值是（　　）

A. $\sqrt{3}-1$　　B. $\sqrt{3}+1$　　C. 2　　D. $2-\sqrt{3}$

二、填空题(本大题共4小题，每小题5分，共20分)

13. $\cos43^\circ\cos77^\circ+\sin43^\circ\cos167^\circ$的值为_____.

14. 已知$|\boldsymbol{a}|=6$，$|\boldsymbol{b}|=4$，$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$的夹角为60°，则$(\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b})=$_____.

15. 已知O是四边形$ABCD$所在平面内任一点，且$|\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OB}|=|\overrightarrow{DO}+\overrightarrow{OC}|$，$\overrightarrow{AB}/\!/\overrightarrow{CD}$，则四边形$ABCD$的形状是_____.

16. 函数$y=3\sin(x+10^\circ)+5\sin(x+70^\circ)$的最大值为_____.

三、解答题(本大题共6小题，共70分)

17. (10分)已知平面向量$\boldsymbol{a}=(1,x)$，$\boldsymbol{b}=(2x+3,-x)(x\in\mathbf{R})$.

(1)若$\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$，求$x$的值；

(2)若$\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$，求$|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

18.(12 分)**(2018·江苏卷)**已知 α,β 为锐角，$\tan\alpha=\frac{4}{3}$，$\cos(\alpha+\beta)=-\frac{\sqrt{5}}{5}$.

(1)求 $\cos2\alpha$ 的值；

(2)求 $\tan(\alpha-\beta)$ 的值.

19.(12 分)设函数 $f(x)=\sin x\cos x-\sqrt{3}\cos(x+\pi)\cos x(x\in\mathbf{R})$.

(1)求 $f(x)$ 的最小正周期；

(2)若函数 $y=f(x)$ 的图象按 $\boldsymbol{b}=\left(\frac{\pi}{4},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ 平移后得到函数 $y=g(x)$ 的图象，求 $y=g(x)$ 在 $\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$ 上的最大值.

20.(12 分)已知 $\cos\left(\frac{\pi}{4}-\theta\right)=\frac{\sqrt{2}}{10}$，且 $\theta\in(0,\pi)$.

(1)求 $\sin\left(\frac{\pi}{4}+\theta\right)$ 的值；

(2)求 $\sin^4\theta-\cos^4\theta$ 的值.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

21.(12 分)**(2018·北京卷)**已知函数 $f(x)=\sin^2x+\sqrt{3}\sin x\cos x$.

(1)求 $f(x)$的最小正周期;

(2)若 $f(x)$在区间$\left[-\frac{\pi}{3},m\right]$上的最大值为$\frac{3}{2}$,求 m 的最小值.

22.(12 分)已知函数 $f(x)=\cos\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)+\cos\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)+2\sin x\cos x+1$.

(1)求函数 $f(x)$的最小正周期和单调递增区间;

(2)若函数 $g(x)=f(x)-m$ 在区间$\left[0,\frac{\pi}{3}\right]$上有两个不同的零点,求实数 m 的取值范围.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

班级_____ 姓名_____ 考场号_____ 准考证号_____
密 封 线
数学 必修4B

骄子之路®
the Road to Pride
让 学习更快乐，人生更精彩

答案与解析

与45分钟课时作业与单元测试配套使用

数学

必修4 RJ·B

班级：_____

姓名：_____

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

第一部分　课时作业

第一章　基本初等函数(Ⅱ)

1.1　任意角的概念与弧度制

1.1.1　角的概念的推广

基础知识点对点

1. B
2. C　若 α 为锐角，则 $0°<\alpha<90°$，则 $0°<2\alpha<180°$，故选 C.
3. D　$-150°+360°=210°$，故 $210°$ 与 $-150°$ 终边相同，故选 D.
4. D　若角 α 和角 β 的终边关于 y 轴对称，
   则 $\beta=180°-\alpha+2k\times180°$，
   即 $\alpha+\beta=(2k+1)\times180°$，$k\in\mathbf{Z}$，故选 D.
5. D　由题可知角 α 的终边在 y 轴负半轴上，不属于任何象限角，故选 D.
6. C

课后拔高提能练

1. D
2. C　∵时针顺时针旋转，故旋转的角度为 $-\frac{360°}{12}=-30°$.
3. C　特值法：取 $\alpha=30°$，∴$360°-30°=330°$ 是第四象限角，故选 C.
4. C
5. C
6. D　与 $1\ 250°$ 角终边相同的角 $\alpha=1\ 250°+k\cdot360°$，$k\in\mathbf{Z}$，
   ∵$-360°<\alpha<0°$，
   ∴当 $k=-4$ 时，$\alpha=-190°$，故选 D.
7. $60°$

   解析：由题意得 $7\alpha=k\cdot360°+\alpha(k\in\mathbf{Z})$，∴$\alpha=60°\cdot k$ $(k\in\mathbf{Z})$，又 α 为锐角，∴$\alpha=60°$.
8. $20°,140°,260°$

   解析：∵$\beta=k\cdot360°+60°(k\in\mathbf{Z})$，

   ∴$\frac{\beta}{3}=k\cdot120°+20°(k\in\mathbf{Z})$.

   又 $\frac{\beta}{3}\in[0°,360°)$，∴$0°\leqslant k\cdot120°+20°<360°(k\in\mathbf{Z})$，

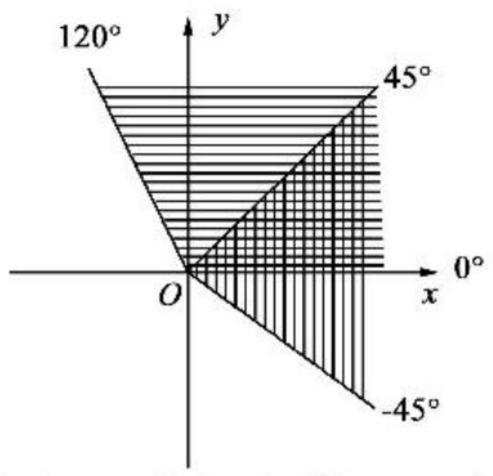
   ∴$-\frac{1}{6}\leqslant k<\frac{17}{6}$，∴$k=0,1,2$，

   此时分别得 $\frac{\beta}{3}$ 为 $20°,140°,260°$.

   故与 $\frac{\beta}{3}$ 终边相同的角为 $20°,140°,260°$.
9. ②④

   解析：$-75°$ 是第四象限角，①错；
   $670°=360°+310°$，是第四象限角，③错；
   ②④正确.
10. **解**：在 $0°\sim360°$ 的范围内，终边落在阴影部分内的角为 $30°<\alpha<150°$ 与 $210°<\alpha<330°$，∴所有满足题意的角 α 的集合为 $\{\alpha|k\cdot360°+30°<\alpha<k\cdot360°+150°,k\in\mathbf{Z}\}\cup\{\alpha|k\cdot360°+210°<\alpha<k\cdot360°+330°,k\in\mathbf{Z}\}=\{\alpha|n\cdot180°+30°<\alpha<n\cdot180°+150°,n\in\mathbf{Z}\}$.
11. **解**：(1)$S=\{\beta|\beta=1\ 303°18'+k\cdot360°,k\in\mathbf{Z}\}$. 分别令 $k=-5,-4,-3$ 得，S 中满足不等式 $-720°\leqslant\beta<360°$ 的元素为 $-496°42'$，$-136°42'$，$223°18'$.

    (2)$S=\{\beta|\beta=-225°+k\cdot360°,k\in\mathbf{Z}\}$. 分别令 $k=-1,0,1$ 得，S 中满足不等式 $-720°\leqslant\beta<360°$ 的元素为 $-585°$，$-225°$，$135°$.
12. **解**：集合 A、B 表示的角如图中阴影部分所示，

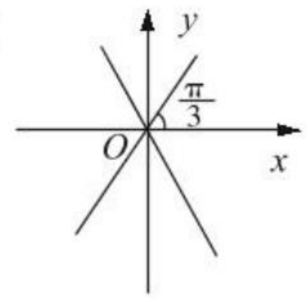


故 $A\cap B=\{\alpha|k\cdot360°<\alpha<45°+k\cdot360°,k\in\mathbf{Z}\}$，
$A\cup B=\{\alpha|-45°+k\cdot360°<\alpha<120°+k\cdot360°,k\in\mathbf{Z}\}$.

1.1.2　弧度制和弧度制与角度制的换算

基础知识点对点

1. C　$-225\times\frac{\pi}{180}=-\frac{5\pi}{4}$ 弧度. 故选 C.
2. (1)$105°$　(2)$-\frac{23\pi}{6}$　(3)$675°$　(4)-6π
3. B　终边所在直线与 y 轴夹角为 $\frac{\pi}{6}$，则其终边如图所示.



   则角的集合为 $\left\{\alpha\,\middle|\,\alpha=k\pi\pm\frac{\pi}{3},k\in\mathbf{Z}\right\}$.

   故选 B.
4. $\left\{\alpha\,\middle|\,\alpha=k\pi-\frac{\pi}{4},k\in\mathbf{Z}\right\}$
5. 1

   解析：扇形的半径为 r，

   则 $r=\frac{2}{2}=1$，

   ∴扇形的面积为 $S=\frac{1}{2}\times2\times1=1$.
6. 2

   解析：设扇形的半径为 r，弧长为 l，

   则 $\begin{cases}2r+l=8,\\ \frac{1}{2}lr=4,\end{cases}$ 解得 $r=2$，$l=4$，∴圆心角为 $\frac{l}{r}=2$.

课后拔高提能练

1. B
2. D　$56°15'=56.25°=56.25\times\frac{\pi}{180}=\frac{5}{16}\pi$. 故选 D.
3. D　根据角度与弧度的定义，可知无论是角度制还是弧度制，角的大小与圆的半径长短无关，而是与弧长与半径的比值有关，故选 D.
4. A　圆的弦与半径组成等边三角形，所以圆心角的弧度数为 $\frac{\pi}{3}$，故选 A.
5. C　$60°=60\times\frac{\pi}{180}=\frac{\pi}{3}$，A 正确；

   $-\frac{10\pi}{3}=-\frac{10\pi}{3}\times\frac{180°}{\pi}=-600°$，B 正确；

   $-150°=-150\times\frac{\pi}{180}=-\frac{5\pi}{6}$，C 错；

   $\frac{\pi}{12}=\frac{\pi}{12}\times\frac{180°}{\pi}=15°$，D 正确，故选 C.
6. A　设扇形的半径为 r，弧度为 α，

   由题意得 $\begin{cases}2r+\alpha r=6,\\ \frac{1}{2}\alpha r^2=2,\end{cases}$ 得 $\alpha=1$ 或 $\alpha=4$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

7. ①③

解析：$\frac{15\pi}{2}=6\pi+\frac{3\pi}{2}$，故$\frac{3\pi}{2}$与$\frac{15\pi}{2}$终边相同，

$\frac{26\pi}{5}=4\pi+\frac{6\pi}{5}$，$\frac{\pi}{5}$与$\frac{26\pi}{5}$终边不相同，

$\frac{25\pi}{8}=4\pi-\frac{7\pi}{8}$，$-\frac{7\pi}{8}$和$\frac{25\pi}{8}$终边相同.

$\frac{20\pi}{3}=6\pi+\frac{2\pi}{3}$，$-\frac{17\pi}{3}=-6\pi+\frac{\pi}{3}$，

$\therefore\frac{20\pi}{3}$与$-\frac{17\pi}{3}$终边不相同.

8. $-8\pi+\frac{7\pi}{4}$

解析：$-1\ 125^\circ=-360^\circ\times4+315^\circ$，

$\therefore$把$-1\ 125^\circ$化为$-8\pi+\frac{7\pi}{4}$.

9. 2

解析：由$l=r\cdot\theta$，

若半径变为原来的$\frac{1}{2}$，弧长不变，

则$\theta'=\frac{l}{\frac{r}{2}}=2\cdot\frac{l}{r}=2\theta$.

10. **解**：(1)$20^\circ=\frac{20\pi}{180}=\frac{\pi}{9}$.

(2)$-15^\circ=-\frac{15\pi}{180}=-\frac{\pi}{12}$.

(3)$\frac{17\pi}{12}=\frac{17\pi}{12}\times\left(\frac{180}{\pi}\right)^\circ=\left(\frac{17\pi}{12}\times\frac{180}{\pi}\right)^\circ=255^\circ$.

(4)$-\frac{11\pi}{5}=-\frac{11\pi}{5}\times\left(\frac{180}{\pi}\right)^\circ=-\left(\frac{11\pi}{5}\times\frac{180}{\pi}\right)^\circ=-396^\circ$.

11. **解**：设扇形的圆心角为α，半径为r，弧长为l，面积为S，则$l+2r=30$，$l=30-2r(0<r<15)$，

$\therefore S=\frac{1}{2}lr=\frac{1}{2}(30-2r)r=-\left(r-\frac{15}{2}\right)^2+\frac{225}{4}$.

$\therefore$当$r=\frac{15}{2}$ cm时，扇形面积的最大值是$\frac{225}{4}$ cm^2，

此时$\alpha=\frac{l}{r}=\frac{30-2\times\frac{15}{2}}{\frac{15}{2}}=2$.

12. **解**：(1)如题中图(1)，在$[0,2\pi)$内满足条件的集合为$\left[0,\frac{\pi}{3}\right]\cup\left[\frac{2\pi}{3},\pi\right]$.

则所求角的集合为

$\left\{\alpha\middle|2k\pi\leqslant\alpha\leqslant\frac{\pi}{3}+2k\pi\text{或}\frac{2\pi}{3}+2k\pi\leqslant\alpha\leqslant\pi+2k\pi,k\in\mathbf{Z}\right\}$.

(2)如题中图(2)，在$[0,2\pi)$内满足条件的集合为$\left(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{4}\right)\cup\left(\frac{7\pi}{6},\frac{5\pi}{4}\right)$，则所求角的集合为

$\left\{\alpha\middle|\frac{\pi}{6}+2k\pi<\alpha<\frac{\pi}{4}+2k\pi,k\in\mathbf{Z}\right\}\cup$

$\left\{\alpha\middle|\frac{7\pi}{6}+2k\pi<\alpha<\frac{5\pi}{4}+2k\pi,k\in\mathbf{Z}\right\}$

$=\left\{\alpha\middle|\frac{\pi}{6}+2k\pi<\alpha<\frac{\pi}{4}+2k\pi,k\in\mathbf{Z}\right\}\cup$

$\left\{\alpha\middle|\frac{\pi}{6}+(2k+1)\pi<\alpha<\frac{\pi}{4}+(2k+1)\pi,k\in\mathbf{Z}\right\}$

$=\left\{\alpha\middle|\frac{\pi}{6}+n\pi<\alpha<\frac{\pi}{4}+n\pi,n\in\mathbf{Z}\right\}$.

1.2 任意角的三角函数

1.2.1 三角函数的定义

基础知识点对点

1. C 当角θ的终边在第一象限时，取点$(1,\sqrt{3})$，则$\tan\theta=\frac{\sqrt{3}}{1}=\sqrt{3}$；当角$\theta$的终边在第三象限时，取点$(-1,-\sqrt{3})$，则$\tan\theta=\frac{-\sqrt{3}}{-1}=\sqrt{3}$. 故选 C.

2. A $\sin\alpha=\frac{3}{5}$，$\cos\alpha=-\frac{4}{5}$，

令$r=5$，则$\sin\alpha=\frac{y}{r}=\frac{3}{5}$，$\therefore y=3$，

$\cos\alpha=\frac{x}{r}=-\frac{4}{5}$，$x=-4$，

$\therefore$角α终边上的点是$(-4,3)$，故选 A.

3. B 由题可知$\cos\theta<0$，$\tan\theta<0$，

$\therefore\theta$是第二象限角，故选 B.

4. 三

解析：$\frac{5\pi}{4}$是第三象限角，$\therefore\sin\frac{5\pi}{4}<0$，$\frac{3\pi}{4}$是第二象限角，

$\therefore\cos\frac{3\pi}{4}<0$，$\therefore\theta$是第三象限角.

5. $[2k\pi,2k\pi+\pi](k\in\mathbf{Z})$

解析：由题可知，$\sin x\geqslant0$，$\therefore2k\pi\leqslant x\leqslant2k\pi+\pi$，$k\in\mathbf{Z}$，故函数的定义域为$[2k\pi,2k\pi+\pi](k\in\mathbf{Z})$.

课后拔高提能练

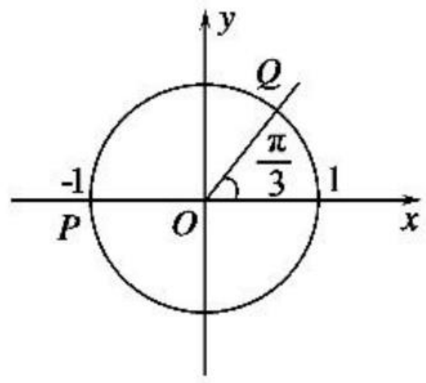
1. B $r=\sqrt{4^2+(-3)^2}=5$，$\therefore\tan\alpha=-\frac{3}{4}$，$\cos\alpha=\frac{4}{5}$，$\sin\alpha=-\frac{3}{5}$，故选 B.

2. B $r=\sqrt{3+y^2}$，

$\therefore\sin\beta=\frac{y}{\sqrt{3+y^2}}=\frac{\sqrt{13}}{13}$，$\therefore y>0$，

$\frac{y^2}{3+y^2}=\frac{1}{13}$，$\therefore y^2=\frac{1}{4}$，$\therefore y=\frac{1}{2}$，故选 B.

3. C 由图可知，$\angle xOQ=\pi-\frac{2}{3}\pi=\frac{\pi}{3}$，



设$Q(x,y)$，由三角函数的定义可知

$y=\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，

$x=\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}$，

$\therefore Q\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

4. B 由三角函数的定义及三角函数在各象限的符号规律可得②④正确，故选 B.

5. D $\sin\alpha<0$，$\cos\alpha>0$，

$\therefore\alpha$是第四象限角，$\therefore\frac{3\pi}{2}<\alpha<2\pi$，故选 D.

6. C 在射线$y=3x(x\geqslant0)$上任取一点$(1,3)$，$\therefore r=\sqrt{1^2+3^2}=\sqrt{10}$，

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

则 $\sin\alpha=\frac{3}{\sqrt{10}}=\frac{3\sqrt{10}}{10}$，$\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{10}}=\frac{\sqrt{10}}{10}$，

$\therefore 2\sin\alpha+\cos\alpha=\frac{7\sqrt{10}}{10}$.

7. 0

解析：原式$=5\times1+2\times1-3\times(-1)+10\times(-1)=0$.

8. $\frac{4}{3}$

解析：根据任意角的三角函数的定义知 $\tan\alpha=\frac{-2}{1}=-2$，

所以 $\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}=\frac{2\times(-2)}{1-(-2)^2}=\frac{4}{3}$.

9. $\left\{x\middle|x\neq k\pi+\frac{\pi}{2},k\in\mathbf{Z}\right\}$

解析：由题可知 $\begin{cases}x\neq k\pi+\frac{\pi}{2},k\in\mathbf{Z},\\1+\sin x\neq0,\end{cases}$

$\therefore x\neq k\pi+\frac{\pi}{2},k\in\mathbf{Z}$，

$\therefore$ 函数的定义域为 $\left\{x\middle|x\neq k\pi+\frac{\pi}{2},k\in\mathbf{Z}\right\}$.

10. **解**：(1) $2\sin\alpha+\cos\alpha=2\frac{-3}{\sqrt{4^2+(-3)^2}}+\frac{4}{\sqrt{4^2+(-3)^2}}=-\frac{6}{5}+\frac{4}{5}=-\frac{2}{5}$.

(2) 由题可得 $\frac{m}{\sqrt{3+m^2}}=\frac{\sqrt{2}}{4}m$，

$\therefore\sqrt{3+m^2}=2\sqrt{2}$，

$\therefore m^2=5$，$\therefore m=\pm\sqrt{5}$，

当 $m=-\sqrt{5}$ 时，$\cos\alpha=\frac{-\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}=-\frac{\sqrt{6}}{4}$，

$\tan\alpha=\frac{-\sqrt{5}}{-\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{15}}{3}$；

当 $m=\sqrt{5}$ 时，$\cos\alpha=\frac{-\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}=-\frac{\sqrt{6}}{4}$，

$\tan\alpha=\frac{\sqrt{5}}{-\sqrt{3}}=-\frac{\sqrt{15}}{3}$.

11. **解**：由题知点 A 关于 x 轴的对称点为 $(a,-b)$，

则 $\sin\alpha=\frac{-b}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

点 A 关于 $y=x$ 的对称点为 (b,a)，

则 $\cos\beta=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

$\therefore\sin\alpha+\cos\beta=-\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}+\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}=0$.

12. **解**：依题意，点 P 到原点 O 的距离为

$OP=\sqrt{(-\sqrt{3})^2+y^2}$，

即 $r=\sqrt{3+y^2}$，$\sin\alpha=\frac{y}{r}=\frac{y}{\sqrt{3+y^2}}=\frac{\sqrt{3}}{4}y$.

$\because y\neq0$，$\therefore 9+3y^2=16$，$\therefore y^2=\frac{7}{3}$，$y=\pm\frac{\sqrt{21}}{3}$.

当 $y=\frac{\sqrt{21}}{3}$，α 是第二象限角，

$\cos\alpha=\frac{x}{r}=-\frac{3}{4}$，$\tan\alpha=-\frac{\sqrt{7}}{3}$；

当 $y=-\frac{\sqrt{21}}{3}$，α 是第三象限角，

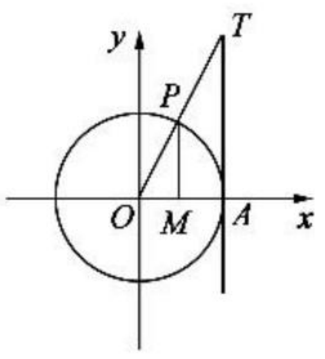
$\cos\alpha=\frac{x}{r}=-\frac{3}{4}$，$\tan\alpha=\frac{\sqrt{7}}{3}$.

1.2.2　单位圆与三角函数线

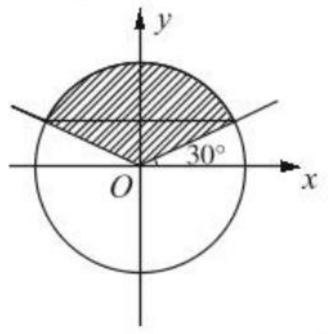
基础知识点对点

1. B

2. D　如图 α 的正弦线 MP，正切线 AT，余弦线 OM，可知 $OM<MP<AT$，$\therefore b<a<c$，故选 D.

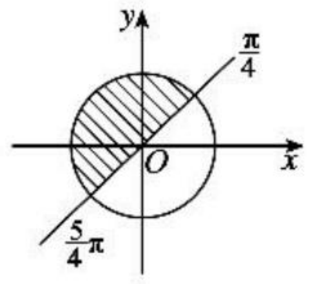


3. B　如图所示，使 $\sin x\geqslant\frac{1}{2}$ 的 x 的取值范围是 $\left[\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6}\right]$，故选 B.



课后拔高提能练

1. C　在直角坐标系 xOy 中作第一、三象限角平分线（如图），由阴影部分易知当 $\frac{\pi}{4}<x<\frac{5}{4}\pi$ 时，$\sin x>\cos x$. 故选 C.



2. B

3. B

4. B　$\frac{\pi}{6}$ 和 $\frac{5\pi}{6}$ 的正弦线关于 y 轴对称，大小相等，方向相同；$\frac{\pi}{3}$ 和 $\frac{4\pi}{3}$ 两角的终边在同一条直线上，因而所作正切线相等；$\frac{\pi}{4}$ 和 $\frac{5\pi}{4}$ 的余弦线方向不同. 所以答案为 B.

5. C

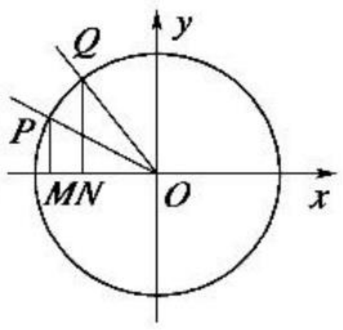
6. C　逐个分析 A、B、C、D 四个选项，利用三角函数的定义可得正确结论.

当点 P 在 $\overset{\frown}{AB}$ 上时，$\cos\alpha=x$，$\sin\alpha=y$，$\therefore\cos\alpha>\sin\alpha$，故 A 选项错误；当点 P 在 $\overset{\frown}{CD}$ 上时，$\cos\alpha=x$，$\sin\alpha=y$，$\tan\alpha=\frac{y}{x}$，$\therefore\tan\alpha>\sin\alpha>\cos\alpha$，故 B 选项错误；当点 P 在 $\overset{\frown}{EF}$ 上时，$\cos\alpha=x$，$\sin\alpha=y$，$\tan\alpha=\frac{y}{x}$，$\therefore\sin\alpha>\cos\alpha>\tan\alpha$，故 C 选项正确；当点 P 在 $\overset{\frown}{GH}$ 上时，$\tan\alpha>0$，$\sin\alpha<0$，$\cos\alpha<0$，故 D 选项错误. 综上，故选 C.

7. >

解析：借助于三角函数线解决.

如右图，α，β 的终边与单位圆分别交于 Q、P，$NQ>MP$，$\therefore|OM|>|ON|$，由于 OM，ON 为余弦线，即 $\cos\alpha>\cos\beta$.



8. $\cos\frac{6\pi}{5}<\sin\frac{2\pi}{5}<\tan\frac{7\pi}{5}$

解析：$\cos\frac{6\pi}{5}<0$，$\because\frac{7\pi}{5}$ 与 $\frac{2\pi}{5}$ 的正切线相同，

$\therefore\tan\frac{7\pi}{5}=\tan\frac{2\pi}{5}$，而 $\frac{\pi}{4}<\frac{2\pi}{5}<\frac{\pi}{2}$，$\therefore\tan\frac{2\pi}{5}>1$，

$\therefore\tan\frac{2\pi}{5}>\sin\frac{2\pi}{5}>0$.

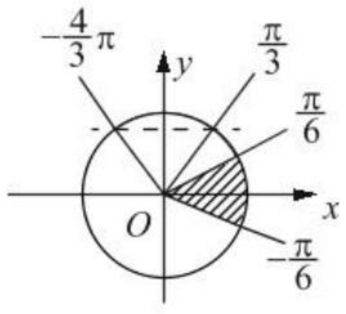
$\therefore\cos\frac{6\pi}{5}<\sin\frac{2\pi}{5}<\tan\frac{7\pi}{5}$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

9. ①②④

解析：作出角 α 的三角函数线，可知①②正确，③错误，若 $\alpha\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$，$0<\sin\alpha<-\cos\alpha$，则 $|\sin\alpha|<|\cos\alpha|$，④正确.

10. **解**：满足 $\sin\alpha\leqslant\frac{\sqrt{3}}{2}$ 的 α 的范围是 $\left[2k\pi-\frac{4\pi}{3},2k\pi+\frac{\pi}{3}\right](k\in\mathbf{Z})$，满足 $\cos\alpha\geqslant\frac{\sqrt{3}}{2}$ 的 α 范围是 $\left[2k\pi-\frac{\pi}{6},2k\pi+\frac{\pi}{6}\right](k\in\mathbf{Z})$，故符合题目要求的 α 范围是 $\left\{\alpha\,\middle|\,2k\pi-\frac{\pi}{6}\leqslant\alpha\leqslant2k\pi+\frac{\pi}{6},k\in\mathbf{Z}\right\}$.



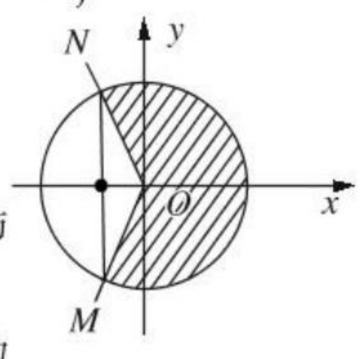
11. **解**：(1) $\because 4\cos x+2\geqslant0$，

$\therefore\cos x\geqslant-\frac{1}{2}$，

如图所示，

$\cos x=-\frac{1}{2}$ 的角的终边落在 OM 与 ON 上，

则满足 $\cos x\geqslant-\frac{1}{2}$ 的 x 值为 $2k\pi-\frac{2\pi}{3}\leqslant x\leqslant2k\pi+\frac{2\pi}{3},k\in\mathbf{Z}$.



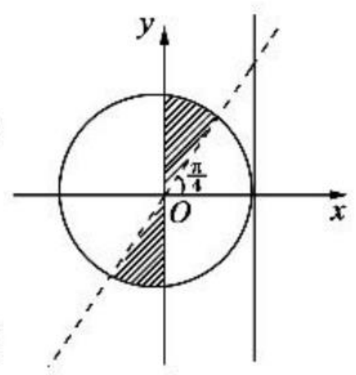
$\therefore$ 函数的定义域为 $\left[2k\pi-\frac{2\pi}{3},2k\pi+\frac{2\pi}{3}\right](k\in\mathbf{Z})$.

(2) $\because\tan x-1>0$，$\therefore\tan x>1$，

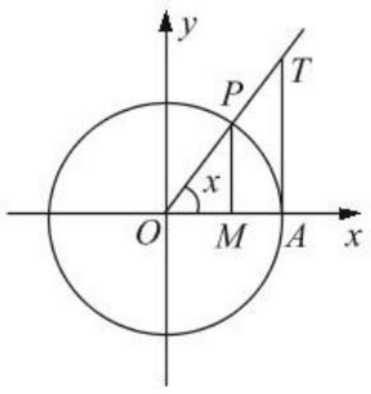
如图所示 $\tan x=1$ 时角为 $\frac{\pi}{4},\frac{5\pi}{4}$，

使正切值大于 1 的角落在阴影区域，

故函数的定义域为 $\left(k\pi+\frac{\pi}{4},k\pi+\frac{\pi}{2}\right)(k\in\mathbf{Z})$.



12. **解**：如图所示，在单位圆中，x 的正弦线、余弦线、正切线分别是 MP，OM，AT，



在 $\triangle OMP$ 中，$OP=1$，

$OM>OP-MP$，即 $\cos x>1-\sin x$，

又 $\because AT>1$，$\therefore\tan x>1$，

$\therefore\tan x>\cos x>1-\sin x$，

$\therefore2^{\tan x}>2^{\cos x}>2^{1-\sin x}$，即 $c>b>a$.

1.2.3 同角三角函数的基本关系式

基础知识点对点

1. B $\because\alpha\in\left(-\frac{\pi}{2},0\right)$，$\therefore\sin\alpha<0$，

$\therefore\sin\alpha=-\sqrt{1-\cos^2\alpha}=-\frac{3}{5}$，故选 B.

2. A $\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=-\frac{3}{4}$，$\therefore\cos\alpha=-\frac{4}{3}\sin\alpha$，$\therefore\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=\sin^2\alpha+\frac{16}{9}\sin^2\alpha=\frac{25}{9}\sin^2\alpha=1$，$\therefore\sin^2\alpha=\frac{9}{25}$，

$\because\alpha\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$，$\therefore\sin\alpha=\frac{3}{5}$，故选 A.

3. B $\sqrt{1-\sin^2160^\circ}=\sqrt{\cos^2160^\circ}=-\cos160^\circ$，故选 B.

4. A $\because\alpha\in\left(-\pi,-\frac{\pi}{2}\right)$，$\therefore\cos\alpha<0$，$\sqrt{\frac{1+\sin\alpha}{1-\sin\alpha}}-\sqrt{\frac{1-\sin\alpha}{1+\sin\alpha}}=\sqrt{\frac{(1+\sin\alpha)^2}{1-\sin^2\alpha}}-\sqrt{\frac{(1-\sin\alpha)^2}{1-\sin^2\alpha}}=\frac{1+\sin\alpha}{-\cos\alpha}-\frac{1-\sin\alpha}{-\cos\alpha}=\frac{-1-\sin\alpha+1-\sin\alpha}{\cos\alpha}=-2\tan\alpha$，故选 A.

5. B $\tan\alpha=3$，$\therefore\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=3$，$\therefore\sin\alpha=3\cos\alpha$，

代入 $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$，得 $10\cos^2\alpha=1$，$\therefore\cos^2\alpha=\frac{1}{10}$，

$\therefore2\sin^2\alpha+4\sin\alpha\cos\alpha-9\cos^2\alpha=2\times9\cos^2\alpha+12\cos^2\alpha-9\cos^2\alpha=21\cos^2\alpha=\frac{21}{10}$. 故选 B.

6. $\frac{1}{2}$

解析：由 $\sin x+\cos x=\sqrt{2}$，得 $1+2\sin x\cos x=2$，

$\therefore2\sin x\cos x=1$，

$\sin^4x+\cos^4x=\sin^4x+\cos^4x+2\sin^2x\cos^2x-2\sin^2x\cos^2x=(\sin^2x+\cos^2x)^2-2(\sin x\cos x)^2=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$.

课后拔高提能练

1. C $\because$ 角 α 在第四象限，且 $\sin\alpha=-\frac{3}{5}$，$\therefore\cos\alpha=\frac{4}{5}$，

$\therefore\tan\alpha=\frac{-\frac{3}{5}}{\frac{4}{5}}=-\frac{3}{4}$. 故选 C.

2. A $\sin^4\alpha-\cos^4\alpha=(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)(\sin^2\alpha-\cos^2\alpha)=\sin^2\alpha-\cos^2\alpha=\sin^2\alpha-(1-\sin^2\alpha)=2\sin^2\alpha-1=-\frac{3}{5}$.

3. A 由 $\tan\alpha=-\frac{1}{2}$，得 $\sin\alpha=-\frac{1}{2}\cos\alpha$，$\therefore\frac{2\sin\alpha\cos\alpha}{\sin^2\alpha-\cos^2\alpha}=\frac{2\times\left(-\frac{1}{2}\right)\cos^2\alpha}{\frac{1}{4}\cos^2\alpha-\cos^2\alpha}=\frac{4}{3}$，故选 A.

4. A 由 $5\sin\alpha+2\cos\alpha=0$，得 $\sin\alpha=-\frac{2}{5}\cos\alpha$.

又 $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$，

$\therefore\frac{4}{25}\cos^2\alpha+\cos^2\alpha=1$，

$\therefore\cos^2\alpha=\frac{25}{29}$，$\therefore\sin^2\alpha=\frac{4}{29}$.

原式 $=\sqrt{\cos^2\alpha\cdot\sin^2\alpha}=\sqrt{\frac{25}{29}\times\frac{4}{29}}=\frac{10}{29}$.

5. B $\frac{1}{4}\sin^2\alpha+\frac{2}{5}\cos^2\alpha=\frac{\frac{1}{4}\sin^2\alpha+\frac{2}{5}\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}=\frac{\frac{1}{4}\tan^2\alpha+\frac{2}{5}}{\tan^2\alpha+1}=\frac{\frac{1}{4}\times(-2)^2+\frac{2}{5}}{(-2)^2+1}=\frac{7}{25}$. 故选 B.

6. A $\frac{\cos x}{\sin x-1}=\frac{\cos x(1+\sin x)}{(\sin x-1)(\sin x+1)}=\frac{\cos x(1+\sin x)}{\sin^2x-1}=\frac{1+\sin x}{-\cos x}=\frac{1}{2}$. 故选 A.

7. $\frac{1}{5}$

解析：$\cos^2\alpha=\frac{\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha+\sin^2\alpha}=\frac{1}{1+\tan^2\alpha}=\frac{1}{5}$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

8. $-\frac{7}{5}$

解析：由 $\sin A+\cos A=\frac{1}{5}$，得 $1+2\sin A\cos A=\frac{1}{25}$，

$\therefore 2\sin A\cos A=-\frac{24}{25}$，

$\because A$ 为三角形的内角，$\therefore \sin A>0,\cos A<0$，

$\therefore (\cos A-\sin A)^2=1-2\sin A\cos A=\frac{49}{25}$，

$\therefore \cos A-\sin A=-\frac{7}{5}$.

9. $\cos 4-\sin 4$

解析：$\sqrt{1-2\sin 4\cos 4}=\sqrt{(\sin 4-\cos 4)^2}=\cos 4-\sin 4$.

10. **解**：由 $\sin\alpha+\cos\alpha=-\frac{1}{5}$，得 $(\sin\alpha+\cos\alpha)^2=\frac{1}{25}$，

$\therefore 2\sin\alpha\cos\alpha=-\frac{24}{25}$，$\therefore \sin\alpha\cdot\cos\alpha=-\frac{12}{25}$.

$(\sin\alpha-\cos\alpha)^2=1-2\sin\alpha\cos\alpha=\frac{49}{25}$，

$\because \alpha\in(0,\pi)$，$\sin\alpha\cdot\cos\alpha<0$，$\therefore \sin\alpha>0,\cos\alpha<0$，$\sin\alpha-\cos\alpha>0$，

$\therefore \sin\alpha-\cos\alpha=\frac{7}{5}$，由 $\begin{cases}\sin\alpha+\cos\alpha=-\frac{1}{5},\\ \sin\alpha-\cos\alpha=\frac{7}{5},\end{cases}$ 得

$\sin\alpha=\frac{3}{5}$，$\cos\alpha=-\frac{4}{5}$，$\therefore \tan\alpha=-\frac{3}{4}$.

11. **解**：由 $\cos\alpha+\cos^2\alpha=1$，

得 $\cos\alpha=1-\cos^2\alpha=\sin^2\alpha$，

$\therefore \sin^2\alpha+\sin^6\alpha+\sin^8\alpha$

$=\cos\alpha+\cos^3\alpha+\cos^4\alpha$

$=\cos\alpha+\cos^2\alpha(\cos\alpha+\cos^2\alpha)$

$=\cos\alpha+\cos^2\alpha=1$.

12. **解**：由韦达定理得 $\begin{cases}\sin\theta+\cos\theta=a,\\ \sin\theta\cdot\cos\theta=a.\end{cases}$

所以 $a^2=(\sin\theta+\cos\theta)^2=1+2\sin\theta\cos\theta=1+2a$，

即 $a^2-2a-1=0$，所以 $a=1\pm\sqrt{2}$.

又方程有两根，则 $\Delta=(-a)^2-4a\geqslant 0$，即

$a\leqslant 0$ 或 $a\geqslant 4$，所以 $a=1-\sqrt{2}$.

即 $\sin\theta+\cos\theta=\sin\theta\cdot\cos\theta=1-\sqrt{2}$.

(1) $\sin^3\theta+\cos^3\theta=(\sin\theta+\cos\theta)(\sin^2\theta-\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta)$

$=\sqrt{2}-2$.

(2) $\tan\theta+\frac{1}{\tan\theta}=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}+\frac{\cos\theta}{\sin\theta}=\frac{1}{\sin\theta\cos\theta}=-\sqrt{2}-1$.

1.2.4　诱导公式(一)

基础知识点对点

1. **解**：(1) $\sin\frac{17\pi}{4}=\sin\left(4\pi+\frac{\pi}{4}\right)=\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

(2) $\cos\frac{37}{6}\pi=\cos\left(6\pi+\frac{\pi}{6}\right)=\cos\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

(3) $\tan\left(-\frac{15\pi}{4}\right)=\tan\left(-4\pi+\frac{\pi}{4}\right)=\tan\frac{\pi}{4}=1$.

2. $-\frac{1}{3}$

解析：$\sin\left(\alpha+\frac{7\pi}{6}\right)=\sin\left[\left(\alpha+\frac{7\pi}{6}\right)-2\pi\right]=$

$\sin\left(\alpha-\frac{5\pi}{6}\right)=-\sin\left(\frac{5\pi}{6}-\alpha\right)=-\frac{1}{3}$.

3. $\frac{3}{5}$

解析：$\tan(-\alpha)=-\tan\alpha=\frac{3}{4}$，$\therefore \tan\alpha=-\frac{3}{4}$，$\therefore \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=-\frac{3}{4}$，$\therefore \cos\alpha=-\frac{4}{3}\sin\alpha$，$\therefore \sin^2\alpha+\frac{16}{9}\sin^2\alpha=1$，

$\therefore \sin^2\alpha=\frac{9}{25}$，又 $\because \alpha$ 是第二象限角，$\therefore \sin\alpha=\frac{3}{5}$.

4. C　原式 $=\sqrt{(\sin\alpha-\cos\alpha)^2}+\cos\alpha\tan\alpha$

$=\cos\alpha-\sin\alpha+\sin\alpha=\cos\alpha$. 故选 C.

5. A　$\because \sin(\pi+\alpha)=\frac{3}{5}$，$\sin\alpha=-\frac{3}{5}$，

又 $\because \alpha$ 是第三象限角，

$\therefore \cos\alpha=-\frac{4}{5}$，

$\cos(\alpha-2\pi)=\cos\alpha=-\frac{4}{5}$，故选 A.

课后拔高提能练

1. B　由 $\tan(\pi-\alpha)+3=0$，得 $-\tan\alpha+3=0$，$\therefore \tan\alpha=3$，

$\therefore \sin\alpha=3\cos\alpha$，又 $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=10\cos^2\alpha=1$，$\cos^2\alpha=\frac{1}{10}$，

$\therefore \sin^2\alpha=\frac{9}{10}$，

$\because \alpha$ 为锐角，$\therefore \sin\alpha=\frac{3\sqrt{10}}{10}$，故选 B.

2. B　由 $\sin(-\alpha)=\frac{2}{3}$，$\therefore \sin\alpha=-\frac{2}{3}$，

又 $\alpha\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$，

$\therefore \cos\alpha=\frac{\sqrt{5}}{3}$，

$\cos(\pi+\alpha)=-\cos\alpha=-\frac{\sqrt{5}}{3}$，故选 B.

3. C　由已知 $A+B+C=\pi$，$A+B=\pi-C$，故有

①$\sin(A+B)-\sin C=\sin(\pi-C)-\sin C=\sin C-\sin C=0$ 为常数；

②$\cos(A+B)+\cos C=\cos(\pi-C)+\cos C=-\cos C+\cos C=0$ 为常数；

③$\tan(A+B)+\tan C=\tan(\pi-C)+\tan C=-\tan C+\tan C=0$ 为常数；

④$\cot(A+B)-\cot C=\cot(\pi-C)-\cot C=-\cot C-\cot C=-2\cot C$ 不是常数，故选 C.

4. A　$\because \tan(5\pi+\alpha)=m$，

$\therefore \tan\alpha=m$.

原式 $=\frac{\sin(\alpha-\pi)+\cos(\pi-\alpha)}{\sin(-\alpha)-\cos(\pi+\alpha)}$

$=\frac{-\sin\alpha-\cos\alpha}{-\sin\alpha+\cos\alpha}=\frac{\sin\alpha+\cos\alpha}{\sin\alpha-\cos\alpha}$

$=\frac{\tan\alpha+1}{\tan\alpha-1}=\frac{m+1}{m-1}$. 故选 A.

5. C　$\because f\left(-\frac{11}{6}\right)=\sin\left(-\frac{11}{6}\pi\right)=\sin\left(-2\pi+\frac{\pi}{6}\right)=\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}$；$f\left(\frac{11}{6}\right)=f\left(\frac{5}{6}\right)-1=f\left(-\frac{1}{6}\right)-2=\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)-2=-\frac{5}{2}$.

$\therefore f\left(-\frac{11}{6}\right)+f\left(\frac{11}{6}\right)=-2$. 故选 C.

6. A　原式 $=\frac{(-\tan\alpha)\cos\alpha\cos\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha}=-1$，故选 A.

7. $\frac{1}{2}$

解析：$\sin 750^\circ=\sin(720^\circ+30^\circ)=\sin 30^\circ=\frac{1}{2}$.

8. $-\frac{\sqrt{3}}{3}$

解析：$\cos\left(\frac{5\pi}{6}-\alpha\right)=\cos\left[\pi-\left(\frac{\pi}{6}+\alpha\right)\right]=-\cos\left(\frac{\pi}{6}+\alpha\right)=-\frac{\sqrt{3}}{3}$.

9. -1

解析：$f(2\ 016)=a\sin(2\ 016\pi+\alpha)+b\cos(2\ 016\pi+\beta)=a\sin\alpha+b\cos\beta=1$，$f(2\ 017)=a\sin(2\ 017\pi+\alpha)+b\cos(2\ 017\pi+\beta)=-a\sin\alpha-b\cos\beta=-1$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

10. **解**：$\because 3\pi<\alpha<\frac{7\pi}{2}$，$\therefore \tan\alpha>0$，$\therefore k>0$，

由题可得 $\begin{cases}\tan\alpha+\dfrac{1}{\tan\alpha}=k,\\ \tan\alpha\cdot\dfrac{1}{\tan\alpha}=k^2-3,\end{cases}$

$\therefore k=2$，

$\therefore \tan\alpha+\dfrac{1}{\tan\alpha}=2$，即 $\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}+\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}=2$，

$\therefore \dfrac{1}{\sin\alpha\cos\alpha}=2$.

$\therefore 2\sin\alpha\cos\alpha=1$，

$\cos(3\pi+\alpha)-\sin(\pi+\alpha)=-\cos\alpha+\sin\alpha$，

$(\sin\alpha-\cos\alpha)^2=1-2\sin\alpha\cos\alpha=0$，

$\therefore \sin\alpha-\cos\alpha=0$. $\therefore \cos(3\pi+\alpha)-\sin(\pi+\alpha)=0$.

11. **解**：$\because a=\dfrac{\cot\alpha\cdot(-\cos\alpha)\cdot\sin^2\alpha}{\tan\alpha\cdot(-\cos^3\alpha)}$

$=\dfrac{\cot\alpha\cdot\sin^2\alpha}{\tan\alpha\cdot\cos^2\alpha}$

$=\cot^2\alpha\cdot\tan^2\alpha=1$，

$\therefore a^2+a+1=1^2+1+1=3$.

12. **解**：(1) $f(\alpha)=\dfrac{\sin^2\alpha\cos\alpha\tan\alpha}{(-\sin\alpha)(-\tan\alpha)}=\sin\alpha\cdot\cos\alpha$.

(2)若 $f(\alpha)=\dfrac{1}{8}$，$\therefore \sin\alpha\cos\alpha=\dfrac{1}{8}$，

$\therefore (\cos\alpha-\sin\alpha)^2=1-2\sin\alpha\cos\alpha=1-\dfrac{1}{4}=\dfrac{3}{4}$，

$\because \dfrac{\pi}{4}<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$，$\therefore \cos\alpha-\sin\alpha<0$，

$\therefore \cos\alpha-\sin\alpha=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

1.2.4 诱导公式(二)

基础知识点对点

1. A　原式 $=\sin2-\sin2=0$. 故选 A.

2. B　由 $\cos\left(\dfrac{\pi}{2}+\alpha\right)=\dfrac{3}{5}$，得 $\sin\alpha=-\dfrac{3}{5}$，

又 $\alpha\in\left(\dfrac{\pi}{2},\dfrac{3\pi}{2}\right)$，$\therefore \cos\alpha<0$，$\therefore \cos\alpha=-\dfrac{4}{5}$，

$\therefore \tan\alpha=\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\dfrac{3}{4}$，故选 B.

3. **解**：原式 $=$

$$\frac{\sin\alpha(-\cos\alpha)\sin\alpha\cos\left[2\pi+\left(\pi+\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\right]}{-\cos\alpha\sin[2\pi+(\pi-\alpha)]\sin[-(\pi-\alpha)]\sin\left[2\pi+\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)\right]}$$

$$=\frac{\sin\alpha\sin\alpha\cos\left[\pi+\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\right]}{\sin(\pi-\alpha)[-\sin(\pi-\alpha)]\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)}$$

$$=\frac{\sin\alpha\sin\alpha\left[-\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\right]}{\sin\alpha(-\sin\alpha)\cos\alpha}$$

$=\dfrac{\sin\alpha(-\sin\alpha)}{(-\sin\alpha)\cos\alpha}=\tan\alpha$.

4. **解**：(1) $f(\alpha)=\dfrac{(-\sin\alpha)(-\cos\alpha)(-\sin\alpha)\sin\alpha}{(-\cos\alpha)\sin\alpha(-\sin\alpha)(-\cos\alpha)}=\tan\alpha$.

(2)若 $f(\alpha)=2$，则 $\tan\alpha=2$，

$\sin^2\alpha-\sin\alpha\cos\alpha-2\cos^2\alpha$

$=\dfrac{\sin^2\alpha-\sin\alpha\cos\alpha-2\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}$

$=\dfrac{\tan^2\alpha-\tan\alpha-2}{\tan^2\alpha+1}=0$.

5. **解**：由题可知 $\tan\alpha=\dfrac{3}{-4}=-\dfrac{3}{4}$，

则 $\dfrac{\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)\sin(-\pi-\alpha)}{\cos\left(\frac{11\pi}{2}-\alpha\right)\sin\left(\frac{9\pi}{2}+\alpha\right)}$

$=\dfrac{(-\sin\alpha)\sin\alpha}{(-\sin\alpha)\cos\alpha}=\tan\alpha=-\dfrac{3}{4}$.

课后拔高提能练

1. A　$\sin(\pi+\theta)=-\sin\theta<0$，$\therefore \sin\theta>0$，

$\sin\left(\dfrac{3\pi}{2}-\theta\right)=-\cos\theta<0$，$\therefore \cos\theta>0$，

$\therefore \theta$ 是第一象限角，故选 A.

2. A　$\because -180^\circ<\alpha<-90^\circ$，$\therefore -105^\circ<75^\circ+\alpha<-15^\circ$，

$\therefore \sin(75^\circ+\alpha)<0$，

$\therefore \cos(15^\circ-\alpha)=\sin[90^\circ-(15^\circ-\alpha)]$

$=\sin(75^\circ+\alpha)$

$=-\sqrt{1-\cos^2(75^\circ+\alpha)}=-\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$，故选 A.

3. B　原式 $=\dfrac{\cos\theta+\cos\theta}{\cos\theta-\sin\theta}=\dfrac{2}{1-\tan\theta}=\dfrac{2}{1-2}=-2$. 故选 B.

4. B　$\sin\left(\alpha-\dfrac{2\pi}{3}\right)=-\sin\left(\dfrac{2\pi}{3}-\alpha\right)=-\sin\left(\dfrac{\pi}{2}+\dfrac{\pi}{6}-\alpha\right)=$

$-\cos\left(\dfrac{\pi}{6}-\alpha\right)=-\dfrac{2}{3}$. 故选 B.

5. C　$\because$ 在 $\triangle ABC$ 内 $A+B+C=\pi$，

$\therefore A+B=\pi-C$，

$\therefore \sin(A+B)=\sin(\pi-C)=\sin C$，故 C 正确.

6. A　原式 $=\dfrac{\cos\alpha\sin\alpha}{-\cos\alpha}+\dfrac{\sin\alpha(-\sin\alpha)}{-\sin\alpha}=-\sin\alpha+\sin\alpha=0$.

7. $-\dfrac{4}{3}$

解析：由 $\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{4}\right)=\cos\left(\theta-\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{3}{5}$，

$\because \theta$ 是第四象限角，

$\therefore 2k\pi+\dfrac{3\pi}{2}<\theta<2k\pi+2\pi(k\in\mathbf{Z})$，

$\therefore 2k\pi+\dfrac{5\pi}{4}<\theta-\dfrac{\pi}{4}<2k\pi+\dfrac{7\pi}{4}(k\in\mathbf{Z})$，

$\therefore \sin\left(\theta-\dfrac{\pi}{4}\right)<0$，

$\therefore \sin\left(\theta-\dfrac{\pi}{4}\right)=-\dfrac{4}{5}$，

$\therefore \tan\left(\theta-\dfrac{\pi}{4}\right)=-\dfrac{4}{3}$.

8. ②

解析：$\tan\left(\dfrac{3}{2}\pi-\alpha\right)=\tan\left(\pi+\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right)=$

$\tan\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right)\neq\tan\left(\dfrac{\pi}{2}+\alpha\right)$，①不正确；

$\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right)=\sin\alpha$，

$\sin(\pi-\alpha)=\sin\alpha$，

$\therefore \cos\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right)=\sin(\pi-\alpha)$，②正确；

$\sin\left(\dfrac{3}{2}\pi+\alpha\right)=-\cos\alpha$，$\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right)=\sin\alpha$，③不正确；

$\sin\left(\dfrac{\pi}{2}+\alpha\right)=\cos\alpha$，$\sin\left(\dfrac{3}{2}\pi+\alpha\right)=-\cos\alpha$，④不正确.

9. $-2\sqrt{2}$

解析：原式 $=\dfrac{(-\cos\alpha)\sin\alpha(-\tan\alpha)}{(-\cos\alpha)(-\sin\alpha)}=\tan\alpha$.

$\because \cos\alpha=\dfrac{1}{3}$，$-\dfrac{\pi}{2}<\alpha<0$，

$\therefore \sin\alpha=-\sqrt{1-\dfrac{1}{9}}=-\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$，

$\therefore \tan\alpha=-2\sqrt{2}$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

10. **解**：(1)$r=\sqrt{\frac{16}{25}+\frac{9}{25}}=1$，

$\therefore \sin\alpha=-\frac{3}{5}$.

(2)原式$=\frac{\cos\alpha\tan\alpha}{(-\sin\alpha)(-\cos\alpha)}$

$=\frac{1}{\cos\alpha}=\frac{5}{4}$.

11. **解**：$\cos\left(\frac{5\pi}{6}+\alpha\right)-\sin^2\left(\alpha-\frac{\pi}{6}\right)$

$=\cos\left(\pi-\frac{\pi}{6}+\alpha\right)-1+\cos^2\left(\alpha-\frac{\pi}{6}\right)$

$=-\cos\left(\frac{\pi}{6}-\alpha\right)-1+\cos^2\left(\alpha-\frac{\pi}{6}\right)$

$=-\frac{\sqrt{3}}{2}-1+\frac{3}{4}=-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{4}$.

12. **解**：(1)∵已知$0<\alpha<\frac{\pi}{2}$，

$\cos(2\pi-\alpha)-\sin(\pi-\alpha)=\cos\alpha-\sin\alpha=-\frac{\sqrt{5}}{5}$，

平方可得$1-2\sin\alpha\cos\alpha=\frac{1}{5}$，$\therefore 2\sin\alpha\cos\alpha=\frac{4}{5}$，

$\therefore(\sin\alpha+\cos\alpha)^2=1+2\sin\alpha\cos\alpha=\frac{9}{5}$，

$\therefore \sin\alpha+\cos\alpha=\frac{3\sqrt{5}}{5}$.

(2)∵$\cos\alpha-\sin\alpha=-\frac{\sqrt{5}}{5}$，$\sin\alpha+\cos\alpha=\frac{3\sqrt{5}}{5}$，

$\therefore \sin\alpha=\frac{2\sqrt{5}}{5}$，$\cos\alpha=\frac{\sqrt{5}}{5}$，$\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=2$.

$\therefore \frac{2\sin\alpha\cos\alpha-\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)+1}{1-\cot\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)}=\frac{2\sin\alpha\cos\alpha-\cos\alpha+1}{1-\tan\alpha}=$

$\frac{\frac{4}{5}-\frac{\sqrt{5}}{5}+1}{1-2}=\frac{\sqrt{5}-9}{5}$.

1.3　三角函数的图象与性质

1.3.1　正弦函数的图象与性质(一)

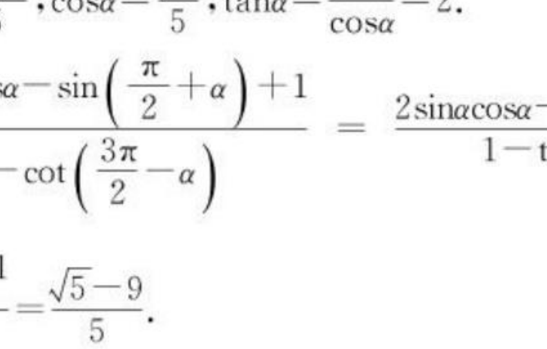
基础知识点对点

1. C　$y=\cos x|\tan x|=\begin{cases}\sin x, 0\leqslant x<\frac{\pi}{2},\\ -\sin x, \frac{\pi}{2}<x\leqslant\pi,\end{cases}$ 故选 C.

2. (1,3)

解析：$f(x)=\sin x+2|\sin x|=\begin{cases}3\sin x, 0\leqslant x<\pi,\\ -\sin x, \pi\leqslant x\leqslant 2\pi.\end{cases}$

分别画出 $f(x)$及 $y=k$ 的图象，如图所示：



$\therefore 1<k<3$.

3. $(2k\pi,2k\pi+\pi)(k\in\mathbf{Z})$

解析：由题可知，$\sin x>0$，$\therefore x\in(2k\pi,2k\pi+\pi)(k\in\mathbf{Z})$.

4. C　当$x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$时，$\sin x\in[0,1]$，

$\therefore f(x)\in[1,2]$，

$\therefore f(x)_{\min}=1$. 故选 C.

5. B　$y=\cos^2x+\sin x=-\sin^2x+\sin x+1$，

令 $t=\sin x$，∵$|x|\leqslant\frac{\pi}{4}$，$\therefore t\in\left[-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right]$，

$\therefore y=-t^2+t+1=-\left(t-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{5}{4}$，

$\therefore$当$t=-\frac{\sqrt{2}}{2}$时，$y_{\min}=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}+1=-\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{1}{2}$，故选 B.

课后拔高提能练

1. C

2. D

3. B　由$2\sin x+1\geqslant 0$，得$\sin x\geqslant-\frac{1}{2}$，

$\therefore -\frac{\pi}{6}+2k\pi\leqslant x\leqslant\frac{7\pi}{6}+2k\pi, k\in\mathbf{Z}$，

所以函数的定义域为$\left[-\frac{\pi}{6}+2k\pi,\frac{7\pi}{6}+2k\pi\right]$，$k\in\mathbf{Z}$，故选 B.

4. B　由正弦曲线结合单调性可知 B 选项正确. 故选 B.

5. D　$y=-3\sin 3x$ 的最大值为 3，此时 x 的值满足 $3x=2k\pi-\frac{\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$，

即 $x=\frac{2k\pi}{3}-\frac{\pi}{6}(k\in\mathbf{Z})$，

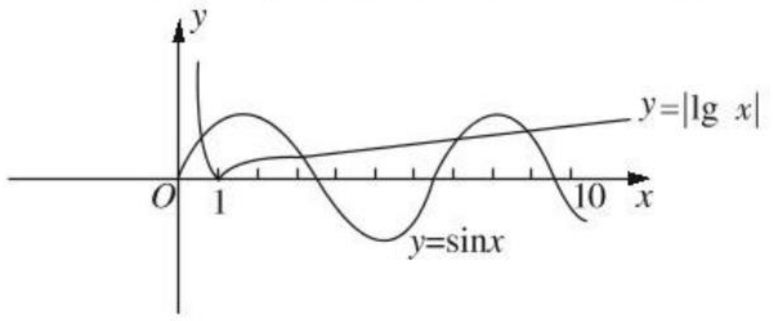
当 $k=0$ 时，$x=-\frac{\pi}{6}$，故选 D.

6. A

7. 4 个

解析：由 $f(x)=|\lg x|-\sin x=0$，得$|\lg x|=\sin x$，

在同一坐标系中作出 $y=|\lg x|$ 与 $y=\sin x$ 的图象，



从图象上可知 $y=|\lg x|$ 与 $y=\sin x$ 的图象有 4 个交点，所以函数 $f(x)$的零点有 4 个.

8. [1,2]

解析：∵$0\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2}$，∴$\frac{\pi}{3}\leqslant x+\frac{\pi}{3}\leqslant\frac{5\pi}{6}$，∴$\frac{1}{2}\leqslant\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\leqslant 1$，∴$1\leqslant y\leqslant 2$. ∴函数的值域为[1,2].

9. $-\frac{7}{4}$

解析：∵$y=\frac{5}{4}-(1-\sin^2x)-3\sin x=\sin^2x-3\sin x+\frac{1}{4}$，

设 $\sin x=t, t\in[-1,1]$，

$\therefore y=t^2-3t+\frac{1}{4}, t\in[-1,1]$，

∴当 $t=1$ 时，y 取得最小值为

$y_{\min}=1-3+\frac{1}{4}=-\frac{7}{4}$.

10. **解**：(1)∵$0\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2}$，∴$-\frac{\pi}{4}\leqslant x-\frac{\pi}{4}\leqslant\frac{\pi}{4}$，

$\therefore -\frac{\sqrt{2}}{2}\leqslant\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\leqslant\frac{\sqrt{2}}{2}$，

$\therefore -\sqrt{2}\leqslant 2\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\leqslant\sqrt{2}$，

∴函数 $y=2\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$的值域为$[-\sqrt{2},\sqrt{2}]$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

(2)令 $\sin x=t$，$\because x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$，$\therefore t\in[0,1]$，

当 $y=t^2+4t=(t+2)^2-4$，

$\therefore$ 当 $t=0$ 时，$y_{\min}=0$，

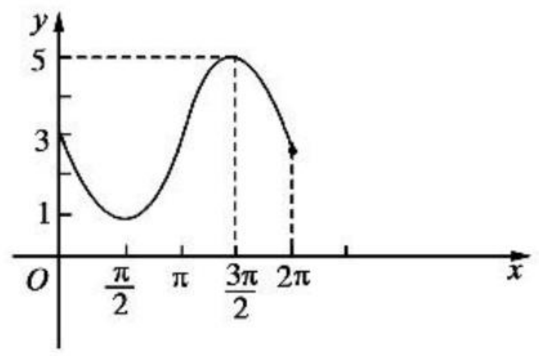
当 $t=1$ 时，$y_{\max}=5$，

$\therefore$ 函数 $y=\sin^2x+4\sin x$ 的值域为$[0,5]$.

11. **解**：列表：

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\sin x$	0	1	0	-1	0
$3-2\sin x$	3	1	3	5	3

描点连线：



12. **解**：当 $a>0$ 时，$\begin{cases}a+b=4,\\-a+b=-2,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=3,\\b=1.\end{cases}$

当 $a<0$ 时，$\begin{cases}-a+b=4,\\a+b=-2,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=-3,\\b=1.\end{cases}$

$\therefore\begin{cases}a=3,\\b=1\end{cases}$ 或 $\begin{cases}a=-3,\\b=1.\end{cases}$

1.3.1 正弦函数的图象与性质(二)

基础知识点对点

1. C　由题可知 $\frac{2\pi}{a}=1$，$\therefore a=2\pi$，

$g\left(\frac{5}{6}\right)=g\left(\frac{5}{6}-1\right)=g\left(-\frac{1}{6}\right)=\sin\left(-\frac{2\pi}{6}\right)=\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{2}$，故选 C.

2. B　由 $f(x+2)=-\frac{1}{f(x)}$，得 $f(x+4)=-\frac{1}{f(x+2)}=f(x)$，

$\therefore f(x)$ 是周期为 4 的周期函数.

$f(105.5)=f(26\times4+1.5)=f(1.5)=f(-1.5)=f(2.5)=2.5$，故选 B.

3. A　由函数图象平移变换的性质可知，将 $y=\sin\left(2x+\frac{\pi}{5}\right)$ 的图象向右平移 $\frac{\pi}{10}$ 个单位长度之后的解析式为 $y=\sin\left[2\left(x-\frac{\pi}{10}\right)+\frac{\pi}{5}\right]=\sin2x$. 则函数的单调递增区间满足：$2k\pi-\frac{\pi}{2}\leqslant2x\leqslant2k\pi+\frac{\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$，即 $k\pi-\frac{\pi}{4}\leqslant x\leqslant k\pi+\frac{\pi}{4}(k\in\mathbf{Z})$，令 $k=1$ 可得一个单调递增区间为 $\left[\frac{3\pi}{4},\frac{5\pi}{4}\right]$. 函数的单调递减区间满足：$2k\pi+\frac{\pi}{2}\leqslant2x\leqslant2k\pi+\frac{3\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$，即 $k\pi+\frac{\pi}{4}\leqslant x\leqslant k\pi+\frac{3\pi}{4}(k\in\mathbf{Z})$，令 $k=1$ 可得一个单调递减区间为 $\left[\frac{5\pi}{4},\frac{7\pi}{4}\right]$. 故选 A.

4. $\left[-2\pi,-\frac{\pi}{3}\right]$，$\left[\frac{5\pi}{3},2\pi\right]$

解析：$y=\sin\left(\frac{\pi}{3}-\frac{1}{2}x\right)=-\sin\left(\frac{1}{2}x-\frac{\pi}{3}\right)$，

由 $\frac{\pi}{2}+2k\pi\leqslant\frac{1}{2}x-\frac{\pi}{3}\leqslant\frac{3\pi}{2}+2k\pi,k\in\mathbf{Z}$，

得 $\frac{5\pi}{3}+4k\pi\leqslant x\leqslant\frac{11\pi}{3}+4k\pi,k\in\mathbf{Z}$，

$\therefore y=\sin\left(\frac{\pi}{3}-\frac{1}{2}x\right)$ 的递增区间为 $\left[\frac{5\pi}{3}+4k\pi,\frac{11\pi}{3}+4k\pi\right],k\in\mathbf{Z}$，

由 $\left[\frac{5\pi}{3}+4k\pi,\frac{11\pi}{3}+4k\pi\right]\cap[-2\pi,2\pi]$ 为 $\left[-2\pi,-\frac{\pi}{3}\right]$，$\left[\frac{5\pi}{3},2\pi\right]$.

5. A　由题可知 $\frac{2\pi}{\omega}=\pi$，$\therefore\omega=2$，

$2\times\frac{2\pi}{3}+\varphi=k\pi+\frac{\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$，

$\therefore\varphi=k\pi-\frac{5\pi}{6}(k\in\mathbf{Z})$，$\because-\frac{\pi}{2}<\varphi<\frac{\pi}{2}$，

$\therefore\varphi=\frac{\pi}{6}$，$\therefore f(x)=\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$，

令 $2x+\frac{\pi}{6}=k\pi$，$\therefore x=\frac{k\pi}{2}-\frac{\pi}{12}(k\in\mathbf{Z})$，$\therefore$ 函数的对称中心为 $\left(\frac{k\pi}{2}-\frac{\pi}{12},0\right)(k\in\mathbf{Z})$.

$\therefore\left(-\frac{\pi}{12},0\right)$ 是它的一个对称中心的坐标，故选 A.

6. ①③

解析：$f(x)=4\cos\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)=4\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{2}\right)=4\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$，故①正确；$f(x)$ 的最小正周期为 π，②错；

当 $x=-\frac{\pi}{6}$ 时，$f\left(-\frac{\pi}{6}\right)=4\sin\left(-\frac{\pi}{6}\times2+\frac{\pi}{3}\right)=0$，

$\therefore f(x)$ 关于 $\left(-\frac{\pi}{6},0\right)$ 对称，③正确，④错.

课后拔高提能练

1. A　由 $f(-x)=\sqrt{2}\sin(-2x)=-f(x)$ 知，$y=\sqrt{2}\sin2x$ 为奇函数，故选 A.

2. C　$T=\frac{2\pi}{2}=\pi$，故选 C.

3. B　$f(x)$ 的周期为 2，$f(x)=\sin\left(\pi x-\frac{\pi}{2}\right)-1=-\cos\pi x-1$，$f(-x)=-\cos(-\pi x)-1=-\cos\pi x-1=f(x)$.

$\therefore f(x)$ 为偶函数，故选 B.

4. A　由 $2k\pi-\frac{\pi}{2}\leqslant2x-\frac{\pi}{6}\leqslant2k\pi+\frac{\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$，得 $k\pi-\frac{\pi}{6}\leqslant x\leqslant k\pi+\frac{\pi}{3}$，令 $k=0$，得 $-\frac{\pi}{6}\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{3}$，故 A 正确.

5. A　$y=\sin\left(\frac{1}{2}x+\pi\right)=-\sin\frac{1}{2}x$，

$f(-x)=-\sin\frac{1}{2}(-x)=\sin\frac{1}{2}x=-f(x)$，

$\therefore$ 函数 $y=\sin\left(\frac{1}{2}x+\pi\right)$ 为奇函数.

6. D　$\because\cos1=\sin\left(\frac{\pi}{2}-1\right)$，而 $0<\frac{\pi}{2}-1<1<\frac{\pi}{2}$，且 $y=\sin x$ 在 $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 上是增函数.

$\therefore\sin\left(\frac{\pi}{2}-1\right)<\sin1$，即 $\sin1>\cos1$，故 A 错；

$\because\sin\left(-\frac{3\pi}{2}\right)=1=\sin\frac{\pi}{2}$，故 B 错；又 $\because\sin\frac{\pi}{4}=\sin\frac{3\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，故 C 错；$\because-\frac{\pi}{2}<-\frac{\pi}{10}<-\frac{\pi}{18}<0$，且函数 $y=\sin x$ 在 $\left[-\frac{\pi}{2},0\right]$ 上为增函数，$\therefore\sin\left(-\frac{\pi}{18}\right)>\sin\left(-\frac{\pi}{10}\right)$，故 D 正确.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

7. $\left[4k\pi-\frac{5\pi}{3},4k\pi+\frac{\pi}{3}\right](k\in\mathbf{Z})$

解析：由 $2k\pi-\frac{\pi}{2}\leqslant\frac{1}{2}x+\frac{\pi}{3}\leqslant2k\pi+\frac{\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$，得 $4k\pi-\frac{5\pi}{3}\leqslant x\leqslant4k\pi+\frac{\pi}{3}(k\in\mathbf{Z})$.

∴函数 $y=\sin\left(\frac{1}{2}x+\frac{\pi}{3}\right)$ 的单调递增区间为

$\left[4k\pi-\frac{5\pi}{3},4k\pi+\frac{\pi}{3}\right](k\in\mathbf{Z})$.

8. 4 033

解析：$f(x)+f(2-x)=x+\sin\pi x+(2-x)+\sin\pi(2-x)=2$,

令 $T=f\left(\frac{1}{2\,017}\right)+f\left(\frac{2}{2\,017}\right)+f\left(\frac{3}{2017}\right)+\cdots+f\left(\frac{4\,033}{2\,017}\right)$,

$T=f\left(\frac{4\,033}{2\,017}\right)+f\left(\frac{4\,032}{2\,017}\right)+\cdots+f\left(\frac{1}{2\,017}\right)$,

∴ $2T=\left[f\left(\frac{1}{2\,017}\right)+f\left(\frac{4\,033}{2\,017}\right)\right]+\left[f\left(\frac{2}{2\,017}\right)+f\left(\frac{4\,032}{2\,017}\right)\right]+\cdots+\left[f\left(\frac{4\,033}{2\,017}\right)+f\left(\frac{1}{2\,017}\right)\right]=4\,033\times2$,

∴ $T=4\,033$.

9. 1

解析：不妨设 $a=-\frac{\pi}{2},b=\frac{\pi}{2}$,

$f(x)$ 在 $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ 上是增函数，

且 $f\left(-\frac{\pi}{2}\right)=-1,f\left(\frac{\pi}{2}\right)=1$，故 $\cos\frac{a+b}{2}=1$.

10. **解**：(1)∵$0\leqslant x\leqslant2\pi$,

∴ $-\frac{\pi}{3}\leqslant\frac{1}{2}x-\frac{\pi}{3}\leqslant\frac{2\pi}{3},-\frac{\sqrt{3}}{2}\leqslant\sin\left(\frac{1}{2}x-\frac{\pi}{3}\right)\leqslant1$,

∴ $-\frac{3\sqrt{3}}{2}\leqslant y\leqslant3$. ∴函数的值域为 $\left[-\frac{3\sqrt{3}}{2},3\right]$.

(2) $2k\pi-\frac{\pi}{2}\leqslant\frac{1}{2}x-\frac{\pi}{3}\leqslant2k\pi+\frac{\pi}{2},k\in\mathbf{Z}$,

∴ $2k\pi-\frac{\pi}{6}\leqslant\frac{1}{2}x\leqslant2k\pi+\frac{5\pi}{6}$,

$4k\pi-\frac{\pi}{3}\leqslant x\leqslant4k\pi+\frac{5\pi}{3},k\in\mathbf{Z}$，又 $x\in[0,2\pi]$,

∴ $0\leqslant x\leqslant\frac{5\pi}{3}$,

故函数的单调增区间为 $\left[0,\frac{5\pi}{3}\right]$.

11. **解**：∵ $\left(\frac{\pi}{3}+4x\right)+\left(\frac{\pi}{6}-4x\right)=\frac{\pi}{2}$,

∴ $\cos\left(4x-\frac{\pi}{6}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{6}-4x\right)$

$=\cos\left[\frac{\pi}{2}-\left(\frac{\pi}{3}+4x\right)\right]=\sin\left(\frac{\pi}{3}+4x\right)$.

∴ $y=2\sin\left(4x+\frac{\pi}{3}\right)$.

最小正周期 $T=\frac{2\pi}{4}=\frac{\pi}{2}$.

当 $-\frac{\pi}{2}+2k\pi\leqslant4x+\frac{\pi}{3}\leqslant\frac{\pi}{2}+2k\pi(k\in\mathbf{Z})$ 时函数递增，

∴函数的递增区间为 $\left[-\frac{5\pi}{24}+\frac{k\pi}{2},\frac{\pi}{24}+\frac{k\pi}{2}\right](k\in\mathbf{Z})$.

当 $\frac{\pi}{2}+2k\pi\leqslant4x+\frac{\pi}{3}\leqslant\frac{3\pi}{2}+2k\pi(k\in\mathbf{Z})$ 时函数递减，

∴函数的递减区间为 $\left[\frac{\pi}{24}+\frac{k\pi}{2},\frac{7\pi}{24}+\frac{k\pi}{2}\right](k\in\mathbf{Z})$.

当 $x=\frac{\pi}{24}+\frac{k\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$ 时，$y_{\max}=2$；

当 $x=-\frac{5\pi}{24}+\frac{k\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$ 时，$y_{\min}=-2$.

12. **解**：(1) $2x-\frac{\pi}{3}=k\pi+\frac{\pi}{2}$，∴ $x=\frac{k\pi}{2}+\frac{5\pi}{12}(k\in\mathbf{Z})$.

∴ $f(x)$ 的对称轴方程为 $x=\frac{k\pi}{2}+\frac{5\pi}{12}(k\in\mathbf{Z})$.

(2)若 $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$，∴ $2x-\frac{\pi}{3}\in\left[-\frac{\pi}{3},\frac{2\pi}{3}\right]$,

∴ $\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)\in\left[-\frac{\sqrt{3}}{2},1\right]$.

∴当 $a>0$ 时，$\begin{cases}-\frac{\sqrt{3}}{2}a+b=-2,\\ a+b=\sqrt{3},\end{cases}$

∴ $a=2,b=\sqrt{3}-2$；

当 $a<0$ 时，$\begin{cases}-\frac{\sqrt{3}}{2}a+b=\sqrt{3},\\ a+b=-2,\end{cases}$

∴ $a=-2,b=0$.

1.3.1　正弦函数的图象与性质(三)

基础知识点对点

1. D　$y=\sin\left(2x-\frac{2\pi}{3}\right)=\sin2\left(x-\frac{\pi}{3}\right)$，∴需将 $y=\sin2x$ 的图象向右平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位，故选 D.

2. C　将 $y=4\sin\left(4x+\frac{\pi}{6}\right)$ 的图象上各点的横坐标伸长为原来的 2 倍，

得 $y=4\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$，再向右平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位，得到

$y=4\sin\left[2\left(x-\frac{\pi}{6}\right)+\frac{\pi}{6}\right]=4\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)$,

令 $2x-\frac{\pi}{6}=k\pi,k\in\mathbf{Z}$，∴ $x=\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{12},k\in\mathbf{Z}$,

当 $k=0$ 时，$x=\frac{\pi}{12}$，所以函数图象的一个对称中心为 $\left(\frac{\pi}{12},0\right)$. 故选 C.

3. A　根据周期求 ω：$T=\frac{2\pi}{\omega}=2\left[\frac{4\pi}{3}-\left(-\frac{2}{3}\pi\right)\right]=4\pi$,

$\omega=\frac{1}{2}$,

$\begin{cases}x=-\frac{2\pi}{3},\\ \omega x+\varphi=\pi,\end{cases}$ ∴ $\varphi=\frac{4\pi}{3}$,

∴ $f(x)=A\sin\left(\frac{x}{2}+\frac{4\pi}{3}\right)=-A\sin\left(\frac{1}{2}x+\frac{\pi}{3}\right)$,

又∵ $f(0)=-\frac{\sqrt{3}}{2}A=-\sqrt{3}$，∴ $A=2$,

∴ $f(x)=-2\sin\left(\frac{1}{2}x+\frac{\pi}{3}\right)$.

故 $f(2\,018\pi)=-2\sin\left(1\,009\pi+\frac{\pi}{3}\right)=2\sin\frac{\pi}{3}=\sqrt{3}$.

4. C　如题图所示，$A=2,T=8$，∴ $\frac{2\pi}{\omega}=8$，∴ $\omega=\frac{\pi}{4}$,

当 $x=2$ 时，$2\times\frac{\pi}{4}+\varphi=\frac{\pi}{2}$,

∴ $\varphi=0$,

∴ $y=2\sin\frac{\pi}{4}x$,

∴ $f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(11)$

$=2\sin\frac{\pi}{4}+2\sin\frac{2\pi}{4}+2\sin\frac{3\pi}{4}+\cdots+2\sin\frac{11\pi}{4}$

$=2+2\sqrt{2}$，故选 C.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

5. **解**：(1)由图知，$T=\pi$，于是 $\omega=\frac{2\pi}{T}=2$，将 $y=A\sin 2x$ 的图象向左平移$\frac{\pi}{12}$，得 $y=A\sin(2x+\varphi)$ 的图象，于是$\varphi=2\times\frac{\pi}{12}=\frac{\pi}{6}$. 将(0,1)代入 $y=A\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$，得$A=2$.

故 $f_1(x)=2\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$.

(2)依题意，$f_2(x)=2\sin\left[2\left(x-\frac{\pi}{4}\right)+\frac{\pi}{6}\right]=-2\cos\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$，

由 $2x+\frac{\pi}{6}=k\pi(k\in\mathbf{Z})$，得 $x=\frac{k\pi}{2}-\frac{\pi}{12}(k\in\mathbf{Z})$，

$\therefore f_2(x)$的对称轴方程为$x=\frac{k\pi}{2}-\frac{\pi}{12}(k\in\mathbf{Z})$.

课后拔高提能练

1. B　将函数 $y=2\sin 2x$ 的图象向左平移$\frac{\pi}{12}$个单位长度，得到 $y=2\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$，由 $2x+\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}+k\pi$，$\therefore x=\frac{\pi}{6}+\frac{k\pi}{2}$，$k\in\mathbf{Z}$，

$\therefore$函数的对称轴为 $x=\frac{\pi}{6}+\frac{k\pi}{2}$，$k\in\mathbf{Z}$，故选 B.

2. B　由图象知函数的周期 $T=\pi$，所以 $\omega=\frac{2\pi}{T}=\frac{2\pi}{\pi}=2$. 故选 B.

3. A

4. D　由图可知$\frac{3}{4}T=\frac{11\pi}{12}-\frac{\pi}{6}=\frac{9\pi}{12}=\frac{3\pi}{4}$，

$\therefore T=\pi$，又 $T=\frac{2\pi}{\omega}$，$\therefore\omega=2$.

又 $A=1$，$\therefore f(x)=\sin(2x+\varphi)$，又 $f(x)$过点$\left(\frac{\pi}{6},1\right)$，

$\therefore f\left(\frac{\pi}{6}\right)=\sin\left(\frac{\pi}{3}+\varphi\right)=1$，

又$|\varphi|<\frac{\pi}{2}$，$\therefore\varphi=\frac{\pi}{6}$，

$\therefore f(x)=\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$，将 $f(x)$的图象向右平移$\frac{\pi}{6}$个单位后，得到 $y=\sin\left[2\left(x-\frac{\pi}{6}\right)+\frac{\pi}{6}\right]=\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)$的图象.

5. D　函数 $y=\sin\omega x(\omega>0)$的图象向右平移$\frac{\pi}{4}$个单位长度，可得到 $y=\sin\omega\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$，过$\left(\frac{3\pi}{4},0\right)$，

$\therefore\sin\omega\left(\frac{3\pi}{4}-\frac{\pi}{4}\right)=0$，即 $\sin\frac{\pi\omega}{2}=0$，

$\therefore\frac{\pi\omega}{2}=k\pi(k\in\mathbf{Z})$，

$\omega=2k(k\in\mathbf{Z})$，

$\therefore\omega$的最小值为 2.

6. A　由 $T=\frac{2\pi}{3}$，得 $\omega=3$，$\therefore f(x)=\sin\left(3x+\frac{\pi}{6}\right)-1$，$3x+\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}+k\pi$，$\therefore x=\frac{\pi}{9}+\frac{k\pi}{3}(k\in\mathbf{Z})$. $\therefore$一条对称轴方程为 $x=\frac{\pi}{9}$. 故选 A.

7. -1

解析：$\because$图象关于 $x=-\frac{\pi}{8}$对称，

$\therefore f(0)=f\left(-\frac{\pi}{4}\right)$，

即 $\sin 0+a\cos 0=\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)+a\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)$，

$\therefore a=-1$.

8. $\left(-\frac{\pi}{12},0\right)$

解析：$y=3\sin\left(4x+\frac{\pi}{3}\right)=0$，得 $4x+\frac{\pi}{3}=k\pi(k\in\mathbf{Z})$，

$\therefore x=\frac{k\pi}{4}-\frac{\pi}{12}$，当 $k=0$ 时，$x=-\frac{\pi}{12}$，当 $k=1$ 时，$x=\frac{\pi}{6}$，$\left|-\frac{\pi}{12}\right|<\left|\frac{\pi}{6}\right|$，

故所求点为$\left(-\frac{\pi}{12},0\right)$.

9. $y=3\sin\left(6x+\frac{11\pi}{6}\right)$

解析：由已知得 $A=3$，$T=\frac{\pi}{3}=\frac{2\pi}{\omega}$，故 $\omega=6$.

$\therefore y=3\sin(6x+\varphi)$.

把$\left(0,-\frac{3}{2}\right)$代入，得 $3\sin\varphi=-\frac{3}{2}$，$\sin\varphi=-\frac{1}{2}$.

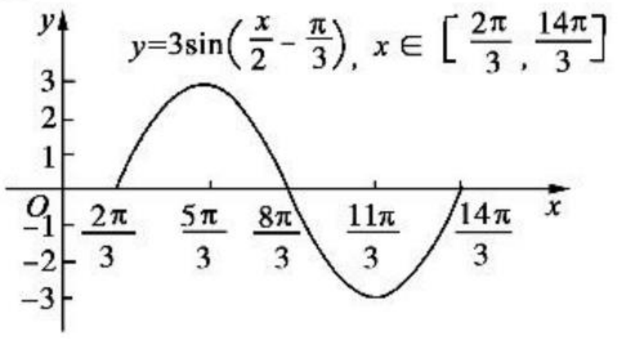
又$\frac{3\pi}{2}<\varphi<2\pi$，$\therefore\varphi=\frac{11\pi}{6}$.

$\therefore y=3\sin\left(6x+\frac{11\pi}{6}\right)$.

10. **解**：(1)$y=3\sin\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{3}\right)$，列出下表：

$\frac{x}{2}-\frac{\pi}{3}$	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
x	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{8\pi}{3}$	$\frac{11\pi}{3}$	$\frac{14\pi}{3}$
y	0	3	0	-3	0

描出对应的五点(x,y)，用平滑曲线连接各点即得函数图象(如图).



(2)依题意，有$\begin{cases}\frac{\omega}{2\pi}=\frac{2}{\pi},\\ \omega\cdot\frac{\pi}{24}+\varphi=\frac{\pi}{3},\end{cases}\therefore\begin{cases}\omega=4,\\ \varphi=\frac{\pi}{6}.\end{cases}$

11. **解**：(1)由条件，知 $A=2$，$\frac{T}{4}=\frac{7\pi}{12}-\frac{\pi}{3}$，

$\therefore T=\pi$，$\therefore\omega=2$.

于是，$f(x)=2\sin(2x+\varphi)$，将点$\left(\frac{\pi}{3},2\right)$代入，得 $\varphi=2k\pi-\frac{\pi}{6}$，$k\in\mathbf{Z}$，又$-\pi<\varphi<0$，$\therefore\varphi=-\frac{\pi}{6}$，

$\therefore f(x)=2\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)$.

(2)将 $f(x)=2\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)$的图象向左平移 m 个单位可得函数 $f(x+m)=2\sin\left[2(x+m)-\frac{\pi}{6}\right]=2\sin\left(2x+2m-\frac{\pi}{6}\right)$的图象.

$\because f(x+m)$是偶函数，$\therefore$直线 $x=0$ 是 $f(x+m)$的一条对称轴，

$\therefore 2\sin\left(2m-\frac{\pi}{6}\right)=\pm 2$，$\therefore 2m-\frac{\pi}{6}=k\pi+\frac{\pi}{2}$，即 $m=\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{3}(k\in\mathbf{Z})$，

令 $k=0$ 可得最小正实数 $m=\frac{\pi}{3}$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

(3)当 ω 最大时,函数在一个周期内完整单调递增区间就是 $\left[0,\frac{\pi}{3}\right]$,

故函数周期 T 满足 $\frac{\pi}{3}=\frac{T}{2}$,故 $\frac{2\pi}{\omega}=\frac{2\pi}{3}$,解得 $\omega=3$.

12. **解**:(1)振幅为 2,$T=\frac{2\pi}{2}=\pi$.

(2)若 $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$,$\therefore\frac{\pi}{6}\leqslant 2x+\frac{\pi}{6}\leqslant\frac{7\pi}{6}$,

$\therefore-\frac{1}{2}\leqslant\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)\leqslant 1$,$\therefore-1\leqslant f(x)\leqslant 2$,

$\therefore f(x)$的值域为$[-1,2]$.

(3)由 $\frac{\pi}{2}+2k\pi\leqslant 2x+\frac{\pi}{6}\leqslant\frac{3\pi}{2}+2k\pi,k\in\mathbf{Z}$,

$\therefore\frac{\pi}{6}+k\pi\leqslant x\leqslant\frac{2\pi}{3}+k\pi$,$\because-\pi\leqslant x\leqslant\pi$,$\therefore-\frac{5\pi}{6}\leqslant x\leqslant-\frac{\pi}{3}$或 $\frac{\pi}{6}\leqslant x\leqslant\frac{2\pi}{3}$,$\therefore f(x)$的单调递减区间为 $\left[\frac{\pi}{6},\frac{2\pi}{3}\right]$,$\left[-\frac{5\pi}{6},-\frac{\pi}{3}\right]$.

1.3.2　余弦函数、正切函数的图象与性质(一)

基础知识点对点

1. D　由 $2\cos x+1\geqslant 0$,得 $-\frac{2\pi}{3}+2k\pi\leqslant x\leqslant\frac{2\pi}{3}+2k\pi,k\in\mathbf{Z}$,故选 D.

2. $[-1,2]$

解析:$\because-\frac{\pi}{6}\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{6}$,$\therefore 0\leqslant 2x+\frac{\pi}{3}\leqslant\frac{2\pi}{3}$,

$\therefore-\frac{1}{2}\leqslant\cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)\leqslant 1$,

$\therefore y=2\cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$的值域为$[-1,2]$.

3. C　以 π 为最小正周期的偶函数是 $y=-\cos 2x$,$y=\cos 2x$,当 $0<x<\frac{\pi}{4}$时,$0<2x<\frac{\pi}{2}$,

$y=\cos 2x$ 在 $\left(0,\frac{\pi}{4}\right)$是减函数,$y=-\cos 2x$ 在 $\left(0,\frac{\pi}{4}\right)$是增函数,故选 C.

4. A　函数关于点 $\left(\frac{4\pi}{3},0\right)$中心对称,则有

$3\cos\left(2\times\frac{4\pi}{3}+\varphi\right)=0$,即 $\cos\left(\frac{8\pi}{3}+\varphi\right)=0$,

所以 $\cos\left(\frac{2\pi}{3}+\varphi\right)=0$,即 $\frac{2\pi}{3}+\varphi=\frac{\pi}{2}+k\pi,k\in\mathbf{Z}$,即 $\varphi=-\frac{\pi}{6}+k\pi,k\in\mathbf{Z}$,所以当 $k=0$ 时,$\varphi=-\frac{\pi}{6}$,此时 $|\varphi|$ 最小,选 A.

5. C　$y=\cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)=\cos 2\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$,故选 C.

6. D　$\because y=\cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)=\sin\left(2x+\frac{5\pi}{6}\right)=\sin\left[2\left(x+\frac{5}{12}\pi\right)\right]$,$\therefore$只需将 $y=\sin 2x$ 的图象向左平移 $\frac{5\pi}{12}$个长度单位,故选 D.

课后拔高提能练

1. B　若 $f(x)=\cos(2x+\varphi)$是奇函数,即 $f(x)$关于原点对称,则 $\varphi=k\pi+\frac{\pi}{2},k\in\mathbf{Z}$,当 $k=-1$,$\varphi=-\frac{\pi}{2}$,故选 B.

2. D　$\because T=\frac{2\pi}{|\omega|}=\frac{\pi}{2}$,$\therefore|\omega|=4$,$\omega=\pm 4$.

3. D　令 $2k\pi-\pi\leqslant 2x\leqslant 2k\pi(k\in\mathbf{Z})\Rightarrow k\pi-\frac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant k\pi(k\in\mathbf{Z})$,故选 D.

4. A　由题可知,$f(x)$的周期为 $T=\frac{2\pi}{\omega}$,

$\therefore\frac{T}{2}\geqslant\frac{2\pi}{3}$,$\therefore\frac{\pi}{\omega}\geqslant\frac{2\pi}{3}$,$\therefore\omega\leqslant\frac{1}{2}$,故选 A.

5. D　$y=\cos^2 x-3\cos x+2=\left(\cos x-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{1}{4}$,

当 $\cos x=1$ 时,$y_{\min}=0$. 故选 D.

6. D　易判断该函数周期 $T=\left(\frac{\pi}{12}+\frac{\pi}{6}\right)\times 4=\pi$,

$\therefore\omega=2$,排除选项 A 和 C;结合 $f\left(-\frac{\pi}{6}\right)=0$ 可排除选项 B,故选 D.

7. $\frac{2}{3}$

解析:因为 $f(x)\leqslant f\left(\frac{\pi}{4}\right)$对任意的实数 x 都成立,所以 $f\left(\frac{\pi}{4}\right)$取最大值,所以 $\frac{\pi}{4}\omega-\frac{\pi}{6}=2k\pi(k\in\mathbf{Z})$,$\therefore\omega=8k+\frac{2}{3}(k\in\mathbf{Z})$,因为 $\omega>0$,所以当 $k=0$ 时,ω 取最小值为 $\frac{2}{3}$.

8. $\left(-\frac{\pi}{2}+2k\pi,\frac{\pi}{2}+2k\pi\right),k\in\mathbf{Z}$

解析:由 $f(\pi+x)=f(\pi-x)$知 $f(x)$的图象关于 $x=\pi$ 对称,

又 $f(x)$是偶函数,$\therefore f(x)$关于 y 轴的对称,

$f(2\pi+x)=f[\pi-(\pi+x)]=f(-x)=f(x)$,

$\therefore f(x)$是周期函数,$T=2\pi$.

当 $x\in[0,\pi]$时,$f(x)=\cos x>0$,得 $0\leqslant x<\frac{\pi}{2}$,

当 $x\in[-\pi,0)$时,$f(x)>0$ 得 $-\frac{\pi}{2}<x<0$,

$\therefore f(x)>0$ 的解集为 $\left(-\frac{\pi}{2}+2k\pi,\frac{\pi}{2}+2k\pi\right),k\in\mathbf{Z}$.

9. $\frac{2}{3}$

解析:由题图可知,

$T=\left(\frac{11\pi}{12}-\frac{7\pi}{12}\right)\times 2=\frac{2\pi}{3}$,

$\therefore\frac{2\pi}{\omega}=\frac{2\pi}{3}$,$\therefore\omega=3$.

图象经过 $\left(\frac{7\pi}{12},0\right)$,

$\therefore 3\times\frac{7\pi}{12}+\varphi=\frac{3\pi}{2}$,$\therefore\varphi=-\frac{\pi}{4}$,

$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=A\cos\left(\frac{3\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)=A\cos\frac{5\pi}{4}=-\frac{2}{3}$,$\therefore-\frac{\sqrt{2}}{2}A=-\frac{2}{3}$,$\frac{\sqrt{2}}{2}A=\frac{2}{3}$,

$f(0)=A\cos\varphi=A\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}A=\frac{2}{3}$.

10. **解**:(1)由 $f(0)=\cos\left(\varphi-\frac{\pi}{6}\right)=0$,$0<\varphi<\pi$,得 $\varphi=\frac{2\pi}{3}$.

(2)由(1),可得 $f(x)=-\sin 3x$,

故 $f\left(x+\frac{\pi}{12}\right)=-\sin\left(3x+\frac{\pi}{4}\right)$,

由 $2k\pi-\frac{\pi}{2}\leqslant 3x+\frac{\pi}{4}\leqslant 2k\pi+\frac{\pi}{2},k\in\mathbf{Z}$,

得 $\frac{2k\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\leqslant x\leqslant\frac{2k\pi}{3}+\frac{\pi}{12},k\in\mathbf{Z}$.

故所求单调减区间是 $\left[\frac{2k\pi}{3}-\frac{\pi}{4},\frac{2k\pi}{3}+\frac{\pi}{12}\right],k\in\mathbf{Z}$.

11. **解**:(1)由 $T=\frac{2\pi}{\omega}$,得 $T=\frac{2\pi}{2}=\pi$.

由 $2k\pi-\pi\leqslant 2x-\frac{\pi}{4}\leqslant 2k\pi(k\in\mathbf{Z})$可得 $k\pi-\frac{3\pi}{8}\leqslant x\leqslant k\pi+$

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

$\frac{\pi}{8}(k\in\mathbf{Z})$,

所以函数的最小正周期为 π.

单调递增区间为 $\left[k\pi-\frac{3\pi}{8},k\pi+\frac{\pi}{8}\right](k\in\mathbf{Z})$.

(2) 设 $t=2x-\frac{\pi}{4}$, 由 $x\in\left[-\frac{\pi}{8},\frac{\pi}{2}\right]$ 得 $t\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{4}\right]$,

则函数 $y=\cos t$ 在 $\left[-\frac{\pi}{2},0\right]$ 上递增, 在 $\left[0,\frac{3\pi}{4}\right]$ 上递减.

$\therefore$ 当 $t=0$ 即 $x=\frac{\pi}{8}$ 时, $f(x)_{\max}=\sqrt{2}$,

当 $t=\frac{3\pi}{4}$ 即 $x=\frac{\pi}{2}$ 时, $f(x)_{\min}=-1$.

12. **解**: (1) 由题意可知 $\frac{2\pi}{\omega}=\pi$, $\therefore\omega=2$. $\therefore f(x)=2\cos 2x$.

$\therefore f\left(\frac{\pi}{8}\right)=2\cos\frac{\pi}{4}=\sqrt{2}$.

(2) 将 $y=f(x)$ 的图象向右平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位后, 得到 $y=f\left(x-\frac{\pi}{6}\right)$ 的图象, 再将所得函数图象上各点的横坐标伸长到原来的 4 倍, 纵坐标不变, 得到 $y=f\left(\frac{x}{4}-\frac{\pi}{6}\right)$ 的图象.

所以 $g(x)=f\left(\frac{x}{4}-\frac{\pi}{6}\right)=2\cos\left[2\left(\frac{x}{4}-\frac{\pi}{6}\right)\right]=2\cos\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{3}\right)$.

当 $2k\pi\leqslant\frac{x}{2}-\frac{\pi}{3}\leqslant 2k\pi+\pi(k\in\mathbf{Z})$, 即 $4k\pi+\frac{2\pi}{3}\leqslant x\leqslant 4k\pi+\frac{8\pi}{3}(k\in\mathbf{Z})$ 时, $y=g(x)$ 单调递减, 因此 $y=g(x)$ 的单调递减区间为 $\left[4k\pi+\frac{2\pi}{3},4k\pi+\frac{8\pi}{3}\right](k\in\mathbf{Z})$.

1.3.2 余弦函数、正切函数的图象与性质(二)

基础知识点对点

1. $\left[-2,-\frac{\pi}{2}\right)\cup\left[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right)$

解析: 由题可知 $\begin{cases}\tan x-1\geqslant 0,\\ 4-x^2\geqslant 0,\end{cases}$

$\therefore\begin{cases}k\pi+\frac{\pi}{4}\leqslant x<k\pi+\frac{\pi}{2},k\in\mathbf{Z},\\ -2\leqslant x\leqslant 2,\end{cases}$

$\therefore -2\leqslant x<-\frac{\pi}{2}$ 或 $\frac{\pi}{4}\leqslant x<\frac{\pi}{2}$,

$\therefore f(x)$ 的定义域为 $\left[-2,-\frac{\pi}{2}\right)\cup\left[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right)$.

2. $[1,+\infty)$

解析: $\because x\in\left[0,\frac{\pi}{8}\right)$, $\therefore 2x+\frac{\pi}{4}\in\left[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right)$,

$\therefore\tan\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)\geqslant 1$. $\therefore$ 函数的值域为 $[1,+\infty)$.

3. C

4. D $\tan\left(-\frac{13\pi}{4}\right)=\tan\left(-3\pi-\frac{\pi}{4}\right)=\tan\left(-\frac{\pi}{4}\right)=-\tan\frac{\pi}{4}=-1$.

$\tan\left(-\frac{12\pi}{5}\right)=\tan\left(-2\pi-\frac{2\pi}{5}\right)=\tan\left(-\frac{2\pi}{5}\right)=-\tan\frac{2\pi}{5}$.

$\because 0<\frac{\pi}{4}<\frac{2\pi}{5}<\frac{\pi}{2}$,

$\therefore\tan\frac{2\pi}{5}>\tan\frac{\pi}{4}$,

$\therefore\tan\left(-\frac{12\pi}{5}\right)<\tan\left(-\frac{13\pi}{4}\right)$, 故选 D.

5. D a→①, b→②, c→④, d→③.

6. C 由题可知 $f(x)$ 的一个周期为 2, $\therefore\omega=\frac{\pi}{2}$. $\therefore f(x)=\tan\frac{\pi}{2}x$, $\therefore f\left(-\frac{4}{3}\right)=\tan\frac{\pi}{2}\times\left(-\frac{4}{3}\right)=\tan\left(-\frac{2\pi}{3}\right)=\sqrt{3}$. 故选 C.

课后拔高提能练

1. C $T=\frac{\pi}{\frac{1}{2}}=2\pi$.

2. B $y=\tan\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$ 在 $\left[-\frac{\pi}{4},0\right)$, $\left(0,\frac{\pi}{4}\right]$ 是减函数,

当 $-\frac{\pi}{4}\leqslant x<0$ 时, $\frac{\pi}{2}<\frac{\pi}{2}-x\leqslant\frac{3\pi}{4}$, $\therefore y\leqslant -1$,

当 $0<x\leqslant\frac{\pi}{4}$ 时, $\frac{\pi}{4}\leqslant\frac{\pi}{2}-x<\frac{\pi}{2}$, $\therefore y\geqslant 1$, $\therefore$ 函数 $y=\tan\left[\frac{\pi}{2}-x\right)$ 的值域为 $(-\infty,-1]\cup[1,+\infty)$.

3. C

4. A 由函数表达式 $y=\tan\left(\frac{1}{2}x-\frac{\pi}{3}\right)$ 知, 这个函数的最小正周期为 2π, 因此可排除 B、D. 又函数表达式可化成 $y=\tan\frac{1}{2}\left(x-\frac{2\pi}{3}\right)$, 而这个函数的图象与函数 $y=\tan\frac{1}{2}x$ 的图象形状相同, 且是将其向右侧平移 $\frac{2\pi}{3}$ 个单位而得到的. 故选 A.

5. C 由 $\frac{1}{2}x+\frac{\pi}{3}=\frac{k\pi}{2},k\in\mathbf{Z}$, $\therefore x=k\pi-\frac{2\pi}{3}$,

$\therefore y=3\tan\left(\frac{1}{2}x+\frac{\pi}{3}\right)$ 的对称中心为 $\left(k\pi-\frac{2\pi}{3},0\right),k\in\mathbf{Z}$,

当 $k=0$ 时, 对称中心为 $\left(-\frac{2\pi}{3},0\right)$, 故选 C.

6. D 函数 $y=\tan\left(\omega x+\frac{\pi}{4}\right)$ 向右平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位后得到 $y=\tan\left[\omega\left(x-\frac{\pi}{6}\right)+\frac{\pi}{4}\right]=\tan\left(\omega x-\frac{\omega\pi}{6}+\frac{\pi}{4}\right)$. 又 $\because y=\tan\left(\omega x+\frac{\pi}{6}\right)$, $\therefore$ 令 $\frac{\pi}{4}-\frac{\omega\pi}{6}=\frac{\pi}{6}+k\pi(k\in\mathbf{Z})$, $\therefore\frac{\pi}{12}=\frac{\omega\pi}{6}+k\pi(k\in\mathbf{Z})$, $\therefore\omega=\frac{1}{2}-6k(k\in\mathbf{Z})$. $\because\omega>0$, $\therefore\omega$ 的最小值为 $\frac{1}{2}$.

7. $\left\{x\,\middle|\,x\neq\frac{k}{2}\pi+\frac{3}{8}\pi,k\in\mathbf{Z}\right\}$

解析: 由题可得 $2x-\frac{\pi}{4}\neq k\pi+\frac{\pi}{2},k\in\mathbf{Z}$, 得 $x=\frac{k}{2}\pi+\frac{3}{8}\pi,k\in\mathbf{Z}$, 故函数 $y=2\tan\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)$ 的定义域是 $\left\{x\,\middle|\,x\neq\frac{k}{2}\pi+\frac{3}{8}\pi,k\in\mathbf{Z}\right\}$.

8. $\left[-6-\sqrt{3},-\frac{11}{4}\right]$

解析: $y=-\tan^2x-\tan x-3=-\left(\tan x+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{11}{4}$.

$\because -\frac{\pi}{4}\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{3}$, $\therefore -1\leqslant\tan x\leqslant\sqrt{3}$, $\therefore$ 当 $\tan x=-\frac{1}{2}$ 时, $y_{\max}=-\frac{11}{4}$. 当 $\tan x=\sqrt{3}$ 时, $y_{\min}=-6-\sqrt{3}$. $\therefore$ 函数的值域是 $\left[-6-\sqrt{3},-\frac{11}{4}\right]$.

9. $\tan(\sin\alpha)<\tan(\tan\alpha)<\tan(\cos\alpha)$

解析: $\because 0<\alpha<\frac{\pi}{6}$, $\therefore\sin\alpha<\tan\alpha$, $\sin\alpha<\cos\alpha$, $\tan\alpha<\tan\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{3}$, $\cos\alpha>\cos\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\therefore\tan\alpha<\cos\alpha$,

$\therefore\tan(\sin\alpha)<\tan(\tan\alpha)<\tan(\cos\alpha)$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

10. **解**：$\because x\in\left[0,\frac{\pi}{3}\right)\cup\left(\frac{\pi}{3},\pi\right]$，$\therefore\frac{x}{2}+\frac{\pi}{3}\in\left[\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{2}\right)\cup\left(\frac{\pi}{2},\frac{5\pi}{6}\right]$，

$\therefore y\leqslant-\frac{\sqrt{3}}{3}$或 $y\geqslant\sqrt{3}$.

故函数 $y=\tan\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{3}\right)$的值域为$\left(-\infty,-\frac{\sqrt{3}}{3}\right]\cup[\sqrt{3},+\infty)$.

11. **解**：设 $t=\tan x$.

$\because|x|\leqslant\frac{\pi}{4}$，$\therefore t\in[-1,1]$，则原函数化为

$y=t^2-at=\left(t-\frac{a}{2}\right)^2-\frac{a^2}{4}$，对称轴 $t=\frac{a}{2}$.

①若$-1\leqslant\frac{a}{2}\leqslant1$，即$-2\leqslant a\leqslant2$，

则 $t=\frac{a}{2}$时，$y_{\min}=-\frac{a^2}{4}=-6$.

$\therefore a^2=24$，$a=\pm2\sqrt{6}$(舍去).

②若$\frac{a}{2}<-1$时，

即 $a<-2$ 时，二次函数 $y=t^2-at$ 在$[-1,1]$上单调递增.

$\therefore y_{\min}=\left(-1-\frac{a}{2}\right)^2-\frac{a^2}{4}=1+a=-6$，

$\therefore a=-7$.

③若$\frac{a}{2}>1$，即 $a>2$ 时，二次函数 $y=t^2-at$ 在$[-1,1]$上单调递减.

$y_{\min}=\left(1-\frac{a}{2}\right)^2-\frac{a^2}{4}=1-a=-6$. $\therefore a=7$.

综上所述，$a=-7$ 或 $a=7$.

12. **解**：由题意知$\frac{2\pi}{k}+\frac{\pi}{k}=\frac{3}{2}\pi$，得 $k=2$.

由$\begin{cases}a\sin\left(2\times\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{3}\right)=b\tan\left(2\times\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{3}\right),\\ a\sin\left(2\times\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{3}\right)=-\sqrt{3}b\tan\left(2\times\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{3}\right)+1,\end{cases}$

得$\begin{cases}a=2b,\\ a=-2b+2,\end{cases}$解得$\begin{cases}a=1,\\ b=\frac{1}{2}.\end{cases}$

$\therefore f(x)=\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$，$g(x)=\frac{1}{2}\tan\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)$.

1.3.3　已知三角函数值求角

基础知识点对点

1. C　$\sin x=-\frac{\sqrt{3}}{2}$，$\frac{\pi}{2}<x<\frac{3\pi}{2}$，$x$ 是第三象限角，

$\therefore x=\frac{4\pi}{3}$，故选 C.

2. B　由$-1\leqslant x-2\leqslant1$，

得 $1\leqslant x\leqslant3$，故选 B.

3. C

4. $\frac{\pi}{3}$或$\frac{5\pi}{3}$

解析：$\cos x=\frac{1}{2}$，$x\in[0,2\pi]$，则 $x=\frac{\pi}{3}$或 $x=\frac{5\pi}{3}$.

5. $-\frac{\pi}{12}$

解析：$\arctan1+\arctan(-\sqrt{3})=\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{3}=-\frac{\pi}{12}$.

6. $-\frac{\pi}{3}$或$-\frac{4\pi}{3}$

解析：$\because\tan x=-\sqrt{3}<0$，$\therefore x$ 是第二或第四象限角，由已知 $x\in[-2\pi,0]$，故 $x\in\left(-\frac{\pi}{2},0\right)\cup\left(-\frac{3\pi}{2},-\pi\right)$，

又$\because\tan\frac{\pi}{3}=\sqrt{3}$，$\therefore x=-\frac{\pi}{3}$或 $x=-\pi-\frac{\pi}{3}$. 即 $x=-\frac{\pi}{3}$或 $x=-\frac{4\pi}{3}$为所求角.

课后拔高提能练

1. D

2. D　$\because\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$，且 $\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)=-\frac{1}{2}$，故选 D.

3. C　$\because A\in(0°,180°)$，$\tan A=\frac{\sqrt{3}}{3}>0$，$\therefore A\in(0°,90°)$，

又 $\tan30°=\frac{\sqrt{3}}{3}$，故选 C.

4. C　$\cos\frac{x}{2}=\frac{1}{2}$，$\frac{x}{2}=2k\pi\pm\frac{\pi}{3}(k\in\mathbf{Z})$，

$\therefore x=4k\pi\pm\frac{2\pi}{3}(k\in\mathbf{Z})$，故选 C.

5. D　$\because x\in\left(-\pi,-\frac{\pi}{2}\right)$，

$\therefore x+\pi\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，

$\therefore\sin x=-\sin(x+\pi)=-\frac{1}{3}$，

$\therefore\sin(x+\pi)=\frac{1}{3}$，

$\therefore x=-\pi+\arcsin\frac{1}{3}=-\pi-\arcsin\left(-\frac{1}{3}\right)$，故选 D.

6. D　由 $\cos x=\frac{\sqrt{3}}{2}$，得 $x=2k\pi\pm\frac{\pi}{6}(k\in\mathbf{Z})$，

当 $x=2k\pi+\frac{\pi}{6}(k\in\mathbf{Z})$时，$f\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=2\sin\left(2k\pi+\frac{\pi}{6}\right)+1=2$，

当 $x=2k\pi-\frac{\pi}{6}(k\in\mathbf{Z})$时，$f\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=2\sin\left(2k\pi-\frac{\pi}{6}\right)+1=0$，故选 D.

7. $\frac{7\pi}{4}$

解析：$\because\tan\alpha<0$ 且 $\cos\alpha>0$，

$\therefore\alpha$ 为第四象限角.

又$\because\tan\alpha=-1$ 且 $\cos\alpha=\frac{\sqrt{2}}{2}$，$\alpha\in(0,2\pi)$，

$\therefore\alpha=\frac{7\pi}{4}$.

8. $a<b<c$

解析：由题可知 $a,b,c\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，

且 $\sin a=\frac{1}{4}$，$\tan b=\frac{\sqrt{5}}{5}$，$\cos c=\frac{4}{5}$，

$\therefore\sin b=\frac{\sqrt{6}}{6}$，$\sin c=\frac{3}{5}$，

$\because\frac{1}{4}<\frac{\sqrt{6}}{6}<\frac{3}{5}$，

$\therefore a<b<c$.

9. $[0,1]$

解析：由题可知，$-1\leqslant2x-1\leqslant1$，$\therefore0\leqslant x\leqslant1$.

10. **解**：(1)由正切函数在开区间$\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$上是增函数可知，符合条件 $\tan\alpha=-2$ 的角只有一个，即 $\alpha=\arctan(-2)$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

(2)∵$\tan\alpha=-2<0$,所以α是第二或第四象限角.

又∵$\alpha\in[0,2\pi]$,由正切函数在区间$\left(\frac{\pi}{2},\pi\right]$、$\left(\frac{3\pi}{2},2\pi\right]$上分别是增函数可知,符合$\tan\alpha=-2$的角有两个.

∵$\tan(\pi+\alpha)=\tan(2\pi+\alpha)=\tan\alpha=-2$,

且$\arctan(-2)\in\left(-\frac{\pi}{2},0\right)$,

∴$\alpha=\pi+\arctan(-2)$或$\alpha=2\pi+\arctan(-2)$.

11. **解**:(1)$\arctan(-1)=-\frac{\pi}{4}$,$\arctan(-\sqrt{3})=-\frac{\pi}{3}$,

∵$-\frac{\pi}{4}>-\frac{\pi}{3}$.

∴$\arctan(-1)>\arctan(-\sqrt{3})$.

(2)$\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=-\frac{\pi}{3}$,$\arctan\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)=-\frac{\pi}{6}$,

∴$\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)<\arctan\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$.

12. **解**:∵$x\in\left[0,\frac{\pi}{3}\right]$,∴$\frac{\pi}{3}\leqslant 2x+\frac{\pi}{3}\leqslant\pi$.

又∵$\cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)=-\frac{1}{2}$,∴$2x+\frac{\pi}{3}=\frac{2\pi}{3}$,∴$x=\frac{\pi}{6}$.

章末检测

1. D　若点$(4,a)$在$y=x^{\frac{1}{2}}$的图象上,

∴$a=4^{\frac{1}{2}}=2$,∴$\tan\frac{2\pi}{6}=\tan\frac{\pi}{3}=\sqrt{3}$,故选 D.

2. B　由$3x-\frac{\pi}{4}=k\pi,k\in\mathbf{Z}$,∴$x=\frac{k\pi}{3}+\frac{\pi}{12}$,

当$k=-2$时,$x=-\frac{7\pi}{12}$,∴$y=\sin\left(3x-\frac{\pi}{4}\right)$的一个对称中心为$\left(-\frac{7\pi}{12},0\right)$. 故选 B.

3. C　$f\left(-\frac{13\pi}{4}\right)=f\left(-\frac{13\pi}{4}+4\pi\right)=f\left(\frac{3\pi}{4}\right)=\sin\frac{3\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$. 故选 C.

4. A　$y=\sin\left(2x+\frac{\pi}{2}\right)=\cos2x$,周期为$\pi$,在$\left[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right]$上为减函数,故选 A.

5. A　由$\sin\alpha-\cos\alpha=\sqrt{2}$,得$1-2\sin\alpha\cos\alpha=2$. ∴$2\sin\alpha\cos\alpha=-1$. ∴$1+2\sin\alpha\cos\alpha=0$. ∴$(\sin\alpha+\cos\alpha)^2=0$. ∴$\sin\alpha=-\cos\alpha$,∴$\tan\alpha=-1$. 故选 A.

6. A　由图知,$A=2$,周期$T=2\left[\frac{\pi}{3}-\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right]=\pi$,所以$\omega=\frac{2\pi}{\pi}=2$,所以$y=2\sin(2x+\varphi)$,因为图象过点$\left(\frac{\pi}{3},2\right)$,所以$2=2\sin\left(2\times\frac{\pi}{3}+\varphi\right)$,所以$\sin\left(\frac{2\pi}{3}+\varphi\right)=1$,所以$\frac{2\pi}{3}+\varphi=2k\pi+\frac{\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$,令$k=0$得,$\varphi=-\frac{\pi}{6}$,所以$y=2\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)$,故选 A.

7. D　A、B、C 正确;D 中,$x\in\left(\frac{\pi}{2},\frac{2\pi}{3}\right)$时,$f(x)=\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$是单调减函数,$x\in\left(\frac{2\pi}{3},\pi\right)$时,$f(x)=\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$是单调增函数,故 D 不正确.

8. C　令$y=\sin^2x+\sin x-1=\left(\sin x+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{5}{4}$,

∵$\sin x\in[-1,1]$,∴当$\sin x=-\frac{1}{2}$时,$y_{\min}=-\frac{5}{4}$,

当$\sin x=1$时,$y_{\max}=1$,∴函数$y=\sin^2x+\sin x-1$的值域为$\left[-\frac{5}{4},1\right]$. 故选 C.

9. $\frac{3}{5}$

解析:由$r=\sqrt{9+16}=5$,∴$\cos\alpha=\frac{3}{5}$.

10. $\left(\frac{k\pi}{2},0\right),k\in\mathbf{Z}$

解析:$y=\cos2x$的图象向左平移$\frac{\pi}{4}$个单位,得到$g(x)=\cos2\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=-\sin2x$,

由$2x=k\pi$,得$x=\frac{k\pi}{2},k\in\mathbf{Z}$,

∴$g(x)$的对称点为$\left(\frac{k\pi}{2},0\right),k\in\mathbf{Z}$.

11. $-\cos\alpha$

解析:原式$=\frac{(-\cos\alpha)(-\sin\alpha)(-\tan\alpha)}{(-\tan\alpha)(-\sin\alpha)}=-\cos\alpha$.

12. **解**:由$2x^2-x-1=0$可得$x_1=1$,$x_2=-\frac{1}{2}$,

∵α是第三象限角,∴$\tan\alpha=1$.

(1)$\frac{2\sin\alpha-\cos\alpha}{\sin\alpha+\cos\alpha}=\frac{2\tan\alpha-1}{\tan\alpha+1}=\frac{1}{2}$.

(2)$3\sin^2\alpha-\sin\alpha\cos\alpha+2\cos^2\alpha=\frac{3\sin^2\alpha-\sin\alpha\cos\alpha+2\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}=\frac{3\tan^2\alpha-\tan\alpha+2}{\tan^2\alpha+1}=2$.

13. **解**:(1)由图象可知$A=1$,又因为$\omega>0$,$-\frac{\pi}{2}<\varphi<\frac{\pi}{2}$,所以有$\begin{cases}\frac{\pi}{6}\omega+\varphi=\frac{\pi}{2},\\ \frac{2\pi}{3}\omega+\varphi=\pi,\end{cases}$解得$\begin{cases}\omega=1,\\ \varphi=\frac{\pi}{3},\end{cases}$

所以$x\in\left[-\frac{\pi}{6},\frac{2\pi}{3}\right]$时,$f(x)=\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$;由$y=f(x)$关于直线$x=-\frac{\pi}{6}$对称,可求得当$x\in\left[-\pi,-\frac{\pi}{6}\right]$时,$f(x)=-\sin x$.

综上,$f(x)=\begin{cases}-\sin x,x\in\left[-\pi,-\frac{\pi}{6}\right],\\ \sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right),x\in\left(-\frac{\pi}{6},\frac{2\pi}{3}\right].\end{cases}$

(2)因为$f(x)=\frac{\sqrt{3}}{2}$,则在区间$\left(-\frac{\pi}{6},\frac{2\pi}{3}\right]$上有$x+\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{3}$或$x+\frac{\pi}{3}=\frac{2\pi}{3}$,所以$x_1=0$,$x_2=\frac{\pi}{3}$. 又$y=f(x)$关于$x=-\frac{\pi}{6}$对称,所以$x_3=-\frac{\pi}{3}$,$x_4=-\frac{2\pi}{3}$也是方程的解.

所以$f(x)=\frac{\sqrt{3}}{2}$的解为$x=-\frac{2\pi}{3},-\frac{\pi}{3},0,\frac{\pi}{3}$.

14. **解**:(1)由$T=\pi$,∴$\frac{2\pi}{\omega}=\pi$,∴$\omega=2$,$A=2$,

∴$f(x)=2\sin2x$.

(2)$-\frac{\pi}{2}+2k\pi\leqslant 2x\leqslant\frac{\pi}{2}+2k\pi$,∴$-\frac{\pi}{4}+k\pi\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{4}+k\pi,k\in\mathbf{Z}$,

∴$f(x)$的单调增区间为$\left[-\frac{\pi}{4}+k\pi,\frac{\pi}{4}+k\pi\right],k\in\mathbf{Z}$.

(3)当$f(x)_{\max}=2$时,$2x=\frac{\pi}{2}+2k\pi$,∴$x=\frac{\pi}{4}+k\pi$,$k\in\mathbf{Z}$,

∴函数$f(x)$取得最大值时x的取值集合为$\left\{x\,\middle|\,x=\frac{\pi}{4}+k\pi,k\in\mathbf{Z}\right\}$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

第二章　平面向量

2.1　向量的线性运算

2.1.1　向量的概念

基础知识点对点

1. A　方向相同，模相等的向量叫相等向量，①错；共线向量是指方向相同或相反的向量，③错；零向量的方向任意，④错；平行向量方向相同或相反，⑥错，②⑤正确，故选 A.
2. (1)×　(2)×　(3)×
3. B　如题图可知，$DE \parallel BC$，$\therefore \overrightarrow{DE}$与$\overrightarrow{CB}$共线，故选 B.
4. 7

   解析：$\overrightarrow{CM}$模相等且共线的向量有$\overrightarrow{MC}$，$\overrightarrow{DE}$，$\overrightarrow{ED}$，$\overrightarrow{BF}$，$\overrightarrow{FB}$，$\overrightarrow{AF}$，$\overrightarrow{FA}$，共 7 个.

课后拔高提能练

1. D　由题意知，$\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 方向相反，长度相等，所以 A、B、C 正确，D 错.
2. B　因 O 为正六边形 $ABCDEF$ 的中心，所以 B，O，E 三点共线，所以$\overrightarrow{OB}$与$\overrightarrow{OE}$方向相反. 故选 B.
3. B　$A \cap B$ 中含有与 $\boldsymbol{a}$ 长度相等、方向相反的向量，故 B 错.
4. B　与$\overrightarrow{PQ}$相等的向量是$\overrightarrow{AR}$，$\overrightarrow{RC}$，故选 B.
5. D　由图可知，$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OC}$，$\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{DE}$，$|\overrightarrow{AD}|=|\overrightarrow{BE}|$，$|\overrightarrow{AD}|=|\overrightarrow{FC}|$，故 D 错.
6. C　由$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$，知 $AB \parallel DC$ 且 $AB=DC$，

   $\therefore$四边形 $ABCD$ 为平行四边形，又$|\overrightarrow{AB}|=|\overrightarrow{BC}|$，

   $\therefore$四边形 $ABCD$ 为菱形.
7. $\boldsymbol{0}$

   解析：$\boldsymbol{0}$ 与任意向量都平行.
8. ②③

   解析：①④错，②③正确.
9. $\frac{3}{2}$

   解析：由三角形内角平分线的性质可知$|\overrightarrow{AC}|:|\overrightarrow{BC}|=|\overrightarrow{AD}|:|\overrightarrow{DB}|$，故$|\overrightarrow{DB}|=\frac{3}{2}$.
10. **解：**(1)$\overrightarrow{AO}=\overrightarrow{BF}$，$\overrightarrow{BO}=\overrightarrow{AE}$.

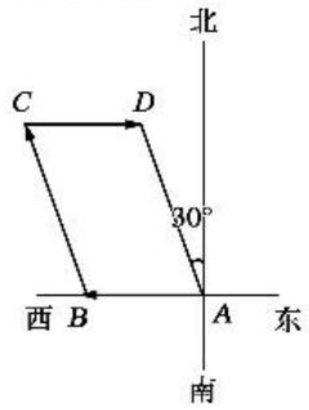
    (2)与$\overrightarrow{AO}$共线的向量有：$\overrightarrow{BF}$，$\overrightarrow{CO}$，$\overrightarrow{DE}$.

    (3)与$\overrightarrow{AO}$模相等的向量有：$\overrightarrow{CO}$，$\overrightarrow{DO}$，$\overrightarrow{BO}$，$\overrightarrow{BF}$，$\overrightarrow{CF}$，$\overrightarrow{AE}$，$\overrightarrow{DE}$.

    (4)向量$\overrightarrow{AO}$与$\overrightarrow{CO}$不相等，因为它们的方向不相同.
11. **解：**(1)如图.

    (2)向量$\overrightarrow{DA}$的模与向量$\overrightarrow{BC}$的模相等，

    即$|\overrightarrow{DA}|=15$ m.



12. **解：**(1)证明：由题意知，在 $\triangle BED$ 中，$BD=5$，$DE=3$，$BE=4$，

    $\therefore \angle DEB=90°$.

    又点 C 为半圆上一点，则 $\angle ACB=90°$.

    $\therefore AC \parallel DE$，故$\overrightarrow{AC} \parallel \overrightarrow{DE}$.

    (2)由 $AC \parallel DE$，知 $\triangle ABC \backsim \triangle DBE$.

    $\therefore \frac{AC}{DE}=\frac{AB}{BD}$，即$\frac{AC}{3}=\frac{6}{5}$，$\therefore AC=\frac{18}{5}$，即$|\overrightarrow{AC}|=\frac{18}{5}$.

2.1.2　向量的加法

基础知识点对点

1. C　$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$，A、B 错；$\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AD}$，C 正确；$\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{AC}$，D 错.
2. ①$\overrightarrow{AC}$　②$\boldsymbol{0}$

   解析：①$\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$.

   ②$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DF}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{FA}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DF}+\overrightarrow{FA}=\boldsymbol{0}$.
3. A　$\because |\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|$，$\therefore \boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 同向，故选 A.
4. 120°

   解析：$\because \overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}=\overrightarrow{PC}$，$\therefore$四边形 $PACB$ 是平行四边形.

   又$\because P$ 是$\triangle ABC$ 的外心，

   $\therefore PA=PB=PC$，

   $\therefore$平行四边形 $PACB$ 为菱形，且$\angle PAC=60°$，

   $\therefore \angle ACB=120°$.

课后拔高提能练

1. B　$\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{PQ}+\overrightarrow{PS}+\overrightarrow{SP}=(\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{PQ})+(\overrightarrow{PS}+\overrightarrow{SP})=\overrightarrow{OQ}+\boldsymbol{0}=\overrightarrow{OQ}$. 故选 B.
2. C　$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{AC}$，

   $\therefore |\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}|=2|\overrightarrow{AC}|$，又$|\overrightarrow{AC}|=\sqrt{2}$. 故选 C.
3. B　①原式$=(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC})+\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CA}=\boldsymbol{0}$；②原式$=(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CA})+\overrightarrow{CB}=2\overrightarrow{CB}$；③原式$=\overrightarrow{OA}+(\overrightarrow{BO}+\overrightarrow{OC})+\overrightarrow{CO}=\overrightarrow{OA}+(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CO})=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{BO}=\overrightarrow{BA}$；④原式$=(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD})+(\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{CA})=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DA}=\boldsymbol{0}$. 故选 B.
4. A　在平行四边形 $ABCD$ 中，$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}=\boldsymbol{0}$，$\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{DA}=\boldsymbol{0}$，所以 $\boldsymbol{a}$ 为零向量，零向量和任何向量都平行，零向量和任意向量的和等于这个向量本身，所以①③正确. 故选 A.
5. A　$\because \boldsymbol{a} \parallel \boldsymbol{b}$，且$|\boldsymbol{a}|>|\boldsymbol{b}|>0$，$\therefore \boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 为非零的共线向量，

   当 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 方向同向时，$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 方向相同，

   当 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 方向相反时，由$|\boldsymbol{a}|>|\boldsymbol{b}|$，$\therefore \boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 方向相同，

   综上，$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 方向相同.
6. C　$|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{FE}+\overrightarrow{CD}|=|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}|=|\overrightarrow{AD}|=2$. 故选 C.
7. $\sqrt{3}$

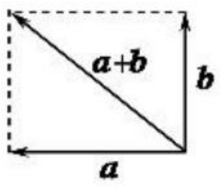
   解析：设$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OC}$，则 $OACB$ 为菱形，且$\angle AOB=60°$，

   $\therefore |\overrightarrow{OC}|=\sqrt{3}$.
8. 20　4

   解析：当且仅当 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 同向共线时，$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|$ 取最大值为 20，

   当且仅当 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 反向共线时，$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|$ 取最小值为 4.
9. 向西北方向走 $2\sqrt{2}$ km

   解析：由平行四边形法则可知$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=\sqrt{2^2+2^2}=2\sqrt{2}$，其中 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为 45°.



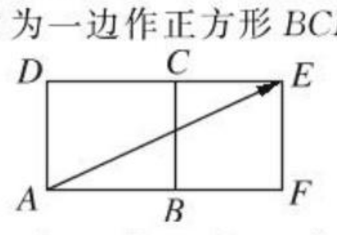
10. **证明：**$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{PB}$，$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AQ}+\overrightarrow{QC}$，

    $\therefore \overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{AQ}+\overrightarrow{QC}$，

    $\therefore \overrightarrow{PB}$和$\overrightarrow{QC}$大小相等，方向相反，

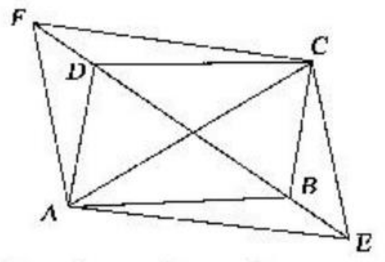
    $\therefore \overrightarrow{PB}+\overrightarrow{QC}=\boldsymbol{0}$.

    故$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{AQ}$.
11. **解：**在图中以 BC 为一边作正方形 $BCEF$，



    则$\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{CE}$，于是$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CE}=\overrightarrow{AE}$，

    $\therefore |\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC}|=|\overrightarrow{AE}|=\sqrt{2^2+1^2}=\sqrt{5}$.
12. **证明：**如图由向量加法法则，



    有$\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BE}$，$\overrightarrow{FC}=\overrightarrow{FD}+\overrightarrow{DC}$，

    又由已知得$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$，$\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{FD}$，所以$\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{FC}$.

    这说明 AE 与 FC 平行且相等，故四边形 $AECF$ 是平行四边形.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

2.1.3 向量的减法

基础知识点对点

1. D $\overrightarrow{AF}-\overrightarrow{DB}=\overrightarrow{AF}-\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{DF}$，故选 D.

2. C $\because \overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}$，
当$\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AC}$同向时，$|\overrightarrow{BC}|=8-5=3$；
当$\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AC}$反向时，$|\overrightarrow{BC}|=8+5=13$；
当$\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AC}$不平行时，$3<|\overrightarrow{BC}|<13$.
故选 C.

3. D $\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{CD}-\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CB}=\mathbf{0}$.

4. ②

课后拔高提能练

1. D 任何向量与零向量的和仍等于这个向量本身，故①正确；②为向量加法的交换律，正确；一个向量的相反向量的相反向量等于它本身，故③正确；同样也可得④⑤正确，故选 D.

2. C 由$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$知，A、B 错；$\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{CB}$，C 正确；$\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{DB}-\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{CB}$，D 错，故选 C.

3. A $\overrightarrow{AE}-\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{FE}$，
$\therefore |\overrightarrow{FE}|=\sqrt{EC^2+CF^2}=\sqrt{2^2+\left(\frac{3}{2}\right)^2}=\frac{5}{2}$. 故选 A.

4. A $\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AD}=(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC})-\overrightarrow{AD}=(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c})-\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c}-\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$. 故选 A.

5. B $\because \overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$，$\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}$，
即以 AB、AC 为邻边的平行四边形的对角线长相等，
则此四边形为矩形，$\therefore AB\perp AC$. 故选 B.

6. B 因为$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OD}$，所以$\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OC}$，即$\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{CD}$. 又 A，B，C，D 四点不共线，所以$|\overrightarrow{BA}|=|\overrightarrow{CD}|$，且 $BA\parallel CD$，故四边形 $ABCD$ 为平行四边形.

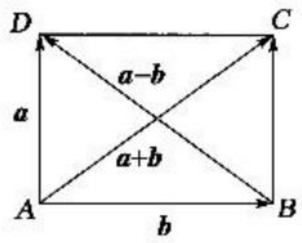
7. 13
解析：$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ 构成了一个直角三角形，
则$|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=|\overrightarrow{BA}|=\sqrt{|\boldsymbol{a}|^2+|\boldsymbol{b}|^2}=\sqrt{5^2+12^2}=13$.

8. 6

9. ②③④
解析：①错，若$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$，则以 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 为邻边的四边形为矩形，$|\boldsymbol{a}|$ 与 $|\boldsymbol{b}|$ 不一定相等；②③④正确.

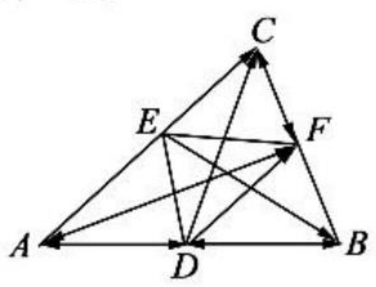
10. **解**：$\overrightarrow{ED}=\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OE}=-\overrightarrow{DO}+\overrightarrow{EO}=-\boldsymbol{d}+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{c}-\boldsymbol{d}$；
$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OD}=-\boldsymbol{a}-\boldsymbol{d}$；
$\overrightarrow{DB}=\overrightarrow{DO}+\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{d}+\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c}-\boldsymbol{d}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c}$.

11. **解**：如图，



$\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{b}$，则$\overrightarrow{BD}=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$. 由于$|\boldsymbol{a}|=6$，$|\boldsymbol{b}|=8$ 且$|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=10$，
$\therefore \angle BAD=90^\circ$，故四边形 $ABCD$ 为矩形，
故$|\overrightarrow{AC}|=|\overrightarrow{BD}|$，即$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=10$.

12. **证明**：如图，



(1)在$\triangle ABC$ 中，$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BF}=\overrightarrow{AF}$.
在$\triangle ACF$ 中，$\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CF}=\overrightarrow{AF}$.
$\therefore \overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BF}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CF}$.
(2)点 D、E、F 分别是$\triangle ABC$ 三边 AB、AC、BC 的中点，
$\therefore$四边形 $EDFC$ 是平行四边形，$\overrightarrow{ED}=-\overrightarrow{FC}$.
又$\overrightarrow{DA}=-\overrightarrow{DB}$，$\overrightarrow{FD}=-\overrightarrow{DF}$.
故$\overrightarrow{FA}+\overrightarrow{EB}+\overrightarrow{DC}=(\overrightarrow{FD}+\overrightarrow{DA})+(\overrightarrow{ED}+\overrightarrow{DB})+(\overrightarrow{DF}+\overrightarrow{FC})=(-\overrightarrow{DF}+\overrightarrow{DF})+(-\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{DB})+(-\overrightarrow{FC}+\overrightarrow{FC})=\mathbf{0}$.

2.1.4 数乘向量

基础知识点对点

1. C $\because \lambda^2>0$，$\therefore \boldsymbol{a}$ 与 $\lambda^2\boldsymbol{a}$ 的方向相同，故选 C.

2. D 由$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|$，知 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 方向相同，但不一定相等，故 A、B、C 错，D 正确.

3. B 原式$=\frac{1}{3}(\boldsymbol{a}+4\boldsymbol{b}-4\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b})=\frac{1}{3}(-3\boldsymbol{a}+6\boldsymbol{b})=-\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}$，故选 B.

4. C 由 $CD=2BD$，得$\overrightarrow{CD}=2\overrightarrow{DB}$，
$\therefore \overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AC}=2(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD})$，
$\therefore \overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{AB}-2\overrightarrow{AD}$，
$\therefore 3\overrightarrow{AD}=2\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$，
$\therefore \overrightarrow{AD}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$，故选 C.

5. A $\because D$ 为 BC 的中点，$\therefore \overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=2\overrightarrow{OD}$，$\therefore 2\overrightarrow{OA}+2\overrightarrow{OD}=\mathbf{0}$，$\therefore \overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OD}=\mathbf{0}$，$\therefore \overrightarrow{AO}=\overrightarrow{OD}$，故选 A.

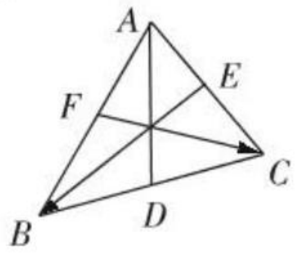
6. **0**
解析：由 $3(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{a})+2(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a})+\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}=\mathbf{0}$，
得 $4\boldsymbol{x}+3\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}-2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}=\mathbf{0}$，
即 $4\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$，$\therefore \boldsymbol{x}=\mathbf{0}$.

课后拔高提能练

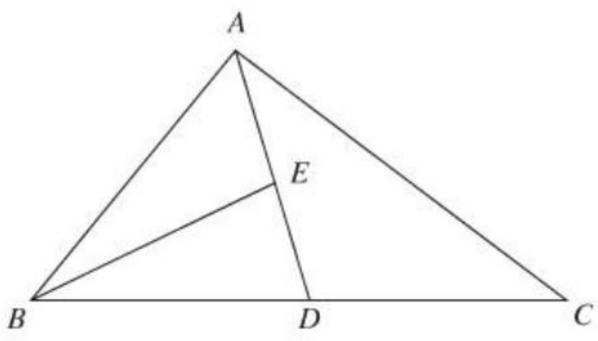
1. D

2. D 由数乘的法则可知全部正确，故选 D.

3. A 如图所示，$\overrightarrow{EB}+\overrightarrow{FC}=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AF}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}=\frac{1}{2}\times 2\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AD}$. 故选 A.



4. A 根据向量的运算法则，可得
$\overrightarrow{BE}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BD}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC})=\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}+\frac{1}{4}\overrightarrow{BA}+\frac{1}{4}\overrightarrow{AC}=\frac{3}{4}\overrightarrow{BA}+\frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$，
所以$\overrightarrow{EB}=\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}-\frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$，故选 A.



5. B 由$\overrightarrow{OM}=\lambda\overrightarrow{OB}+(1-\lambda)\overrightarrow{OA}$，
$\therefore \overrightarrow{OM}-\overrightarrow{OA}=\lambda(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA})$，
$\therefore \overrightarrow{AM}=\lambda\overrightarrow{AB}$，又 $\lambda\in(1,2)$，
$\therefore$点 B 在线段 AM 上.

6. C $\because AD=2DB$，$\therefore CD-CA=2(CB-CD)$，
$\therefore 3\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{CA}+2\overrightarrow{CB}$，$\therefore \overrightarrow{CD}=\frac{1}{3}\overrightarrow{CA}+\frac{2}{3}\overrightarrow{CB}$，$\therefore \lambda=\frac{2}{3}$，故选 C.

7. $\frac{5}{3}\boldsymbol{a}-\frac{11}{18}\boldsymbol{b}$
解析：原式$=\frac{2}{3}\left(4\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b}+\frac{1}{3}\boldsymbol{b}-\frac{3}{2}\boldsymbol{a}+\frac{7}{4}\boldsymbol{b}\right)$
$=\frac{2}{3}\left[\left(4-\frac{3}{2}\right)\boldsymbol{a}+\left(-3+\frac{1}{3}+\frac{7}{4}\right)\boldsymbol{b}\right]$
$=\frac{2}{3}\left(\frac{5}{2}\boldsymbol{a}-\frac{11}{12}\boldsymbol{b}\right)=\frac{5}{3}\boldsymbol{a}-\frac{11}{18}\boldsymbol{b}$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

8. $\overrightarrow{BO}$

解析：$3\boldsymbol{e}_2-2\boldsymbol{e}_1=\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{AB})=\frac{1}{2}\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{BO}$.

9. ①②③

解析：向量是既有大小又有方向的量，$\boldsymbol{a}$ 与 $|\boldsymbol{a}|\boldsymbol{a}_0$ 的模相同，但方向不一定相同，故①错；若 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}_0$ 平行，$\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}_0$ 的方向有可能同向，也可能反向，故②③错.

10. **解**：(1)$4(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})-3(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})=4\boldsymbol{a}+4\boldsymbol{b}-3\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}+7\boldsymbol{b}$.

(2)$3(\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})-(2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}-3\boldsymbol{c})=3\boldsymbol{a}-6\boldsymbol{b}+3\boldsymbol{c}-2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}+3\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}-7\boldsymbol{b}+6\boldsymbol{c}$.

(3)$\frac{2}{5}(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})-\frac{1}{3}(2\boldsymbol{a}+4\boldsymbol{b})+\frac{2}{15}(2\boldsymbol{a}+13\boldsymbol{b})$

$=\frac{2}{5}\boldsymbol{a}-\frac{2}{5}\boldsymbol{b}-\frac{2}{3}\boldsymbol{a}-\frac{4}{3}\boldsymbol{b}+\frac{4}{15}\boldsymbol{a}+\frac{26}{15}\boldsymbol{b}$

$=\left(\frac{2}{5}-\frac{2}{3}+\frac{4}{15}\right)\boldsymbol{a}+\left(-\frac{2}{5}-\frac{4}{3}+\frac{26}{15}\right)\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$.

11. **解**：连接 AC，由平行四边形法则，得 $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$.

因为 E,F 分别为 BC 和 CD 的中点，所以

$$\begin{cases}\boldsymbol{a}=\overrightarrow{AE}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})=\frac{1}{2}(2\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}),\\ \boldsymbol{b}=\overrightarrow{AF}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AC})=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AD}).\end{cases}$$

所以 $\begin{cases}2\boldsymbol{a}=2\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD},\\ 2\boldsymbol{b}=\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AD}.\end{cases}$

由此可得 $\overrightarrow{AB}=\frac{2}{3}(2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})=\frac{4}{3}\boldsymbol{a}-\frac{2}{3}\boldsymbol{b}$，

$\overrightarrow{AD}=\frac{2}{3}(2\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a})=\frac{4}{3}\boldsymbol{b}-\frac{2}{3}\boldsymbol{a}$.

12. **解**：因为 AP 的中点为 Q，BQ 的中点为 R，CR 的中点为 P，

所以 $\overrightarrow{QP}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AP}$，$\overrightarrow{PR}=\overrightarrow{CP}=\overrightarrow{AP}-\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AP}-\boldsymbol{b}$，

$\overrightarrow{RQ}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BQ}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AQ}-\overrightarrow{AB})=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{AP}-\boldsymbol{a}\right)=\frac{1}{4}\overrightarrow{AP}-\frac{1}{2}\boldsymbol{a}$. 因为 $\overrightarrow{QP}+\overrightarrow{PR}+\overrightarrow{RQ}=\boldsymbol{0}$，所以 $\frac{1}{2}\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{AP}-\boldsymbol{b}+\frac{1}{4}\overrightarrow{AP}-\frac{1}{2}\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$，解得 $\overrightarrow{AP}=\frac{2}{7}\boldsymbol{a}+\frac{4}{7}\boldsymbol{b}$.

2.1.5　向量共线的条件与轴上向量坐标运算

基础知识点对点

1. B　由 $\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}$ 与 $-(\boldsymbol{b}-2\boldsymbol{a})$ 共线，则存在一个实数 m，使 $\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}=m(-\boldsymbol{b}+2\boldsymbol{a})=2m\boldsymbol{a}-m\boldsymbol{b}$，

$\therefore\begin{cases}2m=1,\\ -m=\lambda,\end{cases}\therefore\begin{cases}m=\frac{1}{2},\\ \lambda=-\frac{1}{2}.\end{cases}$

2. B　①中 $\boldsymbol{a}=-\frac{3}{2}\boldsymbol{b}$，所以 $\boldsymbol{a}\parallel\boldsymbol{b}$；②中 $\boldsymbol{b}=\frac{\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2}{2}-\boldsymbol{e}_1=\frac{\boldsymbol{e}_2-\boldsymbol{e}_1}{2}=-\frac{1}{2}\boldsymbol{a}$，所以 $\boldsymbol{a}\parallel\boldsymbol{b}$；③中 $\boldsymbol{b}=\frac{3\boldsymbol{e}_1+3\boldsymbol{e}_2}{2}=\frac{3}{2}(\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2)$，若 $\boldsymbol{e}_1$ 与 $\boldsymbol{e}_2$ 共线，则 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 共线，若 $\boldsymbol{e}_1$ 与 $\boldsymbol{e}_2$ 不共线，则 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 不共线.

3. B　$AB=-1-(-4)=3$，$|\overrightarrow{AB}|=3$，故选 B.

4. 5　3

解析：$|\overrightarrow{AC}|+|\overrightarrow{BC}|=|-3-1|+|-3-(-4)|=4+1=5$，$|\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BC}|=|-3-1+(-3)-(-4)|=3$.

课后拔高提能练

1. A　$\overrightarrow{BD}=-5\boldsymbol{a}+6\boldsymbol{b}+7\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}=2\boldsymbol{a}+4\boldsymbol{b}=2\overrightarrow{AB}$，

$\therefore A,B,D$ 三点共线，故选 A.

2. B　$\because\overrightarrow{AB}=\frac{1}{2}\overrightarrow{DC}$，$\therefore AB\parallel DC$，且 $|AB|=\frac{1}{2}|DC|$，

$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 为梯形.

3. B　$\because\boldsymbol{m}\parallel\boldsymbol{n}$，$\therefore\frac{1}{-1}=\frac{k}{1}$，$\therefore k=-1$.

4. D　$\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AC}$，

$\therefore\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{BP}$，

$\therefore\overrightarrow{AC}$ 与 $\overrightarrow{BP}$ 平行，即 $AC\parallel BP$. 故选 D.

5. D　由 $\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}=\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{PB}-\overrightarrow{PA}$，

$\therefore 2\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PC}=\boldsymbol{0}$，$\therefore\overrightarrow{PC}=-2\overrightarrow{PA}$，

$\therefore P$ 是 AC 边上的一个三等分点.

6. C　$\overrightarrow{FE}=\overrightarrow{AE}-\overrightarrow{AF}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}-(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BF})=\frac{2}{3}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD})-(\overrightarrow{AB}+\frac{3}{4}\overrightarrow{BD})=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB}-\frac{3}{4}(\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB})=\frac{5}{12}\overrightarrow{AB}-\frac{1}{12}\overrightarrow{AD}$，故选 C.

7. 13　4

解析：$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=3+10=13$.

$\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}=10-6=4$.

8. −5　1

解析：$\overrightarrow{AB}=(-2)-3=-5$，

$\overrightarrow{CA}=3-4=-1$，

$\therefore|\overrightarrow{CA}|=1$.

9. 2

解析：取 AC 的中点为 D，连接 OD，

$\therefore\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}=2\overrightarrow{OD}$，

$\therefore 2\overrightarrow{OD}=-2\overrightarrow{OB}$，

$\therefore O$ 为 B,D 的中点，

$\therefore\frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle AOC}}=\frac{\frac{1}{2}AC\cdot h}{\frac{1}{2}AC\cdot h'}=\frac{BD}{OD}=2$. 其中 h,h' 分别为 $\triangle ABC$，$\triangle AOC$ 的 AC 边的高.

10. **解**：(1)$\overrightarrow{AB}=x_2-x_1=-4-3=-7$，$|\overrightarrow{AB}|=7$；

$\overrightarrow{AC}=x_3-x_1=6-3=3$，$|\overrightarrow{AC}|=3$.

(2)$\overrightarrow{AB}=x_2-x_1=8+14=22$，$|\overrightarrow{AB}|=22$；

$\overrightarrow{AC}=x_3-x_1=-7+14=7$，$|\overrightarrow{AC}|=7$.

11. **解**：$\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{CD}-\overrightarrow{CB}=(2\boldsymbol{e}_1-\boldsymbol{e}_2)-(\boldsymbol{e}_1+3\boldsymbol{e}_2)=\boldsymbol{e}_1-4\boldsymbol{e}_2$.

因为 A,B,D 三点共线，所以存在 $\lambda\in\mathbf{R}$，使 $\overrightarrow{AB}=\lambda\overrightarrow{BD}$，

即 $2\boldsymbol{e}_1+k\boldsymbol{e}_2=\lambda(\boldsymbol{e}_1-4\boldsymbol{e}_2)$，

所以 $\begin{cases}2=\lambda,\\ k=-4\lambda,\end{cases}$

所以 $k=-8$.

12. **证明**：如题图，$\overrightarrow{AN}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BN}=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{a}+\frac{1}{3}\boldsymbol{b}=\frac{1}{3}\boldsymbol{b}$，

$\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CM}=\boldsymbol{b}+\frac{1}{3}\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=\frac{1}{3}\boldsymbol{a}$，

$\therefore\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{AN}-\overrightarrow{AM}=\frac{1}{3}(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a})=\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$，

又 MN 与 BC 不共线，

$\therefore MN\parallel BC$，且 $MN=\frac{1}{3}BC$.

2.2　向量的分解与向量的坐标运算

2.2.1　平面向量基本定理

基础知识点对点

1. A　$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ 不共线，可以作为基底.

2. B　平面中任意两个不共线的向量都可以作为一组基底，故②③正确.

3. D　$\because\overrightarrow{AD}=2\overrightarrow{DB}$，

$\therefore\overrightarrow{CD}-\overrightarrow{CA}=2(\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{CD})$，$\therefore 3\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{CA}+2\overrightarrow{CB}$，$\therefore\overrightarrow{CD}=\frac{1}{3}\overrightarrow{CA}+$

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

$\frac{2}{3}\overrightarrow{CB}=\frac{1}{3}\boldsymbol{a}+\frac{2}{3}\boldsymbol{b}$,

$\therefore\overrightarrow{DC}=-\frac{1}{3}\boldsymbol{a}-\frac{2}{3}\boldsymbol{b}$,故选 D.

4. $-\frac{1}{4}\boldsymbol{a}+\frac{3}{4}\boldsymbol{b}$

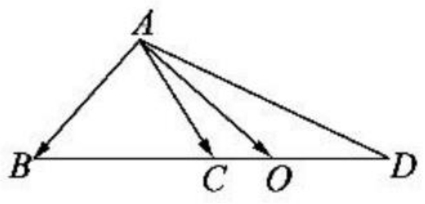
解析:$\because\overrightarrow{AG}=3\overrightarrow{GC}$,$\therefore\overrightarrow{AG}=\frac{3}{4}\overrightarrow{AC}$,$\therefore\overrightarrow{BG}=\overrightarrow{AG}-\overrightarrow{AB}=\frac{3}{4}\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}=\frac{3}{4}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD})-\overrightarrow{AB}=-\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}+\frac{3}{4}\overrightarrow{AD}=-\frac{1}{4}\boldsymbol{a}+\frac{3}{4}\boldsymbol{b}$.

5. D　由$\overrightarrow{OB}=\frac{1}{3}\overrightarrow{OA}+\frac{2}{3}\overrightarrow{OC}$,得$\frac{1}{3}\overrightarrow{OB}-\frac{1}{3}\overrightarrow{OA}=\frac{2}{3}(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB})$,

$\therefore\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}=\frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$,$\therefore\overrightarrow{AB}=2\overrightarrow{BC}$,

$\therefore|\overrightarrow{AB}|:|\overrightarrow{BC}|=2:1$,故选 D.

6. C　如图所示:由于$\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{CD}$,点 O 在线段 CD 上(点 O 与点 C,D 不重合),故存在实数 $\lambda\in(0,1)$,使得$\overrightarrow{CO}=\lambda\overrightarrow{CD}$,所以$\overrightarrow{AO}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CO}=\overrightarrow{AC}+\lambda\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AC}+\lambda\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}+\lambda(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})=-\lambda\overrightarrow{AB}+(1+\lambda)\overrightarrow{AC}$,又$\overrightarrow{AO}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}$,所以 $x=-\lambda$,因为 $0<\lambda<1$,所以 $-1<-\lambda<0$,即 $-1<x<0$.



课后拔高提能练

1. C　$\because\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2$ 为基底,$\therefore\boldsymbol{e}_1$ 与 $\boldsymbol{e}_2$ 不共线,又 $4\boldsymbol{e}_2-2\boldsymbol{e}_1=-2(\boldsymbol{e}_1-2\boldsymbol{e}_2)$,$\therefore\boldsymbol{e}_1-2\boldsymbol{e}_2$ 与 $4\boldsymbol{e}_2-2\boldsymbol{e}_1$ 共线,不能作为向量的基底.

2. A　解方程组$\begin{cases}3x-4y=6,\\2x-3y=3,\end{cases}$得$\begin{cases}x=6,\\y=3,\end{cases}$所以 $x-y=3$.故选 A.

3. A　$\because A,B,C$ 三点共线,$\therefore$存在一个实数 λ,使$\overrightarrow{AB}=\lambda\overrightarrow{BC}$,

$\therefore\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=\lambda(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB})$,$\therefore\overrightarrow{OA}=(1+\lambda)\overrightarrow{OB}-\lambda\overrightarrow{OC}$,

又 $m\overrightarrow{OA}-2\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\boldsymbol{0}$,

$\therefore m\overrightarrow{OA}=2\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OC}$,即$\overrightarrow{OA}=\frac{2}{m}\overrightarrow{OB}-\frac{1}{m}\overrightarrow{OC}$,

$\therefore\begin{cases}\frac{2}{m}=1+\lambda,\\-\frac{1}{m}=-\lambda,\end{cases}$　$\therefore\lambda=1,m=1$,故选 A.

4. C　$\because\boldsymbol{c}=p\boldsymbol{a}+q\boldsymbol{b}$,

$\therefore3\boldsymbol{e}_1-2\boldsymbol{e}_2=p(-\boldsymbol{e}_1+2\boldsymbol{e}_2)+q(\boldsymbol{e}_1-\boldsymbol{e}_2)=(q-p)\boldsymbol{e}_1+(2p-q)\boldsymbol{e}_2$,

$\therefore\begin{cases}q-p=3,\\2p-q=-2,\end{cases}$得$\begin{cases}p=1,\\q=4,\end{cases}$

$\therefore p+q=5$.

5. B　由$\overrightarrow{PA}-\overrightarrow{PB}-\overrightarrow{PC}=\overrightarrow{AB}$,得$\overrightarrow{BA}-\overrightarrow{PC}=\overrightarrow{AB}$,

$\therefore\overrightarrow{PC}=\overrightarrow{BA}-\overrightarrow{AB}=2\overrightarrow{BA}$,$\therefore P$ 在$\triangle ABC$ 的外部,故选 B.

6. A　$\because$点 G 是$\triangle ABC$ 的重心,$\therefore$点 G 在$\triangle ABC$ 的中线上,

$\therefore\overrightarrow{AG}=\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})=\frac{1}{3}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})$.

$\because\overrightarrow{AG}=\lambda\overrightarrow{AB}+\mu\overrightarrow{AC}$,$\therefore\lambda=\mu=\frac{1}{3}$.

7. ①②③④

解析:①$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{CD}-\overrightarrow{CA}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{CA}=-\frac{1}{2}\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$.

②$\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CE}=\boldsymbol{a}+\frac{1}{2}\boldsymbol{b}$.

③$\overrightarrow{CF}=\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BF}=\overrightarrow{CB}+\frac{1}{2}(\overrightarrow{CA}-\overrightarrow{CB})=-\frac{1}{2}\boldsymbol{a}+\frac{1}{2}\boldsymbol{b}$.

④由①②③知,$\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{CF}=\boldsymbol{0}$.

8. $\frac{3}{7}\overrightarrow{AB}+\frac{4}{7}\overrightarrow{AC}$

解析:$\because\overrightarrow{BP}=\frac{4}{3}\overrightarrow{PC}=\frac{4}{3}(\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{BP})$,$\therefore\overrightarrow{BP}=\frac{4}{7}\overrightarrow{BC}$.

$\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BP}$

$=\overrightarrow{AB}+\frac{4}{7}\overrightarrow{BC}$

$=\overrightarrow{AB}+\frac{4}{7}(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})$

$=\frac{3}{7}\overrightarrow{AB}+\frac{4}{7}\overrightarrow{AC}$.

9. $\frac{1}{2}$

解析:$\overrightarrow{AM}=2\overrightarrow{AN}=2(\lambda\overrightarrow{AB}+\mu\overrightarrow{AC})=2\lambda\overrightarrow{AB}+2\mu\overrightarrow{AC}$.

$\because M,B,C$ 共线,$\therefore2\lambda+2\mu=1$.

$\therefore\lambda+\mu=\frac{1}{2}$.

10. **解**:$\because\boldsymbol{d}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b}=\lambda(2\boldsymbol{e}_1-3\boldsymbol{e}_2)+\mu(2\boldsymbol{e}_1+3\boldsymbol{e}_2)=(2\lambda+2\mu)\boldsymbol{e}_1-(3\lambda-3\mu)\boldsymbol{e}_2$,欲使 $\boldsymbol{d}$ 与 $\boldsymbol{c}$ 共线,必有$\frac{2\lambda+2\mu}{2}=\frac{3\lambda-3\mu}{9}$,即 $\lambda+\mu=\frac{1}{3}(\lambda-\mu)$,即 $\lambda+2\mu=0$,故符合条件的 λ、μ 存在,只要 $\lambda,\mu\in\mathbf{R}$ 且 $\lambda+2\mu=0$,都能使 $\boldsymbol{d}$ 与 $\boldsymbol{c}$ 共线.

11. **解**:$\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{AE}-\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BE}-\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{a}+\frac{1}{2}\boldsymbol{b}-\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}-\frac{1}{2}\boldsymbol{b}$;

$\overrightarrow{BF}=\overrightarrow{AF}-\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DF}-\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{b}+\frac{1}{2}\boldsymbol{a}-\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}-\frac{1}{2}\boldsymbol{a}$;

连接 BD,易知 G 是$\triangle CBD$ 的重心,

$\therefore\overrightarrow{CG}=\frac{1}{3}\overrightarrow{CA}=-\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}=-\frac{1}{3}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$.

12. **解**:$\because A,M,D$ 三点共线,

$\therefore\overrightarrow{OM}=k\overrightarrow{OA}+(1-k)\overrightarrow{OD}=k\boldsymbol{a}+\frac{1-k}{2}\boldsymbol{b}(k\in\mathbf{R})$,

同理$\overrightarrow{OM}=t\overrightarrow{OC}+(1-t)\overrightarrow{OB}=\frac{t}{4}\boldsymbol{a}+(1-t)\boldsymbol{b}(t\in\mathbf{R})$.

又$\because\overrightarrow{OA}$,$\overrightarrow{OB}$不共线,即 $\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$ 不共线.

$\therefore k=\frac{t}{4}$且$\frac{1-k}{2}=1-t$,

解得 $k=\frac{1}{7}$,$t=\frac{4}{7}$,

$\therefore\overrightarrow{OM}=\frac{1}{7}\boldsymbol{a}+\frac{3}{7}\boldsymbol{b}$.

2.2.2　向量的正交分解与向量的直角坐标运算

基础知识点对点

1. A　设 $N(x,y)$,则$\overrightarrow{MN}=(x-5,y+6)$,$-3\boldsymbol{a}=(-3,6)$,

$\therefore\begin{cases}x-5=-3,\\y+6=6,\end{cases}\therefore\begin{cases}x=2,\\y=0,\end{cases}\therefore N(2,0)$,故选 A.

2. C　①②④正确.

3. D　$\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}=(5,-2)-2(-4,-3)-(x,y)=(5+8-x,-2+6-y)=(13-x,4-y)$,

$\therefore\begin{cases}13-x=0,\\4-y=0,\end{cases}\therefore\begin{cases}x=13,\\y=4,\end{cases}$故选 D.

4. A　$2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=2(2,4)-(-1,1)=(5,7)$,故选 A.

5. C　设 $P(x,y)$,则$(x-2,y-3)=2(x-4,y+3)$,

$\therefore\begin{cases}x-2=2(x-4),\\y-3=2(y+3),\end{cases}\therefore x=6,y=-9$,故选 C.

课后拔高提能练

1. B　设 $C(x,y)$,$\therefore\overrightarrow{AC}=(x,y-1)$,$\therefore\begin{cases}x=-4,\\y-1=-3,\end{cases}$

$\therefore\begin{cases}x=-4,\\y=-2,\end{cases}\therefore\overrightarrow{BC}=(-7,-4)$,故选 B.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

2. C　在平行四边形 $ABCD$ 中，$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{DA}$；
$\therefore \overrightarrow{DA}=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}=(2,4)-(1,3)=(1,1)$，故选 C.

3. A　设 $A(x,y)$，$\because \boldsymbol{a}=3\boldsymbol{b}-2\boldsymbol{c}=3(-3,4)-2(-1,1)=(-7,10)$，又 $\boldsymbol{a}=\overrightarrow{AB}=(1-x,-y)$，
$\therefore \begin{cases}1-x=-7,\\10=-y,\end{cases}\therefore \begin{cases}x=8,\\y=-10,\end{cases}\therefore A(8,-10)$.

4. B　设 $\boldsymbol{c}=x\boldsymbol{a}+y\boldsymbol{b}$，
则 $(-1,2)=x(1,1)+y(1,-1)$，
$\therefore \begin{cases}x+y=-1,\\x-y=2,\end{cases}$
$\therefore \begin{cases}x=\dfrac{1}{2},\\y=-\dfrac{3}{2},\end{cases}$
故 $\boldsymbol{c}=\dfrac{1}{2}\boldsymbol{a}-\dfrac{3}{2}\boldsymbol{b}$.

5. A　$\boldsymbol{a}=(x+3,x^2-3x-4)=\overrightarrow{AB}=(2,0)$，
所以 $x+3=2$ 且 $x^2-3x-4=0$. 故 $x=-1$.

6. C　$\because \boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(x,1)+(-x,x^2)=(0,x^2+1)$，
$\therefore \boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 平行于 y 轴.

7. $\left(-1,-\dfrac{3}{2}\right)$

解析：设 $P(x,y)$，则
$(x-3,y+2)=\dfrac{1}{2}(-8,1)=\left(-4,\dfrac{1}{2}\right)$，
$\therefore \begin{cases}x-3=-4,\\y+2=\dfrac{1}{2},\end{cases}\therefore \begin{cases}x=-1,\\y=-\dfrac{3}{2},\end{cases}$ 即 $P\left(-1,-\dfrac{3}{2}\right)$.

8. $\left(\dfrac{8}{3},-7\right)$

解析：设 $C(x,y)$，由 $\overrightarrow{AC}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{BC}$，得 $(x-2,y+1)=\dfrac{1}{2}(x-1,y-4)$，
$\therefore \begin{cases}x-2=\dfrac{1}{2}(x-1),\\y+1=\dfrac{1}{2}(y-4),\end{cases}$
$\therefore \begin{cases}x=3,\\y=-6,\end{cases}$
$\therefore C(3,-6)$，
又 $|\overrightarrow{CE}|=\dfrac{1}{4}|\overrightarrow{ED}|$，$E$ 在 DC 的延长线上，
$\therefore \overrightarrow{CE}=-\dfrac{1}{4}\overrightarrow{ED}$，
设 $E(m,n)$，
则 $(m-3,n+6)=-\dfrac{1}{4}(4-m,-3-n)$，
$\therefore \begin{cases}m-3=-\dfrac{1}{4}(4-m),\\n+6=-\dfrac{1}{4}(-3-n),\end{cases}$
$\therefore \begin{cases}m=\dfrac{8}{3},\\n=-7.\end{cases}$
$\therefore E$ 点的坐标为 $\left(\dfrac{8}{3},-7\right)$.

9. $\lambda<-1$

解析：设 $P(x,y)$，$\because \overrightarrow{AP}=\overrightarrow{AB}+\lambda\overrightarrow{AC}$，
$\therefore (x-2,y-3)=(3,1)+\lambda(5,7)=(3+5\lambda,1+7\lambda)$，
$\therefore \begin{cases}x-2=3+5\lambda,\\y-3=1+7\lambda,\end{cases}$
$\therefore \begin{cases}x=5+5\lambda,\\y=4+7\lambda,\end{cases}$
$\because P$ 在第三象限，
$\therefore \begin{cases}5+5\lambda<0,\\4+7\lambda<0,\end{cases}\therefore \lambda<-1$.

10. **解**：$\overrightarrow{CA}=(-2,4)-(-3,-4)=(1,8)$，$\overrightarrow{CB}=(6,3)$，
$\therefore \overrightarrow{CM}=3\overrightarrow{CA}=(3,24)$，$\overrightarrow{CN}=2\overrightarrow{CB}=(12,6)$.
设 $M(x_1,y_1)$，$N(x_2,y_2)$，得 $\overrightarrow{CM}=(x_1+3,y_1+4)=(3,24)$，
$\therefore M(0,20)$. $\overrightarrow{CN}=(x_2+3,y_2+4)=(12,6)$，
$\therefore N(9,2)$，$\therefore \overrightarrow{MN}=(9,-18)$.

11. **解**：设 $\boldsymbol{a}=(x_1,y_1)$，$\boldsymbol{b}=(x_2,y_2)$，$\boldsymbol{c}=(x_3,y_3)$，
$\therefore x_1=|\boldsymbol{a}|\cos225^\circ=3\times\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)=-\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$，
$y_1=|\boldsymbol{a}|\sin225^\circ=3\times\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)=-\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$.
$x_2=|\boldsymbol{b}|\cos(-60^\circ)=4\times\dfrac{1}{2}=2$.
$y_2=|\boldsymbol{b}|\sin(-60^\circ)=4\times\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)=-2\sqrt{3}$.
$x_3=|\boldsymbol{c}|\cos150^\circ=8\times\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)=-4\sqrt{3}$，
$y_3=|\boldsymbol{c}|\sin150^\circ=8\times\dfrac{1}{2}=4$.
$\therefore \boldsymbol{a}=\left(-\dfrac{3\sqrt{3}}{2},-\dfrac{3\sqrt{3}}{2}\right)$，
$\boldsymbol{b}=(2,-2\sqrt{3})$，$\boldsymbol{c}=(-4\sqrt{3},4)$.

12. **解**：(1)设 $P(x,y)$，由 $\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{AB}$ 得 $(x,y)=(1,2)+t(3,3)$，即 $\begin{cases}x=1+3t,\\y=2+3t.\end{cases}$
若 P 在 x 轴上，则 $y_P=0$，
即 $2+3t=0$，$\therefore t=-\dfrac{2}{3}$.
若 P 在 y 轴上，则 $x_P=0$，
即 $1+3t=0$，$\therefore t=-\dfrac{1}{3}$.
若 P 在第二象限，则 $\begin{cases}1+3t<0,\\2+3t>0\end{cases}\Leftrightarrow -\dfrac{2}{3}<t<-\dfrac{1}{3}$.
(2)若四边形 $OABP$ 能构成平行四边形，则 $\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{AB}$，即 $(1+3t,2+3t)=(3,3)$.
$\therefore \begin{cases}1+3t=3,\\2+3t=3,\end{cases}$ 这是不可能的.
故不能成为平行四边形.

2.2.3　用平面向量坐标表示向量共线条件

基础知识点对点

1. B　$①-1\times7-2\times5=-17\neq0$，故①可以；$②3\times10-5\times6=0$，故②不可以；$③2\times\left(-\dfrac{3}{4}\right)-3\times\dfrac{1}{2}=-3\neq0$，故③可以，故选 B.

2. **解**：$\overrightarrow{AB}=(2,4)$，$\overrightarrow{BC}=(1,2)$，$2\times2-4\times1=0$. $\therefore \overrightarrow{AB}\parallel\overrightarrow{BC}$，即 A,B,C 三点共线.

3. B　由 $\boldsymbol{a}\parallel\boldsymbol{b}$，$\therefore 4y=12$，$\therefore y=3$，故选 B.

4. $\dfrac{1}{2}$

解析：$\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}=(1,2)+\lambda(1,0)=(1+\lambda,2)$. $\because (\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b})\parallel\boldsymbol{c}$，
$\therefore 4(1+\lambda)=6$，$\therefore \lambda=\dfrac{1}{2}$.

5. -6

解析：$\because \boldsymbol{a}\parallel\boldsymbol{b}$，
$\therefore 2y+12=0$，
$\therefore y=-6$.

课后拔高提能练

1. A　$\because \boldsymbol{a}\parallel\boldsymbol{b}$，$\therefore 4\times3=2x$，$\therefore x=6$，故选 A.

2. B　由题可得：$2\cos\alpha\cdot\tan\alpha=-\sqrt{2}$，$\therefore \sin\alpha=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，故选 B.

3. D　$\because \overrightarrow{AB}=(2,5)$，又 $\boldsymbol{p}\parallel\overrightarrow{AB}$，$\therefore 2\times7=5\times(2k-1)$，
$\therefore k=\dfrac{19}{10}$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

4. A　∵$OABC$为平行四边形，由向量加法的平行四边形法则知$\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}$，∴$\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=(3,1)-(2,0)=(1,1)$，故选 A.

5. C　∵$\overrightarrow{OA}=(1,-3)$，$\overrightarrow{OB}=(2,-1)$，$\overrightarrow{OC}=(k+1,k-2)$，
∴$\overrightarrow{AC}=(k,k+1)$，$\overrightarrow{AB}=(1,2)$，
又A,B,C三点不能构成三角形，∴A,B,C三点共线，
∴$2k-k-1=0$，得$k=1$.

6. B　由题可知$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$不共线，若$\boldsymbol{a}\parallel\boldsymbol{b}$，则$m$满足$3(m-1)-(2m+3)=0$，即$m=6$，∴实数$m$应满足$m\neq6$. 故选 B.

7. -6
解析：因为$\boldsymbol{a}\parallel\boldsymbol{b}$，所以$-2m-4\times3=0$，解得$m=-6$.

8. $(2,16)$
解析：∵$A(-1,2)$，$B(2,3)$，$C(3,-1)$，
∴$\overrightarrow{AB}=(3,1)$，$\overrightarrow{BC}=(1,-4)$，
∴$\overrightarrow{AD}=2\times(3,1)-3\times(1,-4)=(6,2)-(3,-12)=(3,14)$.
设$D(x,y)$，则$\overrightarrow{AD}=(x+1,y-2)$，
∴$\begin{cases}x+1=3,\\y-2=14,\end{cases}$
∴$\begin{cases}x=2,\\y=16,\end{cases}$∴$D(2,16)$.

9. $-4,2,1$
解析：由$k_1(1,0)+k_2(1,-1)+k_3(2,2)=\boldsymbol{0}$，
得$\begin{cases}k_1+k_2+2k_3=0,\\2k_3-k_2=0,\end{cases}$令$k_3=1$，
则$k_2=2$，$k_1=-4$，可取$-4,2,1$.

10. **解**：设$A(x,y)$，
由$|\overrightarrow{PA}|:|\overrightarrow{AQ}|=3:1$，
得$\overrightarrow{PA}=3\overrightarrow{AQ}$或$\overrightarrow{PA}=-3\overrightarrow{AQ}$.
当$\overrightarrow{PA}=3\overrightarrow{AQ}$时，
$(x-2,y-3)=3(5-x,2-y)$，
则$\begin{cases}x-2=3(5-x),\\y-3=3(2-y),\end{cases}$
解得$\begin{cases}x=\frac{17}{4},\\y=\frac{9}{4}.\end{cases}$
当$\overrightarrow{PA}=-3\overrightarrow{AQ}$时，$(x-2,y-3)=-3(5-x,2-y)$，
则$\begin{cases}x-2=-3(5-x),\\y-3=-3(2-y),\end{cases}$
解得$\begin{cases}x=\frac{13}{2},\\y=\frac{3}{2}.\end{cases}$
故A点的坐标为$\left(\frac{17}{4},\frac{9}{4}\right)$或$\left(\frac{13}{2},\frac{3}{2}\right)$.

11. **解**：设$M(x,y)$，
$\overrightarrow{OC}=\frac{1}{4}\overrightarrow{OA}=\frac{1}{4}(0,5)=\left(0,\frac{5}{4}\right)$，
$\overrightarrow{OD}=\frac{1}{2}\overrightarrow{OB}=\frac{1}{2}(4,3)=\left(2,\frac{3}{2}\right)$.
由C,M,B三点共线得$\overrightarrow{CM}\parallel\overrightarrow{BC}$.
$\overrightarrow{CM}=\overrightarrow{OM}-\overrightarrow{OC}=\left(x,y-\frac{5}{4}\right)$，$\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB}=\left(-4,-\frac{7}{4}\right)$，$-\frac{7}{4}x=-4\left(y-\frac{5}{4}\right)$，即$7x=16y-20$.　①
由A,M,D三点共线，得$\overrightarrow{AM}\parallel\overrightarrow{AD}$，
又$\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{OM}-\overrightarrow{OA}=(x,y-5)$，$\overrightarrow{AD}=\left(2,-\frac{7}{2}\right)$，
∴$-\frac{7}{2}x=2(y-5)$，即$7x=-4y+20$.　②
由①②得$\begin{cases}x=\frac{12}{7},\\y=2,\end{cases}$∴$M\left(\frac{12}{7},2\right)$.

12. **证明**：设点$E(x_1,y_1)$，$F(x_2,y_2)$，
依题意有$\overrightarrow{AC}=(2,2)$，$\overrightarrow{BC}=(-2,3)$，$\overrightarrow{AB}=(4,-1)$.
∵$\overrightarrow{AE}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$，
∴$\overrightarrow{AE}=\frac{1}{3}(2,2)=\left(\frac{2}{3},\frac{2}{3}\right)$.
∵$\overrightarrow{BF}=\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$，∴$\overrightarrow{BF}=\frac{1}{3}(-2,3)=\left(-\frac{2}{3},1\right)$.
又$\overrightarrow{AE}=(x_1+1,y_1)=\left(\frac{2}{3},\frac{2}{3}\right)$，
∴$x_1=-\frac{1}{3}$，$y_1=\frac{2}{3}$，
即$E\left(-\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)$.
又$\overrightarrow{BF}=(x_2-3,y_2+1)=\left(-\frac{2}{3},1\right)$，
∴$x_2=\frac{7}{3}$，$y_2=0$，
即$F\left(\frac{7}{3},0\right)$，∴$\overrightarrow{EF}=\left(\frac{8}{3},-\frac{2}{3}\right)$.
又$4\times\left(-\frac{2}{3}\right)-\frac{8}{3}\times(-1)=0$.
∴$\overrightarrow{EF}\parallel\overrightarrow{AB}$.

2.3　平面向量的数量积

2.3.1　向量数量积的物理背景与定义

基础知识点对点

1. A　当$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$为非零向量时，$\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}\Leftrightarrow\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$，①②错；$|\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}||\cos\theta|$，③错；当$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$反向时，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos180^\circ=-|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|$，④正确，故选 A.

2. A　$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cdot\cos60^\circ=1\times1\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$，故选 A.

3. -4
解析：$\boldsymbol{a}$在$\boldsymbol{b}$方向上的投影为$|\boldsymbol{a}|\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=|\boldsymbol{a}|\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}=\frac{-12}{3}=-4$.

4. C　$\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}=\frac{2}{1\times4}=\frac{1}{2}$，∴$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$的夹角为$\frac{\pi}{3}$，故选 C.

5. A

课后拔高提能练

1. B　单位向量的模相等，但方向可能不同，A 错；若$\boldsymbol{a}\parallel\boldsymbol{b}$时，$\boldsymbol{b}\neq\boldsymbol{0}$，则一定存在实数$\lambda$，使$\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{b}$，C 错；若$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$，若$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$为非零向量，$\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$，D 错，B 正确.

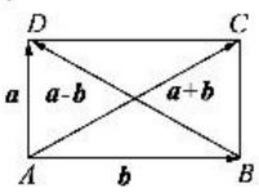
2. B

3. D　解法一：特值法. 不妨设$AB=5$，$\cos A=\frac{4}{5}$，
∴$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=|\overrightarrow{AB}|\cdot|\overrightarrow{AC}|\cos A=5\times4\times\frac{4}{5}=16$，故选 D.
解法二：$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|\cos A=|\overrightarrow{AB}|\cos A\cdot|\overrightarrow{AC}|=|\overrightarrow{AC}|^2=16$.

4. B　∵$\triangle ABC$为等边三角形，∴$\angle ABC=60^\circ$，
∴$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=|\overrightarrow{AB}|\cdot|\overrightarrow{BC}|\cos(180^\circ-60^\circ)=4\times4\times\left(-\frac{1}{2}\right)=-8$.

5. C　∵$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{b}$，∴$\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=\angle BAC$.
又$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}<0$，∴$\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle<0$，即$\cos\angle BAC<0$.
又$\angle BAC\in(0,\pi)$，∴$\angle BAC\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$，
即$\angle BAC$为钝角，∴$\triangle ABC$为钝角三角形.

6. C　如图，在以$\boldsymbol{a}$和$\boldsymbol{b}$为邻边的平行四边形$ABCD$中，
∵$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$，∴四边形$ABCD$为矩形. 在 Rt$\triangle ABD$中，$|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=2|\boldsymbol{a}|$，
∴$\angle ABD=\frac{\pi}{6}$. ∴$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$和$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$的夹角为$\frac{2\pi}{3}$.



关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

7. 3

解析：由题意得 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos30^\circ=2\times\sqrt{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=3$.

8. 4

解析：由题可得：$|\boldsymbol{a}|\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=|\boldsymbol{a}|\cdot\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|}=4$.

$\therefore|\boldsymbol{b}|=4$.

9. $\frac{12}{5}$

解析：$\boldsymbol{a}$ 在 $\boldsymbol{b}$ 方向上的正射影为 $\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|}=\frac{12}{5}$.

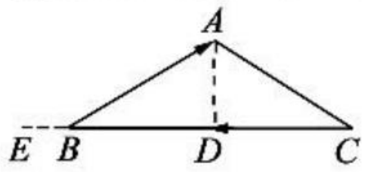
10. **解**：(1)$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta=2\times3\times\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=-3\sqrt{2}$.

(2)当 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 同向时，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos0^\circ=6$；当 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 反向时，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos180^\circ=-6$.

(3)$\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$，则 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$.

11. **解**：$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a}=\cos120^\circ+\cos120^\circ+\cos120^\circ=-\frac{3}{2}$.

12. **解**：如图所示，连接 AD，在等腰三角形 ABC 中，$AB=AC=2$，$\angle ABC=30^\circ$，D 是 BC 的中点，所以 $AD\perp BC$，$\angle C=30^\circ$. 所以 $CD=\sqrt{AC^2-AD^2}=\sqrt{AC^2-\left(\frac{1}{2}AC\right)^2}=\sqrt{2^2-1^2}=\sqrt{3}$. 延长 CB 至 E，可知 $\overrightarrow{BA}$ 与 $\overrightarrow{CD}$ 的夹角为 $\angle ABE=180^\circ-\angle ABC=180^\circ-30^\circ=150^\circ$.



(1)$\overrightarrow{BA}$ 在 $\overrightarrow{CD}$ 的方向上正射影的数量是

$|\overrightarrow{BA}|\cos150^\circ=2\times\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=-\sqrt{3}$.

(2)$\overrightarrow{CD}$ 在 $\overrightarrow{BA}$ 的方向上正射影的数量是

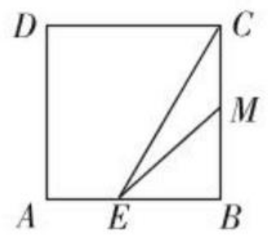
$|\overrightarrow{CD}|\cos150^\circ=\sqrt{3}\times\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=-\frac{3}{2}$.

2.3.2　向量数量积的运算律

基础知识点对点

1. D　数量积不满足结合律与消去律，A、C 错；$|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$ 与 $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|$ 的大小不确定 B 错，故选 D.

2. C　如图所示，



$\overrightarrow{EC}\cdot\overrightarrow{EM}=(\overrightarrow{EB}+\overrightarrow{BC})\cdot(\overrightarrow{EB}+\overrightarrow{BM})=\overrightarrow{EB}^2+\overrightarrow{EB}\cdot\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{EB}+\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{EB}^2+\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{EB}^2+\frac{1}{2}$，$\because\overrightarrow{EB}^2\in[0,1]$，$\therefore\overrightarrow{EC}\cdot\overrightarrow{EM}=\left[\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right]$. 故选 C.

3. C　由 $\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b})=0$，得 $\boldsymbol{a}^2+2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$，$\therefore4+2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$，$\therefore\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=-2$，$\therefore\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}=\frac{-2}{2\times2}=-\frac{1}{2}$，

$\therefore\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=\frac{2\pi}{3}$，故选 C.

4. C　由 $|2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=\sqrt{10}$，得 $(2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})^2=10$，$4\boldsymbol{a}^2-4\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}^2=10$，

$\therefore|\boldsymbol{b}|^2-4\times|\boldsymbol{b}|\times\frac{\sqrt{2}}{2}-6=0$，$\therefore|\boldsymbol{b}|^2-2\sqrt{2}|\boldsymbol{b}|-6=0$，

$\therefore|\boldsymbol{b}|=3\sqrt{2}$，故选 C.

5. 4

解析：$\because\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}$，

$\therefore\boldsymbol{c}=-\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$，

由 $(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\perp\boldsymbol{c}$，

$\therefore(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=0$.

$\therefore(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\cdot(-\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})=0$.

$\therefore-\boldsymbol{a}^2+\boldsymbol{b}^2=0$.

$\therefore|\boldsymbol{b}|^2=|\boldsymbol{a}|^2=1$，$\therefore|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|=1$，

又 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$，$\therefore\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$，

$\therefore\boldsymbol{c}^2=(-\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})^2=\boldsymbol{a}^2+2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}^2=2$，

$\therefore|\boldsymbol{c}|^2=2$.

$\therefore|\boldsymbol{a}|^2+|\boldsymbol{b}|^2+|\boldsymbol{c}|^2=4$.

6. **解**：$\because\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b}$ 与 $7\boldsymbol{a}-5\boldsymbol{b}$ 垂直，

$\therefore(\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b})\cdot(7\boldsymbol{a}-5\boldsymbol{b})=0$.

$\because\boldsymbol{a}-4\boldsymbol{b}$ 与 $7\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}$ 垂直，$\therefore(\boldsymbol{a}-4\boldsymbol{b})\cdot(7\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b})=0$.

$$\therefore\begin{cases}7\boldsymbol{a}^2+16\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}-15\boldsymbol{b}^2=0, & ①\\ 7\boldsymbol{a}^2-30\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+8\boldsymbol{b}^2=0. & ②\end{cases}$$

①－②并整理得 $2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}^2$，③

将③代入①得 $\boldsymbol{a}^2=\boldsymbol{b}^2$，$\therefore|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|$.

$\therefore\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}=\frac{1}{2}$.

$\because0^\circ\leqslant\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle\leqslant180^\circ$，$\therefore\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=60^\circ$.

课后拔高提能练

1. A　$|\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b}|^2=\boldsymbol{a}^2-6\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+9\boldsymbol{b}^2=1-6\times1\times1\times\frac{1}{2}+9=7$. $\therefore|\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b}|=\sqrt{7}$，故选 A.

2. B　由题可得 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$，由 $\boldsymbol{c}\perp\boldsymbol{d}$，得 $\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{d}=(2\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b})\cdot(k\boldsymbol{a}-4\boldsymbol{b})=2k\boldsymbol{a}^2-12\boldsymbol{b}^2=2k-12=0$. $\therefore k=6$. 故选 B.

3. C　$\because|\overrightarrow{AB}|=3$，$|\overrightarrow{BC}|=4$，$|\overrightarrow{CA}|=5$，

$\therefore|\overrightarrow{AB}|^2+|\overrightarrow{BC}|^2=|\overrightarrow{CA}|^2$，$\therefore\angle ABC=90^\circ$，

$\therefore\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=0$，

$\therefore$原式$=\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CA}\cdot(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC})=\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{AC}=-25$.

4. B　设 $\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{\beta}$ 的夹角为 θ，由题得 $2\boldsymbol{\alpha}^2-2\boldsymbol{\beta}^2+3\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\beta}=2-2+3\cos\theta=1$. $\therefore\cos\theta=\frac{1}{3}$.

5. D　A 中，当 $\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 同时与 $\boldsymbol{a}$ 垂直，但不相等，也满足 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}$，不正确；

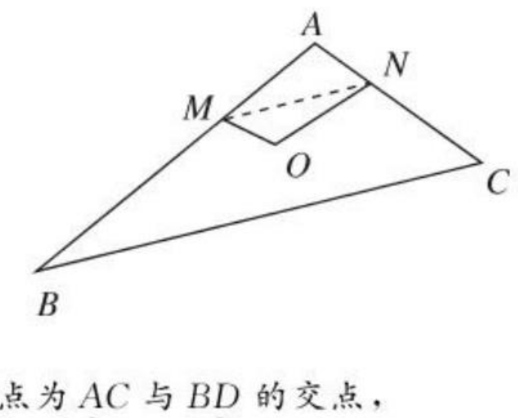
B 中，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0\Leftrightarrow\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$，不一定有 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$ 或 $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$，不正确；

C 中，$\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})$ 与 $\boldsymbol{a}$ 共线，$(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}$ 与 $\boldsymbol{c}$ 共线，

又 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{c}$ 不共线，故 $(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}\neq\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})$，不正确；

D 正确.

6. C　如图所示，连接 MN，由 $\overrightarrow{BM}=2\overrightarrow{MA}$，$\overrightarrow{CN}=2\overrightarrow{NA}$ 可知点 M、N 分别为线段 AB、AC 上靠近点 A 的三等分点，则 $\overrightarrow{BC}=3\overrightarrow{MN}=3(\overrightarrow{ON}-\overrightarrow{OM})$，由题意可知，$\overrightarrow{OM}^2=1^2=1$，$\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{ON}=1\times2\times\cos120^\circ=-1$，结合数量积的运算法则可得 $\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{OM}=3(\overrightarrow{ON}-\overrightarrow{OM})\cdot\overrightarrow{OM}=3\overrightarrow{ON}\cdot\overrightarrow{OM}-3\overrightarrow{OM}^2=-3-3=-6$. 故选 C.



7. 18

解析：设 O 点为 AC 与 BD 的交点，

$\therefore\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AC}=|\overrightarrow{AP}|\cdot|\overrightarrow{AC}|\cos\angle PAC$

$=|\overrightarrow{AP}|\cdot2|\overrightarrow{AO}|\cos\angle PAC$

$=2|\overrightarrow{AP}|^2=18$.

8. -2 或 0

解析：若 $\angle A$ 为直角，则 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=(\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j})\cdot(2\boldsymbol{i}+m\boldsymbol{j})=2+m=0$，得 $m=-2$；

若 $\angle B$ 为直角，$\because\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{i}+(m-1)\boldsymbol{j}$，

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

则$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=1+m-1=0$，得$m=0$；

若$\angle C$为直角，$\therefore\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BC}=2+m(m-1)=0$，

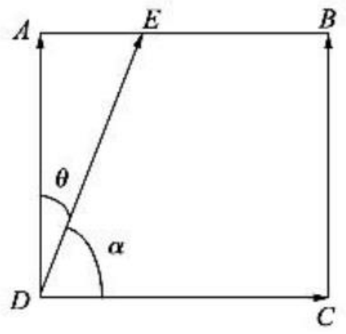
即$m^2-m+2=0$，方程无解.

$\therefore m$的值为-2或0.

9. 1　1

解析：解法一：根据平面向量的数量积公式

$\overrightarrow{DE}\cdot\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{DE}\cdot\overrightarrow{DA}=|\overrightarrow{DE}||\overrightarrow{DA}|\cos\theta$，由图可知，



$|\overrightarrow{DE}|\cdot\cos\theta=|\overrightarrow{DA}|$. 因此$\overrightarrow{DE}\cdot\overrightarrow{CB}=|\overrightarrow{DA}|^2=1$，

$\overrightarrow{DE}\cdot\overrightarrow{DC}=|\overrightarrow{DE}||\overrightarrow{DC}|\cos\alpha=|\overrightarrow{DE}|\cos\alpha$，

而$|\overrightarrow{DE}|\cos\alpha$就是向量$\overrightarrow{DE}$在$\overrightarrow{DC}$边上的射影，要想让$\overrightarrow{DE}\cdot\overrightarrow{DC}$最大，即让射影最大，此时$E$点与$B$点重合，射影为$\overrightarrow{DC}$，所以长度为1.

解法二：$\overrightarrow{DE}\cdot\overrightarrow{CB}=(\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AE})\cdot\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{DA}^2=1$.

$\overrightarrow{DE}\cdot\overrightarrow{DC}=(\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AE})\cdot\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{DC}=|\overrightarrow{AE}||\overrightarrow{DC}|\cos0^\circ=|\overrightarrow{AE}|$，

$\therefore$当$|\overrightarrow{AE}|=1$时，$\overrightarrow{DE}\cdot\overrightarrow{DC}$最大，此时$E$点与$B$点重合.

10. **解**：(1)由$(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\perp\boldsymbol{a}$，$\therefore(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{a}=0$，$\therefore\boldsymbol{a}^2-\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}=0$.

$\therefore\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=2$，$\therefore\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=\dfrac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}=\dfrac{2}{\sqrt{2}\times2}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

$\therefore\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=\dfrac{\pi}{4}$.

(2)$|2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|^2=4\boldsymbol{a}^2+4\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}^2=4\times2+4\times2+4=20$.

$\therefore|2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=2\sqrt{5}$.

11. **解**：(1)证明：因为M是BC的中点，所以$\overrightarrow{OM}=\dfrac{1}{2}(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})$，代入$\overrightarrow{OA}=-2\overrightarrow{OM}$，得$\overrightarrow{OA}=-\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OC}$，即$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\boldsymbol{0}$.

(2)设$|\overrightarrow{AP}|=x$，即$|\overrightarrow{PM}|=2-x(0\leqslant x\leqslant2)$.

因为M是BC的中点，所以$\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}=2\overrightarrow{PM}$.

所以$\overrightarrow{PA}\cdot(\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC})=2\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PM}=-2|\overrightarrow{PA}||\overrightarrow{PM}|=-2x(2-x)=2(x^2-2x)=2(x-1)^2-2$，

当$x=1$时，取最小值-2.

12. **解**：(1)$|\boldsymbol{a}+t\boldsymbol{b}|^2=\boldsymbol{a}^2+t^2\boldsymbol{b}^2+2t\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}^2\left(t+\dfrac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|^2}\right)^2+\boldsymbol{a}^2-\dfrac{(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})^2}{\boldsymbol{b}^2}$.

当$t=-\dfrac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{\boldsymbol{b}^2}$时，$|\boldsymbol{a}+t\boldsymbol{b}|$取最小值.

(2)证明：$(\boldsymbol{a}+t\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+t\boldsymbol{b}^2=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}-\dfrac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{\boldsymbol{b}^2}\cdot\boldsymbol{b}^2=0$，

所以$\boldsymbol{a}+t\boldsymbol{b}$与$\boldsymbol{b}$垂直.

2.3.3　向量数量积的坐标运算与度量公式

基础知识点对点

1. C　$\because\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}$垂直，$\therefore\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b})=0$，$\therefore\boldsymbol{a}^2+2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$，$\therefore10+2(-2+3m)=0$，$\therefore m=-1$，故选C.

2. B　$\overrightarrow{AB}=(2,2)$，$\overrightarrow{CD}=(-1,3)$，$\therefore\overrightarrow{AB}$在$\overrightarrow{CD}$上的投影为$\dfrac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}}{|\overrightarrow{CD}|}=\dfrac{-2+6}{\sqrt{10}}=\dfrac{4}{\sqrt{10}}=\dfrac{4}{10}\sqrt{10}=\dfrac{2\sqrt{10}}{5}$，故选B.

3. D　$|\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}|^2=\boldsymbol{a}^2-4\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+4\boldsymbol{b}^2=4-4|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\dfrac{\pi}{3}+4=4-4\times2\times1\times\dfrac{1}{2}+4=4$. $\therefore|\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}|=2$，故选D.

4. -2

解析：由$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|^2=|\boldsymbol{a}|^2+|\boldsymbol{b}|^2$，得$(m+1)^2+9=m^2+1+5$，$\therefore2m=-4$，$\therefore m=-2$.

5. **解**：(1)$\because\boldsymbol{b}/\!/\boldsymbol{d}$，$\therefore6x-24=0$，$\therefore x=4$.

$\because4\boldsymbol{a}+\boldsymbol{d}=(4,10)$，$(4\boldsymbol{a}+\boldsymbol{d})\perp\boldsymbol{c}$，

$\therefore5\times4+10y=0$，$y=-2$，

$\therefore\boldsymbol{b}=(4,3)$，$\boldsymbol{c}=(5,-2)$.

(2)$\because\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{c}\rangle=\dfrac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{c}|}=\dfrac{-5-2}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{29}}=-\dfrac{7\sqrt{58}}{58}$，

$\therefore\boldsymbol{c}$在$\boldsymbol{a}$方向上的投影为$|\boldsymbol{c}|\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{c}\rangle=-\dfrac{7\sqrt{2}}{2}$.

(3)$\because\boldsymbol{c}=\lambda_1\boldsymbol{a}+\lambda_2\boldsymbol{b}$，$\therefore\begin{cases}5=-\lambda_1+4\lambda_2,\\-2=\lambda_1+3\lambda_2,\end{cases}$

$\therefore\lambda_1=-\dfrac{23}{7}$，$\lambda_2=\dfrac{3}{7}$.

6. **解**：假设$\overrightarrow{OM}=t\overrightarrow{OC}$，$t\in[0,1]$，则$\overrightarrow{OM}=(6t,3t)$，

即$M(6t,3t)$. 所以$\overrightarrow{MA}=\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OM}=(2-6t,5-3t)$，

$\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OM}=(3-6t,1-3t)$.

因为$MA\perp MB$，

所以$\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=(2-6t)(3-6t)+(5-3t)(1-3t)=0$，即$45t^2-48t+11=0$，

解得$t=\dfrac{1}{3}$或$t=\dfrac{11}{15}$.

所以存在点M，M点的坐标为$(2,1)$或$\left(\dfrac{22}{5},\dfrac{11}{5}\right)$.

课后拔高提能练

1. A　由题意可得$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$，$\therefore3\lambda+6=0$，$\therefore\lambda=-2$，故选A.

2. B　因为$\boldsymbol{a}\cdot(2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})=2\boldsymbol{a}^2-\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=2|\boldsymbol{a}|^2-(-1)=2+1=3$，所以选B.

3. C　解法一：由题意可得$|\boldsymbol{a}|=\sqrt{1^2+3^2}=\sqrt{10}$，$|\boldsymbol{b}|=\sqrt{(-2)^2+(-1)^2}=\sqrt{5}$，且$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=1\times(-2)+3\times(-1)=-5$，所以$(3\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b})\cdot(2\boldsymbol{a}+5\boldsymbol{b})=6\boldsymbol{a}^2+10\boldsymbol{b}^2+19\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=60+50-5\times19=15$. 故选C.

解法二：$(3\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b})\cdot(2\boldsymbol{a}+5\boldsymbol{b})=(-1,7)\cdot(-8,1)=8+7=15$.

4. B　$\because\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$，$\therefore2x+4+2x=0$，$\therefore x=-1$，$\therefore\boldsymbol{b}=(2,1)$，

$\therefore\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(4,2)$，

$\therefore|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=\sqrt{4^2+2^2}=2\sqrt{5}$，故选B.

5. C　$\because\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{c}$，$\therefore2x-4=0$，得$x=2$，又$\boldsymbol{b}/\!/\boldsymbol{c}$，$\therefore1\times(-4)=2y$，得$y=-2$，$\therefore\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(2,1)+(1,-2)=(3,-1)$，

$\therefore|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=\sqrt{3^2+(-1)^2}=\sqrt{10}$.

6. C　$\because\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$的夹角是钝角，$\therefore\begin{cases}\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=-3,x+10<0,\\5x\neq-6,\end{cases}$

$\therefore x>\dfrac{10}{3}$，故选C.

7. -1

解析：$\because\boldsymbol{a}=(1,0)$，$\boldsymbol{b}=(-1,m)$，$\therefore m\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=(m,0)-(-1,m)=(m+1,-m)$，

由$\boldsymbol{a}\perp(m\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})$得$\boldsymbol{a}\cdot(m\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})=0$，$\therefore\boldsymbol{a}\cdot(m\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})=m+1=0$，即$m=-1$.

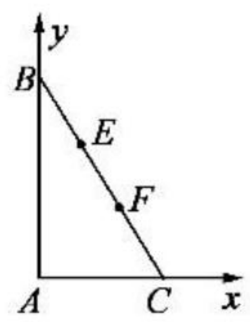
8. $8\sqrt{2}$

解析：$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=-2+8=6$. $\boldsymbol{c}=(2,4)-6(-1,2)=(8,-8)$，

$\therefore|\boldsymbol{c}|=8\sqrt{2}$.

9. 10

解析：如图所示，以A为坐标原点AC，AB分别为x轴，y轴建立坐标系，



$\therefore C(3,0)$，$B(0,6)$，$\therefore E(1,4)$，

$F(2,2)$，$\therefore\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{AF}=(1,4)\cdot(2,2)=10$.

10. **解**：(1)因为$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$同向. 又$\because\boldsymbol{b}=(1,2)$，

$\therefore\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{b}=(\lambda,2\lambda)(\lambda>0)$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

又$\because \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=10$，$\therefore 1\cdot\lambda+2\cdot 2\lambda=10$，
解得$\lambda=2>0$.
$\therefore\lambda=2$符合$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$同向条件，$\therefore\boldsymbol{a}=(2,4)$.
(2)$\because \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}=1\times2+2\times(-1)=0$，
$\therefore(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})\cdot\boldsymbol{a}=0\cdot\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$.

11. **解**：(1)$\because \boldsymbol{b}=\left(-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$，
$\therefore|\boldsymbol{b}|=1$，
$\therefore\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|\cos\frac{2\pi}{3}=2\times1\times\left(-\frac{1}{2}\right)=-1$，
$\therefore|\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}|=\sqrt{\boldsymbol{a}^2+4\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+4\boldsymbol{b}^2}=2$.
(2)$\because(\boldsymbol{a}+k\boldsymbol{b})\perp(2\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a})$，
$\therefore(\boldsymbol{a}+k\boldsymbol{b})\cdot(2\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a})=0$，
$\therefore 2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}^2+2k\boldsymbol{b}^2-k\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$，
$\therefore -2-4+2k+k=0$，
$\therefore k=2$.

12. **解**：(1)证明：$\overrightarrow{AB}=(-1,-2)-(2,4)=(-3,-6)$，
$\overrightarrow{AC}=(2,-1)$，
$\because\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=-3\times2+(-6)\times(-1)=0$，
$\therefore AB\perp AC$.
(2)设D点的坐标为(x,y)，
则$\overrightarrow{AD}=(x-2,y-4)$，$\overrightarrow{BC}=(5,5)$，
$\because AD\perp BC$，$\therefore\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BC}=5(x-2)+5(y-4)=0$. ①
又$\overrightarrow{BD}=(x+1,y+2)$，而$\overrightarrow{BD}$与$\overrightarrow{BC}$共线，
$\therefore 5(x+1)-5(y+2)=0$. ②
联立①②，解得$x=\frac{7}{2}$，$y=\frac{5}{2}$，故D点坐标为$\left(\frac{7}{2},\frac{5}{2}\right)$，
$\therefore\overrightarrow{AD}=\left(\frac{7}{2}-2,\frac{5}{2}-4\right)=\left(\frac{3}{2},-\frac{3}{2}\right)$.
(3)$\cos\theta=\frac{\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{BA}||\overrightarrow{BC}|}=\frac{3\times5+6\times5}{\sqrt{3^2+6^2}\cdot\sqrt{5^2+5^2}}=\frac{3\sqrt{10}}{10}$.

2.4　向量的应用

2.4.1　向量在几何中的应用

2.4.2　向量在物理中的应用

基础知识点对点

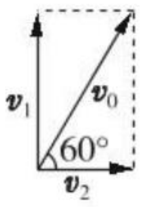
1. C　$\because G$为$\triangle ABC$的重心，取BC的中点为D，则$\overrightarrow{AG}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AD}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})$，由$a\overrightarrow{GA}+b\overrightarrow{GB}+c\overrightarrow{GC}=\boldsymbol{0}$得$a\overrightarrow{GA}+b(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AG})+c(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AG})=\boldsymbol{0}$. $\therefore -a\overrightarrow{AG}-b\overrightarrow{AG}-c\overrightarrow{AG}+b\overrightarrow{AB}+c\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{0}$，
$\therefore\overrightarrow{AG}=\frac{b}{a+b+c}\overrightarrow{AB}+\frac{c}{a+b+c}\overrightarrow{AC}$，
$\therefore\begin{cases}\frac{b}{a+b+c}=\frac{1}{3},\\ \frac{c}{a+b+c}=\frac{1}{3},\end{cases}\therefore a=b=c$.
$\therefore\triangle ABC$为等边三角形，故$C=60^\circ$.

2. D　由$\left(\frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|}+\frac{\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|}\right)\cdot\overrightarrow{BC}=0$，$\angle A$的角平线与$BC$垂直，$\therefore AB=AC$，由$\frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|}\cdot\frac{\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|}=\frac{1}{2}$，可知$\angle A=60^\circ$.
$\therefore\triangle ABC$是等边三角形.

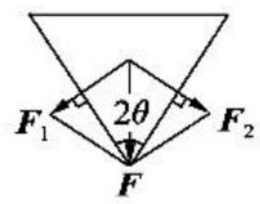
3. $x+2y=4$
解析：$\because\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OA}=4$，$\therefore(x,y)\cdot(1,2)=4$，$\therefore x+2y=4$.

4. **解**：(1)由已知得$D(-1,1)$，$E(-3,-1)$，$F(2,-2)$.
设点$M(x,y)$是直线DE上任一点，则$\overrightarrow{DM}\parallel\overrightarrow{DE}$，
$\overrightarrow{DM}=(x+1,y-1)$，$\overrightarrow{DE}=(-2,-2)$，
$\therefore(-2)\times(x+1)-(-2)(y-1)=0$，
即$x-y+2=0$为直线DE的方程.
同理可得直线EF，FD的方程分别为$x+5y+8=0$，$x+y=0$.
(2)设点$N(x,y)$是CH所在直线上的任一点，则$\overrightarrow{CN}\perp\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{CN}\cdot\overrightarrow{AB}=0$，$\overrightarrow{CN}=(x+6,y-2)$，$\overrightarrow{AB}=(4,4)$，
$\therefore 4(x+6)+4(y-2)=0$，即$x+y+4=0$为所求高$CH$所在直线的方程.

5. 5
解析：设该物体在竖直方向上的速度为$\boldsymbol{v}_1$，水平方向上的速度为$\boldsymbol{v}_2$，如图所示，由向量的平行四边形法则以及直角三角形的知识可知，$|\boldsymbol{v}_2|=|\boldsymbol{v}_0|\cos60^\circ=10\times\frac{1}{2}=5(\mathrm{m/s})$，所以该物体在水平方向上的速度是5 m/s.



6. **解**：根据力的作用效果(力$\boldsymbol{F}_1$，$\boldsymbol{F}_2$的方向分别垂直于劈面)，可将力分解，如图所示.
由向量的平行四边形法则及直角三角形的知识得$|\boldsymbol{F}_1|=|\boldsymbol{F}_2|=\frac{\frac{|\boldsymbol{F}|}{2}}{\sin\theta}=\frac{|\boldsymbol{F}|}{2\sin\theta}=\frac{100}{2\sin\theta}=\frac{50}{\sin\theta}(\mathrm{N})$.



根据题意得$0<2\theta<\pi$，所以$0<\theta<\frac{\pi}{2}$.
因为当$\theta\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$时，$\sin\theta$是增函数，
所以随着θ的增大，$|\boldsymbol{F}_1|$，$|\boldsymbol{F}_2|$在减小，
故顶角越小，分力越大.
当$\theta=\frac{\pi}{6}$时，即顶角为$\frac{\pi}{3}$时，$|\boldsymbol{F}_1|=|\boldsymbol{F}_2|=|\boldsymbol{F}|$.

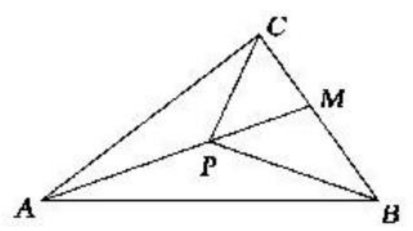
课后拔高提能练

1. D　由$k=\frac{a_2}{a_1}$，知$\frac{1}{1-m}=-\frac{m}{2}$，解得$m=-1$或$m=2$.故选D.

2. A　由题意，有$[(\overrightarrow{DB}-\overrightarrow{DA})+(\overrightarrow{DC}-\overrightarrow{DA})]\cdot(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC})=0$，所以$(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})\cdot(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC})=0$，$\therefore\overrightarrow{AB}^2-\overrightarrow{AC}^2=0$，
$\therefore|\overrightarrow{AB}|=|\overrightarrow{AC}|$，所以$\triangle ABC$是等腰三角形.故选A.

3. D　$\because\overrightarrow{AP}\perp\overrightarrow{BC}$，$\therefore\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{BC}=0$，$\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{BC}=(\lambda\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})=\lambda\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}-\lambda\overrightarrow{AB}^2+\overrightarrow{AC}^2-\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}=\lambda\times2\times3\times\left(-\frac{1}{2}\right)-4\lambda+9-2\times3\times\left(-\frac{1}{2}\right)=-7\lambda+12$，
$\therefore -7\lambda+12=0$，$\therefore\lambda=\frac{12}{7}$，故选D.

4. A　如图，由题知，$\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}=2\overrightarrow{PM}$，
$\overrightarrow{PA}\cdot(\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC})=\overrightarrow{PA}\cdot2\overrightarrow{PM}$，
$\because|\overrightarrow{AM}|=1$，
$\therefore|\overrightarrow{PA}|=\frac{2}{3}$，$|\overrightarrow{PM}|=\frac{1}{3}$，
$\therefore\overrightarrow{PA}\cdot(\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC})=\overrightarrow{PA}\cdot2\overrightarrow{PM}=-\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}\times2=-\frac{4}{9}$.
故选A.



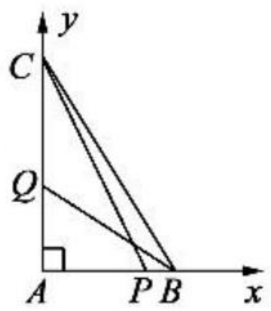
5. D　由题意得$\boldsymbol{f}_1+\boldsymbol{f}_2+\boldsymbol{f}_3+\boldsymbol{f}_4=\boldsymbol{0}$，$\therefore\boldsymbol{f}_4=-(\boldsymbol{f}_1+\boldsymbol{f}_2+\boldsymbol{f}_3)=(1,2)$.

6. B　解法一：由已知条件可知，$\overrightarrow{BQ}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AQ}$，$\overrightarrow{CP}=\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AP}$，
$\therefore\overrightarrow{BQ}\cdot\overrightarrow{CP}=(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AQ})\cdot(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AP})$
$=\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{AQ}\cdot\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AQ}\cdot\overrightarrow{AP}$
$=0+\overrightarrow{BA}\cdot\lambda\overrightarrow{AB}+(1-\lambda)\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{CA}$

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

$=-\lambda|\overrightarrow{AB}|^2-(1-\lambda)|\overrightarrow{AC}|^2$
$=-\lambda-4(1-\lambda)$，而$\overrightarrow{BQ}\cdot\overrightarrow{CP}=-2$，
$\therefore -\lambda-4(1-\lambda)=-2$，
解得$\lambda=\frac{2}{3}$，故选 B.

解法二：以 A 为坐标原点，AB 为 x 轴正半轴建立坐标系，如图所示，



则 $B(1,0)$，$C(0,2)$，设 $P(x,0)$，$Q(0,y)$.
由$\overrightarrow{AP}=\lambda\overrightarrow{AB}$，$\therefore(x,0)=\lambda(1,0)$，
$\therefore P(\lambda,0)$.
由$\overrightarrow{AQ}=(1-\lambda)\overrightarrow{AC}$，$\therefore(0,y)=(1-\lambda)(0,2)$，
$\therefore Q(0,2-2\lambda)$.
由$\overrightarrow{BQ}\cdot\overrightarrow{CP}=-2$，
得$(-1,2-2\lambda)\cdot(\lambda,-2)=-2$.
即$-\lambda-4+4\lambda=-2$.
$\therefore\lambda=\frac{2}{3}$. 故选 B.

7. -1

解析：$\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{BD}=(\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AD})(\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB})=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB}^2+\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}^2-\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AB}=2\times2\times\frac{1}{2}-4+\frac{1}{2}\times4-\frac{1}{2}\times2\times2\times\frac{1}{2}=-1$.

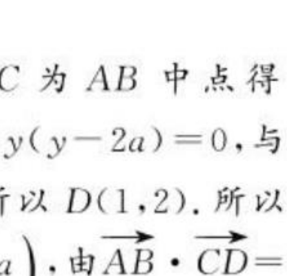
8. $\left(-\frac{\sqrt{10}}{5},\frac{3\sqrt{10}}{5}\right)$

解析：$\overrightarrow{OC}=\lambda\left(\frac{\overrightarrow{OA}}{|\overrightarrow{OA}|}+\frac{\overrightarrow{OB}}{|\overrightarrow{OB}|}\right)=\lambda\left[(0,1)+\left(-\frac{3}{5},\frac{4}{5}\right)\right]=\lambda\left(-\frac{3}{5},\frac{9}{5}\right)$，$\lambda>0$，
$\therefore|\lambda|\cdot\sqrt{\left(\frac{3}{5}\right)^2+\left(\frac{9}{5}\right)^2}=2$，$\therefore\lambda=\frac{\sqrt{10}}{3}$，
$\therefore\overrightarrow{OC}=\left(-\frac{\sqrt{10}}{5},\frac{3\sqrt{10}}{5}\right)$.

9. 3

解析：设 $A(a,2a)(a>0)$，则由圆心 C 为 AB 中点得 $C\left(\frac{a+5}{2},a\right)$. 易得$\odot C$：$(x-5)(x-a)+y(y-2a)=0$，与 $y=2x$ 联立解得点 D 的横坐标 $x_D=1$，所以 $D(1,2)$. 所以$\overrightarrow{AB}=(5-a,-2a)$，$\overrightarrow{CD}=\left(1-\frac{a+5}{2},2-a\right)$，由$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}=0$ 得$(5-a)\left(1-\frac{a+5}{2}\right)+(-2a)(2-a)=0$，即 $a^2-2a-3=0$，解得 $a=3$ 或 $a=-1$，因为 $a>0$，所以 $a=3$.

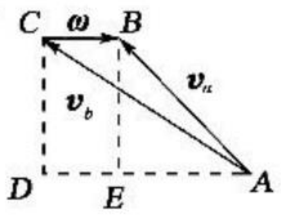
10. **证明**：证法一：$\because\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$，$\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB}$，又四边形 $ABCD$ 是菱形，$\therefore AB=AD$.
$\therefore\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}=(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD})\cdot(\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB})=|\overrightarrow{AD}|^2-|\overrightarrow{AB}|^2=0$，
$\therefore\overrightarrow{AC}\perp\overrightarrow{BD}$，$\therefore AC\perp BD$.
证法二：如右图，以 BC 所在直线为 x 轴，以 B 为原点建立平面直角坐标系，则 $B(0,0)$，设 $A(a,b)$，$C(c,0)$，则$\overrightarrow{BA}=(a,b)$，$\overrightarrow{BC}=(c,0)$，



由$|\overrightarrow{BA}|=|\overrightarrow{BC}|$，得 $a^2+b^2=c^2$.
$\because\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{BA}=(c,0)-(a,b)=(c-a,-b)$，
$\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}=(a,b)+(c,0)=(c+a,b)$，
$\therefore\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}=c^2-a^2-b^2=0$，$\therefore\overrightarrow{AC}\perp\overrightarrow{BD}$，即 $AC\perp BD$.

11. **解**：设 P 点坐标为 $P(x,y)$，
则$\overrightarrow{OP}=(x,y)$，
而$\overrightarrow{OB}=(4,4)$.
$\because\overrightarrow{OP}$与$\overrightarrow{OB}$共线，
$\therefore 4x-4y=0$. ①
又$\because\overrightarrow{AP}=(x-4,y)$，
$\overrightarrow{AC}=(2-4,6-0)=(-2,6)$，
且$\overrightarrow{AP}$与$\overrightarrow{AC}$共线，
$\therefore 6(x-4)-(-2)y=0$，
即 $3x+y=12$. ②
由①②解得$\begin{cases}x=3,\\y=3,\end{cases}$
故 P 点的坐标是$(3,3)$.

12. **解**：设 $\boldsymbol{\omega}$＝风速，$\boldsymbol{v}_a$＝有风时飞机的航行速度，$\boldsymbol{v}_b$＝无风时飞机的航行速度，$\boldsymbol{v}_b=\boldsymbol{v}_a-\boldsymbol{\omega}$.
如右图所示.



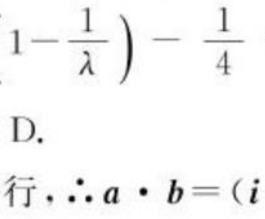
$\therefore\boldsymbol{v}_b$、$\boldsymbol{v}_a$、$\boldsymbol{\omega}$ 构成三角形.
设$|\overrightarrow{AB}|=|\boldsymbol{v}_a|$，$|\overrightarrow{CB}|=|\boldsymbol{\omega}|$，
$|\overrightarrow{AC}|=|\boldsymbol{v}_b|$，
作 $AD\parallel BC$，$CD\perp AD$ 于 D，$BE\perp AD$ 于 E，则$\angle BAD=45^\circ$.
设$|\overrightarrow{AB}|=150$，则$|\overrightarrow{CB}|=75(\sqrt{6}-\sqrt{2})$.
$\therefore|\overrightarrow{CD}|=|\overrightarrow{BE}|=|\overrightarrow{EA}|=75\sqrt{2}$，$|\overrightarrow{DA}|=75\sqrt{6}$.
从而$|\overrightarrow{AC}|=150\sqrt{2}$，$\angle CAD=30^\circ$.
$\therefore|\boldsymbol{v}_b|=150\sqrt{2}$ km/h，方向为北偏西 60°.

章末检测

1. C　$\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}=(2,-1)+(-4,1)=(-2,0)$，故选 C.

2. C　由题可知，$3x-3=0$，$\therefore x=1$，故选 C.

3. B　设对角线 AC 与 BD 的交点为 O，则$\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CA}\cdot(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA})=\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{OA}=-\overrightarrow{CA}\cdot\frac{1}{2}\overrightarrow{CA}=-2$，故选 B.



4. B　$|2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|^2=4\boldsymbol{a}^2-4\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}^2=4+4=8$，$\therefore|2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=2\sqrt{2}$，故选 B.

5. A　设 $PO=x$，
由 $AB=2$，$\therefore OC=1$，
$\therefore PC=1-x$，
$\therefore(\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB})\cdot\overrightarrow{PC}=2\overrightarrow{PO}\cdot\overrightarrow{PC}=-2x\cdot(1-x)=2x^2-2x=2\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{2}$，$\therefore$当 $x=\frac{1}{2}$时，$(\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB})\cdot\overrightarrow{PC}$有最小值$-\frac{1}{2}$. 故选 A.

6. D　①②③正确，故选 D.

7. D　$\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BE}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AB})\cdot(\overrightarrow{AE}-\overrightarrow{AB})=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AB})\left[\left(1-\frac{1}{\lambda}\right)\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}\right]=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{\lambda}\right)-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{\lambda}\right)-\frac{1}{2}=-\frac{1}{4}$，$\therefore\lambda=3$. 故选 D.

8. A　由题可知，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}>0$ 且 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 不平行，$\therefore\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=(\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{j})(\boldsymbol{i}+\lambda\boldsymbol{j})=1-2\lambda>0$，$\therefore\lambda<\frac{1}{2}$，又 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 不平行，
$\therefore\lambda\neq-2$. 故 $\lambda<\frac{1}{2}$且 $\lambda\neq-2$，故选 A.

9. $(3\sqrt{2},\sqrt{2})$或$(-3\sqrt{2},-\sqrt{2})$

解析：设 $\boldsymbol{a}=(x,y)$，$\therefore\begin{cases}-x+3y=0,\\x^2+y^2=20.\end{cases}$
$\therefore\begin{cases}x=3\sqrt{2},\\y=\sqrt{2}\end{cases}$或$\begin{cases}x=-3\sqrt{2},\\y=-\sqrt{2},\end{cases}$$\therefore\boldsymbol{a}=(3\sqrt{2},\sqrt{2})$或$\boldsymbol{a}=(-3\sqrt{2},-\sqrt{2})$.

10. $\frac{1}{2}$

解析：由题可得 $2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(4,2)$，$\because\boldsymbol{c}\parallel(2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$，$\boldsymbol{c}=(1,\lambda)$，
$\therefore 4\lambda-2=0$，即 $\lambda=\frac{1}{2}$，故答案为$\frac{1}{2}$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

11. 1

解析：由题意得，$|\boldsymbol{a}|=1$，又$\triangle OAB$是以O为直角顶点的等腰直角三角形，故$\overrightarrow{OA}\perp\overrightarrow{OB}$，$|\overrightarrow{OA}|=|\overrightarrow{OB}|$，则$(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=|\boldsymbol{a}|^2-|\boldsymbol{b}|^2=0$，即$|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|$，又$|\overrightarrow{OA}|=|\overrightarrow{OB}|$，故$|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|$，得$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$，所以$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|^2=|\boldsymbol{a}|^2+|\boldsymbol{b}|^2=2$，所以$|\overrightarrow{OB}|=|\overrightarrow{OA}|=\sqrt{2}$，故$S_{\triangle OAB}=\frac{1}{2}\times\sqrt{2}\times\sqrt{2}=1$.

12. **解**：(1)$\because|\boldsymbol{a}|=\sqrt{3}$，$|\boldsymbol{b}|=2$，$\therefore\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\sqrt{3}\cdot2\cos150^\circ=-3$.

$|\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}|^2=\boldsymbol{a}^2-4\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+4\boldsymbol{b}^2=3-4\times(-3)+4\times4=31$，

$\therefore|\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}|=\sqrt{31}$.

(2)$\because(\boldsymbol{a}+3\lambda\boldsymbol{b})\perp(\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b})$，

$\therefore(\boldsymbol{a}+3\lambda\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b})=0$.

$\therefore\boldsymbol{a}^2+4\lambda\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+3\lambda^2\boldsymbol{b}^2=0$.

$\therefore3-12\lambda+12\lambda^2=0$，$\therefore\lambda=\frac{1}{2}$.

13. **解**：设$\overrightarrow{BC}=(x,y)$，则$\overrightarrow{AC}=(6+x,1+y)$，$\overrightarrow{AD}=(4+x,y-2)$，$\overrightarrow{DA}=(-x-4,2-y)$，$\overrightarrow{BD}=(x-2,y-3)$.

又$\overrightarrow{BC}/\!/\overrightarrow{DA}$及$\overrightarrow{AC}\perp\overrightarrow{BD}$，

所以$x(2-y)-(-x-4)y=0$，

$(6+x)(x-2)+(1+y)(y-3)=0$.

解得$\begin{cases}x=-6,\\y=3\end{cases}$或$\begin{cases}x=2,\\y=-1.\end{cases}$

$\therefore\overrightarrow{BC}=(-6,3)$或$(2,-1)$.

14. **解**：由题意得$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}+\boldsymbol{d}=\boldsymbol{0}$，$\therefore\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=-(\boldsymbol{c}+\boldsymbol{d})$，

即$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})^2=(\boldsymbol{c}+\boldsymbol{d})^2$，

即$|\boldsymbol{a}|^2+|\boldsymbol{b}|^2+2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{c}|^2+|\boldsymbol{d}|^2+2\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{d}$，

由$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{d}$得$|\boldsymbol{a}|^2+|\boldsymbol{b}|^2=|\boldsymbol{c}|^2+|\boldsymbol{d}|^2$.　①

同理可得$|\boldsymbol{a}|^2+|\boldsymbol{d}|^2=|\boldsymbol{b}|^2+|\boldsymbol{c}|^2$.　②

①－②，得$|\boldsymbol{b}|^2=|\boldsymbol{d}|^2$，

$\therefore|\boldsymbol{a}|^2=|\boldsymbol{c}|^2$，

即$|\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{d}|$且$|\boldsymbol{c}|=|\boldsymbol{a}|$，

同理可得$|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|$且$|\boldsymbol{c}|=|\boldsymbol{d}|$，

$\therefore$四边形$ABCD$为菱形.

$\therefore AB/\!/CD$，$\therefore\boldsymbol{a}=-\boldsymbol{c}$，

又$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}$，

$\therefore\boldsymbol{b}\cdot(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{c})=0$，即$\boldsymbol{b}\cdot2\boldsymbol{a}=0$，

又$\because$边长不为0，$\therefore\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$，

$\therefore\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{BC}$，故菱形$ABCD$为正方形.

第三章　三角恒等变换

3.1　和角公式

3.1.1　两角和与差的余弦

基础知识点对点

1. A　$\cos42^\circ\cos78^\circ+\sin42^\circ\cos168^\circ=\cos42^\circ\cos78^\circ-\sin42^\circ\sin78^\circ=\cos(42^\circ+78^\circ)=\cos120^\circ=-\frac{1}{2}$.

2. $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

解析：$\frac{\cos7^\circ-\sin15^\circ\sin8^\circ}{\cos8^\circ}=\frac{\cos(15^\circ-8^\circ)-\sin15^\circ\sin8^\circ}{\cos8^\circ}=\frac{\cos15^\circ\cos8^\circ}{\cos8^\circ}=\cos15^\circ=\cos(45^\circ-30^\circ)=\cos45^\circ\cos30^\circ+\sin45^\circ\sin30^\circ=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$.

3. C　$\because\alpha\in\left(\frac{3\pi}{2},2\pi\right)$，$\therefore\sin\alpha=-\sqrt{1-\cos^2\alpha}=\frac{-5}{13}=-\frac{5}{13}$，

$\therefore\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)=\cos\alpha\cos\frac{\pi}{4}-\sin\alpha\sin\frac{\pi}{4}=\frac{12}{13}\times\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{5}{13}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{17\sqrt{2}}{26}$，故选C.

4. $\frac{1}{3}$

解析：$3\cos B\cos C+3\sin B\sin C-1=6\cos B\cos C$，$\therefore\cos B\cos C-\sin B\sin C=-\frac{1}{3}$，$\therefore\cos(B+C)=-\frac{1}{3}$，$\therefore\cos A=\frac{1}{3}$.

5. A　$\because\alpha,\beta$都是锐角，$\therefore0<\alpha+\beta<\pi$，$\therefore\sin\alpha=\sqrt{1-\cos^2\alpha}=\frac{4\sqrt{3}}{7}$，$\sin(\alpha+\beta)=\sqrt{1-\cos^2(\alpha+\beta)}=\frac{5\sqrt{3}}{14}$，$\therefore\cos\beta=\cos(\alpha+\beta-\alpha)=\cos(\alpha+\beta)\cos\alpha+\sin(\alpha+\beta)\sin\alpha=-\frac{11}{14}\times\frac{1}{7}+\frac{5\sqrt{3}}{14}\times\frac{4\sqrt{3}}{7}=\frac{1}{2}$，$\therefore\beta=60^\circ$. 故选A.

课后拔高提能练

1. A　$\cos15^\circ+\cos75^\circ=\cos(45^\circ-30^\circ)+\cos(45^\circ+30^\circ)=\cos45^\circ\cos30^\circ+\sin45^\circ\sin30^\circ+\cos45^\circ\cos30^\circ-\sin45^\circ\sin30^\circ=2\cos45^\circ\cos30^\circ=2\times\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{6}}{2}$.

2. D　由已知得$(\sin\alpha+\sin\beta)^2+(\cos\alpha+\cos\beta)^2=\left(\frac{4}{5}\right)^2+\left(\frac{3}{5}\right)^2=1$，

所以$2+2(\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta)=1$，

即$2+2\cos(\alpha-\beta)=1$，

所以$\cos(\alpha-\beta)=-\frac{1}{2}$. 故选D.

3. A　$\because0<\theta<\frac{\pi}{3}$，$\therefore\frac{\pi}{6}<\theta+\frac{\pi}{6}<\frac{\pi}{2}$，$\therefore\sin\left(\theta+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{12}{13}$，$\therefore\cos\theta=\cos\left(\theta+\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{6}\right)=\cos\left(\theta+\frac{\pi}{6}\right)\cos\frac{\pi}{6}+\sin\left(\theta+\frac{\pi}{6}\right)\sin\frac{\pi}{6}=\frac{5}{13}\times\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{12}{13}\times\frac{1}{2}=\frac{5\sqrt{3}+12}{26}$，故选A.

4. D　由两角和与差的余弦公式$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$，$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$，所以$\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta+\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta=2\cos\alpha\cos\beta=\frac{1}{3}$，$\therefore\cos\alpha\cos\beta=\frac{1}{6}$. 故选D.

5. C　$y=\cos x\cos\left(3x-\frac{\pi}{4}\right)+\sin x\sin\left(3x-\frac{\pi}{4}\right)=\cos\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)$　$\therefore T=\frac{2\pi}{2}=\pi$，故选C.

6. C　$\because0<\alpha<\frac{\pi}{2}$，$\frac{\pi}{4}<\alpha+\frac{\pi}{4}<\frac{3\pi}{4}$，$\therefore\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{2\sqrt{2}}{3}$，$-\frac{\pi}{2}<\beta<0$，$\frac{\pi}{4}<\frac{\pi}{4}-\frac{\beta}{2}<\frac{\pi}{2}$，$\therefore\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\beta}{2}\right)=\frac{\sqrt{6}}{3}$.

$\therefore\cos\left(\alpha+\frac{\beta}{2}\right)=\cos\left[\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)-\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\beta}{2}\right)\right]=\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\beta}{2}\right)+\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\beta}{2}\right)=\frac{1}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{3}+\frac{2\sqrt{2}}{3}\times\frac{\sqrt{6}}{3}=\frac{5\sqrt{3}}{9}$. 故选C.

7. $\frac{\sqrt{2}}{2}$

解析：$\frac{1}{2}\cos15^\circ+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin15^\circ=\cos60^\circ\cos15^\circ+\sin60^\circ\sin15^\circ=\cos(60^\circ-15^\circ)=\cos45^\circ=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

8. $-\frac{3\sqrt{2}+\sqrt{3}}{6}$

解析：$\because\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$，$\therefore3\sin^2\theta=1$，又$\theta\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$，

$\therefore\sin\theta=\frac{\sqrt{3}}{3}$，$\cos\theta=-\sqrt{1-\sin^2\theta}=-\frac{\sqrt{6}}{3}$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

$\therefore \cos\left(\theta+\frac{\pi}{6}\right)=\cos\theta\cos\frac{\pi}{6}-\sin\theta\sin\frac{\pi}{6}$

$=-\frac{\sqrt{6}}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{3}}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{-3\sqrt{2}-\sqrt{3}}{6}$.

9. $\frac{3\pi}{4}$

解析：$\because \alpha,\beta$ 为锐角，$\therefore \sin\alpha=\sqrt{1-\cos^2\alpha}=\frac{3\sqrt{10}}{10}$，$\sin\beta=\sqrt{1-\cos^2\beta}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$. $\therefore \cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta=\frac{1}{\sqrt{10}}\times\frac{1}{\sqrt{5}}-\frac{3\sqrt{10}}{10}\times\frac{2\sqrt{5}}{5}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$. $\because 0<\alpha+\beta<\pi$，$\therefore \alpha+\beta=\frac{3\pi}{4}$.

10. **解**：$\because \cos(\alpha-\beta)\cos\alpha+\sin(\alpha-\beta)\sin\alpha=m$.

$\therefore \cos(\alpha-\beta-\alpha)=m$.

$\therefore \cos\beta=m$. 而 β 为第三象限角，

$\therefore \sin\beta=-\sqrt{1-\cos^2\beta}=-\sqrt{1-m^2}$.

11. **解**：(1)根据三角函数定义可知 $\sin\angle COA=\frac{4}{5}$.

(2)$\because \triangle AOB$ 为正三角形，$\therefore \angle AOB=60^\circ$，

又 $\sin\angle COA=\frac{4}{5}$，$\cos\angle COA=\frac{3}{5}$，

$\therefore \cos\angle COB=\cos(\angle COA+60^\circ)=\cos\angle COA\cos60^\circ-\sin\angle COA\sin60^\circ=\frac{3}{5}\times\frac{1}{2}-\frac{4}{5}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{3-4\sqrt{3}}{10}$.

12. **解**：(1)$\because \boldsymbol{a}=(\cos\alpha,\sin\alpha)$，$\boldsymbol{b}=(\cos\beta,\sin\beta)$，

$\therefore \boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=(\cos\alpha-\cos\beta,\sin\alpha-\sin\beta)$.

$\because |\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=\frac{2\sqrt{5}}{5}$，

$\therefore \sqrt{(\cos\alpha-\cos\beta)^2+(\sin\alpha-\sin\beta)^2}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$，

即 $2-2\cos(\alpha-\beta)=\frac{4}{5}$，$\therefore \cos(\alpha-\beta)=\frac{3}{5}$.

(2)$\because 0<\alpha<\frac{\pi}{2}$，$-\frac{\pi}{2}<\beta<0$，$\therefore 0<\alpha-\beta<\pi$.

$\because \cos(\alpha-\beta)=\frac{3}{5}$，$\sin(\alpha-\beta)=\frac{4}{5}$.

$\because \sin\beta=-\frac{5}{13}$，$\therefore \cos\beta=\frac{12}{13}$.

$\therefore \cos\alpha=\cos[(\alpha-\beta)+\beta]$

$=\cos(\alpha-\beta)\cos\beta-\sin(\alpha-\beta)\sin\beta$

$=\frac{3}{5}\times\frac{12}{13}-\frac{4}{5}\times\left(-\frac{5}{13}\right)=\frac{56}{65}$.

又 $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$，$\therefore \sin\alpha=\sqrt{1-\cos^2\alpha}=\frac{33}{65}$.

3.1.2 两角和与差的正弦

基础知识点对点

1. D　$\sin15^\circ\cos75^\circ-\sin75^\circ\cos15^\circ=\sin(15^\circ-75^\circ)=\sin(-60^\circ)=-\frac{\sqrt{3}}{2}$，故选 D.

2. 0

解析：原式 $=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta+\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta-2\sin\alpha\cos\beta=0$.

3. D　$\because \alpha,\beta$ 为锐角，$\therefore \sin\alpha=\sqrt{1-\cos^2\alpha}=\frac{3}{5}$，$\sin(\alpha+\beta)=\sqrt{1-\cos^2(\alpha+\beta)}=\frac{12}{13}$，$\therefore \sin\beta=\sin(\alpha+\beta-\alpha)=\sin(\alpha+\beta)\cos\alpha-\cos(\alpha+\beta)\sin\alpha=\frac{12}{13}\times\frac{4}{5}-\frac{5}{13}\times\frac{3}{5}=\frac{33}{65}$. 故选 D.

4. **解**：$\because \sin\alpha=\frac{4\sqrt{3}}{7}$，且 α 为锐角，

$\therefore \cos\alpha=\sqrt{1-\sin^2\alpha}=\sqrt{1-\left(\frac{4\sqrt{3}}{7}\right)^2}=\frac{1}{7}$.

$\because \cos(\alpha+\beta)=-\frac{11}{14}$，且 α,β 均为锐角，

$\therefore \sin(\alpha+\beta)=\sqrt{1-\cos^2(\alpha+\beta)}=\sqrt{1-\left(-\frac{11}{14}\right)^2}=\frac{5\sqrt{3}}{14}$.

$\therefore \sin\beta=\sin[(\alpha+\beta)-\alpha]=\sin(\alpha+\beta)\cos\alpha-\cos(\alpha+\beta)\sin\alpha=\frac{5\sqrt{3}}{14}\times\frac{1}{7}-\left(-\frac{11}{14}\right)\times\frac{4\sqrt{3}}{7}=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

5. B　$\cos\alpha+\sqrt{3}\sin\alpha=2\left(\frac{1}{2}\cos\alpha+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\alpha\right)=2\left(\sin\frac{\pi}{6}\cos\alpha+\cos\frac{\pi}{6}\sin\alpha\right)=2\sin\left(\frac{\pi}{6}+\alpha\right)=\frac{1}{2}$，故选 B.

6. **解**：$\because \cos\left(\alpha-\frac{\pi}{6}\right)+\sin\alpha=\frac{4\sqrt{3}}{5}$，$\therefore \frac{3}{2}\sin\alpha+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\alpha=\frac{4\sqrt{3}}{5}$，$\therefore \sin\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{4}{5}$.

$\therefore \sin\left(\alpha+\frac{7\pi}{6}\right)=-\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)=-\frac{4}{5}$.

课后拔高提能练

1. C　$\sin72^\circ\cos18^\circ+\cos72^\circ\sin18^\circ=\sin(72^\circ+18^\circ)=\sin90^\circ=1$.

2. A　由题意得 $\sin\alpha=-\frac{4}{5}$，$\cos\alpha=-\frac{3}{5}$，

$\therefore \sin\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)=\sin\alpha\cos\frac{\pi}{4}+\cos\alpha\sin\frac{\pi}{4}=-\frac{4}{5}\times\frac{\sqrt{2}}{2}+\left(-\frac{3}{5}\right)\times\frac{\sqrt{2}}{2}=-\frac{7\sqrt{2}}{10}$.

3. A　$f(x)=\frac{1}{5}\cdot\sin x\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{5}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x+\cos x\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\sin x=\frac{6}{10}\sin x+\frac{6\sqrt{3}}{10}\cos x=\frac{6}{5}\left(\frac{1}{2}\sin x+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x\right)=\frac{6}{5}\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$，$\therefore f(x)$ 的最大值为 $\frac{6}{5}$. 故选 A.

4. D　$b=\sin85^\circ-\sqrt{3}\cos85^\circ=2\left(\frac{1}{2}\sin85^\circ-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos85^\circ\right)=2\sin(85^\circ-60^\circ)=2\sin25^\circ$，$c=2(\sin47^\circ\sin66^\circ-\sin24^\circ\sin43^\circ)=2(\sin47^\circ\cos24^\circ-\cos47^\circ\sin24^\circ)=2\sin(47^\circ-24^\circ)=2\sin23^\circ$，因为函数 $y=\sin x$ 在 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 上是增函数，所以 $b>a>c$.

故选 D.

5. D　$f(x)=2\left(\frac{1}{2}\sin x-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x\right)$

$=2\left(\sin x\cos\frac{\pi}{3}-\cos x\sin\frac{\pi}{3}\right)=2\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)$.

$\because x\in[-\pi,0]$，$\therefore -\frac{4\pi}{3}\leqslant x-\frac{\pi}{3}\leqslant-\frac{\pi}{3}$，

$\therefore$ 当 $-\frac{\pi}{2}\leqslant x-\frac{\pi}{3}\leqslant-\frac{\pi}{3}$，即 $x\in\left[-\frac{\pi}{6},0\right]$ 时，$f(x)$ 单调递增. 故选 D.

6. C　$\sin(A-B)\cos B+\cos(A-B)\sin B=\sin(A-B+B)=\sin A\geqslant1$，

$\therefore \sin A=1$，又 A 为 $\triangle ABC$ 的内角，

$\therefore A=90^\circ$，$\therefore \triangle ABC$ 为直角三角形.

7. $-\frac{1}{2}$

解析：由 $\sin\alpha+\cos\beta=1$，两边平方得 $\sin^2\alpha+2\sin\alpha\cos\beta+\cos^2\beta=1$，①

由 $\cos\alpha+\sin\beta=0$，两边平方得 $\cos^2\alpha+2\cos\alpha\sin\beta+\sin^2\beta=0$，②

①+②可得 $2+2(\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta)=1$，所以 $\sin(\alpha+\beta)=-\frac{1}{2}$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

8. $\frac{7}{25}$

解析：∵ $\cos\alpha=\frac{3}{5}$，$\cos(\alpha-\beta)=\frac{4}{5}$，又 α,β 均为锐角，则 $\sin\alpha=\frac{4}{5}$，若 $\sin(\alpha-\beta)=\frac{3}{5}$，$\sin\beta=\sin[\alpha-(\alpha-\beta)]=\sin\alpha\cos(\alpha-\beta)-\cos\alpha\sin(\alpha-\beta)=\frac{7}{25}$；若 $\sin(\alpha-\beta)=-\frac{3}{5}$，$\sin\beta=1$(舍).

9. $[2,+\infty)$

解析：∵ $f(x)=\sqrt{3}\sin3x+\cos3x=2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin3x+\frac{1}{2}\cos3x\right)=2\sin\left(3x+\frac{\pi}{6}\right)$，由 $|f(x)|\leqslant a$ 知 $a\geqslant2$.

10. **解：**(1) 原式 $=\sin(x+26°)\cos(19°-x)+\cos(x+26°)\sin(19°-x)=\sin(x+26°+19°-x)=\sin45°=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

(2) 原式 $=\sin\frac{7\pi}{18}\cos\frac{2\pi}{9}-\cos\frac{7\pi}{18}\sin\frac{2\pi}{9}=\sin\left(\frac{7\pi}{18}-\frac{2\pi}{9}\right)=\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}$.

(3) 原式 $=\frac{\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta-2\cos\alpha\sin\beta}{2\cos\alpha\cos\beta-\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta}=\frac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos(\alpha-\beta)}=\tan(\alpha-\beta)$.

11. **解：** $f(x)=\sin x-\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=\sin x-\sin x\cos\frac{\pi}{3}-\cos x\sin\frac{\pi}{3}=\sin x-\frac{1}{2}\sin x-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x=\frac{1}{2}\sin x-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x=\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)$.

(1) $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{3}\right)=\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}$.

(2) 由 $-\frac{\pi}{2}+2k\pi\leqslant x-\frac{\pi}{3}\leqslant\frac{\pi}{2}+2k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$.

∴ $-\frac{\pi}{6}+2k\pi\leqslant x\leqslant\frac{5\pi}{6}+2k\pi$，

∴ $f(x)$ 的单调增区间为 $\left[-\frac{\pi}{6}+2k\pi,\frac{5\pi}{6}+2k\pi\right]$，$k\in\mathbf{Z}$.

12. **解：**(1) $f(x)=\sin2x+\cos\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)=\sin2x+\left(\cos2x\cdot\cos\frac{\pi}{6}+\sin2x\cdot\sin\frac{\pi}{6}\right)=\frac{3}{2}\sin2x+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos2x=\sqrt{3}\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$，故 $f(x)$ 的最大值为 $\sqrt{3}$.

(2) 设把 $y=f(x)$ 的图象向左平移 t 个单位可得到 $y=g(x)$ 图象，

则 $y=\sqrt{3}\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$ ∴ $y=\sqrt{3}\sin\left[2(x+t)+\frac{\pi}{6}\right]=\sqrt{3}\sin\left(2x+2t+\frac{\pi}{6}\right)$，

据题意得 $2x+2t+\frac{\pi}{6}=2k\pi+2x-\frac{\pi}{4}$，∴ $t=k\pi-\frac{5\pi}{24}$ $(k\in\mathbf{Z})$，

使 $k\pi-\frac{5\pi}{24}$ $(k\in\mathbf{Z})$ 为最小正数，则 $k=1$，∴ $t=\frac{19\pi}{24}$，

即至少向左平移 $\frac{19\pi}{24}$ 个单位.

3.1.3　两角和与差的正切

基础知识点对点

1. C　$(1+\tan18°)(1+\tan27°)=1+\tan18°+\tan27°+\tan18°\tan27°=1+\tan(18°+27°)(1-\tan18°\tan27°)+\tan18°\tan27°=2$. 故选 C.

2. 1

解析： $\frac{\sqrt{3}\tan15°+1}{\sqrt{3}-\tan15°}=\frac{\tan15°+\frac{\sqrt{3}}{3}}{1-\frac{\sqrt{3}}{3}\tan15°}=\frac{\tan15°+\tan30°}{1-\tan30°\tan15°}=\tan45°=1$.

3. C　$\tan\left(\alpha-\frac{\pi}{6}\right)=\tan\left[(\alpha-\beta)-\left(\frac{\pi}{6}-\beta\right)\right]=\frac{\tan(\alpha-\beta)-\tan\left(\frac{\pi}{6}-\beta\right)}{1+\tan(\alpha-\beta)\tan\left(\alpha-\frac{\pi}{6}\right)}=\frac{\frac{2}{3}-\frac{1}{2}}{1+\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}}=\frac{1}{8}$. 故选 C.

4. C　∵ $\cos B=\frac{3}{5}$，∴ $\sin B=\frac{4}{5}>\frac{5}{13}$，∴ $0<A<B<\frac{\pi}{2}$，∴ $\cos A=\frac{12}{13}$，∴ $\tan A=\frac{5}{12}$，$\tan B=\frac{4}{3}$，∴ $\tan C=-\tan(A+B)=-\frac{\tan A+\tan B}{1-\tan A\tan B}=-\frac{63}{16}$，故选 C.

5. **证明：**(1) 左边 $=\frac{\tan A+\tan B}{1-\tan A\tan B}(1-\tan A\tan B)+\tan C=\tan(A+B)(1-\tan A\tan B)+\tan C=\tan(\pi-C)(1-\tan A\tan B)+\tan C=-\tan C+\tan A\tan B\tan C+\tan C=\tan A\cdot\tan B\cdot\tan C=$右边.

(2) 左边 $=\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}+\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}+\tan\frac{C}{2}\tan\frac{A}{2}=\tan\frac{B}{2}\left(\tan\frac{A}{2}+\tan\frac{C}{2}\right)+\tan\frac{A}{2}\tan\frac{C}{2}=\tan\frac{B}{2}\left(\frac{\tan\frac{A}{2}+\tan\frac{C}{2}}{1-\tan\frac{A}{2}\tan\frac{C}{2}}\right)\left(1-\tan\frac{A}{2}\tan\frac{C}{2}\right)+\tan\frac{A}{2}\tan\frac{C}{2}=\tan\frac{B}{2}\cot\frac{B}{2}\left(1-\tan\frac{A}{2}\tan\frac{C}{2}\right)+\tan\frac{A}{2}\tan\frac{C}{2}=1$(定值).

课后拔高提能练

1. D　$\tan70°+\tan50°-\sqrt{3}\tan70°\tan50°=\tan120°(1-\tan70°\tan50°)-\sqrt{3}\tan70°\tan15°=-\sqrt{3}$. 故选 D.

2. A　∵ $\alpha\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$，$\cos\alpha=-\frac{4}{5}$，∴ $\sin\alpha=\frac{3}{5}$，∴ $\tan\alpha=-\frac{3}{4}$. ∴ $\tan\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\tan\alpha+1}{1-\tan\alpha}=\frac{-\frac{3}{4}+1}{1+\frac{3}{4}}=\frac{1}{7}$. 故选 A.

3. C　$(1-\tan A)(1-\tan B)=1+\tan A\tan B-(\tan A+\tan B)=1+\tan A\tan B-\tan(A+B)(1-\tan A\tan B)=1+\tan A\tan B-\tan135°(1-\tan A\tan B)=2$. 故选 C.

4. A　由 $\tan\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)=\frac{1-\tan\alpha}{1+\tan\alpha}=3$，

得 $\tan\alpha=-\frac{1}{2}$，所以 $\cot\alpha=-2$. 故选 A.

5. A　由于 $\tan A$，$\tan B$ 是 $3x^2+8x-1=0$ 的两根，

得 $\begin{cases}\tan A+\tan B=-\frac{8}{3},\\ \tan A\cdot\tan B=-\frac{1}{3},\end{cases}$

∴ $\tan(A+B)=\frac{\tan A+\tan B}{1-\tan A\tan B}=\frac{-\frac{8}{3}}{1-\left(-\frac{1}{3}\right)}=-2$.

∴ $\tan C=-\tan(A+B)=2$. 故选 A.

6. D　∵ x 是第三象限角，

∴ $2k\pi+\pi<x<2k\pi+\frac{3}{2}\pi$ $(k\in\mathbf{Z})$，

∴ $2k\pi+\frac{5}{4}\pi<x+\frac{\pi}{4}<2k\pi+\frac{7}{4}\pi$ $(k\in\mathbf{Z})$，

又 $\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{3}{5}$，∴ $\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{4}{5}$，

$\tan\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)}{\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)}=\frac{4}{3}$.

又 $\frac{1+\tan x}{1-\tan x}=\tan\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{4}{3}$，故选 D.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

7. $\frac{3}{2}$

解析：$\tan\left(\alpha-\frac{5\pi}{4}\right)=\frac{\tan\alpha-\tan\frac{5\pi}{4}}{1+\tan\alpha\cdot\tan\frac{5\pi}{4}}=\frac{\tan\alpha-1}{1+\tan\alpha}=\frac{1}{5}$，

解方程得 $\tan\alpha=\frac{3}{2}$.

8. $\frac{7}{5}$

解析：$\tan\alpha=\tan\left(\alpha-\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4}\right)$

$=\frac{\tan\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)+\tan\frac{\pi}{4}}{1-\tan\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)\tan\frac{\pi}{4}}$

$=\frac{\frac{1}{6}+1}{1-\frac{1}{6}}=\frac{7}{5}$.

9. $\frac{1}{3}$

解析：$\because\angle C=120^\circ$，$\therefore A+B=60^\circ$，

$\tan(A+B)=\frac{\tan A+\tan B}{1-\tan A\tan B}=\sqrt{3}$，

$\therefore\tan A+\tan B=\sqrt{3}(1-\tan A\tan B)=\frac{2\sqrt{3}}{3}$，

$\therefore 1-\tan A\tan B=\frac{2}{3}$，$\therefore\tan A\tan B=\frac{1}{3}$.

10. **解**：$\because\tan\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)=-\frac{1}{2}$，

$\therefore\frac{1+\tan\alpha}{1-\tan\alpha}=-\frac{1}{2}$，

得 $\tan\alpha=-3$.

$\therefore\frac{2\cos\alpha(\sin\alpha-\cos\alpha)}{1+\tan\alpha}=\frac{2\cos^2\alpha(\tan\alpha-1)}{1+\tan\alpha}$

$=\frac{2\cos^2\alpha(-3-1)}{-3+1}=4\cos^2\alpha$

$=\frac{4\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}=\frac{4}{\tan^2\alpha+1}$

$=\frac{4}{(-3)^2+1}=\frac{2}{5}$.

11. **解**：(1)证明：$\because\sin(A+B)=\frac{3}{5}$，$\sin(A-B)=\frac{1}{5}$.

$\therefore\begin{cases}\sin A\cos B+\cos A\sin B=\frac{3}{5},\\ \sin A\cos B-\cos A\sin B=\frac{1}{5},\end{cases}$

$\therefore\begin{cases}\sin A\cos B=\frac{2}{5},\\ \cos A\sin B=\frac{1}{5},\end{cases}$

$\therefore\frac{\tan A}{\tan B}=2$，

即 $\tan A=2\tan B$.

(2)$\because\frac{\pi}{2}<A+B<\pi$，$\sin(A+B)=\frac{3}{5}$，

$\therefore\cos(A+B)=-\frac{4}{5}$，$\tan(A+B)=-\frac{3}{4}$.

即 $\frac{\tan A+\tan B}{1-\tan A\tan B}=-\frac{3}{4}$.

将 $\tan A=2\tan B$ 代入得 $2\tan^2B-4\tan B-1=0$，

得 $\tan B=\frac{2\pm\sqrt{6}}{2}$，舍去负值得 $\tan B=\frac{2+\sqrt{6}}{2}$.

$\therefore\tan A=2\tan B=2+\sqrt{6}$. 设 AB 边上的高为 CD，

则 $AB=AD+DB=\frac{CD}{\tan A}+\frac{CD}{\tan B}=\frac{3CD}{2+\sqrt{6}}$，

由 $AB=3$，得 $CD=2+\sqrt{6}$. 所以 AB 边上的高等于 $2+\sqrt{6}$.

12. **解**：(1)由题可得 $\begin{cases}\tan\alpha+\tan\beta=\frac{5}{6},\\ \tan\alpha\cdot\tan\beta=\frac{1}{6}.\end{cases}$

$\therefore\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}=\frac{\frac{5}{6}}{1-\frac{1}{6}}=1$.

(2)$\because 0<\alpha<\frac{\pi}{2}$，$\pi<\beta<\frac{3\pi}{2}$，

$\therefore\pi<\alpha+\beta<2\pi$，

由 $\tan(\alpha+\beta)=1$，$\therefore\alpha+\beta=\frac{5\pi}{4}$.

3.2 倍角公式和半角公式

3.2.1 倍角公式

基础知识点对点

1. B $\frac{1}{2}\sin15^\circ\cos15^\circ=\sin30^\circ=\frac{1}{2}$，故选 B.

2. $\frac{1}{2}$

解析：原式 $=\frac{1-\cos\left(2\alpha-\frac{\pi}{3}\right)}{2}+\frac{1-\cos\left(2\alpha+\frac{\pi}{3}\right)}{2}-\frac{1-\cos2\alpha}{2}=1-\cos2\alpha\cos\frac{\pi}{3}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos2\alpha=\frac{1}{2}$.

3. C 由 $\sin x+\cos x=\frac{3\sqrt{2}}{5}$，得 $(\sin x+\cos x)^2=\frac{18}{25}$，即 $1+2\sin x\cos x=\frac{18}{25}$，$\therefore\sin2x=-\frac{7}{25}$，故选 C.

4. C $\because\cos\alpha=\frac{1}{3}$，$\alpha\in(0,\pi)$，$\therefore\sin\alpha=\frac{2\sqrt{2}}{3}$，

$\therefore\cos\left(\frac{3\pi}{2}+2\alpha\right)=\sin2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha=2\times\frac{1}{3}\times\frac{2\sqrt{2}}{3}=\frac{4\sqrt{2}}{9}$，故选 C.

5. **证明**：原式等价于 $1+\sin4\theta-\cos4\theta=\frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}(1+\sin4\theta+\cos4\theta)$，

即证 $1+\sin4\theta-\cos4\theta=\tan2\theta(1+\sin4\theta+\cos4\theta)$，

而上式右边 $=\tan2\theta(1+\sin4\theta+\cos4\theta)=\frac{\sin2\theta}{\cos2\theta}(2\cos^22\theta+2\sin2\theta\cos2\theta)=\sin4\theta+1-\cos4\theta=$左边，

$\therefore$原式成立，

即 $\frac{1+\sin4\theta-\cos4\theta}{2\tan\theta}=\frac{1+\sin4\theta+\cos4\theta}{1-\tan^2\theta}$.

6. **解**：(1) $f(x)=\frac{1-\cos2x}{2}+\sin2x+\frac{3(1+\cos2x)}{2}=2+\sin2x+\cos2x=2+\sqrt{2}\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)$，

当 $2x+\frac{\pi}{4}=2k\pi+\frac{\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$，

即 $x=k\pi+\frac{\pi}{8}(k\in\mathbf{Z})$时，$f(x)$取得最大值 $2+\sqrt{2}$.

所以函数 $f(x)$取得最大值时自变量 x 的集合为 $\left\{x\middle|x=k\pi+\frac{\pi}{8}(k\in\mathbf{Z})\right\}$.

(2)函数 $f(x)=2+\sqrt{2}\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)$的单调增区间满足：

$2k\pi-\frac{\pi}{2}\leqslant2x+\frac{\pi}{4}\leqslant2k\pi+\frac{\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$，

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

即 $k\pi-\frac{3}{8}\pi\leqslant x\leqslant k\pi+\frac{\pi}{8}(k\in\mathbf{Z})$.

所以函数 $f(x)$的单调增区间为$\left[k\pi-\frac{3}{8}\pi,k\pi+\frac{\pi}{8}\right](k\in\mathbf{Z})$.

课后拔高提能练

1. C　∵ α 是第二象限角，且 $\tan\alpha=-\frac{1}{3}$，∴ $\cos\alpha=-\sqrt{\frac{1}{1+\tan^2\alpha}}=-\frac{3\sqrt{10}}{10}$，$\sin\alpha=\frac{\sqrt{10}}{10}$，∴ $\sin2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha=2\times\frac{\sqrt{10}}{10}\times\left(-\frac{3\sqrt{10}}{10}\right)=-\frac{3}{5}$. 故选 C.

2. A　由 $\sin\alpha-\cos\alpha=\frac{4}{3}$，得 $(\sin\alpha-\cos\alpha)^2=\frac{16}{9}$，∴ $1-2\sin\alpha\cos\alpha=\frac{16}{9}$，∴ $\sin2\alpha=-\frac{7}{9}$，故选 A.

3. C　由题可得 $\cos\alpha=\sqrt{1-\sin^2\alpha}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$，$\cos(\alpha-\beta)=\sqrt{1-\frac{1}{10}}=\frac{3\sqrt{10}}{10}$，∴ $\sin\beta=\sin[\alpha-(\alpha-\beta)]=\sin\alpha\cos(\alpha-\beta)-\cos\alpha\sin(\alpha-\beta)=\frac{\sqrt{5}}{5}\times\frac{3\sqrt{10}}{10}-\frac{2\sqrt{5}}{5}\times\left(-\frac{\sqrt{10}}{10}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

∴ $\cos2\beta=1-2\sin^2\beta=1-2\times\frac{1}{2}=0$. 故选 C.

4. B　$\cos2\alpha=1-2\sin^2\alpha=1-\frac{2}{9}=\frac{7}{9}$.

故选 B.

5. C　由已知得 $f(x)$的定义域为$\left\{x\middle|x\neq k\pi+\frac{\pi}{2},k\in\mathbf{Z}\right\}$且

$$f(x)=\frac{\tan x}{1+\tan^2x}=\frac{\cos x}{1+\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)^2}=\sin x\cos x=\frac{1}{2}\sin2x,$$

$f(x)$的最小正周期 $T=\frac{2\pi}{2}=\pi$，故选 C.

6. B　根据题目条件，可知 O,A,B 三点共线，从而得到 $b=2a$，因为 $\cos2\alpha=2\cos^2\alpha-1=2\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{a^2+1}}\right)^2-1=\frac{2}{3}$，解得 $a^2=\frac{1}{5}$，即 $|a|=\frac{\sqrt{5}}{5}$，所以 $|a-b|=|a-2a|=\frac{\sqrt{5}}{5}$，故选 B.

7. $\sqrt{3}$

解析：∵ $\sin2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha=-\sin\alpha$，

∴ $\cos\alpha=-\frac{1}{2}$，又 $\alpha\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$，

∴ $\sin\alpha=\frac{\sqrt{3}}{2}$，$\tan\alpha=-\sqrt{3}$，

$$\tan2\alpha=\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}=\frac{-2\sqrt{3}}{1-3}=\sqrt{3}.$$

8. -1

解析：由 $\frac{1}{2}\cos2\alpha=\sin\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)$，得 $\frac{1}{2}\sin\left(\frac{\pi}{2}+2\alpha\right)=\sin\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)$，$\sin\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)\left[\cos\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)-1\right]=0$.

∴ $\sin\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)=0$ 或 $\cos\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)=1$. ∵ $\alpha\in(0,\pi)$，

∴ $\sin\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)=0$，∴ $\alpha=\frac{3\pi}{4}$，∴ $\sin2\alpha=\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right)=-1$.

9. $\frac{17\sqrt{2}}{50}$

解析：∵ α 为锐角，$\frac{\pi}{6}<\alpha+\frac{\pi}{6}<\frac{2\pi}{3}$，

∴ $\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{3}{5}$，

∴ $\sin\left(2\alpha+\frac{\pi}{3}\right)=2\times\frac{4}{5}\times\frac{3}{5}=\frac{24}{25}$，

又 $\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{4}{5}$，$\frac{4}{5}\in\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$，

∴ $\frac{\pi}{6}<\alpha+\frac{\pi}{6}<\frac{\pi}{4}$，∴ $\frac{\pi}{3}<2\alpha+\frac{\pi}{3}<\frac{\pi}{2}$，

∴ $\cos\left(2\alpha+\frac{\pi}{3}\right)=\frac{7}{25}$.

∴ $\sin\left(2\alpha+\frac{\pi}{12}\right)=\sin\left[\left(2\alpha+\frac{\pi}{3}\right)-\frac{\pi}{4}\right]=\frac{17\sqrt{2}}{50}$.

10. **解：**(1) ∵ $\tan\theta=2$，∴ $\tan\left(\frac{\pi}{4}-\theta\right)=\frac{\tan\frac{\pi}{4}-\tan\theta}{1+\tan\frac{\pi}{4}\tan\theta}=\frac{1-2}{1+2}=-\frac{1}{3}$.

(2) ∵ $\tan\theta=2$，∴ $\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=2$，∴ $\sin\theta=2\cos\theta$.

又 $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$，

所以 $\cos^2\theta=\frac{1}{5}$，

∴ $\cos2\theta=2\cos^2\theta-1=-\frac{3}{5}$.

11. **解：**(1) $\overrightarrow{AC}=(\cos\alpha-3,\sin\alpha)$，$\overrightarrow{BC}=(\cos\alpha,\sin\alpha-3)$.

∵ $|\overrightarrow{AC}|=|\overrightarrow{BC}|$，∴ $|\overrightarrow{AC}|^2=|\overrightarrow{BC}|^2$，

即 $(\cos\alpha-3)^2+\sin^2\alpha=\cos^2\alpha+(\sin\alpha-3)^2$，

化简得 $\sin\alpha=\cos\alpha$. ∵ $\frac{\pi}{2}<\alpha<\frac{3\pi}{2}$，∴ $\alpha=\frac{5\pi}{4}$.

(2) $-1=\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BC}=\cos\alpha(\cos\alpha-3)+\sin\alpha(\sin\alpha-3)=1-3(\sin\alpha+\cos\alpha)$，∴ $\sin\alpha+\cos\alpha=\frac{2}{3}$.

于是 $2\sin\alpha\cos\alpha=(\sin\alpha+\cos\alpha)^2-1=-\frac{5}{9}$.

故 $\frac{2\sin^2\alpha+\sin2\alpha}{1+\tan\alpha}=\frac{2\sin\alpha(\sin\alpha+\cos\alpha)}{\frac{\cos\alpha+\sin\alpha}{\cos\alpha}}=2\sin\alpha\cos\alpha=-\frac{5}{9}$.

12. **解：**(1) $f(x)=\cos^2x-\sin^2x-\sin2x=\cos2x-\sin2x=\sqrt{2}\cos\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)$.

∴ $T=\pi$.

(2) ∵ $0\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2}$，∴ $\frac{\pi}{4}\leqslant2x+\frac{\pi}{4}\leqslant\frac{5\pi}{4}$，

∴ $-1\leqslant\cos\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)\leqslant\frac{\sqrt{2}}{2}$，

∴ $f(x)\in[-\sqrt{2},1]$，

∴ $f(x)$在区间$\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$上最大值为 1，最小值为 $-\sqrt{2}$.

3.2.2　半角的正弦、余弦和正切

基础知识点对点

1. (1)×　(2)√　(3)×　(4)√

解析：(1) 错误. 只有当 $-\frac{\pi}{2}+2k\pi\leqslant\frac{\alpha}{2}\leqslant\frac{\pi}{2}+2k\pi$ $(k\in\mathbf{Z})$，即 $-\pi+4k\pi\leqslant\alpha\leqslant\pi+4k\pi(k\in\mathbf{Z})$ 时，$\cos\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}$.

(2) 正确. 当 $\cos\alpha=-\sqrt{3}+1$ 时，上式成立，但一般情况下不成立.

(3) 错误. 当 $\alpha=2k\pi(k\in\mathbf{Z})$ 时，上式成立，但一般情况下不成立.

(4) 正确. 若 α 是第一象限角，则 $\frac{\alpha}{2}$ 是第一、三象限角，此时 $\tan\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}$ 成立.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

2. D $\sqrt{1+\sin10^\circ}+\sqrt{1-\sin10^\circ}=\sqrt{(\sin5^\circ+\cos5^\circ)^2}+\sqrt{(\sin5^\circ-\cos5^\circ)^2}=\sin5^\circ+\cos5^\circ+\cos5^\circ-\sin5^\circ=2\cos5^\circ$. 故选 D.

3. B 原式 $=\dfrac{2\sin2\alpha\cos2\alpha+2\sin^2 2\alpha}{2\sin2\alpha\cos2\alpha+2\cos^2 2\alpha}=\dfrac{2\sin2\alpha(\sin2\alpha+\cos2\alpha)}{2\cos2\alpha(\sin2\alpha+\cos2\alpha)}=\tan2\alpha$. 故选 B.

4. C 由 $\sin\alpha:\sin\dfrac{\alpha}{2}=3:2$，$\therefore\dfrac{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}=\dfrac{3}{2}$，

$\therefore\cos\dfrac{\alpha}{2}=\dfrac{3}{4}$，$\therefore\sin\dfrac{\alpha}{2}=\dfrac{\sqrt{7}}{4}$，$\therefore\tan\dfrac{\alpha}{2}=\dfrac{\sqrt{7}}{3}$，故选 C.

5. D 解法一：$f(x)=\cos^2\left(\dfrac{\pi}{4}+x\right)-\sin^2\left[\dfrac{\pi}{2}-\left(\dfrac{\pi}{4}-x\right)\right]$

$=\cos^2\left(\dfrac{\pi}{4}+x\right)-\sin^2\left(\dfrac{\pi}{4}+x\right)=\cos\left(\dfrac{\pi}{2}+2x\right)$

$=-\sin2x$，

$\therefore f\left(\dfrac{\pi}{12}\right)=-\sin\dfrac{\pi}{6}=-\dfrac{1}{2}$，故选 D.

解法二：$f\left(\dfrac{\pi}{12}\right)=\cos^2\dfrac{\pi}{3}-\cos^2\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{1}{4}-\dfrac{3}{4}=-\dfrac{1}{2}$.

课后拔高提能练

1. D $\because270^\circ<\alpha<360^\circ$，$\therefore135^\circ<\dfrac{\alpha}{2}<180^\circ$，$\therefore\cos\dfrac{\alpha}{2}<0$.

故 $\cos\dfrac{\alpha}{2}=-\sqrt{\dfrac{1+\cos\alpha}{2}}=-\sqrt{\dfrac{1+\frac{2}{3}}{2}}=-\sqrt{\dfrac{5}{6}}=-\dfrac{\sqrt{30}}{6}$.

故选 D.

2. A $y=\cos\left(2x+\dfrac{\pi}{2}\right)=-\sin2x$，$\therefore T=\pi$ 且为奇函数. 故选 A.

3. D 由题意知：$a=\sin28^\circ$，$b=\tan28^\circ$，$c=\sin25^\circ$，$\therefore c<a<b$. 故选 D.

4. C 由 $(2\cos x-\sin x)(\sin x+\cos x+3)=0$ 得 $2\cos x-\sin x=0$，

$\therefore\tan x=2$，$\dfrac{2\cos^2 x+\sin2x}{1+\tan x}=\dfrac{2\cos x(\cos x+\sin x)}{1+\frac{\sin x}{\cos x}}=2\cos^2 x=2\dfrac{1}{1+\tan^2 x}=2\times\dfrac{1}{1+4}=\dfrac{2}{5}$. 故选 C.

5. D $\dfrac{3-\sin70^\circ}{1+\sin^2 10^\circ}=\dfrac{3-\cos20^\circ}{1+\frac{1-\cos20^\circ}{2}}=\dfrac{3-\cos20^\circ}{\frac{3-\cos20^\circ}{2}}=2$. 故选 D.

6. D $\tan\alpha+\dfrac{1}{\tan\alpha}=\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}+\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}=\dfrac{1}{\sin\alpha\cos\alpha}=\dfrac{2}{\sin2\alpha}=\dfrac{2}{\frac{2}{3}}=3$，

故选 D.

7. 2

解析：由 $\sin\dfrac{\alpha}{2}-\cos\dfrac{\alpha}{2}=-\dfrac{\sqrt{5}}{5}$，

$\therefore\left(\sin\dfrac{\alpha}{2}-\cos\dfrac{\alpha}{2}\right)^2=\left(-\dfrac{\sqrt{5}}{5}\right)^2$，

得 $\sin\alpha=\dfrac{4}{5}$.

又 $450^\circ<\alpha<540^\circ$，$\therefore\cos\alpha=-\dfrac{3}{5}$.

$\therefore\tan\dfrac{\alpha}{2}=\dfrac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}=\dfrac{\frac{4}{5}}{1-\frac{3}{5}}=2$.

8. $-\dfrac{3}{5}$

解析：$\because\tan\alpha=2$，$\therefore\cos^2\alpha=\dfrac{1}{1+\tan^2\alpha}=\dfrac{1}{5}$，$\sin\left(\dfrac{2\,017\pi}{2}-2\alpha\right)=\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-2\alpha\right)=\cos2\alpha=2\cos^2\alpha-1=2\times\dfrac{1}{5}-1=-\dfrac{3}{5}$.

9. $\tan\dfrac{x}{2}$

解析：$\dfrac{\sin4x}{1+\cos4x}\cdot\dfrac{\cos2x}{1+\cos2x}\cdot\dfrac{\cos x}{1+\cos x}$

$=\tan2x\cdot\dfrac{\cos2x}{1+\cos2x}\cdot\dfrac{\cos x}{1+\cos x}$

$=\dfrac{\sin2x}{1+\cos2x}\cdot\dfrac{\cos x}{1+\cos x}=\tan x\cdot\dfrac{\cos x}{1+\cos x}$

$=\tan\dfrac{x}{2}$.

10. **解：**原式 $=\dfrac{[(1+\cos\alpha)+\sin\alpha]\left(\cos\frac{\alpha}{2}-\sin\frac{\alpha}{2}\right)}{\sqrt{2(1+\cos\alpha)}}$

$=\dfrac{\left(2\cos^2\frac{\alpha}{2}+2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}\right)\left(\cos\frac{\alpha}{2}-\sin\frac{\alpha}{2}\right)}{\sqrt{2\times2\cos^2\frac{\alpha}{2}}}$

$=\dfrac{2\cos\frac{\alpha}{2}\left(\cos^2\frac{\alpha}{2}-\sin^2\frac{\alpha}{2}\right)}{2\sqrt{\cos^2\frac{\alpha}{2}}}$，

$\because0<\alpha<\pi$，$\therefore0<\dfrac{\alpha}{2}<\dfrac{\pi}{2}$，$\cos\dfrac{\alpha}{2}>0$，原式 $=\dfrac{2\cos\frac{\alpha}{2}\cos\alpha}{2\cos\frac{\alpha}{2}}=\cos\alpha$.

11. **解：**解法一：(1)由 $\sin x+\cos x=\dfrac{1}{5}$，

平方得 $\sin^2 x+2\sin x\cos x+\cos^2 x=\dfrac{1}{25}$，

即 $2\sin x\cos x=-\dfrac{24}{25}$.

$\because(\sin x-\cos x)^2=1-2\sin x\cos x=\dfrac{49}{25}$.

又 $\because-\dfrac{\pi}{2}<x<0$，

$\therefore\sin x<0$，$\cos x>0$，$\sin x-\cos x<0$，

故 $\sin x-\cos x=-\dfrac{7}{5}$.

(2)$\dfrac{3\sin^2\frac{x}{2}-2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}}{\tan x+\cot x}$

$=\dfrac{2\sin^2\frac{x}{2}-\sin x+1}{\frac{\sin x}{\cos x}+\frac{\cos x}{\sin x}}$

$=\sin x\cos x(2-\cos x-\sin x)$

$=\left(-\dfrac{12}{25}\right)\times\left(2-\dfrac{1}{5}\right)=-\dfrac{108}{125}$.

解法二：(1)联立方程

$\begin{cases}\sin x+\cos x=\dfrac{1}{5}, & ①\\ \sin^2 x+\cos^2 x=1. & ②\end{cases}$

由①得 $\sin x=\dfrac{1}{5}-\cos x$，将其代入②，

整理得 $25\cos^2 x-5\cos x-12=0$，

$\therefore\cos x=-\dfrac{3}{5}$ 或 $\cos x=\dfrac{4}{5}$.

$\because-\dfrac{\pi}{2}<x<0$，$\therefore\begin{cases}\sin x=-\dfrac{3}{5},\\ \cos x=\dfrac{4}{5}.\end{cases}$

故 $\sin x-\cos x=-\dfrac{7}{5}$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

(2) $\dfrac{3\sin^2\frac{x}{2}-2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}}{\tan x+\cot x}$

$=\dfrac{2\sin^2\frac{x}{2}-\sin x+1}{\frac{\sin x}{\cos x}+\frac{\cos x}{\sin x}}$

$=\sin x\cos x(2-\cos x-\sin x)$

$=\left(-\frac{3}{5}\right)\times\frac{4}{5}\times\left(2-\frac{4}{5}+\frac{3}{5}\right)=-\frac{108}{125}$.

12. **解**：(1) $f(x)=\cos^2\frac{x}{2}-\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}-\frac{1}{2}=\frac{1+\cos x}{2}-\frac{1}{2}\sin x-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\cos x-\frac{1}{2}\sin x=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cos x-\frac{\sqrt{2}}{2}\sin x\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$.

∴ $f(x)$的最小正周期为 π，值域为 $\left[-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right]$.

(2) $f(x)=\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{3\sqrt{2}}{10}$，∴ $\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{3}{5}$.

$\sin 2x=-\cos\left(\frac{\pi}{2}+2x\right)=-\left[2\cos^2\left(x+\frac{\pi}{4}\right)-1\right]=-2\times\frac{9}{25}+1=\frac{7}{25}$.

3.3　三角函数的积化和差与和差化积

基础知识点对点

1. B　$\sin 105^\circ\cos 75^\circ=\frac{1}{2}(\sin 180^\circ+\sin 30^\circ)=\frac{1}{4}$. 故选 B.

2. $-\frac{1}{4}$

解析：$y=\cos 2x\cos\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)$

$=\frac{1}{2}\left[\cos\left(4x-\frac{\pi}{3}\right)+\cos\frac{\pi}{3}\right]$

$=\frac{1}{2}\cos\left(4x-\frac{\pi}{3}\right)+\frac{1}{4}$,

∴ $y_{\min}=-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=-\frac{1}{4}$.

3. B　$\sin 75^\circ-\sin 15^\circ=2\cos\frac{75^\circ+15^\circ}{2}\sin\frac{75^\circ-15^\circ}{2}=2\times\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}$. 故选 B.

4. $-\sqrt{3}$

解析：$\frac{\sin 20^\circ-\sin 40^\circ}{\cos 20^\circ-\cos 40^\circ}=\frac{2\cos 30^\circ\sin(-10^\circ)}{-2\sin 30^\circ\sin(-10^\circ)}=-\sqrt{3}$.

课后拔高提能练

1. D　由两角和与差的正、余弦公式展开左边可知 A，B，C 正确. 故选 D.

2. C　$\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)$

$=\frac{1}{2}(\cos 2\alpha+\cos 2\beta)$

$=\frac{1}{2}[(2\cos^2\alpha-1)+(1-2\sin^2\beta)]$

$=\cos^2\alpha-\sin^2\beta$,

∴ $\cos^2\alpha-\sin^2\beta=\frac{1}{3}$. 故选 C.

3. C　原式 $=\dfrac{2\sin 30^\circ\cos 20^\circ}{-\frac{1}{2}(\cos 90^\circ-\cos 20^\circ)}=\dfrac{\cos 20^\circ}{\frac{1}{2}\cos 20^\circ}=2$. 故选 C.

4. C　由 $\cos\alpha-\cos\beta=\frac{1}{3}$，得 $-2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\sin\frac{\alpha-\beta}{2}=\frac{1}{3}$，

即 $\sin\frac{\alpha+\beta}{2}=-\frac{1}{3}$，

∴ $\cos(\alpha+\beta)=1-2\sin^2\frac{\alpha+\beta}{2}=1-2\times\left(-\frac{1}{3}\right)^2=\frac{7}{9}$. 故选 C.

5. A　$\sin 70^\circ\cos 20^\circ-\sin 10^\circ\sin 50^\circ=\frac{1}{2}(\sin 90^\circ+\sin 50^\circ)+\frac{1}{2}(\cos 60^\circ-\cos 40^\circ)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sin 50^\circ+\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\sin 50^\circ=\frac{3}{4}$. 故选 A.

6. A　∵ $\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$，　①

$\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$，　②

①÷②得 $\tan\frac{\alpha+\beta}{2}=\frac{\frac{12}{13}}{\frac{6}{13}}=2$.

7. $\left[-\frac{1}{4},\frac{3}{4}\right]$

解析：$\cos A\cdot\sin C=\frac{1}{2}[\sin(A+C)-\sin(A-C)]=\frac{1}{2}\sin B-\frac{1}{2}\sin(A-C)=-\frac{1}{2}\sin(A-C)+\frac{1}{2}\sin B$. ∵ $\frac{1}{2}\sin(A-C)\in\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$，∴ $-\frac{1}{2}\sin(A-C)+\frac{1}{2}\sin B\in\left[-\frac{1}{4},\frac{3}{4}\right]$.

8. $-m$

解析：$\sin(\alpha+\beta)\cdot\sin(\alpha-\beta)=-\frac{1}{2}(\cos 2\alpha-\cos 2\beta)$

$=-\frac{1}{2}[(2\cos^2\alpha-1)-(2\cos^2\beta-1)]$

$=\cos^2\beta-\cos^2\alpha=-m$.

9. $\sqrt{3}$

解析：$\frac{1}{\tan 10^\circ}-4\cos 10^\circ=\frac{\cos 10^\circ-2\sin 20^\circ}{\sin 10^\circ}=\frac{\cos 10^\circ-2\sin(30^\circ-10^\circ)}{\sin 10^\circ}=\frac{2\cos 30^\circ\sin 10^\circ}{\sin 10^\circ}=\sqrt{3}$.

10. **解**：原式 $=\frac{1}{2}(1-\cos 40^\circ)+\frac{1}{2}(1+\cos 160^\circ)+\sqrt{3}\sin 20^\circ\cos 80^\circ=1+\frac{\cos 160^\circ-\cos 40^\circ}{2}+\sqrt{3}\sin 20^\circ\cos 80^\circ$

$=1+\frac{-2\sin 100^\circ\sin 60^\circ}{2}+\sqrt{3}\times\frac{1}{2}(\sin 100^\circ-\sin 60^\circ)$

$=1-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 100^\circ+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 100^\circ-\frac{3}{4}$

$=\frac{1}{4}$.

11. **解**：由题设条件知 $B=60^\circ$，$A+C=120^\circ$，

∵ $\frac{-\sqrt{2}}{\cos 60^\circ}=-2\sqrt{2}$，∴ $\frac{1}{\cos A}+\frac{1}{\cos C}=-2\sqrt{2}$，

∴ $\cos A+\cos C=-2\sqrt{2}\cos A\cos C$.

利用和差化积及积化和差公式得

$2\cos\frac{A+C}{2}\cos\frac{A-C}{2}=-\sqrt{2}[\cos(A+C)+\cos(A-C)]$，

∴ $\cos\frac{A-C}{2}=-\sqrt{2}\left(-\frac{1}{2}+2\cos^2\frac{A-C}{2}-1\right)$，化简得

$4\sqrt{2}\cos^2\frac{A-C}{2}+2\cos\frac{A-C}{2}-3\sqrt{2}=0$，

即 $\left(2\cos\frac{A-C}{2}-\sqrt{2}\right)\left(2\sqrt{2}\cos\frac{A-C}{2}+3\right)=0$，

∵ $2\sqrt{2}\cos\frac{A-C}{2}+3\neq 0$，∴ $\cos\frac{A-C}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

12. **解**：(1) $f(x)=(1-\tan x)(1+\sin 2x+\cos 2x)-3$
$=2\cos^2 x-2\sin^2 x-3$
$=2\cos 2x-3$，
∴定义域为 $\left\{x\middle|x\in\mathbf{R}\text{，且 }x\neq k\pi+\frac{\pi}{2},k\in\mathbf{Z}\right\}$，$T=\pi$，$f(x)\in(-5,-1]$.
(2) $f\left(\frac{\alpha}{2}\right)-f\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{6},\alpha\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$.
$\therefore 2\cos 2\left(\frac{\alpha}{2}\right)-3-\left[2\cos 2\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\pi}{4}\right)-3\right]=\sqrt{6}$，
$2\cos\alpha-3-\left[2\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right)-3\right]=\sqrt{6}$，
$2\cos\alpha-3-(-2\sin\alpha-3)=\sqrt{6}$，
$2\sin\alpha+2\cos\alpha=\sqrt{6}$，$\sin\alpha+\cos\alpha=\frac{\sqrt{6}}{2}$，
$\sqrt{2}\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{6}}{2}$，$\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2},\alpha\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$.
$\therefore\alpha+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{3}$或$\frac{2\pi}{3}$，$\therefore\alpha=\frac{\pi}{12}$或$\frac{5\pi}{12}$.

章末检测

1. D $\left(\cos\frac{\pi}{12}-\sin\frac{\pi}{12}\right)\left(\cos\frac{\pi}{12}+\sin\frac{\pi}{12}\right)=\cos^2\frac{\pi}{12}-\sin^2\frac{\pi}{12}=\cos\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，故选 D.

2. C 由题意得 $\tan\alpha=-2$，所以 $\tan\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\tan\frac{\pi}{4}+\tan\alpha}{1-\tan\alpha\tan\frac{\pi}{4}}=\frac{1+(-2)}{1-(-2)}=-\frac{1}{3}$.

3. A $2\tan\alpha\cdot\sin\alpha=3$，$\therefore 2\sin^2\alpha=3\cos\alpha$，$\therefore 2\cos^2\alpha+3\cos\alpha-2=0$，$\therefore(2\cos\alpha-1)(\cos\alpha+2)=0$，$\therefore\cos\alpha=\frac{1}{2}$. $\because-\frac{\pi}{2}<\alpha<0$，$\therefore\alpha=-\frac{\pi}{3}$. $\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{6}\right)=\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)=0$. 故选 A.

4. A 因为 $f(x)=\cos x-\sin x=\sqrt{2}\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$，
所以由 $2k\pi\leqslant\pi+\frac{\pi}{4}\leqslant\pi+2k\pi(k\in\mathbf{Z})$，得$-\frac{\pi}{4}+2k\pi\leqslant x\leqslant\frac{3\pi}{4}+2k\pi(k\in\mathbf{Z})$，
$\because[-a,a]\subseteq\left[-\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4}\right]$，$\therefore -a<a$，$-a\geqslant-\frac{\pi}{4}$，$a\leqslant\frac{3\pi}{4}$，
$\therefore 0<a\leqslant\frac{\pi}{4}$，$\therefore a$ 的最大值为$\frac{\pi}{4}$，故选 A.

5. B 若 $\alpha+\beta=45°$，$(1+\tan\alpha)(1+\tan\beta)=1+\tan\alpha\tan\beta+\tan\alpha+\tan\beta=1+\tan\alpha\tan\beta+\tan(\alpha+\beta)(1-\tan\alpha\cdot\tan\beta)=2$. 令 $T=(1+\tan1°)(1+\tan2°)\cdots(1+\tan45°)$ 则 $T^2=[(1+\tan1°)\cdot(1+\tan2°)\cdots(1+\tan45°)]^2=(1+\tan1°)(1+\tan44°)\cdot(1+\tan2°)(1+\tan43°)\cdots(1+\tan45°)(1+\tan45°)=2^{46}$.
$\therefore T=2^{23}$，故选 B.

6. A $\because f(x)=\frac{\sqrt{2}}{2}\sin2x+\frac{\sqrt{6}}{2}\cos2x$
$=\sqrt{2}\left(\frac{1}{2}\sin2x+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos2x\right)=\sqrt{2}\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$，
$\therefore g(x)=\sqrt{2}\sin\left[2\left(x-\frac{\pi}{4}\right)+\frac{\pi}{3}\right]$
$=\sqrt{2}\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)$，$\therefore g\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{6}}{2}$.

7. B $f(x)=\sqrt{3}\sin x\cos x+\cos^2x-\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}\sin2x+\frac{1+\cos2x}{2}-\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}\sin2x+\frac{1}{2}\cos2x=\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$，则 $g(x)=\sin\left[2\left(x+\frac{5\pi}{12}\right)+\frac{\pi}{6}\right]=\sin(2x+\pi)=-\sin2x$，$\because-\frac{\pi}{12}\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{3}$，$\therefore-\frac{\pi}{6}\leqslant2x\leqslant\frac{2\pi}{3}$，$-\frac{1}{2}\leqslant\sin2x\leqslant1$，$\therefore-1\leqslant-\sin2x\leqslant\frac{1}{2}$. 故 $g(x)$ 的值域为$\left[-1,\frac{1}{2}\right]$，故选 B.

8. A 因为 α 是第三象限角，$\cos\alpha=-\frac{4}{5}$，所以 $\sin\alpha=-\frac{3}{5}$，
$\frac{1+\tan\frac{\alpha}{2}}{1-\tan\frac{\alpha}{2}}=\frac{1+\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}}{1-\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}}=\frac{\frac{1+\cos\alpha+\sin\alpha}{1+\cos\alpha}}{\frac{1+\cos\alpha-\sin\alpha}{1+\cos\alpha}}=\frac{1+\cos\alpha+\sin\alpha}{1+\cos\alpha-\sin\alpha}=\frac{1-\frac{4}{5}-\frac{3}{5}}{1-\frac{4}{5}+\frac{3}{5}}=\frac{-\frac{2}{5}}{\frac{4}{5}}=-\frac{1}{2}$.

9. $\frac{7}{8}$
解析：$\frac{\cos2\alpha}{\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)}=\frac{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}{\sin\alpha\cos\frac{\pi}{4}+\cos\alpha\sin\frac{\pi}{4}}=\sqrt{2}(\cos\alpha-\sin\alpha)=\frac{1}{2}$，即 $\cos\alpha-\sin\alpha=\frac{\sqrt{2}}{4}$，等式两边分别平方得 $\cos^2\alpha-2\sin\alpha\cos\alpha+\sin^2\alpha=1-\sin2\alpha=\frac{1}{8}$，解得 $\sin2\alpha=\frac{7}{8}$.

10. $\frac{2\sqrt{5}}{25}$
解析：$\because\alpha,\beta$ 都是锐角，$0<\alpha<\alpha+\beta<\pi$，
$\therefore\cos\alpha>\cos(\alpha+\beta)$，
$\therefore\sin\alpha=\sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{5}}{5}\right)^2}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$，$\cos(\alpha+\beta)=\pm\frac{4}{5}$，
$\because\frac{4}{5}>\frac{\sqrt{5}}{5}>-\frac{4}{5}$，$\therefore\cos(\alpha+\beta)=-\frac{4}{5}$.
$\therefore\cos\beta=\cos[(\alpha+\beta)-\alpha]$
$=\cos(\alpha+\beta)\cos\alpha+\sin(\alpha+\beta)\sin\alpha$
$=-\frac{4}{5}\times\frac{\sqrt{5}}{5}+\frac{2\sqrt{5}}{5}\times\frac{3}{5}=\frac{2\sqrt{5}}{25}$.

11. ②③④
解析：①错误：$\begin{cases}\sin\alpha\cos\beta=-\frac{1}{3}\cdots\cdots⑤\\ \text{设 }\cos\alpha\sin\beta=t\cdots\cdots⑥\end{cases}$，⑤+⑥且⑤−⑥⇒
$\begin{cases}\sin(\alpha+\beta)=-\frac{1}{3}+t\in[-1,1]\Rightarrow t\in\left[-\frac{2}{3},\frac{4}{3}\right]\\ \sin(\alpha-\beta)=-\frac{1}{3}-t\in[-1,1]\Rightarrow t\in\left[-\frac{4}{3},\frac{2}{3}\right]\end{cases}\Rightarrow$
$t\in\left[-\frac{2}{3},\frac{2}{3}\right]$；
② 正确：$\begin{cases}\cos\alpha-2\cos\beta=2\cdots\cdots⑦\\ \text{设 }\sin\alpha+2\sin\beta=t\cdots\cdots⑧\end{cases}$，⑦^2 + ⑧^2 ⇒
$\cos(\alpha+\beta)=\frac{1-t^2}{4}\in[-1,1]\Rightarrow t\in[-\sqrt{5},\sqrt{5}]$；
③正确：一心(0,0)，一轴 $x=1$⇒周期 $T=4$；
④正确：**R** 上的奇函数，半周必为零点.

12. **解**：(1) $f(x)$ 的最大值是 1，$\therefore A=1$，将 $M\left(\frac{\pi}{3},\frac{1}{2}\right)$ 代入，得 $\frac{1}{2}=\sin\left(\frac{\pi}{3}+\varphi\right)$，$\because0<\varphi<\pi$，$\therefore\frac{\pi}{3}+\varphi=\frac{5\pi}{6}$，$\therefore\varphi=\frac{\pi}{2}$. 故 $f(x)=\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=\cos x$.
(2) $f(\alpha)=\cos\alpha=\frac{3}{5}$，$f(\beta)=\cos\beta=\frac{12}{13}$，$\therefore\sin\alpha=\frac{4}{5}$，$\sin\beta=\frac{5}{13}$，$f(\alpha-\beta)=\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta=\frac{3}{5}\times\frac{12}{13}+\frac{4}{5}\times\frac{5}{13}=\frac{56}{65}$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

13. **解**：(1) ∵ $f(x)=\sin x+1$，∴ $f(x)$ 在 $\left[-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2}\right]$ 上为增函数，在 $\left[\frac{\pi}{2},\frac{2\pi}{3}\right]$ 上为减函数，

又 $f\left(-\frac{\pi}{6}\right)<f\left(\frac{2\pi}{3}\right)$，

∴当 $x=-\frac{\pi}{6}$ 时，$f(x)$ 在 $\left[-\frac{\pi}{6},\frac{2\pi}{3}\right]$ 上有最小值 $f\left(-\frac{\pi}{6}\right)=\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)+1=\frac{1}{2}$；

当 $x=\frac{\pi}{2}$ 时，$f(x)$ 在 $\left[-\frac{\pi}{6},\frac{2\pi}{3}\right]$ 上有最大值 $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\sin\frac{\pi}{2}+1=2$.

(2) 由题知 A,B 为锐角，∴ $\sin A=\frac{24}{25}$，$\sin B=\frac{4}{5}$，

$\sin C=\sin(A+B)=\sin A\cos B+\cos A\sin B=\frac{24}{25}\times\frac{3}{5}+\frac{7}{25}\times\frac{4}{5}=\frac{4}{5}$，

∴ $f(C)=\sin C+1=\frac{9}{5}$.

14. **解**：因为 $\sin\frac{\alpha}{2}-\cos\frac{\alpha}{2}=\frac{\sqrt{10}}{5}$，所以 $1-\sin\alpha=\left(\frac{\sqrt{10}}{5}\right)^2=\frac{2}{5}$，所以 $\sin\alpha=\frac{3}{5}$.

又因为 $\alpha\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$，所以 $\cos\alpha=-\frac{4}{5}$，$\tan\alpha=-\frac{3}{4}$.

由 $\tan(\pi-\beta)=\frac{1}{2}$，得 $\tan\beta=-\frac{1}{2}$，所以 $\tan2\beta=\frac{2\tan\beta}{1-\tan^2\beta}=-\frac{4}{3}$.

所以 $\tan(\alpha-2\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan2\beta}{1+\tan\alpha\cdot\tan2\beta}=\frac{7}{24}$.

第二部分　阶段检测

阶段测试一

1. D　$120^\circ=\frac{2\pi}{3}$，∴弧长为 $\frac{2\pi^2}{3}$，故选 D.

2. D　由 $\cos\alpha>0$，则 α 在第一、四象限，由 $\sin\alpha<0$，则 α 在第三、四象限，∴α 在第四象限，故选 D.

3. B　$y=\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)$ 的最小正周期为 π，当 $x=\frac{\pi}{3}$ 时，$y=\sin\left(2\times\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{6}\right)=\sin\frac{\pi}{2}=1$. ∴ $x=\frac{\pi}{3}$ 是对称轴，故选 B.

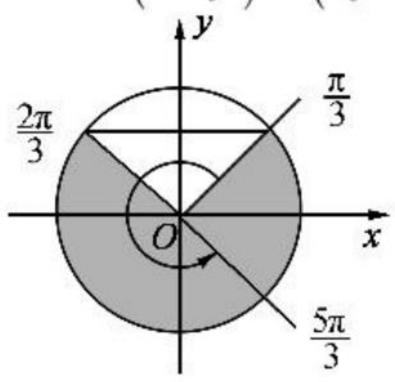
4. A　易知 $A=2$，由 $\frac{2\pi}{\omega}=8$，得 $\omega=\frac{\pi}{4}$，∴ $f(x)=2\sin\frac{\pi x}{4}$，

又由对称性知，原式 $=f(1)=2\sin\frac{\pi}{4}=\sqrt{2}$，故选 A.

5. B　① $\sin100^\circ>0$；② $\cos(-100^\circ)=\cos100^\circ<0$；③$\tan(-100^\circ)=-\tan100^\circ>0$；④ ∵ $\sin\frac{7\pi}{10}>0$，$\cos\pi=-1$，$\tan\frac{17\pi}{9}<0$，∴ $\frac{\sin\frac{7\pi}{10}\cos\pi}{\tan\frac{17\pi}{9}}>0$. 其中符号为负的是②，故选 B.

6. B　$\cos(-80^\circ)=k$，$k>0$，∴ $\cos80^\circ=k$，∴ $\sin80^\circ=\sqrt{1-k^2}$，$\tan100^\circ=\tan(180^\circ-80^\circ)=-\tan80^\circ=-\frac{\sqrt{1-k^2}}{k}$，故选 B.

7. D　如图所示，满足 $\sin\alpha<\frac{\sqrt{3}}{2}$ 的角 α 为 $\left(0,\frac{\pi}{3}\right)\cup\left(\frac{2\pi}{3},2\pi\right)$，满足 $\cos\alpha>\frac{1}{2}$ 的角 α 为 $\left(0,\frac{\pi}{3}\right)\cup\left(\frac{5\pi}{3},2\pi\right)$，所以符合条件的角 α 为 $\left(0,\frac{\pi}{3}\right)\cup\left(\frac{5\pi}{3},2\pi\right)$，故选 D.



8. B　原式 $=\frac{\cos\alpha(2\sin\alpha-1)}{1-\cos^2\alpha+\sin^2\alpha-\sin\alpha}=\frac{\cos\alpha(2\sin\alpha-1)}{2\sin^2\alpha-\sin\alpha}=\frac{\cos\alpha(2\sin\alpha-1)}{\sin\alpha(2\sin\alpha-1)}=\frac{1}{\tan\alpha}$. 故选 B.

9. C　由 $\frac{2\pi}{\omega}=\frac{\pi}{2}$，∴ $\omega=4$.

10. C　$y=\sin x$ 的图象上所有点向右平移 $\frac{\pi}{10}$ 个单位长度，得 $y=\sin\left(x-\frac{\pi}{10}\right)$，将 $y=\sin\left(x-\frac{\pi}{10}\right)$ 的图象各点的横坐标伸长到原来的 2 倍，得 $y=\sin\left(\frac{1}{2}x-\frac{\pi}{10}\right)$，故选 C.

11. D　由题意得 $\begin{cases}A+m=4,\\-A+m=0,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}A=2,\\m=2.\end{cases}$ 由题可知周期 $T=\frac{\pi}{2}$，由 $T=\frac{2\pi}{\omega}=\frac{\pi}{2}$ 得 $\omega=4$，于是函数 $f(x)=2\sin(4x+\varphi)+2$. 又由题可知 $x=\frac{\pi}{12}$ 是函数的对称轴，故 $4\times\frac{\pi}{12}+\varphi=k\pi+\frac{\pi}{2}$，则 $\varphi=k\pi+\frac{\pi}{6}$（$k\in\mathbf{Z}$），又因为 $f(\pi)<f\left(\frac{\pi}{4}\right)$，验证选项 A、D，可得选项 D 正确.

12. C　由图象可知，$A=2$，$T=\left(\frac{7\pi}{12}-\frac{\pi}{3}\right)\times4=\pi$，∴ $\omega=2$，当 $x=\frac{7\pi}{12}$ 时，$2\times\frac{7\pi}{12}+\varphi=\frac{3\pi}{2}$，∴ $\varphi=\frac{\pi}{3}$，∴ $f(x)=2\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$，故①正确；$f(0)=2\sin\frac{\pi}{3}=\sqrt{3}$，故③不正确，故选 C.

13. m

解析：$\cos\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)=\sin\left[\frac{\pi}{2}-\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)\right]=\sin\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)=m$.

14. $\left[-\frac{3}{2},3\right]$

解析：由题可知，$f(x)$ 与 $g(x)$ 的周期相同，∴ $T=\frac{2\pi}{2}=\pi$，∴ $\omega=2$，则 $f(x)=3\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)$，当 $0\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2}$ 时，$-\frac{\pi}{6}\leqslant2x-\frac{\pi}{6}\leqslant\frac{5\pi}{6}$，∴ $-\frac{3}{2}\leqslant f(x)\leqslant3$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

15. $\left[-\frac{1}{2},1\right]$

解析：∵ $2k\pi-\frac{\pi}{6}\leqslant x\leqslant 2k\pi+\frac{2\pi}{3}$，$k\in\mathbf{Z}$. ∴ $-\frac{1}{2}\leqslant\cos x\leqslant 1$. ∴ $f(x)$的定义域为$\left[-\frac{1}{2},1\right]$.

16. ①②③

解析：由 $T=\frac{2\pi}{\omega}=\frac{2\pi}{2}=\pi$，①正确；$A=4$，②正确. 当 $x=\frac{\pi}{12}$时，$f(x)=4\sin\left(2\times\frac{\pi}{12}+\frac{\pi}{3}\right)=4$，∴$x=\frac{\pi}{12}$是 $f(x)$的一条对称轴，③正确.

17. **解**：(1)∵角 α 终边上一点 $P(-4,3)$，

∴$x=-4$，$y=3$，$r=|OP|=5$，$\sin\alpha=\frac{y}{r}=\frac{3}{5}$，$\cos\alpha=\frac{x}{r}=-\frac{4}{5}$，

$$\therefore\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)\sin(-\pi-\alpha)}{\cos\left(\frac{11\pi}{2}-\alpha\right)\sin\left(\frac{9\pi}{2}+\alpha\right)}=\frac{-\sin\alpha\sin\alpha}{\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)}$$

$$=\frac{-\sin\alpha\sin\alpha}{-\sin\alpha\cos\alpha}=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=-\frac{3}{4}.$$

(2)当 k 为偶数时，

原式$=\frac{(-\sin\alpha)(-\cos\alpha)}{(-\sin\alpha)\cos\alpha}=-1$；

当 k 为奇数时，

原式$=\frac{\sin\alpha\cos\alpha}{\sin\alpha(-\cos\alpha)}=-1$，

∴原式$=-1$.

18. **解**：(1)由图可知 $A=\frac{1}{2}(4+2)=3$，$c=\frac{1}{2}(4-2)=1$，

$\frac{3}{4}T=12-4$，∴$T=\frac{32}{3}$，又 $T=\frac{2\pi}{\omega}$，

∴$\omega=\frac{3\pi}{16}$，$y=3\sin\left(\frac{3\pi}{16}x+\varphi\right)+1$.

把(12,4)代入得 $4=3\sin\left(\frac{3\pi}{16}\cdot 12+\varphi\right)+1$，

∴$\sin\left(\frac{9\pi}{4}+\varphi\right)=1$，又 $0<\varphi<\frac{\pi}{2}$，∴$\frac{9\pi}{4}+\varphi\in\left(\frac{9\pi}{4},\frac{11\pi}{4}\right)$，∴$\frac{9\pi}{4}+\varphi=\frac{10\pi}{4}$，$\varphi=\frac{\pi}{4}$，

故 $y=3\sin\left(\frac{3\pi}{16}x+\frac{\pi}{4}\right)+1$.

(2)令$-\frac{\pi}{2}+2k\pi\leqslant\frac{3\pi}{16}x+\frac{\pi}{4}\leqslant\frac{\pi}{2}+2k\pi$，得$-4+\frac{32k}{3}\leqslant x\leqslant\frac{4}{3}+\frac{32k}{3}$，$k\in\mathbf{Z}$，

故此函数的单调递增区间是$\left[-4+\frac{32k}{3},\frac{4}{3}+\frac{32k}{3}\right]$，$k\in\mathbf{Z}$，

令$\frac{3\pi}{16}x+\frac{\pi}{4}=k\pi$，则 $x=\frac{16k}{3}-\frac{4}{3}$，故此函数的对称中心为$\left(\frac{16k}{3}-\frac{4}{3},1\right)$，$k\in\mathbf{Z}$.

19. **解**：(1)已知 α 是一个三角形的内角，∴$0<\alpha<\pi$，$\sin\alpha>0$.

由 $\sin\alpha+\cos\alpha=\frac{1}{5}$，得 $1+2\sin\alpha\cos\alpha=\frac{1}{25}$，

∴$2\sin\alpha\cos\alpha=-\frac{24}{25}$，∴$\cos\alpha<0$，

∴$(\sin\alpha-\cos\alpha)^2=1-2\sin\alpha\cos\alpha=\frac{49}{25}$，

∴$\sin\alpha-\cos\alpha=\frac{7}{5}$. ∴$\sin\alpha=\frac{4}{5}$，$\cos\alpha=-\frac{3}{5}$，

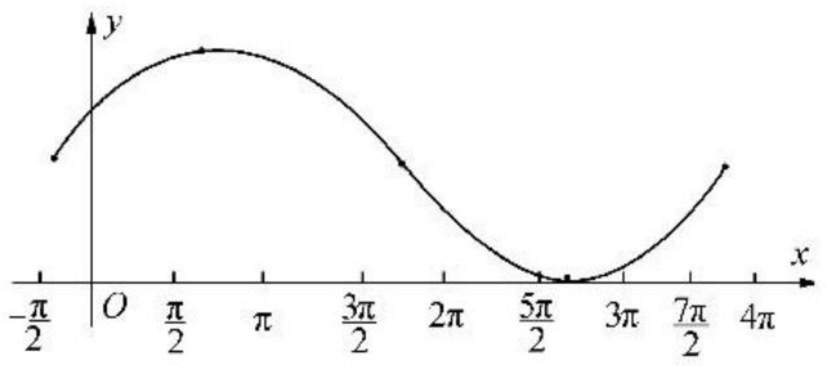
∴$\tan\alpha=-\frac{4}{3}$.

(2) $\frac{1}{\sin^2\alpha-\cos^2\alpha}=\frac{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha-\cos^2\alpha}=\frac{\tan^2\alpha+1}{\tan^2\alpha-1}=\frac{\left(-\frac{4}{3}\right)^2+1}{\left(-\frac{4}{3}\right)^2-1}=\frac{25}{7}$.

∴$\frac{1}{\sin^2\alpha-\cos^2\alpha}=\frac{25}{7}$.

20. **解**：(1)列表

x	$-\frac{\pi}{3}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{8\pi}{3}$	$\frac{11\pi}{3}$
$\frac{x}{2}+\frac{\pi}{6}$	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
y	3	6	3	0	3



(2)周期 $T=4\pi$，振幅 $A=3$，初相 $\varphi=\frac{\pi}{6}$，由 $\frac{x}{2}+\frac{\pi}{6}=k\pi+\frac{\pi}{2}$，得 $x=2k\pi+\frac{2\pi}{3}$($k\in\mathbf{Z}$)即为对称轴方程.

(3)①由 $y=\sin x$ 的图象上各点向左平移 $\varphi=\frac{\pi}{6}$个长度单位，得 $y=\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$的图象；

②由 $y=\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$的图象上各点的横坐标伸长为原来的 2 倍(纵坐标不变)，得 $y=\sin\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{6}\right)$的图象；

③由 $y=\sin\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{6}\right)$的图象上各点的纵坐标伸长为原来的 3 倍(横坐标不变)，得 $y=3\sin\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{6}\right)$的图象；

④由 $y=3\sin\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{6}\right)$的图象上各点向上平移 3 个长度单位，得 $y=3\sin\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{6}\right)+3$ 的图象.

21. **解**：(1)依题意知，$2\times\frac{7\pi}{6}\omega+\frac{\pi}{3}=\frac{3\pi}{2}\Rightarrow\omega=\frac{1}{2}$.

(2)由(1)知 $f(x)=\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)+\frac{\sqrt{3}}{2}+a$，

又当 $x\in\left[-\frac{\pi}{3},\frac{5\pi}{6}\right]$时，$x+\frac{\pi}{3}\in\left[0,\frac{7\pi}{6}\right]$，

故$-\frac{1}{2}\leqslant\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\leqslant 1$，

从而 $f(x)$在$\left[-\frac{\pi}{3},\frac{5\pi}{6}\right]$上取最小值$-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}+a$.

因此$-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}+a=\sqrt{3}$，解得 $a=\frac{\sqrt{3}+1}{2}$.

22. **解**：(1)由题意知 $\cos\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)>0$，

∴$2k\pi-\frac{\pi}{2}<2x-\frac{\pi}{3}<2k\pi+\frac{\pi}{2}$($k\in\mathbf{Z}$).

即 $k\pi-\frac{\pi}{12}<x<k\pi+\frac{5\pi}{12}$($k\in\mathbf{Z}$).

故定义域为$\left(k\pi-\frac{\pi}{12},k\pi+\frac{5\pi}{12}\right)$($k\in\mathbf{Z}$).

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

(2)由 $2k\pi\leqslant 2x-\frac{\pi}{3}\leqslant(2k+1)\pi(k\in\mathbf{Z})$,

得 $k\pi+\frac{\pi}{6}\leqslant x\leqslant k\pi+\frac{2\pi}{3}(k\in\mathbf{Z})$.

即 $\cos\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)$ 的单调减区间为 $\left[k\pi+\frac{\pi}{6},k\pi+\frac{2\pi}{3}\right]$ $(k\in\mathbf{Z})$.

由 $2k\pi-\pi\leqslant 2x-\frac{\pi}{3}\leqslant 2k\pi(k\in\mathbf{Z})$,得 $k\pi-\frac{\pi}{3}\leqslant x\leqslant k\pi+\frac{\pi}{6}(k\in\mathbf{Z})$.

即 $\cos\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)$ 的单调增区间为 $\left[k\pi-\frac{\pi}{3},k\pi+\frac{\pi}{6}\right]$ $(k\in\mathbf{Z})$.

∴函数 $u=\cos\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)$ 在 $\left(k\pi-\frac{\pi}{12},k\pi+\frac{\pi}{6}\right](k\in\mathbf{Z})$ 上是增函数,在 $\left[k\pi+\frac{\pi}{6},k\pi+\frac{5\pi}{12}\right)(k\in\mathbf{Z})$ 上是减函数.

∴当 $a>1$ 时,$f(x)$ 的单调增区间为 $\left(k\pi-\frac{\pi}{12},k\pi+\frac{\pi}{6}\right](k\in\mathbf{Z})$.

单调减区间为 $\left[k\pi+\frac{\pi}{6},k\pi+\frac{5\pi}{12}\right)(k\in\mathbf{Z})$.

当 $0<a<1$ 时,$f(x)$ 的单调增区间为 $\left[k\pi+\frac{\pi}{6},k\pi+\frac{5\pi}{12}\right)(k\in\mathbf{Z})$,单调减区间为 $\left(k\pi-\frac{\pi}{12},k\pi+\frac{\pi}{6}\right](k\in\mathbf{Z})$.

(3)∵$f(x)$ 的定义域不关于原点对称,

∴函数 $f(x)$ 既不是奇函数,也不是偶函数.

(4)∵$f(x+\pi)=\log_a\cos\left[2(x+\pi)-\frac{\pi}{3}\right]=\log_a\cos\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)=f(x)$.

∴函数 $f(x)$ 的周期为 $T=\pi$.

阶段测试二

1. C　$\mu\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(2\mu-1,3\mu+2)$,$\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}=(4,-1)$,

∴$(2\mu-1)\times(-1)=(3\mu+2)\times 4$,

∴$\mu=-\frac{1}{2}$,故选 C.

2. A　$\overrightarrow{AB}=(3,-4)$,$|\overrightarrow{AB}|=5$,∴与 $\overrightarrow{AB}$ 的方向相反的单位向量是 $-\frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|}=-\frac{1}{5}(3,-4)=\left(-\frac{3}{5},\frac{4}{5}\right)$.

3. A　由题意,得 $\cos\angle ABC=\frac{\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{BA}||\overrightarrow{BC}|}=\frac{\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{1}{2}}{1\times 1}=\frac{\sqrt{3}}{2}$,所以 $\angle ABC=30°$,故选 A.

4. B　$\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}=2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$,∵$A,B,D$ 三点共线,∴存在一个实数 λ,使 $\overrightarrow{AB}=\lambda\overrightarrow{BD}$,∴$2\boldsymbol{a}+p\boldsymbol{b}=\lambda(2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})=2\lambda\boldsymbol{a}-\lambda\boldsymbol{b}$,∴$\begin{cases}2=2\lambda,\\ p=-\lambda,\end{cases}$∴$\begin{cases}\lambda=1,\\ p=-1.\end{cases}$

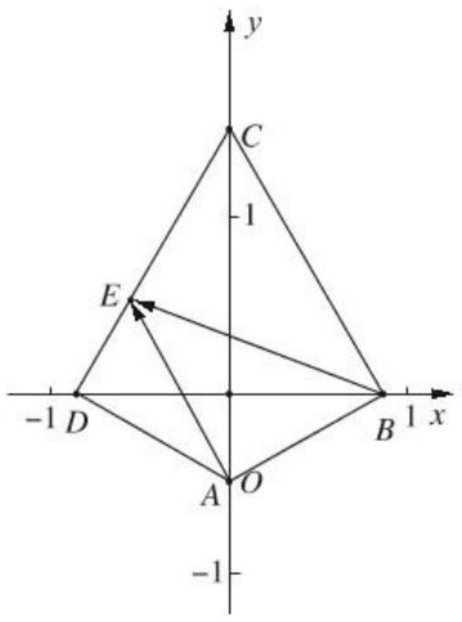
5. C　当 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 至少有一个零向量时,$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$,则 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$,当 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 均为非零向量,若 $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$,则以 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 为邻边的四边形是矩形,∴$\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$,即 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$,故 C 正确.

6. D　由 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$,则 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=3x+3=0$,∴$x=-1$,故选 D.

7. B　由 $\overrightarrow{BD}=\frac{1}{2}\overrightarrow{DC}$,得 $\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AD})$,∴$3\overrightarrow{AD}=2\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$,∴$\overrightarrow{AD}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}=\frac{2}{3}\boldsymbol{a}+\frac{1}{3}\boldsymbol{b}$,故选 B.

8. B　设 $\boldsymbol{b}=(x,y)$,则 $2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(2,2)+(x,y)=(x+2,y+2)$,∴$\begin{cases}x+2=4,\\ y+2=2,\end{cases}$∴$\begin{cases}x=2,\\ y=0,\end{cases}$∴$\boldsymbol{b}=(2,0)$,设 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 的夹角为 θ,∴$\cos\theta=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}=\frac{2}{\sqrt{2}\cdot 2}=\frac{\sqrt{2}}{2}$.∴$\theta=\frac{\pi}{4}$.故选 B.

9. A　建立如图所示的平面直角坐标系,



则 $A\left(0,-\frac{1}{2}\right)$,$B\left(\frac{\sqrt{3}}{2},0\right)$,$C\left(0,\frac{3}{2}\right)$,$D\left(-\frac{\sqrt{3}}{2},0\right)$,由点 E 在 CD 上,则 $\overrightarrow{DE}=\lambda\overrightarrow{DC}(0\leqslant\lambda\leqslant 1)$,设 $E(x,y)$,则 $\left(x+\frac{\sqrt{3}}{2},y\right)=\lambda\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{3}{2}\right)$,即 $\begin{cases}x+\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}\lambda,\\ y=\frac{3}{2}\lambda,\end{cases}$ 据此可得 $E\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\lambda-\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{3}{2}\lambda\right)$,且 $\overrightarrow{AE}=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\lambda-\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{3}{2}\lambda+\frac{1}{2}\right)$,$\overrightarrow{BE}=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\lambda-\sqrt{3},\frac{3}{2}\lambda\right)$,由数量积的坐标运算法则可得 $\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{BE}=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\lambda-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\lambda-\sqrt{3}\right)+\frac{3}{2}\lambda\times\left(\frac{3}{2}\lambda+\frac{1}{2}\right)$,整理可得,$\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{BE}=\frac{3}{4}(4\lambda^2-2\lambda+2)(0\leqslant\lambda\leqslant 1)$,结合二次函数的性质可知,当 $\lambda=\frac{1}{4}$ 时,$\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{BE}$ 取得最小值 $\frac{21}{16}$.故选 A.

10. D　由题意得 $\boldsymbol{\alpha}=-2(1,-1)+2(2,1)=(2,4)$,

设 $(2,4)=m(-1,1)+n(1,2)=(n-m,m+2n)$.

∴$\begin{cases}n-m=2,\\ m+2n=4,\end{cases}$得$\begin{cases}n=2,\\ m=0,\end{cases}$∴选 D.

11. B　由题意知 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}=0$,又 $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AB}+\sqrt{3}\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AB}+\sqrt{3}(\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB})=\sqrt{3}\overrightarrow{AD}+(1-\sqrt{3})\overrightarrow{AB}$,

所以 $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD}=[\sqrt{3}\overrightarrow{AD}+(1-\sqrt{3})\overrightarrow{AB}]\cdot\overrightarrow{AD}=\sqrt{3}|\overrightarrow{AD}|^2+(1-\sqrt{3})\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}=\sqrt{3}|\overrightarrow{AD}|^2=\sqrt{3}$.

12. C　∵D 是 CO 的延长线与 AB 的交点,∴$x<0$,$y<0$,排除选项 A,B;当 A,B,C 三点均匀分布在圆上时,$\overrightarrow{OD}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{OC}=\frac{\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}}{2}$,此时 $x=y=-1$,∴$x+y=-2$,排除 D,故选 C.

13. -3

解析:$\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}=-\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$,由 $\overrightarrow{AB}/\!/\overrightarrow{BD}$,得 $3=-k$,

∴$k=-3$.

14. 2

解析:∵$\boldsymbol{a}\perp(\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b})$,∴$\boldsymbol{a}^2-2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$,

∴$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=5$,又 $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=2\sqrt{6}$,∴$\boldsymbol{a}^2+\boldsymbol{b}^2+2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=24$,

∴$\boldsymbol{b}^2=24-10-10=4$,

∴$(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})^2=\boldsymbol{a}^2-2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}^2=10+4-10=4$,

∴$|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=2$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

15. $\frac{5}{6}$

解析：$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}\cdot(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD})=\overrightarrow{AB}^2+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BD}=1+1\times\frac{1}{3}\times\cos120^\circ=1-\frac{1}{6}=\frac{5}{6}$.

16. $-\frac{4}{3}$

解析：$\because|\overrightarrow{BC}|=2$，$\therefore(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})^2=\overrightarrow{AB}^2+\overrightarrow{AC}^2-2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=4$.

又$\overrightarrow{BD}\cdot\overrightarrow{AC}=\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}\right)\cdot\overrightarrow{AC}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}^2-\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=-\frac{1}{2}$，

$\therefore\overrightarrow{AC}^2-2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=-1$，$\therefore\overrightarrow{AB}^2=5$，$\therefore\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=3$，

$\therefore\overrightarrow{CE}\cdot\overrightarrow{AB}=\left(\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}\right)\cdot\overrightarrow{AB}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}^2-\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\frac{5}{3}-3=-\frac{4}{3}$.

17. **解**：(1)$\boldsymbol{a}\perp(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$，$\therefore\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}=-2+6-2+2m=0$，$\therefore m=-1$，$\therefore\boldsymbol{c}=(-2,-1)$，$\therefore|\boldsymbol{c}|=\sqrt{4+1}=\sqrt{5}$.

(2)$\because k\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$与$2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$共线，$\therefore\frac{k}{2}=\frac{1}{-1}$，$\therefore k=-2$.

18. **解**：(1)$\boldsymbol{c}=3\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}=(11,-6)$ $\therefore\boldsymbol{c}_0=\frac{\boldsymbol{c}}{|\boldsymbol{c}|}=\frac{1}{\sqrt{157}}(11,-6)=\left(\frac{11\sqrt{157}}{157},\frac{-6\sqrt{157}}{157}\right)$.

(2)$\because[x\boldsymbol{a}+(3-x)\boldsymbol{b}]\parallel\boldsymbol{c}$，$\therefore\frac{x}{3}=\frac{3-x}{-2}$，$\therefore x=9$.

19. **解**：(1)设AB边上的高为CE. 设$E(x,y)$，

则$\overrightarrow{CE}=(x,y-4)$，$\overrightarrow{AE}=(x+5,y+1)$，$\overrightarrow{AB}=(9,2)$.

由于$\overrightarrow{CE}\perp\overrightarrow{AB}$，则$9x+2(y-4)=0$. ①

由于$\overrightarrow{AE}$与$\overrightarrow{AB}$共线，则$2(x+5)-9(y+1)=0$. ②

由①②解得$\begin{cases}x=\frac{14}{17},\\y=\frac{5}{17},\end{cases}$

则$\overrightarrow{CE}=\left(\frac{14}{17},-\frac{63}{17}\right)$.

$\therefore S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{CE}|=\frac{1}{2}\sqrt{85}\times\sqrt{\frac{14^2+63^2}{17^2}}=\frac{35}{2}$.

(2)设$D(x,y)$.

$\because\overrightarrow{AD}=(x+5,y+1)$，$\overrightarrow{BC}=(-4,3)$，

又$\because\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}$，$\therefore\begin{cases}x+5=-4,\\y+1=3.\end{cases}\therefore\begin{cases}x=-9,\\y=2.\end{cases}$

$\therefore D(-9,2)$.

20. **解**：$\because M$是BC的中点，

$\therefore\overrightarrow{BM}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})=\frac{1}{2}(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a})$，

$\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BM}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$.

$\because\overrightarrow{DN}\parallel\overrightarrow{BM}$，$\overrightarrow{AN}\parallel\overrightarrow{AM}$，$\therefore$存在实数$\lambda$和$\mu$，使

$\overrightarrow{DN}=\lambda\overrightarrow{BM}=\frac{1}{2}\lambda(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a})$，$\overrightarrow{AN}=\mu\overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}\mu(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$.

又$\because\overrightarrow{AN}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DN}=\frac{1}{4}\boldsymbol{a}+\frac{1}{2}\lambda(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a})=\left(\frac{1}{4}-\frac{\lambda}{2}\right)\boldsymbol{a}+\frac{\lambda}{2}\boldsymbol{b}$，

由基本定理，得$\begin{cases}\frac{1}{4}-\frac{\lambda}{2}=\frac{1}{2}\mu,\\\frac{\lambda}{2}=\frac{1}{2}\mu,\end{cases}$

解得$\lambda=\mu=\frac{1}{4}$. 故$\overrightarrow{DN}=\frac{1}{8}(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a})$.

21. **解**：(1)由于$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$是同一平面内的三个向量，其中$\boldsymbol{a}=(1,2)$，若$|\boldsymbol{c}|=2\sqrt{5}$，且$\boldsymbol{c}\parallel\boldsymbol{a}$，可设$\boldsymbol{c}=\lambda\cdot\boldsymbol{a}=(\lambda,2\lambda)$，则由$|\boldsymbol{c}|=\sqrt{\lambda^2+(2\lambda)^2}=2\sqrt{5}$，可得$\lambda=\pm2$，$\therefore\boldsymbol{c}=(2,4)$，或$\boldsymbol{c}=(-2,-4)$.

(2)$\because|\boldsymbol{b}|=\frac{\sqrt{5}}{2}$，且$\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}$与$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$垂直，$\therefore(\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})=\boldsymbol{a}^2+\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}-2\boldsymbol{b}^2=0$，化简可得$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=-\frac{5}{2}$，即$\sqrt{5}\times\frac{\sqrt{5}}{2}\times\cos\theta=-\frac{5}{2}$，$\therefore\cos\theta=-1$，故$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$的夹角$\theta=\pi$.

22. **解**：(1)$\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BE}=(2\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2)+(-\boldsymbol{e}_1+\lambda\boldsymbol{e}_2)=\boldsymbol{e}_1+(1+\lambda)\boldsymbol{e}_2$.

$\because A,E,C$三点共线，

$\therefore$存在实数k，使得$\overrightarrow{AE}=k\overrightarrow{EC}$，即$\boldsymbol{e}_1+(1+\lambda)\boldsymbol{e}_2=k(-2\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2)$，

得$(1+2k)\boldsymbol{e}_1=(k-1-\lambda)\boldsymbol{e}_2$，

$\because\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2$是平面内两个不共线的非零向量，

$\therefore\begin{cases}1+2k=0,\\\lambda=k-1,\end{cases}$解得$k=-\frac{1}{2}$，$\lambda=-\frac{3}{2}$.

(2)$\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{EC}=-3\boldsymbol{e}_1-\frac{1}{2}\boldsymbol{e}_2=(-6,-3)+(-1,1)=(-7,-2)$.

(3)$\because A,B,C,D$四点按逆时针顺序构成平行四边形，

$\therefore\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}$.

设$A(x,y)$，则$\overrightarrow{AD}=(3-x,5-y)$，

$\because\overrightarrow{BC}=(-7,-2)$，

$\therefore\begin{cases}3-x=-7,\\5-y=-2,\end{cases}$解得$\begin{cases}x=10,\\y=7,\end{cases}$即点$A$的坐标为$(10,7)$.

阶段测试三

1. C　$f(x)=\frac{1}{2}\sin4x$，$\therefore T=\frac{\pi}{2}$，$f(x)$为奇函数，故选C.

2. D　$\because\alpha$为锐角，$\therefore\frac{\pi}{6}<\alpha+\frac{\pi}{6}<\frac{2\pi}{3}$，$\therefore\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)=\sqrt{1-\cos^2\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)}=\frac{\sqrt{5}}{3}$. $\therefore\sin\alpha=\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{6}\right)=\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)\cos\frac{\pi}{6}-\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)\sin\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{5}}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{15}-2}{6}$，故选D.

3. D　$y=\sin^22x-\cos^22x=-\cos4x$，周期$T=\frac{2\pi}{4}=\frac{\pi}{2}$，且为偶函数，故选D.

4. A　依题意$\because x\in(0,\pi)$，$\cos x=\frac{4}{5}$，

$\therefore\sin x=\frac{3}{5}$，$\tan x=\frac{3}{4}$，

$\therefore\tan2x=\frac{2\tan x}{1-\tan^2x}=\frac{24}{7}$. $\therefore\frac{1}{\tan2x}=\frac{7}{24}$.

5. C　由已知得：$4(\tan\alpha-\tan\beta)=16(1+\tan\alpha\tan\beta)$，

即$\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}=4$. $\therefore\tan(\alpha-\beta)=4$. 故选C.

6. A　$\because\alpha,\beta$都是锐角，$\therefore0<\alpha+\beta<\pi$，$\therefore\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cdot\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta=\frac{2\sqrt{5}}{5}\cdot\frac{3\sqrt{10}}{10}-\frac{\sqrt{5}}{5}\cdot\frac{\sqrt{10}}{10}=\frac{\sqrt{2}}{2}$. $\therefore\alpha+\beta=\frac{\pi}{4}$，故选A.

7. A　由$\frac{\sin\alpha\cos\alpha}{\cos2\alpha+1}=1$，得$\sin\alpha\cos\alpha=1+\cos2\alpha=2\cos^2\alpha$，$\therefore\cos\alpha=0$(舍)或$\sin\alpha=2\cos\alpha$，$\therefore\tan\alpha=2$. $\therefore\tan\beta=\tan[\alpha-(\alpha-\beta)]=\frac{\tan\alpha-\tan(\alpha-\beta)}{1+\tan\alpha\tan(\alpha-\beta)}=\frac{2-3}{1+2\times3}=-\frac{1}{7}$. 故选A.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

8. B　$\sin^4\theta+\cos^4\theta=(\sin^2\theta+\cos^2\theta)^2-2\sin^2\theta\cos^2\theta=1-\frac{1}{2}\sin^2 2\theta=1-\frac{1}{2}(1-\cos^2 2\theta)=\frac{11}{18}$. 故选 B.

9. A　$f(x)=(1+\sqrt{3}\tan x)\cos x=\left(1+\sqrt{3}\frac{\sin x}{\cos x}\right)\cos x=\cos x+\sqrt{3}\sin x=2\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)\therefore T=\frac{2\pi}{1}=2\pi$，故选 A.

10. D　$|2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=\sqrt{4\boldsymbol{a}^2-4\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}^2}=\sqrt{4-4(\sqrt{3}\cos\theta-\sin\theta)+4}=\sqrt{8-8\sin\left(\frac{\pi}{3}-\theta\right)}$.

$\therefore|2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|_{\max}=\sqrt{16}=4$，$|2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|_{\min}=0$，故选 D.

11. D　$\because\frac{\pi}{3}<\alpha<\pi$，$\therefore\frac{\pi}{2}<\alpha+\frac{\pi}{6}<\frac{7\pi}{6}$，$\therefore\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)=-\sqrt{1-\sin^2\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)}=-\frac{2\sqrt{2}}{3}$，$\therefore\sin\left(\frac{\pi}{12}-\alpha\right)=\sin\left[\frac{\pi}{4}-\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)\right]=\sin\frac{\pi}{4}\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)-\cos\frac{\pi}{4}\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}\times\left(-\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)-\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{1}{3}=\frac{-4-\sqrt{2}}{6}=-\frac{4+\sqrt{2}}{6}$，故选 D.

12. C　$\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}=\sqrt{3}(\sin A\cos B+\cos A\sin B)=\sqrt{3}\sin(A+B)=1+\cos(A+B)$，

$\therefore 2\sin\left(A+B-\frac{\pi}{6}\right)=1$，$\therefore\sin\left(A+B-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{2}$，又 A，B 为 $\triangle ABC$ 的内角，

$\therefore A+B-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{6}$，$\therefore A+B=\frac{\pi}{3}$，$C=\frac{2\pi}{3}$.

13. 3

解析：$\because 0\leqslant x\leqslant\pi$，$\therefore\frac{\pi}{6}\leqslant 3x+\frac{\pi}{6}\leqslant\frac{19\pi}{6}$，由题可知 $3x+\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}$，$3x+\frac{\pi}{6}=\frac{3\pi}{2}$ 或 $3x+\frac{\pi}{6}=\frac{5\pi}{2}$，解得 $x=\frac{\pi}{9}$，$\frac{4\pi}{9}$ 或 $\frac{7\pi}{9}$，故有 3 个零点.

14. $-\frac{\pi}{6}$

解析：由题意可得 $\sin\left(\frac{2}{3}\pi+\varphi\right)=\pm 1$，所以 $\frac{2}{3}\pi+\varphi=\frac{\pi}{2}+k\pi$，$\varphi=-\frac{\pi}{6}+k\pi(k\in\mathbf{Z})$，因为 $-\frac{\pi}{2}<\varphi<\frac{\pi}{2}$，所以 $k=0$ 时，$\varphi=-\frac{\pi}{6}$.

15. $-\frac{7}{9}$

解析：$\cos\left(\frac{2\pi}{3}+2\alpha\right)=\cos\left(\pi-\frac{\pi}{3}+2\alpha\right)=-\cos\left(\frac{\pi}{3}-2\alpha\right)=-\left[1-2\sin^2\left(\frac{\pi}{6}-\alpha\right)\right]=-1+2\sin^2\left(\frac{\pi}{6}-\alpha\right)=-\frac{7}{9}$.

16. ①③

解析：由 $f(x)\leqslant\left|f\left(\frac{\pi}{6}\right)\right|$ 恒成立知 $\left|f\left(\frac{\pi}{6}\right)\right|=\sqrt{a^2+b^2}$，

$\therefore\left|a\cdot\sin\frac{\pi}{3}+b\cdot\cos\frac{\pi}{3}\right|=\sqrt{a^2+b^2}$，化简得 $a^2-2\sqrt{3}ab+3b^2=0$，

即 $(a-\sqrt{3}b)^2=0$，$\therefore a=\sqrt{3}b$，

$\therefore f(x)=\sqrt{3}b\cdot\sin 2x+b\cos 2x=2b\cdot\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$，

$\therefore f\left(\frac{11\pi}{12}\right)=0$，$\therefore$①对.

又 $\left|f\left(\frac{7\pi}{10}\right)\right|=\left|2b\cdot\sin\frac{17\pi}{30}\right|$，$\left|f\left(\frac{\pi}{5}\right)\right|=\left|2b\cdot\sin\frac{17\pi}{30}\right|$，

$\therefore\left|f\left(\frac{7\pi}{10}\right)\right|=\left|f\left(\frac{\pi}{5}\right)\right|$，$\therefore$②错.

$\because f(-x)\neq\pm f(x)$，$\therefore$③正确.

由于 b 与 0 的大小关系不确定，$\therefore$不能判断出 $f(x)$ 的单调递增区间，

$\therefore$④错.

由①知 $a=\sqrt{3}b$，要使经过点 (a,b) 的直线与函数 $f(x)$ 的图象不相交，则此直线与 x 轴平行，又 $f(x)$ 的振幅为 $|2b|>|b|$，所以直线必与 $f(x)$ 的图象有交点.

$\therefore$⑤错.

17. **解**：(1)由角 α 的终边过点 $P\left(-\frac{3}{5},-\frac{4}{5}\right)$，得 $\sin\alpha=-\frac{4}{5}$，所以 $\sin(\alpha+\pi)=-\sin\alpha=\frac{4}{5}$.

(2)由角 α 的终边过点 $P\left(-\frac{3}{5},-\frac{4}{5}\right)$，得 $\cos\alpha=-\frac{3}{5}$，

由 $\sin(\alpha+\beta)=\frac{5}{13}$ 得 $\cos(\alpha+\beta)=\pm\frac{12}{13}$.

由 $\beta=(\alpha+\beta)-\alpha$ 得 $\cos\beta=\cos(\alpha+\beta)\cos\alpha+\sin(\alpha+\beta)\sin\alpha$，

所以 $\cos\beta=-\frac{56}{65}$ 或 $\cos\beta=-\frac{16}{65}$.

18. **解**：$\tan\frac{\alpha}{2}=\frac{1}{2}$，$\tan\alpha=\frac{2\tan\frac{\alpha}{2}}{1-\tan^2\frac{\alpha}{2}}=\frac{1}{1-\frac{1}{4}}=\frac{4}{3}$，

$\frac{1+\sin 2\alpha}{1+\sin 2\alpha+\cos 2\alpha}=\frac{1+2\sin\alpha\cos\alpha}{1+2\sin\alpha\cos\alpha+2\cos^2\alpha-1}$

$=\frac{\cos^2\alpha+\sin^2\alpha+2\sin\alpha\cos\alpha}{2\sin\alpha\cos\alpha+2\cos^2\alpha}=\frac{1+\tan^2\alpha+2\tan\alpha}{2\tan\alpha+2}$

$=\frac{(\tan\alpha+1)^2}{2(\tan\alpha+1)}=\frac{\tan\alpha+1}{2}=\frac{7}{3\times 2}=\frac{7}{6}$.

19. **解**：(1)由 $A\in\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right)$，可知 $A+\frac{\pi}{4}\in\left(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{4}\right)$，则 $\cos\left(A+\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{\sqrt{2}}{10}$，

$\cos A=\cos\left[\left(A+\frac{\pi}{4}\right)-\frac{\pi}{4}\right]=\cos\left(A+\frac{\pi}{4}\right)\cos\frac{\pi}{4}+\sin\left(A+\frac{\pi}{4}\right)\sin\frac{\pi}{4}=-\frac{\sqrt{2}}{10}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{7\sqrt{2}}{10}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{3}{5}$.

(2) $f(x)=\cos 2x+\frac{5}{2}\sin A\sin x=1-2\sin^2 x+\frac{5}{2}\times\frac{4}{5}\sin x=-2\sin^2 x+2\sin x+1=-2\left(\sin x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{2}$，

由 $\sin x\in[-1,1]$，可知 $f(x)\in\left[-3,\frac{3}{2}\right]$.

20. **解**：(1)由 $\cos\alpha=\frac{1}{7}$，$0<\alpha<\frac{\pi}{2}$，

得 $\sin\alpha=\sqrt{1-\cos^2\alpha}=\sqrt{1-\left(\frac{1}{7}\right)^2}=\frac{4\sqrt{3}}{7}$.

$\therefore\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{4\sqrt{3}}{7}\times\frac{7}{1}=4\sqrt{3}$.

于是 $\tan 2\alpha=\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}=\frac{2\times 4\sqrt{3}}{1-(4\sqrt{3})^2}=-\frac{8\sqrt{3}}{47}$.

(2)由 $0<\beta<\alpha<\frac{\pi}{2}$，得 $0<\alpha-\beta<\frac{\pi}{2}$.

又 $\because\cos(\alpha-\beta)=\frac{13}{14}$，

$\therefore\sin(\alpha-\beta)=\sqrt{1-\cos^2(\alpha-\beta)}=\sqrt{1-\left(\frac{13}{14}\right)^2}=\frac{3\sqrt{3}}{14}$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

由$\beta=\alpha-(\alpha-\beta)$，得 $\cos\beta=\cos[\alpha-(\alpha-\beta)]=\cos\alpha\cos(\alpha-\beta)+\sin\alpha\sin(\alpha-\beta)=\frac{1}{7}\times\frac{13}{14}+\frac{4\sqrt{3}}{7}\times\frac{3\sqrt{3}}{14}=\frac{1}{2}$，$\therefore\beta=\frac{\pi}{3}$.

21. **解**：(1)由角α的终边与单位圆交于点$P\left(\frac{3}{5},\frac{4}{5}\right)$，可知

$\sin\alpha=\frac{4}{5}$，$\cos\alpha=\frac{3}{5}$，

$\therefore f(\alpha)=2\sqrt{3}\sin\alpha\cos\alpha-2\sin^2\alpha=\frac{24\sqrt{3}-32}{25}$.

(2)$\because f(x)=2\sqrt{3}\sin x\cos x-2\sin^2 x=2\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)-1$，

$\therefore T=\pi$.

$\because x\in\left[-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3}\right]$，$\therefore 2x+\frac{\pi}{6}\in\left[-\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6}\right]$，

$\therefore\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)\in\left[-\frac{1}{2},1\right]$，$\therefore f(x)$的值域是$[-2,1]$.

22. **解**：(1)$f(x)=2\sqrt{3}\sin(\pi-x)\sin x-(\sin x-\cos x)^2$

$=2\sqrt{3}\sin^2 x-(1-2\sin x\cos x)$

$=\sqrt{3}(1-\cos 2x)+\sin 2x-1$

$=\sin 2x-\sqrt{3}\cos 2x+\sqrt{3}-1$

$=2\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)+\sqrt{3}-1$，

由$2k\pi-\frac{\pi}{2}\leqslant 2x-\frac{\pi}{3}\leqslant 2k\pi+\frac{\pi}{2}$($k\in\mathbf{Z}$)，得$k\pi-\frac{\pi}{12}\leqslant x\leqslant k\pi+\frac{5\pi}{12}$($k\in\mathbf{Z}$)，所以$f(x)$的单调递增区间是$\left[k\pi-\frac{\pi}{12},k\pi+\frac{5\pi}{12}\right](k\in\mathbf{Z})$，或$\left(k\pi-\frac{\pi}{12},k\pi+\frac{5\pi}{12}\right)(k\in\mathbf{Z})$.

(2)由(1)知$f(x)=2\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)+\sqrt{3}-1$，

把$y=f(x)$的图象上所有点的横坐标伸长到原来的2倍(纵坐标不变)，

得到$y=2\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)+\sqrt{3}-1$的图象，

再把得到的图象向左平移$\frac{\pi}{3}$个单位，

得到$y=2\sin x+\sqrt{3}-1$的图象，

即$g(x)=2\sin x+\sqrt{3}-1$.

所以$g\left(\frac{\pi}{6}\right)=2\sin\frac{\pi}{6}+\sqrt{3}-1=\sqrt{3}$.

阶段测试四

1. B　$\sin 780^\circ=\sin(720^\circ+60^\circ)=\sin 60^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}$，故选B.

2. C　$y=-\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=-\cos x$是偶函数，在$(0,\pi)$上是增函数，故选C.

3. A　①正确.

4. B　$\because\triangle ABC$是锐角三角形，$\therefore A+B>\frac{\pi}{2}$，$\frac{\pi}{2}>A>\frac{\pi}{2}-B>0$，$\therefore\sin A>\sin\left(\frac{\pi}{2}-B\right)=\cos B$，$\cos A<\cos\left(\frac{\pi}{2}-B\right)=\sin B$，$\therefore P>Q$，故选B.

5. C　$2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=2(1,n)-(-1,n)=(3,n)$.

$\because(2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\perp\boldsymbol{b}$，$\therefore(2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{b}=(-1)\times 3+n^2=0$，

$\therefore n^2=3$，$\therefore|\boldsymbol{a}|=\sqrt{1^2+n^2}=\sqrt{1+3}=2$，故选C.

6. A　由$\overrightarrow{BC}=3\overrightarrow{CD}$得$\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}=3(\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AC})$，$\therefore 3\overrightarrow{AD}=4\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}$，$\therefore\overrightarrow{AD}=\frac{4}{3}\overrightarrow{AC}-\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$，故选A.

7. D　由图可知，$T=\left(\frac{5}{4}-\frac{1}{4}\right)\times 2=2$，$\therefore\omega=\frac{2\pi}{T}=\pi$. 将$\left(\frac{1}{4},0\right)$代入$f(x)=\cos\left(\frac{\pi}{4}+\varphi\right)=0$，$\therefore$可令$\frac{\pi}{4}+\varphi=\frac{\pi}{2}$，$\therefore\varphi=\frac{\pi}{4}$，$\therefore f(x)=\cos\left(\pi x+\frac{\pi}{4}\right)$，$2k\pi\leqslant\pi x+\frac{\pi}{4}\leqslant 2k\pi+\pi$，$k\in\mathbf{Z}$. 得$2k-\frac{1}{4}\leqslant x\leqslant 2k+\frac{3}{4}$，$\therefore f(x)$的递减区间为$\left[2k-\frac{1}{4},2k+\frac{3}{4}\right]$，$k\in\mathbf{Z}$，故选D.

8. B　根据题意有$f(x)=\cos 2x+1-\frac{1-\cos 2x}{2}+2=\frac{3}{2}\cos 2x+\frac{5}{2}$，

所以函数$f(x)$的最小正周期为$T=\frac{2\pi}{2}=\pi$，

且最大值为$f(x)_{\max}=\frac{3}{2}+\frac{5}{2}=4$，故选B.

9. A　$\because\overrightarrow{AD}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})=\frac{1}{2}(5\boldsymbol{p}+2\boldsymbol{q}+\boldsymbol{p}-3\boldsymbol{q})=\frac{1}{2}(6\boldsymbol{p}-\boldsymbol{q})$，

$\therefore|\overrightarrow{AD}|=\sqrt{|\overrightarrow{AD}|^2}=\frac{1}{2}\sqrt{(6\boldsymbol{p}-\boldsymbol{q})^2}$

$=\frac{1}{2}\sqrt{36\boldsymbol{p}^2-12\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{q}+\boldsymbol{q}^2}$

$=\frac{1}{2}\sqrt{36\times(2\sqrt{2})^2-12\times 2\sqrt{2}\times 3\times\cos\frac{\pi}{4}+3^2}$

$=\frac{15}{2}$.

10. C　由$\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$得，$-1+2\cos^2\theta=0$，$\therefore\cos 2\theta=0$，故选C.

11. D　$\because-\pi<\alpha<-\frac{\pi}{2}$，$\therefore-\frac{7\pi}{12}<\frac{5\pi}{12}+\alpha<-\frac{\pi}{12}$，

$\therefore\sin\left(\frac{5\pi}{12}+\alpha\right)=-\sqrt{1-\frac{1}{9}}=-\frac{2\sqrt{2}}{3}$，$\therefore\cos\left(\frac{\pi}{12}-\alpha\right)=\cos\left[\frac{\pi}{2}-\left(\frac{5\pi}{12}+\alpha\right)\right]=\sin\left(\frac{5\pi}{12}+\alpha\right)=-\frac{2\sqrt{2}}{3}$，故选D.

12. A　设$\boldsymbol{a}=(x,y)$，$\boldsymbol{e}=(1,0)$，$\boldsymbol{b}=(m,n)$，则由$\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{e}\rangle=\frac{\pi}{3}$，得$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{e}=|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{e}|\cos\frac{\pi}{3}$，即$x=\frac{1}{2}\sqrt{x^2+y^2}$，$\therefore y=\pm\sqrt{3}x$，

由$\boldsymbol{b}^2-4\boldsymbol{e}\cdot\boldsymbol{b}+3=0$得$m^2+n^2-4m+3=0$，即$(m-2)^2+n^2=1$.

因此$|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$的最小值为圆心$(2,0)$到直线$y=\pm\sqrt{3}x$的距离减去半径1，为$\sqrt{3}-1$. 故选A.

13. $-\frac{1}{2}$

解析：$\cos 43^\circ\cos 77^\circ+\sin 43^\circ\cos 167^\circ=\cos 43^\circ\cos 77^\circ-\sin 43^\circ\sin 77^\circ=\cos 120^\circ=-\frac{1}{2}$.

14. -72

解析：由题意得$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=12$，则$(\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b})=|\boldsymbol{a}|^2-\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}-6|\boldsymbol{b}|^2=-72$.

15. 平行四边形

解析：由条件可知$|\overrightarrow{AB}|=|\overrightarrow{DC}|$，又$\overrightarrow{AB}/\!/\overrightarrow{CD}$，

$\therefore AB\not\parallel CD$，

$\therefore$四边形$ABCD$为平行四边形.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

16. 7

解析：$y=3\sin(x+10°)+5\sin(x+70°)=3\sin(x+40°-30°)+5\sin(x+40°+30°)=\frac{3}{2}[\sqrt{3}\sin(x+40°)-\cos(x+40°)]+\frac{5}{2}[\sqrt{3}\sin(x+40°)+\cos(x+40°)]=4\sqrt{3}\sin(x+40°)+\cos(x+40°)=7\left[\frac{4\sqrt{3}}{7}\sin(x+40°)+\frac{1}{7}\cos(x+40°)\right]=7\sin(x+40°+\varphi)\leqslant 7$.

17. **解**：(1)由 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$，得 $2x+3-x^2=0$，$x=-1$ 或 $x=3$.

(2)由 $\boldsymbol{a}\parallel\boldsymbol{b}$，得 $-x=x(2x+3)$，$\therefore x=0$ 时 $x=-2$.

当 $x=0$ 时，$\boldsymbol{a}=(1,0)$，$\boldsymbol{b}=(3,0)$，

$\therefore|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=2$；

当 $x=-2$ 时，$\boldsymbol{a}=(1,-2)$，$\boldsymbol{b}=(-1,2)$，$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=(2,-4)$，

$\therefore|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=2\sqrt{5}$.

$\therefore|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=2$ 或 $|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=2\sqrt{5}$.

18. **解**：(1)因为 $\tan\alpha=\frac{4}{3}$，$\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$，所以 $\sin\alpha=\frac{4}{3}\cos\alpha$.

因为 $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$，所以 $\cos^2\alpha=\frac{9}{25}$，

因此，$\cos2\alpha=2\cos^2\alpha-1=-\frac{7}{25}$.

(2)因为 α,β 为锐角，所以 $\alpha+\beta\in(0,\pi)$.

又因为 $\cos(\alpha+\beta)=-\frac{\sqrt{5}}{5}$，

所以 $\sin(\alpha+\beta)=\sqrt{1-\cos^2(\alpha+\beta)}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$，

因此 $\tan(\alpha+\beta)=-2$.

因为 $\tan\alpha=\frac{4}{3}$，所以 $\tan2\alpha=\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}=-\frac{24}{7}$，

因此，$\tan(\alpha-\beta)=\tan[2\alpha-(\alpha+\beta)]=\frac{\tan2\alpha-\tan(\alpha+\beta)}{1+\tan2\alpha\tan(\alpha+\beta)}=-\frac{2}{11}$.

19. **解**：(1)$f(x)=\frac{1}{2}\sin2x+\sqrt{3}\cos^2x$

$=\frac{1}{2}\sin2x+\frac{\sqrt{3}}{2}(1+\cos2x)$

$=\frac{1}{2}\sin2x+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos2x+\frac{\sqrt{3}}{2}$

$=\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)+\frac{\sqrt{3}}{2}$.

故 $f(x)$ 的最小正周期为 $T=\frac{2\pi}{2}=\pi$.

(2)依题意 $g(x)=f\left(x-\frac{\pi}{4}\right)+\frac{\sqrt{3}}{2}$

$=\sin\left[2\left(x-\frac{\pi}{4}\right)+\frac{\pi}{3}\right]+\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}$

$=\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)+\sqrt{3}$.

当 $x\in\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$ 时，$2x-\frac{\pi}{6}\in\left[-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3}\right]$，$g(x)$ 为增函数，

所以 $g(x)$ 在 $\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$ 上的最大值为 $g\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{3\sqrt{3}}{2}$.

20. **解**：(1)$\sin\left(\frac{\pi}{4}+\theta\right)=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}-\theta\right)=\cos\left(\frac{\pi}{4}-\theta\right)=\frac{\sqrt{2}}{10}$.

(2)$\because\cos\left(\frac{\pi}{4}-\theta\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\theta+\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\theta=\frac{\sqrt{2}}{10}$，

$\therefore\cos\theta+\sin\theta=\frac{1}{5}$，$\therefore2\sin\theta\cos\theta=-\frac{24}{25}<0$，

$\because\theta\in(0,\pi)$，$\therefore\sin\theta>0$，$\cos\theta<0$，

$\therefore\sin\theta-\cos\theta=\sqrt{1-2\sin\theta\cos\theta}=\frac{7}{5}$.

$\sin^4\theta-\cos^4\theta=(\sin^2\theta+\cos^2\theta)(\sin^2\theta-\cos^2\theta)=(\sin\theta-\cos\theta)(\sin\theta+\cos\theta)=\frac{1}{5}\times\frac{7}{5}=\frac{7}{25}$.

21. **解**：(1)因为 $f(x)=\frac{1-\cos2x}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin2x=\frac{\sqrt{3}}{2}\sin2x-\frac{1}{2}\cos2x+\frac{1}{2}=\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)+\frac{1}{2}$，所以 $f(x)$ 的最小正周期为 $T=\frac{2\pi}{2}=\pi$.

(2)由(1)知 $f(x)=\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)+\frac{1}{2}$.

因为 $x\in\left[-\frac{\pi}{3},m\right]$，所以 $2x-\frac{\pi}{6}\in\left[-\frac{5\pi}{6},2m-\frac{\pi}{6}\right]$.

要使得 $f(x)$ 在 $\left[-\frac{\pi}{3},m\right]$ 上的最大值为 $\frac{3}{2}$，即 $\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)$ 在 $\left[-\frac{\pi}{3},m\right]$ 上的最大值为 1.

所以 $2m-\frac{\pi}{6}\geqslant\frac{\pi}{2}$，即 $m\geqslant\frac{\pi}{3}$.

所以 m 的最小值为 $\frac{\pi}{3}$.

22. **解**：依题意得，$f(x)=\frac{\sqrt{3}}{2}\cos2x-\frac{1}{2}\sin2x+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos2x+\frac{1}{2}\sin2x+\sin2x+1=\sin2x+\sqrt{3}\cos2x+1=2\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)+1$.

(1)函数 $f(x)$ 的最小正周期为 $T=\frac{2\pi}{2}=\pi$，

由 $2k\pi-\frac{\pi}{2}\leqslant2x+\frac{\pi}{3}\leqslant2k\pi+\frac{\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$，得 $k\pi-\frac{5\pi}{12}\leqslant x\leqslant k\pi+\frac{\pi}{12}(k\in\mathbf{Z})$.

$\therefore$ 函数 $f(x)$ 的单调递减增区间为 $\left[k\pi-\frac{5\pi}{12},k\pi+\frac{\pi}{12}\right](k\in\mathbf{Z})$.

(2)$\because0\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{3}$，$\therefore\frac{\pi}{3}\leqslant2x+\frac{\pi}{3}\leqslant\pi$，

$\therefore0\leqslant\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)\leqslant1$，$\therefore1\leqslant f(x)\leqslant3$.

由函数 $g(x)=f(x)-m$ 在区间 $\left[0,\frac{\pi}{3}\right]$ 上有两个不同的零点，可知 $f(x)=m$ 在区间 $\left[0,\frac{\pi}{3}\right]$ 内有两个相异的实根，即 $y=f(x)$ 图象与 $y=m$ 的图象有两个不同的交点结合图象可知，当 $\sqrt{3}+1\leqslant m<3$ 时，两图象有两个不同的交点.

$\therefore$实数 m 的取值范围是 $[\sqrt{3}+1,3)$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

责任编辑 李 莉 陈小彦 刘晓冬
美术编辑 李 欣
封面设计 欣 羽

45 分钟
课时作业与单元测试

45FENZHONG KESHIZUOYEYUDANYUANCESHI SHUXUE

丛书科目

语文 数学 英语 物理 化学 生物 历史 地理 思想政治

同学们，你想了解丛书的更多信息吗？详情请登录 http://www.dfjc100.com

※ 各科配有教师用书及教学课件光盘 (word 文档可自主编辑)，英语配有原声磁带 / MP3 光盘。

左手骄子之路练习题，右手阿凡题答疑

扫码下载APP

拍照搜题，秒回解析，火箭速度提升学习效率

随时随地老师在线答疑，看得懂，学得会，听得见

积累错题本，问题不过夜，养成学习好习惯

手机扫一扫
获取配套学习资源

ISBN 978-7-202-08074-0

9 787202 080740 04

定价：38.00 元

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料