东方杰创®
DONGFANG JIECHUANG
让 学习更快乐，人生更精彩

骄子之路®
the Road to Pride
主　编：邓保沧

45分钟

课时作业与单元测试

活页
可拆开使用

教辅资料站
电子教辅　试卷练习
知识总结　备课资源
扫码关注获取更多学习资料

提升＝基础＋能力＋方法
课时作业　基础自测·知能提升
阶段检测　梯度练习·评估达标
答案与解析　全解全析·点拨精准

数学

必修5　RJ·B

河北人民出版社

东方杰创®
DONGFANG JIECHUANG
让 学习更快乐，人生更精彩

骄子之路®
the Road to Pride
主　编：邓保沧

45分钟 课时作业与单元测试

活页
可拆开使用

提升＝基础＋能力＋方法
课时作业　基础自测·知能提升
阶段检测　梯度练习·评估达标
答案与解析　全解全析·点拨精准

数学

必修5　RJ·B

微信公众号
教辅资料站

河北人民出版社
石家庄

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

图书在版编目（CIP）数据

45分钟课时作业与单元测试：B版．数学．5 ：必修／邓保沧主编．－石家庄：河北人民出版社，2013.7（2019.6重印）
ISBN 978-7-202-08062-7

Ⅰ．①4… Ⅱ．①邓… Ⅲ．①中学数学课－高中－习题集
Ⅳ．①G634

中国版本图书馆CIP数据核字（2013）第194835号

编　委：李　雅　李　越　张瑞霞
天高云　蒋　敏　金剑飞

书　名　45分钟课时作业与单元测试　数学　必修5　B
主　编　邓保沧

责任编辑　李　莉　阴耀华
美术编辑　李　欣
封面设计　欣　羽

出版发行　河北人民出版社（石家庄市友谊北大街330号）
印　刷　河北伦洋印业有限公司
开　本　880毫米×1230毫米　1/16
印　张　5.5
字　数　176 000
版　次　2013年7月第1版　2019年6月第6次印刷
书　号　ISBN 978-7-202-08062-7
定　价　29.00元

版权所有　翻印必究

微信公众号
教辅资料站

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料



目录 CONTENTS

第一部分　课时作业

第一章　解三角形 …… 1
1.1　正弦定理和余弦定理 …… 1
1.1.1　正弦定理 …… 1
1.1.2　余弦定理 …… 3
1.2　应用举例 …… 5
章末检测 …… 7
第二章　数　列 …… 9
2.1　数　列 …… 9
2.2　等差数列 …… 11
2.2.1　等差数列 …… 11
2.2.2　等差数列的前 n 项和 …… 13
2.3　等比数列 …… 15
2.3.1　等比数列 …… 15
2.3.2　等比数列的前 n 项和 …… 17
章末检测 …… 19
第三章　不等式 …… 21
3.1　不等关系与不等式 …… 21
3.2　均值不等式 …… 23
3.3　一元二次不等式及其解法 …… 25
3.4　不等式的实际应用 …… 27
3.5　二元一次不等式(组)与简单的线性规划问题 …… 29
3.5.1　二元一次不等式(组)所表示的平面区域 …… 29
3.5.2　简单线性规划 …… 31
章末检测 …… 33
模块检测 …… 35

第二部分　阶段检测

阶段测试一(第一章　解三角形) …… 37
阶段测试二(第二章　数　列) …… 41
阶段测试三(第三章　不等式) …… 45
阶段测试四(本册综合测试) …… 49

第三部分　答案与解析

答案与解析 …… 54～84

提示：全书包括课时作业、阶段检测、答案与解析三部分，共计 88 页。

（根据教师教学情况不同，课时作业部分可在书中作答，也可撕下使用。）

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

学习札记

第一章　解三角形

1.1　正弦定理和余弦定理

1.1.1　正弦定理

学习目标

1. 掌握正弦定理 $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R$（$R$ 为 $\triangle ABC$ 外接圆半径），并能应用正弦定理解三角形；
2. 掌握正弦定理的变形：
   (1) $a=2R\sin A$，$b=2R\sin B$，$c=2R\sin C$；
   (2) $\sin A:\sin B:\sin C=a:b:c$；
3. 灵活运用正弦定理，能够正用、逆用、变形应用解三角形.

1 基础知识点对点

知识点一　已知两角与任意一边，解三角形

1. **(2019·安徽六校月考)** 在 $\triangle ABC$ 中，角 A,B,C 的对边分别为 a,b,c，已知 $b=1$，$B=\frac{\pi}{4}$，$\cos A=\frac{1}{3}$，则 $a=$ (　　)

A. $\frac{4}{3}$　　B. $\frac{\sqrt{2}}{3}$

C. $\frac{3}{4}$　　D. $\sqrt{2}$

2. $\triangle ABC$ 的内角 A,B,C 的对边分别为 a,b,c，若 $\cos A=\frac{4}{5}$，$\cos C=\frac{5}{13}$，$a=1$，则 $b=$_____.

知识点二　已知两边和其中一边的对角，解三角形

3. **(2017·全国卷Ⅱ)** $\triangle ABC$ 的内角 A,B,C 的对边分别为 a,b,c. 已知 $\sin B+\sin A(\sin C-\cos C)=0$，$a=2$，$c=\sqrt{2}$，则 $C=$ (　　)

A. $\frac{\pi}{12}$　　B. $\frac{\pi}{6}$

C. $\frac{\pi}{4}$　　D. $\frac{\pi}{3}$

4. **(2018·甘肃武威期中)** 在 $\triangle ABC$ 中，a,b,c 分别为角 A,B,C 的对边，若 $a=2$，$b=2\sqrt{3}$，$\angle A=30°$，则 $\angle B$ 等于 (　　)

A. 30°　　B. 30°或 150°

C. 60°　　D. 60°或 120°

知识点三　正弦定理的综合应用

5. 设 $\triangle ABC$ 的内角 A,B,C 所对的边分别为 a,b,c，若 $b\cos C+c\cos B=a\sin A$，则 $\triangle ABC$ 的形状为 (　　)

A. 直角三角形　　B. 锐角三角形

C. 钝角三角形　　D. 不确定

6. 在 $\triangle ABC$ 中，内角 A,B,C 所对的边分别是 a,b,c. 若 $3a=2b$，则 $\frac{2\sin^2 B-\sin^2 A}{\sin^2 A}$ 的值为 (　　)

A. $\frac{1}{9}$　　B. $\frac{1}{3}$

C. 1　　D. $\frac{7}{2}$

2 课后拔高提能练

一、选择题

1. 在 $\triangle ABC$ 中，已知 $AB=\sqrt{2}AC$，$\angle B=30°$，则 $\angle A=$ (　　)

A. 45°　　B. 15°

C. 45°或 135°　　D. 15°或 105°

2. **(2018·黑龙江大庆期中)** 在 $\triangle ABC$ 中，若 $\sqrt{3}b=2a\sin B$，则 A 等于 (　　)

A. 30°或 60°　　B. 45°或 60°

C. 120°或 60°　　D. 30°或 150°

3. **(2018·辽宁盘锦期中)** 在 $\triangle ABC$ 中，$a=3$，$b=5$，$\sin A=\frac{1}{3}$，则 $\sin B=$ (　　)

A. $\frac{1}{5}$　　B. $\frac{5}{9}$

C. $\frac{\sqrt{5}}{3}$　　D. 1

4. **(2019·内蒙古集宁一中月考)** 不解三角形，确定下列判断中正确的是 (　　)

A. $a=7,b=14,A=30°$，有两解

B. $a=30,b=25,A=150°$，有一解

C. $a=6,b=9,A=45°$，有两解

D. $b=9,c=10,B=60°$，无解

5. **(2017·山东卷)** 在 $\triangle ABC$ 中，角 A,B,C 的对边分别为 a,b,c，若 $\triangle ABC$ 为锐角三角形，且满足 $\sin B(1+2\cos C)=2\sin A\cos C+\cos A\sin C$，则下列等式成立的是 (　　)

A. $a=2b$　　B. $b=2a$

C. $A=2B$　　D. $B=2A$

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

学习札记

6. 在△ABC中，a,b,c分别为内角A,B,C的对边，已知$b=5c$，$\cos A=\frac{4}{5}$，则$\sin B=$　　(　　)

A. $\frac{\sqrt{2}}{2}$　　B. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

C. $\frac{\sqrt{2}}{10}$　　D. $\frac{\sqrt{3}}{10}$

二、填空题

7. 在△ABC中，$A:B:C=1:2:3$，则$a:b:c=$_____.

8. **(2017·全国卷Ⅲ)**△ABC的内角A,B,C的对边分别为a,b,c. 已知$C=60°$，$b=\sqrt{6}$，$c=3$，则$A=$_____.

9. 在△ABC中，角A,B,C所对应的边分别为a,b,c，已知$b\cos C+c\cos B=2b$，则$\frac{a}{b}=$_____.

三、解答题

10. △ABC的内角A,B,C的对边分别为a,b,c，已知$3a\cos C=2c\cos A$，$\tan A=\frac{1}{3}$，求B.

11. 在△ABC中，设$\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{CA}=\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{c}$.

(1)当△ABC为正三角形时，求证：$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}=\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a}$；

(2)若$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}=\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a}$，则△$ABC$是否为正三角形？

12. 已知△ABC中，角A,B,C的对边分别为a,b,c，$a=\sqrt{2}$，向量$\boldsymbol{m}=(-1,1)$，$\boldsymbol{n}=\left(\cos B\cos C,\sin B\sin C-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$，且$\boldsymbol{m}\perp\boldsymbol{n}$.

(1)求A的大小；

(2)当$\sin B+\cos\left(\frac{7\pi}{12}-C\right)$取得最大值时，求边$b$.

微信公众号
教辅资料站

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

学习札记

1.1.2　余弦定理

学习目标

1. 了解余弦定理的推导过程，掌握余弦定理及其推论；
2. 能够应用余弦定理解三角形，并判断三角形的形状.

1 基础知识点对点

知识点一　已知三边，解三角形

1. 在△ABC中，内角A，B，C的对边分别是a，b，c，若$a^2-b^2=\sqrt{3}bc$，$\sin C=2\sqrt{3}\sin B$，则$A=$　　(　　)

A. $\frac{\pi}{6}$　　B. $\frac{\pi}{3}$

C. $\frac{2\pi}{3}$　　D. $\frac{5\pi}{6}$

2. **(2018·辽宁盘锦月考)** 设△ABC的内角A，B，C所对的边分别为a，b，c，若$b+c=2a$，$3\sin A=5\sin B$，则角$C=$　　(　　)

A. $\frac{\pi}{3}$　　B. $\frac{2\pi}{3}$

C. $\frac{3\pi}{4}$　　D. $\frac{5\pi}{6}$

知识点二　已知两边和一角，解三角形

3. **(2018·安徽合肥调研)** 在△ABC中，角A，B，C对应的边分别为a，b，c，$C=60°$，$a=4b$，$c=\sqrt{13}$，则$b=$　　(　　)

A. 1　　B. 2

C. 3　　D. $\sqrt{13}$

4. 在△ABC中，$B=120°$，$AB=\sqrt{2}$，$\angle A$的角平分线$AD=\sqrt{3}$，则$AC=$　　(　　)

A. $\sqrt{2}$　　B. 2

C. $\sqrt{6}$　　D. $2\sqrt{2}$

知识点三　正、余弦定理的综合应用

5. **(2019·福建闽侯月考)** 在△ABC中，角A，B，C所对的边分别为a，b，c，且$a\sin A\cos C+c\sin A\cos A=\frac{1}{3}c$，$D$是$AC$的中点，且$\cos B=\frac{2\sqrt{5}}{5}$，$BD=\sqrt{26}$，

(1) 求角A的大小；

(2) 求△ABC的最短边的边长.

2 课后拔高提能练

一、选择题

1. **(2018·甘肃武威期中)** 在△ABC中，若$(a+b+c)(b+c-a)=3bc$，则$\angle A$等于　　(　　)

A. $\frac{\pi}{3}$　　B. $\frac{\pi}{6}$

C. $\frac{2\pi}{3}$　　D. $\frac{\pi}{3}$或$\frac{2\pi}{3}$

2. **(2018·安徽滁州月考)** 已知△ABC的内角A，B，C满足$6\sin A=4\sin B=3\sin C$，则$\cos B=$　　(　　)

A. $\frac{\sqrt{15}}{4}$　　B. $\frac{3}{4}$

C. $\frac{11}{16}$　　D. $\frac{3\sqrt{15}}{16}$

3. **(2018·全国卷Ⅲ)** △ABC的内角A，B，C的对边分别为a，b，c，若△ABC的面积为$\frac{a^2+b^2-c^2}{4}$，则$C=$　　(　　)

A. $\frac{\pi}{2}$　　B. $\frac{\pi}{3}$

C. $\frac{\pi}{4}$　　D. $\frac{\pi}{6}$

4. 在△ABC中，a，b，c分别为角A，B，C所对的边，若$(a+b)^2-c^2=4$，且$C=60°$，则ab的值为　　(　　)

A. $\frac{4}{3}$　　B. $1+\sqrt{3}$

C. 1　　D. $\frac{1+\sqrt{3}}{2}$

5. **(2019·湖北襄阳月考)** △ABC的内角A，B，C的对边分别为a，b，c，若$a^2=bc$，且$\sin A=\sqrt{2}\sin C$，则$\cos C=$　　(　　)

A. $\frac{5\sqrt{2}}{8}$　　B. $\frac{7}{8}$

C. $\frac{\sqrt{2}}{8}$　　D. $\frac{\sqrt{2}}{4}$

6. 设△ABC的内角A，B，C的对边分别为a，b，c，且$a=2b\sin A$，$b^2+c^2-a^2=bc$，则△ABC的形状是(　　)

A. 锐角三角形　　B. 钝角三角形

C. 直角三角形　　D. 等边三角形

二、填空题

7. 在△ABC中，$A=60°$，$AC=2$，$BC=\sqrt{3}$，则AB等于_____.

微信公众号 教辅资料站

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

学习札记

8. 在△ABC中，内角 A,B,C 的对边分别是 a,b,c，已知 $b=c$，$a^2=2b^2(1-\sin A)$，则 $A=$_____.

9. **(2018·全国卷Ⅰ)**△ABC 的内角 A,B,C 的对边分别为 a,b,c，已知 $b\sin C+c\sin B=4a\sin B\sin C$，$b^2+c^2-a^2=8$，则△$ABC$ 的面积为_____.

三、解答题

10. **(2017·天津卷)**在△ABC中，内角 A,B,C 所对的边分别为 a,b,c. 已知 $a>b$，$a=5$，$c=6$，$\sin B=\frac{3}{5}$.

(1)求 b 和 $\sin A$ 的值；

(2)求 $\sin\left(2A+\frac{\pi}{4}\right)$ 的值.

11. 在△ABC中，设内角 A,B,C 的对边分别为 a,b,c，并且满足 $(a+b+c)(a-b+c)=ac$.

(1)求角 B 的大小；

(2)若 $\sin A\sin C=\frac{\sqrt{3}-1}{4}$，求角 C.

12. **(2018·天津卷)**在△ABC中，内角 A,B,C 所对的边分别为 a,b,c. 已知 $b\sin A=a\cos\left(B-\frac{\pi}{6}\right)$.

(1)求角 B 的大小；

(2)设 $a=2$，$c=3$，求 b 和 $\sin(2A-B)$ 的值.

微信公众号
教辅资料站

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

学习札记

1.2　应用举例

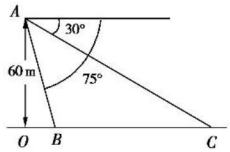
学习目标

1. 熟练掌握正弦定理和余弦定理；
2. 能够运用正、余弦定理等知识和方法解决与三角形有关的求解问题.

1 基础知识点对点

知识点一　实际应用举例

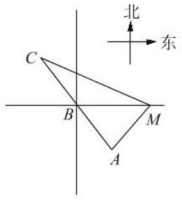
1. 如图，从气球 A 上测得正前方的河流的两岸 B，C 的俯角分别为 $75°$，$30°$，此时气球的高是 60 m，则河流的宽度 BC 等于（　　）



A. $30(\sqrt{3}+1)$ m　　B. $120(\sqrt{3}-1)$ m

C. $180(\sqrt{2}-1)$ m　　D. $240(\sqrt{3}-1)$ m

2. **(2018·黑龙江牡丹江月考)** 如图所示，已知 A，B，C 是一条直路上的三点，AB 与 BC 均等于 2 km，从三点分别遥望塔 M，在 A 处看见塔在北偏东 $45°$ 方向，在 B 处看见塔在正东方向，在 C 处看见塔在南偏东 $60°$ 方向，则塔 M 到直路 ABC 的最短距离为_____.



知识点二　三角形的面积问题

3. **(2019·广东中山一中月考)** 在锐角 $\triangle ABC$ 中，角 A，B，C 所对的边分别为 a，b，c，若 $\sin A=\frac{2\sqrt{2}}{3}$，$a=2$，$S_{\triangle ABC}=\sqrt{2}$，则 b 的值为（　　）

A. $\sqrt{3}$　　B. $\frac{3\sqrt{2}}{2}$

C. $2\sqrt{2}$　　D. $2\sqrt{3}$

4. **(2017·浙江卷)** 已知 $\triangle ABC$，$AB=AC=4$，$BC=2$. 点 D 为 AB 延长线上的一点，$BD=2$，连接 CD，则 $\triangle BDC$ 的面积是_____，$\cos\angle BDC=$_____.

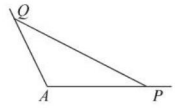
知识点三　正弦定理与余弦定理的综合应用

5. **(2017·全国卷Ⅰ)** $\triangle ABC$ 的内角 A，B，C 的对边分别为 a，b，c，已知 $\sin(A+C)=8\sin^2\frac{B}{2}$.

(1) 求 $\cos B$；

(2) 若 $a+c=6$，$\triangle ABC$ 的面积为 2，求 b.

6. 如图，角 A 为钝角，且 $\sin A=\frac{3}{5}$，点 P，Q 分别是在角 A 的两边上不同于点 A 的动点.



(1) 若 $AP=5$，$PQ=3\sqrt{5}$，求 AQ 的长；

(2) 设 $\angle APQ=\alpha$，$\angle AQP=\beta$，且 $\cos\alpha=\frac{12}{13}$，求 $\cos(\alpha+\beta)$ 和 $\cos(2\alpha+\beta)$ 的值.

2 课后拔高提能练

一、选择题

1. **(2018·内蒙古乌兰察布月考)** 若点 M 在点 N 的北偏西 $43°$ 方向上，则点 N 在点 M 的（　　）

A. 南偏西 $47°$ 方向上　　B. 西偏北 $47°$ 方向上

C. 南偏东 $43°$ 方向上　　D. 西偏北 $43°$ 方向上

2. **(2019·河北邯郸月考)** 已知 $\triangle ABC$ 的面积为 $\frac{3}{2}$，且 $b=2$，$c=\sqrt{3}$，则 $\angle A$ 等于（　　）

A. $30°$　　B. $30°$ 或 $150°$

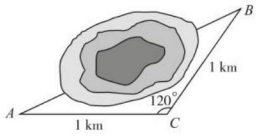
C. $60°$　　D. $60°$ 或 $120°$

微信公众号 教辅资料站

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

学习札记

3.（2018·湖南衡阳期中）如图，在高速公路建设中需要确定隧道的长度，工程技术人员已测得隧道两端的两点 A，B 到点 C 的距离 $AC=BC=1$ km，且 $\angle ACB=120°$，则 A，B 两点间的距离为　（　）



A. 1.5 km　　B. $\sqrt{2}$ km

C. 2 km　　D. $\sqrt{3}$ km

4.（2018·甘肃武威月考）$\triangle ABC$ 的三边分别为 a，b，c，且 $a=1$，$\angle B=45°$，$S_{\triangle ABC}=2$，则 $\triangle ABC$ 外接圆的直径为　（　）

A. $4\sqrt{3}$　　B. 5

C. $5\sqrt{2}$　　D. $6\sqrt{2}$

5. 海事救护船 A 在基地北偏东 60°，与基地相距 $100\sqrt{3}$ 海里，渔船 B 被困海面，已知 B 距离基地 100 海里，而且在救护船 A 正西方，则渔船 B 与救护船 A 的距离是　（　）

A. 100 海里　　B. 200 海里

C. 100 海里或 200 海里　　D. $100\sqrt{3}$ 海里

6. 在 $\triangle ABC$ 中，D 是边 AC 上的点，$AB=AD$，$2AB=\sqrt{3}BD$，$BC=2BD$，则 $\sin C=$　（　）

A. $\frac{\sqrt{3}}{12}$　　B. $\frac{\sqrt{6}}{6}$

C. $\frac{\sqrt{3}}{6}$　　D. $\frac{\sqrt{6}}{3}$

二、填空题

7. 已知 $\triangle ABC$ 的内角 A，B，C 所对的边分别为 a，b，c，$\cos A=\frac{3}{5}$，$b=5\sqrt{3}$，$B=\frac{\pi}{3}$，则 $a=$_____.

8. 已知三角形两边长分别为 1 和 $\sqrt{3}$，第三边的中线长为 1，则三角形的外接圆半径为_____.

9. 甲在 A 处，乙在北偏东 45°距 A 10 千米的 C 处，乙正沿南偏东 75°方向以 9 千米/时的速度奔向 B 处，甲欲以 21 千米/时的速度与乙会合，则甲乙会合的最短时间为_____小时.

三、解答题

10. 在 $\triangle ABC$ 中，内角 A，B，C 所对的边分别为 a，b，c. 已知 $b+c=2a\cos B$.

（1）证明：$A=2B$；

（2）若 $\triangle ABC$ 的面积 $S=\frac{a^2}{4}$，求角 A 的大小.

11. 某人在 M 汽车站的北偏西 20°的方向上的 A 处，观察到点 C 处有一辆汽车沿公路向 M 站行驶. 公路的走向是 M 站的北偏东 40°. 开始时，汽车到 A 的距离为 31 千米，汽车前进 20 千米至 B 点后，到 A 的距离缩短了 10 千米，问汽车还需行驶多远，才能到达 M 汽车站？

12.（2019·吉林大学附属中学月考）已知 $\triangle ABC$ 的内角 A，B，C 的对边分别为 a，b，c，$a^2-ab-2b^2=0$.

（1）若 $B=\frac{\pi}{6}$，求 C；

（2）若 $C=\frac{2\pi}{3}$，$c=14$，求 $S_{\triangle ABC}$.

微信公众号 教辅资料站

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

学习札记

章末检测

时间：60 分钟　满分：100 分

一、选择题（每小题 5 分，共 40 分）

1. 不解三角形，确定下列判断正确的是（　　）

A. $a=2\sqrt{2}, b=2\sqrt{3}, A=45°$，有一解

B. $a=5, b=4, A=60°$，有两解

C. $a=\sqrt{3}, b=\sqrt{6}, A=60°$，无解

D. $a=\sqrt{3}, b=\sqrt{2}, B=120°$，有一解

2. **（2018·广西南宁月考）**在$\triangle ABC$中，若$\angle A=60°$，$\angle B=45°$，$BC=3\sqrt{2}$，则 $AC=$（　　）

A. $4\sqrt{3}$　　B. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

C. $\sqrt{3}$　　D. $2\sqrt{3}$

3. **（2019·内蒙古乌兰察布市月考）**在$\triangle ABC$中，若$(a+b+c)(\sin A+\sin B-\sin C)=3a\sin B$，则角 $C=$（　　）

A. 60°　　B. 120°

C. 45°　　D. 30°

4. **（2018·全国卷Ⅱ）**在$\triangle ABC$中，$\cos\frac{C}{2}=\frac{\sqrt{5}}{5}$，$BC=1$，$AC=5$，则 $AB=$（　　）

A. $4\sqrt{2}$　　B. $\sqrt{30}$

C. $\sqrt{29}$　　D. $2\sqrt{5}$

5. **（2018·河北鸡泽县月考）**$\triangle ABC$的两边长分别为 2，3，其夹角的余弦值为$\frac{1}{3}$，则其外接圆的半径为（　　）

A. $\frac{9\sqrt{2}}{2}$　　B. $\frac{9\sqrt{2}}{4}$

C. $\frac{9\sqrt{2}}{8}$　　D. $9\sqrt{2}$

6. 若 $c=a\cos B$，$b=a\sin C$，则$\triangle ABC$是（　　）

A. 等腰三角形　　B. 等腰直角三角形

C. 直角三角形　　D. 等边三角形

7. 在$\triangle ABC$中，a 比 b 长 2，b 比 c 长 2，最大角的正弦值为$\frac{\sqrt{3}}{2}$，则$\triangle ABC$的面积是（　　）

A. $\frac{15\sqrt{3}}{4}$　　B. $\frac{15}{4}$

C. $\frac{21\sqrt{3}}{4}$　　D. $\frac{35\sqrt{3}}{4}$

8. 在$\triangle ABC$中，角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c，且$(b-c)\cdot(\sin B+\sin C)=(a-\sqrt{3}c)\cdot\sin A$，则角 B 的大小为（　　）

A. 30°　　B. 45°

C. 60°　　D. 120°

二、填空题（每小题 5 分，共 15 分）

9. **（2018·浙江卷）**在$\triangle ABC$中，角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c. 若 $a=\sqrt{7}, b=2, A=60°$，则 $\sin B=$_____，$c=$_____.

10. **（2018·湖南邵阳联考）**我国南宋著名数学家秦九韶发现了从三角形三边求三角形面积的“三斜公式”，设$\triangle ABC$三个内角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c，面积为 S，则“三斜求积”公式为 $S=\sqrt{\frac{1}{4}\left[a^2c^2-\left(\frac{a^2+c^2-b^2}{2}\right)^2\right]}$. 若 $a^2\sin C=4\sin A$，$(a+c)^2=12+b^2$，则用“三斜求积”公式求得$\triangle ABC$的面积为_____.

11. 已知$\triangle ABC$中，角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c，$\tan A:\tan B:\tan C=1:2:3$，则$\frac{b}{c}=$_____.

三、解答题（每小题 15 分，共 45 分）

12. **（2019·山西忻州月考）**在$\triangle ABC$中，内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c，满足 $\cos 2A-\cos 2B=2\cos\left(\frac{\pi}{6}-A\right)\cos\left(\frac{\pi}{6}+A\right)$.

(1)求角 B 的值；

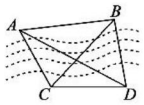
(2)若 $b=\sqrt{3}$，且 $b\leqslant a$，求 $a-\frac{1}{2}c$ 的取值范围.

微信公众号 教辅资料站

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

学习札记

13. 如图，要测量河对岸两点 A，B 之间的距离，选取相距 $\sqrt{3}$ km 的 C，D 两点，并测得 $\angle ACB=75°$，$\angle BCD=45°$，$\angle ADC=30°$，$\angle ADB=45°$，求 AB 之间的距离.



14. **(2018·北京卷)** 在 $\triangle ABC$ 中，$a=7$，$b=8$，$\cos B=-\frac{1}{7}$.

(1)求 A；

(2)求 AC 边上的高.

微信公众号
教辅资料站

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

学习札记

第二章　数　列

2.1　数　列

学习目标

1. 理解数列、数列的项、通项等基本概念；
2. 能从所给数列的若干项归纳出一个通项公式，逐步培养由特殊到一般的归纳、发现能力及整体观察的思维习惯；
3. 了解递推公式是给出数列的一种形式，能够根据数列的递推公式写出前几项.

1 基础知识点对点

知识点一　数列的通项公式

1. **(2019·河北邯郸月考)** 设数列为 $\sqrt{2}$，$\sqrt{5}$，$2\sqrt{2}$，$\sqrt{11}$，…，则 $4\sqrt{2}$ 是该数列的 (　　)

A. 第 9 项　　B. 第 10 项

C. 第 11 项　　D. 第 12 项

2. 设数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_n=\dfrac{4}{n^2+3n}$，试问 $\dfrac{1}{10}$ 和 $\dfrac{16}{27}$ 是不是它的项？如果是，是第几项？

知识点二　递推公式

3. **(2018·黑龙江哈尔滨期中)** 在数列 $\{a_n\}$ 中，若 $a_1=1$，$a_n=1+\dfrac{1}{a_{n-1}}(n\geqslant 2)$ 则 $a_3=$ (　　)

A. 1　　B. $\dfrac{13}{6}$

C. 2　　D. $\dfrac{3}{2}$

4. 数列 $\{a_n\}$ 中，$a_1=2$，$a_{n+1}=a_n+\dfrac{2}{n(n+1)}(n\in\mathbf{N}^*)$，则 $a_{10}=$ (　　)

A. 3.4　　B. 3.6

C. 3.8　　D. 4

知识点三　数列中函数问题

5. **(2018·河北张家口期中)** 已知数列 $\{a_n\}$，满足 $a_{n+1}=\dfrac{1}{1-a_n}$，若 $a_1=\dfrac{1}{2}$，则 $a_{2\,018}=$ (　　)

A. -1　　B. 2

C. $\dfrac{1}{2}$　　D. 1

6. 已知 $\{a_n\}$ 是递增数列，对任意的 $n(n\geqslant 1)$，都有 $a_n=n^2+\lambda n$ 恒成立，则实数 λ 的取值范围是_____.

2 课后拔高提能练

一、选择题

1. 若数列 $\{a_n\}$ 的通项公式是 $a_n=(-1)^n\cdot\dfrac{1}{2n+1}$，则 $a_{10}=$ (　　)

A. $\dfrac{1}{21}$　　B. $-\dfrac{1}{21}$

C. $\dfrac{1}{20}$　　D. $-\dfrac{1}{20}$

2. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1>0$，$\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=\dfrac{1}{2}$，则数列 $\{a_n\}$ 是 (　　)

A. 递增数列　　B. 递减数列

C. 摆动数列　　D. 不确定

3. 在数列 $\{a_n\}$ 中，$a_{n+1}=\dfrac{2a_n}{2+a_n}$ 对所有正整数 n 都成立，且 $a_7=\dfrac{1}{2}$，则 $a_5=$ (　　)

A. 1　　B. $\dfrac{2}{3}$

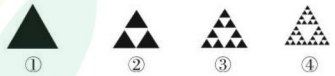
C. $\dfrac{2}{5}$　　D. -1

4. **(2019·江西赣州月考)** 已知数列 $\{a_n\}$ 中，$a_1=\dfrac{1}{2}$，$a_{n+1}=a_n+\dfrac{1}{n^2+3n+2}(n\in\mathbf{N}^*)$，则数列 $\{a_n\}$ 的通项为 (　　)

A. $a_n=\dfrac{1}{n+1}$　　B. $a_n=\dfrac{n}{n+1}$

C. $a_n=\dfrac{1}{2}+\dfrac{n-1}{n^2+n+2}$　　D. $a_n=\dfrac{n+1}{n+2}$

5. **(2018·云南姚安月考)** 如图，下列四个图形中，着色三角形的个数依次构成一个数列的前 4 项，则这个数列的一个通项公式为 (　　)



①　②　③　④

A. $a_n=3^{n-1}$　　B. $a_n=3^n$

C. $a_n=3^n-2n$　　D. $a_n=3^{n-1}+2n-3$

6. **(2018·湖南宁远期中)** 已知数列 $\{a_n\}$ 的首项为 $a_1=1$，且 $a_{n+1}=\dfrac{1}{2}a_n+\dfrac{1}{2}$，则此数列第 4 项是 (　　)

A. 1　　B. $\dfrac{1}{2}$

C. $\dfrac{3}{4}$　　D. $\dfrac{5}{8}$

微信公众号 教辅资料站

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

学习札记

二、填空题

7. 已知数列$\{a_n\}$满足 $a_1=-2$，$a_{n+1}=2+\dfrac{2a_n}{1-a_n}$，则 $a_6=$_____.

8. 已知数列$\{a_n\}$的通项公式为 $a_n=-2n^2+29n+3$，则$\{a_n\}$中的最大项是第_____项.

9. 数列$\{a_n\}$的前 n 项为 $1,-\dfrac{1}{3},\dfrac{1}{7},-\dfrac{1}{15},\cdots$，则 $a_8=$_____.

三、解答题

10. 已知数列$\{a_n\}$满足 $a_1=1$，$a_2=2$，$a_{n+2}=a_{n+1}+2a_n$，写出这个数列的前 6 项，由此猜想数列的一个通项公式，并把此数列用列表法和图象法表示.

11. 已知数列$\dfrac{4}{5},\dfrac{9}{10},\dfrac{16}{17},\dfrac{25}{26},\cdots,\dfrac{m^2}{m^2+1}(m\geqslant 7,m\in\mathbf{N}_+)$.

(1)写出这个数列的一个通项公式；

(2)判断 0.98 是否为这个数列中的项，若是，是第几项？

12. 已知数列$\{a_n\}$的通项公式是 $a_n=(n+1)\cdot\left(\dfrac{10}{11}\right)^n$，试问该数列$\{a_n\}$有没有最大项？若有，求出最大项和最大项的序号；若没有，请说明理由.

微信公众号
教辅资料站

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

学习札记

2.2　等差数列

2.2.1　等差数列

学习目标

1. 理解等差数列、等差数列的公差的概念，能根据等差数列的定义证明某数列是否为等差数列；
2. 理解等差中项的概念，能正确地应用等差中项的概念进行推理论证；
3. 掌握等差数列的一些性质，能灵活运用概念及性质解决一些应用问题.

1 基础知识点对点

知识点一　等差数列的通项公式

1. **(2018·云南沾益检测)** 设 $3,x,5$ 成等差数列，则 x 为 (　　)

A. 3　　B. 4

C. 5　　D. 6

2. **(2019·云南姚安月考)** 在等差数列 $\{a_n\}$ 中，已知 $a_1=\frac{1}{3}$，$a_2+a_5=4$，$a_n=35$，则 n 等于 (　　)

A. 50　　B. 51

C. 52　　D. 53

知识点二　等差数列的性质

3. **(2018·黑龙江大庆月考)** 等差数列 $\{a_n\}$ 中，若 $a_2+a_4+a_9+a_{11}=32$，则 $a_6+a_7=$ (　　)

A. 9　　B. 12

C. 15　　D. 16

4. 设 $\{a_n\}$ 是公差为正数的等差数列，若 $a_1+a_2+a_3=15$，$a_1a_2a_3=80$，则 $a_{11}+a_{12}+a_{13}=$ (　　)

A. 120　　B. 105

C. 90　　D. 75

知识点三　等差数列的判断与证明

5. 已知函数 $f(x)=\frac{3x}{x+3}$，在数列 $\{a_n\}$ 中，$a_n=f(a_{n-1})(n\geqslant 2,n\in\mathbf{N}_+)$.

(1)求证：$\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$ 是等差数列；

(2)若 $a_1=\frac{1}{2}$，求 $a_{2\,017}$ 的值.

2 课后拔高提能练

一、选择题

1. **(2019·黑龙江牡丹江月考)** 已知数列 $\{a_n\}$ 是等差数列，$a_2=3$，$a_6=7$，则 a_{11} 的值为 (　　)

A. 11　　B. 12

C. 13　　D. 10

2. **(2018·云南姚安月考)** 等差数列 $\{a_n\}$ 中，$a_1+a_8=10$，$a_{10}=6$，则 $a_{18}=$ (　　)

A. 8.5　　B. 8

C. 7.5　　D. 7

3. **(2018·广西南宁月考)** 在 $\triangle ABC$ 中，已知 A,B,C 成等差数列，且 $b=\sqrt{3}$，则 $\frac{a+b}{\sin A+\sin B}=$ (　　)

A. 2　　B. $\frac{1}{2}$

C. $\sqrt{3}$　　D. $\frac{\sqrt{3}}{3}$

4. 在数列 $\{a_n\}$ 中，$a_1=2$，$2a_{n+1}=2a_n+1$，则 a_{101} 的值为 (　　)

A. 49　　B. 50

C. 51　　D. 52

5. 已知数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n=3n-2(n\in\mathbf{N}_+)$，则 $a_3+a_6+a_9+a_{12}+a_{15}=$ (　　)

A. 120　　B. 125

C. 130　　D. 135

6. 下面关于公差 $d>0$ 的等差数列 $\{a_n\}$ 的四个命题：

p_1：数列 $\{a_n\}$ 是递增数列；

p_2：数列 $\{na_n\}$ 是递增数列；

p_3：数列 $\left\{\frac{a_n}{n}\right\}$ 是递增数列；

p_4：数列 $\{a_n+3nd\}$ 是递增数列.

其中正确命题为 (　　)

A. p_1,p_2　　B. p_3,p_4

C. p_2,p_3　　D. p_1,p_4

二、填空题

7. **(2018·北京卷)** 设 $\{a_n\}$ 是等差数列，且 $a_1=3$，$a_2+a_5=36$，则 $\{a_n\}$ 的通项公式为_____.

8. 设数列 $\{a_n\}$ 是公差不为零的等差数列，且 $a_{20}=22$，$|a_{11}|=|a_{51}|$，则 $a_n=$_____.

9. 如果有穷数列 $a_1,a_2,\cdots,a_m$（m 为正整数），满足条件：$a_1=a_m$，$a_2=a_{m-1}$，$\cdots$，$a_m=a_1$，那么称其为“对称”数列，例如数列 1,2,5,2,1 与 8,4,2,4,8 都是“对称”数列，已知在 21 项的“对称”数列 $\{c_n\}$ 中，$c_{11},c_{12},\cdots,c_{21}$ 是以 1 为首项，2 为公差的等差数列，则 $c_2=$_____.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

学习札记

三、解答题

10. 已知等差数列$\{a_n\}$的公差是正数，并且$a_3a_7=-12$，$a_4+a_6=-4$，求数列$\{a_n\}$的通项公式.

11. 两个等差数列 5，8，11，…和 3，7，11，…都有 100 项，问它们有多少个共同的项？

12. 设各项均为正数的无穷数列$\{a_n\}$和$\{b_n\}$满足：对任意$n\in\mathbf{N}_+$，都有 $2b_n=a_n+a_{n+1}$，且 $a_{n+1}^2=b_n\cdot b_{n+1}$.

(1)求证：$\{\sqrt{b_n}\}$是等差数列；

(2)设 $a_1=1$，$a_2=2$，求$\{a_n\}$和$\{b_n\}$的通项公式.

微信公众号
教辅资料站

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

学习札记

2.2.2　等差数列的前 n 项和

学习目标

1. 掌握等差数列的前 n 项和公式的推导，能灵活应用两种形式，即 $S_n=\frac{(a_1+a_n)n}{2}$ 和 $S_n=na_1+\frac{n(n-1)}{2}d$；
2. 掌握可以转化为等差数列的数列求和问题；
3. 会运用等差数列的相关知识解决与数列有关的应用问题.

1 基础知识点对点

知识点一　等差数列前 n 项和公式

1. **(2017·全国卷Ⅱ)** 记 S_n 为等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和. 若 $a_4+a_5=24$，$S_6=48$，则 $\{a_n\}$ 的公差为 (　　)

A. 1　　B. 2

C. 4　　D. 8

2. **(2018·江西赣州月考)** 已知等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，若 $a_4=18-a_5$，则 $S_8=$ (　　)

A. 18　　B. 36

C. 54　　D. 72

知识点二　等差数列前 n 项和的性质

3. 设 S_n 是等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和，若 $\frac{a_5}{a_3}=\frac{5}{9}$，则 $\frac{S_9}{S_5}=$ (　　)

A. 1　　B. 2

C. $\frac{9}{5}$　　D. $\frac{5}{9}$

4. 已知 $\{a_n\}$ 为等差数列，若 $\frac{a_{11}}{a_{10}}<-1$，且它的前 n 项和 S_n 有最大值，那么当 S_n 取得最小正值时，$n=$ (　　)

A. 11　　B. 17

C. 19　　D. 21

5. 数列 $\{a_n\}$ 是递减的等差数列，$\{a_n\}$ 的前 n 项和是 S_n，且 $S_6=S_9$，有以下四个结论①$a_8=0$；②若对任意 $n\in\mathbf{N}_+$，都有 $S_n\leqslant S_k$ 成立，则 k 的值等于 7 或 8；③存在正整数 k，使 $S_k=0$；④存在正整数 m，使 $S_m=S_{2m}$，其中所有正确结论的序号是 (　　)

A. ①②　　B. ①②③

C. ②③④　　D. ①②③④

知识点三　a_n 与 S_n 的关系

6. 已知数列 $\{a_n\}$ 前 n 项和是 S_n，$S_n=2n^2-3n+1$，那么数列的通项公式是_____.

2 课后拔高提能练

一、选择题

1. 已知等差数列 $\{a_n\}$ 的前 9 项的和为 27，$a_{10}=8$，则 $a_{100}=$ (　　)

A. 100　　B. 99

C. 98　　D. 97

2. 若 $\{a_n\}$ 为等差数列，S_n 是其前 n 项和，且 $S_{11}=\frac{22\pi}{3}$，则 $\tan a_6$ 的值为 (　　)

A. $\sqrt{3}$　　B. $-\sqrt{3}$

C. $\pm\sqrt{3}$　　D. $-\frac{\sqrt{3}}{3}$

3. **(2019·黑龙江大庆期中)** 已知等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，若 $a_2=4$，$S_4=22$，$a_n=28$，则 $n=$ (　　)

A. 3　　B. 7

C. 9　　D. 10

4. **(2018·全国卷Ⅰ)** 设 S_n 为等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和，若 $3S_3=S_2+S_4$，$a_1=2$，则 $a_5=$ (　　)

A. -12　　B. -10

C. 10　　D. 12

5. **(2018·北京丰台月考)** 在数列 $\{a_n\}$ 中，$a_{n+1}=a_n+2$，且 $a_1=1$，则 $\frac{1}{a_1a_2}+\frac{1}{a_2a_3}+\frac{1}{a_3a_4}+\cdots+\frac{1}{a_9a_{10}}=$ (　　)

A. $\frac{9}{19}$　　B. $\frac{18}{19}$

C. $\frac{10}{21}$　　D. $\frac{20}{21}$

6. **(2019·河北馆陶月考)** 一个只有有限项的等差数列，它的前 5 项的和为 34，最后 5 项的和为 146，所有项的和为 234，则它的第 7 项等于 (　　)

A. 22　　B. 21

C. 19　　D. 18

二、填空题

7. 已知某等差数列 $\{a_n\}$ 共有 20 项，所有奇数项之和为 20，所有偶数项之和为 30，则其公差 $d=$_____.

8. **(2018·黑龙江哈尔滨月考)** 在等差数列 $\{a_n\}$ 中，$a_3^2+a_8^2+2a_3a_8=9$，且 $a_n<0$，则 $S_{10}=$_____.

9. 设等差数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_2=7$，$a_4=3$，S_n 是数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和，则使得 $S_n>0$ 成立的最大的自然数 n 是_____.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

学习札记

三、解答题

10.（2018·全国卷Ⅱ）记 S_n 为等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和，已知 $a_1=-7$，$S_3=-15$.

(1)求 $\{a_n\}$ 的通项公式；

(2)求 S_n，并求 S_n 的最小值.

11.已知数列 $\{a_n\}$ 中，$a_n=2-\frac{1}{a_{n-1}}(n\geqslant 2,\ n\in\mathbf{N}_+)$.

(1)若 $a_1=\frac{3}{5}$，数列 $\{b_n\}$ 满足 $b_n=\frac{1}{a_n-1}(n\in\mathbf{N}_+)$，求证：数列 $\{b_n\}$ 是等差数列；

(2)若 $a_1=\frac{3}{5}$，求数列 $\{a_n\}$ 中的最大项与最小项，并说明理由.

12.数列 $\{a_n\}$ 中，$a_1=8$，$a_4=2$，且满足 $a_{n+2}-2a_{n+1}+a_n=0(n\in\mathbf{N}_+)$.

(1)求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；

(2)设 $S_n=|a_1|+|a_2|+\cdots+|a_n|$，求 S_n；

(3)设 $b_n=\frac{1}{n(12-a_n)}(n\in\mathbf{N}_+)$，$T_n=b_1+b_2+\cdots+b_n(n\in\mathbf{N}_+)$，是否存在最大的整数 m，使得对任意 $n\in\mathbf{N}_+$，均有 $T_n>\frac{m}{32}$ 成立？若存在，求出 m 的值；若不存在，说明理由.

微信公众号
教辅资料站

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

学习札记

2.3　等比数列

2.3.1　等比数列

学习目标

1. 理解等比数列的概念，掌握等比数列的通项公式及其应用；
2. 理解等比中项，掌握等比数列的一些性质，能运用性质来进行运算，简化解题过程；
3. 会判定等比数列，了解等比数列在实际中的应用.

1 基础知识点对点

知识点一　等比数列的通项公式

1. **(2019·北京丰台月考)** 等比数列$\{a_n\}$中，$a_2=1$，$a_4=2$，则$a_6=$　　(　　)

A. $2\sqrt{2}$　　B. 4

C. $4\sqrt{2}$　　D. 8

2. 已知等比数列$\{a_n\}$为递增数列，且$a_5^2=a_{10}$，$2(a_n+a_{n+2})=5a_{n+1}$，则数列$\{a_n\}$的通项公式$a_n=$(　　)

A. 2^n　　B. 3^n

C. 2^{-n}　　D. 3^{-n}

知识点二　等比数列的性质

3. 在公比大于1的等比数列$\{a_n\}$中，$a_3a_7=72$，$a_2+a_8=27$，则$a_{12}=$　　(　　)

A. 96　　B. 64

C. 72　　D. 48

4. **(2018·安徽滁州期中)** 已知-2，a_1，a_2，-8成等差数列，-2，b_1，b_2，b_3，-8成等比数列，则$\frac{a_2-a_1}{b_2}$等于　　(　　)

A. $\frac{1}{4}$　　B. $-\frac{1}{2}$

C. $\frac{1}{2}$　　D. $-\frac{1}{2}$或$\frac{1}{2}$

知识点三　等比数列的判定

5. 数列$\{a_n\}$满足：$a_{n+1}=\lambda a_n-1(n\in\mathbf{N}^*,\lambda\in\mathbf{R}$且$\lambda\neq0)$，若数列$\{a_n-1\}$是等比数列，则$\lambda$的值等于　　(　　)

A. 1　　B. -1

C. $\frac{1}{2}$　　D. 2

6. 已知数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，$S_n=\frac{1}{3}(a_n-1)$$(n\in\mathbf{N}_+)$.

(1)求a_1，a_2；

(2)求证：数列$\{a_n\}$是等比数列.

2 课后拔高提能练

一、选择题

1. **(2018·黑龙江牡丹江月考)** 在等比数列$\{a_n\}$中，$a_2=8$，$a_5=64$，则公比q为　　(　　)

A. 2　　B. 3

C. 4　　D. 8

2. **(2018·吉林延边月考)** 已知各项均为正数的等比数列$\{a_n\}$，$a_1\cdot a_9=16$，则$a_2\cdot a_5\cdot a_8$的值为　　(　　)

A. 16　　B. 32

C. 48　　D. 64

3. **(2019·安徽无为月考)** 已知等比数列$\{a_n\}$，且$a_6+a_8=4$，则$a_8(a_4+2a_6+a_8)$的值为　　(　　)

A. 2　　B. 4

C. 8　　D. 16

4. **(2017·全国卷Ⅲ)** 等差数列$\{a_n\}$的首项为1，公差不为0. 若a_2，a_3，a_6成等比数列，则$\{a_n\}$前6项的和为　　(　　)

A. -24　　B. -3

C. 3　　D. 8

5. 设S_n是公差不为0的等差数列$\{a_n\}$的前n项和，且S_1，S_2，S_4成等比数列，则$\frac{a_2}{a_1}$等于　　(　　)

A. 1　　B. 2

C. 3　　D. 4

微信公众号 教辅资料站

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

学习札记

6.（2019·河南鲁山月考）各项为正的等比数列$\{a_n\}$中，a_4与a_{14}的等比中项为$2\sqrt{2}$，则$\log_2 a_7+\log_2 a_{11}$的值为（　　）

A. 4　　B. 3

C. 2　　D. 1

二、填空题

7. 已知数列$\{a_n\}$为等比数列，若$a_4+a_6=10$，则$a_7(a_1+2a_3)+a_3a_9$的值为_____.

8.（2018·江苏苏州调研）已知等比数列$\{a_n\}$中，$a_3=2$，$a_4a_6=16$，则$\frac{a_7-a_9}{a_3-a_5}=$_____.

9. 已知等差数列$\{a_n\}$的公差为3，从$\{a_n\}$中取出部分项（不改变顺序）a_1，a_4，a_{10}，…组成等比数列，则该数列的公比是_____.

三、解答题

10. 在各项均为负数的数列$\{a_n\}$中，已知$2a_n=3a_{n+1}$，且$a_2\cdot a_5=\frac{8}{27}$.

(1)求证：$\{a_n\}$是等比数列，并求出通项公式；

(2)试问$-\frac{16}{81}$是否为该数列的项；若是，是第几项？若不是，请说明理由.

11.(1)等差数列$\{a_n\}$中，$a_1=10$，且a_3，a_6，a_{10}成等比数列，求数列$\{a_n\}$的前20项的和S_{20}；

(2)已知等比数列$\{b_n\}$中，各项都是正数，$b_4=1$，且b_6，b_7，$\frac{3}{4}b_8$成等差数列，求数列$\{b_n\}$的通项公式.

12. 已知数列$\{a_n\}$及等差数列$\{b_n\}$，若$a_1=3$，$a_n=\frac{1}{2}a_{n-1}+1(n\geqslant 2)$，$a_1=b_2$，$2a_3+a_2=b_4$.

(1)证明：数列$\{a_n-2\}$为等比数列；

(2)求数列$\{b_n\}$的通项公式.

微信公众号
教辅资料站

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

学习札记

2.3.2　等比数列的前 n 项和

学习目标

1. 理解等比数列前 n 项和公式的推导过程，掌握等比数列的前 n 项和公式，即 $S_n=\begin{cases}na_1,(q=1),\\ \dfrac{a_1(1-q^n)}{1-q},(q\neq1);\end{cases}$
2. 掌握能转化为等比数列的数列求和问题，会用裂项相消法、错位相减法、倒序相加法求和.

1 基础知识点对点

知识点一　等比数列前 n 项和

1. **(2018·广西南宁月考)** 等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，若 $a_n>0$，$q>1$，$a_3+a_5=20$，$a_2\cdot a_6=64$，则 $S_5=$ (　　)

A. 31　　B. 36

C. 42　　D. 48

2. **(2017·江苏卷)** 等比数列 $\{a_n\}$ 的各项均为实数，其前 n 项的和为 S_n，已知 $S_3=\dfrac{7}{4}$，$S_6=\dfrac{63}{4}$，则 $a_8=$ _____.

知识点二　等比数列前 n 项和的性质

3. **(2018·黑龙江大庆月考)** 设等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，若 $\dfrac{S_6}{S_3}=7$，则 $\dfrac{S_9}{S_6}=$ (　　)

A. 2　　B. $\dfrac{7}{3}$

C. $\dfrac{13}{4}$　　D. $\dfrac{43}{7}$

4. 等比数列 $\{a_n\}$ 共有 $2n+1$ 项，奇数项之积为 100，偶数项之积为 120，则 a_{n+1} 为 (　　)

A. $\dfrac{6}{5}$　　B. $\dfrac{5}{6}$

C. 20　　D. 110

知识点三　求数列前 n 项和的常用方法

5. 1，$1+2$，$1+2+2^2$，$1+2+2^2+2^3$，…，$1+2+2^2+\cdots+2^{n-1}$ 的前 n 项和 S_n 等于 (　　)

A. 2^n　　B. 2^n-n

C. $2^{n+1}-n-2$　　D. $n-2^n$

6. **(2017·天津卷)** 已知 $\{a_n\}$ 为等差数列，前 n 项和为 $S_n(n\in\mathbf{N}^*)$，$\{b_n\}$ 是首项为 2 的等比数列，且公比大于 0，$b_2+b_3=12$，$b_3=a_4-2a_1$，$S_{11}=11b_4$.

(1)求 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 的通项公式；

(2)求数列 $\{a_{2n}b_n\}$ 的前 n 项和 $(n\in\mathbf{N}^*)$.

2 课后拔高提能练

一、选择题

1. 已知等比数列 $\{a_n\}$ 的公比 $q=2$，其前 4 项和 $S_4=60$，则 a_2 等于 (　　)

A. 6　　B. 8

C. -6　　D. -8

2. **(2019·河南长葛质检)** 已知 $\{a_n\}$ 为等比数列，S_n 是它的前 n 项和，若 $a_2a_3=2a_1$，且 a_4 与 $2a_7$ 的等差中项为 $\dfrac{5}{4}$，则 $S_4=$ (　　)

A. 29　　B. 30

C. 31　　D. 33

3. 等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，且 $4a_1$，$2a_2$，a_3 成等差数列，若 $a_1=1$，则 $S_4=$ (　　)

A. 4　　B. 10

C. 15　　D. 16

4. **(2018·安徽池州月考)** 设等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，则下列不等式中一定成立的是 (　　)

A. $a_1a_3>0$　　B. $a_1+a_3>0$

C. $S_1+S_3<0$　　D. $S_1S_3<0$

5. 等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，已知 $S_4=a_2+a_3+9a_1$，$a_5=32$，则 $a_1=$ (　　)

A. $-\dfrac{1}{2}$　　B. $\dfrac{1}{2}$

C. 2　　D. -2

6. 数列 $1\dfrac{1}{2}$，$3\dfrac{1}{4}$，$5\dfrac{1}{8}$，$7\dfrac{1}{16}$，…，$(2n-1)+\dfrac{1}{2^n}$，… 的前 n 项和 S_n 的值等于 (　　)

A. $n^2+1-\dfrac{1}{2^n}$　　B. $2n^2-n+1-\dfrac{1}{2^n}$

C. $n^2+1-\dfrac{1}{2^{n-1}}$　　D. $n^2-n+1-\dfrac{1}{2^n}$

二、填空题

7. 在等比数列 $\{a_n\}$ 中，$a_1=2$，$a_4=16$，则数列 $\{a_n\}$ 的通项公式 $a_n=$ _____，设 $b_n=\log_2a_n$，则数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 $S_n=$ _____.

8. 设数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 $S_n(n\in\mathbf{N}_+)$. 关于数列 $\{a_n\}$ 有下列三个命题：

①若 $\{a_n\}$ 既是等差数列又是等比数列，则 $a_n=a_{n+1}(n\in\mathbf{N}_+)$；

②若 $S_n=an^2+bn(a,b\in\mathbf{R})$，则 $\{a_n\}$ 是等差数列；

③若 $S_n=1-(-1)^n$，则 $\{a_n\}$ 是等比数列.

这些命题中，真命题的序号是 _____.

9. 数列 $\{a_n\}$ 的各项都是整数，满足 $a_3=-1$，$a_7=4$，前 6 项依次成等差数列，从第 5 项起依次成等比数列，则数列 $\{a_n\}$ 的前 10 项的和是 _____.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

学习札记

三、解答题

10.（2017·北京卷）已知等差数列$\{a_n\}$和等比数列$\{b_n\}$满足$a_1=b_1=1$，$a_2+a_4=10$，$b_2b_4=a_5$.

(1)求$\{a_n\}$的通项公式；

(2)求和：$b_1+b_3+b_5+\cdots+b_{2n-1}$.

11.（2018·北京卷）设$\{a_n\}$是等差数列，且$a_1=\ln 2$，$a_2+a_3=5\ln 2$.

(1)求$\{a_n\}$的通项公式；

(2)求$e^{a_1}+e^{a_2}+\cdots+e^{a_n}$.

12. 设数列$\{b_n\}$的前n项和为S_n，且$b_n=2-2S_n$，数列$\{a_n\}$为等差数列，且$a_5=14$，$a_7=20$.

(1)求数列$\{b_n\}$的通项公式；

(2)若$c_n=a_n\cdot b_n$，$n=1,2,3,\cdots$，T_n为数列$\{c_n\}$的前n项和. 求证：$T_n<\frac{7}{2}$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

学习札记

章末检测

时间：60 分钟　满分：100 分

一、选择题（每小题 5 分，共 40 分）

1.（2019·河北馆陶月考）数列 $1,\frac{1}{3},\frac{1}{5},\frac{1}{7},\cdots$ 的一个通项公式是（　　）

A. $a_n=\frac{1}{n}$　　B. $a_n=\frac{1}{2n-1}$

C. $a_n=\frac{1}{n+2}$　　D. $a_n=\frac{1}{2n+1}$

2.（2019·云南姚安月考）如果等差数列 $\{a_n\}$ 中，$a_3+a_4+a_5=12$，那么 $a_1+a_2+\cdots+a_7=$（　　）

A. 14　　B. 21

C. 28　　D. 35

3.（2018·广西陆川月考）等差数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=1$，$a_2+a_3=3$，则 $a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_6+a_7=$（　　）

A. 7　　B. 14

C. 21　　D. 28

4. 设 $\{a_n\}$ 是首项为 a_1，公差为 -1 的等差数列，S_n 为其前 n 项和，若 S_1,S_2,S_4 成等比数列，则 $a_1=$（　　）

A. 2　　B. -2

C. $\frac{1}{2}$　　D. $-\frac{1}{2}$

5. 已知等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，$a_1=-11$，$a_5+a_6=-4$，S_n 取最小值时 n 的值为（　　）

A. 6　　B. 7

C. 8　　D. 9

6.（2018·黑龙江大庆期中）已知等比数列 $\{a_n\}$ 中，各项都是正数，且 $a_1,\frac{1}{2}a_3,2a_2$ 成等差数列，则 $\frac{a_8+a_9}{a_7+a_8}=$（　　）

A. $1+\sqrt{2}$　　B. $1-\sqrt{2}$

C. $3+2\sqrt{2}$　　D. $3-2\sqrt{2}$

7.（2019·河南长葛质检）已知等差数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_5=3$，$a_7=-3$，则数列 $\{|a_n|\}$ 的前 10 项和为（　　）

A. 15　　B. 75

C. 45　　D. 60

8. 在正项数列 $\{a_n\}$ 中，$a_1=1$，$a_2=2$，$2a_n^2=a_{n+1}^2+a_{n-1}^2$ $(n\geqslant 2)$，则 a_6 等于（　　）

A. 16　　B. 8

C. $2\sqrt{2}$　　D. 4

二、填空题（每小题 5 分，共 15 分）

9.（2018·全国卷Ⅰ）记 S_n 为数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和，若 $S_n=2a_n+1$，则 $S_6=$_____.

10. 数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 $S_n=n^2+n+1$，$b_n=(-1)^n a_n(n\in\mathbf{N}_+)$，则数列 $\{b_n\}$ 的前 50 项和为_____.

11.（2018·安徽滁州期中）已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $na_{n+1}=(n+1)a_n$，$a_1=2$，则 $a_n=$_____.

三、解答题（每小题 15 分，共 45 分）

12. 数列 $\{a_n\}$ 中，$a_1=2$，$a_{n+1}=a_n+cn$（c 是常数，$n=1,2,3,\cdots$），且 a_1,a_2,a_3 成公比不为 1 的等比数列.

(1) 求 c 的值；

(2) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

学习札记

13.（2018·河北鸡泽月考）数列$\{a_n\}$中，$a_1=\frac{1}{3}$，前n项和S_n满足$S_{n+1}-S_n=\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}(n\in\mathbf{N}^*)$.

(1)求数列$\{a_n\}$的通项公式a_n以及前n项和S_n；

(2)若S_1，$t(S_1+S_2)$，$3(S_2+S_3)$成等差数列，求实数t的值.

14.（2018·浙江卷）已知等比数列$\{a_n\}$的公比$q>1$，且$a_3+a_4+a_5=28$，a_4+2是a_3，a_5的等差中项. 数列$\{b_n\}$满足$b_1=1$，数列$\{(b_{n+1}-b_n)a_n\}$的前n项和为$2n^2+n$.

(1)求q的值；

(2)求数列$\{b_n\}$的通项公式.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

学习札记

第三章　不等式

3.1　不等关系与不等式

学习目标

1. 了解现实生活中存在的不等关系，了解不等式与不等式组的实际背景，会从实际问题中找出不等关系；
2. 掌握不等式的性质，能运用不等式的性质判断命题的真假，比较数或式的大小，求代数式的取值范围等.

1 基础知识点对点

知识点一　比较两数(式)的大小

1. 已知 a,b 为实数，且 $a\neq b,a<0$，则 a 与 $2b-\frac{b^2}{a}$ 的大小关系为_____.

2. 已知 $a>0,b>0$，比较 a^ab^b 与 a^bb^a 的大小.

知识点二　不等式的基本性质

3. **(2019·黑龙江伊春二中月考)** 下列不等式关系正确的是 (　　)

A. 若 $a>b$，则 $a-c>b-c$

B. 若 $a>b$，则 $\frac{a}{c}>\frac{b}{c}$

C. 若 $ac>bc$，则 $a>b$

D. 若 $a>b$，则 $ac^2>bc^2$

知识点三　不等式的综合应用

4. **(2018·山西忻州月考)** 若 x,y 满足 $\begin{cases}1<x<6,\\2<y<8,\end{cases}$ 则 $\frac{x}{y}$ 的取值范围是_____.

5. 已知 $a>b>c$，求证：$a^2b+b^2c+c^2a>ab^2+bc^2+ca^2$.

2 课后拔高提能练

一、选择题

1. **(2019·吉林梅河口月考)** 若 $a<b<0$，则下列不等式不能成立的是 (　　)

A. $\frac{1}{a-b}>\frac{1}{a}$　　B. $\frac{1}{a}>\frac{1}{b}$

C. $|a|>|b|$　　D. $a^2>b^2$

2. 若 $a<1,b>1$，那么下列命题中正确的是 (　　)

A. $\frac{1}{a}>\frac{1}{b}$　　B. $\frac{b}{a}>1$

C. $a^2>b^2$　　D. $ab<a+b-1$

3. **(2018·江西吉安期中)** a,b 是任意实数，且 $a>b$，则下列结论正确的是 (　　)

A. $a^2>b^2$　　B. $\frac{b}{a}<1$

C. $\lg(a-b)>\lg\frac{1}{a-b}$　　D. $4^{-a}<4^{-b}$

4. **(2018·新疆石河子月考)** 设 $x<a<0$，则下列不等式一定成立的是 (　　)

A. $x^2<ax<a^2$　　B. $x^2>ax>a^2$

C. $x^2<a^2<ax$　　D. $x^2>a^2>ax$

5. 若不等式 $x^2+2x+a\geqslant-y^2-2y$ 对于任意实数 x,y 都成立，则实数 a 的取值范围是 (　　)

A. $a\geqslant0$　　B. $a\geqslant1$

C. $a\geqslant2$　　D. $a\geqslant3$

6. **(2017·山东卷)** 若 $a>b>0$，且 $ab=1$，则下列不等式成立的是 (　　)

A. $a+\frac{1}{b}<\frac{b}{2^a}<\log_2(a+b)$

B. $\frac{b}{2^a}<\log_2(a+b)<a+\frac{1}{b}$

C. $a+\frac{1}{b}<\log_2(a+b)<\frac{b}{2^a}$

D. $\log_2(a+b)<a+\frac{1}{b}<\frac{b}{2^a}$

二、填空题

7. 若 α,β 满足 $-\frac{\pi}{2}<\alpha<\beta<\frac{\pi}{2}$，则 $2\alpha-\beta$ 的取值范围是_____.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

学习札记

8. 下列不等式：①$a^2+3>2a$；②$a^2+b^2>2(a-b-1)$；③$x^2+y^2>xy$. 其中恒成立的不等式有_____.

9. 已知实数 a,b,c 满足 $b+c=6-4a+3a^2$，$c-b=4-4a+a^2$，则 a,b,c 的大小关系是_____.

三、解答题

10. 若 $a>b>0$，$c<d<0$，$e<0$.

求证：$\frac{e}{(a-c)^2}>\frac{e}{(b-d)^2}$.

11. 在等比数列 $\{a_n\}$ 和等差数列 $\{b_n\}$ 中，$a_1=b_1>0$，$a_3=b_3>0$，$a_1\neq a_3$，试比较 a_5 与 b_5 的大小.

12. 已知函数 $f(x)=ax^2-c$，$-4\leqslant f(1)\leqslant -1$，$-1\leqslant f(2)\leqslant 5$，求 $f(3)$ 的取值范围.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

学习札记

3.2　均值不等式

学习目标

1. 理解并掌握基本不等式及其推导过程，明确均值不等式成立的条件；
2. 能利用均值不等式证明不等式，掌握利用均值不等式求函数最值的基本方法.

1 基础知识点对点

知识点一　利用均值不等式比较大小

1. 若 $x>0$，$y>0$，$x+y\leqslant 4$，则下列不等式中恒成立的是（　　）

A. $\dfrac{1}{x+y}\leqslant\dfrac{1}{4}$　　B. $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}\geqslant 1$

C. $\sqrt{xy}\geqslant 2$　　D. $\dfrac{1}{xy}\geqslant 1$

知识点二　利用均值不等式求最值

2. **(2018·黑龙江大庆期中)** 下列各函数中，最小值为2的是（　　）

A. $y=x+\dfrac{1}{x}$

B. $y=\sin x+\dfrac{1}{\sin x}$，$x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$

C. $y=\dfrac{x^2+3}{\sqrt{x^2+2}}$

D. $y=\sqrt{x}+\dfrac{1}{\sqrt{x}}$

3. **(2018·安徽滁州期中)** 设 $a>0$，$b>0$. 若3是 3^a 与 3^b 的等比中项，则 $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}$ 的最小值为（　　）

A. 4　　B. 2

C. $\dfrac{1}{2}$　　D. $\dfrac{1}{4}$

4. **(2017·天津卷)** 若 $a,b\in\mathbf{R}$，$ab>0$，则 $\dfrac{a^4+4b^4+1}{ab}$ 的最小值为_____.

知识点三　均值不等式的综合应用

5. 利用基本不等式求最值，下列运用正确的是（　　）

A. $y=|x|^2+\dfrac{4}{|x|}\geqslant 2\sqrt{|x|^2\cdot\dfrac{4}{|x|}}=4\sqrt{|x|}\geqslant 0$

B. $y=\sin x+\dfrac{4}{\sin x}\geqslant 2\sqrt{\sin x\cdot\dfrac{4}{\sin x}}=4$（$x$ 为锐角）

C. 已知 $ab\neq 0$，$\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{a}\geqslant 2\sqrt{\dfrac{a}{b}\cdot\dfrac{b}{a}}=2$

D. $y=3^x+\dfrac{4}{3^x}\geqslant 2\sqrt{3^x\cdot\dfrac{4}{3^x}}=4$

6. 已知 a,b,c,d 都是实数，且 $a^2+b^2=1$，$c^2+d^2=1$，求证：$|ac+bd|\leqslant 1$.

2 课后拔高提能练

一、选择题

1. **(2019·安徽池州月考)** 设 $a>b>0$，则下列不等式中一定成立的是（　　）

A. $\sqrt{ab}<\dfrac{a+b}{2}$　　B. $0<\dfrac{a}{b}<1$

C. $a-b<0$　　D. $ab>a+b$

2. 若正数 a，b 满足 $ab=a+b+3$，则 ab 的取值范围是（　　）

A. $[9,+\infty)$　　B. $[6,+\infty)$

C. $(0,9]$　　D. $(0,6)$

3. 已知 $a>0$，$b>0$，a，b 的等差中项是 $\dfrac{1}{2}$，且 $\alpha=a+\dfrac{1}{a}$，$\beta=b+\dfrac{1}{b}$，则 $\alpha+\beta$ 的最小值是（　　）

A. 3　　B. 4

C. 5　　D. 6

4. 若正数 x,y 满足 $x+y=2$，则 $\dfrac{1}{xy}$ 的最小值为（　　）

A. 1　　B. 2

C. 3　　D. 4

5. 已知 $x>0$，$y>0$，$\lg 2^x+\lg 8^y=\lg 2$，则 $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{3y}$ 的最小值是（　　）

A. 2　　B. $2\sqrt{2}$　　C. 4　　D. $2\sqrt{3}$

6. 下列不等式一定成立的是（　　）

A. $\lg\left(x^2+\dfrac{1}{4}\right)>\lg x\ (x>0)$

B. $x^2+1\geqslant 2|x|$

C. $a+b\geqslant 2\sqrt{ab}$

D. $\sqrt{\dfrac{a^2+b^2}{2}}>\dfrac{a+b}{2}$

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

学习札记

二、填空题

7.（2018·甘肃武威月考）已知 $x>0,y>0$，且 $2x+3y=6$，则 xy 的最大值是_____.

8.（2018·河南鲁山月考）已知 $x>0,y>0$，且 $\frac{2}{x}+\frac{1}{y}=1$，若 $x+2y>m^2+2m$ 恒成立，则实数 m 的取值范围是_____.

9.（2018·天津卷）已知 $a,b\in\mathbf{R}$，且 $a-3b+6=0$，则 $2^a+\frac{1}{8^b}$ 的最小值为_____.

三、解答题

10. 已知正数 a,b,x,y 满足 $a+b=10$，$\frac{a}{x}+\frac{b}{y}=1$，$x+y$ 的最小值为 18，求 a,b 的值.

11.（1）设 $0<x<\frac{3}{2}$，求函数 $y=4x(3-2x)$ 的最大值；

（2）已知 x,y 都是正实数，且 $x+y-3xy+5=0$，求 xy 的最小值.

12. 已知 a,b,c 均为正数，且 $a+b+c=1$，求证：

（1）$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\geqslant 9$；

（2）$\left(\frac{1}{a}-1\right)\left(\frac{1}{b}-1\right)\left(\frac{1}{c}-1\right)\geqslant 8$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

学习札记

3.3　一元二次不等式及其解法

学习目标

1. 理解一元二次不等式、二次函数、一元二次方程之间的关系；
2. 掌握一元二次不等式的解法；
3. 了解可化为一元二次不等式的复杂不等式的解法.

1 基础知识点对点

知识点一　一元二次不等式的解法

1. **(2017·山东卷)**设函数 $y=\sqrt{4-x^2}$ 的定义域为 A，函数 $y=\ln(1-x)$ 的定义域为 B，则 $A\cap B=$(　　)

A. $(1,2)$　　B. $(1,2]$

C. $(-2,1)$　　D. $[-2,1)$

2. **(2018·江西吉安期中)**不等式 $\dfrac{x-1}{x^2-x-30}\geqslant 0$ 的解集是_____.

知识点二　含参数一元二次不等式的解法

3. 已知集合 $A=\{x|x^2-3x-4<0\}$，$B=\{x|(x-m)\cdot[x-(m+2)]>0\}$，若 $A\cup B=\mathbf{R}$，则实数 m 的取值范围是(　　)

A. $(-1,+\infty)$　　B. $(-\infty,2)$

C. $(-1,2)$　　D. $[-1,2]$

4. **(2018·山西忻州月考)**若 $a<1$，解关于 x 的不等式 $\dfrac{ax}{x-2}>1$.

知识点三　一元二次不等式的综合应用

5. 已知函数 $f(x)=x^2+ax+b(a,b\in\mathbf{R})$ 的值域为 $[0,+\infty)$，若关于 x 的不等式 $f(x)<c$ 的解集为 $(m,m+8)$，则实数 c 的值为_____.

6. **(2019·安徽滁州月考)**已知函数 $f(x)=mx^2-mx-1$.

(1)若对于 $x\in\mathbf{R}$，$f(x)<0$ 恒成立，求实数 m 的取值范围；

(2)若对于 $m\in\left[\dfrac{1}{2},2\right]$，$f(x)<0$ 恒成立，求实数 x 的取值范围.

2 课后拔高提能练

一、选择题

1. **(2018·新疆石河子月考)**不等式 $2x^2-x-1>0$ 的解集是(　　)

A. $\left(-\dfrac{1}{2},1\right)$

B. $(1,+\infty)$

C. $(-\infty,1)\cup(2,+\infty)$

D. $\left(-\infty,-\dfrac{1}{2}\right)\cup(1,+\infty)$

2. 不等式 $\dfrac{x+5}{(x-1)^2}\geqslant 2$ 的解集是(　　)

A. $\left[-3,\dfrac{1}{2}\right]$　　B. $\left[-\dfrac{1}{2},3\right]$

C. $\left[\dfrac{1}{2},1\right)\cup(1,3]$　　D. $\left[-\dfrac{1}{2},1\right)\cup(1,3]$

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

学习札记

3.（2018·山东实验中学一诊）不等式$-x^2+|x|+2<0$的解集是（　　）

A. $\{x|-2<x<2\}$

B. $\{x|x<-2$ 或 $x>2\}$

C. $\{x|-1<x<1\}$

D. $\{x|x<-1$ 或 $x>1\}$

4.（2019·河北鸡泽月考）对任意$a\in[0,1]$，函数$f(x)=x^2+(a-4)x+4-2a$的值恒大于零，则x的取值范围是（　　）

A. $1<x<3$　　B. $x<1$ 或 $x>3$

C. $1<x<2$　　D. $x<1$ 或 $x>2$

5. 如果方程$x^2+(m-1)x+m^2-2=0$的两个实根一个小于-1，另一个大于1，那么实数m的取值范围是（　　）

A. $(-\sqrt{2},\sqrt{2})$　　B. $(-2,1)$

C. $(0,1)$　　D. $(-2,0)$

6. 在$\mathbf{R}$上定义运算$\otimes$：$x\otimes y=x(1-y)$，若不等式$(x-a)\otimes(x+a)<1$对任意实数x成立，则（　　）

A. $-1<a<1$　　B. $0<a<2$

C. $-\frac{1}{2}<a<\frac{3}{2}$　　D. $-\frac{3}{2}<a<\frac{1}{2}$

二、填空题

7. 二次函数$y=ax^2+bx+c(x\in\mathbf{R})$的部分对应值表如下：

x	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
y	6	0	-4	-6	-6	-4	0	6

则不等式$ax^2+bx+c\leqslant 0$的解集是_____.

8. 关于x的不等式$ax^2-2ax+2a+3>0$的解集为$\mathbf{R}$，则实数a的取值范围为_____.

9. 若一元二次不等式$mx^2+(2-m)x-2>0$恰有3个整数解，则实数m的取值范围是_____.

三、解答题

10. 求下列不等式的解集.

(1) $2x^2+7x+3>0$；

(2) $-x^2+8x-3>0$；

(3) $-4x^2+18x-\frac{81}{4}\geqslant 0$；

(4) $-\frac{1}{2}x^2+3x-5>0$；

(5) $-2x^2+3x-2<0$.

11.（2019·安徽池州月考）已知函数$f(x)=x^2+ax+6$.

(1) 当$a=5$时，解不等式$f(x)<0$；

(2) 若不等式$f(x)>0$的解集为$\mathbf{R}$，求实数a的取值范围.

12. 解关于x的不等式$(x-2)(ax-2)>0(a\in\mathbf{R})$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

学习札记

3.4　不等式的实际应用

学习目标

1. 能够应用二次不等式解决一些实际问题；
2. 能够应用均值不等式解决一些实际问题.

1 基础知识点对点

知识点一　一元二次不等式模型

1. 若产品的总成本 y(万元)与产量 x(台)之间的函数关系式是 $y=3\ 000+20x-0.1x^2(0<x<240)$，若每台产品的售价为 25 万元，则生产者不亏本(销售收入不小于总成本)时的最低产量是　　(　　)

A. 100 台　　B. 120 台

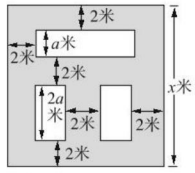
C. 150 台　　D. 18 台

2. 某商人如果将进货单价为 8 元的商品按每件 10 元出售，每天可销售 100 件，现在他采用提高售价，减少进货量的办法增加利润. 已知这种商品每件销售价提高 1 元，销售量就要减少 10 件，问他将销售价每件定为多少元时，才能使得每天所赚的利润最大. 销售价定为多少元时，才能保证每天所赚的利润在 300 元以上？

知识点二　利用均值不等式求最值

3. **(2017·江苏卷)** 某公司一年购买某种货物 600 吨，每次购买 x 吨，运费为 6 万元/次，一年的总存储费用为 $4x$ 万元. 要使一年的总运费与总存储费用之和最小，则 x 的值是_____.

4. **(2018·安徽滁州期中)** 桑基鱼塘是某地一种独具地方特色的农业生产形式，某研究单位打算开发一个桑基鱼塘项目，该项目准备购置一块 1 800 平方米的矩形地块，中间挖出三个矩形池塘养鱼，挖出的泥土堆在池塘四周形成基围(阴影部分所示)种植桑树，池塘周围的基围宽均为 2 米，如图，设池塘所占的总面积为 S 平方米.



(1)试用 x 表示 S；

(2)当 x 取何值时，才能使得 S 最大？并求出 S 的最大值.

2 课后拔高提能练

一、选择题

1. 某公司在甲、乙两地销售一种品牌车，利润(单位：万元)分别为 $L_1=5.06x-0.15x^2$ 和 $L_2=2x$，其中 x 为销售量(单位：辆). 若该公司在这两地共销售 15 辆车，则能获得的最大利润为　　(　　)

A. 45.606 万元　　B. 45.6 万元

C. 45.56 万元　　D. 45.51 万元

2. **(2018·内蒙古包头期中)** 要制作一个容积为 4 m^3，高为 1 m 的无盖长方体容器. 已知该容器的底面造价是每平方米 20 元，侧面造价是每平方米 10 元，则该容器的最低总造价是　　(　　)

A. 80 元　　B. 120 元

C. 160 元　　D. 240 元

3. 某工厂第一年产量为 A，第二年的增长率为 a，第三年的增长率为 b，这两年的平均增长率为 x，则　　(　　)

A. $x=\frac{a+b}{2}$　　B. $x\leqslant\frac{a+b}{2}$

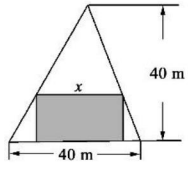
C. $x>\frac{a+b}{2}$　　D. $x\geqslant\frac{a+b}{2}$

4. 某商品在最近 30 天内的价格 $f(t)$ 与时间 t(单位：天)的函数关系是 $f(t)=t+10(0<t\leqslant30,\ t\in\mathbf{N})$；销售量 $g(t)$ 与时间的函数关系是 $g(t)=-t+35(0<t\leqslant30,\ t\in\mathbf{N})$，则这种商品日销售金额的最大值是　　(　　)

A. 505 元　　B. 506 元

C. 510 元　　D. 600 元

5. 在如图所示的锐角三角形空地中，欲建一个面积不小于 300 m^2 的内接矩形花园(阴影部分)，则其边长 x(单位 m)的取值范围是　　(　　)



关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

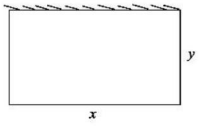
学习札记

A. [15,20]　　B. [12,25]
C. [10,30]　　D. [20,30]

6. 因为某种产品的两种原料相继提价，所以生产者决定对产品分两次提价，现在有三种提价方案：
方案甲：第一次提价 $p\%$，第二次提价 $q\%$；
方案乙：第一次提价 $q\%$，第二次提价 $p\%$；
方案丙：第一次提价 $\frac{p+q}{2}\%$，第二次提价 $\frac{p+q}{2}\%$.
其中 $p>q>0$，比较上述三种方案，提价最多的是（　　）
A. 甲　　B. 乙
C. 丙　　D. 一样多

二、填空题

7. 现要用一段长为 l 的篱笆围成一边靠墙的矩形菜园（如图所示），则围成的菜园最大面积是_____.



8. 某商家一月份至五月份累计销售额达 3 860 万元，预测六月份销售额为 500 万元，七月份销售额比六月份递增 $x\%$，八月份销售额比七月份递增 $x\%$，九、十月份销售总额与七、八月份销售总额相等，若一月份至十月份销售总额至少达7 000 万元，则 x 的最小值为_____.

9. 某产品的利润 y(元)与产量 x(件)之间的函数关系是 $y=-2x^2+220x$，如果厂家希望在一天内获利6 000元以上，那么一天生产产品(件)的范围是_____.

三、解答题

10. 某农贸公司按每担 200 元收购某农产品，并每 100 元纳税 10 元(又称征税率为 10 个百分点)，计划可收购 a 万担，政府为了鼓励收购公司多收购这种农产品，决定将征税率降低 $x(x\neq 0)$ 个百分点，预测收购量可增加 $2x$ 个百分点.
(1)写出降税后税收 y(万元)与 x 的函数关系式；
(2)要使此项税收在税率调节后，不少于原计划税收的 83.2%，试确定 x 的取值范围.

11. **(2018·江苏启东月考)**小张于年初支出 50 万元购买一辆大货车，第一年因缴纳各种费用需支出 6 万元，从第二年起，每年都比上一年增加支出 2 万元，假定该车每年的运输收入均为 25 万元. 小张在该车运输累计收入超过总支出后，考虑将大货车作为二手车出售，若该车在第 x 年年底出售，其销售收入为 $25-x$ 万元(国家规定大货车的报废年限为 10 年).
(1)大货车运输到第几年年底，该车运输累计收入超过总支出？
(2)在第几年年底将大货车出售，能使小张获得的年平均利润最大？
(利润＝累积收入＋销售收入－总支出)

12. **(2019·江西赣州月考)**某工厂某种产品的年固定成本为 250 万元，每生产 x 千件，需另投入成本为 $C(x)$，当年产量不足 80 千件时，$C(x)=\frac{1}{3}x^2+10x$(万元). 当年产量不小于 80 千件时，$C(x)=51x+\frac{10\,000}{x}-1\,450$(万元). 每件商品售价为 0.05 万元. 通过市场分析，该厂生产的商品能全部售完.
(1)写出年利润 $L(x)$(万元)关于年产量 x(千件)的函数解析式；
(2)当年产量为多少千件时，该厂在这一商品的生产中所获利润最大？

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

学习札记

3.5　二元一次不等式(组)与简单的线性规划问题

3.5.1　二元一次不等式(组)所表示的平面区域

学习目标

1. 通过实际应用问题抽象出二元一次不等式组，了解二元一次不等式的几何意义；
2. 会用二元一次不等式表示平面区域，掌握二元一次不等式组表示的平面区域.

1 基础知识点对点

知识点一　二元一次不等式(组)表示的平面区域

1. **(2018·安徽池州月考)** 设不等式组 $\begin{cases} x\leqslant 1, \\ y\geqslant 0, \\ x-y\geqslant 0 \end{cases}$ 所表示的平面区域是 W，则下列各点中，在区域 W 内的点是 (　　)

A. $\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{3}\right)$　　B. $\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{3}\right)$

C. $\left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{3}\right)$　　D. $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{3}\right)$

2. 画出不等式组 $\begin{cases} x+y-3\leqslant 0, \\ x-y+3\geqslant 0, \\ y\geqslant 0 \end{cases}$ 表示的平面区域.

知识点二　求平面区域的面积

3. **(2019·河南信阳月考)** 设集合 $A=\left\{(x,y)\middle|\begin{cases} x-y-1\leqslant 0, \\ 3x-y+1\geqslant 0, \\ 3x+y-1\leqslant 0, \end{cases} x,y\in\mathbf{R}\right\}$，则 A 表示的平面区域的面积是 (　　)

A. $\sqrt{2}$　　B. $\frac{3}{2}$

C. $\frac{3\sqrt{2}}{2}$　　D. 2

4. 已知区域 $D:\begin{cases} x-y+1\geqslant 0, \\ x+y-1\geqslant 0, \\ 3x-y-3\leqslant 0 \end{cases}$ 的面积为 S，点集 $T=\{(x,y)\in D\mid y\geqslant kx+1\}$ 在坐标系中对应区域的面积为 $\frac{1}{2}S$，则 k 的值为_____.

知识点三　利用二元一次不等式(组)解决实际问题

5. 完成一项装修工程，木工和瓦工的比例为 2∶3，请木工需付工资每人 50 元，请瓦工需付工资每人 40 元，现有工资预算 2 000 元，设木工 x 人，瓦工 y 人，请工人数所满足的关系为 (　　)

A. $\begin{cases} 2x+3y\leqslant 5, \\ x,y\in\mathbf{N}^* \end{cases}$　　B. $\begin{cases} 50x+40y\leqslant 2\,000, \\ \frac{x}{y}=\frac{2}{3} \end{cases}$

C. $\begin{cases} 5x+4y\leqslant 200, \\ \frac{x}{y}=\frac{2}{3}, \\ x,y\in\mathbf{N}^* \end{cases}$　　D. $\begin{cases} 5x+4y<100, \\ \frac{x}{y}=\frac{2}{3} \end{cases}$

2 课后拔高提能练

一、选择题

1. 原点和点(1,1)在直线 $x+y-a=0$ 的两侧，则 a 的取值范围是 (　　)

A. $a<0$ 或 $a>2$　　B. $a=0$ 或 $a=2$

C. $0<a<2$　　D. $0\leqslant a\leqslant 2$

2. **(2018·吉林扶余月考)** 在 $3x+5y<4$ 表示的平面区域内的一个点是 (　　)

A. $(-1,1)$　　B. $(-1,2)$

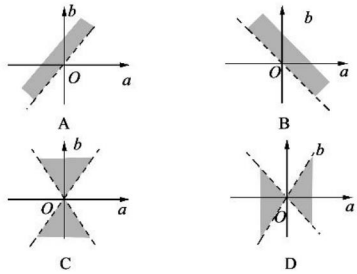
C. $(1,1)$　　D. $(2,0)$

3. 曲线 $y=2^x$ 上存在点 (x,y) 满足约束条件 $\begin{cases} x+y-3\leqslant 0, \\ x-2y-3\leqslant 0, \\ x\geqslant m, \end{cases}$ 则实数 m 的最大值为 (　　)

A. 2　　B. $\frac{3}{2}$

C. 1　　D. -1

4. 若二次函数 $y=ax^2+bx+a$ 与 x 轴无交点，则点 (a,b) 在 aOb 平面上的区域(不含边界)为 (　　)



关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

学习札记

5. 若不等式组$\begin{cases}x-y\geqslant 0,\\ 2x+y\leqslant 2,\\ y\geqslant 0,\\ x+y\leqslant a\end{cases}$表示的平面区域是一个三角形，则 a 的取值范围是（　　）

A. $a\geqslant\frac{4}{3}$　　B. $0<a\leqslant 1$

C. $1\leqslant a\leqslant\frac{4}{3}$　　D. $0<a\leqslant 1$ 或 $a\geqslant\frac{4}{3}$

6. 不等式组$\begin{cases}y-2x\leqslant 0,\\ x+2y+3>0,\\ 5x+3y-5<0\end{cases}$表示的平面区域中共有几个整点（　　）

A. 2　　B. 3

C. 4　　D. 5

二、填空题

7. 直线 $2x+y-6=0$ 与不等式组$\begin{cases}x\geqslant 0,\\ y\geqslant 0,\\ x-y+2\geqslant 0,\\ 4x+3y\leqslant 12\end{cases}$表示的平面区域的公共点有_____个.

8. 点集$\{(x,y)||x|+|y|\leqslant 1\}$所占有的平面区域的面积为_____.

9. 满足不等式组$\begin{cases}(x-y+1)(x+y-3)\geqslant 0,\\ 0\leqslant x\leqslant a\end{cases}$的点$(x,y)$组成的图形的面积是 5，则实数 a 的值为_____.

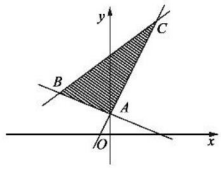
三、解答题

10. 画出下列不等式(组)所表示的平面区域.

(1)$\begin{cases}x<3,\\ y\geqslant\frac{x}{2},\\ 3x+2y\geqslant 6,\\ 3y<x+9;\end{cases}$

(2)$(x+2y+1)(x-y+4)<0$.

11. 如图，$\triangle ABC$ 中，$A(0,1)$，$B(-2,2)$，$C(2,6)$，写出 $\triangle ABC$ 区域所表示的二元一次不等式组.



12. 某家具厂制造甲、乙两种型号的桌子，每张桌子需木工和漆工两道工序完成. 已知木工做一张甲、乙型的桌子分别需要 1 h 和 2 h，漆工油漆一张甲、乙型的桌子分别需要 3 h 和 1 h. 又木工、漆工每天工作分别不得超过 8 h 和 9 h. 请列出满足生产条件的数学关系式，并画出相应的平面区域.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

学习札记

3.5.2　简单线性规划

学习目标

能从实际情境中抽象出简单的线性规划问题，学会用二元一次不等式(组)表示的平面区域解决简单的线性规划问题.

1 基础知识点对点

知识点一　求线性目标函数的最值

1.(2017·全国卷Ⅰ)设 x,y 满足约束条件 $\begin{cases}x+3y\leqslant 3,\\ x-y\geqslant 1,\\ y\geqslant 0,\end{cases}$ 则 $z=x+y$ 的最大值为　(　)

A. 0　　B. 1

C. 2　　D. 3

2.(2019·安徽合肥调研)已知实数 x,y 满足约束条件 $\begin{cases}x-y+2\geqslant 0,\\ x+2y+2\geqslant 0,\\ x\leqslant 1,\end{cases}$ 则 $z=3x-2y$ 的最大值是(　)

A. -6　　B. -3

C. 3　　D. 6

知识点二　求非线性目标函数的最值

3.(2018·河南信阳月考)已知点 $P(x,y)$ 的坐标满足条件 $\begin{cases}x+y\leqslant 4,\\ y\geqslant x,\\ x\geqslant 1,\end{cases}$ 则 x^2+y^2 的最大值为　(　)

A. $\sqrt{10}$　　B. 8

C. 10　　D. 16

4.(2018·江西赣州月考)设实数 x,y 满足条件 $\begin{cases}x-y-2\leqslant 0,\\ x+2y-4\geqslant 0,\\ 2y-3\leqslant 0,\end{cases}$ 则 $\frac{y}{x}$ 的最大值为_____.

知识点三　线性规划问题的综合应用

5.(2018·吉林梅河口期中)已知点 $A(-2,0)$，点 $M(x,y)$ 为平面区域 $\begin{cases}2x+y-2\geqslant 0,\\ x-2y+4\geqslant 0,\\ 3x-y-3\leqslant 0\end{cases}$ 上的一个动点，则 $|AM|$ 的最小值是　(　)

A. 5　　B. 3

C. $2\sqrt{2}$　　D. $\frac{6\sqrt{5}}{5}$

6.若 x,y 满足约束条件 $\begin{cases}x-3\leqslant 0,\\ y-a\leqslant 0,\\ x+y\geqslant 0,\end{cases}$ 且目标函数 $z=2x+y$ 的最大值为 10，则 a 等于　(　)

A. -3　　B. -10

C. 4　　D. 10

2 课后拔高提能练

一、选择题

1.(2017·北京卷)若 x,y 满足 $\begin{cases}x\leqslant 3,\\ x+y\geqslant 2,\\ y\leqslant x,\end{cases}$ 则 $x+2y$ 的最大值为　(　)

A. 1　　B. 3

C. 5　　D. 9

2.(2019·新疆石河子月考)若实数 x,y 满足 $\begin{cases}x-y+1\leqslant 0,\\ x>0,\end{cases}$ 则 $\frac{y}{x-1}$ 的取值范围是　(　)

A. $(-1,1)$

B. $(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$

C. $(-\infty,-1)$

D. $(-\infty,-1)\cup(0,+\infty)$

3.(2018·天津卷)设变量 x,y 满足约束条件 $\begin{cases}x+y\leqslant 5,\\ 2x-y\leqslant 4,\\ -x+y\leqslant 1,\\ y\geqslant 0,\end{cases}$ 则目标函数 $z=3x+5y$ 的最大值为　(　)

A. 6　　B. 19

C. 21　　D. 45

4.已知正三角形 ABC 的顶点 $A(1,1)$，顶点 $B(1,3)$，顶点 C 在第一象限，若点 (x,y) 在 $\triangle ABC$ 内部，则 $z=-x+y$ 的取值范围是　(　)

A. $(1-\sqrt{3},2)$　　B. $(0,2)$

C. $(\sqrt{3}-1,2)$　　D. $(0,1+\sqrt{3})$

5.已知实数 x,y 满足 $\begin{cases}|x+y|\leqslant 1,\\ |x-y|\leqslant 1,\end{cases}$ 则 $z=|3x+4y-5|$ 的最大值为　(　)

A. 1　　B. 2

C. 8　　D. 9

6.已知实数 x,y 满足 $\begin{cases}y\geqslant 1,\\ y\leqslant 2x-1,\\ x+y\leqslant m,\end{cases}$ 如果目标函数 $z=x-y$ 的最小值为 -1，则实数 $m=$　(　)

A. 6　　B. 5

C. 4　　D. 3

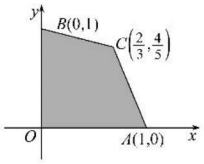
二、填空题

7.(2018·浙江卷)若 x,y 满足约束条件 $\begin{cases}x-y\geqslant 0,\\ 2x+y\leqslant 6,\\ x+y\geqslant 2,\end{cases}$ 则 $z=x+3y$ 的最小值是_____，最大值是_____.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

学习札记

8. 给出平面区域如图所示，目标函数 $t=ax-y$，若当且仅当 $x=\frac{2}{3}$，$y=\frac{4}{5}$ 时，目标函数 t 取最小值，则实数 a 的取值范围是_____.



9. **(2018·内蒙古包头月考)** 设变量 x，y 满足约束条件 $\begin{cases}2x-y-6\leqslant 0,\\ x-y+2\geqslant 0,\\ x>0,\\ y>0,\end{cases}$ 若目标函数 $z=ax+by(a>0,$ $b>0)$ 的最大值为 40，则 $\frac{5}{a}+\frac{1}{b}$ 的最小值为_____.

三、解答题

10. 已知 x，y 满足条件 $\begin{cases}7x-5y-23\leqslant 0,\\ x+7y-11\leqslant 0,\\ 4x+y+10\geqslant 0.\end{cases}$

求：(1) $4x-3y$ 的最大值和最小值；

(2) x^2+y^2 的最大值和最小值.

11. **(2019·安徽池州月考)** 某厂生产甲、乙两种产品，生产这两种产品每吨所需要的煤、电以及每吨产品的产值如下表所示. 若每天配给该厂的煤至多 56 吨，供电至多 45 千瓦，问该厂如何安排生产，使得该厂日产值最大？

	用煤(吨)	用电(千瓦)	产值(万元)
甲种产品	7	2	8
乙种产品	3	5	11

12. 某工厂生产甲、乙两种产品，已知生产每吨甲、乙两种产品所需煤、电力、劳动力、获得利润及每天资源限额(最大供应量)如下表所示：

产品 / 消耗量 / 资源	甲产品(每吨)	乙产品(每吨)	资源限额(每天)
煤(t)	9	4	360
电力(kW·h)	4	5	200
劳动力(个)	3	10	300
利润(万元)	6	12	

问：每天生产甲、乙两种产品各多少吨，获得利润总额最大？

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

学习札记

章末检测

时间：60 分钟　满分：100 分

一、选择题（每小题 5 分，共 40 分）

1.（2018·福建闽侯月考）设集合 $M=\{x|x^2+3x+2>0\}$，集合 $N=\left\{x\left|\left(\frac{1}{2}\right)^x\leqslant 4\right.\right\}$，则 $M\cup N=$（　）

A. $\{x|x\geqslant -2\}$　　B. $\{x|x>-1\}$

C. $\{x|x\leqslant -2\}$　　D. $\mathbf{R}$

2.（2018·北京丰台区月考）如果 $a>b$，那么下列不等式中一定成立的是（　）

A. $a+c>b+c$　　B. $\sqrt{a}>\sqrt{b}$

C. $c-a>c-b$　　D. $a^2>b^2$

3.（2018·山西忻州月考）已知关于 x 的不等式 $x^2-4x\geqslant m$ 对任意 $x\in(0,1]$ 恒成立，则有（　）

A. $m\leqslant -3$　　B. $m\geqslant -3$

C. $-3\leqslant m<0$　　D. $m\geqslant -4$

4. 若 $a<b<0$，则下列不等式：①$|a|>|b|$；②$\frac{1}{a}>\frac{1}{b}$；③$\frac{a}{b}+\frac{b}{a}>2$；④$a^2<b^2$ 中，正确的有（　）

A. 1 个　　B. 2 个

C. 3 个　　D. 4 个

5.（2019·黑龙江哈尔滨月考）若实数 x,y 满足 $|x-3|\leqslant y\leqslant 1$，则 $z=\frac{2x+y}{x+y}$ 的最小值为（　）

A. $\frac{5}{3}$　　B. 2

C. $\frac{3}{5}$　　D. $\frac{1}{2}$

6. 若正数 a,b 满足：$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=1$，则 $\frac{1}{a-1}+\frac{9}{b-1}$ 的最小值为（　）

A. 16　　B. 9

C. 6　　D. 1

7. 设 $a>1,b>1$ 且 $ab-(a+b)=1$，那么（　）

A. $a+b$ 有最小值 $2(\sqrt{2}+1)$

B. $a+b$ 有最大值 $(\sqrt{2}+1)^2$

C. ab 有最大值 $\sqrt{2}+1$

D. ab 有最小值 $2(\sqrt{2}+1)$

8.（2018·河南信阳月考）已知函数 $f(x)=(ax-1)(x-b)$，如果不等式 $f(x)>0$ 的解集是 $(-1,3)$，则不等式 $f(-x)<0$ 的解集是（　）

A. $(-\infty,-1)\cup(3,+\infty)$　　B. $(-3,1)$

C. $(-\infty,-3)\cup(1,+\infty)$　　D. $(-1,3)$

二、填空题（每小题 5 分，共 15 分）

9.（2018·北京卷）若 x,y 满足 $x+1\leqslant y\leqslant 2x$，则 $2y-x$ 的最小值是_____.

10.（2018·江苏卷）在 $\triangle ABC$ 中，内角 A,B,C 所对的边分别为 a,b,c，$\angle ABC=120^\circ$，$\angle ABC$ 的平分线交 AC 于点 D，且 $BD=1$，则 $4a+c$ 的最小值为_____.

11.（2018·四川绵阳一诊）某商场销售某种商品的经验表明，该产品生产总成本 C 与产量 $q(q\in\mathbf{N}^*)$ 的函数关系式为 $C=100+4q$，销售单价 p 与产量 q 的函数关系式为 $p=25-\frac{1}{16}q$，要使每件产品的平均利润最大，则产量 q 等于_____.

三、解答题（每小题 15 分，共 45 分）

12.（2019·河北鸡泽月考）已知常数 $a\in\mathbf{R}$，解关于 x 的不等式 $ax^2-2x+a<0$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

学习札记

13. 某化肥厂生产甲、乙两种肥料，已知生产每吨甲种肥料要用 A 原料 3 吨，B 原料 2 吨；生产每吨乙种肥料要用 A 原料 1 吨，B 原料 3 吨，且该企业在一个生产周期内消耗 A 原料不超过 13 吨，B 原料不超过 18 吨. 据悉生产甲种肥料每吨利润为 5 万元，生产乙种肥料每吨利润为 3 万元，通过市场分析该厂生产的肥料能全部售完，问如何合理安排生产甲、乙两种肥料，使该企业的利润最大？

14. 某地需要修建一条大型输油管道通过 240 km 宽的沙漠地带，该段输油管道两端的输油站已建好，余下工程是在该段两端已建好的输油站之间铺设输油管道和等距离修建增压站（又称泵站）. 经预算，修建一个增压站的费用为 400 万元，铺设距离为 x km 的相邻两增压站之间的输油管道的费用为 x^2+x 万元. 设余下工程的总费用为 y 万元.

(1)试将 y 表示成 x 的函数；

(2)需要修建多少个增压站才能使 y 最小，其最小值为多少？

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

学习札记

模块检测

时间:60 分钟　满分:100 分

一、选择题(每小题 5 分,共 40 分)

1. (2018·河北馆陶月考)在△ABC 中,$a=2$,$b=\sqrt{3}$,$c=1$,则最小角为 (　　)

A. $\frac{\pi}{12}$　　B. $\frac{\pi}{6}$

C. $\frac{\pi}{4}$　　D. $\frac{\pi}{3}$

2. (2019·山西忻州月考)若$\{x|2<x<3\}$为 $x^2+ax+b<0$的解集,则 $bx^2+ax+1>0$ 的解集为 (　　)

A. $\{x|x<2$ 或 $x>3\}$　　B. $\{x|2<x<3\}$

C. $\left\{x\left|\frac{1}{3}<x<\frac{1}{2}\right.\right\}$　　D. $\left\{x\left|x<\frac{1}{3}\right.\text{或 } x>\frac{1}{2}\right\}$

3. (2018·云南沾益检测)在等比数列$\{a_n\}$中,已知 $a_7\cdot a_{12}=5$,则 $a_8\cdot a_9\cdot a_{10}\cdot a_{11}=$ (　　)

A. 10　　B. 50

C. 25　　D. 75

4. 在△ABC 中,角 A,B,C 所对的边分别为 a,b,c,若 $a=8$,$\angle B=60°$,$\angle C=75°$,则 $b=$ (　　)

A. $4\sqrt{2}$　　B. $4\sqrt{3}$

C. $4\sqrt{6}$　　D. $\frac{32}{3}$

5. 已知正数 a,b 满足 $4a+b=30$,当 $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$ 取得最小值时,实数对(a,b)是 (　　)

A. $(5,10)$　　B. $(6,6)$

C. $(10,5)$　　D. $(7,2)$

6. (2018·衡水月考)设等差数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 S_n,已知 $S_{13}>0$,$S_{14}<0$,若 $a_k\cdot a_{k+1}<0$,则 $k=$ (　　)

A. 6　　B. 7

C. 13　　D. 14

7. 若当 $x\in(-\infty,-1]$时,不等式$(m^2-m)4^x-2^x-1<0$ 恒成立,则实数 m 的取值范围是 (　　)

A. $(-2,3)$　　B. $(-3,3)$

C. $(-3,4)$　　D. $(-2,2)$

8. (2018·吉林梅河口期中)若 x,y 满足 $\begin{cases}x+y-2\geqslant 0,\\ kx-y+2\geqslant 0,\\ y\geqslant 0,\end{cases}$ 且 $z=y-x$ 的最小值为 -4,则 k 的值为 (　　)

A. 2　　B. -2

C. $\frac{1}{2}$　　D. $-\frac{1}{2}$

二、填空题(每小题 5 分,共 15 分)

9. (2018·全国卷Ⅰ)若 x,y 满足约束条件 $\begin{cases}x-2y-2\leqslant 0,\\ x-y+1\geqslant 0,\\ y\leqslant 0,\end{cases}$ 则 $z=3x+2y$ 的最大值为_____.

10. 设等比数列$\{a_n\}$的各项均为正数,且 $a_{10}a_{11}+a_9a_{12}=2e^5$,则 $\ln a_1+\ln a_2+\cdots+\ln a_{20}=$_____.

11. 等比数列$\{a_n\}$的公比为 q,其前 n 项积为 T_n,并且满足条件 $a_1>1$,$a_{99}a_{100}>1$,$\frac{a_{99}-1}{a_{100}-1}<0$,给出下列结论:①$0<q<1$;②$a_{99}a_{101}-1<0$;③$T_{100}$的值是 T_n 中最大的;④使 $T_n>1$ 成立的最大自然数 n 等于 198.其中正确的结论是_____.

三、解答题(每小题 15 分,共 45 分)

12. (2019·河南鲁山月考)在△ABC 中,点 D 为 BC 边上的一点,且 $BD=1$,E 为 AC 的中点,$AE=\frac{3}{2}$,$\cos B=\frac{2\sqrt{7}}{7}$,$\angle ADB=\frac{2\pi}{3}$.

(1)求 $\sin\angle BAD$;

(2)求 AD 及 DC 的长.

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

学习札记

13. 设函数 $f(x)=x+\frac{a}{x+1}$，$x\in[0,+\infty)$.

(1)当 $a=2$ 时，求函数 $f(x)$ 的最小值；

(2)当 $0<a<1$ 时，求函数 $f(x)$ 的最小值.

14. **(2018·安徽合肥调研)**已知各项均为正数的等比数列 $\{a_n\}$ 中，$a_1+a_2+a_3=14$，$a_2\cdot a_4=64$.

(1)求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；

(2)设 $b_n=(2n-1)a_n$，求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 T_n.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

学习札记

阶段测试一

(第一章　解三角形)

时间:120 分钟　满分:150 分

答题卡

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
答案												

一、选择题(本大题共 12 小题,每小题 5 分,共 60 分)

1. **(2018·河北馆陶月考)** $\triangle ABC$ 的内角 A,B,C 的对边分别为 a,b,c,已知 $a=3$,$A=60°$,$b=\sqrt{6}$,则 $B=$ (　　)

A. $45°$　　B. $30°$

C. $60°$　　D. $135°$

2. **(2018·甘肃武威期中)** 在钝角 $\triangle ABC$ 中,a,b,c 分别为角 A,B,C 的对边,已知 $\triangle ABC$ 的面积 $S=\frac{1}{2}$,$AB=1$,$BC=\sqrt{2}$,则 $AC=$ (　　)

A. 5　　B. $\sqrt{5}$

C. 2　　D. 1

3. **(2019·江西赣州月考)** 若 $\triangle ABC$ 的内角 A,B,C 的对边分别为 a,b,c,且 $a\sin A+c\sin C-\sqrt{2}a\sin C=b\sin B$,则 B 等于 (　　)

A. $\frac{\pi}{6}$　　B. $\frac{\pi}{4}$

C. $\frac{\pi}{3}$　　D. $\frac{3\pi}{4}$

4. **(2018·河南长葛质检)** 在锐角三角形 ABC 中,角 A,B,C 所对应的边分别为 a,b,c,若 $b=2a\sin B$,则角 A 等于 (　　)

A. $30°$　　B. $45°$

C. $60°$　　D. $75°$

5. 在 $\triangle ABC$ 中,角 A,B,C 的对边分别是 a,b,c,且 $a>b>c$,$a^2<b^2+c^2$,则 $\angle A$ 的取值范围是 (　　)

A. $\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$　　B. $\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right)$

C. $\left(\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{2}\right)$　　D. $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$

6. **(2018·黑龙江哈尔滨月考)** 在 $\triangle ABC$ 中,内角 A,B,C 的对边分别为 a,b,c 且 $b\sin A=\sqrt{3}a\cos B$,则 $B=$ (　　)

A. $\frac{\pi}{2}$　　B. $\frac{\pi}{3}$

C. $\frac{\pi}{4}$　　D. $\frac{\pi}{6}$

7. 在 $\triangle ABC$ 中,内角 A,B,C 所对的边分别是 a,b,c,已知 $8b=5c$,$C=2B$,则 $\cos C=$ (　　)

A. $\frac{7}{25}$　　B. $\frac{24}{25}$

C. $-\frac{7}{25}$　　D. $\pm\frac{7}{25}$

8. 在 $\triangle ABC$ 中,$A=30°$,$B=60°$,$C=90°$,那么三边之比 $a:b:c$ 等于 (　　)

A. $1:2:3$　　B. $3:2:1$

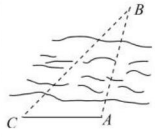
C. $1:\sqrt{3}:2$　　D. $2:\sqrt{3}:1$

9. **(2018·辽宁盘锦期中)** 在 $\triangle ABC$ 中,内角 A,B,C 所对的边分别为 a,b,c,已知 $a\sin B\cos C+c\sin B\cos A=\frac{1}{2}b$,且 $a>b$,则角 B 为 (　　)

A. $\frac{\pi}{6}$　　B. $\frac{\pi}{3}$

C. $\frac{2\pi}{3}$　　D. $\frac{5\pi}{6}$

10. 如图,已知 A,B 两点分别在河的两岸,某测量者在点 A 所在的河岸边另选定一点 C,测得 $AC=50$ m,$\angle ACB=45°$,$\angle CAB=105°$,则 A,B 两点的距离为 (　　)



A. $50\sqrt{3}$ m　　B. $25\sqrt{3}$ m

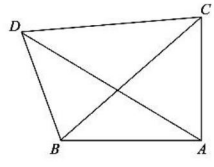
C. $25\sqrt{2}$ m　　D. $50\sqrt{2}$ m

11. **(2019·河南鲁山月考)** 已知 $\triangle ABC$ 是锐角三角形,若 $A=2B$,则 $\frac{a}{b}$ 的取值范围是 (　　)

A. $(\sqrt{2},\sqrt{3})$　　B. $(\sqrt{2},2)$

C. $(1,\sqrt{3})$　　D. $(1,2)$

12. A,B 两地相距 200 m,且 A 地在 B 地的正东方.一人在 A 地测得建筑 C 在正北方,建筑 D 在北偏西 $60°$;在 B 地测得建筑 C 在北偏东 $45°$,建筑 D 在北偏西 $15°$,则两建筑 C 和 D 之间的距离为 (　　)



A. $200\sqrt{2}$ m　　B. $100\sqrt{7}$ m

C. $100\sqrt{6}$ m　　D. $100(\sqrt{3}-1)$ m

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

学习札记

二、填空题(本大题共 4 小题,每小题 5 分,共 20 分)

13. **(2018·湖南衡阳期中)**在△ABC 中,$B=45°$,$C=60°$,$c=2$,,则 $b=$_____.

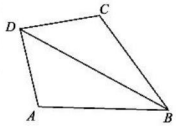
14. **(2018·石家庄一中月考)**设△ABC 的内角 A,B,C 的对边分别为 a,b,c,若 $a\cos B-b\cos A=\frac{3}{5}c$,则 $\frac{\tan A}{\tan B}$ 的值为_____.

15. 三角形的一边长为 14,这条边所对的角为 60°,另两边之比为 8∶5,则这个三角形的面积为_____.

16. 已知△ABC 的面积为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$,$AC=\sqrt{3}$,$\angle ABC=\frac{\pi}{3}$,则△ABC 的周长等于_____.

三、解答题(本大题共 6 小题,共 70 分)

17. (10 分)在四边形 $ABCD$ 中,$AD\perp CD$,$AD=5$,$AB=7$,$\angle BDA=60°$,$\angle CBD=15°$,求 BC 的长.



18. (12 分)设 a,b,c 分别是△ABC 的三个内角 A,B,C 所对的边,S 是△ABC 的面积,已知 $a=4$,$b=5$,$S=5\sqrt{3}$.

(1)求角 C;

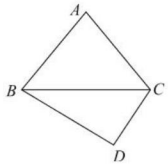
(2)求 c 边的长度.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

19.（12 分）**（2019 · 辽宁东北育才模拟）**如图，在 $\triangle ABC$ 中，角 A,B,C 的对边分别为 a,b,c，$a=b(\sin C+\cos C)$.

（1）求角 B 的大小；

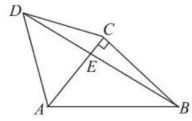
（2）若 $A=\frac{\pi}{2}$，D 为 $\triangle ABC$ 外一点，$DB=2$，$DC=1$，求四边形 $ABDC$ 面积的最大值.



20.（12 分）如图，$\triangle ACD$ 是等边三角形，$\triangle ABC$ 是等腰直角三角形，$\angle ACB=90°$，BD 交 AC 于 E，$AB=2$.

（1）求 $\cos\angle CBE$ 的值；

（2）求 AE.



学习札记

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

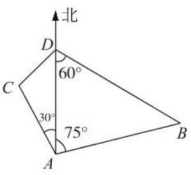
学习札记

21.（12 分）**（2018・全国卷Ⅰ）**在平面四边形 $ABCD$ 中，$\angle ADC=90°$，$A=45°$，$AB=2$，$BD=5$.

（1）求 $\cos\angle ADB$；

（2）若 $DC=2\sqrt{2}$，求 BC.

22.（12 分）**（2018・河北馆陶月考）**如图，某货轮在 A 处看灯塔 B 在货轮的北偏东 $75°$ 方向上，距离为 $12\sqrt{6}$ n mile，在 A 处看灯塔 C 在货轮的北偏西 $30°$ 方向上，距离为 $8\sqrt{3}$ n mile，货轮由 A 处向正北航行到 D 处时，再看灯塔 B 在南偏东 $60°$ 方向上. 求：



（1）A 处与 D 处的距离；

（2）灯塔 C 与 D 处的距离.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

学习札记

阶段测试二

(第二章　数　列)

时间:120 分钟　满分:150 分

答题卡

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
答案												

一、选择题(本大题共 12 小题,每小题 5 分,共 60 分)

1. **(2018·云南姚安月考)**已知等差数列$\{a_n\}$的通项公式$a_n=3-2n$,则它的公差d为　(　)

A. 2　　B. 3

C. -2　　D. -3

2. **(2018·吉林梅河口期中)**已知等比数列$\{a_n\}$满足$a_1=\frac{1}{4}$,$a_3a_5=4(a_4-1)$,则$a_2=$　(　)

A. 2　　B. 1

C. $\frac{1}{2}$　　D. $\frac{1}{8}$

3. **(2018·河北馆陶月考)**若数列$\{a_n\}$满足$a_{n+1}=1+\frac{1}{a_n}$,$a_8=\frac{34}{21}$,则$a_5=$　(　)

A. $\frac{3}{2}$　　B. $\frac{5}{3}$

C. $\frac{13}{8}$　　D. $\frac{8}{5}$

4. 在数列$\{a_n\}$中,$a_n=-2n^2+29n+3$,则此数列最大项的值是　(　)

A. 102　　B. $\frac{965}{8}$

C. $\frac{917}{8}$　　D. 108

5. **(2019·黑龙江伊春二中月考)**一个等差数列的第 5 项等于 10,前 3 项和等于 3,那么它的首项与公差分别是　(　)

A. -2,3　　B. 2,-3

C. -3,2　　D. 3,-2

6. **(2018·河北鸡泽月考)**在等差数列$\{a_n\}$中,$a_1+a_2+a_3=3$,$a_{28}+a_{29}+a_{30}=165$,则此数列的前 30 项和等于　(　)

A. 810　　B. 840

C. 870　　D. 900

7. 已知数列$\{a_n\}$的前n项和$S_n=an^2+bn(a,b\in\mathbf{R})$,且$S_{25}=100$,则$a_{12}+a_{14}$等于　(　)

A. 16　　B. 8

C. 4　　D. 不确定

8. 设$\{a_n\}(n\in\mathbf{N}^*)$是等差数列,$S_n$是其前$n$项和,且$S_5<S_6$,$S_6=S_7>S_8$,则下列结论错误的是　(　)

A. $d<0$

B. $a_7=0$

C. $S_9>S_5$

D. S_6和S_7均为S_n的最大值

9. **(2019·吉林延边月考)**已知公差不为 0 的等差数列$\{a_n\}$满足$a_3^2=a_1\cdot a_4$,S_n为数列$\{a_n\}$的前n项和,则$\frac{S_3-S_2}{S_5-S_3}$的值为　(　)

A. -2　　B. -3

C. 2　　D. 3

10. 数列$\{a_n\}$中,$a_1=1$,$a_2=\frac{2}{3}$,且$\frac{1}{a_{n-1}}+\frac{1}{a_{n+1}}=\frac{2}{a_n}(n\in\mathbf{N}^*,n\geqslant 2)$,则$a_6$等于　(　)

A. $\frac{1}{7}$　　B. $\frac{2}{7}$

C. $\frac{7}{2}$　　D. 7

11. 设$a_n=\frac{1}{n}\sin\frac{n\pi}{25}$,$S_n=a_1+a_2+\cdots+a_n$,在$S_1$,$S_2$,…,$S_{100}$中,正数的个数是　(　)

A. 25　　B. 50

C. 75　　D. 100

12. **(2018·安徽合肥调研)**已知数列$\{a_n\}$满足$a_1=2$,$4a_3=a_6$,$\left\{\frac{a_n}{n}\right\}$是等差数列,则数列$\{(-1)^na_n\}$的前 10 项的和$S_{10}=$　(　)

A. 220　　B. 110

C. 99　　D. 55

二、填空题(本大题共 4 小题,每小题 5 分,共 20 分)

13. 等差数列$\{a_n\}$中,$a_4+a_{10}+a_{16}=30$,则$a_{18}-2a_{14}$的值为_____.

14. **(2019·甘肃天水月考)**已知数列$\{a_n\}$中,$a_1=5$,$a_2=2$,$a_n=2a_{n-1}+3a_{n-2}(n\geqslant 3)$,则$a_4=$_____.

15. **(2018·甘肃武威市月考)**若数列$\{a_n\}$前n项和$S_n=n^2+2n+1$,则$a_n=$_____.

16. **(2018·浙江卷)**已知集合$A=\{x\mid x=2n-1,n\in\mathbf{N}^*\}$,$B=\{x\mid x=2^n,n\in\mathbf{N}^*\}$.将$A\cup B$的所有元素从小到大依次排列构成一个数列$\{a_n\}$.记$S_n$为数列$\{a_n\}$的前$n$项和,则使得$S_n>12a_{n+1}$成立的$n$的最小值为_____.

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

学习札记

三、解答题(本大题共 6 小题,共 70 分)

17.(10 分)**(2018·福建闽侯月考)**已知$\{a_n\}$是公差为 3 的等差数列,数列$\{b_n\}$满足 $b_1=1$,$b_2=\frac{1}{3}$,$a_nb_{n+1}+b_{n+1}=nb_n$.

(1)求$\{a_n\}$的通项公式;

(2)求$\{b_n\}$的前 n 项和.

18.(12 分)**(2018·天津卷)**设$\{a_n\}$是等差数列,其前 n 项和为 $S_n(n\in\mathbf{N}^*)$;$\{b_n\}$是等比数列,公比大于 0,其前 n 项和为 $T_n(n\in\mathbf{N}^*)$.已知 $b_1=1$,$b_3=b_2+2$,$b_4=a_3+a_5$,$b_5=a_4+2a_6$.

(1)求 S_n 和 T_n;

(2)若 $S_n+(T_1+T_2+\cdots+T_n)=a_n+4b_n$,求正整数 n 的值.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

19.(12 分)已知等差数列$\{a_n\}$满足:$a_2=5$,前 4 项和$S_4=28$.

(1)求数列$\{a_n\}$的通项公式;

(2)若$b_n=(-1)^n a_n$,求数列$\{b_n\}$的前$2n$项和T_{2n}.

20.(12 分)数列$\{a_n\}$的前 n 项和记为 S_n,$a_1=t$,$a_{n+1}=2S_n+1(n\in\mathbf{N}^*)$.

(1)当 t 为何值时,数列$\{a_n\}$是等比数列;

(2)在(1)的条件下,若等差数列$\{b_n\}$的前 n 项和 T_n 有最大值,且 $T_3=15$,又 a_1+b_1,a_2+b_2,a_3+b_3 成等比数列,求 T_n.

学习札记

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

学习札记

21.（12 分）**（2018·河南信阳月考）**设数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 S_n，且 $2S_n=(n+2)a_n-1(n\in\mathbf{N}^*)$.

（1）求 a_1 的值，并用 a_{n-1} 表示 a_n；

（2）求数列$\{a_n\}$的通项公式；

（3）设 $T_n=\dfrac{1}{a_1a_3}+\dfrac{1}{a_2a_4}+\dfrac{1}{a_3a_5}+\cdots+\dfrac{1}{a_na_{n+2}}$，求证：$T_n<\dfrac{5}{3}$.

22.（12 分）已知数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 $S_n=3^n$，数列$\{b_n\}$满足：$b_1=-1$，$b_{n+1}=b_n+(2n-1)(n\in\mathbf{N}^*)$.

（1）求数列$\{a_n\}$的通项公式 a_n；

（2）求数列$\{b_n\}$的通项公式 b_n；

（3）若 $c_n=\dfrac{a_n\cdot b_n}{n}$，求数列$\{c_n\}$的前 n 项和 T_n.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

学习札记

阶段测试三

(第三章　不等式)

时间:120 分钟　满分:150 分

答题卡

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
答案												

一、选择题(本大题共 12 小题,每小题 5 分,共 60 分)

1. **(2018·宁夏银川月考)**不等式 $x^2\geqslant 2x$ 的解集是 (　　)

A. $\{x|x\geqslant 2\}$　　B. $\{x|x\leqslant 0$ 或 $x\geqslant 2\}$

C. $\{x|0\leqslant x\leqslant 2\}$　　D. $\{x|x\leqslant 2\}$

2. **(2018·安徽蚌埠月考)**不等式 $ax^2+bx+2>0$ 的解集是 $\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{3}\right)$,则 $a-b$ 等于 (　　)

A. -10　　B. 10

C. -14　　D. 14

3. **(2019·安徽滁州月考)**下列不等式正确的是 (　　)

A. 若 $a>b$,则 $a\cdot c>b\cdot c$

B. 若 $a>b$,则 $a\cdot c^2>b\cdot c^2$

C. 若 $a>b$,则 $\frac{1}{a}>\frac{1}{b}$

D. 若 $a\cdot c^2>b\cdot c^2$,则 $a>b$

4. 若 $x,y\in\mathbf{R}$, $x^2+y^2=1$,则 $(1-xy)(1+xy)$ 有 (　　)

A. 最小值 $\frac{1}{2}$ 和最大值 1

B. 最小值 $\frac{3}{4}$ 和最大值 1

C. 最小值 $\frac{1}{2}$ 和最大值 $\frac{3}{4}$

D. 最小值 1

5. **(2018·广东中山一中七校联考)**若 x,y 满足 $\begin{cases}x-y+1\geqslant 0,\\2x-y-2\leqslant 0,\\x+y-4\geqslant 0,\end{cases}$ 则 $x+2y$ 的最大值为 (　　)

A. $\frac{13}{2}$　　B. 6

C. 11　　D. 10

6. 设 $a=\log_3 7$, $b=2^{1.1}$, $c=0.8^{3.1}$,则 (　　)

A. $b<a<c$　　B. $c<a<b$

C. $c<b<a$　　D. $a<c<b$

7. 已知 $a>0,b>0$,则 $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+2\sqrt{ab}$ 的最小值是 (　　)

A. 2　　B. $2\sqrt{2}$

C. 4　　D. 5

8. 不等式 $\frac{3x^2+2x+2}{x^2+x+1}\geqslant m$ 对任意实数 x 都成立,则实数 m 的取值范围是 (　　)

A. $m\leqslant 2$　　B. $m<2$

C. $m\leqslant 3$　　D. $m<3$

9. x,y 满足约束条件 $\begin{cases}x+y-2\leqslant 0,\\x-2y-2\leqslant 0,\\2x-y+2\geqslant 0,\end{cases}$ 若 $z=y-ax$ 取得最大值的最优解不唯一,则实数 a 的值为 (　　)

A. $\frac{1}{2}$ 或 -1　　B. 2 或 $\frac{1}{2}$

C. 2 或 1　　D. 2 或 -1

10. 在 $\triangle ABC$ 中,角 A,B,C 所对边长分别为 a,b,c,若 $b^2+c^2=2a^2$,则 $\cos A$ 的最小值为 (　　)

A. $\frac{\sqrt{3}}{2}$　　B. $\frac{\sqrt{2}}{2}$

C. $\frac{1}{2}$　　D. $-\frac{1}{2}$

11. **(2019·山西忻州月考)**已知实数 x,y 满足约束条件 $\begin{cases}x-y\geqslant 0,\\x+2y\leqslant 4,\\x-2y\leqslant 2,\end{cases}$ 如果目标函数 $z=x+ay$ 的最大值为 $\frac{16}{3}$,则实数 a 的值为 (　　)

A. 3　　B. $\frac{14}{3}$

C. 3 或 $\frac{14}{3}$　　D. 3 或 $-\frac{11}{3}$

12. 若对满足条件 $3x+3y+8=2xy(x>0,y>0)$ 的任意 x,y, $(x+y)^2-a(x+y)+16\geqslant 0$ 恒成立,则实数 a 的取值范围是 (　　)

A. $(-\infty,8]$　　B. $[8,+\infty)$

C. $(-\infty,10]$　　D. $[10,+\infty)$

二、填空题(本大题共 4 小题,每小题 5 分,共 20 分)

13. **(2018·黑龙江大庆月考)**已知两个正实数 x,y 满足 $x+y=4$,则使不等式 $\frac{1}{x}+\frac{4}{y}\geqslant m$ 恒成立的实数 m 的取值范围是_____.

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

学习札记

14. 已知实数 x,y 满足 $\begin{cases}x+2y\leqslant 1,\\ x\geqslant 0,\\ y\geqslant 0,\end{cases}$ 则 $w=\dfrac{4x+2y-16}{x-3}$ 的取值范围是_____.

15. 给定区域 $D:\begin{cases}x+4y\geqslant 4,\\ x+y\leqslant 4,\\ x\geqslant 0,\end{cases}$ 令点集 $T=\{(x_0,y_0)\in D\mid x_0,y_0\in\mathbf{Z},(x_0,y_0)$ 是 $z=x+y$ 在 D 上取得最大值或最小值的点$\}$，则 T 中的点共确定_____条不同的直线.

16. 已知 x,y 均为正实数，且 $\dfrac{1}{x+2}+\dfrac{1}{y+2}=\dfrac{1}{6}$，则 $x+y$ 的最小值为_____.

三、解答题(本大题共 6 小题，共 70 分)

17. (10 分)已知 a,b,c 为不相等的正数，且 $abc=1$. 求证：$\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}<\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}$.

18. (12 分)**(2018·甘肃武威市月考)**求下列不等式的解集.

(1) $-2x^2+x<-3$；

(2) $\dfrac{x+1}{x-2}\leqslant 2$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

19.(12分)(1)已知$x>0$,求$f(x)=\frac{2}{x}+2x$的最小值和取到最小值时对应x的值;

(2)已知$0<x<\frac{1}{3}$,求函数$y=x(1-3x)$的最大值.

20.(12分)**(2018·新疆石河子月考)**(1)已知关于x的不等式$x+\frac{1}{x-1}>m$对任意$x\in(1,+\infty)$恒成立,求实数m的取值范围;

(2)已知不等式$ax^2+bx+c>0$的解集是$(-4,1)$,求不等式$b(x^2-1)+a(x+3)+c>0$的解集.

学习札记

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

学习札记

21.(12 分)设不等式组 $\begin{cases}x>0,\\ y>0,\\ y\leqslant -nx+3n\end{cases}$ 所表示的平面区域为 D_n,记 D_n 内的整点个数为 $a_n(n\in\mathbf{N}_+)$.

(1)求数列$\{a_n\}$的通项公式;

(2)记数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 S_n,且 $T_n=\dfrac{S_n}{3\cdot 2^{n-1}}$,若对一切的正整数 n,总有 $T_n\leqslant m$,求实数 m 的取值范围.

22.(12 分)**(2019·天津耀华中学模拟)**某家具厂有方木料 90 m^3,五合板 600 m^2,准备加工成书桌和书橱出售.已知生产每张书桌需要方木料 0.1 m^3、五合板 2 m^2;生产每个书橱需要方木料 0.2 m^3、五合板 1 m^2.出售一张书桌可获利润 80 元,出售一个书橱可获得利润 120 元,怎样安排生产可使所得利润最大?最大利润为多少?

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

学习札记

阶段测试四

(本册综合测试)

时间:120 分钟　满分:150 分

答题卡

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
答案												

一、选择题(本大题共 12 小题,每小题 5 分,共 60 分)

1. **(2018·黑龙江大庆月考)**在$\triangle ABC$中,若$a=7,b=3,c=8$,则其面积等于 (　　)

A. 12　　B. $\frac{21}{2}$

C. 28　　D. $6\sqrt{3}$

2. **(2018·甘肃威武月考)**等比数列$\{a_n\}$中,$a_2=9$,$a_5=243$,则$\{a_n\}$的前 4 项和为 (　　)

A. 81　　B. 120

C. 168　　D. 192

3. **(2018·河南长葛质检)**设$0<b<a<1$,则下列不等式成立的是 (　　)

A. $ab<b^2<1$　　B. $\log_{\frac{1}{2}}b<\log_{\frac{1}{2}}a<0$

C. $2^b<2^a<2$　　D. $a^2<ab<1$

4. **(2019·辽宁盘锦月考)**已知$\{a_n\}$为等差数列,若$a_1+a_5+a_9=\pi$,则$\cos(a_2+a_8)$的值为 (　　)

A. $-\frac{1}{2}$　　B. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

C. $\frac{1}{2}$　　D. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

5. **(2018·河北鸡泽月考)**在$\triangle ABC$中,$AB=7$,$AC=6$,M是BC的中点,$AM=4$,则BC等于 (　　)

A. $\sqrt{21}$　　B. $\sqrt{106}$

C. $\sqrt{69}$　　D. $\sqrt{154}$

6. 若$a,b,c\in\mathbf{R}$,$a>b$,则下列不等式成立的是 (　　)

A. $\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$　　B. $\frac{1}{a^2}>\frac{1}{b^2}$

C. $\frac{a}{c^2+1}>\frac{b}{c^2+1}$　　D. $a|c|>b|c|$

7. **(2018·北京卷)**"十二平均律"是通用的音律体系,明代朱载堉最早用数学方法计算出半音比例,为这个理论的发展做出了重要贡献.十二平均律将一个纯八度音程分成十二份,依次得到十三个单音,从第二个单音起,每一个单音的频率与它的前一个单音的频率的比都等于$\sqrt[12]{2}$.若第一个单音的频率为f,则第八个单音频率为 (　　)

A. $\sqrt[3]{2}f$　　B. $\sqrt[3]{2^2}f$

C. $\sqrt[12]{2^5}f$　　D. $\sqrt[12]{2^7}f$

8. 若变量x,y满足约束条件$\begin{cases}x+y\leqslant 8,\\2y-x\leqslant 4,\\x\geqslant 0,\\y\geqslant 0,\end{cases}$且$z=5y-x$的最大值为$a$,最小值为$b$,则$a-b$的值是 (　　)

A. 48　　B. 30

C. 24　　D. 16

9. 设$\{a_n\}$是等比数列,公比$q=2$,S_n为$\{a_n\}$的前n项和,记$T_n=\frac{17S_n-S_{2n}}{a_{n+1}}(n\in\mathbf{N}^*)$,设$T_{n_0}$为数列$\{T_n\}$的最大项,则$n_0=$ (　　)

A. 2　　B. 3

C. 4　　D. 5

10. **(2018·吉林延边月考)**已知不等式$x^2-2x-3<0$的整数解构成等差数列$\{a_n\}$的前 3 项,则数列$\{a_n\}$的第 4 项为 (　　)

A. 3　　B. -1

C. 2　　D. 3 或-1

11. 在等比数列$\{a_n\}$中,已知$a_2=1$,则其前三项的和S_3的取值范围是 (　　)

A. $(-\infty,-1]$

B. $(-\infty,0]\cup[1,+\infty)$

C. $[3,+\infty)$

D. $(-\infty,-1]\cup[3,+\infty)$

12. 在数列$\{a_n\}$中,$a_1=1$,$a_{n+1}=a_n+n+1$,设数列$\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$的前$n$项和为$S_n$,若$S_n<m$对一切正整数$n$恒成立,则实数$m$的取值范围为 (　　)

A. $(3,+\infty)$　　B. $[3,+\infty)$

C. $(2,+\infty)$　　D. $[2,+\infty)$

二、填空题(本大题共 4 小题,每小题 5 分,共 20 分)

13. **(2019·甘肃天水月考)**已知数列$\{a_n\}$的前n项和$S_n=\frac{1}{4}n^2+\frac{2}{3}n+3$,数列$\{a_n\}$的通项公式为$a_n=$_____.

14. **(2018·全国卷Ⅱ)**若x,y满足约束条件$\begin{cases}x+2y-5\geqslant 0,\\x-2y+3\geqslant 0,\\x-5\leqslant 0,\end{cases}$则$z=x+y$的最大值为_____.

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

学习札记

15.（2018·黑龙江牡丹江月考）已知数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，且$a_1=1$，$a_{n+1}=3S_n(n\geqslant 1,n\in \mathbf{N}^*)$第$k$项满足$750<a_k<900$，则$k$等于_____.

16.（2018·江苏南京师范大学附中模拟）在$\triangle ABC$中，已知边a,b,c所对的角分别为A,B,C，若$2\sin^2 B+3\sin^2 C=2\sin A\sin B\sin C+\sin^2 A$，则$\tan A=$_____.

三、解答题（本大题共6小题，共70分）

17.（10分）若关于x的不等式$ax^2+3x-1>0$的解集是$\left\{x\left|\frac{1}{2}<x<1\right.\right\}$.

（1）求a的值；

（2）求不等式$ax^2-3x+a^2+1>0$的解集.

18.（12分）（2019·河北邯郸月考）在$\triangle ABC$中，角A,B,C所对的边分别为a,b,c，$\triangle ABC$的面积为S，$a\sin B=\sqrt{3}b\cos A$.

（1）求角A的大小；

（2）若$a=\sqrt{3}$，$S=\frac{\sqrt{3}}{2}$，求$b+c$的值.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

19.(12分)在$\triangle ABC$中,角A,B,C的对边分别为a,b,c,且$\cos A=\frac{1}{3}$.

(1)求$\sin^2\frac{B+C}{2}+\cos 2A$的值;

(2)若$a=\sqrt{3}$,求bc的最大值.

20.(12分)**(2018·天津卷)**设$\{a_n\}$是等比数列,公比大于0,其前n项和为$S_n(n\in\mathbf{N}^*)$,$\{b_n\}$是等差数列.已知$a_1=1,a_3=a_2+2,a_4=b_3+b_5,a_5=b_4+2b_6$.

(1)求$\{a_n\}$和$\{b_n\}$的通项公式;

(2)设数列$\{S_n\}$的前n项和为$T_n(n\in\mathbf{N}^*)$,求T_n.

学习札记

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

学习札记

21.（12 分）**（2018·河南信阳月考）**已知数列$\{a_n\}$满足$a_1=2$，$a_{n+1}=2a_n+2^{n+1}$.

（1）设$b_n=\frac{a_n}{2^n}$，求数列$\{b_n\}$的通项公式；

（2）求数列$\{a_n\}$的前n项和S_n.

22.（12 分）某投资商到一开发区投资 72 万元建起一座蔬菜加工厂，第一年共支出 12 万元，以后每年支出增加 4 万元，从第一年起每年蔬菜销售收入 50 万元. 设$f(n)$表示前n年的纯利润总和（$f(n)$=前n年的总收入－前n年的总支出－投资额）.

（1）该厂从第几年起开始盈利？

（2）若干年后，投资商为开发新项目，对该厂有两种处理方法：①年平均纯利润达到最大时，以 48 万元出售该厂；②纯利润总和达到最大时，以 16 万元出售该厂，问哪种方案更合算？

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

骄子之路®
the Road to Pride
让 学习更快乐，人生更精彩

答案与解析

与45分钟课时作业与单元测试配套使用

数学

必修5 RJ·B

班级：_____

姓名：_____

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

第一部分　课时作业

第一章　解三角形

1.1　正弦定理和余弦定理

1.1.1　正弦定理

基础知识点对点

1. A　由 $\cos A=\frac{1}{3}$，得 $\sin A=\frac{2\sqrt{2}}{3}$，由正弦定理 $\frac{a}{\frac{2\sqrt{2}}{3}}=\frac{1}{\frac{\sqrt{2}}{2}}$，

所以 $a=\frac{4}{3}$，故选 A.

2. $\frac{21}{13}$

解析：$\because \cos A=\frac{4}{5}$，$\cos C=\frac{5}{13}$，

$\therefore \sin A=\frac{3}{5}$，$\sin C=\frac{12}{13}$，

$\therefore \sin B=\sin(A+C)$

$=\sin A\cos C+\cos A\sin C$

$=\frac{3}{5}\times\frac{5}{13}+\frac{4}{5}\times\frac{12}{13}$

$=\frac{63}{65}$，

$\therefore$ 由正弦定理 $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}$ 得，

$\therefore b=\frac{a\sin B}{\sin A}=\frac{1\times\frac{63}{65}}{\frac{3}{5}}=\frac{21}{13}$.

3. B　由题可得，$\sin(A+C)+\sin A(\sin C-\cos C)=0$，

$\therefore \sin A\cos C+\cos A\sin C+\sin A\sin C-\sin A\cos C=0$，

$\therefore \sin C(\sin A+\cos A)=0$，

在 $\triangle ABC$ 中，$\sin C\neq 0$，$\therefore \sin A+\cos A=0$，$\therefore A=\frac{3\pi}{4}$.

由正弦定理 $\frac{a}{\sin A}=\frac{c}{\sin C}$，得

$\sin C=\frac{c\sin A}{a}=\frac{\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}}{2}=\frac{1}{2}$，又 $C\in\left(0,\frac{\pi}{4}\right)$，

$\therefore C=\frac{\pi}{6}$，故选 B.

4. D　由正弦定理 $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}$ 得，

$\sin B=\frac{b\sin A}{a}=\frac{2\sqrt{3}\times\frac{1}{2}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，

$\because b>a$，

$\therefore B=60^\circ$ 或 $B=120^\circ$，故选 D.

5. A　由正弦定理得

$2R\sin B\cos C+2R\sin C\cos B=2R\sin^2 A$，

即 $\sin(B+C)=\sin^2 A$，

即 $\sin A=\sin^2 A$，$\because 0<A<\pi$，$\therefore \sin A\neq 0$，$\therefore \sin A=1$，

$\therefore A=\frac{\pi}{2}$，故选 A.

6. D　在 $\triangle ABC$ 中，$\because \frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}$，$\therefore \frac{\sin B}{\sin A}=\frac{b}{a}$.

又 $\because 3a=2b$，$\therefore \frac{b}{a}=\frac{3}{2}$，$\therefore \frac{\sin B}{\sin A}=\frac{3}{2}$.

$\therefore \frac{2\sin^2 B-\sin^2 A}{\sin^2 A}=2\left(\frac{\sin B}{\sin A}\right)^2-1=2\times\left(\frac{3}{2}\right)^2-1=\frac{7}{2}$.

课后拔高提能练

1. D　由正弦定理 $\frac{AB}{\sin C}=\frac{AC}{\sin B}$，

将 $AB=\sqrt{2}AC$ 代入得，

$\sin C=\frac{\sqrt{2}}{2}$，$\because C\in(0^\circ,180^\circ)$，

$\therefore \angle C=45^\circ$ 或 $\angle C=135^\circ$，

$\therefore \angle A=105^\circ$ 或 $\angle A=15^\circ$，故选 D.

2. C　由正弦定理，得 $\sqrt{3}\sin B=2\sin A\sin B$，

在 $\triangle ABC$ 中，$\sin B\neq 0$，$\therefore \sin A=\frac{\sqrt{3}}{2}$，

$\therefore A=60^\circ$ 或 120°，故选 C.

3. B　由正弦定理得 $\sin B=\frac{b\sin A}{a}=\frac{5\times\frac{1}{3}}{3}=\frac{5}{9}$，故选 B.

4. B　A 中，$\sin B=\frac{14\times\sin 30^\circ}{7}=1$，$B$ 有唯一解，A 错误；B 中，

$b<a$，$\sin B=\frac{25\times\frac{1}{2}}{30}=\frac{5}{12}$，$B$ 有唯一解，B 正确；C 中，

$b>a$，$\sin B=\frac{9\times\frac{\sqrt{2}}{2}}{6}=\frac{3\sqrt{2}}{4}>1$，无解，C 错误；D 中，$b<c$，

$\sin C=\frac{10\times\sin 60^\circ}{9}$，有两解，D 错误. 故选 B.

5. A　由 $\sin B(1+2\cos C)=2\sin A\cos C+\cos A\sin C$，

得 $\sin B+2\sin B\cos C=\sin A\cos C+\sin(A+C)$，

$\therefore 2\sin B\cos C=\sin A\cos C$，

$\because \triangle ABC$ 是锐角三角形，

$\therefore \cos C\neq 0$，

$\therefore 2\sin B=\sin A$，

由正弦定理知 $a=2b$，故选 A.

6. A　在 $\triangle ABC$ 中，$\because \cos A=\frac{4}{5}$，$\therefore \sin A=\frac{3}{5}$.

又 $\because b=5c$，$\therefore \sin B=5\sin C$.

又 $\sin C=\sin(A+B)=\sin A\cos B+\cos A\sin B=\frac{3}{5}\cos B+\frac{4}{5}\sin B$，

$\therefore \sin B=3\cos B+4\sin B$，

$\therefore \sin B=-\cos B$. $\therefore \tan B=-1$，

$\therefore B=\frac{3\pi}{4}$，$\therefore \sin B=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

7. $1:\sqrt{3}:2$

解析：$\because A:B:C=1:2:3$，

$\therefore A=30^\circ$，$B=60^\circ$，$C=90^\circ$.

$\therefore a:b:c=\sin A:\sin B:\sin C=\frac{1}{2}:\frac{\sqrt{3}}{2}:1=1:\sqrt{3}:2$.

8. 75°

解析：由正弦定理 $\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$ 得，

$\sin B=\frac{b\sin C}{c}=\frac{\sqrt{6}\times\frac{\sqrt{3}}{2}}{3}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，又 $b<c$，$\therefore B=45^\circ$，

$\therefore A=180^\circ-B-C=75^\circ$.

9. 2

解析：在 $\triangle ABC$ 中，$\because b\cos C+c\cos B=2b$，

$\therefore \sin B\cos C+\sin C\cos B=2\sin B$，

即 $\sin(B+C)=2\sin B$，

$\therefore \sin A=2\sin B$，由正弦定理得 $a=2b$，即 $\frac{a}{b}=2$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

10. **解**：由正弦定理及 $3a\cos C=2c\cos A$，
得 $3\sin A\cos C=2\sin C\cos A$，
$\therefore 3\tan A=2\tan C$. 又 $\because \tan A=\frac{1}{3}$，
$\therefore \tan C=\frac{1}{2}$，
$\therefore \tan B=\tan[180^\circ-(A+C)]=$
$-\tan(A+C)=-\frac{\tan A+\tan C}{1-\tan A\tan C}=$
$-\frac{\frac{1}{3}+\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}}=-1$.
$\because 0^\circ<B<180^\circ$，
$\therefore B=135^\circ$.

11. **解**：(1)证明：不妨设 $|\overrightarrow{BC}|=|\overrightarrow{CA}|=|\overrightarrow{AB}|=1$，
则 $\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}=|\overrightarrow{CA}||\overrightarrow{CB}|\cos 60^\circ=\frac{1}{2}$，
同理可得 $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}=\frac{1}{2}$，$\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=\frac{1}{2}$，
$\therefore \boldsymbol{b}\cdot(-\boldsymbol{a})=(-\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=(-\boldsymbol{c})\cdot\boldsymbol{a}$，
$\therefore \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}=\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a}$.
(2)若 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}=\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a}$，
则 $\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}$，
$\therefore \overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}$，
即 $|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos C=|\boldsymbol{b}||\boldsymbol{c}|\cos A=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{c}|\cos B$，
各式均除以 $|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}||\boldsymbol{c}|$ 得，$\frac{\cos C}{|\boldsymbol{c}|}=\frac{\cos A}{|\boldsymbol{a}|}=\frac{\cos B}{|\boldsymbol{b}|}$，
由正弦定理可得 $\frac{|\boldsymbol{c}|}{\sin C}=\frac{|\boldsymbol{a}|}{\sin A}=\frac{|\boldsymbol{b}|}{\sin B}$，
两式相乘得 $\frac{\cos C}{\sin C}=\frac{\cos A}{\sin A}=\frac{\cos B}{\sin B}$，$\therefore \tan C=\tan A=\tan B$.
$\because A,B,C\in(0,\pi)$，$\therefore A=B=C$，即 $\triangle ABC$ 为正三角形.

12. **解**：(1)$\because \boldsymbol{m}\perp\boldsymbol{n}$，$\therefore -\cos B\cos C+\sin B\sin C-\frac{\sqrt{2}}{2}=0$，
$\therefore \cos(B+C)=-\frac{\sqrt{2}}{2}$，
$\therefore -\cos A=-\frac{\sqrt{2}}{2}$，即 $\cos A=\frac{\sqrt{2}}{2}$，$\because 0<A<\pi$，$\therefore A=\frac{\pi}{4}$.
(2)$\because A=\frac{\pi}{4}$，$\therefore C=\frac{3\pi}{4}-B$，
$\therefore \sin B+\cos\left(\frac{7\pi}{12}-C\right)=\sin B+\cos\left(B-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{3}{2}\sin B+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos B=\sqrt{3}\sin\left(B+\frac{\pi}{6}\right)$，
$\because B\in\left(0,\frac{3\pi}{4}\right)$，$\therefore$ 当 $B=\frac{\pi}{3}$ 时，$\sin B+\cos\left(\frac{7\pi}{12}-C\right)$ 有最大值.
则由正弦定理 $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}$ 得，
$b=\frac{a\sin B}{\sin A}=\frac{\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}=\sqrt{3}$.

1.1.2 余弦定理

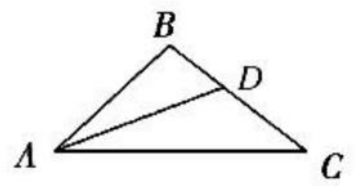
基础知识点对点

1. A　由正弦定理 $\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$，
得 $c=2\sqrt{3}b$，
代入 $a^2-b^2=\sqrt{3}bc$，
得 $a^2=b^2+\sqrt{3}b\cdot 2\sqrt{3}b=7b^2$，
$\therefore \cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{b^2+12b^2-7b^2}{4\sqrt{3}b^2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，
$\because A\in(0,\pi)$，
$\therefore A=\frac{\pi}{6}$，故选 A.

2. B　由正弦定理及 $3\sin A=5\sin B$，
得 $3a=5b$，$\therefore a=\frac{5}{3}b$，
又 $b+c=2a$，$\therefore c=\frac{7}{3}b$，
$\therefore \cos C=\frac{b^2+a^2-c^2}{2ab}=\frac{b^2+\frac{25}{9}b^2-\frac{49}{9}b^2}{2\times\frac{5}{3}b^2}=-\frac{1}{2}$.
$\because 0<C<\pi$，$\therefore C=\frac{2\pi}{3}$，故选 B.

3. A　由余弦定理得
$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$，
$\therefore 13=a^2+b^2-2ab\times\frac{1}{2}$，
$\therefore b^2=1$，
$\therefore b=1$，故选 A.

4. C　在 $\triangle ABD$ 中，由正弦定理，得
$\sin\angle ADB=\frac{AB\cdot\sin B}{AD}=$
$\frac{\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，



$\because B=120^\circ$，$\therefore \angle ADB$ 是锐角，
$\therefore \angle ADB=45^\circ$，
$\therefore \angle BAD=180^\circ-\angle ABD-\angle ADB=15^\circ$，
$\therefore \angle BAC=30^\circ$，$\therefore \angle BCA=30^\circ$，
$\therefore BC=AB=\sqrt{2}$，
$\therefore AC^2=AB^2+BC^2-2AB\cdot BC\cdot\cos 120^\circ=6$，
$\therefore AC=\sqrt{6}$，故选 C.

5. **解**：(1)由 $a\sin A\cos C+c\sin A\cos A=\frac{1}{3}c$ 及正弦定理，
得 $\sin A\sin A\cos C+\sin C\sin A\cos A=\frac{1}{3}\sin C$，
即 $\sin A\sin B=\frac{1}{3}\sin C$.
由 $\cos B=\frac{2\sqrt{5}}{5}$，得 $\sin B=\frac{\sqrt{5}}{5}$，
$\because C=\pi-(A+B)$，$\therefore 3\sin A=\sqrt{5}\sin(A+B)$，
则 $\sin A=\cos A$，得 $\tan A=1$，$\because A\in(0,\pi)$，
$\therefore A=\frac{\pi}{4}$.

(2)根据余弦定理得 $c^2+\frac{1}{4}b^2-\frac{\sqrt{2}}{2}bc=26$，
$\because \sin A\times\frac{\sqrt{5}}{5}=\frac{1}{3}\sin C$ 且 $\sin B\times\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{1}{3}\sin C$，
$\therefore c=\frac{3\sqrt{5}}{5}a$，$b=\frac{\sqrt{2}}{3}c=\frac{\sqrt{10}}{5}a$，$\therefore \frac{9}{5}a^2+\frac{1}{10}a^2-\frac{3}{5}a^2=26$.
解得 $a=2\sqrt{5}$，$\therefore b=2\sqrt{2}$，$c=6$，
$\therefore \triangle ABC$ 的最短边的边长为 $2\sqrt{2}$.

课后拔高提能练

1. A　由 $(a+b+c)(b+c-a)=3bc$，
得 $b^2+c^2-a^2=bc$，
$\therefore \cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{1}{2}$.
$\because A\in(0,\pi)$，则 $A=\frac{\pi}{3}$，故选 A.

2. C　由 $6\sin A=4\sin B=3\sin C$ 及正弦定理，
得 $6a=4b=3c$，
$\therefore a=\frac{1}{2}c$，$b=\frac{3}{4}c$，
$\therefore \cos B=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=\frac{11}{16}$，故选 C.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

3. C　由题可知 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{a^2+b^2-c^2}{4}$，所以 $a^2+b^2-c^2=2ab\sin C$，由余弦定理 $a^2+b^2-c^2=2ab\cos C$，

$\therefore \sin C=\cos C$，$\because C\in(0,\pi)$，$\therefore C=\frac{\pi}{4}$，故选 C.

4. A　由余弦定理，得

$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C=a^2+b^2-ab$，

代入 $(a+b)^2-c^2=4$，得

$3ab=4$，$\therefore ab=\frac{4}{3}$，故选 A.

5. A　由 $\sin A=\sqrt{2}\sin C$ 及正弦定理，得 $a=\sqrt{2}c$，

由 $a^2=bc$，得 $2c^2=bc$，$\therefore b=2c$，

$\therefore \cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\frac{2c^2+4c^2-c^2}{2\sqrt{2}c\cdot 2c}=\frac{5\sqrt{2}}{8}$，故选 A.

6. C　在 $\triangle ABC$ 中，$\because a=2b\sin A$，

$\therefore \sin A=2\sin B\sin A$.

$\because \sin A\neq 0$，$\therefore \sin B=\frac{1}{2}$.

又 $\because b^2+c^2-a^2=bc$，

$\therefore \cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{1}{2}$，

$\therefore A=60°$，于是 $B=30°$，

则 $C=90°$，故 $\triangle ABC$ 为直角三角形，故选 C.

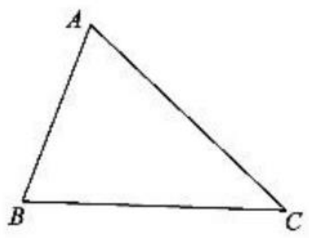
7. 1

解析：在 $\triangle ABC$ 中，$A=60°$，$AC=2$，

$BC=\sqrt{3}$，设 $AB=x$，则 $BC^2=AB^2+AC^2-2AB\cdot AC\cos A$，

$\therefore 3=x^2+4-2\times x\times 2\times\frac{1}{2}$，

即 $x^2-2x+1=0$，$\therefore x=1$.



8. $\frac{\pi}{4}$

解析：$\because b=c$，由余弦定理得

$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A=2b^2(1-\cos A)$，

又 $a^2=2b^2(1-\sin A)$，

$\therefore 1-\cos A=1-\sin A$，

$\therefore \sin A=\cos A$，

$\because A\in(0,\pi)$，

$\therefore A=\frac{\pi}{4}$.

9. $\frac{2\sqrt{3}}{3}$

解析：根据题意，结合正弦定理可得 $\sin B\sin C+\sin C\sin B=4\sin A\sin B\sin C$，即 $\sin A=\frac{1}{2}$，结合余弦定理可得 $2bc\cos A=8$，所以 A 为锐角，且 $\cos A=\frac{\sqrt{3}}{2}$，从而求得 $bc=\frac{8\sqrt{3}}{3}$，所以 $\triangle ABC$ 的面积为 $S=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}\times\frac{8\sqrt{3}}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

10. **解**：(1) $\triangle ABC$ 中，$a>b$，知 B 为锐角，$\because \sin B=\frac{3}{5}$，

$\therefore \cos B=\frac{4}{5}$，由余弦定理得，$b^2=a^2+c^2-2ac\cos B=13$，

$\therefore b=\sqrt{13}$，由正弦定理得，$\sin A=\frac{a\sin B}{b}=\frac{3\sqrt{13}}{13}$.

(2) 由(1)知 $\sin A=\frac{3\sqrt{13}}{13}$，又 $a<c$，$\therefore \cos A=\frac{2\sqrt{13}}{13}$，

$\therefore \sin 2A=2\sin A\cos A=\frac{12}{13}$，

$\cos 2A=1-2\sin^2 A=-\frac{5}{13}$，

$\therefore \sin\left(2A+\frac{\pi}{4}\right)=\sin 2A\cos\frac{\pi}{4}+\cos 2A\sin\frac{\pi}{4}=\frac{7\sqrt{2}}{26}$.

11. **解**：(1) 由 $(a+b+c)(a-b+c)=ac$，

得 $a^2+c^2-b^2=-ac$，

则 $\cos B=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=-\frac{1}{2}$，

又 $B\in(0,\pi)$，$\therefore B=\frac{2\pi}{3}$.

(2) 由(1)知 $A+C=\frac{\pi}{3}$，

$\therefore \sin A\sin C=\sin C\sin\left(\frac{\pi}{3}-C\right)=$

$\sin C\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos C-\frac{1}{2}\sin C\right)=$

$\frac{\sqrt{3}}{2}\sin C\cos C-\frac{1}{2}\sin^2 C=\frac{\sqrt{3}}{4}\sin 2C+\frac{1}{4}\cos 2C-\frac{1}{4}=$

$\frac{1}{2}\sin\left(2C+\frac{\pi}{6}\right)-\frac{1}{4}=\frac{\sqrt{3}-1}{4}$，

$\therefore \sin\left(2C+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$，又 $\because 0<C<\frac{\pi}{3}$，$\therefore \frac{\pi}{6}<2C+\frac{\pi}{6}<\frac{5\pi}{6}$，$\therefore 2C+\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{3}$ 或 $2C+\frac{\pi}{6}=\frac{2\pi}{3}$，$\therefore C=\frac{\pi}{12}$ 或 $C=\frac{\pi}{4}$.

12. **解**：(1) 在 $\triangle ABC$ 中，由正弦定理 $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}$，可得 $b\sin A=a\sin B$，

又由 $b\sin A=a\cos\left(B-\frac{\pi}{6}\right)$，

得 $a\sin B=a\cos\left(B-\frac{\pi}{6}\right)$，

即 $\sin B=\cos\left(B-\frac{\pi}{6}\right)$，可得 $\tan B=\sqrt{3}$.

又因为 $B\in(0,\pi)$，可得 $B=\frac{\pi}{3}$.

(2) 在 $\triangle ABC$ 中，由余弦定理及 $a=2$，$c=3$，$B=\frac{\pi}{3}$，

有 $b^2=a^2+c^2-2ac\cos B=7$，故 $b=\sqrt{7}$.

由 $b\sin A=a\cos\left(B-\frac{\pi}{6}\right)$，可得 $\sin A=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}$. 因为 $a<c$，故 $\cos A=\frac{2}{\sqrt{7}}$.

因此 $\sin 2A=2\sin A\cos A=\frac{4\sqrt{3}}{7}$，

$\cos 2A=2\cos^2 A-1=\frac{1}{7}$.

所以 $\sin(2A-B)=\sin 2A\cos B-\cos 2A\sin B=\frac{4\sqrt{3}}{7}\times\frac{1}{2}-\frac{1}{7}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{3\sqrt{3}}{14}$.

1.2　应用举例

基础知识点对点

1. B　如题图，可知 $\angle CAB=75°-30°=45°$，

$\angle ABO=75°$，$AO=60$ m，$\angle ACB=30°$，

$\therefore$ 在 $\triangle AOB$ 中，$AB=\frac{AO}{\sin\angle ABO}=\frac{60}{\sin 75°}$，

在 $\triangle ABC$ 中，由正弦定理，可得，

$\frac{BC}{\sin\angle CAB}=\frac{AB}{\sin\angle ACB}$，

$\therefore BC=\frac{AB\cdot\sin\angle CAB}{\sin\angle ACB}=\frac{60\cdot\sin 45°}{\sin 75°\cdot\sin 30°}=120(\sqrt{3}-1)$ m，

故选 B.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

2. $\frac{14+10\sqrt{3}}{13}$

解析：设$\angle ABM=\alpha$，在$\triangle ABM$中，$AB=2$，

$\angle AMB=45°$，由正弦定理$\frac{BM}{\sin A}=\frac{BA}{\sin\angle AMB}$得，

$BM=2\sqrt{2}\sin(\alpha+45°)$.

在$\triangle CMB$中，$CB=2$，$\angle BMC=30°$，$\angle BCM=\alpha-30°$，

由正弦定理$\frac{BM}{\sin\angle BCM}=\frac{BC}{\sin 30°}$得，

$BM=4\sin(\alpha-30°)$，

$\therefore 2\sqrt{2}\sin(\alpha+45°)=4\sin(\alpha-30°)$，

$\therefore 2\cos\alpha=(\sqrt{3}-1)\sin\alpha$，

$\therefore \tan\alpha=\frac{2}{\sqrt{3}-1}=\sqrt{3}+1$.

$\therefore M$到直路ABC的最短距离为

$BM\sin\alpha=2\sqrt{2}\sin(\alpha+45°)\cdot\sin\alpha=2\sin^2\alpha+2\sin\alpha\cos\alpha=\frac{2\tan^2\alpha+2\tan\alpha}{\tan^2\alpha+1}=\frac{14+10\sqrt{3}}{13}$.

3. A　$\because \sin A=\frac{2\sqrt{2}}{3}$，$\triangle ABC$是锐角三角形，

$\therefore \cos A=\frac{1}{3}$，

由$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$，

得$b^2+c^2-\frac{2}{3}bc=4$，　①

$\because S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}bc\sin A=\sqrt{2}$，

$\therefore bc=3$.　②

由①②可得$b=\sqrt{3}$. 故选 A.

4. $\frac{\sqrt{15}}{2}$　$\frac{\sqrt{10}}{4}$

解析：在$\triangle ABC$中，$\because AB=AC=4$，$BC=2$，$\therefore$由余弦定理得$\cos\angle ABC=\frac{AB^2+BC^2-AC^2}{2AB\cdot BC}=\frac{4^2+2^2-4^2}{2\times4\times2}=\frac{1}{4}$，

$\therefore \sin\angle DBC=\sin\angle ABC=\frac{\sqrt{15}}{4}$.

$\therefore S_{\triangle BDC}=\frac{1}{2}BD\cdot BC\sin\angle DBC=\frac{\sqrt{15}}{2}$，

$\because BD=BC=2$，$\therefore \angle BDC=\frac{1}{2}\angle ABC$，

$\therefore \cos\angle BDC=\sqrt{\frac{\cos\angle ABC+1}{2}}=\frac{\sqrt{10}}{4}$.

5. **解**：(1)由题设及$A+B+C=\pi$，得$\sin B=8\sin^2\frac{B}{2}$，

故$\sin B=4(1-\cos B)$，

上式两边平方，整理得$17\cos^2 B-32\cos B+15=0$，

解得$\cos B=1$(舍去)，$\cos B=\frac{15}{17}$.

(2)由$\cos B=\frac{15}{17}$得$\sin B=\frac{8}{17}$，故$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ac\sin B=\frac{4}{17}ac$，

又$S_{\triangle ABC}=2$，则$ac=\frac{17}{2}$，由余弦定理及$a+c=6$得$b^2=a^2+c^2-2ac\cos B=(a+c)^2-2ac(1+\cos B)=36-2\times\frac{17}{2}\times\left(1+\frac{15}{17}\right)=4$，所以$b=2$.

6. **解**：(1)$\because \angle A$是钝角，$\sin A=\frac{3}{5}$，$\therefore \cos A=-\frac{4}{5}$，

在$\triangle APQ$中，由余弦定理得，$PQ^2=AP^2+AQ^2-2AP\cdot AQ\cos A$，

$\therefore AQ^2+8AQ-20=0$，

解得$AQ=2$或-10(舍去负值)，$\therefore AQ=2$.

(2)由$\cos A=\frac{12}{13}$，得$\sin\alpha=\frac{5}{13}$.

在$\triangle APQ$中，$\alpha+\beta+A=\pi$，

$\because \sin(\alpha+\beta)=\sin(\pi-A)=\sin A=\frac{3}{5}$，

$\therefore \cos(\alpha+\beta)=-\cos A=\frac{4}{5}$，

$\therefore \cos(2\alpha+\beta)=\cos[(\alpha+\beta)+\alpha]=\cos(\alpha+\beta)\cos\alpha-\sin(\alpha+\beta)\sin\alpha=\frac{4}{5}\times\frac{12}{13}-\frac{3}{5}\times\frac{5}{13}=\frac{33}{65}$.

课后拔高提能练

1. C　点N在点M的南偏东43°方向上，故选 C.

2. D　由题可知$S=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{3}{2}$，

$\therefore \sin A=\frac{\sqrt{3}}{2}$，

若A为锐角，则$A=60°$，符合题意，

若A为钝角，则$A=120°$，符合题意，故选 D.

3. D　由题得$AB^2=AC^2+BC^2-2AC\cdot BC\cos C=1+1-2\times1\times1\times\left(-\frac{1}{2}\right)=3$，

$\therefore AB=\sqrt{3}$，故选 D.

4. C　$\because S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ac\sin B=2$，

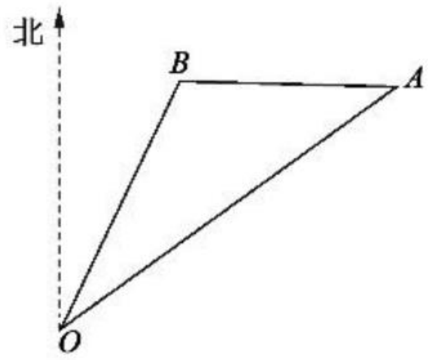
$\therefore c=4\sqrt{2}$，

$\therefore b^2=a^2+c^2-2ac\cos B=25$，

$\therefore b=5$，设$\triangle ABC$外接圆的半径为R，

则$2R=\frac{b}{\sin B}=5\sqrt{2}$，故选 C.

5. C　如图所示，设某基地位于点O处，在$\triangle OAB$中，$OB=100$，$OA=100\sqrt{3}$，$A=30°$，



由正弦定理得

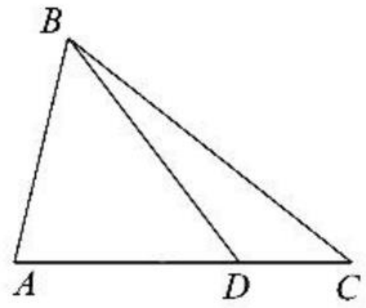
$\sin B=\frac{OA\sin A}{OB}=\frac{100\sqrt{3}\times\frac{1}{2}}{100}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，$\because 0°<B<180°$，

$\therefore B=60°$或$120°$.

当$B=60°$时，$A=30°$，此时$\angle BOA=90°$，$\therefore BA=2OB=200$；

当$B=120°$时，$A=\angle BOA=30°$，$\therefore BA=OB=100$.

6. B　如图所示，不妨设$BD=2$，



$\therefore AB=\sqrt{3}$，$BC=4$，

$\therefore AD=AB=\sqrt{3}$，

$\therefore \cos A=\frac{AB^2+AD^2-BD^2}{2AB\cdot AD}=\frac{3+3-4}{2\times3}=\frac{1}{3}$，

$\therefore \sin A=\sqrt{1-\frac{1}{9}}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$，

$\therefore \frac{AB}{\sin C}=\frac{BC}{\sin A}$，

$\therefore \sin C=\frac{AB\cdot\sin A}{BC}=\frac{\sqrt{3}}{4}\times\frac{2\sqrt{2}}{3}=\frac{\sqrt{6}}{6}$，故选 B.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

7. 8

解析：在$\triangle ABC$中，$\because \cos A=\frac{3}{5}$，

$\therefore \sin A=\frac{4}{5}$. $\because \frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}$，

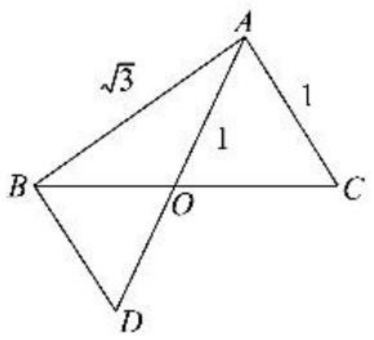
$\therefore a=\frac{b\sin A}{\sin B}=\frac{5\sqrt{3}\times\frac{4}{5}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=8$.

8. 1

解析：如图，延长AO至D，使$OD=AO$，

在$\triangle ABD$中，$AB=\sqrt{3}$，$BD=AC=1$，

$AD=2$.

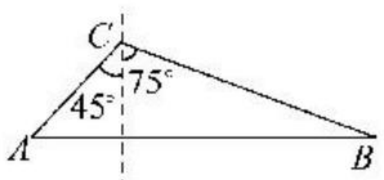


$\therefore \angle ABD=90^\circ$，$\angle BAC=90^\circ$，$\therefore \triangle ABC$为直角三角形，

$\therefore$外接圆半径为1.

9. $\frac{2}{3}$

解析：设甲乙会合的最短时间为x，在$\triangle ACB$中，$AC=10$，$AB=21x$，$CB=9x$，$\angle ACB=45^\circ+75^\circ=120^\circ$，



$\therefore$由余弦定理，得

$(21x)^2=10^2+(9x)^2-2\times10\times9x\times\left(-\frac{1}{2}\right)$，

$\therefore 36x^2-9x-10=0$，$\therefore x=\frac{2}{3}$或$x=-\frac{5}{12}$(舍去).

10. **解**：(1)证明：由正弦定理及已知可得

$\sin B+\sin C=2\sin A\cos B$，

$\therefore \sin B+\sin(A+B)=2\sin A\cos B$，

$\therefore \sin B=\sin A\cos B-\cos A\sin B=\sin(A-B)$，

$\because A,B\in(0,\pi)$，

$\therefore A-B\in(0,\pi)$，

$\therefore B=A-B$或$B=\pi-(A-B)$，

$\therefore A=2B$或$A=\pi$(舍)，

$\therefore A=2B$.

(2)由$S=\frac{a^2}{4}$得

$\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{a^2}{4}$，$\therefore b\sin C=\frac{a}{2}$，

由正弦定理知$\sin B\sin C=\frac{1}{2}\sin A=\frac{1}{2}\sin 2B=\sin B\cos B$，

$\because \sin B\neq0$，$\therefore \sin C=\cos B=\sin\left(\frac{\pi}{2}-B\right)$，

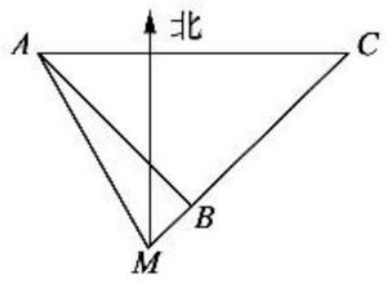
$\therefore C=\frac{\pi}{2}-B$或$C=\pi-\frac{\pi}{2}+B=\frac{\pi}{2}+B$.

当$C=\frac{\pi}{2}-B$时，$A=\frac{\pi}{2}$；

当$C=\frac{\pi}{2}+B$时，$A=\frac{\pi}{4}$，

$\therefore A=\frac{\pi}{2}$或$A=\frac{\pi}{4}$.

11. **解**：由题设，画出示意图.



在$\triangle ABC$中，$AC=31$，$BC=20$，$AB=21$，

由余弦定理得$\cos C=\frac{AC^2+BC^2-AB^2}{2AC\cdot BC}=\frac{23}{31}$，

则$\sin^2 C=1-\cos^2 C=\frac{432}{31^2}$，$\sin C=\frac{12\sqrt{3}}{31}$，

所以$\sin\angle MAC=\sin(120^\circ-\angle C)=\sin120^\circ\cos C-\cos120^\circ\sin C=\frac{35\sqrt{3}}{62}$.

在$\triangle MAC$中，由正弦定理得$MC=\frac{AC\sin\angle MAC}{\sin\angle AMC}=\frac{31}{\sqrt{3}}\times\frac{35\sqrt{3}}{62}=35$，从而有$MB=MC-BC=15$.

所以汽车还需要行驶15千米才能到达M汽车站.

12. **解**：(1)由已知$B=\frac{\pi}{6}$，$a^2-ab-2b^2=0$，结合正弦定理得$2\sin^2 A-\sin A-1=0$，于是$\sin A=1$或$\sin A=-\frac{1}{2}$(舍).

因为$0<A<\pi$，

所以，$A=\frac{\pi}{2}$，$C=\frac{\pi}{3}$.

(2)由题意及余弦定理可知$a^2+b^2+ab=196$，

由(1)$a^2-ab-2b^2=0$得$(a+b)(a-2b)=0$即$a=2b$，

联立解得$b=2\sqrt{7}$，$a=4\sqrt{7}$.

所以，$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ab\sin C=14\sqrt{3}$.

章末检测

1. C　A中，$a=2\sqrt{2}<b$，$\sin B=\frac{2\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}<1$，有两解，A错；B中，$a>b$，有一解，B错；C中，$\sin B=\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{3}}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{6}}{2}>1$，无解，C正确；D中，$a>b$，$B=120^\circ$，无解，D错. 故选C.

2. D　由正弦定理得$\frac{AC}{\sin45^\circ}=\frac{BC}{\sin60^\circ}$，$\therefore AC=\frac{3\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=2\sqrt{3}$，故选D.

3. A　由正弦定理可得$(a+b+c)(a+b-c)=3ab$，

$\therefore a^2+b^2-c^2=ab$，

$\therefore \cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\frac{1}{2}$，$\because C\in(0,\pi)$，$\therefore C=60^\circ$，故选A.

4. A　因为$\cos C=2\cos^2\frac{C}{2}-1=2\times\left(\frac{\sqrt{5}}{5}\right)^2-1=-\frac{3}{5}$，所以$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C=1+25-2\times1\times5\times\left(-\frac{3}{5}\right)=32$. 所以$c=4\sqrt{2}$，故选A.

5. C　由题可知$a=2$，$b=3$，$\cos C=\frac{1}{3}$，

$\therefore c^2=a^2+b^2-2ab\cos C=9$，

$\therefore c=3$.

由$\cos C=\frac{1}{3}$，得$\sin C=\frac{2\sqrt{2}}{3}$，

$\therefore 2R=\frac{c}{\sin C}=\frac{9\sqrt{2}}{4}$，

$\therefore R=\frac{9\sqrt{2}}{8}$，故选C.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

6. B　由 $c=a\cos B$，可得 $\sin C=\sin A\cos B$，
$\therefore \sin(A+B)=\sin A\cos B$，
$\therefore \sin A\cos B+\cos A\sin B=\sin A\cos B$，
$\therefore \cos A\sin B=0$，
$\because$ 在$\triangle ABC$中，$\sin B\neq 0$，
$\therefore \cos A=0$，$\therefore A=\frac{\pi}{2}$.
由 $b=a\sin C$，得 $\sin B=\sin A\sin C$，
$\because A=\frac{\pi}{2}$，$\therefore \sin A=1$，$\sin B=\sin C$，$\therefore B=C$，
$\therefore \triangle ABC$是等腰直角三角形. 故选 B.

7. A　依题意知 $a=b+2$，$b=c+2$，$\therefore$ 最长边为 a，
从而最大角为 A，$\therefore \sin A=\frac{\sqrt{3}}{2}$，$\cos A=\pm\frac{1}{2}$.
当 $\cos A=\frac{1}{2}$时，由 $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$，
得$(b+2)^2=b^2+(b-2)^2-2b(b-2)\times\frac{1}{2}$，$\therefore b=0$(舍去).
当 $\cos A=-\frac{1}{2}$时，同理解得 $b=5$，从而 $c=3$.
$\therefore S=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}\times5\times3\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{15\sqrt{3}}{4}$. 故选 A.

8. A　由正弦定理得，
$(b-c)\cdot(b+c)=(a-\sqrt{3}c)a$，
即 $b^2-c^2=a^2-\sqrt{3}ac$，
$\therefore b^2=a^2+c^2-\sqrt{3}ac$，
$\therefore \cos B=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ab}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，
$\because B\in(0°,180°)$，
$\therefore B=30°$. 故选 A.

9. $\frac{\sqrt{21}}{7}$　3

解析：由正弦定理得 $\frac{a}{b}=\frac{\sin A}{\sin B}$，$\therefore \sin B=\frac{2}{\sqrt{7}}\times\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{21}}{7}$，由余弦定理得 $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$，$\therefore 7=4+c^2-2c$，$\therefore c=3$(负值舍去).

10. $\sqrt{3}$

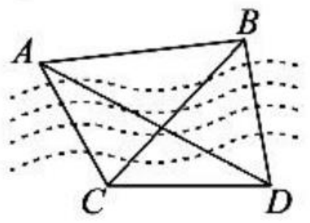
解析：由 $a^2\sin C=4\sin A$，得 $a^2c=4a$，即 $ac=4$，
由$(a+c)^2=12+b^2$，得 $a^2+c^2-b^2=4$.
$\therefore S=\sqrt{\frac{1}{4}(16-4)}=\sqrt{3}$.

11. $\frac{2\sqrt{2}}{3}$

解析：$\because \tan A:\tan B:\tan C=1:2:3$，
设 $\tan A=x$，$\tan B=2x$，$\tan C=3x$，
又 $\tan C=-\tan(A+B)$，
$\therefore 3x=-\frac{3x}{1-2x^2}$，解得 $x=1$，
$\therefore \tan A=1$，$\tan B=2$，$\tan C=3$，
$\therefore \sin B=\frac{2\sqrt{5}}{5}$，$\sin C=\frac{3\sqrt{10}}{10}$，
$\therefore \frac{b}{c}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$.

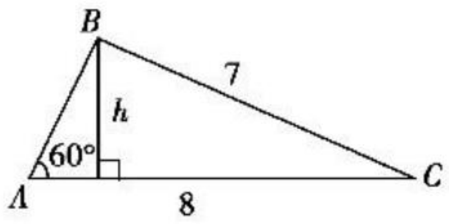
12. **解**：由已知 $\cos2A-\cos2B=2\cos\left(\frac{\pi}{6}-A\right)\cos\left(\frac{\pi}{6}+A\right)$
得 $2\sin^2B-2\sin^2A=2\left(\frac{3}{4}\cos^2A-\frac{1}{4}\sin^2A\right)$化简得 $\sin B=\frac{\sqrt{3}}{2}$，故 $B=\frac{\pi}{3}$或$\frac{2\pi}{3}$.
(2)$\because b\leqslant a$，$\therefore B=\frac{\pi}{3}$，
由正弦定理$\frac{a}{\sin A}=\frac{c}{\sin C}=\frac{b}{\sin B}=\frac{\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=2$，
$\therefore a=2\sin A$，$c=2\sin C$，
故 $a-\frac{1}{2}c=2\sin A-\sin C=2\sin A-\sin\left(\frac{2\pi}{3}-A\right)=\frac{3}{2}\sin A-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos A=\sqrt{3}\sin\left(A-\frac{\pi}{6}\right)$.
$\because b\leqslant a$，$\therefore \frac{\pi}{3}\leqslant A<\frac{2\pi}{3}$，$\frac{\pi}{6}\leqslant A-\frac{\pi}{6}<\frac{\pi}{2}$，
$\therefore \frac{1}{2}\leqslant\sin\left(A-\frac{\pi}{6}\right)<1$，
$\therefore a-\frac{1}{2}c=\sqrt{3}\sin\left(A-\frac{\pi}{6}\right)\in\left[\frac{\sqrt{3}}{2},\sqrt{3}\right)$.

13. **解**：在$\triangle ACD$中，$\angle ACD=120°$，
$\angle CAD=\angle ADC=30°$，
$\therefore AC=CD=\sqrt{3}$ km，
在$\triangle BCD$中，$\angle BCD=45°$，
$\angle BDC=75°$，$\angle CBD=60°$，
$\therefore BC=\frac{\sqrt{3}\sin75°}{\sin60°}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}$，



在$\triangle ABC$中，由余弦定理，得 $AB^2=(\sqrt{3})^2+\left(\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}\right)^2-2\sqrt{3}\times\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}\cos75°=3+2+\sqrt{3}-\sqrt{3}=5$.
$\therefore AB=\sqrt{5}$ km.
$\therefore A$，B之间距离为$\sqrt{5}$ km.

14. **解**：(1)在$\triangle ABC$中，$\because \cos B=-\frac{1}{7}$，$\therefore B\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$，
$\therefore \sin B=\sqrt{1-\cos^2B}=\frac{4\sqrt{3}}{7}$. 由正弦定理得$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}\Rightarrow\frac{7}{\sin A}=\frac{8}{\frac{4\sqrt{3}}{7}}$，$\therefore \sin A=\frac{\sqrt{3}}{2}$.
$\because B\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$，$\therefore A\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，$\therefore A=\frac{\pi}{3}$.
(2)在$\triangle ABC$中，$\because \sin C=\sin(A+B)=\sin A\cos B+\sin B\cos A=\frac{\sqrt{3}}{2}\times\left(-\frac{1}{7}\right)+\frac{1}{2}\times\frac{4\sqrt{3}}{7}=\frac{3\sqrt{3}}{14}$.
如图所示，在$\triangle ABC$中，$\because \sin C=\frac{h}{BC}$，$\therefore h=BC\cdot\sin C=7\times\frac{3\sqrt{3}}{14}=\frac{3\sqrt{3}}{2}$，$\therefore AC$边上的高为$\frac{3\sqrt{3}}{2}$.



第二章　数　列

2.1　数　列

基础知识点对点

1. C　由 $\sqrt{2}$，$\sqrt{5}$，$2\sqrt{2}$，$\sqrt{11}$，…，
观察可得 $a_n=\sqrt{3n-1}$，
由 $4\sqrt{2}=\sqrt{3n-1}$，得 $n=11$. 故选 C.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

2. **解**：令$\frac{4}{n^2+3n}=\frac{1}{10}$，

则 $n^2+3n-40=0$，解得 $n=5$ 或 $n=-8$，

$\because n\in\mathbf{N}^*$，

$\therefore n=5$，故$\frac{1}{10}$是数列的第 5 项.

令$\frac{4}{n^2+3n}=\frac{16}{27}$，则 $4n^2+12n-27=0$，

解得 $n=\frac{3}{2}$或 $n=-\frac{9}{2}$，又 $n\in\mathbf{N}^*$，

$\therefore$ $\frac{16}{27}$ 不是数列中的项.

3. D　$a_1=1$，$a_n=1+\frac{1}{a_{n-1}}$，

$\therefore a_2=1+\frac{1}{1}=2$，

$a_3=1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$，故选 D.

4. C　$\because a_{n+1}=a_n+\frac{2}{n(n+1)}$，

$\therefore a_2=a_1+\frac{2}{n(n+1)}=2+\frac{2}{1\times2}=3$，

$a_3=a_2+\frac{2}{3\times2}=\frac{10}{3}$，

$a_4=a_3+\frac{2}{4\times3}=\frac{7}{2}=\frac{14}{4}$，

$a_5=a_4+\frac{2}{5\times4}=\frac{18}{5}$，

$a_6=a_5+\frac{2}{6\times5}=\frac{22}{6}$，

依此可得 $a_7=\frac{26}{7}$，$a_8=\frac{30}{8}$，$a_9=\frac{34}{9}$，$a_{10}=\frac{38}{10}=3.8$，故选 C.

5. B　由 $a_1=\frac{1}{2}$，$a_{n+1}=\frac{1}{1-a_n}$得，

$a_2=\frac{1}{1-\frac{1}{2}}=2$，$a_3=\frac{1}{1-2}=-1$，$a_4=\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}$，

$\therefore$数列$\{a_n\}$具有周期性，且 $T=3$，

$\therefore a_{2\,018}=a_2=2$. 故选 B.

6. $\lambda>-3$

解析：$\because\{a_n\}$是递增数列，

$\therefore a_{n+1}>a_n$，即$(n+1)^2+\lambda(n+1)>n^2+\lambda n$，

整理得 $\lambda>-1-2n$，

当 $n=1$ 时，$-1-2n$ 取最大值为 -3，

$\therefore\lambda>-3$.

课后拔高提能练

1. A　$a_{10}=(-1)^{10}\cdot\frac{1}{2\times10+1}=\frac{1}{21}$，故选 A.

2. B　由$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{1}{2}>0$ 知，a_{n+1}与 a_n 同号. 又 $a_1>0$，

$\therefore a_n>0$. 又$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{1}{2}<1$，$\therefore a_{n+1}<a_n$. $\therefore\{a_n\}$是递减数列.

故选 B.

3. A　由 $a_{n+1}=\frac{2a_n}{2+a_n}$，得$\frac{1}{a_n}=\frac{1}{a_{n+1}}-\frac{1}{2}$，所以$\frac{1}{a_5}=\frac{1}{a_6}-\frac{1}{2}=\left(\frac{1}{a_7}-\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{2}=1$，

所以 $a_5=1$. 故选 A.

4. B　当 $n=1$ 时，$a_1=\frac{1}{2}$，排除 D；

当 $n=2$ 时，$a_2=\frac{1}{2}+\frac{1}{1+3+2}=\frac{2}{3}$，排除 A，C. 故选 B.

5. A　当 $n=1$ 时，$a_1=1$，排除 B，D；

当 $n=2$ 时，$a_2=3$.

当 $n=3$ 时，$a_3=9$，排除 C. 故选 A.

6. A　$a_1=1$，

$a_2=\frac{1}{2}\times1+\frac{1}{2}=1$，

$a_3=\frac{1}{2}\times1+\frac{1}{2}=1$，

$a_4=\frac{1}{2}\times1+\frac{1}{2}=1$，故选 A.

7. $-\frac{14}{3}$

解析：$\because a_{n+1}=\frac{2(1-a_n)+2a_n}{1-a_n}=\frac{2}{1-a_n}$，

$\therefore a_2=\frac{2}{1-(-2)}=\frac{2}{3}$，$a_3=\frac{2}{1-\frac{2}{3}}=6$，$a_4=\frac{2}{1-6}=-\frac{2}{5}$，$a_5=\frac{2}{1+\frac{2}{5}}=\frac{10}{7}$，$a_6=\frac{2}{1-\frac{10}{7}}=-\frac{14}{3}$.

8. 7

解析：$a_n=-2\left(n-\frac{29}{4}\right)^2+\frac{865}{8}$.

$\therefore$当 $n=7$ 时，a_n 最大.

9. $-\frac{1}{255}$

解析：由数列的前 n 项可猜想 $a_n=(-1)^{n+1}\frac{1}{2^n-1}$，

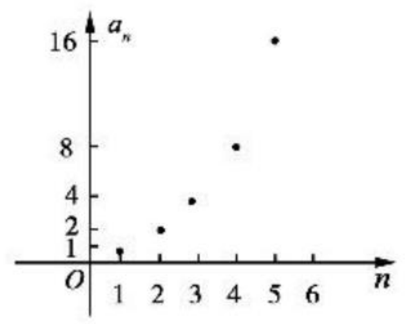
$\therefore a_8=(-1)^9\frac{1}{2^8-1}=-\frac{1}{255}$.

10. **解**：$a_1=1$，$a_2=2$，$a_3=4$，$a_4=8$，$a_5=16$，$a_6=32$，猜想 $a_n=2^{n-1}$.

列表表示为：

n	1	2	3	4	5	6	…	k	…
a_n	1	2	4	8	16	32	…	2^{k-1}	…

图象为



11. **解**：(1)$\frac{m^2}{m^2+1}$不是这个数列的通项公式，数列的通项公式是数列的第 n 项 a_n 与 n 之间的一个函数关系，即 $a_n=f(n)$. 这个数列前几项的分子依次为 4，9，16，25，…，与 n 的关系为 $f(n)=(n+1)^2$；而每一项的分母依次比分子大 1. 所以这个数列的一个通项公式为 $a_n=\frac{(n+1)^2}{(n+1)^2+1}$($n=1,2,\cdots,m-1$).

(2) 不妨设 0.98 是这个数列的第 k 项，则$\frac{(k+1)^2}{(k+1)^2+1}=0.98$，解得 $k=6$，所以 0.98 是这个数列中的项，且为第 6 项.

12. **解**：解法一：$a_{n+1}-a_n=(n+2)\left(\frac{10}{11}\right)^{n+1}-(n+1)\cdot\left(\frac{10}{11}\right)^n=\left(\frac{10}{11}\right)^n\times\frac{9-n}{11}$，则

当 $n<9$ 时，$a_{n+1}-a_n>0$，即 $a_{n+1}>a_n$；

当 $n=9$ 时，$a_{n+1}-a_n=0$，即 $a_{n+1}=a_n$；

当 $n>9$ 时，$a_{n+1}-a_n<0$，即 $a_{n+1}<a_n$.

$\therefore a_1<a_2<a_3<\cdots<a_9=a_{10}>a_{11}>a_{12}>\cdots$，

$\therefore$该数列中有最大项，为第 9、10 项，

且 $a_9=a_{10}=10\times\left(\frac{10}{11}\right)^9$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

解法二：根据题意，令$\begin{cases}a_{n-1}\leqslant a_n,\\a_n\geqslant a_{n+1},\end{cases}$

即$\begin{cases}n\times\left(\frac{10}{11}\right)^{n-1}\leqslant(n+1)\left(\frac{10}{11}\right)^n,\\(n+1)\left(\frac{10}{11}\right)^n\geqslant(n+2)\left(\frac{10}{11}\right)^{n+1},\end{cases}$

解得 $9\leqslant n\leqslant10$. 又 $n\in\mathbf{N}_+$，$\therefore n=9$ 或 $n=10$.

$\therefore$该数列中有最大项，为第 9、10 项，

即 $a_9=a_{10}=10\times\left(\frac{10}{11}\right)^9$.

2.2 等差数列

2.2.1 等差数列

基础知识点对点

1. B $\because 3,x,5$ 成等差数列，

$\therefore 2x=3+5$，$\therefore x=4$. 故选 B.

2. D 设等差数列的公差为 d，

则由 $a_2+a_5=4$ 得，

$2a_1+5d=4$，

$\therefore d=\frac{2}{3}$，$\therefore a_n=\frac{1}{3}+\frac{2}{3}(n-1)=35$，

$\therefore n=53$，故选 D.

3. D $a_2+a_4+a_9+a_{11}=2(a_2+a_{11})=32$，

$\therefore a_2+a_{11}=16$，

$\therefore a_6+a_7=a_2+a_{11}=16$. 故选 D.

4. B 由题可得，$a_1+a_2+a_3=3a_2=15$，

$\therefore a_2=5$，

$\therefore\begin{cases}a_1+a_3=10,\\a_1\cdot a_3=16,\end{cases}$又 $d>0$，

$\therefore\begin{cases}a_1=2,\\a_3=8,\end{cases}\therefore d=\frac{8-2}{2}=3$.

$\therefore a_n=3n-1$，

$\therefore a_{11}+a_{12}+a_{13}=3a_{12}=105$. 故选 B.

5. **解**：(1)证明：$\because f(x)=\frac{3x}{x+3}$，

$\therefore a_n=f(a_{n-1})=\frac{3a_{n-1}}{a_{n-1}+3}$，

$\therefore\frac{1}{a_n}=\frac{a_{n-1}+3}{3a_{n-1}}=\frac{1}{3}+\frac{1}{a_{n-1}}$，

$\therefore\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$是等差数列，公差为$\frac{1}{3}$.

(2)若 $a_1=\frac{1}{2}$，$\therefore\frac{1}{a_1}=2$，

$\therefore\frac{1}{a_n}=2+(n-1)\times\frac{1}{3}$.

$\therefore\frac{1}{a_{2\,017}}=2+2\,016\times\frac{1}{3}=674$，

$\therefore a_{2\,017}=\frac{1}{674}$.

课后拔高提能练

1. B 由 $a_2=3$，$a_6=7$，得 $d=\frac{a_6-a_2}{6-2}=\frac{7-3}{4}=1$，

$\therefore a_{11}=a_6+5d=7+5=12$. 故选 B.

2. B 由 $a_4+a_8=10$，$a_{10}=6$，

得$\begin{cases}2a_1+10d=10,\\a_1+9d=6,\end{cases}\therefore\begin{cases}a_1=\frac{15}{4},\\d=\frac{1}{4}.\end{cases}$

$a_{18}=a_1+17d=\frac{15}{4}+\frac{17}{4}=8$. 故选 B.

3. A $\because A,B,C$ 成等差数列，$\therefore A+C=2B$，

又 $A+B+C=\pi$，$\therefore B=\frac{\pi}{3}$.

又 $b=\sqrt{3}$，$\therefore\frac{b}{\sin B}=\frac{\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=2$，

$\therefore\frac{a+b}{\sin A+\sin B}=\frac{b}{\sin B}=2$. 故选 A.

4. D 由 $2a_{n+1}=2a_n+1$，得 $a_{n+1}-a_n=\frac{1}{2}$，$\therefore$数列$\{a_n\}$是首项为 2，公差为$\frac{1}{2}$的等差数列，则 $a_n=2+\frac{1}{2}(n-1)$，

$\therefore a_{101}=2+\frac{1}{2}\times100=52$. 故选 D.

5. B 解法一：$\because a_n=3n-2$，$\therefore a_1=1$，$d=a_2-a_1=4-1=3$.

$\therefore a_3+a_6+a_9+a_{12}+a_{15}=5a_1+(2+5+8+11+14)d=5a_1+40d=5\times1+40\times3=125$. 故选 B.

解法二：$a_3+a_6+a_9+a_{12}+a_{15}=5a_9=5\times(3\times9-2)=125$.

6. D 由等差数列的通项公式 $a_n=a_1+(n-1)d=dn+a_1-d$ 知，当 $d>0$ 时，$\{a_n\}$是递增数列，$\{a_n+3nd\}$是递增数列，而$\{na_n\}$和$\left\{\frac{a_n}{n}\right\}$不一定是递增数列. 因此命题 p_1，p_4 正确. 故选 D.

7. $a_n=6n-3$

解析：设$\{a_n\}$的公差为 d，$\because a_1=3$，$\therefore3+d+3+4d=36$，

$\therefore d=6$，$\therefore a_n=3+6(n-1)=6n-3$.

8. $62-2n$

解析：$\because$公差不为零，且$|a_{11}|=|a_{51}|$，

$\therefore a_{11}=-a_{51}$. $\therefore a_1+10d=-(a_1+50d)$.

即 $a_1+30d=0$；

又 $a_{20}=a_1+19d=22$，$\therefore d=-2$，$a_1=60$，

$\therefore a_n=60+(n-1)(-2)=62-2n$.

9. 19

解析：$\because c_{11},c_{12}\cdots,c_{21}$是以 1 为首项，2 为公差的等差数列.

$\therefore c_{20}=c_{11}+9d=1+9\times2=19$，又$\{c_n\}$为 21 项的对称数列，$\therefore c_2=c_{20}=19$.

10. **解**：由等差数列的性质知，

$a_3+a_7=a_4+a_6$，从而得

$a_3+a_7=-4$. 又 $a_3a_7=-12$，

$\therefore a_3,a_7$ 是方程 $x^2+4x-12=0$ 的两根. 解得 $x=-6$ 或 $x=2$.

$\because$公差 $d>0$，$\therefore a_3=-6$，$a_7=2$.

$\therefore\begin{cases}a_1+2d=-6,\\a_1+6d=2.\end{cases}$解得$\begin{cases}a_1=-10,\\d=2.\end{cases}$

$\therefore a_n=a_1+(n-1)d=-10+(n-1)\times2=2n-12$.

即数列$\{a_n\}$的通项公式为 $a_n=2n-12$.

11. **解**：易知等差数列 5，8，11，…的通项公式为 $a_n=3n+2(1\leqslant n\leqslant100,n\in\mathbf{N}_+)$，等差数列 3，7，11，…的通项公式为 $b_k=4k-1(1\leqslant k\leqslant100,k\in\mathbf{N}_+)$.

于是两个数列的共同项可由 $3n+2=4k-1$ 求得，此时 $n=\frac{4}{3}k-1(n,k\in\mathbf{N}_+)$. $\therefore$设 $k=3r,r\in\mathbf{N}_+$，则 $n=4r-1$.

由$\begin{cases}1\leqslant3r\leqslant100,\\1\leqslant4r-1\leqslant100,\end{cases}$解得$\frac{1}{2}\leqslant r\leqslant\frac{101}{4}$，且 $r\in\mathbf{N}_+$，

$\therefore$这两个等差数列有 25 个共同的项.

12. **解**：(1)证明：$a_{n+1}^2=b_n\cdot b_{n+1}$，得 $a_{n+1}=\sqrt{b_n\cdot b_{n+1}}$，

$\therefore a_n=\sqrt{b_{n-1}\cdot b_n}(n\geqslant2)$，代入 $2b_n=a_n+a_{n+1}$，

得 $2b_n=\sqrt{b_{n-1}\cdot b_n}+\sqrt{b_n\cdot b_{n+1}}$，

$\therefore2\sqrt{b_n}=\sqrt{b_{n-1}}+\sqrt{b_{n+1}}(n\geqslant2)$，

$\therefore\{\sqrt{b_n}\}$是等差数列.

(2)由 $a_1=1$，$a_2=2$，得 $b_1=\frac{a_1+a_2}{2}=\frac{3}{2}$.

又由 $a_{n+1}^2=b_n\cdot b_{n+1}$，得 $a_2^2=b_1\cdot b_2$，$\therefore b_2=\frac{a_2^2}{b_1}=\frac{8}{3}$，

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

$\therefore \sqrt{b_1}=\sqrt{\frac{3}{2}}=\frac{\sqrt{6}}{2}$，$\sqrt{b_2}=\sqrt{\frac{8}{3}}=\frac{2}{3}\sqrt{6}$.

$\therefore \{\sqrt{b_n}\}$的公差 $d=\sqrt{b_2}-\sqrt{b_1}=\frac{\sqrt{6}}{6}$.

$\therefore \sqrt{b_n}=\frac{\sqrt{6}}{2}+(n-1)\cdot\frac{\sqrt{6}}{6}=\frac{\sqrt{6}}{6}(n+2)$，

$\therefore b_n=\frac{1}{6}(n+2)^2$，

$\therefore a_n^2=b_{n-1}\cdot b_n=\frac{1}{6}(n+1)^2\cdot\frac{1}{6}(n+2)^2(n\geqslant 2)$，

$\therefore a_n=\frac{1}{6}(n+1)\cdot(n+2)(n\geqslant 2)$，

当 $n=1$ 时也满足此式.

$\therefore a_n=\frac{1}{6}(n+1)(n+2)$.

2.2.2　等差数列的前 n 项和

基础知识点对点

1. C　设公差为 d，则 $a_4+a_5=a_1+3d+a_1+4d=24$，$S_6=6a_1+\frac{6\times5}{2}d=48$，联立得 $\begin{cases}2a_1+7d=24, & ①\\ 6a_1+15d=48, & ②\end{cases}$

①×3－②得$(21-15)d=24$，$6d=24$，所以 $d=4$. 故选 C.

2. D　由 $a_4=18-a_5$，得 $a_4+a_5=18$，$S_8=\frac{8(a_1+a_8)}{2}=4(a_4+a_5)=72$. 故选 D.

3. A　$\frac{S_9}{S_5}=\frac{9a_5}{5a_3}=\frac{9}{5}\times\frac{5}{9}=1$，故选 A.

4. C　若 S_n 有最大值，则 $d<0$，$\therefore a_{10}>a_{11}$.

由 $\frac{a_{11}}{a_{10}}<-1$，得 $\frac{a_{11}+a_{10}}{a_{10}}<0$.

$\therefore a_{10}>0$，$a_{11}+a_{10}<0$，

$\therefore S_{19}=\frac{19(a_1+a_{19})}{2}=19a_{10}>0$，

$S_{20}=\frac{20(a_1+a_{20})}{2}=10(a_{10}+a_{11})<0$，

$\therefore$ 当 S_n 取得最小正值时，$n=19$. 故选 C.

5. D　由$\{a_n\}$是递减的等差数列，$\therefore d<0$，

由 $S_6=S_9$，得 $a_7+a_8+a_9=0$，

$\therefore a_8=0$，故①正确；

$\therefore a_7+a_9=0$，$\therefore a_7>0$，$a_9<0$，

$\therefore S_7$ 与 S_8 是 S_n 中的最大值，故②正确；

由 $a_8=0$，得 $a_1+7d=0$，$\therefore a_1=-7d$，$\therefore S_n=na_1+\frac{n(n-1)}{2}d=\frac{d}{2}n^2-\frac{15n}{2}d$.

$\therefore$ 当 $n=15$ 时，$S_{15}=0$，故③正确；

二次函数 $y=\frac{d}{2}x^2-\frac{15}{2}dx$ 的对称轴为 $x=\frac{15}{2}$，

$\therefore S_5=S_{10}$，故当 $m=5$ 时，满足 $S_m=S_{2m}$，④正确. 故选 D.

6. $a_n=\begin{cases}0, & n=1,\\ 4n-5, & n\geqslant 2\end{cases}$

解析：当 $n=1$ 时，$a_1=S_1=2\times1^2-3\times1+1=0$.

当 $n\geqslant2$ 时，$a_n=S_n-S_{n-1}=2n^2-3n+1-2(n-1)^2+3(n-1)-1=4n-5$.

$\therefore a_n=\begin{cases}0, & n=1,\\ 4n-5, & n\geqslant 2.\end{cases}$

课后拔高提能练

1. C　$S_9=9a_5=27$，$\therefore a_5=3$，

$\therefore d=\frac{a_{10}-a_5}{10-5}=\frac{8-3}{5}=1$，

$\therefore a_{100}=a_5+95d=3+95=98$. 故选 C.

2. B　$\because S_{11}=\frac{a_1+a_{11}}{2}\times11=11a_6=\frac{22\pi}{3}$，$\therefore a_6=\frac{2\pi}{3}$.

$\therefore \tan a_6=\tan\frac{2\pi}{3}=-\sqrt{3}$. 故选 B.

3. D　由 $a_2=4$，$S_4=22$，

$\begin{cases}a_1+d=4,\\ 4a_1+6d=22.\end{cases}\therefore\begin{cases}a_1=1,\\ d=3,\end{cases}$

$\therefore a_n=a_1+(n-1)d=1+3(n-1)=28$，

$\therefore n=10$. 故选 D.

4. B　设该等差数列的公差为 d，根据题中的条件可得，

$3\left(3\times2+\frac{3\times2}{2}\cdot d\right)=2\times2+d+4\times2+\frac{4\times3}{2}\cdot d$，

整理解得 $d=-3$，所以 $a_5=a_1+4d=2-12=-10$，故选 B.

5. A　由 $a_{n+1}=a_n+2$，可知数列$\{a_n\}$是等差数列，公差 $d=2$，

$\therefore a_n=a_1+(n-1)d=2n-1$，

$\therefore \frac{1}{a_1a_2}+\frac{1}{a_2a_3}+\frac{1}{a_3a_4}+\cdots+\frac{1}{a_9a_{10}}$

$=\frac{1}{1\times3}+\frac{1}{3\times5}+\frac{1}{5\times7}+\cdots+\frac{1}{17\times19}$

$=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots+\frac{1}{17}-\frac{1}{19}\right)$

$=\frac{9}{19}$. 故选 A.

6. D　由题可得 $\begin{cases}a_1+a_2+a_3+a_4+a_5=34,\\ a_n+a_{n-1}+a_{n-2}+a_{n-3}+a_{n-4}=146,\end{cases}$

$\therefore 5(a_1+a_n)=34+146=180$，

$\therefore a_1+a_n=36$.

又 $S_n=\frac{n(a_1+a_n)}{2}=234$，

$\therefore \frac{n\times36}{2}=234$，

$\therefore n=13$. 即 $S_{13}=13a_7=234$，$\therefore a_7=18$，故选 D.

7. 1

解析：解法一：由题可得 $S_{奇}=\frac{a_1+a_{19}}{2}\times10=20$，$\therefore a_{10}=2$.

$S_{偶}=\frac{a_2+a_{20}}{2}\times10=30$，

$\therefore a_{11}=3$，$\therefore d=a_{11}-a_{10}=3-2=1$.

解法二：$\because$ 此数列共 20 项，$\therefore S_{偶}-S_{奇}=10d=10$.

$\therefore d=1$.

8. -15

解析：由 $a_3^2+a_8^2+a_3a_8=9$，

得$(a_3+a_8)^2=9$，

$\because a_n<0$，$\therefore a_3+a_8=-3$，

$\therefore S_{10}=\frac{10(a_1+a_{10})}{2}=5(a_3+a_8)=-15$.

9. 9

解析：由 $a_2=7$，$a_4=3$，

得 $\begin{cases}a_1+d=7,\\ a_1+3d=3,\end{cases}$

$\therefore\begin{cases}a_1=9,\\ d=-2,\end{cases}$

$\therefore S_n=9n+\frac{n(n-1)}{2}\times(-2)=10n-n^2$，

令 $S_n>0$，

$\therefore 10n-n^2>0$，

$\therefore 0<n<10$，

$\therefore$ 使 $S_n>0$ 成立的最大自然数 n 为 9.

10. **解**：(1)设$\{a_n\}$的公差为 d，由题意得 $3a_1+3d=-15$. 由 $a_1=-7$ 得 $d=2$. 所以$\{a_n\}$的通项公式为 $a_n=2n-9$.

(2)由(1)得 $S_n=n^2-8n=(n-4)^2-16$. 所以当$n=4$ 时，S_n 取得最小值，最小值为-16.

11. **解**：(1)证明：$b_n=\frac{1}{a_n-1}=\frac{1}{2-\frac{1}{a_{n-1}}-1}=\frac{a_{n-1}}{a_{n-1}-1}$，

$b_{n-1}=\frac{1}{a_{n-1}-1}$，

$\therefore b_n-b_{n-1}=\frac{a_{n-1}}{a_{n-1}-1}-\frac{1}{a_{n-1}-1}=1(n\geqslant2,\ n\in\mathbf{N}_+)$.

$\therefore\{b_n\}$是首项为 $b_1=\frac{1}{a_1-1}=-\frac{5}{2}$，公差为 1 的等差数列.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

(2)依题意有 $a_n-1=\frac{1}{b_n}$,

而 $b_n=-\frac{5}{2}+(n-1)\times1=n-3.5$,

$\therefore a_n-1=\frac{1}{n-3.5}$.

对于函数 $y=\frac{1}{x-3.5}$,在 $x>3.5$ 时,$y>0$,且在 $(3.5,+\infty)$ 上为减函数.

故当 $n=4$ 时,$a_n=1+\frac{1}{n-3.5}$ 取最大值 $a_4=3$.

而函数 $y=\frac{1}{x-3.5}$ 在 $x<3.5$ 时,$y<0$,且在 $(-\infty,3.5)$ 上也为减函数.

故当 $n=3$ 时,$a_n=1+\frac{1}{n-3.5}$ 取最小值 $a_3=-1$.

12. **解**:(1)由 $a_{n+2}-2a_{n+1}+a_n=0$,

知 $a_{n+2}-a_{n+1}=a_{n+1}-a_n$,所以 $\{a_n\}$ 是等差数列,

$\because a_1=8$,$d=\frac{a_4-a_1}{3}=-2$,

$\therefore a_n=8+(n-1)\times(-2)=-2n+10$.

(2)当 $a_n\geqslant0$,即 $-2n+10\geqslant0$,$n\leqslant5$ 时,

$|a_n|=a_n$,此时 $S_n=\frac{n(a_1+a_n)}{2}=-n^2+9n$.

当 $a_n<0$,即 $-2n+10<0$,$n>5$ 时,$|a_n|=-a_n$,

此时 $S_n=20+\frac{(-a_6-a_n)\cdot(n-5)}{2}=$

$20+\frac{(2+2n-10)}{2}\cdot(n-5)=n^2-9n+40$.

综上 $S_n=\begin{cases}-n^2+9n(n\leqslant5),\\ n^2-9n+40(n>5).\end{cases}$

(3)$\because b_n=\frac{1}{n(12-a_n)}=\frac{1}{n[12-(-2n+10)]}$

$=\frac{1}{2n(n+1)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$,

$\therefore T_n=b_1+b_2+b_3+\cdots+b_n$

$=\frac{1}{2}\left[\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)\right]=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)$.

$\because\frac{1}{n+1}>\frac{1}{(n+1)+1}$,$\therefore-\frac{1}{n+1}<-\frac{1}{(n+1)+1}$,

$\therefore T_n<T_{n+1}$,$\therefore\{T_n\}$ 是递增数列.

$\therefore$要使 $T_n>\frac{m}{32}$ 对 $n\in\mathbf{N}_+$ 成立,只要 $\frac{m}{32}<T_1=\frac{1}{4}$ 成立.

$\therefore m<8$,$m\in\mathbf{Z}$,

$\therefore$适合条件的 m 的最大值为 7.

2.3 等比数列

2.3.1 等比数列

基础知识点对点

1. B 由 $a_2=1$,$a_4=2$,得 $q^2=\frac{a_4}{a_2}=2$,

$\therefore a_6=a_4\cdot q^2=2\times2=4$. 故选 B.

2. A 由题可设数列 $\{a_n\}$ 的公比为 q,

$\therefore\begin{cases}a_1^2q^8=a_1q^9,\\ 2(a_n+a_nq^2)=5a_nq,\end{cases}$

$\therefore\begin{cases}a_1=2,\\ q=2\end{cases}$ 或 $\begin{cases}a_1=\frac{1}{2},\\ q=\frac{1}{2}.\end{cases}$

又数列 $\{a_n\}$ 为递增数列,$\therefore a_1=2$,$q=2$,

$\therefore a_n=2^n$. 故选 A.

3. A 由 $a_3a_7=a_2a_8=72$,$a_2+a_8=27$,

$\therefore\begin{cases}a_2=3,\\ a_8=24\end{cases}$ 或 $\begin{cases}a_2=24,\\ a_8=3\end{cases}$(舍)$(q>1)$,

$\therefore q^6=\frac{a_8}{a_2}=8$,

$\therefore q^2=2$,$a_{12}=a_2\cdot q^{10}=3\times2^5=96$,故选 A.

4. C $\because-2$,a_1,a_2,-8 成等差数列,

$\therefore a_2-a_1=\frac{-8+2}{3}=-2$,

-2,b_1,b_2,b_3,-8 成等比数列,

$\therefore b_2^2=(-2)\cdot(-8)=16$,且 $b_2<0$,

$\therefore b_2=-4$,$\therefore\frac{a_2-a_1}{b_2}=\frac{-2}{-4}=\frac{1}{2}$. 故选 C.

5. D $\because a_{n+1}=\lambda a_n-1$,

若 $\{a_n-1\}$ 是等比数列,

则 $\frac{a_{n+1}-1}{a_n-1}=\frac{\lambda a_n-2}{a_n-1}$ 为常数,

$\therefore\lambda=2$,故选 D.

6. **解**:(1)由 $S_1=\frac{1}{3}(a_1-1)(n\in\mathbf{N}_+)$,

得 $a_1=\frac{1}{3}(a_1-1)$,$\therefore a_1=-\frac{1}{2}$,

又 $S_2=\frac{1}{3}(a_2-1)$,即 $a_1+a_2=\frac{1}{3}(a_2-1)$,

得 $a_2=\frac{1}{4}$.

(2)证明:当 $n\geqslant2$ 时,

$a_n=S_n-S_{n-1}=\frac{1}{3}(a_n-1)-\frac{1}{3}(a_{n-1}-1)$,

得 $\frac{a_n}{a_{n-1}}=-\frac{1}{2}$,又 $\frac{a_2}{a_1}=-\frac{1}{2}$,

$\therefore$数列 $\{a_n\}$ 是首项为 $-\frac{1}{2}$,公比为 $-\frac{1}{2}$ 的等比数列.

课后拔高提能练

1. A $q^3=\frac{a_5}{a_2}=\frac{64}{8}=8$,$\therefore q=2$. 故选 A.

2. D $\because a_1\cdot a_9=a_5^2=16$,$a_5>0$,$\therefore a_5=4$,$\therefore a_2\cdot a_5\cdot a_8=a_5^3=64$,故选 D.

3. D $a_8(a_4+2a_6+a_8)=a_8a_4+2a_8\cdot a_6+a_8^2=a_6^2+2a_8\cdot a_6+a_8^2=(a_6+a_8)^2=16$. 故选 D.

4. A 由 a_2,a_3,a_6 成等比数列,

$\therefore a_3^2=a_2\cdot a_6$,$\therefore(a_1+2d)^2=(a_1+d)(a_1+5d)$,

$\because a_1=1$,$\therefore d=-2$,

$S_6=6a_1+\frac{6\times5}{2}d=-24$. 故选 A.

5. C $\because S_1$,S_2,S_4 成等比数列,$\therefore S_2^2=S_1\cdot S_4$.

$\therefore(2a_1+d)^2=a_1\cdot(4a_1+6d)$. 整理得 $d^2-2a_1d=0$.

$\because d\neq0$,$\therefore d=2a_1$,$\therefore\frac{a_2}{a_1}=\frac{a_1+d}{a_1}=\frac{3a_1}{a_1}=3$. 故选 C.

6. B 由题可知,$a_4\cdot a_{14}=8$,$\log_2a_7+\log_2a_{11}=\log_2(a_7\cdot a_{11})=\log_2(a_4\cdot a_{14})=3$,故选 B.

7. 100

解析:$\because a_4+a_6=10$,$\therefore a_1q^3(1+q^2)=10$,

$\therefore a_7(a_1+2a_3)+a_3a_9=a_1^2q^6(1+2q^2+q^4)=[a_1q^3(1+q^2)]^2=100$.

8. 4

解析:$\because a_4a_6=a_3q\cdot a_3q^3=a_3^2q^4=16$,$a_3=2$,

$\therefore q^4=4$,

$\therefore\frac{a_7-a_9}{a_3-a_5}=\frac{a_3q^4-a_5q^4}{a_3-a_5}=q^4=4$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

9. 2

解析：∵公差 $d=3$，∴$a_4=a_1+3d=a_1+9$，$a_{10}=a_1+9d=a_1+27$. 由已知得 $a_4^2=a_1\cdot a_{10}$，

即 $(a_1+9)^2=a_1(a_1+27)$. 解得 $a_1=9$.

∴该数列的公比 $q=\dfrac{a_4}{a_1}=\dfrac{18}{9}=2$.

10. **解**：(1)证明：∵$2a_n=3a_{n+1}$，∴$\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=\dfrac{2}{3}$，

故数列$\{a_n\}$是公比 $q=\dfrac{2}{3}$的等比数列.

又 $a_2\cdot a_5=\dfrac{8}{27}$，则 $a_1q\cdot a_1q^4=\dfrac{8}{27}$，

即 $a_1^2\cdot\left(\dfrac{2}{3}\right)^5=\left(\dfrac{2}{3}\right)^3$.

由于数列各项均为负数，则 $a_1=-\dfrac{3}{2}$，

∴$a_n=\left(-\dfrac{3}{2}\right)\times\left(\dfrac{2}{3}\right)^{n-1}=-\left(\dfrac{2}{3}\right)^{n-2}$.

(2)设 $a_n=-\dfrac{16}{81}$，由等比数列的通项公式得

$-\dfrac{16}{81}=-\left(\dfrac{2}{3}\right)^{n-2}$，即$\left(\dfrac{2}{3}\right)^4=\left(\dfrac{2}{3}\right)^{n-2}$，

根据指数的性质有 $4=n-2$，

∴$n=6$.

因此，$-\dfrac{16}{81}$是这个数列的第 6 项.

11. **解**：(1)∵$\{a_n\}$为等差数列，设公差为 d，又 $a_4=10$，

∴$a_3=a_4-d=10-d$，$a_6=a_4+2d=10+2d$，

$a_{10}=a_4+6d=10+6d$. ∵a_3，a_6，a_{10}成等比数列，

∴$a_6^2=a_3\cdot a_{10}$，即$(10+2d)^2=(10-d)(10+6d)$.

整理得 $10d^2-10d=0$. ∴$d=0$ 或 $d=1$.

当 $d=0$ 时，$S_{20}=20a_4=200$；

当 $d=1$ 时，$a_1=a_4-3d=10-3=7$.

∴$S_{20}=20a_1+\dfrac{20\times19}{2}\times d=20\times7+190=330$.

(2)∵数列$\{b_n\}$为等比数列，设公比为 q，又 b_6，b_7，$\dfrac{3}{4}b_8$成等差数列，

∴$2b_7=b_6+\dfrac{3}{4}b_8$，即 $2q=1+\dfrac{3}{4}q^2$. 解得 $q=\dfrac{2}{3}$或 $q=2$.

∵$b_4=1$，

∴当 $q=\dfrac{2}{3}$时，$b_n=b_4\cdot q^{n-4}=\left(\dfrac{2}{3}\right)^{n-4}$；当 $q=2$ 时，$b_n=b_4\cdot q^{n-4}=2^{n-4}$.

12. **解**：(1)证明：由 $a_n=\dfrac{1}{2}a_{n-1}+1$，得

$a_n-2=\dfrac{1}{2}a_{n-1}-1=\dfrac{1}{2}(a_{n-1}-2)$，

∴$\dfrac{a_n-2}{a_{n-1}-2}=\dfrac{1}{2}$，∴数列$\{a_n-2\}$为等比数列.

(2)由(1)知 $a_n-2=(a_1-2)\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$，

∴$a_n=2+\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$.

∴$b_2=a_1=3$，

$b_4=2a_3+a_2=7$，

设数列$\{b_n\}$的公差为 d，

则 $d=\dfrac{b_4-b_2}{2}=2$，∴$b_n=b_2+(n-2)d=3+2(n-2)=2n-1$.

2.3.2　等比数列的前 n 项和

基础知识点对点

1. A　由题可知$\begin{cases}a_3+a_5=20,\\ a_2\cdot a_6=a_3\cdot a_5=64,\end{cases}$

又 $q>1$，$a_n>0$，

∴$a_3=4$，$a_5=16$，

∴$q^2=\dfrac{a_5}{a_3}=4$. ∴$q=2$.

∴$a_1=\dfrac{a_3}{q^2}=1$. ∴$S_5=\dfrac{a_1(1-q^5)}{1-q}=31$. 故选 A.

2. 32

解析：当 $q=1$ 时，显然不符合题意；

当 $q\neq1$ 时，$\begin{cases}\dfrac{a_1(1-q^3)}{1-q}=\dfrac{7}{4},\\ \dfrac{a_1(1-q^6)}{1-q}=\dfrac{63}{4},\end{cases}$解得$\begin{cases}a_1=\dfrac{1}{4},\\ q=2,\end{cases}$

则 $a_8=\dfrac{1}{4}\times2^7=32$.

3. D　∵$S_6=S_3+q^3S_3=S_3(1+q^3)$，

∴$1+q^3=7$，∴$q^3=6$，

$\dfrac{S_9}{S_6}=\dfrac{(q^6+q^3+1)S_3}{7S_3}=\dfrac{36+6+1}{7}=\dfrac{43}{7}$. 故选 D.

4. B　由题知，$S_{奇}=a_1\cdot a_3\cdot\cdots\cdot a_{2n+1}=100$，

$S_{偶}=a_2\cdot a_4\cdot\cdots\cdot a_{2n}=120$，

∴$\dfrac{S_{奇}}{S_{偶}}=\dfrac{a_3\cdot a_5\cdot a_7\cdot\cdots\cdot a_{2n+1}}{a_2\cdot a_4\cdot a_6\cdot\cdots\cdot a_{2n}}\cdot a_1=\dfrac{100}{120}=\dfrac{5}{6}$，

∴$a_1q^n=\dfrac{5}{6}$，即 $a_{n+1}=\dfrac{5}{6}$，故选 B.

5. C　此数列的通项公式

$a_n=1+2+2^2+\cdots+2^{n-1}=\dfrac{1\times(1-2^n)}{1-2}=2^n-1$.

∴$S_n=2-1+2^2-1+2^3-1+\cdots+2^n-1=(2+2^2+2^3+\cdots+2^n)-n=\dfrac{2(1-2^n)}{1-2}-n=2^{n+1}-n-2$，故选 C.

6. **解**：(1)设等差数列$\{a_n\}$的公差为 d，等比数列$\{b_n\}$的公比为 q. 由已知 $b_2+b_3=12$，得 $b_1(q+q^2)=12$，

而 $b_1=2$，所以 $q^2+q-6=0$.

又因为 $q>0$，解得 $q=2$.

所以 $b_n=2^n$.

由 $b_3=a_4-2a_1$，可得 $3d-a_1=8$，　①

由 $S_{11}=11b_4$，可得 $a_1+5d=16$，　②

联立①②，

解得 $a_1=1$，$d=3$，由此可得 $a_n=3n-2$.

所以$\{a_n\}$的通项公式为 $a_n=3n-2$，$\{b_n\}$的通项公式为 $b_n=2^n$.

(2)设数列$\{a_{2n}b_n\}$的前 n 项和为 T_n，由 $a_{2n}=6n-2$，有 $T_n=4\times2+10\times2^2+16\times2^3+\cdots+(6n-2)\times2^n$，$2T_n=4\times2^2+10\times2^3+16\times2^4+\cdots+(6n-8)\times2^n+(6n-2)\times2^{n+1}$，

上述两式相减，得 $-T_n=4\times2+6\times2^2+6\times2^3+\cdots+6\times2^n-(6n-2)\times2^{n+1}=\dfrac{12\times(1-2^n)}{1-2}-4-(6n-2)\times2^{n+1}=-(3n-4)2^{n+2}-16$.

得 $T_n=(3n-4)2^{n+2}+16$.

所以数列$\{a_{2n}b_n\}$的前 n 项和为 $T_n=(3n-4)2^{n+2}+16$.

课后拔高提能练

1. B　∵$S_4=60$，$q=2$，∴$\dfrac{a_1(1-q^4)}{1-q}=60$，∴$a_1=4$.

∴$a_2=a_1q=4\times2=8$. 故选 B.

2. B　由题可得$\begin{cases}a_1q\cdot a_1q^2=2a_1,\\ a_4+2a_7=\dfrac{5}{2},\end{cases}$　①　②

由①可得 $a_1q^3=2$，即 $a_4=2$，

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

$\therefore a_7=\frac{1}{4}$,

$\therefore q^3=\frac{a_7}{a_4}=\frac{1}{8}$,$\therefore q=\frac{1}{2}$,

$\therefore a_1=\frac{a_4}{q^3}=16$,

$\therefore S_4=\frac{a_1(1-q^4)}{1-q}=\frac{16\times(1-\frac{1}{16})}{1-\frac{1}{2}}=30$. 故选 B.

3. C　由 $4a_1$,$2a_2$,a_3 成等差数列,

得 $4a_2=4a_1+a_3$,

$\therefore 4q=4+q^2$,

解得 $q=2$,

$\therefore S_4=\frac{a_1(1-q^4)}{1-q}=15$. 故选 C.

4. A　$a_1\cdot a_3=a_1^2\cdot q^2>0$,故选 A.

5. C　$\because S_4=a_1+a_2+a_3+a_4=a_2+a_3+9a_1$,

$\therefore a_4=8a_1$,$\therefore q^3=8$,$q=2$,$a_5=a_1\cdot q^4$,

$\therefore 32=16a_1$,$\therefore a_1=2$. 故选 C.

6. A　$S_n=1\ \frac{1}{2}+3\ \frac{1}{4}+\cdots+(2n-1)+\frac{1}{2^n}=$

$[1+3+\cdots+(2n-1)]+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2^n}\right)=$

$\frac{n(1+2n-1)}{2}+\frac{\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2^n}\right)}{1-\frac{1}{2}}=n^2+1-\frac{1}{2^n}$. 故选 A.

7. 2^n　$\frac{n(n+1)}{2}$

解析:$\because q^3=\frac{a_4}{a_1}=\frac{16}{2}=8$.

$\therefore q=2$,$\therefore a_n=a_1\cdot q^{n-1}=2\cdot 2^{n-1}=2^n$.

$\because b_n=\log_2 a_n=\log_2 2^n=n$,$\therefore S_n=b_1+b_2+\cdots+b_n=1+2+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$.

8. ①②③

解析:①$\{a_n\}$既是等差数列又是等比数列,则$\{a_n\}$为非零的常数数列,即$a_n=a_{n+1}(n\in\mathbf{N}_+)$,$\therefore$①正确.

②$S_n=an^2+bn(a,b\in\mathbf{R})$符合等差数列前 n 项和公式特点,$\therefore\{a_n\}$是等差数列,$\therefore$②正确.

③$S_n=1-(-1)^n$ 符合等比数列前 n 项和特点,

$\therefore\{a_n\}$是等比数列,$\therefore$③正确.

9. 57

解析:$\because a_5=a_3+2d=2d-1$,

$a_6=a_3+3d=3d-1$,

又 a_5,a_6,a_7 成等比数列,

$\therefore 4(2d-1)=(3d-1)^2$,即 $9d^2-14d+5=0$,

解得 $d=\frac{5}{9}$ 或 $d=1$.

$\because\{a_n\}$各项均为整数,$\therefore d=1$.

$\therefore a_5=1$,$a_6=2$,$a_1=-3$,

$\therefore S_{10}=-3\times6+\frac{6\times5}{2}\times1+\frac{4(1-2^4)}{1-2}=-3+60=57$.

10. **解**:(1)设等差数列$\{a_n\}$公差为 d,因为 $a_2+a_4=2a_3=10$,所以 $a_3=5=1+2d$,所以 $d=2$,所以 $a_n=2n-1$.

(2)设$\{b_n\}$的公比为 q,$b_2\cdot b_4=a_5\Rightarrow qq^3=9$,所以 $q^2=3$,所以$\{b_{2n-1}\}$是以 $b_1=1$ 为首项,$q'=q^2=3$ 为公比的等比数列,所以 $b_1+b_3+b_5+\cdots+b_{2n-1}=\frac{1\times(1-3^n)}{1-3}=\frac{3^n-1}{2}$.

11. **解**:(1)设等差数列$\{a_n\}$的公差为 d,$\because a_2+a_3=5\ln 2$,

$\therefore 2a_1+3d=5\ln 2$,又 $a_1=\ln 2$,$\therefore d=\ln 2$.

$\therefore a_n=a_1+(n-1)d=n\ln 2$.

(2)由(1)知 $a_n=n\ln 2$,

$\because e^{a_n}=e^{n\ln 2}=e^{\ln 2^n}=2^n$,$\therefore\{e^{a_n}\}$是以 2 为首项,2 为公比的等比数列.

$\therefore e^{a_1}+e^{a_2}+\cdots+e^{a_n}=e^{\ln 2}+e^{\ln 2^2}+\cdots+e^{\ln 2^n}=2+2^2+\cdots+2^n=2^{n+1}-2$.

$\therefore e^{a_1}+e^{a_2}+\cdots+e^{a_n}=2^{n+1}-2$.

12. **解**:(1)由 $b_n=2-2S_n$,令 $n=1$,则 $b_1=2-2S_1$,又 $S_1=b_1$,$\therefore b_1=\frac{2}{3}$,$b_2=2-2(b_1+b_2)$,则 $b_2=\frac{2}{9}$且$\frac{b_2}{b_1}=\frac{1}{3}$.

当 $n\geqslant2$ 时,由 $b_n=2-2S_n$,可得

$b_n-b_{n-1}=-2(S_n-S_{n-1})=-2b_n$. 即$\frac{b_n}{b_{n-1}}=\frac{1}{3}$.

$\therefore\{b_n\}$是以 $b_1=\frac{2}{3}$ 为首项,$\frac{1}{3}$ 为公比的等比数列,于是

$b_n=2\times\frac{1}{3^n}$.

(2)证明:数列$\{a_n\}$为等差数列,由公差 $d=\frac{1}{2}(a_7-a_5)=3$,可得 $a_n=3n-1$. 从而 $c_n=a_n\times b_n=2(3n-1)\times\frac{1}{3^n}$.

$\therefore T_n=2\left[2\times\frac{1}{3}+5\times\frac{1}{3^2}+8\times\frac{1}{3^3}+\cdots+(3n-1)\times\frac{1}{3^n}\right]$,

$\frac{1}{3}T_n=2\left[2\times\frac{1}{3^2}+5\times\frac{1}{3^3}+\cdots+(3n-4)\times\frac{1}{3^n}+(3n-1)\times\frac{1}{3^{n+1}}\right]$,

$\therefore$两式相减得$\frac{2}{3}T_n=2\left[2\times\frac{1}{3}+3\times\frac{1}{3^2}+3\times\frac{1}{3^3}+\cdots+3\times\frac{1}{3^n}-(3n-1)\times\frac{1}{3^{n+1}}\right]$.

从而 $T_n=\frac{7}{2}-\frac{7}{2}\times\frac{1}{3^n}-\frac{n}{3^{n-1}}<\frac{7}{2}$.

章末检测

1. B　当 $n=1$ 时,$a_1=1$,排除 C、D;

当 $n=2$ 时,$a_2=\frac{1}{3}$,排除 A,故选 B.

2. C　由 $a_3+a_4+a_5=12$,得 $a_4=4$,$a_1+a_2+\cdots+a_7=7a_4=28$. 故选 C.

3. B　由题可得$\begin{cases}a_1=1,\\1+d+1+2d=3,\end{cases}$

$\therefore d=\frac{1}{3}$,

$\therefore a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_6+a_7=7a_1+\frac{7\times6}{2}d=14$,故选 B.

4. D　$\because S_n=na_1+\frac{n(n-1)}{2}d$,$d=-1$,$\therefore S_1=a_1$,$S_2=2a_1-1$,

$S_4=4a_1-6$,又 S_1,S_2,S_4 成等比数列,

$\therefore S_2^2=S_1\cdot S_4$,即$(2a_1-1)^2=a_1(4a_1-6)$.

解得 $a_1=-\frac{1}{2}$. 故选 D.

5. A　$\because a_1=-11$,$a_5+a_6=-4$,

$\therefore 2a_1+9d=-4$,$\therefore d=2$.

$\therefore S_n=na_1+\frac{n(n-1)}{2}\times2=n^2-12n=(n-6)^2-36$. 故当 $n=6$ 时,S_n 有最小值 -36. 故选 A.

6. A　由 a_1,$\frac{1}{2}a_3$,$2a_2$ 成等差数列,

$\therefore a_3=a_1+2a_2$,$\therefore a_1q^2=a_1+2a_1q$,

$\because a_1\neq0$,$\therefore q^2-2q-1=0$,

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

∴$q=1+\sqrt{2}$或 $q=1-\sqrt{2}$(舍).

∴$\frac{a_8+a_9}{a_7+a_8}=q=1+\sqrt{2}$,故选 A.

7. B　由 $a_5=3,a_7=-3$,得 $d=\frac{a_7-a_5}{2}=-3$,

∴$a_n=3+(n-5)(-3)=18-3n$,

当 $n<6$ 时,$a_n>0$,当 $n=6$ 时,$a_n=0$,当 $n>6$ 时,$a_n<0$,

∴$\{|a_n|\}$的前 10 项和为

$a_1+a_2+\cdots+a_6-a_7-a_8-a_9-a_{10}$

$=15+12+\cdots+0+3+6+9+12$

$=\frac{6\times(15+0)}{2}+\frac{4\times(3+12)}{2}$

$=75$. 故选 B.

8. D　由 $2a_n^2=a_{n+1}^2+a_{n-1}^2$ 可知数列$\{a_n^2\}$为等差数列,公差为 d,

则 $d=a_2^2-a_1^2=3,a_1^2=1$,

∴$a_6^2=a_1^2+5d=1+5\times3=16$,又 $a_n>0$,

∴$a_6=4$,故选 D.

9. -63

解析:根据 $S_n=2a_n+1$,可得 $S_{n+1}=2a_{n+1}+1$,两式相减得 $a_{n+1}=2a_{n+1}-2a_n$,即 $a_{n+1}=2a_n$,当 $n=1$ 时,$S_1=a_1=2a_1+1$,解得 $a_1=-1$,所以数列$\{a_n\}$是以 -1 为首项,以 2 为公比的等比数列,所以 $S_6=\frac{-(1-2^6)}{1-2}=-63$.

10. 49

解析:∵$S_n=n^2+n+1$,

当 $n=1,S_1=3$;

当 $n\geqslant2$ 时,$a_n=S_n-S_{n-1}=2n$.

∴$a_n=\begin{cases}3,n=1,\\2n,n\geqslant2.\end{cases}$

∵$b_n=(-1)^n a_n$.

∴数列$\{b_n\}$的前 50 项和为 $T_{50}=-3+4-6+8-\cdots-98+100=1+2\times24=49$.

11. $2n$

解析:由 $na_{n+1}=(n+1)a_n$,得 $\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{n+1}{n}$,

∴$a_n=\frac{a_n}{a_{n-1}}\cdot\frac{a_{n-1}}{a_{n-2}}\cdot\frac{a_{n-2}}{a_{n-3}}\cdots\frac{a_2}{a_1}\cdot a_1=\frac{n}{n-1}\cdot\frac{n-1}{n-2}\cdot\frac{n-2}{n-3}\cdots\frac{2}{1}\cdot2=2n$,

当 $n=1$ 时,$a_1=2$,符合 $a_n=2n$,∴$a_n=2n$.

12. **解**:(1)$a_1=2,a_2=2+c,a_3=2+3c$,

因为 a_1,a_2,a_3 成等比数列,

所以$(2+c)^2=2(2+3c)$,

解得 $c=0$ 或 $c=2$.

当 $c=0$ 时,$a_1=a_2=a_3$,不符合题意舍去,故 $c=2$.

(2)当 $n\geqslant2$ 时,由于 $a_2-a_1=c,a_3-a_2=2c,a_n-a_{n-1}=(n-1)c$,所以 $a_n-a_1=[1+2+(n-1)]c=\frac{n(n-1)}{2}c$.

又 $a_1=2,c=2$,故 $a_n=2+n(n-1)=n^2-n+2$ $(n=2,3,\cdots)$.

当 $n=1$ 时,上式也成立,

所以 $a_n=n^2-n+2(n=1,2,\cdots)$.

13. **解**:(1)由 $S_{n+1}-S_n=\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}$,

得 $a_{n+1}=\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}$,

∴$a_n=\left(\frac{1}{3}\right)^n$.

当 $n=1,a_1=\frac{1}{3}$,数列$\{a_n\}$是等比数列,$q=\frac{1}{3},a_1=\frac{1}{3}$,

∴$S_n=\frac{\frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{3^n}\right)}{1-\frac{1}{3}}=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{3^n}\right)$.

(2)$S_1=\frac{1}{3},S_2=\frac{4}{9},S_3=\frac{13}{27}$.

由 $S_1,t(S_1+S_2),3(S_2+S_3)$成等差数列,

∴$S_1+3(S_2+S_3)=2t(S_1+S_2)$,

即 $\frac{1}{3}+3\left(\frac{4}{9}+\frac{13}{27}\right)=2t\left(\frac{1}{3}+\frac{4}{9}\right)$,

∴$t=2$.

14. **解**:(1)由 a_4+2 是 a_3,a_5 的等差中项得 $a_3+a_5=2a_4+4$,所以 $a_3+a_4+a_5=3a_4+4=28$,解得 $a_4=8$. 由 $a_3+a_5=20$ 得 $8\left(q+\frac{1}{q}\right)=20$,因为 $q>1$,所以 $q=2$.

(2)设 $c_n=(b_{n+1}-b_n)a_n$,数列$\{c_n\}$的前 n 项和为 S_n. 由 $c_n=\begin{cases}S_1,n=1,\\S_n-S_{n-1},n\geqslant2.\end{cases}$ 解得 $c_n=4n-1$.

由(1)可知 $a_n=2^{n-1}$,所以 $b_{n+1}-b_n=(4n-1)\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$,故 $b_n-b_{n-1}=(4n-5)\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2},n\geqslant2$,

所以 $b_n-b_1=(b_n-b_{n-1})+(b_{n-1}-b_{n-2})+\cdots+(b_3-b_2)+(b_2-b_1)$

$=(4n-5)\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}+(4n-9)\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-3}+\cdots+7\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^1+3\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^0$.

设 $T_n=3\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^0+7\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^1+11\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2+\cdots+(4n-5)\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2},n\geqslant2$,

$\frac{1}{2}T_n=3\cdot\frac{1}{2}+7\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2+\cdots+(4n-9)\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}+(4n-5)\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$,

所以 $\frac{1}{2}T_n=3+4\cdot\frac{1}{2}+4\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2+\cdots+4\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}-(4n-5)\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$,

因此 $T_n=14-(4n+3)\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2},n\geqslant2$,

又 $b_1=1$,所以 $b_n=15-(4n+3)\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}$.

第三章　不等式

3.1　不等关系与不等式

基础知识点对点

1. $a<2b-\frac{b^2}{a}$

解析:$a-\left(2b-\frac{b^2}{a}\right)=a-2b+\frac{b^2}{a}=\frac{a^2-2ab+b^2}{a}=\frac{(a-b)^2}{a}$,

∵$a<0,a\neq b$,∴$(a-b)^2>0$,

∴$\frac{(a-b)^2}{a}<0$,∴$a<2b-\frac{b^2}{a}$.

2. **解**:∵$a>0,b>0$,

∴$\frac{a^a b^b}{a^b b^a}=\left(\frac{a}{b}\right)^{a-b}$,

若 $a>b$,则 $\frac{a}{b}>1,a-b>0$,

∴$\left(\frac{a}{b}\right)^{a-b}>1$,∴$a^a b^b>a^b b^a$,

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

若 $a=b$，则 $\frac{a}{b}=1$，$a-b=0$，

$\therefore \left(\frac{a}{b}\right)^{a-b}=1$，$\therefore a^a b^b=a^b b^a$，

若 $a<b$，则 $0<\frac{a}{b}<1$，$a-b<0$，

$\therefore \left(\frac{a}{b}\right)^{a-b}>1$，$\therefore a^a b^b>a^b b^a$，

$\therefore a^a b^b \geqslant a^b b^a$.

3. A　根据不等式的性质可知 A 正确.

4. $\left(\frac{1}{8},3\right)$

解析：$\because 2<y<8$，$\therefore \frac{1}{8}<\frac{1}{y}<\frac{1}{2}$，

又 $1<x<6$，$\therefore \frac{1}{8}<\frac{x}{y}<3$.

5. **证明**：$a^2b+b^2c+c^2a-(ab^2+bc^2+ca^2)=$
$(a^2b-bc^2)+(b^2c-ab^2)+(c^2a-ca^2)=$
$b(a^2-c^2)+b^2(c-a)+ca(c-a)=$
$(c-a)(b^2+ca-ba-bc)=(c-a)(c-b)(a-b)$.
因为 $a>b>c$，所以 $c-a<0$，$c-b<0$，$a-b>0$.
则 $(c-a)(c-b)(a-b)>0$，即 $a^2b+b^2c+c^2a-(ab^2+bc^2+ca^2)>0$. 所以 $a^2b+b^2c+c^2a>ab^2+bc^2+ca^2$.

课后拔高提能练

1. A　$\because a<b<0$，

$\therefore \frac{1}{a}>\frac{1}{b}$ 成立，$|a|>|b|$ 成立，

$a^2>b^2$ 成立，$0>a-b>a$，

$\therefore \frac{1}{a-b}<\frac{1}{a}$，A 不成立. 故选 A.

2. D　取 $a=-1$，$b=2$ 知，A，B，C 均不成立，故 D 正确.

3. D　$\because a>b$，$\therefore -a<-b$，$y=4^x$ 是增函数，$\therefore 4^{-a}<4^{-b}$，故选 D.

4. B　$\because x<a<0$，$\therefore x^2>ax$，$ax>a^2$，
$\therefore x^2>ax>a^2$，故选 B.

5. C　$\because x^2+2x+a\geqslant -y^2-2y$ 对任意实数 x，y 都成立，
$\therefore a\geqslant -x^2-2x-y^2-2y=2-(x+1)^2-(y+1)^2$ 恒成立.
$\because 2-(x+1)^2-(y+1)^2\leqslant 2$，
$\therefore a\geqslant 2$. 故选 C.

6. B　令 $a=2$，$b=\frac{1}{2}$ 进行验证，易知 $a+\frac{1}{b}=4$，$\frac{b}{2^a}=\frac{1}{8}$，
$\log_2(a+b)=\log_2\frac{5}{2}>1$，因此 $a+\frac{1}{b}>\log_2(a+b)>\frac{b}{2^a}$.
故选 B.

7. $\left(-\frac{3\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$

解析：$\because -\frac{\pi}{2}<\alpha<\beta<\frac{\pi}{2}$，$\therefore -\frac{\pi}{2}<-\beta<\frac{\pi}{2}$，
$\therefore -\pi<\alpha-\beta<0$，
$\therefore -\frac{3\pi}{2}<\alpha+(\alpha-\beta)<\frac{\pi}{2}$，
即 $-\frac{3\pi}{2}<2\alpha-\beta<\frac{\pi}{2}$.

8. ①

解析：①$a^2+3-2a=(a-1)^2+2>0$，
$\therefore a^2+3>2a$ 恒成立；
②$a^2+b^2-2(a-b-1)=(a-1)^2+(b-1)^2\geqslant 0$，
$\therefore$ ②不恒成立；
③$x^2+y^2-xy=\left(x-\frac{y}{2}\right)^2+\frac{3}{4}y^2\geqslant 0$，
$\therefore$ ③不恒成立.

9. $c\geqslant b>a$

解析：$\because c-b=4-4a+a^2=(a-2)^2\geqslant 0$，
$\therefore c\geqslant b$.
又 $b+c=6-4a+3a^2$，
$\therefore 2b=2+2a^2$，
$\therefore b=a^2+1$，
$b-a=a^2+1-a=\left(a-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}>0$，
$\therefore b>a$，$\therefore c\geqslant b>a$.

10. **证明**：$\because c<d<0$，$\therefore -c>-d>0$.
又 $a>b>0$，$\therefore a-c>b-d>0$，
$\therefore (a-c)^2>(b-d)^2>0$，
两边同乘以 $\frac{1}{(a-c)^2(b-d)^2}$ 得 $\frac{1}{(a-c)^2}<\frac{1}{(b-d)^2}$，
又 $e<0$，$\therefore \frac{e}{(a-c)^2}>\frac{e}{(b-d)^2}$.

11. **解**：设等比数列 $\{a_n\}$ 的公比为 q，等差数列 $\{b_n\}$ 的公差为 d.
则 $a_3=a_1q^2$，$b_3=a_1+2d$.
$\because a_1=b_1>0$，$a_3=b_3$，$\therefore a_1q^2=a_1+2d$，
$\therefore 2d=a_1(q^2-1)$. $\because a_1\neq a_3$，$\therefore q^2\neq 1$.
$b_5-a_5=(a_1+4d)-a_1q^4=a_1+2a_1(q^2-1)-a_1q^4=$
$-a_1q^4+2a_1q^2-a_1=-a_1(q^2-1)^2<0$，
$\therefore b_5<a_5$.

12. **解**：由题意得 $\begin{cases} f(1)=a-c, \\ f(2)=4a-c, \end{cases}$
解得 $\begin{cases} a=\frac{1}{3}f(2)-\frac{1}{3}f(1), \\ c=\frac{1}{3}f(2)-\frac{4}{3}f(1). \end{cases}$
$\therefore f(3)=9a-c=\frac{8}{3}f(2)-\frac{5}{3}f(1)$.
$\because -4\leqslant f(1)\leqslant -1$，
$\therefore (-1)\times\left(-\frac{5}{3}\right)\leqslant\left(-\frac{5}{3}\right)\times f(1)\leqslant(-4)\times\left(-\frac{5}{3}\right)$，
即 $\frac{5}{3}\leqslant -\frac{5}{3}f(1)\leqslant\frac{20}{3}$.　①
又 $-1\leqslant f(2)\leqslant 5$，$\therefore -\frac{8}{3}\leqslant\frac{8}{3}f(2)\leqslant\frac{40}{3}$.　②
由①+②，得 $-1\leqslant\frac{8}{3}f(2)-\frac{5}{3}f(1)\leqslant 20$，
即 $-1\leqslant f(3)\leqslant 20$.

3.2　均值不等式

基础知识点对点

1. B　解法一：令 $x=1$，$y=2$，满足 $x+y\leqslant 4$，排除 A、C、D，故选 B.

解法二：$0<x+y\leqslant 4$，$\therefore \frac{1}{x+y}\geqslant\frac{1}{4}$，A 错；
$x+y\geqslant 2\sqrt{xy}$，$\therefore \sqrt{xy}\leqslant 2$，C 错；
$0<xy\leqslant 4$，$\therefore \frac{1}{xy}\geqslant\frac{1}{4}$，D 错；
$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{x+y}{xy}\geqslant\frac{2\sqrt{xy}}{xy}=\frac{2}{\sqrt{xy}}\geqslant 1$，B 正确.

2. D　A 中，$y=x+\frac{1}{x}$ 的值域为 $(-\infty,-2]\cup[2,+\infty)$，无最小值；
B 中，$y=\sin x+\frac{1}{\sin x}$ 的值域为 $(2,+\infty)$，无最小值；
C 中，$y=\frac{x^2+3}{\sqrt{x^2+2}}=\sqrt{x^2+2}+\frac{1}{\sqrt{x^2+2}}$，
$\sqrt{x^2+2}\geqslant\sqrt{2}$，函数的最小值为 $\frac{3\sqrt{2}}{2}$；
D 中，$y=\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}$ 的最小值为 2，符合条件. 故选 D.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

3. B　∵3 是 3^a 与 3^b 的等比中项，∴$3^a \cdot 3^b = 3^2$，

∴$a+b=2$，

$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)(a+b)=\frac{1}{2}\left(2+\frac{b}{a}+\frac{a}{b}\right)\geqslant 2$.

当且仅当 $a=b=1$ 时，等号成立，故选 B.

4. 4

解析：∵$a^4+4b^4\geqslant 2a^2\cdot 2b^2=4a^2b^2$（当且仅当 $a^2=2b^2$ 时“=”成立），

∴$\frac{a^4+4b^4+1}{ab}\geqslant\frac{4a^2b^2+1}{ab}=4ab+\frac{1}{ab}$，

由于 $ab>0$，∴$4ab+\frac{1}{ab}\geqslant 2\sqrt{4ab\cdot\frac{1}{ab}}=4$

$\left(\text{当且仅当 } 4ab=\frac{1}{ab}\text{ 时“=”成立}\right)$，

故当且仅当 $\begin{cases}a^2=2b^2,\\ 4ab=\frac{1}{ab}\end{cases}$ 时，即 $\begin{cases}a^2=\frac{\sqrt{2}}{2},\\ b^2=\frac{\sqrt{2}}{4}\end{cases}$ 时，$\frac{a^4+4b^4+1}{ab}$ 的最小值为 4.

5. D　A 中 $|x|$ 不是定值，A 错；B 中等号不能成立，B 错；C 中 $\frac{a}{b}$ 不一定为正数，C 错；D 正确.

6. **证明**：∵a,b,c,d 都是实数，

∴$|ac+bd|\leqslant|ac|+|bd|\leqslant\frac{a^2+c^2}{2}+\frac{b^2+d^2}{2}=\frac{a^2+b^2+c^2+d^2}{2}=1$，

∴$|ac+bd|\leqslant 1$.

课后拔高提能练

1. A　由均值不等式得 $\frac{a+b}{2}\geqslant\sqrt{ab}$，∵$a>b>0$，

∴$\frac{a+b}{2}>\sqrt{ab}$，A 成立. 故选 A.

2. A　令 $\sqrt{ab}=t(t>0)$，

由 $ab=a+b+3\geqslant 2\sqrt{ab}+3$，得 $t^2\geqslant 2t+3$.

解得 $t\geqslant 3$，即 $ab\geqslant 9$，故选 A.

3. C　由题意知 $a+b=1$，则

$\alpha+\beta=a+\frac{1}{a}+b+\frac{1}{b}=1+\frac{1}{ab}\geqslant 1+\frac{1}{\left(\frac{a+b}{2}\right)^2}=5$，

故选 C.

4. A　∵$x>0,y>0,x+y=2$，∴$xy\leqslant\left(\frac{x+y}{2}\right)^2=1$，

∴$\frac{1}{xy}\geqslant 1$. 当且仅当 $x=y=1$ 时取等号. 故选 A.

5. C　∵$\lg 2^x+\lg 8^y=\lg 2$，∴$2^x\cdot 8^y=2$，∴$x+3y=1$.

∴$\frac{1}{x}+\frac{1}{3y}=(x+3y)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{3y}\right)=2+\frac{3y}{x}+\frac{x}{3y}\geqslant 4$.

当且仅当 $x=3y=\frac{1}{2}$ 时，等号成立，故选 C.

6. B　当 $x>0$ 时，$x^2+\frac{1}{4}\geqslant x$，所以 $\lg\left(x^2+\frac{1}{4}\right)\geqslant\lg x$，A 错；$x^2+1\geqslant 2|x|$，B 正确；C 中 a,b 的范围不定，C 错；D 中 $\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}\geqslant\frac{a+b}{2}$，D 错，故选 B.

7. $\frac{3}{2}$

解析：$x>0,y>0$，∴$2x+3y\geqslant 2\sqrt{6xy}$，

∴$xy\leqslant\frac{3}{2}$，

当且仅当 $x=\frac{3}{2}$，$y=1$ 时，等号成立，

∴xy 的最大值为 $\frac{3}{2}$.

8. $(-4,2)$

解析：因 $F(x,y)=x+2y=(x+2y)\left(\frac{2}{x}+\frac{1}{y}\right)=4+\frac{4y}{x}+\frac{x}{y}\geqslant 4+4=8$，即 $F_{\min}(x,y)=8$，故 $m^2+2m-8<0\Rightarrow -4<m<2$，应填答案 $(-4,2)$.

9. $\frac{1}{4}$

解析：由 $a-3b+6=0$ 可知 $a-3b=-6$，

且 $2^a+\frac{1}{8^b}=2^a+2^{-3b}$，因为对于任意 x，$2^x>0$ 恒成立，

结合均值不等式的结论可得，$2^a+2^{-3b}\geqslant 2\times\sqrt{2^a\times 2^{-3b}}=2\times\sqrt{2^{-6}}=\frac{1}{4}$.

当且仅当 $\begin{cases}2^a=2^{-3b},\\ a-3b=-6,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}a=-3,\\ b=1\end{cases}$ 时等号成立.

综上可得 $2^a+\frac{1}{8^b}$ 的最小值为 $\frac{1}{4}$.

10. **解**：∵a,b,x,y 均为正数，且 $\frac{a}{x}+\frac{b}{y}=1$，

∴$x+y=(x+y)\left(\frac{a}{x}+\frac{b}{y}\right)=$

$a+b+\frac{bx}{y}+\frac{ay}{x}\geqslant a+b+2\sqrt{ab}=(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2$.

∵$x+y$ 的最小值为 18，∴$(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2=18$，

即 $a+b+2\sqrt{ab}=18$. 又 $a+b=10$，

∴$ab=16$. 由 $\begin{cases}a+b=10,\\ ab=16,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=2,\\ b=8\end{cases}$ 或 $\begin{cases}a=8,\\ b=2.\end{cases}$

11. **解**：(1)∵$0<x<\frac{3}{2}$，

∴$3-2x>0$，

∴$y=4x(3-2x)=2\times 2x(3-2x)\leqslant 2\left(\frac{2x+3-2x}{2}\right)^2=\frac{9}{2}$.

当且仅当 $2x=3-2x$，即 $x=\frac{3}{4}$ 时，“=”成立.

∴$y=4x(3-2x)$ 的最大值为 $\frac{9}{2}$.

(2)∵$x+y-3xy+5=0$.

∴$x+y=3xy-5\geqslant 2\sqrt{xy}$，

∴$3xy-2\sqrt{xy}-5\geqslant 0$，

∴$(3\sqrt{xy}-5)(\sqrt{xy}+1)\geqslant 0$，

∴$3\sqrt{xy}-5\geqslant 0$，

即 $\sqrt{xy}\geqslant\frac{5}{3}$，

∴$xy\geqslant\frac{25}{9}$.

当且仅当 $x=y=\frac{5}{3}$ 时，“=”成立.

∴xy 的最小值是 $\frac{25}{9}$.

12. **证明**：(1)∵$a,b,c>0$，且 $a+b+c=1$，

∴$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{a+b+c}{a}+\frac{a+b+c}{b}+\frac{a+b+c}{c}=3+\left(\frac{b}{a}+\frac{a}{b}\right)+\left(\frac{c}{a}+\frac{a}{c}\right)+\left(\frac{c}{b}+\frac{b}{c}\right)\geqslant 3+2+2+2=9$.

当且仅当 $a=b=c=\frac{1}{3}$ 时取等号.

(2)∵$a,b,c>0$，$a+b+c=1$，

∴$\frac{1}{a}-1=\frac{1-a}{a}=\frac{b+c}{a}\geqslant\frac{2\sqrt{bc}}{a}$.

同理：$\frac{1}{b}-1\geqslant\frac{2\sqrt{ac}}{b}$，$\frac{1}{c}-1\geqslant\frac{2\sqrt{ab}}{c}$.

由上述三个不等式两边均为正，分别相乘，得

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

$\left(\frac{1}{a}-1\right)\left(\frac{1}{b}-1\right)\left(\frac{1}{c}-1\right)\geqslant\frac{2\sqrt{bc}}{a}\cdot\frac{2\sqrt{ac}}{b}\cdot\frac{2\sqrt{ab}}{c}=8$，

当且仅当 $a=b=c=\frac{1}{3}$ 时取等号.

3.3 一元二次不等式及其解法

基础知识点对点

1. D　由题可知 $A=[-2,2]$，$B=(-\infty,1)$，

∴$A\cap B=[-2,1)$，故选 D.

2. $(-5,1]\cup(6,+\infty)$

解析：不等式可化为 $\frac{x-1}{(x+5)(x-6)}\geqslant 0$，

∴$-5<x\leqslant 1$ 或 $x>6$，

∴不等式的解集为 $(-5,1]\cup(6,+\infty)$.

3. C　$A=\{x|-1<x<4\}$，

$B=\{x|x<m$，或 $x>m+2\}$，

若 $A\cup B=\mathbf{R}$，

∴$\begin{cases}m>-1,\\ m+2<4,\end{cases}$ 解得 $-1<m<2$.

故选 C.

4. **解**：当 $a=0$ 时，不等式化为 $0>1$，无解，

当 $a\neq 0$ 时，不等式可化为 $\frac{(a-1)x+2}{x-2}>0$，

等价于 $[(a-1)x+2](x-2)>0$.

方程 $[(a-1)x+2](x-2)=0$ 的两根为 $\frac{2}{1-a}$ 与 2.

∴当 $a<0$ 时，$\frac{2}{1-a}<2$，$a-1<0$，

不等式的解为 $\frac{2}{1-a}<x<2$.

当 $0<a<1$ 时，$\frac{2}{1-a}>2$，$a-1<0$，

不等式的解为 $2<x<\frac{2}{1-a}$.

综上，当 $a=0$ 时，不等式的解集为 $\varnothing$.

当 $a<0$ 时，不等式的解集为 $\left(\frac{2}{1-a},2\right)$.

当 $0<a<1$ 时，不等式的解集为 $\left(2,\frac{2}{1-a}\right)$.

5. 16

解析：∵函数 $f(x)=x^2+ax+b(a,b\in\mathbf{R})$ 的值域为 $[0,+\infty)$，

∴函数的最小值为 0，

∴$\Delta=a^2-4b=0$，即 $b=\frac{1}{4}a^2$.

又∵关于 x 的不等式 $f(x)<c$ 可化为 $x^2+ax+b-c<0$，解集为 $(m,m+8)$，

∴方程 $x^2+ax+\frac{1}{4}a^2-c=0$ 的两根为

$x_1=m$，$x_2=m+8$，

又 $\begin{cases}x_1+x_2=-a,\\ x_1x_2=\frac{1}{4}a^2-c,\end{cases}$

∴$|x_1-x_2|^2=(x_1+x_2)^2-4x_1x_2=64$，

∴$a^2-4\left(\frac{1}{4}a^2-c\right)=64$，

∴$c=16$.

6. **解**：(1)若 $x\in\mathbf{R}$，$f(x)=mx^2-mx-1<0$ 恒成立，

当 $m=0$ 时，$f(x)=-1<0$，符合题意，

当 $m\neq 0$ 时，$\begin{cases}m<0,\\ \Delta=m^2+4m<0,\end{cases}$ ∴$-4<m<0$，

∴实数 m 的取值范围是 $(-4,0]$.

(2)若 $m\in\left[\frac{1}{2},2\right]$，$f(x)=mx^2-mx-1<0$ 恒成立. 即 $(x^2-x)m-1<0$，

只需 $\begin{cases}\frac{1}{2}(x^2-x)-1<0,\\ 2(x^2-x)-1<0,\end{cases}$ ∴$\begin{cases}-1<x<2,\\ \frac{1-\sqrt{3}}{2}<x<\frac{1+\sqrt{3}}{2},\end{cases}$

∴$\frac{1-\sqrt{3}}{2}<x<\frac{1+\sqrt{3}}{2}$.

课后拔高提能练

1. D　$2x^2-x-1>0$，可化为 $(2x+1)(x-1)>0$，

∴$x>1$ 或 $x<-\frac{1}{2}$，

∴不等式 $2x^2-x-1>0$ 的解集为 $\left(-\infty,-\frac{1}{2}\right)\cup(1,+\infty)$，

故选 D.

2. D　首先 $x\neq 1$，在此条件下 $(x-1)^2>0$. 然后根据不等式的性质，原不等式可化为 $x+5\geqslant 2(x-1)^2$，即 $2x^2-5x-3\leqslant 0$，解得 $-\frac{1}{2}\leqslant x\leqslant 3$. 又 $x\neq 1$，所以原不等式的解集为 $\left[-\frac{1}{2},1\right)\cup(1,3]$. 故选 D.

3. B　当 $x\geqslant 0$ 时，不等式 $-x^2+|x|+2<0$，可化为 $-x^2+x+2<0$，∴$x>2$；

当 $x<0$ 时，不等式 $-x^2+|x|+2<0$ 可化为 $-x^2-x+2<0$，∴$x<-2$，

综上，原不等式的解集为 $\{x|x<-2$ 或 $x>2\}$，故选 B.

4. D　由题可知 $x^2+(a-4)x+4-2a>0$，$a\in[0,1]$ 恒成立，

∴$(x-2)a+x^2-4x+4>0$，

即 $(x-2)a+(x-2)^2>0$，

∴$\begin{cases}(x-2)^2>0,\\ x-2+(x-2)^2>0,\end{cases}$

∴$x>2$ 或 $x<1$，故选 D.

5. C　令 $f(x)=x^2+(m-1)x+m^2-2$，

则由题可得 $\begin{cases}f(-1)<0,\\ f(1)<0,\end{cases}$

∴$\begin{cases}m^2-m<0,\\ m^2+m-2<0,\end{cases}$

即 $0<m<1$，故选 C.

6. C　由题意得 $(x-a)\otimes(x+a)<1$，则 $(x-a)(1-x-a)<1$，即 $x^2-x-a^2+a+1>0$.

要使不等式恒成立，只需 $\Delta=1-4(-a^2+a+1)<0$，即 $4a^2-4a-3<0$. 解得 $-\frac{1}{2}<a<\frac{3}{2}$. 故选 C.

7. $[-2,3]$

解析：由对应值表知，抛物线开口向上，因此不等式 $ax^2+bx+c\leqslant 0$ 的解集为 $\{x|-2\leqslant x\leqslant 3\}$.

8. $[0,+\infty)$

解析：$a\neq 0$ 时，由题意得 $\begin{cases}a>0,\\ \Delta<0,\end{cases}$

即 $\begin{cases}a>0,\\ 4a^2-4a(2a+3)<0,\end{cases}$ 解得 $a>0$.

当 $a=0$ 时，恒有 $3>0$，不等式也成立，故 a 的取值范围是 $[0,+\infty)$.

9. $\left(-\frac{1}{2},-\frac{2}{5}\right]$

解析：由 $mx^2+(2-m)x-2>0$，

得 $(mx+2)(x-1)>0$，

令 $(mx+2)(x-1)=0$，

∴$x_1=-\frac{2}{m}$，$x_2=1$，

当 $m>0$ 时，不等式的解 $x<-\frac{2}{m}$，或 $x>1$，不符合题意；

当 $m<0$ 时，$x_1=-\frac{2}{m}>0$；

若不等式恰有 3 个整数解，则只需 $4<-\frac{2}{m}\leqslant 5$，即 $-\frac{1}{2}<m\leqslant-\frac{2}{5}$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

10. **解**：(1)因为 $\Delta=7^2-4\times2\times3=25>0$，所以方程 $2x^2+7x+3=0$ 有两个不等实根 $x_1=-3$，$x_2=-\frac{1}{2}$. 又二次函数 $y=2x^2+7x+3$ 的图象开口向上，所以原不等式的解集为 $\left\{x\middle|x>-\frac{1}{2}\text{或}x<-3\right\}$.

(2)因为 $\Delta=8^2-4\times(-1)\times(-3)=52>0$，所以方程 $-x^2+8x-3=0$ 有两个不等实根 $x_1=4-\sqrt{13}$，$x_2=4+\sqrt{13}$. 又二次函数 $y=-x^2+8x-3$ 的图象开口向下，所以原不等式的解集为 $\{x|4-\sqrt{13}<x<4+\sqrt{13}\}$.

(3)因为原不等式可化为 $\left(2x-\frac{9}{2}\right)^2\leqslant0$，所以原不等式的解集为 $\left\{x\middle|x=\frac{9}{4}\right\}$.

(4)原不等式可化为 $x^2-6x+10<0$，因为 $\Delta=(-6)^2-40=-4<0$，所以原不等式的解集为 $\varnothing$.

(5)原不等式可化为 $2x^2-3x+2>0$，因为 $\Delta=(-3)^2-4\times2\times2=-7<0$，所以原不等式的解集为 **R**.

11. **解**：(1)当 $a=5$ 时，$f(x)=x^2+5x+6$.

$\therefore f(x)<0$，即 $x^2+5x+6<0$，解得 $-3<x<-2$.

(2)若不等式 $f(x)>0$ 的解集为 **R**，则

$\Delta=a^2-4\times1\times6<0$，解得 $-2\sqrt{6}<a<2\sqrt{6}$.

故实数 a 的取值范围是 $(-2\sqrt{6},2\sqrt{6})$.

12. **解**：当 $a=0$ 时，原不等式化为 $x-2<0$，解集为 $\{x|x<2\}$.

当 $a<0$ 时，原不等式化为 $(x-2)\left(x-\frac{2}{a}\right)<0$，这时两根的大小顺序为 $2>\frac{2}{a}$，所以解集为 $\left\{x\middle|\frac{2}{a}<x<2\right\}$.

当 $a>0$ 时，原不等式化为 $(x-2)\left(x-\frac{2}{a}\right)>0$.

①当 $0<a<1$ 时，两根的大小顺序为 $2<\frac{2}{a}$，所以原不等式的解集为 $\left\{x\middle|x>\frac{2}{a}\text{或}x<2\right\}$.

②当 $a=1$ 时，$2=\frac{2}{a}$，所以原不等式的解集为 $\{x|x\neq2\text{ 且 }x\in\mathbf{R}\}$.

③当 $a>1$ 时，两根的大小顺序为 $2>\frac{2}{a}$，

解集为 $\left\{x\middle|x>2\text{ 或 }x<\frac{2}{a}\right\}$.

综上所述，不等式的解集为 $a=0$ 时，$\{x|x<2\}$；

$a=1$ 时，$\{x|x\neq2\text{ 且 }x\in\mathbf{R}\}$；

$a<0$ 时，$\left\{x\middle|\frac{2}{a}<x<2\right\}$；

$0<a<1$ 时，$\left\{x\middle|x>\frac{2}{a}\text{或}x<2\right\}$；

$a>1$ 时，$\left\{x\middle|x>2\text{ 或 }x<\frac{2}{a}\right\}$.

3.4　不等式的实际应用

基础知识点对点

1. C　设生产 x 台时不亏本，需 $25x-y\geqslant0(0<x<240)$，即 $0.1x^2+5x-3\,000\geqslant0$，所以 $0.1(x+25)^2-3\,062.5\geqslant0$，所以 $(x+25)^2\geqslant30\,625$.

所以 $x\geqslant150$ 时成立，当且仅当 $x=150$ 时取等号. 故选 C.

2. **解**：设每件提高 x 元 $(0\leqslant x\leqslant10)$，即每件获利润 $(2+x)$ 元，则每天可销售 $(100-10x)$ 件，每天获总利润为 y 元，由题意有 $y=(2+x)(100-10x)=-10x^2+80x+200$.

当 $x=4$ 时，y 取得最大值 360.

$\therefore$ 当售价定为 14 元时，每天所赚利润最大为 360 元.

要使每天所赚的利润在 300 元以上，则有 $-10x^2+80x+200>300$，

即 $x^2-8x+10<0$，解得 $4-\sqrt{6}<x<4+\sqrt{6}$.

故每件定价在 $(14-\sqrt{6})$ 元到 $(14+\sqrt{6})$ 元之间时，能确保每天的利润在 300 元以上.

3. 30

解析：设总费用为 y 万元，则 $y=\frac{600}{x}\times6+4x=4\left(x+\frac{900}{x}\right)\geqslant240$.

当且仅当 $x=\frac{900}{x}$，即 $x=30$ 时，等号成立.

4. **解**：(1)由题图形知，$3a+6=x$，$\therefore a=\frac{x-6}{3}$.

则总面积 $S=\left(\frac{1\,800}{x}-4\right)\cdot a+2a\left(\frac{1\,800}{x}-6\right)=$

$a\left(\frac{5\,400}{x}-16\right)=\frac{x-6}{3}\left(\frac{5\,400}{x}-16\right)=$

$1\,832-\left(\frac{10\,800}{x}+\frac{16x}{3}\right)$，

即 $S=1\,832-\left(\frac{10\,800}{x}+\frac{16x}{3}\right)(x>0)$.

(2)由 $S=1\,832-\left(\frac{10\,800}{x}+\frac{16x}{3}\right)$，

得 $S\leqslant1\,832-2\sqrt{\frac{10\,800}{x}\cdot\frac{16x}{3}}=1\,832-2\times240=1\,352$（平方米）.

当且仅当 $\frac{10\,800}{x}=\frac{16x}{3}$，此时，$x=45$.

即当 x 为 45 米时，S 最大，且 S 最大值为 1 352 平方米.

课后拔高提能练

1. B　依题意可设甲地销售 x 辆，则乙地销售 $(15-x)$ 辆，所以总利润 $S=5.06x-0.15x^2+2(15-x)=-0.15x^2+3.06x+30(x\geqslant0)$. 由于 x 需取整数，故当 $x=10$ 时，S 有最大值，且 $S_{max}=45.6$（万元）. 故选 B.

2. C　设长方体的长为 x，宽为 y，则 $xy\cdot1=4$，$\therefore xy=4$，总造价 $z=20xy+2(x+y)\times10=80+20(x+y)\geqslant80+20\times2\sqrt{xy}=160$，当且仅当 $x=y$ 时，等号成立，$\therefore$ 最低总造价为 160 元，故选 C.

3. B　由题可得 $A(1+a)(1+b)=A(1+x)^2$，

$\therefore(1+a)(1+b)=(1+x)^2$.

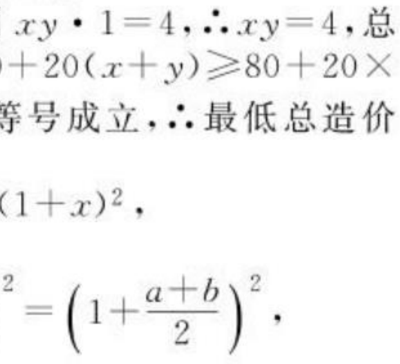
又 $(1+a)(1+b)\leqslant\left(\frac{1+a+1+b}{2}\right)^2=\left(1+\frac{a+b}{2}\right)^2$，

$\therefore(1+x)^2\leqslant\left(1+\frac{a+b}{2}\right)^2$，

即 $1+x\leqslant1+\frac{a+b}{2}$，$\therefore x\leqslant\frac{a+b}{2}$，故选 B.

4. B　日销售金额 $\omega=f(t)g(t)=(t+10)(-t+35)=-t^2+25t+350=-\left(t-\frac{25}{2}\right)^2+\frac{625}{4}+350$，当 $t=12$ 或 13 时，$\omega_{max}=506$. 故选 B.

5. C　如图 $\triangle ABC$，设矩形的另一边长为 y，则 $\frac{S_{\triangle ADE}}{S_{\triangle ABC}}=\frac{x\cdot(40-y)}{40\cdot40}=\left(\frac{40-y}{40}\right)^2$，所以 $y=40-x$，又 $xy\geqslant300$，所以 $x(40-x)\geqslant300$，即 $x^2-40x+300\leqslant0$，解得 $10\leqslant x\leqslant30$. 故选 C.



6. C　设产品的原价为 a，则按方案甲可得提价后的价格为 $A=a(1+p\%)(1+q\%)$；按方案乙可得提价后的价格为 $B=a(1+q\%)(1+p\%)=A$；按方案丙可得提价后的价格为 $C=a\left(1+\frac{p+q}{2}\%\right)^2$，

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

则 $C-B=a\left(1+\frac{p+q}{2}\%\right)^2-a(1+p\%)(1+q\%)=\frac{a}{4}(p\%-q\%)^2>0$，故选 C.

7. $\frac{l^2}{8}$

解析：依题意得 $x=l-2y$，设围成的菜园面积为 S，则 $S=xy=(l-2y)y=-2y^2+ly=-2\left(y-\frac{l}{4}\right)^2+\frac{l^2}{8}$.

∴当 $y=\frac{l}{4}$，$x=\frac{l}{2}$ 时，S 有最大面积为 $\frac{l^2}{8}$（面积单位）.

8. 20

解析：七月份：$500(1+x\%)$，八月份：$500(1+x\%)^2$. 所以一月份至十月份的销售总额为 $3\ 860+500+2[500(1+x\%)+500(1+x\%)^2]\geqslant 7\ 000$，解得 $1+x\%\leqslant -2.2$（舍）或 $1+x\%\geqslant 1.2$，∴$x_{\min}=20$.

9. $50<x<60$

解析：由题意知 x 应满足 $-2x^2+220x>6\ 000$，解得 $50<x<60$.

10. **解**：(1)降低税率后的税率为 $(10-x)\%$，农产品的收购量为 $a(1+2x\%)$ 万担，收购总金额为 $200a(1+2x\%)$ 万元，依题意，得 $y=200a(1+2x\%)(10-x)\%=\frac{1}{50}a(100+2x)(10-x)(0<x<10)$.

(2)原计划税收为 $200a\cdot 10\%=20a$（万元）.

依题意得 $\frac{1}{50}a(100+2x)(10-x)\geqslant 20a\times 83.2\%$.

化简，得 $x^2+40x-84\leqslant 0$，解得 $-42\leqslant x\leqslant 2$. 又∵$0<x<10$，∴$0<x\leqslant 2$. 故 x 的取值范围是 $(0,2]$.

11. **解**：(1)设大货车到第 x 年年底的运输累计收入与总支出的差为 y 万元，

则 $y=25x-[6x+x(x-1)]-50$，$(0<x\leqslant 10, x\in \mathbf{N})$，

则 $y=-x^2+20x-50$，$(0<x\leqslant 10, x\in \mathbf{N})$，

由 $-x^2+20x-50>0$，解得 $10-5\sqrt{2}<x<10+5\sqrt{2}$，

而 $2<10-5\sqrt{2}<3$，故从第三年开始运输累计收入超过总支出.

(2)因为利润＝累积收入＋销售收入－总支出，所以销售二手货车后，小张的年平均利润为 $\bar{y}=\frac{1}{x}[y+(25-x)]=\frac{1}{x}(-x^2+19x-25)=19-\left(x+\frac{25}{x}\right)$.

而 $19-\left(x+\frac{25}{x}\right)\leqslant 19-2\sqrt{x\cdot\frac{25}{x}}=9$，当且仅当 $x=5$ 时等号成立.

所以第 5 年底出售货车，年平均利润最大.

12. **解**：(1)当 $0<x<80$ 时，$L(x)=1\ 000x\times 0.05-\left(\frac{1}{3}x^2+10x\right)-250=-\frac{1}{3}x^2+40x-250$.

当 $x\geqslant 80$ 时，$L(x)=1\ 000x\times 0.05-\left(51x+\frac{10\ 000}{x}-1\ 450\right)-250=1\ 200-\left(x+\frac{10\ 000}{x}\right)$.

∴$L(x)=\begin{cases}-\frac{1}{3}x^2+40x-250, 0<x<80,\\ 1\ 200-\left(x+\frac{10\ 000}{x}\right), x\geqslant 80.\end{cases}$

(2)当 $0<x<80$ 时，$L(x)=-\frac{1}{3}x^2+40x-250$ 的对称轴为 $x=60$，

即当 $x=60$ 时，$L(x)_{最大}=950$（万元）.

当 $x\geqslant 80$ 时，

$L(x)=1\ 200-\left(x+\frac{10\ 000}{x}\right)\leqslant 1\ 200-2\sqrt{10\ 000}=1\ 000$（万元），

当且仅当 $x=100$ 时，$L(x)_{最大}=1\ 000$（万元）. 综上所述，当 $x=100$ 时，年获利润最大.

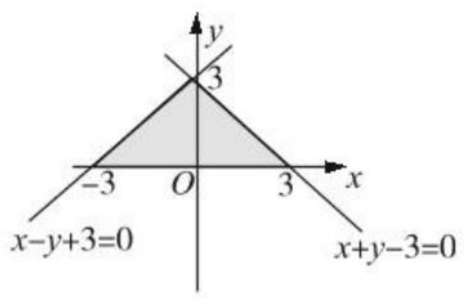
3.5 二元一次不等式(组)与简单的线性规划问题

3.5.1 二元一次不等式(组)所表示的平面区域

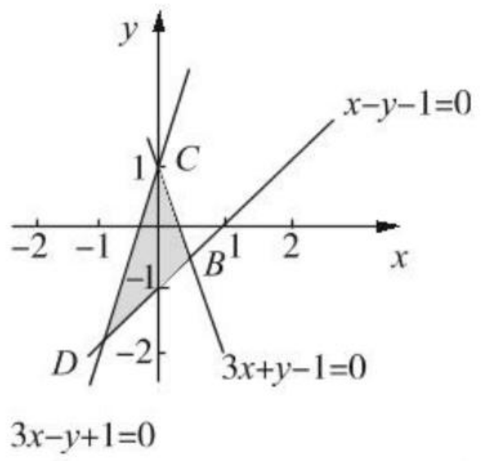
基础知识点对点

1. D 由 $y\geqslant 0$，排除 A、C；由 $x-y\geqslant 0$，排除 B，故选 D.

2. **解**：不等式组表示的平面区域如图所示：



3. B 作出不等式组对应的平面区域，如图所示.

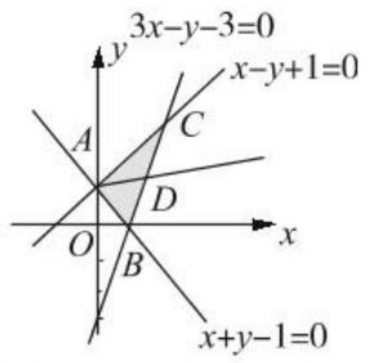


由不等式组可知 $D(-1,-2)$，$B\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)$，$C(0,1)$，

∴$S_{\triangle DBC}=\frac{1}{2}\times 2\times\left(1+\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{2}$，故选 B.

4. $\frac{1}{3}$

解析：不等式组对应的平面区域如图中的阴影部分：



直线 $y=kx+1$ 过定点 $A(0,1)$，

若点集 T 在坐标系中对应区域的面积为 $\frac{1}{2}S$，则直线 $y=kx+1$ 过 BC 的中点 D，由 $\begin{cases}x-y+1=0,\\ 3x-y-3=0,\end{cases}$ 得 $\begin{cases}x=2,\\ y=3,\end{cases}$

即 $C(2,3)$，

由 $\begin{cases}x+y-1=0,\\ 3x-y-3=0,\end{cases}$ 得 $\begin{cases}x=1,\\ y=0,\end{cases}$ 即 $B(1,0)$，

∴BC 的中点 D 为 $\left(\frac{3}{2},\frac{3}{2}\right)$ 代入 $y=kx+1$，

∴$\frac{3}{2}=\frac{3}{2}k+1$，得 $k=\frac{1}{3}$.

5. C

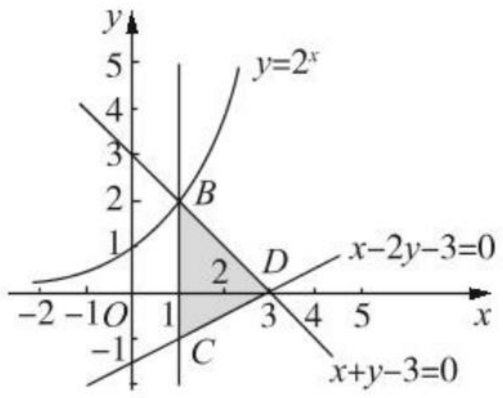
课后拔高提能练

1. C 依题意可得 $(0-a)(2-a)<0$，即 $a(a-2)<0$，解得 $0<a<2$. 故选 C.

2. A $3\times(-1)+5\times 1=2<4$，∴$(-1,1)$ 在 $3x+5y<4$ 表示的平面区域内，故选 A.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

3. C　不等式组所表示的平面区域如图所示.



曲线 $y=2^x$ 与直线 $x+y-3=0$，交于点 $B(1,2)$，当 $m\leqslant 1$ 时，曲线 $y=2^x$ 上存在点 (x,y) 满足约束条件，则实数 m 的最大值为 1. 故选 C.

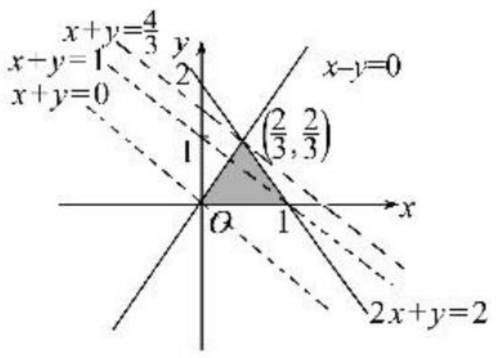
4. D　∵二次函数与 x 轴无交点，∴$\Delta=b^2-4a^2<0$，

∴$(b-2a)(b+2a)<0$，

将 $(1,0)$ 代入 $(0-2)(0+2)<0$，符合条件，排除 A、C；

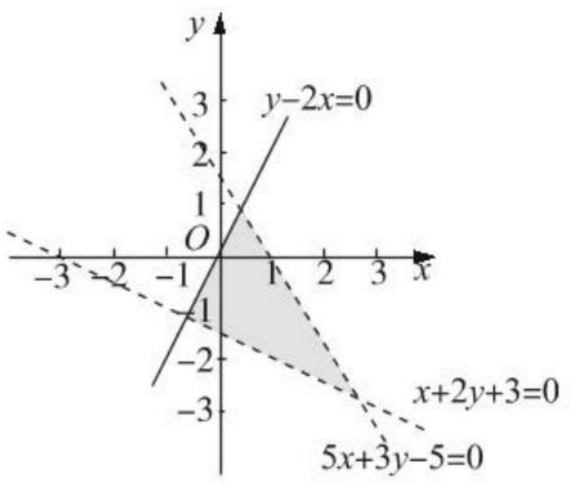
将 $(-1,0)$ 代入 $(0+2)(0-2)<0$，符合条件，排除 B；故选 D.

5. D　画可行域 $\begin{cases}x-y\geqslant 0,\\ 2x+y\leqslant 2,\\ y\geqslant 0,\end{cases}$ 再画 $x+y=a$，



使 $x+y\leqslant a$ 与上面可行域生成的新区域仍为三角形区域，则 $0<a\leqslant 1$ 或 $a\geqslant\frac{4}{3}$，故选 D.

6. C　不等式组 $\begin{cases}y-2x\leqslant 0,\\ x+2y+3>0,\\ 5x+3y-5<0\end{cases}$ 表示的平面区域如下图中阴影部分，显然，满足条件的平面区域中的整点为 $(1,-1)$、$(2,-2)$、$(0,0)$、$(0,-1)$，共有 4 个整点. 故选 C.

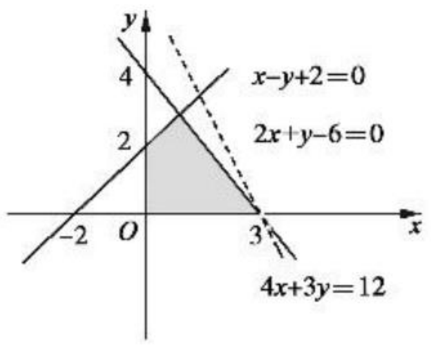


7. 1

解析：作出可行域如图中阴影部分所示.

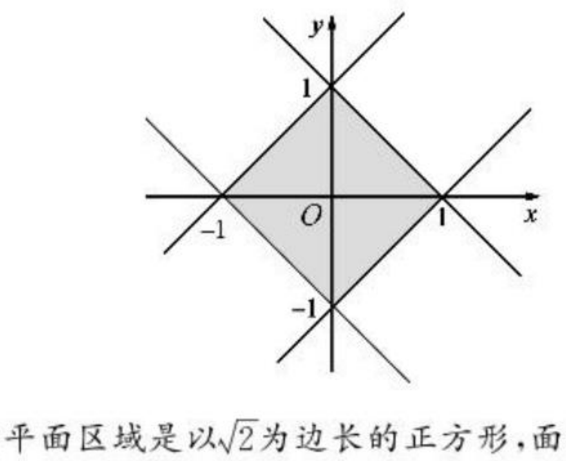
∵直线 $2x+y-6=0$ 过点 $(3,0)$，

∴直线与可行域只有 1 个公共点.



8. 2

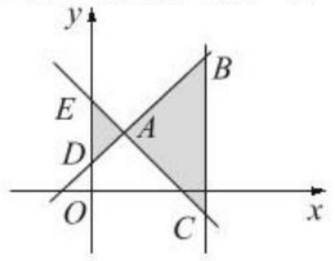
解析：点集 $\{(x,y)\mid |x|+|y|\leqslant 1\}$ 可化为 $\begin{cases}x+y\leqslant 1,\\ x-y\leqslant 1,\\ -x+y\leqslant 1,\\ -x-y\leqslant 1\end{cases}$ 围成的平面区域. 如图所示，



显然该平面区域是以 $\sqrt{2}$ 为边长的正方形，面积为 $\sqrt{2}\times\sqrt{2}=2$.

9. 3

解析：不等式组所表示的平面区域如图所示：



由 $\begin{cases}x-y+1=0,\\ x+y-3=0\end{cases}$ 得 $A(1,2)$，又 $E(0,3)$，$D(0,1)$，

∴$S=S_{\triangle ADE}+S_{\triangle ABC}=5$.

∴$\frac{1}{2}\times 2\times 1+\frac{1}{2}(a-1)(a+1-3+a)=5$.

∴$a=3$.

10. **解**：(1)不等式 $x<3$ 表示 $x=3$ 的左侧平面区域，不等式 $y\geqslant\frac{x}{2}$ 变形为 $x-2y\leqslant 0$，它表示直线 $x-2y=0$ 及左上方的平面区域，不等式 $3x+2y\geqslant 6$，即 $3x+2y-6\geqslant 0$ 表示直线 $3x+2y-6=0$ 及右上方的平面区域，不等式 $3y<x+9$，即 $x-3y+9>0$ 表示直线 $x-3y+9=0$ 右下方的平面区域. 因此，可得此不等式组所表示的平面区域如下图 1 所示.

(2)原不等式等价于两个不等式组：

$\begin{cases}x+2y+1>0,\\ x-y+4<0\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x+2y+1<0,\\ x-y+4>0.\end{cases}$

在平面坐标系中画出直线 $x+2y+1=0$ 与直线 $x-y+4=0$（虚线），取 $(0,0)$ 点判断.

不等式 $x+2y+1>0$ 表示直线 $x+2y+1=0$ 的右上方的点的集合，$x+2y+1<0$ 表示直线 $x+2y+1=0$ 的左下方区域；$x-y+4<0$ 表示直线 $x-y+4=0$ 左上方区域，$x-y+4>0$ 表示直线 $x-y+4=0$ 右下方区域. 由此可得原不等式表示的平面区域如下图 2.

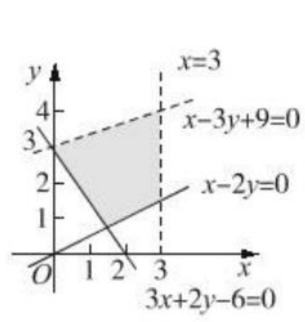


图1

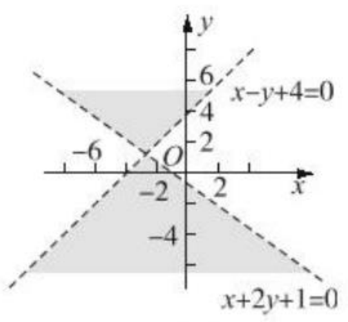


图2

11. **解**：由两点式得直线 AB，BC，CA 的方程并化简为：

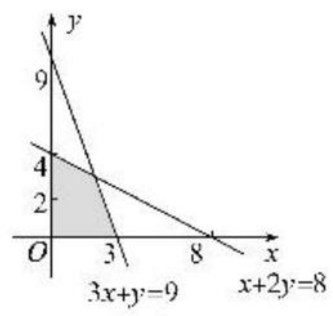
直线 AB：$x+2y-2=0$，直线 BC：$x-y+4=0$，直线 CA：$5x-2y+2=0$.

∴原点 $(0,0)$ 不在各直线上，将原点坐标代入到各直线方程左端，结合式子的符号可得不等式组为

$\begin{cases}x+2y-2\geqslant 0,\\ x-y+4\geqslant 0,\\ 5x-2y+2\leqslant 0.\end{cases}$

12. **解**：设家具厂每天生产甲、乙型桌子的张数分别为 x 和 y，它们满足的数学关系式为：

$\begin{cases}x+2y\leqslant 8,\\ 3x+y\leqslant 9,\\ x\geqslant 0,x\in\mathbf{N},\\ y\geqslant 0,y\in\mathbf{N}.\end{cases}$ 分别画出不等式组中各不等式表示的区域，然后取交集，如图所示.

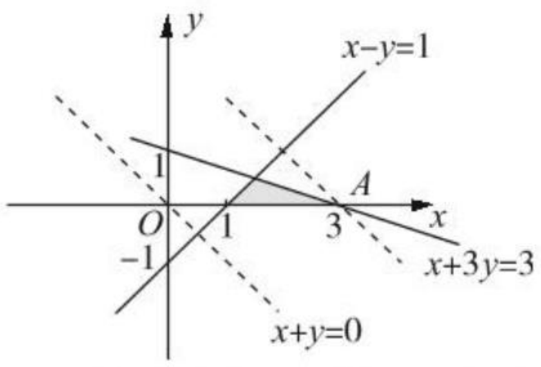


关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

3.5.2 简单线性规划

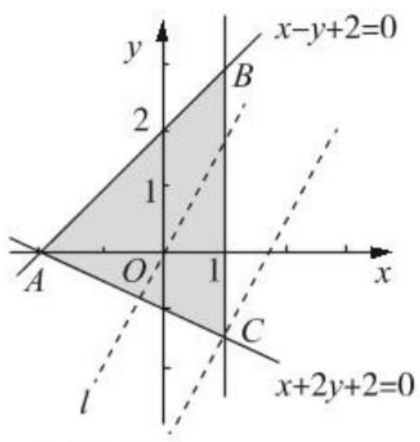
基础知识点对点

1. D　作出约束条件表示的可行域如图：



平移直线 $x+y=0$，可得目标函数 $z=x+y$ 在 $A(3,0)$ 处取得最大值，$z_{max}=3$，故选 D.

2. D　不等式组所表示的平面区域如图所示，

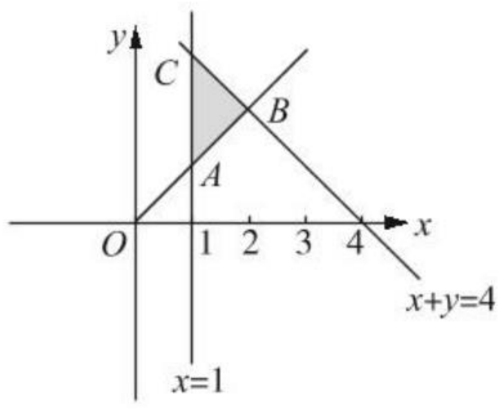


当 l 过 C 点时，z 有最大值，

由 $\begin{cases}x=1,\\x+2y+2=0,\end{cases}$ 得 $C\left(1,-\frac{3}{2}\right)$.

$\therefore z_{max}=3\times1-2\times\left(-\frac{3}{2}\right)=6$. 故选 D.

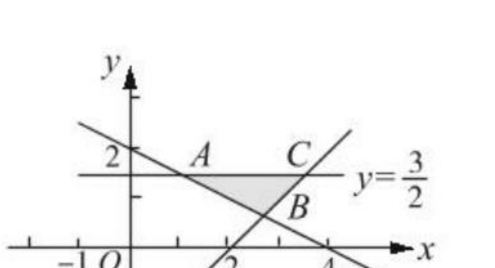
3. C　不等式组所表示的平面区域如图所示.



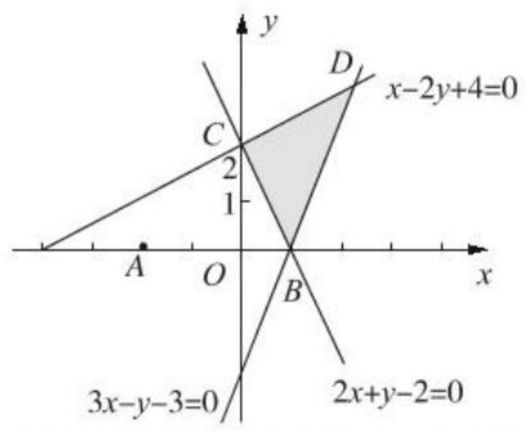
由不等式组可得 $A(1,1)$，$B(2,2)$，$C(1,3)$. $1^2+1^2=2$，$2^2+2^2=8$，$1^2+3^2=10$. $\therefore x^2+y^2$ 的最大值为 10，故选 C.

4. $\frac{3}{2}$

解析：画出不等式组表示的平面区域，如图中阴影部分，由图形易知点 $A\left(1,\frac{3}{2}\right)$ 与原点连线的斜率最大，且最大值为 $\frac{3}{2}$.

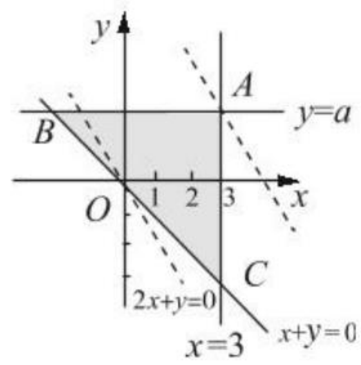


5. D　不等式组所表示的平面区域如图所示，



由不等式组可知 $|AM|$ 的最小值为 A 到直线 $2x+y-2=0$ 的距离. $\therefore |AM|_{min}=\frac{|-4+0-2|}{\sqrt{4+1}}=\frac{6\sqrt{5}}{5}$. 故选 D.

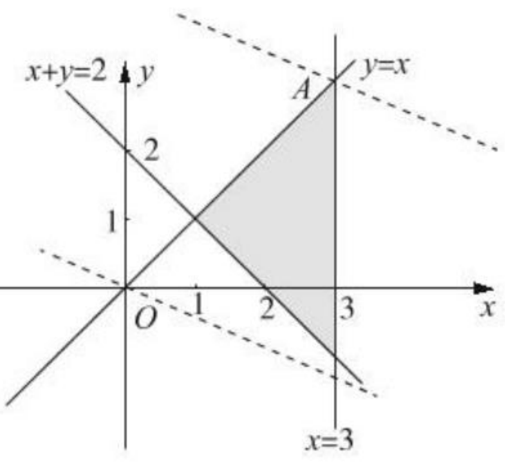
6. C　不等式组所表示的平面区域如图所示：



当直线 $z=2x+y$ 过 A 点时有最大值，$A(3,a)$，$\therefore 6+a=10$，$a=4$. 故选 C.

课后拔高提能练

1. D　作出不等式组表示的平面区域，如图中阴影部分.



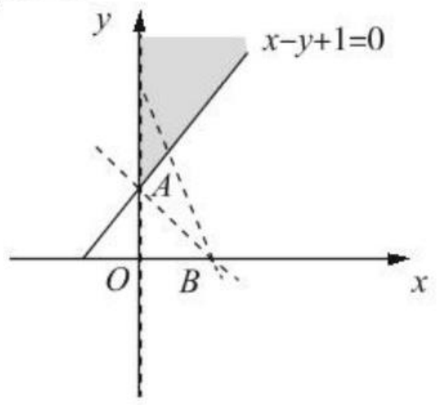
令 $z=x+2y$，

当 $z=x+2y$ 过 A 点时，z 取最大值.

由 $\begin{cases}x=3,\\y=x\end{cases}$ 得 $A(3,3)$，

$\therefore z$ 的最大值为 $3+2\times3=9$. 故选 D.

2. B　不等式组 $\begin{cases}x-y+1\leqslant0,\\x>0\end{cases}$ 所表示的平面区域如图所示.



$\therefore \frac{y}{x-1}$ 表示点 (x,y) 与 $B(1,0)$ 连线的斜率，

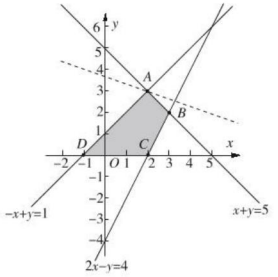
其中 $A(0,1)$，

$\therefore k_{AB}=\frac{1}{-1}=-1$，

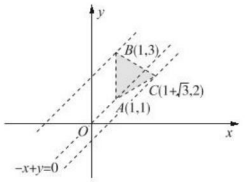
$\therefore \frac{y}{x-1}$ 的取值范围 $(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$，故选 B.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

3. C　绘制不等式组表示的平面区域如图所示，结合目标函数的几何意义可知目标函数在点 A 处取得最大值，联立直线方程 $\begin{cases}x+y=5,\\-x+y=1,\end{cases}$ 可得点 A 的坐标为 $A(2,3)$，据此可知目标函数的最大值为 $z_{\max}=3x+5y=3\times2+5\times3=21$. 故选 C.

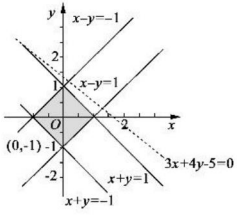


4. A　如图，

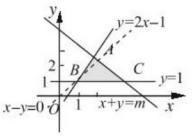


根据题意得 $C(1+\sqrt{3},2)$.
作直线 $-x+y=0$，并向左上或右下平移，过点 $B(1,3)$ 和 $C(1+\sqrt{3},2)$ 时，$z=-x+y$ 取最大值和最小值，即 $-(1+\sqrt{3})+2<z<-1+3$，$\therefore z=-x+y$ 的取值范围是 $(1-\sqrt{3},2)$，故选 A.

5. D　如图为不等式组表示的平面区域，$z=|3x+4y-5|=\dfrac{|3x+4y-5|}{5}\times5$，其几何意义为平面区域内的点到直线 $3x+4y-5=0$ 的距离的 5 倍，显然点 $(0,-1)$ 到直线 $3x+4y-5=0$ 的距离最大，此时 $z_{\max}=9$，故选 D.



6. B　不等式组所表示的平面区域如图所示：



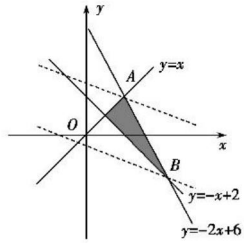
由图可知，当直线 $z=x-y$ 过 A 点时，z 有最小值 $\begin{cases}x+y=m,\\y=2x-1,\end{cases}\therefore\begin{cases}x=\dfrac{m+1}{3},\\y=\dfrac{2m-1}{3},\end{cases}$

$\therefore-1=\dfrac{m+1}{3}-\dfrac{2m-1}{3}$，

$\therefore m=5$，故选 B.

7. -2　8

解析：作可行域，如图中阴影部分所示，则直线 $z=x+3y$ 过点 $A(2,2)$ 时 z 取最大值 8，过点 $B(4,-2)$ 时 z 取最小值 -2.



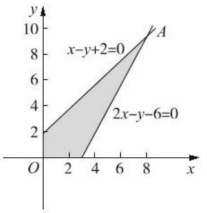
8. $\left(-\dfrac{12}{5},-\dfrac{3}{10}\right)$

解析：$k_{BC}=\dfrac{1-\frac{4}{5}}{0-\frac{2}{3}}=-\dfrac{3}{10}$，$k_{AC}=\dfrac{\frac{4}{5}-0}{\frac{2}{3}-1}=-\dfrac{12}{5}$.

则 $k_{AC}<a<k_{BC}$，即 $-\dfrac{12}{5}<a<-\dfrac{3}{10}$.

9. $\dfrac{9}{4}$

解析：不等式组所表示的平面区域如图所示：



由 $\begin{cases}x-y+2=0,\\2x-y-6=0,\end{cases}$ 得 $A(8,10)$，

$\because a>0,b>0$，$\therefore$ 当直线 $z=ax+by$ 过 A 点时，z 有最大值，

$\therefore 8a+10b=40$，

即 $4a+5b=20$，

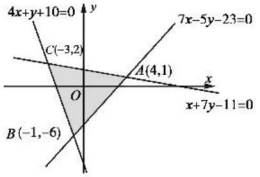
$\therefore\dfrac{5}{a}+\dfrac{1}{b}=\left(\dfrac{5}{a}+\dfrac{1}{b}\right)\dfrac{(4a+5b)}{20}=$

$\dfrac{1}{20}\left(20+5+\dfrac{25b}{a}+\dfrac{4a}{b}\right)\geqslant\dfrac{9}{4}$.

当且仅当 $b=\dfrac{2}{5}a$ 时，等号成立.

$\therefore\dfrac{5}{a}+\dfrac{1}{b}$ 的最小值为 $\dfrac{9}{4}$，

10. **解**：作出可行域：



关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

(1)设 $z=4x-3y$,则 $y=\frac{4}{3}x-\frac{z}{3}$,

当直线 $y=\frac{4}{3}x-\frac{z}{3}$ 经过点 C 时,$z_{min}=-18$;

当直线经过 B 时,$z_{max}=14$.

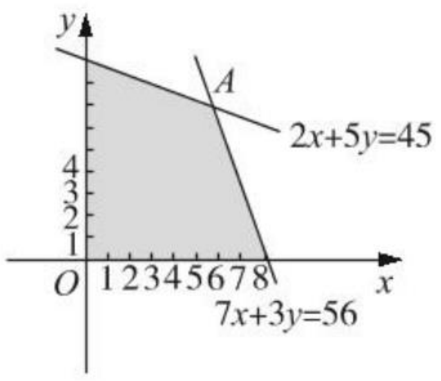
(2)$x^2+y^2=\left(\sqrt{(x-0)^2+(y-0)^2}\right)^2$,

令 $z=\sqrt{(x-0)^2+(y-0)^2}$,则 z 表示可行域内的点到原点的距离,由图可知,$z_{max}=\sqrt{37}$,此时 $x=-1$,$y=-6$;$z_{min}=0$,此时 $x=0$,$y=0$.

则 x^2+y^2 的最大值为 37,最小值为 0.

11. **解**:设每天生产甲种产品 x 吨,乙种产品 y 吨,

则 $\begin{cases}7x+3y\leqslant 56,\\2x+5y\leqslant 45,\\x\geqslant 0,y\geqslant 0.\end{cases}$



目标函数 $z=8x+11y$,作出线性约束条件所表示的平面区域,可求得当 $x=5$,$y=7$ 时,z 取最大值 117 万元.

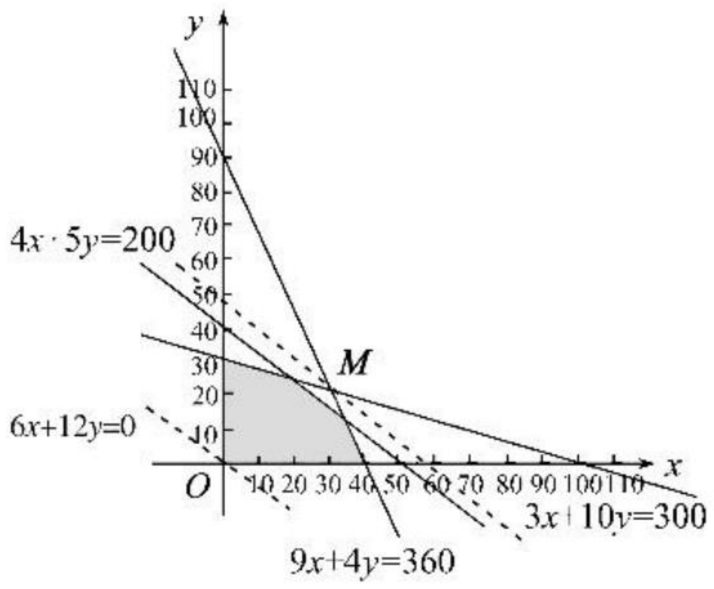
所以,每天生产甲种产品 5 吨,乙种产品 7 吨,日产值到达最大值 117 万元.

12. **解**:设此工厂应分别生产甲、乙两种产品 x 吨、y 吨.获得利润 z 万元.

依题意可得约束条件 $\begin{cases}9x+4y\leqslant 360,\\4x+5y\leqslant 200,\\3x+10y\leqslant 300,\\x\geqslant 0,\\y\geqslant 0.\end{cases}$

利润目标函数 $z=6x+12y$.

如图,作出可行域,作直线 $l:6x+12y=0$,把直线 l 向右上方平移至 l_1 位置,直线经过可行域上的点 M,且与原点距离最大,此时 $z=6x+12y$ 取得最大值.



解方程组 $\begin{cases}3x+10y=300,\\4x+5y=200,\end{cases}$ 得 $M(20,24)$.

所以生产甲种产品 20 t,乙种产品 24 t,才能使此工厂获得最大利润.

章末检测

1. D $M=\{x|x^2+3x+2>0\}=\{x|x>-1$ 或 $x<-2\}$,

$N=\left\{x\left|\left(\frac{1}{2}\right)^x\leqslant 4\right.\right\}=\{x|x\geqslant -2\}$,

$\therefore M\cup N=\mathbf{R}$,故选 D.

2. A

3. A 令 $t=x^2-4x=(x-2)^2-4$,

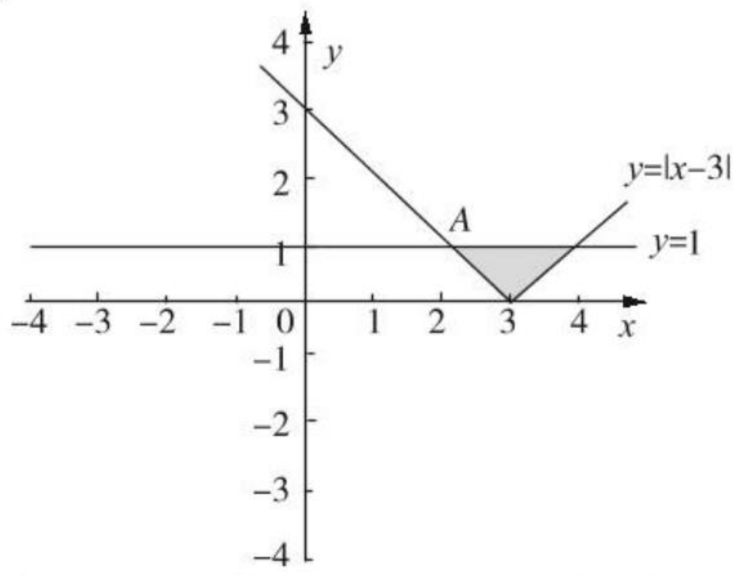
当 $x\in(0,1]$ 时,$t\in[-3,0)$,

若 $x^2-4x\geqslant m$ 对任意 $x\in(0,1]$ 恒成立,

则 $m\leqslant t_{min}$,即 $m\leqslant -3$,故选 A.

4. C $\because a<b<0$,$\therefore a^2-b^2=(a+b)(a-b)>0$,故④不正确;其他三个均正确.故选 C.

5. A 解法一:$|x-3|\leqslant y\leqslant 1\Leftrightarrow\begin{cases}y\geqslant|x-3|,\\y\leqslant 1,\end{cases}$ 其图形如图所示,



$z=\frac{2x+y}{x+y}\Rightarrow y=\frac{z-2}{1-z}x$,由图形知 $0\leqslant\frac{z-2}{1-z}\leqslant\frac{1}{2}$,

$\therefore 2\geqslant z\geqslant\frac{5}{3}$,故选 A.

解法二:$z=\frac{x+y+x}{x+y}=1+\frac{x}{x+y}=1+\frac{1}{1+\frac{y}{x}}$,求 z 最小值即 $\frac{y}{x}$ 最大时,当过 $A(2,1)$ 时,最大为 $\frac{1}{2}$,此时 z 最小为 $\frac{5}{3}$.

6. C 解法一:由 $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=1$ 可得

$b=\frac{a}{a-1}>0$,$\therefore a>1$,

$\therefore\frac{1}{a-1}+\frac{9}{b-1}=\frac{1}{a-1}+9(a-1)\geqslant 6$,

当且仅当 $a=\frac{4}{3}$,$b=4$ 时等号成立,故选 C.

解法二:由 $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=1$,可得

$a+b=ab$,

$\therefore(a-1)(b-1)=1$,

$\therefore\frac{1}{a-1}+\frac{9}{b-1}\geqslant 2\sqrt{\frac{1}{a-1}\cdot\frac{9}{b-1}}=6$.

当且仅当 $\frac{1}{a-1}=\frac{9}{b-1}$ 时,等号成立.

解法三:由 $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=1$,可设 $\frac{1}{a}=\cos^2\theta$,$\frac{1}{b}=\sin^2\theta$,$\therefore a=\frac{1}{\cos^2\theta}$,$b=\frac{1}{\sin^2\theta}$,

$\therefore\frac{1}{a-1}+\frac{1}{b-1}=\frac{1}{\frac{1}{\cos^2\theta}-1}$

$=\frac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta}+\frac{9\sin^2\theta}{\cos^2\theta}\geqslant 6$.

当且仅当 $\cos^2\theta=3\sin^2\theta$ 时,等号成立,故选 C.

7. A $\because a>1$,$b>1$,$ab-(a+b)=1$,

$\therefore a+b+1=ab\leqslant\left(\frac{a+b}{2}\right)^2$,

$\therefore a+b\geqslant 2\sqrt{2}+2$,

$\therefore a+b$ 有最小值 $2\sqrt{2}+2$,故选 A.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

8. C　若不等式 $f(x)>0$ 的解集是 $(-1,3)$，

$f(x)=a\left(x-\frac{1}{a}\right)(x-b)=a(x+1)(x-3)$，且 $a<0$，

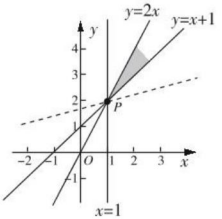
$\therefore f(-x)=a(-x+1)(-x-3)=a(x-1)(x+3)$，

$\therefore f(-x)<0$ 的解集为 $(-\infty,-3)\cup(1,+\infty)$，故选 C.

9. 3

解析：不等式可转化为 $\begin{cases}y\geqslant x+1,\\ y\leqslant 2x,\\ x+1\leqslant 2x,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}y\geqslant x+1,\\ y\leqslant 2x,\\ x\geqslant 1,\end{cases}$

$\therefore$ 满足条件的 x,y 在平面直角坐标系中的可行域如图所示：



令 $2y-x=z$，$y=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}z$，由图象可知，当 $2y-x=z$ 过点 $P(1,2)$ 时，z 取最小值，此时 $z_{\min}=2\times 2-1=3$，

$\therefore 2y-x$ 的最小值为 3.

10. 9

解析：由题意可知，$S_{\triangle ABC}=S_{\triangle ABD}+S_{\triangle BCD}$，由角平分线性质和三角形面积公式得 $\frac{1}{2}ac\sin 120^\circ=\frac{1}{2}\cdot a\times 1\times\sin 60^\circ+\frac{1}{2}c\times 1\times\sin 60^\circ$，化简得 $ac=a+c$，即 $\frac{1}{a}+\frac{1}{c}=1$，因此 $4a+c=(4a+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{c}\right)=5+\frac{c}{a}+\frac{4a}{c}\geqslant 5+2\sqrt{\frac{c}{a}\cdot\frac{4a}{c}}=9$，当且仅当 $c=2a=3$ 时取等号，则 $4a+c$ 的最小值为 9.

11. 40

解析：利润 $L=p\times q-C=\left(25-\frac{1}{16}q\right)q-100-4q=-\frac{1}{16}q^2+21q-100(0<q\leqslant 400)$，

每件产品的平均利润 $f(q)=21-\left(\frac{1}{16}q+\frac{100}{q}\right)$，

$\because\frac{1}{16}q+\frac{100}{q}\geqslant 5$，$\therefore f(q)\leqslant 16$，当且仅当 $q=40$ 时，每件产品的平均利润最大.

12. **解**：当 $a=0$ 时，不等式化为 $-2x<0$，$\therefore x>0$，

当 $a\neq 0$ 时，由 $\Delta=4-4a^2\leqslant 0$，

得 $a\geqslant 1$ 或 $a\leqslant -1$，

当 $a\geqslant 1$ 时，不等式 $ax^2-2x+a<0$ 无解，

当 $a<-1$ 时，不等式 $ax^2-2x+a<0$ 的解集为 $\mathbf{R}$，

当 $a=-1$ 时，不等式 $ax^2-2x+a<0$ 的解集为 $\{x|x\neq -1\}$.

由 $\Delta=4-4a^2>0$ 时，得 $-1<a<1$，且 $a\neq 0$，

$\therefore$ 当 $0<a<1$ 时，不等式的解集为 $\frac{1-\sqrt{1-a^2}}{a}<x<\frac{1+\sqrt{1-a^2}}{a}$，

当 $-1<a<0$ 时，不等式的解集为 $x<\frac{1+\sqrt{1-a^2}}{a}$ 或 $x>\frac{1-\sqrt{1-a^2}}{a}$.

综上，当 $a<-1$ 时，不等式的解集为 $\mathbf{R}$；

当 $a=-1$ 时，不等式的解集为 $\{x|x\neq -1\}$；

当 $-1<a<0$ 时，不等式的解集为 $\left\{x\middle|x<\frac{1+\sqrt{1-a^2}}{a}\text{或}x>\frac{1-\sqrt{1-a^2}}{a}\right\}$；

当 $a=0$ 时，不等式的解集为 $\{x|x>0\}$；

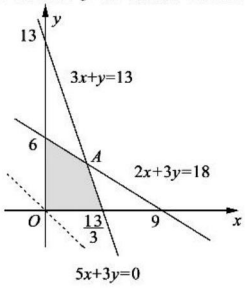
当 $0<a<1$ 时，不等式的解集为 $\left\{x\middle|\frac{1-\sqrt{1-a^2}}{a}<x<\frac{1+\sqrt{1-a^2}}{a}\right\}$；

当 $a\geqslant 1$ 时，不等式无解.

13. **解**：设生产甲种肥料 x 吨，乙种肥料 y 吨，利润为 z 万元，由题意可得

$\begin{cases}3x+y\leqslant 13,\\ 2x+3y\leqslant 18,\\ x\geqslant 0,\\ y\geqslant 0,\end{cases}$

目标函数为 $z=5x+3y$，作出如图所示的可行域（阴影部分）.



当直线 $5x+3y=z$ 经过 $A(3,4)$ 时，z 取得最大值，$\therefore z_{\max}=5\times 3+3\times 4=27$. $\therefore$ 该企业的最大利润为 27 万元.

14. **解**：(1)设需要修建 k 个增压站，

则 $(k+1)x=240$，则 $k=\frac{240}{x}-1$.

所以 $y=400k+(k+1)(x^2+x)=400\left(\frac{240}{x}-1\right)+\frac{240}{x}(x^2+x)=\frac{96\,000}{x}+240x-160$.

因为 x 表示相邻两增压站之间的距离，则 $0<x<240$.

故 y 与 x 的函数关系是 $y=\frac{96\,000}{x}+240x-160(0<x<240)$.

(2)$y=\frac{96\,000}{x}+240x-160\geqslant 2\sqrt{\frac{96\,000}{x}\cdot 240x}-160=2\times 4\,800-160=9\,440$，

当且仅当 $\frac{96\,000}{x}=240x$，即 $x=20$ 时等号成立，

此时 $k=\frac{240}{x}-1=\frac{240}{20}-1=11$.

故需要修建 11 个增压站才能使 y 最小，其最小值为 9 440 万元.

模块检测

1. B　$\because c<b<a$，$\therefore$ 角 C 最小，且 $C\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，

又 $\because\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\frac{4+3-1}{2\times 2\times\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，

$\therefore C=\frac{\pi}{6}$，故选 B.

2. D　若 $\{x|2<x<3\}$ 为 $x^2+ax+b<0$ 的解集，

则 $\begin{cases}2+3=-a,\\ 2\times 3=b,\end{cases}\therefore\begin{cases}a=-5,\\ b=6,\end{cases}$

$\therefore bx^2+ax+1>0$ 为 $6x^2-5x+1>0$，

$\therefore$ 解集为 $\left\{x\middle|x<\frac{1}{3}\text{或}x>\frac{1}{2}\right\}$，故选 D.

3. C　$a_8\cdot a_{11}=a_9\cdot a_{10}=a_7\cdot a_{12}=5$，$\therefore a_8\cdot a_9\cdot a_{10}\cdot a_{11}=25$，故选 C.

4. C　由已知条件得 $\angle A=180^\circ-(\angle B+\angle C)=45^\circ$，由正弦定理，得 $b=\frac{a\sin B}{\sin 45^\circ}=4\sqrt{6}$. 故选 C.

5. A　$\because 4a+b=30$，$\therefore\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{30}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)(4a+b)=\frac{1}{30}\left(5+\frac{4a}{b}+\frac{b}{a}\right)\geqslant\frac{1}{30}(5+4)=\frac{3}{10}$.

当且仅当 $\begin{cases}\frac{4a}{b}=\frac{b}{a},\\ 4a+b=30,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}a=5,\\ b=10\end{cases}$ 时取等号. 故选 A.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

6. B $S_{13}=\frac{13(a_1+a_{13})}{2}=13a_7>0$，$\therefore a_7>0$，

$S_{14}=\frac{14(a_1+a_{14})}{2}=7(a_7+a_8)<0$，

$\therefore a_8<0$，$\therefore a_7\cdot a_8<0$，故 $k=7$. 故选 B.

7. A 不等式可化为 $m^2-m<\frac{2^x+1}{4^x}$，设 $\left(\frac{1}{2}\right)^x=t$，

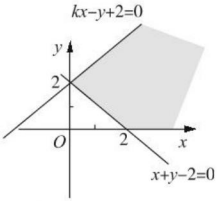
$\because x\leqslant -1$，$\therefore t\geqslant 2$.

$\therefore \frac{2^x+1}{4^x}=t^2+t=\left(t+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}\geqslant 6$.

$\therefore m^2-m<6$，

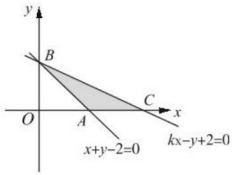
解得 $-2<m<3$. 故选 A.

8. D 当 $k>0$ 时，不等式组表示平面区域如图所示，



$z=y-x$ 没有最小值，

当 $k<0$ 时，不等式组表示平面区域如图所示，



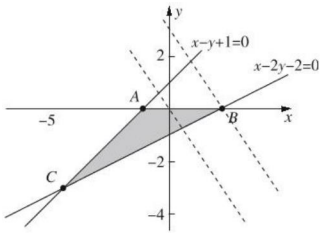
当直线 $z=y-x$ 过 C 点时，z 有最小值.

又 $C\left(-\frac{2}{k},0\right)$，

$\therefore z=0+\frac{2}{k}=-4$，$\therefore k=-\frac{1}{2}$. 故选 D.

9. 6

解析：根据题中所给的约束条件，画出其对应的可行域，如图所示：



由 $z=3x+2y$ 可得 $y=-\frac{3}{2}x+\frac{1}{2}z$，画出直线 $y=-\frac{3}{2}x$，将其上下移动，结合 $\frac{z}{2}$ 的几何意义，可知当直线过点 B 时，z 取得最大值，

由 $\begin{cases}x-2y-2=0,\\ y=0,\end{cases}$ 解得 $B(2,0)$，此时 $z_{\max}=3\times 2+0=6$.

10. 50

解析：由等比数列的性质得 $a_{10}a_{11}+a_9a_{12}=2a_{10}a_{11}=2e^5$，

$\therefore a_{10}a_{11}=e^5$.

$\therefore \ln a_1+\ln a_2+\cdots+\ln a_{20}=\ln(a_1a_2\cdots a_{20})=\ln[(a_1a_{20})(a_2a_{19})\cdots(a_{10}a_{11})]=\ln(a_{10}a_{11})^{10}=10\ln(a_{10}a_{11})=10\ln e^5=50\ln e=50$.

11. ①②④

解析：①中 $(a_{99}-1)(a_{100}-1)<0$，$a_1>1$，$a_{99}a_{100}>1\Rightarrow a_{99}>1$，$0<a_{100}<1\Rightarrow q=\frac{a_{100}}{a_{99}}\in(0,1)$，$\therefore$ ①正确；

②中 $a_{99}a_{101}=a_{100}^2<a_{100}<1\Rightarrow a_{99}a_{101}<1$，$\therefore$ ②正确；

③中 $T_{100}=T_{99}\cdot a_{100}$，$0<a_{100}<1\Rightarrow T_{100}<T_{99}$，$\therefore$ ③错误；

④中 $T_{198}=a_1\cdot a_2\cdot\cdots\cdot a_{198}=(a_1\cdot a_{198})(a_2\cdot a_{197})\cdot\cdots\cdot(a_{99}\cdot a_{100})=(a_{99}\cdot a_{100})^{99}>1$，$T_{199}=a_1\cdot a_2\cdot\cdots\cdot a_{199}=(a_1\cdot a_{199})(a_2\cdot a_{198})\cdot\cdots\cdot(a_{99}\cdot a_{101})a_{100}<1=a_{100}^{199}$，$\therefore$ ④正确.

12. **解**：(1)在 $\triangle ABD$ 中，$\cos B=\frac{2\sqrt{7}}{7}$，$B\in(0,\pi)$，

$\therefore \sin B=\frac{\sqrt{21}}{7}$，

$\therefore \sin\angle BAD=\sin(\angle B+\angle ADB)=\frac{\sqrt{21}}{7}\times\left(-\frac{1}{2}\right)+\frac{2\sqrt{7}}{7}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{21}}{14}$.

(2)由正弦定理 $\frac{AD}{\sin B}=\frac{BD}{\sin\angle BAD}$ 得，

$\therefore AD=\frac{BD\cdot\sin B}{\sin\angle BAD}=\frac{1\times\frac{\sqrt{21}}{7}}{\frac{\sqrt{21}}{14}}=2$.

$\because AE=\frac{3}{2}$，E 为 AC 的中点，$\therefore AC=3$.

在 $\triangle ACD$ 中，$AC^2=AD^2+DC^2-2AD\cdot CD\cdot\cos\angle ADC$，

即 $9=4+DC^2-2\times 2\times CD\times\frac{1}{2}$，

$\therefore CD=1+\sqrt{6}$ 或 $CD=1-\sqrt{6}$(舍).

$\therefore AD=2$，$CD=1+\sqrt{6}$.

13. **解**：(1)$\because a=2$，$\therefore f(x)=x+\frac{2}{x+1}=x+1+\frac{2}{x+1}-1$.

$\because x\in[0,+\infty)$，$\therefore x+1>0$，$\frac{2}{x+1}>0$.

$\therefore f(x)\geqslant 2\sqrt{2}-1$. 当且仅当 $x+1=\frac{2}{x+1}$，即 $x=\sqrt{2}-1$ 时，$f(x)$ 取最小值，最小值为 $2\sqrt{2}-1$.

(2)$f(x)=x+\frac{a}{x+1}$，

(此时再利用(1)的方法，等号取不到，应用单调求解)

设 $x_1>x_2\geqslant 0$，则 $f(x_1)-f(x_2)=x_1+\frac{a}{x_1+1}-x_2-\frac{a}{x_2+1}=(x_1-x_2)\left[1-\frac{a}{(x_1+1)(x_2+1)}\right]$.

$\because x_1>x_2\geqslant 0$，$\therefore x_1-x_2>0$，$x_1+1>1$，$x_2+1\geqslant 1$，

$\therefore (x_1+1)(x_2+1)>1$. 又 $0<a<1$，

$\therefore \frac{a}{(x_1+1)(x_2+1)}<1$. $\therefore f(x_1)-f(x_2)>0$，

即 $f(x_1)>f(x_2)$. $\therefore f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调递增，

$\therefore f(x)_{\min}=f(0)=a$.

14. **解**：(1)设等比数列的公比为 q，且 $q>0$，

$\because a_2\cdot a_4=a_3^2$，$\therefore a_3=8$，

由 $a_1+a_2+a_3=14$，

得 $\begin{cases}a_1q^2+a_1q++a_1=14,\\ a_1q^2=8,\end{cases}$

解得 $q=2$，$a_1=2$，

$\therefore a_n=2^n$.

(2)$b_n=(2n-1)a_n=(2n-1)\times 2^n$，

$\therefore T_n=b_1+b_2+\cdots+b_n$

$=1\times 2^1+3\cdot 2^2+\cdots+(2n-1)\times 2^n$，①

$2T_n=1\times 2^2+3\times 2^3+\cdots+(2n-1)\times 2^{n+1}$，②

①－②得

$-T_n=2+2(2^2+\cdots+2^n)-(2n-1)2^{n+1}=2^{n+2}-6-(2n-1)\times 2^{n+1}=(3-2n)\times 2^{n+1}-6$，

$\therefore T_n=(2n-3)\times 2^{n+1}+6$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

第二部分　阶段检测

阶段测试一

1. A　由正弦定理$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}$得，

$\sin B=\frac{b\sin A}{a}=\frac{\sqrt{6}\times\frac{\sqrt{3}}{2}}{3}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，∵$b<a$，∴$B$为锐角，

∴$B=45°$. 故选 A.

2. B　$S=\frac{1}{2}AB\cdot BC\cdot\sin B=\frac{1}{2}$，∴$\sin B=\frac{\sqrt{2}}{2}$，

若B为锐角，则$B=45°$，∴$AC^2=AB^2+BC^2-2AB\cdot BC\cdot\cos B=1$，$AC=1$，此时，$\triangle ABC$为直角三角形，不符合题意，若$B$为钝角，则$B=135°$，∴$AC^2=AB^2+AC^2-2AB\cdot BC\cdot\cos B=5$. ∴$AC=\sqrt{5}$. 故选 B.

3. B　由正弦定理可得$a\cdot\frac{a}{2R}+c\cdot\frac{c}{2R}-\sqrt{2}a\cdot\frac{c}{2R}=b\cdot\frac{b}{2R}$，

∴$a^2+c^2-\sqrt{2}ac=b^2$，又$\cos B=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=\frac{\sqrt{2}ac}{2ac}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，

$B\in(0,\pi)$，∴$B=\frac{\pi}{4}$. 故选 B.

4. A　由正弦定理得$\sin B=2\sin A\sin B$，又在锐角$\triangle ABC$中，

$\sin B\neq0$，∴$2\sin A=1$，$\sin A=\frac{1}{2}$，∴$A=30°$. 故选 A.

5. C　解法一：$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$，

∵$a^2<b^2+c^2$，$a>b>c$，$\cos A<\frac{a^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{c}{2b}<\frac{b}{2b}=\frac{1}{2}$，∴$\cos A>0$，且$\cos A<\frac{1}{2}$.

∴$\angle A$的范围为$\left(\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{2}\right)$，故选 C.

解法二：∵$a>b>c$，∴a为最长边，$\angle A>\frac{\pi}{3}$.

又$a^2<b^2+c^2$，∴$\angle A<\frac{\pi}{2}$. ∴$\frac{\pi}{3}<\angle A<\frac{\pi}{2}$. 故选 C.

6. B　由$b\sin A=\sqrt{3}a\cos B$及正弦定理，得$\sin B\sin A=\sqrt{3}\sin A\cos B$，∵$\sin A\neq0$，∴$\sin B=\sqrt{3}\cos B$，∴$\tan B=\sqrt{3}$，

∵$B\in(0,\pi)$，∴$B=\frac{\pi}{3}$，故选 B.

7. A　∵$C=2B$，∴$\sin C=\sin2B=2\sin B\cos B$. 又∵$8b=5c$，$\frac{c}{\sin C}=\frac{b}{\sin B}$，∴$\frac{c}{b}=\frac{\sin C}{\sin B}=\frac{8}{5}$. ∴$\cos B=\frac{\sin C}{2\sin B}=\frac{1}{2}\times\frac{8}{5}=\frac{4}{5}$.

∴$\cos C=\cos2B=2\cos^2B-1=2\times\left(\frac{4}{5}\right)^2-1=\frac{7}{25}$. 故选 A.

8. C　$a:b:c=\sin A:\sin B:\sin C=\frac{1}{2}:\frac{\sqrt{3}}{2}:1=1:\sqrt{3}:2$，故选 C.

9. A　由正弦定理可得

$2R\sin A\sin B\cos C+2R\sin C\sin B\cos A=\frac{1}{2}\cdot2R\sin B$，

∴$(\sin A\cos C+\sin C\cos A)\sin B=\frac{1}{2}\sin B$，

∴$\sin(A+C)\sin B=\frac{1}{2}\sin B$. 即$\sin^2B=\frac{1}{2}\sin B$.

∵在$\triangle ABC$中，$\sin B\neq0$，∴$\sin B=\frac{1}{2}$，

又$a>b$，∴B为锐角，∴$B=\frac{\pi}{6}$. 故选 A.

10. D　$\angle CBA=180°-\angle ACB-\angle CAB=180°-45°-105°=30°$，∴$\frac{AB}{\sin\angle BCA}=\frac{AC}{\sin\angle CBA}$，∴$AB=\frac{AC\cdot\sin\angle BCA}{\sin\angle CBA}=\frac{50\times\sin45°}{\sin30°}=50\sqrt{2}$ m. 故选 D.

11. A　由正弦定理可得，$\frac{a}{b}=\frac{\sin A}{\sin B}=\frac{\sin2B}{\sin B}=2\cos B$.

又$\triangle ABC$是锐角三角形，∴$\begin{cases}0<A=2B<\frac{\pi}{2},\\0<B<\frac{\pi}{2},\\0<\pi-A-B<\frac{\pi}{2},\end{cases}$

∴$\frac{\pi}{6}<B<\frac{\pi}{4}$，∴$\sqrt{2}<2\cos B<\sqrt{3}$，

∴$\frac{a}{b}$的取值范围是$(\sqrt{2},\sqrt{3})$，故选 A.

12. C　由题可知$\triangle BCA$是等腰直角三角形，

∴$AB=AC=200$，$BC=200\sqrt{2}$，

$\angle DBC=15°+45°=60°$，

∵$\angle DAB=90°-60°=30°$，

∴$\angle BDA=45°$，∴$\frac{AB}{\sin45°}=\frac{DB}{\sin30°}$.

∴$DB=\frac{AB\cdot\sin30°}{\sin45°}=100\sqrt{2}$，

∴$DC^2=DB^2+BC^2-2DB\cdot BC\cdot\cos60°=(100\sqrt{2})^2+(200\sqrt{2})^2-2\times100\sqrt{2}\times200\sqrt{2}\times\frac{1}{2}=6\times100^2$，

∴$DC=100\sqrt{6}$ m，故选 C.

13. $\frac{2\sqrt{6}}{3}$

解析：由正弦定理$\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$得，

$b=\frac{c\cdot\sin B}{\sin C}=\frac{2\times\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{2\sqrt{6}}{3}$.

14. 4

解析：由正弦定理，可得$\sin A\cos B-\sin B\cos A=\frac{3}{5}\sin C$，

∴$\sin A\cos B-\sin B\cos A=\frac{3}{5}\sin(A+B)$，

∴$\sin A\cos B-\sin B\cos A=\frac{3}{5}(\sin A\cos B+\sin B\cos A)$，

∴$\frac{2}{5}\sin A\cos B=\frac{8}{5}\sin B\cos A$，

∴$\frac{\sin A\cos B}{\sin B\cos A}=4$，∴$\frac{\tan A}{\tan B}=4$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

15. $40\sqrt{3}$

解析：设另两边分别为 $8t,5t(t>0)$，则由余弦定理得 $14^2=(8t)^2+(5t)^2-2\cdot 8t\cdot 5t\cdot\cos 60^\circ$，

$\therefore t^2=4$，$\therefore t=2$.

$\therefore S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}\times 16\times 10\times\frac{\sqrt{3}}{2}=40\sqrt{3}$.

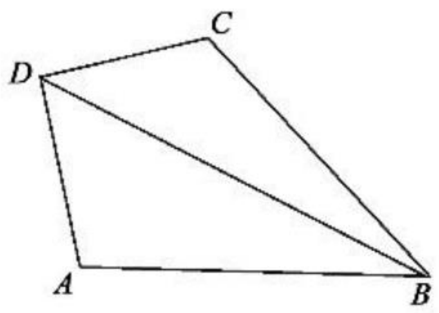
16. $3+\sqrt{3}$

解析：由已知得 $\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{1}{2}AB\cdot BC\sin\frac{\pi}{3}$，$\therefore AB\cdot BC=2$.

又 $AC^2=AB^2+BC^2-2AB\cdot BC\cos B=AB^2+BC^2-AB\cdot BC=(AB+BC)^2-3AB\cdot BC=(AB+BC)^2-6$. 又 $AC=\sqrt{3}$，$\therefore AB+BC=3$. $\therefore AB+BC+AC=3+\sqrt{3}$.

17. **解**：在 $\triangle ABD$ 中，由余弦定理得 $AB^2=AD^2+BD^2-2AD\cdot BD\cos 60^\circ$，又 $AD=5$，$AB=7$，

$\therefore BD^2-5BD-24=0$，解得 $BD=8$.



在 $\triangle BCD$ 中，$\angle BDC=30^\circ$，$\angle BCD=135^\circ$，由正弦定理得 $BC=\frac{BD\sin\angle BDC}{\sin\angle BCD}=\frac{8\sin 30^\circ}{\sin 135^\circ}=4\sqrt{2}$.

18. **解**：(1)由题知 $S=5\sqrt{3}$，$a=4$，$b=5$.

由 $S=\frac{1}{2}ab\sin C$ 得，

$5\sqrt{3}=\frac{1}{2}\times 4\times 5\sin C$，

解得 $\sin C=\frac{\sqrt{3}}{2}$，

又 C 是 $\triangle ABC$ 的内角，所以 $C=\frac{\pi}{3}$ 或 $C=\frac{2\pi}{3}$.

(2)当 $C=\frac{\pi}{3}$ 时，由余弦定理得 $c^2=a^2+b^2-2ab\cos\frac{\pi}{3}=16+25-2\times 4\times 5\times\frac{1}{2}=21$，解得 $c=\sqrt{21}$；

当 $C=\frac{2\pi}{3}$ 时，由 $c^2=a^2+b^2-2ab\cos\frac{2\pi}{3}=16+25+2\times 4\times 5\times\frac{1}{2}=61$，解得 $c=\sqrt{61}$.

综上得，c 边的长度是 $\sqrt{21}$ 或 $\sqrt{61}$.

19. **解**：(1)在 $\triangle ABC$ 中，$a=b(\sin C+\cos C)$.

由正弦定理有 $\sin A=\sin B(\sin C+\cos C)$，

$\sin(B+C)=\sin B(\sin C+\cos C)$，

$\therefore\cos B\sin C=\sin B\sin C$，又 $\sin C>0$，则 $\cos B=\sin B$，

即 $\tan B=1$，$\because B\in(0,\pi)$，$\therefore B=\frac{\pi}{4}$.

(2)在 $\triangle BCD$ 中，$BD=2$，$DC=1$，

$\therefore BC^2=1^2+2^2-2\times 1\times 2\times\cos D=5-4\cos D$，

又 $A=\frac{\pi}{2}$，则 $\triangle ABC$ 为等腰直角三角形，

$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}\times BC\times\frac{1}{2}\times BC=\frac{1}{4}BC^2=\frac{5}{4}-\cos D$.

又 $S_{\triangle BDC}=\frac{1}{2}\times BD\times DC\sin D=\sin D$，

$\therefore S_{\triangle ABDC}=\frac{5}{4}-\cos D+\sin D=\frac{5}{4}+\sqrt{2}\sin\left(D-\frac{\pi}{4}\right)$，

$D=\frac{3\pi}{4}$ 时，四边形 $ABDC$ 的面积有最大值，最大值为 $\frac{5}{4}+\sqrt{2}$.

20. **解**：(1)$\because\angle BCD=90^\circ+60^\circ=150^\circ$，$CB=AC=CD$，

$\therefore\angle CBE=15^\circ$，$\therefore\cos\angle CBE=\cos(45^\circ-30^\circ)=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$.

(2)在 $\triangle ABE$ 中，$AB=2$，由正弦定理得 $\frac{AE}{\sin(45^\circ-15^\circ)}=\frac{2}{\sin(90^\circ+15^\circ)}$，

故 $AE=\frac{2\sin 30^\circ}{\cos 15^\circ}=\frac{2\times\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}}=\sqrt{6}-\sqrt{2}$.

21. **解**：(1)在 $\triangle ABD$ 中，由正弦定理得 $\frac{BD}{\sin A}=\frac{AB}{\sin\angle ADB}$. 由题设知，$\frac{5}{\sin 45^\circ}=\frac{2}{\sin\angle ADB}$，所以 $\sin\angle ADB=\frac{\sqrt{2}}{5}$.

由题设知，$\angle ADB<90^\circ$，所以 $\cos\angle ADB=\sqrt{1-\frac{2}{25}}=\frac{\sqrt{23}}{5}$.

(2)由题设及(1)知，$\cos\angle BDC=\sin\angle ADB=\frac{\sqrt{2}}{5}$. 在 $\triangle BCD$ 中，由余弦定理得 $BC^2=BD^2+DC^2-2\cdot BD\cdot DC\cdot\cos\angle BDC=25+8-2\times 5\times 2\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{2}}{5}=25$. 所以 $BC=5$.

22. **解**：(1)在 $\triangle ABD$ 中，$\angle ADB=60^\circ$，$B=45^\circ$，$AB=12\sqrt{6}$，

由正弦定理得 $AD=\frac{AB\sin B}{\sin\angle ADB}=\frac{12\sqrt{6}\times\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=24$，

$\therefore A$ 处与 D 处的距离为 24 n mile.

(2)在 $\triangle ADC$ 中，由余弦定理得 $CD^2=AD^2+AC^2-2AD\cdot AC\cdot\cos 30^\circ$，解得 $CD=8\sqrt{3}$，

$\therefore$ 灯塔 C 与 D 处的距离为 $8\sqrt{3}$ n mile.

阶段测试二

1. C　$\because a_n=3-2n$，$\therefore a_{n+1}-a_n=3-2(n+1)-3+2n=-2$，$\therefore d=-2$. 故选 C.

2. C　由 $a_3a_5=4(a_4-1)$，得 $a_4^2=4a_4-4$，

$\therefore a_4^2-4a_4+4=0$，$\therefore a_4=2$，$\therefore q^3=\frac{a_4}{a_1}=\frac{2}{\frac{1}{4}}=8$，

$\therefore q=2$，$a_2=a_1q=\frac{1}{4}\times 2=\frac{1}{2}$. 故选 C.

3. D　由 $a_{n+1}=1+\frac{1}{a_n}$，得 $a_n=\frac{1}{a_{n+1}-1}$，

$\therefore a_7=\frac{1}{a_8-1}=\frac{21}{13}$，$a_6=\frac{1}{a_7-1}=\frac{13}{8}$，$a_5=\frac{1}{a_6-1}=\frac{8}{5}$. 故选 D.

4. D　将 $a_n=-2n^2+29n+3$ 看作一个二次函数，

但 $n\in\mathbf{N}^*$，对称轴 $n=\frac{29}{4}$ 开口向下，

$\therefore$ 当 $n=7$ 时离对称轴最近，$\therefore a_n$ 的最大值为 $a_7=108$，故选 D.

5. A　由题得 $\begin{cases}a_1+4d=10,\\3a_1+3d=3,\end{cases}$

$\therefore a_1=-2$，$d=3$. 故选 A.

6. B　由 $\begin{cases}a_1+a_2+a_3=3,\\a_{28}+a_{29}+a_{30}=165,\end{cases}$

$\therefore 3(a_1+a_{30})=168$，$\therefore a_1+a_{30}=56$，$\therefore S_{30}=\frac{30(a_1+a_{30})}{2}=840$，故选 B.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

7. B　由题可知数列$\{a_n\}$为等差数列，

$\therefore S_{25}=\dfrac{25\times(a_1+a_{25})}{2}=100$，$\therefore a_1+a_{25}=8$，

$\therefore a_{12}+a_{14}=a_1+a_{25}=8$，故选 B.

8. C　由 $S_5<S_6$，得 $S_6-S_5=a_6>0$，

由 $S_6=S_7$，得 $S_7-S_6=a_7=0$，

$\therefore d<0$，$S_9<S_8=S_5$，故 C 错.

9. C　设等差数列的公差为 d，$(d\neq0)$，由 $a_3^2=a_1\cdot a_4$，

得$(a_1+2d)^2=a_1\cdot(a_1+3d)$，$\therefore a_1=-4d$，

$\therefore\dfrac{S_3-S_2}{S_5-S_3}=\dfrac{a_3}{a_5+a_4}=\dfrac{-2d}{-d}=2$. 故选 C.

10. B　由已知可得数列$\left\{\dfrac{1}{a_n}\right\}$是等差数列.

$\because a_1=1$，$a_2=\dfrac{2}{3}$，$\therefore\dfrac{1}{a_1}=1$，$\dfrac{1}{a_2}=\dfrac{3}{2}$，

$\therefore$公差 $d=\dfrac{3}{2}-1=\dfrac{1}{2}$，$\therefore\dfrac{1}{a_6}=\dfrac{1}{a_1}+5d=1+\dfrac{5}{2}=\dfrac{7}{2}$，

$\therefore a_6=\dfrac{2}{7}$. 故选 B.

11. D　$f(n)=\sin\dfrac{n\pi}{25}$的周期 $T=50$.

a_1，a_2，…，$a_{24}>0$，$a_{25}=0$，a_{26}，a_{27}，…，$a_{49}<0$，$a_{50}=0$.

且 $\sin\dfrac{26\pi}{25}=-\sin\dfrac{\pi}{25}$，$\sin\dfrac{27\pi}{25}=-\sin\dfrac{2\pi}{25}$，…

$\therefore S_1$，S_2，…，S_{50}都为正，同理，S_{51}，…，S_{100}都为正，故选 D.

12. B　数列$\left\{\dfrac{a_n}{n}\right\}$是等差数列，设公差为 d，

$$\therefore\begin{cases}\dfrac{a_6}{6}=\dfrac{a_1}{1}+5d=5d+2,\\ \dfrac{a_3}{3}=\dfrac{a_1}{1}+2d=2+2d,\end{cases}$$

$\therefore a_6=30d+12$，$a_3=6+6d$，

由 $4a_3=a_6$，得 $24+24d=30d+12$，

$\therefore d=2$，$\therefore\dfrac{a_n}{n}=2+2(n-1)=2n$，$\therefore a_n=2n^2$.

$S_{10}=-a_1+a_2-a_3+a_4-a_5+a_6-a_7+a_8-a_9+a_{10}$

$=-2+2\times2^2-2\times3^2+2\times4^2+\cdots-2\times9^2+2\times10^2$

$=2(2^2-1^2+4^2-3^2+\cdots+10^2-9^2)=$

$2(1+2+3+4\cdots+9+10)=2\times\dfrac{10(1+10)}{2}=110$，故选 B.

13. -10

解析：由等差数列的性质知，$a_4+a_{10}+a_{16}=3a_{10}=30$，

$\therefore a_{10}=10$. $\therefore a_{18}-2a_{14}=(a_{10}+8d)-2(a_{10}+4d)=-a_{10}=-10$.

14. 44

解析：由 $a_n=2a_{n-1}+3a_{n-2}$，

$\therefore a_3=2a_2+3a_1=19$，$a_4=2a_3+3a_2=44$.

15. $\begin{cases}4,n=1,\\2n+1,n\geqslant2\end{cases}$

解析：当 $n=1$ 时，$S_1=a_1=4$，当 $n\geqslant2$ 时，$a_n=S_n-S_{n-1}=2n+1$. $\therefore a_n=\begin{cases}4,n=1,\\2n+1,n\geqslant2.\end{cases}$

16. 27

解析：设 $a_n=2^k$，则 $S_n=[(2\times1-1)+(2\times2-1)+\cdots+(2\cdot2^{k-1}-1)]+[2+2^2+\cdots+2^k]=\dfrac{2^{k-1}(1+2\times2^{k-1}-1)}{2}+\dfrac{2(1-2^k)}{1-2}=2^{2k-2}+2^{k+1}-2$，由 $S_n>12a_{n+1}$ 得 $2^{2k-2}+2^{k+1}-2>12(2^k+1)$，$(2^{k-1})^2-20(2^{k-1})-14>0$，$2^{k-1}\geqslant2^5$，$k\geqslant6$，所以只需研究 $2^5<a_n<2^6$ 是否有满足条件的解，此时 $S_n=[(2\times1-1)+(2\times2-1)+\cdots+(2m-1)]+[2+2^2+\cdots+2^5]=m^2+2^{5+1}-2$，$a_{n+1}=2m+1$，$m$ 为等差数列项数，且 $m>16$. 由 $m^2+2^{5+1}-2>12(2m+1)$，$m^2-24m+50>0$，所以 $m\geqslant22$，$n=m+5\geqslant27$ 得满足条件的 n 的最小值为 27.

17. **解**：(1)由已知，得 $a_1b_2+b_2=b_1$，$b_1=1$，$b_2=\dfrac{1}{3}$，解得 $a_1=2$，所以数列$\{a_n\}$是首项为 2，公差为 3 的等差数列，通项公式为 $a_n=3n-1$.

(2)由(1)知 $a_n=3n-1$，代入 $a_nb_{n+1}+b_{n+1}=nb_n$，得 $b_{n+1}=\dfrac{b_n}{3}$，因此$\{b_n\}$是首项为 1，公比为$\dfrac{1}{3}$的等比数列.

设$\{b_n\}$的前 n 项和为 S_n，则

$$S_n=\frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^n}{1-\frac{1}{3}}=\frac{3}{2}-\frac{1}{2\times3^{n-1}}.$$

18. **解**：(1)设等比数列$\{b_n\}$的公比为 q，由 $b_1=1$，$b_3=b_2+2$，可得 $q^2-q-2=0$. 因为 $q>0$，可得 $q=2$，故 $b_n=2^{n-1}$. 所以 $T_n=\dfrac{1-2^n}{1-2}=2^n-1$.

设等差数列$\{a_n\}$的公差为 d. 由 $b_4=a_3+a_5$，可得 $a_1+3d=4$. 由 $b_5=a_4+2a_6$，可得 $3a_1+13d=16$，从而 $a_1=1$，$d=1$，故 $a_n=n$，所以 $S_n=\dfrac{n(n+1)}{2}$.

(2)由(1)有 $T_1+T_2+\cdots+T_n=(2^1+2^3+\cdots+2^n)-n=\dfrac{2\times(1-2^n)}{1-2}-n=2^{n+1}-n-2$.

由 $S_n+(T_1+T_2+\cdots+T_n)=a_n+4b_n$ 可得$\dfrac{n(n+1)}{2}+2^{n+1}-n-2=n+2^{n+1}$，整理得 $n^2-3n-4=0$，解得 $n=-1$(舍)或 $n=4$. 所以 n 的值为 4.

19. **解**：(1)由题得$\begin{cases}a_1+d=5,\\4a_1+6d=28,\end{cases}$ $\therefore\begin{cases}a_1=1,\\d=4,\end{cases}$

$\therefore a_n=1+4(n-1)=4n-3$.

(2)$b_n=(-1)^n(4n-3)$，

$T_{2n}=b_1+b_2+b_3+b_4+\cdots+b_{2n-1}+b_{2n}=$

$(-1+5)+(-9+13)+\cdots+(-8n+7+8n-3)=4n$.

20. **解**：(1)由 $a_{n+1}=2S_n+1$，可得 $a_n=2S_{n-1}+1(n\geqslant2)$. 两式相减得 $a_{n+1}-a_n=2a_n$，即 $a_{n+1}=3a_n(n\geqslant2)$.

$\therefore$当 $n\geqslant2$ 时，$\{a_n\}$是等比数列. 要使 $n\geqslant1$ 时，$\{a_n\}$是等比数列，则只需$\dfrac{a_2}{a_1}=\dfrac{2t+1}{t}=3$，从而 $t=1$，即当 $t=1$ 时，数列$\{a_n\}$是等比数列.

(2)设$\{b_n\}$的公差为 d，由 $T_3=15$，得 $b_1+b_2+b_3=15$，于是 $b_2=5$.

故可设 $b_1=5-d$，$b_3=5+d$，又 $a_1=1$，$a_2=3$，$a_3=9$，由题意可得$(5-d+1)(5+d+9)=(5+3)^2$.

解得 $d_1=2$，$d_2=-10$.

$\because$等差数列$\{b_n\}$的前 n 项和 T_n 有最大值，$\therefore d<0$，$d=-10$.

$\therefore T_n=15n+\dfrac{n(n-1)}{2}\times(-10)=20n-5n^2$.

21. **解**：(1)由 $2S_n=(n+2)a_n-1$，

当 $n=1$ 时，$2S_1=3a_1-1$，$\therefore a_1=1$，

当 $n\geqslant2$ 时，$2S_{n-1}=(n+1)a_{n-1}-1$，

$\therefore2a_n=(n+2)a_n-(n+1)a_{n-1}$，

$\therefore na_n=(n+1)a_{n-1}$，$\therefore a_n=\dfrac{n+1}{n}a_{n-1}$.

(2)由(1)可知，$\dfrac{a_n}{a_{n-1}}=\dfrac{n+1}{n}$，

$\therefore a_n=a_1\cdot\dfrac{a_2}{a_1}\cdot\dfrac{a_3}{a_2}\cdots\dfrac{a_n}{a_{n-1}}=1\times\dfrac{3}{2}\times\dfrac{4}{3}\times\cdots\times\dfrac{n+1}{n}=\dfrac{n+1}{2}$.

当 $n=1$ 时，$a_1=\dfrac{1+1}{2}=1$，$\therefore a_n=\dfrac{n+1}{2}$.

(3)证明：$T_n=\dfrac{1}{a_1a_3}+\dfrac{1}{a_2a_4}+\dfrac{1}{a_3a_5}+\cdots+\dfrac{1}{a_na_{n+2}}=\dfrac{4}{2\times4}+\dfrac{4}{3\times5}+\dfrac{4}{4\times6}+\cdots+\dfrac{4}{(n+1)(n+3)}=$

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

$2\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\frac{1}{4}-\frac{1}{6}+\cdots+\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+3}\right)=$
$2\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+3}\right)=$
$\frac{5}{3}-2\left(\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}\right)<\frac{5}{3}$.

22. **解**：(1)$S_n=3^n$，$S_{n-1}=3^{n-1}$ $(n\geqslant 2)$，$\therefore a_n=3^n-3^{n-1}=2\times 3^{n-1}$ $(n\geqslant 2)$.
当 $n=1$ 时，$a_1=S_1=3\neq 2\times 3^{1-1}$，
$\therefore a_n=\begin{cases}3, n=1,\\ 2\times 3^{n-1}, n\geqslant 2.\end{cases}$
(2)$\because b_{n+1}=b_n+(2n-1)$，$\therefore b_2-b_1=1$，$b_3-b_2=3$，$b_4-b_3=5$，…，$b_n-b_{n-1}=2n-3$，以上各式相加得，$b_n-b_1=1+3+5+\cdots+(2n-3)=\frac{(n-1)(1+2n-3)}{2}=(n-1)^2$.
又 $b_1=-1$，故 $b_n=n^2-2n$.
(3)由题意得，$c_n=\frac{a_n\cdot b_n}{n}=\begin{cases}-3, n=1,\\ 2(n-2)\times 3^{n-1}, n\geqslant 2.\end{cases}$
当 $n\geqslant 2$ 时，$T_n=-3+2\times 0\times 3^1+2\times 1\times 3^2+2\times 2\times 3^3+\cdots+2\times(n-2)\times 3^{n-1}$，
$\therefore 3T_n=-9+2\times 0\times 3^2+2\times 1\times 3^3+2\times 2\times 3^4+\cdots+2\times(n-2)\times 3^n$.
两式相减得，$-2T_n=6+2\times 3^2+2\times 3^3+\cdots+2\times 3^{n-1}-2\times(n-2)\times 3^n$，
$\therefore T_n=-(3+3^2+3^3+\cdots+3^{n-1})+(n-2)\times 3^n=(n-2)\times 3^n-\frac{3^n-3}{2}=\frac{(2n-5)3^n+3}{2}$.
又 $T_1=-3=\frac{(2\times 1-5)\times 3^1+3}{2}$，符合上式，$\therefore T_n=\frac{(2n-5)3^n+3}{2}$ $(n\in\mathbf{N}^*)$.

阶段测试三

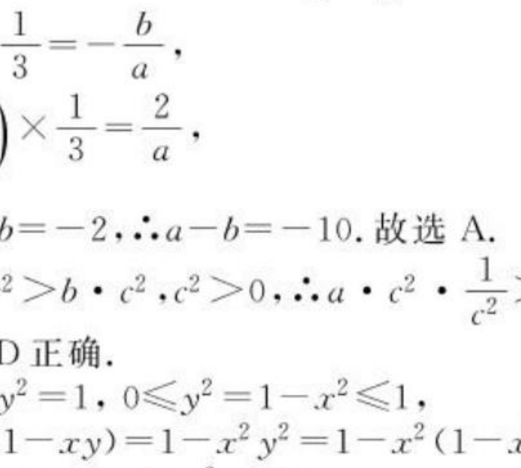
1. B　由 $x^2\geqslant 2x$，得 $x(x-2)\geqslant 0$，$\therefore x\geqslant 2$ 或 $x\leqslant 0$，故选 B.

2. A　不等式 $ax^2+bx+2>0$ 的解集是 $\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{3}\right)$，
$\therefore ax^2+bx+2=0$ 的两根为 $-\frac{1}{2}$，$\frac{1}{3}$，
$\therefore\begin{cases}-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=-\frac{b}{a},\\ \left(-\frac{1}{2}\right)\times\frac{1}{3}=\frac{2}{a},\\ a<0,\end{cases}$
$\therefore a=-12$，$b=-2$，$\therefore a-b=-10$. 故选 A.

3. D　若 $a\cdot c^2>b\cdot c^2$，$c^2>0$，$\therefore a\cdot c^2\cdot\frac{1}{c^2}>b\cdot c^2\cdot\frac{1}{c^2}$，
$\therefore a>b$，故 D 正确.

4. B　由 $x^2+y^2=1$，$0\leqslant y^2=1-x^2\leqslant 1$，
$\therefore(1+xy)(1-xy)=1-x^2y^2=1-x^2(1-x^2)=x^4-x^2+1=\left(x^2-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}$.
$\because 0\leqslant x^2\leqslant 1$，$\therefore$ 当 $x^2=\frac{1}{2}$ 时有最小值 $\frac{3}{4}$.
当 $x^2=0$ 或 1 时有最大值 1，故选 B.

5. C　不等式组所表示的平面区域如图所示.



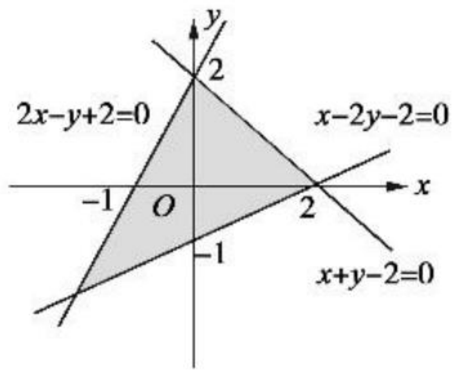
当 $z=x+2y$ 过 A 点时，z 有最大值，
由 $\begin{cases}x-y+1=0,\\ 2x-y-2=0,\end{cases}$ 得 $A(3,4)$，
$\therefore z_{\max}=3+2\times 4=11$. 故选 C.

6. B　$\because a=\log_3 7$，$\therefore 1<a<2$. $\because b=2^{1.1}$，$\therefore b>2$. $\because c=0.8^{3.1}$，$\therefore 0<c<1$. 故 $b>a>c$. 故选 B.

7. C　$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+2\sqrt{ab}\geqslant 2\sqrt{\frac{1}{ab}}+2\sqrt{ab}\geqslant 2\sqrt{2\times 2}=4$，
当且仅当 $\frac{1}{a}=\frac{1}{b}$ 且 $2\sqrt{\frac{1}{ab}}=2\sqrt{ab}$，即 $a=b=1$ 时，“=”号成立，故选 C.

8. A　$\because x^2+x+1>0$ 恒成立，
$\therefore$ 不等式可化为 $3x^2+2x+2\geqslant m(x^2+x+1)$，
即 $(3-m)x^2+(2-m)x+2-m\geqslant 0$ 对任意实数 x 都成立，
当 $m=3$ 时，不等式化为 $-x-1\geqslant 0$ 不恒成立.
当 $m\neq 3$ 时，有 $\begin{cases}3-m>0,\\ (2-m)^2-4\times(3-m)\times(2-m)\leqslant 0,\end{cases}$ 即 $m\leqslant 2$.
综上，实数 m 的取值范围是 $m\leqslant 2$，故选 A.

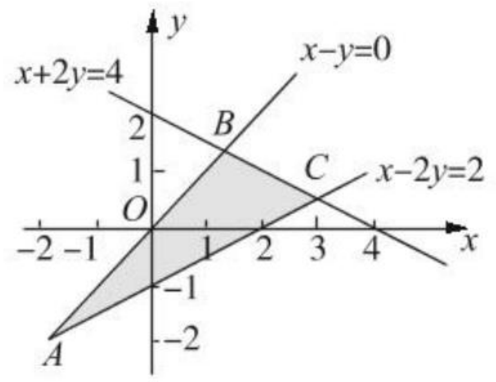
9. D　作出可行域如图中阴影部分所示.



由 $z=y-ax$ 得 $y=ax+z$，知 z 的几何意义是直线在 y 轴上的截距.
故当 $a>0$ 时，要使 $z=y-ax$ 取得最大值的最优解不唯一，则 $a=2$；
当 $a<0$ 时，要使 $z=y-ax$ 取得最大值的最优解不唯一，则 $a=-1$. 故选 D.

10. C　$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{b^2+c^2-\frac{b^2+c^2}{2}}{2bc}=\frac{b^2+c^2}{4bc}\geqslant\frac{2bc}{4bc}=\frac{1}{2}$，当且仅当 $b=c$ 时等号成立，故选 C.

11. D　不等式组表示的平面区域如图所示.



由不等式组可得 $A(-2,-2)$，$B\left(\frac{4}{3},\frac{4}{3}\right)$，$C\left(3,\frac{1}{2}\right)$.
若 $-2+a\cdot(-2)=\frac{16}{3}$，$a=-\frac{11}{3}$，此时在 A 处有最大值.
若 $\frac{4}{3}+\frac{4}{3}a=\frac{16}{3}$，
$\therefore a=3$.
此处在 B 处有最大值.
若 $3+\frac{1}{2}a=\frac{16}{3}$，$a=\frac{14}{3}$，
此时在 C 处没有最大值，舍去，
故 $a=3$ 或 $a=-\frac{11}{3}$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

12. C　$\because xy\leqslant\left(\frac{x+y}{2}\right)^2$，

$\therefore 3x+3y+8=2xy\leqslant\frac{(x+y)^2}{2}$，

$\therefore\frac{(x+y)^2}{2}-3(x+y)-8\geqslant 0$，解得 $x+y\geqslant 8$，

$\because (x+y)^2-a(x+y)+16\geqslant 0$ 恒成立，

即 $a\leqslant x+y+\frac{16}{x+y}$，

又 $x+y+\frac{16}{x+y}\geqslant 10$. $\therefore$ 只需 $a\leqslant 10$，故选 C.

13. $\left(-\infty,\frac{9}{4}\right]$

解析：$\frac{1}{x}+\frac{4}{y}=\left(\frac{1}{x}+\frac{4}{y}\right)\frac{(x+y)}{4}=\frac{1}{4}\left(5+\frac{4x}{y}+\frac{y}{x}\right)\geqslant\frac{9}{4}$，

若 $\frac{1}{x}+\frac{4}{y}\geqslant m$ 恒成立，则 $m\leqslant\frac{9}{4}$.

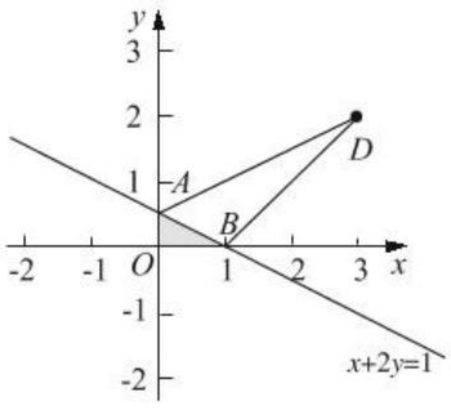
14. [5,6]

解析：$w=\frac{4x+2y-16}{x-3}=\frac{4(x-3)+2y-4}{x-3}=4+2\times\frac{y-2}{x-3}$，

设 $k=\frac{y-2}{x-3}$.

则 k 的几何意义是区域内的点到定点 $D(3,2)$ 的斜率，

作出不等式组对应的平面区域如图：



由图象得 AD 的斜率最小，BD 的斜率最大，

其中 $A\left(0,\frac{1}{2}\right)$，$B(1,0)$，

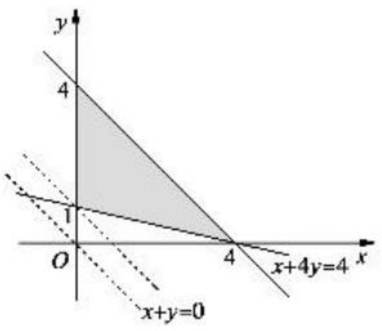
此时 $k_{AD}=\frac{\frac{1}{2}-2}{0-3}=\frac{1}{2}$，此时 w 最小为 $w=4+2\times\frac{1}{2}=4+1=5$，

$k_{BD}=\frac{0-2}{1-3}=1$，此时 w 最大为 $w=4+2\times 1=6$，

故 $5\leqslant w\leqslant 6$.

15. 6

解析：画出可行域如图所示，其中 $z=x+y$ 取得最小值时的整点为 $(0,1)$，取得最大值时的整点为 $(0,4)$，$(1,3)$，$(2,2)$，$(3,1)$ 及 $(4,0)$ 共 5 个整点. 故可确定 $5+1=6$ 条不同的直线.



16. 20

解析：$\because x,y$ 均为正实数，

则 $x+y=(x+2+y+2)-4=6\left(\frac{1}{x+2}+\frac{1}{y+2}\right)(x+2+y+2)-4=6\left(2+\frac{x+2}{y+2}+\frac{y+2}{x+2}\right)-4\geqslant 6\times 4-4=20$.

当且仅当 $x=y=10$ 的取等号，$\therefore x+y$ 的最小值为 20.

17. **证明**：证法一：$\because a,b,c$ 为不等正数，且 $abc=1$，

$\therefore\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}=\sqrt{\frac{1}{bc}}+\sqrt{\frac{1}{ca}}+\sqrt{\frac{1}{ab}}<\frac{\frac{1}{b}+\frac{1}{c}}{2}+\frac{\frac{1}{c}+\frac{1}{a}}{2}+\frac{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}{2}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$. 故原不等式成立.

证法二：$\because a,b,c$ 为不等正数，且 $abc=1$，$\therefore\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=bc+ca+ab=\frac{bc+ca}{2}+\frac{ca+ab}{2}+\frac{ab+bc}{2}>\sqrt{abc^2}+\sqrt{a^2bc}+\sqrt{ab^2c}=\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}$. 故原不等式成立.

18. **解**：(1)由 $-2x^2+x<-3$，得 $2x^2-x-3>0$，

$\therefore(2x-3)(x+1)>0$，$\therefore x<-1$ 或 $x>\frac{3}{2}$，

$\therefore$ 原不等式的解集为 $\left\{x\,\middle|\,x<-1\text{ 或 }x>\frac{3}{2}\right\}$.

(2)由 $\frac{x+1}{x-2}\leqslant 2$，得 $\frac{x+1}{x-2}-2\leqslant 0$，

$\therefore\frac{5-x}{x-2}\leqslant 0$，$\therefore\frac{x-5}{x-2}\geqslant 0$，

$\therefore x\geqslant 5$ 或 $x<2$，$\therefore$ 原不等式的解集为 $\{x|x\geqslant 5\text{ 或 }x<2\}$.

19. **解**：(1) $f(x)=\frac{2}{x}+2x\geqslant 2\sqrt{\frac{2}{x}\cdot 2x}=4$，

当且仅当 $\frac{2}{x}=2x$，即 $x=1$ 时，等号成立，

$\therefore f(x)$ 的最小值为 4，此时对应的 x 的值为 1.

(2) $\because 0<x<\frac{1}{3}$，

$\therefore 1-3x>0$.

$y=x(1-3x)=\frac{1}{3}\cdot 3x(1-3x)\leqslant\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{3x+1-3x}{2}\right)^2=\frac{1}{12}$，当且仅当 $3x=1-3x$，$\therefore x=\frac{1}{6}$ 时，等号成立，

$\therefore y=x(1-3x)$ 的最大值为 $\frac{1}{12}$.

20. **解**：(1) $\because x+\frac{1}{x-1}=x-1+\frac{1}{x-1}+1\geqslant 3$，(当且仅当 $x-1=\frac{1}{x-1}$，即 $x=2$ 时取等号)

$\therefore$ 若不等式 $x+\frac{1}{x-1}>m$ 对任意 $x\in(1,+\infty)$ 恒成立，

$\therefore m<3$.

(2)不等式 $ax^2+bx+c>0$ 的解集是 $(-4,1)$，

$\therefore\begin{cases}-4+1=-\frac{b}{a},\\-4\times 1=\frac{c}{a},\\a<0,\end{cases}$ $\therefore b=3a,c=-4a$，

$\therefore$ 不等式 $b(x^2-1)+a(x+3)+c>0$ 可化为 $3ax^2-3a+ax+3a-4a>0$，

即 $3ax^2+ax-4a>0$，$\therefore a(3x+4)(x-1)>0$，

$\therefore -\frac{4}{3}<x<1$.

$\therefore$ 原不等式的解集为 $\left(-\frac{4}{3},1\right)$.

21. **解**：(1)由 $x>0$，$y>0$，$y=3n-nx>0$，

得 $0<x<3$.

所以 $x=1$ 或 $x=2$，即 D_n 内的整点在直线 $x=1$ 和 $x=2$ 上.

记 $y=-nx+3n$ 为 l，l 与 $x=1$，$x=2$ 的交点的纵坐标分别为 y_1，y_2，

则 $y_1=2n$，$y_2=n$，$\therefore a_n=3n(n\in\mathbf{N}_+)$.

(2) $\because S_n=3(1+2+\cdots+n)=\frac{3n(n+1)}{2}$，

$\therefore T_n=\frac{n(n+1)}{2^n}$. 又 $\frac{T_{n+1}}{T_n}=\frac{n+2}{2n}>1\Rightarrow n<2$，

$\therefore$ 当 $n\geqslant 3$ 时，$T_n>T_{n+1}$，且 $T_1=1<T_2=T_3=\frac{3}{2}$.

所以实数 m 的取值范围为 $\left[\frac{3}{2},+\infty\right)$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

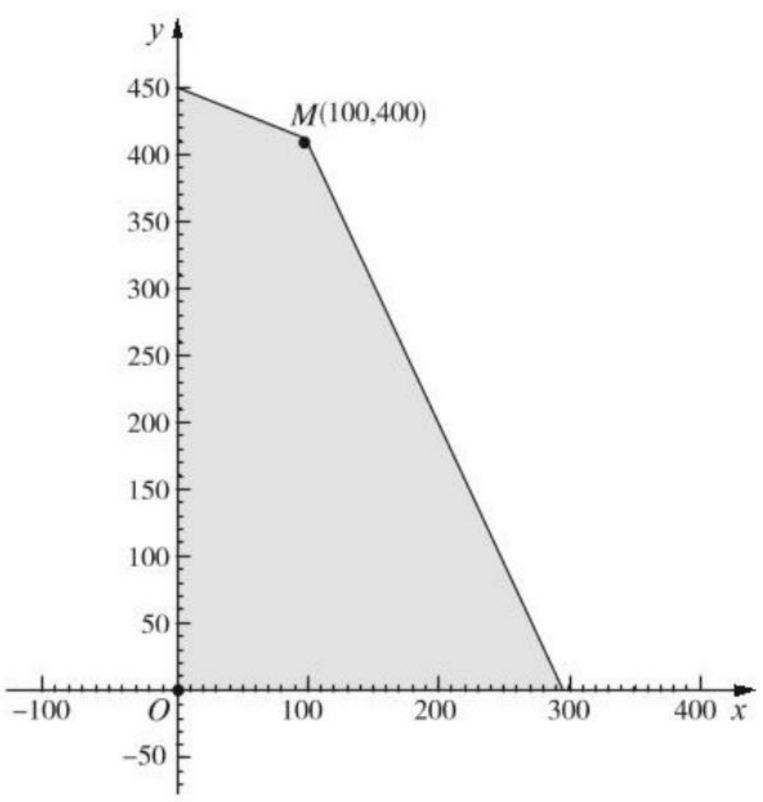
22. **解**：设生产书桌 x 张，书橱 y 个，利润总额为 z 元，则

$$\begin{cases}0.1x+0.2y\leqslant 90,\\ 2x+y\leqslant 600,\\ x\geqslant 0,\\ y\geqslant 0,\\ x,y\in\mathbf{N}.\end{cases}$$

$z=80x+120y$，可行域如图.

由图可知，当直线 $y=-\frac{2}{3}x+\frac{z}{120}$ 经过可行域上的点 M 时，截距 $\frac{z}{120}$ 最大，即 z 最大，解方程组 $\begin{cases}x+2y=900\\ 2x+y=600\end{cases}$ 得 M 的坐标为(100,400)，

$\therefore z_{max}=80x+120y=80\times100+120\times400=56\ 000$(元).



因此，生产书桌 100 张，书橱 400 个，可使所得利润最大，最大利润为 56 000 元.

阶段测试四

1. D　由题可得 $\cos C=\frac{7^2+3^2-8^2}{2\times7\times3}=-\frac{1}{7}$，

$\therefore\sin C=\sqrt{1-\left(-\frac{1}{7}\right)^2}=\frac{4\sqrt{3}}{7}$，

$\therefore S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{1}{2}\times7\times3\times\frac{4\sqrt{3}}{7}=6\sqrt{3}$. 故选 D.

2. B　$q^3=\frac{a_5}{a_2}=\frac{243}{9}=27$，$\therefore q=3$. $\therefore a_1=3$.

$S_4=\frac{a_1(1-q^4)}{1-q}=\frac{3(1-3^4)}{1-3}=120$. 故选 B.

3. C　由 $0<b<a<1$，$ab>b^2$，A 错；

$\log_{\frac{1}{2}}b>\log_{\frac{1}{2}}a>0$，B 错；

$2^b<2^a<2$，C 正确；

$a^2>ab$，D 错，故选 C.

4. A　∵数列$\{a_n\}$为等差数列，$\therefore a_1+a_5+a_9=3a_5=\pi$，

$\therefore a_5=\frac{\pi}{3}$，$\cos(a_2+a_8)=\cos2a_5=\cos\frac{2\pi}{3}=-\frac{1}{2}$. 故选 A.

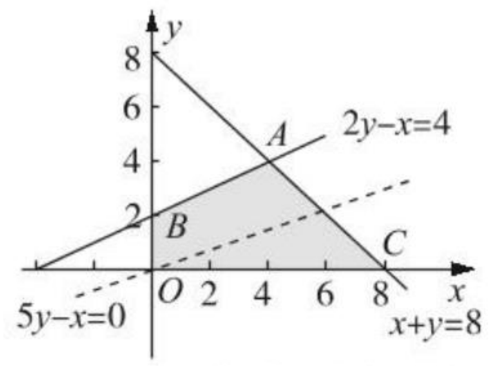
5. B　设 $BM=x$，则 $BC=2x$，由 $\cos\angle AMB+\cos\angle AMC=0$，得 $\frac{4^2+x^2-7^2}{2\times4x}+\frac{4^2+x^2-6^2}{2\times4x}=0$，$\therefore 4^2+x^2-7^2+4^2+x^2-6^2=0$，

$\therefore x^2=\frac{53}{2}$，$\therefore x=\frac{\sqrt{106}}{2}$，$\therefore BC=2x=\sqrt{106}$. 故选 B.

6. C　∵$a>b$，$\frac{1}{c^2+1}>0$，$\therefore\frac{a}{c^2+1}>\frac{b}{c^2+1}$，故选 C.

7. D　因为每一个单音与前一个单音频率比为 $\sqrt[12]{2}$，所以 $a_n=\sqrt[12]{2}a_{n-1}(n\geqslant2,n\in\mathbf{N}_+)$，又 $a_1=f$，则 $a_8=a_1q^7=(\sqrt[12]{2})^7f=\sqrt[12]{2^7}f$，故选 D.

8. C　如图所示，



当直线 $z=5y-x$ 经过 A 点时 z 最大，即 $a=16$，经过 C 点时 z 最小，即 $b=-8$，$\therefore a-b=24$，故选 C.

9. A　$S_n=\frac{a_1(2^n-1)}{2-1}=a_1(2^n-1)$，$S_{2n}=\frac{a_1(2^{2n}-1)}{2-1}=a_1(2^{2n}-1)$，$a_{n+1}=a_1\cdot2^n$，

$\therefore T_n=\frac{17S_n-S_{2n}}{a_{n+1}}=\frac{17a_1(2^n-1)-a_1(2^{2n}-1)}{a_1\cdot2^n}=17-\left(2^n+\frac{16}{2^n}\right)\leqslant17-8=9$，当且仅当 $n=2$ 时取等号，$\therefore$ 数列$\{T_n\}$的最大项为 T_2，则 $n_0=2$，故选 A.

10. D　由 $x^2-2x-3<0$，得 $-1<x<3$，

$\therefore x^2-2x-3<0$ 的整数解为 0，1，2，

则等差数列$\{a_n\}$的前 3 项为 0，1，2 或 2，1，0，

$\therefore$第 4 项为 3 或 -1，故选 D.

11. D　设数列$\{a_n\}$的公比为 q，则 $a_2=a_1q=1$，$\therefore q=\frac{1}{a_1}$，

$\therefore S_3=a_1+a_2+a_3=a_1+a_1q+a_1q^2=a_1+1+\frac{1}{a_1}$，当 $a_1>0$ 时，$S_3\geqslant1+2\sqrt{a_1\cdot\frac{1}{a_1}}=3$，当且仅当 $a_1=1$ 时，取等号；当 $a_1<0$ 时，$S_3\leqslant1-2=-1$，当且仅当 $a_1=-1$ 时，取等号.

故 S_3 的取值范围是 $(-\infty,-1]\cup[3,+\infty)$.

12. D　$a_1=1$，$a_{n+1}-a_n=n+1$，

$a_n=(a_n-a_{n-1})+(a_{n-1}-a_{n-2})+\cdots+(a_2-a_1)+a_1=(n-1+1)+(n-2+1)+\cdots+(1+1)+1=$

$n+(n-1)+(n-2)+\cdots+2+1=\frac{n(n+1)}{2}$，

当 $n=1$ 时，也满足上式，

$\therefore a_n=\frac{n(n+1)}{2}$，

$\frac{1}{a_n}=\frac{2}{n(n+1)}=2\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$，

$\therefore S_n=2\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=2\left(1-\frac{1}{n+1}\right)$.

∵$S_n<m$ 对一切正整数 n 恒成立，$\therefore m\geqslant2$，故选 D.

13. $\begin{cases}\frac{47}{12},n=1,\\ \frac{1}{2}n+\frac{5}{12},n\geqslant2\end{cases}$

解析：当 $n=1$ 时，$a_1=S_1=\frac{47}{12}$，

当 $n\geqslant2$ 时，$a_n=S_n-S_{n-1}=\frac{1}{4}n^2+\frac{2}{3}n+3-\frac{1}{4}(n-1)^2-\frac{2}{3}(n-1)-3=\frac{1}{2}n+\frac{5}{12}$.

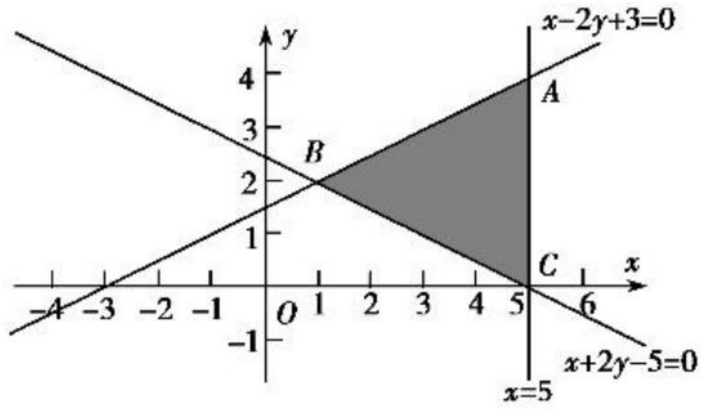
当 $n=1$ 时，$\frac{1}{2}\times1+\frac{5}{12}=\frac{11}{12}\neq\frac{47}{12}$，

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

$$\therefore a_n=\begin{cases}\frac{47}{12},n=1,\\ \frac{1}{2}n+\frac{5}{12},n\geqslant 2.\end{cases}$$

14. 9

解析：不等式组表示的可行域是以 $A(5,4)$，$B(1,2)$，$C(5,0)$ 为顶点的三角形区域，如下图所示，目标函数 $z=x+y$ 的最大值必在顶点处取得，易知当 $x=5$，$y=4$ 时，$z_{\max}=9$.



15. 6

解析：由 $a_{n+1}=3S_n$，

得 $a_n=3S_{n-1}(n\geqslant 2)$，

$\therefore a_{n+1}-a_n=3a_n$，

$\therefore a_{n+1}=4a_n$，

又 $a_2=3S_1=3$，

$\therefore$ 当 $n\geqslant 2$ 时，$a_n=3\cdot 4^{n-2}$，

由 $750<3\cdot 4^{k-2}<900$，

得 $k=6$.

16. -1

解析：由正弦定理得 $2b^2+3c^2=2bc\sin A+a^2$，

即 $2b^2+3c^2=2bc\sin A+b^2+c^2-2bc\cos A$，

$\therefore \frac{b^2+2c^2}{2bc}=\sin A-\cos A$.

$\because \frac{b^2+2c^2}{2bc}\geqslant\frac{2\sqrt{b^2\cdot 2c^2}}{2bc}=\sqrt{2}$，

又 $\sin A-\cos A\leqslant\sqrt{2}$，$\therefore \sin A-\cos A=\sqrt{2}$，

$\therefore \sin^2 A-2\sin A\cos A+\cos^2 A=2$，

$\sin 2A=-1$，$\because 0<A<\pi$，$\therefore 0<2A<2\pi$，

$\therefore 2A=\frac{3\pi}{2}$，$\therefore A=\frac{3\pi}{4}$，$\therefore \tan A=-1$.

17. **解**：(1)依题意，可知方程 $ax^2+3x-1=0$ 的两个实数根为 $\frac{1}{2}$ 和 1，

$\therefore \frac{1}{2}+1=-\frac{3}{a}$ 且 $\frac{1}{2}\times 1=-\frac{1}{a}$ 解得 $a=-2$，

$\therefore a$ 的值为 -2.

(2)由(1)可知，不等式为 $-2x^2-3x+5>0$，即 $2x^2+3x-5<0$，

$\because$ 方程 $2x^2+3x-5=0$ 的两根为 $x_1=1$，$x_2=-\frac{5}{2}$，

$\therefore$ 不等式 $ax^2-3x+a^2+1>0$ 的解集为 $\left\{x\middle|-\frac{5}{2}<x<1\right\}$.

18. **解**：(1)由 $a\sin B=\sqrt{3}b\cos A$，得 $\sin A\sin B=\sqrt{3}\sin B\cos A$，

$\therefore \sin A=\sqrt{3}\cos A$，$\therefore \tan A=\sqrt{3}$，$\because A\in(0,\pi)$，$\therefore A=\frac{\pi}{3}$.

(2)由 $a=\sqrt{3}$，$S=\frac{\sqrt{3}}{2}$，得

$$\begin{cases}\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{\sqrt{3}}{2},\\ a^2=b^2+c^2-2bc\cos A,\end{cases}\text{即}\begin{cases}bc=2,\\ b^2+c^2=5,\end{cases}$$

$(b+c)^2=b^2+c^2+2bc=9$，$\therefore b+c=3$.

19. **解**：(1)在 $\triangle ABC$ 中，$\because \cos A=\frac{1}{3}$，

$\therefore \sin^2\frac{B+C}{2}+\cos 2A=\frac{1}{2}[1-\cos(B+C)]+2\cos^2 A-1=\frac{1}{2}(1+\cos A)+2\cos^2 A-1=-\frac{1}{9}$.

(2)由余弦定理知 $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$，

$\therefore 3=b^2+c^2-\frac{2}{3}bc\geqslant 2bc-\frac{2}{3}bc=\frac{4}{3}bc$，

$\therefore bc\leqslant\frac{9}{4}$，当且仅当 $b=c=\frac{3}{2}$ 时，等号成立，

$\therefore bc$ 的最大值为 $\frac{9}{4}$.

20. **解**：(1)设等比数列 $\{a_n\}$ 的公比为 q. 由 $a_1=1$，$a_3=a_2+2$，可得 $q^2-q-2=0$.

因为 $q>0$，可得 $q=2$，故 $a_n=2^{n-1}$.

设等差数列 $\{b_n\}$ 的公差为 d，由 $a_4=b_3+b_5$，可得 $b_1+3d=4$. 由 $a_5=b_4+2b_6$，

可得 $3b_1+13d=16$，从而 $b_1=1$，$d=1$，故 $b_n=n$.

所以，数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n=2^{n-1}$，数列 $\{b_n\}$ 的通项公式为 $b_n=n$.

(2)由(1)，有 $S_n=\frac{1-2^n}{1-2}=2^n-1$，故

$$T_n=\sum_{k=1}^{n}(2^k-1)=\sum_{k=1}^{n}2^k-n=\frac{2\times(1-2^n)}{1-2}-n=2^{n+1}-n-2.$$

21. **解**：(1)由 $a_{n+1}=2a_n+2^{n+1}$，得 $\frac{a_{n+1}}{2^{n+1}}=\frac{a_n}{2^n}+1$，

$\therefore b_{n+1}=b_n+1$，$\therefore$ 数列 $\{b_n\}$ 是等差数列，

$b_1=\frac{a_1}{2}=1$，$d=1$，$\therefore b_n=n$.

(2)由(1)知 $b_n=\frac{a_n}{2^n}=n$，$\therefore a_n=n\cdot 2^n$.

$S_n=a_1+a_2+\cdots+a_n=1\times 2+2\times 2^2+\cdots+n\cdot 2^n$，

$\therefore 2S_n=1\times 2^2+2\times 2^3+\cdots+n\cdot 2^{n+1}$，

$\therefore -S_n=1\times 2+1\times 2^2+\cdots+2^n-n\cdot 2^{n+1}=\frac{2(1-2^n)}{1-2}-n\cdot 2^{n+1}=(1-n)2^{n+1}-2$，

$\therefore S_n=(n-1)2^{n+1}+2$.

22. **解**：由题意知 $f(n)=50n-\left[12n+\frac{n(n-1)}{2}\times 4\right]-72=-2n^2+40n-72$.

(1)由 $f(n)>0$，即 $-2n^2+40n-72>0$，解得 $2<n<18$.

由 $n\in\mathbf{N}_+$ 知，该厂从第 3 年起开始盈利.

(2)方案①：年平均纯利润 $\frac{f(n)}{n}=40-2\left(n+\frac{36}{n}\right)$，

$\because n+\frac{36}{n}\geqslant 2\sqrt{n\times\frac{36}{n}}=12$，当且仅当 $n=6$ 时取等号，

$\therefore \frac{f(n)}{n}\leqslant 40-2\times 12=16$.

因此方案①共获利 $16\times 6+48=144$(万元)，此时 $n=6$.

方案②：$f(n)=-2(n-10)^2+128$. 从而方案②共获利 $128+16=144$(万元). 比较两种方案，获利都是 144 万元，但由于第一方案只需 6 年，而第②种方案需要 10 年，因此，选择第①种方案更合算.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

责任编辑 李 莉 阴耀华
美术编辑 李 欣
封面设计 欣 羽

45 分钟
课时作业与单元测试

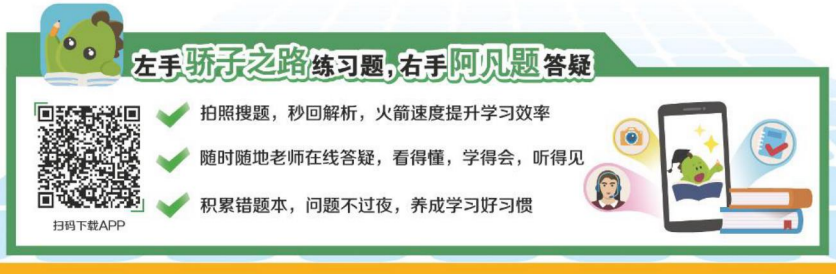
45FENZHONG KESHIZUOYEYUDANYUANCESHI SHUXUE

丛书科目

语文 数学 英语 物理 化学 生物 历史 地理 思想政治

同学们，你想了解丛书的更多信息吗？详情请登录 http://www.dfjc100.com

※ 各科配有教师用书及教学课件光盘 (word 文档可自主编辑)，英语配有原声磁带 / MP3 光盘。



手机扫一扫
获取配套学习资源

ISBN 978-7-202-08062-7
9 787202 080627 04>
定价：29.00 元

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料