东方杰创®
DONGFANG JIECHUANG
让 学习更快乐，人生更精彩

骄子之路®
the Road to Pride
主　编：邓保沧

45分钟

课时作业与单元测试

活页
可拆开使用

教辅资料站

电子教辅　试卷练习
知识总结　备课资源

扫码关注获取更多学习资料

提升＝基础＋能力＋方法
课时作业　基础自测·知能提升
阶段检测　梯度练习·评估达标
答案与解析　全解全析·点拨精准

数学

必修4·BS

河北人民出版社

东方杰创®
DONGFANG JIECHUANG
让 学习更快乐，人生更精彩

骄子之路®
the Road to Pride
主　编：邓保沧

45分钟 课时作业与单元测试

活页
可拆开使用

提升＝基础＋能力＋方法
课时作业　基础自测·知能提升
阶段检测　梯度练习·评估达标
答案与解析　全解全析·点拨精准

数学
必修4·BS

微信公众号
教辅资料站

河北人民出版社
石家庄

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

图书在版编目（CIP）数据

45分钟课时作业与单元测试：BS版．数学．4 ： 必修／邓保沧主编． －石家庄： 河北人民出版社， 2013.7（2019.6重印）
ISBN 978-7-202-08077-1

Ⅰ．①4… Ⅱ．①邓… Ⅲ．①中学数学课－高中－习题集
Ⅳ．①G634

中国版本图书馆CIP数据核字（2013）第194841号

编　委： 张瑞霞　天高云　黄小惠
姜　楠　蒋　敏　金剑飞

书　　名	**45分钟课时作业与单元测试　数学 必修4 BS**
主　　编	邓保沧
责任编辑	李　莉　陈小彦
美术编辑	李　欣
封面设计	欣　羽
出版发行	河北人民出版社（石家庄市友谊北大街330号）
印　　刷	河北伦洋印业有限公司
开　　本	880毫米×1230毫米　1/16
印　　张	7
字　　数	224 000
版　　次	2013年7月第1版　2019年6月第7次印刷
书　　号	ISBN 978-7-202-08077-1
定　　价	32.00元

版权所有　翻印必究

微信公众号 教辅资料站

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料



目录 CONTENTS

第一部分　课时作业

第一章　三角函数 …… 1

§1　周期现象 …… 1

§2　角的概念的推广 …… 3

§3　弧度制 …… 5

§4　正弦函数和余弦函数的定义与诱导公式 …… 7

4.1　单位圆与任意角的正弦函数、余弦函数的定义 …… 7

4.2　单位圆与周期性 …… 7

4.3　单位圆与正弦函数、余弦函数的基本性质 …… 9

4.4　单位圆的对称性与诱导公式 …… 9

§5　正弦函数的图像与性质 …… 11

5.1　正弦函数的图像 …… 11

5.2　正弦函数的性质 …… 13

§6　余弦函数的图像与性质 …… 15

§7　正切函数 …… 17

7.1　正切函数的定义 …… 17

7.2　正切函数的图像与性质 …… 17

7.3　正切函数的诱导公式 …… 19

§8　函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ 的图像与性质 …… 21

第一课时　函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ 的图像与性质(一) …… 21

第二课时　函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ 的图像与性质(二) …… 23

§9　三角函数的简单应用 …… 25

第二章　平面向量 …… 27

§1　从位移、速度、力到向量 …… 27

§2　从位移的合成到向量的加法 …… 29

2.1　向量的加法 …… 29

2.2　向量的减法 …… 31

§3　从速度的倍数到数乘向量 …… 33

3.1　数乘向量 …… 33

3.2　平面向量基本定理 …… 35

微信公众号
教辅资料站

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料



目录 CONTENTS

§4 平面向量的坐标 …… 37
§5 从力做的功到向量的数量积 …… 39
第一课时 从力做的功到向量的数量积(一) …… 39
第二课时 从力做的功到向量的数量积(二) …… 41
§6 平面向量数量积的坐标表示 …… 43
§7 向量应用举例 …… 45
第三章 三角恒等变形 …… 47
§1 同角三角函数的基本关系 …… 47
第一课时 同角三角函数的基本关系(一) …… 47
第二课时 同角三角函数的基本关系(二) …… 49
§2 两角和与差的三角函数 …… 51
2.1 两角差的余弦函数 …… 51
2.2 两角和与差的正弦、余弦函数 …… 53
2.3 两角和与差的正切函数 …… 55
§3 二倍角的三角函数 …… 57
三角向量真题体验 …… 59

第二部分 阶段检测

阶段测试一(第一章 三角函数) …… 61
阶段测试二(第二章 平面向量) …… 65
阶段测试三(第三章 三角恒等变形) …… 69
阶段测试四(综合质量测试) …… 73

第三部分 答案与解析

答案与解析 …… 78～108

提示:全书包括课时作业、阶段检测、答案与解析三部分,共计 112 页。

(根据教师教学情况不同,课时作业部分可在书中作答,也可撕下使用。)

微信公众号 教辅资料站

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

学习札记

第一章　三角函数

§1　周期现象

1 基础知识点对点

知识点一　周期现象

1. 下列现象是周期现象的是　　(　　)

①日出日落　②潮汐　③海啸　④地震

A. ①②　　B. ①②③

C. ①②④　　D. ③④

2. 下列变化中是周期现象的是　　(　　)

A. 每天晚上 19:00 开始的中央电视台《新闻联播》节目

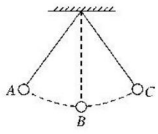
B. 李明每天上午上学的时间

C. 某高速公路每天通过的车辆数

D. 现代奥运会的举办时间

知识点二　周期现象应用

3. 如图一小球从 A 点开始摆动，周期为 2 s，则 8 s 时刻小球的位置是　　(　　)



A. B　　B. A

C. C　　D. 不确定

4. 一组数按如下方式排列：

1，2，3，4，

5，6，7，8，

9，10，11，12，

…

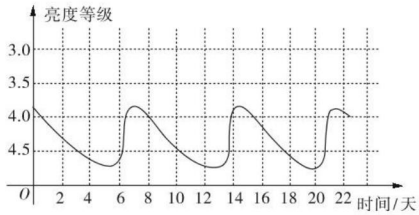
则 2 018 在第　　(　　)

A. 503 行第四列　　B. 503 行第二列

C. 504 行第一列　　D. 504 行第二列

知识点三　周期函数

5. 天上有些恒星的亮度是会变化的，其中一种称为造父(型)变星，本身体积会膨胀收缩造成亮度周期性变化. 如图为一造父变星的亮度随时间的周期变化图，可知此变星亮度变化的周期是　　(　　)



A. 5.5 天　　B. 7 天

C. 14 天　　D. 20 天

2 课后拔高提能练

一、选择题

1. 如果今天是星期一，那么从明天算起，第 100 天是星期　　(　　)

A. 二　　B. 三

C. 四　　D. 五

2. 2018 年是狗年，那么 1957 年是　　(　　)

A. 狗年　　B. 猪年

C. 鸡年　　D. 羊年

3. 李明是高一(10)班的卫生委员，他班上有 50 名学生，现要安排本学期的卫生值日，这个学期有二十一周，按照每周五天，每天安排 4 名学生进行卫生值日，那么某位学生最少需要值日的次数是　　(　　)

A. 7　　B. 8

C. 9　　D. 10

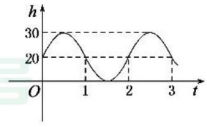
4. 已知 $f(x)$ 为周期函数，且周期为 3，满足 $f(-x)=-f(x)$，若 $f(1)=1$，则 $f(2)$ 的值为　　(　　)

A. 1　　B. -1

C. 2　　D. 3

二、填空题

5. 若钟摆的高度 h(mm)与时间 t(s)之间的函数关系如图所示：



则该函数的周期为_____，当 $t=25$ s 时，钟摆的高度为_____.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

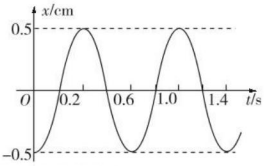
学习札记

6. 学期初，班级的课程表是本学期周期性班级课堂学习的一种安排，假如第一周周一的前三节课依次是数学、物理、语文，那么正常情况下，第四周周一的前三节课依次应该是_____.

7. 某市绿化委员会为了庆祝国庆节，要在道路的两侧摆放花卉，其中一侧需摆放红、黄、紫、白四种颜色的花，并且按红、黄、紫、白、红、黄、紫、白、…的顺序摆放，那么第 2 015 盆花的颜色为_____.

三、解答题

8. 如图是一个单摆的振动图像，根据图像，回答下面问题：

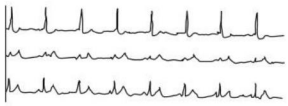


(1)单摆的振动是周期现象吗？

(2)若是周期现象，其振动的周期是多少？

(3)单摆离开平衡位置的最大距离是多少？

9. 下图是某人的心电图，根据这个心电图，请判断他的心脏跳动是否正常.



微信公众号
教辅资料站

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

学习札记

§2　角的概念的推广

1 基础知识点对点

知识点一　象限角

1. 下列四个命题：①－75°角是第四象限角；②234°角是第三象限角；③476°角是第二象限角；④－315°角是第一象限角．其中正确的个数是　（　）

A. 1　　B. 2

C. 3　　D. 4

2. 角 $\alpha=45°+k\cdot 180°,k\in\mathbf{Z}$ 的终边落在　（　）

A. 第一或第三象限　　B. 第一或第二象限

C. 第二或第四象限　　D. 第三或第四象限

知识点二　终边相同的角

3. 与 610°角的终边相同的角表示为　（　）

A. $k\cdot 360°+230°(k\in\mathbf{Z})$

B. $k\cdot 360°+250°(k\in\mathbf{Z})$

C. $k\cdot 360°+70°(k\in\mathbf{Z})$

D. $k\cdot 360°+270°(k\in\mathbf{Z})$

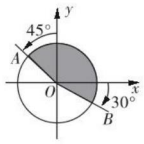
4. 下列各组角中，终边相同的角是　（　）

A. 390°与 690°　　B. －330°与 750°

C. 480°与－420°　　D. 300°与－840°

知识点三　区域角的表示

5. 如图所示．



(1)分别写出终边落在 OA，OB 位置上的角的集合；

(2)写出终边落在阴影部分(包括边界)的角的集合．

2 课后拔高提能练

一、选择题

1. 若角 α 的终边与角 β 的终边关于原点对称，则有　（　）

A. $\alpha=\beta$

B. $\alpha=180°+\beta$

C. $\alpha=k\cdot 360°+\beta,k\in\mathbf{Z}$

D. $\alpha=k\cdot 360°+180°+\beta,k\in\mathbf{Z}$

2. 如果角 α 的终边上有一点 $P(0,-3)$，那么 α（　）

A. 是第三象限角　　B. 是第四象限角

C. 是第三或第四象限角　　D. 不是任何象限角

3. 若 α 是第一象限角，则下列各角中是第四象限角的是　（　）

A. $90°-\alpha$　　B. $90°+\alpha$

C. $360°-\alpha$　　D. $180°+\alpha$

4. 与－457°角的终边相同的角的集合是　（　）

A. $\{\alpha\mid\alpha=457°+k\cdot 360°,k\in\mathbf{Z}\}$

B. $\{\alpha\mid\alpha=97°+k\cdot 360°,k\in\mathbf{Z}\}$

C. $\{\alpha\mid\alpha=263°+k\cdot 360°,k\in\mathbf{Z}\}$

D. $\{\alpha\mid\alpha=-263°+k\cdot 360°,k\in\mathbf{Z}\}$

二、填空题

5. 下列结论：

①锐角都是第一象限角；

②第一象限角一定不是负角；

③第二象限角是钝角；

④小于 180°的角是钝角、直角或锐角．

其中，正确结论的序号为_____(把正确结论的序号都写上)．

6. 时钟的时针走过了 1 小时 20 分钟，则分针转过的角为_____．

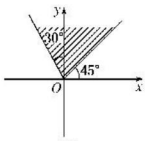
7. 已知 α 是第三象限的角，终边落在射线 $y=\frac{\sqrt{2}}{4}x(x\leqslant 0)$ 上，角 β 的终边与角 α 的终边关于 x 轴对称，则角 β 的终边在射线_____上．

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

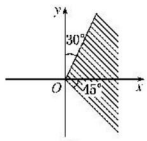
学习札记

三、解答题

8. 写出下列终边落在阴影部分的角的集合(包括边界).



(1)



(2)

9. 已知 α 为第二象限角,那么 2α,$\frac{\alpha}{2}$ 分别是第几象限角?

微信公众号
教辅资料站

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

学习札记

§3　弧度制

1 基础知识点对点

知识点一　弧度制

1. 下列命题错误的是　　(　　)

A. “度”与“弧度”是角的度量中的两种不同的度量单位

B. 不论是用角度制还是弧度制来度量角，都与圆的半径的大小无关

C. 0 rad=0°

D. 对于同一个角，对应的圆的半径越大，角的弧度数就越大

2. 已知扇形周长为 6 cm，面积为 2 cm^2，则扇形圆心角的弧度数为　　(　　)

A. 1　　B. 4　　C. 1 或 4　　D. 2 或 4

知识点二　弧度制与角度制互化

3. 将$-\frac{17\pi}{4}$化成 $\alpha+k\cdot 360°(-360°<\alpha<0°,k\in\mathbf{Z})$的形式为　　(　　)

A. $-2\times360°-15°$　　B. $-3\times360°+45°$

C. $-2\times360°-45°$　　D. $-2\times360°-75°$

4. 角度与弧度互化：

(1)$-160°=$_____rad；

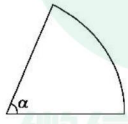
(2)$\frac{3\pi}{10}$ rad=_____；

(3)$10°=$_____rad；

(4)$\frac{\pi}{12}$ rad=_____.

知识点三　弧长及扇形面积

5. 现要用篱笆围成一个面积为 S 的扇形菜园(如图所示)，问要使这个菜园所用篱笆最短，则这个扇形的半径和圆心角各为　　(　　)



A. $\sqrt{S}$和 1　　B. $2\sqrt{S}$和 2

C. $\sqrt{S}$和 2　　D. $2\sqrt{S}$和 1

2 课后拔高提能练

一、选择题

1. $-\frac{29\pi}{12}$的终边所在的象限是　　(　　)

A. 第一象限　　B. 第二象限

C. 第三象限　　D. 第四象限

2. 将$-\frac{11}{4}\pi$ 表示成 $2k\pi+\theta(k\in\mathbf{Z})$的形式，且使$|\theta|$最小的 θ 的值是　　(　　)

A. $-\frac{\pi}{4}$　　B. $\frac{3\pi}{4}$

C. $-\frac{3\pi}{4}$　　D. $\frac{\pi}{4}$

3. 若一圆弧长等于其所在圆的内接正三角形的边长，则其所对圆心 $\alpha(0<\alpha<\pi)$的弧度数为　　(　　)

A. $\frac{\pi}{3}$　　B. $\frac{2\pi}{3}$

C. $\sqrt{3}$　　D. 2

4. 已知集合 $A=\{x\mid 2k\pi\leqslant x\leqslant 2k\pi+\pi,k\in\mathbf{Z}\}$，$B=\{\alpha\mid -4\leqslant\alpha\leqslant 4\}$，则 $A\cap B$ 为　　(　　)

A. $\varnothing$

B. $\{\alpha\mid -4\leqslant\alpha\leqslant\pi\}$

C. $\{\alpha\mid 0\leqslant\alpha\leqslant\pi\}$

D. $\{\alpha\mid -4\leqslant\alpha\leqslant-\pi\}\cup\{\alpha\mid 0\leqslant\alpha\leqslant\pi\}$

二、填空题

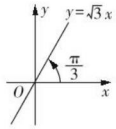
5. 若角 α 的终边与角$\frac{8}{5}\pi$ 的终边相同，则在$[0,2\pi]$上，终边与$\frac{\alpha}{4}$角的终边相同的角是_____.

6. 若角 α 满足 $180°<\alpha<360°$，角 5α 与角 α 有相同的始边，又有相同的终边，则角 $\alpha=$_____ rad.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

学习札记

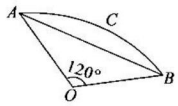
7. 如图所示，终边落在直线 $y=\sqrt{3}x$ 上的角的集合是_____（用弧度制表示）.



三、解答题

8. 已知一扇形的周长为 40 cm，当它的半径和圆心角各取什么值时，才能使扇形的面积最大？最大面积是多少？

9. 如图，已知扇形 AOB 的圆心角为 120°，半径长为 6，求弓形 ACB 的面积.



微信公众号
教辅资料站

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

学习札记

§4　正弦函数和余弦函数的定义与诱导公式

4.1　单位圆与任意角的正弦函数、余弦函数的定义

4.2　单位圆与周期性

1 基础知识点对点

知识点一　正弦函数、余弦函数的定义

1. 已知角 α 的终边和单位圆的交点为 P，则点 P 的坐标为　（　）

A. $(\sin\alpha,\cos\alpha)$　　B. $(\cos\alpha,\sin\alpha)$

C. $(\sin\alpha,\tan\alpha)$　　D. $(\tan\alpha,\sin\alpha)$

2. 已知点 $P(x,3)$ 是角 θ 终边上一点，且 $\cos\theta=-\frac{4}{5}$，则 x 的值为　（　）

A. 5　　B. -5

C. 4　　D. -4

知识点二　三角函数值的符号

3. 若三角形的两内角 A,B 满足 $\sin A\cdot\cos B<0$，则此三角形的形状为　（　）

A. 锐角三角形　　B. 钝角三角形

C. 直角三角形　　D. 不能确定

4. 设 $a=\sin105^\circ\cdot\cos230^\circ$，$b=\sin2\cdot\cos1$，则　（　）

A. $a>0,b>0$　　B. $a>0,b<0$

C. $a<0,b>0$　　D. $a<0,b<0$

知识点三　利用正弦、余弦函数值的周期性求值

5. 求值：

(1) $\sin\left(-\frac{31\pi}{4}\right)$；

(2) $\sin420^\circ\cos750^\circ+\sin(-690^\circ)\cos(-660^\circ)$.

2 课后拔高提能练

一、选择题

1. 点 P 从 $(1,0)$ 出发，沿单位圆（以坐标原点为圆心）逆时针方向运动 $\frac{2\pi}{3}$ 弧长到达 Q 点，则 Q 的坐标为　（　）

A. $\left(-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$　　B. $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2},-\frac{1}{2}\right)$

C. $\left(-\frac{1}{2},-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$　　D. $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2}\right)$

2. 已知 $P(3,y)$ 在角 α 的终边上，且满足 $y<0$，$\cos\alpha=\frac{3}{5}$，则 $\sin\alpha$ 的值为　（　）

A. $\frac{4}{5}$　　B. $-\frac{4}{5}$

C. $-\frac{3}{5}$　　D. $\frac{3}{5}$

3. 设 α 是第二象限角，且 $\left|\cos\frac{\alpha}{2}\right|=-\cos\frac{\alpha}{2}$，则角 $\frac{\alpha}{2}$ 的终边落在　（　）

A. 第一象限　　B. 第二象限

C. 第三象限　　D. 第四象限

4. 给出以下命题：

①存在函数 $f(x)$，对于其定义域中的某个自变量 x_0，使 $f(x_0+T)=f(x_0)$，则 $f(x)$ 为周期函数；

②存在实数 T，使得对 $f(x)$ 定义域内的任意一个 x，都有 $f(x+T)=f(x)$，则 $f(x)$ 为周期函数；

③周期函数的周期是唯一的；

④周期函数 $f(x)$ 的定义域可以为 (a,b)，其中 a,b 均为实常数.

其中正确的个数有　（　）

A. 0　　B. 1

C. 2　　D. 3

微信公众号 教辅资料站

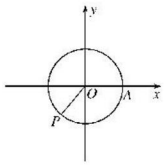
关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

学习札记

二、填空题

5. 若点$(a,9)$在函数$y=3^x$的图像上，则$\sin\frac{a\pi}{6}=$_____.

6. 如图，动点从$A(1,0)$出发，逆时针旋转到$P\left(-\frac{\sqrt{3}}{3},-\frac{\sqrt{6}}{3}\right)$，则以$OP$为终边的角$\alpha$的余弦值为_____.



7. 已知角α的终边经过点$P(-\sqrt{3},y)(y\neq0)$，且$\sin\alpha=\frac{\sqrt{2}}{4}y$，则$\cos\alpha=$_____.

三、解答题

8. (1)已知角α的终边过点$P(1,2)$，求$\sqrt{5}\sin\alpha+\frac{\sqrt{5}}{2}\cos\alpha$的值；

(2)若角α的终边在直线$y=2x$上，求$\sin\alpha,\cos\alpha$的值.

9. 设θ为锐角，利用三角函数的定义证明：$1<\sin\theta+\cos\theta\leqslant\sqrt{2}$.

微信公众号
教辅资料站

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

学习札记

4.3　单位圆与正弦函数、余弦函数的基本性质
4.4　单位圆的对称性与诱导公式

1 基础知识点对点

知识点一　给角求值

1. $\sin585°$的值为（　　）

A. $-\frac{\sqrt{2}}{2}$　　B. $\frac{\sqrt{2}}{2}$

C. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$　　D. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

2. $\cos\left(-\frac{20}{3}\pi\right)=$（　　）

A. $\frac{1}{2}$　　B. $-\frac{1}{2}$

C. $\frac{\sqrt{3}}{2}$　　D. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

知识点二　给值求值

3. 若$\sin\left(\frac{\pi}{6}+\alpha\right)=\frac{3}{5}$，则$\cos\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)=$（　　）

A. $-\frac{3}{5}$　　B. $\frac{3}{5}$

C. $\frac{4}{5}$　　D. $-\frac{4}{5}$

4. 若$\sin(\pi-\alpha)=\log_8\frac{1}{4}$，则$\sin(4\pi-\alpha)$的值为（　　）

A. $\frac{\sqrt{5}}{3}$　　B. $-\frac{\sqrt{5}}{3}$

C. $\frac{2}{3}$　　D. $-\frac{2}{3}$

知识点三　化简求值

5. 已知$f(\alpha)=\dfrac{\sin(\alpha-3\pi)\cos(2\pi-\alpha)\sin\left(-\alpha+\frac{3}{2}\pi\right)}{\cos(-\pi-\alpha)\sin(-\pi-\alpha)}$.

(1)化简$f(\alpha)$；

(2)若α是第三象限角，且$\cos\left(\alpha-\frac{3}{2}\pi\right)=\frac{1}{5}$，求$f(\alpha)$的值.

2 课后拔高提能练

一、选择题

1. 已知$\cos(\alpha+\pi)=-\frac{1}{2}$，则$\dfrac{1}{\cos(-\alpha+3\pi)}=$（　　）

A. $\frac{2\sqrt{3}}{2}$　　B. -2

C. $-\frac{2\sqrt{3}}{3}$　　D. ±2

2. 已知$\cos\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)=-\frac{1}{2}$，则$\sin\left(\frac{9\pi}{4}-\alpha\right)$的值为（　　）

A. $\frac{1}{2}$　　B. $-\frac{1}{2}$

C. $-\frac{\sqrt{2}}{2}$　　D. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

3. 若$\sin(3\pi+\alpha)=-\frac{1}{2}$，则$\cos\left(\frac{7}{2}\pi-\alpha\right)$等于（　　）

A. $-\frac{1}{2}$　　B. $\frac{1}{2}$

C. $\frac{\sqrt{3}}{2}$　　D. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

4. 已知$\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{3}$，则$\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)$的值为（　　）

A. $-\frac{2\sqrt{3}}{3}$　　B. $\frac{2\sqrt{3}}{3}$

C. $\frac{1}{3}$　　D. $-\frac{1}{3}$

二、填空题

5. 已知$f(x)=\begin{cases}\cos\pi x, x<1,\\ f(x-1)-1, x>1,\end{cases}$则$f\left(\frac{1}{3}\right)+f\left(\frac{4}{3}\right)$的值是_____.

6. **(2017·北京卷)**在平面直角坐标系xOy中，角α与角β均以Ox为始边，它们的终边关于y轴对称，若$\sin\alpha=\frac{1}{3}$，则$\sin\beta=$_____.

微信公众号 教辅资料站

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

学习札记

7. 设 A,B,C 是三角形的三个内角，

①$\sin(A+B)-\sin C$；

②$\cos(A+B)+\cos C$；

③$\dfrac{\sin(A+B)}{\cos(A+B)}+\dfrac{\sin C}{\cos C}$.

以上三个式子中，值为常数的有_____.（把你认为正确命题的序号都填上）

三、解答题

8. 化简：

(1)$\dfrac{\cos(2\pi+\alpha)\sin(4\pi-\alpha)}{\sin(\alpha-2\pi)\cos(-\alpha)}$；

(2)$\dfrac{\sin(2\pi+\alpha)\cos(\pi-\alpha)\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right)\cos\left(\dfrac{7\pi}{2}-\alpha\right)}{\cos(\pi+\alpha)\sin(3\pi-\alpha)\sin(-\pi+\alpha)\sin\left(\dfrac{5\pi}{2}+\alpha\right)}$.

9. 已知 $\cos(\pi+\alpha)=-\dfrac{1}{2}$，计算：

$\dfrac{\sin[\alpha+(2n+1)\pi]+\sin[\alpha-(2n+1)\pi]}{\sin(\alpha+2n\pi)\cos(\alpha-2n\pi)}(n\in\mathbf{Z})$.

微信公众号
教辅资料站

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

学习札记

§5　正弦函数的图像与性质

5.1　正弦函数的图像

1 基础知识点对点

知识点一　五点法作正弦曲线

1. 用五点法画 $y=\sin x, x\in[0,2\pi]$ 的图像时，下列哪个点不是关键点　　(　　)

A. $\left(\frac{\pi}{6},\frac{1}{2}\right)$　　B. $\left(\frac{\pi}{2},1\right)$

C. $(\pi,0)$　　D. $(2\pi,0)$

2. 用“五点法”作 $y=2\sin 2x$ 的图像时，首先描出的五个点的横坐标是　　(　　)

A. $0,\frac{\pi}{2},\pi,\frac{3}{2}\pi,2\pi$　　B. $0,\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2},\frac{3}{4}\pi,\pi$

C. $0,\pi,2\pi,3\pi,4\pi$　　D. $0,\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{2},\frac{2}{3}\pi$

知识点二　$y=\sin x$ 的图像

3. 以下对正弦函数 $y=\sin x$ 的图像描述不正确的是　　(　　)

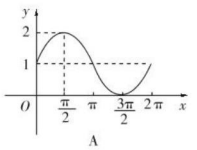
A. 在 $x\in[2k\pi,2k\pi+2\pi](k\in\mathbf{Z})$ 上的图像形状相同，只是位置不同

B. 介于直线 $y=1$ 与 $y=-1$ 之间

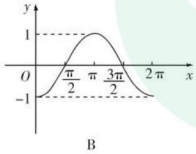
C. 关于 x 轴对称

D. 与 y 轴只有一个交点

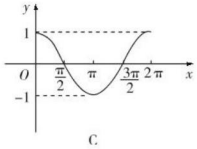
4. 函数 $y=1-\sin x, x\in[0,2\pi]$ 的大致图像是　　(　　)



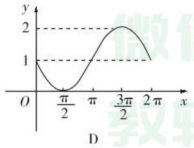
A



B



C



D

知识点三　$y=\sin x$ 的图像的应用

5. 求 $y=\sqrt{2\sin x+1}$ 的定义域.

2 课后拔高提能练

一、选择题

1. 下列函数图像相同的是　　(　　)

A. $y=\sin x$ 与 $y=\sin(\pi-x)$

B. $y=|\sin x|$ 与 $y=\sin|x|$

C. $y=\sin x$ 与 $y=\sin(-x)$

D. $y=\sin x$ 与 $y=\sin(2\pi-x)$

2. 函数 $y=1+\sin x, x\in[0,2\pi]$ 的图像与直线 $y=\frac{3}{2}$ 的交点个数为　　(　　)

A. 1 个　　B. 2 个

C. 3 个　　D. 0 个

3. 对于任意实数 x，都有 $2-\sin x>a$，则实数 a 的取值范围是　　(　　)

A. $(-\infty,1)$　　B. $(-\infty,1]$

C. $(-1,1)$　　D. $[-1,1]$

4. 已知函数 $y=2\sin x\left(\frac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant\frac{5\pi}{2}\right)$ 的图像与直线 $y=2$ 围成一个封闭的平面图形，那么此封闭图形的面积为　　(　　)

A. 4　　B. 8

C. 4π　　D. 2π

微信公众号 教辅资料站

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

学习札记

二、填空题

5. 函数 $y=-2\sin x$ 在区间 $[0,2\pi]$ 的图像上最高点的坐标是_____.

6. 函数 $y=\sqrt{2\sin x-1}$ 的定义域为_____.

7. 不等式 $\sin x\geqslant\frac{\sqrt{2}}{2}$ 的解集是_____.

三、解答题

8. (1)请补充完整下面用“五点法”作 $y=-\sin x(0\leqslant x\leqslant 2\pi)$ 的图像时的列表.

x	0	$\frac{\pi}{2}$	③	④	2π
$-\sin x$	①	②	0	1	⑤

①_____;②_____;③_____;

④_____;⑤_____.

(2)请利用“五点法”画出函数 $y=2\sin x$ 在区间 $[0,2\pi]$ 上的简图.

9. 函数 $f(x)=\sin x+2|\sin x|$, $x\in[0,2\pi]$ 的图像与直线 $y=k$ 有且仅有两个不同的交点,求实数 k 的取值范围.

微信公众号
教辅资料站

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

学习札记

5.2　正弦函数的性质

1 基础知识点对点

知识点一　奇偶性

1. 使函数 $f(x)=\sin(x+\varphi)$ 为奇函数的 φ 的可能值是　（　）

A. $\frac{\pi}{4}$　　B. $\frac{\pi}{2}$

C. π　　D. $\frac{3\pi}{2}$

2. 定义在 **R** 上的函数 $f(x)$ 既是偶函数，又是周期函数，若 $f(x)$ 的最小正周期为 π，且当 $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 时，$f(x)=\sin x$，则 $f\left(\frac{5\pi}{3}\right)$ 等于　（　）

A. $-\frac{1}{2}$　　B. $\frac{1}{2}$

C. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$　　D. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

知识点二　单调性

3. 下列关系中正确的是　（　）

A. $\sin11^\circ<\cos10^\circ<\sin168^\circ$

B. $\sin168^\circ<\sin11^\circ<\cos10^\circ$

C. $\sin11^\circ<\sin168^\circ<\cos10^\circ$

D. $\sin168^\circ<\cos10^\circ<\sin11^\circ$

4. $y=\sin x,x\in[-3\pi,-\pi]$ 的单调性是　（　）

A. 在 $[-3\pi,-2\pi]$ 上是增加的，在 $[-2\pi,-\pi]$ 上是减少的

B. 在 $\left[-3\pi,-\frac{5\pi}{2}\right]$ 和 $\left[-\frac{3\pi}{2},-\pi\right]$ 上是减少的，在 $\left[-\frac{5\pi}{2},-\frac{3\pi}{2}\right]$ 上是增加的

C. 在 $\left[-3\pi,-\frac{5\pi}{2}\right]$ 上是减少的，在 $\left[-\frac{5\pi}{2},-\pi\right]$ 上是增加的

D. 在 $\left[-3\pi,-\frac{3\pi}{2}\right]$ 上是增加的，在 $\left[-\frac{3\pi}{2},-\pi\right]$ 上是减少的

知识点三　值域

5. 求下列函数的值域：

(1) $y=3-2\sin x$；

(2) $y=\sin^2x-\sin x+1,x\in\left[\frac{\pi}{3},\frac{3\pi}{4}\right]$.

2 课后拔高提能练

一、选择题

1. 函数 $y=1-\sin x$ 在下列哪个区间上是减函数　（　）

A. $\left[\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right]$　　B. $\left[\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4}\right]$

C. $\left[\frac{\pi}{4},\frac{5\pi}{4}\right]$　　D. $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$

2. 函数 $y=\sin x\left(\frac{\pi}{6}\leqslant x\leqslant\frac{2\pi}{3}\right)$ 的值域是　（　）

A. $[-1,1]$　　B. $\left[\frac{1}{2},1\right]$

C. $\left[\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right]$　　D. $\left[\frac{\sqrt{3}}{2},1\right]$

3. 函数 $y=\sin^2x-3\sin x+2$ 的最小值为　（　）

A. 2　　B. 0

C. $-\frac{1}{4}$　　D. 6

微信公众号 教辅资料站

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

学习札记

4. 设 $f(x)=x\cdot\sin x$，若 $x_1,x_2\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$，且 $f(x_1)>f(x_2)$，则下列结论中，必成立的是（　　）

A. $x_1>x_2$　　B. $x_1+x_2>0$

C. $x_1<x_2$　　D. $x_1^2>x_2^2$

二、填空题

5. 函数 $f(x)=\sqrt{2}|\sin x|$ 的最小正周期是_____.

6. 已知 $a\in\mathbf{R}$，函数 $f(x)=\sin x-|a|(x\in\mathbf{R})$ 为奇函数，则 a 的值为_____.

7. 函数 $y=\sin x$ 在 $\left[\frac{3\pi}{2},a\right]$ 上是增加的，则 a 的取值范围是_____.

三、解答题

8. 已知函数 $f(x)=3\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)+1$.

(1)写出该函数的单调区间；

(2)求该函数的对称轴及对称中心.

9. 求 $y=\sin 2x+1$，$x\in\left[-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3}\right]$ 的最值以及取得最值时 x 的值.

微信公众号
教辅资料站

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

学习札记

§6　余弦函数的图像与性质

1 基础知识点对点

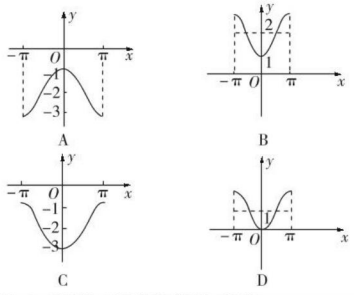
知识点一　余弦函数的图像

1. 对于余弦函数 $y=\cos x$ 的图像，有以下描述：①在原点两侧向左、右无限伸展；②与 $y=\sin x$ 图像形状完全一样，只是位置不同；③与 x 轴有无数个交点；④关于 y 轴对称. 其中正确的描述有　　(　　)

A. 1 项　　B. 2 项

C. 3 项　　D. 4 项

2. 函数 $y=\cos x-2$ 在 $x\in[-\pi,\pi]$ 上的图像是(　　)



知识点二　余弦函数的定义域、值域

3. 函数 $y=\sqrt{2\cos x+1}$ 的定义域是　　(　　)

A. $\left[2k\pi-\frac{\pi}{3},2k\pi+\frac{\pi}{3}\right](k\in\mathbf{Z})$

B. $\left[2k\pi-\frac{\pi}{6},2k\pi+\frac{\pi}{6}\right](k\in\mathbf{Z})$

C. $\left[2k\pi+\frac{\pi}{3},2k\pi+\frac{2\pi}{3}\right](k\in\mathbf{Z})$

D. $\left[2k\pi-\frac{2\pi}{3},2k\pi+\frac{2\pi}{3}\right](k\in\mathbf{Z})$

4. 函数 $y=-3\cos x+2$ 的值域是　　(　　)

A. $[-1,5]$　　B. $[-5,1]$

C. $[-1,1]$　　D. $[-3,1]$

知识点三　余弦函数的单调性

5. 已知 $0\leqslant x\leqslant 2\pi$，若 $y=\sin x$ 和 $y=\cos x$ 都是减少的，则角 x 的集合是　　(　　)

A. $\left\{x\left|0\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2}\right.\right\}$　　B. $\left\{x\left|\frac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant\pi\right.\right\}$

C. $\left\{x\left|\pi\leqslant x\leqslant\frac{3\pi}{2}\right.\right\}$　　D. $\left\{x\left|\frac{3\pi}{2}\leqslant x\leqslant 2\pi\right.\right\}$

2 课后拔高提能练

一、选择题

1. 已知函数 $f(x)=\sin\left(2x+\frac{3\pi}{2}\right)(x\in\mathbf{R})$，下面结论错误的是　　(　　)

A. 函数 $f(x)$ 的最小正周期为 π

B. 函数 $f(x)$ 是偶函数

C. 函数 $f(x)$ 的图象关于直线 $x=\frac{\pi}{4}$ 对称

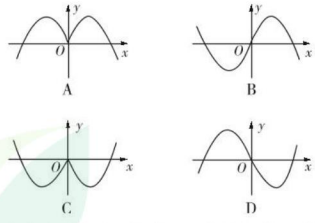
D. 函数 $f(x)$ 在区间 $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 上是增函数

2. (2017 · 全国卷Ⅲ) 函数 $f(x)=\frac{1}{5}\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)+\cos\left(x-\frac{\pi}{6}\right)$ 的最大值为　　(　　)

A. $\frac{6}{5}$　　B. 1

C. $\frac{3}{5}$　　D. $\frac{1}{5}$

3. 函数 $y=-x\cos x$ 的图像大致是图中的　　(　　)



4. 在 $(0,2\pi)$ 内，使 $\sin x>|\cos x|$ 成立的 x 的取值范围是　　(　　)

A. $\left(\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4}\right)$

B. $\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right)\cup\left(\frac{5\pi}{4},\frac{3\pi}{2}\right)$

C. $\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right)$

D. $\left(\frac{5\pi}{4},\frac{7\pi}{4}\right)$

微信公众号 教辅资料站

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

学习札记

二、填空题

5. 若方程 $2\cos x+1=3m$ 有解，则实数 m 的取值范围是_____.

6. **(2018·北京卷)** 设函数 $f(x)=\cos\left(\omega x-\frac{\pi}{6}\right)(\omega>0)$，若 $f(x)\leqslant f\left(\frac{\pi}{4}\right)$ 对任意的实数 x 都成立，则 ω 的最小值为_____.

7. 函数 $y=\cos x$ 在区间 $[-\pi,a]$ 上为增函数，则 a 的取值范围为_____.

三、解答题

8. 已知函数 $f(x)=2\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$.

(1)求函数 $f(x)$ 的单调区间；

(2)求当 $x\in[0,\pi]$ 时，$f(x)$ 的值域.

9. 函数 $f(x)$ 是定义在 $[-2\pi,2\pi]$ 上的偶函数，当 $x\in[0,\pi]$ 时，$f(x)=\cos x$；当 $x\in(\pi,2\pi]$ 时，$f(x)$ 的图像是斜率为 $\frac{2}{\pi}$，在 y 轴上截距为 -2 的直线在相应区间上的部分.

(1)求 $f(-2\pi)$，$f\left(-\frac{\pi}{3}\right)$ 的值；

(2)求 $f(x)$ 的解析式，并作出图像，写出其单调区间.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

学习札记

§7　正切函数

7.1　正切函数的定义

7.2　正切函数的图像与性质

1 基础知识点对点

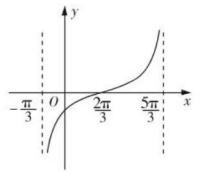
知识点一　正切函数的定义与图像

1. 已知 $P(x,3)$ 是角 θ 终边上一点，且 $\tan\theta=-\frac{\sqrt{3}}{5}$，则 x 的值为　（　）

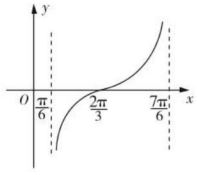
A. $\sqrt{3}$　　B. 5

C. $-\sqrt{3}$　　D. $-5\sqrt{3}$

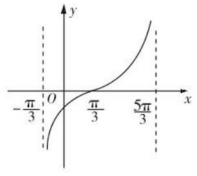
2. 函数 $y=\tan\left(\frac{1}{2}x-\frac{\pi}{3}\right)$ 在一个周期内的图像是　（　）



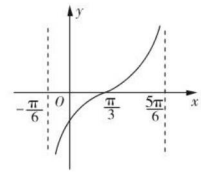
A



B



C



D

知识点二　与正切函数相关的范围问题

3. 在 $(0,2\pi)$ 内，使 $\tan x>1$ 成立的 x 的取值范围是　（　）

A. $\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right)\cup\left(\pi,\frac{5\pi}{4}\right)$　　B. $\left(\frac{\pi}{4},\pi\right)$

C. $\left(\frac{\pi}{4},\frac{5\pi}{4}\right)$　　D. $\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right)\cup\left(\frac{5\pi}{4},\frac{3\pi}{2}\right)$

4. 函数 $y=\tan\left(\frac{\pi}{4}-x\right)$ 的定义域是　（　）

A. $\left\{x\,\middle|\,x\in\mathbf{R},x\neq\frac{\pi}{4}\right\}$

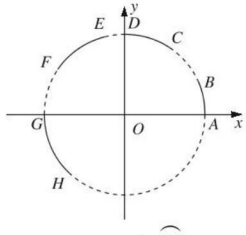
B. $\left\{x\,\middle|\,x\in\mathbf{R},x\neq-\frac{\pi}{4}\right\}$

C. $\left\{x\,\middle|\,x\in\mathbf{R},x\neq k\pi+\frac{\pi}{4},k\in\mathbf{Z}\right\}$

D. $\left\{x\,\middle|\,x\in\mathbf{R},x\neq k\pi+\frac{3}{4}\pi,k\in\mathbf{Z}\right\}$

知识点三　正切函数的单调性的应用

5. **(2018·北京卷)** 在平面直角坐标系中，$\overset{\frown}{AB}$，$\overset{\frown}{CD}$，$\overset{\frown}{EF}$，$\overset{\frown}{GH}$ 是圆 $x^2+y^2=1$ 上的四段弧(如图)，点 P 在其中一段上，角 α 以 Ox 为始边，OP 为终边，若 $\tan\alpha<\cos\alpha<\sin\alpha$，则 P 所在的圆弧是　（　）



A. $\overset{\frown}{AB}$　　B. $\overset{\frown}{CD}$

C. $\overset{\frown}{EF}$　　D. $\overset{\frown}{GH}$

2 课后拔高提能练

一、选择题

1. 正切函数 $y=\tan x$ 在定义域上的单调性为　（　）

A. 在整个定义域上为增函数

B. 在整个定义域上为减函数

C. 在每一个开区间 $\left(-\frac{\pi}{2}+k\pi,\frac{\pi}{2}+k\pi\right)(k\in\mathbf{Z})$ 上为增函数

D. 在每一个开区间 $\left(-\frac{\pi}{2}+2k\pi,\frac{\pi}{2}+2k\pi\right)(k\in\mathbf{Z})$ 上为增函数

2. 函数 $y=\tan x,x\in\left(-\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{4}\right]$ 的值域是　（　）

A. $(-\infty,1]$　　B. $(-\sqrt{3},1]$

C. $\mathbf{R}$　　D. $(\sqrt{3},+\infty)$

3. 若 $f(x)=x^2+(2\tan\theta)x-1$ 在 $[-1,\sqrt{3}]$ 上为减函数，则 θ 的取值范围是　（　）

A. $\left(-\frac{\pi}{2}+k\pi,-\frac{\pi}{3}+k\pi\right](k\in\mathbf{Z})$

B. $\left[\frac{\pi}{3}+k\pi,\frac{\pi}{2}+k\pi\right)(k\in\mathbf{Z})$

C. $\left(-\frac{\pi}{2}+k\pi,-\frac{\pi}{4}+k\pi\right](k\in\mathbf{Z})$

D. $\left[\frac{\pi}{4}+k\pi,\frac{\pi}{2}+k\pi\right)(k\in\mathbf{Z})$

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

学习札记

4. 已知函数 $f(x)=\tan\left(\frac{\pi}{3}-2x\right)$，下列判断正确的是（　　）

A. $f(x)$是定义域上的增函数，且周期是$\frac{\pi}{2}$

B. $f(x)$在$\left(k\pi-\frac{\pi}{2},k\pi+\frac{\pi}{2}\right)(k\in\mathbf{Z})$上是增函数，且周期是$2\pi$

C. $f(x)$在$\left(-\frac{\pi}{12},\frac{5\pi}{12}\right)$上是减函数，且周期是$\frac{\pi}{2}$

D. $f(x)$在$\left(\frac{5\pi}{12},\frac{11\pi}{12}\right)$上是减函数，且周期是$2\pi$

二、填空题

5. 函数$y=\tan\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{3}\right)$的增区间为_____.

6. 函数$y=\sqrt{\sqrt{3}-\tan x}$的定义域为_____，值域为_____.

7. 直线$y=a$(a为常数)与正切曲线$y=\tan\omega x$(ω为常数，且$\omega>0$)相交，则两相邻交点间的距离是_____.

三、解答题

8. 求函数$y=\tan\left(4x-\frac{\pi}{3}\right)$的定义域、值域，指出它的周期性、奇偶性和图像的对称中心.

9. 若函数$f(x)=\tan^2x-a\tan x\left(|x|\leqslant\frac{\pi}{4}\right)$的最小值为$-6$，求实数$a$的值.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

学习札记

7.3　正切函数的诱导公式

1 基础知识点对点

知识点一　利用诱导公式求值

1. $\tan\left(-\frac{7\pi}{3}\right)$的值为　　(　　)

A. $\frac{\sqrt{3}}{3}$　　B. $-\frac{\sqrt{3}}{3}$

C. $\sqrt{3}$　　D. $-\sqrt{3}$

2. $2\sin(-600°)+\sqrt{3}\tan(-855°)$的值为　　(　　)

A. $\frac{\sqrt{3}}{2}$　　B. 1

C. $2\sqrt{3}$　　D. 0

知识点二　三角函数之间关系应用

3. 已知 $\cos(3\pi-x)=\frac{3}{5}$，$x\in(\pi,2\pi)$，那么 $\tan x=$ (　　)

A. $-\frac{3}{4}$　　B. $-\frac{4}{3}$

C. $\frac{3}{4}$　　D. $\frac{4}{3}$

4. 已知 $a=\tan\left(-\frac{7\pi}{6}\right)$，$b=\cos\frac{33\pi}{4}$，$c=\sin\left(-\frac{33\pi}{4}\right)$，则 a，b，c 的大小关系是　　(　　)

A. $b>a>c$　　B. $a>b>c$

C. $b>c>a$　　D. $a>c>b$

知识点三　利用诱导公式化简

5. 已知 $f(\alpha)=\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)\sin\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)}{\cos(-\pi-\alpha)\tan(\pi-\alpha)}$，求 $f\left(-\frac{25\pi}{3}\right)$的值.

2 课后拔高提能练

一、选择题

1. $\sin600°+\tan240°$的值是　　(　　)

A. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$　　B. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

C. $-\frac{1}{2}+\sqrt{3}$　　D. $\frac{1}{2}+\sqrt{3}$

2. 已知 $\tan\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)=2$，则 $\tan\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)$的值为(　　)

A. 2　　B. -2

C. $\frac{1}{2}$　　D. $-\frac{1}{2}$

3. 化简$\frac{\sin(\theta-5\pi)}{\tan(3\pi-\theta)}\cdot\frac{\cot\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)}{\cos\left(\frac{3\pi}{2}+\theta\right)}$的结果是　　(　　)

A. 0　　B. $\sin\theta$

C. -1　　D. 1

4. 设 $\tan(5\pi+\alpha)=m$，则$\frac{\sin(\alpha-3\pi)+\cos(\pi-\alpha)}{\sin(-\alpha)-\cos(\pi+\alpha)}$的值为　　(　　)

A. $\frac{m+1}{m-1}$　　B. $\frac{m-1}{m+1}$

C. -1　　D. 1

二、填空题

5. 下列各函数值：①$\tan2$；②$\tan(-10)$；③$\frac{\sin\frac{7\pi}{10}\cos\pi}{\tan\frac{17\pi}{9}}$；④$\tan2\ 012°$，其中符号为负的有_____(只填序号).

6. $\sin\frac{4\pi}{3}\cos\frac{25\pi}{6}\tan\frac{5\pi}{4}$的值为_____.

7. 设 $a=\tan735°$，$b=\tan556°$，$c=\tan(-343°)$，则 a，b，c 的大小关系为_____.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

学习札记

三、解答题

8. 化简：

(1) $\dfrac{\tan(540^\circ-\alpha)\tan(\alpha-270^\circ)\tan(\alpha+180^\circ)}{\tan(\alpha-180^\circ)\tan(810^\circ+\alpha)\tan(-\alpha-360^\circ)}$；

(2) $\dfrac{\tan(2k\pi-\alpha)\tan(2\,017\pi+\alpha)}{\tan(-\pi+\alpha)\tan[(2k+1)\pi-\alpha]\tan(-\alpha-\pi)}$

($k\in\mathbf{Z}$).

9. 已知 $\tan(\pi+\alpha)=-2$，求 $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha-3\sin\alpha+4\cos\alpha$ 的值.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

学习札记

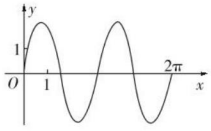
§8　函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$的图像与性质

第一课时　函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$的图像与性质(一)

1 基础知识点对点

知识点一　“五点法”作 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$的图像

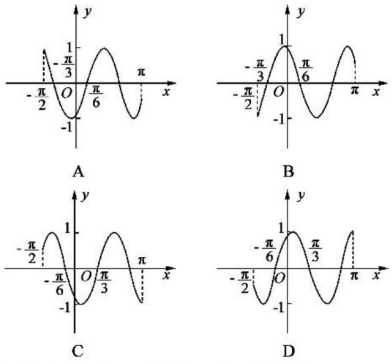
1. 已知函数 $y=2\sin(\omega x+\varphi)(\omega>0)$在区间$[0,2\pi]$的图像如图所示，那么 $\omega=$　(　)



A. 1　　B. 2

C. $\frac{1}{2}$　　D. $\frac{1}{3}$

2. 函数 $y=\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)$在区间$\left[-\frac{\pi}{2},\pi\right]$上的简图是　(　)



知识点二　函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$的变换

3. 为了得到函数 $y=\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$的图像，只需把函数 $y=\sin x$ 的图像上所有的点　(　)

A. 向左平行移动$\frac{\pi}{3}$个单位长度

B. 向右平行移动$\frac{\pi}{3}$个单位长度

C. 向上平行移动$\frac{\pi}{3}$个单位长度

D. 向下平行移动$\frac{\pi}{3}$个单位长度

4. 有下列四种变换方式：

(1)向左平移$\frac{\pi}{4}$，再将横坐标变为原来的$\frac{1}{2}$；(2)横坐标变为原来的$\frac{1}{2}$，再向左平移$\frac{\pi}{8}$；(3)横坐标变为原来的$\frac{1}{2}$，再向左平移$\frac{\pi}{4}$；(4)向左平移$\frac{\pi}{8}$，再将横坐标变为原来的$\frac{1}{2}$.

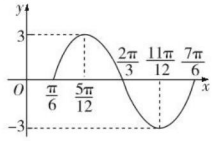
其中能将正弦曲线 $y=\sin x$ 的图像变为 $y=\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)$的图像的是　(　)

A. (1)和(2)　　B. (1)和(3)

C. (2)和(3)　　D. (2)和(4)

知识点三　已知 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$的图像求解析式

5. 如图所示，函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)(A>0,\omega>0)$的图像上相邻的最高点与最低点的坐标分别为$\left(\frac{5\pi}{12},3\right)$和$\left(\frac{11\pi}{12},-3\right)$，求该函数的解析式.



2 课后拔高提能练

一、选择题

1. 函数 $y=\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$图像的对称轴方程可能是　(　)

A. $x=-\frac{\pi}{6}$　　B. $x=-\frac{\pi}{12}$

C. $x=\frac{\pi}{6}$　　D. $x=\frac{\pi}{12}$

2. 若将函数 $y=2\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$的图像向右平移$\frac{1}{4}$个周期后，所得图像对应的函数为　(　)

A. $y=2\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)$　　B. $y=2\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$

C. $y=2\sin\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)$　　D. $y=2\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)$

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

学习札记

3. 函数 $f(x)=\sin(\omega x+\varphi)$ 的图像上所有的点向左平移 $\frac{\pi}{2}$ 个单位长度. 若所得图像与原图像重合，则 ω 的值不可能等于　（　）

A. 4　　B. 6

C. 8　　D. 12

4. 要得到函数 $y=\cos\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{4}\right)$ 的图像，只需将 $y=\sin\frac{x}{2}$ 的图像上所有的点　（　）

A. 向右平移 $\frac{\pi}{2}$ 个单位长度

B. 向右平移 $\frac{\pi}{4}$ 个单位长度

C. 向左平移 $\frac{\pi}{2}$ 个单位长度

D. 向左平移 $\frac{\pi}{4}$ 个单位长度

二、填空题

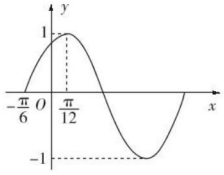
5. 把函数 $y=3\sin 2x$ 的图像向左平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位得到图像的函数解析式是_____.

6. 设 $\omega>0$，将函数 $y=\sin\left(\omega x+\frac{\pi}{3}\right)$ 的图像向左平移 $\frac{2\pi}{3}$ 个单位后与原图像重合，则 ω 的最小值为_____.

7. 将函数 $f(x)$ 的图像上所有点的横坐标缩短为原来的 $\frac{1}{2}$ 倍（纵坐标不变），再把所得的图像向右平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度，得到 $y=\sin x$ 的图像，则 $f(x)$ 的解析式为 $f(x)=$_____.

三、解答题

8. 已知函数 $f(x)=A\sin(\omega x+\varphi)\left(A>0,\omega>0,-\frac{\pi}{2}<\varphi<\frac{\pi}{2}\right)$ 一个周期的图像如图所示.



(1) 求函数 $f(x)$ 的最小正周期 T 及最大值、最小值；

(2) 求函数 $f(x)$ 的表达式、递增区间.

9. 已知 $f(x)=A\sin(\omega x+\varphi)+1\left(x\in\mathbf{R},A>0,\omega>0,0<\varphi<\frac{\pi}{2}\right)$ 的周期为 π，且图像上的一个最低点为 $M\left(\frac{2\pi}{3},-1\right)$.

(1) 求 $f(x)$ 的解析式；

(2) 已知 $f\left(\frac{\alpha}{2}\right)=\frac{1}{3},\alpha\in[0,\pi]$，求 $\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)$ 的值.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

学习札记

第二课时　函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ 的图像与性质(二)

1 基础知识点对点

知识点一　$y=A\sin(\omega x+\varphi)$ 的值域

1. 函数 $f(x)=3\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)$，$x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 的值域为　(　)

A. $\left(-\frac{3}{2},\frac{3}{2}\right)$　　B. $\left[-\frac{3}{2},3\right]$

C. $\left[-\frac{3}{2},\frac{3}{2}\right]$　　D. $[-3,3]$

2. 函数 $y=1-2\cos\frac{\pi}{2}x$ 在区间 $\left[0,\frac{4}{3}\right]$ 上的最小值和最大值分别是　(　)

A. $-1,3$　　B. $-1,2$

C. $0,3$　　D. $0,2$

知识点二　$y=A\sin(\omega x+\varphi)$ 的对称轴、对称中心

3. 函数 $y=\sin\left(3x-\frac{\pi}{4}\right)$ 图像的一个对称中心的坐标为　(　)

A. $\left(-\frac{\pi}{12},0\right)$　　B. $\left(\frac{7\pi}{12},0\right)$

C. $\left(-\frac{7\pi}{12},0\right)$　　D. $\left(\frac{11\pi}{12},0\right)$

4. 已知函数 $f(x)=\sin\left(\omega x+\frac{\pi}{4}\right)(\omega>0)$ 的最小正周期为 π，则该函数的图像　(　)

A. 关于点 $\left(\frac{\pi}{4},0\right)$ 对称

B. 关于直线 $x=\frac{\pi}{8}$ 对称

C. 关于点 $\left(\frac{\pi}{8},0\right)$ 对称

D. 关于直线 $x=\frac{\pi}{4}$ 对称

知识点三　$y=A\sin(\omega x+\varphi)$ 的单调区间

5. 求函数 $y=\sin\left(-2x+\frac{\pi}{6}\right)$ 的单调区间.

2 课后拔高提能练

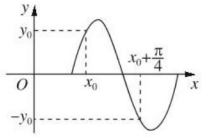
一、选择题

1. 已知简谐振动 $y=2\sin\left(\frac{\pi}{3}x+\varphi\right)\left(|\varphi|<\frac{\pi}{2}\right)$ 的图像过点 $(0,1)$，则该简谐运动的最小正周期 T 和初相 φ 分别为　(　)

A. $T=6,\varphi=\frac{\pi}{6}$　　B. $T=6,\varphi=\frac{\pi}{3}$

C. $T=6\pi,\varphi=\frac{\pi}{6}$　　D. $T=6\pi,\varphi=\frac{\pi}{3}$

2. 若函数 $y=\sin(\omega x+\varphi)(\omega>0)$ 的部分图像如图所示，则 ω 等于　(　)



A. 5　　B. 4

C. 3　　D. 2

3. **(2018·天津卷)** 将函数 $y=\sin\left(2x+\frac{\pi}{5}\right)$ 的图像向右平移 $\frac{\pi}{10}$ 个单位长度，所得图像对应的函数　(　)

A. 在区间 $\left[\frac{3\pi}{4},\frac{5\pi}{4}\right]$ 上单调递增

B. 在区间 $\left[\frac{3\pi}{4},\pi\right]$ 上单调递减

C. 在区间 $\left[\frac{5\pi}{4},\frac{3\pi}{2}\right]$ 上单调递增

D. 在区间 $\left[\frac{3\pi}{2},2\pi\right]$ 上单调递减

4. **(2017·全国卷Ⅲ)** 设函数 $f(x)=\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$，则下列结论错误的是　(　)

A. $f(x)$ 的一个周期为 -2π

B. $y=f(x)$ 的图像关于 $x=\frac{8\pi}{3}$ 对称

C. $f(x+\pi)$ 的一个零点为 $x=\frac{\pi}{6}$

D. $f(x)$ 在 $\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$ 单调递减

二、填空题

5. 若函数 $f(x)=3\cos(2x+\varphi)$ 的图像关于 $\left(\frac{4\pi}{3},0\right)$ 对称，则 $|\varphi|$ 的最小值为_____.

6. 函数 $y=\sin\left(\omega x+\frac{\pi}{4}\right)$ 的图像相邻的两条对称轴之间的距离为 $\frac{\pi}{2}$，则 $\omega=$_____.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

学习札记

7. 关于 $f(x)=3\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)$ 有以下说法：

①若 $f(x_1)=f(x_2)=0$，则 $x_1-x_2=k\pi(k\in\mathbf{Z})$；

②$f(x)$ 的图像与 $g(x)=3\cos\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)$ 的图像相同；

③$f(x)$ 在区间 $\left[-\frac{7\pi}{8},-\frac{3\pi}{8}\right]$ 上是减少的；

④$f(x)$ 的图像关于点 $\left(-\frac{\pi}{8},0\right)$ 对称.

其中正确的是_____.

三、解答题

8. 已知函数 $f(x)=A\sin(\omega x+\varphi)\left(A>0,\omega>0,0<\varphi<\frac{\pi}{2}\right)$ 图像上某个最高点坐标为 $(2,\sqrt{2})$，由此最高点到相邻的最低点间函数图像与 x 轴交于一点 $(6,0)$.

(1)求 $f(x)$ 的解析式；

(2)求使函数取最值时 x 的取值；

(3)求 $f(x)$ 的单调区间.

9. 已知函数 $f(x)=\sin(\omega x+\varphi)(\omega>0,0\leqslant\varphi\leqslant\pi)$ 是 **R** 上的偶函数，其图像关于点 $M\left(\frac{3\pi}{4},0\right)$ 对称，且在区间 $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 上是单调函数，求 φ 和 ω 的值.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

学习札记

§9　三角函数的简单应用

1 基础知识点对点

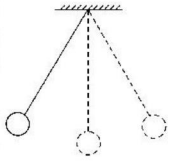
知识点一　三角函数在物理中的应用

1. 电流 I(A)随时间 t(s)变化的关系式是 $I=5\sin\left(100\pi t+\frac{\pi}{3}\right)$,则当 $t=\frac{1}{200}$时,电流 I 为(　　)

A. 5　　B. $\frac{5}{2}$

C. $-\frac{5}{2}$　　D. -5

2. 如图所示单摆从某点开始来回摆动离开平衡位置 O 的距离 s(cm)和时间 t(s)的函数关系式为 $s=6\sin\left(2\pi t+\frac{\pi}{6}\right)$,那么单摆来回摆动一次所需的时间为(　　)

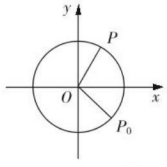


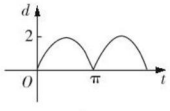
A. 2 s　　B. π s

C. 0.5 s　　D. 1 s

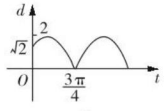
知识点二　三角函数在生产实际中的应用

3. 如图,质点 P 在半径为 2 的圆周上逆时针运动,其初始位置为 $P_0(\sqrt{2},-\sqrt{2})$,角速度为 1,那么点 P 到 x 轴距离 d 关于时间 t 的函数图像大致为(　　)

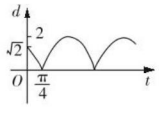




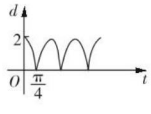
A



B

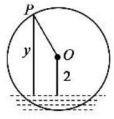


C



D

4. 如图是一半径 r 为 3 米的水轮,水轮圆心 O 距离水面 2 米,已知水轮每分钟旋转 4 圈,水轮上的点 P 到水面的距离 y(米)与时间 x(秒)满足函数关系 $y=A\sin(\omega x+\varphi)+2$,则有(　　)



A. $\omega=\frac{15}{2\pi}$,$A=3$　　B. $\omega=\frac{2\pi}{15}$,$A=3$

C. $\omega=\frac{2\pi}{15}$,$A=5$　　D. $\omega=\frac{15}{2\pi}$,$A=5$

知识点三　三角函数的综合应用

5. 动点 $A(x,y)$在圆 $x^2+y^2=1$ 上绕坐标原点沿逆时针方向匀速旋转,12 s 旋转一周.已知时间 $t=0$ 时,点 A 的坐标是 $\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$,则当 $0\leqslant t\leqslant 12$ 时,动点 A 的纵坐标 y 关于 t(单位:s)的函数的单调递增区间是(　　)

A. [0,1]　　B. [1,7]

C. [7,12]　　D. [0,1]和[7,12]

2 课后拔高提能练

一、选择题

1. 某人的血压满足函数式 $f(t)=24\sin(160\pi t)+110$,其中 $f(t)$为血压,t 为时间,则此人每分钟心跳的次数为(　　)

A. 60　　B. 70　　C. 80　　D. 90

2. 某城市 6 月份的平均气温最高为 29.45 ℃,12 月份的平均气温最低为 18.35 ℃,若 x 月份的平均气温为 y ℃,满足条件的一个模拟函数可以是(　　)

A. $y=23.9-5.55\sin\frac{\pi}{6}x$

B. $y=23.9-5.55\cos\frac{\pi}{6}x$

C. $y=23.9-5.55\tan\frac{\pi}{6}x$

D. $y=23.9+5.55\cos\frac{\pi}{6}x$

3. 若一质子做简谐振动,其解析式为 $f(x)=3\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)$,则下列判断错误的是(　　)

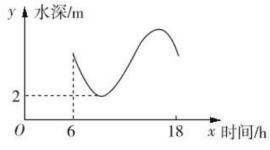
A. 函数 $f(x)$的周期为 π

B. 振幅为 3

C. 相位为 $2x+\frac{\pi}{4}$

D. 初相为 0

4. 如图,某港口一天 6 时到 18 时的水深变化曲线近似满足函数 $y=3\sin\left(\frac{\pi}{6}x+\varphi\right)+k$,据此函数可知,这段时间水深(单位:m)的最大值为(　　)



A. 5　　B. 6　　C. 8　　D. 10

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

学习札记

二、填空题

5. 已知某种交流电 I(A)随时间 t(s)的变化规律可以拟合为函数 $I=5\sqrt{2}\sin\left(100\pi t-\frac{\pi}{2}\right)$，$t\in[0,+\infty)$，则这种交变电流在 0.5 s 内往复运动的次数为_____次.

6. 国际油价在某一时间内呈现出正弦波动规律：$P=A\sin\left(\omega\pi t+\frac{\pi}{4}\right)+60$(美元)($t$(元)，$A>0$，$\omega>0$)，现采集到下列信息：最高油价 80 美元，当 $t=150$(元)时达到最低油价，则 ω 的最小值为_____.

7. 某时钟的秒针端点 A 到中心点 O 的距离为 5 cm，秒针均匀地绕点 O 旋转. 当时间 $t=0$ 时，点 A 与钟面上标 12 的点 B 重合，将 A、B 两点的距离 d(cm)表示成 t(s)的函数，则 $d=$_____，其中 $t\in[0,60]$.

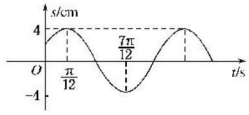
三、解答题

8. 某实验室一天的温度(单位：℃)随时间 t(单位：h)的变化近似满足函数关系：$f(t)=10-2\sin\left(\frac{\pi}{12}t+\frac{\pi}{3}\right)$，$t\in[0,24]$.

(1)求实验室这一天上午 8 时的温度；

(2)求实验室这一天的最大温差.

9. 如图，弹簧上挂的小球做上下振动时，小球离开平衡位置的距离 s(cm)随时间 t(s)的变化曲线是一个三角函数的图像.



(1)经过多长时间，小球往复振动一次？

(2)求这条曲线的函数解析式；

(3)小球在开始振动时，离开平衡位置的位移是多少？

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

学习札记

第二章　平面向量

§1　从位移、速度、力到向量

1 基础知识点对点

知识点一　向量的有关概念

1. 下列物理量：①质量；②重力；③位移；④路程；⑤力；⑥功. 其中是向量的有　　(　　)

A. 2 个　　B. 3 个

C. 4 个　　D. 5 个

2. 下列说法中错误的是　　(　　)

A. 相等向量一定是共线向量

B. 两个相等向量若起点相同，则终点必相同

C. 只有零向量的模等于 0

D. 共线的单位向量都相等

知识点二　共线向量

3. 下列说法正确的是　　(　　)

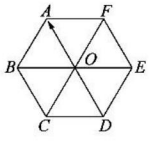
A. 向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 共线，向量 $\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{c}$ 共线，则向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{c}$ 共线

B. 向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 不共线，向量 $\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{c}$ 不共线，则向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{c}$ 不共线

C. 向量 $\overrightarrow{AB}$ 与 $\overrightarrow{CD}$ 是共线向量，则 A,B,C,D 四点可构成平行四边形

D. 向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 不共线，则 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 都是非零向量

4. 如图，点 O 是正六边形 $ABCDEF$ 的中心，则以图中点 A,B,C,D,E,F,O 中的任意一点为始点，与始点不同的另一点为终点的所有向量中，除向量 $\overrightarrow{OA}$ 外，与向量 $\overrightarrow{OA}$ 共线的向量共有　　(　　)

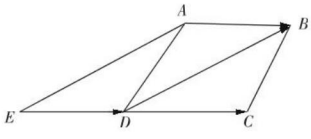


A. 6 个　　B. 7 个

C. 8 个　　D. 9 个

知识点三　相等向量

5. 如图所示，四边形 $ABCD$ 和 $ABDE$ 都是平行四边形.



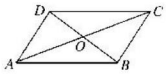
(1) 图中所标的向量中，与向量 $\overrightarrow{ED}$ 相等的向量有_____；

(2) 若 $|\overrightarrow{AB}|=3$，则向量 $|\overrightarrow{EC}|=$_____.

2 课后拔高提能练

一、选择题

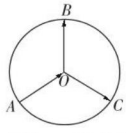
1. 已知在平行四边形 $ABCD$ 中，对角线 AC 与 BD 相交于 O 点，下列说法错误的是　　(　　)



A. $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$　　B. $\overrightarrow{AO}=\overrightarrow{OC}$

C. $\overrightarrow{BO}=\overrightarrow{OD}$　　D. $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{CB}$

2. 如图，在 $\odot O$ 中，向量 $\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OC},\overrightarrow{AO}$ 是　　(　　)



A. 有相同起点的向量　　B. 共线向量

C. 模相等的向量　　D. 相等向量

3. 给出下列六个命题：

①两个向量相等，则它们的起点相同，终点相同；

②若 $|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|$，则 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$；

③若 $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$，则 A,B,C,D 一定能构成平行四边形；

④平行四边形 $ABCD$ 中，一定有 $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$；

⑤若 $\boldsymbol{m}=\boldsymbol{n},\boldsymbol{n}=\boldsymbol{k}$，则 $\boldsymbol{m}=\boldsymbol{k}$；

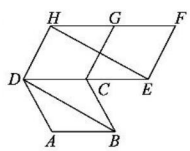
⑥若 $\boldsymbol{a}\parallel\boldsymbol{b},\boldsymbol{b}\parallel\boldsymbol{c}$，则 $\boldsymbol{a}\parallel\boldsymbol{c}$.

其中不正确的命题的个数为　　(　　)

A. 2　　B. 3

C. 4　　D. 5

4. 如图所示，四边形 $ABCD$，$CEFG$，$CGHD$ 是全等的菱形，则下列结论中不一定成立的是　　(　　)



A. $|\overrightarrow{AB}|=|\overrightarrow{EF}|$

B. $\overrightarrow{AB}$ 与 $\overrightarrow{FH}$ 共线

C. $\overrightarrow{BD}$ 与 $\overrightarrow{EH}$ 共线

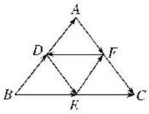
D. $\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{FG}$

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

学习札记

二、填空题

5. 在如图所示的正三角形 ABC 中，D、E、F 分别为 AB、BC、CA 的中点，在如图所示的向量中与 $\overrightarrow{DE}$ 共线的向量有_____；与 $\overrightarrow{DE}$ 长度相等的向量有_____.

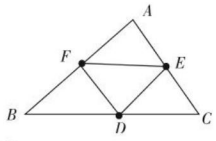


6. 下列说法：①若 $|\boldsymbol{a}|>|\boldsymbol{b}|$，则 $\boldsymbol{a}>\boldsymbol{b}$；②若 $|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|$，则 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$；③若 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$，则 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 共线；④若 $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{b}$，则 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 不共线. 其中正确的有_____(只填序号).

7. 给出下列六个命题：
①任何两个单位向量都是平行向量；
②零向量是没有方向的；
③在△ABC 中，D、E 分别是 AB、AC 的中点，则向量 $\overrightarrow{DE}$ 与 $\overrightarrow{CB}$ 是平行向量；
④对于向量 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$，若 $\boldsymbol{a}\parallel\boldsymbol{b}$，且 $\boldsymbol{b}\parallel\boldsymbol{c}$，则 $\boldsymbol{a}\parallel\boldsymbol{c}$；
⑤若非零向量 $\overrightarrow{AB}$ 与 $\overrightarrow{CD}$ 是平行向量，则直线 AB 与直线 CD 平行；
⑥非零向量 $\overrightarrow{AB}$ 与 $\overrightarrow{BA}$ 是模相等的平行向量.
其中正确的命题是_____(填序号即可).

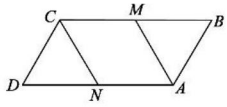
三、解答题

8. 如图所示，△ABC 的三边均不相等，E，F，D 分别是 CA，AB，BC 的中点.



(1)写出与 $\overrightarrow{EF}$ 共线的向量；
(2)写出与 $\overrightarrow{EF}$ 的模相等的向量；
(3)写出与 $\overrightarrow{EF}$ 相等的向量.

9. 如图，已知四边形 $ABCD$ 中，M、N 分别是 BC、AD 的中点，又 $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$，求证：$\overrightarrow{CN}=\overrightarrow{MA}$.



关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

学习札记

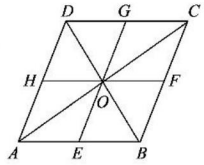
§2　从位移的合成到向量的加法

2.1　向量的加法

1 基础知识点对点

知识点一　向量加法平行四边形法则

1. 如图所示，四边形 $ABCD$ 是平行四边形，E,F,G,H 分别是所在边的中点，点 O 是对角线的交点，则下列各式正确的是（　　）



①$\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{AH}=\overrightarrow{OC}$；

②$\overrightarrow{AH}+\overrightarrow{OF}=\overrightarrow{CG}+\overrightarrow{FB}$；

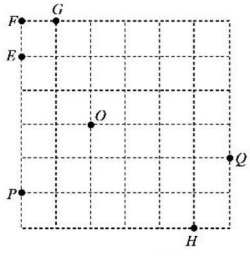
③$\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{FC}=\overrightarrow{HD}+\overrightarrow{OH}$；

④$\overrightarrow{OG}+\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{DO}$.

A. ①和③　　B. ②和④

C. ②和③　　D. ①和④

2. 如图所示的方格纸中有定点 O,P,Q,E,F,G,H，则 $\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ}$ 等于（　　）

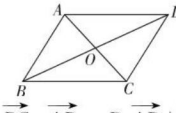


A. $\overrightarrow{OH}$　　B. $\overrightarrow{OG}$

C. $\overrightarrow{FO}$　　D. $\overrightarrow{EO}$

知识点二　向量加法的三角形法则

3. 如图，在平行四边形 $ABCD$ 中，O 是对角线的交点，下列结论正确的是（　　）



A. $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD},\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AD}$　　B. $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{DA}$

C. $\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD}$　　D. $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{DA}$

4. 下列等式不正确的是（　　）

A. $\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c})+\boldsymbol{b}$

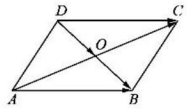
B. $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AD}$

C. $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BA}=\boldsymbol{0}$

D. 等式 $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|$ 不可能成立

知识点三　向量加法的应用

5. 如图，O 是四边形 $ABCD$ 对角线的交点，使得 $\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{DO}+\overrightarrow{OC}$，求证：四边形 $ABCD$ 是平行四边形.



2 课后拔高提能练

一、选择题

1. 设 $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BC},\overrightarrow{AC}$ 是三个非零向量，且 $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$，则（　　）

A. 线段 AB,BC,AC 一定构成三角形

B. 线段 AB,BC 一定共线

C. 线段 AB,BC 一定平行

D. 线段 AB,BC,AC 构成三角形或共线

2. 在△ABC 中，$|\overrightarrow{AB}|=|\overrightarrow{BC}|=|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}|$，则△$ABC$ 是（　　）

A. 直角三角形　　B. 等边三角形

C. 钝角三角形　　D. 等腰直角三角形

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

学习札记

3. 设 $\boldsymbol{a}=(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD})+(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{DA})$，$\boldsymbol{b}$ 是任一非零向量，有下列结论：

①$\boldsymbol{a}\parallel\boldsymbol{b}$；②$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}$；③$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}$；

④$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|<|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|$；⑤$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|$.

其中，正确的结论为　　（　　）

A. ①②　　B. ①③

C. ①③⑤　　D. ③④⑤

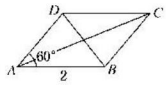
4. 设非零向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$，若 $\boldsymbol{p}=\frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}+\frac{\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|}+\frac{\boldsymbol{c}}{|\boldsymbol{c}|}$，则 $|\boldsymbol{p}|$ 的取值范围为　　（　　）

A. $[0,1]$　　B. $[0,2]$

C. $[0,3]$　　D. $[1,2]$

二、填空题

5. 在菱形 $ABCD$ 中，$\angle DAB=60°$，$|\overrightarrow{AB}|=2$，则 $|\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{DC}|=$_____.



6. 已知 $|\boldsymbol{a}|=3$，$|\boldsymbol{b}|=2$，则 $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|$ 的取值范围是_____.

7. 设 P 为 $\square ABCD$ 所在平面内一点，则①$\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}=\overrightarrow{PC}+\overrightarrow{PD}$；②$\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PC}=\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PD}$；③$\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PD}=\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}$. 其中成立的序号为_____.

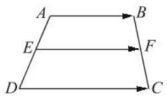
三、解答题

8. (1)$\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AB}$；

(2)$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{BO}+\overrightarrow{CO}$；

(3)$(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{MB})+(\overrightarrow{BO}+\overrightarrow{BC})+\overrightarrow{OM}$.

9. 如图所示，已知四边形 $ABCD$ 是梯形，$AB\parallel CD$，E、F 分别是 AD，BC 的中点，求证：$\overrightarrow{EF}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DC})$.



关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

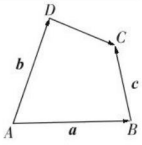
学习札记

2.2　向量的减法

1 基础知识点对点

知识点一　向量减法法则

1. 如图，在四边形 $ABCD$ 中，设 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{c}$，则 $\overrightarrow{DC}$ 等于　（　）



A. $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$

B. $\boldsymbol{b}-(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c})$

C. $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$

D. $\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c}$

2. $\overrightarrow{AB}$可以表示为①$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AB}$；②$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}$；③$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OB}$；④$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}$，其中正确的是　（　）

A. ①②　　B. ②③

C. ②④　　D. ③④

知识点二　向量加、减运算

3. 化简下列各式：

①$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}$；②$\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}-\overrightarrow{CD}$；③$\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{AD}$；④$\overrightarrow{NQ}+\overrightarrow{QP}+\overrightarrow{MN}-\overrightarrow{MP}$.

结果为零向量的个数是　（　）

A. 1　　B. 2

C. 3　　D. 4

4. 下列各式中不能化简为$\overrightarrow{PQ}$的是　（　）

A. $\overrightarrow{AB}+(\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{BQ})$

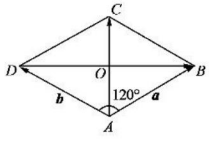
B. $(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{PC})+(\overrightarrow{BA}-\overrightarrow{QC})$

C. $\overrightarrow{QC}-\overrightarrow{QP}+\overrightarrow{CQ}$

D. $\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{BQ}$

知识点三　向量加、减法的几何意义

5. 如图，已知向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 所夹的角为 120°，且 $|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|=3$，求：$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|$，$|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$.



2 课后拔高提能练

一、选择题

1. 下列结论：

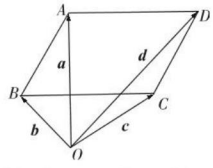
①若 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$，则 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$；②若 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 反向，则 $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}|-|\boldsymbol{b}|$；③若 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 同向，则 $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|$；④若 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$，则 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 所在直线重合.

其中错误结论的个数为　（　）

A. 1 个　　B. 2 个

C. 3 个　　D. 4 个

2. 如图，已知$\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{OC}=\boldsymbol{c}$，$\overrightarrow{OD}=\boldsymbol{d}$，且四边形 $ABCD$ 为平行四边形，则　（　）



A. $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}+\boldsymbol{d}=\boldsymbol{0}$　　B. $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}-\boldsymbol{d}=\boldsymbol{0}$

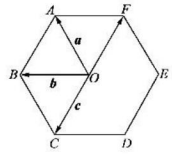
C. $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}-\boldsymbol{d}=\boldsymbol{0}$　　D. $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}+\boldsymbol{d}=\boldsymbol{0}$

3. 边长为 1 的正三角形 ABC 中，$|\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{BC}|$ 的值为　（　）

A. $\sqrt{3}$　　B. 2

C. $\frac{\sqrt{3}}{2}$　　D. 1

4. 如图，已知 $ABCDEF$ 是一个正六边形，O 是它的中心，其中 $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{OC}=\boldsymbol{c}$，则 $\overrightarrow{EF}$ 等于　（　）

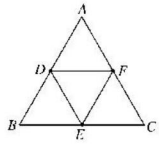


A. $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$　　B. $\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}$

C. $\boldsymbol{c}-\boldsymbol{b}$　　D. $\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}$

二、填空题

5. 如图，在△ABC 中，D、E、F 分别为 AB、BC、AC 的中点，则$\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AF}+\overrightarrow{EC}=$_____.



关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

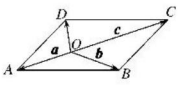
学习札记

6. 已知三角形 ABC 为等腰直角三角形，且$\angle A=90°$，有下列命题：

①$|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}|=|\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}|$；②$|\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{BA}|=|\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{CA}|$；③$|\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CB}|=|\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{BC}|$；④$|\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}|^2=|\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{AC}|^2+|\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{AB}|^2$.

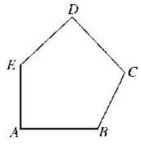
其中正确命题的序号为_____.

7. 如图所示，已知点 O 到平行四边形 $ABCD$ 的三个顶点 A、B、C 的向量分别为 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$，试用 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$ 表示$\overrightarrow{OD}$=_____.

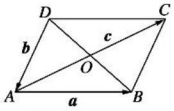


三、解答题

8. 在五边形 $ABCDE$ 中，设$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{AE}=\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{c}$，试用 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$ 表示$\overrightarrow{AC}$，$\overrightarrow{EB}$，$\overrightarrow{EC}$.



9. 如图所示，O 为□$ABCD$ 的对角线 AC、BD 的交点，设$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{DA}=\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{OC}=\boldsymbol{c}$.



求证：$\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}-\boldsymbol{a}=\overrightarrow{OA}$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

学习札记

§3　从速度的倍数到数乘向量

3.1　数乘向量

1 基础知识点对点

知识点一　数乘向量概念

1. 已知 $\lambda,\mu\in\mathbf{R}$，则下面的结论正确的是　（　）

A. $\lambda\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 同向

B. $0\cdot\boldsymbol{a}=0$

C. $(\lambda+\mu)\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{a}$

D. 若 $\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$，则 $|\boldsymbol{b}|=\lambda|\boldsymbol{a}|$

2. 已知向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 是两个非零向量，下列命题中真命题的个数是　（　）

①$3\boldsymbol{a}$ 的方向与 $\boldsymbol{a}$ 的方向相同，且 $3\boldsymbol{a}$ 的模是 $\boldsymbol{a}$ 的模的 3 倍；

②$-2\boldsymbol{a}$ 的方向与 $5\boldsymbol{a}$ 的方向相反，且 $-2\boldsymbol{a}$ 的模是 $5\boldsymbol{a}$ 的模的 $\frac{2}{5}$；

③$-2\boldsymbol{a}$ 与 $2\boldsymbol{a}$ 是一对相反向量；

④$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ 与 $-(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a})$ 是一对相反向量.

A. 1　　B. 2

C. 3　　D. 4

知识点二　向量的线性运算

3. $\frac{1}{2}(2\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b})-\left(4\boldsymbol{a}+\frac{3}{2}\boldsymbol{b}\right)$ 等于　（　）

A. $-3\boldsymbol{a}$　　B. $3\boldsymbol{a}$

C. $-3\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b}$　　D. $-3\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b}$

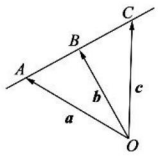
4. 若 $3\boldsymbol{x}+(\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{x})+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$，则 $\boldsymbol{x}=$　（　）

A. $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$　　B. $-\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$

C. $\frac{1}{5}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$　　D. $\frac{1}{5}(-\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})$

知识点三　向量共线定理

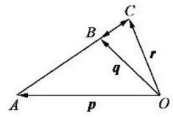
5. 如图，以点 O 为起点的三个向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 的终点分别为 A、B、C，若 $\boldsymbol{c}=\alpha\boldsymbol{a}+\beta\boldsymbol{b}$ 且实数 $\alpha+\beta=1$，求证：A、B、C 三点共线.



2 课后拔高提能练

一、选择题

1. 如图，向量 $\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OC}$ 的终点在同一直线上，且 $\overrightarrow{AC}=-3\overrightarrow{CB}$，设 $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{p}$，$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{q}$，$\overrightarrow{OC}=\boldsymbol{r}$，则下列等式中成立的是　（　）



A. $\boldsymbol{r}=-\frac{1}{2}\boldsymbol{p}+\frac{3}{2}\boldsymbol{q}$　　B. $\boldsymbol{r}=-\boldsymbol{p}+2\boldsymbol{q}$

C. $\boldsymbol{r}=\frac{3}{2}\boldsymbol{p}-\frac{1}{2}\boldsymbol{q}$　　D. $\boldsymbol{r}=-\boldsymbol{q}+2\boldsymbol{p}$

2. 在 $\square ABCD$ 中，AC 与 BD 交于点 O，E 是线段 OD 的中点，AE 的延长线交 CD 于点 F. 若 $\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{BD}=\boldsymbol{b}$，则 $\overrightarrow{AF}=$　（　）

A. $\frac{1}{4}\boldsymbol{a}+\frac{1}{2}\boldsymbol{b}$　　B. $\frac{2}{3}\boldsymbol{a}+\frac{1}{3}\boldsymbol{b}$

C. $\frac{1}{2}\boldsymbol{a}+\frac{1}{4}\boldsymbol{b}$　　D. $\frac{1}{3}\boldsymbol{a}+\frac{2}{3}\boldsymbol{b}$

3. 下列命题中真命题是　（　）

①$\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}\Leftrightarrow$存在唯一的实数 λ，使 $\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{b}$；

②$\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}\Leftrightarrow$存在不全为 0 的实数 λ_1,λ_2，使 $\lambda_1\boldsymbol{a}+\lambda_2\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$；

③$\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 不共线$\Leftrightarrow$若 $\lambda_1\boldsymbol{a}+\lambda_2\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$，则 $\lambda_1=\lambda_2=0$；

④$\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 不共线$\Leftrightarrow$不存在实数 λ_1,λ_2，使 $\lambda_1\boldsymbol{a}+\lambda_2\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$.

A. ①与④　　B. ②与③

C. ①与③　　D. ②与④

4. 若 $\overrightarrow{AB}=3\boldsymbol{e}_1$，$\overrightarrow{CD}=-5\boldsymbol{e}_1$，且 $|\overrightarrow{AD}|=|\overrightarrow{BC}|$，则四边形 $ABCD$ 是　（　）

A. 平行四边形　　B. 等腰梯形

C. 菱形　　D. 不等腰的梯形

二、填空题

5. 已知 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 不共线，实数 x,y 满足 $(3x-4y)\boldsymbol{a}+(2x-3y)\boldsymbol{b}=6\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b}$，则 $x+y=$_____.

6. 在 $\triangle ABC$ 中，点 M 满足 $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=\boldsymbol{0}$，若存在实数 m，使得 $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=m\overrightarrow{AM}$，则实数 $m=$_____.

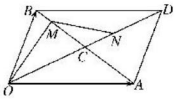
7. 已知点 P,Q 是 $\triangle ABC$ 所在平面上的两个定点，且满足 $\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PC}=\boldsymbol{0}$，$2\overrightarrow{QA}+\overrightarrow{QB}+\overrightarrow{QC}=\overrightarrow{BC}$，若 $|\overrightarrow{PQ}|=\lambda|\overrightarrow{BC}|$，则正实数 $\lambda=$_____.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

学习札记

三、解答题

8. 如图所示，四边形 $OADB$ 是以向量 $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$ 为邻边的平行四边形，又 $BM=\frac{1}{3}BC$，$CN=\frac{1}{3}CD$，试用向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 表示 $\overrightarrow{OM}$，$\overrightarrow{ON}$，$\overrightarrow{MN}$.



9. 两个非零向量 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 不共线.

(1) 若 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{BC}=2\boldsymbol{a}+8\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{CD}=3(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})$，求证：$A$、$B$、$D$ 三点共线；

(2) 求实数 k 使 $k\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 与 $2\boldsymbol{a}+k\boldsymbol{b}$ 共线.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

学习札记

3.2　平面向量基本定理

1 基础知识点对点

知识点一　对基底的正确理解

1. 已知 e_1，e_2 是平面内的一组基底，那么下面四组向量，不能作为一组基底的是　（　）

A. e_1，e_1+e_2

B. e_1+e_2，e_1-e_2

C. $3e_1+4e_2$，$-\frac{1}{2}e_1+e_2$

D. $2e_1-e_2$，$-\frac{1}{2}e_1+\frac{1}{4}e_2$

2. 设 e_1，e_2 是同一个平面内的两个向量，则有　（　）

A. e_1，e_2 一定平行

B. e_1，e_2 的模相等

C. 同一平面内的任一向量 a 都有 $a=\lambda e_1+\mu e_2(\lambda,\mu\in\mathbf{R})$

D. 若 e_1，e_2 不共线，则同一平面内的任一向量 a 都有 $a=\lambda e_1+\mu e_2(\lambda,\mu\in\mathbf{R})$

知识点二　用基底表示向量

3. 设 e_1，e_2 为平面内不共线的向量，$a=e_1+e_2$，$b=e_1-e_2$，$c=\frac{2}{3}e_1-\frac{1}{3}e_2$，则　（　）

A. $c=\frac{1}{6}a+\frac{1}{2}b$　　B. $c=\frac{1}{2}a+\frac{1}{6}b$

C. $c=\frac{1}{3}a+b$　　D. $c=\frac{1}{3}b+a$

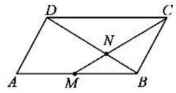
4. **(2018·全国卷Ⅰ)** 在$\triangle ABC$中，AD 为 BC 边上的中线，E 为 AD 的中点，则$\overrightarrow{EB}=$　（　）

A. $\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}-\frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$　　B. $\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}-\frac{3}{4}\overrightarrow{AC}$

C. $\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$　　D. $\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}+\frac{3}{4}\overrightarrow{AC}$

知识点三　平面向量基本定理应用

5. $\square ABCD$ 中，M 为 AB 的中点，$\overrightarrow{DN}=2\overrightarrow{NB}$，求证：$M$、$N$、$C$ 三点共线.



2 课后拔高提能练

一、选择题

1. 已知 AD，BE 分别是$\triangle ABC$的边 BC，AC 上的中线，且$\overrightarrow{AD}=a$，$\overrightarrow{BE}=b$，则$\overrightarrow{BC}=$　（　）

A. $\frac{4}{3}a+\frac{2}{3}b$　　B. $\frac{2}{3}a+\frac{4}{3}b$

C. $\frac{2}{3}a-\frac{2}{3}b$　　D. $-\frac{2}{3}a+\frac{2}{3}b$

2. 设 a，b 为基底向量，已知向量$\overrightarrow{AB}=a-kb$，$\overrightarrow{CB}=2a+b$，$\overrightarrow{CD}=3a-b$，若 A，B，D 三点共线，则实数 k 的值等于　（　）

A. 2　　B. -2

C. 10　　D. -10

3. 若$\overrightarrow{OP_1}=a$，$\overrightarrow{OP_2}=b$，$\overrightarrow{P_1P}=\lambda\overrightarrow{PP_2}(\lambda\neq-1)$，则$\overrightarrow{OP}$等于　（　）

A. $a+\lambda b$　　B. $\lambda a+(1-\lambda)b$

C. $\lambda a+b$　　D. $\frac{1}{1+\lambda}a+\frac{\lambda}{1+\lambda}b$

4. 已知 O，A，B，C 为同一平面内的四个点，若 $2\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB}=\mathbf{0}$，则$\overrightarrow{OC}$等于　（　）

A. $\frac{2}{3}\overrightarrow{OA}-\frac{1}{3}\overrightarrow{OB}$　　B. $-\frac{1}{3}\overrightarrow{OA}+\frac{2}{3}\overrightarrow{OB}$

C. $2\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}$　　D. $-\overrightarrow{OA}-2\overrightarrow{OB}$

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

学习札记

二、填空题

5. 若向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 不共线，实数 x，y 满足等式：$2x\boldsymbol{a}+(3-y)\boldsymbol{b}=x\boldsymbol{b}+(3y+1)\boldsymbol{a}$，则 $x+y=$_____.

6. 已知 $\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$ 是两个不共线向量，$\boldsymbol{a}=k^2\boldsymbol{e}_1+\left(1-\frac{5k}{2}\right)\boldsymbol{e}_2$ 与 $\boldsymbol{b}=2\boldsymbol{e}_1+3\boldsymbol{e}_2$ 共线，则实数 $k=$_____.

7. 设 D，E 分别是 $\triangle ABC$ 的边 AB，BC 上的点，$AD=\frac{1}{3}AB$，$BE=\frac{1}{2}BC$，若 $\overrightarrow{DE}=\lambda_1\overrightarrow{AB}+\lambda_2\overrightarrow{AC}$（$\lambda_1$，$\lambda_2\in\mathbf{R}$），则 $\lambda_1+\lambda_2=$_____.

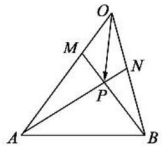
三、解答题

8. 已知 $\overrightarrow{AP}=\lambda\overrightarrow{AB}(\lambda\in\mathbf{R})$，$O$ 是平面内任意一点（O 不在直线 AB 上）.

(1) 试以 $\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB}$ 为基底表示 $\overrightarrow{OP}$；

(2) 当 $\lambda=\frac{1}{2}$ 时，试确定点 P 的位置.

9. 如图所示，$\triangle AOB$ 中，$\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$，$M$、$N$ 分别是边 $\overrightarrow{OA}$、$\overrightarrow{OB}$ 上的点，且 $\overrightarrow{OM}=\frac{1}{3}\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{ON}=\frac{1}{2}\boldsymbol{b}$，设 $\overrightarrow{AN}$ 与 $\overrightarrow{BM}$ 相交于 P，用向量 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 表示 $\overrightarrow{OP}$.



关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

学习札记

§4　平面向量的坐标

1 基础知识点对点

知识点一　向量的坐标

1. 已知 O 是坐标原点，点 A 在第一象限 $|\overrightarrow{OA}|=4\sqrt{3}$，$\angle xOA=60°$，则 $\overrightarrow{OA}=$（　）

A. $(6,2\sqrt{3})$　　B. $(2\sqrt{3},6)$

C. $(3,\sqrt{3})$　　D. $(\sqrt{3},3)$

2. 已知 $A(-5,-1)$，$B(3,-2)$，则 $-\overrightarrow{AB}=$（　）

A. $(8,1)$　　B. $\left(-4,\frac{1}{2}\right)$

C. $(-8,1)$　　D. $(-8,-1)$

知识点二　向量坐标的线性运算

3. 已知点 $A(1,3)$，$B(4,-1)$，则与 $\overrightarrow{AB}$ 同方向的单位向量为（　）

A. $\left(\frac{3}{5},-\frac{4}{5}\right)$　　B. $\left(\frac{4}{5},-\frac{3}{5}\right)$

C. $\left(-\frac{3}{5},\frac{4}{5}\right)$　　D. $\left(-\frac{4}{5},\frac{3}{5}\right)$

4. 已知 $\boldsymbol{a}=(5,-2)$，$\boldsymbol{b}=(-4,-3)$，$\boldsymbol{c}=(x,y)$，若 $\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}+3\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}$ 则 $\boldsymbol{c}$ 等于（　）

A. $\left(1,\frac{8}{3}\right)$　　B. $\left(\frac{13}{3},\frac{8}{3}\right)$

C. $\left(\frac{13}{3},\frac{4}{3}\right)$　　D. $\left(-\frac{13}{3},-\frac{4}{3}\right)$

知识点三　向量共线的坐标运算

5. 已知 $A(1,1)$，$B(3,-1)$，$C(a,b)$.

(1)若 A、B、C 三点共线，求 a，b 的关系式；

(2)若 $\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{AB}$，求点 C 的坐标.

2 课后拔高提能练

一、选择题

1. 已知向量 $\overrightarrow{AB}=(2,4)$，$\overrightarrow{AC}=(0,2)$，则 $\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}=$（　）

A. $(-2,-2)$　　B. $(-1,-1)$

C. $(2,2)$　　D. $(1,1)$

2. $\boldsymbol{a}=\overrightarrow{AB}$，$B(1,0)$，$\boldsymbol{b}=(-3,4)$，$\boldsymbol{c}=(-1,1)$ 且 $\boldsymbol{a}=2\boldsymbol{b}-2\boldsymbol{c}$，则点 A 的坐标为（　）

A. $(-5,6)$　　B. $(-3,-6)$

C. $(-3,6)$　　D. $(5,-6)$

3. 已知四边形 $ABCD$ 的三个顶点 $A(0,2)$，$B(-1,-2)$，$C(3,1)$，且 $\overrightarrow{BC}=2\overrightarrow{AD}$，则顶点 D 的坐标为（　）

A. $\left(2,\frac{7}{2}\right)$　　B. $\left(2,-\frac{1}{2}\right)$

C. $(3,2)$　　D. $(1,3)$

4. 向量 $\boldsymbol{a}=(2,3)$，$\boldsymbol{b}=(-1,2)$，若 $m\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}$ 平行，则 m 等于（　）

A. -2　　B. 2

C. $-\frac{1}{2}$　　D. $\frac{1}{2}$

二、填空题

5. 已知 $A(3,4)$，$B(-5,5)$，$\boldsymbol{a}=(x-3,x^2+4x-4)$，若 $\boldsymbol{a}=\overrightarrow{AB}$，则 $x=$_____.

6. 已知向量 $\boldsymbol{a}=(1,2)$，$\boldsymbol{b}=(-1,0)$，则 $3\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}=$_____.

7. 已知向量 $\boldsymbol{a}=(\sqrt{3},1)$，$\boldsymbol{b}=(0,-1)$，$\boldsymbol{c}=(k,\sqrt{3})$，若 $\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{c}$ 共线，则 $k=$_____.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

学习札记

三、解答题

8. 平面上有 $A(2,-1)$，$B(1,4)$，$D(4,-3)$ 三点，点 C 在直线 AB 上，且 $\overrightarrow{AC}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$，连接 DC 延长至 E，使 $|\overrightarrow{CE}|=\frac{1}{4}|\overrightarrow{ED}|$. 求点 E 的坐标.

9. 平面内给定三个向量：$\boldsymbol{a}=(3,2)$，$\boldsymbol{b}=(-1,2)$，$\boldsymbol{c}=(4,1)$.

(1)求 $3\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}-2\boldsymbol{c}$；

(2)求满足 $\boldsymbol{a}=m\boldsymbol{b}+n\boldsymbol{c}$ 的实数 m、n；

(3)若 $(\boldsymbol{a}+k\boldsymbol{c})\parallel(2\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a})$，求实数 k.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

学习札记

§5　从力做的功到向量的数量积

第一课时　从力做的功到向量的数量积(一)

1 基础知识点对点

知识点一　向量的数量积定义

1. 若 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 满足 $|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|=1$，$\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为 $60°$，则 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}+\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=$　(　)

A. $\frac{1}{2}$　　B. $\frac{3}{2}$

C. $1+\frac{\sqrt{3}}{2}$　　D. 2

2. 下列命题正确的是　(　)

A. 若 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$，则 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$ 或 $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$

B. 若 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$，则 $\boldsymbol{a}\parallel\boldsymbol{b}$

C. 若 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$，则 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})^2$

D. $\boldsymbol{a}^2>|\boldsymbol{a}|^2$

知识点二　向量数量积的几何意义

3. 已知 $|\boldsymbol{a}|=6$，$|\boldsymbol{b}|=3$，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=-12$，则向量 $\boldsymbol{a}$ 在向量 $\boldsymbol{b}$ 方向上的射影是　(　)

A. -4　　B. 4

C. -2　　D. 2

4. 已知 $|\boldsymbol{b}|=3$，$\boldsymbol{a}$ 在 $\boldsymbol{b}$ 方向上的射影是 $\frac{3}{2}$，则 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$ 的值为　(　)

A. 3　　B. $\frac{9}{2}$

C. 2　　D. $\frac{1}{2}$

知识点三　数量积的运算

5. 已知 $|\boldsymbol{a}|=3$，$|\boldsymbol{b}|=4$，$\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角 θ 为 $120°$，求：

(1) $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$；

(2) $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})$；

(3) $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$；

(4) $(\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b})\cdot(3\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$.

2 课后拔高提能练

一、选择题

1. 在平面直角坐标系中，向量 $|\overrightarrow{AB}|=4$，$\langle\overrightarrow{AB},x$ 轴$\rangle=120°$，则 $\overrightarrow{AB}$ 在 x 轴、y 轴上的投影的数量分别是　(　)

A. $2,2\sqrt{3}$　　B. $-2,-2\sqrt{3}$

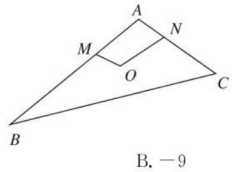
C. $-2,2\sqrt{3}$　　D. $2,-2\sqrt{3}$

2. 已知 $|\boldsymbol{a}|=1$，$|\boldsymbol{b}|=6$，$\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为 $\frac{\pi}{3}$，则 $\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a})$ 的值为　(　)

A. 2　　B. 4

C. 0　　D. $-\frac{1}{2}$

3. **(2018·天津卷)** 在如图的平面图形中，已知 $OM=1$，$ON=2$，$\angle MON=120°$，$\overrightarrow{BM}=2\overrightarrow{MA}$，$\overrightarrow{CN}=2\overrightarrow{NA}$，则 $\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{OM}$ 的值为　(　)



A. -15　　B. -9

C. -6　　D. 0

4. 设 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 是任意的非零平面向量，且相互不共线，则

①$(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\boldsymbol{c}-(\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a})\boldsymbol{b}=0$；

②$|\boldsymbol{a}|-|\boldsymbol{b}|<|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$；

③$(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{a}-(\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a})\boldsymbol{b}$ 不与 $\boldsymbol{c}$ 垂直；

④$(3\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b})\cdot(3\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b})=9|\boldsymbol{a}|^2-4|\boldsymbol{b}|^2$.

以上命题中的真命题是　(　)

A. ①②　　B. ②③

C. ③④　　D. ②④

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

学习札记

二、填空题

5. 已知向量 $\boldsymbol{a}=(6,2)$ 与 $\boldsymbol{b}=(-3,k)$ 的夹角是钝角，则 k 的取值范围是_____.

6. 已知 $|\boldsymbol{a}|=3$，$|\boldsymbol{b}|=5$，且向量 $\boldsymbol{a}$ 在向量 $\boldsymbol{b}$ 方向上的投影为 $\frac{12}{5}$，则 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=$_____.

7. 已知 $|\boldsymbol{a}|=6$，$\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为 $\frac{\pi}{3}$，且 $(\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b})=-72$，则 $|\boldsymbol{b}|=$_____.

三、解答题

8. 在 $\triangle ABC$ 中，$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{c}$，$\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{CA}=\boldsymbol{b}$，且 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}=\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a}$，试判断 $\triangle ABC$ 的形状.

9. 已知 $|\boldsymbol{a}|=3$，$|\boldsymbol{b}|=2$，$\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为 $60°$，$\boldsymbol{c}=3\boldsymbol{a}+5\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{d}=m\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b}$.

(1) 当 m 为何值时，$\boldsymbol{c}$ 与 $\boldsymbol{d}$ 垂直？

(2) 当 m 为何值时，$\boldsymbol{c}$ 与 $\boldsymbol{d}$ 共线？

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

学习札记

第二课时　从力做的功到向量的数量积(二)

1 基础知识点对点

知识点一　向量的夹角

1. 已知$|a|=\sqrt{3}$,$|b|=2\sqrt{3}$,$a\cdot b=-3$,则a与b的夹角是　(　)

A. 150°　　B. 120°

C. 60°　　D. 30°

2. 若$|a|=1$,$|b|=2$,$c=a+b$,且$c\perp a$,则向量a与b的夹角为　(　)

A. 30°　　B. 60°

C. 120°　　D. 150°

知识点二　向量的模

3. **(2017·全国卷Ⅱ)**设非零向量a,b满足$|a+b|=|a-b|$,则　(　)

A. $a\perp b$　　B. $|a|=|b|$

C. $a/\!/b$　　D. $|a|>|b|$

4. 设向量a,b满足$|a|=1$,$|a-b|=\sqrt{3}$,$a\cdot(a-b)=0$,则$|2a+b|=$　(　)

A. 2　　B. $2\sqrt{3}$

C. 4　　D. $4\sqrt{3}$

知识点三　根据向量的夹角求范围

5. 已知$|a|=\sqrt{2}$,$|b|=3$,a与b的夹角为45°,求使$a+\lambda b$与$a+2b$的夹角为钝角时,λ的取值范围.

2 课后拔高提能练

一、选择题

1. 设向量a,b均为单位向量,且$|a+b|=1$,则a与b的夹角为　(　)

A. $\frac{\pi}{3}$　　B. $\frac{\pi}{2}$

C. $\frac{2\pi}{3}$　　D. $\frac{3\pi}{4}$

2. 在边长为$\sqrt{2}$的正三角形ABC中,设$\overrightarrow{AB}=c$,$\overrightarrow{BC}=a$,$\overrightarrow{CA}=b$,则$a\cdot b+b\cdot c+c\cdot a$等于　(　)

A. -3　　B. 0

C. 1　　D. 2

3. **(2018·全国卷Ⅱ)**已知向量a,b满足$|a|=1$,$a\cdot b=-1$,则$a\cdot(2a-b)=$　(　)

A. 4　　B. 3

C. 2　　D. 0

4. 已知$\triangle ABC$是边长为1的等边三角形,点D,E分别是边AB,BC的中点,连接DE并延长到点F,使得$DE=2EF$,则$\overrightarrow{AF}\cdot\overrightarrow{BC}$的值为　(　)

A. $-\frac{5}{8}$　　B. $\frac{1}{8}$

C. $\frac{1}{4}$　　D. $\frac{11}{8}$

二、填空题

5. 向量a与b满足$|a|=2$,$|a+b|=3$,$|a-b|=3$,则$|b|=$_____.

6. 在$\triangle ABC$中,若$\overrightarrow{AB}^2=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}$,则$\triangle ABC$的形状是_____.

7. **(2017·山东卷)**已知e_1,e_2是互相垂直的单位向量,若$\sqrt{3}e_1-e_2$与$e_1+\lambda e_2$的夹角为60°,则实数λ的值是_____.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

学习札记

三、解答题

8. 已知 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$，且 $|\boldsymbol{a}|=2$，$|\boldsymbol{b}|=1$，若对于两个不同时为零的实数 k，t，使得 $\boldsymbol{a}+(t-3)\boldsymbol{b}$ 与 $-k\boldsymbol{a}+t\boldsymbol{b}$ 垂直，试求 k 的最小值.

9. 已知向量 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 满足 $|\boldsymbol{a}|=1$，$|\boldsymbol{b}|=2$，且 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 的夹角为 $60°$.

(1)求 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 的模；

(2)若 $\lambda\boldsymbol{a}-6\boldsymbol{b}$ 与 $\lambda\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 互相垂直，求 λ 的值.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

学习札记

§6　平面向量数量积的坐标表示

1 基础知识点对点

知识点一　向量数量积的坐标运算

1. 已知 $\boldsymbol{a}=(2\,017,2\,018)$，$\boldsymbol{b}=(1,-1)$，则 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=$（　　）

A. 2 017　　B. 2 018

C. 1　　D. -1

2. 已知向量 $\boldsymbol{a}=(2,1)$，$\boldsymbol{b}=(-1,k)$，$\boldsymbol{a}\cdot(2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})=0$，则 $k=$（　　）

A. -12　　B. -6

C. 6　　D. 12

知识点二　向量的模

3. 平面向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为 $60°$，$\boldsymbol{a}=(2,0)$，$|\boldsymbol{b}|=1$，则 $|\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}|$ 等于（　　）

A. $\sqrt{3}$　　B. $2\sqrt{3}$

C. 4　　D. 12

4. 已知平面向量 $\boldsymbol{a}=(2,4)$，$\boldsymbol{b}=(-1,2)$，若 $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{b}$，则 $|\boldsymbol{c}|=$（　　）

A. $4\sqrt{2}$　　B. $2\sqrt{5}$

C. 8　　D. $8\sqrt{2}$

知识点三　向量的夹角

5. 已知 $\boldsymbol{a}=(1,-2)$，$\boldsymbol{b}=(1,\lambda)$，且 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角 θ 为锐角，求实数 λ 的取值范围.

2 课后拔高提能练

一、选择题

1. 若 $\boldsymbol{a}=(2,1)$，$\boldsymbol{b}=(3,4)$，则向量 $\boldsymbol{a}$ 在向量 $\boldsymbol{b}$ 方向上的投影为（　　）

A. $2\sqrt{5}$　　B. 2

C. $\sqrt{5}$　　D. 10

2. 若 $\boldsymbol{a}=(1,2)$，$\boldsymbol{b}=(-1,1)$，$\boldsymbol{c}=(2,1)$，$k\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{c}$ 共线，则 k 的值为（　　）

A. 2　　B. 1

C. 0　　D. -1

3. 若向量 $\boldsymbol{a}=(1,2)$，$\boldsymbol{b}=(1,-1)$，则 $2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ 的夹角等于（　　）

A. $-\frac{\pi}{4}$　　B. $\frac{\pi}{6}$

C. $\frac{\pi}{4}$　　D. $\frac{3\pi}{4}$

4. 已知向量 $\overrightarrow{OA}=(2,2)$，$\overrightarrow{OB}=(4,1)$，在 x 轴上有一点 P，使 $\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{BP}$ 有最小值，则 P 点坐标为（　　）

A. $(-3,0)$　　B. $(3,0)$

C. $(2,0)$　　D. $(4,0)$

二、填空题

5. **(2017·全国卷Ⅲ)** 已知向量 $\boldsymbol{a}=(-2,3)$，$\boldsymbol{b}=(3,m)$，且 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$，则 $m=$_____.

6. **(2018·北京卷)** 设向量 $\boldsymbol{a}=(1,0)$，$\boldsymbol{b}=(-1,m)$，若 $\boldsymbol{a}\perp(m\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})$，则 $m=$_____.

7. 若平面向量 $\boldsymbol{a}=(\log_2 x,-1)$，$\boldsymbol{b}=(3,2+\log_2 x)$，则满足 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}<0$ 的实数 x 的取值集合为_____.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

学习札记

三、解答题

8. 已知向量 $\boldsymbol{a}=(-2,1)$，$\boldsymbol{b}=(1,-1)$，$\boldsymbol{m}=\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{n}=\boldsymbol{a}-\lambda\boldsymbol{b}$.

(1)若 $\boldsymbol{m}\parallel\boldsymbol{n}$，求 λ 的值；

(2)当 $\lambda=2$ 时，求 $\boldsymbol{m}$ 与 $\boldsymbol{n}$ 夹角的余弦值.

9. 已知向量 $\boldsymbol{a}=(-3,2)$，$\boldsymbol{b}=(-1,0)$，设 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为 θ.

(1)求 $\cos\theta$；

(2)若 $(\lambda\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\perp(\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b})$，求 λ 的值.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

学习札记

§7　向量应用举例

1 基础知识点对点

知识点一　直线的方向向量和法向量

1. 直线 $3x+4y+1=0$ 的一个方向向量是　　(　　)

A. $(3,4)$　　B. $(4,-3)$

C. $(-3,4)$　　D. $(-4,-3)$

2. 过点 $A(2,3)$，且垂直于向量 $\boldsymbol{a}=(2,1)$ 的直线方程为　　(　　)

A. $2x+y-7=0$　　B. $2x+y+7=0$

C. $x-2y+4=0$　　D. $x-2y-4=0$

知识点二　向量在平面几何中的应用

3. 设点 M 是线段 BC 的中点，点 A 在线段 BC 外，$|\overrightarrow{BC}|^2=16$，$|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}|=|\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}|$，则 $|\overrightarrow{AM}|$ 等于　　(　　)

A. 8　　B. 4

C. 2　　D. 1

4. 点 O 是 $\triangle ABC$ 所在平面内的一点，满足 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OA}$，则点 O 是 $\triangle ABC$ 的　　(　　)

A. 三个内角的角平分线的交点

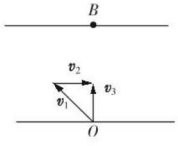
B. 三个边的垂直平分线的交点

C. 三条中线的交点

D. 三条高线的交点

知识点三　向量在物理中的应用

5. 已知船速为 5 m/s，且速度大于水速，河宽为 20 m，如图所示，船从 O 点垂直到达 B 点所用的时间为 5 s，求水流的速度.



2 课后拔高提能练

一、选择题

1. 已知平面上三点 A,B,C 满足 $(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BA})\cdot\overrightarrow{AC}=0$，则 $\triangle ABC$ 的形状是　　(　　)

A. 等腰三角形　　B. 等边三角形

C. 直角三角形　　D. 等腰直角三角形

2. 已知点 $A(-2,-3)$，$B(19,4)$，$C(-1,-6)$，则 $\triangle ABC$ 是　　(　　)

A. 等腰三角形　　B. 等边三角形

C. 直角三角形　　D. 等腰直角三角形

3. 已知作用在点 A 的三个力 $\boldsymbol{f}_1=(3,4)$，$\boldsymbol{f}_2=(2,-5)$，$\boldsymbol{f}_3=(3,1)$ 且 $A(1,1)$，则合力 $\boldsymbol{f}=\boldsymbol{f}_1+\boldsymbol{f}_2+\boldsymbol{f}_3$ 的终点坐标为　　(　　)

A. $(9,1)$　　B. $(1,9)$

C. $(9,0)$　　D. $(0,9)$

4. 质点 P 在平面上做匀速直线运动，速度向量 $\boldsymbol{v}=(4,-3)$（即点 P 的运动方向与 $\boldsymbol{v}$ 相同，且每秒移动的距离为 $|\boldsymbol{v}|$ 个单位）. 设开始时点 P 的坐标为 $(-10,10)$，则 5 秒后点 P 的坐标为　　(　　)

A. $(-2,4)$　　B. $(-30,25)$

C. $(10,-5)$　　D. $(5,-10)$

二、填空题

5. **(2018·江苏卷)** 在平面直角坐标系 xOy 中，A 为直线 $l:y=2x$ 上在第一象限内的点，$B(5,0)$，以 AB 为直径的圆 C 与直线 l 交于另一点 D. 若 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}=0$，则点 A 的横坐标为_____.

6. 在 $\triangle ABC$ 中，已知 $|\overrightarrow{AB}|=|\overrightarrow{AC}|=4$，且 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=8$，则 $\triangle ABC$ 的形状是_____.

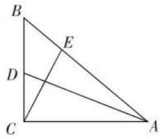
7. 在平面直角坐标系中，O 为坐标原点，已知两点 $A(3,1)$，$B(-1,3)$，若点 C 满足 $\overrightarrow{OC}=\alpha\overrightarrow{OA}+\beta\overrightarrow{OB}$，（其中 $\alpha+\beta=1$，$\alpha,\beta\in\mathbf{R}$），则点 C 的轨迹方程是_____.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

学习札记

三、解答题

8. 如图，△ABC 是直角三角形，$CA=CB$，D 是 BC 的中点，E 是 AB 上一点，且 $AE=2EB$. 求证：$AD\perp CE$.



9. 两个力 $\boldsymbol{f}_1=\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}$，$\boldsymbol{f}_2=4\boldsymbol{i}-5\boldsymbol{j}$ 作用于同一质点，使该质点从 $A(20,15)$ 移动到点 $B(7,0)$，(其中 $\boldsymbol{i}$，$\boldsymbol{j}$ 是 x 轴，y 轴方向上的单位向量). 求：

(1) $\boldsymbol{f}_1$，$\boldsymbol{f}_2$ 分别对该质点做的功；

(2) $\boldsymbol{f}_1$，$\boldsymbol{f}_2$ 的合力 $\boldsymbol{f}$ 对该质点做的功.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

学习札记

第三章　三角恒等变形

§1　同角三角函数的基本关系

第一课时　同角三角函数的基本关系(一)

1 基础知识点对点

知识点一　$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$

1. 若 $\sin^2\alpha+\sin\alpha=1$，则 $\cos^4\alpha+\cos^2\alpha$ 的值为　(　　)

A. 0　　B. 1

C. 2　　D. 3

2. 化简 $\sqrt{1-\sin^2 4}$ 的结果为　(　　)

A. $\cos 4$　　B. $-\cos 4$

C. $\pm\cos 4$　　D. $\cos^2 2$

知识点二　$\tan\alpha=\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$

3. 若 $\tan\alpha=2$，则 $\dfrac{2\sin\alpha-\cos\alpha}{\sin\alpha+2\cos\alpha}$ 的值为　(　　)

A. 0　　B. $\dfrac{3}{4}$

C. 1　　D. $\dfrac{5}{4}$

4. 若 $\cos\alpha+2\sin\alpha=-\sqrt{5}$，则 $\tan\alpha=$　(　　)

A. $\dfrac{1}{2}$　　B. 2

C. $-\dfrac{1}{2}$　　D. -2

知识点三　利用 $\sin\alpha\pm\cos\alpha$ 与 $\sin\alpha\cos\alpha$ 关系求值

5. 已知：$\sin\alpha-\cos\alpha=-\dfrac{\sqrt{5}}{5}(180^\circ<\alpha<270^\circ)$，求：$\sin\alpha+\cos\alpha$ 与 $\sin\alpha\cdot\cos\alpha$.

2 课后拔高提能练

一、选择题

1. 已知 $\sin\alpha=\dfrac{4}{5}$，且 α 是第二象限的角，那么 $\tan\alpha=$　(　　)

A. $\dfrac{4}{3}$　　B. $-\dfrac{3}{4}$

C. $-\dfrac{4}{3}$　　D. $-\dfrac{3}{4}$

2. 已知 $\tan\alpha=\dfrac{1}{2}$，则 $\sin\alpha\cos\alpha$ 的值为　(　　)

A. $\dfrac{1}{5}$　　B. $\dfrac{2}{5}$

C. $\dfrac{3}{5}$　　D. $-\dfrac{2}{5}$

3. 已知 $\sin\theta<0$，$\tan\theta>0$，则 $\sqrt{1-\sin^2\theta}$ 化简的结果为　(　　)

A. $\cos\theta$　　B. $-\cos\theta$

C. $\pm\cos\theta$　　D. $\sin\theta$

4. 若 α 为第三象限的角，则 $\dfrac{\cos\alpha}{\sqrt{1-\sin^2\alpha}}+\dfrac{2\sin\alpha}{\sqrt{1-\cos^2\alpha}}$ 的值为　(　　)

A. 3　　B. -3

C. 1　　D. -1

二、填空题

5. 已知 θ 是第四象限的角，且 $\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{3}{5}$，则 $\tan\left(\theta-\dfrac{\pi}{4}\right)=$_____.

6. 已知 $\tan\theta=2$，则 $\cos^2\theta=$_____.

7. 已知 $\sin\alpha=\dfrac{m-3}{m+5}$，$\cos\alpha=\dfrac{4-2m}{m+5}(m\neq 0)$，则 $m=$_____，$\tan\alpha=$_____.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

学习札记

三、解答题

8. 化简：

(1)$(1+\tan^2\alpha)\cos^2\alpha$；

(2)$\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}}+\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}\left(\pi<\alpha<\frac{3\pi}{2}\right)$；

(3)$\sin^2\alpha+\sin^2\beta-\sin^2\alpha\sin^2\beta+\cos^2\alpha\cos^2\beta$.

9. (1)已知 $\sin\alpha=\frac{12}{13}$，并且 α 是第二象限的角，求 $\cos\alpha$ 和 $\tan\alpha$ 的值；

(2)已知 $\cos\alpha=-\frac{4}{5}$，求 $\sin\alpha$ 和 $\tan\alpha$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

学习札记

第二课时　同角三角函数的基本关系(二)

1 基础知识点对点

知识点一　三角函数式的化简

1. $\dfrac{\sqrt{1-2\sin10^\circ\cos10^\circ}}{\sin10^\circ-\sqrt{1-\sin^2 10^\circ}}=$　(　)

A. 1　　B. -1

C. 2　　D. -2

2. $\sin^2(\pi+\alpha)-\cos(\pi+\alpha)\cos(-\alpha)+1$ 的值为　(　)

A. 1　　B. $2\sin^2\alpha$

C. 0　　D. 2

知识点二　三角函数式的求值

3. 若 $\alpha\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$，且 $\sin\alpha-\cos\alpha=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，则 $\sin\alpha\cos\alpha$ 的值为　(　)

A. $\dfrac{1}{8}$　　B. $-\dfrac{1}{8}$

C. $\dfrac{1}{4}$　　D. $-\dfrac{1}{4}$

4. 已知 $\sin\alpha=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$，则 $\sin^4\alpha-\cos^4\alpha$ 的值为　(　)

A. $-\dfrac{1}{5}$　　B. $-\dfrac{3}{5}$

C. $\dfrac{1}{5}$　　D. $\dfrac{3}{5}$

知识点三　三角恒等式证明

5. 求证：$3-2\cos^2\alpha=\dfrac{3\tan^2\alpha+1}{\tan^2\alpha+1}$.

2 课后拔高提能练

一、选择题

1. 若 α 是第四象限角，则下列各式中，成立的是(　)

A. $\tan\alpha=-\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$

B. $\cos\alpha=-\sqrt{1-\sin^2\alpha}$

C. $\sin\alpha=-\sqrt{1-\cos^2\alpha}$

D. $\tan\alpha=\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$

2. 已知 $\dfrac{\sin\theta+\cos\theta}{\sin\theta-\cos\theta}=2$，则 $\sin\theta\cos\theta$ 的值为　(　)

A. $\dfrac{3}{4}$　　B. $\dfrac{3}{10}$

C. $-\dfrac{3}{10}$　　D. $\pm\dfrac{3}{10}$

3. 已知 $\dfrac{1+\sin\alpha}{\cos\alpha}=-\dfrac{1}{2}$，则 $\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha-1}=$　(　)

A. $\dfrac{1}{2}$　　B. $-\dfrac{1}{2}$

C. 2　　D. -2

4. 下列三个式子化简正确的有　(　)

①$\sqrt{1-\sin^2 100^\circ}=\cos100^\circ$；② $\cos\alpha\tan(2\pi+\alpha)=\sin\alpha$；③$\sqrt{\dfrac{1+\sin\alpha}{1-\sin\alpha}}-\sqrt{\dfrac{1-\sin\alpha}{1+\sin\alpha}}=2|\tan\alpha|$.

A. 0 个　　B. 1 个

C. 2 个　　D. 3 个

二、填空题

5. **(2017·全国卷Ⅱ)** 函数 $f(x)=\sin^2 x+\sqrt{3}\cos x-\dfrac{3}{4}$ $\left(x\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]\right)$ 的最大值是_____.

6. 若 $\tan\theta+\dfrac{1}{\tan\theta}=4$，则 $\sin\theta\cdot\cos\theta=$_____.

7. $\sqrt{1-2\sin\dfrac{\alpha}{2}\cos\dfrac{\alpha}{2}}+\sqrt{1+2\sin\dfrac{\alpha}{2}\cos\dfrac{\alpha}{2}}$ $\left(0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}\right)=$_____.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

学习札记

三、解答题

8. 已知 $\sin\theta+\cos\theta=\frac{1-\sqrt{3}}{2}(0<\theta<\pi)$，求 $\sin\theta,\cos\theta$.

9. 已知关于 x 的方程 $2x^2-(\sqrt{3}+1)x+m=0$ 的两个根分别为 $\sin\theta$ 和 $\cos\theta,\theta\in(0,2\pi)$，求：

(1)$\frac{\sin\theta}{1-\frac{\cos\theta}{\sin\theta}}+\frac{\cos\theta}{1-\tan\theta}$的值；

(2)m 的值；

(3)方程的两个根及此时 θ 的值.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

学习札记

§2　两角和与差的三角函数

2.1　两角差的余弦函数

1 基础知识点对点

知识点一　两角差的余弦函数

1. cos15°的值为　　(　　)

A. $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$　　B. $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

C. $\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$　　D. $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}$

2. 若 $\sin(\pi+\theta)=-\frac{3}{5}$，$\theta$ 是第二象限角，$\sin\left(\frac{\pi}{2}+\varphi\right)=-\frac{2\sqrt{5}}{5}$，$\varphi$ 是第三象限角，则 $\cos(\theta-\varphi)$ 的值是　　(　　)

A. $-\frac{\sqrt{5}}{5}$　　B. $\frac{\sqrt{5}}{5}$

C. $\frac{11\sqrt{5}}{25}$　　D. $\sqrt{5}$

知识点二　公式逆用

3. 下面利用两角差的余弦公式化简，其中错误的是　　(　　)

A. $\cos70°\cos40°+\sin70°\sin40°=\cos30°$

B. $\cos45°\cos(-30°)+\sin45°\sin(-30°)=\cos75°$

C. $\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)\sin\alpha+\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)\cos\alpha=\frac{1}{2}$

D. $\frac{1}{2}\cos\alpha+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\alpha=\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{6}\right)$

4. $\cos80°\cdot\cos35°+\sin80°\cdot\cos55°$ 的值是　　(　　)

A. $\frac{\sqrt{2}}{2}$　　B. $-\frac{\sqrt{2}}{2}$

C. $\frac{1}{2}$　　D. $-\frac{1}{2}$

知识点三　求角

5. 已知 α、β 均为锐角，且 $\cos\alpha=\frac{1}{7}$，$\cos(\alpha+\beta)=-\frac{11}{14}$，则角 β 为　　(　　)

A. $\frac{\pi}{6}$　　B. $\frac{\pi}{3}$

C. $\frac{2\pi}{3}$　　D. $\frac{5\pi}{6}$

2 课后拔高提能练

一、选择题

1. $\sin245°\sin125°+\sin155°\sin35°$ 的值是　　(　　)

A. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$　　B. $-\frac{1}{2}$

C. $\frac{1}{2}$　　D. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

2. 已知 $\alpha\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$，$\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{3}{5}$，则 $\cos\alpha=$　　(　　)

A. $-\frac{\sqrt{2}}{10}$　　B. $\frac{7\sqrt{2}}{10}$

C. $-\frac{\sqrt{2}}{10}$ 或 $\frac{7\sqrt{2}}{10}$　　D. $-\frac{7\sqrt{2}}{10}$

3. 满足 $\cos\alpha\cos\beta=\frac{\sqrt{3}}{2}-\sin\alpha\sin\beta$ 的一组 α，β 的值是　　(　　)

A. $\alpha=\frac{13\pi}{12}$，$\beta=\frac{3\pi}{4}$　　B. $\alpha=\frac{\pi}{2}$，$\beta=\frac{\pi}{3}$

C. $\alpha=\frac{\pi}{2}$，$\beta=\frac{\pi}{6}$　　D. $\alpha=\frac{\pi}{3}$，$\beta=\frac{\pi}{4}$

4. 若 $\sin\alpha-\sin\beta=1-\frac{\sqrt{3}}{2}$，$\cos\alpha-\cos\beta=\frac{1}{2}$，则 $\cos(\alpha-\beta)$ 的值为　　(　　)

A. $\frac{1}{2}$　　B. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

C. $\frac{\sqrt{3}}{4}$　　D. 1

二、填空题

5. $\cos(62°+2\alpha)\cos(32°+2\alpha)+\sin(62°+2\alpha)\sin(32°+2\alpha)=$_____.

6. 已知 $\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma=0$，$\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma=0$，则 $\cos(\alpha-\beta)$ 的值为_____.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

学习札记

7. 已知 α 为三角形的内角，且 $\frac{1}{2}\cos\alpha+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\alpha=\frac{1}{2}$，则 $\alpha=$_____.

三、解答题

8. 已知 $\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{4}{5}$，且 $\frac{\pi}{4}<\alpha<\frac{3\pi}{4}$，求 $\cos\alpha$ 的值.

9. 已知 $\boldsymbol{a}=(\cos\alpha,\sin\alpha)$，$\boldsymbol{b}=(\cos\beta,\sin\beta)$，$|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=\frac{2}{5}\sqrt{5}$.

(1)求 $\cos(\alpha-\beta)$ 的值；

(2)若 $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$，$-\frac{\pi}{2}<\beta<0$，且 $\sin\alpha=\frac{5}{13}$，求 $\cos\beta$ 的值.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

学习札记

2.2　两角和与差的正弦、余弦函数

1 基础知识点对点

知识点一　给角求值

1. $\sin 165^\circ =$ （　）

A. $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$　　B. $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

C. $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{3}}{4}$　　D. $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{3}}{4}$

2. 已知锐角 α,β 满足 $\cos\alpha=\frac{3}{5}$，$\cos(\alpha+\beta)=-\frac{5}{13}$，则 $\cos(2\pi-\beta)$ 的值为 （　）

A. $\frac{33}{65}$　　B. $-\frac{33}{65}$

C. $\frac{54}{65}$　　D. $-\frac{54}{65}$

知识点二　给值求角

3. 若 $\cos(\alpha-\beta)=\frac{\sqrt{5}}{5}$，$\cos 2\alpha=\frac{\sqrt{10}}{10}$，并且 α、β 均为锐角且 $\alpha<\beta$，则 $\alpha+\beta$ 的值为 （　）

A. $\frac{\pi}{6}$　　B. $\frac{\pi}{4}$

C. $\frac{3\pi}{4}$　　D. $\frac{5\pi}{6}$

4. 已知 $\sin\left(\frac{\pi}{6}+\alpha\right)=\frac{1}{4}$，则 $\cos\alpha+\sqrt{3}\sin\alpha$ 的值为 （　）

A. $-\frac{1}{4}$　　B. $\frac{1}{2}$

C. -1　　D. 2

知识点三　给值求值

5. 若 $\alpha,\beta\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，$\sin\left(\alpha-\frac{\beta}{2}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$，$\sin\left(\frac{\alpha}{2}-\beta\right)=-\frac{1}{2}$，则 $\sin\frac{\alpha+\beta}{2}$ 的值为 （　）

A. $-\frac{1}{2}$　　B. $\frac{1}{2}$

C. 1　　D. -1

2 课后拔高提能练

一、选择题

1. $\sin\theta\cos\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)-\cos\theta\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)$ 的值为 （　）

A. $\frac{\sqrt{2}}{2}$　　B. $-\frac{\sqrt{2}}{2}$

C. 1　　D. -1

2. 在 $\triangle ABC$ 中，若 $\sin A\sin B<\cos A\cos B$，则 $\triangle ABC$ 是 （　）

A. 直角三角形　　B. 钝角三角形

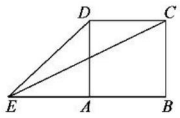
C. 锐角三角形　　D. 等腰三角形

3. 已知 $\sin\left(\frac{\pi}{6}-\alpha\right)=\cos\left(\frac{\pi}{6}+\alpha\right)$，则 $\tan\alpha=$ （　）

A. -1　　B. 0

C. $\frac{1}{2}$　　D. 1

4. 如图，正方形 $ABCD$ 的边长为 1，延长 BA 至 E，使 $AE=1$，连接 EC、ED，则 $\sin\angle CED=$ （　）



A. $\frac{3\sqrt{10}}{10}$　　B. $\frac{\sqrt{10}}{10}$

C. $\frac{\sqrt{5}}{10}$　　D. $\frac{\sqrt{5}}{15}$

二、填空题

5. 已知 θ 是第二象限角，$\sin\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)=-\frac{3}{5}$，则 $\cos\theta=$ _____.

6. （2018·全国卷Ⅱ）已知 $\sin\alpha+\cos\beta=1$，$\cos\alpha+\sin\beta=0$，则 $\sin(\alpha+\beta)=$ _____.

7. 若 $\sin\left(\theta-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{8}{17}$，$\frac{\pi}{6}<\theta<\frac{\pi}{2}$，则 $\cos\theta=$ _____.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

学习札记

三、解答题

8. 已知 α,β 都是锐角，$\cos\alpha\cdot\cos\beta-\sin\alpha\cdot\sin\beta=-\frac{11}{14}$，$\cos\alpha=\frac{1}{7}$，求 $\cos\beta$.

9. 已知向量 $\boldsymbol{a}=(\cos\theta,\sin\theta)$，$\theta\in[0,\pi]$，向量 $\boldsymbol{b}=(\sqrt{3},-1)$.

(1)若 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$，求 θ 的值；

(2)若 $|2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|<m$ 恒成立，求实数 m 的取值范围.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

学习札记

2.3　两角和与差的正切函数

1 基础知识点对点

知识点一　公式的直接应用

1. 已知 $\alpha\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$，$\sin\alpha=\frac{3}{5}$，则 $\tan\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)$的值为　　（　　）

A. $\frac{7}{4}$　　B. -7

C. $\frac{4}{7}$　　D. 7

2. 已知$\frac{1-\tan\alpha}{1+\tan\alpha}=2+\sqrt{3}$，则 $\tan\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)=$　　（　　）

A. $2+\sqrt{3}$　　B. $2-\sqrt{3}$

C. 1　　D. $\sqrt{3}$

知识点二　公式的变形应用

3. $\frac{1+\tan75^\circ}{1-\tan75^\circ}=$　　（　　）

A. $\sqrt{3}$　　B. $-\sqrt{3}$

C. $\frac{\sqrt{3}}{3}$　　D. $-\frac{\sqrt{3}}{3}$

4. $\frac{\tan20^\circ+\tan40^\circ+\tan120^\circ}{\tan20^\circ\tan40^\circ\tan120^\circ}=$　　（　　）

A. 1　　B. -1

C. $\sqrt{3}$　　D. $-\sqrt{3}$

知识点三　利用公式求角

5. 若 $\alpha,\beta\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，$\tan\alpha=\frac{4}{3}$，$\tan\beta=\frac{1}{7}$，则 $\alpha-\beta$等于　　（　　）

A. $\frac{\pi}{3}$　　B. $\frac{\pi}{4}$

C. $\frac{\pi}{6}$　　D. $\frac{\pi}{8}$

2 课后拔高提能练

一、选择题

1. 若 $\alpha\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$，$\tan\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{7}$，则 $\sin\alpha=$　　（　　）

A. $\frac{3}{5}$　　B. $\frac{4}{5}$

C. $-\frac{3}{5}$　　D. $-\frac{4}{5}$

2. 已知 $\tan(\alpha+\beta)=\frac{3}{5}$，$\tan\left(\beta-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{4}$，那么 $\tan\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)=$　　（　　）

A. $\frac{13}{18}$　　B. $\frac{13}{23}$

C. $\frac{7}{23}$　　D. $\frac{1}{6}$

3. 若 $\tan\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)=2$，则$\frac{1}{2\sin\alpha\cos\alpha+\cos^2\alpha}$的值为　　（　　）

A. $\frac{3}{2}$　　B. $-\frac{3}{2}$

C. $\frac{2}{3}$　　D. $-\frac{2}{3}$

4. 若 $\tan\alpha=\lg 10m$，$\tan\beta=\lg m$，且 $\alpha-\beta=\frac{\pi}{4}$，则实数 m的值为　　（　　）

A. 1　　B. $\frac{1}{10}$

C. 1 或$\frac{1}{10}$　　D. 1 或 10

二、填空题

5. **(2017 · 江苏卷)** 若 $\tan\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{6}$，则 $\tan\alpha=$_____.

6. **(2018 · 全国卷Ⅱ)** 已知 $\tan\left(\alpha-\frac{5\pi}{4}\right)=\frac{1}{5}$，则 $\tan\alpha=$_____.

7. 已知 $\tan\left(\alpha-\frac{\beta}{2}\right)=\frac{1}{2}$，$\tan\left(\beta-\frac{\alpha}{2}\right)=-\frac{1}{3}$，则 $\tan\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)=$_____.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

学习札记

三、解答题

8. 已知△ABC 中，$\tan B+\tan C+\sqrt{3}\tan B\tan C=\sqrt{3}$，且 $\sqrt{3}\tan A+\sqrt{3}\tan B=\tan A\tan B-1$，试判断△$ABC$ 的形状.

9. 若 $\tan\alpha$，$\tan\beta$ 是关于 x 的方程 $mx^2-(2m-3)x+m-2=0$ 的两个实根.

(1)求 m 的取值范围；

(2)求 $\tan(\alpha+\beta)$ 的取值范围.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

学习札记

§3　二倍角的三角函数

1 基础知识点对点

知识点一　二倍角公式正用

1.（2017·全国卷Ⅲ）已知 $\sin\alpha-\cos\alpha=\frac{4}{3}$，则 $\sin 2\alpha=$（　　）

A. $-\frac{7}{9}$　　B. $-\frac{2}{9}$

C. $\frac{2}{9}$　　D. $\frac{7}{9}$

2.（2018·全国卷Ⅲ）函数 $f(x)=\frac{\tan x}{1+\tan^2 x}$ 的最小正周期为（　　）

A. $\frac{\pi}{4}$　　B. $\frac{\pi}{2}$

C. π　　D. 2π

知识点二　二倍角公式灵活应用

3. 若 $\tan\theta+\frac{1}{\tan\theta}=4$，则 $\sin 2\theta=$（　　）

A. $\frac{1}{5}$　　B. $\frac{1}{4}$

C. $\frac{1}{3}$　　D. $\frac{1}{2}$

4. 已知函数 $f(x)=\sin^2\frac{\omega x}{2}+\frac{1}{2}\sin\omega x-\frac{1}{2}(\omega>0)$，$x\in\mathbf{R}$. 若 $f(x)$ 在区间 $(\pi,2\pi)$ 内没有零点，则 ω 的取值范围是（　　）

A. $\left(0,\frac{1}{8}\right]$　　B. $\left(0,\frac{1}{4}\right]\cup\left[\frac{5}{8},1\right)$

C. $\left(0,\frac{5}{8}\right]$　　D. $\left(0,\frac{1}{8}\right]\cup\left[\frac{1}{4},\frac{5}{8}\right]$

知识点三　用二倍角公式化简

5. 化简下列各式：

（1）$\cos 20^\circ\cos 40^\circ\cos 60^\circ\cos 80^\circ$；

（2）$\sin^2 20^\circ+\cos^2 50^\circ+\sin 30^\circ\sin 70^\circ$.

2 课后拔高提能练

一、选择题

1. $\frac{2\sin 2\alpha}{1+\cos 2\alpha}\cdot\frac{\cos^2\alpha}{\cos 2\alpha}=$（　　）

A. $\tan\alpha$　　B. $\tan 2\alpha$

C. 1　　D. $\frac{1}{2}$

2. 函数 $f(x)=\cos 2x+6\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$ 的最大值为（　　）

A. 4　　B. 5

C. 6　　D. 7

3. 若 $\tan\theta=\frac{1}{3}$，则 $\cos 2\theta=$（　　）

A. $-\frac{4}{5}$　　B. $-\frac{1}{5}$

C. $\frac{1}{5}$　　D. $\frac{4}{5}$

4. 已知 $\sin\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)=-\frac{2}{5}$，则 $\cos\left(\frac{2\,015\pi}{3}-2\alpha\right)=$（　　）

A. $-\frac{17}{25}$　　B. $-\frac{7}{8}$

C. $\frac{17}{25}$　　D. $\frac{7}{8}$

二、填空题

5.（2018·全国卷Ⅲ，改编）若 $\sin\alpha=\frac{1}{3}$，则 $\cos 2\alpha=$_____.

6. 若向量 $\boldsymbol{a}=\left(\cos\alpha,\frac{1}{2}\right)$ 的模为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$，则 $\cos 2\alpha=$_____.

7. 函数 $f(x)=\sin\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)-2\sqrt{2}\sin^2 x$ 的最小正周期是_____.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

学习札记

三、解答题

8. 已知函数 $f(x)=\dfrac{(\sin x-\cos x)\sin 2x}{\sin x}$.

(1)求 $f(x)$的定义域及最小正周期；

(2)求 $f(x)$的单调递增区间.

9. **(2017·北京卷)**已知函数 $f(x)=\sqrt{3}\cos\left(2x-\dfrac{\pi}{3}\right)-2\sin x\cos x$.

(1)求 $f(x)$的最小正周期；

(2)求证：当 $x\in\left[-\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{4}\right]$时，$f(x)\geqslant-\dfrac{1}{2}$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

学习札记

三角向量真题体验

时间：45 分钟　满分：100 分

一、选择题（6×5=30 分）

1.（**2017 · 全国卷Ⅱ**）函数 $f(x)=\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$ 的最小正周期为（　　）

A. 4π　　B. 2π

C. π　　D. $\frac{\pi}{2}$

2.（**2018 · 全国卷Ⅱ**）若 $f(x)=\cos x-\sin x$ 在 $[-a,a]$ 是减函数，则 a 的最大值是（　　）

A. $\frac{\pi}{4}$　　B. $\frac{\pi}{2}$

C. $\frac{3\pi}{4}$　　D. π

3. 已知 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 为平面向量，$\boldsymbol{a}=(4,3)$，$2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(3,18)$，则 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 夹角的余弦值等于（　　）

A. $\frac{8}{65}$　　B. $-\frac{8}{65}$

C. $\frac{16}{65}$　　D. $-\frac{16}{65}$

4. 已知向量 $\overrightarrow{BA}=\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$，$\overrightarrow{BC}=\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2}\right)$，则 $\angle ABC=$（　　）

A. 30°　　B. 45°

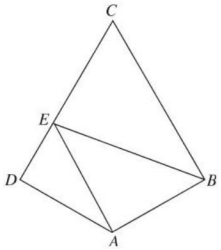
C. 60°　　D. 120°

5. 已知向量 $\boldsymbol{a}=(2,3)$，$\boldsymbol{b}=(\cos\theta,\sin\theta)$，且 $\boldsymbol{a}\parallel\boldsymbol{b}$，则 $\tan\theta$ 的值为（　　）

A. $\frac{3}{2}$　　B. $-\frac{2}{3}$

C. $\frac{2}{3}$　　D. $-\frac{3}{2}$

6.（**2018 · 天津卷**）如图，在平面四边形 $ABCD$ 中，$AB\perp BC$，$AD\perp CD$，$\angle BAD=120^\circ$，$AB=AD=1$. 若点 E 为边 CD 上的动点，则 $\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{BE}$ 的最小值为（　　）



A. $\frac{21}{16}$　　B. $\frac{3}{2}$

C. $\frac{25}{16}$　　D. 3

二、填空题（5×3=15 分）

7.（**2018 · 全国卷Ⅲ**）函数 $f(x)=\cos\left(3x+\frac{\pi}{6}\right)$ 在 $[0,\pi]$ 的零点个数为_____.

8.（**2018 · 江苏卷**）已知函数 $y=\sin(2x+\varphi)\left(-\frac{\pi}{2}<\varphi<\frac{\pi}{2}\right)$ 的图像关于直线 $x=\frac{\pi}{3}$ 对称，则 φ 的值是_____.

9. 函数 $y=\sin x-\sqrt{3}\cos x$ 的图像可由函数 $y=2\sin x$ 的图像至少向右平移_____个单位长度得到.

三、解答题（55 分）

10.（13 分）已知 $\tan 2\theta=-2\sqrt{2}$，$\pi<2\theta<2\pi$.

（1）求 $\tan\theta$ 的值；

（2）求 $\dfrac{2\cos^2\frac{\theta}{2}-1-\sin\theta}{\sqrt{2}\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)}$ 的值.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

学习札记

11.（13 分）**（2017 · 江苏卷）**已知向量 $\boldsymbol{a}=(\cos x,\sin x)$，$\boldsymbol{b}=(3,-\sqrt{3})$，$x\in[0,\pi]$.

（1）若 $\boldsymbol{a}\parallel\boldsymbol{b}$，求 x 的值；

（2）记 $f(x)=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$，求 $f(x)$ 的最大值和最小值以及对应的 x 的值.

12.（14 分）**（2018 · 浙江卷）**已知角 α 的顶点与原点 O 重合，始边与 x 轴的非负半轴重合，它的终边过点 $P\left(-\frac{3}{5},-\frac{4}{5}\right)$.

（1）求 $\sin(\alpha+\pi)$ 的值；

（2）若角 β 满足 $\sin(\alpha+\beta)=\frac{5}{13}$，求 $\cos\beta$ 的值.

13.（15 分）**（2018 · 江苏卷）**已知 α,β 为锐角，$\tan\alpha=\frac{4}{3}$，$\cos(\alpha+\beta)=-\frac{\sqrt{5}}{5}$.

（1）求 $\cos 2\alpha$ 的值；

（2）求 $\tan(\alpha-\beta)$ 的值.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

班级_____ 姓名_____ 考场号_____ 准考证号_____

密 封 线

阶段测试一

(第一章 三角函数)

时间:120 分钟 满分:150 分

一、选择题(本大题共 10 小题,每小题 5 分,共 50 分,在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的)

1. 若 $\tan\alpha>0$,则 ( )

A. $\sin\alpha>0$ B. $\cos\alpha>0$ C. $\sin\alpha\cos\alpha>0$ D. $\sin\alpha\cos\alpha<0$

2. 已知扇形的圆心角为$\frac{2\pi}{3}$弧度,半径为 2,则扇形的面积为 ( )

A. $\frac{8}{3}\pi$ B. $\frac{4}{3}$ C. 2π D. $\frac{4\pi}{3}$

3. 已知角 θ 的终边过点$(4,-3)$,则 $\cos(\pi-\theta)=$ ( )

A. $\frac{4}{5}$ B. $-\frac{4}{5}$ C. $\frac{3}{5}$ D. $-\frac{3}{5}$

4. 如果函数 $f(x)=\cos(3x+\varphi)$的图像关于原点对称,则 φ 的值为 ( )

A. $\pm\frac{\pi}{2}$ B. $2k\pi-\frac{\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$

C. $k\pi(k\in\mathbf{Z})$ D. $k\pi+\frac{\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$

5. 方程 $\sin x=\tan x$ 在$\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$内解的个数为 ( )

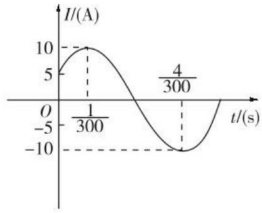
A. 0 B. 1 C. 2 D. 3

6. 已知函数 $f(x)=\sin(\omega x+\varphi)\left(\omega>0,|\varphi|<\frac{\pi}{2}\right)$的最小正周期是 π,若其图像向右平移$\frac{\pi}{3}$个单位后得到的函数为奇函数,则函数 $y=f(x)$的图像 ( )

A. 关于点$\left(\frac{\pi}{12},0\right)$对称 B. 关于直线 $x=\frac{\pi}{12}$对称

C. 关于点$\left(\frac{5\pi}{12},0\right)$对称 D. 关于直线 $x=\frac{5\pi}{12}$对称

7. 电流强度 I(A)随时间 t(s)变化的函数 $I=A\sin(\omega t+\varphi)\left(A>0,\omega>0,0<\varphi<\frac{\pi}{2}\right)$的图像如图所示,则当 $t=\frac{1}{100}$ s 时,电流强度是 ( )



A. -5 A B. 5 A C. $5\sqrt{3}$ A D. 10 A

8. 函数 $y=2\sin\left(\frac{\pi x}{6}-\frac{\pi}{3}\right)(0\leqslant x\leqslant 9)$的最大值与最小值之和为 ( )

A. $2-\sqrt{3}$ B. 0 C. -1 D. $-1-\sqrt{3}$

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

9. 将函数 $f(x)=\cos 2x$ 的图像向右平移 $\frac{\pi}{4}$ 个单位后得到函数 $g(x)$，则 $g(x)$ 具有的性质是 （　　）

A. 最大值为 1，图像关于直线 $x=\frac{\pi}{2}$ 对称　　B. 在 $\left(0,\frac{\pi}{4}\right)$ 上单调递增，为奇函数

C. 在 $\left(-\frac{3\pi}{8},\frac{\pi}{8}\right)$ 上单调递增，为偶函数　　D. 周期为 π，图像关于点 $\left(\frac{3\pi}{8},0\right)$ 对称

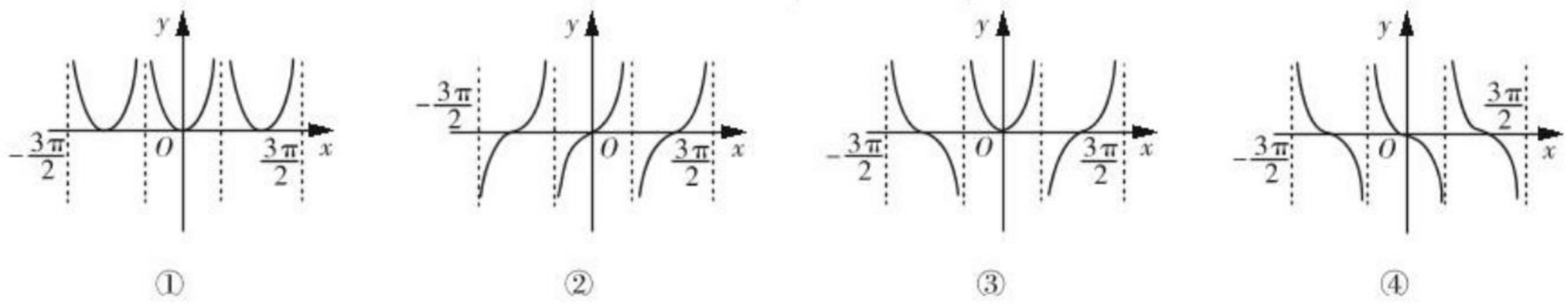
10. 已知 $\omega>0$，函数 $f(x)=\sin\left(\omega x+\frac{\pi}{4}\right)$ 在 $\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$ 上单调递减，则 ω 的取值范围是 （　　）

A. $\left[\frac{1}{2},\frac{5}{4}\right]$　　B. $\left[\frac{1}{2},\frac{3}{4}\right]$　　C. $\left(0,\frac{1}{2}\right]$　　D. $(0,2]$

二、填空题（本大题共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分，把答案填在题中横线上）

11. 已知点 $M(\tan\alpha,\cos\alpha)$ 在第二象限，则角 α 的终边在第_____象限.

12. 函数 $y=|\tan x|$，$y=\tan x$，$y=\tan(-x)$，$y=\tan|x|$ 在 $\left(-\frac{3\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right)$ 上的大致图像依次是_____.



①　②　③　④

13. 已知函数 $f(x)=\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$，其中 $x\in\left[-\frac{\pi}{3},\alpha\right]$. 当 $\alpha=\frac{\pi}{2}$ 时，$f(x)$ 的值域是_____.

14. 若 $\cos\left(\frac{\pi}{6}-\alpha\right)=a$ 则 $\sin\left(\frac{2\pi}{3}-\alpha\right)=$_____.

15. 下列说法正确的序号为_____（把你认为正确的都写出来）.

①$y=\frac{1}{2}\sin 2x$ 的周期为 π，最大值为 $\frac{1}{2}$；

②若 x 是第一象限的角，则 $y=\sin x$ 是增函数；

③在 $\triangle ABC$ 中，若 $\sin A=\sin B$，则 $A=B$；

④α、$\beta\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 且 $\cos\alpha<\sin\beta$，则 $\alpha+\beta>\frac{\pi}{2}$.

三、解答题（本大题共 6 小题，共 75 分，解答时写出文字说明、证明过程或演算步骤）

16.（12 分）角 α 终边上的点 P 与 $A(a,b)$ 关于 x 轴对称（$a\neq 0$，$b\neq 0$），角 β 的终边上的点 Q 与 A 关于直线 $y=x$ 对称，求 $\frac{\sin\alpha}{\cos\beta}+\frac{\tan\alpha}{\tan\beta}+\frac{1}{\cos\alpha\sin\beta}$ 的值.

17.（12 分）已知角 α 的终边过点 $P(1,\sqrt{3})$.

（1）求 $\sin(\pi-\alpha)-\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)$ 的值；

（2）写出满足 $2\cos x-\tan\alpha>0$ 的角 x 的集合 S.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

18.(12 分)函数 $f(x)=A\sin\left(\omega x-\frac{\pi}{6}\right)+1(A>0,\omega>0)$的最大值为 3,其图像相邻两条对称轴之间的距离为$\frac{\pi}{2}$.

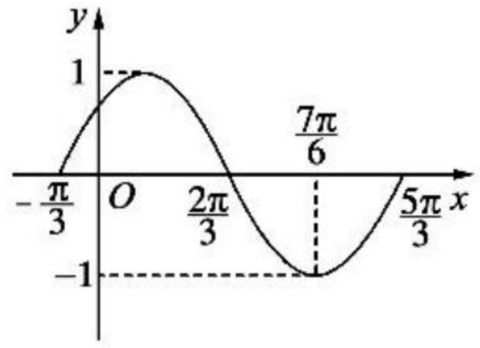
(1)求函数 $f(x)$的解析式;

(2)设 $\alpha\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$,则 $f\left(\frac{\alpha}{2}\right)=2$,求 α 的值.

19.(12 分)已知函数 $f(x)=A\sin(\omega x+\varphi)\left(A>0\text{ 且 }\omega>0,0<\varphi<\frac{\pi}{2}\right)$的部分图像,如图所示.

(1)求函数 $f(x)$的解析式;

(2)若方程 $f(x)=a$ 在$\left(0,\frac{5\pi}{3}\right)$上有两个不同的实根,试求 a 的取值范围.



关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

20.(13 分)某同学用“五点法”画函数 $f(x)=A\sin(\omega x+\varphi)\left(\omega>0,|\varphi|<\frac{\pi}{2}\right)$ 在某一个周期内的图像时,列表并填入了部分数据,如下表:

$\omega x+\varphi$	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
x		$\frac{\pi}{3}$		$\frac{5\pi}{6}$	
$A\sin(\omega x+\varphi)$	0	5		-5	0

(1)请将上表数据补充完整,并直接写出函数 $f(x)$ 的解析式;

(2)将 $y=f(x)$ 图像上所有点向左平行移动 $\theta(\theta>0)$ 个单位长度,得到 $y=g(x)$ 的图像.若 $y=g(x)$ 图像的一个对称中心为 $\left(\frac{5\pi}{12},0\right)$,求 θ 的最小值.

21.(14 分)已知 $f(x)=2\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)+a+1$($a$ 为常数).

(1)求 $f(x)$ 的单调递增区间;

(2)若当 $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 时,$f(x)$ 的最大值为 4,求 a 的值;

(3)求出使 $f(x)$ 取得最大值时 x 的取值集合.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

班级 姓名 考场号 准考证号
密 封 线
数学 必修4 BS

班级_____ 姓名_____ 考场号_____ 准考证号_____

密 封 线

阶段测试二

(第二章 平面向量)

时间:120 分钟 满分:150 分

一、选择题(本大题共 10 小题,每小题 5 分,共 50 分,在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的)

1. 以 $\boldsymbol{a}=(-1,2)$,$\boldsymbol{b}=(1,-1)$为基底表示 $\boldsymbol{c}=(3,-2)$为 ( )

A. $\boldsymbol{c}=4\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ B. $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+4\boldsymbol{b}$ C. $\boldsymbol{c}=4\boldsymbol{b}$ D. $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}-4\boldsymbol{b}$

2. 已知 $A(1,2)$,$B(3,4)$,$C(-2,2)$,$D(-3,5)$,则向量$\overrightarrow{AB}$在向量$\overrightarrow{CD}$上的投影为 ( )

A. $\frac{\sqrt{10}}{5}$ B. $\frac{2\sqrt{10}}{5}$ C. $\frac{3\sqrt{10}}{5}$ D. $\frac{4\sqrt{10}}{5}$

3. 已知平面向量 $\boldsymbol{a}=(1,-3)$,$\boldsymbol{b}=(4,-2)$,$\lambda\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 垂直,则 λ 是 ( )

A. -1 B. 1 C. -2 D. 2

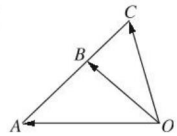
4. 已知向量 $\boldsymbol{a}=(2,1)$,$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=10$,$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=5\sqrt{2}$,则$|\boldsymbol{b}|=$ ( )

A. 5 B. 25 C. $\sqrt{5}$ D. $\sqrt{10}$

5. 已知 $\boldsymbol{a}=(3,1)$,$\boldsymbol{b}=(1,m)$,若 $2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b}$ 共线,则 m 的值为 ( )

A. $\frac{1}{3}$ B. -3 C. 3 D. $-\frac{1}{3}$

6. 如图所示,已知$\overrightarrow{AB}=2\overrightarrow{BC}$,$\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$,$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$,$\overrightarrow{OC}=\boldsymbol{c}$,则下列等式中成立的是 ( )



A. $\boldsymbol{c}=\frac{3}{2}\boldsymbol{b}-\frac{1}{2}\boldsymbol{a}$ B. $\boldsymbol{c}=2\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}$

C. $\boldsymbol{c}=2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ D. $\boldsymbol{c}=\frac{3}{2}\boldsymbol{a}-\frac{1}{2}\boldsymbol{b}$

7. $\triangle ABC$ 中,AB 边上的高为 CD,若$\overrightarrow{CB}=\boldsymbol{a}$,$\overrightarrow{CA}=\boldsymbol{b}$,$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$,$|\boldsymbol{a}|=1$,$|\boldsymbol{b}|=2$,则$\overrightarrow{AD}=$ ( )

A. $\frac{1}{3}\boldsymbol{a}-\frac{1}{3}\boldsymbol{b}$ B. $\frac{2}{3}\boldsymbol{a}-\frac{2}{3}\boldsymbol{b}$ C. $\frac{3}{5}\boldsymbol{a}-\frac{3}{5}\boldsymbol{b}$ D. $\frac{4}{5}\boldsymbol{a}-\frac{4}{5}\boldsymbol{b}$

8. 已知菱形 $ABCD$ 的边长为 a,$\angle ABC=60°$,则$\overrightarrow{BD}\cdot\overrightarrow{CD}=$ ( )

A. $-\frac{3}{2}a^2$ B. $-\frac{3}{4}a^2$ C. $\frac{3}{4}a^2$ D. $\frac{3}{2}a^2$

9. 向量$\overrightarrow{BA}=(4,-3)$,向量$\overrightarrow{BC}=(2,-4)$,则$\triangle ABC$ 的形状为 ( )

A. 等腰非直角三角形 B. 等边三角形

C. 直角非等腰三角形 D. 等腰直角三角形

10. **(2018·浙江卷)**已知 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{e}$ 是平面向量,$\boldsymbol{e}$ 是单位向量.若非零向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{e}$ 的夹角为$\frac{\pi}{3}$,向量 $\boldsymbol{b}$ 满足 $\boldsymbol{b}^2-4\boldsymbol{e}\cdot\boldsymbol{b}+3=0$,则$|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$的最小值是 ( )

A. $\sqrt{3}-1$ B. $\sqrt{3}+1$ C. 2 D. $2-\sqrt{3}$

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

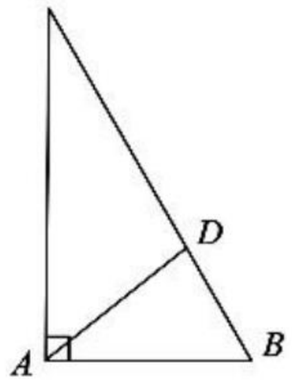
二、填空题(本大题共 5 小题,每小题 5 分,共 25 分,把答案填在题中横线上)

11.(**2017·全国卷Ⅰ**)已知向量 $\boldsymbol{a}=(-1,2)$,$\boldsymbol{b}=(m,1)$.若向量 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 垂直,则 $m=$_____.

12.已知两个单位向量 $\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$ 的夹角为 $60°$,$\boldsymbol{c}=t\boldsymbol{a}+(1-t)\boldsymbol{b}$,若 $\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}=0$,则 $t=$_____.

13.(**2018·全国卷Ⅲ**)已知向量 $\boldsymbol{a}=(1,2)$,$\boldsymbol{b}=(2,-2)$,$\boldsymbol{c}=(1,\lambda)$.若 $\boldsymbol{c}\parallel(2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$,则 $\lambda=$_____.

14.如图,在 Rt$\triangle ABC$ 中,$AB=1$,$AC=\sqrt{3}$,$BC=2$,点 D 在边 BC 上,且 $BD=\frac{2}{3}$,则$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}=$_____.



15.已知 $\boldsymbol{a}=(1,3)$,$\boldsymbol{b}=(1,1)$,$\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}$,$\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{c}$ 的夹角为锐角,则实数 λ 的取值范围是_____.

三、解答题(本大题共 6 小题,共 75 分,解答时写出文字说明、证明过程或演算步骤)

16.(12 分)已知 A,B,C 三点的坐标分别为$(-2,1)$,$(2,-1)$,$(0,1)$,且$\overrightarrow{CP}=3\overrightarrow{CA}$,$\overrightarrow{CQ}=2\overrightarrow{CB}$,求点 P,Q 和向量$\overrightarrow{PQ}$的坐标.

17.(12 分)已知 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$ 是同一平面内的三个向量,其中 $\boldsymbol{a}=(1,2)$.

(1)若$|\boldsymbol{c}|=2\sqrt{5}$,且 $\boldsymbol{c}\parallel\boldsymbol{a}$,求 $\boldsymbol{c}$ 的坐标;

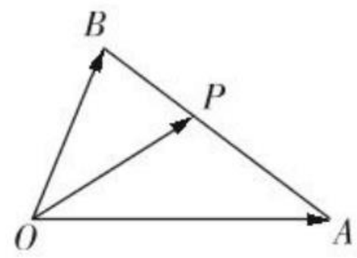
(2)若$|\boldsymbol{b}|=\frac{\sqrt{5}}{2}$,且 $\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}$ 与 $2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ 垂直,求 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角 θ.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

18.(12 分)如图,在△OAB 中,P 为线段 AB 上一点,且$\overrightarrow{OP}=x\overrightarrow{OA}+y\overrightarrow{OB}$.

(1)若$\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{PB}$,求 x,y 的值;

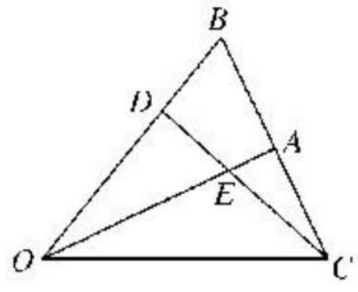
(2)若$\overrightarrow{AP}=3\overrightarrow{PB}$,$|\overrightarrow{OA}|=4$,$|\overrightarrow{OB}|=2$,且$\overrightarrow{OA}$与$\overrightarrow{OB}$的夹角为 60°,求$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{AB}$的值.



19.(12 分)如图,在△OBC 中,A 为 BC 的中点,$\overrightarrow{OD}=2\overrightarrow{DB}$,$DC$ 与 OA 相交于点 E,设$\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$,$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$.

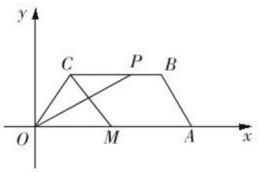
(1)用 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 表示向量$\overrightarrow{OC}$,$\overrightarrow{DC}$;

(2)若$\overrightarrow{OE}=\lambda\overrightarrow{OA}$,求实数 λ 的值.



关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

20.(13 分)在平面直角坐标系 xOy 中,已知四边形 $OABC$ 是等腰梯形,$A(6,0)$,$C(1,\sqrt{3})$,点 M 满足$\overrightarrow{OM}=\frac{1}{2}\overrightarrow{OA}$,点 P 在线段 BC 上运动(包括端点),如图.



(1)求$\angle OCM$ 的余弦值;

(2)是否存在实数 λ,使$(\overrightarrow{OA}-\lambda\overrightarrow{OP})\perp\overrightarrow{CM}$,若存在,求出满足条件的实数 λ 的取值范围,若不存在,请说明理由.

21.(14 分)已知 A、B、C 三点的坐标分别为$(1,1)$,$(3,2)$,$(2,k+1)$,求$\triangle ABC$ 为等腰直角三角形时 k 的取值.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

班级_____ 姓名_____ 考场号_____ 准考证号_____
密 封 线
数学 必修4 BS

班级_____ 姓名_____ 考场号_____ 准考证号_____

密 封 线

阶段测试三

（第三章　三角恒等变形）

时间：120 分钟　满分：150 分

一、选择题（本大题共 10 小题，每小题 5 分，共 50 分，在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的）

1. **（2018·全国卷Ⅲ，改编）**若 $\sin\frac{\alpha}{2}=\frac{1}{3}$，则 $\cos 2\alpha=$ （　）

A. $\frac{15}{81}$　　B. $\frac{7}{9}$　　C. $-\frac{7}{9}$　　D. $\frac{17}{81}$

2. **（2017·山东卷）**已知 $\cos x=\frac{3}{4}$，则 $\cos 2x=$ （　）

A. $-\frac{1}{4}$　　B. $\frac{1}{4}$　　C. $-\frac{1}{8}$　　D. $\frac{1}{8}$

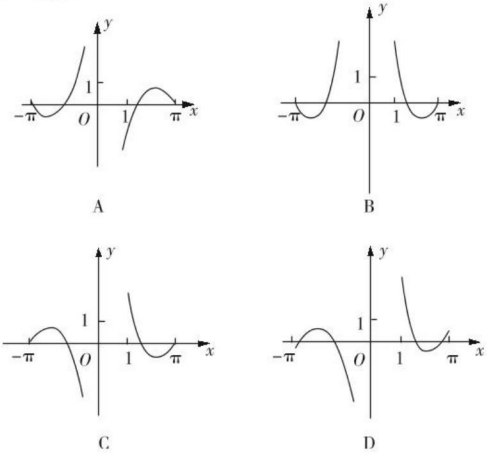
3. $\left(\cos\frac{\pi}{12}-\sin\frac{\pi}{12}\right)\left(\cos\frac{\pi}{12}+\sin\frac{\pi}{12}\right)=$ （　）

A. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$　　B. $-\frac{1}{2}$　　C. $\frac{1}{2}$　　D. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

4. 已知 $\tan(\alpha+\beta)=3$，$\tan(\alpha-\beta)=5$，则 $\tan 2\alpha$ 的值为 （　）

A. $-\frac{4}{7}$　　B. $\frac{4}{7}$　　C. $\frac{1}{8}$　　D. $-\frac{1}{8}$

5. **（2017·全国卷Ⅰ）**函数 $y=\frac{\sin 2x}{1-\cos x}$ 的部分图像大致为 （　）



A　　B

C　　D

6. 若 $\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)=-\cos 2\alpha$，则 $\sin 2\alpha$ 的值可以是 （　）

A. $-\frac{1}{2}$ 或 1　　B. $\frac{1}{2}$　　C. $\frac{3}{4}$　　D. $\pm\frac{3}{4}$

7. **（2018·全国卷Ⅰ）**已知函数 $f(x)=2\cos^2 x-\sin^2 x+2$，则 （　）

A. $f(x)$ 的最小正周期为 π，最大值为 3

B. $f(x)$ 的最小正周期为 π，最大值为 4

C. $f(x)$ 的最小正周期为 2π，最大值为 3

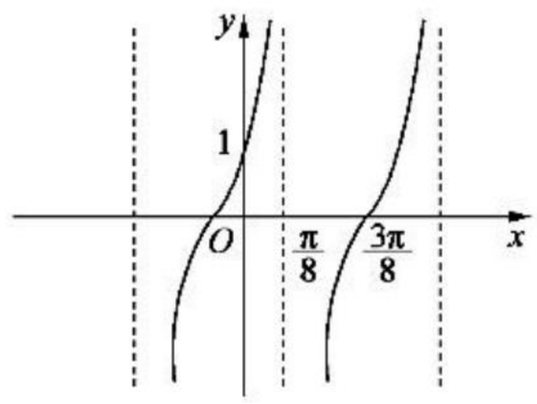
D. $f(x)$ 的最小正周期为 2π，最大值为 4

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

8. 已知$\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{3\pi}{4}$，且$\sin2\theta=-\frac{4}{5}$，则$\tan\theta$等于（　　）

A. 2　　B. $-\frac{1}{2}$　　C. -2或$-\frac{1}{2}$　　D. -2

9. 已知函数$f(x)=A\tan(\omega x+\varphi)\left(\omega>0,|\varphi|<\frac{\pi}{2}\right)$，$y=f(x)$的部分图像如图，则$f\left(\frac{\pi}{24}\right)=$（　　）



A. $2+\sqrt{3}$　　B. $\sqrt{3}$　　C. $\frac{\sqrt{3}}{3}$　　D. $2-\sqrt{3}$

10. 使函数$f(x)=\sin(2x+\theta)+\sqrt{3}\cos(2x+\theta)$是奇函数，且在$\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$上是减函数的$\theta$的一个值是（　　）

A. $\frac{\pi}{3}$　　B. $\frac{2\pi}{3}$　　C. $\frac{4\pi}{3}$　　D. $\frac{5\pi}{3}$

二、填空题(本大题共5小题，每小题5分，共25分，把答案填在题中横线上)

11. 已知$\sin\theta=\frac{12}{13}$，且$\sin\theta-\cos\theta>1$，则$\tan\theta=$_____.

12. 函数$y=\frac{\sqrt{3}}{2}\sin2x+\cos^2x$的最小正周期为_____.

13. 函数$f(x)=\sin\frac{2}{3}x+\cos\frac{2}{3}x$的图像相邻两条对称轴之间的距离是_____.

14. 已知$\alpha\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，且$\tan\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)=3$，则$\log_5(\sin\alpha+2\cos\alpha)+\log_5(3\sin\alpha+\cos\alpha)=$_____.

15. 已知$\boldsymbol{a}=(\cos2\alpha,\sin\alpha)$，$\boldsymbol{b}=(1,2\sin\alpha-1)$，$\alpha\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$，若$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\frac{2}{5}$，则$\tan2\alpha=$_____.

三、解答题(本大题共6小题，共75分，解答时写出文字说明、证明过程或演算步骤)

16. (12分)已知$\sin(\pi-\theta)=\frac{4}{5}$，$\theta\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$.

(1)求$\tan\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)$的值；

(2)求$\cos\left(2\theta-\frac{\pi}{3}\right)$的值.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

17.(12 分)**(2017·浙江卷)**已知函数 $f(x)=\sin^2x-\cos^2x-2\sqrt{3}\sin x\cos x(x\in\mathbf{R})$.

(1)求 $f\left(\frac{2\pi}{3}\right)$的值;

(2)求 $f(x)$的最小正周期及单调递增区间.

18.(12 分)某同学在一次研究性学习中发现,以下五个式子的值都等于同一个常数 a.

①$\sin^213^\circ+\cos^217^\circ-\sin13^\circ\cos17^\circ$;

②$\sin^215^\circ+\cos^215^\circ-\sin15^\circ\cos15^\circ$;

③$\sin^218^\circ+\cos^212^\circ-\sin18^\circ\cos12^\circ$;

④$\sin^2(-18^\circ)+\cos^248^\circ-\sin(-18^\circ)\cos48^\circ$;

⑤$\sin^2(-25^\circ)+\cos^255^\circ-\sin(-25^\circ)\cos55^\circ$.

(1)从上述五个式子中选择一个,求出常数 a;

(2)根据(1)的计算结果,将该同学的发现推广为一个三角恒等式,并证明你的结论.

19.(12 分)已知 A,B,C 的坐标分别为 $A(3,0),B(0,3),C(\cos\alpha,\sin\alpha),\alpha\in\left(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right)$.

(1)若 $|\overrightarrow{AC}|=|\overrightarrow{BC}|$,求角 α 的值;

(2)若 $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BC}=-1$,求 $\frac{2\sin^2\alpha+\sin2\alpha}{1+\tan\alpha}$的值.

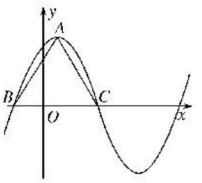
关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

20.(13 分)已知函数 $f(x)=\sin^2 x-\sin^2\left(x-\frac{\pi}{6}\right)$,$x\in\mathbf{R}$.

(1)求 $f(x)$的最小正周期;

(2)求 $f(x)$在区间$\left[-\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{4}\right]$上的最大值和最小值.

21.(14 分)函数 $f(x)=6\cos^2\frac{\omega x}{2}+\sqrt{3}\sin\omega x-3(\omega>0)$在一个周期内的图像如图所示,$A$为图像的最高点,$B$、$C$为图像与 x 轴的交点,且$\triangle ABC$为正三角形.



(1)求 ω 的值及函数 $f(x)$的值域;

(2)若 $f(x_0)=\frac{8\sqrt{3}}{5}$,且 $x_0\in\left(-\frac{10}{3},\frac{2}{3}\right)$,求 $f(x_0+1)$的值.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

班级_____ 姓名_____ 考场号_____ 准考证号_____
密 封 线
数学 必修4 BS

班级_____ 姓名_____ 考场号_____ 准考证号_____

密 封 线

阶段测试四

(综合质量测试)

时间:120 分钟　满分:150 分

一、选择题(本大题共 10 小题,每小题 5 分,共 50 分,在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的)

1. $\sin35°\cos85°+\sin55°\sin85°$的值为 (　　)

A. $\frac{1}{2}$　　B. $\frac{\sqrt{3}}{2}$　　C. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$　　D. $-\frac{1}{2}$

2. 已知 $\sin\left(\frac{\pi}{3}-x\right)=\frac{3}{5}$,则 $\cos\left(\frac{5\pi}{6}-x\right)=$ (　　)

A. $\frac{3}{5}$　　B. $\frac{4}{5}$　　C. $-\frac{3}{5}$　　D. $-\frac{4}{5}$

3. 若 $M(3,-2)$,$N(-5,-1)$,$\overrightarrow{MP}=\frac{1}{2}\overrightarrow{MN}$,则点 P 的坐标为 (　　)

A. $(-8,1)$　　B. $\left(-1,-\frac{3}{2}\right)$　　C. $\left(1,\frac{3}{2}\right)$　　D. $(8,-1)$

4. 若 $3\overrightarrow{OC}-2\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OB}$,则 (　　)

A. $\overrightarrow{AC}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$　　B. $\overrightarrow{AC}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$

C. $\overrightarrow{AC}=-\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$　　D. $\overrightarrow{AC}=-\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$

5. **(2017·山东卷)**函数 $y=\sqrt{3}\sin2x+\cos2x$ 的最小正周期为 (　　)

A. $\frac{\pi}{2}$　　B. $\frac{2\pi}{3}$　　C. π　　D. 2π

6. 已知直线 $y=2x-4$ 与曲线 $y^2=4x$ 交于 A,B 两点,$F(1,0)$,则 $\cos\angle AFB=$ (　　)

A. $\frac{4}{5}$　　B. $\frac{3}{5}$　　C. $-\frac{3}{5}$　　D. $-\frac{4}{5}$

7. **(2017·全国卷Ⅰ)**已知曲线 $C_1:y=\cos x$,$C_2:y=\sin\left(2x+\frac{2\pi}{3}\right)$,则下面结论正确的是 (　　)

A. 把 C_1 上各点的横坐标伸长到原来的 2 倍,纵坐标不变,再把得到的曲线向右平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度,得到曲线 C_2

B. 把 C_1 上各点的横坐标伸长到原来的 2 倍,纵坐标不变,再把得到的曲线向左平移 $\frac{\pi}{12}$ 个单位长度,得到曲线 C_2

C. 把 C_1 上各点的横坐标缩短到原来的 $\frac{1}{2}$ 倍,纵坐标不变,再把得到的曲线向右平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度,得到曲线 C_2

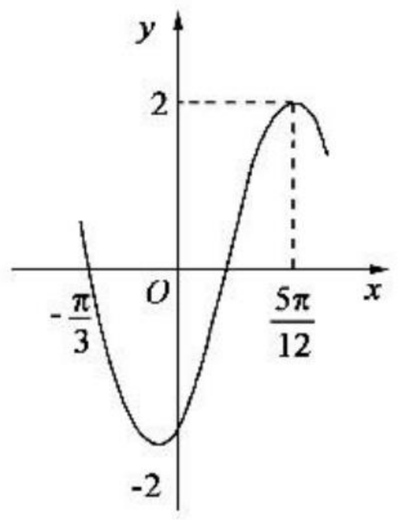
D. 把 C_1 上各点的横坐标缩短到原来的 $\frac{1}{2}$ 倍,纵坐标不变,再把得到的曲线向左平移 $\frac{\pi}{12}$ 个单位长度,得到曲线 C_2

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

8. **(2018·全国卷Ⅰ)**已知角 α 的顶点为坐标原点，始边与 x 轴的非负半轴重合，终边上有两点 $A(1,a)$，$B(2,b)$，且 $\cos 2\alpha=\frac{2}{3}$，则 $|a-b|=$ （　　）

A. $\frac{1}{5}$　　B. $\frac{\sqrt{5}}{5}$　　C. $\frac{2\sqrt{5}}{5}$　　D. 1

9. 函数 $f(x)=2\sin(\omega x+\varphi)\left(\omega>0,-\frac{\pi}{2}<\varphi<\frac{\pi}{2}\right)$ 的部分图像如图所示，则 ω,φ 的值分别是 （　　）



A. $2,-\frac{\pi}{3}$　　B. $2,-\frac{\pi}{6}$

C. $4,-\frac{\pi}{6}$　　D. $4,\frac{\pi}{3}$

10. 已知向量 $\boldsymbol{a}=\left(\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{6}\right),1\right)$，$\boldsymbol{b}=(4,4\cos\alpha-\sqrt{3})$，若 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$，则 $\sin\left(\alpha+\frac{7}{6}\pi\right)$ 等于 （　　）

A. $-\frac{\sqrt{3}}{4}$　　B. $-\frac{1}{4}$　　C. $\frac{\sqrt{3}}{4}$　　D. $\frac{1}{4}$

二、填空题(本大题共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分，把答案填在题中横线上)

11. **(2017·全国卷Ⅱ)**函数 $f(x)=2\cos x+\sin x$ 的最大值为_____.

12. **(2017·全国卷Ⅰ)**已知 $\alpha\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，$\tan\alpha=2$，则 $\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)=$_____.

13. 已知角 φ 的终边经过点 $P(1,1)$，函数 $f(x)=\sin(\omega x+\varphi)(\omega>0)$ 图像的相邻两条对称轴之间的距离等于 $\frac{\pi}{3}$，则 $f\left(\frac{\pi}{12}\right)=$_____.

14. **(2017·全国卷Ⅰ)**已知向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 的夹角为 $60°$，$|\boldsymbol{a}|=2$，$|\boldsymbol{b}|=1$，则 $|\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}|=$_____.

15. 已知下列命题中：

①若 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}$，则 $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{c}$；

②$x=\frac{\pi}{8}$ 是函数 $y=\sin\left(2x+\frac{5\pi}{4}\right)$ 的一条对称轴方程；

③若向量 $\boldsymbol{a}=(\lambda,2)$，$\boldsymbol{b}=(-4,-2)$ 夹角为钝角，则 λ 的取值范围为 $\lambda>-1$；

④存在实数 $x\in\mathbf{R}$，使 $\sin x+\cos x=\frac{\pi}{2}$ 成立；

⑤函数 $y=\sin 2x-4\sin^3 x\cos x$ 的最小正周期为 $\frac{\pi}{2}$.

共中正确的命题序号为_____.

三、解答题(本大题共 6 小题，共 75 分，解答时写出文字说明、证明过程或演算步骤)

16. (12 分)已知角 α 的终边经过点 $P\left(\frac{4}{5},-\frac{3}{5}\right)$.

(1)求 $\sin\alpha,\cos\alpha$ 的值；

(2)求 $\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)}{\sin(\pi+\alpha)}\cdot\frac{\tan(\alpha-\pi)}{\cos(3\pi-\alpha)}$ 的值.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

17.(12 分)**(2017 · 山东卷)**设函数 $f(x)=\sin\left(\omega x-\frac{\pi}{6}\right)+\sin\left(\omega x-\frac{\pi}{2}\right)$,其中 $0<\omega<3$,已知 $f\left(\frac{\pi}{6}\right)=0$.

(1)求 ω;

(2)将函数 $y=f(x)$的图像上各点的横坐标伸长为原来的 2 倍(纵坐标不变),再将得到的图像向左平移$\frac{\pi}{4}$个单位,得到函数 $y=g(x)$的图像,求 $g(x)$在$\left[-\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4}\right]$上的最小值.

18.(12 分)设向量 $\boldsymbol{m}=(\cos\alpha,1)$,$\boldsymbol{n}=(\sin\alpha,2)$,且 $\boldsymbol{m}\parallel\boldsymbol{n}$,其中 $\alpha\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$.

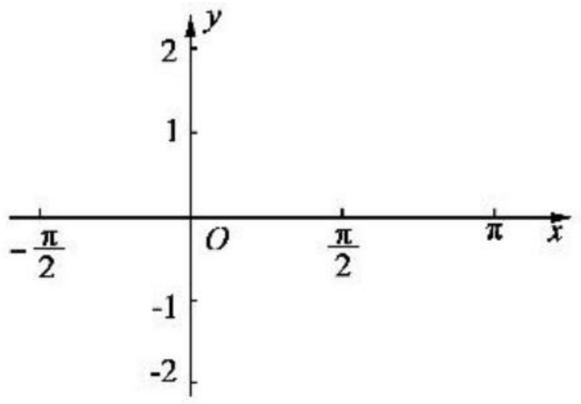
(1)求 $\sin\alpha$;

(2)若 $\sin(\alpha-\beta)=\frac{3}{5}$,$\beta=\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$,求 $\cos\beta$.

19.(12 分)已知函数 $f(x)=2\cos x\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)-\frac{\sqrt{3}}{2}$.

(1)求函数 $f(x)$的最小正周期;

(2)在给定的坐标系内,用五点作图法画出函数 $f(x)$在一个周期内的图像.



关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

20.(13 分)**(2018·北京卷)**已知函数 $f(x)=\sin^2x+\sqrt{3}\sin x\cos x$.

(1)求 $f(x)$的最小正周期;

(2)若 $f(x)$在区间$\left[-\frac{\pi}{3},m\right]$上的最大值为$\frac{3}{2}$,求 m 的最小值.

21.(14 分)已知向量$\overrightarrow{OA}=(\cos\alpha,\sin\alpha)$,$\alpha\in[-\pi,0]$,向量 $\boldsymbol{m}=(2,1)$,$\boldsymbol{n}=(0,-\sqrt{5})$,且$\boldsymbol{m}\perp(\overrightarrow{OA}-\boldsymbol{n})$.

(1)求向量$\overrightarrow{OA}$;

(2)若 $\cos(\beta-\pi)=\frac{\sqrt{2}}{10}$,$0<\beta<\pi$,求 $\cos(2\alpha-\beta)$的值.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

班级_____ 姓名_____ 考场号_____ 准考证号_____
密 封 线
数学 必修4 BS

骄子之路®
the Road to Pride
让 学习更快乐，人生更精彩

答案与解析

与45分钟课时作业与单元测试配套使用

数学

必修4·BS

班级：_____

姓名：_____

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

第一部分　课时作业

第一章　三角函数

§1　周期现象

基础知识点对点

1. A
2. A　《新闻联播》节目是每天晚上 19:00 准时开始的，是周期现象；李明每天上午上学在时间上还是会有差别，故不能算作是周期现象；高速公路每天通过的车辆数会因季节、天气等各种原因而不同，故不是周期现象；现代奥运会大体是 4 年一次，但具体举办时间还是有差异，即时间间隔并不完全相同，故不是周期现象. 故选 A.
3. B　∵小球摆动的周期为 2 s，摆动 8 s，正好是 4 个周期，正好又回到 A 处.
4. D　由图可知，每行排 4 个数，从左至右依次增大. 又 $2\,018=504\times4+2$，∴2 018 在这组数中的第 504 行第二列.
5. B　由图可知，造父变星的亮度每经过 7 天又重复出现，事实上，无论从哪个时刻算起，经过 7 天后，又出现相同的亮度等级.

课后拔高提能练

1. B　周期为 7，又∵$100\div7=14$ 余 2，∴100 天后是星期三.
2. C　∵$1957+60=2017$，又 2018 年是狗年，∴2017 年是鸡年，∴1957 年是鸡年.
3. B　本学期共需要 $4\times5\times21=420$ 名学生的值日工作，又 $420\div50=8$ 余 20，故某同学最少需要值日 8 次，最多需要值日 9 次.
4. B　∵$f(x)$ 为周期函数，且周期为 3，∴$f(2)=f(2-3)=f(-1)$，又 $f(x)$ 满足 $f(-x)=-f(x)$，∴$f(x)$ 为奇函数，故 $f(-1)=-f(1)=-1$.
5. 2 s　20 mm

   解析：由题可知 $T=2$ s，又∵$t=25=12\times2+1$，∴当 25 s 时钟摆的高度与 $t=1$ s 时的高度相同为 20 mm.
6. 数学、物理、语文

   解析：由题意知，课程表具有周期性，每周周一的课表一致.
7. 紫色

   解析：由题意可知周期为 4，$2\,015\div4=503$ 余 3，

   ∴第 2 015 盆为紫色.
8. **解**：(1)单摆的振动是周期现象.

   (2)其振动周期是 $T=2(0.6-0.2)=0.8$(s).

   (3)单摆离平衡位置的最大距离是 0.5 cm.
9. **解**：该心电图呈规律性、周期性变化，故其心脏跳动正常.

§2　角的概念的推广

基础知识点对点

1. D　①②显然正确，∵$476^\circ=360^\circ+116^\circ$，为第二象限角，∴③正确；∵$-315^\circ=-360^\circ+45^\circ$，∴$-315^\circ$ 为第一象限角，故④正确，∴①②③④均正确.
2. A　当 $k=0$ 时，$\alpha=45^\circ$ 在第一象限；当 $k=1$ 时，$\alpha=45^\circ+180^\circ$ 在第三象限，所以 $\alpha=45^\circ+k\cdot180^\circ$，$k\in\mathbf{Z}$ 的终边落在第一或第三象限.
3. B　∵$610^\circ=360^\circ+250^\circ$，∴与 610° 角终边相同的角可表示为 $k\cdot360^\circ+250^\circ(k\in\mathbf{Z})$.
4. B　若角 α 与 β 的终边相同，则 $\alpha-\beta=k\cdot360^\circ$，$k\in\mathbf{Z}$. ∵$750^\circ-(-330^\circ)=1\,080^\circ=360^\circ\times3$，∴$-330^\circ$ 与 750° 终边相同.
5. **解**：(1)终边落在 OA 位置上的角的集合为 $\{\alpha|\alpha=k\cdot360^\circ+90^\circ+45^\circ,k\in\mathbf{Z}\}=\{\alpha|\alpha=k\cdot360^\circ+135^\circ,k\in\mathbf{Z}\}$.

   终边落在 OB 位置上的角的集合为 $\{\beta|\beta=k\cdot360^\circ-30^\circ,k\in\mathbf{Z}\}$.

   (2)由(1)可知，终边落在阴影部分(包括边界)的角的集合为 $\{\alpha|-30^\circ+k\cdot360^\circ\leqslant\alpha\leqslant135^\circ+k\cdot360^\circ,k\in\mathbf{Z}\}$.

课后拔高提能练

1. D　在同一周期内，α 与 β 的差为 180°.
2. D　∵点 $P(0,-3)$ 在 y 轴的非正半轴上，不在任何象限，∴角 α 不是任何象限角.
3. C　α 为第一象限角，$-\alpha$ 为第四象限角，$360^\circ-\alpha$ 终边与 $-\alpha$ 终边相同. ∴选 C.
4. C　$-457^\circ=-1\times360^\circ-97^\circ=-2\times360^\circ+263^\circ$ 可知 C 正确.
5. ①

   解析：①锐角是大于 0° 且小于 90° 的角，终边落在第一象限，故是第一象限角，所以①正确；②-330° 角是第一象限角，但它是负角，所以②不正确；③$480^\circ$ 角是第二象限角，但它不是钝角，所以③不正确；④$0^\circ$ 角小于 180°，但它既不是钝角，也不是直角或锐角，故④不正确.
6. -480°

   解析：时针走过了 1 小时 20 分，则分钟转了 $\frac{4}{3}$ 周，

   又∵按顺时针方向旋转的角为负角，∴分针转过了 $-\frac{4}{3}\times360^\circ=-480^\circ$.
7. $y=-\frac{\sqrt{2}}{4}x(x\leqslant0)$

   解析：射线 $y=\frac{\sqrt{2}}{4}x(x\leqslant0)$ 关于 x 轴的对称方程为

   $y=-\frac{\sqrt{2}}{4}x(x\leqslant0)$.
8. **解**：(1)在 $0^\circ\sim360^\circ$ 内，终边落在阴影部分的角为 $45^\circ\leqslant\alpha\leqslant120^\circ$，∴终边落在阴影部分的角的集合为 $\{\alpha|k\cdot360^\circ+45^\circ\leqslant\alpha\leqslant k\cdot360^\circ+120^\circ,k\in\mathbf{Z}\}$.

   (2)在 $-180^\circ\sim180^\circ$ 内，终边落在阴影部分的角为 $-45^\circ\leqslant\alpha\leqslant60^\circ$，∴终边落在阴影部分的角的集合为 $\{\alpha|k\cdot360^\circ-45^\circ\leqslant\alpha\leqslant k\cdot360^\circ+60^\circ,k\in\mathbf{Z}\}$.
9. **解**：∵α 是第二象限角，

   ∴$90^\circ+k\times360^\circ<\alpha<180^\circ+k\times360^\circ$.

   ∴$180^\circ+2k\times360^\circ<2\alpha<360^\circ+2k\times360^\circ$.

   ∴2α 是第三或第四象限角，或是终边落在 y 轴的非正半轴上的角.

   同理 $45^\circ+\frac{k}{2}\times360^\circ<\frac{\alpha}{2}<90^\circ+\frac{k}{2}\times360^\circ$.

   当 k 为偶数时，不妨令 $k=2n$，$n\in\mathbf{Z}$，则 $45^\circ+n\times360^\circ<\frac{\alpha}{2}<90^\circ+n\times360^\circ$，此时，$\frac{\alpha}{2}$ 为第一象限角；

   当 k 为奇数时，令 $k=2n+1$，$n\in\mathbf{Z}$，则 $225^\circ+n\times360^\circ<\frac{\alpha}{2}<270^\circ+n\times360^\circ$，此时，$\frac{\alpha}{2}$ 为第三象限角.

§3　弧度制

基础知识点对点

1. D
2. C　由题意知，$\begin{cases}2R+\alpha R=6,\\ \frac{1}{2}\alpha R^2=2,\end{cases}$ 把 $\alpha=\frac{4}{R^2}$ 代入 $2R+\alpha R=6$，得 $R=2$ 或 $R=1$. ∴$\alpha=1$ 或 $\alpha=4$.
3. C　$-\frac{17\pi}{4}=-\frac{\pi}{4}-4\pi$，∴可表示为 $-2\times360^\circ-45^\circ$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

4. (1) $-\frac{8\pi}{9}$ (2) 54° (3) $\frac{\pi}{18}$ (4) 15°

5. C 设扇形半径为 r,弧长为 l,则 $S=\frac{1}{2}lr$,$\therefore lr=2S$ ①,

$\therefore l+2r\geqslant 2\sqrt{2lr}=2\sqrt{4S}=4\sqrt{S}$,当且仅当 $l=2r$ 时取等号,把 $l=2r$ 代回①得 $r=\sqrt{S}$,由 $\alpha=\frac{l}{r}=\frac{2r}{r}=2$. $\therefore$ 选 C.

课后拔高提能练

1. D $-\frac{29\pi}{12}=-2\pi-\frac{5\pi}{12}$,

$\because -\frac{5\pi}{12}$ 是第四象限角,

$\therefore -\frac{29\pi}{12}$ 的终边所在的象限是第四象限.

2. C $\because -\frac{11\pi}{4}=-2\pi-\frac{3\pi}{4}=-4\pi+\frac{5\pi}{4}$,又 $\left|-\frac{3\pi}{4}\right|<\frac{5\pi}{4}$,$\therefore \theta=-\frac{3\pi}{4}$.

3. C 设圆的半径为 R,则该圆内接正三角形的边长为 $\sqrt{3}R$,$\therefore$ 圆心角的弧度数为 $\frac{\sqrt{3}R}{R}=\sqrt{3}$.

4. D 当 $k=-1$ 时,$A\cap B=\{\alpha|-4\leqslant\alpha\leqslant-\pi\}$;当 $k=0$ 时,$A\cap B=\{\alpha|0\leqslant\alpha\leqslant\pi\}$,当 k 取其它整数值时 $A\cap B=\varnothing$.

5. $\frac{2}{5}\pi,\frac{9}{10}\pi,\frac{7}{5}\pi,\frac{19}{10}\pi$

解析:$\because \alpha=\frac{8}{5}\pi+2k\pi,k\in\mathbf{Z}$,$\therefore \frac{\alpha}{4}=\frac{2}{5}\pi+\frac{k\pi}{2},k\in\mathbf{Z}$.

令 $k=0$,$\frac{\alpha}{4}=\frac{2}{5}\pi$,令 $k=1$,$\frac{\alpha}{4}=\frac{9}{10}\pi$,令 $k=2$,$\frac{\alpha}{4}=\frac{7}{5}\pi$,令 $k=3$,$\frac{\alpha}{4}=\frac{19}{10}\pi$.

6. $\frac{3}{2}\pi$

解析:$5\alpha=k\cdot 360^\circ+\alpha,k\in\mathbf{Z}$,$\therefore \alpha=k\cdot 90^\circ,k\in\mathbf{Z}$,

又 $\because 180^\circ<\alpha<360^\circ$,$\therefore \alpha=270^\circ=\frac{3}{2}\pi$.

7. $\left\{\alpha\middle|\alpha=n\pi+\frac{\pi}{3},n\in\mathbf{Z}\right\}$

解析:终边落在第一象限时,角的集合为 $\left\{\alpha\middle|\alpha=2k\pi+\frac{\pi}{3},k\in\mathbf{Z}\right\}$;当角的终边落在第三象限时,角的集合为 $\left\{\alpha\middle|\alpha=2k\pi+\frac{4\pi}{3},k\in\mathbf{Z}\right\}$ 因此角 α 的集合为 $\left\{\alpha\middle|\alpha=2k\pi+\frac{\pi}{3},k\in\mathbf{Z}\right\}\cup\left\{\alpha\middle|\alpha=(2k+1)\pi+\frac{\pi}{3},k\in\mathbf{Z}\right\}=\left\{\alpha\middle|\alpha=n\pi+\frac{\pi}{3},n\in\mathbf{Z}\right\}$.

8. **解**:设扇形的圆心角为 θ,半径为 R,弧长为 l,面积为 S.

$\because l+2R=40$,$\therefore l=40-2R$.

$\therefore S=\frac{1}{2}lR=\frac{1}{2}\times(40-2R)R=20R-R^2=-(R-10)^2+100$.

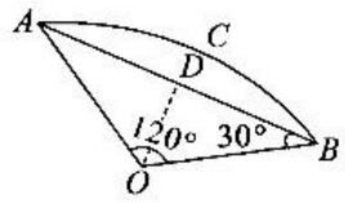
$\therefore$ 当半径 $R=10$ cm 时,扇形的面积最大,最大值为 $100\ \text{cm}^2$,

此时 $\theta=\frac{l}{R}=\frac{40-2\times10}{10}=2$ rad.

9. **解**:$\because 120^\circ=\frac{\pi}{180}\times120=\frac{2\pi}{3}$,

$\therefore l=6\times\frac{2\pi}{3}=4\pi$,$\therefore \overset{\frown}{AB}$ 的长为 4π,$\therefore S_{\text{扇形}OAB}=\frac{1}{2}lr=\frac{1}{2}\times4\pi\times6=12\pi$,

如图所示,有 $S_{\triangle OAB}=\frac{1}{2}\times AB\times OD$($D$ 为 AB 中点)$=\frac{1}{2}\times2\times6\cos30^\circ\times3=9\sqrt{3}$.



$\therefore S_{\text{弓形}ACB}=S_{\text{扇形}OAB}-S_{\triangle OAB}=12\pi-9\sqrt{3}$.

$\therefore$ 弓形 ACB 的面积为 $12\pi-9\sqrt{3}$.

§4 正弦函数和余弦函数的定义与诱导公式

4.1 单位圆与任意角的正弦函数、余弦函数的定义

基础知识点对点

1. B 由三角函数的定义知,B 正确.

2. D 由 $\cos\theta=-\frac{4}{5}=\frac{x}{\sqrt{x^2+9}}$,得 $x^2=16$,

由 $\cos\theta<0$ 得 $x=-4$.

3. B $\because A,B$ 为三角形的内角,$\therefore 0<A<\pi,0<B<\pi$,$\therefore \sin A>0$. 又 $\sin A\cdot\cos B<0$,$\therefore \cos B<0$,$\therefore B$ 为钝角,$\therefore$ 三角形为钝角三角形.

4. C $\because \sin105^\circ>0$,$\cos230^\circ<0$,$\therefore a=\sin105^\circ\cdot\cos230^\circ<0$. $\because 0<1<\frac{\pi}{2}<2<\pi$,$\therefore \sin2>0,\cos1>0$,

$\therefore b=\sin2\cdot\cos1>0$.

5. **解**:(1)$\because -\frac{31\pi}{4}=-4\times2\pi+\frac{\pi}{4}$,

$\therefore -\frac{31\pi}{4}$ 的终边与 $\frac{\pi}{4}$ 的终边相同,

$\therefore \sin\left(-\frac{31\pi}{4}\right)=\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

(2)原式$=\sin(360^\circ+60^\circ)\cos(720^\circ+30^\circ)+\sin(-720^\circ+30^\circ)\cos(-720^\circ+60^\circ)$

$=\sin60^\circ\cos30^\circ+\sin30^\circ\cos60^\circ$

$=\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}$

$=\frac{3}{4}+\frac{1}{4}=1$.

课后拔高提能练

1. A

2. B 由题意知 $\frac{3}{\sqrt{3^2+y^2}}=\frac{3}{5}$,得 $y=\pm4$,又 $y<0$,

$\therefore y=-4$,$\therefore \sin\alpha=\frac{-4}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}=-\frac{4}{5}$.

3. C $\because \alpha$ 是第二象限角,

$\therefore 2k\pi+\frac{\pi}{2}<\alpha<2k\pi+\pi,k\in\mathbf{Z}$,

$\therefore k\pi+\frac{\pi}{4}<\frac{\alpha}{2}<k\pi+\frac{\pi}{2},k\in\mathbf{Z}$,

$\therefore \frac{\alpha}{2}$ 是第一或第三象限角.

又 $\left|\cos\frac{\alpha}{2}\right|=-\cos\frac{\alpha}{2}$,$\therefore \cos\frac{\alpha}{2}<0$,

$\therefore \frac{\alpha}{2}$ 是第三象限角.

4. A 由周期函数定义知 $f(x+T)=f(x)$ 对定义域内的任意一个 x 都成立,故①错误;又 T 是非零实数,故②错误;若 T 为周期,则 $kT(k\in\mathbf{Z})$ 也是周期,故③错误;由于 T 不为零,又当 x 属于 $f(x)$ 的定义域时,$x+T$,$x+2T$,…,$x+kT(k\in\mathbf{Z})$ 也属于定义域,故周期函数 $f(x)$ 的定义域没有上、下界,只能是 $\mathbf{R}$,故④错误.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

5. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

解析：∵ $(a,9)$ 在 $y=3^x$ 的图像上，∴ $3^a=9$，$a=2$.

$\sin\frac{a\pi}{6}=\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

6. $-\frac{\sqrt{3}}{3}$

解析：由三角函数的定义可知 $\cos\alpha=x=-\frac{\sqrt{3}}{3}$.

7. $-\frac{\sqrt{6}}{4}$

解析：$r=\sqrt{3+y^2}$，$\sin\alpha=\frac{y}{r}=\frac{\sqrt{2}}{4}y$，∵ $y\neq0$，∴ $y^2=5$，

∴ $r=2\sqrt{2}$，∴ $\cos\alpha=\frac{x}{r}=\frac{-\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}=-\frac{\sqrt{6}}{4}$.

8. **解**：(1)∵ 角 α 的终边上有一点 $P(1,2)$，

∴ $OP=\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt{5}$，$\sin\alpha=\frac{2}{\sqrt{5}}$，$\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{5}}$，

$\sqrt{5}\sin\alpha+\frac{\sqrt{5}}{2}\cos\alpha=\frac{2}{\sqrt{5}}\cdot\sqrt{5}+\frac{\sqrt{5}}{2}\times\frac{1}{\sqrt{5}}=\frac{5}{2}$.

(2)在角 α 的终边上任取一点 $(a,2a)(a\neq0)$，

则 $|OP|=\sqrt{a^2+(2a)^2}=\sqrt{5}|a|$.

当 $a>0$ 时，$\sin\alpha=\frac{2a}{\sqrt{5}|a|}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$，

$\cos\alpha=\frac{a}{\sqrt{5}|a|}=\frac{\sqrt{5}}{5}$；

当 $a<0$ 时，$\sin\alpha=\frac{2a}{\sqrt{5}|a|}=-\frac{2\sqrt{5}}{5}$，

$\cos\alpha=\frac{a}{\sqrt{5}|a|}=-\frac{\sqrt{5}}{5}$.

9. **证明**：在角 θ 的终边上任取一点 $P(x,y)$，

则 $\sin\theta=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$，$\cos\theta=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$，

∵ θ 为锐角，∴ $x>0$，$y>0$.

于是 $\sin\theta+\cos\theta=\frac{x+y}{\sqrt{x^2+y^2}}=\sqrt{\frac{(x+y)^2}{x^2+y^2}}=\sqrt{2-\frac{(x-y)^2}{x^2+y^2}}\leqslant\sqrt{2}$.

又∵ $\sin\theta+\cos\theta=\sqrt{\frac{x^2+y^2+2xy}{x^2+y^2}}=\sqrt{1+\frac{2xy}{x^2+y^2}}>1$，

∴ $1<\sin\theta+\cos\theta\leqslant\sqrt{2}$.

4.3　单位圆与正弦函数、余弦函数的基本性质

4.4　单位圆的对称性与诱导公式

基础知识点对点

1. A　$\sin585^\circ=\sin(720^\circ-135^\circ)=\sin(-135^\circ)=-\sin135^\circ=-\sin(180^\circ-45^\circ)=-\sin45^\circ=-\frac{\sqrt{2}}{2}$.

2. B　$\cos\left(-\frac{20}{3}\pi\right)=\cos\frac{20}{3}\pi=\cos\left(6\pi+\frac{2}{3}\pi\right)=\cos\frac{2}{3}\pi=\cos\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right)=-\cos\frac{\pi}{3}=-\frac{1}{2}$.

3. B　∵ $\left(\frac{\pi}{6}+\alpha\right)+\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)=\frac{\pi}{2}$，∴ $\cos\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)=\cos\left[\frac{\pi}{2}-\left(\frac{\pi}{6}+\alpha\right)\right]=\sin\left(\frac{\pi}{6}+\alpha\right)=\frac{3}{5}$.

4. C　∵ $\sin(\pi-\alpha)=\log_8\frac{1}{4}=\log_{2^3}2^{-2}=-\frac{2}{3}$，

又∵ $\sin(\pi-\alpha)=\sin\alpha$，∴ $\sin\alpha=-\frac{2}{3}$，

又∵ $\sin(4\pi-\alpha)=\sin(-\alpha)=-\sin\alpha=\frac{2}{3}$.

5. **解**：(1) $f(\alpha)=\frac{-\sin\alpha\cos\alpha\cdot(-\cos\alpha)}{(-\cos\alpha)\sin\alpha}=-\cos\alpha$.

(2) ∵ $\cos\left(\alpha-\frac{3}{2}\pi\right)=\cos\left[-2\pi+\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)\right]=\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=-\sin\alpha=\frac{1}{5}$，

∴ $\sin\alpha=-\frac{1}{5}$，又 α 是第三象限角，

∴ $\cos\alpha=-\sqrt{1-\sin^2\alpha}=-\sqrt{1-\frac{1}{25}}=-\frac{2\sqrt{6}}{5}$，

∴ $f(\alpha)=-\cos\alpha=\frac{2\sqrt{6}}{5}$.

课后拔高提能练

1. B　∵ $\cos(\alpha+\pi)=-\cos\alpha=-\frac{1}{2}$，∴ $\cos\alpha=\frac{1}{2}$.

∴ $\frac{1}{\cos(-\alpha+3\pi)}=\frac{1}{\cos(\pi-\alpha)}=\frac{1}{-\cos\alpha}=-2$.

2. B　∵ $\sin\left(\frac{9\pi}{4}-\alpha\right)=\sin\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)$，又 $\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)+\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)=\frac{\pi}{2}$，∴ $\sin\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)=\cos\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)=-\frac{1}{2}$.

3. A　∵ $\sin(3\pi+\alpha)=-\sin\alpha=-\frac{1}{2}$，∴ $\sin\alpha=\frac{1}{2}$，

∴ $\cos\left(\frac{7}{2}\pi-\alpha\right)=\cos\left(\frac{3}{2}\pi-\alpha\right)=-\sin\alpha=-\frac{1}{2}$.

4. D　∵ $\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)-\left(\alpha-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\pi}{2}$，∴ $\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)=\cos\left[\frac{\pi}{2}+\left(\alpha-\frac{\pi}{6}\right)\right]=-\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{6}\right)=-\frac{1}{3}$.

5. 0

解析：$f\left(\frac{1}{3}\right)+f\left(\frac{4}{3}\right)=\cos\frac{\pi}{3}+f\left(\frac{4}{3}-1\right)-1=\frac{1}{2}+f\left(\frac{1}{3}\right)-1=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-1=0$.

6. $\frac{1}{3}$

解析：由题意知，α 与 β 互补，又 $\sin\alpha=\frac{1}{3}$，∴ $\sin\beta=\frac{1}{3}$.

7. ①②③

解析：①$\sin(A+B)-\sin C=\sin(\pi-C)-\sin C=\sin C-\sin C=0$；②$\cos(A+B)+\cos C=\cos(\pi-C)+\cos C=-\cos C+\cos C=0$；③$\frac{\sin(A+B)}{\cos(A+B)}+\frac{\sin C}{\cos C}=\frac{\sin C}{-\cos C}+\frac{\sin C}{\cos C}=0$.

8. **解**：(1)原式 $=\frac{\cos\alpha\cdot(-\sin\alpha)}{-\sin(2\pi-\alpha)\cos\alpha}=\frac{-\cos\alpha\sin\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha}=-1$.

(2)原式 $=\frac{\sin\alpha(-\cos\alpha)\sin\alpha\cos\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)}{-\cos\alpha\sin(\pi-\alpha)[-\sin(\pi-\alpha)]\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)}$

$=\frac{-\sin\alpha\cos\alpha\sin\alpha\left[-\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\right]}{-\cos\alpha\sin\alpha(-\sin\alpha)\cos\alpha}$

$=\frac{-\sin\alpha\cos\alpha\sin\alpha(-\sin\alpha)}{\cos\alpha\sin\alpha\sin\alpha\cos\alpha}$

$=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\tan\alpha$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

9. **解**：$\because \cos(\pi+\alpha)=-\frac{1}{2}$，$\therefore \cos\alpha=\frac{1}{2}$，

$$\frac{\sin[\alpha+(2n+1)\pi]+\sin[\alpha-(2n+1)\pi]}{\sin(\alpha+2n\pi)\cos(\alpha-2n\pi)}$$
$$=\frac{\sin(2n\pi+\pi+\alpha)+\sin(-2n\pi-\pi+\alpha)}{\sin(2n\pi+\alpha)\cos(-2n\pi+\alpha)}$$
$$=\frac{\sin(\pi+\alpha)+\sin(-\pi+\alpha)}{\sin\alpha\cos\alpha}=\frac{-\sin\alpha-\sin(\pi-\alpha)}{\sin\alpha\cos\alpha}$$
$$=\frac{-2\sin\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha}=-\frac{2}{\cos\alpha}=-4.$$

§5 正弦函数的图像与性质

5.1 正弦函数的图像

基础知识点对点

1. A

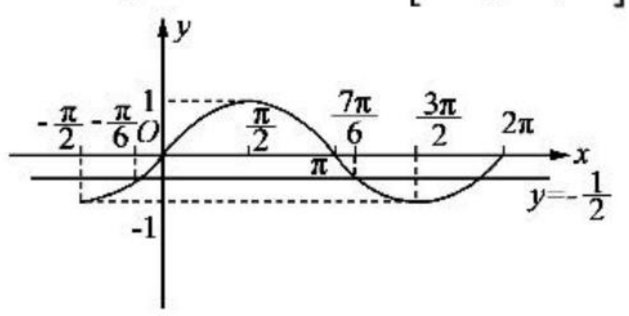
2. B　令 $2x=0,\frac{\pi}{2},\pi,\frac{3}{2}\pi,2\pi$ 得 $x=0,\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2},\frac{3}{4}\pi,\pi$.

3. C

4. D　函数 $y=1-\sin x,x\in[0,2\pi]$ 的图像是 $y=-\sin x$ 的图像向上平移了 1 个单位而得到，故选 D.

5. **解**：要使函数有意义，则 $2\sin x+1\geqslant 0$，即 $\sin x\geqslant-\frac{1}{2}$.

如图所示，$y=\sin x$ 的图像在一个周期 $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right]$ 内符合 $\sin x\geqslant-\frac{1}{2}$ 的 x 的范围是 $\left[-\frac{\pi}{6},\frac{7}{6}\pi\right]$.



由此可知，满足 $\sin x\geqslant-\frac{1}{2}$ 的 x 的范围是

$\left[-\frac{\pi}{6}+2k\pi,\frac{7}{6}\pi+2k\pi\right](k\in\mathbf{Z})$.

即函数 $y=\sqrt{2\sin x+1}$ 的定义域为

$\left[-\frac{\pi}{6}+2k\pi,\frac{7}{6}\pi+2k\pi\right](k\in\mathbf{Z})$.

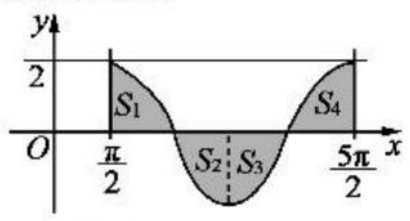
课后拔高提能练

1. A　函数的图像相同，则函数的解析式相同，$\because y=\sin(\pi-x)=\sin x$，$\therefore y=\sin x$ 与 $y=\sin(\pi-x)$ 的图像相同.

2. B　由 $1+\sin x=\frac{3}{2}$，得 $\sin x=\frac{1}{2}$，由 $y=\sin x$ 在 $[0,2\pi]$ 的图像可知，$\sin x=\frac{1}{2}$ 在 $[0,2\pi]$ 上有两解，$\therefore$ 函数 $y=1+\sin x,x\in[0,2\pi]$ 的图像与直线 $y=\frac{3}{2}$ 有两个交点.

3. A　$\because 2-\sin x>a$，$\therefore 2-a>\sin x$.
$\because$ 对任意 x 都有 $\sin x\leqslant 1$，$\therefore 2-a>1$，$\therefore a<1$.

4. C　数形结合，如图所示.



$y=2\sin x,x\in\left[\frac{\pi}{2},\frac{5\pi}{2}\right]$ 的图像与直线 $y=2$ 围成的封闭平面图形面积相当于由 $x=\frac{\pi}{2},x=\frac{5\pi}{2},y=0,y=2$ 围成的矩形面积，即 $S=\left(\frac{5}{2}\pi-\frac{\pi}{2}\right)\times 2=4\pi$，故选 C.

5. $\left(\frac{3\pi}{2},2\right)$

解析：当 $x=\frac{3\pi}{2}$ 时，$y=-2\sin\frac{3\pi}{2}=-2\times(-1)=2$，

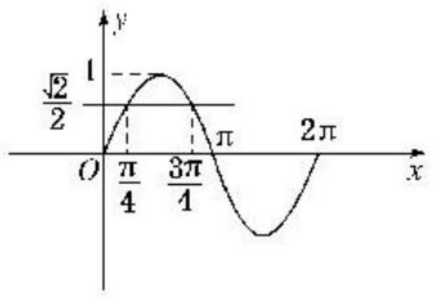
$\therefore$ 最高点的坐标为 $\left(\frac{3\pi}{2},2\right)$.

6. $\left\{x\,\middle|\,2k\pi+\frac{\pi}{6}\leqslant x\leqslant 2k\pi+\frac{5\pi}{6},k\in\mathbf{Z}\right\}$

解析：由题意得 $2\sin x-1\geqslant 0$，得 $\sin x\geqslant\frac{1}{2}$，由正弦函数 $y=\sin x$ 的图像可知 $2k\pi+\frac{\pi}{6}\leqslant x\leqslant 2k\pi+\frac{5\pi}{6},k\in\mathbf{Z}$.

7. $\left\{x\,\middle|\,2k\pi+\frac{\pi}{4}\leqslant x\leqslant 2k\pi+\frac{3\pi}{4},k\in\mathbf{Z}\right\}$

解析：由 $y=\sin x$ 的图像可知，



当 $x\in[0,2\pi]$ 满足 $\sin x\geqslant\frac{\sqrt{2}}{2}$ 的角 x 范围：$\frac{\pi}{4}\leqslant x\leqslant\frac{3\pi}{4}$.

$\therefore$ 满足 $\sin x\geqslant\frac{\sqrt{2}}{2}$ 的解集为

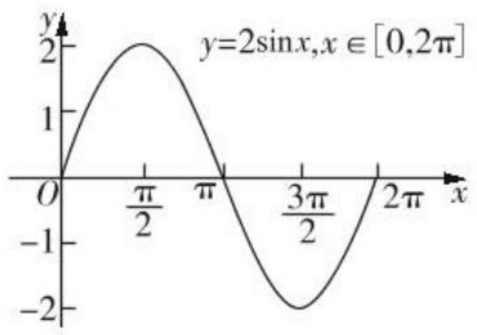
$\left\{x\,\middle|\,2k\pi+\frac{\pi}{4}\leqslant x\leqslant 2k\pi+\frac{3\pi}{4},k\in\mathbf{Z}\right\}$.

8. **解**：(1)①0　②-1　③π　④$\frac{3\pi}{2}$　⑤0

(2)列表：

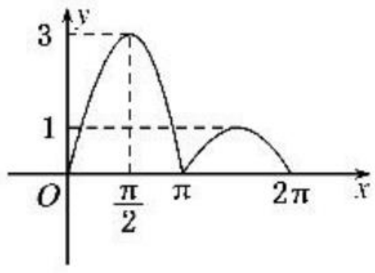
x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$y=\sin x$	0	1	0	-1	0
$y=2\sin x$	0	2	0	-2	0

描点并将它们用光滑的曲线连接起来，如图所示.



9. **解**：$f(x)=\sin x+2|\sin x|=\begin{cases}3\sin x,0\leqslant x\leqslant\pi,\\-\sin x,\pi<x\leqslant 2\pi,\end{cases}$

其图像如图所示，



$\therefore$ 欲使 $f(x)=\sin x+2|\sin x|$ 与 $y=k$ 有且仅有两个不同的交点，需 $1<k<3$.
$\therefore k$ 的取值范围是 $1<k<3$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

5.2　正弦函数的性质

基础知识点对点

1. C　当 $\varphi=\pi$ 时，有 $f(x)=\sin(x+\pi)=-\sin x$ 为奇函数.

2. D　$f\left(\frac{5\pi}{3}\right)=f\left(\frac{5\pi}{3}-\pi\right)=f\left(\frac{2\pi}{3}\right)$
$=f\left(\frac{2\pi}{3}-\pi\right)=f\left(-\frac{\pi}{3}\right)=f\left(\frac{\pi}{3}\right)$
$=\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

3. C　$\because \sin168^\circ=\sin12^\circ,\cos10^\circ=\sin80^\circ$. $\because 0^\circ<11^\circ<12^\circ<80^\circ<90^\circ$，$\therefore \sin11^\circ<\sin12^\circ<\sin80^\circ$，即 $\sin11^\circ<\sin168^\circ<\cos10^\circ$.

4. B

5. **解**：(1) $\because -1\leqslant\sin x\leqslant1$，$\therefore -2\leqslant-2\sin x\leqslant2$，
$\therefore 1\leqslant3-2\sin x\leqslant5$.
$\therefore$ 函数 $y=3-2\sin x$ 的值域是 $[1,5]$.
(2) $y=\sin^2x-\sin x+1=\left(\sin x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}$，
设 $t=\sin x$，$\because x\in\left[\frac{\pi}{3},\frac{3\pi}{4}\right]$，$\therefore t\in\left[\frac{\sqrt{2}}{2},1\right]$.
而函数 $y=\left(t-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}$ 在 $\left[\frac{\sqrt{2}}{2},1\right]$ 上是增函数，
$\therefore$ 当 $t=\frac{\sqrt{2}}{2}$，即 $x=\frac{3\pi}{4}$ 时，y 有最小值为 $\frac{3-\sqrt{2}}{2}$，
当 $t=1$，即 $x=\frac{\pi}{2}$ 时，y 有最大值为 1.
$\therefore$ 函数的值域为 $\left[\frac{3-\sqrt{2}}{2},1\right]$.

课后拔高提能练

1. D　由 $y=1-\sin x$ 的图像可知函数在 $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ 上为减函数.

2. B　$\because \frac{\pi}{6}\leqslant x\leqslant\frac{2\pi}{3}$，$\therefore$ 当 $x=\frac{\pi}{6}$ 时，$y_{\min}=\frac{1}{2}$，当 $x=\frac{\pi}{2}$ 时，$y_{\max}=1$，$\therefore$ 函数的值域为 $\left[\frac{1}{2},1\right]$.

3. B　设 $t=\sin x$，则 $t\in[-1,1]$. $\therefore y=t^2-3t+2$ 在 $[-1,1]$ 上单调递减，最小值为 $1^2-3\times1+2=0$.

4. D　$\because f(-x)=(-x)\sin(-x)=x\cdot\sin x=f(x)$，$\therefore f(x)$ 为偶函数，又 $\because f(x_1)>f(x_2)$，$\therefore |x_1|>|x_2|$，$\therefore x_1^2>x_2^2$，$\therefore$ 选 D.

5. π
解析：由 $y=|\sin x|$ 的图像知，最小正周期为 π.

6. 0

7. $\left(\frac{3\pi}{2},\frac{5\pi}{2}\right]$
解析：由正弦函数的图像知 $\left[\frac{3\pi}{2},a\right]\subseteq\left[\frac{3\pi}{2},\frac{5\pi}{2}\right]$，
$\therefore \frac{3\pi}{2}<a\leqslant\frac{5\pi}{2}$.

8. **解**：(1) 由 $2k\pi-\frac{\pi}{2}\leqslant2x+\frac{\pi}{3}\leqslant2k\pi+\frac{\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$，
得 $k\pi-\frac{5\pi}{12}\leqslant x\leqslant k\pi+\frac{\pi}{12}(k\in\mathbf{Z})$.
由 $2k\pi+\frac{\pi}{2}\leqslant2x+\frac{\pi}{3}\leqslant2k\pi+\frac{3\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$，
得 $k\pi+\frac{\pi}{12}\leqslant x\leqslant k\pi+\frac{7\pi}{12}(k\in\mathbf{Z})$.
$\therefore$ 函数 $f(x)=3\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)+1$ 的单调增区间为 $\left[k\pi-\frac{5\pi}{12},k\pi+\frac{\pi}{12}\right](k\in\mathbf{Z})$，
单调减区间为 $\left[k\pi+\frac{\pi}{12},k\pi+\frac{7\pi}{12}\right](k\in\mathbf{Z})$.
(2) 由 $2x+\frac{\pi}{3}=k\pi+\frac{\pi}{2}$，得 $x=\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{12}(k\in\mathbf{Z})$，
$\therefore$ 函数 $f(x)$ 的对称轴为 $x=\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{12}(k\in\mathbf{Z})$.
由 $2x+\frac{\pi}{3}=k\pi$，得 $x=\frac{k\pi}{2}-\frac{\pi}{6}(k\in\mathbf{Z})$.
知函数 $f(x)$ 的对称中心为 $\left(\frac{k\pi}{2}-\frac{\pi}{6},1\right)(k\in\mathbf{Z})$.

9. **解**：$\because -\frac{\pi}{6}\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{3}$，$\therefore -\frac{\pi}{3}\leqslant2x\leqslant\frac{2}{3}\pi$.
由 $y=\sin2x+1$ 的图像可知，
当 $2x=-\frac{\pi}{3}$，即 $x=-\frac{\pi}{6}$ 时，
$y_{\min}=\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)+1=1-\frac{\sqrt{3}}{2}$；
当 $2x=\frac{\pi}{2}$，即 $x=\frac{\pi}{4}$ 时，$y_{\max}=2$.
综上，当 $x=-\frac{\pi}{6}$ 时，函数取得最小值 $1-\frac{\sqrt{3}}{2}$，当 $x=\frac{\pi}{4}$ 时，函数取得最大值 2.

§6　余弦函数的图像与性质

基础知识点对点

1. D　由余弦函数的图像可知①②③④均正确.

2. A　将 $y=\cos x$ 的图像向下平移 2 个单位即可得 $y=\cos x-2$ 的图像.

3. D　由 $2\cos x+1\geqslant0$，得 $\cos x\geqslant-\frac{1}{2}$，
$\therefore 2k\pi-\frac{2\pi}{3}\leqslant x\leqslant2k\pi+\frac{2\pi}{3}(k\in\mathbf{Z})$.

4. A　$\because -1\leqslant\cos x\leqslant1$，$\therefore -1\leqslant-3\cos x+2\leqslant5$，$\therefore$ 函数的值域为 $[-1,5]$.

5. B　在 $\left[\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right]$ 内 $y=\sin x$ 是减少的，在 $[0,\pi]$ 内 $y=\cos x$ 是减少的，所以在 $\left[\frac{\pi}{2},\pi\right]$ 内 $y=\sin x$ 和 $y=\cos x$ 都是减少的.

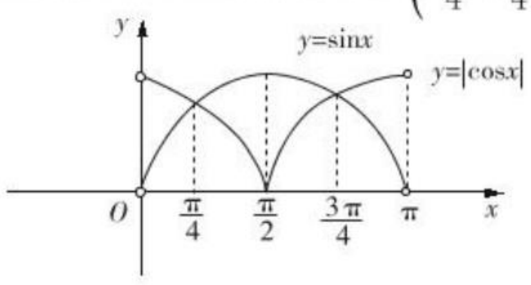
课后拔高提能练

1. C　$f(x)=\sin\left(2x+\frac{3\pi}{2}\right)=-\cos2x$，易知 A，B，D 正确；$\because f\left(\frac{\pi}{4}\right)=-\cos\left(2\times\frac{\pi}{4}\right)=-\cos\frac{\pi}{2}=0$，$\therefore f(x)$ 的图像关于点 $\left(\frac{\pi}{4},0\right)$ 对称，故 C 错.

2. A　$\because \left(x+\frac{\pi}{3}\right)-\left(x-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\pi}{2}$，$\therefore \cos\left(x-\frac{\pi}{6}\right)=\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$，$\therefore f(x)=\frac{6}{5}\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$，$\therefore$ 最大值为 $\frac{6}{5}$.

3. D　令 $f(x)=-x\cos x$，则 $f(-x)=x\cos(-x)=x\cos x=-f(x)$，$\therefore f(x)$ 是奇函数，其图像关于原点对称. 又当 $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 时，$f(x)<0$，故选 D.

4. A　$\because \sin x>|\cos x|$，$\therefore \sin x>0$，$\therefore x\in(0,\pi)$，在同一坐标系中画出 $y=\sin x,x\in(0,\pi)$ 与 $y=|\cos x|$，$x\in(0,\pi)$ 的图像，观察图像易得 $x\in\left(\frac{\pi}{4},\frac{3}{4}\pi\right)$，故选 A.



关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

5. $\left[-\frac{1}{3},1\right]$

解析：由 $2\cos x+1=3m$，得 $\cos x=\frac{3m-1}{2}$，

由 $-1\leqslant\frac{3m-1}{2}\leqslant1$，得 $-\frac{1}{3}\leqslant m\leqslant1$.

6. $\frac{2}{3}$

解析：因为 $f(x)\leqslant f\left(\frac{\pi}{4}\right)$ 对任意的实数 x 都成立，所以 $f\left(\frac{\pi}{4}\right)$ 取最大值，所以 $\frac{\pi}{4}\omega-\frac{\pi}{6}=2k\pi(k\in\mathbf{Z})$，

$\therefore\omega=8k+\frac{2}{3}(k\in\mathbf{Z})$，因为 $\omega>0$，所以当 $k=0$ 时，ω 取最小值为 $\frac{2}{3}$.

7. $(-\pi,0]$

解析：$\because y=\cos x$ 在 $[-\pi,0]$ 上为增函数，

$\therefore-\pi<a\leqslant0$.

8. **解**：(1)由 $2k\pi\leqslant x-\frac{\pi}{4}\leqslant2k\pi+\pi(k\in\mathbf{Z})$，

得 $2k\pi+\frac{\pi}{4}\leqslant x\leqslant2k\pi+\frac{5\pi}{4}(k\in\mathbf{Z})$，

由 $2k\pi-\pi\leqslant x-\frac{\pi}{4}\leqslant2k\pi(k\in\mathbf{Z})$，

得 $2k\pi-\frac{3\pi}{4}\leqslant x\leqslant2k\pi+\frac{\pi}{4}(k\in\mathbf{Z})$.

$\therefore$ 函数 $f(x)$ 的单调增区间为 $\left[2k\pi-\frac{3\pi}{4},2k\pi+\frac{\pi}{4}\right]$ $(k\in\mathbf{Z})$，单调减区间为 $\left[2k\pi+\frac{\pi}{4},2k\pi+\frac{5\pi}{4}\right](k\in\mathbf{Z})$.

(2)$\because x\in[0,\pi]$，$\therefore-\frac{\pi}{4}\leqslant x-\frac{\pi}{4}\leqslant\frac{3\pi}{4}$，

$\therefore-\frac{\sqrt{2}}{2}\leqslant\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\leqslant1$.

即 $-\sqrt{2}\leqslant2\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\leqslant2$，

$\therefore$ 函数 $f(x)$ 的值域为 $[-\sqrt{2},2]$.

9. **解**：(1)当 $x\in(\pi,2\pi]$ 时，$f(x)=\frac{2}{\pi}x-2$.

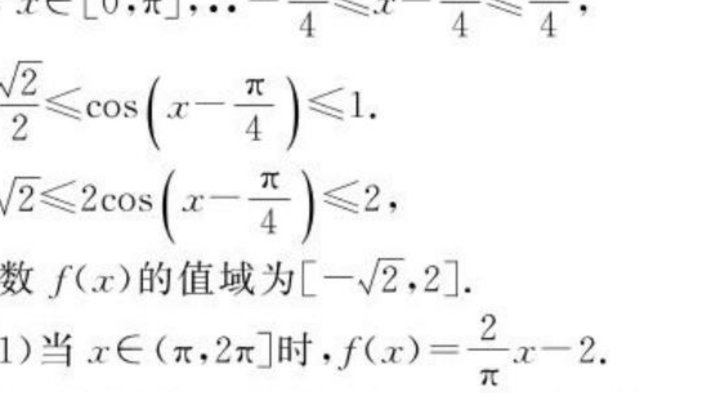
又 $f(x)$ 是偶函数，$\therefore f(-2\pi)=f(2\pi)=2$.

又当 $x\in[0,\pi]$ 时，$f(x)=\cos x$，

$\therefore f\left(-\frac{\pi}{3}\right)=f\left(\frac{\pi}{3}\right)=\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}$.

(2)由(1)知 $f(x)=\begin{cases}-\frac{2}{\pi}x-2,x\in[-2\pi,-\pi),\\ \cos x,x\in[-\pi,\pi],\\ \frac{2}{\pi}x-2,x\in(\pi,2\pi].\end{cases}$

图像如图所示，单调增区间为 $[-\pi,0]$，$(\pi,2\pi]$，单调减区间为 $[-2\pi,-\pi)$，$[0,\pi]$.



§7 正切函数

7.1 正切函数的定义

7.2 正切函数的图像与性质

基础知识点对点

1. D　由正切函数的定义得 $\tan\theta=\frac{3}{x}=-\frac{\sqrt{3}}{5}$，

$\therefore x=-5\sqrt{3}$.

2. A　由 $\frac{1}{2}x-\frac{\pi}{3}\neq k\pi+\frac{\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$，得定义域为 $\left\{x\left|x\neq2k\pi+\frac{5\pi}{3},k\in\mathbf{Z}\right.\right\}$，可排除 B、D，又当 $x=\frac{2\pi}{3}$ 时，$y=0$，所以排除 C. 故选 A.

3. D

4. D　$y=\tan\left(\frac{\pi}{4}-x\right)=-\tan\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$，

由 $x-\frac{\pi}{4}\neq k\pi+\frac{\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$，得 $x\neq k\pi+\frac{3\pi}{4}(k\in\mathbf{Z})$. 所以函数的定义域为 $\left\{x\left|x\in\mathbf{R},x\neq k\pi+\frac{3\pi}{4},k\in\mathbf{Z}\right.\right\}$.

5. C　逐个分析 A、B、C、D 四个选项，利用三角函数的定义可得正确结论.

当点 P 在 AB 上时，$\cos\alpha=x$，$\sin\alpha=y$，$\therefore\cos\alpha>\sin\alpha$，故 A 选项错误；当点 P 在 $\overset{\frown}{CD}$ 上时，$\cos\alpha=x$，$\sin\alpha=y$，$\tan\alpha=\frac{y}{x}$，$\therefore\tan\alpha>\sin\alpha>\cos\alpha$，故 B 选项错误；当点 P 在 $\overset{\frown}{EF}$ 上时，$\cos\alpha=x$，$\sin\alpha=y$，$\tan\alpha=\frac{y}{x}$，$\therefore\sin\alpha>\cos\alpha>\tan\alpha$，故 C 选项正确；当点 P 在 $\overset{\frown}{GH}$ 上时，$\tan\alpha>0$，$\sin\alpha<0$，$\cos\alpha<0$，故 D 选项错误. 综上，故选 C.

课后拔高提能练

1. C　由正切函数 $y=\tan x$ 的图像知 C 正确.

2. B　由正切函数的图像可知，当 $-\frac{\pi}{3}<x\leqslant\frac{\pi}{4}$ 时，$-\sqrt{3}<\tan x\leqslant1$.

3. A　由题意知，$-\tan\theta\geqslant\sqrt{3}$，$\tan\theta\leqslant-\sqrt{3}$，$-\frac{\pi}{2}+k\pi<\theta\leqslant-\frac{\pi}{3}+k\pi(k\in\mathbf{Z})$.

4. C　$f(x)=\tan\left(\frac{\pi}{3}-2x\right)=-\tan\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)$，

$-\frac{\pi}{2}+k\pi<2x-\frac{\pi}{3}<\frac{\pi}{2}+k\pi,k\in\mathbf{Z}$，

$-\frac{\pi}{12}+\frac{k\pi}{2}<x<\frac{5\pi}{12}+\frac{k\pi}{2},k\in\mathbf{Z}$.

$\therefore f(x)$ 在 $\left(-\frac{\pi}{12}+\frac{k\pi}{2},\frac{5\pi}{12}+\frac{k\pi}{2}\right),k\in\mathbf{Z}$ 上单调递减，$T=\frac{\pi}{2}$.

5. $\left(2k\pi-\frac{5\pi}{3},2k\pi+\frac{\pi}{3}\right)(k\in\mathbf{Z})$

解析：由 $k\pi-\frac{\pi}{2}<\frac{x}{2}+\frac{\pi}{3}<k\pi+\frac{\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$，得 $2k\pi-\frac{5\pi}{3}<x<2k\pi+\frac{\pi}{3}(k\in\mathbf{Z})$，知函数的增区间为 $\left(2k\pi-\frac{5\pi}{3},2k\pi+\frac{\pi}{3}\right)(k\in\mathbf{Z})$.

6. $\left(k\pi-\frac{\pi}{2},k\pi+\frac{\pi}{3}\right](k\in\mathbf{Z})$　$[0,+\infty)$

解析：由 $\sqrt{3}-\tan x\geqslant0$，得 $\tan x\leqslant\sqrt{3}$，

$\therefore$ 定义域为 $\left(k\pi-\frac{\pi}{2},k\pi+\frac{\pi}{3}\right](k\in\mathbf{Z})$，

值域为 $[0,+\infty)$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

7. $\frac{\pi}{\omega}$

解析：由正切曲线 $y=\tan\omega x$ 的图像性质知，两相邻交点间的距离为函数的周期 $\frac{\pi}{\omega}(\omega>0)$.

8. **解**：由 $4x-\frac{\pi}{3}\neq k\pi+\frac{\pi}{2}$，得 $x\neq\frac{k\pi}{4}+\frac{5\pi}{24}$，$k\in\mathbf{Z}$，

∴所求定义域为 $\left\{x\,\middle|\,x\in\mathbf{R}\text{，且 }x\neq\frac{k\pi}{4}+\frac{5\pi}{24},k\in\mathbf{Z}\right\}$，

值域为 $\mathbf{R}$，周期 $T=\frac{\pi}{4}$.

∵定义域关于原点不对称，∴函数为非奇非偶函数，

由 $4x-\frac{\pi}{3}=\frac{k\pi}{2},k\in\mathbf{Z}$ 得，$x=\frac{k\pi}{8}+\frac{\pi}{12},k\in\mathbf{Z}$，

∴函数图像的对称中心为 $\left(\frac{k\pi}{8}+\frac{\pi}{12},0\right),k\in\mathbf{Z}$.

9. **解**：设 $t=\tan x$，

∵$|x|\leqslant\frac{\pi}{4}$，

∴$t\in[-1,1]$.

∴原函数可转化为

$y=t^2-at=\left(t-\frac{a}{2}\right)^2-\frac{a^2}{4}$，

对称轴为 $t=\frac{a}{2}$.

①若 $-1\leqslant\frac{a}{2}\leqslant1$，即 $-2\leqslant a\leqslant2$ 时，

则当 $t=\frac{a}{2}$ 时，$y_{\min}=-\frac{a^2}{4}=-6$，

$a^2=24$（舍）；

②若 $\frac{a}{2}<-1$，即 $a<-2$ 时，

$y=\left(t-\frac{a}{2}\right)^2-\frac{a^2}{4}$ 在 $[-1,1]$ 上递增，

$y_{\min}=\left(-1-\frac{a}{2}\right)^2-\frac{a^2}{4}=1+a=-6$，

∴$a=-7$；

③若 $\frac{a}{2}>1$，即 $a>2$ 时，

$y=\left(t-\frac{a}{2}\right)^2-\frac{a^2}{4}$ 在 $[-1,1]$ 上递减，

$y_{\min}=1-a=-6$，∴$a=7$.

综上，$a=-7$ 或 $a=7$.

7.3　正切函数的诱导公式

基础知识点对点

1. D　$\tan\left(-\frac{7\pi}{3}\right)=-\tan\frac{7\pi}{3}=-\tan\frac{\pi}{3}=-\sqrt{3}$.

2. C　$2\sin(-600^\circ)+\sqrt{3}\tan(-855^\circ)=2\sin120^\circ+\sqrt{3}\tan45^\circ=\sqrt{3}+\sqrt{3}=2\sqrt{3}$.

3. D　$\cos(3\pi-x)=\cos(\pi-x)=-\cos x=\frac{3}{5}$，∴$\cos x=-\frac{3}{5}<0$，又∵$x\in(\pi,2\pi)$，∴$x\in\left(\pi,\frac{3}{2}\pi\right)$，

∴$\tan x=\frac{4}{3}$.

4. A　$a=\tan\left(-\frac{7\pi}{6}\right)=\tan\left(-\pi-\frac{\pi}{6}\right)=\tan\left(-\frac{\pi}{6}\right)=-\tan\frac{\pi}{6}=-\frac{\sqrt{3}}{3}$，$b=\cos\frac{33\pi}{4}=\cos\left(8\pi+\frac{\pi}{4}\right)=\cos\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，$c=\sin\left(-\frac{33\pi}{4}\right)=\sin\left(-8\pi-\frac{\pi}{4}\right)=\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)=-\sin\frac{\pi}{4}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$. ∴$b>a>c$.

5. **解**：∵$f(\alpha)=\frac{(-\sin\alpha)\cdot(-\cos\alpha)}{\cos(\pi+\alpha)\tan(-\alpha)}=\frac{\sin\alpha\cos\alpha}{(-\cos\alpha)\cdot(-\tan\alpha)}=\frac{\sin\alpha}{\tan\alpha}$，

∴$f\left(-\frac{25\pi}{3}\right)=\frac{\sin\left(-\frac{25\pi}{3}\right)}{\tan\left(-\frac{25\pi}{3}\right)}=\frac{\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)}{\tan\left(-\frac{\pi}{3}\right)}=\frac{-\sin\frac{\pi}{3}}{-\tan\frac{\pi}{3}}=\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{3}}=\frac{1}{2}$.

课后拔高提能练

1. B　$\sin600^\circ+\tan240^\circ=\sin(720^\circ-120^\circ)+\tan(180^\circ+60^\circ)=-\sin120^\circ+\tan60^\circ=-\frac{\sqrt{3}}{2}+\sqrt{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

2. C　∵$\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)+\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)=\frac{\pi}{2}$，∴$\tan\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)=\tan\left[\frac{\pi}{2}-\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)\right]=\cot\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)=\frac{1}{\tan\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)}=\frac{1}{2}$.

3. D　原式$=\frac{-\sin(5\pi-\theta)}{\tan(\pi-\theta)}\cdot\frac{\tan\theta}{\sin\theta}=\frac{-\sin\theta}{-\tan\theta}\cdot\frac{\tan\theta}{\sin\theta}=1$.

4. A　∵$\tan(5\pi+\alpha)=\tan\alpha=m$，$\sin(\alpha-3\pi)=-\sin\alpha$，$\cos(\pi-\alpha)=-\cos\alpha$，$\sin(-\alpha)=-\sin\alpha$，$\cos(\pi+\alpha)=-\cos\alpha$，∴原式$=\frac{-\sin\alpha-\cos\alpha}{-\sin\alpha+\cos\alpha}=\frac{\sin\alpha+\cos\alpha}{\sin\alpha-\cos\alpha}=\frac{\tan\alpha+1}{\tan\alpha-1}=\frac{m+1}{m-1}$，故选 A.

5. ①②

解析：∵$\frac{\pi}{2}<2<\pi$，∴$\tan2<0$，∴①为负；

又 $\tan(-10)=-\tan(10-3\pi)<0$，∴②为负；

∵$\sin\frac{7\pi}{10}>0$，$\cos\pi=-1<0$，

$\tan\frac{17\pi}{9}=\tan\left(2\pi-\frac{\pi}{9}\right)<0$，∴$\frac{\sin\frac{7\pi}{10}\cos\pi}{\tan\frac{17\pi}{9}}>0$，

∴③为正；

又 $\tan2\,012^\circ=\tan(11\times180^\circ+32^\circ)=\tan32^\circ>0$，

∴④为正.

∴符号为负的有①②.

6. $-\frac{3}{4}$

解析：$\sin\frac{4\pi}{3}\cos\frac{25\pi}{6}\tan\frac{5\pi}{4}=-\sin\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{6}\tan\frac{\pi}{4}=-\frac{3}{4}$.

7. $a<b<c$

解析：∵$\tan735^\circ=\tan(720^\circ+15^\circ)=\tan15^\circ$，$\tan556^\circ=\tan(3\times180^\circ+16^\circ)=\tan16^\circ$，$\tan(-343^\circ)=\tan(-360^\circ+17^\circ)=\tan17^\circ$，由正切函数的单调性可知，$\tan15^\circ<\tan16^\circ<\tan17^\circ$，即 $a<b<c$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

8. **解**：(1)原式$=\dfrac{\tan(180^\circ-\alpha)[-\tan(270^\circ-\alpha)]\tan\alpha}{-\tan(180^\circ-\alpha)\tan(90^\circ+\alpha)\tan(-\alpha)}$

$=\dfrac{-\tan\alpha[-\tan(90^\circ-\alpha)]\tan\alpha}{\tan\alpha(-\cot\alpha)(-\tan\alpha)}$

$=\dfrac{-\tan\alpha(-\cot\alpha)\tan\alpha}{\tan\alpha\cot\alpha\tan\alpha}$

$=\dfrac{\tan\alpha\cot\alpha\tan\alpha}{\tan\alpha\cot\alpha\tan\alpha}$

$=1$.

(2)原式$=\dfrac{-\tan\alpha\tan\alpha}{\tan\alpha(-\tan\alpha)(-\tan\alpha)}=-\dfrac{1}{\tan\alpha}$.

9. **解**：$\because\tan(\pi+\alpha)=\tan\alpha=-2<0$，可知角$\alpha$的终边在第二、四象限内.

当角α的终边在第二象限时，在角α的终边上取一点$P(-1,2)$，

则$r=\sqrt{(-1)^2+2^2}=\sqrt{5}$，

$\therefore\sin\alpha=\dfrac{2}{\sqrt{5}}=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$，$\cos\alpha=\dfrac{-1}{\sqrt{5}}=-\dfrac{\sqrt{5}}{5}$，

$\therefore\sin^2\alpha+\cos^2\alpha-3\sin\alpha+4\cos\alpha$

$=\left(\dfrac{2\sqrt{5}}{5}\right)^2+\left(-\dfrac{\sqrt{5}}{5}\right)^2-\dfrac{6\sqrt{5}}{5}-\dfrac{4\sqrt{5}}{5}$

$=1-2\sqrt{5}$.

当角α的终边在第四象限时，在角α的终边上取一点$P(1,-2)$，

则$\sin\alpha=\dfrac{-2\sqrt{5}}{5}$，$\cos\alpha=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$，

$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha-3\sin\alpha+4\cos\alpha=$

$1+\dfrac{6\sqrt{5}}{5}+\dfrac{4\sqrt{5}}{5}=1+2\sqrt{5}$.

$\therefore\sin^2\alpha+\cos^2\alpha-3\sin\alpha+4\cos\alpha$的值为$1\pm2\sqrt{5}$.

§8　函数$y=A\sin(\omega x+\varphi)$的图像与性质

第一课时　函数$y=A\sin(\omega x+\varphi)$的图像与性质(一)

基础知识点对点

1. B　由图像知，函数的周期是π，$\therefore\omega=\dfrac{2\pi}{\pi}=2$.

2. A　解法一：当$x=0$时，$y=\sin\left(-\dfrac{\pi}{3}\right)<0$，可排除B、D；当$x=\dfrac{\pi}{6}$时，$y=0$，排除C.

解法二：令$t=2x-\dfrac{\pi}{3}$，t，x，y对应值如下表：

t	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3}{2}\pi$	2π
x	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{5}{12}\pi$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{11}{12}\pi$	$\frac{7}{6}\pi$
y	0	1	0	-1	0

结合图像知，A正确.

3. A　由题意，为得到函数$y=\sin\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)$的图像，只需把函数$y=\sin x$的图像上所有点向左平移$\dfrac{\pi}{3}$个单位，故选A.

4. A　将$y=\sin x$的图像向左平移$\dfrac{\pi}{4}$个单位，得到$y=\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)$的图像，再将图像上所有点的横坐标变为原来的$\dfrac{1}{2}$，得到$y=\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{4}\right)$的图像；将$y=\sin x$图像上各点的横坐标变为原来的$\dfrac{1}{2}$，得到$y=\sin2x$的图像，再将图像上各点向左平移$\dfrac{\pi}{8}$个单位，得到$y=\sin2\left(x+\dfrac{\pi}{8}\right)$的图像，即$y=\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{4}\right)$的图像.

5. **解**：依题意知，$A=3$，设最小正周期为T，

则$\dfrac{T}{2}=\dfrac{11\pi}{12}-\dfrac{5\pi}{12}=\dfrac{\pi}{2}$，

$\therefore T=\pi$，又$\because T=\dfrac{2\pi}{\omega}$，

$\therefore\omega=2$.

$\therefore$函数解析式为$y=3\sin(2x+\varphi)$.

从图像特征看，我们可以将$\left(\dfrac{\pi}{6},0\right)$看作第一个关键点，则有$2\times\dfrac{\pi}{6}+\varphi=0$，

解得$\varphi=-\dfrac{\pi}{3}$，$\therefore y=3\sin\left(2x-\dfrac{\pi}{3}\right)$.

课后拔高提能练

1. D　将$x=\dfrac{\pi}{12}$代入函数方程得$y=\sin\left(2\times\dfrac{\pi}{12}+\dfrac{\pi}{3}\right)=\sin\dfrac{\pi}{2}=1$，$\therefore x=\dfrac{\pi}{12}$是一条对称轴.

2. D　解函数$y=2\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{6}\right)$的周期为$\pi$，将函数$y=2\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{6}\right)$的图像向右平移$\dfrac{1}{4}$个周期，即$\dfrac{\pi}{4}$个单位，所得函数为$y=2\sin\left[2\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)+\dfrac{\pi}{6}\right]=2\sin\left(2x-\dfrac{\pi}{3}\right)$，故选D.

3. B　$y=\sin(\omega x+\varphi)$向左平移$\dfrac{\pi}{2}$个单位后得到$y=\sin\left[\omega\left(x+\dfrac{\pi}{2}\right)+\varphi\right]=\sin\left(\omega x+\dfrac{\pi}{2}\omega+\varphi\right)=\sin(\omega x+\varphi)$，

$\therefore\dfrac{\pi}{2}\omega=2k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$，$\therefore\omega=4k$，$\therefore$选B.

4. C　$y=\sin\dfrac{x}{2}=\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{x}{2}\right)=\cos\left(\dfrac{x}{2}-\dfrac{\pi}{2}\right)=\cos\left(\dfrac{x}{2}-\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{\pi}{4}\right)=\cos\left[\dfrac{1}{2}\left(x-\dfrac{\pi}{2}\right)-\dfrac{\pi}{4}\right]$，$\therefore y=\sin\dfrac{x}{2}$向左平移$\dfrac{\pi}{2}$个单位得到$y=\cos\left(\dfrac{x}{2}-\dfrac{\pi}{4}\right)$，

$\therefore$选C.

5. $y=3\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{3}\right)$

解析：把$y=3\sin2x$的图像向左平移$\dfrac{\pi}{6}$个单位，得到$y=3\sin2\left(x+\dfrac{\pi}{6}\right)=3\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{3}\right)$的图像.

6. 3

解析：由题意得$\omega_{\min}=\dfrac{2\pi}{2\pi}=3$.

7. $\sin\left(\dfrac{x}{2}+\dfrac{\pi}{6}\right)$

解析：由题可得，将$y=\sin x$的图像向左平移$\dfrac{\pi}{6}$个单位长度，得到$y=\sin\left(x+\dfrac{\pi}{6}\right)$，再把横坐标扩大为原来的2倍，得到$y=\sin\left(\dfrac{x}{2}+\dfrac{\pi}{6}\right)$的图像，即$f(x)$的图像，

$\therefore f(x)=\sin\left(\dfrac{x}{2}+\dfrac{\pi}{6}\right)$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

8. **解**：(1)由题图知，函数 $f(x)$ 的最小正周期为 $T=4\times\left(\frac{\pi}{12}+\frac{\pi}{6}\right)=\pi$，函数的最大值为 1，最小值为 -1.

(2)$T=\frac{2\pi}{\omega}=\pi$，则 $\omega=2$，

又当 $x=-\frac{\pi}{6}$ 时，$y=0$，

$\therefore \sin\left[2\times\left(-\frac{\pi}{6}\right)+\varphi\right]=0$，

而 $-\frac{\pi}{2}<\varphi<\frac{\pi}{2}$，则 $\varphi=\frac{\pi}{3}$，

$\therefore$ 函数 $f(x)$ 的表达式为 $f(x)=\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$.

由 $2k\pi-\frac{\pi}{2}\leqslant 2x+\frac{\pi}{3}\leqslant 2k\pi+\frac{\pi}{2}$，$k\in\mathbf{Z}$，

得 $k\pi-\frac{5\pi}{12}\leqslant x\leqslant kx+\frac{\pi}{12}$，$k\in\mathbf{Z}$，

$\therefore$ 函数 $f(x)$ 的递增区间为 $\left[k\pi-\frac{5\pi}{12},k\pi+\frac{\pi}{12}\right]$，$k\in\mathbf{Z}$.

9. **解**：(1)$\because f(x)=A\sin(\omega x+\varphi)+1$ 的周期为 π，

$\therefore\omega=2$. $\therefore f(x)=A\sin(2x+\varphi)+1$.

$\because$ 函数图像的一个最低点 $M\left(\frac{2\pi}{3},-1\right)$，$A>0$，

$\therefore A=2$，且 $2\times\frac{2\pi}{3}+\varphi=\frac{3\pi}{2}+2k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$，

$\therefore\varphi=\frac{\pi}{6}+2k\pi$. $\because 0<\varphi<\frac{\pi}{2}$，$\therefore\varphi=\frac{\pi}{6}$.

$\therefore f(x)=2\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)+1$.

(2)$\because f\left(\frac{\alpha}{2}\right)=\frac{1}{3}$，$\therefore\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)=-\frac{1}{3}$.

$\because 0\leqslant\alpha\leqslant\pi$，$\therefore\frac{\pi}{6}\leqslant\alpha+\frac{\pi}{6}\leqslant\frac{7\pi}{6}$.

又 $\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)<0$，

$\therefore\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)=-\sqrt{1-\sin^2\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)}=-\sqrt{1-\left(-\frac{1}{3}\right)^2}=-\frac{2\sqrt{2}}{3}$.

第二课时　函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ 的图像与性质(二)

基础知识点对点

1. B　$\because 0\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2}$，$\therefore-\frac{\pi}{6}\leqslant 2x-\frac{\pi}{6}\leqslant\frac{5\pi}{6}$，$\therefore-\frac{3}{2}\leqslant 3\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)\leqslant 3$.

2. B　$\because 0\leqslant x\leqslant\frac{4}{3}$，$\therefore 0\leqslant\frac{\pi}{2}x\leqslant\frac{2\pi}{3}$，

$\therefore-\frac{1}{2}\leqslant\cos\frac{\pi}{2}x\leqslant 1$，$\therefore-2\leqslant-2\cos\frac{\pi}{2}x\leqslant 1$.

$\therefore y=1-2\cos\frac{\pi}{2}x$ 的最小值为 -1，最大值为 2.

3. C　由 $3x-\frac{\pi}{4}=k\pi$，得 $x=\frac{k\pi}{3}+\frac{\pi}{12}(k\in\mathbf{Z})$.

令 $k=-2$，得 $x=-\frac{7\pi}{12}$，$\therefore$ 一个对称中心的坐标为 $\left(-\frac{7\pi}{12},0\right)$.

4. B　依题意得 $T=\frac{2\pi}{\omega}=\pi$，$\omega=2$，

故 $f(x)=\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)$，

所以 $f\left(\frac{\pi}{4}\right)=\sin\left(2\times\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4}\right)=\sin\frac{3\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}\neq 0$，

$f\left(\frac{\pi}{8}\right)=\sin\left(2\times\frac{\pi}{8}+\frac{\pi}{4}\right)=\sin\frac{\pi}{2}=1\neq 0$，

因此该函数的图像关于直线 $x=\frac{\pi}{8}$ 对称，不关于点 $\left(\frac{\pi}{4},0\right)$ 和点 $\left(\frac{\pi}{8},0\right)$ 对称，也不关于直线 $x=\frac{\pi}{4}$ 对称，故选 B.

5. **解**：$y=\sin\left(-2x+\frac{\pi}{6}\right)=-\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)$.

由 $2k\pi-\frac{\pi}{2}\leqslant 2x-\frac{\pi}{6}\leqslant 2k\pi+\frac{\pi}{2}$，$k\in\mathbf{Z}$，

得 $k\pi-\frac{\pi}{6}\leqslant x\leqslant k\pi+\frac{\pi}{3}$，$k\in\mathbf{Z}$.

$\therefore$ 单调减区间为 $\left[k\pi-\frac{\pi}{6},k\pi+\frac{\pi}{3}\right]$，$k\in\mathbf{Z}$.

由 $2k\pi+\frac{\pi}{2}\leqslant 2x-\frac{\pi}{6}\leqslant 2k\pi+\frac{3\pi}{2}$，$k\in\mathbf{Z}$，

得 $k\pi+\frac{\pi}{3}\leqslant x\leqslant k\pi+\frac{5\pi}{6}$，$k\in\mathbf{Z}$.

$\therefore$ 单调增区间为 $\left[k\pi+\frac{\pi}{3},k\pi+\frac{5\pi}{6}\right]$，$k\in\mathbf{Z}$.

课后拔高提能练

1. A　由题意得 $T=\frac{2\pi}{\frac{\pi}{3}}=6$，又图像过点(0,1)，

$\therefore 2\sin\varphi=1$，$\sin\varphi=\frac{1}{2}$，又 $|\varphi|<\frac{\pi}{2}$，$\therefore\varphi=\frac{\pi}{6}$.

2. B　由题图知，$T=2\left[\left(x_0+\frac{\pi}{4}\right)-x_0\right]=\frac{\pi}{2}$，

$\therefore\omega=\frac{2\pi}{T}=4$.

3. A　由函数图像平移变换的性质可知，将 $y=\sin\left(2x+\frac{\pi}{5}\right)$ 的图像向右平移 $\frac{\pi}{10}$ 个单位长度之后的解析式为 $y=\sin\left[2\left(x-\frac{\pi}{10}\right)+\frac{\pi}{5}\right]=\sin 2x$. 则函数的单调递增区间满足：$2k\pi-\frac{\pi}{2}\leqslant 2x\leqslant 2k\pi+\frac{\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$，即 $k\pi-\frac{\pi}{4}\leqslant x\leqslant k\pi+\frac{\pi}{4}(k\in\mathbf{Z})$，令 $k=1$ 可得一个单调递增区间为 $\left[\frac{3\pi}{4},\frac{5\pi}{4}\right]$. 函数的单调递减区间满足：$2k\pi+\frac{\pi}{2}\leqslant 2x\leqslant 2k\pi+\frac{3}{2}\pi(k\in\mathbf{Z})$，即 $k\pi+\frac{\pi}{4}\leqslant x\leqslant 9k\pi+\frac{3\pi}{4}(k\in\mathbf{Z})$，令 $k=1$ 可得一个单调递减区间为 $\left[\frac{5\pi}{4},\frac{7\pi}{4}\right]$. 故选 A.

4. D　$f(x)=\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$ 的最小正周期为 2π，

$\therefore f(x)$ 的一个周期为 2π，故 A 正确；当 $x=\frac{8\pi}{3}$ 时，$x+\frac{\pi}{3}=3\pi$，$\therefore\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=-1$，故 B 正确；$f(x+\pi)=\cos\left(x+\frac{4\pi}{3}\right)$，当 $x=\frac{\pi}{6}$ 时，$x+\frac{4\pi}{3}=\frac{3\pi}{2}$，$\therefore f(x+\pi)=0$，故 C 正确；函数 $f(x)=\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$ 在 $\left(\frac{\pi}{2},\frac{2\pi}{3}\right)$ 上单调递减，在 $\left(\frac{2\pi}{3},\pi\right)$ 上单调递增，故 D 不正确.

5. $\frac{\pi}{6}$

解析：由题意得 $\cos\left(\frac{8\pi}{3}+\varphi\right)=0$，即 $\frac{2\pi}{3}+\varphi=k\pi+\frac{\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$，$\therefore\varphi=k\pi-\frac{\pi}{6}(k\in\mathbf{Z})$，$\therefore|\varphi|_{\min}=\frac{\pi}{6}$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

6. ± 2

解析：由题意知 $T=\dfrac{2\pi}{|\omega|}=2\times\dfrac{\pi}{2}=\pi$，

$\therefore |\omega|=2,\omega=\pm 2$.

7. ②③④

8. **解**：(1)由题意得 $T=4\times(6-2)=16=\dfrac{2\pi}{\omega}$，所以 $\omega=\dfrac{\pi}{8}$，$A=\sqrt{2}$.

将点$(2,\sqrt{2})$代入 $f(x)=\sqrt{2}\sin\left(\dfrac{\pi}{8}x+\varphi\right)$，且 $0<\varphi<\dfrac{\pi}{2}$，解得 $\varphi=\dfrac{\pi}{4}$，

$\therefore y=\sqrt{2}\sin\left(\dfrac{\pi x}{8}+\dfrac{\pi}{4}\right)$.

(2)当 $\dfrac{\pi}{8}x+\dfrac{\pi}{4}=2k\pi+\dfrac{\pi}{2}$，即 $x=16k+2$ 时，$y_{\max}=\sqrt{2}$，

当 $\dfrac{\pi}{8}x+\dfrac{\pi}{4}=2k\pi+\dfrac{3\pi}{2}$，即 $x=16k+10$ 时，$y_{\min}=-\sqrt{2}$.

(3)单调增区间为$[16k-6,16k+2](k\in\mathbf{Z})$，单调减区间为$[16k+2,16k+10](k\in\mathbf{Z})$.

9. **解**：由 $f(x)$是偶函数且 $0\leqslant\varphi\leqslant\pi$，$\therefore\varphi=\dfrac{\pi}{2}$，

又 $f(x)$的图像关于点 M 对称，

$\therefore\dfrac{3\pi}{4}\cdot\omega=k\pi+\dfrac{\pi}{2},k\in\mathbf{Z}$，

又 $\omega>0$，$\therefore\omega=\dfrac{2}{3}(2k+1),k=0,1,2,3,\cdots$

当 $k=0$ 时，$\omega=\dfrac{2}{3}$，$f(x)=\sin\left(\dfrac{2}{3}x+\dfrac{\pi}{2}\right)$在$\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$上递减.

当 $k=1$ 时，$\omega=2$，$f(x)=\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{2}\right)$，在$\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$上递减.

当 $k\geqslant 2$ 时，$\omega\geqslant\dfrac{10}{3}$，$f(x)=\sin\left(\omega x+\dfrac{\pi}{2}\right)$在$\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$上不单调. 综上，$\omega=\dfrac{2}{3}$或 $\omega=2$.

§9 三角函数的简单应用

基础知识点对点

1. B　由 $I=5\sin\left(100\pi t+\dfrac{\pi}{3}\right)$知，当 $t=\dfrac{1}{200}$时，

$I=5\sin\left(\dfrac{\pi}{2}+\dfrac{\pi}{3}\right)=5\cos\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{5}{2}$.

2. D　$T=\dfrac{2\pi}{2\pi}=1$.

3. C　由图知，当 $t=0$ 时，$d=\sqrt{2}$，可排除 A，D；当 $t=\dfrac{\pi}{4}$ 时，$d=0$，故选 C.

4. B　水轮的角速度 $\omega=\dfrac{4\times 2\pi}{60}=\dfrac{2}{15}\pi$，$\therefore y=3\sin(\omega x+\varphi)+2=3\sin\left(\dfrac{2}{15}\pi x+\varphi\right)+2$ 则 $A=3,\omega=\dfrac{2}{15}\pi$.

5. D　由已知得该函数的最小正周期为 $T=12$，则 $\omega=\dfrac{2\pi}{T}=\dfrac{\pi}{6}$，又∵$t=0$ 时，$A\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$，

$\therefore$此函数为 $y=\sin\left(\dfrac{\pi}{6}t+\dfrac{\pi}{3}\right)t\in[0,12]$，

$\therefore 2k\pi-\dfrac{\pi}{2}\leqslant\dfrac{\pi}{6}t+\dfrac{\pi}{3}\leqslant 2k\pi+\dfrac{\pi}{2},k\in\mathbf{Z}$，$12k-5\leqslant t\leqslant 12k+1$，令 $k=0$ 得 $0\leqslant t\leqslant 1$，令 $k=1$ 得 $7\leqslant t\leqslant 12$.

课后拔高提能练

1. C　$T=\dfrac{2\pi}{\omega}=\dfrac{2\pi}{160\pi}=\dfrac{1}{80}$，又∵$f=\dfrac{1}{T}=80$.

2. B　把 $t=6,y=29.45,t=12,y=18.35$ 分别代入验证知，应选 B.

3. D　$f(x)=3\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{4}\right)$的初相为 $x=0$ 时 $2x+\dfrac{\pi}{4}$的值$\dfrac{\pi}{4}$，故 D 不正确.

4. C　由图像可知，$-3+k=2$，$\therefore k=5$，$\therefore$最大值为 $3+k=8$.

5. 25

解析：由题意得 $T=\dfrac{2\pi}{100\pi}=\dfrac{1}{50}$，由$\dfrac{0.5}{\frac{1}{50}}=0.5\times 50=25$.

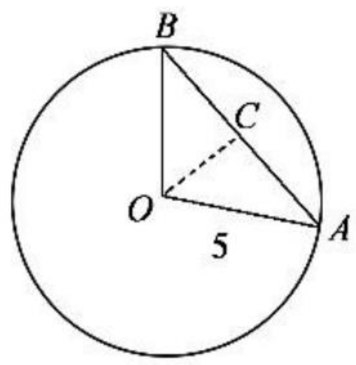
6. $\dfrac{1}{120}$

解析：由题意知 $A=20$，当 $t=150$ 时，P 取最小值，得 $\sin\left(\omega\pi\times 150+\dfrac{\pi}{4}\right)=-1$，$\therefore 150\omega\pi+\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{3\pi}{2}+2k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$，令 $k=0$，得 $\omega=\dfrac{1}{120}$.

7. $10\sin\dfrac{\pi}{60}\cdot t$

解析：经过 t s 秒针转了$\dfrac{\pi}{30}t$ rad.

过点 O 作 $OC\perp AB$，垂足为 C，如图，则 $\sin\dfrac{\pi t}{60}=\dfrac{\frac{d}{2}}{5}$，所以 $d=10\sin\dfrac{\pi t}{60}$.



8. **解**：(1)当 $t=8$ 时，$f(8)=10-2\sin\left(\dfrac{\pi}{12}\times 8+\dfrac{\pi}{3}\right)=10-2\sin\pi=10-2\times 0=10$，

$\therefore$实验室这一天上午 8 时的温度是 10 ℃.

(2)∵$0\leqslant t\leqslant 24$，$\therefore\dfrac{\pi}{3}\leqslant\dfrac{\pi}{12}t+\dfrac{\pi}{3}\leqslant 2\pi+\dfrac{\pi}{3}$，

$\therefore -1\leqslant\sin\left(\dfrac{\pi}{12}t+\dfrac{\pi}{3}\right)\leqslant 1$.

$\therefore f(t)_{\max}=10+2=12$，$f(t)_{\min}=10-2=8$.

$\therefore$实验室这一天的最大温差是 4 ℃.

9. **解**：(1)由图像可知，周期 $T=2\left(\dfrac{7\pi}{12}-\dfrac{\pi}{12}\right)=\pi$，所以小球往复振动一次所需要的时间为 $\pi\approx 3.14$ s.

(2)可设该曲线的函数解析式为：$s=A\sin(\omega t+\varphi)$，$t\in[0,+\infty)$，

从图像中可以看出 $A=4$，$T=2\times\left(\dfrac{7\pi}{12}-\dfrac{\pi}{12}\right)=\pi$.

$\therefore\dfrac{2\pi}{\omega}=\pi$，即 $\omega=2$，将 $t=\dfrac{\pi}{12}$，$s=4$ 代入解析式，

得 $\sin\left(\dfrac{\pi}{6}+\varphi\right)=1$，解得 $\varphi=\dfrac{\pi}{3}$.

$\therefore$这条曲线的函数解析式为 $S=4\sin\left(2t+\dfrac{\pi}{3}\right)$，$t\in[0,+\infty)$.

(3)当 $t=0$ 时，$s=4\sin\dfrac{\pi}{3}=2\sqrt{3}$ cm，故小球在开始振动时，离开平衡位置的位移是 $2\sqrt{3}$ cm.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

第二章　平面向量

§1　从位移、速度、力到向量

基础知识点对点

1. B　由向量的概念知②③⑤是向量.
2. D　共线的单位向量只有方向相同时，才是相等向量，故 D 错误.
3. D
4. D　与$\overrightarrow{OA}$共线的有$\overrightarrow{AO}$，$\overrightarrow{OD}$，$\overrightarrow{DO}$，$\overrightarrow{AD}$，$\overrightarrow{DA}$，$\overrightarrow{EF}$，$\overrightarrow{FE}$，$\overrightarrow{BC}$，$\overrightarrow{CB}$，共 9 个.
5. (1)AB，DC　(2)6

解析：(1)四边形 $ABCD$ 和 $ABDE$ 都是平行四边形，根据平行四边形的性质与向量相等的定义可知，$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{ED}$，$\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{ED}$.

(2)由(1)知，$|\overrightarrow{ED}|=|\overrightarrow{DC}|=|\overrightarrow{AB}|=3$，所以 $|\overrightarrow{EC}|=|\overrightarrow{ED}|+|\overrightarrow{DC}|=3+3=6$.

课后拔高提能练

1. D　$\overrightarrow{AD}$与$\overrightarrow{CB}$的方向相反，$\therefore \overrightarrow{AD}\neq\overrightarrow{CB}$，故 D 不正确.
2. C
3. C　两个向量起点相同、终点相同，则两个向量相等；但两个向量相等，却不一定有起点相同，终点相同，故①不正确；根据向量相等的定义，要保证两向量相等，不仅模相等，而且方向相同，而②中方向不一定相同，故②不正确；因为当$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$时，可能 A、B、C、D 落在同一条直线上，故③不正确；④⑤显然正确；由于零向量方向不确定，它与任一向量都平行，故⑥中若 $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$，则 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{c}$ 就不一定平行了，因此⑥也不正确. 应选 C.
4. C
5. $\overrightarrow{AF}$、$\overrightarrow{FC}$　$\overrightarrow{BD}$、$\overrightarrow{DA}$、$\overrightarrow{AF}$、$\overrightarrow{FC}$、$\overrightarrow{BE}$、$\overrightarrow{EC}$、$\overrightarrow{FD}$、$\overrightarrow{EF}$
6. ③

解析：由向量的知识可知③正确.

7. ③⑥

解析：$\because D$、E 分别为 $\triangle ABC$ 中 AB，AC 的中点，$\therefore \overrightarrow{DE}$与$\overrightarrow{CB}$为平行向量，故③正确，由向量的知识可知①②不正确；对于④，若 $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$，$\boldsymbol{a}\parallel\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{b}\parallel\boldsymbol{c}$，但 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{c}$ 不一定共线，故④不正确；对于⑤，当$\overrightarrow{AB}$与$\overrightarrow{CD}$为平行向量时，A、B、C、D 四点可能共线，故⑤不正确；⑥显然正确.

8. **解**：$\because E$，F 分别是 CA，AB 的中点，

$\therefore EF\parallel BC$，且 $EF=\frac{1}{2}BC$.

又 $\because D$ 为 BC 的中点.

$\therefore$(1)与$\overrightarrow{EF}$共线的向量有：$\overrightarrow{FE}$，$\overrightarrow{BD}$，$\overrightarrow{DB}$，$\overrightarrow{DC}$，$\overrightarrow{CD}$，$\overrightarrow{BC}$，$\overrightarrow{CB}$.

(2)与$\overrightarrow{EF}$的模相等的向量有：$\overrightarrow{FE}$，$\overrightarrow{BD}$，$\overrightarrow{DB}$，$\overrightarrow{DC}$，$\overrightarrow{CD}$.

(3)与$\overrightarrow{EF}$相等的向量有$\overrightarrow{CD}$，$\overrightarrow{DB}$.

9. **证明**：$\because \overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$，$\therefore |\overrightarrow{AB}|=|\overrightarrow{DC}|$且 $AB\parallel DC$.

$\therefore$四边形 $ABCD$ 为平行四边形，$\therefore \overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}$.

又 $\because M$、N 分别是 BC、AD 的中点，

$\therefore |\overrightarrow{AN}|=\frac{1}{2}|\overrightarrow{AD}|$，$|\overrightarrow{MC}|=\frac{1}{2}|\overrightarrow{BC}|$，

$\therefore |\overrightarrow{AN}|=|\overrightarrow{MC}|$.

又 $\because AN\parallel MC$，

$\therefore$四边形 $AMCN$ 是平行四边形.

$\therefore MA\parallel CN$，$|\overrightarrow{MA}|=|\overrightarrow{CN}|$.

由图知，$\overrightarrow{MA}$与$\overrightarrow{CN}$方向一致，$\therefore \overrightarrow{CN}=\overrightarrow{MA}$.

§2　从位移的合成到向量的加法

2.1　向量的加法

基础知识点对点

1. A
2. C
3. C　$\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{AD}$，$\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AD}$，

$\therefore \overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD}$.

4. D　当 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 同向时，有 $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|$ 成立，故 D 不正确.
5. **证明**：因为$\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{DO}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{DC}$，$\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{DO}+\overrightarrow{OC}$，所以$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$，所以 $AB\parallel DC$，所以四边形 $ABCD$ 是平行四边形.

课后拔高提能练

1. D　由于向量加法的三角形法则对于向量共线时也成立，所以线段 AB，BC，AC 构成三角形或共线，AB，BC 不可能平行.
2. B　$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$，则 $|\overrightarrow{AB}|=|\overrightarrow{BC}|=|\overrightarrow{AC}|$，

则 $\triangle ABC$ 是等边三角形.

3. C　$\because \boldsymbol{a}=(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD})+(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{DA})=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DA}=\boldsymbol{0}$，$\therefore \boldsymbol{a}\parallel\boldsymbol{b}$；$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}$，故①③正确，②不正确；

$\because \boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$，$\therefore |\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|$，故④不正确，⑤正确. 故正确的有①③⑤.

4. C　$\because \frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}$，$\frac{\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|}$，$\frac{\boldsymbol{c}}{|\boldsymbol{c}|}$为三个单位向量，$\therefore$当它们共线同向时，$|\boldsymbol{p}|$取最大值 3，当它们两两夹角为 120°时，$|\boldsymbol{p}|$取最小值 0，$\therefore |\boldsymbol{p}|$的取值范围是[0,3].
5. $2\sqrt{3}$

解析：$|\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{DC}|=|\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AB}|=2|\overrightarrow{AB}|\sin 60°=2\sqrt{3}$.

6. [1,5]

解析：$|\boldsymbol{a}|-|\boldsymbol{b}|=3-2=1$，$|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|=3+2=5$，又 $|\boldsymbol{a}|-|\boldsymbol{b}|\leqslant|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|\leqslant|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|$，则有 $1\leqslant|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|\leqslant 5$.

7. ②
8. **解**：(1)$\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AD}$.

(2)$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{BO}+\overrightarrow{CO}=(\overrightarrow{BO}+\overrightarrow{OA})+(\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{CO})=\overrightarrow{BA}+\boldsymbol{0}=\overrightarrow{BA}$.

(3)$(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{MB})+(\overrightarrow{BO}+\overrightarrow{BC})+\overrightarrow{OM}$

$=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BO}+\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{AC}$.

9. **证明**：易知$\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BF}$，

同理$\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{ED}+\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{CF}$，

两式相加，得 $2\overrightarrow{EF}=(\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{ED})+(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DC})+(\overrightarrow{BF}+\overrightarrow{CF})=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DC}$.

$\therefore \overrightarrow{EF}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DC})$.

2.2　向量的减法

基础知识点对点

1. A　$\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$.
2. B　根据向量加法、减法的几何意义，可知②③正确.
3. D　对于①，$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CA}=\boldsymbol{0}$；对于②，$\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}-\overrightarrow{CD}=(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD})-(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD})=\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{0}$；对于③，$\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{0}$；对于④，$\overrightarrow{NQ}+\overrightarrow{QP}+\overrightarrow{MN}-\overrightarrow{MP}=(\overrightarrow{NQ}+\overrightarrow{QP})+(\overrightarrow{MN}-\overrightarrow{MP})=\overrightarrow{NP}+\overrightarrow{PN}=\boldsymbol{0}$.
4. D　$\overrightarrow{AB}+(\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{BQ})=\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BQ}=\overrightarrow{PQ}$，

$(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{PC})+(\overrightarrow{BA}-\overrightarrow{QC})$

$=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{PC}+\overrightarrow{CQ}=\overrightarrow{PQ}$，

$\overrightarrow{QC}-\overrightarrow{QP}+\overrightarrow{CQ}=\overrightarrow{PC}+\overrightarrow{CQ}=\overrightarrow{PQ}$，

$\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{BQ}=\overrightarrow{PB}-\overrightarrow{BQ}\neq\overrightarrow{PQ}$.

5. **解**：由向量加法、减法法则知：

$\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{DB}=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$，

则 $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=|\overrightarrow{AC}|$，$|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=|\overrightarrow{DB}|$.

由菱形的性质可得 $AC\perp BD$，

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

且$\angle DAC=60^\circ=\angle BAC$.

$\therefore|\overrightarrow{AC}|=|\overrightarrow{AB}|=3,|\overrightarrow{AO}|=\frac{1}{2}|\overrightarrow{AC}|=\frac{3}{2}$.

$\therefore|\overrightarrow{OB}|=\sqrt{|\overrightarrow{AB}|^2-|\overrightarrow{AO}|^2}=\sqrt{3^2-\left(\frac{3}{2}\right)^2}=\frac{3\sqrt{3}}{2}$,

$|\overrightarrow{DB}|=2|\overrightarrow{OB}|=3\sqrt{3}$.

因此,$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=3,|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=3\sqrt{3}$.

课后拔高提能练

1. B　易知①③正确,②④错误.

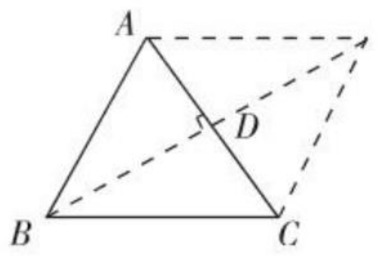
2. B　∵四边形$ABCD$是平行四边形,

$\therefore\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC},\therefore\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}=\boldsymbol{0}$.

又∵$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a},\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OC}=\boldsymbol{d}-\boldsymbol{c}$,

$\therefore\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}+\boldsymbol{d}-\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}$,即$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}-\boldsymbol{d}=\boldsymbol{0}$.

3. A　如图,$|\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{BC}|=|-\overrightarrow{BA}-\overrightarrow{BC}|=|\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}|=2|\overrightarrow{BD}|=2\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}$.



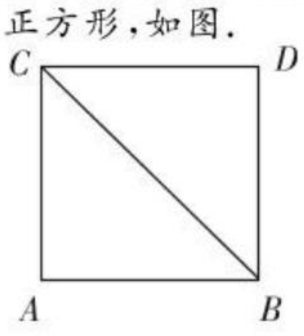
4. D　$\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{CB}=\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}$.

5. **0**

解析:∵$\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{FD}$,又$D、E、F$分别为$AB、BC、AC$的中点,$\therefore\overrightarrow{FD}=\overrightarrow{EB},\therefore\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AF}+\overrightarrow{EC}=\overrightarrow{EB}+\overrightarrow{EC}=\boldsymbol{0}$.

6. ①②③④

解析:以AB,AC为邻边作平行四边形$ABDC$,则平行四边形$ABDC$为正方形,如图.



由正方形的性质及向量加减法的几何意义知,①$|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}|$与$|\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}|$表示正方形的两条对角线,$\therefore|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}|=|\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}|$,即①正确;②∵$|\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{BA}|=|\overrightarrow{AB}|$,$|\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{CA}|=|\overrightarrow{AC}|$,而$|\overrightarrow{AB}|=|\overrightarrow{AC}|$,$\therefore|\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{BA}|=|\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{CA}|$,故②正确;同理知③正确;④∵$|\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}|^2=|\overrightarrow{CB}|^2,|\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{AC}|^2=|\overrightarrow{BA}|^2,|\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{AB}|^2=|\overrightarrow{CA}|^2$,又$|\overrightarrow{BA}|^2+|\overrightarrow{CA}|^2=|\overrightarrow{CB}|^2$.$\therefore|\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}|^2=|\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{AC}|^2+|\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{AB}|$.故④正确.

7. $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c}-\boldsymbol{b}$

解析:因为$\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a},\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b},\overrightarrow{OC}=\boldsymbol{c}$,则$\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{c}-\boldsymbol{b}$,又$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}$,所以$\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c}-\boldsymbol{b}$.

8. **解**:$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c},\overrightarrow{EB}=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AE}=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$,

$\overrightarrow{EC}=\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=-\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c}-\boldsymbol{b}$.

9. **证明**:∵四边形$ABCD$为平行四边形,

$\therefore\overrightarrow{DA}=\overrightarrow{CB}$,

$\therefore\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{CO}=\overrightarrow{OB}$,

$\therefore\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}-\boldsymbol{a}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{OA}$.

§3　从速度的倍数到数乘向量

3.1　数乘向量

基础知识点对点

1. C

2. C　易知①②③正确,④不正确,$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$与$\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}$是一对相反向量,而$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$与$-(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a})$是相等向量.

3. A

4. B　$3\boldsymbol{x}+\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{x}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$,得$\boldsymbol{x}=-\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$.

5. **证明**:$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}$,

$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{c}-\boldsymbol{a}$

$=\alpha\boldsymbol{a}+\beta\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}$

$=(\alpha-1)\boldsymbol{a}+\beta\boldsymbol{b}$.

∵$\alpha+\beta=1$,$\therefore\alpha-1=-\beta$.

$\therefore\overrightarrow{AC}=-\beta\boldsymbol{a}+\beta\boldsymbol{b}=\beta(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a})=\beta\overrightarrow{AB}$.

$\therefore\overrightarrow{AC}/\!/\overrightarrow{AB}$.$\therefore A、B、C$三点共线.

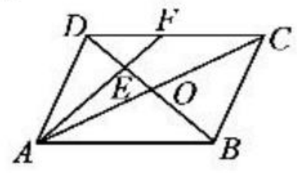
课后拔高提能练

1. A　∵$\overrightarrow{AC}=-3\overrightarrow{CB},\therefore\overrightarrow{AB}=-2\overrightarrow{CB}=2\overrightarrow{BC}$,

$\therefore\boldsymbol{r}=\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=-\frac{1}{2}\boldsymbol{p}+\frac{3}{2}\boldsymbol{q}$.

2. B　如图.∵$\triangle DEF\backsim\triangle BEA$,

$\therefore\frac{DF}{AB}=\frac{DE}{EB}=\frac{1}{3}$.$\therefore DF=\frac{1}{3}AB=\frac{1}{3}DC$.$\therefore CF=\frac{2}{3}DC$.$\therefore\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CF}=\boldsymbol{a}+\frac{2}{3}\overrightarrow{CD}=\boldsymbol{a}+\frac{2}{3}(\overrightarrow{CO}+\overrightarrow{OD})=\boldsymbol{a}+\frac{2}{3}\left(-\frac{1}{2}\boldsymbol{a}+\frac{1}{2}\boldsymbol{b}\right)=\frac{2}{3}\boldsymbol{a}+\frac{1}{3}\boldsymbol{b}$.



3. B　①中当$\boldsymbol{a}$为零向量时,λ不唯一,所以①为假命题;②,③是真命题;④中当$\lambda_1=\lambda_2=0$时,$\lambda_1\boldsymbol{a}+\lambda_2\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$成立,所以④是假命题.

4. B　∵$\overrightarrow{AB}=3\boldsymbol{e}_1,\overrightarrow{CD}=-5\boldsymbol{e}_1,\therefore\overrightarrow{AB}=-\frac{3}{5}\overrightarrow{CD}$,

$\therefore\overrightarrow{AB}/\!/\overrightarrow{CD}$,但$|\overrightarrow{AB}|\neq|\overrightarrow{CD}|$.

$\therefore$四边形$ABCD$是以$AB、CD$为底边的梯形.

又∵$|\overrightarrow{AD}|=|\overrightarrow{BC}|$,$\therefore$梯形的两腰相等,

$\therefore$四边形$ABCD$是等腰梯形.

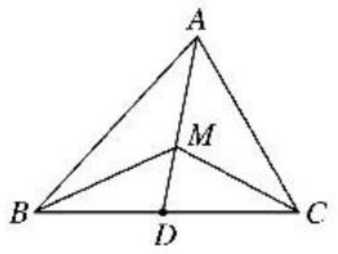
5. 9

解析:由$(3x-4y)\boldsymbol{a}+(2x-3y)\boldsymbol{b}=6\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b}$,

得$\begin{cases}3x-4y=6,\\2x-3y=3,\end{cases}$得$\begin{cases}y=3,\\x=6,\end{cases}\therefore x+y=9$.

6. 3

解析:由$\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=\boldsymbol{0}$可知$M$为$\triangle ABC$的重心,设$D$为$BC$的中点,则$\overrightarrow{AM}=2\overrightarrow{MD}$,又$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{AD}=2(\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{MD})=3\overrightarrow{AM}$.又$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=m\overrightarrow{AM}$,$\therefore m=3$.



7. $\frac{1}{2}$

解析:∵$\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PC}=\boldsymbol{0}$,$\therefore\overrightarrow{PA}=-\overrightarrow{PC}=\overrightarrow{CP}$,$\therefore P$是边$AC$的中点.又∵$2\overrightarrow{QA}+\overrightarrow{QB}+\overrightarrow{QC}=\overrightarrow{BC}$,

$\therefore2\overrightarrow{QA}=\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{QB}-\overrightarrow{QC}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CQ}+\overrightarrow{BQ}=2\overrightarrow{BQ}$,

$\therefore\overrightarrow{QA}=\overrightarrow{BQ}$,$\therefore Q$为边$AB$的中点,

$\therefore PQ$是$\triangle ABC$的中位线,$\therefore|\overrightarrow{PQ}|=\frac{1}{2}|\overrightarrow{BC}|$,

$\therefore\lambda=\frac{1}{2}$.

8. **解**:∵$\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$,

又$BM=\frac{1}{3}BC=\frac{1}{6}BA$,$\therefore\overrightarrow{BM}=\frac{1}{6}(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})$,

$\therefore\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BM}=\boldsymbol{b}+\frac{1}{6}(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})=\frac{1}{6}\boldsymbol{a}+\frac{5}{6}\boldsymbol{b}$,

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

又在□$OADB$ 中，$\overrightarrow{OD}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$，$CN=\frac{1}{3}CD$，$\therefore ON=\frac{2}{3}OD$，$\therefore\overrightarrow{ON}=\frac{2}{3}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$，

在 $\triangle OMN$ 中，$\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{ON}-\overrightarrow{OM}=\frac{2}{3}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})-\left(\frac{1}{6}\boldsymbol{a}+\frac{5}{6}\boldsymbol{b}\right)=\frac{1}{2}\boldsymbol{a}-\frac{1}{6}\boldsymbol{b}$.

9. **解**：(1)证明：$\because\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+2\boldsymbol{a}+8\boldsymbol{b}+3(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})=6\boldsymbol{a}+6\boldsymbol{b}=6\overrightarrow{AB}$，

$\therefore\overrightarrow{AD}$与$\overrightarrow{AB}$共线，又有公共点 A，

$\therefore A,B,D$ 三点共线.

(2)$\because k\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 与 $2\boldsymbol{a}+k\boldsymbol{b}$ 共线，

$\therefore k\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\lambda(2\boldsymbol{a}+k\boldsymbol{b})$，

$\therefore(k-2\lambda)\boldsymbol{a}+(1-\lambda k)\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$.

$\because\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 不共线，

$\therefore\begin{cases}k-2\lambda=0,\\1-\lambda k=0.\end{cases}$

解得 $k=\pm\sqrt{2}$.

$\therefore k=\pm\sqrt{2}$时，使 $k\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 与 $2\boldsymbol{a}+k\boldsymbol{b}$ 共线.

3.2　平面向量基本定理

基础知识点对点

1. D　$\because-\frac{1}{2}\boldsymbol{e}_1+\frac{1}{4}\boldsymbol{e}_2=-\frac{1}{4}(2\boldsymbol{e}_1-\boldsymbol{e}_2)$，$\therefore 2\boldsymbol{e}_1-\boldsymbol{e}_2$ 与 $-\frac{1}{2}\boldsymbol{e}_1+\frac{1}{4}\boldsymbol{e}_2$共线，故不能作为一组基底.

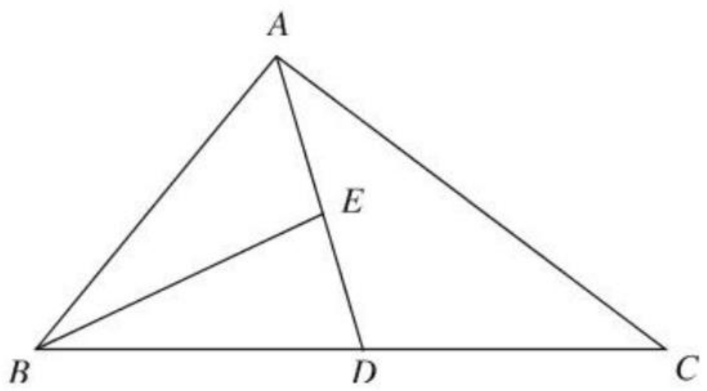
2. D　由平面向量基本定理知 D 正确.

3. A　设 $\boldsymbol{c}=x\boldsymbol{a}+y\boldsymbol{b}=(x+y)\boldsymbol{e}_1+(x-y)\boldsymbol{e}_2=\frac{2}{3}\boldsymbol{e}_1-\frac{1}{3}\boldsymbol{e}_2$，$\therefore\begin{cases}x+y=\frac{2}{3},\\x-y=-\frac{1}{3},\end{cases}$得$\begin{cases}x=\frac{1}{6},\\y=\frac{1}{2},\end{cases}$

$\therefore\boldsymbol{c}=\frac{1}{6}\boldsymbol{a}+\frac{1}{2}\boldsymbol{b}$.

4. A　根据向量的运算法则，可得

$\overrightarrow{BE}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BD}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC})=\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}+\frac{1}{4}\overrightarrow{BA}+\frac{1}{4}\overrightarrow{AC}=\frac{3}{4}\overrightarrow{BA}+\frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$，所以$\overrightarrow{EB}=\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}-\frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$，故选 A.



5. **证明**：设$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{BD}=\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}$.

$\because\overrightarrow{DN}=2\overrightarrow{NB}$，

$\therefore\overrightarrow{BN}=\frac{1}{3}\overrightarrow{BD}=\frac{1}{3}(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a})$，

$\because\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{b}$，

$\therefore\overrightarrow{CN}=\overrightarrow{BN}-\overrightarrow{BC}=\frac{1}{3}(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a})-\boldsymbol{b}=-\frac{1}{3}\boldsymbol{a}-\frac{2}{3}\boldsymbol{b}$，

$\because M$ 为 AB 中点，

$\therefore\overrightarrow{MB}=\frac{1}{2}\boldsymbol{a}$，

$\therefore\overrightarrow{CM}=-\overrightarrow{MC}=-(\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{BC})=-\frac{1}{2}\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$，

$\therefore\overrightarrow{CM}=\frac{3}{2}\overrightarrow{CN}$，

$\therefore\overrightarrow{CM}/\!/\overrightarrow{CN}$，

$\therefore C$、M、N 三点共线.

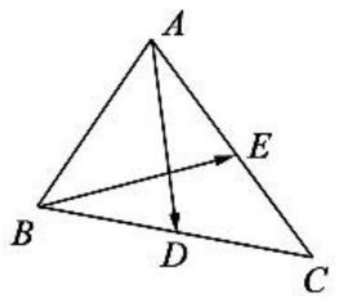
课后拔高提能练

1. B　如图，$\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{EC}=\boldsymbol{b}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{b}+\frac{1}{2}(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC})=\boldsymbol{b}+\frac{1}{2}(\boldsymbol{a}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BC})$，

$\therefore\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{b}+\frac{1}{2}\boldsymbol{a}+\frac{1}{4}\overrightarrow{BC}$，

$\frac{3}{4}\overrightarrow{BC}=\frac{1}{2}\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$，

$\overrightarrow{BC}=\frac{2}{3}\boldsymbol{a}+\frac{4}{3}\boldsymbol{b}$.



2. A　$\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{CD}-\overrightarrow{CB}=\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}$，$\because A$、$B$、$D$ 三点共线，

$\therefore\overrightarrow{AB}/\!/\overrightarrow{BD}$，设$\overrightarrow{AB}=\lambda\overrightarrow{BD}$，$\therefore\boldsymbol{a}-k\boldsymbol{b}=\lambda(\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b})=\lambda\boldsymbol{a}-2\lambda\boldsymbol{b}$，

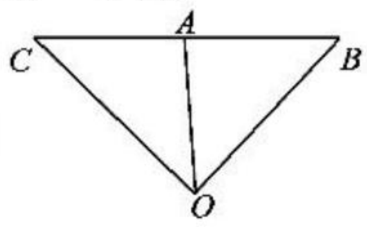
$\therefore\begin{cases}1=\lambda,\\k=2\lambda,\end{cases}\therefore k=2$.

3. D　$\because\overrightarrow{P_1P}=\lambda\overrightarrow{PP_2}$，$\therefore\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OP_1}=\lambda(\overrightarrow{OP_2}-\overrightarrow{OP})$，

$\therefore(1+\lambda)\overrightarrow{OP}=\lambda\overrightarrow{OP_2}+\overrightarrow{OP_1}$，

$\therefore\overrightarrow{OP}=\frac{1}{1+\lambda}\overrightarrow{OP_1}+\frac{\lambda}{1+\lambda}\overrightarrow{OP_2}=\frac{1}{1+\lambda}\boldsymbol{a}+\frac{\lambda}{1+\lambda}\boldsymbol{b}$.

4. C　$\because 2\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB}=\boldsymbol{0}$，$\therefore\overrightarrow{CB}=-2\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{CA}$，$\therefore A$、$B$、$C$ 共线且 A 为 CB 中点(如图)，$\therefore\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}$，$\therefore\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}=2\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}$.



5. 3

解析：$\because 2x\boldsymbol{a}+(3-y)\boldsymbol{b}=x\boldsymbol{b}+(3y+1)\boldsymbol{a}$，

$\therefore(2x-3y-1)\boldsymbol{a}+(3-y-x)\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$.

又$\because\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 不共线，

$\therefore\begin{cases}2x-3y-1=0,\\3-y-x=0,\end{cases}$

$\therefore\begin{cases}x=2,\\y=1,\end{cases}$

$\therefore x+y=3$.

6. -2 或$\frac{1}{3}$

解析：$\because\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 共线，$\therefore\frac{k^2}{2}=\frac{1-\frac{5k}{2}}{3}$，

$\therefore 3k^2+5k-2=0$，

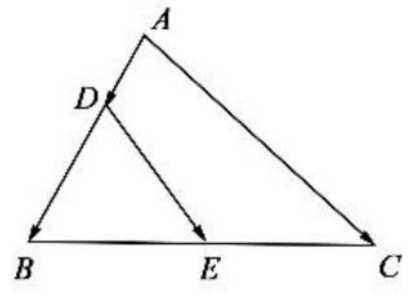
$\therefore k=-2$ 或$\frac{1}{3}$.

7. $\frac{2}{3}$

解析：如图，$\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{BE}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})=\frac{1}{6}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$，

$\therefore\lambda_1=\frac{1}{6}$，$\lambda_2=\frac{1}{2}$，

$\lambda_1+\lambda_2=\frac{1}{6}+\frac{1}{2}=\frac{2}{3}$.



关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

8. **解**:(1)$\because \overrightarrow{AP}=\lambda\overrightarrow{AB}$,
$\therefore \overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OA}=\lambda(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA})$,
$\therefore \overrightarrow{OP}=(1-\lambda)\overrightarrow{OA}+\lambda\overrightarrow{OB}$.
(2)当$\lambda=\frac{1}{2}$时,由(1)可知
$\overrightarrow{OP}=\frac{1}{2}\overrightarrow{OA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{OB}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})$,
由向量加法的几何意义知,点P为线段AB的中点.

9. **解**:设$\overrightarrow{MP}=m\overrightarrow{MB}$,$\overrightarrow{NP}=n\overrightarrow{NA}$,
则$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{MP}$
$=\overrightarrow{OM}+m\overrightarrow{MB}$
$=\frac{1}{3}\boldsymbol{a}+m(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OM})$
$=\frac{1}{3}\boldsymbol{a}+m\left(\boldsymbol{b}-\frac{1}{3}\boldsymbol{a}\right)$
$=\frac{1}{3}(1-m)\boldsymbol{a}+m\boldsymbol{b}$.
又$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{ON}+\overrightarrow{NP}$
$=\frac{1}{2}\boldsymbol{b}+n\overrightarrow{NA}$
$=\frac{1}{2}\boldsymbol{b}+n\cdot(\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{ON})$
$=\frac{1}{2}\boldsymbol{b}+n\left(\boldsymbol{a}-\frac{1}{2}\boldsymbol{b}\right)$
$=\frac{1}{2}(1-n)\boldsymbol{b}+n\boldsymbol{a}$.
$\because \boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$不共线,
$\therefore \begin{cases}\frac{1}{3}(1-m)=n,\\ \frac{1}{2}(1-n)=m,\end{cases}$即$\begin{cases}m=\frac{2}{5},\\ n=\frac{1}{5}.\end{cases}$
$\therefore \overrightarrow{OP}=\frac{1}{5}\boldsymbol{a}+\frac{2}{5}\boldsymbol{b}$.

§4 平面向量的坐标

基础知识点对点

1. B
2. C $\because A(-5,-1),B(3,-2)$,
$\therefore \overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=(3,-2)-(-5,-1)=(8,-1)$,
$\therefore -\overrightarrow{AB}=(-8,1)$.
3. A $\because \overrightarrow{AB}=(3,-4),|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{3^2+(-4)^2}=5$,
$\therefore$与$\overrightarrow{AB}$同方向的单位向量为$\frac{1}{5}\overrightarrow{AB}=\left(\frac{3}{5},-\frac{4}{5}\right)$.
4. D $\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}+3\boldsymbol{c}$
$=(5,-2)-(-8,-6)+(3x,3y)$
$=(3x+13,3y+4)=(0,0)$.
$\therefore \begin{cases}3x+13=0,\\ 3y+4=0,\end{cases}$解得$\begin{cases}x=-\frac{13}{3},\\ y=-\frac{4}{3}.\end{cases}$
即$\boldsymbol{c}=\left(-\frac{13}{3},-\frac{4}{3}\right)$.
5. **解**:(1)$\because A(1,1),B(3,-1),C(a,b)$,
$\therefore \overrightarrow{AB}=(2,-2),\overrightarrow{AC}=(a-1,b-1)$,
又A、B、C三点共线,$\therefore 2(b-1)+2(a-1)=0$,
得$a+b=2$.
(2)由(1)知$\overrightarrow{AC}=(a-1,b-1),\overrightarrow{AB}=(2,-2)$,
又$\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{AB}$,$\therefore \begin{cases}a-1=4,\\ b-1=-4,\end{cases}$得$\begin{cases}a=5,\\ b=-3,\end{cases}$
$\therefore C(5,-3)$.

课后拔高提能练

1. B $\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})=\frac{1}{2}[(0,2)-(2,4)]=\frac{1}{2}(-2,-2)=(-1,-1)$.
2. D $\boldsymbol{a}=2(-3,4)-2(-1,1)=(-4,6)$,设$A(x,y)$,
$\therefore \boldsymbol{a}=\overrightarrow{AB}=(1,0)-(x,y)=(1-x,-y)$,
$\therefore \begin{cases}1-x=-4,\\ -y=6,\end{cases}\therefore \begin{cases}x=5,\\ y=-6.\end{cases}$
3. A 设$D(m,n)$,则$\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB}=(3,1)-(-1,-2)=(4,3)$,$\overrightarrow{AD}=(m,n-2)$.
$\because \overrightarrow{BC}=2\overrightarrow{AD}$,$\therefore (4,3)=2(m,n-2)$,$\therefore \begin{cases}2m=4,\\ 2(n-2)=3,\end{cases}$
解得$\begin{cases}m=2,\\ n=\frac{7}{2},\end{cases}$$\therefore$点$D$的坐标为$\left(2,\frac{7}{2}\right)$.
4. C $m\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(2m-1,3m+2)$,$\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}=(4,-1)$,由已知得$1-2m=4(3m+2)$,$\therefore m=-\frac{1}{2}$.
5. -5
解析:$\because \overrightarrow{AB}=(-8,1)$,$\boldsymbol{a}=\overrightarrow{AB}$,
$\therefore \begin{cases}x-3=-8,\\ x^2+4x-4=1,\end{cases}$得$x=-5$.
6. (5,6)
解析:$3\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}=3(1,2)-2(-1,0)=(3,6)-(-2,0)=(5,6)$.
7. 1
解析:$\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}=(\sqrt{3},1)-2(0,-1)=(\sqrt{3},3)$,
又$\boldsymbol{c}=(k,\sqrt{3})$,$\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}$与$\boldsymbol{c}$共线,$\therefore \frac{k}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$,$\therefore k=1$.
8. **解**:设$C(x,y)$,由$\overrightarrow{AC}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$,得
$(x-2,y+1)=\frac{1}{2}(x-1,y-4)$,
即$\begin{cases}x-2=\frac{1}{2}(x-1),\\ y+1=\frac{1}{2}(y-4),\end{cases}$解得$\begin{cases}x=3,\\ y=-6.\end{cases}$
$\therefore C(3,-6)$.
又$\because E$在DC的延长线上,
且$\overrightarrow{CE}=\frac{1}{4}\overrightarrow{DE}$,设$E(m,n)$,则
$(m-3,n+6)=\frac{1}{4}(m-4,n+3)$.
$\therefore \begin{cases}m-3=\frac{1}{4}(m-4),\\ n+6=\frac{1}{4}(n+3),\end{cases}$
解得$\begin{cases}m=\frac{8}{3},\\ n=-7.\end{cases}$
$\therefore$点E的坐标为$\left(\frac{8}{3},-7\right)$.
9. **解**:(1)$3\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}-2\boldsymbol{c}=3(3,2)+(-1,2)-2(4,1)=(0,6)$.
(2)$\because \boldsymbol{a}=m\boldsymbol{b}+n\boldsymbol{c}$,
$\therefore (3,2)=m(-1,2)+n(4,1)=(-m+4n,2m+n)$.
$\therefore \begin{cases}-m+4n=3,\\ 2m+n=2,\end{cases}$解得$\begin{cases}m=\frac{5}{9},\\ n=\frac{8}{9}.\end{cases}$
(3)$\because (\boldsymbol{a}+k\boldsymbol{c})\parallel(2\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a})$,
又$\boldsymbol{a}+k\boldsymbol{c}=(3+4k,2+k)$,$2\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}=(-5,2)$,
$\therefore \frac{3+4k}{-5}=\frac{2+k}{2}$,$\therefore k=-\frac{16}{13}$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

§5　从力做的功到向量的数量积

第一课时　从力做的功到向量的数量积(一)

基础知识点对点

1. B　$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}+\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=1+1\times1\times\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$.

2. C　$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$ 时，可能为 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$ 的情况；$\boldsymbol{a}^2=|\boldsymbol{a}|^2$，∴A，B，D 均错，C 正确.

3. A　$\boldsymbol{a}$ 在 $\boldsymbol{b}$ 方向上的射影等于 $\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|}=\frac{-12}{3}=-4$.

4. B

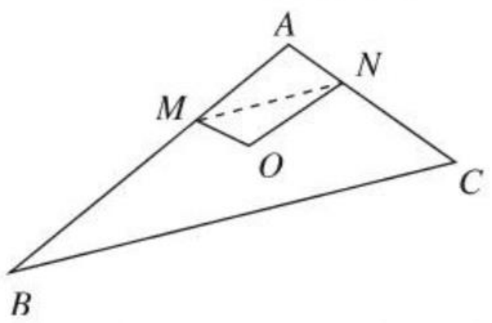
5. **解**：(1)$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta$
$=3\times4\times\cos120^\circ=3\times4\times\left(-\frac{1}{2}\right)=-6$.
(2)$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}-\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}^2-\boldsymbol{b}^2=|\boldsymbol{a}|^2-|\boldsymbol{b}|^2=3^2-4^2=-7$.
(3)$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}+\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{b}$
$=\boldsymbol{a}^2+2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}^2$
$=|\boldsymbol{a}|^2+2|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos120^\circ+|\boldsymbol{b}|^2$
$=3^2+2\times3\times4\times\cos120^\circ+4^2$
$=9+2\times3\times4\times\left(-\frac{1}{2}\right)+16=13$.
(4)$(\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b})\cdot(3\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=3\boldsymbol{a}^2+\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}-6\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}^2$
$=3|\boldsymbol{a}|^2-5|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos120^\circ-2|\boldsymbol{b}|^2$
$=3\times3^2-5\times3\times4\times\cos120^\circ-2\times4^2$
$=27-5\times3\times4\times\left(-\frac{1}{2}\right)-32$
$=25$.

课后拔高提能练

1. C　由题意得 $\overrightarrow{AB}$ 在 x 轴上的投影为 $4\cos120^\circ=-2$，在 y 轴上的投影为 $4\sin120^\circ=2\sqrt{3}$.

2. A　$\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a})=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}^2=1\times6\times\cos\frac{\pi}{3}-|\boldsymbol{a}|^2=6\times\frac{1}{2}-1=2$.

3. C　如图所示，连接 MN，由 $\overrightarrow{BM}=2\overrightarrow{MA}$，$\overrightarrow{CN}=2\overrightarrow{NA}$ 可知点 M、N 分别为线段 AB、AC 上靠近点 A 的三等分点，则 $\overrightarrow{BC}=3\overrightarrow{MN}=3(\overrightarrow{ON}-\overrightarrow{OM})$，由题意可知，$\overrightarrow{OM}^2=1^2=1$，$\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{ON}=1\times2\times\cos120^\circ=-1$，结合数量积的运算法则可得 $\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{OM}=3(\overrightarrow{ON}-\overrightarrow{OM})\cdot\overrightarrow{OM}=3\overrightarrow{ON}\cdot\overrightarrow{OM}-3\overrightarrow{OM}^2=-3-3=-6$. 故选 C.



4. D　①假. $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\lambda\in\mathbf{R}$，$\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a}=\mu\in\mathbf{R}$. 而 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$ 是非零向量且互不共线，故 $\lambda\boldsymbol{c}-\mu\boldsymbol{b}\neq0$. ②真. ∵$||\boldsymbol{a}|-|\boldsymbol{b}||<|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$. ③假. ∵$[(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{a}-(\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a})\boldsymbol{b}]\cdot\boldsymbol{c}=0$，故应为垂直. ④真. 根据数量积结合律交换律可判定. 故选 D.

5. $(-\infty,-1)\cup(-1,9)$.
解析：由题意知，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=6\times(-3)+2k<0$，$k<9$. 若 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 反向，则 $k=-1$. ∴k 的取值范围是 $(-\infty,-1)\cup(-1,9)$.

6. 12
解析：$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|\cdot\cos\theta=|\boldsymbol{a}|\cos\theta\cdot|\boldsymbol{b}|=\frac{12}{5}\times5=12$.

7. 4
解析：由已知得：$\boldsymbol{a}^2-\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}-6\boldsymbol{b}^2=-72$ ∴$|\boldsymbol{a}|^2-|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|\cdot\cos\frac{\pi}{3}-6|\boldsymbol{b}|^2=-72$，即 $2|\boldsymbol{b}|^2+|\boldsymbol{b}|-36=0$，∴$|\boldsymbol{b}|=4$.

8. **解**：在 $\triangle ABC$ 中，易知 $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}=\mathbf{0}$，即 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=\mathbf{0}$，
因此 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c}=-\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=-\boldsymbol{c}$.
从而 $\begin{cases}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})^2=(-\boldsymbol{c})^2,\\(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c})^2=(-\boldsymbol{b})^2,\end{cases}$
两式相减，可得 $\boldsymbol{b}^2+2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}^2-2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}=\boldsymbol{c}^2-\boldsymbol{b}^2$，
则 $2\boldsymbol{b}^2+2(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})=2\boldsymbol{c}^2$.
因为 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}$，
所以 $2\boldsymbol{b}^2=2\boldsymbol{c}^2$，即 $|\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{c}|$.
同理可得 $|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|$，故 $|\overrightarrow{AB}|=|\overrightarrow{BC}|=|\overrightarrow{CA}|$，即 $\triangle ABC$ 是等边三角形.

9. **解**：(1)假设向量 $\boldsymbol{c}$ 与向量 $\boldsymbol{d}$ 垂直，得 $\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{d}=0$，而 $\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{d}=(3\boldsymbol{a}+5\boldsymbol{b})\cdot(m\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b})=3m\boldsymbol{a}^2+(5m-9)\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}-15\boldsymbol{b}^2=27m+3(5m-9)-60$，
所以 $42m-87=0$，即 $m=\frac{29}{14}$，
即当 $m=\frac{29}{14}$ 时，$\boldsymbol{c}$ 与 $\boldsymbol{d}$ 垂直.
(2)假设 $\boldsymbol{c}$ 与 $\boldsymbol{d}$ 共线，则存在实数 λ，使得 $\boldsymbol{c}=\lambda\boldsymbol{d}$，所以 $3\boldsymbol{a}+5\boldsymbol{b}=\lambda(m\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b})$，
即 $3\boldsymbol{a}+5\boldsymbol{b}=\lambda m\boldsymbol{a}-3\lambda\boldsymbol{b}$. 又 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 不共线，
所以 $\begin{cases}\lambda m=3,\\-3\lambda=5,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}\lambda=-\frac{5}{3},\\m=-\frac{9}{5},\end{cases}$
即当 $m=-\frac{9}{5}$ 时，$\boldsymbol{c}$ 与 $\boldsymbol{d}$ 共线.

第二课时　从力做的功到向量的数量积(二)

基础知识点对点

1. B　∵$\cos\theta=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|}=\frac{-3}{\sqrt{3}\times2\sqrt{3}}=-\frac{1}{2}$.
∴$\theta=120^\circ$，即 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角是 120°.

2. C　$\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{c}\Rightarrow\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}=0$，即 $\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=0$，∴$\boldsymbol{a}^2+\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$，
∴$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=-\boldsymbol{a}^2=-1$，∴$|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|\cdot\cos\theta=-1$，
∴$\cos\theta=-\frac{1}{2}$，∴$\theta=120^\circ$.

3. A　∵$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$，∴$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})^2=(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})^2$，
∴$2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=-2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$，即 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$，∴$\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$.

4. B　$\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})=0\Rightarrow\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}|^2=1$，$|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=\sqrt{3}$，
∴$(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})^2=3$，得 $|\boldsymbol{a}|^2+|\boldsymbol{b}|^2-2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=3$，∴$|\boldsymbol{b}|^2=4$，
∴$|2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=\sqrt{(2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})^2}=\sqrt{4|\boldsymbol{a}|^2+|\boldsymbol{b}|^2+4\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}=\sqrt{12}=2\sqrt{3}$.

5. **解**：由已知得 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\sqrt{2}\times3\times\cos45^\circ=3\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=3$，
$(\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b})<0$，
∴$\boldsymbol{a}^2+(\lambda+2)\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+2\lambda\boldsymbol{b}^2<0$，即 $2+3(\lambda+2)+18\lambda<0$，
即 $21\lambda+8<0$，∴$\lambda<-\frac{8}{21}$.
此时 $\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}$ 不共线，
∴λ 的取值范围是 $\left(-\infty,-\frac{8}{21}\right)$.

课后拔高提能练

1. C　设 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为 θ，则 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta=\cos\theta$.
又∵$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=1$，∴$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})^2=|\boldsymbol{a}|^2+2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+|\boldsymbol{b}|^2=1$，
∴$1+2\cos\theta+1=1$，∴$\cos\theta=-\frac{1}{2}$，∴$\theta=\frac{2\pi}{3}$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

2. A $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}\cdot(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c})+\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}\cdot(-\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a}=-|\boldsymbol{b}|^2+|\boldsymbol{c}||\boldsymbol{a}|\cos120^\circ=-2+\sqrt{2}\times\sqrt{2}\times\left(-\frac{1}{2}\right)=-3$.

3. B 因为 $\boldsymbol{a}\cdot(2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})=2\boldsymbol{a}^2-\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=2|\boldsymbol{a}|^2-(-1)=2+1=3$,故选 B.

4. B 设 $\overrightarrow{BA}=\boldsymbol{a}$, $\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{b}$, $\therefore\overrightarrow{DE}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a})$, $\overrightarrow{DF}=\frac{3}{2}\overrightarrow{DE}=\frac{3}{4}(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a})$, $\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DF}=-\frac{1}{2}\boldsymbol{a}+\frac{3}{4}(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a})=-\frac{5}{4}\boldsymbol{a}+\frac{3}{4}\boldsymbol{b}$, $\therefore\overrightarrow{AF}\cdot\overrightarrow{BC}=-\frac{5}{4}\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\frac{3}{4}\boldsymbol{b}^2=-\frac{5}{8}+\frac{3}{4}=\frac{1}{8}$,故选 B.

5. $\sqrt{5}$

解析:由 $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=3$, $|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=3$,得 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$,

$\therefore|\boldsymbol{a}|^2+2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+|\boldsymbol{b}|^2=9$.

$\therefore|\boldsymbol{b}|^2=9-|\boldsymbol{a}|^2=5$, $\therefore|\boldsymbol{b}|=\sqrt{5}$.

6. 直角三角形

解析:$\because\overrightarrow{AB}^2=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}$,得 $\overrightarrow{AB}^2-\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}$,即 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}$, $\therefore\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}=0$, $\therefore C=\frac{\pi}{2}$,

$\therefore\triangle ABC$ 为直角三角形.

7. $\frac{\sqrt{3}}{3}$

解析:依题意得 $\frac{(\sqrt{3}\boldsymbol{e}_1-\boldsymbol{e}_2)\cdot(\boldsymbol{e}_1+\lambda\boldsymbol{e}_2)}{|\sqrt{3}\boldsymbol{e}_1-\boldsymbol{e}_2|\cdot|\boldsymbol{e}_1+\lambda\boldsymbol{e}_2|}=\cos60^\circ=\frac{1}{2}$,

$\therefore\frac{\sqrt{3}-\lambda}{2\sqrt{1+\lambda^2}}=\frac{1}{2}$, $\therefore\lambda=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

8. **解**:$\because\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$, $\therefore\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$.

又由已知得 $[\boldsymbol{a}+(t-3)\boldsymbol{b}]\cdot(-k\boldsymbol{a}+t\boldsymbol{b})=0$,

$\therefore-k\boldsymbol{a}^2+t(t-3)\boldsymbol{b}^2=0$.

$\because|\boldsymbol{a}|=2$, $|\boldsymbol{b}|=1$, $\therefore-4k+t(t-3)=0$,

$\therefore k=\frac{1}{4}t^2-\frac{3}{4}t=\frac{1}{4}\left(t-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{9}{16}$.

$\therefore$ 当 $t=\frac{3}{2}$ 时,k 取得最小值 $-\frac{9}{16}$.

9. **解**:(1)$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|^2=\boldsymbol{a}^2+2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+|\boldsymbol{b}|^2=1+2\times1\times2\times\cos60^\circ+4=7$.

$\therefore|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=\sqrt{7}$.

(2)$\because\lambda\boldsymbol{a}-6\boldsymbol{b}$ 与 $\lambda\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 互相垂直,

$\therefore(\lambda\boldsymbol{a}-6\boldsymbol{b})\cdot(\lambda\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=0$,

$\lambda^2\boldsymbol{a}^2-5\lambda\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}-6\boldsymbol{b}^2=0$,

$\lambda^2-5\lambda-24=0$,

解得 $\lambda=8$ 或 $\lambda=-3$.

§6 平面向量数量积的坐标表示

基础知识点对点

1. D $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=2\,017\times1+2\,018\times(-1)=2\,017-2\,018=-1$.

2. D $\because2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=(5,2-k)$,

$\therefore\boldsymbol{a}\cdot(2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})=(2,1)\cdot(5,2-k)=10+2-k=12-k=0$, $\therefore k=12$.

3. B $|\boldsymbol{a}|=2$, $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|\cdot\cos60^\circ=1$, $|\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}|^2=\boldsymbol{a}^2+4\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+4\boldsymbol{b}^2=12$, $\therefore|\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}|=2\sqrt{3}$.

4. D $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=2\times(-1)+4\times2=6$, $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}-6\boldsymbol{b}=(2,4)-(-6,12)=(8,-8)$, $\therefore|\boldsymbol{c}|=8\sqrt{2}$.

5. **解**:$\because\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角 θ 为锐角,

$\therefore\cos\theta>0$ 且 $\cos\theta\neq1$,

即 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}>0$ 且 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的方向不同.

即 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=1-2\lambda>0$,且 $\boldsymbol{a}\neq m\boldsymbol{b}(m>0)$.

$\therefore\lambda<\frac{1}{2}$,且 $\lambda\neq-2$.

$\therefore$ 实数 λ 的取值范围是 $(-\infty,-2)\cup\left(-2,\frac{1}{2}\right)$.

课后拔高提能练

1. B $\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|}=\frac{2\times3+1\times4}{\sqrt{3^2+4^2}}=2$.

2. D 由 $\boldsymbol{a}=(1,2)$, $\boldsymbol{b}=(-1,1)$,可得 $k\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(k-1,2k+1)$.又$\because\boldsymbol{c}=(2,1)$, $k\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}\parallel\boldsymbol{c}$, $\therefore2(2k+1)=k-1$, $\therefore k=-1$.

3. C $2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(3,3)$, $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=(0,3)$, $\cos\langle2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b},\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}\rangle=\frac{(3,3)\cdot(0,3)}{3\sqrt{2}\cdot3}=\frac{9}{9\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\therefore$ 夹角为 $\frac{\pi}{4}$.

4. B $\because\overrightarrow{OA}=(2,2)$, $\therefore A(2,2)$, $\because\overrightarrow{OB}=(4,1)$, $\therefore B(4,1)$.设 $P(x,0)$, $\therefore\overrightarrow{AP}=(x-2,-2)$, $\overrightarrow{BP}=(x-4,-1)$

$\therefore\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{BP}=(x-2)(x-4)+2=x^2-6x+10=(x-3)^2+1$, $\therefore x=3$ 时,$\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{BP}$ 取最小值, $\therefore P(3,0)$.

5. 2

解析:$\because\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$, $\therefore\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$,即 $-2\times3+3m=0$, $\therefore m=2$.

6. -1

解析:$\because\boldsymbol{a}=(1,0)$, $\boldsymbol{b}=(-1,m)$, $\therefore m\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=(m,0)-(-1,m)=(m+1,-m)$,

由 $\boldsymbol{a}\perp(m\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})$得,$\boldsymbol{a}\cdot(m\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})=0$, $\therefore\boldsymbol{a}\cdot(m\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})=m+1=0$,即 $m=-1$.

7. $\{x|0<x<2\}$

解析:$\because\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=(\log_2x,-1)\cdot(3,2+\log_2x)$,

$3\log_2x-(2+\log_2x)=2\log_2x-2<0$,

$\therefore\log_2x<1$, $\therefore0<x<2$.

8. **解**:(1)$\because\boldsymbol{m}=\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b}=(-2,1)+3(1,-1)=(1,-2)$,

$\boldsymbol{n}=\boldsymbol{a}-\lambda\boldsymbol{b}=(-2-\lambda,1+\lambda)$,

又 $\boldsymbol{m}\parallel\boldsymbol{n}$, $\therefore1\times(1+\lambda)=-2\times(-2-\lambda)$,

$\therefore\lambda=-3$.

(2)当 $\lambda=2$ 时,$\boldsymbol{m}=(1,-2)$, $\boldsymbol{n}=(-4,3)$.

设 $\boldsymbol{m}$ 与 $\boldsymbol{n}$ 的夹角为 θ,

则 $\cos\theta=\frac{\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{m}||\boldsymbol{n}|}=\frac{1\times(-4)+(-2)\times3}{\sqrt{1^2+(-2)^2}\cdot\sqrt{(-4)^2+3^2}}=\frac{-10}{5\sqrt{5}}=-\frac{2\sqrt{5}}{5}$.

$\therefore\boldsymbol{m}$ 与 $\boldsymbol{n}$ 夹角的余弦值为 $-\frac{2\sqrt{5}}{5}$.

9. **解**:(1)$\because\boldsymbol{a}=(-3,2)$, $\boldsymbol{b}=(-1,0)$,

$\therefore|\boldsymbol{a}|=\sqrt{(-3)^2+2^2}=\sqrt{13}$, $|\boldsymbol{b}|=\sqrt{1^2-0^2}=1$,

$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=-3\times(-1)+2\times0=3$.

$\therefore\cos\theta=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|}=\frac{3}{\sqrt{13}}=\frac{3\sqrt{13}}{13}$.

(2)$\lambda\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\lambda(-3,2)+(-1,0)=(-3\lambda-1,2\lambda)$,

$\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}=(-3,2)-2(-1,0)=(-1,2)$,

由 $(\lambda\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\perp(\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b})$得,

$(-3\lambda-1)\times(-1)+2\lambda\times2=0$,

解得 $\lambda=-\frac{1}{7}$.

§7 向量应用举例

基础知识点对点

1. B

2. A

3. C 由 $|\overrightarrow{BC}|^2=16$,得 $|\overrightarrow{BC}|=4$,

又$\because|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}|=|\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}|=|\overrightarrow{CB}|=4$.

M 为 BC 的中点,

$\therefore|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}|=2|\overrightarrow{AM}|$,

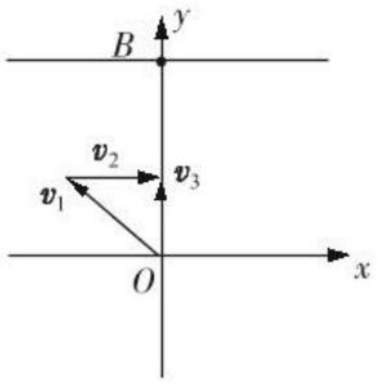
$\therefore|\overrightarrow{AM}|=2$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

4. D　$\because \overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}$，$\therefore \overrightarrow{OB}\cdot(\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OC})=0$，即 $\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{CA}=0$，$\therefore \overrightarrow{OB}\perp\overrightarrow{CA}$，同理 $\overrightarrow{OC}\perp\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{OA}\perp\overrightarrow{CB}$，$\therefore OA\perp CB$，$OB\perp CA$，$OC\perp AB$，即点 O 是 $\triangle ABC$ 的三条高线的交点，$\therefore$ 选 D.

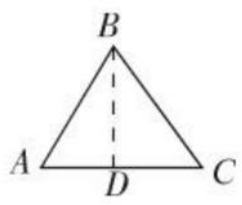
5. **解**：设船速为 $\boldsymbol{v}_1$，水速为 $\boldsymbol{v}_2$，船的实际速度为 $\boldsymbol{v}_3$，建立如图所示的直角坐标系，由题意得 $|\boldsymbol{v}_1|=5$ m/s，$|\boldsymbol{v}_3|=\frac{20\text{ m}}{5\text{ s}}=4$ m/s，由 $\boldsymbol{v}_3=\boldsymbol{v}_1+\boldsymbol{v}_2$，得 $\boldsymbol{v}_2=\boldsymbol{v}_3-\boldsymbol{v}_1=(0,4)-(-3,4)=(3,0)$.

$\therefore |\boldsymbol{v}_3|=3$ m/s，即水流的速度是 3 m/s.



课后拔高提能练

1. A　如图，



设 AC 边上的中点为 D，则 $\overrightarrow{BD}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BA})$.

$\because (\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BA})\cdot\overrightarrow{AC}=0$，$\therefore \overrightarrow{BD}\cdot\overrightarrow{AC}=0$，

$\therefore \overrightarrow{BD}\perp\overrightarrow{AC}$.

$\because$ 底边 AC 上的中线也是底边 AC 上的高，$\therefore \triangle ABC$ 为等腰三角形.

2. C　$\overrightarrow{AB}=(21,7)$，$\overrightarrow{AC}=(1,-3)$，$\therefore \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=0$，

$\therefore \overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{AC}$，即 $\angle A=90°$.

3. A　$\boldsymbol{f}=\boldsymbol{f}_1+\boldsymbol{f}_2+\boldsymbol{f}_3=(3,4)+(2,-5)+(3,1)=(8,0)$，

设合力 $\boldsymbol{f}$ 终点的坐标为 (a,b)，则

$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+\boldsymbol{f}=(1,1)+(8,0)=(9,1)$.

4. C　$(-10,10)+5(4,-3)=(10,-5)$.

5. 3

解析：设 $A(a,2a)(a>0)$，则由圆心 C 为 AB 中点得 $C\left(\frac{a+5}{2},a\right)$. 易得 $\odot C$：$(x-5)(x-a)+y(y-2a)=0$，与 $y=2x$ 联立解得点 D 的横坐标 $x_D=1$，所以 $D(1,2)$. 所以 $\overrightarrow{AB}=(5-a,-2a)$，$\overrightarrow{CD}=\left(1-\frac{a+5}{2},2-a\right)$，由 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}=0$ 得 $(5-a)\left(1-\frac{a+5}{2}\right)+(-2a)(2-a)=0$，即 $a^2-2a-3=0$，解得 $a=3$ 或 $a=-1$，因为 $a>0$，所以 $a=3$.

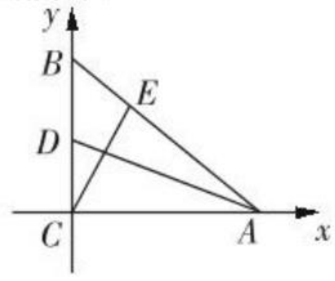
6. 正三角形

解析：$\because \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=|\overrightarrow{AB}|\cdot|\overrightarrow{AC}|\cos A=8$，得 $\cos A=\frac{1}{2}$，$\therefore \angle A=60°$，又 $|\overrightarrow{AB}|=|\overrightarrow{AC}|$，$\therefore \triangle ABC$ 为正三角形.

7. $x+2y-5=0$

解析：设 $C(x,y)$，由 $\overrightarrow{OC}=\alpha\overrightarrow{OA}+\beta\overrightarrow{OB}$ 得：$(x,y)=\alpha(3,1)+\beta(-1,3)$，$\therefore \begin{cases}x=3\alpha-\beta,\\ y=\alpha+3\beta,\end{cases}$ 把 $\beta=1-\alpha$ 代入上式得 $\begin{cases}x=4\alpha-1,\\ y=3-2\alpha,\end{cases}$ 消去 α 得 $x+2y-5=0$.

8. **证明**：以 C 为原点，以 CA 所在直线为 x 轴，建立平面直角坐标系，如图所示.



设 $AC=a$，则 $A(a,0)$，$B(0,a)$，$D\left(0,\frac{a}{2}\right)$，$C(0,0)$，$E\left(\frac{1}{3}a,\frac{2}{3}a\right)$.

$\therefore \overrightarrow{AD}=\left(-a,\frac{a}{2}\right)$，$\overrightarrow{CE}=\left(\frac{1}{3}a,\frac{2}{3}a\right)$，

$\therefore \overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{CE}=-\frac{1}{3}a^2+\frac{1}{3}a^2=0$，

$\therefore \overrightarrow{AD}\perp\overrightarrow{CE}$，即 $AD\perp CE$.

9. **解**：由题意知 $\boldsymbol{f}_1=(1,1)$，$\boldsymbol{f}_2=(4,-5)$，$\boldsymbol{s}=\overrightarrow{AB}=(-13,-15)$.

(1) $\boldsymbol{f}_1$ 对该质点做的功 $W_1=\boldsymbol{f}_1\cdot\boldsymbol{s}=1\times(-13)+1\times(-15)=-28$.

$\boldsymbol{f}_2$ 对该质点做的功 $W_2=\boldsymbol{f}_2\cdot\boldsymbol{s}=4\times(-13)+(-5)\times(-15)=23$.

(2) 合力 $\boldsymbol{f}=\boldsymbol{f}_1+\boldsymbol{f}_2=(5,-4)$，合力 $\boldsymbol{f}$ 对该质点做的功 $W=\boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{s}=5\times(-13)-4\times(-15)=-5$.

第三章　三角恒等变形

§1　同角三角函数的基本关系

第一课时　同角三角函数的基本关系(一)

基础知识点对点

1. B　由 $\sin^2\alpha+\sin\alpha=1$ 得 $\sin\alpha=1-\sin^2\alpha$，即 $\sin\alpha=\cos^2\alpha$，$\therefore \sin^2\alpha=\cos^4\alpha$，$\therefore \cos^4\alpha+\cos^2\alpha=\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$.

2. B　$\because \sin^2 4+\cos^2 4=1$，$\therefore 1-\sin^2 4=\cos^2 4$，$\therefore$ 原式 $=\sqrt{\cos^2 4}=|\cos 4|=-\cos 4$.

3. B　$\frac{2\sin\alpha-\cos\alpha}{\sin\alpha+2\cos\alpha}=\frac{2\tan\alpha-1}{\tan\alpha+2}=\frac{3}{4}$.

4. B　$\cos^2\alpha+4\sin\alpha\cos\alpha+4\sin^2\alpha=5$，

$\therefore \frac{\cos^2\alpha+4\sin\alpha\cos\alpha+4\sin^2\alpha}{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}=5$，$\frac{4\tan^2\alpha+4\tan\alpha+1}{\tan^2\alpha+1}=5$，

$\therefore (\tan\alpha-2)^2=0$，$\therefore \tan\alpha=2$.

5. **解**：$\because \sin\alpha-\cos\alpha=-\frac{\sqrt{5}}{5}$，

$\therefore (\sin\alpha-\cos\alpha)^2=1-2\sin\alpha\cos\alpha=\frac{1}{5}$，

$\therefore \sin\alpha\cdot\cos\alpha=\frac{2}{5}$.

$\because (\sin\alpha+\cos\alpha)^2=1+2\sin\alpha\cos\alpha=\frac{9}{5}$，$\because 180°<\alpha<270°$，$\therefore \sin\alpha<0$，$\cos\alpha<0$，

$\therefore \sin\alpha+\cos\alpha=-\frac{3}{5}\sqrt{5}$.

课后拔高提能练

1. C　$\because \sin\alpha=\frac{4}{5}$，且 α 是第二象限的角，$\therefore \cos\alpha=-\sqrt{1-\sin^2\alpha}=-\frac{3}{5}$，$\therefore \tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=-\frac{4}{3}$.

2. B　原式 $=\frac{\sin\alpha\cos\alpha}{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}=\frac{\tan\alpha}{\tan^2\alpha+1}=\frac{2}{5}$.

3. B　$\because \sin\theta<0$，$\tan\theta>0$，$\therefore \theta$ 为第三象限的角，

$\therefore \sqrt{1-\sin^2\theta}=\sqrt{\cos^2\theta}=|\cos\theta|=-\cos\theta$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

4. B　∵α为第三象限的角，∴$\sin\alpha<0$，$\cos\alpha<0$.

∴$\frac{\cos\alpha}{\sqrt{1-\sin^2\alpha}}+\frac{2\sin\alpha}{\sqrt{1-\cos^2\alpha}}=\frac{\cos\alpha}{|\cos\alpha|}+\frac{2\sin\alpha}{|\sin\alpha|}=\frac{\cos\alpha}{-\cos\alpha}+\frac{2\sin\alpha}{-\sin\alpha}=-1-2=-3$.

5. $-\frac{4}{3}$

解析：由题意 $\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)=\sin\left[\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)+\frac{\pi}{2}\right]=\cos\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{3}{5}$. 因为 $2k\pi+\frac{3\pi}{2}<\theta<2k\pi+2\pi(k\in\mathbf{Z})$，所以 $2k\pi+\frac{5\pi}{4}<\theta-\frac{\pi}{4}<2k\pi+\frac{7\pi}{4}(k\in\mathbf{Z})$，从而 $\sin\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{4}{5}$，因此 $\tan\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{4}{3}$.

6. $\frac{1}{5}$

解析：∵$\tan\theta=2$，$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$，

∴$\cos^2\theta=\frac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta+\cos^2\theta}=\frac{1}{\tan^2\theta+1}=\frac{1}{2^2+1}=\frac{1}{5}$.

7. 8　$-\frac{5}{12}$

解析：∵$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$，∴$\left(\frac{m-3}{m+5}\right)^2+\left(\frac{4-2m}{m+5}\right)^2=1$，

解得 $m=0$(舍)或 $m=8$.

∴$\sin\alpha=\frac{5}{13}$，$\cos\alpha=-\frac{12}{13}$，∴$\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=-\frac{5}{12}$.

8. **解：**(1)$(1+\tan^2\alpha)\cos^2\alpha=\cos^2\alpha+\tan^2\alpha\cos^2\alpha=\cos^2\alpha+\sin^2\alpha=1$.

(2)∵$\pi<\alpha<\frac{3\pi}{2}$，∴$\sin\alpha<0$.

∴原式$=\sqrt{\frac{(1+\cos\alpha)^2}{1-\cos^2\alpha}}+\sqrt{\frac{(1-\cos\alpha)^2}{1-\cos^2\alpha}}$

$=\frac{1+\cos\alpha}{|\sin\alpha|}+\frac{1-\cos\alpha}{|\sin\alpha|}=\frac{2}{|\sin\alpha|}=-\frac{2}{\sin\alpha}$.

(3)原式$=\sin^2\alpha(1-\sin^2\beta)+\sin^2\beta+\cos^2\alpha\cos^2\beta$

$=\sin^2\alpha\cos^2\beta+\sin^2\beta+\cos^2\alpha\cos^2\beta$

$=\cos^2\beta(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)+\sin^2\beta$

$=\cos^2\beta+\sin^2\beta$

$=1$.

9. **解：**(1)$\cos^2\alpha=1-\sin^2\alpha=1-\left(\frac{12}{13}\right)^2=\left(\frac{5}{13}\right)^2$，又$\alpha$是第二象限角，所以 $\cos\alpha<0$，$\cos\alpha=-\frac{5}{13}$，$\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=-\frac{12}{5}$.

(2)$\sin^2\alpha=1-\cos^2\alpha=1-\left(-\frac{4}{5}\right)^2=\left(\frac{3}{5}\right)^2$，因为 $\cos\alpha=-\frac{4}{5}<0$，所以$\alpha$是第二或第三象限角，当$\alpha$是第二象限角时，$\sin\alpha=\frac{3}{5}$，$\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=-\frac{3}{4}$；当$\alpha$是第三象限角时，$\sin\alpha=-\frac{3}{5}$，$\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{3}{4}$.

第二课时　同角三角函数的基本关系(二)

基础知识点对点

1. B　原式$=\frac{\cos10^\circ-\sin10^\circ}{\sin10^\circ-\cos10^\circ}=-1$.

2. D　原式$=\sin^2\alpha+\cos^2\alpha+1=2$.

3. A　由 $\sin\alpha-\cos\alpha=\frac{\sqrt{3}}{2}$，得 $1-2\sin\alpha\cos\alpha=\frac{3}{4}$，

∴$\sin\alpha\cos\alpha=\frac{1}{8}$.

4. B　∵$\sin\alpha=\frac{\sqrt{5}}{5}$，∴$\cos^2\alpha=1-\sin^2\alpha=1-\frac{1}{5}=\frac{4}{5}$.

∴$\sin^4\alpha-\cos^4\alpha=(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)(\sin^2\alpha-\cos^2\alpha)=\left(\frac{\sqrt{5}}{5}\right)^2-\frac{4}{5}=\frac{1}{5}-\frac{4}{5}=-\frac{3}{5}$.

5. **证明：**右边$=\frac{3(\tan^2\alpha+1)-2}{\tan^2\alpha+1}=3-\frac{2}{\tan^2\alpha+1}=3-\frac{2}{\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}+1}=3-\frac{2\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}=3-2\cos^2\alpha=$左边，所以原式得证.

课后拔高提能练

1. C

2. B　解法一：∵$\frac{\sin\theta+\cos\theta}{\sin\theta-\cos\theta}=2$，∴$\frac{\tan\theta+1}{\tan\theta-1}=2$，∴$\tan\theta=3$. ∴$\sin\theta\cos\theta=\frac{\sin\theta\cos\theta}{\sin^2\theta+\cos^2\theta}=\frac{\tan\theta}{\tan^2\theta+1}=\frac{3}{3^2+1}=\frac{3}{10}$.

解法二：∵$\frac{\sin\theta+\cos\theta}{\sin\theta-\cos\theta}=2$，∴$\left(\frac{\sin\theta+\cos\theta}{\sin\theta-\cos\theta}\right)^2=4$，

∴$\sin^2\theta+2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta=4(\sin^2\theta-2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta)$，∴$1+2\sin\theta\cos\theta=4-8\sin\theta\cos\theta$，∴$\sin\theta\cos\theta=\frac{3}{10}$.

3. A　∵$\frac{1+\sin\alpha}{\cos\alpha}\div\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha-1}=\frac{1+\sin\alpha}{\cos\alpha}\cdot\frac{\sin\alpha-1}{\cos\alpha}=\frac{\sin^2\alpha-1}{\cos^2\alpha}=\frac{-\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha}=-1$，又$\frac{1+\sin\alpha}{\cos\alpha}=-\frac{1}{2}$，

∴$\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha-1}=\frac{1}{2}$.

4. B　①式应等于$-\cos100^\circ$；②正确；③中，左边$=\frac{1+\sin\alpha}{|\cos\alpha|}-\frac{1-\sin\alpha}{|\cos\alpha|}=\frac{2\sin\alpha}{|\cos\alpha|}\neq2|\tan\alpha|$，所以③不正确.

5. 1

解析：$f(x)=1-\cos^2x+\sqrt{3}\cos x-\frac{3}{4}=-\cos^2x+\sqrt{3}\cos x+\frac{1}{4}=-\left(\cos x-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+1$，∵$x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$，

∴当 $x=\frac{\pi}{6}$时，函数 $f(x)$有最大值 1.

6. $\frac{1}{4}$

解析：由 $\tan\theta+\frac{1}{\tan\theta}=4$，得$\frac{\sin\theta}{\cos\theta}+\frac{\cos\theta}{\sin\theta}=4$，

得$\frac{\sin^2\theta+\cos^2\theta}{\sin\theta\cos\theta}=4$，∴$\sin\theta\cdot\cos\theta=\frac{1}{4}$.

7. $2\cos\frac{\alpha}{2}$

解析：∵$0<\alpha<\frac{\pi}{2}$，∴$0<\frac{\alpha}{2}<\frac{\pi}{4}$，∴$\sin\frac{\alpha}{2}<\cos\frac{\alpha}{2}$，

∴$\sqrt{1-2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}+\sqrt{1+2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}$

$=\sqrt{\left(\sin\frac{\alpha}{2}-\cos\frac{\alpha}{2}\right)^2}+\sqrt{\left(\sin\frac{\alpha}{2}+\cos\frac{\alpha}{2}\right)^2}$

$=\left|\sin\frac{\alpha}{2}-\cos\frac{\alpha}{2}\right|+\left|\sin\frac{\alpha}{2}+\cos\frac{\alpha}{2}\right|$

$=\cos\frac{\alpha}{2}-\sin\frac{\alpha}{2}+\sin\frac{\alpha}{2}+\cos\frac{\alpha}{2}=2\cos\frac{\alpha}{2}$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

8. **解**：由 $\sin\theta+\cos\theta=\frac{1-\sqrt{3}}{2}$，

两边平方得 $\sin^2\theta+2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta=\left(\frac{1-\sqrt{3}}{2}\right)^2$，

整理得 $\sin\theta\cos\theta=-\frac{\sqrt{3}}{4}$，$\because 0<\theta<\pi$，$\therefore \sin\theta>0$.

又 $\sin\theta\cos\theta=-\frac{\sqrt{3}}{4}<0$，$\therefore \cos\theta<0$. $\therefore \sin\theta-\cos\theta>0$.

由 $(\sin\theta-\cos\theta)^2=1-2\sin\theta\cos\theta=1+\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{4+2\sqrt{3}}{4}=\left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right)^2$，

得 $\sin\theta-\cos\theta=\frac{1+\sqrt{3}}{2}$，即 $\begin{cases}\sin\theta-\cos\theta=\frac{1+\sqrt{3}}{2},\\ \sin\theta+\cos\theta=\frac{1-\sqrt{3}}{2},\end{cases}$

解得 $\begin{cases}\sin\theta=\frac{1}{2},\\ \cos\theta=-\frac{\sqrt{3}}{2}.\end{cases}$

9. **解**：(1)由韦达定理知 $\begin{cases}\sin\theta+\cos\theta=\frac{\sqrt{3}+1}{2},\\ \sin\theta\cdot\cos\theta=\frac{m}{2}.\end{cases}$

$\therefore \frac{\sin\theta}{1-\frac{\cos\theta}{\sin\theta}}+\frac{\cos\theta}{1-\tan\theta}=\frac{\sin^2\theta}{\sin\theta-\cos\theta}+\frac{\cos^2\theta}{\cos\theta-\sin\theta}=\frac{\sin^2\theta-\cos^2\theta}{\sin\theta-\cos\theta}=\sin\theta+\cos\theta=\frac{\sqrt{3}+1}{2}$.

(2)$\because \sin\theta+\cos\theta=\frac{\sqrt{3}+1}{2}$，$\therefore 1+2\sin\theta\cos\theta=\frac{2+\sqrt{3}}{2}$.

又 $\because \sin\theta\cos\theta=\frac{m}{2}$，$\therefore m=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

此时 $\Delta=(\sqrt{3}+1)^2-4\sqrt{3}>0$. $\therefore m=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

(3)方程的两个根为 $x_1=\frac{1}{2}$，$x_2=\frac{\sqrt{3}}{2}$，

又 $\because \theta\in(0,2\pi)$，

$\therefore \begin{cases}\sin\theta=\frac{\sqrt{3}}{2},\\ \cos\theta=\frac{1}{2}\end{cases}$ 或 $\begin{cases}\sin\theta=\frac{1}{2},\\ \cos\theta=\frac{\sqrt{3}}{2}.\end{cases}$ $\therefore \theta=\frac{\pi}{3}$ 或 $\frac{\pi}{6}$.

§2　两角和与差的三角函数

2.1　两角差的余弦函数

基础知识点对点

1. A　$\because \cos15^\circ=\cos(45^\circ-30^\circ)=\cos45^\circ\cos30^\circ+\sin45^\circ\sin30^\circ=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$.

2. B　$\because \sin(\pi+\theta)=-\sin\theta=-\frac{3}{5}$，$\therefore \sin\theta=\frac{3}{5}$. 又 θ 是第二象限角，$\therefore \cos\theta=-\frac{4}{5}$. 又 $\sin\left(\frac{\pi}{2}+\varphi\right)=\cos\varphi=-\frac{2\sqrt{5}}{5}$，且 φ 是第三象限角，$\therefore \sin\varphi=-\frac{\sqrt{5}}{5}$.

$\therefore \cos(\theta-\varphi)=\cos\theta\cos\varphi+\sin\theta\sin\varphi=-\frac{4}{5}\times\left(-\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)+\frac{3}{5}\times\left(-\frac{\sqrt{5}}{5}\right)=\frac{5\sqrt{5}}{25}=\frac{\sqrt{5}}{5}$.

3. D　$\because \cos\left(\alpha-\frac{\pi}{6}\right)=\cos\alpha\cos\frac{\pi}{6}+\sin\alpha\sin\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\alpha+\frac{1}{2}\sin\alpha$，$\therefore$ D 不正确.

4. A　原式 $=\cos80^\circ\cdot\cos35^\circ+\sin80^\circ\cdot\cos(90^\circ-35^\circ)=\cos80^\circ\cdot\cos35^\circ+\sin80^\circ\cdot\sin35^\circ=\cos(80^\circ-35^\circ)=\cos45^\circ=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

5. B　$\because \alpha$、β 为锐角，$\therefore \sin\alpha=\frac{4\sqrt{3}}{7}$，$\alpha+\beta\in(0,\pi)$，

$\therefore \sin(\alpha+\beta)=\frac{5\sqrt{3}}{14}$，$\cos\beta=\cos[(\alpha+\beta)-\alpha]=\cos(\alpha+\beta)\cdot\cos\alpha+\sin(\alpha+\beta)\cdot\sin\alpha=-\frac{11}{14}\times\frac{1}{7}+\frac{5\sqrt{3}}{14}\times\frac{4\sqrt{3}}{7}=\frac{1}{2}$. $\therefore \beta=\frac{\pi}{3}$.

课后拔高提能练

1. B　原式 $=\sin(270^\circ-25^\circ)\cdot\sin(90^\circ+35^\circ)+\sin(180^\circ-25^\circ)\cdot\sin35^\circ=-\cos25^\circ\cdot\cos35^\circ+\sin25^\circ\cdot\sin35^\circ=-\cos(25^\circ+35^\circ)=-\cos60^\circ=-\frac{1}{2}$.

2. A　$\because \alpha\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$，

$\therefore \alpha+\frac{\pi}{4}\in\left(\frac{3\pi}{4},\frac{5\pi}{4}\right)$.

又 $\because \sin\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{3}{5}$，

$\therefore \cos\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{4}{5}$.

$\therefore \cos\alpha=\cos\left[\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)-\frac{\pi}{4}\right]=\left(-\frac{4}{5}\right)\times\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{3}{5}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=-\frac{\sqrt{2}}{10}$.

3. B　由 $\cos\alpha\cos\beta=\frac{\sqrt{3}}{2}-\sin\alpha\sin\beta$，得 $\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta=\frac{\sqrt{3}}{2}$，即 $\cos(\alpha-\beta)=\frac{\sqrt{3}}{2}$. 则 $\alpha=\frac{\pi}{2}$，$\beta=\frac{\pi}{3}$ 满足题意，故选 B.

4. B　由 $\sin\alpha-\sin\beta=1-\frac{\sqrt{3}}{2}$ 平方，得 $\sin^2\alpha-2\sin\alpha\cos\alpha+\sin^2\beta=1-\sqrt{3}+\frac{3}{4}$. ①

由 $\cos\alpha-\cos\beta=\frac{1}{2}$ 平方，得 $\cos^2\alpha-2\cos\alpha\cos\beta+\cos^2\beta=\frac{1}{4}$. ②

①＋②得 $2-2(\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta)=2-\sqrt{3}$.

$\therefore \cos(\alpha-\beta)=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

5. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

解析：原式 $=\cos[(62^\circ+2\alpha)-(32^\circ+2\alpha)]=\cos30^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

6. $-\frac{1}{2}$

解析：由已知得 $\sin\alpha+\sin\beta=-\sin\gamma$，$\cos\alpha+\cos\beta=-\cos\gamma$，两式平方相加得 $2+2\cos(\alpha-\beta)=1$，

$\therefore\cos(\alpha-\beta)=-\frac{1}{2}$.

7. 120°

解析：由已知得，$\cos60^\circ\cdot\cos\alpha+\sin60^\circ\cdot\sin\alpha=\frac{1}{2}$，

$\therefore\cos(60^\circ-\alpha)=\frac{1}{2}$，$\because\alpha$ 为三角形内角，$\therefore\alpha=120^\circ$.

8. **解**：$\because\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{4}{5}$，且 $\frac{\pi}{4}<\alpha<\frac{3\pi}{4}$，

$\therefore\frac{\pi}{2}<\alpha+\frac{\pi}{4}<\pi$.

$\therefore\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)=-\sqrt{1-\left(\frac{4}{5}\right)^2}=-\frac{3}{5}$.

$\therefore\cos\alpha=\cos\left[\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)-\frac{\pi}{4}\right]$

$=\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)\cos\frac{\pi}{4}+\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)\sin\frac{\pi}{4}$

$=-\frac{3}{5}\times\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{4}{5}\times\frac{\sqrt{2}}{2}$

$=\frac{\sqrt{2}}{10}$.

9. **解**：(1) 由 $|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=\frac{2\sqrt{5}}{5}$，知 $(\cos\alpha-\cos\beta)^2+(\sin\alpha-\sin\beta)^2=\frac{4}{5}$，

得 $2-2\cos(\alpha-\beta)=\frac{4}{5}$，$\therefore\cos(\alpha-\beta)=\frac{3}{5}$.

(2) $\because0<\alpha<\frac{\pi}{2}$，$-\frac{\pi}{2}<\beta<0$，$\therefore0<\alpha-\beta<\pi$，

又 $\cos(\alpha-\beta)=\frac{3}{5}$，$\sin\alpha=\frac{5}{13}$，

$\therefore\sin(\alpha-\beta)=\sqrt{1-\cos^2(\alpha-\beta)}=\frac{4}{5}$，

$\cos\alpha=\sqrt{1-\sin^2\alpha}=\frac{12}{13}$.

又 $\cos\beta=\cos[\alpha-(\alpha-\beta)]=\cos\alpha\cos(\alpha-\beta)+\sin\alpha\sin(\alpha-\beta)=\frac{12}{13}\times\frac{3}{5}+\frac{5}{13}\times\frac{4}{5}=\frac{56}{65}$.

2.2 两角和与差的正弦、余弦函数

基础知识点对点

1. A　$\sin165^\circ=\sin15^\circ=\sin(45^\circ-30^\circ)=\sin45^\circ\cdot\cos30^\circ-\cos45^\circ\cdot\sin30^\circ=\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$.

2. A　$\because\alpha,\beta$ 为锐角，$\cos\alpha=\frac{3}{5}$，又 $\cos(\alpha+\beta)=-\frac{5}{13}$，

$\therefore\sin\alpha=\frac{4}{5}$，$\therefore\sin(\alpha+\beta)=\frac{12}{13}$，$\therefore\cos(2\pi-\beta)=\cos\beta=\cos[(\alpha+\beta)-\alpha]=\cos(\alpha+\beta)\cos\alpha+\sin(\alpha+\beta)\sin\alpha=-\frac{5}{13}\times\frac{3}{5}+\frac{12}{13}\times\frac{4}{5}=\frac{33}{65}$.

3. C　$\because\alpha<\beta$，$\therefore\alpha-\beta<0$，又 $\because\cos(\alpha-\beta)=\frac{\sqrt{5}}{5}>0$，

$\therefore\sin(\alpha-\beta)=-\frac{2}{5}\sqrt{5}$. $\because\alpha$ 为锐角，$\therefore2\alpha\in(0,\pi)$，

$\therefore\sin2\alpha=\frac{3\sqrt{10}}{10}$，$\because\cos(\alpha+\beta)=\cos[2\alpha-(\alpha-\beta)]=\cos2\alpha\cdot\cos(\alpha-\beta)+\sin2\alpha\cdot\sin(\alpha-\beta)=\frac{\sqrt{10}}{10}\times\frac{\sqrt{5}}{5}+\frac{3\sqrt{10}}{10}\times\left(-\frac{2}{5}\sqrt{5}\right)=-\frac{\sqrt{2}}{2}$，又 $\because\alpha+\beta\in(0,\pi)$，$\therefore\alpha+\beta=\frac{3}{4}\pi$.

4. B　$\because\sin\left(\frac{\pi}{6}+\alpha\right)=\frac{1}{4}$，$\therefore\cos\alpha+\sqrt{3}\sin\alpha=2\left(\frac{1}{2}\cos\alpha+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\alpha\right)=2\cos\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)=2\cos\left[\frac{\pi}{2}-\left(\frac{\pi}{6}+\alpha\right)\right]=2\sin\left(\frac{\pi}{6}+\alpha\right)=2\times\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$.

5. C　$\because\alpha,\beta\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，$-\frac{\pi}{4}<\alpha-\frac{\beta}{2}<\frac{\pi}{2}$，$-\frac{\pi}{2}<\frac{\alpha}{2}-\beta<\frac{\pi}{4}$，又 $\sin\left(\alpha-\frac{\beta}{2}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$，$\therefore\cos\left(\alpha-\frac{\beta}{2}\right)=\sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}=\frac{1}{2}$. 又 $\sin\left(\frac{\alpha}{2}-\beta\right)=-\frac{1}{2}$，

$\therefore\cos\left(\frac{\alpha}{2}-\beta\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

$\therefore\sin\frac{\alpha+\beta}{2}=\sin\left[\left(\alpha-\frac{\beta}{2}\right)-\left(\frac{\alpha}{2}-\beta\right)\right]$

$=\sin\left(\alpha-\frac{\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha}{2}-\beta\right)-\cos\left(\alpha-\frac{\beta}{2}\right)\sin\left(\frac{\alpha}{2}-\beta\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}\times\left(-\frac{1}{2}\right)=1$.

课后拔高提能练

1. B　$\sin\theta\cos\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)-\cos\theta\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)$

$=\sin\left(\theta-\theta-\frac{\pi}{4}\right)=-\sin\frac{\pi}{4}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$.

2. B　由 $\sin A\sin B<\cos A\cos B$，得 $\cos(A+B)>0$，

$\therefore\cos C=\cos[\pi-(A+B)]=-\cos(A+B)<0$，$\therefore C$ 为钝角，$\therefore\triangle ABC$ 是钝角三角形.

3. A　$\because\sin\left(\frac{\pi}{6}-\alpha\right)=\cos\left(\frac{\pi}{6}+\alpha\right)$，

$\therefore\sin\frac{\pi}{6}\cos\alpha-\cos\frac{\pi}{6}\sin\alpha=\cos\frac{\pi}{6}\cos\alpha-\sin\frac{\pi}{6}\sin\alpha$，

$\therefore\frac{1-\sqrt{3}}{2}\sin\alpha=\frac{\sqrt{3}-1}{2}\cos\alpha$.

易知 $\cos\alpha\neq0$，$\therefore\tan\alpha=-1$.

4. B　由题意知，$\sin\angle BEC=\frac{1}{\sqrt{5}}$，$\cos\angle BEC=\frac{2}{\sqrt{5}}$，又 $\angle CED=\frac{\pi}{4}-\angle BEC$，所以 $\sin\angle CED=\sin\frac{\pi}{4}\cos\angle BEC-\cos\frac{\pi}{4}\sin\angle BEC=\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{2}{\sqrt{5}}-\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{1}{\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{10}}{10}$.

5. $-\frac{4+3\sqrt{3}}{10}$

解析：$\because\sin\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)=-\frac{3}{5}$，$\theta$ 是第二象限角，

$\therefore\cos\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)=-\frac{4}{5}$.

$\therefore\cos\theta=\cos\left[\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)-\frac{\pi}{3}\right]=\cos\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)\cos\frac{\pi}{3}+\sin\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)\sin\frac{\pi}{3}=-\frac{4}{5}\times\frac{1}{2}+\left(-\frac{3}{5}\right)\times\frac{\sqrt{3}}{2}=-\frac{4+3\sqrt{3}}{10}$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

6. $-\frac{1}{2}$

解析：由 $\sin\alpha+\cos\beta=1$，两边平方得 $\sin^2\alpha+2\sin\alpha\cos\beta+\cos^2\beta=1$，①

由 $\cos\alpha+\sin\beta=0$，两边平方得 $\cos^2\alpha+2\cos\alpha\sin\beta+\sin^2\beta=0$，②

① + ② 可得 $2+2(\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta)=1$，所以 $\sin(\alpha+\beta)=-\frac{1}{2}$.

7. $\frac{15\sqrt{3}-8}{34}$

解析：$\because \frac{\pi}{6}<\theta<\frac{\pi}{2}$，$\therefore 0<\theta-\frac{\pi}{6}<\frac{\pi}{3}$，

$\therefore \cos\left(\theta-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{15}{17}$，

$\therefore \cos\theta=\cos\left[\left(\theta-\frac{\pi}{6}\right)+\frac{\pi}{6}\right]=\cos\left(\theta-\frac{\pi}{6}\right)\cdot\cos\frac{\pi}{6}-\sin\left(\theta-\frac{\pi}{6}\right)\cdot\sin\frac{\pi}{6}=\frac{15}{17}\times\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{8}{17}\times\frac{1}{2}=\frac{15\sqrt{3}-8}{34}$.

8. **解**：由已知条件得，$\cos(\alpha+\beta)=-\frac{11}{14}$，

又 α、β 都是锐角，

$\therefore \sin(\alpha+\beta)=\frac{5\sqrt{3}}{14}$.

由 $\cos\alpha=\frac{1}{7}$，得 $\sin\alpha=\frac{4\sqrt{3}}{7}$.

$\therefore \cos\beta=\cos[(\alpha+\beta)-\alpha]$

$=\cos(\alpha+\beta)\cos\alpha+\sin(\alpha+\beta)\sin\alpha$

$=-\frac{11}{14}\times\frac{1}{7}+\frac{5\sqrt{3}}{14}\times\frac{4\sqrt{3}}{7}$

$=\frac{49}{14\times7}=\frac{1}{2}$.

9. **解**：(1) $\because \boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$，$\therefore \sqrt{3}\cos\theta-\sin\theta=0$，得 $\tan\theta=\sqrt{3}$.

又 $\because \theta\in[0,\pi]$，所以 $\theta=\frac{\pi}{3}$.

(2) $\because 2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=(2\cos\theta-\sqrt{3},2\sin\theta+1)$，

所以 $|2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|^2=(2\cos\theta-\sqrt{3})^2+(2\sin\theta+1)^2=8+8\left(\frac{1}{2}\sin\theta-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta\right)=8+8\sin\left(\theta-\frac{\pi}{3}\right)$.

又 $\because \theta\in[0,\pi]$，$\therefore \theta-\frac{\pi}{3}\in\left[-\frac{\pi}{3},\frac{2\pi}{3}\right]$，

$\therefore \sin\left(\theta-\frac{\pi}{3}\right)\in\left[-\frac{\sqrt{3}}{2},1\right]$，

$\therefore |2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|^2$ 的最大值为 16，$\therefore |2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$ 的最大值为 4.

又 $\because |2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|<m$ 恒成立，所以 $m>4$.

2.3　两角和与差的正切函数

基础知识点对点

1. B　$\because \alpha\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$，$\sin\alpha=\frac{3}{5}$，$\therefore \tan\alpha=-\frac{3}{4}$，

$\tan\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\tan\alpha-\tan\frac{\pi}{4}}{1+\tan\alpha\tan\frac{\pi}{4}}=\frac{-\frac{3}{4}-1}{1-\frac{3}{4}}=-7$.

2. B　$\because \tan\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)=\frac{\tan\frac{\pi}{4}+\tan\alpha}{1-\tan\frac{\pi}{4}\tan\alpha}=\frac{1+\tan\alpha}{1-\tan\alpha}=\frac{1}{2+\sqrt{3}}=2-\sqrt{3}$.

3. B　$\frac{1+\tan75^\circ}{1-\tan75^\circ}=\frac{\tan45^\circ+\tan75^\circ}{1-\tan45^\circ\tan75^\circ}=\tan(45^\circ+75^\circ)=\tan120^\circ=-\sqrt{3}$.

4. A　$\because \tan20^\circ+\tan40^\circ+\tan120^\circ=\tan(20^\circ+40^\circ)(1-\tan20^\circ\tan40^\circ)+\tan120^\circ=\tan60^\circ-\tan20^\circ\tan40^\circ\tan60^\circ-\tan60^\circ=-\tan20^\circ\tan40^\circ\tan60^\circ$，

$\therefore$ 原式 $=\frac{-\tan20^\circ\tan40^\circ\tan60^\circ}{-\tan20^\circ\tan40^\circ\tan60^\circ}=1$.

5. B　$\because \tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}=\frac{\frac{4}{3}-\frac{1}{7}}{1+\frac{4}{3}\times\frac{1}{7}}=\frac{25}{25}=1$，

又 $\because \alpha,\beta\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，$\therefore -\frac{\pi}{2}<\alpha-\beta<\frac{\pi}{2}$，$\therefore \alpha-\beta=\frac{\pi}{4}$.

课后拔高提能练

1. A　$\tan\alpha=\tan\left(\alpha+\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\tan\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)-1}{1+\tan\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)}=\frac{\frac{1}{7}-1}{1+\frac{1}{7}}=-\frac{3}{4}$，因为 $\alpha\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$，所以 $\sin\alpha=\frac{3}{5}$，选 A.

2. C　$\tan\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)=\tan\left[(\alpha+\beta)-\left(\beta-\frac{\pi}{4}\right)\right]=\frac{\tan(\alpha+\beta)-\tan\left(\beta-\frac{\pi}{4}\right)}{1+\tan(\alpha+\beta)\tan\left(\beta-\frac{\pi}{4}\right)}=\frac{\frac{3}{5}-\frac{1}{4}}{1+\frac{3}{5}\times\frac{1}{4}}=\frac{7}{23}$.

3. C　由 $\tan\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)=2$ 知，

$\tan\alpha=\tan\left(\alpha+\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{2-1}{1+2}=\frac{1}{3}$.

又 $\frac{1}{2\sin\alpha\cos\alpha+\cos^2\alpha}=\frac{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}{2\sin\alpha\cos\alpha+\cos^2\alpha}=\frac{\tan^2\alpha+1}{2\tan\alpha+1}=\frac{\frac{1}{9}+1}{\frac{2}{3}+1}=\frac{10}{6+9}=\frac{2}{3}$.

4. C　$\because \tan\alpha=\lg 10m=1+\lg m$，$\tan\beta=\lg m$，

又 $\alpha-\beta=\frac{\pi}{4}$，

$\therefore \tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}=\frac{1+\lg m-\lg m}{1+(1+\lg m)\lg m}=1$，

$\therefore \lg m(\lg m+1)=0$，$\therefore \lg m=0$ 或 $\lg m=-1$，

$\therefore m=1$ 或 $\frac{1}{10}$.

5. $\frac{7}{5}$

解析：解法一：$\because \tan\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\tan\alpha-1}{1+\tan\alpha}=\frac{1}{6}$，

即 $6\tan\alpha-6=1+\tan\alpha$，$\therefore \tan\alpha=\frac{7}{5}$.

解法二：$\tan\alpha=\tan\left[\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)+\frac{\pi}{4}\right]=\frac{\tan\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)+\tan\frac{\pi}{4}}{1-\tan\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)\tan\frac{\pi}{4}}=\frac{\frac{1}{6}+1}{1-\frac{1}{6}}=\frac{7}{5}$.

6. $\frac{3}{2}$

解析：$\tan\left(\alpha-\frac{5\pi}{4}\right)=\frac{\tan\alpha-\tan\frac{5\pi}{4}}{1+\tan\alpha\cdot\tan\frac{5\pi}{4}}=\frac{\tan\alpha-1}{1+\tan\alpha}=\frac{1}{5}$，

解方程得 $\tan\alpha=\frac{3}{2}$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

7. $\frac{1}{7}$

解析： $\tan\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)=\tan\left[\left(\alpha-\frac{\beta}{2}\right)+\left(\beta-\frac{\alpha}{2}\right)\right]=\frac{\frac{1}{2}-\frac{1}{3}}{1+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}}=\frac{1}{7}$.

8. **解：** $\because\sqrt{3}\tan A+\sqrt{3}\tan B=\tan A\tan B-1$，

$\therefore\frac{\tan A+\tan B}{1-\tan A\tan B}=-\frac{\sqrt{3}}{3}$.

$\therefore\tan(A+B)=-\frac{\sqrt{3}}{3}$.

$\because 0<A+B<\pi$，$\therefore A+B=\frac{5\pi}{6}$，$\therefore C=\frac{\pi}{6}$.

又 $\because\tan B+\tan C+\sqrt{3}\tan B\tan C=\sqrt{3}$，

$\therefore\tan B+\frac{\sqrt{3}}{3}+\sqrt{3}\times\frac{\sqrt{3}}{3}\tan B=\sqrt{3}$.

$\therefore\tan B=\frac{\sqrt{3}}{3}$，$\therefore B=\frac{\pi}{6}$，从而 $A=\frac{2\pi}{3}$.

$\therefore\triangle ABC$ 是等腰钝角三角形.

9. **解：**(1) $\because\tan\alpha,\tan\beta$ 是方程 $mx^2-(2m-3)x+m-2=0$ 的两实根，且 $\tan\alpha\in\mathbf{R}$，$\tan\beta\in\mathbf{R}$，

$\therefore$ 只需 $\begin{cases}m\neq0,\\ \Delta\geqslant0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}m\neq0,\\ (2m-3)^2-4m(m-2)\geqslant0.\end{cases}$

得 $m\leqslant\frac{9}{4}$ 且 $m\neq0$. $\therefore m$ 的取值范围是 $(-\infty,0)\cup\left(0,\frac{9}{4}\right]$.

(2) $\because\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$，

且 $\tan\alpha\tan\beta=\frac{m-2}{m}$，$\tan\alpha+\tan\beta=\frac{2m-3}{m}$，

$\therefore\tan(\alpha+\beta)=\frac{2m-3}{2}=m-\frac{3}{2}$.

$\because m\leqslant\frac{9}{4}$ 且 $m\neq0$，$\therefore\tan(\alpha+\beta)\leqslant\frac{3}{4}$，且 $\tan(\alpha+\beta)\neq-\frac{3}{2}$.

§3 二倍角的三角函数

基础知识点对点

1. A $\because\sin\alpha-\cos\alpha=\frac{4}{3}$，$\therefore\sin^2\alpha-2\sin\alpha\cos\alpha+\cos^2\alpha=\frac{16}{9}$，$\therefore\sin2\alpha=1-\frac{16}{9}=-\frac{7}{9}$.

2. C 由已知得此函数的定义域为 $\left\{x\middle|x\neq k\pi+\frac{\pi}{2},k\in\mathbf{Z}\right\}$. $f(x)=\frac{\tan x}{1+\tan^2x}=\frac{\frac{\sin x}{\cos x}}{1+\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)^2}=\sin x\cos x=\frac{1}{2}\sin2x$，所以 $f(x)$ 的最小正周期 $T=\frac{2\pi}{2}=\pi$，故选 C.

3. D 解法一：$\because\tan\theta+\frac{1}{\tan\theta}=4$，$\therefore\frac{\sin\theta}{\cos\theta}+\frac{\cos\theta}{\sin\theta}=4$，

$\therefore\frac{\sin^2\theta+\cos^2\theta}{\sin\theta\cos\theta}=4$，$\therefore2\sin2\theta=1$，$\therefore\sin2\theta=\frac{1}{2}$.

解法二：$\because\tan\theta+\frac{1}{\tan\theta}=4$，$\therefore4\tan\theta=1+\tan^2\theta$.

$\therefore\sin2\theta=\frac{2\sin\theta\cos\theta}{\sin^2\theta+\cos^2\theta}=\frac{2\tan\theta}{\tan^2\theta+1}=\frac{2\tan\theta}{4\tan\theta}=\frac{1}{2}$.

4. D $f(x)=\frac{1-\cos\omega x}{2}+\frac{\sin\omega x}{2}-\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\left(\omega x-\frac{\pi}{4}\right)$，

$f(x)=0\Rightarrow\sin\left(\omega x-\frac{\pi}{4}\right)=0$，所以 $x=\frac{k\pi+\frac{\pi}{4}}{\omega}\notin(\pi,2\pi)$（$k\in\mathbf{Z}$），因此 $\omega\notin\left(\frac{1}{8},\frac{1}{4}\right)\cup\left(\frac{5}{8},\frac{5}{4}\right)\cup\left(\frac{9}{8},\frac{9}{4}\right)\cup\cdots=\left(\frac{1}{8},\frac{1}{4}\right)\cup\left(\frac{5}{8},+\infty\right)\Rightarrow\omega\in\left(0,\frac{1}{8}\right]\cup\left[\frac{1}{4},\frac{5}{8}\right]$，选 D.

5. **解：**(1) $\cos20^\circ\cos40^\circ\cos60^\circ\cos80^\circ$

$=\frac{1}{2\sin20^\circ}\cdot2\sin20^\circ\cos20^\circ\cos40^\circ\cos60^\circ\cos80^\circ$

$=\frac{1}{2\sin20^\circ}\cdot\sin40^\circ\cos40^\circ\cos60^\circ\cos80^\circ$

$=\frac{1}{4\sin20^\circ}\cdot\sin80^\circ\cos60^\circ\cos80^\circ$

$=\frac{1}{8\sin20^\circ}\cdot\frac{1}{2}\sin160^\circ$

$=\frac{1}{16}$.

(2) $\sin^220^\circ+\cos^250^\circ+\sin30^\circ\sin70^\circ=\frac{1-\cos40^\circ}{2}+\frac{1+\cos100^\circ}{2}+\frac{1}{2}\sin70^\circ=1-\frac{1}{2}(\cos40^\circ-\cos100^\circ)+\frac{1}{2}\sin70^\circ=1-\frac{1}{2}[\cos(70^\circ-30^\circ)-\cos(70^\circ+30^\circ)]+\frac{1}{2}\sin70^\circ=1-\frac{1}{2}\cdot2\sin70^\circ\sin30^\circ+\frac{1}{2}\sin70^\circ=1$.

课后拔高提能练

1. B $\frac{2\sin2\alpha}{1+\cos2\alpha}\cdot\frac{\cos^2\alpha}{\cos2\alpha}=\frac{2\sin2\alpha}{2\cos^2\alpha}\cdot\frac{\cos^2\alpha}{\cos2\alpha}=\tan2\alpha$.

2. B 因为 $f(x)=1-2\sin^2x+6\sin x=-2\left(\sin x-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{11}{2}$，而 $\sin x\in[-1,1]$，所以当 $\sin x=1$ 时，取最大值 5，选 B.

3. D $\cos2\theta=\frac{\cos^2\theta-\sin^2\theta}{\cos^2\theta+\sin^2\theta}=\frac{1-\tan^2\theta}{1+\tan^2\theta}=\frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^2}{1+\left(\frac{1}{3}\right)^2}=\frac{4}{5}$.

4. A $\because\sin\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)=-\frac{2}{5}$，

$\therefore\cos\left(\frac{2\,015\pi}{3}-2\alpha\right)=\cos\left(670\pi+\frac{5\pi}{3}-2\alpha\right)$

$=\cos\left[\pi+\left(\frac{2\pi}{3}-2\alpha\right)\right]=-\cos\left(\frac{2\pi}{3}-2\alpha\right)$

$=-\cos2\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)=-\left[1-2\sin^2\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)\right]$

$=-1+2\times\left(-\frac{2}{5}\right)^2=-1+\frac{8}{25}=-\frac{17}{25}$.

5. $\frac{7}{9}$

解析： $\cos2\alpha=1-2\sin^2\alpha=1-\frac{2}{9}=\frac{7}{9}$.

6. $-\frac{1}{2}$

解析： 由 $|\boldsymbol{a}|^2=\cos^2\alpha+\left(\frac{1}{2}\right)^2=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2$，得 $\cos^2\alpha=\frac{1}{4}$.

$\therefore\cos2\alpha=2\cos^2\alpha-1=\frac{1}{2}-1=-\frac{1}{2}$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

7. π

解析： $f(x)=\sin 2x\cos\frac{\pi}{4}-\cos 2x\sin\frac{\pi}{4}-\sqrt{2}(1-\cos 2x)=\frac{\sqrt{2}}{2}\sin 2x+\frac{\sqrt{2}}{2}\cos 2x-\sqrt{2}=\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)-\sqrt{2}$. $\therefore T=\pi$.

8. **解：**(1)由 $\sin x\neq 0$ 得 $x\neq k\pi(k\in\mathbf{Z})$，

故 $f(x)$的定义域为$\{x\in\mathbf{R}\mid x\neq k\pi,k\in\mathbf{Z}\}$.

因为 $f(x)=\frac{(\sin x-\cos x)\sin 2x}{\sin x}=2\cos x(\sin x-\cos x)=\sin 2x-\cos 2x-1=\sqrt{2}\sin\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)-1$，

所以 $f(x)$的最小正周期 $T=\frac{2\pi}{2}=\pi$.

(2)由 $2k\pi-\frac{\pi}{2}\leqslant 2x-\frac{\pi}{4}\leqslant 2k\pi+\frac{\pi}{2}$，$x\neq k\pi(k\in\mathbf{Z})$，

得 $k\pi-\frac{\pi}{8}\leqslant x\leqslant k\pi+\frac{3\pi}{8}$，$x\neq k\pi(k\in\mathbf{Z})$.

所以 $f(x)$的单调递增区间为$\left[k\pi-\frac{\pi}{8},k\pi\right)$，

$\left(k\pi,k\pi+\frac{3\pi}{8}\right](k\in\mathbf{Z})$.

9. **解：**(1)$f(x)=\sqrt{3}\cos\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)-2\sin x\cos x=\sqrt{3}\left(\frac{1}{2}\cos 2x+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x\right)-\sin 2x=\frac{\sqrt{3}}{2}\cos 2x+\frac{1}{2}\sin 2x=\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$. $\therefore f(x)$的最小正周期 $T=\frac{2\pi}{2}=\pi$.

(2)证明：$\because -\frac{\pi}{4}\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{4}$，$\therefore -\frac{\pi}{6}\leqslant 2x+\frac{\pi}{3}\leqslant\frac{5\pi}{6}$.

$\therefore\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)\geqslant\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)=-\frac{1}{2}$.

$\therefore$当 $x\in\left[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right]$时，$f(x)\geqslant-\frac{1}{2}$.

三角向量真题体验

1. C　$f(x)=\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$的最小正周期 $T=\frac{2\pi}{2}=\pi$.

2. A　因为 $f(x)=\cos x-\sin x=\sqrt{2}\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$，

所以由 $2k\pi\leqslant x+\frac{\pi}{4}\leqslant\pi+2k\pi(k\in\mathbf{Z})$，

得 $-\frac{\pi}{4}+2k\pi\leqslant x\leqslant\frac{3\pi}{4}+2k\pi(k\in\mathbf{Z})$，

由$[-a,a]\subseteq\left[-\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4}\right]$，$\therefore -a<a$，$-a\geqslant-\frac{\pi}{4}$，$a\leqslant\frac{3\pi}{4}$，$\therefore 0<a\leqslant\frac{\pi}{4}$，$\therefore a$ 的最大值为$\frac{\pi}{4}$，故选 A.

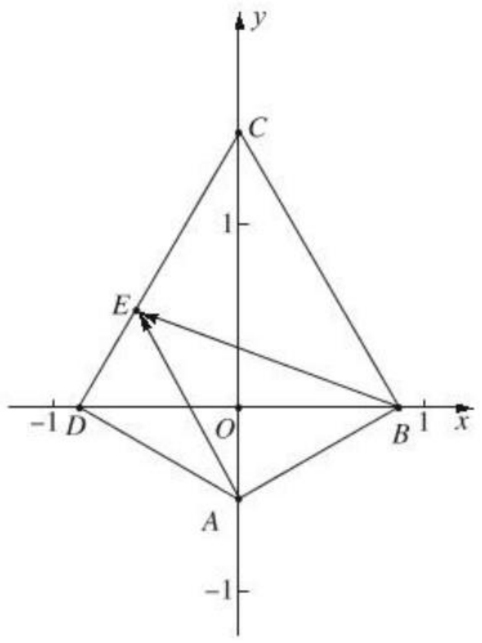
3. C　$\because\boldsymbol{a}=(4,3)$，设 $\boldsymbol{b}=(x,y)$，则 $2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(8+x,6+y)$，又 $2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(3,18)$，$\therefore\begin{cases}8+x=3,\\6+y=18,\end{cases}\therefore\begin{cases}x=-5,\\y=12.\end{cases}$

$\therefore\boldsymbol{b}=(-5,12)$. 设 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 的夹角为 θ，则 $\cos\theta=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}=\frac{4\times(-5)+3\times 12}{\sqrt{3^2+4^2}\cdot\sqrt{(-5)^2+12^2}}=\frac{16}{65}$.

4. A　由题意，得 $\cos\angle ABC=\frac{\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{BA}||\overrightarrow{BC}|}=\frac{\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{1}{2}}{1\times 1}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，所以 $\angle ABC=30^\circ$，故选 A.

5. A　$\because\boldsymbol{a}=(2,3)$，$\boldsymbol{b}=(\cos\theta,\sin\theta)$，$\boldsymbol{a}\parallel\boldsymbol{b}$，$\therefore 2\sin\theta=3\cos\theta$，$\therefore\tan\theta=\frac{3}{2}$.

6. A　建立如图所示的平面直角坐标系，



则 $A\left(0,-\frac{1}{2}\right)$，$B\left(\frac{\sqrt{3}}{2},0\right)$，$C\left(0,\frac{3}{2}\right)$，$D\left(-\frac{\sqrt{3}}{2},0\right)$，点 E 在 CD 上，则 $\overrightarrow{DE}=\lambda\overrightarrow{DC}(0\leqslant\lambda\leqslant 1)$，设 $E(x,y)$，则 $\left(x+\frac{\sqrt{3}}{2},y\right)=\lambda\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{3}{2}\right)$，即 $\begin{cases}x+\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}\lambda,\\y=\frac{3}{2}\lambda,\end{cases}$ 据此可得 $E\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\lambda-\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{3}{2}\lambda\right)$，且 $\overrightarrow{AE}=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\lambda-\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{3}{2}\lambda+\frac{1}{2}\right)$，$\overrightarrow{BE}=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\lambda-\sqrt{3},\frac{3}{2}\lambda\right)$，由数量积的坐标运算法则可得 $\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{BE}=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\lambda-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\lambda-\sqrt{3}\right)+\frac{3}{2}\lambda\times\left(\frac{3}{2}\lambda+\frac{1}{2}\right)$，整理可得 $\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{BE}=\frac{3}{4}(4\lambda^2-2\lambda+2)(0\leqslant\lambda\leqslant 1)$，结合二次函数的性质可知，当 $\lambda=\frac{1}{4}$ 时，$\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{BE}$取得最小值$\frac{21}{16}$. 故选 A.

7. 3

解析：$\because 0\leqslant x\leqslant\pi$，$\therefore\frac{\pi}{6}\leqslant 3x+\frac{\pi}{6}\leqslant\frac{19\pi}{6}$，由题可知 $3x+\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}$，$3x+\frac{\pi}{6}=\frac{3\pi}{2}$或 $3x+\frac{\pi}{6}=\frac{5\pi}{2}$，解得 $x=\frac{\pi}{9}$，$\frac{4\pi}{9}$或$\frac{7\pi}{9}$，故有 3 个零点.

8. $-\frac{\pi}{6}$

解析：由题意可得 $\sin\left(\frac{2}{3}\pi+\varphi\right)=\pm 1$，所以 $\frac{2}{3}\pi+\varphi=\frac{\pi}{2}+k\pi$，解得 $\varphi=-\frac{\pi}{6}+k\pi(k\in\mathbf{Z})$，因为 $-\frac{\pi}{2}<\varphi<\frac{\pi}{2}$，所以 $k=0$ 时，$\varphi=-\frac{\pi}{6}$.

9. $\frac{\pi}{3}$

解析：因为 $y=\sin x-\sqrt{3}\cos x=2\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)$，所以函数 $y=\sin x-\sqrt{3}\cos x$ 的图像可由函数 $y=2\sin x$ 的图像至少向右平移$\frac{\pi}{3}$个单位长度得到.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

10. **解**：(1)∵ $\tan2\theta=-2\sqrt{2}$，∴ $\frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}=-2\sqrt{2}$，

∴ $\tan\theta=\sqrt{2}$ 或 $\tan\theta=-\frac{\sqrt{2}}{2}$.

∵ $\pi<2\theta<2\pi$，∴ $\frac{\pi}{2}<\theta<\pi$，

∴ $\tan\theta<0$，∴ $\tan\theta=-\frac{\sqrt{2}}{2}$.

(2) $\frac{2\cos^2\frac{\theta}{2}-1-\sin\theta}{\sqrt{2}\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)}=\frac{\cos\theta-\sin\theta}{\sin\theta+\cos\theta}=\frac{1-\tan\theta}{1+\tan\theta}=\frac{1-\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}=\frac{2+\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}=3+2\sqrt{2}$.

11. **解**：(1)∵ $\boldsymbol{a}=(\cos x,\sin x)$，$\boldsymbol{b}=(3,-\sqrt{3})$，$\boldsymbol{a}\parallel\boldsymbol{b}$，

∴ $3\sin x=-\sqrt{3}\cos x$. 若 $\cos x=0$，则 $\sin x=0$，这与 $\sin^2x+\cos^2x=1$ 矛盾，∴ $\tan x=-\frac{\sqrt{3}}{3}$. 又∵ $x\in[0,\pi]$，∴ $x=\frac{5\pi}{6}$.

(2) $f(x)=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=3\cos x-\sqrt{3}\sin x=2\sqrt{3}\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$.

∵ $x\in[0,\pi]$，∴ $x+\frac{\pi}{6}\in\left[\frac{\pi}{6},\frac{7\pi}{6}\right]$，

∴ $-1\leqslant\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)\leqslant\frac{\sqrt{3}}{2}$.

∴ 当 $x+\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{6}$，即 $x=0$ 时，$f(x)$ 取到最大值 3；当 $x+\frac{\pi}{6}=\pi$，即 $x=\frac{5\pi}{6}$ 时，$f(x)$ 取到最小值 $-2\sqrt{3}$.

12. **解**：(1)由角 α 的终边过点 $P\left(-\frac{3}{5},-\frac{4}{5}\right)$，得 $\sin\alpha=-\frac{4}{5}$，所以 $\sin(\alpha+\pi)=-\sin\alpha=\frac{4}{5}$.

(2)由角 α 的终边过点 $P\left(-\frac{3}{5},-\frac{4}{5}\right)$，得 $\cos\alpha=-\frac{3}{5}$，由 $\sin(\alpha+\beta)=\frac{5}{13}$ 得 $\cos(\alpha+\beta)=\pm\frac{12}{13}$.

由 $\beta=(\alpha+\beta)-\alpha$ 得 $\cos\beta=\cos(\alpha+\beta)\cos\alpha+\sin(\alpha+\beta)\sin\alpha$，

所以 $\cos\beta=-\frac{56}{65}$ 或 $\cos\beta=-\frac{16}{65}$.

13. **解**：(1)因为 $\tan\alpha=\frac{4}{3}$，$\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$，所以 $\sin\alpha=\frac{4}{3}\cos\alpha$.

因为 $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$，所以 $\cos^2\alpha=\frac{9}{25}$，

因此 $\cos2\alpha=2\cos^2\alpha-1=-\frac{7}{25}$.

(2)因为 α,β 为锐角，所以 $\alpha+\beta\in(0,\pi)$.

又因为 $\cos(\alpha+\beta)=-\frac{\sqrt{5}}{5}$，

所以 $\sin(\alpha+\beta)=\sqrt{1-\cos^2(\alpha+\beta)}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$，

因此 $\tan(\alpha+\beta)=-2$.

因为 $\tan\alpha=\frac{4}{3}$，所以 $\tan2\alpha=\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}=-\frac{24}{7}$，

因此 $\tan(\alpha-\beta)=\tan[2\alpha-(\alpha+\beta)]=\frac{\tan2\alpha-\tan(\alpha+\beta)}{1+\tan2\alpha\tan(\alpha+\beta)}=-\frac{2}{11}$.

第二部分　阶段检测

阶段测试一

1. C　∵ $\tan\alpha>0$，∴ α 是第一或第三象限的角，∴ $\sin\alpha$ 与 $\cos\alpha$ 同号，∴ $\sin\alpha\cos\alpha>0$.

2. D　$S=\frac{1}{2}\alpha r^2=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\pi\cdot2^2=\frac{4}{3}\pi$.

3. B　由题意得 $\cos\theta=\frac{4}{5}$，∴ $\cos(\pi-\theta)=-\cos\theta=-\frac{4}{5}$.

4. D　由题意知，$y=\cos(3x+\varphi)$ 为奇函数，∴ $f(0)=\cos\varphi=0$，∴ $\varphi=k\pi+\frac{\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$.

5. B　在同一直角坐标内画出 $y=\sin x$ 与 $y=\tan x$ 的图像，∵ 当 $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 时，$\tan x>\sin x$，∴ 在 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 内，$y=\sin x$ 与 $y=\tan x$ 无交点，又 $y=\sin x$ 与 $y=\tan x$ 均为奇函数，∴ 由函数图像的对称性可知，当 $x\in\left(-\frac{\pi}{2},0\right)$ 时，$y=\sin x$ 与 $y=\tan x$ 无交点，又 $\sin0=\tan0$，∴ 方程 $\sin x=\tan x$ 在 $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ 内只有一个解.

6. D　∵ $f(x)$ 的最小正周期为 π，

∴ $\frac{2\pi}{\omega}=\pi$，∴ $\omega=2$.

∴ $f(x)=\sin(2x+\varphi)$ 向右平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位后得到 $y=\sin\left[2\left(x-\frac{\pi}{3}\right)+\varphi\right]=\sin\left(2x+\varphi-\frac{2}{3}\pi\right)$，

又∵ 它为奇函数，

∴ $\varphi-\frac{2}{3}\pi=k\pi,k\in\mathbf{Z}$，

∴ $\varphi=k\pi+\frac{2}{3}\pi,k\in\mathbf{Z}$.

由 $|\varphi|<\frac{\pi}{2}$，

令 $k=-1$ 得 $\varphi=-\frac{\pi}{3}$，

∴ $f(x)=\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)$，它的对称轴是

$2x-\frac{\pi}{3}=k\pi+\frac{\pi}{2},k\in\mathbf{Z}$，

∴ $x=\frac{k\pi}{2}+\frac{5}{12}\pi,k\in\mathbf{Z}$，

令 $k=0$，得 $x=\frac{5}{12}\pi$.

7. A　由图像知 $A=10$，$\frac{1}{2}T=\frac{4}{300}-\frac{1}{300}=\frac{1}{100}$，

∴ $T=\frac{1}{50}$，∴ $\omega=\frac{2\pi}{T}=100\pi$.

∴ $I=10\sin(100\pi t+\varphi)$.

又∵ $\left(\frac{1}{300},10\right)$ 在图像上，∴ $100\pi\times\frac{1}{300}+\varphi=\frac{\pi}{2}+2k\pi$ $(k\in\mathbf{Z})$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

又∵$0<\varphi<\frac{\pi}{2}$，∴$\varphi=\frac{\pi}{6}$，

∴$I=10\sin\left(100\pi t+\frac{\pi}{6}\right)$. 当 $t=\frac{1}{100}$时，

$I=10\sin\left(\pi+\frac{\pi}{6}\right)=-10\sin\frac{\pi}{6}=-5$.

8. A　∵$0\leqslant x\leqslant 9$，

∴$0\leqslant\frac{\pi}{6}x\leqslant\frac{3}{2}\pi$，

∴$-\frac{\pi}{3}\leqslant\frac{\pi}{6}x-\frac{\pi}{3}\leqslant\frac{7}{6}\pi$，

∴当$\frac{\pi}{6}x-\frac{\pi}{3}=-\frac{\pi}{3}$时 $y_{\min}=2\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)=-\sqrt{3}$；

当$\frac{\pi}{6}x-\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{2}$时，$y_{\max}=2\sin\frac{\pi}{2}=2$.

∴$y_{\max}+y_{\min}=2-\sqrt{3}$.

9. B　依题意得 $g(x)=f\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\cos 2\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\cos\left(2x-\frac{\pi}{2}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{2}-2x\right)=\sin 2x$，

当 $x\in\left(0,\frac{\pi}{4}\right)$时，$2x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，

∴$g(x)$在$\left(0,\frac{\pi}{4}\right)$上单调递增，且为奇函数.

10. A　∵$f(x)=\sin\left(\omega x+\frac{\pi}{4}\right)$的单调减区间为 $\left[\frac{2k\pi+\frac{\pi}{4}}{\omega},\frac{2k\pi+\frac{5\pi}{4}}{\omega}\right](k\in\mathbf{Z})$，由题意得 $\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)\subseteq\left[\frac{\pi}{4\omega},\frac{5\pi}{4\omega}\right]$且 $\omega>0$，∴$\begin{cases}\frac{5\pi}{4\omega}\geqslant\pi,\\ \frac{\pi}{4\omega}\leqslant\frac{\pi}{2},\end{cases}$ ∴$\frac{1}{2}\leqslant\omega\leqslant\frac{5}{4}$，

∴选 A.

11. 四

解析：∵点 $M(\tan\alpha,\cos\alpha)$在第二象限内，∴$\tan\alpha<0$，$\cos\alpha>0$，∴角 α 在第四象限.

12. ①②④③

解析：$y=|\tan x|$的图像是将 $y=\tan x$ 的图像在 x 轴下方的部分翻折到 x 轴上方去(上方部分保持不变)而得到，而 $y=\tan|x|$是偶函数，其图像关于 y 轴对称.

13. $\left[-\frac{1}{2},1\right]$

解析：若$-\frac{\pi}{3}\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2}$，则$-\frac{\pi}{6}\leqslant x+\frac{\pi}{6}\leqslant\frac{2\pi}{3}$，此时

$-\frac{1}{2}\leqslant\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)\leqslant 1$，

即 $f(x)$的值域是$\left[-\frac{1}{2},1\right]$.

14. a

解析：∵$\cos\left(\frac{\pi}{6}-\alpha\right)=\cos\left(\frac{2\pi}{3}-\alpha-\frac{\pi}{2}\right)=\cos\left[\frac{\pi}{2}-\left(\frac{2\pi}{3}-\alpha\right)\right]=\sin\left(\frac{2\pi}{3}-\alpha\right)$，

∴$\sin\left(\frac{2\pi}{3}-\alpha\right)=a$.

15. ①③④

解析：①显然正确；$y=\sin x$ 在区间$\left[2k\pi,2k\pi+\frac{\pi}{2}\right](k\in\mathbf{Z})$上单调递增，不能说成在第一象限是增函数，②不正确；由 $\sin A=\sin B$ 得 $A=B$ 或 $A+B=\pi$，又 A、B 为三角形的内角，∴$A=B$，③正确；由 $\alpha+\beta>\frac{\pi}{2}$，知 $\alpha>\frac{\pi}{2}-\beta$，又 α、$\beta\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，∴$\frac{\pi}{2}>\alpha>\frac{\pi}{2}-\beta>0$.

又 $y=\cos x$ 在$\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$上递减，

∴$\cos\alpha<\cos\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right)=\sin\beta$，即 $\cos\alpha<\sin\beta$，④正确.

16. **解**：由题意得 $P(a,-b)$，$Q(b,a)$，记 $r=\sqrt{a^2+b^2}$，

∴$\sin\alpha=-\frac{b}{r}$，$\cos\alpha=\frac{a}{r}$，$\tan\alpha=-\frac{b}{a}$，$\sin\beta=\frac{a}{r}$，

$\cos\beta=\frac{b}{r}$，$\tan\beta=\frac{a}{b}$.

∴$\frac{\sin\alpha}{\cos\beta}+\frac{\tan\alpha}{\tan\beta}+\frac{1}{\cos\alpha\sin\beta}$

$=\frac{-\frac{b}{r}}{\frac{b}{r}}+\frac{-\frac{b}{a}}{\frac{a}{b}}+\frac{1}{\frac{a}{r}\cdot\frac{a}{r}}$

$=-1-\frac{b^2}{a^2}+\frac{r^2}{a^2}$

$=\frac{-a^2-b^2}{a^2}+\frac{a^2+b^2}{a^2}$

$=0$.

17. **解**：$OP=2$，∴$\sin\alpha=\frac{\sqrt{3}}{2}$，$\cos\alpha=\frac{1}{2}$，$\tan\alpha=\sqrt{3}$.

(1)原式$=\sin\alpha-\cos\alpha=\frac{\sqrt{3}-1}{2}$.

(2)∵$2\cos x-\tan\alpha>0$，

∴$2\cos x>\sqrt{3}$，

∴$\cos x>\frac{\sqrt{3}}{2}$，

∴$2k\pi-\frac{\pi}{6}<x<2k\pi+\frac{\pi}{6}$，$k\in\mathbf{Z}$，

∴$S=\left\{x\,\middle|\,2k\pi-\frac{\pi}{6}<x<2k\pi+\frac{\pi}{6},k\in\mathbf{Z}\right\}$.

18. **解**：(1)∵函数 $f(x)$的最大值为 3，

∴$A+1=3$，即 $A=2$，

∵函数图像的相邻两条对称轴之间的距离为$\frac{\pi}{2}$，

∴最小正周期 $T=\pi$，∴$\omega=2$，

故函数 $f(x)$的解析式为 $y=2\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)+1$.

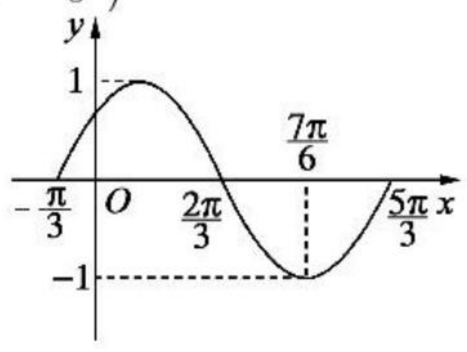
(2)∵$f\left(\frac{\alpha}{2}\right)=2\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{6}\right)+1=2$，

即 $\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{2}$，

∵$0<\alpha<\frac{\pi}{2}$，∴$-\frac{\pi}{6}<\alpha-\frac{\pi}{6}<\frac{\pi}{3}$，

∴$\alpha-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{6}$，故 $\alpha=\frac{\pi}{3}$.

19. **解**：(1)由图像易知函数 $f(x)$的周期为 $T=4\times\left(\frac{7\pi}{6}-\frac{2\pi}{3}\right)=2\pi$，$A=1$，所以 $\omega=1$.

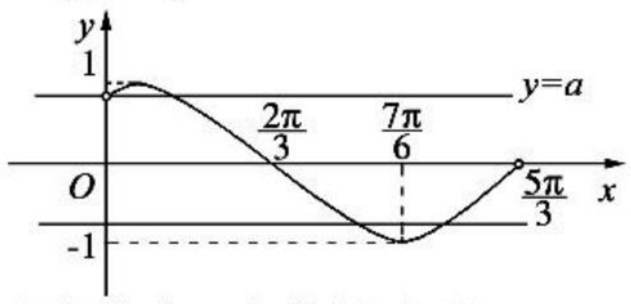


由图像知 $f(x)$过点$\left(-\frac{\pi}{3},0\right)$，则 $\sin\left(-\frac{\pi}{3}+\varphi\right)=$

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

0，$\therefore -\frac{\pi}{3}+\varphi=k\pi, k\in\mathbf{Z}$. $\therefore \varphi=k\pi+\frac{\pi}{3}, k\in\mathbf{Z}$，又$\because \varphi\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，$\therefore\varphi=\frac{\pi}{3}$，$\therefore f(x)=\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$.

(2)方程 $f(x)=a$ 在 $\left(0,\frac{5\pi}{3}\right)$ 上有两个不同的实根等价于 $y=f(x)$ 与 $y=a$ 的图像在 $\left(0,\frac{5\pi}{3}\right)$ 上有两个交点，在图中作 $y=a$ 的图像，如图为函数 $f(x)=\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$ 在 $\left(0,\frac{5\pi}{3}\right)$ 上的图像，当 $x=0$ 时，$f(x)=\frac{\sqrt{3}}{2}$，当 $x=\frac{5\pi}{3}$ 时，$f(x)=0$，由图中可以看出有两个交点时，$a\in\left(\frac{\sqrt{3}}{2},1\right)\cup(-1,0)$.



20. **解**：(1)根据表中已知数据，解得 $A=5$，$\omega=2$，$\varphi=-\frac{\pi}{6}$. 数据补全如下表：

$\omega x+\varphi$	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
x	$\frac{\pi}{12}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{12}$	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{13}{12}\pi$
$A\sin(\omega x+\varphi)$	0	5	0	-5	0

且函数表达式为 $f(x)=5\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)$.

(2)由(1)知 $f(x)=5\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)$，

得 $g(x)=5\sin\left(2x+2\theta-\frac{\pi}{6}\right)$，

因为 $y=\sin x$ 的对称中心为 $(k\pi,0)$，$k\in\mathbf{Z}$.

令 $2x+2\theta-\frac{\pi}{6}=k\pi$，解得 $x=\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{12}-\theta, k\in\mathbf{Z}$.

由于函数 $y=g(x)$ 的图像关于点 $\left(\frac{5\pi}{12},0\right)$ 成中心对称，

令 $\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{12}-\theta=\frac{5\pi}{12}, k\in\mathbf{Z}$，

解得 $\theta=\frac{k\pi}{2}-\frac{\pi}{3}, k\in\mathbf{Z}$.

由 $\theta>0$ 可知，当 $k=1$ 时，θ 取得最小值 $\frac{\pi}{6}$.

21. **解**：(1)由 $2k\pi-\frac{\pi}{2}\leqslant 2x+\frac{\pi}{6}\leqslant 2k\pi+\frac{\pi}{2}, k\in\mathbf{Z}$，得 $k\pi-\frac{\pi}{3}\leqslant x\leqslant k\pi+\frac{\pi}{6}, k\in\mathbf{Z}$，所以 $f(x)$ 的单调递增区间为 $\left[k\pi-\frac{\pi}{3},k\pi+\frac{\pi}{6}\right], k\in\mathbf{Z}$.

(2)当 $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 时，$2x+\frac{\pi}{6}\in\left[\frac{\pi}{6},\frac{7\pi}{6}\right]$，故当 $2x+\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}$，即 $x=\frac{\pi}{6}$ 时，$f(x)$ 有最大值 $a+3=4$，所以 $a=1$.

(3)当 $\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)=1$ 时，$f(x)$ 取得最大值，此时 $2x+\frac{\pi}{6}=2k\pi+\frac{\pi}{2}, k\in\mathbf{Z}$，即 $x=k\pi+\frac{\pi}{6}, k\in\mathbf{Z}$，此时 x 的取值集合为 $\left\{x\,\middle|\, x=k\pi+\frac{\pi}{6}, k\in\mathbf{Z}\right\}$.

阶段测试二

1. B　设 $\boldsymbol{c}=x\boldsymbol{a}+y\boldsymbol{b}$，
$\therefore(3,-2)=x(-1,2)+y(1,-1)=(-x+y,2x-y)$，
$\therefore\begin{cases}-x+y=3,\\2x-y=-2,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x=1,\\y=4,\end{cases}$
$\therefore\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+4\boldsymbol{b}$.

2. B　$\because\overrightarrow{AB}=(2,2)$，$\overrightarrow{CD}=(-1,3)$，$|\overrightarrow{CD}|=\sqrt{10}$，$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}=2\times(-1)+2\times3=4$，$\therefore$ 向量 $\overrightarrow{AB}$ 在向量 $\overrightarrow{CD}$ 上的投影为 $\frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}}{|\overrightarrow{CD}|}=\frac{4}{\sqrt{10}}=\frac{2\sqrt{10}}{5}$.

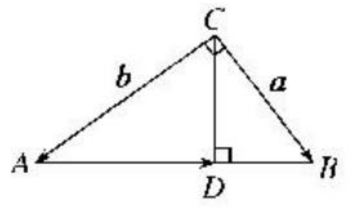
3. A　$\lambda\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\lambda(1,-3)+(4,-2)=(4+\lambda,-3\lambda-2)$.
$\because(\lambda\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\perp\boldsymbol{a}$，
$\therefore(\lambda\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{a}=0$，即 $(4+\lambda)\times1+(3\lambda+2)\times(+3)=0$，
$\therefore10\lambda+10=0$，$\therefore\lambda=-1$.

4. A　$\because\boldsymbol{a}=(2,1)$，$\therefore|\boldsymbol{a}|=\sqrt{5}$. 又 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=10$，$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=5\sqrt{2}$，$\therefore|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|^2=50$.
即 $|\boldsymbol{a}|^2+|\boldsymbol{b}|^2+2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=50$.
即 $5+|\boldsymbol{b}|^2+20=50$，$\therefore|\boldsymbol{b}|^2=25$，$|\boldsymbol{b}|=5$.

5. A　$\because2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=(5,2-m)$，$\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b}=(6,1+3m)$，
又 $\because2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b}$ 共线，$\therefore5\times(1+3m)=6\times(2-m)$，得 $m=\frac{1}{3}$.

6. A　$\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AC}$
$=\overrightarrow{OA}+\frac{3}{2}\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OA}+\frac{3}{2}(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA})$
$=\frac{3}{2}\overrightarrow{OB}-\frac{1}{2}\overrightarrow{OA}=\frac{3}{2}\boldsymbol{b}-\frac{1}{2}\boldsymbol{a}$.

7. D　如图，$\because\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$，
$\therefore\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$，$\therefore\angle ACB=90^\circ$，$\therefore AB=\sqrt{AC^2+BC^2}=\sqrt{5}$，又 $CD\perp AB$，
$\therefore AC^2=AD\cdot AB$，$\therefore AD=\frac{4\sqrt{5}}{5}$，
$\therefore\overrightarrow{AD}=\frac{4}{5}\overrightarrow{AB}=\frac{4}{5}(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})=\frac{4}{5}\boldsymbol{a}-\frac{4}{5}\boldsymbol{b}$.



8. D　$\overrightarrow{BD}\cdot\overrightarrow{CD}=(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC})\cdot\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{BA}^2+\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BA}=a^2+a\cdot a\cdot\cos60^\circ=\frac{3}{2}a^2$.

9. C　$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{BA}=(-2,-1)$，
$\because\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BC}=(-2)\times2+(-1)\times(-4)=0$，
$\therefore\overrightarrow{AC}\perp\overrightarrow{BC}$. 又 $\because|\overrightarrow{AC}|=\sqrt{(-2)^2+(-1)^2}=\sqrt{5}$，
$|\overrightarrow{BC}|=\sqrt{2^2+(-4)^2}=2\sqrt{5}$.
$\therefore\triangle ABC$ 是直角非等腰三角形.

10. A　设 $\boldsymbol{a}=(x,y)$，$\boldsymbol{e}=(1,0)$，$\boldsymbol{b}=(m,n)$，则由 $\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{e}\rangle=\frac{\pi}{3}$，得 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{e}=|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{e}|\cos\frac{\pi}{3}$，即 $x=\frac{1}{2}\sqrt{x^2+y^2}$，
$\therefore y=\pm\sqrt{3}x$，
由 $\boldsymbol{b}^2-4\boldsymbol{e}\cdot\boldsymbol{b}+3=0$ 得 $m^2+n^2-4m+3=0$，即 $(m-2)^2+n^2=1$.
因此 $|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$ 的最小值为圆心 $(2,0)$ 到直线 $y=\pm\sqrt{3}x$ 的距离 $\frac{2\sqrt{3}}{2}$ 减去半径 1，为 $\sqrt{3}-1$. 故选 A.

11. 7
解析：$\because\boldsymbol{a}=(-1,2)$，$\boldsymbol{b}=(m,1)$，$\therefore\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(m-1,3)$.
又 $\because\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 垂直，$\therefore(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{a}=0$，
$\therefore-(m-1)+2\times3=0$，$\therefore m=7$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

12. 2

解析：由题意得$|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|=1$，

$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=1\times1\times\cos60^\circ=\frac{1}{2}$，

又 $\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}=0$，

$\therefore\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}=\boldsymbol{b}\cdot[t\boldsymbol{a}+(1-t)\boldsymbol{b}]$

$=t\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+(1-t)\boldsymbol{b}^2$

$=\frac{1}{2}t+1-t$

$=1-\frac{1}{2}t=0$，

$\therefore t=2$.

13. $\frac{1}{2}$

解析：由题可得 $2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(4,2)$，$\because\boldsymbol{c}\parallel(2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$，$\boldsymbol{c}=(1,\lambda)$，$\therefore4\lambda-2=0$，即 $\lambda=\frac{1}{2}$，故答案为 $\frac{1}{2}$.

14. $\frac{2}{3}$

解析：$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}\cdot(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD})$

$=\overrightarrow{AB}\cdot\left(\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}\right)$

$=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AB}\cdot\frac{1}{3}(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})$

$=1+\frac{1}{3}(\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AB})$

$=1+\frac{1}{3}\times(0-1)$

$=\frac{2}{3}$.

15. $\left(-\frac{5}{2},0\right)\cup(0,+\infty)$

解析：$\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}=(1,3)+\lambda(1,1)=(1+\lambda,3+\lambda)$，

$\because\boldsymbol{a},\boldsymbol{c}$ 夹角为锐角，

$\therefore\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}>0$ 且 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{c}$ 不共线，

$\therefore(1+\lambda)\times1+3(3+\lambda)>0$，

$10+4\lambda>0$，

$\therefore\lambda>-\frac{5}{2}$.

由 $\boldsymbol{a}\parallel\boldsymbol{c}$ 得 $(1+\lambda)\times3=1\times(3+\lambda)$，

$\therefore\lambda=0$，

$\therefore\lambda$ 的取值范围为 $\lambda>-\frac{5}{2}$ 且 $\lambda\neq0$.

16. **解**：$\because A(-2,1)$，$B(2,-1)$，$C(0,1)$，

$\therefore\overrightarrow{CA}=(-2,0)$，$\overrightarrow{CB}=(2,-2)$，

$\therefore\overrightarrow{CP}=3\overrightarrow{CA}=(-6,0)$，$\overrightarrow{CQ}=2\overrightarrow{CB}=(4,-4)$.

设 $P(x,y)$，则有 $\overrightarrow{CP}=(x,y-1)$，

$\therefore\begin{cases}x=-6,\\y-1=0,\end{cases}\therefore\begin{cases}x=-6,\\y=1.\end{cases}\therefore P(-6,1)$.

同理可得 $Q(4,-3)$，$\therefore$ 向量 $\overrightarrow{PQ}=(10,-4)$.

17. **解**：(1)设 $\boldsymbol{c}=(x,y)$，$\because\boldsymbol{c}\parallel\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{a}=(1,2)$，$\therefore2x-y=0$，

$\therefore y=2x$.

$\because|\boldsymbol{c}|=2\sqrt{5}$，$\therefore\sqrt{x^2+y^2}=2\sqrt{5}$，$\therefore x^2+y^2=20$，

$\therefore\begin{cases}x=2,\\y=4\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x=-2,\\y=-4,\end{cases}\therefore\boldsymbol{c}=(2,4)$ 或 $\boldsymbol{c}=(-2,-4)$.

(2)$\because(\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b})\perp(2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})$，$\therefore(\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b})\cdot(2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})=0$，

$2\boldsymbol{a}^2+3\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}-2\boldsymbol{b}^2=0$，$\therefore2|\boldsymbol{a}|^2+3\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}-2|\boldsymbol{b}|^2=0$.

$\because|\boldsymbol{a}|^2=5$，$|\boldsymbol{b}|^2=\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2=\frac{5}{4}$，

$\therefore2\times5+3\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}-2\times\frac{5}{4}=0$，$\therefore\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=-\frac{5}{2}$.

$\because|\boldsymbol{a}|=\sqrt{5}$，$|\boldsymbol{b}|=\frac{\sqrt{5}}{2}$，

$\therefore\cos\theta=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|}=\frac{-\frac{5}{2}}{\sqrt{5}\cdot\frac{\sqrt{5}}{2}}=-1$，

$\therefore\theta\in[0,\pi]$，$\therefore\theta=\pi$.

18. **解**：(1)$\because\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{PB}$，$\therefore P$ 为线段 AB 的中点，

$\therefore\overrightarrow{OP}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})=\frac{1}{2}\overrightarrow{OA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{OB}$，

$\therefore x=y=\frac{1}{2}$.

(2)若 $\overrightarrow{AP}=3\overrightarrow{PB}$，则 $\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AP}$

$=\overrightarrow{OA}+\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OA}+\frac{3}{4}(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA})$

$=\frac{1}{4}\overrightarrow{OA}+\frac{3}{4}\overrightarrow{OB}$.

$\therefore\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{AB}=\left(\frac{1}{4}\overrightarrow{OA}+\frac{3}{4}\overrightarrow{OB}\right)\cdot(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA})$

$=-\frac{1}{4}\overrightarrow{OA}^2+\frac{3}{4}\overrightarrow{OB}^2-\frac{1}{2}\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}$

$=-\frac{1}{4}\times4^2+\frac{3}{4}\times2^2-\frac{1}{2}\times4\times2\times\cos60^\circ$

$=-4+3-2=-3$.

19. **解**：(1)$\because\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$，

又 $\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$.

$\because\overrightarrow{OD}=2\overrightarrow{DB}$，$\therefore\overrightarrow{OD}=\frac{2}{3}\overrightarrow{OB}=\frac{2}{3}\boldsymbol{b}$，

$\therefore\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OD}=2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}-\frac{2}{3}\boldsymbol{b}=2\boldsymbol{a}-\frac{5}{3}\boldsymbol{b}$.

(2)设 $\overrightarrow{OE}=\lambda\overrightarrow{OA}$，则 $\overrightarrow{CE}=\overrightarrow{OE}-\overrightarrow{OC}=\lambda\boldsymbol{a}-(2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})=(\lambda-2)\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$，

又 $\overrightarrow{CE}$ 与 $\overrightarrow{CD}$ 共线，$(\lambda-2)\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=k\left(2\boldsymbol{a}-\frac{5}{3}\boldsymbol{b}\right)=2k\boldsymbol{a}-\frac{5}{3}k\boldsymbol{b}$，

$\therefore\begin{cases}2k=\lambda-2,\\-\frac{5}{3}k=1,\end{cases}$ 得 $\lambda=\frac{4}{5}$，$\therefore\lambda$ 的值为 $\frac{4}{5}$.

20. **解**：(1)由题意可知 $\overrightarrow{OA}=(6,0)$，$\overrightarrow{OC}=(1,\sqrt{3})$，$\overrightarrow{OM}=\frac{1}{2}\overrightarrow{OA}=(3,0)$.

$\therefore\overrightarrow{CO}=(-1,-\sqrt{3})$，$\overrightarrow{CM}=(2,-\sqrt{3})$，

$\therefore\overrightarrow{CO}\cdot\overrightarrow{CM}=-1\times2+(-\sqrt{3})\times(-\sqrt{3})=1$，$|\overrightarrow{CO}|=2$，$|\overrightarrow{CM}|=\sqrt{7}$，

$\therefore\cos\angle OCM=\cos\langle\overrightarrow{CO},\overrightarrow{CM}\rangle=\frac{\overrightarrow{CO}\cdot\overrightarrow{CM}}{|\overrightarrow{CO}|\cdot|\overrightarrow{CM}|}=\frac{1}{2\sqrt{7}}=\frac{\sqrt{7}}{14}$.

(2)设 $P(t,\sqrt{3})$，其中 $1\leqslant t\leqslant5$，则 $\lambda\overrightarrow{OP}=(t\lambda,\sqrt{3}\lambda)$，$\overrightarrow{OA}-\lambda\overrightarrow{OP}=(6-t\lambda,-\sqrt{3}\lambda)$，$\overrightarrow{CM}=(2,-\sqrt{3})$.

若 $(\overrightarrow{OA}-\lambda\overrightarrow{OP})\perp\overrightarrow{CM}$，则 $(\overrightarrow{OA}-\lambda\overrightarrow{OP})\cdot\overrightarrow{CM}=0$，

即 $2(6-t\lambda)-\sqrt{3}\times(-\sqrt{3}\lambda)=0$，即 $(2t-3)\lambda=12$.

当 $t=\frac{3}{2}$ 时，则 λ 不存在；

当 $t\neq\frac{3}{2}$ 时，则 $\lambda=\frac{12}{2t-3}$.

$\because t\in\left[1,\frac{3}{2}\right)\cup\left(\frac{3}{2},5\right]$，

$\therefore\lambda\in(-\infty,-12]\cup\left[\frac{12}{7},+\infty\right)$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

21. **解**：由题意可知$\overrightarrow{AB}=(2,1)$，$\overrightarrow{AC}=(1,k)$.

①当$A=90°$时，则有$\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{AC}$，$|\overrightarrow{AB}|=|\overrightarrow{AC}|$，

所以$\begin{cases}(2,1)\cdot(1,k)=2+k=0,\\ \sqrt{4+1}=\sqrt{1+k^2},\end{cases}$解得$k=-2$.

②当$B=90°$时，则有$\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{BC}$，$|\overrightarrow{AB}|=|\overrightarrow{BC}|$，

而$\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}=(-1,k-1)$，

所以$\begin{cases}(2,1)\cdot(-1,k-1)=-2+(k-1)=0,\\ \sqrt{4+1}=\sqrt{1+(k-1)^2},\end{cases}$

解得$k=3$.

③当$C=90°$时，则$\overrightarrow{AC}\perp\overrightarrow{CB}$，$|\overrightarrow{AC}|=|\overrightarrow{CB}|$，

而$\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}=(1,1-k)$，

所以$\begin{cases}(1,k)\cdot(1,1-k)=1+k(1-k)=0,\\ \sqrt{1+k^2}=\sqrt{1+(1-k)^2}.\end{cases}$

这时k无解.

综上可得$k=-2$或$k=3$时，$\triangle ABC$为等腰直角三角形.

阶段测试三

1. D　$\because\cos\alpha=1-2\sin^2\frac{\alpha}{2}=1-2\times\left(\frac{1}{3}\right)^2=\frac{7}{9}$，

$\therefore\cos2\alpha=2\cos^2\alpha-1=2\times\left(\frac{7}{9}\right)^2-1=\frac{17}{81}$，故选 D.

2. D　$\because\cos x=\frac{3}{4}$，

$\therefore\cos2x=2\cos^2x-1=2\times\left(\frac{3}{4}\right)^2-1=\frac{9}{8}-1=\frac{1}{8}$.

3. D　$\left(\cos\frac{\pi}{12}-\sin\frac{\pi}{12}\right)\cdot\left(\cos\frac{\pi}{12}+\sin\frac{\pi}{12}\right)=\cos^2\frac{\pi}{12}-\sin^2\frac{\pi}{12}=\cos\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

4. A　$\tan2\alpha=\tan[(\alpha+\beta)+(\alpha-\beta)]$

$=\frac{\tan(\alpha+\beta)+\tan(\alpha-\beta)}{1-\tan(\alpha+\beta)\cdot\tan(\alpha-\beta)}=\frac{3+5}{1-3\times5}=-\frac{4}{7}$.

5. C　函数$y=\frac{\sin2x}{1-\cos x}$的定义域为$\{x|x\neq2k\pi,k\in\mathbf{Z}\}$，

又$f(-x)=\frac{-\sin2x}{1-\cos x}=-\frac{\sin2x}{1-\cos x}=-f(x)$，所以函数是奇函数，其图像关于原点对称，可排除 B；又$x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$时，$y>0$，可排除 A；又$x=\pi$时，$y=0$，可排除 D，故选 C.

6. A　$\because\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)=-\cos2\alpha$，$\therefore\frac{\sqrt{2}}{2}(\sin\alpha-\cos\alpha)=\sin^2\alpha-\cos^2\alpha$，$\therefore\sin\alpha+\cos\alpha=\frac{\sqrt{2}}{2}$或$\sin\alpha-\cos\alpha=0$.

平方可得$\sin2\alpha=-\frac{1}{2}$或$\sin2\alpha=1$.

7. B　根据题意有$f(x)=\cos2x+1-\frac{1-\cos2x}{2}+2=\frac{3}{2}\cos2x+\frac{5}{2}$，

所以函数$f(x)$的最小正周期为$T=\frac{2\pi}{2}=\pi$，

且最大值为$f(x)_{\max}=\frac{3}{2}+\frac{5}{2}=4$，故选 B.

8. D　$\sin2\theta=\frac{2\sin\theta\cos\theta}{\sin^2\theta+\cos^2\theta}=\frac{2\tan\theta}{1+\tan^2\theta}=-\frac{4}{5}$，

$\therefore2\tan^2\theta+5\tan\theta+2=0$，

$\therefore\tan\theta=-\frac{1}{2}$，$\tan\theta=-2$.

$\because\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{3}{4}\pi$，

$\therefore\tan\theta<-1$，

$\therefore\tan\theta=-2$.

9. B　由图像得$f(x)$的周期为$T=2\left(\frac{3}{8}\pi-\frac{\pi}{8}\right)=\frac{\pi}{2}$，

由$\frac{\pi}{\omega}=\frac{\pi}{2}$得$\omega=2$，

$\therefore f(x)=A\tan(2x+\varphi)$，

代入$(0,1)$，$\left(\frac{3}{8}\pi,0\right)$得$\begin{cases}A\tan\varphi=1,\\ A\tan\left(\frac{3}{4}\pi+\varphi\right)=0,\end{cases}$

解得$\begin{cases}A=1,\\ \varphi=\frac{\pi}{4},\end{cases}$

$\therefore f(x)=\tan\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)$，

$\therefore f\left(\frac{\pi}{24}\right)=\tan\left(\frac{\pi}{12}+\frac{\pi}{4}\right)=\tan\frac{\pi}{3}=\sqrt{3}$.

10. B　$f(x)=\sin(2x+\theta)+\sqrt{3}\cos(2x+\theta)$

$=2\left[\frac{1}{2}\sin(2x+\theta)+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos(2x+\theta)\right]$

$=2\sin\left(2x+\theta+\frac{\pi}{3}\right)$，

$\because f(x)$是奇函数，$\therefore\theta+\frac{\pi}{3}=k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$.

$\theta=k\pi-\frac{\pi}{3}$，$k\in\mathbf{Z}$.

当$k=1$时，$\theta=\frac{2\pi}{3}$，$f(x)=2\sin\left(2x+\frac{2\pi}{3}\right)$，

由$2k\pi+\frac{\pi}{2}\leqslant2x+\frac{2\pi}{3}\leqslant2k\pi+\frac{3\pi}{2}$，$k\in\mathbf{Z}$得递减区间为$\left[k\pi-\frac{\pi}{12},k\pi+\frac{5\pi}{12}\right]$，$k\in\mathbf{Z}$.

当$k=0$时，$\left[-\frac{\pi}{12},\frac{5\pi}{12}\right]\supseteq\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$，符合题意.

11. $-\frac{12}{5}$

解析：由题意知$\cos\theta<0$，$\therefore\cos\theta=-\frac{5}{13}$，

$\therefore\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=-\frac{12}{5}$.

12. π

解析：$y=\frac{\sqrt{3}}{2}\sin2x+\frac{1+\cos2x}{2}$

$=\sin2x\cdot\cos\frac{\pi}{6}+\cos2x\cdot\sin\frac{\pi}{6}+\frac{1}{2}$

$=\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)+\frac{1}{2}$

$\therefore T=\frac{2\pi}{2}=\pi$.

13. $\frac{3\pi}{2}$

解析：$\because f(x)=\sin\frac{2}{3}x+\cos\frac{2}{3}x=\sqrt{2}\sin\left(\frac{2}{3}x+\frac{\pi}{4}\right)$，

$\therefore$其相邻两条对称轴之间的距离是$\frac{T}{2}=\frac{3\pi}{2}$.

14. 1

解析：$\because\tan\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)=3$，$\therefore\frac{1+\tan\alpha}{1-\tan\alpha}=3$，

$\therefore\tan\alpha=\frac{1}{2}$，

$\therefore\log_5(\sin\alpha+2\cos\alpha)+\log_5(3\sin\alpha+\cos\alpha)$

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

$$=\log_5\frac{3\sin^2\alpha+7\sin\alpha\cos\alpha+2\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}$$
$$=\log_5\frac{3\tan^2\alpha+7\tan\alpha+2}{\tan^2\alpha+1}$$
$$=\log_5\frac{3\times\left(\frac{1}{2}\right)^2+7\times\frac{1}{2}+2}{\left(\frac{1}{2}\right)^2+1}$$
$$=\log_5 5=1.$$

15. $-\frac{24}{7}$

解析：$\because \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\cos2\alpha+2\sin^2\alpha-\sin\alpha=1-\sin\alpha=\frac{2}{5}$，

$\therefore\sin\alpha=\frac{3}{5}$. 又 $\alpha\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$，$\therefore\tan\alpha=-\frac{3}{4}$，$\tan2\alpha=\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}=\frac{2\times\left(-\frac{3}{4}\right)}{1-\frac{9}{16}}=-\frac{24}{7}$.

16. **解：**(1)$\because\sin(\pi-\theta)=\frac{4}{5}$，$\therefore\sin\theta=\frac{4}{5}$.

又 $\because\theta\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$，$\therefore\cos\theta=-\sqrt{1-\sin^2\theta}=-\frac{3}{5}$，

$\therefore\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=-\frac{4}{3}$，

$\therefore\tan\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\tan\theta-1}{1+\tan\theta}=\frac{-\frac{4}{3}-1}{1-\frac{4}{3}}=7$.

(2)$\because\sin\theta=\frac{4}{5}$，$\cos\theta=-\frac{3}{5}$，

$\therefore\cos2\theta=1-2\sin^2\theta=1-2\times\left(\frac{4}{5}\right)^2=-\frac{7}{25}$，

$\sin2\theta=2\sin\theta\cos\theta=2\times\frac{4}{5}\times\left(-\frac{3}{5}\right)=-\frac{24}{25}$.

$\therefore\cos\left(2\theta-\frac{\pi}{3}\right)=\cos2\theta\cos\frac{\pi}{3}+\sin2\theta\sin\frac{\pi}{3}$
$=-\frac{7}{25}\times\frac{1}{2}+\left(-\frac{24}{25}\right)\times\frac{\sqrt{3}}{2}$
$=-\frac{7+24\sqrt{3}}{50}$.

17. **解：**$f(x)=\sin^2x-\cos^2x-2\sqrt{3}\sin x\cos x$
$=-\cos2x-\sqrt{3}\sin2x=-2\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$.

(1)$f\left(\frac{2\pi}{3}\right)=-2\sin\left(2\times\frac{2\pi}{3}+\frac{\pi}{6}\right)=-2\sin\left(\pi+\frac{\pi}{2}\right)=2$.

(2)$\because f(x)=-2\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$，$\therefore f(x)$的最小正周期是 π.

由正弦函数的性质得 $2k\pi+\frac{\pi}{2}\leqslant2x+\frac{\pi}{6}\leqslant2k\pi+\frac{3\pi}{2}$，$k\in\mathbf{Z}$.

解得 $k\pi+\frac{\pi}{6}\leqslant x\leqslant k\pi+\frac{2\pi}{3}$，$k\in\mathbf{Z}$.

$\therefore f(x)$的单调递增区间是

$\left[k\pi+\frac{\pi}{6},k\pi+\frac{2\pi}{3}\right]$，$k\in\mathbf{Z}$.

18. **解：**(1)选择②式计算：

$a=\sin^215^\circ+\cos^215^\circ-\sin15^\circ\cos15^\circ$
$=1-\frac{1}{2}\sin30^\circ=1-\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{3}{4}$.

(2)猜想三角恒等式为

$\sin^2\alpha+\cos^2(30^\circ-\alpha)-\sin\alpha\cos(30^\circ-\alpha)=\frac{3}{4}$.

证明：$\sin^2\alpha+\cos^2(30^\circ-\alpha)-\sin\alpha\cos(30^\circ-\alpha)$
$=\sin^2\alpha+(\cos30^\circ\cos\alpha+\sin30^\circ\sin\alpha)^2-\sin\alpha(\cos30^\circ\cos\alpha+\sin30^\circ\sin\alpha)$
$=\sin^2\alpha+\frac{3}{4}\cos^2\alpha+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\alpha\cos\alpha+\frac{1}{4}\sin^2\alpha-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\alpha\cos\alpha-\frac{1}{4}\sin^2\alpha$
$=\frac{3}{4}(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)$
$=\frac{3}{4}$.

19. **解：**(1)$\because\overrightarrow{AC}=(\cos\alpha-3,\sin\alpha)$，$\overrightarrow{BC}=(\cos\alpha,\sin\alpha-3)$，

$\therefore|\overrightarrow{AC}|=\sqrt{(\cos\alpha-3)^2+\sin^2\alpha}=\sqrt{10-6\cos\alpha}$，

$|\overrightarrow{BC}|=\sqrt{\cos^2\alpha+(\sin\alpha-3)^2}=\sqrt{10-6\sin\alpha}$.

由 $|\overrightarrow{AC}|=|\overrightarrow{BC}|$ 得 $\sin\alpha=\cos\alpha$，又 $\because\alpha\in\left(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right)$，

$\therefore\alpha=\frac{5\pi}{4}$.

(2)由 $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BC}=-1$，得 $(\cos\alpha-3)\cos\alpha+\sin\alpha(\sin\alpha-3)=-1$，

$\therefore\sin\alpha+\cos\alpha=\frac{2}{3}$.　①

$\frac{2\sin^2\alpha+\sin2\alpha}{1+\tan\alpha}=\frac{2\sin^2\alpha+2\sin\alpha\cos\alpha}{1+\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}}=2\sin\alpha\cos\alpha$，

又由①式两边平方得 $1+2\sin\alpha\cos\alpha=\frac{4}{9}$，

$\therefore2\sin\alpha\cos\alpha=-\frac{5}{9}$，$\frac{2\sin^2\alpha+\sin2\alpha}{1+\tan\alpha}=-\frac{5}{9}$.

20. **解：**(1)由已知，

有 $f(x)=\frac{1-\cos2x}{2}-\frac{1-\cos\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)}{2}$
$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\cos2x+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin2x\right)-\frac{1}{2}\cos2x$
$=\frac{\sqrt{3}}{4}\sin2x-\frac{1}{4}\cos2x$
$=\frac{1}{2}\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)$，

所以 $f(x)$的最小正周期 $T=\frac{2\pi}{2}=\pi$.

(2)因为 $f(x)$在区间 $\left[-\frac{\pi}{3},-\frac{\pi}{6}\right]$上是减函数，在区间 $\left[-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{4}\right]$上是增函数，$f\left(-\frac{\pi}{3}\right)=-\frac{1}{4}$，$f\left(-\frac{\pi}{6}\right)=-\frac{1}{2}$，$f\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{3}}{4}$.

所以，$f(x)$在区间 $\left[-\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{4}\right]$上的最大值为 $\frac{\sqrt{3}}{4}$，最小值为 $-\frac{1}{2}$.

21. **解：**(1)由已知可得，$f(x)=3\cos\omega x+\sqrt{3}\sin\omega x=2\sqrt{3}\sin\left(\omega x+\frac{\pi}{3}\right)$，

又正$\triangle ABC$的高为 $2\sqrt{3}$，从而 $BC=4$.

所以函数 $f(x)$的周期 $T=4\times2=8$，即 $\frac{2\pi}{\omega}=8$，$\omega=\frac{\pi}{4}$.

函数 $f(x)$的值域为 $[-2\sqrt{3},2\sqrt{3}]$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

(2)因为 $f(x_0)=\frac{8\sqrt{3}}{5}$,由(1)有

$f(x_0)=2\sqrt{3}\sin\left(\frac{\pi x_0}{4}+\frac{\pi}{3}\right)=\frac{8\sqrt{3}}{5}$,

即 $\sin\left(\frac{\pi x_0}{4}+\frac{\pi}{3}\right)=\frac{4}{5}$.

由 $x_0\in\left(-\frac{10}{3},\frac{2}{3}\right)$,知$\frac{\pi x_0}{4}+\frac{\pi}{3}\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$,

所以 $\cos\left(\frac{\pi x_0}{4}+\frac{\pi}{3}\right)=\sqrt{1-\left(\frac{4}{5}\right)^2}=\frac{3}{5}$.

故 $f(x_0+1)=2\sqrt{3}\sin\left(\frac{\pi x_0}{4}+\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{3}\right)$

$=2\sqrt{3}\sin\left[\left(\frac{\pi x_0}{4}+\frac{\pi}{3}\right)+\frac{\pi}{4}\right]$

$=2\sqrt{3}\left[\sin\left(\frac{\pi x_0}{4}+\frac{\pi}{3}\right)\cos\frac{\pi}{4}+\cos\left(\frac{\pi x_0}{4}+\frac{\pi}{3}\right)\sin\frac{\pi}{4}\right]$

$=2\sqrt{3}\left(\frac{4}{5}\times\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{3}{5}\times\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\frac{7\sqrt{6}}{5}$.

阶段测试四

1. B　$\sin35^\circ\cos85^\circ+\sin55^\circ\sin85^\circ$

$=\cos55^\circ\cos85^\circ+\sin55^\circ\sin85^\circ$

$=\cos(55^\circ-85^\circ)=\cos(-30^\circ)=\cos30^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

2. C　$\cos\left(\frac{5\pi}{6}-x\right)=\cos\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{3}-x\right)=$

$-\sin\left(\frac{\pi}{3}-x\right)=-\frac{3}{5}$,选 C.

3. B　设 $P(x,y)$,由 $\overrightarrow{MP}=\frac{1}{2}\overrightarrow{MN}$,知$(x-3,y+2)=\frac{1}{2}\times(-8,1)$,得$\begin{cases}x-3=-4,\\ y+2=\frac{1}{2},\end{cases}$得$\begin{cases}x=-1,\\ y=-\frac{3}{2}.\end{cases}$

4. A　原等式化为 $2\overrightarrow{OC}-2\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OC}$,

$2\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{CB}$,

又∵$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB}=3\overrightarrow{AC}$,

∴$\overrightarrow{AC}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$.

5. C　∵$y=\sqrt{3}\sin2x+\cos2x=2\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$,∴最小正周期为 π.

6. D　解方程组$\begin{cases}y=2x-4,\\ y^2=4x,\end{cases}$得$\begin{cases}x=1,\\ y=-2\end{cases}$或$\begin{cases}x=4,\\ y=4.\end{cases}$

又 $F(1,0)$,

∴可得$\overrightarrow{FA}=(3,4)$,$\overrightarrow{FB}=(0,-2)$,

$\cos\angle AFB=\frac{\overrightarrow{FA}\cdot\overrightarrow{FB}}{|\overrightarrow{FA}||\overrightarrow{FB}|}=\frac{-8}{5\times2}=-\frac{4}{5}$.

7. D　易知 $C_1:y=\cos x=\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$,把曲线 C_1 上各点的横坐标缩短到原来的$\frac{1}{2}$倍,纵坐标不变,得到函数 $y=\sin\left(2x+\frac{\pi}{2}\right)$的图像,再把得到的函数的图像向左平移$\frac{\pi}{12}$个单位长度,可得到函数 $y=\sin\left[2\left(x+\frac{\pi}{12}\right)+\frac{\pi}{2}\right]=\sin\left(2x+\frac{2\pi}{3}\right)$的图像,即曲线 C_2.

8. B　根据题的条件,可知 O,A,B 三点共线,从而得到 $b=2a$,因为 $\cos2\alpha=2\cos^2\alpha-1=2\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{a^2+1}}\right)^2-1=\frac{2}{3}$,解得 $a^2=\frac{1}{5}$,即$|a|=\frac{\sqrt{5}}{5}$,所以$|a-b|=|a-2a|=\frac{\sqrt{5}}{5}$,故选 B.

9. A　$\frac{3}{4}T=\frac{5}{12}\pi+\frac{\pi}{3}=\frac{3}{4}\pi$,∴$T=\pi$,∴$\omega=2$. 又∵最高点为$\left(\frac{5}{12}\pi,2\right)$,∴$2\sin\left(2\times\frac{5}{12}\pi+\varphi\right)=2$,∴$\frac{5}{6}\pi+\varphi=\frac{\pi}{2}$,∴$\varphi=-\frac{\pi}{3}$,故选 A.

10. A　∵$\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$,∴$4\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{6}\right)+4\cos\alpha-\sqrt{3}=0$,即

$4\left(\sin\alpha\cos\frac{\pi}{6}-\cos\alpha\sin\frac{\pi}{6}\right)+4\cos\alpha-\sqrt{3}=2\sqrt{3}\sin\alpha+2\cos\alpha-\sqrt{3}=4\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)-\sqrt{3}=0$,

∴$\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\sqrt{3}}{4}$,

∴$\sin\left(\alpha+\frac{7\pi}{6}\right)=-\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{4}$.

11. $\sqrt{5}$

解析:∵$f(x)=2\cos x+\sin x=\sqrt{5}\sin(x+\theta)$ $\left(\text{其中 }\sin\theta=\frac{2}{\sqrt{5}},\cos\theta=\frac{1}{\sqrt{5}}\right)$,又 $x\in\mathbf{R}$,∴$f(x)$的最大值为$\sqrt{5}$.

12. $\frac{3\sqrt{10}}{10}$

解析:∵$\alpha\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$,$\tan\alpha=2$,∴$\sin\alpha=\frac{2\sqrt{5}}{5}$,

$\cos\alpha=\frac{\sqrt{5}}{5}$,∴$\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)=\cos\alpha\cos\frac{\pi}{4}+\sin\alpha\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{\sqrt{5}}{5}+\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)=\frac{3\sqrt{10}}{10}$.

13. 1

解析:由题意得 $\varphi=\frac{\pi}{4}$,$T=\frac{2\pi}{3}$,

∴$\frac{2\pi}{\omega}=\frac{2\pi}{3}$,∴$\omega=3$,∴$f(x)=\sin\left(3x+\frac{\pi}{4}\right)$.

∴$f\left(\frac{\pi}{12}\right)=\sin\frac{\pi}{2}=1$.

14. $2\sqrt{3}$

解析:∵$|\boldsymbol{a}|=2$,$|\boldsymbol{b}|=1$,$\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为 60°,

∴$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=2\times1\times\cos60^\circ=1$,

∴$|\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}|=\sqrt{(\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b})^2}=\sqrt{|\boldsymbol{a}|^2+4\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+4|\boldsymbol{b}|^2}=\sqrt{4+4+4\times1}=2\sqrt{3}$.

15. ②⑤

解析:①显然不正确;当 $x=\frac{\pi}{8}$ 时,$\sin\left(2x+\frac{5\pi}{4}\right)=\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{5\pi}{4}\right)=-1$,∴②正确;对于③,由 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=-4\lambda-4<0$,得 $\lambda>-1$,又 $\lambda=4$ 时,$\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 共线且方向相反,∴③不正确;由于 $\sin x+\cos x=\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\leqslant\sqrt{2}$,∴$\sin x+\cos x=\frac{\pi}{2}$ 不成立,故④不正确;对于⑤,由于 $y=\sin2x-4\sin^3x\cos x=\sin2x(1-2\sin^2x)=\sin2x\cos2x=\frac{1}{2}\sin4x$,∴$T=\frac{2\pi}{4}=\frac{\pi}{2}$,故⑤正确.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

16. **解**：(1)∵ $|OP|=\sqrt{\left(\frac{4}{5}\right)^2+\left(-\frac{3}{5}\right)^2}=1$，

∴ $\sin\alpha=-\frac{3}{5}$，$\cos\alpha=\frac{4}{5}$.

(2) $\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)}{\sin(\pi+\alpha)}\cdot\frac{\tan(\alpha-\pi)}{\cos(\pi-\alpha)}$

$=\frac{\cos\alpha}{-\sin\alpha}\cdot\frac{\tan\alpha}{-\cos\alpha}=\frac{1}{\cos\alpha}=\frac{5}{4}$.

17. **解**：(1)∵ $f(x)=\sin\left(\omega x-\frac{\pi}{6}\right)+\sin\left(\omega x-\frac{\pi}{2}\right)=$

$\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\omega x-\frac{1}{2}\cos\omega x-\cos\omega x=\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\omega x-\frac{3}{2}\cos\omega x$

$=\sqrt{3}\left(\frac{1}{2}\sin\omega x-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\omega x\right)$

$=\sqrt{3}\sin\left(\omega x-\frac{\pi}{3}\right)$.

又 $f\left(\frac{\pi}{6}\right)=\sqrt{3}\sin\left(\frac{\omega\pi}{6}-\frac{\pi}{3}\right)=0$，

∴ $\frac{\omega\pi}{6}-\frac{\pi}{3}=k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$，∴ $\omega=6k+2$，$k\in\mathbf{Z}$.

又∵ $0<\omega<3$，∴ $\omega=2$.

(2)由(1)得 $f(x)=\sqrt{3}\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)$，

∴ $g(x)=\sqrt{3}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{3}\right)=\sqrt{3}\sin\left(x-\frac{\pi}{12}\right)$.

∵ $x\in\left[-\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4}\right]$，

∴ $x-\frac{\pi}{12}\in\left[-\frac{\pi}{3},\frac{2\pi}{3}\right]$，

∴当 $x-\frac{\pi}{12}=-\frac{\pi}{3}$，即 $x=-\frac{\pi}{4}$ 时，$g(x)$ 取得最小值 $-\frac{3}{2}$.

18. **解**：(1)∵ $\boldsymbol{m}\parallel\boldsymbol{n}$，∴ $2\cos\alpha=\sin\alpha$，

又 $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$，

∴ $\sin^2\alpha+\frac{1}{4}\sin^2\alpha=1$，∴ $\sin^2\alpha=\frac{4}{5}$，

∵ $\alpha\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，∴ $\sin\alpha>0$，故 $\sin\alpha=\frac{2\sqrt{5}}{5}$.

(2)∵ $\alpha\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，$\beta\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，∴ $-\frac{\pi}{2}<\alpha-\beta<\frac{\pi}{2}$.

∵ $\sin(\alpha-\beta)=\frac{3}{5}$，∴ $\cos(\alpha-\beta)=\frac{4}{5}$；$\sin\alpha=\frac{2\sqrt{5}}{5}$，

$\cos\alpha=\frac{\sqrt{5}}{5}$.

$\cos\beta=\cos[\alpha-(\alpha-\beta)]=\cos\alpha\cos(\alpha-\beta)+\sin\alpha\sin(\alpha-\beta)=\frac{\sqrt{5}}{5}\times\frac{4}{5}+\frac{2\sqrt{5}}{5}\times\frac{3}{5}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$.

19. **解**：(1) $f(x)=2\cos x\left(\sin x\cos\frac{\pi}{3}+\cos x\sin\frac{\pi}{3}\right)-\frac{\sqrt{3}}{2}$

$=2\cos x\left(\frac{1}{2}\sin x+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x\right)-\frac{\sqrt{3}}{2}$

$=\frac{1}{2}\sin 2x+\frac{\sqrt{3}}{2}(1+\cos 2x)-\frac{\sqrt{3}}{2}$

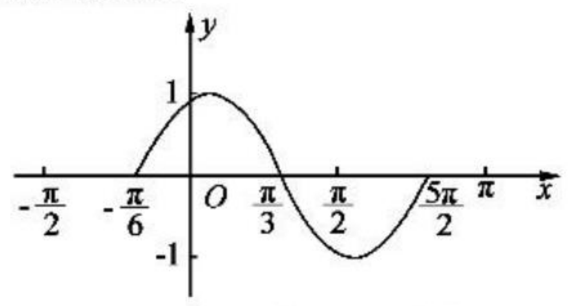
$=\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$.

所以函数 $f(x)$ 的最小正周期为 π.

(2)列表：

$2x+\frac{\pi}{3}$	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
x	$-\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{12}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{12}$	$\frac{5\pi}{6}$
$f(x)$	0	1	0	-1	0

描点连线，如图所示.



20. **解**：(1) $f(x)=\frac{1-\cos 2x}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x=\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x-\frac{1}{2}\cos 2x+\frac{1}{2}=\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)+\frac{1}{2}$，所以 $f(x)$ 的最小正周期为 $T=\frac{2\pi}{2}=\pi$.

(2)由(1)知 $f(x)=\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)+\frac{1}{2}$.

因为 $x\in\left[-\frac{\pi}{3},m\right]$，

所以 $2x-\frac{\pi}{6}\in\left[-\frac{5\pi}{6},2m-\frac{\pi}{6}\right]$.

要使得 $f(x)$ 在 $\left[-\frac{\pi}{3},m\right]$ 上的最大值为 $\frac{3}{2}$，即 $\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)$ 在 $\left[-\frac{\pi}{3},m\right]$ 上的最大值为 1.

所以 $2m-\frac{\pi}{6}\geqslant\frac{\pi}{2}$，即 $m\geqslant\frac{\pi}{3}$.

所以 m 的最小值为 $\frac{\pi}{3}$.

21. **解**：(1)∵ $\overrightarrow{OA}=(\cos\alpha,\sin\alpha)$，$\boldsymbol{n}=(0,-\sqrt{5})$，

∴ $\overrightarrow{OA}-\boldsymbol{n}=(\cos\alpha,\sin\alpha+\sqrt{5})$.

∵ $\boldsymbol{m}\perp(\overrightarrow{OA}-\boldsymbol{n})$，∴ $\boldsymbol{m}\cdot(\overrightarrow{OA}-\boldsymbol{n})=0$，

即 $2\cos\alpha+(\sin\alpha+\sqrt{5})=0$. ①

又 $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$， ②

由①②解得 $\cos\alpha=-\frac{2\sqrt{5}}{5}$，$\sin\alpha=-\frac{\sqrt{5}}{5}$.

∴ $\overrightarrow{OA}=\left(-\frac{2\sqrt{5}}{5},-\frac{\sqrt{5}}{5}\right)$.

(2)∵ $\cos(\beta-\pi)=\frac{\sqrt{2}}{10}$，∴ $\cos\beta=-\frac{\sqrt{2}}{10}$，又∵ $0<\beta<\pi$，

∴ $\sin\beta=\frac{7\sqrt{2}}{10}$.

由(1)知 $\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha=2\times\left(-\frac{\sqrt{5}}{5}\right)\times\left(-\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)=\frac{4}{5}$，$\cos 2\alpha=2\cos^2\alpha-1=2\times\frac{4}{5}-1=\frac{3}{5}$，

∴ $\cos(2\alpha-\beta)=\cos 2\alpha\cos\beta+\sin 2\alpha\sin\beta$

$=\frac{3}{5}\times\left(-\frac{\sqrt{2}}{10}\right)+\frac{4}{5}\times\frac{7\sqrt{2}}{10}=\frac{25\sqrt{2}}{50}=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

责任编辑 李 莉 陈小彦
美术编辑 李 欣
封面设计 欣 羽

45 分钟
课时作业与单元测试

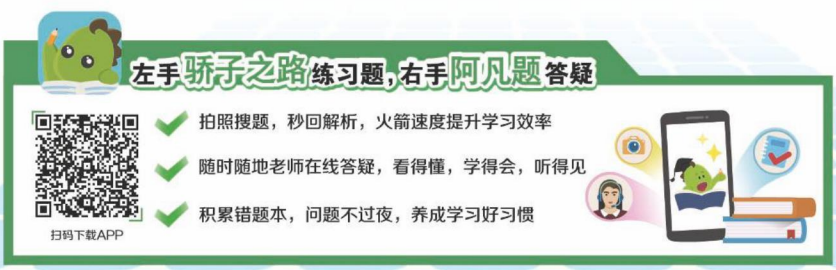
45FENZHONG KESHIZUOYEYUDANYUANCESHI SHUXUE

丛书科目

语文 数学 英语 物理 化学 生物 历史 地理 思想政治

同学们，你想了解丛书的更多信息吗？详情请登录 http://www.dfjc100.com

※ 各科配有教师用书及教学课件光盘 (word 文档可自主编辑)，英语配有原声磁带 / MP3 光盘。



手机扫一扫
获取配套学习资源

ISBN 978-7-202-08077-1
9 787202 080771 03>
定价：32.00 元

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料