东方杰创®
DONGFANG JIECHUANG
让 学习更快乐，人生更精彩

骄子之路®
the Road to Pride
主　编：邓保沧

45分钟

课时作业与单元测试

活页
可拆开使用

教辅资料站

电子教辅　试卷练习
知识总结　备课资源

扫码关注获取更多学习资料

提升＝基础＋能力＋方法
课时作业　基础自测·知能提升
阶段检测　梯度练习·评估达标
答案与解析　全解全析·点拨精准

数学

必修5·BS

河北人民出版社

东方杰创®
DONGFANG JIECHUANG
让 学习更快乐，人生更精彩

骄子之路®
the Road to Pride
主　编：邓保沧

45分钟 课时作业与单元测试

活页
可拆开使用

提升＝基础＋能力＋方法
课时作业　基础自测·知能提升
阶段检测　梯度练习·评估达标
答案与解析　全解全析·点拨精准

数学
必修5·BS

微信公众号
教辅资料站

河北人民出版社
石家庄

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

图书在版编目（CIP）数据

45分钟课时作业与单元测试：数学.BS版.5：必修/邓保沧主编. —石家庄：河北人民出版社，2013.7（2019.6重印）
ISBN 978-7-202-08081-8

Ⅰ.①4… Ⅱ.①邓… Ⅲ.①中学数学课—高中—习题集
Ⅳ.①G634

中国版本图书馆CIP数据核字（2013）第194839号

编　委：张瑞霞　天高云　黄小惠
姜　楠　蒋　敏　金剑飞

书　名　45分钟课时作业与单元测试　数学　必修5　BS
主　编　邓保沧

责任编辑　李　莉　阴耀华
美术编辑　李　欣
封面设计　欣　羽

出版发行　河北人民出版社（石家庄市友谊北大街330号）
印　刷　河北伦洋印业有限公司
开　本　880毫米×1230毫米　1/16
印　张　7.5
字　数　240 000
版　次　2013年7月第1版　2019年6月第6次印刷
书　号　ISBN 978-7-202-08081-8
定　价　35.00元

版权所有　翻印必究

微信公众号
教辅资料站

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料



目录 CONTENTS

第一部分　课时作业

第一章　数　列 …… 1

§1　数　列 …… 1

1.1　数列的概念 …… 1

1.2　数列的函数特性 …… 3

§2　等差数列 …… 5

2.1　等差数列 …… 5

第一课时　等差数列(一) …… 5

第二课时　等差数列(二) …… 7

2.2　等差数列的前 n 项和 …… 9

第一课时　等差数列的前 n 项和(一) …… 9

第二课时　等差数列的前 n 项和(二) …… 11

§3　等比数列 …… 13

3.1　等比数列 …… 13

第一课时　等比数列(一) …… 13

第二课时　等比数列(二) …… 15

3.2　等比数列的前 n 项和 …… 17

第一课时　等比数列的前 n 项和(一) …… 17

第二课时　等比数列的前 n 项和(二) …… 19

§4　数列在日常经济生活中的应用 …… 21

阶段质量评估卷(一) …… 23

第二章　解三角形 …… 25

§1　正弦定理与余弦定理 …… 25

1.1　正弦定理 …… 25

1.2　余弦定理 …… 27

§2　三角形中的几何计算 …… 29

第一课时　三角形中的几何计算(一) …… 29

第二课时　三角形中的几何计算(二) …… 31

§3　解三角形的实际应用举例 …… 33

阶段质量评估卷(二) …… 35

阶段质量评估卷(三) …… 37

微信公众号
教辅资料站

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料



目录 CONTENTS

第三章　不等式 …… 39

§1　不等关系 …… 39

§2　一元二次不等式 …… 41

2.1　一元二次不等式的解法 …… 41

第一课时　一元二次不等式的解法(一) …… 41

第二课时　一元二次不等式的解法(二) …… 43

2.2　一元二次不等式的应用 …… 45

§3　基本不等式 …… 47

3.1　基本不等式 …… 47

3.2　基本不等式与最大(小)值 …… 49

§4　简单线性规划 …… 51

4.1　二元一次不等式(组)与平面区域 …… 51

4.2　简单线性规划 …… 53

4.3　简单线性规划的应用 …… 55

阶段质量评估卷(四) …… 57

阶段质量评估卷(五) …… 59

第二部分　阶段检测

阶段测试一(第一章　数　列) …… 61

阶段测试二(第二章　解三角形) …… 65

阶段测试三(第三章　不等式) …… 69

阶段测试四(必修5综合测试) …… 73

第三部分　答案与解析

答案与解析 …… 78～116

提示:全书包括课时作业、阶段检测、答案与解析三部分,共计120页。

(根据教师教学情况不同,课时作业部分可在书中作答,也可撕下使用。)

微信公众号
教辅资料站

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

学习札记

第一章 数 列

§1 数 列

1.1 数列的概念

1 基础知识点对点

知识点一 数列的概念

1. 下列说法中，正确的是 ( )

A. 数列 1,3,5,7 可表示为{1,3,5,7}

B. 数列 1,0,−1,−2 与数列−2,−1,0,1 是相同的数列

C. 数列$\left\{\frac{n+1}{n}\right\}$的第 k 项为 $1+\frac{1}{k}$

D. 数列 0,2,4,6,8,…可记为{2n}.

知识点二 根据数列的前几项写出数列的通项公式

2. 数列 1,0,1,0,…的一个通项公式是 ( )

A. $a_n=\frac{1+(-1)^n}{2}(n\in\mathbf{N}_+)$

B. $a_n=\frac{-1+(-1)^n}{2}(n\in\mathbf{N}_+)$

C. $a_n=\frac{1-(-1)^{n+1}}{2}(n\in\mathbf{N}_+)$

D. $a_n=\frac{1-(-1)^n}{2}(n\in\mathbf{N}_+)$

3. 写出数列的一个通项公式：

(1)1,3,7,15,31,…，$a_n=$_____，…；

(2)2,$-\frac{4}{5}$,$\frac{1}{2}$,$-\frac{4}{11}$,$\frac{2}{7}$,$-\frac{4}{17}$,…，$a_n=$_____，…；

(3)$1\frac{1}{2}$,$2\frac{4}{5}$,$3\frac{9}{10}$,$4\frac{16}{17}$,…，$a_n=$_____，….

知识点三 通项公式的应用

4. 已知数列 1,$\sqrt{3}$,$\sqrt{5}$,$\sqrt{7}$,…，$\sqrt{2n-1}$,…，则 $3\sqrt{5}$ 是它的 ( )

A. 第 22 项　　B. 第 23 项

C. 第 24 项　　D. 第 28 项

5. 已知数列$\{a_n\}$满足 $a_1=0$，$a_{n+1}=a_n+2n-1$，试写出它的前 5 项，并归纳出该数列的一个通项公式.

2 课后拔高提能练

一、选择题

1. 数列$\{a_n\}$的通项公式为 $a_n=\frac{1+(-1)^{n+1}}{2}$，则该数列的前 4 项依次为 ( )

A. 1,0,1,0　　B. 0,1,0,1

C. $\frac{1}{2}$,0,$\frac{1}{2}$,0　　D. 2,0,2,0

2. 数列$\{a_n\}$：$-\sqrt{3}$,3,$-3\sqrt{3}$,9,…的一个通项公式是 ( )

A. $a_n=(-1)^n\sqrt{3n}(n\in\mathbf{N}_+)$

B. $a_n=(-1)^n\sqrt{3^n}(n\in\mathbf{N}_+)$

C. $a_n=(-1)^{n+1}\sqrt{3n}(n\in\mathbf{N}_+)$

D. $a_n=(-1)^{n+1}\sqrt{3^n}(n\in\mathbf{N}_+)$

3. 已知数列$\{a_n\}$的递推关系式为 $a_{n+1}=a_n+n$，$a_1=1$，则 a_5 的值为 ( )

A. 7　　B. 10

C. 11　　D. 15

4. 已知数列$\{a_n\}$对任意的 $p,q\in\mathbf{N}_+$，满足 $a_{p+q}=a_p+a_q$，且 $a_2=-6$，那么 $a_{10}=$ ( )

A. −165　　B. −33

C. −30　　D. −21

微信公众号 教辅资料站

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

学习札记

二、填空题

5. “开心辞典”中有这样的问题：给出一组数，要你根据前面几个数的变化规律填出后面的数，现给出一组数：$\frac{1}{2}$，$-\frac{1}{2}$，$\frac{3}{8}$，$-\frac{1}{4}$，$\frac{5}{32}$，…，则它的第8个数应当是_____.

6. 已知数列$\{a_n\}$的通项公式为$a_n=\underbrace{999\cdots9}_{n个9}$，则$a_n=10^n-1$，那么数列$\{b_n\}$的通项公式$b_n=\underbrace{888\cdots8}_{n个8}$可化为$b_n=$_____.

7. 已知数列$\{a_n\}$的首项$a_1=\sqrt{3}$，$a_{n+1}=\frac{\sqrt{3}+a_n}{1-\sqrt{3}a_n}$，则$a_{2\,014}=$_____.

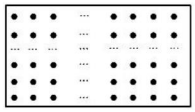
三、解答题

8. 已知数列$\{a_n\}$中，$a_1=1$，$a_{n+1}=\frac{n}{n+1}a_n$.

(1)写出数列的前5项；

(2)猜想数列$\{a_n\}$的通项公式.

9. 如下图所示，有$n(n\geqslant2)$行$(n+1)$列的士兵方阵.



(1)写出一个数列，用它表示当n分别为2，3，4，5，6，…时方阵中的士兵人数；

(2)说出(1)中数列的第5，6项，用a_5，a_6表示；

(3)若把(1)中的数列记为$\{a_n\}$，求该数列的通项公式a_n；

(4)求a_{10}，并说明a_{10}所表示的实际意义.

微信公众号
教辅资料站

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

学习札记

1.2　数列的函数特性

1 基础知识点对点

知识点一　判断数列的增减性

1. 已知数列$\{a_n\}$的通项公式$a_n=\frac{n-1}{n+1}$，则数列$\{a_n\}$为　　（　　）

A. 单调递增数列　　B. 单调递减数列

C. 先增后减的数列　　D. 先减后增的数列

2. 已知数列$\{a_n\}$满足$a_{n+1}-a_n-3=0$，则数列$\{a_n\}$是　　（　　）

A. 递增数列　　B. 递减数列

C. 常数列　　D. 不能确定

知识点二　数列的周期性

3. 已知数列$\{a_n\}$满足$a_{n+1}=\begin{cases}2a_n,0<a_n<\frac{1}{2},\\2a_n-1,\frac{1}{2}\leqslant a_n<1.\end{cases}$若$a_1=\frac{6}{7}$，则$a_{2\,018}=$　　（　　）

A. $\frac{3}{7}$　　B. $\frac{4}{7}$

C. $\frac{5}{7}$　　D. $\frac{6}{7}$

知识点三　数列增减性的应用

4. **(2018·山西忻州一中期末)** 在数列$\{a_n\}$中，$a_n=-2n^2+29n+3$，则此数列最大项的值是　　（　　）

A. 102　　B. $\frac{965}{8}$

C. $\frac{927}{8}$　　D. 108

5. 已知数列$\{a_n\}$的通项公式$a_n=\frac{n^2}{n^2+1}$，求证：$\{a_n\}$为递增数列.

2 课后拔高提能练

一、选择题

1. 下列结论中正确的是　　（　　）

①在直角坐标系中数列的图像是一群孤立的点；

②任何一个数列都有增减性；

③数列的通项公式存在且唯一.

A. ①②　　B. ②③

C. ①②③　　D. ①

2. 已知数列$\{a_n\}$的通项公式是$a_n=\frac{an}{bn+1}$，其中a,b均为大于0的常数，那么a_n与a_{n+1}的大小关系是　　（　　）

A. $a_n>a_{n+1}$　　B. $a_n<a_{n+1}$

C. $a_n=a_{n+1}$　　D. 与n的取值有关

3. 已知数列$\{a_n\}$的通项公式是$a_n=n^2+kn+2$，若对于$n\in\mathbf{N}_+$，都有$a_{n+1}>a_n$成立，则实数k的取值范围是　　（　　）

A. $k>0$　　B. $k>-1$

C. $k>-2$　　D. $k>-3$

4. 已知数列$\{a_n\}$满足$a_1=2$，$a_{n+1}=\frac{a_n-1}{a_n+1}(n\in\mathbf{N}_+)$，则$a_{30}=$　　（　　）

A. 2　　B. $\frac{1}{3}$

C. $-\frac{1}{2}$　　D. -3

二、填空题

5. 数列$\{a_n\}$的通项公式为$a_n=n^2-6n$，则它的最小项的值是_____.

6. **(2019·河南安阳模拟)** 数列$\{a_n\}$满足$a_{n+1}=\frac{1}{1-a_n}$，若$a_8=2$，则$a_1=$_____.

7. **(2018·沈阳模拟)** 在数列$\{a_n\}$中，$a_1=\frac{1}{2}$，$a_2=\frac{1}{3}$，$a_na_{n+2}=1$，则$a_{2\,017}+a_{2\,018}=$_____.

微信公众号 教辅资料站

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

学习札记

三、解答题

8. 已知不等式$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}+\cdots+\frac{1}{n+n}>a$对于一切大于 1 的自然数 n 都成立，求实数 a 的取值范围.

9. 已知函数 $f(x)=2^x-2^{-x}$，数列$\{a_n\}$满足 $f(\log_2 a_n)=-2n(n\in\mathbf{N}_+)$.

(1)求数列$\{a_n\}$的通项公式；

(2)判断数列$\{a_n\}$的增减性.

微信公众号
教辅资料站

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

学习札记

§2　等差数列

2.1　等差数列

第一课时　等差数列(一)

1 基础知识点对点

知识点一　等差数列的概念及通项公式

1.(2018·安徽宿州市十三校期中)数列 2,5,8,11,…,则 23 是这个数列的　(　)

A. 第 5 项　　B. 第 6 项

C. 第 7 项　　D. 第 8 项

2. 由 $a_1=1, d=3$ 确定的等差数列 $\{a_n\}$,当 $a_n=295$ 时,序号 n 等于　(　)

A. 98　　B. 99

C. 95　　D. 100

知识点二　等差中项

3. 一个等差数列的前 4 项是 $a, x, b, 2x$,则 $\frac{a}{b}=$(　)

A. $\frac{1}{4}$　　B. $\frac{1}{2}$

C. $\frac{1}{3}$　　D. $\frac{2}{3}$

知识点三　等差数列的判断与证明

4. 在数列 $\{a_n\}$ 中,$a_1=1$,点 (a_n, a_{n+1}) 在直线 $x-y+1=0$ 上,则 $a_8=$　(　)

A. 6　　B. 8

C. -8　　D. -6

5. 已知数列 $\{a_n\}$ 是等差数列,若 $b_n=2a_n+3a_{n+1}$,则数列 $\{b_n\}$ 是否为等差数列?并说明理由.

2 课后拔高提能练

一、选择题

1.(2018·陕西西北大学附中)等差数列 $\{a_n\}$ 中,已知 $a_1=\frac{1}{3}, a_2+a_5=4, a_n=33$,则 $n=$　(　)

A. 48　　B. 49

C. 50　　D. 51

2.(2019·福州质检)已知数列 $\{a_n\}$ 是等差数列,且 $a_7-2a_4=6, a_3=2$,则公差 $d=$　(　)

A. $2\sqrt{2}$　　B. 4

C. 8　　D. 16

3. 等差数列 $\{a_n\}$ 中,$a_1=70$,公差 $d=-9$,则这个数列中绝对值最小的一项是　(　)

A. a_8　　B. a_9

C. a_{10}　　D. a_{11}

4.(2018·保定期中)首项为 -24 的等差数列,从第 10 项起为正数,则公差 d 的取值范围是　(　)

A. $d>\frac{8}{3}$　　B. $d<3$

C. $\frac{8}{3}\leqslant d<3$　　D. $\frac{8}{3}<d\leqslant 3$

二、填空题

5.(2018·北京卷)设 $\{a_n\}$ 是等差数列,且 $a_1=3, a_2+a_5=36$,则 $\{a_n\}$ 的通项公式为_____.

6. 已知等差数列 $\{a_n\}$ 中,a_2 与 a_6 的等差中项为 5,a_3 与 a_7 的等差中项为 7,则 $a_n=$_____.

7.(2019·河北邯郸调研)在数列 $\{a_n\}$ 中,$a_1=2, 2a_{n+1}=2a_n+1$,则 $a_{101}=$_____.

微信公众号 教辅资料站

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

学习札记

三、解答题

8. 在等差数列$\{a_n\}$中.

(1)若$a_1=8$,$a_9=-2$,求d与a_{16};

(2)若$a_1+a_6=12$,$a_4=7$,求a_9.

9. 已知数列$\{a_n\}$满足$a_1=2$,$a_{n+1}=\dfrac{2a_n}{a_n+2}$.

(1)数列$\left\{\dfrac{1}{a_n}\right\}$是否为等差数列?说明理由;

(2)求数列$\{a_n\}$的通项公式.

微信公众号
教辅资料站

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

学习札记

第二课时　等差数列(二)

1 基础知识点对点

知识点一　等差数列的性质

1. 在等差数列$\{a_n\}$中，$a_7+a_9=16$，$a_4=1$，则a_{12}的值为（　　）

A. 15　　B. 30

C. 31　　D. 64

2. **(2019·河北唐山模拟)**在等差数列$\{a_n\}$中，$a_4=2$，且$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{10}=65$，则公差$d$的值为（　　）

A. $\frac{9}{2}$　　B. 3

C. $\frac{9}{4}$　　D. 2

知识点二　等差数列的综合问题

3. **(2018·云南昆明三中期中)**等差数列$\{a_n\}$的公差为2，若$a_1+a_3+a_5=3$，则$a_4+a_6+a_8=$（　　）

A. 30　　B. 21

C. 18　　D. 15

4. 在等差数列$\{a_n\}$中，a_3，a_9是方程$x^2-12x-5=0$的两个根，则$a_6=$（　　）

A. 12　　B. 6

C. 5　　D. -6

5. 已知三个数成等差数列，它们的和为9，积为-21，求这三个数.

2 课后拔高提能练

一、选择题

1. 已知等差数列$\{a_n\}$中，$a_7=\frac{\pi}{4}$，则$\tan(a_6+a_7+a_8)=$（　　）

A. $-\frac{\sqrt{3}}{3}$　　B. $-\sqrt{2}$

C. -1　　D. 1

2. 已知等差数列$\{a_n\}$的前三项依次为$a-1$，$a+1$，$2a+3$，则此数列的通项公式$a_n=$（　　）

A. $2n+1$　　B. $2n-1$

C. $2n-3$　　D. $2n-5$

3. **(2018·广东佛山一中期末)**设$\{a_n\}$是公差为正数的等差数列，若$a_1+a_2+a_3=15$，$a_1a_2a_3=80$，则$a_{11}+a_{12}+a_{13}=$（　　）

A. 120　　B. 105

C. 90　　D. 75

4. 设数列$\{a_n\}$，$\{b_n\}$都是等差数列，且$a_1=25$，$b_1=75$，$a_2+b_2=100$，那么由a_n+b_n所组成的数列的第37项的值为（　　）

A. 0　　B. 37

C. 100　　D. -37

二、填空题

5. 已知数列$\{a_n\}$是等差数列，且$a_1+a_7+a_{13}=2\pi$，则$\sin a_7=$_____.

6. 在等差数列$\{a_n\}$中，$a_3=m$，$a_6=n$，则$a_{18}=$_____.

7. 在等差数列$\{a_n\}$中，$a_2+a_4=4$，$a_3+a_5=10$，则$a_{99}=$_____.

微信公众号 教辅资料站

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

学习札记

三、解答题

8. 已知 $f(x)=x^2-2x-3$，等差数列 $\{a_n\}$ 中，$a_1=f(x-1)$，$a_2=-\frac{3}{2}$，$a_3=f(x)$.

(1)求 x 的值；

(2)求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式 a_n.

9. 已知函数 $f(x)=\frac{3x}{x+3}$，数列 $\{x_n\}$ 的通项由 $x_n=f(x_{n-1})(n\geqslant 2$，且 $n\in\mathbf{N}_+)$ 确定.

(1)求证：$\left\{\frac{1}{x_n}\right\}$ 是等差数列；

(2)当 $x_1=\frac{1}{2}$ 时，求 $x_{2\,014}$.

微信公众号
教辅资料站

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

学习札记

2.2　等差数列的前 n 项和

第一课时　等差数列的前 n 项和(一)

1 基础知识点对点

知识点一　与 S_n 有关的基本量的计算

1. 在等差数列 $\{a_n\}$ 中，$a_2=1$，$a_4=5$，则 $\{a_n\}$ 的前 5 项和 $S_5=$　　(　　)

A. 7　　B. 15

C. 20　　D. 25

2. 已知 $\{a_n\}$ 为等差数列，$a_{10}=10$，前 10 项和 $S_{10}=70$，则公差 d 等于　　(　　)

A. $-\frac{2}{3}$　　B. $-\frac{1}{3}$

C. $\frac{1}{3}$　　D. $\frac{2}{3}$

知识点二　等差数列前 n 项和的最值

3. **(2018·四川雅安市期末)** 等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，若 $a_1=-12$，$S_5=S_8$，则当 S_n 取最小值时，n 的值为　　(　　)

A. 6　　B. 7

C. 8　　D. 6 或 7

知识点三　等差数列前 n 项和的应用

4. **(2018·河北唐山一中期末)** 设 S_n 是等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和，若 $\frac{a_5}{a_3}=\frac{5}{9}$，则 $\frac{S_9}{S_5}=$　　(　　)

A. 1　　B. -1

C. 2　　D. $\frac{1}{2}$

5. 已知等差数列 $\{a_n\}$ 中，公差 $d=2$，$a_n=11$，$S_n=35$，求 a_1 和 n.

2 课后拔高提能练

一、选择题

1. **(2018·安徽芜湖市期末)** 在等差数列 $\{a_n\}$ 中，$S_{10}=240$，则 a_1+a_{10} 的值为　　(　　)

A. 12　　B. 24

C. 36　　D. 48

2. **(2019·河南洛阳模拟)** 在等差数列 $\{a_n\}$ 中，$a_3+a_9=27-a_6$，S_n 表示数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和，则 $S_{11}=$　　(　　)

A. 18　　B. 99

C. 198　　D. 297

3. **(2018·郑州模拟)** 已知数列 $\{a_n\}$ 是等差数列，其前 n 项和为 S_n，若 $a_1a_2a_3=10$，且 $\frac{5}{S_1S_5}=\frac{1}{5}$，则 $a_2=$　　(　　)

A. 2　　B. 3

C. 4　　D. 5

4. 记等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，若 $S_2=4$，$S_4=20$，则该数列的公差 $d=$　　(　　)

A. 2　　B. 3

C. 6　　D. 7

二、填空题

5. 已知公差不为零的等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，若 $a_{10}=S_4$，则 $\frac{S_8}{a_9}$ 等于_____.

6. S_n 为等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和，已知 $a_{13}+a_{14}=20$，$a_{15}+a_{16}=16$，则 $S_{28}=$_____.

7. **(2019·山西大同调研)** 设等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，等差数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和为 T_n，若 $\frac{S_n}{T_n}=\frac{n+1}{n-1}$，则 $\frac{a_2}{b_4+b_6}+\frac{a_8}{b_3+b_7}=$_____.

微信公众号 教辅资料站

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

学习札记

三、解答题

8.（2018·全国卷Ⅱ）记 S_n 为等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和，已知 $a_1=-7$，$S_3=-15$.

(1)求 $\{a_n\}$ 的通项公式；

(2)求 S_n，并求 S_n 的最小值.

9. 等差数列 $\{a_n\}$ 中，$a_3+a_4=4$，$a_5+a_7=6$.

(1)求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；

(2)设 $b_n=[a_n]$，求数列 $\{b_n\}$ 的前 10 项和，其中 $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数，如 $[0.9]=0$，$[2.6]=2$.

微信公众号
教辅资料站

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

学习札记

第二课时　等差数列的前 n 项和(二)

1 基础知识点对点

知识点一　等差数列前 n 项和的性质

1. 已知等差数列$\{a_n\}$共 10 项，其奇数项之和为 15，偶数项之和为 30，则公差 $d=$　　(　　)

A. 5　　B. 4

C. 3　　D. 2

2. 设 S_n 为等差数列$\{a_n\}$的前 n 项和，若 $S_{10}=10$，$S_{20}=30$，则 S_{30} 等于　　(　　)

A. 20　　B. 40

C. 30　　D. 60

知识点二　等差数列的综合应用

3. **(2019·贵州遵义一中月考)** 已知在等差数列$\{a_n\}$中，前 n 项和为 S_n，若 $a_3+a_9=6$，则 $S_{11}=$　　(　　)

A. 12　　B. 33

C. 66　　D. 99

4. **(2018·河北枣强中学期中)** 已知等差数列$\{a_n\}$中，$|a_3|=|a_9|$，公差 $d<0$，则使前 n 项和取最大值的正整数 n 是　　(　　)

A. 4 或 5　　B. 5 或 6

C. 6 或 7　　D. 8

知识点三　数列中 S_n 与 a_n 的关系

5. 若数列$\{a_n\}$的前 n 项和 $S_n=n^2-10n(n\in\mathbf{N}_+)$，求数列$\{a_n\}$的通项公式及 S_n 的最小值.

2 课后拔高提能练

一、选择题

1. **(2018·河北石家庄一中期末)** 等差数列$\{a_n\}$中，$a_1=2\,017$，前 n 项和为 S_n，$\frac{S_{12}}{12}-\frac{S_{10}}{10}=-2$，则 $S_{2\,017}$ 的值为　　(　　)

A. 4 034　　B. 2 018

C. 2 017　　D. 4 036

2. **(2018·河南部分重点中学联考)** 设 S_n 是公差不为零的等差数列$\{a_n\}$的前 n 项和，且 $a_1>0$，若 $S_5=S_9$，则当 S_n 最大时，$n=$　　(　　)

A. 6　　B. 7

C. 10　　D. 9

3. **(2018·全国卷Ⅰ)** 设 S_n 为等差数列$\{a_n\}$的前 n 项和，若 $3S_3=S_2+S_4$，$a_1=2$，则 $a_5=$　　(　　)

A. -12　　B. -10

C. 10　　D. 12

4. **(2018·广州模拟)** 各项均不为零的等差数列$\{a_n\}$中，若 $3a_n^2-na_{n-1}-na_{n+1}=0(n\in\mathbf{N}_+,n\geqslant 2)$，则 $S_{30}=$　　(　　)

A. 310　　B. 270

C. 210　　D. 180

二、填空题

5. 数列$\{a_n\}$的通项公式 $a_n=\frac{1}{n(n+1)}(n\in\mathbf{N}_+)$，若前 n 项和 $S_n=\frac{10}{11}$，则 $n=$_____.

6. 设数列$\{a_n\}$的通项公式为 $a_n=2n-7$，则 $|a_1|+|a_2|+\cdots+|a_{15}|=$_____.

7. **(2019·山西平遥中学等联考)** 设等差数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 S_n，$S_{m-1}=-2$，$S_m=0$，$S_{m+1}=3$，则 $m=$_____.

微信公众号 教辅资料站

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

学习札记

三、解答题

8. 在等差数列$\{a_n\}$中，S_n 为其前 n 项和，若 $a_2=1$，$a_7=-9$.

(1)求 S_n；

(2)求数列$\{|a_n|\}$的前 n 项和 T_n.

9. 从 4 月 1 日开始，有一新款服装投入某商场销售，4 月 1 日该款服装销售出 10 件，第二天销售出 25 件，第三天销售出 40 件，以后每天售出的件数分别递增 15 件，直到 4 月 12 号日销售量达到最大，然后，每天销售的件数分别递减 10 件.

(1)记该款服装 4 月份日销售量与销售天数 n 的关系为 a_n，求 a_n；

(2)求 4 月份的总销售量；

(3)按规律，当该商场销售此服装超过 1 200 件时，社会上就流行，而且销售量连续下降，且日销量低于 100 件时，则流行消失，问：该款服装在社会上流行是否超过 10 天？

微信公众号
教辅资料站

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

学习札记

§3　等比数列

3.1　等比数列

第一课时　等比数列(一)

1 基础知识点对点

知识点一　等比数列的概念及通项公式

1. 等比数列 $x,3x+3,6x+6,\cdots$ 的第四项等于（　　）

A. -24　　B. 0

C. 12　　D. 24

2. 已知等比数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1+a_2=3,a_2+a_3=6$，则 $a_7=$（　　）

A. 64　　B. 81

C. 128　　D. 243

知识点二　等比数列的判断或证明

3. 下面各数列成等比数列的是（　　）

①$-1,-2,-4,-8,\cdots$；②$1,-\sqrt{3},3,-3\sqrt{3},\cdots$；

③$x,x,x,x,\cdots$；④$\frac{1}{a},\frac{1}{a^2},\frac{1}{a^3},\frac{1}{a^4},\cdots$.

A. ①②③　　B. ①②

C. ①②④　　D. ①②③④

4. 设数列 $\{a_n\}$ 为等比数列，则下面四个数列：①$\{a_n^3\}$；②$\{pa_n\}$（p 为非零常数）；③$\{a_n\cdot a_{n+1}\}$；④$\{a_n+a_{n+1}\}$ 中等比数列的个数是（　　）

A. 1 个　　B. 2 个

C. 3 个　　D. 4 个

5. 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，且 $S_n=\frac{1}{3}(a_n-1)$ $(n\in\mathbf{N}_+)$.

(1)求 a_1,a_2；

(2)求证：数列 $\{a_n\}$ 是等比数列.

2 课后拔高提能练

一、选择题

1. 已知等比数列 $\{a_n\}$ 的公比 $q=-\frac{1}{3}$，则 $\frac{a_1+a_3}{a_2+a_4}$ 等于（　　）

A. $-\frac{1}{3}$　　B. -3

C. $\frac{1}{3}$　　D. 3

2. **(2018·河北唐山一中期末)** 在等比数列 $\{a_n\}$ 中，若 $a_1+a_4=18,a_2+a_3=12$，则这个数列的公比为（　　）

A. 2　　B. $\frac{1}{2}$

C. 2 或 $\frac{1}{2}$　　D. -2 或 $\frac{1}{2}$

3. **(2019·太原模拟)** 在单调递减的等比数列 $\{a_n\}$ 中，$a_3=1,a_2+a_4=\frac{5}{2}$，则 $a_1=$（　　）

A. 2　　B. 4

C. $\sqrt{2}$　　D. $2\sqrt{2}$

4. 在等比数列 $\{a_n\}$ 中，$|a_1|=1,a_5=-8a_2,a_5>a_2$，则 a_n 等于（　　）

A. $(-2)^{n-1}$　　B. $-(-2)^{n-1}$

C. $(-2)^n$　　D. $-(-2)^n$

二、填空题

5. 各项为正数的等比数列 $\{a_n\}$ 中，$a_2,\frac{1}{2}a_3,a_1$ 成等差数列，则 $\frac{a_1+a_5}{a_3+a_4}$ 的值为_____.

6. 数列 $\{a_n\}$ 中，$a_1=2,a_2=-1,a_n^2=a_{n-1}\cdot a_{n+1}$ $(n\geqslant 2)$，则 $a_n=$_____.

7. 等差数列 $\{a_n\}$ 中，$a_1=2$，公差 $d\neq 0$，a_1,a_3,a_{11} 恰为某等比数列的前三项，那么该数列的公比 $q=$_____.

微信公众号 教辅资料站
关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

学习札记

三、解答题

8.（2018·保定高二月考）已知等比数列$\{a_n\}$中，$a_1=1$，公比$q\neq0$，且$b_n=a_{n+1}-a_n$.

(1)判断$\{b_n\}$是否为等比数列？并说明理由；

(2)求数列$\{b_n\}$的通项公式。

9. 数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，已知$a_1=1$，$a_{n+1}=\frac{n+2}{n}S_n$（$n=1,2,3,\cdots$）. 证明：

(1)数列$\left\{\frac{S_n}{n}\right\}$是等比数列；

(2)$S_{n+1}=4a_n$.

微信公众号
教辅资料站

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

学习札记

第二课时　等比数列(二)

1 基础知识点对点

知识点一　等比数列性质的应用

1. 已知 a,b,c,d 成等比数列，且曲线 $y=x^2-2x+3$ 的顶点是 (b,c)，则 ad 等于　　(　　)

A. 3　　B. 2

C. 1　　D. -2

2. 等比数列 $\{a_n\}$ 的公比 $q>1$，$\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_3}=3$，$a_1a_4=\frac{1}{2}$，则 $a_3+a_4+a_5+a_6+a_7+a_8$ 等于　　(　　)

A. 64　　B. 31

C. 32　　D. 63

知识点二　等比中项的应用

3. 在等比数列 $\{a_n\}$ 中，$a_4=4$，则 $a_2\cdot a_6=$　　(　　)

A. 4　　B. 8

C. 16　　D. 32

4. 已知 1 是 a^2 与 b^2 的等比中项，又是 $\frac{1}{a}$ 与 $\frac{1}{b}$ 的等差中项，则 $\frac{a+b}{a^2+b^2}$ 的值是　　(　　)

A. 1 或 $\frac{1}{2}$　　B. 1 或 $-\frac{1}{2}$

C. 1 或 $\frac{1}{3}$　　D. 1 或 $-\frac{1}{3}$

知识点三　等比数列的实际应用

5. 某市 2015 年新建住房 400 万平方米，其中 250 万平方米是中低价房，预计今年后的若干年内，该市每年新建住房面积平均比上一年增长 8%．另外，每年新建住房中，中低价房的面积比上一年增加 50 万平方米，那么到哪一年底：

(1)该市历年所建中低价房的累计面积(以 2015 年为累计的第一年)将首次不少于 4 750 万平方米；

(2)当年建造的中低价房的面积占该年建造住房面积的比例首次大于 85%．

2 课后拔高提能练

一、选择题

1. $3+\sqrt{5}$ 与 $3-\sqrt{5}$ 的等比中项为　　(　　)

A. 2　　B. -2

C. ±2　　D. 4

2. 在等比数列 $\{a_n\}$ 中，$a_1a_2a_3=8$，$a_1+a_2+a_3=7$，则公比 q 的值为　　(　　)

A. 2　　B. $\frac{1}{2}$

C. $\frac{1}{2}$ 或 2　　D. -2 或 $-\frac{1}{2}$

3. **(2018·沈阳模拟)** 在等比数列 $\{a_n\}$ 中，若 a_3，a_7 是函数 $f(x)=3x^2-11x+9$ 的两个零点，则 $a_5=$　　(　　)

A. 3　　B. ±3

C. $\pm\sqrt{3}$　　D. $\sqrt{3}$

4. **(2019·河南许昌调研)** 各项都为正数的等比数列 $\{a_n\}$ 中，$3a_1$，$\frac{1}{2}a_3$，$2a_2$ 成等差数列，则 $\frac{a_{10}+a_{12}+a_{15}+a_{19}+a_{20}+a_{23}}{a_8+a_{10}+a_{13}+a_{17}+a_{18}+a_{21}}=$　　(　　)

A. 1　　B. 3

C. 6　　D. 9

二、填空题

5. 已知等比数列 $\{a_n\}$ 中，$a_1a_{10}=5$，则 $a_4a_5a_6a_7=$ _____．

6. **(2018·山东威海模拟)** 在等比数列 $\{a_n\}$ 中，$a_n>a_{n+1}$，且 $a_7\cdot a_{11}=6$，$a_4+a_{14}=5$，则 $\frac{a_6}{a_{16}}=$ _____．

7. 在等比数列 $\{a_n\}$ 中，$a_m=10^k$，$a_k=10^m$，则 $a_{m+k}=$ _____．

微信公众号 教辅资料站

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

学习札记

三、解答题

8. 互不相等的三个数之积为 -8，这三个数适当排列后可成为等比数列，也可排成等差数列，求这三个数排成的等差数列.

9. 已知数列 $\{a_n\}$ 的通项公式 $a_n=\frac{n}{n+a}(n,a\in\mathbf{N}_+)$.

(1) 若 a_1,a_3,a_{15} 成等比数列，求 a_5 的值；

(2) 当 k 满足 $k\geqslant 3$ 且 $k\in\mathbf{N}_+$ 时，a_1,a_2,a_k 成等差数列，求 a 的值.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

学习札记

3.2　等比数列的前 n 项和

第一课时　等比数列的前 n 项和(一)

1 基础知识点对点

知识点一　等比数列前 n 项和的基本运算

1. 等比数列$\{a_n\}$中，$a_1=2$，$q=2$，$S_n=126$，则 $n=$　(　　)

A. 6　　B. 7

C. 8　　D. 9

2. **(2018·安徽淮南市模拟)**已知数列$\{a_n\}$满足：$a_{n+1}+2a_n=0$，且 $a_2=2$，则$\{a_n\}$的前 10 项和等于　(　　)

A. $\dfrac{1-2^{10}}{3}$　　B. $-\dfrac{1-2^{10}}{3}$

C. $2^{10}-1$　　D. $1-2^{10}$

知识点二　等比数列前 n 项和的性质

3. 等比数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 S_n，$S_2=7$，$S_6=91$，则 S_4 为　(　　)

A. 28　　B. 32

C. 21　　D. 28 或 −21

4. 设各项都是正数的等比数列$\{a_n\}$中，S_n 为其前 n 项和，且 $S_{10}=10$，$S_{30}=70$，那么 $S_{40}=$　(　　)

A. 150　　B. −200

C. 150 或 −200　　D. 400 或 −50

知识点三　数列的综合问题

5. **(2017·全国卷Ⅱ)**已知等差数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 S_n，等比数列$\{b_n\}$的前 n 项和为 T_n，$a_1=-1$，$b_1=1$，$a_2+b_2=2$.

(1)若 $a_3+b_3=5$，求$\{b_n\}$的通项公式；

(2)若 $T_3=21$，求 S_3.

2 课后拔高提能练

一、选择题

1. 在等比数列$\{a_n\}$中，$a_2=3$，$a_5=81$，则数列$\{a_n\}$的前 5 项的和 $S_5=$　(　　)

A. 121　　B. 243

C. 242　　D. 122

2. **(2019·河南六市联考)**在明朝程大位《算法统宗》中有这样的一首歌谣："远看巍巍塔七层，红光点点倍加增，共灯三百八十一，请问尖头几盏灯？"这首古诗描述的这个宝塔其古称浮屠，本题说它一共有 7 层，每层悬挂的红灯数是上一层的 2 倍，共有 381 盏灯，问塔顶有几盏灯　(　　)

A. 5　　B. 6

C. 4　　D. 3

3. 已知等比数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 $S_n=3^n+r$，q 为数列$\{a_n\}$的公比，则下列说法正确的是　(　　)

A. $q=3$，$r=1$　　B. $q=3$，$r=-1$

C. $q=-3$，$r=1$　　D. 不确定

4. **(2018·南昌模拟)**数列$\{a_n\}$为各项均为正数的等比数列，其前 n 项和为 S_n. 若 $a_3=4$，$S_3=7$，则公比 q 等于　(　　)

A. $\dfrac{1}{2}$　　B. $\dfrac{3}{2}$

C. 2　　D. 3

二、填空题

5. **(2018·太原模拟)**等比数列$\{a_n\}$的公比 $q=2$，前 n 项和为 S_n，则$\dfrac{S_4}{a_2}=$_____.

6. **(2017·江苏卷)**等比数列$\{a_n\}$的各项均为实数，其前 n 项和为 S_n. 已知 $S_3=\dfrac{7}{4}$，$S_6=\dfrac{63}{4}$，则 $a_8=$_____.

7. 若$\{a_n\}$是等比数列，公比 $q=3$，前 80 项和为 32，则 $a_2+a_4+\cdots+a_{80}=$_____.

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

学习札记

三、解答题

8.（2017·北京卷）已知等差数列$\{a_n\}$和等比数列$\{b_n\}$满足$a_1=b_1=1$，$a_2+a_4=10$，$b_2b_4=a_5$.

(1)求$\{a_n\}$的通项公式；

(2)求和：$b_1+b_3+b_5+\cdots+b_{2n-1}$.

9.（2018·北京卷）设$\{a_n\}$是等差数列，且$a_1=\ln 2$，$a_2+a_3=5\ln 2$.

(1)求$\{a_n\}$的通项公式；

(2)求$e^{a_1}+e^{a_2}+\cdots+e^{a_n}$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

学习札记

第二课时　等比数列的前 n 项和(二)

1 基础知识点对点

知识点一　错位相减法求和

1. **(2018·河南商丘市模拟)** 已知首项为 $\frac{3}{2}$ 的等比数列 $\{a_n\}$ 不是递减数列，其前 n 项和为 $S_n(n\in\mathbf{N}_+)$，且 S_3+a_3，S_5+a_5，S_4+a_4 成等差数列.

(1)求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；

(2)设数列 $b_n=(-1)^{n+1}\cdot n(n\in\mathbf{N}_+)$，求数列 $\{a_n\cdot b_n\}$ 的前 n 项和 T_n.

知识点二　等比数列前 n 项和的实际应用

2. 某科研单位欲拿出一定的经费奖励科研人员，第 1 名得全部资金的一半多一万元，第二名得剩下的一半多一万元，以名次类推都得到剩下的一半多一万元，到第 10 名恰好资金分完，求此科研单位共拿出多少万元资金进行奖励.

2 课后拔高提能练

一、选择题

1. 等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，且 $4a_1$，$2a_2$，a_3 成等差数列. 若 $a_1=1$，则 $S_4=$　(　)

A. 7　　B. 8

C. 15　　D. 16

2. 在正项等比数列 $\{a_n\}$ 中，$a_2a_4=4$，$S_3=14$，数列 $\{b_n\}$ 满足 $b_n=\log_2 a_n$，则数列 $\{b_n\}$ 的前 6 项的和为　(　)

A. 0　　B. 2

C. 3　　D. 5

3. 若数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_{n+1}=10a_n$，且 $a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{100}=100$，则 $\lg(a_{101}+a_{102}+a_{103}+\cdots+a_{200})$ 的值为　(　)

A. 102　　B. 101

C. 100　　D. 99

4. 满足 $a_1=1$，$\log_2 a_{n+1}=\log_2 a_n+1(n\in\mathbf{N}_+)$ 的数列 $\{a_n\}$，它的前 n 项和为 S_n，则满足 $S_n>1\,025$ 的最小 n 值是　(　)

A. 9　　B. 10

C. 11　　D. 12

二、填空题

5. **(2018·哈尔滨三中模拟)** 在各项均为正数的等比数列 $\{a_n\}$ 中，$a_{m+1}\cdot a_{m-1}=2a_m(m\geqslant 2)$，数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项积为 T_n，若 $T_{2m-1}=512$，则 $m=$_____.

6. **(2019·保定联考)** 数列 $\{a_n\}$ 的首项 $a_1=1$，数列 $\{b_n\}$ 为等比数列，且 $b_n=\frac{a_{n+1}}{a_n}$，若 $b_{10}b_{11}=2\,018^{\frac{1}{10}}$，则 $a_{21}=$_____.

7. **(2018·全国卷Ⅰ)** 记 S_n 为数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和，若 $S_n=2a_n+1$，则 $S_6=$_____.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

学习札记

三、解答题

8.（2018·四川宜宾模拟）若等比数列$\{a_n\}$的各项均为正数，且$a_1+6a_2=1$，$a_3^2=9a_1a_7$.

（1）求数列$\{a_n\}$的通项公式；

（2）设$b_n=\log_3 a_1+\log_3 a_2+\log_3 a_3+\cdots+\log_3 a_n$，求数列$\left\{\frac{1}{b_n}\right\}$的前$n$项和$T_n$.

9.（2018·浙江卷）已知等比数列$\{a_n\}$的公比$q>1$，且$a_3+a_4+a_5=28$，a_4+2是a_3，a_5的等差中项. 数列$\{b_n\}$满足$b_1=1$，数列$\{(b_{n+1}-b_n)a_n\}$的前n项和为$2n^2+n$.

（1）求q的值；

（2）求数列$\{b_n\}$的通项公式.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

学习札记

§4 数列在日常经济生活中的应用

1 基础知识点对点

知识点一 利用等差数列模型解题

1. 某人从1月起每月第一天存入100元，到12月最后一天取出全部本金和利息，已知月利率是0.165%，按单利计息，那么实际取出多少钱？

知识点二 利用等比数列模型解题

2. 已知一个蜂巢里有1只蜜蜂，第1天，它飞出去找回了4个伙伴；第2天，5只蜜蜂飞出去，各自找回了4个伙伴，……按照这个规律继续下去，第20天所有的蜜蜂都归巢后，蜂巢中一共有蜜蜂 （ ）

A. 4^{20}只　　B. 5^{20}只

C. $\frac{5^{20}-5}{4}$只　　D. $\frac{4^{21}-4}{3}$只

知识点三 等差、等比数列的综合应用

3. 某工厂为扩大生产规模，2015年初新购置了一条高性能的生产线，该生产线在使用过程中的维护费用会逐年增加，第1年的维护费用是4万元，从第2年到第7年，每年的维护费用均比上年增加2万元，从第8年开始，每年的维护费用比上年增加25%.

(1)设该生产线第n年的维护费用为a_n，求a_n的表达式；

(2)设该生产线前n年维护费用总和为S_n，求该生产线前n年平均维护费用的表达式.

2 课后拔高提能练

一、选择题

1. 某城市决定从2017年到2021年五年间更新市内原有的全部出租车.若每年更新的车辆数比前一年递增10%，则2017年年底更新原有总车辆的(参考数据：$1.1^4\approx1.46$，$1.1^5\approx1.61$) （ ）

A. 10%　　B. 16.4%

C. 16.8%　　D. 20%

2. 某储蓄所计划从2017年起，力争做到每年的吸蓄量比前一年增加8%，则到2020年底该储蓄所的吸蓄量比2017年的吸蓄量增加 （ ）

A. 24%

B. $(1+8\%)^4$

C. $(1+8\%)^4-1$

D. $(1+8\%)^3-1$

3. 某工厂总产值月平均增长率为p，则年平均增长率为 （ ）

A. p　　B. $12p$

C. $(1+p)^{12}$　　D. $(1+p)^{12}-1$

4. 某工厂2016年生产某种产品2万件，计划从2018年开始，每年的产量比上一年增长20%，经过n年这家工厂生产这种产品的年产量超过12万件，则n的值为(已知$\lg 2=0.3010$，$\lg 3=0.4771$) （ ）

A. 10　　B. 11

C. 12　　D. 13

二、填空题

5. 某种产品平均每三年降低价格的$\frac{1}{4}$，目前售价为640元，则9年后的产品价格为_____.

6. 某住宅小区计划植树不少于100棵，若第一天植树2棵，以后每天植树的棵数是前一天的2倍，则需要的最少天数n=_____.

7. **(2018·保定高三月考)**现有一根n节的竹杆，自上而下每节的长度构成等差数列，最上面一节长为10 cm，最下面三节长度之和为114 cm，第6节的长度是首节与末节长度的等比中项，则n=_____.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

学习札记

三、解答题

8. 为了参加运动会的 5 000 m 长跑比赛，李强给自己制定了 10 天的计划：第一天跑 5 000 m，以后每天比前一天多跑 500 m，则李强 10 天将要跑多少 m？

9. 银行按规定在一定时间计算利息一次，然后将利息并入本金，这种计算方法叫复利，现在某企业进行技术改造，有两种方案：甲方案一次性贷款 10 万元，第一年可获利 1 万元，以后每一年比前一年增加 30%的利润；乙方案每年贷款 1 万元，第一年可获利 1 万元，以后每年却比前一年增加利润 5 千元. 两种方案使用期都是 10 年，到期一次性还本付息，若银行贷款，利息均按年息 10%的复利计算，试比较两方案的优劣.（结果精确到千元，并取 $1.1^{10}\approx2.594$，$1.3^{10}\approx13.786$）

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

学习札记

阶段质量评估卷(一)

时间:45 分钟　满分:100 分

一、选择题(6×5=30 分)

1. 数列$\{a_n\}$的通项公式是$a_n=\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}$,若前 n 项和为 10,则项数为 (　　)

A. 11　　B. 99

C. 120　　D. 121

2. 已知$\{a_n\}$为等差数列,若 $a_3+a_4+a_8=9$,则 $S_9=$ (　　)

A. 24　　B. 27

C. 15　　D. 54

3. 等差数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 S_n,若 $a_1=2$,$S_3=12$,则 a_6 等于 (　　)

A. 8　　B. 10

C. 12　　D. 14

4. 已知数列$\{a_n\}$的前 n 项和$S_n=1-5+9-13+17-21+\cdots+(-1)^{n-1}(4n-3)$,则 $S_{15}+S_{22}-S_{31}$的值为 (　　)

A. 13　　B. -76

C. 46　　D. 76

5. 正项等比数列$\{a_n\}$满足 $a_3=1$,$S_3=13$,$b_n=\log_3 a_n$,则数列$\{b_n\}$的前 10 项和是 (　　)

A. 65　　B. -65

C. 25　　D. -25

6. **(2018·江西萍乡市芦溪中学期末)**《莱因德纸草书》(Rhind Papyrus)是世界上最古老的数学著作之一.书中有一道这样的题目:把 100 个面包分给 5 个人,使每个人所得成等差数列,且使较大的三份之和的$\frac{1}{7}$是较小的两份之和,问最小一份为(　　)

A. $\frac{5}{3}$　　B. $\frac{10}{3}$

C. $\frac{5}{6}$　　D. $\frac{11}{6}$

二、填空题(3×5=15 分)

7. **(2019·江西红色六校联考)**等比数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 S_n,公比 $q\neq1$,若 $a_1=1$,且对任意 $n\in\mathbf{N}_+$都有 $a_{n+2}+a_{n+1}-2a_n=0$,则 $S_5=$_____.

8. 若等比数列$\{a_n\}$的各项均为正数,且 $a_{10}a_{11}+a_9a_{12}=2e^5$,则 $\ln a_1+\ln a_2+\cdots+\ln a_{20}=$_____.

9. **(2018·浙江卷)**已知集合 $A=\{x\mid x=2n-1,n\in\mathbf{N}^*\}$,$B=\{x\mid x=2^n,n\in\mathbf{N}^*\}$.将 $A\cup B$ 的所有元素从小到大依次排列构成一个数列$\{a_n\}$.记 S_n 为数列$\{a_n\}$的前 n 项和,则使得 $S_n>12a_{n+1}$成立的 n 的最小值为_____.

三、解答题(55 分)

10. (13 分)**(2018·天津卷)**设$\{a_n\}$是等差数列,其前 n 项和为 $S_n(n\in\mathbf{N}^*)$;$\{b_n\}$是等比数列,公比大于 0,其前 n 项和为 $T_n(n\in\mathbf{N}^*)$.已知 $b_1=1$,$b_3=b_2+2$,$b_4=a_3+a_5$,$b_5=a_4+2a_6$.

(1)求 S_n 和 T_n;

(2)若 $S_n+(T_1+T_2+\cdots+T_n)=a_n+4b_n$,求正整数 n 的值.

11. (13 分)**(2018·东北三省四市二联)**等差数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 S_n,且满足 $a_1+a_7=-9$,$S_9=-\frac{99}{2}$.

(1)求数列$\{a_n\}$的通项公式;

(2)设 $b_n=\frac{1}{2S_n}$,数列$\{b_n\}$的前 n 项和为 T_n,求证:$T_n>-\frac{3}{4}$.

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

学习札记

12.（14 分）**(2019・湖南岳阳质检)**已知$\{a_n\}$是各项均为正数的等比数列，$\{b_n\}$是等差数列，且 $a_1=b_1=1$，$b_2+b_3=2a_3$，$a_5-3b_2=7$.

（1）求$\{a_n\}$和$\{b_n\}$的通项公式；

（2）设 $c_n=a_nb_n$，$n\in\mathbf{N}^*$，求数列$\{c_n\}$的前 n 项和.

13.（15 分）**(2018・吉林五校联考)**设在等差数列$\{a_n\}$和等比数列$\{b_n\}$中，$a_1=1$，$b_1=2$，$b_n>0(n\in\mathbf{N}^*)$，且 b_1，a_2，b_2 成等差数列，a_2，b_2，a_3+2 成等比数列.

（1）求数列$\{a_n\}$，$\{b_n\}$的通项公式；

（2）设 $c_n=a_{b_n}$，数列$\{c_n\}$的前 n 项和为 S_n. 若$\dfrac{S_{2n}+4n}{S_n+2n}<b_{n+1}+t$ 恒成立，求实数 t 的取值范围.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

学习札记

第二章　解三角形

§1　正弦定理与余弦定理

1.1　正弦定理

1 基础知识点对点

知识点一　已知两角一边解三角形

1. 在△ABC中，若$A=30°$，$B=60°$，$b=\sqrt{3}$，则a等于（　　）

A. 3　　B. 1

C. 2　　D. $\frac{1}{2}$

2. **(2018·河北邯郸市期末)** 在△ABC中，角A，B，C的对边分别为a、b、c，$a=3$，$A=45°$，$B=60°$，则$b=$（　　）

A. $\frac{3\sqrt{3}}{2}$　　B. $\frac{3\sqrt{6}}{2}$

C. $\sqrt{3}$　　D. $\sqrt{6}$

知识点二　已知两边及一边的对角解三角形

3. **(2018·山西忻州一中期末)** 满足条件$a=4$，$b=5\sqrt{2}$，$A=45°$的△ABC的个数是（　　）

A. 1　　B. 2

C. 无数个　　D. 不存在

4. **(2018·四川雅安市期末)** 在△ABC中，角A，B，C所对的边为a，b，c，若$a=1$，$b=\sqrt{3}$，$B=120°$，则A等于（　　）

A. 30°　　B. 45°

C. 60°　　D. 120°

知识点三　求三角形的面积

5. 在△ABC中，$A=60°$，$B=45°$，$a=2\sqrt{3}$，求三角形ABC的面积.

2 课后拔高提能练

一、选择题

1. 在△ABC中，若$A=60°$，$B=45°$，$BC=3\sqrt{2}$，则$AC=$（　　）

A. $4\sqrt{2}$　　B. $2\sqrt{3}$

C. $\sqrt{3}$　　D. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

2. **(2018·湖北黄石一中期中)** 在锐角△ABC中，角A，B所对的边分别为a，b. 若$2a\sin B=\sqrt{3}b$，则角$A=$（　　）

A. $\frac{\pi}{3}$　　B. $\frac{\pi}{4}$

C. $\frac{\pi}{6}$　　D. $\frac{\pi}{12}$

3. 在△ABC中，角A，B，C的对边为a，b，c，若$a=\sqrt{3}$，$b=\sqrt{2}$，$B=45°$，则角$A=$（　　）

A. 30°　　B. 30°或150°

C. 60°　　D. 60°或120°

4. **(2018·南京高二期末)** 在△ABC中，$\frac{a}{\cos B}=\frac{b}{\cos A}$，则△$ABC$一定是（　　）

A. 等腰三角形

B. 直角三角形

C. 等腰直角三角形

D. 等腰三角形或直角三角形

二、填空题

5. 在△ABC中，$AB=3$，$AC=4$，$S_{\triangle ABC}=3\sqrt{3}$，则角$A=$_____.

6. 在△ABC中，已知$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\tan A$，当$A=\frac{\pi}{6}$时，△$ABC$的面积为_____.

7. **(2019·成都模拟)** 在△ABC中，内角A，B，C所对的边分别为a，b，c. 若$3a=2b$，则$\frac{2\sin^2 B-\sin^2 A}{\sin^2 A}$的值为_____.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

学习札记

三、解答题

8. 在△ABC 中，角 A，B，C 所对的边分别为 a，b，c，且 $\tan A=2$，$\tan B=3$，$c=2\sqrt{2}$，求 a，b 的值及此三角形的面积.

9. **(2019 · 河北邢台模拟)** 在△ABC 中，角 A，B，C 的对边分别为 a，b，c，且 $2b\cos C+c=2a$.

(1)求 B；

(2)若 $\cos A=\frac{1}{7}$，求 $\frac{c}{a}$ 的值.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

学习札记

1.2　余弦定理

1 基础知识点对点

知识点一　已知两边及一角解三角形

1. 在△ABC中，已知$a=5$，$b=4$，$C=120°$，则c为（　　）

A. $\sqrt{41}$　　B. $\sqrt{61}$

C. $\sqrt{41}$或$\sqrt{61}$　　D. $\sqrt{21}$

2. △ABC的内角A，B，C的对边分别为a，b，c，若$c=\sqrt{2}$，$b=\sqrt{6}$，$B=120°$，则a等于（　　）

A. $\sqrt{6}$　　B. 2

C. $\sqrt{3}$　　D. $\sqrt{2}$

知识点二　已知三边关系解三角形

3. **(2018·宁夏一中月考)** 在△ABC中，内角A，B，C的对边分别为a，b，c，若$a^2-b^2=\sqrt{3}bc$，$\sin C=2\sqrt{3}\sin B$，则$A=$（　　）

A. 30°　　B. 60°

C. 120°　　D. 150°

4. **(2018·重庆七中期中)** 已知在△ABC中，$\sin A:\sin B:\sin C=3:5:7$，那么这个三角形的最大角是（　　）

A. 30°　　B. 45°

C. 60°　　D. 120°

知识点三　三角形形状的判断

5. 已知△ABC中，若$a\cos A=b\cos B$，试判断△ABC的形状.

2 课后拔高提能练

一、选择题

1. 在△ABC中，已知$a=2$，则$b\cos C+c\cos B$等于（　　）

A. 1　　B. $\sqrt{2}$

C. 2　　D. 4

2. 在△ABC中，$AB=3$，$BC=\sqrt{13}$，$AC=4$，则$\sin A=$（　　）

A. $\frac{\sqrt{3}}{2}$　　B. $\frac{1}{2}$

C. $\frac{\sqrt{2}}{2}$　　D. $\frac{\sqrt{3}}{3}$

3. 在△ABC中，a，b，c是A，B，C所对的边，设向量$\boldsymbol{m}=(b-c,c-a)$，$\boldsymbol{n}=(b,c+a)$，若$\boldsymbol{m}\perp\boldsymbol{n}$，则角$A$的大小为（　　）

A. $\frac{2\pi}{3}$　　B. $\frac{\pi}{3}$

C. $\frac{\pi}{2}$　　D. $\frac{\pi}{4}$

4. 在△ABC中，$B=\frac{\pi}{4}$，BC边上的高等于$\frac{1}{3}BC$，则$\cos A=$（　　）

A. $\frac{3\sqrt{10}}{10}$　　B. $\frac{\sqrt{10}}{10}$

C. $-\frac{\sqrt{10}}{10}$　　D. $-\frac{3\sqrt{10}}{10}$

二、填空题

5. 在△ABC中，$A=30°$，且$3a=\sqrt{3}b=12$，则c的值为_____.

6. **(2019·合肥质检)** 在△ABC中，内角A，B，C所对的边分别为a，b，c，已知△ABC的面积为$3\sqrt{15}$，$b-c=2$，$\cos A=-\frac{1}{4}$，则a的值为_____.

7. 在△ABC中，$A=60°$，$b=1$，$S_{\triangle ABC}=\sqrt{3}$，则△$ABC$外接圆的面积是_____.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

学习札记

三、解答题

8. 在△ABC中，a，b，c分别为内角A，B，C的对边，且$2a\sin A=(2b+c)\sin B+(2c+b)\sin C$.

(1)求A的大小；

(2)若$\sin B+\sin C=1$，试判断△ABC的形状.

9. **(2017·山东卷)**在△ABC中，角A，B，C的对边分别为a，b，c. 已知$b=3$，$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=-6$，$S_{\triangle ABC}=3$，求$A$和$a$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

学习札记

§2　三角形中的几何计算

第一课时　三角形中的几何计算(一)

1 基础知识点对点

知识点一　三角形中与长度、角度有关的问题

1.(2018·甘肃张掖模拟)在△ABC中,$A=45°$,$C=105°$,$BC=\sqrt{2}$,则$AC=$　　(　　)

A. $\sqrt{3}-1$　　B. 1

C. 2　　D. $\sqrt{3}+1$

2.(2018·广东惠州模拟)在△ABC中,$AB=2$,$AC=3$,$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=3$,则$BC=$　　(　　)

A. $\sqrt{3}$　　B. $\sqrt{7}$

C. $\sqrt{19}$　　D. $\sqrt{23}$

知识点二　与三角形面积有关的问题

3.(2019·江西上高二中月考)已知在△ABC中,a,b,c分别为角A,B,C的对边,且$a=4$,$b+c=5$,$A=60°$,则△ABC的面积为　　(　　)

A. $\frac{\sqrt{3}}{4}$　　B. $3\sqrt{3}$

C. $\frac{3\sqrt{3}}{4}$　　D. $\frac{3}{4}$

4.(2018·河北唐山一中期末)在△ABC中,角A,B,C所对的边分别为a,b,c,且$c=4\sqrt{2}$,$B=45°$,面积$S=2$,则$b=$　　(　　)

A. $\frac{\sqrt{113}}{2}$　　B. 5

C. $\sqrt{41}$　　D. 25

知识点三　正、余弦定理的综合应用

5.(2018·山东齐鲁名校协作体调研)在△ABC中,角A,B,C所对的边分别为a,b,c,$\cos 2C+2\sqrt{2}\cos C+2=0$.

(1)求角C的大小;

(2)若$b=\sqrt{2}a$,△ABC的面积为$\frac{\sqrt{2}}{2}\sin A\sin B$,求$\sin A$及$c$的值.

2 课后拔高提能练

一、选择题

1.(2018·全国卷Ⅲ)△ABC的内角A,B,C的对边分别为a,b,c,若△ABC的面积为$\frac{a^2+b^2-c^2}{4}$,则$C=$　　(　　)

A. $\frac{\pi}{2}$　　B. $\frac{\pi}{3}$

C. $\frac{\pi}{4}$　　D. $\frac{\pi}{6}$

2.在△ABC中,角A,B,C所对的边分别为a,b,c,且$b\sin A=\sqrt{3}a\cos B$,则$\cos B$的值为　　(　　)

A. $\frac{1}{2}$　　B. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

C. $\frac{\sqrt{2}}{2}$　　D. 0

3.在△ABC中,已知$b\cdot\cos C+c\cdot\cos B=3a\cdot\cos B$,其中$a$、$b$、$c$分别为角$A$、$B$、$C$的对边,则$\cos B$的值为　　(　　)

A. $\frac{1}{3}$　　B. $-\frac{1}{3}$

C. $\frac{2\sqrt{2}}{3}$　　D. $-\frac{2\sqrt{2}}{3}$

4.(2018·天津南开区模拟)在△ABC中,内角A,B,C的对边分别为a,b,c,且$b^2=a^2+bc$,$A=\frac{\pi}{6}$,则内角$C=$　　(　　)

A. $\frac{\pi}{6}$　　B. $\frac{\pi}{4}$

C. $\frac{3\pi}{4}$　　D. $\frac{\pi}{4}$或$\frac{3\pi}{4}$

二、填空题

5.(2018·宜宾模拟)在△ABC中,内角A,B,C所对的边分别为a,b,c,且满足$b\sin A=a\cos B$,则角B的大小为_____.

6.(2019·河南部分重点中学联考)在△ABC中,$AB=\sqrt{3}$,$AC=1$,$B=30°$,△ABC的面积为$\frac{\sqrt{3}}{2}$,则$C=$_____.

7.(2018·全国卷Ⅰ)△ABC的内角A,B,C的对边分别为a,b,c,已知$b\sin C+c\sin B=4a\sin B\sin C$,$b^2+c^2-a^2=8$,则△$ABC$的面积为_____.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

学习札记

三、解答题

8.（2018·天津卷）在△ABC 中，内角 A，B，C 所对的边分别为 a，b，c. 已知 $b\sin A=a\cos\left(B-\frac{\pi}{6}\right)$.

（1）求角 B 的大小；

（2）设 $a=2$，$c=3$，求 b 和 $\sin(2A-B)$ 的值.

9.（2017·全国卷Ⅰ）△ABC 的内角 A，B，C 的对边分别为 a，b，c. 已知△ABC 的面积为 $\frac{a^2}{3\sin A}$.

（1）求 $\sin B\sin C$；

（2）若 $6\cos B\cos C=1$，$a=3$，求△ABC 的周长.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

学习札记

第二课时　三角形中的几何计算(二)

1 基础知识点对点

知识点一　解三角形问题

1. 在△ABC中，已知$a=1$，$b=\sqrt{3}$，$A=30°$，B为锐角，则角A，B，C的大小关系是　(　)

A. $A>B>C$　　B. $B>A>C$

C. $C>B>A$　　D. $C>A>B$

2. 在△ABC中，内角A，B，C的对边分别为a，b，c，若$a\sin B\cos C+c\sin B\cos A=\frac{1}{2}b$，且$a>b$，则角$B=$　(　)

A. $\frac{\pi}{6}$　　B. $\frac{\pi}{3}$

C. $\frac{2\pi}{3}$　　D. $\frac{5\pi}{6}$

知识点二　与三角形有关的综合问题

3. 在△ABC中，$c=\sqrt{3}$，$b=1$，$B=30°$，则△ABC的面积为　(　)

A. $\frac{\sqrt{3}}{2}$或$\sqrt{3}$　　B. $\frac{\sqrt{3}}{2}$或$\frac{\sqrt{3}}{4}$

C. $\sqrt{3}$或$\frac{\sqrt{3}}{4}$　　D. $\sqrt{3}$

4. 在△ABC中，$AC=\sqrt{7}$，$BC=2$，$B=60°$，则BC边上的高等于　(　)

A. $\frac{\sqrt{3}}{2}$　　B. $\frac{3\sqrt{3}}{2}$

C. $\frac{\sqrt{3}+\sqrt{6}}{2}$　　D. $\frac{\sqrt{3}+\sqrt{39}}{2}$

5. 已知△ABC的内角A，B，C所对的边分别为a，b，c，且$a\cos B+\sqrt{3}b\sin A=c$.

(1)求角A的大小；

(2)若$a=1$，$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=3$，求$b+c$的值.

2 课后拔高提能练

一、选择题

1. **(2018·全国卷Ⅱ)**在△ABC中，$\cos\frac{C}{2}=\frac{\sqrt{5}}{5}$，$BC=1$，$AC=5$，则$AB=$　(　)

A. $4\sqrt{2}$　　B. $\sqrt{30}$

C. $\sqrt{29}$　　D. $2\sqrt{5}$

2. **(2018·安徽安庆模拟)**在△ABC中，$A:B=1:2$，$\sin C=1$，则$a:b:c=$　(　)

A. $1:2:3$　　B. $3:2:1$

C. $1:\sqrt{3}:2$　　D. $2:\sqrt{3}:1$

3. **(2019·江西宜春市四校联考)**已知△ABC内角A，B，C的对边分别是a，b，c，若$\cos B=\frac{1}{4}$，$b=4$，$\sin C=2\sin A$，则△ABC的面积为　(　)

A. $\frac{2\sqrt{15}}{3}$　　B. $\sqrt{15}$

C. $2\sqrt{15}$　　D. $4\sqrt{15}$

4. **(2018·山西太谷中学等四校联考)**在△ABC中，a，b，c分别是角A，B，C所对边的边长，若$\cos C+\sin C-\frac{2}{\cos B+\sin B}=0$，则$\frac{a+b}{c}$的值是　(　)

A. $\sqrt{2}-1$　　B. $\sqrt{2}+1$

C. $\sqrt{3}+1$　　D. 2

二、填空题

5. **(2018·浙江卷)**在△ABC中，角A，B，C所对的边分别为a，b，c. 若$a=\sqrt{7}$，$b=2$，$A=60°$，则$\sin B=$_____，$c=$_____.

6. **(2019·太原模拟)**在△ABC中，若$B=\frac{\pi}{4}$，$b=\sqrt{2}a$，则$C=$_____.

7. 在△ABC中，角A，B，C所对的边分别为a，b，c，若$a\cos B+b\cos A=c\sin C$，$b^2+c^2-a^2=\sqrt{3}bc$，则角$B=$_____.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

学习札记

三、解答题

8.（2018·北京卷）在△ABC 中，$a=7$，$b=8$，$\cos B=-\frac{1}{7}$.

(1)求 A；

(2)求 AC 边上的高.

9.（2018·合肥一中期末）在△ABC 中，a，b，c 分别是角 A，B，C 的对边，且 $2\cos A\cos C+1=2\sin A\sin C$.

(1)求 B 的大小；

(2)若 $a+c=\frac{3\sqrt{3}}{2}$，$b=\sqrt{3}$，求△ABC 的面积.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

学习札记

§3　解三角形的实际应用举例

1 基础知识点对点

知识点一　测量距离问题

1. 已知 A,B 两地的距离为 10 km，B,C 两地的距离为 20 km，观测得 $\angle ABC=120°$，则 A,C 两地的距离为　（　）

A. 10 km　　B. $10\sqrt{3}$ km

C. $10\sqrt{5}$ km　　D. $10\sqrt{7}$ km

2. 在相距 2 km 的 A,B 两点处测量目标点 C，若 $\angle CAB=75°$，$\angle CBA=60°$，则 A,C 两点之间的距离是　（　）

A. 2 km　　B. $\sqrt{6}$ km

C. $2\sqrt{6}$ km　　D. $\sqrt{7}$ km

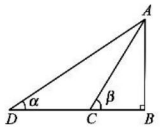
知识点二　测量高度问题

3. 在 200 m 高的山顶上，测得山下一塔的塔顶 A 与塔底 B 的俯角分别是 $30°,60°$，则塔高 $AB=$　（　）

A. 200 m　　B. $\frac{200}{3}$ m

C. $\frac{400}{3}$ m　　D. 100 m

4. 如图，D,C,B 三点在一条直线上，$DC=a$，从 C,D 两点测得 A 点的仰角分别是 β，$\alpha(\beta>\alpha)$，则 A 点离地面的高度 AB 等于　（　）

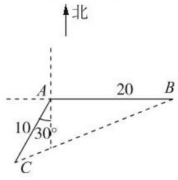


A. $\frac{a\sin\alpha\sin\beta}{\sin(\alpha-\beta)}$　　B. $\frac{a\sin\alpha\sin\beta}{\sin(\beta-\alpha)}$

C. $\frac{a\sin\alpha\cos\beta}{\sin(\alpha-\beta)}$　　D. $\frac{a\cos\alpha\cos\beta}{\cos(\alpha-\beta)}$

知识点三　测量角度问题

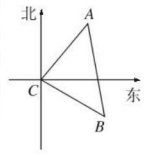
5. 如图，当甲船位于 A 处时获悉，在其正东方向相距 20 海里的 B 处有一艘渔船遇险等待营救. 甲船立即前往救援，同时把消息告知在甲船的南偏西 30°，相距 10 海里的 C 处的乙船，试问乙船应朝北偏东多少度的方向沿直线前往 B 处救援（角度精确到 1°）？



2 课后拔高提能练

一、选择题

1. 如图，已知两座灯塔 A 和 B 与海岸观察站 C 的距离相等，灯塔 A 在观察站 C 的北偏东 40°，灯塔 B 在观察站 C 的南偏东 60°，则灯塔 A 在灯塔 B 的　（　）



A. 北偏东 10°

B. 北偏西 10°

C. 南偏东 10°

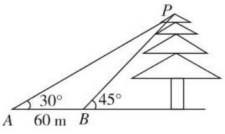
D. 南偏西 10°

2. 有一座 20 米高的观测台，测得对面一水塔塔顶的仰角是 60°，塔底的俯角是 45°，则这座塔高是　（　）

A. $20\left(1+\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$ m　　B. $20(1+\sqrt{3})$ m

C. $10(\sqrt{6}+\sqrt{2})$ m　　D. $20(\sqrt{6}+\sqrt{2})$ m

3. 如图所示，为测一树的高度，在地面上选取 A,B 两点（点 A,B 与树根部在同一直线上），从 A,B 两点分别测得树尖的仰角为 30°，45°，且 A,B 两点之间的距离为 60 m. 则树的高度为　（　）



A. $(30+30\sqrt{3})$ m　　B. $(30+15\sqrt{3})$ m

C. $(15+30\sqrt{3})$ m　　D. $(15+3\sqrt{3})$ m

4. 已知两灯塔 A 和 B 与海洋观测站 C 的距离都是 a km，灯塔 A 在观测站 C 的北偏东 20°，灯塔 B 在观测站 C 的南偏东 40°，则灯塔 A 与灯塔 B 的距离是　（　）

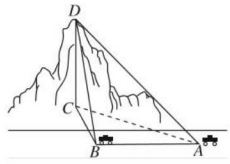
A. a km　　B. $\sqrt{3}a$ km

C. $\sqrt{2}a$ km　　D. $2a$ km

二、填空题

5. 海上有 A,B 两个小岛相距 10 海里，从 A 岛望 C 岛和 B 岛，成 60°视角，从 B 岛望 A 岛和 C 岛，成 75°视角，则 B 岛和 C 岛的距离是_____海里.

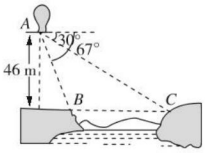
6. 如图，一辆汽车在一条水平的公路上向正西行驶，到 A 处时测得公路北侧一山顶 D 在西偏北 30°的方向上，行驶 600 m 后到达 B 处，测得此山顶在西偏北 75°的方向上，仰角为 30°，则此山的高度 $CD=$_____m.



关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

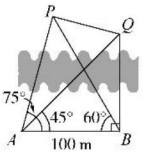
学习札记

7. 如图，从气球 A 上测得正前方的河流的两岸 B，C 的俯角分别为 $67°$，$30°$，此时气球的高是 46 m，则河流的宽度 BC 约等于_____m.（用四舍五入法将结果精确到个位. 参考数据：$\sin 67° \approx 0.92$，$\cos 67° \approx 0.39$，$\sin 37° \approx 0.60$，$\cos 37° \approx 0.80$，$\sqrt{3} \approx 1.73$）



三、解答题

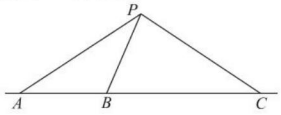
8. 风景秀美的湖畔有四棵高大的银杏树，记做 A，B，P，Q，欲测量 P，Q 两棵树和 A，P 两棵树之间的距离，但湖岸部分地方围有铁丝网不能靠近，现在可以方便的测得 A，B 两点间的距离为 $AB=100$ 米，如图，同时也能测量出 $\angle PAB=75°$，$\angle QAB=45°$，$\angle PBA=60°$，$\angle QBA=90°$，则 P，Q 两棵树和 A，P 两棵树之间的距离各为多少？



9. 如图，在一条海防警戒线上的点 A、B、C 处各有一个水声监测点，B、C 两点到 A 的距离分别为 20 千米和 50 千米，某时刻，B 收到发自静止目标 P 的一个声波信号，8 秒后 A、C 同时接收到该声波信号，已知声波在水中的传播速度是 1.5 千米/秒.

(1) 设 A 到 P 的距离为 x 千米，用 x 表示 B、C 到 P 的距离，并求 x 的值；

(2) 求 P 到海防警戒线 AC 的距离.



关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

学习札记

阶段质量评估卷(二)

时间:45 分钟　满分:100 分

一、选择题(6×5=30 分)

1. 在△ABC 中,角 A,B,C 的对边分别为 a,b,c,若 $a=8,B=60°,C=75°$,则 b 等于　(　)

A. $4\sqrt{2}$　　B. $4\sqrt{3}$

C. 8　　D. $4\sqrt{6}$

2. 若△ABC 的三个内角 A,B,C 对应的边分别为 a,b,c,且 $a\cos C,b\cos B,c\cos A$ 成等差数列,则 $B=$　(　)

A. 30°　　B. 60°

C. 90°　　D. 120°

3. 在△ABC 中,已知 $B=60°$且 $b=\sqrt{3}$,则△ABC 外接圆的面积是　(　)

A. $\frac{\pi}{2}$　　B. $\frac{3\pi}{4}$

C. π　　D. 2π

4. 在△ABC 中,内角 A,B,C 的对边分别是 a,b,c. 若 $\cos B=\frac{1}{4},\frac{\sin C}{\sin A}=2$,且 $S_{\triangle ABC}=\frac{\sqrt{15}}{4}$,则 $a=$　(　)

A. 1　　B. 2

C. 3　　D. 4

5. **(2019·广西质检)**在△ABC 中,角 A,B,C 所对的边分别为 a,b,c,若角 A,B,C 依次成等差数列,且 $a=1,b=\sqrt{3}$,则 $S_{\triangle ABC}=$　(　)

A. $\sqrt{2}$　　B. $\sqrt{3}$　　C. $\frac{\sqrt{3}}{2}$　　D. 2

6. **(2018·山西忻州一中期末)**在△ABC 中,$\sin^2 A\leqslant\sin^2 B+\sin^2 C-\sin B\sin C$,则 A 的取值范围是　(　)

A. $\left(0,\frac{\pi}{6}\right]$　　B. $\left(\frac{\pi}{6},\pi\right]$

C. $\left(0,\frac{\pi}{3}\right]$　　D. $\left(\frac{\pi}{3},\pi\right]$

二、填空题(3×5=15 分)

7. **(2018·成都模拟)**在△ABC 中,内角 A,B,C 的对边分别为 a,b,c,若 $c=2a,b=4,\cos B=\frac{1}{4}$,则△$ABC$ 的面积 $S=$_____.

8. **(2018·黑龙江双鸭山一中期中)**在△ABC 中,角 A,B,C 所对的边分别为 a,b,c,且 $a\cos B+a\cos C=b+c$,则△ABC 的形状是_____(填"等边三角形""锐角三角形""钝角三角形"或"直角三角形").

9. **(2017·浙江卷)**已知△ABC 中,$AB=AC=4,BC=2$,点 D 为 AB 延长线上一点,$BD=2$,连接 CD,则△BDC 的面积是_____,$\cos\angle BDC=$_____.

三、解答题(55 分)

10. (13 分)**(2017·北京卷)**在△ABC 中,$A=60°,c=\frac{3}{7}a$.

(1)求 $\sin C$ 的值;

(2)若 $a=7$,求△ABC 的面积.

11. (13 分)**(2019·海口市调研)**在△ABC 中,A,B,C 的对边分别是 a,b,c,已知 $(a-3b)\cos C=c(3\cos B-\cos A)$.

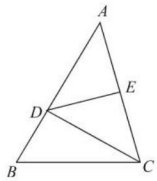
(1)求 $\frac{\sin B}{\sin A}$ 的值;

(2)若 $c=\sqrt{7}a$,求角 C 的大小.

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

学习札记

12.（14 分）**（2018 · 湖南浏阳一中月考）**如图，在△ABC 中，$B=\frac{\pi}{3}$，$BC=2$，点 D 在边 AB 上，$AD=DC$，$DE\perp AC$，E 为垂足.



（1）若△BCD 的面积为 $\frac{\sqrt{3}}{3}$，求 CD 的长；

（2）若 $DE=\frac{\sqrt{6}}{2}$，求角 A 的大小.

13.（15 分）**（2018 · 全国卷Ⅰ）**在平面四边形 $ABCD$ 中，$\angle ADC=90°$，$A=45°$，$AB=2$，$BD=5$.

（1）求 $\cos\angle ADB$；

（2）若 $DC=2\sqrt{2}$，求 BC.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

学习札记

阶段质量评估卷(三)

时间:45 分钟　满分:100 分

一、选择题(6×5=30 分)

1. **(2019·太原模拟)** 在 $\triangle ABC$ 中,a,b,c 分别是角 A,B,C 的对边,若 $a^2=2b^2$,$\sin B=\sin C$,则 $B=$ (　　)

A. 60°　　B. 30°

C. 135°　　D. 45°

2. 在等差数列 $\{a_n\}$ 中,$a_5+a_6+a_7=15$,那么 $a_3+a_4+\cdots+a_9$ 等于 (　　)

A. 21　　B. 30

C. 35　　D. 40

3. 在 $\triangle ABC$ 中,若 $(a+b+c)(b+c-a)=3bc$,则 $A=$ (　　)

A. 90°　　B. 60°

C. 135°　　D. 150°

4. 在 $\triangle ABC$ 中,已知 $3b=2\sqrt{3}a\sin B$,且 $\cos B=\cos C$,角 A 是锐角,则 $\triangle ABC$ 的形状是 (　　)

A. 直角三角形　　B. 等腰三角形

C. 等腰直角三角形　　D. 等边三角形

5. 某人 2013 年 1 月 1 日到银行存入一年期存款 a 元,若按年利率为 x,并按复利计算,到 2018 年 1 月 1 日可取回款 (　　)

A. $a(1+x)^5$ 元　　B. $a(1+x)^6$ 元

C. $a(1+x^5)$ 元　　D. $a(1+x^6)$ 元

6. **(2018·内蒙古模拟)** 设等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n,若 $8a_2+a_5=0$,则下列式子中数值不能确定的是 (　　)

A. $\dfrac{a_5}{a_3}$　　B. $\dfrac{S_5}{S_3}$

C. $\dfrac{a_{n+1}}{a_n}$　　D. $\dfrac{S_{n+1}}{S_n}$

二、填空题(3×5=15 分)

7. **(2019·深圳调研)** 等差数列 $\{a_n\}$ 中,$a_4=4$,则 $2a_1+a_5+a_9=$_____.

8. 已知 $\triangle ABC$ 的一个内角为 120°,并且三边长构成公差为 4 的等差数列,则 $\triangle ABC$ 的面积为_____.

9. 在 $\triangle ABC$ 中,三个内角 A,B,C 的对边边长分别为 $a=3,b=4,c=6$,则 $bc\cdot\cos A+ca\cdot\cos B+ab\cdot\cos C$ 的值为_____.

三、解答题(55 分)

10. (13 分)**(2017·天津卷)** 在 $\triangle ABC$ 中,内角 A,B,C 所对的边分别为 a,b,c,已知 $a>b$,$a=5$,$c=6$,$\sin B=\dfrac{3}{5}$.

(1)求 b 和 $\sin A$ 的值;

(2)求 $\sin\left(2A+\dfrac{\pi}{4}\right)$ 的值.

11. (13 分)**(2018·广州中山市高二期末)** 数列 $\{a_n\}$ 中,$a_1=8$,$a_4=2$,且满足 $a_{n+2}-2a_{n+1}+a_n=0$ $(n\in\mathbf{N}_+)$.

(1)求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2)设 $S_n=|a_1|+|a_2|+\cdots+|a_n|$,求 S_n.

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

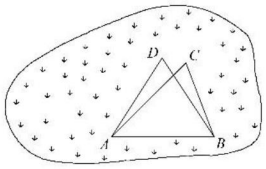
学习札记

12.(14 分)**(2018·江西九江市模拟)**已知数列$\{a_n\}$是等差数列,其中$a_1=2$,且a_2,a_3,a_4+1成等比数列,数列$\{b_n\}$的前n项和为S_n,满足$b_n+S_n=2$.

(1)求数列$\{a_n\}$,$\{b_n\}$的通项公式;

(2)设$c_n=\frac{a_nS_n}{2}$,求数列$\{c_n\}$的前n项和T_n.

13.(15 分)某校有一块不规则的绿地如图所示,欲在该地上建造一个底座为三角形的环境标志,小李、小王设计的底座形状分别为$\triangle ABC$、$\triangle ABD$,经测量$AD=BD=14$,$BC=10$,$AC=16$,$\angle C=\angle D$.



(1)求边AB的长度;

(2)若建造环境标志的费用与用地面积成正比,不考虑其他因素,小李、小王谁的设计使建造费用更低?请说明理由.

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

学习札记

第三章　不等式

§1　不等关系

1 基础知识点对点

知识点一　用不等式(组)表示不等关系

1. 某高速公路对行驶的各种车辆的最大限速为120 km/h,行驶过程中,同一车道上的车间距 d 不得小于10 m.用不等式表示为　(　)

A. $v\leqslant 120$ km/h 或 $d\geqslant 10$ m

B. $\begin{cases} v\leqslant 120 \text{ km/h}, \\ d\geqslant 10 \text{ m} \end{cases}$

C. $v\leqslant 120$ km/h

D. $d\geqslant 10$ m

2. 某校对高一美术生划定录取分数线,专业成绩 x 不低于95分,文化课总分 y 高于380分,体育成绩 z 超过45分,满足上述所有不等关系的不等式是　(　)

A. $\begin{cases} x\geqslant 95, \\ y\geqslant 380, \\ z>45 \end{cases}$　　B. $\begin{cases} x\geqslant 95, \\ y>380, \\ z\geqslant 45 \end{cases}$

C. $\begin{cases} x>95, \\ y>380, \\ z>45 \end{cases}$　　D. $\begin{cases} x\geqslant 95, \\ y>380, \\ z>45 \end{cases}$

知识点二　比较两个数(式)的大小

3. 若 $M=a^2+3ab$,$N=4ab-b^2$,则 M 与 N 的大小关系是　(　)

A. $M\leqslant N$　　B. $M\geqslant N$

C. $M>N$　　D. $M<N$

4. 已知实数 a,b,c 满足 $b+c=6-4a+3a^2$,$c-b=4-4a+a^2$,则 a,b,c 的大小关系是　(　)

A. $c\geqslant b>a$　　B. $a>c\geqslant b$

C. $c>b>a$　　D. $a>c>b$

知识点三　不等式性质的应用

5. (1)已知 $1<a<3$,$-4<b<2$,求 $a+b$,$2a-3b$ 的取值范围;

(2)已知 $-3<a+b<5$,$-4<2a-b<18$,求 $a+4b$ 的取值范围.

2 课后拔高提能练

一、选择题

1. 已知:a,b,c,$d\in\mathbf{R}$,则下列命题中必成立的是　(　)

A. 若 $a>b$,$c>b$,则 $a>c$

B. 若 $a>-b$,则 $c-a<c+b$

C. 若 $a>b$,$c<d$,则 $\frac{a}{c}<\frac{b}{d}$

D. 若 $a^2>b^2$,则 $-a<-b$

2. 如果 $x+y<0$,且 $y>0$,那么下列不等式成立的是　(　)

A. $y^2>x^2>-xy$　　B. $x^2>y^2>-xy$

C. $x^2<-xy<y^2$　　D. $x^2>-xy>y^2$

3. 如果 a,b,c,d 是实数,则下列不等式成立的是　(　)

A. $a>b$,$c=d\Rightarrow ac>bd$

B. $\frac{a}{c}>\frac{b}{c}\Rightarrow a>b$

C. $a^3>b^3$,$ab>0\Rightarrow\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$

D. $a^2>b^2$,$ab\neq 0\Rightarrow\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$

4. 已知 $a>b>0$,给出下列四个不等式:

①$a^2>b^2$;②$2^a>2^{b-1}$;③$\sqrt{a-b}>\sqrt{a}-\sqrt{b}$;④$a^3+b^3>2a^2b$.

其中一定成立的不等式为　(　)

A. ①②③　　B. ①②④

C. ①③④　　D. ②③④

二、填空题

5. 若 α,β 满足 $-\frac{\pi}{2}<\alpha<\beta<\frac{\pi}{2}$,则 $\alpha-\beta$ 的取值范围是_____.

6. 已知 $2b<a<-b$,则 $\frac{a}{b}$ 的取值范围是_____.

7. 已知下列说法:

①若 $a<b<0$,则 $a^2>ab$;②若 $a\geqslant b$,$ac\geqslant bc$,则 $c\geqslant 0$;

③若 $a>b>0$,$c<0$,则 $\frac{c}{a}>\frac{c}{b}$;④若 $0<a<1$,则 $\log_a(1+a)>\log_a\left(1+\frac{1}{a}\right)$.

其中正确的有_____.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

学习札记

三、解答题

8. 甲、乙两位采购员同去一家销售公司各自买了两次粮食，且两次粮食的价格不同，两位采购员的购粮方式也不同. 其中，甲每次购粮 1 000 kg，乙每次购粮用去 1 000 元钱，谁的购粮方式更合算？

9. 已知 $12<a<60$，$15<b<36$，求 $a-b$ 和 $\frac{a}{b}$ 的取值范围.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

学习札记

§2　一元二次不等式

2.1　一元二次不等式的解法

第一课时　一元二次不等式的解法(一)

1 基础知识点对点

知识点一　不含参数的一元二次不等式的解法

1.(2019·珠海模拟)不等式$-2x^2+x+3<0$的解集是　(　)

A.$\{x|x<-1\}$

B.$\left\{x\middle|x>\frac{3}{2}\right\}$

C.$\left\{x\middle|-1<x<\frac{3}{2}\right\}$

D.$\left\{x\middle|x<-1\text{ 或 }x>\frac{3}{2}\right\}$

2.已知集合$M=\{x|x^2-3x-28\leqslant 0\}$,$N=\{x|x^2-x-6>0\}$,则$M\cap N$为　(　)

A.$\{x|-4\leqslant x<-2\text{ 或 }3<x\leqslant 7\}$

B.$\{x|-4<x\leqslant -2\text{ 或 }3\leqslant x<7\}$

C.$\{x|x\leqslant -2\text{ 或 }x>3\}$

D.$\{x|x<-2\text{ 或 }x\leqslant 3\}$

知识点二　解含参数的一元二次不等式

3.若$a<0$,则不等式$x^2-ax-12a^2<0$的解集为　(　)

A.$\{x|3a<x<-4a\}$　　B.$\{x|-3a<x<-4a\}$

C.$\{x|4a<x<-3a\}$　　D.$\{x|4a<x<3a\}$

4.(2018·安徽芜湖市期末)关于x的不等式$x^2-2ax-8a^2<0(a>0)$的解集为(x_1,x_2),且$x_2-x_1=15$,则$a=$　(　)

A.$\frac{5}{2}$　　B.$\frac{7}{2}$

C.$\frac{15}{4}$　　D.$\frac{15}{2}$

知识点三　三个"二次"之间的关系

5.设关于x的不等式$ax^2+bx-2>0$的解集为$\left(-1,-\frac{1}{4}\right)$.

(1)求a,b的值;

(2)解不等式$bx^2-ax+2\geqslant 0$.

2 课后拔高提能练

一、选择题

1.(2017·山东卷)设函数$y=\sqrt{4-x^2}$的定义域为A,函数$y=\ln(1-x)$的定义域为B,则$A\cap B=$(　)

A.$(1,2)$　　B.$(1,2]$

C.$(-2,1)$　　D.$[-2,1)$

2.(2019·山东潍坊模拟)函数$f(x)=\frac{1}{\ln(-x^2+4x-3)}$的定义域是　(　)

A.$(-\infty,1)\cup(3,+\infty)$　　B.$(1,3)$

C.$(-\infty,2)\cup(2,+\infty)$　　D.$(1,2)\cup(2,3)$

3.(2018·太原模拟)若$0<a<1$,则不等式$(a-x)\left(x-\frac{1}{a}\right)>0$的解集是　(　)

A.$\left\{x\middle|a<x<\frac{1}{a}\right\}$　　B.$\left\{x\middle|\frac{1}{a}<x<a\right\}$

C.$\left\{x\middle|x>\frac{1}{a}\text{或}x<a\right\}$　　D.$\left\{x\middle|x<\frac{1}{a}\text{或}x>a\right\}$

4.若关于x的不等式$ax^2+bx+2>0$的解集为$(-1,2)$,则关于x的不等式$bx^2-ax-2>0$的解集为　(　)

A.$(-2,1)$

B.$(-\infty,-2)\cup(1,+\infty)$

C.$(-\infty,-1)\cup(2,+\infty)$

D.$(-1,2)$

二、填空题

5.若关于x的不等式$mx^2-4x+m-3\leqslant 0$的解集为$\mathbf{R}$,则实数m的取值范围为_____.

6.(2018·沈阳铁路实验中学期末)不等式$ax^2+bx+2>0$的解集是$\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{3}\right)$,则$a+b$的值是_____.

7.已知函数$f(x)=(ax-1)(x+b)$,如果不等式$f(x)>0$的解集为$(-1,3)$,则不等式$f(-2x)<0$的解集是_____.

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

学习札记

三、解答题

8. 若关于 x 的不等式 $mx^2-mx-1\geqslant 0$ 的解集非空，求实数 m 的取值范围.

9. 已知不等式 $ax^2+5x-2>0$ 的解集是 M.

(1) 若 $2\in M$，求 a 的取值范围；

(2) 若 $M=\left\{x\left|\frac{1}{2}<x<2\right.\right\}$，求不等式 $ax^2-5x+a^2-1>0$ 的解集.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

学习札记

第二课时　一元二次不等式的解法(二)

1 基础知识点对点

知识点一　一元二次不等式的解法

1. 在 **R** 上定义运算⊙：$a\odot b=ab+2a+b$，则满足 $x\odot(x-2)<0$ 的实数 x 的取值范围是　(　)

A. $(0,2)$　　B. $(-2,1)$

C. $(-\infty,-2)\cup(1,+\infty)$　　D. $(-1,2)$

2. 不等式 $(x-a)(x-a-1)>0$ 的解集为　(　)

A. $(a,a+1)$

B. $(a+1,a)$

C. $(-\infty,a)\cup(a+1,+\infty)$

D. $(-\infty,a+1)\cup(a,+\infty)$

知识点二　一元二次不等式的综合问题

3. 若关于 x 的不等式 $(a-2)x^2+2(a-2)x-4<0$，对一切 $x\in\mathbf{R}$ 恒成立，则实数 a 的取值范围是　(　)

A. $(-\infty,2]$　　B. $(-2,2]$

C. $(-2,2)$　　D. $(-\infty,-2)$

4. **(2018·福州四中期末)** 若不等式 $kx^2-kx+1>0$ 对任意 $x\in\mathbf{R}$ 都成立，则 k 的取值范围是　(　)

A. $(0,4)$　　B. $[0,4)$

C. $(0,+\infty)$　　D. $[0,+\infty)$

5. 解关于 x 的不等式：$12x^2-ax-a^2<0$.

2 课后拔高提能练

一、选择题

1. 在下列不等式中，解集是∅的是　(　)

A. $2x^2-3x+2>0$　　B. $x^2+4x+4\leqslant 0$

C. $4-4x-x^2<0$　　D. $-2+3x-2x^2>0$

2. 若 $f(x)=-x^2+mx-1$ 的函数值有正值，则实数 m 的取值范围是　(　)

A. $m<-2$ 或 $m>2$　　B. $-2<m<2$

C. $m\neq\pm2$　　D. $1<m<3$

3. **(2019·湖南长沙一中月考)** 已知函数 $f(x)=(ax-1)(x+b)$，如果不等式 $f(x)>0$ 的解集是 $(-1,3)$，则不等式 $f(-x)<0$ 的解集是　(　)

A. $(-\infty,-1)\cup(3,+\infty)$

B. $(-3,1)$

C. $(-\infty,-3)\cup(1,+\infty)$

D. $(-1,3)$

4. **(2018·广东佛山一中等期末联考)** 一元二次不等式 $ax^2+bx+c>0$ 的解集是 $\left(-\frac{1}{3},2\right)$，则 $cx^2+bx+a<0$ 的解集是　(　)

A. $\left(-3,\frac{1}{2}\right)$

B. $(-\infty,-3)\cup\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$

C. $\left(-2,\frac{1}{3}\right)$

D. $(-\infty,-2)\cup\left(\frac{1}{3},+\infty\right)$

二、填空题

5. 若不等式 $5x^2-bx+c<0$ 的解集为 $\{x\mid-1<x<3\}$，则 $b+c=$_____.

6. 若关于 x 的不等式 $tx^2-6x+t^2<0$ 的解集为 $(-\infty,a)\cup(1,+\infty)$，则 a 的值为_____.

7. 已知关于 x 的不等式 $x^2-ax+2a>0$ 在 **R** 上恒成立，则实数 a 的取值范围是_____.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

学习札记

三、解答题

8. 若不等式 $x^2+ax-a+3\geqslant 0$，当 $x\in[-2,2]$ 时恒成立，求实数 a 的取值范围.

9. 若不等式 $(1-a)x^2-4x+6>0$ 的解集为 $\{x\mid -3<x<1\}$.

(1) 解不等式 $2x^2+(2-a)x-a>0$；

(2) b 为何值时，$ax^2+bx+3\geqslant 0$ 的解集为 **R**.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

学习札记

2.2　一元二次不等式的应用

1 基础知识点对点

知识点一　分式不等式的解法

1. 不等式$\frac{x(x+2)}{x-3}<0$的解集为　　(　　)

A. $\{x|x<-2$ 或 $0<x<3\}$

B. $\{x|x<-2$ 或 $x>0\}$

C. $\{x|-2<x<0\}$

D. $\{x|x<0$ 或 $x>3\}$

2. **(2019·安徽宿州市联考)**不等式$\frac{x-1}{x}\geqslant 2$的解集为　　(　　)

A. $[-1,0)$　　B. $[-1,+\infty)$

C. $(-\infty,-1]$　　D. $(-\infty,-1]\cup(0,+\infty)$

知识点二　高次不等式的解法

3. 不等式$(x^2-7x+12)(x^2+x+1)>0$的解集为(　　)

A. $(-\infty,-4)\cup(-3,+\infty)$

B. $(-\infty,3)\cup(4,+\infty)$

C. $(-4,-3)$

D. $(3,4)$

4. 不等式$(x+2)(x^2-x-12)>0$的解集为_____.

知识点三　一元二次不等式解法的实际应用

5. 某农贸公司按每担200元收购某农产品，并按每100元纳税10元(又称征税率为10个百分点)，计划可收购a万担，政府为了鼓励收购公司多收购这种农产品，决定将征税率降低$x(x\neq 0)$个百分点，预测收购量可增加$2x$个百分点.

(1)写出税收y(万元)与x的函数关系式；

(2)要使此项税收在税率调节后，不少于原计划税收的83.2%，试确定x的取值范围.

2 课后拔高提能练

一、选择题

1. 下列不等式中与$\frac{x-4}{3-x}\geqslant 0$同解的是　　(　　)

A. $(x-4)(3-x)\geqslant 0$　　B. $\frac{3-x}{x-4}\geqslant 0$

C. $(x-4)(3-x)>0$　　D. $\lg(x-3)\leqslant 0$

2. 不等式$\frac{x^2-x-6}{x-1}>0$的解集为　　(　　)

A. $(-\infty,-2)\cup(3,+\infty)$

B. $(-\infty,-2)\cup(1,3)$

C. $(-2,1)\cup(3,+\infty)$

D. $(-2,1)\cup(1,3)$

3. 不等式$(x+1)(x-2)^2(x-1)(x-4)<0$的解集为　　(　　)

A. $(-\infty,-1)$

B. $(1,4)$

C. $(-\infty,-1)\cup(1,4)$

D. $(-\infty,-1)\cup(1,2)\cup(2,4)$

4. 关于x的不等式$ax-b>0$的解集是$(1,+\infty)$，则关于x的不等式$\frac{ax+b}{x-2}>0$的解集是　　(　　)

A. $(-\infty,-1)\cup(2,+\infty)$

B. $(-1,2)$

C. $(1,2)$

D. $(-\infty,1)\cup(2,+\infty)$

二、填空题

5. 设函数$f(x)=\begin{cases}x^2-4x+6(x\geqslant 0),\\ x+6(x<0).\end{cases}$则$f(x)>f(1)$的解集是_____.

6. **(2018·云南玉溪一中月考)**不等式$x^2-2x+5\geqslant a^2-3a$对任意实数x恒成立，则实数a的取值范围是_____.

7. 已知不等式$\frac{x^2-2x+3}{mx^2-mx-1}<0$对于一切$x\in\mathbf{R}$恒成立，则实数$m$的取值范围是_____.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

学习札记

三、解答题

8. 若方程 $8x^2-(m-1)x+m-7=0$ 的两实根都大于 1，求实数 m 的取值范围.

9. 已知三个不等式：①$|2x-4|<5-x$；②$\frac{x+2}{x^2-3x+2}\geqslant 1$；③$2x^2+mx-1<0$.

(1)若同时满足①、②的 x 值也满足③，求 m 的取值范围；

(2)若满足③的 x 值至少满足①和②中的一个，求 m 的取值范围.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

学习札记

§3　基本不等式

3.1　基本不等式

1 基础知识点对点

知识点一　利用基本不等式比较大小

1. 设 $0<a<b$，则下列不等式中正确的是　　(　　)

A. $a<b<\sqrt{ab}<\frac{a+b}{2}$

B. $a<\sqrt{ab}<\frac{a+b}{2}<b$

C. $a<\sqrt{ab}<b<\frac{a+b}{2}$

D. $\sqrt{ab}<a<\frac{a+b}{2}<b$

2. 若 $a>b>1$，$P=\sqrt{\lg a\lg b}$，$Q=\frac{1}{2}(\lg a+\lg b)$，$R=\lg\frac{a+b}{2}$，则　　(　　)

A. $R<P<Q$　　B. $P<Q<R$

C. $Q<P<R$　　D. $P<R<Q$

知识点二　利用基本不等式证明不等式

3. 已知 $a,b,c\in\mathbf{R}$，求证：$a^2+b^2+c^2\geqslant ab+bc+ca$.

知识点三　条件不等式的证明

4. 已知 $a>0,b>0,c>0$，且 $a+b+c=1$. 求证：$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\geqslant 9$.

2 课后拔高提能练

一、选择题

1. 下列结论中正确的是　　(　　)

A. 若 $a>0$，则 $a+\frac{1}{a}>2$

B. 若 $ab>0$，则 $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\geqslant 2$

C. 若 $a,b\in\mathbf{R}$，则 $a+b\geqslant 2\sqrt{ab}$

D. 若 $x<0$，则 $\frac{1}{x}+4x\geqslant 4$

2. 下列不等式一定成立的是　　(　　)

A. $\lg\left(x^2+\frac{1}{4}\right)>\lg x(x>0)$

B. $\sin x+\frac{1}{\sin x}\geqslant 2(x\neq k\pi,k\in\mathbf{Z})$

C. $x^2+1\geqslant 2|x|(x\in\mathbf{R})$

D. $\frac{1}{x^2+1}<1(x\in\mathbf{R})$

3. 下列不等式一定成立的是　　(　　)

A. $x-1+\frac{1}{x-1}\geqslant 2$　　B. $\frac{x^2+5}{\sqrt{x^2+4}}\geqslant 2$

C. $\frac{x^2+2}{\sqrt{x^2+1}}\geqslant 2$　　D. $-x+\frac{1}{x}\geqslant 2$

4. 某企业第一年的产量为 m，第二年的增长率为 a，第三年的增长率为 b，这两年的平均增长率为 x，则　　(　　)

A. $x=\frac{a+b}{2}$　　B. $x\leqslant\frac{a+b}{2}$

C. $x>\frac{a+b}{2}$　　D. $x\geqslant\frac{a+b}{2}$

二、填空题

5. 设数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n=\frac{n}{n^2+8}$，则数列 $\{a_n\}$ 中的最大项是第_____项.

6. 已知 $a>b>c$，则 $\sqrt{(a-b)(b-c)}$ 与 $\frac{a-c}{2}$ 的大小关系是_____.

7. 若 $a>0,b>0,a+b=2$，则下列不等式对一切满足条件的 a,b 恒成立的是_____(写出所有正确命题的编号).

①$ab\leqslant 1$；②$\sqrt{a}+\sqrt{b}\leqslant\sqrt{2}$；③$a^2+b^2\geqslant 2$；④$a^3+b^3\geqslant 3$；⑤$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\geqslant 2$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

学习札记

三、解答题

8.(1)已知a,b为正实数,且$a+b=1$,求证:$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{ab}\geqslant 8$.

(2)已知a,b,c是不全相等的正数.求证:$\frac{b+c-a}{a}+\frac{a+c-b}{b}+\frac{a+b-c}{c}>3$.

9.**(2018·保定高二联考)**若$a>0,b>0$,且$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\sqrt{ab}$.

(1)求a^3+b^3的最小值;

(2)是否存在a,b,使得$2a+3b=6$?并说明理由.

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

学习札记

3.2　基本不等式与最大(小)值

1 基础知识点对点

知识点一　利用基本不等式求最值

1. 若实数 a,b 满足 $\frac{1}{a}+\frac{2}{b}=\sqrt{ab}$，则 ab 的最小值为　　(　　)

A. $\sqrt{2}$　　B. 2

C. $2\sqrt{2}$　　D. 4

2. 若函数 $f(x)=x+\frac{1}{x-2}(x>2)$ 在 $x=a$ 处取最小值，则 $a=$　　(　　)

A. $1+\sqrt{2}$　　B. $1+\sqrt{3}$

C. 3　　D. 4

知识点二　有限制条件的最值问题

3. **(2018·江西师大附中期中)** 设 $x>0,y>0$，若 $x\lg 2,\lg\sqrt{2},y\lg 2$ 成等差数列，则 $\frac{1}{x}+\frac{16}{y}$ 的最小值为　　(　　)

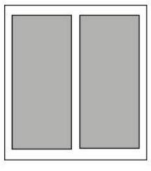
A. 9　　B. 16

C. 25　　D. 32

4. 若实数 a,b 满足 $ab-4a-b+1=0(a>1)$，则 $(a+1)(b+2)$ 的最小值为_____.

知识点三　利用基本不等式解应用题

5. 如右图，要设计一张矩形广告，该广告含有大小相等的左右两个矩形栏目(即图中阴影部分)，这两栏目的面积之和为 18 000 cm^2，四周空白的宽度为 10 cm，两栏之间的中缝空白的宽度为 5 cm，怎样确定广告的高与宽的尺寸(单位：cm)，能使矩形广告面积最小？



2 课后拔高提能练

一、选择题

1. **(2018·乌鲁木齐模拟)** 已知 x,y 都是正数，且 $xy=1$，则 $\frac{1}{x}+\frac{4}{y}$ 的最小值为　　(　　)

A. 6　　B. 5

C. 4　　D. 3

2. 已知第一象限的点 (a,b) 在直线 $2x+3y-1=0$ 上，则代数式 $\frac{2}{a}+\frac{3}{b}$ 的最小值为　　(　　)

A. 24　　B. 25

C. 26　　D. 27

3. 设 $x>0,y>0$，若不等式 $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\geqslant\frac{m}{x+y}$ 恒成立，则实数 m 的取值范围是　　(　　)

A. $(-\infty,4]$　　B. $(-\infty,4)$

C. $(4,+\infty)$　　D. $[4,+\infty)$

4. **(2019·黄冈模拟)** 设 $a>1,b>0$，若 $a+b=2$，则 $\frac{1}{a-1}+\frac{2}{b}$ 的最小值为　　(　　)

A. $3+2\sqrt{2}$　　B. 6

C. $4\sqrt{2}$　　D. $2\sqrt{2}$

二、填空题

5. **(2018·天津卷)** 已知 $a,b\in\mathbf{R}$，且 $a-3b+6=0$，则 $2^a+\frac{1}{8^b}$ 的最小值为_____.

6. **(2018·江苏卷)** 在 $\triangle ABC$ 中，内角 A,B,C 所对的边分别为 a,b,c，$\angle ABC=120°$，$\angle ABC$ 的平分线交 AC 于点 D，且 $BD=1$，则 $4a+c$ 的最小值为_____.

7. **(2018·郑州模拟)** 若 $x>0,\frac{x}{x^2+3x+1}\leqslant a$ 恒成立，则实数 a 的取值范围是_____.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

学习札记

三、解答题

8. 已知 $x>0,y>0$，且 $x+2y=1$.

(1)求 $\frac{1}{x}+\frac{4}{y}$ 的最小值；

(2)若 $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}>a$ 恒成立，求实数 a 的取值范围.

9. 已知 $x>0,y>0$，且 $2x+5y=20$.

(1)求 $a=\lg x+\lg y$ 的最大值；

(2)求 $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$ 的最小值，并求出 $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$ 取到最小值时，对应的 x,y 的值.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

学习札记

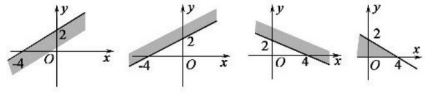
§4　简单线性规划

4.1　二元一次不等式(组)与平面区域

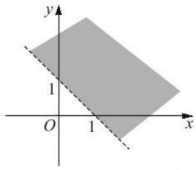
1 基础知识点对点

知识点一　二元一次不等式表示的平面区域

1. 不等式 $x-2y+4\geqslant 0$ 表示的平面区域是　(　　)



2. 图中阴影部分表示的平面区域满足的不等式是　(　　)

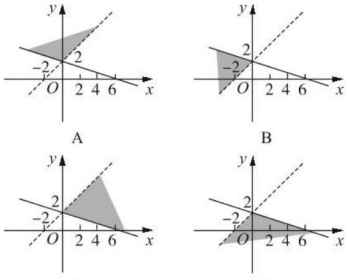


A. $x+y-1<0$　　B. $x+y-1>0$

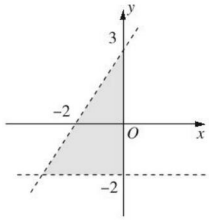
C. $x-y-1<0$　　D. $x-y-1>0$

知识点二　二元一次不等式组表示的平面区域

3. 不等式组 $\begin{cases}x+3y-6\leqslant 0,\\ x-y+2<0\end{cases}$ 表示的平面区域是(　　)



4. 如图所示，表示阴影部分的二元一次不等式组是　(　　)



A. $\begin{cases}y\geqslant -2,\\ 3x-2y+6>0,\\ x<0\end{cases}$　　B. $\begin{cases}y\geqslant -2,\\ 3x-2y+6\geqslant 0,\\ x<0\end{cases}$

C. $\begin{cases}y>-2,\\ 3x-2y+6>0,\\ x\leqslant 0\end{cases}$　　D. $\begin{cases}y>-2,\\ 3x-2y+6<0,\\ x\leqslant 0\end{cases}$

知识点三　用平面区域表示实际问题

5. 某家具厂计划每天生产桌椅的数量各不少于 12，已知生产一张桌子需用木材 0.3 方，生产一把椅子需用木材 0.2 方，每个工人每天能生产一张桌子或 2 把椅子，木材每天供应量为 12 方，工人人数最多时为 30 人，请把每天生产的桌椅数量在直角坐标系中表示出来.

2 课后拔高提能练

一、选择题

1. 不等式 $x+3y-6<0$ 表示的平面区域在直线 $x+3y-6=0$ 的　(　　)

A. 右上方　　B. 左上方

C. 右下方　　D. 左下方

2. 若点(2,1)及点(1,2)分别在直线 $3x+ay-6=0$ 的两侧，则实数 a 的取值范围是　(　　)

A. $a>0$　　B. $a<\frac{3}{2}$

C. $0<a<\frac{3}{2}$　　D. $a<0$ 或 $a>\frac{3}{2}$

3. **(2018·浙江台州市期末)** 若实数 $a,b\in\{1,2\}$，则在不等式 $x+y-3\geqslant 0$ 表示的平面区域内的点 $P(a,b)$ 共有　(　　)

A. 1 个　　B. 2 个

C. 3 个　　D. 4 个

4. 已知点 $A(a,2a-1)$ 既在直线 $y=3x-6$ 的上方，又在 y 轴的右侧，则实数 a 的取值范围是　(　　)

A. $(2,+\infty)$　　B. $(5,+\infty)$

C. $(0,2)$　　D. $(0,5)$

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

学习札记

二、填空题

5. 点 $P(a,3)$ 到直线 $4x-3y+1=0$ 的距离等于 4，且点 P 在不等式 $2x+y>0$ 表示的平面区域内，则点 P 的坐标为_____.

6. 若不等式组 $\begin{cases} x-y+5\geqslant 0, \\ y\geqslant a, \\ 0\leqslant x\leqslant 2 \end{cases}$ 表示的平面区域是一个三角形，则实数 a 的取值范围是_____.

7. **(2019·辽宁铁岭市联考)** 已知实数 x、y 满足约束条件 $\begin{cases} y\leqslant -x+2, \\ y\leqslant x-1, \\ y\geqslant 0, \end{cases}$ 则其围成的平面区域的面积为_____.

三、解答题

8. 在 $\triangle ABC$ 中，$A(3,-1)$，$B(-1,1)$，$C(1,3)$，写出 $\triangle ABC$ 区域（包括边界）所表示的二元一次不等式组.

9. 求不等式组 $\begin{cases} x-y+6\geqslant 0, \\ x+y\geqslant 0, \\ x\leqslant 3 \end{cases}$ 表示的平面区域的面积.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

学习札记

4.2　简单线性规划

1 基础知识点对点

知识点一　求线性目标函数的最值

1.（2017·全国卷Ⅱ）设 x,y 满足约束条件 $\begin{cases}2x+3y-3\leqslant 0,\\2x-3y+3\geqslant 0,\\y+3\geqslant 0,\end{cases}$ 则 $z=2x+y$ 的最小值是（　　）

A. -15　　B. -9

C. 1　　D. 9

2.（2017·全国卷Ⅲ）设 x,y 满足约束条件 $\begin{cases}3x+2y-6\leqslant 0,\\x\geqslant 0,\\y\leqslant 0,\end{cases}$ 则 $z=x-y$ 的取值范围是（　　）

A. $[-3,0]$　　B. $[-3,2]$

C. $[0,2]$　　D. $[0,3]$

知识点二　求非线性目标函数的最值

3.（2019·湖南衡阳市联考）已知 O 为坐标原点，点 M 坐标为 $(-2,1)$，在平面区域 $\begin{cases}x\geqslant 0,\\x+y\leqslant 2,\\y\geqslant 0\end{cases}$ 上取一点 N，则使 $|MN|$ 取得最小值时，点 N 的坐标是（　　）

A. $(0,0)$　　B. $(0,1)$

C. $(0,2)$　　D. $(2,0)$

4.（2018·内蒙古包头一中模拟）已知 x,y 满足约束条件 $\begin{cases}x-y-2\leqslant 0,\\x+2y-5\geqslant 0,\\y-2\leqslant 0,\end{cases}$ 则 $z=\dfrac{y+1}{x+1}$ 的范围是（　　）

A. $\left[\dfrac{1}{3},2\right]$　　B. $\left[-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right]$

C. $\left[\dfrac{1}{2},\dfrac{3}{2}\right]$　　D. $\left[\dfrac{3}{2},\dfrac{5}{2}\right]$

知识点三　含参数的线性规划问题

5.（2018·陕西汉中市质检）已知实数 x,y 满足约束条件 $\begin{cases}2x-y-1\leqslant 0,\\x-y+1\geqslant 0,\\x\geqslant 0,y\geqslant 0,\end{cases}$ 若 $z=ax+by(a>0,b>0)$ 的最大值为 1，则 $\dfrac{1}{2a}+\dfrac{1}{3b}$ 的最小值为_____.

2 课后拔高提能练

一、选择题

1.（2017·全国卷Ⅰ）设 x,y 满足约束条件 $\begin{cases}x+3y\leqslant 3,\\x-y\geqslant 1,\\y\geqslant 0,\end{cases}$ 则 $z=x+y$ 的最大值为（　　）

A. 0　　B. 1

C. 2　　D. 3

2.（2018·天津卷）设变量 x,y 满足约束条件 $\begin{cases}x+y\leqslant 5,\\2x-y\leqslant 4,\\-x+y\leqslant 1,\\y\geqslant 0,\end{cases}$ 则目标函数 $z=3x+5y$ 的最大值为（　　）

A. 6　　B. 19

C. 21　　D. 45

3. 设 $z=x+y$，其中实数 x,y 满足 $\begin{cases}x+2y\geqslant 0,\\x-y\leqslant 0,\\0\leqslant y\leqslant k,\end{cases}$ 若 z 的最大值为 6，则 z 的最小值为（　　）

A. -3　　B. -2

C. -1　　D. 0

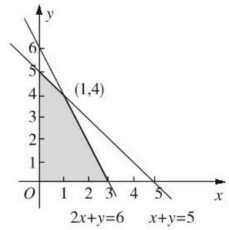
4. 已知平面区域 D 是由以 $A(1,3),B(5,2),C(3,1)$ 为顶点的三角形内部和边界组成. 若在区域 D 上有无穷多个点 (x,y) 可使目标函数 $z=x+my$ 取得最小值，则 m 等于（　　）

A. -2　　B. -1

C. 1　　D. 4

二、填空题

5. 如图所示，阴影部分的点满足不等式组 $\begin{cases}x+y\leqslant 5,\\2x+y\leqslant 6,\\x\geqslant 0,y\geqslant 0,\end{cases}$ 在这些点中，使目标函数 $k=6x+8y$ 取得最大值的点的坐标是_____.



关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

学习札记

6. 在平面直角坐标系 xOy 中，M 为不等式组 $\begin{cases}2x+3y-6\leqslant 0,\\ x+y-2\geqslant 0,\\ y\geqslant 0\end{cases}$ 所表示的区域内一动点，则 $|OM|$ 的最小值是_____.

7. **（2018 · 浙江卷）**若 x、y 满足约束条件 $\begin{cases}x-y\geqslant 0,\\ 2x+y\leqslant 6,\\ x+y\geqslant 2,\end{cases}$ 则 $z=x+3y$ 的最小值是_____，最大值是_____.

三、解答题

8. 若实数 x，y 满足不等式组 $\begin{cases}x+3y-3\geqslant 0,\\ 2x-y-3\leqslant 0,\\ x-my+1\geqslant 0,\end{cases}$ 且 $x+y$ 的最大值为 9，求实数 m 的值.

9. 求由约束条件 $\begin{cases}x+y\leqslant 5,\\ 2x+y\leqslant 6,\\ x\geqslant 0,y\geqslant 0\end{cases}$ 确定的平面区域的面积 $S_{\text{阴影部分}}$ 和周长 $C_{\text{阴影部分}}$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

学习札记

4.3　简单线性规划的应用

1 基础知识点对点

知识点一　利润最大问题

1. 某企业生产甲、乙两种产品，已知生产每吨甲产品要用A原料3吨，B原料2吨；生产每吨乙产品要用A原料1吨，B原料3吨，销售每吨甲产品可获得利润5万元，销售每吨乙产品可获得利润3万元．该企业在一个生产周期内消耗A原料不超过13吨．B原料不超过18吨．那么该企业可获得的最大利润是（　　）

A. 12万元　　B. 20万元

C. 25万元　　D. 27万元

2. 某公司有60万元资金，计划投资甲、乙两个项目．按要求对项目甲的投资不小于对项目乙投资的$\frac{2}{3}$倍，且对每个项目的投资不能低于5万元，对项目甲每投资1万元可获得0.4万元的利润，对项目乙每投资1万元可获得0.6万元的利润，该公司正确规划投资后，在这两个项目上共可获得的最大利润为（　　）

A. 36万元　　B. 31.2万元

C. 30.4万元　　D. 24万元

知识点二　费用最低问题

3. 在“家电下乡”活动中，某厂要将100台洗衣机运往邻近的乡镇，现有4辆甲型货车和8辆乙型货车可供使用．每辆甲型货车运输费用400元，可装洗衣机20台；每辆乙型货车运输费用300元，可装洗衣机10台．若每辆车至多只运一次，则该厂所花的最少运输费用为（　　）

A. 2 000元　　B. 2 200元

C. 2 400元　　D. 2 800元

4. 某公司租赁甲、乙两种设备生产A，B两种产品，甲种设备每天能生产A类产品5件和B类产品10件，乙种设备每天能生产A类产品6件和B类产品20件．已知设备甲每天的租赁费为200元，设备乙每天的租赁费为300元．现该公司至少要生产A类产品50件，B类产品140件，所需租赁费最少为_____元．

2 课后拔高提能练

一、选择题

1. 有5辆6吨的汽车和4辆4吨的汽车，要运送最多货物，完成这项运输任务的线性目标函数是（　　）

A. $z=5x+4y$　　B. $z=6x+4y$

C. $z=5x+6y$　　D. $z=4x+4y$

2. 完成一项装修工程，请木工需付工资每人每天50元，请瓦工需付工资每人每天40元，现有工人工资预算每天2 000元，设请木工x人，请瓦工y人，则请工人的约束条件是（　　）

A. $50x+40y\leqslant 2\,000$　　B. $50x+40y=2\,000$

C. $50x+4y\geqslant 2\,000$　　D. $40x+50y\leqslant 2\,000$

3. **(2018·湖南常德模拟)** 某企业拟生产甲、乙两种产品，已知每件甲产品的利润为3万元，每件乙产品的利润为2万元，且甲、乙两种产品都需要在A，B两种设备上加工，在每台设备A，每台设备B上加工1件甲产品所需工时分别为1 h和2 h，加工1件乙产品所需工时分别为2 h和1 h，A设备每天使用时间不超过4 h，B设备每天使用时间不超过5 h，则通过合理安排生产计划，该企业在一天内的最大利润是（　　）

A. 18万元　　B. 12万元

C. 10万元　　D. 8万元

4. 某旅行社租用A，B两种型号的客车安排900名客人旅行，A，B两种车辆的载客量分别为36和60人，租金分别为1 600元/辆和2 400元/辆，旅行社要求租车总数不超过21辆，且B型车不多于A型车7辆，则租金最少为（　　）

A. 31 200元　　B. 36 000元

C. 36 800元　　D. 38 400元

二、填空题

5. 若不等式组$\begin{cases}x-y\geqslant 0,\\ 2x+y\leqslant 2,\\ y\geqslant 0,\\ x+y\leqslant a\end{cases}$表示的平面区域是一个三角形，则实数$a$的取值范围是_____．

6. 设x，y满足条件$\begin{cases}x+y\leqslant 3,\\ y\leqslant x-1,\\ y\geqslant 0,\end{cases}$则$z=(x+1)^2+y^2$的最小值为_____．

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

学习札记

7. 某公司招收男职员 x 名，女职员 y 名，x 和 y 需满足约束条件 $\begin{cases}5x-11y\geqslant -22,\\2x+3y\geqslant 9,\\2x\leqslant 11,\end{cases}$ 则 $z=10x+10y$ 的最大值是_____.

三、解答题

8. 某工厂生产甲，乙两种产品，其产量分别为 45 个和 55 个，所用原料为 A，B 两种规格的金属板，每张金属板的面积分别为 2 m^2 和 3 m^2. 用一张 A 种规格的金属板可造甲种产品 3 个，乙种产品 5 个；用一张 B 种规格的金属板可造甲，乙两种产品各 6 个. 问 A，B 两种规格的金属板各取多少张，才能完成生产计划，并使总的用料面积最省？求出此时所用原料面积.

9. **(2017・天津卷)** 电视台播放甲、乙两套连续剧，每次播放连续剧时，需要播放广告. 已知每次播放甲、乙两套连续剧时，连续剧播放时长、广告播放时长、收视人次如下表所示：

	连续剧播放时长（分钟）	广告播放时长（分钟）	收视人次（万）
甲	70	5	60
乙	60	5	25

已知电视台每周安排的甲、乙连续剧的总播放时间不多于 600 分钟，广告的总播放时间不少于 30 分钟，且甲连续剧播放的次数不多于乙连续剧播放次数的 2 倍. 分别用 x，y 表示每周计划播出的甲、乙两套连续剧的次数.

(1) 用 x，y 列出满足题目条件的数学关系式，并画出相应的平面区域；

(2) 问电视台每周播出甲、乙两套连续剧各多少次，才能使总收视人次最多？

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

学习札记

阶段质量评估卷(四)

时间:45 分钟　满分:100 分

一、选择题(6×5=30 分)

1. (2019·四川成都市树德中学月考)已知$\frac{1}{a}<\frac{1}{b}<0$,则下列结论不正确的是 (　　)

A. $a^2<b^2$　　B. $ab<b^2$

C. $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}>2$　　D. $|a|+|b|>|a+b|$

2. (2019·南昌模拟)若集合$A=\{x|1\leqslant 3^x\leqslant 81\}$,$B=\{x|\log_2(x^2-x)>1\}$,则$A\cap B=$ (　　)

A. $(2,4]$　　B. $[2,4]$

C. $(-\infty,0)\cup(0,4]$　　D. $(-\infty,-1)\cup[0,4]$

3. (2018·保定高二期末)已知函数$f(x)=\begin{cases}x+2(x\leqslant 0),\\-x+2(x>0),\end{cases}$则不等式$f(x)\geqslant x^2$的解集为 (　　)

A. $[-1,1]$　　B. $[-2,2]$

C. $[-2,1]$　　D. $[-1,2]$

4. (2018·怀化模拟)已知$a>0$,$b>0$,函数$f(x)=2ae^x+b$的图像过点$(0,1)$,则$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$的最小值是 (　　)

A. $3+2\sqrt{2}$　　B. $3-2\sqrt{2}$

C. 4　　D. 2

5. 若正数a,b满足$ab=a+b+\frac{5}{4}$,则$a+b$的取值范围是 (　　)

A. $(0,4]$　　B. $(0,5]$

C. $[4,+\infty)$　　D. $[5,+\infty)$

6. (2017·北京卷)若x,y满足$\begin{cases}x\leqslant 3,\\x+y\geqslant 2,\\y\leqslant x,\end{cases}$则$x+2y$的最大值为 (　　)

A. 1　　B. 3

C. 5　　D. 9

二、填空题(3×5=15 分)

7. (2018·北京卷)若x,y满足$x+1\leqslant y\leqslant 2x$,则$2y-x$的最小值是_____.

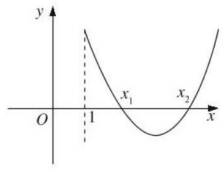
8. (2018·四川攀枝花十二中期中)当$x\in(1,3)$时,不等式$x^2+mx+4<0$恒成立,则m的取值范围是_____.

9. (2018·浙江宁海中学期中)设a,b都是正数,且$a+b-2a^2b^2-6=0$,则$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$的最小值为_____,此时ab值为_____.

三、解答题(55 分)

10. (13 分)解关于x的不等式$ax^2-(a+1)x+1<0$.

11. (13 分)若方程$8x^2-(m-1)x+m-7=0$的两实根都大于 1,求实数m的取值范围.



关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

学习札记

12.(14 分)(1)已知 $x>\frac{5}{4}$,求 $y=4x-2+\frac{1}{4x-5}$的最小值;

(2)已知 $0<x<\frac{1}{2}$,求 $y=\frac{1}{2}x(1-2x)$的最大值.

13.(15 分)**(2018·河北唐山一中期末)**某厂家拟在 2018 年举行促销活动,经调查测算,该产品年销售量(即该厂的年产量)x 万件与年促销费用 m 万元($m\geqslant 0$)满足 $x=3-\frac{k}{m+1}$(k 为常数),如果不搞促销活动,则该产品的年销售只能是 1 万件.已知 2018 年生产该产品的固定投入为 8 万元.每生产 1 万件该产品需要再投入 16 万元,厂家将每件产品的销售价格定为每件产品年平均成本的 1.5 倍(产品成本包括固定投入和再投入两部分资金).

(1)将 2018 年该产品的利润 y 万元表示为年促销费用 m 万元的函数;

(2)该厂家 2018 年的促销费用投入多少万元时,厂家的利润最大?

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

学习札记

阶段质量评估卷(五)

时间:45 分钟　满分:100 分

一、选择题(6×5=30 分)

1. (2018·北京西城区期末)等差数列$\{a_n\}$中,前三项为$-2,0,2$,则$a_6+a_9=$　(　)

A. $2a_7$　　B. 8

C. 14　　D. 22

2. 已知数列$\{a_n\}$的前n项和$S_n=n^2-9n$,第k项满足$5<a_k<8$,则$k=$　(　)

A. 9　　B. 8

C. 7　　D. 6

3. 不等式$\frac{x+5}{(x-1)^2}\geqslant 2$的解集是　(　)

A. $\left[-3,\frac{1}{2}\right]$　　B. $\left[-\frac{1}{2},3\right]$

C. $\left[\frac{1}{2},1\right)\cup(1,3]$　　D. $\left[-\frac{1}{2},1\right)\cup(1,3]$

4. $\triangle ABC$的外接圆半径为R,若$2R(\sin^2A-\sin^2C)=(\sqrt{2}a-b)\sin B$,则$C$等于　(　)

A. 30°　　B. 45°

C. 135°　　D. 150°

5. 设全集$U=\mathbf{R}$,$A=\left\{x\left|\frac{x-a}{x+b}\geqslant 0\right.\right\}$,$\complement_U A=(-1,-a]$,则$a+b=$　(　)

A. -2　　B. 2

C. 1　　D. 0

6. (2019·湖南衡阳四中月考)正项等比数列$\{a_n\}$中,存在两项a_m、a_n使得$\sqrt{a_m a_n}=4a_1$,且$a_6=a_5+2a_4$,则$\frac{1}{m}+\frac{4}{n}$的最小值是　(　)

A. $\frac{3}{2}$　　B. 2

C. $\frac{7}{3}$　　D. $\frac{25}{6}$

二、填空题(3×5=15 分)

7. (2019·南阳一中模拟)已知$\{a_n\}$是首项为32的等比数列,S_n是其前n项和,且$\frac{S_6}{S_3}=\frac{65}{64}$,则数列$\{|\log_2 a_n|\}$的前10项和为_____.

8. 在$\triangle ABC$中,角A,B,C的对边分别是a,b,c.已知$a=2$,$3b\sin C-5c\sin B\cos A=0$,则$\triangle ABC$面积的最大值是_____.

9. 已知正数x,y满足$x+3y=5xy$,则$3x+4y$的最小值为_____.

三、解答题(55 分)

10. (13 分)(2018·北京顺义区高三统测)已知数列$\{a_n\}$满足$a_1=2$,$a_{n+1}=3a_n+2(n\in\mathbf{N}^*)$

(1)求证:数列$\{a_n+1\}$是等比数列;

(2)求数列$\{a_n\}$的通项公式a_n与前n项和S_n.

11. (13 分)(2019·辽宁鞍山市质量调查)在$\triangle ABC$中,角A,B,C的对边分别为a,b,c.且$b\cos A+a\cos B=-2c\cos C$.

(1)求角C的大小;

(2)若$a+b=6$,且$\triangle ABC$的面积为$2\sqrt{3}$,求边c的长.

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

学习札记

12.(14 分)变量 x、y 满足 $\begin{cases}x-4y+3\leqslant 0,\\3x+5y-25\leqslant 0,\\x\geqslant 1.\end{cases}$

(1)设 $z=\dfrac{y}{x}$,求 z 的最小值;

(2)设 $z=x^2+y^2$,求 z 的取值范围.

13.(15 分)**(2018·吉林五校联考)**已知△ABC 的三个角 A,B,C 的对边分别为 a,b,c,且 A,B,C 成等差数列,且 $b=\sqrt{3}$. 数列$\{a_n\}$是等比数列,且首项 $a_1=\dfrac{1}{2}$,公比为$\dfrac{\sin A+\sin C}{a+c}$.

(1)求数列$\{a_n\}$的通项公式;

(2)若 $b_n=-\dfrac{\log_2 a_n}{a_n}$,求数列$\{b_n\}$的前 n 项和 S_n.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

班级_____ 姓名_____ 考场号_____ 准考证号_____

密 封 线

阶段测试一

(第一章 数 列)

时间:120 分钟 满分:150 分

一、选择题(本大题共 10 小题,每小题 5 分,共 50 分,在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的)

1. 数列 $-1,6,-11,16,\cdots$ 的一个通项公式为 ( )

A. $a_n=5n-4$ B. $a_n=5n+4$ C. $a_n=(-1)^n(5n-4)$ D. $a_n=(-1)^n(5n+4)$

2. 设 $\{a_n\}$ 是等比数列,函数 $y=x^2-x-2\,018$ 的两个零点是 a_2,a_3,则 $a_1a_4=$ ( )

A. 2 018 B. 1 C. -1 D. $-2\,018$

3. 已知等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n,$S_3=3$,$S_6=27$,则此等比数列的公比 q 等于 ( )

A. 2 B. -2 C. $\frac{1}{2}$ D. $-\frac{1}{2}$

4. **(2017·全国卷Ⅰ)**记 S_n 为等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和,若 $a_4+a_5=24$,$S_6=48$,则 $\{a_n\}$ 的公差为 ( )

A. 1 B. 2 C. 4 D. 8

5. 下面是关于公差 $d>0$ 的等差数列 $\{a_n\}$ 的四个命题:

p_1:数列 $\{a_n\}$ 是递增数列; p_2:数列 $\{na_n\}$ 是递增数列;

p_3:数列 $\left\{\frac{a_n}{n}\right\}$ 是递增数列; p_4:数列 $\{a_n+3nd\}$ 是递增数列.

其中的真命题为 ( )

A. p_1,p_2 B. p_3,p_4 C. p_2,p_3 D. p_1,p_4

6. **(2018·江西师大附中期中)**某人为了观看 2018 年足球世界杯,从 2014 年起,每年的 5 月 1 日到银行存入 a 元的定期储蓄,若年利率为 p 且保持不变,并约定每年到期,存款的本息均自动转为新的一年的定期,到 2018 年的 5 月 1 日将所有存款及利息全部取出,则可取出钱(元)的总数为 ( )

A. $a(1+p)^4$ B. $a(1+p)^5$

C. $\frac{a}{p}[(1+p)^4-(1+p)]$ D. $\frac{a}{p}[(1+p)^5-(1+p)]$

7. **(2019·开封模拟)**已知 $\{a_n\}$ 为正项等比数列,S_n 是它的前 n 项和,若 $a_1=16$,且 a_4,a_7 的等差中项为 $\frac{9}{8}$,则 $S_5=$ ( )

A. 29 B. 31 C. 33 D. 35

8. 已知正项数列 $\{a_n\}$ 中,$a_1=1$,$a_2=2$,$2a_n^2=a_{n+1}^2+a_{n-1}^2(n\geqslant 2)$,则 a_6 等于 ( )

A. 16 B. 8 C. $2\sqrt{2}$ D. 4

9. **(2018·海南模拟)**已知函数 $f(x)=x^2+2bx$ 的图像过点 $(1,2)$,若数列 $\left\{\frac{1}{f(n)}\right\}$ 的前 n 项和为 S_n,则 $S_{2\,017}$ 的值为 ( )

A. $\frac{2\,017}{2\,016}$ B. $\frac{2\,015}{2\,016}$ C. $\frac{2\,018}{2\,017}$ D. $\frac{2\,017}{2\,018}$

10. **(2018·保定模拟)**数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_n+a_{n+1}=\frac{1}{2}$,$a_1=1$,S_n 是数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和,则 $S_{21}=$ ( )

A. $\frac{21}{2}$ B. 6 C. 10 D. 21

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

二、填空题(本大题共 5 小题,每小题 5 分,共 25 分,把答案填在题中横线上)

11. 数列$\{a_n\}$是等差数列,若a_1+1,a_3+3,a_5+5构成公比为q的等比数列,则$q=$_____.

12. 已知S_n是等差数列$\{a_n\}$的前n项和,若$S_7=7,S_{15}=75$,则数列$\left\{\frac{S_n}{n}\right\}$的前 20 项和为_____.

13. **(2017·全国卷Ⅱ)**设等比数列$\{a_n\}$满足$a_1+a_2=-1,a_1-a_3=-3$,则$a_4=$_____.

14. 已知$a,b,c(a<b<c)$成等差数列,将其中的两个数交换,得到的三个数依次成等比数列,则$\frac{a^2+c^2}{2b^2}$的值为_____.

15. 设数列$\{a_n\}$的前n项和为$S_n(n\in\mathbf{N}_+)$,关于数列$\{a_n\}$有下面四个命题:

①若$S_n=an^2+bn(a,b\in\mathbf{R})$,则$\{a_n\}$是等差数列;

②若$S_n=\frac{1}{2}(3a_n-1)$,则$\{a_n\}$是等比数列;

③若$\{a_n\}$是等差数列,则$S_n=na_1+\frac{n(n-1)}{2}d$($d$为公差);

④若$\{a_n\}$是等比数列,则$S_n=\frac{a_1(1-q^n)}{1-q}$($q$为公比).

其中所有正确命题的序号是_____.

三、解答题(本大题共 6 小题,共 75 分,解答时写出文字说明、证明过程或演算步骤)

16. (12 分)**(2019·保定高二月考)**等差数列$\{a_n\}$中,$a_2=4,a_4+a_7=15$.

(1)求数列$\{a_n\}$的通项公式;

(2)设$b_n=2^{a_n-2}+n$,求$b_1+b_2+\cdots+b_{10}$的值.

17. (12 分)在等比数列$\{a_n\}$中,$a_1=2$,公比$q>0$,其中$-8a_1,a_2,a_3$成等差数列.

(1)求数列$\{a_n\}$的通项公式;

(2)设$b_n=\log_2 a_n$,求数列$\left\{\frac{1}{b_nb_{n+1}}\right\}$的前$n$项和$T_n$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

18.（12 分）**(2018 · 河北衡水冀州中学期末)**已知$\{a_n\}$是单调递增的等差数列，首项 $a_1=3$，前 n 项和为 S_n，数列$\{b_n\}$是等比数列，首项 $b_1=1$，且 $a_2b_2=12$，$S_3+b_2=20$.

（1）求数列$\{a_n\}$和$\{b_n\}$的通项公式；

（2）令 $c_n=nb_n(n\in\mathbf{N}_+)$，求$\{c_n\}$的前 n 项和 T_n.

19.（12 分）**(2019 · 云南模拟)**已知数列$\{a_n\}$与$\{b_n\}$，若 $a_1=3$，且对任意正整数 n 满足 $a_{n+1}-a_n=2$，数列$\{b_n\}$的前 n 项和 $S_n=n^2+a_n$.

（1）求数列$\{a_n\}$，$\{b_n\}$的通项公式；

（2）求数列$\left\{\dfrac{1}{b_nb_{n+1}}\right\}$的前 n 项和 T_n.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

20.(13分)**(2018·湖北天门模拟)**在数列$\{a_n\}$中,$a_{n+1}+a_n=2n-44(n\in\mathbf{N}_+)$,$a_1=-23$.

(1)求a_n;

(2)设S_n为$\{a_n\}$的前n项和,求S_n的最小值.

21.(14分)设数列$\{a_n\}$满足$a_1=2$,$a_{n+1}=a_n+3\cdot 2^{n-1}$.

(1)求数列$\{a_n\}$的通项公式a_n;

(2)令$b_n=n(a_n+1)$,求数列$\{b_n\}$的前n项和S_n.

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

班级_____ 姓名_____ 考场号_____ 准考证号_____ 数学 必修5 BS
密 封 线

班级_____ 姓名_____ 考场号_____ 准考证号_____

密 封 线

阶段测试二

(第二章 解三角形)

时间:120 分钟 满分:150 分

一、选择题(本大题共 10 小题,每小题 5 分,共 50 分,在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的)

1. 在△ABC 中,下列等式中总能成立的是 ( )

A. $a\cdot\cos C=c\cdot\cos A$　　B. $b\cdot\sin C=c\cdot\sin A$

C. $ab\sin C=bc\sin B$　　D. $a\cdot\sin C=c\cdot\sin A$

2. 若△ABC 的面积为$\frac{3}{2}$,$b=\sqrt{2}$,$c=3$,则角 A 等于 ( )

A. 45°　　B. 135°　　C. 45°或 135°　　D. 60°或 120°

3. **(2018·湖北咸宁重点高中联考)**在△ABC 中,角 A,B,C 所对的边分别为 a,b,c,若 $a=\sqrt{22}$,$c=3$,$\cos A=\frac{2}{5}$,则 $b=$ ( )

A. 2　　B. 4　　C. 5　　D. 6

4. 在△ABC 中,已知下列条件:①$b=3$,$c=4$,$B=30°$;②$a=5$,$b=8$,$A=30°$;③$c=6$,$b=3\sqrt{3}$,$B=60°$;④$c=9$,$b=12$,$C=60°$,其中满足上述条件的三角形有两解的是 ( )

A. ①④　　B. ①②　　C. ①②③　　D. ③④

5. 若△ABC 的三个内角满足 $\sin A:\sin B:\sin C=5:11:13$,则△$ABC$ ( )

A. 一定是锐角三角形　　B. 一定是直角三角形

C. 一定是钝角三角形　　D. 可能是锐角三角形,也可能是直角三角形

6. **(2018·山东高二模块测试)**在△ABC 中,角 A,B,C 的对边分别为 a,b,c,若$(a^2+c^2-b^2)\tan B=\sqrt{3}ac$,则角 B 的值为 ( )

A. $\frac{\pi}{6}$　　B. $\frac{\pi}{3}$　　C. $\frac{\pi}{6}$或$\frac{5\pi}{6}$　　D. $\frac{\pi}{3}$或$\frac{2\pi}{3}$

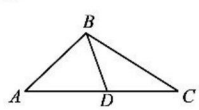
7. 在△ABC 中,内角 A,B,C 所对的边分别是 a,b,c,若 $c^2=(a-b)^2+6$,$C=\frac{\pi}{3}$,则△ABC 的面积是 ( )

A. $\sqrt{3}$　　B. $\frac{9\sqrt{3}}{2}$　　C. $\frac{3\sqrt{3}}{2}$　　D. $3\sqrt{3}$

8. **(2019·江西师大附中模拟)**在△ABC 中,角 A,B,C 的对边分别为 a,b,c,$\frac{a\sin A+b\sin B-c\sin C}{\sin A\sin B}=\frac{2\sqrt{3}}{3}c$,$a=2\sqrt{3}$. 若 $b\in[1,\sqrt{3}]$,则 c 的最小值为 ( )

A. 2　　B. 3　　C. $2\sqrt{2}$　　D. $2\sqrt{3}$

9. 在△ABC 中,D 是边 AC 上的点,且 $AB=AD$,$2AB=\sqrt{3}BD$,$BC=2BD$,则 $\sin C$ 的值为 ( )



A. $\frac{\sqrt{3}}{3}$　　B. $\frac{\sqrt{3}}{6}$

C. $\frac{\sqrt{6}}{3}$　　D. $\frac{\sqrt{6}}{6}$

10. 甲船在湖中 B 岛的正南 A 处,$AB=3$ km,甲船以 8 km/h 的速度向正北方向航行,同时乙船从 B 岛出发,以 12 km/h 的速度向北偏东 60°方向驶去,则行驶 15 min 后,两船的距离是 ( )

A. $\sqrt{7}$ km　　B. $\sqrt{13}$ km　　C. $\sqrt{19}$ km　　D. $\sqrt{10-3\sqrt{3}}$ km

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

二、填空题(本大题共 5 小题,每小题 5 分,共 25 分,把答案填在题中横线上)

11. 在$\triangle ABC$中,$a=1$,$b=2$,$\cos C=\frac{1}{4}$,则$\triangle ABC$的周长为_____.

12. 在$\triangle ABC$中,BD为$\angle ABC$的平分线,$AB=3$,$BC=2$,$AC=\sqrt{7}$,则$\sin\angle ABD$等于_____.

13. **(2018·银川模拟)**在$\triangle ABC$中,角A,B,C所对的边分别为a,b,c,已知$a=2\sqrt{3}$,$c=2\sqrt{2}$,$1+\frac{\tan A}{\tan B}=\frac{2c}{b}$,则角$C=$_____.

14. 在$\triangle ABC$中,a,b,c分别为角A,B,C的对边,$B=60^\circ$,$b=2$,$a=x$,若c有两解,则x的取值范围是_____.

15. 在$\triangle ABC$中,$B=30^\circ$,$AB=2\sqrt{3}$,$AC=2$,则$\triangle ABC$的面积为_____.

三、解答题(本大题共 6 小题,共 75 分,解答时写出文字说明、证明过程或演算步骤)

16. (12 分)**(2017·全国卷Ⅲ)**$\triangle ABC$的内角A,B,C的对边分别为a,b,c,已知$\sin A+\sqrt{3}\cos A=0$,$a=2\sqrt{7}$,$b=2$.

(1)求c;

(2)设D为BC边上一点,且$AD\perp AC$,求$\triangle ABD$的面积.

17. (12 分)在$\triangle ABC$中,三个内角A,B,C的对边分别为a,b,c,$\cos A=\frac{\sqrt{10}}{10}$,$a\sin A+b\sin B-c\sin C=\frac{2\sqrt{5}}{5}a\sin B$.

(1)求角B的值;

(2)设$b=10$,求$\triangle ABC$的面积S.

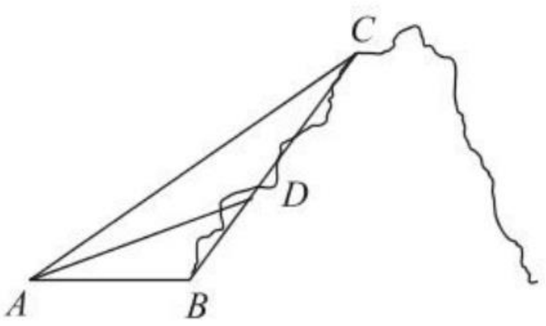
关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

18.（12 分）**(2019 · 辽宁本溪一中月考)**在△ABC 中，角 A，B，C 所对的边分别为 a，b，c.

（1）若 $c=2$，$C=\frac{\pi}{3}$，且△ABC 的面积为$\sqrt{3}$，求 a 和 b 的值；

（2）若 $\sin C+\sin(B-A)=\sin 2A$，试判断△ABC 的形状.

19.（12 分）**(2018 · 贵州遵义一中月考)**如图所示，某旅游景点有一座风景秀丽的山峰，山上有一条笔直的山路 BC 和一条索道 AC，小王和小李打算不坐索道，而是花 2 个小时的时间进行徒步攀登，已知 $\angle ABC=120°$，$\angle ADC=150°$，$BD=1$（千米），$AC=3$（千米）. 假设小王和小李徒步攀登的速度为每小时 1 250 米，请问：两位登山爱好者能否在 2 个小时内徒步登上山峰.



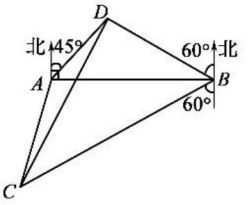
关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

20. (13 分)**(2018 · 浙江十二校联考)**在△ABC中,内角 A,B,C 所对的边分别为 a,b,c,且 $2\sin(A-B)=a\sin A-b\sin B$,$a\neq b$.

(1)求边 c;

(2)若△ABC 的面积为 1,且 $\tan C=2$,求 $a+b$ 的值.

21. (14 分)如图所示,A,B 是海面上位于东西方向相距 $5(3+\sqrt{3})$ 海里的两个观测点.现位于 A 点北偏东 45°,B 点北偏西 60°的 D 点有一艘轮船发出求救信号,位于 B 点南偏西 60°且与 B 点相距 $20\sqrt{3}$ 海里的 C 点的救援船立即前往营救,其航行速度为 30 海里/小时,该救援船到达 D 点需要多长时间?



关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

班级_____ 姓名_____ 考场号_____ 准考证号_____
密 封 线
数学 必修5 BS

班级_____ 姓名_____ 考场号_____ 准考证号_____

密 封 线

阶段测试三

(第三章 不等式)

时间:120 分钟 满分:150 分

一、选择题(本大题共 10 小题,每小题 5 分,共 50 分,在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的)

1. **(2019·四川成都树德中学月考)**已知 $U=\left\{x\left|\frac{x-2}{x}\leqslant 1\right.\right\}$,$A=\{x|2-x\leqslant 1\}$,则 $\complement_U A=$ ( )

A. $\{x|x<1\}$ B. $\{x|0<x<1\}$ C. $\{x|0\leqslant x<1\}$ D. $\{x|x>1\}$

2. 已知 $x,y\in\mathbf{R}$,且 $x>y>0$,则 ( )

A. $\frac{1}{x}-\frac{1}{y}>0$ B. $\sin x-\sin y>0$

C. $\left(\frac{1}{2}\right)^x-\left(\frac{1}{2}\right)^y<0$ D. $\lg x+\lg y>0$

3. **(2018·合肥质检)**下列三个不等式:①$x+\frac{1}{x}\geqslant 2(x\neq 0)$;②$\frac{c}{a}<\frac{c}{b}(a>b>c>0)$;③$\frac{a+m}{b+m}>\frac{a}{b}(a,b,m>0$ 且 $a<b)$,恒成立的个数为 ( )

A. 3 B. 2 C. 1 D. 0

4. 已知 $x>0,y>0,x,a,b,y$ 成等差数列,x,c,d,y 成等比数列,则 $\frac{(a+b)^2}{cd}$ 的最小值是 ( )

A. 0 B. 1 C. 2 D. 4

5. 设 $x>0$,则 $y=3-3x-\frac{1}{x}$ 的最大值是 ( )

A. 3 B. $3-2\sqrt{3}$ C. $3-3\sqrt{2}$ D. -1

6. 若 $1<a<3,-4<b<2$,则 $a-|b|$ 的取值范围是 ( )

A. $(-1,3)$ B. $(-3,6)$ C. $(-3,3)$ D. $(1,4)$

7. **(2019·四川成都树德中学月考)**若两个正实数 x,y 满足 $\frac{1}{x}+\frac{4}{y}=1$,且不等式 $x+\frac{y}{4}<m^2-3m$ 有解,则实数 m 的取值范围是 ( )

A. $(-4,1)$ B. $(-1,4)$

C. $(-\infty,-1)\cup(4,+\infty)$ D. $(-\infty,0)\cup(3,+\infty)$

8. 若 $a>0,b>0$ 且 $4a^2+b^2=4$,则 $a\sqrt{1+b^2}$ 的最大值是 ( )

A. $\frac{3}{2}$ B. $\frac{\sqrt{6}}{2}$ C. $\frac{5}{4}$ D. $\frac{25}{8}$

9. **(2018·烟台模拟)**已知 $-1<a<0,A=1+a^2,B=1-a^2,C=\frac{1}{1+a}$,比较 A,B,C 的大小结果为 ( )

A. $A<B<C$ B. $B<A<C$ C. $A<C<B$ D. $B<C<A$

10. 设 A 为不等式组 $\begin{cases}x\leqslant 0,\\ y\geqslant 0,\\ y-x\leqslant 2\end{cases}$ 所表示的平面区域,则当 a 从 -2 连续变化到 1 时,动直线 $x+y=a$ 扫过 A 中的那部分区域的面积为 ( )

A. $\frac{3}{4}$ B. 1 C. 2 D. $\frac{7}{4}$

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

二、填空题(本大题共 5 小题,每小题 5 分,共 25 分,把答案填在题中横线上)

11. **(2018·重庆七中期中)**不等式 $2x^2-3x-2>0$ 的解集是_____.

12. **(2018·全国卷Ⅰ)**若 x,y 满足约束条件 $\begin{cases}x-2y-2\leqslant 0,\\ x-y+1\geqslant 0,\\ y\leqslant 0,\end{cases}$ 则 $z=3x+2y$ 的最大值为_____.

13. **(2017·全国卷Ⅲ)**若 x,y 满足约束条件 $\begin{cases}x-y\geqslant 0,\\ x+y-2\leqslant 0,\\ y\geqslant 0,\end{cases}$ 则 $z=3x-4y$ 的最小值为_____.

14. **(2017·全国卷Ⅱ)**$\triangle ABC$ 的内角 A,B,C 的对边分别为 a,b,c,若 $2b\cos B=a\cos C+c\cos A$,则 $B=$_____.

15. 某公司一年购买某种货物 600 吨,每次都购买 x 吨,运费为 3 万元/次,一年的总存储费用为 $2x$ 万元,若要使一年的总运费与总存储费用之和最小,则每次需购买_____吨.

三、解答题(本大题共 6 小题,共 75 分,解答时写出文字说明、证明过程或演算步骤)

16. (12 分)设 a,b,c 均为正数,且 $a+b+c=1$,证明:$\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a}\geqslant 1$.

17. (12 分)**(2018·浙江宁海中学期中)**已知实数 a 满足不等式 $|a+2|<2$,解关于 x 的不等式 $(ax+1)(x-1)>0$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

18.(12 分)**(2018·四川攀枝花市十二中期中)**已知 $f(x)=\dfrac{2x}{x^2+6}$.

(1)若 $f(x)>k$ 的解集为$\{x|x<-3$ 或 $x>-2\}$,求 k 的值;

(2)若对任意 $x>0$,$f(x)\leqslant t$ 恒成立,求实数 t 的取值范围.

19.(12 分)已知 a,b 是正常数,$a\neq b$,x,$y\in(0,+\infty)$.

(1)求证:$\dfrac{a^2}{x}+\dfrac{b^2}{y}\geqslant\dfrac{(a+b)^2}{x+y}$,并写出等号成立的条件;

(2)利用(1)的结论求函数 $f(x)=\dfrac{2}{x}+\dfrac{9}{1-2x}$,$x\in\left(0,\dfrac{1}{2}\right)$的最小值,并写出 $f(x)$取最小值时 x 的值.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

20.(13分)为了在夏季降温和冬季供暖时减少能源损耗,房屋的屋顶和外墙需要建造隔热层.某幢建筑物要建造可使用20年的隔热层,每厘米厚的隔热层建造成本为6万元.该建筑物每年的能源消耗费用C(单位:万元)与隔热层厚度x(单位:cm)满足关系式:$C(x)=\frac{k}{3x+5}(0\leqslant x\leqslant 10)$,若不建隔热层,每年能源消耗费用为8万元.设$f(x)$为隔热层建造费用与20年的能源消耗费用之和.

(1)求k的值及$f(x)$的表达式;

(2)隔热层修建多厚时,总费用$f(x)$达到最小?并求最小值.

21.(14分)设函数$f(x)=mx^2-mx-1$.

(1)若对于一切实数x,$f(x)<0$恒成立,求实数m的取值范围;

(2)若对于$x\in[1,3]$,$f(x)<-m+5$恒成立,求实数m的取值范围.

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

班级_____ 姓名_____ 考场号_____ 准考证号_____
密 封 线
数学 必修5 BS

班级_____ 姓名_____ 考场号_____ 准考证号_____

密 封 线

阶段测试四

(必修5综合测试)

时间:120分钟　满分:150分

一、选择题(本大题共10小题,每小题5分,共50分,在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的)

1. **(2018·保定高二月考)**在等差数列$\{a_n\}$中,$a_1=2$,$a_3+a_5=10$,则$a_7=$ (　　)

A. 5　　B. 8　　C. 10　　D. 14

2. 不等式$|x|(1-2x)>0$的解集是 (　　)

A. $\left(-\infty,\frac{1}{2}\right)$　　B. $(-\infty,0)\cup\left(0,\frac{1}{2}\right)$

C. $\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$　　D. $\left(0,\frac{1}{2}\right)$

3. **(2018·重庆七中期中)**等比数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n,若$a_1+a_2+a_3+a_4=1$,$a_5+a_6+a_7+a_8=2$,$S_n=15$,则项数n为 (　　)

A. 12　　B. 14　　C. 15　　D. 16

4. **(2019·广西梧州模拟)**在$\triangle ABC$中,$A=60°$,若a,b,c成等比数列,则$\frac{b\sin B}{c}=$ (　　)

A. $\frac{1}{2}$　　B. $\frac{\sqrt{3}}{2}$　　C. $\frac{\sqrt{2}}{2}$　　D. $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

5. **(2018·河北衡水枣强中学期中)**已知a,b,$a+b$成等差数列,a,b,ab成等比数列,且$0<\log_m(ab)<1$,则m的取值范围是 (　　)

A. $m>1$　　B. $1<m<8$　　C. $m>8$　　D. $0<m<1$或$m>8$

6. **(2018·北京卷)**"十二平均律"是通用的音律体系,明代朱载堉最早用数学方法计算出半音比例,为这个理论的发展做出了重要贡献.十二平均律将一个纯八度音程分成十二份,依次得到十三个单音,从第二个单音起,每一个单音的频率与它的前一个单音的频率的比都等于$\sqrt[12]{2}$.若第一个单音的频率为f,则第八个单音频率为 (　　)

A. $\sqrt[3]{2}f$　　B. $\sqrt[3]{2^2}f$　　C. $\sqrt[12]{2^5}f$　　D. $\sqrt[12]{2^7}f$

7. **(2018·武汉一中月考)**若$\log_m n=-1$,则$m+3n$的最小值为 (　　)

A. 2　　B. $2\sqrt{2}$　　C. $2\sqrt{3}$　　D. 4

8. 设x,y满足约束条件$\begin{cases}3x-y-2\leqslant 0,\\ x-y\geqslant 0,\\ x\geqslant 0,y\geqslant 0,\end{cases}$若目标函数$z=ax+by(a>0,b>0)$的最大值为1,则$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$的最小值为 (　　)

A. $\frac{25}{6}$　　B. $\frac{8}{3}$　　C. $\frac{11}{3}$　　D. 4

9. 已知正实数a,b满足$a+b=1$,则$\frac{ab}{4a+9b}$的最大值为 (　　)

A. $\frac{1}{23}$　　B. $\frac{1}{24}$　　C. $\frac{1}{25}$　　D. $\frac{1}{26}$

10. 已知两个正数x,y满足$x+4y+5=xy$,则xy取最小值时,x,y的值分别为 (　　)

A. 5,5　　B. 10,$\frac{5}{2}$　　C. 10,5　　D. 10,10

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

二、填空题(本大题共 5 小题,每小题 5 分,共 25 分,把答案填在题中横线上)

11. 在$\triangle ABC$中,若$b=1,c=\sqrt{3},C=\frac{\pi}{3}$,则$a=$_____.

12. **(2017·北京卷)**若等差数列$\{a_n\}$和等比数列$\{b_n\}$满足$a_1=b_1=-1,a_4=b_4=8$,则$\frac{a_2}{b_2}=$_____.

13. 正数x,y满足$xy+x+y=8$,那么$x+y$的最小值等于_____.

14. **(2018·全国卷Ⅱ)**若x,y满足约束条件$\begin{cases}x+2y-5\geqslant 0,\\ x-2y+3\geqslant 0,\\ x-5\leqslant 0,\end{cases}$则$z=x+y$的最大值为_____.

15. **(2017·全国卷Ⅱ)**等差数列$\{a_n\}$的前n项和为$S_n,a_3=3,S_4=10$,则$\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{S_k}=$_____.

三、解答题(本大题共 6 小题,共 75 分,解答时写出文字说明、证明过程或演算步骤)

16. (12 分)**(2019·保定模拟)**已知$\triangle ABC$中,内角A,B,C的对边分别为a,b,c,且$a+b=\sqrt{3}c,2\sin^2 C=3\sin A\sin B$.

(1)求角C;

(2)若$S_{\triangle ABC}=\sqrt{3}$,求$c$.

17. (12 分)**(2018·江西师大附中期中)**某地区共有 100 户农民从事蔬菜种植,据调查,每户年均收入为 3 万元.为了调整产业结构,当地政府决定动员部分种植户从事蔬菜加工.据估计,如果能动员$x(x>0)$户农民从事蔬菜加工,那么剩下从事蔬菜种植的农民每户年均收入有望提高$2x\%$,从事蔬菜加工的农民每户年均收入为$3\left(a-\frac{3x}{50}\right)(a>0)$万元.

(1)在动员x户农民从事蔬菜加工后,要使从事蔬菜种植的农民的年总收入不低于动员前从事蔬菜种植的年总收入,试求x的取值范围;

(2)在(1)的条件下,要使这 100 户农民中从事蔬菜加工农民的年总收入始终不高于从事蔬菜种植农民的年总收入,试求实数a的最大值.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

18.(12 分)**(2018·天津卷)**设$\{a_n\}$是等比数列,公比大于 0,其前 n 项和为 $S_n(n\in\mathbf{N}^*)$,$\{b_n\}$是等差数列. 已知 $a_1=1,a_3=a_2+2,a_4=b_3+b_5,a_5=b_4+2b_6$.

(1)求$\{a_n\}$和$\{b_n\}$的通项公式;

(2)设数列$\{S_n\}$的前 n 项和为 $T_n(n\in\mathbf{N}^*)$,求 T_n.

19.(12 分)在$\triangle ABC$ 中,角 A,B,C 的对边分别为 a,b,c,满足 $a\cos B+b\cos A=2c\cos C$.

(1)求 C;

(2)若$\triangle ABC$ 的面积为 $2\sqrt{3}$,求 c 的最小值.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

20.(13分)某厂为适应市场需求,投入98万元引进世界先进设备,并马上投入生产,第一年需各种费用12万元,从第二年开始,每年所需费用会比上一年增加4万元,而每年因引入该设备可获得年利润为50万元.请根据以上数据,解决以下问题:

(1)引进该设备多少年后开始盈利?

(2)引进该设备若干年后,有两种处理方案:第一种是当年平均利润达到最大值时,以26万元的价格卖出;第二种是当盈利总额达到最大值时,以8万元的价格卖出.问哪一种方案较为合算?

21.(14分)**(2018·衡水中学调研)**数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n,且$a_1=1$,$a_{n+1}=2S_n+1(n\in\mathbf{N}^*)$,数列$\{b_n\}$为等差数列,且$b_1=-3$,$b_3=3$.

(1)求数列$\{a_n\}$,(b_n)的通项公式;

(2)若对任意的$n\in\mathbf{N}^*$,$\left(S_n+\frac{1}{2}\right)\cdot k\geqslant b_n$恒成立,求实数$k$的取值范围.

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

骄子之路®
the Road to Pride
让 学习更快乐，人生更精彩

答案与解析

与45分钟课时作业与单元测试配套使用

数学

必修5·BS

班级：_____

姓名：_____

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

第一部分　课时作业

第一章　数　列

§1　数　列

1.1　数列的概念

基础知识点对点

1. C　数列与集合不同，不能用集合表示数列，故 A 错；由数列的定义知，B 错；当 $n=k$ 时，第 k 项 $a_k=\frac{k+1}{k}=1+\frac{1}{k}$，故 C 正确；数列中 $n\in\mathbf{N}_+$，则 $n\neq0$，故 D 错.

2. D　逐项代入检验知，D 正确.

3. (1)2^n-1　(2)$(-1)^{n+1}\cdot\frac{4}{3n-1}$　(3)$n+\frac{n^2}{n^2+1}$

解析：(1)各项均加上 1，变为 2，4，8，16，32，…，其通项为 2^n，则原数列的通项公式为 $a_n=2^n-1$.

(2)使各项的分子均变为 4，得 $\frac{4}{2}$，$-\frac{4}{5}$，$\frac{4}{8}$，$-\frac{4}{11}$，$\frac{4}{14}$，$-\frac{4}{17}$，…，其通项公式为 $a_n=(-1)^{n+1}\cdot\frac{4}{3n-1}$.

(3)数列变形为 $1+\frac{1}{2}$，$2+\frac{4}{5}$，$3+\frac{9}{10}$，$4+\frac{16}{17}$，…，$a_n=n+\frac{n^2}{n^2+1}$.

4. B　由 $\sqrt{2n-1}=3\sqrt{5}$，得 $n=23$.

5. **解**：$\because a_1=0$，$a_{n+1}=a_n+2n-1$，

$\therefore a_2=a_1+1=1$，$a_3=a_2+2\times2-1=4$，$a_4=a_3+2\times3-1=9$，$a_5=a_4+2\times4-1=16$，….

又 $\because a_1=0$，$a_2=1=1^2$，$a_3=4=2^2$，$a_4=9=3^2$，$a_5=16=4^2$，$\therefore a_n=(n-1)^2$.

课后拔高提能练

1. A　$\because a_n=\frac{1+(-1)^{n+1}}{2}$，

$\therefore a_1=\frac{1+1}{2}=1$，$a_2=\frac{1-1}{2}=0$，$a_3=\frac{1+1}{2}=1$，$a_4=\frac{1-1}{2}=0$.

2. B　$\because a_1=-\sqrt{3}$，$a_2=\sqrt{3^2}$，$a_3=-\sqrt{3^3}$，$a_4=\sqrt{3^4}$，

$\therefore a_n=(-1)^n\sqrt{3^n}(n\in\mathbf{N}_+)$.

3. C　$\because a_1=1$，$\therefore a_2=a_1+1=2$，$a_3=a_2+2=4$，$a_4=a_3+3=7$，$a_5=a_4+4=11$.

4. C　由题意得 $a_4=a_{2+2}=a_2+a_2=2a_2=-12$，

$a_6=a_{4+2}=a_4+a_2=-12-6=-18$，

$a_{10}=a_6+a_4=-18-12=-30$.

5. $-\frac{1}{32}$

解析：前 5 个数依次是 $\frac{1}{2}$，$-\frac{1}{2}$，$\frac{3}{8}$，$-\frac{1}{4}$，$\frac{5}{32}$，可变形为 $\frac{1}{2}$，$-\frac{2}{2^2}$，$\frac{3}{2^3}$，$-\frac{4}{2^4}$，$\frac{5}{2^5}$，则第 6 个数是 $-\frac{6}{2^6}$，第 7 个数是 $\frac{7}{2^7}$，第 8 个数是 $-\frac{8}{2^8}=-\frac{1}{32}$.

6. $\frac{8}{9}(10^n-1)$

解析：$b_n=\underbrace{888\cdots8}_{n个8}=\frac{8}{9}\times\underbrace{999\cdots9}_{n个9}=\frac{8}{9}(10^n-1)$.

7. $\sqrt{3}$

解析：$\because a_{n+1}=\frac{\sqrt{3}+a_n}{1-\sqrt{3}a_n}$，$a_1=\sqrt{3}$，

$\therefore a_2=\frac{\sqrt{3}+\sqrt{3}}{1-3}=-\sqrt{3}$，$a_3=\frac{\sqrt{3}-\sqrt{3}}{1+(\sqrt{3})^2}=0$，$a_4=\sqrt{3}$，….

$\therefore$ 数列 $\{a_n\}$ 为周期数列，且周期 $T=3$.

$\therefore a_{2\,014}=a_1=\sqrt{3}$.

8. **解**：(1)$a_1=1$，$a_2=\frac{1}{2}a_1=\frac{1}{2}$，$a_3=\frac{2}{3}a_2=\frac{1}{3}$，$a_4=\frac{3}{4}a_3=\frac{1}{4}$，$a_5=\frac{4}{5}a_4=\frac{1}{5}$.

(2)猜想 $a_n=\frac{1}{n}$.

9. **解**：(1)当 $n=2$ 时，方阵为 2 行 3 列，人数为 6；当 $n=3$ 时，方阵为 3 行 4 列，人数为 12；依此类推，方阵中士兵人数的数列为 6，12，20，30，….

(2)第 5 项为 6 行 7 列的方阵人数，第 6 项为 7 行 8 列的方阵的人数. $a_5=42$，$a_6=56$.

(3)第 1 项为 $6=2\times3$，第 2 项为 $12=3\times4$，第 3 项为 $20=4\times5$，第 4 项为 $30=5\times6$，…，$\therefore a_n=(n+1)(n+2)$.

(4)$a_{10}=(10+1)\times(11+1)=132$，$a_{10}$ 表示 11 行 12 列的方阵中士兵的人数.

1.2　数列的函数特性

基础知识点对点

1. A　$\because a_n=\frac{n-1}{n+1}$，$a_{n+1}=\frac{n}{n+2}$，$a_{n+1}-a_n=\frac{n}{n+2}-\frac{n-1}{n+1}=\frac{2}{(n+1)(n+2)}$，又 $n\in\mathbf{N}_+$，$\therefore a_{n+1}-a_n>0$.

$\therefore\{a_n\}$ 为单调递增数列.

2. A　由题意知 $a_{n+1}-a_n=3>0$，$\therefore$ 数列 $\{a_n\}$ 是递增数列.

3. C　$\because a_1=\frac{6}{7}$，$\therefore a_2=2a_1-1=2\times\frac{6}{7}-1=\frac{5}{7}$，

$a_3=2a_2-1=2\times\frac{5}{7}-1=\frac{3}{7}$.

$\because 0<a_3<\frac{1}{2}$，$\therefore a_4=2a_3=\frac{6}{7}$.

$\therefore$ 数列 $\{a_n\}$ 是以 3 为周期的周期数列.

又 $2\,018=672\times3+2$，$\therefore a_{2\,018}=a_2=\frac{5}{7}$.

4. D　将此通项公式看作一个二次函数，且自变量只能取正整数，对称轴为 $n=\frac{29}{4}$，且开口向下，$n=7$ 离对称轴最近，$\therefore a_n$ 的最大值是 $a_7=108$.

5. **证明**：$\because a_n=\frac{n^2}{n^2+1}=\frac{n^2+1-1}{n^2+1}=1-\frac{1}{n^2+1}$，

$\therefore a_{n+1}-a_n=-\frac{1}{(n+1)^2+1}+\frac{1}{n^2+1}$. 又 $(n+1)^2+1>n^2+1>0$，

$\therefore\frac{1}{n^2+1}>\frac{1}{(n+1)^2+1}$. $\therefore a_{n+1}-a_n>0$，$a_{n+1}>a_n$.

$\therefore$ 数列 $\{a_n\}$ 为递增数列.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

课后拔高提能练

1. D　由于 $n\in\mathbf{N}_+$，①显然正确；由于并不是所有的数列都具有单调性，如数列 1，−1，2，−2，3，−3，…无单调性，故②不正确；③显然不正确. 故正确的只有①.

2. B　$\because a_{n+1}-a_n=\dfrac{a(n+1)}{b(n+1)+1}-\dfrac{an}{bn+1}=\dfrac{a}{(bn+b+1)(bn+1)}>0$，$\therefore a_{n+1}>a_n$.

3. D　$\because a_{n+1}>a_n$，$a_n=n^2+kn+2$，

$\therefore (n+1)^2+k(n+1)+2>n^2+kn+2$.

$\therefore k>-(2n+1)$. 又 $n\in\mathbf{N}_+$. $\therefore -(2n+1)$ 的最大值为 -3. $\therefore k>-3$.

4. B　$a_1=2$，$a_2=\dfrac{2-1}{2+1}=\dfrac{1}{3}$，$a_3=\dfrac{\frac{1}{3}-1}{\frac{1}{3}+1}=-\dfrac{1}{2}$，$a_4=\dfrac{-\frac{1}{2}-1}{-\frac{1}{2}+1}=-3$，$a_5=\dfrac{-3-1}{-3+1}=2$，即数列 $\{a_n\}$ 的周期是 4，$\therefore a_{30}=a_2=\dfrac{1}{3}$.

5. -9

解析：$\because a_n=n^2-6n=(n-3)^2-9$，$\therefore$ 当 $n=3$ 时，a_n 取得最小值 -9.

6. $\dfrac{1}{2}$

解析：$\because a_{n+1}=\dfrac{1}{1-a_n}$，$\therefore a_n=1-\dfrac{1}{a_{n+1}}$.

$\because a_8=2$，$\therefore a_7=1-\dfrac{1}{a_8}=\dfrac{1}{2}$，$a_6=1-\dfrac{1}{a_7}=-1$，

$a_5=1-\dfrac{1}{a_6}=2$，$a_4=1-\dfrac{1}{a_5}=\dfrac{1}{2}$，$a_3=1-\dfrac{1}{a_4}=-1$，

$a_2=1-\dfrac{1}{a_3}=2$，$a_1=1-\dfrac{1}{a_2}=\dfrac{1}{2}$.

7. $\dfrac{5}{6}$

解析：$\because a_1=\dfrac{1}{2}$，$a_2=\dfrac{1}{3}$，$a_na_{n+2}=1$，

$\therefore a_3=2$，$a_4=3$，$a_5=\dfrac{1}{2}$，$a_6=\dfrac{1}{3}$.

$\therefore$ 数列 $\{a_n\}$ 是周期为 4 的周期数列.

$\therefore a_{2\,017}=a_{504\times4+1}=a_1=\dfrac{1}{2}$，

$a_{2\,018}=a_{504\times4+2}=a_2=\dfrac{1}{3}$.

$\therefore a_{2\,017}+a_{2\,018}=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}=\dfrac{5}{6}$.

8. **解：**令 $f(n)=\dfrac{1}{n+1}+\dfrac{1}{n+2}+\dfrac{1}{n+3}+\cdots+\dfrac{1}{n+n}$，则

$f(n+1)=\dfrac{1}{n+2}+\dfrac{1}{n+3}+\cdots+\dfrac{1}{2n}+\dfrac{1}{2n+1}+\dfrac{1}{2n+2}$，

$f(n+1)-f(n)=\dfrac{1}{2n+1}+\dfrac{1}{2n+2}-\dfrac{1}{n+1}=\dfrac{1}{2n+1}-\dfrac{1}{2n+2}=\dfrac{1}{(2n+1)(2n+2)}>0$，

$\therefore f(n)$ 为递增数列，又 $n>1$，$n\in\mathbf{N}_+$.

$\therefore f(n)_{\min}=f(2)=\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{4}=\dfrac{7}{12}$. $\therefore a<\dfrac{7}{12}$.

9. **解：**(1)$\because f(x)=2^x-2^{-x}$，$f(\log_2 a_n)=-2n$，

$\therefore 2^{\log_2 a_n}-2^{-\log_2 a_n}=-2n$，即 $a_n-\dfrac{1}{a_n}=-2n$.

$\therefore a_n^2+2na_n-1=0$，

解得 $a_n=-n\pm\sqrt{n^2+1}$.

$\because a_n>0$，$\therefore a_n=\sqrt{n^2+1}-n$，$n\in\mathbf{N}_+$.

(2)$\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=\dfrac{\sqrt{(n+1)^2+1}-(n+1)}{\sqrt{n^2+1}-n}=\dfrac{\sqrt{n^2+1}+n}{\sqrt{(n+1)^2+1}+(n+1)}<1$.

$\because a_n>0$，$\therefore a_{n+1}<a_n$.

$\therefore$ 数列 $\{a_n\}$ 是递减数列.

§2　等差数列

2.1　等差数列

第一课时　等差数列(一)

基础知识点对点

1. D　数列 2，5，8，11，…，组成以 2 为首项，3 为公差的等差数列，通项为 $a_n=3n-1$，令 $3n-1=23$，可得 $n=8$.

2. B　$295=1+(n-1)\times3$，解得 $n=99$.

3. C　$\because a$，x，b，$2x$ 是等差数列，

$\therefore \begin{cases}2x=a+b,\\2b=x+2x.\end{cases}$

$\therefore b=\dfrac{3x}{2}$，$a=\dfrac{x}{2}$. $\therefore \dfrac{a}{b}=\dfrac{1}{3}$.

4. B　由题意得，$a_n-a_{n+1}+1=0$，即 $a_{n+1}-a_n=1$，

$\therefore$ 数列 $\{a_n\}$ 为等差数列，且 $d=1$. $\therefore a_8=a_1+7d=1+7=8$.

5. **解：**数列 $\{b_n\}$ 是等差数列。理由如下：

$\because$ 数列 $\{a_n\}$ 是等差数列，设公差为 d(常数)，

则 $a_{n+1}-a_n=d$.

又 $\because b_n=2a_n+3a_{n+1}$，

$\therefore$ 当 $n\geqslant2$ 时，$b_n-b_{n-1}=2a_n+3a_{n+1}-(2a_{n-1}+3a_n)$

$=2(a_n-a_{n-1})+3(a_{n+1}-a_n)$

$=2d+3d=5d$.

$\therefore$ 数列 $\{b_n\}$ 是等差数列.

课后拔高提能练

1. C　设数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d，又 $a_1=\dfrac{1}{3}$，

$\therefore a_2+a_5=2a_1+5d=4$，$a_n=a_1+(n-1)d=33$，

即 $\begin{cases}\frac{2}{3}+5d=4,\\\frac{1}{3}+(n-1)d=33.\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}d=\frac{2}{3},\\n=50.\end{cases}$

2. B　设数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d，由 $a_7-2a_4=6$，$a_3=2$，得 $\begin{cases}a_1+6d-2(a_1+3d)=6,\\a_1+2d=2,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a_1=-6,\\d=4.\end{cases}$

3. B　由 $a_n=a_1+(n-1)d=70+(n-1)\times(-9)=79-9n$，得 $a_8=7$，$a_9=-2$，$a_{10}=-11$，$a_{11}=-20$，$\therefore$ 绝对值最小的一项是 a_9.

4. D　由题意得 $\begin{cases}a_{10}=a_1+9d>0,\\a_9=a_1+8d\leqslant0,\end{cases}$ 将 $a_1=-24$ 代入，解得 $\dfrac{8}{3}<d\leqslant3$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

5. $a_n=6n-3$

解析：设$\{a_n\}$的公差为 d，$\because a_1=3$，$\therefore 3+d+3+4d=36$，$\therefore d=6$，$\therefore a_n=3+6(n-1)=6n-3$.

6. $2n-3$

解析：由题意知 $a_4=5$，$a_5=7$，$\therefore d=2$，$a_4=a_1+(4-1)\times 2=5$，$a_1=-1$.

$\therefore a_n=-1+(n-1)\times 2=2n-3$.

7. 52

解析：$\because 2a_{n+1}=2a_n+1$，$\therefore a_{n+1}-a_n=\frac{1}{2}$.

$\therefore$数列$\{a_n\}$是公差 $d=\frac{1}{2}$的等差数列.

又 $a_1=2$，$\therefore a_{101}=2+100\times\frac{1}{2}=52$.

8. **解**：(1)由 $a_1=8$，$a_9=a_1+8d=-2$，得 $d=-\frac{5}{4}$，$a_{16}=a_1+15d=8+15\times\left(-\frac{5}{4}\right)=-\frac{43}{4}$.

(2)由 $a_1+a_6=a_4-3d+a_4+2d=14-d=12$，得 $d=2$. $\therefore a_9=a_4+5d=7+10=17$.

9. **解**：(1)数列$\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$是等差数列. 理由如下：

$\because a_1=2$，$a_{n+1}=\frac{2a_n}{a_n+2}$，

$\therefore \frac{1}{a_{n+1}}=\frac{1}{2}+\frac{1}{a_n}$，即$\frac{1}{a_{n+1}}-\frac{1}{a_n}=\frac{1}{2}$.

$\therefore\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$是以$\frac{1}{a_1}=\frac{1}{2}$为首项，$\frac{1}{2}$为公差的等差数列.

(2)由(1)得$\frac{1}{a_n}=\frac{1}{a_1}+(n-1)d=\frac{1}{2}+(n-1)\times\frac{1}{2}=\frac{n}{2}$，$\therefore a_n=\frac{2}{n}$.

第二课时　等差数列(二)

基础知识点对点

1. A　$\because a_{12}+a_4=a_7+a_9=16$，$\therefore a_{12}=16-a_4=16-1=15$.

2. B　由等差数列的性质得

$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{10}=5(a_4+a_7)=65$，

$\therefore a_4+a_7=13$. 又$\because a_4=2$，$\therefore a_7=11$.

$\therefore d=\frac{a_7-a_4}{7-4}=\frac{11-2}{3}=3$.

3. B　在等差数列$\{a_n\}$中，公差 $d=2$，且 $a_1+a_3+a_5=3$，

$\therefore a_4+a_6+a_8=(a_1+3d)+(a_3+3d)+(a_5+3d)$

$=(a_1+a_3+a_5)+9d$

$=3+9\times 2$

$=21$.

4. B　由根与系数的关系知 $a_3+a_9=12$，$\therefore 2a_6=a_3+a_9=12$，$\therefore a_6=6$.

5. **解**：设这三个数分别为 $a-d$，a，$a+d$，

由题意得$\begin{cases}a-d+a+a+d=9,\\(a-d)\cdot a\cdot(a+d)=-21,\end{cases}$解得$\begin{cases}a=3,\\d^2=16,\end{cases}$

$\therefore\begin{cases}a=3,\\d=4\end{cases}$或$\begin{cases}a=3,\\d=-4.\end{cases}$

$\therefore$这三个数为-1，3，7 或 7，3，-1.

课后拔高提能练

1 C　在等差数列$\{a_n\}$中，$\because a_7=\frac{\pi}{4}$，$\therefore a_6+a_7+a_8=3a_7=\frac{3\pi}{4}$，$\therefore \tan(a_6+a_7+a_8)=\tan\frac{3\pi}{4}=-1$.

2. C　由题意知，$2(a+1)=a-1+2a+3$，解得 $a=0$，

$\therefore a_n=a_1+(n-1)\times 2=2n-3$.

3. B　$\because a_1+a_2+a_3=3a_2=15$，$\therefore a_2=5$.

又 $a_1a_2a_3=80$，$\therefore a_1\cdot a_3=16$.

$\therefore(5-d)(5+d)=16$，$\therefore d=3$.

$\therefore a_{11}+a_{12}+a_{13}=3a_{12}=3(a_2+10d)=3(5+30)=105$.

4. C　设 $c_n=a_n+b_n$，则$\{c_n\}$是等差数列，又 $c_1=a_1+b_1=25+75=100$，$c_2=a_2+b_2=100$，$\therefore$数列$\{c_n\}$的公差 $d=c_2-c_1=0$，$\therefore c_n=100$. $\therefore c_{37}=100$.

5. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

解析：$\because a_1+a_7+a_{13}=3a_7=2\pi$，

$\therefore a_7=\frac{2\pi}{3}$，$\therefore \sin a_7=\sin\frac{2\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

6. $5n-4m$

解析：$\because$数列$\{a_n\}$为等差数列，

$\therefore a_3$，a_6，a_9，a_{12}，a_{15}，a_{18}仍成等差数列，且新数列的公差 $d=a_6-a_3=n-m$，

$\therefore a_{18}=a_3+5d=m+5(n-m)=5n-4m$.

7. 290

解析：$\because a_2+a_4=2a_3=4$，

$\therefore a_3=2$，又 $a_3+a_5=2a_4=10$. $\therefore a_4=5$.

$\therefore d=a_4-a_3=3$，$a_{99}=a_3+96d=2+96\times 3=290$.

8. **解**：(1)$\because f(x)=x^2-2x-3$，

$\therefore a_1=f(x-1)=(x-1)^2-2(x-1)-3=x^2-4x$，

$a_3=f(x)=x^2-2x-3$. 又 a_1，a_2，a_3 成等差数列，

$\therefore 2a_2=a_1+a_3=2x^2-6x-3$. 又$\because a_2=-\frac{3}{2}$，$\therefore 2x^2-6x-3=-3$. $\therefore x=0$ 或 $x=3$.

(2)当 $x=0$ 时，$a_1=0$，$d=a_2-a_1=-\frac{3}{2}$，$\therefore a_n=a_1+(n-1)d=-\frac{3}{2}(n-1)$；

当 $x=3$ 时，$a_1=-3$，$d=a_2-a_1=-\frac{3}{2}+3=\frac{3}{2}$，

$\therefore a_n=a_1+(n-1)d=-3+(n-1)\times\frac{3}{2}=\frac{3}{2}(n-3)$.

9. **解**：(1)证明：$x_n=f(x_{n-1})=\frac{3x_{n-1}}{x_{n-1}+3}(n\geqslant 2,n\in\mathbf{N}_+)$，

$\therefore\frac{1}{x_n}=\frac{x_{n-1}+3}{3x_{n-1}}=\frac{1}{x_{n-1}}+\frac{1}{3}$，$\frac{1}{x_n}-\frac{1}{x_{n-1}}=\frac{1}{3}(n\geqslant 2,n\in\mathbf{N}_+)$，

$\therefore\left\{\frac{1}{x_n}\right\}$是等差数列.

(2)由(1)知$\left\{\frac{1}{x_n}\right\}$的公差为$\frac{1}{3}$，又$\because x_1=\frac{1}{2}$，$\therefore\frac{1}{x_n}=2+(n-1)\times\frac{1}{3}$. $\therefore\frac{1}{x_{2\,014}}=2+(2\,014-1)\times\frac{1}{3}=673$.

$\therefore x_{2\,014}=\frac{1}{673}$（或求出 $x_n=\frac{3}{n+5}$后再代入求值）.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

2.2 等差数列的前 n 项和

第一课时 等差数列的前 n 项和(一)

基础知识点对点

1. B $S_5=\dfrac{5(a_1+a_5)}{2}=\dfrac{5(a_2+a_4)}{2}=\dfrac{5\times(1+5)}{2}=15.$

2. D $\because S_{10}=\dfrac{(a_1+a_{10})\times10}{2}=70,$

$\therefore a_1+a_{10}=14.$ 又 $a_{10}=10,$

$\therefore a_1=4.$ 又 $a_{10}=a_1+9d,$

$\therefore d=\dfrac{6}{9}=\dfrac{2}{3}.$

3. D $\because a_1=-12, S_5=S_8,$

$\therefore -12\times5+\dfrac{5\times4}{2}d=-12\times8+\dfrac{8\times7}{2}d,$

解得 $d=2.$ $\therefore S_n=-12n+\dfrac{n(n-1)}{2}\times2=n^2-13n=\left(n-\dfrac{13}{2}\right)^2-\dfrac{169}{4}.$

$\therefore$ 当 $n=6$ 或 7 时, S_n 有最小值.

4. A $\dfrac{S_9}{S_5}=\dfrac{\frac{9(a_1+a_9)}{2}}{\frac{5(a_1+a_5)}{2}}=\dfrac{\frac{9\times2a_5}{2}}{\frac{5\times2a_3}{2}}=\dfrac{9a_5}{5a_3}=\dfrac{9}{5}\times\dfrac{5}{9}=1.$

5. **解:** 由题意得 $\begin{cases}a_1+(n-1)d=11,\\ na_1+\dfrac{n(n-1)}{2}d=35,\end{cases}$

即 $\begin{cases}2n+a_1-2=11,\\ na_1+n^2-n=35,\end{cases}$

整理得 $n^2-12n+35=0$, 解得 $n=5$ 或 $n=7.$

当 $n=5$ 时, $a_1=3;$

当 $n=7$ 时, $a_1=-1.$

课后拔高提能练

1. D $\because \{a_n\}$ 为等差数列,

$\therefore S_{10}=\dfrac{(a_1+a_{10})\times10}{2},$

$\therefore a_1+a_{10}=\dfrac{S_{10}}{5}=48.$

2. B $\because a_3+a_9=27-a_6, \therefore 2a_6=27-a_6. \therefore a_6=9.$

$\therefore S_{11}=\dfrac{a_1+a_{11}}{2}\times11=11a_6=11\times9=99.$

3. A $\because S_1=a_1, S_5=a_1+a_2+a_3+a_4+a_5=5a_3,$

$\therefore \dfrac{5}{S_1S_5}=\dfrac{5}{5a_1a_3}=\dfrac{1}{a_1a_3}=\dfrac{1}{5}, \therefore a_1a_3=5.$ 又 $\because a_1a_2a_3=10, \therefore a_2=2.$

4. B 由题意知 $\begin{cases}2a_1+d=4,\\ 4a_1+6d=20,\end{cases}$ 解得 $d=3.$

5. 4

解析: 由题意知, $a_1+9d=4a_1+\dfrac{4\times3}{2}d$, 得 $a_1=d,$

$\therefore S_8=8a_1+\dfrac{8\times7}{2}d=36d, a_9=a_1+8d=9d,$ 又 $d\neq0,$

$\therefore \dfrac{S_8}{a_9}=\dfrac{36}{9}=4.$

6. 252

解析: 由题意得 $\begin{cases}a_1+12d+a_1+13d=20,\\ a_1+14d+a_1+15d=16,\end{cases}$

解得 $\begin{cases}a_1=\dfrac{45}{2},\\ d=-1,\end{cases}$

$\therefore S_{28}=28\times\dfrac{45}{2}+\dfrac{28\times27}{2}\times(-1)=252.$

7. $\dfrac{5}{4}$

解析: $\because \dfrac{S_n}{T_n}=\dfrac{n+1}{n-1},$

$\therefore \dfrac{a_2}{b_4+b_6}+\dfrac{a_8}{b_3+b_7}=\dfrac{a_2}{2b_5}+\dfrac{a_8}{2b_5}=\dfrac{a_2+a_8}{2b_5}=\dfrac{2a_5}{2b_5}=\dfrac{a_1+a_9}{b_1+b_9}=\dfrac{\frac{a_1+a_9}{2}\times9}{\frac{b_1+b_9}{2}\times9}=\dfrac{S_9}{T_9}=\dfrac{9+1}{9-1}=\dfrac{5}{4}.$

8. **解:** (1) 设 $\{a_n\}$ 的公差为 d, 由题意得 $3a_1+3d=-15.$ 由 $a_1=-7$ 得 $d=2.$ 所以 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n=2n-9.$

(2) 由(1)得 $S_n=n^2-8n=(n-4)^2-16.$ 所以当 $n=4$ 时, S_n 取得最小值, 最小值为 $-16.$

9. **解:** (1) 设数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d, 由 $a_3+a_4=4,$

$a_5+a_7=6$, 得 $\begin{cases}2a_1+5d=4,\\ 2a_1+10d=6,\end{cases}$ $\therefore \begin{cases}a_1=1,\\ d=\dfrac{2}{5}.\end{cases}$

$\therefore a_n=\dfrac{2n+3}{5}.$

(2) 由(1)知, $b_n=\left[\dfrac{2n+3}{5}\right],$

当 $n=1,2,3$ 时, $1\leqslant\dfrac{2n+3}{5}<2, \therefore b_n=1;$

当 $n=4,5$ 时, $2<\dfrac{2n+3}{5}<3, \therefore b_n=2;$

当 $n=6,7,8$ 时, $3\leqslant\dfrac{2n+3}{5}<4, \therefore b_n=3;$

当 $n=9,10$ 时, $4<\dfrac{2n+3}{5}<5, \therefore b_n=4.$

$\therefore$ 数列 $\{b_n\}$ 的前 10 项和为 $1\times3+2\times2+3\times3+4\times2=24.$

第二课时 等差数列的前 n 项和(二)

基础知识点对点

1. C 由题意得 $S_{偶}-S_{奇}=30-15=5d, \therefore 15+5d=30,$

$\therefore d=3.$

2. D 由题意知: $S_{10}, S_{20}-S_{10}, S_{30}-S_{20}$ 成等差数列,

$\therefore (30-10)\times2=10+S_{30}-30,$ 得 $S_{30}=60.$

3. B $S_{11}=\dfrac{a_1+a_{11}}{2}\times11=\dfrac{a_3+a_9}{2}\times11=\dfrac{6}{2}\times11=33.$

4. B 设等差数列 $\{a_n\}$ 的首项为 $a_1,$

$\because |a_3|=|a_9|,$

$\therefore |a_1+2d|=|a_1+8d|,$

解得 $a_1=-5d$ 或 $d=0$(舍去),

则 $a_1+5d=a_6=0,$

$a_5>0,$

故使前 n 项和取最大值的正整数 n 是 5 或 6.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

5. **解**：∵$S_n=n^2-10n(n\in\mathbf{N}_+)$，
∴当 $n=1$ 时，$a_1=S_1=-9$；
当 $n\geqslant 2$ 时，$a_n=S_n-S_{n-1}=(n^2-10n)-[(n-1)^2-10(n-1)]=2n-11$.
当 $n=1$ 时，$a_1=-9$ 也适合，
∴数列$\{a_n\}$的通项公式为 $a_n=2n-11(n\in\mathbf{N}_+)$.
∵$S_n=n^2-10n=(n-5)^2-25$.
∴当 $n=5$ 时，S_n 最小，其最小值为 -25.

课后拔高提能练

1. C　由$\{a_n\}$是等差数列，得$\frac{S_n}{n}=a_1+\frac{n-1}{2}d$，$\frac{S_{12}}{12}-\frac{S_{10}}{10}=\left(a_1+\frac{11}{2}d\right)-\left(a_1+\frac{9}{2}d\right)=d=-2$，
$S_{2\,017}=2\,017\times 2\,017+\frac{2\,017\times 2\,016}{2}\times(-2)=2\,017$.

2. B　$S_9-S_5=a_9+a_8+a_7+a_6=4a_1+26d=0$，$d=-\frac{2}{13}a_1$. ∴$a_n=a_1+(n-1)\cdot\left(-\frac{2}{13}a_1\right)$，由 $a_n\geqslant 0$ 得，$n\leqslant\frac{15}{2}$. ∴前 7 项为正数，S_n 最大时，$n=7$.

3. B　设该等差数列的公差为 d，根据题中的条件可得，
$3\left(3\times 2+\frac{3\times 2}{2}\cdot d\right)=2\times 2+d+4\times 2+\frac{4\times 3}{2}\cdot d$，
整理解得 $d=-3$，所以 $a_5=a_1+4d=2-12=-10$，故选 B.

4. A　∵$\{a_n\}$为各项均不为零的等差数列，
∴$a_{n-1}+a_{n+1}=2a_n$.
又 $3a_n^2-na_{n-1}-na_{n+1}=0$，∴$3a_n{}^2-n\cdot 2a_n=0$，
∵$a_n\neq 0$，∴$a_n=\frac{2}{3}n$.
∴$S_n=\frac{\left(\frac{2}{3}+\frac{2}{3}n\right)}{2}\times n=\frac{n(n+1)}{3}$，
∴$S_{30}=\frac{30\times 31}{3}=310$.

5. 10

解析：∵$a_n=\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$.
∴$S_n=a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n$
$=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$
$=1-\frac{1}{n+1}=\frac{n}{n+1}=\frac{10}{11}$，∴$n=10$.

6. 153

解析：∵$a_n=2n-7$，∴$a_1=-5$，$a_2=-3$. $a_3=-1$，$a_4=1$，从第 4 项起大于 0. ∴$|a_1|+|a_2|+\cdots+|a_{15}|=-a_1-a_2-a_3+a_4+\cdots+a_{15}=5+3+1+1+3+\cdots+23=9+\frac{1+23}{2}\times 12=9+24\times 6=153$.

7. 5

解析：$a_m=S_m-S_{m-1}=2$，$a_{m+1}=S_{m+1}-S_m=3$，∴$d=a_{m+1}-a_m=1$，$S_m=\frac{m(a_1+a_m)}{2}=0$，∴$a_1=-2$，$a_m=-2+(m-1)\times 1=2$，∴$m=5$.

8. **解**：(1)∵$\{a_n\}$为等差数列，
∴$a_7=a_2+5d$.
∴$d=\frac{-9-1}{5}=-2$.
∴$a_n=a_2+(n-2)d=1+(n-2)\times(-2)=5-2n$，
$a_1=5-2\times 1=3$.
∴$S_n=\frac{(a_1+a_n)n}{2}=4n-n^2$.

(2)由(1)可知，$a_n=5-2n$，由 $a_n\geqslant 0$，得 $n\leqslant\frac{5}{2}$，
∴$a_1>0$，$a_2>0$，$a_3<0$，
当 $n\leqslant 2$ 时，$T_n=S_n=4n-n^2$；
当 $n\geqslant 3$ 时，$T_n=|a_1|+|a_2|+|a_3|+\cdots+|a_n|$
$=a_1+a_2-(a_3+a_4+\cdots+a_n)$
$=2(a_1+a_2)-S_n=8-4n+n^2$，
综上得，$T_n=\begin{cases}4n-n^2,n\leqslant 2,\\ n^2-4n+8,n\geqslant 3.\end{cases}$

9. **解**：(1)从 4 月 1 日起每天销售量依次组成数列$\{a_n\}$，$(n\in\{1,2,\cdots 30\})$依题意，数列 a_1，$a_2\cdots$，a_{12} 是首项为 10，公差为 15 的等差数列，
∴$a_n=15n-5(1\leqslant n\leqslant 12)$.
a_{13}，a_{14}，a_{15}，…，a_{30} 是首项为 $a_{13}=a_{12}-10=165$，公差为 -10 的等差数列，
∴$a_n=165+(n-13)(-10)=-10n+295(13\leqslant n\leqslant 30)$.
∴$a_n=\begin{cases}15n-5(1\leqslant n\leqslant 12,n\in\mathbf{N}_+),\\ -10n+295(13\leqslant n\leqslant 30,n\in\mathbf{N}_+).\end{cases}$
(2)4 月份的总销售量为
$\frac{12(10+175)}{2}+18\times 165+\frac{18\times 17\times(-10)}{2}=2\,550$(件).
(3)4 月 1 日至 4 月 12 日销售总数为
$\frac{12(a_1+a_{12})}{2}=\frac{12(10+175)}{2}=1\,110<1\,200$.
∴4 月 12 日前还没有流行. 由 $-10n+295<100$ 得 $n>\frac{39}{2}$.
∴第 20 天流行结束，故该服装在社会上流行没有超过 10 天.

§3　等比数列

3.1　等比数列

第一课时　等比数列(一)

基础知识点对点

1. A　由题意知，$x(6x+6)=(3x+3)^2$，即 $x^2+4x+3=0$，$x=-3$ 或 $x=-1$
当 $x=-3$ 时，等比数列为 $-3,-6,-12,-24,\cdots$.
当 $x=-1$ 时，$3x+3=0$，不符合题意，舍去.
所以第 4 项为 -24.

2. A　设公比为 q，由$\begin{cases}a_1+a_2=3,\\ a_2+a_3=6,\end{cases}$得$\begin{cases}a_1+a_1q=3,\\ a_1q+a_1q^2=6.\end{cases}$
解得$\begin{cases}a_1=1,\\ q=2,\end{cases}$∴$a_7=a_1q^6=64$.

3. C　由等比数列的定义知，①②④均为等比数列；③中，若 $x=0$，则不是等比数列.

4. C　对于①，因为$\frac{a_{n+1}^3}{a_n^3}=\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)^3=q^3$(常数)，所以$\{a_n^3\}$是等比数列；
对于②，因为$\frac{pa_{n+1}}{pa_n}=\frac{a_{n+1}}{a_n}=q$(常数)，所以$\{pa_n\}$是等比数列；
对于③，因为$\frac{a_{n+1}\cdot a_{n+2}}{a_n\cdot a_{n+1}}=\frac{a_{n+2}}{a_n}=q^2$(常数)，

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

所以$\{a_n \cdot a_{n+1}\}$是等比数列；

对于④，因为 $q \neq -1$ 时 $\frac{a_{n+1}+a_{n+2}}{a_n+a_{n+1}} = \frac{a_nq+a_{n+1}q}{a_n+a_{n+1}} = \frac{q(a_n+a_{n+1})}{a_n+a_{n+1}} = q$(常数)；但 $q=-1$ 时，$a_n+a_{n+1}=0$，此时$\{a_n+a_{n+1}\}$不是等比数列.

所以$\{a_n+a_{n+1}\}$不一定是等比数列.

5. **解**：(1)由 $S_1 = \frac{1}{3}(a_1-1)$，得 $a_1 = \frac{1}{3}(a_1-1)$，$\therefore a_1 = -\frac{1}{2}$. 又 $S_2 = \frac{1}{3}(a_2-1)$，$\therefore a_1+a_2 = \frac{1}{3}(a_2-1)$.

$\therefore a_2 = \frac{1}{4}$.

(2)证明：当 $n>1$ 时，$a_n = S_n - S_{n-1} = \frac{1}{3}(a_n-1) - \frac{1}{3}(a_{n-1}-1)$，得 $\frac{a_n}{a_{n-1}} = -\frac{1}{2}$.

又 $\because \frac{a_2}{a_1} = -\frac{1}{2}$，$a_1 = -\frac{1}{2}$，

$\therefore$ 数列$\{a_n\}$是首项为$-\frac{1}{2}$，公比为$-\frac{1}{2}$的等比数列.

课后拔高提能练

1. B $\frac{a_1+a_3}{a_2+a_4} = \frac{a_1+a_3}{a_1q+a_3q} = \frac{1}{q} = -3$.

2. C 由题意知 $\begin{cases} a_1+a_1q^3=18, \\ a_1q+a_1q^2=12, \end{cases}$ 消 a_1 并化简得 $2q^2-5q+2=0$，解得 $q=2$ 或 $q=\frac{1}{2}$.

3. B 设数列$\{a_n\}$的公比为 q，$\because a_3=1$，$a_2+a_4=\frac{5}{2}$，

$\therefore \frac{1}{q}+q=\frac{5}{2}$，即 $2q^2-5q+2=0$，解得 $q=\frac{1}{2}$ 或 $q=2$.

$\because$ 数列$\{a_n\}$单调递减，且 $a_n>0$，$\therefore q=\frac{1}{2}$. $\therefore a_1 = \frac{a_3}{q^2} = 4$.

4. A 由 $a_5=-8a_2$ 知 $q^3=-8$，$\therefore q=-2$，

又 $a_5>a_2$，$\therefore a_5>0$，$a_2<0$，

又 $|a_1|=1$，$\therefore a_1=1$，

$\therefore a_n = a_1q^{n-1} = (-2)^{n-1}$.

5. $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$

解析：$\because a_2$，$\frac{1}{2}a_3$，a_1 成等差数列，

$\therefore a_3 = a_1+a_2$，$\therefore q^2-q-1=0$，

$\therefore q = \frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$. 又 $a_n>0$，

$\therefore q = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$，

$\therefore \frac{a_4+a_5}{a_3+a_4} = q = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

6. $2\times\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

解析：$\because a_n^2 = a_{n-1} \cdot a_{n+1}$，$\therefore$ 数列$\{a_n\}$是等比数列. 又 $q=\frac{a_2}{a_1} = \frac{-1}{2} = -\frac{1}{2}$，$a_1=2$，$\therefore a_n = a_1q^{n-1} = 2\times\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$.

7. 4

解析：$\because a_1$，a_3，a_{11} 为等比数列，又 $a_1=2$，

$\therefore a_3 = a_1q = 2q$，$a_{11} = a_1q^2 = 2q^2$.

又 $\because \{a_n\}$为等差数列，$\therefore a_{11} = a_1+10d = a_1+5\times2d = a_1+5(a_3-a_1)$，$\therefore 2q^2 = 2+5(2p-2)$，即 $q^2-5q+4=0$，解得 $q=4$ 或 $q=1$(舍去).

$\therefore q=4$.

8. **解**：(1)$\because$ 等比数列$\{a_n\}$中，$a_1=1$，公比为 q，

$\therefore a_n = a_1q^{n-1} = q^{n-1}$ $(q\neq0)$，

若 $q=1$，则 $a_n=1$，$b_n = a_{n+1}-a_n = 0$，

$\therefore \{b_n\}$是各项均为 0 的常数，不是等比数列.

若 $q\neq1$，

$\because \frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{a_{n+2}-a_{n+1}}{a_{n+1}-a_n} = \frac{q^{n+1}-q^n}{q^n-q^{n-1}} = \frac{q^n(q-1)}{q^{n-1}(q-1)} = q$，

$\therefore \{b_n\}$是首项为 $b_1 = a_2-a_1 = q-1$，公比为 q 的等比数列.

(2)由(1)可知，当 $q=1$ 时，$b_n=0$；

当 $q\neq1$ 时，$b_n = b_1q^{n-1} = (q-1)\cdot q^{n-1}$，

$\therefore b_n = (q-1)q^{n-1}$ $(n\in\mathbf{N}_+)$.

9. **证明**：(1)$\because a_{n+1} = S_{n+1}-S_n$，$a_{n+1} = \frac{n+2}{n}S_n$，

$\therefore (n+2)S_n = n(S_{n+1}-S_n)$.

整理得 $nS_{n+1} = 2(n+1)S_n$，

$\therefore \frac{S_{n+1}}{n+1} = 2\cdot\frac{S_n}{n}$. $\therefore \left\{\frac{S_n}{n}\right\}$是以 2 为公比的等比数列.

(2)由(1)知 $\frac{S_{n+1}}{n+1} = 4\cdot\frac{S_{n-1}}{n-1}$ $(n\geqslant2)$.

于是 $S_{n+1} = 4(n+1)\cdot\frac{S_{n-1}}{n-1} = 4a_n$ $(n\geqslant2)$，

又 $\because a_2 = 3S_1 = 3$，$\therefore S_2 = a_1+a_2 = 4 = 4a_1$.

因此对于任意正整数，都有 $S_{n+1} = 4a_n$.

第二课时　等比数列(二)

基础知识点对点

1. B $\because y = x^2-2x+3 = (x-1)^2+2$，

$\therefore b=1$，$c=2$，

$\because a$，b，c，d 成等比数列，

$\therefore ad = bc = 1\times2 = 2$.

2. D $\because \frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_3} = \frac{a_2+a_3}{a_2a_3} = \frac{a_2+a_3}{a_1a_4} = 2(a_2+a_3) = 3$，

$\therefore a_2+a_3 = \frac{3}{2}$，又 $a_2a_3 = a_1a_4 = \frac{1}{2}$，且 $q>1$.

$\therefore a_2 = \frac{1}{2}$，$a_3=1$，$q=2$.

$\therefore a_3+a_4+a_5+a_6+a_7+a_8 = 1+1\times2+1\times2^2+1\times2^3+1\times2^4+1\times2^5 = 63$.

3. C $a_2\cdot a_6 = a_4^2 = 4^2 = 16$.

4. D 由题意得 $a^2b^2=1$，$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=2$，

$\therefore ab=1$ 或 $ab=-1$，$a+b=2ab$.

$\therefore \frac{a+b}{a^2+b^2} = \frac{2ab}{(a+b)^2-2ab} = \frac{2ab}{4a^2b^2-2ab} = \frac{1}{2ab-1}$.

$\therefore \frac{a+b}{a^2+b^2} = 1$ 或 $-\frac{1}{3}$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

5. **解**:(1)设中低价房面积构成数列$\{a_n\}$,由题意可知,$\{a_n\}$是等差数列,其中$a_1=250$,$d=50$,

则$S_n=250n+\frac{n(n-1)}{2}\times50=25n^2+225n$;

令$25n^2+225n\geqslant4\ 750$,

即$n^2+9n-190\geqslant0$,

解得$n\leqslant-19$或$n\geqslant10$,而n是正整数,

所以$n\geqslant10$.

故到2024年年底,该市历年所建中低价房的累计面积将首次不少于4 750万平方米.

(2)设新建住房面积构成数列$\{b_n\}$.

由题意可知$\{b_n\}$是等比数列,

其中$b_1=400$,$q=1.08$,

则$b_n=400\times(1.08)^{n-1}$,

由题意可知$a_n>0.85b_n$,

即$250+(n-1)\times50>400\times(1.08)^{n-1}\times0.85$,满足上述不等式的最小正整数$n=6$.

故到2020年年底,当年建造的中低价房的面积占该年建造住房的比例首次大于85%.

课后拔高提能练

1. C　设$3+\sqrt{5}$与$3-\sqrt{5}$的等比中项为a,则$a^2=(3+\sqrt{5})(3-\sqrt{5})=4$,$\therefore a=\pm2$.

2. C　$\because\{a_n\}$为等比数列,$\therefore a_1a_2a_3=a_2^3=8$,$\therefore a_2=2$,

$\therefore a_1+a_2+a_3=\frac{2}{q}+2q+2=7$,$2q^2-5q+2=0$,

$\therefore q=\frac{1}{2}$或$q=2$.

3. D　由题意知,a_3,a_7是方程$3x^2-11x+9=0$的两个根,$\therefore\begin{cases}a_3+a_7=\frac{11}{3}>0,\\a_3\cdot a_7=3>0,\end{cases}\therefore a_3>0,a_7>0$.

由等比数列的性质得$a_5^2=a_3\cdot a_7=3$.

又$a_5=a_3q^2>0$,$\therefore a_5=\sqrt{3}$.

4. D　$\because3a_1$,$\frac{1}{2}a_3$,$2a_2$成等差数列,

$\therefore a_3=3a_1+2a_2$.$\therefore a_1q^2=3a_1+2a_1q$.

$\because a_1\neq0$,$\therefore q^2-2q-3=0$.$\therefore q=3$或$q=-1$.

$\because a_n>0$,$\therefore q=3$.

$$\therefore\frac{a_{10}+a_{12}+a_{15}+a_{19}+a_{20}+a_{23}}{a_8+a_{10}+a_{13}+a_{17}+a_{18}+a_{21}}=\frac{q^2(a_8+a_{10}+a_{13}+a_{17}+a_{18}+a_{21})}{a_8+a_{10}+a_{13}+a_{17}+a_{18}+a_{21}}=q^2=9.$$

5. 25

解析:$a_4a_5a_6a_7=(a_4a_7)(a_5a_6)=(a_1a_{10})^2=25$.

6. $\frac{3}{2}$

解析:由等比数列的性质知$a_4\cdot a_{14}=a_7\cdot a_{11}=6$,

又$a_4+a_{14}=5$,$\therefore a_4$与a_{14}是方程$x^2-5x+6=0$的两个根,解$x^2-5x+6=0$,得$x=2$或3.

又$a_n>a_{n+1}$,$\therefore a_4=3$,$a_{14}=2$.

$\therefore\frac{a_6}{a_{16}}=\frac{a_4}{a_{14}}=\frac{3}{2}$.

7. 1

解析:$\because a_m=a_k\cdot q^{m-k}$,$\therefore10^k=10^m\cdot q^{m-k}$.

$\therefore q^{m-k}=10^{k-m}$.$\therefore q=\frac{1}{10}$.

$\therefore a_{m+k}=a_mq^k=10^k\cdot10^{-k}=1$.

8. **解**:设三个数为$\frac{a}{q}$,a,aq,

$\therefore a^3=-8$,即$a=-2$,

$\therefore$三个数为$-\frac{2}{q}$,-2,$-2q$.

①若-2为$-\frac{2}{q}$和$-2q$的等差中项,则$\frac{2}{q}+2q=4$,

$\therefore q^2-2q+1=0$,$q=1$,与已知矛盾;

②若$-2q$为$-\frac{2}{q}$与-2的等差中项,则$\frac{1}{q}+1=2q$,

$2q^2-q-1=0$,$q=-\frac{1}{2}$或$q=1$(舍去),

$\therefore$三个数为4,1,-2;

③若$-\frac{2}{q}$为$-2q$与-2的等差中项,则$q+1=\frac{2}{q}$,

$\therefore q^2+q-2=0$,$\therefore q=-2$或$q=1$(舍去),

$\therefore$三个数为4,1,-2.

综合①②③可知,这三个数排成的等差数列为4,1,-2或-2,1,4.

9. **解**:(1)$a_1=\frac{1}{1+a}$,$a_3=\frac{3}{3+a}$,$a_{15}=\frac{15}{15+a}$,$\because a_1$,a_3,a_{15}成等比数列,$\therefore\frac{1}{1+a}\cdot\frac{15}{15+a}=\left(\frac{3}{3+a}\right)^2$,解得$a=9$或$a=0$(舍),$\therefore a_5=\frac{5}{5+9}=\frac{5}{14}$.

(2)$a_1=\frac{1}{1+a}$,$a_2=\frac{2}{2+a}$,$a_k=\frac{k}{k+a}$.$\because a_1$,a_2,a_k成等差数列,$\therefore\frac{1}{1+a}+\frac{k}{k+a}=\frac{2}{2+a}\times2$,化简得$a(k-3)=2$.

$\because k,a\in\mathbf{N}_+$,$\therefore\begin{cases}a=1,\\k=5\end{cases}$或$\begin{cases}a=2,\\k=4.\end{cases}\therefore a$的值为1或2.

3.2　等比数列的前n项和

第一课时　等比数列的前n项和(一)

基础知识点对点

1. A　由题意知,$S_n=126=\frac{2(1-2^n)}{1-2}$,$2^n-1=63$,

$2^n=64$,$n=6$.

2. B　由$a_{n+1}+2a_n=0$得$\frac{a_{n+1}}{a_n}=-2$,即$q=-2$,$\therefore a_1=\frac{a_2}{q}=-1$.

$$\therefore S_{10}=\frac{-1\times[1-(-2)^{10}]}{1-(-2)}=-\frac{1-2^{10}}{3}.$$

3. A　$\because\{a_n\}$为等比数列,

$\therefore S_2$,S_4-S_2,S_6-S_4也为等比数列,

即7,S_4-7,$91-S_4$成等比数列.

$\therefore(S_4-7)^2=7(91-S_4)$,解得$S_4=28$或$S_4=-21$.

$\because S_4=a_1+a_2+a_3+a_4=a_1+a_2+a_1q^2+a_2q^2=(a_1+a_2)(1+q^2)=S_2(1+q^2)>S_2$,

$\therefore S_4=28$.

4. A　依题意,数列S_{10},$S_{20}-S_{10}$,$S_{30}-S_{20}$,$S_{40}-S_{30}$成等比数列,因此有$(S_{20}-S_{10})^2=S_{10}(S_{30}-S_{20})$,即$(S_{20}-10)^2=10(70-S_{20})$,故$S_{20}=-20$或$S_{20}=30$;又$S_{20}>0$,因此,$S_{20}=30$,$S_{20}-S_{10}=20$,$S_{40}=10+20+40+80=150$,选A.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

5. **解**：设$\{a_n\}$的公差为d，$\{b_n\}$的公比为q，则$a_n=-1+(n-1)d$，$b_n=q^{n-1}$.

(1)由$a_2+b_2=2$得$d+q=3$. ①

由$a_3+b_3=5$得$2d+q^2=6$. ②

联立①和②解得$\begin{cases}d=3,\\q=0\end{cases}$(舍去)，$\begin{cases}d=1,\\q=2.\end{cases}$

因此$\{b_n\}$的通项公式为$b_n=2^{n-1}$.

(2)由$b_1=1$，$T_3=21$得$q^2+q-20=0$，

解得$q=-5$，或$q=4$.

当$q=-5$时，由①得$d=8$，则$S_3=21$.

当$q=4$时，由①得$d=-1$，则$S_3=-6$.

课后拔高提能练

1. A ∵$\{a_n\}$为等比数列，∴$a_5=a_2q^3$，

∴$q^3=\dfrac{a_5}{a_2}=27$，

∴$q=3$，又$a_1=\dfrac{a_2}{q}=1$，

∴$S_5=\dfrac{a_1(1-q^5)}{1-q}=\dfrac{3^5-1}{2}=121$.

2. D 设塔顶有a盏灯，那么$S_7=\dfrac{a(1-2^7)}{1-2}=381$，解得$a=3$.

3. B 由$S_n=3^n+r$知，$a_1=3^1+r=3+r$，当$n\geqslant 2$时，$a_n=S_n-S_{n-1}=3^n-3^{n-1}$. 又$\{a_n\}$为等比数列，∴$q=3$，当$n=1$时，$3+r=2\times 3^0=2$，∴$r=-1$.

4. C 由$\begin{cases}a_3=4,\\S_3=7,\end{cases}$得$\begin{cases}a_1q^2=4,\\\dfrac{a_1(1-q^3)}{1-q}=7,\end{cases}$

即$\begin{cases}a_1q^2=4,\\a_1(1+q+q^2)=7,\end{cases}$

消去a_1，并整理得$3q^2-4q-4=0$.

∵$q>0$，∴$q=2$.

5. $\dfrac{15}{2}$

解析：∵$S_4=\dfrac{a_1(1-q^4)}{1-q}=\dfrac{a_1(1-2^4)}{1-2}=15a_1$，

∴$\dfrac{S_4}{a_2}=\dfrac{15a_1}{2a_1}=\dfrac{15}{2}$.

6. 32

解析：设公比为q，由$2S_3\neq S_6$知$q\neq 1$.

$S_3=\dfrac{a_1(1-q^3)}{1-q}=\dfrac{7}{4}$，$S_6=\dfrac{a_1(1-q^6)}{1-q}=\dfrac{63}{4}$，

解得$q=2$，$a_1=\dfrac{1}{4}$. ∴$a_8=a_1q^7=\dfrac{1}{4}\times 2^7=32$.

7. 24

解析：∵$q=\dfrac{a_2+a_4+\cdots+a_{80}}{a_1+a_3+\cdots+a_{79}}=3$，

∴$a_1+a_3+\cdots+a_{79}=\dfrac{1}{3}(a_2+a_4+\cdots+a_{80})$.

∴$S_{80}=\dfrac{4}{3}(a_2+a_4+\cdots+a_{80})=32$，

∴$a_2+a_4+\cdots+a_8=24$.

8. **解**：(1)设等差数列$\{a_n\}$的公差为d.

∵$a_2+a_4=10$，∴$2a_1+4d=10$. 又$a_1=1$，∴$d=2$.

∴$a_n=2n-1$.

(2)设等比数列$\{b_n\}$的公比为q.

∵$b_2b_4=a_5$，∴$b_1qb_1q^3=9$. 解得$q^2=3$.

∴$b_{2n-1}=b_1q^{2n-2}=3^{n-1}$.

∴$b_1+b_3+b_5+\cdots+b_{2n-1}=1+3+3^2+\cdots+3^{n-1}=\dfrac{3^n-1}{2}$.

9. **解**：(1)设等差数列$\{a_n\}$的公差为d，∵$a_2+a_3=5\ln 2$，∴$2a_1+3d=5\ln 2$，又$a_1=\ln 2$，∴$d=\ln 2$.

∴$a_n=a_1+(n-1)d=n\ln 2$.

(2)由(1)知$a_n=n\ln 2$，

∵$e^{a_n}=e^{n\ln 2}=e^{\ln 2^n}=2^n$，∴$\{e^{a_n}\}$是以2为首项，2为公比的等比数列.

∴$e^{a_1}+e^{a_2}+\cdots+e^{a_n}=e^{\ln 2}+e^{\ln 2^2}+\cdots+e^{\ln 2^n}=2+2^2+\cdots+2^n=2^{n+1}-2$.

∴$e^{a_1}+e^{a_2}+\cdots+e^{a_n}=2^{n+1}-2$.

第二课时　等比数列的前n项和(二)

基础知识点对点

1. **解**：(1)设等比数列$\{a_n\}$的公比为q，∵S_3+a_3，S_5+a_5，S_4+a_4成等差数列，

∴$2(S_5+a_5)=(S_3+a_3)+(S_4+a_4)$.

∴$4a_5=a_3$，因此，$q^2=\dfrac{a_5}{a_3}=\dfrac{1}{4}$.

∴$q=\pm\dfrac{1}{2}$.

∵数列$\{a_n\}$不是递减数列，∴$q=-\dfrac{1}{2}$.

∴$a_n=\dfrac{3}{2}\left(-\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}=(-1)^{n-1}\dfrac{3}{2^n}$，$n\in\mathbf{N}_+$.

(2)∵$a_n\cdot b_n=(-1)^{n-1}\dfrac{3}{2^n}\times(-1)^{n+1}n=\dfrac{3n}{2^n}$，

∴$T_n=3\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{2}{2^2}+\dfrac{3}{2^3}+\cdots+\dfrac{n}{2^n}\right)$.

∴$\dfrac{1}{2}T_n=3\left(\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{2}{2^3}+\cdots+\dfrac{n-1}{2^n}+\dfrac{n}{2^{n+1}}\right)$.

以上两式相减得$\dfrac{1}{2}T_n=3\left(\dfrac{1}{2^1}+\dfrac{1}{2^2}+\cdots+\dfrac{1}{2^n}-\dfrac{n}{2^{n+1}}\right)=3\left(1-\dfrac{1}{2^n}-\dfrac{n}{2^{n+1}}\right)$，

∴$T_n=6\left(1-\dfrac{n+2}{2^{n+1}}\right)$.

2. **解**：设单位共拿出x万元资金，第1名到第10名所得资金构成数列$\{a_n\}$，前n项和为S_n，则

$a_1=\dfrac{x}{2}+1$，$a_n=\dfrac{1}{2}(x-S_{n-1})+1(n\geqslant 2)$，

所以$2a_n=x-S_{n-1}+2$，$2a_{n+1}=x-S_n+2$，

两式相减得$2a_{n+1}-2a_n=-a_n$，所以$2a_{n+1}=a_n$.

由已知得$a_2=\dfrac{x-\left(\dfrac{x}{2}+1\right)}{2}+1$

$=\dfrac{x}{4}+\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{x}{2}+1\right)$

$=\dfrac{1}{2}a_1$.

所以$\{a_n\}$是公比为$\dfrac{1}{2}$的等比数列，首项为$\dfrac{x}{2}+1$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

由 $S_{10}=\dfrac{\left(\dfrac{x}{2}+1\right)\left(1-\dfrac{1}{2^{10}}\right)}{1-\dfrac{1}{2}}=x$，解得 $x=2\,046$.

故单位共拿出 2 046 万元资金进行奖励.

课后拔高提能练

1. C　由题意得 $4a_1+a_1q^2=2\times 2a_1q$，$\because a_1=1$，$\therefore q^2-4q+4=0$，$q=2$. $\therefore S_4=\dfrac{1(1-2^4)}{1-2}=15$.

2. C　$\because\{a_n\}$为正项等比数列，$\therefore a_2a_4=a_3^2=4$. $\therefore a_3=2$. 又 $S_3=2\left(1+\dfrac{1}{q}+\dfrac{1}{q^2}\right)=14$，得 $q=\dfrac{1}{2}$，

$\therefore a_n=a_3q^{n-3}=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-4}$.

$\therefore b_n=\log_2 a_n=4-n$.

$\therefore$数列$\{b_n\}$的前 6 项的和为 $T_6=\dfrac{(3+4-6)\times 6}{2}=3$.

3. A　由 $a_{n+1}=10a_n$，$\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=10$，

$\therefore$数列$\{a_n\}$为等比数列，且 $q=10$，

$\therefore a_{101}+a_{102}+a_{103}+\cdots+a_{200}=(a_1+a_2+\cdots+a_{100})\cdot q^{100}=100\times 10^{100}=10^{102}$，

$\therefore\lg(a_{101}+a_{102}+a_{103}+\cdots+a_{200})=\lg 10^{102}=102$.

4. C　$\because a_1=1$，$\log_2 a_{n+1}=\log_2 a_n+1(n\in\mathbf{N}_+)$，$\therefore a_{n+1}=2a_n$. $\therefore\{a_n\}$是首项为 1，公比为 2 的等比数列，$\therefore a_n=2^{n-1}$. $S_n=2^n-1$. $S_n>1\,025$，即 $2^n>1\,026$，最小的 n 值为 11.

5. 5

解析：由 $a_{m+1}\cdot a_{m-1}=2a_m$，得 $a_m^2=2a_m$. $\because a_m>0$，

$\therefore a_m=2$. $\therefore T_{2m-1}=2^{2m-1}=512=2^9$. $\therefore 2m-1=9$，$m=5$.

6. 2 018

解析：$\because a_1=1$，$b_n=\dfrac{a_{n+1}}{a_n}$，$\therefore b_1=\dfrac{a_2}{a_1}=a_2$，$b_2=\dfrac{a_3}{a_2}$，$a_3=b_2a_2=b_1b_2$，$b_3=\dfrac{a_4}{a_3}$，$a_4=a_3b_3=b_1b_2b_3$，$\cdots$，

$a_n=b_1b_2\cdots b_{n-1}$.

$\therefore a_{21}=b_1b_2\cdots b_{20}=(b_1b_{20})(b_2b_{19})\cdots(b_{10}b_{11})=(b_{10}b_{11})^{10}=(2\,018^{\frac{1}{10}})^{10}=2\,018$.

7. -63

解析：根据 $S_n=2a_n+1$，可得 $S_{n+1}=2a_{n+1}+1$，两式相减得 $a_{n+1}=2a_{n+1}-2a_n$，即 $a_{n+1}=2a_n$，当 $n=1$ 时，$S_1=a_1=2a_1+1$，解得 $a_1=-1$，所以数列$\{a_n\}$是以 -1 为首项，以 2 为公比的等比数列，所以 $S_6=\dfrac{-(1-2^6)}{1-2}=-63$.

8. **解**：(1)设等比数列的公比为 q，$\because$各项均为正数，$\therefore q>0$.

由 $\begin{cases}a_1+6a_2=1,\\ a_3^2=9a_1a_7,\end{cases}$ 得 $\begin{cases}a_1+6a_1q=1,\\ a_1^2q^4=9a_1^2q^6.\end{cases}$ $\therefore\begin{cases}a_1=\dfrac{1}{3},\\ q=\dfrac{1}{3}.\end{cases}$

$\therefore a_n=\left(\dfrac{1}{3}\right)^n(n\in\mathbf{N}^*)$.

(2)$b_n=\log_3 a_1+\log_3 a_2+\log_3 a_3+\cdots+\log_3 a_n=\log_3(a_1\cdot a_2\cdots a_n)=\log_3\left(\dfrac{1}{3}\right)^{1+2+\cdots+n}=-(1+2+\cdots+n)=-\dfrac{n(n+1)}{2}$，

$\therefore\dfrac{1}{b_n}=-\dfrac{2}{n(n+1)}=-2\left(\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}\right)$，

$\therefore\left\{\dfrac{1}{b_n}\right\}$的前 n 项和 $T_n=\dfrac{1}{b_1}+\dfrac{1}{b_2}+\cdots+\dfrac{1}{b_n}=-2\left(\dfrac{1}{1}-\dfrac{1}{2}+\cdots+\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}\right)=\dfrac{2}{n+1}-2=-\dfrac{2n}{n+1}$.

9. **解**：(1)由 a_4+2 是 a_3，a_5 的等差中项得 $a_3+a_5=2a_4+4$，所以 $a_3+a_4+a_5=3a_4+4=28$，解得 $a_4=8$. 由 $a_3+a_5=20$ 得 $8\left(q+\dfrac{1}{q}\right)=20$，因为 $q>1$，所以 $q=2$.

(2)设 $c_n=(b_{n+1}-b_n)a_n$，数列$\{c_n\}$的前 n 项和为 S_n. 由 $c_n=\begin{cases}S_1,n=1,\\ S_n-S_{n-1},n\geqslant 2.\end{cases}$ 解得 $c_n=4n-1$.

由(1)可知 $a_n=2^{n-1}$，所以 $b_{n+1}-b_n=(4n-1)\cdot\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$，故 $b_n-b_{n-1}=(4n-5)\cdot\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-2}$，$n\geqslant 2$，所以 $b_n-b_1=(b_n-b_{n-1})+(b_{n-1}-b_{n-2})+\cdots+(b_3-b_2)+(b_2-b_1)=(4n-5)\cdot\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-2}+(4n-9)\cdot\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-3}+\cdots+7\cdot\left(\dfrac{1}{2}\right)^1+3\left(\dfrac{1}{2}\right)^0$.

设 $T_n=3\left(\dfrac{1}{2}\right)^0+7\cdot\left(\dfrac{1}{2}\right)^1+11\cdot\left(\dfrac{1}{2}\right)^2+\cdots+(4n-5)\cdot\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-2}$，$n\geqslant 2$，

$\dfrac{1}{2}T_n=3\cdot\dfrac{1}{2}+7\cdot\left(\dfrac{1}{2}\right)^2+\cdots+(4n-9)\cdot\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-2}+(4n-5)\cdot\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$，

所以两式相减得 $\dfrac{1}{2}T_n=3+4\cdot\dfrac{1}{2}+4\cdot\left(\dfrac{1}{2}\right)^2+\cdots+4\cdot\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-2}-(4n-5)\cdot\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$，

因此 $T_n=14-(4n+3)\cdot\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-2}$，$n\geqslant 2$，

又 $b_1=1$，所以 $b_n=15-(4n+3)\cdot\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-2}$.

§4　数列在日常经济生活中的应用

基础知识点对点

1. **解**：实际取出的钱等于：本金＋利息. 到 12 月最后一天取款时：第一个月存款利息：$100\times 12\times 0.165\%$；

第二个月存款利息：$100\times 11\times 0.165\%$；

$\cdots$

第十一个月存款利息：$100\times 2\times 0.165\%$；

第十二个月存款利息：$100\times 1\times 0.165\%$.

$\therefore S_{12}=100\times 12\times 0.165\%+100\times 11\times 0.165\%+\cdots+100\times 2\times 0.165\%+100\times 1\times 0.165\%=100\times 0.165\%(1+2+3+\cdots+12)=100\times 0.165\%\times\dfrac{12(1+12)}{2}=12.87$.

$\therefore$实际取出 $100\times 12+12.87=1\,212.87$(元).

2. B　设蜂巢中的蜜蜂数构成数列$\{a_n\}$，则 $a_1=1+4=5$，$a_2=5\times 4+5=25$，$\cdots$，$a_n=5a_{n-1}$，$\therefore\{a_n\}$为等比数列，$a_1=5$，$q=5$，$a_{20}=5\times 5^{19}=5^{20}$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

3. **解**:(1)由题意知,当 $n\leqslant 7$ 时,$\{a_n\}$ 组成以 4 为首项,2 为公差的等差数列,所以 $a_n=2n+2$,当 $n>7$ 时,$\{a_n\}$ 组成以 $a_7=16$ 为首项,$1+25\%=\frac{5}{4}$ 为公比的等比数列,所以 $a_n=16\times\left(\frac{5}{4}\right)^{n-7}$,所以

$$a_n=\begin{cases}16\cdot\left(\frac{5}{4}\right)^{n-7},n\geqslant 8,\\2n+2,n\leqslant 7.\end{cases}$$

(2)当 $n\leqslant 7$ 时,$S_n=4n+\frac{n(n-1)}{2}\times 2=n^2+3n$,

当 $n>7$ 时,$S_n=70+16\times\frac{5}{4}\times\frac{1-\left(\frac{5}{4}\right)^{n-7}}{1-\frac{5}{4}}=80\times\left(\frac{5}{4}\right)^{n-7}-10$.

所以该生产线前 n 年维护费用的总和为

$$S_n=\begin{cases}n^2+3n,n\leqslant 7,\\80\times\left(\frac{5}{4}\right)^{n-7}-10,n\geqslant 8.\end{cases}$$

∴该生产线前几年平均维护费用为 $\frac{S_n}{n}=$

$$\begin{cases}n+3,n\leqslant 7,\\\frac{80}{n}\times\left(\frac{5}{4}\right)^{n-7}-\frac{10}{n},n\geqslant 8.\end{cases}$$

课后拔高提能练

1. B　设 2017 年年底更新原有总车辆的比例为 x,则 $x+1.1x+1.1^2x+1.1^3x+1.1^4x=1$,即 $x\times\frac{1.1^5-1}{1.1-1}=1$,

∴$x\approx 16.4\%$.

2. D　由题意知 $(1+8\%)^3-1$.

3. D　年平均增长率为 $(1+p)^{12}-1$.

4. A　由题意得 $2(1+20\%)^n\geqslant 12$,即 $1.2^n\geqslant 6$.

两边取对数得 $n\geqslant\frac{\lg 6}{\lg 1.2}=\frac{\lg 2+\lg 3}{2\lg 2+\lg 3-1}=\frac{0.3010+0.4771}{2\times 0.3010+0.4771-1}=\frac{7\,781}{791}\approx 10$.

5. 270 元

解析:依题意得 $640\left(1-\frac{1}{4}\right)^3=640\times\frac{27}{64}=270$(元).

6. 6

解析:由题意得 $2+2^2+2^3+\cdots+2^n=\frac{2(2^n-1)}{2-1}=2^{n+1}-2\geqslant 100$,即 $2^n\geqslant 51$,∴$n\geqslant 6$.

即 n 的最小值为 6.

7. 16

解析:设等差数列的公差为 d,则

$$\begin{cases}a_1=10,\\a_n+a_{n-1}+a_{n-2}=114,\\a_6^2=a_1\cdot a_n,\end{cases}$$

即 $\begin{cases}a_1=10,\\a_{n-1}=38,\\(a_1+5d)^2=a_1(a_{n-1}+d).\end{cases}$

∴$(10+5d)^2=10(38+d)$. ∵$d>0$,∴$d=2$.

∴$a_{n-1}=10+(n-2)\times 2=38$,∴$n=16$.

8. **解**:由题意知,李强每天跑的路程构成一个等差数列,记 $a_1=5\,000$,则公差 $d=500$,李强 10 天跑的路程为这个等差数列的前 10 项和,$S_{10}=10\times 5\,000+\frac{10\times 9}{2}\times 500=72\,500$.

即李强 10 天跑的路程为 72 500 m.

9. **解**:甲方案 10 年共获利 $1+(1+30\%)+\cdots+(1+30\%)^9=\frac{1.3^{10}-1}{1.3-1}\approx 42.62$(万元).

到期时,银行贷款本息为 $10(1+10\%)^{10}\approx 25.94$(万元).

所以按甲方案扣除贷款本息后,净收益为 $42.62-25.94\approx 16.7$(万元).

乙方案 10 年共获利 $1+1.5+\cdots+(1+9\times 0.5)=\frac{10(1+5.5)}{2}=32.50$(万元).

到期时,银行贷款本息为 $(1+10\%)+(1+10\%)^2+\cdots+(1+10\%)^{10}=\frac{1.1(1.1^{10}-1)}{1.1-1}\approx 17.53$(万元).

所以按乙方案扣除贷款本息后,净收益为 $32.50-17.53\approx 15.0$(万元).

故甲方案略优于乙方案.

阶段质量评估卷(一)

1. C　∵$a_n=\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}=\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$,∴$S_n=a_1+a_2+\cdots+a_n=(\sqrt{2}-1)+(\sqrt{3}-\sqrt{2})+\cdots+(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})=\sqrt{n+1}-1$.

由题意知 $\sqrt{n+1}-1=10$,解得 $n=120$.

2. B　∵数列 $\{a_n\}$ 为等差数列,

∴$a_3+a_4+a_8=a_5-2d+a_5-d+a_5+3d=3a_5=9$,

∴$a_5=3$,∴$S_9=9a_5=27$.

3. C　因为 $S_3=3a_1+\frac{3\times(3-1)}{2}d=3\times 2+\frac{3\times 2}{2}d=12$,

所以 $d=2$. 所以 $a_6=a_1+(6-1)d=2+5\times 2=12$. 故选 C.

4. B　相邻两项结合,故 $S_{15}+S_{22}-S_{31}=S_{14}+a_{15}+S_{22}-(S_{30}+a_{31})=-4\times 7+57-4\times 11-(-60+121)=-28+57-44-61=-76$.

5. D　∵$a_1+a_2+a_3=13$,$a_3=1$,

∴$a_1+a_2=12$,由 $\begin{cases}a_1q^2=1,\\a_1+a_1q=12\end{cases}$ 得 $\frac{q^2}{1+q}=\frac{1}{12}$,$12q^2-q-1=0$,$q=\frac{1}{3}$ 或 $q=-\frac{1}{4}$(舍).

∴$a_n=a_3q^{n-3}=1\times\left(\frac{1}{3}\right)^{n-3}$,∴$b_n=\log_3\left(\frac{1}{3}\right)^{n-3}=3-n$.

∴$T_{10}=\frac{10(b_1+b_{10})}{2}=\frac{10[2+(-7)]}{2}=-25$.

6. A　设五个人所分得的面包为 $a-2d$,$a-d$,a,$a+d$,$a+2d$(其中 $d>0$).

∵把 100 个面包分给 5 个人,

∴$(a-2d)+(a-d)+a+(a+d)+(a+2d)=5a=100$,得 $a=20$.

∵使较大的三份之和的 $\frac{1}{7}$ 是较小的两份之和,

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

$\therefore \frac{1}{7}(a+a+d+a+2d)=a-2d+a-d$，得 $3a+3d=7(2a-3d)$，

化简得 $24d=11a$，$\therefore d=\frac{11}{24}\times 20=\frac{55}{6}$，

所以最小的 1 份为 $a-2d=20-2\times\frac{55}{6}=\frac{5}{3}$.

7. 11

解析：$\because a_{n+2}+a_{n+1}-2a_n=0$，$\therefore a_n(q^2+q-2)=0$.

$\because q\neq 1$，$a_n\neq 0$，$\therefore q=-2$.

又 $\because a_1=1$，$\therefore S_5=\frac{1-(-2)^5}{1-(-2)}=11$.

8. 50

解析：$\because a_{10}a_{11}+a_9a_{12}=2a_{10}a_{11}=2e^5$，

$\therefore a_{10}a_{11}=e^5$.

$\ln a_1+\ln a_2+\cdots+\ln a_{20}=\ln(a_1\cdot a_2\cdot\cdots\cdot a_{20})=\ln(a_{10}a_{11})^{10}=\ln(e^5)^{10}=\ln e^{50}=50\ln e=50$.

9. 27

解析：设 $a_n=2^k$，则 $S_n=[(2\times 1-1)+(2\times 2-1)+\cdots+(2\cdot 2^{k-1}-1)]+[2+2^2+\cdots+2^k]=\frac{2^{k-1}(1+2\times 2^{k-1}-1)}{2}+\frac{2(1-2^k)}{1-2}=2^{2k-2}+2^{k+1}-2$，由 $S_n>12a_{n+1}$ 得 $2^{2k-2}+2^{k+1}-2>12(2^k+1)$，$(2^{k-1})^2-20(2^{k-1})-14>0$，$2^{k-1}\geqslant 2^5$，$k\geqslant 6$，所以只需研究 $2^5<a_n<2^6$ 是否有满足条件的解，此时 $S_n=[(2\times 1-1)+(2\times 2-1)+\cdots+(2m-1)]+[2+2^2+\cdots+2^5]=m^2+2^{5+1}-2$，$a_{n+1}=2m+1$，$m$ 为等差数列项数，且 $m>16$. 由 $m^2+2^{5+1}-2>12(2m+1)$，$m^2-24m+50>0$，$\therefore m\geqslant 22$，$n=m+5\geqslant 27$ 得满足条件的 n 的最小值为 27.

10. **解**：(1)设等比数列 $\{b_n\}$ 的公比为 q，由 $b_1=1$，$b_3=b_2+2$，可得 $q^2-q-2=0$. 因为 $q>0$，可得 $q=2$，故 $b_n=2^{n-1}$. 所以 $T_n=\frac{1-2^n}{1-2}=2^n-1$.

设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d. 由 $b_4=a_3+a_5$，可得 $a_1+3d=4$. 由 $b_5=a_4+2a_6$，可得 $3a_1+13d=16$，从而 $a_1=1$，$d=1$，故 $a_n=n$，所以 $S_n=\frac{n(n+1)}{2}$.

(2)由(1)有 $T_1+T_2+\cdots+T_n=(2^1+2^2+\cdots+2^n)-n=\frac{2\times(1-2^n)}{1-2}-n=2^{n+1}-n-2$.

由 $S_n+(T_1+T_2+\cdots+T_n)=a_n+4b_n$ 可得 $\frac{n(n+1)}{2}+2^{n+1}-n-2=n+2^{n+1}$，整理得 $n^2-3n-4=0$，解得 $n=-1$(舍)或 $n=4$. 所以 n 的值为 4.

11. **解**：(1)设数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d，

则由已知条件可得 $\begin{cases}2a_1+6d=-9,\\ 9a_1+36d=-\frac{99}{2},\end{cases}$

解得 $\begin{cases}a_1=-\frac{3}{2},\\ d=-1.\end{cases}$

所以 $a_n=-\frac{2n+1}{2}$.

(2)证明：由(1)可知 $S_n=-\frac{n(n+2)}{2}$，

故 $b_n=-\frac{1}{n(n+2)}=-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)$，

$T_n=-\frac{1}{2}\left[\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}\right)-\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{n+2}\right)\right]=-\frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)$.

又因为 $\frac{3}{2}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}<\frac{3}{2}$，

所以 $T_n>-\frac{3}{4}$.

12. **解**：(1)设 $\{a_n\}$ 的公比为 q，$\{b_n\}$ 的公差为 d，由题意 $q>0$，由已知，有 $\begin{cases}2q^2-3d=2,\\ q^4-3d=10,\end{cases}$

消去 d 得 $q^4-2q^2-8=0$，解得 $q=2$，$d=2$，

所以 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n=2^{n-1}$，$n\in\mathbf{N}^*$，

$\{b_n\}$ 的通项公式为 $b_n=2n-1$，$n\in\mathbf{N}^*$.

(2)由(1)有 $c_n=(2n-1)2^{n-1}$，设 $\{c_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，则

$S_n=1\times 2^0+3\times 2^1+5\times 2^2+\cdots+(2n-1)\times 2^{n-1}$，

$2S_n=1\times 2^1+3\times 2^2+5\times 2^3+\cdots+(2n-1)\times 2^n$，

两式相减得 $-S_n=1+2^2+2^3+\cdots+2^n-(2n-1)\times 2^n=-(2n-3)\times 2^n-3$，

所以 $S_n=(2n-3)\cdot 2^n+3$.

13. **解**：(1)设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d，

等比数列 $\{b_n\}$ 的公比为 $q(q>0)$. 由题意，

得 $\begin{cases}2(1+d)=2+2q,\\ (2q)^2=(1+d)(3+2d),\end{cases}$ 解得 $d=q=3$，

$\therefore a_n=3n-2$，$b_n=2\cdot 3^{n-1}$.

(2)$c_n=3\cdot b_n-2=2\cdot 3^n-2$，

$\therefore S_n=c_1+c_2+\cdots+c_n=2(3^1+3^2+\cdots+3^n)-2n=3^{n+1}-2n-3$.

$\therefore \frac{S_{2n}+4n}{S_n+2n}=\frac{3^{2n+1}-3}{3^{n+1}-3}=3^n+1$.

$\therefore 3^n+1<2\times 3^n+t$ 恒成立，即 $t>(-3^n+1)_{\max}$.

故 $t>-2$.

第二章　解三角形

§1　正弦定理与余弦定理

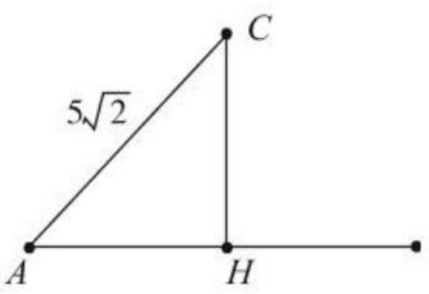
1.1　正弦定理

基础知识点对点

1. B　由正弦定理得 $\frac{a}{\sin 30^\circ}=\frac{\sqrt{3}}{\sin 60^\circ}$，$a=1$.

2. B　由正弦定理得 $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}$，即 $\frac{3}{\frac{\sqrt{2}}{2}}=\frac{b}{\frac{\sqrt{3}}{2}}$，解得 $b=\frac{3\sqrt{6}}{2}$.

3. D　如图：



在 Rt△ACH 中，由 $b=5\sqrt{2}$，$A=45^\circ$ 解得 $CH=5$，由于 $a<CH$，故这样的三角形不存在.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

4. A　在$\triangle ABC$中，$a=1$，$b=\sqrt{3}$，$B=120°$，∴由正弦定理$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}$得$\sin A=\frac{a\sin B}{b}=\frac{1\times\frac{\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{3}}=\frac{1}{2}$，
∵$a<b$，∴$A<B$，
则$A=30°$.

5. **解**：由正弦定理$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}$得$b=\frac{a\sin B}{\sin A}=\frac{2\sqrt{3}\sin 45°}{\sin 60°}=2\sqrt{2}$，
又∵$\sin C=\sin(A+B)=\sin A\cos B+\cos A\sin B=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$.
∴三角形的面积是
$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{1}{2}\times 2\sqrt{3}\times 2\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}=3+\sqrt{3}$.

课后拔高提能练

1. B　由正弦定理得$\frac{BC}{\sin A}=\frac{AC}{\sin B}$，即$\frac{3\sqrt{2}}{\sin 60°}=\frac{AC}{\sin 45°}$，
∴$AC=\frac{3\sqrt{2}\times\sin 45°}{\sin 60°}=2\sqrt{3}$.

2. A　∵$2a\sin B=\sqrt{3}b$，由正弦定理得$2\sin A\sin B=\sqrt{3}\sin B$.
∵$\sin B\neq 0$，∴$\sin A=\frac{\sqrt{3}}{2}$. 又$0<A<\frac{\pi}{2}$，∴$A=\frac{\pi}{3}$.

3. D　由正弦定理得$\frac{\sqrt{3}}{\sin A}=\frac{\sqrt{2}}{\sin 45°}$，$\sin A=\frac{\sqrt{3}}{2}$，又$a>b$，
∴$A>B$，∴$A=60°$或$120°$.

4. D　在$\triangle ABC$中，∵$\frac{a}{\cos B}=\frac{b}{\cos A}$，∴$\frac{a}{b}=\frac{\cos B}{\cos A}$. 又由正弦定理得$\frac{a}{b}=\frac{\sin A}{\sin B}$，∴$\frac{\sin A}{\sin B}=\frac{\cos B}{\cos A}$，∴$\sin 2A=\sin 2B$.
∴$2A=2B$或$2A+2B=\pi$.
∴$A=B$或$A+B=\frac{\pi}{2}$. ∴$\triangle ABC$为等腰三角形或直角三角形.

5. $60°$或$120°$
解析：∵$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}AB\cdot AC\cdot\sin A=\frac{1}{2}\times 3\times 4\times\sin A=3\sqrt{3}$，∴$\sin A=\frac{\sqrt{3}}{2}$. 又$A$为$\triangle ABC$的内角，
∴$A=60°$或$A=120°$.

6. $\frac{1}{6}$
解析：∵$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=|\overrightarrow{AB}|\cdot|\overrightarrow{AC}|\cos A=\tan A$，且$A=\frac{\pi}{6}$，∴$|\overrightarrow{AB}|\cdot|\overrightarrow{AC}|=\frac{2}{3}$. ∴$\triangle ABC$的面积为$\frac{1}{2}\times|\overrightarrow{AB}|\cdot|\overrightarrow{AC}|\sin A=\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{6}$.

7. $\frac{7}{2}$
解析：由已知及正弦定理可得$\frac{2\sin^2 B-\sin^2 A}{\sin^2 A}=2\frac{\sin^2 B}{\sin^2 A}-1=2\left(\frac{b}{a}\right)^2-1=2\times\left(\frac{3}{2}\right)^2-1=\frac{7}{2}$.

8. **解**：∵A，B为$\triangle ABC$的内角，$\tan A=2$，
∴$\sin A=\frac{2\sqrt{5}}{5}$，$\cos A=\frac{\sqrt{5}}{5}$，又$\tan B=3$，
∴$\sin B=\frac{3\sqrt{10}}{10}$，$\cos B=\frac{\sqrt{10}}{10}$.
∴$\sin C=\sin[\pi-(A+B)]=\sin(A+B)=\sin A\cos B+\cos A\sin B=\frac{\sqrt{2}}{2}$.
由正弦定理$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$，
得$a=\frac{c\sin A}{\sin C}=\frac{8\sqrt{5}}{5}$，
$b=\frac{c\sin B}{\sin C}=\frac{6\sqrt{10}}{5}$，
$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{1}{2}\times\frac{6\sqrt{10}}{5}\times\frac{8\sqrt{5}}{5}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{24}{5}$.

9. **解**：(1)∵$2b\cos C+c=2a$，
∴由正弦定理得$2\sin B\cos C+\sin C=2\sin A$.
∵$A+B+C=\pi$，
∴$\sin A=\sin(B+C)=\sin B\cos C+\cos B\sin C$.
∴$2\sin B\cos C+\sin C=2\sin B\cos C+2\cos B\sin C$，
即$\sin C=2\cos B\sin C$. ∵$\sin C\neq 0$，
∴$\cos B=\frac{1}{2}$. 又$0<B<\pi$，∴$B=\frac{\pi}{3}$.
(2)∵$B=\frac{\pi}{3}$，$\cos A=\frac{1}{7}$，∴$\sin A=\frac{4\sqrt{3}}{7}$.
∴$\sin C=\sin(A+B)=\sin A\cos B+\cos A\sin B=\frac{4\sqrt{3}}{7}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{7}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{5\sqrt{3}}{14}$.
∴$\frac{c}{a}=\frac{\sin C}{\sin A}=\frac{\frac{5\sqrt{3}}{14}}{\frac{4\sqrt{3}}{7}}=\frac{5}{8}$.

1.2　余弦定理

基础知识点对点

1. B　$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C=25+16-2\times 5\times 4\times\left(-\frac{1}{2}\right)=61$，$c=\sqrt{61}$.

2. D　由$b^2=a^2+c^2-2ac\cos B$得，$6=a^2+2-2\sqrt{2}a\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)$，即$a^2+\sqrt{2}a-4=0$，$a=\sqrt{2}$或$a=-2\sqrt{2}$(舍).

3. A　由$\sin C=2\sqrt{3}\sin B$及正弦定理得$c=2\sqrt{3}b$，代入$a^2-b^2=\sqrt{3}bc$，得$a^2-b^2=6b^2$，∴$a^2=7b^2$. ∴$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{b^2+12b^2-7b^2}{4\sqrt{3}b^2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$.
又∵$0°<A<180°$，∴$A=30°$.

4. D　设三角形的三边长分别为a，b，c，根据正弦定理$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$化简已知的等式得：$a:b:c=3:5:7$，设$a=3k$，$b=5k$，$c=7k$，根据余弦定理得$\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\frac{9k^2+25k^2-49k^2}{30k^2}=-\frac{1}{2}$，
∵$C\in(0,180°)$，∴$C=120°$，
则这个三角形的最大角为$120°$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

5. **解**：∵ $a\cos A=b\cos B$，∴由余弦定理得

$a\cdot\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=b\cdot\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}$，

∴$a^2(b^2+c^2-a^2)=b^2(a^2+c^2-b^2)$.

即$(a^2-b^2)c^2=(a^2-b^2)(a^2+b^2)$.

∴$(a^2-b^2)(a^2+b^2-c^2)=0$.

∴$a=b$ 或 $a^2+b^2=c^2$.

∴△ABC 为等腰三角形或直角三角形.

课后拔高提能练

1. C　$b\cos C+c\cos B=b\cdot\frac{a^2+b^2-c^2}{2ba}+c\cdot\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=\frac{a^2+b^2-c^2+a^2+c^2-b^2}{2a}=a=2$.

2. A　在△ABC 中，由余弦定理得

$\cos A=\frac{AB^2+AC^2-BC^2}{2AB\cdot AC}=\frac{9+16-13}{2\times3\times4}=\frac{1}{2}$，

∴$\sin A=\sqrt{1-\cos^2A}=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

3. B　由 $\boldsymbol{m}\perp\boldsymbol{n}$，得$(b-c)\cdot b+(c-a)(c+a)=0$，

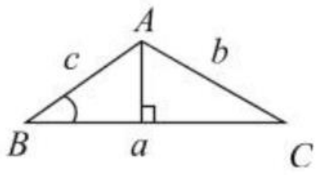
得 $b^2-bc+c^2-a^2=0$，

∴$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{1}{2}$，

又 A 为△ABC 的内角，∴$A=\frac{\pi}{3}$.

4. C　设△ABC 中，角 A,B,C 所对的边分别为 a,b,c，由题意可得$\frac{1}{3}a=c\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}c$.

由 $a=\frac{3\sqrt{2}}{2}c$. 在△ABC 中，由余弦定理得 $b^2=a^2+c^2-2ac\cos B=\frac{9}{2}c^2+c^2-3c^2=\frac{5}{2}c^2$，∴$b=\frac{\sqrt{10}}{2}c$.



∴$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{\frac{5}{2}c^2+c^2-\frac{9}{2}c^2}{2\times\frac{\sqrt{10}}{2}c\times c}=-\frac{\sqrt{10}}{10}$.

5. 4 或 8

解析：由 $3a=\sqrt{3}b=12$，得 $a=4,b=4\sqrt{3}$，

由余弦定理得 $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$，得 $c=4$ 或 $c=8$.

6. 8

解析：在△ABC 中，∵$\cos A=-\frac{1}{4}$，∴$\sin A=\frac{\sqrt{15}}{4}$.

∴$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}bc\times\frac{\sqrt{15}}{4}=3\sqrt{15}$，

∴$bc=24$. 又∵$b-c=2$，

∴$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A=b^2+c^2+\frac{1}{2}bc=(b-c)^2+\frac{5}{2}bc=4+\frac{5}{2}\times24=64$，∴$a=8$.

7. $\frac{13\pi}{3}$

解析：∵$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{\sqrt{3}}{4}c=\sqrt{3}$，∴$c=4$.

由余弦定理得 $a^2=b^2+c^2-2bc\cdot\cos A=1+16-2\times4\times\frac{1}{2}=13$，

∴$a=\sqrt{13}$，由正弦定理得$\frac{a}{\sin A}=\frac{\sqrt{13}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=2R$，

得 $R=\sqrt{\frac{13}{3}}$.

∴△ABC 外接圆的面积为 $S=\pi R^2=\frac{13\pi}{3}$.

8. **解**：(1)由已知，根据正弦定理得

$2a^2=(2b+c)b+(2c+b)c$，即 $a^2=b^2+c^2+bc$，

由余弦定理得 $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$，

故 $\cos A=-\frac{1}{2}$，

又 $0<A<\pi$，所以 $A=\frac{2}{3}\pi$.

(2)由(1)得 $\sin^2A=\sin^2B+\sin^2C+\sin B\sin C$.

又 $\sin B+\sin C=1$，得 $\sin B=\sin C=\frac{1}{2}$.

因为 $0<B<\frac{\pi}{2}$，$0<C<\frac{\pi}{2}$，故 $B=C=\frac{\pi}{6}$，

所以△ABC 是等腰的钝角三角形.

9. **解**：∵$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=-6$，∴$|\overrightarrow{AB}|\cdot|\overrightarrow{AC}|\cos A=-6$，

即 $bc\cos A=-6$. 又 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}bc\sin A=3$，

∴$bc\sin A=6$. ∴$\tan A=-1$.

又 $0<A<\pi$，∴$A=\frac{3\pi}{4}$.

又∵$b=3$，∴$c=2\sqrt{2}$.

∴$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A=9+8-2\times(-6)=29$，

∴$a=\sqrt{29}$.

§2　三角形中的几何计算

第一课时　三角形中的几何计算(一)

基础知识点对点

1. B　∵$A=45°,C=105°$，∴$B=30°$. 由正弦定理得 $AC=\frac{BC}{\sin A}\cdot\sin B=\frac{\sqrt{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}\times\frac{1}{2}=1$.

2. B　由$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=6\cos A=3$，∴$\cos A=\frac{1}{2}$.

在△ABC 中，由余弦定理得

$BC^2=4+9-2\times2\times3\times\frac{1}{2}=7$，∴$BC=\sqrt{7}$.

3. C　由余弦定理得 $4^2=b^2+c^2-2bc\times\frac{1}{2}$，即 $b^2+c^2-bc=16$，$(b+c)^2=16+3bc$，∵$b+c=5$，∴$bc=3$，∴$S=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}\times3\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{3\sqrt{3}}{4}$.

4. B　$S=\frac{1}{2}ac\sin B=\frac{1}{2}\times a\times4\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=2$，解得 $a=1$.

由余弦定理得 $b^2=1^2+(4\sqrt{2})^2-2\times1\times4\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=25$，∴$b=5$.

5. **解**：(1)∵$\cos2C+2\sqrt{2}\cos C+2=0$，

∴$2\cos^2C+2\sqrt{2}\cos C+1=0$，

即$(\sqrt{2}\cos C+1)^2=0$. ∴$\cos C=-\frac{\sqrt{2}}{2}$.

又 $0<C<\pi$，∴$C=\frac{3\pi}{4}$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

(2)$\because c^2=a^2+b^2-2ab\cos C=5a^2$，$\therefore c=\sqrt{5}a$.

由正弦定理，得 $\sin C=\sqrt{5}\sin A$，$\therefore \sin A=\frac{1}{\sqrt{5}}\sin C=\frac{\sqrt{10}}{10}$.

$\because S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ab\sin C$，且 $S_{\triangle ABC}=\frac{\sqrt{2}}{2}\sin A\sin B$，

$\therefore \frac{ab}{\sin A\sin B}\sin C=\sqrt{2}$，由正弦定理得 $\left(\frac{c}{\sin C}\right)^2\sin C=\sqrt{2}$，解得 $c=1$.

课后拔高提能练

1. C　由题可知 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{a^2+b^2-c^2}{4}$，所以 $a^2+b^2-c^2=2ab\sin C$，由余弦定理 $a^2+b^2-c^2=2ab\cos C$，所以 $\sin C=\cos C$，$\because C\in(0,\pi)$，$\therefore C=\frac{\pi}{4}$，故选 C.

2. A　$\because b\sin A=\sqrt{3}a\cos B$，由正弦定理得 $\sin B\sin A=\sqrt{3}\sin A\cos B$，$\therefore \tan B=\sqrt{3}$. 又 B 为 $\triangle ABC$ 的内角，

$\therefore B=\frac{\pi}{3}$. $\therefore \cos B=\frac{1}{2}$.

3. A　由 $b\cdot\cos C+C\cdot\cos B=3a\cdot\cos B$ 及正弦定理得 $\sin B\cos C+\sin C\cos B=3\sin A\cos B$，

$\therefore \sin(B+C)=3\sin A\cos B$.

$\therefore \sin A=3\sin A\cos B$. $\because \sin A\neq 0$，$\therefore \cos B=\frac{1}{3}$.

4. B　由 $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$，$b^2=a^2+bc$，$A=\frac{\pi}{6}$，得 $b=\frac{\sqrt{3}+1}{2}c$，代入 $b^2=a^2+bc$，得 $2a^2=c^2$，

由正弦定理得 $\sin^2 C=2\sin^2 A=2\times\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{2}$，

$\therefore \sin C=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

又 $\because b=\frac{\sqrt{3}+1}{2}c$，$\therefore b>c$，$\therefore C=\frac{\pi}{4}$.

5. $\frac{\pi}{4}$

解析：$\because b\sin A=a\cos B$，由正弦定理得 $\sin B\sin A=\sin A\cos B$. $\because \sin A\neq 0$，$\therefore \sin B=\cos B$. $\therefore \tan B=1$.

$\because B$ 为 $\triangle ABC$ 的内角，$\therefore B=\frac{\pi}{4}$.

6. $\frac{\pi}{3}$

解析：$S=\frac{1}{2}\cdot a\cdot\sqrt{3}\sin 30^\circ=\frac{\sqrt{3}}{4}a=\frac{\sqrt{3}}{2}$，$a=2$.

由余弦定理得 $\cos C=\frac{2^2+1^2-3}{2\times 2\times 1}=\frac{1}{2}$，$C=\frac{\pi}{3}$.

7. $\frac{2\sqrt{3}}{3}$

解析：根据题意，结合正弦定理可得 $\sin B\sin C+\sin C\sin B=4\sin A\sin B\sin C$，即 $\sin A=\frac{1}{2}$，结合余弦定理可得 $2bc\cos A=8$，所以 A 为锐角，且 $\cos A=\frac{\sqrt{3}}{2}$，从而求得 $bc=\frac{8\sqrt{3}}{3}$，所以 $\triangle ABC$ 的面积为 $S=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}\times\frac{8\sqrt{3}}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

8. **解**：(1)在 $\triangle ABC$ 中，由正弦定理 $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}$，可得 $b\sin A=a\sin B$，

又由 $b\sin A=a\cos\left(B-\frac{\pi}{6}\right)$，

得 $a\sin B=a\cos\left(B-\frac{\pi}{6}\right)$，

即 $\sin B=\cos\left(B-\frac{\pi}{6}\right)$，

可得 $\tan B=\sqrt{3}$.

又因为 $B\in(0,\pi)$，可得 $B=\frac{\pi}{3}$.

(2)在 $\triangle ABC$ 中，由余弦定理及 $a=2$，$c=3$，$B=\frac{\pi}{3}$，

有 $b^2=a^2+c^2-2ac\cos B=7$，故 $b=\sqrt{7}$.

由 $b\sin A=a\cos\left(B-\frac{\pi}{6}\right)$，可得 $\sin A=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}$. 因为 $a<c$，

故 $\cos A=\frac{2}{\sqrt{7}}$.

因此 $\sin 2A=2\sin A\cos A=\frac{4\sqrt{3}}{7}$，

$\cos 2A=2\cos^2 A-1=\frac{1}{7}$.

所以 $\sin(2A-B)=\sin 2A\cos B-\cos 2A\sin B=\frac{4\sqrt{3}}{7}\times\frac{1}{2}-\frac{1}{7}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{3\sqrt{3}}{14}$.

9. **解**：(1)由已知得 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ac\sin B=\frac{a^2}{3\sin A}$，

即 $\frac{1}{2}c\sin B=\frac{a}{3\sin A}$.

由正弦定理得 $\frac{1}{2}\sin C\sin B=\frac{\sin A}{3\sin A}$，

$\therefore \sin B\sin C=\frac{2}{3}$.

(2)由题设及(1)得 $\cos B\cos C-\sin B\sin C=-\frac{1}{2}$，

即 $\cos(B+C)=-\frac{1}{2}$. $\therefore B+C=\frac{2\pi}{3}$，$\therefore A=\frac{\pi}{3}$.

由题设得 $\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{a^2}{3\sin A}$，$\therefore bc=8$.

由余弦定理得 $b^2+c^2-bc=9$，即 $(b+c)^2-3bc=9$.

$\therefore b+c=\sqrt{33}$.

$\therefore \triangle ABC$ 的周长为 $3+\sqrt{33}$.

第二课时　三角形中的几何计算(二)

基础知识点对点

1. C　由正弦定理 $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}$，

得 $\sin B=\frac{b\sin A}{a}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，又 B 为锐角，

$\therefore B=60^\circ$，$\therefore C=180^\circ-A-B=90^\circ$，

$\therefore A<B<C$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

2. A　由 $a\sin B\cos C+c\sin B\cos A=\frac{1}{2}b$ 及正弦定理得 $\sin A\sin B\cos C+\sin C\sin B\cos A=\frac{1}{2}\sin B$，又 B 为 $\triangle ABC$ 的内角，$\therefore \sin B\neq 0$，$\sin(A+C)=\frac{1}{2}$，$\therefore \sin B=\frac{1}{2}$，又 $a>b$，$\therefore B$ 为锐角，$\therefore B=\frac{\pi}{6}$.

3. B　由正弦定理得 $\sin C=\frac{c\cdot \sin B}{b}=\frac{\sqrt{3}\times\frac{1}{2}}{1}=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

$\because B=30^\circ$，$c>b$，$\therefore C=60^\circ$ 或 120°.

当 $C=60^\circ$ 时，$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}\times 1\times\sqrt{3}\times 1=\frac{\sqrt{3}}{2}$；

当 $C=120^\circ$ 时，$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}\times 1\times\sqrt{3}\times\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{3}}{4}$.

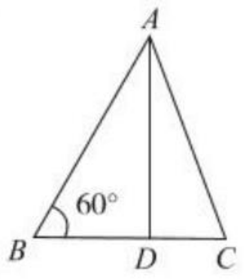
4. B　如图，在 $\triangle ABC$ 中，由余弦定理得 $AC^2=AB^2+BC^2-2AB\cdot BC\cdot\cos B$，

即 $7=AB^2+4-2AB\times 2\times\frac{1}{2}$，

即 $AB^2-2AB-3=0$，$\therefore AB=3$.

设 BC 边上的高为 AD，

则 $AD=AB\cdot\sin 60^\circ=\frac{3\sqrt{3}}{2}$.



5. **解**：(1) $\because a\cos B+\sqrt{3}b\sin A=c$，

由正弦定理得 $\sin A\cos B+\sqrt{3}\sin B\sin A=\sin C=\sin A\cos B+\cos A\sin B$，

$\therefore \sqrt{3}\sin B\sin A=\cos A\sin B$. 又 B 为 $\triangle ABC$ 的内角，

$\therefore \sin B\neq 0$，$\therefore \tan A=\frac{\sqrt{3}}{3}$. 又 A 为 $\triangle ABC$ 的内角，

$\therefore A=\frac{\pi}{6}$.

(2) $\because \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=bc\cos A=3$，由(1)知 $A=\frac{\pi}{6}$，

$\therefore \cos A=\frac{\sqrt{3}}{2}$，$\therefore bc=2\sqrt{3}$.

由余弦定理得 $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A=(b+c)^2-4\sqrt{3}-6$，

$\therefore (b+c)^2=7+4\sqrt{3}=(2+\sqrt{3})^2$，$\therefore b+c=2+\sqrt{3}$.

课后拔高提能练

1. A　因为 $\cos C=2\cos^2\frac{C}{2}-1=2\times\left(\frac{\sqrt{5}}{5}\right)^2-1=-\frac{3}{5}$，

所以 $c^2=a^2+b^2-2ab\cos C=1+25-2\times 1\times 5\times\left(-\frac{3}{5}\right)=32$. $\therefore c=4\sqrt{2}$，故选 A.

2. C　在 $\triangle ABC$ 中，$\because \sin C=1$，$\therefore C=90^\circ$. $\because A:B=1:2$，$\therefore A+B=3A=90^\circ$，$\therefore A=30^\circ$，$B=60^\circ$. 由正弦定理得 $a:b:c=\sin A:\sin B:\sin C=\sin 30^\circ:\sin 60^\circ:\sin 90^\circ=\frac{1}{2}:\frac{\sqrt{3}}{2}:1=1:\sqrt{3}:2$.

3. B　$\because \sin C=2\sin A$，$\therefore c=2a$，$\cos B=\frac{1}{4}=\frac{a^2+(2a)^2-4^2}{2a\times 2a}$，

解得 $a=2$，$c=4$. 又 $\because \sin B=\sqrt{1-\cos^2 B}=\frac{\sqrt{15}}{4}$，

$\therefore S=\frac{1}{2}\times 2\times 4\times\frac{\sqrt{15}}{4}=\sqrt{15}$.

4. B　由已知得，$\cos C\cos B+\cos C\sin B+\sin C\cos B+\sin C\sin B-2=0$，$\cos(B-C)+\sin(B+C)=2$，$\cos(B-C)+\sin A=2$，$\therefore \cos(B-C)=1$，$\sin A=1$，

$\therefore A=\frac{\pi}{2}$，$B=C=\frac{\pi}{4}$，$\therefore \frac{a+b}{c}=\frac{\sin A+\sin B}{\sin C}=\frac{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}=\sqrt{2}+1$.

5. $\frac{\sqrt{21}}{7}$　3

解析：由正弦定理得 $\frac{a}{b}=\frac{\sin A}{\sin B}$，$\therefore \sin B=\frac{2}{\sqrt{7}}\times\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{21}}{7}$，由余弦定理得 $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$，$\therefore 7=4+c^2-2c$，$\therefore c=3$(负值舍去).

6. $\frac{7\pi}{12}$

解析：由正弦定理 $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}$，得 $\frac{a}{\sin A}=\frac{\sqrt{2}a}{\sin\frac{\pi}{4}}$，$\therefore \sin A=\frac{1}{2}$. $\because b=\sqrt{2}a>a$，$\therefore A<B$.

$\therefore A=\frac{\pi}{6}$. $\therefore C=\pi-A-B=\pi-\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{4}=\frac{7\pi}{12}$.

7. 60°

解析：$\because a\cos B+b\cos A=c\sin C$，由正弦定理得 $\sin(A+B)=\sin^2 C$，

$\therefore \sin C=1$，又 C 为 $\triangle ABC$ 的内角，

$\therefore C=90^\circ$. $\therefore c^2=a^2+b^2$.

$\therefore b^2+c^2-a^2=2b^2=\sqrt{3}bc$.

$\therefore \frac{b}{c}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，即 $\sin B=\frac{\sqrt{3}}{2}$. $\therefore B=60^\circ$.

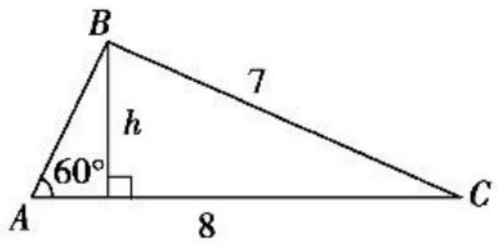
8. **解**：(1) 在 $\triangle ABC$ 中，$\because \cos B=-\frac{1}{7}$，$\therefore B\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$，

$\therefore \sin B=\sqrt{1-\cos^2 B}=\frac{4\sqrt{3}}{7}$. 由正弦定理得 $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}\Rightarrow\frac{7}{\sin A}=\frac{8}{\frac{4\sqrt{3}}{7}}$，$\therefore \sin A=\frac{\sqrt{3}}{2}$. $\because B\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$，

$\therefore A\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，$\therefore A=\frac{\pi}{3}$.

(2) 在 $\triangle ABC$ 中，$\because \sin C=\sin(A+B)=\sin A\cos B+\sin B\cos A=\frac{\sqrt{3}}{2}\times\left(-\frac{1}{7}\right)+\frac{1}{2}\times\frac{4\sqrt{3}}{7}=\frac{3\sqrt{3}}{14}$.

如图所示，在 $\triangle ABC$ 中，$\because \sin C=\frac{h}{BC}$，$\therefore h=BC\cdot\sin C=7\times\frac{3\sqrt{3}}{14}=\frac{3\sqrt{3}}{2}$，$\therefore AC$ 边上的高为 $\frac{3\sqrt{3}}{2}$.



关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

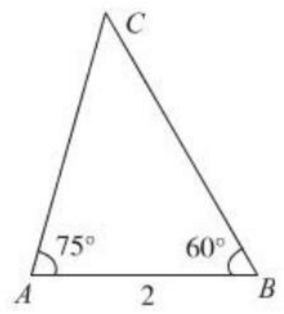
9. **解**：(1)由 $2\cos A\cos C+1=2\sin A\sin C$ 得
$2(\cos A\cos C-\sin A\sin C)=-1$，
$\therefore \cos(A+C)=-\frac{1}{2}$，
$\therefore \cos B=\frac{1}{2}$，又 $0<B<\pi$，$\therefore B=\frac{\pi}{3}$.
(2)由余弦定理得 $\cos B=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=\frac{1}{2}$，
$\therefore \frac{(a+c)^2-2ac-b^2}{2ac}=\frac{1}{2}$，
又 $a+c=\frac{3\sqrt{3}}{2}$，$b=\sqrt{3}$，$\therefore \frac{27}{4}-2ac-3=ac$，$ac=\frac{5}{4}$.
$\therefore S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ac\sin B=\frac{1}{2}\times\frac{5}{4}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{5\sqrt{3}}{16}$.

§3 解三角形的实际应用举例

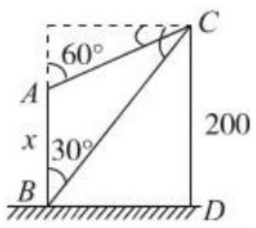
基础知识点对点

1. D　由余弦定理得 $AC^2=AB^2+BC^2-2AB\cdot BC\cdot\cos 120^\circ=10^2+20^2-2\times10\times20\times\left(-\frac{1}{2}\right)=700$，
$\therefore AC=10\sqrt{7}$(km).

2. B　由题意知，$C=45^\circ$，由正弦定理知，$\frac{AC}{\sin 60^\circ}=\frac{2}{\sin 45^\circ}$，
$\therefore AC=\frac{2}{\frac{\sqrt{2}}{2}}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{6}$(km).



3. C　如图，设 $AB=x$，则 $(200-x)\tan 60^\circ=x\tan 30^\circ$，
解得 $x=\frac{400}{3}$.

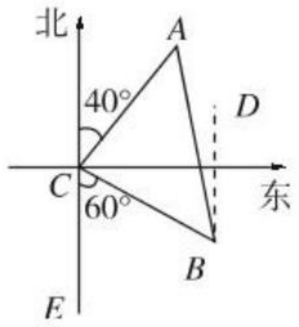


4. B　∵在 $\triangle ADC$ 中，$\angle DAC=\beta-\alpha$，
由正弦定理可得 $\frac{AC}{\sin\alpha}=\frac{DC}{\sin(\beta-\alpha)}$，
$\therefore AC=\frac{a\sin\alpha}{\sin(\beta-\alpha)}$，
在 $\triangle ABC$ 中，$AB=AC\sin\beta=\frac{a\sin\alpha\sin\beta}{\sin(\beta-\alpha)}$.

5. **解**：连接 BC，如题图，由余弦定理得 $BC^2=20^2+10^2-2\times20\times10\cos 120^\circ=700$，$BC=10\sqrt{7}$.
∵ $\frac{\sin\angle ACB}{20}=\frac{\sin 120^\circ}{10\sqrt{7}}$，$\therefore \sin\angle ACB=\sqrt{\frac{3}{7}}$.
∵ $\angle ACB<90^\circ$，$\therefore \angle ACB\approx41^\circ$.
∴乙船应朝北偏东约 $41^\circ+30^\circ=71^\circ$ 的方向沿直线前往 B 处救援.

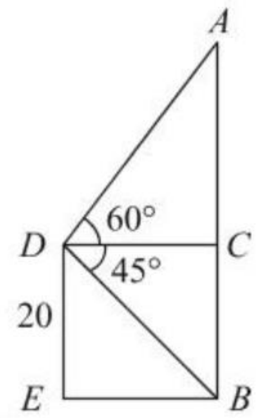
课后拔高提能练

1. B　由图可知，$\angle ACB=180^\circ-(40^\circ+60^\circ)=80^\circ$.
又∵ $AC=BC$，
$\therefore \angle A=\angle CBA=\frac{1}{2}(180^\circ-80^\circ)=50^\circ$.



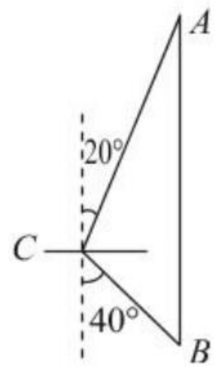
∵ $CE\parallel BD$，
$\therefore \angle CBD=\angle BCE=60^\circ$，
$\therefore \angle ABD=60^\circ-50^\circ=10^\circ$.
∴灯塔 A 在灯塔 B 的北偏西 10° 的位置.

2. B　如图，$\angle ADC=60^\circ$，$DE=20$，$\angle CDB=45^\circ$，
$\therefore BC=20$，
在 Rt$\triangle DBC$ 中，∵ $BC=DE=20$，$\angle CDB=45^\circ$，$\therefore DC=20$，
在 Rt$\triangle ACD$ 中，$\frac{AC}{DC}=\tan 60^\circ$，
$\therefore AC=\sqrt{3}\times20=20\sqrt{3}$，
$\therefore AB=AC+CB=20\sqrt{3}+20=20(1+\sqrt{3})$(m).

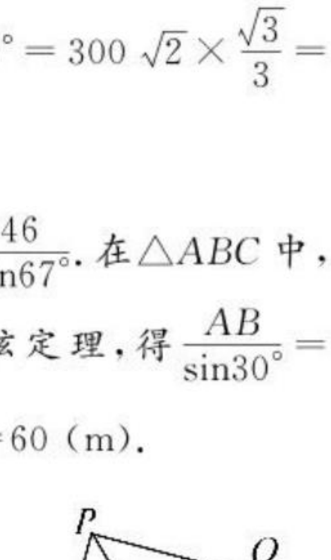


3. A　设树高为 x，由题意得 $x\tan 60^\circ-x\tan 45^\circ=60$，
即 $\sqrt{3}x-x=60$，$\therefore x=\frac{60}{\sqrt{3}-1}=30(\sqrt{3}+1)=30\sqrt{3}+30$.

4. B　如图，可得 $\angle ACB=180^\circ-20^\circ-40^\circ=120^\circ$，
由余弦定理可得
$AB^2=AC^2+BC^2-2AC\cdot BC\cdot\cos 120^\circ=a^2+a^2+a^2=3a^2$，
$\therefore AB=\sqrt{3}a$(km).



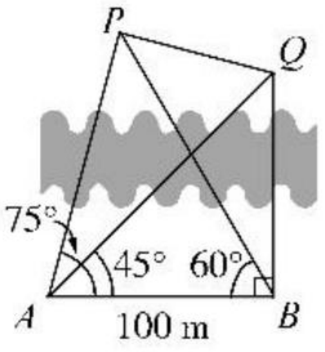
5. $5\sqrt{6}$
解析：如图，$\angle A=60^\circ$，$\angle B=75^\circ$，
则 $\angle C=180^\circ-60^\circ-75^\circ=45^\circ$，
由正弦定理得 $\frac{AB}{\sin C}=\frac{BC}{\sin A}$，
$\therefore BC=\frac{AB\sin A}{\sin C}=\frac{10\times\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}=5\sqrt{6}$.



6. $100\sqrt{6}$
解析：由题意，在 $\triangle ABC$ 中，$\angle BAC=30^\circ$，$\angle ABC=180^\circ-75^\circ=105^\circ$，故 $\angle ACB=45^\circ$.
又 $AB=600$m，故由正弦定理得 $\frac{600}{\sin 45^\circ}=\frac{BC}{\sin 30^\circ}$，解得 $BC=300\sqrt{2}$ (m).
在 Rt$\triangle BCD$ 中，$CD=BC\cdot\tan 30^\circ=300\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{3}}{3}=100\sqrt{6}$ (m).

7. 60
解析：根据已知的图形可得 $AB=\frac{46}{\sin 67^\circ}$. 在 $\triangle ABC$ 中，$\angle BCA=30^\circ$，$\angle BAC=37^\circ$，由正弦定理，得 $\frac{AB}{\sin 30^\circ}=\frac{BC}{\sin 37^\circ}$，所以 $BC\approx2\times\frac{46}{0.92}\times0.60=60$ (m).

8. **解**：在 $\triangle PAB$ 中，$\angle APB=180^\circ-(75^\circ+60^\circ)=45^\circ$，
由正弦定理：$\frac{AP}{\sin 60^\circ}=\frac{100}{\sin 45^\circ}$得，
$AP=50\sqrt{6}$，
在 $\triangle QAB$ 中，$\angle ABQ=90^\circ$，
$\therefore AQ=100\sqrt{2}$，在 $\triangle APQ$ 中，
$\angle PAQ=75^\circ-45^\circ=30^\circ$，



关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

由余弦定理得 $PQ^2=(50\sqrt{6})^2+(100\sqrt{2})^2-2\cdot 50\sqrt{6}\cdot 100\sqrt{2}\cos 30^\circ=5\ 000$.

$\therefore PQ=\sqrt{5\ 000}=50\sqrt{2}$.

$\therefore P,Q$ 两棵树之间的距离为 $50\sqrt{2}$ 米，A,P 两棵树之间的距离为 $50\sqrt{6}$ 米.

9. **解**：(1)依题意，有 $PA=PC=x$，$PB=x-1.5\times 8=x-12$.

在 $\triangle PAB$ 中，$AB=20$，

$\cos\angle PAB=\dfrac{PA^2+AB^2-PB^2}{2PA\cdot AB}=\dfrac{x^2+20^2-(x-12)^2}{2x\cdot 20}=\dfrac{3x+32}{5x}$，

同理，在 $\triangle PAC$ 中，$AC=50$，$\cos\angle PAC=\dfrac{PA^2+AC^2-PC^2}{2PA\cdot AC}=\dfrac{x^2+50^2-x^2}{2x\cdot 50}=\dfrac{25}{x}$，

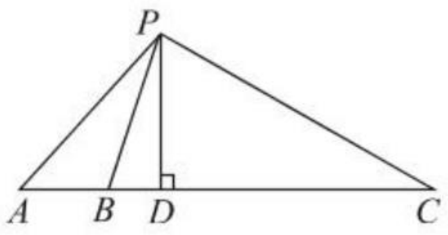
$\because \cos\angle PAB=\cos\angle PAC$，$\therefore \dfrac{3x+32}{5x}=\dfrac{25}{x}$，

解得 $x=31$.

(2)作 $PD\perp AC$ 于 D，在 $\triangle ADP$ 中，由 $\cos\angle PAD=\dfrac{25}{31}$，得 $\sin\angle PAD=\sqrt{1-\cos^2\angle PAD}=\dfrac{4\sqrt{21}}{31}$，

$\therefore PD=PA\sin\angle PAD=31\cdot\dfrac{4\sqrt{21}}{31}=4\sqrt{21}$ 千米.

故静止目标 P 到海防警戒线 AC 的距离为 $4\sqrt{21}$ 千米.



阶段质量评估卷(二)

1. D　$A=180^\circ-60^\circ-75^\circ=45^\circ$，$\dfrac{8}{\sin 45^\circ}=\dfrac{b}{\sin 60^\circ}$，$b=4\sqrt{6}$.

2. B　由题意知 $2b\cos B=a\cos C+c\cos A$，

根据正弦定理可得

$2\sin B\cos B=\sin A\cos C+\sin C\cos A$，

即 $2\sin B\cos B=\sin(A+C)=\sin B$，

$\because \sin B\neq 0$，$\therefore \cos B=\dfrac{1}{2}$.

又 $0^\circ<B<180^\circ$，$\therefore B=60^\circ$.

3. C　由正弦定理 $\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=2=2R$，得 $R=1$，

$\therefore \triangle ABC$ 外接圆的面积 $S=\pi R^2=\pi$.

4. A　由 $\dfrac{\sin C}{\sin A}=2$，得 $c=2a$.

又 $\cos B=\dfrac{1}{4}$，$\therefore \sin B=\sqrt{1-\cos^2 B}=\dfrac{\sqrt{15}}{4}$.

又 $S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}ac\sin B=\dfrac{1}{2}\times 2a^2\times\dfrac{\sqrt{15}}{4}=\dfrac{\sqrt{15}}{4}$，

得 $a=1$.

5. C　$\because A,B,C$ 成等差数列，$\therefore 2B=A+C$.

又 $A+B+C=\pi$，$\therefore B=\dfrac{\pi}{3}$.

$\because b^2=a^2+c^2-2ac\cdot\cos B$，$b=\sqrt{3}$，$a=1$，

$\therefore 3=1+c^2-c$，即 $c^2-c-2=0$.

$\because c>0$，$\therefore c=2$.

$\therefore S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}ac\cdot\sin B=\dfrac{1}{2}\times 1\times 2\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

6. C　由正弦定理知，$\sin^2 A\leqslant\sin^2 B+\sin^2 C-\sin B\sin C$ 可以转化为 $a^2\leqslant b^2+c^2-bc$，再由余弦定理知：$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$，两式结合得：$\cos A\geqslant\dfrac{1}{2}$，且 $A\in(0,\pi)$，可以解得 $A\in\left(0,\dfrac{\pi}{3}\right]$.

7. $\sqrt{15}$

解析：由 $b^2=a^2+c^2-2ac\cdot\cos B$，$b=4$，$c=2a$，$\cos B=\dfrac{1}{4}$，得 $16=a^2+4a^2-a^2$，$\therefore a=2$，$c=4$，$\sin B=\dfrac{\sqrt{15}}{4}$.

$\therefore S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}ac\cdot\sin B=\dfrac{1}{2}\times 2\times 4\times\dfrac{\sqrt{15}}{4}=\sqrt{15}$.

8. 直角三角形

解析：在 $\triangle ABC$ 中，$\because a\cos B+a\cos C=b+c$，

$\therefore a\cdot\dfrac{a^2+c^2-b^2}{2ac}+a\cdot\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=b+c$.

即 $\dfrac{b(a^2+c^2-b^2)+c(a^2+b^2-c^2)}{2bc}=b+c$.

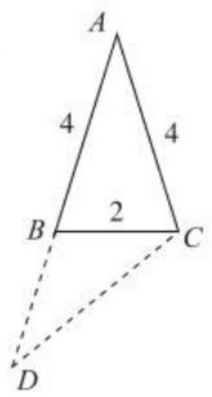
$\therefore \dfrac{(b+c)(a^2-b^2-c^2+2bc)}{2bc}=b+c$，

$\therefore a^2-b^2-c^2+2bc=2bc$，即 $a^2=b^2+c^2$.

$\therefore \triangle ABC$ 是直角三角形.

9. $\dfrac{\sqrt{15}}{2}$　$\dfrac{\sqrt{10}}{4}$

解析：如图所示，在 $\triangle ABC$ 中，$AB=AC=4$，$BC=2$，由余弦定理得 $\cos\angle ABC=\dfrac{AB^2+AC^2-BC^2}{2AB\cdot AC}=\dfrac{4^2+2^2-4^2}{2\times 4\times 2}=\dfrac{1}{4}$，



则 $\sin\angle ABC=\sin\angle CBD=\dfrac{\sqrt{15}}{4}$，

$\therefore S_{\triangle BDC}=\dfrac{1}{2}BD\cdot BC\cdot\sin\angle CBD=\dfrac{1}{2}\times 2\times 2\times\dfrac{\sqrt{15}}{4}=\dfrac{\sqrt{15}}{2}$.

$\because BD=BC=2$，

$\therefore \angle CDB=\dfrac{1}{2}\angle ABC$，

$\therefore \cos\angle BDC=\sqrt{\dfrac{\cos\angle ABC+1}{2}}=\dfrac{\sqrt{10}}{4}$.

10. **解**：(1)在 $\triangle ABC$ 中，因为 $A=60^\circ$，$c=\dfrac{3}{7}a$，

所以由正弦定理得 $\sin C=\dfrac{c\sin A}{a}=\dfrac{3}{7}\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{3\sqrt{3}}{14}$.

(2)因为 $a=7$，所以 $c=\dfrac{3}{7}\times 7=3$.

由余弦定理 $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$ 得 $7^2=b^2+3^2-2b\times 3\times\dfrac{1}{2}$，

解得 $b=8$ 或 $b=-5$(舍).

所以 $\triangle ABC$ 的面积 $S=\dfrac{1}{2}bc\sin A=\dfrac{1}{2}\times 8\times 3\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=6\sqrt{3}$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

11. **解**:(1)由正弦定理得,$(\sin A-3\sin B)\cos C=\sin C(3\cos B-\cos A)$,
$\therefore \sin A\cos C+\cos A\sin C=3\sin C\cos B+3\cos C\sin B$,
即 $\sin(A+C)=3\sin(C+B)$,即 $\sin B=3\sin A$,
$\therefore \dfrac{\sin B}{\sin A}=3$.

(2)由(1)知 $b=3a$,$\therefore c=\sqrt{7}a$,$\therefore \cos C=\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\dfrac{a^2+9a^2-7a^2}{2\times a\times 3a}=\dfrac{3a^2}{6a^2}=\dfrac{1}{2}$,

$\because C\in(0,\pi)$,$\therefore C=\dfrac{\pi}{3}$.

12. **解**:(1)由已知得 $S_{\triangle BCD}=\dfrac{1}{2}BC\cdot BD\cdot \sin B=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$,

又 $BC=2$,$\sin B=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ 得 $BD=\dfrac{2}{3}$.

在$\triangle BCD$中,由余弦定理得

$CD=\sqrt{BC^2+BD^2-2BC\cdot BD\cdot \cos B}=\sqrt{2^2+\left(\dfrac{2}{3}\right)^2-2\times 2\times\dfrac{2}{3}\times\dfrac{1}{2}}=\dfrac{2\sqrt{7}}{3}$,

$\therefore CD$ 的长为$\dfrac{2\sqrt{7}}{3}$.

(2)$\because CD=AD=\dfrac{DE}{\sin A}=\dfrac{\sqrt{6}}{2\sin A}$,

在$\triangle BCD$中,由正弦定理得$\dfrac{BC}{\sin\angle BDC}=\dfrac{CD}{\sin B}$,

又$\angle BDC=2A$,

得$\dfrac{2}{\sin 2A}=\dfrac{\sqrt{6}}{2\sin A\sin 60^\circ}$,

解得 $\cos A=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$,$\therefore A=\dfrac{\pi}{4}$.

13. **解**:(1)在$\triangle ABD$中,由正弦定理得$\dfrac{BD}{\sin A}=\dfrac{AB}{\sin\angle ADB}$.由题设知,$\dfrac{5}{\sin 45^\circ}=\dfrac{2}{\sin\angle ADB}$,所以 $\sin\angle ADB=\dfrac{\sqrt{2}}{5}$.

由题设知,$\angle ADB<90^\circ$,所以 $\cos\angle ADB=\sqrt{1-\dfrac{2}{25}}=\dfrac{\sqrt{23}}{5}$.

(2)由题设及(1)知,$\cos\angle BDC=\sin\angle ADB=\dfrac{\sqrt{2}}{5}$.在$\triangle BCD$中,由余弦定理得 $BC^2=BD^2+DC^2-2\cdot BD\cdot DC\cdot\cos\angle BDC=25+8-2\times 5\times 2\sqrt{2}\times\dfrac{\sqrt{2}}{5}=25$.所以 $BC=5$.

阶段质量评估卷(三)

1. D　由 $\sin B=\sin C$ 及正弦定理得 $b=c$.又 $a^2=2b^2$,
$\therefore b^2+c^2=2b^2=a^2$.
$\therefore\triangle ABC$是等腰直角三角形,$\therefore B=45^\circ$.

2. C　$\because\{a_n\}$为等差数列,
$\therefore a_5+a_6+a_7=3a_6=15$,
$\therefore a_6=5$.
$\therefore a_3+a_4+\cdots+a_9=7a_6=35$.

3. B　由题意得$(b+c)^2-a^2=3bc$,$b^2+c^2-a^2+2bc=3bc$,$\therefore b^2+c^2-a^2=bc$,
$\therefore\cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\dfrac{bc}{2bc}=\dfrac{1}{2}$.又$\because 0^\circ<A<180^\circ$,
$\therefore A=60^\circ$.

4. D　由 $3b=2\sqrt{3}a\sin B$ 及正弦定理得 $3\sin B=2\sqrt{3}\sin A\sin B$,$\therefore\sin A=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$,又 A 为锐角,$\therefore A=\dfrac{\pi}{3}$,又 $\cos B=\cos C$,B,C 为$\triangle ABC$的内角,$\therefore B=C$,
$\therefore\triangle ABC$为等边三角形.

5. A　由题意知,该人从 2013 年 1 月 1 日起,每年该天的本金与利息的总和构成等比数列,其公比为 $1+x$,
$\therefore$到 2018 年 1 月 1 日可取回款 $a(1+x)^5$ 元.

6. D　设数列$\{a_n\}$的公比为 q,则由 $8a_2+a_5=0$,知 $q\neq 1$,$8a_1q+a_1q^4=0$,$\therefore q^3=-8$,$\therefore q=-2$.
易知 A、B、C 均为定值,故选 D.

7. 16
解析:设数列$\{a_n\}$的公差为 d,$\because a_4=4$,$\therefore 2a_1+a_5+a_9=4a_1+12d=4(a_1+3d)=4a_4=16$.

8. $15\sqrt{3}$
解析:设三边长分别为 $a-4$,a,$a+4$,则 $\cos 120^\circ=-\dfrac{1}{2}=\dfrac{(a-4)^2+a^2-(a+4)^2}{2a(a-4)}$,解得 $a=10$,$\therefore$三边长分别为 6,10,14.$\therefore S=\dfrac{1}{2}\times 6\times 10\times\sin 120^\circ=15\sqrt{3}$.

9. $\dfrac{61}{2}$
解析:由余弦定理可得
$bc\cdot\cos A+ca\cdot\cos B+ab\cdot\cos C$
$=bc\cdot\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}+ca\cdot\dfrac{a^2+c^2-b^2}{2ac}+ab\cdot\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$
$=\dfrac{a^2+b^2+c^2}{2}=\dfrac{3^2+4^2+6^2}{2}=\dfrac{61}{2}$.

10. **解**:(1)在$\triangle ABC$中,$\because a>b$,$\therefore$由 $\sin B=\dfrac{3}{5}$,
得 $\cos B=\dfrac{4}{5}$.
由 $b^2=a^2+c^2-2ac\cos B$,$a=5$,$c=6$,
得 $b^2=13$,$\therefore b=\sqrt{13}$.
由$\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}$,得 $\sin A=\dfrac{a\sin B}{b}=\dfrac{3\sqrt{13}}{13}$.
$\therefore b$ 的值为 $\sqrt{13}$,$\sin A$ 的值为$\dfrac{3\sqrt{13}}{13}$.

(2)由(1)及 $a<c$,得 $\cos A=\dfrac{2\sqrt{13}}{13}$,
$\therefore\sin 2A=2\sin A\cos A=\dfrac{12}{13}$,$\cos 2A=1-2\sin^2 A=-\dfrac{5}{13}$,
$\therefore\sin\left(2A+\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{\sqrt{2}}{2}(\sin 2A+\cos 2A)=\dfrac{7\sqrt{2}}{26}$.

11. **解**:(1)$\because a_{n+2}-2a_{n+1}+a_n=0$,
$\therefore a_{n+2}+a_n=2a_{n+1}$,
$\therefore$数列$\{a_n\}$是等差数列.
又 $d=\dfrac{a_4-a_1}{4-1}=\dfrac{2-8}{3}=-2$,
$\therefore a_n=a_1+(n-1)d=8+(n-1)\times(-2)=10-2n$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

(2)由 $a_n=10-2n$ 知，$n\geqslant 6$ 时，$a_n<0$，当 $n<6$ 时，$a_n\geqslant 0$，

∴当 $n<6$ 时，$S_n=|a_1|+|a_2|+\cdots+|a_n|=a_1+a_2+\cdots+a_n=\dfrac{n(a_1+a_n)}{2}=\dfrac{n(8+10-2n)}{2}=9n-n^2$.

当 $n\geqslant 6$ 时，$S_n=|a_1|+|a_2|+\cdots+|a_5|+|a_6|+\cdots+|a_n|=a_1+a_2+\cdots+a_5-(a_6+a_7+\cdots+a_n)=2(a_1+a_2+\cdots+a_5)-(a_1+a_2+\cdots+a_n)=n^2-9n+40$，

$$\therefore S_n=\begin{cases}9n-n^2(n<6),\\ n^2-9n+40(n\geqslant 6).\end{cases}$$

12. **解**：(1)设数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d，依条件有 $a_3^2=a_2(a_4+1)$，

即 $(a_1+2d)^2=(a_1+d)(a_1+3d+1)$，解得 $d=2$ 或 $d=-1$.

当 $d=-1$ 时，$a_3=0$ 与已知矛盾，∴$d=2$.

∴$a_n=a_1+(n-1)d=2+2(n-1)=2n$，

由 $b_n+S_n=2$，得 $S_n=2-b_n$，

当 $n=1$ 时，$b_1+S_1=2$，解得 $b_1=1$.

当 $n\geqslant 2$ 时，$b_n=S_n-S_{n-1}=(2-b_n)-(2-b_{n-1})=b_{n-1}-b_n$，∴$b_n=\dfrac{1}{2}b_{n-1}$.

∴数列 $\{b_n\}$ 是首项为 1，公比为 $\dfrac{1}{2}$ 的等比数列. 故 $b_n=\dfrac{1}{2^{n-1}}$.

(2)由(1)知 $S_n=2-\dfrac{1}{2^{n-1}}$，∴$c_n=\dfrac{a_nS_n}{2}=2n-\dfrac{n}{2^{n-1}}$，

∴$T_n=2(1+2+3+\cdots+n)-\left(\dfrac{1}{2^0}+\dfrac{2}{2^1}+\dfrac{3}{2^2}+\cdots+\dfrac{n}{2^{n-1}}\right)=n(n+1)-\left(\dfrac{1}{2^0}+\dfrac{2}{2^1}+\dfrac{3}{2^2}+\cdots+\dfrac{n}{2^{n-1}}\right)$，

令 $R_n=\dfrac{1}{2^0}+\dfrac{2}{2^1}+\dfrac{3}{2^2}+\cdots+\dfrac{n}{2^{n-1}}$，则 $\dfrac{1}{2}R_n=\dfrac{1}{2^1}+\dfrac{2}{2^2}+\dfrac{3}{2^3}+\cdots+\dfrac{n}{2^n}$，

两式相减得 $\dfrac{1}{2}R_n=1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2^2}+\cdots+\dfrac{1}{2^{n-1}}-\dfrac{n}{2^n}=\dfrac{1-\frac{1}{2^n}}{1-\frac{1}{2}}-\dfrac{n}{2^n}=2-\dfrac{n+2}{2^n}$，

∴$R_n=4-\dfrac{n+2}{2^{n-1}}$.

∴$T_n=n^2+n-4+\dfrac{n+2}{2^{n-1}}$.

13. **解**：(1)在 $\triangle ABC$ 中，由余弦定理得 $AB^2=AC^2+BC^2-2AC\cdot BC\cos C=16^2+10^2-2\cdot 16\cdot 10\cos C$，①

在 $\triangle ABD$ 中，由余弦定理及 $\angle C=\angle D$ 整理得 $AB^2=AD^2+BD^2-2AD\cdot BD\cos D=14^2+14^2-2\cdot 14^2\cos C$，②

由①②得：$14^2+14^2-2\cdot 14^2\cos C=16^2+10^2-2\cdot 16\cdot 10\cos C$，

∴$\cos C=\dfrac{1}{2}$.

又∵$\angle C$ 为三角形的内角，∴$\angle C=60°$.

又∵$\angle C=\angle D$，$AD=BD$，∴$\triangle ABD$ 是等边三角形，

∴$AB=14$.

(2)小李的设计符合要求.

理由如下：$S_{\triangle ABD}=\dfrac{1}{2}AD\cdot BD\sin D$，

$S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}AC\cdot BC\sin C$，

∵$AD\cdot BD>AC\cdot BC$，∴$S_{\triangle ABD}>S_{\triangle ABC}$，

由已知建造费用与用地面积成正比，故选择 $\triangle ABC$ 建造环境标志费用较低，即小李的设计符合要求.

第三章　不等式

§1　不等关系

基础知识点对点

1. B

2. D　“不低于”表示“≥”；“高于”“超过”即“>”.

∴$x\geqslant 95$，$y>380$，$z>45$.

3. B　$M-N=a^2+3ab-(4ab-b^2)=a^2-ab+b^2=\left(a-\dfrac{b}{2}\right)^2+\dfrac{3}{4}b^2$，∵$a,b\in\mathbf{R}$，

∴$M-N\geqslant 0$，即 $M\geqslant N$.

4. A　∵$c-b=4-4a+a^2=(a-2)^2\geqslant 0$，∴$c\geqslant b$.

将已知两式作差得 $2b=2a^2+2$，即 $b=a^2+1$.

∵$1+a^2-a=\left(a-\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{3}{4}>0$，

∴$1+a^2>a$. ∴$b=1+a^2>a$，即 $b>a$.

∴$c\geqslant b>a$.

5. **解**：(1)∵$1<a<3$，$-4<b<2$，

∴$-3<a+b<5$.

∴$2<2a<6$，$-6<-3b<12$.

∴$-4<2a-3b<18$.

∴$a+b$ 的取值范围是 $(-3,5)$，$2a-3b$ 的取值范围是 $(-4,18)$.

(2)设 $a+4b=x(a+b)+y(2a-b)=(2y+x)a+(x-y)b$，

∴$\begin{cases}x+2y=1,\\ x-y=4,\end{cases}$ 得 $\begin{cases}y=-1,\\ x=3.\end{cases}$

∴$a+4b=3(a+b)-(2a-b)$.

∵$-3<a+b<5$，∴$-9<3(a+b)<15$.

又 $-4<2a-b<18$，∴$-18<-(2a-b)<4$.

∴$-27<3(a+b)-(2a-b)<19$.

即 $-27<a+4b<19$，

综上得 $a+4b$ 的取值范围是 $(-27,19)$.

课后拔高提能练

1. B　∵$a>-b$，∴$-a<b$，∴$c-a<c+b$，故选 B.

2. D　由 $x+y<0$ 得，$y<-x$，又 $y>0$，∴$x<0$.

由 $\begin{cases}y<-x,\\ y>0,\end{cases}$ 得 $y^2<-xy$；由 $\begin{cases}y<-x,\\ x<0,\end{cases}$ 得 $xy>-x^2$，

即 $x^2>-xy$.

∴$x^2>-xy>y^2$.

3. C　∵$a^3>b^3$，∴$a>b$. 又 $ab>0$，

∴$\dfrac{a}{ab}>\dfrac{b}{ab}$，即 $\dfrac{1}{b}>\dfrac{1}{a}$，∴$\dfrac{1}{a}<\dfrac{1}{b}$.

4. A　∵$a>b>0$，∴$a^2>b^2$，故①成立；

∵$a>b>0$，∴$a>b-1$，∴$2^a>2^{b-1}$，故②成立；

∵$a>b>0$，∴$(\sqrt{a-b})^2-(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2=a-b-(a+b-2\sqrt{ab})=2\sqrt{ab}-2b=2\sqrt{b}(\sqrt{a}-\sqrt{b})>0$，

∴$\sqrt{a-b}>\sqrt{a}-\sqrt{b}$. 故③成立；

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

对于④，取 $a=3,b=2$，则 $a^3+b^3=3^3+2^3=27+8=35$，

而 $2a^2b=2\times3^2\times2=36$，

故④不成立.

5. $(-\pi,0)$

解析：$\because -\frac{\pi}{2}<\alpha<\frac{\pi}{2},-\frac{\pi}{2}<\beta<\frac{\pi}{2}$，

$\therefore -\frac{\pi}{2}<-\beta<\frac{\pi}{2}$，

$\therefore -\pi<\alpha-\beta<\pi$，又 $\alpha<\beta$，$\therefore -\pi<\alpha-\beta<0$.

6. $(-1,2)$

解析：$\because 2b<-b$，$\therefore b<0$.

又 $2b<a<-b$，

$\therefore \frac{-b}{b}<\frac{a}{b}<\frac{2b}{b}$，

即 $-1<\frac{a}{b}<2$.

7. ①③④

解析：对于① $\because a<b<0$，$\therefore a^2>ab$，故①正确；

对于②，当 $a=b$ 时，c 可以是负数，$\therefore$ ②不正确；

对于③，$\because a>b>0$，

$\therefore \frac{1}{a}<\frac{1}{b}$. 又 $c<0$，$\therefore \frac{c}{a}>\frac{c}{b}$，故③正确；

对于④，$\because 0<a<1$，

$\therefore \frac{1}{a}>1$，$\therefore 1+a<1+\frac{1}{a}$，

$\therefore \log_a(1+a)>\log_a\left(1+\frac{1}{a}\right)$. 故④正确.

8. **解**：设两次粮食的价格分别为 a 元/kg 与 b 元/kg，且 $a\neq b$. 则

甲采购员两次购粮的平均单价为 $\frac{1\,000(a+b)}{2\times1\,000}=\frac{a+b}{2}$（元/kg），

乙采购员两次购粮的平均单价为 $\frac{2\times1\,000}{\frac{1\,000}{a}+\frac{1\,000}{b}}=\frac{2ab}{a+b}$（元/kg）.

$\because \frac{a+b}{2}-\frac{2ab}{a+b}=\frac{(a+b)^2-4ab}{2(a+b)}=\frac{(a-b)^2}{2(a+b)}$，

又 $a+b>0$，$a\neq b$，$(a-b)^2>0$，

$\therefore \frac{(a-b)^2}{2(a+b)}>0$，即 $\frac{a+b}{2}>\frac{2ab}{a+b}$.

$\therefore$ 乙采购员的购粮方式更合算.

9. **解**：$\because 15<b<36$，$\therefore -36<-b<-15$. $\therefore 12-36<a-b<60-15$. $\therefore -24<a-b<45$. 又 $\frac{1}{36}<\frac{1}{b}<\frac{1}{15}$，

$\therefore \frac{12}{36}<\frac{a}{b}<\frac{60}{15}$. $\therefore \frac{1}{3}<\frac{a}{b}<4$. $\therefore -24<a-b<45$，$\frac{1}{3}<\frac{a}{b}<4$.

§2 一元二次不等式

2.1 一元二次不等式的解法

第一课时 一元二次不等式的解法(一)

基础知识点对点

1. D $\because -2x^2+x+3<0$，$\therefore 2x^2-x-3>0$，

即 $(2x-3)(x+1)>0$，解得 $x>\frac{3}{2}$ 或 $x<-1$.

$\therefore$ 不等式 $-2x^2+x+3<0$ 的解集是 $\left\{x\middle|x<-1\text{ 或 }x>\frac{3}{2}\right\}$.

2. A 由 $x^2-3x-28\leqslant0$，得 $-4\leqslant x\leqslant7$，$\therefore M=\{x|-4\leqslant x\leqslant7\}$.

由 $x^2-x-6>0$，得 $x<-2$ 或 $x>3$，$\therefore N=\{x|x<-2$ 或 $x>3\}$.

则 $M\cap N=\{x|-4\leqslant x<-2$ 或 $3<x\leqslant7\}$.

3. C 原不等式可转化为 $(x+3a)(x-4a)<0$，

又 $\because a<0$，

$\therefore$ 原不等式的解集为 $\{x|4a<x<-3a\}$.

4. A 原不等式可转化为 $(x-4a)(x+2a)<0(a>0)$，

即 $-2a<x<4a$，$\therefore x_1=-2a$，$x_2=4a$，

$\therefore 4a-(-2a)=15$，$a=\frac{15}{6}=\frac{5}{2}$.

5. **解**：(1)由题意知，方程 $ax^2+bx-2=0$ 有两根 -1，$-\frac{1}{4}$，由韦达定理得 $\begin{cases}-1-\frac{1}{4}=-\frac{b}{a},\\(-1)\times\left(-\frac{1}{4}\right)=-\frac{2}{a},\end{cases}$

得 $\begin{cases}a=-8,\\b=-10.\end{cases}$

(2)由(1)知 $a=-8$，$b=-10$，

$\therefore$ 不等式 $bx^2-ax+2\geqslant0$

可化为 $-10x^2+8x+2\geqslant0$，

即 $5x^2-4x-1\leqslant0$，解得 $-\frac{1}{5}\leqslant x\leqslant1$，

$\therefore$ 原不等式的解集为 $\left[-\frac{1}{5},1\right]$.

课后拔高提能练

1. D 由 $4-x^2\geqslant0$，得 $-2\leqslant x\leqslant2$，$\therefore A=[-2,2]$.

由 $1-x>0$，得 $x<1$，$\therefore B=(-\infty,1)$.

$\therefore A\cap B=[-2,1)$.

2. D 由题意得 $\begin{cases}-x^2+4x-3>0,\\-x^2+4x-3\neq1,\end{cases}$ 解得 $1<x<3$ 且 $x\neq2$.

$\therefore$ 函数 $f(x)$ 的定义域为 $(1,2)\cup(2,3)$.

3. A $\because 0<a<1$，$\therefore a<\frac{1}{a}$. 又 $(a-x)\left(x-\frac{1}{a}\right)>0$，

$\therefore (x-a)\left(x-\frac{1}{a}\right)<0$. $\therefore a<x<\frac{1}{a}$.

4. B 由 $ax^2+bx+2>0$ 的解集为 $(-1,2)$，知方程 $ax^2+bx+2=0$ 有两根 $-1,2$，由韦达定理可知 $\begin{cases}-\frac{b}{a}=-1+2,\\\frac{2}{a}=-1\times2,\end{cases}$ 得 $\begin{cases}a=-1,\\b=1,\end{cases}$

$\therefore bx^2-ax-2>0$ 可化为 $x^2+x-2>0$，

解得 $x>1$ 或 $x<-2$.

5. $(-\infty,-1]$

解析：由题意知 $\begin{cases}m<0,\\\Delta=(-4)^2-4m(m-3)\leqslant0,\end{cases}$ 解得 $m\leqslant-1$.

6. -14

解析：由题意知 $a<0$，且 $-\frac{1}{2}$，$\frac{1}{3}$ 是方程 $ax^2+bx+2=0$ 的两个根，所以 $\begin{cases}-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=-\frac{b}{a},\\-\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}=\frac{2}{a},\end{cases}$ 解得

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

$\begin{cases}a=-12,\\b=-2,\end{cases}$ 故 $a+b=-14$.

7. $\left(-\infty,-\frac{3}{2}\right)\cup\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$

解析：$f(x)=(ax-1)(x+b)=ax^2+(ab-1)x-b$，由题设知 $-1,3$ 是方程 $f(x)=0$ 的两个根，且 $a<0$，

$\therefore\begin{cases}-1+3=\frac{1-ab}{a},\\-1\times3=-\frac{b}{a},\end{cases}$ 即 $\begin{cases}2a+ab=1,\\b=3a.\end{cases}$

解得 $a=-1,b=-3$，$\therefore f(x)=-x^2+2x+3$，

$\therefore f(-2x)=-4x^2-4x+3$.

由 $f(-2x)<0$，得 $4x^2+4x-3>0$，解得 $x<-\frac{3}{2}$ 或 $x>\frac{1}{2}$，$\therefore f(-2x)<0$ 的解集为 $\left(-\infty,-\frac{3}{2}\right)\cup\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$.

8. **解**：当 $m=0$ 时，不等式可化为 $-1\geqslant0$，不等式无解，不合题意.

当 $m\neq0$ 时，若 $mx^2-mx-1\geqslant0$ 的解集为 $\varnothing$，则 $mx^2-mx-1<0$ 恒成立，

$\therefore\begin{cases}m<0,\\\Delta=m^2+4m<0,\end{cases}$ $-4<m<0$.

$\therefore$ 欲使 $mx^2-mx-1\geqslant0$ 的解集非空，需 $m>0$ 或 $m\leqslant-4$.

$\therefore$ 实数 m 的取值范围是 $(-\infty,-4]\cup(0,+\infty)$.

9. **解**：(1) $\because 2\in M$，$\therefore a\cdot2^2+5\cdot2-2>0$，$\therefore a>-2$.

(2) $\because M=\left\{x\,\middle|\,\frac{1}{2}<x<2\right\}$，$\therefore\frac{1}{2}$，2 是方程 $ax^2+5x-2=0$ 的两个根，

$\therefore$ 由韦达定理得 $\begin{cases}\frac{1}{2}+2=-\frac{5}{a},\\\frac{1}{2}\cdot2=-\frac{2}{a},\end{cases}$ $\therefore a=-2$.

$\therefore$ 不等式 $ax^2-5x+a^2-1>0$，

即为 $-2x^2-5x+3>0$，其解集为 $\left\{x\,\middle|\,-3<x<\frac{1}{2}\right\}$.

第二课时　一元二次不等式的解法(二)

基础知识点对点

1. B　由题意得 $x(x-2)+2x+x-2<0$，即 $x^2+x-2<0$，得 $-2<x<1$.

2. C　$\because a+1>a$，$\therefore(x-a)\cdot(x-a-1)>0$ 的解为 $x>a+1$ 或 $x<a$.

3. B　当 $a-2=0$，即 $a=2$ 时，不等式化为 $-4<0$ 恒成立；

当 $a-2\neq0$ 时，

由题意得 $\begin{cases}a-2<0,\\\Delta=4(a-2)^2+16(a-2)<0,\end{cases}$

得 $-2<a<2$.

综上得 $-2<a\leqslant2$.

4. B　$\because kx^2-kx+1>0$ 对任意 $x\in\mathbf{R}$ 都成立，$\therefore$ 当 $k=0$ 时，$1>0$ 成立，当 $k\neq0$ 时，应有 $\begin{cases}k>0,\\\Delta=k^2-4k<0,\end{cases}$ 解得 $0<k<4$. 综上知，$0\leqslant k<4$.

5. **解**：$\because 12x^2-ax-a^2<0$ 可化为 $(3x-a)(4x+a)<0$，

当 $a>0$ 时，$\frac{a}{3}>-\frac{a}{4}$，

$\therefore$ 不等式的解为 $-\frac{a}{4}<x<\frac{a}{3}$；

当 $a=0$ 时，不等式化为 $12x^2<0$，$x\in\varnothing$；

当 $a<0$ 时，$-\frac{a}{4}>\frac{a}{3}$，不等式的解为 $\frac{a}{3}<x<-\frac{a}{4}$.

综上得，当 $a>0$ 时，不等式的解集为 $\left(-\frac{a}{4},\frac{a}{3}\right)$，

当 $a=0$ 时，不等式的解集为 $\varnothing$，

当 $a<0$ 时，不等式的解集为 $\left(\frac{a}{3},-\frac{a}{4}\right)$.

课后拔高提能练

1. D　$\because 2x^2-3x+2=0$ 中 $\Delta=(-3)^2-4\times2\times2=-7<0$，

$\therefore 2x^2-3x+2>0$ 的解集为 $\mathbf{R}$；

又 $x^2+4x+4=(x+2)^2\leqslant0$，解集为 $\{-2\}$；

而 $4-4x-x^2<0\Rightarrow x^2+4x-4>0$.

$\Delta=32>0$，$\therefore 4-4x-x^2<0$ 有解.

$-2+3x-2x^2>0$ 即 $2x^2-3x+2<0$，

而 $\Delta=12-16<0$.

$\therefore 2x^2-3x+2<0$ 的解集为 4.

即 $-2+3x-2x^2>0$ 的解集为 $\varnothing$. 故选 D.

2. A　由题设知 $\Delta=m^2-4>0$，$\therefore m>2$ 或 $m<-2$.

3. C　$f(x)=ax^2+(ab-1)x-b$，$f(-x)=ax^2-(ab-1)x-b$，其图像与 $y=f(x)$ 的图像关于 y 轴对称，$\because f(x)>0$ 的解集是 $(-1,3)$，$\therefore f(-x)<0$ 的解集是 $(-\infty,-3)\cup(1,+\infty)$.

4. A　$\because$ 关于 x 的一元二次不等式 $ax^2+bx+c>0$ 的解集是 $\left(-\frac{1}{3},2\right)$，

$\therefore\begin{cases}-\frac{1}{3}+2=-\frac{b}{a},\\-\frac{1}{3}\times2=\frac{c}{a},\\a<0.\end{cases}$ $\therefore b=-\frac{5}{3}a$，$c=-\frac{2}{3}a$.

$\therefore$ 不等式 $cx^2+bx+a<0$ 可化为 $-\frac{2}{3}ax^2-\frac{5}{3}ax+a<0$，即 $2x^2+5x-3<0$，解得 $x\in\left(-3,\frac{1}{2}\right)$.

5. -5

解析：由题意知 -1 和 3 是方程 $5x^2-bx+c=0$ 的两个根，由根与系数的关系得

$\begin{cases}-1+3=\frac{b}{5},\\-1\times3=\frac{c}{5},\end{cases}$ $\therefore\begin{cases}b=10,\\c=-15.\end{cases}$ $\therefore b+c=-5$.

6. -3

解析：$\because tx^2-6x+t^2<0$ 的解集是 $(-\infty,a)\cup(1,+\infty)$.

$\therefore t<0$，$x=a$，$x=1$ 是方程 $tx^2-6x+t^2=0$ 的两根.

$\therefore\begin{cases}a+1=\frac{6}{t},\\a\cdot1=\frac{t^2}{t},\end{cases}$ 解得 $a=t=-3$ 或 $a=t=2$(舍).

7. $(0,8)$

解析：由题设知 $\Delta=(-a)^2-4\times2a<0$，

即 $a^2-8a<0$，$\therefore 0<a<8$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

8. **解**：令 $f(x)=x^2+ax-a+3=\left(x+\frac{a}{2}\right)^2+3-a-\frac{a^2}{4}$，

当 $-\frac{a}{2}<-2$ 即 $a>4$ 时，$f(x)$ 在 $[-2,2]$ 上单调递增，

$\therefore f(x)_{\min}=f(-2)=7-3a\geqslant 0$，得 $a\leqslant\frac{7}{3}$ 与 $a>4$ 矛盾，舍去；

当 $-2\leqslant-\frac{a}{2}\leqslant 2$ 即 $-4\leqslant a\leqslant 4$ 时，

$f(x)_{\min}=f\left(-\frac{a}{2}\right)=3-a-\frac{a^2}{4}\geqslant 0$，得 $-6\leqslant a\leqslant 2$，

又 $-4\leqslant a\leqslant 4$，$\therefore -4\leqslant a\leqslant 2$.

当 $-\frac{a}{2}>2$ 即 $a<-4$ 时，$f(x)$ 在 $[-2,2]$ 上单调递减，

$\therefore f(x)_{\min}=f(2)=7+a\geqslant 0$，得 $a\geqslant -7$，又 $a<-4$，

$\therefore -7\leqslant a<-4$.

综上得 a 的取值范围是 $[-7,2]$.

9. **解**：(1)由题意知 $1-a<0$，且 -3 和 1 是方程 $(1-a)x^2-4x+6=0$ 的两个根，

$$\therefore\begin{cases}1-a<0,\\ \frac{4}{1-a}=-2,\\ \frac{6}{1-a}=-3,\end{cases}\text{解得 } a=3.$$

$\therefore$ 不等式 $2x^2+(2-a)x-a>0$ 即为 $2x^2-x-3>0$.

解得 $x<-1$ 或 $x>\frac{3}{2}$.

$\therefore$ 所求不等式的解集为 $\left\{x\middle|x<-1\text{ 或 }x>\frac{3}{2}\right\}$.

(2)$ax^2+bx+3\geqslant 0$ 即为 $3x^2+bx+3\geqslant 0$，若此不等式的解集为 $\mathbf{R}$，则 $\Delta=b^2-36\leqslant 0$，$\therefore -6\leqslant b\leqslant 6$.

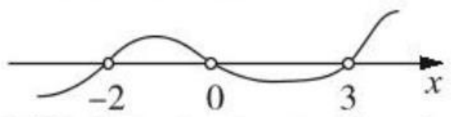
2.2 一元二次不等式的应用

基础知识点对点

1. A $\frac{x(x+2)}{x-3}<0\Leftrightarrow x(x+2)(x-3)<0$，

方程 $x(x+2)(x-3)=0$ 的根为 $-2,0,3$.

由穿针引线在数轴上表示如下：



故原不等式的解集为 $\{x|x<-2\text{ 或 }0<x<3\}$.

2. A $\frac{x-1}{x}-2\geqslant 0$，$\frac{x-1-2x}{x}\geqslant 0$，$\frac{-x-1}{x}\geqslant 0$，$\frac{x+1}{x}\leqslant 0$，

$(x+1)x\leqslant 0$ 且 $x\neq 0$，$\therefore$ 解集为 $\{x|-1\leqslant x<0\}$.

3. B $\because x^2+x+1>0$，

$\therefore$ 原不等式等价于 $x^2-7x+12>0$，

解得 $x<3$ 或 $x>4$.

4. $\{x|-3<x<-2\text{ 或 }x>4\}$

解析：$(x+2)(x-4)(x+3)>0$，由数轴标根法得解集为 $\{x|-3<x<-2\text{ 或 }x>4\}$.

5. **解**：(1)降低税率后的税率为 $(10-x)\%$，农产品的收购量为 $a(1+2x\%)$ 万担，收购总金额为 $200a(1+2x\%)$.

依题意得：$y=200a(1+2x\%)(10-x)\%=\frac{1}{50}a(100+2x)(10-x)(0<x<10)$.

(2)原计划税收为 $200a\cdot 10\%=20a$(万元)．依题意得：$\frac{1}{50}a(100+2x)(10-x)\geqslant 20a\times 83.2\%$，

化简得，$x^2+40x-84\leqslant 0$，$\therefore -42\leqslant x\leqslant 2$.

又 $\because 0<x<10$，$\therefore 0<x\leqslant 2$.

$\therefore x$ 的取值范围是 $(0,2]$.

课后拔高提能练

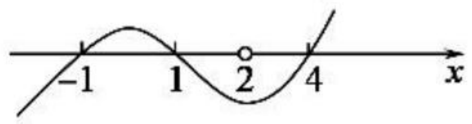
1. D $\frac{x-4}{3-x}\geqslant 0\Leftrightarrow\frac{x-4}{x-3}\leqslant 0\Leftrightarrow\begin{cases}(x-4)(x-3)\leqslant 0,\\ x-3\neq 0.\end{cases}$

观察选项知，A、B、C 均不同解．故选 D.

2. C 原不等式等价于 $(x-1)(x^2-x-6)>0$，

即 $(x-1)(x+2)(x-3)>0$，得 $-2<x<1$ 或 $x>3$.

3. D 由数轴标根法可知不等式的解为 $x<-1$ 或 $1<x<4$ 且 $x\neq 2$.



4. A 由 $ax-b>0$ 的解集是 $(1,+\infty)$，得 $\begin{cases}a>0,\\ \frac{b}{a}=1.\end{cases}$

$\therefore\frac{ax+b}{x-2}>0\Leftrightarrow\frac{x+1}{x-2}>0\Leftrightarrow x<-1$ 或 $x>2$.

5. $\{x|-3<x<1\text{ 或 }x>3\}$

解析：$f(1)=1-4+6=3$，则 $f(x)>f(1)$ 同解于 $f(x)>3$．$\therefore$ 当 $x\geqslant 0$ 时，$x^2-4x+6>3$，

即 $x^2-4x+3>0$，解得 $x<1$ 或 $x>3$．$\therefore 0\leqslant x<1$ 或 $x>3$；当 $x<0$ 时，$x+6>3$，解得 $x>-3$.

$\therefore -3<x<0$.

综上知 $f(x)>f(1)$ 的解集为 $\{x|-3<x<1\text{ 或 }x>3\}$.

6. $[-1,4]$

解析：$\because x^2-2x+5=(x-1)^2+4\geqslant 4$.

$\therefore$ 要使 $x^2-2x+5\geqslant a^2-3a$ 对任意实数 x 恒成立，只需 $a^2-3a\leqslant 4$，解得 $-1\leqslant a\leqslant 4$.

7. $(-4,0]$

解析：$\because x^2-2x+3>0$ 恒成立，欲使 $\frac{x^2-2x+3}{mx^2-mx-1}<0$ 恒成立，需 $mx^2-mx-1<0$ 恒成立，

又当 $m=0$ 时，不等式化为 $-1<0$，符合题意；

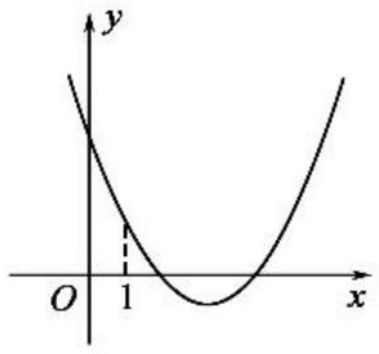
当 $m\neq 0$ 时，由题意知 $\begin{cases}m<0,\\ \Delta=m^2+4m<0,\end{cases}$

得 $-4<m<0$.

综上得 $-4<m\leqslant 0$.

8. **解**：设 $f(x)=8x^2-(m-1)x+m-7$.

作 $y=f(x)$ 的图像，由题意可作图像如图所示.



关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

$$\therefore\begin{cases}\Delta=(m-1)^2-32(m-7)\geqslant 0,\\ f(1)=2>0,\\ \dfrac{m-1}{16}>1,\end{cases}$$

即$\begin{cases}m\geqslant 25\text{ 或 }m\leqslant 9,\\ m\in\mathbf{R},\\ m>17,\end{cases}$

解得 $m\geqslant 25$，即实数 m 的取值范围是$[25,+\infty)$.

9. **解**：记①的解集为 A，②的解集为 B，③的解集为 C.

解①得 $A=(-1,3)$；解②得 $B=[0,1)\cup(2,4]$，

$\therefore A\cap B=[0,1)\cup(2,3)$，$A\cup B=(-1,4]$.

(1)∵同时满足①、②的 x 值也满足③，$\therefore(A\cap B)\subseteq C$.

设 $f(x)=2x^2+mx-1$，由 $f(x)$的图像可知：当方程 $2x^2+mx-1=0$ 的小根小于 0，大根大于或等于 3 时，即可满足$(A\cap B)\subseteq C$.

$\therefore\begin{cases}f(0)<0,\\ f(3)\leqslant 0,\end{cases}$即$\begin{cases}-1<0,\\ 3m+17\leqslant 0,\end{cases}\therefore m\leqslant-\dfrac{17}{3}$.

(2)∵满足③的 x 值至少满足①和②中的一个，

$\therefore C\subseteq(A\cup B)$，而 $A\cup B=(-1,4]$，

因而$\begin{cases}f(-1)=1-m\geqslant 0,\\ f(4)=4m+31\geqslant 0,\\ -1<-\dfrac{m}{4}<4,\end{cases}$解得$-\dfrac{31}{4}\leqslant m\leqslant 1$.

§3　基本不等式

3.1　基本不等式

基础知识点对点

1. B　∵$0<a<b$，

$\therefore 0<\sqrt{a}<\sqrt{b}$，$\sqrt{a}\cdot\sqrt{a}<\sqrt{b}\cdot\sqrt{a}$，即 $a<\sqrt{ab}$.

∵$0<a<b$，

$\therefore a+b<b+b$，$a+b<2b$，$\dfrac{a+b}{2}<b$.

又∵$\dfrac{a+b}{2}>\sqrt{ab}$，$\therefore a<\sqrt{ab}<\dfrac{a+b}{2}<b$.

2. B　∵$a>b>1$，$\therefore\dfrac{a+b}{2}>\sqrt{ab}$，

$\therefore\lg\dfrac{a+b}{2}>\dfrac{1}{2}(\lg a+\lg b)$.

又∵$a>b>1$，$\therefore\lg a>\lg b>0$，

$\therefore\dfrac{1}{2}(\lg a+\lg b)>\sqrt{\lg a\lg b}$.

综上得 $R>Q>P$.

3. **证明**：∵$a^2+b^2\geqslant 2ab$，$b^2+c^2\geqslant 2bc$，$c^2+a^2\geqslant 2ac$，

$\therefore 2(a^2+b^2+c^2)\geqslant 2(ab+bc+ca)$，

$\therefore a^2+b^2+c^2\geqslant ab+bc+ca$.

4. **证明**：∵$a>0$，$b>0$，$c>0$，且 $a+b+c=1$，

$\therefore\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}=\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}\right)(a+b+c)$

$=3+\left(\dfrac{b}{a}+\dfrac{a}{b}\right)+\left(\dfrac{c}{a}+\dfrac{a}{c}\right)+\left(\dfrac{c}{b}+\dfrac{b}{c}\right)$

$\geqslant 3+2+2+2=9$.

当且仅当 $a=b=c=\dfrac{1}{3}$时等号成立.

$\therefore\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}\geqslant 9$.

课后拔高提能练

1. B

2. C　当 $x=\dfrac{1}{2}$时，$\lg\left(x^2+\dfrac{1}{4}\right)=\lg x$，∴A 不成立；当 $x=\dfrac{3\pi}{2}$时，$\sin x=-1$，∴B 不成立；当 $x=0$ 时，D 不成立，故选 C.

3. C　∵$\dfrac{x^2+2}{\sqrt{x^2+1}}=\sqrt{x^2+1}+\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}\geqslant 2$（当且仅当 $\sqrt{x^2+1}=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$，即 $x=0$ 时等号成立）.

4. B　由题设可得$(1+x)^2=(1+a)(1+b)\leqslant\left(\dfrac{1+a+1+b}{2}\right)^2=\left(1+\dfrac{a+b}{2}\right)^2$，∴$1+x\leqslant 1+\dfrac{a+b}{2}$，即 $x\leqslant\dfrac{a+b}{2}$.

5. 3

解析：∵$n\in\mathbf{N}_+$，∴$a_n=\dfrac{n}{n^2+8}=\dfrac{1}{n+\dfrac{8}{n}}\leqslant\dfrac{1}{2\sqrt{n\cdot\dfrac{8}{n}}}=\dfrac{1}{4\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{8}$，当且仅当 $n=\dfrac{8}{n}$，即 $n^2=8$ 时等号成立.

∵$n\in\mathbf{N}_+$，∴当 $n=3$ 时，a_n 最大.

6. $\sqrt{(a-b)(b-c)}\leqslant\dfrac{a-c}{2}$

解析：∵$a>b>c$，∴$a-b>0$，$b-c>0$，∴$\dfrac{a-c}{2}=\dfrac{(a-b)+(b-c)}{2}\geqslant\sqrt{(a-b)(b-c)}$，当 $a-b=b-c$ 时取等号.

7. ①③⑤

解析：两个正数，和为定值，积有最大值，即 $ab\leqslant\dfrac{(a+b)^2}{4}=1$，当且仅当 $a=b$ 时取等号，故①正确；$(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2=a+b+2\sqrt{ab}=2+2\sqrt{ab}\leqslant 4$，当且仅当 $a=b$ 时取等号，得$\sqrt{a}+\sqrt{b}\leqslant 2$，故②错误；由于$\dfrac{a^2+b^2}{2}\geqslant\dfrac{(a+b)^2}{4}=1$，故 $a^2+b^2\geqslant 2$ 成立，故③正确；$a^3+b^3=(a+b)(a^2+b^2-ab)=2(a^2+b^2-ab)$，∵$ab\leqslant 1$，∴$-ab\geqslant-1$. 又 $a^2+b^2\geqslant 2$，∴$a^2+b^2-ab\geqslant 1$，∴$a^3+b^3\geqslant 2$，故④错误；$\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}=\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}\right)\dfrac{a+b}{2}=1+\dfrac{a}{2b}+\dfrac{b}{2a}\geqslant 1+1=2$，当且仅当 $a=b$ 时取等号，故⑤正确.

8. **证明**：(1)∵$a+b=1$，且 a，b 为正实数，

$\therefore a+b\geqslant 2\sqrt{ab}$，

$\therefore 0<ab\leqslant\dfrac{1}{4}$，∴$\dfrac{1}{ab}\geqslant 4$，

$\therefore\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{ab}=\dfrac{a+b+1}{ab}=\dfrac{2}{ab}\geqslant 8$.

(2)$\dfrac{b+c-a}{a}+\dfrac{a+c-b}{b}+\dfrac{a+b-c}{c}=\dfrac{b}{a}+\dfrac{c}{a}+\dfrac{a}{b}+\dfrac{c}{b}+\dfrac{a}{c}+\dfrac{b}{c}-3=\left(\dfrac{b}{a}+\dfrac{a}{b}\right)+\left(\dfrac{c}{a}+\dfrac{a}{c}\right)+$

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

$\left(\frac{c}{b}+\frac{b}{c}\right)-3$.

$\because a,b,c$ 都是正数，

$\therefore \frac{b}{a}+\frac{a}{b}\geqslant 2\sqrt{\frac{b}{a}\cdot\frac{a}{b}}=2$，

同理 $\frac{c}{a}+\frac{a}{c}\geqslant 2$，$\frac{c}{b}+\frac{b}{c}\geqslant 2$，

$\therefore \left(\frac{b}{a}+\frac{a}{b}\right)+\left(\frac{c}{a}+\frac{a}{c}\right)+\left(\frac{c}{b}+\frac{b}{c}\right)\geqslant 6$.

$\because a,b,c$ 不全相等，上述三式不能同时取等号，

$\therefore \left(\frac{b}{a}+\frac{a}{b}\right)+\left(\frac{c}{a}+\frac{a}{c}\right)+\left(\frac{c}{b}+\frac{b}{c}\right)>6$，

$\therefore \frac{b+c-a}{a}+\frac{a+c-b}{b}+\frac{a+b-c}{c}>3$.

9. **解**：(1)$\because a>0,b>0$，且 $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\sqrt{ab}$，$\therefore \sqrt{ab}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}>\frac{1}{2\sqrt{ab}}$，$\therefore ab\geqslant 2$，当且仅当 $a=b=\sqrt{2}$ 时取等号.

$\therefore a^3+b^3\geqslant 2\sqrt{(ab)^3}\geqslant 2\sqrt{2^3}=4\sqrt{2}$，当且仅当 $a=b=\sqrt{2}$ 时取等号，$\therefore a^3+b^3$ 的最小值为 $4\sqrt{2}$.

(2)由(1)知，$2a+3b\geqslant 2\sqrt{6ab}\geqslant 2\sqrt{12}=4\sqrt{3}>6$，

$\therefore$ 不存在 a,b，使 $2a+3b=6$ 成立.

3.2 基本不等式与最大(小)值

基础知识点对点

1. C　由 $\frac{1}{a}+\frac{2}{b}=\sqrt{ab}$ 知 $a>0,b>0$，$\therefore \sqrt{ab}=\frac{1}{a}+\frac{2}{b}\geqslant 2\sqrt{\frac{2}{ab}}$，$\therefore ab\geqslant 2\sqrt{2}$. 当且仅当 $b=2a$ 时取等号.

2. C　$\because x>2$，$\therefore f(x)=x+\frac{1}{x-2}=(x-2)+\frac{1}{x-2}+2\geqslant 2\sqrt{(x-2)\cdot\frac{1}{x-2}}+2=2+2=4$，当且仅当 $x-2=\frac{1}{x-2}$，即 $(x-2)^2=1$，$x=3$ 时等号成立，$\therefore a=3$.

3. C　由已知得 $x+y=1$，$\therefore$ 原式 $=(x+y)\left(\frac{1}{x}+\frac{16}{y}\right)=17+\frac{y}{x}+\frac{16x}{y}\geqslant 25$.

4. 27

解析：$\because ab-4a-b+1=0$，

$\therefore b=\frac{4a-1}{a-1}$.

$\because a>1$，$\therefore b>0$.

$\because ab=4a+b-1$，

$\therefore (a+1)(b+2)=ab+2a+b+2$

$=6a+2b+1=6a+\frac{4a-1}{a-1}\cdot 2+1$

$=6a+\frac{[4(a-1)+3]\times 2}{a-1}+1=6a+8+\frac{6}{a-1}+1$

$=6(a-1)+\frac{6}{a-1}+15$.

$\because a-1>0$，

$\therefore$ 原式 $=6(a-1)+\frac{6}{a-1}+15\geqslant 2\sqrt{6\times 6}+15=27$，当且仅当 $(a-1)^2=1(a>1)$，即 $a=2$ 时成立.

$\therefore$ 最小值为 27.

5. **解**：设矩形栏目的高为 a cm，宽为 b cm，

则 $ab=9\ 000$. ①

广告的高为 $a+20$，宽为 $2b+25$，其中 $a>0,b>0$.

广告的面积 $S=(a+20)(2b+25)$

$=2ab+40b+25a+500$

$=18\ 500+25a+40b$

$\geqslant 18\ 500+2\sqrt{25a\cdot 40b}$

$=18\ 500+2\sqrt{1\ 000ab}=24\ 500$.

当且仅当 $25a=40b$，即 $b=\frac{5}{8}a$ 时等号成立，

代入①式得 $a=120$，从而 $b=75$.

即当 $a=120,b=75$ 时，S 取得最小值 24 500.

故广告的高为 140 cm，宽为 175 cm 时，可使广告的面积最小.

课后拔高提能练

1. C　$\because x>0,y>0,xy=1$，

$\therefore \frac{1}{x}+\frac{4}{y}\geqslant 2\sqrt{\frac{1}{x}\cdot\frac{4}{y}}=4$. 当且仅当 $\frac{1}{x}=\frac{4}{y}$，即 $y=4x$ 时取等号，$\therefore$ 当 $x=\frac{1}{2}$，$y=2$ 时，$\frac{1}{x}+\frac{4}{y}$ 有最小值 4.

2. B　由题意知 $2a+3b-1=0$，又 (a,b) 为第一象限内的点，$\therefore a>0,b>0$.

$\therefore \frac{2}{a}+\frac{3}{b}=\left(\frac{2}{a}+\frac{3}{b}\right)(2a+3b)=13+\frac{6b}{a}+\frac{6a}{b}\geqslant 13+2\sqrt{\frac{6b}{a}\cdot\frac{6a}{b}}=25$（当且仅当 $\frac{6b}{a}=\frac{6a}{b}$，即 $a=b=\frac{1}{5}$ 时等号成立）.

3. A　$\because x>0,y>0$，

$\therefore \frac{1}{x}+\frac{1}{y}\geqslant \frac{m}{x+y}$ 恒成立等价于 $(x+y)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)\geqslant m$ 恒成立，

又 $(x+y)\geqslant 2\sqrt{xy}$，$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\geqslant 2\sqrt{\frac{1}{xy}}$（当且仅当 $x=y$ 时等号成立），

$\therefore (x+y)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)\geqslant 4$.

$\therefore$ 欲使原不等式恒成立，只需 $m\leqslant 4$.

4. A　$\because a+b=2$，$\therefore (a-1)+b=1$.

又 $\because a>1,b>0$，$\therefore \frac{1}{a-1}+\frac{2}{b}=\left(\frac{1}{a-1}+\frac{2}{b}\right)\cdot[(a-1)+b]=1+\frac{b}{a-1}+\frac{2(a-1)}{b}+2\geqslant 3+2\sqrt{\frac{b}{a-1}\cdot\frac{2(a-1)}{b}}=3+2\sqrt{2}$，当且仅当 $\frac{b}{a-1}=\frac{2(a-1)}{b}$，即 $a=\sqrt{2}$，$b=2-\sqrt{2}$ 时取等号.

5. $\frac{1}{4}$

解析：由 $a-3b+6=0$，可知 $a-3b=-6$，

且 $2^a+\frac{1}{8^b}=2^a+2^{-3b}$，因为对于任意 x，$2^x>0$ 恒成立，结合均值不等式的结论可得，$2^a+2^{-3b}\geqslant 2\times\sqrt{2^a\times 2^{-3b}}=2\times\sqrt{2^{-6}}=\frac{1}{4}$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

当且仅当 $\begin{cases}2^a=2^{-3b},\\ a-3b=-6,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}a=-3,\\ b=1\end{cases}$ 时等号成立.

综上可得 $2^a+\frac{1}{8^b}$ 的最小值为 $\frac{1}{4}$.

6. 9

解析：由题意可知，$S_{\triangle ABC}=S_{\triangle ABD}+S_{\triangle BCD}$，由角平分线性质和三角形面积公式得 $\frac{1}{2}ac\sin120^\circ=\frac{1}{2}a\times1\times\sin60^\circ+\frac{1}{2}c\times1\times\sin60^\circ$，化简得 $ac=a+c$，即 $\frac{1}{a}+\frac{1}{c}=1$，因此 $4a+c=(4a+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{c}\right)=5+\frac{c}{a}+\frac{4a}{c}\geqslant5+2\sqrt{\frac{c}{a}\cdot\frac{4a}{c}}=9$，当且仅当 $c=2a=3$ 时取等号，则 $4a+c$ 的最小值为 9.

7. $\left[\frac{1}{5},+\infty\right)$

解析：$\because x>0$，$\therefore x+\frac{1}{x}+3\geqslant2+3=5$，当且仅当 $x=1$ 时取等号. $\therefore\frac{x}{x^2+3x+1}=\frac{1}{x+\frac{1}{x}+3}\leqslant\frac{1}{5}$. $\therefore a\geqslant\frac{1}{5}$ 时，$\frac{x}{x^2+3x+1}\leqslant a$ 恒成立.

8. **解**：(1) $\because x>0$，$y>0$，且 $x+2y=1$，

$\therefore\frac{1}{x}+\frac{4}{y}=\left(\frac{1}{x}+\frac{4}{y}\right)(x+2y)=9+\frac{4x}{y}+\frac{2y}{x}\geqslant9+2\sqrt{\frac{4x}{y}\cdot\frac{2y}{x}}=9+4\sqrt{2}$（当且仅当 $\frac{4x}{y}=\frac{2y}{x}$ 即 $x=\frac{2\sqrt{2}-1}{7}$，$y=\frac{4-\sqrt{2}}{7}$ 时等号成立），

$\therefore\frac{1}{x}+\frac{4}{y}$ 的最小值为 $9+4\sqrt{2}$.

(2) $\because x>0$，$y>0$，$x+2y=1$，

$\therefore\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)(x+2y)=3+\frac{x}{y}+\frac{2y}{x}\geqslant3+2\sqrt{\frac{x}{y}\cdot\frac{2y}{x}}=3+2\sqrt{2}$（当且仅当 $\frac{x}{y}=\frac{2y}{x}$ 即 $x=\sqrt{2}-1$，$y=\frac{2-\sqrt{2}}{2}$ 时等号成立），

$\therefore\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$ 的最小值为 $3+2\sqrt{2}$，欲使 $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}>a$ 恒成立，需 $\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)_{\min}>a$，

$\therefore a$ 的取值范围是 $(-\infty,3+2\sqrt{2})$.

9. **解**：(1) 因为 $x>0$，$y>0$，由基本不等式得 $2x+5y\geqslant2\sqrt{10xy}$，因为 $2x+5y=20$，故 $2\sqrt{10xy}\leqslant20$，$xy\leqslant10$，当且仅当 $2x=5y$ 时，等号成立.

此时 xy 有最大值 10.

故 $u=\lg x+\lg y=\lg(xy)\leqslant\lg10=1$，

所以 $u=\lg x+\lg y$ 有最大值 1.

(2) 因为 $x>0$，$y>0$，

故 $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)\cdot\frac{2x+5y}{20}$

$=\frac{1}{20}\left(7+\frac{5y}{x}+\frac{2x}{y}\right)$

$\geqslant\frac{1}{20}\left(7+2\sqrt{\frac{5y}{x}\cdot\frac{2x}{y}}\right)=\frac{7+2\sqrt{10}}{20}$，

当且仅当 $\begin{cases}\frac{5y}{x}=\frac{2x}{y},\\ 2x+5y=20\end{cases}$ 时，等号成立.

解得 $\begin{cases}x=\frac{10\sqrt{10}-20}{3},\\ y=\frac{20-4\sqrt{10}}{3}.\end{cases}$

故 $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$ 的最小值为 $\frac{7+2\sqrt{10}}{20}$，此时 $\begin{cases}x=\frac{10\sqrt{10}-20}{3},\\ y=\frac{20-4\sqrt{10}}{3}.\end{cases}$

§4　简单线性规划

4.1　二元一次不等式(组)与平面区域

基础知识点对点

1. A

2. B

3. B　将点(−3,0)代入不等式组检验可知，B 正确.

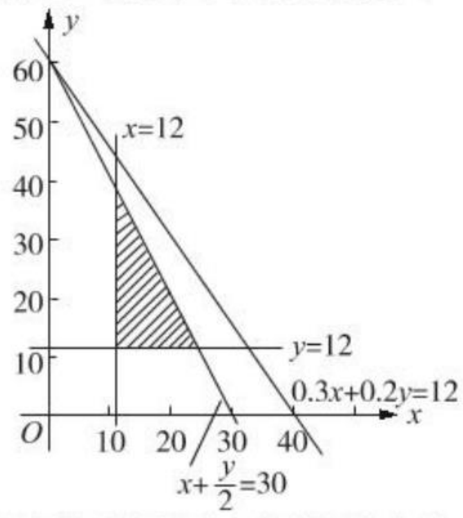
4. C　直线 $y=-2$ 为虚线，可排除 A、B. 把点(−1,0)代入 $3x-2y+6$ 得 $3\times(-1)-2\times0+6=3>0$，

$\therefore$ 点(−1,0)在 $3x-2y+6>0$ 对应的区域内，故选 C.

5. **解**：设每天生产桌子 x 张，椅子 y 把，由题意得

$$\begin{cases}x\geqslant12,\\ y\geqslant12,\\ 0.3x+0.2y\leqslant12,\\ x+\frac{y}{2}\leqslant30,\\ x,y\in\mathbf{N},\end{cases}$$

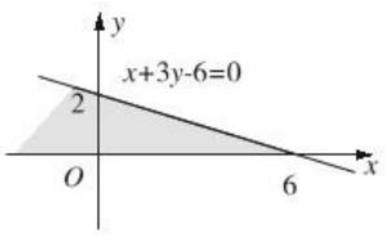
由不等式组画出区域如图中阴影部分.



每天生产的桌椅数量是图中阴影部分的整数点的横坐标和纵坐标.

课后拔高提能练

1. D　作出直线 $x+3y-6=0$，将点(0,0)代入 $x+3y-6=-6<0$，所以不等式 $x+3y-6<0$ 表示的平面区域在直线 $x+3y-6=0$ 的左下方.



2. C　由题意知 $(3\times2+a-6)(3+2a-6)<0$，

即 $a(2a-3)<0$，得 $0<a<\frac{3}{2}$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

3. C　∵$a,b\in\{1,2\}$，∴点$p(a,b)$共有4个，分别是(1,1)(1,2)(2,1)和(2,2)．其中满足不等式$x+y-3\geqslant 0$的点有(2,2)，(1,2)，(2,1)共3个．

4. D　∵点$A(a,2a-1)$在直线$3x-y-6=0$的上方，∴$3a-(2a-1)-6<0$，∴$a<5$．又点A在y轴的右侧，∴$a>0$，故$0<a<5$．

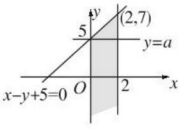
5. (7,3)

解析：由点到直线的距离公式得$\dfrac{|4a-9+1|}{\sqrt{4^2+(-3)^2}}=4$，

即$|a-2|=5$，∴$a=7$或$a=-3$．∴点P为(7,3)或(−3,3)，代入$2x+y>0$得$7\times2+3>0$，或$2\times(-3)+3<0$，∴$a=7$时适合题意．

6. [5,7)

解析：不等式组$\begin{cases}x-y+5\geqslant 0,\\0\leqslant x\leqslant 2\end{cases}$表示的平面区域如图中阴影部分所示．用平行于$x$轴的直线截该平面区域，若得到一个三角形，则$a$的取值范围是$5\leqslant a<7$．

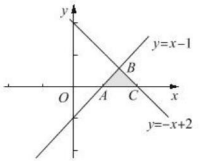


7. $\dfrac{1}{4}$

解析：由$\begin{cases}y=x-1,\\y=-x+2\end{cases}$得

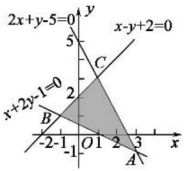
$\begin{cases}x=\dfrac{3}{2},\\y=\dfrac{1}{2},\end{cases}$即$B\left(\dfrac{3}{2},\dfrac{1}{2}\right)$，

∴$S=\dfrac{1}{2}\times1\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{4}$．

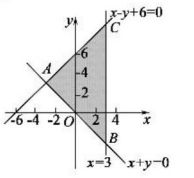


8. **解**：由两点式得AB，BC，CA的直线方程并化简为AB：$x+2y-1=0$，BC：$x-y+2=0$，CA：$2x+y-5=0$，

如图所示，由区域可得不等式组为$\begin{cases}x+2y-1\geqslant 0,\\x-y+2\geqslant 0,\\2x+y-5\leqslant 0.\end{cases}$



9. **解**：不等式$x-y+6\geqslant 0$表示直线$x-y+6=0$上及其右下方的点的集合；$x+y\geqslant 0$表示直线$x+y=0$上及其右上方的点的集合；$x\leqslant 3$表示直线$x=3$上及其左方的点的集合，所以不等式组$\begin{cases}x-y+6\geqslant 0,\\x+y\geqslant 0,\\x\leqslant 3\end{cases}$表示的平面区域如图所示．



因此其区域面积也就是$\triangle ABC$的面积．显然，$\triangle ABC$为等腰直角三角形，$\angle BAC=90°$，$AB=AC$，B点坐标为(3，−3)．由点到直线的距离公式得

$|AB|=\dfrac{|3\times1+(-3)\times(-1)+6|}{\sqrt{2}}=\dfrac{12}{\sqrt{2}}$，

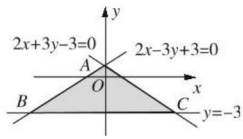
∴$S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{12}{\sqrt{2}}\times\dfrac{12}{\sqrt{2}}=36$．

故不等式组$\begin{cases}x-y+6\geqslant 0,\\x+y\geqslant 0,\\x\leqslant 3\end{cases}$表示的平面区域的面积等于36．

4.2　简单线性规划

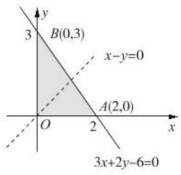
基础知识点对点

1. A　解法一：作出不等式组$\begin{cases}2x+3y-3\leqslant 0,\\2x-3y+3\geqslant 0,\\y+3\geqslant 0\end{cases}$对应的可行域，如图中阴影部分所示．易求得可行域的顶点$A(0,1)$，$B(-6,-3)$，$C(6,-3)$，当直线$z=2x+y$过点$B(-6,-3)$时，z取得最小值，$z_{\min}=2\times(-6)-3=-15$，选择A．



解法二：易求可行域顶点$A(0,1)$，$B(-6,-3)$，$C(6,-3)$，分别代入目标函数，求出对应的z的值依次为1，−15，9，故最小值为−15．

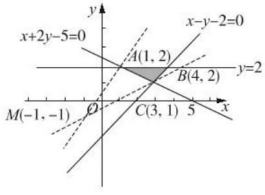
2. B　不等式组$\begin{cases}3x+2y-6\leqslant 0,\\x\geqslant 0,\\y\geqslant 0\end{cases}$表示的平面区域如图中阴影部分所示．当直线$z=x-y$过点$A(2,0)$时，$z$取最大值2；当直线$z=x-y$过点$B(0,3)$时，$z$取得最小值−3，所以$z=x-y$的取值范围是$[-3,2]$．



3. B　MN垂直y轴，$|MN|$取得最小值2，此时点$N(0,1)$．

4. C　$z=\dfrac{y+1}{x+1}$表示过平面区域内的点$P(x,y)$与点$M(-1,-1)$的直线的斜率，如图，$k_{CM}=\dfrac{1}{2}$，$k_{AM}=\dfrac{3}{2}$，

∴$\dfrac{1}{2}\leqslant z\leqslant\dfrac{3}{2}$．



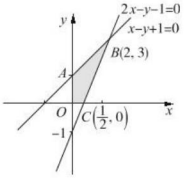
关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

5. 4

解析：由 $z=ax+by$ 得 $y=-\frac{a}{b}x+\frac{1}{b}z$，如图，当直线经过 $B(2,3)$ 时，纵截距最大，此时，$2a+3b=1$.

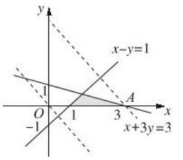
$\therefore \frac{1}{2a}+\frac{1}{3b}=\left(\frac{1}{2a}+\frac{1}{3b}\right)(2a+3b)=2+\frac{3b}{2a}+\frac{2a}{3b}\geqslant 2+2\sqrt{\frac{3b}{2a}\times\frac{2a}{3b}}=4$，

即 $\frac{1}{2a}+\frac{1}{3b}$ 的最小值为 4.

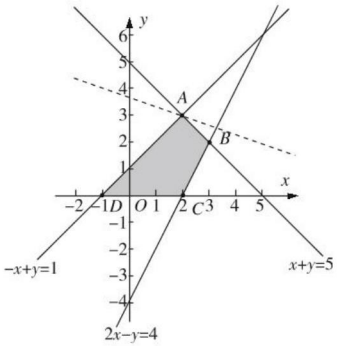


课后拔高提能练

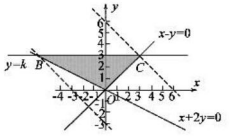
1. D　作出可行域如图中阴影部分所示，平移直线 $y=-x$，当直线过点 $A(3,0)$ 时，$z=x+y$ 取得最大值 3.



2. C　绘制不等式组表示的平面区域如图所示，结合目标函数的几何意义可知目标函数在点 A 处取得最大值，联立直线方程 $\begin{cases}x+y=5,\\-x+y=1,\end{cases}$ 可得点 A 的坐标为 $A(2,3)$，据此可知目标函数的最大值为 $z_{max}=3x+5y=3\times2+5\times3=21$. 故选 C.



3. A　由 $z=x+y$ 得 $y=-x+z$，作出 $\begin{cases}x+2y\geqslant0,\\x-y\leqslant0,\\0\leqslant y\leqslant k\end{cases}$ 的区域 BCO，平移直线 $y=-x+z$，由图像可知当直线经过 C 时，直线的截距最大，此时 $z=6$，



由 $\begin{cases}y=x,\\y=-x+6,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x=3,\\y=3,\end{cases}$

所以 $k=3$，解得 $B(-6,3)$，代入 $z=x+y$ 得 z 的最小值为 $z=-6+3=-3$，选 A.

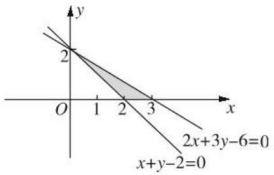
4. C　依题意，令 $z=0$，可得直线 $x+my=0$，线段 AC 上的任意一点都可使目标函数 $z=x+my$ 取得最小值，而直线 AC 的斜率为 $-\frac{1}{m}$，结合可行域可知直线 $x+my=0$ 与直线 AC 平行，所以 $-\frac{1}{m}=-1$，即 $m=1$.

5. $(0,5)$

解析：将 $k=6x+8y$ 变形为 $y=-\frac{3}{4}x+\frac{k}{8}$，$\because -\frac{3}{4}>-1>-2$，$\therefore y=-\frac{3}{4}x+\frac{k}{8}$ 过 $(0,5)$ 点时在 y 轴上截距最大. 即 $k=40$，此时点为 $(0,5)$.

6. $\sqrt{2}$

解析：不等式组表示的平面区域如图所示，

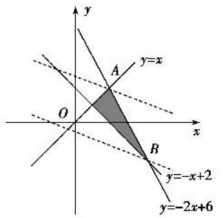


$|OM|$ 表示区域内的点到坐标原点的距离，其最小值为 O 到直线 $x+y-2=0$ 的距离，

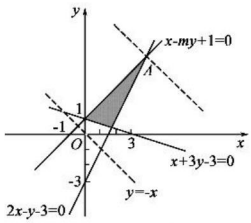
$\therefore |OM|_{min}=\frac{|-2|}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$.

7. -2　8

解析：作可行域，如图中阴影部分所示，则直线 $z=x+3y$ 过点 $A(2,2)$ 时 z 取最大值 8，过点 $B(4,-2)$ 时 z 取最小值 -2.



8. **解**：由 $x+y$ 有最大值可知 $m>0$，画出可行域如图.



目标函数 $z=x+y$，即 $y=-x+z$.

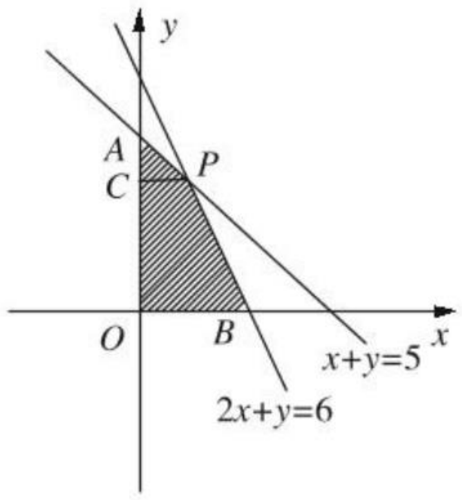
关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

作出直线 $y=-x$，平移得 $A\left(\frac{3m+1}{2m-1},\frac{5}{2m-1}\right)$ 为最优解，所以当 $x=\frac{3m+1}{2m-1}$，$y=\frac{5}{2m-1}$ 时，$x+y$ 取最大值 9，

即 $\frac{3m+1}{2m-1}+\frac{5}{2m-1}=9$，

解得 $m=1$.

9. **解**：由约束条件作出其所确定的平面区域（阴影部分），其四个顶点为 $O(0,0)$，$B(3,0)$，$A(0,5)$，$P(1,4)$. 过 P 点作 y 轴的垂线，垂足为 C. 则 $AC=|5-4|=1$，$PC=|1-0|=1$，$OC=4$，$OB=3$，$AP=\sqrt{2}$，$PB=\sqrt{(4-0)^2+(1-3)^2}=2\sqrt{5}$.



$\therefore S_{\triangle ACP}=\frac{1}{2}AC\cdot PC=\frac{1}{2}$，$S_{梯形COBP}=\frac{1}{2}(CP+OB)\cdot OC=8$.

$\therefore S_{阴影部分}=S_{\triangle ACP}+S_{梯形COBP}=\frac{17}{2}$，

$C_{阴影部分}=OA+AP+PB+OB=8+\sqrt{2}+2\sqrt{5}$.

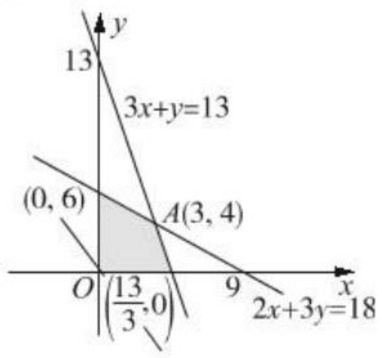
4.3 简单线性规划的应用

基础知识点对点

1. D　设生产甲产品 x 吨，生产乙产品 y 吨，该企业获得的利润为 z 万元，则有关系

$$\begin{cases}x\geqslant 0,\\ y\geqslant 0,\\ 3x+y\leqslant 13,\\ 2x+3y\leqslant 18,\end{cases}$$

目标函数 $z=5x+3y$. 作出可行域如图所示.

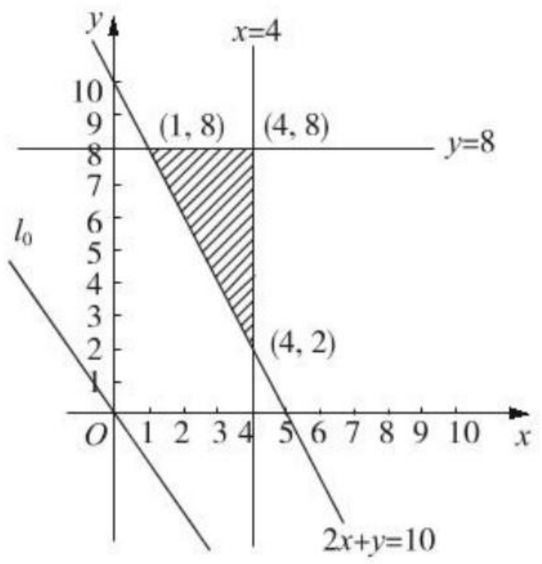


由 $\begin{cases}3x+y=13,\\ 2x+3y=18,\end{cases}$ 得 $A(3,4)$，当直线 l_0：$5x+3y=0$ 平移至过点 $A(3,4)$ 时，z 取得最大值，故 $z_{max}=15+12=27$.

2. B　因为对乙项目投资获利较大，所以在投资规划要求内，尽可能多安排资金投资于乙项目，即对甲项目投资等于对乙项目投资的 $\frac{2}{3}$ 倍，可获得最大利润.

所以，对甲项目投资 24 万元，对乙项目投资 36 万元，可获得最大利润 31.2 万元.

3. B　设需用甲型货车 x 辆，乙型货车 y 辆，由题目条件可得约束条件为 $\begin{cases}20x+10y\geqslant 100,\\ 0\leqslant x\leqslant 4,\\ 0\leqslant y\leqslant 8,\\ x,y\in\mathbf{N}.\end{cases}$ 目标函数 $z=400x+300y$，画图可知，当平移直线 l_0：$400x+300y=0$ 至经过点 $(4,2)$ 时，z 取得最小值 2 200.



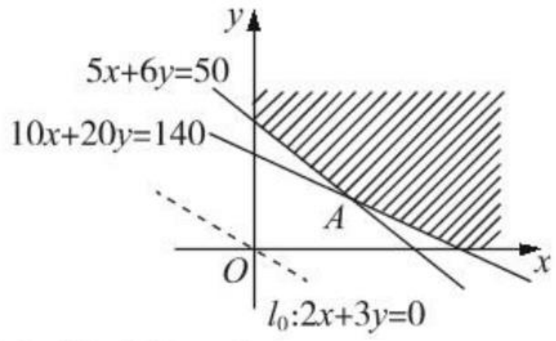
4. 2 300

解析：设需租赁甲种设备 x 台，乙种设备 y 台（$x,y\in\mathbf{N}$），租赁费 z 元，

由题意得 $\begin{cases}5x+6y\geqslant 50,\\ 10x+20y\geqslant 140,\\ x\geqslant 0,y\geqslant 0,\end{cases}$

$z=200x+300y$.

作出如图所示的可行域.



令 $z=0$，得 l_0：$2x+3y=0$，

平移 l_0 可知，当 l_0 过点 A 时 z 有最小值.

又由 $\begin{cases}5x+6y=50,\\ 10x+20y=140.\end{cases}$

得 A 点坐标为 $(4,5)$，

所以 $z_{min}=4\times 200+5\times 300=2\ 300$（元）.

课后拔高提能练

1. B　设 6 吨的汽车 x 辆，4 吨的汽车 y 辆，则运送货物 $z=6x+4y$.

2. A

3. D　设应生产甲、乙两种产品各 x，y 件，企业获得的利润为 z，

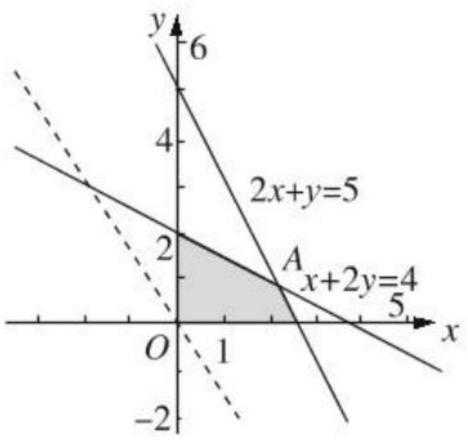
则 x，y 满足的约束条件为 $\begin{cases}x+2y\leqslant 4,\\ 2x+y\leqslant 5,\\ x,y\in\mathbf{N},\end{cases}$

且 $z=3x+2y$，

画出可行域，如图所示，可知最优解为 $(2,1)$，

即应生产 A 产品 2 件，B 产品 1 件，

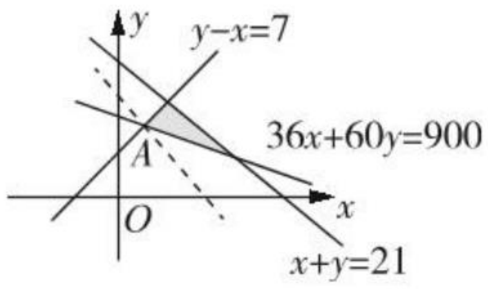
可使企业获得最大利润，最大利润为 8 万元.



4. C　设租用 A 型车 x 辆，B 型车 y 辆，目标函数为 $z=1\ 600x+2\ 400y$，约束条件为 $\begin{cases}36x+60y\geqslant 900,\\ x+y\leqslant 21,\\ y-x\leqslant 7,\\ x,y\in\mathbf{N}.\end{cases}$

作出可行域如图中阴影部分所示，可知目标函数过点 $A(5,12)$ 时，z 有最小值 36 800 元.

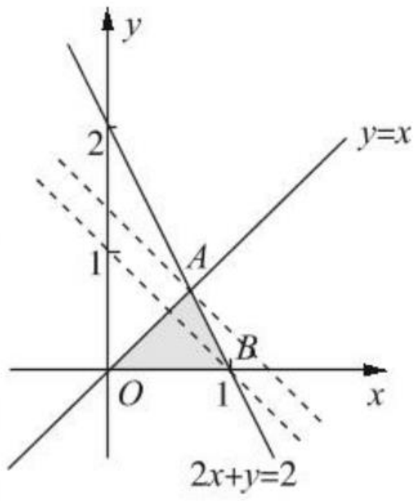
关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料



5. $(0,1]\cup\left[\frac{4}{3},+\infty\right)$

解析：不等式组

$\begin{cases}x-y\geqslant 0,\\ 2x+y\leqslant 2,\\ y\geqslant 0\end{cases}$ 表示的平面区域如图所示(阴影部分).

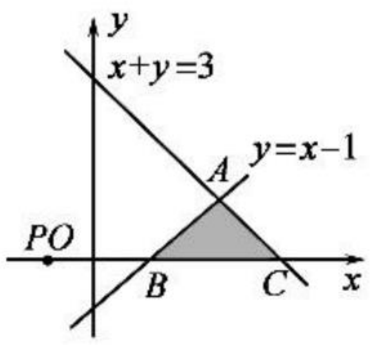


解 $\begin{cases}y=x,\\ 2x+y=2\end{cases}$ 得 $A\left(\frac{2}{3},\frac{2}{3}\right)$；

解 $\begin{cases}y=0,\\ 2x+y=2\end{cases}$ 得 $B(1,0)$. 若原不等式组表示的平面区域是一个三角形，则直线 $x+y=a$ 中的 a 的取值范围是 $0<a\leqslant 1$ 或 $a\geqslant\frac{4}{3}$.

6. 4

解析：如图，作出满足所给线性约束条件的可行域(阴影部分)，

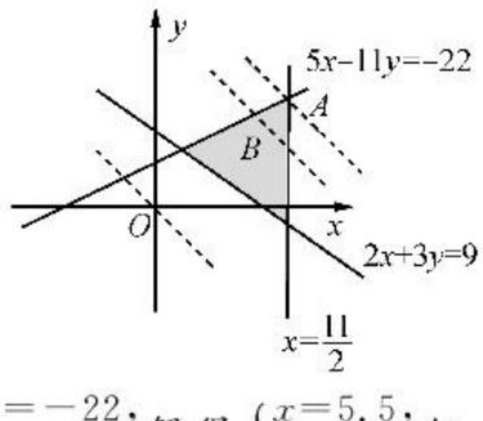


则函数 $z=(x+1)^2+y^2$ 表示可行域内的点到点 $P(-1,0)$ 距离的平方，

由图形可直观地知当且仅当可行域内的点 $B(1,0)$ 到点 P 的距离最小，即 $[\sqrt{(x+1)^2+y^2}]_{\min}=|PB|=2$，故 $z=(x+1)^2+y^2$ 的最小值是 4.

7. 90

解析：先画出满足约束条件的可行域，如图中阴影部分所示.



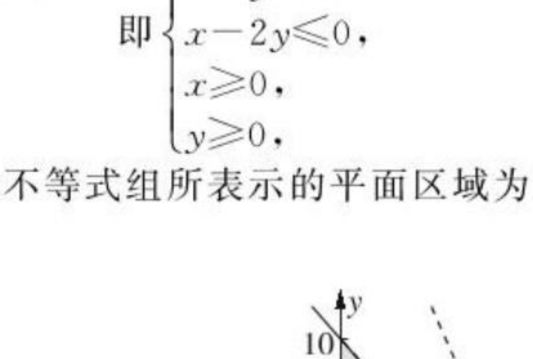
由 $\begin{cases}5x-11y=-22,\\ 2x=11,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x=5.5,\\ y=4.5,\end{cases}$ 但 $x\in\mathbf{N}_+$，$y\in\mathbf{N}_+$，结合图知当 $x=5$，$y=4$ 时，$z_{\max}=90$.

8. **解**：设需要 A，B 两种规格的金属板分别为 x 张，y 张，用料面积为 z m^2，

则线性约束条件是 $\begin{cases}x\geqslant 0,y\geqslant 0,\\ 3x+6y\geqslant 45,\\ 5x+6y\geqslant 55,\end{cases}$

目标函数 $z=2x+3y$.

如图，作出可行域和直线 l：$2x+3y=0$，



将直线 l 向右上方平移，使其经过可行域内的点 $A(5,5)$ 时，$z=2x+3y$ 取得最小值 25.

故需要 A，B 两种规格的金属板各 5 张，才能完成生产计划，此时用料面积最省，其面积为 25 m^2.

9. **解**：(1)由已知得 x，y 满足的数学关系式为

$\begin{cases}70x+60y\leqslant 600,\\ 5x+5y\geqslant 30,\\ x\leqslant 2y,\\ x\geqslant 0,\\ y\geqslant 0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}7x+6y\leqslant 60,\\ x+y\geqslant 6,\\ x-2y\leqslant 0,\\ x\geqslant 0,\\ y\geqslant 0,\end{cases}$

该二元一次不等式组所表示的平面区域为图 1 中的阴影部分：

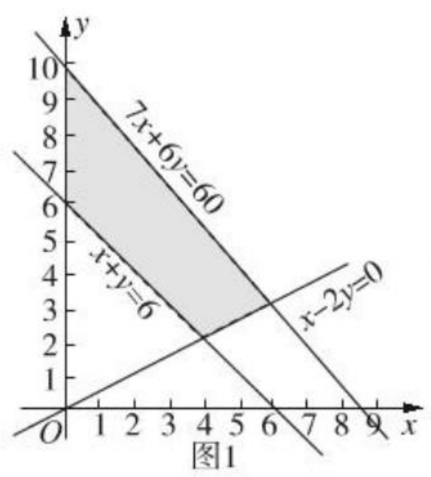


图1

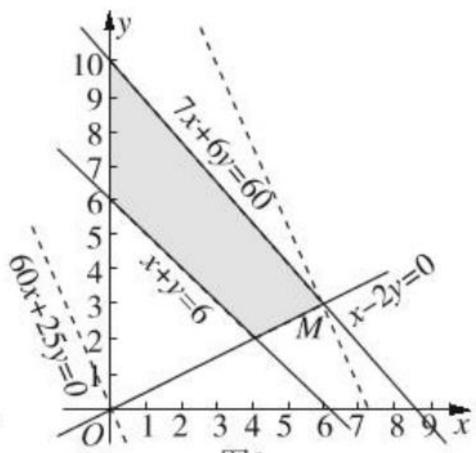


图2

(2)设总收视人次为 z 万，则目标函数为 $z=60x+25y$.

考虑 $z=60x+25y$，将它变形为 $y=-\frac{12}{5}x+\frac{z}{25}$，这是斜率为 $-\frac{12}{5}$，随 z 变化的一族平行直线. $\frac{z}{25}$ 为直线在 y 轴上的截距，当 $\frac{z}{25}$ 取得最大值时，z 的值最大. 又因为 x，y 满足约束条件，所以由图 2 可知，当直线 $z=60x+25y$ 经过可行域上的点 M 时，截距 $\frac{z}{25}$ 最大，即 z 最大.

解方程组 $\begin{cases}7x+6y=60,\\ x-2y=0,\end{cases}$ 得点 M 的坐标为 $(6,3)$.

所以，电视台每周播出甲连续剧 6 次、乙连续剧 3 次时才能使总收视人次最多.

阶段质量评估卷(四)

1. D　令 $a=-2$，$b=-3$. 经检验知 D 不正确.

2. A　由 $1\leqslant 3^x\leqslant 81$，得 $0\leqslant x\leqslant 4$，$\therefore A=[0,4]$，由 $\log_2(x^2-x)>1$，得 $x^2-x>2$，解得 $x<-1$ 或 $x>2$，$\therefore B=(-\infty,-1)\cup(2,+\infty)$. $\therefore A\cap B=(2,4]$.

3. A　当 $x\leqslant 0$ 时，$f(x)=x+2\geqslant x^2$，即 $x^2-x-2\leqslant 0$，解得 $-1\leqslant x\leqslant 2$，$\therefore -1\leqslant x\leqslant 0$.

当 $x>0$ 时，$f(x)=-x+2\geqslant x^2$，即 $x^2+x-2\leqslant 0$，解得 $-2\leqslant x\leqslant 1$，$\therefore 0<x\leqslant 1$.

综上知，原不等式的解集是 $[-1,1]$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

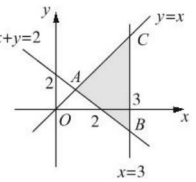
4. A　由题意知 $2a+b=1$，又 $a>0,b>0$，$\therefore \frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)(2a+b)=2+\frac{2a}{b}+\frac{b}{a}+1\geqslant 3+2\sqrt{\frac{2a}{b}\cdot\frac{b}{a}}=3+2\sqrt{2}$. 当且仅当 $\frac{2a}{b}=\frac{b}{a}$，即 $b=\sqrt{2}a$ 时等号成立.

5. D　$\because ab=a+b+\frac{5}{4}\leqslant\left(\frac{a+b}{2}\right)^2$，

即 $(a+b)^2-4(a+b)-5\geqslant 0$，

得 $a+b\geqslant 5$ 或 $a+b\leqslant -1$（舍）.

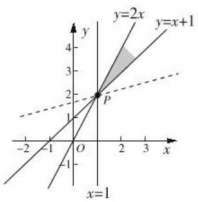
6. D　作出可行域如图中阴影部分所示，求得 $\triangle ABC$ 区域的三个顶点 $A(1,1)$，$B(3,-1)$，$C(3,3)$，平移直线 $x+2y=0$，当直线过点 $C(3,3)$ 时，z 取得最大值 9.



7. 3

解析：不等式可转化为 $\begin{cases}y\geqslant x+1,\\ y\leqslant 2x,\\ x+1\leqslant 2x,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}y\geqslant x+1,\\ y\leqslant 2x,\\ x\geqslant 1,\end{cases}$

$\therefore$ 满足条件的 x,y 在平面直角坐标系中的可行域如图



令 $2y-x=z$，$y=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}z$，由图象可知，当 $2y-x=z$ 过点 $P(1,2)$ 时，z 取最小值，此时 $z=2\times 2-1=3$，

$\therefore 2y-x$ 的最小值为 3.

8. $(-\infty,-5]$

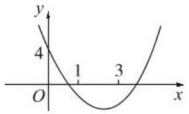
解析：利用函数 $f(x)=x^2+mx+4$ 的图像，

当 $x\in(1,3)$ 时，不等式 $x^2+mx+4<0$ 恒成立，

$\therefore \begin{cases}f(1)\leqslant 0,\\ f(3)\leqslant 0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}5+m\leqslant 0,\\ 13+3m\leqslant 0,\end{cases}$

解得 $m\leqslant -5$.

$\therefore m$ 的取值范围是 $(-\infty,-5]$.



9. $4\sqrt{3}$　$\sqrt{3}$

解析：$\because a+b-2a^2b^2-6=0$，$\therefore a+b=2a^2b^2+6$.

$\therefore \frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{a+b}{ab}=\frac{2a^2b^2+6}{ab}=2ab+\frac{6}{ab}\geqslant 2\sqrt{2ab\cdot\frac{6}{ab}}=4\sqrt{3}$，当且仅当 $2ab=\frac{6}{ab}$，即 $ab=\sqrt{3}$ 时取等号.

10. **解**：当 $a=0$ 时，不等式可化为 $-x+1<0$，得 $x>1$；

当 $a\neq 0$ 时，不等式可化为 $(ax-1)(x-1)<0$；

当 $a<0$ 时，不等式的解为 $x<\frac{1}{a}$ 或 $x>1$；

当 $0<a<1$ 时，不等式的解为 $1<x<\frac{1}{a}$；

当 $a=1$ 时，不等式的解集为 $\varnothing$；

当 $a>1$ 时，不等式的解为 $\frac{1}{a}<x<1$.

综上得，当 $a=0$ 时不等式的解集为 $(1,+\infty)$，

当 $a<0$ 时，不等式的解集为 $\left(-\infty,\frac{1}{a}\right)\cup(1,+\infty)$；

当 $0<a<1$ 时，不等式的解集为 $\left(1,\frac{1}{a}\right)$；

当 $a=1$ 时，不等式的解集为 $\varnothing$；

当 $a>1$ 时，不等式的解集为 $\left(\frac{1}{a},1\right)$.

11. **解**：设 $f(x)=8x^2-(m-1)x+m-7$. 由 $f(x)$ 的图像可知 $\begin{cases}\Delta=(m-1)^2-4\times 8\times(m-7)\geqslant 0,\\ f(1)=2>0,\\ \frac{m-1}{2\times 8}>1,\end{cases}$

即 $\begin{cases}m\geqslant 25 \text{ 或 } m\leqslant 9,\\ m\in\mathbf{R},\\ m>17.\end{cases}$

$\therefore$ 实数 m 的取值范围是 $[25,+\infty)$.

12. **解**：(1) $y=4x-2+\frac{1}{4x-5}=4x-5+\frac{1}{4x-5}+3$，

又 $x>\frac{5}{4}$，$\therefore 4x-5>0$，

$\therefore 4x-5+\frac{1}{4x-5}+3\geqslant 2\sqrt{(4x-5)\cdot\frac{1}{4x-5}}+3=5$，

当且仅当 $4x-5=\frac{1}{4x-5}$，即 $x=\frac{3}{2}$ 时等号成立.

$\therefore$ 函数 $y=4x-2+\frac{1}{4x-5}$ 的最小值为 5.

(2) $\because 0<x<\frac{1}{2}$，$\therefore 1-2x>0$，

$y=\frac{1}{4}\times 2x(1-2x)\leqslant\frac{1}{4}\left(\frac{2x+1-2x}{2}\right)^2=\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{16}$，

当且仅当 $2x=1-2x\left(0<x<\frac{1}{2}\right)$，

即 $x=\frac{1}{4}$ 时等号成立，$y_{\max}=\frac{1}{16}$.

13. **解**：(1) 由题意知，$m=0$ 时，$x=1$（万件），

$\therefore 1=3-k$，$k=2$，$x=3-\frac{2}{m+1}$.

每件产品的销售价格为 $1.5\times\frac{8+16x}{x}$（万元），

$\therefore$ 2018 年的利润 $y=x\times\left(1.5\times\frac{8+16x}{x}\right)-(8+16x+m)$

$=4+8x-m$

$=4+8\left(3-\frac{2}{m+1}\right)-m$

$=-\left[\frac{16}{m+1}+(m+1)\right]+29(m\geqslant 0)$.

(2) $\because m\geqslant 0$ 时，$\frac{16}{m+1}+(m+1)\geqslant 2\sqrt{16}=8$，

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

$\therefore y\leqslant -8+29=21$，当且仅当$\frac{16}{m+1}=m+1$，即 $m=3$（万元）时，$y_{max}=21$（万元）.

∴该厂家 2018 年的促销费用投入 3 万元时，厂家的利润最大.

阶段质量评估卷(五)

1. D　设数列$\{a_n\}$的公差为 d，由 $a_1=-2$，$a_2=0$，$a_3=2$，知 $d=2$. $\therefore a_6=-2+5\times 2=8$，$a_9=-2+8\times 2=14$，

$\therefore a_6+a_9=22$.

2. B　$a_k=S_k-S_{k-1}=(k^2-9k)-[(k-1)^2-9(k-1)]=2k-10$，

$\because 5<a_k<8$，$\therefore \begin{cases}2k-10>5,\\2k-10<8,\end{cases}$解得$\frac{15}{2}<k<9$，$\because k\in \mathbf{N}_+$，

$\therefore k=8$.

3. D　$\frac{x+5}{(x-1)^2}\geqslant 2\Leftrightarrow\begin{cases}x-1\neq 0,\\x+5\geqslant 2(x-1)^2\end{cases}\Leftrightarrow$

$\begin{cases}x\neq 1,\\(2x+1)(x-3)\leqslant 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\neq 1,\\-\frac{1}{2}\leqslant x\leqslant 3.\end{cases}$

∴不等式$\frac{x+5}{(x-1)^2}\geqslant 2$的解集是$\left[-\frac{1}{2},1\right)\cup(1,3]$.

4. B　由 $2R(\sin^2 A-\sin^2 C)=(\sqrt{2}a-b)\sin B$，得 $2R(\sin A-\sin C)(\sin A+\sin C)=(\sqrt{2}a-b)\sin B$，由正弦定理得 $a^2-c^2=\sqrt{2}ab-b^2$，$\therefore \cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\frac{\sqrt{2}ab}{2ab}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，又 C 为$\triangle ABC$的内角，$\therefore C=45°$.

5. A　$\because \complement_U A=(-1,-a]$，

$\therefore A=(-\infty,-1]\cup(-a,+\infty)$，

即不等式$\frac{x-a}{x+b}\geqslant 0$的解集为$(-\infty,-1]\cup(-a,+\infty)$，

$\therefore a=-1$，$-b=-a=1$，

$\therefore b=-1$，故 $a+b=-2$.

6. A　在等比数列$\{a_n\}$中，$\because a_6=a_5+2a_4$，

$\therefore a_4q^2=a_4q+2a_4$，

即 $q^2-q-2=0$，

解得 $q=2$ 或 $q=-1$(舍去)，

$\because \sqrt{a_m a_n}=4a_1$，

$\therefore \sqrt{a_1^2\cdot 2^{m+n-2}}=4a_1$，

$\therefore$即 $2^{m+n-2}=16=2^4$，

$\therefore m+n-2=4$，即 $m+n=6$，

$\therefore \frac{m}{6}+\frac{n}{6}=1$，

$\therefore \frac{1}{m}+\frac{4}{n}=\left(\frac{1}{m}+\frac{4}{n}\right)\left(\frac{m}{6}+\frac{n}{6}\right)=\frac{1}{6}+\frac{4}{6}+\frac{4m}{6n}+\frac{n}{6m}\geqslant\frac{5}{6}+2\sqrt{\frac{4m}{6n}\cdot\frac{n}{6m}}=\frac{5}{6}+2\times\frac{2}{6}=\frac{9}{6}=\frac{3}{2}$，

当且仅当$\frac{4m}{6n}=\frac{n}{6m}$，即 $n=2m$ 时取等号.

7. 58

解析：$\because \frac{S_6}{S_3}=\frac{65}{64}$，$\therefore \frac{S_6-S_3}{S_3}=\frac{1}{64}$，$\therefore q^3=\frac{1}{64}$，

$\therefore q=\frac{1}{4}$. 又 $\because a_1=32$，$\therefore a_n=32\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}=2^{7-2n}$.

$\therefore \log_2 a_n=7-2n$. $\therefore |\log_2 a_n|=|7-2n|$.

$\therefore S_{10}=5+3+1+1+3+5+7+9+11+13=58$.

8. 2

解析：$\because 3b\sin C-5c\sin B\cos A=0$，由正弦定理得 $3bc-5bc\cos A=0$，$\therefore \cos A=\frac{3}{5}$，$\therefore \sin A=\sqrt{1-\cos^2 A}=\frac{4}{5}$，由余弦定理得 $\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\geqslant\frac{2bc-4}{2bc}$，$\therefore \frac{bc-2}{bc}\leqslant\frac{3}{5}$，$\therefore bc\leqslant 5$，又 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}bc\sin A\leqslant\frac{1}{2}\times 5\times\frac{4}{5}=2$.

9. 5

解析：由 $x+3y=5xy$，得$\frac{3}{x}+\frac{1}{y}=5$，

$\therefore 3x+4y=\frac{(3x+4y)\left(\frac{3}{x}+\frac{1}{y}\right)}{5}=\frac{13+\frac{12y}{x}+\frac{3x}{y}}{5}\geqslant\frac{13+2\sqrt{36}}{5}=5$（当且仅当$\frac{12y}{x}=\frac{3x}{y}$，即 $x=1$，$y=\frac{1}{2}$时等号成立）.

10. **解**：(1)证明：由 $a_{n+1}=3a_n+2$，得 $a_{n+1}+1=3(a_n+1)$，

$\therefore \frac{a_{n+1}+1}{a_n+1}=3$. 又 $a_1+1=3$，

∴数列$\{a_n+1\}$是首项为 3，公比为 3 的等比数列.

(2)由(1)得 $a_n+1=3\cdot 3^{n-1}=3^n$，

$\therefore a_n=3^n-1$.

$\therefore S_n=3+3^2+\cdots+3^n-n=\frac{3(1-3^n)}{1-3}-n=\frac{3}{2}(3^n-1)-n$.

11. **解**：(1)在$\triangle ABC$中，$b\cos A+a\cos B=-2c\cos C$，由正弦定理得 $\sin B\cos A+\sin A\cos B=-2\sin C\cos C$，

得 $\sin C=-2\sin C\cos C$，$\because 0<C<\pi$，$\therefore \sin C\neq 0$，

$\cos C=-\frac{1}{2}$，

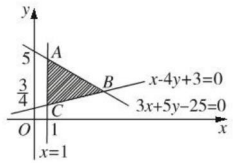
$\therefore C=\frac{2\pi}{3}$.

(2)$\triangle ABC$ 的面积为 $2\sqrt{3}$，则 $\frac{1}{2}ab\sin\frac{2\pi}{3}=2\sqrt{3}$，$ab=8$，

又 $a+b=6$，则 $a^2+b^2=20$，

由余弦定理知 $c^2=a^2+b^2-2ab\cos\frac{2\pi}{3}=28$，得边 $c=2\sqrt{7}$.

12. **解**：由约束条件$\begin{cases}x-4y+3\leqslant 0,\\3x+5y-25\leqslant 0,\\x\geqslant 1\end{cases}$作出可行域如图所示.



关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

由$\begin{cases}3x+5y-25=0,\\x=1,\end{cases}$解得$A\left(1,\frac{22}{5}\right)$,

由$\begin{cases}x-4y+3=0,\\x=1,\end{cases}$解得$C(1,1)$,

由$\begin{cases}x-4y+3=0,\\3x+5y-25=0,\end{cases}$解得$B(5,2)$.

(1)$z=\frac{y}{x}=\frac{y-0}{x-0}$,即$z$的值是可行域中的点与原点$O$连线的斜率.

观察图形可知,$z_{\min}=k_{OB}=\frac{2}{5}$.

(2)$z=x^2+y^2$的几何意义是可行域中的点到原点O的距离的平方.

结合图形可知,可行域上的点到原点的距离中,

$d_{\min}=|OC|=\sqrt{2}$,$d_{\max}=|OB|=\sqrt{29}$,

所以$2\leqslant z\leqslant 29$.

13. **解**:(1)$\because A,B,C$成等差数列,$\therefore B=60^\circ$.

$\therefore q=\frac{\sin A+\sin C}{a+c}=\frac{\sin B}{b}=\frac{\sin 60^\circ}{\sqrt{3}}=\frac{1}{2}$.

又$\because a_1=\frac{1}{2}$,$\therefore$数列$\{a_n\}$的通项公式$a_n=\frac{1}{2^n}$.

(2)由(1)知,$b_n=-\frac{\log_2 a_n}{a_n}=n\times 2^n$.$\therefore S_n=1\times 2+2\times 2^2+\cdots+n\times 2^n$.

$2S_n=1\times 2^2+2\times 2^3+\cdots+(n-1)\times 2^n+n\times 2^{n+1}$,

$\therefore(1-2)S_n=2+2^2+\cdots+2^n-n2^{n+1}=2^{n+1}-2-n2^{n+1}$,

$\therefore S_n=(n-1)2^{n+1}+2$.

第二部分　阶段检测

阶段测试一

1. C　$\because\{|a_n|\}$是首项为1,公差为5的等差数列,

$\therefore|a_n|=|a_1|+(n-1)d=1+5(n-1)=5n-4$.又$\{a_n\}$中的奇数项为负,偶数项为正,

$\therefore a_n=(-1)^n(5n-4)$.

2. D　由题意知a_2,a_3是方程$x^2-x-2\ 018=0$的两个根,$\therefore a_1a_4=a_2a_3=-2\ 018$.

3. A　$\because\{a_n\}$为等比数列,

$\therefore a_1+a_2+a_3,a_4+a_5+a_6,\cdots$成等比数列,

$\therefore a_4+a_5+a_6=S_6-S_3=24=q^3(a_1+a_2+a_3)$,

$\therefore q^3=\frac{24}{3}=8$,$\therefore q=2$.

4. C　设数列$\{a_n\}$的公差为d,由$a_4+a_5=24$,$S_6=48$,得$2a_1+7d=24$,$6a_1+15d=48$.

解得$d=4$.

5. D　$\because\{a_n\}$为等差数列,且$d>0$,

$\therefore\{a_n\}$为递增数列,故p_1正确;

又$(n+1)a_{n+1}-na_n=n(a_{n+1}-a_n)+a_{n+1}=dn+a_{n+1}=a_1+2dn$,

又$d>0$,$n\in\mathbf{N}_+$,但a_1有可能为负值,且$a_1+2dn<0$,故p_2不正确;

又$a_n+3nd=a_1+(4n-1)d$,为递增数列,$\therefore p_4$正确.

6. D　依题意,可取出钱的总数为

$a(1+p)^4+a(1+p)^3+a(1+p)^2+a(1+p)=\frac{a(1+p)[1-(1+p)^4]}{1-(1+p)}=\frac{a}{p}[(1+p)^5-(1+p)]$.

7. B　设数列$\{a_n\}$的公比为q,又$a_1=16$,则$a_4=16q^3$,$a_7=16q^6$.由题意得$a_4+a_7=\frac{9}{8}\times 2$,

即$16q^3+16q^6=\frac{9}{4}$,解得$q=\frac{1}{2}$.

$\therefore S_5=\frac{16\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^5\right]}{1-\frac{1}{2}}=31$.

8. D　$\because$正项数列$\{a_n\}$中,$a_1=1$,$a_2=2$,$2a_n^2=a_{n+1}^2+a_{n-1}^2$$(n\geqslant 2)$,

$\therefore a_{n+1}^2-a_n^2=a_n^2-a_{n-1}^2$,

$\therefore$数列$\{a_n^2\}$为等差数列,首项为1,

公差$d=a_2^2-a_1^2=3$,

$\therefore a_n^2=1+3(n-1)=3n-2$,

$\therefore a_6^2=3\times 6-2=16$,

$\therefore a_6=4$.

9. C　$\because$函数$f(x)=x^2+2bx$的图像过点(1,2),

$\therefore 2=1+2b$,$\therefore b=\frac{1}{2}$.$\therefore f(x)=x^2+x$.

$\therefore f(n)=n^2+n=n(n+1)$.

$\therefore\frac{1}{f(n)}=\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$.

$\therefore S_{2\ 017}=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\cdots+\frac{1}{2\ 017}-\frac{1}{2\ 018}=1-\frac{1}{2\ 018}=\frac{2\ 017}{2\ 018}$,$\therefore f(2\ 017)=\frac{2\ 018}{2\ 017}$.

10. B　$\because a_n+a_{n+1}=\frac{1}{2}$,$\therefore a_{n+1}+a_{n+2}=\frac{1}{2}$,

$\therefore a_n=a_{n+2}$.$\therefore$数列$\{a_n\}$的奇数项相等,偶数项也相等.$\therefore a_{21}=a_1=1$,

$\therefore S_{21}=(a_1+a_2)+(a_3+a_4)+\cdots+(a_{19}+a_{20})+a_{21}=\frac{1}{2}\times 10+1=6$.

11. 1

解析:由题意知,$(a_3+3)^2=(a_1+1)(a_5+5)$,

$(a_1+2d+3)^2=(a_1+1)(a_1+4d+5)$,$a_1^2+4d^2+9+4a_1d+6a_1+12d=a_1^2+4a_1d+5a_1+a_1+4d+5$,

$4d^2+8d+4=0$,即$(d+1)^2=0$,$d=-1$,

$\therefore q=\frac{a_3+3}{a_1+1}=\frac{a_1+1}{a_1+1}=1$.

12. 55

解析:$\because\{a_n\}$为等差数列,$\therefore S_7=7a_4=7$,$\therefore a_4=1$,

又$S_{15}=15a_8=75$,

$\therefore a_8=5$,又$a_8=a_4+4d$,$\therefore d=1$,

$\therefore a_n=a_4+(n-4)d=1+n-4=n-3$,

$\therefore\frac{S_n}{n}=\frac{n-5}{2}$,

$\therefore\left\{\frac{S_n}{n}\right\}$的前20项和$T_{20}=\frac{\left(-2+\frac{15}{2}\right)\times 20}{2}=55$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

13. -8

解析：设等比数列$\{a_n\}$的公比为 q，由

$\begin{cases}a_1+a_2=-1,\\ a_1-a_3=-3,\end{cases}$得$\begin{cases}a_1(1+q)=-1,\\ a_1(1-q^2)=-3.\end{cases}$∴$1-q=3$，

∴$q=-2$，$a_1=1$.

∴$a_4=(-2)^3=-8$.

14. 10

解析：由题意知 $a<0$，∴b，a，c 成等比数列，

∴$a^2=bc$，又 a，b，c 成等差数列，∴$2b=a+c$，

∴$2a^2=c(a+c)$，得$\frac{a}{c}=-\frac{1}{2}$，∴$a=-\frac{c}{2}$，$b=\frac{c}{4}$，

∴$\frac{a^2+c^2}{2b^2}=\frac{\frac{c^2}{4}+c^2}{2\times\frac{c^2}{16}}=10$.

15. ①②③

解析：由等差数列前 n 项和公式可知①③正确；

当等比数列的公比 $q=1$ 时，$S_n=na_1$，故④不正确；

由 $S_n=\frac{1}{2}(3a_n-1)$可知当 $n=1$ 时，$a_1=1$；

当 $n\geqslant 2$ 时，$a_n=\frac{1}{2}(3a_n-1-3a_{n-1}+1)$，得$\frac{a_n}{a_{n-1}}=3$，

∴数列$\{a_n\}$为等比数列，故②正确.

16. **解**：(1)设等差数列$\{a_n\}$的公差为 d.

由已知得$\begin{cases}a_1+d=4,\\ (a_1+3d)+(a_1+6d)=15.\end{cases}$

解得$\begin{cases}a_1=3,\\ d=1.\end{cases}$

所以 $a_n=a_1+(n-1)d=n+2$.

(2)由(1)可得 $b_n=2^n+n$.

所以 $b_1+b_2+b_3+\cdots+b_{10}=(2+1)+(2^2+2)+(2^3+3)+\cdots+(2^{10}+10)=(2+2^2+2^3+\cdots+2^{10})+(1+2+3+\cdots+10)=\frac{2(1-2^{10})}{1-2}+\frac{(1+10)\times 10}{2}=(2^{11}-2)+55=2^{11}+53=2\ 101$.

17. **解**：(1)由$-8a_1$，a_2，a_3，成等差数列，

得 $2a_2=-8a_1+a_3$.

所以 $a_1q^2-2a_1q-8a_1=0$，即 $q^2-2q-8=0$，

$(q-4)(q+2)=0$，解得 $q=4$ 或 $q=-2$.

因为 $q>0$，所以 $q=4$，

故通项公式 $a_n=2\times 4^{n-1}$，即 $a_n=2^{2n-1}$.

(2)由(1)知 $b_n=\log_2 2^{2n-1}=2n-1$，因此$\frac{1}{b_nb_{n+1}}=\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)$.

$T_n=\frac{1}{2}\left[\left(1-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{7}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)\right]=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2n+1}\right)=\frac{n}{2n+1}$.

18. **解**：(1)设公差为 d，公比为 q，

则 $a_2b_2=(3+d)q=12$，①

$S_3+b_2=3a_2+b_2=3(3+d)+q=20$，②

联立①②可得，$(3d+7)(d-3)=0$

∵$\{a_n\}$是单调递增的等差数列，$d>0$.

则 $d=3$，$q=2$，

∴$a_n=3+(n-1)\times 3=3n$，$b_n=2^{n-1}$.

(2)$b_n=2^{n-1}$，$c_n=n\cdot 2^{n-1}$，

∴$T_n=c_1+c_2+\cdots c_n$，$T_n=1\cdot 2^0+2\cdot 2^1+3\cdot 2^2+\cdots+n\cdot 2^{n-1}$，$2T_n=1\cdot 2^1+2\cdot 2^2+\cdots+(n-1)\cdot 2^{n-1}+n\cdot 2^n$，

两式相减可得，$-T_n=1\cdot 2^0+1\cdot 2^1+1\cdot 2^2+\cdots+1\cdot 2^{n-1}-n\cdot 2^n$，

∴$-T_n=\frac{1-2^n}{1-2}-n\cdot 2^n=2^n-1-n\cdot 2^n$，

∴$T_n=(n-1)\cdot 2^n+1$.

19. **解**：(1)由题意知数列$\{a_n\}$是公差为 2 的等差数列，又因为 $a_1=3$，所以 $a_n=2n+1$，

当 $n=1$ 时，$b_1=S_1=4$；

当 $n\geqslant 2$ 时，$b_n=S_n-S_{n-1}=(n^2+2n+1)-[(n-1)^2+2(n-1)+1]=2n+1$.

当 $n=1$ 时，$b_1=4$ 不适合上式，

所以，数列$\{b_n\}$的通项公式 $b_n=\begin{cases}4,(n=1),\\ 2n+1,(n\geqslant 2).\end{cases}$

(2)$n=1$ 时，$T_1=\frac{1}{b_1b_2}=\frac{1}{20}$，$n\geqslant 2$ 时，$\frac{1}{b_nb_{n+1}}=\frac{1}{(2n+1)(2n+3)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n+1}-\frac{1}{2n+3}\right)$，

$T_n=\frac{1}{20}+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{7}-\frac{1}{9}+\cdots+\frac{1}{2n+1}-\frac{1}{2n+3}\right)=\frac{1}{20}+\frac{n-1}{10n+15}=\frac{6n-1}{20(2n+3)}$.

$n=1$ 仍然适合上式.

综上，$T_n=\frac{6n-1}{20(2n+3)}$.

20. **解**：(1)由 $a_{n+1}+a_n=2n-44(n\in\mathbf{N}_+)$，$a_{n+2}+a_{n+1}=2(n+1)-44$.

∴$a_{n+2}-a_n=2$，又 $a_2+a_1=2-44$，∴$a_2=-19$.

同理得 $a_3=-21$，$a_4=-17$. 故 a_1，a_3，a_5，…是以 a_1 为首项、2 为公差的等差数列，a_2，a_4，a_6，…是以 a_2 为首项、2 为公差的等差数列.

从而 $a_n=\begin{cases}n-24(n\text{ 为奇数}),\\ n-21(n\text{ 为偶数}).\end{cases}$

(2)当 n 为偶数时，

$S_n=(a_1+a_2)+(a_3+a_4)+\cdots+(a_{n-1}+a_n)$

$=(2\times 1-44)+(2\times 3-44)+\cdots+[2\times(n-1)-44]$

$=2[1+3+\cdots+(n-1)]-\frac{n}{2}\cdot 44=\frac{n^2}{2}-22n$，

故当 $n=22$ 时，S_n 取得最小值-242.

当 n 为奇数时，

$S_n=a_1+(a_2+a_3)+(a_4+a_5)+\cdots+(a_{n-1}+a_n)$

$=a_1+(2\times 2-44)+\cdots+[2\times(n-1)-44]$

$=a_1+2[2+4+\cdots+(n-1)]+\frac{n-1}{2}\cdot(-44)$

$=-23+\frac{(n+1)(n-1)}{2}-22(n-1)=\frac{n^2}{2}-22n-\frac{3}{2}$.

故当 $n=21$ 或 $n=23$ 时，S_n 取得最小值-243.

综上所述：当 n 为偶数时，S_n 取得最小值为-242；当 n 为奇数时，S_n 取最小值为-243.

21. **解**：(1)∵$a_1=2$，$a_{n+1}-a_n=3\cdot 2^{n-1}$，

∴当 $n\geqslant 2$ 时，$a_n=a_1+(a_2-a_1)+(a_3-a_2)+\cdots+(a_n-a_{n-1})$

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

$=2+3\times2^0+3\times2^1+3\times2^2+\cdots+3\times2^{n-2}$

$=2+3(2^0+2^1+2^2+\cdots+2^{n-2})$

$=2+3\times\frac{1(1-2^{n-1})}{1-2}=3\times2^{n-1}-1(n\geqslant2)$,

经验证 $n=1$ 也成立.

$\therefore a_n=3\times2^{n-1}-1$.

(2)$b_n=n(a_n+1)=3n\times2^{n-1}$,

$\therefore S_n=3(1\cdot2^0+2\cdot2^1+3\cdot2^2+\cdots+n\cdot2^{n-1})$,

设 $x=1\cdot2^0+2\cdot2^1+3\cdot2^2+\cdots+n\cdot2^{n-1}$, ①

$2x=1\cdot2^1+2\cdot2^2+3\cdot2^3+\cdots+(n-1)2^{n-1}+n\cdot2^n$, ②

①－②得

$-x=1+2^1+2^2+2^3+\cdots+2^{n-1}-n\cdot2^n$,

$-x=1+\frac{2(1-2^{n-1})}{1-2}-n\cdot2^n$,

$-x=-1+(1-n)\cdot2^n$,

$\therefore x=(n-1)\cdot2^n+1$,

$\therefore S_n=3(n-1)\cdot2^n+3$.

阶段测试二

1. D　由正弦定理$\frac{a}{\sin A}=\frac{c}{\sin C}$,知 $a\cdot\sin C=c\cdot\sin A$.

2. C　$\because S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{3\sqrt{2}}{2}\sin A=\frac{3}{2}$,

$\therefore\sin A=\frac{\sqrt{2}}{2}$. 又 A 为$\triangle ABC$ 的内角,

$\therefore A=45°$或 $135°$.

3. C　由余弦定理 $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$,得 $22=b^2+9-2\times3\times b\times\frac{2}{5}$,即 $b^2-\frac{12}{5}b-13=0$,解得 $b=5$. 故选 C.

4. B　③只有一解,④无解,所以排除 A,C,D. 故选 B.

5. C　据正弦定理可得 $\sin A:\sin B:\sin C=a:b:c=5:11:13$,故设 $a=5k,b=11k,c=13k$,利用余弦定理可得 $\cos C=\frac{25k^2+121k^2-169k^2}{110k^2}<0$,即角 C 为钝角,故三角形为钝角三角形.

6. D　$\because(a^2+c^2-b^2)\tan B=\sqrt{3}ac$,$\therefore$由余弦定理得 $2ac\cdot\cos B\tan B=\sqrt{3}ac$.

$\therefore\sin B=\frac{\sqrt{3}}{2}$,$\therefore B=\frac{\pi}{3}$或$\frac{2\pi}{3}$.

7. C　由题意得,$c^2=a^2+b^2-2ab+6$,

又由余弦定理可知,$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C=a^2+b^2-ab$,

$\therefore-2ab+6=-ab$,即 $ab=6$.

$\therefore S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{3\sqrt{3}}{2}$.

8. B　由正弦定理及$\frac{a\sin A+b\sin B-c\sin C}{\sin A\sin B}=\frac{2\sqrt{3}}{3}c$,

得$\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\frac{\sqrt{3}}{3}\sin C$,$\therefore\cos C=\frac{\sqrt{3}}{3}\sin C$,

$\therefore\tan C=\sqrt{3}$. $\therefore C=60°$,$\therefore\cos C=\frac{1}{2}$.

又 $a=2\sqrt{3}$,$b\in[1,\sqrt{3}]$,

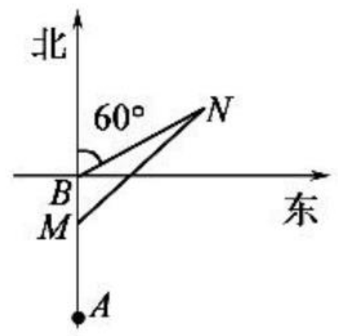
$\therefore c^2=a^2+b^2-2ab\cos C=12+b^2-2\sqrt{3}b$

$=(b-\sqrt{3})^2+9$. $\therefore$当 $b=\sqrt{3}$时,c 有最小值 3.

9. D　设 $AB=AD=x$,则 $BD=\frac{2}{\sqrt{3}}x$. 在$\triangle ADB$ 中,由余弦定理可得 $\cos\angle ADB=\frac{\sqrt{3}}{3}$,$\therefore\sin\angle ADB=\frac{\sqrt{6}}{3}$,

即 $\sin\angle CDB=\frac{\sqrt{6}}{3}$,在 $\triangle BDC$ 中,由正弦定理可得 $\sin C=\frac{\sqrt{6}}{6}$.

10. B　如图所示,设行驶 15 min 后,甲、乙两船分别到达 M、N 处.



由题意知$\angle MBN=180°-60°=120°$,$AM=8\times\frac{15}{60}=2$,$BN=12\times\frac{15}{60}=3$,$MB=AB-AM=3-2=1$.

在$\triangle BMN$ 中,由余弦定理得 $MN^2=MB^2+BN^2-2MB\cdot BN\cos120°=1+9-2\times1\times3\times\left(-\frac{1}{2}\right)=13$,

所以 $MN=\sqrt{13}$,即行驶 15 min 后,两船相距$\sqrt{13}$ km.

11. 5

解析:由余弦定理得 $c^2=a^2+b^2-2ab\cos C=1+4-2\times2\times\frac{1}{4}=4$,$\therefore c=2$,

$\therefore\triangle ABC$ 的周长为 $a+b+c=5$.

12. $\frac{1}{2}$

解析:$\because$在$\triangle ABC$ 中,BD 为$\angle ABC$ 的角平分线,$AB=3$,$BC=2$,$AC=\sqrt{7}$,

设$\angle ABD=\theta$,则$\angle ABC=2\theta$,

由余弦定理可得 $\cos2\theta=\frac{AB^2+BC^2-AC^2}{2AB\cdot BC}=\frac{9+4-7}{2\times3\times2}=\frac{1}{2}$,

$\therefore2\theta=\frac{\pi}{3}$,$\theta=\frac{\pi}{6}$,$\therefore\sin\angle ABD=\frac{1}{2}$.

13. $\frac{\pi}{4}$

解析:$\because1+\frac{\tan A}{\tan B}=\frac{\cos A\sin B+\sin A\cos B}{\cos A\sin B}=\frac{\sin(A+B)}{\cos A\sin B}=\frac{\sin C}{\cos A\sin B}=\frac{2c}{b}=\frac{2\sin C}{\sin B}$,

$\therefore\cos A=\frac{1}{2}$. $\therefore\sin A=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

由正弦定理$\frac{a}{\sin A}=\frac{c}{\sin C}$,得 $\sin C=\frac{c\cdot\sin A}{a}=\frac{2\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}}{2\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$. $\because c<a$,$\therefore C=\frac{\pi}{4}$.

14. $\left(2,\frac{4\sqrt{3}}{3}\right)$

解析:由题意及正弦定理得

$\sin B<\sin A=\frac{a\sin B}{b}=\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}a}{2}<1$,

即$\frac{\sqrt{3}}{2}<\frac{\sqrt{3}a}{4}<1$,解得 $2<a<\frac{4\sqrt{3}}{3}$.

即 x 的取值范围是$\left(2,\frac{4\sqrt{3}}{3}\right)$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

15. $\sqrt{3}$或 $2\sqrt{3}$

解析：由余弦定理得 $AC^2=AB^2+BC^2-2AB\cdot BC\cdot\cos B$，得 $BC=2$ 或 $BC=4$，

当 $BC=2$ 时，$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}AB\cdot BC\cdot\sin B=\frac{1}{2}\times 2\sqrt{3}\times 2\times\frac{1}{2}=\sqrt{3}$；

当 $BC=4$ 时，$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}AB\cdot BC\cdot\sin B=\frac{1}{2}\times 2\sqrt{3}\times 4\times\frac{1}{2}=2\sqrt{3}$.

16. **解**：(1) $\because\sin A+\sqrt{3}\cos A=0$，$\therefore\tan A=-\sqrt{3}$，$\therefore A=\frac{2\pi}{3}$.

在$\triangle ABC$中，由余弦定理 $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$ 及 $a=2\sqrt{7}$，$b=2$，

得 $28=4+c^2-4c\left(-\frac{1}{2}\right)$，即 $c^2+2c-24=0$.

解得 $c=4$.

(2) 由题设知 $\angle CAD=\frac{\pi}{2}$，$\therefore\angle BAD=\angle BAC-\angle CAD=\frac{\pi}{6}$. $\therefore\triangle ABD$ 面积与$\triangle ACD$面积的比值为 $\frac{\frac{1}{2}AB\cdot AD\cdot\sin\frac{\pi}{6}}{\frac{1}{2}AC\cdot AD}=1$，又 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}\times 4\times 2\sin\angle BAC=2\sqrt{3}$，$\therefore\triangle ABD$ 的面积为$\sqrt{3}$.

17. **解**：(1) $\because a\sin A+b\sin B-c\sin C=\frac{2\sqrt{5}}{5}a\sin B$，

$\therefore a^2+b^2-c^2=\frac{2\sqrt{5}}{5}ab$，

$\therefore\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\frac{\sqrt{5}}{5}$.

又 $\because A$、B、C 是$\triangle ABC$的内角，$\therefore\sin A=\frac{3\sqrt{10}}{10}$，$\sin C=\frac{2\sqrt{5}}{5}$.

$\therefore\cos(A+C)=\cos A\cos C-\sin A\sin C=\frac{\sqrt{10}}{10}\times\frac{\sqrt{5}}{5}-\frac{3\sqrt{10}}{10}\times\frac{2\sqrt{5}}{5}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$.

又 $\because A$、B、C 是$\triangle ABC$的内角，$\therefore 0<A+C<\pi$，

$\therefore A+C=\frac{3\pi}{4}$，$\therefore B=\pi-(A+C)=\frac{\pi}{4}$.

(2) $\because\frac{c}{\sin C}=\frac{b}{\sin B}$，$\therefore c=\frac{b}{\sin B}\times\sin C=4\sqrt{10}$.

$\therefore\triangle ABC$ 的面积 $S=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}\times 10\times 4\sqrt{10}\times\frac{3\sqrt{10}}{10}=60$.

18. **解**：(1) $\because S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{1}{2}ab\sin\frac{\pi}{3}=\sqrt{3}$，

$\therefore ab=4$.

又 $c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$，

$\therefore 4=a^2+b^2-2\times 4\times\frac{1}{2}$，即 $a^2+b^2=8$.

解得 $a=2$，$b=2$.

(2) $\because\sin C+\sin(B-A)=\sin 2A$，

$\therefore\sin(A+B)+\sin(B-A)=2\sin A\cos A$，

$\therefore\sin B\cos A=\sin A\cos A$，

即 $\cos A(\sin A-\sin B)=0$.

若 $\cos A=0$，则 $A=\frac{\pi}{2}$，$\therefore\triangle ABC$ 为直角三角形.

若 $\sin A=\sin B$，则 $A=B$，$\therefore\triangle ABC$ 为等腰三角形.

故$\triangle ABC$为直角三角形或等腰三角形.

19. **解**：在$\triangle ABD$中，由题意知，$\angle ADB=\angle BAD=30^\circ$，$\therefore AB=BD=1$. $\because\angle ABD=120^\circ$，

由正弦定理 $\frac{AB}{\sin\angle ADB}=\frac{AD}{\sin\angle ABD}$，解得 $AD=\sqrt{3}$ 千米，

在$\triangle ACD$中，由 $AC^2=AD^2+CD^2-2AD\cdot CD\cdot\cos 150^\circ$，

得 $9=3+CD^2+2\sqrt{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}CD$，即 $CD^2+3CD-6=0$，

$CD=\frac{\sqrt{33}-3}{2}$ 千米，

$BC=BD+CD=\frac{\sqrt{33}-1}{2}$ 千米，

两个小时小王和小李可徒步攀登 $1\ 250\times 2=2\ 500$ 米，即 2.5 千米，

而 $\frac{\sqrt{33}-1}{2}<\frac{\sqrt{36}-1}{2}=\frac{5}{2}=2.5$，

所以两位登山爱好者可以在两个小时内徒步登上山峰.

20. **解**：(1) $\because 2\sin(A-B)=a\sin A-b\sin B$，

$\therefore 2\sin A\cos B-2\cos A\sin B=a\sin A-b\sin B$，

由正弦定理有 $2a\cos B-2b\cos A=a^2-b^2$，

由余弦定理有 $2a\times\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}-2b\times\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=a^2-b^2$，

即 $\frac{2(a^2-b^2)}{c}=a^2-b^2$，

$\because a\neq b$，$\therefore c=2$.

(2) $\because\tan C=\frac{\sin C}{\cos C}=2$ 且 $\sin^2C+\cos^2C=1$，

$\therefore\sin C=\frac{2\sqrt{5}}{5}$，$\cos C=\frac{\sqrt{5}}{5}$.

$\because S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{1}{2}ab\times\frac{2\sqrt{5}}{5}=1$，$\therefore ab=\sqrt{5}$.

由余弦定理有 $\cos C=\frac{\sqrt{5}}{5}=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\frac{a^2+b^2-4}{2ab}$，

$\therefore a^2+b^2=6$.

$\therefore(a+b)^2=a^2+b^2+2ab=6+2\sqrt{5}$.

$\therefore a+b=\sqrt{5}+1$.

21. **解**：由题意知 $AB=5(3+\sqrt{3})$ 海里，

$\angle DBA=90^\circ-60^\circ=30^\circ$，$\angle DAB=90^\circ-45^\circ=45^\circ$，

$\therefore\angle ADB=180^\circ-(45^\circ+30^\circ)=105^\circ$，

在$\triangle DAB$中，由正弦定理得 $\frac{DB}{\sin\angle DAB}=\frac{AB}{\sin\angle ADB}$，

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

$\therefore DB=\dfrac{AB\cdot\sin\angle DAB}{\sin\angle ADB}=\dfrac{5(3+\sqrt{3})\cdot\sin45^\circ}{\sin105^\circ}=\dfrac{5(3+\sqrt{3})\cdot\sin45^\circ}{\sin45^\circ\cos60^\circ+\cos45^\circ\sin60^\circ}=\dfrac{5\sqrt{3}(\sqrt{3}+1)}{\dfrac{\sqrt{3}+1}{2}}=10\sqrt{3}$(海里),

又$\angle DBC=\angle DBA+\angle ABC=30^\circ+(90^\circ-60^\circ)=60^\circ$,$BC=20\sqrt{3}$(海里),

在$\triangle DBC$中,由余弦定理得

$CD^2=BD^2+BC^2-2BD\cdot BC\cdot\cos\angle DBC=300+1\ 200-2\times10\sqrt{3}\times20\sqrt{3}\times\dfrac{1}{2}=900$,

$\therefore CD=30$(海里),则需要的时间$t=\dfrac{30}{30}=1$(小时).

$\therefore$救援船到达D点需要1小时.

阶段测试三

1. B $\because\dfrac{x-2}{x}\leqslant1$,$\therefore\dfrac{x-2}{x}-1\leqslant0$,$\dfrac{x-2-x}{x}\leqslant0$,$\dfrac{-2}{x}\leqslant0$,$x>0$,即$U=\{x|x>0\}$,又$\because A=\{x|x\geqslant1\}$,$\therefore\complement_U A=\{x|0<x<1\}$.

2. C $\because y=\left(\dfrac{1}{2}\right)^x$在$\mathbf{R}$上是减函数,又$\because x>y>0$,

$\therefore\left(\dfrac{1}{2}\right)^x<\left(\dfrac{1}{2}\right)^y$,即$\left(\dfrac{1}{2}\right)^x-\left(\dfrac{1}{2}\right)^y<0$.

3. B 当$x<0$时,①不成立;由$a>b>c>0$得$\dfrac{1}{a}<\dfrac{1}{b}$,所以$\dfrac{c}{a}<\dfrac{c}{b}$成立,所以②恒成立;$\dfrac{a+m}{b+m}-\dfrac{a}{b}=\dfrac{m(b-a)}{b(b+m)}$,由$a,b,m>0$且$a<b$知$\dfrac{a+m}{b+m}-\dfrac{a}{b}>0$恒成立,故③恒成立,所以选B.

4. D $\because x,a,b,y$成等差数列,

$\therefore a+b=x+y$,又x,c,d,y成等比数列,

$\therefore cd=xy$,

$\therefore\dfrac{(a+b)^2}{cd}=\dfrac{(x+y)^2}{xy}=\dfrac{x^2+y^2}{xy}+2\geqslant4$,当且仅当$x=y$时等号成立.

5. B $\because3x+\dfrac{1}{x}\geqslant2\sqrt{3x\cdot\dfrac{1}{x}}=2\sqrt{3}$,当且仅当$x=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$时取等号,

$\therefore-3x-\dfrac{1}{x}\leqslant-2\sqrt{3}$,$3-3x-\dfrac{1}{x}\leqslant3-2\sqrt{3}$,即$y$的最大值是$3-2\sqrt{3}$.

6. C $\because-4<b<2$,$\therefore0\leqslant|b|<4$.$\therefore-4<-|b|\leqslant0$,又$\because1<a<3$,$\therefore-3<a-|b|<3$.

7. C $x+\dfrac{y}{4}=\left(x+\dfrac{y}{4}\right)\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{4}{y}\right)=2+\dfrac{y}{4x}+\dfrac{4x}{y}\geqslant2+2\sqrt{\dfrac{y}{4x}\cdot\dfrac{4x}{y}}=4$,当且仅当$x=2$,$y=8$时等号成立.

即$x+\dfrac{y}{4}$的最小值为4,由题意知,$m^2-3m>4$,$(m-4)(m+1)>0$,解得$m<-1$或$m>4$.

8. C $a\sqrt{1+b^2}=\dfrac{1}{2}\times(2a)\times\sqrt{1+b^2}\leqslant\dfrac{1}{2}\times\dfrac{(2a)^2+(\sqrt{1+b^2})^2}{2}=\dfrac{4a^2+b^2+1}{4}=\dfrac{5}{4}$,当且仅当$a=\dfrac{\sqrt{10}}{4}$,$b=\dfrac{\sqrt{6}}{2}$时等号成立.

9. B 解法一:取$a=-\dfrac{1}{2}$,则$A=1+a^2=\dfrac{5}{4}$,$B=1-a^2=\dfrac{3}{4}$,$C=\dfrac{1}{1+a}=2$,

$\therefore B<A<C$.

解法二:$\because-1<a<0$,$\therefore1+a>0$.

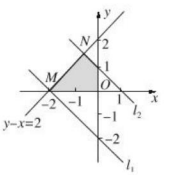
$\therefore A-B=(1+a^2)-(1-a^2)=2a^2>0$.

$\therefore A>B$.

又$C-A=\dfrac{1}{1+a}-(1+a^2)=\dfrac{1-(1+a)(1+a^2)}{1+a}=-\dfrac{a(a^2+a+1)}{1+a}>0$,$\therefore C>A$.

$\therefore C>A>B$.

10. D 作出区域A为$\triangle OMN$,当a从-2连续变化到1时,动直线从l_1变化到l_2扫过A中区域为阴影部分,易知$l_2\perp MN$,$\therefore$阴影部分面积$S=\dfrac{1}{2}\times2\times2-\dfrac{1}{4}=\dfrac{7}{4}$.故选D.

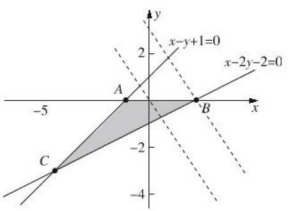


11. $\left(-\infty,-\dfrac{1}{2}\right)\cup(2,+\infty)$

解析:因式分解得$(2x+1)(x-2)>0$,$\therefore x<-\dfrac{1}{2}$或$x>2$.

12. 6

解析:根据题中所给的约束条件,画出其对应的可行域,如图所示:



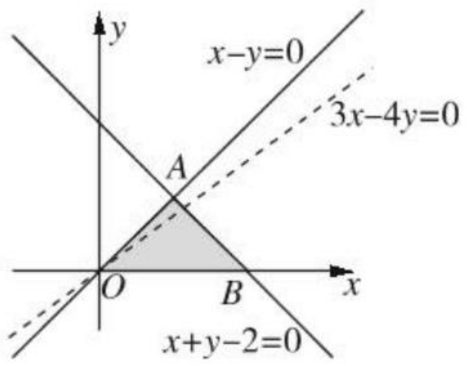
由$z=3x+2y$可得$y=-\dfrac{3}{2}x+\dfrac{1}{2}z$,画出直线$y=-\dfrac{3}{2}x$,将其上下移动,结合$\dfrac{z}{2}$的几何意义,可知当直线过点$B$时,$z$取得最大值,

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

由 $\begin{cases}x-2y-2=0,\\y=0,\end{cases}$ 解得 $B(2,0)$，此时 $z_{max}=3\times2+0=6$.

13. -1

解析：作出约束条件表示的可行域如图中阴影部分所示，作出直线 $l:3x-4y=0$，平移直线 l，当直线 $z=3x-4y$ 经过点 $A(1,1)$ 时，z 取得最小值，最小值为 $3-4=-1$.



14. $\frac{\pi}{3}$

解析：由 $2b\cos B=a\cos C+c\cos A$ 及正弦定理得 $2\sin B\cos B=\sin A\cos C+\sin C\cos A=\sin(A+C)=\sin B>0$，

$\therefore\cos B=\frac{1}{2}$. 又 $0<B<\pi$. $\therefore B=\frac{\pi}{3}$.

15. 30

解析：一年的总运费与总存储费用之和 $y=3\times\frac{600}{x}+2x=\frac{1\,800}{x}+2x\geqslant2\sqrt{\frac{1\,800}{x}\cdot2x}=120$，当且仅当 $\frac{1\,800}{x}=2x$ 即 $x=30$ 时等号成立.

16. **证明**：$\because a>0,b>0,c>0$，

$\therefore\frac{a^2}{b}+b\geqslant2\sqrt{\frac{a^2}{b}\cdot b}=2a$.

同理 $\frac{b^2}{c}+c\geqslant2b$，$\frac{c^2}{a}+a\geqslant2c$.

$\therefore\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a}+a+b+c\geqslant2(a+b+c)$.

$\therefore\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a}\geqslant a+b+c$.

又 $\because a+b+c=1$，

$\therefore\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a}\geqslant1$.

17. **解**：$\because|a+2|<2,\therefore-4<a<0$.

由 $(ax+1)(x-1)=0$，得 $x_1=1,x_2=-\frac{1}{a}$.

由 $1+\frac{1}{a}=\frac{a+1}{a}>0$，得 $a<-1$ 或 $a>0$.

$\therefore$ 当 $-4<a<-1$ 时不等式解集为 $\left(-\frac{1}{a},1\right)$，

当 $-1<a<0$ 时不等式解集为 $\left(1,-\frac{1}{a}\right)$，

当 $a=-1$ 时不等式解集为 $\varnothing$.

18. **解**：(1) $\because f(x)>k,\therefore\frac{2x}{x^2+6}>k$，

整理得 $kx^2-2x+6k<0$，$\because$ 不等式的解集为 $\{x|x<-3$ 或 $x>-2\}$，

$\therefore$ 方程 $kx^2-2x+6k=0$ 的两根是 $-3,-2$，

由根与系数的关系知，

$-3+(-2)=\frac{2}{k}$，

即 $k=-\frac{2}{5}$.

(2) $\because x>0,\therefore f(x)=\frac{2x}{x^2+6}=\frac{2}{x+\frac{6}{x}}\leqslant\frac{2}{2\sqrt{6}}=\frac{\sqrt{6}}{6}$，

当且仅当 $x=\sqrt{6}$ 时取等号；

又 $\because f(x)\leqslant t$ 对任意 $x>0$ 恒成立，

$\therefore t\geqslant\frac{\sqrt{6}}{6}$，

即 t 的取值范围是 $\left[\frac{\sqrt{6}}{6},+\infty\right)$.

19. **解**：(1)证明：$\frac{a^2}{x}+\frac{b^2}{y}-\frac{(a+b)^2}{x+y}$

$=\frac{a^2y(x+y)+b^2x(x+y)-xy(a+b)^2}{xy(x+y)}$

$=\frac{a^2y^2+b^2x^2-2abxy}{xy(x+y)}=\frac{(ay-bx)^2}{xy(x+y)}$.

因为 $a,b,x,y\in(0,+\infty)$，故 $\frac{(ay-bx)^2}{xy(x+y)}\geqslant0$，

故 $\frac{a^2}{x}+\frac{b^2}{y}\geqslant\frac{(a+b)^2}{x+y}$，当且仅当 $ay=bx$ 时等号成立.

(2)由(1)知 $f(x)=\frac{2^2}{2x}+\frac{3^2}{1-2x}\geqslant\frac{(2+3)^2}{2x+(1-2x)}=25$.

当且仅当 $2(1-2x)=3\cdot2x$，即当 $x=\frac{1}{5}$ 时，$f(x)$ 取到最小值 25.

20. **解**：(1)设隔热层厚度为 x cm，由题设，每年能源消耗费用为 $C(x)=\frac{k}{3x+5}$，

由 $C(0)=8$ 得 $k=40$，因此 $C(x)=\frac{40}{3x+5}$.

而建造费用 $C_1(x)=6x$.

故 $f(x)=20C(x)+C_1(x)=20\times\frac{40}{3x+5}+6x=\frac{800}{3x+5}+6x(0\leqslant x\leqslant10)$.

(2)由 $f(x)=2\left(\frac{400}{3x+5}+3x+5-5\right)\geqslant2(2\sqrt{400}-5)=70$，

当且仅当 $\frac{400}{3x+5}=3x+5$，

即 $x=5$ 时等号成立，得 $f(x)_{min}=70$，$\therefore$ 隔热层修建 5 cm 厚时，总费用 $f(x)$ 最小，最小值为 70 万元.

21. **解**：(1)若 $m=0$，显然 $-1<0$；

若 $m\neq0$，则 $\begin{cases}m<0,\\\Delta=m^2+4m<0,\end{cases}$ 即 $-4<m<0$.

所以 $-4<m\leqslant0$.

(2)要使 $f(x)<-m+5$ 在 $[1,3]$ 上恒成立，

即 $m\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}m-6<0$ 在 $[1,3]$ 上恒成立.

令 $g(x)=m\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}m-6,x\in[1,3]$，

当 $m>0$ 时，$g(x)$ 在 $[1,3]$ 上是增函数，

所以只需 $g(x)_{max}=g(3)<0$，即 $0<m<\frac{6}{7}$；

当 $m=0$ 时，$-6<0$ 恒成立；

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

当 $m<0$ 时，$g(x)$ 在 $[1,3]$ 上是减函数，
所以只需 $g(x)_{max}=g(1)<0$，即 $m-6<0$，
所以 $m<0$，

综上所述，m 的取值范围是 $m<\frac{6}{7}$.

阶段测试四

1. B　设数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d，则 $a_3+a_5=2a_4=10$，

$\therefore a_4=5$，又 $a_1=2$，$\therefore d=\frac{a_4-a_1}{4-1}=1$.

$\therefore a_7=a_1+6d=2+6=8$.

2. B　当 $x>0$ 时，不等式可化为 $x(1-2x)>0$，
得 $0<x<\frac{1}{2}$；
当 $x<0$ 时，不等式可化为 $x(2x-1)>0$，
解得 $x<0$ 或 $x>\frac{1}{2}$（舍），

故不等式的解集为 $(-\infty,0)\cup\left(0,\frac{1}{2}\right)$.

3. D　$\because$ 等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，$\therefore S_4$，S_8-S_4，$S_{12}-S_8$ 也成等比数列，设公比为 q.
$\because a_1+a_2+a_3+a_4=1=S_4$，$a_5+a_6+a_7+a_8=2=S_8-S_4$，则 $q=2$.
$\therefore a_9+a_{10}+a_{11}+a_{12}=4$，$a_{13}+a_{14}+a_{15}+a_{16}=8$，又 $2S_n=15$，$\therefore n=16$.

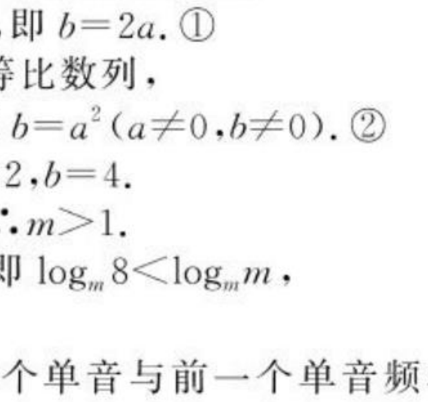
4. B　$\because a,b,c$ 成等比数列，$\therefore b^2=ac$. ①
又 $A=60°$，则由正弦定理得 $a=\frac{b\sin A}{\sin B}$，代入①得 $b^2=\frac{bc\sin A}{\sin B}$，则 $b=\frac{c\sin A}{\sin B}$.
$\therefore \frac{b\sin B}{c}=\sin A=\sin 60°=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

5. C　$\because a,b,a+b$ 成等差数列，
$\therefore 2b=2a+b$，即 $b=2a$. ①
$\because a,b,ab$ 成等比数列，
$\therefore b^2=a^2b$，即 $b=a^2(a\neq0,b\neq0)$. ②
由①②得 $a=2$，$b=4$.
$\because 0<\log_m 8$，$\therefore m>1$.
$\because \log_m 8<1$，即 $\log_m 8<\log_m m$，
$\therefore m>8$.

6. D　因为每一个单音与前一个单音频率比为 $\sqrt[12]{2}$，所以 $a_n=\sqrt[12]{2}a_{n-1}(n\geqslant2,n\in\mathbf{N}_+)$，又 $a_1=f$，则 $a_8=a_1q^7=(\sqrt[12]{2})^7f=\sqrt[12]{2^7}f$，故选 D.

7. C　$\because \log_m n=-1$，$m>0$ 且 $m\neq1$，$n>0$，$\therefore \frac{\lg n}{\lg m}=-1$，
则 $mn=1$，
$\therefore m+3n\geqslant2\sqrt{3mn}=2\sqrt{3}$，当且仅当 $m=3n$ 时等号成立.

8. D　作出可行域如图中阴影部分所示.



$\because a>0,b>0$，
$\therefore$ 由图知，当直线 $z=ax+by$ 过点 $A(1,1)$ 时，z 取得最大值 1，$\therefore a+b=1$. $\therefore \frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{a+b}{a}+\frac{a+b}{b}=2+\frac{b}{a}+\frac{a}{b}\geqslant2+2\sqrt{\frac{b}{a}\cdot\frac{a}{b}}=4$. 当且仅当 $a=b=\frac{1}{2}$ 时取等号.

9. C　$\because a,b$ 为正实数，且 $a+b=1$，
$\therefore \frac{4}{b}+\frac{9}{a}=\left(\frac{4}{b}+\frac{9}{a}\right)(a+b)=13+\frac{4a}{b}+\frac{9b}{a}\geqslant13+2\sqrt{\frac{4a}{b}\cdot\frac{9b}{a}}=25$（当且仅当 $\frac{4a}{b}=\frac{9b}{a}$，即 $a=\frac{3}{5}$，$b=\frac{2}{5}$ 时等号成立），
$\therefore \frac{4}{b}+\frac{9}{a}\geqslant25$，$\therefore \frac{1}{\frac{4}{b}+\frac{9}{a}}\leqslant\frac{1}{25}$，
即 $\frac{ab}{4a+9b}\leqslant\frac{1}{25}$.

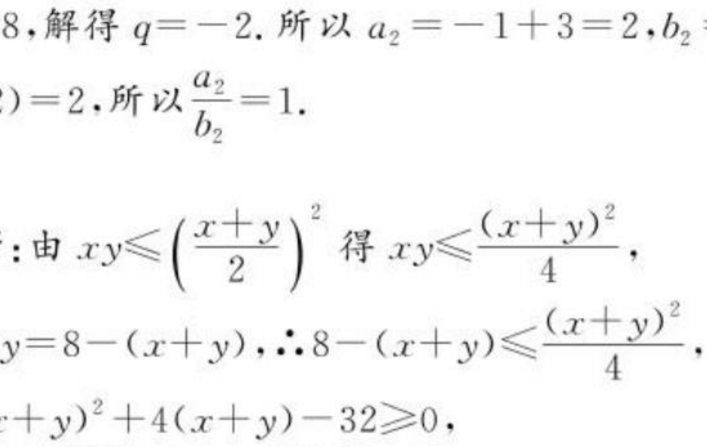
10. B　$\because x>0,y>0$，$\therefore xy=x+4y+5\geqslant4\sqrt{xy}+5$. 令 $\sqrt{xy}=t$，则 $t^2\geqslant4t-5$，即 $t^2-4t-5\geqslant0$. 解得 $t\geqslant5$ 或 $t\leqslant-1$（舍去），$\therefore \sqrt{xy}\geqslant5$. 由 $\begin{cases}xy=25,\\x=4y,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x=10,\\y=\frac{5}{2}.\end{cases}$ $\therefore x=10$，$y=\frac{5}{2}$.

11. 2
解析：由余弦定理可知 $c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$，
即 $3=1+a^2-a$，得 $a=2$ 或 $a=-1$（舍）.

12. 1
解析：设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d，等比数列 $\{b_n\}$ 的公比为 q，则 $a_4=-1+3d=8$，解得 $d=3$；$b_4=-1\cdot q^3=8$，解得 $q=-2$. 所以 $a_2=-1+3=2$，$b_2=-1\times(-2)=2$，所以 $\frac{a_2}{b_2}=1$.

13. 4
解析：由 $xy\leqslant\left(\frac{x+y}{2}\right)^2$ 得 $xy\leqslant\frac{(x+y)^2}{4}$，
又 $xy=8-(x+y)$，$\therefore 8-(x+y)\leqslant\frac{(x+y)^2}{4}$，
即 $(x+y)^2+4(x+y)-32\geqslant0$，
$(x+y+8)(x+y-4)\geqslant0$，
$x+y\geqslant4$ 或 $x+y\leqslant-8$（舍）.
$\therefore x+y$ 的最小值为 4.

14. 9
解析：不等式组表示的可行域是以 $A(5,4)$，$B(1,2)$，$C(5,0)$ 为顶点的三角形区域，如下图所示，目标函数 $z=x+y$ 的最大值必在顶点处取得，易知当 $x=5$，$y=4$ 时，$z_{max}=9$.



关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

15. $\frac{2n}{n+1}$

解析：设等差数列$\{a_n\}$的公差为d，则有$\begin{cases}a_3=a_1+2d=3,\\S_4=4a_1+6d=10,\end{cases}$解得$\begin{cases}a_1=1,\\d=1.\end{cases}$

$\therefore S_n=\frac{n(n+1)}{2}$. $\therefore \frac{1}{S_n}=\frac{2}{n(n+1)}=2\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$.

$\therefore \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{S_k}=2\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=2\left(1-\frac{n}{n+1}\right)=\frac{2n}{n+1}$.

16. **解**：(1)$\because 2\sin^2 C=3\sin A\sin B$，

$\therefore$由正弦定理得$2c^2=3ab$.

又$\because a+b=\sqrt{3}c$，$\therefore a^2+b^2+2ab=3c^2$.

由余弦定理得$\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$，

$\therefore \cos C=\frac{2c^2-2ab}{2ab}=\frac{3ab-2ab}{2ab}=\frac{1}{2}$.

$\therefore C=\frac{\pi}{3}$.

(2)$\because S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ab\sin C=\sqrt{3}$，

又$C=\frac{\pi}{3}$，$\therefore ab=4$.

又$c^2=\frac{3}{2}ab=6$，$\therefore c=\sqrt{6}$.

17. **解**：(1)由题意得$3(100-x)(1+2x\%)\geqslant 3\times 100$，即$x^2-50x\leqslant 0$，解得$0\leqslant x\leqslant 50$，

又因为$x>0$，所以$0<x\leqslant 50$.

(2)从事蔬菜加工的农民的年总收入为$3\left(a-\frac{3x}{50}\right)x$万元，从事蔬菜种植的农民的年总收入为$3(100-x)(1+2x\%)$万元，根据题意得$3\left(a-\frac{3x}{50}\right)x\leqslant 3(100-x)(1+2x\%)$恒成立，即$ax\leqslant 100+x+\frac{x^2}{25}$恒成立. 又$x>0$，所以$a\leqslant\frac{100}{x}+\frac{x}{25}+1$恒成立，

而$\frac{100}{x}+\frac{x}{25}+1\geqslant 5$(当且仅当$x=50$时取得等号)，所以$a$的最大值为5.

18. **解**：(1)设等比数列$\{a_n\}$的公比为q. 由$a_1=1$，$a_3=a_2+2$，可得$q^2-q-2=0$.

因为$q>0$，可得$q=2$，故$a_n=2^{n-1}$.

设等差数列$\{b_n\}$的公差为d，由$a_4=b_3+b_5$，可得$b_1+3d=4$. 由$a_5=b_4+2b_6$，

可得$3b_1+13d=16$，从而$b_1=1$，$d=1$，故$b_n=n$.

所以，数列$\{a_n\}$的通项公式为$a_n=2^{n-1}$，数列$\{b_n\}$的通项公式为$b_n=n$.

(2)由(1)，有$S_n=\frac{1-2^n}{1-2}=2^n-1$，故

$T_n=\sum_{k=1}^{n}(2^k-1)=\sum_{k=1}^{n}2^k-n=\frac{2\times(1-2^n)}{1-2}-n=2^{n+1}-n-2$.

19. **解**：(1)由正弦定理，可得$\sin A\cos B+\sin B\cos A=2\sin C\cos C$，

$\therefore \sin(A+B)=2\sin C\cos C$，

$\therefore \sin C=2\sin C\cos C$，又$\because \sin C\neq 0$，

$\therefore \cos C=\frac{1}{2}$，故$C=60°$.

(2)由已知$S=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{\sqrt{3}}{4}ab=2\sqrt{3}$，所以$ab=8$，

由余弦定理$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$，$\therefore c^2\geqslant 2ab-2ab\cos C\Rightarrow c^2\geqslant 8$，

$\therefore c\geqslant 2\sqrt{2}$(当且仅当$a=b$时取等号).

$\therefore c$的最小值为$2\sqrt{2}$.

20. **解**：(1)设引进该设备x年后开始盈利，盈利额为y元.

则$y=50x-98-\left[12x+\frac{x(x-1)}{2}\times 4\right]=-2x^2+40x-98$.

令$y>0$，得$10-\sqrt{51}<x<10+\sqrt{51}$.

又$x\in\mathbf{N}_+$，所以$3\leqslant x\leqslant 17$，

即引进该设备三年后开始盈利；

(2)对于第一种方案，年平均盈利为

$u=\frac{y}{x}=-2x-\frac{98}{x}+40\leqslant -2\sqrt{2x\times\frac{98}{x}}+40=12$.

当且仅当$2x=\frac{98}{x}$，即$x=7$时年平均利润最大，共盈利$12\times 7+26=110$(万元)；

对于第二种处理方案，盈利总额$y=-2(x-10)^2+102$，当$x=10$时，取得最大值102，即经过10年盈利总额最大，共计盈利$102+8=110$(万元).

两种方案获利相等，但由于第二种方案时间长，所以采用方案一合算.

21. **解**：(1)$\because a_{n+1}=2S_n+1(n\in\mathbf{N}^*)$，①

$\therefore n\geqslant 2$时，$a_n=2S_{n-1}+1$. ②

①－②得$a_{n+1}=3a_n(n\geqslant 2)$.

$\therefore \frac{a_{n+1}}{a_n}=3$. 又$a_1=1$，$a_2=3$，$\therefore \frac{a_2}{a_1}=3$，$\therefore a_n=3^{n-1}$.

$\because b_3-b_1=2d=6$，$\therefore d=3$，$\therefore b_n=3+(n-3)\times 3=3n-6$.

(2)由(1)知，数列$\{a_n\}$是等比数列，设其公比为q，则$S_n=\frac{a_1(1-q^n)}{1-q}=\frac{1-3^n}{1-3}=\frac{3^n-1}{2}$，

$\therefore \left(\frac{3^n-1}{2}+\frac{1}{2}\right)k\geqslant 3n-6$对$n\in\mathbf{N}^*$恒成立，即$k\geqslant\frac{6(n-2)}{3^n}$对$n\in\mathbf{N}^*$恒成立.

令$c_n=\frac{n-2}{3^n}$，则$c_n-c_{n-1}=\frac{n-2}{3^n}-\frac{n-3}{3^{n-1}}=\frac{-2n+7}{3^n}$.

$\therefore$当$n\leqslant 3$时，$c_n>c_{n-1}$；当$n\geqslant 4$时，$c_n<c_{n-1}$.

$\therefore (c_n)_{\max}=c_3=\frac{1}{27}$.

$\therefore k\geqslant\frac{2}{9}$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

责任编辑 李 莉 阴耀华
美术编辑 李 欣
封面设计 欣 羽

45 分钟
课时作业与单元测试

45FENZHONG KESHIZUOYEYUDANYUANCESHI SHUXUE

丛书科目

语文 数学 英语 物理 化学 生物 历史 地理 思想政治

同学们，你想了解丛书的更多信息吗？详情请登录 http://www.dfjc100.com

※ 各科配有教师用书及教学课件光盘 (word 文档可自主编辑)，英语配有原声磁带 / MP3 光盘。

左手骄子之路练习题，右手阿凡题答疑

扫码下载APP

拍照搜题，秒回解析，火箭速度提升学习效率

随时随地老师在线答疑，看得懂，学得会，听得见

积累错题本，问题不过夜，养成学习好习惯



手机扫一扫
获取配套学习资源

ISBN 978-7-202-08081-8
9 787202 080818
定价：35.00 元

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料