目 录

(正文)(答案)

第二十一章 一元二次方程

21.1 一元二次方程 …… 刷基础 刷提升 (1)(D1)
21.2 解一元二次方程 …… (3)(D1)
21.2.1 配方法 …… (3)(D1)
课时1 直接开平方法 …… 刷基础 (3)(D1)
课时2 配方法 …… 刷基础 刷提升 (4)(D2)
21.2.2 公式法 …… (6)(D3)
课时1 一元二次方程根的判别式 …… 刷基础 (6)(D3)
课时2 公式法解一元二次方程 …… 刷基础 刷提升 (7)(D4)
21.2.3 因式分解法 …… 刷基础 刷提升 (9)(D4)
*21.2.4 一元二次方程的根与系数的关系 …… 刷基础 (11)(D6)
21.1~21.2 综合训练 …… 刷综合 刷中考 (12)(D6)
▶▶ 专题 一元二次方程的解法 …… 刷难关 (14)(D7)
21.3 实际问题与一元二次方程 …… (15)(D8)
课时1 传播问题和数字问题 …… 刷基础 (15)(D8)
课时2 变化率问题和利润问题 …… 刷基础 (16)(D8)
课时3 几何图形面积问题 …… 刷基础 (17)(D9)
21.3 综合训练 …… 刷综合 刷中考 (18)(D9)
全章综合训练 …… 刷章测 刷中考 (20)(D10)

第二十二章 二次函数

22.1 二次函数的图象和性质 …… (22)(D11)
22.1.1 二次函数 …… 刷基础 (22)(D11)
22.1.2 二次函数 $y=ax^2$ 的图象和性质 …… 刷基础 (23)(D11)
22.1.3 二次函数 $y=a(x-h)^2+k$ 的图象和性质 …… (24)(D12)
课时1 二次函数 $y=ax^2+k$ 的图象和性质 …… 刷基础 刷提升 (24)(D12)
课时2 二次函数 $y=a(x-h)^2$ 的图象和性质 …… 刷基础 (26)(D13)
课时3 二次函数 $y=a(x-h)^2+k$ 的图象和性质 …… 刷基础 刷提升 (27)(D13)
22.1.4 二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图象和性质 …… (29)(D15)
课时1 二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图象和性质 …… 刷基础 刷提升 (29)(D15)
课时2 用待定系数法求二次函数的解析式 …… 刷基础 刷提升 (31)(D16)
22.1 综合训练 …… 刷综合 刷中考 (33)(D17)
22.2 二次函数与一元二次方程 …… 刷基础 刷提升 (35)(D18)
▶▶ 专题 二次函数的综合 …… 刷难关 (37)(D20)
22.3 实际问题与二次函数 …… (39)(D21)
课时1 几何图形问题 …… 刷基础 (39)(D21)
课时2 销售利润问题 …… 刷提升 (40)(D21)
课时3 抛物线形实际问题 …… 刷基础 (41)(D22)
22.3 综合训练 …… 刷综合 刷中考 (42)(D22)
全章综合训练 …… 刷章测 (45)(D24)

目 录

第二十三章 旋转

23.1 图形的旋转 …… 刷基础 刷提升 (47)(D25)
23.2 中心对称 …… (49)(D26)
23.2.1 中心对称 …… 刷基础 (49)(D26)
23.2.2 中心对称图形 …… 刷基础 (50)(D27)
23.2.3 关于原点对称的点的坐标 …… 刷基础 (51)(D27)
23.1 ~ 23.2 综合训练 …… 刷综合 刷中考 (52)(D27)
23.3 课题学习 图案设计 …… 刷基础 (54)(D29)
▶▶ 专题 与三种特殊角度的旋转有关的计算 …… 刷难关 (55)(D29)
全章综合训练 …… 刷章测 (56)(D30)

第二十四章 圆

24.1 圆的有关性质 …… (58)(D31)
24.1.1 圆 …… 刷基础 (58)(D31)
24.1.2 垂直于弦的直径 …… 刷基础 刷提升 (59)(D31)
24.1.3 弧、弦、圆心角 …… 刷基础 刷提升 (61)(D33)
24.1.4 圆周角 …… 刷基础 刷提升 (63)(D34)
24.1 综合训练 …… 刷综合 刷中考 (65)(D35)
24.2 点和圆、直线和圆的位置关系 …… (67)(D36)
24.2.1 点和圆的位置关系 …… 刷基础 (67)(D36)
24.2.2 直线和圆的位置关系 …… (68)(D37)
课时 1 直线和圆的位置关系 …… 刷基础 (68)(D37)
课时 2 切线的判定和性质 …… 刷基础 刷提升 (69)(D38)
课时 3 切线长定理及三角形的内切圆 …… 刷基础 刷提升 (71)(D39)
24.2 综合训练 …… 刷综合 刷中考 (73)(D40)
▶▶ 专题 1 圆的切线的判定 …… 刷难关 (75)(D42)
24.3 正多边形和圆 …… 刷基础 刷提升 (76)(D42)
24.4 弧长和扇形面积 …… (78)(D43)
课时 1 弧长和扇形面积 …… 刷基础 刷提升 (78)(D43)
课时 2 圆锥的侧面积和全面积 …… 刷基础 (80)(D45)
▶▶ 专题 2 不规则图形面积的求法 …… 刷难关 (81)(D45)
24.3 ~ 24.4 综合训练 …… 刷综合 刷中考 (82)(D46)
全章综合训练 …… 刷章测 (84)(D47)

第二十五章 概率初步

25.1 随机事件与概率 …… (86)(D49)
25.1.1 随机事件 …… 刷基础 (86)(D49)
25.1.2 概率 …… 刷基础 (87)(D49)
25.2 用列举法求概率 …… (88)(D50)
课时 1 用列表法求概率 …… 刷基础 刷提升 (88)(D50)
课时 2 用画树状图法求概率 …… 刷基础 刷提升 (90)(D51)
25.3 用频率估计概率 …… 刷基础 (92)(D53)
全章综合训练 …… 刷章测 刷中考 (93)(D53)

▶▶ 期末综合测试 …… 刷速度 (95)(D54)

第二十一章 一元二次方程

21.1 一元二次方程

刷基础

▶答案 D1

题型1 一元二次方程的定义

1 [2019 江苏宜兴校级月考]下列方程是一元二次方程的是 ( )

A. $ax^2+bx+c=0$　　B. $x^2-y+1=0$

C. $x^2-\frac{1}{x}-2=0$　　D. $(x-1)(x+2)=1-x$

2 方程$(m-2)x^2+3mx+1=0$是关于x的一元二次方程,则 ( )

A. $m\neq\pm2$　　B. $m=2$

C. $m=-2$　　D. $m\neq2$

3 若关于x的方程$(a+3)x^{|a|-1}-3x+2=0$是一元二次方程,则a的值为_____.

4 若关于x的方程$(m-1)x^{m^2+1}-3x+2=0$是一元二次方程,则此一元二次方程是_____.

题型2 一元二次方程的一般形式

5 [2019 安徽宣城期中]方程$2x^2-6x-5=0$的二次项系数、一次项系数、常数项分别为 ( )

A. 6,2,5　　B. 2,−6,5

C. 2,−6,−5　　D. −2,6,5

6 一元二次方程$(x+3)(x-3)=2x$化为一般形式,二次项系数为_____,一次项系数为_____,常数项为_____.

题型3 一元二次方程的根(解)

7 [2019 天津宁河区期中]$x=2$不是下列哪一个方程的解 ( )

A. $3(x-2)=0$　　B. $2x^2-3x=2$

C. $(x-2)(x+2)=0$　　D. $x^2-x+2=0$

8 [2019 山东庆云期中]如果2是一元二次方程$x^2-3x+k=0$的一个根,则常数k的值为 ( )

A. 1　　B. 2

C. −1　　D. −2

9 若一元二次方程$ax^2-bx-2\,018=0$有一根为−1,则$a+b=$_____.

题型4 建立一元二次方程模型

10 [2019 天津红桥区月考]某班学生毕业时都将自己的照片向全班其他学生各送一张以作留念,全班共送出1 056张照片.如果全班有x名同学,根据题意,列出的方程为 ( )

A. $x(x+1)=1\,056$

B. $x(x-1)=1\,056\times2$

C. $x(x-1)=1\,056$

D. $2x(x+1)=1\,056$

11 某市"桃花节"观赏人数逐年增加,据有关部门统计,2017年约为20万人次,2019年约为28.8万人次.设观赏人数年均增长率为x,则下列方程中正确的是 ( )

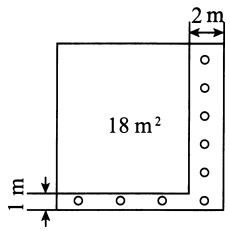
A. $20(1+2x)=28.8$

B. $28.8(1+x)^2=20$

C. $20(1+x)^2=28.8$

D. $20+20(1+x)+20(1+x)^2=28.8$

12 公园有一块正方形的空地,后来在这块空地上划出部分区域栽种鲜花(如图),原空地一边减少了1 m,另一边减少了2 m,剩余空地的面积为18 m^2.设原正方形空地的边长为x m,则可列方程为 ( )



A. $(x+1)(x+2)=18$　　B. $x^2-3x+16=0$

C. $(x-1)(x-2)=18$　　D. $x^2+3x+16=0$

刷易错

易错点1 已知方程求字母系数时,忽略二次项系数不为0导致出错

13 [2018 湖北模拟]关于x的一元二次方程$(m-1)x^2+2x+|m|-1=0$,常数项为0,则m的值等于 ( )

A. 1　　B. −1

C. 1或−1　　D. 0

易错点2 确定各项时未化为一般形式导致出错

14 关于x的一元二次方程$x^2+(2a-1)x+5-a=ax+1$的一次项系数为4,则常数项为_____.

刷提升

▶答案 D1

1 下面关于 x 的方程中①$ax^2+bx+c=0$;②$3(x-9)^2-(x+1)^2=1$;③$x^2+\frac{1}{x}+5=0$;④$x^2-2+5x^3-6=0$;⑤$3x^2=3(x-2)^2$;⑥$12x-10=0$ 是一元二次方程的个数是 (　　)

A. 1　　B. 2

C. 3　　D. 4

2 把一块长与宽之比为 2∶1 的铁皮的四角各剪去一个边长为 10 厘米的小正方形,折起四边,可以做成一个无盖的盒子,如果这个盒子的容积是 1 500 立方厘米,设铁皮的宽为 x 厘米,则正确的方程是 (　　)

A. $(2x-20)(x-20)=1\ 500$

B. $10(2x-10)(x-10)=1\ 500$

C. $10(2x-20)(x-20)=1\ 500$

D. $10(x-10)(x-20)=1\ 500$

3 [2019 贵州桐梓期中]m 是方程 $x^2+x-1=0$ 的根,则式子 $m^3+2m^2+2\ 018$ 的值为 (　　)

A. 2 017　　B. 2 018

C. 2 019　　D. 2 020

4 [2019 湖北武汉武昌区期中]已知 m,n 是方程 $x^2-2x-1=0$ 的两个根,则 $(2m^2-4m-1)(3n^2-6n+2)$ 的值等于 (　　)

A. 4　　B. 5

C. 6　　D. 7

5 [2019 江苏镇江期中]定义新运算:m,n 是实数,$m*n=m(2n-1)$. 若 m,n 是方程 $2x^2-x+k=0(k<0)$ 的两个根,则 $m*m-n*n=$ _____.

6 [2018 山东临沂兰山区二模]已知 a 是方程 $2x^2+2x-3=0$ 的一个根,则 $\frac{2}{a^2-1}-\frac{1}{a^2-a}=$ _____.

7 已知 $x=-1$ 是方程 $ax^2+bx+c=0(b\neq0)$ 的根,则 $\sqrt{\frac{a}{b}+\frac{c}{b}}=$ _____.

8 [2018 广西来宾期末]已知关于 x 的一元二次方程 $(a+c)x^2+2bx+(a-c)=0$,其中 a,b,c 分别为 $\triangle ABC$ 三边的长. 如果 $x=-1$ 是方程的根,则 $\triangle ABC$ 是_____三角形.

9 已知 m 是方程 $x^2-x-2=0$ 的一个实数根,求代数式 $(m^2-m)\left(m-\frac{2}{m}+1\right)$ 的值.

刷素养

10 [难]阅读下列材料:

(1)已知关于 x 的方程 $x^2-3x+1=0(x\neq0)$,将方程两边同时乘 $\frac{1}{x}$ 得 $x-3+\frac{1}{x}=0$ 即 $x+\frac{1}{x}=3$,$\left(x+\frac{1}{x}\right)^2=x^2+\frac{1}{x^2}+2\cdot x\cdot\frac{1}{x}=x^2+\frac{1}{x^2}+2$,$x^2+\frac{1}{x^2}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2=3^2-2=7$.

(2)$a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$;$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$.

根据以上材料,解答下列问题:

(1)$x^2-4x+1=0(x\neq0)$,则 $x+\frac{1}{x}=$ _____,$x^2+\frac{1}{x^2}=$ _____,$x^4+\frac{1}{x^4}=$ _____;

(2)$2x^2-7x+2=0(x\neq0)$,求 $x^3+\frac{1}{x^3}$ 的值.

21.2　解一元二次方程

21.2.1　配方法

课时1　直接开平方法

刷基础

▸答案 D1

题型1　解形如 $x^2=p(p\geqslant 0)$ 的方程

1 [2019 天津宁河区期中]若一元二次方程 $x^2=m$ 有解，则 m 的取值为（　　）

A. 正数　　B. 非负数

C. 一切实数　　D. 零

2 一元二次方程 $25x^2-169=0$ 的解是（　　）

A. $x=\frac{13}{5}$　　B. $x=\frac{5}{13}$

C. $x_1=\frac{13}{5}$，$x_2=-\frac{13}{5}$　　D. $x_1=\frac{5}{13}$，$x_2=-\frac{5}{13}$

3 如果 $x=-3$ 是一元二次方程 $ax^2=c$ 的一个根，那么该方程的另一个根是（　　）

A. 3　　B. -3　　C. 0　　D. 1

4 若代数式 $3x^2-6$ 的值为 21，则 x 的值为_____.

5 解方程：(1)$2x^2-98=0$；　(2)$2x^2+3=-2x^2+4$.

题型2　解形如 $(mx+n)^2=p(p\geqslant 0)$ 的方程

6 若方程 $(x-4)^2=a$ 有实数解，则 a 的取值范围是（　　）

A. $a\leqslant 0$　　B. $a\geqslant 0$

C. $a>0$　　D. 无法确定

7 如果多项式 $(2x-1)^2$ 的值为 9，则 x 的值为（　　）

A. 2　　B. 2 或 -2

C. -1　　D. 2 或 -1

8 方程 $4(2x-1)^2-25(x+1)^2=0$ 的解为（　　）

A. $x_1=x_2=-7$　　B. $x_1=-7$，$x_2=-\frac{1}{3}$

C. $x_1=\frac{1}{3}$，$x_2=7$　　D. $x_1=-7$，$x_2=\frac{1}{3}$

9 若关于 x 的方程 $(ax-1)^2-16=0$ 的一个根是 2，则 a 的值为（　　）

A. $\frac{5}{2}$　　B. $-\frac{3}{2}$

C. $-\frac{5}{2}$ 或 $\frac{3}{2}$　　D. $\frac{5}{2}$ 或 $-\frac{3}{2}$

10 已知一元二次方程 $(x-3)^2=1$ 的两个解恰好分别是等腰三角形 ABC 的底边长和腰长，则 $\triangle ABC$ 的周长为（　　）

A. 10　　B. 10 或 8　　C. 9　　D. 8

11 如果 $(2a+2b+1)(2a+2b-1)=63$，那么 $a+b$ 的值为_____.

12 [2019 江西临川一中月考]已知 $(a+6)^2+\sqrt{b^2-2b-3}=0$，则 $2b^2-4b-a$ 的值为_____.

13 解方程：(1)$9(3x-2)^2=64$；

(2)$(x-4)^2=(5-2x)^2$.

课时2　配方法

刷基础

▶答案 D2

题型1　二次三项式的配方

1 若 $x^2-24x+m^2$ 是一个完全平方式，则 m 的值为（　　）

A. 12　　B. -12　　C. ±12　　D. 以上都不对

2 将多项式 $2x^2-6x+9$ 配方成 $m(x-h)^2+k$ 的形式为_____.

3 用适当的正数填空：

(1) x^2-4x+_____$=(x-$_____$)^2$；

(2) x^2-_____$x+16=(x-$_____$)^2$；

(3) $x^2+3x+\frac{9}{4}=(x+$_____$)^2$；

(4) $x^2-\frac{2}{5}x+$_____$=(x-$_____$)^2$.

题型2　配方法解一元二次方程

4 用配方法解方程 $x^2-8x+5=0$，正确的变形为（　　）

A. $(x-6)^2=11$　　B. $(x-4)^2=11$

C. $(x-4)^2=-11$　　D. 以上都不对

5 用配方法解下列方程，其中应在方程的左右两边同时加上4的是（　　）

A. $x^2-2x=5$　　B. $x^2+4x=5$

C. $x^2+2x=5$　　D. $2x^2-4x=5$

6 用配方法解一元二次方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq0)$，此方程可变形为（　　）

A. $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2}$

B. $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{4ac-b^2}{4a^2}$

C. $\left(x-\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2}$

D. $\left(x-\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{4ac-b^2}{4a^2}$

7 方程 $x^2+2x+1=0$ 的根是（　　）

A. $x_1=x_2=1$　　B. $x_1=x_2=-1$

C. $x_2=-1,x_2=1$　　D. 无实根

8 一元二次方程 $x^2+3=2\sqrt{3}x$ 的解是_____.

9 当 $x=$_____时，代数式 $x^2-8x+12$ 的值是 -4.

10 将一元二次方程 $x^2-6x+4=0$ 化成 $(x+a)^2=2b$ 的形式，则 $a=$_____，$b=$_____.

11 [2019陕西西安碑林区校级月考]将一元二次方程 $x^2-6x+1=0$ 化成 $(x-a)^2=b$ 的形式，则 b 的值为_____.

12 [2019江苏南京秦淮区期中]关于 x 的一元二次方程 $ax^2+bx+c=0(a,b,c$ 是常数，$a\neq0)$ 配方后为 $(x+1)^2=d(d$ 为常数)，则 $\frac{b}{2a}=$_____.

13 用配方法解下列方程：

(1) $x^2-2x=5$；　　(2) $x^2-\frac{2}{3}x+1=0$；

(3) $2x^2-3x-6=0$；　　(4) $\frac{2}{3}x^2+\frac{1}{3}x-2=0$.

刷易错

易错点　在配方时忽视等式的性质而致错

14 用配方法解方程：$2x^2-4x-6=0$.

念念不忘，必有回响。提一壶酒，点一盏灯，听一场雨。有雨就有痕，有灯就有人，有酒就有魂。

刷提升

▶答案 D2

1 用配方法解下列方程时，配方有误的是　（　）

A. $x^2-2x-99=0$ 化为 $(x-1)^2=100$

B. $x^2+8x+9=0$ 化为 $(x+4)^2=25$

C. $2t^2-7t-4=0$ 化为 $\left(t-\frac{7}{4}\right)^2=\frac{81}{16}$

D. $3x^2-4x-2=0$ 化为 $\left(x-\frac{2}{3}\right)^2=\frac{10}{9}$

2 把一元二次方程 $x^2-6x+4=0$ 化成 $(x+n)^2=m$ 的形式时，$m+n$ 的值为　（　）

A. 8　　B. 6　　C. 3　　D. 2

3 [2019 浙江宁波校级月考]用配方法解方程 $2x^2-x-1=0$，变形结果正确的是　（　）

A. $\left(x-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{3}{4}$　　B. $\left(x-\frac{1}{4}\right)^2=\frac{3}{4}$

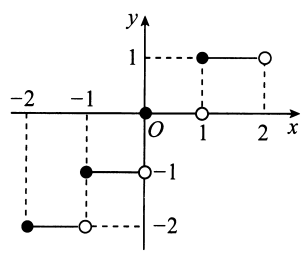
C. $\left(x-\frac{1}{4}\right)^2=\frac{17}{16}$　　D. $\left(x-\frac{1}{4}\right)^2=\frac{9}{16}$

4 [2019 河北唐山期中]若方程 $4x^2-(m-2)x+1=0$ 的左边是一个完全平方式，则 m 等于　（　）

A. -2　　B. -2 或 6

C. -2 或 -6　　D. 2 或 -6

5 定义 $[x]$ 为不大于实数 x 的最大整数，如 $[1.8]=1$，$[-1.4]=-2$，$[-3]=-3$. 函数 $y=[x]$（$-2\leqslant x<2$）的图象如图所示，则方程 $[x]=\frac{1}{2}x^2$ 的解为（　）



A. 0 或 $\sqrt{2}$　　B. 0 或 2

C. 1 或 $-\sqrt{2}$　　D. $\sqrt{2}$ 或 $-\sqrt{2}$

6 若一元二次方程 $4x^2+12x-1\ 147=0$ 的两根为 a,b，且 $a>b$，则 $3a+b$ 的值为　（　）

A. 22　　B. 28　　C. 34　　D. 40

7 用配方法解下列方程：

（1）$-3x^2+4x+1=0$；　　（3）$3y^2-6y+2=0$；

（3）$x^2+2x-399=0$；　　（4）$(x-1)(x-3)=8$.

8 已知实数 x 满足 $x^2+\frac{1}{x^2}-3x-\frac{3}{x}-8=0$，求 $x+\frac{1}{x}$ 的值.

9 若 a,b,c 是 $\triangle ABC$ 的三边长，且满足 $a^2+b^2+c^2-6a-8b-10c+50=0$.

（1）求 a,b,c 的值；

（2）请判断 $\triangle ABC$ 的形状.

刷素养

10 先阅读理解下面的例题，再按要求解答下列问题.

求代数式 y^2+4y+8 的最小值.

解：$y^2+4y+8=y^2+4y+4+4=(y+2)^2+4$.

$\because (y+2)^2\geqslant 0$，

$\therefore (y+2)^2+4\geqslant 4$，

$\therefore y^2+4y+8$ 的最小值是 4.

（1）求代数式 m^2+m+1 的最小值；

（2）求代数式 $4-x^2+2x$ 的最大值.

21.2.2　公式法

课时1　一元二次方程根的判别式

刷基础

▶答案 D3

题型1　一元二次方程根的判别式

1 一元二次方程 $x^2-4x+2=0$ 中，b^2-4ac 的值为（　　）

A. 12　　B. 8　　C. -8　　D. -12

2 若关于 x 的一元二次方程 $2x^2-4x+m=0$ 的根的判别式的值为 4，则 m 的值为_____.

题型2　应用根的判别式判断方程根的情况

3 [2018 上海中考]下列对一元二次方程 $x^2+x-3=0$ 根的情况的判断，正确的是（　　）

A. 有两个不相等的实数根

B. 有两个相等的实数根

C. 有且只有一个实数根

D. 没有实数根

4 关于 x 的方程 $mx^2-4x-m+5=0$，有以下说法：①当 $m=0$ 时，方程只有一个实数根；②当 $m=1$ 时，方程有两个相等的实数根；③当 $m=-1$ 时，方程没有实数根. 其中正确的是（　　）

A. ①②　　B. ①③　　C. ②③　　D. ①②③

5 不解方程，判定下列一元二次方程的根的情况：

(1) $9x^2+6x+1=0$；

(2) $16x^2+8x=-3$；

(3) $3(x^2-1)-5x=0$.

题型3　已知方程根的情况确定字母系数的取值或范围

6 [2018 广西桂林中考]已知关于 x 的一元二次方程 $2x^2-kx+3=0$ 有两个相等的实数根，则 k 的值为（　　）

A. $\pm2\sqrt{6}$　　B. $\pm\sqrt{6}$

C. 2 或 3　　D. $\sqrt{2}$ 或 $\sqrt{3}$

7 当 k 为何值时，关于 x 的一元二次方程 $x^2-(2k-1)x=-k^2+2k+3$：

(1) 有两个不相等的实数根；

(2) 有两个相等的实数根；

(3) 无实数根.

8 已知关于 x 的一元二次方程 $(a+c)x^2+2bx+(a-c)=0$，其中 a,b,c 分别为 $\triangle ABC$ 三边的长.

(1) 如果 $x=-1$ 是方程的根，试判断 $\triangle ABC$ 的形状，并说明理由；

(2) 如果方程有两个相等的实数根，试判断 $\triangle ABC$ 的形状，并说明理由.

刷易错

易错点　忽略方程有两个根包括两个相等的根、两个不等的根两种情况而出错

9 若关于 x 的一元二次方程 $kx^2+4x+3=0$ 有两个实数根，则 k 的取值范围是_____.

人生是一场旅程。我们经历了几次轮回，才换来这个旅程。而这个旅程很短，因此不妨大胆一些，去爱一个人，去攀一座山，去追一个梦……

课时2　公式法解一元二次方程

刷基础

▶答案 D4

题型1　一元二次方程的求根公式

1 [2019 广西贺州期中]用公式法解一元二次方程 $3x^2-2x+3=0$ 时,首先要确定 a,b,c 的值,下列叙述正确的是 (　　)

A. $a=3,b=2,c=3$

B. $a=-3,b=2,c=3$

C. $a=3,b=2,c=-3$

D. $a=3,b=-2,c=3$

2 [2019 安徽合肥包河区期中]用公式法解方程 $3x^2+4=12x$,下列代入公式正确的是 (　　)

A. $x=\dfrac{12\pm\sqrt{12^2-3\times4}}{2}$

B. $x=\dfrac{-12\pm\sqrt{12^2-3\times4}}{2}$

C. $x=\dfrac{-12\pm\sqrt{-(-12)^2-4\times3\times4}}{2\times3}$

D. $x=\dfrac{-(-12)\pm\sqrt{(-12)^2-4\times3\times4}}{2\times3}$

3 以 $x=\dfrac{b\pm\sqrt{b^2+4c}}{2}$ 为根的一元二次方程可能是 (　　)

A. $x^2+bx+c=0$　　B. $x^2+bx-c=0$

C. $x^2-bx+c=0$　　D. $x^2-bx-c=0$

题型2　用求根公式解一元二次方程

4 [2019 四川江油校级月考]关于 x 的方程 $x(x+6)=16$ 的解为 (　　)

A. $x_1=2,x_2=2$　　B. $x_1=8,x_2=-4$

C. $x_1=-8,x_2=2$　　D. $x_1=8,x_2=-2$

5 用求根公式法解得某方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq0)$ 的两个根互为相反数,则 (　　)

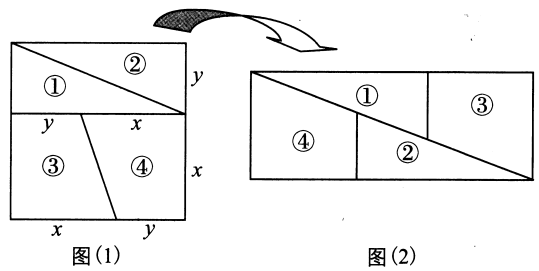
A. $b=0$　　B. $c=0$

C. $b^2-4ac=0$　　D. $b+c=0$

6 已知代数式 $x(x+1)+2$ 与代数式 $2x-1$ 的值互为相反数,则 $x=$_____.

7 [2019 福建大田校级期中]小明设计了一个魔术盒,当任意实数对 (a,b) 进入其中,会得到一个新的实数 a^2-2b+3,若将实数对 $(x,-3x)$ 放入其中,得到一个新数为 5,则 $x=$_____.

8 如图,将图(1)表示的正方形纸片剪成四块,恰好拼成图(2)表示的矩形. 若 $x=1$,则 y 等于_____.



图(1)　　图(2)

9 [2018 河南模拟]用公式法解方程:$2x^2+5x=3$.

10 解方程 $\sqrt{2}x^2+4\sqrt{3}x=2\sqrt{2}$,有一位同学解答如下:

解:这里 $a=\sqrt{2},b=4\sqrt{3},c=2\sqrt{2}$,

$\therefore b^2-4ac=(4\sqrt{3})^2-4\times\sqrt{2}\times2\sqrt{2}=32$,

$\therefore x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\dfrac{-4\sqrt{3}\pm\sqrt{32}}{2\sqrt{2}}=-\sqrt{6}\pm2$,

$\therefore x_1=-\sqrt{6}+2,x_2=-\sqrt{6}-2$.

请你分析以上解答有无错误,如有错误,指出错误的地方,并写出正确的结果.

刷提升

▸答案 D4

1 [2018 广东汕头潮阳区期中]若 a,b,c 为常数,且 $(a-c)^2>a^2+c^2$,则关于 x 的方程 $ax^2+bx+c=0$ 的根的情况是 (　　)

A. 有两个不相等的实数根

B. 有两个相等的实数根

C. 无实数根

D. 有一个根为 0

2 已知 a 是一元二次方程 $x^2-3x-5=0$ 的较小的根,则下面对 a 的估计正确的是 (　　)

A. $-2<a<-1$　　B. $2<a<3$

C. $-3<a<-4$　　D. $4<a<5$

3 若关于 x 的一元二次方程 $(k-1)x^2+4x+1=0$ 有两个不相等的实数根,则 k 的取值范围是 (　　)

A. $k<5$　　B. $k<5$ 且 $k\neq1$

C. $k\leqslant5$ 且 $k\neq1$　　D. $k>5$

4 [2018 山东宁阳期末]已知关于 x 的一元二次方程 $(m-2)x^2+2mx+m+3=0$ 有两个不相等的实数根.

(1)求 m 的取值范围;

(2)当 m 取满足条件的最大整数时,求方程的根.

5 [2018 天津红桥区模拟]关于 x 的一元二次方程 $(2m+1)x^2+4mx+2m-3=0$.

(1)当 $m=\frac{1}{2}$ 时,求方程的实数根;

(2)若方程有两个不相等的实数根,求实数 m 的取值范围.

6 [难]关于 x 的一元二次方程为 $(m-1)x^2-2mx+m+1=0$.

(1)求出方程的根;

(2)m 为何整数时,此方程的两个根都为正整数?

只有首先看到事情的可能性,才会有发生的机会。

21.2.3　因式分解法

刷基础

▶答案 D4

题型1　用因式分解法解一元二次方程

1 方程$(x-5)(x+2)=0$的根是　　(　　)

A. $x_1=-5, x_2=2$　　B. $x_1=5, x_2=-2$

C. $x_1=5, x_2=2$　　D. $x_1=-5, x_2=-2$

2 [2018 海南灵山中学期末检测]一元二次方程$x^2-25=0$的根是　　(　　)

A. $x_1=x_2=5$　　B. $x_1=x_2=25$

C. $x_1=25, x_2=-25$　　D. $x_1=5, x_2=-5$

3 下列方程能用因式分解法求解的有　　(　　)

①$x^2=x$;②$x^2-x+\frac{1}{4}=0$;③$x-x^2-3=0$;④$(3x+2)^2=16$.

A. 1 个　　B. 2 个　　C. 3 个　　D. 4 个

4 方程$x^2=4x$的解是　　(　　)

A. $x=4$　　B. $x_1=0, x_2=4$

C. $x=0$　　D. $x_1=2, x_2=-2$

5 方程$x(x-2)=3x$的解为　　(　　)

A. $x=5$　　B. $x_1=0, x_2=5$

C. $x_1=2, x_2=0$　　D. $x_1=0, x_2=-5$

6 方程$5x(x+3)=3(x+3)$的解为　　(　　)

A. $x_1=\frac{3}{5}, x_2=3$　　B. $x=\frac{3}{5}$

C. $x_1=-\frac{3}{5}, x_2=-3$　　D. $x_1=\frac{3}{5}, x_2=-3$

7 一元二次方程$x(x-2)=2-x$的根是　　(　　)

A. -1　　B. -1和2

C. 1和2　　D. 2

8 已知直角三角形的两条直角边的长恰好是方程$x^2-3x=4(x-3)$的两个实数根,则该直角三角形斜边上的中线长是　　(　　)

A. 3　　B. 4　　C. 6　　D. 2.5

9 一元二次方程$-x^2+2x=0$的解是_____.

10 一元二次方程$x-1=x^2-1$的根是_____.

11 方程$(x-2)^2=3x(x-2)$的解为_____.

12 解方程:(1)$(x-3)(x-1)=3$;

(2)$x^2-1=2(x+1)$.

题型2　用合适的方法解一元二次方程

13 [2019 广东广州越秀区期中]一元二次方程$(x+1)^2=4$的解为_____.

14 方程$4x^2-4x+1=0$的解为_____.

15 [2019 湖北老河口期中]一元二次方程$x^2+2\sqrt{2}x-6=0$的根是_____.

16 选择合适的方法解方程:

(1)$x(x-1)=x$;

(2)$(x+1)(x-1)+2(x+3)=8$;

(3)$\sqrt{3}x^2=6x-\sqrt{3}$;

(4)$x^2-2x-1=0$.

刷易错

易错点　解方程时,方程两边同时除以含有未知数的代数式导致失根

17 方程$3x(x-1)=2(x-1)$的根为_____.

刷提升

▸答案 D5

1 [2019 河北唐山期中]一元二次方程 $x(x+2)=3(x+2)$ 的根是　(　　)

A. $x=3$　　B. $x=-2$

C. $x_1=-2, x_2=-3$　　D. $x_1=-2, x_2=3$

2 若方程 $(x-2)(3x+1)=0$,则 $3x+1$ 的值为　(　　)

A. 7　　B. 2

C. 0　　D. 7 或 0

3 方程 $\left(x-\frac{3}{4}\right)^2+\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{3}{4}\right)=0$ 的较小的根为　(　　)

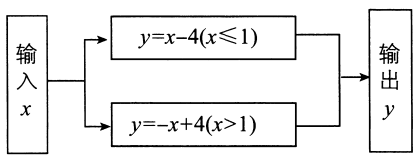
A. $-\frac{3}{4}$　　B. $\frac{1}{2}$　　C. $\frac{5}{8}$　　D. $\frac{3}{4}$

4 在解方程 $(x+2)(x-2)=5$ 时,甲同学说:由于 $5=1\times5$,可令 $x+2=1, x-2=5$,得方程的根 $x_1=-1, x_2=7$;乙同学说:应把方程右边化为 0,得 $x^2-9=0$,再分解因式,即 $(x+3)(x-3)=0$,得方程的根 $x_1=-3, x_2=3$. 对于甲、乙两名同学的说法,下列判断正确的是　(　　)

A. 甲错误,乙正确　　B. 甲正确,乙错误

C. 甲、乙都正确　　D. 甲、乙都错误

5 根据图中的程序,当输入方程 $x^2=2x$ 的解 x 时,输出结果 $y=$　(　　)



A. -4　　B. 2

C. -4 或 2　　D. 2 或 -2

6 [2019 江苏南京建邺区期中]方程 $x^2+2ax-b^2+a^2=0$ 的解为_____.

7 已知 $x=1$ 是关于 x 的方程 $(1-k)x^2+k^2x-1=0$ 的根,则常数 k 的值为_____.

8 4 个数 a, b, c, d 排列成 $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$,我们称之为二阶行列式,规定它的运算法则为 $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}=ad-bc$. 若 $\begin{vmatrix} 2x & x+1 \\ x-2 & x+1 \end{vmatrix}=6$,则 $x=$_____.

9 解方程:

(1) $3y^2+1=2\sqrt{3}y$;

(2) $(2x+1)^2=3(2x+1)$;

(3) $(2x+1)^2=-6x-3$;

刷素养

10 [难]阅读下面材料:

把方程 $x^2-4x+3=0$ 写成 $x^2-4x+4-4+3=0$,

即 $(x-2)^2-1^2=0$,

因式分解得 $(x-2+1)(x-2-1)=0$,

即 $(x-1)(x-3)=0$.

发现:$1+3=4, 1\times3=3$,

结论:方程 $x^2-(p+q)x+pq=0$ 可变形为 $(x-p)(x-q)=0$.

应用上面总结的解题方法,解下列方程:

(1) $x^2+5x+6=0$;

(2) $x^2-5x-6=0$;

(3) $x^2+3x-4=0$.

秋兮如风，凄兮如雨，愿化作人间的风雨，伴你左右。秋会等，等下一个春天。

*21.2.4　一元二次方程的根与系数的关系

刷基础

▶答案 D6

题型1　一元二次方程的根与系数的关系

1 一元二次方程 $3x^2-1=2x+5$ 的两个实数根的和与积分别是（　　）

A. $\frac{3}{2}$，-2　　B. $\frac{2}{3}$，-2

C. $-\frac{2}{3}$，2　　D. $-\frac{3}{2}$，2

2 若 α，β 是方程 $x^2-2x-1=0$ 的两根，则代数式 $\alpha+\beta+\alpha\beta$ 的值是（　　）

A. 1　　B. -1　　C. 3　　D. -3

题型2　一元二次方程的根与系数的关系的应用

3 若关于 x 的方程 $x^2+2(k+2)x+k^2=0$ 的两个实数根之和大于 -4，则 k 的取值范围是（　　）

A. $k>-1$　　B. $k<0$

C. $-1<k<0$　　D. $-1\leqslant k<0$

4 [2019 河北石家庄新华区校级月考] 若 x_1，x_2 是方程 $x^2+x-1=0$ 的两个根，则 $(x_1-2)\cdot(x_2-2)$ 的值为（　　）

A. 2　　B. 4

C. 5　　D. -2

5 若关于 x 的一元二次方程 $x^2-(a+5)x+8a=0$ 的两个实数根分别为 2 和 b，则 $ab=$ _____.

6 若 x_1，x_2 是一元二次方程 $x^2+3x-5=0$ 的两个根，则 $x_1^2x_2+x_1x_2^2$ 的值是_____.

7 如果关于 x 的方程 $m^2x^2-(m-2)x+1=0$ 的两个实数根互为倒数，那么 $m=$ _____.

8 [2019 河南郑州期中] 已知关于 x 的一元二次方程 $x^2+(2m-1)x+m^2=0$ 有两个实数根 x_1 和 x_2，当 $x_1^2-x_2^2=0$ 时，m 的值为_____.

9 已知直角三角形的两条直角边的长恰好是方程 $2x^2-8x+7=0$ 的两个根，则这个直角三角形的斜边长是_____.

10 在解方程 $x^2+px+q=0$ 时，甲同学看错了 p，解得方程的根为 $x_1=1$，$x_2=-3$；乙同学看错了 q，解得方程的根为 $x_1=4$，$x_2=-2$，则方程中的 $p=$ _____，$q=$ _____.

11 [2019 江苏南京玄武区期中] 已知关于 x 的一元二次方程 $x^2-mx+m-1=0$.

(1) 求证：对于任意的实数 m，方程总有实数根；

(2) 若方程的一个根为 2，求出方程的另一个根.

12 [2019 四川宜宾校级月考] 已知关于 x 的方程 $x^2-2mx=-m^2+2x$ 有两个实数根 x_1，x_2，且满足 $|x_1|=x_2$，求实数 m 的值.

刷易错

易错点　已知根与系数的关系求字母系数的值时，忽视 $\Delta\geqslant0$ 而出错

13 若 x_1，x_2 是方程 $x^2-2mx+m^2-m-1=0$ 的两个根，且 $x_1+x_2=1-x_1x_2$，则 m 的值为（　　）

A. -1 或 2　　B. 1 或 -2

C. -2　　D. 1

21.1～21.2 综合训练

刷综合

▶答案 D6

1 一元二次方程 $x^2-2x-1=0$ 的根是 （ ）

A. $x_1=x_2=1$

B. $x_1=1+\sqrt{2}, x_2=-1-\sqrt{2}$

C. $x_1=1+\sqrt{2}, x_2=1-\sqrt{2}$

D. $x_1=-1+\sqrt{2}, x_2=-1-\sqrt{2}$

2 已知 α 是一元二次方程 $x^2-x-1=0$ 较大的根，则下面对 α 的估计正确的是 （ ）

A. $0<\alpha<1$　　B. $1<\alpha<1.5$

C. $1.5<\alpha<2$　　D. $2<\alpha<3$

3 若关于 x 的一元二次方程 $(k-1)x^2+2x-2=0$ 有两个不等的实数根，则 k 的取值范围是 （ ）

A. $k>\frac{1}{2}$　　B. $k\geqslant\frac{1}{2}$

C. $k>\frac{1}{2}$ 且 $k\neq1$　　D. $k\geqslant\frac{1}{2}$ 且 $k\neq1$

4 已知 a, b 是方程 $x^2-x-3=0$ 的两个根，则代数式 $2a^3+b^2+3a^2-11a-b+5$ 的值为_____.

5 关于 x 的一元二次方程 $x^2+2(m-1)x+m^2=0$ 的两个实数根分别为 x_1, x_2 且 $x_1+x_2>0, x_1x_2>0$，则 m 的取值范围是_____.

6 已知关于 x 的一元二次方程 $x^2-2\sqrt{2}x+m=0$ 有两个不等的实数根.

(1)求整数 m 的最大值；

(2)在(1)的条件下，方程的实数根为 x_1, x_2，求代数式 $x_1^2+x_2^2-x_1x_2$ 的值.

7 关于 x 的方程 $(k-1)x^2+2kx+2=0$.

(1)求证：无论 k 为何值，方程总有实数根；

(2)设 x_1, x_2 是方程 $(k-1)x^2+2kx+2=0$ 的两个根，记 $S=\frac{x_2}{x_1}+\frac{x_1}{x_2}+x_1+x_2$，$S$ 的值能为 2 吗？若能，求出此时 k 的值；若不能，请说明理由.

8 关于 x 的一元二次方程 $4x^2+4(m-1)x+m^2=0$.

(1)当 m 在什么范围内取值时，方程有两个实数根？

(2)设方程有两个实数根 x_1, x_2，当 m 为何值时，$x_1^2+x_2^2=17$？

(3)若方程有两个实数根 x_1, x_2，则 x_1 和 x_2 能否同号？若能同号，请求出相应 m 的取值范围；若不能同号，请说明理由.

9 [难]阅读下面的例题与解答过程：

例　解方程：$x^2-|x|-2=0$.

解：原方程可化为 $|x|^2-|x|-2=0$.

设 $|x|=y$，则 $y^2-y-2=0$.

解得 $y_1=2, y_2=-1$.

当 $y=2$ 时，$|x|=2$，$\therefore x=\pm2$；

当 $y=-1$ 时，$|x|=-1$，$\therefore$ 无实数解.

$\therefore$ 原方程的解是 $x_1=2, x_2=-2$.

在上面的解答过程中，我们把 $|x|$ 看成一个整体，用字母 y 代替(即换元)，使得问题简单、明朗，解答过程更清晰. 这是解决数学问题中的一种重要方法——换元法. 请你仿照上述例题的解答过程，利用换元法解下列方程：

(1)$x^2-2|x|=0$；

(2)$x^2-2x-4|x-1|+5=0$.

1 [2018 宁夏中考]若 $2-\sqrt{3}$ 是方程 $x^2-4x+c=0$ 的一个根,则 c 的值是　(　　)

A. 1　　B. $3-\sqrt{3}$

C. $1+\sqrt{3}$　　D. $2+\sqrt{3}$

2 [2018 湖南湘潭中考] 若一元二次方程 $x^2-2x+m=0$ 有两个不相等的实数根,则实数 m 的取值范围是(　　)

A. $m\geqslant 1$　　B. $m\leqslant 1$

C. $m>1$　　D. $m<1$

3 [2018 辽宁铁岭中考]下列一元二次方程中,有两个不相等的实数根的方程是　(　　)

A. $x^2+1=0$　　B. $x^2-2x+1=0$

C. $x^2+2x+4=0$　　D. $x^2-x-3=0$

4 [2018 山东泰安中考]一元二次方程 $(x+1)(x-3)=2x-5$ 根的情况是　(　　)

A. 无实数根

B. 有一个正根,一个负根

C. 有两个正根,且都小于 3

D. 有两个正根,且有一根大于 3

5 [2018 山东威海中考]关于 x 的一元二次方程 $(m-5)x^2+2x+2=0$ 有实数根,则 m 的最大整数解是_____.

6 [2018 江苏南通中考]若关于 x 的一元二次方程 $\frac{1}{2}x^2-2mx-4m+1=0$ 有两个相等的实数根,则 $(m-2)^2-2m(m-1)$ 的值为_____.

7 [2018 江苏扬州中考]若 m 是方程 $2x^2-3x-1=0$ 的一个根,则 $6m^2-9m+2\,015$ 的值为_____.

8 解方程:

(1)[2018 广西梧州中考]$2x^2-4x-30=0$;

(2)[2018 黑龙江齐齐哈尔中考]$2(x-3)=3x(x-3)$.

9 [2018 湖北黄石中考]已知关于 x 的方程 $x^2-2x+m=0$ 有两个不相等的实数根 x_1,x_2.

(1)求实数 m 的取值范围;

(2)若 $x_1-x_2=2$,求实数 m 的值.

10 [2018 北京中考]关于 x 的一元二次方程 $ax^2+bx+1=0$.

(1)当 $b=a+2$ 时,利用根的判别式判断方程根的情况;

(2)若方程有两个相等的实数根,写出一组满足条件的 a,b 的值,并求此时方程的根.

11 [2018 湖北鄂州中考]已知关于 x 的方程 $x^2-(3k+3)x+2k^2+4k+2=0$.

(1)求证:无论 k 为何值时,原方程都有实数根;

(2)若该方程的两个实数根 x_1,x_2 为一菱形的两条对角线之长,且 $x_1x_2+2x_1+2x_2=36$,求 k 值及该菱形的面积.

专题　一元二次方程的解法

刷难关

▶答案 D7

类型1　用指定方法解一元二次方程

1 [2019 江苏无锡梁溪区校级期中]用指定的方法解下列方程：

(1)$(2x+1)^2=9$;(直接开平方法)

(2)$3x^2-5x-2=0$;(配方法)

(3)$2x^2-5x+1=0$;(公式法)

(4)$(x-3)^2-4x(3-x)=0$.(因式分解法)

类型2　选择适当的方法解一元二次方程

2 用适当的方法解下列方程：

(1)$16x^2-225=0$;　　(2)$(2x+1)^2=2x+1$;

(3)$1-x=x^2$;　　(4)$2y^2=3y+1$.

类型3　用换元法解一元二次方程

3 阅读下面的材料,回答问题：

解方程$x^4-5x^2+4=0$,这是一个一元四次方程,根据该方程的特点,它的解法通常是：

设$x^2=y$,那么$x^4=y^2$,于是原方程可变形为$y^2-5y+4=0$,①　解得$y_1=1$,$y_2=4$.

当$y=1$时,$x^2=1$,$\therefore x=\pm1$;

当$y=4$时,$x^2=4$,$\therefore x=\pm2$.

$\therefore$原方程有四个根：$x_1=1$,$x_2=-1$,$x_3=2$,$x_4=-2$.

(1)在由原方程得到方程①的过程中,利用_____法达到_____的目的,体现了数学的转化思想.

(2)解方程$(x^2+x)^2-4(x^2+x)-12=0$.

类型4　含绝对值的一元二次方程的解法

4 阅读例题：

解方程：$x^2-|x|-2=0$.

解：当$x\geqslant0$时,得$x^2-x-2=0$,

解得$x_1=2$,$x_2=-1$(舍去).

当$x<0$时,得$x^2+x-2=0$,

解得$x_3=1$(舍去),$x_4=-2$.

$\therefore$原方程的解为$x_1=2$,$x_4=-2$.

请参照例题的方法解方程$x^2-|x-1|-1=0$.

我就是我，是颜色不一样的烟火。天空海阔，要做最坚强的泡沫。

21.3　实际问题与一元二次方程

课时1　传播问题和数字问题

刷基础

▶答案 D8

题型1　传播问题

1 [2019 陕西定边期中]鸡瘟是一种传播速度很快的传染病,一轮传染为一天时间,红发养鸡场于某日发现一例,两天后发现共有169只鸡患有这种病.若每只病鸡每轮传染健康鸡的只数均相同,则每只病鸡每轮传染健康鸡的只数为　(　)

A. 10　　B. 11　　C. 12　　D. 13

2 [2019 湖北孝感校级月考]某种电脑病毒传播非常快,如果1台电脑被感染,经过两轮感染后就会有81台电脑被感染.请你用学过的知识分析,每轮感染中平均1台电脑会感染几台电脑?若病毒得不到有效控制,三轮感染后,被感染的电脑会不会超过700台?

题型2　计数问题

3 要组织一次篮球邀请赛,参赛的每两个队之间都要比赛1场,计划安排15场比赛,设比赛组织者应邀请x个队参赛,则x满足的关系式为　(　)

A. $\frac{1}{2}x(x+1)=15$　　B. $\frac{1}{2}x(x-1)=15$

C. $x(x+1)=15$　　D. $x(x-1)=15$

4 [2018 河南卫辉期中调研]某年“国庆节”和“中秋节”双节期间,某微信群规定,群内的每个人都要发一个红包,并保证群内其他人都能抢到且自己不能抢自己发的红包,若此次抢红包活动,群内所有人共收到90个红包,则该群一共有　(　)

A. 9人　　B. 10人　　C. 11人　　D. 12人

5 某象棋比赛,每个选手都要与其他选手比赛一局,每局胜者记2分,负者记0分,和棋各记1分.有四位观众统计了比赛中全部选手得分总数分别是2 017,2 070,2 018,2 078,经核实,只有一位观众统计准确,则这次比赛的选手共有多少名?

题型3　数字问题

6 已知一个两位数,个位上的数字比十位上的数字小4,若这个两位数十位上的数字和个位上的数字交换位置后,新两位数与原两位数的积为1 612,则这个两位数为_____.

7 [2019 江苏扬州邗江区校级月考]一个两位数两个数字的和为5,把这个两位数的个位上的数字与十位上的数字互换得到一个新的两位数,它与原两位数的积为736,则原两位数是_____.

8 如图是某年某月的日历表,在此日历表上可以用一个矩形圈出3×3个位置相邻的9个数(如6,7,8,13,14,15,20,21,22).若圈出的9个数中,最大数与最小数的积为192,则这9个数的和是_____.

日	一	二	三	四	五	六
			1 中国建军节	2 十五	3 十六	4 十七
5 十八	6 十九	7 立秋	8 廿一	9 廿二	10 廿三	11 廿四
12 廿五	13 廿六	14 廿七	15 廿八	16 廿九	17 7月	18 初二
19 初三	20 初四	21 初五	22 初六	23 初七	24 初八	25 初九
26 初十	27 十一	28 十二	29 十三	30 十四	31 十五	

课时2 变化率问题和利润问题

刷基础

▶答案 D8

题型1 平均变化率问题

1 [2019 吉林长春期中]某机械厂七月份生产零件50万个,第三季度生产零件182万个. 若该厂八、九月份平均每月生产零件的增长率均为 x,则下面所列方程正确的是 ( )

A. $50(1+x)^2=182$

B. $50+50(1+x)^2=182$

C. $50+50(1+x)+50(1+2x)=182$

D. $50+50(1+x)+50(1+x)^2=182$

2 制造一种产品,原来每件的成本是100元,由于连续两次降低成本,现在的成本是81元,则平均每次降低成本的百分率为 ( )

A. 20% B. 15% C. 10% D. 5%

3 某一养殖户每年的养殖成本包括固定成本和可变成本,其中固定成本每年均为4万元,可变成本逐年增长,已知该养殖户第1年的可变成本为2.6万元. 设可变成本平均每年增长的百分率为 x.

(1)用含 x 的代数式表示第3年的可变成本为_____万元;

(2)如果该养殖户第3年的养殖成本为7.146万元,求可变成本平均每年增长的百分率 x.

题型2 销售利润问题

4 某种花卉每盆的盈利与每盆的株数有一定的关系. 每盆植3株时,平均每株盈利4元;若每盆增加1株,平均每株盈利减少0.5元. 要使每盆的盈利达到15元,每盆应多植多少株? 设每盆多植 x 株,则可以列出的方程是 ( )

A. $(3+x)(4-0.5x)=15$

B. $(x+3)(4+0.5x)=15$

C. $(x+4)(3-0.5x)=15$

D. $(x+1)(4-0.5x)=15$

5 [2019 江苏睢宁校级月考]某企业设计了一款工艺品,每件成本50元,为了合理定价,现投放市场进行试销. 据市场调查,销售单价是100元时,每天的销售量是50件,若销售单价每降低1元,每天就可多售出5件,但要求销售单价不得低于成本. 销售单价为多少元时,每天的销售利润可达4 000元?

6 菜农李伟种植的某蔬菜,计划以每千克5元的价格对外批发销售. 由于部分菜农盲目扩大种植,造成该蔬菜滞销,李伟为了加快销售,减少损失,对价格经过两次下调后,以每千克3.2元的价格对外批发销售.

(1)求平均每次下调的百分率;

(2)小华准备到李伟处购买5吨该蔬菜,因数量多,李伟决定再给予两种优惠方案以供选择:方案一,打九折销售;方案二,不打折,每吨优惠现金200元. 试问小华选择哪种方案更优惠? 请说明理由.

课时3　几何图形面积问题

刷基础

▶答案 D9

题型1　规则图形的面积问题

1 [2019 江苏泰州高港区期中]某中学准备建一个面积为375 m^2 的矩形游泳池,且游泳池的宽比长短10 m.设游泳池的长为 x m,则可列方程为　　(　　)

A. $x(x-10)=375$　　B. $x(x+10)=375$

C. $2x(2x-10)=375$　　D. $2x(2x+10)=375$

2 在一幅长为80 cm,宽为50 cm的矩形风景画的四周镶一条相同宽度的金色纸边,制成一幅矩形挂图,如图所示.如果要使整个挂图的面积是5 400 cm^2,设金色纸边的宽为 x cm,那么 x 满足的方程是　　(　　)



A. $x^2+65x-350=0$

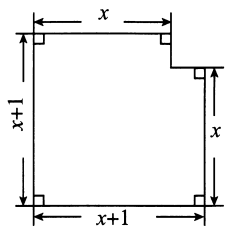
B. $x^2+130x-1\ 400=0$

C. $x^2-65x-350=0$

D. $x^2-130x-1\ 400=0$

3 一个直角三角形的两条直角边相差5 cm,面积是7 cm^2,这两条直角边长分别为_____.

4 已知如图所示的图形的面积为24,根据图中的条件,求 x.

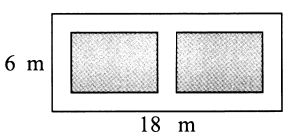


题型2　边框与甬道的面积问题

5 [2019 江西赣州南康区期中]如图,某小区有一块长为18 m,宽为6 m的矩形空地,计划在其中修建两块相同的矩形绿地,它们的面积之和为60 m^2,两块绿地之间及周边留有宽度相等的人行通道.若设人行道的宽度为 x 米,则可以列出关于 x 的方程是　　(　　)

A. $x^2+9x-8=0$　　B. $x^2-9x-8=0$

C. $x^2-9x+8=0$　　D. $2x^2-9x+8=0$

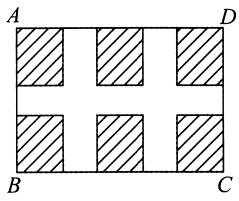


(第5题图)

6 某小区规划在一个长为40 m,宽为26 m的矩形场地 $ABCD$ 上修建三条同样宽的甬路,使其中两条与 AB 平行,另一条与 AD 平行,其余部分种草,若使每块草坪的面积都为144 m^2(如图),则甬路的宽为　　(　　)

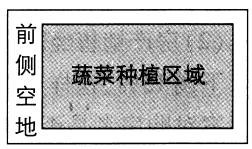
A. 3 m　　B. 4 m

C. 2 m　　D. 5 m



(第6题图)

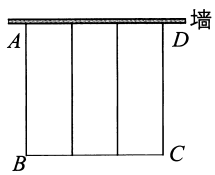
7 [2019 四川富顺校级月考]某村计划建造如图所示的矩形蔬菜温室,要求长与宽的比为2:1.在温室内,沿前侧内墙保留3 m宽的空地,其他三侧内墙各保留1 m宽的甬道.当矩形温室的长与宽各为多少时,蔬菜种植区域的面积是288 m^2?



刷易错

易错点　用忽略验根导致解不符合实际而致错

8 如图,要利用一面墙(墙长为25米)建羊圈,用100米的围栏围成总面积为400平方米的三个大小相同的矩形羊圈,求羊圈的边长 AB,BC 各为多少米?



21.3 综合训练

刷综合

▶答案 D9

1 [2018 湖北潜江联考]一人患了流感,经过两轮传染后,共有 64 人患病. 如果不及时控制,第三轮将又有_____人被传染.

2 有一个两位数,它的十位上的数字比个位上的数字小 2,十位上的数字与个位上的数字的积的 3 倍刚好等于这个两位数,这个两位数为_____.

3 某中心城市有一楼盘,开发商准备以每平方米 7 000 元的价格出售. 由于国家出台了有关调控房地产的政策,开发商经过两次下调销售价格后,决定以每平方米 5 670 元的价格销售.

(1)求平均每次下调的百分比;

(2)房产销售经理向开发商建议:先公布下调 5%,再下调 15%,这样更有吸引力. 请问房产销售经理的方案对购房者是否更优惠? 为什么?

4 某精品店购进甲、乙两种小礼品,已知 1 件甲礼品的进价比 1 件乙礼品的进价多 1 元,购进 2 件甲礼品与 1 件乙礼品共需 11 元.

(1)求甲礼品的进价;

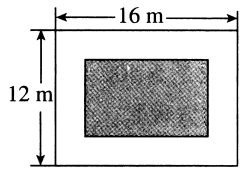
(2)经市场调查发现,若甲礼品按 6 元/件销售,每天可卖 40 件;按 5 元/件销售,每天可卖 60 件. 假设每天销售的件数 y(件)与售价 x(元/件)之间满足一次函数关系,求 y 与 x 之间的函数关系式;

(3)在(2)的条件下,当甲礼品的销售价格定为多少时,才能使每天销售甲礼品的利润为 60 元?

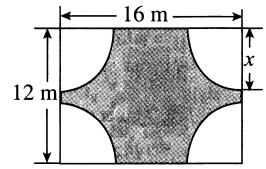
5 [2019 江苏苏州相城区月考]在一块长为 16 m,宽为 12 m 的矩形荒地上,需建造一个花园,要求花园所占面积为荒地面积的一半,下面分别是小明和小颖的设计方案.

小明说:我的设计方案如图(1),其中花园四周小路的宽度相等,通过解方程,我得到小路的宽为 2 m.

小颖说:我的设计方案如图(2),其中花园每个角的扇形相同.



图(1)



图(2)

(1)你认为小明的结果对吗? 请计算说明;

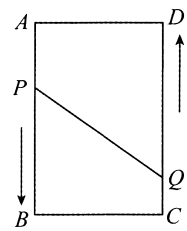
(2)请你帮助小颖求出图中的 x(结果保留根号和 π).

6 [2019 四川达州达川区校级月考,难]如图,A,B,C,D 为矩形的四个顶点,$AB=16$ cm,$AD=6$ cm,动点 P,Q 分别从点 A,C 同时出发,点 P 以 3 cm/s 的速度向点 B 移动,一直到达 B 为止,点 Q 以 2 cm/s 的速度向点 D 移动.

(1)P,Q 两点从出发开始到几秒时,四边形 $APQD$ 为矩形?

(2)P,Q 两点从出发开始到几秒时,四边形 $PBCQ$ 的面积为 33 cm^2?

(3)P,Q 两点从出发开始到几秒时,点 P 和点 Q 的距离是 10 cm?



刷中考

▶答案 D10

1 [2018 四川绵阳中考]在一次酒会上,每两人都只碰一次杯,如果一共碰杯 55 次,则参加酒会的人数为 (　　)

A. 9　　B. 10　　C. 11　　D. 12

2 [2018 贵州遵义中考]在水果销售旺季,某水果店购进一批优质水果,进价为 20 元/千克,售价不低于 20 元/千克,且不超过 32 元/千克,根据销售情况,发现该水果一天的销售量 y(千克)与该天的售价 x(元/千克)满足如下表所示的一次函数关系.

销售量 y/千克	…	34.8	32	29.6	28	…
售价 x/(元/千克)	…	22.6	24	25.2	26	…

(1)某天这种水果的售价为 23.5 元/千克,求当天该水果的销售量;

(2)如果某天销售这种水果获利 150 元,那么该天水果的售价为多少?

3 [2018 贵州安顺中考]某地 2015 年为做好"精准扶贫",投入资金 1 280 万元用于异地安置,并规划投入资金逐年增加,2017 年在 2015 年的基础上增加投入资金 1 600 万元.

(1)从 2015 年到 2017 年,该地投入异地安置资金的年平均增长率为多少?

(2)在 2017 年异地安置的具体实施中,该地计划投入资金不低于 500 万元用于优先搬迁租房奖励,规定前 1 000 户(含第 1 000 户)每户每天奖励 8 元,1 000 户以后每户每天奖励 5 元,按租房 400 天计算,求 2017 年该地至少有多少户享受到优先搬迁租房奖励.

4 [2018 湖北宜昌中考]某市创建"绿色发展模范城市",针对境内长江段两种主要污染源:生活污水和沿江工厂污染物排放,分别用"生活污水集中处理"(下称甲方案)和"沿江工厂转型升级"(下称乙方案)进行治理,若江水污染指数记为 Q,沿江工厂用乙方案进行一次性治理(当年完工),从当年开始,所治理的每家工厂一年降低的 Q 值都以平均值 n 计算. 第一年有 40 家工厂用乙方案治理,共使 Q 值降低了 12. 经过三年治理,境内长江水质明显改善.

(1)求 n 的值;

(2)从第二年起,每年用乙方案新治理的工厂数量比上一年都增加相同的百分数 m,三年来用乙方案治理的工厂数量共 190 家,求 m 的值,并计算第二年用乙方案新治理的工厂数量;

(3)该市生活污水用甲方案治理,从第二年起,每年因此降低的 Q 值比上一年都增加一个相同的数值 a. 在(2)的情况下,第二年,用乙方案所治理的工厂合计降低的 Q 值与当年因甲方案治理降低的 Q 值相等,第三年,用甲方案使 Q 值降低了 39.5. 求第一年用甲方案治理降低的 Q 值及 a 的值.

全章综合训练

刷章测

►建议用时:45 分钟 答案 D10

1 下列方程中,是一元二次方程的是 ( )

A. $x^2-2x-3=0$ B. $2x^2-y-1=0$

C. $x^2-x(x+7)=0$ D. $ax^2+bx+c=0$

2 用配方法解一元二次方程 $x^2-6x-4=0$,下列变形正确的是 ( )

A. $(x-6)^2=-4+36$ B. $(x-3)^2=4+9$

C. $(x-3)^2=-4+9$ D. $(x-6)^2=4+36$

3 已知 m 是方程 $x^2-x-1=0$ 的一个根,则代数式 m^2-m+5 的值等于 ( )

A. -6 B. 5 C. 6 D. 7

4 某商店今年 1 月份的销售额是 2 万元,3 月份的销售额是 4.5 万元,从 1 月份到 3 月份,该店销售额平均每月的增长率是 ( )

A. 20% B. 25% C. 50% D. 62.5%

5 在$\square ABCD$ 中,$AB=10$,$BC=14$,E,F 分别为边 BC,AD 上的点. 若四边形 $AECF$ 为正方形,则 AE 的长为 ( )

A. 7 B. 4 或 10 C. 5 或 9 D. 6 或 8

6 [2018 江苏扬州江都区五校期中]写出一个以 -1 和 -2 为两个根的一元二次方程(二次项系数为 1):_____.

7 定义新运算:$A\oplus B=A(1-B)$,若 a,b 是方程 $x^2-x+\frac{2}{3}k=0(k<0)$ 的两根,则 $b\oplus b-a\oplus a$ 的值为_____.

8 在$\triangle ABC$ 中,$BC=2$,$AB=2\sqrt{3}$,$AC=b$,且关于 x 的方程 $x^2-4x+b=0$ 有两个相等的实数根,则 AC 边上的中线长为_____.

9 解方程:(1)$3(2x-1)^2-27=0$;

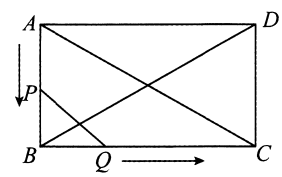
(2)$2x^2-5x+1=0$.

10 [2018 江苏江阴期中]已知关于 x 的一元二次方程 $x^2-(k+1)x+2k-2=0$.

(1)求证:方程有两个实数根;

(2)若$\triangle ABC$ 的两边 AB,AC 的长是这个方程的两个实数根,第三边 BC 的长为 3. 当$\triangle ABC$ 是等腰三角形时,求 k 的值.

11 [2019 贵州石阡校级月考]已知矩形 $ABCD$,长 $BC=12$ cm,宽 $AB=8$ cm,P,Q 分别是 AB,BC 上运动的两点. 若 P 从点 A 出发,以 1 cm/s 的速度沿 AB 方向运动,同时,Q 从点 B 出发以 2 cm/s 的速度沿 BC 方向运动,问经过几秒,以 P,B,Q 为顶点的三角形占矩形面积的$\frac{1}{8}$?



刷中考

▶答案 D10

1 [2018 内蒙古赤峰中考]2017—2018 赛季中国男子篮球职业联赛,采用双循环制(每两队之间都进行两场比赛),比赛总场数为 380 场,若设参赛队伍有 x 支,则可列方程为 (　　)

A. $\frac{1}{2}x(x-1)=380$　　B. $x(x-1)=380$

C. $\frac{1}{2}x(x+1)=380$　　D. $x(x+1)=380$

2 [2018 贵州铜仁中考]关于 x 的一元二次方程 $x^2-4x+3=0$ 的解为 (　　)

A. $x_1=-1, x_2=3$　　B. $x_1=1, x_2=-3$

C. $x_1=1, x_2=3$　　D. $x_1=-1, x_2=-3$

3 [2018 青海中考]关于一元二次方程 $x^2-2x-1=0$ 根的情况,下列说法正确的是 (　　)

A. 有一个实数根

B. 有两个相等的实数根

C. 有两个不相等的实数根

D. 没有实数根

4 [2018 山东临沂中考]一元二次方程 $y^2-y-\frac{3}{4}=0$ 配方后可化为 (　　)

A. $\left(y+\frac{1}{2}\right)^2=1$　　B. $\left(y-\frac{1}{2}\right)^2=1$

C. $\left(y+\frac{1}{2}\right)^2=\frac{3}{4}$　　D. $\left(y-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{3}{4}$

5 [2018 湖北咸宁中考]已知一元二次方程 $2x^2+2x-1=0$ 的两个根为 x_1, x_2,且 $x_1<x_2$,下列结论正确的是 (　　)

A. $x_1+x_2=1$　　B. $x_1\cdot x_2=-1$

C. $|x_1|<|x_2|$　　D. $x_1^2+x_1=\frac{1}{2}$

6 [2018 湖南郴州中考]已知关于 x 的一元二次方程 $x^2+kx-6=0$ 有一个根为 -3,则方程的另一个根为_____.

7 [2018 湖南益阳中考]规定:$a\otimes b=(a+b)b$,如:$2\otimes 3=(2+3)\times 3=15$,若 $2\otimes x=3$,则 $x=$_____.

8 [2018 湖北黄冈中考]一个三角形的两边长分别为 3 和 6,第三边长是方程 $x^2-10x+21=0$ 的根,则三角形的周长为_____.

9 [2018 甘肃兰州中考]解方程:$3x^2-2x-2=0$.

10 [2018 湖北中考]已知关于 x 的一元二次方程 $x^2+(2m+1)x+m^2-2=0$.

(1)若该方程有两个实数根,求 m 的最小整数值;

(2)若方程的两个实数根为 x_1, x_2,且 $(x_1-x_2)^2+m^2=21$,求 m 的值.

11 [2018 山东德州中考]为积极响应新旧动能转换,提高公司经济效益,某科技公司近期研发出一种新型高科技设备,每台设备成本价为 30 万元,经过市场调研发现,每台售价为 40 万元时,年销售量为 600 台;每台售价为 45 万元时,年销售量为 550 台.假定该设备的年销售量 y(单位:台)和销售单价 x(单位:万元)成一次函数关系.

(1)求年销售量 y 与销售单价 x 的函数关系式;

(2)根据相关规定,此设备的销售单价不得高于 70 万元,如果该公司想获得 10 000 万元的年利润,则该设备的销售单价应是多少万元?

第二十二章 二次函数

22.1 二次函数的图象和性质

22.1.1 二次函数

刷基础

▶答案 D11

题型1 二次函数的定义

1 [2019 江苏江阴校级月考]下列函数的解析式中,一定为二次函数的是 ( )

A. $y=3x-1$　　B. $y=ax^2+bx+c$

C. $s=2t^2+1$　　D. $y=x^2+\frac{1}{x}$

2 [2019 河南开封校级月考]若 $y=(2-m)x^{m^2-2}$ 是二次函数,则 m 等于 ( )

A. ± 2　　B. 2　　C. -2　　D. 不能确定

题型2 二次函数的一般形式

3 已知二次函数 $y=1-3x+5x^2$,则其二次项系数 a,一次项系数 b,常数项 c 分别是 ( )

A. $a=1,b=-3,c=5$

B. $a=1,b=3,c=5$

C. $a=5,b=3,c=1$

D. $a=5,b=-3,c=1$

题型3 实际问题中的二次函数

4 [2019 河北衡水冀州区月考]某农产品市场经销一种销售成本为 40 元的水产品. 据市场分析,若按每千克 50 元销售,一个月能售出 500 千克;销售单价每涨 1 元,月销售量就减少 10 千克. 设销售单价为每千克 x 元,月销售利润为 y 元,则 y 与 x 的函数解析式为 ( )

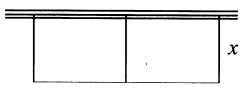
A. $y=(x-40)(500-10x)$

B. $y=(x-40)(10x-500)$

C. $y=(x-40)[500-10(x-50)]$

D. $y=(x-40)[500-10(50-x)]$

5 有长 24 m 的篱笆,一面利用围墙围成如图中间隔有一道篱笆的矩形花圃,设花圃垂直于墙的一边长为 x m,面积是 S m^2,则 S 与 x 的关系式是 ( )



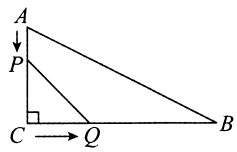
A. $S=-3x^2+24x$　　B. $S=-2x^2-24x$

C. $S=-3x^2-24x$　　D. $S=-2x^2+24x$

6 如图,在 Rt$\triangle ABC$ 中,$\angle C=90°$,$AC=12$ mm,$BC=24$ mm,动点 P 从点 A 开始沿边 AC 向 C 以 2 mm/s 的速度移动,动点 Q 从点 C 开始沿边 CB 向 B 以 4 mm/s 的速度移动.

(1)如果 P,Q 两点同时出发,那么$\triangle PCQ$ 的面积 S_1 随出发时间 t 如何变化?写出函数关系式及 t 的取值范围;

(2)在(1)的条件下,请写出四边形 $APQB$ 的面积 S_2 与运动时间 t 的函数关系式.



刷易错

易错点 用二次函数定义求字母的值时,易忽略二次项系数不为 0 这一条件而导致错误

7 已知 $y=(m-4)x^{m^2-m}+2x^2-3x-1$.

(1)当 m 为何值时,它是 y 关于 x 的一次函数;

(2)当 m 为何值时,它是 y 关于 x 的二次函数.

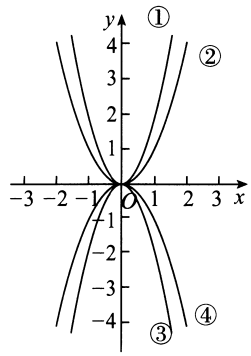
22.1.2　二次函数 $y=ax^2$ 的图象和性质

刷基础

▸答案 D11

题型1　二次函数 $y=ax^2$ 的图象

1 [2019 四川莲溪校级月考]如图,二次函数 $y=-2x^2$ 的图象是　　(　　)

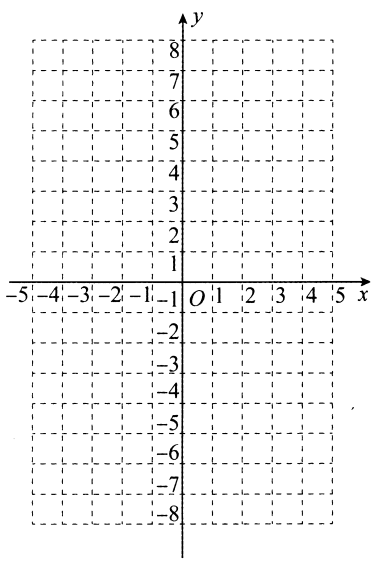


A. ①　　B. ②

C. ③　　D. ④

2 在如图所示的同一直角坐标系中,画出函数 $y=2x^2$,$y=\frac{1}{2}x^2$,$y=-2x^2$ 与 $y=-\frac{1}{2}x^2$ 的图象,并观察抛物线的开口方向、对称轴和顶点及对称轴两侧图象的增减性.

x	…	-2	0	2	…
$y=2x^2$	…				…
$y=\frac{1}{2}x^2$	…				…
$y=-2x^2$	…				…
$y=-\frac{1}{2}x^2$	…				…



题型2　二次函数 $y=ax^2$ 的性质

3 [2019 陕西汉中校级月考]已知点 $(-2,y_1)$,$(0,y_2)$,$(1,y_3)$ 都在函数 $y=x^2$ 的图象上,则　　(　　)

A. $y_2>y_3>y_1$　　B. $y_1>y_3>y_2$

C. $y_3>y_2>y_1$　　D. $y_2>y_1>y_3$

4 [2018 浙江海宁新仓中学开学考试]一条开口向上的抛物线的顶点坐标是 $(-1,2)$,则它有　　(　　)

A. 最大值 1　　B. 最大值 -1

C. 最小值 2　　D. 最小值 -2

5 [2019 江苏南京玄武区校级月考]抛物线 $y=-x^2$ 不具有的性质是　　(　　)

A. 开口向上

B. 对称轴是 y 轴

C. 在对称轴的左侧,y 随 x 的增大而增大

D. 最高点是原点

6 若二次函数 $y=ax^2$ 的图象过点 $P(-2,4)$,则该图象必经过点　　(　　)

A. $(2,4)$　　B. $(-2,-4)$

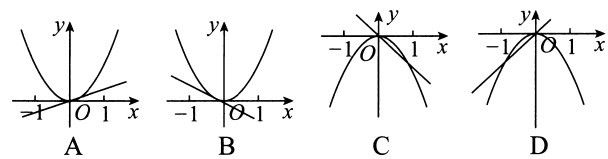
C. $(-4,2)$　　D. $(4,-2)$

7 [2019 辽宁大石桥校级月考]写出下列抛物线的开口方向、对称轴和顶点.

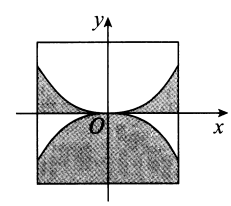
(1) $y=-5x^2$;(2) $y=5x^2$;(3) $y=-4x^2$;(4) $y=4x^2$.

题型3　二次函数 $y=ax^2$ 图象和性质的综合应用

8 已知 $a\neq0$,在同一直角坐标系中,函数 $y=ax$ 与 $y=ax^2$ 的图象有可能是　　(　　)



9 [2018 山东济宁实验中学学业测试]如图,正方形的边长为 4,以正方形的中心为原点建立平面直角坐标系,作出函数 $y=\frac{1}{3}x^2$ 与 $y=-\frac{1}{3}x^2$ 的图象,则阴影部分的面积是_____.



10 [2019 河北衡水校级月考]已知 $y=(k+2)x^{k^2+k-4}$ 是二次函数,且函数图象有最高点.

(1)求 k 的值;(2)求顶点坐标和对称轴.

22.1.3　二次函数 $y=a(x-h)^2+k$ 的图象和性质

课时 1　二次函数 $y=ax^2+k$ 的图象和性质

刷基础

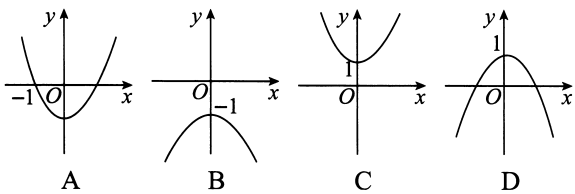
▶答案 D12

题型 1　二次函数 $y=ax^2+k$ 的图象

1 在抛物线 $y=-x^2+1$ 上的一个点是　(　　)

A. (1,0)　　B. (0,0)　　C. (0,−1)　　D. (1,1)

2 二次函数 $y=x^2+1$ 的图象大致是　(　　)

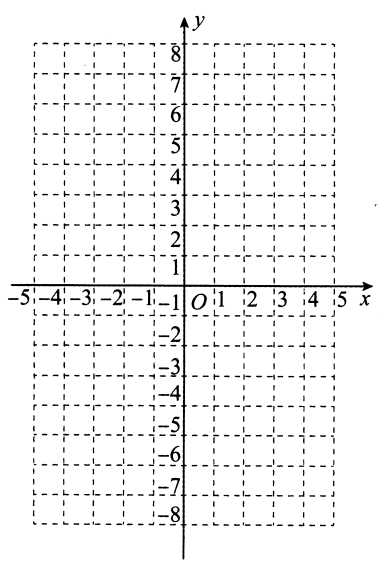


A　　B　　C　　D

3 在同一直角坐标系中,画出下列二次函数的图象,并观察抛物线的开口方向、对称轴和顶点及对称轴两侧图象的增减性.

$y=\frac{1}{2}x^2$, $y=\frac{1}{2}x^2+2$, $y=\frac{1}{2}x^2-2$.

x	…	−2	0	2	…
$y=\frac{1}{2}x^2$	…				…
$y=\frac{1}{2}x^2+2$	…				…
$y=\frac{1}{2}x^2-2$	…				…



题型 2　二次函数 $y=ax^2+k$ 的性质

4 [2019 广东广州校级检测]在抛物线 $y=-\frac{1}{3}x^2-1$ 的对称轴的左侧　(　　)

A. y 随 x 的增大而增大　　B. y 随 x 的增大而减小

C. y 随 x 的减小而增大　　D. 以上都不对

5 [2019 江苏海安期中]对于二次函数 $y=3x^2+2$,下列说法错误的是　(　　)

A. 其最小值为 2

B. 其图象与 y 轴没有公共点

C. 当 $x<0$ 时,y 随 x 的增大而减小

D. 其图象的对称轴是 y 轴

题型 3　二次函数 $y=ax^2+k$ 图象的平移

6 如果将抛物线 $y=x^2+2$ 向下平移 1 个单位长度,那么所得新抛物线的解析式是　(　　)

A. $y=(x-1)^2+2$　　B. $y=(x+1)^2+2$

C. $y=x^2+1$　　D. $y=x^2+3$

7 能否通过适当地上下平移二次函数 $y=\frac{1}{3}x^2$ 的图象,使得到的新函数的图象过点(3,−3),若能,求出平移的方向和距离;若不能,请说明理由.

刷易错

易错点　忽略二次函数 $y=ax^2+k$ 增减性的范围导致判定出错

8 已知点 (x_1,y_1), (x_2,y_2) 均在抛物线 $y=x^2-1$ 上,下列说法中正确的是　(　　)

A. 若 $y_1=y_2$,则 $x_1=x_2$　　B. 若 $x_1=-x_2$,则 $y_1=-y_2$

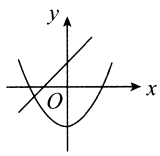
C. 若 $0<x_1<x_2$,则 $y_1>y_2$　　D. 若 $x_1<x_2<0$,则 $y_1>y_2$

刷提升

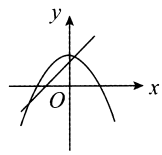
▶答案 D12

1 [2019 广东汕头校级期中]在同一坐标系中,一次函数 $y=ax+1$ 与二次函数 $y=x^2+a$ 的图象可能是(　　)

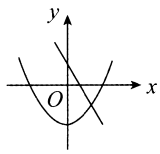
A



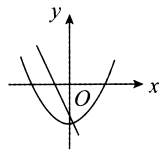
B



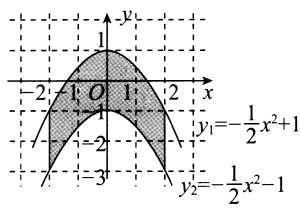
C



D



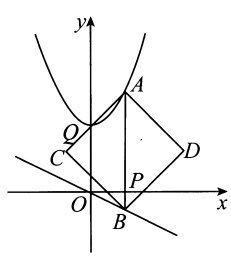
2 如图,两条抛物线 $y_1=-\frac{1}{2}x^2+1$,$y_2=-\frac{1}{2}x^2-1$ 与分别经过点 $(-2,0)$,$(2,0)$ 且平行于 y 轴的两条平行线围成的阴影部分的面积为(　　)



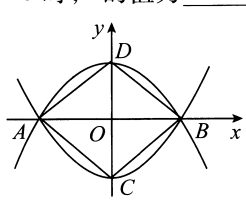
A. 8　　B. 6

C. 10　　D. 4

3 如图,在直角坐标系中,过点 $P(1,0)$ 作 x 轴的垂线分别交抛物线 $y=x^2+2$ 与直线 $y=-\frac{1}{2}x$ 于 A,B 两点,以线段 AB 为对角线作正方形 $ADBC$. 已知点 $Q(a,b)$ 为该抛物线上的点,当点 Q 在正方形 $ADBC$ 边上(点 A 除外)时,a 的值为_____.



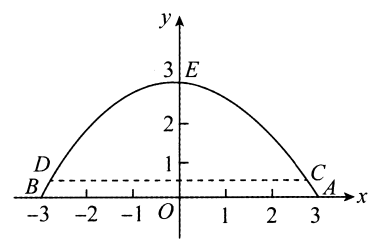
4 如图,抛物线 $y=ax^2-4$ 和 $y=-ax^2+4$ 都经过 x 轴上的 A,B 两点,两条抛物线的顶点分别为 C,D,当四边形 $ACBD$ 的面积为 40 时,a 的值为_____.



5 [2018 河北邢台模拟]如图,河上有一座抛物线形桥洞,已知桥下的水面离桥拱顶部 3 m 时,水面宽 $AB=6$ m,建立如图所示的坐标系.

(1)当水位上升 0.5 m 时,求水面宽度 CD 为多少米?(结果可保留根号)

(2)当水面的宽度为 CD 时,有一艘游船,它的左右两边缘最宽处有一个长方体形状的遮阳棚,此船正对着桥洞在上述河流中航行,若游船宽(最大宽度)2 m,从水面到棚顶高度为1.8 m. 问这艘游船能否从桥洞下通过?

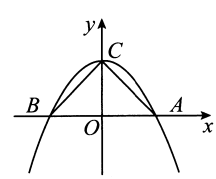


刷素养

6 [难]如图,抛物线 $y=-\frac{1}{2}x^2+2$ 与 x 轴交于 A,B 两点,其中点 A 在 x 轴的正半轴上,点 B 在 x 轴的负半轴上.

(1)试写出该抛物线的对称轴和顶点 C 的坐标;

(2)问在抛物线上是否存在一点 M,使 $\triangle MAC$ 和 $\triangle OAC$ 全等?若存在,求出点 M 的坐标;若不存在,请说明理由.



课时2 二次函数 $y=a(x-h)^2$ 的图象和性质

刷基础

▶答案 D13

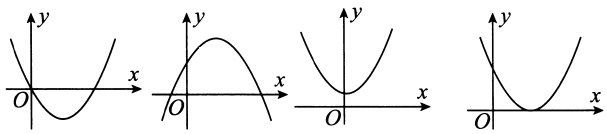
题型1 二次函数 $y=a(x-h)^2$ 的图象

1 [2019 天津蓟州区期中]抛物线 $y=-3(x+1)^2$ 不经过的象限是 (　　)

A. 第一、二象限　　B. 第二、四象限

C. 第三、四象限　　D. 第二、三象限

2 在平面直角坐标系中,二次函数 $y=a(x-h)^2(a\neq0)$ 的图象可能是 (　　)

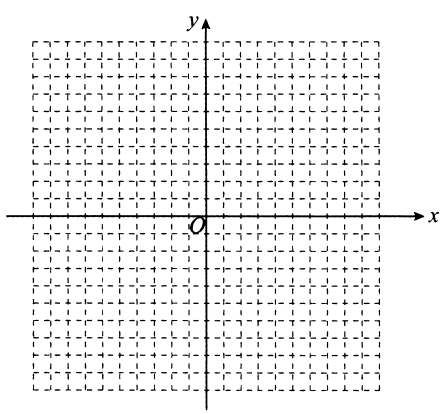


A　　B　　C　　D

3 在同一坐标系中画出下列函数的图象,并观察抛物线的开口方向、对称轴和顶点及对称轴两侧图象的增减性.

(1) $y=-x^2$;(2) $y=-(x+2)^2$;(3) $y=-(x-1)^2$.

x	…	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	…
$y=-x^2$	…										…
$y=-(x+2)^2$	…										…
$y=-(x-1)^2$	…										…



题型2 二次函数 $y=a(x-h)^2$ 的性质

4 关于 x 的二次函数 $y=2(x-3)^2$ 的图象,下列说法不正确的是 (　　)

A. 它的开口方向向上

B. 它的对称轴是直线 $x=3$

C. 它的顶点坐标为(3,0)

D. 当 $x<3$ 时,y 随 x 的增大而增大

5 二次函数 $y=-5(x+m)^2$ 中,当 $x<-5$ 时,y 随 x 的增大而增大,当 $x>-5$ 时,y 随 x 的增大而减小,则 $m=$_____,此时,该函数的图象的顶点坐标为_____,当 $x=$_____时,y 取最_____值,最大值为_____.

6 二次函数 $y=3(x-5)^2$ 的图象上有两点 $P(2,y_1)$,$Q(6,y_2)$,则 y_1 和 y_2 的大小关系是_____.

7 已知抛物线 $y=a(x-h)^2$,当 $x=2$ 时,有最大值,且抛物线过点(1,-3).

(1)求抛物线的解析式;

(2)当 y 随 x 的增大而增大时,求 x 的取值范围;

(3)求抛物线与 y 轴的交点坐标.

题型3 二次函数 $y=a(x-h)^2$ 的图象的平移

8 将抛物线 $y=x^2$ 通过平移得到抛物线 $y=(x+2)^2$,则下列平移过程正确的是 (　　)

A. 向左平移2个单位长度

B. 向右平移2个单位长度

C. 向上平移2个单位长度

D. 向下平移2个单位长度

9 [2019 安徽安庆期中]把抛物线 $y=\frac{1}{2}x^2$ 向左平移3个单位长度,就得到抛物线_____,抛物线 $y=\frac{1}{2}(x-3)^2$ 是由抛物线 $y=\frac{1}{2}x^2$ 向____平移____个单位长度得到的,抛物线 $y=\frac{1}{2}(x-1)^2$ 可以由抛物线 $y=\frac{1}{2}(x-4)^2$ 向____平移____个单位长度得到.

刷易错

易错点 忽略自变量取值对二次函数 $y=a(x-h)^2$ 的增减性的影响而出错

10 若点 $A\left(-\frac{13}{4},y_1\right)$,$B\left(-\frac{5}{4},y_2\right)$,$C\left(\frac{1}{4},y_3\right)$ 为二次函数 $y=(x-2)^2$ 图象上的三点,则 y_1,y_2,y_3 的大小关系为_____.

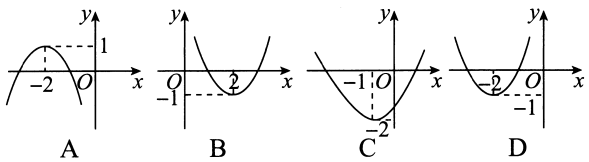
课时3　二次函数 $y=a(x-h)^2+k$ 的图象和性质

刷基础

▶答案 D13

题型1　二次函数 $y=a(x-h)^2+k$ 的图象

1 二次函数 $y=(x+2)^2-1$ 的图象大致为　　(　　)

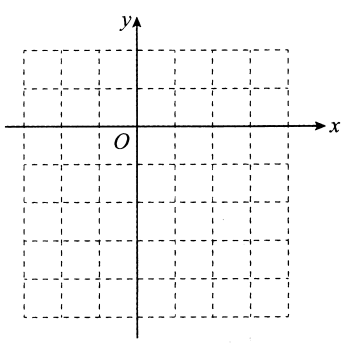


A　　B　　C　　D

2 (1)在同一直角坐标系中,画出函数 $y=-\frac{1}{2}x^2$ 与 $y=-\frac{1}{2}(x-1)^2+2$ 的图象.

列表并填写下列表格:

x	…	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	…
$y=-\frac{1}{2}x^2$	…								…	…
$y=-\frac{1}{2}(x-1)^2+2$	…	…								…



(2)观察(1)中所画的图象,回答下面的问题:

①抛物线 $y=-\frac{1}{2}x^2$ 的开口向_____,对称轴是直线_____,顶点坐标为_____;

②抛物线 $y=-\frac{1}{2}(x-1)^2+2$ 的开口向_____,对称轴是直线_____,顶点坐标为_____.

题型2　二次函数 $y=a(x-h)^2+k$ 的性质

3 [2019 重庆渝中区校级月考]抛物线 $y=2(x-3)^2+1$ 的顶点坐标是　　(　　)

A. (3,1)　　B. (3,-1)

C. (-3,1)　　D. (-3,-1)

4 关于 x 的二次函数 $y=-(x-1)^2+2$,下列说法正确的是　　(　　)

A. 图象的开口向上

B. 图象与 y 轴的交点坐标为(0,2)

C. 图象的顶点坐标是(-1,2)

D. 当 $x>1$ 时,y 随 x 的增大而减小

5 [2018 四川德阳第五中学期中]当 $2.5\leqslant x\leqslant 5$ 时,二次函数 $y=-(x-1)^2+2$ 的最大值为_____.

6 已知点 $A(4,y_1)$,$B(\sqrt{2},y_2)$,$C(-2,y_3)$ 都在二次函数 $y=(x-2)^2-1$ 的图象上,则 y_1,y_2,y_3 的大小关系是_____.

题型3　二次函数 $y=a(x-h)^2+k$ 图象的平移

7 将抛物线 $y=2x^2$ 先向右平移3个单位长度,再向下平移5个单位长度,得到的抛物线的解析式为　　(　　)

A. $y=2(x-3)^2-5$　　B. $y=2(x+3)^2+5$

C. $y=2(x-3)^2+5$　　D. $y=2(x+3)^2-5$

8 在平面直角坐标系上将二次函数 $y=-2(x-1)^2-2$ 的图象先向左平移1个单位长度,再向上平移1个单位长度,则其顶点为　　(　　)

A. (0,0)　　B. (1,-2)

C. (0,-1)　　D. (-2,1)

9 把二次函数 $y=a(x-h)^2+k$ 的图象先向左平移2个单位长度,再向上平移4个单位长度,得到二次函数 $y=\frac{1}{2}(x+1)^2-1$ 的图象.

(1)试确定 a,h,k 的值;

(2)指出 $y=a(x-h)^2+k$ 的图象的开口方向、对称轴和顶点坐标.

刷提升

▶答案 D14

1 已知二次函数 $y=2(x-3)^2+1$，则下列说法：①其图象的开口向下；②其图象的对称轴为直线 $x=-3$；③其图象的顶点坐标为 $(3,-1)$；④当 $x<3$ 时，y 随 x 的增大而减小，正确的有　（　）

A. 1 个　　B. 2 个

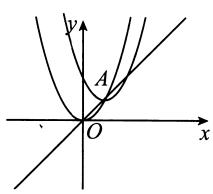
C. 3 个　　D. 4 个

2 已知二次函数 $y=(x-h)^2+1$（h 为常数），在自变量 x 的值满足 $1\leqslant x\leqslant 3$ 的情况下，与其对应的函数值 y 的最小值为 5，则 h 的值为　（　）

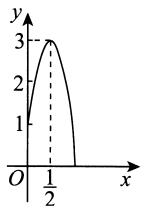
A. 1 或 -5　　B. -1 或 5

C. 1 或 -3　　D. 1 或 3

3 如图，把抛物线 $y=x^2$ 沿直线 $y=x$ 平移 $\sqrt{2}$ 个单位长度后，其顶点在直线上的 A 处，则平移后抛物线的解析式是_____.



（第 3 题图）



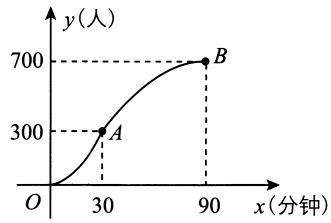
（第 4 题图）

4 某市广场中心标志性建筑处有高低不同的各种喷泉，其中一支高度为 1 米的喷水管所喷出水柱的最大高度为 3 米，此时喷水水平距离为 $\frac{1}{2}$ 米. 若水柱是抛物线形，在如图所示的坐标系中，则这支喷泉最远能喷_____米.（结果保留根号）

5 科技馆是少年儿童节假日游玩的乐园. 如图所示，图中点的横坐标 x 表示科技馆从 8:30 开门后经过的时间（分钟），纵坐标 y 表示到达科技馆的总人数. 图中曲线对应的函数解析式为 $y=\begin{cases}ax^2,0\leqslant x\leqslant 30,\\ b(x-90)^2+n,30<x\leqslant 90,\end{cases}$ 10:00 之后来的游客较少可忽略不计.

（1）请写出图中曲线对应的函数解析式；

（2）为保证科技馆内游客的游玩质量，馆内人数不超过 684 人，后来的人在馆外休息区等待. 从 10:30 开始到 12:00 馆内陆续有人离馆，平均每分钟离馆 4 人，直到馆内人数减少到 624 人时，馆外等待的游客可全部进入. 请问馆外游客最多等待多少分钟？



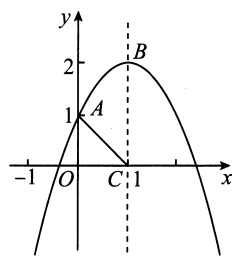
刷素养

6 [难] 如图，抛物线 $y=a(x-h)^2+k$ 经过点 $A(0,1)$，且顶点坐标为 $B(1,2)$，它的对称轴与 x 轴交于点 C.

（1）求此抛物线的解析式；

（2）在第一象限内的抛物线上求点 P，使得 $\triangle ACP$ 是以 AC 为底的等腰三角形，请求出此时点 P 的坐标；

（3）上述点是否是第一象限内此抛物线上与 AC 距离最远的点，若是，请说明理由；若不是，请求出第一象限内此抛物线上与 AC 距离最远的点的坐标.



少年侠气，交结五都雄。肝胆洞，毛发耸。立谈中，死生同，一诺千金重。

22.1.4　二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图象和性质

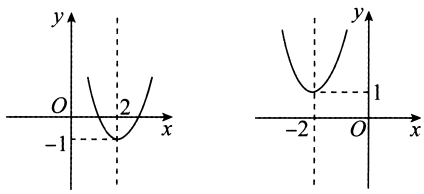
课时1　二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图象和性质

刷基础

▶答案 D15

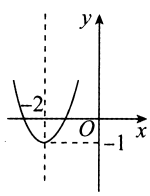
题型1　二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图象

1 [2019 湖北鄂州鄂城区期中]二次函数 $y=2x^2+8x+7$ 的图象是（　　）

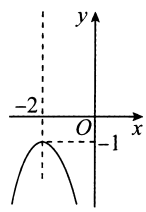


A

B



C



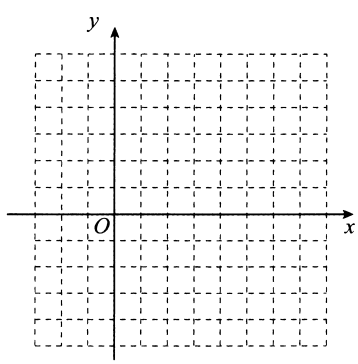
D

2 对于抛物线 $y=x^2-4x+3$.

(1)将抛物线的一般式化为顶点式.

(2)在坐标系中利用五点法画出此抛物线.

x	…						…
y	…						…



(3)结合图象,当 $0<x<3$ 时,求出 y 的取值范围.

题型2　二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的性质

3 [2019 天津蓟州区期中]关于抛物线 $y=x^2-4x+4$,下列说法错误的是（　　）

A. 开口向上

B. 与 x 轴只有一个交点

C. 对称轴是直线 $x=2$

D. 当 $x>0$ 时,y 随 x 的增大而增大

4 [2019 河南洛阳期中]二次函数图象上部分点的坐标对应值列表如下:

x	…	-3	-2	-1	0	1	…
y	…	-3	-2	-3	-6	-11	…

则该函数图象的对称轴是直线（　　）

A. $x=-3$　　B. $x=-2$

C. $x=-1$　　D. $x=0$

5 已知函数 $y=ax^2-2ax-1$(a 是常数,$a\neq0$),下列选项中正确的是（　　）

A. 当 $a=1$ 时,函数图象经过点 $(-1,0)$

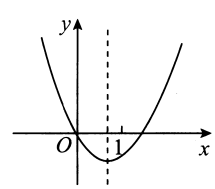
B. 当 $a=-2$ 时,函数图象与 x 轴没有交点

C. 若 $a<0$,函数图象的顶点始终在 x 轴的下方

D. 若 $a>0$,则当 $x\geqslant1$ 时,y 随 x 的增大而增大

题型3　二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图象与 a,b,c 的关系

6 [2018 湖北宜昌期中]如图,已知函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图象,则 $|a+b+c|+|a-b+c|+|2a+b|=$（　　）



A. $2a+3b$　　B. $2c-b$

C. $2a-b$　　D. $b-2c$

刷易错

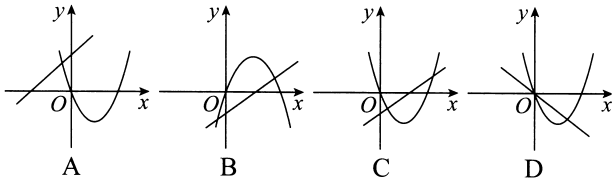
易错点　求二次函数最值时忽略自变量的取值范围

7 已知二次函数 $y=x^2-3x+1$,当 $x\geqslant6$ 时,它的最小值为_____.

刷提升

▸答案 D15

1 如图，一次函数 $y=ax+b$ 与二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的大致图象是 （ ）



2 已知抛物线 $y=x^2-4x+3$ 与 x 轴相交于点 A，B（点 A 在点 B 左侧），顶点为 M. 平移该抛物线，使点 M 平移后的对应点 M' 落在 x 轴上，点 B 平移后的对应点 B' 落在 y 轴上. 则平移后的抛物线为 （ ）

A. $y=x^2+2x+1$　　B. $y=x^2+2x-1$

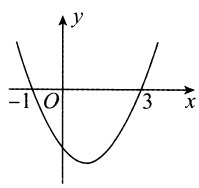
C. $y=x^2-2x+1$　　D. $y=x^2-2x-1$

3 已知二次函数 $y=x^2-2mx$（m 为常数），当 $-1\leqslant x\leqslant 2$ 时，函数 y 的最小值为 -2，则 m 的值是 （ ）

A. $\frac{3}{2}$　　B. $\sqrt{2}$

C. $\frac{3}{2}$或$\sqrt{2}$　　D. $-\frac{3}{2}$或$\sqrt{2}$

4 如图为二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图象，在下列说法中：①$ac<0$；②方程 $ax^2+bx+c=0$ 的根是 $x_1=-1$，$x_2=3$；③$a+b+c<0$；④当 $x>1$ 时，y 随 x 的增大而减小；⑤$2a-b=0$；⑥$b^2-4ac>0$. 下列结论一定成立的是 （ ）



A. ①②④⑥　　B. ①②③⑥

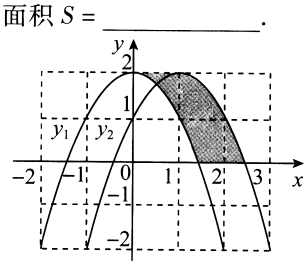
C. ②③④⑤⑥　　D. ①②③④

5 已知二次函数 $y=2x^2-12x+5$，则该函数图象关于 x 轴对称的图象的函数解析式为_____.

6 将抛物线 $y=-\frac{1}{2}(x-3)^2+5$ 绕顶点旋转 180°后的抛物线的解析式为_____.

7 [2018 山东德州月考]已知抛物线 $y=x^2-4$ 与 x 轴交于 B，C 两点（点 B 在点 C 的左侧），顶点为 A，则 $\triangle ABC$ 的周长为_____.

8 [2018 安徽合肥四十五中段考]如图，将抛物线 $y_1=-x^2+2$ 向右平移 1 个单位长度得到抛物线 y_2，则图中阴影部分的面积 $S=$_____.



9 [2019 江苏张家港期中]已知抛物线：$y=ax^2-4ax-5$（$a\neq 0$）.

（1）写出抛物线的对称轴：直线_____；

（2）当 $a=-1$ 时，将该抛物线图象沿 x 轴翻折，得到新的抛物线解析式是_____；

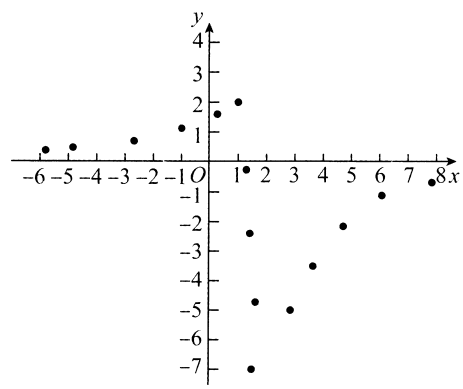
（3）若抛物线的顶点在 x 轴上，求 a 的值.

刷素养

10 某“数学兴趣小组”根据学习函数的经验，对函数 $y=\frac{-4x+6}{(x-2)^2}$ 的图象和性质进行了探究，探究过程如下，请补充完整：

（1）该函数的自变量 x 的取值范围是_____；

（2）同学们先找到 y 与 x 的几组对应值，然后在下图的平面直角坐标系 xOy 中，描出各对对应值为坐标的点. 请你根据描出的点，画出该函数的图象；



（3）结合图象，写出当 $x<2$ 时，函数在 $x=$_____，取得最大值 $y=$_____；

（4）结合画出的函数图象，写出该函数的一条性质：_____.

当你可以直面自己身体里与生俱来的笨拙与孤独时，你便能够彻底谅解过去的自己。

课时2　用待定系数法求二次函数的解析式

刷基础

▶答案 D16

题型1　用“一般式”求二次函数解析式

1 [2019 湖北武汉洪山区期中]已知二次函数的图象经过点$(-1,-5)$,$(0,-4)$和$(1,1)$,则该二次函数的解析式为　(　　)

A. $y=-6x^2+3x+4$　　B. $y=-2x^2+3x-4$

C. $y=x^2+2x-4$　　D. $y=2x^2+3x-4$

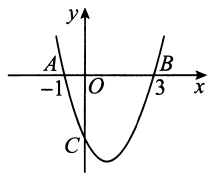
2 若二次函数$y=ax^2+bx+c$的x与y的部分对应值如下表:

x	-7	-6	-5	-4	-3	-2
y	-27	-13	-3	3	5	3

则二次函数的解析式为_____.

3 [2018 内蒙古北京八中乌兰察布分校期中]经过$A(1,4)$,$B(-2,1)$两点,对称轴为直线$x=-1$的抛物线的解析式为_____.

4 如图所示,抛物线$y=x^2+bx+c$的解析式为_____,对称轴为直线_____,顶点坐标为_____.



题型2　用“顶点式”求二次函数解析式

5 若抛物线的顶点坐标是$(-2,1)$,且经过点$(1,-8)$,则该抛物线的解析式是　(　　)

A. $y=-9(x-2)^2+1$

B. $y=-7(x-2)^2-1$

C. $y=-(x+2)^2+1$

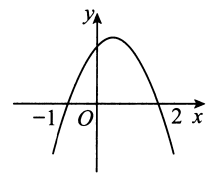
D. $y=-\frac{7}{9}(x+2)^2-1$

6 已知某二次函数的图象的顶点坐标为$(4,-1)$,且它的形状、开口方向与抛物线$y=-x^2$相同,则这个二次函数的解析式为_____.

7 [2018 青海西宁二十一中月考]若二次函数在$x=\frac{3}{2}$时,有最小值$-\frac{1}{4}$,且函数的图象经过点$(0,2)$,则此函数的解析式为_____.

题型3　用“交点式”求二次函数解析式

8 [2019 江苏南京鼓楼区期中]抛物线的图象如下,根据图象可知,抛物线的解析式可能是　(　　)



A. $y=x^2-x+2$　　B. $y=-\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}x+2$

C. $y=-\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}x+1$　　D. $y=-x^2+x+2$

9 [2018 河南模拟]已知抛物线$y=ax^2+bx+c$与x轴的两个交点为$(-1,0)$,$(3,0)$,其形状、开口方向与抛物线$y=-2x^2$相同,则$y=ax^2+bx+c$的函数解析式为(　　)

A. $y=-2x^2-x+3$　　B. $y=-2x^2+4x+5$

C. $y=-2x^2+4x+8$　　D. $y=-2x^2+4x+6$

10 如果抛物线经过点$A(2,0)$和$B(-1,0)$,且与y轴交于点C,若$OC=2$,那么这条抛物线的解析式是　(　　)

A. $y=x^2-x-2$

B. $y=-x^2-x-2$或$y=x^2+x+2$

C. $y=-x^2+x+2$

D. $y=x^2-x-2$或$y=-x^2+x+2$

11 [2017 广西百色中考]经过$A(4,0)$,$B(-2,0)$,$C(0,3)$三点的抛物线的解析式是_____.

12 已知抛物线与x轴交于点$A(-3,0)$,对称轴是直线$x=1$,且过点$(2,5)$,求抛物线的解析式.

刷提升

▶答案 D16

1 一个二次函数的图象过$(-1,5)$,$(1,1)$和$(3,5)$三个点,则这个二次函数的解析式为　　(　　)

A. $y=-x^2-2x+2$　　B. $y=x^2-2x+2$

C. $y=x^2-2x+1$　　D. $y=x^2-2x-2$

2 [2019 天津河西区校级月考]与抛物线$y=-x^2+1$的顶点相同、形状相同且开口方向相反的抛物线所对应的函数解析式为　　(　　)

A. $y=-x^2$　　B. $y=x^2-1$

C. $y=-x^2-1$　　D. $y=x^2+1$

3 某二次函数,当自变量x满足$0\leqslant x\leqslant 4$时,对应的函数值y满足$0\leqslant y\leqslant 2$,则这个函数不可能是　　(　　)

A. $y=\frac{1}{2}(x-2)^2$

B. $y=x^2-4x+2$

C. $y=-\frac{1}{2}(x-2)^2+2$

D. $y=-\frac{1}{4}x^2+x+1$

4 若抛物线$y=ax^2+bx+c(a\neq 0)$与抛物线$y=2x^2-4x-1$的顶点重合,且与y轴的交点坐标为$(0,1)$,则抛物线$y=ax^2+bx+c(a\neq 0)$的解析式是　　(　　)

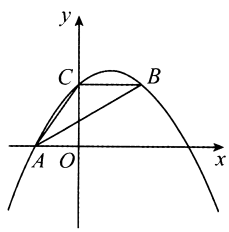
A. $y=4x^2-8x-7$　　B. $y=4x^2-8x+1$

C. $y=2x^2-4x+1$　　D. $y=-2x^2-4x+1$

5 [2019 江苏东台期中]抛物线的顶点为$(2,-3)$,与y轴交于点$(0,-7)$,则该抛物线的解析式为_____.

6 [2018 上海杨浦区一模]请写出一个开口向下,且与y轴的交点坐标为$(0,4)$的抛物线的解析式_____.

7 [2019 福建厦门思明区校级月考]如图,抛物线$y=ax^2+bx+4$经过点$A(-3,0)$,点B在抛物线上,$CB\parallel x$轴,且AB平分$\angle CAO$.则此抛物线的解析式是_____.



8 [2019 福建连城期中]在平面直角坐标系中,一组有规律的点$A_1(0,1)$,$A_2(1,0)$,$A_3(2,1)$,$A_4(3,0)$,$A_5(4,1)$,$A_6(5,0)$,…(注:当n为奇数时,$A_n(n-1,1)$;当n为偶数时,$A_n(n-1,0)$),抛物线C_1经过点A_1,A_2,A_3三点,…,抛物线C_n经过C_n,C_{n+1},C_{n+2}三点,请写出抛物线C_{2n}的解析式_____.

9 [2019 吉林长春期中]在平面直角坐标系中,抛物线$y=x^2+bx+c$经过点$(1,-2)$,$(2,-3)$.

(1)求这条抛物线所对应的函数解析式;

(2)点P是抛物线上一点,其横、纵坐标互为相反数,求点P的坐标.

刷素养

10 [2018 浙江杭州下城区二模,难]设二次函数的解析式为$y=ax^2+bx(a\neq 0)$,且$|a+b|=1$,它的图象过点$(2,1)$.

(1)求此二次函数的解析式;

(2)当$a>0$时,设函数图象上到两坐标轴的距离相等的点为A,且点A的横坐标为$m(m\neq 0)$,求m的值;

(3)当$t_1\leqslant x\leqslant t_2$时,对应$y=ax^2+bx$都有"$y$随$x$的增大而增大",求$t_1$的最小值与$t_2$的最大值.

22.1 综合训练

刷综合

▶答案 D17

1 已知平行于 x 轴的直线与抛物线 $y=a(x-2)^2$ 的一个交点坐标为 $(-1,2)$，则另一个交点的坐标为（　　）

A. $(1,2)$　　B. $(1,-2)$　　C. $(5,2)$　　D. $(-1,4)$

2 设 $A(-2,y_1)$，$B(1,y_2)$，$C(2,y_3)$ 是抛物线 $y=-(x+1)^2+1$ 上的三点，则 y_1,y_2,y_3 的大小关系为（　　）

A. $y_1>y_2>y_3$　　B. $y_1>y_3>y_2$

C. $y_3>y_2>y_1$　　D. $y_3>y_1>y_2$

3 已知二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的自变量 x 与函数值 y 的部分对应值如下表：

x	…	-5	-4	-3	-2	-1	0	…
y	…	4	0	-2	-2	0	4	…

下列说法正确的是（　　）

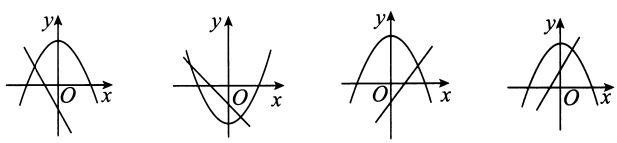
A. 抛物线的开口向下

B. 当 $x>-3$ 时，y 随 x 的增大而增大

C. 二次函数的最小值是 -2

D. 抛物线的对称轴是直线 $x=-\frac{5}{2}$

4 在同一直角坐标系中，二次函数 $y=-x^2+m$ 与一次函数 $y=mx-1(m\neq0)$ 的图象可能是（　　）



A　　B　　C　　D

5 [2018 浙江台州书生中学月考]已知二次函数 $y=\left(x-\frac{1}{m}\right)(mx-4m)$（其中 $m>0$），下列说法正确的是（　　）

A. 当 $x>2$ 时，都有 y 随着 x 的增大而增大

B. 当 $x<3$ 时，都有 y 随着 x 的增大而减小

C. 若当 $x<n$ 时，都有 y 随着 x 的增大而减小，则 $n\leqslant2+\frac{1}{2m}$

D. 若当 $x<n$ 时，都有 y 随着 x 的增大而减小，则 $n\geqslant\frac{1}{2m}$

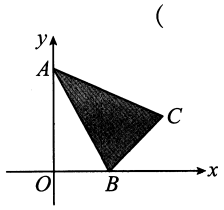
6 如图，已知 $\triangle ABC$ 的顶点分别为 $A(0,2)$，$B(1,0)$，$C(2,1)$，若二次函数 $y=x^2+bx+1$ 的图象与阴影部分（含边界）一定有公共点，则实数 b 的取值范围是（　　）

A. $b\leqslant-2$

B. $b<-2$

C. $b\geqslant-2$

D. $b>-2$



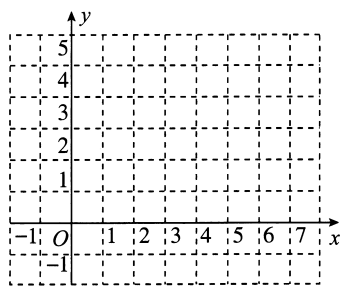
7 [2019 海南海口校级月考]已知某抛物线的顶点坐标为 $(-2,1)$，且与 y 轴相交于点 $(0,4)$，这个抛物线所对应的二次函数的解析式是_____.

8 二次函数 $y=x^2+bx+c$ 的图象经过点 $A(1,0)$，$C(0,3)$.

(1)求 b,c 的值；

(2)求该二次函数图象的顶点坐标和对称轴；

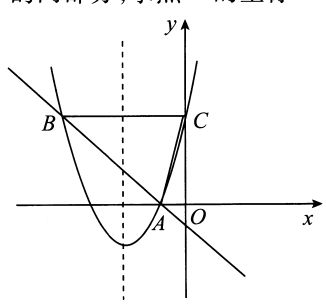
(3)在所给直角坐标系中画出二次函数 $y=x^2+bx+c$ 的图象，并根据图象在抛物线的对称轴上找点 P，使得 $\triangle ACP$ 的周长最短（直接写出点 P 的坐标）.



9 [难]已知二次函数 $y=x^2+4x+4+m$ 的图象与 y 轴交于点 C，点 B 与点 C 的纵坐标相同，一次函数 $y=kx+b$ 与二次函数的图象交于 A,B 两点，且点 A 的坐标为 $(-1,0)$.

(1)求二次函数与一次函数的解析式；

(2)若抛物线的对称轴上存在一点 P，直线 PC 将 $\triangle ABC$ 分成面积比为 $1:2$ 的两部分，求点 P 的坐标.



1 [2018 山西中考]用配方法将二次函数 $y=x^2-8x-9$ 化为 $y=a(x-h)^2+k$ 的形式为　(　)

A. $y=(x-4)^2+7$　　B. $y=(x-4)^2-25$

C. $y=(x+4)^2+7$　　D. $y=(x+4)^2-25$

2 [2018 黑龙江哈尔滨中考]将抛物线 $y=-5x^2+1$ 先向左平移 1 个单位长度,再向下平移 2 个单位长度,所得到的抛物线为　(　)

A. $y=-5(x+1)^2-1$

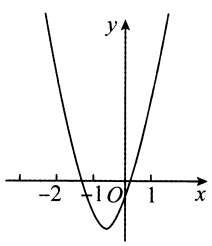
B. $y=-5(x-1)^2-1$

C. $y=-5(x+1)^2+3$

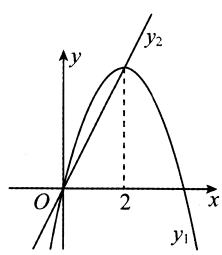
D. $y=-5(x-1)^2+3$

3 [2018 山东日照中考]已知二次函数 $y=ax^2+bx+c$ $(a\neq0)$ 图象如图所示. 有下列结论:①$abc<0$;②$2a-b<0$;③$b^2>(a+c)^2$;④点 $(-3,y_1)$,$(1,y_2)$ 都在抛物线上,则有 $y_1>y_2$. 其中正确的结论有　(　)

A. 4 个　　B. 3 个　　C. 2 个　　D. 1 个



(第 3 题图)



(第 4 题图)

4 [2018 新疆生产建设兵团中考]如图,已知抛物线 $y_1=-x^2+4x$ 和直线 $y_2=2x$. 我们规定当 x 取任意一个值时,x 对应的函数值分别为 y_1 和 y_2. 若 $y_1\neq y_2$,取 y_1 和 y_2 中较小值为 M;若 $y_1=y_2$,记 $M=y_1=y_2$. ①当 $x>2$ 时,$M=y_2$;②当 $x<0$ 时,M 随 x 的增大而增大;③使得 M 大于 4 的 x 的值不存在;④若 $M=2$,则 $x=1$. 上述结论正确的是_____. (填写所有正确结论的序号)

5 [2017 浙江杭州中考]在平面直角坐标系中,设二次函数 $y_1=(x+a)(x-a-1)$,其中 $a\neq0$.

(1)若函数 y_1 的图象经过点 $(1,-2)$,求函数 y_1 的解析式;

(2)若一次函数 $y_2=ax+b$ 的图象与 y_1 的图象经过 x 轴上同一点,探究实数 a,b 满足的关系式;

(3)已知点 $P(x_0,m)$ 和 $Q(1,n)$ 在函数 y_1 的图象上,若 $m<n$,求 x_0 的取值范围.

6 [2018 北京中考]在平面直角坐标系 xOy 中,直线 $y=4x+4$ 与 x 轴、y 轴分别交于点 A,B,抛物线 $y=ax^2+bx-3a$ 经过点 A,将点 B 向右平移 5 个单位长度,得到点 C.

(1)求点 C 的坐标;

(2)求抛物线的对称轴;

(3)若抛物线与线段 BC 恰有一个公共点,结合函数图象,求 a 的取值范围.

22.2　二次函数与一元二次方程

刷基础

▸答案 D18

题型1　二次函数与一元二次方程的关系

1 抛物线 $y=2x^2-2\sqrt{2}x+1$ 与坐标轴的交点个数是（　　）

A. 0　　B. 1　　C. 2　　D. 3

2 若抛物线 $y=x^2+2x+m-1$ 与 x 轴有两个不同的交点，则 m 的取值范围是（　　）

A. $m<2$　　B. $m>2$

C. $0<m\leqslant 2$　　D. $m<-2$

3 已知方程 $2x^2-3x-5=0$ 的两根为 $\frac{5}{2}$，-1，则抛物线 $y=2x^2-3x-5$ 与 x 轴两个交点间距离为_____.

4 若抛物线 $y=x^2-2x-3$ 与 x 轴分别交于 A，B 两点（A 在 B 的左边），则 A，B 的坐标分别为_____.

题型2　用二次函数的图象解一元二次方程

5 已知二次函数 $y=x^2-3x+m$（m 为常数）的图象与 x 轴的一个交点为（1，0），则关于 x 的一元二次方程 $x^2-3x+m=0$ 的两实数根是（　　）

A. $x_1=1$，$x_2=-1$　　B. $x_1=1$，$x_2=2$

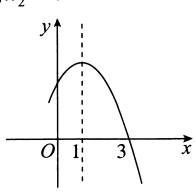
C. $x_1=1$，$x_2=0$　　D. $x_1=1$，$x_2=3$

6 若二次函数 $y=x^2+mx$ 图象的对称轴是直线 $x=3$，则关于 x 的方程 $x^2+mx=7$ 的解为（　　）

A. $x_1=0$，$x_2=6$　　B. $x_1=1$，$x_2=7$

C. $x_1=1$，$x_2=-7$　　D. $x_1=-1$，$x_2=7$

7 若二次函数 $y=-x^2+2x+k$ 的部分图象如图所示，则关于 x 的一元二次方程 $-x^2+2x+k=0$ 的一个解 $x_1=3$，另一个解 $x_2=$_____.



题型3　用二次函数的图象求一元二次方程的近似解

8 根据下列表格中的数据，判断一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$（$a\neq 0$，a，b，c 为常数）一个解的范围是（　　）

x	…	3.3	3.4	3.5	3.6	…
$y=ax^2+bx+c$	…	−0.6	−0.2	0.3	0.9	…

A. $3<x<3.3$　　B. $3.3<x<3.4$

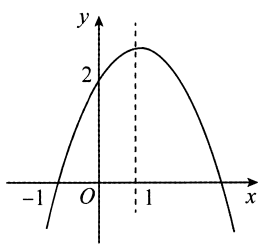
C. $3.4<x<3.5$　　D. $3.5<x<3.6$

题型4　用二次函数的图象解不等式

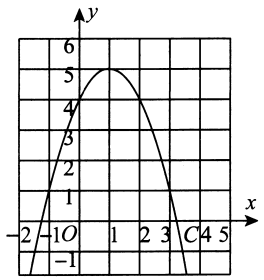
9 [2019 福建福州晋安区期中] 已知抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 的部分图象如图所示，若 $y>0$，则 x 的取值范围是（　　）

A. $x<-1$ 或 $x>2$　　B. $x<-1$ 或 $x>3$

C. $-1<x<2$　　D. $-1<x<3$



（第9题图）



（第10题图）

10 如图是二次函数 $y=-x^2+2x+4$ 的图象，则使 $y\leqslant 1$ 成立的 x 的取值范围是（　　）

A. $-1\leqslant x\leqslant 3$

B. $x\leqslant -1$

C. $x\geqslant 1$

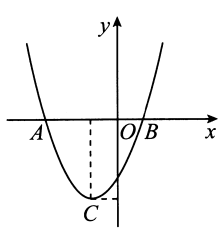
D. $x\leqslant -1$ 或 $x\geqslant 3$

11 [2018 湖北孝感期中] 如图，二次函数 $y=ax^2+bx+c$（$a\neq 0$）的图象的顶点 C 的坐标为（-1，-3），与 x 轴交于 $A(-3,0)$，$B(1,0)$，根据图象回答下列问题：

（1）写出方程 $ax^2+bx+c=0$ 的根；

（2）写出不等式 $ax^2+bx+c>0$ 的解集；

（3）若方程 $ax^2+bx+c=k$ 有实数根，写出实数 k 的取值范围.



刷易错

易错点　忽视隐含条件“二次项系数不为0”导致错误

12 若抛物线 $y=ax^2+2x-1$ 与 x 轴有交点，则 a 的取值范围是_____.

刷提升

▸答案 D19

1 若二次函数 $y=ax^2+1$ 的图象经过点 $(-2,0)$，则关于 x 的方程 $a(x-2)^2+1=0$ 的实数根为 （　　）

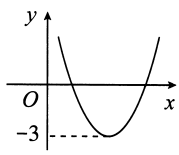
A. $x_1=0, x_2=4$

B. $x_1=-2, x_2=6$

C. $x_1=\frac{3}{2}, x_2=\frac{5}{2}$

D. $x_1=-4, x_2=0$

2 已知函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图象如图所示，那么关于 x 的方程 $ax^2+bx+c+2=0$ 的根的情况是 （　　）



A. 有两个同号不相等的实数根

B. 有两个异号不相等的实数根

C. 有两个相等的实数根

D. 无实数根

3 已知二次函数 $y=x^2+bx$ 图象的对称轴为直线 $x=1$. 若关于 x 的一元二次方程 $x^2+bx-t=0$（t 为实数）在 $-1<x<4$ 的范围内有解，则 t 的取值范围是 （　　）

A. $t\geqslant -1$　　B. $-1\leqslant t<3$

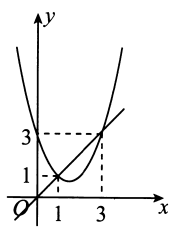
C. $-1\leqslant t<8$　　D. $3<t<8$

4 函数 $y=x^2+bx+c$ 与函数 $y=x$ 的图象如图所示，有以下结论：

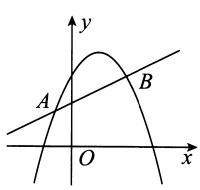
①$b^2-4c>0$；②$b+c=0$；③$b<0$；④方程组 $\begin{cases}y=x^2+bx+c,\\y=x\end{cases}$ 的解为 $\begin{cases}x_1=1,\\y_1=1,\end{cases}\begin{cases}x_2=3,\\y_2=3;\end{cases}$ ⑤当 $1<x<3$ 时，$x^2+(b-1)x+c>0$. 其中正确的是 （　　）

A. ①②③　　B. ②③④

C. ③④⑤　　D. ②③⑤



（第 4 题图）



（第 5 题图）

5 如图，直线 $y=mx+n$ 与抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 交于 $A(-1,p)$，$B(4,q)$ 两点，则关于 x 的不等式 $mx+n>ax^2+bx+c$ 的解集是_____.

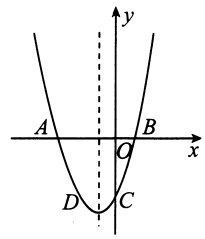
6 [2018 江苏扬州江都区月考] 若关于 x 的一元二次方程 $ax^2+2x-5=0$ 的两根中有且仅有一根在 0 与 1 之间（不含 0 和 1），则 a 的取值范围是_____.

7 [2019 江苏宜兴月考] 已知抛物线 $y=x^2+bx+c$ 与 x 轴交于 A,B 两点，其中点 A 的坐标为 $(-3,0)$，与 y 轴交于点 C，点 $D(-2,-3)$ 在抛物线上.

(1) 求抛物线的解析式；

(2) 抛物线的对称轴上有一动点 P，求出 $PA+PD$ 的最小值；

(3) 若抛物线上有一动点 Q，使 $\triangle ABQ$ 的面积为 6，求点 Q 点的坐标.



刷素养

8 [难] 已知关于 x 的方程 $kx^2+(2k+1)x+2=0$.

(1) 求证：无论 k 取任何实数时，方程总有实数根；

(2) 当抛物线 $y=kx^2+(2k+1)x+2$ 与 x 轴的两个交点的横坐标均为整数，且 k 为正整数时，若 $P(a,y_1)$，$Q(1,y_2)$ 是此抛物线上的两点，且 $y_1>y_2$，请结合函数图象确定实数 a 的取值范围；

(3) 已知抛物线 $y=kx^2+(2k+1)x+2$ 恒过定点，求出定点坐标.

去做你想做的事情，留下一个你认为重要且永久的痕迹，那么生命就没有虚度。

专题　二次函数的综合

刷难关

▶答案 D20

类型1　二次函数与一次函数的综合

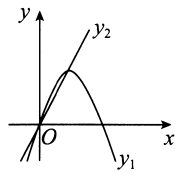
1 [2018 广东新会桥美学校质检]如图,抛物线 $y_1=-x^2+4x$ 和直线 $y_2=2x$,当 $y_1>y_2$ 时,x 的取值范围为 (　　)

A. $0<x<2$

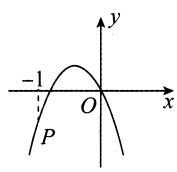
B. $x<0$ 或 $x>4$

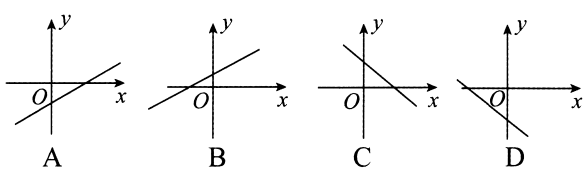
C. $x<0$ 或 $x>2$

D. $0<x<4$



2 [2018 浙江宁波中考]如图,二次函数 $y=ax^2+bx$ 的图象开口向下,且经过第三象限的点 P. 若点 P 的横坐标为 -1,则一次函数 $y=(a-b)x+b$ 的图象大致是 (　　)



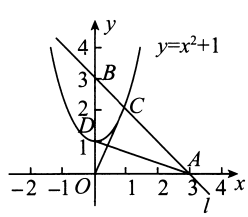


A　B　C　D

3 如图,直线 l 经过 $A(3,0)$,$B(0,3)$ 两点,且与二次函数 $y=x^2+1$ 的图象在第一象限内交于点 C. 求:

(1) $\triangle AOC$ 的面积;

(2)二次函数图象的顶点 D 与点 A,B 组成的三角形的面积.



类型2　二次函数与一元二次方程的综合

4 小明为了研究关于 x 的方程 $x^2-|x|-k=0$ 的根的个数问题,先将该方程转化为 $x^2=|x|+k$,再分别画出函数 $y=x^2$ 的图象与函数 $y=|x|+k$ 的图象,当该方程有且只有四个根时,k 的取值范围是 (　　)

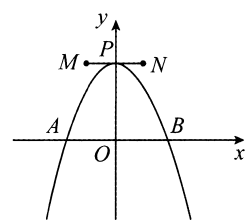
A. $k>0$

B. $-\frac{1}{4}<k<0$

C. $0<k<\frac{1}{4}$

D. $-\frac{1}{4}<k<\frac{1}{4}$

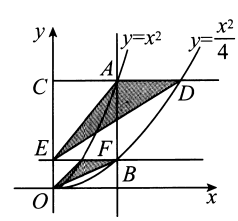
5 [2018 江西吉安二模]如图,一条抛物线与 x 轴相交于 $A(x_1,0)$,$B(x_2,0)$ 两点(点 B 在点 A 的右侧),其顶点 P 在线段 MN 上移动. M,N 的坐标分别为 $(-1,2)$,$(1,2)$. x_1 的最小值为 -3,则 x_2 的最大值为 (　　)



A. -1　　B. 1　　C. 3　　D. 5

类型3　二次函数与几何图形的综合

6 [2018 湖北黄石第十四中学月考]如图,垂直于 x 轴的直线 AB 分别与抛物线 C_1:$y=x^2$ $(x\geqslant 0)$ 和抛物线 C_2:$y=\frac{x^2}{4}(x\geqslant 0)$ 交于点 A,B,过点 A 作 $CD\parallel x$ 轴,分别与 y 轴和抛物线 C_2 交于点 C,D,过点 B 作 $EF\parallel x$ 轴,分别与 y 轴和抛物线 C_1 交于点 E,F,则 $\frac{S_{\triangle OBF}}{S_{\triangle EAD}}$ 的值为 (　　)

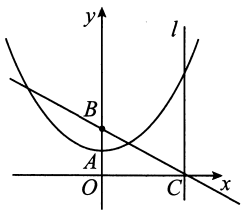


A. $\frac{\sqrt{2}}{6}$　　B. $\frac{\sqrt{2}}{4}$　　C. $\frac{1}{4}$　　D. $\frac{1}{6}$

7 如图，在平面直角坐标系 xOy 中，抛物线 $y=x^2+\frac{1}{4}$ 与 y 轴相交于点 A，点 B 在 y 轴上，且在点 A 的上方，$AB=OA$.

(1)填空：点 B 的坐标是_____；

(2)过点 B 的直线 $y=kx+b$（其中 $k<0$）与 x 轴相交于点 C，过点 C 作直线 l 平行于 y 轴，P 是直线 l 上一点，且 $PB=PC$，求线段 PB 的长（用含 k 的式子表示），并判断点 P 是否在抛物线上，说明理由.

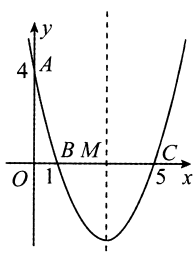


8 [2019 河北冀州校级月考，难]如图，在平面直角坐标系中，抛物线经过点 $A(0,4)$，$B(1,0)$，$C(5,0)$，其对称轴与 x 轴相交于点 M.

(1)求此抛物线的解析式和对称轴；

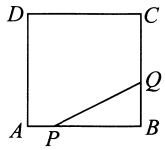
(2)在此抛物线的对称轴上是否存在一点 P，使 $\triangle PAB$ 的周长最小？若存在，请求出点 P 的坐标；若不存在，请说明理由；

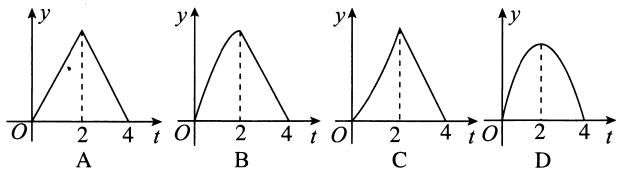
(3)连接 AC，在直线 AC 下方的抛物线上，是否存在一点 N，使 $\triangle NAC$ 的面积最大，若存在，请求出点 N 的坐标；若不存在，请说明理由.



类型4　二次函数与动点问题

9 如图，正方形 $ABCD$ 的边长为 4，点 P 从点 A 运动到点 B，速度为 1，点 Q 沿 $B-C-D$ 运动，速度为 2，点 P，Q 同时出发，则 $\triangle BPQ$ 的面积 y 与运动时间 t（$t\leqslant 4$）的函数图象是（　　）



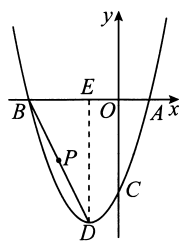


10 [难]如图，已知抛物线 $y=x^2+bx+c$ 的图象经过 $A(1,0)$，$B(-3,0)$，与 y 轴交于点 C，抛物线的顶点为 D，对称轴与 x 轴相交于点 E，连接 BD.

(1)求抛物线的解析式；

(2)若点 P 在直线 BD 上，当 $PE=PC$ 时，求点 P 的坐标；

(3)在(2)的条件下，作 $PF\perp x$ 轴于点 F，点 M 为 x 轴上一动点，N 为直线 PF 上一动点，G 为抛物线上一动点，当以 F,N,G,M 四点为顶点的四边形为正方形时，求点 M 的坐标.



当一个人感觉到有高飞的冲动时，他将再也不会满足于在地上爬。

22.3　实际问题与二次函数

课时1　几何图形问题

刷基础

▶答案 D21

题型1　求几何图形面积的最值

1 [2019 河北邯郸校级月考]矩形的周长为 12 cm,设其一边长为 x cm,面积为 y cm^2,则 y 与 x 的函数解析式及其自变量 x 的取值范围均正确的是　(　　)

A. $y=-x^2+6x(3<x<6)$

B. $y=-x^2+6x(0<x<6)$

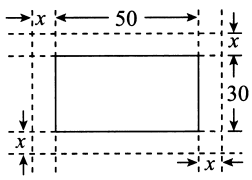
C. $y=-x^2+12x(6<x<12)$

D. $y=-x^2+12x(0<x<12)$

2 用一条长为 40 cm 的绳子围成一个面积为 a cm^2 的长方形,a 的值不可能为　(　　)

A. 20　　B. 40　　C. 100　　D. 120

3 如图,在一幅长 50 cm,宽 30 cm 的矩形风景画的四周镶一条金色纸边,制成一幅矩形挂画,设整个挂画总面积为 y cm^2,金色纸边的宽为 x cm,则 y 与 x 的关系式是_____.



4 用长为 32 米的篱笆围一个矩形养鸡场,设围成的矩形一边长为 x 米,面积为 y 平方米.

(1)求 y 关于 x 的函数关系式;

(2)当 x 为何值时,围成的养鸡场面积为 60 平方米?

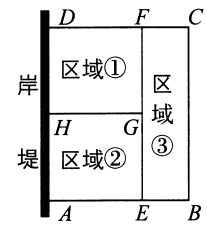
(3)能否围成面积为 70 平方米的养鸡场?如果能,请求出其边长;如果不能,请说明理由.

题型2　解决与几何图形面积有关的最优化问题

5 为了节省材料,某水产养殖户利用水库的岸堤(岸堤足够长)为一边,用总长为 80 m 的围网在水库中围成了如图所示的①②③三块矩形区域,而且这三块矩形区域的面积相等.设 BC 的长度为 x m,矩形区域 $ABCD$ 的面积为 y m^2.

(1)求 y 与 x 之间的函数关系式,并注明自变量 x 的取值范围;

(2)x 为何值时,y 有最大值?最大值是多少?



6 某广告公司设计一幅周长为 16 米的矩形广告牌,广告设计费为每平方米 2 000 元,设矩形一边长为 x 米,面积为 S 平方米.

(1)求 S 与 x 之间的函数关系式,并写出自变量 x 米的取值范围;

(2)设计费能达到 24 000 元吗?为什么?

(3)当 x 是多少米时,设计费最多?最多是多少元?

课时2　销售利润问题

刷提升

▸答案 D21

1 某超市有一种商品，进价为2元，据市场调查，销售单价是13元时，平均每天销售量是50件，而销售单价每降低1元，平均每天就可以多售出10件. 若设降价后销售单价为x元，每天利润为y元，则y与x之间的函数关系式为（　　）

A. $y=10x^2-100x-160$

B. $y=-10x^2+200x-360$

C. $y=x^2-20x+36$

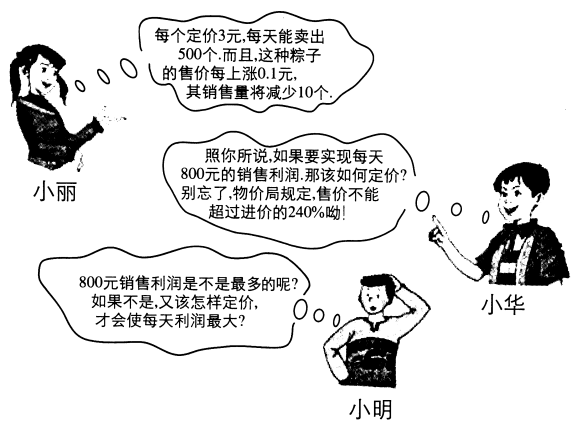
D. $y=-10x^2+310x-2\,340$

2 一件工艺品的进价为100元，标价135元出售，每天可售出100件，根据销售统计，一件工艺品每降价1元，则每天可多售出4件，要使每天获得的利润最大，则每件需降价（　　）

A. 3元　　B. 5元　　C. 10元　　D. 12元

3 [2018 广西贺州中考]某种商品每件进价为20元，调查表明：在某段时间内若以每件x元（$20\leqslant x\leqslant 30$，且$x$为整数）出售，可卖出$(30-x)$件，若要使利润最大，则每件商品的售价应为_____元.

4 在今年端午节前夕，三位同学到某超市调研一种每个进价为2元的粽子的销售情况. 请根据小丽提供的信息，解答小华和小明提出的问题.



5 为了响应政府提出的由中国制造向中国创造转型的号召，某公司自主设计了一款成本为40元的可控温杯，并投放市场进行试销售，经过调查发现该产品每天的销售量y（件）与销售单价x（元）满足一次函数关系式$y=-10x+1\,200$.

（1）求出利润S（元）与销售单价x（元）之间的关系式；（利润＝销售额－成本）

（2）当销售单价定为多少时，该公司每天获取的利润最大？最大利润是多少元？

6 [2018 安徽中考，难]小明大学毕业回家乡创业，第一期培植盆景与花卉各50盆，售后统计，盆景平均每盆利润是160元，花卉平均每盆利润是19元. 调研发现：

①盆景每增加1盆，盆景平均每盆利润减少2元；每减少1盆，盆景平均每盆利润增加2元；

②花卉平均每盆利润始终不变.

小明计划第二期培植盆景与花卉共100盆，设培植的盆景比第一期增加x盆，第二期盆景与花卉售完后的利润分别为W_1，W_2（单位：元）.

（1）用含x的代数式分别表示W_1，W_2；

（2）当x取何值时，第二期培植的盆景与花卉售完后获得的总利润W最大？最大总利润是多少？

课时3　抛物线形实际问题

刷基础

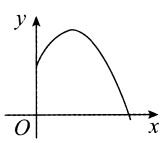
▶答案 D22

题型1　实际问题中的抛物线形轨迹问题

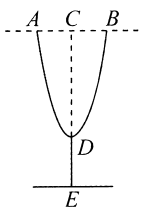
1 [2019 广东潮州期中]如图所示是阳光中学教学楼前喷水池喷出的抛物线形水柱,其解析式为 $y=-(x-2)^2+6$,则水柱的最大高度是　(　　)

A. 2　　B. 4

C. 6　　D. $2+\sqrt{6}$



(第1题图)

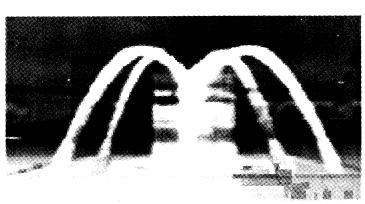


(第2题图)

2 [2018 浙江玉环一模]小迪同学以二次函数 $y=2x^2+8$ 的图象为灵感设计了一款杯子,如图为杯子的设计稿,若 $AB=4$,$DE=3$,则杯子的高 CE 为_____.

3 一个足球被从地面向上踢出,它距地面的高度 h(m)与足球被踢出后经过的时间 t(s)之间具有函数关系式 $h=at^2+19.6t$. 已知足球被踢出后经过4 s落地,则足球距地面最大高度是_____m.

4 随着新农村的建设和旧城的改造,我们的家园越来越美丽. 小明家附近广场中央新修了个圆形喷水池,在水池中心竖直安装了一根高为2米的喷水管,它喷出的抛物线形水柱在与池中心的水平距离为1米处达到最高,水柱落地处离池中心3米.

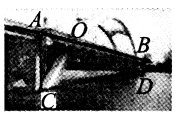


(1)请你建立适当的平面直角坐标系,并求水柱抛物线的函数解析式;

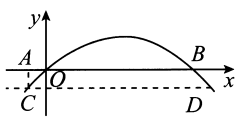
(2)求水柱的最大高度.

题型2　实际问题中的拱桥形问题

5 图(2)是图(1)中拱形大桥的示意图,桥拱与桥面的交点为 O,B,以点 O 为原点,水平直线 OB 为 x 轴,建立平面直角坐标系,桥的拱形可以近似看成抛物线 $y=-\frac{1}{400}(x-80)^2+16$,桥拱与桥墩 AC 的交点 C 恰好在水面,有 $AC\perp x$ 轴. 若 $OA=10$ 米,则桥面离水面的高度 AC 为　(　　)



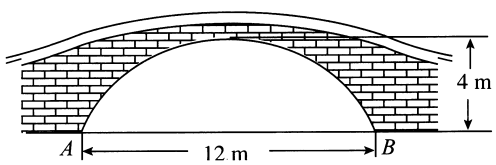
图(1)



图(2)

A. $16\frac{9}{40}$ 米　B. $\frac{17}{4}$ 米　C. $16\frac{7}{40}$ 米　D. $\frac{15}{4}$ 米

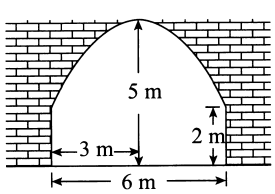
6 如图的一座拱桥,当水面宽 AB 为12 m时,桥洞顶部离水面4 m. 已知桥洞的拱形是抛物线,以水平方向为 x 轴,建立平面直角坐标系,若选取点 A 为坐标原点时的抛物线解析式是 $y=-\frac{1}{9}(x-6)^2+4$,则选取点 B 为坐标原点时的抛物线解析式是_____.



7 某隧道横断面由抛物线与矩形的三边组成,尺寸如图所示.

(1)以隧道横断面抛物线的顶点为原点,以抛物线的对称轴为 y 轴,建立平面直角坐标系,求该抛物线对应的函数解析式;

(2)某卡车空车时能通过此隧道,现装载一宽为3 m的集装箱,车与箱共高4.5 m,此车能否通过隧道?并说明理由.



22.3 综合训练

刷综合

▶答案 D22

1 [2018 浙江湖州第四中学教育集团第一次月考]将进货单价为 70 元的某种商品按零售价 100 元一个售出时,每天能卖出 20 个,若这种商品的零售价每降价 1 元,其日销量就增加 1 个,为了获取每日最大利润,则应降价 ( )

A. 5 元　　B. 10 元　　C. 15 元　　D. 20 元

2 已知烟花弹爆炸后某个残片的空中飞行轨迹可以看成二次函数 $y=-\frac{1}{3}x^2+2x+5$ 图象的一部分,其中 x 为爆炸后经过的时间(秒),y 为残片离地面的高度(米),请问在爆炸后 1 秒到 6 秒之间,残片距离地面的高度范围为 ( )

A. 0 米到 8 米　　B. 5 米到 8 米

C. $\frac{20}{3}$ 米到 8 米　　D. 5 米到 $\frac{20}{3}$ 米

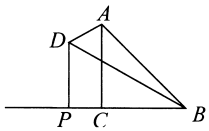
3 如图,已知等腰直角三角形 ABC 中,$\angle ACB=90°$,$BC=1$,在 BC 的延长线上任取一点 P,过点 P 作 $PD\perp BC$,使得 $PD=2PC$,则当点 P 在 BC 延长线上向左移动时,$\triangle ABD$ 的面积大小变化情况是 ( )

A. 一直变大

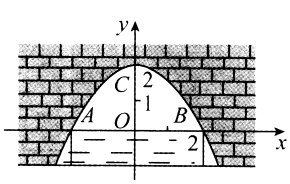
B. 一直变小

C. 先变小再变大

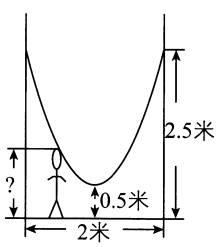
D. 先变大再变小



4 [2019 辽宁大连甘井子区期中]如图所示是抛物线形拱桥,当拱顶离水面 2 m 时,水面宽 4 m,建立如图所示的平面直角坐标系,若水面下降 1 m 时,则水面的宽度为_____ m.



(第 4 题图)



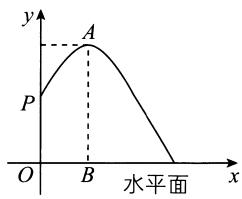
(第 5 题图)

5 如图,小明的父亲在相距 2 米的两棵树间拴了一根绳子,给小明做了一个简易的秋千. 拴绳子的地方距地面高都是 2.5 米,绳子自然下垂呈抛物线状,最低点离地面 0.5 米,小明距较近的那棵树 0.5 米时,头部刚好接触到绳子,则小明的身高为_____米.

6 [2018 安徽合肥四十五中段考]某市人民广场上要建一个圆形的喷水池,并在水池中央垂直安装一个柱子 OP,柱子顶端 P 处装上喷头,由 P 处向外喷出的水流(在各个方向上)沿形状相同的抛物线路径落下(如图所示). 若已知 $OP=3$ 米,喷出的水流的最高点 A 距水平面的高度是 4 米,离柱子 OP 的水平距离为 1 米.

(1)求这条抛物线的解析式;

(2)若不计其他因素,水池的半径至少要多少米,才能使喷出的水流不至于落在池外?



7 [2019 河北保定校级月考]某化工材料经销公司购进了一种化工原料共 7 000 kg,购进价格为每千克 30 元,物价部门规定其销售单价不得高于每千克 70 元,也不得低于每千克 30 元,市场调查发现:单价定为 70 元时,日均销售 60 kg;单价每降低 1 元,日均多售出 2 kg. 在销售过程中,每天还要除去其他费用 400 元(天数不足一天时,按整天计算). 设销售单价为 x 元,日均获利为 y 元. (日均获利 = 销售所得利润 - 各种开支)

(1)求 y 关于 x 的函数解析式,并写出 x 的取值范围;

(2)求销售单价定为多少元时,日均获利最多?是多少?

(3)若用日均获利最多的方式销售或按销售单价最高销售,试比较哪一种销售获总利更多,多多少?

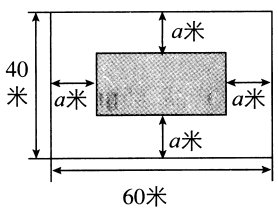
成长是憧憬和怀念的天平,当它倾斜得颓然倒下时,那些失去了月光的夜晚该用怎样的声音去抚慰。

8 如图(1),为美化校园环境,某校计划在一块长为60米,宽为40米的长方形空地上修建一个长方形花圃,并将花圃四周余下的空地修建成同样宽的通道,设通道宽为a米.

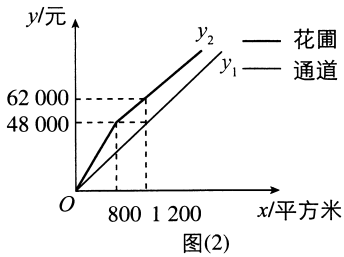
(1)用含a的式子表示花圃的面积;

(2)如果通道所占面积是整个长方形空地面积的$\frac{3}{8}$,求出此时通道的宽;

(3)已知某园林公司修建通道、花圃的造价y_1(元)、y_2(元)与修建面积x(平方米)之间的函数关系如图(2)所示. 如果学校决定由该公司承建此项目,并要求修建的通道的宽度不少于2米且不超过10米,那么通道宽为多少时,修建的通道和花圃的总造价最低?最低总造价为多少元?



图(1)

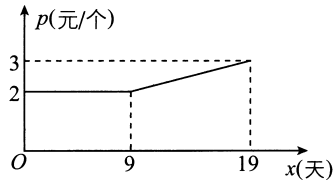


图(2)

9 [2018 河南南阳二模]某企业接到一批小型毛绒玩具生产任务,按要求在19天内完成,约定这批玩具的出厂价为每个4元. 为按时完成任务,该企业招收了新工人,设新工人李红第x天生产的玩具数量为y个,y与x满足关系式$y=\begin{cases}32x, 0\leqslant x\leqslant 5,\\ 20x+60, 5<x\leqslant 19.\end{cases}$

(1)李红第几天生产的玩具数量为260个?

(2)如图,设第x天每个玩具的成本是p元,p与x之间的关系可用图中的函数图象来刻画,若李红第x天创造的利润为w元,求w与x之间的函数关系式,并求出第几天的利润最大?最大利润是多少元?(利润=出厂价-成本)

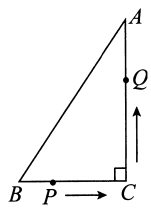


10 [2018 吉林白山长白期中,难]如图,在Rt△ABC中,$AC=24$ cm,$BC=7$ cm,点P在BC上,从点B向点C运动(不包括点C),速度为2 cm/s;点Q在AC上,从点C向点A运动(不包括点A),速度为5 cm/s. 若点P,Q分别从点B,C同时运动,且运动时间记为t s,请解答下面的问题,并写出探索的主要过程.

(1)当t为何值时,P,Q两点的距离为$5\sqrt{2}$ cm?

(2)当t为何值时,△PCQ的面积为15 cm^2?

(3)请用配方法说明,点P运动多少时间时,四边形$BPQA$的面积最小?最小面积是多少?



1 [2018 江苏连云港中考]已知学校航模组设计制作的火箭的升空高度 h(m)与飞行时间 t(s)满足函数解析式 $h=-t^2+24t+1$. 则下列说法中正确的是　(　　)

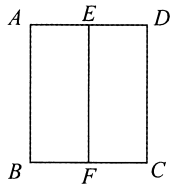
A. 点火后 9 s 和点火后 13 s 的升空高度相同

B. 点火后 24 s 火箭落于地面

C. 点火后 10 s 的升空高度为 139 m

D. 火箭升空的最大高度为 145 m

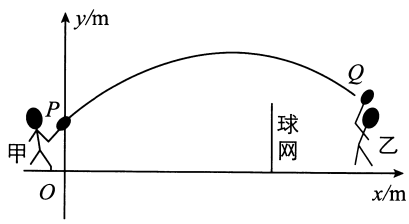
2 [2018 辽宁沈阳中考]如图,一块矩形土地 $ABCD$ 由篱笆围成,并且由一条与 CD 边平行的篱笆 EF 分开. 已知篱笆的总长为 900 m(篱笆的厚度忽略不计),当 $AB=$ _____ m 时,矩形 $ABCD$ 的面积最大.



3 [2017 浙江金华中考]甲、乙两人进行羽毛球比赛,羽毛球飞行的路线为抛物线的一部分,如图,甲在 O 点正上方 1 m 的 P 处发出一球,羽毛球飞行的高度 y(m)与水平距离 x(m)之间满足函数关系式 $y=a(x-4)^2+h$. 已知点 O 与球网的水平距离为 5 m,球网的高度为 1.55 m.

(1)当 $a=-\frac{1}{24}$ 时,①求 h 的值;②通过计算判断此球能否过网.

(2)若甲发球过网后,羽毛球飞行到离点 O 的水平距离为 7 m,离地面的高度为 $\frac{12}{5}$ m 的 Q 处时,乙扣球成功,求 a 的值.



4 [2018 辽宁抚顺中考]俄罗斯世界杯足球赛期间,某商店销售一批足球纪念册,每本进价 40 元,规定销售单价不低于 44 元,且获利不高于 30%. 试销售期间发现,当销售单价定为 44 元时,每天可售出 300 本,销售单价每上涨 1 元,每天销售量减少 10 本,现商店决定提价销售. 设每天销售量为 y 本,销售单价为 x 元.

(1)请直接写出 y 与 x 之间的函数解析式和自变量 x 的取值范围;

(2)当每本足球纪念册的销售单价是多少元时,商店每天获利 2 400 元?

(3)将每本足球纪念册的销售单价定为多少元时,商店每天销售纪念册获得的利润 w 最大?最大利润是多少元?

5 [2018 河南中考]某公司推出一款产品,经市场调查发现,该产品的日销售量 y(个)与销售单价 x(元)之间满足一次函数关系. 关于销售单价、日销售量和日销售利润的几组对应值如表:

销售单价 x/元	85	95	105	115
日销售量 y/个	175	125	75	m
日销售利润 w/元	875	1 875	1 875	875

(注:日销售利润 = 日销售量 ×(销售单价 − 成本单价))

(1)求 y 关于 x 的函数解析式(不要求写出 x 的取值范围)及 m 的值;

(2)由以上信息可知,该产品的成本单价是_____元,当销售单价 $x=$ _____元时,日销售利润 w 最大,最大值是_____元;

(3)公司计划开展科技创新,以降低该产品的成本,预计在今后的销售中,日销售量与销售单价仍存在(1)中的关系. 若想实现销售单价为 90 元时,日销售利润不低于 3 750 元的销售目标,该产品的成本单价应不超过多少元?

全章综合训练

刷章测

▶建议用时:45 分钟　答案 D24

1 [2018 四川成都中考]关于二次函数 $y=2x^2+4x-1$,下列说法正确的是　(　　)

A. 图象与 y 轴的交点坐标为(0,1)

B. 图象的对称轴在 y 轴的右侧

C. 当 $x<0$ 时,y 的值随 x 的值的增大而减小

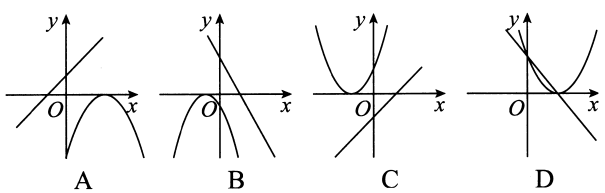
D. y 的最小值为 -3

2 若将抛物线 $y=x^2$ 先向右平移 2 个单位长度,再向上平移 3 个单位长度,则所得抛物线的解析式为(　　)

A. $y=(x+2)^2+3$　　B. $y=(x-2)^2+3$

C. $y=(x+2)^2-3$　　D. $y=(x-2)^2-3$

3 在同一直角坐标系中,一次函数 $y=ax+c$ 和二次函数 $y=a(x+c)^2$ 的图象大致为　(　　)



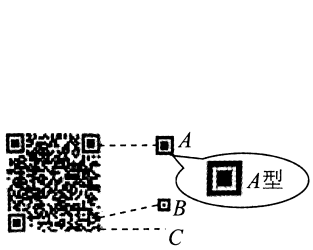
A　　B　　C　　D

4 若函数 $y=mx^2+(m+2)x+\frac{1}{2}m+1$ 的图象与 x 轴只有一个交点,那么 m 的值为　(　　)

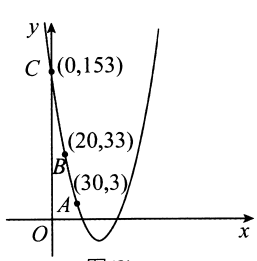
A. 0　　B. 0 或 2

C. 2 或 -2　　D. 0,2 或 -2

5 [2018 浙江湖州吴兴区一模]二维码已经给我们的生活带来了很大的方便,它是由大小相同的黑白两色的小正方形(如图(1)中 C)按某种规律组成的一个大正方形,现有 25×25 格式的正方形如图(1),角上是 3 个 7×7 的 A 型大黑白相间正方形,中间右下有 1 个 5×5 的 B 型黑白相间正方形,除这 4 个正方形外,若其他的小正方形白色块数 y 与黑色块数 x 正好满足如图(2)所示的函数图象,则该 25×25 格式的二维码共有黑色的 C 型小正方形　(　　)



图(1)

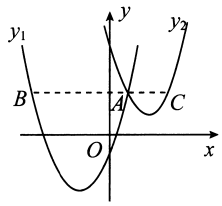


图(2)

A. 153 块　　B. 218 块

C. 100 块　　D. 216 块

6 如图,抛物线 $y_1=a(x+2)^2-3$ 与 $y_2=\frac{1}{2}(x-3)^2+1$ 交于点 $A(1,3)$,过点 A 作 x 轴的平行线,分别交两条抛物线于点 B,C. 则以下结论:



①无论 x 取何值,y_2 的值总是正数;

②$a=1$;

③当 $x=0$ 时,$y_2-y_1=4$;

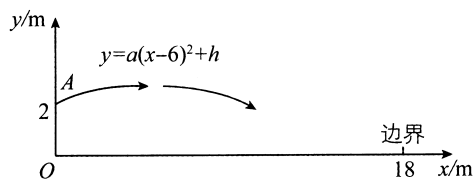
④$2AB=3AC$.

正确的是　(　　)

A. ①③　　B. ②④　　C. ①④　　D. ②③

7 已知抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 与 x 轴的交点是 $(-4,0)$,$(2,0)$,则这条抛物线的对称轴是直线_____.

8 [2019 江苏南京鼓楼区期中]如图,将球从点 O 正上方 2 m 的 A 处发出,把球看成点,其运行的高度 y(m)与运行的水平距离 x(m)满足解析式 $y=a(x-6)^2+h$,边界距点 O 的水平距离为 18 m,若球发出后不出边界,则 h 的取值范围是_____.



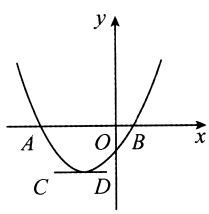
9 [2019 河北冀州校级月考]在平面直角坐标系 xOy 中,若抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 的顶点为 M,且经过 $A(0,4)$,$B(4,4)$ 两点,若 M 到线段 AB 的距离为 4,则 $a=$_____.

10 科学家为了推测最适合某种珍奇植物生长的温度,将这种植物分别放在不同温度的环境中,经过一段时间后,测试出这种植物高度的增长情况,部分数据如下表:

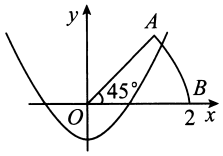
温度 t/℃	-4	-2	0	1	4
植物高度增长量 l/mm	41	49	49	46	25

科学家经过猜想,推测出 l 与 t 之间是二次函数关系. 由此可以推测最适合这种植物生长的温度为_____℃.

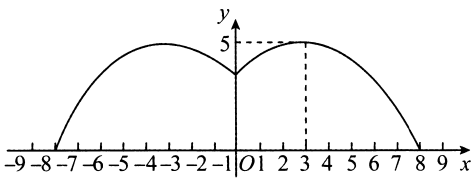
11 [2019 山东济宁期中]如图,点 D,C 的坐标分别为 $(-1,-4)$ 和 $(-5,-4)$,抛物线的顶点在线段 CD 上运动(抛物线随顶点一起平移),与 x 轴交于 A,B 两点(A 在 B 的左侧),点 B 的横坐标最大值为 3,则点 A 的横坐标最小值为_____.



12 如图，以扇形 OAB 的顶点 O 为原点，半径 OB 所在的直线为 x 轴，建立平面直角坐标系，点 B 的坐标为 $(2,0)$，若抛物线 $y=\frac{1}{2}x^2+k$ 与扇形 OAB 的边界总有两个公共点，则实数 k 的取值范围是_____.



13 [2018 浙江衢州中考]某游乐园有一个直径为 16 米的圆形喷水池，喷水池的周边有一圈喷水头，喷出的水柱为抛物线，在距水池中心 3 米处达到最高，高度为 5 米，且各方向喷出的水柱恰好在喷水池中心的装饰物处汇合. 如图所示，以水平方向为 x 轴，喷水池中心为原点建立直角坐标系.



(1)求水柱所在抛物线(第一象限部分)的函数解析式；

(2)王师傅在喷水池内维修设备期间，喷水管意外喷水，为了不被淋湿，身高 1.8 米的王师傅站立时必须在离水池中心多少米以内？

(3)经检修评估，游乐园决定对喷水设施做如下设计改进：在喷出水柱的形状不变的前提下，把水池的直径扩大到 32 米，各方向喷出的水柱仍在喷水池中心保留的原装饰物(高度不变)处汇合，请探究扩建改造后喷水池水柱的最大高度.

14 已知函数 $y=-x^2+(m-1)x+m$(m 为常数).

(1)该函数的图象与 x 轴交点的个数是 (　　)

A. 0　　B. 1　　C. 2　　D. 1 或 2

(2)求证：不论 m 为何值，该函数的图象的顶点都在函数 $y=(x+1)^2$ 的图象上；

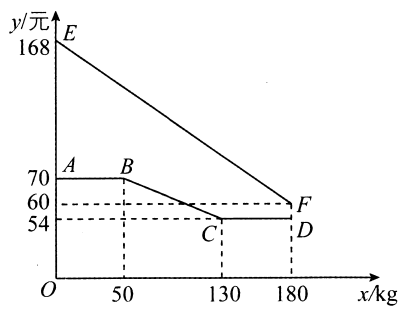
(3)当 $-2\leqslant m\leqslant 3$ 时，求该函数的图象的顶点纵坐标的取值范围.

15 [2018 湖北中考]绿色生态农场生产并销售某种有机产品，假设生产出的产品能全部售出. 如图，线段 EF、折线 $ABCD$ 分别表示该有机产品每千克的售价 y_1(元)、生产成本 y_2(元)与产量 x(kg)之间的函数关系：

(1)求该产品售价 y_1(元)与产量 x(kg)之间的函数解析式；

(2)写出生产成本 y_2(元)与产量 x(kg)之间的函数解析式；

(3)当产量为多少时，这种产品获得的利润最大？最大利润为多少？



属于你的另一个全世界，终会以豁然开朗的姿态呈现，以我们必须幸福的名义。

第二十三章 旋转

23.1 图形的旋转

刷基础

▶答案 D25

题型1 旋转的概念

1 下列现象属于旋转的是 (　　)

A. 摩托车在急刹车时向前滑动

B. 电梯上下运动的过程

C. 幸运大转盘转动的过程

D. 笔直的铁轨上飞驰而过的火车

2 观察下列图案,将它们绕其各自的中心旋转后,可与原图案重合,则这些图案的最小旋转角中最大的是 (　　)



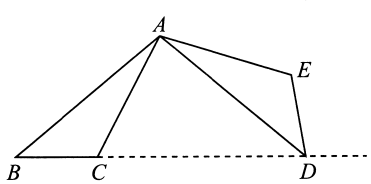
A　　B　　C　　D

3 钟表的分针匀速旋转一周需要 60 min,经过 20 min,分针旋转的角度为_____.

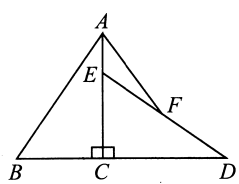
题型2 旋转的性质

4 [2018 北京海淀区期末]如图,将△ABC 绕点 A 逆时针旋转 100°,得到△ADE. 若点 D 在线段 BC 的延长线上,则∠B 的大小为 (　　)

A. 30°　　B. 40°　　C. 50°　　D. 60°



(第 4 题图)



(第 5 题图)

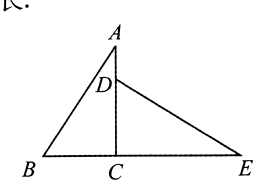
5 如图,已知在 Rt△ABC 中,∠ACB = 90°,AC = 6,BC = 4,将△ABC 绕直角顶点 C 顺时针旋转 90° 得到△DEC,若点 F 是 DE 的中点,连接 AF,则 AF 的长是 (　　)

A. 3　　B. 4　　C. 5　　D. 6

6 [2018 广东汕头潮南区期末]如图,在 Rt△ABC 中,∠ACB = 90°,△EDC 是△ABC 绕点 C 按顺时针方向旋转得到的,此时 B,C,E 在同一直线上.

(1)求旋转角的大小;

(2)若 AB = 10,AC = 8,求 BE 的长.



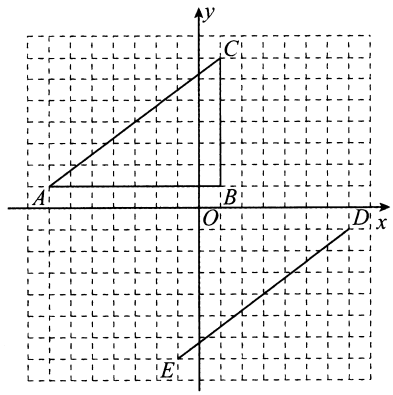
题型3 旋转作图

7 [2019 河北邢台校级质检]如图,在平面直角坐标系中,△ABC 的顶点坐标是 A(−7,1),B(1,1),C(1,7),线段 DE 的端点坐标是 D(7,−1),E(−1,−7).

(1)试说明如何平移线段 AC,使其与线段 ED 重合;

(2)将△ABC 绕坐标原点 O 逆时针旋转,使 AC 的对应边为 DE,请直接写出点 B 的对应点 F 的坐标;

(3)画出(2)中的△DEF,并和△ABC 同时绕坐标原点 O 逆时针旋转 90°,画出旋转后的图形.



刷易错

易错点 旋转时忽略旋转方向而出错

8 在△ABC 中,∠B = 45°,∠C = 60°,将△ABC 绕点 A 旋转 30°后与△AB_1C_1 重合,求∠BAC_1 的度数.

刷提升

▸答案 D26

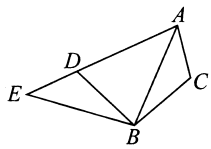
1 [2018 辽宁大连中考]如图,将△ABC绕点B逆时针旋转α,得到△EBD,若点A恰好在ED的延长线上,则∠CAD的度数为　(　)

A. $90°-\alpha$

B. α

C. $180°-\alpha$

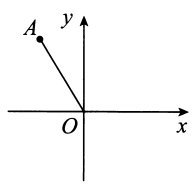
D. 2α



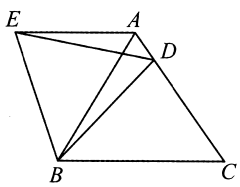
2 如图,在平面直角坐标系中,点A的坐标为$(-1,\sqrt{3})$,以原点O为中心,将点A顺时针旋转150°得到点A',则点A'的坐标为　(　)

A. $(0,-2)$　　B. $(1,-3)$

C. $(2,0)$　　D. $(\sqrt{3},-1)$



(第2题图)



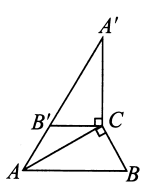
(第3题图)

3 [2019 湖北老河口期中]如图所示,在等边△ABC中,点D是边AC上一点,连接BD,将△BCD绕点B逆时针旋转60°,得到△BAE,连接ED,则下列结论中:①$AE\parallel BC$;②$\angle DEB=60°$;③$\angle ADE=\angle BDC$;④$\angle AED=\angle ABD$,其中正确结论的序号是　(　)

A. ①②　　B. ①③

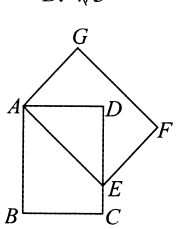
C. ②③　　D. ①②④

4 如图,在Rt△ABC中,$\angle ACB=90°$,$\angle B=60°$,$BC=1$,△$A'B'C$由△ABC绕点C顺时针旋转得到,其中点A'与点A、点B'与点B是对应点,连接AB',且A,B',A'在同一条直线上,则AA'的长为　(　)



A. 3　　B. $2\sqrt{3}$　　C. 4　　D. $4\sqrt{3}$

5 [2018 江西中考]如图,在矩形$ABCD$中,$AD=3$,将矩形$ABCD$绕点A逆时针旋转,得到矩形$AEFG$,点B的对应点E落在CD上,且$DE=EF$,则AB的长为_____.

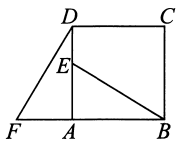


6 如图,四边形$ABCD$是正方形,E是AD上任意一点,延长BA到F,使得$AF=AE$,连接DF.

(1)旋转△ADF可得到哪个三角形?

(2)旋转中心是哪一点?旋转了多少度?

(3)BE与DF的数量关系、位置关系如何?为什么?



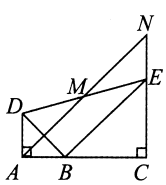
刷素养

7 如图,已知△BAD和△BCE均为等腰直角三角形,$\angle BAD=\angle BCE=90°$,点$M$为$DE$的中点,过点$E$与$AD$平行的直线交射线$AM$于点$N$.

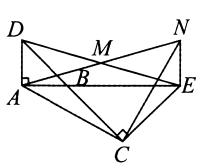
(1)当A,B,C三点在同一直线上时,如图(1),求证:M为AN的中点;

(2)将图(1)中△BCE绕点B旋转,当A,B,E三点在同一直线上时,如图(2),求证:△CAN为等腰直角三角形;

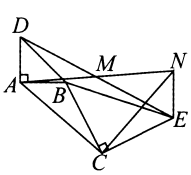
(3)将图(1)中△BCE绕点B旋转到图(3)的位置时,(2)中的结论是否成立?若成立,请证明;若不成立,请说明理由.



图(1)



图(2)



图(3)

我们必须要学会接受人的差异性,而不是以排斥别人定义自己。

23.2 中心对称

23.2.1 中心对称

刷基础

▸答案 D26

题型1　中心对称的概念及性质

1 若两个图形关于某点成中心对称，则以下说法正确的是（　　）

①这两个图形一定全等；②对称点的连线一定经过对称中心；③一定存在某条直线，沿该直线折叠后的两个图形能互相重合.

A. ①②　　B. ①③　　C. ②③　　D. ①②③

2 已知四边形 $ABCD$ 与四边形 $A'B'C'D'$ 关于点 O 成中心对称，则 AB 与 $A'B'$ 的关系是（　　）

A. 相等

B. 垂直

C. 平行且相等

D. 平行且相等或共线且相等

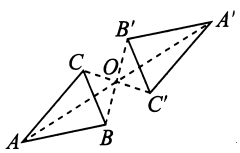
3 如图，$\triangle ABC$ 与 $\triangle A'B'C'$ 关于点 O 成中心对称，下列结论中不成立的是（　　）

A. $OC = OC'$

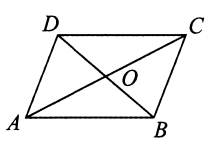
B. $OA = OA'$

C. $BC = B'C'$

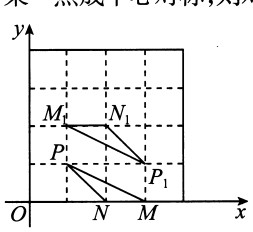
D. $\angle ABC = \angle A'C'B'$



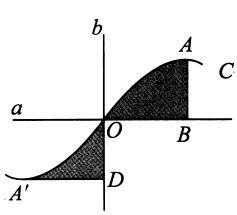
4 [2019 河北冀州校级期中]已知点 O 是平行四边形 $ABCD$ 对角线的交点，则图中关于点 O 中心对称的三角形有_____对.



5 在平面直角坐标系中，点 $P(1,1)$，$N(2,0)$，$\triangle MNP$ 和 $\triangle M_1N_1P_1$ 的顶点都在格点上，$\triangle MNP$ 与 $\triangle M_1N_1P_1$ 是关于某一点成中心对称，则对称中心的坐标为_____.



（第5题图）



（第6题图）

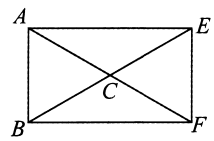
6 如图，直线 a，b 垂直相交于点 O，曲线 C 关于点 O 成中心对称，点 A 的对称点是点 A'，$AB \perp a$ 于点 B，$A'D \perp b$ 于点 D. 若 $OB = 3$，$OD = 2$，则阴影部分的面积之和为_____.

7 [2019 江苏阜宁质检]如图，在 $\triangle ABC$ 中，$AB = AC$，将 $\triangle ABC$ 绕点 C 顺时针旋转 180°得到 $\triangle FEC$.

(1)试猜想 AE 与 BF 有何关系，并说明理由；

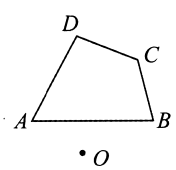
(2)若 $\triangle ABC$ 的面积为 3 cm^2，求四边形 $ABFE$ 的面积；

(3)当 $\angle ACB$ 为多少度时，四边形 $ABFE$ 为矩形？说明理由.



题型2　中心对称作图

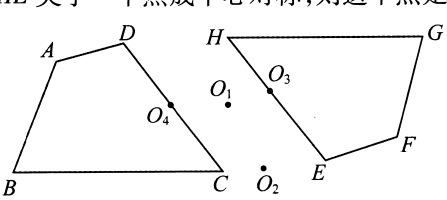
8 画出如图所示的四边形 $ABCD$ 关于点 O 成中心对称的四边形 $A'B'C'D'$.



刷易错

易错点　不能熟练掌握旋转性质，导致确定对称中心出错

9 [2019 河北衡水五中期末]如图，四边形 $ABCD$ 与四边形 $FGHE$ 关于一个点成中心对称，则这个点是（　　）



A. O_1　　B. O_2　　C. O_3　　D. O_4

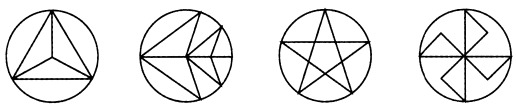
23.2.2 中心对称图形

刷基础

▶答案 D27

题型1 中心对称图形的概念

1 [2018 辽宁辽阳中考]下列图形中,是中心对称图形的是 ( )



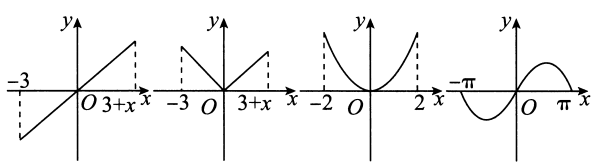
A B C D

2 [2019 天津宁河区期中]观察下列汽车标志,其中是中心对称图形的是 ( )



A B C D

3 下列函数图象中,既是中心对称图形又是轴对称图形的是 ( )



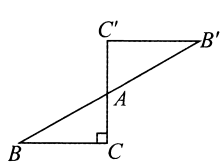
A B C D

题型2 中心对称图形的性质

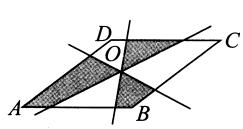
4 [2019 河北石家庄校级月考]如图,是一个中心对称图形,点 A 为对称中心. 若 $\angle C=90°$, $\angle B=30°$, $BC=1$,则 BB' 的长为 ( )

A. 4 B. $\frac{\sqrt{3}}{3}$

C. $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ D. $\frac{4\sqrt{3}}{3}$



(第4题图)

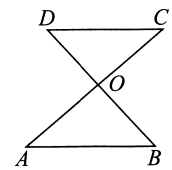


(第6题图)

5 已知六边形 $ABCDEF$ 是中心对称图形,$AB=1$, $BC=2$, $CD=3$,那么 $EF=$ _____.

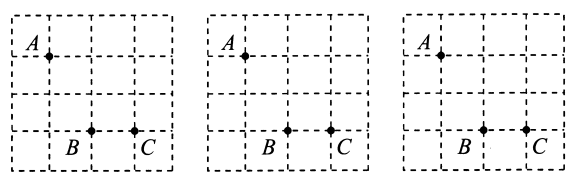
6 如图,四边形 $ABCD$ 是菱形,O 是两条对角线的交点,过点 O 的三条直线将菱形分成阴影和空白部分. 当菱形的两条对角线的长分别为 6 和 8 时,则阴影部分的面积为_____.

7 如图,线段 AC, BD 相交于点 O,且 $AB\parallel CD$, $AB=CD$,此图形是中心对称图形吗? 试说明你的理由.



题型3 作中心对称图形

8 [2017 福建安溪校级月考]如图,方格纸中有三个点 A, B, C,要求作一个四边形使这三个点在这个四边形的边(包括顶点)上,且四边形的顶点在方格的顶点上.



(甲图) (乙图) (丙图)

(1)在甲图中作出的四边形是中心对称图形但不是轴对称图形;

(2)在乙图中作出的四边形是轴对称图形但不是中心对称图形;

(3)在丙图中作出的四边形既是轴对称图形又是中心对称图形.

刷易错

易错点 对中心对称图形的概念理解不到位,导致判定图形错误

9 [2019 江苏阜宁期中]下列图形中既是轴对称图形,又是中心对称图形的是 ( )

A. 多边形

B. 边数为奇数的正多边形

C. 正多边形

D. 边数为偶数的正多边形

23.2.3　关于原点对称的点的坐标

刷基础

▶答案 D27

题型1　关于原点对称的点的坐标

1 在平面直角坐标系中，点 $A(5,-3)$ 关于原点对称的点的坐标为　　(　　)

A. $(-5,-3)$　　B. $(5,3)$

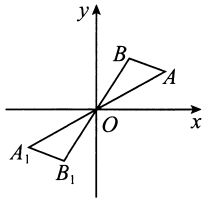
C. $(-5,3)$　　D. $(5,-3)$

2 [2018 辽宁鞍山铁西区二模]点 $P(4,-3)$ 关于原点对称的点所在的象限是　　(　　)

A. 第四象限　　B. 第三象限

C. 第二象限　　D. 第一象限

3 $\triangle ABO$ 与 $\triangle A_1B_1O$ 在平面直角坐标系中的位置如图所示，它们关于点 O 成中心对称，其中点 $A(4,2)$，则点 A_1 的坐标是_____.



4 若 $\sqrt{a-3}+(b+4)^2=0$，那么点 (a,b) 关于原点对称的点的坐标是_____.

题型2　利用关于原点对称的点的坐标求字母取值或范围

5 若点 $A(3-m,n+2)$ 关于原点的对称点 B 的坐标是 $(-3,2)$，则 m,n 的值为　　(　　)

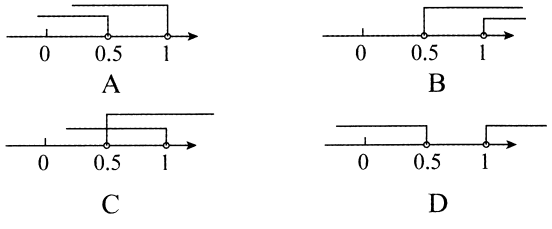
A. $m=-6,n=-4$

B. $m=0,n=-4$

C. $m=6,n=4$

D. $m=6,n=-4$

6 [2018 江苏东海二模]已知点 $M(1-2m,m-1)$ 关于原点对称的点在第一象限，则 m 的取值范围在数轴上表示正确的是　　(　　)



7 在平面直角坐标系中，若点 $P(m,m-n)$ 与点 $Q(-2,3)$ 关于原点对称，则点 $M(m,n)$ 在　　(　　)

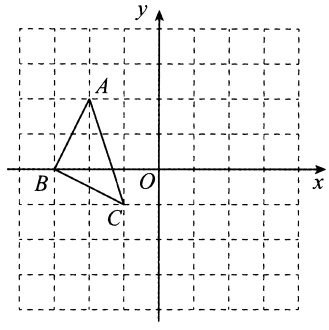
A. 第一象限　　B. 第二象限

C. 第三象限　　D. 第四象限

8 已知点 $A(2a+3b,-2)$ 和点 $B(8,3a+2b)$ 关于原点对称，则 $a+b=$_____.

题型3　作已知图形关于原点对称的图形

9 如图所示，每个小正方形的边长为 1 个单位长度，作出 $\triangle ABC$ 关于原点对称的图形 $\triangle A_1B_1C_1$，并写出 A_1，B_1，C_1 的坐标.

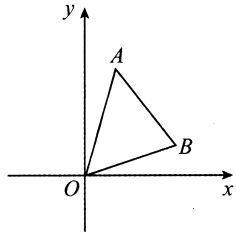


10 如图，在平面直角坐标系 xOy 中，点 $A\left(1,\frac{7}{2}\right)$，点 $B(3,1)$，将 $\triangle OAB$ 绕着点 O 旋转 $180°$ 后得到 $\triangle OA'B'$.

(1)在图中画出 $\triangle OA'B'$；

(2)求点 A，点 B 的对称点 A' 和 B' 的坐标；

(3)请直接写出 AB 和 $A'B'$ 的数量关系和位置关系.

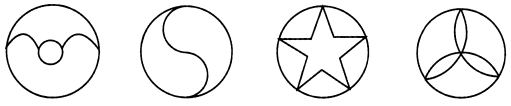


23.1~23.2 综合训练

刷综合

▶答案 D27

1 [2019 江苏扬州江都三中月考]下列图案中,是中心对称图形的是 (　　)

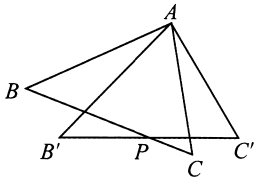


A　　B　　C　　D

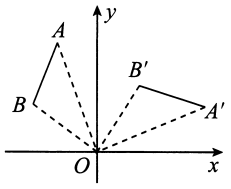
2 [2018 黑龙江哈尔滨道里区月考]如图,将△ABC绕点A逆时针旋转20°得到△$AB'C'$,BC与$B'C'$交于点P,则∠$B'PC$的度数为 (　　)

A. 100°　　B. 120°

C. 140°　　D. 160°



(第2题图)



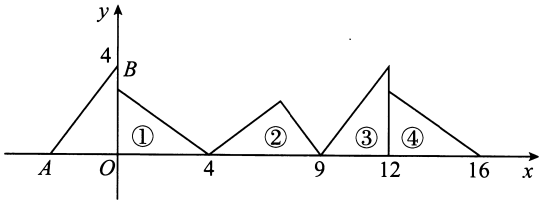
(第3题图)

3 如图,将线段AB绕点O顺时针旋转90°得到线段$A'B'$,那么$A(-2,5)$的对应点A'的坐标是 (　　)

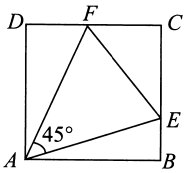
A. (2,5)　　B. (5,2)

C. (2,-5)　　D. (5,-2)

4 如图,在直角坐标系中,已知点$A(-3,0)$,$B(0,4)$,对△OAB连续作旋转变换,依次得到三角形①,②,③,④,…,则三角形⑩的直角顶点的坐标为_____.



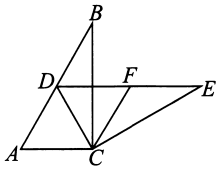
5 如图,在正方形$ABCD$中,E,F分别是边BC,CD上的点,∠EAF=45°,△ECF的周长为4,则正方形$ABCD$的边长为_____.



6 如图,在Rt△ABC中,∠ACB=90°,∠B=30°,将△ABC绕点C按顺时针方向旋转n度后,得到△DEC,点D刚好落在AB边上.

(1)求n的值;

(2)若F是DE的中点,判断四边形$ACFD$的形状,并说明理由.

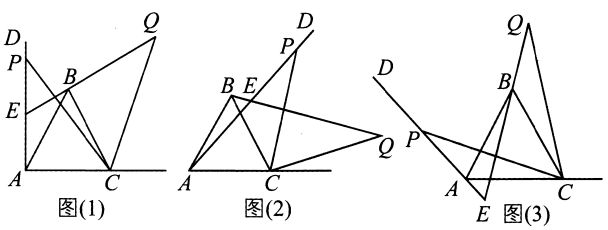


7 [难]如图(1),已知∠DAC=90°,△ABC是等边三角形,点P为射线AD上任意一点(点P与点A不重合),连接CP,将线段CP绕点C顺时针旋转60°得到线段CQ,连接BQ并延长交射线AD于点E.

(1)如图(1),猜想∠QEP=_____;

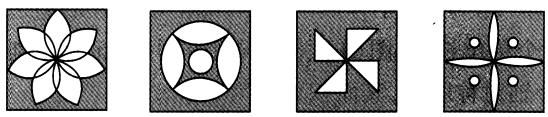
(2)如图(2)、图(3),若当∠DAC是锐角或钝角时,其他条件不变,猜想∠QEP的度数,选取其中一种情况加以证明;

(3)如图(3),若∠DAC=135°,∠ACP=15°,且AC=4,求BQ的长.



我们总是以诗般的语言刻画自己在青春的罅隙中的那般狼狈。

1 [2018 山东烟台中考]在学习《图形变化的简单应用》这一节时,老师要求同学们利用图形变化设计图案.下列设计的图案中,是中心对称图形,但不是轴对称图形的是　(　　)

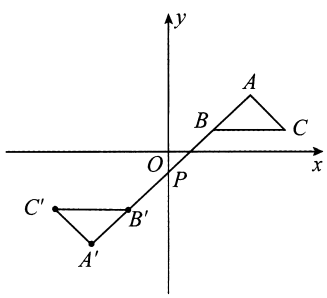


A　　B　　C　　D

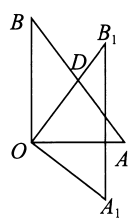
2 [2018 四川内江中考]如图,在平面直角坐标系中,$\triangle ABC$ 的顶点 A 在第一象限,点 B,C 坐标分别为(2,1),(6,1),$\angle BAC=90°$,$AB=AC$,直线 AB 交 y 轴于点 P,若 $\triangle ABC$ 与 $\triangle A'B'C'$ 关于点 P 成中心对称,则点 A' 的坐标为　(　　)

A.(−4,−5)　　B.(−5,−4)

C.(−3,−4)　　D.(−4,−3)



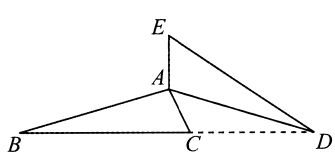
(第 2 题图)



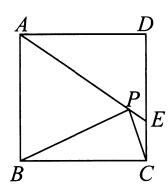
(第 3 题图)

3 [2017 湖北黄冈中考]已知,如图,在 $\triangle AOB$ 中,$\angle AOB=90°$,$AO=3$ cm,$BO=4$ cm. 将 $\triangle AOB$ 绕顶点 O 按顺时针方向旋转到 $\triangle A_1OB_1$ 处,此时线段 OB_1 与 AB 的交点 D 恰好为 AB 的中点,则线段 $B_1D=$ _____cm.

4 [2018 湖南张家界中考]如图,将 $\triangle ABC$ 绕点 A 逆时针旋转 150°,得到 $\triangle ADE$,这时点 B,C,D 恰好在同一直线上,则 $\angle B$ 的度数为_____.



(第 4 题图)



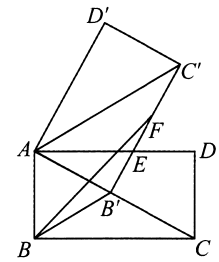
(第 5 题图)

5 [2017 湖南张家界中考]如图,在正方形 $ABCD$ 中,$AD=2\sqrt{3}$,把边 BC 绕点 B 逆时针旋转 30° 得到线段 BP,连接 AP 并延长交 CD 于点 E,连接 PC,则三角形 PCE 的面积为_____.

6 [2018 四川南充中考]如图,在矩形 $ABCD$ 中,$AC=2AB$,将矩形 $ABCD$ 绕点 A 旋转得到矩形 $AB'C'D'$,使点 B 的对应点 B' 落在 AC 上,$B'C'$ 交 AD 于点 E,在 $B'C'$ 上取点 F,使 $B'F=AB$.

(1)求证:$AE=C'E$;

(2)求 $\angle FBB'$ 的度数.

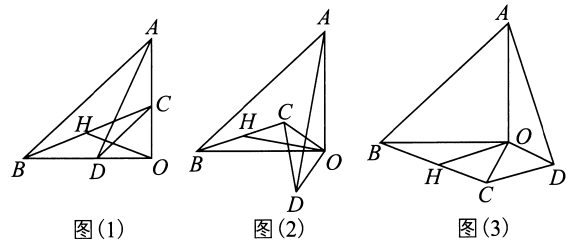


刷素养

7 [难]已知 $\triangle AOB$ 和 $\triangle COD$ 均为等腰直角三角形,$\angle AOB=\angle COD=90°$. 连接 AD,BC,点 H 为 BC 的中点,连接 OH.

(1)如图(1)所示,求证:$OH=\frac{1}{2}AD$,且 $OH\perp AD$;

(2)将 $\triangle COD$ 绕点 O 旋转到图(2)、图(3)所示位置时,线段 OH 与 AD 又有怎样的关系,并选择一个图形证明你的结论.



图(1)　　图(2)　　图(3)

23.3 课题学习 图案设计

刷基础

▶答案 D29

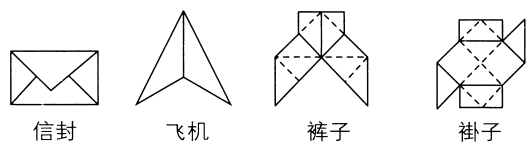
题型1 图形的变换

1 将下列图形绕其对角线的交点逆时针旋转90°,所得图形一定与原图形重合的是 ( )

A. 正方形 B. 矩形

C. 菱形 D. 平行四边形

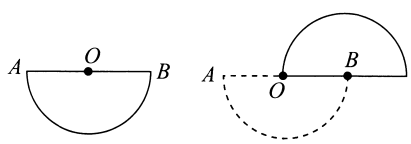
2 如图,观察下列用纸折叠成的图案. 其中,轴对称图形和中心对称图形的个数分别为 ( )



信封 飞机 裤子 褂子

A. 4,1 B. 3,1 C. 2,2 D. 1,3

3 以如图(1)(以 O 为圆心,半径为1的半圆)作为"基本图形",分别经历如下变换,不能得到图(2)的是( )



图(1) 图(2)

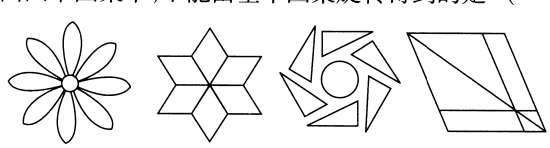
A. 绕 OB 的中点旋转180°即可

B. 向右平移1个单位

C. 先以直线 AB 为对称轴进行翻折,再向右平移1个单位

D. 先绕点 O 旋转180°,再向右平移1个单位

4 下面四个图案中,不能由基本图案旋转得到的是 ( )



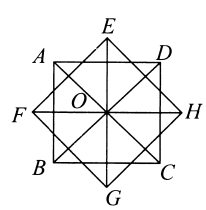
A B C D

5 如图,正方形 $ABCD$ 与正方形 $EFGH$ 边长相等,下列说法正确的有 ( )

①这个图案可以看成正方形 $ABCD$ 绕点 O 旋转45°前后图形共同组成的;

②这个图案可以看成是△ABC 绕点 O 分别旋转45°,90°,135°,180°,225°得到的;

③这个图案可以看成是△BOC 绕点 O 分别旋转45°,90°,135°,180°,225°,270°,315°得到的.



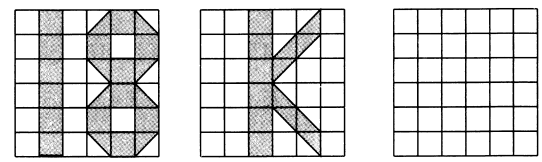
A. 1个 B. 2个 C. 3个 D. 以上都不对

题型2 图案设计

6 如图,在6×6正方形网格中,每个小正方形的边长为1个单位长度,图(1)、图(2)中的阴影部分分别是两个轴对称图形,其面积分别为 S_1,S_2.

(1)填空:S_1∶S_2 的值是_____;

(2)请在图(3)的网格上画出一个面积为8个平方单位的中心对称图形.



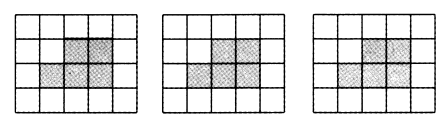
图(1) 图(2) 图(3)

7 [2019 贵州贵阳期末]如图,网格中的图形是由5个小正方形组成的,根据下列要求画图(涂上阴影).

(1)在图(1)中,添加一个小正方形,使之成为轴对称图形,且只有一条对称轴;(画一种情况即可)

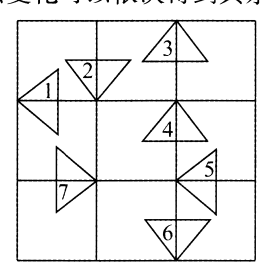
(2)在图(2)中,添加一个小正方形,使之成为中心对称图形,但不是轴对称图形;

(3)在图(3)中,添加一个小正方形,使之既是中心对称图形,又是轴对称图形.



图(1) 图(2) 图(3)

8 如图,共有7个全等的三角形,你能分析说明第1个三角形经过什么变化可以依次得到其余6个三角形吗?



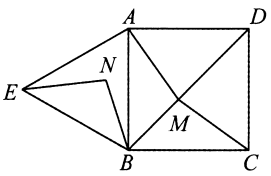
专题　与三种特殊角度的旋转有关的计算

刷难关

▶答案 D29

类型1　利用旋转60°进行计算

1 [2019 山东临沂期中]如图,四边形 $ABCD$ 是正方形,$\triangle ABE$ 是等边三角形,M 为对角线 BD(不含点 B,D)上任意一点,将线段 BM 绕点 B 逆时针旋转 60°得到 BN,连接 EN,AM,CM. 求证:$AM = EN$.

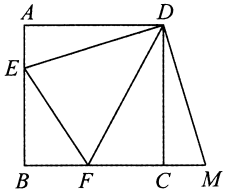


类型2　利用旋转90°进行计算

2 [2018 四川德阳二模]如图,已知正方形 $ABCD$ 的边长为 3,E,F 分别是 AB,BC 边上的点,且 $\angle EDF = 45°$,将 $\triangle DAE$ 绕点 D 按逆时针方向旋转 90°得到 $\triangle DCM$.

(1)求证:$EF = MF$;

(2)当 $AE = 1$ 时,求 EF 的长.



类型3　利用旋转180°进行计算

3 [难]如图(1),$\angle ACB = \angle AED = 90°$,$AC = BC$,$AE = DE$.

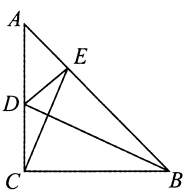
(1)若点 D 为 AC 的中点,求 $\frac{BD}{CE}$ 的值;

(2)将图(1)中的 $\triangle ADE$ 绕点 A 顺时针旋转,使点 D 落在 AB 上,如图(2),点 F 为 DB 的中点.

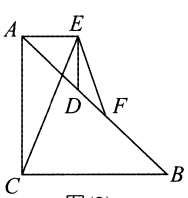
①画出 $\triangle DEF$ 关于点 F 成中心对称的图形;

②求 $\frac{EF}{CE}$ 的值.

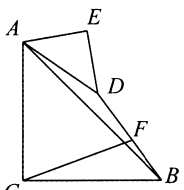
(3)如图(3),将 $\triangle ADE$ 绕点 A 顺时针旋转,点 F 为 BD 的中点,当 $AC = 6$,$AD = 4$ 时,则 CF 的最大值为_____.



图(1)



图(2)



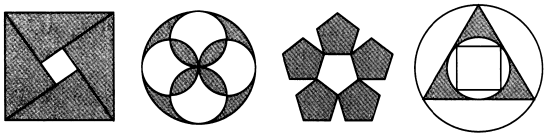
图(3)

全章综合训练

刷章测

►建议用时:45 分钟 答案 D30

1 下列图形中,既是轴对称图形,又是中心对称图形的是 (　　)

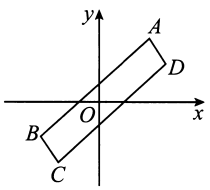


A　　B　　C　　D

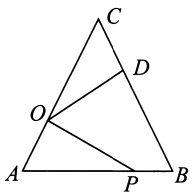
2 如图所示,在平面直角坐标系内,原点 O 恰好是平行四边形 $ABCD$ 对角线的交点. 若点 A 的坐标为(2,3),则点 C 的坐标为 (　　)

A. $(-3,-2)$　　B. $(-2,3)$

C. $(-2,-3)$　　D. $(2,-3)$



(第 2 题图)



(第 3 题图)

3 如图,在等边△ABC 中,$AC=9$,点 O 在 AC 上,且 $AO=3$,点 P 是 AB 上一动点. 连接 OP,将线段 OP 绕点 O 逆时针旋转 60°得到线段 OD. 要使点 D 恰好落在 BC 上,则 AP 的长是 (　　)

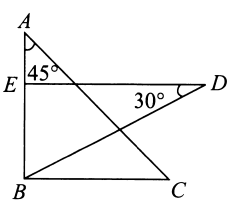
A. 4　　B. 5

C. 6　　D. 8

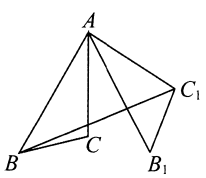
4 把一副三角板按如图放置,其中 $\angle ABC=\angle DEB=90°$,$\angle A=45°$,$\angle D=30°$,斜边 $AC=BD=10$,若将三角板 DEB 绕点 B 逆时针旋转 45°得到△$D'E'B$,则点 A 在△$D'E'B$ 的 (　　)

A. 内部　　B. 外部

C. 边上　　D. 以上都有可能



(第 4 题图)



(第 5 题图)

5 [2019 河南新乡校级月考]如图,在△ABC 中,$AB=\sqrt{6}$,$AC=\sqrt{3}$,$\angle BAC=30°$,将△ABC 绕点 A 逆时针旋转 60°得到△AB_1C_1,连接 BC_1,则 BC_1 的长为 (　　)

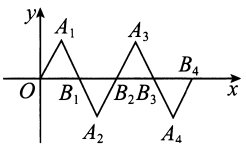
A. 3　　B. $2\sqrt{3}$

C. $2\sqrt{2}$　　D. 4

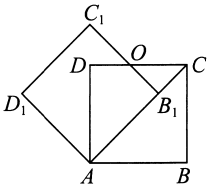
6 在如图所示的平面直角坐标系中,△OA_1B_1 是边长为 2 的等边三角形,作△$B_2A_2B_1$ 与△OA_1B_1 关于点 B_1 成中心对称,再作△$B_2A_3B_3$ 与△$B_1A_2B_2$ 关于点 B_2 成中心对称,如此作下去,则△$B_{2n}A_{2n+1}B_{2n+1}$(n 是正整数)的顶点 A_{2n+1} 的坐标是 (　　)

A. $(4n-1,\sqrt{3})$　　B. $(2n-1,\sqrt{3})$

C. $(4n+1,\sqrt{3})$　　D. $(2n+1,\sqrt{3})$



(第 6 题图)

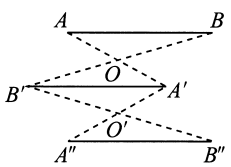


(第 7 题图)

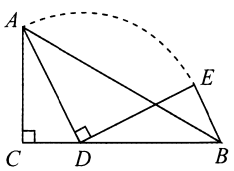
7 如图,边长为 1 的正方形 $ABCD$ 绕点 A 逆时针旋转 45°后得到正方形 $AB_1C_1D_1$,边 B_1C_1 与 CD 交于点 O,则四边形 AB_1OD 的面积是 (　　)

A. $\frac{3}{4}$　　B. $\frac{7}{16}$　　C. $\frac{\sqrt{2}-1}{2}$　　D. $\sqrt{2}-1$

8 如图,线段 AB 关于点 O(不在 AB 上)的对称线段是 $A'B'$;线段 $A'B'$ 关于点 O'(不在 $A'B'$ 上且不与 O 在 $A'B'$ 的同侧)的对称线段是 $A''B''$. 那么线段 AB 与线段 $A''B''$ 的关系是_____.



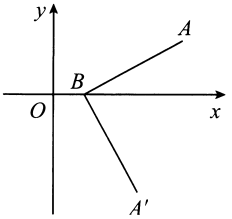
(第 8 题图)



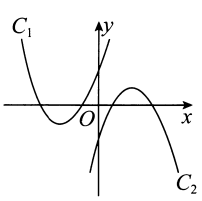
(第 9 题图)

9 [2019 河南周口川汇区期中]如图,在△ABC 中,$\angle ACB=90°$,$AC=3$,$CB=5$,点 D 是 CB 边上的一个动点,将线段 AD 绕点 D 顺时针旋转 90°,得到线段 DE,连接 BE,则线段 BE 的最小值等于_____.

10 如图,在平面直角坐标系中,点 B 的坐标是(1,0),若点 A 的坐标为(a,b),将线段 BA 绕点 B 顺时针旋转 90°得到线段 BA',则点 A' 的坐标是_____.



(第 10 题图)



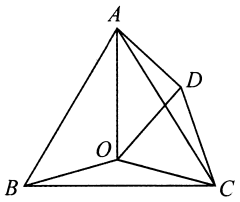
(第 11 题图)

11 如图所示，已知抛物线 C_1，C_2 关于原点成中心对称，若抛物线 C_1 的解析式为 $y=\frac{3}{4}(x+2)^2-1$，那么抛物线 C_2 的解析式为_____.

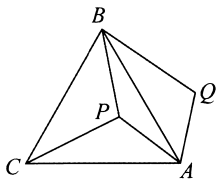
12 [2019 天津滨海新区期中]如图，点 O 是等边三角形 ABC 内一点，$\angle BOC=150°$，将 $\triangle BOC$ 绕点 C 顺时针旋转得到 $\triangle ADC$，连接 OD，OA.

(1)求 $\angle ODC$ 的度数；

(2)若 $OB=2$，$OC=3$，求 AO 的长.



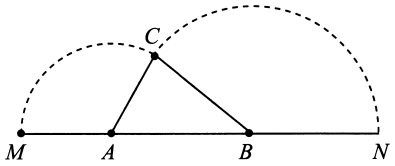
13 如图，P 是等边三角形 ABC 内一点，将线段 AP 绕点 A 顺时针旋转 60°得到线段 AQ，连接 BQ，PB，PC. 若 $PA=6$，$PB=8$，$PC=10$，求四边形 $APBQ$ 的面积.



14 [2018 安徽太和三校期中联考]如图，已知 AB 是线段 MN 上的两点，$MN=4$，$MA=1$，$MB>1$，以 A 为中心顺时针旋转点 M，以 B 为中心逆时针旋转点 N，使 MN 两点重合成一点 C，构成 $\triangle ABC$，设 $AB=x$.

(1)求 x 的取值范围；

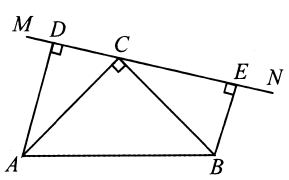
(2)求 $\triangle ABC$ 面积的最大值.



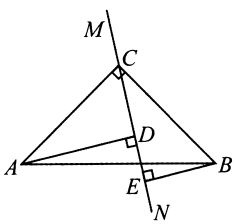
15 [2019 河北邯郸校级期中]在 $\triangle ABC$ 中，$\angle ACB=90°$，$AC=BC$，直线 MN 经过点 C，且 $AD\perp MN$ 于点 D，$BE\perp MN$ 于点 E.

(1)当直线 MN 绕点 C 旋转到图(1)的位置时，求证：$DE=AD+BE$；

(2)当直线 MN 绕点 C 旋转到图(2)的位置时，(1)中的结论还成立吗？若成立，请给出证明；若不成立，请说明理由.



图(1)



图(2)

第二十四章 圆

24.1 圆的有关性质

24.1.1 圆

刷基础

▶答案 D31

题型1 圆的定义

1 下列条件中,能确定一个圆的是 (　　)

A. 以点 O 为圆心

B. 以 10 cm 长为半径

C. 以点 A 为圆心,4 cm 长为半径

D. 经过已知点 M

2 [2019 湖北武汉江汉区期中]自行车车轮要做成圆形,实际上是根据圆的以下哪个特征 (　　)

A. 圆是轴对称图形

B. 圆是中心对称图形

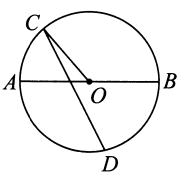
C. 圆上各点到圆心的距离相等

D. 直径是圆中最长的弦

3 到定点 O 的距离为 3 cm 的点的集合是以点_____为圆心,_____为半径的圆.

题型2 与圆有关的概念

4 如图,圆中弦共有 (　　)



A. 1 条　　B. 2 条

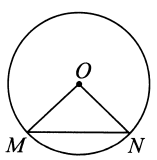
C. 3 条　　D. 4 条

5 下列说法:①圆心相同的圆是同圆;②圆心不同,半径相等的圆是等圆;③长度相等的弧是等弧;④在同圆或等圆中,长度相等的弧是等弧;⑤大于半圆的弧叫做优弧;⑥小于半圆的弧叫做劣弧. 其中正确的有 (　　)

A. 1 个　　B. 2 个

C. 3 个　　D. 4 个

6 如图,MN 为 $\odot O$ 的弦,$\angle M = 45°$,则 $\angle MON$ 等于 (　　)



A. 45°　　B. 60°

C. 90°　　D. 100°

7 下列说法错误的是 (　　)

A. 圆有无数条直径

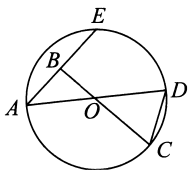
B. 连接圆上任意两点之间的线段叫弦

C. 过圆心的线段是直径

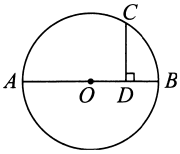
D. 能够重合的圆叫做等圆

8 若 $\odot O$ 的半径为 6 cm,则 $\odot O$ 中最长的弦长为_____.

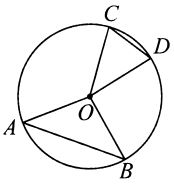
9 如图,以点 A 为端点的优弧是_____,以点 A 为端点的劣弧是_____.



(第 9 题图)



(第 10 题图)

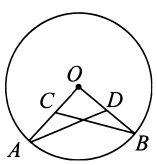


(第 11 题图)

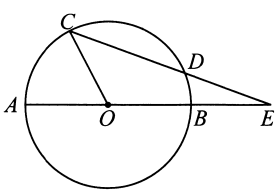
10 如图,AB 是 $\odot O$ 的直径,点 C 在 $\odot O$ 上,$CD \perp AB$,垂足为点 D,已知 $CD = 4$,$OD = 3$,则 AB 的长是_____.

11 如图,AB,CD 是 $\odot O$ 的两条弦. 若 $\angle AOB + \angle C = 180°$,$\angle COD = \angle A$,则 $\angle AOB =$ _____.

12 如图,在 $\odot O$ 中,C,D 分别是半径 OA,OB 的中点,求证:$AD = BC$.



13 如图,AB 为 $\odot O$ 的直径,CD 是 $\odot O$ 的弦,AB,CD 的延长线交于点 E,已知 $AB = 2DE$,$\angle AEC = 20°$. 求 $\angle AOC$ 的度数.



24.1.2 垂直于弦的直径

刷基础

▸答案 D31

题型1 圆的对称性

1 下列说法中,不正确的是 (　　)

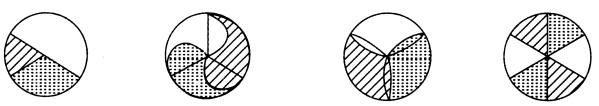
A. 圆是轴对称图形

B. 圆的任意一条直径所在的直线都是圆的对称轴

C. 圆的任意一条直径都是圆的对称轴

D. 经过圆心的任意直线都是圆的对称轴

2 学校有一个圆形花坛,现要求将它三等分,以便在上面种植三种不同的花,你认为符合设计要求的图案是_____.



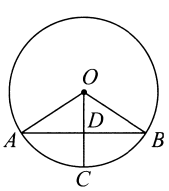
①　②　③　④

题型2 垂径定理

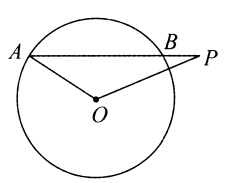
3 如图,AB 是$\odot O$ 的弦,半径 $OC\perp AB$ 于点 D. 若$\odot O$ 的半径为 5,$AB=8$,则 CD 的长是 (　　)

A. 2　　B. 3

C. 4　　D. 5



(第3题图)



(第4题图)

4 [2019 江苏无锡滨湖区期中]如图,已知$\odot O$ 的半径为 5 cm,弦 AB 的长为 8 cm,P 是 AB 的延长线上一点,$BP=2$ cm,则 OP 等于 (　　)

A. $2\sqrt{2}$ cm　　B. $3\sqrt{2}$ cm

C. $2\sqrt{5}$ cm　　D. $3\sqrt{5}$ cm

5 已知$\odot O$ 的半径为 10,弦 $AB\parallel CD$,$AB=12$,$CD=16$,则 AB 和 CD 的距离为_____.

题型3 垂径定理的推论

6 下列说法中错误的有 (　　)

①过弦的中点的直线平分弦所对的两条弧;

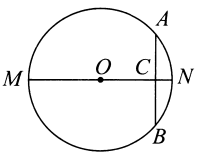
②弦的垂线平分它所对的两条弧;

③过弦的中点的直径平分弦所对的两条弧;

④平分不是直径的弦的直径平分弦所对的两条弧.

A. 1 个　　B. 2 个　　C. 3 个　　D. 4 个

7 如图,若$\overset{\frown}{AN}=\overset{\frown}{BN}$,$MN$ 为直径,则下列结论:①$AC=BC$;②$MN\perp AB$;③$\overset{\frown}{AM}=\overset{\frown}{BM}$;④$ON=AB$,其中正确的有 (　　)



A. 4 个　　B. 3 个

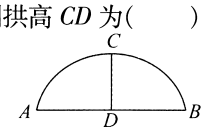
C. 2 个　　D. 1 个

题型4 垂径定理的实际应用

8 [2018 湖南长沙岳麓区模拟]如图,一座石拱桥是圆弧形,其跨度 $AB=24$ 米,半径为 13 米,则拱高 CD 为(　　)

A. $3\sqrt{5}$ 米　　B. 5 米

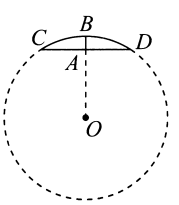
C. 7 米　　D. 8 米



9 《九章算术》是中国传统数学重要的著作,奠定了中国传统数学的基本框架.《九章算术》中记载:"今有圆材,埋在壁中,不知大小. 以锯锯之,深一寸,锯道长一尺. 问径几何?"(如图(1))



图(1)



图(2)

阅读完这段文字后,小智画出了一个圆柱截面示意图(如图(2)),其中 $BO\perp CD$ 于点 A,求径就是要求$\odot O$ 的直径.

再次阅读后,发现 $AB=$_____寸,$CD=$_____寸(一尺等于十寸),通过运用有关知识即可解决这个问题. 请你补全题目条件,并帮助小智求出$\odot O$ 的直径.

刷易错

易错点 对定理理解不透,造成误判

10 分析下列说法:①垂直于弦的直径平分弦;②平分弦的直径垂直于弦;③平分弦所对的一条弧的直径不一定平分另一条弧;④平分任意一条弦所对的两条弧的弦一定是直径. 其中正确的是(填序号)_____.

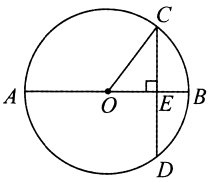
刷提升

▶答案 D32

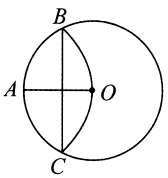
1 [2018 湖南张家界中考]如图,AB 是⊙O 的直径,弦 $CD \perp AB$ 于点 E,$OC=5$ cm,$CD=8$ cm,则 $AE=$ (　　)

A. 8 cm　　B. 5 cm

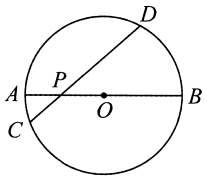
C. 3 cm　　D. 2 cm



(第 1 题图)



(第 2 题图)



(第 3 题图)

2 [2018 浙江杭州临安区中考]如图,⊙O 的半径 $OA=6$,以 A 为圆心,OA 为半径的弧交⊙O 于点 B,C,则 $BC=$ (　　)

A. $6\sqrt{3}$　　B. $6\sqrt{2}$

C. $3\sqrt{3}$　　D. $3\sqrt{2}$

3 [2018 山东枣庄中考]如图,AB 是⊙O 的直径,弦 CD 交 AB 于点 P,$AP=2$,$BP=6$,$\angle APC=30°$,则 CD 的长为 (　　)

A. $\sqrt{15}$　　B. $2\sqrt{5}$

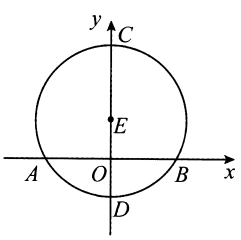
C. $2\sqrt{15}$　　D. 8

4 已知⊙O 的半径为 2,点 P 是⊙O 内一点,且 $OP=\sqrt{3}$,过 P 作互相垂直的两条弦 AC,BD,则四边形 $ABCD$ 面积的最大值为 (　　)

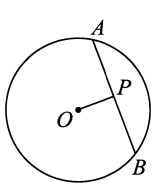
A. 4　　B. 5　　C. 6　　D. 7

5 若小唐同学掷出的铅球在场地上砸出一个直径为8 cm、深为2 cm 的小坑,则该铅球的直径为_____cm.

6 [2019 江苏南京玄武区期中]如图,点 E 在 y 轴上,⊙E 与 x 轴交于点 A,B,与 y 轴交于点 C,D,若 $C(0,4)$,$D(0,-1)$,则线段 AB 的长度为_____.

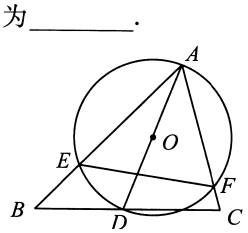


7 如图,点 P 在半径为 3 的⊙O 内,$OP=\sqrt{3}$,点 A 为⊙O 上一动点,弦 AB 过点 P,则 AB 最长为_____,AB 最短为_____.



(第 7 题图)

8 如图,在 $\triangle ABC$ 中,$\angle BAC=60°$,$\angle ABC=45°$,$AB=\sqrt{2}$,D 是线段 BC 上的一个动点,以 AD 为直径画⊙O 分别交 AB,AC 于点 E,F,连接 EF,则线段 EF 长度的最小值为_____.

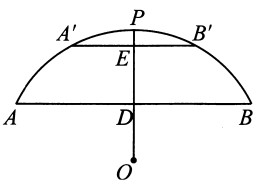


(第 8 题图)

9 如图,有一座拱桥是圆弧形,它的跨度 $AB=60$ 米,拱高 $PD=18$ 米.

(1)求圆弧所在的圆的半径 r 的长.

(2)当洪水泛滥到跨度只有 30 米时,要采取紧急措施.若拱顶离水面只有 4 米,即 $PE=4$ 米时,是否要采取紧急措施?



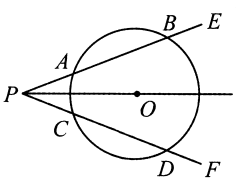
刷素养

10 [难]如图(1),已知点 O 是 $\angle EPF$ 的平分线上的点,以点 O 为圆心的圆与角两边分别交于 A,B 和 C,D 四点.

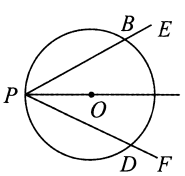
(1)求证:$AB=CD$;

(2)若角的顶点 P 在圆上,如图(2),其他条件不变,(1)中的结论成立吗?请说明理由;

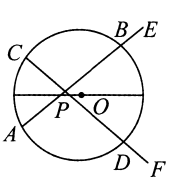
(3)若角的顶点 P 在圆内,如图(3),其他条件不变,(1)中的结论成立吗?请说明理由.



图(1)



图(2)



图(3)

有一种孤独，不是做一些事没有人陪伴，而是做一些事没有人理解。

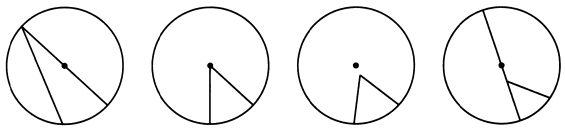
24.1.3 弧、弦、圆心角

刷基础

▶答案 D33

题型1 圆心角的定义及计算

1 下列图形中的角是圆心角的是 (　　)



2 半径为5的$\odot O$中，弦AB的长为5，则弦AB所对的圆心角的度数为_____.

题型2 弧、弦、圆心角之间的关系

3 下列说法中，不正确的是 (　　)

A. 在同圆或等圆中，若两弧相等，则它们所对的弦相等

B. 在同一个圆中，若弦长等于半径，则该弦所对的劣弧的度数为60°

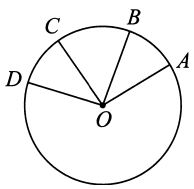
C. 在同一个圆中，若两弧不等，则大弧所对的圆心角较大

D. 若两弧的度数相等，则这两条弧是等弧

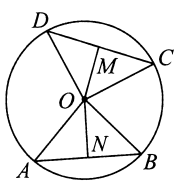
4 如图，已知$\odot O$中，$\angle AOB = \angle COD$，那么$\overset{\frown}{AC}$和$\overset{\frown}{BD}$的大小关系是 (　　)

A. $\overset{\frown}{AC} > \overset{\frown}{BD}$　　B. $\overset{\frown}{AC} < \overset{\frown}{BD}$

C. $\overset{\frown}{AC} = \overset{\frown}{BD}$　　D. 不确定



(第4题图)



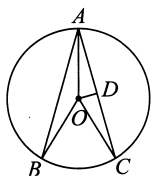
(第5题图)

5 [2019 四川广元苍溪期中]如图，在$\odot O$中，AB，CD是两条弦，$OM \perp CD$，$ON \perp AB$，如果$AB = CD$，则下列结论不正确的是 (　　)

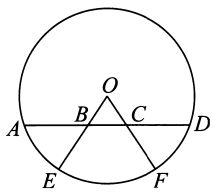
A. $\angle AON = \angle DOM$　　B. $AN = DM$

C. $OM = DM$　　D. $OM = ON$

6 如图，在半径为5的$\odot O$中，$\angle AOB = \angle AOC$，$OD \perp AC$于点D，$AB = 8$，则$OD =$ _____.



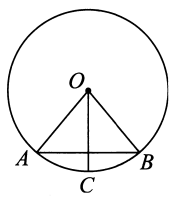
7 如图，AD是$\odot O$的一条弦，B，C是弦AD上的点，$AB = CD$，连接OB，OC，分别延长OB，OC交$\odot O$于E，F两点. 求证：$\overset{\frown}{AE} = \overset{\frown}{DF}$.



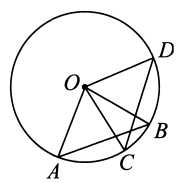
题型3 等弧所对的圆心角相等，所对的弦相等

8 如图，在$\odot O$中，若点C是$\overset{\frown}{AB}$的中点，$\angle A = 50°$，则$\angle BOC =$ (　　)

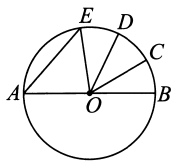
A. 40°　　B. 45°　　C. 50°　　D. 60°



(第8题图)



(第9题图)



(第10题图)

9 如图，在$\odot O$中，已知$\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{CD}$，则$AC$与$BD$的关系是 (　　)

A. $AC = BD$　　B. $AC < BD$

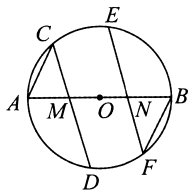
C. $AC > BD$　　D. 不确定

10 如图，AB是$\odot O$的直径，$\overset{\frown}{BC} = \overset{\frown}{CD} = \overset{\frown}{DE}$，$\angle COD = 34°$，则$\angle AEO$的度数是_____.

11 [2019 江苏海安月考]如图，过$\odot O$的直径AB上两点M，N，分别作弦CD，EF，若$CD \parallel EF$，$AC = BF$. 求证：

(1) $\overset{\frown}{BC} = \overset{\frown}{AF}$；

(2) $AM = BN$.



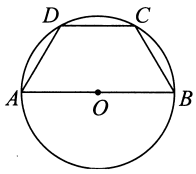
刷提升

▸答案 D33

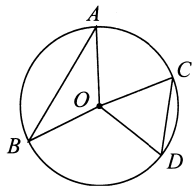
1 如图，AB 是⊙O 的直径，BC，CD，DA 是⊙O 的弦，且 $BC=CD=DA$，则∠BCD 等于 （　　）

A. 100°　　B. 110°

C. 120°　　D. 135°



（第 1 题图）



（第 2 题图）

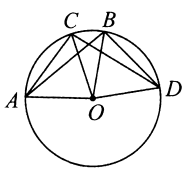
2 如图，在⊙O 中，如果∠$AOB=2$∠COD，那么 （　　）

A. $AB=DC$　　B. $AB<DC$

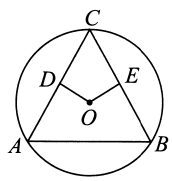
C. $AB<2DC$　　D. $AB>2DC$

3 [2019 河北石家庄 42 中检测] 如图，在⊙O 中，$\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{CD}$，则下列结论：①$AB=CD$；②$AC=BD$；③∠$AOC$=∠$BOD$；④$\overset{\frown}{AC}=\overset{\frown}{BD}$. 其中正确的有 （　　）

A. 1 个　　B. 2 个　　C. 3 个　　D. 4 个



（第 3 题图）



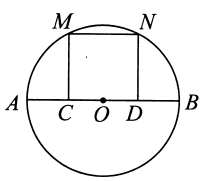
（第 4 题图）

4 如图，点 C 是⊙O 上一点，⊙O 的半径为 $2\sqrt{2}$，D，E 分别是弦 AC，BC 上的动点，且 $OD=OE=\sqrt{2}$，则 AB 的最大值为 （　　）

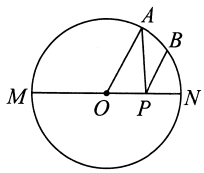
A. $2\sqrt{6}$　　B. $2\sqrt{3}$　　C. $2\sqrt{2}$　　D. $4\sqrt{2}$

5 如图，AB 是⊙O 的直径，C，D 分别是 OA，OB 的中点，$MC\perp AB$，$ND\perp AB$，M，N 在⊙O 上. 下列结论：①$MC=ND$；②$\overset{\frown}{AM}=\overset{\frown}{MN}=\overset{\frown}{NB}$；③四边形 $MCDN$ 是正方形；④$MN=\frac{1}{2}AB$. 其中正确的结论有 （　　）

A. 1 个　　B. 2 个　　C. 3 个　　D. 4 个



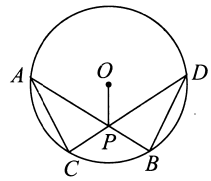
（第 5 题图）



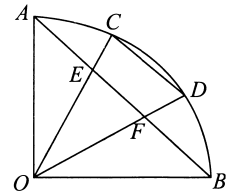
（第 6 题图）

6 如图，点 A 是半圆上的一个三等分点，点 B 是$\overset{\frown}{AN}$的中点，点 P 是直径 MN 上一动点. 若⊙O 的直径为 2，则 $AP+BP$ 的最小值是_____.

7 如图，在⊙O 中，弦 AB，CD 相交于点 P. 若 $AB=CD$，∠APO=65°，则∠APC=_____.



8 如图，∠AOB=90°，C，D 是$\overset{\frown}{AB}$的三等分点，连接 AB 分别交 OC，OD 于点 E，F. 求证：$AE=BF=CD$.

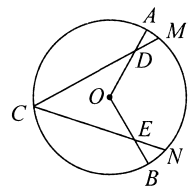


刷素养

9 [2019 江苏泰州兴化月考，难] 如图，在⊙O 中，点 C 是优弧 ACB 的中点，D，E 分别是 OA，OB 上的点，且 $AD=BE$，弦 CM，CN 分别过点 D，E. 求证：

(1) $CD=CE$；

(2) $\overset{\frown}{AM}=\overset{\frown}{BN}$.



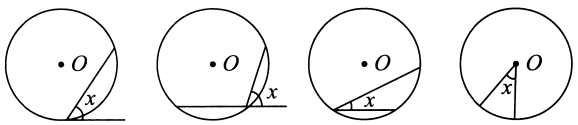
24.1.4 圆周角

刷基础

▶答案 D34

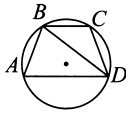
题型1 圆周角的定义

1 下列四个图中，$\angle x$ 是圆周角的是 （ ）



A　　B　　C　　D

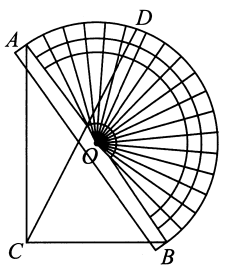
2 如图，点 A,B,C,D 均在圆上，则图中有_____个圆周角.



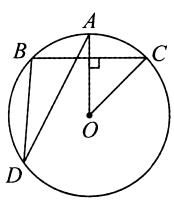
题型2 圆周角定理

3 如图，一块直角三角板 ABC 的斜边 AB 与量角器的直径重合，点 D 对应 $54°$，则 $\angle BCD$ 的度数为 （ ）

A. $27°$　　B. $54°$　　C. $63°$　　D. $36°$



（第3题图）



（第4题图）

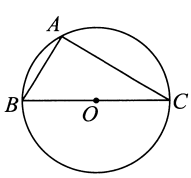
4 [2018 辽宁盘锦中考] 如图，在 $\odot O$ 中，$OA \perp BC$，$\angle AOC = 50°$，则 $\angle ADB$ 的度数为 （ ）

A. $15°$　　B. $25°$　　C. $30°$　　D. $50°$

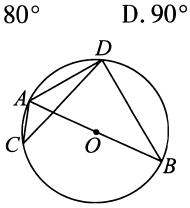
题型3 圆周角定理的推论

5 如图，BC 是 $\odot O$ 的直径，点 A 是 $\odot O$ 上异于 B,C 的一点，则 $\angle A$ 的度数为 （ ）

A. $60°$　　B. $70°$　　C. $80°$　　D. $90°$



（第5题图）



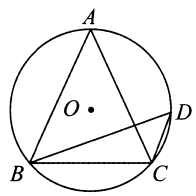
（第6题图）

6 如图，AB 是 $\odot O$ 的直径，C,D 是 $\odot O$ 上位于 AB 异侧的两点，下列四个角中，一定与 $\angle ACD$ 互余的角是 （ ）

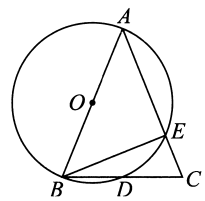
A. $\angle ADC$　　B. $\angle ABD$　　C. $\angle BAC$　　D. $\angle BAD$

7 [2018 陕西中考] 如图，$\triangle ABC$ 是 $\odot O$ 的内接三角形，$AB = AC$，$\angle BCA = 65°$，作 $CD \parallel AB$，并与 $\odot O$ 相交于点 D，连接 BD，则 $\angle DBC$ 的大小为 （ ）

A. $15°$　　B. $35°$　　C. $25°$　　D. $45°$



（第7题图）



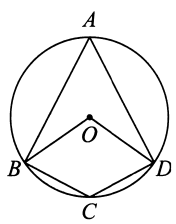
（第8题图）

8 已知：如图，AB 是 $\odot O$ 的直径，$AB = AC$，BC 交 $\odot O$ 于点 D，AC 交 $\odot O$ 于点 E，$\angle BAC = 45°$. 给出以下结论：①$\angle EBC = 22.5°$；②$BD = DC$；③$\overset{\frown}{BD} = \overset{\frown}{DE}$；④$AE = BC$. 其中正确结论的序号是_____.

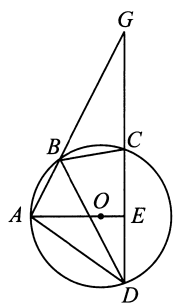
题型4 圆内接多边形

9 如图，四边形 $ABCD$ 内接于 $\odot O$，$\angle BOD = 110°$，那么 $\angle BCD$ 等于 （ ）

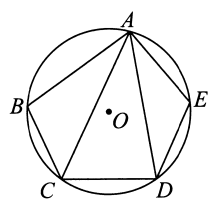
A. $110°$　　B. $135°$　　C. $55°$　　D. $125°$



（第9题图）



（第10题图）



（第11题图）

10 如图，四边形 $ABCD$ 为 $\odot O$ 的内接四边形. 延长 AB 与 DC 相交于点 G，$AO \perp CD$，垂足为点 E，连接 BD，$\angle GBC = 50°$，则 $\angle DBC$ 的度数为 （ ）

A. $50°$　　B. $60°$　　C. $80°$　　D. $90°$

11 如图，在 $\odot O$ 的内接五边形 $ABCDE$ 中，$\angle CAD = 30°$，则 $\angle B + \angle E =$ _____.

刷易错

易错点 做题时因漏解而出错

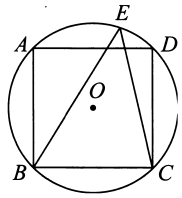
12 已知 $\odot O$ 的弦 AB 的长等于 $\odot O$ 的半径，求此弦 AB 所对的圆周角的度数.

刷提升

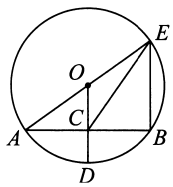
▸答案 D34

1 如图，已知⊙O是正方形$ABCD$的外接圆，点E是弧AD上任意一点，则∠BEC的度数为（　　）

A. 30°　　B. 45°　　C. 60°　　D. 90°



（第1题图）



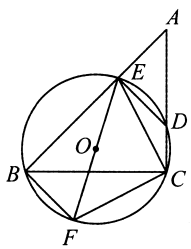
（第2题图）

2 如图，⊙O的半径OD垂直于弦AB，垂足为点C，连接AO并延长交⊙O于点E，连接BE，CE. 若$AB=8$，$CD=2$，则△BCE的面积为（　　）

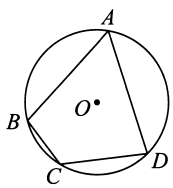
A. 12　　B. 15　　C. 16　　D. 18

3 [2018辽宁锦州中考]如图，在△ABC中，∠$ACB=90°$，过B，C两点的⊙O交AC于点D，交AB于点E，连接EO并延长交⊙O于点F，连接BF，CF，CE，若∠$EDC=135°$，$CF=2\sqrt{2}$，则AE^2+BE^2的值为（　　）

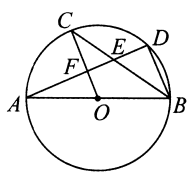
A. 8　　B. 12　　C. 16　　D. 20



（第3题图）



（第4题图）



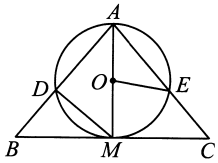
（第5题图）

4 [2017湖北黄石中考]如图，已知⊙O为四边形$ABCD$的外接圆，O为圆心. 若∠$BCD=120°$，$AB=AD=2$，则⊙O的半径为（　　）

A. $\frac{3\sqrt{2}}{2}$　　B. $\frac{\sqrt{6}}{2}$　　C. $\frac{3}{2}$　　D. $\frac{2\sqrt{3}}{3}$

5 [2019江苏东台月考]如图，AB是⊙O的直径，C，D是⊙O上的点，且$OC/\!/BD$，AD与BC，OC分别相交于点E，F，则下列结论：①$AD\perp BD$；②∠$AOC=$∠AEC；③CB平分∠ABD；④$AF=DF$；⑤△CEF≌△BED. 其中一定成立的结论是_____.（填序号）

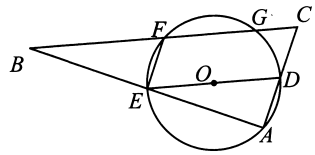
6 如图，已知AM为⊙O的直径，直线BC经过点M，且$AB=AC$，∠$BAM=$∠CAM，线段AB和AC分别交⊙O于点D，E，∠$BMD=40°$，则∠$EOM=$_____.



7 如图，已知ED为⊙O的直径且$ED=4$，点A（不与E，D重合）为⊙O上一个动点，线段AB经过点E，且$EA=EB$，F为⊙O上一点，∠$FEB=90°$，BF的延长线与AD的延长线交于点C.

（1）求证：△EFB≌△ADE；

（2）当点A在⊙O上移动时，求四边形$FCDE$的最大面积.



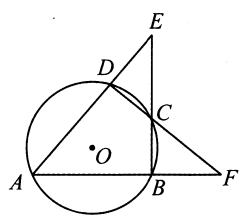
刷素养

8 如图，⊙O的内接四边形$ABCD$两组对边的延长线分别交于点E，F.

（1）若∠$E=$∠F，求证：∠$ADC=$∠ABC；

（2）若∠$E=$∠$F=42°$，求∠A的度数；

（3）若∠$E=\alpha$，∠$F=\beta$，且$\alpha\neq\beta$. 请你用含有α，β的代数式表示∠DAB的大小.



天空像是被飓风吹了整整一夜，干净得没有一朵云。只剩下彻底的纯粹的蓝色，张狂地渲染在头顶上面。

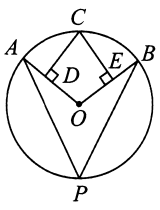
24.1 综合训练

刷综合

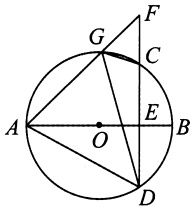
▶答案 D35

1 [2019 海南琼中校级检测]如图,点 A,B,C,P 在⊙O 上,$CD\perp OA$,$CE\perp OB$,垂足分别为 D,E,$\angle DCE=80°$,则 $\angle APB$ 的度数为 (　　)

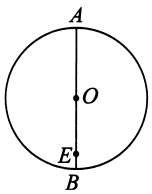
A. 100°　　B. 80°　　C. 60°　　D. 50°



(第 1 题图)



(第 2 题图)



(第 3 题图)

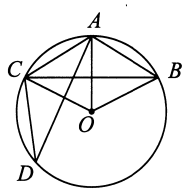
2 [2018 山东潍坊青州三模]如图,AB 是⊙O 的直径,弦 $CD\perp AB$,垂足为点 E. 点 G 是$\overset{\frown}{AC}$上任意一点,延长 AG 交 DC 的延长线于点 F,连接 GC,GD,AD. 若 $\angle BAD=25°$,则 $\angle AGD$ 等于 (　　)

A. 55°　　B. 65°　　C. 75°　　D. 85°

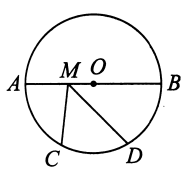
3 如图,⊙O 的直径 $AB=10$,E 在⊙O 内,且 $OE=4$,则过 E 点的所有弦中,长度为整数的条数为 (　　)

A. 4　　B. 6　　C. 8　　D. 10

4 如图,在半径为 6 cm 的⊙O 中,点 A 是$\overset{\frown}{BC}$的中点,点 D 是$\overset{\frown}{BDC}$上一点,且 $\angle D=30°$. 下列四个结论:①$OA\perp BC$;②$BC=3\sqrt{3}$ cm;③$\angle AOB=60°$;④四边形 $ABOC$ 是菱形. 其中正确结论的序号是_____.



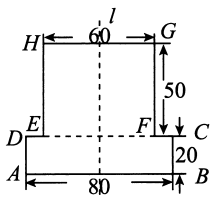
(第 4 题图)



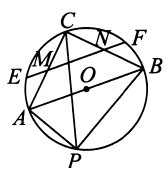
(第 5 题图)

5 如图,⊙O 的半径是 8,AB 是⊙O 的直径,M 为 AB 上一动点,$\overset{\frown}{AC}=\overset{\frown}{CD}=\overset{\frown}{BD}$,则 $CM+DM$ 的最小值为_____.

6 如图是由两个长方形组成的工件平面图(单位:mm),直线 l 是它的对称轴. 若 $HG=60$,$AB=80$,$GF=50$,$CB=20$,则能完全覆盖这个平面图形的圆面的最小半径是_____mm.



(第 6 题图)



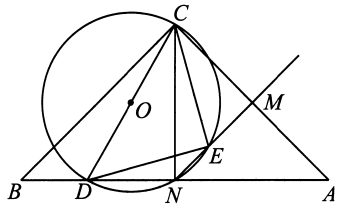
(第 7 题图)

7 如图,AB 是半径为 4 的⊙O 的直径,P 是圆上异于 A,B 的任意一点,$\angle APB$ 的平分线交⊙O 于点 C,连接 AC 和 BC,△ABC 的中位线 MN 所在的直线与⊙O 相交于点 E,F,则 EF 的长是_____.

8 已知△ABC 中,$\angle BCA=90°$,$BC=AC$,D 是 BA 边上一点(点 D 不与 A,B 重合),M 是 CA 的中点. 以 CD 为直径的⊙O 与 BA 边交于点 N,⊙O 与射线 NM 交于点 E,连接 CE,DE.

(1)求证:$BN=AN$;

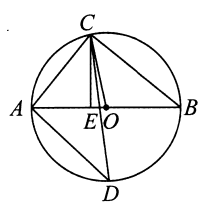
(2)猜想线段 CD 与 DE 的数量关系,并说明理由.



9 [2018 河南洛阳三模,难]如图,AB 为⊙O 的直径,C 为⊙O 上半圆的一个动点,$CE\perp AB$ 于点 E,$\angle OCE$ 的平分线交⊙O 于点 D,连接 AD.

(1)当点 C 在⊙O 上半圆移动时,点 D 的位置会变吗?请说明理由;

(2)若⊙O 的半径为 5,弦 AC 的长为 6,求线段 AD,CD 的长.

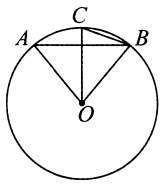


刷中考

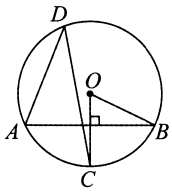
▸答案 D35

1 [2018 广东广州中考]如图,AB 是⊙O 的弦,$OC \perp AB$,交⊙O 于点 C,连接 OA,OB,BC,若 $\angle ABC = 20°$,则 $\angle AOB$ 的度数是 (　　)

A. 40°　　B. 50°　　C. 70°　　D. 80°



(第 1 题图)



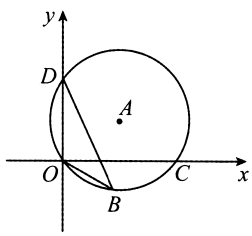
(第 2 题图)

2 [2018 山东菏泽中考]如图,在⊙O 中,$OC \perp AB$,$\angle ADC = 32°$,则 $\angle OBA$ 的度数是 (　　)

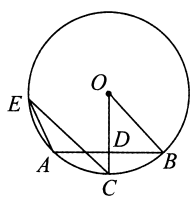
A. 64°　　B. 58°　　C. 32°　　D. 26°

3 [2018 甘肃威武中考]如图,⊙A 过点 $O(0,0)$,$C(\sqrt{3},0)$,$D(0,1)$,点 B 是 x 轴下方⊙A 上的一点,连接 BO,BD,则 $\angle OBD$ 的度数是 (　　)

A. 15°　　B. 30°　　C. 45°　　D. 60°



(第 3 题图)



(第 4 题图)

4 [2018 四川巴中中考]如图,在⊙O 中,半径 $OC \perp$ 弦 AB 于点 D,点 E 在⊙O 上,$\angle AEC = 22.5°$,$AB = 4$,则半径 OB 等于 (　　)

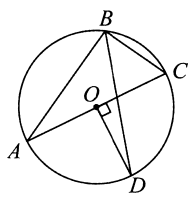
A. $\sqrt{2}$　　B. 2　　C. $2\sqrt{2}$　　D. 3

5 [2018 贵州安顺中考] 已知⊙O 的直径 $CD = 10$ cm,AB 是⊙O 的弦,$AB \perp CD$,垂足为 M,且 $AB = 8$ cm,则 AC 的长为 (　　)

A. $2\sqrt{5}$ cm　　B. $4\sqrt{5}$ cm

C. $2\sqrt{5}$ cm 或 $4\sqrt{5}$ cm　　D. $2\sqrt{3}$ cm 或 $4\sqrt{3}$ cm

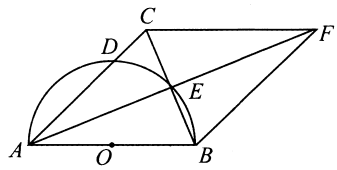
6 [2018 黑龙江龙东中考]如图,AC 为⊙O 的直径,点 B 在圆上,$OD \perp AC$ 交⊙O 于点 D,连接 BD,$\angle BDO = 15°$,则 $\angle ACB =$ _____.



7 [2018 湖北宜昌中考]如图,在△ABC 中,$AB = AC$,以 AB 为直径的圆交 AC 于点 D,交 BC 于点 E,延长 AE 至点 F,使 $EF = AE$,连接 FB,FC.

(1)求证:四边形 $ABFC$ 是菱形;

(2)若 $AD = 7$,$BE = 2$,求菱形 $ABFC$ 的面积.

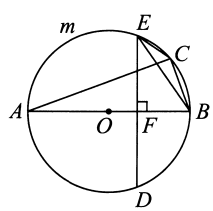


刷素养

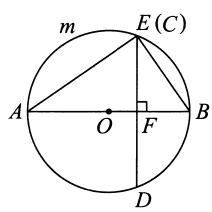
8 如图(1),已知 AB 是⊙O 的直径,C 是$\overset{\frown}{AmB}$上的一个动点(点 C 与点 A,B 不重合),连接 AC,D 是$\overset{\frown}{ABC}$的中点,作弦 $DE \perp AB$ 于点 F.

(1)若点 C 和点 E 不重合,连接 BC,CE 和 EB,当△BCE 是等腰三角形时,求 $\angle CAB$ 的度数;

(2)若点 C 和点 E 重合,如图(2),探索 AB 与 AC 的数量关系并说明理由.



图(1)



图(2)

在这世上珍贵的东西总是罕有，所以这世界上只有一个你。

24.2 点和圆、直线和圆的位置关系

24.2.1 点和圆的位置关系

刷基础

▶答案 D36

题型1 点和圆的位置关系

1 已知⊙O的半径是4，$OP=3$，则点P与⊙O的位置关系是 （ ）

A. 点P在圆内　　B. 点P在圆上

C. 点P在圆外　　D. 不能确定

2 已知点P是线段OA的中点，且点P在半径为r的⊙O外，点A与点O的距离为8，则r的取值范围是 （ ）

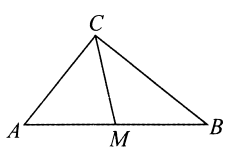
A. $r>4$　　B. $r>8$

C. $0<r<4$　　D. $0<r<8$

3 如图，在△ABC中，$\angle ACB=90°$，$AC=4$，$BC=5$，点M为AB的中点.

(1) 以点C为圆心、4为半径作⊙C，则点A，B，M分别与⊙C有怎样的位置关系？

(2) 若以点C为圆心作⊙C，使A，B，M三点中至少有一点在⊙C内，且至少有一点在⊙C外，求⊙C的半径r的取值范围.



题型2 确定圆的条件及个数

4 过A，B，C三点能确定一个圆的条件是 （ ）

①$AB=2$，$BC=3$，$AC=5$；②$AB=3$，$BC=3$，$AC=2$；③$AB=3$，$BC=4$，$AC=5$.

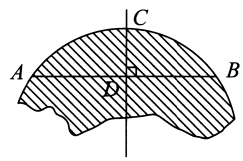
A. ①②　　B. ①②③

C. ②③　　D. ①③

5 [2018 江苏盐城大丰区实验初级中学学情调研]如图，残破的圆形轮片上，弦AB的垂直平分线交弧AB于点C，交弦AB于点D. 已知$AB=16$ cm，$CD=4$ cm.

(1) 求作此残片所在的圆(不写作法，保留作图痕迹)；

(2) 求(1)中所作圆的半径.



题型3 三角形的外接圆

6 已知方程$x^2-10x+18=0$的两根恰好是一个直角三角形的两条直角边的长，则这个直角三角形的外接圆半径为 （ ）

A. 3　　B. 4　　C. 5　　D. 6

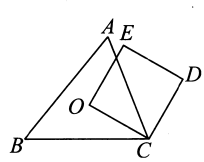
7 如图，O为锐角三角形ABC的外心，四边形$OCDE$为正方形，其中点E在△ABC的外部，下列叙述正确的是（ ）

A. O是△AEB的外心，O是△AED的外心

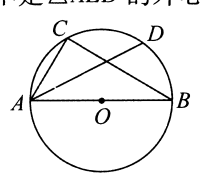
B. O是△AEB的外心，O不是△AED的外心

C. O不是△AEB的外心，O是△AED的外心

D. O不是△AEB的外心，O不是△AED的外心



（第7题图）



（第8题图）

8 [2018 湖北黄冈中考]如图，△ABC内接于⊙O，AB为⊙O的直径，$\angle CAB=60°$，弦AD平分$\angle CAB$，若$AD=6$，则$AC=$_____.

题型4 反证法

9 用反证法证明“若⊙O的半径为r，点P到圆心的距离为d，且$d>r$，则点P在⊙O的外部”，应先假设 （ ）

A. $d\leqslant r$

B. 点P在⊙O外

C. 点P在⊙O上

D. 点P在⊙O上或点P在⊙O内

刷易错

易错点 忽略对外心位置的分析导致出现漏解

10 如果点O为△ABC的外心，$\angle BOC=70°$，那么$\angle BAC$等于 （ ）

A. 35°　　B. 110°　　C. 145°　　D. 35°或145°

24.2.2 直线和圆的位置关系

课时1 直线和圆的位置关系

刷基础

▶答案 D37

题型1 直线和圆的位置关系的判定

1 已知⊙O的半径为3,圆心O到直线l的距离为2,则直线l与⊙O的位置关系是 (　　)

A. 相交　　B. 相切

C. 相离　　D. 不能确定

2 已知⊙O的面积为9π cm^2,若圆心O到直线的距离为3 cm,则直线与⊙O的位置关系是 (　　)

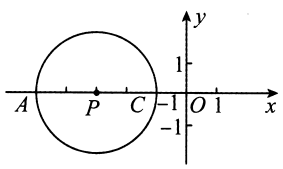
A. 相切　　B. 相交

C. 相离　　D. 不能确定

3 [2019 江苏沭阳期末]已知⊙O的半径为3,圆心O到直线AB的距离为5,则直线AB与⊙O的位置关系是_____.

题型2 直线和圆的位置关系的性质

4 [2019 辽宁辽阳校级期中]如图,在平面直角坐标系xOy中,半径为2的⊙P的圆心P的坐标为$(-3,0)$,将⊙P沿x轴正方向平移,使⊙P与y轴相切,则平移的距离为 (　　)



A. 1　　B. 1或5

C. 3　　D. 5

5 在△ABC中,$\angle C=90°$,$AC=4$,$AB=5$,以点C为圆心,R为半径作圆.若⊙C与边AB只有一个公共点,则R的取值范围是 (　　)

A. $R=\frac{12}{5}$

B. $3\leqslant R\leqslant 4$

C. $0<R<3$或$R>4$

D. $3<R\leqslant 4$或$R=\frac{12}{5}$

6 在平面直角坐标系内,以点$M(-1,0)$为圆心,$\sqrt{5}$为半径作圆,则该圆与y轴的交点坐标是_____.

7 在平面直角坐标系中,圆心P的坐标为$(-3,4)$,以半径r在坐标平面内作圆.

(1)当r满足_____时,⊙P与坐标轴有1个交点;

(2)当r满足_____时,⊙P与坐标轴有2个交点;

(3)当r满足_____时,⊙P与坐标轴有3个交点;

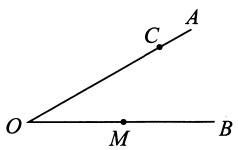
(4)当r满足_____时,⊙P与坐标轴有4个交点.

8 [2019 河北唐山路北区模拟]已知⊙O的半径$OA=5$,延长OA到B,$AB=2$,以OB为一边作$\angle OBC=45°$,那么BC所在直线与⊙O的位置关系是_____.

9 如图,$\angle AOB=30°$,点M在OB上,且$OM=5$ cm,以M为圆心,r为半径作圆.

(1)讨论射线OA与⊙M公共点个数,并写出r对应的取值范围;

(2)若C是OA上一点,$OC=5\sqrt{3}$ cm,当$r>5$ cm时,求线段OC与⊙M的公共点个数.



刷易错

易错点 错把圆心到直线上某点的距离与半径作比较来确定直线与圆的位置关系

10 已知⊙O的半径为3 cm,P为直线l上的一点,若$OP=5$ cm,则直线l与⊙O的位置关系是 (　　)

A. 一定相交

B. 一定相切

C. 一定相离

D. 可能相交,也可能相切或相离

人在年轻时,最头疼的一件事就是决定自己这一生要做什么。

课时2 切线的判定和性质

刷基础

▶答案 D38

题型1 切线的判定

1 下列说法正确的是 ( )

A. 与圆有公共点的直线是圆的切线

B. 和圆心的距离等于圆的半径的直线是圆的切线

C. 垂直于圆的半径的直线是圆的切线

D. 过圆的半径外端的直线是圆的切线

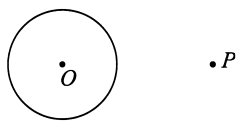
2 阅读下面材料.

在数学课上,老师提出如下问题:

尺规作图:过圆外一点作圆的切线.

已知:$\odot O$ 和点 P.

求作:过点 P 的 $\odot O$ 的切线.



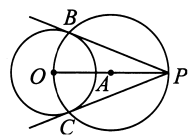
小涵的主要作法如下:

如图,(1)连接 OP,作线段 OP 的中点 A;

(2)以 A 为圆心,OA 长为半径作圆,交 $\odot O$ 于点 B,C;

(3)作射线 PB 和 PC.

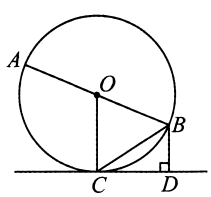
所以 PB 和 PC 就是所求的切线.



老师说:"小涵的作法正确."

请回答:小涵的作图依据是_____.

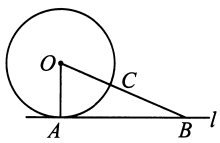
3 [2018 湖南邵阳中考]如图所示,AB 是 $\odot O$ 的直径,点 C 为 $\odot O$ 上一点,过点 B 作 $BD \perp CD$,垂足为点 D,连接 OC,BC,BC 平分 $\angle ABD$. 求证:CD 为 $\odot O$ 的切线.



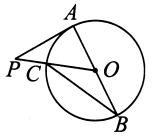
题型2 切线的性质

4 如图,直线 l 是 $\odot O$ 的切线,A 为切点,B 为直线 l 上一点,连接 OB 交 $\odot O$ 于点 C. 若 $AB = 12$,$OA = 5$,则 BC 的长为 ( )

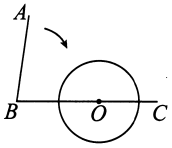
A. 5 B. 6 C. 7 D. 8



(第4题图)



(第5题图)



(第6题图)

5 [2017 四川自贡中考]AB 是 $\odot O$ 的直径,PA 切 $\odot O$ 于点 A,PO 交 $\odot O$ 于点 C,连接 BC. 若 $\angle P = 40°$,则 $\angle B$ 等于 ( )

A. 20° B. 25° C. 30° D. 40°

6 如图,$\angle ABC = 80°$,O 为射线 BC 上一点,以点 O 为圆心,$\frac{1}{2}OB$ 长为半径作 $\odot O$,要使射线 BA 与 $\odot O$ 相切,应将射线 BA 绕点 B 按顺时针方向旋转 ( )

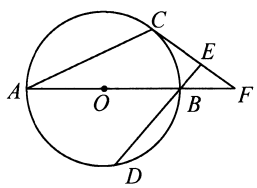
A. 50° B. 50°或 110°

C. 60°或 120° D. 50°或 100°

7 [2019 江苏仪征期中]如图,AB 为 $\odot O$ 直径,C,D 为 $\odot O$ 上不同于 A,B 的两点,$\angle ABD = 2\angle A$. 过点 C 作 $CE \perp DB$,垂足为 E,直线 AB 与 CE 相交于点 F.

(1)求证:CF 为 $\odot O$ 的切线;

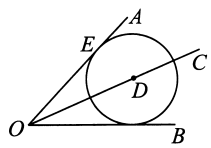
(2)若 $CE = 2$,$BE = 1$,求 BD 长.



刷易错

易错点 不清楚"有公共点,连半径,证垂直"和"无公共点,作垂直,证半径"的含义致错

8 已知 OC 平分 $\angle AOB$,D 是 OC 上任意一点,$\odot D$ 与 OA 相切于点 E,求证:OB 与 $\odot D$ 相切.



刷提升

▶答案 D38

1 如图，已知 P 为⊙O 外一点，连接 OP 交⊙O 于点 A，且 $OA=2AP$，求作一条直线 PB，使 PB 与⊙O 相切. 以下是甲、乙两位同学的作业.

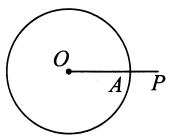
甲：作 OP 的垂直平分线，交⊙O 于点 B，则直线 PB 即为所求.

乙：取 OP 的中点 M，以 M 为圆心，OM 长为半径作圆，交⊙O 于点 B，则直线 PB 即为所求.

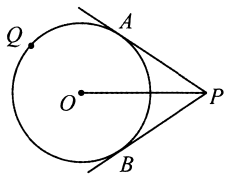
对于两人的作业，下列说法正确的是　（　）

A. 两人都对　　B. 两人都不对

C. 甲对，乙不对　　D. 甲不对，乙对



（第 1 题图）



（第 2 题图）

2 [2019 河北承德校级月考] 如图，PA，PB 分别切⊙O 于 A，B 两点，已知圆的半径为 4，劣弧 $\overset{\frown}{AB}$ 的度数为 120°，Q 是圆上的一动点，则 PQ 的长的最大值是　（　）

A. $12\sqrt{3}$　　B. 12

C. $8\sqrt{3}$　　D. $4\sqrt{3}$

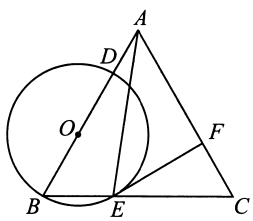
3 如图，在等边三角形 ABC 中，点 O 在边 AB 上，⊙O 过点 B 且分别与边 AB，BC 相交于点 D，E，F 是 AC 上的点，连接 EF. 判断下列说法错误的是　（　）

A. 若 $EF\perp AC$，则 EF 是⊙O 的切线

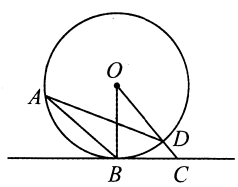
B. 若 EF 是⊙O 的切线，则 $EF\perp AC$

C. 若 $BE=EC$，则 AC 是⊙O 的切线

D. 若 $BE=\frac{\sqrt{3}}{2}EC$，则 AC 是⊙O 的切线



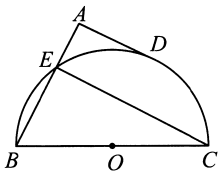
（第 3 题图）



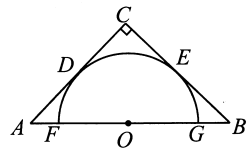
（第 4 题图）

4 [2018 湖南长沙中考] 如图，点 A，B，D 在⊙O 上，$\angle A=20°$，BC 是⊙O 的切线，B 为切点，OD 的延长线交 BC 于点 C，则 $\angle OCB$ 的度数为_____.

5 如图，BC 是半圆 O 的直径，点 D 是半圆上一点，过点 D 作⊙O 的切线 AD，$BA\perp DA$ 于点 A，BA 交半圆于点 E. 已知 $BC=10$，$AD=4$，那么直线 CE 与以点 O 为圆心，3 为半径的圆的位置关系是_____.



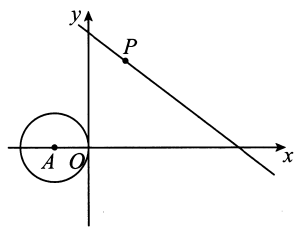
（第 5 题图）



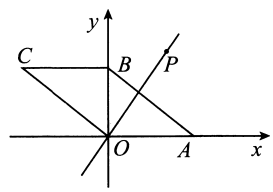
（第 6 题图）

6 如图，半圆 O 与等腰直角三角形 ABC 的两腰 CA，CB 分别切于 D，E 两点，直径 FG 在 AB 上. 若 $BG=1$，则 $\triangle ABC$ 的周长为_____.

7 如图，在平面直角坐标系中，⊙A 的圆心 A 的坐标为 $(-1,0)$，半径为 1，点 P 为直线 $y=-\frac{3}{4}x+3$ 上的动点，过点 P 作⊙A 的切线，切点为 Q，则线段 PQ 的最小值是_____.



（第 7 题图）



（第 8 题图）

8 如图，在平面直角坐标系 xOy 中，▱$OABC$ 的顶点 A，B 的坐标分别是 $(3,0)$，$(0,2)$，动点 P 在直线 $y=\frac{3}{2}x$ 上运动，以点 P 为圆心，BP 长为半径的⊙P 随点 P 运动，当⊙P 与▱$OABC$ 的边相切时，点 P 的坐标为_____.

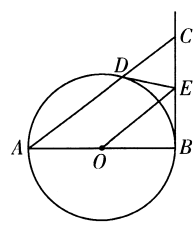
刷素养

9 如图，已知以直角 $\triangle ABC$ 的直角边 AB 为直径作⊙O 与斜边 AC 交于点 D，E 为 BC 边的中点，连接 DE.

(1) 求证：DE 是⊙O 的切线.

(2) 连接 OE，当 $\angle CAB$ 为何值时，四边形 $AOED$ 是平行四边形.

(3) 在(2)条件下，探索四边形 $OBED$ 的形状.



当你犹豫要不要去做一件事的时候，其实你内心已经有了选择，只是你还没有充足的理由去说服自己。

课时3　切线长定理及三角形的内切圆

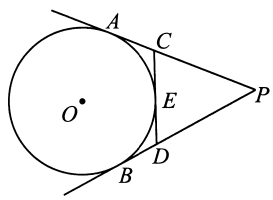
刷基础

▶答案 D39

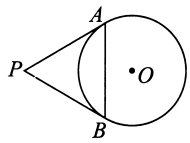
题型1　切线长定理

1 如图，P 为$\odot O$ 外一点，PA，PB 分别切$\odot O$ 于点 A，B，CD 切$\odot O$ 于点 E，分别交 PA，PB 于点 C，D. 若 $PA=5$，则$\triangle PCD$ 的周长为（　　）

A. 5　　B. 7　　C. 8　　D. 10



（第1题图）



（第2题图）

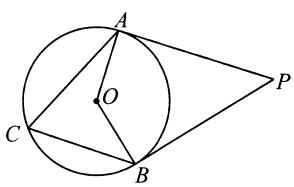
2 从$\odot O$ 外一点 P 引$\odot O$ 的两条切线 PA，PB，切点分别为 A，B. 如果$\angle APB=60°$，$PA=8$，那么弦 AB 的长是（　　）

A. 4　　B. 8　　C. $4\sqrt{3}$　　D. $8\sqrt{3}$

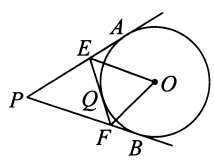
3 [2019 河北衡水校级月考]如图，PA，PB 分别与$\odot O$ 相切于 A，B 两点，若$\angle C=65°$，则$\angle P$ 的度数为（　　）

A. 50°　　B. 65°

C. 100°　　D. 130°



（第3题图）



（第4题图）

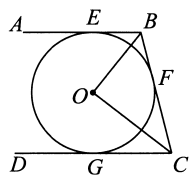
4 如图，PA，PB 是$\odot O$ 的切线，切点分别为 A，B，直线 EF 也是$\odot O$ 的切线，Q 是切点，交 PA，PB 于点 E，F. 若$\angle APB=50°$，则$\angle EOF$ 的度数为_____.

5 如图，直线 AB，BC，CD 分别与$\odot O$ 相切于点 E，F，G，且 $AB\parallel CD$，$OB=6$ cm，$OC=8$ cm. 求：

(1)$\angle BOC$ 的度数；

(2)$BE+CG$ 的长；

(3)$\odot O$ 的半径.



题型2　三角形的内切圆

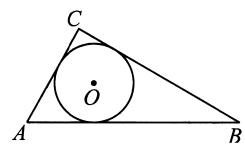
6 [2017 广东广州中考]如图，$\odot O$ 是$\triangle ABC$ 的内切圆，则点 O 是$\triangle ABC$ 的（　　）

A. 三条边的垂直平分线的交点

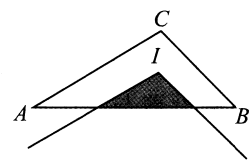
B. 三条角平分线的交点

C. 三条中线的交点

D. 三条高的交点



（第6题图）



（第7题图）

7 [2018 河北中考]如图，点 I 为$\triangle ABC$ 的内心，$AB=4$，$AC=3$，$BC=2$，将$\angle ACB$ 平移使其顶点与 I 重合，则图中阴影部分的周长为（　　）

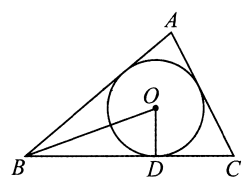
A. 4.5　　B. 4

C. 3　　D. 2

8 在 Rt$\triangle ABC$ 中，$\angle C=90°$，$AB=5$，内切圆半径为 1，则三角形的周长为（　　）

A. 15　　B. 12　　C. 13　　D. 14

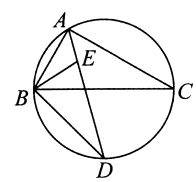
9 [2018 浙江湖州中考]如图，已知$\triangle ABC$ 的内切圆$\odot O$ 与 BC 边相切于点 D，连接 OB，OD. 若$\angle ABC=40°$，则$\angle BOD$ 的度数是_____.



10 [2019 江苏兴化期中]如图，点 E 是$\triangle ABC$ 的内心，AE 的延长线交$\triangle ABC$ 的外接圆于点 D.

(1)BD 与 DE 相等吗？为什么？

(2)若$\angle BAC=90°$，$DE=4$，求$\triangle ABC$ 外接圆的半径.

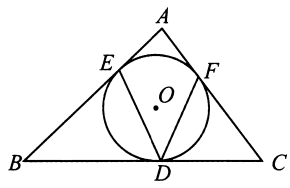


刷提升

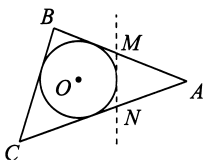
▸答案 D40

1 [2019 江苏苏州姑苏区期中] 如图，⊙O 内切于△ABC，切点分别为 D,E,F. 已知∠$B=50°$，∠$C=60°$，连接 DE,DF，那么∠EDF 等于 (　　)

A. 40°　　B. 55°　　C. 65°　　D. 70°



（第 1 题图）



（第 2 题图）

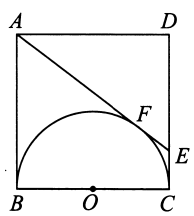
2 如图，△ABC 是一张周长为 17 cm 的三角形纸片，$BC=5$ cm，⊙O 是它的内切圆，小明准备用剪刀在⊙O 的右侧沿着与⊙O 相切的任意一条直线 MN 剪下△AMN，则剪下的三角形的周长为 (　　)

A. 12 cm　　B. 7 cm

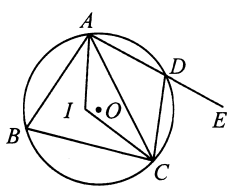
C. 6 cm　　D. 随直线 MN 的变化而变化

3 如图，正方形 $ABCD$ 边长为 4 cm，以正方形的一边 BC 为直径，在正方形 $ABCD$ 内作半圆，过 A 作半圆的切线，与半圆相切于点 F，与 DC 相交于点 E，则△ADE 的面积为 (　　)

A. 12 cm^2　　B. 24 cm^2　　C. 8 cm^2　　D. 6 cm^2



（第 3 题图）



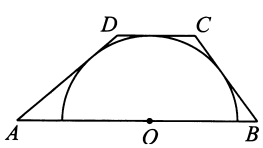
（第 4 题图）

4 [2018 山东烟台中考] 如图，四边形 $ABCD$ 内接于⊙O，点 I 是△ABC 的内心，∠$AIC=124°$，点 E 在 AD 的延长线上，则∠CDE 的度数为 (　　)

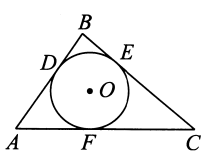
A. 56°　　B. 62°　　C. 68°　　D. 78°

5 如图，⊙O 的圆心在梯形 $ABCD$ 的底边 AB 上，并与其他三边均相切. 若 $AB=10$，$AD=6$，则 $CB=$ (　　)

A. 4　　B. 5　　C. 6　　D. 无法确定



（第 5 题图）



（第 6 题图）

6 如图，⊙O 内切于△ABC，D,E,F 分别为 AB,BC,AC 上的切点. 若△ABC 的周长为 60，且 $AB:BC:AC=4:5:6$，则 $CF=$ _____.

7 如图，以定线段 AB 为直径作半圆 O，P 为半圆上任意一点(异于 A,B)，过点 P 作半圆 O 的切线分别交过 A,B 两点的切线于点 D,C，连接 OC,BP，过点 O 作 $OM\parallel CD$ 分别交 BC 与 BP 于点 M,N. 下列结论：

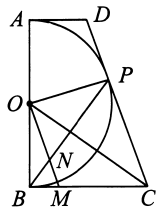
①$S_{四边形ABCD}=\frac{1}{2}AB\cdot CD$；

②$AD=AB$；

③$AD=ON$；

④AB 为过 O,C,D 三点的圆的切线.

其中正确的是_____.(填序号)

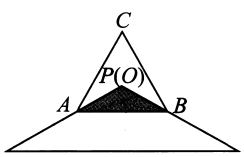


刷素养

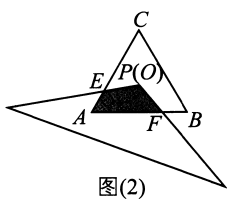
8 [难]【数学活动】求重叠部分的面积.

(1)【问题情境】如图(1)，将顶角为 120°的等腰三角形纸片(纸片足够大)的顶点 P 与等边三角形 ABC 的内心 O 重合，已知 $OA=2$，求图中重叠部分△PAB 的面积.

(2)【探究】在(1)的条件下，将纸片绕点 P 旋转至如图(2)所示的位置，纸片两边分别与 AC,AB 交于点 E,F. 图(2)中重叠部分的面积与图(1)中重叠部分的面积是否相等？若相等，请给予证明；若不相等，请说明理由.



图(1)



图(2)

24.2 综合训练

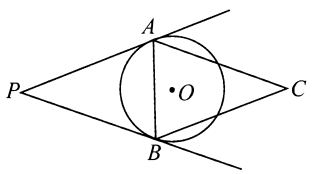
刷综合

▶答案 D40

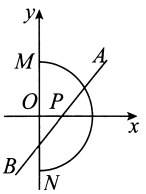
1 [2019 河北邯郸邯山区月考]如图,在$\square APBC$中,$\angle C=40°$,若$\odot O$与PA,PB相切于点A,B,则$\angle CAB=$(　　)

A. 40°　　B. 50°

C. 60°　　D. 70°



(第1题图)



(第2题图)

2 如图,在平面直角坐标系中,以原点O为圆心,3为半径的半圆与y轴交于点M,N,直线AB:$y=x+b$与x轴交于点$P(x,0)$. 若直线AB与半圆弧有公共点,则x值的范围是(　　)

A. $-3\leqslant x\leqslant 3\sqrt{2}$

B. $-3\leqslant x\leqslant 3$

C. $-3\sqrt{2}\leqslant x\leqslant 3$

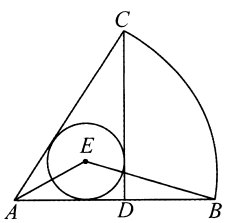
D. $0\leqslant x\leqslant 3\sqrt{2}$

3 在平面直角坐标系中,点O为坐标原点,点A,B,C的坐标分别为$A(\sqrt{3},0)$,$B(3\sqrt{3},0)$,$C(0,5)$,点D在第一象限内,且$\angle ADB=60°$,则线段CD的长的最小值是(　　)

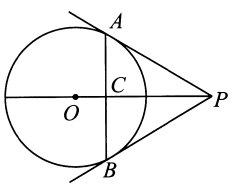
A. $2\sqrt{3}-2$　　B. $2\sqrt{5}-2$

C. $2\sqrt{7}-2$　　D. $2\sqrt{10}-2$

4 [2018 山东威海中考]如图,在扇形CAB中,$CD\perp AB$,垂足为D,$\odot E$是$\triangle ACD$的内切圆,连接AE,BE,则$\angle AEB$的度数为_____.



(第4题图)



(第5题图)

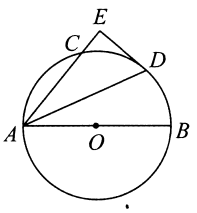
5 如图,PA,PB切$\odot O$于点A,B,连接AB交直线OP于点C. 若$\odot O$的半径为3,$PA=4$,则OC的长为_____.

6 已知G是$\mathrm{Rt}\triangle ABC$的内心,$\angle C=90°$,$AC=6$,$BC=8$,则线段CG的长为_____.

7 [2018 黑龙江绥化中考]如图,AB是$\odot O$的直径,AC为弦,$\angle BAC$的平分线交$\odot O$于点D,过点D的切线交AC的延长线于点E. 求证:

(1)$DE\perp AE$;

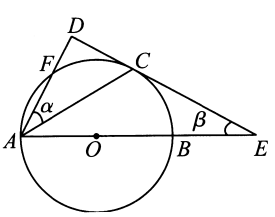
(2)$AE+CE=AB$.



8 如图,AB是$\odot O$的直径,AC是上半圆的弦,过点C作$\odot O$的切线DE交AB的延长线于点E,过点A作切线DE的垂线,垂足为点D,且DE与$\odot O$交于点F,设$\angle DAC$,$\angle CEA$的度数分别是α,β.

(1)用含α的代数式表示β,并直接写出α的取值范围;

(2)连接OF与AC交于点O',当点O'是AC的中点时,求α,β的值.

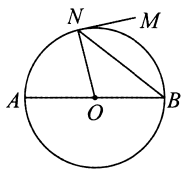


刷中考

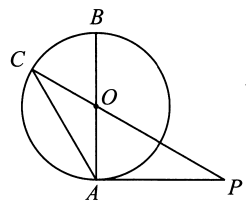
▶答案 D41

1 [2018 江苏常州中考]如图,AB 是⊙O 的直径,MN 是⊙O 的切线,切点为 N,如果 $\angle MNB = 52°$,则 $\angle NOA$ 的度数为　(　　)

A. 76°　　B. 56°　　C. 54°　　D. 52°



(第 1 题图)

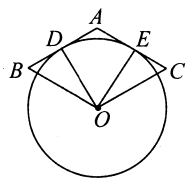


(第 2 题图)

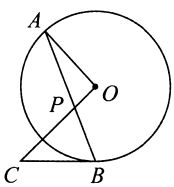
2 [2017 山东日照中考]如图,AB 是⊙O 的直径,PA 切⊙O 于点 A,连接 PO 并延长交⊙O 于点 C,连接 AC. 若 $AB = 10$,$\angle P = 30°$,则 AC 的长度是　(　　)

A. $5\sqrt{3}$　　B. $5\sqrt{2}$　　C. 5　　D. $\frac{5}{2}$

3 [2018 安徽中考]如图,菱形 $ABOC$ 的边 AB,AC 分别与⊙O 相切于点 D,E,若点 D 是 AB 的中点,则 $\angle DOE =$ _____.



(第 3 题图)



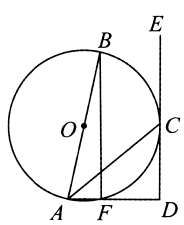
(第 4 题图)

4 [2018 江苏连云港中考]如图,AB 是⊙O 的弦,点 C 在过点 B 的切线上,且 $OC \perp OA$,OC 交 AB 于点 P,已知 $\angle OAB = 22°$,则 $\angle OCB =$ _____.

5 [2018 云南昆明中考]如图,AB 是⊙O 的直径,ED 切⊙O 于点 C,AD 交⊙O 于点 F,AC 平分 $\angle BAD$,连接 BF.

(1)求证:$AD \perp ED$;

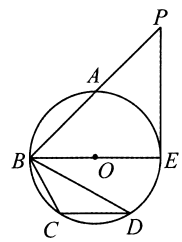
(2)若 $CD = 4$,$AF = 2$,求⊙O 的半径.



6 [2018 湖北黄石中考]如图,已知 A,B,C,D,E 是⊙O 上的五点,⊙O 的直径 $BE = 2\sqrt{3}$,$\angle BCD = 120°$,A 为 $\overset{\frown}{BE}$的中点,延长 BA 到点 P,使 $BA = AP$,连接 PE.

(1)求线段 BD 的长;

(2)求证:直线 PE 是⊙O 的切线.



刷素养

7 已知点 $P(x_0, y_0)$ 和直线 $y = kx + b$,则点 P 到直线 $y = kx + b$ 的距离 d 可用公式 $d = \frac{|kx_0 - y_0 + b|}{\sqrt{1 + k^2}}$ 计算.

例如:求点 $P(-1, 2)$ 到直线 $y = 3x + 7$ 的距离.

解:因为直线 $y = 3x + 7$,其中 $k = 3$,$b = 7$,点 $P(-1, 2)$,其中 $x_0 = -1$,$y_0 = 2$,

所以点 $P(-1, 2)$ 到直线 $y = 3x + 7$ 的距离

$$d = \frac{|kx_0 - y_0 + b|}{\sqrt{1 + k^2}} = \frac{|3 \times (-1) - 2 + 7|}{\sqrt{1 + 3^2}} = \frac{2}{\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{10}}{5}.$$

根据以上材料,解答下列问题:

(1)求点 $P(1, -1)$ 到直线 $y = x - 1$ 的距离;

(2)已知⊙Q 的圆心 Q 坐标为(0,5),半径 r 为 2,判断⊙Q 与直线 $y = \sqrt{3}x + 9$ 的位置关系并说明理由.

不必太纠结于当下,也不必太忧虑于未来,当你经历过一些事情的时候,眼前的风景,已经和从前不一样了。

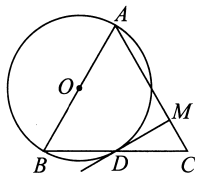
专题1 圆的切线的判定

刷难关

▶答案 D42

类型1 有切点，连半径，证垂直

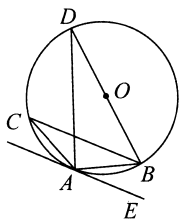
1 如图，$AB=AC$，AB 是$\odot O$ 的直径，$\odot O$ 交 BC 于点 D，$DM\perp AC$ 于点 M. 求证：DM 与$\odot O$ 相切.



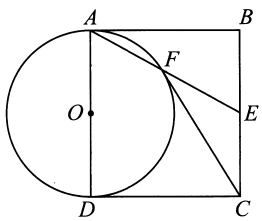
2 [2018 山东潍坊中考] 如图，BD 为 $\triangle ABC$ 外接圆$\odot O$ 的直径，且 $\angle BAE=\angle C$.

(1) 求证：AE 与$\odot O$ 相切于点 A；

(2) 若 $AE/\!/BC$，$BC=2\sqrt{7}$，$AC=2\sqrt{2}$，求 AD 的长.

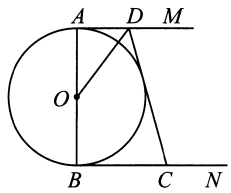


3 如图，四边形 $ABCD$ 为矩形，E 为 BC 的中点，连接 AE，以 AD 为直径的$\odot O$ 交 AE 于点 F，连接 CF. 求证：CF 与$\odot O$ 相切.

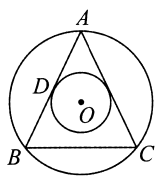


类型2 无切点，作垂直，证半径

4 如图，AB 是$\odot O$ 的直径，AM，BN 分别切$\odot O$ 于点 A，B，CD 交 AM，BN 于点 D，C，DO 平分 $\angle ADC$. 求证：CD 是$\odot O$ 的切线.



5 [2019 河南郑州校级月考] 如图，$\triangle ABC$ 内接于大圆 O，$\angle ACB=\angle ABC$，小圆 O 与 AB 相切于点 D，求证：AC 是小圆 O 的切线.



24.3　正多边形和圆

刷基础

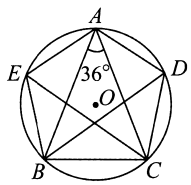
▶答案 D42

题型1　正多边形的有关概念

1 对于以下说法：①各角相等的多边形是正多边形；②各边相等的三角形是正三角形；③各角相等的圆内接多边形是正多边形；④各顶点等分外接圆的多边形是正多边形. 正确的有　（　）

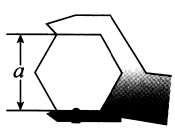
A. 1 个　　B. 2 个　　C. 3 个　　D. 4 个

2 已知：如图，$\triangle ABC$ 是 $\odot O$ 的内接等腰三角形，顶角 $\angle BAC = 36°$，弦 BD，CE 分别平分 $\angle ABC$，$\angle ACB$. 求证：五边形 $AEBCD$ 是正五边形.



题型2　正多边形的有关计算

3 如图，正六边形螺帽的边长是 2 cm，这个扳手的开口 a 的值应是　（　）



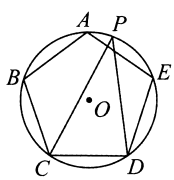
A. $2\sqrt{3}$ cm　　B. $\sqrt{3}$ cm　　C. $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ cm　　D. 1 cm

4 正多边形的中心角与该正多边形一个内角的关系是　（　）

A. 互余　　B. 互补

C. 互余或互补　　D. 不能确定

5 [2018 四川广元中考] 如图，$\odot O$ 是正五边形 $ABCDE$ 的外接圆，点 P 是 $\overset{\frown}{AE}$ 的一点，则 $\angle CPD$ 的度数是　（　）

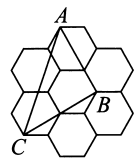


A. 30°　　B. 36°　　C. 45°　　D. 72°

6 [2018 北京朝阳区二模] $\odot O$ 是一个正 n 边形的外接圆，若 $\odot O$ 的半径与这个正 n 边形的边长相等，则 n 的值为　（　）

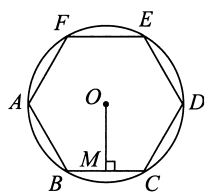
A. 3　　B. 4　　C. 5　　D. 6

7 如图，由 7 个形状、大小完全相同的正六边形组成的网格，正六边形的顶点称为格点，已知每个正六边形的边长均为 1，$\triangle ABC$ 的顶点都在格点上，则 $\triangle ABC$ 的面积是　（　）

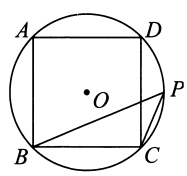


A. $\sqrt{2}$　　B. $2\sqrt{3}$　　C. $3\sqrt{2}$　　D. $3\sqrt{3}$

8 如图，正六边形 $ABCDEF$ 内接于 $\odot O$，$\odot O$ 的半径为 6，则这个正六边形的边心距 OM 的长为_____.



（第 8 题图）



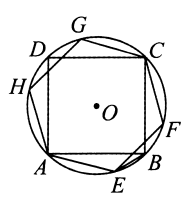
（第 9 题图）

9 如图，正方形 $ABCD$ 是 $\odot O$ 的内接正方形，点 P 是劣弧 $\overset{\frown}{CD}$ 上不同于点 C 的任意一点，则 $\angle BPC$ 的度数是_____.

10 [2019 江苏仪征月考] 如图，$\odot O$ 是正方形 $ABCD$ 与正六边形 $AEFCGH$ 的外接圆.

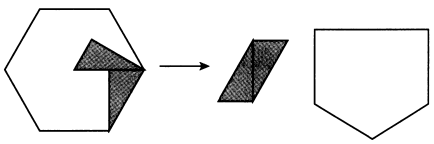
(1) 正方形 $ABCD$ 与正六边形 $AEFCGH$ 的边长之比为_____；

(2) 连接 BE，BE 是否为 $\odot O$ 的内接正 n 边形的一边？如果是，求出 n 的值；如果不是，请说明理由.

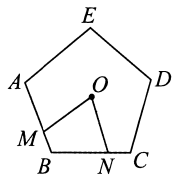


1 如图,在一张正六边形纸片中剪下两个全等的直角三角形(阴影部分),拼成一个四边形. 若拼成的四边形的面积为2,则纸片的剩余部分拼成的五边形的面积为 ( )

A. 5 B. 6 C. 8 D. 10



(第1题图)



(第2题图)

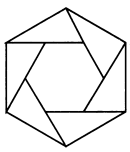
2 [2019 河北唐山路南区期中]如图,点 M,N 分别是正五边形 $ABCDE$ 的两边 AB,BC 上的点. 且 $AM=BN$,点 O 是正五边形的中心,则 $\angle MON$ 的度数是 ( )

A. 45° B. 60° C. 72° D. 90°

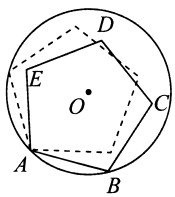
3 如图,把正六边形各边按同一方向延长,使延长的线段与原正六边形的边长相等,顺次连接这六条线段外端点可以得到一个新的正六边形,…,重复上述过程,经过2 018次后,所得到的正六边形的边长是原正六边形边长的 ( )

A. $(\sqrt{3})^{2016}$倍 B. $(\sqrt{3})^{2017}$倍

C. $(\sqrt{3})^{2018}$倍 D. $(\sqrt{3})^{2019}$倍



(第3题图)



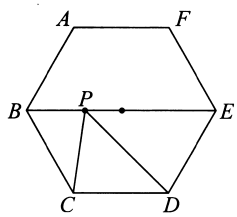
(第4题图)

4 [2018 河北张家口宣化区模拟]如图所示,边长为3的正五边形 $ABCDE$,顶点 A,B 在半径为3的圆上,其他各点在圆内,将正五边形 $ABCDE$ 绕点 A 逆时针旋转,当点 E 第一次落在圆上时,则点 C 转过的度数为 ( )

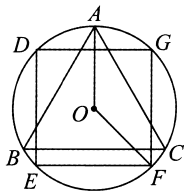
A. 12° B. 16° C. 20° D. 24°

5 我们规定:一个正 n 边形(n 为整数,$n\geqslant 4$)的最短对角线与最长对角线长度的比值叫做这个正 n 边形的"特征值",记为 λ_n,那么 $\lambda_6=$ _____.

6 如图,在边长为2的正六边形 $ABCDEF$ 中,点 P 是其对角线 BE 上一动点,连接 PC,PD,则 $\triangle PCD$ 的周长的最小值是_____.



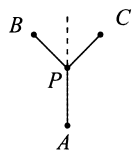
(第6题图)



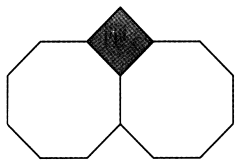
(第7题图)

7 [2019 江苏建湖期中]如图,$\triangle ABC$ 是 $\odot O$ 的内接正三角形,四边形 $DEFG$ 是 $\odot O$ 的内接正方形,$EF\parallel BC$,则 $\angle AOF$ 的度数为_____.

8 [2018 河北中考]如图(1),作 $\angle BPC$ 的平分线的反向延长线 PA,现要分别以 $\angle APB,\angle APC,\angle BPC$ 为内角作正多边形,且边长均为1,将作出的三个正多边形填充不同花纹后成为一个图案. 例如,若以 $\angle BPC$ 为内角,可作出一个边长为1的正方形,此时 $\angle BPC=90°$,而 $\frac{90°}{2}=45°$ 是360°(多边形外角和)的 $\frac{1}{8}$,这样就恰好可作出两个边长均为1的正八边形,填充花纹后得到一个符合要求的图案,如图(2)所示. 图(2)中的图案外轮廓周长是_____;在所有符合要求的图案中选一个外轮廓周长最大的定为会标,则会标的外轮廓周长是_____.



图(1)



图(2)

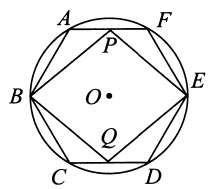
9 [难]如图,$\odot O$ 的半径为4 cm,其内接正六边形 $ABCDEF$,点 P,Q 同时分别从 A,D 两点出发,以1 cm/s的速度沿 AF,DC 向终点 F,C 运动,连接 PB,QE,PE,BQ. 设运动时间为 t(s).

(1)求证:四边形 $PBQE$ 为平行四边形;

(2)填空:

①当 $t=$ _____s时,四边形 $PBQE$ 为菱形;

②当 $t=$ _____s时,四边形 $PBQE$ 为矩形.



24.4 弧长和扇形面积

课时1 弧长和扇形面积

刷基础

▶答案 D43

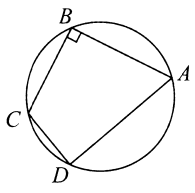
题型1 与弧长有关的计算

1 已知圆心角为90°的扇形的半径为4,那么此扇形的弧长为 (　　)

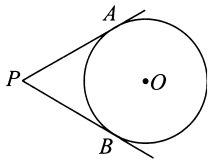
A. 4π　　B. 3π　　C. 2π　　D. π

2 [2019 浙江瑞安期中]如图,四边形 $ABCD$ 内接于圆,$\angle ABC=90°$,若 $\overset{\frown}{BCD}$,$\overset{\frown}{BAD}$ 的弧长分别为 3π,5π,则 $\overset{\frown}{ABC}$ 的弧长为 (　　)

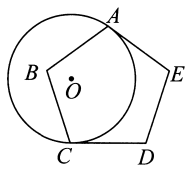
A. 2π　　B. 4π　　C. 6π　　D. 8π



(第2题图)



(第3题图)



(第4题图)

3 如图,PA 切$\odot O$ 于点 A,PB 切$\odot O$ 于点 B,若 $\angle APB=60°$,$\odot O$ 半径是3,则劣弧 AB 的长为 (　　)

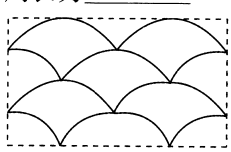
A. $\frac{\pi}{2}$　　B. π　　C. 2π　　D. 4π

4 如图,半径为1的$\odot O$ 与正五边形 $ABCDE$ 相切于点 A,C,劣弧 AC 的长度为 (　　)

A. $\frac{3}{5}\pi$　　B. $\frac{4}{5}\pi$　　C. $\frac{3}{4}\pi$　　D. $\frac{2}{3}\pi$

5 75°的圆心角所对的弧长是 2.5π,则此弧所在圆的半径为_____.

6 [2018 江苏盐城中考]如图,图(1)是由若干个相同的图形(图(2))组成的美丽图案的一部分,图(2)中,图形的相关数据:半径 $OA=2$ cm,$\angle AOB=120°$. 则图(2)的周长为_____cm(结果保留 π).



图(1)



图(2)

7 如图,在等腰直角三角形 ABC 中,$\angle ACB=90°$,$AC=1$.

(1)作$\odot O$,使它过点 A,B,C(要求:尺规作图,保留作图痕迹,不写作法);



(2)在(1)所作的圆中,求出劣弧 BC 的长.

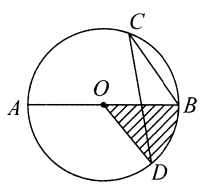
题型2 与扇形面积有关的计算

8 如果一个扇形的弧长和半径均为2,则此扇形的面积是 (　　)

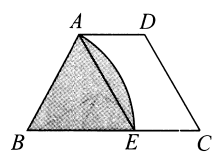
A. $\frac{2\pi}{3}$　　B. π　　C. 4　　D. 2

9 [2018 辽宁抚顺中考]如图,AB 是$\odot O$ 的直径,CD 是弦,$\angle BCD=30°$,$OA=2$,则阴影部分的面积是 (　　)

A. $\frac{\pi}{3}$　　B. $\frac{2\pi}{3}$　　C. π　　D. 2π



(第9题图)



(第10题图)

10 如图,在四边形 $ABCD$ 中,$AB=CD$,$AD\parallel BC$,以点 B 为圆心,BA 为半径的圆弧与 BC 交于点 E,四边形 $AECD$ 是平行四边形,$AB=6$,则扇形(图中阴影部分)的面积是_____.

刷易错

易错点 对弧长公式及扇形的面积公式中的 n 的意义理解不充分而致错

11 在$\odot O$ 中,弦 AB 所对的圆周角为30°,且 $AB=5$ cm,则 $\overset{\frown}{AB}$ 的长为 (　　)

A. $\frac{5}{3}\pi$ cm　　B. $\frac{6}{5}\pi$ cm

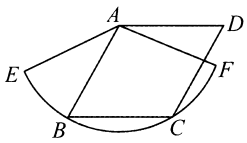
C. $\frac{5\sqrt{3}}{3}\pi$ cm　　D. $\frac{5\sqrt{3}}{6}\pi$ cm

刷提升

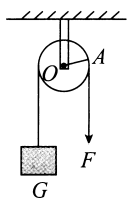
▶答案 D44

1 [2019 河北邯郸校级期中]如图,边长为 2 的菱形 $ABCD$ 绕点 A 旋转,当 B,C 两点恰好落在扇形 AEF 的 $\overset{\frown}{EF}$ 上时,$\overset{\frown}{BC}$ 的长度等于 (　　)

A. $\frac{\pi}{2}$　　B. $\frac{\pi}{3}$　　C. $\frac{3\pi}{4}$　　D. $\frac{2\pi}{3}$



(第 1 题图)



(第 2 题图)

2 一个滑轮起重装置如图所示,滑轮的半径是 15 cm,当重物上升 15 cm 时,滑轮的一条半径 OA 绕轴心 O 按顺时针方向旋转的角度约为(π 取 3.14,结果精确到 1°) (　　)

A. 115°　　B. 60°　　C. 57°　　D. 29°

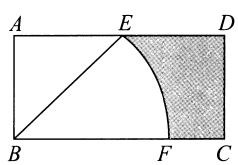
3 已知一弧长为 l 的弧所对的圆心角为 120°,那么它所对的弦长为 (　　)

A. $\frac{3\sqrt{3}}{4\pi}l$　　B. $\frac{3\sqrt{2}}{4\pi}l$　　C. $\frac{3\sqrt{3}}{2\pi}l$　　D. $\frac{3\sqrt{2}}{2\pi}l$

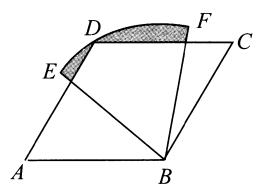
4 [2017 重庆中考]如图,矩形 $ABCD$ 的边 $AB=1$,BE 平分 $\angle ABC$,交 AD 于点 E. 若点 E 是 AD 的中点,以点 B 为圆心,BE 长为半径画弧,交 BC 于点 F,则图中阴影部分的面积是 (　　)

A. $2-\frac{\pi}{4}$　　B. $\frac{3}{2}-\frac{\pi}{4}$

C. $2-\frac{\pi}{8}$　　D. $\frac{3}{2}-\frac{\pi}{8}$



(第 4 题图)



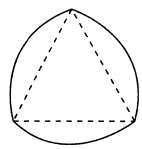
(第 5 题图)

5 如图,四边形 $ABCD$ 是菱形,$\angle A=60°$,$AB=2$,扇形 BEF 的半径为 2,圆心角为 60°,则图中阴影部分的面积是 (　　)

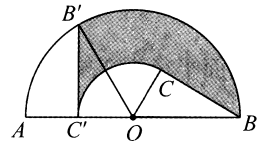
A. $\frac{2\pi}{3}-\sqrt{3}$　　B. $\frac{2\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}$

C. $\pi-\frac{\sqrt{3}}{2}$　　D. $\pi-\sqrt{3}$

6 [2018 甘肃陇南中考]如图,分别以等边三角形的每个顶点为圆心、以边长为半径,在另两个顶点间作一段圆弧,三段圆弧围成的曲边三角形称为勒洛三角形. 若等边三角形的边长为 a,则勒洛三角形的周长为_____.



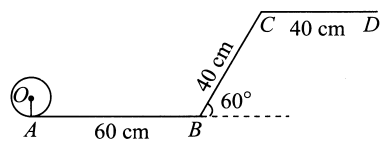
(第 6 题图)



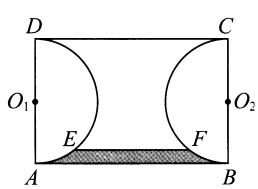
(第 7 题图)

7 [2018 贵州安顺中考]如图,C 为半圆内一点,O 为圆心,直径 AB 长为 2 cm,$\angle BOC=60°$,$\angle BCO=90°$,将 $\triangle BOC$ 绕圆心 O 逆时针旋转至 $\triangle B'OC'$,点 C' 在 OA 上,则边 BC 扫过区域(图中阴影部分)的面积为_____ cm^2. (结果保留 π)

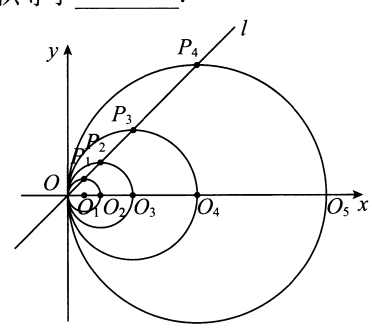
8 一位小朋友在粗糙不打滑的反"Z"字形平面轨道上滚动一个半径为 10 cm 的圆盘. 如图,AB 与 CD 是水平的,BC 与水平面的夹角为 60°,其中 $AB=60$ cm,$CD=40$ cm,$BC=40$ cm,那么该小朋友将圆盘从点 A 滚动到点 D 其圆心所经过的路线长为_____cm.



9 [2017 江苏无锡中考]如图,已知矩形 $ABCD$ 中,$AB=3$,$AD=2$,分别以边 AD,BC 为直径在矩形 $ABCD$ 的内部作半圆 O_1 和半圆 O_2,一平行于 AB 的直线 EF 与这两个半圆分别交于点 E,F,且 $EF=2$(EF 与 AB 在圆心 O_1 和 O_2 的同侧),则由 $\overset{\frown}{AE}$,EF,$\overset{\frown}{FB}$,AB 所围成图形(图中阴影部分)的面积等于_____.



(第 9 题图)



(第 10 题图)

10 [难]如图,在平面直角坐标系中,直线 l 的函数解析式为 $y=x$,点 O_1 的坐标为(1,0),以 O_1 为圆心,O_1O 为半径画圆,交直线 l 于点 P_1,交 x 轴正半轴于点 O_2,以 O_2 为圆心,O_2O 为半径画圆,交直线 l 于点 P_2,交 x 轴正半轴于点 O_3,以 O_3 为圆心,O_3O 为半径画圆,交直线 l 于点 P_3,交 x 轴正半轴于点 O_4……按此做法进行下去,其中弧 $P_{2\,017}O_{2\,018}$ 的长为_____.

课时2 圆锥的侧面积和全面积

刷基础

▶答案 D45

题型1 圆锥的侧面积和全面积

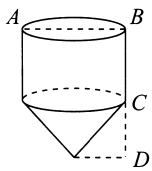
1 圆锥的底面半径为2,母线长为6,则侧面积为 (　　)

A. 4π　　B. 6π　　C. 12π　　D. 16π

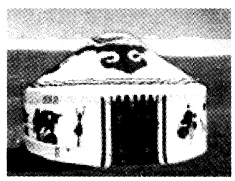
2 “赶陀螺”是一项深受人们喜爱的运动,如图所示是一个陀螺的立体结构图. 已知底面圆的直径 $AB=8$ cm,圆柱部分的高 $BC=6$ cm,圆锥部分的高 $CD=3$ cm,则这个陀螺的表面积是 (　　)

A. 68π cm^2　　B. 74π cm^2

C. 84π cm^2　　D. 100π cm^2



(第2题图)



(第3题图)

3 [2018 四川绵阳中考]如图,蒙古包可近似地看作由圆锥和圆柱组成,若用毛毡搭建一个底面圆面积为 25π m^2,圆柱高为3 m,圆锥高为2 m的蒙古包,则需要毛毡的面积是 (　　)

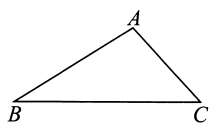
A. $(30+5\sqrt{29})\pi$ m^2　　B. 40π m^2

C. $(30+5\sqrt{21})\pi$ m^2　　D. 55π m^2

4 如图,已知在 $\triangle ABC$ 中,$AB=4$,$AC=2\sqrt{2}$,$\angle B=30°$,$0°<\angle C<90°$.

(1)求点 A 到直线 BC 的距离以及 BC 的长度.

(2)将 $\triangle ABC$ 绕线段 BC 所在的直线旋转一周,求所得几何体的表面积.



题型2 圆锥的侧面展开图及相关计算

5 若将半径为12 cm的半圆形纸片围成一个圆锥的侧面,则这个圆锥的底面圆半径是 (　　)

A. 2 cm　　B. 3 cm　　C. 4 cm　　D. 6 cm

6 [2018 湖北中考]一个圆锥的侧面积是底面积的2倍,则该圆锥侧面展开图的圆心角的度数是 (　　)

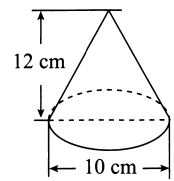
A. 120°　　B. 180°

C. 240°　　D. 300°

7 若一个圆锥的底面圆半径为1 cm,其侧面展开图的圆心角为120°,则圆锥的母线长为_____cm.

8 圆锥的底面周长为6π cm,高为4 cm,则该圆锥的全面积是_____;侧面展开图的圆心角是_____.

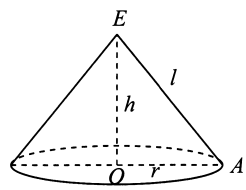
9 如图,已知圆锥的底面直径是10 cm,高为12 cm,则它的侧面展开图的面积是_____cm^2.



10 工人师傅用一张半径为24 cm,圆心角为150°的扇形铁皮做成一个圆锥的侧面,则这个圆锥的高为_____.

11 [2018 黑龙江中考]用一块半径为4,圆心角为90°的扇形纸片围成一个圆锥的侧面,则此圆锥的高为_____.

12 已知圆锥的底面半径 $r=20$ cm,高 $h=20\sqrt{15}$ cm,现在有一只蚂蚁从底边上一点 A 出发. 在侧面上爬行一周又回到点 A,求蚂蚁爬行的最短距离.



刷易错

易错点 计算圆锥的侧面积时,错误理解底面半径、周长与侧面展开图的关系而出错

13 [2018 黑龙江齐齐哈尔中考]已知圆锥的底面半径为20,侧面积为600π,则这个圆锥的母线长为_____.

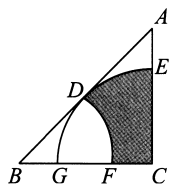
专题2　不规则图形面积的求法

刷难关

▸答案 D45

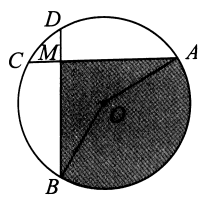
类型1　直接和差法

1 如图，已知等腰直角三角形 ABC，$\angle ACB=90°$，D 是斜边 AB 的中点，且 $AC=BC=16$ 分米，以点 B 为圆心，BD 为半径画弧，交 BC 于点 F，以点 C 为圆心，CD 为半径画弧，分别交 AC，BC 于点 E，G. 求阴影部分的面积.



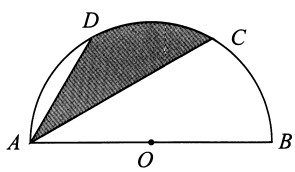
类型2　构造和差法

2 如图，在⊙O 中，弦 AC，BD 相交于点 M，$AC\perp BD$，$\angle A=\angle B=30°$，$OA=4$，求图中阴影部分的面积.



类型3　三角形转化法（等底等高）

3 如图，半圆的直径 $AB=40$，C，D 是半圆的三等分点，求弦 AC，AD 与$\overset{\frown}{CD}$围成的阴影部分的面积.



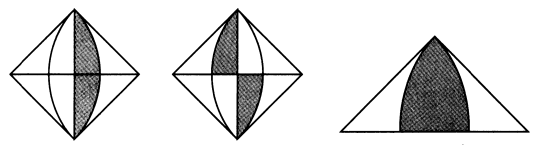
类型4　对称法

4 如图，图(1)和图(2)都是由边长为2的正方形和以正方形顶点为圆心、正方形的边长为半径的圆弧组成的图形.

(1)计算图(1)中阴影部分的面积；

(2)图(2)中阴影部分的面积与图(1)中阴影部分的面积_____.(填“相等”或“不相等”)

(3)图(3)是一个由直角边长为2的等腰直角三角形和以三角形的顶点为圆心、直角边长为半径的圆弧组成的图形，求阴影部分的面积.



图(1)　图(2)　图(3)

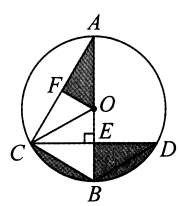
5 [2019 浙江宁波期中，难]如图，AB 为⊙O 的直径，CD 是弦，$AB\perp CD$ 于点 E，$OF\perp AC$ 于点 F，$BE=OF$.

(1)求证：$\triangle AFO\cong\triangle CEB$.

(2)若 $BE=4$，$CD=8\sqrt{3}$，求：

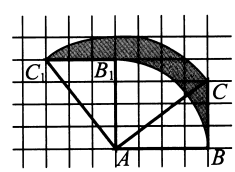
①⊙O 的半径；

②求图中阴影部分的面积.



类型5　旋转法

6 如图，将 $\mathrm{Rt}\triangle ABC$ 绕点 A 逆时针旋转90°得到 $\mathrm{Rt}\triangle AB_1C_1$，阴影部分为线段 BC 扫过的区域，已知 $AB=4$，$BC=3$，求阴影部分的面积.



24.3～24.4 综合训练

刷综合

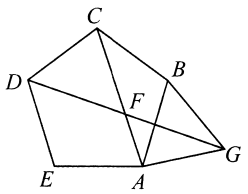
▶答案 D46

1 在正六边形 $ABCDEF$ 中，四边形 $BCEF$ 的面积为 30，则正六边形 $ABCDEF$ 的面积为 （　　）

A. $20\sqrt{3}$　　B. 40

C. $20\sqrt{5}$　　D. 45

2 [2018 河北石家庄二模] 老师在微信群发了这样一个图：以线段 AB 为边作正五边形 $ABCDE$ 和正三角形 ABG，连接 AC，DG，交点为 F，下列四位同学的说法不正确的是 （　　）



乙　$AC \perp AG$

丁　DG是AB的垂直平分线

甲　$\triangle DCF$是等腰三角形

丙　$AC /\!/ DE$

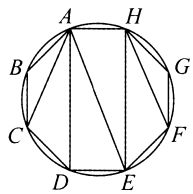
A. 甲　　B. 乙

C. 丙　　D. 丁

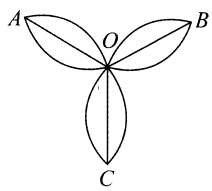
3 [2019 湖南长沙雨花区月考] 如图所示，有一圆内接正八边形 $ABCDEFGH$，若 $\triangle ADE$ 的面积为 8，则正八边形 $ABCDEFGH$ 的面积为 （　　）

A. 32　　B. 40

C. 24　　D. 30



（第 3 题图）



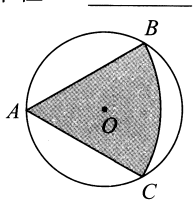
（第 4 题图）

4 [2019 江苏南京玄武区期中] 如图，由 6 段相等的圆弧组成的三叶花，每段圆弧都是四分之一圆周，$OA = OB = OC = 2$，则这朵三叶花的面积为 （　　）

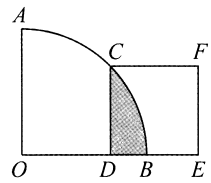
A. $3\pi - 3$　　B. $3\pi - 6$

C. $6\pi - 3$　　D. $6\pi - 6$

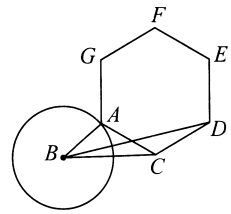
5 有一直径为 4 的圆形铁皮，要从中剪出一个圆心角为 $60°$ 的扇形 ABC，用此剪下的扇形铁皮围成一个圆锥，该圆锥的底面圆半径 $r =$ _____.



6 [2019 江苏苏州吴江区期中] 如图，在扇形 AOB 中，$\angle AOB = 90°$，正方形 $CDEF$ 的顶点 C 是 $\overset{\frown}{AB}$ 的中点，点 D 在 OB 上，点 E 在 OB 的延长线上，当扇形 AOB 的半径为 $2\sqrt{2}$ 时，阴影部分的面积为_____.



（第 6 题图）



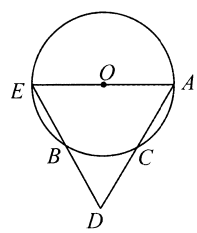
（第 7 题图）

7 如图，$BC = 2$，A 为半径为 1 的 $\odot B$ 上一点，连接 AC，在 AC 上方作一个正六边形 $ACDEFG$，连接 BD，则 BD 的最大值为_____.

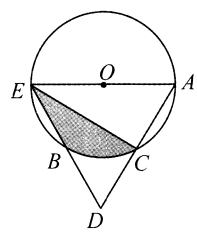
8 [2019 河北邯郸邯山区月考，难] 如图(1)，AE 是 $\odot O$ 的直径，点 C 是 $\odot O$ 上的点，连接 AC 并延长 AC 至点 D，使 $CD = CA$，连接 ED 交 $\odot O$ 于点 B.

(1)求证：点 C 是劣弧 AB 的中点；

(2)如图(2)，连接 EC，若 $AE = 2AC = 6$，求阴影部分的面积.



图(1)



图(2)

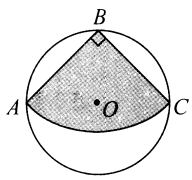
刷中考

▶答案 D46

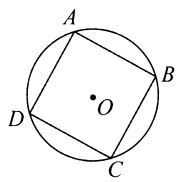
1 [2018 山东德州中考] 如图，从一块直径为 2 m 的圆形铁皮上剪出一个圆心角为 90°的扇形，则此扇形的面积为 （ ）

A. $\frac{\pi}{2}$ m^2　　B. $\frac{\sqrt{3}}{2}\pi$ m^2

C. π m^2　　D. 2π m^2



（第 1 题图）



（第 2 题图）

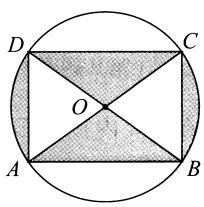
2 [2018 辽宁沈阳中考] 如图，正方形 $ABCD$ 内接于⊙O，$AB=2\sqrt{2}$，则$\overset{\frown}{AB}$的长是 （ ）

A. π　　B. $\frac{3}{2}\pi$　　C. 2π　　D. $\frac{1}{2}\pi$

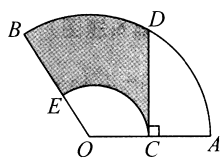
3 [2017 山西中考] 如图是某商品的标志图案，AC 与 BD 是⊙O 的两条直径，首尾顺次连接点 A,B,C,D，得到四边形 $ABCD$. 若 $AC=10$ cm，$\angle BAC=36°$，则图中阴影部分的面积为 （ ）

A. 5π cm^2　　B. 10π cm^2

C. 15π cm^2　　D. 20π cm^2



（第 3 题图）



（第 4 题图）

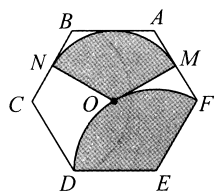
4 [2018 湖北十堰中考] 如图，在扇形 OAB 中，$\angle AOB=120°$，$OA=12$，点 C 是 OA 的中点，$CD\perp OA$ 交$\overset{\frown}{AB}$于点 D，以 OC 为半径的$\overset{\frown}{CE}$交 OB 于点 E，则图中阴影部分的面积是 （ ）

A. $12\pi+18\sqrt{3}$　　B. $12\pi+36\sqrt{3}$

C. $6\pi+18\sqrt{3}$　　D. $6\pi+36\sqrt{3}$

5 [2017 山东菏泽中考] 一个扇形的圆心角为 100°，面积为 15π cm^2，则此扇形的半径长为_____.

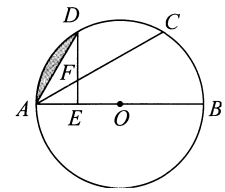
6 [2018 山东烟台中考] 如图，点 O 为正六边形 $ABCDEF$ 的中心，点 M 为 AF 的中点. 以点 O 为圆心、OM 长为半径画弧，得到扇形 MON，点 N 在 BC 上；以点 E 为圆心、DE 长为半径画弧，得到扇形 DEF. 把扇形 MON 的两条半径 OM,ON 重合，围成圆锥，将此圆锥的底面半径记为 r_1，将扇形 DEF 以同样的方法围成的圆锥的底面半径记为 r_2. 则 $r_1:r_2=$_____.



7 [2017 贵州贵阳中考] 如图，C,D 是半圆 O 上的三等分点，直径 $AB=4$，连接 $AD,AC,DE\perp AB$，垂足为点 E，DE 交 AC 于点 F.

(1) 求 $\angle AFE$ 的度数；

(2) 求阴影部分的面积（结果保留 π 和根号）.

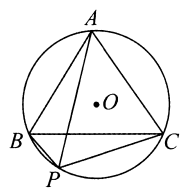


刷素养

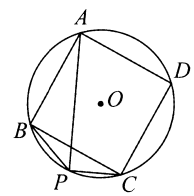
8 [难] (1) 已知：如图(1)，$\triangle ABC$ 是⊙O 的内接正三角形，点 P 为$\overset{\frown}{BC}$上一动点，求证：$PA=PB+PC$；

(2) 如图(2)，四边形 $ABCD$ 是⊙O 的内接正方形，点 P 为$\overset{\frown}{BC}$上一动点，求证：$PA=PC+\sqrt{2}PB$；

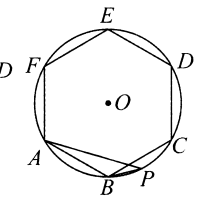
(3) 如图(3)，六边形 $ABCDEF$ 是⊙O 的内接正六边形，点 P 为$\overset{\frown}{BC}$上一动点，请探究 PA,PB,PC 三者之间的数量关系，并给予证明.



图(1)



图(2)



图(3)

全章综合训练

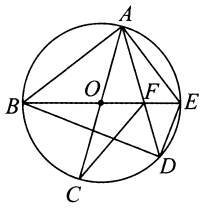
刷章测

▶建议用时:45 分钟　答案 D47

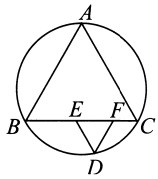
1 如图,AC,BE 是⊙O 的直径,弦 AD 与 BE 相交于点 F,下列三角形中,外心不是点 O 的是　(　)

A. △ABE　　B. △ACF

C. △ABD　　D. △ADE



(第 1 题图)



(第 2 题图)

2 如图,在△ABC 的外接圆上,$\overset{\frown}{AB}$,$\overset{\frown}{BC}$,$\overset{\frown}{CA}$所对的圆心角的度数比为 12∶13∶11. 在$\overset{\frown}{BC}$上取一点 D,过 D 分别作直线 AC,AB 的平行线,交 BC 于 E,F 两点,则∠EDF 的度数为　(　)

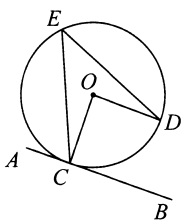
A. 55°　　B. 60°　　C. 65°　　D. 70°

3 将直径为 60 cm 的圆形铁皮做成三个相同的圆锥形容器的侧面(不浪费材料,不计接缝处的材料损耗),那么每个圆锥形容器的底面半径为　(　)

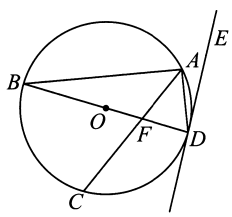
A. 10 cm　　B. 30 cm　　C. 45 cm　　D. 300 cm

4 [2018 湖北宜昌中考]如图,直线 AB 是⊙O 的切线,C 为切点,OD // AB 交⊙O 于点 D,点 E 在⊙O 上,连接 OC,EC,ED,则∠CED 的度数为　(　)

A. 30°　　B. 35°　　C. 40°　　D. 45°



(第 4 题图)



(第 5 题图)

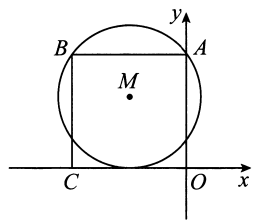
5 如图,BD 为⊙O 的直径,直线 ED 为⊙O 的切线,A,C 两点在圆上,AC 平分∠BAD 且交 BD 于点 F. 若∠ADE = 19°,则∠AFB 的度数是　(　)

A. 97°　　B. 104°　　C. 116°　　D. 142°

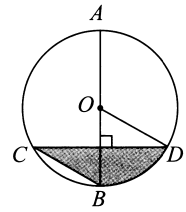
6 如图,在平面直角坐标系中,正方形 $ABCO$ 的顶点 A,C 分别在 y 轴,x 轴上,以 AB 为弦的⊙M 与 x 轴相切. 若点 A 的坐标为(0,8),则圆心 M 的坐标为　(　)

A. (−4,5)　　B. (−5,4)

C. (5,−4)　　D. (4,−5)



(第 6 题图)



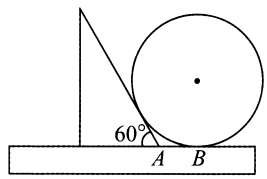
(第 7 题图)

7 如图,AB 是⊙O 的直径,弦 CD ⊥ AB,∠BCD = 30°,CD = $4\sqrt{3}$,则 $S_{阴影}$ =　(　)

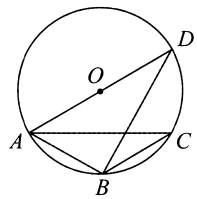
A. 2π　　B. $\frac{8}{3}\pi$　　C. $\frac{4}{3}\pi$　　D. $\frac{3}{8}\pi$

8 [2018 广东深圳中考]如图,一把直尺、60°的直角三角形和光盘如图摆放,A 为 60°角与直尺交点,AB = 3,则光盘的直径是　(　)

A. 3　　B. $3\sqrt{3}$　　C. 6　　D. $6\sqrt{3}$



(第 8 题图)



(第 9 题图)

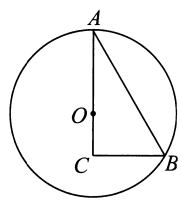
9 [2019 湖北广水期中]如图,△ABC 内接于⊙O,AB = BC,∠ABC = 120°,AD 为⊙O 的直径,AD = 6,那么弦 AC 的值为　(　)

A. 3　　B. $2\sqrt{3}$　　C. $3\sqrt{3}$　　D. 2

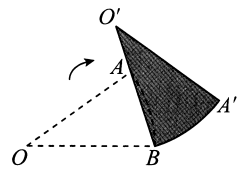
10 如图,在 Rt△ABC 中,∠C = 90°,∠A = 30°,在 AC 边上取点 O 为圆心画圆,使⊙O 经过 A,B 两点,下列结论:①AO = 2CO;②AO = BC;③以 O 圆心,OC 为半径的圆与 AB 相切;④延长 BC 交⊙O 于点 D,则 A,B,D 是⊙O 的三等分点. 其中正确结论的序号是　(　)

A. ①②③④　　B. ①②③

C. ②③④　　D. ①③④



(第 10 题图)

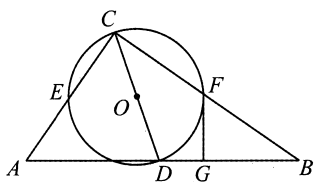


(第 11 题图)

11 如图，在扇形 OAB 中，$OA=10$，$\angle AOB=36°$. 若将此扇形绕点 B 顺时针旋转，得一新扇形 $O'A'B$，其中点 A 在 $O'B$ 上，则点 O 的运动路径长为_____cm.（结果保留 π）

12 [2018 四川宜宾中考] 刘徽是中国古代卓越的数学家之一，他在《九章算术》中提出了“割圆术”，即用内接或外切正多边形逐步逼近圆来近似计算圆的面积，设圆 O 的半径为 1，若用圆 O 的外切正六边形的面积 S 来近似估计圆 O 的面积，则 $S=$_____.（结果保留根号）

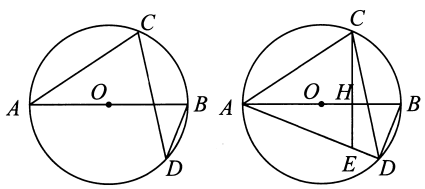
13 [2018 山西中考] 如图，在 Rt$\triangle ABC$ 中，$\angle ACB=90°$，$AC=6$，$BC=8$，点 D 是 AB 的中点，以 CD 为直径作$\odot O$，$\odot O$ 分别与 AC，BC 交于点 E，F，过点 F 作 $\odot O$ 的切线 FG，交 AB 于点 G，则 FG 的长为_____.



14 如图(1)，AB 为$\odot O$ 的直径，点 D 为 AB 下方$\odot O$ 上一点，点 C 为$\overset{\frown}{ABD}$的中点，连接 CD，CA.

(1)求证：$\angle ABD=2\angle BDC$；

(2)如图(2)，过点 C 作 $CE\perp AB$ 于点 H，交 AD 于点 E，求证：$EA=EC$.

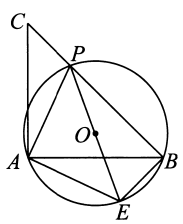


图(1)　　图(2)

15 如图，已知等腰直角三角形 ABC，点 P 是斜边 BC 上一点(不与 B，C 重合)，PE 是$\triangle ABP$ 的外接圆$\odot O$ 的直径.

(1)求证：$\triangle APE$ 是等腰直角三角形；

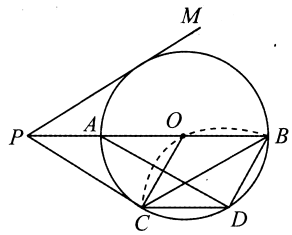
(2)若$\odot O$ 的直径为 2，求 PC^2+PB^2 的值.



16 [2018 云南曲靖中考] 如图，AB 为$\odot O$ 的直径，点 C 为$\odot O$ 上一点，将$\overset{\frown}{BC}$沿直线 BC 翻折，使$\overset{\frown}{BC}$的中点 D 恰好与圆心 O 重合，连接 OC，CD，BD，过点 C 的切线与线段 BA 的延长线交于点 P，连接 AD，在 PB 的另一侧作 $\angle MPB=\angle ADC$.

(1)判断 PM 与$\odot O$ 的位置关系，并说明理由；

(2)若 $PC=\sqrt{3}$，求四边形 $OCDB$ 的面积.

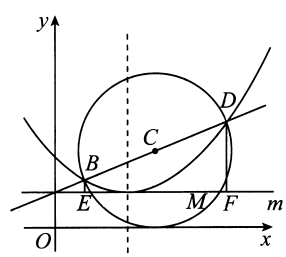


17 如图，已知抛物线 $y=ax^2+bx+c(a\neq 0)$ 的顶点坐标是(2，1)，并且经过点(4，2)，直线 $y=\frac{1}{2}x+1$ 与抛物线交于 B，D 两点，以 BD 为直径作圆，圆心为点 C，圆 C 与直线 m 交于对称轴右侧的点 $M(t,1)$，直线 m 上每一点的纵坐标都等于 1.

(1)求抛物线的解析式；

(2)证明：圆 C 与 x 轴相切；

(3)过点 B 作 $BE\perp m$，垂足为点 E，再过点 D 作 $DF\perp m$，垂足为点 F，求 $BE:MF$ 的值.



第二十五章 概率初步



25.1 随机事件与概率

25.1.1 随机事件

刷基础

▶答案 D49

题型1 必然事件、不可能事件、随机事件

1 [2019 山东无棣期中]下列事件中,属于必然事件的是 (　　)

A. 经过路口,恰好遇到红灯

B. 抛一枚硬币,正面朝上

C. 打开电视,正在播放动画片

D. 四个人分成三组,这三组中有一组必有 2 人

2 下列成语所描述的事件为不可能事件的是 (　　)

A. 水到渠成　　B. 空中楼阁

C. 木已成舟　　D. 日行千里

3 [2018 江苏海安曲塘中学附属初级中学月考]下列事件属于确定性事件的是 (　　)

A. 掷一枚质地均匀的骰子,掷出的点数是奇数

B. 车辆随机经过一个路口,遇到红灯

C. 掷一枚质地均匀的骰子,掷出的点数是 7

D. 有三条线段,将这三条线段首尾顺次相接可以组成一个三角形

4 在一个不透明的布袋中,装有大小、形状完全相同的 3 个黑球、1 个红球,从中摸出 1 个球,摸出 1 个黑球这一事件是 (　　)

A. 必然事件　　B. 随机事件

C. 确定性事件　　D. 不可能事件

5 [2019 河北邢台校级月考]邢台市某移动掌上营业厅,推出"每日签到 - 抽奖活动":每个手机号码每日只能签到 1 次,且只能抽奖 1 次,抽奖结果有流量红包、话费充值券、惊喜大礼包、谢谢参与. 小明的爸爸已经连续签到 3 天,且都抽到了流量红包,则"他第 4 天签到后,抽奖结果是流量红包"是 (　　)

A. 必然事件　　B. 不可能事件

C. 随机事件　　D. 必然事件或不可能事件

6 写一个你喜欢的实数 m 的值_____,使得事件"对于二次函数 $y=x^2+(m-1)x+1$,当 $x>1$ 时,y 随 x 的增大而增大"成为随机事件.

7 判断下列事件哪些是随机事件,哪些是必然事件,哪些是不可能事件,哪些是确定性事件.

有一个正六面体,六个面上分别写有 1 ~ 6 这六个整数,抛掷这个正六面体一次.

①向上一面的点数是 3 的倍数;

②向上一面的点数是 5;

③向上一面的点数是分数;

④向上一面的点数大于 4;

⑤向上一面的点数小于或等于 6.

8 [2019 湖北武汉校级月考]在一个不透明的袋子里,装有 9 个大小和形状一样的小球,其中 3 个红球、3 个白球、3 个黑球,它们已在袋子中被搅匀,现在有一个事件:从袋子中任意摸出 n 个球,红球、白球、黑球至少各有一个.

(1)当 n 为何值时,这个事件必然发生?

(2)当 n 为何值时,这个事件不可能发生?

(3)当 n 为何值时,这个事件可能发生?

题型2 事件发生的可能性

9 桌上倒扣着背面相同的 5 张扑克牌,其中 3 张黑桃、2 张红桃. 从中随机抽取一张,则 (　　)

A. 能够事先确定抽取的扑克牌的花色

B. 抽到黑桃的可能性更大

C. 抽到黑桃和抽到红桃的可能性一样大

D. 抽到红桃的可能性更大

10 从 1,2,2,3,4,3,3,1 这 8 个数中,任取 1 个,则取到的可能性较大的数是 (　　)

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

11 [2018 江苏东台第二教育联盟联考]有四张不透明卡片,分别写有实数 $\frac{1}{4}$,-1,$\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$,$\frac{1}{5}$,除正面的数不同外其余都相同,将它们背面朝上洗匀后,从中任取一张卡片,取到的数是无理数的可能性的大小是_____.

25.1.2　概率

刷基础

▶答案 D49

题型1　概率的意义

1 [2019 湖南长沙岳麓区校级月考]下列说法正确的是（　　）

A. 任意抛一枚质地均匀的硬币 10 次，一定有 5 次正面朝上

B. 天气预报说“明天的降水概率为 40%”，表示明天有 40% 的时间都在降雨

C. “篮球队员在罚球线上投篮一次，投中”为随机事件

D. “a 是实数，$|a|\geqslant 0$”是不可能事件

2 [2019 河北沧州校级月考]下列事件发生的概率为 0 的是（　　）

A. 射击运动员只射击 1 次，就命中靶心

B. 任取一个实数，都有 $|x|\geqslant 0$

C. 画一个三角形，使其三边的长分别为 8 cm，6 cm，2 cm

D. 掷一枚质地均匀且六个面分别刻有 1 到 6 的点数的正方体骰子，朝上一面的点数为 6

题型2　概率的大小

3 下列说法正确的是（　　）

A. 不可能事件发生的概率为 1

B. 随机事件发生的概率为 $\frac{1}{3}$

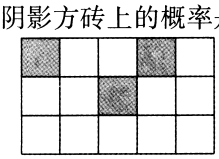
C. 概率很小的事件不可能发生

D. 抛掷一枚质地均匀的硬币，正面朝上的概率为 $\frac{1}{2}$

4 从 $\sqrt{2}$，0，π，3.14，6 这 5 个数中随机抽取一个数，抽到有理数的概率是（　　）

A. $\frac{1}{5}$　　B. $\frac{2}{5}$　　C. $\frac{3}{5}$　　D. $\frac{4}{5}$

5 [2019 山东无棣期中]一只小狗在如图的方砖上走来走去，最终停在阴影方砖上的概率是（　　）



A. $\frac{1}{3}$　　B. $\frac{4}{15}$　　C. $\frac{1}{5}$　　D. $\frac{2}{15}$

6 如果用 A 表示事件“若 $a>b$，则 $a+c>b+c$”，用 $P(A)$ 表示事件 A 发生的概率，那么下列结论中正确的是（　　）

A. $P(A)=1$　　B. $P(A)=0$

C. $0<P(A)<1$　　D. $P(A)>1$

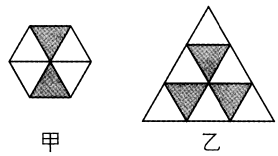
7 [2019 北京师大附中检测]如图，水平放置的甲、乙两图形分别由若干个大小完全相同的灰色、白色正三角形组成，小明任意向甲、乙两个图形各抛一个小球，P(甲)表示小球停在甲中灰色三角形上的概率，P(乙)表示小球停在乙中灰色三角形上的概率，下列说法中正确的是（　　）

A. P(甲) > P(乙)

B. P(甲) = P(乙)

C. P(甲) < P(乙)

D. P(甲)与 P(乙)的大小关系无法确定

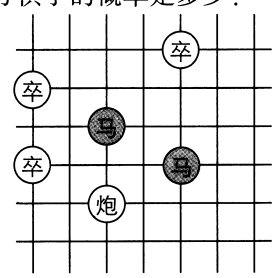


甲　　乙

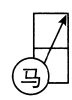
8 给甲、乙、丙三人打电话，若打电话的顺序是任意的，则第一个电话打给甲的概率是_____.

9 [2019 陕西西安碑林区月考]桌上放有完全相同的 3 张卡片，卡片上分别标有数字 2，1，4，随机摸出一张卡片(不放回)，其数字记为 p，随机摸出另一张卡片，其数字记为 q，则关于 x 的方程 $x^2+px+q=0$ 有实数根的概率是_____.

10 [2018 江苏东台第四教育联盟联考]图(1)是中国象棋棋盘的一部分，图中红方有两个马，黑方有三个卒和一个炮. 按照中国象棋中马的行走规则(马走日字，例如：按图(2)中的箭头方向走)，红方的马现在走一步能吃到黑方棋子的概率是多少？



图(1)



图(2)

题型3　用概率意义判断公平性

11 [2018 山东淄博临淄区期中]小刚与小强玩摸球游戏，在一个袋子中放有 5 个完全一样的球，分别标有 1，2，3，4，5 五个数字. 小刚从袋子中摸出一个球，记下号码，然后放回由小强摸，规定：如果小强摸到的球号码大于 3 则小刚胜，否则小强胜，你认为这个游戏公平吗？请说明理由.

25.2　用列举法求概率

课时1　用列表法求概率

刷基础

▶答案 D50

题型1　简单列举法求概率

1 为支援灾区，小慧准备通过爱心热线捐款，她只记得号码的前5位，后三位由5,1,2这三个数字组成，但具体顺序忘记了. 她第一次就拨通电话的概率是（　　）

A. $\frac{1}{2}$　　B. $\frac{1}{4}$　　C. $\frac{1}{6}$　　D. $\frac{1}{8}$

2 在英语句子“Wish you success.”（祝你成功）中任选一个字母，这个字母为“s”的概率是（　　）

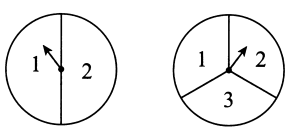
A. $\frac{1}{4}$　　B. $\frac{4}{11}$　　C. $\frac{2}{7}$　　D. $\frac{3}{7}$

题型2　列表法求概率

3 [2018 江苏南京高淳区期中]甲、乙两人参加社会实践活动，随机选择“打扫社区卫生”和“参加社会调查”其中一项，那么两人同时选择“参加社会调查”的概率为（　　）

A. $\frac{3}{4}$　　B. $\frac{1}{4}$　　C. $\frac{1}{3}$　　D. $\frac{1}{2}$

4 [2018 陕西西安电子科技中学月考]如图，现分别旋转两个标准的转盘，两个转盘分别被分成两等份和三等份，则转盘所转到的两个数字之积为奇数的概率是（　　）



A. $\frac{3}{5}$　　B. $\frac{1}{3}$　　C. $\frac{1}{2}$　　D. $\frac{1}{6}$

5 [2019 广东深圳龙岗区期中]在一个口袋中有4个完全相同的小球，把它们分别标号为1,2,3,4，随机摸出一个小球不放回，再随机摸出一个小球，则两次摸出的小球的标号之和为奇数的概率是（　　）

A. $\frac{1}{3}$　　B. $\frac{2}{3}$　　C. $\frac{1}{4}$　　D. $\frac{1}{5}$

6 下列说法错误的是（　　）

A. 袋中装有一个红球和两个白球，它们除颜色外都相同，从中随机地摸出一个球，记下颜色后放回，充分摇动后，再从中随机地摸出一个球，两次摸到不同颜色的球的概率是$\frac{4}{9}$

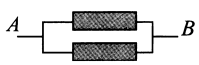
B. 甲、乙、丙三人玩“石头、剪刀、布”的游戏，游戏规则是如果甲、乙两人的手势相同，那么丙获胜，如果甲、乙两人的手势不同，按照“石头胜剪刀，剪刀胜布，布胜石头”的规则决定甲、乙的获胜者. 这个游戏规则对甲、乙、丙三人是公平的

C. 连续抛两枚质地均匀的硬币，“两枚正面朝上”“两枚反面朝上”和“一枚正面朝上，一枚反面朝上”，这三种结果发生的概率是相同的

D. 一个小组的八名同学通过依次抽签（卡片外观一样，抽到不放回）决定一名同学获得元旦奖品，先抽和后抽的同学获得奖品的概率是相同的，抽签的先后不影响公平

7 在$a^2\square 4a\square 4$的空格中，任意填上“+”或“-”，能构成完全平方公式的概率是_____.

8 如图，已知电流在一定时间段内正常通过电子元件“▭”的概率是$\frac{1}{2}$，在一定时间段内，A,B之间电流能够正常通过的概率为_____.



9 [2019 河北衡水实验中学月考]一个不透明的口袋中有4个完全相同的小球，它们分别标号为1,2,3,4.

(1)随机摸出一个小球，写出“摸出小球标号是3”的概率.

(2)随机摸出一个小球然后放回，再随机摸出一个小球，写出下列结果：

①两次摸出的小球一个标号是1，另一个标号是2的概率；

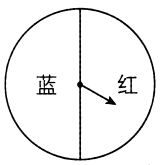
②第一次摸出标号是1的小球且第二次摸出标号是2的小球的概率.

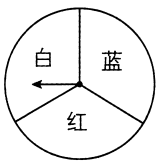
一个人知道为什么而活，就可以忍受任何一种生活。

刷提升

▶答案 D50

1 [2019 山西太原期中]小明要用如图的两个转盘做“配紫色”游戏,每个转盘均被等分成若干个扇形,他同时转动两个转盘,停止时指针所指的颜色恰好配成紫色的概率为　(　　)





A. $\frac{1}{6}$　　B. $\frac{1}{4}$　　C. $\frac{1}{3}$　　D. $\frac{1}{2}$

2 在盒子里放有 3 张分别写有整式 $a-3$,$a+1$,2 的卡片,从中随机抽取 2 张卡片,把 2 张卡片上的整式分别作为分子和分母,则能组成分式的概率是　(　　)

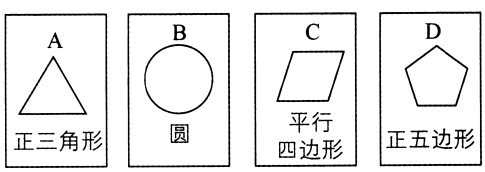
A. $\frac{1}{3}$　　B. $\frac{2}{3}$　　C. $\frac{1}{6}$　　D. $\frac{3}{4}$

3 [2019 河南南阳模拟]点 P 的坐标是(x,y),先从 -3,-2,0,2,3 这 5 个数中任取一个数作为 x 的值,再从余下的 4 个数中任取一个数作为 y 的值,则点 $P(x,y)$ 在平面直角坐标系中第四象限内的概率是　(　　)

A. $\frac{1}{5}$　　B. $\frac{1}{4}$　　C. $\frac{1}{3}$　　D. $\frac{2}{5}$

4 从 1,2,3,4 中任意取出两个不同的数,其和为 5 的概率是_____.

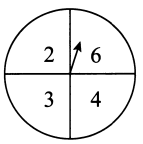
5 [2019 江苏海安期中]如图,有 4 张背面完全相同的纸牌 A、B、C、D,其正面分别画有 4 个不同的几何图,这 4 张纸牌背面朝上洗匀.

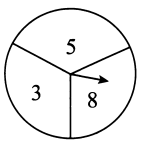


(1)从中随机摸出 1 张,求摸出的牌面图形是中心对称图形的概率;

(2)小明和小亮约定做一个游戏,其规则如下:先由小明随机摸出 1 张纸牌,不放回,再由小亮从剩下的纸牌中随机摸出 1 张,若摸出的 2 张纸牌的牌面图形都是轴对称图形,则小明获胜,否则小亮获胜,这个游戏公平吗?请用列表法说明.(纸牌用 A、B、C、D 表示)

6 九年级(4)班要举行一场毕业联欢会,主持人同时转动如图所示的两个转盘(两个转盘分别被四等分和三等分),由一名同学在转动前来判断两个转盘上指针所指的两个数字之和是奇数还是偶数,如果判断错误,他就要为大家表演一个节目;如果判断正确,他可以指派别人替自己表演节目. 现在轮到小明来选择,小明不想自己表演,于是他选择了偶数. 小明的选择合理吗?从概率的角度进行分析.





7 星期五晚上,小明和他的妈妈一起看某文艺节目,选手表演完后要评选出名次. 在已公布四到七名后,还有甲、乙、丙三位选手没有公布名次.

(1)求选手丙获得第一名的概率;

(2)如果小明和妈妈一起竞猜第一名,那么两人中一个人猜中另一个人却没猜中的概率是多少?

课时2 用画树状图法求概率

刷基础

►答案 D51

题型1 画树状图法求概率

1 [2018 广西梧州中考]小燕一家三口在商场参加抽奖活动,每人只有一次抽奖机会:在一个不透明的箱子中装有红、黄、白三种球各1个,这些球除颜色外无其他差别,从箱子中随机摸出1个球,然后放回箱子中,轮到下一个人摸球,三人摸到球的颜色都不相同的概率是 ( )

A. $\frac{1}{27}$ B. $\frac{1}{3}$ C. $\frac{1}{9}$ D. $\frac{2}{9}$

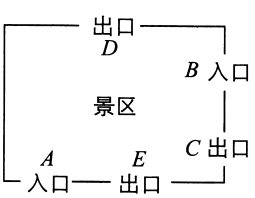
2 从甲地到乙地有 a,b,c 三条道路可走,小王、小李、小张都任选一条道路从甲地到乙地,则恰有两人走 a 道路的概率是 ( )

A. $\frac{2}{3}$ B. $\frac{1}{3}$ C. $\frac{1}{6}$ D. $\frac{2}{9}$

3 [2019 浙江苍南期中]某校食堂每天中午为学生提供A、B两种套餐,甲、乙两人同去该食堂打饭,那么甲、乙两人选择同款套餐的概率为 ( )

A. $\frac{1}{2}$ B. $\frac{1}{3}$ C. $\frac{1}{4}$ D. $\frac{2}{3}$

4 [2018 江苏东台第六联盟联考]如图,十一旅游黄金周期间,西溪景区规定 A 和 B 为入口,C,D,E 为出口. 小红随机选一个入口进入景区,游玩后任选一个出口离开,则她选择从 A 口进入,从 D 口离开的概率是 ( )



A. $\frac{1}{3}$ B. $\frac{1}{2}$ C. $\frac{1}{6}$ D. $\frac{2}{5}$

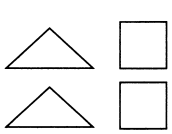
5 [2018 河南中考]现有4张卡片,其中3张卡片正面上的图案是,1张卡片正面上的图案是,它们除此之外完全相同. 把这4张卡片背面朝上洗匀,从中随机抽取2张,则这2张卡片正面图案相同的概率是 ( )

A. $\frac{9}{16}$ B. $\frac{3}{4}$ C. $\frac{3}{8}$ D. $\frac{1}{2}$

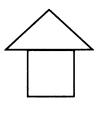
6 小源、小凯在玩“石头、剪刀、布”游戏,小源给自己一个规定:一直不出“石头”. 小源、小凯获胜的概率分别是 P_1,P_2,则下列结论正确的是 ( )

A. $P_1=P_2$ B. $P_1>P_2$ C. $P_1<P_2$ D. $P_1\leqslant P_2$

7 在拼图游戏中,从图(1)中的四张纸片中,任取两张纸片,能拼成“小房子”(如图(2))的概率等于 ( )



图(1)



图(2)

A. 1 B. $\frac{1}{2}$ C. $\frac{1}{3}$ D. $\frac{2}{3}$

8 在$\square a^2\square 2ab\square b^2$的三个空格中,顺次填上“+”或“-”,恰好能构成完全平方公式的概率是_____.

题型2 应用概率解决实际问题

9 [2019 重庆沙坪坝区校级月考]今年暑假,小丽爸爸的同事送给她爸爸1张北京故宫的门票,她和哥哥两人都很想去参观,可门票只有1张. 读九年级的哥哥想了一个办法,他拿了8张扑克牌,将数字为1,2,3,5的4张牌给小丽,将数字为4,6,7,8的4张牌留给自己,并按如下游戏规则进行:小丽和哥哥从各自的4张牌中随机抽出1张,然后将抽出的2张扑克牌上的数字相加,如果和为偶数,则小丽去;如果和为奇数,则哥哥去.

(1)请用画树状图或列表的方法求小丽去北京故宫参观的概率;

(2)哥哥设计的游戏规则公平吗? 请说明理由.

一切的烦恼都是自找的,因此也只能自己解决,不要找朋友哭诉,找他们去打球。

刷提升

▸答案 D52

1 [2019 河北保定校级质检]某公园有 A、B、C、D 四个入口,每位游客都是随机从一个入口进入公园,则甲、乙两位游客恰好从同一个入口进入公园的概率是　(　　)

A. $\frac{1}{2}$　　B. $\frac{1}{4}$

C. $\frac{1}{6}$　　D. $\frac{1}{8}$

2 [2018 河南柘城二模]随着“国家宝藏”的热播,小颖和小梅计划利用假期时间到河南博物馆担任“贾湖骨笛”“妇好鸮尊”“云纹铜禁”的讲解员,由于能力水平的限制,她们一人只能讲解其中一个文物,小颖和小梅制作了三张质地大小完全相同的卡片,背面朝上洗匀后各自抽取一张(第一个人抽取后不放回),则“贾湖骨笛”未被抽到的概率为　(　　)

A. $\frac{1}{2}$　　B. $\frac{1}{3}$

C. $\frac{2}{3}$　　D. $\frac{1}{6}$

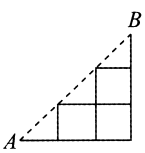
3 三张背面完全相同的数字牌,它们的正面分别印有数字“1”“2”“3”,将它们背面朝上,洗匀后随机抽取一张,记录牌上的数字并把牌放回,再重复这样的步骤两次,得到三个数字 a,b,c,则以 a,b,c 为边长正好构成等边三角形的概率是　(　　)

A. $\frac{1}{9}$　　B. $\frac{1}{27}$　　C. $\frac{5}{9}$　　D. $\frac{1}{3}$

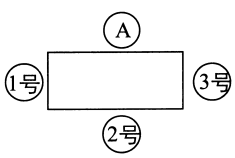
4 [2018 江苏无锡中考]如图是一个沿 3×3 正方形方格纸的对角线 AB 剪下的图形,一质点 P 由点 A 出发,沿格点线每次向右或向上运动 1 个单位长度,则点 P 由点 A 运动到点 B 的不同路径共有　(　　)

A. 4 条　　B. 5 条

C. 6 条　　D. 7 条



(第 4 题图)



(第 5 题图)

5 合作小组的 4 位同学坐在课桌旁讨论问题,学生 A 的座位如图所示,学生 B、C、D 随机坐到其他三个座位上,则学生 B 坐在 1 号座位的概率是_____.

6 把同一副扑克牌中的红桃 2,3,4,5 有数字的一面朝下放置,洗匀后甲先抽取一张,记下数字后将牌放回,洗匀后乙再抽取一张. 先后两次抽得的数字分别记为 x 和 y,则 $|x-y|\geqslant 2$ 的概率为_____.

7 小明参加某智力竞答节目,还剩最后两道单选题,若答对就顺利通关. 第一道单选题有 3 个选项,第二道单选题有 4 个选项,这两道题小明都不会,不过小明还有一个“求助”没有用(使用“求助”可以让主持人去掉其中一题的一个错误选项).

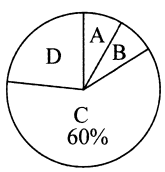
(1)如果小明第一道题不使用“求助”,那么小明答对第一道题的概率是_____;

(2)如果小明将“求助”留在第二道题使用,请用树状图或者列表法来分析小明顺利通关的概率;

(3)从概率的角度分析,你建议小明在第几道题使用“求助”.

8 [2018 四川宜宾二模]今年 3 月,某集团随机抽取所属的 m 家商业连锁店进行评估,将各连锁店按照评估成绩分成了 A、B、C、D 四个等级,绘制了如图尚不完整的统计图表.

评估成绩 n/分	评定等级	频数
$90\leqslant n\leqslant 100$	A	2
$80\leqslant n<90$	B	b
$70\leqslant n<80$	C	15
$n<70$	D	6



根据以上信息解答下列问题:

(1)求 m,b 的值;

(2)在扇形统计图中,求 B 等级所在的扇形圆心角的大小;

(3)从评估成绩不少于 80 分的连锁店中,任选 2 家介绍营销经验,用树状图或列表法求其中至少有一家是 A 等级的概率.

25.3 用频率估计概率

刷基础

▸答案 D53

题型1 模拟试验

1 在抛掷硬币的试验中,下列结论正确的是 ( )

A. 经过大量重复的抛掷硬币试验,可发现“正面向上”的频率越来越稳定

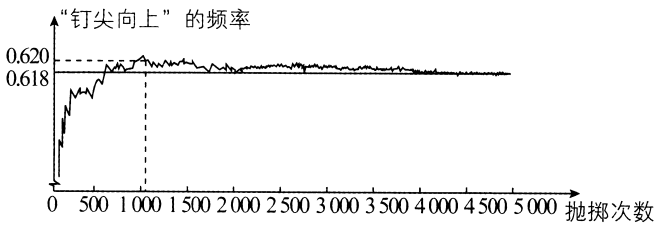
B. 抛掷 10 000 次硬币与抛掷 12 000 次硬币“正面向上”的频率相同

C. 抛掷 50 000 次硬币,可得“正面向上”的频率为 0.5

D. 若抛掷 2 000 次硬币“正面向上”的频率是 0.518,则“正面向下”的频率也为 0.518

题型2 用频率估计概率

2 [2019 山东平度期中]如图显示了用计算机模拟随机抛掷一枚图钉的某次试验的结果. 下面有 3 个推断:①某次试验抛掷次数是 500,计算机记录“钉尖向上”的次数是 308,则该次试验“钉尖向上”的频率是 0.616;②随着试验次数的增加,“钉尖向上”的频率总在 0.618 附近摆动,显示出一定的稳定性,可以估计“钉尖向上”的概率是 0.618;③若再次用计算机模拟试验,则当抛掷次数为 1 000 时,“钉尖向上”的概率一定是 0.620. 其中合理的是 ( )



A. ①② B. ②③ C. ①③ D. ①②③

3 某种幼树在一定条件下移植成活的概率为 0.9,下列说法正确的是 ( )

A. 种植 10 棵幼树,结果一定是“有 9 棵幼树成活”

B. 种植 100 棵幼树,结果一定是“90 棵幼树成活”和“10 棵幼树不成活”

C. 种植 $10n$ 棵幼树,恰好有“n 棵幼树不成活”

D. 种植 n 棵幼树,当 n 越来越大时,种植成活幼树的频率会越来越稳定于 0.9

题型3 用频率估计概率的实际应用

4 [2019 广东深圳校级月考]某鱼塘里养了 200 条鲤鱼、若干条草鱼和 150 条罗非鱼,该鱼塘主通过多次捕捞试验后发现,捕捞到草鱼的频率稳定在 0.5 左右. 若该鱼塘主随机在鱼塘捕捞一条鱼,则捕捞到鲤鱼的概率为 ( )

A. $\frac{3}{4}$ B. $\frac{1}{2}$ C. $\frac{2}{7}$ D. $\frac{3}{14}$

5 [2018 辽宁锦州中考]如图,这是一幅长为 3 m,宽为 2 m 的长方形世界杯宣传画,为测量宣传画上世界杯图案的面积,现将宣传画平铺在地上,向长方形宣传画内随机抛掷骰子(假设骰子落在长方形内的每一点都是等可能的),经过大量重复抛掷试验,发现骰子落在世界杯图案中的频率稳定在常数 0.4 附近,由此可估计宣传画上世界杯图案的面积约为_____ m^2.



6 某射击运动员在相同条件下射击 160 次,其成绩记录如下:

射击次数	20	40	60	80	100	120	140	160
“射中 9 环以上”的次数	15	33		63	79	97	111	130
“射中 9 环以上”的频率	0.75	0.83	0.80	0.79	0.79		0.79	0.81

(1)根据上表中的信息将两个空格的数据补全(“射中 9 环以上”的次数为整数,频率精确到 0.01);

(2)根据频率的稳定性,估计这名运动员射击一次时“射中 9 环以上”的概率(精确到 0.1),并简述理由.

你我都渴望成功,哪怕要付出很多,但我们连早点儿起床都做不到。

全章综合训练

刷章测

▶建议用时:30 分钟　答案 D53

1 [2018 辽宁沈阳中考]下列事件中,是必然事件的是(　　)

A. 任意买一张电影票,座位号是 2 的倍数

B. 13 个人中至少有 2 个人生肖相同

C. 车辆随机到达一个路口,遇到红灯

D. 明天一定会下雨

2 下列事件中,随机事件的个数是(　　)

①抛掷一枚硬币正面朝上;②明天太阳从东方升起;③五边形的内角和是 560°;④购买一张彩票中奖.

A. 0　　B. 1　　C. 2　　D. 3

3 某学校在进行防溺水安全教育活动中,将以下几种在游泳时的注意事项写在纸条上并折好,内容分别是①互相关心;②互相提醒;③不要互相嬉水;④互相比潜水深度;⑤选择水流湍急的水域;⑥选择有人看护的游泳池. 小颖从这 6 张纸条中随机抽出一张,抽到内容描述正确的纸条的概率是(　　)

A. $\frac{1}{2}$　　B. $\frac{1}{3}$　　C. $\frac{2}{3}$　　D. $\frac{1}{6}$

4 口袋中放有 3 个红球和 11 个黄球,这两种球除颜色外没有任何区别,随机从口袋中任取一个球,取得黄球的可能性的大小是(　　)

A. $\frac{11}{14}$　　B. $\frac{3}{14}$　　C. $\frac{3}{11}$　　D. $\frac{8}{11}$

5 在不透明的袋子中有黑棋子 10 枚和白棋子若干(它们除颜色外都相同),现随机从中摸出 10 枚记下颜色后放回,这样连续做了 10 次,记录了如下的数据:

次数	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
黑棋数	1	3	0	2	3	4	2	1	1	3

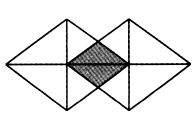
根据以上数据,估算袋中的白棋子数量为(　　)

A. 60 枚　　B. 50 枚

C. 40 枚　　D. 30 枚

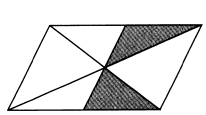
6 [2018 辽宁阜新中考]如图所示,阴影是两个相同菱形的重合部分,假设可以随机在图中取点,那么这个点取在阴影部分的概率是(　　)

A. $\frac{1}{5}$　　B. $\frac{1}{6}$　　C. $\frac{1}{7}$　　D. $\frac{1}{8}$



(第 6 题图)

7 如图所示,平行四边形的两条对角线及过对角线交点的任意一条直线将平行四边形纸片分割成六个部分,现在平行四边形纸片上做随机扎针试验,针头扎在阴影区域内的概率为_____.



(第 7 题图)

8 [2018 内蒙古呼和浩特中考] 已知函数 $y=(2k-1)x+4$(k 为常数),若从 $-3\leqslant k\leqslant 3$ 中任取 k 值,则得到的函数是具有性质"y 随 x 增加而增加"的一次函数的概率为_____.

9 袋子中有红球、白球共 10 个,这些球除颜色外都相同,将袋中的球搅匀,从中随机摸出一个球,记下颜色后再放回袋中,不断重复这一过程. 摸了 100 次后,发现有 30 次摸到红球,请你估计这个袋中红球约有_____个.

10 某十字路口汽车能够行驶的方向有左转、右转还有直行. 假设所有的汽车经过这个十字路口时,所行驶的这三种方向可能性大小相同,则两辆汽车经过这个十字路口时,在这三种方向中,它们行驶的方向相同的概率为_____.

11 [2019 山东莱西期中]2018 年 9 月,第 24 届山东省运动会在青岛举行,有 20 名志愿者参加某分会场的工作,其中男生有 8 名,女生有 12 名.

(1)若从这 20 名志愿者中随机选取 1 名作为联络员,求选到女生的概率;

(2)若该分会场的某项工程只在甲、乙 2 人中选 1 人,他们准备以游戏的方式决定由谁参加,游戏规则如下:将 4 张牌面数字分别为 2,3,4,5 的扑克牌洗匀后,数字朝下放在桌面,从中任取 1 张,不放回,再取 1 张,若牌面数字之和为偶数,则甲参加;否则乙参加. 试问这个游戏公平吗? 请用画树状图或列表的方法说明理由.

刷中考

▶答案 D53

1 [2018 山东淄博中考]下列语句描述的事件中,是随机事件的为　(　　)

A. 水能载舟,亦能覆舟

B. 只手遮天,偷天换日

C. 瓜熟蒂落,水到渠成

D. 心想事成,万事如意

2 [2018 江苏泰州中考]小亮是一名职业足球队员,根据以往比赛数据统计,小亮的进球率为 10%. 他明天将参加一场比赛,下面几种说法正确的是　(　　)

A. 小亮明天的进球率为 10%

B. 小亮明天每射球 10 次必进球 1 次

C. 小亮明天有可能进球

D. 小亮明天肯定进球

3 [2018 山东威海中考]在一个不透明的盒子中放入 4 张卡片,每张卡片上都写有一个数字,分别是 -2,-1,0,1. 卡片除数字不同外其他均相同,从中随机抽取 2 张卡片,抽取的 2 张卡片上数字之积为负数的概率是　(　　)

A. $\frac{1}{4}$　　B. $\frac{1}{3}$　　C. $\frac{1}{2}$　　D. $\frac{3}{4}$

4 [2018 山东聊城中考]小亮、小莹、大刚三位同学随机地站成一排合影留念,小亮恰好站在中间的概率是　(　　)

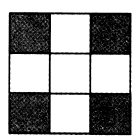
A. $\frac{1}{2}$　　B. $\frac{1}{3}$　　C. $\frac{2}{3}$　　D. $\frac{1}{6}$

5 [2018 北京中考]从甲地到乙地有 A、B、C 三条不同的公交线路. 为了解早高峰期间这三条线路上的公交车从甲地到乙地的用时情况,在每条线路上随机选取了 500 个班次的公交车,收集了这些班次的公交车用时(单位:分)的数据,统计如下:

公交车用时/分 公交车用时的频数线路	$30\leqslant t\leqslant 35$	$35<t\leqslant 40$	$40<t\leqslant 45$	$45<t\leqslant 50$	合计
A	59	151	166	124	500
B	50	50	122	278	500
C	45	265	167	23	500

早高峰期间,乘坐_____(填“A”“B”或“C”)线路上的公交车,从甲地到乙地“用时不超过 45 分钟”的可能性最大.

6 [2018 江苏盐城中考]一只蚂蚁在如图所示的方格地板上随机爬行,每个小方格形状大小完全相同,当蚂蚁停下时,停在地板中阴影部分的概率为_____.



7 [2018 吉林长春中考]剪纸是中国传统的民间艺术,它画面精美,风格独特,深受大家喜爱,现有三张不透明的卡片,其中两张卡片的正面图案为“金鱼”,另外一张卡片的正面图案为“蝴蝶”,卡片除正面剪纸图案不同外,其余均相同. 将这三张卡片背面向上洗匀,从中随机抽出一张,记录图案后放回,重新洗匀后,再从中随机抽出一张. 请用画树状图(或列表)的方法,求抽出的两张卡片上的图案都是“金鱼”的概率. (图案为“金鱼”的两张卡片分别记为 A_1、A_2,图案为“蝴蝶”的卡片记为 B)



8 [2018 内蒙古巴彦淖尔中考]小美周末来到公园,发现在公园一角有一种“守株待兔”的游戏. 游戏设计者提供了一只兔子和一个有 A、B、C、D、E 五个出入口的兔笼,而且笼内的兔子从每个出入口走出兔笼的机会是均等的. 规定:①玩家只能将兔子从 A、B 两个出入口放入;②如果兔子进入兔笼后选择从开始进入的出入口离开,则可获得一只价值 4 元的小兔玩具,否则应付费 3 元.

(1)请用画树状图的方法,列举出该游戏的所有可能的情况;

(2)小美得到小兔玩具的机会有多大?

(3)假设有 125 人玩此游戏,估计游戏设计者可赚多少元.

期末综合测试

（满分 120 分，时间 100 分钟）

刷速度 ▶答案 D54

一、选择题（本大题共 24 分，每小题 3 分）

1 下列事件中属于随机事件的是 （ ）

A. 抛掷一石头，石头终将落地

B. 从装有黑球、白球的袋里摸出红球

C. 地球绕着太阳转

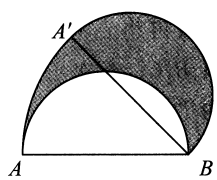
D. 买 1 张彩票，中 500 万大奖

2 [2019 北京海淀区期中]下列图案中，既不是中心对称图形也不是轴对称图形的是 （ ）



A　B　C　D

3 如图，AB 为半圆的直径，其中 $AB=4$，半圆绕点 B 顺时针旋转 45°，点 A 旋转到点 A' 的位置，则图中阴影部分的面积为 （ ）



A. π　　B. 2π

C. $\frac{\pi}{2}$　　D. 4π

4 已知 $x=1$ 是方程 $x^2+bx-2=0$ 的一个根，则方程的另一个根是 （ ）

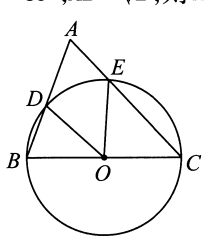
A. 1　　B. 2　　C. -2　　D. -1

5 将抛物线 $y=3x^2+2$ 向左平移 2 个单位长度，再向下平移 3 个单位长度，则得到的抛物线的解析式为 （ ）

A. $y=3(x-2)^2-1$　　B. $y=3(x-2)^2+5$

C. $y=3(x+2)^2-1$　　D. $y=3(x+2)^2+5$

6 如图，以 $\triangle ABC$ 的边 BC 为直径的 $\odot O$ 分别交 AB，AC 于点 D，E. 若 $\angle DOE=60°$，$AD=\sqrt{2}$，则 AC 的长为 （ ）



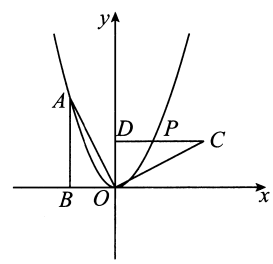
A. $\sqrt{3}$　　B. 2　　C. $2\sqrt{2}$　　D. $2\sqrt{3}$

7 某工厂生产的某种产品按质量分为 10 个档次，第 1 档次（最低档次）的产品一天能生产 95 件，每件利润 6 元，每提高一个档次，每件利润增加 2 元，但一天产量减少 5 件. 若生产的产品一天的总利润为 1 120 元，且同一天所生产的产品为同一档次，则该产品的质量档次是 （ ）

A. 6　　B. 8

C. 10　　D. 12

8 如图，$\mathrm{Rt}\triangle OAB$ 的顶点 $A(-2,4)$ 在抛物线 $y=ax^2$ 上，将 $\mathrm{Rt}\triangle OAB$ 绕点 O 顺时针旋转 90°得到 $\mathrm{Rt}\triangle OCD$，边 CD 与该抛物线交于点 P，则点 P 的坐标为 （ ）



A. $(\sqrt{2},\sqrt{2})$　　B. $(2,2)$

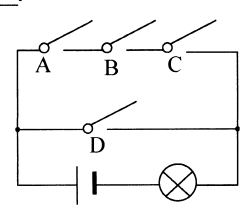
C. $(\sqrt{2},2)$　　D. $(2,\sqrt{2})$

二、填空题（本大题共 24 分，每小题 4 分）

9 二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图象与 x 轴相交于 $(-2,0)$，$(6,0)$ 两点，则该抛物线的对称轴是_____.

10 边长为 1 的正六边形的边心距是_____.

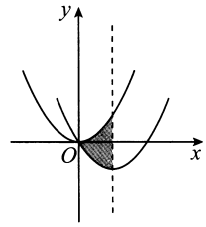
11 如图，电路图上有 4 个开关 A、B、C、D 和 1 个小灯泡，闭合开关 D 或同时闭合开关 A、B、C 都可使小灯泡发光. 任意闭合其中 2 个开关，则小灯泡发光的概率为_____.



12 一元二次方程 $x^2+3x-1=0$ 与 $x^2-3x-1=0$ 的所有实数根的和等于_____.

13 在四边形 $ABCD$ 中，$AD/\!/BC$，$AB\perp BC$，$AD=4$，将线段 CD 以点 D 为中心逆时针旋转 90°至 DE，连接 AE，CE，$\triangle ADE$ 的面积为 6，则 BC 的长为_____.

14 如图,在平面直角坐标系中,抛物线 $y=\frac{1}{2}x^2$ 经过平移得到抛物线 $y=\frac{1}{2}x^2-2x$,其对称轴与两段抛物线所围成的阴影部分的面积为_____.



三、解答题(本大题共 72 分. 解答应写出文字说明,演算步骤或证明过程)

15 (5 分)解方程:$(x-1)(x-2)=4$.

16 (6 分)关于 x 的一元二次方程 $x^2+(2m+1)x+m^2-1=0$ 有两个不相等的实数根.

(1)求 m 的取值范围;

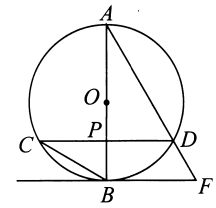
(2)写出一个满足条件的 m 的值,并求此时方程的根.

17 (6 分)汽车租赁公司共有出租车 120 辆,每辆汽车的日租金为 160 元,出租业务供不应求,为适合市场需求,经有关部门批准,公司准备适当提高日租金. 经市场调查发现,一辆汽车的日租金每增加 10 元,每天出租的汽车相应的减少 6 辆,若不考虑其他因素,一辆汽车的日租金提高几个 10 元时,才能使公司的日租金收入最高?公司的日租金总收入比提高租金前增加了多少?(公司日租金总收入 = 每辆汽车的日租金 × 公司每天出租的汽车数)

18 (6 分)如图,AB 为⊙O 的直径,弦 $CD\perp AB$,垂足为点 P,直线 BF 与 AD 延长线交于点 F,且 $\angle AFB=\angle ABC$.

(1)求证:直线 BF 是⊙O 的切线;

(2)若 $CD=2\sqrt{3}$,$OP=1$,求⊙O 的半径.

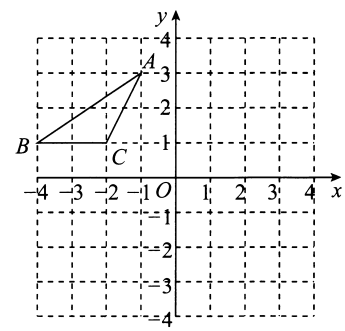


19 (6 分)如图,在平面直角坐标系中,点 A,B,C 的坐标分别为(−1,3),(−4,1),(−2,1),先将 $\triangle ABC$ 沿一确定方向平移得到 $\triangle A_1B_1C_1$,点 B 的对应点 B_1 的坐标是(1,2),再将 $\triangle A_1B_1C_1$ 绕原点 O 顺时针旋转 90°得到 $\triangle A_2B_2C_2$,点 A_1 的对应点为点 A_2.

(1)画出 $\triangle A_1B_1C_1$ 和 $\triangle A_2B_2C_2$;

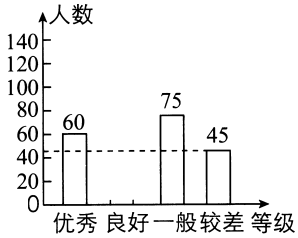
(2)求出在这两次变换过程中,点 A 经过点 A_1 到达 A_2 的路径总长;

(3)求线段 B_1C_1 旋转到 B_2C_2 所扫过的图形的面积.

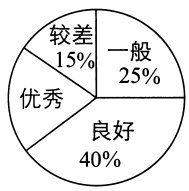


20 (6分)中央电视台的“中国诗词大会”节目文化品位高,内容丰富.某校初二年级模拟开展“中国诗词大赛”比赛,对全年级同学的成绩进行统计后分为“优秀”“良好”“一般”“较差”四个等级,并根据成绩绘制成如下两幅不完整的统计图.

初二年级参加“中国诗词大赛”比赛成绩条形统计图



初二年级参加“中国诗词大赛”比赛成绩扇形统计图

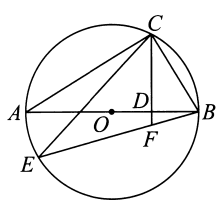


请结合统计图中的信息,回答下列问题:

(1)扇形统计图中“优秀”所对应扇形的圆心角的大小为_____,并将条形统计图补充完整;

(2)此次比赛有四名同学获得满分,分别是甲、乙、丙、丁,现从这四名同学中挑选两名同学参加学校举行的“中国诗词大赛”比赛,请用列表法或画树状图法求选中的两名同学恰好是甲和丁的概率.

21 (7分)如图,AB为$\odot O$的直径,C为$\odot O$上一点,连AC,BC,E为$\odot O$上一点,且$BE=CE$,点F在BE上,$CF\perp AB$于点D.求证:$CB=CF$.



22 (7分)[2018云南中考]已知二次函数$y=-\frac{3}{16}x^2+bx+c$的图象经过$A(0,3)$,$B\left(-4,-\frac{9}{2}\right)$两点.

(1)求b,c的值;

(2)二次函数$y=-\frac{3}{16}x^2+bx+c$的图象与x轴是否有公共点?若有,求公共点的坐标;若没有,请说明情况.

23 (7分)已知关于x的一元二次方程$x^2+(k-5)x+1-k=0$,其中k为常数.

(1)求证:无论k为何值,方程总有两个不相等实数根;

(2)已知函数$y=x^2+(k-5)x+1-k$的图象不经过第三象限,求k的取值范围;

(3)若原方程的一个根大于3,另一个根小于3,求k的最大整数值.

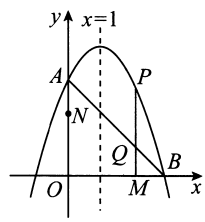
24 (7分)如图,已知抛物线 $y=-x^2+bx+c$ 与 y 轴相交于点 $A(0,3)$,与 x 轴正半轴相交于点 B,对称轴是直线 $x=1$.

(1)求此抛物线的解析式以及点 B 的坐标;

(2)动点 M 从点 O 出发,以每秒2个单位长度的速度沿 x 轴正方向运动,同时动点 N 从点 O 出发,以每秒3个单位长度的速度沿 y 轴正方向运动,当点 N 到达点 A 时,M,N 同时停止运动. 过动点 M 作 x 轴的垂线交线段 AB 于点 Q,交抛物线于点 P. 设运动的时间为 t 秒.

①当 t 为何值时,四边形 $OMPN$ 为矩形?

②当 $t>0$ 时,$\triangle BOQ$ 能否为等腰三角形?若能,求出 t 的值;若不能,请说明理由.

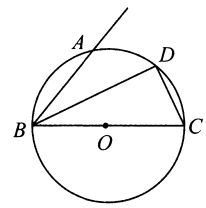


25 (9分)[2019江苏南京玄武区期中,难]【特例感知】

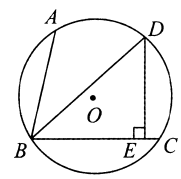
(1)如图(1),$\angle ABC$ 是 $\odot O$ 的圆周角,BC 为直径,BD 平分 $\angle ABC$ 交 $\odot O$ 于点 D,$CD=3$,$BD=4$,求点 D 到直线 AB 的距离.

【类比迁移】(2)如图(2),$\angle ABC$ 是 $\odot O$ 的圆周角,BC 为 $\odot O$ 的弦,BD 平分 $\angle ABC$ 交 $\odot O$ 于点 D,过点 D 作 $DE\perp BC$,垂足为点 E,探索线段 AB,BE,BC 之间的数量关系,并说明理由.

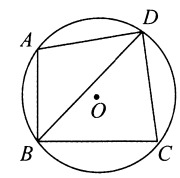
【问题解决】(3)如图(3),四边形 $ABCD$ 为 $\odot O$ 的内接四边形,$\angle ABC=90°$,BD 平分 $\angle ABC$,$BD=7\sqrt{2}$,$AB=6$,求 $\triangle ABC$ 的内心与外心之间的距离.



图(1)



图(2)



图(3)

附录Ⅰ　初中数学常用公式

1	绝对值	$\lvert a\rvert=\begin{cases}a,a>0,\\0,a=0,\\-a,a<0\end{cases}$
2	实数的运算律	(1)加法交换律:$a+b=b+a$; (2)加法结合律:$(a+b)+c=a+(b+c)$; (3)乘法交换律:$ab=ba$; (4)乘法结合律:$(ab)c=a(bc)$; (5)乘法分配律:$a(b+c)=ab+ac$
3	等式的性质	(1)如果 $a=b$,那么 $a\pm c=b\pm c$; (2)如果 $a=b$,那么 $ac=bc$; 如果 $a=b(c\neq0)$,那么 $\frac{a}{c}=\frac{b}{c}$
4	不等式的性质	(1)如果 $a>b$,那么 $a\pm c>b\pm c$; (2)如果 $a>b,c>0$,那么 $ac>bc\left(\frac{a}{c}>\frac{b}{c}\right)$; (3)如果 $a>b,c<0$,那么 $ac<bc\left(\frac{a}{c}<\frac{b}{c}\right)$
5	整式乘法公式	(1)平方差公式:$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$; (2)完全平方公式:$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$,$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$
6	幂的运算性质	(1)$a^m\cdot a^n=a^{m+n}$(m,n 为整数);(2)$(a^m)^n=a^{mn}$(m,n 为整数);(3)$(ab)^n=a^nb^n$(n 为整数);(4)$a^m\div a^n=a^{m-n}$(m,n 为整数,$a\neq0$); (5)$\left(\frac{a}{b}\right)^n=\frac{a^n}{b^n}$($n$ 为整数,$b\neq0$),$a^0=1(a\neq0)$; (6)$a^{-p}=\frac{1}{a^p}$(p 为正整数)
7	分式的运算及性质	(1)$\frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c}=\frac{ad}{bc}$; (2)$\frac{a}{b}\div\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c}=\frac{a\cdot d}{b\cdot c}$; (3)$\left(\frac{a}{b}\right)^n=\frac{a^n}{b^n}$;(4)$\frac{b}{a}\pm\frac{c}{a}=\frac{b\pm c}{a}$; (5)$\frac{b}{a}\pm\frac{c}{d}=\frac{bd}{ad}\pm\frac{ac}{ad}=\frac{bd\pm ac}{ad}$
8	二次根式的性质	(1)$\sqrt{a}\geqslant0(a\geqslant0)$; (2)$(\sqrt{a})^2=a(a\geqslant0)$; (3)$\sqrt{a^2}=a(a\geqslant0)$; (4)$\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}=\sqrt{ab}(a\geqslant0,b\geqslant0)$; (5)$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a}{b}}(a\geqslant0,b>0)$
9	平均数	(1)平均数:$\bar{x}=\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}$; (2)加权平均数:$\bar{x}=\frac{x_1w_1+x_2w_2+\cdots+x_nw_n}{w_1+w_2+\cdots+w_n}$, $w_1,w_2,\cdots,w_n$ 分别叫做 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的权
10	方差	$s^2=\frac{1}{n}[(x_1-\bar{x})^2+(x_2-\bar{x})^2+\cdots+(x_n-\bar{x})^2]$
11	一元二次方程	一元二次方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq0)$ 的求根公式: $x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}(b^2-4ac\geqslant0)$. 一元二次方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq0)$ 的根的个数: (1)当 $\Delta=b^2-4ac>0$ 时,方程有两个不等的实数根; (2)当 $\Delta=b^2-4ac=0$ 时,方程有两个相等的实数根; (3)当 $\Delta=b^2-4ac<0$ 时,方程无实数根. 根与系数的关系:$x_1+x_2=-\frac{b}{a}$,$x_1x_2=\frac{c}{a}$

12	比例的性质	(1)基本性质:如果 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$,那么 $ad=bc$; (2)合比性质,如果 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$,那么 $\frac{a\pm b}{b}=\frac{c\pm d}{d}$
13	勾股定理及其逆定理	(1)勾股定理:如果直角三角形的两条直角边长为 a,b,斜边长为 c,那么 $a^2+b^2=c^2$; (2)勾股定理的逆定理:如果三角形的三边长 a,b,c 满足 $a^2+b^2=c^2$,那么这个三角形是直角三角形
14	角	1 周角 $=360°$;1 平角 $=180°$;1 直角 $=90°$
15	概率	一般地,如果在一次试验中,有 n 种可能的结果,并且它们发生的可能性都相等,事件 A 包含其中的 m 种结果,那么事件 A 发生的概率 $P(A)=\frac{m}{n}$
16	点与圆的位置关系	设⊙O 的半径为 r,点 P 到圆心 O 的距离为 d,则有 (1)点 P 在圆外$\Leftrightarrow d>r$; (2)点 P 在圆上$\Leftrightarrow d=r$; (3)点 P 在圆内$\Leftrightarrow d<r$
17	直线和圆的位置关系	设⊙O 的半径为 r,圆心到直线 l 的距离为 d,那么 (1)直线 l 与⊙O 相交$\Leftrightarrow d<r$; (2)直线 l 与⊙O 相切$\Leftrightarrow d=r$; (3)直线 l 与⊙O 相离$\Leftrightarrow d>r$
18	圆和圆的位置关系	如果两圆的半径分别为 r_1 和 $r_2(r_1<r_2)$,圆心距为 d,则两圆的位置关系: (1)两圆外离$\Leftrightarrow d>r_1+r_2$; (2)两圆外切$\Leftrightarrow d=r_1+r_2$; (3)两圆相交$\Leftrightarrow r_2-r_1<d<r_1+r_2$; (4)两圆内切$\Leftrightarrow d=r_2-r_1$; (5)两圆内含$\Leftrightarrow d<r_2-r_1$
19	扇形、圆锥	(1)弧长 $l=\frac{n\pi R}{180}$,扇形面积 $S=\frac{n\pi R^2}{360}=\frac{1}{2}lR$; (2)圆锥的侧面积为 πrl(l 为母线长,r 为底面圆的半径),圆锥的全面积为 $\pi r(r+l)$
20	锐角三角函数	锐角 A 的三角函数: $\sin A=\frac{\angle A\text{的对边}}{\text{斜边}}$, $\cos A=\frac{\angle A\text{的邻边}}{\text{斜边}}$, $\tan A=\frac{\angle A\text{的对边}}{\angle A\text{的邻边}}$

三角函数之间的关系:
(1)互余角的三角函数值之间的关系:若 $\angle A+\angle B=90°$,那么 $\sin A=\cos B$ 或 $\sin B=\cos A$.
(2)同角的三角函数值之间的关系:
①$\sin^2A+\cos^2A=1$;
②$\tan A=\frac{\sin A}{\cos A}$

三角函数 \ 锐角 A	$30°$	$45°$	$60°$
$\sin A$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos A$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\tan A$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

附录Ⅱ　初中数学必记定理

(一)点、线、角

(1)两点确定一条直线.

(2)两点之间,线段最短.

(3)同角或等角的补角相等.

(4)同角或等角的余角相等.

(5)角的平分线上的点到角的两边的距离相等;角的内部到角的两边的距离相等的点在角的平分线上.

(6)线段垂直平分线上的点到这条线段两个端点的距离相等;与线段两个端点距离相等的点在这条线段的垂直平分线上.

(二)相交线与平行线

(1)在同一平面内,过一点有且只有一条直线与已知直线垂直.

(2)连接直线外一点与直线上各点的所有线段中,垂线段最短.

(3)经过直线外一点,有且只有一条直线与这条直线平行.

(4)如果两条直线都与第三条直线平行,那么这两条直线也互相平行.

(5)两直线平行,同位角相等(内错角相等,同旁内角互补).

(三)三角形

(1)三角形两边的和大于第三边,三角形两边的差小于第三边.

(2)三角形三个内角的和等于180°.

(3)三角形的外角等于与它不相邻的两个内角的和.

(4)三角形的外角大于任何一个与它不相邻的内角.

(5)全等三角形的判定:边角边(SAS),角边角(ASA),角角边(AAS),边边边(SSS),斜边、直角边(HL).

(6)全等三角形的对应边、对应角相等.

(7)等腰三角形的两个底角相等(即等边对等角);等腰三角形顶角平分线、底边上的中线、底边上的高相互重合(简写成"三线合一").

(8)如果一个三角形有两个角相等,那么这两个角所对的边也相等(等角对等边).

(9)三个角都相等的三角形是等边三角形.

(10)有一个角是60°的等腰三角形是等边三角形.

(11)在直角三角形中,如果一个锐角等于30°,那么它所对的直角边等于斜边的一半.

(12)直角三角形斜边上的中线等于斜边的一半.反之如果三角形一边上的中线等于这边的一半,那么这个三角形是直角三角形.

(13)勾股定理:如果直角三角形的两条直角边分别为a,b,斜边长为c,那么$a^2+b^2=c^2$.

(14)勾股定理的逆定理:如果三角形的三边长a,b,c满足$a^2+b^2=c^2$,那么这个三角形是直角三角形.

(四)四边形

(1)四边形的内角和等于360°;四边形的外角和等于360°.

(2)n边形的内角和等于$(n-2)\times180°$.

(3)任意多边形的外角和等于360°.

(4)平行四边形的对角相等、邻角互补.

(5)平行四边形的对边相等、对边平行.

(6)夹在两条平行线间的平行线段相等.

(7)平行四边形的对角线互相平分.

(8)两组对边分别平行的四边形是平行四边形.

(9)两组对角分别相等的四边形是平行四边形.

(10)两组对边分别相等的四边形是平行四边形.

(11)对角线互相平分的四边形是平行四边形.

(12)一组对边平行且相等的四边形是平行四边形.

(13)矩形的四个角都是直角,对边平行且相等.

(14)矩形的对角线相等且互相平分.

(15)有一个角是直角的平行四边形是矩形.

(16)有三个角是直角的四边形是矩形.

(17)对角线相等的平行四边形是矩形.

(18)菱形的四条边都相等,对边平行,对角相等.

(19)菱形的两条对角线互相垂直,并且每一条对角线平分一组对角.

(20)菱形面积=对角线乘积的一半,即$S=(a\times b)\div2$,也等于底×高.

(21)有一组邻边相等的平行四条边形叫做菱形.

(22)四条边相等的四边形是菱形.

(23)对角线互相垂直的平行四边形是菱形.

(24)正方形的四个角都是直角,四条边都相等,对边平行.

(25)正方形的两条对角线相等,并且互相垂直平分,每条对角线平分一组对角.

(26)正方形的判定定理1:是矩形且一组邻边相等.

(27)正方形的判定定理2:是菱形且有一个角是直角.

(五)圆

(1)不在同一条直线上的三个点确定一个圆.

(2)垂直于弦的直径平分弦,并且平分弦所对的两条弧.

(3)垂径定理的推论

①平分弦(不是直径)的直径垂直于弦,并且平分弦所对的两条弧.

②弦的垂直平分线经过圆心,并且平分弦所对的两条弧.

③平分弦所对的一条弧的直径,垂直平分弦,并且平分弦所对的另一条弧.

(4)在同圆或等圆中,相等的圆心角所对的弧相等,所对的弦相等,所对的弦的弦心距相等.

(5)一条弧所对的圆周角等于它所对的圆心角的一半.

(6)半圆(或直径)所对的圆周角是直角;90°的圆周角所对的弦是直径.

(7)圆内接四边形的对角互补,并且任何一个外角都等于它的内对角.

(8)经过半径的外端并且垂直于这条半径的直线是圆的切线.

(9)圆的切线垂直于过切点的半径.

(10)经过圆心且垂直于切线的直线必经过切点.

(11)经过切点且垂直于切线的直线必经过圆心.

(12)从圆外一点可以引圆的两条切线,它们的切线长相等,这一点和圆心的连线平分两条切线的夹角.

(13)圆的外切四边形的两组对边的和相等.

(14)如果两个圆相切,那么切点一定在连心线上.

(六)多边形

(1)正n边形的每个内角都等于$\dfrac{(n-2)\times180°}{n}$.

(2)正n边形的半径和边心距把正n边形分成$2n$个全等的直角三角形.

(3)正n边形的面积$S_n=\dfrac{1}{2}I_n r_n$,I_n表示正n边形的周长,r_n是正n边形的边心距.

(4)如果在一个顶点周围有k个正n边形的角,由于这些角的和应为360°,因此$k\times\dfrac{(n-2)\times180°}{n}=360°$可化为$(n-2)(k-2)=4$.

(七)图形的变化

(1)成轴对称的两个图形中,对应点的连线被对称轴垂直平分.

(2)平移的基本性质:两组对应点的连线平行(或在同一条直线上)且相等.

(3)旋转的基本性质:

①对应点到旋转中心的距离相等.

②对应点与旋转中心所连线段的夹角等于旋转角.

③旋转前、后的图形全等.

(4)中心对称的基本性质:

①中心对称的两个图形,对称点所连线段都经过对称中心,而且被对称中心所平分.

②中心对称的两个图形是全等图形.

(5)三角形的中位线平行于第三边,并且等于它的一半.

(6)三条平行线截两条直线,所得的对应线段成比例.

(7)平行于三角形一边的直线截其他两边(或两边的延长线),所得的对应线段成比例.

(8)平行于三角形一边的直线和其他两边相交,所构成的三角形与原三角形相似.

(9)三边成比例的两个三角形相似.

(10)两边成比例且夹角相等的两个三角形相似.

(11)两角分别相等的两个三角形相似.

(12)如果一个直角三角形的斜边和一条直角边与另一个直角三角形的斜边和一条直角边对应成比例,那么这两个直角三角形相似.

(13)三角形相似的性质:

①相似三角形对应高的比,对应中线的比与对应角平分线的比都等于相似比.

②相似三角形周长的比等于相似比.

③相似三角形面积的比等于相似比的平方.

提供各种书籍的 PDF 电子版代找服务，如果您找不到您想要的书的 PDF 电子版，我们可以帮您找到，如有需要，请联系微信、QQ。





PDF 代找说明：

本公司可以帮助您找到您想要的 PDF 电子书。质量都很清晰，只要您提供给我们相关信息，一般都能找到，如果您有需求，请联系我们。

现已经帮助了很多人找到了大家需要的 PDF，其实网上有很多 PDF，大家如果在网上找不到的话，可以联系我们，大部分我们都可以找到。因 PDF 电子书都有版权，请不要随意传播，如果您有经济购买能力，请尽量购买正版。

声明：

本公司只提供代找服务，因寻找 PDF 电子书有一定难度，仅收取代找费用。如因 PDF 产生的版权纠纷，与本公司无关，我们仅仅只是帮助您寻找到您要的 PDF 而已。



·目录·

第二十一章　一元二次方程 …… 1

21.1　一元二次方程 …… 1

21.2　解一元二次方程 …… 3

21.3　实际问题与一元二次方程 …… 7

第二十二章　二次函数 …… 13

22.1　二次函数的图象和性质 …… 13

22.2　二次函数与一元二次方程 …… 21

22.3　实际问题与二次函数 …… 24

专题　确定二次函数解析式 …… 28

第二十三章　旋转 …… 31

23.1　图形的旋转 …… 31

23.2　中心对称 +

23.3　课题学习　图案设计 …… 35

第二十四章　圆 …… 41

24.1　圆的有关性质 …… 41

24.2　点和圆、直线和圆的位置关系 …… 47

24.3　正多边形和圆 …… 53

24.4　弧长和扇形面积 …… 58

第二十五章　概率初步 …… 62

25.1　随机事件与概率 …… 62

25.2　用列举法求概率 +

25.3　用频率估计概率 …… 65

第二十一章 一元二次方程



21.1 一元二次方程

知识过关 全理解

知识点1 一元二次方程的定义

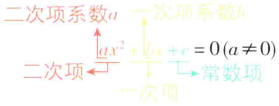
1. 等号两边都是[1]_____，只含有[2]_____个未知数（一元），并且未知数的最高次数是[3]_____（二次）的方程，叫做一元二次方程. 例如：$\sqrt{3}x^2+x+1=0$，$\frac{1}{2}x^2+7=0$ 是一元二次方程.

2. 一元二次方程必须同时满足三个条件：[4]_____、[5]_____、[6]_____.

例如：$\frac{1}{x^2}+x=2$，x^2+1，$x^2+y-3=0$，$x^3-3x+8=0$，$(x-2)(x+5)=x^2-1$ 均不是一元二次方程.

知识点2 一元二次方程的一般形式 ▸注意

一元二次方程的一般形式是 $ax^2+bx+c=0(a\neq0)$，其中[7]_____是二次项，[8]_____是二次项系数；[9]_____是一次项，[10]_____是一次项系数；[11]_____是常数项.



知识点3 一元二次方程的解（根）

使方程左右两边相等的未知数的值就是这个一元二次方程的解，一元二次方程的解也叫做一元二次方程的[12]_____. ▸方法

答案

[1]整式 [2]一 [3]2 [4]是整式方程 [5]只含有一个未知数 [6]未知数的最高次数是2
[7]ax^2 [8]a [9]bx [10]b [11]c [12]根

题型过关 全提升

题型1 根据一元二次方程的定义求值

若给出的一元二次方程中，未知数的次数、系数含参数，可根据未知数的最高次数为2，二次项系数不为0列方程求解.

例题1 已知关于 x 的方程 $(m-1)x^{m^2+1}+2x-3=0$ 是一元二次方程，则 m 的值为 （ ）

A. 1　　B. -1　　C. ±1　　D. 不能确定

敲黑板 划重点

注意 一般形式系数易错

(1) 若已知 $ax^2+bx+c=0$ 是关于 x 的一元二次方程，则隐含 $a\neq0$ 这一条件.

(2) 确定一元二次方程各项及各项系数，必须先将其化为 $ax^2+bx+c=0(a\neq0)$ 的形式，要注意确定各项及各项系数时一定要包括各项前的符号. 例如：$-3x^2-2x+1=6$ 化为一般形式得 $-3x^2-2x-5=0$，其中 $a=-3$，$b=-2$，$c=-5$.

方法 根的应用

(1) 代入法是常用的验根方法，即把未知数的值代入方程，验证方程左右两边是否相等. 若方程左右两边相等，则未知数的值是原方程的根；若方程左右两边不相等，则未知数的值不是原方程的根.

(2) 若方程的系数中含有字母，代入方程的根，可求出方程中所含其他字母的值.

变式练 刷重点

变式练1 关于 x 的方程 $(a-1)x^2+\sqrt{a+1}x+2=0$ 是一元二次方程，则 a 的取值范围为 （ ）

A. $a\neq1$　　B. $a\geqslant-1$ 且 $a\neq1$

C. $a>-1$ 且 $a\neq1$　　D. $a\neq\pm1$

答案见 P2

【解析】∵关于 x 的方程 $(m-1)x^{m^2+1}+2x-3=0$ 是一元二次方程，∴ $m-1\neq 0$ 且 $m^2+1=2$，即 $m\neq 1$ 且 $m=\pm 1$，解得 $m=-1$. 故选 B.

【答案】B

题型 2　根据实际问题列一元二次方程

例题 2　某企业 2018 年初获利润 300 万元，到 2020 年初计划利润达到 507 万元. 设这两年的年利润平均增长率为 x. 应列方程为（　　）

A. $300(1+x)=507$

B. $300(1+x)^2=507$

C. $300(1+x)+300(1+x)^2=507$

D. $300+300(1+x)+300(1+x)^2=507$

【分析】增长率问题，一般用增长后的量 = 增长前的量 × (1 + 增长率) 来计算，如果设年利润平均增长率为 x，根据 2018 年利润为 300 万元，预计 2020 年利润达到 507 万元，即可列出方程.

【解析】由题意得 2019 年的利润为 $300(1+x)$，2020 年的利润为 $300(1+x)^2$. 故列方程为 $300(1+x)^2=507$.

【答案】B

变式练　刷重点

变式练 2　股票每天的涨、跌幅均不能超过 10%，即当涨了原价的 10% 后，便不能再涨，叫做涨停；当跌了原价的 10% 后，便不能再跌，叫做跌停. 已知一只股票某天跌停，之后两天时间又涨回到原价. 若这两天此股票股价的平均增长率为 x，则 x 满足的方程是（　　）

A. $(1+x)^2=\frac{11}{10}$　　B. $(1+x)^2=\frac{10}{9}$

C. $1+2x=\frac{11}{10}$　　D. $1+2x=\frac{10}{9}$

答案见本页

创新过关 提素养

题型 3　已知方程的根，求代数式的值（整体代入思想）

已知方程的根，无法解出所含参数时，应采用整体代入思想解决问题，将所求代数式的一部分看成一个整体，通常这部分通过已知条件可求出，将其整体代入即可求解.

例题 3　已知 α 是一元二次方程 $x^2-8x-5=0$ 的一个根，则代数式 $\alpha^3-7\alpha^2-13\alpha+6$ 的值为_____.

【分析】将 α 代入方程可得关于 α 的一元二次方程，无法解出 α 的值. 由所求式子的最高次数为 3 可知，需要提取公因式降次，将其配凑成关于 $\alpha^2-8\alpha$ 或 $\alpha^2-8\alpha-5$ 的式子，再计算.

【解析】方法一：将 $\alpha^2-8\alpha$ 作为整体.

∵ α 是一元二次方程 $x^2-8x-5=0$ 的一个根，

∴ $\alpha^2-8\alpha-5=0$，∴ $\alpha^2-8\alpha=5$，

∴ $\alpha^3-7\alpha^2-13\alpha+6=\alpha(\alpha^2-8\alpha)+\alpha^2-13\alpha+6=\alpha(\alpha^2-8\alpha)+(\alpha^2-8\alpha)-5\alpha+6=5\alpha+5-5\alpha+6=11$.

方法二：将 $\alpha^2-8\alpha-5$ 作为整体.

∵ α 是一元二次方程 $x^2-8x-5=0$ 的一个根，∴ $\alpha^2-8\alpha-5=0$，

∴ $\alpha^3-7\alpha^2-13\alpha+6=\alpha(\alpha^2-8\alpha-5)+(\alpha^2-8\alpha-5)+11=11$.

【答案】11

变式练　刷重点

变式练 3　已知 t 是方程 $x^2+x-1=0$ 的一个根，求代数式 $t^3-2t+2\,017$ 的值.

答案见本页

变式练答案

1. B　【解析】∵ $(a-1)x^2+\sqrt{a+1}x+2=0$ 是关于 x 的一元二次方程，∴ $a-1\neq 0$ 且 $a+1\geqslant 0$，解得 $a\geqslant -1$ 且 $a\neq 1$. 故选 B.

2. B　【解析】跌停后股价为原价的 90%，两天又涨回到 1，则 $90\%(1+x)^2=1$，即 $(1+x)^2=\frac{10}{9}$. 故选 B.

3. 【解】将 t 代入方程可得 $t^2+t-1=0$，将所求多项式提取公因式得 $t(t^2-2)+2\,017$，由 $t^2+t-1=0$ 可知 $t^2=1-t$，代入可得原式 $=t(1-t-2)+2\,017=-t^2-t+2\,017=t-1-t+2\,017=2\,016$.

21.2 解一元二次方程

知识过关 全理解

知识点1 直接开平方法解一元二次方程

1. 非负数 a 的算术平方根为$\sqrt{a}$;平方根为 $\pm\sqrt{a}$. 例如:

144 的算术方根为 $\sqrt{144}=12$,平方根为 $\pm\sqrt{144}=\pm12$.

2. 根据[1]_____直接开平方来解一元二次方程的方法,叫做直接开平方法. 例如 $x^2=25$,解得 $x=\pm5$.

一般地,对于方程 $x^2=p$,▶拓展 1

$p>0$	方程有两个不等的实数根 $x_1=$[2]_____,$x_2=$[3]_____
$p=0$	方程有两个相等的实数根 $x_1=x_2=$[4]_____
$p<0$	方程[5]_____

3. 直接降次解一元二次方程的步骤:

(1)将方程化为 $x^2=p$ 或$(mx+n)^2=p(p\geqslant0,m\neq0)$的形式;

(2)直接开平方化为两个一元一次方程;

(3)解两个一次方程得到原方程的解.

知识点2 配方法解一元二次方程

1. 通过把方程配成[6]_____形式来解一元二次方程的方法,叫做配方法.

2. 配方法解一元二次方程的一般步骤(示例):▶注意 1

$ax^2+bx+c=0(a\neq0)$ ①常数项移到右边 [7]_____ ②二次项系数化为1 [8]_____

③两边都加上一次项系数一半的平方

[9]_____ ⑤降次 [10]_____

④化为完全平方形式 $x+\frac{b}{2a}=\pm\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}$ $(b^2-4ac\geqslant0)$

⑥解一次方程 $x_1=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$, $x_2=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$.

3. 解题依据

完全平方式:$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$,$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$.

知识点3 一元二次方程根的判别式

1. 对于一元二次方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq0)$,通过配方可得 $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2}$,则方程根的情况由 b^2-4ac 的符号决定. ▶拓展 2

一般地,式子[11]_____叫做一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 根的判别式,通常用希腊字母"[12]_____"表示它,即[13]_____.

敲黑板 划重点

拓展 1 其他适用直接开平方法的情形

(1) $x^2-q=p$ $(p+q\geqslant0)$ 移项后左右同时开平方降次

$x=\pm\sqrt{p+q}$;

(2) $q(mx+a)^2=p(pq\geqslant0,q\neq0,m\neq0)$ 左右同时除以系数后开平方降次

$mx+a=\pm\sqrt{\frac{p}{q}}$;

(3) $(mx+a)^2=(nx+b)^2(m\neq0,n\neq0)$ 左右同时开平方降次

$mx+a=\pm(nx+b)$.

注意 1 配方法使用揭秘

(1)先将方程化为一般式,再确定各项的系数;

(2)移项时要注意变号;

(3)在方程的左右两边都加上一次项系数一半的平方;

(4)一次项系数的符号,决定了方程左侧的完全平方式是和的完全平方,还是差的完全平方.

拓展 2 二次三项式 ax^2+bx+c 的配方

(1)提:$a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right)$;

(2)凑:$a\left[x^2+\frac{b}{a}x+\left(\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{c}{a}\right]$;

(3)整理,得 $a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a}$.

2. 根的判别式与根的情况 ▶对点例

(1)$\Delta>0\Leftrightarrow$一元二次方程有两个不等的实数根;

(2)$\Delta=0\Leftrightarrow$一元二次方程有两个相等的实数根;

(3)$\Delta<0\Leftrightarrow$一元二次方程无实数根.

3. 应用

(1)不解方程判断一元二次方程根的情况;

(2)根据方程根的情况求字母系数的取值范围.

知识点4　公式法解一元二次方程

1. 当$\Delta\geqslant0$时,方程$ax^2+bx+c=0(a\neq0)$通过配方,其实数根可写为[14]_____的形式,这个式子叫做一元二次方程$ax^2+bx+c=0$的求根公式. 将各系数直接代入求根公式,这种解一元二次方程的方法叫做公式法. ▶拓展3

$\Delta>0$	方程有两个不等的实数根$x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$
$\Delta=0$	方程有两个相等的实数根[15]_____
$\Delta<0$	方程无实数根

2. 利用公式法解一元二次方程的一般步骤:

(1)把方程化为一般形式,确定[16]_____的值; ▶注意2

(2)求出$\Delta=b^2-4ac$的值;

(3)若$\Delta\geqslant0$,则将a,b,c的值代入[17]_____求出方程的根,若$\Delta<0$,则方程[18]_____.

知识点5　因式分解法解一元二次方程

1. 先因式分解,使一元二次方程化为两个[19]_____的形式,再使这两个一次式分别等于0,从而实现[20]_____,这种解一元二次方程的方法叫做因式分解法.

2. 适合用因式分解法求解的一元二次方程的形式: ▶注意3

(1)提取公因式法:$x^2+bx=0\xrightarrow[\text{公因式 }x]{\text{提取}}x(x+b)=0$;

(2)公式法:$x^2-k^2=0\xrightarrow{\text{平方差公式}}(x+k)(x-k)=0$;

(3)十字相乘法:$x^2-(p+q)x+pq=0\xrightarrow[\text{因式分解}]{\text{十字相乘}}(x-p)(x-q)=0$.

知识点6　一元二次方程根与系数的关系

1. 由求根公式可得,当$\Delta\geqslant0$时,一元二次方程$ax^2+bx+c=0(a\neq0)$的两根分别为$x_1=$[21]_____,$x_2=$[22]_____,则$x_1+x_2=$[23]_____,$x_1x_2=$[24]_____.

例如:方程$x^2+px+q=0$的两根为x_1,x_2,则$x_1+x_2=$[25]_____,$x_1x_2=$[26]_____.

2. 应用 ▶注意4

(1)不解方程,求与方程根有关的代数式的值; ▶拓展4

(2)已知一个根,求另一个根以及待定系数;

(3)与根的判别式结合,考查综合问题;

(4)以x_1,x_2为根的二次项系数为1的一元二次方程为$x^2-(x_1+x_2)x+x_1x_2=0$.

敲黑板　划重点

对点例　判断一元二次方程$x^2+\sqrt{3}x-1=0$根的情况.

【解】方程$x^2+\sqrt{3}x-1=0$中,$a=1,b=\sqrt{3},c=-1$,

可得$\Delta=(\sqrt{3})^2-4\times1\times(-1)=7>0$,

所以方程有两个不等的实数根.

拓展3　公式法、配方法、直接开平方法的关系

$ax^2+bx+c=0(a\neq0)\xrightarrow{\text{配方}}\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2=\dfrac{b^2-4ac}{4a^2}\xrightarrow{\text{直接开平方}}x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$(求根公式)

注意2　将方程化为一般形式后,要注意各项系数的符号. 例如解方程$10x-15=x^2+2x$时,先化为一般形式得到$x^2-8x+15=0$,再将$a=1,b=-8,c=15$代入求根公式即可.

注意3　切记方程两边不要随意约去含未知数的代数式

如$x(x-1)=x$,若约去x,则会导致丢掉$x=0$这个根,应先移项,提公因式x化为$x(x-1-1)=0$,即$x=0$或$x-1-1=0$,解得$x_1=0$,$x_2=2$.

注意4　根与系数关系的使用前提

一元二次方程有根,即注意$\Delta=b^2-4ac\geqslant0$且$a\neq0$.

拓展4　利用方程根与系数的关系解题的关键在于将代数式化为x_1+x_2,x_1x_2的形式,常用变形如下:

(1)$x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2$;

(2)$\dfrac{1}{x_1}+\dfrac{1}{x_2}=\dfrac{x_1+x_2}{x_1x_2}$;

(3)$|x_1-x_2|=\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}$;

(4)$\dfrac{x_2}{x_1}+\dfrac{x_1}{x_2}=\dfrac{(x_1+x_2)^2-2x_1x_2}{x_1x_2}$.

答案

1 平方根的意义 2 $\sqrt{p}$ 3 $-\sqrt{p}$ 4 0 5 无实数根 6 完全平方 7 $ax^2+bx=-c$ 8 $x^2+\frac{b}{a}x=-\frac{c}{a}$ 9 $x^2+\frac{b}{a}x+\left(\frac{b}{2a}\right)^2=-\frac{c}{a}+\left(\frac{b}{2a}\right)^2$ 10 $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2}$ 11 b^2-4ac 12 Δ 13 $\Delta=b^2-4ac$ 14 $x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ 15 $x_1=x_2=-\frac{b}{2a}$ 16 a,b,c 17 求根公式 $x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ 18 无实数根 19 一次式的乘积等于 0 20 等于 0 21 降次 22 $\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ 23 $\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ 24 $-\frac{b}{a}$ 25 $\frac{c}{a}$ 26 $-p$ 27 q

题型过关 全提升

题型 1 一元二次方程根的判别式的应用

例题 1 关于 x 的一元二次方程 $x^2+8x+q=0$ 有两个不等的实数根，则 q 的取值范围是 （　　）

A. $q<16$　　B. $q>16$　　C. $q\leqslant 4$　　D. $q\geqslant 4$

【分析】

$\Delta>0$	一元二次方程有两个不等的实数根
$\Delta=0$	一元二次方程有两个相等的实数根
$\Delta<0$	一元二次方程无实数根

【解析】∵ 关于 x 的一元二次方程 $x^2+8x+q=0$ 有两个不等的实数根，∴ $\Delta>0$，即 $8^2-4q>0$，∴ $q<16$，故选 A.

【答案】A

变式练 刷重点

变式练 1 方程 $2x^2-5x+3=0$ 的根的情况是 （　　）

A. 有两个相等的实数根

B. 有两个不等的实数根

C. 无实数根

D. 两根异号

答案见 P6

题型 2 一元二次方程的根与系数的关系的应用

例题 2 已知关于 x 的一元二次方程 $x^2-(2k-1)x+k^2+k-1=0$ 有实数根.

(1) 求 k 的取值范围；

(2) 若此方程的两实数根 x_1,x_2 满足 $x_1^2+x_2^2=11$，求 k 的值.

【分析】(1) 根据方程有实数根时 $\Delta\geqslant 0$，即 $[-(2k-1)]^2-4\times1\times(k^2+k-1)\geqslant 0$，解这个不等式，即可求得 k 的取值范围；

(2) 利用根与系数的关系可以将 x_1+x_2 和 x_1x_2 分别用 k 的代数式表示出来，再由 $x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2$，代入可得到关于 k 的方程，解方程求得 k 的值，注意利用根的判别式进行取舍.

【解】(1) ∵ 关于 x 的一元二次方程 $x^2-(2k-1)x+k^2+k-1=0$ 有实数根，∴ $\Delta\geqslant 0$，即 $[-(2k-1)]^2-4\times1\times(k^2+k-1)=-8k+5\geqslant 0$，解得 $k\leqslant\frac{5}{8}$.

(2) 由根与系数的关系可得 $x_1+x_2=2k-1$，$x_1x_2=k^2+k-1$，∴ $x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2=(2k-1)^2-2(k^2+k-1)=2k^2-6k+3$. ∵ $x_1^2+x_2^2=11$，∴ $2k^2-6k+3=11$，解得 $k=4$ 或 $k=-1$，∵ $k\leqslant\frac{5}{8}$，∴ $k=4$ 不符合题意，舍去，∴ $k=-1$.

变式练 2 已知关于 x 的方程 $x^2+ax+a-2=0$.

(1) 若该方程的一个根为 1，求 a 的值及另一个根.

(2) 求证：不论 a 为何值，方程总有两个不相等的实数根.

答案见 P6

题型3 配方法的应用

配方法除了在解一元二次方程中的应用外，还可以用来：①解特殊的二元二次方程，需要配成完全平方式后，利用非负数的性质：若两个非负数的和为0，则它们都为0，来求解计算. 通常在解出字母的值后，与代数式的化简、判断三角形的形状等综合应用. ②求二次三项式的最值，需要将二次三项式配方，利用完全平方式的非负性求最值.

例题3 我们知道：$x^2-6x=x^2-6x+9-9=(x-3)^2-9$；$-x^2+10x=-(x^2-10x+25)+25=-(x-5)^2+25$，这种方法称为配方法，利用配方法解以下各题：

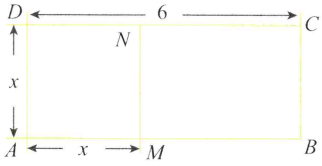
(1)按上面材料提示的方法填空：

$a^2-4a=$_____$=$_____；

$-a^2+12a=$_____$=$_____.

(2)探究：当 a 取不同的实数时，在得到的代数式 a^2-4a 的值中是否存在最小值？请说明理由.

(3)应用：如图，已知线段 $AB=6$，M 是 AB 上的一个动点，设 $AM=x$，以 AM 为一边作正方形 $AMND$，再以 MB，MN 为一组邻边作长方形 $MBCN$. 问：当点 M 在 AB 上运动时，长方形 $MBCN$ 的面积是否存在最大值？若存在，请求出这个最大值，否则请说明理由.



【分析】(1)原式配方即可得到结果；(2)利用非负数的性质确定出结果即可；(3)根据题意列出 S 与 x 的关系式，配方后利用非负数的性质即可得到结果.

【解】(1)$a^2-4a+4-4$　$(a-2)^2-4$　$-(a^2-12a+36)+36$　$-(a-6)^2+36$

(2)$\because a^2-4a=a^2-4a+4-4=(a-2)^2-4$，且$(a-2)^2\geqslant 0$，$\therefore (a-2)^2-4\geqslant -4$，$\therefore$ 当 $a=2$ 时，代数式 a^2-4a 存在最小值 -4.

(3)存在. 设长方形 $MBCN$ 的面积为 S. 根据题意，得 $S=x(6-x)=-x^2+6x=-(x-3)^2+9\leqslant 9$，则当 $x=3$ 时，S 存在最大值，且最大值为9.

变式练 刷重点

变式练3 阅读：代数式 x^2+2x+3 可以转化为 $(x+m)^2+k$ 的形式(其中 m，k 为常数)，如：

x^2+2x+3

$=x^2+2x+1-1+3$

$=(x^2+2x+1)-1+3$

$=(x+1)^2+2$.

(1)仿照此法将代数式 $x^2+6x+15$ 化为 $(x+m)^2+k$ 的形式；

(2)若代数式 x^2-6x+a 可化为 $(x-b)^2-1$ 的形式，求 $b-a$ 的值.

答案见本页

变式练答案

1. B 【解析】因为 $\Delta=(-5)^2-4\times 2\times 3=1>0$，所以方程 $2x^2-5x+3=0$ 有两个不等的实数根，故选B.

2. (1)【解】设方程的另一个根为 x_2.

根据题意则有 $1+x_2=-a$，$1\cdot x_2=a-2$，

$\therefore 1+a-2=-a$，

解得 $a=\frac{1}{2}$，$\therefore x_2=-\frac{3}{2}$.

(2)【证明】$\Delta=a^2-4(a-2)=a^2-4a+8=(a-2)^2+4$，

$\because (a-2)^2\geqslant 0$，$\therefore (a-2)^2+4>0$，即 $\Delta>0$ 恒成立，

$\therefore$ 不论 a 为何值，方程总有两个不相等的实数根.

3. 【解】(1)$x^2+6x+15$

$=x^2+6x+9-9+15$

$=(x^2+6x+9)-9+15$

$=(x+3)^2+6$.

(2)$\because x^2-6x+a$

$=x^2-6x+9-9+a$

$=(x-3)^2+a-9$

$=(x-b)^2-1$，

$\therefore b=3$，$a-9=-1$，$\therefore a=8$，$b=3$，

$\therefore b-a=3-8=-5$.

21.3 实际问题与一元二次方程

知识过关 全理解

知识点1 实际问题中常见的数量关系及表示方法

1. 平均增长(降低)率问题:

设基数为 a,平均增长率为 x,第1次增长后的数量为 $a(1+x)$,第2次增长后的数量为 $a(1+x)^2$,则第 n 次增长后的数量为 $a(1+x)^n$;

平均降低率为 y,则第 n 次降低后的数量为 $a(1-y)^n$. ▶说明1

2. 销售利润问题:

(1)利润 = 售价 − 进价;

(2)利润率 $=\frac{\text{利润}}{\text{进价}}\times100\%=\frac{\text{售价}-\text{进价}}{\text{进价}}\times100\%$;

(3)售价 = 进价 × (1 + 利润率);

(4)总利润 = 每件商品的利润 × 销售量 = 总收入 − 总支出.

3. 几何问题:

(1)面积公式:$S_{长方形}=ab$,$S_{正方形}=a^2$,$S_{圆}=\pi r^2$,$S_{三角形}=\frac{1}{2}ah$;▶说明2

(2)体积公式:$V_{长方体}=abh$,$V_{正方体}=a^3$,$S_{圆柱}=\pi R^2h$,$V_{圆锥}=\frac{1}{3}\pi R^2h$. ▶说明3

4. 传播问题:

传染源 + 第一轮被传染的 + 第二轮被传染的 = 二轮传染后被传染的总数.

5. 计数问题:

若参赛队伍数为 n,则单循环赛中每队比赛场数为 $(n-1)$ 场,比赛总场数为 $\frac{n(n-1)}{2}$ 场. 双循环赛中每队比赛场数为 $2(n-1)$ 场,比赛总场数为 $n(n-1)$ 场.

6. 数字问题: ▶注意1

两位数	十位数字	个位数字
$10x+y$	x	y

三位数	百位数字	十位数字	个位数字
$100a+10b+c$	a	b	c

7. 存款利息问题:

本息和 = 本金 + 利息;利息 = 本金 × 利率 × 存期.

8. 工程(行程)问题:

工作量 = 工作效率 × 工作时间;路程 = 速度 × 时间.

知识点2 列一元二次方程解应用题的一般步骤

简单地可分为:审、设、列、解、验、答等六个步骤.

(1)**审**:认真审题,分析题意,明确已知量、未知量及它们之间的关系;

(2)**设**:用字母(如 x)表示题目中的一个未知数;▶注意2

(3)**列**:根据等量关系,列出所需的代数式,进而列出方程;▶注意3

(4)**解**:解方程,求出未知数的值;

(5)**验**:检验方程的解是否符合实际意义,不符合实际的舍去;▶注意4

(6)**答**:写出答案(包括单位名称).

敲黑板 划重点

说明1 增长(降低)率 $=\left|\frac{\text{实际数}-\text{基数}}{\text{基数}}\right|\times100\%$.

说明2 (1)a,b 分别为长方形的长、宽;
(2)a 为正方形的边长;
(3)r 为圆的半径;
(4)a 为三角形的一边长,h 为边长为 a 的边上的高.

说明3 (1)a,b,h 分别为长方体的长、宽、高;
(2)a 为正方体的棱长;
(3)R 为底面圆的半径,h 为圆柱的高;
(4)R 为底面圆的半径,h 为圆锥的高.

注意1 表示数时用十进制;注意区分数与数字的关系,如 $87=10\times8+7$,切记 $10x+y\neq x\times y$.

注意2 设未知数时,必须写清单位,正确使用单位.

注意3 单位一致性
列方程时,方程两边各个代数式的单位必须一致,写答案时必须写上单位.

注意4 验根
一定要检验根是否符合实际意义.

题型过关 全提升

题型 1　列一元二次方程解决有关平均变化率的问题

设变化前的量为 a，变化后的量为 b，平均变化率为 x，则经过两次变化后的数量关系为 $a\times(1\pm x)^2=b$.

例题 1　某年锡东新城某楼盘以每平方米 8 000 元的均价对外销售. 由于受周边地区及炒房的影响，锡东新城的房价在两年内疯涨，至第 3 年该楼盘的均价为每平方米 11 520 元. 设每年的增长率相同.

(1)求平均每年增长的百分率；

(2)假设第 4 年该楼盘的均价仍然增长相同的百分率，李老师准备在第 4 年底购买一套 100 平方米的住房，他持有现金 80 万元，可在银行贷款 50 万元，李老师的愿望能否实现？(房价按照均价计算，不考虑其他因素)

【分析】若平均每年的增长率为 x，则列表如下：

年份	第 1 年	第 2 年	第 3 年	第 4 年
均价(元/平方米)	8 000	$8\,000(1+x)$	$8\,000(1+x)^2$	$11\,520(1+x)$

【解】(1)设所求的增长率为 x，依据题意可得

$8\,000(1+x)^2=11\,520$，

解得 $x_1=0.2=20\%$，$x_2=-2.2$(不合题意，舍去).

$\therefore x=20\%$. $\therefore$ 平均每年增长的百分率为 20%.

(2)依据题意可得 $100\times11\,520\times(1+20\%)=138.24$(万元).

$\because 130<138.24$，

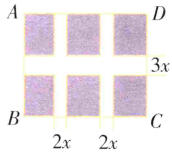
$\therefore$ 李老师的愿望无法实现.

【点拨】平均变化率问题在现实生活中也有许多原型，如经济增长率、人口增长率等，解决方法相同，重点是理解题意，找准等量关系.

题型 2　列一元二次方程解决有关面积的问题

找面积问题的等量关系的方法：(1)直接利用相应图形的面积公式列方程；(2)利用割补法将不规则图形转化为规则图形，找出各部分面积之间的关系，运用面积公式列出方程.

例题 2　如图，某小区规划在一块长 40 米，宽 36 米的矩形场地 $ABCD$ 上修建横、纵道路宽为 3∶2 的三条道路，其中两条与 AB 平行，另一条与 AD 平行，其余部分种草，若每一块草坪的面积都为 198 平方米，求道路的宽度.



【解】设横、纵道路的宽分别为 $3x$ 米、$2x$ 米，则每块草坪的相邻两边的长度分别为 $\frac{1}{3}(40-2\times2x)$ 米、$\frac{1}{2}(36-3x)$ 米.

变式练　刷重点

变式练 1　某中学响应习总书记“足球进校园”的号召，开设了“足球大课间”活动，现需要购进 100 个某品牌的足球供学生使用. 经调查，该品牌足球两年前单价为 200 元，今年单价为 162 元.

(1)求两年前到今年该品牌足球单价平均每年降低的百分率；

(2)选购期间发现该品牌足球在两个文体用品商场有不同的促销方案：

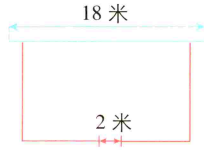
A 商场：买十送一；

B 商场：全场九折.

试问去哪个商场购买足球更优惠？

答案见 P12

变式练 2　如图，若要建一个长方形鸡圈，鸡圈的一边靠墙，墙对面有一扇 2 米宽的门，另三边用竹篱笆围成，篱笆总长 33 米.



(1)若墙长为 18 米，要使围成鸡圈的面积为 150 平方米，则鸡圈的长和宽各为多少米？

(2)鸡圈的面积可能达到 200 平方米吗？

答案见 P12

根据题意得$\frac{1}{3}(40-2\times2x)\times\frac{1}{2}(36-3x)=198$.

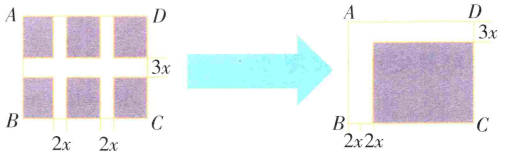
整理得$x^2-22x+21=0$.

解得$x_1=1$,$x_2=21$(不合题意,舍去).

∴ $3x=3$,$2x=2$.

∴ 横、纵道路的宽分别为3米和2米.

【点拨】也可将道路平移至一起进行计算,示意图如下:



题型3 列一元二次方程解决有关销售利润问题

这类题目一般是定价影响销量,进而影响总利润.利润=(单价-成本)×销量,注意:单价和销量均为变化量.

例题3 一商店销售某种商品,平均每天可售出20件,每件盈利40元.为了扩大销售、增加盈利,该店采取了降价措施,在每件盈利不少于25元的前提下,经过一段时间销售,发现销售单价每降低1元,平均每天可多售出2件.

(1)若降价3元,则平均每天销售数量为_____件.

(2)当每件商品降价多少元时,该商店每天销售利润为1 200元?

【解】(1)$20+3\times2=26$(件),故平均每天销售数量为26件.

(2)设每件商品降价x元,则每件盈利$(40-x)$元,平均每天销售数量为$(20+2x)$件.

由题意,得$(40-x)(20+2x)=1\ 200$.

整理,得$x^2-30x+200=0$.

解得$x_1=10$,$x_2=20$.

当$x=10$时,$40-x=40-10=30>25$;

当$x=20$时,$40-x=40-20=20<25$,不符合题意,舍去.

答:当每件商品降价10元时,该商店每天销售利润为1 200元.

变式练 刷重点

变式练3 商场某种商品平均每天可销售30件,每件盈利50元,为了尽快减少库存,商场决定采取适当的降价措施,经调查发现,每件商品每降价1元,商场每天可多售出2件,设每件商品降低x元.据此规律,请回答:

(1)商场日销售量增加_____件,每件商品盈利_____元(用含x的代数式表示).

(2)在上述条件不变,销售正常的情况下,每件商品降价多少元时,商场日盈利可达到2 100元?

答案见P12

创新过关 提素养

题型4 一元二次方程与动点的综合应用

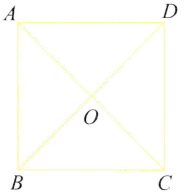
图形中的动点问题是中考的热点考题之一.▶说明4

解决这类问题的关键,是在点的运动变化过程中,找出相应线段的长度与变量之间的关系,并用变量表示出来,最后利用面积公式、勾股定理等列方程求解.

变式练 刷重点

说明4 常以特殊图形为背景,考查点在运动过程中形成新的特殊图形所满足的要求,往往要应用一元二次方程来解决.

例题 4　在正方形 $ABCD$ 中，$AB=6$，连接 AC,BD，P 是正方形边上或对角线上一点，若 $PD=2AP$，求 AP 的长.



【分析】根据正方形的性质得出 $AC\perp BD$，$AC=BD$，$OB=OA=OC=OD$，$AB=BC=AD=CD=6$，$\angle ABC=90°$，根据勾股定理求出 AC,BD 的长，可得出 OA,OB,OC,OD 的长，分析出符合的几种情况，根据勾股定理求出即可.

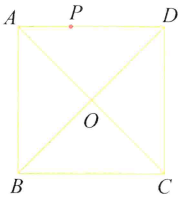
【解】∵ 四边形 $ABCD$ 是正方形，$AB=6$，

∴ $AC\perp BD$，$AC=BD$，$OB=OA=OC=OD$，$AB=BC=AD=CD=6$，$\angle ABC=\angle DAB=90°$.

在 Rt△ABC 中，由勾股定理得 $AC=\sqrt{AB^2+BC^2}=\sqrt{6^2+6^2}=6\sqrt{2}$，

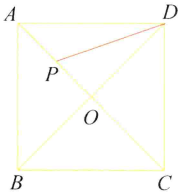
∴ $OA=OB=OC=OD=3\sqrt{2}$.

有 6 种情况：①当点 P 在 AD 上时，



∵ $AD=6$，$PD=2AP$，∴ $AP=2$.

②当点 P 在 AC 上时，



设 $AP=x$，则 $DP=2x$.

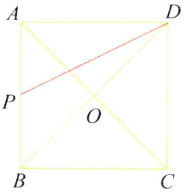
在 Rt△DPO 中，由勾股定理得 $DP^2=DO^2+OP^2$，

即 $(2x)^2=(3\sqrt{2})^2+(3\sqrt{2}-x)^2$，

解得 $x_1=\sqrt{14}-\sqrt{2}$，$x_2=-\sqrt{14}-\sqrt{2}$（舍去），

即 $AP=\sqrt{14}-\sqrt{2}$.

③当点 P 在 AB 上时，



设 $AP=y$，则 $DP=2y$.

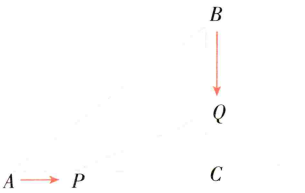
在 Rt△APD 中，由勾股定理得 $AP^2+AD^2=DP^2$，

即 $y^2+6^2=(2y)^2$，

解得 $y_1=2\sqrt{3}$，$y_2=-2\sqrt{3}$（舍去），

变式练　刷重点

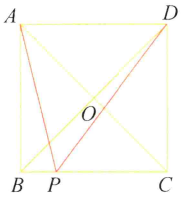
变式练 4　如图，△ABC 中，$\angle C=90°$，$AB=10$ cm，$AC=8$ cm，点 P 从点 A 开始出发向点 C 以 2 cm/s 的速度移动，点 Q 从点 B 出发向点 C 以 1 cm/s 的速度移动，若 P,Q 分别同时从 A,B 出发，_____s 后四边形 $APQB$ 的面积是△ABC 面积的 $\frac{2}{3}$.



答案见 P12

即 $AP=2\sqrt{3}$.

④当点 P 在 BC 上时，设 $BP=z$.



$\because DP=2AP$,

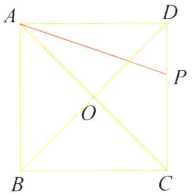
$\therefore \sqrt{6^2+(6-z)^2}=2\sqrt{6^2+z^2}$,

即 $z^2+4z+24=0$,

$\because \Delta=4^2-4\times1\times24<0$,$\therefore$ 此方程无解.

即当点 P 在 BC 上时，不能使 $DP=2AP$.

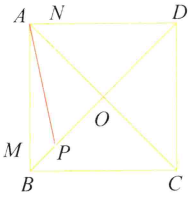
⑤当点 P 在 DC 上时，



$\because \angle ADC=90°$,$\therefore AP>DP$.

即当点 P 在 DC 上时，不能使 $DP=2AP$.

⑥当点 P 在 BD 上时，



过 P 作 $PN\perp AD$ 于 N，$PM\perp AB$ 于 M.

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是正方形，

$\therefore \angle DAB=\angle ANP=\angle AMP=90°$,

$\therefore$ 四边形 $ANPM$ 是矩形，

$\therefore AM=PN$,$AN=PM$.

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是正方形，$\therefore \angle ABD=45°$.

$\because \angle PMB=90°$,

$\therefore \angle MBP=\angle MPB=45°$,

$\therefore BM=PM=AN$,

同理 $DN=PN=AM$.

设 $PM=BM=AN=t$，则 $PN=DN=AM=6-t$,

$\because DP=2AP$,

$\therefore$ 由勾股定理得 $\sqrt{(6-t)^2+(6-t)^2}=2\sqrt{t^2+(6-t)^2}$,

即 $t^2-4t+12=0$,

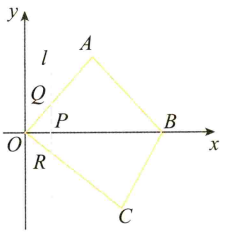
$\because \Delta=(-4)^2-4\times1\times12<0$,$\therefore$ 此方程无解.

即当点 P 在 BD 上时，不能使 $DP=2AP$.

综上所述，AP 的长为 2 或 $\sqrt{14}-\sqrt{2}$ 或 $2\sqrt{3}$.

变式练 刷重点

变式练 5 如图，在平面直角坐标系中，四边形 $OABC$ 的顶点 O 是坐标原点，点 A 在第一象限，点 C 在第四象限，点 B 在 x 轴的正半轴上. $\angle OAB=90°$ 且 $OA=AB$，OB，OC 的长分别是一元二次方程 $x^2-11x+30=0$ 的两个根（$OB>OC$）.



(1) 求点 A 和点 B 的坐标.

(2) 点 P 是线段 OB 上的一个动点（点 P 不与点 O，B 重合），过点 P 的直线 l 与 y 轴平行，直线 l 交边 OA 或边 AB 于点 Q，交边 OC 或边 BC 于点 R. 设点 P 的横坐标为 t，线段 QR 的长度为 m. 已知 $t=4$ 时，直线 l 恰好过点 C. 当 $0<t<3$ 时，求 m 关于 t 的函数解析式.

(3) 当 $m=3.5$ 时，请写出点 P 的坐标.

答案见 P12

变式练答案

1.【解】(1)设两年前到今年该品牌足球单价平均每年降低的百分率为 x.

根据题意得 $200\times(1-x)^2=162$,

解得 $x_1=0.1=10\%$,$x_2=1.9$(不合题意,舍去).

所以两年前到今年该品牌足球单价平均每年降低的百分率为 10%.

(2)由题知,在 A 商场购买只需付 91 个足球的钱,所以在 A 商场需要的费用为 $162\times91=14\,742$(元);

在 B 商场需要的费用为 $162\times100\times\frac{9}{10}=14\,580$(元).

$14\,742>14\,580$.

所以去 B 商场购买足球更优惠.

2.【解】(1)设鸡圈宽为 x 米,则由题意,得

$x(33-2x+2)=150$.

解得 $x_1=10$,$x_2=\frac{15}{2}$(不合题意,舍去),

且 $33-2x+2=15$.

所以鸡圈的长为 15 米,宽为 10 米.

(2)设鸡圈的面积为 w 平方米.

则由题意得 $w=x(33-2x+2)$,

令 $w=200$,可得 $x(33-2x+2)=200$,

变形为 $2x^2-35x+200=0$,根的判别式 $\Delta=-375<0$,

所以方程无解,即鸡圈的面积不可能达到 200 平方米.

3. $2x$　$50-x$　**【解析】**(1)每降价 1 元,可多售出 2 件,降价 x 元,可多售出 $2x$ 件,每件商品盈利 $(50-x)$ 元.

(2)**【解】**由题意得 $(50-x)(30+2x)=2\,100$,

化简得 $x^2-35x+300=0$,解得 $x_1=15$,$x_2=20$.

由于该商场为了尽快减少库存,因此降价越多,越吸引顾客,故每件商品降价 20 元时,商场日盈利可达 2 100 元.

4. 2　**【解析】**∵ 在 $\triangle ABC$ 中,$\angle C=90^\circ$,

∴ $\triangle ABC$ 是直角三角形.

由勾股定理,得 $BC=\sqrt{10^2-8^2}=6$.

设 t s 后四边形 $APQB$ 的面积是 $\triangle ABC$ 面积的 $\frac{2}{3}$,

则 t s 后,$CQ=BC-BQ=6-t$,$PC=AC-AP=8-2t$.

根据题意,知 t s 后 $S_{\triangle PCQ}=\frac{1}{3}S_{\triangle ABC}$,

∴ $\frac{1}{2}CQ\cdot PC=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}AC\cdot BC$,

即 $(6-t)(8-2t)=\frac{1}{3}\times8\times6$,解得 $t_1=2$,$t_2=8$(舍去).

故 2 s 后四边形 $APQB$ 的面积是 $\triangle ABC$ 面积的 $\frac{2}{3}$.

5.【解】(1)∵ 方程 $x^2-11x+30=0$ 的解为 $x_1=5$,$x_2=6$.

∵ $OB>OC$,∴ $OB=6$,$OC=5$,

∴ 点 B 的坐标为 $(6,0)$.

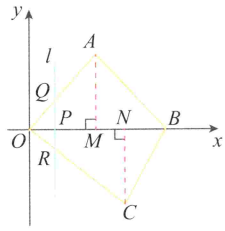
过点 A 作 $AM\perp x$ 轴于 M,如图.

∵ $\angle OAB=90^\circ$ 且 $OA=AB$,

∴ $\triangle AOB$ 为等腰直角三角形,

∴ $OM=BM=AM=\frac{1}{2}OB=3$,

∴ 点 A 的坐标为 $(3,3)$.



(2)过点 C 作 $CN\perp x$ 轴于 N,如图.

∵ 当 $t=4$ 时,直线 l 恰好过点 C,∴ $ON=4$.

在 $\mathrm{Rt}\triangle OCN$ 中,$CN=\sqrt{OC^2-ON^2}=\sqrt{5^2-4^2}=3$,

∴ 点 C 的坐标为 $(4,-3)$.

设直线 OC 的解析式为 $y=kx$.

把 $C(4,-3)$ 代入得 $4k=-3$,解得 $k=-\frac{3}{4}$.

∴ 直线 OC 的解析式为 $y=-\frac{3}{4}x$.

设直线 OA 的解析式为 $y=ax$.

把 $A(3,3)$ 代入得 $3a=3$,解得 $a=1$.

∴ 直线 OA 的解析式为 $y=x$.

∵ $P(t,0)$ $(0<t<3)$,

∴ $Q(t,t)$,$R\left(t,-\frac{3}{4}t\right)$,

∴ $QR=t-\left(-\frac{3}{4}t\right)=\frac{7}{4}t$,即 $m=\frac{7}{4}t\ (0<t<3)$.

(3)设直线 AB 的解析式为 $y=px+q$,

把 $A(3,3)$,$B(6,0)$ 代入得 $\begin{cases}3p+q=3,\\6p+q=0,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}p=-1,\\q=6,\end{cases}$

∴ 直线 AB 的解析式为 $y=-x+6$.

同理可得直线 BC 的解析式为 $y=\frac{3}{2}x-9$.

当 $0<t<3$ 时,$m=\frac{7}{4}t$,若 $m=3.5$,则 $\frac{7}{4}t=3.5$,解得 $t=2$,此时点 P 的坐标为 $(2,0)$;

当 $3\leqslant t<4$ 时,$Q(t,-t+6)$,$R\left(t,-\frac{3}{4}t\right)$,

∴ $m=-t+6-\left(-\frac{3}{4}t\right)=-\frac{1}{4}t+6$,若 $m=3.5$,则 $-\frac{1}{4}t+6=3.5$,解得 $t=10$(不符合题意,舍去);

当 $4\leqslant t<6$ 时,$Q(t,-t+6)$,$R\left(t,\frac{3}{2}t-9\right)$,

∴ $m=-t+6-\left(\frac{3}{2}t-9\right)=-\frac{5}{2}t+15$,若 $m=3.5$,则 $-\frac{5}{2}t+15=3.5$,解得 $t=\frac{23}{5}$,此时点 P 的坐标为 $\left(\frac{23}{5},0\right)$.

综上所述,满足条件的点 P 坐标为 $(2,0)$ 或 $\left(\frac{23}{5},0\right)$.

第二十二章 二次函数



22.1 二次函数的图象和性质

知识过关 全理解

知识点1 二次函数的概念

1. 一般地，形如1_____的函数，叫做二次函数. 其中，2____是自变量，二次函数的二次项系数、一次项系数是3____，常数项是4____. 自变量的取值范围是5_____. ▶注意1

$y=-\frac{1}{3}x^2+2$（二次项，二次项系数为$-\frac{1}{3}$；一次项，一次项系数为+2）

2. 二次函数必须同时满足三个条件：(1)函数解析式为整式；(2)化简后自变量最高次数是2；(3)二次项系数不为0.

知识点2 二次函数几种特殊形式的图象和性质

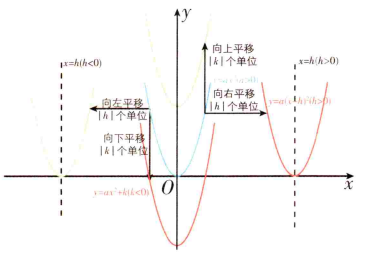
1. 二次函数的图象和性质▶图示

函数形式	顶点坐标	对称轴	最值	开口、单调性
$y=ax^2$	$(0,0)$	y轴	$a>0$时，$x=0$时，$y_{最小值}=0$；$a<0$时，$x=0$时，$y_{最大值}=0$	$a>0$时，抛物线开口向6____；x在对称轴7____侧时，y随x的增大而增大；x在对称轴8____侧时，y随x的增大而减小；$a<0$时，抛物线开口向9____；x在对称轴10____侧时，y随x的增大而增大；x在对称轴11____侧时，y随x的增大而减小
$y=ax^2+k$	$(0,k)$	y轴	$a>0$时，$x=0$时，$y_{最小值}=k$；$a<0$时，$x=0$时，$y_{最大值}=k$	
$y=a(x-h)^2$	$(h,0)$	$x=h$	$a>0$时，$x=h$时，$y_{最小值}=0$；$a<0$时，$x=h$时，$y_{最大值}=0$	
$y=a(x-h)^2+k$	(h,k)	$x=h$	$a>0$时，$x=h$时，$y_{最小值}=k$；$a<0$时，$x=h$时，$y_{最大值}=k$	

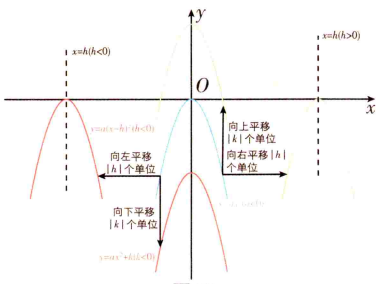
敲黑板 划重点

注意1 (1)若$y=ax^2+bx+c$为二次函数，则$a\neq0$(b,c可同时为0)；(2)若$y=ax^2+bx+c$为一次函数，则$a=0$且$b\neq0$；(3)二次项系数、一次项系数、常数项均包括前面的符号.

图示 二次函数的图象及平移

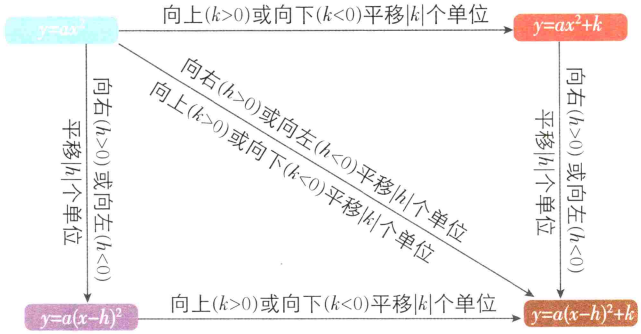


图(1)



图(2)

2. 几种二次函数图象间的平移规律 ▶注意 2



例如：$y=2(x-5)^2+3$ 的图象是由 $y=2x^2$ 的图象先向上平移 3 个单位长度得到 $y=2x^2+3$ 的图象，再向右平移 5 个单位长度得到的. 反之，由 $y=2(x-5)^2+3$ 的图象先向下平移 3 个单位长度得到 $y=2(x-5)^2$ 的图象，再向左平移 5 个单位长度得到 $y=2x^2$ 的图象.

3. 二次函数图象的确定——描点作图法

(1) 首先确定开口方向、对称轴和顶点坐标.

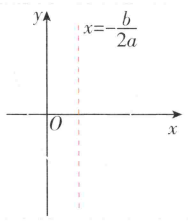
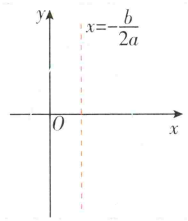
(2) 在对称轴两侧对称取点，列表、描点、平滑连线即可得到二次函数的近似部分图象.

知识点 3　二次函数 $y=ax^2+bx+c$ $(a\neq0)$ 的图象和性质

1. 一般式与顶点式的转化 ▶注意 3

利用配方法，可以将二次函数的一般式 $y=ax^2+bx+c(a\neq0)$ 转化成顶点形式 12 _____，其中 $h=$ 13 _____，$k=$ 14 _____，所以二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的对称轴是直线 15 _____，顶点坐标为 16 _____.

2. 二次函数 $y=ax^2+bx+c(a\neq0)$ 的图象和性质 ▶拓展 1

a 的符号	$a>0$	$a<0$
函数图象		
开口方向	17 _____	18 _____
对称轴	19 _____	
顶点坐标	20 _____	
增减性	在对称轴 21 _____ 侧时，y 随着 x 的增大而增大；在对称轴 22 _____ 侧时，y 随着 x 的增大而减小	在对称轴 23 _____ 侧时，y 随着 x 的增大而增大；在对称轴 24 _____ 侧时，y 随着 x 的增大而减小
最值	当 25 _____ 时，$y_{最小值}=\dfrac{4ac-b^2}{4a}$	当 26 _____ 时，$y_{最大值}=\dfrac{4ac-b^2}{4a}$

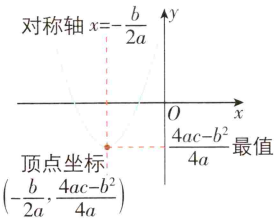
敲黑板　划重点

注意 2　平移规律易混点

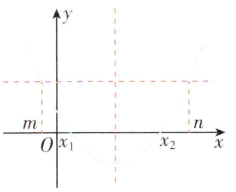
区分 $|h|$ 个单位和自变量加减 h，牢记“上加下减”常数项，“左加右减”自变量.

注意 3　顶点坐标的确定

顶点的横坐标在对称轴所在的直线上，顶点的纵坐标为该函数的最值.



拓展 1　抛物线的对称性



(1) 如果抛物线上 $x=m$ 与 $x=n$ 两点对应的函数值相等，根据抛物线的对称性知，其对称轴为直线 $x=\dfrac{m+n}{2}$.

(2) 如果抛物线与 x 轴的交点为 $(x_1,0)$，$(x_2,0)$，根据抛物线的对称性知，其对称轴为直线 $x=\dfrac{x_1+x_2}{2}$.

3. 二次函数 $y=ax^2+bx+c(a\neq0)$ 的图象特征与 a,b,c,b^2-4ac 的符号关系 ▶拓展 2

代数式(决定因素)	图象特征	符号判定
a(开口方向)	抛物线开口向上	$a>0$
	抛物线开口向下	$a<0$
b(对称轴位置、a 的正负)	对称轴在 y 轴右侧,即 $x=-\frac{b}{2a}>0$	a,b 异号
	对称轴在 y 轴左侧,即 $x=-\frac{b}{2a}<0$	a,b 同号
c(抛物线与 y 轴交点位置)	交于原点	$c=0$
	交于 y 轴正半轴	$c>0$
	交于 y 轴负半轴	$c<0$
b^2-4ac(与 x 轴交点个数)	与 x 轴有两个公共点	$b^2-4ac>0$
	与 x 轴有一个公共点	$b^2-4ac=0$
	与 x 轴没有公共点	$b^2-4ac<0$

知识点 4　求二次函数的解析式

1. 待定系数法

根据已知条件的特点,选择最合适的解析式形式,再将已知点坐标代入解析式,通过解方程(组)求得未知数,即可得到函数解析式.

(1)顶点式:

已知抛物线顶点 (h,k)、对称轴或最大(小)值,可设解析式为27_____,特殊地,若抛物线顶点在原点,则 $h=k=0$,设其解析式为 $y=ax^2(a\neq0)$.

(2)交点式:

已知抛物线与 x 轴的交点坐标 $(x_1,0)(x_2,0)$,可设解析式为28_____.

(3)一般式:

已知函数图象上任意三个点的坐标(三组 x,y 的值),可设解析式为29_____.

2. 平移

将抛物线解析式化为一般式 $y=a(x-h)^2+k(a\neq0)$,再利用"左加右减,上加下减"的规律进行平移.

3. 求二次函数关于点或直线对称的解析式

若已知抛物线上点的坐标,可以使用待定系数法求其解析式. 若已知某抛物线解析式,求其关于某直线或某点对称的抛物线的解析式,常用结论如下:

(1)关于 x 轴对称的抛物线的解析式 ▶说明 1

$y=ax^2+bx+c(a\neq0)$ 关于 x 轴对称的抛物线的解析式:$y=-ax^2-bx-c$;

$y=a(x-h)^2+k(a\neq0)$ 关于 x 轴对称的抛物线的解析式:$y=-a(x-h)^2-k$.

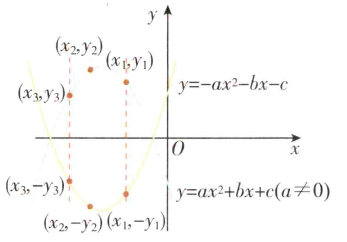
敲黑板　划重点

拓展 2　二次函数图象特殊点位置与系数 a,b,c 的关系

$a+b+c$ 的符号:
- >0(点 $(1,y)$ 在 x 轴上方,$y>0$),
- $=0$(点 $(1,y)$ 在 x 轴上,$y=0$),
- <0(点 $(1,y)$ 在 x 轴下方,$y<0$);

$a-b+c$ 的符号:
- >0(点 $(-1,y)$ 在 x 轴上方,$y>0$),
- $=0$(点 $(-1,y)$ 在 x 轴上,$y=0$),
- <0(点 $(-1,y)$ 在 x 轴下方,$y<0$).

说明 1　确定关于 x 轴对称的抛物线解析式的过程



由图可知,抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 上任意一点 (x_1,y_1) 关于 x 轴对称的点的坐标为 $(x_1,-y_1)$,因此关于 x 轴对称的两条抛物线上对应点的横坐标相同,纵坐标互为相反数,所以抛物线 $y=ax^2+bx+c(a\neq0)$ 关于 x 轴对称的抛物线为 $y=-(ax^2+bx+c)$.

（2）关于 y 轴对称的抛物线的解析式

$y=ax^2+bx+c(a\neq0)$ 关于 y 轴对称的抛物线的解析式：$y=ax^2-bx+c$；

$y=a(x-h)^2+k(a\neq0)$ 关于 y 轴对称的抛物线的解析式：$y=a(x+h)^2+k$.

（3）关于顶点对称的抛物线的解析式▶拓展 3

$y=ax^2+bx+c(a\neq0)$ 关于顶点对称的抛物线的解析式：$y=-ax^2-bx+c-\frac{b^2}{2a}$；

$y=a(x-h)^2+k(a\neq0)$ 关于顶点对称的抛物线的解析式：$y=-a(x-h)^2+k$.

敲黑板 划重点

拓展 3 关于顶点对称的对称抛物线的特殊性

（1）开口方向相反；

（2）顶点坐标相同.

答案

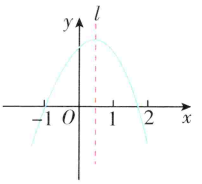
1 $y=ax^2+bx+c$（a，b，c 是常数，$a\neq0$） 2 x 3 a，b 4 c 5 全体实数 6 上 7 右 8 左 9 下 10 左 11 右 12 $y=a(x-h)^2+k$ 13 $-\frac{b}{2a}$ 14 $\frac{4ac-b^2}{4a}$ 15 $x=-\frac{b}{2a}$ 16 $\left(-\frac{b}{2a},\frac{4ac-b^2}{4a}\right)$ 17 向上 18 向下 19 直线 $x=-\frac{b}{2a}$ 20 $\left(-\frac{b}{2a},\frac{4ac-b^2}{4a}\right)$ 21 右 22 左 23 左 24 右 25 $x=-\frac{b}{2a}$ 26 $x=-\frac{b}{2a}$ 27 $y=a(x-h)^2+k(a\neq0)$ 28 $y=a(x-x_1)\cdot(x-x_2)(a\neq0)$ 29 $y=ax^2+bx+c(a\neq0)$

题型过关 全提升

题型 1 二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图象与系数 a，b，c 的关系

根据抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 判断系数 a，b，c 的关系时，通过开口方向判断 a 的正负；通过对称轴直线 $x=-\frac{b}{2a}$ 所在位置判断 ab 的正负；通过函数图象与 y 轴交点判断 c 的正负；通过函数在 $x=1$ 时的函数值判断 $a+b+c$ 的正负；通过函数在 $x=-1$ 时的函数值判断 $a-b+c$ 的正负；其他式子通过变形也可依次分析判断.

例题 1 如图，抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 经过点（-1，0），对称轴 l 如图所示，则下列结论：①$abc>0$；②$a-b+c=0$；③$2a+c<0$；④$a+b<0$. 其中所有正确的结论是（　　）



A. ①③　　B. ②③

C. ②④　　D. ②③④

【分析】已知抛物线过点（-1，0），代入可得二次函数系数满足的等式；由图可知对称轴取值范围，可得二次函数系数满足的不等式；由开口方向、对称轴的位置可知二次函数系数的正负. 将所给条件分析清楚即可判断正误.

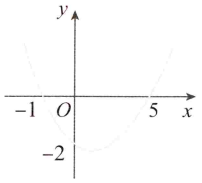
【解析】①∵ 二次函数图象的开口向下，∴ $a<0$.

∵ 二次函数图象的对称轴在 y 轴右侧，∴ $-\frac{b}{2a}>0$，∴ $b>0$.

∵ 二次函数的图象与 y 轴的交点在 y 轴的正半轴上，

变式练 刷重点

变式练 1 已知二次函数 $y=ax^2+bx+c(a\neq0)$ 的图象如图所示，则下列结论：①$ab>0$；②$a+3b+9c>0$；③$4a+b=0$；④当 $y=-2$ 时，x 的值只能为 0；⑤$3b-c<0$. 其中正确的个数是（　　）



A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

答案见 P20

$\therefore c>0$，$\therefore abc<0$，故①错误.

②$\because$ 抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 经过点 $(-1,0)$，$\therefore a-b+c=0$，故②正确.

③$\because a-b+c=0$，$\therefore b=a+c$，

由图可知，当 $x=2$ 时，$y<0$，即 $4a+2b+c<0$，

$\therefore 4a+2(a+c)+c<0$，化简得 $2a+c<0$，故③正确.

④$\because a-b+c=0$，$\therefore c=b-a$，由图可知，当 $x=2$ 时，$y<0$，

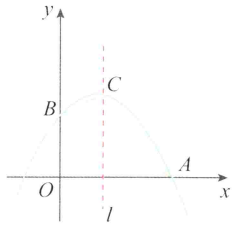
即 $4a+2b+c<0$，$\therefore 4a+2b+b-a<0$，

$\therefore 3a+3b<0$，$\therefore a+b<0$，故④正确. 故选 D.

【答案】D

题型2　用待定系数法求二次函数的解析式

例题2　抛物线 $y=-\frac{1}{3}x^2+bx+c$ 经过点 $A(3\sqrt{3},0)$ 和点 $B(0,3)$，且这个抛物线的对称轴为直线 l，顶点为 C.



(1)求抛物线的解析式；

(2)连接 AB，AC，BC，求 $\triangle ABC$ 的面积.

【分析】(1)利用待定系数法求抛物线的解析式；

(2)利用割补法求 $\triangle ABC$ 的面积.

【解】(1)$\because$ 抛物线 $y=-\frac{1}{3}x^2+bx+c$ 经过 $A(3\sqrt{3},0)$，$B(0,3)$，

$\therefore \begin{cases}-9+3\sqrt{3}b+c=0,\\ c=3,\end{cases}$ 解得 $b=\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

$\therefore$ 抛物线的解析式为 $y=-\frac{1}{3}x^2+\frac{2\sqrt{3}}{3}x+3$.

(2)由(1)可得抛物线的对称轴为直线 $x=\sqrt{3}$.

把 $x=\sqrt{3}$ 代入 $y=-\frac{1}{3}x^2+\frac{2\sqrt{3}}{3}x+3$，得 $y=4$.

则点 C 的坐标为 $(\sqrt{3},4)$.

设线段 AB 所在的直线为 $y=kx+n$.

$\because$ 线段 AB 所在的直线经过点 $A(3\sqrt{3},0)$，$B(0,3)$，

$\therefore$ 线段 AB 所在的直线的解析式为 $y=-\frac{\sqrt{3}}{3}x+3$.

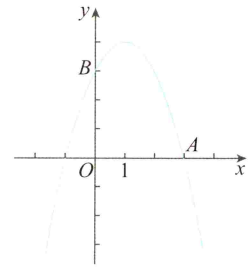
设抛物线的对称轴 l 与直线 AB 交于点 D.

$\therefore$ 设点 D 的坐标为 $(\sqrt{3},m)$.

将点 $D(\sqrt{3},m)$ 代入 $y=-\frac{\sqrt{3}}{3}x+3$，解得 $m=2$.

变式练　刷重点

变式练2　如图，抛物线 $y=-x^2+bx+c$ 经过点 $A(3,0)$ 和点 $B(0,3)$.



(1)求抛物线 $y=-x^2+bx+c$ 的解析式；

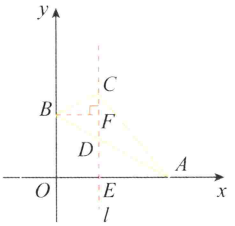
(2)若直线 $l\perp x$ 轴，在第一象限内与抛物线交于点 M，与直线 AB 交于点 N，设线段 MN 的长度为 n，请结合函数图象求出 n 的取值范围.

答案见 P20

∴ 点 D 的坐标为$(\sqrt{3},2)$,

∴ $CD=CE-DE=2$.

过点 B 作 $BF\perp l$ 于点 F.



∴ $BF=OE=\sqrt{3}$,

∵ $BF+AE=OE+AE=OA=3\sqrt{3}$,

∴ $S_{\triangle ABC}=S_{\triangle BCD}+S_{\triangle ACD}=\frac{1}{2}CD\cdot BF+\frac{1}{2}CD\cdot AE$,

∴ $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}CD\cdot(BF+AE)=\frac{1}{2}\times2\times3\sqrt{3}=3\sqrt{3}$.

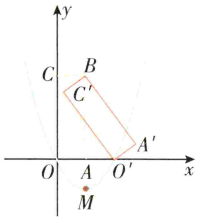
创新过关 提素养

题型 3　二次函数的综合题

变式练　刷重点

以二次函数为背景,集代数知识(如二次方程的求解等)和几何知识(如三角形的全等、图形面积的计算等)于一体的比较复杂的题目,首先需要分解题中所给信息(已知解析式求坐标,已知坐标求解析式等),然后作出草图,注重分类讨论.

例题 3　如图所示,矩形 $A'BC'O'$ 是矩形 $OABC$(边 OA 在 x 轴正半轴上,边 OC 在 y 轴正半轴上)绕点 B 逆时针旋转得到的. 点 O' 在 x 轴的正半轴上,点 B 的坐标为$(1,3)$. ▶说明 2



(1)如果二次函数 $y=ax^2+bx+c(a\neq0)$ 的图象经过 O,O' 两点,且图象顶点 M 的纵坐标为 -1,求这个二次函数的解析式.

(2)在(1)中求出的二次函数图象对称轴的右侧,是否存在点 P,使得 $\triangle POM$ 为直角三角形?若存在,求出点 P 的坐标和 $\triangle POM$ 的面积;若不存在,请说明理由.

(3)求边 $C'O'$ 所在直线的解析式.

【解】(1)如图所示,连接 BO,BO',则 $BO=BO'$.

∵ $BA\perp OO'$,∴ $AO=AO'$.

∵ $B(1,3)$,∴ $O'(2,0)$,$M(1,-1)$,

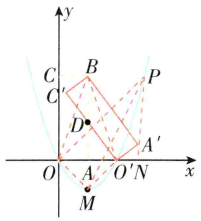
说明 2　(1)连接 BO,BO',则 $BO=BO'$,求出 O',M 点的坐标,列出方程组求出未知数的值,进而求出二次函数的解析式.

(2)设存在满足题设条件的点 $P(x,y)$,连接 OM,PM,OP,过 P 作 $PN\perp x$ 轴,求出 P 点坐标和 $\triangle POM$ 的面积.

(3)已知 $O'(2,0)$,点 D 的横坐标为 1,由相似关系求其纵坐标,用待定系数法求解析式.

$\therefore \begin{cases} 4a+2b+c=0, \\ a+b+c=-1, \\ c=0, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} a=1, \\ b=-2, \\ c=0. \end{cases}$

$\therefore$ 所求二次函数的解析式为 $y=x^2-2x$.



(2)存在点 P 使得 $\triangle POM$ 为直角三角形.

假设存在满足题设条件的点 $P(x,y)$.

连接 OM,PM,OP,过 P 作 $PN\perp x$ 轴于点 N,

①在 $\angle POM=90°$ 的情况下,

$\because M(1,-1),A(1,0),\therefore AM=OA$,

$\therefore \angle NOM=45°,\therefore \angle PON=45°$,

$\therefore ON=NP$,即 $x=y$.

$\because P(x,y)$ 在二次函数 $y=x^2-2x$ 的图象上,

$\therefore x=x^2-2x$,解得 $x=0$ 或 $x=3$.

$\because P(x,y)$ 在对称轴的右侧,$\therefore x>1,\therefore x=3,y=3$,

即 $P(3,3)$ 是所求的点.

$\therefore OP=3\sqrt{2},OM=\sqrt{2}$,

$\therefore S_{\triangle POM}=\frac{1}{2}OP\cdot OM=3$;

②连接 MO',显然 $\triangle OMO'$ 为等腰直角三角形,此时 P 与 O' 重合,且 $PM\perp OM$,

$\therefore$ 点 $O'(2,0)$ 也是满足条件的点,

$\therefore S_{\triangle POM}=\frac{1}{2}OM\cdot O'M=1$;

③显然 $\angle OPM$ 不能为 90°.

故满足条件的点是 $P(2,0)$,此时 $S_{\triangle POM}=1$ 或 $P(3,3)$,此时 $S_{\triangle POM}=3$.

(3)设 AB 与 $C'O'$ 的交点为 $D(1,y)$.

显然 $\mathrm{Rt}\triangle DAO'\backsimeq\mathrm{Rt}\triangle DC'B$,有 $DC'=DA=y,O'D=C'O'-DC'=3-y$.

在 $\mathrm{Rt}\triangle DAO'$ 中,$AO'^2+AD^2=O'D^2$,

即 $1+y^2=(3-y)^2$,

解得 $y=\frac{4}{3},\therefore D\left(1,\frac{4}{3}\right)$.

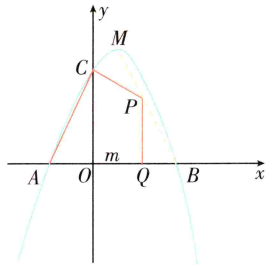
设边 $C'O'$ 所在直线的解析式为 $y=kx+b$.

则 $\begin{cases} k+b=\frac{4}{3}, \\ 2k+b=0, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} k=-\frac{4}{3}, \\ b=\frac{8}{3}. \end{cases}$

$\therefore$ 所求直线的解析式为 $y=-\frac{4}{3}x+\frac{8}{3}$.

变式练 刷重点

变式练 3 如图,已知二次函数 $y=-x^2+bx+c(c>0)$ 的图象与 x 轴交于 A,B 两点(点 A 在点 B 的左侧),与 y 轴交于点 C,且 $OB=OC=3$,顶点为 M.



(1)求二次函数的解析式;

(2)点 P 为线段 BM 上的一个动点,过点 P 作 x 轴的垂线 PQ,垂足为 Q,若 $OQ=m$,四边形 $ACPQ$ 的面积为 S,求 S 关于 m 的函数解析式,并写出 m 的取值范围;

(3)线段 BM 上是否存在点 N,使 $\triangle NMC$ 为等腰三角形?如果存在,求出点 N 的坐标;如果不存在,请说明理由.

答案见 P20

变式练答案

1. B 【解析】由图象可得，$a>0$，$b<0$，$\therefore ab<0$，故①错误；$\because -\frac{b}{2a}=\frac{-1+5}{2}=2$，$c=-2$，$\therefore b=-4a$，$c=-2$，$\therefore a+3b+9c=a+3\times(-4a)+9\times(-2)=-11a-18<0$，故②错误；$\because b=-4a$，$\therefore 4a+b=0$，故③正确；$\because$ 对称轴为直线 $x=2$，$\therefore$ 点$(0,-2)$和$(4,-2)$关于对称轴对称，$\therefore$ 当 $y=-2$ 时，x 的值为 0 或 4，故④错误；当 $x=-1$ 时，$y=a-b+c=0$，$\because b=-4a$，$\therefore a+4a+c=0$，$\therefore c=-5a$，$\therefore 3b-c=-12a+5a=-7a<0$，故⑤正确. 综上所述，可得正确的结论有 2 个. 故选 B.

2. 【解】(1)$\because$ 抛物线 $y=-x^2+bx+c$ 经过点 $A(3,0)$和点 $B(0,3)$，

$\therefore \begin{cases}-9+3b+c=0,\\ c=3,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}b=2,\\ c=3.\end{cases}$

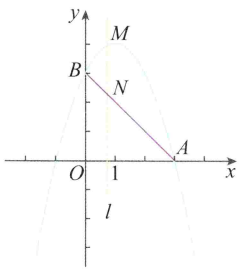
$\therefore$ 抛物线的解析式为 $y=-x^2+2x+3$.

(2)设直线 AB 的解析式为 $y=kx+3$.

把 $A(3,0)$代入，得 $3k+3=0$，解得 $k=-1$.

$\therefore$ 直线 AB 的解析式为 $y=-x+3$.

如图，设点 M 的横坐标为 m.



则点 M 的坐标为$(m,-m^2+2m+3)$，点 N 的坐标为$(m,-m+3)$.

又$\because$ 点 M,N 在第一象限，$\therefore$ 线段 MN 的长度 $n=-m^2+2m+3-(-m+3)=-m^2+3m=-\left(m-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{9}{4}$.

当 $m=\frac{3}{2}$时，n 有最大值，最大值为 $\frac{9}{4}$.

$\therefore n$ 的取值范围是 $0<n\leqslant\frac{9}{4}$.

3. 【解】(1)$\because OB=OC=3$，$\therefore B(3,0)$，$C(0,3)$.

$\therefore \begin{cases}-9+3b+c=0,\\ c=3,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}b=2,\\ c=3.\end{cases}$

$\therefore$ 二次函数的解析式为 $y=-x^2+2x+3$.

(2)$\because y=-x^2+2x+3=-(x-1)^2+4$，$\therefore M(1,4)$.

设直线 MB 的解析式为 $y=kx+n$.

则有 $\begin{cases}4=k+n,\\ 0=3k+n,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}k=-2,\\ n=6.\end{cases}$

$\therefore$ 直线 MB 的解析式为 $y=-2x+6$.

$\because PQ\perp x$ 轴，$OQ=m$，

$\therefore$ 点 P 的坐标为$(m,-2m+6)$.

令 $-x^2+2x+3=0$. 得 $x_1=-1$，$x_2=3$，

$\therefore A(-1,0)$，$OA=1$.

$S_{四边形ACPQ}=S_{\triangle AOC}+S_{梯形PQOC}$

$=\frac{1}{2}AO\cdot CO+\frac{1}{2}(PQ+CO)\cdot OQ$

$=\frac{1}{2}\times1\times3+\frac{1}{2}(-2m+6+3)\cdot m$

$=-m^2+\frac{9}{2}m+\frac{3}{2}(1\leqslant m<3)$.

(3)线段 BM 上存在点 $N\left(\frac{7}{5},\frac{16}{5}\right)$，$(2,2)$，$\left(1+\frac{\sqrt{10}}{5},4-\frac{2\sqrt{10}}{5}\right)$，使$\triangle NMC$ 为等腰三角形.

设 $N(x,-2x+6)$，则由勾股定理得，$CM=\sqrt{2}$，$CN=\sqrt{x^2+(-2x+3)^2}$，$MN=\sqrt{(x-1)^2+(-2x+2)^2}$.

①当 $CN=CM$ 时，$\sqrt{x^2+(-2x+3)^2}=\sqrt{2}$，

解得 $x_1=\frac{7}{5}$，$x_2=1$(舍去)，此时 $N\left(\frac{7}{5},\frac{16}{5}\right)$；

②当 $MN=CM$ 时，$\sqrt{(x-1)^2+(-2x+2)^2}=\sqrt{2}$，

解得 $x_1=1+\frac{\sqrt{10}}{5}$，$x_2=1-\frac{\sqrt{10}}{5}$(舍去)，

此时 $N\left(1+\frac{\sqrt{10}}{5},4-\frac{2\sqrt{10}}{5}\right)$；

③当 $CN=MN$ 时，

$\sqrt{x^2+(-2x+3)^2}=\sqrt{(x-1)^2+(-2x+2)^2}$，

解得 $x=2$，此时 $N(2,2)$.

22.2 二次函数与一元二次方程

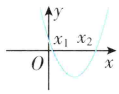
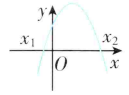
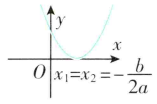
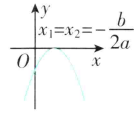
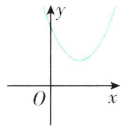
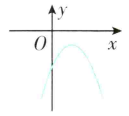
知识过关 全理解

知识点1 二次函数与一元二次方程的关系

一元二次方程是二次函数的函数值 $y=0$ 时的情况，反映在图象上就是一元二次方程的根为对应二次函数的图象与 x 轴交点的横坐标.

(1)若抛物线 $y=ax^2+bx+c(a\neq0)$ 与 x 轴两交点的横坐标分别为 x_1，x_2，则 x_1，x_2 为一元二次方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq0)$ 的两个根.

(2)二次函数图象与 x 轴交点个数与对应一元二次方程根的个数的关系：▶说明

	$a>0$(示意图)	$a<0$(示意图)	一元二次方程根的情况
$b^2-4ac>0$			有两个不相等的实数根 $x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$
$b^2-4ac=0$			有两个相等的实数根 $x_1=x_2=-\frac{b}{2a}$
$b^2-4ac<0$			无实数根

知识点2 利用二次函数的图象求一元二次方程的近似解▶拓展1

直接画二次函数图象的一般步骤：

(1)画出二次函数 $y=ax^2+bx+c(a\neq0)$ 的图象；

(2)确定二次函数 $y=ax^2+bx+c(a\neq0)$ 的图象与 x 轴交点的横坐标在哪两个整数之间；

(3)列表，在(2)中的两数之间取值估计，并用计算器估算近似解，则近似解在对应 y 值正负交替的地方.

知识点3 二次函数与一元二次不等式的关系

利用二次函数图象解一元二次不等式的步骤：▶拓展2

(1)将一元二次不等式化为 $ax^2+bx+c>0$(或 <0)的形式；

(2)明确二次项系数 a 的正负、对称轴在 x 轴哪侧，并计算 b^2-4ac 的值；

(3)作出不等式对应的二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的草图；

(4)抛物线在 x 轴上方的图象对应的函数值大于零，在 x 轴下方的图象对应的函数值小于零.

敲黑板 划重点

说明 抛物线与 x 轴交点横坐标与系数的关系

抛物线 $y=ax^2+bx+c(a\neq0)$ 与 x 轴的交点 $(x_1,0)$ $(x_2,0)$ 同样满足 $x_1+x_2=-\frac{b}{a}$，$x_1x_2=\frac{c}{a}$.

注意区分对称轴直线 $x=-\frac{b}{2a}$.(x_1，x_2 关于对称轴对称)

拓展1 转化为抛物线与直线的交点求解

在同一平面直角坐标系中，作出抛物线 $y=ax^2$ 和直线 $y=-bx-c$ 的图象. 两图象的交点的横坐标就是一元二次方程的解.

抛物线 $y=ax^2+bx$ 和直线 $y=-c$ 图象的交点的横坐标也是一元二次方程的解.

拓展2 一元二次不等式的解法

解不等式 $-x^2+5x+3>7$ 可化为 $-x^2+5x-4>0$ 即 $x^2-5x+4<0$ 后，根据对应一元二次函数的图象求解，也可看作是抛物线 $y=-x^2+5x+3$ 与直线 $y=7$ 相交，分别作出图象再求解.

题型 1　二次函数与一元二次方程的根的关系的应用

通过解方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq0)$ 来求抛物线 $y=ax^2+bx+c(a\neq0)$ 与 x 轴交点的坐标；反过来，也可以由函数 $y=ax^2+bx+c(a\neq0)$ 的图象来求一元二次方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq0)$ 的解.

例题 1　关于 x 的一元二次方程 $ax^2-3x-1=0(a\neq0)$ 的两个不相等的实数根都在 -1 和 0 之间(不包括 -1 和 0)，则 a 的取值范围是_____.

【分析】首先根据根的情况利用根的判别式解得 a 的取值范围，然后根据两个不相等的实数根都在 -1 和 0 之间(不包括 -1 和 0)，结合函数图象确定其函数值的取值范围，易得 a 的取值范围.

【解析】∵ 关于 x 的一元二次方程 $ax^2-3x-1=0$ 有两个不相等的实数根，∴ $\Delta=(-3)^2-4a\cdot(-1)>0$，解得 $a>-\frac{9}{4}$. 设 $y=ax^2-3x-1$.

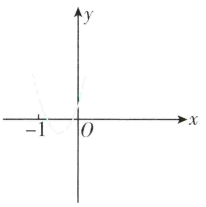


图 (1)

∵ 实数根都在 -1 和 0 之间，∴ 分 $a>0$ 和 $a<0$ 作出草图，如图(1)、图(2).

当 $a>0$ 时，当 $x=0$ 时，$y=-1<0$，与图(1)矛盾，故此种情况不存在.

当 $a<0$ 时，当 $x=-1$ 时，$y=a+2<0$；当 $x=0$ 时，$y=-1<0$，符合图(2). 解得 $a<-2$，∴ $-\frac{9}{4}<a<-2$.

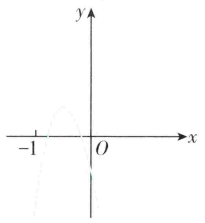


图 (2)

【答案】$-\frac{9}{4}<a<-2$

题型 2　利用二次函数的图象求一元二次方程的近似解

例题 2　小明利用二次函数的图象估计方程 $x^2-2x-2=0$ 的近似解，下表是小明探究过程中的一些计算数据. 根据表中数据可知，方程 $x^2-2x-2=0$ 必有一个实数根在　(　　)

x	1.5	2	2.5	3	3.5
x^2-2x-2	-2.75	-2	-0.75	1	3.25

A. 1.5 和 2 之间　　B. 2 和 2.5 之间

C. 2.5 和 3 之间　　D. 3 和 3.5 之间

【分析】要判断一元二次方程的实数根落在哪个范围内，即判断二次函数与 x 轴的交点落在哪个范围，先判断出 $y=0$ 落在哪两个 y 值之间，那么与 x 轴的交点就落在两个 y 值对应的 x 值之间，即可确定出方程的实数根在哪两个数之间.

【解析】由表格得 $2.5<x<3$ 时，$-0.75<y<1$，二次函数 $y=x^2-2x-2$ 的图象与 x 轴必有一个交点落在 2.5 和 3 之间，所以 $x^2-2x-2=0$ 必有一个实数根在 2.5 和 3 之间. 故选 C.

【答案】C

变式练　刷重点

变式练 1　若二次函数 $y=x^2+bx$ 的图象的对称轴是经过点(2,0)且平行于 y 轴的直线，则关于 x 的方程 $x^2+bx=5$ 的解为　(　　)

A. $x_1=0,x_2=4$

B. $x_1=1,x_2=5$

C. $x_1=1,x_2=-5$

D. $x_1=-1,x_2=5$

答案见 P23

变式练 2　根据下列表格对应值：

x	3.24	3.25	3.26
ax^2+bx+c	0.02	-0.01	-0.03

判断关于 x 的方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq0)$ 的一个解的范围是(　　)

A. $x<3.24$

B. $3.24<x<3.25$

C. $3.25<x<3.26$

D. $x>3.26$

答案见 P23

创新过关 提素养

题型3 二次函数与一元二次方程、不等式的综合

例题3 关于 x 的二次函数 $y_1=kx^2+(2k-1)x-2$（k 为常数）和一次函数 $y_2=x+2$.

（1）若 $k=2$，求二次函数 y_1 的顶点坐标.

（2）若二次函数 y_1 的图象不经过第一象限，求 k 的取值范围.

（3）已知二次函数 y_1 的图象与 x 轴的两个交点间的距离等于3.

①试求此时 k 的值；

②若 $y_1>y_2$，试求 x 的取值范围.

【分析】（1）将 $k=2$ 时的函数解析式配方成顶点式即可；（2）由该抛物线与 x 轴的交点为 $(-2,0)$，$\left(\frac{1}{k},0\right)$，与 y 轴的交点为 $(0,-2)$，根据二次函数 y_1 的图象不经过第一象限知点 $\left(\frac{1}{k},0\right)$ 必不在 x 轴的正半轴上；（3）①根据两点间的距离公式列出关于 k 的方程求解可得；②依据①中 k 的值及 $y_1>y_2$ 列出关于 x 的不等式，解之可得.

【解】（1）当 $k=2$ 时，二次函数 $y_1=2x^2+3x-2=2\left(x+\frac{3}{4}\right)^2-\frac{25}{8}$，

∴ 顶点坐标为 $\left(-\frac{3}{4},-\frac{25}{8}\right)$.

（2）∵ 二次函数可化为 $y_1=k(x+2)\left(x-\frac{1}{k}\right)$，∴ 该抛物线与 x 轴的交点坐标为 $(-2,0)$，$\left(\frac{1}{k},0\right)$，与 y 轴的交点坐标为 $(0,-2)$，而二次函数 y_1 的图象不经过第一象限，∴ 点 $\left(\frac{1}{k},0\right)$ 必不在 x 轴的正半轴上，∴ $\frac{1}{k}<0$，即 $k<0$.

（3）①∵ y_1 的图象与 x 轴的两个交点间的距离等于3，$\left|\frac{1}{k}-(-2)\right|=3$，

∴ $\frac{1}{k}+2=\pm3$，解得 $k_1=1$，$k_2=-\frac{1}{5}$.

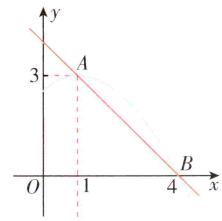
②当 $k=1$ 时，$y_1=(x+2)(x-1)$，$y_2=x+2$. ∵ $y_1>y_2$，∴ $(x+2)(x-1)>x+2$，即 $(x+2)(x-2)>0$，解得 $x<-2$ 或 $x>2$.

当 $k=-\frac{1}{5}$ 时，∵ $y_1>y_2$，∴ $-\frac{1}{5}(x+2)(x+5)>x+2$，即 $(x+2)(x+10)<0$，解得 $-10<x<-2$.

变式练 刷重点

变式练3 如图是抛物线 $y_1=ax^2+bx+c$（$a\neq0$）的一部分，抛物线的顶点坐标是 $A(1,3)$，与 x 轴的一个交点是 $B(4,0)$，直线 $y_2=mx+n$（$m\neq0$）与抛物线交于 A，B 两点，下列结论：

①$abc>0$；②方程 $ax^2+bx+c=3$ 有两个相等的实数根；③抛物线与 x 轴的另一个交点是 $(-1,0)$；④当 $1<x<4$ 时，有 $y_2>y_1$；⑤$x(ax+b)\leqslant a+b$. 其中正确的结论是_____.（只填写序号）



答案见本页

变式练答案

1. D 【解析】∵ 对称轴是经过点 $(2,0)$ 且平行于 y 轴的直线，∴ $-\frac{b}{2}=2$，解得 $b=-4$. 解方程 $x^2-4x=5$，解得 $x_1=-1$，$x_2=5$.

2. B 【解析】由图表可知，当 $ax^2+bx+c=0$ 时，$3.24<x<3.25$. 故选 B.

3. ②⑤ 【解析】由图象可知 $a<0$，$c>0$，$-\frac{b}{2a}>0$，因此 $b>0$，故 $abc<0$，①错误. 观察图象可知，抛物线与直线 $y=3$ 只有一个交点，故方程 $ax^2+bx+c=3$ 有两个相等的实数根，故②正确. 根据对称性可知抛物线与 x 轴的另一个交点是 $(-2,0)$，故③错误. 观察图象可知，当 $1<x<4$ 时，有 $y_2<y_1$，故④错误. 因为 $x=1$ 时，y_1 有最大值，所以 $ax^2+bx+c\leqslant a+b+c$，即 $x(ax+b)\leqslant a+b$，故⑤正确. 所以②⑤正确.

22.3 实际问题与二次函数

知识过关 全理解

知识点 利用二次函数解决实际问题

1. 一般步骤：

(1)审题意；(2)设未知量；(3)列关系式；(4)解答实际问题；(5)验证结果是否符合实际. ▶注意

2. 求二次函数最值

将解析式写成 $y=a(x-h)^2+k$ 的形式，当 $x=$ [1] 时，y 有最大(小)值 [2]；

若对抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 使用配方法，则当 $x=-\dfrac{b}{2a}$ 时，y 有最大(小)值 [3].

答案

[1] h [2] k [3] $\dfrac{4ac-b^2}{4a}$

敲黑板 划重点

注意 (1)实际问题最值是否能取到，在于二次函数的顶点横坐标 h 是否在自变量取值范围内.

(2)实际问题有时需要取整，只能取到相应二次函数图象上的散点，图象并非抛物线.

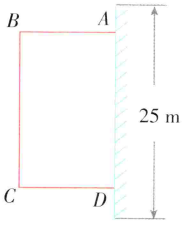
题型过关 全提升

题型1 利用二次函数解决与几何图形面积相关的问题

解决与几何图形面积相关的问题时，首先需要建立函数关系式.

若几何图形为规则图形，可直接利用面积公式建立函数关系式；若几何图形为不规则图形，则要用割补图形的方法将其转化为规则的几何图形，再根据面积和(或面积差)建立函数关系式.

例题 1 为了改善小区环境，某小区决定要在一块一边靠墙(墙长25 m)的空地上修建一个矩形绿化带 $ABCD$，绿化带一边靠墙，另外三边用总长为40 m的栅栏围住(如图). 设绿化带的 BC 边长为 x m，绿化带的面积为 y m^2.



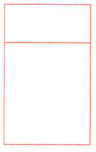
(1)求 y 与 x 之间的函数关系式，并写出自变量的取值范围；

(2)当 x 为何值时，满足条件的绿化带的面积最大？

【分析】(1)利用长方形面积公式列出函数关系式即可；(2)将所得关系式化为顶点式可得到最值，要注意最值是否能取到.

变式练 刷重点

变式练 1 用长为8 m的铝合金制成如图所示形状的矩形窗户，使窗户的透光面积最大，那么这个窗户的最大透光面积是 (　　)



A. $\dfrac{4}{5}$ m^2　　B. $\dfrac{8}{3}$ m^2

C. 4 m^2　　D. $\dfrac{5}{6}$ m^2

答案见 P27

【解】(1)由题意得 $y=x\cdot\frac{40-x}{2}=-\frac{1}{2}x^2+20x$,

自变量 x 的取值范围是 $0<x<25$.

(2)$y=-\frac{1}{2}x^2+20x=-\frac{1}{2}(x-20)^2+200$.

∵ $20<25$,满足条件,∴ 当 $x=20$ 时,y 有最大值 200.

即当 $x=20$ 时,满足条件的绿化带的面积最大,且最大面积为 200 m^2.

题型2　利用二次函数解决最大利润问题

利用二次函数解决利润问题的一般过程可以概括为以下三步:

(1)分析价格变化后的单件利润、销售量、总利润,找到它们随价格变化的规律;

(2)列出总利润与实际价格之间的函数关系式;

(3)借助二次函数图象的性质得到二次函数的最值.

例题2　襄阳精准扶贫工作已进入攻坚阶段. 贫困户张大爷在某单位的帮扶下,把一片坡地改造后种植了优质水果蓝莓,今年正式上市销售. 在销售的 30 天中,第一天卖出 20 千克,为了扩大销量,采取了降价措施,以后每天比前一天多卖出 4 千克. 第 x 天的售价为 y 元/千克,y 关于 x 的函数解析式为 $y=\begin{cases}mx-76m(1\leqslant x<20,x\text{ 为正整数}),\\ n(20\leqslant x\leqslant 30,x\text{ 为正整数}),\end{cases}$ 且第 12 天的售价为 32 元/千克,第 26 天的售价为 25 元/千克. 已知种植销售蓝莓的成本是 18 元/千克,每天的利润是 W 元(利润 = 销售收入 − 成本).

(1)$m=$_____,$n=$_____.

(2)求销售蓝莓第几天时,当天的利润最大? 最大利润是多少?

(3)在销售蓝莓的 30 天中,当天利润不低于 870 元的共有多少天?

【分析】(1)根据"第 12 天的售价为 32 元/千克,第 26 天的售价为 25 元/千克",把 $x=12,y=32$ 和 $x=26,y=25$ 代入函数解析式中即可求出 m,n 的值. (2)根据"在销售的 30 天中,第一天卖出 20 千克,为了扩大销量,采取了降价措施,以后每天比前一天多卖出 4 千克"可知,第 x 天的销售量为 $20+4(x-1)$,于是由"当天利润 = 当天销售量 × 每千克的销售利润"求得 W 关于 x 的函数关系式,注意是分段函数,然后利用函数的有关性质讨论求解. (3)求出使 $W\geqslant 870$ 的整数值 x 有多少个,即为多少天.

【解】(1)根据题意得 $32=12m-76m,n=25$,解得 $m=-\frac{1}{2},n=25$.

(2)根据题意可知,第 x 天的销售量为 $20+4(x-1)=4x+16$.

当 $1\leqslant x<20$ 时,$W=(4x+16)\left(-\frac{1}{2}x+38-18\right)=-2x^2+72x+320=-2(x-18)^2+968$.

∴ 当 $x=18$ 时,$W_{\text{最大值}}=968$.

当 $20\leqslant x\leqslant 30$ 时,$W=(4x+16)(25-18)=28x+112$.

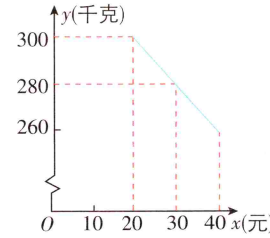
∵ $28>0$,∴ W 随 x 的增大而增大.

∴ 当 $x=30$ 时,$W_{\text{最大值}}=952$.

∵ $968>952$,∴ 当 $x=18$ 时,$W_{\text{最大值}}=968$.

变式练　刷重点

变式练2　草莓是云南多地盛产的一种水果,今年某水果销售店在草莓销售旺季,试销售一种成本为每千克 20 元的草莓,规定试销期间销售单价不低于成本单价,也不高于每千克 40 元. 经试销发现,销售量 y(千克)与销售单价 x(元)符合一次函数关系,如图是 y 与 x 的函数关系图象.



(1)求 y 与 x 的函数解析式(也称关系式);

(2)设该水果销售店试销这种草莓获得的利润为 W 元,求 W 的最大值.

答案见 P27

即销售蓝莓第 18 天时，当天的利润最大，最大利润为 968 元.

(3) 当 $1 \leqslant x < 20$ 时，令 $-2x^2 + 72x + 320 = 870$，

解得 $x_1 = 25$，$x_2 = 11$.

∵ 抛物线 $W = -2x^2 + 72x + 320$ 的开口向下，

∴ 当 $11 \leqslant x \leqslant 25$ 时，$W \geqslant 870$，∴ $11 \leqslant x < 20$.

∵ x 为正整数，∴ 有 9 天利润不低于 870 元.

当 $20 \leqslant x \leqslant 30$ 时，令 $28x + 112 \geqslant 870$，解得 $x \geqslant 27\frac{1}{14}$.

∴ $27\frac{1}{14} \leqslant x \leqslant 30$.

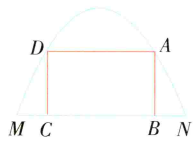
∵ x 为正整数，∴ 有 3 天利润不低于 870 元.

综上所述，当天利润不低于 870 元的共有 12 天.

题型 3　利用二次函数解决抛物线形的实际问题

利用二次函数解决有关隧道、大桥、拱门和投掷等实际问题时，关键是建立恰当的平面直角坐标系，利用待定系数法确定抛物线的解析式，结合二次函数的图象或性质进行求解. 需特别注意自变量的取值范围要使实际问题有意义.

例题 3　如图，有一块铁皮，拱形边缘呈抛物线形，$MN = 4$，拱顶到边 MN 的距离是 4，要在铁皮上截取一矩形 $ABCD$，使矩形顶点 B，C 落在边 MN 上，A，D 落在抛物线上.



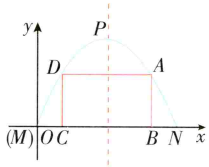
(1) 建立适当的直角坐标系，求抛物线的解析式.

(2) 设矩形 $ABCD$ 的周长为 L，MC 的长度为 m，求 L 与 m 的关系式(不要求写出自变量的取值范围).

(3) 问这样截取的矩形铁皮的周长能否等于 9.5？若不等于 9.5，请说明理由；若等于 9.5，求出 m 的值.

【分析】(1) 根据 $MN = 4$，拱顶到边 MN 的距离是 4，得到顶点的坐标，即可求得函数的解析式；(2) 把 BC，DC 的长度用 m 表示出来，代入 $L = 2(BC + DC)$ 即可；(3) 把 $L = 9.5$ 代入(2) 中得到的关系式，然后解方程即可.

【解】(1) 建立如图所示的直角坐标系，其中 P 为抛物线顶点.



∵ $MN = 4$，拱顶到边 MN 的距离是 4，

∴ $N(4,0)$，顶点 $P(2,4)$.

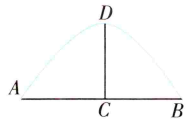
设抛物线的解析式为 $y = a(x-2)^2 + 4$.

把 $N(4,0)$ 代入得 $0 = a(4-2)^2 + 4$，

解得 $a = -1$.

变式练　刷重点

变式练 3　如图为抛物线形门洞，已知 $AB = 8$ m，最高点到 AB 的距离为 4 m.



(1) 建立适当的坐标系，求抛物线的解析式；

(2) 若在 AB 正上方 3 m 处有一横幅，恰好挂在门洞两边的吊环上(横幅宽度不计)，求横幅的长度.

答案见 P27

∴抛物线的解析式为 $y=-(x-2)^2+4$.

(2)由题意知点 C 的坐标为 $(m,0)$,

则点 D 的坐标为 $(m,-m^2+4m)(0<m<2)$.

∴ $BC=4-2m$, $DC=-m^2+4m$,

∴ $L=2(BC+DC)=-2m^2+4m+8$.

(3)能等于9.5,令 $L=-2m^2+4m+8=9.5$,

即 $2m^2-4m+1.5=0$,解得 $m_1=\frac{1}{2}$, $m_2=\frac{3}{2}$.

经检验此时均满足题意,故 m 的值为 $\frac{1}{2}$ 或 $\frac{3}{2}$.

【点拨】建立平面直角坐标系方法不唯一,通常以抛物线对称轴为 y 轴,抛物线过原点等方法建系,可减少计算量.

变式练答案

1. B 【解析】设窗户的宽是 x,根据题意得 $S=\frac{(8-3x)x}{2}=-\frac{3}{2}\left(x-\frac{4}{3}\right)^2+\frac{8}{3}\left(0<x<\frac{8}{3}\right)$.

∴当窗户的宽是 $\frac{4}{3}$ m 时,窗户的透光面积最大,且最大面积是 $\frac{8}{3}$ m^2,故选 B.

2. 【解】(1)设 y 与 x 的函数解析式为 $y=kx+b$.

根据题意,得 $\begin{cases}20k+b=300,\\30k+b=280,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}k=-2,\\b=340.\end{cases}$

∴ y 与 x 的函数解析式为 $y=-2x+340(20\leqslant x\leqslant 40)$.

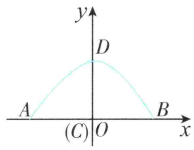
(2)由已知得 $W=(x-20)(-2x+340)=-2x^2+380x-6\,800=-2(x-95)^2+11\,250$.

∵ $-2<0$,∴当 $x\leqslant 95$ 时,W 随 x 的增大而增大,

又∵ $20\leqslant x\leqslant 40$,∴当 $x=40$ 时,

W 最大,最大值为 $-2\times(40-95)^2+11\,250=5\,200$.

3. 【解】(1)建立如图所示的直角坐标系,则 $D(0,4)$, $B(4,0)$,



设抛物线的解析式为 $y=ax^2+4$.

代入 $(4,0)$,得 $0=16a+4$,解得 $a=-\frac{1}{4}$.

所以抛物线的解析式为 $y=-\frac{1}{4}x^2+4$.

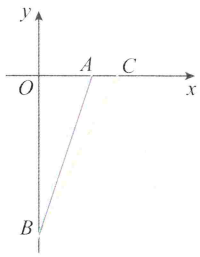
(2)由题意可知,当 $y=3$ 时,$3=-\frac{1}{4}x^2+4$,解得 $x=\pm 2$,由 $2-(-2)=4$ 知,横幅长度为 4 m.

专题　确定二次函数解析式

确定二次函数解析式是中考中的常见题型，求二次函数的解析式一般用待定系数法，根据题中条件，设出恰当的解析式可以给我们解题带来很大的方便.

题型 1　利用一般式求二次函数解析式

例题 1　已知二次函数 $y=-x^2+bx+c$（b，c 均为常数）的图象经过两点 $A(2,0)$，$B(0,-6)$.



（1）求这个二次函数的解析式；

（2）若点 $C(m,0)$（$m>2$）在这个二次函数的图象上，连接 AB，BC，求 $\triangle ABC$ 的面积.

【分析】（1）把 A，B 的坐标代入 $y=-x^2+bx+c$，即可求出函数解析式；（2）先求点 C 的坐标，再求 AC 的值，最后根据三角形的面积公式求出即可.

【解】（1）把 $A(2,0)$，$B(0,-6)$ 代入 $y=-x^2+bx+c$，得

$$\begin{cases}-4+2b+c=0,\\ c=-6,\end{cases}\text{解得}\begin{cases}b=5,\\ c=-6.\end{cases}$$

∴ 二次函数的解析式为 $y=-x^2+5x-6$.

（2）由（1）得二次函数的解析式为 $y=-x^2+5x-6$，

令 $y=0$，即 $-x^2+5x-6=0$.

解得 $x_1=2$，$x_2=3$.

∵ $m>2$，

∴ $C(3,0)$，∴ $AC=1$，

$$\therefore S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}AC\cdot OB=\frac{1}{2}\times 1\times 6=3,$$

∴ $\triangle ABC$ 的面积为 3.

题型 2　利用顶点式求二次函数解析式

例题 2　已知抛物线 $y=ax^2+bx+c(a\neq 0)$ 的顶点坐标为 $(4,-1)$，与 y 轴交于点 $(0,3)$，求这条抛物线的解析式.

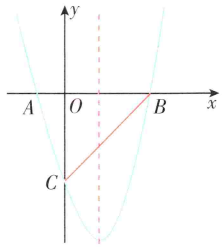
【分析】此题给出抛物线的顶点坐标，最好抛开题目给出的 $y=ax^2+bx+c$，重新设顶点式 $y=a(x-h)^2+k$，其中点 (h,k) 为顶点.

【解】依题意，设这个二次函数的解析式为 $y=a(x-4)^2-1$.

∵ 抛物线与 y 轴交于点 $(0,3)$，

变式练　刷重点

变式练 1　如图，在平面直角坐标系 xOy 中，点 A 在 x 轴的负半轴上，$B(5,0)$，点 C 在 y 轴的负半轴上，且 $OB=OC$，抛物线 $y=x^2+bx+c$ 经过 A，B，C 三点. 求此抛物线的解析式和对称轴.



答案见 P30

变式练 2　已知二次函数的图象以 $A(-1,4)$ 为顶点，且过点 $B(2,-5)$.

（1）求该二次函数的解析式；

（2）直接写出该二次函数图象与坐标轴的交点坐标.

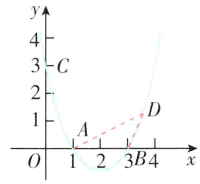
答案见 P30

$\therefore a(0-4)^2-1=3,\therefore a=\frac{1}{4}$.

$\therefore$ 这个二次函数的解析式为 $y=\frac{1}{4}(x-4)^2-1$，即 $y=\frac{1}{4}x^2-2x+3$.

题型3　利用交点式 $y=a(x-x_1)(x-x_2)$ 求二次函数解析式

例题3　已知，如图所示，抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 与 x 轴相交于两点 $A(1,0)$，$B(3,0)$，与 y 轴相交于点 $C(0,3)$.



(1) 求抛物线的解析式；

(2) 若点 $D\left(\frac{7}{2},m\right)$ 是抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 上的一点，请求出 m 的值，并求出此时 $\triangle ABD$ 的面积.

【解】(1) 设这个二次函数的解析式为 $y=a(x-1)(x-3)$.

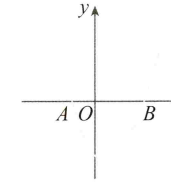
将 $C(0,3)$ 代入解析式得 $3=a(0-1)(0-3)$，

$\therefore a=1,\therefore y=(x-1)(x-3)=x^2-4x+3$.

(2) $\because D\left(\frac{7}{2},m\right)$ 是抛物线 $y=x^2-4x+3$ 上的点，

$\therefore m=\frac{5}{4},\therefore S_{\triangle ABD}=\frac{1}{2}\times2\times\frac{5}{4}=\frac{5}{4}$.

变式练3　已知抛物线 $y=x^2+bx+c$ 经过 $A(-1,0)$，$B(3,0)$ 两点.



(1) 求抛物线的解析式和顶点坐标；

(2) 设点 P 为抛物线上一点，若 $S_{\triangle PAB}=6$，求点 P 的坐标.

答案见 P30

题型4　求经过平移的二次函数的解析式

只要 a 相同，抛物线的形状就完全相同，抛物线之间就可以通过平移得到，上下平移对应顶点纵坐标的变化，左右平移对应顶点横坐标的变化. 平移规律简记为，对 x：左加右减，对 y：上加下减.

例题4　六盘水市梅花山国际滑雪自建成以来，吸引大批滑雪爱好者，一滑雪者从山坡滑下，测得滑行距离 y（单位：cm）与滑行时间 x（单位：s）之间的关系可以近似地用二次函数来表示.

滑行时间 x/s	0	1	2	3	…
滑行距离 y/cm	0	4	12	24	…

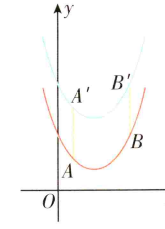
(1) 根据表中数据求出二次函数的解析式，现测量出滑雪者的出发点与终点的距离大约 800 m，他大约需要多少时间才能到达终点？（结果保留整数）

(2) 将得到的二次函数图象补充完整后，先向左平移 2 个单位长度，再向上平移 5 个单位长度，求平移后的函数解析式.

【分析】(1) 用待定系数法，将表中三组 x，y 对应数据代入 $y=ax^2+bx+c(a\neq0)$，列方程组即可求出二次函数的解析式，然后将 $y=800$ 代入所求函数解析式，求出 x 的值；(2) 将 (1) 中解析式转化成形如 $y=a(x-h)^2+k$ 的形式，再结合图象平移特点求平移后的函数解析式.

【解】(1) 设这个二次函数的解析式为 $y=ax^2+bx+c(a\neq0)$，由于 $(0,0)$，$(1,4)$，$(2,12)$ 在该抛物线上，则有 $\begin{cases}c=0,\\a+b+c=4,\\4a+2b+c=12,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=2,\\b=2,\\c=0,\end{cases}\therefore$ 这个二次函数的解析式为 $y=2x^2+2x$.

变式练4　如图，将函数 $y=\frac{1}{2}(x-2)^2+1$ 的图象沿 y 轴向上平移得到一条新函数的图象，其中点 $A(1,m)$，$B(4,n)$ 平移后的对应点分别为点 A'，B'. 若曲线段 AB 扫过的面积为 9（图中的阴影部分），则新图象的函数解析式是（　　）



A. $y=\frac{1}{2}(x-2)^2-2$

B. $y=\frac{1}{2}(x-2)^2+7$

C. $y=\frac{1}{2}(x-2)^2-5$

D. $y=\frac{1}{2}(x-2)^2+4$

答案见 P30

当 $y = 800\ \text{m} = 80\ 000\ \text{cm}$ 时，得 $80\ 000 = 2x^2 + 2x$，解此方程，得 $x_1 = \dfrac{-1+\sqrt{160\ 001}}{2} \approx 200$，$x_2 = \dfrac{-1-\sqrt{160\ 001}}{2}$（不符合题意，舍去）.

∴ 他大约需要 200 s 才能到达终点.

(2)∵ $y = 2x^2 + 2x = 2\left(x+\dfrac{1}{2}\right)^2 - \dfrac{1}{2}$，∴ 当抛物线 $y = 2\left(x+\dfrac{1}{2}\right)^2 - \dfrac{1}{2}$ 先向左平移 2 个单位长度，再向上平移 5 个单位长度后，得到的抛物线解析式为 $y = 2\left(x+\dfrac{1}{2}+2\right)^2 - \dfrac{1}{2} + 5 = 2\left(x+\dfrac{5}{2}\right)^2 + \dfrac{9}{2}$.

变式练答案

1.【解】 由题意得 $C(0,-5)$，∵ 抛物线过点 B, C，代入得 $\begin{cases}25+5b+c=0,\\ c=-5,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}b=-4,\\ c=-5.\end{cases}$ ∴ 抛物线的解析式为 $y = x^2 - 4x - 5$，对称轴为直线 $x = 2$.

2.【解】(1) 由题意设二次函数解析式为 $y = a(x+1)^2 + 4 (a \neq 0)$.

∵ 二次函数的图象过点 $B(2,-5)$，

∴ $-5 = a(2+1)^2 + 4$，解得 $a = -1$.

∴ 二次函数的解析式是 $y = -(x+1)^2 + 4$.

(2) 与 x 轴的交点坐标为 $(-3,0)$，$(1,0)$，与 y 轴的交点坐标为 $(0,3)$.

3.【解】(1)∵ $y = x^2 + bx + c$ 经过 $A(-1,0)$，$B(3,0)$，

∴ 可得解析式 $y = (x+1)(x-3)$，

即 $y = x^2 - 2x - 3 = (x-1)^2 - 4$，

∴ 顶点坐标为 $(1,-4)$.

(2)∵ $A(-1,0)$，$B(3,0)$，∴ $AB = 4$.

设 $P(x,y)$，则 $S_{\triangle PAB} = \dfrac{1}{2}AB \cdot |y| = 2|y| = 6$，

∴ $|y| = 3$，∴ $y = \pm 3$.

①当 $y = 3$ 时，$x^2 - 2x - 3 = 3$，解得 $x_1 = 1+\sqrt{7}$，$x_2 = 1-\sqrt{7}$，

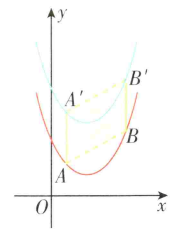
此时点 P 的坐标为 $(1+\sqrt{7},3)$ 或 $(1-\sqrt{7},3)$；

②当 $y = -3$ 时，$x^2 - 2x - 3 = -3$，解得 $x_1 = 0$，$x_2 = 2$，

此时点 P 的坐标为 $(0,-3)$ 或 $(2,-3)$.

综上所述，点 P 的坐标为 $(0,-3)$ 或 $(2,-3)$ 或 $(1+\sqrt{7},3)$ 或 $(1-\sqrt{7},3)$.

4. D **【解析】**∵ 函数 $y = \dfrac{1}{2}(x-2)^2 + 1$ 的图象过点 $A(1,m)$，$B(4,n)$，代入可得 $m = \dfrac{3}{2}$，$n = 3$，∴ $A\left(1,\dfrac{3}{2}\right)$，$B(4,3)$. 连接 AB，$A'B'$，可知四边形 $AA'B'B$ 为平行四边形，且 AA' 边上的高为 $|x_B - x_A| = 3$，又



∵ 曲线段 AB 扫过的面积为 9，∴ 割补平移后，$S_{\square ABB'A'} = 9$，即 $3AA' = 9$，∴ $AA' = 3$，即将函数 $y = \dfrac{1}{2}(x-2)^2 + 1$ 的图象沿 y 轴向上平移 3 个单位长度得到一条新函数的图象，∴ 新图象的函数解析式是 $y = \dfrac{1}{2}(x-2)^2 + 4$. 故选 D.

第二十三章 旋转



23.1 图形的旋转

知识过关 全理解

知识点1 旋转相关概念

1. 把一个平面图形绕着平面内某一点 O 转动一个角度，叫做图形的旋转. 点 O 叫做[1]_____，转动的角叫做[2]_____. 如果图形上的点 P 经过旋转变为点 P'，那么这两个点叫做这个旋转的[3]_____. ▶图示

2. 旋转三要素：[4]_____、[5]_____、[6]_____.

知识点2 旋转的性质

1. 对应点到旋转中心的距离[7]_____.

2. 对应点与旋转中心所连线段的夹角等于[8]_____.

3. 旋转前、后的图形[9]_____. ▶注意

知识点3 旋转作图

将 $\triangle ABC$ 绕点 M 顺时针旋转 $120°$ 后，得到 $\triangle DEF$ 的步骤：

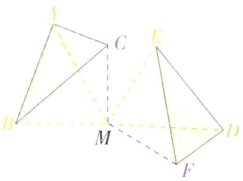
(1) **定**：确定旋转中心为点[10]_____，旋转方向为[11]_____，旋转角为[12]_____；▶方法

(2) **找**：寻找构成图形的关键点 A，B，C，连接关键点 A 和旋转中心 M，即线段 AM；

(3) **转**：以旋转中心 M 为顶点，过关键点 A 的射线 MA 为一边，按顺时针方向作一个 $120°$ 的角；

(4) **截**：在角的另一边上取一点 D，使 $MD = MA$，得到点 A 的对应点 D；以此作法，可得点 B 的对应点[13]_____，点 C 的对应点[14]_____；

(5) **连**：按原图顺序连接 D，E，F，得到 $\triangle DEF$，如图所示.



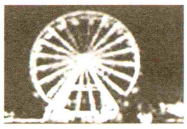
答案

[1]旋转中心 [2]旋转角 [3]对应点 [4]旋转中心 [5]旋转角 [6]旋转方向 [7]相等 [8]旋转角 [9]全等 [10]M [11]顺时针 [12]$120°$ [13]E [14]F

敲黑板 划重点

图示 生活中的旋转现象





注意 平移、旋转的区别与联系

变换	平移	旋转
不同点	定向平行移动	定向转动
	①对应线段平行(或在一条直线上)且相等；②对应角相等	①任意一对对应点到旋转中心的距离相等；②任意一对对应点与旋转中心所连线段的夹角都等于旋转角
	方向和距离	旋转中心、旋转角和旋转方向
相同点	只改变图形的位置，不改变图形的大小和形状	

方法 (1) 旋转角的确定

一组对应点与旋转中心所连线段的夹角为旋转角(如图中 $\angle AMD$).

(2) 旋转中心的确定

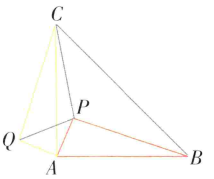
连接两组对应点，分别作这两条线段的垂直平分线，两条垂直平分线的交点就是旋转中心. (依据：线段垂直平分线上的点到线段两端点的距离相等)

题型 1　利用旋转的性质求角的度数或线段长度

解答相关题目需掌握旋转的性质，对应点到旋转中心的距离相等，旋转前后图形全等，对应点与旋转中心所连线段的夹角为旋转角. 通常与等边对等角、三角形内角和定理、勾股定理结合考查，有时需要利用旋转的性质构造全等三角形求解.

例题 1　如图，在等腰三角形 ABC 中，$\angle CAB=90°$，P 是 $\triangle ABC$ 内一点，$PA=1$，$PB=3$，$PC=\sqrt{7}$，将 $\triangle APB$ 绕点 A 逆时针旋转后与 $\triangle AQC$ 重合. 求：

(1) 线段 PQ 的长；(2) $\angle APC$ 的度数.



【分析】(1) 由旋转的性质可知 $\triangle APB\cong\triangle AQC$，$\angle QAP=\angle CAB=90°$，由对应边相等可得 $\triangle APQ$ 为等腰直角三角形，结合勾股定理可求得线段 PQ 的长；(2) $\triangle APQ$ 为等腰直角三角形，故 $\angle APQ=45°$，在 $\triangle QPC$ 中，$PC=\sqrt{7}$，$QC=3$，$QP=\sqrt{2}$，由勾股定理的逆定理可证 $\triangle QCP$ 为直角三角形，从而可求得 $\angle APC=135°$.

【解】(1) $\because$ $\triangle APB$ 绕点 A 旋转后与 $\triangle AQC$ 重合，

$\therefore AQ=AP=1$，$\angle QAP=\angle CAB=90°$.

在 $\mathrm{Rt}\triangle APQ$ 中，由勾股定理得 $PQ=\sqrt{AQ^2+AP^2}=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$.

(2) $\because$ $\angle QAP=90°$，$AQ=AP$，$\therefore$ $\angle APQ=45°$.

$\because$ $\triangle APB$ 绕点 A 旋转后与 $\triangle AQC$ 重合，$\therefore CQ=BP=3$.

在 $\triangle CPQ$ 中，$\because PQ=\sqrt{2}$，$CQ=3$，$CP=\sqrt{7}$，

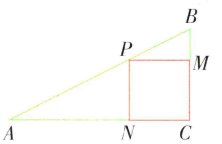
$\therefore CP^2+PQ^2=(\sqrt{7})^2+(\sqrt{2})^2=9$，$CQ^2=3^2=9$. $\therefore CP^2+PQ^2=CQ^2$.

$\therefore$ $\angle CPQ=90°$. $\therefore$ $\angle APC=\angle CPQ+\angle APQ=135°$.

题型 2　利用旋转的性质求面积

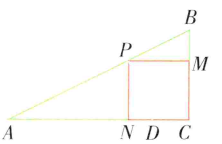
解决此类问题，主要应用旋转前后图形全等，通过平移、割补、旋转等方法将不规则的图形转化为一个规则的图形求解，也有可能和轴对称综合考查.

例题 2　在 $\mathrm{Rt}\triangle ABC$ 中，$\angle C=90°$，内接一个正方形 $CMPN$，点 P，M，N 分别在 $\triangle ABC$ 边上，若 $PA=3$，$PB=2$，则图中阴影部分的面积为_____.



【分析】根据已知条件单独求 $\triangle APN$ 和 $\triangle PBM$ 的面积有困难. 因为四边形 $CMPN$ 是正方形，所以把 $\triangle PMB$ 绕点 P 顺时针旋转 $90°$ 得到 $\triangle PND$，此时可得 $\triangle APD$ 是直角三角形，问题便可解决.

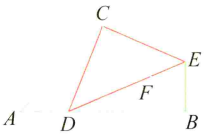
【解析】如图，把 $\triangle PMB$ 绕点 P 顺时针旋转 $90°$ 得到 $\triangle PND$，由旋转性质可知，$S_{\triangle PBM}=S_{\triangle PDN}$，$\angle APD=\angle BPD=90°$，$PD=PB=2$，$\therefore S_{阴影}=S_{\triangle APD}=\frac{1}{2}\times AP\times PD=\frac{1}{2}\times 3\times 2=3$.



【答案】3

变式练　刷重点

变式练 1　如图，在 $\triangle ABC$ 中，$\angle ACB=90°$，$AC=BC$，D 是 AB 边上一点（点 D 与 A，B 不重合），连接 CD，将线段 CD 绕点 C 按逆时针方向旋转 $90°$ 得到线段 CE，连接 DE 交 BC 于点 F，连接 BE.

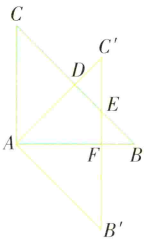


(1) 求证：$\triangle ACD\cong\triangle BCE$；

(2) 当 $AD=BF$ 时，求 $\angle BEF$ 的度数.

答案见 P34

变式练 2　如图，将 $\triangle ABC$ 绕点 A 顺时针旋转 $45°$ 得到 $\triangle AB'C'$. 若 $\angle BAC=90°$，$AB=AC=\sqrt{2}$，则图中阴影部分的面积等于_____.

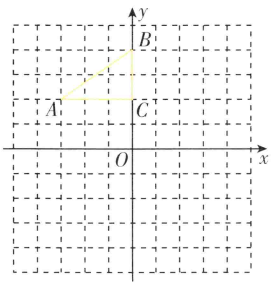


答案见 P34

题型3　平面直角坐标系中的旋转变换

此类题目主要对旋转、勾股定理、轴对称等内容综合考查. 要注意旋转中心的确定.

例题 3　如图,在平面直角坐标系中,Rt△ABC的三个顶点分别是$A(-3,2)$,$B(0,4)$,$C(0,2)$.



(1)将△ABC以点C为旋转中心旋转180°,画出旋转后对应的△A_1B_1C;平移△ABC,若点A的对应点A_2的坐标为$(0,-4)$,画出平移后对应的△$A_2B_2C_2$.

(2)若将△A_1B_1C绕某一点旋转可以得到△$A_2B_2C_2$,请直接写出旋转中心的坐标.

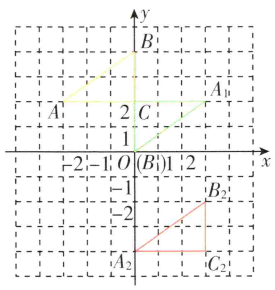
(3)在x轴上有一点P,使得$PA+PB$的值最小,请直接写出点P的坐标.

【分析】(1)根据网格结构找出点A,B以点C为旋转中心旋转180°的对应点A_1,B_1的位置,然后与点C顺次连接即可;再根据网格结构找出点A,B,C平移后的对应点A_2,B_2,C_2的位置,然后顺次连接即可.

(2)连接两组对应点,其垂直平分线的交点即为旋转中心;

(3)利用轴对称的性质,确定点A关于x轴的对称点A',连接$A'B$,其与x轴的交点即为点P.

【解】(1)画出△A_1B_1C与△$A_2B_2C_2$,如图所示.

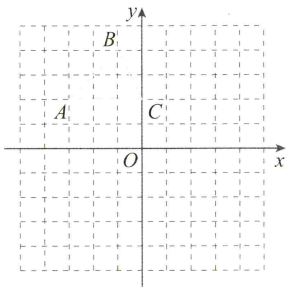


(2)旋转中心的坐标为$\left(\frac{3}{2},-1\right)$.

(3)点P的坐标为$(-2,0)$.

变式练　刷重点

变式练 3　如图,在平面直角坐标系中,△ABC的三个顶点坐标分别是$A(-3,2)$,$B(-1,4)$,$C(0,2)$.



(1)将△ABC以点C为旋转中心旋转180°,画出旋转后对应的△A_1B_1C;

(2)平移△ABC,若A的对应点A_2的坐标为$(-5,-2)$,画出平移后的△$A_2B_2C_2$;

(3)若将△$A_2B_2C_2$绕某一点旋转可以得到△A_1B_1C,请直接写出旋转中心的坐标.

答案见 P34

创新过关　提素养

题型4　旋转中的有关探究问题

与旋转有关的探究性问题,考查操作、想象、探究能力. 解决这类问题,需要首先确定旋转的角度和方向、旋转前后的相关的角与边,明确旋转过程中的变量与不变量,利用旋转前后图形的全等性进行边与角的计算.

例题 4　如图(1),一等腰直角三角尺GEF的两条直角边与正方形$ABCD$的两条边分别重合在一起. 现正方形$ABCD$保持不动,将三角尺GEF绕斜边EF的中点O(点O也是BD的中点)按顺时针方向旋转.

(1)如图(2),当EF与AB相交于点M,GF与BD相交于点N时,通过观察或测量BM,FN的长度,猜想BM,FN满足的数量关系,并证明你的猜想.

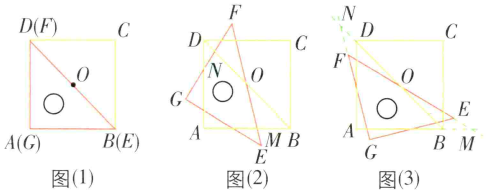
(2)若三角尺GEF旋转到如图(3)所示的位置时,线段FE的延长线与AB的延长线相交于点M,线段BD的延长线与GF的延长线相交于点N,此时,(1)中的猜想还成立吗? 若成立,请证明;若不成立,请说明理由.

变式练　刷重点

变式练 4　已知$\angle AOB=90°$,在$\angle AOB$的平分线OM上有一点C,将一个三角板的直角顶点与C重合,它的两条直角边分别与OA,OB(或它们的反向延长线)相交于点D,E.

当三角板绕点C旋转到CD与OA垂直时,如图(1),易证:$OD+OE=\sqrt{2}OC$.

当三角板绕点C旋转到CD与OA不垂直时,如图(2),上述结论是否还成立? 若成立,请给予证明;若不成立,线段OD,OE,OC之间又有怎样的数量关系? 图(3)呢? 请写出你的猜想,不需证明.



图(1)　图(2)　图(3)

【分析】(1)可知 $BM=FN$,再利用三角形全等证明即可;(2)要明确,在旋转的过程中,$\triangle OBM$ 和 $\triangle OFN$ 之间全等的关系没有改变.

【解】(1)$BM=FN$.

证明:∵ $\triangle GEF$ 是等腰直角三角形,四边形 $ABCD$ 是正方形,

∴ $\angle ABD=\angle GFE=45°$,$OB=OF$.

又∵ $\angle BOM=\angle FON$,

∴ $\triangle OBM\cong\triangle OFN$(ASA).

∴ $BM=FN$.

(2)$BM=FN$ 仍然成立.

证明:∵ $\triangle GEF$ 是等腰直角三角形,四边形 $ABCD$ 是正方形,

∴ $\angle DBA=\angle GFE=45°$,$OB=OF$.

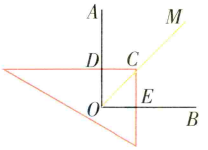
∴ $\angle MBO=\angle NFO=135°$.

又∵ $\angle MOB=\angle NOF$,

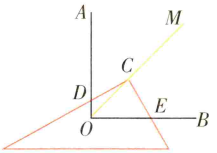
∴ $\triangle OBM\cong\triangle OFN$(ASA).

∴ $BM=FN$.

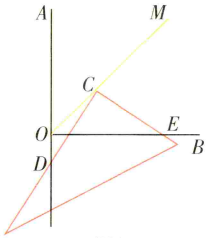
变式练　刷重点



图(1)



图(2)



图(3)

答案见本页

变式练答案

1. 【解】(1)∵ 线段 CD 绕点 C 按逆时针方向旋转 $90°$ 得到线段 CE,∴ $\angle DCE=90°$,$CD=CE$. 又∵ $\angle ACB=90°$,∴ $\angle ACB=\angle DCE=90°$,∴ $\angle ACD=\angle BCE$. 又∵ $AC=BC$,∴ $\triangle ACD\cong\triangle BCE$(SAS).

(2)∵ $\angle ACB=90°$,$AC=BC$,∴ $\angle A=45°$. 由(1)知,$\triangle ACD\cong\triangle BCE$,∴ $AD=BE$,∴ $\angle CBE=\angle A=45°$. 又∵ $AD=BF$,

∴ $BE=BF$,∴ $\angle BEF=\angle BFE=\dfrac{180°-45°}{2}=67.5°$.

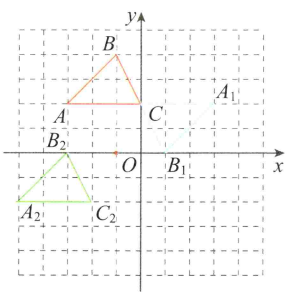
2. $\sqrt{2}-1$　【解析】∵ $\triangle ABC$ 绕点 A 顺时针旋转 $45°$ 得到 $\triangle AB'C'$,$\angle BAC=90°$,$AB=AC=\sqrt{2}$,∴ $BC=2$,$AC'=\sqrt{2}$,$\angle C=\angle B=\angle CAC'=\angle C'=45°$. ∴ $AD\perp BC$,$B'C'\perp AB$. ∴ $AD=BD=\dfrac{1}{2}BC=1$,

$AF=FC'=\dfrac{\sqrt{2}}{2}AC'=1$. ∴ $EF=BF=AB-AF=\sqrt{2}-1$. ∴ $S_{四边形ADEF}=S_{\triangle ABD}-S_{\triangle BEF}=\dfrac{1}{2}\times1\times1-\dfrac{1}{2}\times(\sqrt{2}-1)^2=\sqrt{2}-1$.

3. 【解】(1)$\triangle A_1B_1C$ 如图所示.

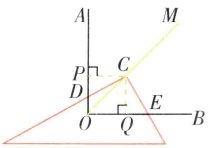
(2)$\triangle A_2B_2C_2$ 如图所示.

(3)旋转中心为 $(-1,0)$.



4. 【解】图(2)结论:$OD+OE=\sqrt{2}OC$ 仍成立.

证明:过点 C 分别作 OA,OB 的垂线,垂足分别为 P,Q.



由题易知 $\triangle CPD\cong\triangle CQE$,∴ $DP=EQ$.

∵ $OP=OD+DP$,$OQ=OE-EQ$,$OP+OQ=\sqrt{2}OC$,

即 $OD+DP+OE-EQ=\sqrt{2}OC$. ∴ $OD+OE=\sqrt{2}OC$.

图(3)猜想:$OE-OD=\sqrt{2}OC$.

23.2 中心对称 + 23.3 课题学习 图案设计

知识过关 全理解

知识点1 中心对称的定义及性质

1. 中心对称的定义

在平面内，把一个图形绕着某一点旋转[1]____，如果它能够与另一个图形重合，那么就说这两个图形关于这个点[2]____或[3]____. ▶注意1

这个点叫做[4]____（简称中心），这两个图形在旋转后能重合的对应点叫做关于对称中心的[5]____.

2. 中心对称的性质

(1)中心对称的两个图形是[6]____图形；

(2)中心对称的两个图形，对称点所连线段都经过[7]____，而且被其平分.

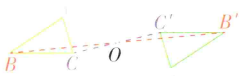
知识点2 中心对称作图

作$\triangle ABC$关于点O成中心对称的$\triangle A'B'C'$的一般步骤：

(1)找：寻找原图形的关键点A，B，C，连接关键点A和对称中心O；▶方法

(2)截：延长AO，在延长线上找出关键点A的对称点A'，使$OA'=$[8]____；重复上述操作，作出点B的对称点[9]____，点C的对称点[10]____；

(3)连：按原图顺序连接A'，B'，C'，得到$\triangle A'B'C'$，如图所示.



知识点3 中心对称图形及性质

1. 中心对称图形的定义 ▶注意2

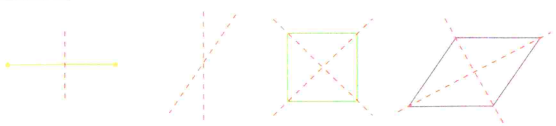
把一个图形绕着某一点旋转[11]____，如果旋转后的图形能够与原来的图形重合，那么这个图形叫做中心对称图形. 这个点就是它的[12]____.

2. 中心对称图形的性质

(1)对称点的连线被对称中心平分；

(2)过对称中心的直线把中心对称图形分成全等的两部分.

3. 常见的线段、矩形、菱形、边数是偶数的正多边形、圆既是[13]____图形，又是[14]____图形.



敲黑板 划重点

注意1 中心对称与轴对称的区别

变换	中心对称	轴对称
不同点	有一个对称中心	至少有一条对称轴
	图形绕中心旋转180°	图形沿对称轴对折180°
	旋转后和另一图形重合	折叠后和另一图形重合

方法 对称中心的确定

(1)连接任意一组对称点，该线段的中点，就是对称中心；

(2)连接任意两组对称点，这两条线段的交点，就是对称中心.

注意2 中心对称VS中心对称图形

(1)区别：中心对称是指两个全等图形之间的相互位置关系，是针对两个图形而言；而中心对称图形是指一个图形本身成中心对称，是针对一个图形而言.

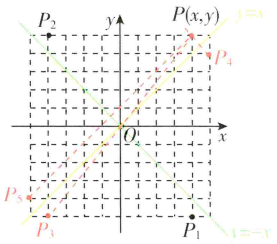
(2)联系：①如果将中心对称的两个图形视为一个图形，那么这个图形是中心对称图形；

②一个中心对称图形，如果把对称的部分视为两个图形，那么它们又成中心对称.

知识点4　关于原点对称的点的坐标

敲黑板　划重点

如图，点 $P(x,y)$ 关于 x 轴对称的点为 P_1 15_____，关于 y 轴对称的点为 P_2 16_____，关于原点对称的点为 P_3 17_____，关于直线 $y=x$ 对称的点为 P_4 18_____，关于直线 $y=-x$ 对称的点为 P_5 19_____. ▶拓展



拓展　**中点坐标公式**

若点 $P_1(x_1,y_1)$，$P_2(x_2,y_2)$ 关于点 $P(x,y)$ 对称，则 $x=\dfrac{x_1+x_2}{2}$，$y=\dfrac{y_1+y_2}{2}$.

答案

1 180°　2 对称　3 中心对称　4 对称中心　5 对称点　6 全等　7 对称中心　8 OA　9 B'　10 C'　11 180°　12 对称中心　13 中心对称　14 轴对称　15 $(x,-y)$　16 $(-x,y)$　17 $(-x,-y)$　18 (y,x)　19 $(-y,-x)$

题型过关　全提升

题型1　中心对称性质的应用

中心对称的性质：对称点所连线段被对称中心平分，成中心对称的两个图形全等.

常在矩形、菱形、圆中利用中心对称的性质进行长度、面积的计算，当给出条件不在同一个图形中时，可以考虑构造中心对称图形计算求证.

变式练　刷重点

例题1　阅读理解：课外兴趣小组活动时，老师提出了如下问题：

如图(1)，在 $\triangle ABC$ 中，若 $AB=5$，$AC=3$，求 BC 边上的中线 AD 的取值范围.

小明在组内经过合作交流，得到了如下的解决方法：延长 AD 到 E，使 $DE=AD$，再连接 BE(或将 $\triangle ACD$ 绕点 D 逆时针旋转 180°得到 $\triangle EBD$)，把 AB，AC，$2AD$ 集中在 $\triangle ABE$ 中，利用三角形的三边关系可得 $2<AE<8$，则 $1<AD<4$.

感悟：解题时，条件中若出现“中点”“中线”字样，可以考虑构造以中点为对称中心的中心对称图形，把分散的已知条件和所求证的结论集中到同一个三角形中.

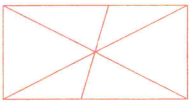
(1)问题解决：根据上面的启发，请你证明下面命题：如图(2)，在 $\triangle ABC$ 中，D 是 BC 边上的中点，$DE\perp DF$，DE 交 AB 于点 E，DF 交 AC 于点 F，连接 EF.

①求证：$BE+CF>EF$；

②若 $\angle A=90°$，探索线段 BE，CF，EF 之间的等量关系，并加以证明.

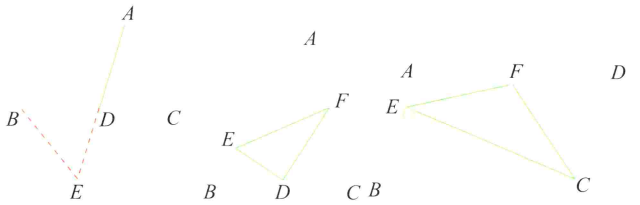
(2)问题拓展：如图(3)，在 $\square ABCD$ 中，$AD=2AB$，F 是 AD 的中点，作 $CE\perp AB$，垂足 E 在线段 AB 上，连接 EF，CF，那么下列结论：①$\angle DCF=$

变式练1　如图，已知长方形的长为 10 cm，宽为 4 cm，则图中阴影部分的面积为_____.



答案见 P40

$\frac{1}{2}\angle BCD$；②$EF=CF$；③$S_{\triangle BEC}=2S_{\triangle CEF}$；④$\angle DFE=3\angle AEF$. 其中一定成立的是_____(填序号).



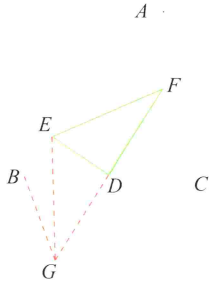
图(1)　图(2)　图(3)

【分析】(1)①因为 D 为 BC 边上的中点，所以作△CFD 关于点 D 的中心对称图形△BGD，然后利用三角形的三边关系即可解决问题；

②若$\angle A=90°$，则$\angle EBC+\angle FCB=90°$，则$\angle EBG=90°$，根据勾股定理得$BE^2+BG^2=EG^2$，再利用 ED 垂直平分 FG，得 $EG=EF$.

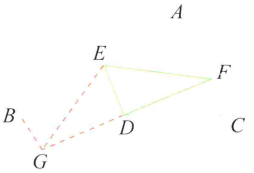
(2)由在▱$ABCD$ 中，$AD=2AB$，F 是 AD 的中点，易得 $AF=FD=CD$，继而证得①$\angle DCF=\frac{1}{2}\angle BCD$；然后延长 EF，交 CD 延长线于 M，利用平行四边形的性质以及全等三角形的判定与性质得出△AEF≌△DMF，得出对应线段之间的关系，进而得出答案.

(1)①【证明】如图，延长 FD 到 G，使 $DG=DF$，连接 BG，EG. 则△CFD 与△BGD 关于点 D 成中心对称. ∴ $CF=BG$，$DF=DG$. ∵ $DE\perp DF$，∴ $EF=EG$. ∵ 在△BEG 中，$BE+BG>EG$，∴ $BE+CF>EF$.



②【解】$BE^2+CF^2=EF^2$. 证明如下：

如图，∵ $\angle A=90°$，∴ $\angle EBC+\angle FCB=90°$，由①知，△$CFD$ 与△BGD 关于点 D 成中心对称，∴ △CFD≌△BGD，∴ $\angle FCD=\angle DBG$，$CF=BG$，∴ $\angle EBC+\angle DBG=\angle EBG=90°$. ∵ 在 Rt△$EBG$ 中，$BE^2+BG^2=EG^2$，又∵ $EF=EG$，∴ $BE^2+CF^2=EF^2$.



(2)【解】①∵ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形，∴ $AB=CD$，$AD\parallel BC$. ∵ F 是 AD 的中点，∴ $AF=FD$. ∵ $AD=2AB$，$AB=CD$，∴ $AF=FD=CD$，∴ $\angle DFC=\angle DCF$. ∵ $AD\parallel BC$，∴ $\angle DFC=\angle FCB$，∴ $\angle DCF=\angle BCF$，∴ $\angle DCF=\frac{1}{2}\angle BCD$，故①正确.

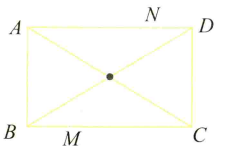
变式练　刷重点

变式练 2　如图(1)，在矩形 $ABCD$ 中，$AD>AB$，O 为对角线 AC，BD 的交点，过点 O 作一直线分别交 BC，AD 于点 M，N.

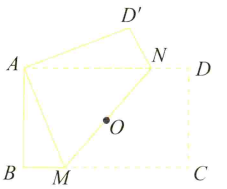
(1)试用中心对称的性质说明梯形 $ABMN$ 的面积等于梯形 $CDNM$ 的面积；

(2)若将矩形 $ABCD$ 沿 MN 翻折后，点 C 恰好与点 A 重合，则 MN 满足什么条件？(只要求写出满足的条件，不要求说明理由)

(3)在(2)的条件下若翻折后不重叠部分的面积是重叠部分面积的 $\frac{1}{2}$，如图(2)，请探究 BM 与 MC 之间的数量关系.



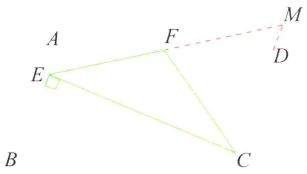
图(1)



图(2)

答案见 P40

②如图，延长 EF 与 CD 的延长线交于点 M. ∵ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形，∴ $AB \parallel CD$，∴ $\angle A = \angle MDF$. ∵ $AF = FD$，$\angle AFE = \angle DFM$，∴ $\triangle AEF \cong \triangle DMF$，∴ $FE = FM$，$\angle AEF = \angle M$. ∵ $CE \perp AB$，∴ $\angle BEC = 90°$，∴ $\angle ECD = \angle BEC = 90°$，∴ $FC = EF = FM$，故②正确.



③∵ $EF = FM$，∴ $S_{\triangle EFC} = S_{\triangle CFM}$，∴ $S_{\triangle EMC} = 2S_{\triangle EFC}$，∵ $MC > DC = AB > BE$，∴ $S_{\triangle BEC} < S_{\triangle EMC}$，$S_{\triangle BEC} < 2S_{\triangle EFC}$，故③错误.

④∵ $FC = FM$，$FD = CD$，∴ $\angle M = \angle FCD = \angle DFC$，∴ $\angle EFC = \angle FCD + \angle M = 2\angle FCD$，∴ $\angle DFE = \angle EFC + \angle DFC = 3\angle FCD$. 由②可知 $\angle M = \angle AEF$，又∵ $\angle M = \angle FCD$，∴ $\angle AEF = \angle FCD$，∴ $\angle DFE = 3\angle AEF$，故④正确.

故一定成立的有①②④.

题型2　坐标变换与作图

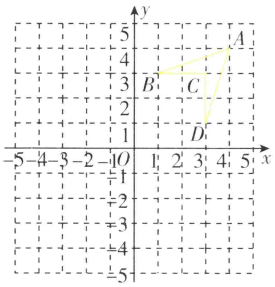
解决此类问题的关键是要掌握坐标系中点关于坐标轴、原点对称的点的坐标，找准图形的关键点，利用中心对称图形和轴对称图形的性质找准对称点，并顺次连接得到对称图形.

例题2　如图，在平面直角坐标系中，将四边形 $ABCD$ 称为“基本图形”，且各点的坐标分别为 $A(4,4)$，$B(1,3)$，$C(3,3)$，$D(3,1)$.

（1）画出“基本图形”关于原点 O 对称的四边形 $A_1B_1C_1D_1$，并求出点 A_1，B_1，C_1，D_1 的坐标；

（2）画出“基本图形”关于 x 轴的对称图形 $A_2B_2C_2D_2$；

（3）画出四边形 $A_3B_3C_3D_3$，使之与前面三个图形组成的图形既是中心对称图形，又是轴对称图形.

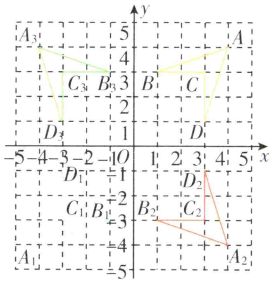


【分析】（1）根据坐标系中点关于原点对称的点的坐标特点，横、纵坐标互为相反数，即可得出答案；（2）关于 x 轴对称的两个点的坐标特点是横坐标相等，纵坐标互为相反数，根据坐标关系画图即可.

【解】（1）四边形 $A_1B_1C_1D_1$ 如图，且 $A_1(-4,-4)$，$B_1(-1,-3)$，$C_1(-3,-3)$，$D_1(-3,-1)$.

（2）分别画出点 A，B，C，D 关于 x 轴对称的点 A_2，B_2，C_2，D_2，然后顺次连接即可，如图所示.

（3）观察作出的图形可知，四边形 $A_3B_3C_3D_3$ 与四边形 $A_2B_2C_2D_2$ 关于原点 O 中心对称，才能使之与前面三个图形组成的图形既是中心对称图形，又是轴对称图形，分别画出点 A_3，B_3，C_3，D_3，然后顺次连接即可，如图所示.



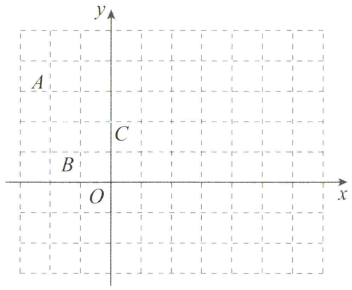
变式练　刷重点

变式练3　已知 $\triangle ABC$ 在平面直角坐标系 xOy 中的位置如图所示.

（1）作 $\triangle ABC$ 关于点 O 成中心对称的图形 $\triangle A_1B_1C_1$；

（2）将 $\triangle A_1B_1C_1$ 向右平移4个单位长度，作出平移后的 $\triangle A_2B_2C_2$；

（3）在 x 轴上求作一点 P，使 $PA_1 + PC_2$ 的值最小，并求出这个最小值.

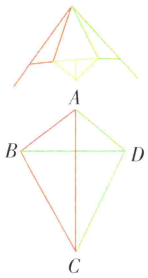


答案见 P40

题型3　简单的图案设计

例题3　阅读以下材料，并按要求完成相应的任务.

在几何中，平行四边形、矩形、菱形、正方形和等腰梯形都是特殊的四边形，大家对于它们的性质都非常熟悉，生活中还有一种特殊的四边形——筝形. 所谓筝形，它的形状与我们生活中风筝的骨架相似.



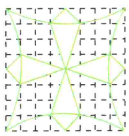
定义：两组邻边分别相等的四边形，称之为筝形，如图，四边形 $ABCD$ 为筝形.

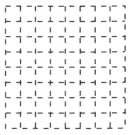
判定：(1)两组邻边分别相等的四边形是筝形.

(2)有一条对角线垂直平分另一条对角线的四边形是筝形.

显然，菱形是特殊的筝形，就一般的筝形而言，它与菱形有许多相同点和不同点.

如果只研究一般的筝形(不包括菱形)，请根据以上材料完成下列任务：


图(1)


图(2)

(1)请说出筝形与菱形的相同点和不同点各两条；

(2)请仿照图(1)的画法，在图(2)所示的网格中重新设计一个由四个全等的筝形和四个全等的菱形组成的新图案，具体要求如下：

①顶点都在格点上；

②所设计的图案既是轴对称图形，又是中心对称图形；

③将新图案中的四个筝形都涂上阴影.

【分析】(1)从角、边、对角线、对称性、面积等方面对比；(2)先设计四个全等菱形的基本图形，使其构成轴对称图形且是中心对称图形，再作出另外四个筝形即可.

【解】(1)相同点：①两组邻边分别相等；②有一组对角相等；③一条对角线垂直平分另一条对角线；④一条对角线平分一组对角；⑤都是轴对称图形；⑥面积等于对角线乘积的一半.

不同点：①菱形的对角线互相平分，筝形的对角线不互相平分；

②菱形的四条边都相等，筝形只有两组邻边分别相等；

③菱形的两组对边分别平行，筝形的对边不平行；

④菱形的两组对角分别相等，筝形只有一组对角相等；

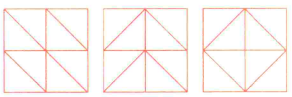
⑤菱形的邻角互补，筝形的邻角不互补；

⑥菱形既是轴对称图形，又是中心对称图形，筝形是轴对称图形，不是中心对称图形.

变式练　刷重点

变式练4　某公司为了节约经费开支，购买了同种质量、两种不同颜色的残缺地板砖，并把它们加工成如图(1)所示的大小相同的等腰直角三角形，准备用来装修地面，斌斌同学设计出如图(2)中①②③所示的三种图形.


图(1)



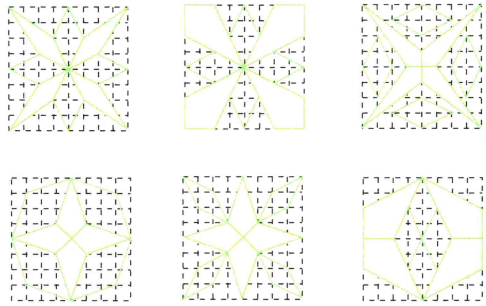
图(2)

(1)请问你喜欢其中的哪种图形，并简述该图形的形成过程；

(2)请利用平移、旋转、轴对称等有关知识，为该公司再设计一种与上述不同的图形.

答案见 P40

(2)(答案不唯一,符合条件即可)如图所示.



变式练答案

1. 20 cm^2 【解析】长方形的面积 $=10\times4=40\ (cm^2)$,根据中心对称的性质可得图中阴影部分的面积是长方形面积的一半,所以图中阴影部分的面积是 20 cm^2.

2. 【解】(1)∵ 四边形 $ABCD$ 是矩形,O 为对角线的交点,

∴ $AO=CO$,$OB=OD$,$AD/\!/BC$,

∴ $\angle MCO=\angle NAO$.

在$\triangle AON$和$\triangle COM$中,$\begin{cases}\angle MCO=\angle NAO,\\ AO=CO,\\ \angle AON=\angle COM,\end{cases}$

∴ $\triangle AON\cong\triangle COM$(ASA),

∴ $AN=CM$,$ON=OM$,

∴ 梯形 $ABMN$ 和梯形 $CDNM$ 关于点 O 成中心对称,

∴ 梯形 $ABMN\cong$梯形 $CDNM$,

∴ 梯形 $ABMN$ 的面积等于梯形 $CDNM$ 的面积.

(2)当 MN 满足 $MN\perp AC$ 时,才能使点 C 恰好与点 A 重合.

(3)∵ 矩形 $ABCD$ 沿 MN 折叠,点 C 与点 A 重合,

∴ $AM=MC$,$AD'=CD=AB$,$\angle AMN=\angle CMN$.

∵ $AD/\!/BC$,∴ $\angle ANM=\angle CMN$,

∴ $\angle AMN=\angle ANM$,∴ $AM=AN$.

在 Rt$\triangle ABM$和 Rt$\triangle AD'N$中,$\begin{cases}AM=AN,\\ AB=AD',\end{cases}$

∴ Rt$\triangle ABM\cong$Rt$\triangle AD'N$(HL),

∴ $S_{\triangle AD'N}=S_{\triangle ABM}$.

∵ 翻折后不重叠部分的面积是重叠部分面积的$\frac{1}{2}$,

∴ $\frac{1}{2}AB\cdot BM=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}AN\cdot AB$,

∴ $BM=\frac{1}{2}AN$.

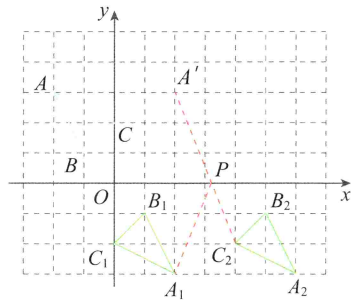
∵ $AM=MC=AN$,∴ $BM:MC=1:2$,

∴ $MC=2BM$.

3. 【解】(1)点 $A(-2,3)$,$B(-1,1)$,$C(0,2)$关于点 O 对称的点分别为 $A_1(2,-3)$,$B_1(1,-1)$,$C_1(0,-2)$,顺次连接 A_1,B_1,C_1,则$\triangle A_1B_1C_1$即为所求;

(2)点 $A_1(2,-3)$,$B_1(1,-1)$,$C_1(0,-2)$,分别向右平移 4 个单位长度,可得 $A_2(6,-3)$,$B_2(5,-1)$,$C_2(4,-2)$,顺次连接 A_2,B_2,C_2,则$\triangle A_2B_2C_2$即为所求;

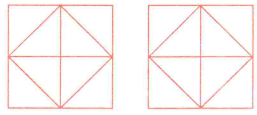
(3)作点 A_1 关于 x 轴对称的点 A',连接 $A'C_2$ 与 x 轴的交点即为所求点 P,此时 PA_1+PC_2 的最小值为 $A'C_2=\sqrt{2^2+5^2}=\sqrt{29}$.



4. 【解】(1)利用平移、旋转、轴对称等图形的变换,选取其中一个图形来简述其形成过程即可.

例如,喜欢图①. 图①的形成过程为同一列、同一行的两块同色地板砖,是以其中的一块地板砖为“基本图案”,经过平移而成;同一行的相邻两块不同色地板砖,可看作是其中的一块地板砖以直角三角形斜边的中点为旋转中心,旋转 180° 而成,或以它们的公共边所在的直线为对称轴,作对称变换而成.

(2)设计的图形如图:



第二十四章 圆



24.1 圆的有关性质

知识过关 全理解

知识点1 圆的定义及表示方法

1. 定义 ▶注意1

(1)描述性定义:

在一个平面内,线段 OA 绕它固定的一个端点 O 旋转一周,另一个端点 A 所形成的图形叫做圆,其固定的端点 O 叫做[1]____,线段 OA 叫做[2]____.

(2)集合性定义:

将圆心为 O、半径为 r 的圆看成是所有到定点 O 的距离等于定长 r 的点的集合.

2. 以点 O 为圆心的圆,记作"[3]____",读作"圆 O". 确定一个圆需要两个要素{圆心:确定圆的位置,;半径:确定圆的大小.}

3. 圆的特性

(1)圆上各点到圆心 O 的距离都等于[4]_____;

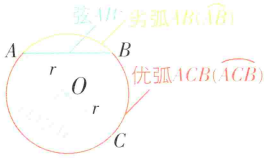
(2)所有到圆心的距离等于半径的点都在同一个圆上;

(3)圆上任意两点和圆心构成的三角形是[5]_____.

知识点2 圆的有关概念 ▶对点例

1. 弦与直径

连接圆上任意两点间的[6]____叫做弦(如图中 AB),经过圆心的弦叫做直径(如图中 AC).



2. 弧、半圆、劣弧、优弧 ▶拓展1

(1)圆上任意两点间的部分叫做[7]____,简称弧.

(2)圆的任意一条直径的两个[8]____把圆分成两条弧,每一条弧都叫做半圆.

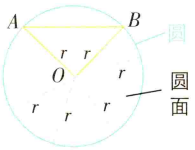
(3)弧{优弧:[9]____半圆的弧叫做优弧,用三个字母表示(如图中 $\overset{\frown}{ACB}$);劣弧:[10]____半圆的弧叫做劣弧,用两个字母表示(如图中 $\overset{\frown}{AB}$).}

3. 等圆与等弧

能够重合的两个圆叫做[11]____,[12]____相等的两个圆是等圆. 在同圆或等圆中,能够互相重合的弧叫做[13]____.

敲黑板 划重点

注意1 "圆"是指"圆周"(一条封闭曲线)而不是"圆面".



对点例 下列说法正确的是(　　)

A. 弦是直径

B. 半圆是弧,但弧不一定是半圆

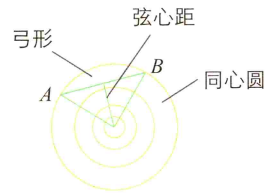
C. 优弧一定大于劣弧

D. 长度相等的弧是等弧

B 【解析】A 错误,直径是过圆心的特殊弦,但弦不一定是直径;B 正确,半圆是弧的一种,弧包括优弧、劣弧和半圆;C 错误,在同圆或等圆中,优弧大于劣弧;D 错误,能够互相重合的弧是等弧,而不是长度相等,必须是在同圆或等圆中,长度相等的弧是等弧. 故选 B.

拓展1 同心圆、弓形、弦心距

同心圆是圆心相同,半径不等的圆;弓形是由弦以及弦所对的弧组成的图形;弦心距是圆心到弦的距离. 如图所示.



知识点3　垂直于弦的直径

1. 圆的轴对称性 ▶注意2

圆是轴对称图形，任何一条[14]_____所在的直线都是圆的对称轴.

2. 垂径定理 ▶方法1

垂直于弦的直径[15]_____弦，并且[16]_____弦所对的两条弧.

$$\left.\begin{array}{l}①CD\text{是直径}\\②CD\perp AB\end{array}\right\}\Rightarrow\begin{cases}③AM=BM\\④\overset{\frown}{AC}=\overset{\frown}{BC}\\⑤\overset{\frown}{AD}=\overset{\frown}{BD}\end{cases}$$

3. 垂径定理的推论

平分弦（不是[17]_____）的直径垂直于弦，并且平分弦所对的两条弧.

$$\left.\begin{array}{l}①CD\text{是直径}\\②AM=BM\\(AB\text{不是直径})\end{array}\right\}\Rightarrow\begin{cases}③CD\perp AB\\④\overset{\frown}{AC}=\overset{\frown}{BC}\\⑤\overset{\frown}{AD}=\overset{\frown}{BD}\end{cases}$$

由垂径定理以及推论可知：如果一条直线具备①经过圆心（直径）；②垂直于弦；③平分弦；④平分弦所对的优弧；⑤平分弦所对的劣弧中任意两条性质，就具备其他三条性质，简称“知二推三”.

知识点4　弧、弦、圆心角

1. 圆心角

顶点在[18]_____的角叫做圆心角. ▶注意3

2. 圆的旋转对称性

将圆绕圆心旋转任意一个角度，都能与原来的图形重合，所以圆是特殊的中心对称图形，[19]_____是对称中心.

3. 圆心角及其所对的弧、弦的关系

定理：在同圆或等圆中，相等的圆心角所对的[20]_____相等，所对的[21]_____也相等. ▶注意4

$$①\angle AOB=\angle COD\Rightarrow\begin{cases}②\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{CD}\\③AB=CD\end{cases}$$

推论：(1)在同圆或等圆中，如果两条弧相等，那么它们所对的[22]_____相等，所对的[23]_____相等.

$$②\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{CD}\Rightarrow\begin{cases}①\angle AOB=\angle COD\\③AB=CD\end{cases}$$

(2)在同圆或等圆中，如果两条弦相等，那么它们所对的[24]_____相等，所对的[25]_____弧和[26]_____弧分别相等.

$$③AB=CD\Rightarrow\begin{cases}①\angle AOB=\angle COD\\②\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{CD}\text{和}\overset{\frown}{ADB}=\overset{\frown}{CBD}\end{cases}$$

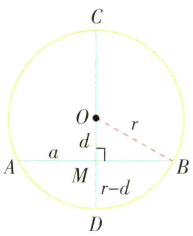
由圆心角、弦、弧的关系及推论可知：在同圆或等圆中，如果两个圆心角、两条弧（同为优弧或劣弧）、两条弦中有一组量相等，那么它们所对应的其余两组量都分别相等，简称“知一推二”.

敲黑板　划重点

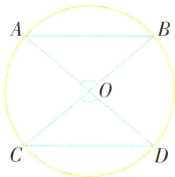
注意2　圆的对称轴不是直径，而是直径所在的直线. 直径是线段，对称轴是直线.

方法1　**垂径定理的计算**

连接半径或作圆心到弦的垂线构造直角三角形，利用勾股定理：弦长的一半^2 + 弦心距^2 = 半径^2，即$\left(\frac{a}{2}\right)^2+d^2=r^2$求解.

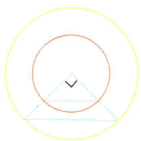


注意3　**一条弧所对的圆心角只有一个**



注意4　**圆心角定理及推论陷阱**

不能离开“在同圆或等圆中”这个前提条件. 如果丢掉这个前提，即使圆心角相等，它们所对的弦、弧也不一定相等. 如下图.



敲黑板 划重点

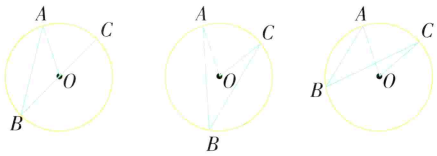
知识点5 圆周角

1. 圆周角的定义

顶点在[27]_____上，并且两边都与圆相交的角叫做圆周角.

2. 圆周角定理

一条弧所对的圆周角等于它所对的[28]_____角度数的一半. 如图 $\angle ABC=\frac{1}{2}\angle AOC$.



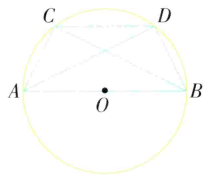
3. 圆周角定理的推论 ▶方法2

(1)[29]_____或等弧所对的圆周角相等.

$\overset{\frown}{AC}=\overset{\frown}{BD}\Rightarrow\angle ABC=\angle BAD$

(2)半圆(或直径)所对的圆周角是[30]_____角；90°的圆周角所对的弦是直径.

AB 是直径$\Rightarrow\angle ACB=\angle ADB=90°$；$\angle ACB=90°\Rightarrow AB$ 是直径.



(3)如果三角形一边上的中线等于这边的一半，那么这个三角形是直角三角形. ▶拓展2

4. 圆周角与圆心角的区别

(1)顶点：圆周角的顶点[31]_____，圆心角的顶点[32]_____；

(2)个数：一条弧所对的圆心角有[33]_____个，所对的圆周角有[34]_____个.

知识点6 圆内接多边形

1. 圆内接多边形的定义 ▶注意5

如果一个多边形的所有顶点都在[35]_____上，这个多边形叫做圆内接多边形，这个圆叫做这个多边形的[36]_____圆.

2. 圆内接四边形的性质

(1)圆内接四边形的对角[37]_____；

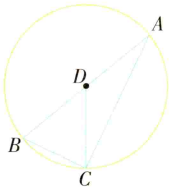
(2)圆内接四边形的每一个外角都等于它的内对角.

答案

[1]圆心 [2]半径 [3]⊙O [4]定长(半径 r) [5]等腰三角形 [6]线段 [7]圆弧 [8]端点 [9]大于 [10]小于 [11]等圆 [12]半径 [13]等弧 [14]直径 [15]平分 [16]平分 [17]直径 [18]圆心 [19]圆心 [20]弧 [21]弦 [22]圆心角 [23]弦 [24]圆心角 [25]优 [26]劣 [27]圆 [28]圆心 [29]同弧 [30]直 [31]在圆上 [32]是圆心 [33]一 [34]无数 [35]同一个圆 [36]外接 [37]互补

方法2 圆周角定理的推论将圆中直径与90°圆周角联系在一起，构造直径所对的圆周角是解决与圆相关问题常用的方法.

拓展2 在 $\triangle ABC$ 中，已知 CD 是 AB 边上的中线，$CD=\frac{1}{2}AB$，求证：$\angle ACB=90°$.



【证明】以 D 为圆心，CD 长为半径画圆，则圆 D 过 A，B，C 三点.

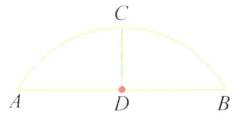
∵ AB 为圆 D 的直径，

∴ $\angle ACB=90°$(直径所对的圆周角等于90°).

注意5 只有对角互补的四边形才存在外接圆.

题型1 垂径定理的应用

例题1 如图，有一座圆弧形拱桥，桥下水面宽度 AB 为 12 m，拱高 CD 为 4 m.



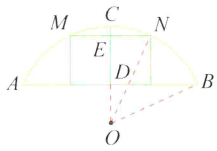
(1)求拱桥的半径；

(2)有一艘宽为 5 m 的货船，船舱顶部为长方形，并高出水面 3.6 m，求此货船是否能顺利通过拱桥.

【分析】(1)根据垂径定理和勾股定理求解；

(2)通过求距离水面 3.6 m 高处即 ED 长为 3.6 m 时，桥有多宽即 MN 的长与船舱顶部宽作比较来判断货船能否通过($MN>5$ m 则能通过，$MN\leqslant 5$ m 则不能通过). 根据第(1)问求出半径的长，利用勾股定理求出 EN 的长，从而求得 MN 的长.

【解】(1)如图，设圆心为点 O，连接 OB，延长 CD 至 O.



$\because OC\perp AB$，$\therefore D$ 为 AB 的中点.

$\because AB=12$ m，$\therefore BD=\frac{1}{2}AB=6$ m.

又$\because CD=4$ m，$\therefore$ 设 $OB=OC=ON=r$，则 $OD=(r-4)$ m.

在 $\mathrm{Rt}\triangle BOD$ 中，根据勾股定理得 $r^2=(r-4)^2+6^2$，

解得 $r=6.5$ m. $\therefore$ 拱桥的半径为 6.5 m.

(2)如图，在 DC 上取 $DE=3.6$ m，过点 E 作 $MN//AB$ 交 $\overset{\frown}{AC}$ 于 M，$\overset{\frown}{BC}$ 于 N.

$\because CD=4$ m，船舱顶部为长方形，并高出水面 $ED=3.6$ m，

$\therefore CE=4-3.6=0.4$(m)，$\therefore OE=r-CE=6.5-0.4=6.1$(m).

在 $\mathrm{Rt}\triangle OEN$ 中，$EN^2=ON^2-OE^2=6.5^2-6.1^2=5.04$，

$\therefore EN=\sqrt{5.04}$(m)，$\therefore MN=2EN=2\times\sqrt{5.04}\approx 4.49$(m).

$\because 4.49$ m <5 m，$\therefore$ 此货船不能顺利通过拱桥.

题型2 弧、弦、圆心角的关系定理及推论

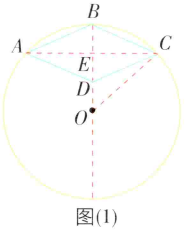
圆中的一条弦对应两段弧，若题干中未明确弦对应哪段弧，解答圆中一条弦对应的圆周角度数时，要注意分类讨论.

例题2 点 A，C 为半径是 3 的圆周上两点，点 B 为 $\overset{\frown}{AC}$ 的中点，以线段 BA，BC 为邻边作菱形 $ABCD$，顶点 D 恰在该圆直径的三等分点上，则该菱形的边长为 (　　)

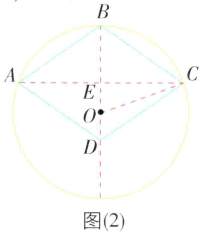
A. $\sqrt{5}$ 或 $2\sqrt{2}$　　B. $\sqrt{5}$ 或 $2\sqrt{3}$　　C. $\sqrt{6}$ 或 $2\sqrt{2}$　　D. $\sqrt{6}$ 或 $2\sqrt{3}$

【分析】依题意作出草图可知，存在 $BD=\frac{1}{3}$ 直径或 $BD=\frac{2}{3}$ 直径两种情况，结合菱形对角线互相垂直平分的性质、垂径定理计算菱形边长.

【解析】如图(1)，过 B 作圆的直径，连接 AC 交 BO 于 E，连接 OC.



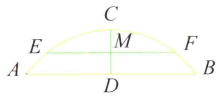
图(1)



图(2)

变式练 刷重点

变式练1 如图是一座跨河拱桥，桥拱是圆弧形，跨度 AB 为 16 米，拱高 CD 为 4 米.

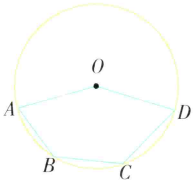


(1)求拱桥的半径 R；

(2)若大雨过后，桥下水面上升到 EF 的位置，且 EF 的宽度为 12 米，求拱顶 C 到水面 EF 的高度.

答案见 P46

变式练2 如图，圆 O 经过五边形 $OABCD$ 的四个顶点. 若 $\overset{\frown}{AD}=150°$，$\angle A=65°$，$\angle D=60°$，求 $\overset{\frown}{BC}$ 的度数.



答案见 P46

∵点 B 为$\overset{\frown}{AC}$的中点，∴ $BD \perp AC$. ∵点 D 恰在该圆直径的三等分点上，∴ $BD = \frac{1}{3} \times 2 \times 3 = 2$，∴ $OD = OB - BD = 1$. ∵四边形 $ABCD$ 是菱形，∴ $DE = \frac{1}{2}BD = 1$，∴ $OE = 2$. ∵ $CE = \sqrt{OC^2 - OE^2} = \sqrt{5}$，∴ $CD = \sqrt{DE^2 + CE^2} = \sqrt{6}$. 同理作图，如图(2)，$BD = \frac{2}{3} \times 2 \times 3 = 4$，同理可得，$OD = 1$，$OE = 1$，$DE = 2$. ∵ $CE = \sqrt{OC^2 - OE^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$，∴ $CD = \sqrt{DE^2 + CE^2} = \sqrt{2^2 + (2\sqrt{2})^2} = 2\sqrt{3}$. 故选 D.

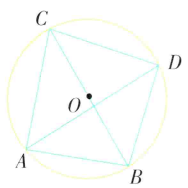
【答案】D

题型 3　圆周角定理及推论的应用

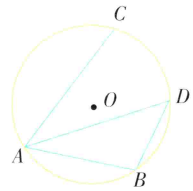
例题 3　已知⊙O 的直径为 10，点 A，B，C 在⊙O 上，$\angle CAB$ 的平分线交⊙O 于点 D.

(1) 如图(1)，若 BC 为⊙O 的直径，$AB = 6$，求 AC，BD，CD 的长；

(2) 如图(2)，若 $\angle CAB = 60°$，求 BD 的长.



图(1)



图(2)

【分析】(1) 利用圆周角定理可以判定△CAB 和△CDB 是直角三角形，利用勾股定理可以求得 AC 的长度，利用圆周角定理可知△DCB 是等腰直角三角形，利用勾股定理得 BD 和 CD 的长度；(2) 由圆周角定理、角平分线的性质以及等边三角形的判定推知△OBD 是等边三角形.

【解】(1) ∵ BC 是⊙O 的直径，∴ $\angle CAB = \angle BDC = 90°$.

在 Rt△CAB 中，$BC = 10$，$AB = 6$，

由勾股定理得 $AC = \sqrt{BC^2 - AB^2} = \sqrt{10^2 - 6^2} = 8$.

∵ AD 平分 $\angle CAB$，∴ $\overset{\frown}{CD} = \overset{\frown}{BD}$，∴ $CD = BD$.

在 Rt△BDC 中，$BC = 10$，由勾股定理得 $CD^2 + BD^2 = BC^2$，

解得 $BD = CD = 5\sqrt{2}$.

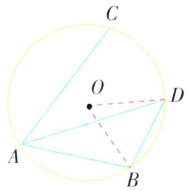
(2) 如图，连接 OB，OD.

∵ AD 平分 $\angle CAB$，且 $\angle CAB = 60°$，

∴ $\angle DAB = \frac{1}{2}\angle CAB = 30°$，∴ $\angle DOB = 2\angle DAB = 60°$.

又∵ $OB = OD$，∴ △OBD 是等边三角形，∴ $BD = OB = OD$.

∵⊙O 的直径为 10，∴ $BD = OB = 5$.



题型 4　巧用圆内接四边形的性质解题

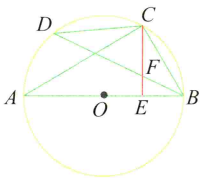
例题 4　如图(1)，在 Rt△ABC 中，$\angle ABC = 90°$，点 M 是 AC 的中点，以 AB 为直径作⊙O 分别交 AC，BM 于点 D，E.

(1) 求证：$MD = ME$；

(2) 如图(2)，连接 OD，OE，当 $\angle C = 30°$ 时，求证：四边形 $ODME$ 是菱形.

变式练　刷重点

变式练 3　如图，AB 是⊙O 的直径，点 C 在⊙O 上，$CE \perp AB$ 于点 E，BD 交 CE 于点 F，$CF = BF$.

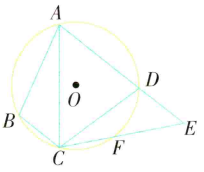


(1) 求证：C 是$\overset{\frown}{BD}$的中点；

(2) 若 $CD = 4$，$AC = 8$，求⊙O 的半径.

答案见 P46

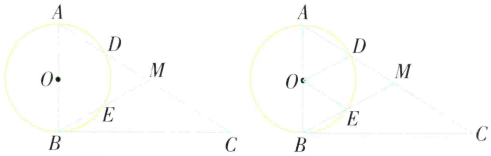
变式练 4　如图，四边形 $ABCD$ 内接于⊙O，F 是$\overset{\frown}{CD}$上一点，且$\overset{\frown}{DF} = \overset{\frown}{BC}$，连接 CF 并延长交 AD 的延长线于点 E，连接 AC，若 $\angle ABC = 105°$，$\angle BAC = 25°$，则 $\angle E$ 的度数为 (　　)



A. 45°　　B. 50°

C. 55°　　D. 60°

答案见 P46



图(1)　　图(2)

变式练　刷重点

【分析】(1)利用直角三角形斜边的中线的性质得 $MA=MB$，则 $\angle A=\angle MBA$，再利用圆内接四边形的性质证明 $\angle MDE=\angle MED$，于是得到 $MD=ME$；(2)先证明 $\triangle OAD$ 和 $\triangle OBE$ 为等边三角形，再证明四边形 $DOEM$ 为平行四边形，由 $OD=OE$ 即可证明四边形 $ODME$ 是菱形.

【证明】(1)在 $\mathrm{Rt}\triangle ABC$ 中，点 M 是 AC 的中点，

$\therefore MA=MB,\therefore \angle A=\angle MBA.$

连接 $DE.\because$ 四边形 $ABED$ 是圆内接四边形，$\therefore \angle ADE+\angle ABE=180°$，

而 $\angle ADE+\angle MDE=180°,\therefore \angle MDE=\angle MBA.$

同理可得 $\angle MED=\angle A,\therefore \angle MDE=\angle MED,\therefore MD=ME.$

(2)$\because \angle C=30°,\angle ABC=90°,\therefore \angle A=60°,\therefore \angle ABM=60°,$

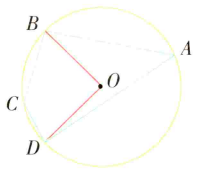
$\therefore \triangle OAD$ 和 $\triangle OBE$ 为等边三角形，$\therefore \angle BOE=60°,$

$\therefore \angle BOE=\angle A,\therefore OE/\!/AC$，同理可得 $OD/\!/BM.$

$\therefore$ 四边形 $ODME$ 为平行四边形.

又$\because OD=OE,\therefore$ 四边形 $ODME$ 是菱形.

变式练 5　如图，在$\odot O$的内接四边形 $ABCD$ 中，$\angle BOD=90°$，则 $\angle BCD=$_____.



答案见本页

变式练答案

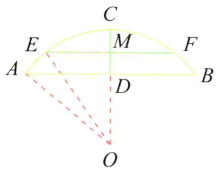
1.【解】(1)如图，设圆心为 O. 连接 $OA,OD.$

由题意可知 $AD=\frac{1}{2}AB=8$ 米，$OD=(R-4)$ 米.

$\because$ 在 $\mathrm{Rt}\triangle AOD$ 中，$AO^2=OD^2+AD^2,$

$\therefore R^2=(R-4)^2+64$，解得 $R=10.$

故拱桥的半径 R 为 10 米.



(2)如图，连接 $OE.$ 由题意可知 $EF=12$ 米，$EM=\frac{1}{2}EF=6$ 米.

$\because$ 在 $\mathrm{Rt}\triangle OEM$ 中，$OE^2=EM^2+OM^2,$

$\therefore 10^2=6^2+OM^2$，解得 $OM=8,$

$\therefore CM=10-8=2$(米).

即拱顶 C 到水面 EF 的高度是 2 米.

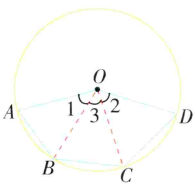
2.【解】如图，连接 $OB,OC.$

$\because OA=OB=OC=OD,\therefore \triangle OAB,$

$\triangle OBC,\triangle OCD$ 皆为等腰三角形.

$\because \angle A=65°,\angle D=60°,$

$\therefore \angle 1=180°-2\angle A=180°-2\times 65°=50°,\angle 2=180°-2\angle D=180°-2\times 60°=60°.$



$\because \overset{\frown}{AD}=150°,\therefore \angle AOD=150°,$

$\therefore \angle 3=\angle AOD-\angle 1-\angle 2=150°-50°-60°=40°,$

则 $\overset{\frown}{BC}$ 的度数为 40°.

3. (1)【证明】$\because AB$ 是直径，$\therefore \angle ACB=90°,$

$\therefore \angle CAB+\angle CBE=90°.$

$\because CE\perp AB,\therefore \angle ECB+\angle CBE=90°,\therefore \angle CAB=\angle ECB.$

$\because \angle CAB=\angle CDB,\therefore \angle CDB=\angle ECB.$

又$\because CF=BF,\therefore \angle FCB=\angle FBC,$

$\therefore \angle CDB=\angle FBC,\therefore \overset{\frown}{CD}=\overset{\frown}{BC},$

$\therefore C$ 是 $\overset{\frown}{BD}$ 的中点.

(2)【解】由(1)知 C 是 $\overset{\frown}{BD}$ 的中点，$\therefore BC=CD=4,$

$\because \angle ACB=90°,\therefore AB=\sqrt{AC^2+BC^2}=\sqrt{8^2+4^2}=4\sqrt{5},$

$\therefore \odot O$ 的半径为 $2\sqrt{5}.$

4. B　【解析】因为四边形 $ABCD$ 内接于$\odot O$，所以 $\angle ADC=180°-\angle ABC=180°-105°=75°.$ 又因为 $\overset{\frown}{DF}=\overset{\frown}{BC}$，所以 $\angle DCE=\angle BAC=25°.$ 又因为 $\angle ADC=\angle DCE+\angle E$，所以 $\angle E=\angle ADC-\angle DCE=75°-25°=50°.$ 故选 B.

5. 135°　【解析】根据圆周角定理，得 $\angle A=\frac{1}{2}\angle BOD=45°,$

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是$\odot O$的内接四边形，$\therefore \angle A+\angle BCD=180°,\therefore \angle BCD=180°-45°=135°.$

24.2 点和圆、直线和圆的位置关系

知识过关 全理解

知识点1 点与圆的位置关系 ▶图示1

设⊙O的半径为r，点P到圆心的距离为d，则

点与圆的位置关系：
- 点P在圆内⇔d [1] ____ r；
- 点P在圆上⇔d [2] ____ r；
- 点P在圆外⇔d [3] ____ r.

知识点2 三角形的外接圆

1. 圆的确定

经过不在同一条直线上的三个点(A,B,C)作圆的一般步骤：▶注意1

(1)连接AB,BC；

(2)分别作AB,BC的垂直平分线EF,HG,交于点O；

(3)以交点O为圆心，以交点到三点中任意一点的距离为半径作圆，⊙O即为所求. ▶图示2

2. 三角形的外接圆

(1)经过三角形[4] ____ 的圆叫做三角形的外接圆，这个三角形叫做这个圆的内接三角形.

(2)三角形的外心，是外接圆的[5] ____，是三角形[6] ____ 的交点.

(3)三角形的外心的性质

三角形的外心到三角形三个顶点的距离[7] ____，等于外接圆的半径.

(4)三角形的外心的位置

锐角三角形外接圆的圆心在[8] ____，直角三角形外接圆的圆心是[9] ____，钝角三角形外接圆的圆心在[10] ____.

知识点3 反证法

1. 概念 ▶注意2

假设命题的结论不成立，由此经过推理得出矛盾，由矛盾断定所作假设不正确，从而得出原命题成立，这种方法叫做反证法.

2. 常见的矛盾类型

(1)与所学定义、定理以及基本事实相矛盾；

(2)与已知条件相矛盾；

(3)自相矛盾.

3. 证明命题的一般步骤 ▶对点例

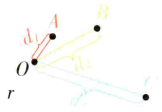
(1)假设命题的结论不成立；

(2)从假设出发，经过推理论证，得出与定义、公理、定理或已知条件相矛盾；

(3)由矛盾断定所作假设不正确，从而得出原命题的结论正确.

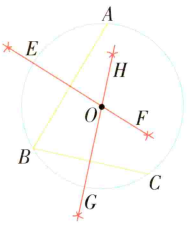
敲黑板 划重点

图示1 点A在圆内，点B在圆上，点C在圆外.



注意1 不可忽视“不在同一条直线上”这个条件，即经过同一条直线上的三个点不能作圆.

图示2 过不共线三点A,B,C作圆



注意2 当命题结论的“反面”不止一种情形时，需要考虑所有情况，并一一否定. 命题中常出现“至多”“至少”等词语.

对点例 反证法证明：“三条长度为1,1,2的线段无法构成三角形”.

【证明】假设三条长度为1,1,2的线段能构成三角形，则满足三边关系$1+1>2$，与$2=2$矛盾，故假设命题不成立，所以原命题成立.

知识点 4　直线与圆的位置关系 ▶图示 3

位置关系	相交	相切	相离
公共点个数	2	1	0
d 与 r 关系	$d<r$	$d=r$	$d>r$
公共点名称	割点	切点	
直线名称	割线	切线	

知识点 5　切线的判定定理和性质定理

1. 切线的判定定理

经过[11]____外端并且垂直于这条半径的直线是圆的切线.

2. 切线的判定定理的推论 ▶说明

(1)经过圆心且垂直于切线的直线必经过切点.

(2)经过切点且垂直于切线的直线必经过圆心.

3. 切线的性质定理

圆的切线垂直于经过[12]____的半径.

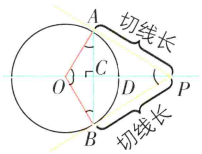
知识点 6　切线长及切线长定理

1. 切线长

经过圆外一点的圆的切线上,[13]____和[14]____之间线段的长,叫做这点到圆的切线长.

2. 切线长定理 ▶拓展 1

从圆外一点可以引圆的两条切线,它们的切线长[15]____,这一点和圆心的连线[16]____两条切线的夹角.



知识点 7　三角形的内切圆

1. 三角形的内切圆

与三角形各边都[17]____的圆叫做三角形的内切圆,这个三角形叫做这个圆的[18]____.

2. 三角形的内心

三角形的[19]____的圆心,是三角形[20]____的交点.

3. 三角形内心的性质

(1)内心到三角形三边的距离相等,且均等于半径; ▶拓展 2

(2)过三角形顶点和内心的射线平分三角形的内角;

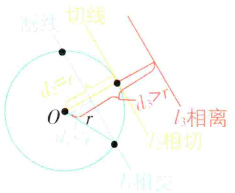
(3)所有三角形的内心均在三角形内部.

答案

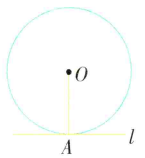
[1] < [2] = [3] > [4]三个顶点 [5]圆心 [6]三条边的垂直平分线 [7]相等 [8]三角形内部 [9]斜边的中点 [10]三角形外部 [11]半径 [12]切点 [13]这点 [14]切点 [15]相等 [16]平分 [17]相切 [18]外切三角形 [19]内切圆 [20]三条角平分线

敲黑板　划重点

图示 3　直线与圆的位置关系



说明　圆中一条直线满足:①垂直于切线;②过切点;③过圆心中的任意两条,一定满足第三条.



拓展 1　由图还可得如下结论

(1)垂直关系:$AB\perp OP$,$OA\perp AP$,$OB\perp BP$;

(2)与 $\angle OAC$ 相等的角:$\angle OBC$,$\angle APC$,$\angle BPC$;

(3)全等三角形:$\triangle AOP\cong\triangle BOP$,$\triangle AOC\cong\triangle BOC$,$\triangle ACP\cong\triangle BCP$.

拓展 2　求直角三角形内切圆的半径 r

方法一:利用面积相等.

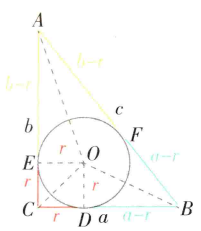
$S_{\triangle ABC}=S_{\triangle BOC}+S_{\triangle AOC}+S_{\triangle AOB}$,

即 $\frac{1}{2}ab=\frac{1}{2}(a+b+c)r$,

则 $r=\frac{ab}{a+b+c}$.

方法二:利用切线长定理.

$a-r+b-r=c$,即 $r=\frac{a+b-c}{2}$.



题型过关 全提升

题型 1　直线与圆的位置关系

主要涉及两类题：(1)根据所给条件判断直线与圆的位置关系；

(2)已知位置关系求参数的值或取值范围.

解答“判定直线与圆的位置关系”有关题目时，一般有两种方式：

(1)根据题意作出图形，根据公共点的个数判断；

(2)根据弦心距 d 与半径 r 的大小判断.

例题 1　在 $\mathrm{Rt}\triangle ABC$ 中，$\angle C=90°$，$AC=6$，$BC=8$，如果以点 C 为圆心，r 为半径作圆，且$\odot C$ 与斜边 AB 仅有一个公共点，求半径 r 的取值范围.

【分析】若圆与斜边只有一个公共点，则该圆和斜边相切或和斜边相交，但只有一个交点在斜边上.

【解】根据勾股定理求得直角三角形的斜边 $AB=\sqrt{8^2+6^2}=10$，

当圆和斜边相切时，半径 r 即是斜边上的高，等于 4.8；

当圆和斜边相交，且只有一个交点在斜边上时，即圆的半径 r 大于短直角边而小于或等于长直角边，$6<r\leqslant 8$.

故半径 r 的取值范围是 $r=4.8$ 或 $6<r\leqslant 8$.

变式练　刷重点

变式练 1　已知 $\angle BAC=45°$，一动点 O 在射线 AB 上运动(点 O 与点 A 不重合)，设 $OA=x$，如果半径为 1 的$\odot O$ 与射线 AC 有公共点，那么 x 的取值范围是　(　　)

A. $0<x\leqslant 1$　　B. $1\leqslant x<\sqrt{2}$

C. $0<x\leqslant\sqrt{2}$　　D. $x>\sqrt{2}$

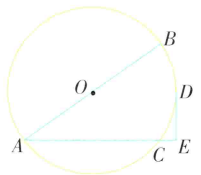
答案见 P52

题型 2　切线的判定

因为切线与圆有且只有一个公共点，所以题中信息是否明确给出公共点可以作为判定切线方法选择的一个标准.

分类标准	证明方法	简记
已知公共点(切点)	证明半径和直线垂直	有切点，连半径，证垂直
未知公共点(切点)	作垂线，证明垂线段的长等于半径长	无切点，作垂线，证相等

例题 2　如图，已知$\odot O$ 的直径 $AB=12$，弦 $AC=10$，D 是$\overset{\frown}{BC}$的中点，过点 D 作 $DE\perp AC$，交 AC 的延长线于点 E.



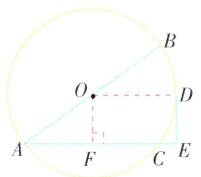
(1)求证：DE 是$\odot O$ 的切线；

(2)求 AE 的长.

【分析】(1)已知切点 D，需证 $OD\perp DE$；

(2)过 O 作 OF 垂直于 AC，利用垂径定理得到 F 为 AC 的中点，再由四边形 $OFED$ 为矩形，求出 FE 的长，最后由 $AF+EF$ 求出 AE 的长即可.

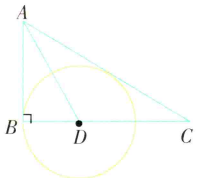
(1)【证明】如图，连接 OD.



$\because D$ 为$\overset{\frown}{BC}$的中点，$\therefore \overset{\frown}{BD}=\overset{\frown}{CD}$，

$\therefore \angle BOD=\angle BAE$，$\therefore OD/\!/AE$.

变式练 2　如图，在 $\mathrm{Rt}\triangle ABC$ 中，$\angle ABC=90°$，$\angle BAC$ 的平分线交 BC 于 D，以 D 为圆心，DB 长为半径作$\odot D$. 求证：AC 与$\odot D$ 相切.



答案见 P52

$\because DE \perp AC, \therefore \angle AED = 90°, \therefore \angle ODE = 90°, \therefore OD \perp DE.$

$\therefore DE$ 是$\odot O$的切线.

(2)【解】如图,过点 O 作 $OF \perp AC$. $\because AC = 10, \therefore AF = CF = \frac{1}{2}AC = 5.$

$\because \angle OFE = \angle DEF = \angle ODE = 90°, \therefore$ 四边形 $OFED$ 为矩形,

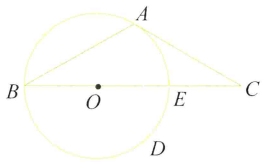
$\therefore FE = OD = \frac{1}{2}AB = 6, \therefore AE = AF + FE = 5 + 6 = 11.$

变式练 刷重点

题型3 切线的性质

已知圆的切线时,常连接圆心和切点,得到半径垂直于切线,通过构造直角三角形解决问题,即"见切线,连半径,得垂线".

例题3 如图,BE 是$\odot O$的直径,点 A 和点 D 是$\odot O$上的两点,过点 A 作$\odot O$的切线交 BE 的延长线于点 C.



(1)若$\angle ADE = 25°$,求$\angle C$的度数;

(2)若 $AB = AC, CE = 2$,求$\odot O$的半径.

【分析】(1)连接 OA,利用切线的性质和角之间的关系解答即可;

(2)根据直角三角形的性质解答即可.

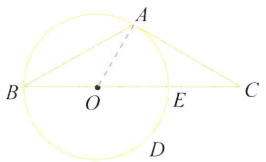
【解】(1)如图,连接 OA.

$\because AC$ 是$\odot O$的切线,OA 是$\odot O$的半径,

$\therefore OA \perp AC, \therefore \angle OAC = 90°.$

$\because \angle ADE = 25°, \therefore \angle AOE = 2\angle ADE = 50°,$

$\therefore \angle C = 90° - \angle AOE = 90° - 50° = 40°.$



(2)$\because AB = AC, \therefore \angle ABC = \angle C.$

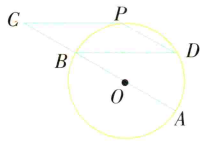
$\because OB = OA, \therefore \angle ABC = \angle OAB, \angle AOC = 2\angle ABC, \therefore \angle AOC = 2\angle C.$

$\because \angle OAC = 90°, \therefore \angle AOC + \angle C = 90°,$

$\therefore 3\angle C = 90°, \therefore \angle C = 30°, \therefore OA = OE = \frac{1}{2}OC,$

$\therefore OE = CE = 2, \therefore$ $\odot O$的半径为 2.

变式练3 如图,$\odot O$的直径 $AB = 12$,C 为 AB 延长线上一点,CP 与$\odot O$相切于点 P,过点 B 作弦 $BD \parallel CP$,连接 PD.



(1)求证:点 P 为$\overset{\frown}{BD}$的中点;

(2)若$\angle C = \angle D$,求四边形 $BCPD$ 的面积.

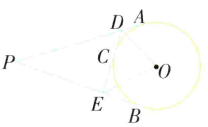
答案见 P52

题型4 切线长定理

切线长定理实际是考查圆的对称性,进行相关计算时,圆外一点、切点和圆心构成的直角三角形是解题的基础.

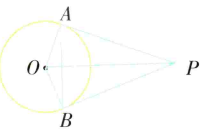
例题4 如图,P 是$\odot O$外的一点,PA,PB 分别与$\odot O$相切于 A,B 两点,C 是$\overset{\frown}{AB}$上的任意一点,过点 C 的切线分别交 PA,PB 于点 D,E. 若 $PA = 4$,求$\triangle PED$的周长.

【分析】由 PA,PB 分别与$\odot O$相切于点 A,B,根据切线长定理得 $PA = PB = 4$,同理得 $DC = DA$,$EC = EB$. 再根据三角形周长的定义得到$\triangle PED$的周长 $= PD + DE + PE$,然后利用等量代换得到$\triangle PDE$的周长 $= PD + DA + EB + PE = PA + PB$.



【解】$\because PA$,PB 分别与$\odot O$相切于点 A,B,$\therefore PA = PB = 4.$

变式练4 如图,$\odot O$的半径为 1,PA,PB 是$\odot O$的两条切线,切点分别为 A,B. 连接 OA,OB,AB,PO. 若$\angle APB = 60°$,则$\triangle PAB$的周长为_____.



答案见 P52

∵ 过点 C 的切线分别交 PA,PB 于点 D,E,∴ $DC=DA$,$EC=EB$,

∴ $\triangle PED$ 的周长 $=PD+DE+PE=PD+DC+CE+PE=PD+DA+EB+PE=PA+PB=4+4=8$.

题型5　三角形的外接圆与内切圆

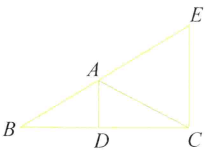
三角形外心的确定:三角形三边的垂直平分线的交点;外心的位置与三角形的形状有关,外心到三角形三个顶点的距离相等. 三角形内心的确定:三角形三条角平分线的交点;内心的位置与三角形的形状无关,内心到三角形三边的距离相等. 内、外心常常放在一起并结合圆的有关性质以及切线长定理作为考查的热点.

例题5　如图,在 $\triangle ABC$ 中,AD 是边 BC 上的中线,$\angle BAD=\angle CAD$,$CE/\!/AD$,CE 交 BA 的延长线于点 E,$BC=8$,$AD=3$.

(1)求证:$\triangle ABC$ 为等腰三角形;

(2)求 CE 的长;

(3)求 $\triangle ABC$ 的外接圆圆心 P 与内切圆圆心 Q 之间的距离.



【分析】(1)通过 $S_{\triangle ABD}=S_{\triangle ACD}$,$\angle BAD=\angle CAD$,证明 $AB=AC$;

(2)由 $\angle BAD=\angle CAD$,$CE/\!/AD$,得到 $\angle ACE=\angle E$,所以 $AC=AE$,可得 AD 为 $\triangle BCE$ 的中位线,$CE=2AD=6$;

(3)如图,连接 BP,BQ,CQ,先利用勾股定理计算出 $AB=5$. 设 $\odot P$ 的半径为 R,$\odot Q$ 的半径为 r. 在 $\mathrm{Rt}\triangle PBD$ 中,利用勾股定理得 $(R-3)^2+4^2=R^2$,解得 $R=\dfrac{25}{6}$,则 $PD=\dfrac{7}{6}$,然后利用面积法求出 $r=\dfrac{4}{3}$,即 $QD=\dfrac{4}{3}$,最后计算 $PD+QD$ 即可.

(1)【证明】过 D 作 $DG\perp AB$,$DH\perp AC$. ∵ AD 是边 BC 上的中线,

∴ $S_{\triangle ABD}=S_{\triangle ACD}$.

∵ $\angle BAD=\angle CAD$,∴ $DG=DH$,∴ $AB=AC$,∴ $\triangle ABC$ 为等腰三角形.

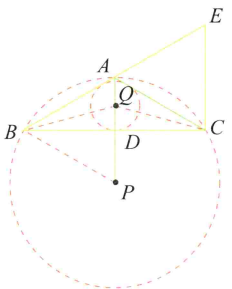
【解】(2)∵ $CE/\!/AD$,∴ $\angle BAD=\angle E$,$\angle CAD=\angle ACE$.

又∵ $\angle BAD=\angle CAD$,∴ $\angle ACE=\angle E$,∴ $AE=AC$.

∵ $AB=AC$,∴ $AB=AE$.

∵ $BD=CD$,∴ AD 为 $\triangle BCE$ 的中位线,∴ $CE=2AD=6$.

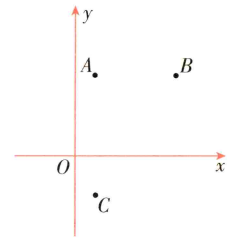
(3)如图,作 $\triangle ABC$ 的外接圆 $\odot P$ 和内切圆 $\odot Q$,连接 BP,BQ,CQ.



∵ $AB=AC$,$BD=CD=\dfrac{1}{2}BC=4$,∴ $AD\perp BC$. 在 $\mathrm{Rt}\triangle ABD$ 中,$AB=\sqrt{3^2+4^2}=5$.

变式练　刷重点

变式练5　如图,在平面直角坐标系中,点 A,B,C 的坐标分别为 $(1,4)$,$(5,4)$,$(1,-2)$,则 $\triangle ABC$ 外接圆的圆心坐标是　(　)

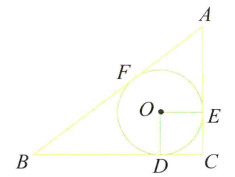


A. $(2,3)$　　B. $(3,2)$

C. $(1,3)$　　D. $(3,1)$

答案见 P52

变式练6　如图,在 $\triangle ABC$ 中,$\angle C=90°$,$\odot O$ 是 $\triangle ABC$ 的内切圆,D,E,F 是切点.



(1)求证:四边形 $ODCE$ 是正方形.

(2)如果 $AC=6$,$BC=8$,求内切圆 $\odot O$ 的半径.

答案见 P52

设$\odot P$的半径为R,$\odot Q$的半径为r.

在$\mathrm{Rt}\triangle PBD$中,$(R-3)^2+4^2=R^2$,解得$R=\frac{25}{6}$,$\therefore PD=PA-AD=\frac{25}{6}-3=\frac{7}{6}$.

$\because S_{\triangle ABQ}+S_{\triangle BCQ}+S_{\triangle ACQ}=S_{\triangle ABC}$,

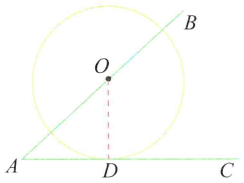
$\therefore \frac{1}{2}\cdot r\cdot 5+\frac{1}{2}\cdot r\cdot 8+\frac{1}{2}\cdot r\cdot 5=\frac{1}{2}\times 3\times 8$,

解得$r=\frac{4}{3}$,即$QD=\frac{4}{3}$,$\therefore PQ=PD+QD=\frac{7}{6}+\frac{4}{3}=\frac{5}{2}$.

即$\triangle ABC$的外接圆圆心P与内切圆圆心Q之间的距离为$\frac{5}{2}$.

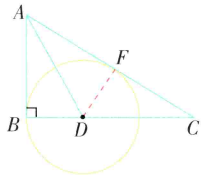
变式练答案

1. C 【解析】当$\odot O$与射线AC相切时,设切点为D,如图所示.



$\because \angle A=45°$,$\angle ODA=90°$,$OD=1$,$\therefore AD=OD=1$,由勾股定理得$AO=\sqrt{2}$,即此时$x=\sqrt{2}$,$\therefore$当半径为1的$\odot O$与射线AC有公共点时,x的取值范围是$0<x\leqslant\sqrt{2}$,故选C.

2. 【证明】如图,过点D作$DF\perp AC$于F.

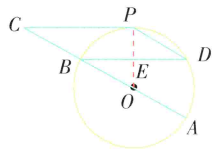


$\because AB$为$\odot D$的切线,$\therefore \angle B=90°$,$\therefore AB\perp BC$.

$\because AD$平分$\angle BAC$,$DF\perp AC$,$\therefore BD=DF$,

$\therefore AC$与$\odot D$相切.

3. (1)【证明】如图,连接OP,交BD于E.



$\because CP$与$\odot O$相切于点P,$\therefore PC\perp OP$.

$\because BD\parallel CP$,$\therefore BD\perp OP$,$\therefore \overset{\frown}{PB}=\overset{\frown}{PD}$,

$\therefore$点P为$\overset{\frown}{BD}$的中点.

(2)【解】$\because \angle C=\angle D$,$\angle POB=2\angle D$,$\therefore \angle POB=2\angle C$.

$\because \angle CPO=90°$,$\therefore \angle C=30°$.

$\because BD\parallel CP$,$\therefore \angle C=\angle DBA$,

$\therefore \angle D=\angle DBA$,$\therefore BC\parallel PD$,

$\therefore$四边形$BCPD$是平行四边形.

$\because PO=\frac{1}{2}AB=6$,$\therefore OC=12$,

在$\mathrm{Rt}\triangle OPC$中,由勾股定理得$PC=6\sqrt{3}$.

$\because \angle ABD=\angle C=30°$,$\therefore OE=\frac{1}{2}OB=3$,$\therefore PE=3$,

$\therefore$四边形$BCPD$的面积为$PC\times PE=6\sqrt{3}\times 3=18\sqrt{3}$.

4. $3\sqrt{3}$ 【解析】$\because PA$,PB是$\odot O$的两条切线,$\angle APB=60°$,

$\therefore PA=PB$,$\angle OAP=90°$,$\angle OPA=30°$,

$\therefore PA=\sqrt{3}$,$\triangle PAB$是等边三角形,

$\therefore \triangle PAB$的周长为$3\sqrt{3}$.

5. D 【解析】$\because$点A,B,C的坐标分别为$(1,4)$,$(5,4)$,$(1,-2)$,

$\therefore \triangle ABC$为直角三角形,$\angle BAC=90°$,

$\therefore \triangle ABC$的外接圆的圆心是斜边BC的中点,

$\therefore \triangle ABC$外接圆的圆心坐标是$\left(\frac{1+5}{2},\frac{-2+4}{2}\right)$,

即$(3,1)$. 故选D.

6. (1)【证明】$\because \odot O$是$\triangle ABC$的内切圆,$\therefore OD\perp BC$,$OE\perp AC$.

又$\because \angle C=90°$,$\therefore$四边形$ODCE$是矩形. $\because OD=OE$,$\therefore$四边形$ODCE$是正方形.

(2)【解】$\because \angle C=90°$,$AC=6$,$BC=8$,$\therefore$由勾股定理得$AB=\sqrt{AC^2+BC^2}=10$. 由切线长定理得$AF=AE$,$BD=BF$,$CD=CE$,$\therefore CD+CE=BC+AC-BD-AE=BC+AC-AB=4$,则$CE=2$,即内切圆$\odot O$的半径为2.

24.3 正多边形和圆

知识过关 全理解

敲黑板 划重点

知识点1 正多边形及有关概念

1. 1 _____的多边形叫做正多边形.

2. 圆内接正多边形

把圆分成 $n(n\geqslant 3)$ 等份,依次连接各等分点得到的多边形就是这个圆的内接正 n 边形,这个圆就是这个正 n 边形的外接圆.

3. 与正多边形有关的概念 ▶拓展1

(1)中心,即正多边形的2 _____;

(2)半径,即正多边形的3 _____;

(3)中心角,即正多边形每一边所对的4 _____;

(4)边心距,即5 _____到正多边形的一边的距离.

知识点2 正多边形的有关计算

设正 n 边形的半径为 R,边长为 a,边心距为 r,则

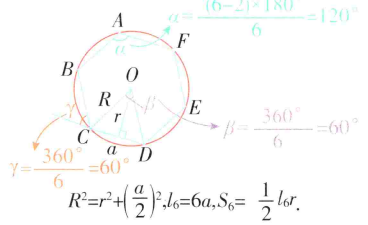
(1)每个内角为6 _____;每个中心角为7 _____;每个外角为8 _____;

(2)半径、边长、边心距的关系为

$R^2=r^2+\left(\frac{a}{2}\right)^2$;▶拓展2

(3)周长 $l=na$;面积 $S=\frac{1}{2}arn=\frac{1}{2}lr$.

以正六边形为例:



$R^2=r^2+\left(\frac{a}{2}\right)^2, l_6=6a, S_6=\frac{1}{2}l_6r$.

知识点3 正多边形的画法

画正多边形的关键是等分圆周,等分圆周有两种方法:

1. 用量角器等分 ▶图示1

特点:(1)可以画出任意正多边形;

(2)边数很大时,容易产生较大误差.

步骤:(1)用量角器画一个等于$\frac{360^\circ}{n}$的圆心角,这个角所对的弧就是圆周长的$\frac{1}{n}$;

(2)在圆上依次截取与这条弧相等的弧,就得到圆的 n 等分点;

(3)顺次连接各等分点,即得到圆的内接正 n 边形.

拓展1 正多边形的性质

(1)正多边形都是轴对称图形,一个正 n 边形一共有 n 条对称轴,每条对称轴都经过正多边形的中心;

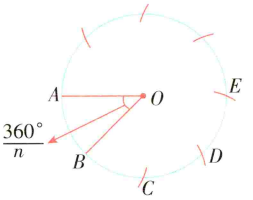
(2)如果正多边形有偶数条边,那么它也是中心对称图形,它的中心是对称中心;

(3)正多边形是旋转对称图形,最小旋转角为$\frac{360^\circ}{n}$;

(4)每个正多边形都有一个外接圆和一个内切圆,两个圆是同心圆.

拓展2 正 n 边形的半径和边心距把正 n 边形分成 $2n$ 个直角三角形,所以可以把正多边形的相关计算转化到直角三角形中,用勾股定理的知识解决.

图示1 量角器等分圆周示意图



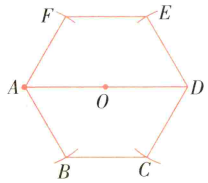
2. 用尺规等分▶图示 2

特点：(1)不能将圆任意等分，只限一些特殊的正多边形，如正四、八、十六边形，正三、六、十二边形等；(2)作图比较准确.

画正六边形的步骤：(1)作直径 AD；(2)分别以 A，D 为圆心，OA 长为半径画弧，分别交⊙O 于点 B，F，C，E；(3)顺次连接 AB，BC，CD，DE，EF，FA，得正六边形 $ABCDEF$.

敲黑板 划重点

图示 2 尺规等分圆周示意图



答案

1 各边相等，各角也相等　2 外接圆的圆心　3 外接圆的半径　4 圆心角　5 中心

6 $\frac{(n-2)\cdot 180^\circ}{n}$　7 $\frac{360^\circ}{n}$　8 $\frac{360^\circ}{n}$

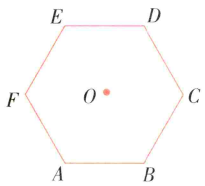
题型过关 全提升

题型 1　正多边形和圆的有关计算

利用正多边形和圆的性质，已知正多边形的边长，求解与正多边形有关的量时，通常做法是作出正多边形的边心距，构造由半径、边心距、边长的一半围成的直角三角形，然后利用勾股定理解决.

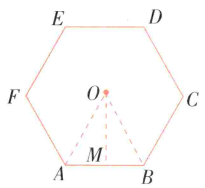
变式练 刷重点

例题 1　如图，已知正六边形 $ABCDEF$ 内接于⊙O，且边长为 4. 求该正六边形的面积及其外接圆的周长.



【分析】正六边形被半径等分成 6 个等边三角形，每个等边三角形被边心距等分成两个直角三角形. 计算直角三角形的面积可得正六边形的面积.

【解】如图，AB 为⊙O 的内接正六边形的一边，连接 OA，OB.



过点 O 作 $OM\perp AB$ 于点 M.

∵ 六边形 $ABCDEF$ 为正六边形，

∴ $OA=OB$，$\angle AOB=\frac{1}{6}\times 360^\circ=60^\circ$，

∴ △OAB 为等边三角形，∴ $OA=AB=4$，

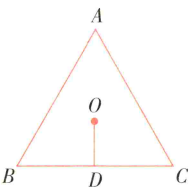
∴ 正六边形外接圆的半径为 4，外接圆的周长为 $2\pi\cdot OA=8\pi$.

∵ $OM\perp AB$，∴ $\angle AOM=\angle BOM=30^\circ$，$AM=\frac{1}{2}AB=2$，

∴ $OM=\sqrt{3}AM=2\sqrt{3}$，∴ $S_{\triangle AOB}=\frac{1}{2}AB\times OM=4\sqrt{3}$，

∴ 正六边形的面积为 $6S_{\triangle AOB}=24\sqrt{3}$.

变式练 1　如图，⊙O 的内接正三角形 ABC 的边心距 OD 为 2 cm，则⊙O 的半径为_____cm.

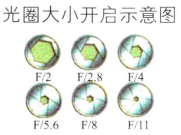


答案见 P57

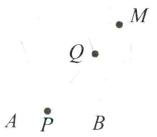
题型2　正多边形的实际应用

正多边形的实际应用问题是正多边形的重要考点，解答这类问题的关键是将实际问题转化为数学问题，运用直角三角形的有关知识进行求解.

例题2　小明发现相机快门打开过程中，光圈大小变化如图(1)所示，于是他绘制了如图(2)所示的图形. 图(2)中6个形状、大小都相同的四边形围成一个圆的内接正六边形和一个小正六边形，若 PQ 所在的直线经过点 M，$PB=5$ cm，小正六边形的面积为 $\frac{49}{2}\sqrt{3}$ cm^2，则该圆的半径为_____ cm.



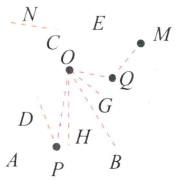
图(1)



图(2)

【分析】设这两个正六边形的中心为 O，连接 OP，OB，OQ，QM，CN，DP，过 O 作 $OG\perp PM$，$OH\perp AB$. 由正六边形的外角和性质得到 $\triangle PMN$ 为等边三角形，由小正六边形的面积求出小正六边形的边长，确定出 PM 的长，进而求出 $\triangle PMN$ 的面积，利用垂径定理求出 PG 的长. 在 Rt$\triangle OPG$ 中，利用勾股定理求出 OP 的长，设 $OB=x$ cm，根据勾股定理列出关于 x 的方程，求出方程的解，即可得到结果.

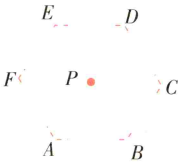
【解析】设两个正六边形的中心为 O. 如图，连接 OP，OB，OQ，QM，CN，DP，过点 O 作 $OG\perp PM$ 于点 G，$OH\perp AB$ 于点 H. ▶说明1



由小正六边形的外角和性质得，$\angle MEQ=\angle MQE=\frac{360°}{6}=60°$，$\therefore\triangle EMQ$ 为等边三角形，$\therefore\angle EMQ=60°$. 同理可得，$\angle MNP=\angle NPM=60°$，$\therefore\triangle PMN$ 是等边三角形. $\because$ 小正六边形是由6个相等的小等边三角形组成，$\therefore$ 一个小等边三角形的面积为 $\frac{1}{6}\times\frac{49\sqrt{3}}{2}=\frac{49\sqrt{3}}{12}$(cm^2). 在 Rt$\triangle QOG$ 中，$\because\angle OQG=60°$，$\therefore\angle QOG=30°$，$\therefore OQ=2QG$. 由勾股定理得 $OG=\sqrt{OQ^2-QG^2}=\sqrt{3}GQ$，$\therefore\frac{1}{2}\times2GQ\times OG=\sqrt{3}GQ^2=\frac{49\sqrt{3}}{12}$，$\therefore2GQ=\frac{7\sqrt{3}}{3}$，$\therefore PM=3\times2GQ=7\sqrt{3}$，$OG=\frac{7}{2}$，而且 $\triangle PMN$ 的面积等于小正六边形的面积的 $\frac{3}{2}$，故 $\triangle PMN$ 的面积为 $\frac{147\sqrt{3}}{4}$ cm^2. $\because OG\perp PM$，且点 O 是正六边形的中心，$\therefore PG=\frac{1}{2}PM=\frac{7\sqrt{3}}{2}$. 在 Rt$\triangle OPG$ 中，根据勾股定理得 $OP^2=OG^2+PG^2$，

变式练　刷重点

变式练2　如图，有六个矩形水池环绕，矩形的内侧一边所在直线恰好围成正六边形 $ABCDEF$，正六边形的边长为4米，要从水源点 P 处向各水池铺设供水管道，这些管道的总长度最短是多少米？(所有管道都在同一平面内，结果保留根号)



答案见P57

说明1　此题的难点是从实际问题中构建数学模型，将大、小正六边形的半径和边心距构造出来，得到大、小直角三角形，再用勾股定理列方程即可.

即$\left(\frac{7}{2}\right)^2+\left(\frac{7\sqrt{3}}{2}\right)^2=OP^2$，∴ $OP=7$ cm. 设 $OB=x$ cm，∵ $OH\perp AB$，且点 O 是圆内接正六边形的中心，∴ $BH=\frac{1}{2}x$，$OH=\frac{\sqrt{3}}{2}x$，∴ $PH=5-\frac{1}{2}x$. 在Rt△PHO中，根据勾股定理得 $OP^2=PH^2+OH^2$，即$\left(5-\frac{1}{2}x\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)^2=7^2$，解得 $x_1=8$，$x_2=-3$（舍去）. 故该圆的半径为 8 cm.

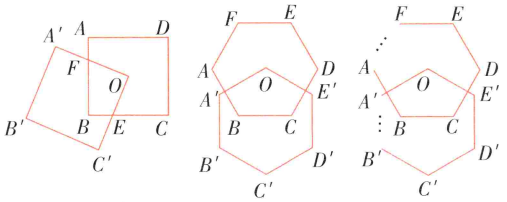
【答案】8

创新过关 提素养

题型3 正多边形中规律探究性问题

正多边形中规律探究性问题是重要的考点之一，解答这类问题的关键是灵活运用特殊与一般的思想. 这类问题需要从简单的情形入手，由浅入深、由简单到复杂、由特殊到一般逐步分析探索，发现变化规律，再根据变化规律归纳出最后的结果.

例题3 如图(1)、图(2)分别是两个相同的正方形、正六边形，其中一个正多边形的顶点在另一个正多边形外接圆的圆心 O 处.



图(1)　图(2)　图(3)

(1)求图(1)中，重叠部分的面积与阴影部分的面积之比；

(2)求图(2)中，重叠部分的面积与阴影部分的面积之比(直接写出答案)；

(3)根据前面探索和图(3)，你能否将本题推广到一般的正 n(n 为大于2的偶数)边形情况？若能，写出推广情况的结论；若不能，请说明理由.

【解】(1)连接 OA，OB，过点 O 作 $OM\perp AB$，垂足为 M.

∵ 点 O 是正方形 $ABCD$ 的外接圆的圆心，∴ $OA=OB$.

∵ 四边形 $ABCD$ 是正方形，∴ $OM=\frac{1}{2}AB$，

∴ $S_{\triangle ABO}=\frac{1}{4}S_{正方形ABCD}$.

∵ $\angle AOB=90°$，∴ $\angle OAF=\angle OBE=45°$.

又∵ $\angle A'OC'=90°$，$\angle AOF+\angle A'OB=\angle A'OB+\angle BOE=90°$，

∴ $\angle AOF=\angle BOE$.

又∵ $OA=OB$，∴ $\triangle AOF\cong\triangle BOE$(ASA)，∴ $S_{\triangle AOF}=S_{\triangle BOE}$. ▶说明2

∴ 重叠部分的面积 $=S_{\triangle BOF}+S_{\triangle BOE}=S_{\triangle BOF}+S_{\triangle AOF}=S_{\triangle ABO}=\frac{1}{4}S_{正方形ABCD}$.

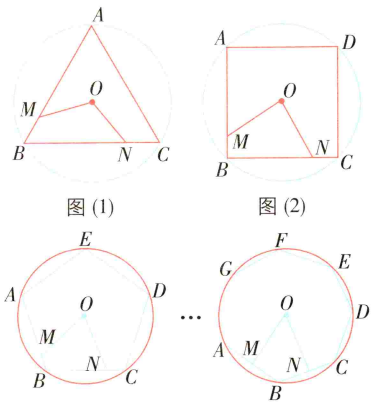
∴ $S_{阴影}=\frac{3}{4}S_{正方形ABCD}$.

∴ 重叠部分的面积与阴影部分的面积之比为1∶3.

(2)1∶2.

变式练 刷重点

变式练3 如图(1)，(2)，(3)，…，(n)，M，N 分别是⊙O 的内接正三角形 ABC，正方形 $ABCD$，正五边形 $ABCDE$，…，正 n 边形 $ABCDEFG\cdots$ 的边 AB，BC 上的点，且 $BM=CN$，连接 OM，ON.



图(1)　图(2)　图(3)　图(n)

(1)求图(1)中∠MON的度数；

(2)图(2)中∠MON的度数是_____，图(3)中∠MON的度数是_____；

(3)试探究∠MON的度数与正 n 边形边数 n 的关系.

答案见P57

说明2 可以先根据两个图形的特殊位置得到结论，然后证明一般情况下结论相同，把问题转化为证明图形全等.

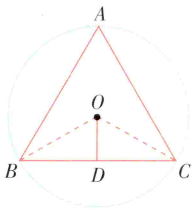
(3)正 n 边形的每一个内角度数为 $\frac{(n-2)\cdot 180^\circ}{n}$,阴影部分对应的中心角为 $360^\circ-\frac{(n-2)\cdot 180^\circ}{n}=\frac{(n+2)\cdot 180^\circ}{n}$,

两个相同正 n 边形重叠部分的面积与阴影部分的面积之比为 $\frac{(n-2)\cdot 180^\circ}{n}:\frac{(n+2)\cdot 180^\circ}{n}=(n-2):(n+2)$.

但当边数超过 6 以后,正多边形的边长小于半径,因而结论不适合推广.

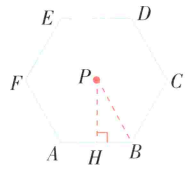
变式练答案

1. 4 【解析】如图,连接 OB,OC,则 $\angle BOC=\frac{360^\circ}{3}=120^\circ$.



$\because OB=OC$,$\therefore \angle OBC=30^\circ$. $\because OD\perp BC$,$\therefore OB=2OD=4$ cm.

2. 【解】如图,连接 PB,作 $PH\perp AB$ 于 H.



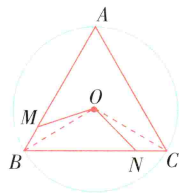
因为六边形 $ABCDEF$ 是正六边形,

所以 $PB=AB=4$ 米,$BH=\frac{1}{2}AB=2$ 米,

在 Rt$\triangle BPH$ 中,利用勾股定理可得 $PH=\sqrt{PB^2-BH^2}=\sqrt{4^2-2^2}=2\sqrt{3}$(米),$2\sqrt{3}\times 6=12\sqrt{3}$(米).

所以从水源点 P 处向各水池铺设供水管道,这些管道的总长度最短是 $12\sqrt{3}$ 米.

3. (1)【解】如图,连接 OB,OC.



$\because AB=AC$,$\therefore \angle ABC=\angle ACB$.

$\because OC=OB$,O 是正三角形 ABC 外接圆的圆心,$\therefore CO$ 平分 $\angle ACB$,

$\therefore \angle OBC=\angle OCB=30^\circ$,$\therefore \angle OBM=\angle OCN=30^\circ$.

$\because BM=CN$,$OC=OB$,$\therefore \triangle OMB\cong\triangle ONC$,$\therefore \angle BOM=\angle NOC$.

$\because \angle BAC=60^\circ$,$\therefore \angle BOC=120^\circ$,$\therefore \angle MON=\angle BOC=120^\circ$.

(2)90° 72° 【解析】同(1)可得题图(2)中 $\angle MON$ 的度数是 90°,题图(3)中 $\angle MON$ 的度数是 72°.

(3)【解】在题图(1)中,$\angle MON=\frac{360^\circ}{3}=120^\circ$;

在题图(2)中,$\angle MON=\frac{360^\circ}{4}=90^\circ$;

在题图(3)中,$\angle MON=\frac{360^\circ}{5}=72^\circ$;…;

故当边数为 n 时,$\angle MON=\frac{360^\circ}{n}$.

24.4 弧长和扇形面积

知识过关 全理解

知识点 1 弧长公式

在半径为 R 的圆中，因为 360° 的圆心角所对的弧长就是圆周长 $C=2\pi R$，所以 1° 的圆心角所对的弧长是[1]____，即[2]____，于是 $n°$ 的圆心角所对的弧长为 $l=$[3]_____ =[4]____，弧长为 l 的弧所对的圆心角为[5]_____.

知识点 2 扇形及扇形的面积公式

1. 扇形

由组成[6]____的两条半径和[7]____所对的弧围成的图形叫做扇形.

2. 扇形的面积公式 ▶拓展

在半径为 R 的圆中，因为 360° 的圆心角所对的扇形面积就是圆面积 $S=\pi R^2$，所以圆心角是 1° 的扇形面积是[8]____，于是圆心角为 $n°$ 的扇形面积是 $S_{扇形}=$[9]____，还可以用弧长表示扇形面积 $S_{扇形}=$[10]____，其中 l 为扇形的弧长. ▶方法

知识点 3 圆锥的侧面积和全面积

1. 圆锥的母线

连接圆锥顶点和[11]_____任意一点的线段叫做圆锥的母线.

2. 圆锥的高

连接圆锥顶点和[12]_____的线段叫做圆锥的高.

3. 圆锥的基本特征

(1)圆锥的轴通过底面的圆心，并垂直于底面.

(2)圆锥的母线长都[13]____.

(3)圆锥可以看作是由一个直角三角形绕一条直角边所在的直线旋转而成的图形，所以圆锥的母线 l，圆锥的高 h，圆锥的底面半径 r 恰好构成一个直角三角形. ▶注意

4. 圆锥的侧面积和全面积

母线长为 l，底面圆半径为 r 的圆锥的侧面积 $S_{侧}=$[14]____. 全面积就是它的侧面积与它的[15]_____之和，即 $S_{全}=$[16]_____.

答案

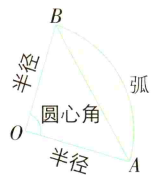
[1] $\frac{2\pi R}{360}$ [2] $\frac{\pi R}{180}$ [3] $\frac{n}{360}\cdot 2\pi R$ [4] $\frac{n\pi R}{180}$ [5] $n=\frac{180l}{\pi R}$ [6] 圆心角 [7] 圆心角 [8] $\frac{\pi R^2}{360}$

[9] $\frac{n\pi R^2}{360}$ [10] $\frac{1}{2}lR$ [11] 底面圆周上 [12] 底面圆心 [13] 相等 [14] πrl [15] 底面积

[16] $\pi lr+\pi r^2$

敲黑板 划重点

拓展 弓形的面积 $S_{弓形}=S_{扇形}-S_{\triangle AOB}$.

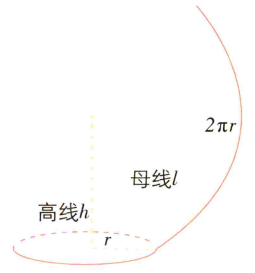


方法 **类比法熟记扇形面积公式**

扇形的面积公式 $S_{扇形}=\frac{1}{2}lR$ 与三角形的面积公式 $S=\frac{1}{2}ah$ 类似，只需把扇形看作一个曲边三角形，把弧长 l 看成底边，半径 R 看成高，用类比的方法记忆更为简便.

注意 **区分展开图半径与底面圆半径**

圆锥侧面展开图的半径是圆锥的母线，下图中 $l^2=h^2+r^2$.

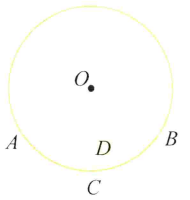


题型过关 全提升

题型1 弧长、扇形面积的计算

在弧长公式中有三个未知的量:弧长、半径、圆心角的度数,利用弧长公式可以解决已知这三个量中的两个量求第三个量的问题.

例题1 如图,已知⊙O的半径为10 cm,弦AB垂直平分半径OC,并交OC于点D.



(1)求弦AB的长;

(2)求弧AB的长,并求出图中阴影部分的面积.

【分析】(1)先利用垂径定理和已知条件得出$AB=2BD$,$\angle ODB=90°$,$OD=\frac{1}{2}OC=5$ cm,进而根据勾股定理求出BD,即可得出结论;

(2)利用在直角三角形中如果有一条直角边等于斜边的一半,那么该直角边所对的锐角等于30°,求出$\angle OBD=30°$,进而求出$\angle BOD=60°$,再利用弧长公式和扇形的面积公式求解.

【解】(1)⊙O的半径为10 cm,则$OB=OC=10$ cm.

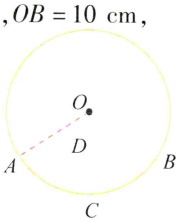
∵弦AB垂直平分半径OC,

∴$AB=2BD$,$\angle ODB=90°$,$OD=\frac{1}{2}OC=5$ cm.

在Rt△BOD中,根据勾股定理得,$BD=\sqrt{OB^2-OD^2}=5\sqrt{3}$(cm),

∴$AB=2BD=10\sqrt{3}$ cm.

(2)如图,连接OA.由(1)知,$OD=5$ cm,在Rt△BOD中,$OB=10$ cm,



∴$OD=\frac{1}{2}OB$,∴$\angle OBD=30°$,∴$\angle BOD=60°$.

∵$OC\perp AB$,$OA=OB$,∴$\angle AOB=2\angle BOD=120°$,

∴弧AB的长为$\frac{n\pi R}{180}=\frac{120\pi\times10}{180}=\frac{20\pi}{3}$(cm),

$S_{阴影}=S_{扇形AOB}-S_{△AOB}=\frac{n\pi R^2}{360}-\frac{1}{2}AB\cdot OD=\frac{120\pi\times100}{360}-\frac{1}{2}\times10\sqrt{3}\times5=\left(\frac{100\pi}{3}-25\sqrt{3}\right)$ cm^2.

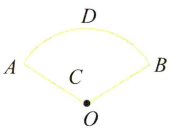
题型2 圆锥侧面展开图的有关计算

圆锥的有关计算通常有四种考查方式:(1)圆锥的底面半径、高、母线长中已知两个,求圆锥的侧面积或全面积;(2)已知圆锥的侧面积和底面半径,求母线长或圆锥的高或圆锥侧面展开图的圆心角;(3)已知圆锥侧面展开图的弧长及圆心角的度数,求圆锥的底面半径和高;(4)侧面展开图求最短距离,在展开的扇形中构造三角形解决.

例题2 如图所示,现有一圆心角为90°,半径为80厘米的扇形铁片,用它恰好围成一个圆锥形的量筒.如果用其他铁片再做一个圆形盖子把量

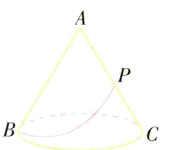
变式练 刷重点

变式练1 如图,弧AB的半径R为6 cm,弓形的高CD为3 cm.求弧AB的长和弓形ADB的面积.



答案见P61

变式练2 如图,有一圆锥形粮堆,其主视图是边长为6 m的正三角形ABC.



(1)求该圆锥形粮堆的侧面积;

(2)母线AC的中点P处有一老鼠正在偷吃粮食,小猫从B处沿圆锥表面去偷袭老鼠,求小猫经过的最短路程.(结果不取近似数)

答案见P61

筒底面密封(接缝都忽略不计),求:

(1)该圆形盖子的半径为多少厘米?

(2)制作这个密封量筒,共用铁片多少平方厘米?(结果保留 π)

【分析】(1)根据扇形的弧长等于圆锥的底面周长,利用扇形的弧长公式即可求得圆锥的底面周长,然后根据圆的周长公式即可求解.(2)将圆锥的底面积和侧面积相加即可.

【解】(1)圆锥的底面周长是$\frac{90\pi\times80}{180}=40\pi$(厘米).

设圆锥底面圆的半径是 r 厘米,则 $2\pi r=40\pi$,解得 $r=20$.

答:该圆形盖子的半径为 20 厘米.

(2)$S=S_{侧}+S_{底}=\frac{1}{4}\times\pi\times80^2+\pi\times20^2=2\,000\pi$(平方厘米).

答:制作这个密封量筒,共用铁片 $2\,000\pi$ 平方厘米.

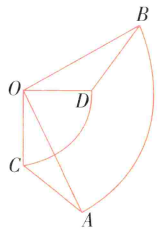
题型 3　不规则图形的面积的计算

不规则图形的面积的计算是弧长、扇形面积公式的综合运用,求不规则图形的面积时,通常借助图形变换、割补法、化整为零法将不规则图形转化为规则图形来求解.

例题 3　如图,扇形 OAB 与扇形 OCD 的圆心角都是 90°,连接 AC,BD.

(1)求证:$AC=BD$;

(2)若图中阴影部分的面积是$\frac{7\pi}{4}$ cm^2,$OC=3$ cm,求 OA 的长.



【分析】(1)根据等角的余角相等得 $\angle AOC=\angle BOD$,再根据"SAS"证明 $\triangle AOC\cong\triangle BOD$,则 $AC=BD$.(2)由图中相等面积图形的转化,将阴影部分面积转化为 $S_{扇形AOB}-S_{扇形EOF}$,然后根据扇形面积公式解方程即可求出 OA.

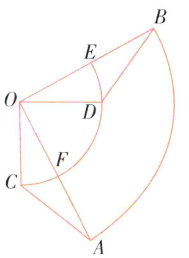
(1)【证明】∵ $\angle COD=\angle AOB=90°$,

即 $\angle AOC+\angle AOD=\angle BOD+\angle AOD$,

∴ $\angle AOC=\angle BOD$. 在 $\triangle AOC$ 和 $\triangle BOD$ 中,

$$\begin{cases}AO=BO,\\ \angle AOC=\angle BOD,\\ CO=DO,\end{cases}$$

∴ $\triangle AOC\cong\triangle BOD$(SAS),∴ $AC=BD$.



(2)【解】如图,延长弧 CD,与 OB 交于点 E.

由(1)中 $\triangle AOC\cong\triangle BOD$ 得 $\angle COF=\angle EOD$,

∴ $S_{扇形COF}=S_{扇形EOD}$,而 $S_{\triangle AOC}=S_{\triangle BOD}$,

∴ $S_{区域DEB}=S_{区域FCA}$,

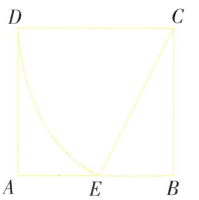
将阴影部分割补后得 $S_{阴影ACDB}=S_{扇形AOB}-S_{扇形EOF}$,

∴ $\frac{90\times\pi\times OA^2}{360}-\frac{90\times\pi\times3^2}{360}=\frac{7\pi}{4}$,

∴ $OA=4$ cm.

变式练　刷重点

变式练 3　如图,在矩形 $ABCD$ 中,$CD=2$,以点 C 为圆心,CD 长为半径画弧,交边 AB 于点 E,且 E 为 AB 的中点,则图中阴影部分的面积为_____.



答案见 P61

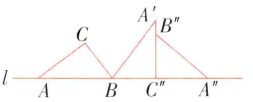
创新过关 提素养

题型4 利用弧长和扇形面积公式解决几何图形的旋转问题

例题4 如图，把直角三角形$\triangle ABC$的斜边AB放在直线l上，按顺时针方向转动两次，使它转到$\triangle A''B''C''$的位置. 设$BC=1$，$AC=\sqrt{3}$，则顶点A运动到A''的位置时，求：

(1)点A经过的路线有多长？

(2)点A经过的路线与直线l所围成的面积是多少？



【分析】(1)点A经过的路线长是两段弧长，利用弧长公式计算. (2)点A经过的路线与直线l所围成的面积是两个扇形的面积和一个三角形的面积，分别利用扇形和三角形面积公式计算.

【解】(1)在$\mathrm{Rt}\triangle ABC$中，$BC=1$，$AC=\sqrt{3}$，

所以$AB=\sqrt{AC^2+BC^2}=2$，$\angle CAB=30°$，

所以点A到点A''所经过的路线为

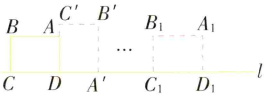
$$l_{\overset{\frown}{AA'}}+l_{\overset{\frown}{A'A''}}=\frac{120\pi\times2}{180}+\frac{90\pi\times\sqrt{3}}{180}=\frac{4\pi}{3}+\frac{\sqrt{3}\pi}{2}.$$

(2)点A经过的路线与直线l围成的面积为

$$\frac{120\times\pi\times2^2}{360}+\frac{90\times\pi\times(\sqrt{3})^2}{360}+\frac{1}{2}\times1\times\sqrt{3}=\frac{25\pi}{12}+\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

变式练 刷重点

变式练4 如图，矩形$ABCD$中，$AB=4$，$BC=3$，边CD在直线l上，将矩形$ABCD$沿直线l做无滑动翻滚，当点A第一次翻滚到点A_1位置时，求点A经过的路线长.



答案见本页

变式练答案

1.【解】由题意得$CO=R-CD=6-3=3(\mathrm{cm})$.

由勾股定理得，$BC=\sqrt{OB^2-OC^2}=3\sqrt{3}$，$AB=2BC=6\sqrt{3}$.

在$\mathrm{Rt}\triangle BCO$中，$\because CO=\frac{1}{2}OB$，

$\therefore\angle OBC=30°$，$\therefore\angle COB=60°$，$\therefore\angle AOB=60°\times2=120°$，

$\therefore$弧AB的长为$\frac{120\cdot\pi\cdot6}{180}=4\pi(\mathrm{cm})$.

$\therefore S_{弓形ADB}=S_{扇形AOB}-S_{\triangle AOB}=\frac{120\cdot\pi\cdot6^2}{360}-\frac{1}{2}\times6\sqrt{3}\times3=12\pi-9\sqrt{3}(\mathrm{cm}^2)$.

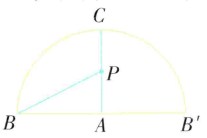
2.【解】(1)根据圆锥的侧面积等于展开扇形的面积得，圆锥形粮堆的侧面积为$\pi rl=\pi\times3\times6=18\pi(\mathrm{m}^2)$.

(2)圆锥的底面周长是6π m，

则$6\pi=\frac{n\pi\times6}{180}$，$\therefore n=180°$，

即圆锥侧面展开图的圆心角是$180°$.

由题意可知在圆锥侧面展开图中$AP=3$ m，$AB=6$ m，$\angle BAP=90°$.



$\therefore$在圆锥侧面展开图中，$BP=\sqrt{3^2+6^2}=3\sqrt{5}(\mathrm{m})$.

故小猫经过的最短路程是$3\sqrt{5}$ m.

3. $\frac{3\sqrt{3}}{2}-\frac{2\pi}{3}$ 【解析】由题意可知$AB=CD=CE=2$，$\therefore EB=\frac{1}{2}AB=1$，$\therefore\angle ECB=30°$，$\therefore\angle DCE=60°$，$\therefore$扇形$CDE$的面积为$\frac{60\times\pi\times2^2}{360}=\frac{2\pi}{3}$. $\because EB=1$，$CE=2$，$\therefore$在$\mathrm{Rt}\triangle BCE$中，由勾股定理可知$BC=\sqrt{3}$，$\therefore AD=BC=\sqrt{3}$，梯形$EADC$的面积为$\frac{(AE+CD)\cdot AD}{2}=\frac{(1+2)\times\sqrt{3}}{2}=\frac{3}{2}\sqrt{3}$，$\therefore$阴影部分的面积为$\frac{3\sqrt{3}}{2}-\frac{2\pi}{3}$.

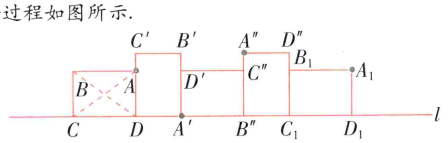
4.【解】如图，连接AC，BD.

$\because$四边形$ABCD$是矩形，$AB=4$，$BC=3$，

$\therefore BC=AD=3$，$\angle ADC=90°$，对角线$AC=BD=5$.

根据旋转的性质知，$\angle ADA'=90°$，$AD=A'D=BC=3$，

旋转过程如图所示.



$\therefore$点A翻滚到点A'位置时，点A'经过的路线为以点D为圆心，AD长为半径的圆的$\frac{1}{4}$，其长为$\frac{90\pi\times3}{180}=\frac{3\pi}{2}$.

同理，点A'翻滚到点A''位置时，点A'经过的路线为以点B''为圆心，$A'B''$长为半径的圆的$\frac{1}{4}$，其长为$\frac{90\pi\times4}{180}=2\pi$.

点A''翻滚到点A_1位置时，点A''经过的路线为以点C_1为圆心，对角线长为半径的圆的$\frac{1}{4}$，其长为$\frac{90\pi\times5}{180}=\frac{5\pi}{2}$.

所以当点A第一次翻滚到点A_1位置时，点A经过的路线长为$\frac{3\pi}{2}+2\pi+\frac{5\pi}{2}=6\pi$.



第二十五章 概率初步

25.1 随机事件与概率

知识过关 全理解

知识点1 随机事件的概念 ▶方法

事件类型		定义	举例
确定性事件	[1]_____事件	在一定条件下，有些事件必然会发生	水涨船高、水滴石穿、铁杵磨成针
	[2]_____事件	在一定条件下，有些事件必然不会发生	水中捞月、海枯石烂
[3]_____事件		在一定条件下，可能发生也可能不发生的事件	守株待兔、海市蜃楼

知识点2 事件发生的可能性大小 ▶图示1

1. 随机事件发生的可能性有大小之分，不同的随机事件发生的可能性大小有可能不同.

2. 必然事件发生的可能性为[4]_____，不可能事件发生的可能性为[5]_____，随机事件发生的可能性范围为[6]_____.

知识点3 概率的定义及计算公式

1. 概率的定义

一般地，对于一个随机事件 A，我们把刻画其发生可能性大小的[7]_____，称为随机事件 A 发生的概率，记为 $P(A)$.

2. 概率的计算公式 ▶注意

一般地，如果在一次试验中，有 n 种可能的结果，并且它们发生的可能性都相等，事件 A 包含其中的 m 种结果，那么事件 A 发生的概率 $P(A)=$[8]_____.

3. 概率的取值 ▶图示2

(1) 当事件 A 是必然事件时，$P(A)=$[9]_____；

(2) 当事件 A 是不可能事件时，$P(A)=$[10]_____；

(3) 当事件 A 是随机事件时，$P(A)$ 满足[11]_____.

答案

[1]必然 [2]不可能 [3]随机 [4]100% [5]0% [6]0%～100% [7]数值 [8]$\frac{m}{n}$

[9]1 [10]0 [11]$0<P(A)<1$

敲黑板 划重点

方法 事件的判定

事先知道一定发生的是必然事件，一定不发生的是不可能事件，否则就是随机事件.

判断一个事件是什么类型，要从定义出发，同时也要联系生活中的常识，看在一定条件下该事件是一定发生、一定不发生，还是可能发生.

图示1 随机转动转盘，指向阴影部分的可能性大于指向空白部分的可能性.

注意 试验需满足两个特点

(1) 每一次试验中，可能出现的结果是有限个；

(2) 每一次试验中，各种结果出现的可能性相等.

图示2 概率的取值



题型过关 全提升

题型1 事件及概率

根据事件发生的可能性判定其类别，掌握概率的意义可以帮助判定. 要注意，概率是反映事件发生机会的大小的概念，只是表示发生的机会的大小，机会大也不一定发生，机会小也有可能发生.

例题1 下列说法正确个数为 （ ）

①“明天降雨的概率是50%”表示明天有半天都是在降雨；

②某抽奖箱中有100张抽奖券，中奖率是25%，首先甲抽取一张没中，接下来乙抽剩下的奖券，则其中奖率大于25%；

③人可能生病，也可能不生病，因此生病和不生病的概率各占50%；

④“水加热到100 ℃会沸腾”发生的概率为1.

A. 0　　B. 1　　C. 2　　D. 3

【解析】①概率表示事件发生的可能性，“明天降雨的概率是50%”表明明天降雨的可能性是50%，错误；

②100张抽奖券中每一张能中奖发生的概率相等，与抽取的前后顺序无关，错误；

③根据常识可知生病和不生病的可能性是不相等的，错误；

④“水加热到100 ℃会沸腾”缺少一定条件的限制，在标准大气压下，水加热到100 ℃会沸腾是必然事件，但气压高于标准大气压时（高压锅），水加热到100 ℃不沸腾，错误.

故错误的有①②③④. 故选A.

【答案】A

题型2 求简单随机事件发生的概率

当试验结果是有限个时，应不重不漏地得到所有等可能的结果数以及所关注的结果数，再利用公式计算概率. 常见问题背景为摸球、掷骰子、抽卡片等.

例题2 一个不透明的布袋中有4个红球、5个白球、11个黄球，它们除颜色外都相同.

（1）求从袋中摸出一个球是红球的概率；

（2）现从袋中取走若干个黄球，并放入相同数量的红球，搅拌均匀后，要使从袋中摸出一个球是红球的概率不小于$\frac{1}{3}$，问至少需取走多少个黄球？

【解】（1）∵ 袋中有4个红球、5个白球、11个黄球，

∴ 摸出一个球是红球的概率为$\frac{4}{4+5+11}=\frac{1}{5}$.

（2）设取走x个黄球，则放入x个红球.

由题意得，$\frac{4+x}{4+5+11}\geqslant\frac{1}{3}$，解得$x\geqslant\frac{8}{3}$.

∵ x为整数，∴ x的最小正整数值是3.

答：至少需取走3个黄球.

变式练 刷重点

变式练1 以下说法合理的是（ ）

A. 小明在10次抛图钉的试验中发现3次钉尖朝上，由此他说钉尖朝上的概率是30%

B. 掷一枚骰子，掷出点数6的概率是$\frac{1}{6}$，意思是每掷6次就有1次掷得点数为6

C. 某彩票的中奖机会是2%，则买100张彩票一定会有2张中奖

D. 甲、乙两组同学分别进行抛掷硬币的试验，正面朝上的频率分别为0.48和0.51

答案见P64

变式练2 如果k是随机抛掷一枚骰子所得的数字（1，2，3，4，5，6），则关于x的一元二次方程$(k-1)x^2+4x+1=0$有两个不等实数根的概率$P=$（ ）

A. $\frac{1}{2}$　　B. $\frac{1}{3}$

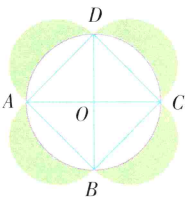
C. $\frac{2}{3}$　　D. $\frac{1}{6}$

答案见P64

题型3　求简单几何概率问题

当试验结果有无限个时，可以用待研究事件发生的区域面积（长度）与所有可能发生的区域面积（长度）的比值求事件概率（几何图形、数轴、时间等）.

例题3　已知⊙O的两条直径AC，BD互相垂直，分别以AB，BC，CD，DA为直径向外作半圆得到如图所示的图形. 现随机地向该图形内掷一枚小针，记针尖落在阴影区域内的概率为P_1，针尖落在⊙O内的概率为P_2，则$\dfrac{P_1}{P_2}=$_____.



【解析】设⊙O的半径为1，则$S_{⊙O}=\pi$，$AO=1$，$AD=\sqrt{2}$.

$\therefore S_{阴影}=4\left[\dfrac{1}{2}\pi\cdot\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^2-\left(\dfrac{1}{4}\pi-\dfrac{1}{2}\right)\right]=2$，

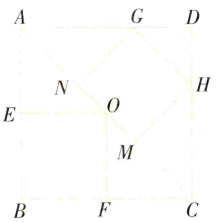
$\therefore$ 该图形的总面积为$2+\pi$，

$\therefore P_1=\dfrac{2}{2+\pi}$，$P_2=\dfrac{\pi}{2+\pi}$，$\therefore\dfrac{P_1}{P_2}=\dfrac{2}{\pi}$.

【答案】$\dfrac{2}{\pi}$

变式练　刷重点

变式练3　如图，正方形$ABCD$是一块绿化带，其中阴影部分$EOFB$，$GHMN$都是正方形的花圃. 已知自由飞翔的小鸟，将随机落在这块绿化带上，则小鸟落在花圃上的概率为_____.



答案见本页

变式练答案

1. D　【解析】A项，试验次数太少，没有代表性；B项，概率指的是大量的试验的平均结果；C项，彩票中奖也是指大量的试验统计，这100张彩票中奖数不一定；D项，频率指这次试验的结果，表述正确. 故选D.

2. A　【解析】在关于x的一元二次方程$(k-1)x^2+4x+1=0$中，$b^2-4ac=16-4(k-1)>0$，且$k\neq1$，解得$k<5$且$k\neq1$，则符合题意的数字为2，3，4，故方程有两个不等实数根的概率$P=\dfrac{1}{2}$. 故选A.

3. $\dfrac{17}{36}$　【解析】设正方形$ABCD$的边长为a，则$BF=\dfrac{1}{2}BC=\dfrac{a}{2}$，$AN=NM=MC=\dfrac{\sqrt{2}}{3}a$，$\therefore$ 阴影部分的面积为$\left(\dfrac{a}{2}\right)^2+\left(\dfrac{\sqrt{2}}{3}a\right)^2=\dfrac{17}{36}a^2$，$\therefore$ 小鸟落在花圃上的概率为$\dfrac{\frac{17}{36}a^2}{a^2}=\dfrac{17}{36}$.

25.2 用列举法求概率 + 25.3 用频率估计概率

知识过关 全理解

知识点1 用列举法求概率

在一次试验中，如果可能出现的结果只有[1]_____，且各种结果出现的可能性大小[2]_____，那么我们通过列举试验结果的方法，求出随机事件发生的概率.

(1)直接列举法：适用于一次试验中涉及一个因素，并且可能出现的等可能结果数较少；

(2)[3]_____：适用于一次试验中涉及两个因素，并且可能出现的等可能结果数较多；

(3)[4]_____：适用于一次试验中涉及两个及以上因素. ▶注意1

知识点2 用频率估计概率

1. 一般地，在大量重复试验中，如果事件 A 发生的频率[5]_____稳定在某个常数 p 附近，那么事件 A 发生的概率 $P(A)=$[6]_____.

2. 适用条件

当试验的所有可能结果不是有限个或各种可能的结果发生不是等可能时，可通过事件发生的频率来估计其概率. ▶注意2

知识点3 频率与概率的区别与联系

名称 / 关系	频率	概率
区别	试验值或使用时的统计值	理论值
	与试验次数的变化有关	与试验次数的变化无关
	与试验人、试验时间、试验地点有关	与试验人、试验时间、试验地点无关
联系	试验次数越多，频率越趋向于概率	

答案

[1]有限个 [2]相等 [3]列表法 [4]树状图法 [5]$\frac{m}{n}$ [6]p

敲黑板 划重点

注意1 两个(或两个及以上)因素包括两种情况

(1)同时进行两种(或三种及以上)相同的操作；(2)先后进行两次(或三次及以上)相同的操作，即两步(或三步及以上)试验.

注意2 (1)试验得出的频率只是概率的近似值.

(2)概率是针对大量重复试验而言的，大量重复试验反映的规律并非在每一次试验中都出现.

题型过关 全提升

题型 1　用列表法求事件的概率

当事件涉及两个因素时，选其中一个因素（一个条件）为横行，另一个因素（另一个条件）为纵行，列出表格，再利用概率公式计算.

例题 1　车辆经过润扬大桥收费站时，4 个收费通道 A、B、C、D 中，可随机选择其中一个通过.

（1）一辆车经过此收费站时，选择 A 通道通过的概率是_____；

（2）求两辆车经过此收费站时，选择不同通道通过的概率.

【分析】（2）涉及两辆车过哪个收费通道的选择，以两辆车的选择分别为横纵行列表可求概率（两个因素也可借助树状图法求概率）.

【解】（1）0.25

（2）列表如下：

	A	B	C	D
A	(A,A)	(A,B)	(A,C)	(A,D)
B	(B,A)	(B,B)	(B,C)	(B,D)
C	(C,A)	(C,B)	(C,C)	(C,D)
D	(D,A)	(D,B)	(D,C)	(D,D)

由表可知两辆车选择收费通道共有 16 种等可能的结果，

而两车选择不同的收费通道共有 12 种结果，

由概率公式可得，

$P(\text{两车选择不同通道})=\frac{12}{16}=\frac{3}{4}$.

题型 2　用画树状图法求事件的概率

当事件涉及三个（或以上）因素时，必须使用画树状图法求概率.

注意：（1）排除不合题目要求的结果；（2）在同一问题中，相同对象需要使用标记区分.

例题 2　为落实“垃圾分类”，环卫部门要求垃圾要按 A、B、C 三类分别装袋，投放，其中 A 类指废电池、过期药品等有毒垃圾，B 类指剩余食品等厨余垃圾，C 类指塑料、废纸等可回收垃圾. 甲投放了一袋垃圾，乙投放了两袋垃圾，这两袋垃圾不同类.

（1）直接写出甲投放的垃圾恰好是 A 类的概率；

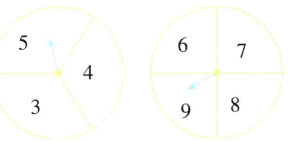
（2）求乙投放的垃圾恰有一袋与甲投放的垃圾是同类的概率.

【解】（1）甲投放的垃圾恰好是 A 类的概率是$\frac{1}{3}$.

（2）画树状图如图所示. 由图可知，甲、乙三袋垃圾分类情况共有 18 种等可能的结果，其中乙投放的恰有一袋与甲投放的是同类的情况有 12 种.

变式练　刷重点

变式练 1　在一次数学兴趣小组活动中，李燕和刘凯两位同学设计了如图所示的两个转盘做游戏（每个转盘被分成面积相等的几个扇形，并在每个扇形区域内标上数字）. 游戏规则如下：两人分别同时转动甲、乙转盘，转盘停止后，若指针所指区域内两数之和小于 12，则李燕获胜；若指针所指区域内两数之和等于 12，则为平局；若指针所指区域内两数之和大于 12，则刘凯获胜（若指针停在等分线上，重转一次，直到指针指向某一扇形内为止）.



甲　　乙

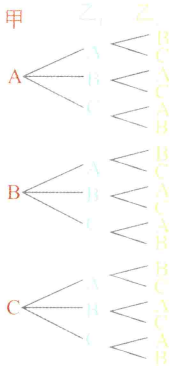
（1）请用列表的方法表示出上述游戏中两数之和的所有可能的结果；

（2）分别求出李燕和刘凯获胜的概率.

答案见 P70

变式练 2　甲、乙、丙三位同学打乒乓球，想通过“手心手背”游戏来决定其中哪两人先打. 规则如下：三人同时各用一只手随机出示手心或手背，若只有两人手势相同（都是手心或都是手背），则这两人先打；若三人手势相同，则重新出示. 那么通过一次“手心手背”游戏能决定甲先打乒乓球的概率是_____.

答案见 P70



所以 P(乙投放的垃圾恰有一袋与甲投放的垃圾是同类) $=\frac{12}{18}=\frac{2}{3}$.

题型3　利用概率判断游戏的公平性

判断游戏公平性就要计算每个参与者取胜的概率,概率相等就公平,否则就不公平. 此类题目的实质,即为求相应事件发生的概率并作比较.

例题3　家住滨河国际一单元的甲、乙两人同时从地下车库进入电梯回家,已知两人在1至4层的任意一层出电梯,并设甲在 a 层出电梯,乙在 b 层出电梯.

(1)用画树状图法或列表法表示 (a,b) 的所有可能结果,并求甲、乙两人在同一层楼出电梯的概率;

(2)小亮和小芳打赌,若甲、乙住在同楼层或相邻楼层,则小亮胜,否则小芳胜. 判断上述游戏是否公平? 并说明理由.

【分析】(1)根据题意和实际情况,可选用列表法求各自的概率. (2)分别求出小亮胜和小芳胜的概率.

【解】(1)列表如下:

甲(a) / 乙(b)	1	2	3	4
1	(1,1)	(2,1)	(3,1)	(4,1)
2	(1,2)	(2,2)	(3,2)	(4,2)
3	(1,3)	(2,3)	(3,3)	(4,3)
4	(1,4)	(2,4)	(3,4)	(4,4)

由表可知一共可能出现16种结果,且它们出现的可能性相等,其中甲、乙在同一楼层出电梯的有4种结果,

所以 P(甲、乙在同一楼层出电梯) $=\frac{4}{16}=\frac{1}{4}$.

(2)不公平,理由如下:

由(1)表知,甲、乙住在同楼层或相邻楼层有10种结果,

故 P(小亮胜) $=\frac{10}{16}=\frac{5}{8}$, P(小芳胜) $=1-\frac{5}{8}=\frac{3}{8}$.

因为 $\frac{5}{8}>\frac{3}{8}$,所以上述游戏不公平.

变式练　刷重点

变式练3　甲、乙两人用4张扑克牌(分别是红桃2,红桃3,方块3,方块4)玩游戏,他们将扑克牌洗匀后,背面朝上放在桌面上,甲先抽,乙后抽,抽出的牌不放回,各抽一张.

(1)写出甲、乙两人抽到的牌的所有结果. (例如甲抽到红桃2,乙抽到方块3,可记作(红2,方3))

(2)若甲抽到红桃3,则乙抽出的牌的牌面数字比3大的概率是多少?

(3)甲、乙约定:若甲抽到的牌的牌面数字比乙大,则甲胜;若乙抽到的牌的牌面数字比甲大,则乙胜,若甲、乙抽到的牌的牌面数字相同,则重新进行游戏. 你认为此游戏是否公平? 说明你的理由.

答案见P70

题型4　利用频率估计概率

相同条件下，同一试验中重复的次数越多，用频率估计概率的效果就越好，但是频率只是概率的近似值.

例题4　小明和小亮两位同学做抛掷骰子（质地均匀的正方体）的试验，他们共做了100次试验，试验的结果如下：

朝上的点数	1	2	3	4	5	6
出现的次数	14	15	23	16	20	12

（1）计算“2点朝上”的频率和“4点朝上”的频率；

（2）小明说：“根据试验，一次试验中出现‘3点朝上’的概率最大.”小亮说：“如果抛掷1 000次，那么出现‘5点朝上’的次数正好是200次.”小明和小亮的说法正确吗？为什么？

（3）小明抛掷一枚骰子，计算小明抛掷点数不小于3的概率.

【解】（1）“2点朝上”的频率为$\frac{15}{100}=0.15$.

“4点朝上”的频率为$\frac{16}{100}=0.16$.

（2）小明的说法错误，因为只有当试验的次数足够大时，该事件发生的频率才稳定在事件发生的概率附近；

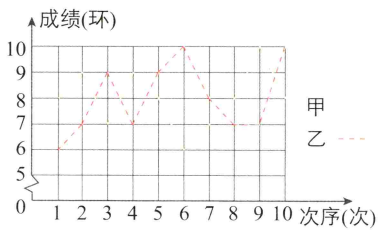
小亮的说法错误，因为事件发生具有随机性.

（3）P（抛掷点数不小于3）$=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$.

题型5　概率与其他数学知识的综合题

概率与其他数学知识相结合是中考的一个热点，解答这类综合问题时，要注意将其他问题转化为概率问题，运用列举法进行求解.

例题5　为了发展学生的核心素养，培养学生的综合能力，某中学利用“阳光大课间”组织学生积极参加丰富多彩的课外活动，学校成立了舞蹈队、足球队、篮球队、毽子队和射击队等，其中射击队在某次训练中，甲、乙两名队员各射击10次，成绩用下面的折线统计图表示：



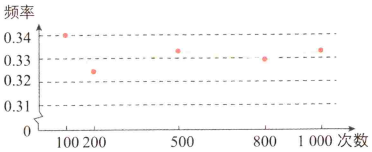
（1）依据折线统计图，得到下面的表格：

射击次序（次）	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
甲的成绩（环）	8	9	7	9	8	6	7	a	10	8
乙的成绩（环）	6	7	9	7	9	10	8	7	b	10

其中$a=$_____，$b=$_____；

变式练　刷重点

变式练4　某数学兴趣小组做“用频率估计概率”的试验时，统计了某一事件发生的频率，绘制了如图所示的折线图.



（1）该事件最有可能是_____（填写一个你认为正确的序号）.

①一个路口的红绿灯，红灯的时间为30秒，黄灯的时间为5秒，绿灯的时间为40秒，多次经过该路口时，看见红灯的概率；

②掷一枚硬币，正面朝上的概率；

③暗箱中有1个红球和2个黄球，这些球除了颜色外无其他差别，从中任取1个球是红球的概率.

（2）你设计的一个游戏，多次掷一个质地均匀的正六面体骰子，当骰子数字_____正面朝上时，该事件发生的概率接近于$\frac{1}{3}$.

答案见P70

(2)甲的成绩的众数是_____环,乙的成绩的中位数是_____环;

(3)请运用方差的知识,判断甲、乙两人谁的成绩更稳定?

(4)该校射击队要参加市组织的射击比赛,已预选出2名男同学和2名女同学,现要从这4名同学中任意选取2名同学参加比赛,请用列表法或画树状图法,求出恰好选到1男1女的概率.

【分析】(1)根据折线图标注的数据信息直接得到 a 与 b 的值;(2)甲的10次射击成绩中,出现次数最多的数字即为这组数据的众数,把乙的10次射击成绩按从小到大的顺序排列,处于中间的第5,6个数的平均数即为中位数;(3)利用方差公式计算这两组数据的方差,方差小的成绩更稳定;(4)先利用画树状图法或列表法列举出所有可能的结果,然后确定1男1女的情况数,最后利用概率公式计算结果.

【解】(1)8　7　(2)8　7.5

(3)$\bar{x}_{甲}=\dfrac{4\times8+2\times9+2\times7+6+10}{10}=8$(环),

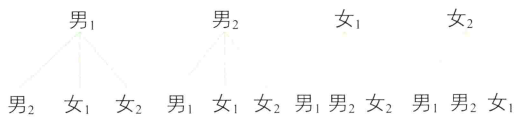
$s^2_{甲}=\dfrac{4\times(8-8)^2+2\times(9-8)^2+2\times(7-8)^2+(6-8)^2+(10-8)^2}{10}=1.2$;

$\bar{x}_{乙}=\dfrac{8+2\times9+4\times7+6+2\times10}{10}=8$(环),

$s^2_{乙}=\dfrac{(8-8)^2+2\times(9-8)^2+4\times(7-8)^2+(6-8)^2+2\times(10-8)^2}{10}=1.8$.

因为 $s^2_{甲}<s^2_{乙}$,所以甲的成绩更稳定.

(4)画树状图如下:



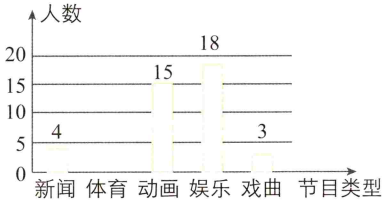
或列表如下:

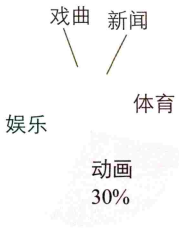
	男1	男2	女1	女2
男1		男1 男2	男1 女1	男1 女2
男2	男2 男1		男2 女1	男2 女2
女1	女1 男1	女1 男2		女1 女2
女2	女2 男1	女2 男2	女2 女1	

共有12种等可能的结果,符合条件的结果有8种,所以恰好选到1男1女的概率为 $P=\dfrac{8}{12}=\dfrac{2}{3}$.

变式练　刷重点

变式练5　某学校为了了解全校学生对电视节目的喜爱情况(新闻、体育、动画、娱乐、戏曲),从全校学生中随机抽取部分学生进行问卷调查,并把调查结果绘制成两幅不完整的统计图.





请根据以上信息,解答下列问题:

(1)这次被调查的学生共有多少人?

(2)请将条形统计图补充完整.

(3)若该校约有1 500名学生,估计全校学生中喜欢娱乐节目的有多少人?

(4)该校广播站需要广播员,现决定从喜欢新闻节目的甲、乙、丙、丁4名同学中选取2名,求恰好选中甲、乙两位同学的概率(用画树状图法或列表法解答).

答案见P70

变式练答案

1.【解】(1)根据题意列表如下：

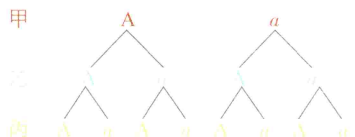
甲＼乙	6	7	8	9
3	9	10	11	12
4	10	11	12	13
5	11	12	13	14

由表可知，两数之和共有12种等可能的结果.

(2)由(1)可知，两数之和共有12种等可能的结果，其中和小于12的结果有6种，和大于12的结果有3种，

∴李燕获胜的概率为$\frac{6}{12}=\frac{1}{2}$，刘凯获胜的概率为$\frac{3}{12}=\frac{1}{4}$.

2. $\frac{1}{2}$ 【解析】分别用A，a表示手心和手背，画树状图为



共有8种等可能的结果，其中甲先打乒乓球的结果数为4，

所以通过一次“手心手背”游戏能决定甲先打乒乓球的概率为$\frac{4}{8}=\frac{1}{2}$.

3.【解】(1)甲、乙两人抽到的牌的所有结果为(红2，红3)、(红2，方3)、(红2，方4)、(红3，红2)、(红3，方3)、(红3，方4)、(方3，红2)、(方3，红3)、(方3，方4)、(方4，红2)、(方4，红3)、(方4，方3)，共12种.

(2)由(1)可知甲抽到红3，乙抽到的牌只能是红2，方3，方4，因此乙抽到的牌的数字大于3的概率为$\frac{1}{3}$.

(3)甲抽到的牌比乙大的有(红3，红2)、(方3，红2)、(方4，方3)、(方4，红2)、(方4，红3)，共5种，则甲胜的概率$P_1=\frac{5}{12}$.

乙抽到的牌比甲大的有(红2，红3)、(红2，方3)、(红2，方4)、(红3，方4)、(方3，方4)，共5种，则乙获胜的概率$P_2=\frac{5}{12}$.

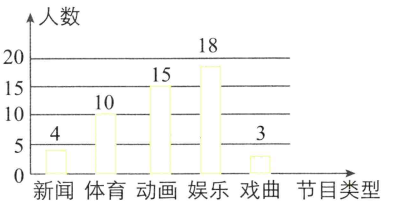
∴游戏公平.

4. (1)③ (2)1或2(答案不唯一) 【解析】(1)由折线统计图可得，该事件最有可能是暗箱中有1个红球和2个黄球，这些球除了颜色外无其他差别，从中任取1个球是红球的概率.

(2)多次掷一个质地均匀的正六面体骰子，当骰子数字1或2正面朝上时，该事件发生的概率接近于$\frac{1}{3}$.

5.【解】(1)结合条形统计图和扇形统计图的信息可得这次被调查的学生共有$15\div30\%=50$(人).

(2)喜欢体育节目的人数为$50-4-15-18-3=10$，补全条形统计图，如图所示：



(3)全校学生中喜欢娱乐节目的总人数为$1\,500\times\frac{18}{50}=540$.

(4)画树状图如下：



由图可知，共有12种等可能的结果，其中恰好选中甲、乙两位同学的结果有2种，所以选中甲、乙两位同学的概率为$\frac{2}{12}=\frac{1}{6}$.

提供各种书籍的 PDF 电子版代找服务，如果您找不到您想要的书的 PDF 电子版，我们可以帮您找到，如有需要，请联系微信、QQ。





PDF 代找说明：

本公司可以帮助您找到您想要的 PDF 电子书。质量都很清晰，只要您提供给我们相关信息，一般都能找到，如果您有需求，请联系我们。

现已经帮助了很多人找到了大家需要的 PDF，其实网上有很多 PDF，大家如果在网上找不到的话，可以联系我们，大部分我们都可以找到。因 PDF 电子书都有版权，请不要随意传播，如果您有经济购买能力，请尽量购买正版。

声明：

本公司只提供代找服务，因寻找 PDF 电子书有一定难度，仅收取代找费用。如因 PDF 产生的版权纠纷，与本公司无关，我们仅仅只是帮助您寻找到您要的 PDF 而已。

第二十一章　一元二次方程

21.1　一元二次方程

刷基础

1. D　【解析】A 选项，当方程的二次项系数为 0 时，方程不是一元二次方程，故本选项不符合题意；B 选项，方程中含有两个未知数，不是一元二次方程，故本选项不符合题意；C 选项，方程不是整式方程，不是一元二次方程，故本选项不符合题意；D 选项，由原方程得到 $x^2+2x-3=0$，符合一元二次方程的定义，故本选项符合题意. 故选 D.

2. D　【解析】由题意知二次项系数不为 0，即 $m-2\neq 0$，解得 $m\neq 2$. 故选 D.

3. 3　【解析】由题意得 $|a|-1=2$，且 $a+3\neq 0$，解得 $a=3$.

4. $-2x^2-3x+2=0$　【解析】由题意得 $m^2+1=2$，且 $m-1\neq 0$，解得 $m=-1$，所以此一元二次方程是 $-2x^2-3x+2=0$.

5. C　【解析】在方程 $2x^2-6x-5=0$ 中，二次项是 $2x^2$，二次项系数为 2；一次项是 $-6x$，一次项系数为 -6；常数项为 -5. 故选 C.

6. 1　-2　-9　【解析】方程 $(x+3)(x-3)=2x$ 的一般形式为 $x^2-2x-9=0$，二次项系数为 1，一次项系数为 -2，常数项为 -9.

7. D　【解析】A 选项，当 $x=2$ 时，方程的左边 $=3\times(2-2)=0$，右边 $=0$，则左边 $=$ 右边，故 $x=2$ 是 A 中方程的解；B 选项，当 $x=2$ 时，方程的左边 $=2\times 2^2-3\times 2=2$，右边 $=2$，则左边 $=$ 右边，故 $x=2$ 是 B 中方程的解；C 选项，当 $x=2$ 时，方程的左边 $=0$，右边 $=0$，则左边 $=$ 右边，故 $x=2$ 是 C 中方程的解；D 选项，当 $x=2$ 时，方程的左边 $=2^2-2+2=4$，右边 $=0$，则左边 $\neq$ 右边，故 $x=2$ 不是 D 中方程的解. 故选 D.

8. B　【解析】∵ 2 是一元二次方程 $x^2-3x+k=0$ 的一个根，∴ $2^2-3\times 2+k=0$，解得 $k=2$. 故选 B.

9. 2 018　【解析】把 $x=-1$ 代入一元二次方程 $ax^2-bx-2\,018=0$ 得 $a+b-2\,018=0$，即 $a+b=2\,018$.

10. C　【解析】∵ 全班有 x 名同学，∴ 每名同学要送出 $(x-1)$ 张. 又 ∵ 是互送照片，∴ 共送出照片的张数应该是 $x(x-1)$，∴ $x(x-1)=1\,056$. 故选 C.

11. C　【解析】根据等量关系：2017 年的观赏人数 $\times(1+$ 年均增长率$)^2=2019$ 年的观赏人数，列出方程为 $20(1+x)^2=28.8$. 故选 C.

12. C　【解析】根据题意，剩余的长方形空地的长为 $(x-1)$ m，宽为 $(x-2)$ m，所以可列方程 $(x-1)(x-2)=18$. 故选 C.

刷易错

13. B　【解析】由题意，得 $|m|-1=0$，且 $m-1\neq 0$，解得 $m=-1$. 故选 B.

易错警示 忽略二次项系数不为 0 导致求得 $m=\pm 1$ 而误选 C.

14. -1　【解析】移项，得 $x^2+(2a-1)x+5-a-ax-1=0$.

合并同类项，得 $x^2+(a-1)x+4-a=0$.

∵ 一次项系数为 4，∴ $a-1=4$，解得 $a=5$，故常数项为 $4-a=4-5=-1$.

易错警示 未化为一元二次方程的一般形式，令 $2a-1=4$，导致错解.

刷提升

1. A　【解析】①当 $a=0$ 时，$ax^2+bx+c=0$ 是一元一次方程，故错误；②$3(x-9)^2-(x+1)^2=1$ 是一元二次方程，故正确；③$x^2+\frac{1}{x}+5=0$ 是分式方程，故错误；④$x^2-2+5x^3-6=0$ 是一元三次方程，故错误；⑤$3x^2=3(x-2)^2$ 是一元一次方程，故错误；⑥$12x-10=0$ 是一元一次方程，故错误. 故选 A.

2. C　【解析】设铁皮的宽为 x 厘米，那么铁皮的长为 $2x$ 厘米. 依题意得 $10(2x-20)(x-20)=1\,500$. 故选 C.

3. C　【解析】∵ m 是方程 $x^2+x-1=0$ 的根，∴ $m^2+m=1$，∵ $m^3+2m^2+2\,018=m^3+m^2+m^2+2\,018=m(m^2+m)+m^2+2\,018=m+m^2+2\,018=1+2\,018=2\,019$. 故选 C.

4. B　【解析】∵ m,n 是方程 $x^2-2x-1=0$ 的两个根，∴ $m^2-2m-1=0$，$n^2-2n-1=0$，∴ $m^2-2m=1$，$n^2-2n=1$，∴ $2(m^2-2m)=2$，$3(n^2-2n)=3$，∴ $(2m^2-4m-1)(3n^2-6n+2)=[2(m^2-2m)-1][3(n^2-2n)+2]=(2-1)\times(3+2)=5$，即 $(2m^2-4m-1)(3n^2-6n+2)$ 的值等于 5. 故选 B.

5. 0　【解析】∵ m,n 是方程 $2x^2-x+k=0$ $(k<0)$ 的两个根，∴ $2m^2-m+k=0$，$2n^2-n+k=0$，即 $2m^2-m=-k$，$2n^2-n=-k$. 则 $m*m-n*n=m(2m-1)-n(2n-1)=2m^2-m-(2n^2-n)=-k-(-k)=-k+k=0$.

6. $\frac{2}{3}$　【解析】原式 $=\frac{2}{(a+1)(a-1)}-\frac{1}{a(a-1)}=\frac{2a-(a+1)}{a(a+1)(a-1)}=\frac{1}{a(a+1)}=\frac{1}{a^2+a}$. ∵ a 是方程 $2x^2+2x-3=0$ 的一个根，∴ $2a^2+2a-3=0$，∴ $a^2+a=\frac{3}{2}$，∴ 原式 $=\frac{1}{\frac{3}{2}}=\frac{2}{3}$.

7. 1　【解析】∵ $x=-1$ 是方程 $ax^2+bx+c=0$ 的根，∴ $a-b+c=0$，即 $a+c=b$，∴ $\sqrt{\frac{a}{b}+\frac{c}{b}}=1$.

8. 等腰　【解析】把 $x=-1$ 代入 $(a+c)x^2+2bx+(a-c)=0$ 得 $a+c+(-2b)+a-c=0$，所以 $a=b$，所以 $\triangle ABC$ 为等腰三角形.

9. 【解】∵ m 是方程 $x^2-x-2=0$ 的一个实数根，

∴ $m^2-m-2=0$，∴ $m^2-m=2$，$m^2-2=m$，

∴ $(m^2-m)\left(m-\frac{2}{m}+1\right)$

$=2\times\left(\frac{m^2-2}{m}+1\right)$

$=2\times\left(\frac{m}{m}+1\right)$

$=2\times(1+1)=2\times 2=4$.

刷素养

10. 4　14　194　【解析】(1) ∵ $x^2-4x+1=0$，∴ $x+\frac{1}{x}=4$，$\left(x+\frac{1}{x}\right)^2=16$，∴ $x^2+2+\frac{1}{x^2}=16$，$x^2+\frac{1}{x^2}=14$，∴ $\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)^2=196$，∴ $x^4+\frac{1}{x^4}+2=196$，$x^4+\frac{1}{x^4}=194$.

(2)【解】∵ $2x^2-7x+2=0$，

∴ $x+\frac{1}{x}=\frac{7}{2}$，$x^2+\frac{1}{x^2}=\frac{41}{4}$，

∴ $x^3+\frac{1}{x^3}=\left(x+\frac{1}{x}\right)\left(x^2-1+\frac{1}{x^2}\right)=\frac{7}{2}\times\left(\frac{41}{4}-1\right)=\frac{259}{8}$.

21.2　解一元二次方程

21.2.1　配方法

课时 1　直接开平方法

刷基础

1. B　【解析】当 $m\geqslant 0$ 时，一元二次方程 $x^2=m$ 有解. 故选 B.

2. C　【解析】移项，得 $25x^2=169$，∴ $x^2=\frac{169}{25}$，即 $x_1=\frac{13}{5}$，$x_2=-\frac{13}{5}$.

3. A　【解析】由 $ax^2=c$ 得 $x^2=\frac{c}{a}$，所以 $x=\pm\sqrt{\frac{c}{a}}$，即该方程的两个根互为相反数. 因为 -3 是一元二次方程 $ax^2=c$ 的一个根，所以另一个根为 3. 故选 A.

4. 3 或 -3　【解析】由题意得 $3x^2-6=21$，即 $x^2=9$，所以 $x=\pm 3$.

5. 【解】(1) 移项，得 $2x^2=98$. 二次项系数化为 1，得 $x^2=49$.

根据平方根的意义，得 $x=\pm 7$，即 $x_1=7$，$x_2=-7$.

(2) 移项、合并同类项，得 $4x^2=1$.

二次项系数化为 1，得 $x^2=\frac{1}{4}$.

根据平方根的意义，得 $x=\pm\frac{1}{2}$，即 $x_1=\frac{1}{2}$，$x_2=-\frac{1}{2}$.

6. B　【解析】∵ 方程 $(x-4)^2=a$ 有实数解，∴ $x-4=\pm\sqrt{a}$，∴ $a\geqslant 0$. 故选 B.

7. D　【解析】依题意，得 $(2x-1)^2=9$.
开平方，得 $2x-1=\pm 3$.
则 $2x=1\pm 3$，解得 $x=2$ 或 $x=-1$.
故选 D.

8. B　【解析】$4(2x-1)^2-25(x+1)^2=0$，
移项，得 $4(2x-1)^2=25(x+1)^2$，
两边直接开平方，得 $2(2x-1)=\pm 5(x+1)$，
$2(2x-1)=5(x+1)$，$2(2x-1)=-5(x+1)$，
解两个方程，得 $x_1=-7$，$x_2=-\frac{1}{3}$.
故选 B.

9. D　【解析】把 $x=2$ 代入方程 $(ax-1)^2-16=0$，得 $(2a-1)^2-16=0$，即 $(2a-1)^2=16$，所以 $2a-1=\pm 4$，解得 $a=\frac{5}{2}$ 或 $a=-\frac{3}{2}$.

10. A　【解析】解方程 $(x-3)^2=1$ 得 $x_1=4$，$x_2=2$. 所以当腰长为 4，底边长为 2 时，其周长为 $4+4+2=10$；当腰长为 2，底边长为 4 时，因为 $2+2=4$，所以此时不能构成三角形. 故选 A.

11. ±4　【解析】∵ $(2a+2b+1)(2a+2b-1)=63$，
∴ $(2a+2b)^2-1^2=63$，∴ $(2a+2b)^2=64$，则 $2a+2b=\pm 8$. 两边同时除以 2，得 $a+b=\pm 4$.

12. 12　【解析】∵ $(a+6)^2\geqslant 0$，$\sqrt{b^2-2b-3}\geqslant 0$，且 $(a+6)^2+\sqrt{b^2-2b-3}=0$，∴ $(a+6)^2=0$，$\sqrt{b^2-2b-3}=0$，∴ $a=-6$，$b^2-2b-3=0$，即 $b^2-2b=3$，∴ $2b^2-4b-a=2(b^2-2b)-a=6-(-6)=12$.

13. 【解】(1)∵ $(3x-2)^2=\frac{64}{9}$，
∴ $3x-2=\frac{8}{3}$ 或 $3x-2=-\frac{8}{3}$，
解得 $x_1=\frac{14}{9}$，$x_2=-\frac{2}{9}$.
(2)∵ $(x-4)^2=(5-2x)^2$，
∴ $x-4=\pm(5-2x)$，解得 $x_1=1$，$x_2=3$.

课时 2　配方法

刷基础

1. C　【解析】∵ $x^2-24x+m^2$ 是完全平方式，$\left(\frac{-24}{2}\right)^2=144$，
∴ $m^2=144$. 解得 $m=\pm 12$. 故选 C.

2. $2\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{9}{2}$　【解析】把 $2x^2-6x+9$ 的二次项系数提出，得 $2\left(x^2-3x+\frac{9}{2}\right)$，根据完全平方式得 $2\left(x^2-3x+\frac{9}{2}\right)=2\left[x^2-3x+\left(\frac{3}{2}\right)^2-\left(\frac{3}{2}\right)^2+\frac{9}{2}\right]=2\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{9}{2}$.

3. (1)4　2　(2)8　4　(3)$\frac{3}{2}$　(4)$\frac{1}{25}$　$\frac{1}{5}$

4. B　【解析】移项得 $x^2-8x=-5$，配方得 $x^2-8x+\left(\frac{-8}{2}\right)^2=-5+\left(\frac{-8}{2}\right)^2$，即 $(x-4)^2=11$.

5. B　【解析】因为方程 $x^2+4x=5$ 的二次项系数是 1，一次项系数是 4，所以方程两边同时加上一次项系数一半的平方 4. 故选 B.

6. A　【解析】二次项系数化为 1 得 $x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0$，移项得 $x^2+\frac{b}{a}x=-\frac{c}{a}$，配方得 $x^2+\frac{b}{a}x+\left(\frac{b}{2a}\right)^2=-\frac{c}{a}+\left(\frac{b}{2a}\right)^2$，即 $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2}$.

7. B　【解析】∵ $x^2+2x+1=(x+1)^2=0$，∴ $x_1=x_2=-1$.

8. $x_1=x_2=\sqrt{3}$　【解析】原方程可化为 $x^2-2\sqrt{3}x+3=0$，即 $(x-\sqrt{3})^2=0$，解得 $x_1=x_2=\sqrt{3}$.

9. 4　【解析】由题可知 $x^2-8x+12=-4$，∴ $x^2-8x+16=0$，即 $(x-4)^2=0$，解得 $x_1=x_2=4$.

10. −3　$\frac{5}{2}$　【解析】$x^2-6x+4=0$ 配方得 $x^2-6x+\left(\frac{-6}{2}\right)^2-\left(\frac{-6}{2}\right)^2+4=0$，即 $(x-3)^2-5=0$，∴ $(x-3)^2=5$，∴ $a=-3$，$2b=5$，∴ $b=\frac{5}{2}$.

11. 8　【解析】$x^2-6x+1=0$，$x^2-6x=-1$，$x^2-6x+9=8$，$(x-3)^2=8$，所以 b 的值为 8.

12. 1　【解析】$ax^2+bx+c=0$，
移项，得 $ax^2+bx=-c$，
两边同时除以 a，得 $x^2+\frac{b}{a}x=-\frac{c}{a}$，
∴ $x^2+\frac{b}{a}x+\left(\frac{b}{2a}\right)^2=-\frac{c}{a}+\left(\frac{b}{2a}\right)^2$，
∴ $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2}$，
∴ $\frac{b}{2a}=1$.

13. 【解】(1)配方，得 $(x-1)^2=6$，∴ $x_1=1+\sqrt{6}$，$x_2=1-\sqrt{6}$.
(2)移项，得 $x^2-\frac{2}{3}x=-1$，配方，得 $\left(x-\frac{1}{3}\right)^2=-\frac{8}{9}$.
∵ $-\frac{8}{9}<0$，∴ 原方程无实数根.
(3)移项，得 $2x^2-3x=6$，配方，得 $\left(x-\frac{3}{4}\right)^2=\frac{57}{16}$，
∴ $x_1=\frac{3+\sqrt{57}}{4}$，$x_2=\frac{3-\sqrt{57}}{4}$.
(4)移项，得 $\frac{2}{3}x^2+\frac{1}{3}x=2$，配方，得 $\left(x+\frac{1}{4}\right)^2=\frac{49}{16}$，
∴ $x_1=\frac{3}{2}$，$x_2=-2$.

刷易错

14. 【解】移项，得 $2x^2-4x=6$.
两边同时除以 2，得 $x^2-2x=3$.
配方，得 $x^2-2x+1=3+1$，
即 $(x-1)^2=4$.
∴ $x-1=\pm 2$，
∴ $x_1=1+2=3$，$x_2=1-2=-1$.
易错警示 配方时，因只在方程的左边加上了一次项系数一半的平方，而忘记在方程的右边也加上，导致错解.

刷提升

1. B　【解析】A 选项，$x^2-2x-99=0$，移项得 $x^2-2x=99$，配方得 $x^2-2x+1=99+1$，即 $(x-1)^2=100$，配方正确；B 选项，$x^2+8x+9=0$，移项得 $x^2+8x=-9$，配方得 $x^2+8x+16=-9+16$，即 $(x+4)^2=7$，配方错误；C 选项，二次项系数化为 1 得 $t^2-\frac{7}{2}t-2=0$，移项得 $t^2-\frac{7}{2}t=2$，配方得 $t^2-\frac{7}{2}t+\left(-\frac{7}{4}\right)^2=2+\left(-\frac{7}{4}\right)^2$，即 $\left(t-\frac{7}{4}\right)^2=\frac{81}{16}$，配方正确；D 选项，二次项系数化为 1 得 $x^2-\frac{4}{3}x-\frac{2}{3}=0$，移项得 $x^2-\frac{4}{3}x=\frac{2}{3}$，配方得 $x^2-\frac{4}{3}x+\left(-\frac{2}{3}\right)^2=\frac{2}{3}+\left(-\frac{2}{3}\right)^2$，即 $\left(x-\frac{2}{3}\right)^2=\frac{10}{9}$，配方正确.

2. D　【解析】移项，得 $x^2-6x=-4$，配方，得 $x^2-6x+9=-4+9$，即 $(x-3)^2=5$，所以 $n=-3$，$m=5$，所以 $m+n=5-3=2$. 故选 D.

3. D　【解析】∵ $2x^2-x-1=0$，∴ $2x^2-x=1$，∴ $x^2-\frac{1}{2}x=\frac{1}{2}$，

$\therefore x^2-\frac{1}{2}x+\frac{1}{16}=\frac{1}{2}+\frac{1}{16},\therefore\left(x-\frac{1}{4}\right)^2=\frac{9}{16}$. 故选 D.

4. B 【解析】根据完全平方式 $a^2\pm2ab+b^2=(a\pm b)^2$ 的结构,且 $4x^2=(2x)^2$,则有 $-(m-2)=\pm2\times2\times1$,$\therefore m-2=\pm4$,即 $m-2=4$ 或 $m-2=-4$,得 $m=6$ 或 $m=-2$. 故选 B.

5. A 【解析】当 $1\leqslant x<2$ 时,原方程可化为 $\frac{1}{2}x^2=1$,解得 $x_1=\sqrt{2}$,$x_2=-\sqrt{2}$(舍去);当 $0\leqslant x<1$ 时,原方程可化为 $\frac{1}{2}x^2=0$,解得 $x_1=x_2=0$;当 $-2\leqslant x<0$ 时,$[x]<0$,因为 $\frac{1}{2}x^2\geqslant0$,所以方程 $[x]=\frac{1}{2}x^2$ 没有实数解. 综上,方程 $[x]=\frac{1}{2}x^2$ 的解为 0 或 $\sqrt{2}$.

6. B 【解析】$4x^2+12x-1\,147=0$ 移项得 $4x^2+12x=1\,147$,二次项系数化为 1 得 $x^2+3x=\frac{1\,147}{4}$,配方得 $\left(x+\frac{3}{2}\right)^2=\frac{1\,147}{4}+\frac{9}{4}$,解得 $x=-\frac{3}{2}\pm17$. 因为 a,b 为已知方程的根,$a>b$,所以 $a=17-\frac{3}{2}$,$b=-17-\frac{3}{2}$,所以 $3a+b=3\times17-\frac{9}{2}-17-\frac{3}{2}=28$.

7. 【解】(1) $-3x^2+4x+1=0$,

二次项系数化为 1 得 $x^2-\frac{4}{3}x-\frac{1}{3}=0$,

移项并配方得 $x^2-\frac{4}{3}x+\left(-\frac{2}{3}\right)^2=\frac{1}{3}+\left(-\frac{2}{3}\right)^2$,

即 $\left(x-\frac{2}{3}\right)^2=\frac{7}{9}$,

$\therefore x-\frac{2}{3}=\pm\frac{\sqrt{7}}{3},\therefore x=\frac{2}{3}\pm\frac{\sqrt{7}}{3}$.

$\therefore x_1=\frac{2+\sqrt{7}}{3},x_2=\frac{2-\sqrt{7}}{3}$.

(2) $3y^2-6y+2=0$,

二次项系数化为 1 得 $y^2-2y+\frac{2}{3}=0$,

移项并配方得 $y^2-2y+\left(\frac{-2}{2}\right)^2=-\frac{2}{3}+\left(\frac{-2}{2}\right)^2$,

即 $(y-1)^2=\frac{1}{3}$,

$\therefore y-1=\pm\frac{\sqrt{3}}{3},\therefore y=1\pm\frac{\sqrt{3}}{3}$,

$\therefore y_1=1+\frac{\sqrt{3}}{3},y_2=1-\frac{\sqrt{3}}{3}$.

(3) $x^2+2x-399=0$,

配方得 $x^2+2x+\left(\frac{2}{2}\right)^2-\left(\frac{2}{2}\right)^2-399=0$,

即 $(x+1)^2-400=0$,

$\therefore(x+1)^2=400,\therefore x+1=\pm20$,

$\therefore x=-1\pm20$,

$\therefore x_1=-21,x_2=19$.

(4) $(x-1)(x-3)=8$,

整理得 $x^2-4x+3=8,\therefore x^2-4x=5$,

配方得 $x^2-4x+\left(\frac{-4}{2}\right)^2=5+\left(\frac{-4}{2}\right)^2$,

即 $(x-2)^2=9,\therefore x-2=\pm3$,

$\therefore x=2\pm3$,

$\therefore x_1=5,x_2=-1$.

8. 【解】$\because x^2+\frac{1}{x^2}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2$,

$\therefore$ 原方程可变形为 $\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-3\left(x+\frac{1}{x}\right)-10=0$.

设 $x+\frac{1}{x}=t$,则原方程可变形为 $t^2-3t-10=0$,

解得 $t_1=5,t_2=-2$.

$\therefore x+\frac{1}{x}=5$ 或 -2.

9. 【解】(1) $\because a^2+b^2+c^2-6a-8b-10c+50=0$,

$\therefore(a^2-6a+9)+(b^2-8b+16)+(c^2-10c+25)=0$.

$\therefore(a-3)^2+(b-4)^2+(c-5)^2=0$.

$\because(a-3)^2\geqslant0,(b-4)^2\geqslant0,(c-5)^2\geqslant0$,

$\therefore a-3=0,b-4=0,c-5=0$,

$\therefore a=3,b=4,c=5$.

(2) $\because5^2=3^2+4^2,\therefore c^2=a^2+b^2$,

$\therefore\triangle ABC$ 是直角三角形.

刷素养

10. 【解】(1) 因为 $m^2+m+1=m^2+m+\frac{1}{4}+\frac{3}{4}=\left(m+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\geqslant\frac{3}{4}$,所以 m^2+m+1 的最小值是 $\frac{3}{4}$.

(2) 因为 $4-x^2+2x=-x^2+2x-1+5=-(x-1)^2+5\leqslant5$,所以 $4-x^2+2x$ 的最大值是 5.

21.2.2 公式法

课时 1 一元二次方程根的判别式

刷基础

1. B 【解析】$\because a=1,b=-4,c=2,\therefore\Delta=b^2-4ac=(-4)^2-4\times1\times2=8$. 故选 B.

2. $\frac{3}{2}$ 【解析】$\because$ 关于 x 的一元二次方程 $2x^2-4x+m=0$ 的根的判别式的值为 4,$\therefore(-4)^2-4\times2m=4$,解得 $m=\frac{3}{2}$.

3. A 【解析】$\because a=1,b=1,c=-3,\therefore\Delta=b^2-4ac=1^2-4\times1\times(-3)=13>0,\therefore$ 方程 $x^2+x-3=0$ 有两个不相等的实数根. 故选 A.

4. A 【解析】当 $m=0$ 时,方程化为 $-4x+5=0$,解得 $x=\frac{5}{4}$,此时方程只有一个实数根,①正确;

当 $m=1$ 时,方程化为 $x^2-4x+4=0$,因为 $\Delta=(-4)^2-4\times1\times4=0$,所以此时方程有两个相等的实数根,②正确;

当 $m=-1$ 时,方程化为 $-x^2-4x+6=0$,因为 $\Delta=(-4)^2-4\times(-1)\times6>0$,所以此时方程有两个不相等的实数根,③错误. 故选 A.

5. 【解】(1) $\because a=9,b=6,c=1$,

$\therefore\Delta=b^2-4ac=36-4\times9\times1=0$.

$\therefore$ 此方程有两个相等的实数根.

(2) 方程化为一般形式为 $16x^2+8x+3=0$.

$\because a=16,b=8,c=3$,

$\therefore\Delta=b^2-4ac=64-4\times16\times3=-128<0$.

$\therefore$ 此方程没有实数根.

(3) 方程化为一般形式为 $3x^2-5x-3=0$.

$\because a=3,b=-5,c=-3$,

$\therefore\Delta=(-5)^2-4\times3\times(-3)=25+36=61>0$.

$\therefore$ 此方程有两个不相等的实数根.

6. A 【解析】$\because a=2,b=-k,c=3,\therefore\Delta=b^2-4ac=k^2-4\times2\times3=k^2-24$. $\because$ 方程有两个相等的实数根,$\therefore\Delta=0,\therefore k^2-24=0$,解得 $k=\pm2\sqrt{6}$. 故选 A.

7. 【解】原方程整理得 $x^2-(2k-1)x+k^2-2k-3=0$,

$\Delta=[(2k-1)]^2-4(k^2-2k-3)=4k+13$.

(1) 当 $\Delta>0$ 时,方程有两个不相等的实数根,即 $4k+13>0$,解得 $k>-\frac{13}{4}$.

(2) 当 $\Delta=0$ 时,方程有两个相等的实数根,即 $4k+13=0$,解得 $k=-\frac{13}{4}$.

(3) 当 $\Delta<0$ 时,方程没有实数根,即 $4k+13<0$,解得 $k<-\frac{13}{4}$.

8. 【解】(1) $\triangle ABC$ 是等腰三角形. 理由如下:

$\because x=-1$ 是方程的根,

$\therefore(a+c)\times(-1)^2-2b+(a-c)=0$.

$\therefore a+c-2b+a-c=0.\therefore a-b=0.\therefore a=b.$

$\therefore \triangle ABC$ 是等腰三角形.

(2) $\triangle ABC$ 是直角三角形. 理由如下:

∵ 方程有两个相等的实数根,

$\therefore (2b)^2-4(a+c)(a-c)=0.$

$\therefore 4b^2-4a^2+4c^2=0.$

$\therefore a^2=b^2+c^2.$

$\therefore \triangle ABC$ 是直角三角形.

刷易错

9. $k\leqslant\frac{4}{3}$且$k\neq0$　【解析】在一元二次方程 $kx^2+4x+3=0$ 中,$\Delta=b^2-4ac=16-12k.$ ∵ 一元二次方程有两个实数根,$\therefore k\neq0$,且 $16-12k\geqslant0$,解得 $k\leqslant\frac{4}{3}$且$k\neq0.$

易错警示 此题有两处易错,①已知一元二次方程,所以 $k\neq0$;②一元二次方程有两个实数根,则包括有两个相等的实数根($\Delta=0$)、两个不等的实数根($\Delta>0$)两种情况.

课时2　公式法解一元二次方程

刷基础

1. D　【解析】因为一元二次方程为 $3x^2-2x+3=0$,所以 $a=3$, $b=-2,c=3$. 故选 D.

2. D　【解析】∵ $3x^2+4=12x$,整理得 $3x^2-12x+4=0,\therefore a=3$, $b=-12,c=4,\therefore x=\frac{-(-12)\pm\sqrt{(-12)^2-4\times3\times4}}{2\times3}$. 故选 D.

3. D　【解析】A 中,$x^2+bx+c=0$ 的根为 $x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4c}}{2}$,不符合题意;B 中,$x^2+bx-c=0$ 的根为 $x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2+4c}}{2}$,不符合题意;C 中,$x^2-bx+c=0$ 的根为 $x=\frac{b\pm\sqrt{b^2-4c}}{2}$,不符合题意;D 中,$x^2-bx-c=0$ 的根为 $x=\frac{b\pm\sqrt{b^2+4c}}{2}$,符合题意. 故选 D.

4. C　【解析】原方程变形为 $x^2+6x-16=0$,由公式法解得方程的解为 $x=\frac{-6\pm\sqrt{36+64}}{2}=\frac{-6\pm10}{2}$,$\therefore x_1=-8,x_2=2.$ 故选 C.

5. A　【解析】∵ 方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq0)$ 有两根,$\therefore \Delta=b^2-4ac\geqslant0$ 且 $a\neq0$. 求根公式得到方程的根为 $x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$,两根互为相反数,所以 $x_1+x_2=0$,即 $\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}+\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=0$,解得 $b=0$. 故选 A.

6. $\frac{-3+\sqrt{5}}{2}$或$\frac{-3-\sqrt{5}}{2}$　【解析】根据题意得 $x(x+1)+2+2x-1=0$,整理得 $x^2+3x+1=0$,则 $a=1,b=3,c=1.$ ∵ $\Delta=b^2-4ac=3^2-4=5,\therefore x=\frac{-3\pm\sqrt{5}}{2}.$

7. $-3\pm\sqrt{11}$　【解析】根据题意,将 $a=x,b=-3x$ 代入,得 $x^2+6x+3=5$,即 $x^2+6x-2=0.$ ∵ $a=1,b=6,c=-2,\therefore \Delta=36-4\times1\times(-2)=44>0,\therefore x=\frac{-6\pm2\sqrt{11}}{2}=-3\pm\sqrt{11}.$

8. $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$　【解析】依题意,题图(1)中正方形和题图(2)中矩形的面积相等,所以列方程可得 $(x+y)^2=x(x+x+y)$. 已知 $x=1$,代入可得 $(1+y)^2=y+2$,化简可得 $y^2+y-1=0$,用求根公式解得 $y=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$. 因为 $y>0$,所以 $y=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

9. 【解】原方程可化为 $2x^2+5x-3=0.$

∵ $a=2,b=5,c=-3,$

$\Delta=b^2-4ac=25+24=49,$

$\therefore x=\frac{-5\pm\sqrt{49}}{2\times2}=\frac{-5\pm7}{4},$

$\therefore x_1=-3,x_2=\frac{1}{2}.$

10. 【解】这位同学的解答过程中有错误,利用公式法解一元二次方程时,确定 a,b,c 的值应先把一元二次方程化成一般形式,再确定 a,b,c 的值.

正确的解答过程如下:

原方程整理为 $\sqrt{2}x^2+4\sqrt{3}x-2\sqrt{2}=0,$

∵ $a=\sqrt{2},b=4\sqrt{3},c=-2\sqrt{2},$

$\therefore \Delta=b^2-4ac=(4\sqrt{3})^2-4\times\sqrt{2}\times(-2\sqrt{2})=64,$

$\therefore x=\frac{-4\sqrt{3}\pm\sqrt{64}}{2\times\sqrt{2}}=\frac{-4\sqrt{3}\pm8}{2\sqrt{2}}=-\sqrt{6}\pm2\sqrt{2},$

$\therefore x_1=-\sqrt{6}+2\sqrt{2},x_2=-\sqrt{6}-2\sqrt{2}.$

刷提升

1. A　【解析】化简 $(a-c)^2>a^2+c^2$ 可得 $2ac<0$,所以 $a\neq0$,即方程 $ax^2+bx+c=0$ 的二次项系数不为 0,所以其根的判别式 $b^2-4ac>0$,所以题中方程有两个不相等的实数根.

2. A　【解析】一元二次方程 $x^2-3x-5=0$,∵ $a=1,b=-3,c=-5,\therefore \Delta=9+20=29,\therefore x=\frac{3\pm\sqrt{29}}{2}$,则较小的根 $a=\frac{3-\sqrt{29}}{2}$,即 $-2<a<-1$. 故选 A.

3. B　【解析】∵ 关于 x 的一元二次方程 $(k-1)x^2+4x+1=0$ 有两个不相等的实数根,$\therefore \begin{cases}k-1\neq0,\\b^2-4ac>0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}k-1\neq0,\\4^2-4(k-1)>0,\end{cases}$ 解得 $k<5$ 且 $k\neq1$. 故选 B.

4. 【解】(1) 由题意知,$\Delta=(2m)^2-4(m-2)(m+3)>0,$

解得 $m<6.$

又 $m-2\neq0$,解得 $m\neq2$,所以 $m<6$ 且 $m\neq2.$

所以 m 的取值范围是 $m<6$ 且 $m\neq2.$

(2) 由(1)知 $m=5$,则方程为 $3x^2+10x+8=0,$

解得 $x_1=-2,x_2=-\frac{4}{3}.$

5. 【解】(1) 当 $m=\frac{1}{2}$时,方程可化为 $x^2+x-1=0.$

移项、配方得 $\left(x+\frac{1}{2}\right)^2=\frac{5}{4},$

$\therefore x=-\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{5}}{2},\therefore x_1=\frac{-1+\sqrt{5}}{2},x_2=\frac{-1-\sqrt{5}}{2}.$

(2) ∵ 关于 x 的一元二次方程 $(2m+1)x^2+4mx+2m-3=0$ 有两个不相等的实数根,$\therefore \Delta>0$ 且 $2m+1\neq0$,即

$(4m)^2-4(2m+1)(2m-3)>0$ 且 $m\neq-\frac{1}{2},$

解得 $m>-\frac{3}{4}$且$m\neq-\frac{1}{2},$

$\therefore$ 实数 m 的取值范围是 $m>-\frac{3}{4}$且$m\neq-\frac{1}{2}.$

6. 【解】(1) 根据题意,得 $m\neq1.$

∵ $a=m-1,b=-2m,c=m+1,$

$\therefore \Delta=b^2-4ac=(-2m)^2-4(m-1)(m+1)=4,$

则 $x_1=\frac{2m+2}{2(m-1)}=\frac{m+1}{m-1},x_2=1.$

(2) 由(1)知,$x_1=\frac{m+1}{m-1}=1+\frac{2}{m-1},$

∵ 方程的两个根都为正整数,

$\therefore \frac{2}{m-1}$是正整数,

$\therefore m-1=1$ 或 $m-1=2,$

解得 $m=2$ 或 3. 即 m 为 2 或 3 时,此方程的两个根都为正整数.

21.2.3　因式分解法

刷基础

1. B　【解析】由 $(x-5)(x+2)=0$ 得 $x-5=0$ 或 $x+2=0$,解得 $x_1=5,x_2=-2.$ 故选 B.

2. D 【解析】由 $x^2-25=0$ 得 $(x+5)(x-5)=0$，$\therefore x_1=5, x_2=-5$. 故选 D.

3. C 【解析】方程 $x^2=x$ 可用提公因式法分解因式. 方程 $x^2-x+\frac{1}{4}=0$ 可用完全平方公式分解因式. 方程 $(3x+2)^2=16$ 可用平方差公式分解因式. 方程 $x-x^2-3=0$ 不能用因式分解法求解. 故选 C.

4. B 【解析】移项得 $x^2-4x=0$，即 $x(x-4)=0$，$\therefore x=0$ 或 $x-4=0$，$\therefore x_1=0, x_2=4$. 故选 B.

5. B 【解析】移项得 $x(x-2)-3x=0$，整理得 $x(x-5)=0$，$\therefore x=0$ 或 $x-5=0$，$\therefore x_1=0, x_2=5$. 故选 B.

6. D 【解析】移项得 $5x(x+3)-3(x+3)=0$，将方程等号左边提取公因式得 $(5x-3)(x+3)=0$，所以 $5x-3=0$ 或 $x+3=0$，解得 $x_1=\frac{3}{5}, x_2=-3$. 故选 D.

7. B 【解析】移项得 $x(x-2)+(x-2)=0$，提取公因式得 $(x-2)(x+1)=0$，$\therefore x-2=0$ 或 $x+1=0$，$\therefore x_1=2, x_2=-1$. 故选 B.

8. D 【解析】原方程可变形为 $x(x-3)-4(x-3)=0$，则 $(x-3)(x-4)=0$，$\therefore x-3=0$ 或 $x-4=0$，$\therefore x_1=3, x_2=4$，$\therefore$ 直角三角形两条直角边的长分别为 3，4，$\therefore$ 斜边的长为 $\sqrt{3^2+4^2}=5$，$\therefore$ 该直角三角形斜边上的中线长为 2.5. 故选 D.

9. $x=0$ 或 $x=2$ 【解析】$\because -x^2+2x=0$，$\therefore x^2-2x=0$，$\therefore x(x-2)=0$，解得 $x=0$ 或 $x=2$.

10. $x=0$ 或 $x=1$ 【解析】移项并化简得 $(x-1)-(x+1)(x-1)=0$，$\therefore (x-1)(1-x-1)=0$，即 $-x(x-1)=0$，解得 $x=0$ 或 $x=1$. 故答案为 $x=0$ 或 $x=1$.

11. $x=2$ 或 $x=-1$ 【解析】移项得 $(x-2)^2-3x(x-2)=0$，$\therefore (x-2)\cdot(x-2-3x)=0$，即 $(x-2)(-2x-2)=0$，则 $x-2=0$ 或 $-2x-2=0$，解得 $x=2$ 或 $x=-1$. 故答案为 $x=2$ 或 $x=-1$.

12. 【解】(1) 原方程整理得 $x^2-4x=0$，因式分解得 $x(x-4)=0$，解得 $x_1=0, x_2=4$.

(2) 方法一：原方程可化为 $x^2-2x-3=0$，整理得 $(x+1)\cdot(x-3)=0$，解得 $x_1=-1, x_2=3$.

方法二：原方程可化为 $(x^2-1)-2(x+1)=0$，

整理得 $(x-1)(x+1)-2(x+1)=0$，

$\therefore (x+1)(x-3)=0$，解得 $x_1=-1, x_2=3$.

13. $x_1=1, x_2=-3$ 【解析】$\because (x+1)^2=4$，$x+1=\pm2$，$\therefore x=\pm2-1$，$x_1=1, x_2=-3$.

14. $x_1=x_2=\frac{1}{2}$ 【解析】$\because 4x^2-4x+1=0$，$\therefore (2x-1)^2=0$，则 $2x-1=0$，解得 $x_1=x_2=\frac{1}{2}$.

15. $x_1=\sqrt{2}, x_2=-3\sqrt{2}$ 【解析】这里 $a=1, b=2\sqrt{2}, c=-6$，$\because \Delta=8+24=32$，$\therefore x=\frac{-2\sqrt{2}\pm4\sqrt{2}}{2}$，即 $x_1=\sqrt{2}, x_2=-3\sqrt{2}$.

16. 【解】(1) $x(x-1)=x$，

移项，得 $x(x-1)-x=0$，

提取公因式，得 $x(x-1-1)=0$，

于是得 $x=0$ 或 $x-1-1=0$，

解得 $x_1=0, x_2=2$.

(2) $(x+1)(x-1)+2(x+3)=8$，

整理，得 $x^2-1+2x+6-8=0$，即 $x^2+2x-3=0$，

因式分解，得 $(x+3)(x-1)=0$，

于是得 $x+3=0$ 或 $x-1=0$，

解得 $x_1=-3, x_2=1$.

(3) $\sqrt{3}x^2=6x-\sqrt{3}$，移项，得 $\sqrt{3}x^2-6x=-\sqrt{3}$，

二次项系数化为 1，得 $x^2-2\sqrt{3}x=-1$，

配方，得 $x^2-2\sqrt{3}x+(\sqrt{3})^2=-1+(\sqrt{3})^2$，

即 $(x-\sqrt{3})^2=2$.

由此可得 $x-\sqrt{3}=\pm\sqrt{2}$，

解得 $x_1=\sqrt{3}+\sqrt{2}, x_2=\sqrt{3}-\sqrt{2}$.

(4) $x^2-2x-1=0$，$\because a=1, b=-2, c=-1$，

$\therefore \Delta=(-2)^2-4\times1\times(-1)=8>0$.

$\therefore$ 方程有两个不相等的实数根，$x=\frac{2\pm\sqrt{8}}{2}=1\pm\sqrt{2}$，

即 $x_1=1+\sqrt{2}, x_2=1-\sqrt{2}$.

刷易错

17. $x_1=1, x_2=\frac{2}{3}$ 【解析】移项得 $3x(x-1)-2(x-1)=0$，所以 $(3x-2)(x-1)=0$，所以 $x-1=0$ 或 $3x-2=0$，解得 $x_1=1$，$x_2=\frac{2}{3}$.

易错警示 方程两侧同时含有代数式 $x-1$，不能直接消掉. 因为 $x-1=0$，即 $x=1$ 时，等号也成立，故 $x=1$ 也是一元二次方程的根. 应移项化简后再选择合适的方法解一元二次方程.

刷提升

1. D 【解析】移项，得 $x(x+2)-3(x+2)=0$. 分解因式，得 $(x-3)(x+2)=0$. 可得 $x+2=0$ 或 $x-3=0$，解得 $x_1=-2, x_2=3$. 故选 D.

2. D 【解析】由 $(x-2)(3x+1)=0$ 得 $3x+1=0$ 或 $x-2=0$. 由 $x-2=0$ 得 $x=2$，此时 $3x+1=7$. 故选 D.

3. C 【解析】分解因式，得 $\left(x-\frac{3}{4}\right)\left(x-\frac{3}{4}+x-\frac{1}{2}\right)=0$. 解得 $x_1=\frac{3}{4}, x_2=\frac{5}{8}$. 则方程较小的根为 $\frac{5}{8}$. 故选 C.

4. A 【解析】由 $(x+2)(x-2)=5$，得 $x^2-4=5$，即 $x^2-9=0$，因式分解得 $(x+3)(x-3)=0$，所以 $x+3=0$ 或 $x-3=0$，解得 $x_1=-3, x_2=3$，所以甲错误，乙正确. 故选 A.

5. C 【解析】$x^2=2x$，$x^2-2x=0$，$x(x-2)=0$，$\therefore x=0$ 或 $x=2$. 当 $x=0$ 时，$y=x-4=0-4=-4$；当 $x=2$ 时，$y=-x+4=-2+4=2$. 故选 C.

6. $x_1=-a-b, x_2=-a+b$ 【解析】原方程可化为 $(x+a+b)(x+a-b)=0$，$\therefore x+a+b=0$，$x+a-b=0$，$\therefore x_1=-a-b, x_2=-a+b$.

7. 0 或 1 【解析】当 $k=1$ 时，方程 $(1-k)x^2+k^2x-1=0$ 为一元一次方程，解得 $x=1$；当 $k\neq1$ 时，方程 $(1-k)x^2+k^2x-1=0$ 为一元二次方程，把 $x=1$ 代入方程 $(1-k)x^2+k^2x-1=0$ 可得 $1-k+k^2-1=0$，即 $-k+k^2=0$，可得 $k(k-1)=0$，即 $k=0$ 或 1（舍去）. 所以常数 k 的值为 0 或 1.

8. -4 或 1 【解析】根据题意得 $2x(x+1)-(x+1)(x-2)=6$，整理得 $x^2+3x-4=0$，$\therefore (x+4)(x-1)=0$，$\therefore x+4=0$ 或 $x-1=0$，$\therefore x_1=-4, x_2=1$，即 x 的值为 -4 或 1.

9. 【解】(1) 移项得 $3y^2-2\sqrt{3}y+1=0$，$\therefore (\sqrt{3}y-1)^2=0$，

$\therefore \sqrt{3}y-1=0$，解得 $y_1=y_2=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

(2) $(2x+1)^2=3(2x+1)$，移项得 $(2x+1)^2-3(2x+1)=0$，提取公因式得 $(2x+1-3)(2x+1)=0$，即 $(2x-2)(2x+1)=0$，解得 $x_1=1, x_2=-\frac{1}{2}$.

(3) 整理得 $(2x+1)^2+3(2x+1)=0$，即 $(2x+1)(x+2)=0$，

解得 $x_1=-\frac{1}{2}, x_2=-2$.

刷素养

10. 【解】(1) 因为 $x^2+5x+6=x^2-(-5)x+6=0$，且 $(-2)+(-3)=-5$，$(-2)\times(-3)=6$，

所以方程 $x^2+5x+6=0$ 可变形为 $(x+2)(x+3)=0$，

则 $x+2=0$ 或 $x+3=0$，解得 $x_1=-2, x_2=-3$.

(2) 因为 $6+(-1)=5$，$6\times(-1)=-6$，

所以方程 $x^2-5x-6=0$ 可变形为 $(x-6)(x+1)=0$，

则 $x-6=0$ 或 $x+1=0$，解得 $x_1=6, x_2=-1$.

(3) 因为 $x^2+3x-4=x^2-(-3)x-4=0$，且 $(-4)+1=-3$，$(-4)\times1=-4$，

所以方程 $x^2+3x-4=0$ 可变形为 $(x+4)(x-1)=0$，

则 $x+4=0$ 或 $x-1=0$，

解得 $x_1=-4, x_2=1$.

*21.2.4　一元二次方程的根与系数的关系

刷基础

1. B　【解析】设这个一元二次方程的两个实数根分别为 x_1,x_2，方程 $3x^2-1=2x+5$ 化为一元二次方程的一般形式为 $3x^2-2x-6=0$. ∵ $a=3,b=-2,c=-6$，∴ $x_1+x_2=-\frac{b}{a}=-\frac{-2}{3}=\frac{2}{3}$，$x_1x_2=\frac{c}{a}=\frac{-6}{3}=-2$. 故选 B.

2. A　【解析】由一元二次方程的根与系数的关系，得 $\alpha+\beta=2$，$\alpha\beta=-1$，则 $\alpha+\beta+\alpha\beta=2-1=1$. 故选 A.

3. D　【解析】设关于 x 的方程 $x^2+2(k+2)x+k^2=0$ 的两个实数根为 a,b，由根与系数的关系得 $a+b=-\frac{2(k+2)}{1}=-(2k+4)$.

∵ 关于 x 的方程 $x^2+2(k+2)x+k^2=0$ 的两个实数根之和大于 -4，∴ $-(2k+4)>-4$，∴ $k<0$.

由 $\Delta=[2(k+2)]^2-4\times1\times k^2=16(k+1)\geqslant0$，解得 $k\geqslant-1$，即 k 的取值范围是 $-1\leqslant k<0$. 故选 D.

4. C　【解析】∵ x_1,x_2 是方程 $x^2+x-1=0$ 的两个根，∴ $x_1+x_2=-1,x_1x_2=-1$，则原式 $=x_1x_2-2x_1-2x_2+4=x_1x_2-2(x_1+x_2)+4=-1-2\times(-1)+4=-1+2+4=5$. 故选 C.

5. 4　【解析】方法一：根据一元二次方程的根与系数的关系得 $\begin{cases}2+b=a+5,\\2b=8a,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=1,\\b=4,\end{cases}$ 所以 $ab=4$.

方法二：把 $x=2$ 代入方程 $x^2-(a+5)x+8a=0$ 可得 $4-2(a+5)+8a=0$，解得 $a=1$. 根据一元二次方程的根与系数的关系可得 $2+b=a+5$，解得 $b=4$，所以 $ab=4$.

6. 15　【解析】根据题意，由根与系数关系得 $x_1+x_2=-3,x_1x_2=-5$，所以 $x_1^2x_2+x_1x_2^2=x_1x_2(x_1+x_2)=(-5)\times(-3)=15$.

7. −1　【解析】设关于 x 的方程 $m^2x^2-(m-2)x+1=0$ 的两个根为 x_1,x_2，则 $x_1x_2=\frac{1}{m^2}$. 又∵ 原方程的两个根互为倒数，∴ $\frac{1}{m^2}=1$，解得 $m_1=1,m_2=-1$. ∵ 当 $m=1$ 时，原方程为 $x^2+x+1=0$，此时 $\Delta<0$，方程无实数根；当 $m=-1$ 时，原方程为 $x^2+3x+1=0$，此时 $\Delta>0$，方程有两个不等的实数根. ∴ $m=-1$.

8. $\frac{1}{4}$　【解析】由题意得 $\Delta=(2m-1)^2-4m^2\geqslant0$，解得 $m\leqslant\frac{1}{4}$.

由根与系数的关系，得 $x_1+x_2=-(2m-1),x_1x_2=m^2$.

由 $x_1^2-x_2^2=0$，得 $(x_1+x_2)(x_1-x_2)=0$.

若 $x_1+x_2=0$，即 $-(2m-1)=0$，解得 $m=\frac{1}{2}$. 因为 $\frac{1}{2}>\frac{1}{4}$，可知 $m=\frac{1}{2}$ 不合题意，舍去；

若 $x_1-x_2=0$，即 $x_1=x_2$，由 $\Delta=0$，得 $m=\frac{1}{4}$.

故当 $x_1^2-x_2^2=0$ 时，$m=\frac{1}{4}$.

9. 3　【解析】设直角三角形的斜边长为 c，两条直角边长分别为 a,b.

∵ 直角三角形的两条直角边的长恰好是方程 $2x^2-8x+7=0$ 的两个根，∴ $a+b=4,ab=3.5$.

根据勾股定理可得 $c^2=a^2+b^2=(a+b)^2-2ab=16-7=9$，∴ $c=3$，即直角三角形的斜边长为 3.

10. −2　−3　【解析】甲同学看错了 p，但没有看错 q，乙同学看错了 q，但没有看错 p，所以根据根与系数的关系，得 $q=(-3)\times1=-3,p=-(-2+4)=-2$.

11. (1)【证明】∵ $\Delta=(-m)^2-4(m-1)=m^2-4m+4=(m-2)^2\geqslant0$，∴ 对于任意的实数 m，方程总有实数根.

(2)【解】设另一个根为 a.

根据题意可得 $a+2=m,2a=m-1$，∴ $a+2=2a+1$，∴ $a=1$，∴ 另一个根为 1.

12.【解】原方程可化为 $x^2-2(m+1)x+m^2=0$.

∵ x_1,x_2 是方程的两个根，∴ $\Delta\geqslant0$，即 $4(m+1)^2-4m^2\geqslant0$，∴ $8m+4\geqslant0$，解得 $m\geqslant-\frac{1}{2}$.

∵ x_1,x_2 满足 $|x_1|=x_2$，∴ $x_1=x_2$ 或 $x_1=-x_2$，即 $\Delta=0$ 或 $x_1+x_2=0$.

①由 $\Delta=0$，即 $8m+4=0$，解得 $m=-\frac{1}{2}$. 经检验，$x_1=x_2=\frac{1}{2}$，满足题意.

②由 $x_1+x_2=0$，即 $2(m+1)=0$，解得 $m=-1$.

∵ $m\geqslant-\frac{1}{2}$，∴ $m=-1$ 舍去.

综上，$m=-\frac{1}{2}$.

刷易错

13. D　【解析】由一元二次方程根与系数的关系，得 $x_1+x_2=2m$，$x_1x_2=m^2-m-1$.

因为 $x_1+x_2=1-x_1x_2$，所以 $2m=1-(m^2-m-1)$.

解得 $m_1=1,m_2=-2$.

又因为 $\Delta=4[m^2-(m^2-m-1)]\geqslant0$，解得 $m\geqslant-1$.

综上，m 的值为 1. 故选 D.

易错警示 由一元二次方程根与系数的关系求出 m 的值后，容易忽视 $\Delta\geqslant0$，导致错选 B.

21.1 ~21.2 综合训练

刷综合

1. C　【解析】方法一(配方法)：方程 $x^2-2x-1=0$ 变形得 $x^2-2x=1$，配方得 $x^2-2x+1=2$，即 $(x-1)^2=2$，开方得 $x-1=\pm\sqrt{2}$，解得 $x_1=1+\sqrt{2},x_2=1-\sqrt{2}$. 故选 C.

方法二(公式法)：方程 $x^2-2x-1=0$ 中，$a=1,b=-2,c=-1$，则 $b^2-4ac=(-2)^2-4\times1\times(-1)=8$，

∴ $x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{2\pm\sqrt{8}}{2}=1\pm\sqrt{2}$.

∴ $x_1=1+\sqrt{2},x_2=1-\sqrt{2}$. 故选 C.

2. C　【解析】∵ $a=1,b=-1,c=-1$，∴ $x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-(-1)\pm\sqrt{(-1)^2-4\times1\times(-1)}}{2\times1}=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$，即 $\alpha=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

∵ $\sqrt{4}<\sqrt{5}<\sqrt{9}$，∴ $2<\sqrt{5}<3,3<1+\sqrt{5}<4$，即 $\frac{3}{2}<\frac{1+\sqrt{5}}{2}<2$，∴ $1.5<\alpha<2$. 故选 C.

3. C　【解析】由关于 x 的一元二次方程 $(k-1)x^2+2x-2=0$ 有两个不等的实数根，得 $\Delta>0$，即 $2^2+8(k-1)>0$，解得 $k>\frac{1}{2}$. 因为一元二次方程的二次项的系数不能等于 0，所以 $k-1\neq0$，解得 $k\neq1$. 故选 C.

4. 23　【解析】根据题意，得 $a^2=a+3,a^2-a=3,b^2-b=3$.

$$\begin{aligned}&\therefore 2a^3+b^2+3a^2-11a-b+5\\&=2a^3+3a^2-11a+b^2-b+5\\&=2a(a+3)+3a^2-11a+3+5\\&=2a^2+6a+3a^2-11a+8\\&=5a^2-5a+8\\&=5(a^2-a)+8\\&=5\times3+8\\&=23.\end{aligned}$$

5. $m\leqslant\frac{1}{2}$ 且 $m\neq0$　【解析】因为一元二次方程有实数根，所以 $\Delta=b^2-4ac=4(m-1)^2-4m^2=4-8m\geqslant0$，所以 $m\leqslant\frac{1}{2}$. 因为 $x_1+x_2=-2(m-1)>0$，所以 $m<1$. 因为 $x_1x_2=m^2>0$，所以 $m\neq0$. 所以 $m\leqslant\frac{1}{2}$ 且 $m\neq0$.

6.【解】(1)由题意，得 $\Delta>0$，即 $(-2\sqrt{2})^2-4m>0$，解得 $m<2$，

∴整数 m 的最大值为 1.

(2)把 $m=1$ 代入关于 x 的一元二次方程 $x^2-2\sqrt{2}x+m=0$ 中,得 $x^2-2\sqrt{2}x+1=0$,

根据根与系数的关系得 $x_1+x_2=2\sqrt{2}$,$x_1x_2=1$,

∴ $x_1^2+x_2^2-x_1x_2=(x_1+x_2)^2-3x_1x_2=(2\sqrt{2})^2-3\times1=5$.

7. (1)【证明】①当 $k-1=0$,即 $k=1$ 时,方程为一元一次方程 $2x+2=0$,解得 $x=-1$,有一个解;

②当 $k-1\neq0$,即 $k\neq1$ 时,方程为一元二次方程,

则 $\Delta=(2k)^2-4\times2(k-1)=4k^2-8k+8=4(k-1)^2+4>0$,

∴方程有两个不等的实数根.

综合①②可知,无论 k 为何值,方程总有实数根.

(2)【解】S 的值能为 2.

由(1),得 $k\neq1$,由一元二次方程的根与系数的关系得

$x_1+x_2=-\dfrac{2k}{k-1}$,$x_1x_2=\dfrac{2}{k-1}$.

又∵ $S=\dfrac{x_2}{x_1}+\dfrac{x_1}{x_2}+x_1+x_2$,

∴ $S=\dfrac{x_1^2+x_2^2}{x_1x_2}+x_1+x_2=\dfrac{(x_1+x_2)^2-2x_1x_2}{x_1x_2}+x_1+x_2$

$=\dfrac{\left(-\dfrac{2k}{k-1}\right)^2-\dfrac{4}{k-1}}{\dfrac{2}{k-1}}+\left(-\dfrac{2k}{k-1}\right)=\dfrac{2k^2}{k-1}-2-\dfrac{2k}{k-1}=2k-2$.

若 $S=2$,则 $2k-2=2$,解得 $k=2$.

∴当 $k=2$ 时,S 的值为 2.

∴ S 的值能为 2,此时 k 的值为 2.

8.【解】(1)由 $\Delta=[4(m-1)]^2-4\times4m^2=-32m+16\geqslant0$,得 $m\leqslant\dfrac{1}{2}$.

∴当 $m\leqslant\dfrac{1}{2}$ 时,方程有两个实数根.

(2)根据一元二次方程的根与系数关系得

$x_1+x_2=-\dfrac{4(m-1)}{4}=1-m$,$x_1x_2=\dfrac{m^2}{4}$.

∵ $x_1^2+x_2^2=17$,∴ $(x_1+x_2)^2-2x_1x_2=17$,

∴ $(1-m)^2-\dfrac{m^2}{2}=17$,

解得 $m_1=8$,$m_2=-4$.

∵当 $m\leqslant\dfrac{1}{2}$ 时,方程有两个实数根,

∴ $m=-4$.

(3)x_1 和 x_2 能同号.

由(1)知,当 $m\leqslant\dfrac{1}{2}$ 时,方程有两个实数根,

由(2)知,$x_1x_2=\dfrac{m^2}{4}$.

若 x_1 与 x_2 同号,则 $x_1x_2>0$,即 $\dfrac{m^2}{4}>0$,解得 $m\neq0$.

∴当 $m\neq0$,且 $m\leqslant\dfrac{1}{2}$ 时,x_1 和 x_2 能同号,

即 m 的取值范围是 $m\leqslant\dfrac{1}{2}$,且 $m\neq0$.

9.【解】(1)原方程可化为 $|x|^2-2|x|=0$,

设 $|x|=y$,则 $y^2-2y=0$. 解得 $y_1=0$,$y_2=2$.

当 $y=0$ 时,$|x|=0$,∴ $x=0$;

当 $y=2$ 时,$|x|=2$,∴ $x=\pm2$.

∴原方程的解是 $x_1=0$,$x_2=-2$,$x_3=2$.

(2)原方程可化为 $|x-1|^2-4|x-1|+4=0$.

设 $|x-1|=y$,则 $y^2-4y+4=0$,解得 $y_1=y_2=2$. 即 $|x-1|=2$,

∴ $x=-1$ 或 3.

∴原方程的解是 $x_1=-1$,$x_2=3$.

刷中考

1. A 【解析】把 $2-\sqrt{3}$ 代入方程 $x^2-4x+c=0$,得 $(2-\sqrt{3})^2-4(2-\sqrt{3})+c=0$,解得 $c=1$. 故选 A.

2. D 【解析】由方程有两个不相等的实数根可知 $b^2-4ac>0$,代入数据可得出关于 m 的一元一次不等式,$\Delta=b^2-4ac=(-2)^2-4\times1\times m=4-4m>0$,解得 $m<1$. 故选 D.

3. D 【解析】A 选项,$x^2+1=0$ 中 $\Delta=0^2-4\times1\times1=-4<0$,没有实数根;B 选项,$x^2-2x+1=0$ 中 $\Delta=(-2)^2-4\times1\times1=0$,有两个相等的实数根;C 选项,$x^2+2x+4=0$ 中 $\Delta=2^2-4\times1\times4=-12<0$,没有实数根;D 选项,$x^2-x-3=0$ 中 $\Delta=(-1)^2-4\times1\times(-3)=13>0$,有两个不相等的实数根. 故选 D.

4. D 【解析】一元二次方程 $(x+1)(x-3)=2x-5$ 化简为 $x^2-4x+2=0$,$\Delta=b^2-4ac=(-4)^2-4\times1\times2=8$,所以方程的两根为 $x=\dfrac{-(-4)\pm\sqrt{8}}{2}$,即 $x_1=2+\sqrt{2}$,$x_2=2-\sqrt{2}$. 又因为 $2+\sqrt{2}>3$,$2-\sqrt{2}>0$,所以该方程有两个正根,且有一根大于 3. 故选 D.

5. $m=4$ 【解析】∵关于 x 的一元二次方程 $(m-5)x^2+2x+2=0$ 有实数根,∴ $\Delta=4-8(m-5)\geqslant0$ 且 $m-5\neq0$,解得 $m\leqslant5.5$ 且 $m\neq5$,则 m 的最大整数解是 $m=4$.

6. $\dfrac{7}{2}$ 【解析】∵关于 x 的一元二次方程 $\dfrac{1}{2}x^2-2mx-4m+1=0$ 有两个相等的实数根,∴ $\Delta=0$,∴ $(-2m)^2-4\times\dfrac{1}{2}(-4m+1)=0$,∴ $4m^2+8m-2=0$,$m^2+2m=\dfrac{1}{2}$,∴ $(m-2)^2-2m(m-1)=-m^2-2m+4=-\dfrac{1}{2}+4=\dfrac{7}{2}$.

7. 2 018 【解析】由题意可知,$2m^2-3m-1=0$,∴ $2m^2-3m=1$,

∴原式 $=3(2m^2-3m)+2\,015=2\,018$.

8.【解】(1)∵ $2x^2-4x-30=0$,

∴ $x^2-2x-15=0$,

∴ $(x-5)(x+3)=0$,

∴ $x_1=5$,$x_2=-3$.

(2)移项,得 $2(x-3)-3x(x-3)=0$.

提公因式,得 $(2-3x)(x-3)=0$,

即 $2-3x=0$ 或 $x-3=0$.

解得 $x_1=\dfrac{2}{3}$,$x_2=3$.

9.【解】(1)由题意可知 $\Delta=4-4m>0$,解得 $m<1$.

∴ m 的取值范围是 $m<1$.

(2)由一元二次方程根与系数的关系可知 $x_1+x_2=2$,$x_1x_2=m$.

又∵ $x_1-x_2=2$,

∴ $(x_1-x_2)^2=4$,则 $(x_1+x_2)^2-4x_1x_2=4$,

∴ $4-4m=4$,解得 $m=0$.

10.【解】(1)由题意得 $a\neq0$.

∵ $\Delta=b^2-4ac=(a+2)^2-4a=a^2+4>0$,

∴原方程有两个不相等的实数根.

(2)答案不唯一,满足 $b^2-4a=0(a\neq0)$ 即可,例如:

令 $a=1$,$b=-2$,则原方程为 $x^2-2x+1=0$,解得 $x_1=x_2=1$.

11. (1)【证明】$\Delta=b^2-4ac=[-(3k+3)]^2-4\times1\times(2k^2+4k+2)=9k^2+18k+9-8k^2-16k-8=k^2+2k+1=(k+1)^2$.

∵无论 k 为何值时,$(k+1)^2\geqslant0$,

∴无论 k 为何值时,原方程都有实数根.

(2)【解】由根与系数的关系可得

$x_1+x_2=3k+3$,$x_1x_2=2k^2+4k+2$.

∵ $x_1x_2+2x_1+2x_2=36$,

∴ $2k^2+4k+2+2(3k+3)=36$,

即 $2k^2+10k-28=0$,

∴ $k_1=2$,$k_2=-7$(不符合题意,舍去).

当 $k=2$ 时,菱形的面积为 $\dfrac{1}{2}x_1x_2=\dfrac{1}{2}\times(2k^2+4k+2)=9$.

专题　一元二次方程的解法

刷难关

1.【解】(1)$(2x+1)^2=9$,

开平方,得 $2x+1=\pm3$,

解得 $x_1=1$,$x_2=-2$.

(2)$3x^2-5x-2=0$,
移项,得$3x^2-5x=2$,
二次项系数化为1,得$x^2-\frac{5}{3}x=\frac{2}{3}$,
配方,得$x^2-\frac{5}{3}x+\left(\frac{5}{6}\right)^2=\frac{2}{3}+\left(\frac{5}{6}\right)^2$,即$\left(x-\frac{5}{6}\right)^2=\frac{49}{36}$,
开平方,得$x-\frac{5}{6}=\pm\frac{7}{6}$,
解得$x_1=-\frac{1}{3}$,$x_2=2$.

(3)$2x^2-5x+1=0$,
$\because\Delta=b^2-4ac=(-5)^2-4\times2\times1=17$,
$\therefore x=\frac{5\pm\sqrt{17}}{2\times2}$,
$\therefore x_1=\frac{5+\sqrt{17}}{4}$,$x_2=\frac{5-\sqrt{17}}{4}$.

(4)$(x-3)^2-4x(3-x)=0$,
$(x-3)^2+4x(x-3)=0$,
分解因式,得$(x-3)(x-3+4x)=0$,
可得$x-3=0$或$x-3+4x=0$,
解得$x_1=3$,$x_2=\frac{3}{5}$.

2.【解】(1)将方程变形得$16x^2=225$,
系数化为1,得$x^2=\frac{225}{16}$,
解得$x_1=\frac{15}{4}$,$x_2=-\frac{15}{4}$.

(2)$\because(2x+1)^2-(2x+1)=0$,
$\therefore(2x+1)(2x+1-1)=0$,即$2x(2x+1)=0$,
则$x=0$或$2x+1=0$,
解得$x_1=0$,$x_2=-\frac{1}{2}$.

(3)方程整理得$x^2+x-1=0$,
方程中$a=1$,$b=1$,$c=-1$.
$\because\Delta=1+4=5$,$\therefore x=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$.
$\therefore x_1=\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$,$x_2=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$.

(4)将方程变形得$y^2-\frac{3}{2}y=\frac{1}{2}$,
配方,得$y^2-\frac{3}{2}y+\frac{9}{16}=\frac{17}{16}$,即$\left(y-\frac{3}{4}\right)^2=\frac{17}{16}$,
开平方,得$y-\frac{3}{4}=\pm\frac{\sqrt{17}}{4}$,
则$y_1=\frac{3+\sqrt{17}}{4}$,$y_2=\frac{3-\sqrt{17}}{4}$.

3.【解】(1)换元　降次
(2)设$x^2+x=y$,则原方程可化为$y^2-4y-12=0$,
解得$y_1=6$,$y_2=-2$.
由$x^2+x=6$,得$x_1=-3$,$x_2=2$.
由$x^2+x=-2$,
整理得$x^2+x+2=0$,
$\Delta=b^2-4ac=1-4\times2=-7<0$,此时方程无实数根.
所以原方程的解为$x_1=-3$,$x_2=2$.

4.【解】当$x-1\geqslant0$,即$x\geqslant1$时,$|x-1|=x-1$,
方程化为$x^2-(x-1)-1=0$,即$x^2-x=0$,
分解因式,得$x(x-1)=0$,
可得$x=0$或$x-1=0$,
解得$x_1=0$(舍去),$x_2=1$;
当$x-1<0$,即$x<1$时,$|x-1|=1-x$,
方程化为$x^2+(x-1)-1=0$,即$x^2+x-2=0$,
分解因式,得$(x-1)(x+2)=0$,
可得$x-1=0$或$x+2=0$,
解得$x_3=1$(舍去),$x_4=-2$.
则原方程的解为$x_2=1$,$x_4=-2$.

21.3　实际问题与一元二次方程

课时1　传播问题和数字问题

刷基础

1.C　【解析】设每只病鸡每轮传染健康鸡x只,由题意得$x+1+x(x+1)=169$,整理,得$x^2+2x-168=0$,解得$x_1=12$,$x_2=-14$(不符合题意,舍去). 所以每只病鸡每轮传染健康鸡12只. 故选C.

2.【解】设每轮感染中平均1台电脑会感染x台电脑,依题意得
$1+x+(1+x)x=81$,
整理得$(1+x)^2=81$,
则$x+1=9$或$x+1=-9$,
解得$x_1=8$,$x_2=-10$(舍去).
$\therefore(1+x)^2+x(1+x)^2=(1+x)^3=(1+8)^3=729>700$.
答:每轮感染中平均1台电脑会感染8台电脑,三轮感染后,被感染的电脑会超过700台.

3.B　【解析】每支球队都需要与其他球队比赛$(x-1)$场,但两队之间只有1场比赛,所以可列方程为$\frac{1}{2}x(x-1)=15$. 故选B.

4.B　【解析】设这个微信群共有x人,依题意有$x(x-1)=90$,解得$x=-9$(舍去)或$x=10$,$\therefore$这个微信群共有10人. 故选B.

5.【解】设这次比赛共有x名选手.
由题意可知,无论胜负情况,每局两位选手得分总和均为2分,x名选手比赛的总局数为$\frac{1}{2}x(x-1)$,
所以得分总数为$x(x-1)$.
因为x是正整数,且大于1,所以x,$x-1$是两个连续的正整数.
不难验证:两个连续的整数之积的末位数字只能是0,2,6,故得分总数只能是2 070,
则$\frac{1}{2}x(x-1)\times2=2\,070$,
解得$x_1=46$,$x_2=-45$(舍去).
答:这次比赛的选手共有46名.

6.62　【解析】设原数的十位上的数字为x,个位上的数字为$x-4$,则原数为$10x+(x-4)$,交换位置后新数为$10(x-4)+x$. 由题意得$[10x+(x-4)]\times[10(x-4)+x]=1\,612$,整理得$x^2-4x-12=0$,解得$x_1=6$,$x_2=-2$. -2不符合题意,应舍去,$\therefore x=6$,$x-4=2$,$\therefore$原来这个两位数是62.

7.23或32　【解析】设原两位数的十位上的数字为x,则个位上的数字为$(5-x)$. 根据题意得$(10x+5-x)[10(5-x)+x]=736$,整理得$x^2-5x+6=0$,解得$x_1=2$,$x_2=3$,$\therefore5-x=3$或2,$\therefore$原两位数是23或32.

8.144　【解析】根据题意,设最小数为x,则最大数为$x+16$. 所以$x(x+16)=192$,解得$x_1=8$,$x_2=-24$(舍去).
故最上面一行的数为8,9,10,中间一行的数为15,16,17,最下面一行的数为22,23,24. 所以这9个数的和为$8+9+10+15+16+17+22+23+24=144$.

课时2　变化率问题和利润问题

刷基础

1.D　【解析】根据题意得$50+50(1+x)+50(1+x)^2=182$. 故选D.

2.C　【解析】设平均每次降低成本的百分率为x,所以第一次降低成本后的成本为$100(1-x)$元,第二次降低成本后的成本为$100(1-x)(1-x)$,所以可列方程$100(1-x)^2=81$,解得$1-x=\pm0.9$. 又$0<x<1$,故$x=0.1$. 故选C.

3.(1)$2.6(1+x)^2$　【解析】因为第1年的可变成本为2.6万元,所以第2年的可变成本为$2.6(1+x)$,则第3年的可变成本为$2.6(1+x)^2$.
(2)【解】根据题意,得$4+2.6(1+x)^2=7.146$.
解方程,得$x_1=0.1$,$x_2=-2.1$(不合题意,舍去).
答:可变成本平均每年增长的百分率是10%.

4.A　【解析】若每盆多植x株,则现在每盆有$(3+x)$株. 因为每盆增加1株,平均每株盈利减少0.5元,则多植x株后每株盈利会

减少 0.5x 元，即多植 x 株后每株的盈利为 $(4-0.5x)$ 元. 要使每盆的盈利达到 15 元，则 $(3+x)(4-0.5x)=15$. 故选 A.

5. 【解】设销售单价降低 x 元，则每天的销售量是 $(50+5x)$ 件.
根据题意得 $(100-x-50)(50+5x)=4\,000$，
整理得 $x^2-40x+300=0$.
解得 $x_1=10, x_2=30$.
∴ $100-x=90$ 或 70.
答：销售单价为 90 元或 70 元时，每天的销售利润可达 4 000 元.

6. 【解】(1) 设平均每次下调的百分率为 x.
由题意，得 $5(1-x)^2=3.2$，
解得 $x_1=0.2=20\%$，$x_2=1.8$（舍去）.
∴ 平均每次下调的百分率为 20%.
(2) 小华选择方案一更优惠，理由如下：
方案一所需费用为 $3.2\times0.9\times5\,000=14\,400$（元）；
方案二所需费用为 $3.2\times5\,000-200\times5=15\,000$（元）.
∵ $14\,400<15\,000$，∴ 小华选择方案一更优惠.

课时 3　几何图形面积问题

刷基础

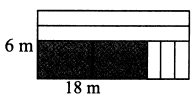
1. A　【解析】∵ 游泳池的长为 x m，∴ 宽可表示为 $(x-10)$ m，根据矩形的面积公式，得 $x(x-10)=375$. 故选 A.

2. A　【解析】依题意，设金色纸边的宽为 x cm，则
$(80+2x)(50+2x)=5\,400$，
整理得 $x^2+65x-350=0$. 故选 A.

3. 2 cm，7 cm　【解析】设较短的直角边的长为 x cm，则另一条直角边的长为 $(x+5)$ cm. 根据题意列方程，得 $\frac{1}{2}x\cdot(x+5)=7$，
整理，得 $x^2+5x-14=0$. 解方程，得 $x_1=2, x_2=-7$（不符合题意，舍去）. 所以 $x=2, x+5=7$. 这两条直角边长分别为 2 cm，7 cm.

4. 【解】根据题意，得 $(x+1)^2-1=24$，
即 $(x+1)^2=25$.
解得 $x_1=4, x_2=-6$（不符合题意，舍去）.
所以 $x=4$.

5. C　【解析】因为人行通道的宽为 x m，把两块绿地“平移”到如图所示的位置，所以绿地部分矩形的宽为 $(6-2x)$ m，长为 $(18-3x)$ m，根据题意得 $(6-2x)(18-3x)=60$，整理得 $x^2-9x+8=0$. 故选 C.



6. C　【解析】设甬路的宽为 x m. 根据题意得 $40\times26-(40x+2\times26x-2x^2)=144\times6$，整理得 $x^2-46x+88=0$，解得 $x_1=44, x_2=2$，当 $x=44$ 时不符合题意，故舍去，所以 $x=2$. 故选 C.

7. 【解】设矩形温室的宽为 x m，则长为 $2x$ m. 根据题意，得
$(x-2)\cdot(2x-4)=288$，
解得 $x_1=-10$（不符合题意，舍去），$x_2=14$.
所以 $x=14$，$2x=2\times14=28$.
答：当矩形温室的长为 28 m，宽为 14 m 时，蔬菜种植区域的面积是 288 m^2.

刷易错

8. 【解】设 $AB=x$ 米，根据题意得
$x(100-4x)=400$，
整理得 $x^2-25x+100=0$，
解得 $x_1=20, x_2=5$.
当 $AB=20$ 米时，$BC=20$ 米；当 $AB=5$ 米时，$BC=80$ 米 >25 米，故舍去.
答：羊圈的边长 AB，BC 都为 20 米.
易错警示 解方程的实际应用题时，要注意根是否符合实际，如本题中，需分析两个取值是否符合实际情况.

21.3 综合训练

刷综合

1. 448　【解析】设一人可传染 x 人. 第一轮传染后，有 $x+1$ 人患病；第二轮传染后，有 $(x+1)+x(x+1)$ 人.
所以可列方程 $(x+1)+x(x+1)=64$，化简可得 $(x+1)^2=64$.
解得 $x_1=-9$（舍），$x_2=7$. 所以 $x=7$.
所以每人可传染 7 人，第三轮将又有 $64\times7=448$（人）被传染.

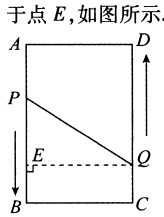
2. 24　【解析】设这个两位数十位上的数字为 x，则个位上的数字为 $x+2$. 根据题意，得 $3x(x+2)=10x+(x+2)$.
整理得 $3x^2-5x-2=0$.
解得 $x_1=2, x_2=-\frac{1}{3}$（不符合题意，舍去）.
当 $x=2$ 时，$x+2=4$. 这个两位数是 24.

3. 【解】(1) 设平均每次下调的百分比为 x，则有
$7\,000(1-x)^2=5\,670$，则 $(1-x)^2=0.81$.
∵ $1-x>0$，∴ $1-x=0.9$，解得 $x=0.1=10\%$.
答：平均每次下调 10%.
(2) 房产销售经理的方案对购房者更优惠. 理由如下：
先下调 5%，再下调 15%，这样最后单价为 $7\,000\times(1-5\%)\times(1-15\%)=5\,652.5$（元）$<5\,670$ 元.
∴ 房产销售经理的方案对购房者更优惠一些.

4. 【解】(1) 设甲礼品的进价为 x 元/件，则乙礼品的进价为 $(x-1)$ 元/件.
根据题意得 $2x+(x-1)=11$，解得 $x=4$.
答：甲礼品的进价是 4 元/件.
(2) 设 y 与 x 之间的函数关系式为 $y=kx+b$，则
$\begin{cases}40=6k+b,\\60=5k+b,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}k=-20,\\b=160.\end{cases}$
所以 y 与 x 之间的函数关系式为 $y=-20x+160$.
(3) 设甲礼品的销售价格应定为 a 元. 根据题意得，
$(-20a+160)(a-4)=60$，解得 $a=5$ 或 $a=7$.
答：当甲礼品的销售价格定为 5 元或 7 元时，每天销售甲礼品的利润为 60 元.

5. 【解】(1) 设小明的方案中小路的宽为 x m.
花园面积为矩形面积的一半，可列方程
$(16-2x)(12-2x)=16\times12\times\frac{1}{2}$.
化简可得 $x^2-14x+24=0$.
解得 $x_1=2, x_2=12$（舍去）.
所以 $x=2$，即小路的宽为 2 m，小明的计算结果是对的.
(2) 图中非阴影部分拼合起来正好为一个半径为 x m 的整圆，此圆面积为矩形面积的一半，可列方程 $\pi x^2=16\times12\times\frac{1}{2}$.
解得 $x=\pm4\sqrt{\frac{6}{\pi}}$，所以 $x=4\sqrt{\frac{6}{\pi}}$.

6. 【解】(1) 设 P，Q 两点从出发开始到 x 秒时，四边形 $APQD$ 为矩形.
根据题意得 $16-2x=3x$，解得 $x=\frac{16}{5}$.
答：P，Q 两点从出发开始到 $\frac{16}{5}$ 秒时，四边形 $APQD$ 为矩形.
(2) 设 P，Q 两点从出发开始到 y 秒时，四边形 $PBCQ$ 的面积为 33 cm^2.
根据题意得 $\frac{1}{2}\times6(16-3x+2x)=33$，
解得 $x=5$.
答：P，Q 两点从出发开始到 5 秒时，四边形 $PBCQ$ 的面积为 33 cm^2.
(3) 过点 Q 作 $QE\perp AB$ 于点 E，如图所示.



设 P,Q 两点从出发开始到 z 秒时，点 P 和点 Q 的距离是 10 cm.
根据题意得 $(16-3x-2x)^2+6^2=10^2$，
整理得 $(16-5x)^2=8^2$，
解得 $x_1=\frac{8}{5}$，$x_2=\frac{24}{5}$.

答：P,Q 两点从出发开始到 $\frac{8}{5}$ 秒或 $\frac{24}{5}$ 秒时，点 P 和点 Q 的距离是 10 cm.

刷中考

1. C　【解析】设参加酒会的人数为 x. 根据题意得 $\frac{1}{2}x(x-1)=55$，整理得 $x^2-x-110=0$，解得 $x_1=11$，$x_2=-10$（不符合题意，舍去）. 故参加酒会的人数为 11. 故选 C.

2. 【解】(1)设 y 与 x 之间的函数关系式为 $y=kx+b$，
将 $(22.6,34.8)$，$(24,32)$ 代入 $y=kx+b$，得
$\begin{cases}22.6k+b=34.8,\\24k+b=32,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}k=-2,\\b=80,\end{cases}$
$\therefore y$ 与 x 之间的函数关系式为 $y=-2x+80$.
当 $x=23.5$ 时，$y=-2\times23.5+80=33$.
答：当天该水果的销售量为 33 千克.
(2)根据题意得 $(x-20)(-2x+80)=150$，
解得 $x_1=35$，$x_2=25$.
$\because 20\leqslant x\leqslant32$，$\therefore x=25$.
答：如果某天销售这种水果获利 150 元，那么该天水果的售价为 25 元/千克.

3. 【解】(1)设该地投入异地安置资金的年平均增长率为 x.
根据题意得 $1\,280(1+x)^2=1\,280+1\,600$，
解得 $x_1=0.5=50\%$，$x_2=-2.5$（舍去）.
答：从 2015 年到 2017 年，该地投入异地安置资金的年平均增长率为 50%.
(2)设 2017 年该地有 a 户享受到优先搬迁租房奖励.
根据题意得 $8\times1\,000\times400+5\times400(a-1\,000)\geqslant5\,000\,000$，
解得 $a\geqslant1\,900$.
答：2017 年该地至少有 1 900 户享受到优先搬迁租房奖励.

4. 【解】(1)由题意可得 $40n=12$，解得 $n=0.3$.
(2)由题意可得 $40+40(1+m)+40(1+m)^2=190$，
解得 $m_1=\frac{1}{2}$，$m_2=-\frac{7}{2}$（舍去）.
$\therefore$ 第二年用乙方案新治理的工厂数量为 $40(1+m)=40(1+50\%)=60$（家）.
(3)设第二年用乙方案治理降低了 $(40+60)n=100\times0.3=30$，
则 $(30-a)+2a=39.5$.
解得 $a=9.5$，则 $Q=30-a=20.5$.
$\therefore$ 第一年用甲方案治理降低的 Q 值为 20.5，a 的值为 9.5.

全章综合训练

刷章测

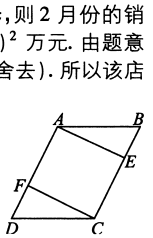
1. A　【解析】A 项满足整式方程、只含有一个未知数 x、未知数的最高次数为 2 这三个条件，是一元二次方程；B 项有两个未知数 x，y；C 项去括号化简后，未知数的最高次数为 1；D 项当 $a=0$ 时未知数的最高次数不为 2. 故选 A.

2. B　【解析】移项得 $x^2-6x=4$，配方得 $x^2-6x+9=4+9$，即 $(x-3)^2=4+9$. 故选 B.

3. C　【解析】将 m 代入方程 $x^2-x-1=0$，得 $m^2-m-1=0$，即 $m^2-m=1$，整体代入 m^2-m+5 得 $m^2-m+5=1+5=6$. 故选 C.

4. C　【解析】设该店销售额平均每月的增长率为 x，则 2 月份的销售额为 $2(1+x)$ 万元，3 月份的销售额为 $2(1+x)^2$ 万元. 由题意可知 $2(1+x)^2=4.5$，解得 $x_1=0.5$，$x_2=-2.5$（舍去）. 所以该店销售额平均每月的增长率为 50%. 故选 C.

5. D　【解析】根据题意，画图，如图所示.
设 AE 的长为 x，根据正方形的性质可得 $BE=14-x$，在 $\mathrm{Rt}\triangle ABE$ 中，根据勾股定理可得 $x^2+(14-x)^2=10^2$，化简可得 $x^2-14x+48=0$，因式分解可得 $x_1=6$，$x_2=8$. 故 AE 的长为 6 或 8，均符合题意. 故选 D.



6. $x^2+3x+2=0$　【解析】$\because$ 以 p,q 为根，且二次项系数为 1 的一元二次方程为 $(x-p)(x-q)=0$，$\therefore$ 以 -1，-2 为根，且二次项系数为 1 的一元二次方程为 $(x+1)(x+2)=0$，即 $x^2+3x+2=0$.

7. 0　【解析】把 a,b 代入 $x^2-x+\frac{2}{3}k=0$ 可得 $a^2-a+\frac{2}{3}k=0$，$b^2-b+\frac{2}{3}k=0$. 所以 $b\oplus b-a\oplus a=b(1-b)-a(1-a)=b-b^2+a^2-a=\frac{2}{3}k-\frac{2}{3}k=0$.

8. 2　【解析】因为关于 x 的方程 $x^2-4x+b=0$ 有两个相等的实数根，所以 $\Delta=(-4)^2-4b=16-4b=0$，得 $AC=b=4$. 又因为 $BC=2$，$AB=2\sqrt{3}$，所以 $BC^2+AB^2=AC^2$，由勾股定理得 $\triangle ABC$ 为直角三角形，AC 为其斜边，则 AC 边上的中线长为斜边的一半，为 2.

9. 【解】(1)移项，得 $3(2x-1)^2=27$.
化简，得 $(2x-1)^2=9$.
开方，得 $2x-1=\pm3$，$\therefore x_1=2$，$x_2=-1$.
(2)$\because a=2$，$b=-5$，$c=1$，$\therefore\Delta=25-4\times2\times1=17>0$，
$\therefore x=\frac{5\pm\sqrt{17}}{4}$. $\therefore x_1=\frac{5+\sqrt{17}}{4}$，$x_2=\frac{5-\sqrt{17}}{4}$.

10. (1)【证明】$\because\Delta=[-(k+1)]^2-4(2k-2)=k^2-6k+9=(k-3)^2\geqslant0$，$\therefore$ 方程有两个实数根.
(2)【解】$x^2-(k+1)x+2k-2=0$，
$(x-2)(x-k+1)=0$，
解得 $x_1=2$，$x_2=k-1$，
当 $k-1=3$ 时，$\triangle ABC$ 是等腰三角形，则 $k=4$；
当 $k-1=2$ 时，$\triangle ABC$ 是等腰三角形，则 $k=3$.
$\therefore k$ 的值为 4 或 3.

11. 【解】设经过 x 秒，以 P,B,Q 为顶点的三角形占矩形面积的 $\frac{1}{8}$.
根据题意得 $\frac{1}{2}\times2x\times(8-x)=12\times8\times\frac{1}{8}$，解得 $x_1=2$，$x_2=6$.
$\because\begin{cases}x\leqslant8,\\2x\leqslant12,\end{cases}$ $\therefore x\leqslant6$，$\therefore x=2$ 或 6.
答：经过 2 秒或 6 秒，以 P,B,Q 为顶点的三角形占矩形面积的 $\frac{1}{8}$.

刷中考

1. B　【解析】由题意知 $x(x-1)=380$. 故选 B.

2. C　【解析】$x^2-4x+3=0$，分解因式，得 $(x-1)(x-3)=0$. 解得 $x_1=1$，$x_2=3$. 故选 C.

3. C　【解析】$a=1$，$b=-2$，$c=-1$，$\Delta=b^2-4ac=(-2)^2-4\times1\times(-1)=8>0$，所以一元二次方程 $x^2-2x-1=0$ 有两个不相等的实数根. 故选 C.

4. B　【解析】$y^2-y-\frac{3}{4}=0$，移项，得 $y^2-y=\frac{3}{4}$. 配方，得 $y^2-y+\frac{1}{4}=1$，所以 $\left(y-\frac{1}{2}\right)^2=1$. 故选 B.

5. D　【解析】根据题意，得 $x_1+x_2=-\frac{2}{2}=-1$，$x_1x_2=-\frac{1}{2}$，因此 A、B 选项错误. $\because x_1+x_2<0$，$x_1x_2<0$，$\therefore x_1$，x_2 异号，且负数的绝对值大，因此 C 选项错误. $\because x_1$ 为一元二次方程 $2x^2+2x-1=0$ 的根，$\therefore 2x_1^2+2x_1-1=0$，$\therefore x_1^2+x_1=\frac{1}{2}$，因此 D 选项正确. 故选 D.

6. 2　【解析】设方程的另一个根为 a. 则根据根与系数的关系得 $-3a=-6$，解得 $a=2$.

7. 1 或 −3　【解析】依题意，得 $(2+x)x=3$. 整理，得 $x^2+2x=3$. 配方，得 $(x+1)^2=4$，所以 $x+1=\pm2$，所以 $x=1$ 或 $x=-3$.

8. 16　【解析】解方程 $x^2-10x+21=0$，得 $x_1=3$，$x_2=7$. $\because 3<$ 第三边的边长 <9，$\therefore$ 第三边的边长为 7. $\therefore$ 这个三角形的周长是 $3+6+7=16$.

9.【解】$x=\frac{2\pm\sqrt{(-2)^2-4\times3\times(-2)}}{2\times3}=\frac{1\pm\sqrt{7}}{3}$,

即 $x_1=\frac{1+\sqrt{7}}{3}$,$x_2=\frac{1-\sqrt{7}}{3}$.

∴ 原方程的解为 $x_1=\frac{1+\sqrt{7}}{3}$,$x_2=\frac{1-\sqrt{7}}{3}$.

10.【解】(1)根据题意得 $\Delta=(2m+1)^2-4(m^2-2)\geqslant0$,

解得 $m\geqslant-\frac{9}{4}$,

∴ m 的最小整数值为 -2.

(2)根据题意得 $x_1+x_2=-(2m+1)$,$x_1x_2=m^2-2$,

∵ $(x_1-x_2)^2+m^2=21$,

∴ $(x_1+x_2)^2-4x_1x_2+m^2=21$,

∴ $(2m+1)^2-4(m^2-2)+m^2=21$,

整理得 $m^2+4m-12=0$,解得 $m_1=2$,$m_2=-6$.

∵ $m\geqslant-\frac{9}{4}$,

∴ m 的值为 2.

11.【解】(1)设年销售量 y 与销售单价 x 的函数关系式为 $y=kx+b$ $(k\neq0)$.

将(40,600),(45,550)代入 $y=kx+b$,得

$\begin{cases}40k+b=600,\\45k+b=550,\end{cases}$解得 $\begin{cases}k=-10,\\b=1\,000.\end{cases}$

∴ 年销售量 y 与销售单价 x 的函数关系式为 $y=-10x+1\,000$.

(2)设此设备的销售单价为 x 万元/台,则每台设备的利润为 $(x-30)$ 万元,销售数量为 $(-10x+1\,000)$ 台.

根据题意,得 $(x-30)(-10x+1\,000)=10\,000$.

整理,得 $x^2-130x+4\,000=0$.

解得 $x_1=50$,$x_2=80$.

∵ 此设备的销售单价不得高于 70 万元,

∴ $x=50$.

答:该设备的销售单价应是 50 万元/台.

第二十二章　二次函数

22.1　二次函数的图象和性质

22.1.1　二次函数

刷基础

1.C 【解析】$y=3x-1$ 是一次函数,所以 A 错误;$y=ax^2+bx+c$ 中缺少 $a\neq0$ 这一条件,所以 B 错误;二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 中,a,b,c 是常数,a 必须不为 0,而 b,c 可以为任意实数,因此 $s=2t^2+1$ 是二次函数,所以 C 正确;$y=x^2+\frac{1}{x}$ 不符合二次函数的概念,所以 D 错误. 故选 C.

2.C 【解析】根据二次函数的定义,得 $m^2-2=2$,解得 $m=2$ 或 $m=-2$. 又∵ $2-m\neq0$,∴ $m\neq2$. ∴ 当 $m=-2$ 时,这个函数是二次函数. 故选 C.

3.D 【解析】∵ 函数 $y=1-3x+5x^2$ 是二次函数,∴ $a=5$,$b=-3$,$c=1$. 故选 D.

4.C 【解析】直接利用每千克利润 × 销售量 = 月销售利润,得 y 与 x 的函数解析式为 $y=(x-40)[500-10(x-50)]$. 故选 C.

5.A 【解析】花圃垂直于墙的一边长为 x m,则平行于墙的一边长为 $(24-3x)$ m,根据长方形的面积公式得 $S=(24-3x)x=24x-3x^2$. 故选 A.

6.【解】(1)当 $0\leqslant t\leqslant3$ 时,S_1 随 t 的增大而增大;

当 $3<t\leqslant6$ 时,S_1 随 t 的增大而减小.

∵ 出发时间为 t,点 P 的速度为 2 mm/s,点 Q 的速度为 4 mm/s,

∴ $PC=12-2t$,$CQ=4t$,∴ $S_1=\frac{1}{2}\times(12-2t)\times4t=-4t^2+24t$.

∵ $\begin{cases}t\geqslant0,\\12-2t\geqslant0,\\24-4t\geqslant0,\end{cases}$∴ $0\leqslant t\leqslant6$.

(2)$S_2=S_{\triangle ABC}-S_1=\frac{1}{2}\times24\times12-(-4t^2+24t)=4t^2-24t+144$.

刷易错

7.【解】(1)由 $y=(m-4)x^{m^2-m}+2x^2-3x-1$ 是关于 x 的一次函数,得 $\begin{cases}m^2-m=2,\\m-4+2=0,\end{cases}$ 解得 $m=2$.

所以当 $m=2$ 时,它是 y 关于 x 的一次函数.

(2)由 $y=(m-4)x^{m^2-m}+2x^2-3x-1$ 是关于 x 的二次函数,得

①$m-4=0$,解得 $m=4$;

②$m^2-m=1$,解得 $m=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$;

③$\begin{cases}m^2-m=2,\\m-4+2\neq0,\end{cases}$ 解得 $m=-1$;

④$m^2-m=0$,解得 $m=0$ 或 $m=1$.

综上所述,当 $m=4$ 或 $\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$ 或 -1 或 0 或 1 时,它是 y 关于 x 的二次函数.

易错警示 二次函数的一般形式 $y=ax^2+bx+c$ $(a\neq0)$ 中,二次项系数 $a\neq0$,解此类题易出现只关注满足指数的要求,而忽略对二次项系数的限制,从而导致错误.

22.1.2　二次函数 $y=ax^2$ 的图象和性质

刷基础

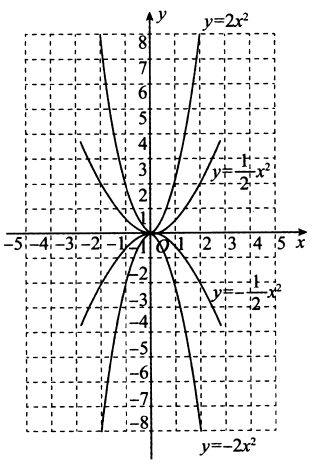
1.C 【解析】根据解析式 $y=-2x^2$ 确定出 a 的值为负数,得到抛物线开口向下,再由 $x=1$ 时,$y=-2$,确定其图象是③. 故选 C.

2.【解】列表如下:

x	…	-2	0	2	…
$y=2x^2$	…	8	0	8	…
$y=\frac{1}{2}x^2$	…	2	0	2	…
$y=-2x^2$	…	-8	0	-8	…
$y=-\frac{1}{2}x^2$	…	-2	0	-2	…

描点:将表中的数据作为点的坐标,在平面直角坐标系中描出各点.

连线:用平滑的曲线连接,如图所示:



3.B 【解析】函数 $y=x^2$ 的图象的对称轴是 y 轴,顶点是原点,开口向上,所以离原点越远,函数值就越大. 因为 $|-2|>1>0$,所以 $y_1>y_3>y_2$. 故选 B.

4.C 【解析】∵ 一条开口向上的抛物线的顶点坐标为 $(-1,2)$,

∴ 该抛物线有最小值 2. 故选 C.

5.A 【解析】根据二次函数的系数与图象的关系,可知 $a=-1<0$,开口向下,故 A 符合题意;根据对称轴的公式,可知 $x=0$,即对

称轴是 y 轴，故 B 不符合题意；根据对称性，可知在左侧，y 随 x 的增大而增大，故 C 不符合题意；这是过原点的二次函数，故 D 不符合题意. 故选 A.

6. A 【解析】∵ 二次函数 $y=ax^2$ 的对称轴为 y 轴，∴ 若图象经过点 $P(-2,4)$，则该图象必经过点 $(2,4)$. 故选 A.

7. 【解】(1) $y=-5x^2$，故抛物线的开口向下，对称轴为 y 轴，顶点是原点；

(2) $y=5x^2$，故抛物线的开口向上，对称轴为 y 轴，顶点是原点；

(3) $y=-4x^2$，故抛物线的开口向下，对称轴为 y 轴，顶点是原点；

(4) $y=4x^2$，故抛物线的开口向上，对称轴为 y 轴，顶点是原点.

8. C 【解析】当 $a>0$ 时，函数 $y=ax$ 的图象必过第一、三象限，函数 $y=ax^2$ 的图象开口向上，显然，选项 B，D 均不符合，故错误；若 $x=1$，则两个函数的函数值都应为 a，选项 A 不符合，故错误；当 $a<0$ 时，观察选项 C，若 $x=1$，则两个函数的函数值都为 a，符合题意. 故选 C.

9. 8 【解析】函数 $y=\frac{1}{3}x^2$ 与 $y=-\frac{1}{3}x^2$ 的图象关于 x 轴对称. 因为正方形的边长为 4，以正方形中心为原点建立平面直角坐标系，所以阴影部分的面积为正方形面积的一半，即 $4\times4\times\frac{1}{2}=8$.

10. 【解】(1)∵ $y=(k+2)x^{k^2+k-4}$ 是二次函数，∴ $k^2+k-4=2$，$k^2+k-6=0$，∴ $(k+3)(k-2)=0$，∴ $k=-3$ 或 $k=2$. ∵ 函数图象有最高点，∴ $k+2<0$. 当 $k=-3$ 时，$k+2=-1<0$，符合要求；当 $k=2$ 时，$k+2=4>0$，不符合要求，舍去. 故 k 的值为 -3.

(2)∵ $k=-3$，∴ 二次函数的解析式为 $y=-x^2$，∴ 顶点坐标为 $(0,0)$，对称轴是 y 轴.

22.1.3　二次函数 $y=a(x-h)^2+k$ 的图象和性质

课时 1　二次函数 $y=ax^2+k$ 的图象和性质

刷基础

1. A 【解析】A 选项，$x=1$ 时，$y=-x^2+1=0$，点 $(1,0)$ 在抛物线 $y=-x^2+1$ 上；B 选项，$x=0$ 时，$y=-x^2+1=1\neq0$，点 $(0,0)$ 不在抛物线 $y=-x^2+1$ 上；C 选项，$x=0$ 时，$y=-x^2+1=1\neq-1$，点 $(0,-1)$ 不在抛物线 $y=-x^2+1$ 上；D 选项，$x=1$ 时，$y=-x^2+1=0\neq1$，点 $(1,1)$ 不在抛物线 $y=-x^2+1$ 上. 故选 A.

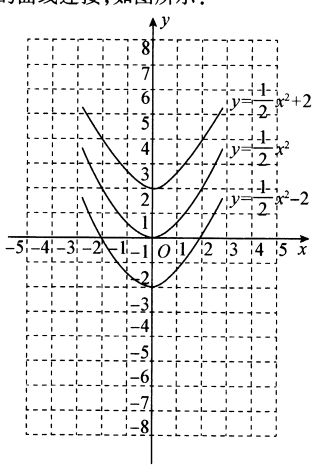
2. C 【解析】已知抛物线 $y=x^2+1$ 中，$a=1>0$，开口向上，对称轴是 y 轴，与 y 轴的交点是 $(0,1)$. 故选 C.

3. 【解】列表：

x	…	-2	0	2	…
$y=\frac{1}{2}x^2$	…	2	0	2	…
$y=\frac{1}{2}x^2+2$	…	4	2	4	…
$y=\frac{1}{2}x^2-2$	…	0	-2	0	…

描点：将表中的数据作为点的坐标，在平面直角坐标系中描出各点.

连线：用平滑的曲线连接，如图所示：



4. A 【解析】由题意可知，抛物线的开口向下，所以在对称轴的左侧，y 随着 x 的增大而增大. 故选 A.

5. B 【解析】A 选项，已知函数的图象开口向上，故函数有最小值为 2，正确；B 选项，其图象与 y 轴交于点 $(0,2)$，错误；C、D 选项，其图象的对称轴为 y 轴，开口向上，所以当 $x<0$ 时，y 随 x 的增大而减小，C、D 选项正确. 故选 B.

6. C 【解析】抛物线向下平移 1 个单位长度，相同的 x 对应的 y 的值都减小 1. 故选 C.

7. 【解】能.

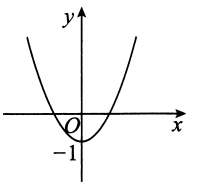
设平移后对应的函数解析式为 $y=\frac{1}{3}x^2+k$，

把 $(3,-3)$ 代入，得 $-3=\frac{1}{3}\times3^2+k$，解得 $k=-6$.

∴ 把 $y=\frac{1}{3}x^2$ 的图象向下平移 6 个单位长度，得到新函数的图象经过点 $(3,-3)$.

刷易错

8. D 【解析】如图所示，选项 A，若 $y_1=y_2$，则 $x_1=x_2$ 或 $x_1=-x_2$；选项 B，若 $x_1=-x_2$，则 $y_1=y_2$；选项 C，若 $0<x_1<x_2$，则在对称轴的右侧，y 随 x 的增大而增大，则 $y_1<y_2$；选项 D，若 $x_1<x_2<0$，则在对称轴的左侧，y 随 x 的增大而减小，则 $y_1>y_2$. 故选 D.



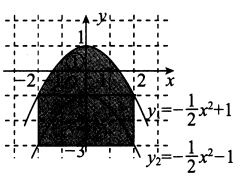
易错警示 二次的函数 $y=ax^2+k$ 的增减性与一次函数增减性不同，它以对称轴 y 轴为界讨论增减性，如果在比较函数值时，点没有在对称轴同一侧，应对称到同一侧进行比较.

刷提升

1. C 【解析】当 $a<0$ 时，二次函数的顶点在 y 轴负半轴，一次函数经过一、二、四象限；当 $a>0$ 时，二次函数的顶点在 y 轴正半轴，一次函数经过一、二、三象限. 故选 C.

2. A 【解析】如图. ∵ 两抛物线解析式的二次项系数相同，∴ 两抛物线的形状完全相同，∴ 一条抛物线可由另一条抛物线上下平移得到. 由平移性质得阴影部分①②的面积相等. ∵ $y_1-y_2=-\frac{1}{2}x^2+1-\left(-\frac{1}{2}x^2-1\right)=2$，

∴ $S_{阴影}=(y_1-y_2)\times|2-(-2)|=2\times4=8$. 故选 A.



3. 0 【解析】∵ 过点 $P(1,0)$ 作 x 轴的垂线分别交抛物线 $y=x^2+2$ 与直线 $y=-\frac{1}{2}x$ 于 A,B 两点，∴ $A(1,3)$，$B\left(1,-\frac{1}{2}\right)$，∴ $AB=\frac{7}{2}$，∴ AB 的一半为 $\frac{7}{4}$. ∵ 正方形 $ADBC$ 是以线段 AB 为对角线的正方形，∴ 点 C,D 的纵坐标为 $3-\frac{7}{4}=\frac{5}{4}$. ∵ 点 C 的横坐标为 $1-\frac{7}{4}=-\frac{3}{4}$，∴ $C\left(-\frac{3}{4},\frac{5}{4}\right)$. 设直线 AC 的解析式为 $y=kx+b$，把点 A,C 的坐标代入得 $\begin{cases}3=k+b,\\ \frac{5}{4}=-\frac{3}{4}k+b,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}k=1,\\ b=2,\end{cases}$ ∴ 直线 AC 的解析式为 $y=x+2$. 与抛物线 $y=x^2+2$ 联立得 $\begin{cases}y=x+2,\\ y=x^2+2,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x=0,\\ y=2\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x=1,\\ y=3,\end{cases}$（舍去）∴ $Q(0,2)$，∴ $a=0$.

4. 0.16 【解析】∵ 抛物线 $y=ax^2-4$ 和 $y=-ax^2+4$ 都经过 x 轴上的 A,B 两点，∴ A,B 两点的坐标分别是 $\left(\frac{2\sqrt{a}}{a},0\right)$，$\left(-\frac{2\sqrt{a}}{a},0\right)$. 又∵ 抛物线 $y=ax^2-4$ 和 $y=-ax^2+4$ 的顶点分别为 C,D. ∴ 点 C,D 的坐标分别是 $(0,-4)$，$(0,4)$. ∴ $CD=8$，$AB=\frac{4\sqrt{a}}{a}$. ∴ $S_{四边形ACBD}=S_{\triangle ABD}+S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}AB\cdot OD+\frac{1}{2}AB\cdot OC=\frac{1}{2}AB\cdot CD=\frac{1}{2}\times8\times\frac{4\sqrt{a}}{a}$. ∴ $\frac{1}{2}\times8\times\frac{4\sqrt{a}}{a}=40$，解得 $a=0.16$.

$\therefore a=0.16$.

5.【解】(1)设抛物线形桥洞的函数解析式为 $y=ax^2+c$,把 $A(3,0)$,$E(0,3)$ 代入得 $\begin{cases}9a+c=0,\\c=3,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=-\frac{1}{3},\\c=3,\end{cases}$

$\therefore y=-\frac{1}{3}x^2+3$.

由题意得点 C 与点 D 的纵坐标为 0.5,$\therefore -\frac{1}{3}x^2+3=0.5$.

解得 $x_1=\frac{\sqrt{30}}{2}$,$x_2=-\frac{\sqrt{30}}{2}$,

$\therefore CD=\frac{\sqrt{30}}{2}+\frac{\sqrt{30}}{2}=\sqrt{30}$(m),

则水面的宽度 CD 为 $\sqrt{30}$ m.

(2)这艘游船能从桥洞下通过. 理由如下:

当 $x=1$ 时,$y=\frac{8}{3}$,

$\because \frac{8}{3}-0.5>1.8$,$\therefore$ 这艘游船能从桥洞下通过.

刷素养

6.【解】(1)抛物线 $y=-\frac{1}{2}x^2+2$ 的对称轴为直线 $x=0$,即 y 轴,顶点 C 的坐标为 $(0,2)$.

(2)抛物线上不存在一点 M,使 $\triangle MAC$ 和 $\triangle OAC$ 全等. 理由如下:

对于抛物线 $y=-\frac{1}{2}x^2+2$,当 $y=0$ 时,$x=\pm 2$,

$\therefore A(2,0)$,$B(-2,0)$,$OB=2$.

由题意知 $\triangle OAC$ 和 $\triangle OBC$ 都是等腰直角三角形,$OA=OB=OC=2$,$\therefore AC=\sqrt{OA^2+OC^2}=2\sqrt{2}$,且 $BC\perp AC$.

分三种情况讨论:

①当 $\angle MAC=90°$ 时,②当 $\angle MCA=90°$ 时,均有 AC 是直角三角形 MAC 的直角边.

$\because AC\neq OA$,$\therefore$ 这两种情况下的点 M 均不存在.

③当 $\angle AMC=90°$ 时,满足 $\triangle MAC$ 和 $\triangle OAC$ 全等的点 M 一定在线段 AC 的垂直平分线上.

$\because OA=OC$,$\therefore$ 点 O 在线段 AC 的垂直平分线上.

$\because BC\perp AC$,$\therefore OM/\!/BC$.

设直线 BC 的解析式为 $y=kx+b$.

根据题意,得 $\begin{cases}b=2,\\-2k+b=0,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}k=1,\\b=2,\end{cases}$

$\therefore$ 直线 BC 的解析式为 $y=x+2$.

$\therefore$ 线段 AC 的垂直平分线 OM 的解析式为 $y=x$.

由题意,得点 M 是抛物线与直线 OM 的交点.

令 $x=-\frac{1}{2}x^2+2$,解得 $x=-1\pm\sqrt{5}$,

$\therefore M_1(-1+\sqrt{5},-1+\sqrt{5})$,$M_2(-1-\sqrt{5},-1-\sqrt{5})$.

此时 $AM\neq OA$,舍去.

综上所述,在抛物线上不存在一点 M,使 $\triangle MAC$ 和 $\triangle OAC$ 全等.

课时2　二次函数 $y=a(x-h)^2$ 的图象和性质

刷基础

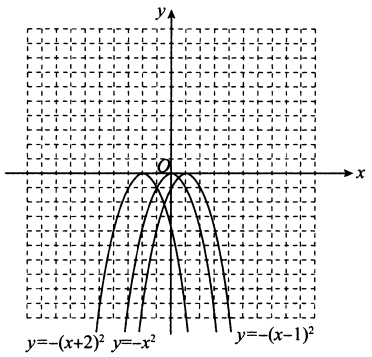
1. A　【解析】抛物线 $y=-3(x+1)^2$ 的开口向下,对称轴为直线 $x=-1$,顶点坐标为 $(-1,0)$,$\therefore$ 抛物线经过第三、四象限,不经过第一、二象限. 故选 A.

2. D　【解析】由题意得,二次函数 $y=a(x-h)^2(a\neq 0)$ 的图象是由 $y=ax^2$ 的图象通过左右平移得到的,抛物线的顶点坐标为 $(h,0)$. 故选 D.

3.【解】列表如下:

x	…	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	…
$y=-x^2$	…	-16	-9	-4	-1	0	-1	-4	-9	-16	…
$y=-(x+2)^2$	…	-4	-1	0	-1	-4	-9	-16	-25	-36	…
$y=-(x-1)^2$	…	-25	-16	-9	-4	-1	0	-1	-4	-9	…

画图如下:



4. D　【解析】A 选项,由 $a=2>0$,故其开口向上;B 选项,抛物线的对称轴是直线 $x=3$;C 选项,它的顶点坐标为 $(3,0)$;D 选项,当 $x<3$ 时,y 随 x 的增大而减小. 故选 D.

5. 5　$(-5,0)$　-5　大　0　【解析】$\because$ 抛物线 $y=-5(x+m)^2$ 的开口向下,对称轴为直线 $x=-m$. 又$\because$ 当 $x<-5$ 时,y 随 x 的增大而增大,当 $x>-5$ 时,y 随 x 的增大而减小,$\therefore$ 抛物线对称轴为直线 $x=-5$,$\therefore m=5$,$\therefore$ 抛物线的解析式为 $y=-5(x+5)^2$,$\therefore$ 抛物线的顶点坐标为 $(-5,0)$,当 $x=-5$ 时,y 取最大值,最大值为 0.

6. $y_1>y_2$　【解析】把 $P(2,y_1)$,$Q(6,y_2)$ 分别代入 $y=3(x-5)^2$ 得 $y_1=3\times(2-5)^2=27$,$y_2=3\times(6-5)^2=3$,所以 $y_1>y_2$.

7.【解】(1)$\because$ 抛物线 $y=a(x-h)^2$,当 $x=2$ 时,有最大值,

$\therefore$ 抛物线的解析式为 $y=a(x-2)^2$.

$\because$ 抛物线过点 $(1,-3)$,

$\therefore -3=a(1-2)^2$,

$\therefore a=-3$.

$\therefore$ 此抛物线的解析式 $y=-3(x-2)^2$.

(2)$\because$ 抛物线的对称轴为直线 $x=2$,且抛物线开口向下,

$\therefore$ 当 $x<2$ 时,y 随 x 的增大而增大.

$\therefore x$ 的取值范围为 $x<2$.

(3)当 $x=0$ 时,$y=-3(0-2)^2=-12$,

$\therefore$ 抛物线 $y=-3(x-2)^2$ 与 y 轴的交点坐标为 $(0,-12)$.

8. A　【解析】将抛物线 $y=x^2$ 通过平移得到抛物线 $y=(x+2)^2$,平移过程正确的是向左平移了 2 个单位长度. 故选 A.

9. $y=\frac{1}{2}(x+3)^2$　右　3　左　3　【解析】由平移规律"左加右减"可得把抛物线 $y=\frac{1}{2}x^2$ 向左平移 3 个单位长度,就得到抛物线 $y=\frac{1}{2}(x+3)^2$,抛物线 $y=\frac{1}{2}(x-3)^2$ 是由抛物线 $y=\frac{1}{2}x^2$ 向右平移 3 个单位长度得到的,抛物线 $y=\frac{1}{2}(x-1)^2$ 可以由抛物线 $y=\frac{1}{2}(x-4)^2$ 向左平移 3 个单位长度得到.

刷易错

10. $y_1>y_2>y_3$　【解析】$\because$ 二次函数 $y=(x-2)^2$ 的图象开口向上,对称轴为直线 $x=2$,$\therefore$ 当 $x<2$ 时,y 随 x 的增大而减小. 又$\because -\frac{13}{4}<-\frac{5}{4}<\frac{1}{4}<2$,$\therefore y_1>y_2>y_3$.

易错警示 在确定函数值的大小时,首先要保证所有要比较函数值的点在对称轴的同一侧,若不在对称轴的同一侧,则需通过抛物线的对称性将点统一到同一侧后再进行大小比较.

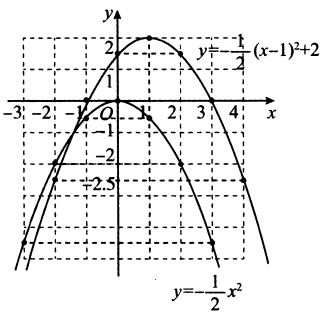
课时3　二次函数 $y=a(x-h)^2+k$ 的图象和性质

刷基础

1. D　【解析】$\because$ 二次函数 $y=(x+2)^2-1$ 中,$a=1>0$,$\therefore$ 开口向上,顶点坐标为 $(-2,-1)$. 故选 D.

2.【解】(1)

x	…	−3	−2	−1	0	1	2	3	4	…
$y=-\frac{1}{2}x^2$	…	−4.5	−2	−0.5	0	−0.5	−2	−4.5	…	…
$y=-\frac{1}{2}(x-1)^2+2$	…	…	−2.5	0	1.5	2	1.5	0	−2.5	…



(2)①下　$x=0$　(0,0)　②下　$x=1$　(1,2)

3.A 【解析】$y=2(x-3)^2+1$ 是抛物线的顶点式，根据顶点式的坐标特点可知，顶点坐标为(3,1). 故选 A.

4.D 【解析】A 选项，∵ $a=-1$，∴ 二次函数的图象的开口向下，对称轴是直线 $x=1$，故此选项错误；B 选项，当 $x=0$ 时，$y=1$，∴ 二次函数的图象与 y 轴的交点坐标为(0,1)，故此选项错误；C 选项，二次函数的图象的顶点坐标是(1,2)，故此选项错误；D 选项，在对称轴的左侧，y 随 x 的增大而增大，在对称轴的右侧，y 随 x 的增大而减小. 故此选项正确. 故选 D.

5. $-\frac{1}{4}$　【解析】函数 $y=-(x-1)^2+2$ 的图象的开口向下，对称轴为直线 $x=1$，当 $2.5\leqslant x\leqslant 5$ 时，y 随 x 的增大而减小，所以当 $x=2.5$ 时，$y_{最大}=-(2.5-1)^2+2=-\frac{1}{4}$.

6. $y_2<y_1<y_3$　【解析】方法一：∵ $y=(x-2)^2-1$ 的图象的对称轴为直线 $x=2$. ∴ 点 $A(4,y_1)$ 关于 $x=2$ 的对称点是 $(0,y_1)$.

∵ $-2<0<\sqrt{2}<2$，且 $a=1>0$，∴ $y_2<y_1<y_3$.

方法二：∵ $A(4,y_1)$，$B(\sqrt{2},y_2)$，$C(-2,y_3)$ 在抛物线 $y=(x-2)^2-1$ 上，∴ $y_1=3$，$y_2=5-4\sqrt{2}$，$y_3=15$. ∵ $5-4\sqrt{2}<3<15$，∴ $y_2<y_1<y_3$.

方法三：设 A，B，C 三点到抛物线的对称轴直线 $x=2$ 的距离分别为 d_1，d_2，d_3. ∵ $d_1=2$，$d_2=2-\sqrt{2}$，$d_3=4$，∴ $2-\sqrt{2}<2<4$，又∵ $a=1>0$，∴ $y_2<y_1<y_3$.

7.A 【解析】抛物线 $y=2x^2$ 的顶点坐标为(0,0)，∵ 先向右平移 3 个单位长度，再向下平移 5 个单位长度，∴ 平移后的顶点坐标为(3,−5)，∴ 平移后的抛物线的解析式为 $y=2(x-3)^2-5$. 故选 A.

8.C 【解析】方法一：∵ 将二次函数 $y=-2(x-1)^2-2$ 的图象先向左平移 1 个单位长度，再向上平移 1 个单位长度，所得新抛物线的解析式为 $y=-2x^2-1$，∴ 平移后的抛物线的顶点坐标为(0,−1). 故选 C.

方法二：原二次函数的图象的顶点为(1,−2)，将其先向左平移 1 个单位长度为(0,−2)，再向上平移 1 个单位长度为(0,−1). 故选 C.

9.【解】(1)由题意，得 $y=a(x-h+2)^2+k+4$ 与 $y=\frac{1}{2}(x+1)^2-1$ 是同一个函数，

∴ $a=\frac{1}{2}$，$2-h=1$，$k+4=-1$，

解得 $a=\frac{1}{2}$，$h=1$，$k=-5$.

(2)由(1)得 $y=a(x-h)^2+k$ 为 $y=\frac{1}{2}(x-1)^2-5$，

∵ $a=\frac{1}{2}>0$，∴ 函数的图象开口向上，对称轴是直线 $x=1$，顶点坐标是(1,−5).

刷提升

1.A 【解析】∵ $2>0$，∴ 其图象的开口向上，故①错误；其图象的对称轴为直线 $x=3$，故②错误；其图象的顶点坐标为(3,1)，故③错误；∵ 函数图象的对称轴为 $x=3$，$2>0$，∴ 当 $x<3$ 时，y 随 x 的增大而减小，故④正确. 综上所述，说法正确的只有④. 故选 A.

2.B 【解析】根据题意知，最小值肯定不是当 $x=h$ 时 y 的值，则 $h<1$ 或 $h>3$. ∵ 当 $x>h$ 时，y 随 x 的增大而增大，当 $x<h$ 时，y 随 x 的增大而减小，∴ ①若 $h<1$，当 $x=1$ 时，y 取得最小值 5，可得 $(1-h)^2+1=5$，解得 $h=-1$ 或 $h=3$(舍去)；②若 $h>3$，当 $x=3$ 时，y 取得最小值 5，可得 $(3-h)^2+1=5$，解得 $h=5$ 或 $h=1$(舍去). 综上，h 的值为 −1 或 5. 故选 B.

3. $y=(x-1)^2+1$　【解析】把抛物线 $y=x^2$ 沿直线 $y=x$ 平移 $\sqrt{2}$ 个单位长度，即是将抛物线向上平移 1 个单位长度后，再向右移 1 个单位长度，再根据"上加下减常数项，左加右减自变量"即可得到平移后的抛物线的解析式为 $y=(x-1)^2+1$.

4. $\frac{2+\sqrt{6}}{4}$　【解析】由题意可知，抛物线的顶点坐标为 $\left(\frac{1}{2},3\right)$，且与 y 轴的交点坐标为(0,1)，∴ 设抛物线解析式为 $y=a\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+3$，则 $1=a\left(0-\frac{1}{2}\right)^2+3$，解得 $a=-8$，∴ 抛物线的解析式为 $y=-8\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+3$. 当 $y=0$ 时，由 $0=-8\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+3$，解得 $x_1=\frac{2-\sqrt{6}}{4}$(不符合题意，舍去)，$x_2=\frac{2+\sqrt{6}}{4}$，∴ 这支喷泉最远能喷 $\frac{2+\sqrt{6}}{4}$ 米.

5.【解】(1)由图象知，点 $A(30,300)$ 在函数 $y=ax^2$ 的图象上.

把点 $A(30,300)$ 代入 $y=ax^2$，得 $300=a\cdot 30^2$，解得 $a=\frac{1}{3}$.

所以当 $0\leqslant x\leqslant 30$ 时，函数的解析式为 $y=\frac{1}{3}x^2$.

由图象知，点 $A(30,300)$，$B(90,700)$ 在函数 $y=b(x-90)^2+n$ 的图象上. 把点 $A(30,300)$，$B(90,700)$ 代入 $y=b(x-90)^2+n$，得

$\begin{cases}300=b(30-90)^2+n,\\700=b(90-90)^2+n,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}b=-\frac{1}{9},\\n=700.\end{cases}$ 所以当 $30<x\leqslant 90$ 时，

函数解析式为 $y=-\frac{1}{9}(x-90)^2+700$.

综上可知，$y=\begin{cases}\frac{1}{3}x^2,0\leqslant x\leqslant 30,\\-\frac{1}{9}(x-90)^2+700,30<x\leqslant 90.\end{cases}$

(2)将 $y=684$ 代入 $y=-\frac{1}{9}(x-90)^2+700$，得

$-\frac{1}{9}(x-90)^2+700=684$，解得 $x_1=78$，$x_2=102$(不符合题意，舍去)，所以 $90-78=12$(分钟). 又因为 10:00 − 10:30 用时 30 分钟，$\frac{684-624}{4}=15$(分钟)，所以馆外游客最多等待的时间为 $12+30+15=57$(分钟).

答：馆外游客最多等待 57 分钟.

刷素养

6.【解】(1)∵ 抛物线 $y=a(x-h)^2+k$ 的顶点坐标为 $B(1,2)$，∴ $y=a(x-1)^2+2$. ∵ 抛物线经过点 $A(0,1)$，∴ $a(0-1)^2+2=1$，∴ $a=-1$，∴ $y=-(x-1)^2+2=-x^2+2x+1$.

(2)设点 P 的坐标为 $(x,-x^2+2x+1)$. ∵ $A(0,1)$，$C(1,0)$，

∴ 由勾股定理可得

$PA^2=x^2+(-x^2+2x+1-1)^2=x^2+(x^2-2x)^2$，

$PC^2=(x-1)^2+(-x^2+2x+1)^2$，

∵ $PA=PC$，∴ $PA^2=PC^2$，

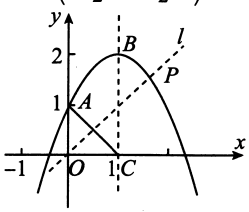
∴ $x^2+(x^2-2x)^2=(x-1)^2+(-x^2+2x+1)^2$，

解得 $x_1=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$，$x_2=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$（舍去）.

当 $x=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ 时，$y=\frac{\sqrt{5}+1}{2}$. ∴ 点 P 的坐标为 $\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2},\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)$.

(3)点 P 不是第一象限内此抛物线上与 AC 距离最远的点.

设直线 AC 的方程为 $y=kx+b$，将 $A(0,1)$，$C(1,0)$ 代入得 $\begin{cases}b=1,\\k+b=0,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}k=-1,\\b=1.\end{cases}$ ∴ 直线 AC 的方程为 $y=-x+1$.



设过抛物线上与 AC 距离最远的点且与 AC 平行的直线的解析式为 $y=-x+m$.

∵ 直线 $y=-x+m$ 过抛物线上与 AC 距离最远的点，∴ 直线 $y=-x+m$ 与抛物线有且只有一个交点，即 $-x^2+2x+1=-x+m$ 有两个相等的实数根. ∴ $x^2-3x+m-1=0$，$\Delta=9-4(m-1)=0$，解得 $m=\frac{13}{4}$. 则 $x^2-3x+\frac{13}{4}-1=0$，解得 $x_1=x_2=\frac{3}{2}$，此时 $y=\frac{7}{4}$. ∴ 第一象限内此抛物线上与 AC 距离最远的点的坐标为 $\left(\frac{3}{2},\frac{7}{4}\right)$.

22.1.4 二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图象和性质

课时 1 二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图象和性质

刷基础

1.C 【解析】∵ $a=2>0$，∴ 抛物线开口向上. ∵ 二次函数的解析式为 $y=2x^2+8x+7=2(x+2)^2-1$，∴ 顶点坐标为 $(-2,-1)$，对称轴为直线 $x=-2$. 故选 C.

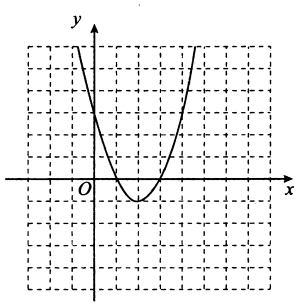
2.【解】(1)$y=x^2-4x+3=(x^2-4x+4)-4+3=(x-2)^2-1$.

∴ 抛物线的顶点式为 $y=(x-2)^2-1$.

(2)

x	…	0	1	2	3	4	…
y	…	3	0	−1	0	3	…

函数图象如图所示：



(3)根据函数图象可知，当 $0<x<3$ 时，y 的取值范围是 $-1\leqslant y<3$.

3.D 【解析】∵ 抛物线 $y=x^2-4x+4$ 的 $a=1>0$，∴ 该抛物线开口向上，故选项 A 不符合题意；$(-4)^2-4\times1\times4=0$，该抛物线与 x 轴只有一个交点，故选项 B 不符合题意；对称轴是直线 $x=-\frac{-4}{2\times1}=2$，故选项 C 不符合题意；当 $x>2$ 时，y 随 x 的增大而增大，故选项 D 符合题意. 故选 D.

4.B 【解析】∵ $x=-3$ 时的 y 值与 $x=-1$ 时的 y 值相等，∴ 二次函数图象的对称轴为直线 $x=\frac{-3-1}{2}=-2$. 故选 B.

5.D 【解析】A 选项，当 $a=1$ 时，函数解析式为 $y=x^2-2x-1$. 当 $x=-1$ 时，$y=1+2-1=2$，∴ 当 $a=1$ 时，函数图象经过点 $(-1,2)$，∴ A 选项不正确；B 选项，当 $a=-2$ 时，函数解析式为 $y=-2x^2+4x-1$. 令 $y=-2x^2+4x-1=0$，则 $\Delta=4^2-4\times(-2)\times(-1)=8>0$，∴ 当 $a=-2$ 时，函数图象与 x 轴有两个不同的交点，∴ B 选项不正确；C 选项，∵ $y=ax^2-2ax-1=a(x-1)^2-1-a(a\neq0)$，∴ 二次函数图象的顶点坐标为 $(1,-1-a)$，当 $-1-a<0$ 时，函数图象的顶点才在 x 轴的下方，此时 $a>-1$，且 $a\neq0$，∴ C 选项不正确；D 选项，∵ $y=ax^2-2ax-1=a(x-1)^2-1-a$，∴ 二次函数图象的对称轴为直线 $x=1$. 若 $a>0$，则当 $x\geqslant1$ 时，y 随 x 的增大而增大，∴ D 选项正确. 故选 D.

6.C 【解析】由图可知，$a>0$，$0<-\frac{b}{2a}<1$，$c=0$，$a+b+c<0$，所以 $2a>-b>0$，$a+b<0$，$b<0$，则 $|a+b+c|+|a-b+c|+|2a+b|=-a-b+a-b+2a+b=2a-b$. 故选 C.

刷易错

7.19 【解析】因为 $y=x^2-3x+1=\left(x-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{5}{4}$，所以当 $x\geqslant\frac{3}{2}$ 时，y 随 x 的增大而增大. 又因为 $x\geqslant6$，所以 y 存在最小值，即当 $x=6$ 时，y 取得最小值，最小值为 $6^2-3\times6+1=19$.

易错警示 在讨论函数的最值时，一定注意函数自变量的取值范围以及函数在这个取值范围内的增减性.

刷提升

1.C 【解析】A 选项，由一次函数 $y=ax+b$ 的图象可得 $a>0$，$b>0$，此时二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图象应该开口向上，对称轴 $x=-\frac{b}{2a}<0$，A 错误；

B 选项，由一次函数 $y=ax+b$ 的图象可得 $a>0$，此时二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图象应该开口向上，B 错误；

C 选项，由一次函数 $y=ax+b$ 的图象可得 $a>0$，$b<0$，此时二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图象应该开口向上，对称轴 $x=-\frac{b}{2a}>0$，C 正确.

D 选项，由一次函数 $y=ax+b$ 的图象可得 $a<0$，此时二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图象应该开口向下，D 错误. 故选 C.

2.A 【解析】令 $y=0$ 可得 $x^2-4x+3=0$，解得 $x_1=1$，$x_2=3$，可得 $A(1,0)$，$B(3,0)$. 根据抛物线顶点坐标公式可得 $M(2,-1)$. 由 M 平移后的对应点 M' 落在 x 轴上，点 B 平移后的对应点 B' 落在 y 轴上，可知抛物线先向左平移 3 个单位长度，再向上平移 1 个单位长度，根据抛物线平移规律，可知平移后的抛物线为 $y=(x+3)^2-4(x+3)+3+1=x^2+2x+1$. 故选 A.

3.D 【解析】对称轴为直线 $x=m$. ①若 $m<-1$，当 $x=-1$ 时，y 取得最小值 -2，可得 $1+2m=-2$，解得 $m=-\frac{3}{2}$；②若 $-1\leqslant m\leqslant2$，当 $x=m$ 时，y 取得最小值为 -2，可得 $-m^2=-2$，解得 $m=\sqrt{2}$ 或 $m=-\sqrt{2}$（舍去）；③若 $m>2$，当 $x=2$ 时，y 取得最小值 -2，可得 $4-4m=-2$，解得 $m=\frac{3}{2}$（舍去）. 综上，m 的值是 $-\frac{3}{2}$ 或 $\sqrt{2}$. 故选 D.

4.B 【解析】由图象可得，$a>0$，$c<0$，∴ $ac<0$，故①正确；方程 $ax^2+bx+c=0$ 的根是 $x_1=-1$，$x_2=3$，故②正确；当 $x=1$ 时，$y=a+b+c<0$，故③正确；∵ 该抛物线的对称轴是直线 $x=\frac{-1+3}{2}=1$，∴ 当 $x>1$ 时，y 随 x 的增大而增大，故④错误；$-\frac{b}{2a}=1$，得 $2a+b=0$，故⑤错误；∵ 抛物线与 x 轴有两个交点，∴ $b^2-4ac>0$，故⑥正确. 故选 B.

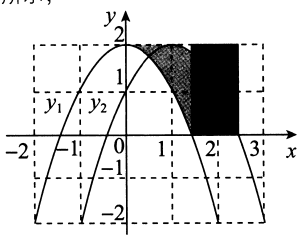
5.$y=-2(x-3)^2+13$ 【解析】$y=2x^2-12x+5=2(x-3)^2-13$，顶点坐标为 $(3,-13)$，其图象关于 x 轴对称的图象顶点坐标为 $(3,13)$，所以对称后的图象的函数解析式为 $y=-2(x-3)^2+13$.

6.$y=\frac{1}{2}(x-3)^2+5$ 【解析】将抛物线 $y=-\frac{1}{2}(x-3)^2+5$ 绕顶点旋转 180°，则顶点 $(3,5)$ 不变，对称轴不变，抛物线的开口方向改变，所以旋转后的抛物线的解析式为 $y=\frac{1}{2}(x-3)^2+5$.

7.$4\sqrt{5}+4$ 【解析】∵ 抛物线 $y=x^2-4$ 与 x 轴交于 B，C 两点，顶点为 A，∴ $B(-2,0)$，$C(2,0)$，$A(0,-4)$. ∴ $AB=AC=\sqrt{2^2+4^2}=$

$2\sqrt{5}$，$BC=4$. ∴ $\triangle ABC$ 的周长为 $AB+AC+BC=4\sqrt{5}+4$.

8. 2 【解析】如图所示，



∵ 抛物线 $y_1=-x^2+2$ 向右平移 1 个单位长度得到抛物线 y_2，
∴ 两个顶点的连线平行 x 轴，∴ 题图的阴影部分和上图中黑色部分是等底等高的，
∴ 题图中阴影部分的面积等于上图中黑色部分的面积.
而黑色部分的是一个长方形，长、宽分别为 2，1，
∴ 题图中阴影部分的面积 $S=2$.

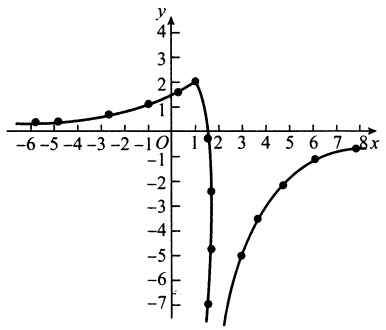
9. (1) $x=2$ 【解析】对称轴是直线 $x=-\dfrac{b}{2a}=-\dfrac{-4a}{2a}=2$.

(2) $y=x^2-4x+5$ 【解析】$a=-1$ 时，$y=-x^2+4x-5$，
对称轴是 $x=2$，顶点坐标为 $(2,-1)$，
图象沿 x 轴的翻折后，顶点为 $(2,1)$，$a=1$，
故新的抛物线解析式是 $y=(x-2)^2+1=x^2-4x+5$.
【解】(3) 由题意得顶点的横坐标为 $x=2$，所以顶点的纵坐标 $y=4a-8a-5=0$，即 $-4a-5=0$，解得 $a=-\dfrac{5}{4}$.

刷素养

10. (1) $x\neq 2$ 【解析】∵ $(x-2)^2\neq 0$，∴ $x\neq 2$.

(2)【解】连线，画出函数图象，如图所示.



(3) 1 2 【解析】观察函数图象可知，当 $x=1$ 时，y 取最大值，最大值为 2.

(4) (答案不唯一) 当 $x>2$ 时，y 值随 x 值的增大而增大.

课时 2 用待定系数法求二次函数的解析式

刷基础

1. D 【解析】设所求函数的解析式为 $y=ax^2+bx+c$. 把 $(-1,-5)$，$(0,-4)$，$(1,1)$ 分别代入，得 $\begin{cases}a-b+c=-5,\\ c=-4,\\ a+b+c=1,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=2,\\ b=3,\\ c=-4.\end{cases}$ 故所求函数的解析式为 $y=2x^2+3x-4$. 故选 D.

2. $y=-2x^2-12x-13$ 【解析】把 $(-4,3)$，$(-3,5)$，$(-2,3)$ 代入 $y=ax^2+bx+c$，得 $\begin{cases}16a-4b+c=3,\\ 9a-3b+c=5,\\ 4a-2b+c=3,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=-2,\\ b=-12,\\ c=-13.\end{cases}$ 所以所求函数的解析式为 $y=-2x^2-12x-13$.

3. $y=x^2+2x+1$ 【解析】设抛物线的解析式为 $y=ax^2+bx+c$，根据题意得 $\begin{cases}a+b+c=4,\\ 4a-2b+c=1,\\ -\dfrac{b}{2a}=-1,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=1,\\ b=2,\\ c=1,\end{cases}$ 则抛物线的解析式为 $y=x^2+2x+1$.

4. $y=x^2-2x-3$ $x=1$ $(1,-4)$ 【解析】由题图可知，抛物线 $y=x^2+bx+c$ 与 x 轴交于 $A(-1,0)$，$B(3,0)$ 两点，∴ $\begin{cases}1-b+c=0,\\ 9+3b+c=0,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}b=-2,\\ c=-3.\end{cases}$ ∴ 抛物线的解析式是 $y=x^2-2x-3$. 又∵ $y=x^2-2x-3=(x-1)^2-4$，∴ 抛物线的对称轴为直线 $x=1$，顶点坐标为 $(1,-4)$.

5. C 【解析】设抛物线的解析式为 $y=a(x+2)^2+1$. 把 $(1,-8)$ 代入得 $a\cdot(1+2)^2+1=-8$，解得 $a=-1$. 所以该抛物线的解析式为 $y=-(x+2)^2+1$. 故选 C.

6. $y=-(x-4)^2-1$ 【解析】∵ 二次函数的图象的顶点坐标为 $(4,-1)$，且它的形状、开口方向与抛物线 $y=-x^2$ 相同，∴ 这个二次函数的解析式为 $y=-(x-4)^2-1$.

7. $y=x^2-3x+2$ 【解析】∵ 二次函数在 $x=\dfrac{3}{2}$ 时，有最小值 $-\dfrac{1}{4}$，∴ 二次函数的图象的顶点是 $\left(\dfrac{3}{2},-\dfrac{1}{4}\right)$. 设此函数的解析式为 $y=a\left(x-\dfrac{3}{2}\right)^2-\dfrac{1}{4}$. ∵ 函数的图象经过点 $(0,2)$，∴ $2=a\cdot\left(0-\dfrac{3}{2}\right)^2-\dfrac{1}{4}$，解得 $a=1$，∴ 此函数的解析式为 $y=\left(x-\dfrac{3}{2}\right)^2-\dfrac{1}{4}$，即 $y=x^2-3x+2$.

8. D 【解析】由图可知抛物线开口向下，且与 x 轴的交点为 $(-1,0)$，$(2,0)$，由交点式设抛物线的解析式为 $y=a(x+1)(x-2)=a(x^2-x-2)$，对比选项可知，选项 A、B、C 无法提取公因式后得到 $y=a(x^2-x-2)$ 的形式，而 D 项中 $a=-1$. 故选 D.

9. D 【解析】根据题意得 $a=-2$，则所求函数的解析式为 $y=-2(x+1)(x-3)=-2x^2+4x+6$. 故选 D.

10. D 【解析】设抛物线的解析式为 $y=a(x-2)(x+1)$. ∵ $OC=2$，∴ C 点坐标为 $(0,2)$ 或 $(0,-2)$. ①把 $C(0,2)$ 代入 $y=a(x-2)(x+1)$ 得 $a\cdot(-2)\times 1=2$，解得 $a=-1$，此时抛物线的解析式为 $y=-(x-2)(x+1)$，即 $y=-x^2+x+2$；
②把 $C(0,-2)$ 代入 $y=a(x-2)(x+1)$ 得 $a\cdot(-2)\times 1=-2$，解得 $a=1$，此时抛物线的解析式为 $y=(x-2)(x+1)$，即 $y=x^2-x-2$.
综上，抛物线的解析式为 $y=-x^2+x+2$ 或 $y=x^2-x-2$. 故选 D.

11. $y=-\dfrac{3}{8}(x-4)(x+2)$ 【解析】设抛物线的解析式为 $y=a(x-4)(x+2)$，把 $C(0,3)$ 代入上式得 $3=a\cdot(0-4)\times(0+2)$，解得 $a=-\dfrac{3}{8}$，故 $y=-\dfrac{3}{8}(x-4)(x+2)$.

12. 【解】∵ 抛物线与 x 轴交于点 $A(-3,0)$，对称轴是直线 $x=1$，
∴ 抛物线与 x 轴的另一个交点的坐标为 $(5,0)$.
设抛物线的解析式为 $y=a(x-5)(x+3)$.
将点 $(2,5)$ 代入，得 $5=a\cdot(2-5)\times(2+3)$，解得 $a=-\dfrac{1}{3}$.
∴ 抛物线的解析式为 $y=-\dfrac{1}{3}(x-5)(x+3)$，即 $y=-\dfrac{1}{3}x^2+\dfrac{2}{3}x+5$.

刷提升

1. B 【解析】设二次函数的解析式为 $y=ax^2+bx+c$，
由于图象过 $(-1,5)$，$(1,1)$ 和 $(3,5)$ 三个点，把它们分别代入解析式得，
$\begin{cases}a\cdot(-1)^2-b+c=5,①\\ a\cdot 1^2+b+c=1,②\\ a\cdot 3^2+3b+c=5,③\end{cases}$
解由①②③组成的方程组得 $\begin{cases}a=1,\\ b=-2,\\ c=2.\end{cases}$
所以二次函数的解析式为 $y=x^2-2x+2$. 故选 B.

2. D 【解析】与抛物线 $y=-x^2+1$ 的顶点相同、形状也相同，而开口方向相反的抛物线，即与抛物线 $y=-x^2+1$ 只有二次项系数

不同，即 $y=x^2+1$. 故选 D.

3. B 【解析】A 选项，函数 $y=\frac{1}{2}(x-2)^2$ 的最小值是 0，当 $x=0$ 或 4 时，y 取最大值 2，符合；B 选项，函数 $y=x^2-4x+2=(x-2)^2-2$ 的最小值是 -2，不符合；C 选项，函数 $y=-\frac{1}{2}(x-2)^2+2$ 的最大值是 2，当 $x=0$ 和 4 时，y 取最小值 0，符合；D 选项，函数 $y=-\frac{1}{4}x^2+x+1=-\frac{1}{4}(x-2)^2+2$ 的最大值是 2，当 $x=0$ 或 4 时，y 取最小值 1，符合. 故选 B.

4. B 【解析】$\because y=2x^2-4x-1=2(x-1)^2-3$，$\therefore$ 抛物线 $y=2x^2-4x-1$ 的顶点坐标为 $(1,-3)$. $\because$ 抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 与抛物线 $y=2x^2-4x-1$ 的顶点重合，$\therefore$ 抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 的顶点坐标为 $(1,-3)$，$\therefore$ 设此抛物线为 $y=a(x-1)^2-3$. $\because$ 与 y 轴的交点坐标为 $(0,1)$，$\therefore 1=a-3$，解得 $a=4$，$\therefore$ 此抛物线为 $y=4(x-1)^2-3=4x^2-8x+1$. 故选 B.

5. $y=-(x-2)^2-3$ 【解析】$\because$ 抛物线的顶点为 $(2,-3)$，$\therefore$ 设这个二次函数的解析式 $y=a(x-2)^2-3$. $\because$ 抛物线与 y 轴交于点 $(0,-7)$，$\therefore -7=4a-3$，解得 $a=-1$. 则该抛物线的解析式为 $y=-(x-2)^2-3$.

6. （答案不唯一）$y=-x^2+4$ 【解析】因为抛物线的开口向下，则可设 $a=-1$. 又因为抛物线与 y 轴的交点坐标为 $(0,4)$，则可设顶点为 $(0,4)$，所以此抛物线的解析式为 $y=-x^2+4$.

7. $y=-\frac{1}{6}x^2+\frac{5}{6}x+4$ 【解析】$\because$ 抛物线 $y=ax^2+bx+4$ 与 y 轴交于点 C，$\therefore C(0,4)$，$\therefore OC=4$. $\because A(-3,0)$，$\therefore OA=3$，$\therefore AC=5$. $\because AB$ 平分 $\angle CAO$，$\therefore \angle BAC=\angle BAO$. $\because BC\parallel x$ 轴，$\therefore \angle CBA=\angle BAO$，$\therefore \angle BAC=\angle CBA$，$\therefore CB=CA=5$，$\therefore B(5,4)$. 把 $A(-3,0)$，$B(5,4)$ 代入 $y=ax^2+bx+4$，得 $\begin{cases}9a-3b+4=0,\\25a+5b+4=4,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=-\frac{1}{6},\\b=\frac{5}{6},\end{cases}$ $\therefore$ 抛物线的解析式为 $y=-\frac{1}{6}x^2+\frac{5}{6}x+4$.

8. $y_{2n}=-(x-2n)^2+1$ 【解析】由 $A_1(0,1)$，$A_2(1,0)$，$A_3(2,1)$，$A_4(3,0)$，$A_5(4,1)$，$A_6(5,0)$，…可知：

C_1 的对称轴为直线 $x=1$，C_2 的对称轴为直线 $x=2$，C_3 对称轴为直线 $x=3$，C_4 对称轴为直线 $x=4$，…，

根据顶点式求出 C_1 的解析式为 $y_1=(x-1)^2$，

C_2 的解析式为 $y_2=-(x-2)^2+1$，

C_3 的解析式为 $y_3=(x-3)^2$，

C_4 的解析式为 $y_4=-(x-4)^2+1$，

……

$\therefore$ 抛物线 C_{2n} 的解析式为 $y_{2n}=-(x-2n)^2+1$.

9. 【解】(1)将点 $(1,-2)$，$(2,-3)$ 代入解析式，得 $\begin{cases}1+b+c=-2,\\4+2b+c=-3,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}b=-4,\\c=1,\end{cases}$

$\therefore$ 这条抛物线的解析式为 $y=x^2-4x+1$.

(2)由题意可得 $\begin{cases}y=x^2-4x+1,\\x+y=0,\end{cases}$

解得 $\begin{cases}x=\frac{3+\sqrt{5}}{2},\\y=-\frac{3+\sqrt{5}}{2},\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x=\frac{3-\sqrt{5}}{2},\\y=\frac{\sqrt{5}-3}{2},\end{cases}$

$\therefore$ 点 P 的坐标为 $\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2},-\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)$ 或 $\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2},\frac{\sqrt{5}-3}{2}\right)$.

刷素养

10. 【解】(1)由题意得 $\begin{cases}4a+2b=1,\\|a+b|=1,\end{cases}$

解得 $\begin{cases}a=-\frac{1}{2},\\b=\frac{3}{2},\end{cases}$ 或 $\begin{cases}a=\frac{3}{2},\\b=-\frac{5}{2},\end{cases}$

$\therefore$ 此二次函数的解析式为 $y=-\frac{1}{2}x^2+\frac{3}{2}x$ 或 $y=\frac{3}{2}x^2-\frac{5}{2}x$.

(2)①由 $\begin{cases}y=x,\\y=\frac{3}{2}x^2-\frac{5}{2}x,\end{cases}$

解得 $\begin{cases}x=0,\\y=0\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x=\frac{7}{3},\\y=\frac{7}{3},\end{cases}$

$\therefore A\left(\frac{7}{3},\frac{7}{3}\right)$，

$\therefore m=\frac{7}{3}$.

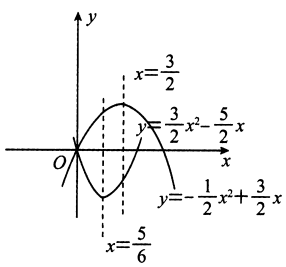
②由 $\begin{cases}y=-x,\\y=\frac{3}{2}x^2-\frac{5}{2}x,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x=0,\\y=0\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x=1,\\y=-1,\end{cases}$

$\therefore A'(1,-1)$，

$\therefore m=1$.

综上所述，$m=1$ 或 $\frac{7}{3}$.

(3)观察图象可知，对 $y=-\frac{1}{2}x^2+\frac{3}{2}x$，当 $x\leqslant\frac{3}{2}$ 时，y 随 x 的增大而增大；对 $y=\frac{3}{2}x^2-\frac{5}{2}x$，当 $x\geqslant\frac{5}{6}$ 时，y 随 x 的增大而增大，



$\therefore t_1$ 的最小值为 $\frac{5}{6}$，t_2 的最大值为 $\frac{3}{2}$.

22.1 综合训练

刷综合

1. C 【解析】把 $(-1,2)$ 代入 $y=a(x-2)^2$，解得 $a=\frac{2}{9}$，$\therefore$ 抛物线的解析式为 $y=\frac{2}{9}(x-2)^2$. 令 $y=2$，即 $\frac{2}{9}(x-2)^2=2$，解得 $x_1=-1$，$x_2=5$，$\therefore$ 另一个交点的坐标为 $(5,2)$. 故选 C.

2. A 【解析】$\because$ 抛物线 $y=-(x+1)^2+1$ 的对称轴是直线 $x=-1$，$\therefore$ 点 A 关于对称轴对称的点是 $A'(0,y_1)$. $\because$ 点 A'，B，C 都在对称轴的右侧，且在对称轴右侧，y 随 x 的增大而减小，$\therefore y_1>y_2>y_3$. 故选 A.

3. D 【解析】从表格中得知，当 $x=-3$ 和 $x=-2$ 时，$y=-2$，$\therefore$ 抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 的对称轴为直线 $x=-\frac{5}{2}$. 故选 D.

4. C 【解析】根据二次函数的图象与性质判断抛物线 $y=-x^2+m$ 开口向下，所以 B 错误，A、C、D 三个选项中顶点均在 y 轴的正半轴，说明 $m>0$，所以可判断一次函数 $y=mx-1$ 的图象过一、三、四象限. 故选 C.

5. C 【解析】$\because y=\left(x-\frac{1}{m}\right)(mx-4m)=mx^2-(4m+1)x+4$（其中 $m>0$），$\therefore$ 抛物线的对称轴为直线 $x=-\frac{b}{2a}=-\frac{-(4m+1)}{2m}=2+\frac{1}{2m}$. $\because m>0$，$\therefore$ 抛物线开口向上，$\therefore$ 当 $x\leqslant 2+\frac{1}{2m}$ 时，y 随着 x 的增大而减小. 故选 C.

6. C 【解析】二次函数 $y=x^2+bx+1$ 的图象与 y 轴的交点为 $(0,1)$，对称轴为 $x=-\frac{b}{2}$. 因为点 C 的坐标是 $(2,1)$，所以当

$-\frac{b}{2}\leqslant 1$ 时，二次函数 $y=x^2+bx+1$ 的图象与阴影部分（含边界）一定有公共点，所以 $b\geqslant -2$．故选 C.

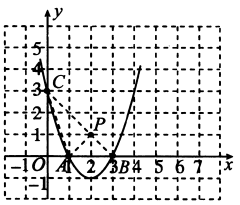
7. $y=\frac{3}{4}(x+2)^2+1$　【解析】设抛物线所对应的二次函数的解析式为 $y=a(x+2)^2+1$．把 $(0,4)$ 代入得 $4=4a+1$，解得 $a=\frac{3}{4}$．

故抛物线所对应的二次函数的解析式为 $y=\frac{3}{4}(x+2)^2+1$.

8.【解】(1)将点 A,C 的坐标代入二次函数的解析式，得 $\begin{cases}1+b+c=0,\\c=3,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}b=-4,\\c=3.\end{cases}$

(2)由(1)知二次函数的解析式为 $y=x^2-4x+3=(x-2)^2-1$．所以二次函数图象的顶点坐标为 $(2,-1)$，对称轴是直线 $x=2$.

(3)如图.



点 A 关于对称轴对称的点为 $B(3,0)$，则 $PA=PB$．则当 P 为直线 BC 与对称轴的交点时，$\triangle ACP$ 的周长最短，此时 P 的坐标为 $(2,1)$.

9.【解】(1)∵ 点 $A(-1,0)$ 在二次函数 $y=x^2+4x+4+m$ 的图象上，∴ $m=-1$，∴ 二次函数的解析式为 $y=x^2+4x+3$．∴ 点 C 的坐标为 $(0,3)$，则点 B 的坐标为 $(-4,3)$．将点 A,B 的坐标代入 $y=kx+b$，得 $\begin{cases}-k+b=0,\\-4k+b=3,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}k=-1,\\b=-1.\end{cases}$

∴ 一次函数的解析式为 $y=-x-1$.

故二次函数的解析式为 $y=x^2+4x+3$，一次函数的解析式为 $y=-x-1$.

(2)∵ 直线 PC 将 $\triangle ABC$ 分成面积比为 1∶2 的两部分，

$A(-1,0),B(-4,3)$，点 P 的横坐标为 -2，

∴ 当 CP 与直线 AB 相交，交点为线段 AB 的三等分点 F（靠近点 A）时，点 F 的坐标为 $(-2,1)$，即点 P.

当 CP 与直线 AB 相交，交点为线段 AB 的三等分点 F'（靠近点 B）时，点 F' 的坐标为 $(-3,2)$.

设直线 CF' 为 $y=mx+n$，则 $\begin{cases}n=3,\\-3m+n=2,\end{cases}$ 得 $\begin{cases}m=\frac{1}{3},\\n=3.\end{cases}$

故直线 CF' 为 $y=\frac{1}{3}x+3$.

当 $x=-2$ 时，$y=\frac{1}{3}\times(-2)+3=\frac{7}{3}$，即此时点 P 的坐标为 $\left(-2,\frac{7}{3}\right)$.

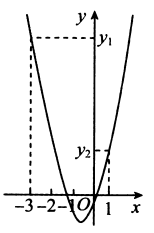
综上，点 P 的坐标为 $(-2,1)$ 或 $\left(-2,\frac{7}{3}\right)$.

刷中考

1. B　【解析】$y=x^2-8x-9=x^2-8x+16-25=(x-4)^2-25$．故选 B.

2. A　【解析】将抛物线 $y=-5x^2+1$ 先向左平移 1 个单位长度，得到 $y=-5(x+1)^2+1$，再向下平移 2 个单位长度，所得到的抛物线为 $y=-5(x+1)^2-1$．故选 A.

3. B　【解析】观察图象知抛物线开口向上，所以 $a>0$，对称轴在 x 轴负半轴，所以 a,b 同号，所以 $b>0$，抛物线与 y 轴交于负半轴，所以 $c<0$，所以 $abc<0$，故①正确；因为对称轴位于 0 和 -1 之间，所以 $-\frac{b}{2a}>-1$，所以 $\frac{b}{2a}<1$，$b<2a$，$2a-b>0$，故②错误；当 $x=1$ 时，$a+b+c>0$，当 $x=-1$ 时，$a-b+c<0$，$(b+a+c)(b-a-c)=b^2-(a+c)^2>0$，故③正确；如图，显然 $y_1>y_2$，故④正确．所以正确的结论有 3 个．故选 B.



4. ②③　【解析】当 $x>2$ 时，$y_1<y_2$，∴ $M=y_1$，所以①错误；当 $x<0$ 时，图象在第三象限，y 随 x 的增大而增大，所以②正确；因为交点坐标是 $(2,4)$，所以使得 M 大于 4 的 x 的值不存在，所以③正确；若 $M=2$，有两种情况：当 $x<2$ 时，$M=y_2=2$，解得 $x=1$；当 $x>2$ 时，$M=y_1=2$，解得 $x=2+\sqrt{2}$，所以④错误.

5.【解】(1)由题意知 $(1+a)(1-a-1)=-2$，即 $a(a+1)=2$.

∵ $y_1=x^2-x-a(a+1)$，∴ $y_1=x^2-x-2$.

(2)由题意知，函数 y_1 的图象与 x 轴交于点 $(-a,0)$ 和 $(a+1,0)$．当 y_2 的图象过点 $(-a,0)$ 时，$a^2-b=0$；当 y_2 的图象过点 $(a+1,0)$ 时，$a^2+a+b=0$.

(3)由题意知，函数 y_1 的图象的对称轴为直线 $x=\frac{1}{2}$，

∴ 点 $Q(1,n)$ 与 $(0,n)$ 关于直线 $x=\frac{1}{2}$ 对称.

∵ 函数 y_1 的图象开口向上，∴ 当 $m<n$ 时，$0<x_0<1$.

6.【解】(1)∵ 直线 $y=4x+4$ 与 x 轴、y 轴交于点 A,B.

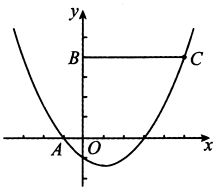
∴ $A(-1,0),B(0,4)$，∴ $C(5,4)$.

(2)抛物线 $y=ax^2+bx-3a$ 过点 $A(-1,0)$，

∴ $a-b-3a=0$，即 $b=-2a$，

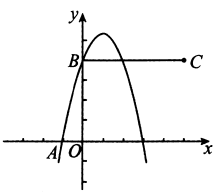
∴ $y=ax^2-2ax-3a$，∴ 对称轴为直线 $x=-\frac{-2a}{2a}=1$.

(3)①当抛物线过点 C 时，



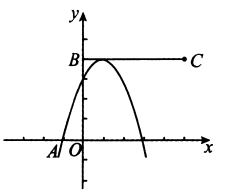
$25a-10a-3a=4$，解得 $a=\frac{1}{3}$.

②当抛物线过点 B 时，



$-3a=4$，解得 $a=-\frac{4}{3}$.

③当抛物线顶点在 BC 上时，



此时顶点为 $(1,4)$，∴ $a-2a-3a=4$，解得 $a=-1$.

∴ 综上所述，$a<-\frac{4}{3}$ 或 $a\geqslant\frac{1}{3}$ 或 $a=-1$.

22.2　二次函数与一元二次方程

刷基础

1. C　【解析】$\Delta=b^2-4ac=(-2\sqrt{2})^2-4\times2\times1=0$，因此抛物线与 x 轴只有一个交点；$c=1$，因此抛物线与 y 轴相交于 $(0,1)$．综上，抛物线与坐标轴有 2 个交点．故选 C.

2. A　【解析】$\Delta=2^2-4(m-1)=8-4m>0$，解得 $m<2$．故选 A.

3. $\frac{7}{2}$　【解析】因为方程 $2x^2-3x-5=0$ 的两根为 $\frac{5}{2}$，-1，所以抛物线 $y=2x^2-3x-5$ 与 x 轴两个交点的横坐标分别为 $\frac{5}{2}$，-1，所以两交点之间的距离为 $\left|\frac{5}{2}-(-1)\right|=\frac{7}{2}$.

4. $(-1,0),(3,0)$ 【解析】当 $y=0$ 时，$x^2-2x-3=0$，解得 $x_1=-1$，$x_2=3$，所以抛物线 $y=x^2-2x-3$ 与 x 轴的交点 A，B 的坐标分别为 $(-1,0)$，$(3,0)$.

5. **B** 【解析】方法一：二次函数图象与 x 轴的一个交点为 $(1,0)$，可得 $0=1^2-3+m$，解得 $m=2$. ∴ 一元二次方程为 $x^2-3x+2=0$，即 $(x-1)(x-2)=0$，解得 $x_1=1$，$x_2=2$. 故选 B.

方法二：∵ 二次函数图象与 x 轴的交点横坐标即为对应一元二次方程的实数根，二次函数图象的对称轴是直线 $x=\frac{3}{2}$，∴ 二次函数的图象与 x 轴的另一个交点为 $(2,0)$，∴ 关于 x 的一元二次方程 $x^2-3x+m=0$ 的两实数根是 $x_1=1$，$x_2=2$. 故选 B.

6. **D** 【解析】因为二次函数 $y=x^2+mx$ 图象的对称轴是直线 $x=3$，所以 $\frac{-m}{2}=3$，解得 $m=-6$. 关于 x 的方程 $x^2+mx=7$，即 $x^2-6x-7=0$，解得 $x_1=-1$，$x_2=7$. 故选 D.

7. -1 【解析】由图可知，对称轴为直线 $x=1$，二次函数图象的与 x 轴的一个交点为 $(3,0)$，根据二次函数图象的对称性知，二次函数的图象与 x 轴的另一个交点为 $(-1,0)$，所以一元二次方程 $-x^2+2x+k=0$ 的另一个解 $x_2=-1$.

8. **C** 【解析】观察表格中的数据，得到当 $x=3.4$ 时，函数值 $y=ax^2+bx+c=-0.2<0$；当 $x=3.5$ 时，函数值 $y=ax^2+bx+c=0.3>0$. ∴ 当 $3.4<x<3.5$ 时，$y=ax^2+bx+c$ 的函数值有可能为 0，∴ 一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$（$a\neq0$，a，b，c 为常数）一个解的范围为 $3.4<x<3.5$. 故选 C.

9. **D** 【解析】从抛物线图象看，函数的对称轴为直线 $x=1$，与 x 轴一个交点是 $(-1,0)$，则另外一个交点为 $(3,0)$，从图象看，当 $-1<x<3$ 时，$y>0$. 故选 D.

10. **D** 【解析】由图可知，二次函数图象过点 $(-1,1)$ 和 $(3,1)$，且图象开口向下，∴ 当 $x\leqslant-1$ 或 $x\geqslant3$ 时，$y\leqslant1$. 故选 D.

11. 【解】(1)∵ 方程 $ax^2+bx+c=0$ 的根是二次函数 $y=ax^2+bx+c$（$a\neq0$）的图象与 x 轴交点的横坐标，

∴ 方程 $ax^2+bx+c=0$ 的根为 $x_1=-3$，$x_2=1$.

(2)∵ 不等式 $ax^2+bx+c>0$ 的解集是抛物线在 x 轴上方的图象对应的 x 的取值范围，

∴ 不等式 $ax^2+bx+c>0$ 的解集为 $x<-3$ 或 $x>1$.

(3)∵ 方程 $ax^2+bx+c=k$ 有实数根，∴ 抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 与直线 $y=k$ 有交点，由函数图象知 $k\geqslant-3$.

刷易错

12. $a\geqslant-1$ 且 $a\neq0$ 【解析】∵ 抛物线 $y=ax^2+2x-1$ 与 x 轴有交点，∴ $b^2-4ac\geqslant0$ 且 $a\neq0$，即 $2^2-4a\cdot(-1)\geqslant0$ 且 $a\neq0$，∴ $a\geqslant-1$ 且 $a\neq0$.

易错警示 若题干未说明“抛物线”，不要忽略 $a=0$ 时 $y=2x-1$ 与 x 轴也有 1 个交点. 同样，说明“抛物线”，则不要忽略二次项系数 $a\neq0$.

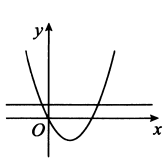
刷提升

1. **A** 【解析】方法一：由二次函数 $y=ax^2+1$ 的图象经过点 $(-2,0)$ 得 $4a+1=0$，解得 $a=-\frac{1}{4}$，则方程为 $-\frac{1}{4}(x-2)^2+1=0$，解方程得 $x_1=0$，$x_2=4$.

方法二：二次函数 $y=ax^2+1$ 的图象经过点 $(-2,0)$ 后，则图象与 x 轴的另一个交点为 $(2,0)$. 因为将其向右平移 2 个单位长度后得到 $y=a(x-2)^2+1$ 的图象，所以将 $(-2,0)$，$(2,0)$ 向右平移 2 个单位长度可得 $y=a(x-2)^2+1$ 与 x 轴的交点 $(0,0)$，$(4,0)$，即可得方程 $a(x-2)^2+1=0$ 的实数根为 $x_1=0$，$x_2=4$. 故选 A.

2. **A** 【解析】由题意知 $y=ax^2+bx+c$ 的图象与 x 轴有两个交点，顶点的纵坐标是 -3. ∵ $ax^2+bx+c+2=0$，∴ $ax^2+bx+c=-2$. ∴ 方程的解为 $y=-2$ 时，x 的值. 由图象可知，方程有两个同号不相等的实数根. 故选 A.

3. **C** 【解析】二次函数 $y=x^2+bx$ 图象的对称轴为直线 $x=1$，∴ $-\frac{b}{2}=1$，解得 $b=-2$.



∵ $x^2+bx-t=0$，∴ $x^2-2x=t$. ∵ 方程 $x^2-2x-t=0$（t 为实数）在 $-1<x<4$ 的范围内有解，∴ 原问题可以转化为抛物线 $y=x^2-2x$ 和直线 $y=t$ 在 $-1<x<4$ 内有交点. 当交点横坐标为 -1 时，可得 $t=(-1)^2-2\times(-1)=3$；当交点横坐标为 4 时，可得 $t=4^2-2\times4=8$. ∵ 函数 $y=x^2-2x=(x-1)^2-1$，∴ 当 $x=1$ 时，二次函数有最小值 -1. 故 t 的取值范围为 $-1\leqslant t<8$. 故选 C.

4. **B** 【解析】①∵ 抛物线 $y=x^2+bx+c$ 与 x 轴没有交点，∴ $\Delta=b^2-4c<0$. ①不正确；②∵ 函数 $y=x^2+bx+c$ 的图象经过点 $(1,1)$，∴ $1=1^2+b+c$，∴ $b+c=0$. ②正确；③抛物线 $y=x^2+bx+c$ 的对称轴在 y 轴右侧，∴ $-\frac{b}{2}>0$，∴ $b<0$. ③正确；④∵ 函数 $y=x^2+bx+c$ 与函数 $y=x$ 的图象交于点 $(1,1)$，$(3,3)$，∴ 方程组 $\begin{cases}y=x^2+bx+c,\\y=x\end{cases}$ 的解为 $\begin{cases}x_1=1,\\y_1=1,\end{cases}$ $\begin{cases}x_2=3,\\y_2=3.\end{cases}$ ④正确；⑤由图象知，当 $1<x<3$ 时，$x^2+bx+c<x$，即 $x^2+(b-1)x+c<0$. ⑤不正确.

5. $x<-1$ 或 $x>4$ 【解析】由函数图象可知，在点 A 的左侧和点 B 的右侧，一次函数的函数值都大于二次函数的函数值. ∵ $A(-1,p)$，$B(4,q)$，∴ 关于 x 的不等式 $mx+n>ax^2+bx+c$ 的解集是 $x<-1$ 或 $x>4$.

6. $a>3$ 【解析】设 $y=ax^2+2x-5$. 由题意知，此函数为二次函数. 当 $x=0$ 时，$y=0+0-5=-5$；当 $x=1$ 时，$y=a+2-5=a-3$. 因为关于 x 的一元二次方程 $ax^2+2x-5=0$ 的两根中有且仅有一根在 0 和 1 之间（不含 0 和 1），所以当 $x=1$ 时，函数图象必在 x 轴的上方，即 $y=a-3>0$，解得 $a>3$.

7. 【解】(1)∵ 抛物线 $y=x^2+bx+c$ 经过点 $A(-3,0)$，$D(-2,-3)$，∴ $\begin{cases}9-3b+c=0,\\4-2b+c=-3,\end{cases}$

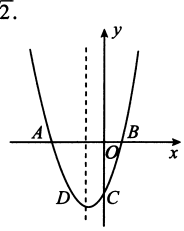
解得 $\begin{cases}b=2,\\c=-3,\end{cases}$

∴ 抛物线的解析式为 $y=x^2+2x-3$.

(2)由(1)得抛物线 $y=x^2+2x-3$ 的对称轴为直线 $x=-1$，$C(0,-3)$.

∵ $D(-2,-3)$，∴ C，D 关于抛物线的对称轴对称. 连接 AC，可知，当点 P 为直线 AC 与对称轴的交点时，$PA+PD$ 取得最小值，最小值为 $AC=\sqrt{OA^2+OC^2}=\sqrt{3^2+3^2}=3\sqrt{2}$.

(3)设点 $Q(m,m^2+2m-3)$.



令 $y=x^2+2x-3=0$，

得 $x=-3$ 或 1，

∴ 点 B 的坐标为 $(1,0)$，

∴ $AB=4$. ∵ $S_{\triangle QAB}=6$，

∴ $\frac{1}{2}\times4\times|m^2+2m-3|=6$，

∴ $m^2+2m-6=0$，或 $m^2+2m=0$.

解得 $m=-1+\sqrt{7}$ 或 $-1-\sqrt{7}$ 或 0 或 -2.

∴ 点 Q 的坐标为 $(0,-3)$ 或 $(-2,-3)$ 或 $(-1+\sqrt{7},3)$ 或 $(-1-\sqrt{7},3)$.

刷素养

8. (1)【证明】当 $k=0$ 时，方程为 $x+2=0$，解得 $x=-2$，方程有实数根.

当 $k\neq0$ 时，$(2k+1)^2-4k\times2=(2k-1)^2\geqslant0$，即 $\Delta\geqslant0$，∴ 方程有实数根.

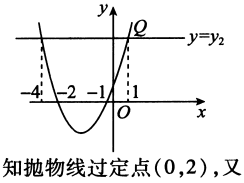
综上，无论 k 取任何实数时，方程总有实数根.

【解】(2)令 $y=0$，则 $kx^2+(2k+1)x+2=0$.

解关于 x 的一元二次方程，得 $x_1=-2$，$x_2=-\frac{1}{k}$.

∵ 抛物线 $y=kx^2+(2k+1)x+2$ 与 x 轴两个交点的横坐标均为整数，且 k 为正整数，∴ $k=1$.

∴ 该抛物线解析式为 $y=x^2+3x+2$. 由题意作出函数图象，如图. 由图象得当 $y_1>y_2$ 时，$a>1$ 或 $a<-4$，∴ 实数 a 的取值范围是 $a<-4$ 或 $a>1$.



(3)方法一：由题易知抛物线过定点 $(0,2)$，又由(2)知抛物线过

定点$(-2,0)$,∴抛物线恒过定点$(0,2)$,$(-2,0)$.

方法二:依题意得$kx^2+(2k+1)x+2-y=0$恒成立,即$k(x^2+2x)+x-y+2=0$恒成立,

则$\begin{cases}x^2+2x=0,\\x-y+2=0,\end{cases}$

解得$\begin{cases}x=0,\\y=2\end{cases}$或$\begin{cases}x=-2,\\y=0.\end{cases}$

∴该抛物线恒过定点$(0,2)$,$(-2,0)$.

专题　二次函数的综合

刷难关

1.A 【解析】由$-x^2+4x=2x$,解得$x_1=0$,$x_2=2$,∴抛物线$y_1=-x^2+4x$和直线$y_2=2x$的两个交点的坐标分别为$(0,0)$,$(2,4)$,结合图象可知,当$y_1>y_2$时,x的取值范围是$0<x<2$.故选A.

2.D 【解析】由二次函数的图象可知,$a<0$,$b<0$,当$x=-1$时,$y=a-b<0$,∴$y=(a-b)x+b$的图象在第二、三、四象限.故选D.

3.【解】(1)设直线AB的解析式为$y=kx+b$,把$A(3,0)$,$B(0,3)$代入,得$\begin{cases}3k+b=0,\\b=3,\end{cases}$解得$\begin{cases}k=-1,\\b=3,\end{cases}$∴直线$AB$的解析式为$y=-x+3$,

解方程组$\begin{cases}y=x^2+1,\\y=-x+3,\end{cases}$得$C(1,2)$,∴$\triangle AOC$的面积为$\frac{1}{2}\times3\times2=3$.

(2)由顶点坐标公式得$D(0,1)$,∴$S_{\triangle ABD}=\frac{1}{2}\times2\times3=3$.

4.B 【解析】当$x>0$时,$y=x+k$,$y=x^2$,则$x^2-x-k=0$,$\Delta=b^2-4ac=1+4k>0$且$-k>0$,解得$-\frac{1}{4}<k<0$;当$x<0$时,$y=-x+k$,$y=x^2$,则$x^2+x-k=0$,$\Delta=b^2-4ac=1+4k>0$且$-k>0$,解得$-\frac{1}{4}<k<0$.故k的取值范围是$-\frac{1}{4}<k<0$.故选B.

5.C 【解析】当抛物线顶点平移到点M时,已知x_1的最小值为-3,则设此时抛物线的解析式为$y=a(x+1)^2+2$.把$(-3,0)$代入得$a=-\frac{1}{2}$.当抛物线顶点平移到N时,抛物线的解析式为$y=-\frac{1}{2}(x-1)^2+2$.当$y=0$时,解得抛物线与x轴的交点坐标为$(3,0)$或$(-1,0)$,则x_2的最大值为3.故选C.

6.D 【解析】设点A,B的横坐标为a,则点A的纵坐标为a^2,点B的纵坐标为$\frac{a^2}{4}$.

∵$BE\parallel x$轴,∴点F的纵坐标为$\frac{a^2}{4}$.

∵点F是抛物线$y=x^2$上的点,∴点F的横坐标为$x=\sqrt{y}=\frac{1}{2}a$.

∵$CD\parallel x$轴,∴点D的纵坐标为a^2.∵点D是抛物线$y=\frac{x^2}{4}$上的点,∴点D的横坐标为$x=\sqrt{4y}=2a$.

∴$AD=a$,$BF=\frac{1}{2}a$,$CE=\frac{3}{4}a^2$,$OE=\frac{1}{4}a^2$.

∴$\frac{S_{\triangle OFB}}{S_{\triangle EAD}}=\frac{\frac{1}{2}BF\cdot OE}{\frac{1}{2}AD\cdot CE}=\frac{\frac{1}{8}}{\frac{3}{4}}=\frac{1}{6}$.故选D.

7.【解】(1)$\left(0,\frac{1}{2}\right)$

(2)点P在抛物线上.理由如下:

∵点B的坐标为$\left(0,\frac{1}{2}\right)$,∴设直线$BC$的解析式为$y=kx+\frac{1}{2}$.

令$y=0$,得$kx+\frac{1}{2}=0$,解得$x=-\frac{1}{2k}$,∴$OC=-\frac{1}{2k}$.

∵$PB=PC$,∴点P只能在x轴上方.

过点B作$BD\perp l$于点D,设$PB=PC=m$,则$BD=OC=-\frac{1}{2k}$,

$CD=OB=\frac{1}{2}$.∴$PD=PC-CD=m-\frac{1}{2}$.

在$\mathrm{Rt}\triangle PBD$中,由勾股定理可得$PB^2=PD^2+BD^2$,

即$m^2=\left(m-\frac{1}{2}\right)^2+\left(-\frac{1}{2k}\right)^2$,解得$m=\frac{1}{4}+\frac{1}{4k^2}$,

∴$PC=PB=\frac{1}{4}+\frac{1}{4k^2}$.

∴点P的坐标为$\left(-\frac{1}{2k},\frac{1}{4}+\frac{1}{4k^2}\right)$.当$x=-\frac{1}{2k}$时,$y=x^2+\frac{1}{4}=\frac{1}{4}+\frac{1}{4k^2}$,∴点$P$在抛物线上.

8.【解】(1)根据已知条件可设抛物线的解析式为$y=a(x-1)(x-5)$.

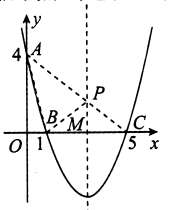
把点$A(0,4)$代入上式,解得$a=\frac{4}{5}$.

∴$y=\frac{4}{5}(x-1)(x-5)=\frac{4}{5}x^2-\frac{24}{5}x+4=\frac{4}{5}(x-3)^2-\frac{16}{5}$,

∴抛物线的对称轴是直线$x=3$.

(2)存在,点P的坐标为$\left(3,\frac{8}{5}\right)$.

如图,连接AC交对称轴于点P,连接BP,AB.



∵点B与点C关于对称轴对称,∴$PB=PC$,∴$AB+AP+PB=AB+AP+PC=AB+AC$,

∴此时$\triangle PAB$的周长最小.

设直线AC的解析式为$y=kx+b$,把$A(0,4)$,$C(5,0)$代入$y=kx+b$,

得$\begin{cases}b=4,\\5k+b=0,\end{cases}$解得$\begin{cases}k=-\frac{4}{5},\\b=4,\end{cases}$

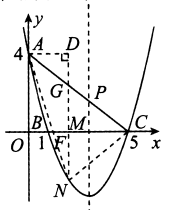
∴直线AC的解析式为$y=-\frac{4}{5}x+4$.

∵点P的横坐标为3,∴$y=-\frac{4}{5}\times3+4=\frac{8}{5}$,∴$P\left(3,\frac{8}{5}\right)$.

(3)在直线AC下方的抛物线上存在点N,使$\triangle NAC$面积最大.

设点N的横坐标为t,此时点$N\left(t,\frac{4}{5}t^2-\frac{24}{5}t+4\right)(0<t<5)$,

如图,过点N作y轴的平行线,分别交x轴,AC于点F,G,过点A作$AD\perp NG$,垂足为D,连接AN,NC.



由(2)可知直线AC的解析式为$y=-\frac{4}{5}x+4$,

把$x=t$代入$y=-\frac{4}{5}x+4$得$y=-\frac{4}{5}t+4$,则$G\left(t,-\frac{4}{5}t+4\right)$,

此时$NG=-\frac{4}{5}t+4-\left(\frac{4}{5}t^2-\frac{24}{5}t+4\right)=-\frac{4}{5}t^2+4t$.

∵$AD+CF=OC=5$,

∴$S_{\triangle NAC}=S_{\triangle ANG}+S_{\triangle CGN}$

$=\frac{1}{2}NG\cdot AD+\frac{1}{2}NG\cdot CF$

$=\frac{1}{2}NG\cdot OC$

$=\frac{1}{2}\times\left(-\frac{4}{5}t^2+4t\right)\times5$

$=-2t^2+10t$

$=-2\left(t-\frac{5}{2}\right)^2+\frac{25}{2}$,

∴ 当 $t=\frac{5}{2}$ 时，$\triangle NAC$ 面积的最大值为 $\frac{25}{2}$.

由 $t=\frac{5}{2}$ 得 $y=\frac{4}{5}t^2-\frac{24}{5}t+4=-3$，∴ $N\left(\frac{5}{2},-3\right)$.

9. B 【解析】①点 P 在 AB 上运动，点 Q 在 BC 上运动，即 $0\leqslant t\leqslant 2$，此时 $AP=t$，$BP=4-t$，$QB=2t$，故可得 $y=\frac{1}{2}PB\cdot QB=\frac{1}{2}(4-t)\cdot 2t=-t^2+4t$，函数图象为开口向下的抛物线；

②点 P 在 AB 上运动，点 Q 在 CD 上运动，即 $2<t\leqslant 4$，此时 $AP=t$，$BP=4-t$，$\triangle BPQ$ 的底边 PB 上的高保持不变，为正方形的边长 4，故可得 $y=\frac{1}{2}BP\cdot 4=-2t+8$，函数图象为直线.

综上，全过程的函数图象，先是开口向下的抛物线，然后是直线. 故选 B.

10. 【解】(1)抛物线 $y=x^2+bx+c$ 的图象经过 $A(1,0)$，$B(-3,0)$，

∴ $\begin{cases}1+b+c=0,\\9-3b+c=0,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}b=2,\\c=-3.\end{cases}$

∴ 抛物线的解析式为 $y=x^2+2x-3$.

(2)如图，连接 PE，PC.

∵ $x=-\frac{b}{2a}=-1$，且当 $x=-1$ 时，$y=-4$，

∴ 点 D 的坐标为 $(-1,-4)$.

设直线 BD 的解析式为 $y=mx+n$，

则 $\begin{cases}-3m+n=0,\\-m+n=-4,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}m=-2,\\n=-6.\end{cases}$

∴ 直线 BD 的解析式为 $y=-2x-6$.

设点 P 的坐标为 $(x,-2x-6)$，由题意知 $C(0,-3)$，$E(-1,0)$. 则 $PC^2=x^2+(-2x-6+3)^2$，$PE^2=(x+1)^2+(-2x-6)^2$.

∵ $PC=PE$，∴ $PC^2=PE^2$. ∴ $x^2+(-2x-6+3)^2=(x+1)^2+(-2x-6)^2$，解得 $x=-2$.

则 $y=-2\times(-2)-6=-2$，

∴ 点 P 的坐标为 $(-2,-2)$.

(3)设点 M 的坐标为 $(a,0)$，则点 G 的坐标为 (a,a^2+2a-3).

∵ 以 F,N,G,M 四点为顶点的四边形为正方形，∴ $FM=GM$，

∴ $|a+2|=|a^2+2a-3|$.

由 $a+2=a^2+2a-3$，整理得 $a^2+a-5=0$，解得 $a=\frac{-1\pm\sqrt{21}}{2}$；

由 $a+2=-(a^2+2a-3)$ 时，整理得 $a^2+3a-1=0$，解得 $a=\frac{-3\pm\sqrt{13}}{2}$.

∴ 以 F,N,G,M 四点为顶点的四边形为正方形时，点 M 的坐标为 $\left(\frac{-1+\sqrt{21}}{2},0\right)$ 或 $\left(\frac{-1-\sqrt{21}}{2},0\right)$ 或 $\left(\frac{-3+\sqrt{13}}{2},0\right)$ 或 $\left(\frac{-3-\sqrt{13}}{2},0\right)$.

22.3 实际问题与二次函数

课时 1 几何图形问题

刷基础

1. B 【解析】已知一边长为 x cm，则另一边长为 $(6-x)$ cm. 则 $y=x(6-x)$ 化简得 $y=-x^2+6x(0<x<6)$. 故选 B.

2. D 【解析】设所围成长方形的长为 x cm，则由题意得，$a=x\left(\frac{40}{2}-x\right)=-x^2+20x=-(x-10)^2+100$，有最大值，即当 $x=10$ 时，a 取得最大值 100. 由于 $120>100$，所以 a 的值不可能为 120. 故选 D.

3. $y=4x^2+160x+1\,500$ 【解析】由题意得 $y=(50+2x)(30+2x)=4x^2+160x+1\,500$.

4. 【解】(1)$y=x(16-x)=-x^2+16x(0<x<16)$.

(2)当 $y=60$ 时，$-x^2+16x=60$，解得 $x_1=10$，$x_2=6$.

所以当 $x=10$ 或 6 时，围成的养鸡场的面积为 60 平方米.

(3)不能围成面积为 70 平方米的养鸡场. 理由如下：

方法一：当 $y=70$ 时，$-x^2+16x=70$，整理得 $x^2-16x+70=0$，

由于 $\Delta=256-280=-24<0$，因此该方程无实数根，

所以不能围成面积为 70 平方米的养鸡场.

方法二：当 $y=70$ 时，$-x^2+16x=70$，整理得 $x^2-16x+70=0$，

配方，得 $(x-8)^2=-6$，因此该方程无实数根，

所以不能围成面积为 70 平方米的养鸡场.

5. 【解】(1)方法一：设 $AE=a$，由题意得 $AE\cdot AD=2BE\cdot BC$，$AD=BC$，所以 $BE=\frac{1}{2}a$，$AB=\frac{3}{2}a$.

由题意得 $2x+3a+2\times\frac{1}{2}a=80$，所以 $a=20-\frac{1}{2}x$.

$y=AB\cdot BC=\frac{3}{2}a\cdot x=\frac{3}{2}\left(20-\frac{1}{2}x\right)x=-\frac{3}{4}x^2+30x(0<x<40)$.

方法二：根据题意得 $CF\cdot x=y$，则 $CF=\frac{y}{3x}$. $DF\cdot x=\frac{2y}{3}$，则 $DF=\frac{2y}{3x}$，所以 $2x+2\cdot\frac{y}{3x}+3\cdot\frac{2y}{3x}=80$，整理得 $y=-\frac{3}{4}x^2+30x$，其中 $0<x<40$.

(2)$y=-\frac{3}{4}x^2+30x=-\frac{3}{4}(x-20)^2+300$，由于 $-\frac{3}{4}<0$，所以抛物线开口向下. 又因为 $0<x<40$，所以当 $x=20$ 时，y 取最大值，最大值为 300 m^2.

6. 【解】(1)∵ 矩形一边长为 x 米，周长为 16 米，

∴ 另一边长为 $(8-x)$ 米，

∴ $S=x(8-x)=-x^2+8x$，其中 $0<x<8$.

(2)能. 理由如下：

∵ 设计费为每平方米 2 000 元，

∴ 当设计费为 24 000 元时，面积为 24 000 ÷ 2 000 = 12(平方米)，即 $-x^2+8x=12$，解得 $x_1=2$，$x_2=6$. ∴ 设计费能达到 24 000 元.

(3)∵ $S=-x^2+8x=-(x-4)^2+16$，∴ 当 $x=4$ 时，$S_{最大值}=16$.

∴ $16\times 2\,000=32\,000$(元).

∴ 当 x 是 4 米时，矩形的最大面积为 16 平方米，设计费最多，最多是 32 000 元.

课时 2 销售利润问题

刷提升

1. B 【解析】根据题意得，每天销售量为 $10(13-x)+50$，销售额为 $x[10(13-x)+50]$，成本为 $2[10(13-x)+50]$，所以利润为销售额减成本，即 $y=(x-2)[10(13-x)+50]$，整理得 $y=-10x^2+200x-360$. 故选 B.

2. B 【解析】设每件降价 x 元，每天获得的利润为 W.

根据题意得，$W=(135-x-100)(100+4x)=-4x^2+40x+3\,500=-4(x-5)^2+3\,600$，

∵ $-4<0$，∴ 当 $x=5$ 时，W 取得最大值，最大值为 3 600，

即每件降价 5 元时，每天获得的利润最大. 故选 B.

3. 25 【解析】设利润为 w 元. 则 $w=(x-20)(30-x)=-(x-25)^2+25$，∵ $20\leqslant x\leqslant 30$，∴ 当 $x=25$ 时，二次函数有最大值为 25，

∴ 每件商品的售价为 25 元时，利润最大.

4. 【解】设每个粽子的定价为 x 时，每天的销售利润为 W.

小华的问题解答：

$W=(x-2)[500-100(x-3)]=-100x^2+1\,000x-1\,600=-100(x-5)^2+900$，

当 $W=800$ 时，$x=4$ 或 6. 又因为 $2\times 240\%=4.8$(元)，所以当定价为 4 元时，其利润为 800 元.

小明的问题解答：

当 $x<5$ 时，y 随 x 的增大而增大. 所以 800 元销售利润不是最多的. 所以当 $x=4.8$ 时，利润最大，为 $y_{max}=-100\times(4.8-5)^2+900=896$(元).

5. 【解】(1)由题意得 $S=(x-40)y=(x-40)(-10x+1\,200)=-10x^2+1\,600x-48\,000$，$x>40$，

所以利润 S(元)与销售单价 x(元)之间的关系式是 $S=-10x^2+1\,600x-48\,000(x>40)$.

(2)$S=-10x^2+1\,600x-48\,000=-10(x-80)^2+16\,000$，当 $x=80$ 时，S 有最大值，最大值是 16 000 元.

答：当销售单价定为 80 元时，每天的销售利润最大，最大利润是

16 000 元.

6. 【解】(1)由题意得 $W_1=(x+50)(160-2x)=-2x^2+60x+8\,000$，$W_2=19(50-x)=-19x+950$.

(2) $W=W_1+W_2=(-2x^2+60x+8\,000)+(-19x+950)=-2x^2+41x+8\,950=-2\left(x-\frac{41}{4}\right)^2+9\,160\frac{1}{8}$.

∵ $-2<0$，∴ 抛物线开口向下.

又∵ $0<x<50$，且 x 是整数，

∴ 当 $x=10$ 时，$W_{最大}=-2\times\left(10-\frac{41}{4}\right)^2+9\,160\frac{1}{8}=9\,160$(元)；

当 $x=11$ 时，$W_{最大}=-2\times\left(11-\frac{41}{4}\right)^2+9\,160\frac{1}{8}=9\,159$(元).

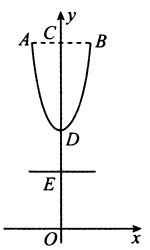
综上所述，当 $x=10$ 时，第二期培植的盆景与花卉售完后获得的总利润 W 最大，最大总利润是 9 160 元.

课时 3　抛物线形实际问题

刷基础

1. C　【解析】∵ 抛物线形水柱的解析式为 $y=-(x-2)^2+6$，∴ 当 $x=2$ 时，水柱的最大高度是 6. 故选 C.

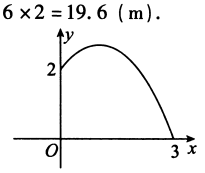
2. 11　【解析】如图，建立平面直角坐标系.



由题意得，点 D 坐标为 $(0,8)$. ∵ $AB=4$，∴ 点 B 横坐标为 2，∴ 当 $x=2$ 时，$y=2\times4+8=16$，∴ $B(2,16)$，∴ $DC=16-8=8$，∴ $CE=DC+DE=8+3=11$.

3. 19.6　【解析】∵ 足球被踢出后经过 4 s 落地，∴ 当 $t=4$ 时，$h=0$. ∴ $16a+19.6\times4=0$，解得 $a=-4.9$. ∴ 函数关系式 $h=-4.9t^2+19.6t$. ∵ $a=-4.9<0$，∴ h 有最大值. 当 $t=-\frac{19.6}{2\times(-4.9)}=2$ 时，h 有最大值，最大值为 $-4.9\times2^2+19.6\times2=19.6$(m).

4. 【解】(1) 如图，以水管与地面交点为原点，原点与水柱落地点所在直线为 x 轴，水管所在直线为 y 轴，建立平面直角坐标系.



由题意可设抛物线的函数解析式为 $y=a(x-1)^2+h(0\leqslant x\leqslant3)$.

抛物线过点 $(0,2)$ 和 $(3,0)$，代入函数解析式可得

$$\begin{cases}a+h=2,\\4a+h=0,\end{cases}\text{解得}\begin{cases}a=-\frac{2}{3},\\h=\frac{8}{3}.\end{cases}$$

所以抛物线的函数解析式为 $y=-\frac{2}{3}(x-1)^2+\frac{8}{3}(0\leqslant x\leqslant3)$，

化为一般式为 $y=-\frac{2}{3}x^2+\frac{4}{3}x+2(0\leqslant x\leqslant3)$.

(2) 由(1)知抛物线为 $y=-\frac{2}{3}(x-1)^2+\frac{8}{3}(0\leqslant x\leqslant3)$.

当 $x=1$ 时，$y=\frac{8}{3}$.

所以水柱的最大高度为 $\frac{8}{3}$ 米.

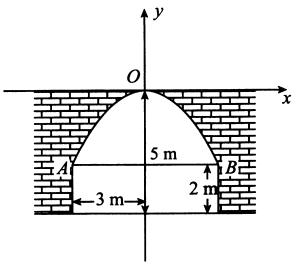
5. B　【解析】∵ $OA=10$ 米，$x_c=-10$，把 $x_c=-10$ 代入 $y=-\frac{1}{400}\cdot(x-80)^2+16$ 可得，$y_c=-\frac{17}{4}$，所以 $AC=|y_c|=\frac{17}{4}$(米). 故选 B.

6. $y=-\frac{1}{9}(x+6)^2+4$　【解析】由题易知在以点 B 为坐标原点、AB 所在直线为 x 轴的平面直角坐标系下，该抛物线的顶点为 $(-6,4)$，又因为不论以 A 为坐标原点还是以 B 为坐标原点，抛物线的形状、大小及开口方向都没有改变，所以所求解析式为 $y=-\frac{1}{9}(x+6)^2+4$.

7. 【解】(1) 设抛物线对应的函数解析式为 $y=ax^2$.

抛物线的顶点为原点，隧道宽 6 m，高 5 m，矩形的高为 2 m，所以抛物线过点 $A(-3,-3)$，代入得 $-3=9a$，

解得 $a=-\frac{1}{3}$.



所以函数解析式为 $y=-\frac{x^2}{3}$.

(2) 此车不能通过隧道. 理由如下：

如果此车能通过隧道，集装箱处于对称位置，

将 $x=1.5$ 代入抛物线方程，得 $y=-0.75$，

又因为 $5-0.75=4.25$(米)，不及车与箱总高 4.5 米，

即 $4.25<4.5$.

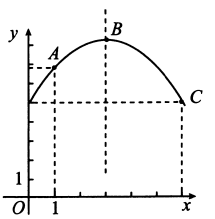
故此车不能通过此隧道.

22.3 综合训练

刷综合

1. A　【解析】设应降价 x 元，总利润为 y 元. 根据题意得 $y=(100-70-x)\cdot(20+x)$，化简、配方得 $y=-(x-5)^2+625$，所以当 $x=5$ 时，$y_{最大}=625$. 故选 A.

2. B　【解析】如图. ∵ $y=-\frac{1}{3}x^2+2x+5=-\frac{1}{3}(x-3)^2+8$，∴ 顶点 B 坐标为 $(3,8)$，对称轴为直线 $x=3$. 又∵ 爆炸后 1 秒点 A 的坐标为 $\left(1,\frac{20}{3}\right)$，6 秒时点 C 的坐标为 $(6,5)$，∴ 爆炸后 1 秒到 6 秒之间，残片距离地面的高度范围为 $5\leqslant y\leqslant8$. 故选 B.



3. C　【解析】设 $PC=x$，则 $PD=2x$，

∴ $S_{\triangle BPD}=\frac{1}{2}\cdot PB\cdot PD=\frac{1}{2}(x+1)\cdot2x=x^2+x$，

$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}\cdot AC\cdot BC=\frac{1}{2}\times1\times1=\frac{1}{2}$，

$S_{梯形ACPD}=\frac{1}{2}(2x+1)\cdot x=x^2+\frac{1}{2}x$，

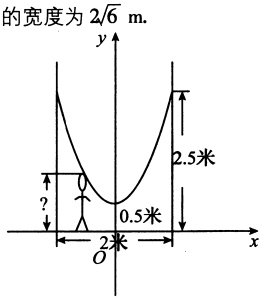
∴ $S_{\triangle ABD}=S_{梯形ACPD}+S_{\triangle ABC}-S_{\triangle BPD}=-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$，

当 $x=1$ 时，$S_{\triangle ABD}=0$，此时 A,B,D 三点共线.

∴ $\triangle ABD$ 的面积先变小再变大. 故选 C.

4. $2\sqrt{6}$　【解析】从图象看，函数顶点坐标 C 为 $(0,2)$，点 B 的坐标为 $(2,0)$，则函数的解析式为 $y=ax^2+2$，把点 B 的坐标代入函数解析式得 $a=-\frac{1}{2}$，所以函数的解析式为 $y=-\frac{1}{2}x^2+2$. 设水面下降 1 m，到点 D 的位置，则点 D 的坐标为 $(x,-1)$，把点 D 的坐标代入函数解析式得 $x=\pm\sqrt{6}$，则水面的宽度为 $2\sqrt{6}$ m.

5. 1　【解析】如图所示，建立平面直角坐标系.



设抛物线的解析式为 $y=ax^2+c$，

则 $\begin{cases}c=0.5,\\a+c=2.5,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=2,\\c=0.5.\end{cases}$

所以该抛物线的解析式为 $y=2x^2+0.5$.

当 $x=-1+0.5=-0.5$ 时，$y=2\times(-0.5)^2+0.5=1$，

即小明的身高为 1 米.

6. 【解】(1) 设这条抛物线解析式为 $y=a(x+m)^2+k$.

由题意知顶点 $A(1,4)$，$P(0,3)$.

所以 $m=-1$，$k=4$，$3=a\cdot(0-1)^2+4$，$a=-1$.

所以这条抛物线的解析式为 $y=-(x-1)^2+4$.

(2) 令 $y=0$，则 $0=-(x-1)^2+4$，

解得 $x_1=3$，$x_2=-1$(舍去).

所以若不计其他因素，水池的半径至少 3 米，才能使喷出的水流不至于落在池外.

7.【解】(1)由题意得 $y=(x-30)[60+2\times(70-x)]-400=-2x^2+260x-6\,400(30\leqslant x\leqslant 70)$.

(2)$y=-2(x-65)^2+2\,050$.

当销售单价定为 65 元时,日均获利最多,是 2 050 元.

(3)当日均获利最多时,单价为 65 元,日均销售为 $60+2\times(70-65)=70$(kg),那么获利为 $2\,050\times(7\,000\div 70)=205\,000$(元).

当销售单价最高时,单价为 70 元,日均销售 60 kg,将这种化工原料全部售完需 $7\,000\div 60\approx 117$(天),那么获利为 $(70-30)\times 7\,000-117\times 400=233\,200$(元). 因为 $233\,200>205\,000$,且 $233\,200-205\,000=28\,200$(元),

所以按销售单价最高销售获总利更多,且多获利 28 200 元.

8.【解】(1)由题可知花圃的面积为 $(60-2a)(40-2a)=4a^2-200a+2\,400(0<a<20)$.

(2)通道的面积为 $60\times 40-(4a^2-200a+2\,400)=-4a^2+200a$,则 $-4a^2+200a=\frac{3}{8}\times 2\,400$,$\therefore 4a^2-200a+900=0$,解得 $a=5$,$a=45$(舍去),

$\therefore$ 通道的宽为 5 米.

(3)设修建的通道和花圃的总造价为 y 元.

由题图可知,$y_1=40x$,$y_2=\begin{cases}60x,0\leqslant x\leqslant 800,\\35x+20\,000,x>800.\end{cases}$

再设花圃的面积为 b 平方米,则通道的面积为 $(2\,400-b)$ 平方米,

$\therefore b=4a^2-200a+2\,400=4(a-25)^2-100$,

$\because 2\leqslant a\leqslant 10$,$\therefore$ 当 $a=2$ 时,$b_{max}=2\,016$,

当 $a=10$ 时,$b_{min}=800$,$\therefore 800\leqslant b\leqslant 2\,016$.

$\therefore y=y_1+y_2=40(2\,400-b)+35b+20\,000=-5b+116\,000(800\leqslant b\leqslant 2\,016)$,

$\because -5<0$,$\therefore y$ 随 b 的增大而减小,

$\therefore$ 当 $b=2\,016$ 时,y 最小,$y_{min}=105\,920$.

此时,$2\,016=4a^2-200a+2\,400$,解得 $a=2$ 或 $a=48$(舍去),

$\therefore$ 当通道宽为 2 米时,修建的通道和花圃的总造价最低,最低总造价为 105 920 元.

9.【解】(1)将 $y=260$ 代入 $y=32x$,得 $260=32x$,解得 $x=8\frac{1}{8}$.

此时,x 不满足 $0\leqslant x\leqslant 5$,故这种情况不存在.

$\therefore 5<x\leqslant 19$ 时,则有 $20x+60=260$,解得 $x=10$.

$\therefore$ 李红第 10 天生产的玩具数量为 260 个.

(2)由图可知 $p_1=2(0\leqslant x\leqslant 9)$.

设 $p=kx+b(9\leqslant x\leqslant 19)$,将 $(9,2)$,$(19,3)$ 代入,得

$\begin{cases}9k+b=2,\\19k+b=3,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}k=0.1,\\b=1.1.\end{cases}$

$\therefore p=0.1x+1.1(9\leqslant x\leqslant 19)$.

当 $0\leqslant x\leqslant 5$ 时,$w=(4-2)\times 32x=64x$,由一次函数的性质,知当 $x=5$ 时,$w_{最大}=320$.

当 $5<x\leqslant 9$ 时,$w=(4-2)\cdot(20x+60)=40x+120$,由一次函数的性质,知当 $x=9$ 时,$w_{最大}=480$.

当 $9<x\leqslant 19$ 时,$w=[4-(0.1x+1.1)]\cdot(20x+60)=-2x^2+52x+174=-2(x-13)^2+512$,由二次函数的性质,知当 $x=13$ 时,$w_{最大}=512$.

$\therefore w$ 与 x 之间的函数关系式为 $w=\begin{cases}64x,0\leqslant x\leqslant 5,\\40x+120,5<x\leqslant 9,\\-2x^2+52x+174,9<x\leqslant 19.\end{cases}$

由 $320<480<512$,知第 13 天的利润最大,最大利润是 512 元.

10.【解】(1)$\because$ 在 $\mathrm{Rt}\triangle ABC$ 中,$AC=24$ cm,$BC=7$ cm,

$\therefore AB=25$ cm.

设经过 t s 后,P,Q 两点的距离为 $5\sqrt{2}$ cm.

t s 后,$PC=(7-2t)$ cm,$CQ=5t$ cm.

由勾股定理得 $PC^2+CQ^2=PQ^2$,

代入数据得 $(7-2t)^2+(5t)^2=(5\sqrt{2})^2$,

解得 $t=1$ 或 $t=-\frac{1}{29}$(不合题意,舍去).

(2)设经过 t s 后,$S_{\triangle PCQ}$ 的面积为 15 cm^2.

t s 后,$PC=(7-2t)$ cm,$CQ=5t$ cm.

$S_{\triangle PCQ}=\frac{1}{2}\cdot(7-2t)\cdot 5t=15$,

解得 $t_1=2$,$t_2=1.5$.

所以经过 2 s 或 1.5 s 后,$S_{\triangle PCQ}$ 的面积为 15 cm^2.

(3)设经过 t s 后,$\triangle PCQ$ 的面积最大,则此时四边形 $BPQA$ 的面积最小.

t s 后,$PC=(7-2t)$ cm,$CQ=5t$ cm.

$S_{\triangle PCQ}=\frac{1}{2}\cdot PC\cdot CQ=\frac{1}{2}\cdot(7-2t)\cdot 5t=\frac{5}{2}\cdot(-2t^2+7t)$.

当 $t=-\frac{b}{2a}$ 时,即 $t=\frac{7}{2\times 2}=1.75$ s 时,$\triangle PCQ$ 的面积最大,

即 $S_{\triangle PCQ最大值}=\frac{1}{2}\times(7-2\times 1.75)\times 5\times 1.75=\frac{245}{16}$(cm^2),

$\therefore$ 四边形 $BPQA$ 的面积最小值为 $S_{\triangle ABC}-S_{\triangle PCQ最大值}=\frac{1}{2}\times 7\times 24-\frac{245}{16}=\frac{1\,099}{16}$(cm^2),

当点 P 运动 1.75 s 时,四边形 $BPQA$ 的面积最小,最小面积为 $\frac{1\,099}{16}$ cm^2.

刷中考

1. D 【解析】A 选项,当 $t=9$ 时,$h=136$;当 $t=13$ 时,$h=144$,所以点火后 9 s 和点火后 13 s 的升空高度不相同,此选项错误;B 选项,当 $t=24$ 时,$h=1\neq 0$,所以点火后 24 s 火箭离地面的高度为 1 m,此选项错误;C 选项,当 $t=10$ 时,$h=141$ m,此选项错误;D 选项,由 $h=-t^2+24t+1=-(t-12)^2+145$ 知火箭升空的最大高度为 145 m,此选项正确. 故选 D.

2. 150 【解析】设 $AB=x$ m,因此 $AB+EF+CD=3x$,所以 $AD=BC=\frac{900-3x}{2}$. 设矩形 $ABCD$ 的面积为 y m^2,所以 $y=x\cdot\frac{900-3x}{2}=-\frac{3}{2}x^2+450x$,由于二次项系数小于 0,所以 y 有最大值,当 $x=-\frac{b}{2a}=-450\div\left[2\times\left(-\frac{3}{2}\right)\right]=150$ 时,函数 y 取得最大值,即当 $AB=150$ m 时,矩形 $ABCD$ 的面积最大.

3.【解】(1)①把 $(0,1)$,$a=-\frac{1}{24}$ 代入 $y=a(x-4)^2+h$,得 $1=-\frac{1}{24}\times 16+h$,解得 $h=\frac{5}{3}$.

②把 $x=5$ 代入 $y=-\frac{1}{24}(x-4)^2+\frac{5}{3}$,得 $y=-\frac{1}{24}\times(5-4)^2+\frac{5}{3}=1.625$.

$\because 1.625>1.55$,$\therefore$ 此球能过网.

(2)把点 $(0,1)$,$\left(7,\frac{12}{5}\right)$ 代入 $y=a(x-4)^2+h$,

得 $\begin{cases}16a+h=1,\\9a+h=\frac{12}{5},\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=-\frac{1}{5},\\h=\frac{21}{5}.\end{cases}$

$\therefore a$ 的值为 $-\frac{1}{5}$.

4.【解】(1)由题意得 $y=300-10(x-44)$,即 $y=-10x+740(44\leqslant x\leqslant 52)$.

(2)根据题意得 $(x-40)(-10x+740)=2\,400$,

解得 $x_1=50$,$x_2=64$(舍去).

答:当每本足球纪念册的销售单价是 50 元时,商店每天获利 2 400 元.

(3)$w=(x-40)(-10x+740)$

$=-10x^2+1\,140x-29\,600$

$=-10(x-57)^2+2\,890$,

当 $x<57$ 时,w 随 x 的增大而增大,

而 $44\leqslant x\leqslant 52$,

所以当 $x=52$ 时,w 有最大值,最大值为 $-10(52-57)^2+2\,890=2\,640$(元).

答:将每本足球纪念册的销售单价定为 52 元时,商店每天销售纪念册获得的利润 w 最大,最大利润是 2 640 元.

5.(1)【解】设 y 关于 x 的函数解析式为 $y=kx+b$.

由题意得 $\begin{cases}85k+b=175,\\95k+b=125,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}k=-5,\\b=600,\end{cases}$

即 y 关于 x 的函数解析式为 $y=-5x+600$.
当 $x=115$ 时，$y=-5\times115+600=25$，即 m 的值是 25.
(2)80 100 2 000 【解析】设成本为 a 元/个. 当 $x=85$ 时，$875=175\times(85-a)$，解得 $a=80$，
$w=(-5x+600)(x-80)=-5x^2+1\,000x-48\,000=-5(x-100)^2+2\,000$，所以当 $x=100$ 时，w 取得最大值，此时 $w=2\,000$.
(3)【解】设科技创新后成本单价为 n 元.
当 $x=90$ 时，$(-5\times90+600)(90-n)\geqslant3\,750$，
解得 $n\leqslant65$.
答：该产品的成本单价应不超过 65 元.

全章综合训练

刷章测

1. D 【解析】$\because y=2x^2+4x-1=2(x+1)^2-3$，$\therefore$ 当 $x=0$ 时，$y=-1$，故选项 A 错误；该函数图象的对称轴是直线 $x=-1$，故选项 B 错误；当 $x<-1$ 时，y 随 x 的增大而减小，故选项 C 错误；当 $x=-1$ 时，y 取得最小值，此时 $y=-3$，故选项 D 正确. 故选 D.

2. B 【解析】抛物线 $y=x^2$ 先向右平移 2 个单位长度，再向上平移 3 个单位长度后顶点坐标是 $(2,3)$，所以抛物线的解析式为 $y=(x-2)^2+3$. 故选 B.

3. B 【解析】A 选项，函数 $y=ax+c$ 中，$a>0,c>0$，$y=a(x+c)^2$ 中，$a<0,c<0$，故 A 错误；
B 选项，函数 $y=ax+c$ 中，$a<0,c>0$，$y=a(x+c)^2$ 中，$a<0,c>0$，故 B 正确；
C 选项，函数 $y=ax+c$ 中，$a>0,c<0$，$y=a(x+c)^2$ 中，$a>0,c>0$，故 C 错误；
D 选项，函数 $y=ax+c$ 中，$a<0,c>0$，$y=a(x+c)^2$ 中，$a>0,c<0$，故 D 错误. 故选 B.

4. D 【解析】当 $m\neq0$ 时，函数对应的一次二次方程为 $mx^2+(m+2)x+\frac{1}{2}m+1=0$，$\Delta=(m+2)^2-4m\left(\frac{1}{2}m+1\right)=0$，解得 $m=2$ 或 -2；当 $m=0$ 时原函数是一次函数，图象与 x 轴也只有一个交点，所以当 $m=0,2$ 或 -2 时，图象与 x 轴只有一个交点. 故选 D.

5. C 【解析】设函数解析式为 $y=ax^2+bx+c$. 由图可得 $\begin{cases}c=153,\\400a+20b+c=33,\\900a+30b+c=3,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=0.1,\\b=-8,\\c=153,\end{cases}$ 则函数解析式为 $y=0.1x^2-8x+153$. $\because C$ 型小正方形白色块数与黑色块数之和是 $25\times25-7\times7\times3-5\times5=453$，$\therefore x+(0.1x^2-8x+153)=453$，解得 $x_1=100$，$x_2=-30$(舍去)，$\therefore y=0.1\times100^2-8\times100+153=353$，即 C 型小正方形黑色块数为 100. 故选 C.

6. C 【解析】①$\because$ 抛物线 $y_2=\frac{1}{2}(x-3)^2+1$ 开口向上，顶点在 x 轴上方，$\therefore y_2$ 的值总是正数. $\therefore$ ①正确.
②把点 $A(1,3)$ 代入 $y_1=a(x+2)^2-3$ 得 $3=a(1+2)^2-3$，解得 $a=\frac{2}{3}$，$\therefore$ ②错误.
③$\because$ 当 $x=0$ 时，$y_1=\frac{2}{3}\times(0+2)^2-3=-\frac{1}{3}$，$y_2=\frac{1}{2}\times(0-3)^2+1=\frac{11}{2}$，$\therefore y_2-y_1=\frac{11}{2}-\left(-\frac{1}{3}\right)=\frac{35}{6}\neq4$. $\therefore$ ③错误.
④$\because$ 在 $y_1=\frac{2}{3}(x+2)^2-3$ 中，当 $y=3$ 时，可得 $\frac{2}{3}(x+2)^2-3=3$，解得 $x_1=1$，$x_2=-5$，$\therefore$ 点 B 的坐标为 $(-5,3)$；
$\because$ 在 $y_2=\frac{1}{2}(x-3)^2+1$ 中，当 $y=3$ 时，可得 $\frac{1}{2}(x-3)^2+1=3$，解得 $x_1=1$，$x_2=5$，$\therefore$ 点 C 的坐标为 $(5,3)$.
$\therefore AB=6$，$AC=4$，$\therefore 2AB=3AC$. $\therefore$ ④正确.
综上所述，正确的是①④. 故选 C.

7. $x=-1$ 【解析】由于抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 与 x 轴的交点是 $(-4,0)$，$(2,0)$，这两个点关于对称轴对称，于是对称轴为直线 $x=\frac{-4+2}{2}=-1$.

8. $h\geqslant\frac{8}{3}$ 【解析】由图可知，抛物线 $y=a(x-6)^2+h$ 过点 $(0,2)$. 当球正好过点 $(18,0)$ 时，代入解析式得 $\begin{cases}2=36a+h,\\0=144a+h,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=-\frac{1}{54},\\h=\frac{8}{3},\end{cases}$ 此时二次函数的解析式为 $y=-\frac{1}{54}(x-6)^2+\frac{8}{3}$，此时球若不出边界，则 $h\geqslant\frac{8}{3}$.

9. 1 或 −1 【解析】$\because A(0,4)$，$B(4,4)$，$\therefore AB\parallel x$ 轴. $\because$ 点 M 到线段 AB 的距离为 4，$\therefore M(2,8)$ 或 $(2,0)$. ①当 $M(2,8)$ 时，设抛物线的解析式为 $y=a(x-2)^2+8$，将点 $A(0,4)$ 代入得，$4a+8=4$，解得 $a=-1$；②当 $M(2,0)$ 时，设抛物线的解析式为 $y=a(x-2)^2$，将点 $A(0,4)$ 代入得，$4a=4$，解得 $a=1$，所以 $a=1$ 或 -1.

10. −1 【解析】设 l 与 t 之间的函数关系式为 $l=at^2+bt+c$，把 $(-2,49)$，$(0,49)$，$(1,46)$ 分别代入得 $\begin{cases}4a-2b+c=49,\\c=49,\\a+b+c=46,\end{cases}$
解得 $\begin{cases}a=-1,\\b=-2,\\c=49.\end{cases}$ $\therefore l=-t^2-2t+49$，即 $l=-(t+1)^2+50$，
$\therefore$ 当 $t=-1$ 时，l 的最大值为 50，即当温度为 -1 ℃时，最适合这种植物生长.

11. −9 【解析】当顶点在点 D 时，点 B 的横坐标最大，此时 D,B 两点的水平距离为 4，则 $AB=8$；当顶点在点 C 时，点 A 的横坐标最小，则点 A 的横坐标的最小值为 $3-8-4=-9$.

12. $-2<k<\frac{1}{2}$ 【解析】由图可知，$\angle AOB=45°$，$\therefore$ 直线 OA 的解析式为 $y=x$，联立 $\begin{cases}y=x,\\y=\frac{1}{2}x^2+k,\end{cases}$ 消去 y，得 $x^2-2x+2k=0$，$\Delta=(-2)^2-4\times1\times2k=0$，解得 $k=\frac{1}{2}$，即 $k=\frac{1}{2}$ 时，抛物线与 OA 有一个交点，该交点的横坐标为 1. $\because$ 点 B 的坐标为 $(2,0)$，$\therefore OA=2$，$\therefore$ 点 A 的坐标为 $(\sqrt{2},\sqrt{2})$，$\therefore$ 交点在线段 AO 上；当抛物线经过点 $B(2,0)$ 时，$\frac{1}{2}\times4+k=0$，解得 $k=-2$. $\therefore$ 要使抛物线 $y=\frac{1}{2}x^2+k$ 与扇形 OAB 的边界总有两个公共点，实数 k 的取值范围是 $-2<k<\frac{1}{2}$.

13. 【解】(1)设水柱所在抛物线(第一象限部分)的函数解析式为 $y=a(x-3)^2+5(a\neq0)$，
将 $(8,0)$ 代入 $y=a(x-3)^2+5$，得 $25a+5=0$，解得 $a=-\frac{1}{5}$，
即水柱所在抛物线(第一象限部分)的函数解析式为 $y=-\frac{1}{5}(x-3)^2+5(0<x<8)$.
(2)当 $y=1.8$ 时，有 $-\frac{1}{5}(x-3)^2+5=1.8$，解得 $x_1=-1$(舍去)，$x_2=7$，
故为了不被淋湿，身高 1.8 米的王师傅站立时必须在离水池中心 7 米以内.
(3)当 $x=0$ 时，$y=-\frac{1}{5}(0-3)^2+5=\frac{16}{5}$.
设改造后水柱所在抛物线(第一象限部分)的函数解析式为 $y=-\frac{1}{5}x^2+bx+\frac{16}{5}$，
$\because$ 该函数图象过点 $(16,0)$，$\therefore 0=-\frac{1}{5}\times16^2+16b+\frac{16}{5}$，解得 $b=3$，
$\therefore$ 改造后水柱所在抛物线(第一象限部分)的函数解析式为 $y=-\frac{1}{5}x^2+3x+\frac{16}{5}=-\frac{1}{5}\left(x-\frac{15}{2}\right)^2+\frac{289}{20}$，$\therefore$ 当 $x=\frac{15}{2}$ 时，扩建改造后喷水池水柱的最大高度为 $\frac{289}{20}$ 米.

14. (1)D 【解析】二次函数对应的一元二次方程为 $-x^2+(m-1)x+m=0$，则 $\Delta=(m-1)^2+4m=(m+1)^2\geqslant0$，

所以一元二次方程有两个相等或两个不相等的实数根，即对应的二次函数图象与 x 轴有 1 个或 2 个交点.

(2)【证明】$y=-x^2+(m-1)x+m=-\left(x-\frac{m-1}{2}\right)^2+\frac{(m+1)^2}{4}$，

所以该函数的图象的顶点坐标为 $\left(\frac{m-1}{2},\frac{(m+1)^2}{4}\right)$.

把 $x=\frac{m-1}{2}$ 代入 $y=(x+1)^2$，得 $y=\left(\frac{m-1}{2}+1\right)^2=\frac{(m+1)^2}{4}$.

因此，不论 m 为何值，该函数的图象的顶点都在函数 $y=(x+1)^2$ 的图象上.

(3)【解】设函数 $z=\frac{(m+1)^2}{4}$.

当 $m<-1$ 时，z 随 m 的增大而减小；

当 $m>-1$ 时，z 随 m 的增大而增大.

当 $m=-1$ 时，z 有最小值 0；

又因为当 $m=-2$ 时，$z=\frac{(-2+1)^2}{4}=\frac{1}{4}$；

当 $m=3$ 时，$z=\frac{(3+1)^2}{4}=4$.

因此，当 $-2\leqslant m\leqslant 3$ 时，该函数的图象的顶点纵坐标的取值范围是 $0\leqslant z\leqslant 4$.

15.【解】(1)设 y_1 与 x 之间的函数解析式为 $y_1=kx+b$，

由图可知，将点 $E(0,168)$ 与点 $F(180,60)$ 代入函数解析式得

$\begin{cases}b=168,\\180k+b=60,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}k=-\frac{3}{5},\\b=168.\end{cases}$

故产品售价 y_1(元)与产量 x(kg)之间的函数解析式为 $y_1=-\frac{3}{5}x+168(0\leqslant x\leqslant 180)$.

(2)由题意得，当 $0\leqslant x\leqslant 50$ 时，$y_2=70$；当 $130\leqslant x\leqslant 180$ 时，$y_2=54$；当 $50<x<130$ 时，设 y_2 与 x 之间的函数解析式为 $y_2=mx+n$.

∵ 直线 $y_2=mx+n$ 过点 $B(50,70)$ 与点 $C(130,54)$，

∴ $\begin{cases}50m+n=70,\\130m+n=54,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}m=-\frac{1}{5},\\n=80,\end{cases}$

∴ 当 $50<x<130$ 时，$y_2=-\frac{1}{5}x+80$.

综上所述，生产成本 y_2(元)与产量 x(kg)之间的函数解析式为

$$y_2=\begin{cases}70(0\leqslant x\leqslant 50),\\-\frac{1}{5}x+80(50<x<130),\\54(130\leqslant x\leqslant 180).\end{cases}$$

(3)当产量为 x kg 时，获得的利润为 W 元.

①当 $0\leqslant x\leqslant 50$ 时，$W=x\left(-\frac{3}{5}x+168-70\right)=-\frac{3}{5}\left(x-\frac{245}{3}\right)^2+\frac{12\,005}{3}$，

故当 $x=50$ 时，W 的值最大，最大值为 3 400；

②当 $50<x<130$ 时，$W=x\left[\left(-\frac{3}{5}x+168\right)-\left(-\frac{1}{5}x+80\right)\right]=-\frac{2}{5}(x-110)^2+4\,840$，

故当 $x=110$ 时，W 的值最大，最大值为 4 840；

③当 $130\leqslant x\leqslant 180$ 时，$W=x\left(-\frac{3}{5}x+168-54\right)=-\frac{3}{5}(x-95)^2+5\,415$，

故当 $x=130$ 时，W 的值最大，最大值为 4 680.

因此当该产品产量为 110 kg 时，获得的利润最大，最大值为 4 840 元.

第二十三章　旋转

23.1　图形的旋转

刷基础

1.C 【解析】A 项，摩托车在急刹车时向前滑动是平移，故此选项错误；

B 项，电梯上下运动的过程是平移，故此选项错误；

C 项，幸运大转盘转动的过程是旋转，故此选项正确；

D 项，笔直的铁轨上飞驰而过的火车是平移，故此选项错误. 故选 C.

2.A 【解析】A 项的最小旋转角是 120°；B 项的最小旋转角是 90°；C 项的最小旋转角是 72°；D 项的最小旋转角是 60°. 故选 A.

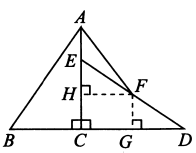
3. 120° 【解析】$\frac{20}{60}\times 360°=120°$.

4.B 【解析】∵ $\triangle ADE$ 是由 $\triangle ABC$ 绕点 A 旋转 100°得到的，

∴ $\angle BAD=100°$，$AD=AB$. ∵ 点 D 在 BC 的延长线上，

∴ $\angle B=\angle ADB=\frac{180°-100°}{2}=40°$. 故选 B.

5.C 【解析】如图，过点 F 作 FH 垂直 AC 于点 H，过点 F 作 FG 垂直 CD 于点 G. 由旋转的性质可知，$CD=CA=6$，$CE=CB=4$. ∵ F 为 ED 的中点，∴ $GF=CH=EH=2$，$HF=CG=GD=3$，∴ $AH=AC-CH=6-2=4$，由勾股定理可知，$AF=\sqrt{4^2+3^2}=5$. 故选 C.



6.【解】(1)∵ $\triangle EDC$ 是 $\triangle ABC$ 绕点 C 按顺时针方向旋转得到的，此时点 B，C，E 在同一直线上，

∴ $\angle ACE=90°$，即旋转角为 90°.

(2)在 Rt$\triangle ABC$ 中，

∵ $AB=10$，$AC=8$，∴ $BC=\sqrt{AB^2-AC^2}=6$.

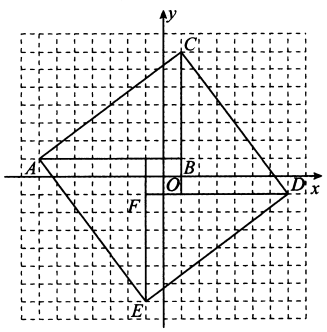
∵ $\triangle ABC$ 绕点 C 旋转得到 $\triangle EDC$，

∴ $CE=AC=8$，∴ $BE=BC+CE=6+8=14$.

7.【解】(1)将线段 AC 先向右平移 6 个单位长度，再向下平移 8 个单位长度.(其他平移方式也可)

(2)$F(-1,-1)$.

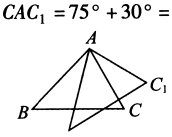
(3)旋转后的图形如图所示.



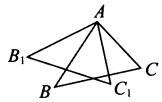
刷易错

8.【解】①当 $\triangle ABC$ 绕点 A 逆时针旋转 30°时，如图所示，

因为在 $\triangle ABC$ 中，$\angle B=45°$，$\angle C=60°$，所以 $\angle BAC=75°$，所以 $\angle BAC_1=\angle BAC+\angle CAC_1=75°+30°=105°$.



②当 $\triangle ABC$ 绕点 A 顺时针旋转 30°时，如图所示，$\angle BAC_1=\angle BAC-\angle CAC_1=75°-30°=45°$.



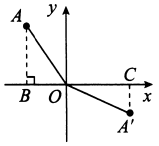
综上所述，$\angle BAC_1$ 的度数为 45°或 105°.

易错警示 当图形旋转，未指明旋转方向时，应分顺时针旋转和逆时针旋转两种情况，解题中要防止漏解.

刷提升

1. C 【解析】由题意可得 $\angle CBD=\alpha$，$\angle ACB=\angle EDB$. ∵ $\angle EDB+\angle ADB=180°$，∴ $\angle ADB+\angle ACB=180°$. ∵ $\angle ADB+\angle DBC+\angle BCA+\angle CAD=360°$，$\angle CBD=\alpha$，∴ $\angle CAD=180°-\alpha$. 故选 C.

2. D 【解析】作 $AB\perp x$ 轴于点 B，



∴ $AB=\sqrt{3}$，$OB=1$，则 $OA=2$.

∴ $\angle AOy=30°$，∴ 将点 A 绕原点顺时针旋转 150°得到点 A' 后，如图所示，

$OA'=OA=\sqrt{(\sqrt{3})^2+1^2}=2$，

且 $\angle A'OC=30°$，

∴ $A'C=1$，$OC=\sqrt{3}$，即 $A'(\sqrt{3},-1)$. 故选 D.

3. D 【解析】∵ $\triangle ABC$ 是等边三角形，∴ $AB=BC$，$\angle BAC=\angle ABC=\angle ACB=60°$. ∵ 将 $\triangle BCD$ 绕点 B 逆时针旋转 60°，得到 $\triangle BAE$，∴ $\angle AEB=\angle BDC$，$BE=BD$，$\angle DBE=60°$，$\angle EAB=\angle ACB=60°$，∴ $\angle EAB=\angle ABC=60°$，∴ $AE\parallel BC$. ∵ $BE=BD$，$\angle DBE=60°$，∴ $\triangle BED$ 是等边三角形，∴ $\angle DEB=60°$，故①②正确. ∵ $\angle AEB=\angle BDC$，$\angle AEB=\angle AED+\angle BED$，$\angle BDC=\angle BAC+\angle ABD$，∴ $\angle AED=\angle ABD$，故④正确. ∵ $\angle BDC>60°$，$\angle ADE<60°$，∴ $\angle BDC\neq\angle ADE$，故③错误. 故选 D.

4. A 【解析】∵ $\angle ACB=90°$，$\angle B=60°$，∴ $\angle BAC=30°$，

∴ $AB=2BC=2\times1=2$.

∵ $\triangle ABC$ 绕点 C 顺时针旋转得到 $\triangle A'B'C$，

∴ $A'B'=AB=2$，$B'C=BC=1$，$A'C=AC$，$\angle A'=\angle BAC=30°$，$\angle A'B'C=\angle B=60°$，

∴ $\triangle CAA'$ 为等腰三角形，∴ $\angle CAA'=\angle A'=30°$.

∵ A，B'，A' 在同一条直线上，

∴ $\angle A'B'C=\angle B'AC+\angle B'CA$，

∴ $\angle B'CA=\angle A'B'C-\angle B'AC=60°-30°=30°$，

∴ $B'A=B'C=1$，

∴ $AA'=AB'+A'B'=1+2=3$. 故选 A.

5. $3\sqrt{2}$ 【解析】由旋转得 $AD=EF$，$AB=AE$，$\angle D=90°$，∵ $DE=EF$，∴ $AD=DE$，即 $\triangle ADE$ 为等腰直角三角形，根据勾股定理，得 $AE=\sqrt{3^2+3^2}=3\sqrt{2}$，则 $AB=AE=3\sqrt{2}$.

6. 【解】(1) 旋转 $\triangle ADF$ 可得到 $\triangle ABE$. 理由如下：

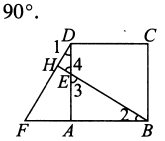
∵ 四边形 $ABCD$ 是正方形，∴ $AD=AB$，$\angle DAB=\angle DAF=90°$.

在 $\triangle ADF$ 和 $\triangle ABE$ 中，$\begin{cases}AF=AE,\\ \angle FAD=\angle EAB,\\ AD=AB,\end{cases}$

∴ $\triangle ADF\cong\triangle ABE$，∴ 旋转 $\triangle ADF$ 可得到 $\triangle ABE$.

(2) 由旋转的定义可知，旋转中心为点 A，∵ 点 D 的对应点为点 B，∴ AD 和 AB 之间的夹角为旋转角，即旋转了 90°.

(3) $BE=DF$ 且 $BE\perp DF$. 理由如下：



延长 BE 交 DF 于点 H，如图.

∵ 四边形 $ABCD$ 为正方形，

∴ $AD=AB$，$\angle DAB=90°$.

∵ $\triangle ABE$ 按逆时针方向旋转 90°可得到 $\triangle ADF$，

∴ $BE=DF$，$\angle1=\angle2$，

∵ $\angle3=\angle4$，∴ $\angle DHB=\angle BAE=90°$，∴ $BE\perp DF$.

综上，$BE=DF$ 且 $BE\perp DF$.

刷素养

7. (1)【证明】∵ 点 M 为 DE 的中点，

∴ $DM=ME$.

∵ $AD\parallel EN$，∴ $\angle ADM=\angle NEM$.

又∵ $\angle DMA=\angle EMN$，

∴ $\triangle DMA\cong\triangle EMN$，∴ $AM=NM$，

即 M 为 AN 的中点.

(2)【证明】由 (1) 中 $\triangle DMA\cong\triangle EMN$ 可知 $DA=EN$. 又∵ $DA=AB$，∴ $AB=NE$.

∵ $\angle ABC=\angle NEC=135°$，$BC=CE$，

∴ $\triangle ABC\cong\triangle NEC$，

∴ $AC=NC$，$\angle ACB=\angle NCE$.

∵ $\angle BCE=\angle BCN+\angle NCE=90°$，

∴ $\angle BCN+\angle ACB=90°$，∴ $\angle ACN=90°$，

∴ $\triangle CAN$ 为等腰直角三角形.

(3)【解】(2) 中结论仍然成立. 证明如下：

由 (2) 可知 $AB=NE$，$BC=EC$，

$\angle ABC=360°-45°-45°-\angle DBE=270°-\angle DBE$.

∵ $AD\parallel EN$，∴ $\angle ADM=\angle NEM$.

又∵ $\angle NEC=\angle CEB+\angle BED+\angle DEN=\angle CEB+\angle BED+\angle ADM=45°+45°+\angle BDE+\angle BED=90°+(180°-\angle DBE)=270°-\angle DBE$，

∴ $\angle ABC=\angle NEC$，

∴ $\triangle ABC\cong\triangle NEC$，再同 (2) 可证 $\triangle CAN$ 为等腰直角三角形，

∴ (2) 中的结论仍然成立.

23.2 中心对称

23.2.1 中心对称

刷基础

1. A 【解析】由中心对称的性质可知，①成中心对称的两个图形经旋转后能够完全重合，即全等；②成中心对称的两个图形的对称点的连线都经过对称中心，并且被对称中心平分；③是轴对称的性质. 故选 A.

2. D 【解析】因为四边形 $ABCD$ 与四边形 $A'B'C'D'$ 关于点 O 成中心对称，所以对应线段相等，所以 $AB=A'B'$；根据点 O 与四边形位置的不同可知，AB 与 $A'B'$ 可能平行，也可能共线. 故选 D.

3. D 【解析】对称点的连线被对称中心平分，A、B 正确；成中心对称的两个图形是全等形，那么对应线段相等，C 正确；$\angle ABC=\angle A'B'C'$，D 错误. 故选 D.

4. 4 【解析】图中成中心对称的三角形有 $\triangle AOD$ 和 $\triangle COB$，$\triangle ABO$ 与 $\triangle CDO$，$\triangle ACD$ 与 $\triangle CAB$，$\triangle ABD$ 和 $\triangle CDB$，共 4 对.

5. (2,1) 【解析】∵ 点 $P(1,1)$，$N(2,0)$，

∴ 由题中图形可知 $M(3,0)$，$M_1(1,2)$，$N_1(2,2)$，$P_1(3,1)$.

∵ 成中心对称的两个图形，对称点的连线都经过对称中心，并且被对称中心平分，∴ 对称中心的坐标为 (2,1).

6. 6 【解析】∵ 直线 a，b 垂直相交于点 O，曲线 C 关于点 O 成中心对称，点 A 的对称点是点 A'，$AB\perp a$ 于点 B，$A'D\perp b$ 于点 D，$OB=3$，$OD=2$，∴ $A'D=3$. 过 A' 作 $A'B'\perp a$ 于点 B'，则由中心对称的性质可知，阴影部分的面积之和等于四边形 $A'B'OD$ 的面积.

∴ 阴影部分的面积之和为 $3\times2=6$.

7. 【解】(1) AE 与 BF 平行且相等. 理由如下：

∵ $\triangle ABC$ 绕点 C 顺时针旋转 180°得到 $\triangle FEC$，

∴ $\triangle ABC$ 与 $\triangle FEC$ 关于点 C 成中心对称，

∴ $AC=FC$，$BC=EC$，

∴ 四边形 $ABFE$ 是平行四边形，

∴ $AE\parallel BF$ 且 $AE=BF$.

(2) ∵ $AC=CF$，∴ $S_{\triangle ABC}=S_{\triangle BCF}=3\ \text{cm}^2$.

又∵ $BC=CE$，∴ $S_{\triangle ABC}=S_{\triangle ACE}=3\ \text{cm}^2$，$S_{\triangle ECF}=S_{\triangle BCF}=3\ \text{cm}^2$，

∴ $S_{\triangle ABC}=S_{\triangle BCF}=S_{\triangle ECF}=S_{\triangle ACE}=3\ \text{cm}^2$，

∴ 四边形 $ABFE$ 的面积为 $4\times3=12(\text{cm}^2)$.

(3) 当 $\angle ACB=60°$ 时，四边形 $ABFE$ 为矩形. 理由如下：

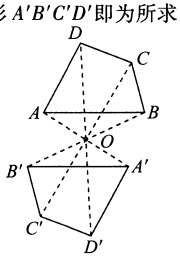
∵ $AB=AC$，$\angle ACB=60°$，

∴ $\triangle ABC$ 为等边三角形，∴ $BC=AC=CF=CE$.

又∵ 四边形 $ABFE$ 为平行四边形，

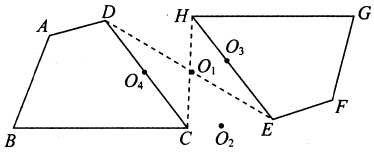
∴ 四边形 $ABFE$ 为矩形.

8. 【解】如图所示，四边形 $A'B'C'D'$ 即为所求：



刷易错

9. A 【解析】如图，连接 HC 和 DE，发现 HC 和 DE 交于 O_1. 故选 A.



易错警示 确定中心对称的对称中心时，要找到两组对应点，对应点的连线的交点为对称中心，对称中心不一定为图形上的某一点.

23.2.2 中心对称图形

刷基础

1. D 【解析】根据中心对称图形的定义对各选项分析判断，选项 A、B、C 不是中心对称图形，选项 D 是中心对称图形. 故选 D.

2. C 【解析】由中心对称图形的定义，可知选项 C 是中心对称图形. 故选 C.

3. A 【解析】A 项，既是中心对称图形（对称中心为原点）又是轴对称图形（对称轴为直线 $y=-x$）；B、C 是轴对称图形（对称轴为 y 轴），不是中心对称图形；D 项，不是轴对称图形，是中心对称图形（对称中心为原点）. 故选 A.

4. D 【解析】∵ $\angle C=90°$，$\angle B=30°$，∴ $AB=2AC$. ∵ $BC=1$，由勾股定理可得 $AB=\frac{2\sqrt{3}}{3}$. ∵ $AB=AB'$，∴ $BB'=\frac{4\sqrt{3}}{3}$. 故选 D.

5. 2 【解析】∵ 六边形 $ABCDEF$ 是中心对称图形，∴ 将六边形绕中心旋转 180° 后，边 BC 与边 EF 重合，∴ $EF=BC=2$.

6. 12 【解析】∵ O 是菱形的两条对角线的交点，∴ 点 O 是菱形的对称中心，由图形的对称性得出阴影部分面积为菱形面积的一半，而菱形的对角线的长分别为 6 和 8，∴ 菱形的面积为 $\frac{1}{2}\times6\times8=24$，∴ 阴影部分的面积为 $\frac{1}{2}\times24=12$.

7. 【解】此图形是中心对称图形. 理由如下：

∵ $AB\parallel CD$，∴ $\angle A=\angle C$，$\angle B=\angle D$，

在 $\triangle AOB$ 与 $\triangle COD$ 中，$\begin{cases}\angle A=\angle C,\\ AB=CD,\\ \angle B=\angle D,\end{cases}$

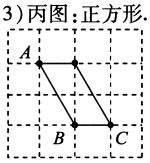
∴ $\triangle AOB\cong\triangle COD$（ASA），

∴ $OA=OC$，$OB=OD$. ∴ 此图形是中心对称图形.

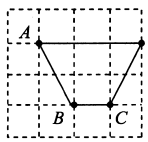
8. 【解】（1）甲图：平行四边形.

（2）乙图：等腰梯形.

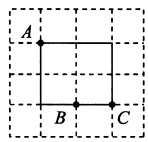
（3）丙图：正方形.



（甲图）



（乙图）



（丙图）

刷易错

9. D 【解析】A 选项，多边形无法确定是轴对称图形，无法确定是中心对称图形，故本选项不符合题意；B 选项，边数为奇数的正多边形是轴对称图形，不是中心对称图形，故本选项不符合题意；C 选项，正多边形是轴对称图形，不一定是中心对称图形，故本选项不符合题意；D 选项，边数为偶数的正多边形，既是轴对称图形，又是中心对称图形，故本选项符合题意. 故选 D.

易错警示 判断一个图形是否是中心对称图形，关键是看图形是否绕一点旋转 180° 后与自身重合，它与轴对称图形是不同的.

23.2.3 关于原点对称的点的坐标

刷基础

1. C 【解析】根据中心对称的性质，可知点 $A(5,-3)$ 关于原点 O 中心对称的点的坐标为 $(-5,3)$. 故选 C.

2. C 【解析】∵ 点 $P(4,-3)$ 关于原点对称的点的坐标为 $(-4,3)$，在第二象限. 故选 C.

3. $(-4,-2)$ 【解析】∵ A 和 A_1 关于原点成中心对称，$A(4,2)$，∴ 点 A_1 的坐标是 $(-4,-2)$.

4. $(-3,4)$ 【解析】∵ $\sqrt{a-3}+(b+4)^2=0$，∴ $a-3=0$，$b+4=0$，解得 $a=3$，$b=-4$，∴ 点 (a,b) 的坐标为 $(3,-4)$，

∴ 关于原点对称的点的坐标是 $(-3,4)$.

5. B 【解析】∵ 点 $A(3-m,n+2)$ 关于原点的对称点 B 的坐标是 $(-3,2)$，∴ $3-m=3$，$n+2=-2$，解得 $m=0$，$n=-4$. 故选 B.

6. C 【解析】∵ 点 $M(1-2m,m-1)$ 关于原点对称的点在第一象限，

∴ 点 $M(1-2m,m-1)$ 在第三象限，

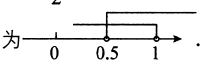
∴ $\begin{cases}1-2m<0,①\\ m-1<0,②\end{cases}$

解不等式①得，$m>\frac{1}{2}$，

解不等式②得，$m<1$，

∴ m 的取值范围是 $\frac{1}{2}<m<1$.

在数轴上表示为

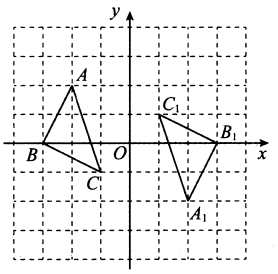


故选 C.

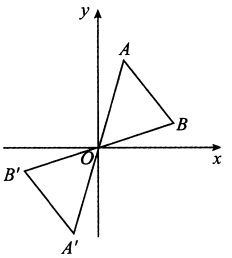
7. A 【解析】∵ 平面内两个关于原点对称的点，横坐标与纵坐标都互为相反数，∴ $m=2$ 且 $m-n=-3$，∴ $m=2$，$n=5$，∴ 点 $M(m,n)$ 在第一象限. 故选 A.

8. $-\frac{6}{5}$ 【解析】由题意得 $\begin{cases}2a+3b=-8,\\ 3a+2b=2,\end{cases}$ 则将两式相加，可得 $5a+5b=-6$，故 $a+b=-\frac{6}{5}$.

9. 【解】根据图形可知 $A(-2,2)$，$B(-3,0)$，$C(-1,-1)$，各点关于原点对称的点的坐标分别是 $A_1(2,-2)$，$B_1(3,0)$，$C_1(1,1)$，然后依次连接各点，$\triangle A_1B_1C_1$ 如图所示.



10. 【解】（1）如图所示.



（2）∵ 点 $A\left(1,\frac{7}{2}\right)$，点 $B(3,1)$，

∴ 点 $A'\left(-1,-\frac{7}{2}\right)$，点 $B'(-3,-1)$.

（3）$AB=A'B'$，$AB\parallel A'B'$.

23.1～23.2 综合训练

刷综合

1. B 【解析】根据中心对称图形的定义可知，选项 A、C、D 不是中心对称图形，选项 B 是中心对称图形. 故选 B.

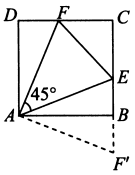
2. D 【解析】∵ 将 $\triangle ABC$ 绕点 A 逆时针旋转 20° 得到 $\triangle AB'C'$，∴ $\angle CAC'=20°$，$\angle C=\angle C'$. ∵ $\angle B+\angle C'+\angle BPC'+\angle BAC'=$

$360°$，∴ $\angle B+\angle C+\angle B'PC+\angle BAC+\angle CAC'=360°$，且 $\angle B+\angle C+\angle BAC=180°$，∴ $\angle B'PC+20°=180°$，∴ $\angle B'PC=160°$. 故选 D.

3. B　【解析】∵ 线段 AB 绕点 O 顺时针旋转 $90°$ 得到线段 $A'B'$，∴ $\triangle ABO\cong\triangle A'B'O$，$\angle AOA'=90°$，∴ $AO=A'O$. 作 $AC\perp y$ 轴于 C，$A'C'\perp x$ 轴于 C'，∴ $\angle ACO=\angle A'C'O=90°$. ∵ $\angle COC'=90°$，∴ $\angle AOA'-\angle COA'=\angle COC'-\angle COA'$，∴ $\angle AOC=\angle A'OC'$. 在 Rt$\triangle ACO$ 和 Rt$\triangle A'C'O$ 中，$\begin{cases}\angle ACO=\angle A'C'O,\\ \angle AOC=\angle A'OC',\\ AO=A'O,\end{cases}$ ∴ Rt$\triangle ACO\cong$ Rt$\triangle A'C'O$(AAS)，∴ $AC=A'C'$，$CO=C'O$. ∵ $A(-2,5)$，∴ $AC=2$，$CO=5$，∴ $A'C'=2$，$C'O=5$，∴ $A'(5,2)$. 故选 B.

4. (36,0)　【解析】由原图到图③，相当于向右平移了 12 个单位长度，像这样平移三次直角顶点是(36,0)，再旋转一次到三角形⑩，直角顶点仍然是(36,0)，则三角形⑩的直角顶点的坐标为(36,0).

5. 2　【解析】将 $\triangle DAF$ 绕点 A 顺时针旋转 $90°$ 到 $\triangle BAF'$ 位置，由题意可得 $\triangle DAF\cong\triangle BAF'$，∴ $DF=BF'$，$AF=AF'$，$\angle DAF=\angle BAF'$. ∴ $\angle EAF'=45°$，在 $\triangle FAE$ 和 $\triangle F'AE$ 中，$\begin{cases}AF=AF',\\ \angle FAE=\angle F'AE,\\ AE=AE,\end{cases}$



∴ $\triangle FAE\cong\triangle F'AE$(SAS)，∴ $EF=EF'$，∵ $\triangle ECF$ 的周长为 4，∴ $EF+EC+FC=FC+CE+EF'=FC+BC+BF'=FC+BC+DF=DC+BC=4$，∵ 四边形 $ABCD$ 为正方形，∴ $DC=BC$，$2BC=4$，∴ $BC=2$，即正方形 $ABCD$ 的边长为 2.

6. 【解】(1)在 Rt$\triangle ABC$ 中，∵ $\angle ACB=90°$，$\angle B=30°$，将 $\triangle ABC$ 绕点 C 按顺时针方向旋转 n 度后，得到 $\triangle DEC$，∴ $AC=DC$，$\angle A=60°$，∴ $\triangle ADC$ 是等边三角形，∴ $\angle ACD=60°$，∴ n 的值是 60.

(2)四边形 $ACFD$ 是菱形. 理由如下：

∵ $\angle DCE=\angle ACB=90°$，$F$ 是 DE 的中点，∴ $FC=DF=FE$.

∵ $\angle CDF=\angle A=60°$，∴ $\triangle DFC$ 是等边三角形，∴ $DF=DC=FC$.

∵ $\triangle ADC$ 是等边三角形，∴ $AD=AC=DC$，∴ $AD=AC=FC=DF$，∴ 四边形 $ACFD$ 是菱形.

7. (1)60°　【解析】∵ $PC=CQ$，$\angle PCQ=\angle ACB=60°$，∴ $\angle ACP=\angle BCQ$. 又∵ $\triangle ABC$ 是等边三角形，∴ $AC=BC$，∴ $\triangle CQB\cong\triangle CPA$，∴ $\angle CQB=\angle CPA$. 设 PC 与 EQ 相交于点 M，则在 $\triangle PEM$ 和 $\triangle CQM$ 中，$\angle EMP=\angle CMQ$，∴ $\angle QEP=\angle QCP=60°$.

(2)【证明】$\angle QEP=60°$. 以 $\angle DAC$ 是锐角为例.

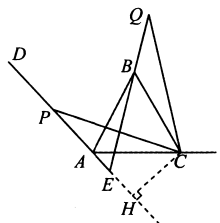
∵ $\triangle ABC$ 是等边三角形，∴ $AC=BC$，$\angle ACB=60°$.

∵ 线段 CP 绕点 C 顺时针旋转 $60°$ 得到线段 CQ，∴ $CP=CQ$，$\angle PCQ=60°$，∴ $\angle ACB+\angle BCP=\angle BCP+\angle PCQ$，即 $\angle ACP=\angle BCQ$.

在 $\triangle ACP$ 和 $\triangle BCQ$ 中，$CA=CB$，$\angle ACP=\angle BCQ$，$CP=CQ$，∴ $\triangle ACP\cong\triangle BCQ$，∴ $\angle APC=\angle Q$.

设 PC 与 EQ 相交于点 M，则 $\angle EMP=\angle CMQ$，∴ $\angle QEP=\angle QCP=60°$.

(3)【解】如图，过点 C 作 $CH\perp AD$，交 DA 的延长线于点 H，同(2)可证 $\triangle ACP\cong\triangle BCQ$，∴ $AP=BQ$.



∵ $\angle DAC=135°$，$\angle ACP=15°$，∴ $\angle APC=30°$，$\angle CAE=45°$，∴ $\triangle ACH$ 为等腰直角三角形，∴ 由勾股定理得 $AH=CH=\frac{\sqrt{2}}{2}AC=\frac{\sqrt{2}}{2}\times4=2\sqrt{2}$，∴ $PC=4\sqrt{2}$.

在 Rt$\triangle PHC$ 中，由勾股定理得 $PH=2\sqrt{6}$，∴ $PA=PH-AH=2\sqrt{6}-2\sqrt{2}$，∴ $BQ=2\sqrt{6}-2\sqrt{2}$.

刷中考

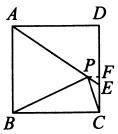
1. C　【解析】选项 A，是轴对称图形，但不是中心对称图形，选项 B、D，既是轴对称图形，又是中心对称图形，只有选项 C 是中心对称图形，不是轴对称图形. 故选 C.

2. A　【解析】∵ 点 B，C 的坐标分别为(2,1)，(6,1)，$\angle BAC=90°$，$AB=AC$，∴ $\triangle ABC$ 是等腰直角三角形，∴ $A(4,3)$. 设直线 AB 的解析式为 $y=kx+b$，则 $\begin{cases}4k+b=3,\\ 2k+b=1,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}k=1,\\ b=-1,\end{cases}$ ∴ 直线 AB 的解析式为 $y=x-1$. 令 $x=0$，则 $y=-1$，∴ $P(0,-1)$. 又∵ 点 A 与点 A' 关于点 P 成中心对称，∴ 点 P 为 AA' 的中点. 设 $A'(m,n)$，则 $\frac{m+4}{2}=0$，$\frac{3+n}{2}=-1$，∴ $m=-4$，$n=-5$，∴ $A'(-4,-5)$.

3. 1.5　【解析】在 $\triangle AOB$ 中，∵ $\angle AOB=90°$，$AO=3$ cm，$BO=4$ cm，∴ $AB=\sqrt{OA^2+OB^2}=5$ cm. ∵ 点 D 为 AB 的中点，∴ $OD=\frac{1}{2}AB=2.5$ cm. ∵ $\triangle AOB$ 绕顶点 O 按顺时针方向旋转到 $\triangle A_1OB_1$ 处，∴ $OB_1=OB=4$ cm，∴ $B_1D=OB_1-OD=1.5$(cm).

4. 15°　【解析】∵ 将 $\triangle ABC$ 绕点 A 逆时针旋转 $150°$，得到 $\triangle ADE$，∴ $\angle BAD=150°$，$AD=AB$. ∵ 点 B，C，D 恰好在同一直线上，∴ $\triangle BAD$ 是顶角为 $150°$ 的等腰三角形，∴ $\angle B=\angle BDA$，∴ $\angle B=\frac{1}{2}(180°-\angle BAD)=15°$.

5. $9-5\sqrt{3}$　【解析】∵ 四边形 $ABCD$ 是正方形，∴ $\angle ABC=90°$. ∵ 把边 BC 绕点 B 逆时针旋转 $30°$ 得到线段 BP，∴ $PB=BC=AB$，$\angle PBC=30°$，∴ $\angle ABP=60°$，∴ $\triangle ABP$ 是等边三角形，∴ $\angle BAP=60°$，$AP=AB=2\sqrt{3}$. ∵ $AD=2\sqrt{3}$，∴ $AE=4$，$DE=2$，∴ $CE=2\sqrt{3}-2$，$PE=4-2\sqrt{3}$，如图，过点 P 作 $PF\perp CD$ 于点 F，∴ $PF=\frac{\sqrt{3}}{2}PE=2\sqrt{3}-3$，∴ $\triangle PCE$ 的面积为 $\frac{1}{2}CE\cdot PF=\frac{1}{2}\times(2\sqrt{3}-2)\times(2\sqrt{3}-3)=9-5\sqrt{3}$.



6. (1)【证明】∵ 在 Rt$\triangle ABC$ 中，$AC=2AB$，∴ $\angle ACB=30°$，$\angle BAC=60°$.

∵ 由旋转可得 $AB'=AB$，$\angle B'AC'=\angle BAC=60°$，$\angle BAD=90°$，∴ $\angle EAC'=\angle AC'B'=30°$，∴ $AE=C'E$.

(2)【解】由(1)知 $\triangle ABB'$ 为等边三角形，∴ $AB=BB'$，∴ $\angle AB'B=60°$，即 $\angle BB'F=\angle AB'B+\angle AB'F=150°$.

∵ $B'F=AB$，∴ $BB'=B'F$，∴ $\angle FBB'=\angle B'FB=15°$.

刷素养

7. (1)【证明】∵ $\triangle OAB$ 与 $\triangle OCD$ 为等腰直角三角形，$\angle AOB=\angle COD=90°$，∴ $OC=OD$，$OA=OB$，∵ 在 $\triangle AOD$ 与 $\triangle BOC$ 中，$\begin{cases}OA=OB,\\ \angle AOD=\angle BOC,\\ OD=OC.\end{cases}$ ∴ $\triangle AOD\cong\triangle BOC$，∴ $\angle ADO=\angle BCO$，$\angle OAD=\angle OBC$，∵ 点 H 为 BC 的中点，BC 为 Rt$\triangle BOC$ 的斜边，∴ $OH=HB$，$OH=\frac{1}{2}BC=\frac{1}{2}AD$，∴ $\angle OBH=\angle BOH=\angle OAD$.

又∵ $\angle OAD+\angle ADO=90°$，∴ $\angle ADO+\angle BOH=90°$，∴ $OH\perp AD$.

(2)【解】①若将 $\triangle COD$ 绕点 O 旋转到图(1)所示位置，则 $OH=\frac{1}{2}AD$，$OH\perp AD$. 证明如下：

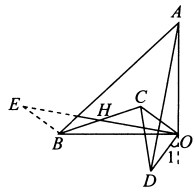
如图(1)，延长 OH 到 E，使得 $HE=OH$，连接 BE. 易证 $\triangle CHO\cong\triangle BHE$，∴ $EB=OC=DO$，$\angle COH=\angle BEH$，∴ $CO/\!/BE$.

∵ $\angle AOB=\angle COD=90°$，∴ $\angle1+\angle BOD=90°$，$\angle BOC+\angle BOD=90°$，∴ $\angle1=\angle BOC$，又∵ $\angle BOC+\angle EBO=180°$，$\angle1+\angle DOA=180°$，∴ $\angle EBO=\angle DOA$.

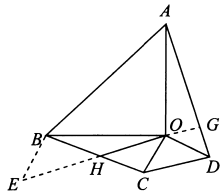
在 $\triangle BEO$ 与 $\triangle ODA$ 中，$\begin{cases}EB=DO,\\ \angle EBO=\angle DOA,\\ BO=OA,\end{cases}$ ∴ $\triangle BEO\cong\triangle ODA$(SAS)，∴ $OE=AD$，∴ $OH=\frac{1}{2}OE=\frac{1}{2}AD$.

由△BEO≌△ODA,知∠EOB=∠DAO,

∴ ∠DAO+∠AOH=∠EOB+∠AOH=∠AOB=90°,∴ $OH\perp AD$.



图(1)



图(2)

②若将△COD绕点O旋转到图(2)所示位置,

则 $OH=\frac{1}{2}AD$,$OH\perp AD$. 证明如下:

如图(2),延长OH到点E,使$HE=OH$,连接BE,延长EO交AD于点G.

易证△BEO≌△ODA,∴ $OE=AD$,∴ $OH=\frac{1}{2}OE=\frac{1}{2}AD$.

由△BEO≌△ODA,知∠EOB=∠DAO,∴ ∠DAO+∠AOG=∠EOB+∠AOG=90°,∴ ∠AGO=90°,∴ $OH\perp AD$.

23.3 课题学习 图案设计

刷基础

1. **A** 【解析】根据旋转对称图形的性质,可得出此四边形需要满足的条件:此四边形的对角线互相垂直、平分且相等,则这个四边形是正方形. 故选A.

2. **B** 【解析】第一个是轴对称图形;第二个是轴对称图形;第三个是轴对称图形;第四个是中心对称图形. 共有3个轴对称图形,1个中心对称图形. 故选B.

3. **B** 【解析】对于A,绕OB的中点旋转180°可得图(2);对于B,向右平移1个单位不能得到图(2);

对于C,先以直线AB为对称轴进行翻折,再向右平移1个单位可得图(2);

对于D,先绕点O旋转180°,再向右平移1个单位可得图(2). 故选B.

4. **D** 【解析】A可由一个基本"花瓣"绕其中心经过7次旋转,每次旋转45°得到;B可由一个基本"菱形"绕其中心经过5次旋转,每次旋转60°得到;C可由一个基本"直角三角形+圆弧"绕其中心经过5次旋转,每次旋转60°得到;D不能由基本图案旋转得到. 故选D.

5. **C** 【解析】∵ 正方形$ABCD$与正方形$EFGH$边长相等,

∴ 对角线AC,BD,EG,FH都平分对角,

∴ ∠OAB=∠ABO=∠OBC=∠OCB=45°.

∴ ①这个图案可以看成正方形$ABCD$绕点O旋转45°前后图形共同组成的,正确;

②这个图案可以看成是△ABC绕点O分别旋转45°,90°,135°,180°,225°得到的,正确;

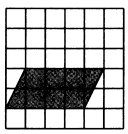
③这个图案可以看成是△BOC绕点O分别旋转45°,90°,135°,180°,225°,270°,315°得到的,正确. 故选C.

6. (1)**9:5** 【解析】由题图(1)可得 $S_1=6+6+6=18$,

由题图(2)可得 $S_2=6+1\times2+1\times2=10$,

故 $S_1:S_2=18:10=9:5$.

【解】(2)如图所示,答案不唯一.

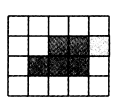


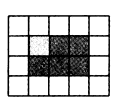
7. 【解】(1)(答案不唯一)如图(1)所示.

(2)如图(2)所示.

(3)如图(3)所示.


图(1)


图(2)


图(3)

8. 【解】1→2先向右平移1个单位长度,再逆时针旋转90°;

2→3:先向右平移1个单位长度,再向上平移1个单位长度,最后旋转180°;

3→4:向下平移1个单位长度;

4→5:先向下平移1个单位长度,再逆时针旋转90°;

5→6:先向下平移1个单位长度,再逆时针旋转90°;

6→7:先向左平移1个单位长度,再向上平移1个单位长度,最后逆时针旋转90°.

专题 与三种特殊角度的旋转有关的计算

刷难关

1. 【证明】由旋转性质可知$BN=BM$,∠MBN=60°,

∵ △ABE为等边三角形,∴ ∠EBA=60°,$BA=BE$,

∵ ∠ABE−∠ABN=∠MBN−∠ABN,∴ ∠NBE=∠MBA,

在△ABM和△EBN中,$\begin{cases}BN=BM,\\ \angle NBE=\angle MBA,\\ BA=BE,\end{cases}$

∴ △ABM≌△EBN(SAS),∴ $AM=EN$.

2. (1)【证明】∵ △DAE绕点D按逆时针方向旋转90°得到△DCM,

∴ $DE=DM$,∠EDM=90°.

∵ ∠EDF=45°,∴ ∠FDM=45°,∴ ∠EDF=∠FDM.

又∵ $DF=DF$,$DE=DM$,∴ △DEF≌△DMF,∴ $EF=MF$.

(2)【解】设$EF=MF=x$.

∵ $AE=CM=1$,$AB=BC=3$,

∴ $EB=AB-AE=3-1=2$,$BM=BC+CM=3+1=4$,

∴ $BF=BM-MF=4-x$.

在Rt△EBF中,由勾股定理得 $EB^2+BF^2=EF^2$,

即 $2^2+(4-x)^2=x^2$,解得 $x=\frac{5}{2}$,

则EF的长为$\frac{5}{2}$.

3. 【解】(1)如图(1),过点E作$EQ\perp AC$于点Q.

∵ △ADE是等腰直角三角形,∴ $EQ=QA=QD$.

设$EQ=QA=QD=a$.

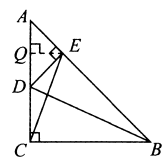
∵ 点D为AC的中点,

∴ $AD=DC=2a$,$BC=AC=4a$,$CQ=3a$,

∴ 在Rt△CDB中,$BD=\sqrt{CD^2+BC^2}=2\sqrt{5}a$.

在Rt△CQE中,$EC=\sqrt{CQ^2+EQ^2}=\sqrt{10}a$,

∴ $\frac{BD}{CE}=\frac{2\sqrt{5}a}{\sqrt{10}a}=\sqrt{2}$.



图(1)

(2)①△DEF关于点F成中心对称的图形△BHF,如图(2)所示.

②如图(2),连接CF,CH.

由(1)知,$AE=DE$,∠ADE=45°,

∵ △FDE≌△FBH,

∴ $DE=BH=AE$,∠EDF=∠FBH=135°,$EF=FH$.

∵ ∠ABC=45°,∴ ∠CBH=90°=∠CAE.

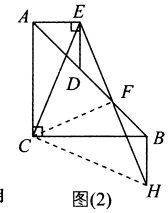
又∵ $CA=CB$,∴ △CAE≌△CBH,

∴ $EC=CH$,∠ACE=∠BCH,

∴ ∠ECH=∠ACB=90°,∴ △ECH是等腰直角三角形.

∵ $EF=FH$,∴ $CF\perp EH$,$CF=EF=FH$,

∴ △ECF是等腰直角三角形,∴ $EC=\sqrt{2}EF$,∴ $\frac{EF}{EC}=\frac{\sqrt{2}}{2}$.



图(2)

(3)**$3\sqrt{2}+2$** 【解析】如图(3),延长EF到点H,使$EF=FH$. 连接CH,延长ED交BC于点K.

∵ ∠ACK=∠AEK=90°,

∴ ∠CAE+∠EKC=180°.

∵ ∠EKC+∠EKB=180°,∴ ∠CAE=∠EKB.

∵ 点F为BD的中点,∴ $DF=FB$,∠DFE=∠BFH,$FE=FH$,

∴ △DFE≌△BFH,

∴ $DE=BH=AE$,∠DEF=∠FHB,

∴ $EK/\!/BH$,∴ ∠EKB=∠CBH,

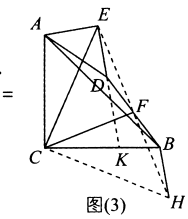
∴ ∠CAE=∠CBH.

又∵ $CA=CB$,∴ △CAE≌△CBH,

∴ $EC=CH$,∠ACE=∠BCH,

∴ ∠ECH=∠ACB=90°,∴ △ECH是等腰直角三角形.

∵ $EF=FH$,∴ $CF\perp EH$,$CF=EF=FH$,



图(3)

$\therefore \triangle ECF$ 是等腰直角三角形，$\therefore EC=\sqrt{2}CF$，

$\therefore$ 当 EC 的值最大时，CF 的值也最大，

$\because EC$ 的最大值为 $AC+AE=6+2\sqrt{2}$，$\therefore 6+2\sqrt{2}=\sqrt{2}CF$，

$\therefore CF$ 的最大值为 $3\sqrt{2}+2$.

全章综合训练

刷章测

1.B 【解析】A 项，不是轴对称图形，是中心对称图形，故此选项错误；B 项，既是轴对称图形，又是中心对称图形，故此选项正确；C 项，是轴对称图形，不是中心对称图形，故此选项错误；D 项，是轴对称图形，不是中心对称图形，故此选项错误. 故选 B.

2.C 【解析】已知原点 O 恰好是 $\square ABCD$ 对角线的交点，可得点 C 与点 A 关于原点对称，又因为关于原点对称的两个点的横纵坐标互为相反数，点 A 的坐标为 $(2,3)$，所以点 C 的坐标为 $(-2,-3)$. 故选 C.

3.C 【解析】由题可知 $\angle DOP=60°$，$OD=OP$. $\because \triangle ABC$ 是等边三角形，$\therefore \angle A=\angle C=60°$，$\angle COP=\angle COD+60°=\angle APO+\angle A=\angle APO+60°$，$\therefore \angle COD=\angle APO$，又由 $OD=PO$，$\angle C=\angle A$，易证 $\triangle COD\cong\triangle APO$，$\therefore AP=CO=AC-AO=6$. 故选 C.

4.C 【解析】$\because AC=BD=10$，$\angle ABC=\angle DEB=90°$，$\angle A=45°$，$\angle D=30°$，$\therefore BE=5$，$AB=BC=5\sqrt{2}$，

由三角板 DEB 绕点 B 逆时针旋转 $45°$ 得到 $\triangle D'E'B$，设 $\triangle D'E'B$ 与直线 AB 交于 G，可知 $\angle EBE'=45°$，$\angle E'=\angle DEB=90°$，

$\therefore \triangle GE'B$ 是等腰直角三角形，且 $BE'=BE=5$，

$\therefore BG=\sqrt{5^2+5^2}=5\sqrt{2}$，又 $\because AB=5\sqrt{2}$，$\therefore BG=AB$，即点 G 与点 A 重合.

$\therefore$ 点 A 在 $\triangle D'E'B$ 的边上. 故选 C.

5.A 【解析】$\because$ 将 $\triangle ABC$ 绕点 A 逆时针旋转 $60°$ 得到 $\triangle AB_1C_1$，$AB=\sqrt{6}$，$AC=\sqrt{3}$，$\therefore \angle CAC_1=60°$，$AC=AC_1=\sqrt{3}$. $\because \angle BAC=30°$，$\therefore \angle BAC_1=30°+60°=90°$. 在 $\mathrm{Rt}\triangle BAC_1$ 中，由勾股定理得 $BC_1=\sqrt{AB^2+AC_1^2}=\sqrt{(\sqrt{6})^2+(\sqrt{3})^2}=3$. 故选 A.

6.C 【解析】$\because \triangle OA_1B_1$ 是边长为 2 的等边三角形，

$\therefore A_1$ 的坐标为 $(1,\sqrt{3})$，B_1 的坐标为 $(2,0)$.

$\because \triangle B_1A_2B_2$ 与 $\triangle OA_1B_1$ 关于点 B_1 成中心对称，

$\therefore$ 点 A_2 与点 A_1 关于点 B_1 成中心对称.

$\because 2\times2-1=3$，$2\times0-\sqrt{3}=-\sqrt{3}$，

$\therefore$ 点 A_2 的坐标是 $(3,-\sqrt{3})$，B_2 的坐标是 $(4,0)$.

$\because \triangle B_2A_3B_3$ 与 $\triangle B_2A_2B_1$ 关于点 B_2 成中心对称，

$\therefore$ 点 A_3 与点 A_2 关于点 B_2 成中心对称.

$\because 2\times4-3=5$，$2\times0-(-\sqrt{3})=\sqrt{3}$，

$\therefore$ 点 A_3 的坐标是 $(5,\sqrt{3})$，B_3 的坐标是 $(6,0)$.

$\because \triangle B_3A_4B_4$ 与 $\triangle B_3A_3B_2$ 关于点 B_3 成中心对称，

$\therefore$ 点 A_4 与点 A_3 关于点 B_3 成中心对称，

$\because 2\times6-5=7$，$2\times0-\sqrt{3}=-\sqrt{3}$，

$\therefore$ 点 A_4 的坐标是 $(7,-\sqrt{3})$，B_4 的坐标是 $(8,0)$.

……

$\because 1=2\times1-1$，$3=2\times2-1$，$5=2\times3-1$，$7=2\times4-1$，…，

$\therefore A_n$ 的横坐标是 $2n-1$，

A_{2n+1} 的横坐标是 $2(2n+1)-1=4n+1$.

$\because$ 当 n 为奇数时，A_n 的纵坐标是 $\sqrt{3}$，当 n 为偶数时，A_n 的纵坐标是 $-\sqrt{3}$，$\therefore$ 顶点 A_{2n+1} 的纵坐标是 $\sqrt{3}$，

$\therefore \triangle B_{2n}A_{2n+1}B_{2n+1}$（$n$ 是正整数）的顶点 A_{2n+1} 的坐标是 $(4n+1,\sqrt{3})$. 故选 C.

7.D 【解析】方法一：连接 AC_1，AO.

$\because$ 四边形 $AB_1C_1D_1$ 是正方形，

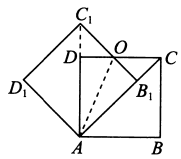
$\therefore \angle C_1AB_1=\frac{1}{2}\times90°=45°=\angle AC_1B_1$.

$\because$ 边长为 1 的正方形 $ABCD$ 绕点 A 逆时针旋转 $45°$ 后得到正方形 $AB_1C_1D_1$，

$\therefore \angle B_1AB=45°$，$\therefore \angle DAB_1=90°-45°=45°$，

$\therefore AC_1$ 过点 D，即 A，D，C_1 三点共线.

$\because$ 正方形 $ABCD$ 的边长是 1，



$\therefore$ 四边形 $AB_1C_1D_1$ 的边长是 1.

在 $\mathrm{Rt}\triangle C_1D_1A$ 中，由勾股定理得 $AC_1=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$，

则 $DC_1=\sqrt{2}-1$.

$\because \angle AC_1B_1=45°$，$\angle C_1DO=90°$，

$\therefore \triangle C_1DO$ 为直角三角形，$\therefore OD=DC_1=\sqrt{2}-1$，

$\therefore S_{\triangle ADO}=\frac{1}{2}\times OD\cdot AD=\frac{\sqrt{2}-1}{2}$，

$\therefore S_{\text{四边形}AB_1OD}=2\times\frac{\sqrt{2}-1}{2}=\sqrt{2}-1$. 故选 D.

方法二：

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是正方形，

$\therefore AC=\sqrt{2}$，$\angle OCB_1=45°$，$\therefore CB_1=OB_1$.

$\because AB_1=1$，$\therefore CB_1=OB_1=AC-AB_1=\sqrt{2}-1$，

$\therefore S_{\triangle OB_1C}=\frac{1}{2}\cdot OB_1\cdot CB_1=\frac{1}{2}(\sqrt{2}-1)^2$.

$\because S_{\triangle ADC}=\frac{1}{2}AD\cdot DC=\frac{1}{2}\times1\times1=\frac{1}{2}$，

$\therefore S_{\text{四边形}AB_1OD}=S_{\triangle ADC}-S_{\triangle OB_1C}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}(\sqrt{2}-1)^2=\sqrt{2}-1$.

故选 D.

8. 平行且相等 【解析】中心对称图形中，不在同一直线上的两条对应线段的关系是平行且相等. 故线段 AB 与线段 $A''B''$ 的关系是平行且相等.

9. $\sqrt{2}$ 【解析】过点 E 作 $EF\perp BC$ 于点 F. $\because \angle ACB=\angle ADE=90°$，$\therefore \angle EFD=\angle ACB=90°$，$\angle FED+\angle EDF=90°$，$\angle EDF+\angle ADC=90°$，$\therefore \angle DEF=\angle ADC$. 在 $\triangle DEF$ 和 $\triangle ADC$ 中，

$$\begin{cases}\angle EFD=\angle ACB,\\ \angle DEF=\angle ADC,\\ AD=DE,\end{cases}$$

$\therefore \triangle DEF\cong\triangle ADC$，$\therefore DF=AC=3$，$EF=CD$.

设 $CD=x$，则 $EF=x$，$BF=2-x$. $\therefore$ 由勾股定理得 $BE^2=x^2+(2-x)^2=2(x-1)^2+2$，$\therefore BE^2$ 的最小值是 2，$\therefore BE$ 的最小值是 $\sqrt{2}$.

10. $(b+1,-a+1)$ 【解析】过点 A 作 $AC\perp x$ 轴，过点 A' 作 $A'D\perp x$ 轴，垂足分别为 C，D，显然 $\mathrm{Rt}\triangle ABC\cong\mathrm{Rt}\triangle BA'D$，

$\because$ 点 A 的坐标为 (a,b)，点 B 的坐标是 $(1,0)$，

$\therefore OD=OB+BD=OB+AC=1+b$，$A'D=BC=OC-OB=a-1$.

$\because$ 点 A' 在第四象限，$\therefore$ 点 A' 的坐标是 $(b+1,-a+1)$.

11. $y=-\frac{3}{4}(x-2)^2+1$ 【解析】抛物线 C_1 的顶点坐标为 $(-2,-1)$，其关于原点中心对称的点的坐标为 $(2,1)$. 因为抛物线 C_1 和 C_2 关于原点成中心对称，所以两条抛物线开口方向相反，所以抛物线 C_2 的解析式为 $y=-\frac{3}{4}(x-2)^2+1$.

12. 【解】(1)由旋转的性质得 $CD=CO$，$\angle ACD=\angle BCO$.

$\because \triangle ABC$ 为等边三角形，$\therefore \angle ACB=60°$.

又 $\because \angle ACD=\angle BCO$，$\therefore \angle DCO=60°$，

$\therefore \triangle OCD$ 为等边三角形，

$\therefore \angle ODC=60°$.

(2)由旋转的性质得 $AD=OB=2$，

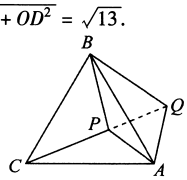
$\because \triangle OCD$ 为等边三角形，

$\therefore OD=CD=OC=3$.

$\because \angle ADC=\angle BOC=150°$，$\angle ODC=60°$，$\therefore \angle ADO=90°$，

在 $\mathrm{Rt}\triangle AOD$ 中，由勾股定理得 $AO=\sqrt{AD^2+OD^2}=\sqrt{13}$.

13. 【解】如图，连接 PQ. $\because \triangle ABC$ 为等边三角形，$\therefore \angle BAC=60°$，$AB=AC$.



$\because$ 线段 AP 绕点 A 顺时针旋转 $60°$ 得到线段 AQ，$\therefore AP=AQ=6$，$\angle PAQ=60°$，

$\therefore \triangle APQ$ 为等边三角形，$\therefore PQ=AP=6$.

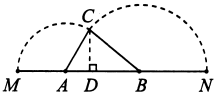
$\because \angle CAP+\angle BAP=60°$，$\angle BAP+\angle BAQ=60°$，$\therefore \angle CAP=\angle BAQ$. 在 $\triangle APC$ 和 $\triangle AQB$ 中，

$$\begin{cases}AC=AB,\\ \angle CAP=\angle BAQ,\\ AP=AQ,\end{cases}$$

$\therefore \triangle APC\cong\triangle AQB$，$\therefore PC=QB=10$. 在 $\triangle BPQ$ 中，$\because PB^2=8^2$，$PQ^2=6^2$，$BQ^2=10^2$，$\therefore PB^2+PQ^2=BQ^2$，

$\therefore \triangle PBQ$ 为直角三角形，$\angle BPQ=90°$，$\therefore S_{四边形APBQ}=S_{\triangle BPQ}+S_{\triangle APQ}=\frac{1}{2}\times6\times8+\frac{1}{2}\times6\times3\sqrt{3}=24+9\sqrt{3}$.

14. 【解】(1)$\because MN=4$，$MA=1$，$AB=x$，$\therefore BN=4-1-x=3-x$.
由旋转的性质得，$MA=AC=1$，$BN=BC=3-x$，
由三角形的三边关系得，$\begin{cases}3-x-1<x,①\\3-x+1>x,②\end{cases}$
解不等式①得，$x>1$，
解不等式②得，$x<2$，
所以 x 的取值范围是 $1<x<2$.
(2)如图，过点 C 作 $CD\perp AB$ 于点 D，设 $CD=h$，



由勾股定理得，$AD=\sqrt{AC^2-CD^2}=\sqrt{1-h^2}$，
$BD=\sqrt{BC^2-CD^2}=\sqrt{(3-x)^2-h^2}$，
$\because BD=AB-AD$，$\therefore \sqrt{(3-x)^2-h^2}=x-\sqrt{1-h^2}$，
两边平方并整理得，$x\sqrt{1-h^2}=3x-4$，
两边平方整理得，$h^2=-\frac{8(x^2-3x+2)}{x^2}$，$S^2=\left(\frac{1}{2}xh\right)^2=-\frac{1}{4}\times8(x^2-3x+2)=-2\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{1}{2}$，
$\therefore$ 当 $x=\frac{3}{2}$ 时，$\triangle ABC$ 的最大面积的平方为 $\frac{1}{2}$，
$\therefore \triangle ABC$ 的最大面积为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

15. (1)【证明】$\because AD\perp DE$，$BE\perp DE$，$\therefore \angle ADC=\angle BEC=90°$.
$\because \angle ACB=90°$，$\therefore \angle ACD+\angle BCE=90°$，$\angle DAC+\angle ACD=90°$，
$\therefore \angle DAC=\angle BCE$.
在 $\triangle ADC$ 和 $\triangle CEB$ 中，$\begin{cases}\angle CDA=\angle BEC,\\\angle DAC=\angle ECB,\\AC=BC,\end{cases}$
$\therefore \triangle ADC\cong\triangle CEB$，$\therefore AD=CE$，$CD=BE$.
$\because DC+CE=DE$，$\therefore AD+BE=DE$.
(2)【解】不成立. 理由如下：
$\because BE\perp EC$，$AD\perp CE$，
$\therefore \angle ADC=\angle BEC=90°$，
$\therefore \angle EBC+\angle ECB=90°$.
$\because \angle ACB=90°$，$\therefore \angle ECB+\angle ACE=90°$，
$\therefore \angle ACD=\angle EBC$.
在 $\triangle ADC$ 和 $\triangle CEB$ 中，$\begin{cases}\angle ADC=\angle CEB,\\\angle ACD=\angle CBE,\\AC=BC,\end{cases}$
$\therefore \triangle ADC\cong\triangle CEB$，
$\therefore AD=CE$，$CD=BE$，
$\therefore DE=EC-CD=AD-BE$.

第二十四章　圆

24.1　圆的有关性质

24.1.1　圆

刷基础

1. C　【解析】确定一个圆需要两个条件：圆心和半径. 故选 C.

2. C　【解析】因为圆上各点到圆心的距离相等，所以车轮中心与地面的距离保持不变，坐车的人感到非常平稳，所以自行车车轮要做成圆形. 故选 C.

3. O　3 cm　【解析】定点是圆心，定长是半径.

4. B　【解析】连接圆上任意两点的线段叫做弦，所以题图中只有两条弦：AB 和 CD. 故选 B.

5. D　【解析】能够重合的两个圆叫做等圆. 与此意思相同的是“圆心不同，半径相等的圆是等圆”，故①错误，②正确；等弧不仅考虑长度要相等，还要考虑是否能够互相重合，即必须是“在同圆或等圆中，能够互相重合的弧叫做等弧”，与此意思相同的是“在同圆或等圆中，长度相等的弧是等弧”故③错误，④正确；⑤⑥是优弧、劣弧的定义，正确. 所以正确的共有 4 个.

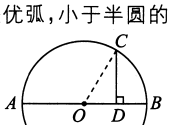
6. C　【解析】$\because MN$ 为 $\odot O$ 的弦，OM，ON 为 $\odot O$ 的半径. $\therefore OM=ON$. $\therefore \angle N=\angle M=45°$. $\therefore \angle MON=180°-45°-45°=90°$.

7. C　【解析】直径是过圆心且两端点在圆上的线段，故 C 错误.

8. 12 cm　【解析】$\because \odot O$ 的半径为 6 cm，$\therefore \odot O$ 的直径为 12 cm，即圆中最长的弦长为 12 cm.

9. $\overset{\frown}{AEC}$，$\overset{\frown}{ACE}$　$\overset{\frown}{AE}$，$\overset{\frown}{AC}$　【解析】大于半圆的弧是优弧，小于半圆的弧是劣弧，半圆既不是优弧，也不是劣弧.

10. 10　【解析】如图，连接 OC. 在 $\mathrm{Rt}\triangle ODC$ 中，

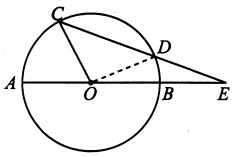


$\because CD=4$，$OD=3$，$\therefore OC=\sqrt{OD^2+CD^2}=\sqrt{3^2+4^2}=5$. $\therefore AB=2OC=10$.

11. 108°　【解析】设 $\angle COD=\angle A=x°$，则在等腰三角形 OAB 和 OCD 中，$\angle AOB=(180-2x)°$，$\angle C=\angle D=\left(\frac{180-x}{2}\right)°$. $\because \angle AOB+\angle C=180°$，$\therefore 180-2x+\frac{180-x}{2}=180$.
解得 $x=36$. $\therefore \angle AOB=(180-2x)°=108°$.

12. 【证明】$\because OA$，OB 是 $\odot O$ 的两条半径，$\therefore OA=OB$.
$\because C$，D 分别是半径 OA，OB 的中点，$\therefore OC=OD$.
在 $\triangle OCB$ 和 $\triangle ODA$ 中，$\because \begin{cases}OB=OA,\\\angle COB=\angle DOA,\\OC=OD,\end{cases}$
$\therefore \triangle OCB\cong\triangle ODA$(SAS). $\therefore AD=BC$.

13. 【解】如图，连接 OD.



$\because AB=2DE$，$AB=2OD$，$\therefore OD=DE$.
$\therefore \angle DOE=\angle E=20°$.
$\therefore \angle CDO=\angle DOE+\angle E=40°$.
$\because OC=OD$，$\therefore \angle C=\angle ODC=40°$.
$\therefore \angle AOC=\angle C+\angle E=60°$.

24.1.2　垂直于弦的直径

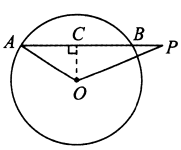
刷基础

1. C　【解析】因为对称轴是直线，直径是线段，所以不能说“直径是圆的对称轴”.

2. ②③④　【解析】根据圆的旋转不变性即可解决，②③④符合要求.

3. A　【解析】$\because OC\perp AB$，$\therefore AD=BD=\frac{1}{2}AB=\frac{1}{2}\times8=4$. 在 $\mathrm{Rt}\triangle OAD$ 中，$\because OA=5$，$AD=4$，$\therefore OD=\sqrt{OA^2-AD^2}=3$. $\therefore CD=OC-OD=5-3=2$.

4. D　【解析】如图，过点 O 作 $OC\perp AB$ 于点 C，则 $\angle OCP=\angle ACO=90°$. $\because OC\perp AB$，OC 过点 O，$\therefore AC=BC=\frac{1}{2}AB=\frac{1}{2}\times8=4$(cm).



$\because BP=2$ cm，$\therefore PC=BC+BP=6$(cm). 在 $\mathrm{Rt}\triangle ACO$ 中，由勾股定理得 $OC=\sqrt{OA^2-AC^2}=\sqrt{5^2-4^2}=3$(cm)，在 $\mathrm{Rt}\triangle PCO$ 中，由勾股定理得 $OP=\sqrt{PC^2+OC^2}=\sqrt{6^2+3^2}=3\sqrt{5}$(cm). 故选 D.

5. 14 或 2　【解析】分两种情况：(a)如图(1)，当 AB，CD 在圆心 O 的两侧时，过点 O 作 $OE\perp CD$ 于点 E，延长 EO 交 AB 于点 F，连接 OD，OB. $\because AB/\!/CD$，$\therefore EF\perp AB$. $\therefore ED=\frac{1}{2}CD$，$BF=\frac{1}{2}AB$.
$\because AB=12$，$CD=16$，$\therefore ED=\frac{1}{2}\times16=8$，$BF=\frac{1}{2}\times12=6$. 由勾股定理得，$OE=\sqrt{OD^2-ED^2}=\sqrt{10^2-8^2}=6$，$OF=\sqrt{OB^2-BF^2}=\sqrt{10^2-6^2}=8$，$\therefore EF=OE+OF=6+8=14$.(b)如图(2)，当 AB，CD 在圆心 O 的同侧时，同理，得 $OE=6$，$OF=8$，$\therefore EF=OF-OE=8-6=2$. 综上所述，$AB$ 和 CD 的距离为 14 或 2.

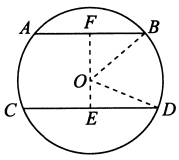


图 (1)

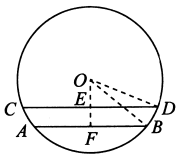
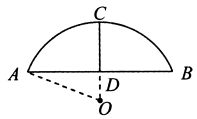


图 (2)

6. C 【解析】①中若直线与弦不垂直,则结论不成立;②若垂线不是直径,则结论不成立;③若所过的弦中点所在的弦本身就是直径,则结论不成立. 故①②③都不正确,④正确.

7. B 【解析】垂径定理包含这样一个推论:"平分弦所对的一条弧的直径垂直平分这条弦,并且平分这条弦所对的另一条弧",故①②③都正确,④错误.

8. D 【解析】如图,设点 O 为圆心,连接 OA, OD. 由题意可知,$OD \perp AB$, $OA = 13$ 米. 由垂径定理可知,$AD = \frac{1}{2}AB = 12$ 米,∴ 由勾股定理可知,$OD = 5$ 米,∴ $CD = OC - OD = 8$ 米. 故选 D.



9. 【解】1 10

如图,连接 CO. ∵ $BO \perp CD$,

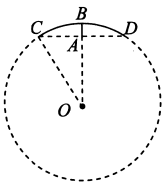
∴ $CA = \frac{1}{2}CD = 5$.

设 $CO = OB = x$ 寸,则 $AO = (x-1)$ 寸.

在 $\mathrm{Rt}\triangle CAO$ 中,∵ $AO^2 + CA^2 = CO^2$,

∴ $(x-1)^2 + 5^2 = x^2$. 解得 $x = 13$,

∴ $\odot O$ 的直径为 26 寸.



刷易错

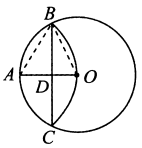
10. ①④ 【解析】垂径定理是"垂直于弦的直径平分弦,并且平分弦所对的两条弧",故①正确;垂径定理的推论是"平分弦(不是直径)的直径垂直于弦,并且平分弦所对的两条弧",要注意:任意两条直径都互相平分,但未必互相垂直,只有平分不是直径的弦的直径才一定垂直于弦,故②错误;平分弦所对的一条弧的直径一定平分另一条弧,这里的"弦"可以是直径,故③错误,④正确.

易错警示 垂径定理的推论"平分弦(不是直径)的直径垂直于弦,并且平分弦所对的两条弧"中,括号内的"不是直径"这个限制条件切勿忽视. 对垂径定理及其推论更全面的解读是由下列五个条件中的两个,一定能推出其余三个:①过圆心;②垂直于弦;③平分弦(不是直径);④平分弦所对的劣弧;⑤平分弦所对的优弧. 简记为"知二推三".

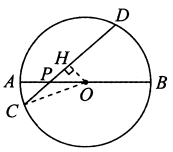
刷提升

1. A 【解析】∵ 弦 $CD \perp AB$ 于点 E, $CD = 8$ cm,∴ $CE = \frac{1}{2}CD = 4$ cm. 在 $\mathrm{Rt}\triangle OCE$ 中,$OC = 5$ cm, $CE = 4$ cm,∴ $OE = \sqrt{OC^2 - CE^2} = 3$ cm,∴ $AE = AO + OE = 5 + 3 = 8$(cm). 故选 A.

2. A 【解析】如图,设 OA 与 BC 相交于点 D,连接 AB, OB. ∵ $AB = OA = OB = 6$,∴ $\triangle OAB$ 是等边三角形. 根据垂径定理可得,OA 垂直平分 BC,由勾股定理得 $BD = \sqrt{6^2 - 3^2} = 3\sqrt{3}$,所以 $BC = 6\sqrt{3}$. 故选 A.

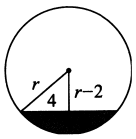


3. C 【解析】如图,作 $OH \perp CD$ 于点 H,连接 OC. ∵ $OH \perp CD$,∴ $HC = HD$. ∵ $AP = 2$, $BP = 6$,∴ $AB = 8$,∴ $OA = 4$,∴ $OP = OA - AP = 2$. 在 $\mathrm{Rt}\triangle OPH$ 中,∵ $\angle OPH = 30°$,∴ $\angle POH = 60°$,∴ $OH = \frac{1}{2}OP = 1$. 在 $\mathrm{Rt}\triangle OHC$ 中,∵ $OC = 4$, $OH = 1$,∴ $CH = \sqrt{OC^2 - OH^2} = \sqrt{4^2 - 1^2} = \sqrt{15}$,∴ $CD = 2CH = 2\sqrt{15}$. 故选 C.

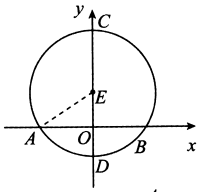


4. B 【解析】如图,连接 OA, OD,作 $OE \perp AC$ 于点 E, $OF \perp BD$ 于点 F. ∵ $AC \perp BD$,∴ 四边形 $OEPF$ 为矩形. 设 $OE = x\,(x > 0)$,∵ $OP = \sqrt{3}$,根据勾股定理,得 $OF = EP = \sqrt{OP^2 - OE^2} = \sqrt{3 - x^2}$. 在 $\mathrm{Rt}\triangle AOE$ 中,∵ $OA = 2$,∴ $AE = \sqrt{OA^2 - OE^2} = \sqrt{4 - x^2}$. ∴ $AC = 2AE = 2\sqrt{4 - x^2}$. 同理,$BD = 2DF = 2\sqrt{OD^2 - OF^2} = 2\sqrt{x^2 + 1}$. 又∵ 任意对角线互相垂直的四边形的面积等于对角线乘积的 $\frac{1}{2}$,∴ $S_{四边形ABCD} = \frac{1}{2}AC \cdot BD = \frac{1}{2} \times 2\sqrt{4 - x^2} \times 2\sqrt{x^2 + 1} = 2\sqrt{(4 - x^2)(x^2 + 1)} = 2\sqrt{-\left(x^2 - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{25}{4}}$. 当 $x^2 = \frac{3}{2}$,即 $x = \frac{\sqrt{6}}{2}$ 时,四边形 $ABCD$ 的面积最大,最大面积为 $2\sqrt{\frac{25}{4}} = 5$.

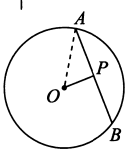
5. 10 【解析】如图,设铅球的半径为 r cm,在由铅球的半径、小坑的半径和圆心到弦的垂线段组成的直角三角形中,根据勾股定理,得 $r^2 = (r-2)^2 + 16$. 解得 $r = 5$. 故 $2r = 10$,即该铅球的直径为 10 cm.



6. 4 【解析】如图,连接 AE. ∵ $C(0,4)$, $D(0,-1)$,∴ $CD = 5$, $CO = 4$, $OD = 1$,∴ $AE = ED = 2.5$,∴ $OE = 2.5 - 1 = 1.5$. ∵ x 轴 $\perp y$ 轴,∴ $\angle EOA = 90°$. 在 $\mathrm{Rt}\triangle EOA$ 中,由勾股定理得 $AO = \sqrt{AE^2 - OE^2} = \sqrt{(2.5)^2 - (1.5)^2} = 2$. ∵ x 轴 $\perp y$ 轴,圆心 E 在 y 轴上,∴ $AB = 2AO = 4$.



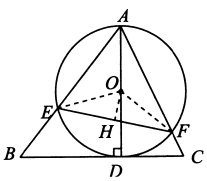
7. 6 $2\sqrt{6}$ 【解析】当 AB 为过点 P 的直径时,AB 最长为 6;当 $OP \perp AB$ 时,AB 为过点 P 的最短弦. 如图,连接 OA. ∵ $OP \perp AB$,在 $\mathrm{Rt}\triangle APO$ 中,$AP = PB = \frac{1}{2}AB = \sqrt{OA^2 - OP^2} = \sqrt{3^2 - (\sqrt{3})^2} = \sqrt{6}$. ∴ $AB = 2\sqrt{6}$.



8. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ 【解析】如图,连接 OE, OF,过点 O 作 $OH \perp EF$,垂足为 H. 在 $\triangle OAE$ 中,∵ $OA = OE$,∴ $\angle OAE = \angle OEA$,∴ $\angle EOD = \angle OAE + \angle OEA = 2\angle OAE$. 同理,在 $\triangle OAF$ 中,$\angle FOD = 2\angle OAF$.

∴ $\angle EOF = \angle EOD + \angle FOD = 2\angle OAE + 2\angle OAF = 2\angle EAF = 120°$. ∵ $\angle EOH = \angle FOH$,∴ $\angle EOH = 60°$.

在 $\mathrm{Rt}\triangle EOH$ 中,∵ $\angle OEH = 30°$,∴ $OH = \frac{1}{2}OE$, $EH = \sqrt{OE^2 - OH^2} = \sqrt{OE^2 - \left(\frac{1}{2}OE\right)^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}OE$. ∵ $OH \perp EF$,∴ $EH = FH$. ∴ $EF = 2EH = \frac{\sqrt{3}}{2}AD$,由垂线段的性质可知,当 AD 为 $\triangle ABC$ 的边 BC 上的高时,$\odot O$ 的直径最短,在 $\mathrm{Rt}\triangle ADB$ 中,$\angle ABC = 45°$, $AB = \sqrt{2}$,∴ $AD = BD = 1$,即此时 $\odot O$ 的直径为 1. 所以线段 EF 长度的最小值为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$.



9. 【解】(1)如图,连接 OA. 由题意,得 $AD = \frac{1}{2}AB = 30$(米), $OD = r - 18$ 米.

在 $\mathrm{Rt}\triangle ADO$ 中,由勾股定理得 $r^2 = 30^2 + (r-18)^2$. 解得 $r = 34$.

∴ 圆弧所在的圆的半径 r 为 34 米.

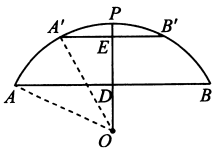
(2)不需要采取紧急措施. 理由如下:

如图,连接 OA'. ∵ $OE = OP - PE = 30$ 米,∴ 在 $\mathrm{Rt}\triangle A'EO$ 中,由勾股定理,得 $A'E^2 = A'O^2 - OE^2$.

∴ $A'E = \sqrt{A'O^2 - OE^2} = \sqrt{34^2 - 30^2} = 16$(米).

∴ $A'B' = 32$ 米. ∵ $A'B' = 32$ 米 > 30 米,

∴ 当 $PE = 4$ 米时,不需要采取紧急措施.



刷素养

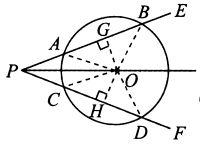
10. (1)【证明】如图(1),过点 O 作 $OG \perp AB$ 于点 G, $OH \perp CD$ 于点 H,连接 OA, OC, OB, OD.

由垂径定理知 $AG = BG$, $CH = DH$.

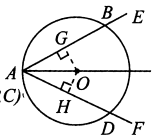
∵ 点 O 是 $\angle EPF$ 平分线上的点,∴ $\angle EPO = \angle FPO$,∴ $OG = OH$.

在 $\mathrm{Rt}\triangle OBG$ 和 $\mathrm{Rt}\triangle ODH$ 中,

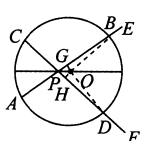
∵ $OG=OH, OB=OD$, ∴ Rt△OBG≌Rt△ODH,
∴ $GB=HD$, ∴ $AB=CD$.
【解】(2)点 P 在圆上,结论成立. 理由如下:
如图(2),点 P 在圆上,此时点 P, A, C 重合于点 A,过点 O 作 $OG\perp AB$ 于点 G, $OH\perp AD$ 于点 H. ∴ $AG=GB, AH=HD$.
∵ $\angle EAO=\angle DAO$, ∴ $OG=OH$.
在 Rt△OAG 和 Rt△OAH 中,
∵ $OA=OA, OG=OH$, ∴ Rt△OAG≌Rt△OAH,
∴ $AG=AH$, ∴ $AB=AD$,
即点 P 在圆上,结论成立.
(3)点 P 在圆内,结论成立. 理由如下:
如图(3),顶点 P 在圆内,过点 O 作 $OG\perp AB$ 于点 G, $OH\perp CD$ 于点 H,连接 OB, OD.
由垂径定理得 $AG=GB, CH=HD$.
∵ $\angle EPO=\angle FPO$, ∴ $OG=OH$.
在 Rt△OBG 和 Rt△ODH 中,
∵ $OB=OD, OG=OH$, ∴ Rt△OBG≌Rt△ODH,
∴ $GB=HD$, ∴ $AB=CD$,
即点 P 在圆内,结论成立.



图(1)



图(2)



图(3)

24.1.3 弧、弦、圆心角

刷基础

1. B 【解析】顶点在圆心的角叫做圆心角. 4 个选项图中只有图 B 符合要求.

2. 60° 【解析】由题意,△ABO 是边长为 5 的等边三角形,所以弦 AB 所对的圆心角为 60°.

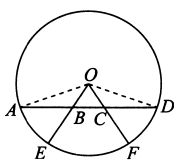
3. D 【解析】在大小不等的两圆中,即使位于两圆中的两弧的度数相等,这两条弧也不是等弧,故 D 错误.

4. C 【解析】∵ $\angle AOB=\angle COD$, ∴ $\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{CD}$. ∴ $\overset{\frown}{AB}+\overset{\frown}{BC}=\overset{\frown}{CD}+\overset{\frown}{BC}$, 即 $\overset{\frown}{AC}=\overset{\frown}{BD}$.

5. C 【解析】∵ $AB=CD, OA=OD, OB=OC$, ∴ △OAB≌△ODC(SSS), $\angle AOB=\angle DOC$. ∵ $OM\perp CD, ON\perp AB$, ∴ $OM=ON, DM=CM, AN=NB$, ∴ $AN=DM$. ∵ $OA=OD, ON=OM$, ∴ Rt△AON≌Rt△DOM(HL), ∴ $\angle AON=\angle DOM$, ∴ A、B、D 正确. 故选 C.

6. 3 【解析】在同圆或等圆中,相等的圆心角所对的弦相等.
∵ $\angle AOB=\angle AOC, AB=8$, ∴ $AC=AB=8$. ∵ $OD\perp AC$, ∴ $DC=\frac{1}{2}AC=4$. ∴ $OD=\sqrt{OC^2-CD^2}=\sqrt{5^2-4^2}=3$.

7. 【证明】如图,连接 OA, OD.
∵ $OA=OD$, ∴ $\angle A=\angle D$. 又∵ $AB=CD$,
∴ △OAB≌△ODC(SAS).
∴ $\angle AOB=\angle DOC$. ∴ $\overset{\frown}{AE}=\overset{\frown}{DF}$.



8. A 【解析】∵ 点 C 是$\overset{\frown}{AB}$的中点, ∴ $\angle AOC=\angle BOC$. ∵ $OA=OB$, ∴ $\angle B=\angle A=50°$.
∴ $\angle AOB=80°$. ∴ $\angle BOC=40°$.

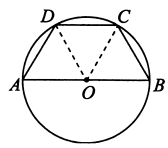
9. A 【解析】∵ $\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{CD}$, ∴ $\overset{\frown}{AB}-\overset{\frown}{BC}=\overset{\frown}{CD}-\overset{\frown}{BC}$. ∴ $\overset{\frown}{AC}=\overset{\frown}{BD}$.
∴ $AC=BD$.

10. 51° 【解析】∵ $\overset{\frown}{BC}=\overset{\frown}{CD}=\overset{\frown}{DE}$, $\angle COD=34°$, ∴ $\angle BOC=\angle EOD=\angle COD=34°$. ∴ $\angle AOE=180°-\angle EOD-\angle COD-\angle BOC=78°$. 又
∵ $OA=OE$, ∴ $\angle AEO=\angle OAE$, ∴ $\angle AEO=\frac{1}{2}\times(180°-78°)=51°$.

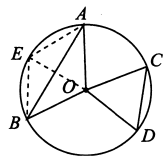
11. 【证明】(1)如图,连接 OC, OF.
∵ $AC=BF$, ∴ $\angle COA=\angle BOF$,
∴ $\angle COB=\angle FOA$. ∴ $\overset{\frown}{BC}=\overset{\frown}{AF}$.
(2)∵ $\angle COA=\angle BOF, OC=OF=OA=OB$,
∴ $\angle CAB=\angle OCA=\angle BFC=\angle ABF$,
∴ $\angle BFC=\angle ACF$.
∵ $CD/\!/EF$, ∴ $\angle AMC=\angle ANE$.
又∵ $\angle BNF=\angle ANE$. ∴ $\angle AMC=\angle BNF$.
在△AMC 和△BNF 中, $\begin{cases}\angle AMC=\angle BNF,\\ \angle CAB=\angle ABF,\\ AC=BF,\end{cases}$
∴ △AMC≌△BNF(AAS), ∴ $AM=BN$.

刷提升

1. C 【解析】如图,连接 OC, OD. ∵ $BC=CD=DA$, ∴ $\angle COB=\angle COD=\angle DOA$. ∵ $\angle COB+\angle COD+\angle DOA=180°$, ∴ $\angle COB=\angle COD=\angle DOA=60°$. ∴ △$BCO$ 和△OCD 都是等边三角形.
∴ $\angle BCD=60°\times2=120°$.

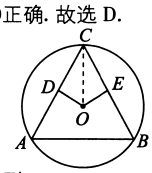


2. C 【解析】如图,过点 O 作 $OE\perp AB$ 交⊙O 于点 E,连接 AE, BE,则 $\angle AOE=\angle BOE=\frac{1}{2}\angle AOB$. ∵ $\angle COD=\frac{1}{2}\angle AOB$, ∴ $\angle AOE=\angle BOE=\angle COD$, ∴ $CD=AE=BE$.
在△ABE 中, ∵ $AE+BE>AB$, ∴ $2CD>AB$.

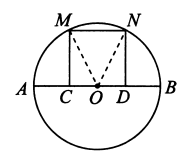


3. D 【解析】∵ $\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{CD}$,根据同弧所对的弦相等, ∴ $AB=CD$,故①正确. ∵ $\overset{\frown}{AB}-\overset{\frown}{CB}=\overset{\frown}{CD}-\overset{\frown}{CB}$, ∴ $\overset{\frown}{AC}=\overset{\frown}{BD}$,故④正确. 根据同弧所对的弦、圆心角相等,故②③正确. 故选 D.

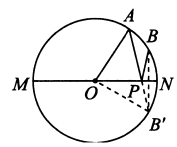
4. A 【解析】如图,当 $OD\perp AC, OE\perp BC$ 时, $\angle ACB$ 最大,即 AB 最大. 连接 OC. ∵ ⊙O 的半径为 $2\sqrt{2}$, $OD=\sqrt{2}$, ∴ $\angle ACO=30°$, ∴ $AC=2CD=2\sqrt{OC^2-OD^2}=2\sqrt{6}$. 同理可得 $\angle BCO=30°$, ∴ $\angle ACB=60°$. ∵ $OD=OE, OD\perp AC, OE\perp BC$, ∴ $CD=CE$, ∴ $AC=BC$. ∴ △ABC 是等边三角形.
∴ $AB=AC=2\sqrt{6}$. 即 AB 的最大值为 $2\sqrt{6}$.



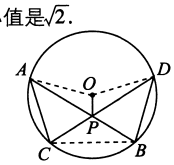
5. C 【解析】如图,连接 OM, ON. ∵ C, D 分别是 OA, OB 的中点, ∴ $OC=OD, OC=\frac{1}{2}OM, OD=\frac{1}{2}ON$. ∵ $MC\perp AB, ND\perp AB$, ∴ $\angle OMC=30°$, $\angle OND=30°$, ∴ $MC=\sqrt{3}OC, ND=\sqrt{3}OD$, ∴ $MC=ND$,故①正确. ∵ $\angle MOC=\angle NOD=60°$, ∴ $\angle MON=60°$, ∴ $\overset{\frown}{AM}=\overset{\frown}{MN}=\overset{\frown}{NB}$,故②正确. ∵ $CM/\!/ND, MC=ND$, ∴ 四边形 $MCDN$ 为平行四边形. ∵ $\angle MCO=90°$, ∴ 四边形 $MCDN$ 为矩形.
∵ $MC=\sqrt{3}OC$, ∴ $MC=\frac{\sqrt{3}}{2}CD$, ∴ 四边形 $MCDN$ 不是正方形,故③错误. ∵ 四边形 $MCDN$ 为矩形, ∴ $MN=CD$, ∴ $MN=\frac{1}{2}AB$,故④正确. 综上,①②④正确. 故选 C.



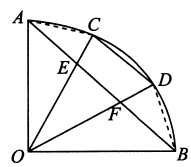
6. $\sqrt{2}$ 【解析】如图,作点 B 关于 MN 对称的点 B',连接 AB'交 MN 于点 P,连接 BB', OB',则 $PB=PB'$,此时 $AP+BP=AB'$最小. ∵ 点 A 是半圆上一个三等分点,点 B 是$\overset{\frown}{AN}$的中点,
∴ $\angle AON=180°\div3=60°$, $\angle B'ON=\angle AON\div2=30°$, ∴ $\angle AOB'=\angle AON+\angle B'ON=90°$.
∵ $OA=OB'=1$, ∴ $AB'=\sqrt{2}$. ∴ $AP+BP$ 的最小值是$\sqrt{2}$.



7. 50° 【解析】如图,连接 OA, OD, BC. ∵ $AB=CD$, ∴ $\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{CD}$, ∴ $\overset{\frown}{AC}=\overset{\frown}{BD}$, ∴ $AC=BD$, ∴ △ABC≌△DCB(SSS), ∴ $\angle PAC=\angle PDB$, ∴ △APC ≌ △DPB(AAS), ∴ $PA=PD$, ∴ △AOP≌△DOP(SSS), ∴ $\angle APO=\angle DPO=65°$, ∴ $\angle APD=130°$, ∴ $\angle APC=50°$.



8. 【证明】如图,连接 AC, BD.
∵ 在⊙O 中, $\angle AOB=90°$,
C, D 是$\overset{\frown}{AB}$的三等分点,
∴ $\angle AOC=\angle COD=\angle BOD=\frac{1}{3}\angle AOB=\frac{1}{3}\times90°=30°$.
∵ $OA=OB$, ∴ $\angle OAB=\angle OBA=45°$,
∴ $\angle OEF=\angle OAB+\angle AOC=45°+30°=75°$,



$\angle ACE=\frac{180°-30°}{2}=75°$，$\angle AEC=\angle OEF$，

$\therefore \angle ACO=\angle AEC$，

$\therefore AC=AE$. 同理，$BF=BD$.

$\because C,D$ 是$\overset{\frown}{AB}$的三等分点，

$\therefore AC=CD=BD$，$\therefore AE=BF=CD$.

刷素养

9. 【证明】(1)如图，连接 OC.

$\because$ 点 C 是优弧 ACB 的中点，$\therefore \overset{\frown}{AC}=\overset{\frown}{BC}$，

$\therefore \angle COD=\angle COE$，

$\because OA=OB$，$AD=BE$，$\therefore OD=OE$.

又$\because OC=OC$，$\therefore \triangle COD\cong\triangle COE$(SAS)，

$\therefore CD=CE$.

(2)如图，连接 OM，ON.

$\because \triangle COD\cong\triangle COE$，

$\therefore \angle CDO=\angle CEO$，$\angle OCD=\angle OCE$.

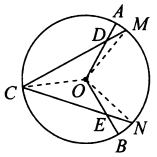
$\because OC=OM=ON$，

$\therefore \angle OCM=\angle OMC$，$\angle OCN=\angle ONC$，

$\therefore \angle OMD=\angle ONE$.

$\because \angle ODC=\angle DMO+\angle MOD$，$\angle CEO=\angle CNO+\angle NOE$，

$\therefore \angle MOD=\angle NOE$，$\therefore \overset{\frown}{AM}=\overset{\frown}{BN}$.



24.1.4 圆周角

刷基础

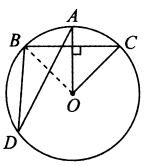
1. C 【解析】根据圆周角的定义，只有选项 C 符合要求.

2. 8 【解析】以点 A，C 为顶点的圆周角各有 1 个，以点 B，D 为顶点的圆周角各有 3 个，共有 8 个圆周角.

3. C 【解析】由题意，点 A，B，C，D 都在以 AB 为直径的圆上. $\because$ 点 D 对应 54°，即 $\angle AOD=54°$，$\therefore \angle ACD=\frac{1}{2}\angle AOD=27°$.

$\therefore \angle BCD=90°-\angle ACD=63°$.

4. B 【解析】如图，连接 OB. $\because OA\perp BC$，$\angle AOC=50°$，$\therefore \angle AOB=\angle AOC=50°$，则 $\angle ADB=\frac{1}{2}\angle AOB=25°$. 故选 B.

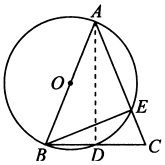


5. D 【解析】$\because BC$ 是$\odot O$的直径，$\therefore \angle A=90°$.

6. D 【解析】$\because AB$ 是$\odot O$的直径，$\therefore \angle ADB=90°$. $\therefore \angle ABD+\angle BAD=90°$. 又$\because \angle ACD$ 和 $\angle ABD$ 是同弧所对的圆周角，$\therefore \angle ACD=\angle ABD$. $\therefore \angle ACD+\angle BAD=90°$，即与 $\angle ACD$ 互余的角是 $\angle BAD$.

7. A 【解析】$\because AB=AC$，$\angle BCA=65°$，$\therefore \angle CBA=\angle BCA=65°$，$\angle BAC=50°$. $\because CD/\!/AB$，$\therefore \angle ACD=\angle BAC=50°$. 又$\because \angle ABD=\angle ACD=50°$，$\therefore \angle DBC=\angle CBA-\angle ABD=15°$. 故选 A.

8. ①②③ 【解析】如图，连接 AD. $\because AB$ 是$\odot O$的直径，$\therefore \angle ADB=90°$. $\therefore AD\perp BC$. 又$\because AB=AC$，$\therefore BD=CD$，故②正确. $\because AD$ 是 $\angle BAC$ 的平分线，$\therefore \angle BAD=\angle CAD$. $\therefore \overset{\frown}{BD}=\overset{\frown}{DE}$. 故③正确. $\because AB$ 是$\odot O$的直径，$\therefore \angle AEB=90°$. $\because \angle BAC=45°$，$\therefore \angle ABE=45°$. $\therefore AE=BE$. $\because BE$ 是 Rt$\triangle BCE$ 的直角边，BC 是斜边，$\therefore BE\neq BC$. $\therefore AE\neq BC$. 故④错误. 由圆周角定理知，$\angle EBC=\angle DAC=\frac{1}{2}\angle BAC=22.5°$，故①正确. 综上，正确的结论是①②③.



9. D 【解析】$\because \angle BOD=110°$，$\therefore \angle BAD=55°$. $\because$ 四边形 $ABCD$ 内接于$\odot O$，$\therefore \angle BCD+\angle BAD=180°$. $\therefore \angle BCD=180°-\angle BAD=180°-55°=125°$.

10. C 【解析】如图，延长 AE 交$\odot O$于点 M.

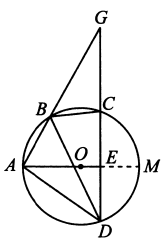
$\because$ 四边形 $ABCD$ 是$\odot O$的内接四边形，

$\therefore \angle GBC=\angle ADC=50°$. $\because AE\perp CD$，

$\therefore \angle AED=90°$. $\therefore \angle EAD=90°-50°=40°$.

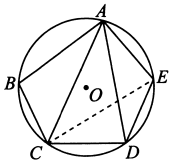
$\because AO\perp CD$，$\therefore \overset{\frown}{CM}=\overset{\frown}{DM}$.

$\therefore \angle DBC=2\angle EAD=80°$.



11. 210° 【解析】如图，连接 CE. $\because$ 五边形 $ABCDE$ 是$\odot O$的内接五边形，$\therefore$ 四边形 $ABCE$ 是$\odot O$的内接四边形. $\therefore \angle B+\angle AEC=180°$.

$\because \angle CED=\angle CAD=30°$，$\therefore \angle B+\angle AED=180°+30°=210°$.



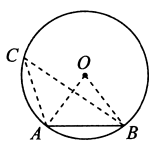
刷易错

12. 【解】有两种情况：

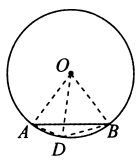
①如图(1)所示，连接 OA，OB，在优弧 AB 上任取一点 C，连接 CA，CB. 因为 $AB=OA=OB$，所以 $\angle AOB=60°$，所以 $\angle ACB=\frac{1}{2}\angle AOB=30°$，即弦 AB 所对的圆周角等于 30°.

②如图(2)所示，连接 OA，OB，在劣弧 AB 上任取一点 D，连接 AD，OD，BD，则 $\angle BAD=\frac{1}{2}\angle BOD$，$\angle ABD=\frac{1}{2}\angle AOD$，所以 $\angle BAD+\angle ABD=\frac{1}{2}(\angle BOD+\angle AOD)=\frac{1}{2}\angle AOB$. 因为 AB 的长等于$\odot O$的半径，所以$\triangle AOB$ 为等边三角形，$\angle AOB=60°$，所以 $\angle BAD+\angle ABD=30°$，$\angle ADB=180°-(\angle BAD+\angle ABD)=150°$，即弦 AB 所对的圆周角为 150°.

综上，弦 AB 所对的圆周角的度数为 30°或 150°.



图(1)

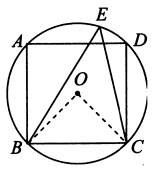


图(2)

易错警示 本题容易因考虑不周而漏解. 一条直径所对的圆周角有无数个，每个角都是 90°. 一条非直径的弦所对的圆周角也有无数个，这些圆周角有锐角和钝角两类，同一类型的圆周角相等，不同类型的圆周角互补. 本题容易忽略一条非直径的弦对着两条长度不等的弧，这两条弧所对的圆周角相等或互补.

刷提升

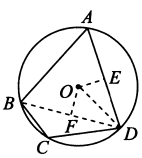
1. B 【解析】如图，连接 OB，OC. $\because$ $\odot O$是正方形 $ABCD$ 的外接圆，$\therefore \angle BOC=90°$. $\therefore \angle BEC=\frac{1}{2}\angle BOC=45°$.



2. A 【解析】$\because$ $\odot O$的半径 OD 垂直于弦 AB，垂足为点 C，$AB=8$，$\therefore AC=BC=\frac{1}{2}AB=4$. 设 $OA=r$，则 $OC=r-2$. 在 Rt$\triangle AOC$ 中，$\because AC^2+OC^2=OA^2$，即 $4^2+(r-2)^2=r^2$，解得 $r=5$. $\therefore AE=10$. $\because AE$ 是直径，$\therefore \angle ABE=90°$. $\therefore BE=\sqrt{AE^2-AB^2}=\sqrt{10^2-8^2}=6$. $\therefore S_{\triangle BCE}=\frac{1}{2}BC\cdot BE=\frac{1}{2}\times4\times6=12$.

3. C 【解析】$\because$ 四边形 $BCDE$ 内接于$\odot O$，且 $\angle EDC=135°$，$\therefore \angle EFC=\angle ABC=180°-\angle EDC=45°$. $\because \angle ACB=90°$，$\therefore \triangle ABC$是等腰直角三角形，$\therefore AC=BC$. 又$\because EF$ 是$\odot O$的直径，$\therefore \angle EBF=\angle ECF=\angle ACB=90°$，$\therefore \angle BCF=\angle ACE$. $\because$ 四边形 $BECF$ 是$\odot O$的内接四边形，$\therefore \angle AEC=\angle BFC$，$\therefore \triangle ACE\cong\triangle BCF$(AAS)，$\therefore AE=BF$. $\because$ 在 Rt$\triangle ECF$ 中，$CF=2\sqrt{2}$，$\angle EFC=45°$，$\therefore EF^2=16$. $\because$ 在 Rt$\triangle EBF$ 中，$EF^2=BE^2+BF^2$，$\therefore AE^2+BE^2=BF^2+BE^2=EF^2=16$. 故选 C.

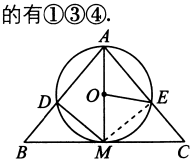
4. D 【解析】如图，连接 BD，过点 O 作 $OE\perp AD$ 于点 E，作 $OF\perp BD$ 于点 F，连接 OD. $\because$ $\odot O$为四边形 $ABCD$ 的外接圆，$\angle BCD=120°$，$\therefore \angle BAD=60°$. $\because AD=AB=2$，$\therefore \triangle ABD$ 是等边三角形. $\therefore \angle ADB=60°$，$AD=BD$. $\because OE\perp AD$，$OF\perp BD$，$\therefore DE=DF$. $\because OD=OD$，$\therefore$ Rt$\triangle ODE\cong$



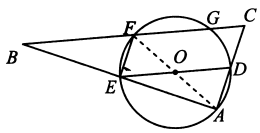
Rt△ODF(HL). ∴ $\angle ODE=\angle ODF=30°$. ∴ $OE=\frac{\sqrt{3}}{3}DE$. ∴ $OD=\frac{2\sqrt{3}}{3}DE$. ∵ $AD=2$, ∴ $DE=1$. ∴ $OD=\frac{2\sqrt{3}}{3}$, 即⊙O 的半径为$\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

5. ①③④ 【解析】①∵ AB 是⊙O 的直径, ∴ $\angle ADB=90°$, ∴ $AD\perp BD$, 故①一定成立. ②$\angle AOC$ 是⊙O 的圆心角, $\angle AEC$ 是⊙O 的圆内部的角, 无法证明 $\angle AOC=\angle AEC$, 故②不一定成立. ③∵ $OC/\!/BD$, ∴ $\angle OCB=\angle DBC$. ∵ $OC=OB$, ∴ $\angle OCB=\angle OBC$, ∴ $\angle OBC=\angle DBC$, ∴ BC 平分 $\angle ABD$, 故③一定成立. ④∵ AB是⊙O 的直径, ∴ $\angle ADB=90°$, ∴ $AD\perp BD$. ∵ $OC/\!/BD$, ∴ $\angle AFO=90°$. ∵ 点 O 为圆心, ∴ $AF=DF$, 故④一定成立. ⑤∵ 在△CEF和△BED中, 没有相等的边, ∴ △CEF 与△BED 不全等, 故⑤不成立. 综上可知, 其中一定成立的有①③④.

6. 80° 【解析】如图, 连接 EM. ∵ $AB=AC$, $\angle BAM=\angle CAM$, ∴ $AM\perp BC$. ∵ AM 为⊙O 的直径, ∴ $\angle ADM=\angle AEM=90°$. ∴ $\angle AME=\angle AMD=90°-\angle BMD=50°$. ∴ $\angle EAM=40°$. ∴ $\angle EOM=2\angle EAM=80°$.

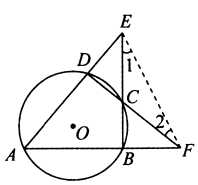


7. (1)【证明】如图, 连接 FA.
∵ $\angle FEB=90°$, ∴ $EF\perp AB$.
∵ $BE=AE$, ∴ $BF=AF$.
∵ $\angle FEA=\angle FEB=90°$, ∴ AF 是⊙O 的直径.
∴ $AF=DE$. ∴ $BF=ED$.
在 Rt△EFB 与 Rt△ADE 中,
∵ $\begin{cases}BF=ED,\\BE=EA,\end{cases}$
∴ Rt△EFB≌Rt△ADE.
(2)【解】∵ Rt△EFB≌Rt△ADE,
∴ $\angle B=\angle AED$. ∴ $DE/\!/BC$.
∵ ED 为⊙O 的直径, ∴ $AC\perp AB$.
∵ $EF\perp AB$, ∴ $EF/\!/CD$.
∴ 四边形 $FCDE$ 是平行四边形.
∴ 点 F 到 DE 的距离最大时, 四边形 $FCDE$ 的面积最大. 当点 F 为$\overset{\frown}{DE}$的中点时, 点 F 到 DE 的距离最大, 这个最大距离是 2, ∴ 四边形 $FCDE$ 的最大面积是 $4\times2=8$.



刷素养

8. (1)【证明】∵ $\angle DCE=\angle BCF$, $\angle E=\angle F$, $\angle ADC=\angle E+\angle DCE$, $\angle ABC=\angle F+\angle BCF$, ∴ $\angle ADC=\angle ABC$.
【解】(2)由(1)知 $\angle ADC=\angle ABC$, ∵ 四边形 $ABCD$ 内接于⊙O,
∴ $\angle ADC+\angle ABC=180°$,
∴ $\angle ADC=90°$.
在 Rt△ADF 中, $\angle A=90°-\angle F=90°-42°=48°$.
(3)如图, 连接 EF.
∵ 四边形 $ABCD$ 为⊙O 的内接四边形,
∴ $\angle DAB+\angle BCD=180°$.
又∵ $\angle ECD+\angle BCD=180°$,
∴ $\angle ECD=\angle DAB$.
∵ $\angle ECD=\angle1+\angle2$,
∴ $\angle DAB=\angle1+\angle2$.
∵ $\angle DAB+\angle1+\angle2+\angle DEC+\angle BFC=180°$,
∴ $2\angle DAB+\alpha+\beta=180°$,
∴ $\angle DAB=90°-\frac{\alpha+\beta}{2}$.



24.1 综合训练

刷综合

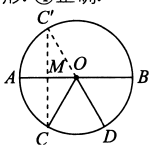
1. D 【解析】∵ $CD\perp OA$, $CE\perp OB$, 垂足分别为 D, E, $\angle DCE=80°$, ∴ $\angle DOE=180°-80°=100°$, ∴ $\angle APB=\frac{1}{2}\angle DOE=50°$. 故选 D.

2. B 【解析】连接 BD. ∵ AB 是直径, $\angle BAD=25°$, ∴ $\angle ABD=90°-25°=65°$, ∴ $\angle AGD=\angle ABD=65°$. 故选 B.

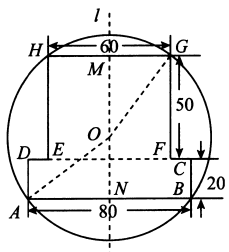
3. C 【解析】∵ $AB=10$, ∴ $OB=OA=5$. 过点 E 作弦 $CD\perp AB$ 于点 E, 连接 OC, 则 CD 是过点 E 的⊙O 的最短弦. ∵ $OB\perp CD$, ∴ $\angle CEO=90°$. ∴ $CE=\sqrt{OC^2-OE^2}=\sqrt{5^2-4^2}=3$. ∵ $OE\perp CD$, OE 过点 O, ∴ $CD=2CE=6$. ∵ AB 是过点 E 的⊙O 的最长弦, $AB=10$, ∴ 过点 E 的所有弦中, 长度为 7, 8, 9 的弦各有 2 条. ∴ 符合条件的弦的条数为 $1+2+2+2+1=8$.

4. ①③④ 【解析】∵ 点 A 是$\overset{\frown}{BC}$的中点, ∴ OA 垂直平分 BC. ①正确. ∵ $\angle AOC=2\angle D=60°$, $OA=OC$, ∴ △OAC 为等边三角形. ∴ $BC=2\times\sqrt{6^2-\left(\frac{6}{2}\right)^2}=6\sqrt{3}$. ②错误. ∵ $\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{AC}$, ∴ $\angle AOB=\angle AOC=60°$. ③正确. ∵ $OA=OB$, ∴ △AOB 为等边三角形. ∴ $AB=AC=OA=OC=OB$, ∴ 四边形 $ABOC$ 是菱形. ④正确.

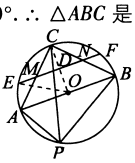
5. 16 【解析】如图, 连接 DO 并延长交⊙O 于点 C'. ∵ $\angle BOD=\angle AOC'$, ∴ $\overset{\frown}{BD}=\overset{\frown}{AC'}$. ∵ $\overset{\frown}{AC}=\overset{\frown}{CD}=\overset{\frown}{BD}$, ∴ $\overset{\frown}{AC}=\overset{\frown}{AC'}$. ∴ 点 C, C' 关于直线 AB 对称. ∴ $CM+DM$ 的最小值就是直径 DC' 的长. ∴ $CM+DM$ 的最小值为 16.



6. 50 【解析】如图, 设圆心为 O, 连接 AO, GO. ∵ 直线 l 是它的对称轴, ∴ $GM=30$, $AN=40$. ∵ $GM^2+OM^2=AN^2+ON^2$, ∴ $30^2+OM^2=40^2+(70-OM)^2$. 解得 $OM=40$. ∴ $OG=\sqrt{30^2+40^2}=50$. ∴ 能完全覆盖这个平面图形的圆面的最小半径是 50 mm.

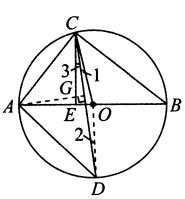


7. $4\sqrt{3}$ 【解析】如图, ∵ PC 是 $\angle APB$ 的平分线, ∴ $\angle APC=\angle CPB$. ∴ $\overset{\frown}{AC}=\overset{\frown}{BC}$. ∴ $AC=BC$. ∵ AB 是⊙O 的直径, ∴ $\angle ACB=90°$. ∴ △ABC 是等腰直角三角形. 连接 OC, 交 EF 于点 D, 则 $OC\perp AB$. ∵ MN 是△ABC 的中位线, ∴ $MN/\!/AB$.
∴ $OC\perp EF$, $OD=\frac{1}{2}OC=2$. 连接 OE. 在 Rt△ODE 中, 根据勾股定理, 得 $DE=\sqrt{4^2-2^2}=2\sqrt{3}$, ∴ $EF=2ED=4\sqrt{3}$.



8. (1)【证明】∵ CD 为⊙O 的直径,
∴ $\angle CND=90°$. ∴ $CN\perp AB$. ∵ $BC=AC$, ∴ $BN=AN$.
(2)【解】$CD=\sqrt{2}DE$. 理由如下:
在△ABC 中, ∵ $\angle BCA=90°$, $BN=AN$, ∴ $CN=AN$.
∵ 点 M 是 CA 的中点, ∴ NM 平分 $\angle CNA$.
∵ $\angle CNA=90°$, ∴ $\angle CNM=45°$.
∴ $\angle CDE=\angle CNE=45°$.
∵ CD 为⊙O 的直径, ∴ $\angle CED=90°$.
∴ $\angle DCE=45°=\angle CDE$. ∴ $DE=CE$.
∵ $CE^2+DE^2=CD^2$, ∴ $CD=\sqrt{2}DE$.

9. 【解】(1)当点 C 在⊙O 上半圆移动时, 点 D 的位置不会变. 理由如下:
如图, 连接 OD.
∵ CD 平分 $\angle OCE$, ∴ $\angle1=\angle3$. ∵ $OC=OD$, ∴ $\angle1=\angle2$, ∴ $\angle2=\angle3$, ∴ $CE/\!/OD$.
∵ $CE\perp AB$, ∴ $OD\perp AB$, ∴ $\overset{\frown}{AD}=\overset{\frown}{BD}$, 即点 D 为⊙O 下半圆的中点.
∴ 当点 C 在⊙O 上半圆移动时, 点 D 的位置不会变.
(2)∵ 在 Rt△AOD 中, $OA=OD=5$,
∴ $AD=5\sqrt{2}$.
如图, 过点 A 作 $AG\perp CD$, 垂足为 G. ∵ $\angle ACD=\frac{1}{2}\angle AOD=45°$,
∴ △AGC 是等腰直角三角形.
∵ $AC=6$, ∴ $AG=CG=3\sqrt{2}$.
在 Rt△AGD 中, $DG=\sqrt{(5\sqrt{2})^2-(3\sqrt{2})^2}=4\sqrt{2}$, ∴ $CD=CG+DG=3\sqrt{2}+4\sqrt{2}=7\sqrt{2}$,
∴ 线段 AD 的长为 $5\sqrt{2}$, 线段 CD 的长为 $7\sqrt{2}$.



刷中考

1. D 【解析】根据"同弧所对的圆周角等于这条弧所对的圆心角的一半", 可得 $\angle AOC=2\angle ABC=40°$. ∵ $OC\perp AB$, ∴ $\overset{\frown}{AC}=\overset{\frown}{BC}$,

∴ $\angle AOB = 2\angle AOC = 80°$. 故选 D.

2. D 【解析】∵ 由垂径定理,得$\overset{\frown}{AC} = \overset{\frown}{BC}$,∴ $\angle O = 2\angle ADC = 64°$,∴ $\angle OBA = 90° - 64° = 26°$. 故选 D.

3. B 【解析】连接 CD,可得出 $\angle OBD = \angle OCD$,根据点 $D(0,1)$,$C(\sqrt{3},0)$,得 $OD = 1$,$OC = \sqrt{3}$. 由勾股定理得 $CD = 2$. ∵ $OD = \frac{1}{2}CD$,∴ $\angle OCD = 30°$,∴ $\angle OBD = 30°$. 故选 B.

4. C 【解析】∵ 半径 $OC \perp$ 弦 AB 于点 D,∴ $\overset{\frown}{AC} = \overset{\frown}{BC}$,∴ $\angle BOD = 2\angle AEC = 45°$,∴ $\triangle ODB$ 是等腰直角三角形. ∵ $AB = 4$,∴ $DB = AD = OD = 2$,∴ $OB = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}$. 故选 C.

5. C 【解析】连接 AC,AO. ∵ $\odot O$ 的直径 $CD = 10$ cm,$AB \perp CD$,$AB = 8$ cm,∴ $AM = \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2} \times 8 = 4$(cm),$OD = OC = OA = 5$ cm.

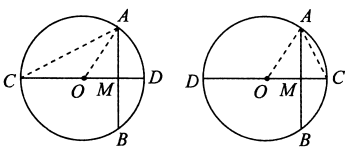
当点 C 的位置如图(1)所示时,

∵ $OA = 5$ cm,$AM = 4$ cm,$CD \perp AB$,∴ 在 Rt$\triangle AOM$ 中,$OM = \sqrt{OA^2 - AM^2} = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3$(cm),

∴ $CM = OC + OM = 5 + 3 = 8$(cm),∴ 在 Rt$\triangle ACM$ 中,$AC = \sqrt{AM^2 + CM^2} = \sqrt{4^2 + 8^2} = 4\sqrt{5}$(cm);

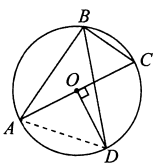
当点 C 的位置如图(2)所示时,同理可得 $OM = 3$ cm. ∵ $OC = 5$ cm,∴ $MC = OC - OM = 5 - 3 = 2$(cm),

在 Rt$\triangle AMC$ 中,$AC = \sqrt{AM^2 + MC^2} = \sqrt{4^2 + 2^2} = 2\sqrt{5}$(cm). 故选 C.



图(1)　图(2)

6. 60° 【解析】如图,连接 AD. ∵ AC 为$\odot O$ 的直径,点 D 在圆上,$OD \perp AC$,∴ $\triangle AOD$ 是等腰直角三角形,∴ $\angle ADO = 45°$. 又∵ $\angle BDO = 15°$,∴ $\angle ADB = 60°$. ∵ $\angle ACB$ 与 $\angle ADB$ 所对的弧都是$\overset{\frown}{AB}$,∴ $\angle ACB = \angle ADB = 60°$.



7. (1)【证明】∵ AB 是直径,∴ $\angle AEB = 90°$,∴ $AE \perp BC$,

∵ $AB = AC$,∴ $BE = CE$.

又∵ $AE = EF$,∴ 四边形 $ABFC$ 是平行四边形.

∵ $AC = AB$,∴ 四边形 $ABFC$ 是菱形.

(2)【解】设 $CD = x$,$AB = AC = 7 + x$. 如图,连接 BD.

∵ $BE = 2$,∴ $CB = 4$.

∵ AB 是直径,

∴ $\angle ADB = \angle BDC = 90°$,

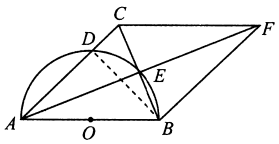
∴ $AB^2 - AD^2 = CB^2 - CD^2$,

∴ $(7 + x)^2 - 7^2 = 4^2 - x^2$,

解得 $x = 1$ 或 $x = -8$(舍去),

∴ $AC = 8$,$BD = \sqrt{8^2 - 7^2} = \sqrt{15}$,

∴ $S_{菱形ABFC} = 2 \times \frac{1}{2} \times 8 \times \sqrt{15} = 8\sqrt{15}$.



刷素养

8. 【解】(1)如图,连接 OC.

当$\triangle BCE$ 是等腰三角形时,分两种情况:

①如图(1),当 $CE = BC$ 时,$\overset{\frown}{CE} = \overset{\frown}{BC}$.

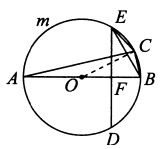
设$\overset{\frown}{BC}$所对的圆心角度数为 $x°$,则$\overset{\frown}{CE}$所对的圆心角的度数 = $\overset{\frown}{BC}$所对的圆心角的度数 = $x°$,

∴ $\overset{\frown}{BE}$所对的圆心角的度数为 $2x°$.

∵ $DE \perp AB$,AB 为$\odot O$ 的直径,

∴ $\overset{\frown}{BD}$所对的圆心角的度数 = $\overset{\frown}{BE}$所对的圆心角的度数 = $2x°$,

∴ $\overset{\frown}{CD}$所对的圆心角的度数为 $3x°$.



图(1)

∵ D 是$\overset{\frown}{ABC}$的中点,∴ $\overset{\frown}{AD}$所对的圆心角的度数 = $\overset{\frown}{CD}$所对的圆心角的度数 = $3x°$.

∴ $\overset{\frown}{ABC}$所对的圆心角的度数为 $6x°$.

∴ $\overset{\frown}{AB}$所对的圆心角的度数 = $\overset{\frown}{BD}$所对的圆心角的度数 + $\overset{\frown}{AD}$所对的圆心角的度数 = $2x° + 3x° = 5x°$.

∵ $\overset{\frown}{AB}$所对的圆心角的度数为 180°,∴ $5x = 180$.

解得 $x = 36$,∴ $\angle BOC = 36°$.

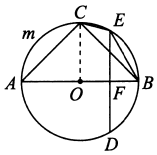
∴ $\angle CAB = \frac{1}{2}\angle BOC = 18°$.

②如图(2),当 $CE = BE$ 时,$\overset{\frown}{BE} = \overset{\frown}{CE}$.

设$\overset{\frown}{BE}$的度数为 $y°$,则$\overset{\frown}{CE}$所对的圆心角的度数为 $y°$.

∵ DE 为弦,AB 为$\odot O$ 的直径,$DE \perp AB$,

∴ $\overset{\frown}{BE}$所对的圆心角的度数 = $\overset{\frown}{BD}$所对的圆心角的度数 = $y°$.



图(2)

∴ $\overset{\frown}{CD}$所对的圆心角的度数 = $\overset{\frown}{CE}$所对的圆心角的度数 + $\overset{\frown}{BE}$所对的圆心角的度数 + $\overset{\frown}{BD}$所对的圆心角的度数 = $3y°$.

∵ D 是$\overset{\frown}{ABC}$的中点,∴ $\overset{\frown}{AD}$所对的圆心角的度数为 $3y°$.

∴ $\overset{\frown}{ABC}$所对的圆心角的度数为 $6y°$.

∴ $\overset{\frown}{AB}$所对的圆心角的度数 = $\overset{\frown}{BD}$所对的圆心角度数 + $\overset{\frown}{AD}$所对的圆心角的度数 = $y° + 3y° = 4y°$.

∵ $\overset{\frown}{AB}$所对的圆心角的度数为 180°,

∴ $4y = 180$. 解得 $y = 45$,

∴ $\overset{\frown}{BC}$所对的圆心角的度数为 90°.

∴ $\angle BOC = 90°$. ∴ $\angle CAB = 45°$.

综上所述,当$\triangle BCE$ 是等腰三角形时,$\angle CAB$ 的度数是 18° 或 45°.

(2)$AC = \frac{\sqrt{3}}{2}AB$. 理由如下:

设$\overset{\frown}{BE}$所对的圆心角的度数为 $t°$,则$\overset{\frown}{BE}$所对的圆心角的度数 = $\overset{\frown}{BD}$所对的圆心角的度数 = $t°$.

∵ D 是$\overset{\frown}{ABC}$的中点,∴ $\overset{\frown}{AD}$所对的圆心角的度数 = $\overset{\frown}{CD}$所对的圆心角的度数 = $2t°$.

∴ $\overset{\frown}{AB}$所对的圆心角的度数 = $\overset{\frown}{BD}$所对的圆心角的度数 + $\overset{\frown}{AD}$所对的圆心角的度数 = $t° + 2t° = 3t°$.

∵ $\overset{\frown}{AB}$所对的圆心角的度数为 180°,∴ $3t = 180$.

解得 $t = 60$,∴ $\angle A = 30°$.

∵ AB 为$\odot O$ 的直径,∴ 在 Rt$\triangle ABC$ 中,$BC = \frac{1}{2}AB$.

∴ $AC = \sqrt{AB^2 - BC^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}AB$.

24.2　点和圆、直线和圆的位置关系

24.2.1　点和圆的位置关系

刷基础

1. A 【解析】$OP = 3 < 4$,故点 P 在圆内.

2. C 【解析】∵ 点 P 是线段 OA 的中点,$OA = 8$,∴ $OP = 4$.

∵ 点 P 在半径为 r 的$\odot O$ 外,∴ $0 < r < OP = 4$. 故选 C.

3. 【解】(1)∵ 在$\triangle ABC$ 中,$\angle ACB = 90°$,$AC = 4$,$BC = 5$,点 M 为 AB 的中点,

∴ $AB = \sqrt{AC^2 + BC^2} = \sqrt{16 + 25} = \sqrt{41}$,$CM = \frac{1}{2}AB = \frac{\sqrt{41}}{2}$.

∵ 以点 C 为圆心、4 为半径作$\odot C$,$AC = 4$,∴ 点 A 在圆上.

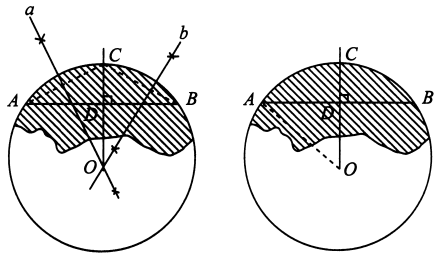
∵ $CM = \frac{\sqrt{41}}{2} < 4$,∴ 点 M 在圆内.

∵ $BC = 5 > 4$,∴ 点 B 在圆外.

(2)以点 C 为圆心作⊙C,使 A,B,M 三点中至少有一点在⊙C 内时,$r>\frac{\sqrt{41}}{2}$;当至少有一点在⊙C 外时,$r<5$,故⊙C 的半径 r 的取值范围为 $\frac{\sqrt{41}}{2}<r<5$.

4. C 【解析】①A,B,C 三点共线,不能确定一个圆;②A,B,C 三点能构成等腰三角形,有外接圆;③A,B,C 三点能构成直角三角形,有外接圆. 故选 C.

5. 【解】(1)作弦 AC 的垂直平分线与弦 BC 的垂直平分线,两条垂直平分线的交点为点 O,以 O 为圆心,OA 长为半径作圆 O,圆 O 就是此残片所在的圆,如图(1).



图(1)　　图(2)

(2)如图(2). 连接 OA,设 $OA=x$ cm.

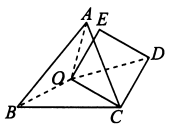
∵ $CD=4$ cm,$AB=16$ cm,∴ $OD=(x-4)$ cm,$AD=8$ cm.

在 Rt△OAD 中,根据勾股定理,得 $x^2=8^2+(x-4)^2$.

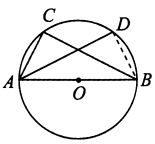
解得 $x=10$. 故所作圆的半径为 10 cm.

6. B 【解析】设 $x^2-10x+18=0$ 的两根为 a,b,则 $a+b=10$,$ab=18$,∴ $a^2+b^2=(a+b)^2-2ab=100-36=64$,∴ 直角三角形的斜边长为 $\sqrt{64}=8$,∴ 这个直角三角形的外接圆半径为 $8\div2=4$. 故选 B.

7. B 【解析】如图,连接 OA,OB,OD. ∵ O 是△ABC 的外心,∴ $OA=OB=OC$. ∵ 四边形 $OCDE$ 是正方形,∴ $OA=OB=OE$. ∴ O 是△AEB 的外心. ∵ $OA=OE\neq OD$,∴ O 不是△AED 的外心.



8. $2\sqrt{3}$ 【解析】如图,连接 BD. ∵ AB 是直径,∴ $\angle ACB=\angle ADB=90°$. ∵ $\angle CAB=60°$,AD 平分 $\angle CAB$,∴ $\angle ABC=\angle DAB=30°$,∴ $AC=BD$,∴ $AB=2BD$. ∵ 在 Rt△ABD 中,$AD^2=AB^2-BD^2$,∴ $BD=2\sqrt{3}$,∴ $AC=2\sqrt{3}$.



9. D 【解析】利用反证法证明时,应先假设结论的对立面成立. 本题的结论是"点 P 在⊙O 的外部",它的对立面是"点 P 在⊙O 上或点 P 在⊙O 内". 故选 D.

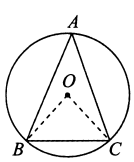
刷易错

10. D 【解析】分两种情况讨论:

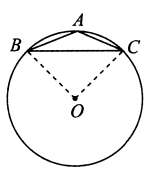
①当点 O 在△ABC 的内部时,如图(1),则 $\angle BAC=\frac{1}{2}\angle BOC=35°$;

②当点 O 在△ABC 的外部时,如图(2),则 $\angle BAC=\frac{1}{2}(360°-70°)=145°$.

综上,$\angle BAC$ 的度数为 35°或 145°.



图(1)



图(2)

易错警示 三角形的外心位置与三角形的形状有关,锐角三角形的外心在三角形的内部,直角三角形的外心在斜边的中点处,钝角三角形的外心在三角形的外部,当涉及三角形外心时,若没有给出具体图形,则要分类讨论.

24.2.2 直线和圆的位置关系

课时 1 直线和圆的位置关系

刷基础

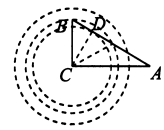
1. A 【解析】∵ ⊙O 的半径 $r=3$,圆心 O 到直线 l 的距离 $d=2$,$2<3$,即 $d<r$,∴ 直线 l 与⊙O 相交.

2. A 【解析】设⊙O 的半径为 r cm,则 $\pi r^2=9\pi$,∴ $r=3$. ∵ 圆心 O 到直线的距离 $d=3$,∴ $d=r$. 故直线与⊙O 相切.

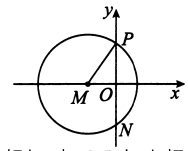
3. 相离 【解析】∵ 圆心 O 到直线 AB 的距离为 5,大于⊙O 的半径 3,∴ 直线 AB 与⊙O 相离.

4. B 【解析】∵ 点 P 的坐标为 $(-3,0)$,⊙P 的半径为 2,∴ 点 A 的坐标为 $(-5,0)$,点 C 的坐标为 $(-1,0)$. 当圆心到 y 轴的距离为 2 时,⊙P 与 y 轴相切,也就是点 A 或点 C 与点 O 重合时,⊙P 与 y 轴相切. 当点 C 和点 O 重合时,点 P 的坐标为 $(-2,0)$,此时点 P 沿 x 轴正方向平移了 1 个单位长度;当点 A 和点 O 重合时,点 P 的坐标为 $(2,0)$,此时点 P 沿 x 轴正方向平移了 5 个单位长度. 故选 B.

5. D 【解析】如图,过点 C 作 $CD\perp AB$ 于点 D. ∵ $\angle ACB=90°$,$AC=4$,$AB=5$,∴ $BC=3$. ①如果以点 C 为圆心,R 为半径的圆与斜边 AB 相切,则 $CD=R$. 此时 $CD\cdot AB=AC\cdot BC$,∴ $R=CD=\frac{12}{5}$. ②当 $3<R\leqslant4$ 时,圆与边 AB 也只有一个公共点. 综上,$3<R\leqslant4$ 或 $R=\frac{12}{5}$.



6. $(0,2),(0,-2)$ 【解析】如图. 由题意得,$OM=1$,$MP=\sqrt{5}$,∴ $OP=\sqrt{5-1}=2$,∴ $P(0,2)$. 同理可得 $N(0,-2)$. ∴ ⊙M 与 y 轴的交点坐标是 $(0,2)$,$(0,-2)$.



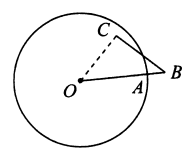
7. (1)$r=3$　(2)$3<r<4$　(3)$r=4$ 或 $r=5$　(4)$r>4$ 且 $r\neq5$ 【解析】(1)当⊙P 和 y 轴相切时,⊙P 与坐标轴有 1 个交点,此时 $r=3$.

(2)当⊙P 和 y 轴相交,且和 x 轴相离时,⊙P 与坐标轴有 2 个交点,此时 $3<r<4$.

(3)当⊙P 和 y 轴相交且和 x 轴相切或⊙P 经过原点时,⊙P 与坐标轴有 3 个交点,此时 $r=4$ 或 5.

(4)当⊙P 和 x 轴,y 轴都相交且不经过原点时,⊙P 与坐标轴有 4 个交点,此时 $r>4$ 且 $r\neq5$.

8. 相交 【解析】如图,过点 O 作 $OC\perp BC$. 在 Rt△OBC 中,$\angle B=45°$,∴ $BC=OC$. ∵ $OB=5+2=7$,$OB^2=BC^2+OC^2=2OC^2$,∴ $OC=\frac{\sqrt{2}}{2}OB=\frac{7\sqrt{2}}{2}<5$,∴ BC 所在直线与⊙O 的位置关系是相交.



9. 【解】(1)如图,作 $MN\perp OA$ 于点 N.

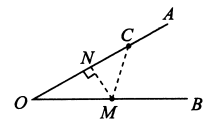
∵ $\angle AOB=30°$,$OM=5$ cm,∴ 点 M 到射线 OA 的距离 $d=MN=\frac{1}{2}OM=2.5$ cm.

∴ 当 $r=2.5$ cm 时,⊙M 与射线 OA 只有一个公共点;

当 0 cm $<r<2.5$ cm 时,⊙M 与射线 OA 没有公共点;

当 2.5 cm $<r\leqslant5$ cm 时,⊙M 与射线 OA 有两个公共点;

当 $r>5$ cm 时,⊙M 与射线 OA 只有一个公共点.



(2)如图,连接 CM.

∵ $MN=\frac{1}{2}OM=2.5$ cm,∴ $ON=\frac{5\sqrt{3}}{2}$ cm.

∵ $OC=5\sqrt{3}$ cm,∴ $ON=CN$,∴ $CM=OM=5$ cm,

∴ 当 $r>5$ cm 时,线段 OC 与⊙M 的公共点个数为 0.

刷易错

10. D 【解析】因为垂线段最短，圆心到直线的距离 d 为垂线段的长度，所以此时垂线段的长度和半径的大小关系不确定，则直线和圆相交、相切、相离都有可能.

易错警示 在利用 d 与 r 的数量关系判定直线与圆的位置关系时，要正确理解 d 的意义，从而避免出现错误.

课时 2　切线的判定和性质

刷基础

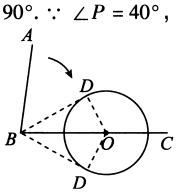
1. B 【解析】直线与圆相交时也有公共点，但直线不是圆的切线，故 A 错误；若直线不过半径外端点，则直线与半径垂直时与圆不相切，故 C 错误；若过圆的半径外端的直线不与半径垂直，则直线也不是圆的切线，故 D 错误. 故选 B.

2. 直径所对的圆周角是直角　【解析】连接 OB, OC. $\because OP$ 是 $\odot A$ 的直径，$\therefore \angle PBO = \angle PCO = 90°$. $\therefore OB \perp PB, OC \perp PC$. $\because OB, OC$ 是 $\odot O$ 的半径，$\therefore PB, PC$ 是 $\odot O$ 的切线. 故小涵的作图依据是直径所对的圆周角是直角.

3. 【证明】$\because BC$ 平分 $\angle ABD$，$\therefore \angle OBC = \angle DBC$.
$\because OB = OC$，$\therefore \angle OBC = \angle OCB$，$\therefore \angle OCB = \angle DBC$，$\therefore OC \parallel BD$.
$\because BD \perp CD$，$\therefore OC \perp CD$，$\therefore CD$ 为 $\odot O$ 的切线.

4. D 【解析】$\because AB$ 是 $\odot O$ 的切线，A 为切点，$\therefore OA \perp AB$. 在 $\mathrm{Rt}\triangle OAB$ 中，由勾股定理，得 $OB = \sqrt{OA^2 + AB^2} = 13$，$\therefore CB = OB - OC = 13 - 5 = 8$.

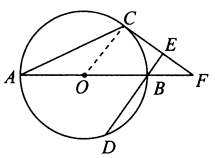
5. B 【解析】$\because PA$ 切 $\odot O$ 于点 A，$\therefore \angle PAB = 90°$. $\because \angle P = 40°$，$\therefore \angle POA = 90° - 40° = 50°$. $\therefore \angle B = \frac{1}{2}\angle POA = 25°$.



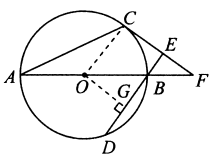
6. B 【解析】如图，设射线 BA 旋转后与 $\odot O$ 相切于点 D，连接 OD，则 $OD \perp BD$. $\because OD = \frac{1}{2}OB$，$\therefore \angle OBD = 30°$. $\therefore$ 当点 D 在射线 BC 上方时，$\angle ABD = \angle ABC - \angle OBD = 80° - 30° = 50°$；当点 D 在射线 BC 下方时，$\angle ABD = \angle ABC + \angle OBD = 80° + 30° = 110°$.

易错警示 情况不确定时，注意圆的轴对称性，切忌想当然地认为只有一个结果.

7. 【证明】(1) 如图，连接 OC.
$\because OA = OC$，$\therefore \angle A = \angle OCA$，
$\therefore \angle BOC = \angle A + \angle OCA = 2\angle A$.
$\because \angle ABD = 2\angle A$，
$\therefore \angle ABD = \angle BOC$，$\therefore OC \parallel BD$.
$\because CE \perp BD$，$\therefore OC \perp CE$，
$\therefore CF$ 为 $\odot O$ 的切线.

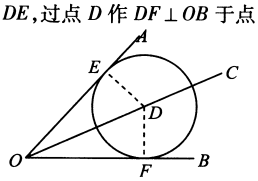


(2) 如图，过点 O 作 $OG \perp DE$，垂足为 G.
$\because OG \perp DE, OC \perp CE, DE \perp CE$，
$\therefore$ 四边形 $OCEG$ 是矩形，
$\therefore OG = CE = 2, OC = GE = 1 + GB$.
在 $\mathrm{Rt}\triangle OGB$ 中，$OB^2 = OG^2 + GB^2$，
$\because OB = OC$，$\therefore OB = 1 + GB$，
$\therefore (1 + GB)^2 = 4 + GB^2$，$\therefore GB = \frac{3}{2}$.
$\because OG \perp DB$，$\therefore BD = 2GB = 3$.



刷易错

8. 【证明】如图，连接 DE，过点 D 作 $DF \perp OB$ 于点 F.

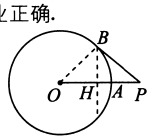


$\because OA$ 切 $\odot D$ 于点 E，$\therefore DE \perp OA$.
又 $\because DF \perp OB$，D 是 $\angle AOB$ 平分线上一点，$\therefore DE = DF$，$\therefore DF$ 是 $\odot D$ 的半径，$\therefore OB$ 与 $\odot D$ 相切.

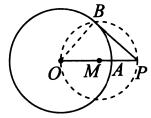
易错警示 本题欲证 OB 为 $\odot D$ 的切线，但尚不知 OB 与 $\odot D$ 是否有公共点，所以不能“连半径”，而应“作垂直，证半径”. 证明一条直线是圆的切线时，如果没有明确直线与圆是否有公共点时，应“作垂直，证半径”，而不能“连半径，证垂直”.

刷提升

1. D 【解析】如图(1)，OP 的垂直平分线交 OP 于点 H，连接 OB. 设 $AP = x$，则 $OA = 2x, OB = 2x$. $\because BH$ 垂直平分 OP，$\therefore BP = BO = 2x$. $\because OB^2 + BP^2 = (2x)^2 + (2x)^2 = 8x^2$，$OP^2 = (3x)^2 = 9x^2$，$\therefore \triangle OBP$ 不是直角三角形. $\therefore PB$ 不是 $\odot O$ 的切线. $\therefore$ 甲的作业错误.
如图(2)，连接 OB. $\because$ 点 M 为 OP 的中点，OM 为 $\odot M$ 的半径，$\therefore OP$ 为 $\odot M$ 的直径. $\therefore \angle OBP = 90°$. $\therefore OB \perp PB$. $\therefore PB$ 与 $\odot O$ 相切. $\therefore$ 乙的作业正确.

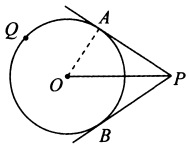


图(1)

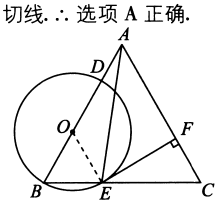


图(2)

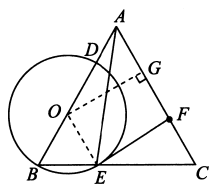
2. B 【解析】当 PQ 在直径所在直线上时，PQ 的长取最大值. 如图，连接 OA，由切线的性质得 $OA \perp PA$，根据劣弧 $\overset{\frown}{AB}$ 的度数为 120° 得 $\angle AOP = 60°$. $\because AO = 4$，$\therefore OP = 8$，$\therefore PQ$ 的长的最大值为 $8 + 4 = 12$. 故选 B.



3. C 【解析】对于选项 A，如图(1)，连接 OE，则 $OB = OE$. $\because \angle B = 60°$，$\therefore \angle BOE = 60°$. $\because \angle BAC = 60°$，$\therefore \angle BOE = \angle BAC$. $\therefore OE \parallel AC$. $\because EF \perp AC$，$\therefore OE \perp EF$. $\therefore EF$ 是 $\odot O$ 的切线. $\therefore$ 选项 A 正确.

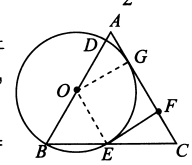


图(1)



图(2)

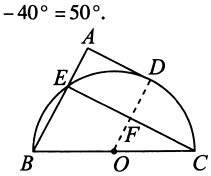
对于选项 B，$\because EF$ 是 $\odot O$ 的切线，$\therefore OE \perp EF$. 由对选项 A 的分析过程知 $OE \parallel AC$，$\therefore AC \perp EF$. $\therefore$ 选项 B 正确. 对于选项 C，$\because \angle B = 60°, OB = OE$，$\therefore BE = OB$. $\because BE = CE$，$\therefore BC = AB = 2BO$. $\therefore AO = OB$. 如图(2)过点 O 作 $OG \perp AC$ 于点 G. $\because \angle BAC = 60°$，$\therefore OG = \frac{\sqrt{3}}{2}AO \neq OB$，$\therefore AC$ 不是 $\odot O$ 的切线. $\therefore$ 选项 C 错误. 对于选项 D，如图(3)，过点 O 作 $OG \perp AC$ 于点 G，连接 OE. 在 $\triangle OBE$ 中，$\because OB = OE$，$\angle B = 60°$，$\therefore OB = BE$. $\because AB = BC$，$\therefore OA = EC$.
在 $\mathrm{Rt}\triangle OAG$ 中，$\because \angle OAG = 60°$，$\therefore OG = \frac{\sqrt{3}}{2}OA = \frac{\sqrt{3}}{2}EC$. $\because BE = \frac{\sqrt{3}}{2}EC$，$\therefore OG = BE = OB$. $\therefore AC$ 是 $\odot O$ 的切线. $\therefore$ 选项 D 正确.



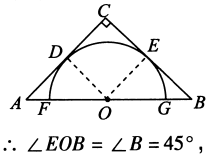
图(3)

4. 50°　【解析】$\because \angle A = 20°$，$\therefore \angle BOC = 40°$. $\because BC$ 是 $\odot O$ 的切线，$\overset{\frown}{B}$ 为切点，$\therefore \angle OBC = 90°$，$\therefore \angle OCB = 90° - 40° = 50°$.

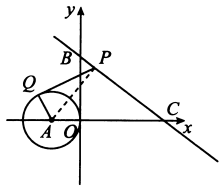
5. 相切　【解析】如图，连接 OD 交 CE 于点 F，则 $OD \perp AD$. $\because BC$ 是半圆 O 的直径，$\therefore \angle BEC = 90°$. $\therefore \angle AEF = 90°$. 又 $\because BA \perp DA$，$\therefore$ 四边形 $AEFD$ 是矩形. $\therefore OD \parallel AB$，$EF = AD = 4$，$OD \perp CE$. $\therefore EF = CF$. 在 $\mathrm{Rt}\triangle OFC$ 中，$OF = \sqrt{OC^2 - CF^2} = \sqrt{25 - 16} = 3$，$\therefore$ 直线 CE 与以点 O 为圆心，3 为半径的圆的位置关系是相切.



6. $8 + 6\sqrt{2}$　【解析】如图，连接 OD, OE. $\because$ 半圆 O 与等腰直角三角形两腰 CA, CB 分别切于 D, E 两点，$\therefore \angle C = \angle OEC = \angle ODC = 90°$. $\therefore$ 四边形 $ODCE$ 是矩形. $\because OD = OE$，$\therefore$ 四边形 $ODCE$ 是正方形. $\therefore CD = CE = OD = OE$. $\because \angle A = \angle B = 45°$，$\therefore \angle EOB = \angle B = 45°$，$\therefore OE = EB$，$\therefore \triangle OEB$ 是等腰直角三角形. 设 $OE = r$，则 $BE = OE = OG = r$. $\therefore OB = OG + BG = 1 + r$. $\because OB = \sqrt{2}OE = \sqrt{2}r$，$\therefore 1 + r = \sqrt{2}r$，$\therefore r = \sqrt{2} + 1$. $\therefore AC = BC = 2\sqrt{2} + 2$. $\therefore AB = 2r + 2 = 4 + 2\sqrt{2}$. $\therefore \triangle ABC$ 的周长为 $8 + 6\sqrt{2}$.



7. $2\sqrt{2}$ 【解析】∵ PQ 切⊙A 于点 Q，∴ $\angle AQP=90°$. 在 Rt△AQP 中，$PQ=\sqrt{AP^2-AQ^2}$. ∵ $AQ=1$，∴ 当 AP 最小时，PQ 最小. 如图，作 AP 垂直于直线 $y=-\frac{3}{4}x+3$，垂足为点 P，此时 AP 最小，此时线段 PQ 最小. 设直线 $y=-\frac{3}{4}x+3$ 与 y 轴，x 轴分别交于点 B，C，



则 $B(0,3)$，$C(4,0)$. ∵ 点 A 的坐标为 $(-1,0)$，∴ $AC=4+1=5$，∴ $AC=BC$. 在△APC 与△BOC 中，$\begin{cases}\angle APC=\angle BOC=90°,\\ \angle ACP=\angle BCO,\\ AC=BC,\end{cases}$

∴ △APC≌△BOC. ∴ $AP=BO=3$. ∴ $PQ=\sqrt{3^2-1^2}=2\sqrt{2}$.

8. $(0,0)$ 或 $\left(\frac{2}{3},1\right)$ 或 $\left(3-\sqrt{5},\frac{9-3\sqrt{5}}{2}\right)$ 【解析】依题意，直线 OP 的解析式为 $y=\frac{3}{2}x$，∴ 设 $P\left(x,\frac{3}{2}x\right)$. ∵ $A(3,0)$，$B(0,2)$，∴ 直线 AB 的解析式为 $y=-\frac{2}{3}x+2$. ∵ $OC/\!/AB$，且 OC 过原点，∴ 直线 OC 的解析式为 $y=-\frac{2}{3}x$. 设直线 OP 与 AB 交于点 Q，解 $\begin{cases}y=\frac{3}{2}x,\\ y=-\frac{2}{3}x+2,\end{cases}$ 得 $\begin{cases}x=\frac{12}{13},\\ y=\frac{18}{13}.\end{cases}$

∴ $OQ=\sqrt{\left(\frac{12}{13}\right)^2+\left(\frac{18}{13}\right)^2}=\frac{6\sqrt{13}}{13}$. ∵ $OA=3$，$OB=2$，∴ $AB=\sqrt{OA^2+OB^2}=\sqrt{3^2+2^2}=\sqrt{13}$. ∵ $AO\cdot OB=AB\cdot OQ$，∴ $OP\perp AB$. ∵ $OC/\!/AB$，∴ 直线 $OP\perp OC$.

①当⊙P 与 BC 相切时，∵ 四边形 $OABC$ 是平行四边形，∴ $BC/\!/AO$. ∵ $BO\perp OA$，∴ $BO\perp BC$. ∴ 当⊙P 与 BC 相切时，点 P 在 BO 上，∴ 点 P 与点 O 重合，∴ $P(0,0)$.

②当⊙P 与 OC 相切时，可得 $OP=BP$. 如图(1)，过点 P 作 $PE\perp y$ 轴于点 E，则 $OE=BE$，∴ 点 P 的坐标为 $P(x,1)$. 把 $y=1$ 代入 $y=\frac{3}{2}x$，解得 $x=\frac{2}{3}$，∴ 点 P 的坐标为 $P\left(\frac{2}{3},1\right)$.

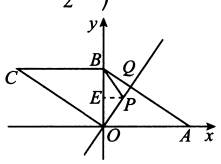
③当⊙P 与 OA 相切时，$BP=$ 点 P 到 x 轴的距离. 如图(2)，过点 P 作 $PF\perp x$ 轴于点 F. ∵ $B(0,2)$，$P\left(x,\frac{3}{2}x\right)$，∴ $PB=\sqrt{|x-0|^2+\left|\frac{3}{2}x-2\right|^2}$. 又∵ $PF=\frac{3}{2}x$，

∴ $\sqrt{|x-0|^2+\left|\frac{3}{2}x-2\right|^2}=\frac{3}{2}x$，解得 $x_1=3+\sqrt{5}$，$x_2=3-\sqrt{5}$.

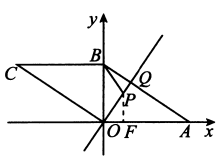
∴ $OF=3+\sqrt{5}$ 或 $OF=3-\sqrt{5}$.

∵ $OF=3+\sqrt{5}>OA$，∴ ⊙P 不会与 OA 相切，舍去.

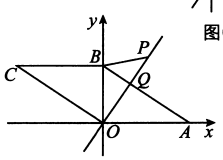
将 $x=3-\sqrt{5}$ 代入 $y=\frac{3}{2}x$，解得 $y=\frac{9-3\sqrt{5}}{2}$，∴ 点 P 的坐标为 $P\left(3-\sqrt{5},\frac{9-3\sqrt{5}}{2}\right)$.



图(1)



图(2)



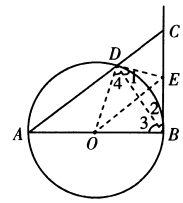
图(3)

④当⊙P 与 AB 相切时，如图(3)，$PB=PQ$. 又∵ $OP\perp AB$，∴ $PB>PQ$，矛盾，故不存在⊙P.

综上，当⊙P 与□$OABC$ 的边相切时，点 P 的坐标为 $(0,0)$ 或 $\left(\frac{2}{3},1\right)$ 或 $\left(3-\sqrt{5},\frac{9-3\sqrt{5}}{2}\right)$.

刷素养

9. 【证明】如图，连接 OD，DB.



∵ AB 是⊙O 的直径，

∴ $\angle ADB=90°$，∴ $\angle CDB=90°$.

∵ E 为 BC 边的中点，

∴ $CE=EB=DE$，∴ $\angle 1=\angle 2$.

∵ $OB=OD$，

∴ $\angle 3=\angle 4$，∴ $\angle 1+\angle 4=\angle 2+\angle 3$.

∵ 在直角△ABC 中，$\angle ABC=\angle 2+\angle 3=90°$，

∴ $\angle EDO=\angle 1+\angle 4=90°$.

∵ D 为⊙O 上的点，∴ DE 是⊙O 的切线.

【解】(2)当 $\angle CAB=45°$ 时，四边形 $AOED$ 是平行四边形.

理由：∵ $OA=OD$，

∴ $\angle A=\angle ODA=45°$，∴ $\angle DOA=180°-45°-45°=90°=\angle EDO$，

∴ $DE/\!/AO$.

∵ E 为 BC 的中点，$OA=OB$，

∴ $EO/\!/AD$，∴ 四边形 $AOED$ 是平行四边形.

即当 $\angle CAB=45°$ 时，四边形 $AOED$ 是平行四边形.

(3)四边形 $OBED$ 是正方形.

理由：∵ $\angle EDO=\angle DOB=\angle EBA=90°$，$OB=OD$，

∴ 四边形 $OBED$ 是正方形.

课时3　切线长定理及三角形的内切圆

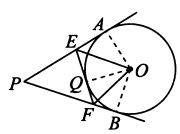
刷基础

1. D 【解析】∵ PA，PB 为⊙O 的两条相交切线，∴ $PA=PB$. 同理，$CA=CE$，$DE=DB$. ∴ △PCD 的周长 $=PC+CE+ED+PD=PC+CA+BD+PD=PA+PB=2PA$. ∵ $PA=5$，∴ △PCD 的周长为 10.

2. B 【解析】∵ PA，PB 是⊙O 的切线，∴ $PA=PB$. ∵ $\angle APB=60°$，∴ △APB 是等边三角形. ∵ $PA=8$，∴ $AB=8$.

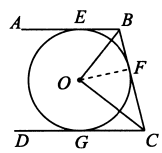
3. A 【解析】∵ PA，PB 是⊙O 的切线，∴ $OA\perp AP$，$OB\perp BP$，∴ $\angle OAP=\angle OBP=90°$. 又∵ $\angle AOB=2\angle C=130°$，∴ $\angle P=360°-(90°+90°+130°)=50°$. 故选 A.

4. 65° 【解析】如图，连接 OA，OQ，OB. ∵ PA，PB，EF 均是⊙O 的切线，∴ $\angle AOE=\angle QOE$，$\angle BOF=\angle QOF$，$\angle P+\angle AOB=180°$. ∵ $\angle APB=50°$，∴ $\angle AOB=130°$.



∴ $\angle EOF=\frac{1}{2}\angle AOB=65°$.

5. 【解】(1)∵ AB，BC，CD 分别与⊙O 相切于点 E，F，G，∴ $BE=BF$，$CF=CG$，$\angle OBF=\angle OBE$，$\angle OCF=\angle OCG$.



∵ $AB/\!/CD$，

∴ $\angle ABC+\angle BCD=180°$.

∴ $\angle OBF+\angle OCF=90°$.

∴ $\angle BOC=90°$.

(2)由(1)知，$\angle BOC=90°$.

∵ $OB=6$ cm，$OC=8$ cm，

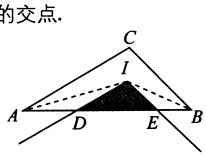
∴ $BC=\sqrt{OB^2+OC^2}=\sqrt{6^2+8^2}=10$ cm.

∴ $BE+CG=BF+CF=BC=10$ cm.

(3)如图，连接 OF，则 $OF\perp BC$. 在 Rt△BOC 中，$OF=\frac{OB\cdot OC}{BC}=\frac{6\times 8}{10}=4.8$ cm，即⊙O 的半径为 4.8 cm.

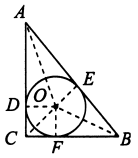
6. B 【解析】∵ ⊙O 是△ABC 的内切圆，∴ 点 O 到△ABC 三边的距离相等，∴ 点 O 是△ABC 的三条角平分线的交点.

7. B 【解析】如图，连接 AI，BI. ∵ 点 I 为△ABC 的内心，∴ AI 平分 $\angle CAB$，∴ $\angle CAI=\angle BAI$. 由平移得 $AC/\!/DI$，∴ $\angle CAI=\angle AID$，∴ $\angle BAI=\angle AID$，∴ $AD=DI$. 同理可得 $BE=EI$，∴ △DIE 的周长为 $DE+$



$DI+EI=DE+AD+BE=AB=4$，即图中阴影部分的周长为 4. 故选 B.

8. B　【解析】如图，设 Rt△ABC 的内切圆的圆心为点 O，切点分别为 D,E,F. 连接 OA,OB,OC,OD,OE,OF. ∵ $\odot O$ 是△ABC 的内切圆，切点分别是 D,E,F，∴ $OD\perp AC,OE\perp AB,OF\perp BC,AD=AE,BE=BF$. ∴ $\angle ODC=\angle OFC=\angle ACB=90°$. ∵ $OD=OF$，∴ 四边形 $ODCF$ 是正方形. ∴ $CD=OD=OF=CF=1$. ∵ $AD=AE,BF=BE,AE+BE=AB=5$，∴ $AD+BF=5$. ∴ △ABC 的周长 $AC+BC+AB=AD+CD+CF+BF+AB=2AB+2CD=12$.



9. 70°　【解析】∵ △ABC 的内切圆 $\odot O$ 与 BC 边相切于点 D，∴ OB 平分 $\angle ABC$，$OD\perp BC$，∴ $\angle OBD=\frac{1}{2}\angle ABC=\frac{1}{2}\times40°=20°$，∴ $\angle BOD=90°-\angle OBD=70°$.

10. 【解】(1) $BD=DE$. 理由如下：

∵ 点 E 是△ABC 的内心，∴ AD 平分 $\angle BAC$，BE 平分 $\angle ABC$，

∴ $\angle ABE=\angle CBE,\angle BAE=\angle CAD$，∴ $\overset{\frown}{BD}=\overset{\frown}{CD}$.

∵ $\angle DBC=\angle CAD$，

∴ $\angle DBC=\angle BAE$.

∵ $\angle DBE=\angle CBE+\angle DBC,\angle DEB=\angle ABE+\angle BAE$，

∴ $\angle DBE=\angle DEB$，

∴ $BD=DE$.

(2) 连接 CD，如图所示. 由(1)知 $\overset{\frown}{BD}=\overset{\frown}{CD}$，

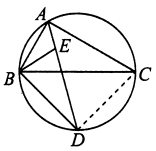
∴ $CD=BD=DE=4$.

∵ $\angle BAC=90°$，

∴ BC 是直径，∴ $\angle BDC=90°$，

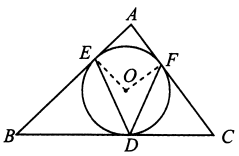
∴ $BC=\sqrt{BD^2+CD^2}=4\sqrt{2}$，

∴ △ABC 外接圆的半径为 $2\sqrt{2}$.

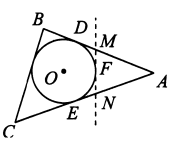


刷提升

1. B　【解析】如图，连接 OE,OF. ∵ $\angle A+\angle B+\angle C=180°,\angle B=50°,\angle C=60°$，∴ $\angle A=70°$. ∵ $\odot O$ 内切于△ABC，切点分别为 D,E,F，∴ $\angle OEA=\angle OFA=90°$，∴ $\angle EOF=360°-\angle A-\angle OEA-\angle OFA=110°$，∴ $\angle EDF=\frac{1}{2}\angle EOF=55°$. 故选 B.



2. B　【解析】如图，$\odot O$ 是△ABC 的内切圆，设 D,E,F 分别是 AB,AC,MN 与 $\odot O$ 的切点. 根据切线长定理，得 $BD+CE=BC=5$ cm，$MN=DM+EN$，所以△AMN 的周长为 $AD+AE=$ △ABC 的周长 $-2BC=17-5\times2=7$(cm).



3. D　【解析】∵ AE 与 $\odot O$ 切于点 F，∴ 根据切线长定理得 $AF=AB=4$ cm，$EF=EC$. 设 $EF=EC=x$ cm，则 $DE=(4-x)$ cm，$AE=(4+x)$ cm. 在 Rt△ADE 中，由勾股定理，得 $(4-x)^2+4^2=(4+x)^2$，解得 $x=1$. ∴ $CE=1$ cm. ∴ $DE=4-1=3$(cm). ∴ $S_{\triangle ADE}=\frac{1}{2}AD\cdot DE=\frac{1}{2}\times4\times3=6$(cm^2).

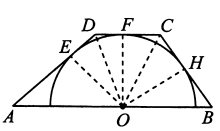
4. C　【解析】∵ 点 I 是△ABC 的内心，∴ $\angle BAC=2\angle IAC,\angle ACB=2\angle ICA$. ∵ $\angle AIC=124°$，∴ $\angle ABC=180°-(\angle BAC+\angle ACB)=180°-2(\angle IAC+\angle ICA)=180°-2(180°-\angle AIC)=68°$. 又∵ 四边形 $ABCD$ 内接于 $\odot O$，∴ $\angle CDE=\angle ABC=68°$. 故选 C.

5. A　【解析】如图，设 $\odot O$ 的半径是 R，$\odot O$ 与 AD,DC,CB 相切于点 E,F,H，连接 OE,OD,OF,OC,OH. 设 $CD=y,CB=x$，$S_{梯形ABCD}=S$.

则 $S=\frac{1}{2}(CD+AB)\cdot R=\frac{1}{2}(y+10)R$. ①

$S=S_{\triangle BOC}+S_{\triangle COD}+S_{\triangle DOA}=\frac{1}{2}xR+\frac{1}{2}yR+\frac{1}{2}\times6R$. ②

联立①②，得 $x=4$. 即 $CB=4$.



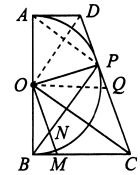
6. 14　【解析】设 $AB=4m$，则 $BC=5m,AC=6m$. 由 $4m+5m+6m=60$，解得 $m=4$. ∴ $AB=4\times4=16,BC=5\times4=20,AC=6\times4=24$. 设 $CF=x,AD=y,BE=z$. ∵ AC,AB,BC 分别为 $\odot O$ 的切线，

∴ $CE=CF=x,AF=AD=y,BD=BE=z$，则 $\begin{cases}x+y=24,①\\y+z=16,②\\z+x=20.③\end{cases}$

①+②+③，得 $2(x+y+z)=60$，∴ $x+y+z=30$. ④

④−②，得 $x=14$，∴ $CF=14$.

7. ①③④　【解析】如图，连接 OD,AP. ∵ DA,DC,BC 是 $\odot O$ 的切线，切点分别是 A,P,B，∴ $DA=DP,CP=CB,\angle DAB=90°=\angle CBA=\angle DPO$，∴ $AD+BC=DP+CP=CD,AD\parallel BC$，$AB\perp AD$，∴ $S_{四边形ABCD}=\frac{1}{2}(AD+BC)\cdot AB=\frac{1}{2}AB\cdot CD$，∴ ① 正确. ∵ $\angle AOD=\angle POD,\angle OBP=\angle OPB$，且 $\angle AOP=\angle OBP+\angle OPB$，∴ $\angle AOD=\angle OBP$. ∴ $OD\parallel BP$. 又∵ $OM\parallel CD$，∴ 四边形 $ODPN$ 是平行四边形. ∴ $AD=DP=ON<OB<AB$，∴ ②错误. ∵ 四边形 $ODPN$ 是平行四边形，∴ $DP=ON$. ∵ $AD=DP$，∴ $AD=ON$. ∴ ③正确. ∵ $\angle OAD=\angle OPD,\angle ODA=\angle ODP$，∴ $\angle AOD=\angle POD$. 同理 $\angle BOC=\angle POC$. ∴ $\angle DOC=\frac{1}{2}\times180°=90°$. ∴ △$CDO$ 的外接圆的直径是 CD. ∵ $\angle OAD=\angle OBC=90°$，取 CD 的中点 Q，连接 OQ. ∵ $OA=OB$，∴ $AD\parallel OQ\parallel BC$. ∴ $\angle AOQ=90°$. ∴ ④正确. 故正确的有①③④.



刷素养

8. 【解】(1) 如图(1)，过点 O 作 $ON\perp AB$，垂足为点 N.

∵ △ABC 为等边三角形，

∴ $\angle CAB=\angle CBA=60°$.

∵ 点 O 为△ABC 的内心，

∴ $\angle OAB=\frac{1}{2}\angle CAB=30°,\angle OBA=\frac{1}{2}\angle CBA=30°$，

∴ $OA=OB$.

∵ $OB=OA=2,ON\perp AB$，

∴ $AN=NB,PN=1$，

∴ $AN=\sqrt{3}$，∴ $AB=2AN=2\sqrt{3}$，

∴ $S_{\triangle OAB}=\frac{1}{2}AB\cdot PN=\sqrt{3}$，

∴ △PAB 的面积是 $\sqrt{3}$.

(2) 图(2)中重叠部分的面积与图(1)中重叠部分的面积相等. 证明如下：

如图(2)，连接 AO,BO.

由(1)知，$\angle EAO=\angle FBO,OA=OB$.

由旋转的性质，得 $\angle EOF=\angle AOB$，

∴ $\angle EOA=\angle FOB$.

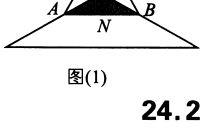
在△EOA 和△FOB 中，

∵ $\begin{cases}\angle EAO=\angle FBO,\\OA=OB,\\\angle EOA=\angle FOB,\end{cases}$

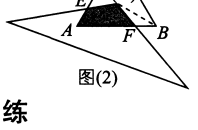
∴ △$EOA\cong$△FOB.

∴ $S_{四边形AEOF}=S_{\triangle AOB}$.

∴ 图(2)中重叠部分的面积与图(1)中重叠部分的面积相等.



图(1)



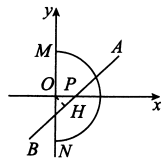
图(2)

24.2 综合训练

刷综合

1. D　【解析】∵ $\odot O$ 与 PA,PB 相切于点 A,B，∴ $PA=PB$. 又∵ 四边形 $APBC$ 是平行四边形，∴ 四边形 $APBC$ 是菱形，∴ $\angle P=\angle C=40°,\angle PAC=140°$，∴ $\angle CAB=\frac{1}{2}\angle PAC=70°$. 故选 D.

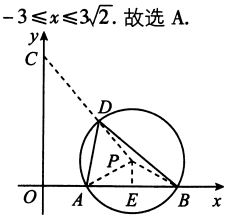
2. **A** 【解析】如图,作 $OH\perp AB$ 于点 H. ∵ 直线 $AB:y=x+b$,∴ $\angle OPH=45°$.



∵ $OP=|x|$,∴ $OH=\frac{\sqrt{2}}{2}|x|$.

∵ 直线 AB 与 $\odot O$ 有公共点,∴ $OH\leqslant 3$,即 $\frac{\sqrt{2}}{2}|x|\leqslant 3$. 当直线 AB 与半圆相切时,$OP=3\sqrt{2}$;当直线 AB 经过点 M 时,$OP=3$. ∴ $-3\leqslant x\leqslant 3\sqrt{2}$. 故选 A.

3. **C** 【解析】如图,以 AB 为弦作 $\odot P$,且使 $\angle APB=120°$,则点 D 在 $\odot P$ 上.

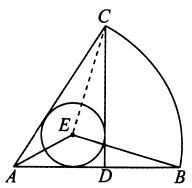


连接 PA,PB,PC,作 $PE\perp AB$ 于点 E.

∵ $A(\sqrt{3},0),B(3\sqrt{3},0)$,∴ $E(2\sqrt{3},0)$.

又 ∵ $\angle APB=120°$,∴ $PE=1$,$PA=2PE=2$. ∴ $P(2\sqrt{3},1)$. ∵ $C(0,5)$. ∴ $PC=\sqrt{(2\sqrt{3})^2+(5-1)^2}=2\sqrt{7}$. 又∵ $PD=PA=2$,∴ 只有点 D 在线段 PC 上时,CD 最短(点 D 在别的位置时构成 $\triangle CDP$). ∴ CD 最小值为 $2\sqrt{7}-2$.

4. $135°$ 【解析】如图,连接 EC.



∵ E 是 $\triangle ADC$ 的内心,

∴ $\angle CAE=\frac{1}{2}\angle CAD$,$\angle ACE=\frac{1}{2}\angle ACD$.

∵ $CD\perp AB$,∴ $\angle CAD+\angle ACD=90°$,

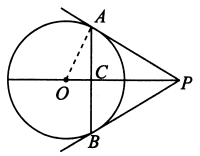
∴ $\angle AEC=180°-(\angle CAE+\angle ACE)=180°-\frac{1}{2}\times 90°=135°$.

在 $\triangle AEC$ 和 $\triangle AEB$ 中,

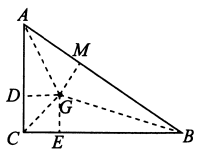
$\begin{cases}AE=AE,\\ \angle EAC=\angle EAB,\\ AC=AB,\end{cases}$

∴ $\triangle AEC\cong\triangle AEB$,∴ $\angle AEB=\angle AEC=135°$.

5. $\frac{9}{5}$ 【解析】如图,连接 AO. ∵ PA,PB 是 $\odot O$ 的两条切线,∴ $OA\perp PA$,$PA=PB$,$\angle APO=\angle BPO$. ∴ $AB\perp OP$. ∵ $AP=4$,$AO=3$,∴ $OP=\sqrt{OA^2+AP^2}=5$. ∴ $AC=\frac{OA\cdot AP}{OP}=\frac{12}{5}$. ∴ $OC=\sqrt{OA^2-AC^2}=\frac{9}{5}$.



6. $2\sqrt{2}$ 【解析】如图,作 $GD\perp AC$ 于点 D,作 $GE\perp BC$ 于点 E,作 $GM\perp AB$ 于点 M,连接 GA,GB,GC. 设 $GM=r$,则 $GD=GE=GM=r$. ∵ $AC=6,BC=8,\angle C=90°$,∴ $AB=10$.



∵ $S_{\triangle ACB}=S_{\triangle GAC}+S_{\triangle GBC}+S_{\triangle GAB}$,

∴ $\frac{1}{2}AC\cdot BC=\frac{1}{2}AC\cdot r+\frac{1}{2}BC\cdot r+\frac{1}{2}AB\cdot r$,即 $\frac{1}{2}\times 6\times 8=\frac{1}{2}\times 6r+\frac{1}{2}\times 8r+\frac{1}{2}\times 10r$. 解得 $r=2$,∴ $GE=2$. ∵ G 是 $\mathrm{Rt}\triangle ABC$ 的内心,∴ $\angle GCE=\frac{1}{2}\angle ACB=45°$. ∴ $CG=\sqrt{2}GE=2\sqrt{2}$.

7. 【证明】(1)连接 OD,如图(1)所示.

∵ $OA=OD$,AD 平分 $\angle BAC$,

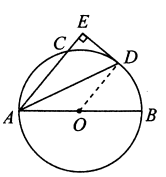
∴ $\angle OAD=\angle ODA$,$\angle CAD=\angle OAD$,

∴ $\angle CAD=\angle ODA$,∴ $AE\parallel OD$.

∵ DE 是 $\odot O$ 的切线,

∴ $\angle ODE=90°$,∴ $OD\perp DE$,

∴ $DE\perp AE$.



图(1)

(2)过点 D 作 $DM\perp AB$ 于点 M,连接 CD,DB,如图(2)所示.

∵ AD 平分 $\angle BAC$,$DE\perp AE$,$DM\perp AB$,

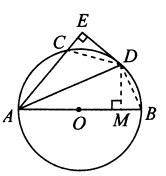
∴ $DE=DM$.

在 $\mathrm{Rt}\triangle DAE$ 和 $\mathrm{Rt}\triangle DAM$ 中,

$\begin{cases}DE=DM,\\ AD=AD,\end{cases}$

∴ $\mathrm{Rt}\triangle DAE\cong\mathrm{Rt}\triangle DAM(\mathrm{HL})$,

∴ $AE=AM$.



图(2)

∵ $\angle EAD=\angle MAD$,

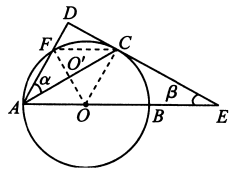
∴ $\overset{\frown}{CD}=\overset{\frown}{BD}$,∴ $CD=BD$.

在 $\mathrm{Rt}\triangle DEC$ 和 $\mathrm{Rt}\triangle DMB$ 中,$\begin{cases}DE=DM,\\ CD=BD,\end{cases}$

∴ $\mathrm{Rt}\triangle DEC\cong\mathrm{Rt}\triangle DMB(\mathrm{HL})$,∴ $CE=BM$,

∴ $AE+CE=AM+BM=AB$.

8. 【解】(1)如图,连接 OC.



∵ DE 是 $\odot O$ 的切线,∴ $OC\perp DE$.

∵ $AD\perp DE$,∴ $AD\parallel OC$.

∴ $\angle DAC=\angle ACO$.

∵ $OA=OC$,∴ $\angle OCA=\angle OAC$.

∴ $\angle DAE=2\alpha$.

∵ $\angle D=90°$,∴ $\angle DAE+\angle E=90°$,

即 $2\alpha+\beta=90°$,∴ $\beta=90°-2\alpha(0°<\alpha<45°)$.

(2)如图,连接 OF 交 AC 于点 O',连接 CF.

∵ O' 是 AC 的中点,∴ $AO'=CO'$,∴ $AC\perp OF$,$FA=FC$.

∴ $\angle FAC=\angle FCA=\alpha$.

由(1)知 $\angle DAE=2\alpha$,∴ $\angle FCA=\angle CAO$. ∴ $CF\parallel OA$.

∵ $AF\parallel OC$,∴ 四边形 $AFCO$ 是平行四边形.

∵ $OA=OC$,∴ 四边形 $AFCO$ 是菱形.

∴ $AF=AO=OF$. ∴ $\triangle AOF$ 是等边三角形.

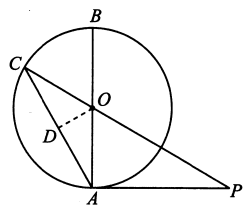
∴ $\angle FAO=2\alpha=60°$. ∴ $\alpha=30°$.

∵ $2\alpha+\beta=90°$,∴ $\beta=30°$. ∴ $\alpha=\beta=30°$.

刷中考

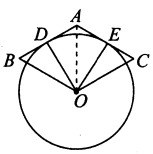
1. **A** 【解析】∵ N 为切点,∴ $MN\perp ON$,∴ $\angle MNO=90°$. ∵ $\angle MNB=52°$,∴ $\angle BNO=38°$. ∵ $ON=OB$,∴ $\angle BNO=\angle NBO$,∴ $\angle NOA=2\angle BNO=76°$. 故选 A.

2. **A** 【解析】如图,过点 O 作 $OD\perp AC$ 于点 D. ∵ AB 是 $\odot O$ 的直径,PA 切 $\odot O$ 于点 A,∴ $AB\perp AP$. ∴ $\angle BAP=90°$. ∵ $\angle P=30°$,∴ $\angle AOP=60°$.

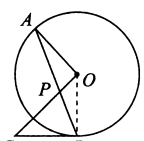


∴ $\angle AOC=120°$. ∵ $OA=OC$,∴ $\angle OAD=30°$. ∵ $AB=10$,∴ $OA=5$. ∴ $OD=\frac{1}{2}AO=\frac{5}{2}$. ∴ $AD=\sqrt{AO^2-OD^2}=\frac{5\sqrt{3}}{2}$. ∴ $AC=2AD=5\sqrt{3}$.

3. $60°$ 【解析】如图,连接 OA. ∵ AB 与 $\odot O$ 相切于点 D,∴ $OD\perp AB$. ∵ 点 D 是 AB 的中点,∴ $OA=BO$. ∵ 四边形 $ABOC$ 是菱形,∴ $AB=BO=AO$,∴ $\triangle ABO$ 是等边三角形,∴ $\angle B=60°$,∴ $\angle BAC=120°$. ∵ AC 与 $\odot O$ 相切于点 E,∴ $OE\perp AC$,∴ $\angle DOE=360°-90°-90°-120°=60°$.



4. $44°$ 【解析】如图,连接 OB. ∵ $OA=OB$,∴ $\angle OBA=\angle OAB=22°$,∴ $\angle AOB=180°-2\times 22°=136°$. 又∵ $OC\perp OA$,∴ $\angle BOC=136°-90°=46°$. ∵ BC 切 $\odot O$ 于点 B,∴ $OB\perp BC$,∴ $\angle OCB=90°-\angle BOC=90°-46°=44°$.



5. (1)【证明】连接 OC,如图.

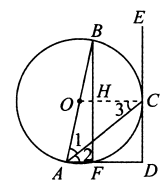
∵ AC 平分 $\angle BAD$,∴ $\angle 1=\angle 2$,

∵ $OA=OC$,∴ $\angle 1=\angle 3$,∴ $\angle 2=\angle 3$,

∴ $OC\parallel AD$.

∵ ED 切 $\odot O$ 于点 C,∴ $OC\perp DE$,∴ $AD\perp ED$.

(2)【解】OC 交 BF 于点 H,如图.



∵ AB 为直径,∴ $\angle AFB=90°$,

∴ 四边形 $CDFH$ 为矩形,

∴ $FH=CD=4$,$\angle CHF=90°$,∴ $OH\perp BF$,

∴ $BH=FH=4$,∴ $BF=8$.

在 $\mathrm{Rt}\triangle ABF$ 中,$AB=\sqrt{AF^2+BF^2}=\sqrt{2^2+8^2}=2\sqrt{17}$,

∴ $\odot O$ 的半径为 $\sqrt{17}$.

6. (1)【解】连接 DE,如图.

∵ $\angle BCD+\angle DEB=180°$,

∴ $\angle DEB=180°-120°=60°$.

∵ BE 为直径,∴ $\angle BDE=90°$,∴ $\angle DBE=30°$.

在 Rt△BDE 中，$DE=\frac{1}{2}BE=\frac{1}{2}\times 2\sqrt{3}=\sqrt{3}$，

$BD=\sqrt{BE^2-DE^2}=3$.

(2)【证明】连接 EA，如图.

∵ BE 为直径，∴ $\angle BAE=90°$.

∵ A 为 $\overset{\frown}{BE}$ 的中点，∴ $\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{AE}$，∴ $\angle ABE=45°$.

∵ $BA=AP$，∴ $AB=AE=AP$，

∴ △BEP 为直角三角形，

∴ $\angle PEB=90°$，∴ $PE\perp BE$，

∴ 直线 PE 是⊙O 的切线.

刷素养

7.【解】(1)∵ 直线 $y=x-1$，其中 $k=1$，$b=-1$，点 $P(1,-1)$，其中 $x_0=1$，$y_0=-1$，

∴ 点 $P(1,-1)$ 到直线 $y=x-1$ 的距离

$d=\frac{|kx_0-y_0+b|}{\sqrt{1+k^2}}=\frac{|1\times 1-(-1)+(-1)|}{\sqrt{1+1^2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

(2)⊙Q 与直线 $y=\sqrt{3}x+9$ 的位置关系为相切. 理由如下：

∵ 圆心 $Q(0,5)$ 到直线 $y=\sqrt{3}x+9$ 的距离 $d'=\frac{|\sqrt{3}\times 0-5+9|}{\sqrt{1+(\sqrt{3})^2}}=2$，⊙$Q$ 的半径 $r=2$，∴ $d'=r$，

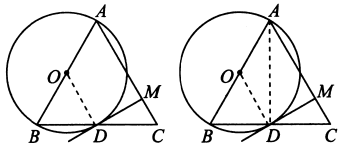
∴ ⊙Q 与直线 $y=\sqrt{3}x+9$ 相切.

专题 1 圆的切线的判定

刷难关

1.【证明】方法一(利用平行线的性质转化角)：

如图(1)，连接 OD. ∵ $AB=AC$，∴ $\angle B=\angle C$. ∵ $OB=OD$，∴ $\angle BDO=\angle B$. ∴ $\angle BDO=\angle C$. ∴ $OD\parallel AC$. ∵ $DM\perp AC$，∴ $DM\perp OD$. ∴ DM 与⊙O 相切.



图(1)

图(2)

方法二(利用圆周角定理的推论转化角)：

如图(2)，连接 OD，AD. ∵ AB 是⊙O 的直径，∴ $AD\perp BC$. ∵ $AB=AC$，∴ $\angle BAD=\angle CAD$. ∵ $DM\perp AC$，∴ $\angle CAD+\angle ADM=90°$. ∵ $OA=OD$，∴ $\angle BAD=\angle ODA$. ∴ $\angle ODA+\angle ADM=90°$，即 $OD\perp DM$，∴ DM 与⊙O 相切.

2.(1)【证明】如图，连接 OA，交 BC 于点 F，

∵ $OA=OD$，∴ $\angle ADB=\angle DAO$.

∵ $\angle ADB=\angle C$，∴ $\angle C=\angle DAO$.

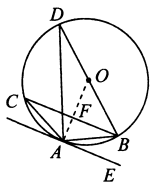
∵ $\angle BAE=\angle C$，∴ $\angle BAE=\angle DAO$.

∵ BD 是⊙O 的直径，∴ $\angle BAD=90°$，

即 $\angle DAO+\angle BAO=90°$，

∴ $\angle BAE+\angle BAO=90°$，即 $\angle OAE=90°$，

∴ $AE\perp OA$，∴ AE 与⊙O 相切于点 A.



(2)【解】∵ $AE\parallel BC$，$AE\perp OA$，∴ $OA\perp BC$，

∴ $\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{AC}$，$FB=\frac{1}{2}BC$，∴ $AB=AC$.

∵ $BC=2\sqrt{7}$，$AC=2\sqrt{2}$，∴ $BF=\sqrt{7}$，$AB=2\sqrt{2}$，

在 Rt△ABF 中，$AF=\sqrt{(2\sqrt{2})^2-(\sqrt{7})^2}=1$，

在 Rt△OFB 中，$OB^2=BF^2+(OB-AF)^2$，∴ $OB=4$，∴ $BD=8$，

∴ 在 Rt△ABD 中，$AD=\sqrt{BD^2-AB^2}=\sqrt{64-8}=\sqrt{56}=2\sqrt{14}$.

3.【证明】如图，连接 OF，OC.

∵ 四边形 $ABCD$ 是矩形，

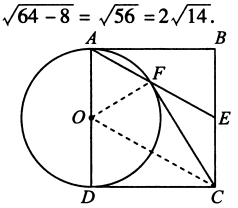
∴ $AD\parallel BC$，$AD=BC$，$\angle ADC=90°$.

∵ E 为 BC 的中点，$AO=DO$，

∴ $AO=\frac{1}{2}AD$，$EC=\frac{1}{2}BC$.

∴ $AO=EC$，$AO\parallel EC$.

∴ 四边形 $OAEC$ 是平行四边形.



∴ $AE\parallel OC$. ∴ $\angle DOC=\angle OAF$，$\angle FOC=\angle OFA$.

∵ $OA=OF$，∴ $\angle OAF=\angle OFA$. ∴ $\angle DOC=\angle FOC$.

在△ODC 和△OFC 中，

∵ $\begin{cases}OD=OF,\\ \angle DOC=\angle FOC,\\ OC=OC,\end{cases}$ ∴ △ODC≌△OFC(SAS).

∴ $\angle OFC=\angle ODC=90°$.

∴ $OF\perp CF$. ∴ CF 与⊙O 相切.

4.【证明】过点 O 作 $OE\perp CD$ 于点 E.

∵ AM 切⊙O 于点 A，∴ $OA\perp AD$.

又∵ DO 平分 $\angle ADC$，∴ $OE=OA$.

∵ OA 为⊙O 的半径，∴ OE 是⊙O 的半径，且 $OE\perp DC$.

∴ CD 是⊙O 的切线.

5.【证明】连接 OD，作 $OE\perp AC$ 于 E，连接 OB，OC，如图.

∵ AB 切小圆 O 于点 D，∴ $OD\perp AB$，

∴ D 为 AB 的中点.

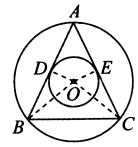
∵ $\angle ABC=\angle ACB$，∴ $AB=AC$.

又∵ $OE\perp AC$，∴ E 为 AC 的中点，

∴ $BD=CE$. 又∵ $OB=OC$，

∴ Rt△OBD≌△OCE(HL)，

∴ $OE=OD$，∴ AC 是小圆 O 的切线.



24.3 正多边形和圆

刷基础

1.B 【解析】①错误，如矩形，满足条件，却不是正多边形；②正确；③错误，如圆内接矩形，满足条件，却不是正多边形；④正确. 共有 2 个正确.

2.【证明】∵ $AB=AC$，$\angle BAC=36°$，∴ $\angle ABC=\angle ACB=72°$.

又∵ BD，CE 平分 $\angle ABC$，$\angle ACB$，

∴ $\angle BAC=\angle BCE=\angle ACE=\angle ABD=\angle DBC=36°$，

∴ $\overset{\frown}{BC}=\overset{\frown}{CD}=\overset{\frown}{DA}=\overset{\frown}{AE}=\overset{\frown}{BE}$，

∴ $BC=CD=AD=AE=BE$，

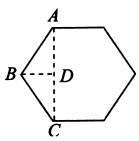
$\overset{\frown}{BCA}=\overset{\frown}{CDE}=\overset{\frown}{DAB}=\overset{\frown}{AEC}=\overset{\frown}{EBD}=3\overset{\frown}{BC}$.

∴ $\angle AEB=\angle EBC=\angle BCD=\angle CDA=\angle DAE$.

∴ 五边形 $AEBCD$ 是正五边形.

3.A 【解析】如图，连接 AC，过点 B 作 $BD\perp AC$ 于点 D. ∵ $AB=BC$，∴ △ABC 是等腰三角形.

∴ $AD=CD$. ∵ 多边形为正六边形，∴ $\angle ABC=\frac{180°\times 4}{6}=120°$. ∴ $\angle ABD=\frac{120°}{2}=60°$.

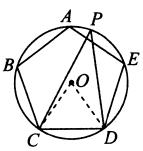


∴ $\angle BAD=30°$，∴ $AD=\frac{\sqrt{3}}{2}AB=\sqrt{3}$ cm.

∴ $a=2AD=2\sqrt{3}$ cm.

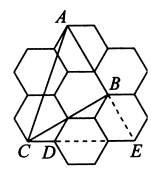
4.B 【解析】设正多边形的边数为 n，则正多边形的中心角为 $\frac{360°}{n}$，正多边形的一个外角等于 $\frac{360°}{n}$，所以正多边形的中心角等于正多边形的一个外角. 因为正多边形的一个外角与该正多边形相邻的一个内角互补，所以正多边形的中心角与该正多边形一个内角互补.

5.B 【解析】如图，连接 OC，OD. ∵ 五边形 $ABCDE$ 是正五边形，∴ $\angle COD=\frac{360°}{5}=72°$，∴ $\angle CPD=\frac{1}{2}\angle COD=36°$. 故选 B.



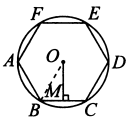
6.D 【解析】∵ ⊙O 的半径与这个正 n 边形的边长相等，∴ 这个多边形的中心角为 60°，∴ $\frac{360°}{n}=60°$，∴ $n=6$. 故选 D.

7.D 【解析】如图，延长 AB，作出过格点 C 与格点 D 所在的直线，一定与 AB 的延长线交于格点 E. ∵ 正六边形的边长为 1，则正六边形的外接圆的半径是 1，$CE=4$，两平行的边之间距离是 $\sqrt{3}$，∴ △BCE 的边 EC 上的高是 $\sqrt{3}$. △ACE 边 EC 上的高是 $\frac{5}{2}\sqrt{3}$. ∴ $S_{\triangle ABC}=S_{\triangle AEC}-S_{\triangle BEC}=\frac{1}{2}\times$

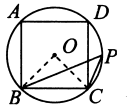


$4\times\left(\frac{5}{2}\sqrt{3}-\sqrt{3}\right)=3\sqrt{3}$.

8. $3\sqrt{3}$ 【解析】如图,连接 OB. ∵ 六边形 $ABCDEF$ 是⊙O 的内接正六边形,∴ $\angle BOM=30°$. ∵ ⊙O 的半径为 6,∴ $OB=BC=6$. ∴ $BM=3$. ∴ $OM=\sqrt{OB^2-BM^2}=3\sqrt{3}$.



9. $45°$ 【解析】如图,连接 OB,OC. ∵ 四边形 $ABCD$ 为⊙O 的内接正方形,∴ $\angle BOC=90°$. ∴ $\angle P=\frac{1}{2}\angle BOC=45°$.



10. (1)$\sqrt{2}:1$ 【解析】设此圆的半径为 R,则它的内接正方形的边长为$\sqrt{2}R$,它的内接正六边形的边长为 R,此圆的内接正方形和内接正六边形的边长比为$\sqrt{2}R:R=\sqrt{2}:1$.

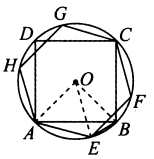
【解】(2) BE 是⊙O 的内接正十二边形的一边,理由如下:

如图,连接 OA,OB,OE,在正方形 $ABCD$ 中,$\angle AOB=90°$,

在正六边形 $AEFCGH$ 中,$\angle AOE=60°$,

∴ $\angle BOE=30°$,

∵ $n=\frac{360°}{30°}=12$,∴ BE 是正十二边形的一边.



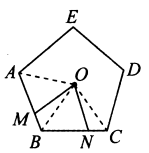
刷提升

1. D 【解析】根据题意得,正六边形的面积为 $6\times2=12$. 故纸片的剩余部分拼成的五边形的面积为 $12-2=10$.

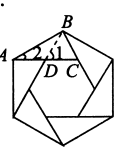
2. C 【解析】如图,连接 OA,OB,OC,$\angle AOB=\frac{360°}{5}=72°$. ∵ $\angle AOB=\angle BOC,OA=OB=OC$,∴ $\angle OAB=\angle OBC$. 在 $\triangle AOM$ 和 $\triangle BON$ 中,

$$\begin{cases}OA=OB,\\ \angle OAM=\angle OBN,\\ AM=BN,\end{cases}$$

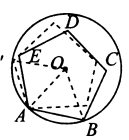
∴ $\triangle AOM\cong\triangle BON$(SAS),∴ $\angle BON=\angle AOM$,∴ $\angle MON=\angle AOB=72°$. 故选 C.



3. C 【解析】如图,由题意,得 $\angle1=180°-120°=60°$. ∵ $AD=CD=BC$,∴ $\triangle BCD$ 为等边三角形,∴ $AC=2BC$,$BD=\frac{1}{2}AC$,∴ $\triangle ABC$ 是直角三角形,且 $\angle2=30°$. ∴ $AB=\sqrt{AC^2-BC^2}=\sqrt{3}BC=\sqrt{3}CD$. 同理可得,经过 2 次后,所得到的正六边形的边长是原正六边形边长的$(\sqrt{3})^2$倍,…,∴ 经过 2 018 次后,所得到的正六边形的边长是原正六边形边长的$(\sqrt{3})^{2\,018}$倍.

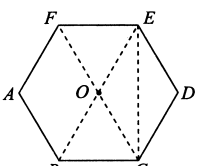


4. A 【解析】设点 E 第一次落在圆上时的对应点为 E',连接 OA,OB,OE',如图. ∵ 五边形 $ABCDE$ 为正五边形,∴ $\angle EAB=108°$. ∵ 正五边形 $ABCDE$ 绕点 A 逆时针旋转,点 E 第一次落在圆上点 E' 处,∴ $AE=AE'=3$. ∵ $OA=AB=OB=OE'=3$,∴ $\triangle OAE',\triangle OAB$ 都为等边三角形,∴ $\angle OAB=\angle OAE'=60°$,∴ $\angle E'AB=120°$,∴ $\angle EAE'=12°$,∴ 当点 E 第一次落在圆上时,则点 C 转过的度数为 12°. 故选 A.

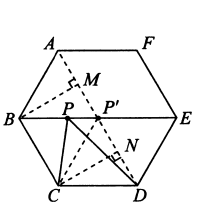


5. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ 【解析】如图,正六边形 $ABCDEF$ 中,对角线 BE,CF 交于点 O,连接 EC.

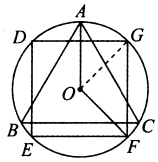
易知 BE 是正六边形的最长对角线,EC 是正六边形的最短对角线. ∵ $\triangle OBC$ 是等边三角形,∴ $\angle OBC=\angle OCB=\angle BOC=60°$. ∵ $OE=OC$,∴ $\angle OEC=\angle OCE$. ∵ $\angle BOC=\angle OEC+\angle OCE$,∴ $\angle OEC=\angle OCE=30°$. ∴ $\angle BCE=90°$. ∴ $CE=\frac{\sqrt{3}}{2}BE$. ∴ $\frac{EC}{BE}=\frac{\sqrt{3}}{2}$. ∴ $\lambda_6=\frac{\sqrt{3}}{2}$.



6. 6 【解析】要使 $\triangle PCD$ 的周长最小,则 $PC+PD$ 应最小. 由正六边形的性质,得点 C 关于 BE 对称的点为点 A,连接 AD 交 BE 于点 P',则有 $P'C=P'A$,$P'C+P'D=AD$ 最小. 又易知四边形 $ABCD$ 为等腰梯形,$\angle BAD=\angle CDA=60°$,作 $BM\perp AD$ 于点 M,$CN\perp AD$ 于点 N. ∵ $AB=2$,∴ $DN=AM=1$,∴ $AD=4$. 故 $\triangle PCD$ 的周长的最小值为 6.



7. $135°$ 【解析】如图,连接 OG. ∵ ⊙O 是 $\triangle ABC$ 的外接圆,∴ $AO\perp BC$. ∵ $EF/\!/BC$,∴ $AO\perp EF$. ∵ 四边形 $DEFG$ 是正方形,∴ $DG/\!/EF$,∴ $AO\perp DG$,∴ AO 是 DG 的垂直平分线. 又∵ 四边形 $DEFG$ 是正方形,∴ $\angle AOG=360°\times\frac{1}{8}=45°$,∴ $\angle GOF=90°$,∴ $\angle AOF=\angle AOG+\angle GOF=45°+90°=135°$.



8. $\frac{14}{2}$ $\frac{21}{=14}$ 【解析】题图(2)中的图案外轮廓周长是 $8-2+2+8-2=14$. 设$\angle BPC=2x°$,则以 $\angle BPC$ 为内角的正多边形的边数为 $\frac{360}{180-2x}=\frac{180}{90-x}$,以 $\angle APB$ 为内角的正多边形的边数为 $\frac{360}{x}$,那么图案外轮廓周长是 $\frac{180}{90-x}-2+\frac{360}{x}-2+\frac{360}{x}-2=\frac{180}{90-x}+\frac{720}{x}-6$. 根据题意可知,$2x°$ 的值只能为 60°,90°,120°,当 x 越小时,周长越大,∴ 当 $x=30$ 时,周长最大,此时图案定为会标,则会标的外轮廓周长是 $\frac{180}{90-30}+\frac{720}{30}-6=21$.

9. (1)【证明】∵ 正六边形 $ABCDEF$ 内接于⊙O,⊙O 的半径为 4,∴ $AB=BC=CD=DE=EF=FA=4$,$\angle FAB=\angle ABC=\angle BCD=\angle CDE=\angle DEF=\angle EFA$.

∵ 点 P,Q 同时分别从 A,D 两点出发,以 1 cm/s 的速度沿 AF,DC 向终点 F,C 运动,∴ $AP=DQ=t$,$PF=QC=4-t$.

在 $\triangle ABP$ 和 $\triangle DEQ$ 中,

∵ $\begin{cases}AB=DE,\\ \angle PAB=\angle QDE,\\ AP=DQ,\end{cases}$

∴ $\triangle ABP\cong\triangle DEQ$(SAS),

∴ $BP=EQ$.

同理可证 $PE=QB$.

∴ 四边形 $PBQE$ 是平行四边形.

(2)①2 ②0 或 4 【解析】①由对称性可知,当 $PA=PF,QC=QD$ 时,四边形 $PBQE$ 是菱形,此时 $t=2$ s.

②当 $t=0$ 时,点 P 在点 A 处,$\angle EPF=\angle PEF=30°$,∴ $\angle BPE=120°-30°=90°$,∴ 此时四边形 $PBQE$ 是矩形.

当 $t=4$ 时,点 P 在点 F 处,同理可得 $\angle BPE=90°$,此时四边形 $PBQE$ 是矩形. 综上所述,当 $t=0$ 或 4 s 时,四边形 $PBQE$ 是矩形.

24.4 弧长和扇形面积

课时 1 弧长和扇形面积

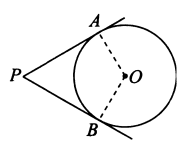
刷基础

1. C 【解析】根据弧长公式,得 $l=\frac{90\pi\times4}{180}=2\pi$. 故选 C.

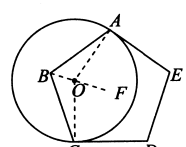
2. B 【解析】∵ $\overset{\frown}{BCD},\overset{\frown}{BAD}$ 的弧长分别为 $3\pi,5\pi$,∴ 圆的周长为 8π.

∵ $\angle D+\angle B=180°$,$\angle B=90°$,∴ $\angle D=90°$,∴ $\overset{\frown}{ABC}$ 的长为 $\frac{1}{2}\times$圆的周长 $=4\pi$. 故选 B.

3. C 【解析】如图,连接 OA,OB,则 $OA\perp PA,OB\perp PB$. ∵ $\angle APB=60°$,∴ $\angle AOB=120°$. ∴ 劣弧 AB 的长是 $\frac{120\pi\times3}{180}=2\pi$.



4. B 【解析】∵ 正五边形 $ABCDE$ 的内角和是 $(5-2)\times180°=540°$,∴ 一个内角是 108°. 如图,连接 OA,OB,OC,延长 BO 到点 F. ∵ 圆 O 与正五边形 $ABCDE$ 相切于点 A,C,∴ $\angle OAE=\angle OCD=90°$. ∴ $\angle OAB=\angle OCB=108°-90°=18°$. ∴ $\angle AOC=\angle OAB+\angle OCB+\angle ABC=18°+18°+108°=144°$. ∴ 劣弧 AC 的长度为

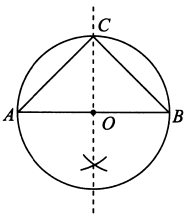


$\frac{144\pi\times1}{180}=\frac{4}{5}\pi$.

5. 6　【解析】∵ $n°$圆心角所对的弧长的计算公式为 $l=\frac{n\pi r}{180}$，∴ 根据题意，得 $2.5\pi=\frac{75\pi r}{180}$，解得 $r=6$.

6. $\frac{8\pi}{3}$　【解析】由图(1)得，$\overset{\frown}{AO}$的长 + $\overset{\frown}{OB}$的长 = $\overset{\frown}{AB}$的长. ∵ 半径 $OA=2$ cm，$\angle AOB=120°$，则图(2)的周长为 $\frac{2\times120\pi\times2}{180}+2=\frac{8\pi}{3}+2$(cm).

7. 【解】(1)如图，⊙O即为所作.



(2)在△ABC中，∵ $\angle ACB=90°$，$AC=BC=1$，∴ $AB=\sqrt{2}$.

∵ 线段AB的垂直平分线交AB于点O，

∴ $\angle BOC=90°$，$OB=OA=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

∴ 劣弧BC的长为 $\frac{90\pi\times\frac{\sqrt{2}}{2}}{180}=\frac{\sqrt{2}}{4}\pi$.

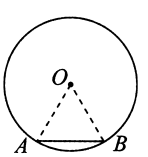
8. D　【解析】由题意，$r=l=2$，则 $S_{扇形}=\frac{1}{2}lr=\frac{1}{2}\times2\times2=2$. 故选 D.

9. B　【解析】∵ $\angle BCD=30°$，∴ $\angle BOD=60°$. ∵ AB是⊙O的直径，CD是弦，$OA=2$，∴ 阴影部分的面积是 $\frac{60\times\pi\times2^2}{360}=\frac{2\pi}{3}$. 故选 B.

10. 6π　【解析】∵ 四边形$AECD$是平行四边形，∴ $AE=CD$. ∵ $AB=BE=CD=6$，∴ $AB=BE=AE$. ∴ △ABE是等边三角形. ∴ $\angle B=60°$. ∴ $S_{扇形BAE}=\frac{60\pi\times6^2}{360}=6\pi$.

刷易错

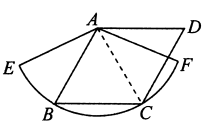
11. A　【解析】如图，连接AO，OB. ∵ 弦AB所对的圆周角为 30°，∴ $\angle AOB=60°$. ∵ $AO=BO$，∴ △OAB是等边三角形. ∵ $AB=5$ cm，∴ $\overset{\frown}{AB}$的长为 $\frac{60\pi\times5}{180}=\frac{5}{3}\pi$(cm). 故选 A.



易错警示 弧长公式中 $l=\frac{n\pi R}{180}$中n是指圆心角的度数，而题干中给的是圆周角的度数，不能直接代入公式计算，要先求出圆心角的度数，再代入公式计算.

刷提升

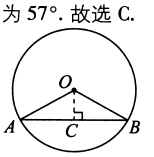
1. D　【解析】如图，连接AC，可得 $AB=BC=AC=2$，则 $\angle BAC=60°$，根据弧长公式，得$\overset{\frown}{BC}$的长度等于 $\frac{60\times\pi\times2}{180}=\frac{2\pi}{3}$. 故选 D.



2. C　【解析】设OA旋转的角度为 $n°$，重物上升 15 cm 时，轴心转动，圆上的点A转动弧长为 15 cm，∴ $15=\frac{n\pi\times15}{180}$，解得 $n\approx57$.

∴ 半径OA绕轴心O按顺时针方向旋转的角度约为 57°. 故选 C.

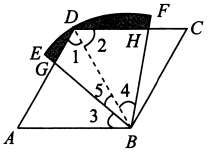
3. C　【解析】设弧所在⊙O的半径为r，所对的弦为AB. 如图，过点O作$OC\perp AB$于点C.



∵ $\angle AOB=120°$，∴ $\overset{\frown}{AB}$的长为 $\frac{120\pi r}{180}=l$，则 $r=\frac{3}{2\pi}l$. ∵ $\angle AOB=120°$，∴ $\angle OBC=30°$. ∴ $OC=\frac{1}{2}OB$. ∴ $BC=\sqrt{OB^2-OC^2}=\frac{\sqrt{3}}{2}r=\frac{3\sqrt{3}}{4\pi}l$. ∴ $AB=2BC=\frac{3\sqrt{3}}{2\pi}l$.

4. B　【解析】∵ $AB=1$，BE平分$\angle ABC$，∴ $\angle ABE=\angle EBF=45°$. ∵ $AD/\!/BC$，∴ $\angle AEB=\angle CBE=45°$. ∴ $AE=AB=1$，$BE=\sqrt{2}$. ∵ 点E是AD的中点，∴ $ED=AE=1$. ∴ 图中阴影部分的面积 $S_{阴影}=S_{矩形ABCD}-S_{△ABE}-S_{扇形BEF}=1\times2-\frac{1}{2}\times1\times1-\frac{45\pi\times(\sqrt{2})^2}{360}=\frac{3}{2}-\frac{\pi}{4}$.

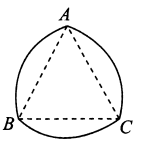
5. A　【解析】如图，连接BD. ∵ 四边形$ABCD$是菱形，$\angle A=60°$，∴ $\angle ADC=120°$. ∴ $\angle1=\angle2=60°$. ∴ △DAB是等边三角形. ∵ $AB=2$，∴ △ABD的高为$\sqrt{3}$. ∵ 扇形的圆心角为 60°，∴ $\angle4+\angle5=60°$. 又∵ $\angle3+\angle5=60°$，∴ $\angle3=\angle4$.



设AD，BE相交于点G，BF，DC相交于点H. 在△ABG和△DBH中，∵ $\begin{cases}\angle A=\angle2,\\AB=BD,\\\angle3=\angle4,\end{cases}$

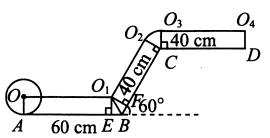
∴ △ABG≌△DBH(ASA). ∴ 四边形$GBHD$的面积等于△ABD的面积. ∴ 图中阴影部分的面积 $S_{阴影}=S_{扇形BEF}-S_{△ABD}=\frac{60\pi\times2^2}{360}-\frac{1}{2}\times2\times\sqrt{3}=\frac{2\pi}{3}-\sqrt{3}$.

6. πa　【解析】如图. ∵ △ABC是等边三角形，∴ $\angle A=\angle B=\angle C=60°$，$AB=BC=CA=a$，∴ $\overset{\frown}{AB}$的长 = $\overset{\frown}{BC}$的长 = $\overset{\frown}{CA}$的长 = $\frac{60\pi a}{180}=\frac{\pi a}{3}$，∴ 勒洛三角形的周长为 $\frac{\pi a}{3}\times3=\pi a$.



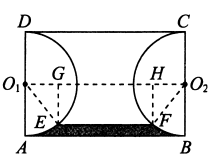
7. $\frac{\pi}{4}$　【解析】∵ $\angle BOC=60°$，△$B'OC'$是△BOC绕圆心O逆时针旋转得到的，∴ △BCO≌△$B'C'O$，$\angle B'OC'=60°$，∴ $\angle B'OC=60°$，$\angle C'B'O=30°$，∴ $\angle C'OC=\angle B'OB=120°$. ∵ $AB=2$ cm，∴ $OB=1$ cm，$OC'=\frac{1}{2}$ cm，∴ $B'C'=\frac{\sqrt{3}}{2}$ cm，∴ $S_{扇形B'OB}=\frac{120\pi\times1^2}{360}=\frac{\pi}{3}$(cm²)，$S_{扇形C'OC}=\frac{120\pi\times\frac{1}{4}}{360}=\frac{\pi}{12}$(cm²)，∴ 阴影部分的面积 $=S_{扇形B'OB}+S_{△B'C'O}-S_{△BCO}-S_{扇形C'OC}=S_{扇形B'OB}-S_{扇形C'OC}=\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{12}=\frac{\pi}{4}$(cm²).

8. $140-\frac{20\sqrt{3}}{3}+\frac{10\pi}{3}$　【解析】分四个阶段，如图所示.



$OO_1=60-\frac{10\sqrt{3}}{3}$，$O_1O_2=40-\frac{10\sqrt{3}}{3}$，$\overset{\frown}{O_2O_3}=\frac{60\pi\times10}{180}=\frac{10\pi}{3}$，$O_3O_4=40$，∴ 点$A$滚动到点$D$其圆心所经过的路线长为 $(60+40+40)-\frac{\sqrt{3}}{3}\times10\times2+\frac{10\pi}{3}=140-\frac{20\sqrt{3}}{3}+\frac{10\pi}{3}$(cm).

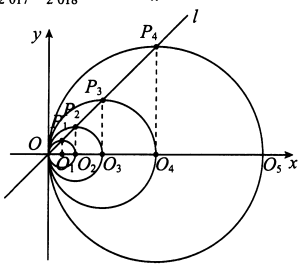
9. $3-\frac{\pi}{6}-\frac{5\sqrt{3}}{4}$　【解析】如图，连接O_1O_2，O_1E，O_2F，则四边形O_1O_2FE是等腰梯形. 过点E作$EG\perp O_1O_2$于点G，过点F作$FH\perp O_1O_2$于点H，则四边形$EGHF$是矩形. ∴ $GH=EF=2$. ∴ $O_1G=\frac{1}{2}$. ∵ $O_1E=1$，∴ $GE=\frac{\sqrt{3}}{2}$，$\angle O_1EG=30°$. ∴ $\angle AO_1E=\angle GEO_1=30°$. 同理 $\angle BO_2F=30°$.



∴ $S_{阴影}=S_{矩形ABO_2O_1}-2S_{扇形O_1AE}-S_{梯形EFO_2O_1}=3\times1-2\times\frac{30\pi\times1^2}{360}-\frac{1}{2}\times(2+3)\times\frac{\sqrt{3}}{2}=3-\frac{\pi}{6}-\frac{5\sqrt{3}}{4}$.

10. $2^{2\,015}\pi$　【解析】如图，连接P_1O_1，P_2O_2，P_3O_3，…. ∵ P_1是⊙O_1上的点，∴ $P_1O_1=OO_1$. ∵ 直线l的解析式为$y=x$，∴ $\angle P_1OO_1=45°$. ∴ △P_1OO_1为等腰直角三角形，即 $P_1O_1\perp x$轴. 同理，P_nO_n垂直于x轴. ∴ 弧P_nO_{n+1}为$\frac{1}{4}$圆周. 由题意，$OO_n=2^{n-1}$，∴ 弧

P_nO_{n+1}的长为$\frac{1}{4}\times 2\pi OO_n=\frac{1}{2}\times\pi\times 2^{n-1}=2^{n-2}\pi$. 当 $n=2\,017$时，弧$P_{2\,017}O_{2\,018}=2^{2\,015}\pi$.



课时2　圆锥的侧面积和全面积

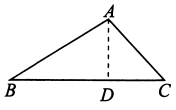
刷基础

1. C　【解析】∵ $r=2, l=6$，∴ 圆锥的侧面积为 $\pi rl=\pi\times 2\times 6=12\pi$. 故选 C.

2. C　【解析】∵ 底面圆的直径为 8 cm，圆锥的高为 3 cm，∴ 圆锥母线长为 5 cm. ∴ 陀螺的表面积为$\frac{1}{2}\pi\times 8\times 5+\left(\frac{8}{2}\right)^2\pi+8\pi\times 6=84\pi(\text{cm}^2)$.

3. A　【解析】设底面圆的半径为 R，则 $\pi R^2=25\pi$，解得 $R=5$，圆锥的母线长为 $\sqrt{2^2+5^2}=\sqrt{29}$，所以圆锥的侧面积为 $\pi\cdot 5\cdot\sqrt{29}=5\sqrt{29}\pi$. 圆柱的侧面积为 $2\pi\cdot 5\cdot 3=30\pi$，所以需要毛毡的面积为$(30\pi+5\sqrt{29}\pi)\,\text{m}^2$. 故选 A.

4. 【解】(1)如图，过点 A 作 $AD\perp BC$ 于点 D.



在 Rt△ABD 中，∵ $\angle B=30°$，

∴ $AD=\frac{1}{2}AB=2$，$BD=\sqrt{AB^2-AD^2}=\sqrt{4^2-2^2}=2\sqrt{3}$.

在 Rt△ACD 中，$CD=\sqrt{(2\sqrt{2})^2-2^2}=2$，

∴ $BC=BD+CD=2\sqrt{3}+2$.

(2)将△ABC 绕线段 BC 所在直线旋转一周，所得几何体的表面积为$\frac{1}{2}\times 2\pi\times 2\times 4+\frac{1}{2}\times 2\pi\times 2\times 2\sqrt{2}=8\pi+4\sqrt{2}\pi=(8+4\sqrt{2})\pi$.

5. D　【解析】圆锥的侧面展开图的弧长为 $2\pi\times 12\div 2=12\pi(\text{cm})$，∴ 圆锥的底面圆半径为 $12\pi\div 2\pi=6(\text{cm})$.

6. B　【解析】设母线长为 R，底面半径为 r，∴ 底面周长为 $2\pi r$，底面面积为 πr^2，侧面积为 πrR. ∵ 侧面积是底面积的 2 倍，∴ $2\pi r^2=\pi rR$，∴ $R=2r$. 设圆心角的度数为 n，则$\frac{n\pi R}{180}=2\pi r=\pi R$，解得 $n=180°$. 故选 B.

7. 3　【解析】圆锥的侧面展开图的半径就是圆锥的母线长. 设母线长为 R cm，则$\frac{120\pi\times R}{180}=2\pi\times 1$，解得 $R=3$.

8. $24\pi\ \text{cm}^2$　$216°$　【解析】设圆锥的底面半径为 r cm，母线长为 R cm，侧面展开图的圆心角为 $n°$. ∵ 圆锥的底面周长为 $2\pi r=6\pi$，∴ $r=3$. ∵ 圆锥的高为 4 cm，∴ $R=\sqrt{3^2+4^2}=5(\text{cm})$. ∴ 圆锥的全面积 = 底面积 + 侧面积 $=\pi\times 3^2+\frac{1}{2}\times 6\pi\times 5=24\pi(\text{cm}^2)$. ∵ 侧面展开图的弧长 l = 底面周长 $=6\pi=\frac{n\pi R}{180}$，∴ $n=\frac{180\times 6\pi}{\pi\times 5}=216$，即侧面展开图的圆心角是 216°.

9. 65π　【解析】∵ 圆锥的底面直径是 10 cm，高为 12 cm，∴ 由勾股定理求得圆锥的母线长为 13 cm. ∴ 圆锥的侧面积为 $\pi\times 13\times 5=65\pi(\text{cm}^2)$.

10. $2\sqrt{119}$ cm　【解析】由题意，得圆锥的母线长为 24 cm. 设圆锥底面圆半径为 r cm，则 $2\pi r=\frac{150\pi\times 24}{180}$，解得 $r=10$，故这个圆锥的高为 $\sqrt{24^2-10^2}=2\sqrt{119}(\text{cm})$.

11. $\sqrt{15}$　【解析】设圆锥的底面圆半径为 r. 根据题意得 $2\pi r=\frac{90\cdot\pi\cdot 4}{180}$，解得 $r=1$，所以此圆锥的高为 $\sqrt{4^2-1^2}=\sqrt{15}$.

12. 【解】设圆锥侧面展开图的扇形的圆心角为 $n°$.

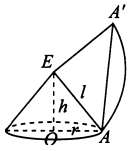
∵ $r=20\ \text{cm}$，$h=20\sqrt{15}\ \text{cm}$，∴ 母线长 $l=\sqrt{r^2+h^2}=80\ \text{cm}$.

如图，∵ 圆锥侧面展开图的扇形弧长为 $2\times 20\pi=\frac{n\pi\times 80}{180}$，

∴ $n=90$，∴ △EAA'是等腰直角三角形.

∴ 由勾股定理，得 $AA'=\sqrt{A'E^2+AE^2}=80\sqrt{2}(\text{cm})$.

答：蚂蚁爬行的最短距离为 $80\sqrt{2}$ cm.



刷易错

13. 30　【解析】设圆锥的母线长为 l. 根据题意得 $\pi\cdot 20\cdot l=600\pi$，解得 $l=30$，即这个圆锥的母线长为 30.

易错警示 圆锥侧面展开图是扇形，此扇形的弧长为底面圆的周长，利用这一关系，可以计算母线长或底面半径，准确掌握各个量之间的关系是解题的关键.

专题2　不规则图形面积的求法

刷难关

1. 【解】在等腰直角三角形 ABC 中，

∵ $\angle ACB=90°$，D 是斜边 AB 的中点，$AC=BC=16$ 分米，

∴ $AB=16\sqrt{2}$ 分米，$\angle DBF=45°$.

∴ $BF=BD=CD=8\sqrt{2}$ 分米.

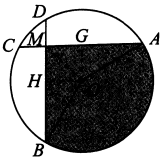
∴ $S_{\text{阴影}}=S_{\triangle ABC}-S_{\text{扇形}BDF}-S_{\text{图形}ADE}$

$=\frac{16\times 16}{2}-\frac{45\pi\times(8\sqrt{2})^2}{360}-\frac{1}{2}\times\left[\frac{16\times 16}{2}-\frac{90\pi\times(8\sqrt{2})^2}{360}\right]$

$=64$(平方分米).

即阴影部分的面积是 64 平方分米.

2. 【解】如图，过点 O 作 $OG\perp AC$ 于点 G，$OH\perp BD$ 于点 H，连接 OM，则 $AC=2AG$，$BD=2BH$.



在 Rt△AOG 和 Rt△BOH 中，

∵ $OA=OB=4$，$\angle A=\angle B=30°$，

∴ $OG=OH=\frac{1}{2}OA=2$.

∴ $AG=BH=2\sqrt{3}$.

∵ $\angle A=\angle B=30°$，$AC\perp BD$ 于点 M，

∴ $\angle AOB=\angle A+\angle B+\angle AMB=30°+30°+90°=150°$.

∵ $OG\perp AC$，$OH\perp BD$，$AC\perp BD$，且 $OH=OG$，

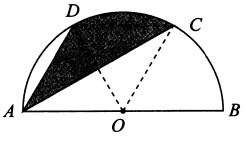
∴ 四边形 $OGMH$ 是正方形.

∴ $GM=HM=OG=2$.

∴ $AM=BM=2+2\sqrt{3}$.

∴ $S_{\text{阴影}}=S_{\text{扇形}OAB}+S_{\triangle AOM}+S_{\triangle BOM}=\frac{150\pi\times 4^2}{360}+2\times\frac{1}{2}\times(2+2\sqrt{3})\times 2=\frac{20\pi}{3}+4\sqrt{3}+4$.

3. 【解】如图，连接 OC，OD，CD.



∵ C，D 是半圆的三等分点，

∴ $\angle AOD=\angle DOC=\angle COB=60°$.

又∵ $OD=OC$，∴ △COD 是等边三角形.

∴ $\angle ODC=60°$. ∴ $\angle ODC=\angle AOD$.

∴ $CD/\!/AB$.

∴ △COD 和△CDA 等底等高.

∴ $S_{\triangle COD}=S_{\triangle ACD}$.

∴ 阴影部分的面积 $S_{\text{阴影}}=S_{\text{扇形}OCD}=\frac{60\pi\times\left(\frac{40}{2}\right)^2}{360}=\frac{200\pi}{3}$.

4. (1)【解】$S_{阴影}=\frac{90\pi\times2^2}{360}-\frac{1}{2}\times2\times2=\pi-2$.

(2)相等 【解析】根据对称性得出题图(2)中阴影部分的面积=题图(1)中阴影部分的面积.

(3)【解】$S_{阴影}=2\times\frac{45\pi\times2^2}{360}-\frac{1}{2}\times2\times2=\pi-2$.

5. (1)【证明】∵ AB 为⊙O 的直径,$AB\perp CD$,

∴ $BC=BD$,∴ $\angle A=\angle DCB$. ∵ $OF\perp AC$,

∴ $\angle AFO=\angle CEB$. ∵ $BE=OF$,∴ $\triangle AFO\cong\triangle CEB$(AAS).

(2)【解】①∵ AB 为⊙O 的直径,$AB\perp CD$,∴ $CE=\frac{1}{2}CD=4\sqrt{3}$,

设 $OC=r$,则 $OE=r-4$.

∴ $r^2=(r-4)^2+(4\sqrt{3})^2$,

∴ $r=8$,即⊙O 的半径为 8.

②如图,连接 OD.

∵ $OE=\frac{1}{2}OC=4$,

∴ $\angle OCE=30°$,$\angle COB=60°$,

∴ $\angle COD=120°$.

∵ $\triangle AFO\cong\triangle CEB$,∴ $S_{\triangle AFO}=S_{\triangle BCE}$,

∴ $S_{阴影}=S_{扇形OCD}-S_{\triangle OCD}$

$=\frac{120\cdot\pi\cdot8^2}{360}-\frac{1}{2}\times8\sqrt{3}\times4$

$=\frac{64}{3}\pi-16\sqrt{3}$.

6.【解】在 Rt△ABC 中,∵ $AB=4$,$BC=3$,

∴ 由勾股定理,得 $AC=5$.

将 Rt△ABC 绕点 A 逆时针旋转 90°得到 Rt△AB_1C_1,可发现阴影部分的面积为扇形 ACC_1 与扇形 ABB_1 的面积之差.

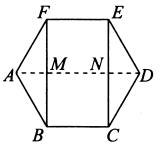
∵ $\angle CAC_1=\angle BAB_1=90°$,

∴ 阴影部分的面积 $S=\frac{1}{4}\times(5^2\pi-4^2\pi)=\frac{9}{4}\pi$.

24.3 ~ 24.4 综合训练

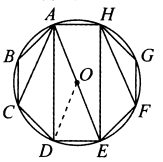
刷综合

1. D 【解析】如图,连接 AD 交 BF,CE 于点 M,N. ∵ 六边形 $ABCDEF$ 是正六边形,∴ $\angle FAB=120°$. ∴ $\angle FAM=60°$. ∴ $AM=\frac{1}{2}AF=\frac{1}{2}EF$. ∴ △$FAB$ 的面积 $=\frac{1}{4}\times$四边形 $BCEF$ 的面积 = 7.5. 同理△EDC 的面积为 7.5. ∴ 正六边形 $ABCDEF$ 的面积为 30 + 7.5 + 7.5 = 45.



2. B 【解析】∵ 五边形 $ABCDE$ 是正五边形,△ABG 是等边三角形,∴ 直线 DG 是正五边形 $ABCDE$ 和正三角形 ABG 的对称轴,∴ DG 垂直平分线段 AB. ∵ $AB=BC$,$\angle ABC=108°$,∴ $\angle BCA=\angle BAC=36°$,$\angle CAG=36°+60°=96°$,故乙同学的说法错误. ∵ $\angle DCB=108°$,$\angle ACB=36°$,∴ $\angle DCA=72°$,∴ $\angle CDE+\angle DCA=180°$,∴ $DE/\!/AC$,∴ $\angle CDF=EDF=\angle CFD=54°$,∴ △$CDF$ 是等腰三角形. 故丁、甲、丙同学的说法正确. 故选 B.

3. A 【解析】如图,取 AE 的中点 O,则点 O 为正八边形 $ABCDEFGH$ 外接圆的圆心,连接 OD,∴ △ODE的面积 $=\frac{1}{2}\times$△ADE 的面积 $=\frac{1}{2}\times8=4$,圆内接正八边形 $ABCDEFGH$ 是由 8 个与△ODE 全等的三角形构成. 则圆内接正八边形 $ABCDEFGH$ 的面积为 $8\times4=32$. 故选 A.



4. B 【解析】如图,$\overset{\frown}{OA}$是⊙M 上满足条件的一段弧,连接 AM,MO. 由题意知,$\angle AMO=90°$,$AM=OM$.

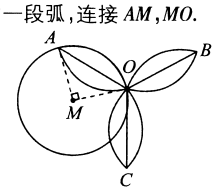
∵ $AO=2$,∴ $AM=\sqrt{2}$.

∴ $S_{扇形AMO}=\frac{1}{4}\times\pi\times MA^2=\frac{1}{2}\pi$.

$S_{\triangle AMO}=\frac{1}{2}AM\cdot MO=1$,

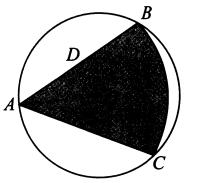
∴ $S_{弓形AO}=\frac{1}{2}\pi-1$,

∴ $S_{三叶花}=6\times\left(\frac{1}{2}\pi-1\right)=3\pi-6$. 故选 B.

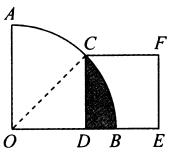


5. $\frac{\sqrt{3}}{3}$ 【解析】如图,连接 OA,OB,OC,过点 O 作 $OD\perp AB$ 于点 D. ∵ $OB=OA=OC$,$AB=AC$,∴ $\angle OAB=\angle OBA=\angle OAC=\angle OCA$.

∵ $\angle BAC=60°$,∴ $\angle DAO=\frac{1}{2}\times60°=30°$. 由题意,得 $OA=2$,∴ $OD=1$. ∴ $AD=\sqrt{3}$. ∴ $AB=2\sqrt{3}$. ∴ 扇形 ABC 的弧长是$\frac{60\pi\times2\sqrt{3}}{180}=\frac{2\sqrt{3}\pi}{3}$. ∴ $2\pi r=\frac{2\sqrt{3}\pi}{3}$,解得 $r=\frac{\sqrt{3}}{3}$.



6. $\pi-2$ 【解析】如图,连接 OC. ∵ 在扇形 AOB 中,$\angle AOB=90°$,正方形 $CDEF$ 的顶点 C 是$\overset{\frown}{AB}$的中点,∴ $\angle COD=45°$,∴ $OC=\sqrt{2}CD=2\sqrt{2}$,∴ $CD=OD=2$,∴ 阴影部分的面积 = 扇形 BOC 的面积 − 三角形 ODC 的面积 $=\frac{45\pi\cdot(2\sqrt{2})^2}{360}-\frac{1}{2}\times2^2=\pi-2$.

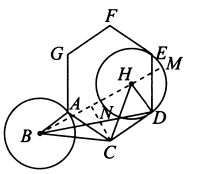


7. $2\sqrt{3}+1$ 【解析】由题意,$AC=CD$,$\angle ACD=(6-2)\times180°\div6=120°$. 把△$ABC$ 和⊙B 绕点 C 顺时针旋转 120°得△DHC 和⊙H,BH 的延长线与⊙H 的交点为 M. 如图,作 $CN\perp BM$ 于点 N,则 BM 的长度就是 DB 达到的最大值,此时 $\angle BCH=120°$,$CH=CB=2$,∴ $BN=HN$,

$\angle HBC=\angle CHB=(180°-120°)\div2=30°$. ∴ $CN=\frac{1}{2}BC=1$.

∴ $BN=\sqrt{3}$. ∴ $BH=2BN=2\sqrt{3}$.

∴ $BM=BH+HM=2\sqrt{3}+1$.



8. (1)【证明】连接 CE,如图(1).

∵ AE 是⊙O 的直径,

∴ $CE\perp AD$.

∵ $AC=CD$,∴ $AE=ED$,

∴ $\angle AEC=\angle DEC$,

∴ $\overset{\frown}{BC}=\overset{\frown}{AC}$,

∴ 点 C 是劣弧 AB 的中点.

(2)【解】连接 BC,OB,OC,如图(2).

∵ $AE=2AC=6$,

∴ $\angle AEC=30°$,$\angle AED=60°$.

又∵ $AE=ED$,∴ △AED 是等边三角形,

∴ $\angle A=60°$.

∵ $\overset{\frown}{BC}=\overset{\frown}{AC}$,∴ $\overset{\frown}{BE}=\overset{\frown}{BC}=\overset{\frown}{AC}$,

∴ $\angle BOC=\angle EOB=60°$.

又∵ $OB=OC$,

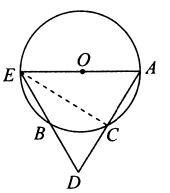
∴ △OBC 为等边三角形,$\angle OBC=60°$,

∴ $\angle EOB=\angle OBC$,$AE/\!/BC$,

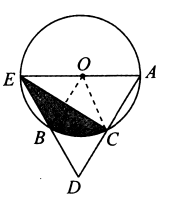
∴ △OBC 与△EBC 等底等高,

∴ $S_{\triangle OBC}=S_{\triangle EBC}$,

∴ $S_{阴影}=S_{扇形OBC}=\frac{60\pi\cdot3^2}{360}=\frac{3}{2}\pi$.



图(1)

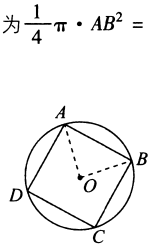


图(2)

刷中考

1. A 【解析】连接 AC. ∵ $\angle B=90°$,∴ AC 是⊙O 的直径. ∵ $AB=BC$,$AC=2$,∴ $AB=BC=\sqrt{2}$ m,∴ 此扇形的面积为 $\frac{1}{4}\pi\cdot AB^2=\frac{1}{4}\pi\times(\sqrt{2})^2=\frac{1}{2}\pi(m^2)$.

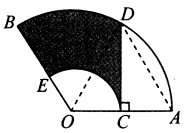
2. A 【解析】如图,连接 OA,OB. ∵ 正方形 $ABCD$ 内接于⊙O,∴ $AB=BC=DC=AD$,∴ $\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{BC}=\overset{\frown}{DC}=\overset{\frown}{AD}$,∴ $\angle AOB=\frac{1}{4}\times360°=90°$. 在 Rt△$AOB$中,由勾股定理得 $2AO^2=(2\sqrt{2})^2$,解得



$AO=2$,$\therefore \overset{\frown}{AB}$的长为$\frac{90\pi\times 2}{180}=\pi$. 故选 A.

3.B 【解析】$\because AC$ 与 BD 是$\odot O$ 的两条直径,$\therefore \angle ABC=\angle ADC=\angle DAB=\angle BCD=90°$. $\therefore$ 四边形 $ABCD$ 是矩形. $\therefore \triangle ABO$ 与 $\triangle CDO$ 的面积的和等于$\triangle AOD$ 与$\triangle BOC$ 的面积的和.
$\therefore$ 图中阴影部分的面积 $S_{阴影}=S_{扇形OAD}+S_{扇形OBC}=2S_{扇形OAD}$.
$\because OA=OB$,$\therefore \angle BAC=\angle ABO=36°$,$\therefore \angle AOD=72°$.
$\because AC=10$ cm,$\therefore OA=5$ cm,$\therefore$ 图中阴影部分的面积 $S_{阴影}=2\times\frac{72\pi\times 5^2}{360}=10\pi(\text{cm}^2)$.

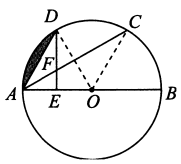
4.A 【解析】如图,连接 OD,AD. $\because$ 点 C 为 OA 的中点,$\therefore OC=\frac{1}{2}OA=\frac{1}{2}OD$. $\because CD\perp OA$,
$\therefore \angle CDO=30°$,$\angle DOC=60°$,$\therefore \triangle ADO$ 为等边三角形,$OD=OA=12$,$OC=CA=6$,
$\therefore CD=\sqrt{(OD)^2-(OC)^2}=\sqrt{12^2-6^2}=6\sqrt{3}$,$\therefore S_{扇形AOD}=\frac{60\cdot\pi\cdot(12)^2}{360}=24\pi$,$\therefore S_{阴影}=S_{扇形AOB}-S_{扇形COE}-(S_{扇形AOD}-S_{\triangle COD})=\frac{120\cdot\pi\cdot(12)^2}{360}-\frac{120\cdot\pi\cdot 6^2}{360}-(24\pi-\frac{1}{2}\times 6\times 6\sqrt{3})=12\pi+18\sqrt{3}$. 故选 A.



5.$3\sqrt{6}$ cm 【解析】设此扇形的半径长为 R cm,则$\frac{100\pi\times R^2}{360}=15\pi$,解得 $R=3\sqrt{6}$.

6.$\frac{\sqrt{3}}{2}$ 【解析】由题意,两个扇形的圆心角度数都为 120°,半径之比为 $OM:EF=\sqrt{3}:2$. 因为 $r_1=\frac{120\cdot OM}{360}$,$r_2=\frac{120\cdot EF}{360}$,所以 $r_1:r_2=OM:EF=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

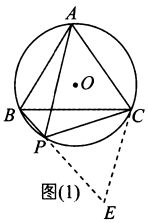
7.【解】(1)如图,连接 OD,OC.
$\because C$,D 是半圆 O 上的三等分点,
$\therefore \overset{\frown}{AD}=\overset{\frown}{CD}=\overset{\frown}{BC}$.
$\therefore \angle AOD=\angle DOC=\angle COB=60°$.
$\therefore \angle CAB=30°$.
$\because DE\perp AB$,$\therefore \angle AEF=90°$.
$\therefore \angle AFE=90°-30°=60°$.



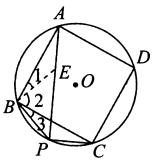
(2)由(1)知 $\angle AOD=60°$. 又$\because OA=OD$,$\therefore \triangle AOD$ 是等边三角形. 又$\because AB=4$,$\therefore OA=2$.
$\because DE\perp AO$,$\therefore DE=\sqrt{3}$.
$\therefore S_{阴影}=S_{扇形OAD}-S_{\triangle AOD}=\frac{60\pi\times 2^2}{360}-\frac{1}{2}\times 2\times\sqrt{3}=\frac{2}{3}\pi-\sqrt{3}$.

刷素养

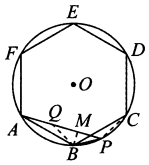
8.【证明】(1)如图(1),延长 BP 至 E,使 $PE=PC$,连接 CE.
$\because A$,B,P,C 四点共圆,
$\therefore \angle BAC+\angle BPC=180°$.
$\because \angle BPC+\angle EPC=180°$,$\triangle ABC$ 是等边三角形,
$\therefore \angle BAC=\angle CPE=60°$.
又$\because PE=PC$,$\therefore \triangle PCE$ 是等边三角形,
$\therefore CE=PC$,$\angle E=60°$.
又$\because \angle BCE=60°+\angle BCP$,$\angle ACP=60°+\angle BCP$,
$\therefore \angle BCE=\angle ACP$.
$\because \triangle ABC$、$\triangle ECP$ 为等边三角形,
$\therefore CE=PC$,$AC=BC$,
$\therefore \triangle BEC\cong\triangle APC$(SAS),
$\therefore PA=BE=PB+PE=PB+PC$.
(2)如图(2),过点 B 作 $BE\perp PB$ 交 PA 于 E.
$\because \angle 1+\angle 2=\angle 2+\angle 3=90°$,
$\therefore \angle 1=\angle 3$.
$\because$ 四边形 $ABCD$ 是$\odot O$ 的内接正方形,
$\therefore \angle APB=45°$,
$\therefore BP=BE$,$\therefore PE=\sqrt{2}PB$.
又$\because AB=BC$,$\therefore \triangle ABE\cong\triangle CBP$,
$\therefore PC=AE$.
$\therefore PA=AE+PE=PC+\sqrt{2}PB$.
(3)$PA=PC+\sqrt{3}PB$. 理由如下:
如图(3),过点 B 作 $BM\perp AP$,在 AP 上截取 $AQ=PC$,连接 BQ,CP.
$\because \angle BAP=\angle BCP$,$AB=BC$,
$\therefore \triangle ABQ\cong\triangle CBP$,
$\therefore BQ=BP$.
又$\because BM\perp PQ$,
$\therefore MP=QM$.
$\because$ 六边形 $ABCDEF$ 是$\odot O$ 的内接正六边形,
$\therefore \angle APB=30°$,
$\therefore BM=\frac{1}{2}BP$,$PM=\frac{\sqrt{3}}{2}BP$,
$\therefore PQ=\sqrt{3}PB$,
$\therefore PA=PQ+AQ=\sqrt{3}PB+PC$.



图(1)



图(2)



图(3)

全章综合训练

刷章测

1.B 【解析】因为 A,B,E 三点在$\odot O$ 上,所以 O 是$\triangle ABE$ 的外接圆圆心;由于点 F 不在$\odot O$ 上,所以 O 不是$\triangle ACF$ 的外接圆圆心;因为 A,B,D 三点在$\odot O$ 上,所以 O 是$\triangle ABD$ 的外接圆圆心;因为 A,D,E 三点在$\odot O$ 上,所以 O 是$\triangle ADE$ 的外接圆圆心. 故选 B.

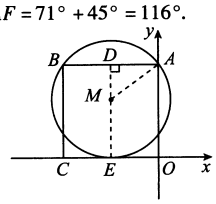
2.C 【解析】$\because \overset{\frown}{AB}$,$\overset{\frown}{BC}$,$\overset{\frown}{CA}$所对的圆心角的度数比为 12∶13∶11,
$\therefore \overset{\frown}{BC}$所对的圆心角的度数为$\frac{13}{12+13+11}\times 360°=130°$,$\therefore \angle BAC=65°$. $\because AC\parallel ED$,$AB\parallel DF$,$\therefore \angle FED=\angle ACB$,$\angle EFD=\angle ABC$.
$\therefore \angle EDF=180°-\angle FED-\angle EFD=180°-\angle ACB-\angle ABC=\angle BAC=65°$.

3.A 【解析】由题意,直径为 60 cm 的圆形铁皮,被分成三个圆心角是 120°,半径为 30 cm 的扇形. 假设每个圆锥形容器的底面半径为 r cm,则$\frac{120\pi\times 30}{180}=2\pi r$,解得 $r=10$.

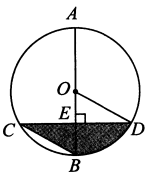
4.D 【解析】$\because$ 直线 AB 是$\odot O$ 的切线,C 为切点,$\therefore \angle OCB=90°$.
$\because OD\parallel AB$,$\therefore \angle COD=90°$,$\therefore \angle CED=\frac{1}{2}\angle COD=45°$. 故选 D.

5.C 【解析】$\because BD$ 为$\odot O$ 的直径,$\therefore \angle BAD=90°$. 又$\because AC$ 平分 $\angle BAD$,$\therefore \angle BAF=\angle DAF=45°$. $\because$ 直线 ED 为$\odot O$ 的切线,$\therefore \angle BDE=90°$. $\because \angle ADE=19°$,$\therefore \angle BDA=\angle BDE-\angle ADE=90°-19°=71°$. $\therefore \angle AFB=\angle BDA+\angle DAF=71°+45°=116°$.

6.A 【解析】如图,过点 M 作 $MD\perp AB$ 于 D,交 OC 于点 E. 连接 AM. 设$\odot M$ 的半径为 R. $\because \odot M$ 与 x 轴相切,$AB\parallel OC$,$\therefore DE\perp CO$. $\therefore DE$ 是$\odot M$ 直径的一部分. $\because$ 四边形 $OABC$ 为正方形,点 A 的坐标为(0,8),$\therefore OA=AB=CB=OC=8$,$DM=8-R$,$AD=BD=4$. $\therefore$ 点 M 的坐标为$(-4,R)$. 在 Rt$\triangle ADM$ 中,$\because AM^2=DM^2+AD^2$,$\therefore R^2=(8-R)^2+4^2$,解得 $R=5$. $\therefore M(-4,5)$. 故选 A.



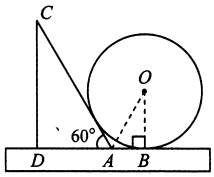
7.B 【解析】如图,设线段 CD,AB 交于点 E.
$\because AB$是$\odot O$ 的直径,弦 $CD\perp AB$,$CD=4\sqrt{3}$,
$\therefore CE=ED=2\sqrt{3}$. 又$\because \angle BCD=30°$,
$\therefore \angle DOE=2\angle BCD=60°$,$\therefore \angle ODE=30°$,
$\therefore OE=\frac{1}{2}OD$. $\because OE^2+ED^2=OD^2$,$\therefore OE=$



$\frac{\sqrt{3}}{3}ED=\frac{\sqrt{3}}{3}\times 2\sqrt{3}=2$. $\therefore OD=2OE=4$.

$\therefore S_{阴影}=S_{扇形ODB}-S_{\triangle DOE}+S_{\triangle BEC}=\frac{60\pi\times OD^2}{360}-\frac{1}{2}OE\times DE+\frac{1}{2}BE\times CE=\frac{8}{3}\pi-2\sqrt{3}+2\sqrt{3}=\frac{8}{3}\pi$.

8. D 【解析】$\because \angle CAD=60°$, $\therefore \angle CAB=120°$. $\because AB$ 和 AC 与 $\odot O$ 相切, $\therefore \angle OAB=\angle OAC$, $\therefore \angle OAB=\frac{1}{2}\angle CAB=60°$. $\because AB=3$, $\therefore OA=6$, $\therefore$ 由勾股定理得 $OB=3\sqrt{3}$, $\therefore$ 光盘的直径为 $6\sqrt{3}$. 故选 D.

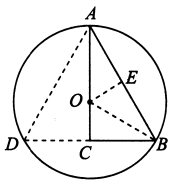


9. C 【解析】$\because AB=BC$, $\angle ABC=120°$, $\therefore \angle BAC=\angle C=30°$, $\therefore \angle D=30°$. $\because AD$ 为 $\odot O$ 的直径, $\therefore \angle ABD=90°$, $\therefore AB=\frac{1}{2}AD=3$.

过 B 作 $BE\perp AC$ 于 E, $\therefore AC=2AE$. $\because \angle BAE=30°$, $\therefore BE=\frac{1}{2}AB$,

由勾股定理得 $AE=\sqrt{AB^2-BE^2}=\frac{3\sqrt{3}}{2}$, $\therefore AC=3\sqrt{3}$. 故选 C.

10. D 【解析】如图, 连接 OB, 则 $OA=OB$. $\because \angle C=90°$, $\angle OAB=30°$, $\therefore \angle ABO=\angle OAB=30°$, $\angle ABC=60°$. $\therefore \angle CBO=30°$. $\therefore OB=2OC$. $\therefore AO=2CO$, $\therefore$ ①正确.



在 $Rt\triangle OCB$ 中, $\angle C=90°$, $OB>BC$, $\because AO=OB$, $\therefore AO>BC$, $\therefore$ ②错误.

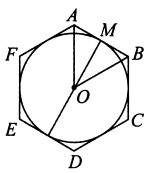
如图, 过点 O 作 $OE\perp AB$ 于点 E. $\because \angle ACB=90°$, $\angle ABO=\angle CBO=30°$, $\therefore OC=OE$. $\therefore$ 以 O 圆心, OC 为半径的圆与 AB 相切, $\therefore$ ③正确.

如图, 延长 BC, 交 $\odot O$ 于点 D, 连接 AD. $\because \angle ACB=90°$, $\therefore DC=BC$. $\therefore AD=AB$. $\because \angle ABC=60°$, $\therefore \triangle ADB$ 是等边三角形.

$\therefore AD=AB=BD$. $\overset{\frown}{AD}=\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{BD}$. $\therefore A,B,D$ 是 $\odot O$ 的三等分点, $\therefore$ ④正确. 故正确的有①③④.

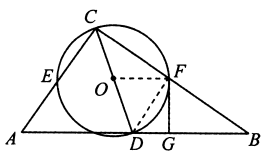
11. 4π 【解析】由题意, 知 $OA=OB$. 又 $\because \angle AOB=36°$, $\therefore \angle OBA=72°$. $\therefore$ 点 O 的运动路径长为 $\frac{72\pi\times 10}{180}=4\pi(cm)$.

12. $2\sqrt{3}$ 【解析】依照题意画出图形, 如图所示.



$\because$ 六边形 $ABCDEF$ 为正六边形, $\therefore \triangle ABO$ 为等边三角形. $\because \odot O$ 的半径为 1, $\therefore OM=1$, $\therefore BM=AM=\frac{\sqrt{3}}{3}$, $\therefore AB=\frac{2\sqrt{3}}{3}$, $\therefore S=6S_{\triangle ABO}=6\times\frac{1}{2}\times\frac{2\sqrt{3}}{3}\times 1=2\sqrt{3}$.

13. $\frac{12}{5}$ 【解析】如图, 连接 DF, OF. 在 $Rt\triangle ABC$ 中, 根据勾股定理得, $AB=10$.



$\because$ 点 D 是 AB 的中点, $\therefore CD=BD=\frac{1}{2}AB=5$. $\because CD$ 是 $\odot O$ 的直径, $\therefore \angle CFD=90°$, $\therefore BF=CF=\frac{1}{2}BC=4$, $\therefore DF=\sqrt{CD^2-CF^2}=3$. $\because OC=OD$, $CF=BF$, $\therefore OF$ 是 $\triangle CBD$ 的中位线, $\therefore OF/\!/AB$. $\because FG$ 是 $\odot O$ 的切线, $\therefore \angle OFG=90°$, $\therefore \angle AGF=90°$, $\therefore FG\perp AB$, $\therefore S_{\triangle BDF}=\frac{1}{2}DF\times BF=\frac{1}{2}BD\times FG$, $\therefore FG=\frac{DF\times BF}{BD}=\frac{3\times 4}{5}=\frac{12}{5}$.

14. 【证明】(1) 如图(1), 连接 AD. 设 $\angle BDC=\alpha$, $\angle DAC=\beta$, 则 $\angle BAC=\angle BDC=\alpha$.

$\because$ 点 C 为 $\overset{\frown}{ABD}$ 的中点, $\therefore \overset{\frown}{AC}=\overset{\frown}{CD}$.

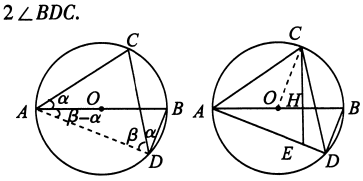
$\therefore \angle ADC=\angle DAC=\beta$. $\therefore \angle DAB=\beta-\alpha$.

$\because AB$ 为 $\odot O$ 的直径, $\therefore \angle ADB=90°$.

$\therefore \alpha+\beta=90°$. $\therefore \beta=90°-\alpha$.

$\therefore \angle ABD=90°-\angle DAB=90°-(\beta-\alpha)=2\alpha$.

$\therefore \angle ABD=2\angle BDC$.



(2) 如图(2), 连接 OC, $\because CE\perp AB$, $\therefore \angle ACE+\angle CAB=\angle ADC+\angle BDC=90°$.

$\because \angle CAB=\angle CDB$, $\therefore \angle ACE=\angle ADC$.

$\because \angle CAE=\angle ADC$, $\therefore \angle ACE=\angle CAE$. $\therefore AE=CE$.

15. (1) 【证明】$\because \triangle ABC$ 是等腰直角三角形,

$\therefore AC=AB$, $\angle CAB=90°$.

又 $\because PE$ 是 $\triangle ABP$ 的外接圆 $\odot O$ 的直径, $\therefore \angle PAE=90°$.

$\because \angle CAP+\angle PAB=\angle CAB$, $\angle PAB+\angle BAE=\angle PAE$,

$\therefore \angle CAP=\angle BAE$.

又 $\because \angle CPA+\angle APB=180°$, $\angle APB+\angle AEB=180°$,

$\therefore \angle APC=\angle AEB$. $\therefore \triangle ACP\cong\triangle ABE$.

$\therefore AP=AE$. $\therefore \triangle APE$ 是等腰直角三角形.

(2) 【解】由(1)得 $\triangle ACP\cong\triangle ABE$, $\therefore CP=BE$.

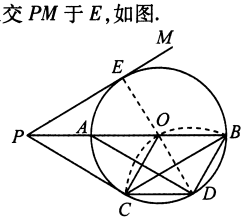
又 $\because \angle PBE=90°$, $PE=2$,

$\therefore EB^2+PB^2=PE^2=4$.

$\therefore PC^2+PB^2=4$.

16. 【解】(1) PM 与 $\odot O$ 相切. 理由如下:

连接 DO 并延长交 PM 于 E, 如图.



$\because \overset{\frown}{BC}$ 沿直线 BC 翻折, 且 $\overset{\frown}{BC}$ 的中点 D 恰好与圆心 O 重合,

$\therefore OC=DC$, $BO=BD$,

$\therefore OC=DC=BO=BD$, $\therefore$ 四边形 $OBDC$ 为菱形, $\therefore OD\perp BC$.

$\because OC=OD=OB$,

$\therefore \triangle OCD$ 和 $\triangle OBD$ 都是等边三角形,

$\therefore \angle COD=\angle BOD=60°$, $\therefore \angle COP=\angle EOP=60°$.

$\because \angle MPB=\angle ADC$, 而 $\angle ADC=\angle ABC$, $\therefore \angle ABC=\angle MPB$,

$\therefore PM/\!/BC$, $\therefore OE\perp PM$, $\therefore OE=\frac{1}{2}OP$.

$\because PC$ 为 $\odot O$ 的切线, $\therefore OC\perp PC$,

$\therefore OC=\frac{1}{2}OP$, $\therefore OE=OC$,

而 $OE\perp PM$, $\therefore PM$ 是 $\odot O$ 的切线.

(2) 在 $Rt\triangle OPC$ 中, $\because$ 由勾股定理得 $OC^2+PC^2=PO^2$, $PC=\sqrt{3}$, $\therefore OC=1$.

$\because \angle ABC=\angle BPM=\angle BPC$, $\therefore BC=PC=\sqrt{3}$,

$\therefore$ 四边形 $OCDB$ 的面积为 $\frac{1}{2}\cdot BC\cdot OD=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

17. (1) 【解】由题意, 设抛物线的解析式为 $y=a(x-2)^2+1$, 将 $(4,2)$ 代入, 得 $2=4a+1$, 解得 $a=\frac{1}{4}$.

$\therefore$ 抛物线的解析式为 $y=\frac{1}{4}(x-2)^2+1$.

(2) 【证明】如图, 过点 B,C,D 分别作 y 轴的垂线, 垂足分别为点 Q,G,H, 过点 C 作 x 轴的垂线, 垂足为点 P, 交直线 m 于点 N.

联立 $y=\frac{1}{4}(x-2)^2+1$ 和 $y=\frac{1}{2}x+1$，得 $x^2-6x+4=0$.

解得 $x=3\pm\sqrt{5}$，

$\therefore B\left(3-\sqrt{5},\frac{5-\sqrt{5}}{2}\right)$，$D\left(3+\sqrt{5},\frac{5+\sqrt{5}}{2}\right)$.

$\therefore BD=\sqrt{[(3+\sqrt{5})-(3-\sqrt{5})]^2+\left(\frac{5+\sqrt{5}}{2}-\frac{5-\sqrt{5}}{2}\right)^2}=5$，

$CG=\frac{DH+BQ}{2}=3$.

$\therefore$ 当 $x=3$ 时，$y=\frac{1}{2}\times3+1=\frac{5}{2}$，即 $CP=\frac{5}{2}$.

$\therefore CP=\frac{1}{2}BD$. $\therefore$ 圆 C 与 x 轴相切.

(3)【解】如图，连接 CM.

由(2)知圆 C 的半径 $R=\frac{5}{2}$，

$\therefore CM=R=\frac{5}{2}$，$CN=R-1=\frac{3}{2}$.

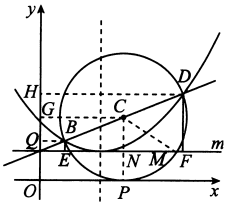
由勾股定理，得 $MN=2$.

又$\because NF=x_D-x_C=3+\sqrt{5}-3=\sqrt{5}$，

$\therefore MF=NF-MN=\sqrt{5}-2$.

又$\because BE=y_B-1=\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{5}}{2}$，

$\therefore BE:MF=\frac{\sqrt{5}+1}{2}$.



第二十五章　概率初步

25.1　随机事件与概率

25.1.1　随机事件

刷基础

1. D　【解析】A 选项，经过路口，恰好遇到红灯，是随机事件，不符合题意；B 选项，抛一枚硬币，正面朝上，是随机事件，不符合题意；C 选项，打开电视，正在播放动画片，是随机事件，不符合题意；D 选项，四个人分成三组，这三组中有一组必有 2 人，是必然事件，符合题意. 故选 D.

2. B　【解析】A 选项，“水到渠成”描述的是必然事件；B 选项，“空中楼阁”描述的是不可能事件；C 选项，“木已成舟”描述的是必然事件；D 选项，“日行千里”描述的事件可能发生，也可能不发生，是随机事件. 故选 B.

3. C　【解析】A 项，B 项，D 项都是随机事件，只有 C 项是不可能事件，必然事件与不可能事件统称为确定性事件. 故选 C.

4. B　【解析】在不透明的布袋中，装有大小、形状完全相同的 3 个黑球、1 个红球，从中摸出 1 个球，摸出 1 个黑球这一事件是随机事件，B 正确. 故选 B.

5. C　【解析】根据随机事件的概念，可以发现小明的爸爸已经连续签到 3 天，且都抽到了流量红包，但这不影响第 4 天抽奖情况，因此“他第 4 天签到后，抽奖结果是流量红包”是随机事件. 故选 C.

6. -3　【解析】$\because$ 对于二次函数 $y=x^2+(m-1)x+1$，当 $x>\frac{1-m}{2}$ 时，y 随 x 的增大而增大，$\therefore$ 要使得事件“对于二次函数 $y=x^2+(m-1)x+1$，当 $x>1$ 时，y 随 x 的增大而增大”成为随机事件，则 $\frac{1-m}{2}>1$，解得 $m<-1$.

7.【解】①向上一面的点数是 3 的倍数，是随机事件；
②向上一面的点数是 5，是随机事件；
③向上一面的点数是分数，是不可能事件；
④向上一面的点数大于 4，是随机事件；
⑤向上一面的点数小于或等于 6，是必然事件.
③和⑤是确定性事件.

8.【解】(1)当 $n>6$ 时，即 $n=7$ 或 8 或 9 时，这个事件必然发生.
(2)当 $n<3$ 时，即 $n=1$ 或 2 时，这个事件不可能发生.
(3)当 $3\leqslant n\leqslant6$ 时，即 $n=3$ 或 4 或 5 或 6 时，这个事件可能发生.

9. B　【解析】A 选项，因为桌上扑克牌的花色不同，所以无法确定抽取的扑克牌的花色；B 选项，因为黑桃的数量较多，所以抽到黑桃的可能性更大；C 选项，因为黑桃和红桃的数量不同，所以抽到黑桃和抽到红桃的可能性不一样大；D 选项，因为红桃的数量小于黑桃的数量，所以抽到红桃的可能性更小. 故选 B.

10. C　【解析】在 1，2，2，3，4，3，3，1 这 8 个数中，3 有 3 个，个数最多，所以任取 1 个，取到的可能性较大的数是 3. 故选 C.

11. $\frac{1}{4}$　【解析】四个数中，无理数只有 $\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$，则取到的数是无理数的可能性大小是 $\frac{1}{4}$.

25.1.2　概率

刷基础

1. C　【解析】A 选项，任意抛一枚质地均匀的硬币 10 次，不一定有 5 次正面朝上，故此选项错误；B 选项，天气预报说“明天的降水概率为 40%”，表示明天降雨的可能性有 40%，故此选项错误；C 选项，“篮球队员在罚球线上投篮一次，投中”为随机事件，故此选项正确；D 选项，“a 是实数，$|a|\geqslant0$”是必然事件，故此选项错误. 故选 C.

2. C　【解析】A、D 选项是随机事件，B 选项是必然事件，C 选项是不可能事件，所以 C 发生的概率是 0. 故选 C.

3. D　【解析】A 选项，不可能事件发生的概率为 0，故错误；
B 选项，随机事件发生的概率介于 0 和 1 之间，不一定是 $\frac{1}{3}$，故错误；
C 选项，概率很小的事件不是不可能发生，而是发生的机会较小，故错误；
D 选项，抛掷一枚质地均匀的硬币，正面朝上和反面朝上的可能性相等，都是 $\frac{1}{2}$，故正确. 故选 D.

4. C　【解析】$\because$ 在 $\sqrt{2}$，0，π，3.14，6 这 5 个数中，只有 0，3.14 和 6 为有理数，$\therefore$ 从 $\sqrt{2}$，0，π，3.14，6 这 5 个数中随机抽取一个数，抽到有理数的概率是 $\frac{3}{5}$. 故选 C.

5. C　【解析】$\because$ 图中共有 15 块方砖，其中阴影方砖有 3 块，$\therefore$ 阴影方砖在所有方砖中所占面积的比值为 $\frac{3}{15}=\frac{1}{5}$，$\therefore$ 最终停在阴影方砖上的概率为 $\frac{1}{5}$. 故选 C.

6. A　【解析】若 $a>b$，根据不等式的基本性质知 $a+c>b+c$，
$\therefore$ 事件 A 是必然事件，$\therefore P(A)=1$. 故选 A.

7. B　【解析】因为 $P(\text{甲})=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$，$P(\text{乙})=\frac{3}{9}=\frac{1}{3}$，所以 $P(\text{甲})=P(\text{乙})$. 故选 B.

8. $\frac{1}{3}$　【解析】$\because$ 打电话的顺序是任意的，$\therefore$ 第一个电话打给甲、乙、丙三人的概率都相等，$\therefore$ 第一个电话打给甲的概率为 $\frac{1}{3}$.

9. $\frac{1}{2}$　【解析】共有 6 种等可能的结果，其中使关于 x 的方程 $x^2+px+q=0$ 有实数根的结果有 3 种，$\therefore$ 关于 x 的方程 $x^2+px+q=0$ 有实数根的概率为 $\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$.

10.【解】红方的马走一步可能的走法有 14 种，其中有 3 种情况吃到了黑方棋子，
所以红方的马现在走一步能吃到黑方棋子的概率是 $\frac{3}{14}$.

11.【解】不公平. 理由如下：
由题意可知，号码大于 3 的球的个数为 2，所以

P(号码大于3)$=\frac{\text{号码大于3的球的个数}}{\text{球的总个数}}=\frac{2}{5}$,

号码小于等于3的球的个数为3,所以P(号码小于等于3)$=\frac{\text{号码小于等于3的球的个数}}{\text{球的总个数}}=\frac{3}{5}$.

所以小刚的胜率低于小强的胜率,这个游戏不公平.

25.2 用列举法求概率

课时1 用列表法求概率

刷基础

1.C 【解析】由于小慧只记得号码的前5位,后三位由5,1,2这三个数字组成,故后三位可能的结果有512,521,152,125,251,215,共6种,而满足条件的结果只有1种,故她第一次就拨通电话的概率$P=\frac{1}{6}$. 故选C.

2.C 【解析】∵"Wish you success."中共有14个字母,任选一个字母时,每个字母被选中的机会均等,而其中字母"s"出现了4次,

∴这个任选出的字母是"s"的概率是$\frac{4}{14}=\frac{2}{7}$. 故选C.

3.B 【解析】用表列举出所有可能出现的结果,如下:

甲	打扫社区卫生	打扫社区卫生	参加社会调查	参加社会调查
乙	打扫社区卫生	参加社会调查	参加社会调查	打扫社区卫生

由上表可知,可能出现的结果有4种,且都是等可能的,其中两人同时选择"参加社会调查"的结果有1种,则所求概率为$\frac{1}{4}$. 故选B.

4.B 【解析】用表列举出所有可能出现的结果,如下:

第一个转盘 / 积 / 第二个转盘	1	2
1	1	2
2	2	4
3	3	6

∵会出现6种等可能的结果,转盘所转到的两个数字之积为奇数的有2种,∴所求概率是$\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$. 故选B.

5.B 【解析】列表如下:

第一次 / 和 / 第二次	1	2	3	4
1		3	4	5
2	3		5	6
3	4	5		7
4	5	6	7	

共有12种等可能的结果,其中两次摸出的小球的标号之和为奇数的结果有8种,所以两次摸出的小球的标号之和为奇数的概率为$\frac{8}{12}=\frac{2}{3}$. 故选B.

6.C 【解析】A选项,两次摸球所有可能出现的结果,用表列举如下:

第二次 / 第一次	红	白1	白2
红	(红,红)	(红,白1)	(红,白2)
白1	(白1,红)	(白1,白1)	(白1,白2)
白2	(白2,红)	(白2,白1)	(白2,白2)

因为有9种等可能的结果,两次摸球颜色不同有4种,所以所求概率为$\frac{4}{9}$.

B选项,甲获胜的概率为$\frac{1}{3}$,乙获胜的概率为$\frac{1}{3}$,丙获胜的概率也为$\frac{1}{3}$,所以这个游戏规则对三人是公平的.

C选项,P(两枚正面朝上)$=P$(两枚反面朝上)$=\frac{1}{4}$,P(一枚正面朝上,一枚反面朝上)$=\frac{1}{2}$.

D选项,等可能事件,每人抽签获奖的概率均为$\frac{1}{8}$. 故选C.

7. $\frac{1}{2}$ 【解析】两空格符号所有可能的结果,列表如下:

第一个 \ 第二个	+	−
−	a^2-4a+4	a^2-4a-4
+	a^2+4a+4	a^2+4a-4

有4种等可能的结果,其式子能构成完全平方公式的有2种,所以所求概率是$\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$.

8. $\frac{3}{4}$ 【解析】两个电子元件通与不通等概率,用表列举所有可能出现的结果,如下:

下 \ 上	通	不通
通	通	通
不通	通	不通

由上表可知,有4种等可能的结果,电流正常通过的有3种,故在一定时间段内,A,B之间电流能够正常通过的概率为$\frac{3}{4}$.

9.【解】(1)∵共有4个小球,其中只有1个标号是3的小球,

∴"摸出小球标号是3"的概率是$\frac{1}{4}$.

(2)①列表如下:

	1	2	3	4
1	(1,1)	(2,1)	(3,1)	(4,1)
2	(1,2)	(2,2)	(3,2)	(4,2)
3	(1,3)	(2,3)	(3,3)	(4,3)
4	(1,4)	(2,4)	(3,4)	(4,4)

"随机摸出一个小球然后放回,再随机摸出一个小球"共有16种等可能的结果,

"两次摸出的小球一个标号是1,另一个标号是2"的可能结果有(2,1),(1,2),共2种,

∴P(两次摸出的小球一个标号是1,另一个标号是2)$=\frac{2}{16}=\frac{1}{8}$.

②由①的表格可知,"随机摸出一个小球然后放回,再随机摸出一个小球"共有16种等可能的结果,"第一次摸出标号是1的小球且第二次摸出标号是2的小球"的可能结果只有(1,2)这一种,∴P(第一次摸出标号是1的小球且第二次摸出标号是2的小球)$=\frac{1}{16}$.

刷提升

1.C 【解析】根据题意,列表如下:

	白	蓝	红
红	(红,白)	(红,蓝)	(红,红)
蓝	(蓝,白)	(蓝,蓝)	(蓝,红)

共有6种等可能的结果,其中有2种情况可能得到紫色,

故配成紫色的概率是$\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$. 故选C.

2.B 【解析】分母含有字母的式子是分式. 列表如下,由表可得能组成分式的概率$P=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$. 故选B.

分母＼分子	$a-3$	$a+1$	2
$a-3$	——	分式	分式
$a+1$	分式	——	分式
2	整式	整式	——

3. A 【解析】列表如下：

	−3	−2	0	2	3
−3		(−3,−2)	(−3,0)	(−3,2)	(−3,3)
−2	(−2,−3)		(−2,0)	(−2,2)	(−2,3)
0	(0,−3)	(0,−2)		(0,2)	(0,3)
2	(2,−3)	(2,−2)	(2,0)		(2,3)
3	(3,−3)	(3,−2)	(3,0)	(3,2)	

由表可知，共有 20 种等可能的结果，其中点 $P(x,y)$ 在平面直角坐标系中第四象限内的有 4 种，

∴ 点 $P(x,y)$ 在平面直角坐标系中第四象限内的概率为 $\frac{4}{20}=\frac{1}{5}$. 故选 A.

4. $\frac{1}{3}$ 【解析】列表如下：

第1个数＼第2个数	1	2	3	4
1	—	3	4	5
2	3	—	5	6
3	4	5	—	7
4	5	6	7	—

∵ 共有 12 种等可能的结果，和为 5 的结果有 4 种，

∴ P(和为 5) $=\frac{4}{12}=\frac{1}{3}$.

5. 【解】(1)共有 4 张牌，正面是中心对称图形的情况有 2 种，

∴ 摸出的牌面图形是中心对称图形的概率是 $\frac{1}{2}$.

(2)这个游戏公平. 列表如下：

	A	B	C	D
A		(A,B)	(A,C)	(A,D)
B	(B,A)		(B,C)	(B,D)
C	(C,A)	(C,B)		(C,D)
D	(D,A)	(D,B)	(D,C)	

共有 12 种结果，每种结果出现的可能性相同，其中 2 张牌都是轴对称图形的有 6 种，

∴ P(2 张纸牌的牌面图形都是轴对称图形) $=\frac{1}{2}$，因此这个游戏公平.

6. 【解】小明的选择不合理.

列表如下：

第2个转盘＼第1个转盘	2	3	4	6
3	5	6	7	9
5	7	8	9	11
8	10	11	12	14

∵ 共出现 12 种等可能的结果，

其中出现奇数的结果是 7 种，概率为 $\frac{7}{12}$，

出现偶数的结果是 5 种，概率为 $\frac{5}{12}$.

∵ $\frac{7}{12}>\frac{5}{12}$，∴ 出现奇数的概率较大，

∴ 小明的选择不合理.

7. 【解】(1)根据题意得，选手丙获得第一名的概率为 $\frac{1}{3}$.

(2)假设选手甲为第一名，列表如下：

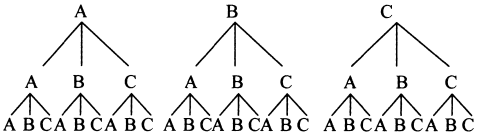
妈妈＼小明	甲	乙	丙
甲	(甲,甲)	(乙,甲)	(丙,甲)
乙	(甲,乙)	(乙,乙)	(丙,乙)
丙	(甲,丙)	(乙,丙)	(丙,丙)

∵ 共有 9 种等可能的结果，两人中一个人猜中另一个人却没猜中的结果有 4 种，则 $P=\frac{4}{9}$.

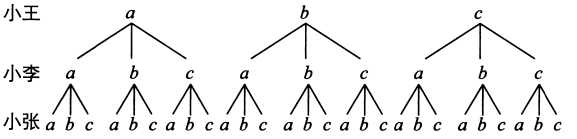
课时 2　用画树状图法求概率

刷基础

1. D 【解析】用 A、B、C 分别代表红、黄、白三种球，画出树状图如图所示，一共有 27 种可能，每种结果出现的可能性相同，三人摸到球的颜色都不相同的有 6 种可能，∴ P(三人摸到球的颜色都不相同) $=\frac{6}{27}=\frac{2}{9}$. 故选 D.

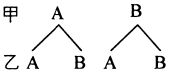


2. D 【解析】根据题意，画出树状图如下：



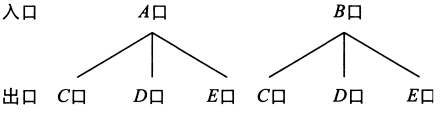
由树状图可知，一共有 27 种等可能出现的结果，恰好有两人走 a 道路的结果有 6 种，所以所求概率为 $\frac{6}{27}=\frac{2}{9}$. 故选 D.

3. A 【解析】根据题意，画出树状图如下：



所有等可能的情况有 4 种，其中甲、乙两人选择同款套餐的有 2 种，则甲、乙两人选择同款套餐的概率为 $\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$. 故选 A.

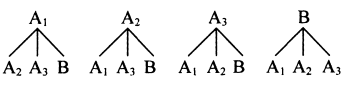
4. C 【解析】根据题意，画出树状图如下：



∵ 由树状图可知，小红随机选择一个入口进，一个出口离开，共有 6 种等可能出现的结果，其中从 A 口进入，从 D 口离开是其中一种，∴ P(小红从 A 口进入，从 D 口离开) $=\frac{1}{6}$. 故选 C.

5. D 【解析】令 3 张  用 A_1、A_2、A_3 表示， 用 B 表示，

画树状图如下：



一共有 12 种等可能的结果，2 张卡片正面图案相同的有 6 种，

故从中随机抽取 2 张，则这 2 张卡片正面图案相同的概率是$\frac{1}{2}$.

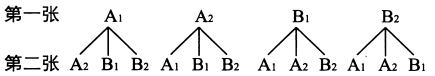
故选 D.

6. **A**　【解析】根据题意，画出树状图，如图所示.



由树状图可知所有等可能出现的结果有 6 种，其中小源获胜的结果有 2 种，小凯获胜的结果有 2 种，所以 $P_1 = P_2 = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$. 故选 A.

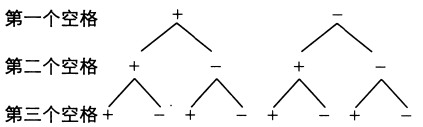
7. **D**　【解析】用 A 与 B 分别表示三角形与正方形. 根据题意，画出树状图如下：



由树状图可知，共有 12 种等可能出现的结果，能拼成“小房子”的有 8 种结果，

∴ 任取两张纸片，能拼成“小房子”的概率为$\frac{8}{12} = \frac{2}{3}$.

8. $\frac{1}{2}$　【解析】根据题意，画出树状图如下：

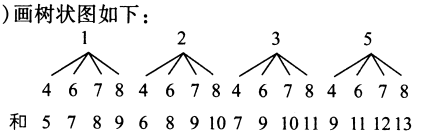


由树状图可知，共有 8 种等可能出现的结果，即

$a^2+2ab+b^2$	$a^2+2ab-b^2$
$a^2-2ab+b^2$	$a^2-2ab-b^2$
$-a^2+2ab+b^2$	$-a^2+2ab-b^2=-(a^2-2ab+b^2)$
$-a^2-2ab+b^2$	$-a^2-2ab-b^2=-(a^2+2ab+b^2)$

恰好能构成完全平方公式的有 4 种结果，∴ 恰好能构成完全平方公式的概率是$\frac{4}{8} = \frac{1}{2}$.

9. 【解】(1)画树状图如下：



一共有 16 种结果，每种结果出现的可能性相同.

和为偶数的概率为$\frac{6}{16} = \frac{3}{8}$，

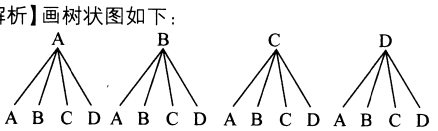
所以小丽去北京故宫参观的概率为$\frac{3}{8}$.

(2)哥哥设计的游戏规则不公平. 理由如下：

由(1)中的树状图的结果可知，小丽去参观的概率为$\frac{3}{8}$，哥哥去参观的概率为$\frac{5}{8}$，所以游戏不公平，对哥哥有利.

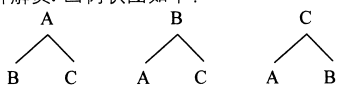
刷提升

1. **B**　【解析】画树状图如下：



由树状图知，共有 16 种等可能的结果，其中甲、乙两位游客恰好从同一个入口进入公园的结果有 4 种，所以甲、乙两位游客恰好从同一个入口进入公园的概率为$\frac{4}{16} = \frac{1}{4}$. 故选 B.

2. **B**　【解析】用 A、B、C 分别表示担任“贾湖骨笛”“妇好鸮尊”“云纹铜禁”的讲解员. 画树状图如下：



共有 6 种等可能的结果，其中“贾湖骨笛”未被抽到的结果有 2 种，

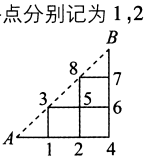
所以“贾湖骨笛”未被抽到的概率为$\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$. 故选 B.

3. **A**　【解析】根据题意，画出树状图如图所示.

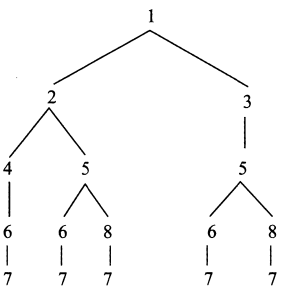


由树状图可知，共有 27 种等可能出现的结果，构成等边三角形的有 3 种结果，∴ 以 a,b,c 为边长正好构成等边三角形的概率是$\frac{3}{27} = \frac{1}{9}$. 故选 A.

4. **B**　【解析】如图，将各格点分别记为 1,2,3,4,5,6,7,8.

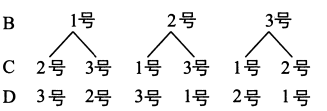


画树状图如下：



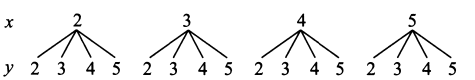
由树状图可知，点 P 由点 A 运动到点 B 的不同路径共有 5 条. 故选 B.

5. $\frac{1}{3}$　【解析】根据题意，画出树状图如图所示.



由树状图可知，共有 6 种等可能出现的结果，其中学生 B 坐在 1 号座位的结果有 2 种，所以 P(学生 B 坐在 1 号座位) $= \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$.

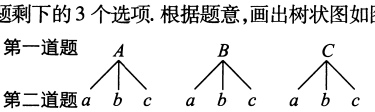
6. $\frac{3}{8}$　【解析】根据题意，画出树状图如图所示.



由树状图可知，共有 16 种等可能出现的结果，$|x-y| \geqslant 2$ 的有 6 种结果，∴ $|x-y| \geqslant 2$ 的概率为 $P = \frac{6}{16} = \frac{3}{8}$.

7. (1)$\frac{1}{3}$　【解析】∵ 第一道单选题有 3 个选项，∴ 如果小明第一道题不使用“求助”，那么小明答对第一道题的概率是$\frac{1}{3}$.

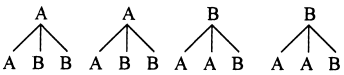
【解】(2)分别用 A,B,C 表示第一道单选题的 3 个选项，a,b,c 表示第二道单选题剩下的 3 个选项. 根据题意，画出树状图如图所示.



由树状图可知，共有 9 种等可能出现的结果，小明顺利通关的只有 1 种结果，∴ 小明顺利通关的概率为$\frac{1}{9}$.

(3)∵ 如果在第一道题使用“求助”,小明顺利通关的概率为$\frac{1}{8}$,如果在第二道题使用“求助”,小明顺利通关的概率为$\frac{1}{9}$,∴ 建议小明在第一道题使用“求助”.

8. 【解】(1)∵ C 等级频数为 15,占 60%,∴ $m=15\div60\%=25$;
∴ $b=25-15-2-6=2$.
(2)∵ B 等级频数为 2,∴ B 等级所在的扇形圆心角的大小为$\frac{2}{25}\times360°=28.8°$.
(3)评估成绩不少于 80 分的连锁店中,有 2 家等级为 A,有 2 家等级为 B,画树状图如下:



由图可知,共有 12 种等可能的结果,其中至少有一家是 A 等级的有 10 种,
则 P(至少有一家是 A 等级)$=\frac{10}{12}=\frac{5}{6}$.

25.3 用频率估计概率

刷基础

1. A 【解析】A 选项,经过大量重复的抛掷硬币试验,可发现“正面向上”的频率越来越稳定,正确;B 选项,抛掷 10 000 次硬币与抛掷12 000次硬币“正面向上”的频率可能不同,错误;C 选项,抛掷 50 000次硬币,可得“正面向上”的频率约为 0.5,错误;D 选项,若抛掷 2 000 次硬币“正面向上”的频率是 0.518,则“正面向下”的频率为 1 - 0.518 = 0.482,错误. 故选 A.

2. A 【解析】当抛掷次数是 500 时,计算机记录“钉尖向上”的次数是 308,所以此时“钉尖向上”的频率是 308 ÷ 500 = 0.616,故①正确;随着试验次数的增加,“钉尖向上”的频率总在 0.618 附近摆动,显示出一定的稳定性,可以估计“钉尖向上”的概率是 0.618,故②正确;若再次用计算机模拟试验,则当抛掷次数为 1 000时,“钉尖向上”的概率可能是 0.620,但不一定是 0.620,故③错误. 故选 A.

3. D 【解析】某种幼树在一定条件下移植成活的概率为 0.9,是在大量重复试验中得到的概率的近似值,故 A、B、C 错误,D 正确. 故选 D.

4. C 【解析】设鱼塘中有草鱼 x 条. 由题意得$\frac{x}{200+x+150}=0.5$,解得 $x=350$,经检验,$x=350$ 是原分式方程的解. 所以捞到鲤鱼的概率为$\frac{200}{200+350+150}=\frac{2}{7}$. 故选 C.

5. 2.4 【解析】长方形的面积为 $3\times2=6(m^2)$. ∵ 骰子落在世界杯图案中的频率稳定在常数 0.4 附近,∴ 世界杯图案占长方形世界杯宣传画的 40%,∴ 世界杯图案的面积约为 $6\times40\%=2.4\ (m^2)$.

6. 【解】(1)48,0.81.
(2)P(射中 9 环以上)$=0.8$.
从频率的波动情况可以发现,频率稳定在 0.8 附近,所以这名运动员射击一次时“射中 9 环以上”的概率是 0.8.

全章综合训练

刷章测

1. B 【解析】A 选项,“任意买一张电影票,座位号是 2 的倍数”是随机事件,故此选项不符合题意;B 选项,“13 个人中至少有 2 个人生肖相同”是必然事件,故此选项符合题意;C 选项,“车辆随机到达一个路口,遇到红灯”是随机事件,故此选项不符合题意;D 选项,“明天一定会下雨”是随机事件,故此选项不符合题意. 故选 B.

2. C 【解析】投掷一枚硬币正面朝上是随机事件;太阳从东方升起是必然事件;五边形的内角和是 540°,所以五边形的内角和是 560°是不可能事件;购买一张彩票中奖是随机事件,所以随机事件有 2 个. 故选 C.

3. C 【解析】∵ 共有 6 张纸条,其中内容描述正确的有①②③⑥,共 4 张,∴ 抽到内容描述正确的纸条的概率是$\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$. 故选 C.

4. A 【解析】由题意,任取一个球,取得黄球的概率为$\frac{11}{3+11}=\frac{11}{14}$,所以随机从口袋中任取一个球,取得黄球的可能性的大小是$\frac{11}{14}$. 故选 A.

5. C 【解析】根据试验提供的数据,黑棋子的比例为(1 + 3 + 0 + 2 + 3 + 4 + 2 + 1 + 1 + 3) ÷ 100 = 20%,所以白棋子比例为 1 - 20% = 80%. 设白棋子有 x 枚,由题意,得$\frac{x}{x+10}=80\%$,解得 $x=40$,经检验,$x=40$是原分式方程的解,即袋子中的白棋子数量约为 40 枚. 故选 C.

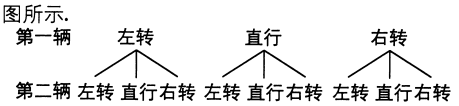
6. C 【解析】设阴影部分的面积是 x,则整个图形的面积是 $7x$. 则这个点取在阴影部分的概率是$\frac{x}{7x}=\frac{1}{7}$. 故选 C.

7. $\frac{1}{4}$ 【解析】∵ 四边形是平行四边形,∴ 对角线把平行四边形分成面积相等的四部分. 观察发现:图中阴影部分面积 = $\frac{1}{4}S_{平行四边形}$,∴ 针头扎在阴影区域内的概率为$\frac{1}{4}$.

8. $\frac{5}{12}$ 【解析】由函数 $y=(2k-1)x+4$,y 随 x 的增加而增加,则 $2k-1>0$,解得 $k>\frac{1}{2}$. ∵ $-3\leqslant k\leqslant3$,∴ $P=\frac{3-\frac{1}{2}}{3-(-3)}=\frac{5}{12}$.

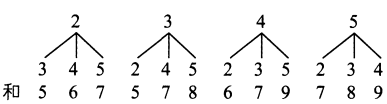
9. 3 【解析】∵ 摸了 100 次后,发现有 30 次摸到红球,∴ 摸到红球的频率为$\frac{30}{100}=0.3$. ∵ 袋子中有红球、白球共 10 个,∴ 这个袋中红球约有 $10\times0.3=3$(个).

10. $\frac{1}{3}$ 【解析】用树状图列举两辆汽车行驶的方向所有可能的结果,如图所示.



由树状图可知,这两辆汽车行驶的方向共有 9 种等可能出现的结果,其中它们行驶的方向相同的有 3 种结果,所以它们行驶的方向相同的概率为$\frac{3}{9}=\frac{1}{3}$.

11. 【解】(1)∵ 共有 20 名志愿者,女生有 12 名,∴ 选到女生的概率是$\frac{12}{20}=\frac{3}{5}$.
(2)不公平,理由如下:
根据题意,画树状图如下:



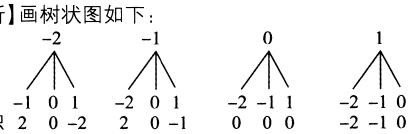
∵ 共有 12 种等可能的结果,和为偶数的结果有 4 种,
∴ 牌面数字之和为偶数的概率是$\frac{4}{12}=\frac{1}{3}$,
∴ 甲参加的概率是$\frac{1}{3}$,乙参加的概率是$\frac{2}{3}$,∴ 这个游戏不公平.

刷中考

1. D 【解析】A 选项,水能载舟,亦能覆舟,是必然事件,故此选项不符合题意;B 选项,只手遮天,偷天换日,是不可能事件,故此选项不符合题意;C 选项,瓜熟蒂落,水到渠成,是必然事件,故此选项不符合题意;D 选项,心想事成,万事如意,是随机事件,故此选项符合题意. 故选 D.

2. C 【解析】“小亮的进球率为 10%”的含义是,在大量重复试验情况下,小亮每射球 100 次,平均进球 10 次,因此 A、B 选项都错误. 小亮明天进球这一事件为随机事件,故 D 选项错误. 只有 C 选项说法正确. 故选 C.

3. B 【解析】画树状图如下:



由树状图可知，共有 12 种等可能的结果，其中抽取的 2 张卡片上数字之积为负数的结果有 4 种，所以抽取的 2 张卡片上数字之积为负数的概率为 $\frac{4}{12}=\frac{1}{3}$. 故选 B.

4. B 【解析】列表如下：

左	中	右
小亮	小莹	大刚
小亮	大刚	小莹
小莹	小亮	大刚
大刚	小亮	小莹
小莹	大刚	小亮
大刚	小莹	小亮

共有 6 种等可能的结果，其中小亮恰好站在中间的结果有 2 种，所以小亮恰好站在中间的概率为 $\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$. 故选 B.

5. C 【解析】∵ A 线路公交车用时不超过 45 分钟的可能性为 $\frac{59+151+166}{500}=0.752$，B 线路公交车用时不超过 45 分钟的可能性为 $\frac{50+50+122}{500}=0.444$，C 线路公交车用时不超过 45 分钟的可能性为 $\frac{45+265+167}{500}=0.954$，∴ 乘坐 C 线路上的公交车，从甲地到乙地“用时不超过 45 分钟”的可能性最大.

6. $\frac{4}{9}$ 【解析】图中的正方形地板被分成大小相同的 9 个小方格，所以蚂蚁在爬行中停到任意一个小方格的可能性都是相同的，其中有 4 个小方格是阴影部分，所以 $P_{\text{停在地板中阴影部分}}=\frac{4}{9}$.

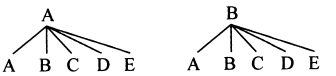
7. 【解】列表如下：

	A_1	A_2	B
A_1	(A_1,A_1)	(A_2,A_1)	(B,A_1)
A_2	(A_1,A_2)	(A_2,A_2)	(B,A_2)
B	(A_1,B)	(A_2,B)	(B,B)

由表可知，共有 9 种等可能的结果，其中抽出的两张卡片上的图案都是“金鱼”的有 4 种结果，

所以抽出的两张卡片上的图案都是“金鱼”的概率为 $\frac{4}{9}$.

8. 【解】(1)画树状图如下：



(2)由树状图知，共有 10 种等可能的结果，其中从开始进入的出入口离开的结果有 2 种，

所以小美玩一次“守株待兔”的游戏能得到小兔玩具的概率为 $\frac{2}{10}=\frac{1}{5}$.

(3)$125\times\frac{4}{5}\times3-125\times\frac{1}{5}\times4=200$(元)，所以估计游戏设计者可赚 200 元.

期末综合测试

刷速度

1. D 【解析】A 选项，抛掷一石头，石头终将落地是必然事件；B 选项，从装有黑球、白球的袋里摸出红球是不可能事件；C 选项，地球绕着太阳转是必然事件；D 选项，买 1 张彩票，中 500 万大奖是随机事件，故 D 正确.

2. B 【解析】A 选项，此图案是轴对称图形，故此选项不符合题意；B 选项，此图案既不是中心对称图形也不是轴对称图形，故此选项符合题意；C 选项，此图案是轴对称图形，故此选项不符合题意；D 选项，此图案是中心对称图形，故此选项不符合题意. 故选 B.

3. B 【解析】∵ 半圆 AB 绕点 B 顺时针旋转 45°，点 A 旋转到 A' 的位置，∴ $S_{\text{半圆}AB}=S_{\text{半圆}A'B}$，$\angle ABA'=45°$.

∵ $S_{\text{阴影}}+S_{\text{半圆}AB}=S_{\text{半圆}A'B}+S_{\text{扇形}BAA'}$，

∴ $S_{\text{阴影}}=S_{\text{扇形}BAA'}=\frac{45\pi\times4^2}{360}=2\pi$.

4. C 【解析】设方程 $x^2+bx-2=0$ 的两根分别为 x_1,x_2，则 $x_1x_2=-2$. ∵ $x=1$ 是方程 $x^2+bx-2=0$ 的一个根，∴ $1\times x_2=-2$，解得 $x_2=-2$，∴ 方程的另一个根是 −2.

5. C 【解析】将抛物线 $y=3x^2+2$ 向左平移 2 个单位长度所得的抛物线的解析式为 $y=3(x+2)^2+2$；再向下平移 3 个单位长度所得的抛物线的解析式为 $y=3(x+2)^2+2-3$，即 $y=3(x+2)^2-1$. 故选 C.

6. C 【解析】如图，连接 CD.

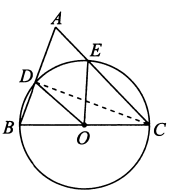
∵ $\angle DOE=60°$，∴ $\angle DCE=30°$.

∵ BC 为 $\odot O$ 的直径，

∴ $\angle BDC=90°$，∴ $\angle ADC=90°$.

∵ $\angle DCE=30°$，$AD=\sqrt{2}$，

∴ $AC=2AD=2\sqrt{2}$.



7. A 【解析】设该产品的质量档次是 x 档，则每天的产量为 $[95-5(x-1)]$ 件，每件的利润是 $[6+2(x-1)]$ 元. 根据题意得 $[6+2(x-1)][95-5(x-1)]=1\,120$，整理得 $x^2-18x+72=0$，解得 $x_1=6$，$x_2=12$(舍去). 故选 A.

8. C 【解析】∵ Rt△OAB 的顶点 $A(-2,4)$ 在抛物线 $y=ax^2$ 上，∴ $4=a\times(-2)^2$，解得 $a=1$，∴ 抛物线的解析式为 $y=x^2$.

∵ Rt△OAB 的顶点 $A(-2,4)$，∴ $B(-2,0)$，∴ $OB=2$.

∵ Rt△OAB 绕点 O 顺时针旋转 90°得到△OCD，

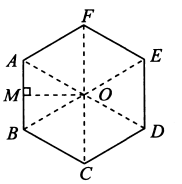
∴ $CD\parallel x$ 轴，$OD=OB=2$. ∴ 点 D 和点 P 的纵坐标均为 2.

令 $y=2$，得 $2=x^2$，解得 $x=\pm\sqrt{2}$.

∵ 点 P 在第一象限，∴ 点 P 的坐标为 $(\sqrt{2},2)$.

9. 直线 $x=2$ 【解析】∵ 二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图象与 x 轴交于 $(-2,0)$ 和 $(6,0)$ 两点，∴ 其对称轴为直线 $x=\frac{-2+6}{2}=2$.

10. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ 【解析】如图，连接 OA,OB,OC,OD,OE,OF，作 $OM\perp AB$ 于点 M.



∵ 六边形 $ABCDEF$ 是正六边形，

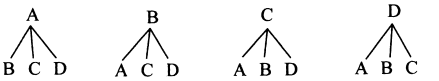
∴ $\angle AOB=\angle BOC=\angle COD=\angle DOE=\angle EOF=\angle FOA=360°\div6=60°$，$OA=OB$，

∴ △AOB 是等边三角形，∴ $OA=OB=AB=1$.

∵ $OM\perp AB$，∴ $AM=BM=\frac{1}{2}$.

在 Rt△OAM 中，由勾股定理得 $OM=\sqrt{OA^2-AM^2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

11. $\frac{1}{2}$ 【解析】画树状图如下：

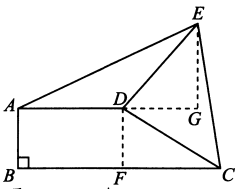


任意闭合其中2个开关的结果共有12种，每种结果出现的可能性都相等，其中能使小灯泡发光的结果有6种，小灯泡发光的概率是$\frac{1}{2}$.

12. 0 【解析】∵ 方程$x^2+3x-1=0$的两根之和为-3，方程$x^2-3x-1=0$的两根之和为3，

∴ 一元二次方程$x^2+3x-1=0$与$x^2-3x-1=0$的所有实数根的和等于$-3+3=0$.

13. 7或1 【解析】①当$AD<BC$时，如图，过点D作$DF\perp BC$于点F，作$EG\perp AD$交AD的延长线于点G. 由题意可得四边形$ABFD$是矩形，则$BF=AD=4$.



∵ $\triangle ADE$的面积为6，∴ $EG=3$.

根据旋转的性质，可知$DE=DC$，$DE\perp DC$，∴ $\angle CDF=\angle EDG$. 在$\triangle CDF$和$\triangle EDG$中，

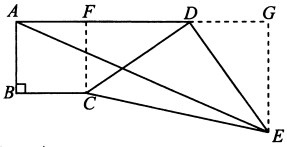
$$\because \begin{cases}\angle DFC=\angle EGD,\\ \angle CDF=\angle EDG,\\ CD=DE,\end{cases}$$

∴ $\triangle CDF\cong\triangle EDG$(AAS).

∴ $CF=EG=3$，

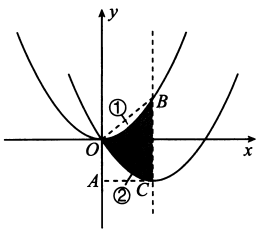
∴ $BC=BF+FC=4+3=7$.

②当$AD>BC$时，同理可求得$BC=1$.



综上，BC的长为7或1.

14. 4 【解析】如图，过点C作$CA\perp y$轴于点A.



∵ 抛物线$y=\frac{1}{2}x^2-2x=\frac{1}{2}(x^2-4x)=\frac{1}{2}(x^2-4x+4)-2=\frac{1}{2}(x-2)^2-2$，

∴ 顶点坐标为$C(2,-2)$. 连接OB，OC，由二次函数的对称性可知$OB=OC$，OB与OC关于x轴对称. 且区域①和区域②面积相等，从而$S_{阴影}=S_{\triangle OBC}$，又∵ $C(2,-2)$，∴ $B(2,2)$. ∴ $BC=4$，边BC上高为2. $S_{阴影}=S_{\triangle OBC}=\frac{1}{2}\times4\times2=4$.

15. 【解】整理得$x^2-3x-2=0$，

$\Delta=b^2-4ac=(-3)^2-4\times1\times(-2)=17$，

∴ $x=\frac{3\pm\sqrt{17}}{2}$，∴ $x_1=\frac{3+\sqrt{17}}{2}$，$x_2=\frac{3-\sqrt{17}}{2}$.

16. 【解】(1)∵ 关于x的一元二次方程$x^2+(2m+1)x+m^2-1=0$有两个不相等的实数根，

∴ $\Delta=(2m+1)^2-4\times1\times(m^2-1)=4m+5>0$，

解得$m>-\frac{5}{4}$.

(2)取$m=1$，此时原方程为$x^2+3x=0$，即$x(x+3)=0$，

解得$x_1=0$，$x_2=-3$.

17. 【解】设该公司的每辆汽车日租金提高x个10元，日租金总收入为y，则$y=(160+10x)(120-6x)=-60(x-2)^2+19\,440$.

当$x=2$时，y取得最大值19 440，

即一辆汽车的日租金提高2个10元时，才能使公司的日租金收入最高.

19 440 − 120 × 160 = 19 440 − 19 200 = 240(元)，故一辆汽车的日租金提高2个10元时，公司的日租金总收入比提高租金前增加了240元.

18. (1)【证明】∵ $\angle AFB=\angle ABC$，$\angle ADC=\angle ABC$，

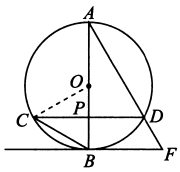
∴ $\angle AFB=\angle ADC$，∴ $CD/\!/BF$.

∵ $CD\perp AB$，∴ $BF\perp AB$.

∵ AB是⊙O的直径，

∴ 直线BF是⊙O的切线.

(2)【解】如图，连接OC.



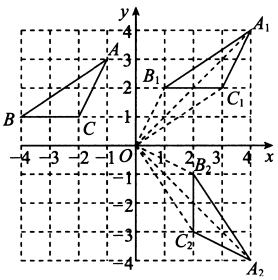
∵ $AB\perp CD$，$CD=2\sqrt{3}$，

∴ $CP=DP=\frac{1}{2}CD=\sqrt{3}$.

在Rt△OCP中，∵ $OP=1$，$CP=\sqrt{3}$，

∴ $OC=\sqrt{OP^2+CP^2}=\sqrt{1^2+(\sqrt{3})^2}=2$.

19. (1)如图.



(2)$OA_1=\sqrt{4^2+4^2}=4\sqrt{2}$，

点A经过点A_1到达A_2的路径总长为

$\sqrt{5^2+1^2}+\frac{90\pi\times4\sqrt{2}}{180}=\sqrt{26}+2\sqrt{2}\pi$.

(3)∵ $OB_1=\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt{5}$，$OC_1=\sqrt{2^2+3^2}=\sqrt{13}$，

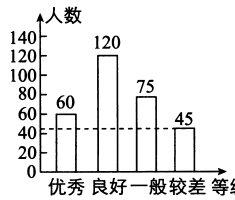
∴ $S=\frac{\pi\times(\sqrt{13})^2}{4}-\frac{\pi\times(\sqrt{5})^2}{4}=2\pi$.

20. 【解】(1)360° × (1 − 40% − 25% − 15%) = 72°.

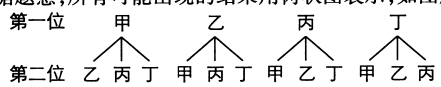
全年级总人数为45 ÷ 15% = 300，

“良好”的人数为300 × 40% = 120.

将条形统计图补充完整，如图所示.



(2)根据题意，所有可能出现的结果用树状图表示，如图所示.



由树状图可知，共有12种等可能出现的结果，选中的两名同学恰好是甲和丁的结果有2种，

∴ P(选中的两名同学恰好是甲和丁)$=\frac{2}{12}=\frac{1}{6}$.

21. 【证明】∵ AB为⊙O的直径，∴ $\angle ACB=90°$.

∵ $CF\perp AB$于点D，∴ $\angle CDB=90°$.

∴ $\angle ACD+\angle BCD=\angle A+\angle ACD=90°$，∴ $\angle A=\angle BCD$.

∵ $\angle A=\angle E$，∴ $\angle E=\angle BCF$.

∵ $CE=BE$，∴ $\angle ECB=\angle EBC$，

∵ $\angle ECB=\angle ECF+\angle BCF$，$\angle CFB=\angle E+\angle ECF$，

∴ $\angle CFB=\angle ECB=\angle CBF$，∴ $CB=CF$.

22. 【解】(1)把$A(0,3)$，$B\left(-4,-\frac{9}{2}\right)$分别代入$y=-\frac{3}{16}x^2+bx+c$，得

$$\begin{cases}c=3,\\ -\frac{3}{16}\times16-4b+c=-\frac{9}{2},\end{cases}\text{解得}\begin{cases}b=\frac{9}{8},\\ c=3.\end{cases}$$

(2)二次函数的图象与x轴有公共点.

由(1)可得，该抛物线的解析式为$y=-\frac{3}{16}x^2+\frac{9}{8}x+3$.

$\Delta=\left(\frac{9}{8}\right)^2-4\times\left(-\frac{3}{16}\right)\times3=\frac{225}{64}>0$，

所以二次函数 $y=-\frac{3}{16}x^2+bx+c$ 的图象与 x 轴有公共点.

令 $-\frac{3}{16}x^2+\frac{9}{8}x+3=0$,解得 $x_1=-2,x_2=8$,

则公共点的坐标是 $(-2,0)$ 或 $(8,0)$.

23. (1)【证明】$\because \Delta=(k-5)^2-4(1-k)=k^2-6k+21=(k-3)^2+12>0$,$\therefore$ 无论 k 为何值,方程总有两个不相等的实数根.

(2)【解】$\because$ 二次函数 $y=x^2+(k-5)x+1-k$ 的二次项系数 $a=1$,$\therefore$ 抛物线 $y=x^2+(k-5)x+1-k$ 的开口方向向上.

$\because \Delta=(k-3)^2+12>0$,

$\therefore$ 抛物线与 x 轴有两个交点.

设抛物线与 x 轴的交点的横坐标分别为 x_1,x_2.

$\because$ 二次函数 $y=x^2+(k-5)x+1-k$ 的图象不经过第三象限,

$\therefore x_1\geqslant 0,x_2\geqslant 0$. 且二者不同时为 0,$\therefore x_1+x_2=5-k>0,x_1\cdot x_2=1-k\geqslant 0$,解得 $k\leqslant 1$,$\therefore k$ 的取值范围是 $k\leqslant 1$.

(3)设方程的两个根分别是 x_1,x_2,

根据题意,得 $(x_1-3)(x_2-3)<0$.

即 $x_1\cdot x_2-3(x_1+x_2)+9<0$.

又$\because x_1+x_2=5-k,x_1\cdot x_2=1-k$,

$\therefore$ 代入得 $1-k-3(5-k)+9<0$.

解得 $k<\frac{5}{2}$,

$\therefore k$ 的最大整数值为 2.

24.【解】(1)$\because$ 抛物线 $y=-x^2+bx+c$ 的对称轴是直线 $x=1$,

$\therefore -\frac{b}{2\times(-1)}=1$,解得 $b=2$. $\because$ 抛物线过点 $A(0,3)$,$\therefore c=3$.

$\therefore$ 抛物线的解析式为 $y=-x^2+2x+3$,

令 $y=0$,得 $-x^2+2x+3=0$,解得 $x_1=-1,x_2=3$,

$\therefore$ 点 B 的坐标为 $(3,0)$.

(2)①由题意可知 $ON=3t,OM=2t$.

$\because$ 点 P 在抛物线上,$\therefore P(2t,-4t^2+4t+3)$.

$\because$ 四边形 $OMPN$ 为矩形,$\therefore ON=PM$,

$\therefore 3t=-4t^2+4t+3$,解得 $t_1=1,t_2=-\frac{3}{4}$(舍去),

$\therefore$ 当 t 的值为 1 时,四边形 $OMPN$ 为矩形.

②当 $t>0$ 时,$\triangle BOQ$ 能构成等腰三角形.

$\because A(0,3),B(3,0)$,

$\therefore OA=OB=3$,且可求得直线 AB 的解析式为 $y=-x+3$.

$\therefore$ 当 $t>0$ 时,$OQ\neq OB$,

$\therefore$ 当 $\triangle BOQ$ 为等腰三角形时,有 $OB=QB$ 或 $OQ=BQ$ 两种情况.

由题意可知 $OM=2t$,$\therefore Q(2t,-2t+3)$.

$\therefore OQ=\sqrt{OM^2+MQ^2}=\sqrt{(2t)^2+(-2t+3)^2}=\sqrt{8t^2-12t+9}$,

$BQ=\sqrt{BM^2+MQ^2}=\sqrt{(3-2t)^2+(-2t+3)^2}=\sqrt{2}|2t-3|$.

又由题意可知 $0<t<1$.

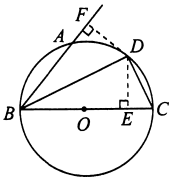
当 $OB=BQ$ 时,有 $\sqrt{2}|2t-3|=3$,解得 $t_1=\frac{6+3\sqrt{2}}{4}$(舍去),

$t_2=\frac{6-3\sqrt{2}}{4}$.

当 $OQ=BQ$ 时,有 $\sqrt{8t^2-12t+9}=\sqrt{2}|2t-3|$,解得 $t=\frac{3}{4}$.

综上可知,当 t 的值为 $\frac{6-3\sqrt{2}}{4}$ 或 $\frac{3}{4}$ 时,$\triangle BOQ$ 为等腰三角形.

25.【解】(1)如图(1),过点 D 作 $DF\perp BA$,交 BA 的延长线于点 F,作 $DE\perp BC$ 于点 E.



图(1)

$\because BD$ 平分 $\angle ABC$,$DF\perp AB$,$DE\perp BC$,$\therefore DF=DE$.

$\because BC$ 是直径,$\therefore \angle BDC=90°$,

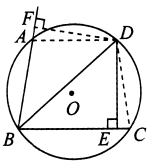
$\therefore BC=\sqrt{BD^2+CD^2}=\sqrt{4^2+3^2}=5$.

$\because$ 在 $\triangle BCD$ 中,$\frac{1}{2}\cdot BC\cdot DE=\frac{1}{2}\cdot BD\cdot DC$,$\therefore DE=\frac{12}{5}$,

$\therefore DF=DE=\frac{12}{5}$.

(2)$AB+BC=2BE$. 理由如下:

如图(2),过点 D 作 $DF\perp BA$,交 BA 的延长线于点 F,连接 AD,DC.



图(2)

$\because BD$ 平分 $\angle ABC$,$DE\perp BC$,$DF\perp BA$,$\therefore DF=DE$,$\angle DFB=\angle DEB=90°$.

$\because \angle DFB=90°,\angle DEB=90°$,

$\therefore \angle ABC+\angle EDF=180°$. 又$\because \angle ABC+\angle ADC=180°$,

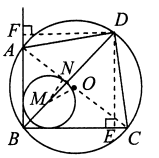
$\therefore \angle ADC=\angle EDF$,$\therefore \angle FDA=\angle CDE$.

$\because \angle DFA=\angle DEC=90°$,$\therefore \triangle DFA\cong\triangle DEC$(ASA),$\therefore AF=CE$.

$\because BD=BD,DF=DE$,$\therefore$ Rt$\triangle BDF\cong$Rt$\triangle BDE$(HL),

$\therefore BF=BE$,$\therefore AB+BC=BF-AF+BE+CE=2BE$.

(3)如图(3),过点 D 作 $DF\perp BA$,交 BA 的延长线于点 F,$DE\perp BC$,交 BC 于点 E,连接 AC,作 $\triangle ABC$ 的内切圆,圆心为 M,N 为切点,连接 MN,OM.



图(3)

由(1)(2)可知,四边形 $BEDF$ 是正方形,BD 是对角线.

$\because BD=7\sqrt{2}$,$\therefore$ 正方形 $BEDF$ 的边长为 7.

由(2)可知 $BC=2BE-AB=8$,$\therefore AC=\sqrt{6^2+8^2}=10$,

由切线长定理可知 $AN=\frac{6+10-8}{2}=4$,$\therefore ON=5-4=1$,

设内切圆的半径为 r,则 $\frac{1}{2}\times r\times 10+\frac{1}{2}\times r\times 6+\frac{1}{2}\times r\times 8=\frac{1}{2}\times 6\times 8$,解得 $r=2$,即 $MN=2$.

在 Rt$\triangle OMN$ 中,$OM=\sqrt{MN^2+ON^2}=\sqrt{2^2+1^2}=\sqrt{5}$.

提供各种书籍的 PDF 电子版代找服务，如果您找不到您想要的书的 PDF 电子版，我们可以帮您找到，如有需要，请联系微信、QQ。





PDF 代找说明：

本公司可以帮助您找到您想要的 PDF 电子书。质量都很清晰，只要您提供给我们相关信息，一般都能找到，如果您有需求，请联系我们。

现已经帮助了很多人找到了大家需要的 PDF，其实网上有很多 PDF，大家如果在网上找不到的话，可以联系我们，大部分我们都可以找到。因 PDF 电子书都有版权，请不要随意传播，如果您有经济购买能力，请尽量购买正版。

声明：

本公司只提供代找服务，因寻找 PDF 电子书有一定难度，仅收取代找费用。如因 PDF 产生的版权纠纷，与本公司无关，我们仅仅只是帮助您寻找到您要的 PDF 而已。