目录

(正文)(答案)

第十一章 三角形

11.1 与三角形有关的线段 …… (1)(D1)
11.1.1 三角形的边 …… 刷基础 (1)(D1)
11.1.2 三角形的高、中线与角平分线 +11.1.3 三角形的稳定性 …… 刷基础 刷提升 (2)(D1)
11.2 与三角形有关的角 …… (4)(D2)
11.2.1 三角形的内角 …… (4)(D2)
课时 1 三角形的内角 …… 刷基础 (4)(D2)
课时 2 直角三角形的性质与判定 …… 刷基础 刷提升 (5)(D3)
11.2.2 三角形的外角 …… 刷基础 刷提升 (7)(D4)
11.3 多边形及其内角和 …… (9)(D5)
11.3.1 多边形 …… 刷基础 (9)(D5)
11.3.2 多边形的内角和 …… 刷基础 刷提升 (10)(D5)
全章综合训练 …… 刷章测 刷中考 (12)(D6)

第十二章 全等三角形

12.1 全等三角形 …… 刷基础 (15)(D8)
12.2 三角形全等的判定 …… (16)(D8)
课时 1 三边证全等(SSS) …… 刷基础 (16)(D8)
课时 2 两边及夹角证全等(SAS) …… 刷基础 刷提升 (17)(D9)
课时 3 两角及一边证全等(ASA,AAS) …… 刷基础 刷提升 (19)(D10)
课时 4 斜边及一条直角边证全等(HL) …… 刷基础 (21)(D11)
▶▶ 专题 全等三角形的性质与判定 …… 刷难关 (22)(D12)
12.3 角的平分线的性质 …… (23)(D13)
课时 1 角的平分线的作法与性质 …… 刷基础 刷提升 (23)(D13)
课时 2 角的平分线的判定 …… 刷基础 (25)(D14)
全章综合训练 …… 刷章测 (26)(D14)

第十三章 轴对称

13.1 轴对称 …… (28)(D16)
13.1.1 轴对称 …… 刷基础 (28)(D16)
13.1.2 线段的垂直平分线的性质 …… 刷基础 刷提升 (29)(D16)
13.2 画轴对称图形 …… (31)(D17)
课时 1 画轴对称图形 …… 刷基础 (31)(D17)
课时 2 用坐标表示轴对称 …… 刷基础 刷提升 (32)(D18)
13.3 等腰三角形 …… (34)(D19)
13.3.1 等腰三角形 …… (34)(D19)
课时 1 等腰三角形的性质 …… 刷基础 刷提升 (34)(D19)
课时 2 等腰三角形的判定 …… 刷基础 刷提升 (36)(D20)
13.3.2 等边三角形 …… (38)(D22)
课时 1 等边三角形的性质与判定 …… 刷基础 刷提升 (38)(D22)
课时 2 含 30°角的直角三角形的性质 …… 刷基础 (40)(D23)
▶▶ 专题 等腰三角形的性质与判定 …… 刷难关 (41)(D24)
13.4 课题学习 最短路径问题 …… 刷基础 刷提升 (42)(D25)
全章综合训练 …… 刷章测 刷中考 (44)(D26)

目 录



第十四章 整式的乘法与因式分解

14.1 整式的乘法 …… (46)(D28)
14.1.1 同底数幂的乘法 …… 刷基础 (46)(D28)
14.1.2 幂的乘方 +14.1.3 积的乘方 …… 刷基础 刷提升 (47)(D28)
14.1.4 整式的乘法 …… (49)(D29)
课时 1 单项式与单项式相乘 …… 刷基础 (49)(D29)
课时 2 单项式与多项式相乘 …… 刷基础 刷提升 (50)(D30)
课时 3 多项式与多项式相乘 …… 刷基础 刷提升 (52)(D30)
课时 4 同底数幂的除法 …… 刷基础 (54)(D31)
课时 5 整式的除法 …… 刷基础 刷提升 (55)(D32)
14.1 综合训练 …… 刷综合 (57)(D32)
14.2 乘法公式 …… (58)(D33)
14.2.1 平方差公式 …… 刷基础 (58)(D33)
14.2.2 完全平方公式 …… (59)(D33)
课时 1 完全平方公式 …… 刷基础 刷提升 (59)(D33)
课时 2 添括号法则 …… 刷基础 (61)(D34)
14.3 因式分解 …… (62)(D35)
14.3.1 提公因式法 …… 刷基础 (62)(D35)
14.3.2 公式法 …… (63)(D35)
课时 1 运用平方差公式分解因式 …… 刷基础 刷提升 (63)(D35)
课时 2 运用完全平方公式分解因式 …… 刷基础 (65)(D36)
全章综合训练 …… 刷章测 (66)(D37)



第十五章 分式

15.1 分式 …… (68)(D38)
15.1.1 从分数到分式 …… 刷基础 (68)(D38)
15.1.2 分式的基本性质 …… 刷基础 刷提升 (69)(D38)
15.2 分式的运算 …… (71)(D39)
15.2.1 分式的乘除 …… (71)(D39)
课时 1 分式的乘除 …… 刷基础 (71)(D39)
课时 2 分式的乘除混合运算及乘方 …… 刷基础 刷提升 (72)(D40)
15.2.2 分式的加减 …… (74)(D41)
课时 1 分式的加减 …… 刷基础 刷提升 (74)(D41)
课时 2 分式的混合运算 …… 刷基础 刷提升 (76)(D42)
15.2.3 整数指数幂 …… (78)(D43)
课时 1 负整数指数幂 …… 刷基础 (78)(D43)
课时 2 用科学记数法表示小于 1 的正数 …… 刷基础 (79)(D43)
▶▶ 专题 分式的化简求值 …… 刷难关 (80)(D43)
15.3 分式方程 …… (81)(D44)
课时 1 分式方程及其解法 …… 刷基础 刷提升 (81)(D44)
课时 2 分式方程与实际问题的综合 …… 刷基础 刷提升 (83)(D45)
全章综合训练 …… 刷章测 (85)(D46)

▶▶ 期末综合测试 …… 刷速度 (87)(D47)

第十一章 三角形

11.1 与三角形有关的线段

11.1.1 三角形的边

刷基础

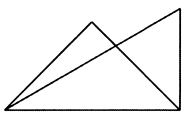
▶答案 D1

题型1 三角形的有关概念

1 [2019 贵州遵义月考]课堂上,老师把教学用的两块三角板叠放在一起,得到如图所示的图形,其中三角形的个数为 (　　)

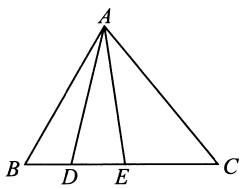
A. 2　　B. 3

C. 5　　D. 6



(第1题图)

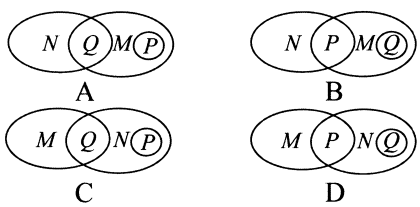
2 如图,以 AD 为边的三角形有_____;以 $\angle C$ 为一个内角的三角形有_____;$\triangle AED$ 的三个内角是_____.



(第2题图)

题型2 三角形的分类

3 [2019 广西忻城期中]设 M 表示直角三角形,N 表示等腰三角形,P 表示等边三角形,Q 表示等腰直角三角形. 下列四个图中,能正确表示它们之间的关系的是 (　　)



4 [2019 上海浦东新区期末]若 $\triangle ABC$ 三条边的长度分别为 m,n,p,且 $|m-n|+(n-p)^2=0$,则这个三角形为 (　　)

A. 等腰三角形　　B. 等边三角形

C. 直角三角形　　D. 等腰直角三角形

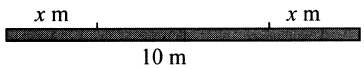
题型3 三角形的三边关系

5 [2019 广东珠海香洲区期末]以下列各组线段为边,能组成三角形的是 (　　)

A. 2,3,5　　B. 3,3,6

C. 2,5,8　　D. 4,5,6

6 [2018 河北石家庄模拟]下图是一根长度为 10 m 的木条,从两边各截取长度为 x m 的木条. 若得到的三根木条能组成三角形,则 x 可以取的值为 (　　)

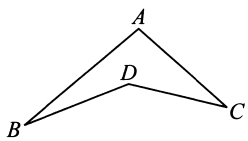


A. 2　　B. $\frac{5}{2}$　　C. 3　　D. 6

7 [2019 内蒙古杭锦后旗期末]若 $\triangle ABC$ 的三边长分别为 a,b,c,则 $|a-b-c|-|b-a-c|=$_____.

8 已知 a,b,c 为 $\triangle ABC$ 的三边长,b,c 满足 $(b-2)^2+|c-3|=0$,a 是方程 $|x-4|=2$ 的解,求 $\triangle ABC$ 的周长,并判断 $\triangle ABC$ 的形状.

9 四边形 $ABDC$ 如图所示,求证:$AB+AC>BD+CD$.



刷易错

易错点 忽略三边关系导致构不成三角形而致错

10 已知等腰三角形的两边长分别为 4 和 10,求这个等腰三角形的周长.

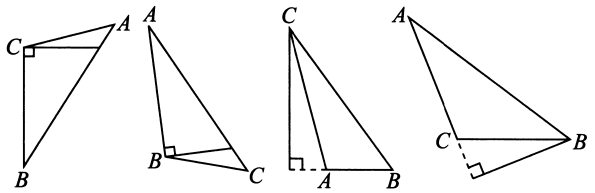
11.1.2　三角形的高、中线与角平分线 + 11.1.3　三角形的稳定性

刷基础

▶答案 D1

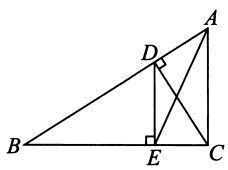
题型1　三角形的高

1 [2019 内蒙古宁城期末]画△*ABC* 的边 *AB* 上的高,下列画法中正确的是 (　　)



A　　B　　C　　D

2 [2019 黑龙江哈尔滨南岗区校级月考]如图,*AC* ⊥ *BC*,*CD* ⊥ *AB*,*DE* ⊥ *BC*,垂足分别为 *C*,*D*,*E*,则下列说法不正确的是 (　　)



A. *AC* 是△*ABC* 的高　　B. *DE* 是△*BCD* 的高

C. *DE* 是△*ABE* 的高　　D. *AD* 是△*ACD* 的高

3 [2019 甘肃临洮期末]三角形三条高的交点在 (　　)

A. 三角形内部　　B. 三角形外部

C. 三角形内部或外部　　D. 三角形内部、外部或顶点

题型2　三角形的中线

4 [2019 湖北荆门校级月考]三角形一边上的中线把原三角形分成两个 (　　)

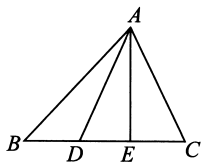
A. 形状相同的三角形

B. 面积相等的三角形

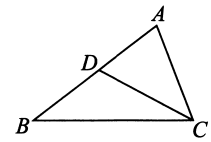
C. 直角三角形

D. 周长相等的三角形

5 如图,在△*ABC* 中,*BD* = *DE* = *EC*,则线段 *AE* 是_____的中线.



6 如图所示,*CD* 为△*ABC* 的边 *AB* 上的中线,△*BCD* 的周长比△*ACD* 的周长长 3 cm,*BC* = 8 cm,求边 *AC* 的长.

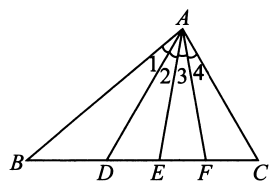


题型3　三角形的角平分线

7 [2019 浙江苍南期中]如图所示,在△*ABC* 中,*D*,*E*,*F* 是 *BC* 边上的三点,且∠1 = ∠2 = ∠3 = ∠4,则 *AE* 是哪个三角形的角平分线 (　　)

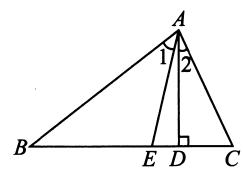
A. △*ABE*　　B. △*ADF*

C. △*ABC*　　D. △*ABC*,△*ADF*



(第 7 题图)

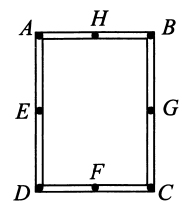
8 如图,在△*ABC* 中,*AD* ⊥ *BC*,*AE* 平分∠*BAC*. 若∠1 = 30°,∠2 = 20°,则∠*EAD* = _____.



(第 8 题图)

题型4　三角形的稳定性

9 如图,工人师傅做了一个长方形窗框 *ABCD*,*E*,*F*,*G*,*H* 分别是四条边上的中点,为了使它更加稳固,需要在窗框上钉一根木条,这根木条不应钉在 (　　)



A. *A*,*C* 两点之间　　B. *E*,*G* 两点之间

C. *B*,*F* 两点之间　　D. *G*,*H* 两点之间

刷易错

易错点　忽视对等腰三角形的分类讨论而漏解

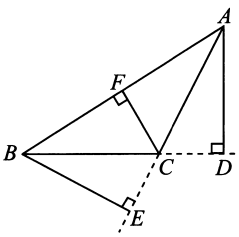
10 等腰三角形一腰上的中线把该三角形的周长分为 13.5 cm 和 11.5 cm 两部分,求这个等腰三角形各边的长.

刷提升

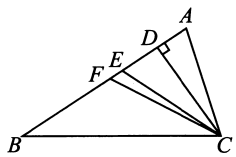
▶答案 D1

1 [2019 湖北武汉桥口区校级月考]如图，$\angle ACB > 90°$，$AD \perp BC$，$BE \perp AC$，$CF \perp AB$，垂足分别为点 D，E，F，则 $\triangle ABC$ 中 AC 边上的高是（　　）

A. CF　　B. BE　　C. AD　　D. CD



（第 1 题图）



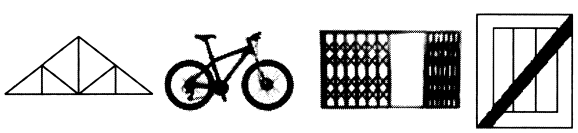
（第 2 题图）

2 如图，CD，CE，CF 分别是 $\triangle ABC$ 的高、角平分线、中线，则下列各式中错误的是（　　）

A. $AB = 2BF$　　B. $\angle ACE = \frac{1}{2}\angle ACB$

C. $AE = BE$　　D. $CD \perp BE$

3 [2019 湖北武汉武昌区期中]下列图形中，没有运用三角形的稳定性的是（　　）



A. 房屋顶的支撑架　　B. 自行车上的三脚架

C. 伸缩的拉闸门　　D. 在木门上钉一根木条

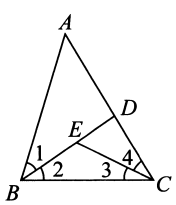
4 如图，若 $\angle 1 = \angle 2$，$\angle 3 = \angle 4$，下列结论中错误的是（　　）

A. BD 是 $\triangle ABC$ 的角平分线

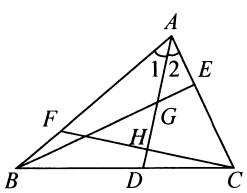
B. CE 是 $\triangle BCD$ 的角平分线

C. $\angle 3 = \frac{1}{2}\angle ACB$

D. CE 是 $\triangle ABC$ 的角平分线



（第 4 题图）



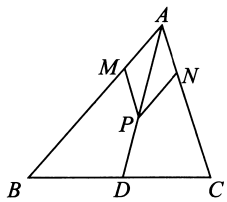
（第 5 题图）

5 如图，在 $\triangle ABC$ 中，$\angle 1 = \angle 2$，G 为 AD 的中点，延长 BG 交 AC 于 E，其满足 $BE \perp AC$；F 为 AB 上一点，且 $CF \perp AD$ 于 H. 下列判断：①线段 AG 是 $\triangle ABE$ 的角平分线；②线段 BE 是 $\triangle ABD$ 的边 AD 上的中线；③线段 AE 是 $\triangle ABG$ 的边 BG 上的高；④ $\angle 1 + \angle FBC + \angle FCB = 90°$. 其中正确的个数是（　　）

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

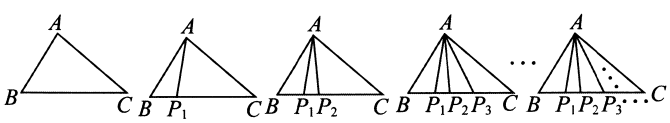
6 [2018 上海长宁区二模]在 $\triangle ABC$ 中，$AB = 2\,016$，$AC = 2\,014$，AD 为 $\triangle ABC$ 的中线，则 $\triangle ABD$ 与 $\triangle ACD$ 的周长之差是_____.

7 如图，AD 是 $\triangle ABC$ 的角平分线，点 P 为 AD 上一点，$PM \parallel AC$ 交 AB 于 M，$PN \parallel AB$ 交 AC 于 N. 求证：PA 平分 $\angle MPN$.



刷素养

8 [难]如图所示，根据规律回答下列问题：



第1个　第2个　第3个　第4个　第n个

（1）第 4 个图中有_____个三角形；

（2）算一算，第 n 个图中有多少个三角形？

11.2　与三角形有关的角

11.2.1　三角形的内角

课时1　三角形的内角

刷基础

▶答案 D2

题型1　利用三角形内角和求角的度数

1 [2019 重庆忠县校级期中]一个三角形中,有一个角是55°,另外两个角可能是　(　)

A. 95°,20°　　B. 45°,80°

C. 55°,60°　　D. 90°,20°

2 已知三角形的一个内角是另一个内角的2倍,是第三个内角的6倍,则这个三角形各个内角的度数分别为　(　)

A. 18°,54°,108°　　B. 48°,72°,60°

C. 48°,32°,38°　　D. 40°,50°,90°

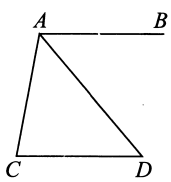
3 在△ABC中,$\angle C=50°$,$\angle B-\angle A=10°$,则$\angle A=$_____,$\angle B=$_____.

4 [2019 四川雅安校级期中]在三角形中,若最大内角等于最小内角的2倍,最大内角又比另一个内角大20°,则此三角形的最小内角的度数是_____.

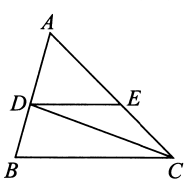
题型2　三角形内角和与角平分线的综合

5 如图,$AB\parallel CD$,AD平分$\angle BAC$,且$\angle C=80°$,则$\angle D$的度数是　(　)

A. 60°　　B. 50°　　C. 45°　　D. 40°



(第5题图)



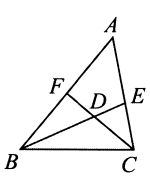
(第6题图)

6 [2019 广西防城港防城区校级模拟]如图,在△ABC中,$DE\parallel BC$,CD是$\angle ACB$的平分线,$\angle B=72°$,$\angle ACB=40°$,那么$\angle BDC$等于　(　)

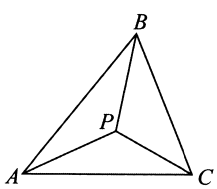
A. 78°　　B. 90°　　C. 88°　　D. 92°

7 [2019 广东中山期中]如图,BE,CF是△ABC的角平分线,$\angle A=50°$,BE,CF相交于点D,则$\angle BDC$的度数是　(　)

A. 115°　　B. 110°　　C. 100°　　D. 90°



(第7题图)

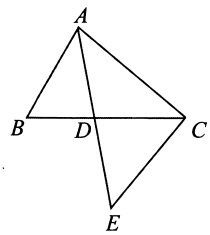


(第8题图)

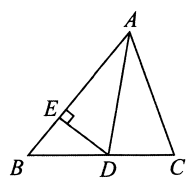
8 [2019 河南宝丰期中]如图,在△ABC中,点P是△ABC的三条角平分线的交点,则$\angle PBC+\angle PCA+\angle PAB$等于　(　)

A. 45°　　B. 120°　　C. 180°　　D. 90°

9 [2019 福建厦门期末]如图,在△ABC中,$\angle B=60°$,AD平分$\angle BAC$,点E在AD的延长线上,且$EC\perp AC$.若$\angle E=50°$,则$\angle ADC$的度数是_____.



10 [2019 四川广安期中]如图,在△ABC中,$\angle B=50°$,$\angle C=70°$,AD是△ABC的角平分线,$DE\perp AB$于点E.求$\angle EDA$的度数.



刷易错

易错点　对三角形的类型考虑不周导致漏解

11 在△ABC中,$\angle ABC=\angle C$,BD是AC边上的高,$\angle ABD=30°$,则$\angle C$的度数是多少?

真正能困住一个人的,不是钢铁铸就的牢笼,而是心中矗立的高墙。

课时2　直角三角形的性质与判定

刷基础

▶答案 D3

题型1　直角三角形的性质

1 在 Rt△ABC 中，$\angle C=90°$，$\angle B=40°$，则 $\angle A=$（　　）

A. 60°　　B. 30°

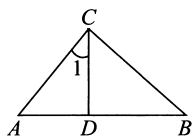
C. 50°　　D. 40°

2 [2019 湖北武汉青山区校级月考]直角三角形的一个锐角是另一个锐角的 4 倍，那么这个锐角的度数是（　　）

A. 18°　　B. 36°

C. 54°　　D. 72°

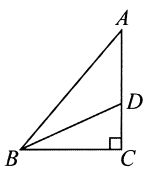
3 如图所示，△ABC 为直角三角形，$\angle ACB=90°$，$CD\perp AB$，与 $\angle 1$ 互余的角为（　　）



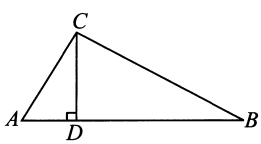
A. $\angle B$　　B. $\angle A$

C. $\angle BCD$ 和 $\angle A$　　D. $\angle BCD$

4 [2019 辽宁大石桥校级月考]如图，在 Rt△ABC 中，$\angle C=90°$，$\angle A=40°$，BD 是 $\angle ABC$ 的平分线，则 $\angle ADB=$_____.



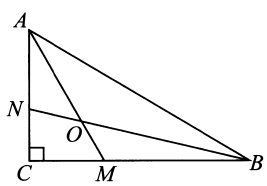
（第 4 题图）



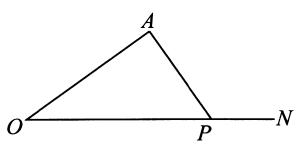
（第 5 题图）

5 如图，在△ABC 中，$CD\perp AB$，$\angle ACB=96°$，$\angle B=20°$，则 $\angle ACD=$_____.

6 [2019 浙江杭州临安区期中]如图，在 Rt△ABC 中，两锐角平分线 AM，BN 相交所成的钝角 $\angle AOB=$_____度.



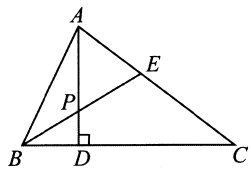
（第 6 题图）



（第 7 题图）

7 如图，已知点 P 是射线 ON 上一动点（即点 P 在射线 ON 上运动），$\angle AON=30°$，当 $\angle A=$_____时，△AOP 为直角三角形.

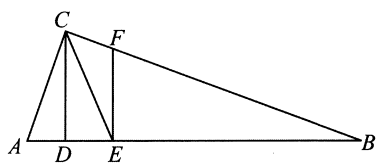
8 [2018 四川遂宁期末]如图，在△ABC 中，AD 是 BC 边上的高线，BE 是 $\angle ABC$ 的平分线，AD，BE 相交于点 P. 已知 $\angle EPD=125°$，求 $\angle BAD$ 的度数.



9 如图，在 Rt△ABC 中，$\angle ACB=90°$，$CD\perp AB$ 于点 D，CE 平分 $\angle ACB$ 交 AB 于点 E，$EF\perp AB$ 交 CB 于点 F.

(1)求证：$CD/\!/EF$；

(2)若 $\angle A=70°$，求 $\angle FEC$ 的度数.



题型2　直角三角形的判定

10 在△ABC 中，若 $\angle B$ 与 $\angle C$ 互余，则△ABC 是（　　）

A. 锐角三角形　　B. 直角三角形

C. 钝角三角形　　D. 等腰三角形

11 [2019 四川广安期中]若在△ABC 中，$\angle A:\angle B:\angle C=1:3:4$，则△$ABC$ 一定是（　　）

A. 锐角三角形　　B. 钝角三角形

C. 直角三角形　　D. 任意三角形

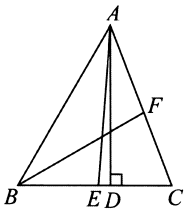
12 [2018 四川凉山州期末]在下列条件中：①$\angle A+\angle B=\angle C$；②$\angle A:\angle B:\angle C=1:2:3$；③$\angle A=90°-\angle B$；④$\angle A=\angle B=\angle C$. 能确定△$ABC$ 是直角三角形的条件有_____.（填序号）

刷提升

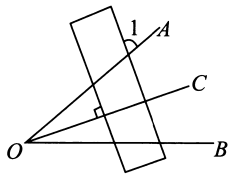
▸答案 D3

1 [2018 湖北黄石中考]如图,在△ABC中,AD是边BC上的高,AE,BF分别是∠BAC,∠ABC的平分线,∠BAC=50°,∠ABC=60°,则∠EAD+∠ACD=　(　)

A. 75°　　B. 80°　　C. 85°　　D. 90°



(第 1 题图)



(第 2 题图)

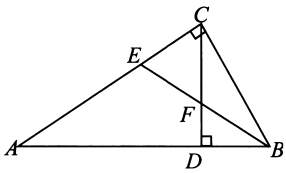
2 [2019 河北石家庄校级模拟]如图,∠AOB=40°,OC平分∠AOB,直尺的一边与OC垂直,则∠1 等于　(　)

A. 60°　　B. 70°　　C. 50°　　D. 40°

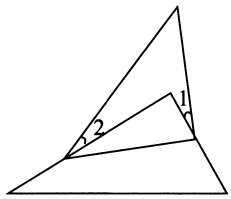
3 如图,已知△ABC中,∠ACB=90°,CD为AB边上的高,∠ABC的平分线BE分别交CD,CA于点F,E,则下列结论:①∠A=∠BCD;②∠FCB=∠FBC;③∠CFE与∠CBF互余. 其中正确的有　(　)

A. ①③　　B. ②③

C. ①②　　D. ①②③



(第 3 题图)



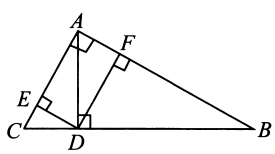
(第 4 题图)

4 将一副三角板按如图所示方式放置,则∠1 与∠2 的和是　(　)

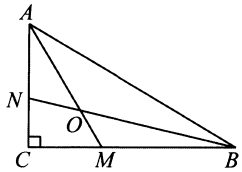
A. 60°　　B. 45°　　C. 30°　　D. 25°

5 如图,在 Rt△ABC中,AC≠AB,AD是斜边BC上的高,DE⊥AC,DF⊥AB,垂足分别为E,F,则图中与∠C(∠C除外)相等的角的个数是　(　)

A. 3　　B. 4　　C. 5　　D. 6



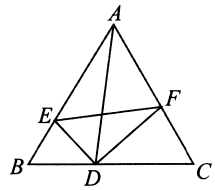
(第 5 题图)



(第 6 题图)

6 [2019 广东汕头潮南区期末]如图,在直角三角形ABC中,两锐角平分线AM,BN相交所成的钝角∠AOB=_____.

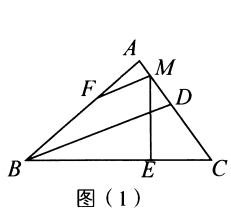
7 在△ABC中,D为BC边上任意一点,DE,DF分别是△ADB和△ADC的角平分线,连接EF,则△DEF的形状为_____.



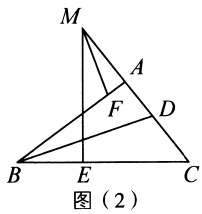
8 直角三角形ABC中有一个角比另一角的 2 倍小 60°,则该直角三角形中最小的角的度数为_____.

刷素养

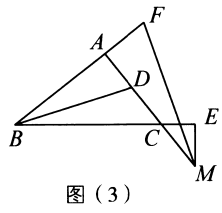
9 小明在学习三角形时,发现以下三个有趣的结论:在 Rt△ABC中,∠A=90°,BD平分∠ABC,M为直线AC上一点,ME⊥BC,垂足为E,∠AME的平分线MF交直线AB于点F.



图(1)



图(2)



图(3)

(1)如图(1),M为边AC上一点,判断BD与MF的位置关系,并进行证明;

(2)如图(2),M为边AC反向延长线上一点,判断BD与MF的位置关系,并进行证明;

(3)如图(3),M为边AC延长线上一点,猜想BD与MF的位置关系,并进行证明.

世界上有两种光芒,一种是太阳,一种是努力的模样。

11.2.2　三角形的外角

刷基础

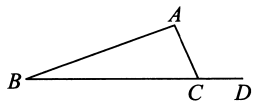
▶答案 D4

题型 1　三角形的外角的性质

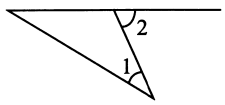
1 如图，$\angle ACD = 120°$，$\angle B = 20°$，则 $\angle A$ 的度数是（　　）

A. 120°　　B. 90°

C. 100°　　D. 30°



（第 1 题图）



（第 2 题图）

2 [2019 湖北宜昌模拟]如图，下列关系正确的是（　　）

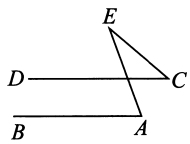
A. $\angle 2 < \angle 1$　　B. $\angle 2 > \angle 1$

C. $\angle 2 \geqslant \angle 1$　　D. $\angle 2 = \angle 1$

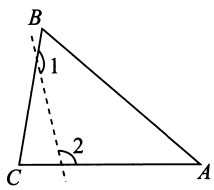
3 [2019 河南洛阳校级月考]如图，直线 $AB \parallel CD$，$\angle A = 70°$，$\angle C = 40°$，则 $\angle E$ 等于（　　）

A. 30°　　B. 40°

C. 60°　　D. 70°



（第 3 题图）



（第 4 题图）

4 [2019 云南昆明期中]如图，$\triangle ABC$ 中，$\angle C = 80°$，若沿图中虚线截去 $\angle C$，则 $\angle 1 + \angle 2 =$（　　）

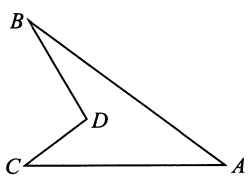
A. 360°　　B. 260°

C. 180°　　D. 140°

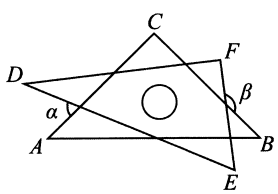
5 如图，$\angle BDC = 98°$，$\angle C = 38°$，$\angle A = 37°$，则 $\angle B$ 的度数是（　　）

A. 33°　　B. 23°

C. 27°　　D. 37°



（第 5 题图）

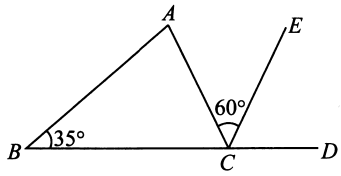


（第 6 题图）

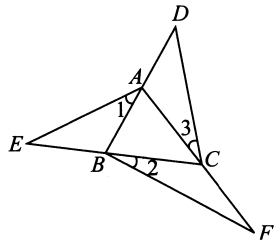
6 [2018 湖南郴州校级月考]小明把一副分别含 45°角和 30°角的直角三角板如图摆放，其中 $\angle C = \angle F = 90°$，$\angle A = 45°$，$\angle D = 30°$，则 $\angle \alpha + \angle \beta$ 等于（　　）

A. 180°　　B. 210°　　C. 360°　　D. 270°

7 [2019 福建厦门思明区校级期中]如图，CE 是 $\triangle ABC$ 的外角 $\angle ACD$ 的平分线，若 $\angle B = 35°$，$\angle ACE = 60°$，则 $\angle A =$ _____.



（第 7 题图）

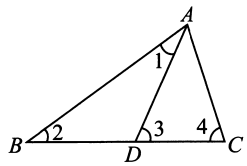


（第 8 题图）

8 如图，D，E，F 分别是 $\triangle ABC$ 三边延长线上的点，则 $\angle D + \angle E + \angle F + \angle 1 + \angle 2 + \angle 3 =$ _____度.

题型 2　三角形外角性质的应用

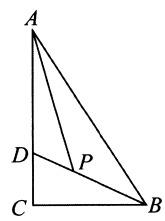
9 如图，在 $\triangle ABC$ 中，D 是 BC 边上一点，$\angle 1 = \angle 2$，$\angle 3 = \angle 4$. 若 $\angle BAC = 63°$，求 $\angle DAC$ 的度数.



10 如图，在 Rt $\triangle ABC$ 中，$\angle C = 90°$，BD 平分 $\angle ABC$ 交 AC 于点 D，AP 平分 $\angle BAC$ 交 BD 于点 P.

(1) $\angle APD$ 的度数为_____；

(2) 若 $\angle BDC = 58°$，求 $\angle BAP$ 的度数.



刷提升

▶答案 D4

1 [2019 重庆北碚区校级月考] $\triangle ABC$ 的三条外角平分线相交构成一个 $\triangle A_1B_1C_1$，则 $\triangle A_1B_1C_1$ （　　）

A. 一定是直角三角形

B. 一定是钝角三角形

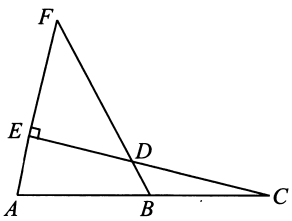
C. 一定是锐角三角形

D. 不一定是锐角三角形

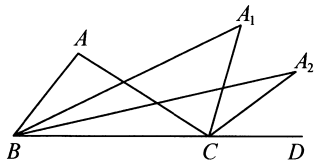
2 [2019 山东临沂校级月考] 如图，C 在 AB 的延长线上，$CE \perp AF$ 于点 E，交 FB 于点 D，若 $\angle F = 40°$，$\angle C = 20°$，则 $\angle FBA$ 的度数为 （　　）

A. 50°　　B. 60°

C. 70°　　D. 80°



（第 2 题图）

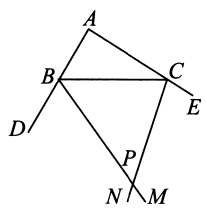


（第 3 题图）

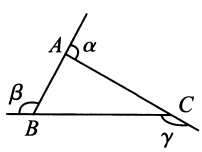
3 [2019 山西阳泉期中] 如图，$\triangle ABC$ 中，$\angle A = 96°$，延长 BC 到 D，$\angle ABC$ 与 $\angle ACD$ 的平分线相交于点 A_1，$\angle A_1BC$ 与 $\angle A_1CD$ 的平分线相交于点 A_2，依次类推，$\angle A_4BC$ 与 $\angle A_4CD$ 的平分线相交于点 A_5，则 $\angle A_5$ 的度数为 （　　）

A. 16°　　B. 8°　　C. 6°　　D. 3°

4 [2018 山东德州一模] 如图，P 是 $\triangle ABC$ 两个外角 $\angle DBC$ 与 $\angle ECB$ 的平分线的交点，$\angle A = 80°$，则 $\angle BPC =$ _____.



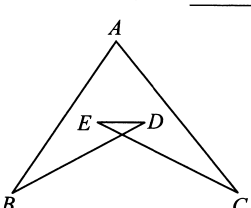
（第 4 题图）



（第 5 题图）

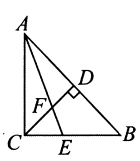
5 如图，$\triangle ABC$ 中，$\angle BAC$，$\angle ABC$，$\angle ACB$ 的外角分别记为 $\angle\alpha$，$\angle\beta$，$\angle\gamma$. 若 $\angle\alpha : \angle\beta : \angle\gamma = 3 : 4 : 5$，则 $\angle BAC : \angle ABC : \angle ACB =$ _____.

6 下图是由平面上五个点 A，B，C，D，E 连接而成，则 $\angle A + \angle B + \angle C + \angle D + \angle E =$ _____.

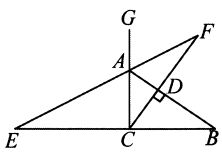


刷素养

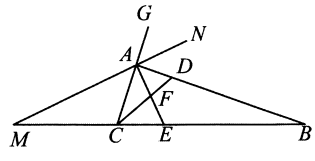
7 [2018 江苏灌云期末] 小明在学习过程中，对一个问题做如下探究：



图(1)



图(2)



图(3)

(1)【问题回顾】已知：如图(1)，在 $\triangle ABC$ 中，$\angle ACB = 90°$，AE 是角平分线，CD 是高，AE，CD 相交于点 F. 求证：$\angle CFE = \angle CEF$.

(2)【变式思考】如图(2)，在 $\triangle ABC$ 中，$\angle ACB = 90°$，CD 是 AB 边上的高. 若 $\triangle ABC$ 的外角 $\angle BAG$ 的平分线交 CD 的延长线于点 F，其反向延长线与 BC 的延长线交于点 E，则 $\angle CFE$ 与 $\angle CEF$ 还相等吗？说明理由.

(3)【探究延伸】如图(3)，在 $\triangle ABC$ 中，AB 上存在一点 D，使得 $\angle ACD = \angle B$，$\angle CAB$ 的平分线 AE 交 CD 于点 F. $\triangle ABC$ 的外角 $\angle BAG$ 的平分线所在直线 MN 与 BC 的延长线交于点 M. 试判断 $\angle M$ 与 $\angle CFE$ 的关系，并说明理由.

世界上任何书籍都不能带给你好运，但是它们能让你悄悄成为你自己。

11.3　多边形及其内角和

11.3.1　多边形

刷基础

▶答案 D5

题型1　多边形及其相关概念

1 下列说法中，正确的有（　　）

①由几条线段连接起来组成的图形叫多边形；

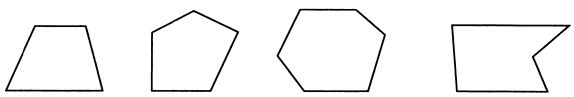
②三角形是边数最少的多边形；

③n 边形有 n 条边、n 个顶点.

A. 0 个　　B. 1 个

C. 2 个　　D. 3 个

2 下列图形不是凸多边形的是（　　）



A　　B　　C　　D

题型2　多边形的对角线

3 已知一个多边形从一个顶点处只能引出 4 条对角线，则它是（　　）

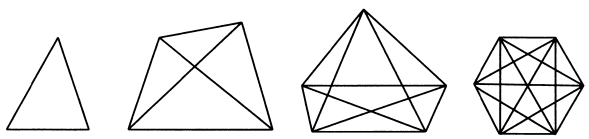
A. 五边形　　B. 六边形

C. 七边形　　D. 八边形

4 从 n 边形的一个顶点所画的全部对角线把这个 n 边形分割成_____个三角形.

5 过 m 边形的一个顶点有 7 条对角线，n 边形没有对角线，则 $m+n=$_____.

6 观察下列图形，并阅读图形下面的相关文字，解答下列问题.



三角形的对角线有0条　　四边形的对角线有2条　　五边形的对角线有5条　　六边形的对角线有9条

十边形有多少条对角线？n 边形呢？

题型3　正多边形

7 下列图形中，是正多边形的是（　　）

A. 等腰三角形　　B. 长方形

C. 正方形　　D. 五边都相等的五边形

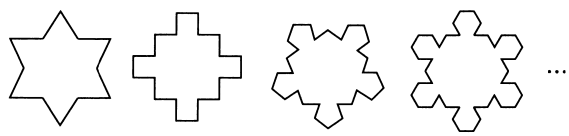
8 下列属于正多边形的特征的有（　　）

①各边相等；②各个内角相等；③各个外角相等；④各条对角线都相等；⑤从一个顶点引出的对角线将 n 边形分成面积相等的 $(n-2)$ 个三角形.

A. 2 个　　B. 3 个

C. 4 个　　D. 5 个

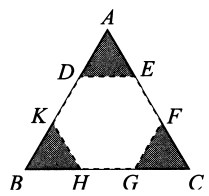
9 如图所示，①中多边形是由正三角形“扩展”而来的.②中多边形是由正方形“扩展”而来的……依次类推，由正 n 边形“扩展”而来的多边形的边数为_____.



①　②　③　④　…

10 已知正多边形的周长为 56，从其一个顶点出发共有 4 条对角线，求这个正多边形的边长.

11 如图，要把边长为 12 的正三角形纸板剪去三个小正三角形，得到正六边形，则剪去的小正三角形的边长是多少？



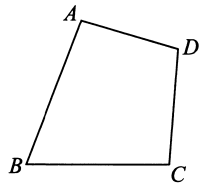
11.3.2　多边形的内角和

刷基础

▶答案 D5

题型1　多边形的内角和

1 [2019 福建大岩新罗区期中]在四边形 $ABCD$ 中，如果 $\angle A+\angle B+\angle C=260°$，那么 $\angle D$ 的度数为（　　）



A. 120°　　B. 110°

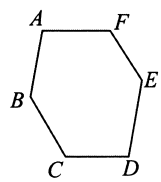
C. 100°　　D. 90°

2 如果一个多边形的内角和是 1 260°，那么该多边形的边数 n 是（　　）

A. 8　　B. 9　　C. 11　　D. 7

3 七边形的内角和是_____.

4 [2019 四川绵阳期中]如图，在六边形 $ABCDEF$ 中，$AF\parallel CD$，$AB\parallel DE$，且 $\angle BAF=100°$，$\angle BCD=120°$，求 $\angle ABC$ 和 $\angle D$ 的度数.



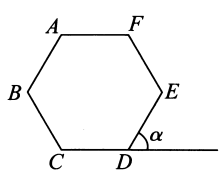
题型2　多边形的外角和

5 [2019 广东揭阳校级月考]若一个正多边形的一个外角是 45°，则这个正多边形的边数是（　　）

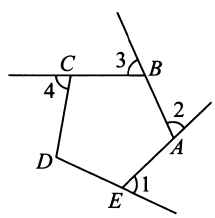
A. 10　　B. 9

C. 8　　D. 6

6 如图，六边形 $ABCDEF$ 是正六边形，那么 $\angle\alpha$ 的度数是_____.



（第 6 题图）



（第 7 题图）

7 [2018 江苏泰州高港区期末]如图，在五边形 $ABCDE$ 中，若 $\angle D=110°$，则 $\angle1+\angle2+\angle3+\angle4=$_____.

题型3　多边形内角和与外角和的综合应用

8 [2019 北京西城区校级月考]如果一个多边形的内角和与外角和相等，那么这个多边形是（　　）

A. 四边形　　B. 五边形

C. 六边形　　D. 七边形

9 一个正多边形的边长为 2，每个内角为 135°，则这个多边形的周长是（　　）

A. 8　　B. 12

C. 16　　D. 18

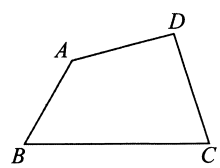
10 [2019 广东模拟]已知一个多边形的内角和与外角和的差是 1 260°，则这个多边形的边数是_____.

11 [2017 江苏南通海安月考]已知一个五边形的内角度数之比为 4∶4∶5∶5∶6，求该五边形各外角对应度数之比.

刷易错

易错点　多边形“截角问题”因漏解而致错

12 [2018 江苏常州期末]如图，从四边形 $ABCD$ 的纸片中剪去一个三角形（只剪一刀），剩余的部分是几边形，请画出示意图（一种形状只需画一个示意图），并在图形下方写上剩余部分多边形的内角和.



刷提升

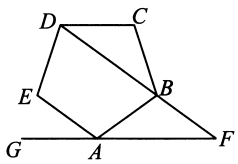
▶答案 D6

1 [2018 黑龙江肇源期末]把一个多边形纸片沿一条直线截下一个三角形后,变成一个十八边形,则原多边形纸片的边数不可能是 (　　)

A. 16　　B. 17

C. 18　　D. 19

2 如图,已知正五边形 $ABCDE$,$AF \parallel CD$,交 DB 的延长线于点 F,则 $\angle DFA$ 等于 (　　)



A. 30°　　B. 36°

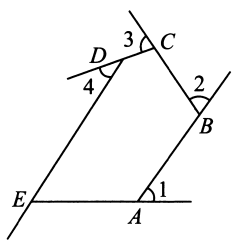
C. 45°　　D. 32°

3 [2019 河南平顶山校级期中]若一个多边形的各内角都相等,则一个内角与一个外角的度数之比不可能是 (　　)

A. 2 : 1　　B. 1 : 1

C. 5 : 2　　D. 5 : 4

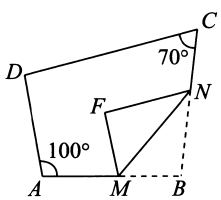
4 如图是由射线 AB,BC,CD,DE,EA 组成的平面图形,若 $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 + \angle 4 = 225°$,$ED \parallel AB$,则 $\angle 1$ 的度数为 (　　)



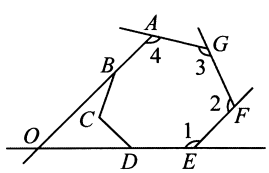
A. 55°　　B. 45°

C. 35°　　D. 25°

5 [2019 湖南长沙校级月考]如图,四边形 $ABCD$ 中,$\angle A = 100°$,$\angle C = 70°$. 将 $\triangle BMN$ 沿 MN 翻折得到 $\triangle FMN$,若 $MF \parallel AD$,$FN \parallel DC$,则 $\angle B =$ _____.



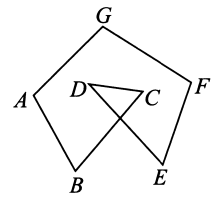
(第 5 题图)



(第 6 题图)

6 [2018 浙江杭州期中]如图,七边形 $ABCDEFG$ 中,AB,ED 的延长线相交于点 O. 若图中 $\angle 1$,$\angle 2$,$\angle 3$,$\angle 4$ 的外角和为 220°,则 $\angle BOD$ 的度数为_____.

7 [2019 河南长葛校级月考]如图所示,求 $\angle A + \angle B + \angle C + \angle D + \angle E + \angle F + \angle G$ 的度数.



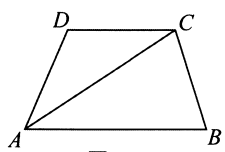
刷素养

8 如图(1),在四边形 $ABCD$ 中,AC 平分 $\angle DAB$,$\angle DAC = \angle DCA$.

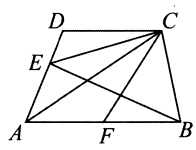
(1)试说明 AB 与 CD 的位置关系,并予以证明.

(2)如图(2),若 $\angle ACB = \angle ABC$,作 CE 平分 $\angle DCA$ 交 AD 于 E,CF 平分 $\angle ECB$ 交 AB 于 F,求 $\angle ECF$ 的度数.

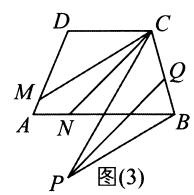
(3)如图(3),若 P 是 AB 下方一点,PQ 平分 $\angle BPC$,$PQ \parallel CN$,CM 平分 $\angle DCP$,$\angle ABP = 30°$,下列结论:①$\angle DCP - \angle MCN$ 的值不变;②$\angle MCN$ 的度数不变. 已知只有一个是正确的,请你作出正确的选择并求值.



图(1)



图(2)



图(3)

全章综合训练

刷章测

▶建议用时:60 分钟　答案 D6

1 三角形的三条高所在直线的交点在三角形的一个顶点上,则此三角形是　(　　)

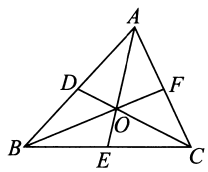
A. 直角三角形　　B. 锐角三角形

C. 钝角三角形　　D. 等腰三角形

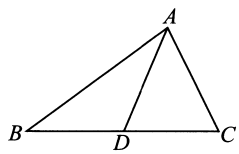
2 如图,点 D,E,F 分别是 AB,BC,CA 上的点,且 AE,BF,CD 交于点 O,它们将 $\triangle ABC$ 分成 6 个面积相等的三角形,则 AE,BF,CD 一定是 $\triangle ABC$ 的　(　　)

A. 高　　B. 中线

C. 角平分线　　D. 三边的垂直平分线



(第 2 题图)



(第 4 题图)

3 三条线段 $a=5,b=3,c$ 的值为整数,以 a,b,c 为边可组成三角形　(　　)

A. 1 个　　B. 3 个

C. 5 个　　D. 无数个

4 如图,AD 是 $\triangle ABC$ 的中线,已知 $\triangle ABD$ 的周长为 25 cm,AB 比 AC 长 6 cm,则 $\triangle ACD$ 的周长为　(　　)

A. 19 cm　　B. 22 cm

C. 25 cm　　D. 31 cm

5 [2018 云南曲靖中考]若一个正多边形的内角和为 720°,则这个正多边形的每一个内角是　(　　)

A. 60°　　B. 90°　　C. 108°　　D. 120°

6 满足下列条件的 $\triangle ABC$ 中,不是直角三角形的是(　　)

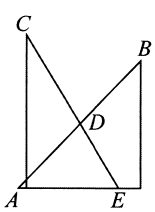
A. $\angle A+\angle B=\angle C$

B. $\angle A:\angle B:\angle C=2:3:5$

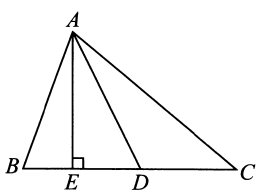
C. $\angle A=2\angle B=3\angle C$

D. 一个外角等于和它相邻的一个内角

7 [2018 湖南永州中考]一副透明的三角板,如图叠放,直角三角板的斜边 AB,CE 相交于点 D,则 $\angle BDC=$ _____.



(第 7 题图)



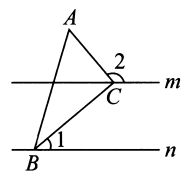
(第 8 题图)

8 如图,若 AE 是 $\triangle ABC$ 的边 BC 上的高,$\angle EAC$ 的平分线 AD 交 BC 于 D. 若 $\angle ACB=40°$,则 $\angle DAE$ 等于 _____.

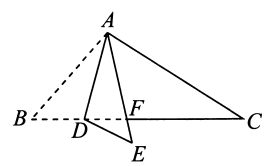
9 在 $\triangle ABC$ 中,边 AB 与 BC 的中点分别是 D,E,连接 AE,CD 交于点 G. 连接 BG 交边 AC 于点 F. 若 $AB=4$,$BC=6$,$AC=8$,则线段 FC 的长度是 _____.

10 一个三角形的三边长分别是 x cm,$(x+1)$ cm,$(x+2)$ cm,它的周长不超过 12 cm,则 x 的取值范围是 _____.

11 如图,直线 $m\parallel n$,$\triangle ABC$ 的顶点 B,C 分别在直线 n,m 上,且 $\angle ACB=90°$,若 $\angle 1=40°$,则 $\angle 2$ 等于 _____.



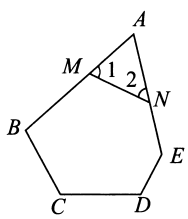
(第 11 题图)



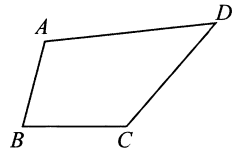
(第 12 题图)

12 如图,在 $\triangle ABC$ 中,点 D 是 BC 边上的一点,$\angle B=50°$,$\angle BAD=30°$,将 $\triangle ABD$ 沿 AD 折叠得到 $\triangle AED$,AE 与 BC 交于点 F,则 $\angle AFC=$ _____.

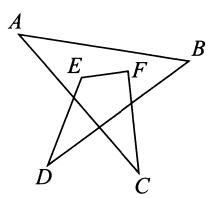
13 如图,在五边形 $ABCDE$ 中,点 M,N 分别在边 AB,AE 上,$\angle 1+\angle 2=110°$,则 $\angle B+\angle C+\angle D+\angle E=$ _____.



(第 13 题图)



(第 14 题图)



(第 15 题图)

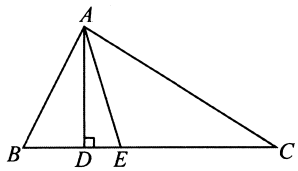
14 [2018 江苏无锡期中]如图,用四条线段首尾相接连成一个可拉动的框架,其中 $AB=12$,$BC=14$,$CD=18$,$DA=24$,则 A,B,C,D 任意两点之间的距离最长为 _____.

15 如图,$\angle A+\angle B+\angle C+\angle D+\angle E+\angle F$ 的度数为 _____.

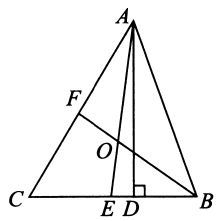
16 [2019 湖北鄂州鄂城区期中]如图,在△ABC中,$AD\perp BC$于点D,AE平分$\angle BAC$.

(1)若$\angle B=70°$,$\angle C=40°$,求$\angle DAE$的度数;

(2)若$\angle B-\angle C=\alpha(\angle B>\angle C)$,求$\angle DAE$的度数.(用含$\alpha$的代数式表示)



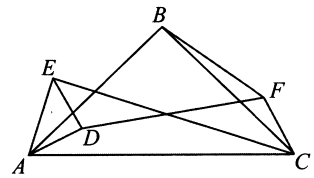
17 如图,△ABC中,AD是高,AE,BF是角平分线,它们相交于点O,$\angle CAB=50°$,$\angle C=60°$,求$\angle DAE$和$\angle BOA$的度数.



18 如图,在△ADE和△ABC中,$\angle EAD=\angle AED=\angle BAC=\angle BCA=45°$,$\angle BAD=\angle BCF$.

(1)求$\angle ECF+\angle DAC+\angle ECA$的度数;

(2)判断ED与FC的位置关系,并加以证明.

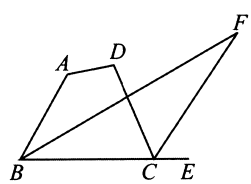


19 [难]如图,在四边形$ABCD$中,$\angle F$为$\angle ABC$的平分线及外角$\angle DCE$的平分线相交所构成的锐角.设$\angle A=\alpha$,$\angle D=\beta$.

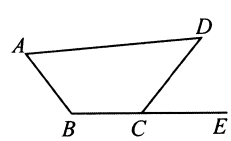
(1)如图(1),$\alpha+\beta>180°$,试用α,β表示$\angle F$.

(2)如图(2),$\alpha+\beta<180°$,请在图中画出$\angle F$,并用α,β表示$\angle F$.

(3)一定存在$\angle F$吗?如果存在,求出$\angle F$的值;如果不一定存在,指出α,β满足什么条件时,不存在$\angle F$.



图(1)



图(2)

刷中考

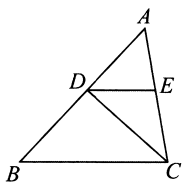
▸答案 D7

1 [2018 湖南常德中考]已知三角形两边的长分别是 3 和 7,则此三角形第三边的长可能是　(　)

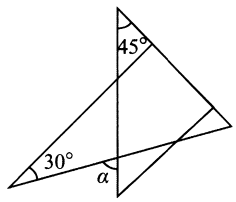
A. 1　　B. 2　　C. 8　　D. 11

2 [2018 吉林长春中考]如图,在 $\triangle ABC$ 中,CD 平分 $\angle ACB$ 交 AB 于点 D,过点 D 作 $DE \parallel BC$ 交 AC 于点 E. 若 $\angle A = 54°$,$\angle B = 48°$,则 $\angle CDE$ 的大小为　(　)

A. 44°　　B. 40°　　C. 39°　　D. 38°



(第 2 题图)



(第 3 题图)

3 [2018 四川眉山中考]将一副直角三角板按如图所示的位置放置,使含 30°角的三角板的一条直角边和含 45°角的三角板的一条直角边放在同一条直线上,则 $\angle\alpha$ 的度数是　(　)

A. 45°　　B. 60°　　C. 75°　　D. 85°

4 [2018 内蒙古呼和浩特中考]已知一个多边形的内角和为 1 080°,则这个多边形是　(　)

A. 九边形　　B. 八边形

C. 七边形　　D. 六边形

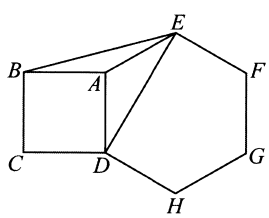
5 [2018 北京中考]若正多边形的一个外角是 60°,则该正多边形的内角和为　(　)

A. 360°　　B. 540°　　C. 720°　　D. 900°

6 [2018 甘肃陇南中考]已知 a,b,c 是 $\triangle ABC$ 的三边长,a,b 满足 $|a-7|+(b-1)^2=0$,c 为奇数,则 $c=$_____.

7 [2018 黑龙江绥化中考]三角形的三边长分别为 3,$2a-1$,4,则 a 的取值范围是_____.

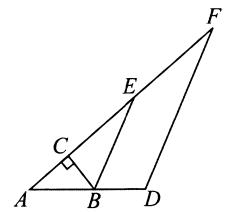
8 [2018 江苏南京中考]如图,以正六边形 $ADHGFE$ 的一边 AD 为边向外作正方形 $ABCD$,则 $\angle BED =$ _____.



9 [2018 湖北宜昌中考]如图,在 Rt$\triangle ABC$ 中,$\angle ACB = 90°$,$\angle A = 40°$,$\triangle ABC$ 的外角 $\angle CBD$ 的平分线 BE 交 AC 的延长线于点 E.

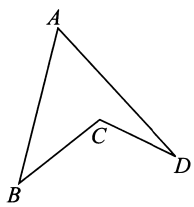
(1)求 $\angle CBE$ 的度数;

(2)过点 D 作 $DF \parallel BE$,交 AC 的延长线于点 F,求 $\angle F$ 的度数.



刷素养

10 【知识拓展】把多边形的某些边向两端延长,其他各边若不全在延长所得直线的同侧,则把这样的多边形叫做凹多边形. 如图,四边形 $ABCD$ 中,延长 BC,边 AB,CD 分别在直线 BC 的两侧,所以四边形 $ABCD$ 是一个凹四边形.



【性质探究】(1)请结合图形证明凹四边形的内角和为 360°;

已知:_____.

求证:_____.

证明:

(2)请写出两个关于凹六边形的正确结论.

①_____;

②_____.

有些人能感受雨,而其他人则只是被淋湿。

第十二章 全等三角形

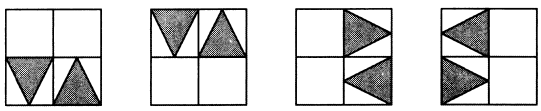
12.1 全等三角形

刷基础

▶答案 D8

题型1 全等形的概念

1 [2019 山东枣庄山亭区期末]下列四个图形中,属于全等形的是 (　　)



A. ③和④　　B. ②和③
C. ①和③　　D. ②和④

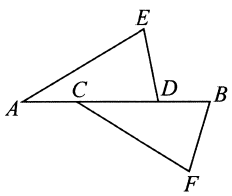
2 下列叙述中错误的是 (　　)

A. 能够完全重合的两个图形称为全等形
B. 全等形的形状和大小都相同
C. 所有正方形都是全等形
D. 平移、翻折、旋转前后的图形全等

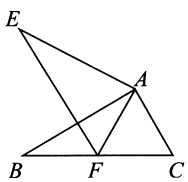
题型2 全等三角形的性质

3 [2019 四川宜宾翠屏区期中]已知:如图,$\triangle ADE \cong \triangle CBF$. 若 $AD=8$ cm,$CD=5$ cm,则 BD 的长为(　　)

A. 2 cm　　B. 3 cm　　C. 4 cm　　D. 5 cm



(第3题图)

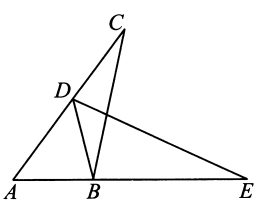


(第4题图)

4 [2019 吉林长春德惠期末]如图,$\triangle ABC \cong \triangle AEF$,$AB=AE$,$\angle B=\angle E$,则下列结论:①$AC=AF$;②$\angle FAB=\angle EAB$;③$EF=BC$;④$\angle EAB=\angle FAC$. 其中正确的个数是 (　　)

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

5 如图,已知点 D 在 AC 上,点 B 在 AE 上,$\triangle ABC \cong \triangle DBE$,且 $\angle BDA=\angle A$,若 $\angle A:\angle C=5:3$,则 $\angle DBC=$ (　　)

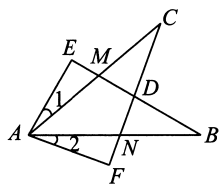


A. 30°　　B. 25°　　C. 20°　　D. 15°

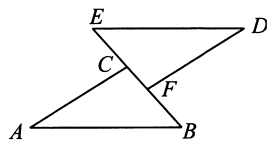
6 [2019 江苏高邮校级月考]一个三角形的三边长分别为 2,5,x,另一个三角形的三边长分别为 y,2,6. 若这两个三角形全等,则 $x+y$ 等于 (　　)

A. 11　　B. 7　　C. 8　　D. 13

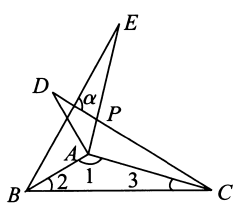
7 如图,已知 $\triangle ABE \cong \triangle ACF$,$\angle E=\angle F=90°$,$\angle CMD=70°$,则 $\angle 2=$ _____.



8 [2019 广东汕头龙湖区月考]如图,已知 $\triangle ABC \cong \triangle DEF$,$\angle A=32°$,$\angle B=48°$,$BF=3$,求 $\angle DFE$ 的度数和 EC 的长.



9 如图所示,$\triangle ABE$ 和 $\triangle ADC$ 是 $\triangle ABC$ 分别沿着 AB,AC 边翻折 180° 形成的,若 $\angle 1:\angle 2:\angle 3=28:5:3$,求 $\angle\alpha$ 的度数.



12.2　三角形全等的判定

课时1　三边证全等（SSS）

刷基础

▶答案 D8

题型1　用“SSS”判定两个三角形全等

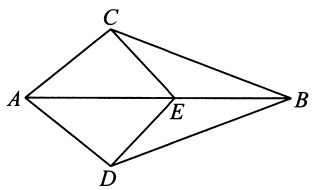
1 $\triangle ABC$ 和 $\triangle DEF$ 中，$AB=2$，$BC=3$，$CA=4$，$DE=4$，$EF=3$，要使 $\triangle ABC$ 与 $\triangle DEF$ 全等，则 DF 等于（　　）

A. 2　　B. 3　　C. 4　　D. 不能确定

2 [2019 江苏句容校级月考]下列说法：①周长相等的两个三角形全等；②周长相等的两个等边三角形全等；③有三个角对应相等的两个三角形全等；④三边对应相等的两个三角形全等. 其中错误的有（　　）

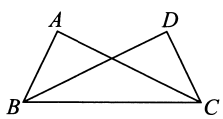
A. 1 个　　B. 2 个　　C. 3 个　　D. 4 个

3 如图，已知 $AC=AD$，$BC=BD$，$CE=DE$，则图中全等三角形的对数是（　　）



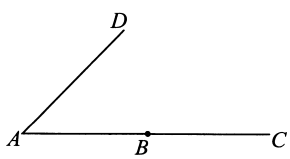
A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

4 如图，已知在 $\triangle ABC$ 与 $\triangle DCB$ 中，$AC=DB$，若不增加任何字母与辅助线，要使 $\triangle ABC\cong\triangle DCB$（SSS），则还需要添加的一个条件是_____.



题型2　利用“SSS”尺规作图

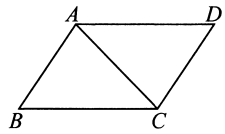
5 [2018 广东佛山南海区期中]如图，以点 B 为顶点，射线 BC 为一边，利用尺规作图作 $\angle EBC$，使得 $\angle EBC=\angle A$.



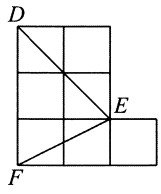
题型3　“SSS”判定定理的应用

6 如图，已知 $AB=CD$，$BC=DA$，下列结论：①$\angle BAC=\angle DCA$；②$\angle ACB=\angle CAD$；③$AB\parallel CD$. 其中正确的结论有（　　）

A. 0 个　　B. 1 个　　C. 2 个　　D. 3 个



（第 6 题图）

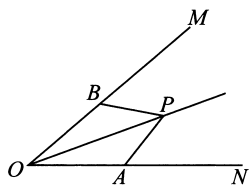


（第 7 题图）

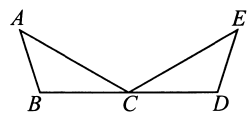
7 [2019 江苏东台校级月考]如图，方格纸中的 $\triangle DEF$ 的三个顶点分别在小正方形的顶点上，像这样三个顶点都在格点上的三角形叫格点三角形，则图中与 $\triangle DEF$ 全等的格点三角形一共有（　　）

A. 8 个　　B. 7 个　　C. 6 个　　D. 4 个

8 如图，已知 $OA=OB$，$AP=BP$，$\angle BOP=20°$，则 $\angle MON$ 等于_____.



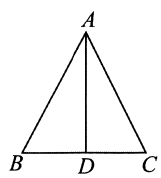
（第 8 题图）



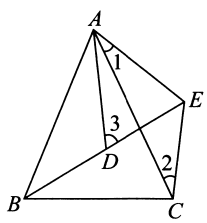
（第 9 题图）

9 如图，$AB=ED$，$AC=EC$，C 是 BD 边的中点，若 $\angle A=36°$，则 $\angle E=$_____.

10 [2019 云南昆明期末]如图，在 $\triangle ABC$ 中，$AB=AC$，$BD=CD$. 求证：$\triangle ABD\cong\triangle ACD$.



11 如图，已知 $AB=AC$，$AD=AE$，$BD=CE$，求证：$\angle 3=\angle 1+\angle 2$.



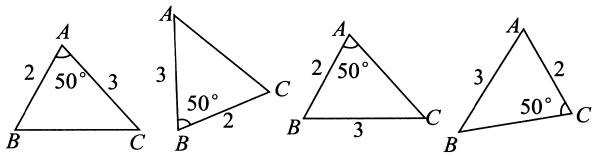
课时2　两边及夹角证全等（SAS）

刷基础

▶答案 D9

题型1　用“SAS”判定两个三角形全等

1 下列两个三角形全等的是　　（　　）



A. ①②　　B. ②③

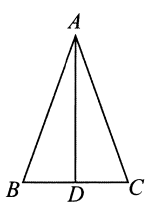
C. ③④　　D. ①④

2 [2019 河北滦南期末]如图，在△ABC中，$AD\perp BC$，D为BC的中点，以下结论：

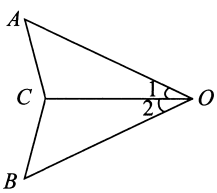
①△$ABD\cong$△ACD；②$AB=AC$；③$\angle B=\angle C$；④AD是△ABC的角平分线.

其中正确的有　　（　　）

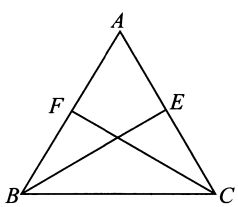
A. 1个　　B. 2个　　C. 3个　　D. 4个



（第2题图）



（第3题图）



（第4题图）

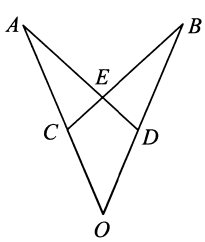
3 如图，在△AOC与△BOC中，若$\angle 1=\angle 2$，加上条件_____，则有△$AOC\cong$△BOC(SAS).

4 [2019 山西阳泉校级期中]如图，在△ABC中，$AB=AC$，BE，CF是中线，则由_____可得△$AFC\cong$△AEB.

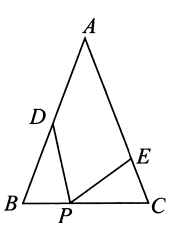
题型2　“SAS”判定定理的应用

5 如图，$AO=BO$，$CO=DO$，AD与BC交于点E，$\angle O=40°$，$\angle B=25°$，则$\angle BED$等于　　（　　）

A. 60°　　B. 90°　　C. 75°　　D. 85°



（第5题图）

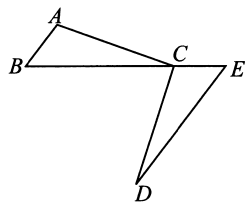


（第6题图）

6 如图，在△ABC中，$\angle A=40°$，$\angle B=\angle C$，$BP=CE$，$BD=CP$，则$\angle DPE=$_____.

7 如图，已知C为BE上一点，点A，D分别在BE两侧，$AB/\!/ED$，$AB=CE$，$BC=ED$.

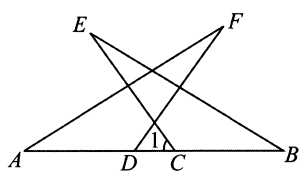
求证：$AC=CD$.



8 [2019 重庆忠县校级期中]如图，在△ADF和△BCE中，$AF=BE$，$AC=BD$，$\angle A=\angle B$，$\angle B=32°$，$\angle F=28°$，$BC=5$ cm，$CD=1$ cm. 求：

(1)$\angle 1$的度数；

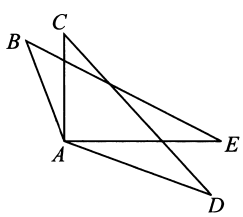
(2)AC的长.



刷易错

易错点　忽略两边一角中的角是两边的夹角这一特征致错

9 如图，$AB=AC$，$AE=AD$，要使△$ACD\cong$△ABE，需要补充的一个条件可以是　　（　　）



A. $\angle B=\angle C$　　B. $\angle D=\angle E$

C. $\angle BAC=\angle EAD$　　D. $\angle B=\angle E$

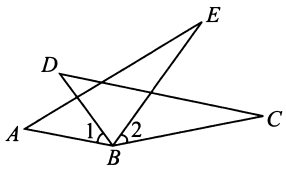
刷提升

▶答案 D9

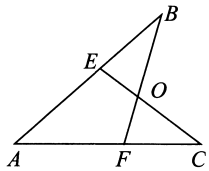
1 如图，$AB=DB$，$BC=BE$，欲证$\triangle ABE\cong\triangle DBC$，则可增加的条件可以是 （ ）

A. $\angle ABE=\angle DBE$　　B. $\angle A=\angle D$

C. $\angle E=\angle C$　　D. $\angle 1=\angle 2$



（第1题图）



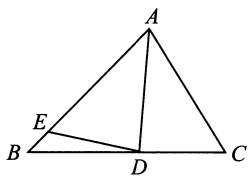
（第2题图）

2 如图，$AE=AF$，$AB=AC$，EC与BF交于点O，$\angle A=60°$，$\angle B=25°$，则$\angle EOB$的度数为 （ ）

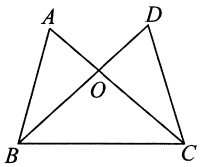
A. 60°　　B. 70°　　C. 75°　　D. 85°

3 如图，在$\triangle ABC$中，$AB=6$，$BC=5$，$AC=4$，AD平分$\angle BAC$交BC于点D，在AB上截取$AE=AC$，则$\triangle BDE$的周长为 （ ）

A. 8　　B. 7　　C. 6　　D. 5



（第3题图）



（第4题图）

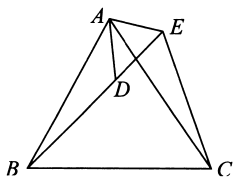
4 [2019 浙江杭州临安区期中]如图，已知$AC=BD$，$OA=OD$，给出下列四个结论：①$OB=OC$；②$\triangle AOB\cong\triangle DOC$；③$AB=CD$；④$\triangle BOC$是直角三角形. 其中正确的有 （ ）

A. 0个　　B. 1个　　C. 2个　　D. 3个

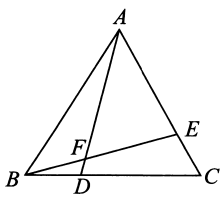
5 如图，已知$AB=AC$，$AD=AE$，$\angle BAC=\angle DAE$. 下列结论不一定正确的是 （ ）

A. $\angle BAD=\angle CAE$　　B. $\triangle ABD\cong\triangle ACE$

C. $AB=BC$　　D. $BD=CE$



（第5题图）



（第7题图）

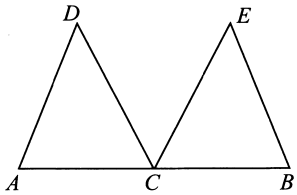
6 [2019 四川成都金牛区校级月考]在$\triangle ABC$中，$AB=5$，$AC=7$，AD是BC边上的中线，则AD的取值范围是_____.

7 [2019 江苏盐城滨海月考]如图，在等边$\triangle ABC$中，$BD=CE$，AD与BE相交于点F，则$\angle AFE=$_____.

8 [2019 江苏苏州吴中区一模]如图，C是线段AB的中点，CD平分$\angle ACE$，CE平分$\angle BCD$，$CD=CE$.

(1)求证：$\triangle ACD\cong\triangle BCE$；

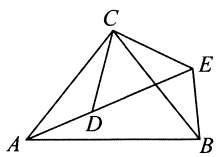
(2)若$\angle D=53°$，求$\angle B$的度数.



9 [2019 安徽无为期末]如图，$\triangle ACB$和$\triangle DCE$均为等腰三角形，点A，D，E在同一条直线上，连接BE，若$\angle CAB=\angle CBA=\angle CDE=\angle CED=50°$.

(1)证明：$AD=BE$；

(2)求$\angle AEB$的度数.



若能避开猛烈的欢乐，自然也不会有很大的悲伤来访。

课时3　两角及一边证全等（ASA，AAS）

刷基础

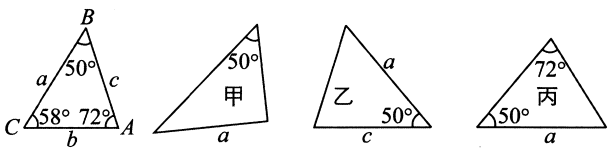
▶答案 D10

题型1　用“ASA”“AAS”判定三角形全等

1 [2019 河北唐山校级月考]已知在△ABC和△$A'B'C'$中，$AB=A'B'$，$\angle A=\angle A'$，$\angle B=\angle B'$，则△$ABC\cong$△$A'B'C'$的根据是（　　）

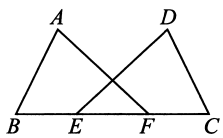
A. SAS　　B. SSA　　C. ASA　　D. 以上都正确

2 如图，已知△ABC的三条边和三个角，则下面甲、乙、丙三个三角形中和△ABC全等的图形是（　　）



A. 只有乙　　B. 只有丙　　C. 甲和乙　　D. 乙和丙

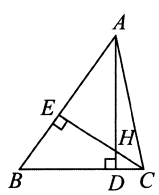
3 [2019 天津宝坻区月考]如图，点B，E，F，C在同一直线上，已知$\angle A=\angle D$，$\angle B=\angle C$，要使△$ABF\cong$△DCE（AAS），需要补充的一个条件是_____.（写出一个即可）



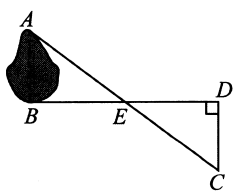
题型2　“ASA”“AAS”判定定理的应用

4 [2019 湖北武汉江夏区期中]如图，在△ABC中，$AD\perp BC$，$CE\perp AB$，垂足分别是D，E，AD，CE交于点H. 已知$EH=EB=4$，$AE=6$，则CH的长为（　　）

A. 1　　B. 2　　C. $\frac{3}{5}$　　D. $\frac{5}{3}$



（第4题图）

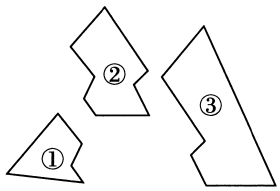


（第5题图）

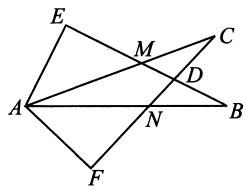
5 [2019 山东曹县校级月考]如图所示，A，B在一水池两侧，若$BE=DE$，$\angle B=\angle D=90°$，$CD=10$ m，则水池的宽AB为（　　）

A. 8 m　　B. 10 m　　C. 12 m　　D. 无法确定

6 如图，小明把一块三角形的玻璃片打碎成三块，现要到玻璃店去配一块完全相同的玻璃片，那么最省事的办法是带_____去.



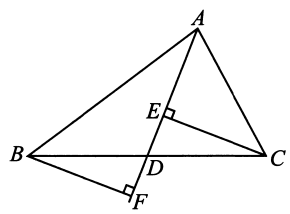
（第6题图）



（第7题图）

7 [2019 河南安阳校级月考]如图所示，$\angle E=\angle F=90°$，$\angle B=\angle C$，$AE=AF$，下列结论：①$EM=FN$；②$CD=DN$；③$\angle FAN=\angle EAM$；④△$ACN\cong$△ABM. 其中正确的是_____.（填上你认为正确结论的序号）

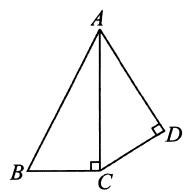
8 如图，分别过点C，B作△ABC的边BC上的中线AD及其延长线的垂线，垂足分别为E，F，求证：$BF=CE$.



刷易错

易错点　弄错全等三角形的对应关系而致错

9 如图，$\angle B=\angle ACD$，$\angle ACB=\angle D=90°$，AC是△ABC和△ACD的公共边，所以判定△$ABC\cong$△ACD. 你认为正确吗？为什么？



刷提升

▸答案 D11

1 [2019 广西忻城期中]下列条件中,不能判定△ABC与△DEF全等的是　(　　)

A. $AC=DF$,$BC=EF$,$\angle C=\angle F$

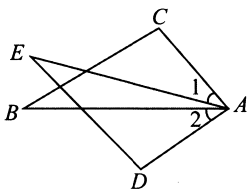
B. $AB=EF$,$\angle A=\angle E$,$\angle B=\angle F$

C. $\angle A=\angle F$,$\angle B=\angle E$,$AC=DE$

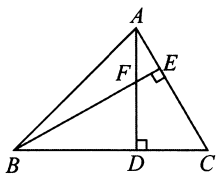
D. $AB=DE$,$\angle B=\angle E$,$\angle C=\angle F$

2 [2018 上海普陀区期末]如图,已知$\angle 1=\angle 2$,$AC=AD$,从①$AB=AE$;②$BC=ED$;③$\angle B=\angle E$;④$\angle C=\angle D$这四个条件中选一个,能使△ABC≌△AED的条件有　(　　)

A. 1 个　　B. 2 个　　C. 3 个　　D. 4 个



(第 2 题图)

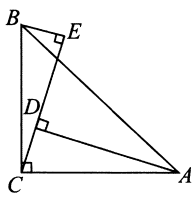


(第 3 题图)

3 [2019 安徽芜湖期末]如图,已知△ABC中,$\angle ABC=45°$,$BE\perp AC$,F是高AD和BE的交点,$CD=4$,则线段DF的长度为　(　　)

A. 3　　B. 4　　C. 5　　D. 6

4 [2019 天津南开区期末]如图,$\angle ACB=90°$,$AC=BC$,$AD\perp CE$,$BE\perp CE$. 若$AD=3$,$BE=1$,则$DE=$　(　　)

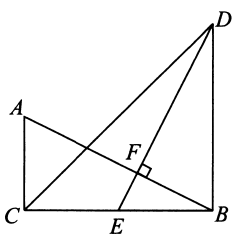


A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

5 如图,在△ABC与△DBC中,$\angle ACB=\angle DBC=90°$,$E$是$BC$的中点,$EF\perp AB$,垂足为$F$,且$AB=DE$.

(1)求证:$BC=BD$;

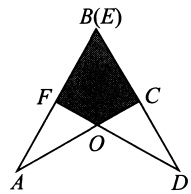
(2)若$BD=8$ cm,求AC的长.



6 [2019 山东威海校级月考]两块完全相同的三角形纸板ABC和DEF,按如图所示的方式叠放,阴影部分为重叠部分,点O为边AC和DF的交点,不重叠的两部分为△AOF,△DOC.

(1)求证:△AOF≌△DOC;

(2)连接BO,AD,试判断直线BO与线段AD的位置关系. (只写结论,不要求证明)

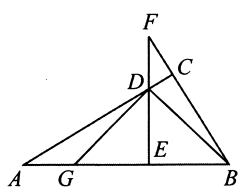


刷素养

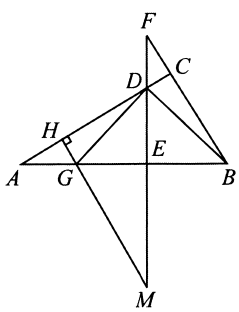
7 如图(1),$\angle ACB=90°$,点D在AC上,$DE\perp AB$,垂足为E,交BC的延长线于F,$DE=EB$,$EG=EB$.

(1)求证:$DG=DB$;

(2)过点G作$GH\perp AD$,垂足为H,与DE的延长线交于点M,如图(2),找出图中与AB相等的线段,并证明.



图(1)



图(2)

我要去做自己想做的事,做真正的自己,我要去弄明白那是什么。

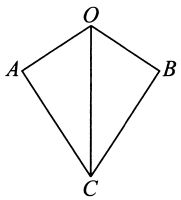
课时4　斜边及一条直角边证全等（HL）

刷基础

▶答案 D11

题型1　用“HL”判定直角三角形全等

1 如图，$AC = BC$，$AC \perp OA$，$CB \perp OB$，则 $Rt\triangle AOC \cong Rt\triangle BOC$的理由是（　　）



A. SSS　　B. ASA　　C. SAS　　D. HL

2 [2019 江苏滨海校级月考]下列条件中，不能判定两个直角三角形全等的是（　　）

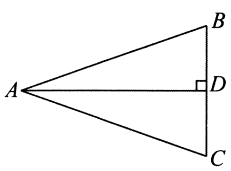
A. 一个锐角和斜边对应相等

B. 两条直角边对应相等

C. 两个锐角对应相等

D. 斜边和一条直角边对应相等

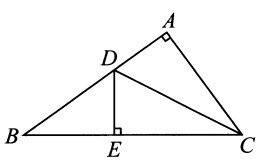
3 [2018 湖南宁远期中]如图，在$\triangle ABC$中，$AD \perp BC$于D，要使$\triangle ABD \cong \triangle ACD$，若根据“HL”判定，还需要添加条件_____，请证明.



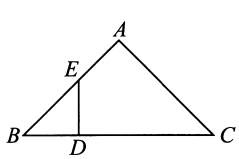
题型2　“HL”判定定理的应用

4 如图，$Rt\triangle ABC$中，$\angle BAC = 90°$，$DE \perp BC$，$AC = 6$，$EC = 6$，$\angle ACB = 60°$，则$\angle ACD$等于（　　）

A. 45°　　B. 30°　　C. 20°　　D. 15°



（第4题图）



（第5题图）

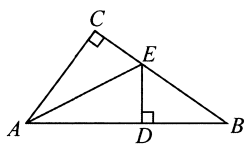
5 如图，在$Rt\triangle ABC$的斜边BC上截取$CD = CA$，过点D作$DE \perp BC$交AB于点E，则有（　　）

A. $DE = DB$　　B. $DE = AE$

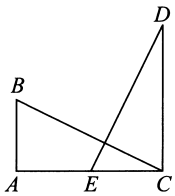
C. $AE = BE$　　D. $AE = BD$

6 [2019 江苏宜兴校级月考]如图所示，已知在$\triangle ABC$中，$\angle C = 90°$，$AD = AC$，$DE \perp AB$交BC于点E. 若$\angle B = 28°$，则$\angle AEC =$（　　）

A. 28°　　B. 59°　　C. 60°　　D. 62°



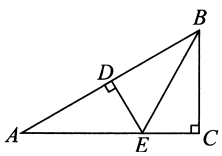
（第6题图）



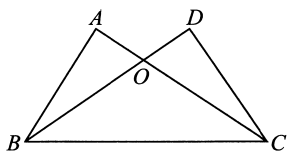
（第7题图）

7 如图，$BA // DC$，$\angle A = 90°$，$AB = CE$，$BC = ED$，则$\triangle CED \cong$_____，$AC =$_____，$\angle B =$_____.

8 如图，在$\triangle ABC$中，$\angle C = 90°$，$DE \perp AB$交AB于点D，$BC = BD$，若$AC = 3$ cm，则$AE + DE =$_____cm.



（第8题图）

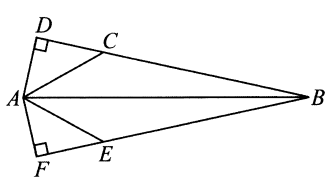


（第9题图）

9 如图，$\angle A = \angle D = 90°$，$AC = DB$，欲证$OB = OC$，以下是小明同学的分析思路：

先利用已知条件，可以证明$Rt\triangle ABC \cong Rt\triangle DCB$，依据是_____，进而得到$AB = DC$；再证明_____$\cong$_____，依据是_____，此时，就能够证出$OB = OC$.

10 [2018 陕西咸阳秦都区期中]如图，已知AD，AF分别是两个钝角$\triangle ABC$和$\triangle ABE$的高，如果$AD = AF$，$AC = AE$. 求证：$BC = BE$.



专题　全等三角形的性质与判定

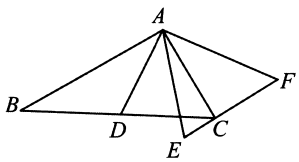
刷难关

▶答案 D12

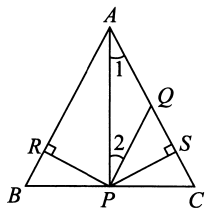
类型 1　全等三角形的性质与判定的综合

1 [2019 安徽芜湖期末]如图,在△ABC中,点 D 为 BC 的中点,△AEF 的边 EF 过点 C,且 $AE=EF$,$AB\parallel EF$,AD 平分∠BAE,$CE=2$,$AB=9$,则 CF 的长为 (　　)

A. 3　　B. 4　　C. 5　　D. 6



(第 1 题图)



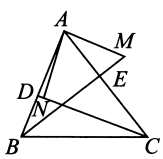
(第 2 题图)

2 如图,已知在△ABC中,$PR\perp AB$ 于 R,$PS\perp AC$ 于 S,$PR=PS$,∠1 = ∠2,则四个结论:①$AR=AS$;②$PQ\parallel AB$;③△$BPR\cong$△CPS;④$BP=CP$ 中正确的是 (　　)

A. ①②③④　　B. ①②

C. ①　　D. ①④

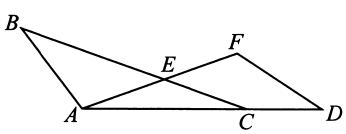
3 如图,△ABC中,CD,BE 是边 AB 和 AC 上的高,点 M 在 BE 的延长线上,且 $BM=AC$,点 N 在 CD 上,且 $AB=CN$,则∠MAN 的度数是_____.



4 如图,点 A,C,D 在同一条直线上,BC 与 AF 交于点 E,$AF=AC$,$AD=BC$,∠EAC = ∠ECA.

(1)求证:$FD=AB$;

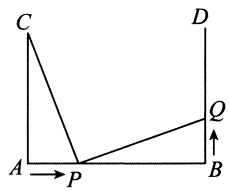
(2)若∠$B=50°$,∠$F=110°$,求∠BCD 的度数.



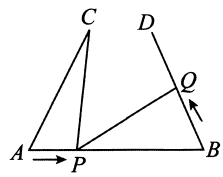
5 [2019 内蒙古鄂尔多斯康巴什区校级月考]如图(1),$AB=8$ cm,$AC\perp AB$,$BD\perp AB$,$AC=BD=6$ cm. 点 P 在线段 AB 上以 2 cm/s 的速度由点 A 向点 B 运动,同时,点 Q 在线段 BD 上由点 B 向点 D 运动,设它们的运动时间为 t(s).

(1)若点 Q 的运动速度与点 P 的运动速度相等,当 $t=1$ 时,判断△ACP 与△BPQ 是否全等,并说明理由.

(2)如图(2),将图(1)中的"$AC\perp AB$,$BD\perp AB$"改为"∠CAB = ∠$DBA=60°$",其他条件不变. 设点 Q 的运动速度为 x cm/s,是否存在实数 x,使得△ACP 与△BPQ 全等?若存在,求出相应的 x,t 的值;若不存在,请说明理由.



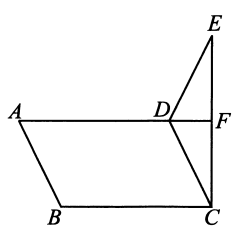
图(1)



图(2)

类型 2　全等三角形的性质与判定的实际应用

6 如图是某城市的部分街道示意图,$AB=CD$,$AD=BC$,$EF=FC$,$DF\perp EC$. 公交车甲从 A 站出发,按照 $A\to D\to E\to F$ 的顺序到达 F 站;公交车乙从 A 站出发,按照 $A\to B\to C\to F$ 的顺序到达 F 站. 如果甲、乙分别从 A 站同时出发,在各自的路径运行中速度及所耽误的时间均相同,猜想哪一辆公交车先到达 F 站?为什么?



12.3　角的平分线的性质

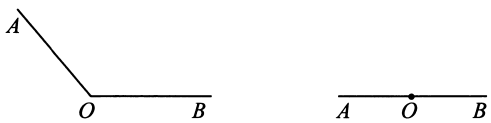
课时1　角的平分线的作法与性质

刷基础

▶答案 D13

题型1　角平分线的作法

1 分别画出已知钝角和平角 $\angle AOB$ 的平分线.

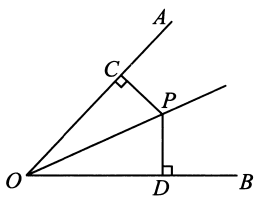


题型2　角平分线的性质

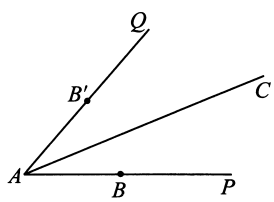
2 [2019 安徽宣城校级月考] 如图，OP 为 $\angle AOB$ 的平分线，$PC \perp OA$，$PD \perp OB$，垂足分别是 C，D，则下列结论错误的是 (　　)

A. $PC = PD$　　B. $OC = OD$

C. $\angle CPO = \angle DPO$　　D. $\angle CPD = \angle DOC$



(第2题图)



(第3题图)

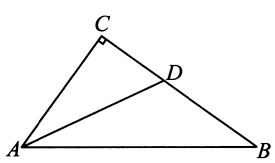
3 如图所示，已知 AC 平分 $\angle PAQ$，点 B，B' 分别在边 AP，AQ 上，如果添加一个条件，即可推出 $AB = AB'$，那么该条件不能是 (　　)

A. $BB' \perp AC$　　B. $BC = B'C$

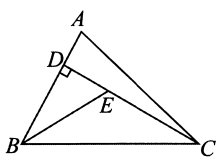
C. $\angle ACB = \angle ACB'$　　D. $\angle ABC = \angle AB'C$

4 如图所示，在 $\triangle ABC$ 中，$\angle C = 90°$，AD 平分 $\angle BAC$，$BC = 30$，$BD : CD = 3 : 2$，则点 D 到 AB 的距离为 (　　)

A. 18　　B. 12　　C. 15　　D. 无法确定



(第4题图)



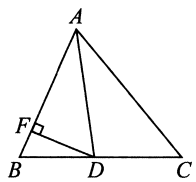
(第5题图)

5 [2019 四川成都校级期中] 如图，已知在 $\triangle ABC$ 中，CD 是 AB 边上的高线，BE 平分 $\angle ABC$，交 CD 于点 E，$BC = 6$，$DE = 2$，则 $\triangle BCE$ 的面积等于 (　　)

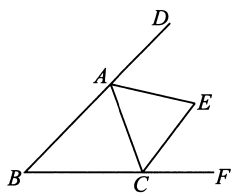
A. 6　　B. 8　　C. 9　　D. 18

6 [2018 陕西富平期末] 如图，AD 是 $\triangle ABC$ 的角平分线，$DF \perp AB$，垂足为 F，$AF = 7$，$\triangle ADF$ 和 $\triangle ADC$ 的面积分别为 14 和 22，则 AC 的长为 (　　)

A. 10　　B. 11　　C. 12　　D. 14



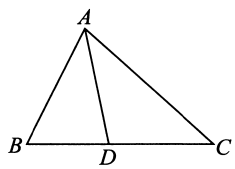
(第6题图)



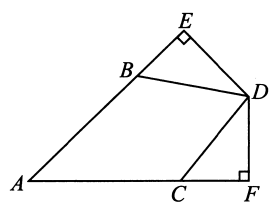
(第7题图)

7 如图，$\triangle ABC$ 中，$\angle B = 30°$，三角形的外角 $\angle DAC$ 和 $\angle ACF$ 的平分线交于点 E，则 $\angle AEC$ 的度数为_____.

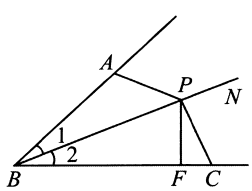
8 如图，在 $\triangle ABC$ 中，AD 是 $\angle BAC$ 的平分线，$AB = 6$ cm，$AC = 8$ cm，则 $BD : CD =$ _____.



9 如图，$AB = AC$，$BD = CD$，$DE \perp AB$ 的延长线于 E，$DF \perp AC$ 的延长线于 F. 求证：$DE = DF$.



10 [2019 浙江诸暨期中] 如图，已知 $\angle 1 = \angle 2$，P 为 BN 上的一点，$PF \perp BC$ 于 F，$PA = PC$. 求证：$\angle PCB + \angle BAP = 180°$.



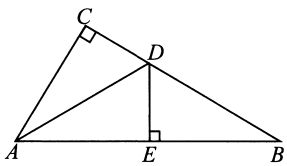
刷提升

▸答案 D13

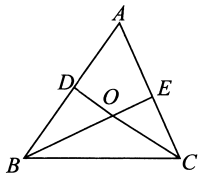
1 如图，在△ABC中，$\angle C=90°$，AD是$\angle CAB$的平分线，$DE\perp AB$于点E，DE平分$\angle ADB$，则$\angle B$等于（　　）

A. 22.5°　　B. 30°

C. 25°　　D. 40°



（第1题图）



（第2题图）

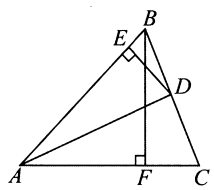
2 如图，在△ABC中，$\angle B$，$\angle C$的平分线交于点O，$OD\perp AB$于点D，$OE\perp AC$于点E，则OD与OE的大小关系是（　　）

A. $OD>OE$　　B. $OD=OE$

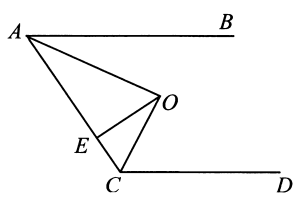
C. $OD<OE$　　D. 不能确定

3 [2019福建厦门思明区校级期中]如图，△ABC中，$AB=6$，$AC=4$，AD平分$\angle BAC$，$DE\perp AB$于点E，$BF\perp AC$于点F，$DE=2$，则BF的长为（　　）

A. 3　　B. 4　　C. 5　　D. 6



（第3题图）



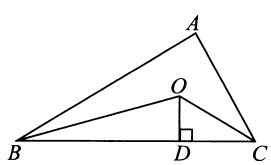
（第4题图）

4 [2019江苏盐城盐都区月考]如图所示，$AB\parallel CD$，O为$\angle BAC$与$\angle ACD$平分线的交点，$OE\perp AC$于E，若$OE=2$，则AB与CD之间的距离是（　　）

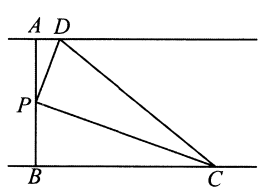
A. 2　　B. 4

C. 8　　D. 无法确定

5 如图，在△ABC中，$\angle ABC$与$\angle ACB$的平分线交于点O，点O到BC边的距离为3，且△ABC的周长为20，则△ABC的面积为_____.



（第5题图）



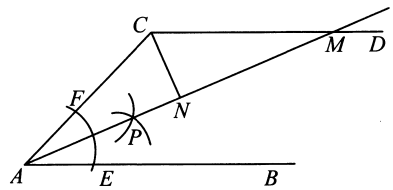
（第6题图）

6 [2019重庆渝中区校级期中]如图，$AD\parallel BC$，CP和DP分别平分$\angle BCD$和$\angle ADC$，AB过点P，且与AD垂直，垂足为A，交BC于点B. 若$AB=10$，则点P到DC的距离是_____.

7 如图，$AB\parallel CD$，以点A为圆心，小于AC长为半径作圆弧，分别交AB，AC于E，F两点，再分别以E，F为圆心，大于EF长为半径作圆弧，两条圆弧交于点P，作射线AP交CD于点M.

(1) 若$\angle ACD=114°$，求$\angle MAB$的度数；

(2) 若$CN\perp AM$，垂足为N，求证：△$CAN\cong$△CMN.

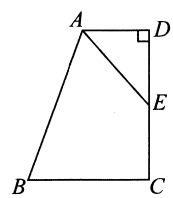


刷素养

8 如图，已知$AD\parallel BC$，$DC\perp AD$，$\angle BAD$的平分线交CD于点E，且点E是CD的中点.

(1) 点E在$\angle ABC$的平分线上吗？

(2) 求$AD+BC$与AB的大小关系，并证明.



课时2　角的平分线的判定

刷基础

▶答案 D14

题型1　角的平分线的判定

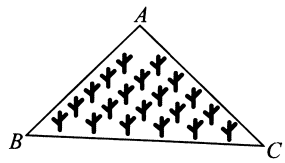
1 [2019 福建漳州期末]如图所示是一块三角形的草坪，现要在草坪上建一个凉亭供大家休息，要使凉亭到草坪三边的距离相等，凉亭的位置应选在（　　）

A. $\triangle ABC$ 三条中线的交点

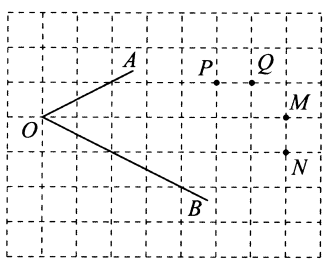
B. $\triangle ABC$ 三条角平分线的交点

C. $\triangle ABC$ 三条高所在直线的交点

D. $\triangle ABC$ 三条边的中垂线的交点



2 [2018 辽宁锦州期末]在正方形网格中，$\angle AOB$ 的位置如图所示，到 $\angle AOB$ 两边距离相等的点是（　　）



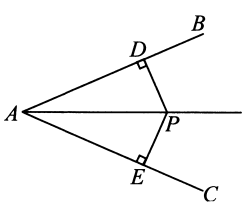
A. M 点　　B. N 点　　C. P 点　　D. Q 点

题型2　角平分线判定的应用

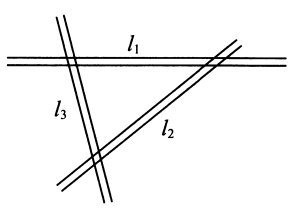
3 如图，$PD \perp AB$ 于点 D，$PE \perp AC$ 于点 E，若 $PE = PD$，则（　　）

A. $\angle BAP > \angle CAP$　　B. $\angle BAP = \angle CAP$

C. $\angle BAP < \angle CAP$　　D. 不能确定



（第3题图）



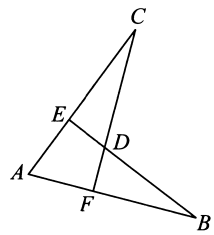
（第4题图）

4 [2018 湖南慈利校级期中]直线 l_1，l_2，l_3 表示三条相互交叉的公路，现要建一个货物中转站，要求它到三条公路的距离相等，则可选择的地址共有（　　）

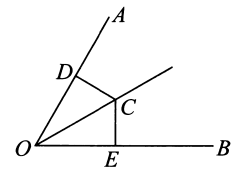
A. 一处　　B. 两处　　C. 三处　　D. 四处

5 如图，$AB = AC$，$BE \perp AC$ 于点 E，$CF \perp AB$ 于点 F，BE，CF 相交于点 D，则 ①$\triangle ABE \cong \triangle ACF$；② $\triangle BDF \cong CDE$；③点 D 在 $\angle BAC$ 的平分线上. 以上结论正确的有（　　）

A. ①　　B. ②　　C. ①②　　D. ①②③



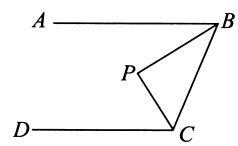
（第5题图）



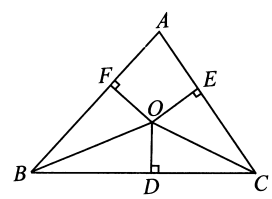
（第6题图）

6 如图，$\angle AOB = 60°$，$CD \perp OA$ 于 D，$CE \perp OB$ 于 E，且 $CD = CE$，则 $\angle DOC =$ _____.

7 如图，$AB \parallel CD$，点 P 到 AB，BC，CD 的距离相等，则 $\angle P =$ _____.



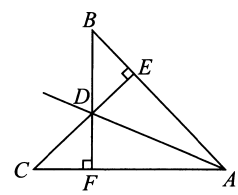
（第7题图）



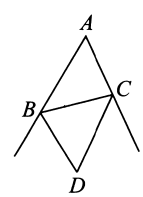
（第8题图）

8 [2019 江苏无锡锡山区期中]如图，O 是 $\triangle ABC$ 内一点，且 O 到三边 AB，BC，CA 的距离 $OF = OD = OE$，若 $\angle BAC = 70°$，则 $\angle BOC =$ _____.

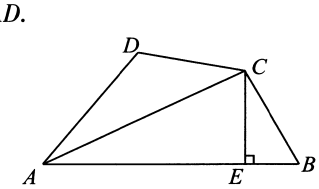
9 如图所示，$BE = CF$，$BF \perp AC$ 于点 F，$CE \perp AB$ 于点 E，BF 和 CE 交于点 D. 求证：AD 平分 $\angle BAC$.



10 如图，在 $\triangle ABC$ 中，$\angle B$，$\angle C$ 相邻的外角的平分线交于点 D. 求证：点 D 在 $\angle A$ 的平分线上.



11 [2019 北京西城区校级期中]如图，在四边形 $ABCD$ 中，$CD = CB$，$\angle ABC + \angle ADC = 180°$，过 C 作 $CE \perp AB$ 于 E. 求证：AC 平分 $\angle BAD$.



全章综合训练

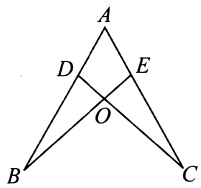
刷章测

▶建议用时:60 分钟　答案 D14

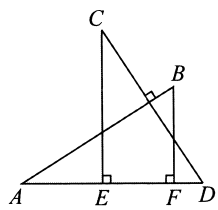
1 [2018 贵州安顺中考]如图,点 D,E 分别在线段 AB, AC 上,CD 与 BE 相交于 O 点,已知 $AB=AC$,现添加以下的哪个条件仍不能判定 $\triangle ABE\cong\triangle ACD$　(　　)

A. $\angle B=\angle C$　　B. $AD=AE$

C. $BD=CE$　　D. $BE=CD$



(第 1 题图)



(第 2 题图)

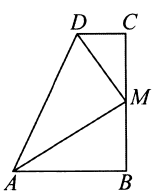
2 [2018 江苏南京中考]如图,$AB\perp CD$,且 $AB=CD$,E,F 是 AD 上的两点,$CE\perp AD$,$BF\perp AD$. 若 $CE=a$,$BF=b$,$EF=c$,则 AD 的长为　(　　)

A. $a+c$　　B. $b+c$

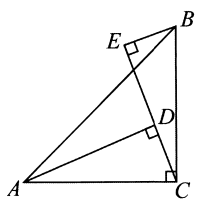
C. $a-b+c$　　D. $a+b-c$

3 [2018 黑龙江大庆中考]如图,$\angle B=\angle C=90°$,M 是 BC 的中点,DM 平分 $\angle ADC$,且 $\angle ADC=110°$,则 $\angle MAB=$　(　　)

A. 30°　　B. 35°　　C. 45°　　D. 60°



(第 3 题图)



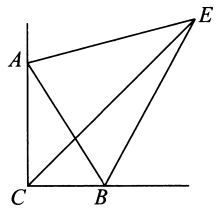
(第 4 题图)

4 [2018 山东临沂中考]如图,$\angle ACB=90°$,$AC=BC$. $AD\perp CE$,$BE\perp CE$,垂足分别是点 D,E,$AD=3$,$BE=1$,则 DE 的长是　(　　)

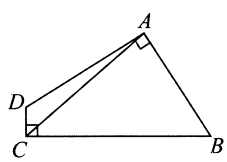
A. $\frac{3}{2}$　　B. 2　　C. $2\sqrt{2}$　　D. $\sqrt{10}$

5 如图,在 Rt $\triangle ABC$ 中,$\angle ACB=90°$,$\angle BAC=30°$,$\angle ACB$ 的平分线与 $\angle ABC$ 的外角的平分线交于 E 点,连接 AE,则 $\angle AEB$ 的度数是　(　　)

A. 50°　　B. 45°　　C. 40°　　D. 35°



(第 5 题图)



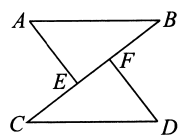
(第 6 题图)

6 [2018 黑龙江中考]如图,四边形 $ABCD$ 中,$AB=AD$, $AC=5$,$\angle DAB=\angle DCB=90°$,则四边形 $ABCD$ 的面积为　(　　)

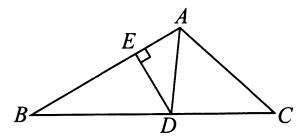
A. 15　　B. 12.5　　C. 14.5　　D. 17

7 [2018 湖南永州中考]现有 A,B 两个大型储油罐,它们相距 2 km,计划修建一条笔直的输油管道,使得 A, B 两个储油罐到输油管道所在直线的距离都为 0.5 km,输油管道所在直线符合上述要求的设计方案有_____种.

8 如图,$\triangle AEB\cong\triangle DFC$,$AE\perp CB$,$DF\perp BC$,$AE=DF$, $\angle C=28°$,则 $\angle A=$_____.



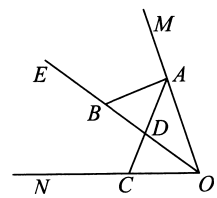
(第 8 题图)



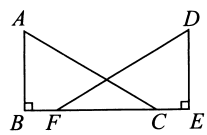
(第 9 题图)

9 如图,AD 是 $\triangle ABC$ 中 $\angle BAC$ 的平分线,$DE\perp AB$ 于点 E,$AC=7$,$DE=4$,则 $\triangle ADC$ 的面积等于_____.

10 如图,已知 $\angle MON=80°$,OE 平分 $\angle MON$,点 A,B,C 分别是射线 OM,OE,ON 上的动点(A,B,C 不与点 O 重合),连接 AC 交射线 OE 于点 D. 当 $AB\perp OM$,且 $\triangle ADB$ 有两个相等的角时,$\angle OAC$ 的度数为_____.



11 如图所示,点 B,F,C,E 在同一直线上,$AB\perp BE$, $DE\perp BE$,连接 AC,DF,且 $AC=DF$,$BF=CE$. 求证: $AB=DE$.

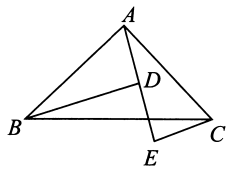


逆风的方向,更适合飞翔,我不怕千万人阻挡,只怕自己投降。

12 如图，A，D，E 三点在同一条直线上，且 $\triangle BAD \cong \triangle ACE$，试说明：

(1) $BD = DE + CE$；

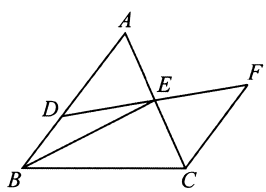
(2) 当 $\triangle ABD$ 满足什么条件时，$BD \parallel CE$？



13 [2019 广东深圳宝安区期末] 如图，在 $\triangle ABC$ 中，D 为 AB 上一点，E 为 AC 的中点，连接 DE 并延长至点 F，使得 $EF = ED$，连接 CF.

(1) 求证：$CF \parallel AB$；

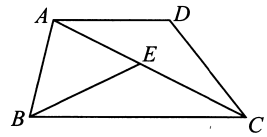
(2) 若 $\angle ABC = 50°$，连接 BE，AC 平分 $\angle BCF$，求 $\angle A$ 的度数.



14 在梯形 $ABCD$ 中，$AD \parallel BC$，连接 AC，且 $AC = BC$，在对角线 AC 上取点 E，使 $CE = AD$，连接 BE.

(1) 求证：$\triangle DAC \cong \triangle ECB$；

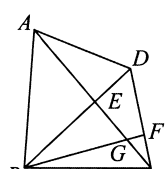
(2) 若 CA 平分 $\angle BCD$，且 $AD = 3$，求 BE 的长.



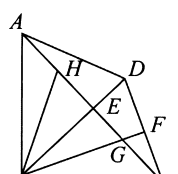
15 [2018 黑龙江哈尔滨中考，难] 已知：在四边形 $ABCD$ 中，对角线 AC，BD 相交于点 E，且 $AC \perp BD$，作 $BF \perp CD$，垂足为点 F，BF 与 AC 交于点 G，$\angle BGE = \angle ADE$.

(1) 如图(1)，求证：$AD = CD$；

(2) 如图(2)，BH 是 $\triangle ABE$ 的中线，若 $AE = 2DE$，$DE = EG$，在不添加任何辅助线的情况下，请直接写出图(2)中四个三角形，使写出的每个三角形的面积都等于 $\triangle ADE$ 面积的 2 倍.



图(1)



图(2)

第十三章 轴对称

13.1 轴对称

13.1.1 轴对称

刷基础

▶答案 D16

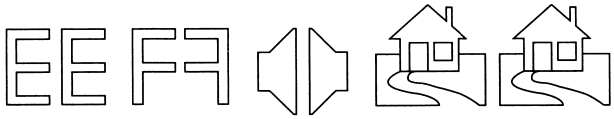
题型1 成轴对称和轴对称图形的概念

1 下列图案中,属于轴对称图形的是 (　　)



A　　B　　C　　D

2 下列各组图形中,右边的图形与左边的图形能形成轴对称图形的有 (　　)



(1)　　(2)　　(3)　　(4)

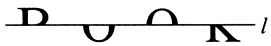
A. 1 组　　B. 2 组　　C. 3 组　　D. 4 组

3 [2018 湖南岳阳期中]下列四句话中的文字有三句具有对称规律,其中没有这种规律的一句是 (　　)

A. 上海自来水来自海上　　B. 有志者事竟成

C. 清水池里池水清　　D. 蜜蜂酿蜂蜜

4 [2019 山东武城期中]如图所示,有一个英语单词,四个字母都关于直线 l 对称,请依据轴对称的知识,写出这个单词所指的物品是_____.

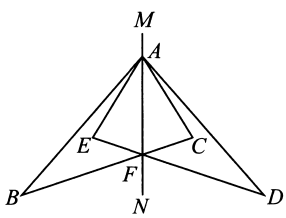


5 如图,$\triangle ABC$ 与 $\triangle ADE$ 关于直线 MN 对称,BC 与 DE 的交点 F 在直线 MN 上.

(1)指出 $\triangle ABC$ 与 $\triangle ADE$ 的对称点;

(2)指出 $\triangle ABC$ 与 $\triangle ADE$ 中相等的线段和角;

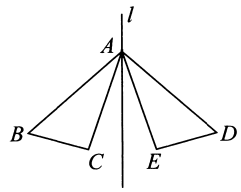
(3)在不添加字母和线段的情况下,图中还有能形成轴对称的两个三角形吗?



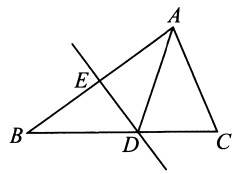
题型2 轴对称和轴对称图形的性质

6 如图,若 $\triangle ABC$ 和 $\triangle ADE$ 关于直线 l 对称,下列结论:①$\triangle ABC \cong \triangle ADE$;② l 垂直平分 DB;③$\angle C = \angle E$;④BC 与 DE 的延长线的交点一定落在直线 l 上. 其中错误的有 (　　)

A. 0 个　　B. 1 个　　C. 2 个　　D. 3 个



(第 6 题图)

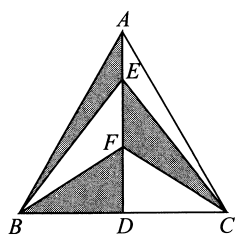


(第 7 题图)

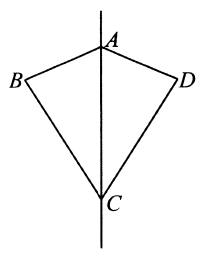
7 如图,将 $\triangle ABC$ 沿直线 DE 折叠后,使得点 B 与点 A 重合. 已知 $AC = 10$ cm,$\triangle ADC$ 的周长为 34 cm,则 BC 的长为 (　　)

A. 14 cm　　B. 20 cm　　C. 24 cm　　D. 44 cm

8 如图,直线 AD 是三角形 ABC 的对称轴,点 E,F 是 AD 上的两点. 若 $BD = 2$,$AD = 3$,则图中阴影部分的面积是_____.



9 [2018 陕西三原期末]如图,$\triangle ABC$ 与 $\triangle ADC$ 关于 AC 所在的直线对称,$\angle BCA = 35°$,$\angle D = 80°$,求 $\angle BAD$ 的度数.



不管全世界所有人怎么说,我都认为自己的感受才是正确的。 无论别人怎么看,我绝不打乱自己的节奏。

13.1.2　线段的垂直平分线的性质

刷基础

▶答案 D16

题型 1　线段垂直平分线的性质及应用

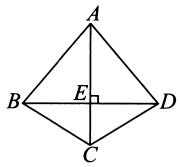
1 如图，四边形 $ABCD$ 中，AC 垂直平分 BD，垂足为 E，下列选项中不一定正确的是（　　）

A. AC 平分 $\angle BAD$

B. $AB = BD$

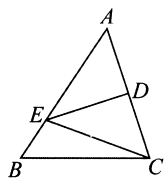
C. $\triangle BEC \cong \triangle DEC$

D. $BC = DC$

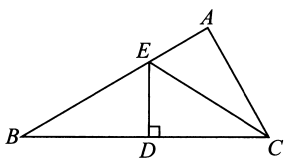


2 [2019 广东江门期末] 如图，直线 DE 是 $\triangle ABC$ 中边 AC 的垂直平分线. 若 $BC = 6$ cm，$AB = 8$ cm，则 $\triangle EBC$ 的周长为（　　）

A. 14 cm　　B. 18 cm　　C. 20 cm　　D. 22 cm



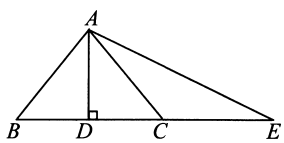
（第 2 题图）



（第 3 题图）

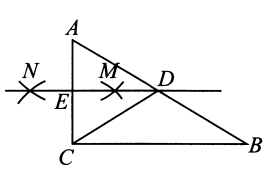
3 如图，在 $\triangle ABC$ 中，ED 垂直平分 BC，$CE = 5$，$AE = 1$，则 AB 的长为_____.

4 如图，$AD \perp BC$，$BD = CD$，点 C 在 AE 的垂直平分线上. 若 $AB = 5$ cm，$BD = 3$ cm，求 BE 的长.



题型 2　线段垂直平分线的作法

5 [2019 福建南平联考] 如图，在 $\triangle ABC$ 中，$\angle ACB = 90°$，分别以点 A 和点 C 为圆心，以相同的长（大于 $\frac{1}{2}AC$）为半径作弧，两弧相交于点 M 和点 N，作直线 MN 交 AB 于点 D，交 AC 于点 E，连接 CD. 下列选项错误的是（　　）



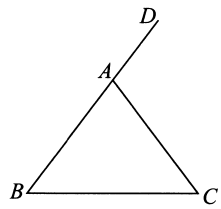
A. $AD = CD$　　B. $\angle A = 2\angle DCB$

C. $\angle ADE = \angle DCB$　　D. $\angle A = \angle DCA$

6 如图，在 $\triangle ABC$ 中，$AB = AC$，$\angle DAC$ 是 $\triangle ABC$ 的一个外角. 根据要求用尺规作图，并在图中标明相应字母（保留作图痕迹，不写作法）.

（1）作 $\angle DAC$ 的平分线 AM；

（2）作线段 AC 的垂直平分线，与 AM 交于点 F，与 BC 交于点 E.



题型 3　线段垂直平分线的判定

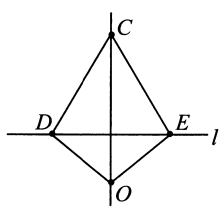
7 如图所示的四边形纸片中，$OD = OE$，$CD = CE$. 小州把这个四边形纸片往直线 l 上一放，使点 D，E 落在直线 l 上，作直线 OC，则 $OC \perp l$，他这样判断的理由是（　　）

A. 到一个角两边距离相等的点在这个角的平分线上

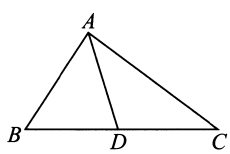
B. 角平分线上的点到这个角两边的距离相等

C. 到线段两端距离相等的点在这条线段的垂直平分线上

D. 线段垂直平分线上的点到线段两端的距离相等



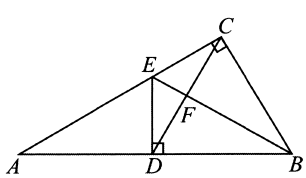
（第 7 题图）



（第 8 题图）

8 如图，在 $\triangle ABC$ 中，D 为 BC 上一点，且 $BC = BD + AD$，则点 D 在线段_____的垂直平分线上.

9 如图，在 Rt$\triangle ABC$ 中，$\angle ACB = 90°$，D 是 AB 上一点，$BD = BC$，过点 D 作 AB 的垂线交 AC 于点 E. 求证：BE 垂直平分 CD.



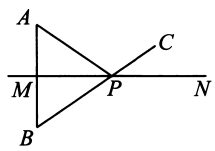
刷提升

▶答案 D17

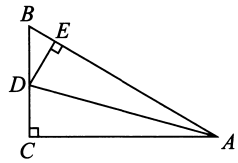
1 [2019 河北唐山校级月考]如图,MN 是线段 AB 的垂直平分线,C 在 MN 外,且与点 A 在 MN 的同一侧,BC 交 MN 于 P 点,则 (　　)

A. $BC > PC + AP$　　B. $BC < PC + AP$

C. $BC = PC + AP$　　D. $BC \geqslant PC + AP$



(第 1 题图)

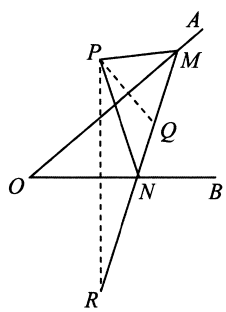


(第 2 题图)

2 [2018 江西崇仁第一中学月考]如图,在 $\triangle ABC$ 中,$\angle C = 90°$,AD 平分 $\angle BAC$,$DE \perp AB$ 于 E,有下列结论:①$CD = ED$;②$AC + BE = AB$;③$\angle BDE = \angle BAC$;④AD 平分 $\angle CDE$. 其中正确的有 (　　)

A. 1 个　　B. 2 个　　C. 3 个　　D. 4 个

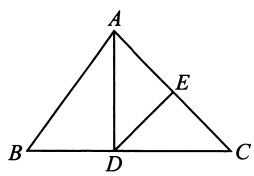
3 [2018 山东聊城期末]如图,点 P 是 $\angle AOB$ 外的一点,点 M,N 分别是 $\angle AOB$ 两边上的点,点 P 关于 OA 的对称点 Q 恰好落在线段 MN 上,点 P 关于 OB 的对称点 R 落在 MN 的延长线上. 若 $PM = 2.5$ cm,$PN = 3$ cm,$MN = 4$ cm,则线段 QR 的长为 (　　)



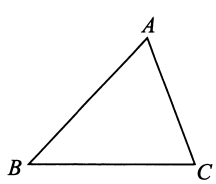
A. 4.5 cm　　B. 5.5 cm

C. 6.5 cm　　D. 7 cm

4 如图,在 $\triangle ABC$ 中,AC 的垂直平分线交 AC 于 E,交 BC 于 D,$\triangle ABC$ 的周长是 12 cm,$\triangle ABD$ 的周长是 7 cm,则 AC 的长为_____cm.



(第 4 题图)



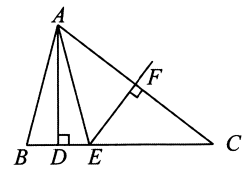
(第 5 题图)

5 [2018 陕西汉中校级期中]如图,点 A,B,C 表示某公司三个车间的位置,现要建一个仓库,要求它到三个车间的距离相等,则仓库应建在 $\triangle ABC$ _____的交点处.

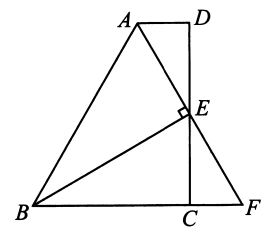
6 [2019 广东深圳罗湖区校级期末]如图,在 $\triangle ABC$ 中,$AD \perp BC$,EF 垂直平分 AC,交 AC 于点 F,交 BC 于点 E,且 $BD = DE$.

(1)若 $\angle BAE = 40°$,求 $\angle C$ 的度数;

(2)若 $\triangle ABC$ 的周长为 13 cm,$AC = 6$ cm,求 DC 的长.



7 如图,在四边形 $ABCD$ 中,$AD // BC$,E 为 CD 的中点,连接 AE,BE,$BE \perp AE$,延长 AE 交 BC 的延长线于点 F. 求证:(1) $FC = AD$;(2) $AB = BC + AD$.

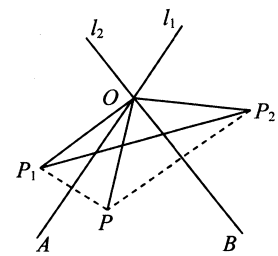


刷素养

8 [2018 陕西定边期末]如图,直线 l_1,l_2 交于点 O,点 P 关于 l_1,l_2 的对称点分别为 P_1,P_2.

(1)若 l_1,l_2 相交所成的锐角 $\angle AOB = 60°$,则 $\angle P_1OP_2 =$ _____;

(2)若 $OP = 3$,$P_1P_2 = 5$,求 $\triangle P_1OP_2$ 的周长.



有些事,现在看来不过如此,但在当时,真的就是一个人一秒一秒熬过来的。

13.2　画轴对称图形

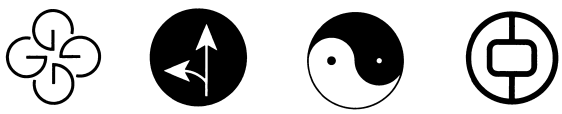
课时 1　画轴对称图形

刷基础

▶答案 D17

题型 1　轴对称变换的性质

1 下列图案中，不是利用轴对称设计的图案的有（　　）



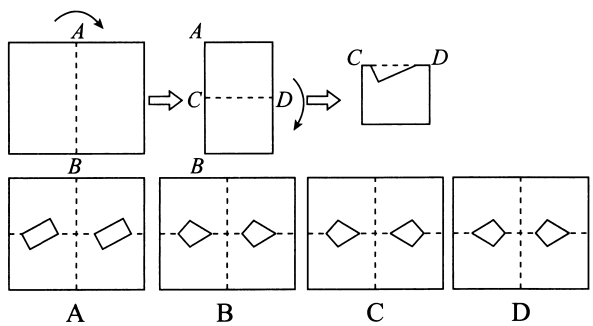
A. 1 个　　B. 2 个　　C. 3 个　　D. 4 个

2 $\triangle ABC$ 与 $\triangle A'B'C'$ 关于直线 l 对称，如果 $\triangle ABC$ 的面积是 4 cm^2，则 $\triangle A'B'C'$ 的面积是（　　）

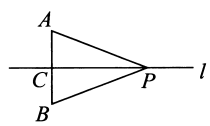
A. 2 cm^2　　B. 4 cm^2

C. 8 cm^2　　D. 10 cm^2

3 [2019 湖北孝感孝南区期中] 如图所示，将长方形纸片先沿虚线 AB 向右对折，接着将对折后的纸片沿虚线 CD 向下对折，然后剪下一个小三角形，再将纸片打开，则打开后的图形是（　　）

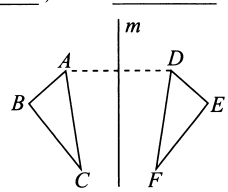


4 如图，A，B 两点关于直线 l 对称，P 为 l 上一点，则 $\angle ACP =$ _____，$AC =$ _____，$PA =$ _____.



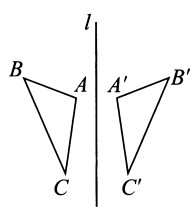
（第 4 题图）

5 如图，$\triangle ABC$ 关于直线 m 进行轴对称变换后得到 $\triangle DEF$，则 m 是 AD 的_____.



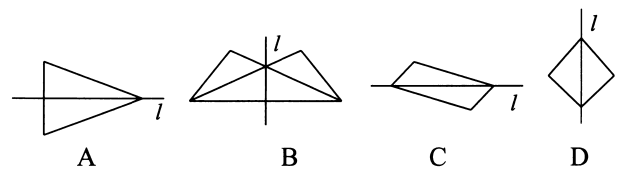
（第 5 题图）

6 [2019 江苏镇江京口区月考] 如图，$\triangle ABC$ 与 $\triangle A'B'C'$ 关于直线 l 对称. 若 $\angle A = 98°$，$\angle C' = 42°$，则 $\angle B$ 的度数为_____.

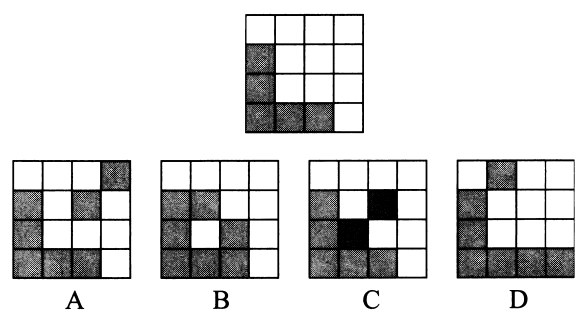


题型 2　画轴对称图形

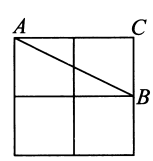
7 分别以直线 l 为对称轴，所作轴对称图形错误的是（　　）



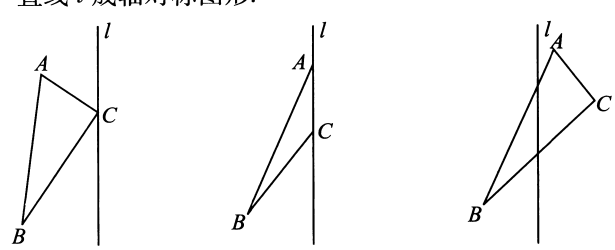
8 如图，阴影部分是由 5 个小正方形组成的一个直角图形，将方格内空白的两个小正方形涂黑，得到新的图形，其中不是轴对称图形的是（　　）



9 如图，在 2 × 2 的正方形格点图中，有一个以格点为顶点的 $\triangle ABC$，请你找出格点图中所有与 $\triangle ABC$ 成轴对称且以格点为顶点的三角形，这样的三角形共有_____个.



10 在下面各图中画 $\triangle A'B'C'$，使 $\triangle A'B'C'$ 与 $\triangle ABC$ 关于直线 l 成轴对称图形.



课时2　用坐标表示轴对称

刷基础

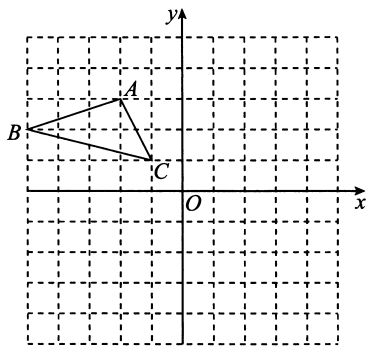
▶答案 D18

题型1　关于坐标轴对称的点的坐标

1 [2018 广西贵港中考]若点 $A(1+m,1-n)$ 与点 $B(-3,2)$ 关于 y 轴对称,则 $m+n$ 的值是　(　)

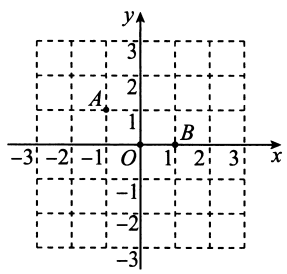
A. -5　　B. -3　　C. 3　　D. 1

2 如图,在平面直角坐标系中,$\triangle ABC$ 位于第二象限,点 A 的坐标是 $(-2,3)$,先把 $\triangle ABC$ 向右平移4个单位长度得到 $\triangle A_1B_1C_1$,再作与 $\triangle A_1B_1C_1$ 关于 x 轴对称的 $\triangle A_2B_2C_2$,则点 A 的对应点 A_2 的坐标是　(　)



A. $(-3,2)$　B. $(2,-3)$　C. $(1,-2)$　D. $(-1,2)$

3 [2019 安徽马鞍山校级月考]如图,在棋盘中建立直角坐标系 xOy,三颗棋子 A,O,B 的位置分别是 $(-1,1)$,$(0,0)$ 和 $(1,0)$. 如果在其他格点位置添加一颗棋子 C,使 A,O,B,C 四颗棋子连线后成为一个轴对称图形,请写出所有满足条件的棋子 C 的坐标:_____.



4 若点 A 的坐标是 $(-2,5)$,点 B 的坐标是 $(2,5)$,点 C 的坐标是 $(2,-5)$,则:

(1)点 A 和点 B 的位置关系是_____;

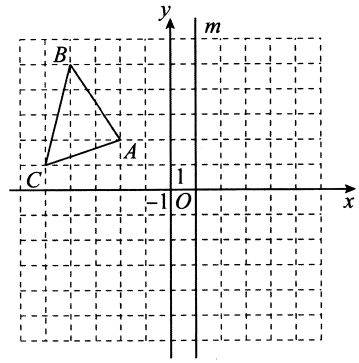
(2)点 B 和点 C 的位置关系是_____.

5 [2019 辽宁大连沙河口区期末]如图,已知 $\triangle ABC$ 的顶点分别为 $A(-2,2)$,$B(-4,5)$,$C(-5,1)$ 和直线 m(直线 m 上各点的横坐标都为1).

(1)作出 $\triangle ABC$ 关于 x 轴对称的图形 $\triangle A_1B_1C_1$,并写出点 B_1 的坐标;

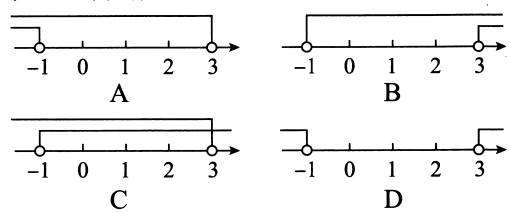
(2)作出 $\triangle ABC$ 关于 y 轴对称的图形 $\triangle A_2B_2C_2$,并写出点 B_2 的坐标;

(3)若点 $P(a,b)$ 是 $\triangle ABC$ 内部一点,则点 P 关于直线 m 对称的点的坐标是_____.



题型2　对称点与其他知识的综合

6 [2019 山东莱芜莱城区期末]已知点 $M(6-2a,a+1)$ 关于 y 轴的对称点在第一象限,则 a 的取值范围在数轴上表示正确的是　(　)

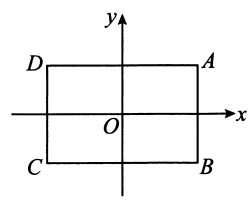


7 [2018 广西桂林二模]已知 $M(a,3)$ 和 $N(4,b)$ 关于 y 轴对称,则 $(a+b)^{2018}$ 的值为_____.

8 如图,分别以长方形 $ABCD$ 的两条对称轴为 x 轴和 y 轴建立平面直角坐标系,若点 A 的坐标为 $(4,3)$.

(1)写出长方形的另外三个顶点 B,C,D 的坐标;

(2)求该长方形的面积.



刷易错

易错点　混淆关于坐标轴对称的点的坐标特征导致错解

9 点 P 的坐标为 $(5,-3)$,则:

(1)点 P 关于 x 轴对称的点的坐标为_____;

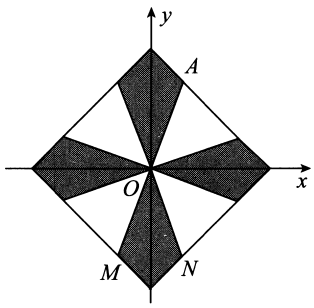
(2)点 P 关于 y 轴对称的点的坐标为_____.

单是聪明还不够,还应有足够的聪明以避免过分聪明。

刷提升

▸答案 D18

1 如图，阴影部分组成的图案既是关于 x 轴对称的图形，又是关于 y 轴对称的图形，若点 A 的坐标是 $(1,3)$，则点 M 和点 N 的坐标分别是（　　）



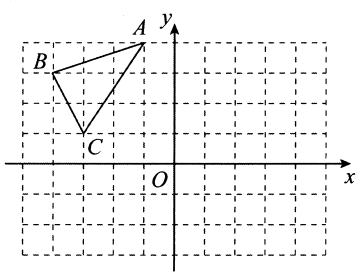
A. $M(1,-3)$，$N(-1,-3)$

B. $M(-1,-3)$，$N(-1,3)$

C. $M(-1,-3)$，$N(1,-3)$

D. $M(-1,3)$，$N(1,-3)$

2 [2018 湖南武冈一模] 如图，$\triangle ABC$ 的顶点都在正方形网格格点上，点 A 的坐标为 $(-1,4)$. 将 $\triangle ABC$ 沿 y 轴翻折到第一象限，则点 C 的对应点 C' 的坐标是（　　）



A. $(3,1)$　　B. $(-3,-1)$

C. $(1,-3)$　　D. $(3,-1)$

3 点 A 和点 $B(2,3)$ 关于 x 轴对称，则 A，B 两点间的距离为（　　）

A. 0　　B. 4　　C. -6　　D. 6

4 [2018 上海浦东新区期末] 在平面直角坐标系内，已知在 y 轴与直线 $x=3$ 之间有一点 $M(a,3)$，如果该点关于直线 $x=3$ 的对称点 N 的坐标为 $(5,3)$，那么 a 的值为（　　）

A. 4　　B. 3　　C. 2　　D. 1

5 点 $P(-2,-4)$ 与点 $Q(6,-4)$ 的位置关系是（　　）

A. 关于 x 轴对称　　B. 关于 y 轴对称

C. 关于直线 $x=2$ 对称　　D. 关于直线 $y=2$ 对称

6 [2019 浙江台州期中] 已知 $M(2,2)$，规定“先把点 M 作关于 x 轴对称，再向左平移 1 个单位”为一次变换，那么连续经过 2 018 次变换后，点 M 的坐标变为（　　）

A. $(-2\,016,2)$　　B. $(-2\,016,-2)$

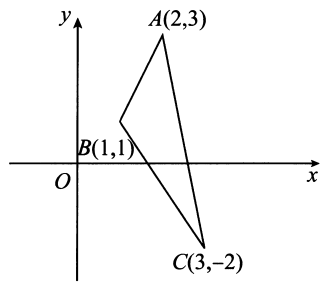
C. $(-2\,017,-2)$　　D. $(-2\,017,2)$

7 [2019 河南罗山期末] 已知点 $P(3,1-b)$ 关于 y 轴的对称点 Q 的坐标是 $(a,-1)$，则 ab 的值为_____.

8 点 $M(-4,0)$ 关于 y 轴对称的点 N 的坐标为_____，则 MN 的长为_____.

9 点 $P(-2,1)$ 关于直线 $y=-1$ 的对称点为_____.

10 如图，已知 $\triangle ABC$，请作出 $\triangle ABC$ 关于 x 轴对称的图形，并写出点 A，B，C 关于 x 轴对称的点的坐标.

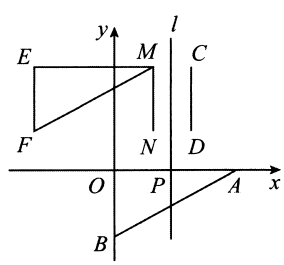


刷素养

11 [2018 江西上饶广丰区模拟，难] 如图，在平面直角坐标系中，$\triangle ABO$ 的顶点坐标分别为 $O(0,0)$，$A(2a,0)$，$B(0,-a)$，线段 EF 两端点的坐标分别为 $E(-m,a+1)$，$F(-m,1)$，$2a>m>a$，直线 $l\parallel y$ 轴交 x 轴于 $P(a,0)$，且线段 EF 与 CD 关于 y 轴对称，线段 CD 与 MN 关于直线 l 对称.

(1) 求点 N，M 的坐标（用含 m，a 的代数式表示）.

(2) $\triangle ABO$ 与 $\triangle MFE$ 通过平移能重合吗？请说明理由. 若能，请你说出一个平移方案（平移的单位长度数用 m，a 表示）.



13.3　等腰三角形

13.3.1　等腰三角形

课时1　等腰三角形的性质

刷基础

▶答案 D19

题型1　等腰三角形性质“等边对等角”的应用

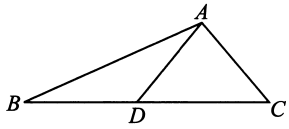
1 已知等腰三角形的一个内角为50°，则这个等腰三角形的顶角为（　　）

A. 50°　　B. 80°

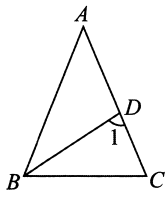
C. 50°或80°　　D. 40°或65°

2 [2017天津河东区期中]如图，△ABC中，$AC=AD=BD$，$\angle DAC=80°$，则$\angle B$等于（　　）

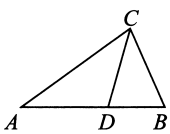
A. 20°　　B. 25°　　C. 35°　　D. 40°



（第2题图）



（第3题图）

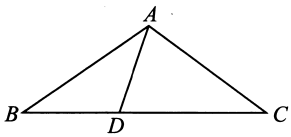


（第4题图）

3 [2019四川广安期中]如图，在△ABC中，$AB=AC$，$\angle BAC=40°$，BD平分$\angle ABC$，则$\angle 1$的度数是_____.

4 如图，在△ABC中，$AB=AC$，CD平分$\angle ACB$，$\angle A=36°$，则$\angle BDC$等于_____.

5 如图，在△ABC中，点D在BC上，$AB=AC=CD$，且$AD=BD$. 求△ABC的三个内角的度数.



题型2　等腰三角形性质“三线合一”的应用

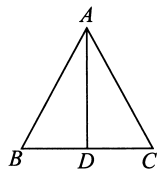
6 等腰三角形的对称轴是（　　）

A. 底边上的中线　　B. 顶角平分线

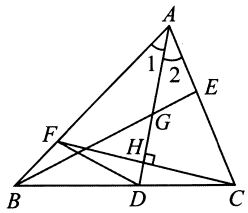
C. 底边上的高　　D. 底边的垂直平分线

7 如图，在△ABC中，$AB=AC$，D为BC的中点，有下列四个结论：①$\angle B=\angle C$；②$AD\perp BC$；③$\angle BAC=2\angle BAD$；④$S_{\triangle ABD}=S_{\triangle ACD}$. 其中正确的结论有（　　）

A. 1个　　B. 2个　　C. 3个　　D. 4个



（第7题图）

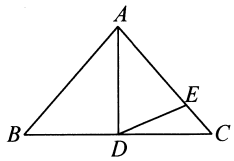


（第8题图）

8 [2019贵州遵义月考]如图所示，在△ABC中，AD是$\angle BAC$的平分线，G是AD上一点，且$AG=DG$，连接BG并延长交AC于点E，过点C作AD的垂线交AD于点H，交AB于点F，则下列说法：

①D是BC的中点；②$\angle ADC>\angle 2$；③BE是△ABC的边AC上的中线；④CH为△ACD的边AD上的高；⑤△AFC为等腰三角形；⑥连接DF，若$CF=6$，$AD=8$，则四边形$ACDF$的面积为24. 其中一定正确的是_____(填序号).

9 [2019北京密云区期末]已知：如图，在等腰△ABC中，$AB=AC$，$\angle BAC=80°$，AD平分$\angle BAC$，且$AD=AE$，求$\angle EDC$的度数.



刷易错

易错点　解等腰三角形时因忽略腰和底的长度关系致错

10 已知等腰三角形的一条边长是5 cm，一条边长是7 cm，求该三角形的周长.

刷提升

▶答案 D19

1 已知一个等腰三角形的两内角的度数之比为 1∶4，则这个等腰三角形顶角的度数为（　　）

A. 20°　　B. 120°

C. 20°或 120°　　D. 36°

2 等腰三角形底边长为 5 cm，一腰上的中线把其分为周长之差为 3 cm 的两部分，则腰长为（　　）

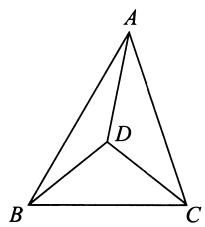
A. 2 cm　　B. 8 cm

C. 2 cm 或 8 cm　　D. 不确定

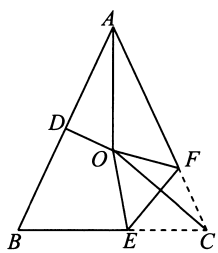
3 如图，$\triangle ABC$ 内有一点 D，且 $DA = DB = DC$，若 $\angle DAB = 20°$，则 $\angle ACB$ 的度数是（　　）

A. 100°　　B. 80°

C. 70°　　D. 50°



（第 3 题图）

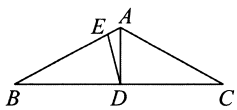


（第 4 题图）

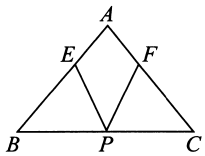
4 [2019 四川宜宾校级月考] 如图，在 $\triangle ABC$ 中，$AB = AC$，$\angle BAC = 50°$，$\angle BAC$ 的平分线与 AB 的垂直平分线交于点 O，点 C 沿 EF 折叠后与点 O 重合，则 $\angle CEF$ 的度数是（　　）

A. 60°　　B. 55°　　C. 50°　　D. 45°

5 [2019 湖南张家界永定区期中] 如图，在 $\triangle ABC$ 中，$AB = AC$，$\angle BAC = 124°$，AD 是边 BC 上的中线，且 $BD = BE$，则 $\angle ADE =$ _____.



（第 5 题图）



（第 6 题图）

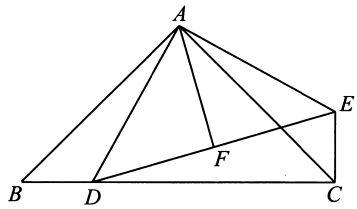
6 如图，在 $\triangle ABC$ 中，$AB = AC$，$\angle A = 80°$，E，F，P 分别是边 AB，AC，BC 上一点，且 $BE = BP$，$CP = CF$，则 $\angle EPF =$ _____.

7 [2019 河南信阳校级期中] 等腰三角形一腰上的高与另一腰的夹角为 30°，则它的顶角度数是_____.

8 如图，在 $\triangle ABC$ 中，已知 $AB = AC$，$\angle BAC = 90°$，D 是 BC 上一点，$EC \perp BC$，$EC = BD$，$DF = FE$. 求证：

(1) $\triangle ABD \cong \triangle ACE$；

(2) $AF \perp DE$.



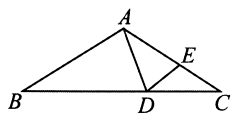
刷素养

9 如图，在 $\triangle ABC$ 中，$\angle ABC = \angle ACB$，点 D 在 BC 所在的直线上，点 E 在射线 AC 上，且 $AD = AE$，连接 DE.

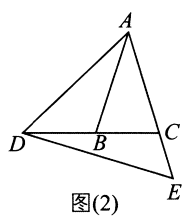
(1) 如图(1)，若 $\angle B = \angle C = 35°$，$\angle BAD = 80°$，求 $\angle CDE$ 的度数；

(2) 如图(2)，若 $\angle ABC = \angle ACB = 75°$，$\angle CDE = 18°$，求 $\angle BAD$ 的度数；

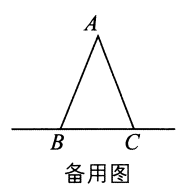
(3) 当点 D 在直线 BC 上(不与点 B，C 重合)运动时，试探究 $\angle BAD$ 与 $\angle CDE$ 的数量关系，并说明理由.



图(1)



图(2)



备用图

课时2　等腰三角形的判定

刷基础

▶答案 D20

题型1　等腰三角形的判定

1 在△ABC中,$\angle A:\angle B:\angle C=1:1:2$,则△$ABC$是(　　)

A. 等腰三角形　　B. 直角三角形

C. 等边三角形　　D. 等腰直角三角形

2 若△ABC的边长分别为a,b,c,且$(a+b-c)(a-c)=0$,则△ABC一定是(　　)

A. 等腰直角三角形　　B. 等边三角形

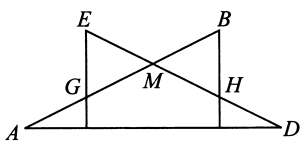
C. 等腰三角形　　D. 直角三角形

3 如果三角形一边上的中点到其他两边的距离相等,那么这个三角形是(　　)

A. 等边三角形　　B. 等腰三角形

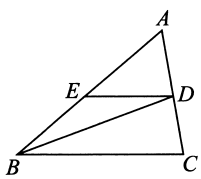
C. 直角三角形　　D. 等腰直角三角形

4 如图是用两个全等且有一个角为60°的直角三角形拼成的图形,其中两条较长的直角边在同一直线上,则图中等腰三角形有(　　)



A. 4个　　B. 3个　　C. 2个　　D. 1个

5 如图,已知BD是△ABC的角平分线,$DE\parallel BC$交AB于E,求证:△BED是等腰三角形.



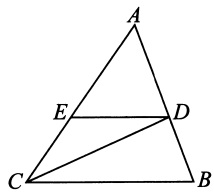
题型2　等腰三角形的性质与判定的综合应用

6 下列说法中,正确的有(　　)

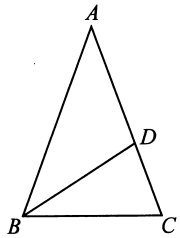
①有两角相等的三角形是等腰三角形;②等腰三角形的两底角相等;③钝角三角形不可能是等腰三角形;④有一高与一中线重合的三角形是等腰三角形;⑤在三角形中,相等的边所对的角也相等.

A. 1个　　B. 2个　　C. 3个　　D. 4个

7 [2019湖北武汉校级月考]如图,在△ABC中,CD平分$\angle ACB$,$DE\parallel BC$交AC于E,若$DE=5$,$AE=7$,则AC的长为_____.



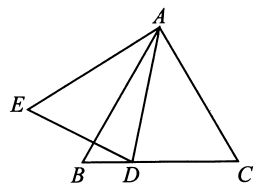
(第7题图)



(第8题图)

8 如图,在△ABC中,已知$AB=AC$,$\angle A=36°$,BD平分$\angle ABC$交AC于D.则图中的等腰三角形有_____个,与BC相等的线段有_____.

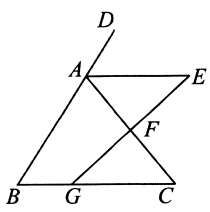
9 如图,在△ABC中,D为BC上的一点,AD平分$\angle EDC$,且$\angle E=\angle B$,$ED=DC$.求证:$AB=AC$.



10 如图,在△ABC中,已知点D在线段AB的反向延长线上,过AC的中点F作线段GE交$\angle DAC$的平分线于点E,交BC于点G,且$AE\parallel BC$.

(1)求证:△ABC是等腰三角形;

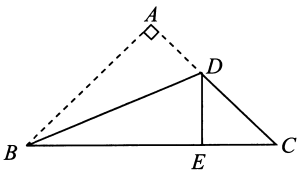
(2)若$AE=8$,$AB=10$,$GC=2BG$,求△ABC的周长.



刷提升

▶答案 D21

1 如图，把等腰直角三角形 ABC 沿 BD 折叠，使点 A 落在边 BC 上的点 E 处，下面结论错误的是　　(　　)



A. $AB=BE$　　B. $AD=DC$

C. $AD=DE$　　D. $AD=EC$

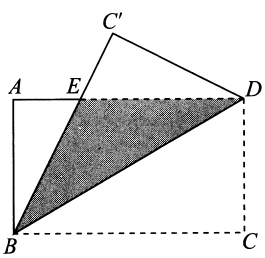
2 [2018 四川南江期末]在平面直角坐标系中，点 A 的坐标为(2,2)，点 P 在 x 轴上运动，当以点 A,P,O 为顶点的三角形为等腰三角形时，点 P 的个数为　　(　　)

A. 2　　B. 3

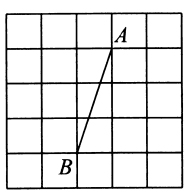
C. 4　　D. 5

3 如图，将一张长方形纸片 $ABCD$ 按图中方式折叠，若 $AE=3,AB=4,BE=5$，则重叠部分的面积为　　(　　)

A. 6　　B. 8　　C. 10　　D. 12



(第 3 题图)



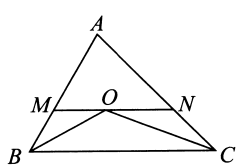
(第 4 题图)

4 [2019 江苏扬州邗江区期中]如图，正方形网格中，网格线的交点称为格点，已知 A,B 是两格点，如果 C 也是图中的格点，且使得 $\triangle ABC$ 为等腰三角形，则点 C 有　　(　　)

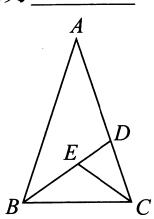
A. 4 个　　B. 6 个

C. 8 个　　D. 10 个

5 [2019 湖北蕲春期中]如图，在 $\triangle ABC$ 中，BO 平分 $\angle ABC$，CO 平分 $\angle ACB$，MN 经过点 O，且 $MN\parallel BC$，若 $AB=12,AC=18$，则 $\triangle AMN$ 的周长为_____.



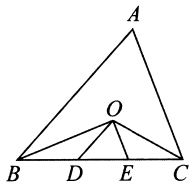
(第 5 题图)



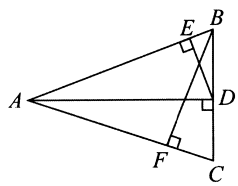
(第 6 题图)

6 如图，在 $\triangle ABC$ 中，$AB=AC,\angle A=36°,BD,CE$ 分别是 $\triangle ABC,\triangle BCD$ 的角平分线，则图中的等腰三角形有_____个.

7 [2019 湖南长沙岳麓区校级月考]如图，O 是 $\triangle ABC$ 的 $\angle ABC,\angle ACB$ 的平分线的交点，$OD\parallel AB$ 交 BC 于点 D，$OE\parallel AC$ 交 BC 于点 E. 若 $BC=17$ cm，则 $\triangle ODE$ 的周长是_____ cm.



8 [2018 湖南娄底中考]如图，$\triangle ABC$ 中，$AB=AC,AD\perp BC$ 于点 $D,DE\perp AB$ 于点 $E,BF\perp AC$ 于点 $F,DE=3$，求 BF 的长.

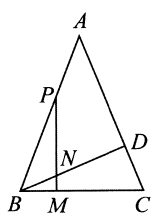


刷素养

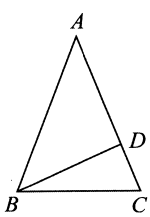
9 [2019 辽宁大连甘井子区期中]如图(1)，在等腰三角形 ABC 中，$AB=AC,\angle BAC=45°,BD\perp AC$，点 P 为 AB 边上一点(不与点 A,B 重合)，$PM\perp BC$，垂足为 M，交 BD 于点 N.

(1)猜想 PN 与 BM 之间的数量关系，并证明.

(2)若点 P 为边 AB 延长线上一点，$PM\perp BC$，垂足为 M，交 DB 延长线于点 N，请在图(2)中画出图形，并判断(1)中的结论是否成立. 若成立，请证明；若不成立，请写出你的猜想并证明.



图(1)



图(2)

13.3.2　等边三角形

课时1　等边三角形的性质与判定

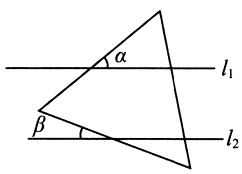
刷基础

▶答案 D22

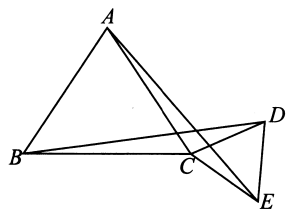
题型1　等边三角形的性质

1 [2019 江西南昌期中]如图,直线 $l_1 // l_2$,将等边三角形如图放置. 若 $\angle\alpha = 35°$,则 $\angle\beta$ 等于　　(　　)

A. 35°　　B. 30°　　C. 25°　　D. 15°



(第1题图)



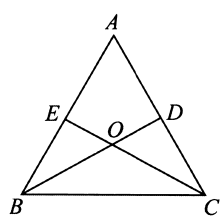
(第2题图)

2 如图,已知 $\triangle ABC$ 和 $\triangle CDE$ 都是等边三角形,则 BD 与 AE 的关系是　　(　　)

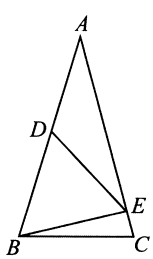
A. $BD = AE$　　B. $BD \perp AE$

C. $BD > AE$　　D. $BD < AE$

3 [2019 江苏东台期中]如图,等边 $\triangle ABC$ 的两条中线 BD, CE 交于点 O,则 $\angle BOC =$ _____.



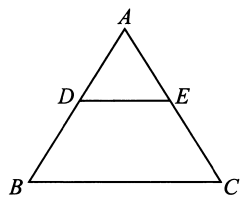
4 [2019 黑龙江哈尔滨南岗区期中]如图,在 $\triangle ABC$ 中,$\angle C = \angle ABC$,$BE \perp AC$,垂足为点 E,$\triangle BDE$ 是等边三角形. 若 $AD = 4$,求 BE 的长.



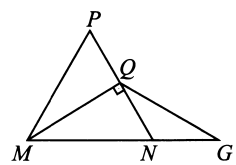
题型2　等边三角形的性质与判定的综合应用

5 如图,$\triangle ABC$ 是等边三角形,$DE // BC$,若 $AB = 5$,$BD = 3$,则 $\triangle ADE$ 的周长为　　(　　)

A. 2　　B. 6　　C. 9　　D. 15



(第5题图)



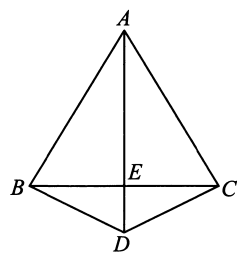
(第6题图)

6 如图,$\triangle MNP$ 中,$\angle P = 60°$,$MN = NP$,$MQ \perp PN$,垂足为 Q,延长 MN 至 G,取 $NG = NQ$,若 $\triangle MNP$ 的周长为 12,$MQ = a$,则 $\triangle MGQ$ 的周长是　　(　　)

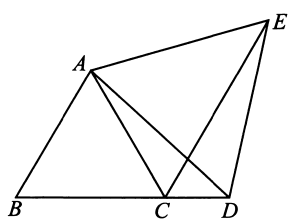
A. $8 + 2a$　　B. $8 + a$　　C. $6 + a$　　D. $6 + 2a$

7 如果 a, b, c 为三角形的三边,且 $(a-b)^2 + (a-c)^2 + |b-c| = 0$,则这个三角形是_____.

8 如图,$AB = AC = 8$ cm,$DB = DC$,若 $\angle ABC = 60°$,则 $BE =$ _____cm.



9 [2019 山东菏泽校级月考]如图,等边 $\triangle ABC$ 中,点 D 在 BC 的延长线上,CE 平分 $\angle ACD$,且 $CE = BD$. 求证:$\triangle ADE$ 是等边三角形.



刷提升

▸答案 D22

1 等边三角形 ABC 的两条角平分线 AD 和 BE 相交所夹锐角的度数为（　　）

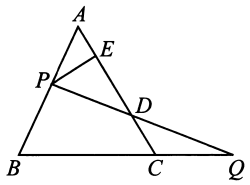
A. 60°　　B. 90°

C. 120°　　D. 150°

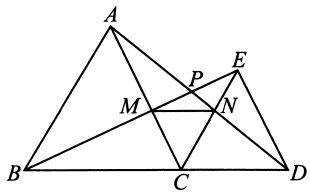
2 [2019 广东茂名校级月考]如图，过边长为 1 的等边三角形 ABC 的边 AB 上一点 P，作 $PE \perp AC$ 于 E，Q 为 BC 延长线上一点，当 $PA = CQ$ 时，连接 PQ 交 AC 边于 D，则 DE 的长为（　　）

A. $\frac{1}{3}$　　B. $\frac{1}{2}$

C. $\frac{2}{3}$　　D. $\frac{3}{4}$



（第 2 题图）



（第 3 题图）

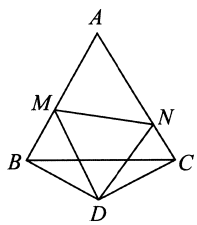
3 如图，$\triangle ABC$ 和 $\triangle DEC$ 都是等边三角形，D 在 BC 的延长线上，AD 与 BE 相交于点 P，AC，BE 相交于点 M，AD，CE 相交于点 N，有下列五个结论：①$AD = BE$；②$\angle BMC = \angle ANC$；③ $\angle APM = 60°$；④ $AN = BM$；⑤$\triangle CMN$ 是等边三角形. 其中正确的有（　　）

A. 2 个　　B. 3 个

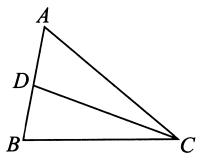
C. 4 个　　D. 5 个

4 [2019 山东菏泽期中]下列三角形：①有两个角等于 60°；②有一个角等于 60° 的等腰三角形；③三个外角都相等的三角形；④一腰上的中线也是这条腰上的高的等腰三角形，其中是等边三角形的有_____.

5 [2019 江苏宜兴校级期中]如图，$\triangle ABC$ 是边长为 3 的等边三角形，$\triangle BDC$ 是等腰三角形，且 $\angle BDC = 120°$. 以 D 为顶点作一个 60° 角，使其两边分别交 AB 于点 M，交 AC 于点 N，连接 MN，则 $\triangle AMN$ 的周长为_____.



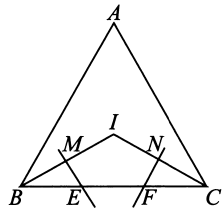
（第 5 题图）



（第 6 题图）

6 如图，已知 $\triangle ABC$ 中，$\angle A = 60°$，D 为 AB 上一点，且 $AC = 2AD + BD$，$\angle B = 4\angle ACD$，则 $\angle DCB$ 的度数是_____.

7 如图，等边三角形 ABC 中，$\angle ABC$，$\angle ACB$ 的平分线交于点 I，BI，CI 的垂直平分线交 BC 于点 E，F. 求证：$BE = EF = CF$.

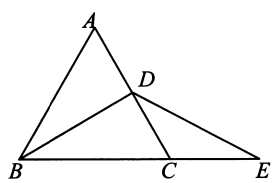


刷素养

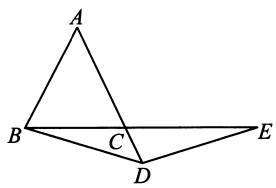
8 已知，$\triangle ABC$ 为等边三角形，点 D 为 AC 上的一个动点，点 E 为 BC 延长线上一点，且 $BD = DE$.

(1)如图(1)，若点 D 在边 AC 上，猜想线段 AD 与 CE 之间的关系，并说明理由；

(2)如图(2)，若点 D 在 AC 的延长线上，(1)中的结论是否成立？请说明理由.



图(1)



图(2)

课时2　含30°角的直角三角形的性质

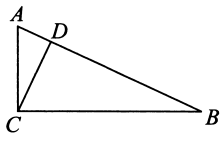
刷基础

▶答案 D23

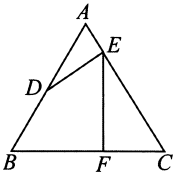
题型　含30°角的直角三角形的性质的应用

1 如图，Rt△ABC中，CD是斜边AB上的高，$\angle B=30°$，$AD=2$ cm，则AB的长度是（　　）

A. 2 cm　　B. 4 cm　　C. 8 cm　　D. 16 cm



（第1题图）



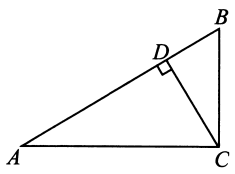
（第2题图）

2 [2019 吉林延边期末]如图，在等边△ABC中，D是AB的中点，$DE\perp AC$于E，$EF\perp BC$于F，已知$AB=8$，则BF的长为（　　）

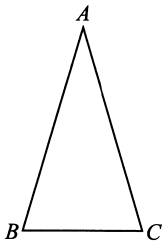
A. 3　　B. 4　　C. 5　　D. 6

3 如图，在△ABC中，$\angle A:\angle B:\angle BCA=1:2:3$，$CD\perp AB$于点$D$，$AB=12$，则$DB$等于（　　）

A. 3　　B. 4　　C. 6　　D. 9



（第3题图）



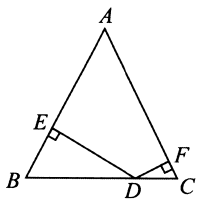
（第4题图）

4 如图，△ABC中，$AB=AC$，$\angle A=30°$，且△ABC的面积是4，则AB的长为（　　）

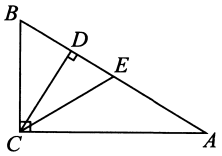
A. 2　　B. 4　　C. 8　　D. 6

5 [2018 山东金乡期末] 如图所示，△ABC是边长为20的等边三角形，点D是BC边上任意一点，$DE\perp AB$于点E，$DF\perp AC$于点F，则$BE+CF=$（　　）

A. 5　　B. 10　　C. 15　　D. 20



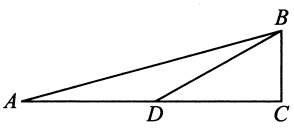
（第5题图）



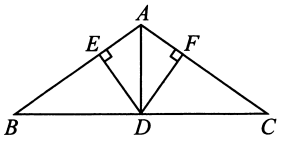
（第6题图）

6 如图，Rt△ABC中，CD，CE分别是斜边AB上的高和中线，如果$\angle A=30°$，$BD=1$ cm，那么$\angle BCD=$_____，$BC=$_____cm，$AD=$_____ cm.

7 [2019 黑龙江尚志期末]如图，在△ABC中，$\angle C=90°$，$\angle A=15°$，$\angle DBC=60°$，$BC=4$，则$AD=$_____.



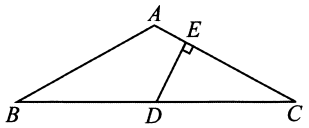
（第7题图）



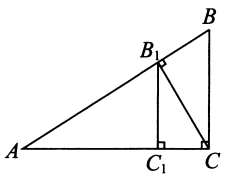
（第8题图）

8 如图是屋顶的“人”字形钢架，其中斜梁$AB=AC$，顶角$\angle BAC=120°$，跨度$BC=10$ m，AD为中柱（即底边的中线），两根支撑架$DE\perp AB$，$DF\perp AC$，则$DE+DF=$_____m.

9 [2019 黑龙江嘉荫期中]如图，在△ABC中，$AB=AC$，$\angle BAC=120°$，D为BC的中点，$DE\perp AC$于点E，$AE=8$，求CE的长.



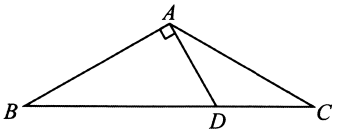
10 如图，△ABC是一个直角三角形，其中$BC\perp AC$，$\angle BAC=30°$，$AB=10$ cm，$CB_1\perp AB$，$B_1C_1\perp AC$，垂足分别是B_1，C_1，那么B_1C_1的长是多少？



刷易错

易错点　利用含30°角的直角三角形的性质时忽略30°角“所对”直角边造成错解

11 [2019 黑龙江哈尔滨南岗区期中]如图，在△ABC中，$AB=AC$，$\angle B=30°$，$AD\perp AB$，交BC于点D，$AD=4$，则BC的长为（　　）



A. 8　　B. 4　　C. 12　　D. 6

当你偶尔发现语言变得无力时，不妨安静下来，让沉默替你发声。

专题　等腰三角形的性质与判定

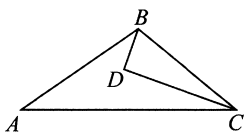
刷难关

▶答案 D24

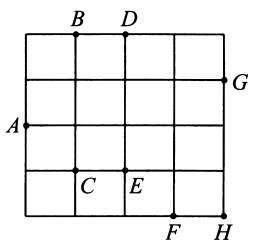
类型1　等腰三角形的性质与判定

1 [2018 陕西宝鸡渭滨区二模]如图，D 为 $\triangle ABC$ 内一点，CD 平分 $\angle ACB$，$BD \perp CD$，$\angle A = \angle ABD$. 若 $AC = 5$，$BC = 3$，则 BD 的长为　(　　)

A. 1　　B. 1.5　　C. $2\sqrt{2}$　　D. 4



(第 1 题图)

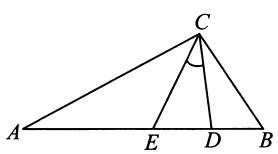


(第 2 题图)

2 在 4×4 的方格中给出如图所示的 8 个点，任选 3 个点作为三角形的顶点，可构成等腰三角形的个数为　(　　)

A. 5　　B. 6　　C. 7　　D. 8

3 如图，在 $\triangle ABC$ 中，$\angle ACB = 100°$，点 D，E 在 AB 上，且 $BE = BC$，$AD = AC$，则 $\angle DCE$ 的大小是_____.

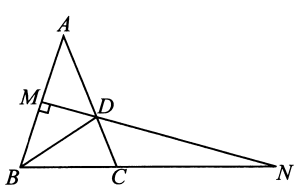


4 在 $\triangle ABC$ 中，a，b，c 为三边长，且有 $a(a-b) = c(c-b)$，那么 $\triangle ABC$ 的形状是_____.

5 如图，在 $\triangle ABC$ 中，$AB = AC$，$\angle A = 36°$，AB 的垂直平分线 MN 交 BC 的延长线于点 N，交 AC 于点 D，连接 BD，$AD = 6$.

(1)求 $\angle N$ 的度数；

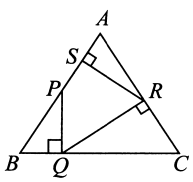
(2)求 BC 的长.



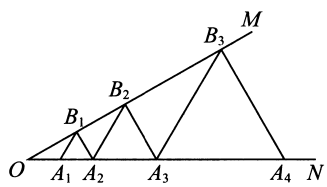
类型2　等边三角形的性质与判定

6 等边 $\triangle ABC$ 的边长为 1，P 在 AB 上，$PQ \perp BC$，$QR \perp AC$，$RS \perp AB$，其中 Q，R，S 为垂足. 若 $SP = \frac{1}{4}$，则 AP 的长是　(　　)

A. $\frac{2}{9}$　　B. $\frac{5}{9}$　　C. $\frac{1}{9}$　　D. $\frac{5}{9}$ 或 $\frac{1}{9}$



(第 6 题图)



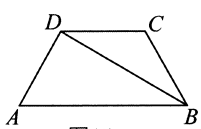
(第 7 题图)

7 [2019 辽宁盘锦双台子区期末]如图，$\angle MON = 30°$，点 A_1，A_2，A_3，…在射线 ON 上，点 B_1，B_2，B_3，…在射线 OM 上，$\triangle A_1B_1A_2$，$\triangle A_2B_2A_3$，$\triangle A_3B_3A_4$，… 均为等边三角形. 若 $OA_1 = 1$，则 $\triangle A_nB_nA_{n+1}$ 的边长为_____.

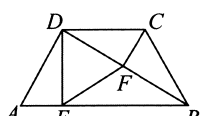
8 如图(1)，在四边形 $ABCD$ 中，$DC \parallel AB$，$AD = BC$，BD 平分 $\angle ABC$.

(1)求证：$AD = DC$；

(2)如图(2)，在上述条件下，若 $\angle A = \angle ABC = 60°$，过点 D 作 $DE \perp AB$，过点 C 作 $CF \perp BD$，垂足分别为 E，F，连接 EF. 判断 $\triangle DEF$ 的形状，并证明你的结论.



图(1)



图(2)

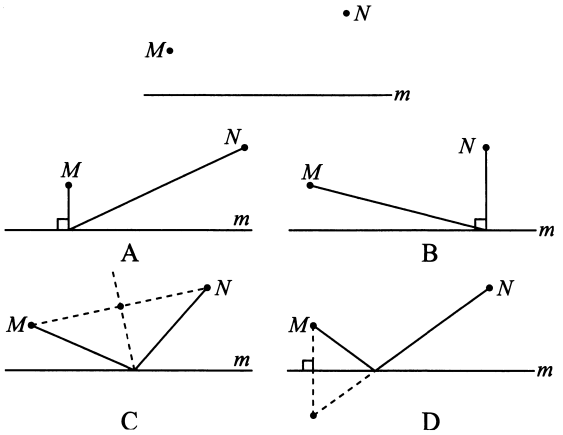
13.4　课题学习　最短路径问题

刷基础

▶答案 D25

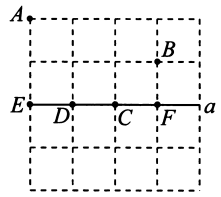
题型1　“将军饮马”问题

1 如图，直线 m 表示一条河，M，N 表示两个村庄，欲在 m 上的某处修建一个给水站，向两个村庄供水，现有如图所示的四种铺设管道的方案，图中实线表示铺设的管道，则所需管道最短的方案是（　　）

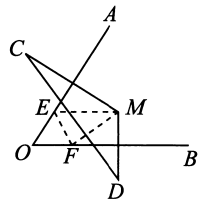


2 [2019 河北邯郸校级月考] 如图，在 4×4 的正方形网格中，有 A，B 两点，在直线 a 上求一点 P，使 $PA+PB$ 最短，则点 P 应选在（　　）

A. C 点　　B. D 点　　C. E 点　　D. F 点



（第 2 题图）

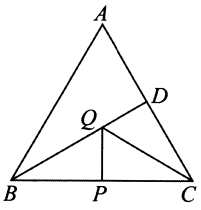


（第 3 题图）

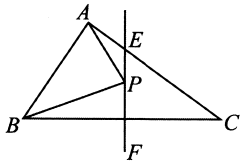
3 如图，OA，OB 分别是线段 MC，MD 的垂直平分线，$MD=5$ cm，$MC=7$ cm，$CD=10$ cm，一只小蚂蚁从点 M 出发爬到 OA 边上任意一点 E，再爬到 OB 边上任意一点 F，然后爬回 M 点，则小蚂蚁爬行的最短路径为（　　）

A. 12 cm　　B. 10 cm　　C. 7 cm　　D. 5 cm

4 [2019 广东珠海香洲区期末] 如图，等边△ABC 的周长为 18 cm，BD 为 AC 边上的中线，动点 P，Q 分别在线段 BC，BD 上运动，连接 CQ，PQ. 当 BP 长为_____ cm 时，线段 $CQ+PQ$ 的值最小.



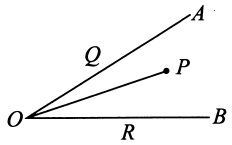
（第 4 题图）



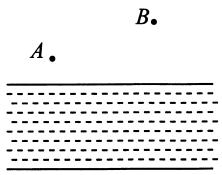
（第 5 题图）

5 [2019 湖北丹江口期中] 如图，在△ABC 中，$AB=3$，$AC=4$，$AB\perp AC$，EF 垂直平分 BC，点 P 为直线 EF 上一动点，则△ABP 周长的最小值是_____.

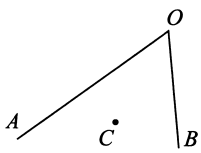
6 [2018 甘肃永登期中，难] 如图，$\angle AOB=30°$，$\angle AOB$ 内有一定点 P，且 $OP=10$. 在 OA 上有一点 Q，OB 上有一点 R. 若△PQR 的周长最小，则最小周长是_____.



7 如图，在一条河的同岸有两个村庄 A 和 B，两村要在河上合修一座桥，桥修在什么位置可以使两村到桥的距离之和最短？并说明理由.

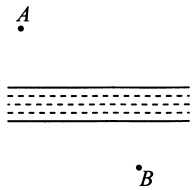


8 某班举行文艺晚会，桌子摆成两条直线（OA，OB），OA 桌面上摆满了橘子，OB 桌面上摆满了糖果，坐在 C 处的小明先拿橘子再拿糖果，然后回到座位，请你帮他设计路线，使其行走的总路程最短.（保留作图痕迹）



题型2　“造桥选址”问题

9 如图所示，在一条河的两岸有两个村庄，现在要在河上建一座小桥，桥的方向与河岸垂直，设河的宽度不变，试问：桥建在何处，才能使从 A 到 B 的距离最短？

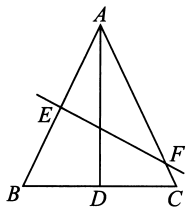


刷提升

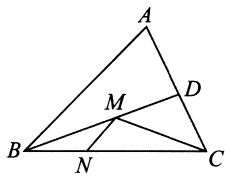
▶答案 D25

1 如图，△ABC 中，$AB=AC$，$BC=5$，$S_{\triangle ABC}=15$，$AD\perp BC$ 于点 D，EF 垂直平分 AB，交 AC 于 F，在 EF 上确定一点 P 使 $PB+PD$ 最小，则这个最小值为　（　）

A. 3　　B. 4　　C. 5　　D. 6



（第 1 题图）



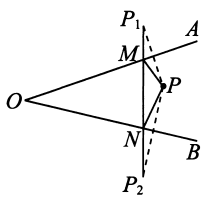
（第 2 题图）

2 [2019 福建龙岩新罗区校级期中]如图，在锐角三角形 ABC 中，$AB=4$，△ABC 的面积为 8，BD 平分 $\angle ABC$. 若 M，N 分别是 BD，BC 上的动点，则 $CM+MN$ 的最小值是　（　）

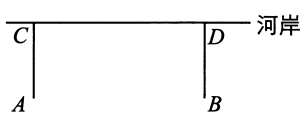
A. 2　　B. 4　　C. 6　　D. 8

3 如图，点 P 为 $\angle AOB$ 内一点，分别作点 P 关于 OA，OB 的对称点 P_1，P_2，连接 P_1，P_2 交 OA 于 M，交 OB 于 N，若 $P_1P_2=6$，则△PMN 的周长为　（　）

A. 4　　B. 5　　C. 6　　D. 7



（第 3 题图）



（第 4 题图）

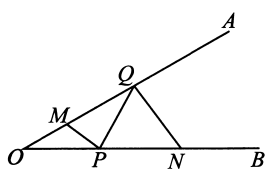
4 [2019 四川成都青羊区校级月考]如图，牧童在 A 处放牛，其家在 B 处，A，B 到河岸的距离分别为 AC 和 BD，且 $AC=BD$，若点 A 到河岸 CD 的中点的距离为 500 米，则牧童从 A 处把牛牵到河边饮水再回家，最短距离是　（　）

A. 750 米　　B. 1 000 米　　C. 1 500 米　　D. 2 000 米

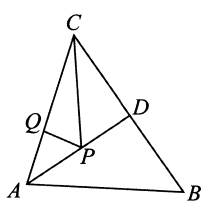
5 如图，$\angle AOB=30°$，M，N 分别是边 OA，OB 上的定点，P，Q 分别是边 OB，OA 上的动点，记 $\angle OPM=\alpha$，$\angle OQN=\beta$，当 $MP+PQ+QN$ 的值最小时，关于 α，β 的数量关系正确的是　（　）

A. $\beta-\alpha=60°$　　B. $\beta+\alpha=210°$

C. $\beta-2\alpha=30°$　　D. $\beta+2\alpha=240°$



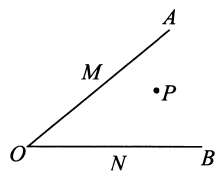
（第 5 题图）



（第 6 题图）

6 [2019 江苏苏州吴中区月考]如图，在△ABC 中，$AB=AC=10$，$BC=12$，$AD=8$，AD 是 $\angle BAC$ 的平分线. 若 P，Q 分别是 AD 和 AC 上的动点，则 $PC+PQ$ 的最小值是_____.

7 如图，P 为 $\angle AOB$ 内一定点，M，N 分别是射线 OA，OB 上一点，当△PMN 周长最小时，$\angle MPN=80°$，则 $\angle AOB=$_____.

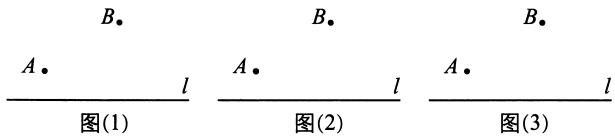


8 [2019 天津和平区期中]如图，已知 A，B 两点在直线 l 的同一侧，根据题意，尺规作图.

(1)在图(1)直线 l 上找出一点 P，使 $PA=PB$.

(2)在图(2)直线 l 上找出一点 P，使 $PA+PB$ 的值最小.

(3)在图(3)直线 l 上找出一点 P，使 $|PA-PB|$ 的值最大.



图(1)　　图(2)　　图(3)

刷素养

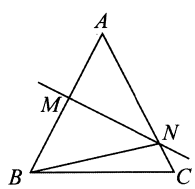
9 [2019 河北临西期末，难]如图，在△ABC 中，$AB=AC$，AB 的垂直平分线交 AB 于 M，交 AC 于 N.

(1)若 $\angle ABC=70°$，则 $\angle MNA$ 的度数是_____.

(2)连接 NB，若 $AB=8$ cm，△NBC 的周长是 14 cm.

①求 BC 的长；

②在直线 MN 上是否存在点 P，使△PBC 的周长值最小？若存在，请标出点 P 的位置并求出△PBC 周长的最小值；若不存在，请说明理由.



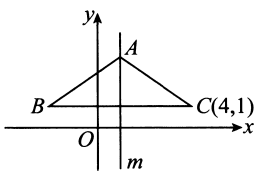
全章综合训练

刷章测

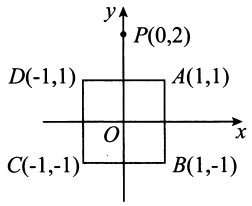
1 如图,在平面直角坐标系中,$\triangle ABC$ 关于直线 m(直线 m 上各点的横坐标都为 1)对称,点 C 的坐标为(4,1),则点 B 的坐标为　(　　)

A. $(-2,1)$　　B. $(-3,1)$

C. $(-2,-1)$　　D. $(-2,-1)$



(第 1 题图)



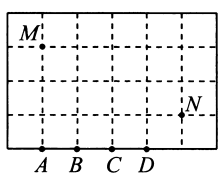
(第 2 题图)

2 在平面直角坐标系中,正方形的顶点坐标分别为 $A(1,1)$,$B(1,-1)$,$C(-1,-1)$,$D(-1,1)$,y 轴上有一点 $P(0,2)$,作点 P 关于点 A 的对称点 P_1,作点 P_1 关于点 B 的对称点 P_2,作点 P_2 关于点 C 的对称轴 P_3,作点 P_3 关于点 D 的对称点 P_4,作点 P_4 关于点 A 的对称点 P_5,作点 P_5 关于点 B 的对称点 P_6,…,按此操作下去,则点 $P_{2\,018}$ 的坐标为　(　　)

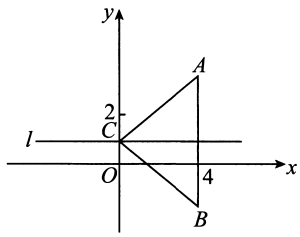
A. $(0,2)$　　B. $(2,0)$

C. $(0,-2)$　　D. $(-2,0)$

3 如图,桌球的桌面上有 M,N 两球,若要将 M 球射向桌面的一边,反弹一次后击中 N 球,则 A,B,C,D 4 个点中,可以反弹击中 N 球的是_____点.



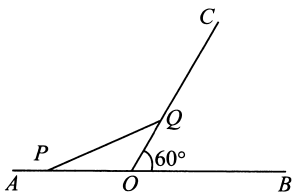
(第 3 题图)



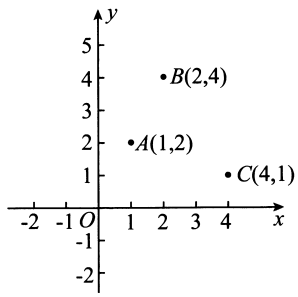
(第 4 题图)

4 如图,在直角坐标系 xOy 中,直线 l 过点 $(0,1)$ 且与 x 轴平行,$\triangle ABC$ 关于直线 l 对称,已知点 A 坐标是 $(4,4)$,则点 B 的坐标是_____.

5 如图,$\angle BOC = 60°$,点 A 是 BO 延长线上的一点,$OA = 10$ cm,动点 P 从点 A 出发沿 AB 以 2 cm/s 的速度移动,动点 Q 从点 O 出发沿 OC 以 1 cm/s 的速度移动,如果 P,Q 同时出发,用 t(s)表示移动的时间,当 $t =$ _____s 时,$\triangle POQ$ 是等腰三角形.



6 如图所示,某公路(视为 x 轴)的同一侧有 A,B,C 三个村庄,要在公路边建一货栈 D(视作在 x 轴上),向 A,B,C 三个村庄运送农用物资,路线是:$D\to A\to B\to C\to D$(或 $D\to C\to B\to A\to D$).试问在公路上是否存在点 D 使送货路程之和最短?若存在,请在图中画出点 D 所在位置;若不存在,请说明理由.

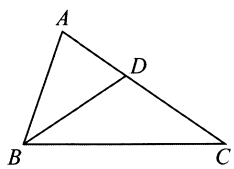


7 [2019 福建莆田期中]如图(1),在 $\triangle ABC$ 中,$\angle BAC = 75°$,$\angle ACB = 35°$,$\angle ABC$ 的平分线 BD 交边 AC 于点 D.

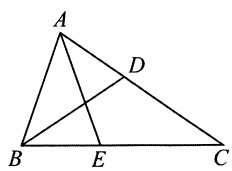
(1)求证:$\triangle BCD$ 为等腰三角形;

(2)若 $\angle BAC$ 的平分线 AE 交边 BC 于点 E,如图(2),求证:$BD + AD = AB + BE$;

(3)若 $\angle BAC$ 外角的平分线 AE 交 CB 的延长线于点 E,请你探究(2)中的结论是否仍然成立,并直接写出正确的结论.



图(1)



图(2)

刷中考

▶答案 D27

1 [2018 湖南永州中考]誉为全国第三大露天碑林的“浯溪碑林”,摩崖上铭刻着 500 多方古今名家碑文,其中悬针篆文具有较高的历史意义和研究价值,下面四个悬针篆文文字明显不是轴对称图形的是 (　　)

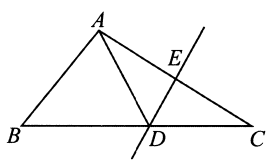


A　　B　　C　　D

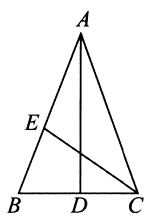
2 [2018 湖北黄冈中考]如图,在△ABC 中,DE 是 AC 的垂直平分线,且分别交 BC,AC 于点 D 和 E,$\angle B=60°$,$\angle C=25°$,则 $\angle BAD$ 为 (　　)

A. 50°　　B. 70°

C. 75°　　D. 80°



(第 2 题图)



(第 3 题图)

3 [2018 浙江湖州中考]如图,AD,CE 分别是△ABC 的中线和角平分线. 若 $AB=AC$,$\angle CAD=20°$,则 $\angle ACE$ 的度数是 (　　)

A. 20°　　B. 35°

C. 40°　　D. 70°

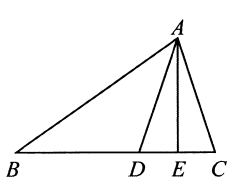
4 [2018 辽宁沈阳中考]在平面直角坐标系中,点 B 的坐标是(4,−1),点 A 与点 B 关于 x 轴对称,则点 A 的坐标是 (　　)

A. (4,1)　　B. (−1,4)

C. (−4,−1)　　D. (−1,−4)

5 [2018 四川甘孜州中考]直线上依次有 A,B,C,D 四个点,$AD=7$,$AB=2$,若 AB,BC,CD 可构成以 BC 为腰的等腰三角形,则 BC 的长为_____.

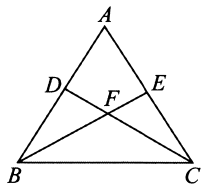
6 [2018 贵州遵义中考]如图,在△ABC 中,点 D 在 BC 边上,$BD=AD=AC$,E 为 CD 的中点. 若 $\angle CAE=16°$,则 $\angle B$ 为_____度.



7 [2017 江苏连云港中考]如图,已知等腰三角形 ABC 中,$AB=AC$,点 D,E 分别在边 AB,AC 上,且 $AD=AE$,连接 BE,CD,交于点 F.

(1)判断 $\angle ABE$ 与 $\angle ACD$ 的数量关系,并说明理由;

(2)求证:过点 A,F 的直线垂直平分线段 BC.



刷素养

8 [2018 浙江绍兴中考]数学课上,张老师举了下面的例题:

例 1　等腰三角形 ABC 中,$\angle A=110°$,求 $\angle B$ 的度数. (答案:35°)

例 2　等腰三角形 ABC 中,$\angle A=40°$,求 $\angle B$ 的度数. (答案:40°或 70°或 100°)

张老师启发同学们进行变式,小敏编了如下一题:

变式　等腰三角形 ABC 中,$\angle A=80°$,求 $\angle B$ 的度数.

(1)请你解答以上的变式题;

(2)解(1)后,小敏发现,$\angle A$ 的度数不同,得到 $\angle B$ 的度数的个数也可能不同. 如果在等腰三角形 ABC 中,设 $\angle A=x°$,当 $\angle B$ 有三个不同的度数时,请你探索 x 的取值范围.

14.1 整式的乘法

14.1.1 同底数幂的乘法

刷基础

▶答案 D28

题型1 同底数幂的乘法法则

1 [2019 湖南邵阳校级月考]计算 $a^2 \cdot a^4$ 的结果为 (　　)

A. a^2　　B. a^4　　C. a^6　　D. a^8

2 下列各式的计算结果为 a^7 的是 (　　)

A. $(-a)^2 \cdot (-a)^5$　　B. $(-a)^2 \cdot (-a^5)$

C. $(-a^2) \cdot (-a)^5$　　D. $(-a) \cdot (-a)^6$

3 计算 $(a-b+c)^2(b-a-c)^3$ 等于 (　　)

A. $(a-b+c)^5$　　B. $(b-a+c)^5$

C. $-(a-b+c)^5$　　D. $-(b-a-c)^5$

4 [2019 湖南耒阳期中]下列各式中,正确的是 (　　)

A. $t^5 \cdot t^5 = 2t^5$　　B. $t^4 + t^2 = t^6$

C. $t^3 \cdot t^4 = t^{12}$　　D. $t^2 \cdot t^3 = t^5$

5 化简 $2a^3 + a^2 \cdot a$ 的结果等于 (　　)

A. $3a^3$　　B. $2a^3$　　C. $3a^6$　　D. $2a^6$

6 当 $a<0$,n 为正整数时,$(-a)^5 \cdot (-a)^{2n}$ 的值为 (　　)

A. 正数　　B. 负数　　C. 非正数　　D. 非负数

7 计算:$a^6 \cdot (-a^2) =$ _____.

8 若 $2^{n+1} \times 2^3 = 2^{10}$($n$ 为正整数),则 $n =$ _____.

9 计算:$3^2 \times 3^7 - 3^2 \times 3^6 + 3 \times (-3)^7$.

10 计算:(1)$a^{n+2} \cdot a^{n+1} \cdot a^n$;

(2)$a^4 \cdot a^{n-1} + 2a^{n+1} \cdot a^2$;

(3)$(x-y)^2 \cdot (y-x)^5$.

11 求下列各式中 x 的值.

(1)$3^{2x+1} = 81 \times 243$;

(2)$4^{3x-1} \times 16 = 64 \times 4$.

12 我们规定:$a * b = 10^a \times 10^b$,例如 $3 * 4 = 10^3 \times 10^4 = 10^7$.

(1)试求 $12 * 3$ 和 $2 * 5$ 的值;

(2)想一想,$(a * b) * c$ 与 $a * (b * c)$ 相等吗?请验证你的结论.

题型2 同底数幂的乘法法则的逆用

13 [2019 北京朝阳区期中]$10^x = a$,$10^y = b$,则 10^{x+y+2} 等于 (　　)

A. $2ab$　　B. $a+b$　　C. $a+b+2$　　D. $100ab$

14 [2018 湖南娄底娄星区期末]如果 $10^m = 12$,$10^n = 3$,那么 $10^{m+n} =$ _____.

15 已知 $3^x = 4$,则 $3^{x+2} =$ _____.

16 [2019 江苏扬州江都区校级月考]已知 $a^x = 5$,$a^{x+y} = 25$,则 $a^x + a^y$ 的值为_____.

刷易错

易错点 把互为相反数的底数化为同底数时出现符号错误

17 $(a-b)^{2n} \cdot (b-a)^3 \cdot (a-b)^{m-2}$ 的计算结果是 (　　)

A. $(a-b)^{2n+m+1}$　　B. $-(a-b)^{2n+m+1}$

C. $(b-a)^{2n+m+1}$　　D. $-(b-a)^{2n+m+1}$

做一个简单的人,踏实而务实。不沉溺幻想,不庸人自扰。

14.1.2　幂的乘方 +14.1.3　积的乘方

刷基础

▸答案 D28

题型1　幂的乘方法则

1 下列运算正确的是（　　）

A. $(x^3)^3=x^6$　　B. $(-x)^5=-x^5$

C. $x^3\cdot x^2=x^6$　　D. $3x^2+2x^3=5x^5$

2 [2019 四川渠县期末]已知 $a^m=2$，$a^n=\frac{1}{2}$，a^{2m+3n} 的值为（　　）

A. 6　　B. $\frac{1}{2}$　　C. 2　　D. $\frac{11}{2}$

3 若 $(a^3)^2=64$，则 a 等于（　　）

A. 2　　B. -2

C. ±2　　D. 以上都不对

4 若 m,n 均为正整数，且 $2^m\cdot2^n=32$，$(2^m)^n=64$，则 $mn+m+n$ 的值为（　　）

A. 10　　B. 11　　C. 12　　D. 13

5 计算：$(y^3)^2\cdot(y^2)^4=$_____.

6 [2019 湖南长沙雨花区校级月考]计算：$(-x^2)^3+(-x^3)^2+(x^2)^2\cdot x^2$.

题型2　幂的乘方法则的逆用

7 [2019 河南漯河校级月考]若 $x+4y=3$，则 $2^x\cdot16^y$ 的值为（　　）

A. 6　　B. 8　　C. 2　　D. 9

8 已知 $32^m=8^n$，则 m,n 满足的关系正确的是（　　）

A. $4m=n$　　B. $5m=3n$　　C. $3m=5n$　　D. $m=4n$

9 比较 3^{55}，4^{44}，5^{33} 的大小关系是（　　）

A. $3^{55}<4^{44}<5^{33}$　　B. $4^{44}<3^{55}<5^{33}$

C. $5^{33}<4^{44}<3^{55}$　　D. $5^{33}<3^{55}<4^{44}$

10 已知 $a^2=3$，则 $a^6-7=$_____.

11 [2019 山东德州校级期中]若 $a+3b-2=0$，则 $3^a\cdot27^b=$_____.

12 根据已知求值：

(1)若 $2x+5y-3=0$，求 $4^x\cdot32^y$ 的值；

(2)若 $2^6=a^2=4^b$，求 $a+b$ 值.

题型3　积的乘方法则

13 计算 $(-2a^3)^2$ 的结果是（　　）

A. $-4a^5$　　B. $4a^5$　　C. $-4a^6$　　D. $4a^6$

14 [2018 江苏徐州中考]下列计算正确的是（　　）

A. $2a^2-a^2=1$　　B. $(ab)^2=ab^2$

C. $a^2+a^3=a^5$　　D. $(a^2)^3=a^6$

15 计算 $(-a^m)^5\cdot a^n=$（　　）

A. $-a^{5+m}$　　B. a^{5+m}

C. a^{5m+n}　　D. $-a^{5m+n}$

16 [2019 四川资阳雁江区模拟]计算 $a\cdot a^5-(2a^3)^2$ 的结果为（　　）

A. a^6-2a^5　　B. $-a^6$

C. a^6-4a^5　　D. $-3a^6$

17 计算 $(-5y^3)^3$ 的结果等于_____.

18 [2019 山西襄汾期中]计算 $(-x^2y)^3$ 的结果是_____.

题型4　积的乘方法则的逆用

19 计算：$\left(-\frac{5}{12}\right)^{2019}\times\left(2\frac{2}{5}\right)^{2018}=$（　　）

A. $-\frac{5}{12}$　　B. $-\frac{12}{5}$　　C. $\frac{5}{12}$　　D. $-2\,016$

20 [2019 山西晋中校级月考]计算：$0.125^{100}\times8^{101}=$_____.

21 计算：$\left(\frac{2}{3}\right)^{2018}\cdot(1.5)^{2019}\div(-1)^{2018}=$_____.

刷提升

▶答案 D29

1 [2018 安徽利辛模拟]化简$(-a^2)\cdot a^5$所得的结果是（　　）

A. a^7　　B. $-a^7$　　C. a^{10}　　D. $-a^{10}$

2 [2019 广西平南期中]如果$a^{2n-1}a^{n+5}=a^{16}$,那么n的值为（　　）

A. 3　　B. 4　　C. 5　　D. 6

3 在等式$a^2\cdot(-a)\cdot(\quad)=a^{12}$中,下列各式可以填入括号内的是（　　）

A. a^9　　B. $-a^9$　　C. $(-a)^{10}$　　D. $-a^{10}$

4 [2019 河北唐山路北区期中]下列运算正确的是（　　）

A. $a^3\cdot a=a^4$　　B. $(-a^4)=a^4$

C. $a^2+a^3=a^5$　　D. $(a^2)^3=a^5$

5 若$(a^mb^n)^3=a^9b^{15}$,则m,n的值分别为（　　）

A. 9,5　　B. 3,5　　C. 5,3　　D. 6,12

6 [2018 辽宁大连中考]计算$(x^3)^2$的结果是（　　）

A. x^5　　B. $2x^3$　　C. x^9　　D. x^6

7 计算$(-a^{n-1})^2$的结果等于（　　）

A. a^{2n-1}　　B. $-a^{2n-1}$

C. a^{2n-2}　　D. $-a^{2n-2}$

8 [2018 湖南邵阳期中]$(-x)\cdot x^2\cdot(-x)^6=$_____.

9 计算:$(-2xy^2)^2=$_____.

10 [2019 江苏南通崇川区校级月考]若$a^{n+1}\cdot a^{m+n}=a^6$,且$m-2n=1$,求m^n的值.

11 已知$x^{m+n}=24,x^m=8$,求x^{3n}的值.

12 已知$3^a=2,3^b=5,3^c=200$,写出一个a,b,c的等量关系式.

13 已知$x^{2m}=2$,求$(2x^{3m})^2-(3x^m)^2$的值.

14.1.4　整式的乘法

课时1　单项式与单项式相乘

刷基础

▶答案 D29

题型1　单项式相乘的运算

1 计算$\frac{1}{3}a^2\cdot(-6ab)$的结果正确的是　(　　)

A. $-2a^2b$　B. $2a^2b$　C. $-2a^3b$　D. $2a^3b$

2 [2019 福建龙岩新罗区校级月考]下列计算正确的是　(　　)

A. $a^4+a^5=a^9$　B. $a^3\cdot a^3\cdot a^3=3a^3$

C. $(-a^3)^4=a^7$　D. $2a^4\cdot 3a^5=6a^9$

3 计算$(6\times10^3)\times(8\times10^5)$的结果是　(　　)

A. 48×10^9　B. 48×10^{15}

C. 4.8×10^8　D. 4.8×10^9

4 下列运算正确的是　(　　)

A. $(-2ab)\cdot(-3ab)^3=-54a^4b^4$

B. $5x^2\cdot(3x^3)^2=15x^{12}$

C. $(-0.1b)\cdot(-10b^2)^3=-b^7$

D. $(3\times10^n)\left(\frac{1}{3}\times10^n\right)=10^{2n}$

5 计算：$(x^n)^n\cdot36x^n=$　(　　)

A. $36x^n$　B. $36x^{n^3}$　C. $36x^{n^2+n}$　D. $36x^{2+n}$

6 若单项式$-2x^{4a-b}y^3$与$\frac{1}{2}x^2y^{a+b}$是同类项，则这两个单项式的积是　(　　)

A. x^4y^6　B. $-x^2y^3$　C. $-\frac{3}{2}x^2y^3$　D. $-x^4y^6$

7 如果单项式$-\frac{1}{2}x^{2a-3}y^2$和$\frac{1}{3}x^3y^{a+2b-7}$的和仍为单项式，那么它们的乘积为　(　　)

A. $-\frac{2}{3}x^6y^4$　B. $-\frac{1}{6}x^3y^2$

C. $-\frac{1}{6}x^6y^4$　D. $\frac{1}{6}x^6y^4$

8 [2019 北京顺义区期末]计算$-\frac{1}{3}ab^2\cdot(3a^2b)^2$的结果是_____.

9 [2019 上海浦东新区期中]计算：$a^2\cdot(-ab^3)^2\cdot(-2b^2)^3$.

10 [2019 黑龙江大庆校级月考]已知$a^{2m}=2$，$b^{3n}=3$，求$(b^{2n})^3-a^{3m}\cdot b^{3n}\cdot a^{5m}$的值.

11 计算：$\left(-\frac{3}{4}x^3y^2\right)^3\cdot(2xy^2)^2-\left(-\frac{1}{2}x^4y^3\right)^2\cdot x^3y^4$.

12 有理数x，y满足条件$|2x-3y+1|+(x+3y+5)^2=0$，求代数式$(-2xy)^2\cdot(-y^2)\cdot6xy^2$的值.

题型2　已知单项式的乘积求字母次数的值

13 若$x^3\cdot x^my^{2n}=x^9y^8$，则$4m-3n=$　(　　)

A. 8　B. 9　C. 10　D. 12

14 [2019 河南开封校级月考]若单项式$3x^2y$与$-2x^3y^3$的积为mx^5y^n，则$m+n=$_____.

15 若$(a^{m+1}b^{n+2})\cdot(a^{2n-1}b^{2n})=a^5b^3$，则$m+n$的值为_____.

题型3　单项式的乘积的实际应用

16 长方体的长是2×10^4厘米，宽是1.5×10^3厘米，高是3×10^3厘米，那么它的体积是_____立方厘米.

课时2　单项式与多项式相乘

刷基础

▶答案 D30

题型　单项式乘多项式

1 [2019 吉林德惠校级月考]计算$(x^3)^2(x^2+2x+1)$的结果是　(　　)

A. $x^4+2x^3+x^2$　　B. $x^5+2x^4+x^3$

C. $x^8+2x^7+x^6$　　D. $x^8+2x^4+x^3$

2 一个长方体的长、宽、高分别为$3a-4$,$2a$,a,它的体积等于　(　　)

A. $3a^3-4a^2$　　B. a^2

C. $6a^3-8a^2$　　D. $6a^2-8a$

3 计算:$(2x^2)^3-6x^3(x^3+2x^2+x)=$　(　　)

A. $-12x^5-6x^4$　　B. $2x^6+12x^5+6x^4$

C. x^2-6x-3　　D. $2x^6-12x^5-6x^4$

4 [2019 河南周口校级月考]计算$x(y-z)-y(z-x)+z(x-y)$的结果正确的是　(　　)

A. $2xy-2yz$　B. $-2yz$　C. $xy-2yz$　D. $2xy-xz$

5 下列计算正确的是　(　　)

A. $2a(3a-1)=6a^3-1$　　B. $x\cdot x^3=x^3$

C. $(-2xy^2)^4=16x^4y^8$　　D. $x^3+x^3=x^6$

6 方程$2x(x-1)-x(2x-5)=12$的解为　(　　)

A. $x=2$　　B. $x=1$　　C. $x=4$　　D. $x=0$

7 [2019 安徽濉溪期中]已知$ab^2=-1$,则$-ab(a^2b^5-ab^3-b)$的值等于　(　　)

A. -1　　B. 0　　C. 1　　D. 无法确定

8 计算:$2a^2b(2a-3b+1)=$_____.

9 [2018 广东揭西期末]计算:$2m^2n\cdot(m^2+n-1)=$_____.

10 计算:$(x-3y)(-6x)=$_____.

11 [2019 上海浦东新区期中]计算:$6x(-x^2-xy+y^2)\cdot(-xy)$.

12 先化简,再求值:$3a(2a^2-4a+3)-2a^2(3a+4)$,其中$a=-2$.

13 张华在计算一个整式乘$3ac$时,误看成了加上$3ac$,得到的答案是$3bc-3ac-2ab$. 该题正确的计算结果应是多少?

14 已知有理数a,b,c满足$|a-b-3|+(b+1)^2+|c-1|=0$,求$(-3ab)\cdot(a^2c-6b^2c)$的值.

15 已知$(m-x)\cdot(-x)+n(x+m)=x^2+5x-6$对于任意$x$都成立,求$m(n-1)+n(m+1)$的值.

BS-2019-04-27

你每天起床之前有两个选择，要么继续趴下做你没有做完的梦，要么拉开被子完成你没有完成的梦想。

刷提升

▶答案 D30

1 计算$(-3a^3)\cdot 2a^2b^2\cdot 4b^3$的结果是　(　　)

A. $-24a^6b^6$　　B. $-32a^5b^5$

C. $32a^6b^6$　　D. $-24a^5b^5$

2 $(-2x^4)^2\cdot(-3x^3)^3$的计算结果是　(　　)

A. $-108x^{17}$　　B. $108x^{17}$

C. $6x^{17}$　　D. $-6x^{17}$

3 计算$(-2a^3+3a^2-4a)(-5a^5)$等于　(　　)

A. $10a^{15}-15a^{10}+20a^5$　　B. $-7a^8-2a^7-9a^6$

C. $10a^8+15a^7-20a^6$　　D. $10a^8-15a^7+20a^6$

4 下列计算正确的是　(　　)

A. $2x^3\cdot(3x)^2=6x^6$

B. $(-3x^4)\cdot(-4x^3)=12x^7$

C. $3x^4\cdot 5x^3=8x^7$

D. $(-x)\cdot(-2x)^3\cdot(-3x)^2=-72x^6$

5 [2018 广东佛山南海区校级期中]下列计算正确的是　(　　)

A. $(-2a)\cdot(3ab-2a^2b)=-6a^2b-4a^3b$

B. $2ab^2\cdot(-a^2+2b^2-1)=-4a^3b^4$

C. $abc\cdot(3a^2b-2ab^2)=3a^3b^2-2a^2b^3$

D. $(ab)^2\cdot(3ab^2-c)=3a^3b^4-a^2b^2c$

6 [2018 湖南岳阳期末]计算:$(-2xy^2)^2\cdot xy=$_____.

7 [2018 江苏泰州中考]计算:$\frac{1}{2}x\cdot(-2x^2)^3=$_____.

8 计算:$(3x)^2\cdot(3x)^3+(-3x)^4\cdot(-x)=$_____.

9 [2019 辽宁沈阳沈河区校级期末]计算$(-3a^3)^2\cdot(-2a^2)^3=$_____.

10 计算下列各式:

(1)$\left(\frac{2}{3}ab^2-2ab+\frac{4}{3}b\right)\cdot\frac{1}{2}ab$;

(2)$2y^{n-1}\cdot(y^{n+1}+2y^n-3y^{n-1})$.

刷素养

11 阅读下列文字,并解决问题.

已知$x^2y=3$,求$2xy(x^5y^2-3x^3y-4x)$的值.

分析:考虑到满足$x^2y=3$的x,y的值较多,不能逐一代入求解,故考虑整体代入思想,将$x^2y=3$整体代入.

解:$2xy(x^5y^2-3x^3y-4x)=2x^6y^3-6x^4y^2-8x^2y=2(x^2y)^3-6(x^2y)^2-8x^2y=2\times 3^3-6\times 3^2-8\times 3=-24$.

请你用上述方法解决问题:已知$ab=3$,求$(2a^3b^2-3a^2b+4a)(-2b)$的值.

课时3　多项式与多项式相乘

刷基础

▶答案 D30

题型1　多项式乘多项式

1 若$(x+3)(2x-5)=2x^2+bx-15$,则b的值为(　　)

A. -2　　B. 2　　C. 1　　D. -1

2 [2019 四川宜宾翠屏区期中]如果计算$(x+m)(x-6)$的结果中不含x的一次项,则(　　)

A. $m=0$　　B. $m=6$　　C. $m=-6$　　D. $m=1$

3 计算$(x+1)(x^2-x+1)$的结果是_____.

4 [2018 上海嘉定区期末]计算:$(a-2b)(a+b)=$_____.

题型2　$(x+p)(x+q)$型多项式的乘法

5 下列各式中,计算结果是$x^2+7x-18$的是(　　)

A. $(x-2)(x+9)$　　B. $(x+2)(x+9)$

C. $(x-3)(x+6)$　　D. $(x-1)(x+18)$

6 [2019 黑龙江哈尔滨道里区期末]若$(x-3)(x+4)=x^2+px+q$,那么p,q的值是(　　)

A. $p=1,q=-12$　　B. $p=-1,q=12$

C. $p=7,q=12$　　D. $p=7,q=-12$

7 已知$m+n=2,mn=-2$,则$(2-m)(2-n)$的值为(　　)

A. 2　　B. -2　　C. 0　　D. 3

8 若$(x+y+2)(x+y-1)=0$,则$x+y$的值为(　　)

A. 1　　B. -2

C. 2或-1　　D. -2或1

9 [2019 江苏扬州邗江区校级月考]要使$(x-3)\cdot M=x^2+x+N$成立,且M是一个多项式,N是一个整数,则(　　)

A. $M=x-4,N=12$　　B. $M=x-5,N=15$

C. $M=x+4,N=-12$　　D. $M=x+5,N=-15$

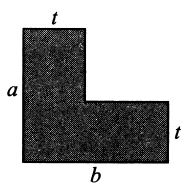
10 用下列各式分别表示图中阴影部分的面积,其中表示正确的有(　　)

①$at+(b-t)t$;

②$at+bt-t^2$;

③$ab-(a-t)(b-t)$;

④$(a-t)t+(b-t)t+t^2$.



A. 4个　　B. 3个

C. 2个　　D. 1个

11 [2019 黑龙江哈尔滨香坊区校级期中]若$(x+3)(x-p)=x^2+mx-27$,则$m+p$的值是_____.

12 如果$a^2-a-1=0$,那么$5(a+3)(a-4)=$_____.

13 4个数a,b,c,d排列成$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$,我们称之为二阶行列式.规定它的运算法则为$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}=ad-bc$.若$\begin{vmatrix} x-2 & x+3 \\ x+1 & x-2 \end{vmatrix}=13$,则$x=$_____.

14 先化简,再求值:已知$|m-1|+\left(n+\frac{1}{2}\right)^2=0$,求$(-m^2n+1)(-1-m^2n)$的值.

刷易错

易错点　多项式与多项式相乘时,易漏乘某项导致结果错误

15 已知$(x^3+mx+n)(x^2-3x+4)$的展开式中不含x^3和x^2项.

(1)求m,n的值;

(2)在(1)的条件下,求$(m+n)(m^2-mn+n^2)$的值.

刷提升

▶答案 D31

1 [2019 福建泉州安溪期中]计算$(x-3)(x+2)$的结果是（　　）

A. x^2-6　　B. x^2-5x+6

C. x^2-x-6　　D. x^2-5x-6

2 [2019 湖南长沙岳麓区校级期中]若$(2x-a)(x+5)$的积中不含x的一次项，则a的值为（　　）

A. -5　　B. 0　　C. 5　　D. 10

3 [2018 河北邢台期末]观察下列两个多项式相乘的运算过程：

$(x\boxed{+2})(x\boxed{+5})=x^2\boxed{+7}x\boxed{+10}$　　$(x\boxed{-2})(x\boxed{+5})=x^2\boxed{+3}x\boxed{-10}$

根据你发现的规律，若$(x+a)(x+b)=x^2-7x+12$，则a，b的值可能分别是（　　）

A. -3，-4　　B. -3，4

C. 3，-4　　D. 3，4

4 [2018 山东淄博张店区期末]计算$(2x^2-4)\cdot\left(2x-1-\frac{3}{2}x\right)$的结果是（　　）

A. $-x^2+2$　　B. x^3+4

C. x^3-4x+4　　D. x^3-2x^2-2x+4

5 [2018 安徽合肥庐阳区期末]若$(x+3)(x-1)=x^2-mx+n$，则$m+n$的值为（　　）

A. -5　　B. 2　　C. 1　　D. -1

6 [2019 四川仁寿校级期中]下列多项式相乘，结果为$a^2+6a-16$的是（　　）

A. $(a-2)(a-8)$　　B. $(a+2)(a-8)$

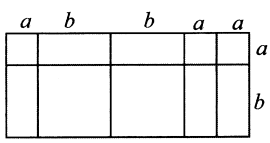
C. $(a-2)(a+8)$　　D. $(a+2)(a+8)$

7 计算$(a-2b)(2a-b)+5ab$的结果是（　　）

A. $4a^2+4b^2$　　B. $4a^2-4b^2$

C. $2a^2+2b^2$　　D. $2a^2-2b^2$

8 [2018 江苏江阴校级月考]根据图中数据，计算大长方形的面积，通过不同的计算方法，你发现的结论是（　　）



A. $(a+b)(a+2b)=a^2+3ab+2b^2$

B. $(3a+b)(a+b)=3a^2+4ab+b^2$

C. $(2a+b)(a+b)=2a^2+3ab+b^2$

D. $(3a+2b)(a+b)=3a^2+5ab+2b^2$

9 计算：$x(2x-3)(x^2-1)+3x^2(x^2-4)=$_____.

10 若$(3x-4)(2x-1)=ax^2+bx+c$，则$a+2b+3c=$_____.

11 [2018 江苏扬州邗江区期中]已知$a^2-a-3=0$，那么$a^2(a-4)$的值是_____.

12 计算下列各式：

(1)$(a-b)(a^2+ab+b^2)$；

(2)$(3x-2)(2x-3)(x+2)$.

刷素养

13 [2018 山东潍坊高密期中，难]甲、乙两人共同计算一道整式乘法：$(2x+a)(3x+b)$，由于甲抄错了第一个多项式中a的符号，得到的结果为$6x^2+11x-10$；由于乙漏抄了第二个多项式中x的系数，得到的结果为$2x^2-9x+10$. 请你计算出a，b的值，并写出这道整式乘法的正确结果.

课时4　同底数幂的除法

刷基础

▶答案 D31

题型1　同底数幂的除法

1 计算 $x^6 \div x^2$ 的结果正确的是　　(　　)

A. 3　　B. x^3　　C. x^4　　D. x^8

2 若 $m \cdot 2^3 = 2^6$，则 m 等于　　(　　)

A. 2　　B. 4　　C. 6　　D. 8

3 [2018 湖北孝感孝南区一模]下列运算正确的是(　　)

A. $x^5 \cdot x^2 = x^{10}$　　B. $(-x^5)^2 = x^{25}$

C. $x^5 + x^2 = x^7$　　D. $x^5 \div x^2 = x^3 (x \neq 0)$

4 [2019 黑龙江哈尔滨南岗区期末]已知 $5^m = 3, 5^n = 2$，则 5^{2m-3n} 的值为_____.

5 计算：$(-a)^2 \cdot (a^2)^2 \div a^3 =$ _____.

6 若 $3 \times 9^m \times 27^m \div 81 = 3^{13}$，则 m 的值为_____.

7 [2019 河南开封兰考期中]计算：$(-x)^6 \div (-x)^2 \cdot (-x)^3$.

8 [2019 吉林长春南关区期中]计算：$(a^2)^5 \cdot (-a)^4 \div (-a^2)^3$.

9 计算：$(m^{12} \div m^9) \cdot m^2 + (m^2)^4 \div m^2$.

题型2　零指数幂的性质

10 计算 $(-3)^0 + (-2)$ 的结果为　　(　　)

A. -1　　B. -2　　C. -3　　D. -5

11 [2019 陕西渭南校级月考]如果 $(a-1)^0 = 1$ 成立，则　　(　　)

A. $a \neq 1$　　B. $a = 0$

C. $a = 2$　　D. $a = 0$ 或 $a = 2$

12 若 $(1-x)^{1-3x} = 1$，则 x 的取值有　　(　　)

A. 0 个　　B. 1 个　　C. 2 个　　D. 3 个

13 计算：

(1) $(-2)^0 + (-1)^{2017} - 2$；

(2) $(-3)^2 + \left(\frac{1}{36}\right)^0 + (-5)^3 \div (-5)^2$.

课时5　整式的除法

刷基础

▶答案 D32

题型1　单项式除以单项式

1 计算 $6x^6 \div 3x^2$ 的结果是（　　）

A. $2x^3$　　B. $3x^4$

C. $2x^4$　　D. $3x^3$

2 下列式子计算结果为 $2x^2$ 的是（　　）

A. $x+x$　　B. $x \cdot 2x$

C. $(2x)^2$　　D. $2x^6 \div x^3$

3 [2018 山东淄博沂源期末]在等式 $10b^2 \div (\quad) = -5b$ 中，括号内应填入的整式为（　　）

A. $-2b$　　B. b

C. $2b$　　D. $-3b$

4 [2017 河南平顶山宝丰月考]已知 $4x^5y^a \div 24x^by^3 = \frac{1}{6}x^2y^3$，那么（　　）

A. $a=2, b=3$　　B. $a=6, b=3$

C. $a=3, b=6$　　D. $a=7, b=6$

5 [2017 山东淄博沂源期末]计算 $(27a^8) \div \left(\frac{1}{3}a^3\right) \div (9a^2)$ 的顺序不正确的是（　　）

A. $(27a^8) \div \left[\left(\frac{1}{3}a^3\right) \div (9a^2)\right]$

B. $\left[(27a^8) \div \left(\frac{1}{3}a^3\right)\right] \div (9a^2)$

C. $\left(27 \div \frac{1}{3} \div 9\right)a^{8-3-2}$

D. $[(27a^8) \div (9a^2)] \div \left(\frac{1}{3}a^3\right)$

题型2　多项式除以单项式

6 计算 $(-4a^2+12a^3b) \div (-4a^2)$ 的结果是（　　）

A. $1-3ab$　　B. $-3ab$

C. $1+3ab$　　D. $-1-3ab$

7 [2019 四川遂宁期中]计算 $(14x^3-21x^2+7x) \div (-7x)$ 的结果是（　　）

A. $-x^2+3x$　　B. $-2x^2+3x-1$

C. $-2x^2+3x+1$　　D. $2x^2-3x+1$

8 [2019 山东济南槐荫区期末]若长方形的面积是 $2a^2-2ab+6a$，一边长为 $2a$，则这个长方形的周长是（　　）

A. $6a-2b+6$　　B. $2a-2b+6$

C. $6a-2b$　　D. $3a-b+3$

9 [2018 江西永新期末]已知被除式是 x^3+3x^2-1，商式是 x，余式是 -1，则除式是（　　）

A. x^2+3x-1　　B. x^2+3x

C. x^2-1　　D. x^2-3x+1

10 计算：$(6x^4-8x^3) \div (-2x^2) =$ _____.

11 已知多项式 $2x^3-4x^2-1$ 除以一个多项式 A，得商式为 $2x$，余式为 $x-1$，求这个多项式.

12 计算：$[2x(2y^2-4y+1)-2x] \div (-4xy)$.

13 [2019 山东威海期中]已知 $A=2x$，B 是多项式，在计算 $B+A$ 时，某同学把 $B+A$ 看成了 $B \div A$，结果得 $x^2+\frac{1}{2}x$，求 $B+A$.

刷提升

▶答案 D32

1 [2018 安徽芜湖繁昌二模]计算$(-abx^2)^3 \div (-abx)^3$的结果是　(　　)

A. x^2　　B. $-x^2$　　C. x^3　　D. $-x^3$

2 [2018 河南模拟]下列运算正确的是　(　　)

A. $3a^3+2a^2=5a^5$　　B. $5a^3b^2 \div ab=5a^2b$

C. $(a-b)^3=a^3-b^3$　　D. $(-a)^5+a^5=2a^5$

3 如果$(4a^2b-3ab^2) \div M=-4a+3b$,那么单项式$M$等于　(　　)

A. ab　　B. $-ab$　　C. a　　D. $-b$

4 [2018 陕西宝鸡陈仓区期中]小亮在计算$(6x^3y-3x^2y^2) \div 3xy$时,错把括号内的减号写成了加号,那么正确结果与错误结果的乘积是　(　　)

A. $2x^2-xy$　　B. $2x^2+xy$

C. $4x^4-x^2y^2$　　D. 无法计算

5 [2019 重庆北碚区校级月考]已知$x^3+(a-1)x-6$能被$x-2$整除,则a的值为　(　　)

A. 1　　B. -1　　C. 0　　D. 2

6 [2019 上海闵行区期末]计算:$(-12x^2y^3z+3xy^2) \div (-3xy^2)=$_____.

7 [2018 山东淄博周村区期中]若长方形的面积是$3a^2+2ab+7a$,宽为a,则它的长为_____.

8 马虎同学在计算$A \div (-2a^2b)$时,由于粗心大意,把"÷"错写成"×"进行计算,结果为$16a^5b^5$,则$A \div (-2a^2b)=$_____.

9 小亮与小明做游戏,两人各报一个整式,小明报的被除式是x^3y-2xy^2,商式必须是$2xy$,则小亮报一个除式是_____.

10 [2019 四川宜宾期中]规定一种新运算"⊗",则有$a \otimes b=a^2 \div b$. 当$x=-1$时,代数式$(3x^2-x) \otimes x^2=$_____.

11 [2018 浙江杭州期中]计算:

(1)$(-3ab) \cdot (-2a) \cdot (-a^2b^3)$;

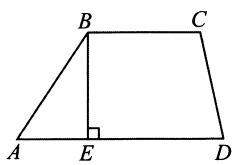
(2)$(25m^2+15m^3n-20m^4) \div (-5m^2)$.

12 [2018 山东荣成校级期中]一位同学在研究多项式除法时,把被除式的二次项系数写成a,而把结果的一次项系数又写成了$-b$,等式如下:$(x^3+ax^2+1) \div (x+1)=x^2-bx+1$,请你帮他求出$a$,$b$的值.

13 某市有一块如图所示的梯形空地$ABCD$,梯形空地的上底BC长为$(4x+y)$米,下底AD长为$(5x+2y)$米,高BE为$(x+2y)$米.

(1)求这块空地的面积;

(2)现计划对这块空地进行改造,修建一个长方形广场. 若长方形广场的面积为$(6x^2+12xy+9x)$平方米,它的宽为$3x$米,则长方形的长比梯形的下底短多少米?



14.1 综合训练

刷综合

▶答案 D32

1 [2018 辽宁铁岭中考]计算$(-b^2)^3$的结果正确的是（　　）

A. $-b^6$　　B. b^6　　C. b^5　　D. $-b^5$

2 [2018 浙江金华中考]计算$(-a)^3 \div a$的结果正确的是（　　）

A. a^2　　B. $-a^2$　　C. $-a^3$　　D. $-a^4$

3 [2018 辽宁本溪中考]下列运算正确的是（　　）

A. $2m^2+m^2=3m^4$　　B. $(mn^2)^2=mn^4$

C. $2m \cdot 4m^2=8m^2$　　D. $m^5 \div m^3=m^2$

4 [2018 甘肃兰州中考]下列计算正确的是（　　）

A. $2a \cdot 3b=5ab$　　B. $a^3 \cdot a^4=a^{12}$

C. $(-3a^2b)^2=6a^4b^2$　　D. $a^4 \div a^2+a^2=2a^2$

5 [2018 山东青岛中考]计算$(a^2)^3-5a^3 \cdot a^3$的结果是（　　）

A. a^5-5a^6　　B. a^6-5a^9

C. $-4a^6$　　D. $4a^6$

6 下列计算正确的是（　　）

A. $\sqrt{2}+\sqrt{3}=\sqrt{5}$

B. $a+2a=2a^2$

C. $x(1+y)=x+xy$

D. $(mn^2)^3=mn^6$

7 下列运算错误的是（　　）

A. $(-1)^0=1$

B. $(-3)^2 \div \left(\frac{3}{2}\right)^2=-4$

C. $5x^2-6x^2=-x^2$

D. $(2m^3)^2 \div (2m)^2=m^4$

8 计算$(x+1)(x+2)$的结果为（　　）

A. x^2+2　　B. x^2+3x+2

C. x^2+3x+3　　D. x^2+2x+2

9 [2018 江苏泰州中考]计算：$\frac{1}{2}x \cdot (-2x^2)^3=$_____.

10 [2018 四川达州中考]已知$a^m=3$，$a^n=2$，则a^{2m-n}的值为_____.

11 我们知道，同底数幂的乘法法则为$a^m \cdot a^n=a^{m+n}$（其中$a \neq 0$，m，n为正整数），类似地，我们规定关于任意正整数m，n的一种新运算：$h(m+n)=h(m) \cdot h(n)$，请根据这种新运算填空：

(1)若$h(1)=\frac{2}{3}$，则$h(2)=$_____；

(2)若$h(1)=k(k \neq 0)$，那么$h(n) \cdot h(2\,018)=$_____（用含n和k的代数式表示，其中n为正整数）.

刷素养

12 观察下列各式：

$(x^2-1) \div (x-1)=x+1$；

$(x^3-1) \div (x-1)=x^2+x+1$；

$(x^4-1) \div (x-1)=x^3+x^2+x+1$；

$(x^5-1) \div (x-1)=x^4+x^3+x^2+x+1$.

根据你发现的规律解答下列问题：

(1)$(x^7-1) \div (x-1)=$_____；

(2)根据(1)的结果，计算：$1+2+2^2+2^3+2^4+2^5+2^6+2^7$.

13 为了求$1+2+2^2+2^3+\cdots+2^{100}$的值，可令$S=1+2+2^2+2^3+\cdots+2^{100}$，则$2S=2+2^2+2^3+2^4+\cdots+2^{101}$，因此$2S-S=2^{101}-1$，所以$S=2^{101}-1$，即$1+2+2^2+2^3+\cdots+2^{100}=2^{101}-1$. 仿照以上推理，计算$1+3+3^2+3^3+\cdots+3^{2\,018}$的值.

14.2　乘法公式

14.2.1　平方差公式

刷基础

▶答案 D33

题型1　平方差公式

1 [2018 山东沂源校级期中]下列各式中,不能用平方差公式计算的是　(　　)

A. $(2x-y)(x+2y)$　　B. $(-2x+y)(-2x-y)$

C. $(-x-2y)(x-2y)$　　D. $(2x+y)(-2x+y)$

2 下列各式计算正确的是　(　　)

A. $2a^2+3a^2=5a^4$

B. $(-2ab)^3=-6ab^3$

C. $(3a+b)(3a-b)=9a^2-b^2$

D. $a^3\cdot(-2a)=-2a^3$

3 [2019 吉林长春校级月考]若$(2-x)(2+x)(4+x^2)=16-x^n$,则 n 的值等于　(　　)

A. 6　　B. 4　　C. 3　　D. 2

4 计算$(4+\sqrt{7})(4-\sqrt{7})$的结果等于_____.

5 计算:$(a-b)(a+b)(a^2+b^2)=$_____.

6 [2019 江苏南京秦淮区期中]计算:$(2a-b)(4a^2+b^2)(b+2a)$.

题型2　平方差公式的应用

7 计算 $2\,018^2-2\,019\times2\,017$ 的结果是　(　　)

A. -1　　B. 0　　C. 1　　D. 4 034

8 若$(2m+2n+1)(2m+2n-1)=35$,则 $m+n$ 的值是_____.

9 [2019 山东青岛市南区期末]若$(m+3x)(m-3x)=16-nx^2$,则 mn 的值为_____.

10 (1)用乘法公式计算:$(x-3y+2c)(x+3y+2c)$;

(2)简便计算:$90\frac{1}{9}\times89\frac{8}{9}$.

11 化简求值:$x(x-2)-(x+2)(x-2)$,其中 $x=\frac{1}{2}$.

12 正方形 Ⅰ 的周长比正方形 Ⅱ 的周长长 96 cm,它们的面积相差 960 cm^2. 求这两个正方形的边长.

唯有对自己卓越的才能和独特的价值有坚定、不可动摇之确信的人才被称为骄傲。

14.2.2　完全平方公式

课时1　完全平方公式

刷基础

▶答案 D33

题型1　完全平方公式

1 [2019 辽宁鞍山期末]计算$(a-1)^2$正确的是（　　）

A. a^2-a+1　　B. a^2-2a+1

C. a^2-2a-1　　D. a^2-1

2 计算$(-a-b)^2$等于（　　）

A. a^2+b^2　　B. a^2-b^2

C. $a^2+2ab+b^2$　　D. $a^2-2ab+b^2$

3 [2019 广东广州海珠区期末]下列各式成立的是（　　）

A. $\frac{x-2y}{2y-x}=1$　　B. $(-a-b)^2=(a+b)^2$

C. $(a-b)^2=a^2-b^2$　　D. $(a+b)^2-(a-b)^2=2ab$

4 下列计算正确的是（　　）

A. $(x+y)^2=x^2+y^2$　　B. $(x-y)^2=x^2-2xy-y^2$

C. $(x+1)(x-1)=x^2-1$　　D. $(x-1)^2=x^2-1$

题型2　完全平方公式的应用

5 若$a^2-2a-2=0$,则$(a-1)^2$的值为（　　）

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

6 若$(x+a)^2=x^2-10x+b$,则a,b的值分别为（　　）

A. 2,4　　B. 5,−25　　C. −2,25　　D. −5,25

7 [2019 重庆北碚区校级月考]已知$(m+n)^2=11$,$mn=2$,则$(m-n)^2$的值为（　　）

A. 7　　B. 5　　C. 3　　D. 1

8 [2019 安徽芜湖期末]已知$x+y=-4$,$xy=2$,则x^2+y^2的值为（　　）

A. 10　　B. 11　　C. 12　　D. 13

9 若$a-\frac{1}{a}=2$,则$a^2+\frac{1}{a^2}$的值为（　　）

A. 0　　B. 2　　C. 4　　D. 6

10 已知$x^2-4x-1=0$,则$x^2+\frac{1}{x^2}=$_____.

11 [2019 四川宜宾期末]已知$x^2+y^2=19$,$x-y=5$,求下列各式的值.

(1)xy;

(2)$x+y$.

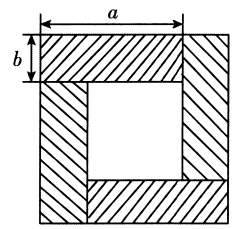
12 已知$x^2-4x-2=0$,求代数式$(2x-3)^2-x^2$的值.

13 先化简,再求值:$(2x+y)^2+(x-y)(x+y)-5x(x-y)$,其中$x=1$,$y=-1$.

14 若$|x-2|+(y+1)^2=0$,求代数式$(x-y)^2-(x+2y)(x-2y)$的值.

15 (1)如图是用4个全等的长方形拼成的一个“回形”正方形,将图中阴影部分的面积用两种不同的方法表示,可得到一个等式,这个等式为_____.

(2)若$(3x-2y)^2=5$,$(3x+2y)^2=9$,求xy的值.



刷易错

易错点　在利用完全平方公式求解时，因公式运用错误而出错

16 先化简,再求值:$(x-3)^2-x(x-8)$,其中$\sqrt{5}<x<\sqrt{10}$,且x为整数.

刷提升

▶答案 D34

1 [2019 山东邹平校级月考]已知 $x+\frac{1}{x}=5$,那么 $x^2+\frac{1}{x^2}$ 的值为　(　　)

A. 10　　B. 23　　C. 25　　D. 27

2 [2018 河北中考]将 9.5^2 变形正确的是　(　　)

A. $9.5^2=9^2+0.5^2$

B. $9.5^2=(10+0.5)(10-0.5)$

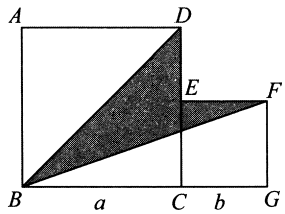
C. $9.5^2=10^2-2\times10\times0.5+0.5^2$

D. $9.5^2=9^2+9\times0.5+0.5^2$

3 [2018 四川乐山中考]已知实数 a,b 满足 $a+b=2$,$ab=\frac{3}{4}$,则 $a-b$ 的值为　(　　)

A. 1　　B. $-\frac{5}{2}$　　C. ±1　　D. $\pm\frac{5}{2}$

4 [2019 福建晋江校级期中]如图,两个正方形的边长分别为 a,b,如果 $a+b=ab=9$,则阴影部分的面积为　(　　)



A. 9　　B. 18　　C. 27　　D. 36

5 [2019 辽宁沈阳铁西区期中]已知 $a-b=4$,$ab=-2$,则 $a^2+4ab+b^2$ 的值为_____.

6 [2018 江苏南京玄武区期中]如果用公式 $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$ 计算 $(a+b+c)^2$,则第一步应该写成 $(a+b+c)^2=$_____.

7 [2018 湖北武汉江汉区期中]已知 $x^2+y^2=25$,$x+y=7$,求 xy 和 $x-y$ 的值.

8 [2018 江西中考]计算:$(a+1)(a-1)-(a-2)^2$.

9 [2018 山东沂源期中]已知:$(a-1)^2-(a^2-2b)=-7$,求代数式 $\frac{a^2+b^2}{2}-ab$ 的值.

刷素养

10 认真阅读以下材料,然后解答问题.

我们学习了多项式的运算法则,类似地,我们可以计算出多项式的展开式.

如:$(a+b)^1=a+b$,$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$,$(a+b)^3=(a+b)^2(a+b)=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$,….

下面我们依次对 $(a+b)^n$ 展开式的各项系数进一步研究发现,当 n 取正整数时可以单独列成以下形式:

$(a+b)^1$……1　1

$(a+b)^2$……1　2　1

$(a+b)^3$……1　3　3　1

$(a+b)^4$……1　4　6　4　1

$(a+b)^5$……1　5　10　10　5　1

$(a+b)^6$……1　6　15　20　15　6　1

……

上面的多项式展开系数表称为“杨辉三角”,仔细观察“杨辉三角”,用你发现的规律回答下列问题:

(1)多项式 $(a+b)^n$ 的展开式是一个几次几项式?并预测第三项的系数.

(2)结合上述材料,推断出多项式 $(a+b)^n$(n 取正整数)的展开式的各项系数之和.(结果用含字母 n 的代数式表示)

课时2　添括号法则

刷基础

▶答案 D34

题型1　添括号法则

1 $3ab-4bc+1=3ab-(\quad)$，括号中所填入的整式应是（　　）

A. $-4bc+1$　B. $4bc+1$　C. $4bc-1$　D. $-4bc-1$

2 将多项式 $3x^3-2x^2+4x-5$ 添括号后正确的是（　　）

A. $3x^3-(2x^2+4x-5)$

B. $(3x^3+4x)-(2x^2+5)$

C. $(3x^3-5)+(-2x^2-4x)$

D. $2x^2+(3x^3+4x-5)$

3 在括号内填上适当的项.

(1) $a-2b+c+d=a-(\quad)$；

(2) $-a-3b+c=-(\quad)$；

(3) $x^2-2y^2+2x-3y=(\quad)+2x-3y$；

(4) $x^2-y^2-x-y=x^2-x-(\quad)$.

题型2　添括号法则在乘法公式中的应用

4 运用乘法公式计算 $(x-y+3)(x+y-3)$ 时，下列各变形中正确的是（　　）

A. $[(x-y)+3][(x+y)-3]$

B. $[(x+3)-y][(x-3)+y]$

C. $[x-(y+3)][x+(y-3)]$

D. $[x-(y-3)][x+(y-3)]$

5 已知 $(x-2\,015)^2+(x-2\,017)^2=34$，则 $(x-2\,016)^2$ 的值是（　　）

A. 4　B. 8　C. 12　D. 16

6 计算：

(1) $(a-2b+3c)(a+2b-3c)$；

(2) $\left(-\frac{1}{3}a+c+2b\right)\left(-\frac{1}{3}a-c+2b\right)$.

7 计算：

(1) $(3m+n-p)(3m-n+p)$；

(2) $(a-2b+c)^2$；

(3) $(a+b-3)(a+b+3)$；

(4) $(x-2y-3z)^2$.

刷易错

易错点　添括号后个别项的符号出错

8 在括号内填入适当的式子：

$(a-b+c)(a+b-c)$

$=[a-(\quad)][a+(\quad)]$

$=a^2-(\quad)^2$.

14.3　因式分解

14.3.1　提公因式法

刷基础

▶答案 D35

题型1　因式分解的概念

1 下列各式从左到右的变形中，是因式分解的为（　　）

A. $a(x+y)=ax+ay$　　B. $x^2-4x+4=x(x-4)+4$

C. $10x^2-5x=5x(2x-1)$　　D. $(x+4)(x-4)=x^2-16$

2 下列各式从左到右的变形中，属于因式分解的是（　　）

A. $a(x-y)=ax-ay$

B. $x^2+2x+1=x(x+2)+1$

C. $(x+1)(x+3)=x^2+4x+3$

D. $x^3-x=x(x+1)(x-1)$

题型2　提公因式法分解因式

3 [2019 山东济宁任城区期中]分解因式 $-4x^2y+2xy^2-2xy$ 的结果是（　　）

A. $-2xy(2x-y+1)$　　B. $2xy(-2x+y)$

C. $2xy(-2xy+y-1)$　　D. $-2xy(2x+y-1)$

4 [2018 广西北海期末]多项式 $2a^{n-1}-4a^{n+1}$ 的公因式是 M，则 M 等于（　　）

A. $2a^{n-1}$　　B. $-2a^n$　　C. $-2a^{n-1}$　　D. $-2a^{n+1}$

5 将 $m^2(a-2)+m(a-2)$ 分解因式的结果是（　　）

A. $(a-2)(m^2-m)$　　B. $m(a-2)(m-1)$

C. $m(a-2)(m+1)$　　D. $m(2-a)(m-1)$

6 多项式 $8x^{2n}-4x^n$ 的公因式是（　　）

A. $4x^n$　　B. $2x^n-1$　　C. $4x^n-1$　　D. $2x^{n-1}$

7 已知 m 为有理数，则整式 $m^2(m^2-1)-m^2+1$ 的值为（　　）

A. 不是负数　　B. 恒为负数

C. 恒为正数　　D. 不等于0

8 [2018 浙江杭州中考]因式分解：$(a-b)^2-(b-a)=$_____.

9 因式分解：$(2a-3b)(x+3)-(3b-2a)(3x-1)-(2a-3b)(5x+7)$.

题型3　提公因式法分解因式的应用

10 若 $ab=-3$，$a-2b=5$，则 a^2b-2ab^2 的值是（　　）

A. -15　　B. 15　　C. 2　　D. -8

11 设 $681\times2\,019-681\times2\,018=a$，$2\,015\times2\,016-2\,013\times2\,018=b$，$\sqrt{678^2+1\,358+690+678}=c$，则 a,b,c 的大小关系是（　　）

A. $b<c<a$　　B. $a<c<b$

C. $b<a<c$　　D. $c<b<a$

12 [2018 广东广州越秀区期末]化简：$a+1+a(a+1)+a(a+1)^2+\cdots+a(a+1)^{99}=$_____.

13 先化简，再求值：$2a(a+b)-(a+b)^2$，其中 $a=3$，$b=5$.

14 [2019 广西钦州钦南区期末]已知 $a+b=2$，$ab=2$，求 a^2b+ab^2 的值.

刷易错

易错点　首项符号为“-”时，在利用提公因式法分解因式的过程中出现符号错误

15 因式分解：$-8ax^2+16axy-8ay^2$.

我发现一个人在放弃给别人留好印象的负担之后，原来心里会如此踏实。一个人不必再讨人欢喜，就可以像我此刻这样，停止受累。

14.3.2　公式法

课时1　运用平方差公式分解因式

刷基础

▶答案 D35

题型1　用平方差公式分解因式

1 多项式 x^2-4 分解因式的结果是（　　）

A. $(x+2)(x-2)$　　B. $(x-2)^2$

C. $(x+4)(x-4)$　　D. $x(x-4)$

2 [2019 江苏东台校级期中]下列多项式能用平方差公式分解因式的是（　　）

A. $-x^2+1$　　B. $-x^2-1$

C. $49-x^3$　　D. $49+x$

3 [2018 湖南邵阳中考]将多项式 $x-x^3$ 因式分解正确的是（　　）

A. $x(x^2-1)$　　B. $x(1-x^2)$

C. $x(x+1)(x-1)$　　D. $x(1+x)(1-x)$

4 分解因式 $(2x+3)^2-x^2$ 的结果是（　　）

A. $3(x^2+4x+3)$　　B. $3(x^2+2x+3)$

C. $(3x+3)(x+3)$　　D. $3(x+1)(x+3)$

5 [2018 山东济南章丘区期中]下列多项式因式分解的结果是 $-(a+3)(a-3)$ 的是（　　）

A. a^2-9　　B. a^2+9　　C. $-a^2-9$　　D. $-a^2+9$

6 化简 $(a+b+c)^2-(a-b+c)^2$ 的结果为（　　）

A. $4ab+4bc$　　B. $4ac$

C. $2ac$　　D. $4ab-4bc$

7 分解因式：$-9m^2+4n^2=$_____.

8 [2019 山东东营东营区校级模拟]分解因式：$(2a+b)^2-(a+2b)^2=$_____.

9 [2019 江苏南京鼓楼区校级模拟]分解因式：$4m^2-1=$_____.

10 分解因式：

(1) $9(a+b)^2-25(a-b)^2$；

(2) $(x+1)(x-9)+8x$.

题型2　平方差公式分解因式的应用

11 若 $a+b=1$，则 a^2-b^2+2b 的值为（　　）

A. 4　　B. 3　　C. 1　　D. 0

12 $(2x)^n-81$ 分解因式后得 $(4x^2+9)(2x+3)(2x-3)$，则 n 等于（　　）

A. 2　　B. 4　　C. 6　　D. 8

13 [2018 江苏苏州中考]若 $a+b=4$，$a-b=1$，则 $(a+1)^2-(b-1)^2$ 的值为_____.

14 已知 $4m+n=40$，$2m-3n=5$，求 $(m+2n)^2-(3m-n)^2$ 的值.

15 已知 $x-y=3$，$y-z=3$，$x+z=14$，求 x^2-z^2 的值.

16 已知 $2^{48}-1$ 可以被 60 和 70 之间某两个数整除，求这两个数.

刷易错

易错点　因式分解时因分解不彻底而出错

17 在实数范围内分解因式：$9a^4-4b^4$.

刷提升

▸答案 D36

1 [2018 广东湛江期末]下列多项式中,能用平方差公式分解因式的是　(　　)

A. $a^2+(-b)^2$　　B. $5m^2-20mn$

C. $-x^2-y^2$　　D. $-x^2+9$

2 [2018 广西百色中考]分解因式 $x-4x^3$ 的最后结果是　(　　)

A. $x(1-2x)^2$　　B. $x(2x-1)(2x+1)$

C. $x(1-2x)(2x+1)$　　D. $x(1-4x^2)$

3 [2018 山东济宁中考]多项式 $4a-a^3$ 分解因式的结果是　(　　)

A. $a(4-a^2)$　　B. $a(2-a)(2+a)$

C. $a(a-2)(a+2)$　　D. $a(2-a)^2$

4 [2019 湖南醴陵期末]若 $3x-2y=a$,$x-4y=b$,则 $(x+y)^2-(2x-3y)^2$ 的值是　(　　)

A. $-ab$　　B. ab

C. a^2+b^2　　D. a^2-b^2

5 [2019 北京期末]写出一个能用平方差公式分解因式的多项式:_____.

6 [2018 山东青州二模]在实数范围内分解因式 $4m^5-16m=$_____.

7 分解因式:$(p+1)(p-4)+3p=$_____.

8 [2018 天津河东区期末]若 $|m-1|+\sqrt{n^2-18n+81}=0$,则将 mx^2-ny^2 因式分解得_____.

9 [2019 黑龙江肇源期末]分解因式:

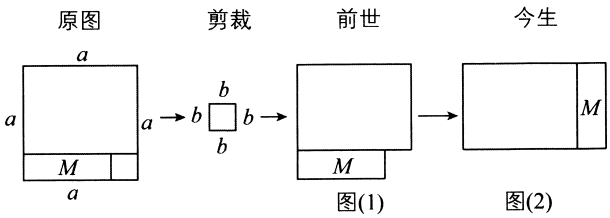
(1)$4(a-b)^2-16(a+b)^2$;

(2)$81a^4-b^4$.

10 [2018 江苏淮安洪泽区期末]当 n 为自然数时,$(n+5)^2-(n-3)^2$ 能被 16 整除吗?请说明理由.

刷素养

11 [2018 吉林四平伊通期末]如图,把一个边长为 a 的大正方形,剪去一个边长为 b 的小正方形,即图(1)称之为"前世",然后再剪拼成一个新长方形如图(2),称之为"今生",请你解答下面的问题:



(1)"前世"图(1)的面积与"今生"图(2)新长方形的面积_____;

(2)根据图形面积的和差关系直接写出"前世"图(1)的面积为_____,"今生"图(2)新长方形的长为_____、宽为_____,面积为_____;

(3)"数缺形时少直观,形少数时难入微"体现了数学中的数形结合思想,由(1)和(2)图形面积的计算,形象地验证了代数中的一个乘法公式为_____;

(4)请你根据(3)中的乘法公式,计算:2.001×1.999.

人们常常被一句"以后怎么办"给吓退了。以后那么长,不是想出来的,是过出来的。

课时2 运用完全平方公式分解因式

刷基础

▶答案 D36

题型1　完全平方公式

1 [2019 广东珠海香洲区期末]下列多项式能用完全平方公式进行因式分解的是（　　）

A. a^2-1　　B. a^2+4

C. a^2+2a+1　　D. a^2-4a-4

2 [2018 湖南邵阳期中]若 $4x^2+(k-1)x+9$ 能用完全平方公式分解因式，则 k 的值为（　　）

A. ±6　　B. ±12

C. -13 或 11　　D. 13 或 -11

题型2　用完全平方公式分解因式

3 把多项式 $x^2-8x+16$ 因式分解，结果正确的是（　　）

A. $(x-4)^2$　　B. $(x-8)^2$

C. $(x+4)(x-4)$　　D. $(x+8)(x-8)$

4 分解因式 $4-4a+a^2$ 正确的是（　　）

A. $(2-a)^2$　　B. $(2+a)^2$

C. $(2-a)(2+a)$　　D. $4(1-a)+a^2$

5 下列各式中，不能用公式法分解因式的是（　　）

A. x^2-6x+9　　B. $-x^2+y^2$

C. x^2+2x+4　　D. $-x^2+2xy-y^2$

6 [2018 山东郯城期中]分解因式：$a^2+2ab+b^2-4=$_____.

7 分解因式 $x^2y^2-2xy+1$ 的结果是_____.

8 分解因式：$(x^2+4)^2-16x^2=$_____.

9 分解因式：$(a+b)^2-12(a+b)+36=$_____.

10 分解因式 $(a+1)(a+3)+1$ 的结果是_____.

11 下面是某同学对多项式 $(x^2-4x+2)(x^2-4x+6)+4$ 进行因式分解的过程：

设 $x^2-4x=y$，原式 $=(y+2)(y+6)+4$（第一步）

$=y^2+8y+16$（第二步）

$=(y+4)^2$（第三步）

$=(x^2-4x+4)^2$.（第四步）

请问：

(1)该同学第二步到第三步运用了因式分解的（　　）

A. 提取公因式法

B. 平方差公式

C. 两数和的完全平方公式

D. 两数差的完全平方公式

(2)该同学因式分解的结果是否彻底？_____.（填“彻底”或“不彻底”）若不彻底，请直接写出因式分解的最后结果_____.

(3)请你模仿以上方法尝试对多项式 $(x^2-2x)(x^2-2x+2)+1$ 进行因式分解.

题型3　完全平方公式分解因式的应用

12 已知 $x^2+y^2-2x-6y=-10$，那么 $x^{2\,018}y^2$ 的值为（　　）

A. $\frac{1}{9}$　　B. 9　　C. 1　　D. 2

13 不论 a,b 为任何实数，$a^2+b^2-6a+10b+35$ 的值是（　　）

A. 非负数　　B. 恒为正数

C. 恒为负数　　D. 非正数

14 若 $\sqrt{a+2}+b^2-2b+1=0$，则 $a=$_____，$b=$_____.

15 已知 $a+b=8$，$a^2b^2=4$，则 $\frac{a^2+b^2}{2}-ab=$_____.

16 [2019 山东泰安泰山区期中]利用因式分解计算：已知 $x+y=3$，$x-y=-2$，求 $(x^2+y^2)^2-4x^2y^2$ 的值.

全章综合训练

刷章测

▶建议用时:60 分钟　答案 D37

1 计算 $a^{12}\div a^4(a\neq0)$ 的结果是　(　　)

A. a^3　　B. a^{-8}　　C. a^8　　D. a^{-3}

2 下列运算正确的是　(　　)

A. $a^2\cdot a^3=a^6$　　B. $2a^2+a^2=3a^4$

C. $(-2a^2)^3=-2a^6$　　D. $a^4\div(-a)^2=a^2$

3 计算 $2^{101}\times0.5^{100}$ 的结果正确的是　(　　)

A. 1　　B. 2　　C. 0.5　　D. 10

4 [2018 河北中考]若 $2^n+2^n+2^n+2^n=2$,则 $n=$　(　　)

A. -1　　B. -2　　C. 0　　D. $\frac{1}{4}$

5 [2018 广东深圳期末]下列计算正确的是　(　　)

A. $(3x-y)(3x+y)=9x^2-y^2$

B. $(x-9)(x+9)=x^2-9$

C. $(x-y)(-x+y)=x^2-y^2$

D. $\left(x-\frac{1}{2}\right)^2=x^2-\frac{1}{4}$

6 [2018 湖南长沙天心区校级期末]下列关于 96^2 的计算方法正确的是　(　　)

A. $96^2=(100-4)^2=100^2-4^2=9\ 984$

B. $96^2=(95+1)(95-1)=95^2-1=9\ 024$

C. $96^2=(90+6)^2=90^2+6^2=8\ 136$

D. $96^2=(100-4)^2=100^2-2\times100\times4+4^2=9\ 216$

7 [2018 安徽濉溪期末]下列等式从左到右的变形是因式分解的是　(　　)

A. $-6a^3b^2=2a^2b\cdot(-3ab)$

B. $9a^2-4b^2=(3a+2b)(3a-2b)$

C. $ma-mb+c=m(a-b)+c$

D. $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$

8 [2018 陕西西安雁塔区校级期末]若 $(x+a)(x-3)=x^2+x-n$,则　(　　)

A. $a=-4,n=12$　　B. $a=-4,n=-12$

C. $a=4,n=-12$　　D. $a=4,n=12$

9 已知 $a^2-2a-1=0$,则 a^4-2a^3-2a+1 等于　(　　)

A. 0　　B. 1　　C. 2　　D. 3

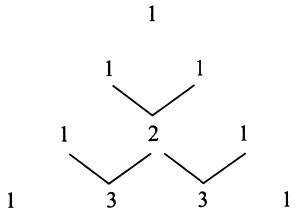
10 [2019 河南郑州校级月考]计算:$\left(\frac{5}{8}\right)^{2017}\times(-1.6)^{2018}\div(-1)^{2016}=$　(　　)

A. $\frac{5}{8}$　　B. $-\frac{5}{8}$　　C. $\frac{8}{5}$　　D. $-\frac{8}{5}$

11 不论 x,y 为何有理数,$x^2+y^2-2x+4y+6$ 的值均为　(　　)

A. 正数　　B. 零　　C. 负数　　D. 非负数

12 如图为杨辉三角系数表,它的作用是指导读者按规律写出形如 $(a+b)^n$(其中 n 为正整数)展开式的系数,例如:$(a+b)=a+b$,$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$,$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$,那么 $(a+b)^6$ 展开式中前四项的系数分别为　(　　)



A. 1,5,6,8　　B. 1,5,6,10

C. 1,6,15,18　　D. 1,6,15,20

13 计算:$25ab^3\div(-5ab^2)=$_____.

14 若 $a^2-3a+1=0$,则 $a^2+\frac{1}{a^2}=$_____.

15 已知 $4x^2+8(n+1)x+16n$ 是一个关于 x 的完全平方式,则常数 n 的值为_____.

16 n 为整数,$(2n+1)^2-(2n-1)^2$ 的值总能被整数 m 整除,则 m 的最大值为_____.

17 [2019 四川雅安校级期中]用简便方法计算:

(1)98^2;

(2)99×101.

自由应是一个能使自己变得更好的机会。

18 [2018 湖南邵阳中考]先化简,再求值:$(a-2b)(a+2b)-(a-2b)^2+8b^2$,其中 $a=-2$,$b=\frac{1}{2}$.

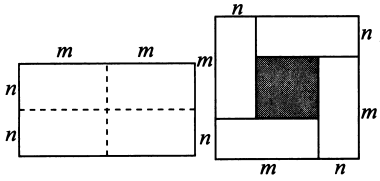
19 沿图(1)长方形中的虚线将其平均分成四块小长方形,然后按图(2)的形式拼成一个正方形.

(1)图(2)中阴影部分的面积为_____.

(2)观察图(2),请你写出代数式 $(m+n)^2$,$(m-n)^2$,mn 之间的等量关系式_____.

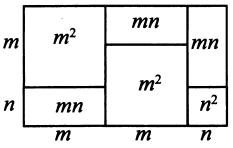
(3)根据你得到的关系式解答问题:若 $x+y=-6$,$xy=5$,则 $x-y=$_____.

(4)实际上有许多代数恒等式可以用图形的面积来表示. 如图(3),它表示了 $(2m+n)(m+n)=2m^2+3mn+n^2$. 试画出一个几何图形,使它的面积能表示 $(m+n)(m+3n)=m^2+4mn+3n^2$.



图(1)

图(2)



图(3)

20 仔细阅读下面的例题,解答问题:

例题:已知二次三项式 x^2-4x+m 有一个因式是 $(x+3)$,求另一个因式以及 m 的值.

解:设另一个因式为 $(x+n)$,得

$x^2-4x+m=(x+3)(x+n)$,

则 $x^2-4x+m=x^2+(n+3)x+3n$,

$\therefore \begin{cases} n+3=-4, \\ 3n=m. \end{cases}$

解得 $\begin{cases} n=-7, \\ m=-21. \end{cases}$

$\therefore$ 另一个因式为 $(x-7)$,m 的值为 -21.

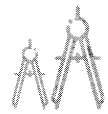
仿照以上方法解答问题:

(1)已知二次三项式 $2x^2-5x+k$ 有一个因式是 $(2x-3)$,求另一个因式以及 k 的值;

(2)若二次三项式 x^2-5x+6 可分解为 $(x-2)(x+a)$,求 a 的值;

(3)若二次三项式 $2x^2+bx-5$ 可分解为 $(2x-1)\cdot(x+5)$,求 b 的值.

第十五章 分式



15.1 分式

15.1.1 从分数到分式

刷基础

▶答案 D38

题型1 分式的定义

1 [2018 湖南邵阳模拟]下列各式中,是分式的是 (　　)

A. $\frac{2x+1}{x-3}$　　B. $\frac{x}{2}$　　C. $\frac{x}{\pi-2}$　　D. $\frac{1}{3}x^2$

2 有一捆粗细均匀的电线,现要确定它的长度. 从中先取出 1 m 长的电线,称出它的质量为 a,再称出其余电线的总质量为 b,则这捆电线的总长是 (　　)

A. $(ab+1)$ m　　B. $\left(\frac{b}{a}-1\right)$ m

C. $\left(\frac{b}{a}+1\right)$ m　　D. $\left(\frac{b+a}{a}+1\right)$ m

3 [2019 江苏如东期中]在式子 $\frac{1}{a}$, $\frac{2xy}{\pi}$, $\frac{3a^2b^3c}{4}$, $\frac{5}{6+x}$, $\frac{x}{7}+\frac{y}{8}$, $9x+\frac{10}{y}$ 中,分式有_____个.

题型2 分式有、无意义的条件

4 若分式 $\frac{x}{x+5}$ 有意义,则 x 的取值范围是_____.

5 若分式 $\frac{a^2-4}{a^2-2a}$ 无意义,则 a 值的是_____.

6 要使式子 $\frac{\sqrt{a+3}}{a^2-1}$ 有意义,则实数 a 的取值范围是_____.

7 当 x 满足什么条件时,下列分式有意义?

(1) $\frac{x^2-1}{x^2+1}$;(2) $\frac{|x|}{1-|x|}$;(3) $\frac{x^2-1}{(x+2)(x-1)}$.

8 已知分式 $\frac{3x-2}{x^2-1}$,求:

(1)当 x 为何值时,此分式有意义;

(2)当 x 为何值时,此分式无意义.

题型3 分式的值为零的条件

9 [2019 北京门头沟区期末]若分式 $\frac{x^2-1}{x+2}$ 的值为 0,则 x 的值为 (　　)

A. -1　　B. 0　　C. 1　　D. ±1

10 当 $x=$_____时,分式 $\frac{x^2-9}{x-3}$ 的值为零.

11 [2018 山东枣庄薛城区校级模拟]分式 $\frac{x+a}{3x-1}$ 中,当 $x=-a$ 时,下列结论正确的是_____.(填序号)

①分式的值为零;②分式无意义;③若 $a\neq-\frac{1}{3}$,分式的值为零;④若 $a\neq\frac{1}{3}$,分式的值为零.

12 [2019 内蒙古巴彦淖尔临河区期末]已知 $x=-2$ 时,分式 $\frac{x-b}{x+a}$ 无意义;$x=4$ 时,分式的值为 0,则 $a+b=$_____.

13 已知分式 $\frac{(m-1)(m-3)}{m^2-3m+2}$,试问:

(1)当 m 为何值时,分式有意义?

(2)当 m 为何值时,分式的值为零?

刷易错

易错点 忽略分式的分母不能为 0 而出错

14 若分式 $\frac{|x|-2}{x+2}$ 的值为零,则 x 的值是 (　　)

A. 2　　B. -2　　C. ±2　　D. 1

愿你自己有充分的忍耐去担当,有充分单纯的心去信仰。请你相信:无论如何,生活是合理的。

15.1.2　分式的基本性质

刷基础

▶答案 D38

题型1　分式的基本性质

1 下列各式变形正确的是（　　）

A. $\frac{2}{2+a}=\frac{1}{1+a}$　　B. $\frac{a+1}{a^2+1}=\frac{1}{a+1}$

C. $\frac{-x+y}{x-y}=\frac{x+y}{y-x}$　　D. $\frac{a^2-1}{a+1}=a-1$

2 [2019 山东泰安泰山区期中]将分式$\frac{x+y}{x^2y}$中 x,y 的值同时扩大为原来的 3 倍，则分式的值（　　）

A. 扩大 3 倍　　B. 缩小为原来的$\frac{1}{9}$

C. 缩小为原来的$\frac{1}{3}$　　D. 不变

3 [2019 北京海淀区期末]把分式$\frac{\frac{1}{3}x+\frac{1}{6}}{\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}}$的分子与分母各项系数化为整数，得到的正确结果是（　　）

A. $\frac{3x+2}{4x-3}$　　B. $\frac{4x+2}{6x-3}$

C. $\frac{2x+1}{2x-1}$　　D. $\frac{4x+1}{6x-3}$

4 不改变分式的值，把分式$\frac{0.1x+0.2y}{0.3+y}$的分子、分母各项系数都化为整数为_____.

题型2　约分与最简分式

5 化简分式$\frac{x^2-4}{x-2}$的结果是（　　）

A. $x-2$　　B. $x+2$　　C. $\frac{x-4}{2}$　　D. $\frac{x+2}{x}$

6 [2018 广东佛山三水区期末]下列分式是最简分式的是（　　）

A. $\frac{4xy}{x^2}$　　B. $\frac{4}{2x-6}$　　C. $\frac{3}{x+3}$　　D. $\frac{x-y}{x^2-y^2}$

7 [2019 湖北武汉江汉区校级月考]计算$\frac{(x+y)^2-(x-y)^2}{4xy}$的结果为（　　）

A. 1　　B. $\frac{1}{2}$　　C. $\frac{1}{4}$　　D. 0

8 若 m 为整数，则能使$\frac{m^2-2m+1}{m^2-1}$也为整数的 m 有（　　）

A. 1 个　　B. 2 个　　C. 3 个　　D. 4 个

9 [2019 河北石家庄栾城区校级月考]将下列分式约分：$\frac{7m^2n}{-35mn^2}=$_____.

10 分式$\frac{x}{x^3},\frac{3a+1}{3a+b},\frac{m+n}{m^2-n^2},\frac{2-x}{2x}$中，最简分式的个数是_____.

11 约分：(1)$\frac{x^2+6x+9}{x^2-9}$；(2)$\frac{m^2-3m+2}{m^2-m}$.

12 先化简，再求值：$\frac{x^2-4xy+4y^2}{(x-2y)^3}$，其中 $x=-2,y=3$.

题型3　通分与最简公分母

13 分式$\frac{2}{ab},\frac{1}{a^2b},\frac{3}{abc}$的最简公分母是_____.

14 [2019 上海浦东新区期末]分式$\frac{m}{m^2-n^2}$和$\frac{n}{3m+3n}$的最简公分母为_____.

15 将分式$\frac{b}{3a},-\frac{ab}{2c}$通分，依次为_____.

刷易错

易错点　通分时最简公分母确定错误而出错

16 对分式$\frac{1}{2a^2bc^3},\frac{2}{3ab^3},\frac{3}{4a^3bc}$进行通分，它们的最简公分母为_____.

刷提升

▶答案 D39

1 [2019 山东泰安泰山区期中]下列分式：$\frac{-6xy}{3x}$，$\frac{y^2-x^2}{x-y}$，$\frac{x^2+y^2}{x+y}$，$\frac{xy+x}{2x+4x^2y}$，$\frac{x^2-1}{x^2+2x+1}$，其中是最简分式的有　(　　)

A. 1 个　　B. 2 个　　C. 3 个　　D. 4 个

2 [2018 山东青岛市南区期末]无论 a 取何值，下列分式一定有意义的是　(　　)

A. $\frac{a^2+1}{a^2}$　　B. $\frac{a+1}{a^2}$　　C. $\frac{a^2-1}{a+1}$　　D. $\frac{a-1}{a^2+1}$

3 [2019 福建漳州南靖校级月考]下列各式的变号中，正确的是　(　　)

A. $\frac{x-y}{y-x}=\frac{y-x}{x+y}$　　B. $\frac{x-y}{y-x^2}=\frac{y-x}{y-x^2}$

C. $\frac{-x-1}{-y+1}=\frac{x-1}{y+1}$　　D. $\frac{-x-y}{y-x}=-\frac{x+y}{y-x}$

4 [2018 北京门头沟区二模]如果代数式 $\frac{x-2}{x^2+1}$ 的结果是负数，则实数 x 的取值范围是　(　　)

A. $x>2$　　B. $x<2$

C. $x\neq -1$　　D. $x<2$ 且 $x\neq -1$

5 对分式 $\frac{1}{a-b}$，$\frac{1}{a+b}$，$\frac{1}{a^2-b^2}$ 通分后，$\frac{1}{a+b}$ 的结果是　(　　)

A. $\frac{a+b}{a^2-b^2}$　　B. $\frac{a-b}{a^2-b^2}$

C. $\frac{a^2-b^2}{(a+b)(a^2-b^2)}$　　D. $\frac{(a+b)(a-b)}{(a^2-b^2)^2}$

6 若 $x^2-4x-1=0$，则 $\frac{3x^2}{x^4-7x^2+1}$ 等于　(　　)

A. $\frac{3}{11}$　　B. -1　　C. $\frac{1}{3}$　　D. $-\frac{3}{5}$

7 [2018 江苏兴化期末]分式 $\frac{4}{m-1}$ 的值是整数，负整数 m 的值为_____.

8 [2018 山东济南商河期末]若分式 $\frac{x^2-1}{x-1}$ 的值为零，则 $x=$_____.

9 [2018 河南周口商水二模]若 $a^2-ab=0(b\neq 0)$，则 $\frac{a}{a+b}=$_____.

10 把下列各式化为最简分式：

(1) $\frac{a^2-16}{a^2-8a+16}$；(2) $\frac{x^2-(y-z)^2}{(x+y)^2-z^2}$.

11 [2018 江苏扬州邗江区期中]先约分，再求值：$\frac{a^3-4ab^2}{a^3-4a^2b+4ab^2}$，其中 $a=2$，$b=-\frac{1}{2}$.

刷素养

12 [2018 山东日照莒县模拟，难]阅读下面的解题过程：

已知：$\frac{x}{x^2+1}=\frac{1}{3}$，求 $\frac{x^2}{x^4+1}$ 的值.

解：由 $\frac{x}{x^2+1}=\frac{1}{3}$ 可知 $x\neq 0$，

所以 $\frac{x^2+1}{x}=3$，即 $x+\frac{1}{x}=3$，

所以 $\frac{x^4+1}{x^2}=x^2+\frac{1}{x^2}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2=3^2-2=7$，

故 $\frac{x^2}{x^4+1}$ 的值为 $\frac{1}{7}$.

该题的解法叫做“倒数法”，请你利用“倒数法”解决下面的题目：

已知 $\frac{x}{x^2-3x+1}=\frac{1}{5}$，求 $\frac{x^2}{x^4+x^2+1}$ 的值.

好花，好茶，好酒。读书，写作，旅行。保管好内心的苍老天真，即使孤独，也孤独得有美意。

15.2　分式的运算

15.2.1　分式的乘除

课时1　分式的乘除

刷基础

▶答案 D39

题型1　分式的乘法

1 计算$\frac{a^2}{b^3}\cdot\frac{2b^2}{3a^2}$的结果是　(　　)

A. $\frac{2}{3}a$　　B. $\frac{2}{3}b$　　C. $\frac{2}{b}$　　D. $\frac{2}{3b}$

2 计算$\left(-\frac{n}{m}\right)\cdot\frac{m^2-m}{n}$的结果是　(　　)

A. $-m-1$　　B. $-m+1$　　C. $-mn+n$　　D. $-mn-n$

3 [2018 天津滨海新区一模]计算$\frac{a+b}{5ab}\cdot\frac{10a^2b}{a^2-b^2}$的结果为　(　　)

A. $\frac{2}{a-b}$　　B. $\frac{a}{a-b}$　　C. $\frac{b}{a-b}$　　D. $\frac{2a}{a-b}$

4 计算$(a^2b)^3\cdot\frac{b^2}{a}$的结果是　(　　)

A. a^5b^5　　B. a^4b^5　　C. ab^5　　D. a^5b^6

5 [2019 广西北海合浦校级期中]计算$6a^3b\cdot\frac{-3b}{2a}$的结果为_____.

6 计算:$(x^2-9)\cdot\frac{1}{x-3}=$_____.

题型2　分式的除法

7 [2018 天津河西区模拟]计算$\frac{1}{49-m^2}\div\frac{1}{m^2-7m}$的结果为　(　　)

A. $\frac{m}{m+7}$　　B. $\frac{m}{m-7}$　　C. $\frac{1}{49-7m}$　　D. $-\frac{m}{m+7}$

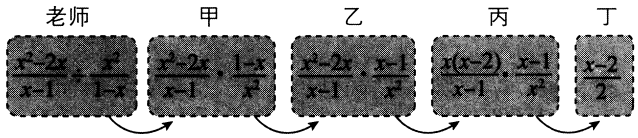
8 计算$\frac{x^2y}{x-y}\div\frac{xy}{x-y}$的结果是　(　　)

A. $\frac{1}{x}$　　B. $\frac{x}{y}$　　C. y　　D. x

9 化简分式$\frac{1}{a-1}\div\frac{1}{a(a-1)}$,正确的结果是　(　　)

A. $\frac{1}{a-1}$　　B. $\frac{1}{a}$　　C. $a-1$　　D. a

10 [2018 河北中考]老师设计了接力游戏,用合作的方式完成分式化简. 规则:每人只能看到前一人给的式子,并进行一步计算,再将结果传递给下一人,最后完成化简. 过程如图所示:



接力中,自己负责的一步出现错误的是　(　　)

A. 只有乙　　B. 甲和丁

C. 乙和丙　　D. 乙和丁

11 分式$\frac{x^2+x}{x^2-1}\div\frac{x^2}{x^2-2x+1}=$_____.

12 计算:$\left(-\frac{3a}{b}\right)\div6ab=$_____.

13 化简:$\frac{12}{m^2-9}\div\frac{2}{m+3}=$_____.

14 化简:$\frac{x^2-1}{x}\div\frac{x+1}{x}=$_____.

15 已知a米布料能做b件上衣,$2a$米布料能做$3b$条裤子,则一件上衣的用料是一条裤子用料的_____倍.

16 [2019 河南开封校级月考]计算:

(1)$\frac{x^2-6x+9}{9-x^2}\div\frac{2x-6}{x^2+3x}$;

(2)$\frac{2x-6}{4-4x+x^2}\div\frac{3-x}{(x-2)(x+3)}$.

课时2 分式的乘除混合运算及乘方

刷基础

▶答案 D40

题型1　分式的乘除混合运算

1 计算 $a \div \frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a}$ 的结果是（　　）

A. a　　B. a^2　　C. $\frac{1}{a^2}$　　D. $\frac{b^2}{a}$

2 计算 $-\frac{n}{m^2} \cdot \frac{m^3}{n^2} \div \frac{m}{n^2}$ 的结果是（　　）

A. $\frac{m^2}{n^2}$　　B. $-\frac{m^2}{n^3}$　　C. $-\frac{n}{m^4}$　　D. $-n$

3 化简 $a^2 \div b \cdot \frac{1}{b}$ 的结果是（　　）

A. a　　B. $\frac{a^2}{b^2}$　　C. $\frac{a}{b^2}$　　D. a^2

4 计算：$\frac{x^2+xy}{x^2-xy} \div (x+y) \cdot \frac{xy-y^2}{xy}$.

5 化简：$\frac{2x-6}{4-4x+x^2} \div (x+3) \cdot \frac{x^2+x-6}{3-x} \cdot (x-2)$.

题型2　分式的乘方和乘除混合运算

6 计算 $\left(\frac{-5x^2y}{3x}\right)^2$ 的结果是（　　）

A. $\frac{10x^3y}{3x}$　　B. $\frac{25x^2y}{9}$　　C. $\frac{25x^2y^2}{9}$　　D. $\frac{-5x^2y^2}{3}$

7 计算 $a^3 \cdot \left(-\frac{1}{a}\right)^2$ 的结果是（　　）

A. a　　B. a^5　　C. a^6　　D. a^4

8 计算 $\left(\frac{a+b}{a-b}\right)^2 \cdot \frac{2a-2b}{3a+3b}$，其结果是（　　）

A. $\frac{3a+3b}{2a-2b}$　　B. $\frac{2a+b}{3a-b}$　　C. $\frac{2a+2b}{3a+3b}$　　D. $\frac{2a+2b}{3a-3b}$

9 下列运算结果正确的是（　　）

A. $\frac{m^4}{n^5} \cdot \frac{n^4}{n^3} = \frac{m^4}{n^4}$　　B. $\left(\frac{3x}{4y}\right)^3 = \frac{3x^3}{4y^3}$

C. $\left(\frac{2a}{a-b}\right)^2 = \frac{4a^2}{a^2-b^2}$　　D. $\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$

10 化简：$\frac{2b}{a^2} \cdot \left(\frac{a}{b}\right)^2 =$ _____.

11 计算：$\left(\frac{x}{2y}\right)^2 \div \frac{x^2}{4y}$.

12 先化简，再求值：$\left(\frac{x^2-y^2}{xy}\right)^2 \div (x+y) \cdot \left(\frac{x}{x-y}\right)^3$，其中 $x=-\frac{1}{2}, y=-1$.

刷易错

易错点　在进行分式的乘除混合运算时弄错运算顺序而出错

13 计算 $(x+y) \div \frac{x+y}{x} \cdot \frac{x}{x+y}$ 的结果是（　　）

A. $x+y$　　B. $\frac{x^2}{x+y}$　　C. $\frac{1}{y}$　　D. $\frac{1}{1+y}$

永远都不要为了目的而忘了初衷。就像给风命名的，不是它要去的方向，而是它来时的方向。

刷提升

▶答案 D40

1 计算$\left(-\frac{2a}{b}\right)^3$的结果是（　　）

A. $-\frac{2a^3}{b^3}$　　B. $-\frac{6a^3}{b^3}$

C. $-\frac{8a^3}{b^3}$　　D. $\frac{8a^3}{b^3}$

2 计算$\frac{m}{3m+9}\cdot\frac{6}{9-m^2}\div\frac{2m}{m-3}$的结果是（　　）

A. $\frac{1}{(m+3)^2}$　　B. $-\frac{1}{(m+3)^2}$

C. $\frac{1}{(m-3)^2}$　　D. $-\frac{1}{m^2+9}$

3 化简$\left(\frac{a-b}{a}\right)^4\cdot\left(\frac{a}{b-a}\right)^5$的结果是（　　）

A. -1　　B. $\frac{a}{a-b}$

C. $\frac{1}{a}$　　D. $-\frac{a}{a-b}$

4 化简$\frac{x-y}{x+y}\div(y-x)\cdot\frac{1}{x-y}$的结果是（　　）

A. $\frac{1}{x^2-y^2}$　　B. $\frac{y-x}{x+y}$

C. $\frac{1}{y^2-x^2}$　　D. $\frac{x-y}{x+y}$

5 计算$\frac{1}{2}\div\frac{a-b}{2a+2b}\cdot(a^2-b^2)$的结果是（　　）

A. $\frac{(a-b)^2}{4}$　　B. $\frac{1}{(a-b)^2}$　　C. $\frac{4}{(a-b)^2}$　　D. $(a+b)^2$

6 化简$\frac{16-a^2}{a^2+4a+4}\div\frac{a-4}{2a+4}\cdot\frac{a+2}{a+4}$的结果是（　　）

A. $-\frac{2}{(a+2)^2}$　　B. 2　　C. -2　　D. $\frac{2}{(a+2)^2}$

7 [2019 上海宝山区期末]计算：$\left(-\frac{y}{2ax}\right)^2\div\frac{y^3}{4x}=$_____.

8 化简$\frac{a^4-a^2b^2}{(a-b)^2}\div\frac{a(a+b)}{b^2}\cdot\frac{b^2}{a}$的结果是_____.

9 化简$\left(-\frac{a}{b}\right)^2\cdot\left(-\frac{b^2}{2a}\right)^3\div(-ab^4)=$_____.

10 已知$\frac{3a+1}{a}=0$，求$\frac{a^2-2a+1}{a^2-2a}\div(a-1)\cdot\frac{2-a}{a-1}$.

11 先化简，再求值：

(1)$\left(\frac{x^2-4x+3}{12-x-x^2}\right)^2\div\left(\frac{4+2x-2x^2}{x^2+2x-8}\right)^2$，其中$x=-2$；

(2)$\left(\frac{a+b}{2ab^2}\right)^3\div\left(\frac{a^2-b^2}{ab^3}\right)^2\div\left[\frac{1}{2(a-b)}\right]^2$，其中$a=-\frac{1}{2}$，$b=\frac{2}{3}$.

刷素养

12 [2019 河北邢台期末，难]给定一列分式：$\frac{x^3}{y}$，$-\frac{x^5}{y^2}$，$\frac{x^7}{y^3}$，$-\frac{x^9}{y^4}$，…，其中$x\neq0$，用任意一个分式去除它后面一个分式得到的结果是什么？根据你发现的规律，试写出第 9 个分式.

15.2.2 分式的加减

课时1 分式的加减

刷基础

►答案 D41

题型1 同分母分式的加减

1 计算$\frac{a}{a+1}+\frac{1}{a+1}$的结果是 (　　)

A. 1　　B. a　　C. $a+1$　　D. $\frac{1}{a+1}$

2 [2018 浙江台州中考]计算$\frac{x+1}{x}-\frac{1}{x}$,结果正确的是 (　　)

A. 1　　B. x　　C. $\frac{1}{x}$　　D. $\frac{x+2}{x}$

3 [2018 江苏扬州邗江区二模]若$\frac{2x-3}{x+1}=A-\frac{5}{x+1}$,则$A=$_____.

4 化简:$\frac{2x}{x+1}+\frac{1-x}{x+1}=$_____.

5 计算:$\frac{x^2}{x-1}-\frac{1}{x-1}=$_____.

6 [2018 湖南衡阳中考]计算:$\frac{x^2}{x+1}-\frac{1}{x+1}$.

题型2 异分母分式的加减

7 [2018 四川乐山中考]化简$\frac{a}{b-a}+\frac{b}{a-b}$的结果是 (　　)

A. 1　　B. $\frac{b}{b-a}$　　C. -1　　D. $\frac{b}{a-b}$

8 [2016 浙江丽水中考]$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$的运算结果正确的是 (　　)

A. $\frac{1}{a+b}$　　B. $\frac{2}{a+b}$　　C. $\frac{a+b}{ab}$　　D. $a+b$

9 化简$\frac{a}{a-b}-\frac{b}{a+b}$的结果是 (　　)

A. $\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}$　　B. $\frac{(a+b)^2}{a^2-b^2}$　　C. $\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}$　　D. $\frac{a^2+b^2}{(a-b)^2}$

10 化简$\frac{y}{x-y}+\frac{x}{x+y}$结果正确的是 (　　)

A. 1　　B. $\frac{x^2+y^2}{x^2-y^2}$　　C. $\frac{x-y}{x+y}$　　D. x^2+y^2

11 [2018 江西抚州二模]化简$\frac{1}{a-2}-\frac{2a}{a^2-4}$的结果是 (　　)

A. $-a-2$　　B. $-\frac{1}{a+2}$　　C. $\frac{1}{a+2}$　　D. $\frac{1}{a-2}$

12 计算:$\frac{4}{a^2-4}+\frac{2}{a+2}-\frac{1}{a-2}=$_____.

13 [2019 河北唐山路北区校级月考]如果$a-b=3ab$,那么$\frac{1}{a}-\frac{1}{b}=$_____.

14 化简$\frac{x^2+6x+9}{x^2-9}-\frac{x}{x-3}$的结果是_____.

15 [2019 陕西咸阳校级月考]先化简,再求值:$\frac{x^2+2x+1}{x^2-1}-\frac{x}{x-1}$,其中$x=2$.

刷易错

易错点 在进行分式的加减运算时,忽视分数线的括号作用而出错

16 计算:$\frac{x^2+xy}{xy}-\frac{x^2-xy}{xy}$.

刷提升

▶答案 D41

1 [2018 四川内江中考]已知:$\frac{1}{a}-\frac{1}{b}=\frac{1}{3}$,则$\frac{ab}{b-a}$的值是　　(　　)

A. $\frac{1}{3}$　　B. $-\frac{1}{3}$　　C. 3　　D. -3

2 化简$\frac{a^2-b^2}{ab}-\frac{ab-b^2}{ab-a^2}$的结果是　　(　　)

A. $\frac{b}{a}$　　B. $\frac{a}{b}$　　C. $-\frac{b}{a}$　　D. $-\frac{a}{b}$

3 [2018 四川甘孜州中考]已知 $m+n=3mn$,则$\frac{1}{m}+\frac{1}{n}$的值是　　(　　)

A. 1　　B. 4　　C. 2　　D. 3

4 化简:$\frac{x^2+2x+1}{x+1}-\frac{x^2+x}{x}=$_____.

5 [2019 内蒙古包头校级期末]已知:$\frac{3x-4}{(x-1)(x-2)}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x-2}$,则 $A=$_____,$B=$_____.

6 [2018 山东济南长清区期中]已知:$\frac{1}{a}-\frac{1}{b}=2$,则$\frac{2a-ab-2b}{a+ab-b}$的值为_____.

7 已知 $a^2-3ab+b^2=0$,则$\frac{a}{b}+\frac{b}{a}=$_____.

8 [2019 河南新乡校级月考]观察下列各式:$\frac{2}{1\times3}=\frac{1}{1}-\frac{1}{3}$,$\frac{2}{2\times4}=\frac{1}{2}-\frac{1}{4}$,$\frac{2}{3\times5}=\frac{1}{3}-\frac{1}{5}$,….请利用你观察所得的结论,化简代数式:$\frac{1}{1\times3}+\frac{1}{2\times4}+\frac{1}{3\times5}+\cdots+\frac{1}{n(n+2)}$($n\geqslant3$ 且 n 为整数),其结果是_____.

9 [2019 山东淄博淄川区一模]化简:$\frac{1}{a^2-a}+\frac{a-3}{a^2-1}$.

10 已知$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\sqrt{5}$,求$\frac{a}{b(a-b)}-\frac{b}{a(a-b)}$的值.

11 已知$\frac{a-b}{a+b}=2$,求$\frac{2(a+b)}{a-b}-\frac{a-b}{3(a+b)}$的值.

刷素养

12 [2018 重庆巴南区模拟,难]阅读材料:

将分式$\frac{x^2+2x-5}{x+3}$拆分成一个整式与一个分式(分子为整数)的和(差)的形式.

解:由分母为 $x+3$,可设 $x^2+2x-5=(x+3)(x+a)+b$,

则由 $x^2+2x-5=(x+3)(x+a)+b=x^2+ax+3x+3a+b=x^2+(a+3)x+(3a+b)$.

∵对于任意 x,上述等式均成立,∴$\begin{cases}a+3=2,\\3a+b=-5,\end{cases}$解得$\begin{cases}a=-1,\\b=-2.\end{cases}$

∴$\frac{x^2+2x-5}{x+3}=\frac{(x+3)(x-1)-2}{x+3}=\frac{(x+3)(x-1)}{x+3}-\frac{2}{x+3}=x-1-\frac{2}{x+3}$.

这样,分式$\frac{x^2+2x-5}{x+3}$就被拆分成一个整式与一个分式(分子为整数)的和(差)的形式.

解决问题:将分式$\frac{x^2+3x+6}{x-1}$,$\frac{-2x^4-x^2+5}{-x^2+1}$分别拆分成一个整式与一个分式(分子为整数)的和(差)的形式.

课时2　分式的混合运算

刷基础

▶答案 D42

题型1　分式的混合运算

1 [2019 黑龙江大庆期末]化简 $\frac{x}{x^2+2x+1}\div\left(1-\frac{1}{x+1}\right)$ 的结果是　(　　)

A. $\frac{1}{x+1}$　　B. $\frac{x+1}{x}$　　C. $x+1$　　D. $x-1$

2 [2018 江苏苏州中考]计算 $\left(1+\frac{1}{x}\right)\div\frac{x^2+2x+1}{x}$ 的结果是　(　　)

A. $x+1$　　B. $\frac{1}{x+1}$　　C. $\frac{x}{x+1}$　　D. $\frac{x+1}{x}$

3 计算 $\left(a-\frac{b^2}{a}\right)\cdot\frac{a}{a-b}$ 的结果是　(　　)

A. $\frac{1}{a-b}$　　B. $\frac{1}{a+b}$　　C. $a-b$　　D. $a+b$

4 [2018 陕西宝鸡凤翔二模]若 $a+b=5$，则代数式 $\left(\frac{b^2}{a}-a\right)\div\left(\frac{a-b}{a}\right)$ 的值为　(　　)

A. 5　　B. -5　　C. $-\frac{1}{5}$　　D. $\frac{1}{5}$

5 化简 $\left(1-\frac{2}{x+1}\right)\div\frac{1}{x^2-1}$ 的结果是　(　　)

A. $(x+1)^2$　　B. $(x-1)^2$

C. $\frac{1}{(x+1)^2}$　　D. $\frac{1}{(x-1)^2}$

6 [2019 山西阳泉校级月考]计算：$\left(\frac{a}{a+b}+\frac{2b}{a+b}\right)\cdot\frac{a}{a+2b}=$ _____.

7 [2018 内蒙古包头中考]化简：$\frac{x^2-4x+4}{x^2+2x}\div\left(\frac{4}{x+2}-1\right)=$ _____.

8 化简：$\left(\frac{x}{x-3}+\frac{2}{3-x}\right)\cdot\frac{x-3}{x-2}=$ _____.

9 化简：$\frac{x-2}{x+1}\cdot\left(1+\frac{2x+5}{x^2-4}\right)$.

10 计算：$\left(x-\frac{6x-9}{x}\right)\div\left(1-\frac{3}{x}\right)$.

题型2　分式的化简求值

11 先化简，再求值：$\left(\frac{a^2}{b}-a\right)\div\frac{a^2-b^2}{b}$，其中 $a=\frac{1}{2}$，$b=1$.

12 [2018 陕西西安莲湖区二模]先化简，再求值：$\left(\frac{x^2-2x+1}{x^2-x}+\frac{x^2-4}{x^2+2x}\right)\div\frac{1}{x}$，其中 x 为满足 $-3<x<2$ 的整数.

刷易错

易错点　进行分式的混合运算时，因将分配律用在除法运算中而出错

13 [2019 贵州六盘水校级月考]化简：$\left(\frac{2}{a+1}+\frac{a+2}{a^2-1}\right)\div\frac{a}{a-1}$.

有时，你必须进入别人的世界去发现自己缺少什么。

刷提升

▸答案 D42

1 [2019 浙江湖州期末]化简$\left(1-\frac{2x-1}{x^2}\right)\div\left(1-\frac{1}{x^2}\right)$的结果为（　　）

A. $\frac{x-1}{x+1}$　　B. $\frac{x+1}{x-1}$　　C. $\frac{x+1}{x}$　　D. $\frac{x-1}{x}$

2 化简$\left(1+\frac{1}{x-2}\right)\cdot\frac{x^2-4x+4}{x-1}$的结果是（　　）

A. $x+2$　　B. $x-1$　　C. $\frac{1}{x+2}$　　D. $x-2$

3 计算：$\left(\frac{1}{1-x}-\frac{1}{x+1}\right)\cdot\frac{x-1}{x}=$（　　）

A. $\frac{2}{x+1}$　　B. $\frac{2}{x-1}$　　C. $-\frac{2}{x+1}$　　D. $-\frac{2}{x-1}$

4 [2018 山东菏泽鄄城期末]如果$b-a=-6$，那么$\left(a-\frac{b^2}{a}\right)\div\frac{a+b}{a}$的值是（　　）

A. 6　　B. -6　　C. $\frac{1}{6}$　　D. $-\frac{1}{6}$

5 计算：$\left(1-\frac{1}{x-1}\right)\cdot\frac{x^2-1}{x-2}=$_____.

6 [2018 湖北孝感中考]已知$x+y=4\sqrt{3}$，$x-y=\sqrt{3}$，则式子$\left(x-y+\frac{4xy}{x-y}\right)\left(x+y-\frac{4xy}{x+y}\right)$的值是_____.

7 [2018 北京中考]如果$a-b=2\sqrt{3}$，那么代数式$\left(\frac{a^2+b^2}{2a}-b\right)\cdot\frac{a}{a-b}$的值是_____

8 化简：$\left(1-\frac{b}{a+b}\right)\div\frac{a}{a^2-b^2}=$_____.

9 已知$x-3y=0$，求$\frac{2x+y}{x^2-2xy+y^2}\cdot(x-y)$的值.

10 化简：$\left(\frac{2a^2+2a}{a^2-1}-\frac{a^2-a}{a^2-2a+1}\right)\div\frac{2a}{a-1}$.

11 [2018 山东临沂中考]计算：$\left(\frac{x+2}{x^2-2x}-\frac{x-1}{x^2-4x+4}\right)\div\frac{x-4}{x}$.

12 先化简，再求值：$\frac{2x-6}{x-2}\div\left(\frac{5}{x-2}-x-2\right)$，其中$x=-2$.

刷素养

13 (1)比较下列各组数的大小，找规律，提出你的猜想：

$\frac{1}{2}$_____$\frac{1+3}{2+3}$；$\frac{2}{3}$_____$\frac{2+1}{3+1}$；$\frac{3}{4}$_____$\frac{3+2}{4+2}$；$\frac{4}{5}$_____$\frac{4+6}{5+6}$；$\frac{2}{9}$_____$\frac{2+5}{9+5}$；$\frac{8}{17}$_____$\frac{8+10}{17+10}$.

从上面各式发现，一个正分数的分子和分母_____，所得分数的值比原分数的值要_____.

猜想：设$a>b>0$，$m>0$，则$\frac{b}{a}$_____$\frac{b+m}{a+m}$；

(2)试证明你的猜想；

(3)试用(1)中你归纳的数学关系式，解释下面生活中的一个现象：若m克糖水里含有n克糖，再加入k克糖(仍不饱和)，则糖水更甜了.

15.2.3　整数指数幂

课时1　负整数指数幂

刷基础

▶答案 D43

题型1　负整数指数幂

1 [2018 广东广州校级月考]计算$|-2\,018|^{-1}$的结果是（　　）

A. $-2\,018$　　B. $-\frac{1}{2\,018}$

C. $2\,018$　　D. $\frac{1}{2\,018}$

2 [2019 安徽阜阳期末]计算$\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}$所得的结果是（　　）

A. -2　　B. $-\frac{1}{2}$　　C. $\frac{1}{2}$　　D. 2

3 下列运算正确的是（　　）

A. $-4^0=1$　　B. $(-3)^{-1}=\frac{1}{3}$

C. $(-2^{m-n})^2=4^{m-n}$　　D. $(a+b)^{-1}=a^{-1}+b^{-1}$

4 [2018 黑龙江牡丹江中考]下列运算正确的是（　　）

A. $2a^{-3}\cdot a^4=2a^{-12}$　　B. $(-3a^2)^3=-9a^6$

C. $a^2\div a\cdot\frac{1}{a}=a^2$　　D. $a\cdot a^3+a^2\cdot a^2=2a^4$

5 [2018 山东利津期末]若$a=-2^2$，$b=2^{-2}$，$c=\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}$，$d=\left(\frac{1}{2}\right)^0$，则（　　）

A. $a<b<d<c$　　B. $a<b<c<d$

C. $b<a<d<c$　　D. $a<c<b<d$

6 若$(3x+8)^{-2}$无意义，则x的值为_____.

题型2　负整数指数幂的相关计算

7 计算：$-2a^{-2}b^3\div\left(-\frac{3a^3}{2b^2}\right)^{-2}=$（　　）

A. $-\frac{9a^4}{2b}$　　B. $\frac{9a^4}{2b}$　　C. $\frac{9a^2}{2b}$　　D. $-\frac{9a^2}{2b}$

8 [2018 浙江绍兴期中]若要$(a-1)^{a-4}=1$成立，则$a=$_____.

9 计算：$-1^{2\,018}-(\pi-3.14)^0+\left(-\frac{1}{2}\right)^{-2}=$_____.

10 若$(1-x)^2+|y+2|=0$，则$x^0+y^{-1}=$_____.

11 计算下列各式：$2^{-1}+3.14^0=$_____；$\left(\frac{1}{2}x^{-2}y^3\right)^{-2}=$_____.

12 [2018 湖南邵阳三模]计算：$\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}+|-2|-(\pi-1)^0$.

13 计算：

(1)$(a^{-3}b^{-2})^{-2}\cdot(ab^3)^{-3}$；

(2)$\left(-\frac{1}{2}\right)^{-2}-2^3\times0.125+2\,018^0+|-1|$.

14 计算：

(1)$(-m^4\cdot m^{-2})^2+(-2m)^3\cdot m^2+m^{-4}\div(m^{-2})^4$；

(2)$|-2|+\left(\frac{1}{3}\right)^{-1}\times(\pi-\sqrt{2})^0-\sqrt{9}+(-1)^2$.

15 化简下列各式，使结果只含有正整数指数幂.

(1)$(-2m^2n^{-3})\cdot(3m^{-3}n^{-1})$；

(2)$(-2m^2n^{-3})\div(3m^{-3}n^{-1})$.

16 计算下列各式：

(1)$\frac{(2x^2y^2)^2\cdot(-3x^{-1}y^3)}{6x^{-2}y^{-3}\cdot3x^2y^3}$；

(2)$\frac{a^{-2}b^{-2}\cdot(-3a^{-3}b^3)}{6a^{-4}b^{-5}}$.

人生虽然热闹，却往往美中不足，好事多磨，你要有心理准备。

课时2 用科学记数法表示小于1的正数

刷基础

▶答案 D43

题型1　科学记数法

1 [2018 广西百色中考]某种细菌的半径是0.000 006 18 米，用科学记数法表示半径为（　　）

A. 618×10^{-6} 米　　B. 6.18×10^{-7} 米

C. 6.18×10^{6} 米　　D. 6.18×10^{-6} 米

2 [2018 广西梧州中考]研究发现，银原子的半径约是0.000 15 微米，把0.000 15 用科学记数法表示为（　　）

A. 1.5×10^{-4}　　B. 1.5×10^{-5}

C. 15×10^{-5}　　D. 15×10^{-6}

3 PM2.5 是指大气中直径小于或等于0.000 002 5 m 的颗粒物，将0.000 002 5 用科学记数法表示为（　　）

A. 2.5×10^{-6}　　B. 2.5×10^{-7}

C. 25×10^{-6}　　D. 0.25×10^{-7}

4 [2018 湖南邵阳中考]据《经济日报》2018 年5 月21 日报道：目前，世界集成电路生产技术水平最高已达到7 nm(1 nm = 10^{-9} m)，主流生产线的技术水平为14～28 nm，中国大陆集成电路生产技术水平最高为28 nm. 将28 nm 用科学记数法表示为（　　）

A. 28×10^{-9} m　　B. 2.8×10^{-8} m

C. 28×10^{9} m　　D. 2.8×10^{8} m

5 某10 亿个感冒病毒的直径之和是123 米，则用科学记数法表示这种病毒的直径是（　　）

A. 1.23×10^{2} 米　　B. 1.23×10^{-7} 米

C. 1.23×10^{-6} 米　　D. 1.2×10^{-7} 米

6 某种电子元件的面积大约为0.000 000 69 平方毫米，将0.000 000 69 用科学记数法表示为_____.

7 [2018 山东青岛中考]斑叶兰被列为国家二级保护植物，它的一粒种子重约0.000 000 5 克. 将0.000 000 5 用科学记数法表示为_____.

8 每到四月，许多地方杨絮、柳絮如雪花般漫天飞舞，人们不堪其扰，据测定，杨絮纤维的直径约为0.000 010 5 m，该数值用科学记数法表示为_____.

9 寨卡病毒是一种通过蚊虫进行传播的虫媒病毒，其直径约为0.000 002 1 cm. 将0.000 002 1 用科学记数法表示为_____.

10 用科学记数法表示下列各数：

(1)$(1\times10^{3})^{-4}$；

(2)0.007 12.

题型2　还原用科学记数法表示的数

11 一种花瓣的花粉颗粒直径用科学记数法表示为6.5×10^{-6} m，这个数用小数表示为（　　）

A. 0.000 065　　B. 0.000 000 65

C. 0.000 006 5　　D. 0.000 65

12 [2018 河北衡水二模]把0.081 3 写成$a\times10^{-n}$($1\leqslant a<10$，n 为整数)的形式，则 a 为（　　）

A. 1　　B. -2　　C. 0.813　　D. 8.13

13 已知1 cm^3 的氢气的质量用科学记数法表示约为9×10^{-5} g，一块橡皮的质量为45 g.

(1)用小数表示1 cm^3 的氢气质量；

(2)这块橡皮的质量是1 cm^3 的氢气质量的多少倍？

题型3　科学记数法表示的数的计算

14 计算(结果用科学记数法表示)：$(5.2\times10^{-9})\div(-4\times10^{-3})$.

专题　分式的化简求值

刷难关

▶答案 D43

类型1　化简后直接求值

1 如果 $a+b=\frac{1}{2}$，那么 $\frac{a^2}{a-b}+\frac{b^2}{b-a}$ 的值是　　(　　)

A. $\frac{1}{2}$　　B. $\frac{1}{4}$　　C. 2　　D. 4

2 [2018 山东淄博周村区二模] 如果 $a-3b=0$，那么代数式 $\left(a-\frac{2ab-b^2}{a}\right)\div\frac{a^2-b^2}{a}$ 的值是　　(　　)

A. $\frac{1}{2}$　　B. $-\frac{1}{2}$　　C. $\frac{1}{4}$　　D. 1

3 如果 $a+b=3$，则代数式 $\frac{a^2-b^2}{a}\div\frac{a-b}{2a}$ 的值为_____.

4 已知 $\frac{ab}{a+b}=\frac{2}{3}$，则 $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=$_____.

5 [2018 辽宁本溪中考] 先化简，再求值：$\left(1-\frac{4}{a+2}\right)\div\frac{a^2-4a+4}{2a-4}$，其中 $a=2^{-1}+(\pi-2\,018)^0$.

6 先化简，再求值：$\left(a+\frac{6a}{a-3}\right)\div\left(a+\frac{9a+9}{a-3}\right)$，其中 $a=\sqrt{3}-3$.

类型2　整体代入法求值

7 若 $x^2+x-2=0$，则 $x^2+x-\frac{1}{x^2+x}$ 的值为　　(　　)

A. $\frac{3}{2}$　　B. $\frac{1}{2}$　　C. 2　　D. $-\frac{3}{2}$

8 [2019 北京海淀区校级月考] 如果 $a^2+2a-1=0$，那么代数式 $\left(a-\frac{4}{a}\right)\cdot\frac{a^2}{a-2}$ 的值是　　(　　)

A. -3　　B. -1　　C. 1　　D. 3

9 [2019 河南周口校级月考] 若 $x-\frac{1}{x}=3$，则 $\frac{x^2}{x^4+1}$ 的值是　　(　　)

A. 11　　B. 7　　C. $\frac{1}{11}$　　D. $\frac{1}{7}$

10 如果 $m^2+2m-2=0$，那么代数式 $\left(m+\frac{4m+4}{m}\right)\cdot\frac{m^2}{m+2}$ 的值是　　(　　)

A. -2　　B. -1　　C. 2　　D. 3

11 已知 $a^2-a-2=0$，则代数式 $\frac{1}{a}-\frac{1}{a-1}$ 的值为_____.

类型3　化简已知条件求值

12 [2019 四川达州校级期末] 已知 $\frac{1}{4}m^2+\frac{1}{4}n^2=n-m-2$，则 $\frac{1}{m}-\frac{1}{n}$ 的值等于　　(　　)

A. 1　　B. 0　　C. -1　　D. $-\frac{1}{4}$

13 已知 $(x-y)(2x-y)=0(xy\neq0)$，则 $\frac{x}{y}+\frac{y}{x}$ 的值是　　(　　)

A. 2　　B. $-2\frac{1}{2}$

C. -2 或 $-2\frac{1}{2}$　　D. 2 或 $2\frac{1}{2}$

14 已知 $a+\frac{1}{a}=4$，则 $\left(a-\frac{1}{a}\right)^2=$_____.

15 先化简，再求值：$1-\frac{a^2+2ab+b^2}{a^2-ab}\div\frac{a+b}{a-b}$，其中 a,b 满足 $(a+1)^2+\sqrt{b+1}=0$.

我们都要把自己照顾好，好到遗憾无法打扰，好好地生活，好好地变老。

15.3　分式方程

课时1　分式方程及其解法

刷基础

▶答案 D44

题型1　解分式方程

1 下列关于 x 的方程中，属于分式方程的个数是（　　）

①$-\frac{1}{2}x^3+3x=0$；②$\frac{x}{b^2}+b=1$；③$\frac{1}{x^2}-1=2$；④$\frac{4}{x}+\frac{x^2}{4}=0$.

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

2 [2018 湖北荆州中考]解分式方程 $\frac{1}{x-2}-3=\frac{4}{2-x}$ 时，去分母可得（　　）

A. $1-3(x-2)=4$　　B. $1-3(x-2)=-4$

C. $-1-3(2-x)=-4$　　D. $1-3(2-x)=4$

3 小明解方程 $\frac{1}{x}-\frac{x-2}{x}=1$ 的过程如下，他的解答过程从第几步开始出现错误（　　）

解：去分母，得 $1-(x-2)=1$，①

去括号，得 $1-x+2=1$，②

合并同类项，得 $-x+3=1$，③

移项，得 $-x=-2$，④

系数化为 1，得 $x=2$. ⑤

A. ①　　B. ②　　C. ③　　D. ④

4 用换元法解方程 $\frac{x^2-12}{x}-\frac{4x}{x^2-12}=3$ 时，设 $\frac{x^2-12}{x}=y$，则原方程可化为（　　）

A. $y-\frac{1}{y}-3=0$　　B. $y-\frac{4}{y}-3=0$

C. $y-\frac{1}{y}+3=0$　　D. $y-\frac{4}{y}+3=0$

5 [2019 浙江宁波校级月考]分式方程 $\frac{2x+1}{3-x}=\frac{3}{2}$ 的解是_____.

6 解分式方程：$\frac{3}{x^2-x}+1=\frac{x}{x-1}$.

7 [2019 辽宁盘锦校级期末]解分式方程：$\frac{3}{2x+1}-\frac{2}{2x-1}=\frac{x+1}{4x^2-1}$.

题型2　根据方程解的情况求字母的取值范围

8 [2019 黑龙江哈尔滨平房区期末]关于 x 的方程 $\frac{2}{x-2}+\frac{kx}{x^2-4}=\frac{3}{x+2}$ 无解，则 k 的值是（　　）

A. 1 或 6　　B. -4

C. 1 或 -4　　D. -4 或 6 或 1

9 已知 $x=3$ 是分式方程 $\frac{kx}{x-1}-\frac{2k-1}{x}=2$ 的解，那么实数 k 的值为（　　）

A. -1　　B. 0　　C. 1　　D. 2

10 如果关于 x 的不等式组 $\begin{cases}\frac{x-m}{2}>0,\\ x-4<3(x-2)\end{cases}$ 的解集为 $x>1$，且关于 x 的分式方程 $\frac{1-x}{2-x}+\frac{m}{x-2}=3$ 有非负整数解，则符合条件的所有整数 m 的值的和是（　　）

A. -2　　B. -4　　C. -7　　D. -8

11 若关于 x 的方程 $\frac{4}{x}-\frac{m}{2x}=1$ 的根是 2，求 $(m-4)^2-2m+8$ 的值.

刷易错

易错点　去分母时，常数项或不含未知数分母的项易漏乘最简公分母而出错

12 解方程：$\frac{2x}{x-2}=1-\frac{1}{2-x}$.

刷提升

▸答案 D44

1 [2018 广东英德校级月考]在方程$\frac{x+5}{3}=7$,$-\frac{2}{x}=2$,$\frac{1}{\pi}+x=\frac{1}{2}$,$\frac{x-1}{2}=\frac{x-1}{3}+4$,$\frac{3x+9}{x}=1$中,分式方程有 (　　)

A. 1 个　　B. 2 个

C. 3 个　　D. 4 个

2 下列方程不是分式方程的是 (　　)

A. $\frac{x-3}{x}=1$　　B. $\frac{x}{x+1}+\frac{1}{x-1}=1$

C. $\frac{3}{x}+\frac{4}{y}=2$　　D. $\frac{1}{2}-\frac{x-2}{3}=x$

3 [2019 湖南邵阳期中]$x=2$是分式方程$\frac{x+3}{3x-2}=\frac{2a-1}{a+1}$的解,则$a$的值是 (　　)

A. -1　　B. 0

C. 1　　D. 3

4 关于x的分式方程$\frac{m}{x-5}=1$,下列说法正确的是 (　　)

A. 方程的解是$x=m+5$

B. $m>-5$时,方程的解是正数

C. $m<-5$时,方程的解为负数

D. 无法确定

5 [2018 安徽合肥包河区期末]关于x的方程$\frac{3x+a}{2x-3}=1$的解是非负数,则a的取值范围是 (　　)

A. $a\geqslant -3$　　B. $a\leqslant -3$

C. $a\geqslant -3$且$a\neq -\frac{3}{2}$　　D. $a\leqslant -3$且$a\neq -\frac{9}{2}$

6 [2018 四川成都中考]分式方程$\frac{x+1}{x}+\frac{1}{x-2}=1$的解是 (　　)

A. $x=1$　　B. $x=-1$

C. $x=3$　　D. $x=-3$

7 [2019 山东乐陵期末]若分式方程$3+\frac{2-kx}{x-3}=\frac{1}{3-x}$无解,则$k=$_____.

8 若关于x的方程$\frac{2x-b}{x-1}=3$的解是非负数,则b的取值范围是_____.

9 [2018 贵州铜仁中考]分式方程$\frac{3x-1}{x+2}=4$的解是$x=$_____.

10 [2018 四川遂宁期末]若分式方程$\frac{x}{x-3}-5=\frac{a}{x-3}$无解,则$a$的值为_____.

11 [2019 重庆北碚区校级月考]解分式方程:

(1)$\frac{2}{x-1}=\frac{x+3}{x^2-1}$;

(2)$\frac{7}{x^2+x}-\frac{3}{x-x^2}=1+\frac{7-x^2}{x^2-1}$.

刷素养

12 对x,y定义一种新运算T,规定$T(x,y)=\frac{ax^2+by^2}{x+y}$(其中$a$,$b$是非零常数,且$x+y\neq 0$),这里等式右边是通常的四则运算.

如:$T(3,1)=\frac{a\times 3^2+b\times 1^2}{3+1}=\frac{9a+b}{4}$,$T(m,-2)=\frac{am^2+4b}{m-2}$.

(1)填空:$T(4,-1)=$_____(用含a,b的代数式表示).

(2)若$T(-2,0)=-2$,且$T(5,-1)=6$.

①求a与b的值;

②若$T(3m-10,m)=T(m,3m-10)$,求m的值.

课时2 分式方程与实际问题的综合

刷基础

▶答案 D45

题型1 工程问题

1 [2019 重庆南岸区校级期中]市政府决定对一块面积为 2 400 m^2 的区域进行绿化,根据需要,该绿化工程在实际施工时增加了施工人员,每天绿化的面积比原计划增加了20%,结果提前5天完成任务. 设计划每天绿化 x m^2,则根据题意可列方程为 ( )

A. $\frac{2\,400}{x}+5=\frac{2\,400}{(1+20\%)x}$ B. $\frac{2\,400}{x}=\frac{2\,400}{(1-20\%)x}-5$

C. $\frac{2\,400}{x}-5=\frac{2\,400}{(1+20\%)x}$ D. $\frac{2\,400}{x}=\frac{2\,400}{(1-20\%)x}+5$

2 [2019 浙江杭州校级月考]甲、乙工程队分别承接了160米、200米的管道铺设任务,已知乙比甲每天多铺设5米,甲、乙完成铺设任务的时间相同,问甲每天铺设多少米? 设甲每天铺设 x 米,根据题意可列出方程为_____.

3 [2018 四川德阳中考]为响应"一带一路"国家倡议,某铁路货运集装箱物流园区正式启动了2期扩建工程. 一项地基基础加固处理工程由A,B两个工程公司承担建设,已知A工程公司单独建设完成此项工程需要180天,A工程公司单独施工45天后,B工程公司参与合作,两个工程公司又共同施工54天后完成了此项工程.

(1)B工程公司单独建设完成此项工程需要多少天?

(2)由于受工程建设工期的限制,物流园区管委会决定将此项工程划分成两部分,要求两个工程公司同时开工,A工程公司建设其中一部分用了 m 天完成,B工程公司建设另一部分用了 n 天完成,其中 m,n 均为正整数,且 $m<46,n<92$,那么A,B两个工程公司各施工建设了多少天?

题型2 行程与销售问题

4 初三学生周末去距离学校120 km的某地游玩,一部分学生乘慢车先行1小时后,另一部分学生乘快车前往,结果他们同时到达目的地. 已知快车的速度是慢车的2倍,求慢车的速度. 设慢车的速度是 x km/h,根据题意可列方程为 ( )

A. $\frac{120}{2x}-\frac{120}{x}=1$ B. $\frac{120}{x}-\frac{120}{2x}=1$

C. $\frac{120}{2x}+\frac{120}{x}=1$ D. $\frac{120}{x-1}+\frac{120}{2x}=1$

5 [2018 江苏徐州中考]徐州至北京的高铁里程约为700 km,甲、乙两人从徐州出发,分别乘坐"徐州号"高铁A与"复兴号"高铁B前往北京. 已知A车的平均速度比B车的平均速度慢80 km/h,A车的行驶时间比B车的行驶时间多40%,两车的行驶时间分别为多少?

6 某商场计划购进一批甲、乙两种玩具,已知一件甲种玩具的进价与一件乙种玩具的进价的和为40元,用90元购进甲种玩具的件数与用150元购进乙种玩具的件数相同.

(1)甲、乙两种玩具的进价分别是多少元/件?

(2)商场计划购进甲、乙两种玩具共48件,其中甲种玩具的件数少于乙种玩具的件数,商场决定此次进货的总资金不超过1 000元,共有几种进货方案?

刷提升

▶答案 D46

1 [2018 湖南益阳中考]体育测试中,小进和小俊进行800米跑测试,小进的速度是小俊的1.25倍,小进比小俊少用了40秒.设小俊的速度是x米/秒,则所列方程正确的是(　　)

A. $40\times1.25x-40x=800$

B. $\frac{800}{x}-\frac{800}{2.25x}=40$

C. $\frac{800}{x}-\frac{800}{1.25x}=40$

D. $\frac{800}{1.25x}-\frac{800}{x}=40$

2 小王乘公共汽车从甲地到相距40千米的乙地办事,然后乘出租车返回,出租车的平均速度比公共汽车多20千米/时,回来时路上所花时间比去时节省了$\frac{1}{4}$,设公共汽车的平均速度为x千米/时,则下面列出的方程中,正确的是(　　)

A. $\frac{40}{x+20}=\frac{3}{4}\times\frac{40}{x}$　　B. $\frac{40}{x}=\frac{3}{4}\times\frac{40}{x+20}$

C. $\frac{40}{x+20}+\frac{1}{4}=\frac{40}{x}$　　D. $\frac{40}{x+20}-\frac{1}{4}=\frac{40}{x}$

3 某工厂原计划生产7 200顶帐篷,后来有一个地区突然发生地震,要求工厂生产的帐篷比原计划多20%,并且需提前4天完成任务.已知实际生产时每天比原计划多生产720顶帐篷,设实际每天生产x顶帐篷,根据题意可列方程为_____.

4 [2018 广西昭平期末]学校新到的一批理、化、生实验器材需要整理,若实验管理员张老师一人单独整理需要1小时完成.现在张老师与工人黄师傅共同整理30分钟后,张老师因事外出,黄师傅又单独整理了30分钟才完成任务.黄师傅单独整理这批实验器材需要_____分钟完成.

5 某市为治理污水,需要铺设一条全长为550米的污水排放管道,为了尽量减少施工对城市交通所造成的影响,实际施工时,每天的工效比原计划增加10%,结果提前5天完成这一任务.假设原计划每天铺设x米,根据题意可列方程为_____.

6 [2018 广西百色中考]班级组织同学乘大巴车前往"研学旅行"基地开展爱国教育活动,基地离学校90千米,队伍8:00从学校出发,苏老师因有事情,8:30从学校自驾小车以大巴车1.5倍的速度行驶,追上大巴车后继续前行,结果比队伍提前15分钟到达基地.问:

(1)大巴车与小车的平均速度各是多少?

(2)苏老师追上大巴车的地点距离基地还有多远?

7 "一带一路"倡议为国内许多企业的发展带来了新的机遇.某公司生产A,B两种机械设备,每台B种设备的成本是A种设备的1.5倍,公司若投入16万元生产A种设备,36万元生产B种设备,则可生产两种设备共10台.请解答下列问题:

(1)A,B两种设备每台的成本分别是多少万元?

(2)若A,B两种设备每台的售价分别是6万元、10万元,公司决定生产两种设备共60台,计划销售后获利不低于126万元,且A种设备至少生产53台,则该公司有几种生产方案?

(3)在(2)的条件下,销售前公司决定从这批设备中拿出一部分,赠送给"一带一路"沿线的甲国,剩余设备全部售出,公司仍获利44万元,赠送的设备采用水路运输和航空运输两种方式,共运输4次,水路运输每次运4台A种设备,航空运输每次运2台B种设备(运输过程中产生的费用由甲国承担).求水路运输的次数.

我们向对方索取的,往往是对方同样无法从我们身上获得的。比如坚定、信任和设身处地的体谅。

全章综合训练

刷章测

►建议用时:60 分钟　答案 D46

1 [2018 辽宁葫芦岛中考]若分式$\frac{x^2-1}{x+1}$的值为 0,则 x 的值为　(　　)

A. 0　　B. 1

C. -1　　D. ±1

2 [2018 湖南株洲中考]下列运算正确的是　(　　)

A. $2a+3b=5ab$　　B. $(-ab)^2=a^2b$

C. $a^2\cdot a^4=a^8$　　D. $\frac{2a^6}{a^3}=2a^3$

3 [2018 山东莱芜中考]若 x,y 的值均扩大为原来的 3 倍,则下列分式的值保持不变的是　(　　)

A. $\frac{2+x}{x-y}$　　B. $\frac{2y}{x^2}$

C. $\frac{2y^3}{3x^2}$　　D. $\frac{2y^2}{(x-y)^2}$

4 计算$|-2|-(\pi-2\,016)^0+\left(\frac{1}{2}\right)^{-3}$的结果为　(　　)

A. -3　　B. 3

C. 6　　D. 9

5 化简$\frac{x}{x-2}-\frac{x}{x-2}\div\frac{x-2}{x}$的结果等于　(　　)

A. 0　　B. $\frac{x}{x-2}$

C. $\frac{x^2-4x}{(x-2)^2}$　　D. $\frac{-2x}{(x-2)^2}$

6 A,B 两地相距 48 千米,一艘轮船从 A 地顺流航行至 B 地,又立即从 B 地逆流返回 A 地,共用去 9 小时. 已知水流速度为 4 千米/时,若设该轮船在静水中的速度为 x 千米/时,则可列方程为　(　　)

A. $\frac{96}{x+4}+\frac{96}{x-4}=9$　　B. $\frac{48}{4+x}+\frac{48}{4-x}=9$

C. $\frac{48}{x}+4=9$　　D. $\frac{48}{x+4}+\frac{48}{x-4}=9$

7 [2017 黑龙江佳木斯模拟]若关于 x 的分式方程$\frac{ax}{x-2}=\frac{4}{x-2}+1$有解,则 a 的取值为　(　　)

A. $a\neq1$　　B. $a\neq2$

C. $a\neq-1$ 且 $a\neq-2$　　D. $a\neq1$ 且 $a\neq2$

8 [2018 江苏徐州中考]我国自主研发的某型号手机处理器采用 10 nm 工艺,已知 1 nm = 0.000 000 001 m,则 10 nm 用科学记数法可表示为_____ m.

9 已知 A,B 两地相距 60 千米,骑摩托车行驶完全程可比骑自行车少用$\frac{3}{2}$小时,已知骑摩托车的速度是骑自行车速度的 2 倍,求骑自行车的速度. 设骑自行车的速度为 x 千米/时,根据题意可列方程为_____.

10 如果 $x^2+x-5=0$,那么代数式$\left(1+\frac{2}{x}\right)\div\frac{x+2}{x^3+x^2}$的值是_____.

11 [2018 四川广元中考]先化简,再求值:$\frac{a}{a-2}\div\left(\frac{a}{a-2}-\frac{4a}{a^2-4}\right)$,其中 $a=3$.

12 解方程:

(1)$\frac{1}{x-2}=\frac{1-x}{2-x}-3$;

(2)$\frac{x}{x-1}-\frac{3}{x}=1$.

13 有这样一道题“求$\frac{a^2+a}{a^2-1}-\frac{a+1}{a^2+2a+1}\div\frac{a-1}{a+1}$的值，其中$a=2\,017$”，“小马虎”不小心把$a=2\,017$错抄成$a=2\,007$，但他的计算结果却是正确的，请说明原因.

14 [2018 广西桂林中考]某校利用暑假进行田径场的改造维修，项目承包单位派遣一号施工队进场施工，计划用40天时间完成整个工程. 当一号施工队工作5天后，承包单位接到通知，有一大型活动要在该田径场举行，要求比原计划提前14天完成整个工程，于是承包单位派遣二号与一号施工队共同完成剩余工程，结果按通知要求如期完成整个工程.

(1)若二号施工队单独施工，完成整个工程需要多少天？

(2)若此项工程由一号、二号施工队同时进场施工，完成整个工程需要多少天？

15 [2018 宁夏中考]某工厂计划生产一种创新产品，若生产一件这种产品需A种原料1.2千克，B种原料1千克. 已知A种原料每千克的价格比B种原料每千克的价格多10元.

(1)为使每件产品的成本价不超过34元，那么购入B种原料每千克的价格不超过多少元？

(2)将这种产品投放市场批发销售一段时间后，为拓展销路又开展了零售业务，每件产品的零售价比批发价多30元. 现用10 000元通过批发价购买该产品的件数与用16 000元通过零售价购买该产品的件数相同，那么这种产品的批发价是多少元/件？

你要尽全力保护你的梦想，那些嘲笑你的人必定会失败，他们想把你变成和他们一样的人。我坚信，只要心中有梦想就会与众不同。你也是。

期末综合测试

（满分 120 分，时间 100 分钟）

刷速度 ▶答案 D47

一、选择题（本题共 30 分，每小题 3 分）

1 下列表示时间的数字中，是轴对称图形的是 （　　）

A. 12∶12　B. 10∶38　C. 15∶51　D. 22∶22

2 下列各式中，计算正确的是 （　　）

A. $x+x^3=x^4$

B. $(x^{-4})^2=x^8$

C. $x^{-2}\cdot x^5=x^3$

D. $x^8\div x^2=x^4(x\neq 0)$

3 下列四个多项式中，能因式分解的是 （　　）

A. a^2+1　B. x^2+5y

C. x^2-5y　D. a^2-6a+9

4 满足下列条件的三条线段 a,b,c 能构成三角形的是 （　　）

A. $a:b:c=1:2:3$

B. $a+b=4,a+b+c=9$

C. $a=3,b=4,c=5$

D. $a:b:c=1:1:2$

5 下列各式从左到右的变形一定正确的是 （　　）

A. $\dfrac{2x^2}{3y^2}=\dfrac{4x^2}{9y^2}$

B. $\dfrac{2c}{-a+3b}=\dfrac{2c}{a+3b}$

C. $\dfrac{x-y}{x+y}=\dfrac{y-x}{y+x}$

D. $\dfrac{x}{y}=\dfrac{x\cdot y}{y\cdot y}=\dfrac{xy}{y^2}$

6 将一块长方形木板锯掉一个角，则锯掉后剩下的多边形木板的内角和为 （　　）

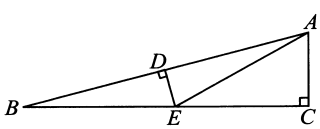
A. 180°或 360°

B. 180°或 540°

C. 360°或 540°

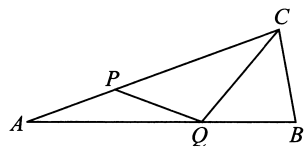
D. 180°或 360°或 540°

7 如图所示，在 Rt△ABC 中，$\angle C=90°$，DE 垂直平分 AB，交 BC 于点 E，垂足为 D，$BE=6$ cm，$\angle AEC=30°$，则 AC 等于 （　　）



A. 6 cm　B. 5 cm　C. 4 cm　D. 3 cm

8 如图，等腰△ABC 中，$AB=AC$，P,Q 分别为 AC,AB 上的点，且 $AP=PQ=QB=BC$，则 $\angle PCQ$ 的度数为 （　　）



A. 30°　B. 36°　C. 45°　D. 37.5°

9 2019 年，在创建文明城市的进程中，乌鲁木齐市为美化城市环境，计划种植树木 30 万棵，由于志愿者的加入，实际每天植树比原计划多 20%，结果提前 5 天完成任务. 设原计划每天植树 x 万棵，可列方程为 （　　）

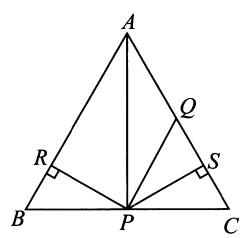
A. $\dfrac{30}{x}-\dfrac{30}{(1+20\%)x}=5$

B. $\dfrac{30}{x}-\dfrac{30}{20\%x}=5$

C. $\dfrac{30}{20\%x}-5=\dfrac{30}{x}$

D. $\dfrac{30}{(1+20\%)x}-\dfrac{30}{x}=5$

10 如图，△ABC 是等边三角形，$AQ=PQ$，P 在 BC 上，$PR\perp AB$ 于点 R，$PS\perp AC$ 于点 S，$PR=PS$，则下列结论：①点 P 在 $\angle BAC$ 的平分线上；②$AS=AR$；③$QP\parallel AR$；④△$BRP\cong$△QSP. 其中正确的有 （　　）



A. 1 个　B. 2 个　C. 3 个　D. 4 个

二、填空题（本题共 18 分，每小题 3 分）

11 科学家在实验中检测出某微生物细胞直径约为 0.000 003 5 米，将 0.000 003 5 用科学记数法表示为 _____.

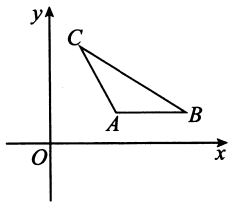
12 若 $a^2-b^2=-\dfrac{1}{16}$，$a+b=-\dfrac{1}{4}$，则 $a-b$ 的值为 _____.

13 若 $(a-1)^{a+2}=1$，则 $a=$ _____.

14 如果关于 x 的分式方程 $\dfrac{ax-1}{x}=3$ 无解，则 a 的值为 _____.

15 有一等腰钝角三角形纸片，若能从一个顶点出发，将其剪成两个等腰三角形纸片，则等腰钝角三角形纸片的顶角度数为_____.

16 如图，在平面直角坐标系 xOy 中，$A(2,1)$，$B(4,1)$，$C(1,3)$. 若 $\triangle ABC$ 与 $\triangle ABD$ 全等，则点 D 的坐标为_____.



三、解答题（本题共 72 分. 解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤）

17 (5 分)分解因式：$3ab^2-6a^2b+3a^3$.

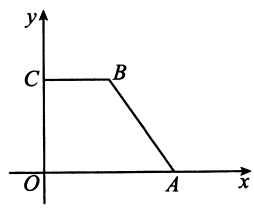
18 (5 分)化简求值：$\left[\left(x+\frac{1}{2}y\right)^2+\left(x-\frac{1}{2}y\right)^2\right]\left(2x^2-\frac{1}{2}y^2\right)$，其中 $x=-3$，$y=4$.

19 (5 分)解分式方程：$\frac{2-x}{x-3}+\frac{1}{3-x}=3$.

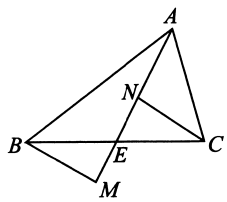
20 (6 分)如图，在平面直角坐标系中，点 A 的坐标是 $(4,0)$，点 B 的坐标是 $(2,3)$，点 C 的坐标是 $(0,3)$.

(1)作出四边形 $OABC$ 关于 y 轴对称的图形，并标出点 B 对应点的坐标.

(2)在 y 轴上找一点 P，使 $PA+PB$ 的值最小，并求出点 P 的坐标.（不要求写作法，保留作图痕迹）

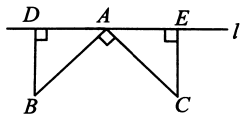


21 (6 分)如图，点 E 是 BC 边上的点，$BM/\!/NC$，$BM=NC$. 试判断点 E 是否为线段 BC 的中点，并说明理由.



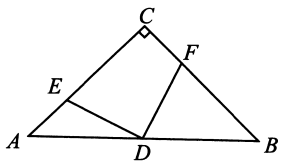
人最大的痛苦就是心灵没有归属，不管你知不知觉，承不承认。

22 (6 分)如图,点 A,D,E 在直线 l 上,$\angle BAC=90°$,$AB=AC$,$BD\perp l$ 于点 D,$CE\perp l$ 于点 E,求证:$DE=BD+CE$.

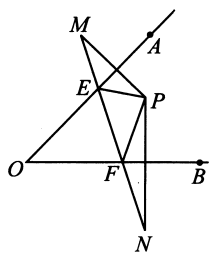


23 (6 分)用 A,B 两种机器人搬运大米,A 型机器人比 B 型机器人每小时多搬运 20 袋大米,A 型机器人搬运 700 袋大米与 B 型机器人搬运 500 袋大米所用时间相等. A,B 型机器人每小时分别搬运多少袋大米?

24 (6 分)如图,在 $\triangle ABC$ 中,$\angle ACB=90°$,$AC=BC$,D 是 AB 的中点,点 E 在 AC 上,点 F 在 BC 上,且 $AE=CF$. 求证:$DE=DF$,$DE\perp DF$.



25 (6 分)如图,点 P 在 $\angle AOB$ 内,点 M,N 分别是 P 点关于 OA,OB 的对称点,且 MN 与 OA,OB 分别相交于点 E,F. 若 $\triangle PEF$ 的周长为 20,求 MN 的长.



26 (6分)若△ABC的三边长a,b,c满足$a^2+b^2+c^2-ab-bc-ac=0$,请你判断△ABC的形状.

27 (7分)数学课上,李老师出示了如下的题目:

在等边三角形ABC中,点E在AB上,点D在CB的延长线上,且$ED=EC$,如图. 试确定线段AE与DB的大小关系,并说明理由.

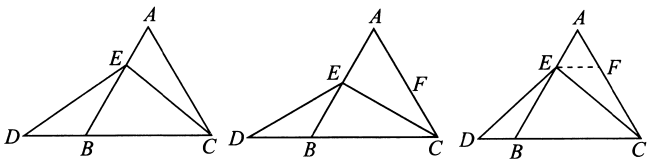
小敏与同桌小聪讨论后,进行了如下解答:

(1)特殊情况,探索结论:

当点E为AB的中点时,如图(1),确定线段AE与DB的大小关系,请你直接写出结论:AE_____DB.(填“>”“<”或“=”)

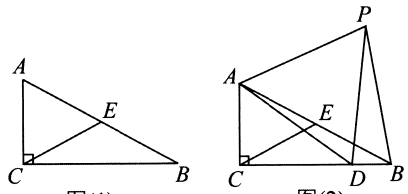
(2)特例启发,解答题目:

【解】AE与DB的大小关系是AE_____DB(填“>”“<”或“=”). 理由如下:如图(2),过点E作$EF//BC$,交AC于点F……请你完成解答过程.



图(1)　　图(2)

28 (8分)问题背景:我们学习等边三角形时得到直角三角形的一个性质:在直角三角形中,如果一个锐角等于30°,那么它所对的直角边等于斜边的一半. 即:如图(1),在Rt△ABC中,$\angle ACB=90°$,$\angle ABC=30°$,则$AC=\frac{1}{2}AB$.



图(1)　　图(2)

探究结论:小明同学对以上结论作了进一步研究.

(1)如图(1),作AB边上的中线CE,易得结论:①△ACE为等边三角形;②BE与CE之间的数量关系为_____.

(2)如图(2),CE是△ABC的中线,点D是边CB上任意一点,连接AD,作等边△ADP,且点P在$\angle ACB$的内部,连接BP. 试探究线段BP与DP之间的数量关系,写出你的猜想并加以证明.

(3)当点D为边CB延长线上任意一点时,在(2)条件的基础上,线段BP与DP之间存在怎样的数量关系?直接写出答案即可.

附录Ⅰ　初中数学常用公式

1	绝对值	$\|a\|=\begin{cases}a,a>0,\\0,a=0,\\-a,a<0\end{cases}$
2	实数的运算律	(1)加法交换律:$a+b=b+a$; (2)加法结合律:$(a+b)+c=a+(b+c)$; (3)乘法交换律:$ab=ba$; (4)乘法结合律:$(ab)c=a(bc)$; (5)乘法分配律:$a(b+c)=ab+ac$
3	等式的性质	(1)如果 $a=b$,那么 $a\pm c=b\pm c$; (2)如果 $a=b$,那么 $ac=bc$; 如果 $a=b(c\neq0)$,那么 $\frac{a}{c}=\frac{b}{c}$
4	不等式的性质	(1)如果 $a>b$,那么 $a\pm c>b\pm c$; (2)如果 $a>b,c>0$,那么 $ac>bc\left(\frac{a}{c}>\frac{b}{c}\right)$; (3)如果 $a>b,c<0$,那么 $ac<bc\left(\frac{a}{c}<\frac{b}{c}\right)$
5	整式乘法公式	(1)平方差公式:$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$; (2)完全平方公式:$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$,$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$
6	幂的运算性质	(1)$a^m\cdot a^n=a^{m+n}$(m,n 为整数);(2)$(a^m)^n=a^{mn}$(m,n 为整数);(3)$(ab)^n=a^nb^n$(n 为整数);(4)$a^m\div a^n=a^{m-n}$(m,n 为整数,$a\neq0$); (5)$\left(\frac{a}{b}\right)^n=\frac{a^n}{b^n}$($n$ 为整数,$b\neq0$),$a^0=1(a\neq0)$; (6)$a^{-p}=\frac{1}{a^p}$(p 为正整数)
7	分式的运算及性质	(1)$\frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c}=\frac{ad}{bc}$; (2)$\frac{a}{b}\div\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c}=\frac{a\cdot d}{b\cdot c}$; (3)$\left(\frac{a}{b}\right)^n=\frac{a^n}{b^n}$;(4)$\frac{b}{a}\pm\frac{c}{a}=\frac{b\pm c}{a}$; (5)$\frac{b}{a}\pm\frac{c}{d}=\frac{bd}{ad}\pm\frac{ac}{ad}=\frac{bd\pm ac}{ad}$
8	二次根式的性质	(1)$\sqrt{a}\geqslant0(a\geqslant0)$; (2)$(\sqrt{a})^2=a(a\geqslant0)$; (3)$\sqrt{a^2}=a(a\geqslant0)$; (4)$\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}=\sqrt{ab}(a\geqslant0,b\geqslant0)$; (5)$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a}{b}}(a\geqslant0,b>0)$
9	平均数	(1)平均数:$\bar{x}=\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}$; (2)加权平均数:$\bar{x}=\frac{x_1w_1+x_2w_2+\cdots+x_nw_n}{w_1+w_2+\cdots+w_n}$, $w_1,w_2,\cdots,w_n$ 分别叫做 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的权
10	方差	$s^2=\frac{1}{n}[(x_1-\bar{x})^2+(x_2-\bar{x})^2+\cdots+(x_n-\bar{x})^2]$
11	一元二次方程	一元二次方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq0)$ 的求根公式: $x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}(b^2-4ac\geqslant0)$. 一元二次方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq0)$ 的根的个数: (1)当 $\Delta=b^2-4ac>0$ 时,方程有两个不等的实数根; (2)当 $\Delta=b^2-4ac=0$ 时,方程有两个相等的实数根; (3)当 $\Delta=b^2-4ac<0$ 时,方程无实数根. 根与系数的关系:$x_1+x_2=-\frac{b}{a}$,$x_1x_2=\frac{c}{a}$

12	比例的性质	(1)基本性质:如果 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$,那么 $ad=bc$; (2)合比性质,如果 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$,那么 $\frac{a\pm b}{b}=\frac{c\pm d}{d}$
13	勾股定理及其逆定理	(1)勾股定理:如果直角三角形的两条直角边长为 a,b,斜边长为 c,那么 $a^2+b^2=c^2$; (2)勾股定理的逆定理:如果三角形的三边长 a,b,c 满足 $a^2+b^2=c^2$,那么这个三角形是直角三角形
14	角	1 周角 $=360°$;1 平角 $=180°$;1 直角 $=90°$
15	概率	一般地,如果在一次试验中,有 n 种可能的结果,并且它们发生的可能性都相等,事件 A 包含其中的 m 种结果,那么事件 A 发生的概率 $P(A)=\frac{m}{n}$
16	点与圆的位置关系	设⊙O 的半径为 r,点 P 到圆心 O 的距离为 d,则有 (1)点 P 在圆外⇔$d>r$; (2)点 P 在圆上⇔$d=r$; (3)点 P 在圆内⇔$d<r$
17	直线和圆的位置关系	设⊙O 的半径为 r,圆心到直线 l 的距离为 d,那么 (1)直线 l 与⊙O 相交⇔$d<r$; (2)直线 l 与⊙O 相切⇔$d=r$; (3)直线 l 与⊙O 相离⇔$d>r$
18	圆和圆的位置关系	如果两圆的半径分别为 r_1 和 $r_2(r_1<r_2)$,圆心距为 d,则两圆的位置关系: (1)两圆外离⇔$d>r_1+r_2$; (2)两圆外切⇔$d=r_1+r_2$; (3)两圆相交⇔$r_2-r_1<d<r_1+r_2$; (4)两圆内切⇔$d=r_2-r_1$; (5)两圆内含⇔$d<r_2-r_1$
19	扇形、圆锥	(1)弧长 $l=\frac{n\pi R}{180}$,扇形面积 $S=\frac{n\pi R^2}{360}=\frac{1}{2}lR$; (2)圆锥的侧面积为 πrl(l 为母线长,r 为底面圆的半径),圆锥的全面积为 $\pi r(r+l)$
20	锐角三角函数	锐角 A 的三角函数: $\sin A=\frac{\angle A\text{ 的对边}}{\text{斜边}}$, $\cos A=\frac{\angle A\text{ 的邻边}}{\text{斜边}}$, $\tan A=\frac{\angle A\text{ 的对边}}{\angle A\text{ 的邻边}}$

三角函数之间的关系:
(1)互余角的三角函数值之间的关系:若 $\angle A+\angle B=90°$,那么 $\sin A=\cos B$或 $\sin B=\cos A$.
(2)同角的三角函数值之间的关系:
①$\sin^2A+\cos^2A=1$;
②$\tan A=\frac{\sin A}{\cos A}$

三角函数 \ 锐角 A	30°	45°	60°
$\sin A$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos A$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\tan A$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

附录Ⅱ　初中数学必记定理

(一)点、线、角

(1)两点确定一条直线.

(2)两点之间,线段最短.

(3)同角或等角的补角相等.

(4)同角或等角的余角相等.

(5)角的平分线上的点到角的两边的距离相等;角的内部到角的两边的距离相等的点在角的平分线上.

(6)线段垂直平分线上的点到这条线段两个端点的距离相等;与线段两个端点距离相等的点在这条线段的垂直平分线上.

(二)相交线与平行线

(1)在同一平面内,过一点有且只有一条直线与已知直线垂直.

(2)连接直线外一点与直线上各点的所有线段中,垂线段最短.

(3)经过直线外一点,有且只有一条直线与这条直线平行.

(4)如果两条直线都与第三条直线平行,那么这两条直线也互相平行.

(5)两直线平行,同位角相等(内错角相等,同旁内角互补).

(三)三角形

(1)三角形两边的和大于第三边,三角形两边的差小于第三边.

(2)三角形三个内角的和等于180°.

(3)三角形的外角等于与它不相邻的两个内角的和.

(4)三角形的外角大于任何一个与它不相邻的内角.

(5)全等三角形的判定:边角边(SAS),角边角(ASA),角角边(AAS),边边边(SSS),斜边、直角边(HL).

(6)全等三角形的对应边、对应角相等.

(7)等腰三角形的两个底角相等(即等边对等角);等腰三角形顶角平分线、底边上的中线、底边上的高相互重合(简写成"三线合一").

(8)如果一个三角形有两个角相等,那么这两个角所对的边也相等(等角对等边).

(9)三个角都相等的三角形是等边三角形.

(10)有一个角是60°的等腰三角形是等边三角形.

(11)在直角三角形中,如果一个锐角等于30°,那么它所对的直角边等于斜边的一半.

(12)直角三角形斜边上的中线等于斜边的一半.反之如果三角形一边上的中线等于这边的一半,那么这个三角形是直角三角形.

(13)勾股定理:如果直角三角形的两条直角边分别为a,b,斜边长为c,那么$a^2+b^2=c^2$.

(14)勾股定理的逆定理:如果三角形的三边长a,b,c满足$a^2+b^2=c^2$,那么这个三角形是直角三角形.

(四)四边形

(1)四边形的内角和等于360°;四边形的外角和等于360°.

(2)n边形的内角和等于$(n-2)\times180°$.

(3)任意多边形的外角和等于360°.

(4)平行四边形的对角相等、邻角互补.

(5)平行四边形的对边相等、对边平行.

(6)夹在两条平行线间的平行线段相等.

(7)平行四边形的对角线互相平分.

(8)两组对边分别平行的四边形是平行四边形.

(9)两组对角分别相等的四边形是平行四边形.

(10)两组对边分别相等的四边形是平行四边形.

(11)对角线互相平分的四边形是平行四边形.

(12)一组对边平行且相等的四边形是平行四边形.

(13)矩形的四个角都是直角,对边平行且相等.

(14)矩形的对角线相等且互相平分.

(15)有一个角是直角的平行四边形是矩形.

(16)有三个角是直角的四边形是矩形.

(17)对角线相等的平行四边形是矩形.

(18)菱形的四条边都相等,对边平行,对角相等.

(19)菱形的两条对角线互相垂直,并且每一条对角线平分一组对角.

(20)菱形面积=对角线乘积的一半,即$S=(a\times b)\div2$,也等于底×高.

(21)有一组邻边相等的平行四条边形叫做菱形.

(22)四条边相等的四边形是菱形.

(23)对角线互相垂直的平行四边形是菱形.

(24)正方形的四个角都是直角,四条边都相等,对边平行.

(25)正方形的两条对角线相等,并且互相垂直平分,每条对角线平分一组对角.

(26)正方形的判定定理1:是矩形且一组邻边相等.

(27)正方形的判定定理2:是菱形且有一个角是直角.

(五)圆

(1)不在同一条直线上的三个点确定一个圆.

(2)垂直于弦的直径平分弦,并且平分弦所对的两条弧.

(3)垂径定理的推论

①平分弦(不是直径)的直径垂直于弦,并且平分弦所对的两条弧.

②弦的垂直平分线经过圆心,并且平分弦所对的两条弧.

③平分弦所对的一条弧的直径,垂直平分弦,并且平分弦所对的另一条弧.

(4)在同圆或等圆中,相等的圆心角所对的弧相等,所对的弦相等,所对的弦的弦心距相等.

(5)一条弧所对的圆周角等于它所对的圆心角的一半.

(6)半圆(或直径)所对的圆周角是直角;90°的圆周角所对的弦是直径.

(7)圆内接四边形的对角互补,并且任何一个外角都等于它的内对角.

(8)经过半径的外端并且垂直于这条半径的直线是圆的切线.

(9)圆的切线垂直于过切点的半径.

(10)经过圆心且垂直于切线的直线必经过切点.

(11)经过切点且垂直于切线的直线必经过圆心.

(12)从圆外一点可以引圆的两条切线,它们的切线长相等,这一点和圆心的连线平分两条切线的夹角.

(13)圆的外切四边形的两组对边的和相等.

(14)如果两个圆相切,那么切点一定在连心线上.

(六)多边形

(1)正n边形的每个内角都等于$\frac{(n-2)\times180°}{n}$.

(2)正n边形的半径和边心距把正n边形分成$2n$个全等的直角三角形.

(3)正n边形的面积$S_n=\frac{1}{2}l_n r_n$,l_n表示正n边形的周长,r_n是正n边形的边心距.

(4)如果在一个顶点周围有k个正n边形的角,由于这些角的和应为360°,因此$k\times\frac{(n-2)\times180°}{n}=360°$可化为$(n-2)(k-2)=4$.

(七)图形的变化

(1)成轴对称的两个图形中,对应点的连线被对称轴垂直平分.

(2)平移的基本性质:两组对应点的连线平行(或在同一条直线上)且相等.

(3)旋转的基本性质:

①对应点到旋转中心的距离相等.

②对应点与旋转中心所连线段的夹角等于旋转角.

③旋转前、后的图形全等.

(4)中心对称的基本性质:

①中心对称的两个图形,对称点所连线段都经过对称中心,而且被对称中心所平分.

②中心对称的两个图形是全等图形.

(5)三角形的中位线平行于第三边,并且等于它的一半.

(6)三条平行线截两条直线,所得的对应线段成比例.

(7)平行于三角形一边的直线截其他两边(或两边的延长线),所得的对应线段成比例.

(8)平行于三角形一边的直线和其他两边相交,所构成的三角形与原三角形相似.

(9)三边成比例的两个三角形相似.

(10)两边成比例且夹角相等的两个三角形相似.

(11)两角分别相等的两个三角形相似.

(12)如果一个直角三角形的斜边和一条直角边与另一个直角三角形的斜边和一条直角边对应成比例,那么这两个直角三角形相似.

(13)三角形相似的性质:

①相似三角形对应高的比,对应中线的比与对应角平分线的比都等于相似比.

②相似三角形周长的比等于相似比.

③相似三角形面积的比等于相似比的平方.

提供各种书籍的 PDF 电子版代找服务，如果您找不到您想要的书的 PDF 电子版，我们可以帮您找到，如有需要，请联系微信、QQ。





PDF 代找说明：

本公司可以帮助您找到您想要的 PDF 电子书。质量都很清晰，只要您提供给我们相关信息，一般都能找到，如果您有需求，请联系我们。

现已经帮助了很多人找到了大家需要的 PDF，其实网上有很多 PDF，大家如果在网上找不到的话，可以联系我们，大部分我们都可以找到。因 PDF 电子书都有版权，请不要随意传播，如果您有经济购买能力，请尽量购买正版。

声明：

本公司只提供代找服务，因寻找 PDF 电子书有一定难度，仅收取代找费用。如因 PDF 产生的版权纠纷，与本公司无关，我们仅仅只是帮助您寻找到您要的 PDF 而已。

理想树 6·7 初中 自主学习

狂K重点



数学

八年级上册 RJ

知识·格 考题·律 创新·法



·目录·

第十一章　三角形 …… 1

11.1　与三角形有关的线段 …… 1

11.2　与三角形有关的角 …… 5

11.3　多边形及其内角和 …… 9

第十二章　全等三角形 …… 11

12.1　全等三角形 …… 11

12.2　三角形全等的判定 …… 14

12.3　角的平分线的性质 …… 20

第十三章　轴对称 …… 23

13.1　轴对称 …… 23

13.2　画轴对称图形 …… 27

13.3　等腰三角形 …… 30

13.4　课题学习　最短路径问题 …… 35

第十四章　整式的乘法与因式分解 …… 37

14.1　整式的乘法 …… 37

14.2　乘法公式 …… 40

14.3　因式分解 …… 43

第十五章　分式 …… 45

15.1　分式 …… 45

15.2　分式的运算 …… 48

专题　分式的化简求值 …… 51

15.3　分式方程 …… 52

第十一章 三角形



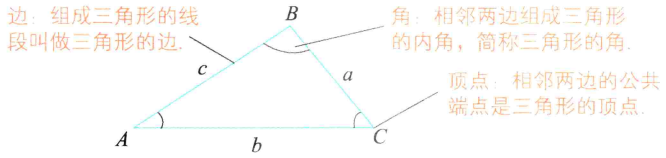
11.1 与三角形有关的线段

知识过关 全理解

知识点1 三角形的有关概念

1. 三角形的定义：由不在同一条直线上的三条线段[1]_____顺次相接所组成的图形叫做三角形. ▶注意1

2. 三角形的三要素：



3. 三角形的表示：三角形用符号“△”表示，三角形 ABC 用符号表示为[2]_____. ▶注意2

知识点2 三角形的稳定性

三角形的三条边确定后，三角形的形状和大小就确定不变了，这个性质叫做三角形的[3]_____性，三角形的稳定性在生产和生活中有广泛的应用. ▶图示1

知识点3 三角形的分类

1. 等腰三角形的定义

三边都相等的三角形叫做等边三角形；有两条边相等的三角形叫做等腰三角形. 相等的边叫做[4]_____，另一边叫做底边，两腰的夹角叫做[5]_____，腰和底边的夹角叫做底角. ▶图示2

2. 等腰三角形的分类

(1)按边分类

三角形
- 三边都不相等的三角形
- 等腰三角形
  - 底边和腰不相等的[6]_____三角形 ▶注意3
  - [7]_____三角形

(2)按角分类

三角形
- 直角三角形
- 斜三角形
  - 锐角三角形
  - 钝角三角形 ▶图示3

敲黑板 划重点

注意1 三角形的三条边

(1)是三条线段；

(2)不在同一条直线上；

(3)首尾顺次相接.

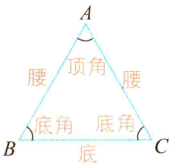
注意2 (1)用字母表示三角形时，三个字母没有先后顺序.

(2)用大写字母表示顶点，小写字母表示边，顶点 A 所对的边 BC 用 a 表示，顶点 B 所对的边 AC 用 b 表示，顶点 C 所对的边 AB 用 c 表示.

图示1 三角形的稳定性



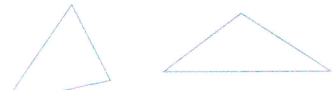
图示2 等腰三角形



注意3 等腰三角形与等边三角形的关系

等边三角形是特殊的等腰三角形，等边三角形一定是等腰三角形，但等腰三角形不一定是等边三角形.

图示3



锐角三角形　　钝角三角形

知识点4　三角形的三边关系

三角形两边的和[8]_____第三边，两边的差[9]_____第三边. ▶注意4

判断三条线段能否组成三角形：若两条较短的线段长之和大于最长线段的长，则这三条线段可以组成三角形；反之，则不能组成三角形.

知识点5　三角形的高▶拓展1

从三角形的一个顶点向它的对边所在直线画[10]_____，[11]_____和[12]_____间的线段叫做三角形的高. ▶注意5

知识点6　三角形的中线▶拓展2

在三角形中，连接一个顶点和它对边[13]_____的线段叫做三角形的中线. 三角形的三条中线相交于一点. 三角形三条中线的交点叫做三角形的[14]_____. 三角形的重心在三角形内部.

知识点7　三角形的角平分线▶注意6

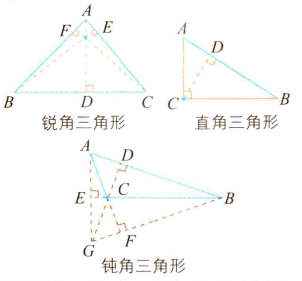
三角形的一个角的平分线与这个角的对边相交，这个角的[15]_____和交点之间的线段叫做三角形的角平分线. 任意一个三角形都有三条角平分线，三条角平分线交于一点，且在三角形的内部，这个点叫做三角形的内心. ▶图示4

[1]首尾　[2]$\triangle ABC$　[3]稳定　[4]腰　[5]顶角　[6]等腰　[7]等边　[8]大于　[9]小于
[10]垂线　[11]顶点　[12]垂足　[13]中点　[14]重心　[15]顶点

敲黑板　划重点

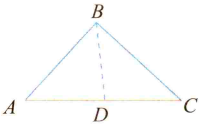
注意4　三角形的三边关系中的“两边的差”“两边的和”中的“两边”是三边中的任意两边.

拓展1　锐角三角形的三条高交于三角形内部，直角三角形的三条高交于直角顶点，钝角三角形的三条高交于三角形外部.



注意5　三角形的高是线段，它是有长度的，不是射线.

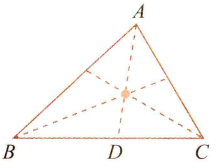
拓展2　(1)三角形的一条中线把三角形分成面积相等的两个三角形，即$S_{\triangle ADB}=S_{\triangle BDC}$.



(2)三角形的一条中线把三角形分成如图所示的两个三角形，即$\triangle ABD$和$\triangle CBD$，其周长差为AB与BC的差.

注意6　角的平分线与三角形的角平分线不同.

图示4　三角形的内心



题型过关　全提升

题型1　三角形的三边关系的应用

例题1　已知三角形的三边长是三个连续的奇数，且三角形的周长小于30，求三条边的长.

【分析】直接设x来表示各边长，利用三角形的三边关系进而得出x的取值范围.

【解】设三角形的三边长分别为$x-2$，x，$x+2$. 依题意得

$$\begin{cases}x-2+x+x+2<30,\\x-2+x>x+2,\end{cases}$$

解得$4<x<10$.

变式练　刷重点

变式练1　已知a，b，c是$\triangle ABC$的三边长，$a=4$，$b=6$，设三角形的周长为x.

(1)直接写出c及x的取值范围.

(2)若x是小于18的偶数；

①求c的长；

②判断$\triangle ABC$的形状.

答案见P4

∴ x 的值可以取 5,7,9,

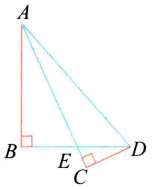
当 $x=5$ 时,三边长为 3,5,7;

当 $x=7$ 时,三边长为 5,7,9;

当 $x=9$ 时,三边长为 7,9,11.

题型 2　三角形高线的有关问题

例题 2　如图所示,$AB\perp BD$ 于点 B,$AC\perp CD$ 于点 C,且 AC 与 BD 交于点 E. 那么(1)$\triangle ADE$ 的边 DE 上的高为_____,边 AE 上的高为_____;(2)若 $AE=5$,$DE=2$,$CD=\frac{9}{5}$,则 $AB=$_____.

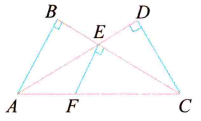


【解析】$\triangle ADE$ 是钝角三角形,在三角形外部有两条高:边 DE 上的高为 AB,边 AE 上的高为 DC. 又因为 $S_{\triangle ADE}=\frac{1}{2}DE\cdot AB=\frac{1}{2}AE\cdot DC$,即 $\frac{1}{2}\times 2\times AB=\frac{1}{2}\times 5\times\frac{9}{5}$,所以 $AB=\frac{9}{2}$.

【答案】(1)AB　DC　(2)$\frac{9}{2}$

变式练 2　如图:(1)在 $\triangle AEC$ 中,AE 边上的高是_____.

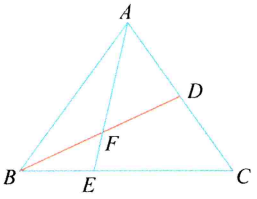
(2)若 $AB=CD=2$ cm,$AE=3$ cm,则 $S_{\triangle AEC}=$_____ cm^2,$CE=$_____cm.



答案见 P4

题型 3　利用中线解决三角形的面积问题

例题 3　如图,在 $\triangle ABC$ 中,E 是 BC 上一点,$EC=2BE$,点 D 是 AC 的中点. 已知 $S_{\triangle ABC}=24$,则 $S_{\triangle ADF}-S_{\triangle BEF}=$_____.



【分析】利用三角形面积公式,等高的三角形的面积比等于底边的比,则 $S_{\triangle AEC}=\frac{2}{3}S_{\triangle ABC}=16$,$S_{\triangle BCD}=\frac{1}{2}S_{\triangle ABC}=12$,然后利用 $S_{\triangle AEC}-S_{\triangle BCD}=4$ 即可得到答案.

【解析】∵ $EC=2BE$,∴ $S_{\triangle AEC}=\frac{2}{3}S_{\triangle ABC}=\frac{2}{3}\times 24=16$.

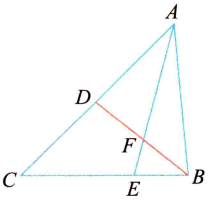
∵ 点 D 是 AC 的中点,∴ $S_{\triangle BCD}=\frac{1}{2}S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}\times 24=12$.

∴ $S_{\triangle AEC}-S_{\triangle BCD}=4$,即 $S_{\triangle ADF}+S_{四边形CEFD}-(S_{\triangle BEF}+S_{四边形CEFD})=4$.

∴ $S_{\triangle ADF}-S_{\triangle BEF}=4$.

【答案】4

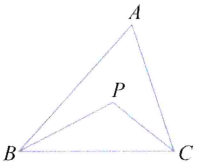
变式练 3　如图,在 $\triangle ABC$ 中,E 是 BC 上的一点,$EC=2BE$,点 D 是 AC 的中点,设 $\triangle ABC$,$\triangle ADF$,$\triangle BEF$ 的面积分别为 S,S_1,S_2,且 $S=36$,则 $S_1-S_2=$_____.



答案见 P4

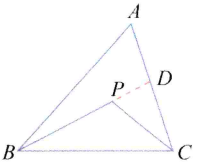
题型4　应用三角形的三边关系解决线段的和差比较问题

例题4　如图所示，点 P 是 $\triangle ABC$ 内一点，试说明 $AB+AC>PB+PC$.



【分析】延长 BP 交 AC 于点 D，在 $\triangle ABD$ 中可得 $PB+PD<AB+AD$，在 $\triangle PCD$ 中，可得 $PC<PD+CD$. 把两个不等式相加整理后可得结论.

【解】如图，延长 BP 交 AC 于点 D. 在 $\triangle ABD$ 中，$PB+PD<AB+AD$ ①，



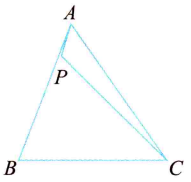
在 $\triangle PCD$ 中，$PC<PD+CD$ ②，

由①②两式相加得 $PB+PD+PC<AB+AD+PD+CD$，

即 $PB+PC<AB+AC$，即 $AB+AC>PB+PC$.

变式练　刷重点

变式练4　如图，设 P 为 $\triangle ABC$ 内一点，且 $PC=BC$，求证：$AB>AP$.



答案见本页

变式练答案

1. 【解】(1) 因为 $a=4$，$b=6$，所以 $2<c<10$.

故周长 x 的取值范围为 $12<x<20$.

(2)①因为周长 x 是小于 18 的偶数，

所以 $x=16$ 或 14.

当 $x=16$ 时，$c=6$；当 $x=14$ 时，$c=4$.

②当 $c=6$ 时，$b=c$，$\triangle ABC$ 为等腰三角形；

当 $c=4$ 时，$a=c$，$\triangle ABC$ 为等腰三角形.

综上，$\triangle ABC$ 是等腰三角形.

2. (1) CD　(2) 3　3

【解析】(1) 在 $\triangle AEC$ 中，AE 边上的高是 CD.

(2) $\because AE=3$ cm，$AB=CD=2$ cm，$\therefore S_{\triangle AEC}=\frac{1}{2}AE\cdot CD=3$ cm^2，

$\therefore S_{\triangle AEC}=\frac{1}{2}AB\cdot CE=3$ cm^2，$\therefore CE=3$ cm.

故 $S_{\triangle AEC}=3$ cm^2，$CE=3$ cm.

3. 6　【解析】$\because$ 点 D 是 AC 的中点，

$\therefore AD=\frac{1}{2}AC$. $\because S=36$，

$\therefore S_{\triangle ABD}=\frac{1}{2}S=\frac{1}{2}\times 36=18$.

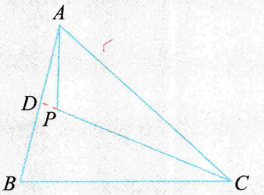
$\because EC=2BE$，$S=36$，

$\therefore S_{\triangle ABE}=\frac{1}{3}S=\frac{1}{3}\times 36=12$.

$\because S_{\triangle ABD}-S_{\triangle ABE}=(S_1+S_{\triangle ABF})-(S_{\triangle ABF}+S_2)=S_1-S_2$，

$\therefore S_1-S_2=S_{\triangle ABD}-S_{\triangle ABE}=18-12=6$.

4. 【证明】如图，延长 CP 交 AB 于点 D. $\because BC+BD>CP+PD$，$AD+PD>AP$，$\therefore BC+BD+AD+PD>CP+PD+AP$. $\therefore BC+AB+PD>CP+PD+AP$，即 $BC+AB>CP+AP$. $\because BC=CP$，$\therefore AB>AP$.



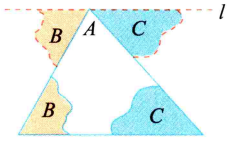
11.2 与三角形有关的角

知识过关 全理解

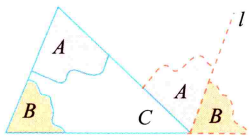
知识点1 三角形内角和定理 ▶注意1

三角形三个内角的和等于[1]_____.

如图所示，在△ABC中，$\angle A+\angle B+\angle C=180°$. ▶注意2



图（1）



图（2）

知识点2 直角三角形的性质及判定 ▶注意3

1. 直角三角形的性质：直角三角形的两个锐角[2]_____.

在△ABC中，∵ $\angle C=90°$，∴ $\angle A+\angle B=90°$.

2. 直角三角形的判定：有两个角互余的三角形是[3]_____.

在△ABC中，∵ $\angle A+\angle B=90°$，∴ $\angle C=90°$，即△ABC是直角三角形. ▶图示1

知识点3 三角形的外角

1. 三角形的一边与另一边的延长线组成的角，叫做三角形的[4]_____.

2. 三角形的外角等于[5]_____的两个内角的和. ▶拓展

3. 三角形的外角和等于[6]_____. ▶注意4

在△ABC中，$\angle ACD$是△ABC的一个外角，$\angle ACD=\angle CAB+\angle ABC$，$\angle ACD+\angle CBF+\angle BAE=360°$. ▶图示2

答案

[1]180° [2]互余 [3]直角三角形 [4]外角 [5]与它不相邻 [6]360°

敲黑板 划重点

注意1 （1）三角形内角和定理适用于所有三角形.

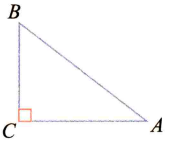
（2）三角形最多有三个锐角，最多有一个钝角，最多有一个直角.

注意2 证明三角形内角和定理的思路方法

主要运用平行线的性质，将三个内角“转移”集中到一个顶点处，合并成一个角，再说明这个角是平角即可.

注意3 直角三角形可以用符号“Rt△”表示，如直角三角形ABC可以表示为Rt△ABC.

图示1 直角△ABC

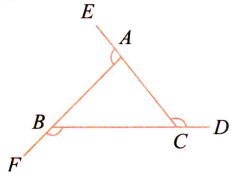


拓展 三角形外角的推论

三角形的外角大于任何一个与它不相邻的内角.

注意4 三角形的外角和不是所有外角的和，而是每个顶点处各取一个外角，然后求和.

图示2 △ABC的外角



题型过关 全提升

题型1 应用三角形内角和定理求角的度数

此类题目一般将所求角纳入一个三角形中，先求出另外两角的度数或另外两角的度数和或与另外两角的数量关系，再借助三角形内角和为180°求解.

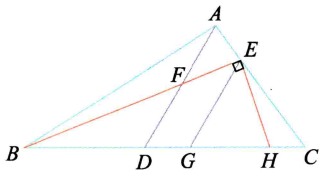
例题1 如图，在△ABC中，点D在BC上，点E在AC上，AD交BE于F. 已知$EG/\!/AD$交BC于点G，$EH\perp BE$交BC于点H，$\angle HEG=50°$.

变式练 刷重点

变式练1 在△ABC中，$\angle A=55°$，$\angle B$比$\angle C$大25°，则$\angle B$的度数为（ ）

A. 50° B. 75° C. 100° D. 125°

答案见P8



(1)求∠*BFD*的度数;

(2)若∠*BAD* = ∠*EBC*,∠*C* = 41°,求∠*BAC*的度数.

【分析】(1)根据垂直的定义可得∠*BEH* = 90°,然后求出∠*BEG* = 40°,再根据两直线平行,同位角相等可得∠*BFD* = ∠*BEG*;(2)根据三角形的一个外角等于与它不相邻的两个内角的和可得∠*BFD* = ∠*BAD* + ∠*ABE* = ∠*EBC* + ∠*ABE* = ∠*ABC*,然后根据三角形的内角和定理列式计算即可.

【解】(1)∵ *EH* ⊥ *BE*,∴ ∠*BEH* = 90°.

∵ ∠*HEG* = 50°,∴ ∠*BEG* = 40°.

又∵ *EG* // *AD*,∴ ∠*BFD* = ∠*BEG* = 40°.

(2)∵ ∠*BFD* = ∠*BAD* + ∠*ABE*,∠*BAD* = ∠*EBC*,

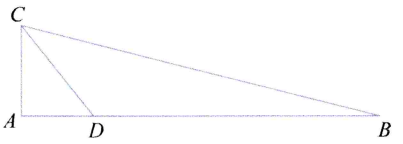
∴ ∠*BFD* = ∠*EBC* + ∠*ABE* = ∠*ABC* = 40°.

∵ ∠*C* = 41°,∴ ∠*BAC* = 180° − ∠*ABC* − ∠*C* = 180° − 40° − 41° = 99°.

题型2　应用三角形内角和定理的推论求角的度数

在三角形中求角的度数,通常将这个角看成一个三角形的内角或一个三角形的外角,再借助内角和定理及其推论进行解答.

例题2　如图,在△*ABC*中,∠*A* = 90°,∠*C*的平分线交*AB*于*D*,若∠*DCB* = 2∠*B*,求∠*ADC*的度数.



【分析】由于∠*DCB* = 2∠*B*,∠*ADC*为△*BCD*的外角,可考虑利用角平分线的特点,确定∠*ACD*与∠*B*的关系,再在直角三角形*ACD*中利用∠*ACD*与∠*ADC*互余,求出∠*B*的度数,再求出∠*ADC*的度数.

【解】∵ *CD*平分∠*ACB*,∴ ∠*ACD* = ∠*BCD* = 2∠*B*.

∵ ∠*ADC* = ∠*B* + ∠*BCD*,∴ ∠*ADC* = 3∠*B*.

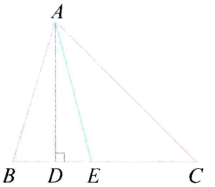
∵ ∠*A* = 90°,∴ ∠*ADC* + ∠*ACD* = 90°. ∴ 3∠*B* + 2∠*B* = 90°,

∴ ∠*B* = 18°. ∴ ∠*ADC* = 3 × 18° = 54°.

题型3　三角形内角和、外角、高线与角平分线的综合

这类题通常借助角平分线找到两角相等或一半的关系,借助高线构造直角三角形,出现两角互余,再借助三角形的内角和为180°这一隐含条件求出角的度数.

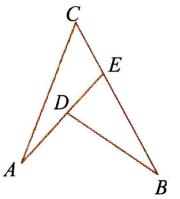
例题3　如图所示,在△*ABC*中,*AD*是*BC*边上的高,*AE*平分∠*BAC*,∠*B* = 75°,∠*C* = 45°,求∠*DAE*与∠*AEC*的度数.



【分析】根据已知条件求出∠*BAE*,利用外角性质求∠*AEC*,或者由已知求∠*EAC*,根据三角形内角和定理

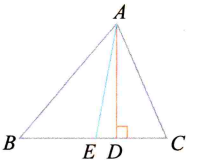
变式练　刷重点

变式练2　如图,∠*A* = 20°,∠*B* = 30°,∠*C* = 50°,求∠*ADB*的度数.



答案见P8

变式练3　如图,在△*ABC*中,*AD*是*BC*边上的高,*AE*平分∠*BAC*,∠*B* = 42°,∠*C* = 70°,则∠*EAD* = _____.



答案见P8

求∠AEC.

【解】∵ ∠B + ∠C + ∠BAC = 180°, ∠B = 75°, ∠C = 45°,

∴ ∠BAC = 180° − ∠B − ∠C = 180° − 75° − 45° = 60°.

∵ AE 平分∠BAC, ∴ $\angle BAE = \angle CAE = \frac{1}{2}\angle BAC = \frac{1}{2}\times 60° = 30°$.

∵ AD 是 BC 边上的高, ∴ ∠B + ∠BAD = 90°.

∴ ∠BAD = 90° − ∠B = 90° − 75° = 15°.

∴ ∠DAE = ∠BAE − ∠BAD = 30° − 15° = 15°.

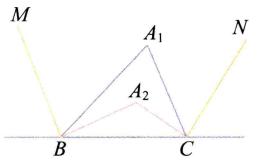
∵ ∠AEC 是△AEB 的外角, ∴ ∠AEC = ∠B + ∠BAE = 75° + 30° = 105°.

创新过关 提素养

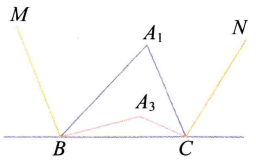
题型4 三角形的内、外角性质及角等分线相关的规律性试题

解这类题的关键是利用角等分线找角之间的数量关系,再借助整体思想和三角形的内、外角性质解答.

例题4 已知 BM, CN 分别是△A_1BC 的两个外角的平分线, BA_2, CA_2 分别是∠A_1BC 和∠A_1CB 的平分线,如图(1); BA_3, CA_3 分别是∠A_1BC 和∠A_1CB 的三等分线(即 $\angle A_3BC = \frac{1}{3}\angle A_1BC$, $\angle A_3CB = \frac{1}{3}\angle A_1CB$),如图(2);依此画图, BA_n, CA_n 分别是∠A_1BC 和∠A_1CB 的 n 等分线(即 $\angle A_nBC = \frac{1}{n}\angle A_1BC$, $\angle A_nCB = \frac{1}{n}\angle A_1CB$), $n \geqslant 2$,且 n 为整数. ▶说明1



图(1)



图(2)

(1)若∠A_1 = 70°,求∠A_2 的度数;

(2)设∠A_1 = α,请用 α 和 n 的代数式表示∠A_n 的大小,并写出表示的过程;

(3)当 $n \geqslant 3$ 时,请直接写出∠MBA_n + ∠NCA_n 与∠A_n 的数量关系.

【解】(1)∵ ∠A_1 = 70°,

∴ ∠A_1BC + ∠A_1CB = 180° − 70° = 110°.

∵ BA_2, CA_2 分别是∠A_1BC 和∠A_1CB 的平分线,

∴ $\angle A_2BC + \angle A_2CB = \frac{1}{2}\times 110° = 55°$.

∴ ∠A_2 = 180° − 55° = 125°.

(2)在△A_1BC 中, ∠A_1BC + ∠A_1CB = 180° − α,

∵ $\angle A_nBC = \frac{1}{n}\angle A_1BC$, $\angle A_nCB = \frac{1}{n}\angle A_1CB$,

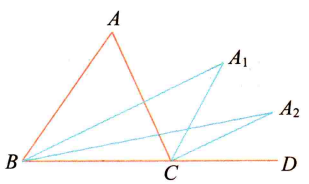
∴ $\angle A_nBC + \angle A_nCB = \frac{1}{n}(\angle A_1BC + \angle A_1CB) = \frac{1}{n}(180° - \alpha)$.

∴ $\angle A_n = 180° - (\angle A_nBC + \angle A_nCB) = 180° - \frac{1}{n}(180° - \alpha)$.

变式练 刷重点

说明1 (1)根据三角形内角和定理,即可得到∠A_1BC + ∠A_1CB 的度数,再根据角平分线的定义,即可得到∠A_2BC + ∠A_2CB 的度数,最后根据三角形内角和定理进行计算即可;(2)根据三角形内角和定理,即可得到∠A_1BC + ∠A_1CB 的度数,再根据 BA_n, CA_n 分别是∠A_1BC 和∠A_1CB 的 n 等分线,即可得到∠A_nBC + ∠A_nCB 的度数,最后根据三角形内角和定理进行计算即可.

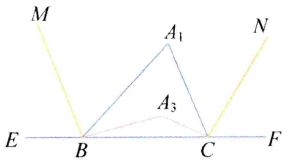
变式练4 如图,在△ABC 中,∠A = m 度, D 是 BC 延长线上一点,∠ABC 和∠ACD 的平分线交于点 A_1,得∠A_1;∠A_1BC 和∠A_1CD 的平分线交于点 A_2,得∠A_2;…;∠$A_{2\,016}BC$ 和∠$A_{2\,016}CD$ 的平分线交于点 $A_{2\,017}$,则∠$A_{2\,017}$ = _____度.



答案见P8

(3)$2(\angle MBA_n+\angle NCA_n)+(n-2)\angle A_n=180°n$.

理由如下:如图,∵ BM,CN 分别是 $\triangle A_1BC$ 的两个外角的平分线,



$\therefore \angle MBE=\frac{1}{2}\angle A_1BE=\frac{1}{2}(180°-\angle A_1BC)$,

$\angle NCF=\frac{1}{2}\angle A_1CF=\frac{1}{2}(180°-\angle A_1CB)$.

$\therefore \angle MBA_n+\angle NCA_n=360°-(\angle MBE+\angle NCF)-(\angle A_nBC+\angle A_nCB)$

$=360°-\frac{1}{2}(180°-\angle A_1BC)-\frac{1}{2}(180°-\angle A_1CB)-(180°-\angle A_n)$

$=\frac{1}{2}(\angle A_1BC+\angle A_1CB)+\angle A_n$

$=\frac{1}{2}(180°-\angle A_1)+\angle A_n$.

由(2)可得,$\angle A_n=180°-\frac{1}{n}(180°-\angle A_1)$,

$\therefore \angle A_1=n\angle A_n-180°n+180°$.

$\therefore \angle MBA_n+\angle NCA_n=\frac{1}{2}(180°-n\angle A_n+180°n-180°)+\angle A_n=$

$90°n-\frac{n-2}{2}\angle A_n$.

$\therefore 2(\angle MBA_n+\angle NCA_n)+(n-2)\angle A_n=180°n$. ▶说明2

变式练 刷重点

说明2 根据$\angle MBA_n+\angle NCA_n=\frac{1}{2}(180°-\angle A_1)+\angle A_n$,以及$\angle A_1=n\angle A_n-180°n+180°$,即可得到$\angle MBA_n+\angle NCA_n=90°n-\frac{n-2}{2}\angle A_n$,进而变形得出$2(\angle MBA_n+\angle NCA_n)+(n-2)\angle A_n=180°n$.

变式练答案

1. B 【解析】∵ $\angle B$ 比 $\angle C$ 大 25°,∴ $\angle C=\angle B-25°$. ∵ $\angle A+\angle B+\angle C=180°$,∴ $55°+\angle B+\angle B-25°=180°$,∴ $\angle B=75°$.

2. 【解】∵ $\angle A=20°$,$\angle C=50°$,∴ $\angle AEB=\angle A+\angle C=20°+50°=70°$,又∵ $\angle B=30°$,∴ $\angle ADB=\angle AEB+\angle B=70°+30°=100°$.

3. 14° 【解析】∵ 在 $\triangle ABC$ 中,AE 是 $\angle BAC$ 的平分线,且 $\angle B=42°$,$\angle C=70°$,∴ $\angle BAE=\angle EAC=\frac{1}{2}(180°-\angle B-\angle C)=\frac{1}{2}(180°-42°-70°)=34°$. 在 $\triangle ACD$ 中,$\angle ADC=90°$,$\angle C=70°$,∴ $\angle DAC=90°-70°=20°$,$\angle EAD=\angle EAC-\angle DAC=34°-20°=14°$.

4. $\frac{m}{2^{2\,017}}$ 【解析】∵ A_1B 平分 $\angle ABC$,A_1C 平分 $\angle ACD$,∴ $\angle A_1BC=\frac{1}{2}\angle ABC$,$\angle A_1CA=\frac{1}{2}\angle ACD$. ∵ $\angle A_1CD=\angle A_1+\angle A_1BC$,即 $\frac{1}{2}\angle ACD=\angle A_1+\frac{1}{2}\angle ABC$,∴ $\angle A_1=\frac{1}{2}(\angle ACD-\angle ABC)$. ∵ $\angle A+\angle ABC=\angle ACD$,∴ $\angle A=\angle ACD-\angle ABC$,∴ $\angle A_1=\frac{1}{2}\angle A$,$\angle A_2=\frac{1}{2}\angle A_1=\frac{1}{2^2}\angle A$,…,依次类推可知 $\angle A_{2\,017}=\frac{1}{2^{2\,017}}\angle A=\left(\frac{m}{2^{2\,017}}\right)$度.

11.3 多边形及其内角和

知识过关 全理解

知识点1 多边形的有关概念

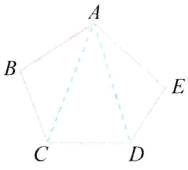
1. 在平面内，由一些线段[1]_____顺次相接组成的封闭图形叫做多边形. ▶注意1

2. 多边形相邻两边组成的角叫做多边形的[2]_____.

3. 多边形的边与它的邻边的延长线组成的角叫做多边形的[3]_____. ▶说明

4. 各个角都[4]_____，[5]_____都相等的多边形叫做正多边形.

知识点2 多边形的对角线 ▶方法



连接多边形不相邻的两个顶点的线段，叫做多边形的[6]_____. 如图，AC，AD 是五边形 $ABCDE$ 的两条对角线. ▶注意2

知识点3 多边形的内角和 ▶拓展1

从五边形的一个顶点出发，可以作[7]_____条对角线，它们将五边形分为[8]_____个三角形，五边形的内角和等于 $180° \times$ [9]_____.

从六边形的一个顶点出发，可以作[10]_____条对角线，它们将六边形分为[11]_____个三角形，六边形的内角和等于 $180° \times$ [12]_____.

从 n 边形的一个顶点出发，可以作 $(n-3)$ 条对角线，它们将 n 边形分为 $(n-2)$ 个三角形，n 边形的内角和等于[13]_____. ▶注意3

知识点4 多边形的外角和

多边形的外角和等于[14]_____. ▶拓展2

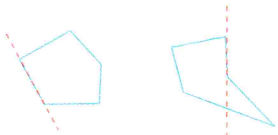
答案

[1]首尾 [2]内角 [3]外角 [4]相等 [5]各条边 [6]对角线 [7]2 [8]3 [9]3 [10]3 [11]4 [12]4 [13]$(n-2)\times180°$ [14]360°

敲黑板 划重点

注意1 三角形是边数最少的多边形.

说明 多边形的分类



凸多边形　　凹多边形

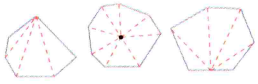
方法 多边形对角线的计算方法

从 n 边形的一个顶点出发有 $(n-3)$ 条对角线，因为它有 n 个顶点，所以共有 $n(n-3)$ 条对角线，其中每条对角线都重复数了一次，因此共有 $\frac{n(n-3)}{2}$ 条对角线.

注意2 从多边形的不同顶点作出的对角线有重复，所以多边形对角线的条数不是所有顶点上对角线条数的和.

拓展1 多边形内角和公式的拓展方法

把多边形的问题转化为三角形的问题进行解决.



注意3 推导多边形内角和公式的方法有很多，通常是将多边形内角和转化为三角形内角和来进行推导.

拓展2 正多边形的外角度数

正 n 边形的每个内角都相等，所以它的每个外角都相等，都等于 $\frac{360°}{n}$.

题型过关 全提升

题型1 多边形内角和公式的应用

多边形内角和公式的考法主要有两种：(1)已知多边形的边数，求多边形的内角和，可以直接利用公式求解；(2)已知多边形的内角和，求多边形的边数，可以设边数为 n，利用多边形内角和公式建立方程，然后列方程求解.

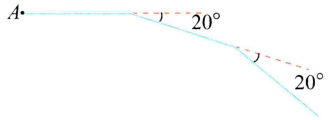
例题1 如图，小明从点 A 出发，前进10米后向右转20°，再前进10米后又向右转20°，这样一直下去，直到他第一次回到出发点 A 为止，他所走

变式练 刷重点

变式练1 已知一个多边形的边数是6，则这个多边形的内角和是_____.

答案见P10

的路径构成了一个多边形.



(1)小明一共走了多少米?

(2)这个多边形的内角和是多少度?

【分析】(1)第一次回到出发点 A 时,所经过的路径正好构成一个外角是 20°的正多边形,由此求得边数,即可求解;

(2)根据多边形的内角和公式即可求解.

【解】(1)∵ 所经过的路径正好构成一个外角是 20°的正多边形,

∴ $360 \div 20 = 18$, $18 \times 10 = 180$(米).

答:小明一共走了 180 米.

(2)根据题意,得 $(18-2) \times 180° = 2\,880°$.

答:这个多边形的内角和是 2 880°.

题型 2 多边形外角和定理的应用

例题 2 已知一个多边形的每一个外角都等于 72°,求这个多边形的内角和.

【解】∵ 多边形的外角和为 360°,多边形的每一个外角都等于 72°,

∴ $360° \div 72° = 5$,即这个多边形的边数为 5.

∴ 这个五边形的内角和为 $(5-2) \times 180° = 540°$.

变式练 2 若正多边形的一个内角等于 120°,则这个正多边形的边数是_____.

答案见本页

题型 3 利用多边形内、外角关系解题

此类题通常用方程的思想来解答,设内角(或外角)为 $x°$,再根据相邻内、外角互补或内、外角和公式建立方程,然后解方程即可.

例题 3 如果多边形的每个内角都比它相邻外角的 4 倍多 30°,求这个多边形的内角和及对角线的总条数.

【分析】首先设外角为 $x°$,则内角为 $(4x+30)°$,根据内角与相邻的外角是互补关系,可得 $x+4x+30=180$,解方程可得 x 的值,再利用外角和除以外角的度数可得边数.

【解】设外角为 $x°$,则 $x+4x+30=180$,

解得 $x=30$, $360° \div 30° = 12$.

$(12-2) \times 180° = 1\,800°$,

∴ 这个多边形的内角和是 1 800°,

对角线的总条数为 $\dfrac{(12-3) \times 12}{2} = 54$.

答:这个多边形的内角和是 1 800°,对角线的总条数为 54.

变式练 3 若多边形的外角和与内角和之比是 2∶9,求这个多边形的边数及内角和.

答案见本页

变式练答案

1. 720° 【解析】由多边形的边数是 6,可得多边形内角和为 $(6-2) \times 180° = 720°$.

2. 6 【解析】设所求正多边形的边数为 n,∵ 该正多边形的每个内角都等于 120°,∴ 该正多边形的每个外角都等于 $180° - 120° = 60°$. 又∵ 多边形的外角和为 360°,∴ $60° \cdot n = 360°$,解得 $n=6$.

3. 【解】设该多边形的边数为 n,内角和为 $x°$,由多边形的外角和与内角和之比是 2∶9,可得 $\dfrac{360}{x} = \dfrac{2}{9}$,解得 $x = 1\,620$. 由 $(n-2) \times 180° = 1\,620°$,解得 $n=11$. 故这个多边形的边数为 11,内角和为 1 620°.

第十二章 全等三角形



12.1 全等三角形

知识过关 全理解

知识点1 全等形的定义及性质

1. 能够完全重合的两个图形叫做[1]_____.

2. 全等形的[2]_____和[3]_____都相同. ▶注意1

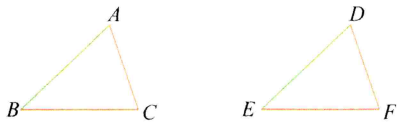
知识点2 全等三角形的概念及表示方法

1. 能够[4]_____的两个三角形叫做全等三角形. ▶注意2

2. 把两个全等的三角形重合到一起,重合的顶点叫做[5]_____,重合的边叫做[6]_____,重合的角叫做[7]_____. ▶注意3

如图所示,$\triangle ABC$ 和 $\triangle DEF$ 全等,记作 $\triangle ABC \cong \triangle DEF$. ▶方法1

其中,点 A 与点 D,点 B 与点 E,点 C 与点 F 是对应顶点,AB 与 DE,AC 与 DF,BC 与 EF 是对应边,$\angle A$ 与 $\angle D$,$\angle B$ 与 $\angle E$,$\angle C$ 与 $\angle F$ 是对应角.



3. 寻找全等三角形对应边、对应角的三种方法:

(1)图形特征法:

最长边对最长边,最短边对最短边;

最大角对最大角,最小角对最小角.

(2)位置关系法:

公共角(对顶角)为对应角,公共边为对应边;

对应角的对边为对应边,对应边的对角为对应角.

(3)字母顺序法: ▶方法2

根据书写规范按照对应顶点确定对应边或对应角.

知识点3 全等三角形的性质 ▶注意4

1. 全等三角形的对应边[8]_____,对应角[9]_____.

2. 用数学语言表示:

$\because \triangle ABC \cong \triangle DEF$,

$\therefore AB = DE, AC = DF, BC = EF$.

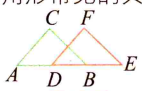
$\therefore \angle A = \angle D, \angle B = \angle E, \angle C = \angle F$.

敲黑板 划重点

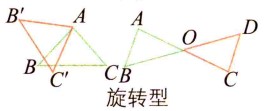
注意1 (1)只有形状和大小都相同的图形才是全等形;
(2)一个图形经过翻折、平移后,位置发生了变化,但形状和大小都没有改变,都是全等形.

注意2 (1)全等三角形是特殊的全等形;
(2)全等三角形的形状和大小完全相同,与图形的位置无关.

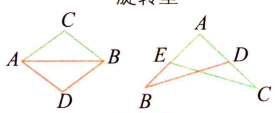
注意3 (1)记两个三角形全等时,通常把表示对应顶点的字母写在对应的位置上;
(2)在找对应边,对应角时,应先确定对应顶点,再确定对应边,对应角;
(3)全等三角形常见的典型类型:



平移型



旋转型

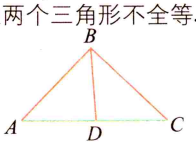


翻折型

方法1 全等三角形的表示方法
全等用符号"$\cong$"表示,读作"全等于".记两个三角形全等时,通常把表示对应顶点的字母写在对应的位置上.

方法2 如何确定对应边、角
根据字母顺序确定全等三角形的对应边、角的前提是表示对应顶点的字母正确地写在了对应位置,否则会出现错误.

注意4 周长相等的三角形不一定全等,面积相等的三角形也不一定全等.例如,下图中 D 为 AC 边中点,连接 BD,$\triangle ABD$ 和 $\triangle CBD$ 面积相等,但两个三角形不全等.



3. 全等三角形的其他性质

(1)全等三角形的周长相等;

(2)全等三角形的面积相等;

(3)全等三角形对应边上的中线相等,对应角的平分线相等,对应边上的高相等. ▶说明1

敲黑板 划重点

说明1 可以利用全等三角形的性质求线段的长度,角的度数.

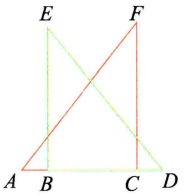
答案

1全等形 2形状 3大小 4完全重合 5对应顶点 6对应边 7对应角 8相等 9相等

题型过关 全提升

题型1 利用全等三角形的性质求角的度数 ▶说明2

例题1 如图,已知$\triangle ACF \cong \triangle DBE$,且点$A,B,C,D$在同一条直线上,$\angle A=50°$,$\angle F=40°$.



(1)求$\triangle DBE$各内角的度数;

(2)若$AD=16$,$BC=10$,求AB的长.

【分析】(1)根据全等三角形的性质求出$\angle D$,$\angle E$的度数,然后根据三角形内角和定理求出$\angle EBD$的度数即可;

(2)根据全等三角形的性质得$AC=BD$,求出$AB=CD$,即可得出答案.

【解】(1)$\because \triangle ACF \cong \triangle DBE$,$\angle A=50°$,$\angle F=40°$,

$\therefore \angle D=\angle A=50°$,$\angle E=\angle F=40°$,

$\therefore \angle EBD=180°-\angle D-\angle E=90°$.

(2)$\because \triangle ACF \cong \triangle DBE$,$\therefore AC=BD$,

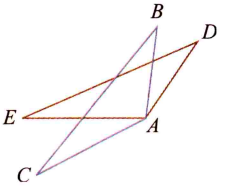
$\therefore AC-BC=DB-BC$,$\therefore AB=CD$.

$\because AD=16$,$BC=10$,$\therefore AB=CD=\frac{1}{2}(AD-BC)=3$.

变式练 刷重点

说明2 此类题目可以利用全等三角形的对应角相等和三角形内角和为180°这一隐含条件求角的度数.

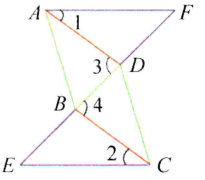
变式练1 如图,$\triangle ABC \cong \triangle ADE$,$\angle B=30°$,$\angle E=20°$,$\angle BAE=105°$,求$\angle BAC$,$\angle DAC$的度数.



答案见P13

题型2 利用全等三角形的性质求两线段的位置关系

例题2 如图所示,$\triangle ADF \cong \triangle CBE$,且点$E,B,D,F$在同一条直线上,判断$AD$与$BC$的位置关系,并加以说明.



【解】AD与BC的位置关系是$AD \parallel BC$.

理由如下:$\because \triangle ADF \cong \triangle CBE$,

$\therefore \angle 1=\angle 2$,$\angle F=\angle E$.

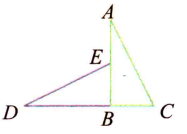
又$\because$点E,B,D,F在同一条直线上,$\therefore \angle 3=\angle 1+\angle F$,

$\angle 4=\angle 2+\angle E$.

$\therefore \angle 3=\angle 4$.

$\therefore AD \parallel BC$(内错角相等,两直线平行).

变式练2 如图所示,$\triangle ABC \cong \triangle DBE$,$DE$与$AC$垂直吗?为什么?

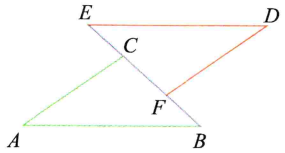


答案见P13

题型3 利用全等三角形的性质求线段的长

利用全等三角形的性质求线段长的方法:(1)先确定两个三角形中边的对应关系,再由这种对应关系实现已知线段与所求线段的转换;(2)若所求的线段不是全等三角形的对应边,则需要用等式的性质进行转换求解.

例题 3 如图，$\triangle ABC \cong \triangle DEF$，$\angle A = 30°$，$\angle B = 50°$，$BF = 8$.



(1)求 $\angle DFE$ 的度数；

(2)求 EC 的长.

【分析】(1)根据全等三角形的对应角相等可得 $\angle D = \angle A$，$\angle E = \angle B$，再利用三角形的内角和等于 180°求解即可；

(2)根据全等三角形的对应边相等可得 $BC = EF$，然后求出 $BF = EC$，从而得出答案.

【解】(1)∵ $\triangle ABC \cong \triangle DEF$，

∴ $\angle D = \angle A = 30°$，$\angle E = \angle B = 50°$，

∴ $\angle DFE = 180° - \angle D - \angle E = 180° - 30° - 50° = 100°$.

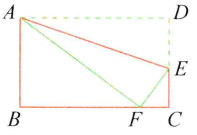
(2)∵ $\triangle ABC \cong \triangle DEF$，∴ $BC = EF$，∴ $BC - CF = EF - CF$，即 $BF = EC$.

∵ $BF = 8$，∴ $EC = 8$.

题型 4 利用全等三角形的性质解决图形变换中的问题

三角形经过平移、旋转或翻折变换后，形状、大小没有发生变化，故变换前后两三角形全等.

例题 4 如图所示，将长方形 $ABCD$ 沿 AE 折叠，使点 D 落在 BC 边上的点 F 处，若 $BC = 8$ cm，$\angle BAF = 40°$. 求 $\angle DAE$ 的度数与 AF 的长度.



【分析】根据长方形的性质得 $AD = BC = 8$ cm，$\angle BAD = 90°$，利用互余得 $\angle DAF = 50°$，再根据折叠的性质得 $\angle DAE = \angle FAE$，$AF = AD = 8$ cm，所以 $\angle DAE = \frac{1}{2}\angle DAF = 25°$.

【解】∵ 四边形 $ABCD$ 为长方形，

∴ $AD = BC = 8$ cm，$\angle BAD = 90°$，

∴ $\angle DAF = 90° - \angle BAF = 90° - 40° = 50°$.

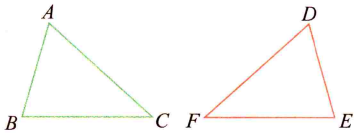
∵ 将长方形 $ABCD$ 沿 AE 折叠，使点 D 落在 BC 边上的点 F 处，

∴ $\angle DAE = \angle FAE$，$AF = AD = 8$ cm.

∴ $\angle DAE = \frac{1}{2}\angle DAF = \frac{1}{2} \times 50° = 25°$.

变式练 刷重点

变式练 3 如图，$\triangle ABC \cong \triangle DEF$，$\triangle ABC$ 的周长是 40 cm，$AB = 10$ cm，$BC = 16$ cm，求 $\triangle DEF$ 中，边 DF 的长.

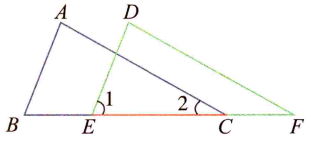


答案见本页

变式练 4 将 $\triangle ABC$ 沿 BC 方向平移，得到 $\triangle DEF$.

(1)若 $\angle B = 74°$，$\angle F = 26°$，求 $\angle A$ 的度数；

(2)若 $BC = 4.5$ cm，$EC = 3.5$ cm，求 $\triangle ABC$ 平移的距离.



答案见本页

变式练答案

1. 【解】∵ $\triangle ABC \cong \triangle ADE$，∴ $\angle B = \angle D = 30°$，$\angle E = \angle C = 20°$，

∴ $\angle DAE = 180° - 30° - 20° = 130°$，∴ $\angle BAC = 130°$.

∵ $\angle BAE = 105°$，∴ $\angle BAD = \angle DAE - \angle BAE = 130° - 105° = 25°$，∴ $\angle DAC = \angle BAD + \angle BAC = 25° + 130° = 155°$.

2. 【解】$DE \perp AC$. 理由如下：延长 DE 交 AC 于点 F.

∵ $\triangle ABC \cong \triangle DBE$，∴ $\angle A = \angle D$，$\angle ABC = \angle DBE$.

又∵ $\angle ABC + \angle DBE = 180°$，∴ $\angle DBE = 90°$.

∵ $\angle A = \angle D$，$\angle DEB = \angle AEF$，∴ $\angle AFD = \angle DBE = 90°$.

∴ $DE \perp AC$.

3. 【解】∵ $\triangle ABC$ 的周长是 40 cm，$AB = 10$ cm，$BC = 16$ cm，

∴ $AC = 40 - AB - BC = 40 - 10 - 16 = 14$(cm).

∵ $\triangle ABC \cong \triangle DEF$，∴ $DF = AC = 14$ cm，

所以边 DF 的长为 14 cm.

4. 【解】(1)由图形平移的特点，可知 $\triangle ABC$ 和 $\triangle DEF$ 的形状与大小相同，即 $\triangle ABC \cong \triangle DEF$. ∴ $\angle 2 = \angle F = 26°$.

∵ $\angle B = 74°$，

∴ $\angle A = 180° - (\angle 2 + \angle B) = 180° - (26° + 74°) = 80°$.

(2)∵ $BC = 4.5$ cm，$EC = 3.5$ cm，

∴ $BE = BC - EC = 4.5 - 3.5 = 1$ (cm).

∴ $\triangle ABC$ 平移的距离为 1 cm.

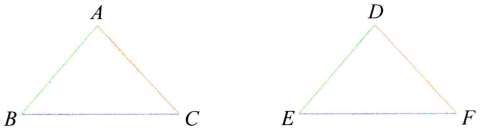
12.2 三角形全等的判定

知识过关 全理解

知识点1 判定两个三角形全等的基本事实（边边边）▶拓展1

（1）三边分别相等的两个三角形[1]____（可以简写成“[2]____”或“SSS”）.

（2）**数学语言表达**：如图所示，$AB = DE$，$AC = DF$，$BC = EF$，则$\triangle ABC \cong \triangle DEF$. ▶注意1



知识点2 判定两个三角形全等的基本事实（边角边）▶注意2

（1）两边和它们的[3]____分别相等的两个三角形全等（可以简写成“[4]____”或“SAS”）.

（2）**数学语言表达**：如上图所示，$AB = DE$，$\angle A = \angle D$，$AC = DF$，则$\triangle ABC \cong \triangle DEF$.

知识点3 判定两个三角形全等的基本事实（角边角）▶注意3

（1）两角和它们的[5]____分别相等的两个三角形全等（可以简写成“[6]____”或“ASA”）.

（2）**数学语言表达**：如上图所示，$\angle A = \angle D$，$AB = DE$，$\angle B = \angle E$，则$\triangle ABC \cong \triangle DEF$.

知识点4 判定两个三角形全等的基本事实（角角边）▶注意4

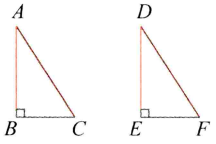
（1）两角分别相等且其中一组等角的[7]____相等的两个三角形全等（可以简写成“[8]____”或“AAS”）.

（2）**数学语言表达**：如上图所示，$\angle A = \angle D$，$\angle B = \angle E$，$AC = DF$，则$\triangle ABC \cong \triangle DEF$. ▶注意5

知识点5 直角三角形全等的判定（斜边、直角边）▶注意6

（1）[9]____分别相等的两个直角三角形全等（可以简写成“[10]____”或“HL”）.

（2）**数学语言表达**：如图所示，$AC = DF$，$AB = DE$，则 Rt$\triangle ABC \cong$ Rt$\triangle DEF$.



敲黑板 划重点

拓展1 三角形的稳定性

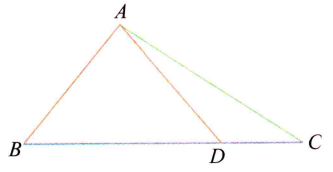
当三角形的三边确定后，其形状、大小也随之确定，这是三角形具有稳定性的原因.

注意1 （1）全等的条件要按顺序排列；

（2）同一个三角形的三个条件要放在等号同一侧；

（3）两个三角形对应顶点的字母要一一对应.

注意2 两边和一边的对角分别相等时，两个三角形不一定全等，即不存在“边边角”. 例如：$AB = AD$，$AC = AC$，$\angle C = \angle C$，$\triangle ABC$不全等于$\triangle ADC$.



注意3 在书写两个三角形全等时，一定要把夹边写在中间，以突出边角的位置及对应关系.

注意4 用“AAS”来判定两个三角形全等时，要注意边是其中一角的对边.

注意5 （1）AAS与ASA可以相互转化；

（2）运用AAS与ASA时，要从图形上确定，按照顺序排列.

注意6 （1）证明直角三角形全等的格式和一般三角形全等不同：①写条件时要注明“Rt△”；②大括号中含两个条件；③结论要注明“Rt△”.

（2）“HL”定理的特殊性：

应用“斜边、直角边”判定两个直角三角形全等的过程中要突出直角三角形这个条件，书写时必须在两个三角形前加上“Rt”.

(3)判定三角形全等,常用思路如下:

已知条件	寻找的条件	选择的判定方法▶拓展2
两角	夹边或其中一组等角的对边	ASA 或 AAS
一角及其对边	任一角	AAS
一角及其邻边	角的另一邻边或边的另一邻角或边的对角	SAS 或 ASA 或 AAS
两边	夹角或另一边或直角	SAS 或 SSS 或 HL

答案

1全等 2边边边 3夹角 4边角边 5夹边 6角边角 7对边 8角角边
9斜边和一条直角边 10斜边、直角边

敲黑板 划重点

拓展2 **寻找三角形全等的条件的方法**

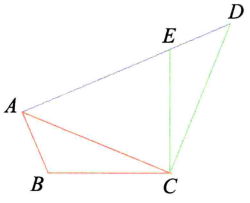
要结合图形,挖掘其中的隐含条件,如公共边、对顶角、中点、角平分线、高所带来的相等关系,以及等线段加(或减)同线段或等线段的和(或差)相等.

题型过关 全提升

题型1 利用全等三角形证明线段或角相等

解决此类题目的关键是根据已知条件选用合适的方法证明三角形全等,再利用全等三角形的性质得出结论.

例题1 如图,已知在四边形 $ABCD$ 中,点 E 在 AD 上,$\angle BCE=\angle ACD=90°$,$\angle BAC=\angle D$,$BC=CE$.



(1)求证:$AC=CD$;

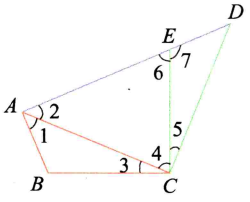
(2)若 $AC=AE$,$\angle ACD=80°$,求 $\angle DEC$ 的度数.

【分析】(1)根据同角的余角相等可得 $\angle 3=\angle 5$,由题意可得 $\angle 1=\angle D$,再加上 $BC=CE$,可证得结论;

(2)先根据 $\angle ACD=80°$,$AC=CD$,得到 $\angle 2=\angle D=50°$,再根据等腰三角形的性质得到 $\angle 4=\angle 6=65°$,然后由平角的定义得到 $\angle DEC$ 的度数.

【解】(1)∵ $\angle BCE=\angle ACD=90°$,

∴ $\angle 3+\angle 4=\angle 4+\angle 5$,∴ $\angle 3=\angle 5$.



在△ABC 和△DEC 中,∵ $\begin{cases}\angle 1=\angle D,\\ \angle 3=\angle 5,\\ BC=CE,\end{cases}$

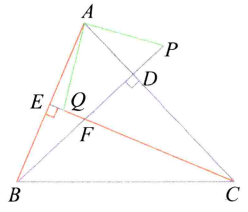
∴ △ABC≌△DEC(AAS),∴ $AC=CD$.

(2)∵ $\angle ACD=80°$,$AC=CD$,∴ $\angle 2=\angle D=50°$.

∵ $AE=AC$,∴ $\angle 4=\angle 6=65°$,∴ $\angle DEC=180°-\angle 6=115°$.

题型2 全等三角形的判定与性质的综合应用

例题2 如图所示,BD,CE 分别是△ABC 的边 AC 和 AB 上的高,点 P 在 BD 的延长线上,$BP=AC$,点 Q 在 CE 上,$CQ=AB$. 求证:



(1)$AP=AQ$;

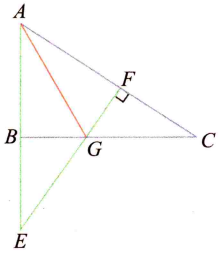
(2)$AP\perp AQ$.

变式练 刷重点

变式练1 如图,在 Rt△ABC 中,$\angle ABC=90°$,延长 AB 至点 E,使 $AE=AC$,过点 E 作 $EF\perp AC$ 于点 F,EF 交 BC 于点 G.

(1)求证:$BE=CF$;

(2)若 $\angle E=40°$,求 $\angle AGB$ 的度数.



答案见 P19

【分析】(1)由 $BD\perp AC$,$CE\perp AB$,可得 $\angle ABD=\angle ACE$,又有对应边的关系,进而可得出 $\triangle ABP\cong\triangle QCA$,即可得出结论;

(2)在(1)的基础上,证明 $\angle PAQ=90°$ 即可.

【证明】(1)∵ BD,CE 分别是 $\triangle ABC$ 的边 AC,AB 上的高,

∴ $\angle ADB=\angle AEC=90°$.

在 $\mathrm{Rt}\triangle AEC$ 和 $\mathrm{Rt}\triangle ADB$ 中,$\angle ACE=90°-\angle DAB$,$\angle ABP=90°-\angle BAD$,

∴ $\angle ABP=\angle ACE$.

在 $\triangle ABP$ 和 $\triangle QCA$ 中,$\begin{cases}BP=CA,\\ \angle ABP=\angle ACE,\\ AB=QC,\end{cases}$

∴ $\triangle ABP\cong\triangle QCA$(SAS).

∴ $AP=AQ$(全等三角形的对应边相等).

(2)由(1)知 $\triangle ABP\cong\triangle QCA$,

∴ $\angle P=\angle CAQ$(全等三角形的对应角相等).

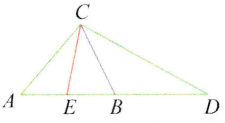
又∵ $\angle P+\angle PAD=90°$,

∴ $\angle CAQ+\angle PAD=90°$,即 $\angle QAP=90°$.

∴ $AP\perp AQ$.

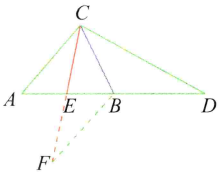
题型3 “倍长中线法”构造全等三角形

例题3 如图,CE,CB 分别是 $\triangle ABC$ 与 $\triangle ADC$ 的中线,且 $\angle ACB=\angle ABC$. 求证:$CD=2CE$.



【分析】在 CE 的延长线上截取 $EF=CE$,利用 SAS 得到三角形 ACE 与三角形 BFE 全等,利用全等三角形的对应边相等得到 $AC=BF$,再由已知角相等,利用等角对等边得到 $AC=AB$,根据 B 为 AD 中点,得到 $AC=AB=BD=BF$,利用外角性质及等量代换得到 $\angle CBD=\angle CBF$,利用 SAS 得到三角形 CBD 与三角形 CBF 全等,利用全等三角形对应边相等得到 $CD=CF$,等量代换即可得证. ▶拓展3

【证明】如图,延长 CE 至点 F,使 $EF=CE$,连接 BF.



在 $\triangle BEF$ 与 $\triangle AEC$ 中,$\begin{cases}BE=AE,\\ \angle BEF=\angle AEC,\\ EF=EC,\end{cases}$

∴ $\triangle BEF\cong\triangle AEC$(SAS).

∴ $BF=AC$,$\angle EBF=\angle A$.

∵ $\angle ACB=\angle ABC$,∴ $AB=AC$.

∴ $\angle ACB+\angle A=\angle ABC+\angle EBF$,

即 $\angle CBD=\angle CBF$.

又∵ $AB=BD$,∴ $BF=BD$.

在 $\triangle CBF$ 与 $\triangle CBD$ 中,∵ $\begin{cases}CB=CB,\\ \angle CBF=\angle CBD,\\ BF=BD,\end{cases}$

∴ $\triangle CBF\cong\triangle CBD$(SAS).

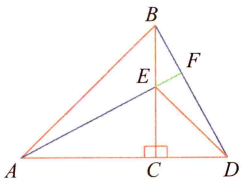
∴ $CF=CD$. 故 $CD=2CE$.

变式练 刷重点

变式练2 如图,$\triangle ACB$ 和 $\triangle ECD$ 都是等腰直角三角形,A,C,D 三点在同一直线上,连接 BD,AE,并延长 AE 交 BD 于 F.

(1)求证:$AE=BD$;

(2)试判断直线 AE 与 BD 的位置关系,并证明你的结论.

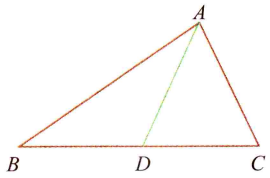


答案见P19

变式练3 如图,$\triangle ABC$ 中,D 为 BC 的中点.

(1)求证:$AB+AC>2AD$;

(2)若 $AB=5$,$AC=3$,求 AD 的取值范围.



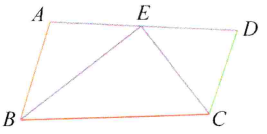
答案见P19

拓展3 如果一个三角形有两个角相等,那么这两个角所对的边也相等(简写成“等角对等边”),如题中 $\angle ACB=\angle ABC$,则 $AC=AB$.

题型4　“截长补短法”证明线段和差问题

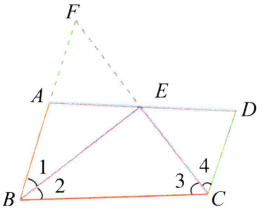
在处理线段和差问题时，常考虑截长补短法. 截长法是在较长线段上截取一段等于某一短线段，再证剩下的那一段等于另一短线段即可. 补短法一般有两种方式：一种是将某短线段延长，使延长的一部分等于另一短线段；另一种是将某短线段直接延长至等于较长的线段.

例题4　已知：如图，E 为 AD 中点，$AB\parallel CD$，BE 平分 $\angle ABC$，CE 平分 $\angle BCD$，求证：$BC=AB+CD$.



【分析】补短法：延长 CE，BA 交于点 F. 易证 $\triangle AEF\cong\triangle DEC$，从而 $AF=DC$，因而只需证 $BF=BC$ 即可得出结论.

【证明】如图，延长 BA，CE 交于点 F.



$\because E$ 为 AD 中点，$\therefore AE=DE$.

$\because AB\parallel CD$，$\therefore \angle F=\angle 4$.

在 $\triangle AEF$ 和 $\triangle DEC$ 中，$\because \begin{cases}\angle F=\angle 4,\\ \angle FEA=\angle CED,\\ AE=DE,\end{cases}$

$\therefore \triangle AEF\cong\triangle DEC$(AAS)，$\therefore AF=CD$.

$\because AB\parallel CD$，$\therefore \angle 1+\angle 2+\angle 3+\angle 4=180°$.

$\because \angle 1=\angle 2$，$\angle 3=\angle 4$，$\therefore \angle 2+\angle 3=180°\div 2=90°$，

$\therefore \angle BEC=90°$，$\therefore \angle BEF=180°-90°=90°$.

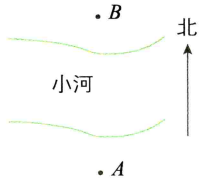
在 $\triangle BEF$ 和 $\triangle BEC$ 中，$\because \begin{cases}\angle 1=\angle 2,\\ BE=BE,\\ \angle BEF=\angle BEC=90°,\end{cases}$

$\therefore \triangle BEF\cong\triangle BEC$(ASA)，$\therefore BF=BC$，即 $BC=AB+AF$.

$\therefore BC=AB+CD$.

题型5　应用全等三角形的性质解决实际问题

例题5　如图所示的 A，B 是两根呈南北方向排列的电线杆，A，B 之间有一条小河，小刚想估测这两根电线杆之间的距离，于是小刚从 A 点开始向正西方向走了 20 步到达一棵大树 C 处，接着又向前走了 20 步到达 D 处，然后他左转 90°直行，当他看到电线杆 B、大树 C 和他自己现在所处的位置 E 恰好在同一条直线上时，他从 D 处走到 E 处恰好走了 100 步. 利用上述数据，小刚测出了 A，B 两根电线杆之间的距离.

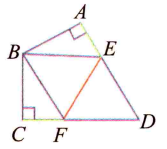


(1) 请你根据上述的测量方法在原图上画出示意图；

(2) 如果小刚一步大约走 60 cm，请你求出 A，B 两根电线杆之间的距离.

变式练　刷重点

变式练4　如图，在四边形 $ABCD$ 中，$\angle A=\angle C=90°$，$\angle D=60°$，$AB=BC$，E，F 分别在 AD，CD 上，且 $\angle EBF=60°$. 求证：$EF=AE+CF$.



答案见 P19

变式练5　某段河流的两岸是平行的，数学兴趣小组在老师的带领下不用涉水过河就测得河的宽度，他们是这样做的：

①在河流一侧的岸边 B 点，选对岸正对的一棵树 A；

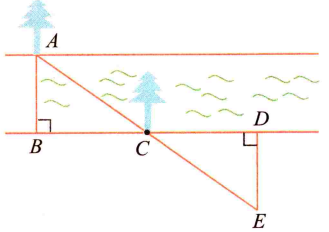
②沿河岸直走 20 米有一树 C，继续前行 20 米到达 D 处；

③从 D 处沿河岸垂直的方向行走，当到达 A 树正好被 C 树遮挡住的 E 处时停止行走；

④测得 DE 的长为 5 米.

(1) 河的宽度是多少米？

(2) 请你证明他们做法的正确性.

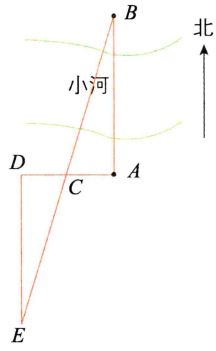


答案见 P19

【分析】(1)根据题意画出示意图即可;

(2)根据题意得出各线段的长度,再证$\triangle ABC\cong\triangle DEC$,得$AB=DE$,从而求出答案.

【解】(1)根据题意画出示意图,如图所示.



(2)由题意可知$\angle BAC=\angle EDC=90°$,60 cm = 0.6 m,

$AC=20\times0.6=12(\text{m})$,$DC=20\times0.6=12(\text{m})$,$DE=100\times0.6=60(\text{m})$.

∵点E,C,B在同一条直线上,∴$\angle DCE=\angle ACB$.

∵$\angle BAC=\angle EDC=90°$,$AC=DC$,∴$\triangle ABC\cong\triangle DEC$,∴$AB=DE$.

∵$DE=60$ m,∴$AB=60$ m.∴A,B两根电线杆之间的距离大约为60 m.

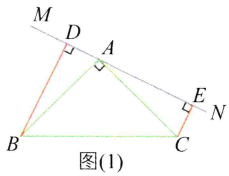
创新过关 提素养

题型6 全等三角形在探究性问题中的应用

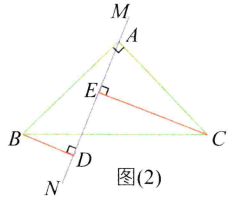
例题6 如图(1)所示,等腰直角三角形ABC中,$\angle BAC=90°$,$AB=AC$,直线MN经过点A,$BD\perp MN$于点D,$CE\perp MN$于点E.

(1)试判断线段DE,BD,CE之间的数量关系,并说明理由;

(2)当直线MN运动到如图(2)所示的位置时,其余条件不变,判断线段DE,BD,CE之间的数量关系.



图(1)



图(2)

【分析】(1)由已知推出$\angle ADB=\angle AEC=90°$,因为$\angle BAD+\angle ABD=90°$,$\angle BAD+\angle CAE=90°$,推出$\angle ABD=\angle CAE$,根据AAS可证明$\triangle BAD\cong\triangle ACE$,依据全等三角形的性质可得$AD=CE$,$BD=AE$,然后由$ED=AD+AE$等量代换可得到$DE,BD,CE$之间的数量关系;

(2)与(1)证法类似可证出$\angle BAD=\angle ECA$,能推出$\triangle ABD\cong\triangle CAE$,得到$AD=CE$,$BD=AE$,最后由$DE=AD-AE$等量代换可得到$DE,BD,CE$之间的数量关系.

【解】(1)$DE=BD+CE$.理由如下:

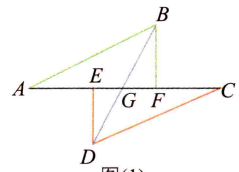
∵$BD\perp MN$,$CE\perp MN$,∴$\angle BDA=\angle AEC=90°$,∴$\angle BAD+\angle ABD=90°$.

又∵$\angle BAC=90°$,∴$\angle BAD+\angle CAE=90°$,∴$\angle ABD=\angle CAE$.

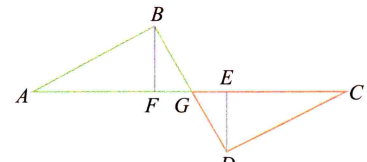
在$\triangle BAD$和$\triangle ACE$中,∵$\begin{cases}\angle BDA=\angle AEC=90°,\\ \angle ABD=\angle CAE,\\ AB=CA,\end{cases}$

变式练 刷重点

变式练6 如图(1),点A,E,F,C在同一条直线上,$AE=CF$,过点E,F分别作$DE\perp AC$,$BF\perp AC$.连接AB,CD,使$AB=CD$.



图(1)



图(2)

(1)求证:BD平分EF;

(2)若将$\triangle DEC$的边EC沿AC方向移动,$\triangle BFA$的边FA沿CA方向移动,变为如图(2)所示时,其余条件不变,上述结论是否仍然成立?若成立,请说明理由.

答案见P19

$\therefore \triangle BAD \cong \triangle ACE(\mathrm{AAS}), \therefore BD = AE, AD = CE.$

又$\because DE = AE + AD, \therefore DE = BD + CE.$

(2) $DE = CE - BD$. 理由如下：

同(1)可证得$\triangle ABD \cong \triangle CAE, \therefore BD = AE, AD = CE.$

$\because DE = AD - AE, \therefore DE = CE - BD.$

变式练答案

1. (1)【证明】$\because \angle ABC = 90°, EF \perp AC, \therefore \angle ABC = \angle AFE = 90°.$

在$\triangle AEF$与$\triangle ACB$中，$\because \begin{cases} \angle EAF = \angle CAB, \\ \angle AFE = \angle ABC = 90°, \\ AE = AC, \end{cases}$

$\therefore \triangle AEF \cong \triangle ACB(\mathrm{AAS}), \therefore AF = AB, \therefore BE = CF.$

(2)【解】由(1)可知$AB = AF$.

在$\mathrm{Rt}\triangle AGF$和$\mathrm{Rt}\triangle AGB$中，$\because \begin{cases} AG = AG, \\ AF = AB, \end{cases}$

$\therefore \mathrm{Rt}\triangle AGF \cong \mathrm{Rt}\triangle AGB(\mathrm{HL}).$

$\because$在$\mathrm{Rt}\triangle BEG$中，$\angle BGE = 90° - \angle E = 50°, \therefore \angle BGF = 130°.$

$\because \mathrm{Rt}\triangle AGF \cong \mathrm{Rt}\triangle AGB, \therefore \angle AGB = \angle AGF = \frac{1}{2}\angle BGF = 65°.$

2. (1)【证明】$\because \triangle ACB$和$\triangle ECD$都是等腰直角三角形，

$\therefore AC = BC, CE = CD, \angle ACE = \angle BCD = 90°.$

在$\triangle ACE$和$\triangle BCD$中，$\begin{cases} AC = BC, \\ \angle ACE = \angle BCD, \\ CE = CD, \end{cases}$

$\therefore \triangle ACE \cong \triangle BCD(\mathrm{SAS}), \therefore AE = BD.$

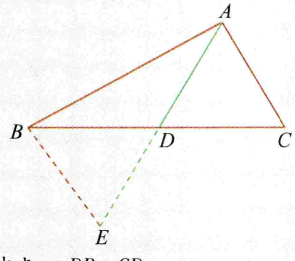
(2)【解】直线AE与BD互相垂直.

证明：$\because \triangle ACE \cong \triangle BCD, \therefore \angle EAC = \angle DBC.$

又$\because \angle DBC + \angle CDB = 90°, \therefore \angle EAC + \angle CDB = 90°.$

$\therefore \angle AFD = 90°. \therefore AF \perp BD$，即直线$AE$与$BD$互相垂直.

3. (1)【证明】如图，延长AD至点E，使$DE = AD$.



$\because D$为BC的中点，$\therefore DB = CD.$

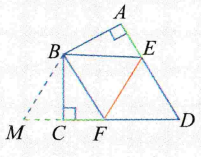
在$\triangle ADC$和$\triangle EDB$中，$\because \begin{cases} AD = ED, \\ \angle ADC = \angle EDB, \\ DC = DB, \end{cases}$

$\therefore \triangle ADC \cong \triangle EDB(\mathrm{SAS}), \therefore BE = AC.$

$\because$在$\triangle ABE$中，有$AB + BE > AE, \therefore AB + AC > 2AD.$

(2)【解】$\because AB = 5, AC = 3, \therefore 5 - 3 < 2AD < 5 + 3, \therefore 1 < AD < 4.$

4.【证明】如图，延长DC至点M，使$CM = AE$，连接BM.



在$\triangle CBM$和$\triangle ABE$中，$\because \begin{cases} CM = AE, \\ \angle BCM = \angle A = 90°, \\ BC = BA, \end{cases}$

$\therefore \triangle CBM \cong \triangle ABE(\mathrm{SAS}). \therefore BM = BE, \angle CBM = \angle ABE.$

$\because \angle D = 60°, \angle A = \angle C = 90°,$

$\therefore \angle ABC = 360° - 60° - 90° \times 2 = 120°.$

$\because \angle EBF = 60°,$

$\therefore \angle ABE + \angle CBF = \angle ABC - \angle EBF = 120° - 60° = 60°.$

$\therefore \angle MBF = \angle MBC + \angle CBF = \angle ABE + \angle CBF = 60°.$

$\therefore \angle EBF = \angle MBF.$

在$\triangle BMF$和$\triangle BEF$中，$\because \begin{cases} BM = BE, \\ \angle MBF = \angle EBF, \\ BF = BF, \end{cases}$

$\therefore \triangle BMF \cong \triangle BEF(\mathrm{SAS}), \therefore MF = EF.$

$\because MF = MC + CF, \therefore EF = AE + CF.$

5. (1)【解】由题意可知河的宽度是5米.

(2)【证明】由作法可知，$BC = DC, \angle ABC = \angle EDC = 90°.$

在$\mathrm{Rt}\triangle ABC$和$\mathrm{Rt}\triangle EDC$中，$\because \begin{cases} \angle ABC = \angle EDC = 90°, \\ BC = DC, \\ \angle ACB = \angle ECD, \end{cases}$

$\therefore \mathrm{Rt}\triangle ABC \cong \mathrm{Rt}\triangle EDC(\mathrm{ASA}), \therefore AB = ED.$

$\therefore$他们的做法是正确的.

6. (1)【证明】$\because AE = CF, \therefore AE + EF = CF + EF, \therefore AF = CE.$

$\because DE \perp AC, BF \perp AC, \therefore \triangle ABF, \triangle CDE$均为直角三角形.

在$\mathrm{Rt}\triangle ABF$和$\mathrm{Rt}\triangle CDE$中，$\because \begin{cases} AB = CD, \\ AF = CE, \end{cases}$

$\therefore \mathrm{Rt}\triangle ABF \cong \mathrm{Rt}\triangle CDE(\mathrm{HL}), \therefore BF = DE.$

在$\triangle DEG$和$\triangle BFG$中，$\because \begin{cases} \angle EGD = \angle FGB, \\ \angle DEG = \angle BFG = 90°, \\ DE = BF, \end{cases}$

$\therefore \triangle DEG \cong \triangle BFG(\mathrm{AAS}),$

$\therefore EG = FG$，即BD平分EF.

(2)【解】成立. 理由如下：

$\because AE = CF, AE - EF = CF - EF, \therefore AF = CE.$

$\because DE \perp AC, BF \perp AC, \therefore \triangle ABF, \triangle CDE$均为直角三角形.

在$\mathrm{Rt}\triangle ABF$和$\mathrm{Rt}\triangle CDE$中，$\because \begin{cases} AB = CD, \\ AF = CE, \end{cases}$

$\therefore \mathrm{Rt}\triangle ABF \cong \mathrm{Rt}\triangle CDE(\mathrm{HL}), \therefore BF = DE.$

在$\triangle DEG$和$\triangle BFG$中，$\because \begin{cases} \angle EGD = \angle FGB, \\ \angle DEG = \angle BFG = 90°, \\ DE = BF, \end{cases}$

$\therefore \triangle DEG \cong \triangle BFG(\mathrm{AAS}),$

$\therefore EG = FG$，即BD平分EF.

12.3 角的平分线的性质

知识过关 全理解

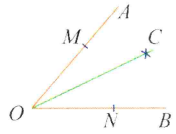
知识点1 作已知角的平分线

已知$\angle AOB$,求作$\angle AOB$的平分线.

作法:(1)以点O为圆心,适当长为半径画弧,交OA于点M,交OB于点N;

(2)分别以点M,N为圆心,大于[1]_____的长为半径画弧,两弧在$\angle AOB$的[2]_____相交于点C;▶注意1

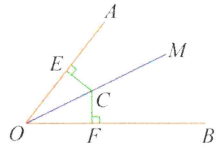
(3)画射线OC,射线OC即为$\angle AOB$的[3]_____.



知识点2 角的平分线的性质▶注意2

角的平分线上的点到角的两边的[4]_____相等.▶说明

如下图所示,$\because OM$是$\angle AOB$的平分线,C是OM上一点,$CE \perp OA$于点E,$CF \perp OB$于点F,$\therefore CE = CF$.



知识点3 证明几何命题的一般步骤▶注意3

(1)明确命题中的已知和求证;

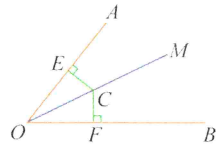
(2)根据题意,[5]_____,并用符号表示[6]_____;

(3)经过分析,找出由已知推出要证的结论的途径,写出[7]_____.

知识点4 角的平分线的判定▶注意4

角的内部到角的两边的距离[8]_____的点在角的平分线上.

如下图所示,$\because CE \perp OA$于点E,$CF \perp OB$于点F,且$CE = CF$,$\therefore OM$是$\angle AOB$的平分线.



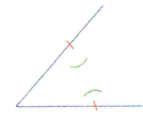
答案

[1] $\frac{1}{2}MN$ [2]内部 [3]平分线 [4]距离 [5]画出图形 [6]已知和求证 [7]证明过程 [8]相等

敲黑板 划重点

注意1 画弧的限制条件

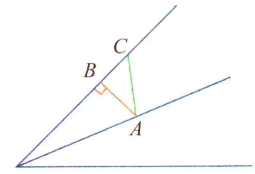
以大于$\frac{1}{2}MN$的长为半径画弧,大于$\frac{1}{2}MN$的条件不可少,若以小于$\frac{1}{2}MN$的长为半径画弧,则两弧没有交点,确定不出点C的位置.



注意2 (1)角平分线上的点到角两边的距离为AB,不是AC;

(2)"距离"是指垂线段的长度;

(3)应用此性质的前提条件是:图中有角平分线与垂直的条件.



说明 利用角平分线的性质可直接推导与角的平分线有关的两条线段相等.

注意3 证明命题步骤的不定性

证明一个命题的步骤不是固定不变的,要根据题目的情况而定,但是总体必须是完整的,并且证明的过程必须"步步有据".

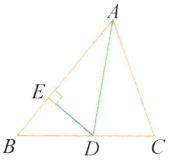
注意4 角的平分线的性质及判定在应用时不要混淆,性质是证两条线段相等的依据,判定是证两角相等的依据.

题型过关 全提升

题型1 角平分线性质的应用

角平分线上有一点到一条边有垂线段时，通常可作这一点到另一边的垂线段，得到两条垂线段的长度相等.

例题1 已知$\triangle ABC$中，$\angle B=50°$，$\angle C=70°$，AD是$\triangle ABC$的角平分线，$DE\perp AB$于点E.



(1)求$\angle EDA$的度数；

(2)若$AB=10$，$AC=8$，$DE=3$，求$S_{\triangle ABC}$.

【分析】(1)直接利用三角形内角和定理得出$\angle BAC$的度数，再利用角平分线的性质即可得出答案；

(2)过点D作$DF\perp AC$于点F，根据角平分线的性质，即可得到$DF=DE=3$，再根据$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}AB\cdot DE+\frac{1}{2}AC\cdot DF$进行计算即可.

【解】(1)$\because\angle B=50°$，$\angle C=70°$，

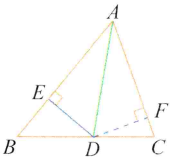
$\therefore\angle BAC=180°-\angle B-\angle C=180°-50°-70°=60°$.

$\because AD$是$\triangle ABC$的角平分线，$\therefore\angle BAD=\frac{1}{2}\angle BAC=\frac{1}{2}\times60°=30°$.

$\because DE\perp AB$，$\therefore\angle DEA=90°$，

$\therefore\angle EDA=180°-\angle BAD-\angle DEA=180°-30°-90°=60°$.

(2)如图，过点D作$DF\perp AC$于点F.



$\because AD$是$\triangle ABC$的角平分线，$DE\perp AB$，$\therefore DF=DE=3$.

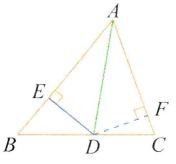
又$\because AB=10$，$AC=8$，

$\therefore S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}AB\cdot DE+\frac{1}{2}AC\cdot DF=\frac{1}{2}\times10\times3+\frac{1}{2}\times8\times3=27$.

题型2 角平分线判定的应用

证明一条射线(或线段)是角平分线，有两种方法：①利用三角形全等证两角相等；②利用到角两边距离相等的点在角的平分线上.

例题2 如图，在$\triangle ABC$中，D是BC的中点，$DE\perp AB$，$DF\perp AC$，垂足分别是E，F，$BE=CF$. 求证：AD是$\triangle ABC$的角平分线.



【分析】首先可证明$\mathrm{Rt}\triangle BDE\cong\mathrm{Rt}\triangle CDF(\mathrm{HL})$，再根据三角形角平分线的判定定理证明$AD$是角平分线即可.

【证明】$\because DE\perp AB$，$DF\perp AC$，$\therefore\triangle BDE$和$\triangle CDF$是直角三角形.

在$\mathrm{Rt}\triangle BDE$和$\mathrm{Rt}\triangle CDF$中，$\begin{cases}BD=CD,\\BE=CF,\end{cases}$

$\therefore\mathrm{Rt}\triangle BDE\cong\mathrm{Rt}\triangle CDF(\mathrm{HL})$，$\therefore DE=DF$.

又$\because DE\perp AB$，$DF\perp AC$，$\therefore AD$是$\triangle ABC$的角平分线.

题型3 角平分线的性质与判定的综合运用

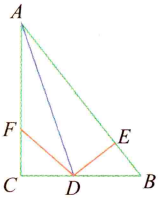
例题3 (1)如图(1)，在$\mathrm{Rt}\triangle ABC$中，$\angle C=90°$，$\angle B=45°$，AD平分$\angle BAC$，交BC于点D. 如果作辅助线$DE\perp AB$于点E，则可以得到AC，CD，AB三条线段之间的数量关系为_____；

变式练 刷重点

变式练1 如图，在$\triangle ABC$中，AD平分$\angle BAC$，$\angle C=90°$，$DE\perp AB$于点E，点F在AC上，$BD=DF$.

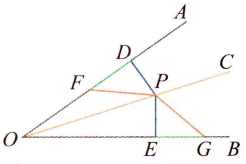
(1)求证：$CF=EB$；

(2)若$AB=12$，$AF=8$，求CF的长.



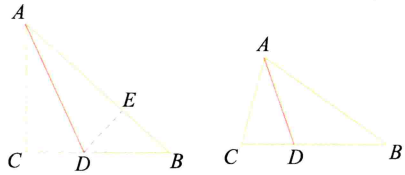
答案见P22

变式练2 已知：如图，P是OC上一点，$PD\perp OA$于D，$PE\perp OB$于E，F，G分别是OA，OB上的点，且$PF=PG$，$DF=EG$. 求证：OC是$\angle AOB$的平分线.



答案见P22

(2)如图(2),在△ABC中,$\angle C=2\angle B$,AD平分$\angle BAC$交BC于点D.(1)中的结论是否仍然成立?若不成立,请说明理由;若成立,请证明.



图(1)　　图(2)

【分析】(1)可证△CAD≌△EAD(AAS),进而利用全等三角形的性质以及等腰直角三角形的性质得出结果;

(2)首先在AB上截取$AE=AC$,进而得出△ACD≌△AED(SAS),则$CD=ED$,$\angle C=\angle AED$,进而得出AC,CD,AB三条线段之间的数量关系.

【解】(1)$AB=AC+CD$.

如题图(1),∵AD平分$\angle BAC$,∴$\angle CAD=\angle EAD$.

在△CAD和△EAD中,∵$\begin{cases}\angle C=\angle AED,\\ \angle CAD=\angle EAD,\\ AD=AD,\end{cases}$

∴△CAD≌△EAD(AAS),∴$CD=DE$,$AC=AE$.

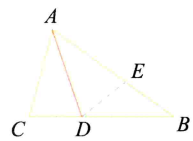
∵$\angle B=45°$,$\angle DEB=90°$,∴$DE=EB$,∴$DC=BE$,

∴$AB=AE+BE=AC+CD$.

(2)成立.证明:

如图,在AB上截取$AE=AC$,连接DE.

∵在△ACD和△AED中,$\begin{cases}AC=AE,\\ \angle CAD=\angle EAD,\\ AD=AD,\end{cases}$



∴△ACD≌△AED(SAS),∴$CD=ED$,$\angle C=\angle AED$.

∵$\angle C=2\angle B$,∴$\angle AED=2\angle B$.

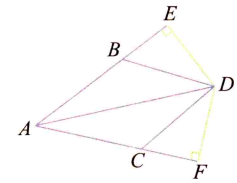
∵$\angle AED=\angle B+\angle EDB$,∴$2\angle B=\angle B+\angle EDB$,

∴$\angle B=\angle EDB$,∴$ED=EB$.

∵$AB=AE+EB$,$ED=EB=CD$,$AE=AC$,∴$AB=AC+CD$.

变式练　刷重点

变式练3　如图,$AB=AC$,$BD=CD$,$DE\perp AB$,点E为垂足,$DF\perp AC$,点F为垂足,求证:$DE=DF$.



答案见本页

变式练答案

1. (1)【证明】∵AD平分$\angle BAC$,$\angle C=90°$,$DE\perp AB$,

∴$DE=DC$.

在Rt△CDF与Rt△EDB中,∵$\begin{cases}DF=DB,\\ DC=DE,\end{cases}$

∴Rt△CDF≌Rt△EDB(HL),∴$CF=EB$.

(2)【解】设$CF=BE=x$,则$AE=12-x$.

在Rt△ACD与Rt△AED中,∵$\begin{cases}AD=AD,\\ CD=ED,\end{cases}$

∴Rt△ACD≌Rt△AED(HL),∴$AC=AE$,∴$8+x=12-x$,

解得$x=2$,即$CF=2$.

2. 【证明】在Rt△PFD和Rt△PGE中,∵$\begin{cases}PF=PG,\\ DF=EG,\end{cases}$

∴Rt△PFD≌Rt△PGE(HL),∴$PD=PE$.

∵P是OC上一点,$PD\perp OA$,$PE\perp OB$,

∴OC是$\angle AOB$的平分线.

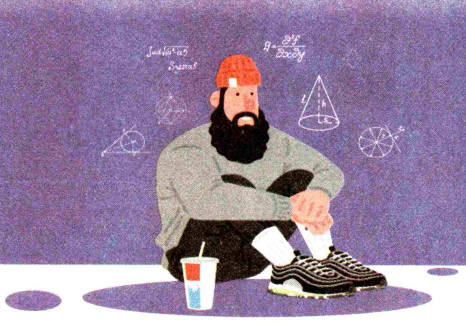
3. 【证明】在△ABD和△ACD中,∵$\begin{cases}AD=AD,\\ BD=CD,\\ AB=AC,\end{cases}$

∴△ABD≌△ACD(SSS),∴$\angle BAD=\angle CAD$.

∴AD是$\angle BAC$的平分线.

又∵$DE\perp AB$,$DF\perp AC$,∴$DE=DF$.

第十三章 轴对称

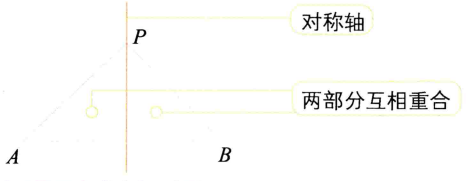


13.1 轴对称

知识过关 全理解

知识点1 轴对称图形与对称轴 ▶方法

如果一个平面图形沿一条直线折叠，直线两旁的部分能够[1]_____，这个图形就叫做[2]_____，这条直线就是它的[3]_____. 这时，我们也说这个图形关于这条直线(成轴)对称. ▶注意1



知识点2 两个图形成轴对称 ▶注意2

1. 把一个图形沿着某一条直线折叠，如果它能够与另一个图形重合，那么就说这两个图形关于这条直线(成轴)对称，这条直线叫做[4]_____，折叠后重合的点是对应点，叫做[5]_____.

2. 两个图形成轴对称和轴对称图形的区别与联系

关系 \ 名称		两个图形成轴对称	轴对称图形
区别	意义不同	两个图形之间的对称关系	具有特殊形状的图形
	对象不同	两个图形	一个图形
	对称轴的位置不同	在两个图形之间	过图形的某条直线
	对称轴的数量不同	只有一条	至少有一条
联系		①如果把成轴对称的两个图形看成一个整体，那么它就是一个轴对称图形； ②如果把一个轴对称图形沿对称轴分成两个图形，那么这两个图形关于这条轴成轴对称	

知识点3 线段的垂直平分线的定义及性质 ▶拓展1

1. 经过线段中点并且垂直于这条线段的直线，叫做这条线段的[6]_____，也叫这条线段的中垂线. ▶拓展2

2. 线段垂直平分线上的点与这条线段两个端点的距离[7]_____.

3. 与一条线段两个端点距离相等的点，在这条线段的[8]_____上.

敲黑板 划重点

方法 轴对称图形的判断

可以先试着画对称轴，通过观察对称轴两旁的部分是否互相重合来判定，找对称轴时要多角度观察图形和对折图形.

注意1 对称轴是一条直线，不是线段、射线，它可以是一条，也可以是多条，甚至是无数条.

注意2 理解成轴对称的定义应抓住以下三点

(1)两个图形；

(2)一条直线；

(3)一个图形沿着这条直线折叠后和另一个图形完全重合.

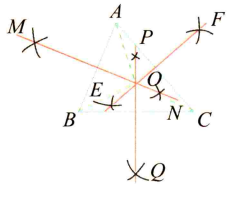
拓展1 线段垂直平分线性质的应用

(1)利用线段垂直平分线的性质可以证明两线段相等，只需直线满足垂直、平分即可，不用再证三角形全等.

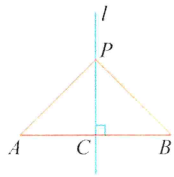
(2)利用线段垂直平分线的性质可以证明垂直关系.

拓展2 三角形三条边的垂直平分线的性质

三角形三条边的垂直平分线相交于一点，这一点到三角形的三个顶点的距离相等.



如图所示，若 $PA = PB$，则点 P 在线段 AB 的垂直平分线上.



知识点 4　两个图形成轴对称和轴对称图形的性质 ▸说明

1. 两个图形成轴对称(或一个图形是轴对称图形)，则对应线段(对折后重合的线段)9_____，对应角(对折后重合的角)10_____.

2. 如果两个图形成轴对称，那么对称轴就是任何一对对应点所连线段的11_____. ▸注意 3

3. 轴对称图形的对称轴是任何一对对应点所连线段的12_____.

知识点 5　画轴对称图形或成轴对称的两个图形的对称轴 ▸注意 4

轴对称图形或成轴对称的两个图形的对称轴的画法，步骤如下：

(1)找出轴对称图形或成轴对称的两个图形的任意一对对应点；

(2)连接这对对应点；

(3)画出对应点所连线段的垂直平分线.

这条垂直平分线就是该轴对称图形或成轴对称的两个图形的对称轴. ▸拓展 3

答案

1互相重合　2轴对称图形　3对称轴　4对称轴　5对称点　6垂直平分线

7相等　8垂直平分线　9相等　10相等　11垂直平分线　12垂直平分线

敲黑板　划重点

说明　(1)轴对称图形的对应线段相等，对应角相等.

(2)成轴对称的两个图形全等；轴对称图形被对称轴分成的两部分全等，但全等的两个图形不一定是轴对称图形.

注意 3　(1)性质中“任何”的定义：成轴对称的两个图形，其对应点有无数对，无论哪一对对应点所连线段的垂直平分线都是对称轴；

(2)轴对称的性质可以作为判断轴对称的依据.

注意 4　**作全轴对称图形对称轴的方法**

对于轴对称图形，由于对称轴可能不是唯一的，因此要多角度观察，选取不同类型的对应点，才能作全对称轴.

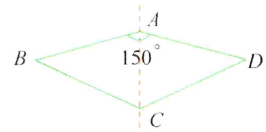
拓展 3　**找对称轴的方法**

仔细观察图形沿一条直线折叠后，直线两旁的部分是否能够互相重合，同时对称轴有可能不止一条，要从各个方向观察.

题型过关　全提升

题型 1　利用轴对称的性质求角的度数

例题 1　如图所示，一种滑翔伞的形状是左、右成轴对称的四边形 $ABCD$，其中 $\angle BAD = 150°$，$\angle B = 40°$，则 $\angle ACD$ 的度数是_____.



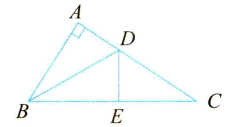
【分析】根据轴对称的性质可得 $\angle BAC = \angle DAC$，然后求出 $\angle BAC$ 的度数，再利用三角形的内角和定理求出 $\angle ACB$ 的度数，再次利用轴对称的性质可得 $\angle ACD = \angle ACB$.

【解析】由题意知 $\angle BAC = \angle DAC$，$\angle ACB = \angle ACD$. $\because \angle BAD = 150°$，$\therefore \angle BAC = \frac{1}{2} \times 150° = 75°$. 在 $\triangle ABC$ 中，$\because \angle B = 40°$，$\therefore \angle ACB = 180° - 40° - 75° = 65°$，$\therefore \angle ACD = \angle ACB = 65°$.

【答案】65°

变式练　刷重点

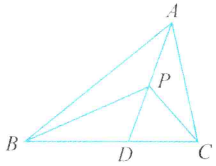
变式练 1　如图，$\angle A = 90°$，E 为 BC 上一点，点 A 和点 E 关于 BD 对称，点 B，C 关于 DE 对称，求 $\angle ABC$ 和 $\angle C$ 的度数.



答案见 P26

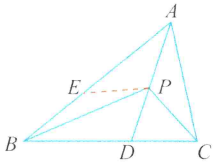
题型2　利用轴对称证明线段之间的关系

例题2　如图所示，$\angle BAD=\angle CAD$，且 $AB>AC$，点 P 是 AD 上一点. 求证：$PB-PC<AB-AC$.



【证明】∵ $\angle BAD=\angle CAD$，且 $AB>AC$，

∴ 以 AP 为对称轴构造 $\triangle AEP$，使 $\triangle AEP$ 与 $\triangle ACP$ 关于 AP 对称，如图.



∴ $AE=AC$，$PE=PC$.

∴ $AB-AC=AB-AE=BE$.

在 $\triangle PBE$ 中，$BE+PE>PB$，∴ $PB-PE<BE$，即 $PB-PC<AB-AC$.

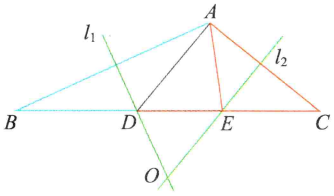
题型3　利用线段垂直平分线的性质求线段的长

此类题目一般是借助线段垂直平分线的性质，将一条线段用另一条线段来替换.

例题3　如图，在 $\triangle ABC$ 中，边 AB 的垂直平分线 l_1 交 BC 于点 D，边 AC 的垂直平分线 l_2 交 BC 于点 E，l_1 与 l_2 相交于点 O. $\triangle ADE$ 的周长为 6 cm.

(1) 求 BC 的长；

(2) 分别连接 OA，OB，OC，若 $\triangle OBC$ 的周长为 16 cm，求 OA 的长.



【分析】(1) 先根据线段垂直平分线的性质得出 $AD=BD$，$AE=CE$，再根据 $AD+DE+AE=BD+DE+CE$ 即可得出结论；

(2) 先根据线段垂直平分线的性质得出 $OA=OC=OB$，再由 $\triangle OBC$ 的周长为 16 cm 求出 OC 的长，进而得出结论.

【解】(1) 如图，∵ DG，EF 分别是线段 AB，AC 的垂直平分线，

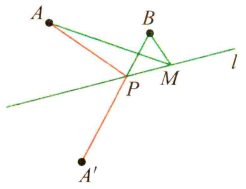
∴ $AD=BD$，$AE=CE$，

∴ $AD+DE+AE=BD+DE+CE=BC$.

∵ $\triangle ADE$ 的周长为 6 cm，即 $AD+DE+AE=6$ cm，∴ $BC=6$ cm.

变式练　刷重点

变式练2　如图，已知 A，B 两点在直线 l 的同侧，点 A' 与 A 关于直线 l 对称，连接 $A'B$ 交 l 于点 P. 若 $A'B=a$.



(1) 求 $AP+PB$.

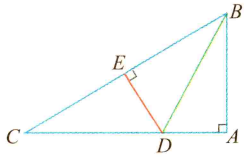
(2) 若点 M 是直线 l 上异于点 P 的任意一点，求证：$AM+MB>AP+PB$.

答案见 P26

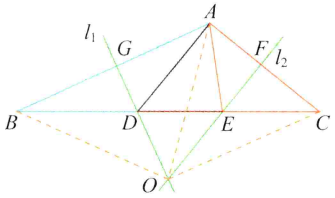
变式练3　如图，在 $\triangle ABC$ 中，$\angle A=90°$，边 BC 的垂直平分线 DE 交 BC 于点 E，交 AC 于点 D，连接 BD.

(1) 若 $\angle C=35°$，求 $\angle DBA$ 的度数；

(2) 若 $\triangle ABD$ 的周长为 30，$AC=18$，求 AB 的长.



答案见 P26



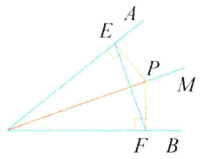
(2)∵ DG,EF 分别是线段 AB,AC 的垂直平分线,∴ $OA=OC=OB$.

∵ $\triangle OBC$ 的周长为 16 cm,即 $OC+OB+BC=16$ cm,

∴ $OC+OB=16-6=10$(cm),∴ $OC=OB=5$ cm,∴ $OA=5$ cm.

题型 4　线段垂直平分线的判定与全等三角形的综合应用

例题 4　如图所示,P 是 $\angle AOB$ 的平分线 OM 上任意一点,$PE\perp OA$ 于点 E,$PF\perp OB$ 于点 F,连接 EF. 求证:OP 垂直平分 EF.



【分析】本题考查线段垂直平分线的判定方法,只要证明 $PE=PF$,$OE=OF$ 即可,故可以考虑证明三角形全等.

【解】∵ OM 平分 $\angle AOB$,$PE\perp OA$,$PF\perp OB$,∴ $PE=PF$.

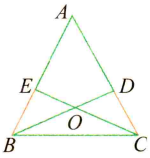
在 Rt$\triangle OEP$ 与 Rt$\triangle OFP$ 中,∵ $OP=OP$,$PE=PF$,

∴ Rt$\triangle OEP\cong$Rt$\triangle OFP$(HL),∴ $OE=OF$.

∴ 点 O,P 均在线段 EF 的垂直平分线上.

∴ OP 垂直平分 EF.

变式练 4　如图所示,在 $\triangle ABC$ 中,$\angle ABC=\angle ACB$,$BE=CD$,BD 与 CE 相交于点 O. 求证:点 O 在线段 BC 的垂直平分线上.



答案见本页

变式练答案

1. 【解】∵ 点 A 和点 E 关于 BD 对称,

∴ $\angle ABD=\angle EBD$,即 $\angle ABC=2\angle ABD=2\angle EBD$.

又∵ 点 B,C 关于 DE 对称,

∴ $\angle DBE=\angle C$,$\angle ABC=2\angle C$.

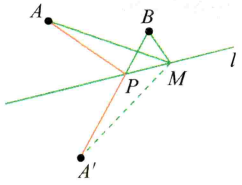
∵ $\angle A=90°$,∴ $\angle ABC+\angle C=2\angle C+\angle C=3\angle C=90°$,

∴ $\angle C=30°$,∴ $\angle ABC=2\angle C=60°$.

2. (1)【解】∵ 点 A' 与 A 关于直线 l 对称,∴ $PA=PA'$.

∴ $PA+PB=PA'+PB=A'B=a$.

(2)【证明】连接 MA'. ∵ 点 A' 与 A 关于直线 l 对称,∴ $MA=MA'$. ∴ $AM+BM=MA'+MB$. 由(1)可知 $AP+PB=A'B$,由两点之间线段最短,可知 $MA'+MB>A'B$,即 $AM+MB>AP+PB$.



3. 【解】(1)∵ DE 是 BC 的垂直平分线,

∴ $CD=BD$,则 $\angle CBD=\angle C=35°$,

∴ $\angle ADB=\angle C+\angle CBD=70°$.

∵ $\angle A=90°$,∴ $\angle DBA=90°-\angle ADB=20°$.

(2)∵ $\triangle ABD$ 的周长为 30,$CD=BD$,

∴ $AB+AD+BD=AB+AD+CD=AB+AC=30$.

∵ $AC=18$,∴ $AB=30-18=12$.

4. 【证明】在 $\triangle BCE$ 和 $\triangle CBD$ 中,∵ $\begin{cases}BE=CD,\\ \angle ABC=\angle ACB,\\ BC=CB,\end{cases}$

∴ $\triangle BCE\cong\triangle CBD$(SAS),∴ $\angle BCE=\angle CBD$.

∵ $\angle ABC=\angle ACB$,∴ $\angle ABC-\angle CBD=\angle ACB-\angle BCE$.

∴ $\angle EBO=\angle DCO$.

在 $\triangle BOE$ 和 $\triangle COD$ 中,$\begin{cases}\angle BOE=\angle COD,\\ \angle EBO=\angle DCO,\\ BE=CD,\end{cases}$

∴ $\triangle BOE\cong\triangle COD$(AAS),∴ $OB=OC$.

∴ 点 O 在线段 BC 的垂直平分线上.

13.2 画轴对称图形

知识过关 全理解

知识点1 轴对称变换 ▶拓展

1. 由一个平面图形得到它的轴对称图形叫做[1]_____，轴对称变换的实质就是图形的翻折，由翻折得到的图形是[2]_____. ▶注意1

2. 一个图形与其关于直线 l 对称后的图形之间的关系 ▶注意2

(1)由一个平面图形可以得到与它关于一条直线 l 对称的图形，这个图形与原图形的形状、大小完全相同；

(2)新图形上的每一点都是原图形上的某一点关于直线 l 的对称点；

(3)连接任意一对对应点的线段被对称轴垂直平分.

知识点2 作轴对称图形

1. 几何图形都可以看作是由点组成的. 对于某些图形，只要画出图形中的一些特殊点(如线段端点)的[3]_____，连接这些[4]_____，就可以得到原图形的轴对称图形.

2. 作轴对称图形的方法 ▶图示

(1)找——在原图形上找特殊点(如线段端点)；

(2)画——画各个特殊点关于对称轴的对称点； ▶注意3

(3)连——依次连接各对称点.

知识点3 关于坐标轴对称的点的坐标的特点 ▶注意4

1. 点 (x,y) 关于 x 轴对称的点的坐标是[5]_____；点 (x,y) 关于 y 轴对称的点的坐标是[6]_____. ▶巧记

2. 在直角坐标系中作已知图形关于某条直线成轴对称图形的方法

(1)写出坐标——写出对称点的坐标；

(2)描点——根据对称点的坐标描点；

(3)连接——按原图形对应连接所描各点得到所求的图形.

答案

[1]轴对称变换 [2]全等形 [3]对称点 [4]对称点 [5]$(x,-y)$ [6]$(-x,y)$

敲黑板 划重点

拓展 轴对称变换是图形变换中的一种，是进行图案设计的方法之一.

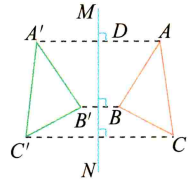
注意1 轴对称图形的特点

翻折前后的两个图形全等，即变换前后的对应线段相等，对应角相等.

注意2 轴对称变换和平移一样，是图形变换中的一种，它可以看成是由一个图形沿某条直线翻折180°得到的图形.

图示 作轴对称图形

作与△ABC 关于直线 MN 对称的图形. 首先画出点 A,B,C 关于直线 MN 的对称点 A',B',C'，即使直线 MN 为线段 AA',BB',CC' 的垂直平分线，然后连接 $A'B',B'C',A'C'$，得到的△$A'B'C'$ 即为所求.



注意3 对称点的作法有两种情况：(1)点在对称轴上——它本身；(2)点不在对称轴上——按照对称点的作法作出来.

注意4 关于坐标轴对称的点的坐标，符号不同，绝对值相同.

巧记 关于谁对称谁不变

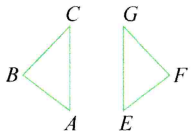
若关于 x 轴对称，则横坐标 x 的值不变，简记为“横同纵反”；若关于 y 轴对称，则纵坐标 y 的值不变，简记为“纵同横反”.

题型过关 全提升

题型1 作已知图形的对称轴

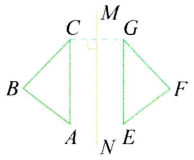
解此类题的一般方法：首先找到一组对应点，再连接对应点，最后作对应点所连线段的垂直平分线，垂直平分线即为图形的对称轴.

例题1 如图所示，$\triangle EFG$ 与 $\triangle ABC$ 关于某直线成轴对称，请画出对称轴.



【分析】确定对称轴的关键是正确应用“对称轴是对应点所连线段的垂直平分线”以及“对应边(或延长线)的交点在对称轴上”这两个重要结论.

【解】如图所示，连接对称点 C,G，再作线段 CG 的垂直平分线 MN，则直线 MN 就是所求的对称轴.



题型2 点的坐标对称规律的应用

掌握好各象限内点的坐标的符号，理解关于坐标轴对称的点的坐标的特点是解决此类问题的关键.

例题2 已知点 $A(2a-b,5+a)$，$B(2b-1,-a+b)$.

(1)若点 A,B 关于 x 轴对称，求 a,b 的值；

(2)若点 A,B 关于 y 轴对称，求 $(4a+b)^{2014}$ 的值.

【分析】(1)直接利用关于 x 轴对称的点的特点得出 a,b 的值；

(2)直接利用关于 y 轴对称的点的特点得出 a,b 的值，进而求出答案.

【解】(1)∵ 点 A,B 关于 x 轴对称，

$$\therefore \begin{cases} 2a-b=2b-1, \\ 5+a=-(-a+b), \end{cases} \text{解得} \begin{cases} a=-8, \\ b=-5. \end{cases}$$

(2)∵ 点 A,B 关于 y 轴对称，

$$\therefore \begin{cases} 2a-b=-(2b-1), \\ 5+a=-a+b, \end{cases}$$

$$\text{解得} \begin{cases} a=-1, \\ b=3. \end{cases}$$

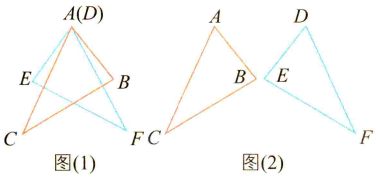
$$\therefore (4a+b)^{2014}=[4\times(-1)+3]^{2014}=1.$$

题型3 平面直角坐标系中的轴对称

在网格或平面直角坐标系中作轴对称图形，熟练掌握网格结构，准确找出对应点的位置是解题的关键.

变式练 刷重点

变式练1 如图所示，$\triangle ABC$ 与 $\triangle DEF$ 关于直线 l 对称，请仅用无刻度的直尺，在下面两个图中分别作出直线 l.



答案见 P29

变式练2 已知点 $A(a+2b,1)$，$B(-2,2a-b)$.

(1)若点 A,B 关于 x 轴对称，则 $a=$_____，$b=$_____；

(2)若点 A,B 关于 y 轴对称，则 $a+b=$_____.

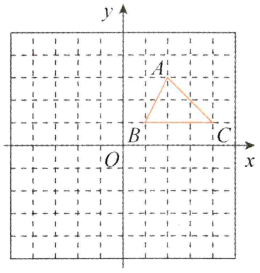
答案见 P29

例题 3 如图，已知 $A(2,3)$，$B(1,1)$，$C(4,1)$ 是平面直角坐标系中的三点.

(1) 请画出与 $\triangle ABC$ 关于 y 轴对称的 $\triangle A_1B_1C_1$；

(2) 画出将 $\triangle A_1B_1C_1$ 向下平移 3 个单位得到的 $\triangle A_2B_2C_2$；

(3) 若 $\triangle ABC$ 中有一点 P 的坐标为 (x,y)，请直接写出经过以上变换后点 P 的对应点 P_2 的坐标.

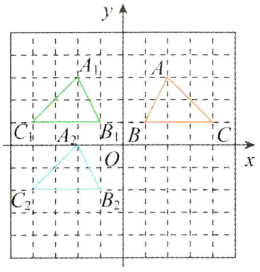


【分析】 本题主要考查图形的平移变换及轴对称变换，关于 y 轴对称的图形，对应点的横坐标互为相反数，纵坐标相等. 图形向下平移 3 个单位，图形上每个点的横坐标都不变，纵坐标减少 3.

【解】 (1) 如图所示，$\triangle A_1B_1C_1$ 即为所作.

(2) 如图所示，$\triangle A_2B_2C_2$ 即为所作.

(3) 根据题意，可得点 P 的对应点 P_2 的坐标为 $(-x,y-3)$.



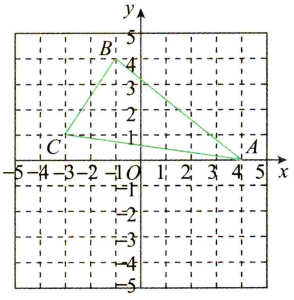
变式练 刷重点

变式练 3 如图，在平面直角坐标系中，$\triangle ABC$ 各顶点的坐标分别为 $A(4,0)$，$B(-1,4)$，$C(-3,1)$.

(1) 在图中作 $\triangle A'B'C'$，使 $\triangle A'B'C'$ 和 $\triangle ABC$ 关于 x 轴对称；

(2) 写出点 A'，B'，C' 的坐标；

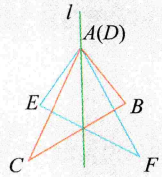
(3) 求 $\triangle ABC$ 的面积.



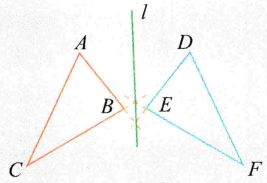
答案见本页

变式练答案

1. 【解】如图所示.



图(1)



图(2)

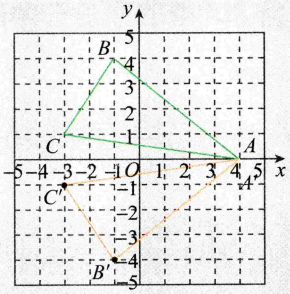
2. (1) $-\frac{4}{5}$　$-\frac{3}{5}$　(2) $\frac{7}{5}$　**【解析】** (1) 由两点关于 x 轴对称，横坐标相等，纵坐标互为相反数，得 $\begin{cases} a+2b=-2, \\ 2a-b=-1, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} a=-\frac{4}{5}, \\ b=-\frac{3}{5}. \end{cases}$

(2) 由两点关于 y 轴对称，纵坐标相等，横坐标互为相反数，得 $\begin{cases} a+2b=2, \\ 2a-b=1, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} a=\frac{4}{5}, \\ b=\frac{3}{5}. \end{cases}$ 所以 $a+b=\frac{7}{5}$.

3. 【解】(1) 如图所示，$\triangle A'B'C'$ 即为所作.

(2) 点 A' 的坐标为 $(4,0)$，点 B' 的坐标为 $(-1,-4)$，点 C' 的坐标为 $(-3,-1)$.

(3) $\triangle ABC$ 的面积为 $7\times4-\frac{1}{2}\times2\times3-\frac{1}{2}\times4\times5-\frac{1}{2}\times1\times7=11.5$.



13.3 等腰三角形

知识过关 全理解

知识点1 等腰三角形的性质 ▸拓展

1. 性质1：等腰三角形的两个底角[1]_____（简写成“等边对等角”）.

2. 性质2：等腰三角形的顶角[2]_____、底边上的[3]_____、底边上的[4]_____相互重合（简写成“三线合一”）. ▸注意1

如右图所示，在$\triangle ABC$中，$\because AB=AC$，AD平分$\angle BAC$，$\therefore AD\perp BC$，$BD=CD$. ▸图示1

知识点2 等腰三角形的判定

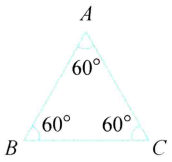
如果一个三角形有两个角相等，那么这两个角所对的边也[5]_____（简写成“等角对等边”）.

知识点3 等边三角形及其性质

1. 等边三角形是[6]_____的特殊的等腰三角形.

2. 等边三角形的三个内角都[7]_____，并且每一个内角都等于[8]_____.

如右图所示，在$\triangle ABC$中，如果$AB=AC=BC$，那么$\angle A=\angle B=\angle C=60°$.



知识点4 等边三角形的判定 ▸方法

1. 由等边三角形的定义判定：三边都[9]_____的三角形是等边三角形.

2. 三个角都[10]_____的三角形是等边三角形.

3. 有一个角是[11]_____的等腰三角形是等边三角形.

在$\triangle ABC$中，$\because AB=AC$，$\angle A=60°$（或$\angle B=60°$，或$\angle C=60°$），$\therefore \triangle ABC$是等边三角形.

知识点5 含30°角的直角三角形的性质 ▸注意2

在直角三角形中，如果一个锐角等于30°，那么它所对的直角边等于斜边的[12]_____.

在$\mathrm{Rt}\triangle ABC$中，$\because \angle C=90°$，$\angle B=30°$，$\therefore AC=\frac{1}{2}AB$. ▸图示2

答案

[1]相等 [2]平分线 [3]中线 [4]高 [5]相等 [6]三边都相等 [7]相等 [8]60° [9]相等 [10]相等 [11]60° [12]一半

敲黑板 划重点

拓展 (1)等腰三角形两腰上的中线、高线分别相等；

(2)等腰三角形两底角的平分线相等；

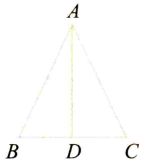
(3)等腰三角形底边的中点到两腰的距离相等；

(4)等腰三角形底边上任意一点到两腰的距离之和等于一腰上的高.

注意1 (1)应用“等边对等角”“三线合一”的前提是在同一个等腰三角形中，不能乱用；

(2)“三线合一”中“三线”指的是顶角平分线、底边上的高、底边上的中线，而腰上的高线、中线及其对角的平分线不一定重合.

图示1 等腰三角形



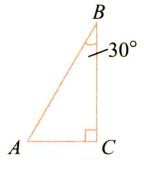
方法 **判定等边三角形时常用的选择方法**

若已知三边关系，一般选用1；若已知三角关系，一般选用2；若已知该三角形是等腰三角形，一般选用3.

注意2 **含30°角的直角三角形的性质的应用前提**

此性质的大前提是“在直角三角形中”，如果没有这个条件，那么即使有30°角，结论也不一定成立.

图示2 **含30°角的直角三角形**



题型过关 全提升

题型1 等腰三角形中分类讨论求角的度数

等腰三角形中涉及角，当没有指明顶角还是底角时，要注意分类讨论.

例题1 若等腰三角形的一个角为80°，则顶角为_____.

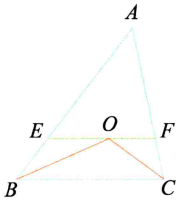
【解析】当底角为80°时，设顶角为x，∵ $80°+80°+x=180°$，∴ $x=20°$；当顶角为80°时，底角为$\frac{180°-80°}{2}=50°$. ∴ 顶角为20°或80°.

【答案】20°或80°

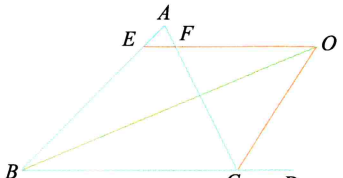
题型2 等腰三角形的性质与判定的综合

例题2 (1)如图(1)，在$\triangle ABC$中，$\angle ABC$，$\angle ACB$的平分线交于点O，过点O作$EF\parallel BC$交AB，AC于点E，F. 试猜想EF，BE，CF之间有怎样的数量关系，并说明理由.

(2)如图(2)，若将图(1)中$\angle ACB$的平分线改为外角$\angle ACD$的平分线，其他条件不变，则(1)中的结论还成立吗？请说明理由.



图(1)



图(2)

【分析】根据角平分线的性质和平行线的性质推出$\angle EBO=\angle EOB$，$\angle FOC=\angle FCO$，根据等角对等边推出$BE=OE$，$CF=OF$，即可得出EF，BE，CF之间的数量关系.

【解】(1)$EF=BE+CF$. 理由如下：

∵ BO平分$\angle ABC$，CO平分$\angle ACB$，

∴ $\angle EBO=\angle OBC$，$\angle FCO=\angle OCB$.

∵ $EF\parallel BC$，

∴ $\angle EOB=\angle OBC$，$\angle FOC=\angle OCB$，

∴ $\angle EBO=\angle EOB$，$\angle FOC=\angle FCO$，

∴ $BE=OE$，$CF=OF$，

∴ $EF=OE+OF=BE+CF$.

(2)不成立. 理由如下：

∵ BO平分$\angle ABC$，CO平分$\angle ACD$，

∴ $\angle EBO=\angle OBC$，$\angle FCO=\angle OCD$.

∵ $EF\parallel BC$，

∴ $\angle EOB=\angle OBC$，$\angle FOC=\angle OCD$，

∴ $\angle EBO=\angle EOB$，$\angle FOC=\angle FCO$，

∴ $BE=OE$，$CF=OF$，

∴ $EF=OE-OF=BE-CF$.

变式练 刷重点

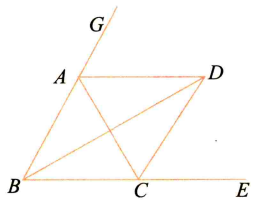
变式练1 等腰三角形一腰上的高与另一腰的夹角为30°，则它的底角为_____.

答案见P34

变式练2 如图，已知点A，C分别在$\angle GBE$的边BG，BE上，且$AB=AC$，$AD\parallel BE$，$\angle GBE$的平分线与AD交于点D，连接CD. 求证：

(1)$AB=AD$；

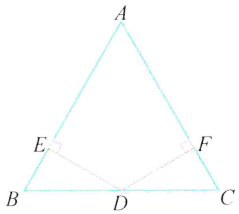
(2)CD平分$\angle ACE$.



答案见P34

题型3　等边三角形的性质与判定

例题3　如图，已知在△ABC中，$AB=AC$，D为BC边的中点，过点D作$DE\perp AB$，$DF\perp AC$，垂足分别为E，F.



(1)求证：$DE=DF$；

(2)若$\angle A=60°$，$BE=2$，求△ABC的周长.

【分析】(1)根据$AB=AC$，得到$\angle B=\angle C$，再利用D是BC的中点，$DE\perp AB$，$DF\perp AC$，证得△$BED\cong$△CFD，即可得出结论；(2)根据$AB=AC$，$\angle A=60°$，得出△ABC为等边三角形，然后求出$\angle BDE=30°$，再根据题目中给出的已知条件即可算出△ABC的周长.

(1)【证明】∵ $DE\perp AB$，$DF\perp AC$，

∴ $\angle BED=\angle CFD=90°$.

∵ $AB=AC$，∴ $\angle B=\angle C$(等边对等角).

∵ D是BC的中点，∴ $BD=CD$.

在△BED和△CFD中，∵ $\begin{cases}\angle BED=\angle CFD,\\ \angle B=\angle C,\\ BD=CD,\end{cases}$

∴ △$BED\cong$△CFD(AAS)，∴ $DE=DF$.

(2)【解】∵ $AB=AC$，$\angle A=60°$，

∴ △ABC为等边三角形，∴ $\angle B=60°$.

∵ $\angle BED=90°$，∴ $\angle BDE=30°$，∴ $BE=\frac{1}{2}BD$.

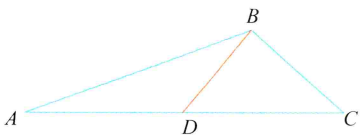
∵ $BE=2$，∴ $BD=4$，∴ $BC=2BD=8$.

∴ △ABC的周长为24.

题型4　含30°角的直角三角形性质的应用

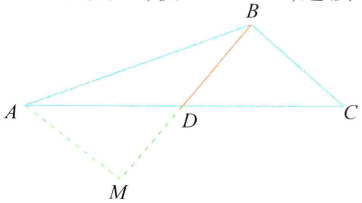
常常通过作辅助线，构造直角三角形，利用直角三角形的性质“30°角所对的直角边是斜边的一半”来解决线段的长度问题.

例题4　如图，在△ABC中，已知BD是AC边上的中线，$BD\perp BC$于点B，$\angle ABC=120°$. 求证：$AB=2BC$.



【分析】在题目中根据$\angle ABC=120°$，$BD\perp BC$，易推得$\angle ABD=30°$，而要推得$AB=2BC$，可以考虑借助$\angle ABD=30°$，构造直角三角形解决问题.

【证明】如图，延长BD至点M，使$DM=BD$，连接AM.



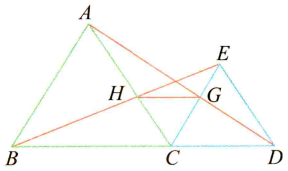
变式练　刷重点

变式练3　如图，已知△ABC和△CDE均为等边三角形，且点B，C，D在同一条直线上，连接AD，BE，分别交CE和AC于点G，H，连接GH.

(1)求证：$AD=BE$；

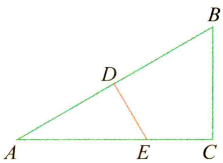
(2)证明：△$ACG\cong$△BCH；

(3)试猜想△CGH是什么特殊三角形，并说明理由.



答案见P34

变式练4　如图，在△ABC中，$\angle C=90°$，$\angle A=30°$，ED垂直平分AB交AB于点D，交AC于点E，$EC=2$. 求AE的长.



答案见P34

$\because BD \perp BC$，$\therefore \angle CBD = 90°$.

$\because BD$ 是 AC 边上的中线，$\therefore AD = DC$.

在 $\triangle AMD$ 和 $\triangle CBD$ 中，$\because \begin{cases} AD = CD, \\ \angle ADM = \angle CDB, \\ MD = BD, \end{cases}$

$\therefore \triangle AMD \cong \triangle CBD(\mathrm{SAS})$，

$\therefore AM = BC$，$\angle AMB = \angle CBD = 90°$.

$\because \angle ABC = 120°$，$\angle CBD = 90°$，

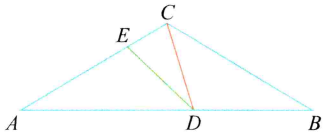
$\therefore \angle ABM = 30°$，$\therefore AB = 2AM$，$\therefore AB = 2BC$.

创新过关 提素养

题型5 与等腰三角形有关的探索型问题

探索规律的题型要紧扣题目中给出的条件，有多个小问的题目，要注意前面小问对后面小问的提示作用.

例题5 如图，在 $\triangle ABC$ 中，$AC = BC$，$\angle ACB = 120°$，点 D 在 AB 边上运动（不与点 A，B 重合），连接 CD，作 $\angle CDE = 30°$，DE 交 AC 于点 E.



（1）当 $DE \parallel BC$ 时，$\triangle ACD$ 的形状按角分类是_____.

（2）在点 D 的运动过程中，$\triangle ECD$ 可能是等腰三角形吗？若可能，请求出 $\angle AED$ 的度数；若不可能，请说明理由.

【分析】（1）由 $DE \parallel BC$ 得到 $\angle BCD = \angle CDE = 30°$，再由 $\angle ACB = 120°$ 得到 $\angle ACD = 120° - 30° = 90°$，则 $\triangle ACD$ 是直角三角形.

（2）分类讨论：当 $\angle CDE = \angle ECD$ 时，$EC = DE$；当 $\angle ECD = \angle CED$ 时，$CD = DE$；当 $\angle CED = \angle CDE$ 时，$EC = CD$. 然后利用等腰三角形的性质和三角形的内角和定理进行计算.

【解】（1）$\triangle ACD$ 是直角三角形.

$\because DE \parallel BC$，$\therefore \angle BCD = \angle CDE = 30°$.

$\because \angle ACB = 120°$，$\therefore \angle ACD = \angle ACB - \angle BCD = 90°$，

$\therefore \triangle ACD$ 是直角三角形.

（2）$\triangle ECD$ 可能是等腰三角形. 理由如下：

①当 $\angle CDE = \angle ECD$ 时，$EC = DE$，$\therefore \angle ECD = \angle CDE = 30°$.

$\because \angle AED = \angle ECD + \angle CDE$，$\therefore \angle AED = 60°$.

②当 $\angle ECD = \angle CED$ 时，$CD = DE$.

$\because \angle ECD + \angle CED + \angle CDE = 180°$，$\angle CDE = 30°$，

$\therefore \angle CED = \dfrac{180° - 30°}{2} = 75°$，

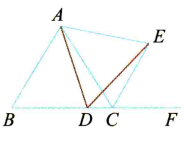
$\therefore \angle AED = 180° - \angle CED = 105°$.

变式练 刷重点

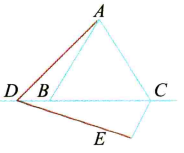
变式练5 如图（1），$\triangle ABC$ 为等边三角形，D 为 BC 上任意一点，$\angle ADE = 60°$，边 DE 与 $\triangle ABC$ 的外角的平分线相交于点 E.

（1）求证：$AD = DE$.

（2）若点 D 在 CB 的延长线上，如图（2），（1）中的结论是否仍然成立？若成立，请给予证明；若不成立，请说明理由.



图（1）



图（2）

答案见 P34

③当$\angle CED=\angle CDE$时，$EC=CD$，

$\angle ACD=180°-\angle CED-\angle CDE=180°-30°-30°=120°$.

$\because \angle ACB=120°$，$\therefore$ 此时，点D与点B重合，不符合题意.

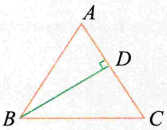
综上，$\triangle ECD$可能是等腰三角形，此时$\angle AED$的度数为60°或105°.

变式练答案

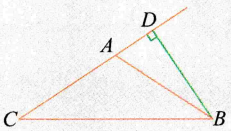
1. 60°或30° 【解析】当等腰三角形为锐角三角形时，如图(1).

由已知可知，$\angle ABD=30°$. $\because BD\perp AC$，$\therefore \angle A=60°$.

$\therefore \angle ABC=\angle C=60°$.



图(1)



图(2)

当等腰三角形为钝角三角形时，如图(2). 由已知可知，$\angle ABD=30°$. $\because BD\perp AC$，$\therefore \angle DAB=60°$，$\therefore \angle C=\angle ABC=30°$.

故答案为60°或30°.

2. 【证明】(1)$\because AD/\!/BE$，$\therefore \angle ADB=\angle DBC$.

$\because BD$平分$\angle ABC$，$\therefore \angle ABD=\angle DBC$.

$\therefore \angle ABD=\angle ADB$，$\therefore AB=AD$.

(2)$\because AD/\!/BE$，$\therefore \angle ADC=\angle DCE$.

又$\because AB=AD$，$AB=AC$，$\therefore AC=AD$，

$\therefore \angle ACD=\angle ADC$，$\therefore \angle ACD=\angle DCE$，

$\therefore CD$平分$\angle ACE$.

3. (1)【证明】$\because \triangle ABC$和$\triangle CDE$均为等边三角形，

$\therefore AC=BC$，$DC=EC$，$\angle ACB=\angle ECD=60°$，

$\therefore \angle ACD=\angle BCE$，$\therefore \triangle ACD\cong\triangle BCE$，$\therefore AD=BE$.

(2)【证明】$\because \triangle ACD\cong\triangle BCE$，$\therefore \angle CAG=\angle CBH$.

$\because \angle ACB=\angle ECD=60°$，$\therefore \angle ACG=\angle ACB=60°$.

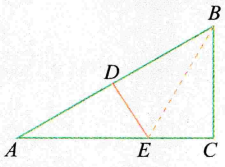
又$\because AC=BC$，$\therefore \triangle ACG\cong\triangle BCH$.

(3)【解】$\triangle CGH$是等边三角形. 理由如下：

$\because \triangle ACG\cong\triangle BCH$，$\therefore CG=CH$.

又$\because \angle ACG=60°$，$\therefore \triangle CGH$是等边三角形.

4. 【解】如图，连接BE.



$\because ED$垂直平分AB，$\therefore AE=BE$，$\therefore \angle ABE=\angle A=30°$.

$\because \angle ABC=90°-30°=60°$，$\therefore \angle EBC=60°-30°=30°$.

$\therefore BE=2CE=2\times2=4$，$\therefore AE=4$.

5. (1)【证明】如图(1)，在AB上取一点M，使$BM=BD$，连接MD.

$\because \triangle ABC$是等边三角形，$\therefore \angle B=60°$，$BA=BC$.

$\therefore \triangle BMD$是等边三角形，$\angle BMD=60°$，$\angle AMD=120°$.

$\because CE$是$\angle ACF$的平分线，$\therefore \angle ECF=60°$，$\therefore \angle DCE=120°$.

$\therefore \angle AMD=\angle DCE$.

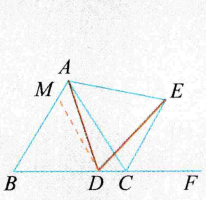
$\because \angle ADE=\angle B=60°$，$\angle ADC=\angle CDE+\angle ADE=\angle MAD+\angle B$，$\therefore \angle CDE=\angle MAD$.

$\because BA-BM=BC-BD$，$\therefore MA=CD$.

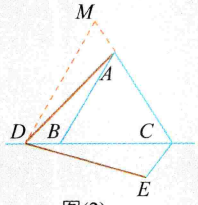
在$\triangle AMD$和$\triangle DCE$中，

$$\because \begin{cases}\angle MAD=\angle CDE,\\ MA=CD,\\ \angle AMD=\angle DCE,\end{cases}$$

$\therefore \triangle AMD\cong\triangle DCE$(ASA)，$\therefore AD=DE$.



图(1)



图(2)

(2)【解】成立. 证明：

如图(2)，延长CA至点M，使$AM=BD$，连接DM，同(1)，可证$\triangle CDM$是等边三角形，

$\therefore \angle CDM=\angle M=60°$，$CD=DM$.

$\because \angle ADE=60°$，$\therefore \angle ADM=\angle EDC$.

在$\triangle AMD$和$\triangle ECD$中，

$$\because \begin{cases}\angle ADM=\angle EDC,\\ DM=DC,\\ \angle M=\angle ECD=60°,\end{cases}$$

$\therefore \triangle AMD\cong\triangle ECD$(ASA)，$\therefore AD=DE$.

13.4 课题学习 最短路径问题

知识过关 全理解

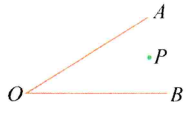
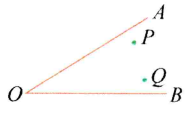
知识点1 用轴对称解决最短路径问题

1. 已知直线 l 上一动点和直线 l 外两定点 ▶图示1

(1)当两定点在 l 的异侧时,连接[1]_____得最短路径.

(2)当两定点在 l 的同侧时,作其中一定点关于 l 的[2]_____,连接该对称点和另一定点,得最短路径.

2. 另两种常见的最短路径问题 ▶图示2

问题	 在射线 OA,OB 上分别作点 M,N,使三角形 PMN 的周长最小	 在射线 OA,OB 上分别作点 M,N,使四边形 $PMNQ$ 的周长最小
作法	分别作点 P 关于两射线的对称点 P',P'',连接 $P'P''$,与两射线交点即为 M,N	分别作点 P,Q 关于两射线的对称点 P',Q',连接 $P'Q'$,与两射线的交点即为 M,N
原理	$PM+MN+PN=P'P''$,两点之间,线段最短	$PQ+PM+MN+NQ=PQ+P'Q'$,两点之间,线段最短

知识点2 用平移解决“造桥选址”问题 ▶注意

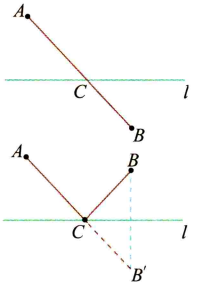
解决“造桥选址”问题,一般用[3]_____的方法,利用平移前后的对应线段相等,把未知的线段转换到[4]_____上,再结合“两点之间,线段最短”解决问题. ▶拓展

答案

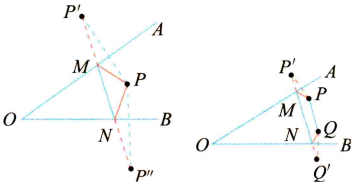
[1]两定点 [2]对称点 [3]平移 [4]一条直线

敲黑板 划重点

图示1 直线 l 上一动点和直线 l 外两定点的最短路径.



图示2 另两种常见的最短路径问题的图形作法



注意 **“造桥选址”问题的根本** 通过平移变换,沿与河垂直的方向平移桥,使除桥外的其他路径平移后在同一条直线上.

拓展 “轴对称+两点之间线段最短”将所求线段之和转化为两点之间的距离,是解决距离之和最短问题的基本思路.

题型过关 全理解

题型1 用轴对称解决“一线”的最短路径问题

例题1 傍晚时分,牧童准备从 A 处回到 B 处的家中,如图所示,但他必须先到小河边 a 去饮马. 为了节省时间,请你帮助牧童选择一条最短的路线,并证明. ▶说明

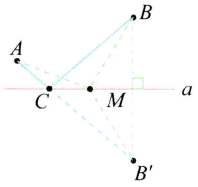


变式练 刷重点

说明 解决路径最短问题,常作其中一个点关于某条直线的对称点,将对称点和另一个点连接,再求解.

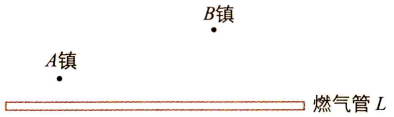
【解】将河边看成一条直线 a，作点 B 关于 a 的对称点 B'，连接 $B'A$，交直线 a 于点 C，连接 BC，则折线 ACB 就是牧童应该走的路线.

证明：在河边（即直线 a 上）任取一点 M（M 不同于 C），则折线 AMB 是任意一条牧童饮马回家的路线. 连接 $B'M$，由“两点之间，线段最短”知线段 $B'A$ 短于折线 $B'MA$. 由轴对称的性质，可知 $AM + MB = AM + MB' > AB' = AC + CB' = AC + CB$. 因此在所有牧童饮马回家的路线中，折线 ACB 最短.



变式练 刷重点

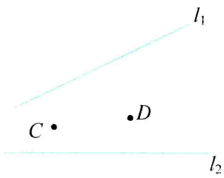
变式练 1 要在燃气管道 L 上修建一个泵站 P，分别向 A，B 两镇供气，泵站修在管道的什么地方，可使所用的输气管线最短？在图上画出 P 点的位置，保留作图痕迹.



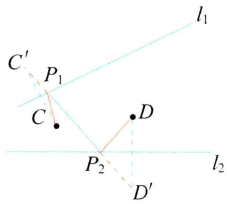
答案见本页

题型 2 用轴对称解决“两线”的最短路径问题

例题 2 如图，一个人从 C 点骑马出发到 D 点，但他必须先到河岸边 l_1 的 P_1 点去饮马，再到河岸边 l_2 的 P_2 点去饮马，最后骑马到 D 点. 他应如何选择饮水点 P_1，P_2，才能使所走的路程 $CP_1 + P_1P_2 + P_2D$ 最短？



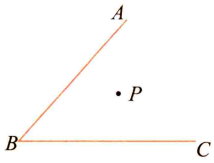
【解】如图，作点 C 关于 l_1 的对称点 C'，点 D 关于 l_2 的对称点 D'.



连接 $C'D'$，交 l_1 于点 P_1，交 l_2 于点 P_2，连接 CP_1，P_1P_2，P_2D.

此时所走路程 $CP_1 + P_1P_2 + P_2D$ 最短.

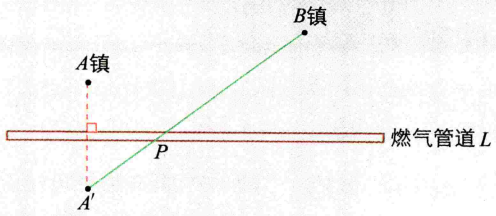
变式练 2 如图，BA，BC 是两条公路，在两条公路夹角内部的点 P 处有一油库，若在两公路上分别建一个加油站，并使运油的油罐车从油库出发先到一加油站，再到另一加油站，最后回到油库的路程最短，则加油站应如何选址？



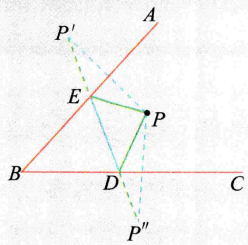
答案见本页

变式练答案

1.【解】如图所示.



2.【解】如图所示，E，D 点即为加油站的位置.



第十四章
整式的乘法与因式分解



14.1 整式的乘法

知识过关 全理解

知识点1 同底数幂的乘法

1. 一般地，对于任意底数 a 与任意正整数 m,n，

$a^m\cdot a^n=(\underbrace{a\cdot a\cdot\cdots\cdot a}_{m个a})\cdot(\underbrace{a\cdot a\cdot\cdots\cdot a}_{n个a})=\underbrace{a\cdot a\cdot\cdots\cdot a}_{(m+n)个a}=a^{m+n}$.

因此，我们有 $a^m\cdot a^n=$ [1] (m,n 都是正整数). ▶注意 1

2. 同底数幂的乘法法则：同底数幂相乘，[2] 不变，[3] 相加. ▶拓展 1

知识点2 幂的乘方

1. 一般地，对于任意底数 a 与任意正整数 m,n，

$(a^m)^n=\overbrace{a^m\cdot a^m\cdot\cdots\cdot a^m}^{n个a^m}=a^{\overbrace{m+m+\cdots+m}^{n个m}}=a^{mn}$. ▶注意 2

因此，我们有 $(a^m)^n=$ [4] (m,n 都是正整数).

2. 幂的乘方法则：幂的乘方，底数[5]，指数[6]. ▶拓展 2

知识点3 积的乘方

1. 一般地，对于任意底数 a,b 与任意正整数 n，

$(ab)^n=\overbrace{(ab)\cdot(ab)\cdot\cdots\cdot(ab)}^{n个ab}=\overbrace{a\cdot a\cdot\cdots\cdot a}^{n个a}\cdot\overbrace{b\cdot b\cdot\cdots\cdot b}^{n个b}=a^nb^n$.

因此，我们有 $(ab)^n=$ [7] (n 为正整数). ▶注意 3

2. 积的乘方法则：积的乘方，等于把积的每一个因式分别[8]，再把所得的幂[9]. ▶拓展 3

知识点4 整式的乘法

1. 单项式与单项式相乘 ▶注意 4

一般地，单项式与单项式相乘，把它们的[10]、[11]分别相乘，对于只在一个单项式里含有的[12]，则连同它的[13]作为积的一个因式. 其实质是运用了同底数幂的乘法、幂的乘方、积的乘方的性质.

2. 单项式与多项式相乘

一般地，单项式与多项式相乘，就是用单项式去乘多项式的[14]，再把所得的积相加. 用式子表示为 $m(a+b+c)=$ [15] (m,a,b,c 都

敲黑板 划重点

注意 1 (1) 不要忽略指数是 1 的因式，如 $c\cdot c^6\neq c^{0+6}$；

(2) 底数可以是单项式，也可以是多项式，当底数是多项式时通常把底数看作一个整体，运用整体思想求解.

拓展 1 **同底数幂的乘法法则的推广与逆运用**

$a^m\cdot a^n\cdot a^p=a^{m+n+p}$ (m,n,p 都是正整数)；$a^{m+n}=a^m\cdot a^n$ (m,n 都是正整数). 如 $2^3\cdot2^4\cdot2^5=2^{3+4+5}=2^{12}$；$2^8=2^{3+5}=2^3\cdot2^5$.

注意 2 应用幂的乘方进行计算时，要特别注意符号问题，负数的奇次幂为负，负数的偶次幂为正.

拓展 2 **幂的乘方法则的推广与逆运用**

$[(a^m)^n]^p=a^{mnp}$ (m,n,p 都是正整数)；$a^{mn}=(a^m)^n=(a^n)^m$ (m,n 都是正整数). 如 $[(2^3)^4]^2=2^{3\cdot4\cdot2}=2^{24}$；$2^{2\cdot3}=(2^2)^3=(2^3)^2$.

注意 3 (1) 每个因式都要乘方，不要漏掉任何一个因式；

(2) 要注意系数连同它的符号一起乘方，尤其当系数是 -1 时，不可忽略；

(3) 式子中的 a,b 可以代表一个单项式，也可以代表一个多项式.

拓展 3 **乘方法则的推广与逆运用**

$(abc)^n=a^nb^nc^n$ (n 为正整数)；$a^nb^n=(ab)^n$ (n 为正整数).

注意 4 (1) 积的系数等于各项系数的积，应先确定积的符号，再计算积的绝对值；

(2) 相同字母相乘，是同底数幂的乘法，按同底数幂的乘法法则来计算.

是单项式). ▶说明 1

3. 多项式与多项式相乘

一般地,多项式与多项式相乘,先用一个多项式的[16]_____乘另一个多项式的[17]_____,再把所得的积[18]_____. 用式子表示为$(a+b)(c+d)=$[19]_____. 其实质是把多项式相乘转化为单项式乘单项式. ▶注意 5

4. 同底数幂的除法

一般地,我们有$a^m \div a^n =$[20]_____($a\neq 0$,m,n 都是正整数,并且 $m>n$). 即同底数幂相除,底数[21]_____,指数[22]_____.

5. 零指数幂

一般地,我们有$a^0 =$[23]_____($a\neq 0$). 即任何不等于 0 的数的 0 次幂都等于 1. ▶注意 6

6. 单项式除以单项式 ▶说明 2

一般地,单项式相除,把[24]_____与同底数幂分别相除作为商的因式,对于只在被除式里含有的[25]_____,则连同它的指数作为商的一个[26]_____. 其实质是把单项式除以单项式转化为同底数幂的除法运算,所得结果仍是单项式.

7. 多项式除以单项式

一般地,多项式除以单项式,先把这个多项式的每一项除以这个单项式,再把所得的商[27]_____.

答案

[1]a^{m+n} [2]底数 [3]指数 [4]a^{mn} [5]不变 [6]相乘 [7]$a^n b^n$ [8]乘方 [9]相乘 [10]系数 [11]同底数幂 [12]字母 [13]指数 [14]每一项 [15]$ma+mb+mc$ [16]每一项 [17]每一项 [18]相加 [19]$ac+ad+bc+bd$ [20]a^{m-n} [21]不变 [22]相减 [23]1 [24]系数 [25]字母 [26]因式 [27]相加

敲黑板 划重点

说明 1 单项式与多项式相乘的实质

利用乘法分配律将单项式乘多项式转化为单项式乘单项式的问题.

注意 5 计算时要注意符号问题,多项式的每一项都包含它前面的符号,同时也要注意单项式的符号.

注意 6 底数可以是不等于 0 的数或式子. 如:$(\sqrt{3}-2)^0=1$,$(a-3)^0=1(a\neq 3)$.

说明 2 单项式除以单项式法则包括三个方面

(1)系数相除;
(2)同底数幂分别相除;
(3)只在被除式里含有的字母,连同它的指数作为商的一个因式.

题型过关 全提升

题型 1 整式的混合运算

先确定运算顺序,再按照对应的法则进行计算,有括号的要先算括号里面的.

例题 1 计算:$(a^3)^2-2a\cdot a^5+(-a)^7\div(-a)$.

【分析】根据幂的乘方和同底数幂的乘法、除法、合并同类项可以解答本题.

【解】$(a^3)^2-2a\cdot a^5+(-a)^7\div(-a)=a^6-2a^6+(-a)^6=0$.

题型 2 整式的化简求值

首先依据整式的混合运算顺序和运算法则进行化简,然后代入求值. 对于幂的运算问题,首先要判断出幂的运算类型,然后根据幂的运算性质计算,要注意底数和指数的变化特点.

例题 2 先化简整式,再求值:$(2a-b)(a+2b)-(3ab^2-2b^3+b)\div b+b^2$,其中$a=\frac{1}{2}$,$b=-3$.

【分析】先算乘法和除法,再合并同类项,最后代入数据求值即可.

【解】$(2a-b)(a+2b)-(3ab^2-2b^3+b)\div b+b^2$

$=2a^2+4ab-ab-2b^2-3ab+2b^2-1+b^2$

$=2a^2+b^2-1$,

当$a=\frac{1}{2}$,$b=-3$时,原式$=2\times\left(\frac{1}{2}\right)^2+(-3)^2-1=8\frac{1}{2}$.

变式练 刷重点

变式练 1 计算:$(2x^2)^3-6x^3(x^3+2x^2+x)$.

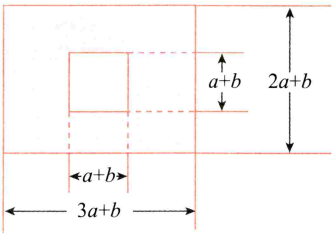
答案见 P39

变式练 2 有这样一道题:当$x=-2\,018$,$y=2\,019$时,求多项式$7x^3-6x^3y+3(x^2y+x^3+2x^3y)-(3x^2y+10x^3)$的值. 有一位同学看到$x$,$y$的值就怕了,这么大的数怎么算啊! 你能用简便的方法帮他解决这个问题吗?

答案见 P39

题型3　整式乘除的应用

例题3　如图，某市有一块长为$(3a+b)$米，宽为$(2a+b)$米的长方形地，规划部门计划将阴影部分进行绿化，中间将修建一座雕像，则绿化的面积是多少平方米？并求出当$a=3,b=2$时的绿化面积.



【分析】长方形的面积等于$(3a+b)(2a+b)$，中间部分的面积等于$(a+b)(a+b)$，阴影部分的面积＝长方形的面积－中间部分的面积，化简结果后，把a,b的值代入计算即可.

【解】$S_{阴影}=(3a+b)(2a+b)-(a+b)(a+b)$

$=6a^2+3ab+2ab+b^2-a^2-2ab-b^2$

$=(5a^2+3ab)$平方米.

当$a=3,b=2$时，

$S_{阴影}=5\times9+3\times3\times2=45+18=63$(平方米).

题型4　利用整式的乘法求字母的值

当多项式的乘积中不含某一项时，说明将多项式的乘积化简合并后该项的系数为0，可利用方程思想求字母的值.

例题4　已知$(x^2+mx+n)(x^2-3x+2)$的结果中不含x^3项和x项，求m,n的值.

【分析】根据多项式与多项式相乘的法则和合并同类项法则计算即可.

【解】原式$=x^4-3x^3+2x^2+mx^3-3mx^2+2mx+nx^2-3nx+2n$

$=x^4-(3-m)x^3+(2-3m+n)x^2+(2m-3n)x+2n.$

由题意得，$3-m=0,2m-3n=0$，解得$m=3,n=2$.

变式练　刷重点

变式练3　要建一个面积为$4a^2-6ab+2a$的长方形草坪，它的一边长为$2a$. 则这个草坪的周长是多少？

答案见本页

变式练4　已知$(x^2+px+2)(x-1)$的结果中不含x的二次项，求$p^{2\,017}$的值.

答案见本页

变式练答案

1.【解】原式$=8x^6-6x^6-12x^5-6x^4=2x^6-12x^5-6x^4$.

2.【解】原式$=7x^3-6x^3y+3x^2y+3x^3+6x^3y-3x^2y-10x^3$

$=(7x^3+3x^3-10x^3)-(6x^3y-6x^3y)+(3x^2y-3x^2y)$

$=0-0+0$

$=0.$

因为所得结果与x,y的值无关，所以无论x,y取何值，多项式的值都是0.

3.【解】草坪的另一边长是$(4a^2-6ab+2a)\div2a=2a-3b+1$.

则周长是$2(2a-3b+1+2a)=4a-6b+2+4a=8a-6b+2$.

4.【解】$(x^2+px+2)(x-1)=x^3-x^2+px^2-px+2x-2=x^3+(-1+p)x^2+(-p+2)x-2.$

∵结果中不含x^2项，

∴$-1+p=0$，解得$p=1$，故$p^{2\,017}$的值是1.

14.2 乘法公式

知识过关 全理解

知识点1 平方差公式

1. 平方差公式 ▶说明1

$(a+b)(a-b)=$ [1] _____. 也就是说，两个数的[2] _____与这两个数的[3] _____的积，等于这两个数的[4] _____. 这个公式叫做(乘法的)平方差公式. ▶注意1

2. 特点 ▶巧记1

(1)等号左边是两个二项式相乘，并且这两个二项式中有一项完全相同，另一项互为相反数；

(2)等号右边是相同项的平方减去相反项的平方；

(3)公式中的 a 和 b 可以表示具体的数或单项式，也可以表示多项式.

知识点2 完全平方公式 ▶说明2

1. 完全平方公式 ▶巧记2

$(a+b)^2=$ [5] _____，$(a-b)^2=$ [6] _____. 也就是说，两个数的和(或差)的平方，等于它们的平方和[7] _____(或[8] _____)它们的积的2倍. 这两个公式叫做(乘法的)完全平方公式.

2. 特点

(1)两个公式的等号左边都是一个二项式的平方，二者仅有一个符号不同；

(2)等号右边都是二次三项式，其中有两项是公式等号左边二项式中每一项的平方，中间一项是等号左边二项式中两项乘积的2倍，二者也仅有一个符号不同. ▶注意2

知识点3 添括号法则

添括号法则：$a+b+c=a+(b+c)$，$a-b-c=a-(b+c)$. 也就是说，添括号时，如果括号前面是[9] _____号，括到括号里的各项都[10] _____符号；如果括号前面是[11] _____号，括到括号里的各项都[12] _____符号.

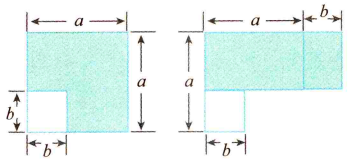
答案

[1] a^2-b^2 [2] 和 [3] 差 [4] 平方差 [5] $a^2+2ab+b^2$ [6] $a^2-2ab+b^2$ [7] 加上 [8] 减去 [9] 正 [10] 不变 [11] 负 [12] 改变

敲黑板 划重点

说明1 平方差公式的探究

图(1)中阴影部分的面积 $S=a^2-b^2$，图(2)中阴影部分的面积 $S=(a+b)\cdot(a-b)$，故可得 $(a+b)\cdot(a-b)=a^2-b^2$.



图(1) 图(2)

注意1 运用平方差公式的关键是确定公式中的 a 和 b，完全相同的一项是 a，符号相反的一项是 b.

巧记1 两数的和乘两数的差等于两数的平方差.

说明2 完全平方公式的探究

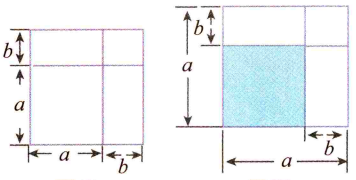
图(1)中大正方形的两种面积表示方法：

$S=(a+b)^2$，$S=a^2+b^2+2ab$，故 $(a+b)^2=a^2+b^2+2ab$；

图(2)中阴影部分的两种面积表示方法：

$S=(a-b)^2$，$S=a^2-2ab+b^2$，

故 $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$.



图(1) 图(2)

巧记2 首平方，尾平方，积的2倍在中央.

注意2 (1)利用完全平方公式时，注意 $2ab$ 项的符号要与两项的“和”或“差”一致；(2)运算时，注意公式变形，如 $(-a-b)^2=(a+b)^2$，$(-a+b)^2=(a-b)^2$.

题型过关 全提升

题型1 平方差公式与完全平方公式的综合应用

解题时要注意分析算式的结构特征，符合“两个数的和与这两个数的差的积”要考虑平方差公式，符合“两数和(或差)的平方”要考虑完全平方公式.

例题1 计算：$(x-2y)(2y+x)+(2y+x)^2-2x(x+2y)$.

【分析】根据整式的运算法则计算即可.

【解】原式$=(x^2-4y^2)+(x^2+4xy+4y^2)-(2x^2+4xy)=0$.

题型2 利用乘法公式化简求值

例题2 已知$x+\frac{1}{x}-3=0$，求：

(1)$x^2+\frac{1}{x^2}$；　　(2)$x-\frac{1}{x}$.

【分析】(1)利用完全平方公式$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$来解答；

(2)利用(1)中的结果和完全平方公式$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$来解答.

【解】(1)$\because x+\frac{1}{x}-3=0$，$\therefore x+\frac{1}{x}=3$，

$\therefore x^2+\frac{1}{x^2}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2=9-2=7$，即$x^2+\frac{1}{x^2}=7$.

(2)由(1)可知，$x^2+\frac{1}{x^2}=7$，

$\therefore \left(x-\frac{1}{x}\right)^2=x^2+\frac{1}{x^2}-2=7-2=5$，$\therefore x-\frac{1}{x}=\pm\sqrt{5}$.

题型3 利用乘法公式解方程或不等式

例题3 解方程：$(3x+1)(3x-1)-(3x+1)^2=-8$.

【分析】先根据平方差公式和完全平方公式计算，再合并同类项得到$-6x-2=-8$，再解一元一次方程即可求解.

【解】根据平方差公式和完全平方公式，得$9x^2-1-(9x^2+6x+1)=-8$，

去括号，得$9x^2-1-9x^2-6x-1=-8$，

合并同类项，得$-6x-2=-8$，

解得$x=1$.

题型4 乘法公式的整体应用

例题4 计算：(1)$\left(x-\frac{1}{2}y+z\right)\left(x+\frac{1}{2}y-z\right)$；(2)$(a+3b+c)^2$.

【分析】(1)中x的符号相同，$\frac{1}{2}y$，z的符号相反，所以我们把$x-\frac{1}{2}y+z$转化为$x-\left(\frac{1}{2}y-z\right)$，就可以转化为$x$与$\left(\frac{1}{2}y-z\right)$这两个数的和乘这两个数的差的形式了；(2)把原式变形为$[(a+3b)+c]^2$，把其中的$(a+3b)$作为

变式练 刷重点

变式练1 计算：$(2x+3y)^2-(4x-9y)(4x+9y)+(3x-2y)^2$.

答案见P42

变式练2 已知$a+b=2$，$ab=1$，求下列代数式的值.

(1)$a-b$；

(2)a^2-b^2+4b.

答案见P42

变式练3 解不等式：$(1-3x)^2+(2x-1)^2>13(x-1)(x+1)$.

答案见P42

变式练4 计算：(1)$(2x-2y-3z)\cdot(2x+2y+3z)$；

(2)$(a-b-c-d)(a-b+c+d)$.

答案见P42

一个整体看作完全平方公式中的 a，把 c 看作完全平方公式中的 b，这样本小题就转化为 $(a+3b)$ 与 c 这两个数的和的平方的形式了.

【解】(1) $\left(x-\frac{1}{2}y+z\right)\left(x+\frac{1}{2}y-z\right)=\left[x-\left(\frac{1}{2}y-z\right)\right]\left[x+\left(\frac{1}{2}y-z\right)\right]=x^2-\left(\frac{1}{2}y-z\right)^2=x^2-\left(\frac{1}{4}y^2-yz+z^2\right)=x^2-\frac{1}{4}y^2+yz-z^2$.

(2) $(a+3b+c)^2=[(a+3b)+c]^2=(a+3b)^2+2(a+3b)c+c^2=a^2+6ab+9b^2+2ac+6bc+c^2$.

创新过关 提素养

题型5 利用乘法公式解决规律探究问题

例题5 探索：

$(2-1)(2+1)=2^2-1$；

$(2-1)(2^2+2+1)=2^3-1$；

$(2-1)(2^3+2^2+2+1)=2^4-1$；

$(2-1)(2^4+2^3+2^2+2+1)=2^5-1$；

……

(1)求 $2^8+2^7+2^6+\cdots+2^2+2+1$ 的值；

(2)求 $3^{2\,008}+3^{2\,007}+3^{2\,006}+\cdots+3^2+3+1$ 的值.

【分析】(1)根据题干得出变化规律，进而得出答案；

(2) $3^{2\,008}+3^{2\,007}+3^{2\,006}+\cdots+3^2+3+1=(3^{2\,009}-1)\div(3-1)$，依此即可求解.

【解】(1)根据以上规律可得，原式 $=(2-1)(2^8+2^7+2^6+\cdots+2^2+2+1)=2^9-1=511$.

(2)由 $(3-1)(3^{2\,008}+3^{2\,007}+3^{2\,006}+\cdots+3^2+3+1)=3^{2\,009}-1$，可得 $3^{2\,008}+3^{2\,007}+3^{2\,006}+\cdots+3^2+3+1=(3^{2\,009}-1)\div(3-1)=\frac{3^{2\,009}-1}{2}$.

变式练 刷重点

变式练5 仔细观察下列各式：

$1^2+(1\times2)^2+2^2=(1\times2+1)^2$；

$2^2+(2\times3)^2+3^2=(2\times3+1)^2$；

$3^2+(3\times4)^2+4^2=(3\times4+1)^2$；

……

请你根据以上规律，写出第 n（n 为自然数）个式子，并说明理由.

答案见本页

变式练答案

1. 【解】原式 $=4x^2+9y^2+12xy-16x^2+81y^2+9x^2+4y^2-12xy=-3x^2+94y^2$.

2. 【解】(1)∵ $a+b=2$，$ab=1$，∴ $(a-b)^2=(a+b)^2-4ab=4-4=0$，则 $a-b=0$.

(2)∵ $a+b=2$，$ab=1$，$a-b=0$，∴ $a=b=1$，∴ $a^2-b^2+4b=(a+b)(a-b)+4b=4$.

3. 【解】整理，得 $1-6x+9x^2+4x^2-4x+1>13x^2-13$，移项、合并同类项，得 $-10x>-15$，解得 $x<1.5$.

4. 【解】(1) $(2x-2y-3z)(2x+2y+3z)=[2x-(2y+3z)][2x+(2y+3z)]=4x^2-(2y+3z)^2=4x^2-(4y^2+12yz+9z^2)=4x^2-4y^2-12yz-9z^2$.

(2) $(a-b-c-d)(a-b+c+d)=[(a-b)-(c+d)][(a-b)+(c+d)]=(a-b)^2-(c+d)^2=a^2-2ab+b^2-c^2-2cd-d^2$.

5. 【解】$n^2+[n(n+1)]^2+(n+1)^2=[n(n+1)+1]^2$.

理由：因为 $n^2+[n(n+1)]^2+(n+1)^2$

$=n^2+(n^2+n)^2+n^2+2n+1$

$=n^2+n^4+2n^3+n^2+n^2+2n+1$

$=n^4+2n^3+3n^2+2n+1$.

$[n(n+1)+1]^2$

$=[n(n+1)]^2+2n(n+1)+1$

$=(n^2+n)^2+2n^2+2n+1$

$=n^4+2n^3+n^2+2n^2+2n+1$

$=n^4+2n^3+3n^2+2n+1$.

所以 $n^2+[n(n+1)]^2+(n+1)^2=[n(n+1)+1]^2$.

14.3 因式分解

知识过关 全理解

知识点1 因式分解 ▶注意1

把一个[1]_____化成几个[2]_____的形式，像这样的式子变形叫做这个多项式的因式分解，也叫做把这个多项式[3]_____. ▶注意2

知识点2 提公因式法

1. 多项式中[4]_____叫做这个多项式各项的公因式. ▶注意3

2. 一般地，如果多项式的各项有公因式，可以把这个公因式[5]_____，将多项式写成公因式与另一个因式的[6]_____的形式，这种分解因式的方法叫做提公因式法. ▶方法

3. 提公因式法的公式

$pa+pb+pc=$[7]_____.

4. 提公因式法分解因式的一般步骤

(1)确定公因式：先确定系数，再确定字母和字母的指数；

(2)提公因式并确定另一个因式；

(3)把多项式写成这两个因式的积的形式.

知识点3 公式法

1. 用平方差公式分解因式 ▶注意4

由于整式的乘法与因式分解是相反的变形，把整式乘法的平方差公式 $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$ 的等号两边互换位置，就得到 $a^2-b^2=$[8]_____. 即两个数的平方差等于这两个数的[9]_____与这两个数的[10]_____的积.

2. 用完全平方公式分解因式 ▶注意5

把整式乘法的完全平方公式 $(a\pm b)^2=a^2\pm2ab+b^2$ 的等号两边互换位置，就得到 $a^2+2ab+b^2=$[11]_____，$a^2-2ab+b^2=$[12]_____. 即两个数的平方和[13]_____(或[14]_____)这两个数的积的2倍，等于这两个数的[15]_____(或[16]_____)的平方.

答案

[1]多项式 [2]整式的积 [3]分解因式 [4]各项都有的因式 [5]提取出来 [6]乘积 [7]$p(a+b+c)$ [8]$(a+b)(a-b)$ [9]和 [10]差 [11]$(a+b)^2$ [12]$(a-b)^2$ [13]加上 [14]减去 [15]和 [16]差

敲黑板 划重点

注意1 因式分解的判断

一个多项式 ⇄（因式分解 / 整式乘法）几个整式的积

注意2 因式分解的结果必须是：(1)式子是乘积的形式；(2)每个因式都是整式；(3)结果分解要彻底.

注意3 (1)提公因式时，当首项为负时，把负号作为公因式的符号提到括号外；

(2)公因式可以是单项式，也可以是多项式.

方法 检查提公因式法分解因式是否正确的方法

在因式分解完成后，按照整式乘法把因式再乘回去，看结果是否与原式相等，如果相等就说明是正确的，否则就是错误的.

注意4 当多项式的每一项都含有公因式时，要先提取公因式，再看能否运用平方差公式分解. 分解因式必须是分解到每一个多项式都不能再分解为止.

注意5 完全平方公式分解因式的关键

如果多项式有公因式，先提取公因式，再运用完全平方公式. 当第一项的系数是负数时，一般要提“$-$”，多项式的各项都要变号. 比如，$-3x^2+6xy-3y^2=-3(x^2-2xy+y^2)=-3(x-y)^2$.

题型过关 全提升

题型1 运用多种方法分解因式

例题1 把下列多项式进行因式分解.

(1)$4x^3y-36xy^3$;　　(2)x^4-2x^2+1;

(3)$x^3y+2x^2y^2+xy^3$;　　(4)$9x^2(a-b)+y^2(b-a)$.

【解】(1)$4x^3y-36xy^3=4xy(x^2-9y^2)=4xy(x+3y)(x-3y)$.

(2)$x^4-2x^2+1=(x^2-1)^2=[(x+1)(x-1)]^2=(x+1)^2(x-1)^2$.

(3)$x^3y+2x^2y^2+xy^3=xy(x^2+2xy+y^2)=xy(x+y)^2$.

(4)$9x^2(a-b)+y^2(b-a)=9x^2(a-b)-y^2(a-b)$

$=(a-b)(3x+y)(3x-y)$.

题型2 利用因式分解法求代数式的值

例题2 已知$x+y=4$,$xy=3$,求代数式x^2y+xy^2的值.

【分析】首先把代数式x^2y+xy^2因式分解,然后把$x+y=4$,$xy=3$代入,求出算式的值即可.

【解】当$x+y=4$,$xy=3$时,$x^2y+xy^2=xy(x+y)=3\times4=12$.

题型3 因式分解与三角形知识的综合应用

例题3 已知a,b,c分别是$\triangle ABC$的三边长.

(1)分别将多项式$a^2c^2-b^2c^2$,a^4-b^4进行因式分解;

(2)若$a^2c^2-b^2c^2=a^4-b^4$,$c^2-a^2-b^2\neq0$,试判断$\triangle ABC$的形状,并说明理由.

【分析】(1)利用平方差公式分解因式;

(2)利用(1)中分解的结果得到$c^2(a+b)(a-b)-(a-b)(a+b)(a^2+b^2)=0$,再提公因式得到$(a+b)(a-b)(c^2-a^2-b^2)=0$,则$a-b=0$,然后判断三角形的形状即可.

【解】(1)$a^2c^2-b^2c^2=c^2(a^2-b^2)=c^2(a+b)(a-b)$;

$a^4-b^4=(a^2-b^2)(a^2+b^2)=(a-b)(a+b)(a^2+b^2)$.

(2)$\because a^2c^2-b^2c^2=a^4-b^4$,

$\therefore c^2(a+b)(a-b)=(a-b)(a+b)(a^2+b^2)$,

$\therefore c^2(a+b)(a-b)-(a-b)(a+b)(a^2+b^2)=0$,

$\therefore (a+b)(a-b)(c^2-a^2-b^2)=0$.

$\because a$,b,c分别是$\triangle ABC$的三边长,$c^2-a^2-b^2\neq0$,$\therefore a-b=0$,

$\therefore a=b$,$\therefore \triangle ABC$为等腰三角形.

变式练 刷重点

变式练1 分解因式:

(1)$6m(x-2)-9n(2-x)$;

(2)$(a^2+4b^2)^2-16a^2b^2$.

答案见本页

变式练2 已知$a-b=5$,$ab=2$,求代数式$a^3b-2a^2b^2+ab^3$的值.

答案见本页

变式练3 已知a,b,c为$\triangle ABC$的三边长,若$a^2+b^2+2c^2-2ac-2bc=0$,试判断$\triangle ABC$的形状.

答案见本页

变式练答案

1. 【解】(1)原式$=6m(x-2)+9n(x-2)=3(x-2)(2m+3n)$.

(2)原式$=(a^2+4b^2+4ab)(a^2+4b^2-4ab)=(a+2b)^2(a-2b)^2$.

2. 【解】$a^3b-2a^2b^2+ab^3=ab(a^2-2ab+b^2)=ab(a-b)^2$.

$\because a-b=5$,$ab=2$,$\therefore$原式$=2\times5^2=50$.

3. 【解】$\because a^2+b^2+2c^2-2ac-2bc=0$,

$\therefore a^2+c^2-2ac+b^2+c^2-2bc=0$,

即$(a-c)^2+(b-c)^2=0$,

$\therefore a-c=0$且$b-c=0$,则$a=c$且$b=c$,

$\therefore a=b=c$,$\therefore \triangle ABC$是等边三角形.

第十五章 分式



15.1 分式

知识过关 全理解

知识点1 分式的概念

1. 一般地，如果 A，B 表示两个整式，并且 B 中含有[1]_____，那么式子 $\frac{A}{B}$ 叫做[2]_____. 分式 $\frac{A}{B}$ 中，A 叫做[3]_____，B 叫做[4]_____. ▶注意1

2. 一个式子是分式需要满足的三个条件▶注意2

(1)是形如 $\frac{A}{B}$ 的式子；(2)A，B 为整式；(3)分母 B 中含有字母.

知识点2 分式有、无意义的条件

(1)**分式有意义的条件**：分式的分母[5]_____0. ▶注意3

(2)**分式无意义的条件**：分式的分母[6]_____0.

知识点3 分式的值为0的条件

1. 当分式的分子为0，分母不为0时，分式的值为[7]_____.

2. 分式的值是在分式有意义的前提下才可以考虑的，所以使分式 $\frac{A}{B}$ 的值为0的条件是[8]_____且[9]_____，两者缺一不可. ▶方法1

知识点4 分式的基本性质▶注意4

1. 分式的分子与分母乘(或除以)同一个[10]_____的整式，分式的值[11]_____.

2. 用式子表示为 $\frac{A}{B}=$[12]_____，$\frac{A}{B}=$[13]_____ $(C\neq0)$，其中 A，B，C 是整式. ▶注意5

知识点5 约分、最简分式

1. 根据分式的基本性质，把一个分式的分子与分母的[14]_____约去，叫做分式的约分. ▶注意6

2. 分子与分母没有公因式的分式，叫做[15]_____. ▶方法2

敲黑板 划重点

注意1 判断一个式子是不是分式，关键是看它的分母中是否含有字母，π 除外.

注意2 判断一个式子是不是分式，不能把原式化简后再判断，只需看原式的本来“面目”是否符合分式的定义. 比如，$\frac{2a}{a}$ 就是分式.

注意3 分母不为0，并不是分母中的字母不为0，而是表示分母的式子的值不能为0.

方法1 使分式的值为0的解题方法

先求出使分子为0的字母的值，再检验这个值是否使分母的值为0，当分母的值不为0时，这个值就是所求的字母的值.

注意4 运用分式的基本性质进行分式的变形是恒等变形，它不改变分式值的大小，只改变其形式.

注意5 (1)运用分式的基本性质时，要注意限制条件 $C\neq0$ 和隐含条件 $B\neq0$；

(2)分子和分母是多项式时，要把分子和分母分别看成一个整体.

注意6 对分式进行约分时，一般先分别对分子、分母进行因式分解.

方法2 找公因式的方法

当分子、分母都是单项式时，先找分子、分母系数的最大公约数，再找相同字母的最低次幂，它们的积就是公因式. 当分子、分母都是多项式时，先把多项式因式分解. 比如，$\frac{a^2-4a}{a^2-16}=\frac{a(a-4)}{(a+4)(a-4)}=\frac{a}{a+4}$.

知识点6　分式的通分 ▶说明

1. 根据分式的基本性质，把几个异分母的分式分别化成与原来的分式相等的16＿＿＿＿的分式，叫做分式的通分.

2. 几个分式通分时，通常取各分母的所有因式的最高次幂的17＿＿＿＿作为公分母，它叫做18＿＿＿＿＿＿. ▶注意7

3. 通分的步骤：(1)求各分式的最简公分母；(2)用这个最简公分母除以分式的分母；(3)用所得的商去乘原各分式的分子、分母.

答案

1字母　2分式　3分子　4分母　5不等于　6等于　7 0　8 $A=0$　9 $B\neq0$　10不等于0　11不变　12 $\frac{A\cdot C}{B\cdot C}$　13 $\frac{A\div C}{B\div C}$　14公因式　15最简分式　16同分母　17积　18最简公分母

敲黑板　划重点

说明　约分与通分的联系和区别

(1)联系：约分和通分都是根据分式的基本性质对分式进行恒等变形，即每个分式变形之后都不改变原分式的值.

(2)区别：约分针对一个分式，约分使分式变得简单；通分针对两个或两个以上的分式，通分使异分母分式化为同分母分式.

注意7　(1)分母互为相反数时，每个分母都可以作为最简公分母；

(2)若分式的分子与分母有公因式，应该先找最简公分母再进行化简.

题型过关　全提升

题型1　分式有、无意义及值为0的条件

例题1　若分式$\frac{|x|-1}{x+1}$的值为零，则x的值是　(　　)

A. 1　　B. -1　　C. ±1　　D. 2

【分析】直接利用分式的值为零，则分子为零，分母不为零，进而得出答案.

【解析】∵ 分式$\frac{|x|-1}{x+1}$的值为零，

∴ $|x|-1=0$且$x+1\neq0$，解得$x=1$，故选A.

【答案】A

变式练　刷重点

变式练1　当x为何值时，分式$\frac{x^2-4}{x+2}$有意义？

答案见P47

题型2　分式的基本性质

例题2　不改变分式的值，把下列分式的分子和分母中各项的系数化为整数.

(1)$\frac{a+\frac{1}{3}b}{\frac{2}{5}a-2b}$；(2)$\frac{0.03a-0.2b}{0.08a+0.5b}$.

【解】(1)原式$=\frac{15\left(a+\frac{1}{3}b\right)}{15\left(\frac{2}{5}a-2b\right)}=\frac{15a+5b}{6a-30b}$.

(2)原式$=\frac{100(0.03a-0.2b)}{100(0.08a+0.5b)}=\frac{3a-20b}{8a+50b}$.

变式练2　若将分式$\frac{a+b}{4a^2}$中的a与b的值都扩大为原来的2倍，则这个分式的值将　(　　)

A. 扩大为原来的2倍

B. 不变

C. 缩小为原来的$\frac{1}{2}$

D. 缩小为原来的$\frac{1}{4}$

答案见P47

题型3 分式的化简求值

例题3 先化简，再求值：$\dfrac{a^2+6ab+9b^2}{a^2-9b^2}$，其中 a,b 满足 $(a-1)^2+|b+1|=0$.

【分析】首先化简 $\dfrac{a^2+6ab+9b^2}{a^2-9b^2}$，然后根据 a,b 满足 $(a-1)^2+|b+1|=0$，求出 a,b 的值，再把求出的 a,b 的值代入化简后的算式，求出算式的值即可.

【解】原式 $=\dfrac{(a+3b)^2}{(a+3b)(a-3b)}=\dfrac{a+3b}{a-3b}$.

$\because a,b$ 满足 $(a-1)^2+|b+1|=0$，

$\therefore a-1=0,b+1=0,\therefore a=1,b=-1$.

当 $a=1,b=-1$ 时，原式 $=\dfrac{1-3}{1+3}=-\dfrac{1}{2}$.

变式练 刷重点

变式练3 先化简，再求值：$\dfrac{x^2-2x}{x^2-4}$，其中 x 是不等式组 $\begin{cases}1-x>\dfrac{-1-x}{2},\\ x-1>0\end{cases}$ 的整数解.

答案见本页

创新过关 提素养

题型4 分式在规律问题中的应用

例题4 按一定规律排列的一列数依次为 $\dfrac{2}{3},\dfrac{5}{8},\dfrac{10}{15},\dfrac{17}{24},\dfrac{26}{35},\cdots$. 请用 n 表示这列数中的第 n 个数（n 是正整数）.

【分析】给出的这列数可改写成 $\dfrac{1^2+1}{(1+1)^2-1},\dfrac{2^2+1}{(2+1)^2-1},\dfrac{3^2+1}{(3+1)^2-1},\dfrac{4^2+1}{(4+1)^2-1},\dfrac{5^2+1}{(5+1)^2-1},\cdots$，可发现每个数的分子恰好比它对应序数的平方大1，而分母恰好是比它对应序数大1的平方减1，由此规律可得到这列数的第 n 个数.

【解】这列数的第 n 个数是 $\dfrac{n^2+1}{(n+1)^2-1}$ 或 $\dfrac{n^2+1}{n^2+2n}$ 或 $\dfrac{n^2+1}{n(n+2)}$.

变式练 刷重点

变式练4 一组按规律排列的式子：$\dfrac{1}{a^2},-\dfrac{4}{a^5},\dfrac{9}{a^8},-\dfrac{16}{a^{11}},\cdots(a\neq0)$，其中第7个式子是_____，第 n 个式子是_____（n 为正整数）.

答案见本页

变式练答案

1. 【解】由题意可知 $x+2\neq0$，解得 $x\neq-2$. 所以当 $x\neq-2$ 时，分式 $\dfrac{x^2-4}{x+2}$ 有意义.

2. C 【解析】$\dfrac{2a+2b}{4\cdot(2a)^2}=\dfrac{2a+2b}{16a^2}=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{a+b}{4a^2}$，故选C.

3. 【解】$\begin{cases}1-x>\dfrac{-1-x}{2},①\\ x-1>0,②\end{cases}$ 解①得 $x<3$；解②得 $x>1$.

$\therefore$ 不等式组的解集为 $1<x<3,\therefore$ 不等式组的整数解为 $x=2$.

$\because\dfrac{x^2-2x}{x^2-4}=\dfrac{x(x-2)}{(x+2)(x-2)}=\dfrac{x}{x+2}$.

当 $x=2$ 时，原式 $=\dfrac{2}{2+2}=\dfrac{1}{2}$.

4. $\dfrac{49}{a^{20}}$ $(-1)^{n+1}\dfrac{n^2}{a^{3n-1}}$ 【解析】观察式子可知规律为 $(-1)^{n+1}\dfrac{n^2}{a^{3n-1}}$，故第7个式子是 $\dfrac{49}{a^{20}}$，第 n 个式子是 $(-1)^{n+1}\dfrac{n^2}{a^{3n-1}}$（$n$ 为正整数）.

15.2 分式的运算

知识过关 全理解

知识点1 分式的乘除

1. 乘法法则：分式乘分式，用[1]_____作为积的分子，[2]_____作为积的分母. 用式子表示为$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=$[3]_____. ▶注意1

2. 除法法则：分式除以分式，把除式的[4]_____、[5]_____颠倒位置后，与被除式相乘. 用式子表示为$\frac{a}{b}\div\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c}=$[6]_____.

知识点2 分式的乘方

一般地，当n是正整数时，$\left(\frac{a}{b}\right)^n=\underbrace{\frac{a}{b}\cdot\frac{a}{b}\cdot\cdots\cdot\frac{a}{b}}_{n个}=\frac{\overbrace{a\cdot a\cdot\cdots\cdot a}^{n个}}{\underbrace{b\cdot b\cdot\cdots\cdot b}_{n个}}=\frac{a^n}{b^n}$，即$\left(\frac{a}{b}\right)^n=$[7]_____. 这就是说，分式乘方要把分子、分母分别[8]_____. ▶注意2

知识点3 分式的加减▶注意3

1. 同分母分式的加减

同分母分式相加减，分母不变，把分子相[9]_____. 用式子表示为$\frac{a}{c}\pm\frac{b}{c}=$[10]_____.

2. 异分母分式的加减

异分母分式相加减，先[11]_____，变为同分母的分式，再加减. 用式子表示为$\frac{a}{b}\pm\frac{c}{d}=\frac{ad}{bd}\pm\frac{bc}{bd}=$[12]_____. ▶注意4

知识点4 分式的混合运算▶注意5

式与数有相同的混合运算顺序：先[13]_____，再[14]_____，然后[15]_____，有括号要先算[16]_____.

知识点5 整数指数幂▶注意6

1. 一般地，当n是[17]_____时，$a^{-n}=$[18]_____$(a\neq0)$. 这就是说，$a^{-n}(a\neq0)$是a^n的倒数.

2. 整数指数幂的运算性质

$(1)a^m\cdot a^n=a^{m+n}$；$(2)(a^m)^n=a^{mn}$；$(3)(ab)^n=a^nb^n$；$(4)a^m\div a^n=a^{m-n}(a\neq0,m>n)$；$(5)\left(\frac{a}{b}\right)^n=\frac{a^n}{b^n}$；$(6)a^0=1(a\neq0)$；$(7)a^{-n}=\frac{1}{a^n}(a\neq0)$. 以上式子中，$m,n$均为正整数.

敲黑板 划重点

注意1 当整式与分式相乘时，要把整式(看作是分母为1的式子)与分式的分子相乘作为积的分子，分式的分母作为积的分母. 当整式是多项式时，同样要先分解因式，看能否约分，再相乘.

注意2 分式乘方时，先确定乘方结果的符号. 正数的任何次方都是正数；负数的偶次方是正数，负数的奇次方是负数. 如$\left(-\frac{a}{b}\right)^2=\left(\frac{a}{b}\right)^2=\frac{a^2}{b^2}$，$\left(-\frac{a}{b}\right)^3=-\left(\frac{a}{b}\right)^3=-\frac{a^3}{b^3}$.

注意3 异分母分式相加减，化异分母分式为同分母分式是解题的关键. 同分母分式相减时，减式的分子是多项式的要加括号，避免产生符号错误.

注意4 异分母分式相加减，当分式中的分子与分母有公因式时，先约分，再通分.

注意5 分式的混合运算中要注意分式中分子、分母符号的处理，分子或分母的系数是负数时，要把“-”移到分式的前面.

注意6 幂的运算的结果的符号与指数的正负无关，只与指数的奇偶有关. 如$(-2)^2=2^2=4$，$(-2)^{-2}=\frac{1}{2^2}=\frac{1}{4}$，$(-2)^3=-2^3=-8$.

3. 科学记数法 ▶注意 7

小于 1 的正数可以用科学记数法表示为⑲_____的形式，其中 n 为原数左起第一个不为 0 的数字前面所有 0 的个数（包括小数点前面的那个 0），$1 \leqslant a < 10$.

答案

①分子的积 ②分母的积 ③$\frac{a \cdot c}{b \cdot d}$ ④分子 ⑤分母 ⑥$\frac{a \cdot d}{b \cdot c}$ ⑦$\frac{a^n}{b^n}$ ⑧乘方 ⑨加减 ⑩$\frac{a \pm b}{c}$ ⑪通分 ⑫$\frac{ad \pm bc}{bd}$ ⑬乘方 ⑭乘除 ⑮加减 ⑯括号里面的 ⑰正整数 ⑱$\frac{1}{a^n}$ ⑲$a \times 10^{-n}$

敲黑板 划重点

注意 7 **用科学记数法表示小于 1 的正数**

要注意小数点位置的变化，即小数点向右移了几位，10 的指数就是负几.

题型过关 全提升

题型 1 分式的混合运算

例题 1 计算：

(1)$\left(-\frac{a^2b}{c}\right)^3 \cdot \left(-\frac{c^2}{a^2}\right)^2 \div \left(-\frac{bc}{a}\right)^4$；(2)$\left(\frac{x+1}{x-1} - \frac{x-1}{x+1}\right) \div \frac{x}{x^2-1}$.

【分析】(1)先计算乘方，再将除法转化为乘法，最后约分即可得结果；(2)先通分，计算括号内分式的减法，同时将除法转化为乘法，继而约分可得结果.

【解】(1)原式 $= -\frac{a^6b^3}{c^3} \cdot \frac{c^4}{a^4} \div \frac{b^4c^4}{a^4}$

$= -\frac{a^6b^3}{c^3} \cdot \frac{c^4}{a^4} \cdot \frac{a^4}{b^4c^4}$

$= -\frac{a^6}{bc^3}$.

(2)原式 $= \left[\frac{x^2+2x+1}{(x+1)(x-1)} - \frac{x^2-2x+1}{(x+1)(x-1)}\right] \cdot \frac{(x+1)(x-1)}{x}$

$= \frac{4x}{(x+1)(x-1)} \cdot \frac{(x+1)(x-1)}{x}$

$= 4$.

变式练 刷重点

变式练 1 计算：$\left(\frac{x+2}{x^2-2x} - \frac{x-1}{x^2-4x+4}\right) \div \frac{x-4}{x}$.

答案见 P50

题型 2 分式的化简求值

解决此类问题的关键是掌握因式分解、通分、约分，同时要注意解题的步骤.

例题 2 先化简，再求值：$\frac{x-2}{x^2+2x} \div \frac{x^2-4x+4}{x^2-4} + \frac{1}{2x}$，其中 $x = -\frac{6}{5}$.

【分析】原式的前两项除法运算利用除法法则变形，约分后通分，再利用同分母分式的加法法则计算得到最简结果，然后把 x 的值代入计算即可.

【解】原式 $= \frac{x-2}{x(x+2)} \cdot \frac{(x+2)(x-2)}{(x-2)^2} + \frac{1}{2x}$

$= \frac{1}{x} + \frac{1}{2x}$

$= \frac{3}{2x}$.

变式练 2 化简求值：$\left(\frac{x^2-4}{x^2-4x+4} - \frac{1}{2-x}\right) \div \frac{1}{x^2-2x}$，其中 $x = -2$.

答案见 P50

将 $x=-\frac{6}{5}$ 代入，得原式 $=\frac{3}{2\times\left(-\frac{6}{5}\right)}=-\frac{5}{4}$.

题型3　整数指数幂的应用

例题3　已知 $3^m=\frac{1}{27}$，$\left(\frac{1}{2}\right)^n=16$，求 m^n 的值.

【分析】首先将 $\frac{1}{27}$ 变形为底数为3的幂，16变形为底数为 $\frac{1}{2}$ 的幂，然后确定 m，n 的值，最后代入求 m^n 的值.

【解】$\because 3^m=\frac{1}{27}=\frac{1}{3^3}=3^{-3}$，即 $3^m=3^{-3}$，$\therefore m=-3$.

又 $\because \left(\frac{1}{2}\right)^n=16=2^4=\frac{1}{2^{-4}}=\left(\frac{1}{2}\right)^{-4}$，即 $\left(\frac{1}{2}\right)^n=\left(\frac{1}{2}\right)^{-4}$，$\therefore n=-4$.

$\therefore m^n=(-3)^{-4}=\frac{1}{(-3)^4}=\frac{1}{81}$.

题型4　分式运算的实际应用

找准各个量的关系，正确列出式子是关键，注意列出的分式一定要有意义.

例题4　小张从甲地到乙地的速度是 a，从乙地返回甲地时，速度是 $b(a\neq b)$；小李从甲地到乙地，又从乙地返回甲地的速度一直是 $\frac{a+b}{2}$，谁用的时间短？

【分析】设甲、乙两地的距离为1，根据“路程÷速度=时间”，分别表示出两人所用的时间，然后比较即可.

【解】设甲、乙两地的距离为1，则

小张用的时间为 $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{a+b}{ab}$，小李用的时间为 $\frac{1}{\frac{a+b}{2}}\times 2=\frac{4}{a+b}$.

$\because \frac{a+b}{ab}-\frac{4}{a+b}=\frac{(a+b)^2-4ab}{ab(a+b)}=\frac{(a-b)^2}{ab(a+b)}>0$，

$\therefore$ 小李用的时间短.

变式练　刷重点

变式练3　若 $(x^m\div x^{2n})^3\div x^{2m-n}$ 与 $2x^3$ 是同类项，且 $m+5n=13$，求 m^2-25n 的值.

答案见本页

变式练4　甲、乙两个家庭同去一家粮店购买大米两次. 两次大米的售价有变化，且两个家庭的购买方式不同，其中甲家庭每次总是买20千克大米，而乙家庭每次总用去20元，商店也按价计算卖给乙家庭. 设前后两次的米价分别是每千克 m 元和 n 元（$m>0$，$n>0$，$m\neq n$），请问谁的购买方式合算？

答案见本页

变式练答案

1. 【解】原式 $=\left[\frac{x+2}{x(x-2)}-\frac{x-1}{(x-2)^2}\right]\cdot\frac{x}{x-4}$

$=\frac{(x+2)(x-2)-x(x-1)}{x(x-2)^2}\cdot\frac{x}{x-4}$

$=\frac{x-4}{x(x-2)^2}\cdot\frac{x}{x-4}$

$=\frac{1}{(x-2)^2}$.

2. 【解】原式 $=\left[\frac{(x+2)(x-2)}{(x-2)^2}+\frac{1}{x-2}\right]\cdot x(x-2)=\left(\frac{x+2}{x-2}+\frac{1}{x-2}\right)\cdot x(x-2)=x(x+3)$.

当 $x=-2$ 时，原式 $=-2\times(-2+3)=-2$.

3. 【解】$(x^m\div x^{2n})^3\div x^{2m-n}=(x^{m-2n})^3\div x^{2m-n}=x^{3m-6n}\div x^{2m-n}=x^{m-5n}$.

$\because (x^m\div x^{2n})^3\div x^{2m-n}$ 与 $2x^3$ 是同类项，

$\therefore m-5n=3$，又 $\because m+5n=13$，$\therefore m=8$，$n=1$.

$\therefore m^2-25n=8^2-25\times 1=39$.

4. 【解】甲买的大米的平均价格为每千克 $\frac{20m+20n}{40}=\frac{m+n}{2}$（元），

乙买的大米的平均价格为每千克 $\frac{40}{\frac{20}{m}+\frac{20}{n}}=\frac{2mn}{m+n}$（元）.

$\frac{m+n}{2}-\frac{2mn}{m+n}=\frac{(m-n)^2}{2(m+n)}$.

$\because m\neq n$，$\therefore (m-n)^2>0$. 又 $\because m+n>0$，$\therefore \frac{(m-n)^2}{2(m+n)}>0$.

$\therefore$ 乙家庭的购买方式合算.

专题　分式的化简求值



题型1　利用整体代入法求值

例题1　先化简，再求值：$\left(\frac{x^2-y^2}{x^2-2xy+y^2}-\frac{x}{x-y}\right)\div\frac{y^2}{x^2-xy}$，其中$x=2y$.（$x\neq y$，$xy\neq0$）

【解】原式$=\left[\frac{(x+y)(x-y)}{(x-y)^2}-\frac{x}{x-y}\right]\cdot\frac{x(x-y)}{y^2}$

$=\left(\frac{x+y}{x-y}-\frac{x}{x-y}\right)\cdot\frac{x(x-y)}{y^2}=\frac{y}{x-y}\cdot\frac{x(x-y)}{y^2}=\frac{x}{y}$.

把$x=2y$代入，原式$=\frac{2y}{y}=2$.

题型2　利用非负数的性质求值后代入

例题2　先化简，再求值：$1-\frac{a^2+4ab+4b^2}{a^2-ab}\div\frac{a+2b}{a-b}$，其中$a$，$b$满足$(a-\sqrt{2^2})^2+\sqrt{b+1}=0$.

【解】原式$=1-\frac{(a+2b)^2}{a(a-b)}\cdot\frac{a-b}{a+2b}=1-\frac{a+2b}{a}=-\frac{2b}{a}$.

∵a，b满足$(a-\sqrt{2^2})^2+\sqrt{b+1}=0$，

∴$a-\sqrt{2^2}=0$，$b+1=0$，∴$a=\sqrt{2^2}=2$，$b=-1$.

当$a=2$，$b=-1$时，原式$=-\frac{2\times(-1)}{2}=1$.

题型3　设辅助未知数代入求值

例题3　已知$\frac{x}{3}=\frac{y}{4}=\frac{z}{6}(xyz\neq0)$，求$\frac{xy+yz+xz}{x^2+y^2+z^2}$的值.

【解】设$\frac{x}{3}=\frac{y}{4}=\frac{z}{6}=k(k\neq0)$，则$x=3k$，$y=4k$，$z=6k$.

∴$\frac{xy+yz+xz}{x^2+y^2+z^2}=\frac{3k\times4k+4k\times6k+3k\times6k}{(3k)^2+(4k)^2+(6k)^2}=\frac{54k^2}{61k^2}=\frac{54}{61}$.

变式练　刷重点

变式练1　先化简，再求值：$\left(\frac{a-2}{a^2+2a}-\frac{a-1}{a^2+4a+4}\right)\div\frac{a-4}{a+2}$，其中$a$满足$a^2+2a-(\sqrt{3})^2=0$.

答案见本页

变式练2　先化简，再求值：$\left(\frac{4xy}{x-2y}+x\right)\div\frac{x^2+4xy+4y^2}{4y^3-x^2y}$，其中$|2x-1|+y^2+4y+4=0$.

答案见本页

变式练3　已知$\frac{x}{3}=\frac{y}{4}=\frac{z}{5}(xyz\neq0)$，求$2+\frac{xy+yz+zx}{x^2}$的值.

答案见本页

变式练答案

1.【解】∵$a^2+2a-(\sqrt{3})^2=0$，∴$a^2+2a=(\sqrt{3})^2=3$.

∴原式$=\left[\frac{a-2}{a(a+2)}-\frac{a-1}{(a+2)^2}\right]\cdot\frac{a+2}{a-4}=\frac{a-2}{a(a-4)}-\frac{a-1}{(a+2)(a-4)}=\frac{1}{a(a+2)}=\frac{1}{a^2+2a}=\frac{1}{3}$.

2.【解】原式$=\frac{x(2y+x)}{x-2y}\cdot\frac{y(2y+x)(2y-x)}{(x+2y)^2}=-xy$.

∵$|2x-1|+y^2+4y+4=0$，即$|2x-1|+(y+2)^2=0$，

∴$2x-1=0$，$y+2=0$. ∴$x=\frac{1}{2}$，$y=-2$.

∴原式$=-\frac{1}{2}\times(-2)=1$.

3.【解】令$\frac{x}{3}=\frac{y}{4}=\frac{z}{5}=k(k\neq0)$，则$x=3k$，$y=4k$，$z=5k$.

原式$=2+\frac{3k\times4k+4k\times5k+5k\times3k}{(3k)^2}$

$=2+\frac{47k^2}{9k^2}$

$=2+\frac{47}{9}$

$=7\frac{2}{9}$.

15.3 分式方程

知识过关 全理解

知识点1 分式方程

1. [1]_____中含有未知数的方程叫做分式方程. ▶注意1

2. 分式方程的重要特征

(1)是方程;(2)分母中含有未知数. ▶注意2

知识点2 解分式方程

1. 解分式方程的基本思路

将分式方程化为[2]_____,具体做法是“去分母”,即方程两边乘[3]_____. 这也是解分式方程的一般方法. ▶注意3

2. 解分式方程的一般步骤 ▶注意4

(1)去分母:方程的两边乘最简公分母,把分式方程转化为整式方程;

(2)解整式方程:去括号、移项、合并同类项、系数化为1;

(3)检验:将整式方程的解代入最简公分母,如果最简公分母的值不为0,则整式方程的解就是原分式方程的解;否则,这个解不是原分式方程的解.

知识点3 分式方程的应用

1. 列分式方程常用的等量关系 ▶注意5

(1)工程问题:工作效率×工作时间=工作量,

总工作量=各工作量之和.

(2)利润问题:利润=售价-进价,利润率$=\frac{\text{利润}}{\text{进价}}\times 100\%$,

总利润=单件的利润×销售的数量.

(3)行程问题:速度×时间=路程.

(4)储蓄问题:本息和=本金+利息.

2. 列分式方程解应用题的一般步骤 ▶注意6

(1)审:审清题意,弄清已知量和未知量;

(2)设:设未知数(可以直接设未知数,也可以间接设未知数);

(3)列:列出分式方程;

(4)解:解分式方程;

(5)验:既要检验是否为分式方程的解,又要检验是否符合实际意义;

(6)答:写出答案.

答案

[1]分母 [2]整式方程 [3]最简公分母

敲黑板 划重点

注意1 判断一个方程是不是分式方程的关键

看其分母中是否含有未知数,判断时不能对方程进行约分、通分,更不能用等式的性质对方程进行变形.

注意2 分式方程可以转化为整式方程.

注意3 如果分式的分子是多项式,去分母时,要给多项式加上括号.

注意4 (1)用最简公分母乘方程两边各项时,不要漏乘不含分母的项.

(2)解分式方程可能产生不是原分式方程的解,所以检验是解分式方程的必要步骤.

注意5 选择合适的等量关系

在实际问题中,有时题目中包含多个等量关系,在列分式方程时,一定要选择一个能够体现全部(或大部分)题意的等量关系列方程.

注意6 (1)列分式方程解应用题时,一定不要忘记检验;

(2)实际问题中要舍去不符合实际意义的分式方程的解.

题型过关 全提升

题型1 解分式方程

解分式方程的基本思路是将分式方程转化为整式方程，若直接去分母，出现未知数的次数高于三次的话，可将方程两边分别通分，再去分母，解方程.

例题1 解方程：$\frac{1}{x-7}-\frac{1}{x-5}=\frac{1}{x-6}-\frac{1}{x-4}$.

【分析】两边各自通分，再去分母.

【解】整理，得$\frac{(x-5)-(x-7)}{(x-5)(x-7)}=\frac{(x-4)-(x-6)}{(x-6)(x-4)}$，

$(x-6)(x-4)=(x-7)(x-5)$，

$x^2-10x+24=x^2-12x+35$，

解得$x=\frac{11}{2}$.

检验：当$x=\frac{11}{2}$时，$(x-7)(x-5)(x-4)(x-6)\neq 0$，

$\therefore x=\frac{11}{2}$是原分式方程的解.

变式练 刷重点

变式练1 解方程：$\frac{1}{x+10}+\frac{1}{(x+1)(x+2)}+\frac{1}{(x+2)(x+3)}+\cdots+\frac{1}{(x+9)(x+10)}=2$.

答案见P54

题型2 利用分式方程的解的情况确定字母的取值范围

分式方程无解的原因有两种：

(1)去分母后化成的整式方程无解；

(2)整式方程有解，但这个解使原方程的最简公分母为0.

将分式方程的解用字母系数表示出来，再利用限制条件确定关于字母系数的不等式(组)是解此类问题的关键.

例题2 若解关于x的分式方程$\frac{2}{x-2}+\frac{mx}{x^2-4}=\frac{3}{x+2}$会产生增根，求$m$的值.

【分析】先将分式方程去分母转化为整式方程，再根据分式方程有增根可求出m的值.

【解】去分母，得$2x+4+mx=3x-6$，

由于分式方程有增根，得$(x+2)(x-2)=0$，$\therefore x^2-4=0$，$\therefore x^2=4$.

$\because (\pm 2)^2=4$，$\therefore x=\pm 2$.

当$x=2$时，$4+4+2m=0$，解得$m=-4$；

当$x=-2$时，$-2m=-12$，解得$m=6$.

综上，m的值是-4或6.

变式练2 已知关于x的方程$\frac{2x+m}{x-2}=3$的解是非负数，求m的取值范围.

答案见P54

题型3 利用分式方程解决实际问题

例题3 某学校在某商场购买甲、乙两种不同的足球，购买甲种足球共花费2 000元，购买乙种足球共花费1 400元，购买甲种足球的数量是购买

乙种足球数量的2倍，且购买一个乙种足球比购买一个甲种足球多花20元.

(1)求购买一个甲种足球、一个乙种足球各需多少元；

(2)如果这所学校决定再次购买甲、乙两种足球共50个，恰逢该商场对两种足球的售价进行调整，甲种足球售价比第一次购买时提高了10%，乙种足球售价比第一次购买时降低了10%. 如果此次购买甲、乙两种足球的总费用不超过2 910元，那么这所学校最多可购买多少个乙种足球？

【分析】(1)设购买一个甲种足球需要x元，则购买一个乙种足球需要$(x+20)$元，根据“数量=总价÷单价”，结合购买甲种足球的数量是购买乙种足球数量的2倍，即可得出关于x的分式方程；

(2)设可购买m个乙种足球，则购买$(50-m)$个甲种足球，根据“总价=单价×数量”，结合此次购买甲、乙两种足球的总费用不超过2 910元，即可列出关于m的一元一次不等式，解之取m的最大值即可得出结论.

【解】(1)设购买一个甲种足球需要x元，则购买一个乙种足球需要$(x+20)$元.

根据题意，得$\frac{2\,000}{x}=2\times\frac{1\,400}{x+20}$，

解得$x=50$.

经检验，$x=50$是原方程的解，且符合题意，

$\therefore x+20=70$.

答：购买一个甲种足球需要50元，购买一个乙种足球需要70元.

(2)设可购买m个乙种足球，则可购买$(50-m)$个甲种足球.

根据题意，得$50\times(1+10\%)(50-m)+70\times(1-10\%)m\leqslant 2\,910$，

解得$m\leqslant 20$.

答：这所学校最多可购买20个乙种足球.

变式练 刷重点

变式练3 一项工程，甲、乙两公司合作，12天可以完成，如果甲、乙两公司单独完成此项工程，乙公司所用的时间是甲公司的1.5倍. 问：甲、乙两公司单独完成这项工程，各需多少天？

答案见本页

变式练答案

1.【解】整理方程，得$\frac{1}{x+10}+\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+2}+\frac{1}{x+2}-\frac{1}{x+3}+\cdots+\frac{1}{x+9}-\frac{1}{x+10}=2$，

即$\frac{1}{x+1}=2$，去分母，得$2x+2=1$，

解得$x=-\frac{1}{2}$.

经检验$x=-\frac{1}{2}$是分式方程的解.

2.【解】去分母，得$2x+m=3x-6$，解得$x=m+6$.

$\because\begin{cases}x\geqslant 0,\\ x\neq 2,\end{cases}\therefore\begin{cases}m+6\geqslant 0,\\ m+6\neq 2,\end{cases}$

$\therefore m$的取值范围为$m\geqslant -6$且$m\neq -4$.

3.【解】设甲公司单独完成这项工程需x天，则乙公司单独完成这项工程需$1.5x$天.

根据题意，得$\frac{1}{x}+\frac{1}{1.5x}=\frac{1}{12}$，解得$x=20$.

经检验，$x=20$是方程的解且符合题意.

$1.5x=30$.

答：甲、乙两公司单独完成这项工程分别需要20天、30天.

提供各种书籍的 PDF 电子版代找服务，如果您找不到您想要的书的 PDF 电子版，我们可以帮您找到，如有需要，请联系微信、QQ。





PDF 代找说明：

本公司可以帮助您找到您想要的 PDF 电子书。质量都很清晰，只要您提供给我们相关信息，一般都能找到，如果您有需求，请联系我们。

现已经帮助了很多人找到了大家需要的 PDF，其实网上有很多 PDF，大家如果在网上找不到的话，可以联系我们，大部分我们都可以找到。因 PDF 电子书都有版权，请不要随意传播，如果您有经济购买能力，请尽量购买正版。

声明：

本公司只提供代找服务，因寻找 PDF 电子书有一定难度，仅收取代找费用。如因 PDF 产生的版权纠纷，与本公司无关，我们仅仅只是帮助您寻找到您要的 PDF 而已。

第十一章　三角形

11.1　与三角形有关的线段

11.1.1　三角形的边

刷基础

1.C 【解析】图中有5个三角形. 故选C.

2. $\triangle ABD$, $\triangle ADE$, $\triangle ADC$　$\triangle AEC$, $\triangle ADC$, $\triangle ABC$　$\angle ADE$, $\angle AED$, $\angle DAE$

3.C 【解析】根据各类三角形的概念可知,C选项可以表示它们之间的关系. 故选C.

4.B 【解析】$\because |m-n|+(n-p)^2=0$, $\therefore m-n=0$, $n-p=0$, $\therefore m=n$, $n=p$, $\therefore m=n=p$, $\therefore \triangle ABC$ 为等边三角形.

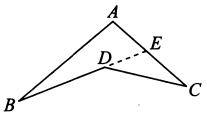
5.D 【解析】A中$2+3=5$,不能构成三角形,故该选项错误;B中$3+3=6$,不能构成三角形,故该选项错误;C中$2+5<8$,不能构成三角形,故该选项错误;D中$4+5>6$,能构成三角形,故该选项正确.

6.C 【解析】根据三角形的三边关系,可得 $\begin{cases}2x>10-2x,\\2x<10,\end{cases}$ 解得$2.5<x<5$. 故选C.

7. $-2a+2b$ 【解析】$\because \triangle ABC$ 的三边长分别是a, b, c, $\therefore$ 必须满足两边之和大于第三边,则$a-b-c<0$, $b-a-c<0$, $\therefore |a-b-c|-|b-a-c|=-a+b+c+b-a-c=-2a+2b$.

8. 【解】由已知得$b-2=0$, $c-3=0$,则$b=2$, $c=3$. 又$|x-4|=2$, $x-4=\pm2$,则$x=6$或$x=2$,即$a=6$或$a=2$. 当$a=6$时,$2+3<6$,故$a=6$舍去;当$a=2$时,$2+3>2>3-2$,故$a=2$符合题意,则$\triangle ABC$的周长为$2+2+3=7$, $\triangle ABC$为等腰三角形.

9. 【证明】如图,延长BD交AC于点E.



$\because AB+AE>BD+DE$,

$\therefore AB+AC>BD+DE+EC$.

$\because DE+CE>CD$,

$\therefore AB+AC>BD+CD$.

刷易错

10. 【解】①若腰长为4,则三角形三边长为4,4,10,$4+4<10$,不符合三角形的三边关系,故腰长不能为4;

②若腰长为10,则三角形三边长为10,10,4,符合三角形的三边关系,此时三角形的周长为24.

综上所述,这个等腰三角形的周长为24.

易错警示 解决本题时应注意分两种情况,而且不能忽略一个重要的条件,即"三角形三边关系需满足任意两边之和大于第三边",对出现的情况应逐一验证,确定取舍.

11.1.2　三角形的高、中线与角平分线 + 11.1.3　三角形的稳定性

刷基础

1.C 【解析】从三角形的一个顶点向它所对的边所在的直线作垂线,顶点和垂足之间的线段叫做三角形的高. 根据三角形高的定义,结合选项可知C正确.

2.C 【解析】选项A的说法符合高的概念,故正确;选项B的说法符合高的概念,故正确;C选项中,DE是$\triangle BDC$, $\triangle BDE$, $\triangle EDC$的高,故错误;选项D的说法符合高的概念,故正确.

3.D 【解析】锐角三角形三条高的交点在三角形内部,直角三角形三条高的交点在三角形直角顶点,钝角三角形三条高的交点在三角形外部. 故选D.

4.B 【解析】根据三角形的面积公式以及三角形的中线定义可知,三角形一边上的中线把原三角形分成了等底同高的两个三角形,所以它们的面积相等.

5. $\triangle ADC$ 【解析】因为$BD=DE=EC$,所以E是CD的中点,所以AE是$\triangle ADC$的中线.

6. 【解】$\because CD$为$\triangle ABC$的边AB上的中线, $\therefore AD=BD$.

$\because \triangle BCD$的周长比$\triangle ACD$的周长长3 cm,

$\therefore (BC+BD+CD)-(AC+AD+CD)=3$ cm,

$\therefore BC-AC=3$ cm.

$\because BC=8$ cm,

$\therefore AC=5$ cm.

7.D 【解析】$\because \angle2=\angle3$, $\therefore AE$是$\triangle ADF$的角平分线;$\because \angle1=\angle2=\angle3=\angle4$, $\therefore \angle1+\angle2=\angle3+\angle4$,即$\angle BAE=\angle CAE$, $\therefore AE$是$\triangle ABC$的角平分线.

8. $10°$ 【解析】$\because AE$平分$\angle BAC$, $\therefore \angle1=\angle EAD+\angle2$, $\therefore \angle EAD=\angle1-\angle2=30°-20°=10°$.

9.B 【解析】选项A、C、D中都构成了三角形,增加了稳定性;选项B中,这根木条钉在E, G两点之间,没有构成三角形,不具有稳定性.

刷易错

10. 【解】设在$\triangle ABC$中,$AB=AC$, BD是中线.

依题意,当$AB>BC$时,$AB-BC=13.5-11.5=2$, $AB=BC+2$,

所以$2(BC+2)+BC=13.5+11.5$.

解得$BC=7$,所以$AB=AC=BC+2=9$.

当$AB<BC$时,$BC-AB=13.5-11.5=2$,

$BC=AB+2$,所以$2AB+AB+2=13.5+11.5$.

解得$AB=\frac{23}{3}$,所以$AC=\frac{23}{3}$, $BC=\frac{23}{3}+2=\frac{29}{3}$.

综上,这个三角形三边的长分别为9 cm, 9 cm, 7 cm或$\frac{23}{3}$ cm, $\frac{23}{3}$ cm, $\frac{29}{3}$ cm.

易错警示 这道题是用文字叙述的形式给出的,没有图形,也没有字母. 因此,可以先根据文字叙述画出图形,标注字母,利用图形减小题目难度. 由于腰和底边不相等造成一腰上的中线把三角形的周长分成两个不相等的部分,因此既要考虑到腰比底边长,又要考虑到底边比腰长.

刷提升

1.B 【解析】$\triangle ABC$中,过点B作AC边的垂线,点B与垂足E之间的线段BE,即为$\triangle ABC$中AC边上的高.

2.C 【解析】$\because CD$, CE, CF分别是$\triangle ABC$的高、角平分线、中线, $\therefore CD\perp BE$, $\angle ACE=\frac{1}{2}\angle ACB$, $AB=2BF$. $\because$ 点E, F不重合, $\therefore AE$与BE不相等.

3.C 【解析】伸缩的拉闸门是利用了四边形的不稳定性,A、B、D选项都利用了三角形的稳定性. 故选C.

4.D 【解析】∠1 = ∠2，∠3 = ∠4，根据角平分线的定义，可知 BD 是△ABC 的角平分线，A 正确；CE 是△BCD 的角平分线，B 正确；∠3 = $\frac{1}{2}$∠ACB，C 正确；CE 是△ABC 的角平分线是错误的，三角形的角平分线是三角形的内角平分线与对边相交，角的顶点与对边交点之间的线段，D 错误.

5.C 【解析】①中，∵ ∠1 = ∠2，∴ AD 平分∠BAC. ∴ 线段 AG 是△ABE 的角平分线，故①正确；②中，∵ G 为 AD 中点，∴ $AG = DG$，∴ 线段 BG 是△ABD 的边 AD 上的中线，故②错误；③中，∵ $BE \perp AC$，∴ $AE \perp BG$，∴ 线段 AE 是△ABG 的边 BG 上的高，故③正确；④中，根据三角形的内角和等于 180°，得∠BFC + ∠FBC + ∠FCB = 180°，又∵ ∠BFC + ∠AFC = 180°，∴ ∠FBC + ∠FCB = ∠AFC，∵ 在△AFH 中，∠AHF = 90°，∴ ∠1 + ∠AFC = 90°，∴ ∠1 + ∠FBC + ∠FCB = 90°，故④正确. 综上所述，正确的个数是 3.

6.2 【解析】∵ AD 是△ABC 的中线，∴ $BD = CD$. ∵ △ABD 的周长为 $AB + AD + BD$，△ACD 的周长为 $AC + CD + AD$，∴ △ABD 的周长 − △ACD 的周长为 $(AB + AD + BD) - (AC + CD + AD) = AB - AC = 2\,016 - 2\,014 = 2$，即△$ABD$ 与△ACD 的周长之差是 2.

7.【证明】∵ AD 是△ABC 的角平分线，

∴ ∠BAD = ∠CAD.

∵ $PM \parallel AC$，$PN \parallel AB$，

∴ ∠APM = ∠PAN，∠APN = ∠PAM.

∴ ∠APM = ∠APN，

∴ PA 平分∠MPN.

刷素养

8. (1)10

(2)【解】第 1 个图中，有 1 个三角形；

第 2 个图中，有 1 + 2 = 3(个)三角形；

第 3 个图中，有 1 + 2 + 3 = 6(个)三角形；

第 4 个图中，有 1 + 2 + 3 + 4 = 10(个)三角形；

第 5 个图中，有 1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15(个)三角形；

……

由此可知：

第 n 个图中，有 $1 + 2 + 3 + 4 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$(个)三角形.

11.2　与三角形有关的角

11.2.1　三角形的内角

课时 1　三角形的内角

刷基础

1.B 【解析】一个三角形中，∵ 有一个角是 55°，∴ 另外两个角的度数和为 125°，各选项中只有 B 选项符合. 故选 B.

2.A 【解析】设第一个内角的度数为 x，则第二个内角的度数为 $\frac{1}{2}x$，第三个内角的度数为 $\frac{1}{6}x$，则 $x + \frac{1}{2}x + \frac{1}{6}x = 180°$，解得 x = 108°，$\frac{1}{2}x = 54°$，$\frac{1}{6}x = 18°$. 故这个三角形的各个内角的度数分别为 108°，54°，18°.

3.60°　70° 【解析】∵ ∠C = 50°，∴ ∠B + ∠A = 130°. 又∵ ∠B − ∠A = 10°，∴ ∠B = 70°，∠A = 60°.

4.40° 【解析】设最小内角的度数为 x，则最大内角的度数为 $2x$，另一个内角的度数为 $2x - 20°$，则 $x + 2x + 2x - 20° = 180°$，解得 x = 40°，即三角形的最小内角的度数是 40°.

5.B 【解析】∵ AD 平分∠BAC，∴ ∠BAD = ∠CAD. ∵ $AB \parallel CD$，∴ ∠BAD = ∠D，∴ ∠CAD = ∠D. 在△ACD 中，∵ ∠C + ∠D + ∠CAD = 180°，∴ 80° + ∠D + ∠CAD = 180°，解得∠D = 50°.

6.C 【解析】∵ CD 是∠ACB 的平分线，∠ACB = 40°，∴ ∠BCD = 20°. 在△BCD 中，∠B = 72°，∠BCD = 20°，∴ ∠BDC = 180° − 72° − 20° = 88°.

7.A 【解析】∵ ∠A = 50°，∴ ∠ABC + ∠ACB = 180° − 50° = 130°. ∵ BE，CF 是△ABC 的角平分线，∴ ∠EBC = $\frac{1}{2}$∠ABC，∠FCB = $\frac{1}{2}$∠ACB，∴ ∠EBC + ∠FCB = $\frac{1}{2} \times (\angle ABC + \angle ACB) = 65°$，∴ ∠$BDC$ = 180° − 65° = 115°. 故选 A.

8.D 【解析】∵ 点 P 是△ABC 的三条角平分线的交点，∴ ∠PBC = $\frac{1}{2}$∠ABC，∠PCA = $\frac{1}{2}$∠ACB，∠PAB = $\frac{1}{2}$∠BAC. ∵ ∠ABC + ∠ACB + ∠BAC = 180°，∴ ∠PBC + ∠PCA + ∠PAB = 90°. 故选 D.

9.100° 【解析】∵ $EC \perp AC$，∠E = 50°，∴ ∠DAC = 40°. ∵ AD 平分∠BAC，∴ ∠BAD = ∠DAC = 40°. ∵ ∠B = 60°，∴ ∠ADB = 180° − 60° − 40° = 80°，∴ ∠ADC = 180° − 80° = 100°.

10.【解】∵ ∠B = 50°，∠C = 70°，

∴ ∠BAC = 180° − ∠B − ∠C = 180° − 50° − 70° = 60°.

∵ AD 是△ABC 的角平分线，

∴ $\angle BAD = \frac{1}{2}\angle BAC = \frac{1}{2} \times 60° = 30°$.

∵ $DE \perp AB$，∴ ∠DEA = 90°，

∴ ∠EDA = 180° − ∠BAD − ∠DEA = 180° − 30° − 90° = 60°.

刷易错

11.【解】①当△ABC 为锐角三角形时，如图(1). 在△ABC 中，

∵ BD 是 AC 边上的高(已知)，∴ ∠ADB = 90°(垂直的定义).

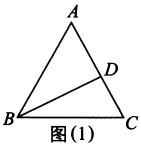
又∵ ∠ABD = 30°(已知)，

∴ ∠A = 180° − ∠ADB − ∠ABD = 180° − 90° − 30° = 60°.

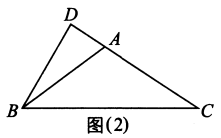
又∵ ∠A + ∠ABC + ∠C = 180°(三角形内角和定理)，

∴ ∠ABC + ∠C = 120°.

又∵ ∠ABC = ∠C，∴ ∠C = 60°.



图(1)



图(2)

②当△ABC 为钝角三角形时，如图(2).

在直角三角形 ABD 中，∵ ∠ABD = 30°(已知)，∴ ∠BAD = 60°.

∴ ∠BAC = 120°.

又∵ ∠BAC + ∠ABC + ∠C = 180°(三角形内角和定理)，

∴ ∠ABC + ∠C = 60°.

又∵ ∠ABC = ∠C，∴ ∠C = 30°.

综上所述，∠C 的度数是 60°或 30°.

易错警示 本题易忽略△ABC 为钝角三角形时的情况. 事实上，在解决无图的几何题的过程中，只有正确作出图形才能解决问题. 这就要求解答者必须具备根据条件作出图形的能力，要注意考虑图形的完整性和其他各种可能性，双解和多解问题也是我们在学习过程中应该注意的一个重要环节.

课时2　直角三角形的性质与判定

刷基础

1.C 【解析】∵ $\angle C=90°$，∴ $\angle A+\angle B=90°$. ∵ $\angle B=40°$，∴ $\angle A=50°$.

2.D 【解析】设这个锐角的度数是 x，则另一个锐角的度数是 $90°-x$. 由题意得，$x=4(90°-x)$，解得 $x=72°$，所以，这个锐角的度数是 72°.

3.C 【解析】因为 $\angle 1+\angle BCD=\angle ACB=90°$，所以 $\angle 1$ 与 $\angle BCD$ 互余；因为 $CD\perp AB$，所以 $\angle CDA=90°$，所以 $\angle 1+\angle A=90°$，所以 $\angle 1$ 与 $\angle A$ 互余.

4.115° 【解析】∵ $\angle C=90°$，$\angle A=40°$，∴ $\angle ABC=50°$. 又∵ BD 是 $\angle ABC$ 的平分线，∴ $\angle ABD=25°$，∴ $\angle ADB=180°-\angle A-\angle ABD=115°$.

5.26° 【解析】∵ $CD\perp AB$，∴ $\angle BDC=90°$. ∵ $\angle B=20°$，∴ $\angle BCD=90°-20°=70°$. ∵ $\angle ACB=96°$，∴ $\angle ACD=\angle ACB-\angle BCD=96°-70°=26°$.

6.135 【解析】∵ $\triangle ABC$ 是直角三角形，∴ $\angle BAC+\angle ABC=90°$，又∵ AM，BN 分别为 $\angle BAC$，$\angle ABC$ 的平分线，∴ $\angle BAM+\angle NBA=45°$，∴ $\angle AOB=180°-(\angle BAM+\angle NBA)=135°$.

7.60°或90° 【解析】若 $\angle APO$ 是直角，则 $\angle A=90°-\angle AON=90°-30°=60°$；若 $\angle APO$ 是锐角，∵ $\angle AON=30°$ 是锐角，∴ $\angle A=90°$. 综上所述，$\angle A=60°$ 或 90°.

8.【解】∵ $\angle APE+\angle EPD=180°$，$\angle EPD=125°$，
∴ $\angle APE=55°$.
∵ $\angle APB=180°-\angle APE=180°-\angle BAP-\angle ABP$，
∴ $\angle BAP+\angle ABP=55°$.
∵ $\angle BAD+\angle ABD=90°$，$\angle ABD=2\angle ABP$，
∴ $\angle ABP=35°$，$\angle ABD=70°$，
∴ $\angle BAD=90°-70°=20°$.

9.(1)【证明】∵ $CD\perp AB$，$EF\perp AB$，∴ $\angle CDB=\angle FEB=90°$，
∴ $CD\parallel EF$.
(2)【解】∵ $CD\perp AB$，
∴ $\angle ACD=90°-70°=20°$.
∵ $\angle ACB=90°$，CE 平分 $\angle ACB$，
∴ $\angle ACE=45°$，∴ $\angle DCE=45°-20°=25°$.
∵ $CD\parallel EF$，∴ $\angle FEC=\angle DCE=25°$.

10.B 【解析】∵ $\angle B$ 与 $\angle C$ 互余，∴ $\angle B+\angle C=90°$. 在 $\triangle ABC$ 中，$\angle A=180°-(\angle B+\angle C)=180°-90°=90°$，∴ $\triangle ABC$ 是直角三角形.

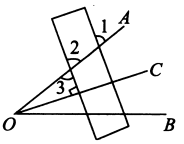
11.C 【解析】设 $\angle A$，$\angle B$，$\angle C$ 的度数分别为 x，$3x$，$4x$，$x>0$，则 $x+3x+4x=180°$，解得 $x=22.5°$，则 $\angle C=4x=4\times22.5°=90°$，所以 $\triangle ABC$ 一定是直角三角形，故选 C.

12.①②③ 【解析】①∵ $\angle A+\angle B=\angle C$，$\angle A+\angle B+\angle C=180°$，∴ $2\angle C=180°$，$\angle C=90°$，则该三角形是直角三角形；②∵ $\angle A:\angle B:\angle C=1:2:3$，$\angle A+\angle B+\angle C=180°$，∴ $\angle C=90°$，则该三角形是直角三角形；③ $\angle A=90°-\angle B$，则 $\angle A+\angle B=90°$，$\angle C=90°$，则该三角形是直角三角形；④ $\angle A=\angle B=\angle C$，则该三角形是等边三角形. 故能确定 $\triangle ABC$ 是直角三角形的条件有①②③.

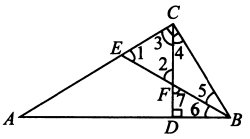
刷提升

1.A 【解析】∵ AD 是 BC 边上的高，$\angle ABC=60°$，∴ $\angle BAD=30°$. ∵ $\angle BAC=50°$，AE 平分 $\angle BAC$，∴ $\angle BAE=25°$，∴ $\angle DAE=30°-25°=5°$. 在 $\triangle ABC$ 中，∵ $\angle C=180°-\angle ABC-\angle BAC=70°$，∴ $\angle EAD+\angle ACD=5°+70°=75°$. 故选 A.

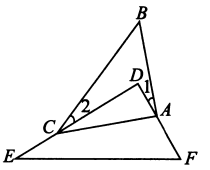
2.B 【解析】如图所示，根据题意得 $\angle 1=\angle 2=\angle 3$. ∵ OC 平分 $\angle AOB$，∴ $\angle AOC=\frac{1}{2}\angle AOB=20°$，∴ $\angle 3=90°-20°=70°$，∴ $\angle 1=70°$.



3.A 【解析】如图所示，∵ BE 平分 $\angle ABC$，∴ $\angle 5=\angle 6$，∵ $\angle 3+\angle 4=90°$，$\angle A+\angle 3=90°$，∴ $\angle A=\angle 4$，∴ ①正确；若 $\angle FCB=\angle FBC$，即 $\angle 4=\angle 5$，又∵ $\angle A=\angle 4$，∴ $\angle A=\angle 5=\angle 6$，∵ $\angle A+\angle 5+\angle 6=90°$，∴ $\angle A=30°$，即只有当 $\angle A=30°$ 时，$\angle FCB=\angle FBC$，而已知没有这个条件，故②错误；∵ $\angle 5=\angle 6$，$\angle 2=\angle 7$，$\angle 5+\angle 1=90°$，$\angle 6+\angle 7=90°$，∴ $\angle 1=\angle 2$，∴ $\angle 2+\angle 5=90°$，即 $\angle CFE$ 与 $\angle CBF$ 互余，故③正确.



4.B 【解析】∵ 图中是一副直角三角板，∴ $\angle B=\angle ACB=45°$，$\angle BAC=\angle EDF=90°$，$\angle E=30°$，$\angle F=60°$，∴ $\angle BCA+\angle BAC=45°+90°=135°$. ∵ $\angle EDF=90°$，∴ $\angle DCA+\angle DAC=90°$，∴ $\angle 1+\angle 2=(\angle BCA+\angle BAC)-(\angle DCA+\angle DAC)=135°-90°=45°$.



5.A 【解析】∵ AD 是斜边 BC 上的高，$DE\perp AC$，$DF\perp AB$，∴ $\angle C+\angle B=90°$，$\angle BDF+\angle B=90°$，$\angle BAD+\angle B=90°$，∴ $\angle C=\angle BDF=\angle BAD$. ∵ $\angle DAC+\angle C=90°$，$\angle DAC+\angle ADE=90°$，∴ $\angle C=\angle ADE$，∴ 图中与 $\angle C$（$\angle C$ 除外）相等的角的个数是 3.

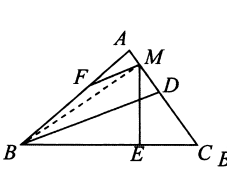
6.135° 【解析】∵ $\triangle ABC$ 是直角三角形，∴ $\angle BAC+\angle ABC=90°$. 又∵ AM，BN 分别为 $\angle BAC$，$\angle ABC$ 的平分线，∴ $\angle BAM+\angle NBA=45°$，∴ $\angle AOB=180°-(\angle BAM+\angle NBA)=135°$.

7.直角三角形 【解析】∵ DE，DF 分别是 $\triangle ADB$ 和 $\triangle ADC$ 的角平分线，∴ $\angle ADE=\frac{1}{2}\angle ADB$，$\angle ADF=\frac{1}{2}\angle ADC$，∴ $\angle EDF=\angle ADE+\angle ADF=\frac{1}{2}(\angle ADB+\angle ADC)=90°$，∴ $\triangle DEF$ 是直角三角形.

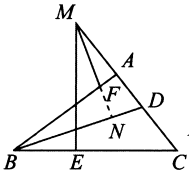
8.40°或15° 【解析】①当这两个角是锐角时，设直角三角形中一个锐角为 x，另一个锐角为 $2x-60°$，根据两个锐角之和为 90°可得 $x+2x-60°=90°$，解得 $x=50°$，较小角为 $90°-50°=40°$；②设当一个角是锐角，另一个角是直角时，一个锐角为 y，则有 $2y-60°=90°$，解得 $y=75°$，∴ 另一个锐角为 15°，较小的角为 15°.

刷素养

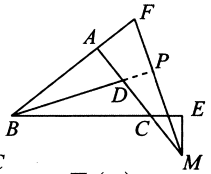
9.【解】(1) $BD\parallel MF$. 理由如下：
如图(1)，连接 BM.
在 $\triangle ABM$ 和 $\triangle BME$ 中，∵ $\angle A=90°$，$ME\perp BC$，∴ $\angle ABM+\angle AMB+\angle MBE+\angle BME=\angle ABC+\angle AME=360°-90°\times2=180°$.
∵ BD 平分 $\angle ABC$，MF 平分 $\angle AME$，
∴ $\angle ABD=\frac{1}{2}\angle ABC$，$\angle AMF=\frac{1}{2}\angle AME$，
∴ $\angle ABD+\angle AMF=\frac{1}{2}(\angle ABC+\angle AME)=90°$.
又∵ $\angle AFM+\angle AMF=90°$，∴ $\angle ABD=\angle AFM$，∴ $BD\parallel MF$.



图(1)



图(2)



图(3)

(2) $BD\perp MF$. 理由如下：
如图(2)，延长 MF 与 BD 交于点 N.

∵ $\angle A=90°$, $ME\perp BC$,

∴ $\angle ABC+\angle C=\angle AME+\angle C=90°$, ∴ $\angle ABC=\angle AME$.

∵ BD 平分 $\angle ABC$, MF 平分 $\angle AME$, ∴ $\angle ABD=\angle AMF$.

∵ $\angle ABD+\angle ADB=90°$, ∴ $\angle AMF+\angle ADB=90°$,

∴ $\angle MND=90°$, ∴ $BD\perp MF$.

(3) $BD\perp MF$. 理由如下:

如图(3),延长 BD 交 FM 于点 P.

∵ $\angle A=90°$, $ME\perp BC$, ∴ $\angle ABC+\angle ACB=\angle AME+\angle MCE=90°$. 又∵ $\angle ACB=\angle MCE$, ∴ $\angle ABC=\angle AME$.

∵ BD 平分 $\angle ABC$, MF 平分 $\angle AME$, ∴ $\angle ABD=\angle AMF$. ∵ $\angle AMF+\angle F=90°$, ∴ $\angle ABD+\angle F=90°$, ∴ $\angle BPF=90°$, ∴ $BD\perp MF$.

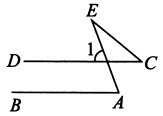
11.2.2 三角形的外角

刷基础

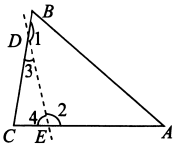
1. C 【解析】$\angle A=\angle ACD-\angle B=120°-20°=100°$.

2. B 【解析】∵ $\angle 2$ 是三角形的一个外角, $\angle 1$ 是此三角形的一个内角,且 $\angle 1$ 与 $\angle 2$ 不相邻, ∴ $\angle 2>\angle 1$.

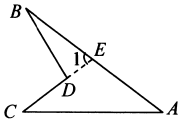
3. A 【解析】如图, ∵ $AB/\!/CD$, $\angle A=70°$, ∴ $\angle 1=\angle A=70°$, ∵ $\angle 1=\angle C+\angle E$, $\angle C=40°$, ∴ $\angle E=\angle 1-\angle C=70°-40°=30°$.



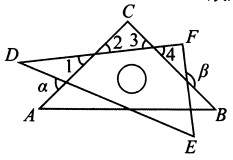
4. B 【解析】如图, ∵ $\angle 1$, $\angle 2$ 是 $\triangle CDE$ 的外角, ∴ $\angle 1=\angle 4+\angle C$, $\angle 2=\angle 3+\angle C$, 即 $\angle 1+\angle 2=\angle C+(\angle C+\angle 3+\angle 4)=80°+180°=260°$.



5. B 【解析】如图,延长 CD 交 AB 于点 E. ∵ $\angle C=38°$, $\angle A=37°$, ∴ $\angle 1=\angle C+\angle A=38°+37°=75°$. ∵ $\angle BDC=98°$, ∴ $\angle B=\angle BDC-\angle 1=98°-75°=23°$.



6. B 【解析】如图, $\angle\alpha=\angle 1+\angle D$, $\angle\beta=\angle 4+\angle F$, ∴ $\angle\alpha+\angle\beta=\angle 1+\angle D+\angle 4+\angle F=\angle 2+\angle D+\angle 3+\angle F=\angle 2+\angle 3+30°+90°=210°$. 故选 B.



7. 85° 【解析】∵ $\angle ACE=60°$, CE 是 $\triangle ABC$ 的外角 $\angle ACD$ 的平分线, ∴ $\angle ACD=2\angle ACE=120°$. ∵ $\angle ACD=\angle A+\angle B$, $\angle B=35°$, ∴ $\angle A=\angle ACD-\angle B=85°$.

8. 180 【解析】∵ $\angle D+\angle 3=\angle CAB$, $\angle E+\angle 1=\angle ABC$, $\angle F+\angle 2=\angle ACB$, ∴ $\angle D+\angle E+\angle F+\angle 1+\angle 2+\angle 3=\angle CAB+\angle ABC+\angle ACB=180°$.

9. 【解】设 $\angle 1=\angle 2=x$, 则 $\angle 3=\angle 4=2x$.

∵ $\angle BAC=63°$, ∴ $\angle 2+\angle 4=117°$, 即 $x+2x=117°$.

∴ $x=39°$. ∴ $\angle 3=\angle 4=78°$, $\angle DAC=180°-\angle 3-\angle 4=24°$.

10. (1) 45° 【解析】∵ $\angle C=90°$, ∴ $\angle ABC+\angle BAC=90°$. ∵ BD 平分 $\angle ABC$, AP 平分 $\angle BAC$, ∴ $\angle BAP+\angle ABP=\frac{1}{2}\angle BAC+\frac{1}{2}\angle ABC=\frac{1}{2}(\angle BAC+\angle ABC)=45°$. ∴ $\angle APD=\angle BAP+\angle ABP=45°$.

(2)【解】∵ $\angle BDC=58°$, ∴ $\angle DBC=180°-90°-58°=32°$.

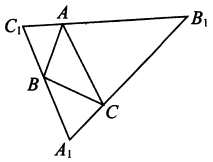
∵ BD 平分 $\angle ABC$,

∴ $\angle ABD=\angle DBC=32°$,

∴ $\angle BAP=\angle APD-\angle ABD=45°-32°=13°$.

刷提升

1. C 【解析】如图, A_1, B_1, C_1 分别是 $\triangle ABC$ 三条外角平分线的交点.



∴ $\angle B_1AC+\angle B_1CA=\frac{1}{2}(\angle BAC+\angle BCA+\angle ABC+\angle ABC)=\frac{1}{2}(180°+\angle ABC)$, ∴ $\angle B_1=180°-\frac{1}{2}(180°+\angle ABC)=90°-\frac{1}{2}\angle ABC<90°$. 同理, $\angle C_1=90°-\frac{1}{2}\angle ACB<90°$, $\angle A_1=90°-\frac{1}{2}\angle BAC<90°$, ∴ $\triangle A_1B_1C_1$ 一定是锐角三角形. 故选 C.

2. C 【解析】∵ $CE\perp AF$ 于点 E, ∴ $\angle FED=90°$. ∵ $\angle F=40°$, ∴ $\angle EDF=180°-\angle FED-\angle F=180°-90°-40°=50°$. ∵ $\angle EDF=\angle CDB$, ∴ $\angle CDB=50°$. ∵ $\angle C=20°$, $\angle FBA$ 是 $\triangle BDC$ 的外角, ∴ $\angle FBA=\angle CDB+\angle C=50°+20°=70°$.

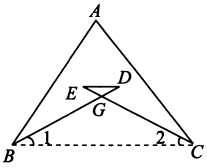
3. D 【解析】$\angle BA_1C+\angle A_1BC=\angle A_1CD$, $2\angle A_1CD=\angle ACD=\angle BAC+\angle ABC$, 所以 $2(\angle BA_1C+\angle A_1BC)=\angle BAC+\angle ABC$, $2\angle BA_1C+2\angle A_1BC=\angle BAC+\angle ABC$. 因为 $2\angle A_1BC=\angle ABC$, 所以 $2\angle BA_1C=\angle BAC$. 同理,可得 $2\angle BA_2C=\angle BA_1C$, $2\angle BA_3C=\angle BA_2C$, $2\angle BA_4C=\angle BA_3C$, $2\angle BA_5C=\angle BA_4C$, 所以 $\angle BA_5C=\frac{1}{2}\angle BA_4C=\frac{1}{4}\angle BA_3C=\frac{1}{8}\angle BA_2C=\frac{1}{16}\angle BA_1C=\frac{1}{32}\angle BAC=96°\div 32=3°$.

4. 50° 【解析】∵ $\angle BCP=\frac{1}{2}\angle BCE=\frac{1}{2}(\angle A+\angle CBA)$, $\angle CBP=\frac{1}{2}\angle CBD=\frac{1}{2}(\angle A+\angle ACB)$, ∴ $\angle BCP+\angle CBP=\angle A+\frac{1}{2}(\angle CBA+\angle ACB)$. 又∵ $\angle BCP+\angle CBP=180°-\angle BPC$, $\angle CBA+\angle ACB=180°-\angle A$, ∴ $180°-\angle BPC=\angle A+\frac{1}{2}(180°-\angle A)$,

∴ $\angle BPC=90°-\frac{1}{2}\angle A$. ∵ $\angle A=80°$, ∴ $\angle BPC=50°$.

5. 3 : 2 : 1 【解析】设 $\angle\alpha=3x°$, $\angle\beta=4x°$, $\angle\gamma=5x°$, 则 $3x+4x+5x=360$, 解得 $x=30$, 即 $\angle\alpha=90°$, $\angle\beta=120°$, $\angle\gamma=150°$, ∴ $\angle BAC=180°-90°=90°$, $\angle ABC=180°-120°=60°$, $\angle ACB=180°-150°=30°$, ∴ $\angle BAC:\angle ABC:\angle ACB=3:2:1$.

6. 180° 【解析】如图,连接 BC,易知 $\angle D+\angle E=\angle 1+\angle 2$, ∴ $\angle A+\angle ABD+\angle ACE+\angle D+\angle E=\angle A+\angle ABD+\angle ACE+\angle 1+\angle 2=\angle A+\angle ABC+\angle ACB=180°$.



刷素养

7. (1)【证明】∵ $\angle ACB=90°$, CD 是高,

∴ $\angle B+\angle CAB=90°$, $\angle ACD+\angle CAB=90°$,

∴ $\angle B=\angle ACD$.

∵ AE 是角平分线,

∴ $\angle CAF=\angle DAF$.

$\because \angle CFE = \angle CAF + \angle ACD$, $\angle CEF = \angle DAF + \angle B$,

$\therefore \angle CFE = \angle CEF$.

【解】(2) $\angle CFE = \angle CEF$. 理由如下：

$\because AF$ 为 $\angle BAG$ 的平分线，$\therefore \angle GAF = \angle DAF$.

$\because CD$ 为边 AB 上的高，

$\therefore \angle ADF = \angle ACE = 90°$.

又 $\because \angle CAE = \angle GAF$,

$\therefore \angle CEF = \angle CFE$.

(3) $\angle M + \angle CFE = 90°$. 理由如下：

$\because C, A, G$ 三点共线，AE, AN 为角平分线，

$\therefore \angle EAN = 90°$.

又 $\because \angle GAN = \angle CAM$,

$\therefore \angle MAE = 90°$, $\therefore \angle M + \angle CEF = 90°$.

$\because \angle CEF = \angle EAB + \angle B$, $\angle CFE = \angle EAC + \angle ACD$, $\angle ACD = \angle B$,

$\therefore \angle CEF = \angle CFE$,

$\therefore \angle M + \angle CFE = 90°$.

11.3 多边形及其内角和

11.3.1 多边形

刷基础

1. C 【解析】由一些线段首尾顺次连接组成的封闭图形叫做多边形，①不正确；易知②③正确，故选 C.

2. D 【解析】根据凸多边形的概念：画出多边形任意一条边所在直线，如果整个多边形都在这条直线的同一侧，那么这个多边形就是凸多边形. 可知选项 D 中的图形不是凸多边形.

3. C 【解析】设这个多边形有 n 条边，由题意得 $n - 3 = 4$，解得 $n = 7$，则这个多边形是七边形.

4. $n-2$ 【解析】从 n 边形的一个顶点出发，可以画 $(n-3)$ 条对角线，这些对角线将该 n 边形分成 $(n-2)$ 个三角形.

5. 13 【解析】$\because$ 过 m 边形的一个顶点有 7 条对角线，n 边形没有对角线，$\therefore m - 3 = 7$, $n = 3$. $\therefore m = 10$, $n = 3$, $\therefore m + n = 13$，故答案为 13.

6. 【解】$\because$ 四边形的对角线条数为 $4 \times (4-3) \times \frac{1}{2} = 2$,

五边形的对角线条数为 $5 \times (5-3) \times \frac{1}{2} = 5$,

六边形的对角线条数为 $6 \times (6-3) \times \frac{1}{2} = 9$,

$\therefore$ 十边形的对角线条数为 $10 \times (10-3) \times \frac{1}{2} = 35$,

n 边形的对角线条数为 $\frac{1}{2}n(n-3)$.

7. C 【解析】根据正多边形的定义：各个内角都相等，各条边长都相等的多边形叫做正多边形，两个条件缺一不可. 满足条件的只有 C 选项. 故选 C.

8. B 【解析】①各边相等是正确的；②各个内角相等是正确的；③各个外角相等是正确的；④各条对角线不一定相等；⑤从正 n 边形一个顶点引出的对角线将 n 边形分成 $(n-2)$ 个三角形，而这 $(n-2)$ 个三角形的面积不一定相等. 综上，正确的说法有 3 个.

9. $n(n+1)$ 【解析】$\because$ ①正三角形“扩展”而来的多边形的边数是 $12 = 3 \times 4$，②正四边形“扩展”而来的多边形的边数是 $20 = 4 \times 5$，③正五边形“扩展”而来的多边形的边数是 $30 = 5 \times 6$，④正六边形“扩展”而来的多边形的边数是 $42 = 6 \times 7$，$\therefore$ 正 n 边形“扩展”而来的多边形的边数为 $n(n+1)$.

10. 【解】设这个正多边形的边数为 n，则 $n - 3 = 4$，$\therefore n = 7$. 设这个正多边形的边长为 x，则 $7x = 56$，$\therefore x = 8$. $\therefore$ 这个正多边形的边长为 8.

11. 【解】小正三角形和正六边形的各边都分别相等，且每个小正三角形与正六边形均有公共边，$\therefore AD = DK = KB$. 又 $\because AD + DK + KB = 12$，$\therefore 3AD = 12$. $\therefore AD = 4$，即剪去的小正三角形的边长是 4.

11.3.2 多边形的内角和

刷基础

1. C 【解析】$\angle D = 360° - (\angle A + \angle B + \angle C) = 360° - 260° = 100°$.

2. B 【解析】根据题意列方程，得 $(n-2) \times 180° = 1\,260°$，解得 $n = 9$. 故选 B.

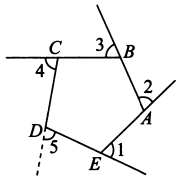
3. 900° 【解析】七边形的内角和是 $180° \times (7-2) = 900°$.

4. 【解】连接 AD. $\because AF \parallel CD$, $AB \parallel DE$, $\therefore \angle FAD = \angle ADC$, $\angle BAD = \angle ADE$, $\therefore \angle CDE = \angle BAF = 100°$. $\because \angle ABC + \angle DCB + \angle BAD + \angle ADC = 360°$, $\angle FAB = \angle FAD + \angle BAD = \angle ADC + \angle BAD = 100°$, $\therefore \angle ABC = 360° - 120° - 100° = 140°$.

5. C 【解析】$\because$ 这个正多边形的外角和为 360°，$\therefore$ 这个正多边形的边数是 $360° \div 45° = 8$.

6. 60° 【解析】$360° \div 6 = 60°$.

7. 290° 【解析】$\because \angle D = 110°$, $\therefore \angle 5 = 180° - 110° = 70°$. $\because \angle 1 + \angle 2 + \angle 3 + \angle 4 + \angle 5 = 360°$, $\therefore \angle 1 + \angle 2 + \angle 3 + \angle 4 = 360° - 70° = 290°$.



8. A 【解析】设多边形的边数为 n，根据题意得 $(n-2) \cdot 180° = 360°$，解得 $n = 4$.

9. C 【解析】$\because$ 正多边形的一个内角为 135°，$\therefore$ 外角是 $180° - 135° = 45°$，$\because 360° \div 45° = 8$，则这个正多边形是正八边形，$\therefore$ 这个正多边形的周长为 $2 \times 8 = 16$.

10. 11 【解析】根据题意，得 $(n-2) \cdot 180 - 360 = 1\,260$，解得 $n = 11$.

11. 【解】设这个五边形五个内角的度数分别为 $4x, 4x, 5x, 5x, 6x$.

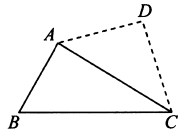
则 $4x + 4x + 5x + 5x + 6x = 540°$，解得 $x = 22.5°$.

$\therefore$ 这个五边形五个内角的度数分别为 90°，90°，112.5°，112.5°，135°，对应的五个外角的度数分别为 90°，90°，67.5°，67.5°，45°.

$\therefore$ 该五边形各外角对应度数之比为 4∶4∶3∶3∶2.

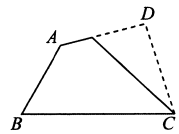
刷易错

12. 【解】如图(1)，剩余部分是三角形，其内角和为 180°.



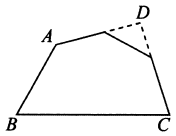
图(1)

如图(2)，剩余部分是四边形，其内角和为 360°.



图(2)

如图(3),剩余部分是五边形,其内角和为540°.



图(3)

易错警示 从不同的位置截角所剩下的多边形的边数也不同,一定要分类讨论,防止漏解.

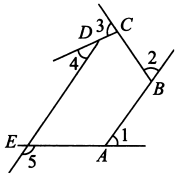
刷提升

1.A 【解析】当剪去一个角后,剩下的部分是一个十八边形,则这张纸片原来的形状可能是十八边形或十七边形或十九边形,不可能是十六边形. 故选 A.

2.B 【解析】在正五边形 $ABCDE$ 中,$\angle C=\frac{1}{5}\times(5-2)\times180°=108°$. ∵ 正五边形 $ABCDE$ 的边 $BC=CD$,∴ $\angle CBD=\angle CDB$,∴ $\angle CDB=\frac{1}{2}(180°-108°)=36°$. ∵ $AF\parallel CD$,∴ $\angle DFA=\angle CDB=36°$.

3.D 【解析】A 中外角是 $180°\times\frac{1}{3}=60°$,$360°\div60°=6$,故可能;B 中外角是 $180°\times\frac{1}{2}=90°$,$360°\div90°=4$,故可能;C 中外角是 $180°\times\frac{2}{7}=\frac{360°}{7}$,$360°\div\frac{360°}{7}=7$,故可能;D 中外角是 $180°\times\frac{4}{9}=80°$,$360°\div80°=4.5$,故不可能.

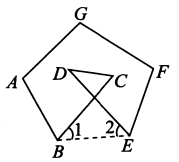
4.B 【解析】如图,由多边形的外角和等于360°可知,$\angle1+\angle2+\angle3+\angle4+\angle5=360°$,又∵ $\angle1+\angle2+\angle3+\angle4=225°$,∴ $\angle5=135°$,∴ $\angle AED=45°$,又∵ $ED\parallel AB$,∴ $\angle1=\angle AED=45°$.



5.95° 【解析】∵ $MF\parallel AD$,$FN\parallel DC$,∴ $\angle BMF=\angle A=100°$,$\angle BNF=\angle C=70°$. ∵ $\triangle BMN$ 沿 MN 翻折得到 $\triangle FMN$,∴ $\angle BMN=\frac{1}{2}\angle BMF=\frac{1}{2}\times100°=50°$,$\angle BNM=\frac{1}{2}\angle BNF=\frac{1}{2}\times70°=35°$. 在 $\triangle BMN$ 中,$\angle B=180°-(\angle BMN+\angle BNM)=180°-(50°+35°)=180°-85°=95°$.

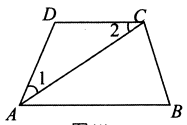
6.40° 【解析】∵ $\angle1$,$\angle2$,$\angle3$,$\angle4$ 的外角和为 220°,∴ $\angle1+\angle2+\angle3+\angle4+220°=4\times180°$,∴ $\angle1+\angle2+\angle3+\angle4=500°$. ∵ 五边形 $OAGFE$ 的内角和为 $(5-2)\times180°=540°$,∴ $\angle1+\angle2+\angle3+\angle4+\angle BOD=540°$,∴ $\angle BOD=540°-500°=40°$.

7.【解】 如图,连接 BE,则 $\angle1+\angle2=\angle D+\angle C$,∴ $\angle A+\angle B+\angle C+\angle D+\angle E+\angle F+\angle G=\angle A+\angle B+\angle1+\angle2+\angle E+\angle F+\angle G=(5-2)\times180°=540°$.



刷素养

8.【解】 (1)$AB\parallel CD$. 证明:



图(1)

∵ AC 平分 $\angle DAB$,∴ $\angle1=\angle CAB$.

∵ $\angle1=\angle2$,∴ $\angle2=\angle CAB$,

∴ $AB\parallel CD$.

(2)由(1)可知 $AB\parallel CD$,∵ CE 平分 $\angle DCA$,

∴ 可设 $\angle DCE=\angle ACE=\alpha$,则 $\angle CAB=2\alpha$.

∵ $\angle ACB=\angle ABC$,

∴ 在 $\triangle ABC$ 中,$\angle ACB=\frac{1}{2}(180°-2\alpha)=90°-\alpha$,

∴ $\angle BCE=\angle ACB+\angle ACE=90°-\alpha+\alpha=90°$.

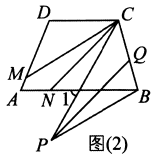
∵ CF 平分 $\angle ECB$,

∴ $\angle ECF=\frac{1}{2}\angle BCE=45°$.

(3)结论②正确. 理由如下:

如图(2),根据三角形外角的性质,可得 $\angle1=\angle BPC+\angle ABP$.

∵ PQ 平分 $\angle BPC$,CM 平分 $\angle DCP$,



图(2)

∴ $\angle CPQ=\frac{1}{2}\angle BPC$,$\angle MCP=\frac{1}{2}\angle DCP$.

∵ $AB\parallel CD$,∴ $\angle1=\angle DCP$,

∴ $\angle MCP=\frac{1}{2}(\angle BPC+\angle ABP)$.

∵ $PQ\parallel CN$,∴ $\angle NCP=\angle CPQ=\frac{1}{2}\angle BPC$,

∴ $\angle MCN=\angle MCP-\angle NCP=\frac{1}{2}(\angle BPC+\angle ABP)-\frac{1}{2}\angle BPC=\frac{1}{2}\angle ABP=\frac{1}{2}\times30°=15°$.

∴ 结论②$\angle MCN$ 的度数不变,为 15°.

全章综合训练

刷章测

1.A 【解析】∵ 三角形的三条高所在直线的交点在三角形的一个顶点上,∴ 此三角形是直角三角形.

2.B 【解析】由题意得 $S_{\triangle OAD}=S_{\triangle OBD}$,∴ $AD=BD$,∴ CD 是 $\triangle ABC$ 的中线,同理,BF,AE 也是 $\triangle ABC$ 的中线.

3.C 【解析】根据三角形的三边关系知 c 的取值范围是 $2<c<8$,又因为 c 的值为整数,因而 c 的值可以是 3,4,5,6,7 共 5 个数,因而以 a,b,c 为边可组成 5 个三角形.

4.A 【解析】∵ AD 是 BC 边上的中线,∴ $BD=CD$,∴ $\triangle ABD$ 和 $\triangle ACD$ 周长的差为 $(AB+BD+AD)-(AC+AD+CD)=AB-AC$,∵ $\triangle ABD$ 的周长为 25 cm,AB 比 AC 长 6 cm,∴ $\triangle ACD$ 的周长为 $25-6=19$(cm).

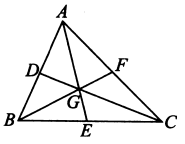
5.D 【解析】设这个正多边形的边数为 n. 由 $(n-2)\times180°=720°$,得 $n-2=4$,∴ $n=6$,则这个正多边形的每一个内角为 $720°\div6=120°$. 故选 D.

6.C 【解析】A 中,∵ $\angle A+\angle B=\angle C$,∴ $\angle C=90°$,∴ $\triangle ABC$ 是直角三角形;B 中,∵ $\angle A:\angle B:\angle C=2:3:5$,∴ $\angle C=90°$,∴ $\triangle ABC$ 是直角三角形;C 中,∵ $\angle A=2\angle B=3\angle C$,∴ $\angle A\neq90°$,$\angle B\neq90°$,$\angle C\neq90°$,∴ $\triangle ABC$ 不是直角三角形;D 中,∵ 一个外角等于和它相邻的内角,∴ 这个角等于 90°,∴ $\triangle ABC$ 是直角三角形.

7.75° 【解析】∵ $\angle CEA=60°$,$\angle BAE=45°$,∴ $\angle ADE=180°-\angle CEA-\angle BAE=75°$,∴ $\angle BDC=\angle ADE=75°$.

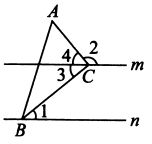
8. 25° 【解析】∵ AE 是 BC 边上的高，$\angle ACB=40°$，∴ $\angle CAE=90°-\angle ACB=90°-40°=50°$，又∵ AD 平分 $\angle CAE$，∴ $\angle DAE=\frac{1}{2}\angle CAE=\frac{1}{2}\times50°=25°$.

9. 4 【解析】∵ 边 AB 与 BC 的中点分别是 D,E，AE,CD 交于点 G，∴ 点 G 是 $\triangle ABC$ 的重心，∴ $FC=\frac{1}{2}AC=4$.



10. $1<x\leqslant3$ 【解析】根据题意，可得 $\begin{cases}x+x+1>x+2,\\x+x+1+x+2\leqslant12,\end{cases}$ 解不等式组，得 $1<x\leqslant3$.

11. 130° 【解析】∵ $m/\!/n$，$\angle1=40°$，∴ $\angle3=\angle1=40°$. ∵ $\angle ACB=90°$，∴ $\angle4=\angle ACB-\angle3=90°-40°=50°$，∴ $\angle2=180°-\angle4=180°-50°=130°$.



12. 110° 【解析】∵ $\triangle ABD$ 沿 AD 折叠得到 $\triangle AED$，∴ $\angle BAD=\angle DAF$. ∵ $\angle B=50°$，$\angle BAD=30°$，∴ $\angle AFC=\angle B+\angle BAD+\angle DAF=110°$.

13. 470° 【解析】∵ $\angle BMN+\angle ENM=360°-(\angle1+\angle2)=360°-110°=250°$，六边形 $BCDENM$ 的内角和为 $(6-2)\times180°=720°$，∴ $\angle B+\angle C+\angle D+\angle E=720°-250°=470°$.

14. 32 【解析】已知 $AB=12$，$BC=14$，$CD=18$，$DA=24$.

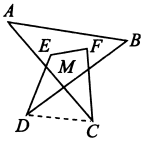
①选 $12+14$，18，24 作为三角形的边长，则三边长为 26，18，24，$26-24<18<26+24$，能构成三角形，此时两个端点间的最长距离为 26；

②选 12，$14+18$，24 作为三角形的边长，则三边长为 12，32，24，$32-24<12<32+24$，能构成三角形，此时两个端点间的最长距离为 32；

③选 12，14，$18+24$ 作为三角形的边长，则三边长为 12，14，42，$12<42-14$，不能构成三角形.

故答案为 32.

15. 360° 【解析】连接 CD，设 AC,BD 交于点 M. ∵ 在 $\triangle CDM$ 和 $\triangle ABM$ 中，$\angle DMC=\angle BMA$，∴ $\angle A+\angle B=\angle BDC+\angle ACD$，∴ $\angle A+\angle B+\angle C+\angle D+\angle E+\angle F=\angle BDC+\angle ACD+\angle ACF+\angle BDE+\angle E+\angle F=\angle EDC+\angle FCD+\angle E+\angle F=360°$.



16. 【解】(1)∵ $AD\perp BC$ 于点 D，∴ $\angle ADC=90°$.

∵ AE 平分 $\angle BAC$，∴ $\angle EAC=\frac{1}{2}\angle BAC$，

而 $\angle BAC=180°-\angle B-\angle C$，

∴ $\angle EAC=90°-\frac{1}{2}\angle B-\frac{1}{2}\angle C$.

∵ $\angle DAC=180°-90°-\angle C$，

∴ $\angle DAE=\angle DAC-\angle EAC=\frac{1}{2}(\angle B-\angle C)=\frac{1}{2}(70°-40°)=15°$.

(2)若 $\angle B-\angle C=\alpha(\angle B>\angle C)$，由(1)得 $\angle DAE=\frac{1}{2}(\angle B-\angle C)$，则 $\angle DAE=\frac{1}{2}\alpha$.

17. 【解】∵ $\angle CAB=50°$，$\angle C=60°$，

∴ $\angle ABC=180°-50°-60°=70°$.

又∵ AD 是高，∴ $\angle ADC=90°$.

∴ $\angle DAC=180°-90°-\angle C=30°$.

∵ AE,BF 是角平分线，

∴ $\angle CBF=\angle ABF=35°$，$\angle EAF=25°$，

∴ $\angle DAE=\angle DAC-\angle EAF=5°$，

$\angle AFB=\angle C+\angle CBF=60°+35°=95°$.

∴ $\angle BOA=\angle EAF+\angle AFB=25°+95°=120°$.

故 $\angle DAE=5°$，$\angle BOA=120°$.

18. 【解】(1)∵ $\angle ECF=\angle ECB+\angle BCF$，

∴ $\angle ECF+\angle DAC+\angle ECA$

$=(\angle ECB+\angle BCF)+\angle DAC+\angle ECA$

$=(\angle ECB+\angle ECA)+(\angle DAC+\angle BAD)$

$=\angle BCA+\angle BAC$

$=45°+45°$

$=90°$.

即 $\angle ECF+\angle DAC+\angle ECA=90°$.

(2) ED 与 FC 平行. 证明：

∵ $\angle EAD=\angle AED=45°$，

∴ $\angle EDA=90°$.

连接 DC，∴ $\angle ECA+\angle CED+\angle CAD=90°=\angle EDA$.

又∵ $\angle ECF+\angle DAC+\angle ECA=90°$，∴ $\angle CED=\angle ECF$，

∴ $DE/\!/CF$.

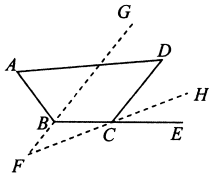
19. 【解】(1)∵ $\angle ABC+\angle DCB=360°-(\alpha+\beta)$，

∴ $\angle ABC+(180°-\angle DCE)=2\angle FBC+(180°-2\angle DCF)=180°-2(\angle DCF-\angle FBC)=180°-2\angle F=360°-(\alpha+\beta)$，

∴ $2\angle F=\alpha+\beta-180°$，

∴ $\angle F=\frac{1}{2}(\alpha+\beta)-90°$.

(2)画出 $\angle F$ 如下图.



∵ $\angle ABC+\angle DCB=360°-(\alpha+\beta)$，

∴ $\angle ABC+(180°-\angle DCE)=2\angle GBC+(180°-2\angle HCE)=180°+2(\angle GBC-\angle HCE)=180°+2\angle F=360°-(\alpha+\beta)$，

∴ $\angle F=90°-\frac{1}{2}(\alpha+\beta)$.

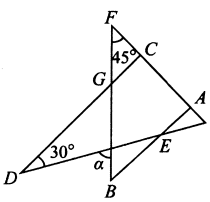
(3)当 $\alpha+\beta=180°$ 时，不存在 $\angle F$.

刷中考

1. C 【解析】设三角形第三边的长为 x，由题意得 $7-3<x<7+3$，解得 $4<x<10$，故选 C.

2. C 【解析】∵ $\angle A=54°$，$\angle B=48°$，∴ $\angle ACB=180°-54°-48°=78°$. ∵ CD 平分 $\angle ACB$ 交 AB 于点 D，∴ $\angle DCB=\frac{1}{2}\times78°=39°$. ∵ $DE/\!/BC$，∴ $\angle CDE=\angle DCB=39°$. 故选 C.

3. C 【解析】如图，∵ $\angle ACD=90°$，$\angle F=45°$，∴ $\angle CGF=\angle DGB=45°$，则 $\angle\alpha=\angle D+\angle DGB=30°+45°=75°$，故选 C.



4. B 【解析】根据 n 边形的内角和公式，得 $(n-2)\times180°=1\,080°$，解得 $n=8$. ∴ 这个多边形是八边形. 故选 B.

5. C　【解析】该正多边形的边数为 $360° \div 60° = 6$，所以该正多边形的内角和为 $(6-2) \times 180° = 720°$. 故选 C.

6. 7　【解析】∵ a, b 满足 $|a-7| + (b-1)^2 = 0$，∴ $a-7=0, b-1=0$，解得 $a=7, b=1$. ∵ $7-1=6, 7+1=8$，∴ $6 < c < 8$. 又∵ c 为奇数，∴ $c=7$.

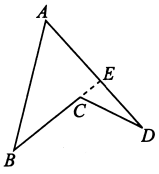
7. $1 < a < 4$　【解析】∵ 三角形的三边长分别为 $3, 2a-1, 4$，∴ $4-3 < 2a-1 < 4+3$，即 $1 < a < 4$.

8. 45°　【解析】∵ 六边形 $ADHGFE$ 为正六边形，∴ $AE = AD$，$\angle DAE = 120°$，∴ $\angle AED = \frac{1}{2}(180° - 120°) = 30°$. ∵ 四边形 $ABCD$ 为正方形，∴ $AB = AD = AE$，$\angle BAD = 90°$，∴ $\angle BAE = 360° - 120° - 90° = 150°$，∴ $\angle AEB = \frac{1}{2}(180° - 150°) = 15°$，∴ $\angle BED = \angle AEB + \angle AED = 15° + 30° = 45°$.

9. 【解】(1)在 Rt△ABC 中，∵ $\angle ACB = 90°$，$\angle A = 40°$，
∴ $\angle ABC = 90° - \angle A = 50°$，
∴ $\angle CBD = 130°$.
∵ BE 是 $\angle CBD$ 的平分线，
∴ $\angle CBE = \frac{1}{2}\angle CBD = 65°$.
(2)∵ $\angle ACB = 90°$，$\angle CBE = 65°$，∴ $\angle CEB = 180° - 90° - 65° = 25°$.
∵ $DF \parallel BE$，
∴ $\angle F = \angle CEB = 25°$.

刷素养

10. (1)【解】已知：四边形 $ABCD$ 为凹四边形.
求证：四边形 $ABCD$ 的内角和为 360°.
证明：如图，延长 BC 与 AD 交于点 E.



该四边形内角和为 $\angle A + \angle B + \angle BCE + \angle ECD + \angle D$.
∵ B, C, E 共线，
∴ $\angle AEB$ 为△CDE 的一个外角，
∴ $\angle D + \angle ECD = \angle AEB$.
又∵ $\angle A, \angle B, \angle AEB$ 为△AEB 的三个内角，
∴ $\angle A + \angle B + \angle AEB = 180°$.
∵ $\angle BCE = 180°$，
∴ 该四边形内角和为 $180° + 180° = 360°$.
(2)①凹六边形的外角和为 360°
②凹六边形的内角和为 720°

第十二章　全等三角形

12.1　全等三角形

刷基础

1. D　【解析】①②④可以完全重合，因此 D 选项符合题意. 故选 D.

2. C　【解析】A 中能够完全重合的两个图形称为全等形，说法正确；B 中全等形的形状和大小都相同，说法正确；C 中所有正方形不一定都是全等形，说法错误；D 中平移、翻折、旋转前后的图形全等，说法正确.

3. B　【解析】∵ △ADE ≌ △CBF，∴ $AD = BC = 8$ cm. ∵ $BD = BC - CD$，$CD = 5$ cm，∴ $BD = 8 - 5 = 3$(cm). 故选 B.

4. C　【解析】∵ △ABC ≌ △AEF，∴ $AC = AF$，故①正确；$\angle EAF = \angle BAC$，∴ $\angle FAC = \angle EAB \neq \angle FAB$，故②错误，④正确；$EF = BC$，故③正确. 综上所述，结论正确的是①③④，共 3 个.

5. C　【解析】由 △ABC ≌ △DBE，∴ $\angle BDE = \angle A = \angle BDA$，$\angle E = \angle C$. ∵ $\angle A : \angle C = 5 : 3$，∴ $\angle A : \angle BDA : \angle BDE : \angle E = 5 : 5 : 5 : 3$. 又∵ $\angle A + \angle BDA + \angle BDE + \angle E = 180°$，∴ $\angle C = \angle E = 30°$，$\angle BDE = \angle A = \angle BDA = 50°$，$\angle CDE = \angle A + \angle E = 50° + 30° = 80°$，∴ $\angle DBC = 180° - \angle C - \angle CDE - \angle BDE = 180° - 30° - 80° - 50° = 20°$.

6. A　【解析】∵ 这两个三角形全等，两个三角形中都有一条边长为 2，∴ 长度为 2 的是对应边，x 应是另一个三角形中边长为 6 的对应边，∴ $x = 6$. 同理可得 $y = 5$，∴ $x + y = 11$. 故选 A.

7. 20°　【解析】∵ $\angle AME = \angle CMD = 70°$，∴ 在 △$AEM$ 中，$\angle 1 = 180° - 90° - 70° = 20°$. ∵ △$ABE$ ≌ △ACF，∴ $\angle EAB = \angle FAC$，即 $\angle 1 + \angle CAB = \angle 2 + \angle CAB$，∴ $\angle 2 = \angle 1 = 20°$.

8. 【解】∵ △ABC ≌ △DEF，$\angle A = 32°$，$\angle B = 48°$，
∴ $\angle D = \angle A = 32°$，$\angle E = \angle B = 48°$.
在 △DEF 中，∵ $\angle D + \angle E + \angle DFE = 180°$，
∴ $\angle DFE = 100°$.
∵ △ABC ≌ △DEF，∴ $BC = EF$.
∴ $BC - CF = EF - CF$，即 $BF = EC$.
∵ $BF = 3$，∴ $EC = 3$.

9. 【解】设 $\angle 3 = 3x$，则 $\angle 1 = 28x$，$\angle 2 = 5x$.
∵ $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 = 180°$，
∴ $28x + 5x + 3x = 180°$.
解得 $x = 5°$.
∴ $\angle 1 = 140°$，$\angle 2 = 25°$，$\angle 3 = 15°$.
∵ △ABE 是 △ABC 沿着 AB 边翻折 180°形成的，
∴ $\angle 1 = \angle BAE = 140°$，$\angle E = \angle 3 = 15°$，
∴ $\angle EAC = 360° - \angle BAE - \angle 1 = 360° - 140° - 140° = 80°$.
又∵ △ADC 是 △ABC 沿着 AC 边翻折 180°形成的，
∴ $\angle ACD = \angle 3 = 15°$.
而 $\angle \alpha + \angle E = \angle EAC + \angle ACD$，
∴ $\angle \alpha = \angle EAC = 80°$.

12.2　三角形全等的判定

课时 1　三边证全等(SSS)

刷基础

1. A　【解析】∵ $CA = DE = 4$，$BC = EF = 3$，∴ 要使 △ABC 与 △DEF 全等，也就是让 $DF = AB = 2$.

2. B　【解析】①如果一个三角形的三边长分别为 3，4，3，另一个三角形的三边长分别为 4，4，2，两个三角形的周长相等，但是这两个三角形不全等，∴ ①错误；②∵ 等边三角形的三条边相等，周长也相等，∴ 两个三角形的三边分别相等，∴ 根据“SSS”能推出这两个三角形全等，∴ ②正确；③根据两个三角形的三个角对应相等不能推出两个三角形全等(如老师用的三角板和学生用的三角板)，∴ ③错误；④∵ 两个三角形的三边对应相等，根据“SSS”能推出两个三角形全等，∴ ④正确. 即①③错误，有 2 个，故选 B.

3. C 【解析】全等三角形共有 3 对，$\triangle ACE \cong \triangle ADE$，$\triangle ACB \cong \triangle ADB$，$\triangle ECB \cong \triangle EDB$. 理由：

在$\triangle ECB$和$\triangle EDB$中，$\because \begin{cases} EB = EB, \\ EC = ED, \\ BC = BD, \end{cases}$ $\therefore \triangle ECB \cong \triangle EDB$(SSS)；

在$\triangle ACE$和$\triangle ADE$中，$\because \begin{cases} AC = AD, \\ AE = AE, \\ EC = ED, \end{cases}$ $\therefore \triangle ACE \cong \triangle ADE$(SSS)；

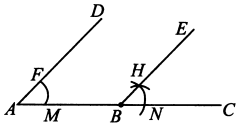
在$\triangle ACB$和$\triangle ADB$中，$\because \begin{cases} AB = AB, \\ AC = AD, \\ BC = BD, \end{cases}$ $\therefore \triangle ACB \cong \triangle ADB$(SSS).

4. $AB = DC$ 【解析】需要添加条件 $AB = DC$. 理由如下：

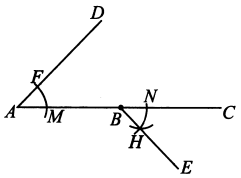
在$\triangle ABC$和$\triangle DCB$中，$\because \begin{cases} AB = DC, \\ CB = BC, \\ AC = DB, \end{cases}$ $\therefore \triangle ABC \cong \triangle DCB$(SSS).

5. 【解】如图所示：

①当所作的角在 BC 上方时：

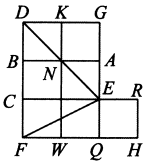


②当所作的角在 BC 下方时：



6. D 【解析】由题意知$\triangle ABC \cong \triangle CDA$(SSS)，$\therefore \angle BAC = \angle DCA$，$\angle ACB = \angle CAD$，$\therefore$ ①②正确；由“内错角相等，两直线平行”可知 $AB \parallel CD$，$\therefore$ ③正确. 综上可知正确结论的个数为 3.

7. A 【解析】如图，与$\triangle DEF$全等的三角形有$\triangle DAF$，$\triangle BGQ$，$\triangle CGQ$，$\triangle NFH$，$\triangle AFH$，$\triangle CKR$，$\triangle KRW$，$\triangle CGR$，共 8 个，故选 A.



8. 40° 【解析】在$\triangle POB$和$\triangle POA$中，$\because \begin{cases} OB = OA, \\ BP = AP, \\ OP = OP, \end{cases}$ $\therefore \triangle POB \cong \triangle POA$(SSS)，$\therefore \angle BOP = \angle AOP = 20°$，$\therefore \angle MON = 40°$.

9. 36° 【解析】$\because C$ 是 BD 的中点，$\therefore BC = CD$. 又$\because AB = ED$，$AC = EC$，$\therefore \triangle ABC \cong \triangle EDC$(SSS)，$\therefore \angle E = \angle A = 36°$.

10. 【证明】在$\triangle ABD$和$\triangle ACD$中，

$\because \begin{cases} AB = AC, \\ BD = CD, \\ AD = AD, \end{cases}$

$\therefore \triangle ABD \cong \triangle ACD$(SSS).

11. 【证明】$\because AB = AC$，$AD = AE$，$BD = CE$，

$\therefore \triangle ABD \cong \triangle ACE$(SSS).

$\therefore \angle 2 = \angle ABD$，$\angle 1 = \angle BAD$.

$\because \angle 3 = \angle ABD + \angle BAD$，$\therefore \angle 3 = \angle 1 + \angle 2$.

课时 2　两边及夹角证全等(SAS)

刷基础

1. A 【解析】在$\triangle ABC$和$\triangle BCA$中，$\because \begin{cases} AB = BC, \\ \angle A = \angle B, \\ AC = BA, \end{cases}$ $\therefore \triangle ABC \cong \triangle BCA$(SAS)，$\therefore$ 两个三角形全等的是①②.

2. D 【解析】$\because AD = AD$，$\angle ADB = \angle ADC$，$BD = CD$，$\therefore \triangle ABD \cong \triangle ACD$(SAS)，故①正确；$\because \triangle ABD \cong \triangle ACD$，$\therefore AB = AC$，$\angle B = \angle C$，$\angle BAD = \angle CAD$，$\therefore$ ②③④都正确. 故选 D.

3. $AO = BO$ 【解析】在$\triangle AOC$和$\triangle BOC$中，$\because \begin{cases} AO = BO, \\ \angle 1 = \angle 2, \\ OC = OC, \end{cases}$ $\therefore \triangle AOC \cong \triangle BOC$(SAS).

4. SAS 【解析】$\because$ 在$\triangle ABC$中，$AB = AC$，BE，CF 是中线，$\therefore AF = BF = AE = EC$，$\therefore \triangle AFC \cong \triangle AEB$(SAS).

5. B 【解析】在$\triangle AOD$和$\triangle BOC$中，$\because \begin{cases} OA = OB, \\ \angle AOD = \angle BOC, \\ OD = OC, \end{cases}$ $\therefore \triangle AOD \cong \triangle BOC$(SAS). $\therefore \angle A = \angle B = 25°$，$\therefore \angle BDE = \angle A + \angle O = 65°$，$\therefore \angle BED = 180° - \angle B - \angle BDE = 90°$.

6. 70° 【解析】$\because AB = AC$，$\angle A = 40°$，$\therefore \angle DBP = \angle ECP = 70°$. 又$\because BP = CE$，$BD = CP$，$\therefore \triangle DBP \cong \triangle PCE$，$\therefore \angle BDP = \angle CPE$. 又$\because \angle DBP = 70°$，$\therefore \angle DPB + \angle BDP = 110°$，$\therefore \angle DPE = 180° - (\angle DPB + \angle CPE) = 180° - (\angle DPB + \angle BDP) = 70°$.

7. 【证明】$\because AB \parallel ED$，$\therefore \angle B = \angle E$.

在$\triangle ABC$和$\triangle CED$中，$\because \begin{cases} AB = CE, \\ \angle B = \angle E, \\ BC = ED, \end{cases}$

$\therefore \triangle ABC \cong \triangle CED$(SAS)，$\therefore AC = CD$.

8. 【解】(1)$\because AC = BD$，$\therefore AD = BC$，且 $AF = BE$，$\angle A = \angle B$，

$\therefore \triangle ADF \cong \triangle BCE$(SAS)，

$\therefore \angle E = \angle F = 28°$，

$\therefore \angle 1 = \angle B + \angle E = 32° + 28° = 60°$.

(2)$\because AD = BC = 5$ cm，$CD = 1$ cm，

$\therefore AC = AD + CD = 6$ cm.

刷易错

9. C 【解析】$\angle BAC = \angle EAD$. 理由：$\because \angle BAC = \angle EAD$，$\therefore \angle BAC + \angle CAE = \angle EAD + \angle CAE$，$\therefore \angle BAE = \angle CAD$. 在$\triangle ACD$和$\triangle ABE$中，

$\because \begin{cases} AC = AB, \\ \angle CAD = \angle BAE, \\ AD = AE, \end{cases}$ $\therefore \triangle ACD \cong \triangle ABE$(SAS). 选项 A、B、D 的条件都不能推出$\triangle ACD \cong \triangle ABE$，只有选项 C 的条件能推出$\triangle ACD \cong \triangle ABE$.

易错警示 在运用“SAS”时，不注重此方法成立的条件，只注重有两条边和一个角对应相等，而忽略了必须是“两边及两边的夹角”对应相等的条件下此方法才成立.

刷提升

1. D 【解析】增加的条件可以是$\angle 1 = \angle 2$，$\therefore \angle ABE = \angle DBC$. 在$\triangle ABE$和$\triangle DBC$中，$\because \begin{cases} AB = DB, \\ \angle ABE = \angle DBC, \\ BE = BC, \end{cases}$ $\therefore \triangle ABE \cong \triangle DBC$(SAS).

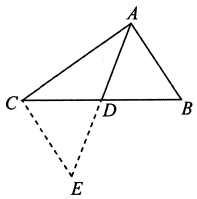
2. B 【解析】∵ $AE=AF$, $AB=AC$, $\angle A=60°$, ∴ $\triangle ABF\cong\triangle ACE$, ∴ $\angle C=\angle B=25°$, ∴ $\angle AEC=180°-60°-25°=95°$, ∴ $\angle EOB=95°-25°=70°$.

3. B 【解析】∵ AD 是 $\angle BAC$ 的平分线, ∴ $\angle EAD=\angle CAD$. 在 $\triangle ADE$ 和 $\triangle ADC$ 中, ∵ $\begin{cases}AE=AC,\\ \angle EAD=\angle CAD,\\ AD=AD,\end{cases}$ ∴ $\triangle ADE\cong\triangle ADC$ (SAS), ∴ $ED=CD$, ∴ $BC=BD+CD=DE+BD=5$, ∴ $\triangle BDE$ 的周长为 $BE+BD+ED=(6-4)+5=7$.

4. D 【解析】∵ $AC=BD$, $OA=OD$, ∴ $OB=OC$, 故①正确; 在 $\triangle AOB$ 与 $\triangle DOC$ 中, ∵ $\begin{cases}OA=OD,\\ \angle AOB=\angle DOC,\\ OB=OC,\end{cases}$ ∴ $\triangle AOB\cong\triangle DOC$ (SAS), 故②正确; ∴ $AB=CD$, 故③正确; ∵ $OB=OC$, ∴ $\triangle BOC$ 是等腰三角形, 无法证得 $\triangle BOC$ 是直角三角形, 故④错误. 故选 D.

5. C 【解析】∵ $\angle BAC=\angle DAE$, ∴ $\angle BAD=\angle CAE$, 故 A 正确; 在 $\triangle BAD$ 和 $\triangle CAE$ 中, ∵ $\begin{cases}BA=CA,\\ \angle BAD=\angle CAE,\\ AD=AE,\end{cases}$ ∴ $\triangle BAD\cong\triangle CAE$, 故 B 正确; ∴ $BD=CE$, 故 D 正确; C 选项无法证得, 不一定正确, 故选 C.

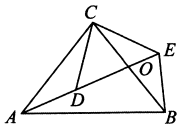
6. $1<AD<6$ 【解析】如图, 延长中线 AD 至点 E, 使 $DE=AD$, 连接 CE. ∵ AD 是 $\triangle ABC$ 的中线, ∴ $BD=CD$. 在 $\triangle ECD$ 和 $\triangle ABD$ 中, ∵ $\begin{cases}CD=BD,\\ \angle CDE=\angle BDA,\\ DE=DA,\end{cases}$ ∴ $\triangle ECD\cong\triangle ABD$ (SAS), ∴ $AB=CE$. ∵ $AC=7$, $CE=AB=5$, ∴ $7-5<2AD<7+5$, 即 $2<2AD<12$, ∴ $1<AD<6$. 故答案为 $1<AD<6$.



7. 60° 【解析】∵ $\triangle ABC$ 是等边三角形, ∴ $\angle ABD=\angle C$, $AB=BC$. 在 $\triangle ABD$ 和 $\triangle BCE$ 中, ∵ $\begin{cases}BD=CE,\\ \angle ABD=\angle C,\\ BA=CB,\end{cases}$ ∴ $\triangle ABD\cong\triangle BCE$ (SAS), ∴ $\angle BAD=\angle CBE$, ∴ $\angle AFE=\angle ABF+\angle BAF=\angle ABF+\angle CBE=60°$.

8. (1)【证明】∵ 点 C 是线段 AB 的中点, ∴ $AC=BC$.
又∵ CD 平分 $\angle ACE$, CE 平分 $\angle BCD$,
∴ $\angle ACD=\angle DCE$, $\angle DCE=\angle ECB$,
∴ $\angle ACD=\angle ECB$.
在 $\triangle ACD$ 和 $\triangle BCE$ 中, ∵ $\begin{cases}CD=CE,\\ \angle ACD=\angle BCE,\\ AC=BC,\end{cases}$
∴ $\triangle ACD\cong\triangle BCE$.
(2)【解】∵ $\angle ACD=\angle DCE=\angle BCE=\frac{1}{3}\times180°=60°$,
又∵ $\triangle ACD\cong\triangle BCE$, ∴ $\angle E=\angle D=53°$,
∴ $\angle B=180°-60°-53°=67°$.

9. (1)【证明】∵ $\angle CAB=\angle CBA=\angle CDE=\angle CED=50°$,
∴ $CA=CB$, $CD=CE$, $\angle ACB=\angle DCE=80°$,
∴ $\angle ACD=\angle BCE$.
在 $\triangle ACD$ 和 $\triangle BCE$ 中,
∵ $\begin{cases}AC=BC,\\ \angle ACD=\angle BCE,\\ CD=CE,\end{cases}$
∴ $\triangle ACD\cong\triangle BCE$ (SAS),
∴ $AD=BE$.
(2)【解】设 AE 与 BC 交于点 O, 如图.
∵ $\triangle ACD\cong\triangle BCE$,
∴ $\angle CAD=\angle CBE$.
∵ $\angle COA=\angle BOE$,
∴ $\angle ACO=\angle BEO=80°$,
∴ $\angle AEB=80°$.



课时3 两角及一边证全等(ASA, AAS)

刷基础

1. C 【解析】∵ $\angle A=\angle A'$, $AB=A'B'$, $\angle B=\angle B'$, ∴ $\triangle ABC\cong\triangle A'B'C'$ (ASA).

2. D 【解析】甲三角形只知道一条边长和一个内角度数无法判断是否与 $\triangle ABC$ 全等; 乙三角形夹 50° 内角的两边分别与已知三角形对应相等, 故乙与 $\triangle ABC$ 全等; 丙三角形 72° 内角及所对边与 $\triangle ABC$ 对应相等且均有 50° 内角, 可根据 AAS 判定丙与 $\triangle ABC$ 全等. 则与 $\triangle ABC$ 全等的有乙和丙.

3. $AF=DE$(答案不唯一) 【解析】∵ $\angle A=\angle D$, $\angle B=\angle C$, ∴ 要使 $\triangle ABF\cong\triangle DCE$ (AAS), 需要补充的一个条件是 $AF=DE$ (或 $BF=CE$ 或 $BE=CF$).

4. B 【解析】∵ $AD\perp BC$, $CE\perp AB$, ∴ $\angle ADC=\angle AEH=\angle BEC=90°$. ∵ $\angle AHE=\angle CHD$, ∴ $\angle BAD=\angle BCE$. 在 $\triangle HEA$ 和 $\triangle BEC$ 中, ∵ $\begin{cases}\angle BAD=\angle BCE,\\ \angle AEH=\angle BEC,\\ EH=EB,\end{cases}$ ∴ $\triangle HEA\cong\triangle BEC$ (AAS), ∴ $AE=EC$, 则 $CH=EC-EH=AE-EH=6-4=2$. 故选 B.

5. B 【解析】在 $\triangle ABE$ 和 $\triangle CDE$ 中, ∵ $\begin{cases}\angle B=\angle D=90°,\\ BE=DE,\\ \angle AEB=\angle CED,\end{cases}$ ∴ $\triangle ABE\cong\triangle CDE$ (ASA), ∴ $AB=CD=10$ m. 故选 B.

6. ③ 【解析】第①块和第②块只保留了原三角形的一个角和部分边, 根据这两块中的任何一块均不能配一块与原来完全一样的; 第③块不仅保留了原来三角形的两个角还保留了一边, 则可以根据"ASA"来配一块一样的玻璃片.

7. ①③④ 【解析】在 $\triangle AEB$ 和 $\triangle AFC$ 中, ∵ $\begin{cases}\angle E=\angle F,\\ \angle B=\angle C,\\ AE=AF,\end{cases}$ ∴ $\triangle AEB\cong\triangle AFC$ (AAS), ∴ $\angle EAB=\angle FAC$, $EB=CF$, $AB=AC$, ∴ $\angle EAM=\angle FAN$, 故③正确; 在 $\triangle AEM$ 和 $\triangle AFN$ 中, ∵ $\begin{cases}\angle E=\angle F,\\ AE=AF,\\ \angle EAM=\angle FAN,\end{cases}$ ∴ $\triangle AEM\cong\triangle AFN$ (ASA), ∴ $EM=FN$, $AM=AN$, 故①正确; ∵ $AC=AB$, ∴ $CM=BN$, 在 $\triangle CMD$ 和 $\triangle BND$ 中, ∵ $\begin{cases}\angle C=\angle B,\\ \angle CDM=\angle BDN,\\ CM=BN,\end{cases}$ ∴ $\triangle CMD\cong\triangle BND$ (AAS), ∴ $CD=DB$, 故②错误; 在 $\triangle ACN$ 和 $\triangle ABM$ 中, ∵ $\begin{cases}\angle CAN=\angle BAM,\\ \angle C=\angle B,\\ AN=AM,\end{cases}$ ∴ $\triangle ACN\cong\triangle ABM$ (AAS), 故④正确. 故①③④正确.

8. 【证明】∵ $CE\perp AF$, $BF\perp AF$,
∴ $\angle DEC=\angle DFB=90°$.

又∵ AD 为 BC 边上的中线，

∴ $BD = CD$.

在△BFD 和△CED 中，∵ $\begin{cases}\angle DFB = \angle DEC,\\ \angle BDF = \angle CDE,\\ BD = CD,\end{cases}$

∴ △BFD≌△CED(AAS)，

∴ $BF = CE$.

刷易错

9.【解】不正确. 理由如下：

因为 AC 不是△ABC 和△ACD 的对应边，故不能判定△ABC≌△ACD.

易错警示 运用两角及一边判定三角形全等时，这两组角及一组边不仅仅是“相等”关系，还要“对应相等”，即两个三角形中相等的边和角必须有相同的顺序.

刷提升

1.C 【解析】A 中根据 $AC = DF$，$BC = EF$，$\angle C = \angle F$，运用“SAS”可判定三角形全等；B 中根据 $AB = EF$，$\angle A = \angle E$，$\angle B = \angle F$，运用“ASA”可判定三角形全等；C 中根据 $\angle A = \angle F$，$\angle B = \angle E$，$AC = DE$，不可判定三角形全等；D 中根据 $AB = DE$，$\angle B = \angle E$，$\angle C = \angle F$，运用“AAS”可判定三角形全等.

2.C 【解析】∵ $\angle 1 = \angle 2$，∴ $\angle 1 + \angle EAB = \angle 2 + \angle EAB$，即 $\angle CAB = \angle DAE$，加上条件① $AB = AE$，可利用“SAS”证明△ABC≌△AED；加上条件② $BC = ED$，不能证明△ABC≌△AED；加上条件③ $\angle B = \angle E$，可利用“AAS”证明△ABC≌△AED；加上条件④ $\angle C = \angle D$，可利用“ASA”证明△ABC≌△AED. 故选 C.

3.B 【解析】∵ $AD \perp BC$，∴ $\angle ADB = 90°$. ∵ $\angle ABC = 45°$，∴ $\angle ABD = \angle DAB$，∴ $BD = AD$. ∵ $\angle CAD + \angle AFE = 90°$，$\angle CAD + \angle C = 90°$，∴ $\angle AFE = \angle C$. ∵ $\angle AFE = \angle BFD$，∴ $\angle C = \angle BFD$. 在△BDF 和△ADC 中，∵ $\begin{cases}\angle BFD = \angle C,\\ \angle BDF = \angle ADC,\\ BD = AD,\end{cases}$ ∴ △BDF≌△ADC(AAS)，

∴ $DF = DC = 4$. 故选 B.

4.B 【解析】∵ $AD \perp CE$，$BE \perp CE$，∴ $\angle ADC = \angle BEC = 90°$. ∵ $\angle BCE + \angle CBE = 90°$，$\angle BCE + \angle DCA = 90°$，∴ $\angle CBE = \angle DCA$. 在△ACD 和△CBE 中，∵ $\begin{cases}\angle ACD = \angle CBE,\\ \angle ADC = \angle CEB,\\ AC = CB,\end{cases}$ ∴ △ACD≌△CBE(AAS)，∴ $CE = AD = 3$，$CD = BE = 1$，∴ $DE = CE - CD = 3 - 1 = 2$. 故选 B.

5.(1)【证明】∵ $\angle EBF + \angle FEB = \angle FDB + \angle FEB = 90°$，

∴ $\angle FDB = \angle EBF$.

∵ $AB = DE$，$\angle ACB = \angle DBC = 90°$，

∴ △ACB≌△EBD(AAS).

∴ $BC = BD$.

(2)【解】∵ $BD = 8$ cm，

∴ $BC = 8$ cm，

∴ $BE = \frac{1}{2}BC = 4$ cm.

∵ △ACB≌△EBD，

∴ $AC = BE = 4$ cm.

6.(1)【证明】∵ 两块完全相同的三角形纸板 ABC 和 DEF，

∴ $AB = BD$，$BF = BC$，

∴ $AB - BF = BD - BC$，即 $AF = DC$.

∵ $\angle A = \angle D$，$\angle AOF = \angle DOC$，

∴ 在△AOF 与△DOC 中，$\begin{cases}\angle A = \angle D,\\ \angle AOF = \angle DOC,\\ AF = DC,\end{cases}$

∴ △AOF≌△DOC(AAS).

(2)直线 BO 与线段 AD 是垂直关系.

刷素养

7.(1)【证明】∵ $DE \perp AB$，

∴ $\angle DEG = \angle DEB$.

在△DEG 和△DEB 中，

∵ $\begin{cases}DE = DE,\\ \angle DEG = \angle DEB,\\ EG = EB,\end{cases}$

∴ △DEG≌△DEB，

∴ $DG = DB$.

(2)【解】$AB = DM$. 证明：

∵ $DE = EB$，$EG = EB$，

∴ $DE = EB = EG$.

∵ $DE \perp AB$，$GH \perp AD$，

∴ $\angle AED = \angle DHM = 90°$，

∴ $\angle A = \angle M$.

在△AED 和△MEG 中，

∵ $\begin{cases}\angle A = \angle M,\\ \angle AED = \angle MEG,\\ ED = EG,\end{cases}$

∴ △AED≌△MEG，

∴ $AE = EM$.

∵ $DE = BE$，

∴ $AE + EB = EM + DE$，

即 $AB = DM$.

课时 4　斜边及一条直角边证全等(HL)

刷基础

1.D 【解析】∵ $AC \perp OA$，$BC \perp OB$，∴ $\angle A = \angle B = 90°$，在 Rt△$AOC$ 和 Rt△BOC 中，$\begin{cases}AC = BC,\\ CO = CO,\end{cases}$ ∴ Rt△AOC≌Rt△BOC(HL).

2.C 【解析】A 选项，一个锐角和斜边对应相等符合“AAS”，故正确；B 选项，两条直角边对应相等符合“SAS”，故正确；C 选项，全等三角形的判定必须有对应边相等，故错误；D 选项，斜边和一条直角边对应相等符合“HL”，故正确. 故选 C.

3.【解】添加条件：$AB = AC$. 证明：

∵ $AD \perp BC$ 于 D，

∴ $\angle ADB = \angle ADC = 90°$.

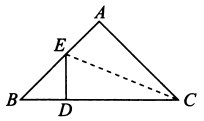
在 Rt△ABD 和 Rt△ACD 中，

∵ $\begin{cases}AB = AC,\\ AD = AD,\end{cases}$

∴ Rt△ABD≌Rt△ACD(HL).

4. B　【解析】∵ $DE\perp BC$,∴ $\angle DAC=\angle DEC=90°$. 又∵ $\begin{cases}DC=DC,\\AC=EC,\end{cases}$ ∴ Rt△ACD≌Rt△ECD(HL),∴ $\angle ACD=\angle ECD$. ∵ $\angle ACB=60°$, ∴ $\angle ACD=30°$.

5. B　【解析】连接 CE. ∵ $DE\perp BC$, $\angle A=90°$,∴ $\angle A=\angle CDE=90°$. 在Rt△CAE和Rt△CDE中,∵ $\begin{cases}CE=CE,\\AC=CD,\end{cases}$ ∴ Rt△CAE≌Rt△CDE(HL),∴ $AE=DE$,故B选项正确;在Rt△BED中,$BE>DE$,即$BE>AE$,故C选项错误;根据已知无法得出$BD=DE$,故A选项错误;根据已知无法得出$BD=DE$,由$DE=AE$,即不能推出$BD=AE$,故D选项错误.



6. B　【解析】在△ABC中,∵ $\angle C=90°$, $AD=AC$, $DE\perp AB$交BC于点E,∴ △CAE≌△DAE(HL),∴ $\angle CAE=\angle DAE=\frac{1}{2}\angle CAB$. ∵ $\angle B+\angle CAB=90°$, $\angle B=28°$,∴ $\angle CAB=90°-28°=62°$, ∴ $\angle AEC=90°-\frac{1}{2}\angle CAB=90°-31°=59°$. 故选B.

7. △ABC　CD　$\angle DEC$　【解析】∵ $BA/\!/DC$, $\angle A=90°$,∴ $\angle DCE=90°$. 又∵ $AB=CE$, $BC=ED$,∴ Rt△CED≌Rt△ABC(HL),∴ $AC=CD$, $\angle B=\angle DEC$.

8. 3　【解析】∵ $\angle C=90°$, $DE\perp AB$,则在Rt△BDE和Rt△BCE中, $\begin{cases}BE=BE,\\BD=BC,\end{cases}$ ∴ Rt△BDE≌Rt△BCE(HL),∴ $DE=CE$,∴ $AE+DE=AE+EC=AC=3$ cm.

9. HL　△ABO　△DCO　AAS　【解析】可以证明Rt△DCB≌Rt△ABC,依据是"HL",进而得到$AB=DC$;再证明△ABO≌△DCO,依据是"AAS",此时,就能够证出$OB=OC$.

10. 【证明】∵ AD, AF分别是两个钝角△ABC和△ABE的高,且$AD=AF$, $AC=AE$,

∴ Rt△ADC≌Rt△AFE(HL). ∴ $CD=EF$.

∵ $AD=AF$, $AB=AB$,

∴ Rt△ABD≌Rt△ABF(HL).

∴ $BD=BF$.

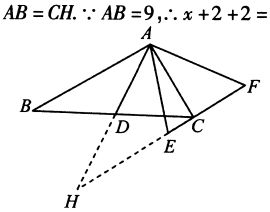
∴ $BD-CD=BF-EF$.

即$BC=BE$.

专题　全等三角形的性质与判定

刷难关

1. C　【解析】如图,延长FE交AD的延长线于H. ∵ AD平分$\angle BAE$,∴ $\angle BAD=\angle HAE$. ∵ $FH/\!/AB$,∴ $\angle H=\angle BAD$,∴ $\angle H=\angle HAE$,∴ $EA=EH=EF$. 设$CF=x$,则$EF=EA=EH=x+2$. ∵ $\angle H=\angle BAD$, $\angle HDC=\angle ADB$, $DC=DB$,∴ △HDC≌△ADB(AAS),∴ $AB=CH$. ∵ $AB=9$,∴ $x+2+2=9$,∴ $x=5$. 故选C.



2. B　【解析】∵ 在Rt△APR和Rt△APS中, $\begin{cases}PR=PS,\\AP=AP,\end{cases}$ ∴ Rt△APR≌Rt△APS(HL),∴ $AR=AS$,①正确;∵ $\angle BAP=\angle 1$, $\angle 1=\angle 2$, ∴ $\angle BAP=\angle 2$,∴ $QP/\!/AB$,②正确;∵ △BRP和△CPS中,只有条件$PR=PS$, $\angle BRP=\angle PSC=90°$,再没有其余条件可以证明△$BPR$≌△$CPS$,故③④错误.

3. 90°　【解析】∵ CD, BE是边AB和AC上的高,∴ $\angle ADC=\angle AEB=90°$,∴ $\angle ABM+\angle BAC=90°$, $\angle BAC+\angle ACN=90°$,∴ $\angle ABM=\angle ACN$. 在△ABM和△NCA中,∵ $\begin{cases}AB=CN,\\\angle ABM=\angle ACN,\\BM=AC,\end{cases}$ ∴ △ABM≌△NCA(SAS),∴ $\angle BAM=\angle CNA$. ∵ $\angle CNA=\angle ADC+\angle BAN=90°+\angle BAN$, $\angle BAM=\angle MAN+\angle BAN$,∴ $\angle MAN=90°$.

4. (1)【证明】在△AFD和△CAB中,

∵ $\begin{cases}AF=CA,\\\angle FAD=\angle BCA,\\AD=CB,\end{cases}$

∴ △AFD≌△CAB(SAS).

∴ $FD=AB$.

(2)【解】∵ △AFD≌△CAB,

∴ $\angle BAC=\angle F=110°$.

∴ $\angle BCD=\angle B+\angle BAC=50°+110°=160°$.

5. 【解】(1)△ACP≌△BPQ. 理由如下:

∵ $AC\perp AB$, $BD\perp AB$,

∴ $\angle A=\angle B=90°$.

∵ $t=1$,∴ $AP=BQ=2$ cm,

∴ $BP=6$ cm,

∴ $BP=AC$.

在△ACP和△BPQ中,

∵ $\begin{cases}AP=BQ,\\\angle A=\angle B,\\AC=BP,\end{cases}$

∴ △ACP≌△BPQ.

(2)存在实数x,使得△ACP与△BPQ全等. 理由如下:

①若△ACP≌△BPQ,

则$AC=BP$, $AP=BQ$,可得$6=8-2t$, $2t=xt$,

解得$x=2$, $t=1$;

②若△ACP≌△BQP,

则$AC=BQ$, $AP=BP$,可得$6=xt$, $2t=8-2t$,

解得$x=3$, $t=2$.

综上所述,$x=2$, $t=1$或$x=3$, $t=2$.

6. 【解】两辆公交车同时到达F站. 理由如下:

∵ $DF\perp EC$,∴ $\angle DFE=\angle DFC=90°$.

在△DFE与△DFC中,

∵ $\begin{cases}EF=CF,\\\angle DFE=\angle DFC,\\DF=DF,\end{cases}$

∴ △DFE≌△DFC(SAS).

∴ $DE=DC$.

又∵ $AD=BC$, $AB=DC$,

$\therefore DE = AB$.

$\therefore AD + DE + EF = AB + BC + CF$.

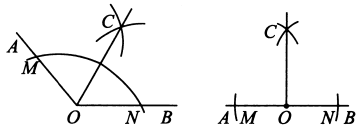
$\therefore$ 两辆公交车同时到达 F 站.

12.3 角的平分线的性质

课时 1 角的平分线的作法与性质

刷基础

1. 【解】如图所示,射线 OC 即为角平分线.



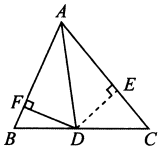
2. D 【解析】$\because OP$ 为 $\angle AOB$ 的平分线,$PC \perp OA$,$PD \perp OB$,$\therefore PC = PD$. 在 $\mathrm{Rt}\triangle OCP$ 和 $\mathrm{Rt}\triangle ODP$ 中,$\because \begin{cases} OP = OP, \\ PC = PD, \end{cases}$ $\therefore \mathrm{Rt}\triangle OCP \cong \mathrm{Rt}\triangle ODP(\mathrm{HL})$,$\therefore OC = OD$,$\angle CPO = \angle DPO$. 因此,A、B、C 选项都正确,结论错误的是 $\angle CPD = \angle DOC$.

3. B 【解析】$\because AC$ 平分 $\angle PAQ$,点 B,B' 分别在边 AP,AQ 上,A 中若 $BB' \perp AC$,设垂足为 D,在 $\triangle ABD$ 与 $\triangle AB'D$ 中,$\angle BAD = \angle B'AD$,$AD = AD$,$\angle ADB = \angle ADB'$,$\therefore \triangle ABD \cong \triangle AB'D$,$\therefore AB = AB'$;B 中若 $BC = B'C$,不能证明 $\triangle ABC \cong \triangle AB'C$,即不能证明 $AB = AB'$;C 中若 $\angle ACB = \angle ACB'$,则在 $\triangle ABC$ 与 $\triangle AB'C$ 中,$\angle BAC = \angle B'AC$,$AC = AC$,$\therefore \triangle ABC \cong \triangle AB'C$,$\therefore AB = AB'$;D 中若 $\angle ABC = \angle AB'C$,则 $\angle ACB = \angle ACB'$,又$\because \angle BAC = \angle B'AC$,$AC = AC$,$\therefore \triangle ABC \cong \triangle AB'C$,$\therefore AB = AB'$.

4. B 【解析】过 D 作 $DE \perp AB$ 于 E. $\because AD$ 平分 $\angle BAC$,$\angle C = 90°$,$\therefore DE = CD$. $\because BD : CD = 3 : 2$,$BC = 30$,$\therefore CD = 12$,故 $DE = 12$,即点 D 到 AB 的距离为 12.

5. A 【解析】作 $EH \perp BC$ 于 H. $\because BE$ 平分 $\angle ABC$,CD 是 AB 边上的高线,$EH \perp BC$,$\therefore EH = DE = 2$,$\therefore \triangle BCE$ 的面积为 $\frac{1}{2}BC \cdot EH = 6$,故选 A.

6. B 【解析】如图,作 $DE \perp AC$ 于 E. $\because \frac{1}{2} \cdot AF \cdot DF = 14$,$AF = 7$,$\therefore DF = 4$. $\because AD$ 是 $\triangle ABC$ 的角平分线,$DF \perp AB$,$DE \perp AC$,$\therefore DE = DF = 4$,$\therefore \frac{1}{2} \cdot AC \cdot DE = 22$,$\therefore AC = 11$. 故选 B.



7. 75° 【解析】$\because \angle B = 30°$,$\therefore \angle BAC + \angle BCA = 150°$,$\therefore \angle DAC + \angle FCA = 210°$. $\because$ 三角形的外角 $\angle DAC$ 和 $\angle ACF$ 的平分线交于点 E,$\therefore \angle EAC + \angle ECA = 105°$,$\therefore \angle AEC = 180° - 105° = 75°$.

8. 3 : 4 【解析】$\because AD$ 是 $\angle BAC$ 的平分线,$\therefore$ 点 D 到 AB,AC 的距离相等,$\therefore S_{\triangle ABD} : S_{\triangle ACD} = 6 : 8 = 3 : 4$,过 A 作 $AE \perp BC$ 于 E,$\therefore S_{\triangle ABD} = \frac{1}{2}BD \cdot AE$,$S_{\triangle ACD} = \frac{1}{2}CD \cdot AE$,$\therefore BD : CD = S_{\triangle ABD} : S_{\triangle ACD} = 3 : 4$.

9. 【证明】连接 AD.

在 $\triangle ABD$ 和 $\triangle ACD$ 中,$\because \begin{cases} AB = AC, \\ BD = CD, \\ AD = AD, \end{cases}$

$\therefore \triangle ABD \cong \triangle ACD(\mathrm{SSS})$.

$\therefore \angle BAD = \angle CAD$,即 AD 平分 $\angle EAF$.

又$\because DE \perp AB$,$DF \perp AC$,$\therefore DE = DF$.

10. 【证明】如图,过点 P 作 $PE \perp BA$ 于 E.

$\because \angle 1 = \angle 2$,$PF \perp BC$ 于 F,

$\therefore PE = PF$,$\angle PEA = \angle PFB = 90°$.

在 $\mathrm{Rt}\triangle PEA$ 与 $\mathrm{Rt}\triangle PFC$ 中,

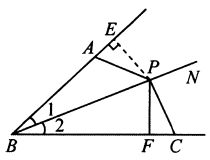
$\because \begin{cases} PA = PC, \\ PE = PF, \end{cases}$

$\therefore \mathrm{Rt}\triangle PEA \cong \mathrm{Rt}\triangle PFC(\mathrm{HL})$,

$\therefore \angle PAE = \angle PCB$.

$\because \angle BAP + \angle PAE = 180°$,

$\therefore \angle PCB + \angle BAP = 180°$.

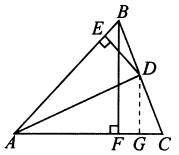


刷提升

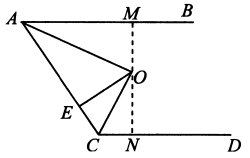
1. B 【解析】$\because$ 在 $\triangle ABC$ 中,$\angle C = 90°$,AD 是 $\angle CAB$ 的平分线,$DE \perp AB$ 于 E,$\therefore CD = ED$. 在 $\mathrm{Rt}\triangle ACD$ 和 $\mathrm{Rt}\triangle AED$ 中,$\because \begin{cases} AD = AD, \\ CD = ED, \end{cases}$ $\therefore \mathrm{Rt}\triangle ACD \cong \mathrm{Rt}\triangle AED(\mathrm{HL})$,$\therefore \angle ADC = \angle ADE$. $\because \angle ADC + \angle ADE + \angle EDB = 180°$,$DE$ 平分 $\angle ADB$,$\therefore \angle ADC = \angle ADE = \angle EDB = 60°$. $\because \angle B + \angle EDB = 90°$,$\therefore \angle B = 30°$.

2. B 【解析】过点 O 作 $OF \perp BC$,垂足为 F. $\because OB$ 是 $\angle ABC$ 的平分线,$OD \perp AB$,$OF \perp BC$,$\therefore OD = OF$,同理,$OE = OF$,$\therefore OD = OE$.

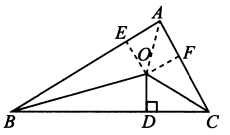
3. C 【解析】如图,过 D 作 $DG \perp AC$ 于点 G. $\because AD$ 平分 $\angle BAC$,$DE \perp AB$,$DG \perp AC$,$\therefore DG = DE = 2$. $\because AB = 6$,$AC = 4$,$\therefore S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}AC \cdot BF = S_{\triangle ABD} + S_{\triangle ACD} = \frac{1}{2}AB \cdot DE + \frac{1}{2}AC \cdot DG$,$\therefore \frac{1}{2} \times 4 \cdot BF = \frac{1}{2} \times 6 \times 2 + \frac{1}{2} \times 4 \times 2$,解得 $BF = 5$. 故选 C.



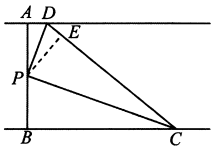
4. B 【解析】如图,过点 O 作 $MN \perp AB$ 于 M,交 CD 于 N. $\because AB // CD$,$\therefore MN \perp CD$. $\because AO$ 是 $\angle BAC$ 的平分线,$OM \perp AB$,$OE \perp AC$,$OE = 2$,$\therefore OM = OE = 2$. $\because CO$ 是 $\angle ACD$ 的平分线,$OE \perp AC$,$ON \perp CD$,$\therefore ON = OE = 2$,$\therefore MN = OM + ON = 4$,即 AB 与 CD 之间的距离是 4.



5. 30 【解析】如图,作 $OE \perp AB$ 于 E,$OF \perp AC$ 于 F,连接 OA. $\because OB$ 是 $\angle ABC$ 的平分线,$OD \perp BC$,$OE \perp AB$,$\therefore OE = OD = 3$,同理 $OF = OD = 3$,$\triangle ABC$ 的面积为 $\frac{1}{2}AB \times 3 + \frac{1}{2}AC \times 3 + \frac{1}{2}BC \times 3 = 30$.



6. 5 【解析】如图,过点 P 作 $PE \perp DC$ 于点 E. $\because AD // BC$,$PA \perp AD$,$\therefore PB \perp CB$. $\because CP$ 和 DP 分别平分 $\angle BCD$ 和 $\angle ADC$,$\therefore PA = PE$,$PB = PE$,$\therefore PE = PA = PB$. $\because PA + PB = AB = 10$,$\therefore PA = PB = 5$,$\therefore PE = 5$. 故答案为 5.



7. (1)【解】$\because AB // CD$,$\therefore \angle ACD + \angle CAB = 180°$.

又$\because \angle ACD = 114°$,$\therefore \angle CAB = 66°$.

由作法知,AM 是 $\angle CAB$ 的平分线,$\therefore \angle MAB = \frac{1}{2}\angle CAB = 33°$.

(2)【证明】由作法可知,AM 平分 $\angle CAB$,$\therefore \angle CAM = \angle MAB$.

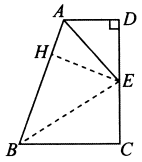
$\because AB // CD$,$\therefore \angle MAB = \angle CMA$,$\therefore \angle CAM = \angle CMA$.

又$\because CN \perp AD$,$CN = CN$,$\therefore \triangle CAN \cong \triangle CMN$.

刷素养

8.【解】(1)点 E 在 $\angle ABC$ 的平分线上. 理由如下:

连接 BE,作 $EH\perp AB$ 于 H,如图.



$\because AE$ 平分 $\angle BAD$,$ED\perp AD$,$EH\perp AB$,

$\therefore ED=EH$.

$\because$ 点 E 是 CD 的中点,

$\therefore ED=EC$,$\therefore EC=EH$.

又$\because AD/\!/BC$,$DC\perp AD$,

$\therefore EC\perp BC$,

$\therefore BE$ 平分 $\angle ABC$,即点 E 在 $\angle ABC$ 的平分线上.

(2)$AD+BC=AB$. 证明:

在 $\mathrm{Rt}\triangle ADE$ 和 $\mathrm{Rt}\triangle AHE$ 中,

$\because \begin{cases} AE=AE, \\ ED=EH, \end{cases}$

$\therefore \mathrm{Rt}\triangle ADE\cong\mathrm{Rt}\triangle AHE$,

$\therefore AD=AH$.

同理,可证明 $\mathrm{Rt}\triangle BCE\cong\mathrm{Rt}\triangle BHE$,

$\therefore BC=BH$,

$\therefore AD+BC=AH+BH=AB$.

课时2　角的平分线的判定

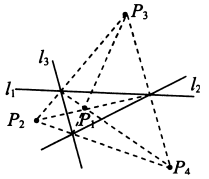
刷基础

1.B　【解析】$\because$ 要使凉亭到草坪三边的距离相等,$\therefore$ 凉亭应在 $\triangle ABC$ 三条角平分线的交点处. 故选 B.

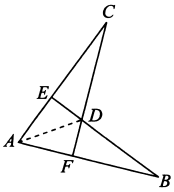
2.A　【解析】从题图上可以看出点 M 在 $\angle AOB$ 的平分线上,其他三点不在 $\angle AOB$ 的平分线上,所以点 M 到 $\angle AOB$ 两边的距离相等. 故选 A.

3.B　【解析】根据题意可知,点 P 在 $\angle BAC$ 的平分线上,因此 AP 平分 $\angle BAC$,则有 $\angle BAP=\angle CAP$.

4.D　【解析】如图,可选择的地址共有四处. 故选 D.



5.D　【解析】如图,连接 AD. $\because BE\perp AC$ 于点 E,$CF\perp AB$ 于点 F,$\therefore \angle AEB=\angle AFC=90°$,$\angle DEC=\angle DFB=90°$. 在 $\triangle ABE$ 和 $\triangle ACF$ 中,$\because \begin{cases} \angle BAE=\angle CAF, \\ \angle AEB=\angle AFC, \\ AB=AC, \end{cases}$ $\therefore \triangle ABE\cong\triangle ACF$(AAS),故①正确;$\therefore AE=AF$,$\because AB=AC$,$\therefore EC=BF$,在 $\triangle DEC$ 和 $\triangle DFB$ 中,$\because \begin{cases} \angle EDC=\angle FDB, \\ \angle DEC=\angle DFB, \\ EC=FB, \end{cases}$ $\therefore \triangle DEC\cong\triangle DFB$(AAS),故②正确;$\therefore DE=DF$,$\because DE\perp AC$,$DF\perp AB$,$\therefore AD$ 平分 $\angle CAB$,故③正确.



6. $30°$　【解析】$\because CD\perp OA$ 于 D,$CE\perp OB$ 于 E,且 $CD=CE$,$\therefore OC$ 平分 $\angle AOB$,即 $\angle DOC=\frac{1}{2}\angle AOB=\frac{1}{2}\times60°=30°$.

7. $90°$　【解析】$\because$ 点 P 到 AB,BC,CD 的距离都相等,$\therefore BP$,CP 分别是 $\angle ABC$ 和 $\angle BCD$ 的平分线,$\therefore \angle CBP=\frac{1}{2}\angle ABC$,$\angle BCP=\frac{1}{2}\angle BCD$,$\therefore \angle CBP+\angle BCP=\frac{1}{2}(\angle ABC+\angle BCD)$. $\because AB/\!/CD$,$\therefore \angle ABC+\angle BCD=180°$,$\therefore \angle CBP+\angle BCP=\frac{1}{2}\times180°=90°$,$\therefore \angle P=180°-(\angle CBP+\angle BCP)=180°-90°=90°$.

8. $125°$　【解析】$\because OF=OD=OE$,$\therefore OB$,OC 分别平分 $\angle ABC$ 和 $\angle ACB$. $\because \angle BAC=70°$,$\therefore \angle ABC+\angle ACB=180°-70°=110°$,$\therefore \angle OBC+\angle OCB=\frac{1}{2}(\angle ABC+\angle ACB)=\frac{1}{2}\times110°=55°$,$\therefore \angle BOC=180°-(\angle OBC+\angle OCB)=180°-55°=125°$.

9.【证明】$\because BF\perp AC$ 于点 F,$CE\perp AB$ 于点 E,

$\therefore \angle DEB=\angle DFC=90°$.

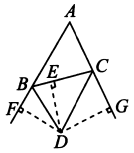
在 $\triangle BDE$ 和 $\triangle CDF$ 中,$\because \begin{cases} \angle BDE=\angle CDF, \\ \angle BED=\angle CFD, \\ BE=CF, \end{cases}$

$\therefore \triangle BDE\cong\triangle CDF$(AAS).

$\therefore DE=DF$,

$\therefore AD$ 平分 $\angle BAC$.

10.【证明】过 D 作 $DE\perp BC$ 于 E,$DF\perp AB$ 交 AB 延长线于 F,$DG\perp AC$ 交 AC 延长线于 G.



$\because BD$ 是 $\angle CBF$ 的平分线,$DE\perp BC$,$DF\perp AB$,

$\therefore DE=DF$.

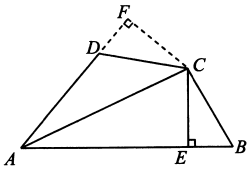
同理可得 $DE=DG$.

$\therefore DF=DG$.

又$\because DF\perp AB$,$DG\perp AC$,

$\therefore$ 点 D 在 $\angle BAC$ 的平分线上.

11.【证明】作 $CF\perp AD$,交 AD 的延长线于 F.



$\because \angle CDF+\angle ADC=180°$,

$\angle ABC+\angle ADC=180°$,

$\therefore \angle CDF=\angle B$,

即 $\angle EBC=\angle CDF$.

$\because CE\perp AB$,$CF\perp AD$,

$\therefore \angle CEB=\angle CFD=90°$.

在 $\triangle CFD$ 和 $\triangle CEB$ 中,

$\because \begin{cases} \angle CFD=\angle CEB, \\ \angle CDF=\angle EBC, \\ CD=CB, \end{cases}$

$\therefore \triangle CDF\cong\triangle CBE$(AAS).

$\therefore CF=CE$.

$\because CF\perp AD$,$CE\perp AB$,$CF=CE$,

$\therefore AC$ 平分 $\angle BAD$.

全章综合训练

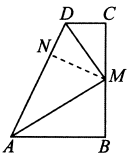
刷章测

1.D　【解析】已知 $AB=AC$,$\angle A$ 为公共角,A 选项,添加 $\angle B=\angle C$,利用"ASA"即可判定 $\triangle ABE\cong\triangle ACD$;B 选项,添加 $AD=AE$,利用"SAS"即可判定 $\triangle ABE\cong\triangle ACD$;C 选项,添加 $BD=CE$,由等量关系可得 $AD=AE$,利用"SAS"即可判定 $\triangle ABE\cong\triangle ACD$;D 选项,添加 $BE=CD$,不能判定 $\triangle ABE\cong\triangle ACD$,所以此选项不能作为添加的条件. 故选 D.

2.D　【解析】$\because AB\perp CD$,$CE\perp AD$,$BF\perp AD$,$\therefore \angle AFB=\angle CED=$

$90°$，$\angle A+\angle D=90°$，$\angle C+\angle D=90°$，$\therefore\ \angle A=\angle C$. $\because AB=CD$，$\therefore\ \triangle ABF\cong\triangle CDE$(AAS)，$\therefore AF=CE=a$，$BF=DE=b$. $\because EF=c$，$\therefore AD=AF+DF=a+(b-c)=a+b-c$. 故选 D.

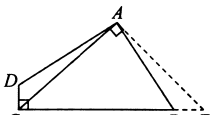
3. B 【解析】如图，作 $MN\perp AD$ 于点 N. $\because\ \angle B=\angle C=90°$，$\therefore AB/\!/CD$，$\therefore\ \angle DAB=180°-\angle ADC=70°$. $\because$ DM 平分 $\angle ADC$，$MN\perp AD$，$MC\perp CD$，$\therefore MN=MC$. $\because$ M 是 BC 的中点，$\therefore MC=MB$，$\therefore MN=MB$. 又 $\because MN\perp AD$，$MB\perp AB$，$\therefore\ \angle MAB=\frac{1}{2}\angle DAB=35°$. 故选 B.



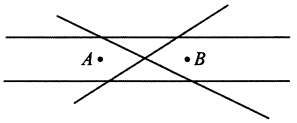
4. B 【解析】$\because BE\perp CE$，$AD\perp CE$，$\therefore\ \angle E=\angle ADC=90°$，$\therefore\ \angle EBC+\angle BCE=90°$. $\because\ \angle ACB=90°$，$\therefore\ \angle BCE+\angle ACD=90°$，$\therefore\ \angle EBC=\angle DCA$. 在 $\triangle CEB$ 和 $\triangle ADC$ 中，$\because\begin{cases}\angle E=\angle ADC,\\ \angle EBC=\angle DCA,\\ BC=AC,\end{cases}\therefore\ \triangle CEB\cong\triangle ADC$(AAS)，$\therefore DC=BE=1$，$CE=AD=3$. $\therefore DE=CE-DC=3-1=2$. 故选 B.

5. B 【解析】$\because E$ 在 $\angle ACB$ 的平分线上，$\therefore E$ 到 CB 的距离等于 E 到 AC 的距离. $\because E$ 在 $\angle ABC$ 的外角的平分线上，$\therefore E$ 到 CB 的距离等于 E 到 AB 的距离，$\therefore E$ 到 AC 的距离等于 E 到 AB 的距离，$\therefore AE$ 是 $\angle BAC$ 的外角的平分线. $\because$ 在 $\mathrm{Rt}\triangle ABC$ 中，$\angle ACB=90°$，$\angle BAC=30°$，$\therefore\ \angle ABC=60°$，$\therefore\ \angle BAE=\frac{150°}{2}=75°$，$\angle ABE=\frac{120°}{2}=60°$，$\therefore\ \angle AEB=180°-60°-75°=45°$.

6. B 【解析】如图，过点 A 作 $AE\perp AC$，交 CB 的延长线于点 E. $\because\ \angle DAB=\angle DCB=90°$，$\therefore\ \angle D+\angle ABC=180°=\angle ABE+\angle ABC$，$\therefore\ \angle D=\angle ABE$. $\because\ \angle DAB=\angle CAE=90°$，$\therefore\ \angle CAD=\angle EAB$. $\because AD=AB$，$\therefore\ \triangle ACD\cong\triangle AEB$，$\therefore AC=AE$，即 $\triangle ACE$ 是等腰直角三角形，$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 的面积与 $\triangle ACE$ 的面积相等. $\because S_{\triangle ACE}=\frac{1}{2}\times5\times5=12.5$，$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 的面积为 12.5. 故选 B.



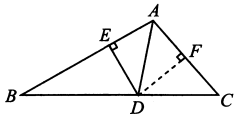
7. 4 【解析】输油管道所在直线符合上述要求的设计方案有 4 种，如图所示：



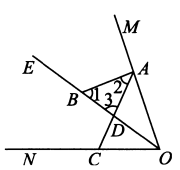
故答案为 4.

8. 62° 【解析】$\because DF\perp BC$，$\angle C=28°$，$\therefore\ \angle D=90°-28°=62°$. $\because\ \triangle AEB\cong\triangle DFC$，$\therefore\ \angle A=\angle D=62°$.

9. 14 【解析】如图，过点 D 作 $DF\perp AC$ 于 F. $\because AD$ 是 $\triangle ABC$ 中 $\angle BAC$ 的平分线，$DE\perp AB$，$\therefore DE=DF=4$. $\therefore\ \triangle ADC$ 的面积为 $\frac{1}{2}AC\cdot DF=\frac{1}{2}\times7\times4=14$.



10. 10°或25°或40° 【解析】如图，$\because\ \angle MON=80°$，OE 平分 $\angle MON$，$\therefore\ \angle MOE=\frac{1}{2}\angle MON=40°$. 又 $\because AB\perp OM$，$\therefore\ \angle OAB=90°$，$\therefore\ \angle1=90°-\angle MOE=50°$. ①当 $\angle1=\angle2=50°$ 时，$\angle OAC=\angle OAB-\angle2=40°$；②当 $\angle1=\angle3=50°$ 时，$\angle2=180°-\angle1-\angle3=80°$，$\therefore\ \angle OAC=\angle OAB-\angle2=10°$；③当 $\angle2=\angle3$ 时，$\because\ \angle1=50°$，$\therefore\ \angle2=\angle3=\frac{180°-\angle1}{2}=65°$，$\therefore\ \angle OAC=\angle OAB-\angle2=25°$. 综上，$\angle OAC$ 的度数为 10°或 25°或 40°.



11. 【证明】$\because BF=EC$，$\therefore BC=EF$.

$\because AB\perp BE$，$DE\perp BE$，

$\therefore\ \angle B=\angle E=90°$.

在 $\mathrm{Rt}\triangle ABC$ 和 $\mathrm{Rt}\triangle DEF$ 中，

$\because\begin{cases}AC=DF,\\ BC=EF,\end{cases}$

$\therefore\ \mathrm{Rt}\triangle ABC\cong\mathrm{Rt}\triangle DEF$(HL).

$\therefore AB=DE$.

12. 【解】(1)$\because\ \triangle BAD\cong\triangle ACE$，

$\therefore BD=AE$，$AD=CE$.

$\therefore BD=AE=AD+DE=CE+DE$，

即 $BD=DE+CE$.

(2)当 $\triangle ABD$ 满足 $\angle ADB=90°$ 时，$BD/\!/CE$. 理由如下：

$\because\ \triangle BAD\cong\triangle ACE$，

$\therefore\ \angle E=\angle ADB=90°$(添加的条件是 $\angle ADB=90°$)，

$\therefore\ \angle BDE=180°-90°=90°=\angle E$，

$\therefore BD/\!/CE$.

13. (1)【证明】在 $\triangle AED$ 和 $\triangle CEF$ 中，

$\because\begin{cases}AE=CE,\\ \angle AED=\angle CEF,\\ DE=FE,\end{cases}$

$\therefore\ \triangle AED\cong\triangle CEF$(SAS)，

$\therefore\ \angle A=\angle ACF$，

$\therefore CF/\!/AB$.

(2)【解】$\because AC$ 平分 $\angle BCF$，

$\therefore\ \angle ACB=\angle ACF$.

$\because\ \angle A=\angle ACF$，

$\therefore\ \angle A=\angle ACB$.

$\because\ \angle A+\angle ABC+\angle ACB=180°$，$\angle ABC=50°$，

$\therefore 2\angle A=130°$，

$\therefore\ \angle A=65°$.

14. (1)【证明】$\because AD/\!/BC$，$\therefore\ \angle DAC=\angle ECB$.

在 $\triangle DAC$ 和 $\triangle ECB$ 中，

$\because\begin{cases}AD=CE,\\ \angle DAC=\angle ECB,\\ AC=CB,\end{cases}$

$\therefore\ \triangle DAC\cong\triangle ECB$(SAS).

(2)【解】$\because CA$ 平分 $\angle BCD$，

$\therefore\ \angle ECB=\angle DCA$，且由(1)可知 $\angle DAC=\angle ECB$，

$\therefore\ \angle DAC=\angle DCA$. $\therefore CD=DA=3$.

又 $\because$ 由(1)可知 $\triangle DAC\cong\triangle ECB$，$\therefore BE=CD=3$.

15. (1)【证明】$\because\ \angle BGE=\angle ADE$，$\angle BGE=\angle CGF$，

$\therefore\ \angle ADE=\angle CGF$.

$\because AC\perp BD$，$BF\perp CD$，

$\therefore\ \angle ADE+\angle DAE=\angle CGF+\angle GCF=90°$，

$\therefore\ \angle DAE=\angle GCF$，

$\therefore AD=CD$.

(2) 面积等于 $\triangle ADE$ 面积的 2 倍的三角形有 $\triangle ACD$, $\triangle ABE$, $\triangle BCE$, $\triangle BHG$. 理由如下:

设 $DE=a$,

则 $AE=2DE=2a$, $EG=DE=a$,

$\therefore S_{\triangle ADE}=\frac{1}{2}AE\cdot DE=\frac{1}{2}\cdot 2a\cdot a=a^2$.

$\because BH$ 是 $\triangle ABE$ 的中线,

$\therefore AH=HE=a$.

$\because AD=CD$, $AC\perp BD$, $\therefore$ Rt$\triangle ADE\cong$Rt$\triangle CDE$(HL),

$\therefore CE=AE=2a$,

则 $S_{\triangle ADC}=\frac{1}{2}AC\cdot DE=\frac{1}{2}\cdot(2a+2a)\cdot a=2a^2=2S_{\triangle ADE}$.

在 $\triangle ADE$ 和 $\triangle BGE$ 中,

$\because \begin{cases}\angle AED=\angle BEG,\\ DE=GE,\\ \angle ADE=\angle BGE,\end{cases}$

$\therefore \triangle ADE\cong\triangle BGE$(ASA),

$\therefore BE=AE=2a$,

$\therefore S_{\triangle ABE}=\frac{1}{2}AE\cdot BE=\frac{1}{2}\cdot 2a\cdot 2a=2a^2$,

$S_{\triangle BCE}=\frac{1}{2}CE\cdot BE=\frac{1}{2}\cdot 2a\cdot 2a=2a^2$,

$S_{\triangle BHG}=\frac{1}{2}HG\cdot BE=\frac{1}{2}\cdot(a+a)\cdot 2a=2a^2$.

综上所述,面积等于 $\triangle ADE$ 面积的 2 倍的三角形有 $\triangle ACD$, $\triangle ABE$, $\triangle BCE$, $\triangle BHG$.

第十三章　轴对称

13.1　轴对称

13.1.1　轴对称

刷基础

1.A 【解析】A 中,此图案是轴对称图形,有 5 条对称轴,此选项符合题意;B 中,此图案不是轴对称图形,此选项不符合题意;C 中,此图案不是轴对称图形,而是旋转得到的图形,不符合题意;D 中,此图案不是轴对称图形,不符合题意.

2.B 【解析】根据成轴对称图形的意义可知:(1)右边图形和左边图形不能形成轴对称图形;(2)右边图形和左边图形能形成轴对称图形;(3)右边图形和左边图形能形成轴对称图形;(4)右边图形和左边图形不能形成轴对称图形.

3.B 【解析】A 选项,上海自来水来自海上,可将“水”字理解为对称轴,对折后重合的字相同,故本选项不符合题意;B 选项,有志者事竟成,五字均不相同,所以不对称,故本选项符合题意;C 选项,清水池里池水清,可将“里”字理解为对称轴,对折后重合的字相同,故本选项不符合题意;D 选项,蜜蜂酿蜂蜜,可将“酿”字理解为对称轴,对折后重合的字相同,故本选项不符合题意. 故选 B.

4.书 【解析】根据轴对称的知识,可知这个英语单词是 BOOK,这个单词所指的物品是书.

5.【解】(1)点 A, A 是对称点,点 B, D 是对称点,点 C, E 是对称点.

(2) $AB=AD$, $AC=AE$, $BC=DE$, $\angle BAC=\angle DAE$, $\angle B=\angle D$, $\angle C=\angle E$.

(3)有. 分别是 $\triangle AFC$ 与 $\triangle AFE$, $\triangle ABF$ 与 $\triangle ADF$,都关于直线 MN 成轴对称.

6.A 【解析】根据轴对称的定义可得,若 $\triangle ABC$ 和 $\triangle ADE$ 关于直线 l 对称,则①$\triangle ABC\cong\triangle ADE$ 正确;因为如果两个图形关于某条直线对称,那么对称轴是任何一对对应点所连线段的垂直平分线,故②l 垂直平分 DB 正确;轴对称图形的对应线段,对应角相等,故③$\angle C=\angle E$ 正确;因为成轴对称的两个图形对应线段或延长线如果相交,那么,交点一定在对称轴上,故④BC 与 DE 的延长线的交点一定落在直线 l 上正确.

7.C 【解析】$\because$ 将 $\triangle ABC$ 沿直线 DE 折叠后,使得点 B 与点 A 重合, $\therefore AD=BD$. $\because$ $\triangle ADC$ 的周长为 34 cm, $AC=10$ cm, $\therefore AD+DC=34-10=24$(cm). $\because AD=BD$, $\therefore BD+DC=24$ cm,即 $BC=24$ cm.

8.3 【解析】$\because$ 直线 AD 是三角形 ABC 的对称轴, $\therefore AD$ 垂直平分 BC,即 $AD\perp BC$, $BD=DC$, $\therefore S_{\triangle EFB}=S_{\triangle EFC}$, $\therefore S_{\text{阴影部分}}=S_{\triangle ABD}=\frac{1}{2}BD\cdot AD=\frac{1}{2}\times 2\times 3=3$.

9.【解】$\because$ $\triangle ABC$ 与 $\triangle ADC$ 关于 AC 所在的直线对称,

$\therefore \angle B=\angle D=80°$, $\angle BAC=\angle CAD$.

$\because \angle BCA=35°$,

$\therefore \angle BAC=180°-\angle BCA-\angle B=180°-35°-80°=65°$,

$\therefore \angle BAD=130°$

13.1.2　线段的垂直平分线的性质

刷基础

1.B 【解析】$\because AC$ 垂直平分 BD, $\therefore BE=ED$. 在 $\triangle ABE$ 和 $\triangle ADE$ 中, $BE=DE$, $\angle AEB=\angle AED=90°$, $AE=AE$, $\therefore$ $\triangle ABE\cong\triangle ADE$. $\therefore \angle BAC=\angle DAC$,故 A 正确;同理 $\triangle BEC\cong\triangle DEC$,故 C 正确;$\because$ $\triangle BEC\cong\triangle DEC$, $\therefore BC=CD$,故 D 正确;依据题意无法得到 AB 与 BD 的数量关系,故 B 不一定正确.

2.A 【解析】$\because$ 直线 DE 是 $\triangle ABC$ 中边 AC 的垂直平分线, $\therefore AE=CE$, $\therefore CE+BE=AB=8$ cm. $\because BC=6$ cm, $\therefore$ $\triangle EBC$ 的周长为 $BC+CE+BE=BC+AB=6+8=14$(cm). 故选 A.

3.6 【解析】$\because ED$ 垂直平分 BC, $\therefore BE=CE$,又 $\because CE=5$, $AE=1$, $\therefore AB=BE+AE=CE+AE=5+1=6$.

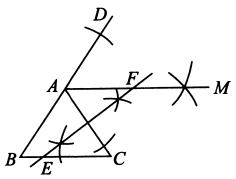
4.【解】$\because AD\perp BC$, $BD=DC$, $\therefore AB=AC$.

又 $\because$ 点 C 在 AE 的垂直平分线上, $\therefore AC=EC$, $\therefore AB=AC=EC=5$ cm.

$\because BD=CD=3$ cm, $\therefore BE=BD+CD+EC=3+3+5=11$(cm).

5.B 【解析】$\because DE$ 是 AC 的垂直平分线, $\therefore DA=DC$, $AE=EC$, $DE=DE$, $\therefore$ $\triangle ADE\cong\triangle CDE$, $\therefore \angle A=\angle DCE$,故 A、D 正确;$\because \angle ACB=90°$, $\therefore DE/\!/BC$, $\therefore \angle ADE=\angle CDE=\angle DCB$,故 C 正确;根据题意无法证得 $\angle A=2\angle DCB$,故 B 错误. 故选 B.

6.【解】如图所示:



7.C 【解析】∵ $OD=OE$，∴ O 点在线段 DE 的垂直平分线上，∵ $CD=CE$，∴ C 点在线段 DE 的垂直平分线上，∴ CO 是线段 DE 的垂直平分线，∴ $OC\perp l$.

8. AC 【解析】∵ $BC=BD+DC$，又∵ $BC=BD+AD$，∴ $AD=CD$，∴ 点 D 在线段 AC 的垂直平分线上.

9. 【证明】∵ $\angle ACB=90°$，$DE\perp AB$，

∴ $\angle ACB=\angle BDE=90°$.

在 $\mathrm{Rt}\triangle BDE$ 和 $\mathrm{Rt}\triangle BCE$ 中，

∵ $\begin{cases}BD=BC,\\BE=BE,\end{cases}$

∴ $\mathrm{Rt}\triangle BDE\cong\mathrm{Rt}\triangle BCE$，

∴ $ED=EC$.

∵ $BD=BC$，

∴ BE 垂直平分 CD.

刷提升

1.C 【解析】∵ 点 P 在线段 AB 的垂直平分线上，∴ $AP=BP$.

∵ $BC=PC+BP$，∴ $BC=PC+AP$.

2.D 【解析】因为 $\angle C=90°$，AD 平分 $\angle BAC$，$DE\perp AB$，所以 $CD=ED$，则①正确；因为 $\angle B+\angle BDE=90°$，$\angle B+\angle BAC=90°$，所以 $\angle BDE=\angle BAC$，则③正确；由“AAS”可证明 $\triangle AED\cong\triangle ACD$，所以 $\angle EDA=\angle CDA$，$AC=AE$，因为 $AE+BE=AB$，所以 $AC+BE=AB$，则②④正确. 故选 D.

3.A 【解析】∵ 点 P 关于 OA 的对称点 Q 恰好落在线段 MN 上，点 P 关于 OB 的对称点 R 落在 MN 的延长线上，∴ $PM=MQ$，$PN=NR$. ∵ $PM=2.5$ cm，$PN=3$ cm，$MN=4$ cm，∴ $NR=3$ cm，$MQ=2.5$ cm，∴ $NQ=MN-MQ=4-2.5=1.5$(cm)，则 $QR=NR+NQ=3+1.5=4.5$(cm). 故选 A.

4.5 【解析】∵ 在 $\triangle ABC$ 中，AC 的垂直平分线交 AC 于 E，交 BC 于 D，∴ $AD=CD$. ∵ $\triangle ABC$ 的周长是 12 cm，$\triangle ABD$ 的周长是 7 cm，∴ $AB+AC+BC=12$ cm，$AB+BD+AD=AB+BD+CD=AB+BC=7$ cm，∴ $AC=12-7=5$(cm).

5. 三边的垂直平分线 【解析】∵ 仓库到三个车间的距离相等，∴ 仓库应建在 AB，BC，CA 的垂直平分线的交点处.

6. 【解】(1)∵ EF 垂直平分 AC，

∴ $AE=EC$，∴ $\triangle AEC$ 是等腰三角形，∴ $\angle C=\angle CAE$.

∵ AD 垂直平分 BE，$\angle BAE=40°$，

∴ $\angle AED=70°$，

∴ $\angle C=\frac{1}{2}\angle AED=35°$.

(2)∵ $\triangle ABC$ 的周长为 13 cm，$AC=6$ cm，

∴ $AB+BE+EC=7$ cm.

由题意可知，$AB=AE=EC$，

∴ $2DE+2EC=7$ cm，

∴ $DE+EC=DC=3.5$ cm.

7. 【证明】(1)∵ $AD/\!/BC$，

∴ $\angle ADC=\angle ECF$.

∵ E 是 CD 的中点，

∴ $DE=CE$.

在 $\triangle ADE$ 与 $\triangle FCE$ 中，

∵ $\begin{cases}\angle ADE=\angle FCE,\\DE=CE,\\\angle AED=\angle FEC,\end{cases}$

∴ $\triangle ADE\cong\triangle FCE$(ASA)，

∴ $FC=AD$.

(2)由(1)知 $\triangle ADE\cong\triangle FCE$，

∴ $AE=EF$，$AD=CF$.

∵ $BE\perp AE$，

∴ BE 是线段 AF 的垂直平分线，

∴ $AB=BF=BC+CF$.

∵ $AD=CF$，

∴ $AB=BC+AD$.

刷素养

8. (1)120° 【解析】∵ 点 P 关于 l_1，l_2 的对称点分别为 P_1，P_2，

∴ $\angle P_1OA=\angle AOP$，$\angle P_2OB=\angle POB$，

∴ $\angle P_1OP_2=2(\angle AOP+\angle POB)=2\angle AOB=120°$.

(2)【解】∵ 点 P 关于 l_1，l_2 的对称点分别为 P_1，P_2，

∴ $OP_1=OP=OP_2=3$.

∵ $P_1P_2=5$，

∴ $\triangle P_1OP_2$ 的周长为 $OP_1+OP_2+P_1P_2=3+3+5=11$.

13.2 画轴对称图形

课时 1 画轴对称图形

刷基础

1.C 【解析】只有第四个图案中的图形沿某条直线折叠后直线两旁的部分能够完全重合，是轴对称图形；不是利用轴对称设计图案的有 3 个，故选 C.

2.B 【解析】因为 $\triangle ABC$ 与 $\triangle A'B'C'$ 关于直线 l 对称，所以 $\triangle ABC$ 与 $\triangle A'B'C'$ 的形状、大小完全一致，所以 $\triangle A'B'C'$ 的面积是 4 cm^2.

3.D 【解析】∵ 剪去的图形是三角形，∴ 将纸片沿 CD 展开，可得◇，即可排除选项 A. ∵ 再沿 AB 展开可知两条短边正对着，∴ 排除 B、C 选项. 故选 D.

4. 90° BC PB 【解析】∵ A，B 两点关于直线 l 对称，∴ l 是 AB 的垂直平分线，∴ $\angle ACP=\angle BCP=90°$，$AC=BC$，$PA=PB$.

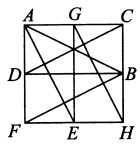
5. 垂直平分线 【解析】∵ $\triangle ABC$，$\triangle DEF$ 关于直线 m 对称，∴ 点 A，D 关于直线 m 对称，m 是 AD 的垂直平分线.

6. 40° 【解析】∵ $\triangle ABC$ 与 $\triangle A'B'C'$ 关于直线 l 对称，∴ $\angle C=\angle C'=42°$. 又∵ $\angle A=98°$，∴ $\angle B$ 的度数为 $180°-\angle A-\angle C=40°$.

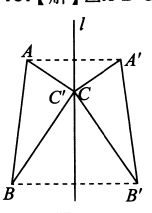
7.C 【解析】根据轴对称的定义可知 C 中图形沿直线 l 对折不能重合.

8.D 【解析】A、B、C 选项中的图形，沿某条直线折叠，直线两旁的部分均能互相重合，所以它们是轴对称图形；D 选项中，根据轴对称的定义，对折后不能完全重合，所以不是轴对称图形.

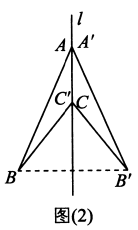
9.5 【解析】如图，与 $\triangle ABC$ 成轴对称且以格点为顶点的三角形有 5 个，分别为 $\triangle DCB$，$\triangle HFB$，$\triangle CDA$，$\triangle AEF$，$\triangle HGC$.



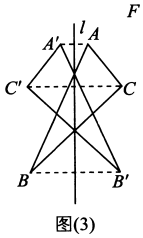
10. 【解】$\triangle A'B'C'$ 如图所示.



图(1)



图(2)



图(3)

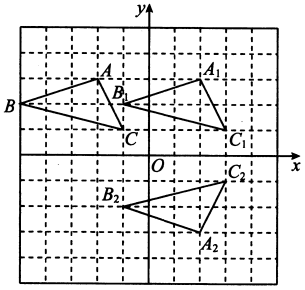
课时2　用坐标表示轴对称

刷基础

1. D　【解析】∵ 点 $A(1+m,1-n)$ 与点 $B(-3,2)$ 关于 y 轴对称，∴ $1+m=3$，$1-n=2$，解得 $m=2$，$n=-1$，∴ $m+n=2-1=1$，故选 D.

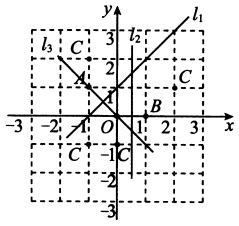
2. B　【解析】方法一：由平移的性质可知，在平移过程中点 A 的横坐标增大 4，纵坐标不变，则点 A_1 的坐标为 $(2,3)$. 由对称的性质可知，点 A_1 和点 A_2 的横坐标相等，纵坐标互为相反数，故点 A_2 的坐标是 $(2,-3)$.

方法二：作出 $\triangle A_1B_1C_1$ 和 $\triangle A_2B_2C_2$，如图所示. 由图可知点 A_2 的坐标点 $(2,-3)$.



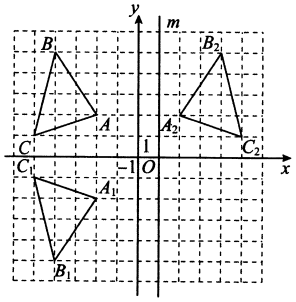
3. $(-1,2),(2,1),(-1,-1),(0,-1)$

【解析】如图所示，当棋子 C 的坐标为 $(-1,2)$，$(2,1)$ 时，A,O,B,C 四颗棋子连线后均组成轴对称图形，直线 l_1,l_2 分别为其对称轴；当棋子 C 的坐标为 $(-1,-1)$ 时，x 轴是对称轴；当棋子 C 的坐标为 $(0,-1)$ 时，直线 l_3 是对称轴.



4. (1)关于 y 轴对称　(2)关于 x 轴对称　【解析】关于 x 轴对称的点的横坐标相等，纵坐标互为相反数；关于 y 轴对称的点的纵坐标相等，横坐标互为相反数. 所以点 A 和点 B 的位置关系是关于 y 轴对称，点 B 和点 C 的位置关系是关于 x 轴对称.

5. 【解】(1)如图所示，$\triangle A_1B_1C_1$ 即为所求作的三角形，点 B_1 的坐标为 $(-4,-5)$.



(2)如图所示，$\triangle A_2B_2C_2$ 即为所求作的三角形，点 B_2 的坐标为 $(4,5)$.

(3)$(2-a,b)$　【解析】∵ 点 $P(a,b)$ 是 $\triangle ABC$ 内部一点，

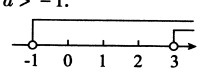
∴ 设点 P 关于直线 m 对称的点 P' 的横坐标为 x，

则 $\frac{a+x}{2}=1$，故 $x=2-a$，

∴ 点 P 关于直线 m 对称的点的坐标是 $(2-a,b)$.

6. B　【解析】∵ 点 $M(6-2a,a+1)$ 关于 y 轴的对称点在第一象限，

∴ $\begin{cases}6-2a<0,\\a+1>0,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a>3,\\a>-1.\end{cases}$ ∴ a 的取值范围在数轴上表示如下.



7. 1　【解析】由题意得 $a=-4$，$b=3$，则 $(a+b)^{2\,018}=(-1)^{2\,018}=1$.

8. 【解】(1)四边形 $ABCD$ 是长方形，分别以长方形 $ABCD$ 的两条对称轴为 x 轴和 y 轴建立平面直角坐标系.

∵ 点 A 的坐标为 $(4,3)$，∴ $B(4,-3)$，$C(-4,-3)$，$D(-4,3)$.

(2)∵ $AB=6$，$AD=8$，

∴ 长方形 $ABCD$ 的面积为 $6\times8=48$.

刷易错

9. (1)$(5,3)$　(2)$(-5,-3)$　【解析】由对称的性质可知，点 P 及其关于 x 轴对称的点的横坐标相等，纵坐标互为相反数，故点 P 关于 x 轴对称的点的坐标为 $(5,3)$；点 P 及其关于 y 轴对称的点的纵坐标相等，横坐标互为相反数，故点 P 关于 y 轴对称的点的坐标为 $(-5,-3)$.

易错警示 若关于 x 轴对称，则横坐标相等；若关于 y 轴对称，则纵坐标相等. 切记不要混淆.

刷提升

1. C　【解析】∵ 点 N 与点 A 关于 x 轴对称，∴ $N(1,-3)$. ∵ 点 M 与点 N 关于 y 轴对称，∴ $M(-1,-3)$.

2. A　【解析】由点 A 坐标，得 $C(-3,1)$. 由翻折的性质得 C' 与 C 关于 y 轴对称，则 $C'(3,1)$. 故选 A.

3. D　【解析】∵ 点 A 和点 $B(2,3)$ 关于 x 轴对称，∴ 点 A 的坐标为 $(2,-3)$，∴ $AB=3-(-3)=3+3=6$，即 A,B 两点间的距离为 6.

4. D　【解析】∵ 点 $M(a,3)$ 关于直线 $x=3$ 的对称点 N 的坐标为 $(5,3)$，∴ 对称点 N 到直线 $x=3$ 的距离为 2. ∴ 点 $M(a,3)$ 到直线 $x=3$ 的距离为 2，∴ $a=1$. 故选 D.

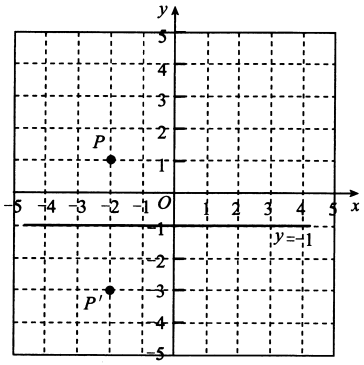
5. C　【解析】∵ 点 $P(-2,-4)$，点 $Q(6,-4)$，$(-2+6)\div2=2$，即横坐标相加除以 2 为 2，纵坐标不变，则 P,Q 两点关于直线 $x=2$ 对称.

6. A　【解析】由题意可知，第 2 018 次变换后的点 M 在 x 轴上方，∴ 点 M 的纵坐标为 2，横坐标为 $2-2\,018\times1=-2\,016$，∴ 点 M 的坐标变为 $(-2\,016,2)$，故选 A.

7. -6　【解析】∵ 点 $P(3,1-b)$ 关于 y 轴的对称点 Q 的坐标是 $(a,-1)$，∴ $a=-3$，$1-b=-1$，解得 $b=2$，∴ $ab=(-3)\times2=-6$.

8. $(4,0)$　8　【解析】点 $M(-4,0)$ 关于 y 轴对称的点 N 的坐标是 $(4,0)$，则 MN 的长为 $4+4=8$.

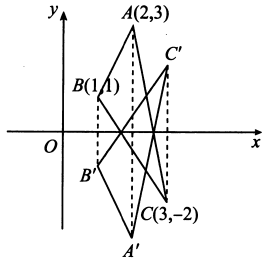
9. $(-2,-3)$　【解析】如图所示，点 $P(-2,1)$ 关于直线 $y=-1$ 的对称点为 $(-2,-3)$.



10. 【解】如图所示，$\triangle A'B'C'$ 即为所作.

由图可知，点 A,B,C 关于 x 轴对称的点的坐标分别为 $(2,-3)$，

(1,-1),(3,2).



刷素养

11. 【解】(1)∵ EF 与 CD 关于 y 轴对称,EF 两端点的坐标分别为 $E(-m,a+1)$,$F(-m,1)$,

∴ $C(m,a+1)$,$D(m,1)$.

设 CD 与直线 l 之间的距离为 x,

∵ CD 与 MN 关于直线 l 对称,l 与 y 轴之间的距离为 a,

∴ MN 与 y 轴之间的距离为 $a-x$.

∵ $x=m-a$,

∴ 点 M 的横坐标为 $a-(m-a)=2a-m$,

∴ $M(2a-m,a+1)$,$N(2a-m,1)$.

(2)能重合. 理由如下:

∵ $EM=2a-m-(-m)=2a=OA$,$EF=a+1-1=a=OB$,

又∵ $EF\parallel y$ 轴,$EM\parallel x$ 轴,

∴ $\angle MEF=\angle AOB=90°$,

∴ $\triangle ABO\cong\triangle MFE$(SAS),

∴ $\triangle ABO$ 与 $\triangle MFE$ 通过平移能重合.

平移方案:先将 $\triangle ABO$ 向上平移 $(a+1)$ 个单位长度,再向左平移 m 个单位长度(或先将 $\triangle ABO$ 向左平移 m 个单位长度,再向上平移 $(a+1)$ 个单位长度).

13.3 等腰三角形

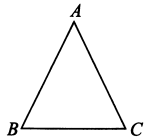
13.3.1 等腰三角形

课时1 等腰三角形的性质

刷基础

1. C 【解析】如图所示,$\triangle ABC$ 中,$AB=AC$. 有两种情况:①顶角 $\angle A=50°$;②当底角是 50°时,∵ $AB=AC$,∴ $\angle B=\angle C=50°$,∵ $\angle A+\angle B+\angle C=180°$,∴ $\angle A=180°-50°-50°=80°$.

∴ 这个等腰三角形的顶角为 50°或 80°.



2. B 【解析】∵ 在 $\triangle ABC$ 中,$AC=AD$,$\angle DAC=80°$,∴ $\angle ADC=\frac{180°-80°}{2}=50°$. ∵ $AD=BD$,∴ $\angle B=\angle BAD$. ∵ $\angle ADC=\angle B+\angle BAD=50°$,∴ $\angle B=\angle BAD=25°$.

3. 75° 【解析】∵ $AB=AC$,$\angle BAC=40°$,∴ $\angle ABC=\angle C=70°$.

∵ BD 平分 $\angle ABC$,∴ $\angle ABD=\frac{1}{2}\angle ABC=35°$,∴ $\angle 1=\angle BAC+\angle ABD=40°+35°=75°$.

4. 72° 【解析】∵ $AB=AC$,CD 平分 $\angle ACB$,$\angle A=36°$,∴ $\angle B=\angle ACB=(180°-36°)\div 2=72°$,∴ $\angle DCB=\frac{1}{2}\angle ACB=36°$,

∴ $\angle BDC=180°-72°-36°=72°$.

5. 【解】设 $\angle B=x$.

∵ $AB=AC$,∴ $\angle C=x$.

∵ $AC=CD$,∴ $\angle CAD=\angle CDA$.

∵ $AD=BD$,

∴ $\angle BAD=\angle B=x$.

由三角形的外角性质,得 $\angle CDA=\angle B+\angle BAD=2x$,

在 $\triangle ACD$ 中,$\angle C+\angle CAD+\angle CDA=180°$,

∴ $x+2x+2x=180°$,

解得 $x=36°$,

∴ $\angle B=\angle C=36°$,

$\angle BAC=180°-36°-36°=108°$,

∴ $\triangle ABC$ 的三个内角分别是 108°,36°,36°.

6. D 【解析】根据等腰三角形的性质可知:顶角平分线、底边的中线、底边上的高所在的直线是等腰三角形的对称轴. 选项 A、B、C 中底边上的中线,顶角的平分线,底边上的高都是线段,故不符合题意;选项 D 中,底边的垂直平分线符合要求,它是一条直线,故 D 选项正确.

7. D 【解析】∵ 在 $\triangle ABC$ 中,$AB=AC$,D 为 BC 的中点,∴ $\angle B=\angle C$,$AD\perp BC$,$\angle BAC=2\angle BAD$,$BD=CD$,∴ $S_{\triangle ABD}=S_{\triangle ACD}$. 故正确的结论有 4 个.

8. ②④⑤⑥ 【解析】①假设结论成立,则 $\triangle ABC$ 是等腰三角形,显然 $\triangle ABC$ 不一定是等腰三角形,故①不一定正确;②∵ $\angle ADC=\angle 1+\angle ABD$,$\angle 1=\angle 2$,∴ $\angle ADC>\angle 2$,故②正确;③假设结论成立,∵ $AG=GD$,$AE=EC$,$S_{\triangle ABG}=S_{\triangle DBG}$,$S_{\triangle ABE}=S_{\triangle CBE}$,∴ $S_{\triangle AGE}=S_{四边形GDCE}$,∵ $AE=EC$,∴ $S_{\triangle AGE}=S_{\triangle CGE}$. ∴ $S_{\triangle CGE}=S_{四边形GDCE}$,显然等式不成立,故③错误;④∵ $CH\perp AD$,∴ CH 为 $\triangle ACD$ 的边 AD 上的高,故④正确;⑤∵ $\angle 1=\angle 2$,$AH=AH$,$\angle AHF=\angle AHC=90°$,∴ $\triangle AHF\cong\triangle AHC$(ASA),∴ $AF=AC$,$\triangle AFC$ 为等腰三角形,故⑤正确;⑥∵ $AD\perp CF$,∴ $S_{四边形ACDF}=\frac{1}{2}CF\cdot AD=\frac{1}{2}\times 6\times 8=24$. 故答案为②④⑤⑥.

9. 【解】∵ $AB=AC$,AD 平分 $\angle BAC$,

∴ $AD\perp BC$,$\angle ADC=90°$.

∵ $\angle BAC=80°$,

∴ $\angle DAE=\frac{1}{2}\angle BAC=40°$.

∵ $AD=AE$,

∴ $\angle ADE=70°$,∴ $\angle EDC=90°-70°=20°$.

刷易错

10. 【解】当腰长为 5 cm 时,周长为 $2\times 5+7=17$(cm);

当腰长为 7 cm 时,周长为 $2\times 7+5=19$(cm).

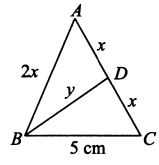
所以该三角形的周长为 17 cm 或 19 cm.

易错警示 当等腰三角形的腰和底不明确时,没有进行分类讨论而漏解,或忽略三角形三边的关系而造成多解的错误是经常出现的,所以解此类题时一定要仔细,考虑问题要全面.

刷提升

1. C 【解析】设这两个角的度数分别是 x,$4x$. ①当 x 是底角时,根据三角形的内角和定理,得 $x+x+4x=180°$,解得 $x=30°$,$4x=120°$,即底角为 30°,顶角为 120°;②当 x 是顶角时,有 $x+4x+4x=180°$,解得 $x=20°$,从而得到顶角为 20°,底角为 80°. 所以该三角形的顶角为 120°或 20°.

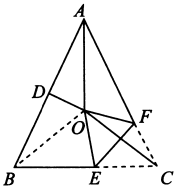
2. B 【解析】如图,在 $\triangle ABC$ 中,$AB=AC$,D 为边 AC 的中点. 设腰长为 $2x$ cm,一腰的中线为 y cm,则 $(2x+x+y)-(5+x+y)=3$ 或 $(5+x+y)-(2x+x+y)=3$,解得 $x=4$ 或 1,∴ $2x=8$ 或 2.



①三角形ABC三边长为8 cm,8 cm,5 cm,符合三角形三边关系;②三角形ABC三边长为2 cm,2 cm,5 cm,$2+2<5$,不符合三角形三边关系.

3. C　【解析】∵ $DA=DB=DC$,∴ $\angle DAB=\angle ABD$,$\angle DBC=\angle DCB$,$\angle DAC=\angle ACD$. 设$\angle DCA=x$,$\angle DCB=y$,∴ $\angle ACB=x+y$. ∵ $\angle DAB=20°$,∴ $\angle ABD=20°$. ∵ $\angle ABC+\angle ACB+\angle BAC=180°$,∴ $20°+y+x+y+20°+x=180°$,∴ $x+y=70°$,∴ $\angle ACB=70°$.

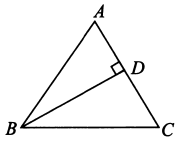
4. C　【解析】如图,连接OB. ∵ $\angle BAC=50°$,AO平分$\angle BAC$,∴ $\angle BAO=\frac{1}{2}\angle BAC=\frac{1}{2}\times50°=25°$. 又∵ $AB=AC$,∴ $\angle ABC=\angle ACB=65°$. ∵ DO是AB的垂直平分线,∴ $OA=OB$,∴ $\angle ABO=\angle BAO=25°$,∴ $\angle OBC=\angle ABC-\angle ABO=65°-25°=40°$. ∵ AO为$\angle BAC$的平分线,$AB=AC$,∴ 直线AO垂直平分BC,∴ $OB=OC$,∴ $\angle OCB=\angle OBC=40°$. ∵ 将点$C$沿$EF$($E$在$BC$上,$F$在$AC$上)折叠,点$C$与点$O$恰好重合,∴ $OE=CE$. ∴ $\angle COE=\angle OCB=40°$. 在△$OCE$中,$\angle OEC=180°-\angle COE-\angle OCB=180°-40°-40°=100°$,∴ $\angle CEF=\frac{1}{2}\angle OEC=50°$.



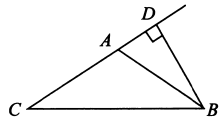
5. 14°　【解析】∵ $AB=AC$,$\angle BAC=124°$,∴ $\angle B=\angle C=28°$. ∵ $AB=AC$,AD是BC边上的中线,∴ $\angle ADB=90°$. ∵ $BD=BE$,∴ $\angle BDE=\frac{180°-28°}{2}=76°$,∴ $\angle ADE=14°$.

6. 50°　【解析】∵ 在△ABC中,$AB=AC$,$\angle A=80°$,∴ $\angle B=\angle C=50°$. ∵ $BE=BP$,∴ $\angle BEP=\angle EPB=65°$,同理,$\angle FPC=65°$,∴ $\angle EPF=180°-65°-65°=50°$.

7. 60°或120°　【解析】分两种情况:①当高在三角形内部时,如图(1),∵ $\angle ABD=30°$,∴ 顶角$\angle A=90°-30°=60°$;②当高在三角形外部时,如图(2),∵ $\angle ABD=30°$,∴ 顶角$\angle CAB=90°+30°=120°$.



图(1)



图(2)

8. 【证明】(1)∵ $AB=AC$,$\angle BAC=90°$,∴ $\angle B=\angle ACB=45°$.

又∵ $EC\perp BC$ ∴ $\angle ACE=45°$,∴ $\angle B=\angle ACE$.

在△ABD和△ACE中,∵ $\begin{cases}AB=AC,\\ \angle B=\angle ACE,\\ BD=CE,\end{cases}$

∴ △ABD≌△ACE(SAS).

(2)由(1)知△ABD≌△ACE,∴ $AD=AE$.

又∵ $DF=EF$,∴ $AF\perp DE$(等腰三角形"三线合一").

刷素养

9. 【解】(1)∵ $\angle B=\angle C=35°$,

∴ $\angle BAC=110°$.

∵ $\angle BAD=80°$,

∴ $\angle DAE=30°$.

∵ $AD=AE$,∴ $\angle ADE=\angle AED=75°$,

∴ $\angle CDE=180°-35°-30°-75°=40°$.

(2)∵ $\angle ACB=75°$,$\angle CDE=18°$,

∴ $\angle E=75°-18°=57°$.

∵ $AD=AE$,∴ $\angle ADE=\angle E=57°$,

∴ $\angle ADC=57°-18°=39°$.

∵ $\angle ABC=\angle ADC+\angle BAD=75°$,

∴ $\angle BAD=36°$.

(3)$2\angle CDE=\angle BAD$. 理由如下:

设$\angle ABC=\angle ACB=y$,$\angle ADE=\angle AED=x$,$\angle CDE=\alpha$,$\angle BAD=\beta$.

如图(1),当点D在点B的左侧时,$\angle ADC=x-\alpha$,

且$\begin{cases}y=x+\alpha,①\\ y=x-\alpha+\beta,②\end{cases}$

①−②,得$2\alpha-\beta=0$,

∴ $2\alpha=\beta$;

如图(2),当点D在线段BC上时,$\angle ADC=x+\alpha$,

且$\begin{cases}x=y+\alpha,③\\ x+\alpha=y+\beta,④\end{cases}$

④−③,得$\alpha=\beta-\alpha$,

∴ $2\alpha=\beta$;

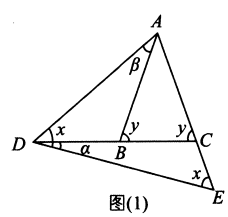
如图(3),当点D在点C右侧时,$\angle ADC=x-\alpha$,

且$\begin{cases}x-\alpha+y+\beta=180°,⑤\\ y+x+\alpha=180°,⑥\end{cases}$

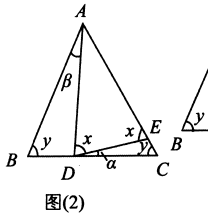
⑥−⑤,得$2\alpha-\beta=0$,

∴ $2\alpha=\beta$.

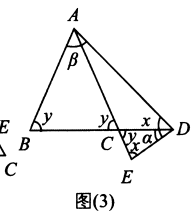
综上所述,$\angle BAD$与$\angle CDE$的数量关系是$2\angle CDE=\angle BAD$.



图(1)



图(2)



图(3)

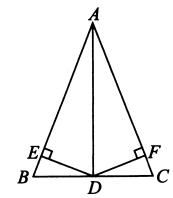
课时2　等腰三角形的判定

刷基础

1. D　【解析】∵ 在△ABC中,$\angle A:\angle B:\angle C=1:1:2$,∴ 设$\angle A=x$,则$\angle B=x$,$\angle C=2x$. ∵ $\angle A+\angle B+\angle C=180°$,即$x+x+2x=180°$,解得$x=45°$,∴ $\angle A=\angle B=45°$,∴ $\angle C=2x=90°$,∴ △ABC是等腰直角三角形.

2. C　【解析】在三角形ABC中,总有两边之和大于第三边,即$a+b>c$,∴ $a+b-c\neq0$. ∵ $(a+b-c)(a-c)=0$,∴ $a-c=0$,即$a=c$,∴ △ABC是一个等腰三角形.

3. B　【解析】如图,在△ABC中,D是BC的中点,$DE\perp AB$于点E,$DF\perp AC$于点F. ∵ $DE\perp AB$,$DF\perp AC$,∴ $\angle BED=\angle DFC=90°$. 在Rt△$BDE$和Rt△$CDF$中,∵ $BD=CD$,$DE=DF$,∴ Rt△DBE≌Rt△DCF(HL),∴ $\angle B=\angle C$,∴ $AB=AC$,∴ △ABC一定是等腰三角形.



4. B　【解析】已知两个直角三角形全等,且有一个角是60°,则可知$\angle A=\angle D=30°$,$\angle B=\angle E=60°$,则$\angle EGM=\angle EMG=\angle BMH=\angle BHM=60°$,∴ 图中是等腰三角形的有△$EMG$,△$BMH$,△$MAD$,共3个.

5. 【证明】∵ BD是$\angle ABC$的平分线,

∴ $\angle ABD=\angle DBC$.

∵ $DE/\!/BC$,∴ $\angle DBC=\angle BDE$,

∴ $\angle ABD=\angle BDE$,∴ $BE=DE$.

即△BED是等腰三角形.

6. D 【解析】①是等腰三角形的判定,说法正确;②是等腰三角形的性质,说法正确;③钝角三角形可能是等腰三角形,说法错误;④根据"三线合一",说法正确;⑤是等腰三角形的性质,说法正确.

7. 12 【解析】∵ CD 平分 $\angle ACB$,∴ $\angle ACD = \angle BCD$. 又∵ $DE \parallel BC$,∴ $\angle EDC = \angle BCD$,∴ $\angle ECD = \angle EDC$,∴ $\triangle ECD$ 是等腰三角形,∴ $CE = DE$. 又∵ $AE = 7$,$DE = 5$,∴ $AC = AE + EC = AE + ED = 7 + 5 = 12$.

8. 3 BD, AD 【解析】∵ $AB = AC$,∴ $\triangle ABC$ 是等腰三角形. ∵ $\angle A = 36°$,∴ $\angle C = \angle ABC = 72°$. ∵ BD 平分 $\angle ABC$ 交 AC 于 D,∴ $\angle ABD = \angle DBC = 36°$. ∵ $\angle A = \angle ABD = 36°$,∴ $BD = AD$,∴ $\triangle ABD$ 是等腰三角形. $\angle BDC = \angle A + \angle ABD = 36° + 36° = 72° = \angle C$,∴ $BC = BD$,∴ $\triangle BDC$ 是等腰三角形. ∴ 共有 3 个等腰三角形. $BC = BD$,$BD = AD$,∴ $BC = BD = AD$.

9. 【证明】∵ AD 平分 $\angle EDC$,∴ $\angle ADE = \angle ADC$.

在 $\triangle ADE$ 和 $\triangle ADC$ 中,∵ $\begin{cases} DE = DC, \\ \angle ADE = \angle ADC, \\ AD = AD, \end{cases}$

∴ $\triangle ADE \cong \triangle ADC$ (SAS),∴ $\angle E = \angle C$.

又∵ $\angle E = \angle B$,∴ $\angle B = \angle C$,∴ $AB = AC$.

10. (1)【证明】∵ $AE \parallel BC$,∴ $\angle B = \angle DAE$,$\angle C = \angle CAE$.

∵ AE 平分 $\angle DAC$,∴ $\angle DAE = \angle CAE$,

∴ $\angle B = \angle C$,∴ $AB = AC$,∴ $\triangle ABC$ 是等腰三角形.

(2)【解】∵ F 是 AC 的中点,∴ $AF = CF$.

∵ $AE \parallel BC$,∴ $\angle C = \angle CAE$.

在 $\triangle AFE$ 和 $\triangle CFG$ 中,∵ $\begin{cases} \angle CAE = \angle C, \\ AF = CF, \\ \angle AFE = \angle CFG, \end{cases}$

∴ $\triangle AFE \cong \triangle CFG$,∴ $AE = GC = 8$.

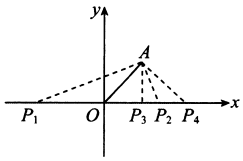
∵ $GC = 2BG$,∴ $BG = 4$. ∴ $BC = 12$.

∴ $\triangle ABC$ 的周长为 $AB + AC + BC = 10 + 10 + 12 = 32$.

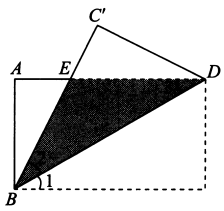
刷提升

1. B 【解析】根据折叠的性质,有 $AB = BE$,$AD = DE$,$\angle A = \angle DEB = 90°$. ∴ A、C 正确;又∵ $\angle C = 45°$,∴ $\triangle CDE$ 是等腰直角三角形,$EC = DE$,$CD > DE$. ∴ D 正确,B 错误.

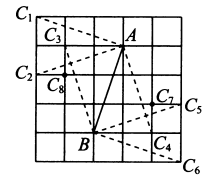
2. C 【解析】如图,当 $OA = OP$ 时,可得 P_1,P_2 满足条件;当 $PA = PO$ 时,可得 P_3 满足条件;当 $AO = AP$ 时,可得 P_4 满足条件. 故选 C.



3. C 【解析】如图,长方形纸片 $ABCD$ 按图中那样折叠,有 $\angle 1 = \angle 2$,∴ $\angle 1 = \angle 3$,∴ $\angle 2 = \angle 3$,∴ $ED = EB$. ∵ $BE = 5$,∴ $DE = 5$,∴ $AB = 4$,∴ 重叠部分的面积为 $\frac{1}{2} \times 5 \times 4 = 10$.



4. C 【解析】如图所示,当 $\triangle ABC$ 为等腰三角形时,点 C 有 8 个.



5. 30 【解析】∵ BO 平分 $\angle ABC$,∴ $\angle ABO = \angle CBO$. ∵ $MN \parallel BC$,∴ $\angle CBO = \angle BOM$,∴ $\angle ABO = \angle BOM$,∴ $BM = OM$,同理可得 $CN = ON$,∴ $\triangle AMN$ 的周长为 $AM + MO + ON + AN = AM + BM + CN + AN = AB + AC$. ∵ $AB = 12$,$AC = 18$,∴ $\triangle AMN$ 的周长为 $12 + 18 = 30$.

6. 5 【解析】∵ $AB = AC$,∴ $\triangle ABC$ 是等腰三角形;∵ BD,CE 分别是 $\angle ABC$,$\angle BCD$ 的平分线,∴ $\angle EBC = \frac{1}{2}\angle ABC$,$\angle ECB = \frac{1}{2}\angle BCD$,∵ $\triangle ABC$ 是等腰三角形,$\angle ABC = \angle ACB$,∴ $\angle EBC = \angle ECB$,∴ $\triangle BCE$ 是等腰三角形;∵ $\angle A = 36°$,$AB = AC$,∴ $\angle ABC = \angle ACB = \frac{1}{2}(180° - 36°) = 72°$,又 BD 是 $\angle ABC$ 的平分线,∴ $\angle ABD = \frac{1}{2}\angle ABC = 36° = \angle A$,∴ $\triangle ABD$ 是等腰三角形;同理可证 $\triangle CDE$ 和 $\triangle BCD$ 是等腰三角形.

7. 17 【解析】∵ BO 平分 $\angle ABC$,∴ $\angle ABO = \angle DBO$. 又∵ $OD \parallel AB$,∴ $\angle ABO = \angle DOB$,∴ $\angle DBO = \angle DOB$,∴ $OD = BD$,同理 $OE = CE$. ∵ $BC = 17$ cm,则 $\triangle ODE$ 的周长为 $OD + DE + OE = BD + DE + CE = BC = 17$ cm.

8. 【解】在 Rt$\triangle ADB$ 与 Rt$\triangle ADC$ 中,

∵ $\begin{cases} AB = AC, \\ AD = AD, \end{cases}$

∴ Rt$\triangle ADB \cong$ Rt$\triangle ADC$,

∴ $S_{\triangle ABC} = 2S_{\triangle ABD} = 2 \times \frac{1}{2} AB \cdot DE = AB \cdot DE = 3AB$.

∵ $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AC \cdot BF$,

∴ $\frac{1}{2} AC \cdot BF = 3AB$.

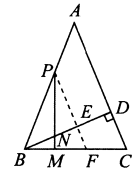
∵ $AC = AB$,∴ $\frac{1}{2} BF = 3$,

∴ $BF = 6$.

刷素养

9. 【解】(1) $PN = 2BM$. 证明:

如图(1),作 $PF \parallel AC$ 交 BC 于点 F,交 BD 于点 E.



图(1)

∵ $BD \perp AC$,$PF \parallel AC$,

∴ $PF \perp BD$,$\angle BPE = \angle A = 45°$.

∵ $\angle BEP = 90°$,∴ $\angle BPE = \angle PBE = 45°$,

∴ $BE = PE$. ∵ $PM \perp BC$,∴ $\angle PMB = \angle PEN = 90°$.

∵ $\angle BNM = \angle PNE$,∴ $\angle EBF = \angle NPE$.

∵ $\angle PEN = \angle BEF = 90°$,

∴ $\triangle PEN \cong \triangle BEF$ (ASA),

∴ $PN = BF$. ∵ $AB = AC$,∴ $\angle ABC = \angle C$.

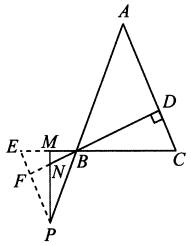
∵ $\angle PFB = \angle C$,∴ $\angle ABC = \angle PFB$,

∴ $PB = PF$. ∵ $PM \perp BF$,∴ $BM = MF$,

∴ $PN = BF = 2BM$.

(2)图形如图(2)中的实线部分,(1)中的结论成立. 证明:

如图(2),作 $PF\parallel AC$ 交 CB 的延长线于点 E,交 DB 的延长线于点 F.



图(2)

$\because \angle ABD=\angle PBF=\angle BPF=45°$,

$\therefore BF=PF$.

$\because \angle EBF=\angle EPM,\angle EFB=\angle NFP,BF=PF$,

$\therefore \triangle BFE\cong\triangle PFN(\mathrm{ASA})$,

$\therefore PN=BE$.

$\because \angle E=\angle C=\angle ABC=\angle PBE$,

$\therefore PE=PB$.

$\because PM\perp EB$,

$\therefore EM=BM$,

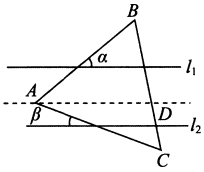
$\therefore PN=BE=2BM$.

13.3.2 等边三角形

课时1 等边三角形的性质与判定

刷基础

1.C 【解析】过点 A 作 $AD\parallel l_1$,如图,则 $\angle BAD=\angle\alpha=35°$. $\because l_1\parallel l_2$,$\therefore AD\parallel l_2$,$\therefore \angle DAC=\angle\beta$. $\because \triangle ABC$ 是等边三角形,$\therefore \angle BAC=60°$,$\therefore \angle\beta=\angle DAC=\angle BAC-\angle DAB=60°-35°=25°$. 故选 C.



2.A 【解析】$\because \triangle ABC$ 是等边三角形,$\therefore AC=BC,\angle ACB=60°$. $\because \triangle CDE$ 是等边三角形,$\therefore CD=CE,\angle DCE=60°$,$\therefore \angle ACB=\angle DCE$,$\therefore \angle ACB+\angle ACD=\angle DCE+\angle ACD$,即 $\angle BCD=\angle ACE$. 在 $\triangle ACE$ 和 $\triangle BCD$ 中,$\because \begin{cases}AC=BC,\\ \angle ACE=\angle BCD,\\ CE=CD,\end{cases}\therefore \triangle ACE\cong\triangle BCD(\mathrm{SAS})$.

$\therefore AE=BD$.

3.120° 【解析】$\because \triangle ABC$ 是等边三角形,BD,CE 是中线,$\therefore BD\perp AC,\angle ACE=\frac{1}{2}\angle ACB=30°$,$\therefore \angle BOC=\angle ODC+\angle ACE=120°$.

4.【解】 $\because \triangle BDE$ 是等边三角形,

$\therefore \angle DBE=60°$.

$\because$ 在 $\triangle ABC$ 中,$\angle C=\angle ABC,BE\perp AC$,

$\therefore \angle C=\angle ABC=\angle ABE+\angle EBC$,

则 $\angle EBC=\angle ABC-60°=\angle C-60°,\angle BEC=90°$,

$\therefore \angle EBC+\angle C=90°$,即 $\angle C-60°+\angle C=90°$,则 $\angle C=75°$,

$\therefore \angle ABC=75°$,$\therefore \angle A=30°$.

$\because \angle AED=90°-\angle DEB=30°$,

$\therefore \angle A=\angle AED$,$\therefore DE=AD=4$,$\therefore BE=DE=4$.

5.B 【解析】$\because \triangle ABC$ 为等边三角形,$\therefore \angle A=\angle B=\angle C=60°$. $\because DE\parallel BC$,$\therefore \angle ADE=\angle AED=\angle B=\angle C=60°$,$\therefore \triangle ADE$ 为等边三角形. $\because AB=5,BD=3$,$\therefore AD=AB-BD=2$,$\therefore \triangle ADE$ 的周长为 6.

6.D 【解析】$\because \triangle MNP$ 中,$\angle P=60°,MN=NP$,$\therefore \triangle MNP$ 是等边三角形. 又 $\because MQ\perp PN$,垂足为 Q,$\therefore PM=PN=MN=4,NQ=NG=2,MQ=a,\angle QMN=30°,\angle PNM=60°$. $\because NG=NQ$,$\therefore \angle G=\angle NQG=30°$,$\therefore \angle G=\angle QMN$,$\therefore QG=MQ=a$,$\therefore \triangle MGQ$ 的周长是 $6+2a$.

7.等边三角形 【解析】$\because (a-b)^2+(a-c)^2+|b-c|=0$,$\therefore a-b=0,a-c=0,b-c=0$,$\therefore a=b,a=c,b=c$,$\therefore a=b=c$,$\therefore$ 这个三角形是等边三角形.

8.4 【解析】$\because AB=AC,\angle ABC=60°$,$\therefore \triangle ABC$ 是等边三角形,A 在 BC 的垂直平分线上,$\therefore BC=AB=8$ cm. $\because DB=DC$,$\therefore$ 点 D 在 BC 的垂直平分线上,$\therefore AD$ 垂直平分 BC,$\therefore BE=\frac{1}{2}BC=4$ cm.

9.【证明】 $\because \triangle ABC$ 为等边三角形,

$\therefore \angle B=\angle ACB=60°,AB=AC$,

$\therefore \angle ACD=120°$.

$\because CE$ 平分 $\angle ACD$,

$\therefore \angle ACE=\angle DCE=60°$.

在 $\triangle ABD$ 和 $\triangle ACE$ 中,

$\because \begin{cases}AB=AC,\\ \angle B=\angle ACE,\\ BD=CE,\end{cases}$

$\therefore \triangle ABD\cong\triangle ACE(\mathrm{SAS})$,

$\therefore AD=AE,\angle BAD=\angle CAE$.

$\because \angle BAC=\angle BAD-\angle CAD=60°$,

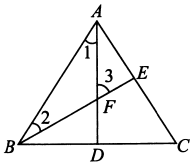
$\therefore \angle DAE=\angle CAE-\angle CAD=60°$,

$\therefore \triangle ADE$ 为等边三角形.

刷提升

1.A 【解析】如图,$\because$ 等边三角形 ABC 中,AD,BE 分别是 $\angle BAC,\angle ABC$ 的平分线,交于点 F,$\therefore \angle 1=\angle 2=\frac{1}{2}\angle ABC=30°$,

$\therefore \angle 3=\angle 1+\angle 2=60°$.

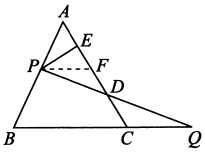


2.B 【解析】如图,过 P 作 $PF\parallel BC$ 交 AC 于 F. $\because PF\parallel BC$,$\triangle ABC$ 是等边三角形,$\therefore \angle PFD=\angle QCD$,$\triangle APF$ 是等边三角形,$\therefore AP=PF=AF$. $\because PE\perp AC$,$\therefore AE=EF$. $\because AP=PF,AP=CQ$,$\therefore PF=CQ$. $\because$ 在 $\triangle PFD$ 和 $\triangle QCD$ 中,

$\begin{cases}\angle PFD=\angle QCD,\\ \angle PDF=\angle QDC,\\ PF=CQ,\end{cases}\therefore \triangle PFD\cong\triangle QCD(\mathrm{AAS})$,$\therefore FD=CD$.

$\because AE=EF$,$\therefore EF+FD=AE+CD$,$\therefore AE+CD=DE=\frac{1}{2}AC$.

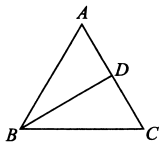
$\because AC=1$,$\therefore DE=\frac{1}{2}$.



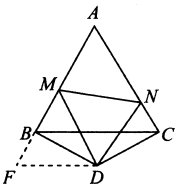
3.D 【解析】$\because \triangle ABC$ 和 $\triangle DEC$ 都是等边三角形,$\therefore AC=BC,CD=CE,\angle ACB=\angle ECD=60°$,$\therefore \angle ACB+\angle ACE=\angle ECD+\angle ACE$,即 $\angle BCE=\angle ACD$,$\therefore \triangle BCE\cong\triangle ACD(\mathrm{SAS})$,$\therefore AD=BE$,故①正确;由 $\triangle BCE\cong\triangle ACD$ 得 $\angle CBE=\angle CAD$,$\because \angle ACB$ 是 $\triangle ACD$ 的外角,$\therefore \angle ACB=\angle CAD+\angle ADC=\angle CBE+\angle ADC=60°$,又 $\because \angle APM$ 是 $\triangle PBD$ 的外角,$\therefore \angle APM=\angle CBE+\angle ADC=60°$,故③正确;在 $\triangle ACN$ 和 $\triangle BCM$ 中,$\because \begin{cases}\angle CAN=\angle CBM,\\ AC=BC,\\ \angle ACN=\angle BCM=60°,\end{cases}$

$\therefore \triangle ACN\cong\triangle BCM(\mathrm{ASA})$,$\therefore \angle ANC=\angle BMC,AN=BM$,故②④正确;$\because \triangle ACN\cong\triangle BCM$,$\therefore CM=CN$,$\therefore \triangle CMN$ 为等腰三角形,$\because \angle MCN=60°$,$\therefore \triangle CMN$ 是等边三角形,故⑤正确.

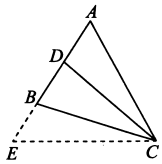
4. ①②③④ 【解析】①根据已知求出三个角相等，所以该三角形是等边三角形；②有一个角为60°的等腰三角形是等边三角形；③由三个外角都相等，得出三角形的三个内角也相等，根据三角都相等的三角形是等边三角形，可知该三角形是等边三角形；④根据题意画出示意图，∵ $AD=DC$，$BD\perp AC$，∴ $AB=BC$，∵ $AB=AC$，∴ $AB=AC=BC$，∴ $\triangle ABC$ 是等边三角形.



5. 6 【解析】∵ $\triangle BDC$ 是等腰三角形，$\angle BDC=120°$，∴ $\angle BCD=\angle DBC=30°$. ∵ $\triangle ABC$ 是边长为3的等边三角形，∴ $\angle ABC=\angle BAC=\angle BCA=60°$，∴ $\angle DBA=\angle DCA=90°$. 如图，延长 AB 至 F，使 $BF=CN$，连接 DF. 在 $\mathrm{Rt}\triangle BDF$ 和 $\mathrm{Rt}\triangle CDN$ 中，$BF=CN$，$\angle FBD=\angle NCD$，$DB=DC$，∴ $\mathrm{Rt}\triangle BDF\cong\mathrm{Rt}\triangle CDN$，∴ $\angle BDF=\angle CDN$，$DF=DN$. ∵ $\angle MDN=60°$，∴ $\angle BDM+\angle CDN=60°$，∴ $\angle BDM+\angle BDF=60°$，∴ $\angle FDM=\angle MDN=60°$，且 DM 为公共边，∴ $\triangle DMN\cong\triangle DMF$，∴ $MN=MF$，∴ $\triangle AMN$ 的周长为 $AM+MN+AN=AM+MB+BF+AN=AB+AC=6$.



6. 20° 【解析】如图，延长 AB 至点 E 使 $BE=AD$，连接 CE，∴ $AE=AD+DB+BE=2AD+BD$. ∵ $AC=2AD+BD$，∴ $AE=AC$. ∵ $\angle A=60°$，∴ $\triangle AEC$ 是等边三角形，∴ $\angle E=\angle ACE=60°$. ∵ $\angle B=4\angle ACD$，设 $\angle ACD=x$，则 $\angle ABC=4x$. 在 $\triangle ADC$ 与 $\triangle EBC$ 中，∵ $\begin{cases}AD=BE,\\ \angle A=\angle E,\\ AC=EC,\end{cases}$ ∴ $\triangle ADC\cong\triangle EBC(\mathrm{SAS})$，∴ $\angle ACD=\angle ECB=x$. ∵ $\angle ABC=\angle E+\angle BCE$，∴ $4x=60°+x$，∴ $x=20°$，∴ $\angle BCD=60°-20°-20°=20°$.



7. 【证明】连接 IE，IF.

∵ ME 垂直平分 IB，

∴ $IE=BE$，同理 $IF=CF$.

又∵ $\triangle ABC$ 是等边三角形，

∴ $\angle ABC=\angle ACB=60°$，

而 IB，IC 分别平分 $\angle ABC$，$\angle ACB$，

∴ $\angle IBC=\angle ICF=30°$.

∵ $IE=BE$，∴ $\angle IEF=2\angle IBE=60°$，

同理 $\angle IFE=60°$，∴ $\triangle IEF$ 为等边三角形.

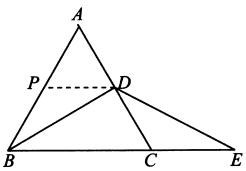
∴ $IE=IF=EF$，

∴ $BE=EF=CF$.

刷素养

8. 【解】(1) $AD=CE$. 理由如下：

如图，过点 D 作 $DP\parallel BC$，交 AB 于点 P.



∵ $\triangle ABC$ 是等边三角形，∴ $\triangle APD$ 也是等边三角形，

∴ $AP=PD=AD$，$\angle APD=\angle ABC=\angle ACB=\angle ADP=60°$.

∵ $DB=DE$，∴ $\angle DBC=\angle DEC$.

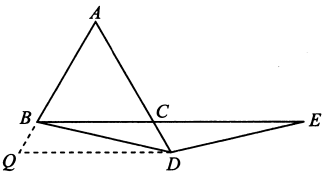
∵ $DP\parallel BC$，∴ $\angle PDB=\angle CBD$，∴ $\angle PDB=\angle DEC$.

又∵ $\angle BPD=\angle A+\angle ADP=120°$，$\angle DCE=\angle A+\angle ABC=120°$，即 $\angle BPD=\angle DCE$.

在 $\triangle BPD$ 和 $\triangle DCE$ 中，$\angle PDB=\angle DEC$，$\angle BPD=\angle DCE$，$DB=DE$，∴ $\triangle BPD\cong\triangle DCE(\mathrm{AAS})$. ∴ $PD=CE$，∴ $AD=CE$.

(2)结论成立. 理由如下：

如图，过点 D 作 $DQ\parallel BC$，交 AB 的延长线于点 Q.



∵ $\triangle ABC$ 是等边三角形，∴ $\triangle AQD$ 也是等边三角形，

∴ $AQ=QD=AD$，$\angle AQD=\angle ABC=\angle ACB=\angle QDC=60°$.

∵ $DB=DE$，∴ $\angle DBC=\angle DEC$.

∵ $DQ\parallel BC$，∴ $\angle QDB=\angle CBD$，

∴ $\angle QDB=\angle DEC$.

在 $\triangle BQD$ 和 $\triangle DCE$ 中，

∵ $\begin{cases}\angle QDB=\angle DEC,\\ \angle Q=\angle DCE=60°,\\ DB=DE,\end{cases}$

∴ $\triangle BQD\cong\triangle DCE(\mathrm{AAS})$，

∴ $QD=CE$，∴ $AD=CE$.

课时2　含30°角的直角三角形的性质

刷基础

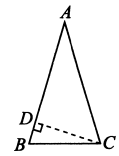
1. C 【解析】在 $\mathrm{Rt}\triangle ABC$ 中，∵ CD 是斜边 AB 上的高，∴ $\angle ADC=90°$，∴ $\angle ACD=\angle B=30°$(同角的余角相等). ∵ $AD=2$ cm，∴ 在 $\mathrm{Rt}\triangle ACD$ 中，$AC=2AD=4$ cm，在 $\mathrm{Rt}\triangle ABC$ 中，$AB=2AC=8$ cm.

2. C 【解析】在等边 $\triangle ABC$ 中，∵ D 是 AB 的中点，$AB=8$，∴ $AD=4$，$AC=8$，$\angle A=\angle C=60°$. ∵ $DE\perp AC$，$EF\perp BC$，∴ $\angle AED=\angle CFE=90°$，∴ $\angle ADE=\angle CEF=30°$，∴ $AE=\frac{1}{2}AD=2$，∴ $CE=8-2=6$，∴ $CF=\frac{1}{2}CE=3$，∴ $BF=5$. 故选C.

3. A 【解析】∵ 在 $\triangle ABC$ 中，$\angle A:\angle B:\angle BCA=1:2:3$，∴ $\angle ACB=90°$，$\angle A=30°$，$\angle B=60°$. ∵ $AB=12$，∴ $BC=6$. ∵ $CD\perp AB$，∴ $\angle BDC=90°$，∴ $\angle BCD=30°$，∴ $BD=3$.

4. B 【解析】如图，过点 C 作 $CD\perp AB$ 于 D.

∵ $\angle A=30°$，∴ $CD=\frac{1}{2}AC$，∴ $\triangle ABC$ 的面积为 $\frac{1}{2}AB\cdot CD=\frac{1}{2}AB\cdot\frac{1}{2}AB=4$，解得 $AB=4$.



5. B 【解析】∵ $\triangle ABC$ 是等边三角形，∴ $\angle B=\angle C=60°$. ∵ $DE\perp AB$ 于点 E，$DF\perp AC$ 于点 F，∴ $\angle BED=\angle DFC=90°$，∴ $\angle BDE=\angle CDF=30°$，∴ $BE=\frac{1}{2}BD$，$CF=\frac{1}{2}CD$，∴ $BE+CF=\frac{1}{2}BC=10$. 故选B.

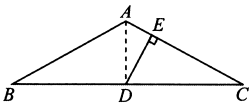
6. 30° 2 3 【解析】∵ $\mathrm{Rt}\triangle ABC$ 中，CD 是斜边 AB 上的高，∴ 根据同角的余角相等可知 $\angle BCD=\angle A=30°$，∴ $BC=2BD=2$ cm，$AB=2BC=4$ cm(两次利用30°角所对的直角边等于斜边的一半)，∴ $AD=AB-BD=4-1=3$(cm).

7. 8 【解析】∵ $\angle DBC=60°$，$\angle C=90°$，∴ $\angle BDC=180°-90°-60°=30°$，∴ $BD=2BC=2\times4=8$. ∵ $\angle C=90°$，$\angle A=15°$，

$\therefore \angle ABC = 90° - 15° = 75°$，$\therefore \angle ABD = \angle ABC - \angle DBC = 75° - 60° = 15°$，$\therefore \angle ABD = \angle A$，$\therefore AD = BD = 8$.

8. 5　【解析】$\because AB = AC$，$\angle BAC = 120°$，$\therefore \angle B = \angle C = 30°$. $\because DE \perp AB$，$DF \perp AC$，垂足为 E，F，$\therefore DE = \frac{1}{2}BD$，$DF = \frac{1}{2}DC$，$\therefore DE + DF = \frac{1}{2}BD + \frac{1}{2}DC = \frac{1}{2}(BD + DC) = \frac{1}{2}BC = \frac{1}{2} \times 10 = 5$(m).

9. 【解】如图，连接 AD.



$\because AB = AC$，$\angle BAC = 120°$，D 为 BC 的中点，

$\therefore AD \perp BC$，AD 平分 $\angle BAC$，$\angle B = \angle C = 30°$，

$\therefore \angle DAC = \frac{1}{2}\angle BAC = 60°$.

$\because DE \perp AC$，

$\therefore \angle AED = 90°$，

$\therefore \angle ADE = 30°$，

$\therefore AD = 2AE = 16$.

在 Rt$\triangle ADC$ 中，$AD = 16$，$\angle C = 30°$，

$\therefore AC = 2AD = 32$，

则 $CE = AC - AE = 32 - 8 = 24$.

10. 【解】在 Rt$\triangle ABC$ 中，$\angle CAB = 30°$，$AB = 10$ cm，

$\therefore BC = \frac{1}{2}AB = 5$ cm.

$\because CB_1 \perp AB$，$\therefore \angle B + \angle BCB_1 = 90°$，

又$\because \angle A + \angle B = 90°$，

$\therefore \angle BCB_1 = \angle A = 30°$.

在 Rt$\triangle BCB_1$ 中，$BB_1 = \frac{1}{2}BC = 2.5$ cm，

$\therefore AB_1 = AB - BB_1 = 10 - 2.5 = 7.5$(cm)，

$\therefore$ 在 Rt$\triangle AB_1C_1$ 中，$\angle A = 30°$，

$\therefore B_1C_1 = \frac{1}{2}AB_1 = \frac{1}{2} \times 7.5 = 3.75$(cm).

刷易错

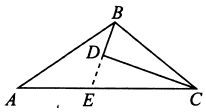
11. C　【解析】$\because AB = AC$，$\therefore \angle B = \angle C = 30°$. $\because AB \perp AD$，$\therefore BD = 2AD = 2 \times 4 = 8$，$\angle B + \angle ADB = 90°$，$\therefore \angle ADB = 60°$. $\because \angle ADB = \angle DAC + \angle C = 60°$，$\therefore \angle DAC = 30°$，$\therefore \angle DAC = \angle C$，$\therefore DC = AD = 4$，$\therefore BC = BD + DC = 8 + 4 = 12$，故选 C.

易错警示 在直角三角形中，如果一个锐角等于 30°，那么它所对的直角边是斜边的一半，而不是另一条直角边是斜边的一半.

专题　等腰三角形的性质与判定

刷难关

1. A　【解析】如图，延长 BD 与 AC 交于点 E. $\because \angle A = \angle ABD$，$\therefore BE = AE$. $\because BD \perp CD$，$\therefore BE \perp CD$. $\because CD$ 平分 $\angle ACB$，$\therefore \angle BCD = \angle ECD$，$\therefore \angle EBC = \angle BEC$，



$\therefore \triangle BEC$ 为等腰三角形，$\therefore BC = CE$. $\because BE \perp CD$，$\therefore 2BD = BE$. $\because AC = 5$，$BC = 3$，$\therefore CE = 3$，$\therefore AE = AC - EC = 2$，$\therefore BE = 2$，$\therefore BD = 1$. 故选 A.

2. A　【解析】图中的等腰三角形共 5 个，分别是 $\triangle ABE$，$\triangle ADH$，$\triangle BGE$，$\triangle BGF$，$\triangle DCH$.

3. 40°　【解析】设 $\angle ACE = x$，$\angle DCE = y$，$\angle BCD = z$. $\because BE = BC$，$AD = AC$，$\therefore \angle ADC = \angle ACD = \angle ACE + \angle DCE = x + y$，$\angle BEC = \angle BCE = \angle BCD + \angle DCE = z + y$，$\therefore \angle A = \angle BEC - \angle ACE = y + z - x$，$\angle B = \angle ADC - \angle BCD = x + y - z$. $\because$ 在 $\triangle ABC$ 中，$\angle ACB = 100°$，$\therefore \angle A + \angle B = 180° - \angle ACB = 80°$，$\therefore y + z - x + x + y - z = 80°$，即 $2y = 80°$，$\therefore y = 40°$，$\therefore \angle DCE = 40°$.

4. 等腰三角形　【解析】$\because a(a-b) = c(c-b)$，$\therefore a^2 - ab - c^2 + bc = 0$，$\therefore (a+c)(a-c) - b(a-c) = 0$，$\therefore (a-c)(a+c-b) = 0$，$\because a$，$b$，$c$ 为 $\triangle ABC$ 的三边长，$\therefore a + c > b$，$\therefore a + c - b \neq 0$，$\therefore a - c = 0$，$\therefore a = c$，即 $\triangle ABC$ 是等腰三角形.

5. 【解】(1)$\because$ 在 $\triangle ABC$ 中，$AB = AC$，$\angle A = 36°$，

$\therefore \angle ABC = \angle ACB = (180° - 36°) \div 2 = 72°$.

$\because MN \perp AB$，

$\therefore \angle BMN = 90°$，

$\therefore \angle N = 90° - \angle ABC = 90° - 72° = 18°$.

(2)$\because AB$ 的垂直平分线 MN 交 BC 的延长线于点 N，

$\therefore \angle ABD = \angle A = 36°$，$BD = AD = 6$，

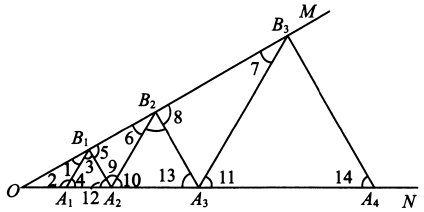
$\therefore \angle BDC = 72°$，

$\therefore \angle BDC = \angle ACB$，

$\therefore BC = BD = 6$.

6. D　【解析】$\because$ 等边三角形 ABC，$\therefore \angle B = 60°$. $\because PQ \perp BC$，$\therefore \angle PQB = 90°$，$\therefore \angle BPQ = 30°$，$\therefore BP = 2BQ$，同理 $CQ = 2CR$，$AR = 2AS$. 设 $BQ = x$，则 $PB = 2x$，$QC = 1 - x$，$CR = \frac{1}{2}(1-x)$，$AR = 1 - \frac{1}{2}(1-x) = \frac{1}{2}(1+x)$，$AS = \frac{1}{4}(1+x)$. 当 S 在 AP 上时，$2x + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}(1+x) = 1$，解得 $x = \frac{2}{9}$，则 $AP = 1 - \frac{4}{9} = \frac{5}{9}$；当 P 在 AS 上时，同理可求出 $AP = \frac{1}{9}$.

7. 2^{n-1}　【解析】$\because \triangle A_1B_1A_2$ 是等边三角形，$\therefore A_1B_1 = A_2B_1$，$\angle 3 = \angle 4 = \angle 12 = 60°$，$\therefore \angle 2 = 120°$. $\because \angle MON = 30°$，$\therefore \angle 1 = 180° - 120° - 30° = 30°$，又$\because \angle 3 = 60°$，$\therefore \angle 5 = 180° - 60° - 30° = 90°$. $\because \angle MON = \angle 1 = 30°$，$\therefore OA_1 = A_1B_1 = 1$，$\therefore A_2B_1 = 1$. $\because \triangle A_2B_2A_3$、$\triangle A_3B_3A_4$ 是等边三角形，$\therefore \angle 11 = \angle 10 = \angle 13 = 60°$. $\because \angle 4 = \angle 12 = 60°$，$\therefore A_1B_1 \parallel A_2B_2 \parallel A_3B_3$，$B_1A_2 \parallel B_2A_3$，$\therefore \angle 1 = \angle 6 = \angle 7 = 30°$，$\angle 5 = \angle 8 = 90°$，$\therefore A_2B_2 = 2B_1A_2$，$B_3A_3 = 2B_2A_3$，$\therefore A_3B_3 = 4B_1A_2 = 4$，$A_4B_4 = 8B_1A_2 = 8$，$A_5B_5 = 16B_1A_2 = 16$. 依次类推，$\triangle A_nB_nA_{n+1}$ 的边长为 2^{n-1}.



8. (1)【证明】$\because DC \parallel AB$，

$\therefore \angle CDB = \angle ABD$.

又$\because BD$ 平分 $\angle ABC$，

$\therefore \angle CBD = \angle ABD$，

$\therefore \angle CDB = \angle CBD$，

$\therefore BC = DC$.

又$\because AD = BC$，

$\therefore AD = DC$.

(2)【解】$\triangle DEF$ 为等边三角形. 证明:

由(1)知 $BC=DC$,

$\because CF\perp BD$,$\therefore$ 点 F 是 BD 的中点.

$\because \angle ABC=60°$,BD 平分 $\angle ABC$,$\therefore \angle ABD=30°$.

$\because \angle DEB=90°$,$\therefore \angle EDB=60°$,$DE=\frac{1}{2}BD=DF$,

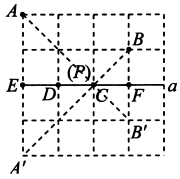
$\therefore \triangle DEF$ 为等边三角形.

13.4 课题学习 最短路径问题

刷基础

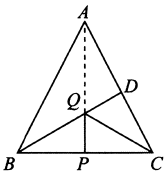
1.D 【解析】作点 M 关于直线 m 的对称点 P',连接 NP' 交直线 m 于 P. 根据"两点之间,线段最短",可知选项 D 铺设的管道最短.

2.A 【解析】如图,点 A' 是点 A 关于直线 a 的对称点,连接 $A'B$,则 $A'B$ 与直线 a 的交点,即为点 P,此时 $PA+PB$ 最短. $\because A'B$ 与直线 a 交于点 C,$\therefore$ 点 P 应选在 C 点. 同理,也可以找点 B 关于直线 a 的对称点.

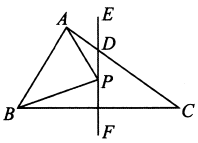


3.B 【解析】设 CD 与 OA 的交点为 E,与 OB 的交点为 F. $\because OA$,OB 分别是线段 MC,MD 的垂直平分线,$\therefore ME=CE$,$MF=DF$,$\therefore$ 小蚂蚁爬行的最短路径为 $ME+EF+FM=CE+EF+FD=CD=10$ cm.

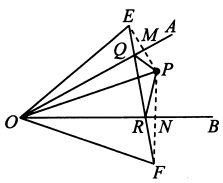
4.3 【解析】如图,连接 AQ. 在等边 $\triangle ABC$ 中,$\because BD$ 为 AC 边上的中线,$\therefore BD$ 垂直平分 AC,$\therefore CQ=AQ$,$\therefore CQ+PQ=AQ+PQ$,$\therefore$ 当 A,Q,P 三点共线,且 $AP\perp BC$ 时,$AQ+PQ$ 的值最小,即为线段 AP 的长,此时,P 为 BC 的中点. 又$\because$ 等边 $\triangle ABC$ 的周长为 18 cm,$\therefore BC=6$ cm,$\therefore BP=\frac{1}{2}BC=\frac{1}{2}\times 6=3$(cm).



5.7 【解析】$\because EF$ 垂直平分 BC,$\therefore B$,C 关于直线 EF 对称. 设 AC 交 EF 于点 D,$\therefore$ 当 P 和 D 重合时,$AP+BP$ 的值最小,最小值等于 AC 的长,$\therefore \triangle ABP$ 周长的最小值是 $4+3=7$.

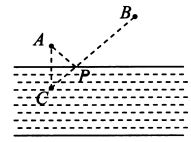


6.10 【解析】设 $\angle POA=\theta$,则 $\angle POB=30°-\theta$. 作 $PM\perp OA$ 与 OA 相交于 M,并将 PM 延长一倍到 E,即 $ME=PM$,作 $PN\perp OB$ 与 OB 相交于 N,并将 PN 延长一倍到 F,即 $NF=PN$,连接 EF 与 OA 相交于 Q,与 OB 相交于 R,再连接 PQ,PR,则此时 $\triangle PQR$ 即为周长最短的三角形. $\because OA$ 是 PE 的垂直平分线,$\therefore EQ=QP$;同理,OB 是 PF 的垂直平分线,$\therefore FR=RP$,$\therefore \triangle PQR$ 的周长即为 EF. $\because OE=OF=OP=10$,且 $\angle EOF=\angle EOP+\angle POF=2\theta+2(30°-\theta)=60°$,$\therefore \triangle EOF$ 是等边三角形,$\therefore EF=10$,即 $\triangle PQR$ 的最小周长是 10.

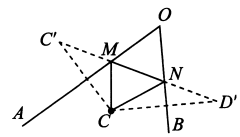


7.【解】如图,作点 A 关于河岸的对称点 C,连接 BC 交河岸于点 P,点 P 就是桥的位置.

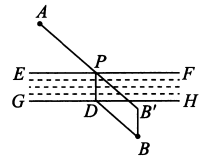
理由:两点之间线段最短.



8.【解】如图所示,小明的行走路线为 $CM\to MN\to NC$,此时所走的总路程为 $C'D'$ 的长,总路程最短.



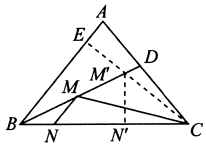
9.【解析】如图,作 BB' 垂直于河岸 GH,使 BB' 等于河宽,连接 AB',与河岸 EF 相交于 P,作 $PD\perp GH$,交 GH 于点 D,则 $PD\parallel BB'$ 且 $PD=BB'$. 连接 BD,利用平移可知 $PB'=BD$. 根据"两点之间,线段最短",可知 AB' 最短,即从 A 到 B,路径 $A\to P\to D\to B$ 最短,故桥应建在 PD 处.



刷提升

1.D 【解析】$\because AB=AC$,$BC=5$,$S_{\triangle ABC}=15$,$AD\perp BC$ 于点 D,$\therefore AD=6$. $\because EF$ 垂直平分 AB,$\therefore$ 点 A,B 关于直线 EF 对称,$\therefore AD$ 的长度为 $PB+PD$ 的最小值,即 $PB+PD$ 的最小值为 6.

2.B 【解析】如图,过点 C 作 $CE\perp AB$ 于点 E,交 BD 于点 M',过点 M' 作 $M'N'\perp BC$ 于 N'. $\because BD$ 平分 $\angle ABC$,$M'E\perp AB$,$M'N'\perp BC$,$\therefore M'N'=M'E$. $\because CE=CM'+M'E$,$\therefore$ 当点 M 与 M' 重合,点 N 与 N' 重合时,$CM+MN$ 的值最小. $\because$ 三角形 ABC 的面积为 8,$AB=4$,$\therefore \frac{1}{2}\times 4\cdot CE=8$,$\therefore CE=4$. 即 $CM+MN$ 的最小值为 4. 故选 B.

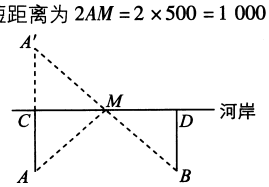


3.C 【解析】$\because P$ 与 P_1 关于 OA 对称,$\therefore OA$ 为 PP_1 的垂直平分线,$\therefore MP=MP_1$. $\because P$ 与 P_2 关于 OB 对称,$\therefore OB$ 为 PP_2 的垂直平分线,$\therefore NP=NP_2$,于是 $\triangle PMN$ 的周长为 $MN+MP+NP=MN+MP_1+NP_2=P_1P_2=6$.

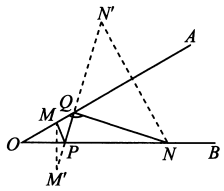
4.B 【解析】如图,作点 A 关于 CD 的对称点 A',连接 $A'B$,交 CD 于 M,$\therefore CA'=AC$. $\because AC=DB$,$\therefore CA'=BD$,由分析可知,点 M 为饮水处. $\because AC\perp CD$,$BD\perp CD$,$\therefore \angle ACD=\angle A'CD=\angle BDC=90°$. 又$\because \angle A'MC=\angle BMD$. 在 $\triangle CA'M$ 和 $\triangle DBM$ 中,

$$\because \begin{cases}\angle A'MC=\angle BMD,\\ \angle A'CM=\angle BDM,\\ CA'=BD,\end{cases}\therefore \triangle CA'M\cong\triangle DBM(\text{AAS}),$$

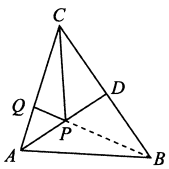
$\therefore A'M=BM$,$CM=DM$,即 M 为 CD 的中点,$\therefore AM=BM=A'M=500$(米),所以最短距离为 $2AM=2\times 500=1\,000$(米).



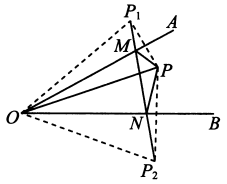
5. B　【解析】如图，作 M 关于 OB 的对称点 M'，N 关于 OA 的对称点 N'，连接 $M'N'$ 交 OA 于 Q，交 OB 于 P，则此时 $MP+PQ+QN$ 的值最小，易知 $\angle OPM=\angle OPM'=\angle NPQ$，$\angle OQP=\angle AQN'=\angle AQN$. ∵ $\angle OQN=180°-30°-\angle ONQ$，$\angle OPM=\angle NPQ=30°+\angle OQP$，$\angle OQP=\angle AQN=30°+\angle ONQ$，∴ $\alpha+\beta=30°+30°+\angle ONQ+180°-30°-\angle ONQ=210°$.



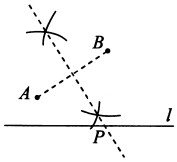
6. 9.6　【解析】如图，连接 BP. ∵ $AB=AC$，AD 是 $\angle BAC$ 的平分线，∴ AD 垂直平分 BC，∴ $BP=CP$. 过点 B 作 $BQ\perp AC$ 于点 Q，BQ 交 AD 于点 P，则此时 $PC+PQ$ 取得最小值，最小值为 BQ 的长，如图所示. ∵ $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}BC\cdot AD=\frac{1}{2}AC\cdot BQ$，∴ $BQ=\frac{BC\cdot AD}{AC}=\frac{12\times8}{10}=9.6$.



7. 50°　【解析】作 P 关于 OA，OB 的对称点 P_1，P_2，连接 OP_1，OP_2. 则当 M，N 是 P_1P_2 与 OA，OB 的交点时，$\triangle PMN$ 的周长最短. ∵ P，P_1 关于 OA 对称，$\angle MPN=80°$，∴ $\angle P_1OP=2\angle MOP$，$OP_1=OP$，$P_1M=PM$，$\angle OP_1M=\angle OPM$，同理，$\angle P_2OP=2\angle NOP$，$OP=OP_2$，$\angle OP_2N=\angle OPN$，∴ $\angle P_1OP_2=\angle P_1OP+\angle P_2OP=2(\angle MOP+\angle NOP)=2\angle AOB$. ∵ $\angle OPM+\angle OPN=\angle MPN=80°$，∴ $\angle OP_1M+\angle OP_2N=80°$，∴ $\angle P_1OP_2=180°-80°=100°$，∴ $\angle AOB=50°$.

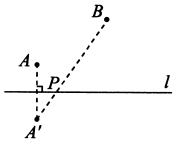


8. 【解】(1)如图所示：



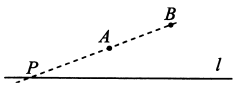
此时 $PA=PB$.

(2)如图所示：



此时 $PA+PB$ 的值最小.

(3)如图所示：



此时 $|PA-PB|$ 的值最大.

刷素养

9. (1)50°　【解析】∵ $AB=AC$，∴ $\angle ABC=\angle ACB=70°$，∴ $\angle A=40°$. ∵ MN 是 AB 的垂直平分线，∴ $AN=BN$，∴ $\angle ABN=\angle A=40°$，∴ $\angle ANB=100°$，∴ $\angle MNA=50°$.

(2)【解】①∵ $AN=BN$，

∴ $BN+CN=AN+CN=AC$.

∵ $AB=AC=8$ cm，

∴ $BN+CN=8$ cm.

∵ $\triangle NBC$ 的周长是 14 cm，

∴ $BC=14-8=6$(cm).

②存在，点 P 和点 N 重合，且 $\triangle PBC$ 周长的最小值为 14 cm. 理由如下：

∵ A，B 关于直线 MN 对称，

∴ 连接 AC 与 MN 的交点即为所求的 P 点，此时 P 和 N 重合，即 $\triangle BNC$ 的周长就是 $\triangle PBC$ 周长的最小值，

∴ $\triangle PBC$ 周长的最小值为 14 cm.

全章综合训练

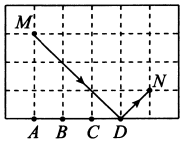
刷章测

1. A　【解析】∵ $\triangle ABC$ 关于直线 m(直线 m 上各点的横坐标都为 1)对称，∴ C，B 两点关于直线 m 对称，即关于直线 $x=1$ 对称.

∵ 点 C 的坐标为(4,1)，设 $B(x,1)$，∴ $\frac{4+x}{2}=1$，解得 $x=-2$，则点 B 的坐标为(−2,1).

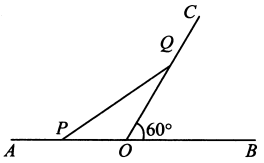
2. C　【解析】由题意得 $P_1(2,0)$，$P_2(0,-2)$，$P_3(-2,0)$，$P_4(0,2)$，$P_5(2,0)$，…，P_5 与 P_1 重合，从 P_5 开始出现循环，2 018 ÷ 4 = 504……2，∴ $P_{2\,018}$ 与 P_2 重合，∴ $P_{2\,018}(0,-2)$.

3. D　【解析】如图所示，要将 M 球射向桌面的一边，反弹一次后击中 N 球，则 A，B，C，D 4 个点中，只有 D 点满足条件.

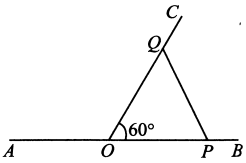


4. (4,−2)　【解析】根据题意可知点 A 和点 B 是关于直线 $y=1$ 对称的点，它们到 $y=1$ 的距离相等，是 3 个单位长度，所以点 B 的坐标是(4,−2).

5. $\frac{10}{3}$ 或 10　【解析】当 P 在 OA 上，$PO=QO$ 时，$\triangle POQ$ 是等腰三角形，如图(1)所示，∵ $PO=AO-AP=(10-2t)$ cm，$OQ=t$ cm，∴ 当 P 在 OA 上，$PO=QO$ 时，$10-2t=t$，解得 $t=\frac{10}{3}$；当 P 在 OB 上，$PO=QO$ 时，$\triangle POQ$ 是等腰三角形，如图(2)所示，∵ $PO=AP-AO=(2t-10)$ cm，$OQ=t$ cm，∴ 当 $PO=QO$ 时，$2t-10=t$，解得 $t=10$. 故当 $t=\frac{10}{3}$ s 或 10 s 时，$\triangle POQ$ 是等腰三角形.



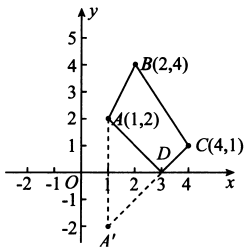
图(1)



图(2)

6. 【解】无论是走 $D\to A\to B\to C\to D$ 还是走 $D\to C\to B\to A\to D$，都必

须经过 A,B,C，而 A,B,C 三点的位置不变，这样 $AB+BC$（或 $CB+BA$）不变，所以为保证 $DA+AB+BC+CD$（或 $DC+CB+BA+AD$）最短，只需保证 $DA+CD$（或 $DC+AD$）最短即可，而这个问题可以通过轴对称作图来完成，故存在点 D 使所走路线 $D\to A\to B\to C\to D$（或 $D\to C\to B\to A\to D$）的路程最短.



作法：(1)作 A 关于 x 轴的对称点 A'（或作 C 关于 x 轴的对称点 C'）；(2)连接 CA'（或 AC'）交 x 轴于点 D. 则点 D 就是要建货栈的位置，如图.

7.【证明】(1)在 $\triangle ABC$ 中，$\angle BAC=75°$，$\angle ACB=35°$，

$\therefore \angle ABC=180°-\angle BAC-\angle ACB=70°$.

$\because BD$ 平分 $\angle ABC$，

$\therefore \angle DBC=\frac{1}{2}\angle ABC=35°$，

$\therefore \angle DBC=\angle ACB$，$\therefore BD=DC$，

$\therefore \triangle BCD$ 为等腰三角形.

(2)如图(1)，在 AC 上截取 $AH=AB$，连接 EH.

由(1)得 $\triangle BCD$ 为等腰三角形，

$\therefore BD=CD$，

$\therefore BD+AD=CD+AD=AC$.

$\because AE$ 平分 $\angle BAC$，

$\therefore \angle EAB=\angle EAH$，

$\therefore \triangle ABE\cong\triangle AHE$，

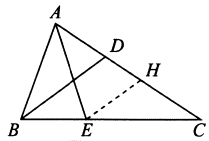
$\therefore BE=EH$，$\angle AHE=\angle ABE=70°$，

$\therefore \angle HEC=\angle AHE-\angle ACB=35°$，

$\therefore \angle HEC=\angle ACB$，

$\therefore EH=HC$，

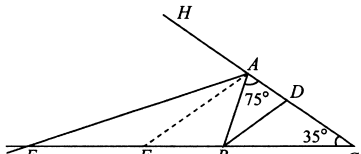
$\therefore AB+BE=AH+HC=AC$，$\therefore BD+AD=AB+BE$.



图(1)

(3)不成立，正确结论：$BD+AD=BE-AB$. 理由：

如图(2)，在 BE 上截取 $BF=AB$，连接 AF.



图(2)

$\because \angle ABC=70°$，

$\therefore \angle AFB=\angle BAF=35°$.

$\because \angle BAC=75°$，

$\therefore \angle HAB=105°$.

$\because AE$ 平分 $\angle HAB$，$\therefore \angle EAB=\frac{1}{2}\angle HAB=52.5°$，

$\therefore \angle EAF=52.5°-35°=17.5°$，$\angle AEF=\angle ABC-\angle EAB=17.5°$，

$\therefore \angle EAF=\angle AEF$，则 $AF=EF$.

$\because \angle AFC=\angle C=35°$，

$\therefore AF=AC=EF$，

$\therefore BE-AB=BE-BF=EF=AC=AD+CD=AD+BD$，

$\therefore BD+AD=BE-AB$.

刷中考

1. C 【解析】A 选项，是轴对称图形，故不符合题意；B 选项，是轴对称图形，故不符合题意；C 选项，不是轴对称图形，故符合题意；D 选项，是轴对称图形，故不符合题意. 故选 C.

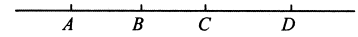
2. B 【解析】$\because DE$ 是 AC 的垂直平分线，$\therefore DA=DC$，$\therefore \angle DAC=\angle C=25°$. $\therefore \angle ADB=50°$. $\because \angle B=60°$，$\therefore \angle BAD=180°-\angle B-\angle ADB=70°$，故选 B.

3. B 【解析】$\because AD$ 是 $\triangle ABC$ 的中线，$AB=AC$，$\angle CAD=20°$，

$\therefore \angle CAB=2\angle CAD=40°$，$\angle B=\angle ACB=\frac{1}{2}(180°-\angle CAB)=70°$. $\because CE$ 是 $\triangle ABC$ 的角平分线，$\therefore \angle ACE=\frac{1}{2}\angle ACB=35°$. 故选 B.

4. A 【解析】$\because$ 点 B 的坐标是 $(4,-1)$，点 A 与点 B 关于 x 轴对称，$\therefore$ 点 A 的坐标是 $(4,1)$. 故选 A.

5. 2 或 2.5 【解析】如图，



$\because AB=2$，$AD=7$，$\therefore BD=BC+CD=5$. $\because$ 要构成以 BC 为腰的等腰三角形，$\therefore BC=AB$ 或 $BC=CD$，$\therefore BC=2$ 或 2.5.

6. 37 【解析】$\because AD=AC$，点 E 是 CD 的中点，$\therefore AE\perp CD$，$\therefore \angle AEC=90°$，$\therefore \angle C=90°-\angle CAE=74°$，$\therefore \angle ADC=\angle C=74°$. $\because AD=BD$，$\therefore \angle ADC=2\angle B=74°$，$\therefore \angle B=37°$.

7. (1)【解】$\angle ABE=\angle ACD$. 理由：

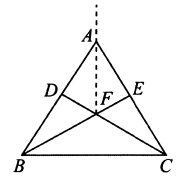
在 $\triangle ABE$ 和 $\triangle ACD$ 中，

$\because \begin{cases} AB=AC, \\ \angle A=\angle A, \\ AE=AD, \end{cases}$

$\therefore \triangle ABE\cong\triangle ACD$，

$\therefore \angle ABE=\angle ACD$.

(2)【证明】如图，连接 AF.



$\because AB=AC$，

$\therefore \angle ABC=\angle ACB$.

由(1)可知 $\angle ABE=\angle ACD$，

$\therefore \angle FBC=\angle FCB$，$\therefore FB=FC$.

$\because AB=AC$，

$\therefore$ 点 A,F 均在线段 BC 的垂直平分线上，

即直线 AF 垂直平分线段 BC.

刷素养

8.【解】(1)若 $\angle A$ 为顶角，则 $\angle B=(180°-\angle A)\div 2=50°$；

若 $\angle A$ 为底角，$\angle B$ 为顶角，则 $\angle B=180°-2\times 80°=20°$；

若 $\angle A$ 为底角，$\angle B$ 为底角，则 $\angle B=80°$.

故 $\angle B=50°$ 或 $20°$ 或 $80°$.

(2)分两种情况：

①当 $90\leqslant x<180$ 时，$\angle A$ 只能为顶角，

$\therefore \angle B$ 的度数只有一个.

②当 $0<x<90$ 时，

若 $\angle A$ 为顶角，则 $\angle B=\left(\frac{180-x}{2}\right)°$；

若 $\angle A$ 为底角，$\angle B$ 为顶角，则 $\angle B=(180-2x)°$；

若 $\angle A$ 为底角，$\angle B$ 为底角，则 $\angle B=x°$.

当$\frac{180-x}{2}\neq180-2x\neq x$时，

即$x\neq60$时，$\angle B$有三个不同的度数.

综上所述，可知当$\angle B$有三个不同的度数时，x的取值范围是$0<x<90$且$x\neq60$.

第十四章　整式的乘法与因式分解

14.1　整式的乘法

14.1.1　同底数幂的乘法

刷基础

1. C　【解析】原式$=a^{2+4}=a^6$.

2. C　【解析】选项A中，$(-a)^2\cdot(-a)^5=-a^7$，故此选项错误；选项B中，$(-a)^2\cdot(-a^5)=-a^7$，故此选项错误；选项C中，$(-a^2)\cdot(-a)^5=a^7$，故此选项正确；选项D中，$(-a)\cdot(-a)^6=-a^7$，故此选项错误.

3. C　【解析】原式$=(b-a-c)^2(b-a-c)^3=(b-a-c)^{2+3}=(b-a-c)^5=-(a-b+c)^5$.

4. D　【解析】A选项，同底数幂相乘，底数不变，指数相加，故A错误；B选项，不是同底数幂的乘法，指数不能相加，故B错误；C选项，同底数幂相乘，底数不变，指数相加，故C错误；D选项，同底数幂相乘，底数不变，指数相加，故D正确. 故选D.

5. A　【解析】$2a^3+a^2\cdot a=2a^3+a^3=3a^3$.

6. A　【解析】$\because(-a)^5\cdot(-a)^{2n}=(-a)^{2n+5}$，$\therefore$当$a<0$，$n$为正整数，即$-a>0$时，$(-a)^{2n+5}>0$，是正数.

7. $-a^8$　【解析】原式$=-a^8$.

8. 6　【解析】$\because2^{n+1}\times2^3=2^{n+1+3}=2^{10}$（$n$为正整数），$\therefore n+1+3=10$，$\therefore n=6$.

9. 【解】原式$=3^{2+7}-3^{2+6}-3^{1+7}=3\times3^8-2\times3^8=3^8$.

10. 【解】(1)原式$=a^{n+2+n+1+n}=a^{3n+3}$.

(2)原式$=a^{4+n-1}+2a^{n+1+2}=a^{n+3}+2a^{n+3}=3a^{n+3}$.

(3)原式$=-(x-y)^2\cdot(x-y)^5=-(x-y)^7$.

11. 【解】(1)$\because3^{2x+1}=81\times243=3^4\times3^5$，

$\therefore2x+1=9$，$\therefore x=4$.

(2)$\because4^{3x-1}\times16=64\times4$，$\therefore4^{3x-1}\times4^2=4^4$，

$\therefore3x+1=4$，$\therefore x=1$.

12. 【解】(1)$12*3=10^{12}\times10^3=10^{15}$，$2*5=10^2\times10^5=10^7$.

(2)不相等. 验证：

$\because(a*b)*c=(10^a\times10^b)*c=10^{a+b}*c=10^{10^{a+b}}\times10^c=10^{10^{a+b}+c}$，

$a*(b*c)=a*(10^b\times10^c)=a*10^{b+c}=10^a\times10^{10^{b+c}}=10^{a+10^{b+c}}$，

$10^{10^{a+b}+c}\neq10^{a+10^{b+c}}$，

$\therefore(a*b)*c\neq a*(b*c)$.

13. D　【解析】$10^{x+y+2}=10^x\times10^y\times10^2=100ab$.

14. 36　【解析】$10^{m+n}=10^m\cdot10^n=12\times3=36$. 故答案为36.

15. 36　【解析】$3^{x+2}=3^x\cdot3^2=4\times9=36$.

16. 10　【解析】$\because a^x=5$，$a^{x+y}=a^x\cdot a^y=25$，$\therefore a^y=5$，$\therefore a^x+a^y=5+5=10$.

刷易错

17. B　【解析】$(a-b)^{2n}\cdot(b-a)^3\cdot(a-b)^{m-2}$

$=(a-b)^{2n}\cdot[-(a-b)]^3\cdot(a-b)^{m-2}$

$=-(a-b)^{2n}\cdot(a-b)^3\cdot(a-b)^{m-2}$

$=-(a-b)^{2n+m+1}$.

故选B.

易错警示　把互为相反数的底数化为同底数时，要注意负数的奇次幂中负号的处理.

14.1.2　幂的乘方 +14.1.3　积的乘方

刷基础

1. B　【解析】选项A中，原式$=x^9$，故本选项错误；选项B中，原式$=-x^5$，故本选项正确；选项C中，原式$=x^5$，故本选项错误；选项D中，$3x^2$与$2x^3$不是同类项，不能合并，故本选项错误.

2. B　【解析】$\because a^m=2$，$a^n=\frac{1}{2}$，$\therefore a^{2m+3n}=(a^m)^2\cdot(a^n)^3=2^2\times\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{1}{2}$. 故选B.

3. C　【解析】$\because(a^3)^2=64$，$\therefore a^6=64$，$\therefore a=\pm2$.

4. B　【解析】$\because2^m\cdot2^n=32$，$\therefore2^{m+n}=2^5$，$\therefore m+n=5$. $\because(2^m)^n=64$，$\therefore2^{mn}=2^6$，$\therefore mn=6$，$\therefore$原式$=6+5=11$.

5. y^{14}　【解析】$(y^3)^2\cdot(y^2)^4=y^6\cdot y^8=y^{14}$.

6. 【解】$(-x^2)^3+(-x^3)^2+(x^2)^2\cdot x^2$

$=-x^6+x^6+x^6$

$=x^6$.

7. B　【解析】$\because x+4y=3$，$\therefore2^x\cdot16^y=2^x\cdot2^{4y}=2^{x+4y}=2^3=8$. 故选B.

8. B　【解析】$\because32^m=8^n$，$\therefore(2^5)^m=(2^3)^n$，$\therefore2^{5m}=2^{3n}$，$\therefore5m=3n$.

9. D　【解析】$3^{55}=(3^5)^{11}=243^{11}$，$4^{44}=(4^4)^{11}=256^{11}$，$5^{33}=(5^3)^{11}=125^{11}$，$\because125<243<256$，$\therefore5^{33}<3^{55}<4^{44}$.

10. 20　【解析】$a^{6-7}=a^{2\times3-7}=(a^2)^3-7=3^3-7=27-7=20$.

11. 9　【解析】$\because a+3b-2=0$，$\therefore a+3b=2$，则$3^a\cdot27^b=3^a\times3^{3b}=3^{a+3b}=3^2=9$.

12. 【解】(1)$\because2x+5y-3=0$，$\therefore2x+5y=3$，$\therefore4^x\cdot32^y=2^{2x}\cdot2^{5y}=2^{2x+5y}=2^3=8$.

(2)$\because2^6=a^2=4^b$，$\therefore(2^3)^2=a^2=(2^2)^b=2^{2b}$，$\therefore a=\pm8$，$2b=6$，解得$a=\pm8$，$b=3$，$\therefore a+b=11$或$-5$.

13. D　【解析】原式$=(-2)^2(a^3)^2=4a^6$.

14. D　【解析】A选项，$2a^2-a^2=a^2$，故A错误；B选项，$(ab)^2=a^2b^2$，故B错误；C选项，a^2与a^3不是同类项，不能合并，故C错误；D选项，$(a^2)^3=a^6$，故D正确. 故选D.

15. D　【解析】$(-a^m)^5\cdot a^n=-a^{5m+n}$.

16. D　【解析】$a\cdot a^5-(2a^3)^2=a^6-4a^6=-3a^6$.

17. $-125y^9$　【解析】$(-5y^3)^3=(-5)^3(y^3)^3=-125y^9$.

18. $-x^6y^3$　【解析】$(-x^2y)^3=-x^6y^3$. 故答案为$-x^6y^3$.

19. A　【解析】原式$=\left[\left(-\frac{5}{12}\right)\times\frac{12}{5}\right]^{2018}\times\left(-\frac{5}{12}\right)=1\times\left(-\frac{5}{12}\right)=-\frac{5}{12}$.

20. 8 【解析】原式 $=0.125^{100}\times8^{100}\times8=(0.125\times8)^{100}\times8=8$.

21. $\frac{3}{2}$ 【解析】原式 $=\left(\frac{2}{3}\times1.5\right)^{2\,018}\times\frac{3}{2}\div1=1\times\frac{3}{2}\div1=\frac{3}{2}$.

刷提升

1. B 【解析】$(-a^2)\cdot a^5=-a^7$. 故选 B.

2. B 【解析】$\because a^{2n-1}a^{n+5}=a^{16}$, $\therefore a^{2n-1+n+5}=a^{16}$, 即 $a^{3n+4}=a^{16}$, 则 $3n+4=16$, 解得 $n=4$. 故选 B.

3. B 【解析】A 选项, $a^2\cdot(-a)\cdot a^9=-a^{12}$, 故本选项错误; B 选项, $a^2\cdot(-a)\cdot(-a^9)=a^{12}$, 故本选项正确; C 选项, $a^2\cdot(-a)\cdot(-a)^{10}=-a^{13}$, 故本选项错误; D 选项, $a^2\cdot(-a)\cdot(-a^{10})=a^{13}$, 故本选项错误. 故选 B.

4. A 【解析】A 选项, $a^3\cdot a=a^4$, 故此选项正确; B 选项, $(-a^4)=-a^4$, 故此选项错误; C 选项, a^2 与 a^3 不能合并, 故此选项错误; D 选项, $(a^2)^3=a^6$, 故此选项错误. 故选 A.

5. B 【解析】$\because(a^mb^n)^3=a^9b^{15}$, $\therefore a^{3m}b^{3n}=a^9b^{15}$, $\therefore 3m=9$, $3n=15$, $\therefore m=3$, $n=5$. 故选 B.

6. D 【解析】$(x^3)^2=x^6$, 故选 D.

7. C 【解析】$(-a^{n-1})^2=a^{2n-2}$. 故选 C.

8. $-x^9$ 【解析】原式 $=-x^3\cdot x^6=-x^9$. 故答案为 $-x^9$.

9. $4x^2y^4$ 【解析】$(-2xy^2)^2=(-2)^2\cdot x^2\cdot(y^2)^2=4x^2y^4$. 故答案为 $4x^2y^4$.

10. 【解】由题意, 得 $a^{n+1}\cdot a^{m+n}=a^{m+2n+1}=a^6$,

则 $m+2n=5$.

$\because\begin{cases}m+2n=5,\\m-2n=1,\end{cases}\therefore\begin{cases}m=3,\\n=1,\end{cases}$

故 $m^n=3$.

11. 【解】$\because x^{m+n}=24$, $x^m=8$,

$\therefore x^m\cdot x^n=8x^n=24$,

解得 $x^n=3$,

则 $x^{3n}=(x^n)^3=3^3=27$.

12. 【解】$\because 2^3\times5^2=200$,

$\therefore(3^a)^3\times(3^b)^2=3^c$,

$\therefore 3a+2b=c$.

13. 【解】$\because x^{2m}=2$,

$\therefore$ 原式 $=4x^{6m}-9x^{2m}$

$=4(x^{2m})^3-9x^{2m}$

$=4\times2^3-9\times2$

$=14$.

14.1.4 整式的乘法

课时 1 单项式与单项式相乘

刷基础

1. C 【解析】原式 $=\frac{1}{3}\times(-6)a^2\cdot ab=-2a^3b$.

2. D 【解析】选项 A 中, 不是同底数幂的乘法, 指数不能相加, 故 A 不正确; 选项 B 中, 同底数幂的乘法, 底数不变, 指数相加, 故 B 不正确; 选项 C 中, 幂的乘方, 底数不变, 指数相乘, 故 C 不正确; 选项 D 中, 单项式乘单项式, 系数乘系数, 同底数幂相乘, 故 D 正确.

3. D 【解析】原式 $=48\times10^8=4.8\times10^9$.

4. D 【解析】选项 A 中, $(-2ab)\cdot(-3ab)^3=(-2ab)\cdot(-27a^3b^3)=54a^4b^4$, 故错误; 选项 B 中, $5x^2\cdot(3x^3)^2=5x^2\cdot(9x^6)=45x^8$, 故错误; 选项 C 中, $(-0.1b)\cdot(-10b^2)^3=(-0.1b)\cdot(-1\,000b^6)=100b^7$, 故错误; 选项 D 中, $(3\times10^n)\left(\frac{1}{3}\times10^n\right)=10^{2n}$, 故正确.

5. C 【解析】原式 $=x^{n^2}\cdot36x^n=36x^{n^2+n}$.

6. D 【解析】$\because$ 单项式 $-2x^{4a-b}y^3$ 与 $\frac{1}{2}x^2y^{a+b}$ 是同类项,

$\therefore\begin{cases}4a-b=2,\\a+b=3,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=1,\\b=2,\end{cases}$ $\therefore$ 这两个单项式分别为 $-2x^2y^3$ 与 $\frac{1}{2}x^2y^3$, $\therefore -2x^2y^3\cdot\frac{1}{2}x^2y^3=-x^4y^6$.

7. C 【解析】$\because$ 单项式 $-\frac{1}{2}x^{2a-3}y^2$ 和 $\frac{1}{3}x^3y^{a+2b-7}$ 的和仍为单项式, $\therefore\begin{cases}2a-3=3,\\a+2b-7=2,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=3,\\b=3,\end{cases}$ 故单项式 $-\frac{1}{2}x^{2a-3}y^2$ 和 $\frac{1}{3}x^3y^{a+2b-7}$ 的乘积为 $-\frac{1}{6}x^6y^4$.

8. $-3a^5b^4$ 【解析】$-\frac{1}{3}ab^2\cdot9a^4b^2=-3a^5b^4$.

9. 【解】原式 $=a^2\cdot a^2b^6\cdot(-8b^6)=-8a^4b^{12}$.

10. 【解】$\because a^{2m}=2$, $b^{3n}=3$,

$\therefore(b^{2n})^3-a^{3m}\cdot b^{3n}\cdot a^{5m}$

$=(b^{3n})^2-a^{8m}\cdot b^{3n}$

$=3^2-(a^{2m})^4\times3$

$=3^2-2^4\times3$

$=9-16\times3$

$=9-48$

$=-39$.

11. 【解】原式 $=-\frac{27}{64}x^9y^6\cdot4x^2y^4-\frac{1}{4}x^8y^6\cdot x^3y^4$

$=-\frac{27}{16}x^{11}y^{10}-\frac{1}{4}x^{11}y^{10}$

$=-\frac{31}{16}x^{11}y^{10}$.

12. 【解】由题意得 $\begin{cases}2x-3y+1=0,\\x+3y+5=0,\end{cases}$

解得 $\begin{cases}x=-2,\\y=-1.\end{cases}$

$\therefore(-2xy)^2\cdot(-y^2)\cdot6xy^2$

$=4x^2y^2\cdot(-y^2)\cdot6xy^2$

$=-24x^3y^6$.

当 $x=-2$, $y=-1$ 时,

原式 $=-24\times(-2)^3\times(-1)^6=-24\times(-8)=192$.

13. D 【解析】$\because x^3\cdot x^my^{2n}=x^{3+m}y^{2n}=x^9y^8$, $\therefore 3+m=9$, $2n=8$, $\therefore m=6$, $n=4$, $\therefore 4m-3n=24-12=12$.

14. -2 【解析】由题意, 得 $m=3\times(-2)=-6$, $n=3+1=4$. 则 $m+n=-6+4=-2$.

15. $\frac{14}{3}$ 【解析】由已知等式整理得 $a^{m+2n}b^{3n+2}=a^5b^3$, 可得

$\begin{cases}m+2n=5,\\3n+2=3,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}m=\frac{13}{3},\\n=\frac{1}{3}.\end{cases}$ $\therefore m+n=\frac{14}{3}$.

16. 9×10^{10} 【解析】该长方体的体积为 $2\times10^4\times1.5\times10^3\times3\times10^3=9\times10^{10}$(立方厘米).

课时2　单项式与多项式相乘

刷基础

1. C 【解析】原式 $=x^6(x^2+2x+1)=x^8+2x^7+x^6$. 故选 C.

2. C 【解析】由题意可知,这个长方体的体积 $=(3a-4)\cdot2a\cdot a=6a^3-8a^2$.

3. D 【解析】$(2x^2)^3-6x^3(x^3+2x^2+x)=8x^6-6x^6-12x^5-6x^4=2x^6-12x^5-6x^4$.

4. A 【解析】原式 $=xy-xz-yz+xy+xz-yz=2xy-2yz$.

5. C 【解析】选项 A 中,$2a(3a-1)=6a^2-2a$,错误;选项 B 中,$x\cdot x^3=x^4$,错误;选项 C 中,$(-2xy^2)^4=16x^4y^8$,正确;选项 D 中,$x^3+x^3=2x^3$,错误.

6. C 【解析】方程去括号得 $2x^2-2x-2x^2+5x=12$,移项,合并同类项得 $3x=12$,解得 $x=4$.

7. C 【解析】$\because ab^2=-1$,$\therefore$ 原式 $=-(ab^2)^3+(ab^2)^2+ab^2=1+1-1=1$.

8. $4a^3b-6a^2b^2+2a^2b$ 【解析】$2a^2b(2a-3b+1)=4a^3b-6a^2b^2+2a^2b$.

9. $2m^4n+2m^2n^2-2m^2n$ 【解析】原式 $=2m^4n+2m^2n^2-2m^2n$. 故答案为 $2m^4n+2m^2n^2-2m^2n$.

10. $-6x^2+18xy$ 【解析】原式 $=-6x^2+18xy$.

11. 【解】原式 $=-6x^2y(-x^2-xy+y^2)$
$=6x^4y+6x^3y^2-6x^2y^3$.

12. 【解】$3a(2a^2-4a+3)-2a^2(3a+4)=6a^3-12a^2+9a-6a^3-8a^2=-20a^2+9a$.
当 $a=-2$ 时,原式 $=-20\times4+9\times(-2)=-98$.

13. 【解】根据题意得 $3ac(3bc-3ac-2ab-3ac)=3ac(3bc-6ac-2ab)=9abc^2-18a^2c^2-6a^2bc$.

14. 【解】由 $|a-b-3|+(b+1)^2+|c-1|=0$,得
$\begin{cases}a-b-3=0,\\b+1=0,\\c-1=0,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=2,\\b=-1,\\c=1.\end{cases}$
$\because(-3ab)\cdot(a^2c-6b^2c)=-3a^3bc+18ab^3c$,
$\therefore$ 原式 $=-3\times2^3\times(-1)\times1+18\times2\times(-1)^3\times1=24-36=-12$.

15. 【解】因为 $(m-x)\cdot(-x)+n(x+m)=-mx+x^2+nx+mn=x^2+(n-m)x+mn=x^2+5x-6$,
则 $\begin{cases}n-m=5,\\mn=-6.\end{cases}$ 所以 $m(n-1)+n(m+1)=2mn+(n-m)=2\times(-6)+5=-7$.

刷提升

1. D 【解析】$(-3a^3)\cdot2a^2b^2\cdot4b^3=-24a^5b^5$. 故选 D.

2. A 【解析】原式 $=4x^8\cdot(-27x^9)=-108x^{17}$. 故选 A.

3. D 【解析】$(-2a^3+3a^2-4a)(-5a^5)=10a^8-15a^7+20a^6$. 故选 D.

4. B 【解析】A 选项,$2x^3\cdot(3x)^2=2x^3\cdot9x^2=18x^5$,故本选项错误;B 选项,$(-3x^4)\cdot(-4x^3)=(-3)\times(-4)x^4\cdot x^3=12x^7$,故本选项正确;C 选项,$3x^4\cdot5x^3=3\times5x^4\cdot x^3=15x^7$,故本选项错误;D 选项,$(-x)\cdot(-2x)^3\cdot(-3x)^2=(-x)\cdot(-8x^3)\cdot9x^2=(-1)\times(-8)\times9x\cdot x^3\cdot x^2=72x^6$,故本选项错误. 故选 B.

5. D 【解析】A 选项,$(-2a)\cdot(3ab-2a^2b)=-6a^2b+4a^3b$,故本选项错误;B 选项,$2ab^2\cdot(-a^2+2b^2-1)=-2a^3b^2+4ab^4-2ab^2$,故本选项错误;C 选项,$abc\cdot(3a^2b-2ab^2)=3a^3b^2c-2a^2b^3c$,故本选项错误;D 选项,$(ab)^2\cdot(3ab^2-c)=3a^3b^4-a^2b^2c$,故本选项正确. 故选 D.

6. $4x^3y^5$ 【解析】原式 $=4x^2y^4\cdot xy=4x^3y^5$. 故答案为 $4x^3y^5$.

7. $-4x^7$ 【解析】$\frac{1}{2}x\cdot(-2x^2)^3=\frac{1}{2}x\cdot(-8x^6)=-4x^7$. 故答案为 $-4x^7$.

8. $162x^5$ 【解析】原式 $=9x^2\cdot27x^3-81x^5=243x^5-81x^5=162x^5$. 故答案为 $162x^5$.

9. $-72a^{12}$ 【解析】$(-3a^3)^2\cdot(-2a^2)^3=9a^6\cdot(-8a^6)=-72a^{12}$. 故答案为 $-72a^{12}$.

10. 【解】(1)原式 $=\frac{2}{3}ab^2\cdot\frac{1}{2}ab-2ab\cdot\frac{1}{2}ab+\frac{4}{3}b\cdot\frac{1}{2}ab$
$=\frac{1}{3}a^2b^3-a^2b^2+\frac{2}{3}ab^2$.
(2)原式 $=2y^{n-1}\cdot y^{n+1}+2y^{n-1}\cdot2y^n-2y^{n-1}\cdot3y^{n-1}$
$=2y^{2n}+4y^{2n-1}-6y^{2n-2}$.

刷素养

11. 【解】$\because ab=3$,
$\therefore(2a^3b^2-3a^2b+4a)(-2b)$
$=-4a^3b^3+6a^2b^2-8ab$
$=-4\times(ab)^3+6(ab)^2-8ab$
$=-4\times3^3+6\times3^2-8\times3$
$=-108+54-24$
$=-78$.

课时3　多项式与多项式相乘

刷基础

1. C 【解析】$\because(x+3)(2x-5)=2x^2+x-15=2x^2+bx-15$,
$\therefore b=1$.

2. B 【解析】$(x+m)(x-6)=x^2+(m-6)x-6m$. $\because$ 结果不含 x 的一次项,$\therefore m-6=0$,解得 $m=6$. 故选 B.

3. x^3+1 【解析】原式 $=x^3-x^2+x+x^2-x+1=x^3+1$.

4. $a^2-ab-2b^2$ 【解析】原式 $=a^2+ab-2ab-2b^2=a^2-ab-2b^2$. 故答案为 $a^2-ab-2b^2$.

5. A 【解析】选项 A 中,$(x-2)(x+9)=x^2+7x-18$,符合题意;选项 B 中,$(x+2)(x+9)=x^2+11x+18$,不符合题意;选项 C 中,$(x-3)(x+6)=x^2+3x-18$,不符合题意;选项 D 中,$(x-1)\cdot(x+18)=x^2+17x-18$,不符合题意. 故选 A.

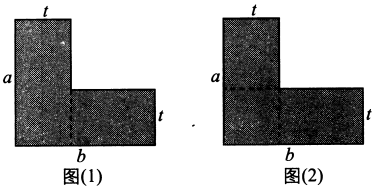
6. A 【解析】由于 $(x-3)(x+4)=x^2+x-12=x^2+px+q$,则 $p=1$,$q=-12$.

7. B 【解析】$(2-m)(2-n)=4-2(m+n)+mn$. $\because m+n=2$,$mn=-2$,$\therefore$ 原式 $=4-4-2=-2$.

8. D 【解析】$\because(x+y+2)(x+y-1)=0$,$\therefore x+y+2=0$ 或 $x+y-1=0$,解得 $x+y=-2$ 或 $x+y=1$.

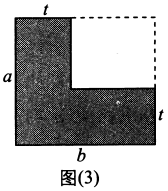
9. C 【解析】$\because(x-3)\cdot(x+4)=x^2+x-12$ 符合题意,$\therefore M=x+4$,$N=-12$,故选 C.

10. A 【解析】根据题意可以分以下几种情况：

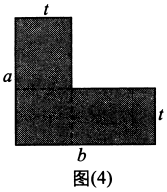


图(1)

图(2)



图(3)



图(4)

①如图(1)所示，则阴影部分的面积为 $at+(b-t)t$，故①正确；②如图(2)所示，则阴影部分的面积为 $at+bt-t^2$，故②正确；③如图(3)所示，则阴影部分的面积为 $ab-(a-t)(b-t)$，故③正确；④如图(4)所示，则阴影部分的面积为 $(a-t)t+(b-t)t+t^2$，故④正确.

11. 3 【解析】$(x+3)(x-p)=x^2+3x-px-3p=x^2+(3-p)x-3p=x^2+mx-27$，则 $3-p=m$，$-3p=-27$，解得 $p=9$，$m=-6$，则 $m+p=-6+9=3$，故答案为 3.

12. −55 【解析】$\because a^2-a-1=0$，$\therefore a^2-a=1$，$\therefore 5(a+3)(a-4)=5a^2-5a-60=5(a^2-a)-60=5\times1-60=-55$.

13. $-\frac{3}{2}$ 【解析】$\because \begin{vmatrix} x-2 & x+3 \\ x+1 & x-2 \end{vmatrix}=13$，$\therefore (x-2)(x-2)-(x+3)(x+1)=13$，即 $x^2-4x+4-x^2-4x-3=13$，即 $-8x=12$，解得 $x=-\frac{3}{2}$.

14. 【解】$\because |m-1|+\left(n+\frac{1}{2}\right)^2=0$，$\therefore m-1=0$，$n+\frac{1}{2}=0$，$\therefore m=1$，$n=-\frac{1}{2}$，$\therefore (-m^2n+1)(-1-m^2n)=m^2n+m^4n^2-1-m^2n=m^4n^2-1=1^4\times\left(-\frac{1}{2}\right)^2-1=1\times\frac{1}{4}-1=-\frac{3}{4}$.

刷易错

15. 【解】(1)$(x^3+mx+n)(x^2-3x+4)$
$=x^5-3x^4+(m+4)x^3+(n-3m)x^2+(4m-3n)x+4n$.
根据展开式中不含 x^3 和 x^2 项，得 $\begin{cases} m+4=0, \\ n-3m=0, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} m=-4, \\ n=-12. \end{cases}$
即 $m=-4$，$n=-12$.
(2)$(m+n)(m^2-mn+n^2)$
$=m^3-m^2n+mn^2+m^2n-mn^2+n^3$
$=m^3+n^3$.
当 $m=-4$，$n=-12$ 时，
原式 $=(-4)^3+(-12)^3=-64-1\,728=-1\,792$.

易错警示 运用多项式乘法法则时，必须做到不重不漏.

刷提升

1. C 【解析】$(x-3)(x+2)=x^2+2x-3x-6=x^2-x-6$. 故选 C.

2. D 【解析】$(2x-a)(x+5)=2x^2+10x-ax-5a=2x^2+(10-a)x-5a$. 由题意得 $10-a=0$，解得 $a=10$. 故选 D.

3. A 【解析】根据题意，知 $a+b=-7$，$ab=12$，$\therefore a$，b 的值可能分别是 −3，−4. 故选 A.

4. D 【解析】$(2x^2-4)\left(2x-1-\frac{3}{2}x\right)=(2x^2-4)\left(\frac{1}{2}x-1\right)=x^3-2x^2-2x+4$. 故选 D.

5. A 【解析】$\because (x+3)(x-1)=x^2+2x-3=x^2-mx+n$，$\therefore m=-2$，$n=-3$，$\therefore m+n=-5$. 故选 A.

6. C 【解析】A 选项，$(a-2)(a-8)=a^2-10a+16$，故本选项不符合题意；B 选项，$(a+2)(a-8)=a^2-6a-16$，故本选项不符合题意；C 选项，$(a-2)(a+8)=a^2+6a-16$，故本选项符合题意；D 选项，$(a+2)(a+8)=a^2+10a+16$，故本选项不符合题意. 故选 C.

7. C 【解析】$(a-2b)(2a-b)+5ab=2a^2-5ab+2b^2+5ab=2a^2+2b^2$. 故选 C.

8. D 【解析】根据题中的图形得 $(3a+2b)(a+b)=3a^2+5ab+2b^2$. 故选 D.

9. $5x^4-3x^3-14x^2+3x$ 【解析】$x(2x-3)(x^2-1)+3x^2(x^2-4)=(2x^2-3x)(x^2-1)+(3x^4-12x^2)=2x^4-2x^2-3x^3+3x+3x^4-12x^2=5x^4-3x^3-14x^2+3x$. 故答案为 $5x^4-3x^3-14x^2+3x$.

10. −4 【解析】$\because (3x-4)(2x-1)=6x^2-3x-8x+4=6x^2-11x+4=ax^2+bx+c$，$\therefore a=6$，$b=-11$，$c=4$，$\therefore a+2b+3c=6+2\times(-11)+3\times4=-4$. 故答案为 −4.

11. −9 【解析】$\because a^2-a-3=0$，$\therefore a^2=a+3$，$a^2-a=3$. $\therefore a^2(a-4)=(a+3)(a-4)=a^2-a-12=3-12=-9$. 故答案为 −9.

12. 【解】(1)$(a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3+a^2b+ab^2-a^2b-ab^2-b^3=a^3-b^3$；
(2)$(3x-2)(2x-3)(x+2)=(6x^2-13x+6)(x+2)=6x^3+12x^2-13x^2-26x+6x+12=6x^3-x^2-20x+12$.

刷素养

13. 【解】$\because$ 甲得到的算式为 $(2x-a)(3x+b)=6x^2+(2b-3a)x-ab=6x^2+11x-10$，
对应的系数相等，$\therefore 2b-3a=11$，$ab=10$.
$\because$ 乙得到的算式为 $(2x+a)(x+b)=2x^2+(2b+a)x+ab=2x^2-9x+10$，
对应的系数相等，$\therefore 2b+a=-9$，$ab=10$，
$\therefore \begin{cases} 2b-3a=11, \\ 2b+a=-9, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} a=-5, \\ b=-2. \end{cases}$
$\therefore$ 正确的结果为 $(2x-5)(3x-2)=6x^2-19x+10$.

课时 4　同底数幂的除法

刷基础

1. C 【解析】原式 $=x^{6-2}=x^4$.

2. D 【解析】$m=2^6\div2^3=2^{6-3}=2^3=8$.

3. D 【解析】选项 A 中，$x^5\cdot x^2=x^7$，故此选项错误；选项 B 中，$(-x^5)^2=x^{10}$，故此选项错误；选项 C 中，x^5+x^2 无法计算，故此选项错误；选项 D 中，$x^5\div x^2=x^3(x\neq0)$，故此选项正确. 故选 D.

4. $\frac{9}{8}$ 【解析】$\because 5^{2m-3n}=(5^m)^2\div(5^n)^3$，把 $5^m=3$，$5^n=2$ 代入上式，得 $3^2\div2^3=\frac{9}{8}$. 故答案为 $\frac{9}{8}$.

5. a^3 【解析】原式 $=a^2\cdot a^{2\times2}\div a^3=a^{2+4-3}=a^3$.

6. $\frac{16}{5}$ 【解析】$\because 3\times9^m\times27^m\div81=3^{13}$，$\therefore 3\times3^{2m}\times3^{3m}\div3^4=3^{13}$，$\therefore 1+2m+3m-4=13$，解得 $m=\frac{16}{5}$.

7. 【解】原式 $=x^6\div x^2\cdot(-x^3)=x^4\cdot(-x^3)=-x^7$.

8.【解】$(a^2)^5\cdot(-a)^4\div(-a^2)^3$
$=a^{10}\cdot a^4\div(-a^6)$
$=-a^8$.

9.【解】原式$=m^3\cdot m^2+m^8\div m^2=m^5+m^6$.

10. A 【解析】$(-3)^0+(-2)=1-2=-1$.

11. A 【解析】∵ $(a-1)^0=1$ 成立,∴ $a-1\neq0$,∴ $a\neq1$.

12. C 【解析】∵ $(1-x)^{1-3x}=1$,∴ 当 $1-3x=0$ 且 $1-x\neq0$,即 $x=\frac{1}{3}$时,原式$=1$;当$x=0$时,原式$=1$. 故 x 的取值有 2 个.

13.【解】(1)原式$=1+(-1)-2=-2$.
(2)原式$=9+1+(-5)=5$.

课时5 整式的除法

刷基础

1. C 【解析】原式$=(6\div3)(x^6\div x^2)=2x^4$.

2. B 【解析】选项 A 中,原式$=2x$,故 A 不正确;选项 B 中,原式$=2x^2$,故 B 正确;选项 C 中,原式$=4x^2$,故 C 不正确;选项 D 中,原式$=2x^3$,故 D 不正确.

3. A 【解析】$10b^2\div(-2b)=-5b$,故选 A.

4. B 【解析】∵ $4x^5y^a\div24x^by^3=\frac{1}{6}x^{5-b}y^{a-3}=\frac{1}{6}x^2y^3$,∴ $5-b=2$,$a-3=3$,解得 $a=6$,$b=3$.

5. A 【解析】$(27a^8)\div\left(\frac{1}{3}a^3\right)\div(9a^2)=\left[(27a^8)\div\left(\frac{1}{3}a^3\right)\right]\div(9a^2)=[(27a^8)\div(9a^2)]\div\left(\frac{1}{3}a^3\right)=\left(27\div\frac{1}{3}\div9\right)a^{8-3-2}$.

6. A 【解析】$(-4a^2+12a^3b)\div(-4a^2)=1-3ab$. 故选 A.

7. B 【解析】原式$=-2x^2+3x-1$.

8. A 【解析】根据题意得另一边长为$(2a^2-2ab+6a)\div(2a)=a-b+3$,则这个长方形的周长为$2(2a+a-b+3)=6a-2b+6$.

9. B 【解析】设除式为 a,则 $ax-1=x^3+3x^2-1$,∴ $a=x^2+3x$. 故选 B.

10. $-3x^2+4x$ 【解析】原式$=6x^4\div(-2x^2)-8x^3\div(-2x^2)=-3x^2+4x$. 故答案为$-3x^2+4x$.

11.【解】$A=[(2x^3-4x^2-1)-(x-1)]\div2x=(2x^3-4x^2-x)\div2x=x^2-2x-\frac{1}{2}$.

12.【解】$[2x(2y^2-4y+1)-2x]\div(-4xy)=(4xy^2-8xy+2x-2x)\div(-4xy)=(4xy^2-8xy)\div(-4xy)=-y+2$.

13.【解】∵ $B\div A=x^2+\frac{1}{2}x$,$A=2x$,∴ $B=\left(x^2+\frac{1}{2}x\right)\cdot2x=2x^3+x^2$,∴ $B+A=2x^3+x^2+2x$.

刷提升

1. C 【解析】$(-abx^2)^3\div(-abx)^3=-a^3b^3x^6\div(-a^3b^3x^3)=x^3$. 故选 C.

2. B 【解析】A 选项,$3a^3+2a^2$ 无法计算,故错误;B 选项,$5a^3b^2\div ab=5a^2b$,故正确;C 选项,$(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$,故错误;D 选项,$(-a)^5+a^5=0$,故错误. 故选 B.

3. B 【解析】依题意得 $M=(4a^2b-3ab^2)\div(-4a+3b)=ab(4a-3b)\div[-(4a-3b)]=-ab$. 故选 B.

4. C 【解析】正确结果为:
原式$=6x^3y\div3xy-3x^2y^2\div3xy$
$=2x^2-xy$;
错误结果为:
原式$=6x^3y\div3xy+3x^2y^2\div3xy$
$=2x^2+xy$,
∴ $(2x^2-xy)(2x^2+xy)=4x^4-x^2y^2$.
故选 C.

5. C 【解析】设 $x^3+(a-1)x-6$ 被 $x-2$ 整除所得的商式为 x^2+mx+n,
$(x-2)(x^2+mx+n)$
$=x^3+mx^2+nx-2x^2-2mx-2n$
$=x^3+(m-2)x^2+(n-2m)x-2n$,
则 $x^3+(m-2)x^2+(n-2m)x-2n=x^3+(a-1)x-6$,
∴ $\begin{cases}m-2=0,\\n-2m=a-1,\\-2n=-6,\end{cases}$解得$\begin{cases}m=2,\\n=3,\\a=0.\end{cases}$
故选 C.

6. $4xyz-1$ 【解析】原式$=4xyz-1$. 故答案为 $4xyz-1$.

7. $3a+2b+7$ 【解析】由题意可知长方形的长为$(3a^2+2ab+7a)\div a=3a+2b+7$. 故答案为 $3a+2b+7$.

8. $4ab^3$ 【解析】由题意可得 $A=16a^5b^5\div(-2a^2b)=-8a^3b^4$,则 $A\div(-2a^2b)=4ab^3$. 故答案为 $4ab^3$.

9. $\frac{1}{2}x^2-y$ 【解析】$(x^3y-2xy^2)\div2xy=\frac{1}{2}x^2-y$. 故答案是 $\frac{1}{2}x^2-y$.

10. 16 【解析】当 $x=-1$ 时,$(3x^2-x)\otimes x^2=4\otimes1=4^2\div1=16$. 故答案为 16.

11.【解】(1)原式$=6a^2b\cdot(-a^2b^3)=-6a^4b^4$.
(2)原式$=25m^2\div(-5m^2)+15m^3n\div(-5m^2)-20m^4\div(-5m^2)=-5-3mn+4m^2$.

12.【解】∵ $x^3+ax^2+1=(x+1)(x^2-bx+1)=x^3+(1-b)x^2+(1-b)x+1$,
∴ $\begin{cases}a=1-b,\\1-b=0,\end{cases}$解得$\begin{cases}a=0,\\b=1.\end{cases}$

13.【解】(1)∵ $S=\frac{(BC+AD)\cdot BE}{2}$,
∴ $S=\frac{(4x+y+5x+2y)\cdot(x+2y)}{2}=\left(\frac{9}{2}x^2+\frac{21}{2}xy+3y^2\right)$平方米.
答:这块空地的面积是$\left(\frac{9}{2}x^2+\frac{21}{2}xy+3y^2\right)$平方米.
(2)∵ 长方形广场的面积为$(6x^2+12xy+9x)$平方米,宽为 $3x$ 米,
∴ 长方形的长为$(6x^2+12xy+9x)\div3x=(2x+4y+3)$米,
∴ $5x+2y-(2x+4y+3)=(3x-2y-3)$米.
答:长方形的长比梯形的下底短$(3x-2y-3)$米.

14.1 综合训练

刷综合

1. A 【解析】$(-b^2)^3=-b^6$. 故选 A.

2. B 【解析】$(-a)^3\div a=-a^3\div a=-a^{3-1}=-a^2$. 故选 B.

3. D 【解析】A 选项,$2m^2+m^2=3m^2$,故此选项错误;B 选项,$(mn^2)^2=m^2n^4$,故此选项错误;C 选项,$2m\cdot4m^2=8m^3$,故此选项错误;D 选项,$m^5\div m^3=m^2$,故此选项正确. 故选 D.

4. D 【解析】A 选项,$2a\cdot3b=6ab$,故此选项错误;B 选项,$a^3\cdot a^4=a^7$,故此选项错误;C 选项,$(-3a^2b)^2=9a^4b^2$,故此选项错

误;D 选项,$a^4 \div a^2 + a^2 = 2a^2$,故此选项正确. 故选 D.

5. C 【解析】$(a^2)^3 - 5a^3 \cdot a^3 = a^6 - 5a^6 = -4a^6$. 故选 C.

6. C 【解析】选项 A 中,$\sqrt{2}$ 与 $\sqrt{3}$ 不能合并,故此选项错误;选项 B 中,$a + 2a = 3a$,故此选项错误;选项 C 中,$x(1+y) = x + xy$,故此选项正确;选项 D 中,$(mn^2)^3 = m^3n^6$,故此选项错误.

7. B 【解析】$(-1)^0 = 1$,选项 A 正确;$(-3)^2 \div \left(\frac{3}{2}\right)^2 = 9 \times \frac{4}{9} = 4$,选项 B 错误;$5x^2 - 6x^2 = -x^2$,选项 C 正确;$(2m^3)^2 \div (2m)^2 = 4m^6 \div 4m^2 = m^4$,选项 D 正确,故选 B.

8. B 【解析】原式 $= x^2 + 2x + x + 2 = x^2 + 3x + 2$.

9. $-4x^7$ 【解析】$\frac{1}{2}x \cdot (-2x^2)^3 = \frac{1}{2}x \cdot (-8x^6) = -4x^7$. 故答案为 $-4x^7$.

10. $\frac{9}{2}$ 【解析】$\because a^m = 3, a^n = 2, \therefore a^{2m} = 3^2 = 9, \therefore a^{2m-n} = \frac{a^{2m}}{a^n} = \frac{9}{2}$. 故答案为 $\frac{9}{2}$.

11. (1)$\frac{4}{9}$ (2)$k^{n+2\,018}$ 【解析】(1)$\because h(1) = \frac{2}{3}, h(m+n) = h(m) \cdot h(n), \therefore h(2) = h(1+1) = \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{4}{9}$;

(2)$\because h(1) = k(k \neq 0), h(m+n) = h(m) \cdot h(n), \therefore h(n) \cdot h(2\,018) = k^n \cdot k^{2\,018} = k^{n+2\,018}$.

刷素养

12. (1)$x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$ 【解析】(1)由已知得 $(x^7 - 1) \div (x - 1) = x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$.

(2)【解】$\because (2^8 - 1) \div (2 - 1) = 2^7 + 2^6 + 2^5 + 2^4 + 2^3 + 2^2 + 2 + 1, \therefore 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5 + 2^6 + 2^7 = 2^8 - 1$.

13. 【解】设 $M = 1 + 3 + 3^2 + 3^3 + \cdots + 3^{2\,018}$,①

①式两边都乘 3,得 $3M = 3 + 3^2 + 3^3 + 3^4 + \cdots + 3^{2\,019}$. ②

由② − ①得 $2M = 3^{2\,019} - 1$,

上式两边都除以 2,得 $M = \frac{3^{2\,019} - 1}{2}$.

14.2 乘法公式

14.2.1 平方差公式

刷基础

1. A 【解析】A 选项,由于两个括号中含 x, y 项的系数不相等,故不能使用平方差公式计算,故此选项符合题意;B 选项,两个括号中,含 $2x$ 项的符号相同,含 y 项的符号相反,故能使用平方差公式计算,故此选项不符合题意;C 选项,两个括号中,含 x 项的符号相反,含 $2y$ 项的符号相同,故能使用平方差公式计算,故此选项不符合题意;D 选项,两个括号中,含 $2x$ 项的符号相反,含 y 项的符号相同,故能使用平方差公式计算,故此选项不符合题意. 故选 A.

2. C 【解析】选项 A 中,原式 $= 5a^2$,不正确;选项 B 中,原式 $= -8a^3b^3$,不正确;选项 C 中,原式 $= 9a^2 - b^2$,正确;选项 D 中,原式 $= -2a^4$,不正确.

3. B 【解析】$\because (2-x)(2+x)(4+x^2) = (4-x^2)(4+x^2) = 16 - x^4$,又 $\because (2-x)(2+x)(4+x^2) = 16 - x^n, \therefore 16 - x^4 = 16 - x^n$,则 $n = 4$. 故选 B.

4. 9 【解析】根据平方差公式得,原式 $= 4^2 - (\sqrt{7})^2 = 16 - 7 = 9$.

5. $a^4 - b^4$ 【解析】原式 $= (a^2 - b^2)(a^2 + b^2) = a^4 - b^4$.

6. 【解】原式 $= (4a^2 + b^2)(4a^2 - b^2) = 16a^4 - b^4$.

7. C 【解析】$2\,018^2 - 2\,019 \times 2\,017 = 2\,018^2 - (2\,018 + 1)(2\,018 - 1) = 2\,018^2 - (2\,018^2 - 1) = 1$.

8. ±3 【解析】$\because$ 原式 $= [2(m+n) + 1][2(m+n) - 1] = 4(m+n)^2 - 1, \therefore 4(m+n)^2 - 1 = 35, \therefore (m+n)^2 = 9, \therefore m + n = \pm 3$.

9. ±36 【解析】$\because (m+3x)(m-3x) = m^2 - 9x^2 = 16 - nx^2, \therefore m^2 = 16, n = 9, \therefore m = \pm 4, \therefore mn = \pm 36$.

10. 【解】(1)原式 $= [(x + 2c) - 3y][(x + 2c) + 3y]$

$= (x + 2c)^2 - (3y)^2$

$= x^2 + 4xc + 4c^2 - 9y^2$.

(2)$90\frac{1}{9} \times 89\frac{8}{9}$

$= \left(90 + \frac{1}{9}\right) \times \left(90 - \frac{1}{9}\right)$

$= 8\,100 - \frac{1}{81}$

$= 8\,099\frac{80}{81}$.

11. 【解】原式 $= x^2 - 2x - (x^2 - 4) = x^2 - 2x - x^2 + 4 = -2x + 4$.

当 $x = \frac{1}{2}$ 时,原式 $= -1 + 4 = 3$.

12. 【解】设正方形 Ⅰ 的边长为 a cm,正方形 Ⅱ 的边长为 b cm.

由已知得 $\begin{cases} 4a - 4b = 96, \\ a^2 - b^2 = 960, \end{cases}$

解得 $\begin{cases} a = 32, \\ b = 8. \end{cases}$

答:正方形 Ⅰ 的边长为 32 cm,正方形 Ⅱ 的边长为 8 cm.

14.2.2 完全平方公式

课时 1 完全平方公式

刷基础

1. B 【解析】由完全平方公式得,原式 $= a^2 - 2a + 1$.

2. C 【解析】$(-a-b)^2 = [-(a+b)]^2 = a^2 + 2ab + b^2$.

3. B 【解析】A 选项,$\frac{x-2y}{2y-x} = -1$,错误;B 选项,$(-a-b)^2 = (a+b)^2$,正确;C 选项,$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$,错误;D 选项,$(a+b)^2 - (a-b)^2 = 4ab$,错误. 故选 B.

4. C 【解析】选项 A 中,$(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$,故此选项错误;选项 B 中,$(x-y)^2 = x^2 - 2xy + y^2$,故此选项错误;选项 C 中,$(x+1)(x-1) = x^2 - 1$,故此选项正确;选项 D 中,$(x-1)^2 = x^2 - 2x + 1$,故此选项错误.

5. C 【解析】由 $a^2 - 2a - 2 = 0$ 得 $a^2 - 2a = 2$,则 $(a-1)^2 = a^2 - 2a + 1 = 3$.

6. D 【解析】已知等式整理得 $x^2 + 2ax + a^2 = x^2 - 10x + b$,可得 $2a = -10, a^2 = b$,解得 $a = -5, b = 25$.

7. C 【解析】$\because (m+n)^2 = 11, mn = 2, \therefore m^2 + n^2 + 2mn = 11, \therefore m^2 + n^2 = 11 - 2mn = 11 - 4 = 7, \therefore (m-n)^2 = m^2 + n^2 - 2mn = 7 - 4 = 3$.

8. C 【解析】$\because x + y = -4, xy = 2, \therefore x^2 + y^2 = (x+y)^2 - 2xy = (-4)^2 - 2 \times 2 = 12$. 故选 C.

9. D 【解析】$\because a - \frac{1}{a} = 2, \therefore \left(a - \frac{1}{a}\right)^2 = 2^2, \therefore a^2 - 2a \cdot \frac{1}{a} + \left(\frac{1}{a}\right)^2 = 4, \therefore a^2 - 2 + \frac{1}{a^2} = 4, \therefore a^2 + \frac{1}{a^2} = 6$.

10. 18 【解析】∵ $x^2-4x-1=0$,∴ $x^2-1=4x$,∴ $\frac{x^2-1}{x}=4$,

∴ $x^2+\frac{1}{x^2}=\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+2=\left(\frac{x^2-1}{x}\right)^2+2=4^2+2=18$.

11. 【解】(1)∵ $x^2+y^2=19$, $x-y=5$,

∴ $(x-y)^2=5^2$,

$x^2-2xy+y^2=25$,

$2xy=(x^2+y^2)-25$,

$2xy=19-25$,

$2xy=-6$,

∴ $xy=-3$.

(2)∵ $(x+y)^2=x^2+2xy+y^2=19+2\times(-3)=13$,

∴ $x+y=\pm\sqrt{13}$.

12. 【解】$(2x-3)^2-x^2=3(x^2-4x)+9$.

∵ $x^2-4x-2=0$,

∴ $x^2-4x=2$,

∴ 原式 $=3(x^2-4x)+9=15$.

13. 【解】原式 $=4x^2+4xy+y^2+x^2-y^2-5x^2+5xy=9xy$.

当 $x=1$, $y=-1$ 时,原式 $=9xy=-9$.

14. 【解】原式 $=x^2-2xy+y^2-(x^2-4y^2)=5y^2-2xy$.

∵ $|x-2|+(y+1)^2=0$,∴ $x=2$, $y=-1$,

∴ 原式 $=5\times(-1)^2-2\times2\times(-1)=5+4=9$.

15. (1) $(a+b)^2-(a-b)^2=4ab$

(2)【解】由(1)可知 $(3x+2y)^2-(3x-2y)^2=24xy=9-5=4$,

所以 $xy=\frac{1}{6}$.

刷易错

16. 【解】$(x-3)^2-x(x-8)=x^2-6x+9-x^2+8x=2x+9$. 因为 $\sqrt{5}<x<\sqrt{10}$,且 x 为整数,所以 $x=3$. 当 $x=3$ 时,原式 $=2\times3+9=15$.

易错警示 (1)要理解 $(a\pm b)^2$ 表示两个 $(a\pm b)$ 的积;(2)公式中的"$-$"看作减号就不能再看作负号,看作负号就不能再看作减号;(3)平方时不要漏掉系数的平方;(4)切记中间一项是乘积的2倍.

刷提升

1. B 【解析】∵ $x+\frac{1}{x}=5$,∴ $\left(x+\frac{1}{x}\right)^2=5^2$, $x^2+2+\frac{1}{x^2}=25$,

∴ $x^2+\frac{1}{x^2}=23$. 故选 B.

2. C 【解析】$9.5^2=(10-0.5)^2=10^2-2\times10\times0.5+0.5^2$. 故选 C.

3. C 【解析】∵ $a+b=2$, $ab=\frac{3}{4}$,∴ $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2=4$,

∴ $a^2+b^2=\frac{5}{2}$,∴ $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2=1$,∴ $a-b=\pm1$. 故选 C.

4. C 【解析】∵ $a+b=ab=9$,∴ $S_{阴影}=a^2+b^2-\frac{1}{2}a^2-\frac{1}{2}b(a+b)=\frac{1}{2}(a^2+b^2-ab)=\frac{1}{2}[(a+b)^2-3ab]=\frac{1}{2}\times(81-27)=27$. 故选 C.

5. 4 【解析】∵ $a-b=4$, $ab=-2$,∴ $a^2+b^2=(a-b)^2+2ab=4^2+2\times(-2)=12$,∴ $a^2+4ab+b^2=12+4\times(-2)=4$. 故答案为4.

6. (答案不唯一) $(a+b)^2+2(a+b)c+c^2$ 【解析】$(a+b+c)^2=[(a+b)+c]^2=(a+b)^2+2(a+b)c+c^2$. 本题答案不唯一.

7. 【解】∵ $x^2+y^2=(x+y)^2-2xy$,

∴ $25=7^2-2xy$,

∴ $xy=12$,

∴ $(x-y)^2=x^2-2xy+y^2=25-2\times12=1$,

∴ $x-y=\pm1$.

8. 【解】原式 $=a^2-1-a^2+4a-4=4a-5$.

9. 【解】∵ $(a-1)^2-(a^2-2b)=-7$,

∴ $a^2-2a+1-a^2+2b=-7$,

∴ $a-b=4$,

则 $\frac{a^2+b^2}{2}-ab=\frac{a^2-2ab+b^2}{2}=\frac{(a-b)^2}{2}=8$.

刷素养

10. 【解】(1)∵ 当 $n=1$ 时,多项式 $(a+b)^1$ 的展开式是一次二项式,此时第三项的系数为 $0=\frac{1\times0}{2}$;

当 $n=2$ 时,多项式 $(a+b)^2$ 的展开式是二次三项式,此时第三项的系数为 $1=\frac{2\times1}{2}$;

当 $n=3$ 时,多项式 $(a+b)^3$ 的展开式是三次四项式,此时第三项的系数为 $3=\frac{3\times2}{2}$;

当 $n=4$ 时,多项式 $(a+b)^4$ 的展开式是四次五项式,此时第三项的系数为 $6=\frac{4\times3}{2}$;

……

∴ 多项式 $(a+b)^n$ 的展开式是一个 n 次 $n+1$ 项式,第三项的系数为 $\frac{n(n-1)}{2}$.

(2)∵ 当 $n=1$ 时,多项式 $(a+b)^1$ 展开式的各项系数之和为 $1+1=2=2^1$;

当 $n=2$ 时,多项式 $(a+b)^2$ 展开式的各项系数之和为 $1+2+1=4=2^2$;

当 $n=3$ 时,多项式 $(a+b)^3$ 展开式的各项系数之和为 $1+3+3+1=8=2^3$;

当 $n=4$ 时,多项式 $(a+b)^4$ 展开式的各项系数之和为 $1+4+6+4+1=16=2^4$;

……

∴ 多项式 $(a+b)^n$ 展开式的各项系数之和为 2^n.

课时2 添括号法则

刷基础

1. C 【解析】因为括号前面是负号,根据添括号法则,括号内各项应变号,所以括号中所填入的整式应是 $4bc-1$.

2. B 【解析】选项A中,原式 $=3x^3-2x^2-4x+5$,错误;选项B中,原式 $=3x^3+4x-2x^2-5$,正确;选项C中,原式 $=3x^3-5-2x^2-4x$,错误;选项D中,原式 $=2x^2+3x^3+4x-5$,错误.

3. (1) $2b-c-d$ (2) $a+3b-c$ (3) x^2-2y^2 (4) y^2+y

【拓展】所添括号前面是"$+$",括到括号里的各项都不改变符号;所添括号前面是"$-$",括到括号里的各项都改变符号,与去括号法则相反.

4. D 【解析】因为在两个因式中 x 的正负号相同，由添括号法则可知选 D.

5. D 【解析】∵ $(x-2\,015)^2+(x-2\,017)^2=34$，∴ $(x-2\,016+1)^2+(x-2\,016-1)^2=(x-2\,016)^2+2(x-2\,016)+1+(x-2\,016)^2-2(x-2\,016)+1=2(x-2\,016)^2+2=34$，∴ $2(x-2\,016)^2=32$，$(x-2\,016)^2=16$.

6. 【解】(1)原式 $=[a-(2b-3c)][a+(2b-3c)]$
$=a^2-(2b-3c)^2$
$=a^2-4b^2+12bc-9c^2$.

(2)原式 $=\left[\left(-\frac{1}{3}a+2b\right)+c\right]\left[\left(-\frac{1}{3}a+2b\right)-c\right]$
$=\left(-\frac{1}{3}a+2b\right)^2-c^2$
$=\frac{1}{9}a^2-\frac{4ab}{3}+4b^2-c^2$.

7. 【解】(1)原式 $=[3m+(n-p)][3m-(n-p)]=(3m)^2-(n-p)^2=9m^2-n^2+2np-p^2$.

(2)原式 $=[(a-2b)+c]^2=(a-2b)^2+2(a-2b)c+c^2=a^2-4ab+4b^2+2ac-4bc+c^2$.

(3)原式 $=[(a+b)-3][(a+b)+3]=(a+b)^2-9=a^2+2ab+b^2-9$.

(4)原式 $=[(x-2y)-3z]^2=(x-2y)^2-6z(x-2y)+9z^2=x^2-4xy+4y^2-6xz+12yz+9z^2$.

刷易错

8. $b-c$　$b-c$　$b-c$ 【解析】$(a-b+c)(a+b-c)=[a-(b-c)][a+(b-c)]=a^2-(b-c)^2$.

易错警示 使用添括号法则时，要分清括到括号里的项是哪些项，括号前面的符号是正号还是负号. 添括号法则与去括号法则是互逆的，因此验证运用添括号法则是否正确时，可用去括号法则检验.

14.3 因式分解

14.3.1 提公因式法

刷基础

1. C 【解析】A 选项是整式乘法，错误；B 选项中右边的结果不是积的形式，错误；C 选项是因式分解，正确；D 选项中右边不是积的形式，错误. 故选 C.

2. D 【解析】A、C 选项中的变形是整式乘法，不是因式分解；B 选项中变形结果是 $x(x+2)$ 与 1 的和，不是因式分解；D 选项中 $x^3-x=x(x^2-1)=x(x+1)(x-1)$，是因式分解. 故选 D.

3. A 【解析】$-4x^2y+2xy^2-2xy=-2xy(2x-y+1)$. 故选 A.

4. A 【解析】$2a^{n-1}-4a^{n+1}=2a^{n-1}(1-2a^2)$，故选 A.

5. C 【解析】$m^2(a-2)+m(a-2)=m(a-2)(m+1)$.

6. A 【解析】$8x^{2n}-4x^n=4x^n(2x^n-1)$，∴ 公因式是 $4x^n$.

7. A 【解析】原式 $=m^2(m^2-1)-(m^2-1)=(m^2-1)^2\geqslant 0$，即不是负数.

8. $(a-b)(a-b+1)$ 【解析】原式 $=(a-b)^2+(a-b)=(a-b)(a-b+1)$. 故答案为 $(a-b)(a-b+1)$.

9. 【解】$(2a-3b)(x+3)-(3b-2a)(3x-1)-(2a-3b)(5x+7)$
$=(2a-3b)(x+3)+(2a-3b)(3x-1)-(2a-3b)(5x+7)$
$=(2a-3b)[(x+3)+(3x-1)-(5x+7)]$
$=(2a-3b)(-x-5)$
$=-(2a-3b)(x+5)$.

10. A 【解析】∵ $ab=-3$，$a-2b=5$，∴ $a^2b-2ab^2=ab(a-2b)=-3\times 5=-15$.

11. A 【解析】∵ $a=681\times 2\,019-681\times 2\,018=681\times(2\,019-2\,018)=681$，$b=2\,015\times(2\,015+1)-(2\,015-2)\times(2\,015+3)=2\,015^2+2\,015-2\,015^2-3\times 2\,015+2\times 2\,015+6=2\,015\times(1-3+2)+6=6$，$c=\sqrt{678^2+678+680+690+678}=\sqrt{678\times(678+1+1)+680+690}=\sqrt{678\times 680+680+690}=\sqrt{680(678+1)+690}=\sqrt{680\times 679+690}=\sqrt{680\times(680-1)+690}=\sqrt{680^2+10}$，∴ $b<c<a$，故选 A.

12. $(a+1)^{100}$ 【解析】原式 $=(a+1)[1+a+a(a+1)+a(a+1)^2+\cdots+a(a+1)^{98}]=(a+1)^2[1+a+a(a+1)+a(a+1)^2+\cdots+a(a+1)^{97}]=(a+1)^3[1+a+a(a+1)+a(a+1)^2+\cdots+a(a+1)^{96}]=\cdots=(a+1)^{100}$.

13. 【解】原式 $=(a+b)(2a-a-b)=(a+b)(a-b)=a^2-b^2$.
当 $a=3$，$b=5$ 时，原式 $=3^2-5^2=-16$.

14. 【解】∵ $a+b=2$，$ab=2$，∴ $a^2b+ab^2=ab(a+b)=2\times 2=4$.

刷易错

15. 【解】$-8ax^2+16axy-8ay^2$
$=-8a(x^2-2xy+y^2)$
$=-8a(x-y)^2$.

易错警示 一个多项式中第一项含有“-”时，一般要将“-”一并提出，但要注意括在括号里面的各项要改变符号.

14.3.2 公式法

课时 1 运用平方差公式分解因式

刷基础

1. A 【解析】$x^2-4=(x+2)(x-2)$.

2. A 【解析】A 选项，$-x^2$ 与 1 符号相反，能运用平方差公式分解因式，故本选项正确；B 选项，$-x^2$ 与 -1 符号相同，不能运用平方差公式分解因式，故本选项错误；C 选项，$49-x^3$ 不能运用平方差公式分解因式，故本选项错误；D 选项，$49+x$ 不能运用平方差公式分解因式，故本选项错误. 故选 A.

3. D 【解析】$x-x^3=x(1-x^2)=x(1+x)(1-x)$. 故选 D.

4. D 【解析】$(2x+3)^2-x^2=(2x+3+x)(2x+3-x)=(3x+3)\cdot(x+3)=3(x+1)(x+3)$.

5. D 【解析】∵ $-(a+3)(a-3)=-(a^2-9)=-a^2+9$，∴ $-(a+3)(a-3)$ 是多项式 $(-a^2+9)$ 分解因式的结果. 故选 D.

6. A 【解析】原式 $=[(a+b+c)+(a-b+c)][(a+b+c)-(a-b+c)]=2b(2a+2c)=4ab+4bc$.

7. $(2n+3m)(2n-3m)$ 【解析】$-9m^2+4n^2=(2n+3m)(2n-3m)$. 故答案为 $(2n+3m)(2n-3m)$.

8. $3(a+b)(a-b)$ 【解析】$(2a+b)^2-(a+2b)^2=(2a+b+a+2b)(2a+b-a-2b)=(3a+3b)(a-b)=3(a+b)(a-b)$.

9. $(2m+1)(2m-1)$ 【解析】$4m^2-1=(2m+1)(2m-1)$.

10. 【解】(1)$9(a+b)^2-25(a-b)^2$
$=[3(a+b)-5(a-b)][3(a+b)+5(a-b)]$
$=(-2a+8b)(8a-2b)$
$=4(4b-a)(4a-b)$.

(2)$(x+1)(x-9)+8x$
$=x^2-9x+x-9+8x=x^2-9=(x+3)(x-3)$.

11. C　【解析】∵ $a+b=1$，∴ $a^2-b^2+2b=(a+b)(a-b)+2b=a-b+2b=a+b=1$.

12. B　【解析】∵ $(4x^2+9)(2x+3)(2x-3)=(4x^2+9)(4x^2-9)=16x^4-81=(2x)^4-81=(2x)^n-81$，∴ $n=4$.

13. 12　【解析】∵ $a+b=4$，$a-b=1$，

∴ $(a+1)^2-(b-1)^2$

$=(a+1+b-1)(a+1-b+1)$

$=(a+b)(a-b+2)$

$=4\times(1+2)$

$=12$.

故答案为 12.

14. 【解】$(m+2n)^2-(3m-n)^2$

$=(m+2n+3m-n)(m+2n-3m+n)$

$=(4m+n)(3n-2m)$

$=-(4m+n)(2m-3n)$.

当 $4m+n=40$，$2m-3n=5$ 时，原式 $=-40\times5=-200$.

15. 【解】∵ $x-z=(x-y)+(y-z)=6$，

∴ $x^2-z^2=(x+z)(x-z)=14\times6=84$.

16. 【解】原式 $=(2^{24}-1)(2^{24}+1)=(2^{12}-1)(2^{12}+1)(2^{24}+1)=(2^6-1)(2^6+1)(2^{12}+1)(2^{24}+1)=63\times65\times(2^{12}+1)(2^{24}+1)$.

则这两个数为 63 与 65.

刷易错

17. 【解】原式 $=(3a^2+2b^2)(3a^2-2b^2)=(3a^2+2b^2)\cdot(\sqrt{3}a+\sqrt{2}b)(\sqrt{3}a-\sqrt{2}b)$.

易错警示 因式分解要分解到不能再分解为止，不能遗留仍然可以分解的因式.

刷提升

1. D　【解析】A 选项，a^2 与 $(-b)^2$ 符号相同，不能用平方差公式分解因式，故 A 选项错误；B 选项，$5m^2-20mn=5m(m-4n)$，不能用平方差公式分解因式，故 B 选项错误；C 选项，x^2 与 y^2 符号相同，不能用平方差公式分解因式，故 C 选项错误；D 选项，$-x^2+9=-x^2+3^2$，两项符号相反，能用平方差公式分解因式，故 D 选项正确. 故选 D.

2. D　【解析】原式 $=x(1-4x^2)=x(1+2x)(1-2x)$. 故选 C.

3. B　【解析】$4a-a^3=a(4-a^2)=a(2-a)(2+a)$. 故选 B.

4. A　【解析】∵ $3x-2y=a$，$x-4y=b$，∴ $4x-6y=a+b$，$2x+2y=a-b$，则 $2x-3y=\frac{a+b}{2}$，$x+y=\frac{a-b}{2}$，

故 $(x+y)^2-(2x-3y)^2$

$=\left(\frac{a-b}{2}\right)^2-\left(\frac{a+b}{2}\right)^2$

$=\frac{a^2+b^2-2ab}{4}-\frac{a^2+b^2+2ab}{4}$

$=-ab$.

故选 A.

5. (答案不唯一)a^2-4　【解析】∵ $(a+2)(a-2)=a^2-2a+2a-4=a^2-4$，∴ 满足条件的多项式可以是 a^2-4. 本题答案不唯一.

6. $4m(m^2+2)(m+\sqrt{2})(m-\sqrt{2})$　【解析】$4m^5-16m=4m(m^4-4)=4m(m^2+2)(m^2-2)=4m(m^2+2)(m+\sqrt{2})(m-\sqrt{2})$. 故答案为 $4m(m^2+2)(m+\sqrt{2})(m-\sqrt{2})$.

7. $(p+2)(p-2)$　【解析】$(p+1)(p-4)+3p=p^2-3p-4+3p=p^2-4=(p+2)(p-2)$.

8. $(x+3y)(x-3y)$　【解析】∵ $|m-1|+\sqrt{n^2-18n+81}=0$，∴ $m=1$，$n=9$，则 $mx^2-ny^2=x^2-9y^2=(x+3y)(x-3y)$.

故答案为 $(x+3y)(x-3y)$.

9. 【解】(1)原式 $=[2(a-b)+4(a+b)][2(a-b)-4(a+b)]=-4(3a+b)(a+3b)$；

(2)原式 $=(9a^2+b^2)(9a^2-b^2)=(9a^2+b^2)(3a+b)(3a-b)$.

10. 【解】能. 理由如下：

∵ $(n+5)^2-(n-3)^2$

$=(n+5+n-3)(n+5-n+3)$

$=16(n+1)$，

∴ 当 n 为自然数时，$(n+5)^2-(n-3)^2$ 能被 16 整除.

刷素养

11. (1)相等　(2)a^2-b^2　$a+b$　$a-b$　$(a+b)(a-b)$　$(3)a^2-b^2=(a+b)(a-b)$　【解析】(1)由题意可知，“前世”题图(1)的面积与“今生”题图(2)新长方形的面积相等；

(2)根据图形面积的和差关系直接写出“前世”题图(1)的面积为 a^2-b^2，“今生”题图(2)新长方形的长为 $a+b$、宽为 $a-b$，面积为 $(a+b)(a-b)$；

(3)由(1)和(2)图形面积的计算，形象地验证了代数中的一个乘法公式为 $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$.

(4)【解】$2.001\times1.999=(2+0.001)(2-0.001)=2^2-0.001^2=4-0.000\,001=3.999\,999$.

课时2　运用完全平方公式分解因式

刷基础

1. C　【解析】A 选项，a^2-1 不符合完全平方公式分解因式的特点，故错误；B 选项，a^2+4 不符合完全平方公式分解因式的特点，故错误；C 选项，$a^2+2a+1=(a+1)^2$，故正确；D 选项，$a^2-4a-4=(a-2)^2-8$，不符合完全平方公式分解因式的特点，故错误. 故选 C.

2. D　【解析】由题意得 $4x^2+(k-1)x+9=(2x+3)^2=4x^2+12x+9$ 或 $4x^2+(k-1)x+9=(2x-3)^2=4x^2-12x+9$，∴ $k-1=12$ 或 $k-1=-12$，解得 $k=13$ 或 -11.

3. A　【解析】$x^2-8x+16=(x-4)^2$.

4. A　【解析】$4-4a+a^2=(2-a)^2$.

5. C　【解析】选项 A 中，原式 $=(x-3)^2$，不符合题意；选项 B 中，原式 $=(y+x)(y-x)$，不符合题意；选项 C 中，原式不能用公式法分解因式，符合题意；选项 D 中，原式 $=-(x-y)^2$，不符合题意.

6. $(a+b+2)(a+b-2)$　【解析】原式 $=(a+b)^2-2^2=(a+b+2)(a+b-2)$. 故答案为 $(a+b+2)(a+b-2)$.

7. $(xy-1)^2$　【解析】原式 $=(xy-1)^2$.

8. $(x+2)^2(x-2)^2$　【解析】$(x^2+4)^2-16x^2=(x^2+4-4x)(x^2+4+4x)=(x+2)^2(x-2)^2$.

9. $(a+b-6)^2$　【解析】原式 $=(a+b-6)^2$.

10. $(a+2)^2$　【解析】$(a+1)(a+3)+1=a^2+4a+4=(a+2)^2$.

11. (1)C　【解析】该同学第二步到第三步运用了因式分解的两数和的完全平方公式，选择 C.

(2)不彻底　$(x-2)^4$

(3)【解】设 $x^2-2x=y$,原式 $=y(y+2)+1=y^2+2y+1=(y+1)^2=(x^2-2x+1)^2=(x-1)^4$.

12. B 【解析】$\because x^2+y^2-2x-6y=-10$,$\therefore (x-1)^2+(y-3)^2=0$,$\therefore x=1$,$y=3$,$x^{2\,018}y^2=1^{2\,018}\times 3^2=9$.

13. B 【解析】$\because a^2+b^2-6a+10b+35=(a-3)^2+(b+5)^2+1>0$,$\therefore$ 选 B.

14. -2 1 【解析】由 $\sqrt{a+2}+b^2-2b+1=0$ 得 $\sqrt{a+2}+(b-1)^2=0$,$\therefore a+2=0$,$b-1=0$,解得 $a=-2$,$b=1$.

15. 28 或 36 【解析】原式 $=\dfrac{a^2+b^2-2ab}{2}=\dfrac{(a-b)^2}{2}=\dfrac{(a+b)^2-4ab}{2}$. $\because a^2b^2=4$,$\therefore ab=\pm 2$.

$\therefore$ ①当 $a+b=8$,$ab=2$ 时,原式 $=\dfrac{8^2-4\times 2}{2}=28$;

②当 $a+b=8$,$ab=-2$ 时,原式 $=\dfrac{8^2-4\times(-2)}{2}=36$.

16. 【解】$(x^2+y^2)^2-4x^2y^2=(x^2+2xy+y^2)(x^2+y^2-2xy)=(x+y)^2(x-y)^2=3^2\times(-2)^2=9\times 4=36$.

全章综合训练

刷章测

1. C 【解析】$a^{12}\div a^4=a^{12-4}=a^8$.

2. D 【解析】A 选项,原式 $=a^5$,所以 A 选项错误;B 选项,原式 $=3a^2$,所以 B 选项错误;C 选项,原式 $=-8a^6$,所以 C 选项错误;D 选项,原式 $=a^4\div a^2=a^2$,所以 D 选项正确. 故选 D.

3. B 【解析】原式 $=2\times 2^{100}\times 0.5^{100}=2\times(2\times 0.5)^{100}=2$.

4. A 【解析】$\because 2^n+2^n+2^n+2^n=2$,$\therefore 4\cdot 2^n=2$,$\therefore 2\cdot 2^n=1$,$\therefore 2^{1+n}=1$,$\therefore 1+n=0$,$\therefore n=-1$. 故选 A.

5. A 【解析】A 选项,原式 $=9x^2-y^2$,正确;B 选项,原式 $=x^2-81$,错误;C 选项,原式 $=-x^2+2xy-y^2$,错误;D 选项,原式 $=x^2-x+\dfrac{1}{4}$,错误. 故选 A.

6. D 【解析】$96^2=(100-4)^2=100^2-2\times 100\times 4+4^2=9\,216$,故选项 A 错误;$96^2=(95+1)^2=95^2+2\times 95\times 1+1=9\,216$,故选项 B 错误;$96^2=(90+6)^2=90^2+2\times 90\times 6+6^2=9\,216$,故选项 C 错误;$96^2=(100-4)^2=100^2-2\times 100\times 4+4^2=9\,216$,故选项 D 正确. 故选 D.

7. B 【解析】A 选项,$-6a^3b^2=2a^2b\cdot(-3ab)$,不符合因式分解的定义;B 选项,$9a^2-4b^2=(3a+2b)(3a-2b)$,是因式分解,符合题意;C 选项,$ma-mb+c=m(a-b)+c$,不符合因式分解的定义;D 选项,$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$,是整式乘法,不符合题意. 故选 B.

8. D 【解析】$(x+a)(x-3)=x^2-3x+ax-3a=x^2+(a-3)x-3a=x^2+x-n$,则 $a-3=1$,$-3a=-n$,解得 $a=4$,$n=12$. 故选 D.

9. C 【解析】$\because a^2-2a-1=0$,$\therefore a^2-2a=1$,$\therefore a^4-2a^3-2a+1=a^2(a^2-2a)-2a+1=a^2-2a+1=1+1=2$.

10. C 【解析】原式 $=\left(\dfrac{5}{8}\right)^{2\,017}\times\left(-\dfrac{8}{5}\right)^{2\,017}\cdot\left(-\dfrac{8}{5}\right)\div(-1)^{2\,016}=\dfrac{8}{5}$.

11. A 【解析】原式 $=x^2-2x+1+y^2+4y+4+1=(x-1)^2+(y+2)^2+1$. $\because (x-1)^2\geqslant 0$,$(y+2)^2\geqslant 0$,$\therefore (x-1)^2+(y+2)^2+1\geqslant 1$.

12. D 【解析】由杨辉三角系数表可以发现:$(a+b)^n$ 的各项展开式的系数除首尾两项都是 1 外,其余各项系数都等于 $(a+b)^{n-1}$ 的相邻两项系数的和,则 $(a+b)^4$ 的各项系数依次为 1,4,6,4,1;$(a+b)^5$ 的各项系数依次为 1,5,10,10,5,1;则 $(a+b)^6$ 的系数分别为 1,6,15,20,15,6,1. 前四项的系数分别为 1,6,15,20.

13. $-5b$ 【解析】原式 $=-\dfrac{25}{5}a^{1-1}b^{3-2}=-5b$.

14. 7 【解析】$\because a^2+\dfrac{1}{a^2}=a^2+\dfrac{1}{a^2}+2-2=\left(a+\dfrac{1}{a}\right)^2-2=\left(\dfrac{a^2+1}{a}\right)^2-2$①,$a^2-3a+1=0$,于是 $a^2+1=3a$②,将②代入①得,原式 $=\left(\dfrac{3a}{a}\right)^2-2=9-2=7$.

15. 1 【解析】$\because 4x^2+8(n+1)x+16n$ 是一个关于 x 的完全平方式,$\therefore n+1=\pm 2\sqrt{n}$,解得 $n=1$.

16. 8 【解析】$(2n+1)^2-(2n-1)^2=(2n+1+2n-1)(2n+1-2n+1)=4n\times 2=8n$. $\because (2n+1)^2-(2n-1)^2$ 的值总能被整数 m 整除,$\therefore m$ 的最大值为 8.

17. 【解】(1)原式 $=(100-2)^2$

$=100^2+2^2-400$

$=9\,604$.

(2)原式 $=(100-1)\times(100+1)$

$=100^2-1$

$=10\,000-1$

$=9\,999$.

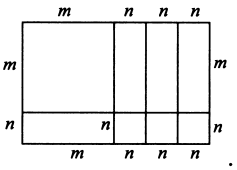
18. 【解】原式 $=a^2-4b^2-a^2+4ab-4b^2+8b^2=4ab$,

当 $a=-2$,$b=\dfrac{1}{2}$ 时,原式 $=-4$.

19. (1) $(m-n)^2$ (2) $(m+n)^2-4mn=(m-n)^2$ (3) ± 4

【解析】$(x-y)^2=(x+y)^2-4xy=(-6)^2-4\times 5=16$,则 $x-y=\pm 4$.

(4)【解】如图所示:



20. 【解】(1)设另一个因式为 $(x+t)$,得

$2x^2-5x+k=(2x-3)(x+t)=2x^2+(2t-3)x-3t$,

则 $\begin{cases}2t-3=-5,\\-3t=k,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}t=-1,\\k=3.\end{cases}$

故另一个因式为 $(x-1)$,k 的值为 3.

(2)$\because (x-2)(x+a)=x^2+(a-2)x-2a=x^2-5x+6$,

$\therefore \begin{cases}a-2=-5,\\-2a=6.\end{cases}$ 解得 $a=-3$.

(3)$\because (2x-1)(x+5)=2x^2+9x-5=2x^2+bx-5$,$\therefore b=9$.

第十五章 分式

15.1 分式

15.1.1 从分数到分式

刷基础

1. A 【解析】$\frac{x}{2}$,$\frac{x}{\pi-2}$,$\frac{1}{3}x^2$ 的分母中均不含有字母,因此它们是整式,而不是分式;$\frac{2x+1}{x-3}$的分母中含有字母,因此是分式. 故选 A.

2. C 【解析】∵ 1 m 长的电线质量为 a,其余电线的总质量为 b,∴ 其余电线的长度为$\frac{b}{a}$ m,∴ 电线的总长度为$\left(\frac{b}{a}+1\right)$ m.

3. 3 【解析】式子$\frac{1}{a}$,$\frac{5}{6+x}$,$9x+\frac{10}{y}$的分母中含有字母,是分式. 其他的式子分母中不含字母,不是分式.

4. $x\neq -5$ 【解析】根据题意,得 $x+5\neq 0$,解得 $x\neq -5$.

5. 0 或 2 【解析】由题意,得 $a^2-2a=0$,解得 $a=0$ 或 2.

6. $a\geqslant -3$ 且 $a\neq \pm 1$ 【解析】由题意,得 $a+3\geqslant 0$ 且 $a^2-1\neq 0$,解得 $a\geqslant -3$ 且 $a\neq \pm 1$.

7. 【解】(1)由题意得 $x^2+1\neq 0$,解得 x 为任意实数,即 x 取任意实数,分式$\frac{x^2-1}{x^2+1}$均有意义.

(2)由题意得 $1-|x|\neq 0$,解得 $x\neq \pm 1$,即当 $x\neq \pm 1$ 时,分式$\frac{|x|}{1-|x|}$有意义.

(3)由题意得$(x+2)(x-1)\neq 0$,解得 $x\neq -2$ 且 $x\neq 1$,即当 $x\neq -2$ 且 $x\neq 1$ 时,分式$\frac{x^2-1}{(x+2)(x-1)}$有意义.

8. 【解】(1)当分母 $x^2-1\neq 0$,即 $x\neq 1$ 且 $x\neq -1$ 时,分式$\frac{3x-2}{x^2-1}$有意义.

(2)当分母 $x^2-1=0$,即 $x=1$ 或 $x=-1$ 时,分式$\frac{3x-2}{x^2-1}$无意义.

9. D 【解析】∵ 分式$\frac{x^2-1}{x+2}$的值为 0,∴ $x^2-1=0$ 且 $x+2\neq 0$,解得 $x=\pm 1$. 故选 D.

10. -3 【解析】由分子 $x^2-9=0$,解得 $x=\pm 3$. 当 $x=-3$ 时,分母 $x-3=-6\neq 0$;当 $x=3$ 时,分母 $x-3=0$,分式没有意义,所以 x 的值为 -3.

11. ③ 【解析】由 $3x-1\neq 0$,得 $x\neq \frac{1}{3}$,故把 $x=-a$ 代入分式$\frac{x+a}{3x-1}$中,当 $x=-a$ 且 $-a\neq \frac{1}{3}$,即 $a\neq -\frac{1}{3}$时,分式的值为零.

12. 6 【解析】由题意得$\begin{cases}-2+a=0,\\4-b=0,\end{cases}$解得$\begin{cases}a=2,\\b=4,\end{cases}$则 $a+b=2+4=6$.

13. 【解】(1)由题意,得 $m^2-3m+2\neq 0$,

解得 $m\neq 1$ 且 $m\neq 2$.

则当 $m\neq 1$ 且 $m\neq 2$ 时,此分式有意义.

(2)由题意,得$(m-1)(m-3)=0$ 且 $m^2-3m+2\neq 0$,

解得 $m=3$.

则当 $m=3$ 时,此分式的值为零.

刷易错

14. A 【解析】∵ 分式$\frac{|x|-2}{x+2}$的值为零,∴ $|x|-2=0$ 且 $x+2\neq 0$,解得 $x=2$.

易错警示 当分式的值为 0 时,可以先求使分子为 0 的未知数的值,再代入分式的分母中检验,要保证分式的分母不为 0.

15.1.2 分式的基本性质

刷基础

1. D 【解析】选项 A 中,$\frac{2}{2+a}\neq\frac{1}{1+a}$,此选项错误;选项 B 中,$\frac{a+1}{a^2+1}\neq\frac{1}{a+1}$,此选项错误;选项 C 中,$\frac{-x+y}{x-y}=\frac{x-y}{y-x}$,此选项错误;选项 D 中,$\frac{a^2-1}{a+1}=\frac{(a+1)(a-1)}{a+1}=a-1$,此选项正确.

2. B 【解析】把分式$\frac{x+y}{x^2y}$中 x,y 的值同时扩大为原来的 3 倍为$\frac{3x+3y}{(3x)^2\cdot 3y}=\frac{x+y}{9x^2y}=\frac{1}{9}\cdot\frac{x+y}{x^2y}$,则分式的值缩小为原来的$\frac{1}{9}$. 故选 B.

3. B 【解析】$\frac{\frac{1}{3}x+\frac{1}{6}}{\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}}=\frac{\left(\frac{1}{3}x+\frac{1}{6}\right)\times 12}{\left(\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}\right)\times 12}=\frac{4x+2}{6x-3}$. 故选 B.

4. $\frac{x+2y}{3+10y}$ 【解析】要想将分式$\frac{0.1x+0.2y}{0.3+y}$的分子、分母各项系数都化为整数,可将分子、分母同乘 10,即原式 $=\frac{10\times(0.1x+0.2y)}{10\times(0.3+y)}=\frac{x+2y}{3+10y}$.

5. B 【解析】原式 $=\frac{(x+2)(x-2)}{x-2}=x+2$.

6. C 【解析】A 选项,$\frac{4xy}{x^2}=\frac{4y}{x}$,不是最简分式;B 选项,$\frac{4}{2x-6}=\frac{2}{x-3}$,不是最简分式;C 选项,$\frac{3}{x+3}$是最简分式;D 选项,$\frac{x-y}{x^2-y^2}=\frac{x-y}{(x+y)(x-y)}=\frac{1}{x+y}$,不是最简分式. 故选 C.

7. A 【解析】原式 $=\frac{(x+y+x-y)(x+y-x+y)}{4xy}=\frac{2x\cdot 2y}{4xy}=1$.

8. C 【解析】∵ 原式 $=\frac{(m-1)^2}{(m+1)(m-1)}=\frac{m-1}{m+1}$,∴ 能使$\frac{m^2-2m+1}{m^2-1}$也为整数的 m 是 0 或 -2 或 -3.

9. $-\frac{m}{5n}$ 【解析】原式 $=-\frac{m}{5n}$.

10. 2 【解析】∵ $\frac{x}{x^3}=\frac{1}{x^2}$,$\frac{m+n}{m^2-n^2}=\frac{1}{m-n}$,∴ 最简分式是$\frac{3a+1}{3a+b}$,$\frac{2-x}{2x}$.

11. 【解】(1)原式 $=\frac{(x+3)^2}{(x+3)(x-3)}=\frac{x+3}{x-3}$.

(2)原式 $=\frac{(m-1)(m-2)}{m(m-1)}=\frac{m-2}{m}$.

12. 【解】$\frac{x^2-4xy+4y^2}{(x-2y)^3}=\frac{(x-2y)^2}{(x-2y)^3}=\frac{1}{x-2y}$.

把 $x=-2,y=3$ 代入得 $\frac{1}{x-2y}=\frac{1}{-2-2\times3}=-\frac{1}{8}$.

13. a^2bc 【解析】最简公分母是 ab,a^2b,abc 的最高次幂的积，即为 a^2bc.

14. $3(m+n)(m-n)$ 【解析】$\frac{m}{m^2-n^2}=\frac{m}{(m+n)(m-n)},\frac{n}{3m+3n}=\frac{n}{3(m+n)}$，所以最简公分母为 $3(m+n)(m-n)$.

15. $\frac{2bc}{6ac}$ 和 $-\frac{3a^2b}{6ac}$ 【解析】∵ 两个分式分母分别为 $3a,2c$，未知数系数的最小公倍数为 $3\times2=6$，a,c 的最高次数为 1，∴ 最简公分母为 $6ac$，将 $\frac{b}{3a},-\frac{ab}{2c}$ 通分依次为 $\frac{2bc}{6ac}$ 和 $-\frac{3a^2b}{6ac}$.

刷易错

16. $12a^3b^3c^3$ 【解析】分母 $2a^2bc^3,3ab^3,4a^3bc$ 中，未知数系数 2，3，4 的最小公倍数为 12，字母 a,b,c 的最高次幂均为 3，所以它们的最简公分母为 $12a^3b^3c^3$.

易错警示 通分时，一般取各分母的所有系数的最小公倍数与所有因式的最高次幂的积作为最简公分母.

刷提升

1. A 【解析】$\frac{-6xy}{3x}=-2y,\frac{y^2-x^2}{x-y}=-x-y,\frac{xy+x}{2x+4x^2y}=\frac{y+1}{2+4xy}$，$\frac{x^2-1}{x^2+2x+1}=\frac{x-1}{x+1}$，都不是最简分式；$\frac{x^2+y^2}{x+y}$ 是最简分式，故选 A.

2. D 【解析】当 $a=0$ 时，$a^2=0$，A、B 选项中的分式无意义；当 $a=-1$ 时，$a+1=0$，C 选项中的分式无意义；无论 a 取何值，$a^2+1\neq0$，分式 $\frac{a-1}{a^2+1}$ 一定有意义. 故选 D.

3. D 【解析】A 选项，$\frac{x-y}{y-x}=\frac{y-x}{x-y}$，故 A 错误；B 选项，$\frac{x-y}{y-x^2}=-\frac{y-x}{y-x^2}$，故 B 错误；C 选项，$\frac{-x-1}{-y+1}=\frac{x+1}{y-1}$，故 C 错误；D 选项，$\frac{-x-y}{y-x}=-\frac{x+y}{y-x}$，故 D 正确. 故选 D.

4. B 【解析】∵ 代数式 $\frac{x-2}{x^2+1}$ 的结果是负数，而 $x^2+1>0$，∴ $x-2<0$，解得 $x<2$. 故选 B.

5. B 【解析】分式 $\frac{1}{a-b},\frac{1}{a+b},\frac{1}{a^2-b^2}$ 的最简公分母是 $(a+b)(a-b)$，所以通分后，$\frac{1}{a+b}$ 的结果是 $\frac{a-b}{a^2-b^2}$. 故选 B.

6. A 【解析】∵ $x^2-4x-1=0$，∴ $x\neq0$，∴ $x-4-\frac{1}{x}=0$，即 $x-\frac{1}{x}=4$，∴ $x^2-2+\frac{1}{x^2}=16$，即 $x^2+\frac{1}{x^2}=18$，∴ $\frac{3x^2}{x^4-7x^2+1}=\frac{3}{x^2-7+\frac{1}{x^2}}=\frac{3}{18-7}=\frac{3}{11}$. 故选 A.

7. -1 或 -3 【解析】由分式 $\frac{4}{m-1}$ 的值是整数（m 为负整数），得 $m-1=-2$ 或 $m-1=-4$，解得 $m=-1$ 或 $m=-3$.

8. -1 【解析】由题意得 $x^2-1=0$，且 $x-1\neq0$，解得 $x=-1$.

9. 0 或 $\frac{1}{2}$ 【解析】∵ $a^2-ab=0(b\neq0)$，∴ $a(a-b)=0$，∴ $a=0$ 或 $a=b$. 当 $a=0$ 时，$\frac{a}{a+b}=0$；当 $a=b$ 时，$\frac{a}{a+b}=\frac{a}{a+a}=\frac{1}{2}$，即 $\frac{a}{a+b}$ 的值为 0 或 $\frac{1}{2}$.

10. 【解】(1) $\frac{a^2-16}{a^2-8a+16}=\frac{(a+4)(a-4)}{(a-4)^2}=\frac{a+4}{a-4}$.

(2) $\frac{x^2-(y-z)^2}{(x+y)^2-z^2}=\frac{(x+y-z)(x-y+z)}{(x+y+z)(x+y-z)}=\frac{x-y+z}{x+y+z}$.

11. 【解】原式 $=\frac{a(a^2-4b^2)}{a(a^2-4ab+4b^2)}=\frac{(a+2b)(a-2b)}{(a-2b)^2}=\frac{a+2b}{a-2b}$.

当 $a=2,b=-\frac{1}{2}$ 时，原式 $=\frac{2+2\times\left(-\frac{1}{2}\right)}{2-2\times\left(-\frac{1}{2}\right)}=\frac{1}{3}$.

刷素养

12. 【解】∵ $\frac{x}{x^2-3x+1}=\frac{1}{5}$，∴ $x\neq0$，

∴ $\frac{x^2-3x+1}{x}=5$，∴ $x+\frac{1}{x}-3=5$，∴ $x+\frac{1}{x}=8$，

∴ $\frac{x^4+x^2+1}{x^2}=x^2+\frac{1}{x^2}+1=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-1=63$，

∴ $\frac{x^2}{x^4+x^2+1}=\frac{1}{63}$.

15.2 分式的运算

15.2.1 分式的乘除

课时 1 分式的乘除

刷基础

1. D 【解析】原式 $=\frac{2a^2b^2}{3a^2b^3}=\frac{2}{3b}$.

2. B 【解析】$\left(-\frac{n}{m}\right)\cdot\frac{m^2-m}{n}=\left(-\frac{n}{m}\right)\cdot\frac{m(m-1)}{n}=-m+1$. 故选 B.

3. D 【解析】原式 $=\frac{a+b}{5ab}\cdot\frac{10a^2b}{(a+b)(a-b)}=\frac{2a}{a-b}$，故选 D.

4. A 【解析】原式 $=a^6b^3\cdot\frac{b^2}{a}=a^5b^5$.

5. $-9a^2b^2$ 【解析】$6a^3b\cdot\frac{-3b}{2a}=-\frac{6a^3b\cdot3b}{2a}=-9a^2b^2$.

6. $x+3$ 【解析】原式 $=(x+3)(x-3)\cdot\frac{1}{x-3}=x+3$.

7. D 【解析】原式 $=\frac{1}{-(m+7)(m-7)}\cdot m(m-7)=-\frac{m}{m+7}$，故选 D.

8. D 【解析】原式 $=\frac{x^2y}{x-y}\cdot\frac{x-y}{xy}=x$.

9. D 【解析】原式 $=\frac{1}{a-1}\cdot[a(a-1)]=a$.

10. D 【解析】∵ $\frac{x^2-2x}{x-1}\div\frac{x^2}{1-x}=\frac{x^2-2x}{x-1}\cdot\frac{1-x}{x^2}=\frac{x^2-2x}{x-1}\cdot\frac{-(x-1)}{x^2}=\frac{x(x-2)}{x-1}\cdot\frac{-(x-1)}{x^2}=\frac{-(x-2)}{x}=\frac{2-x}{x}$，∴ 自己负责的一步出现错误是乙和丁，故选 D.

11. $\frac{x-1}{x}$　【解析】$\frac{x^2+x}{x^2-1}\div\frac{x^2}{x^2-2x+1}=\frac{x(x+1)}{(x+1)(x-1)}\cdot\frac{(x-1)^2}{x^2}=\frac{x-1}{x}$.

12. $-\frac{1}{2b^2}$　【解析】原式$=\left(-\frac{3a}{b}\right)\cdot\frac{1}{6ab}=-\frac{1}{2b^2}$.

13. $\frac{6}{m-3}$　【解析】原式$=\frac{12}{(m+3)(m-3)}\cdot\frac{m+3}{2}=\frac{6}{m-3}$.

14. $x-1$　【解析】原式$=\frac{(x+1)(x-1)}{x}\cdot\frac{x}{x+1}=x-1$.

15. 1.5　【解析】由题意可得$\frac{a}{b}\div\frac{2a}{3b}=\frac{a}{b}\cdot\frac{3b}{2a}=1.5$.

16.【解】(1)原式$=\frac{(x-3)^2}{-(x+3)(x-3)}\cdot\frac{x(x+3)}{2(x-3)}=-\frac{x}{2}$.

(2)原式$=\frac{2(x-3)}{(x-2)^2}\cdot\frac{(x-2)(x+3)}{-(x-3)}=-\frac{2(x+3)}{x-2}$.

课时2　分式的乘除混合运算及乘方

刷基础

1. D　【解析】原式$=a\cdot\frac{b}{a}\cdot\frac{b}{a}=\frac{b^2}{a}$.

2. D　【解析】原式$=-\frac{n}{m^2}\cdot\frac{m^3}{n^2}\cdot\frac{n^2}{m}=-n$.

3. B　【解析】原式$=a^2\cdot\frac{1}{b}\cdot\frac{1}{b}=\frac{a^2}{b^2}$.

4.【解】原式$=\frac{x(x+y)}{x(x-y)}\cdot\frac{1}{x+y}\cdot\frac{y(x-y)}{xy}=\frac{1}{x}$.

5.【解】原式$=\frac{2(x-3)}{(2-x)^2}\cdot\frac{1}{x+3}\cdot\frac{(x+3)(x-2)}{3-x}\cdot(x-2)=-2$.

6. C　【解析】原式$=\frac{25x^4y^2}{9x^2}=\frac{25x^2y^2}{9}$.

7. A　【解析】原式$=a^3\cdot\frac{1}{a^2}=a$.

8. D　【解析】原式$=\frac{(a+b)^2}{(a-b)^2}\cdot\frac{2(a-b)}{3(a+b)}=\frac{2(a+b)}{3(a-b)}=\frac{2a+2b}{3a-3b}$. 故选 D.

9. A　【解析】$\frac{m^4}{n^5}\cdot\frac{n^4}{n^3}=\frac{m^4}{n^4}$，故 A 正确；$\left(\frac{3x}{4y}\right)^3=\frac{(3x)^3}{(4y)^3}=\frac{27x^3}{64y^3}$，故 B 错误；$\left(\frac{2a}{a-b}\right)^2=\frac{(2a)^2}{(a-b)^2}=\frac{4a^2}{a^2-2ab+b^2}$，故 C 错误；$\frac{a}{b}\div\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c}=\frac{ad}{bc}$，故 D 错误. 故选 A.

10. $\frac{2}{b}$　【解析】原式$=\frac{2b}{a^2}\cdot\frac{a^2}{b^2}=\frac{2}{b}$.

11.【解】原式$=\frac{x^2}{4y^2}\cdot\frac{4y}{x^2}=\frac{1}{y}$.

12.【解】原式$=\frac{(x+y)^2(x-y)^2}{x^2y^2}\cdot\frac{1}{x+y}\cdot\frac{x^3}{(x-y)^3}=\frac{x(x+y)}{y^2(x-y)}$.

当$x=-\frac{1}{2}$，$y=-1$时，原式$=\frac{3}{2}$.

刷易错

13. B　【解析】原式$=(x+y)\cdot\frac{x}{x+y}\cdot\frac{x}{x+y}=\frac{x^2}{x+y}$.

易错警示 在进行分式的乘除混合运算时，应将乘除混合运算统一为乘法运算，再按照从左到右的顺序计算. 有乘方的先做乘方运算.

刷提升

1. C　【解析】原式$=-\frac{(2a)^3}{b^3}=-\frac{8a^3}{b^3}$.

2. B　【解析】原式$=-\frac{m}{3(m+3)}\cdot\frac{6}{(m+3)(m-3)}\cdot\frac{m-3}{2m}=-\frac{1}{(m+3)^2}$.

3. D　【解析】原式$=-\frac{(a-b)^4}{a^4}\cdot\frac{a^5}{(a-b)^5}=-\frac{a}{a-b}$.

4. C　【解析】原式$=\frac{x-y}{x+y}\cdot\frac{1}{y-x}\cdot\frac{1}{x-y}=\frac{1}{y^2-x^2}$.

5. D　【解析】原式$=\frac{1}{2}\times\frac{2(a+b)}{a-b}\cdot(a+b)(a-b)=(a+b)^2$.

6. C　【解析】原式$=\frac{-(a+4)(a-4)}{(a+2)^2}\cdot\frac{2(a+2)}{a-4}\cdot\frac{a+2}{a+4}=-2$.

7. $\frac{1}{a^2xy}$　【解析】原式$=\frac{y^2}{4a^2x^2}\cdot\frac{4x}{y^3}=\frac{1}{a^2xy}$.

8. $\frac{b^4}{a-b}$　【解析】原式$=\frac{a^2(a+b)(a-b)}{(a-b)^2}\cdot\frac{b^2}{a(a+b)}\cdot\frac{b^2}{a}=\frac{b^4}{a-b}$.

9. $\frac{1}{8a^2}$　【解析】原式$=\frac{a^2}{b^2}\cdot\frac{b^6}{8a^3}\cdot\frac{1}{ab^4}=\frac{1}{8a^2}$.

10.【解】由$\frac{3a+1}{a}=0$，可知$3a+1=0$且$a\neq0$，

解得$a=-\frac{1}{3}$.

原式$=-\frac{(a-1)^2}{a(a-2)}\cdot\frac{1}{a-1}\cdot\frac{a-2}{a-1}=-\frac{1}{a}$.

将$a=-\frac{1}{3}$代入得，原式$=3$.

11.【解】(1)原式$=\left[\frac{(x-3)(x-1)}{-(x-3)(x+4)}\right]^2\div\left[\frac{-2(x+1)(x-2)}{(x-2)(x+4)}\right]^2$

$=\frac{(x-1)^2}{(x+4)^2}\div\frac{4(x+1)^2}{(x+4)^2}$

$=\frac{(x-1)^2}{(x+4)^2}\cdot\frac{(x+4)^2}{4(x+1)^2}$

$=\frac{(x-1)^2}{4(x+1)^2}$.

当$x=-2$时，原式$=\frac{(-2-1)^2}{4\times(-2+1)^2}=\frac{9}{4}$.

(2)原式$=\frac{(a+b)^3}{8a^3b^6}\div\frac{(a+b)^2(a-b)^2}{a^2b^6}\div\frac{1}{4(a-b)^2}$

$=\frac{(a+b)^3}{8a^3b^6}\cdot\frac{a^2b^6}{(a+b)^2(a-b)^2}\cdot4(a-b)^2$

$=\frac{a+b}{2a}$.

当$a=-\frac{1}{2}$，$b=\frac{2}{3}$时，原式$=\frac{-\frac{1}{2}+\frac{2}{3}}{2\times\left(-\frac{1}{2}\right)}=-\frac{1}{6}$.

刷素养

12.【解】$-\frac{x^5}{y^2}\div\frac{x^3}{y}=-\frac{x^2}{y}$，$\frac{x^7}{y^3}\div\left(-\frac{x^5}{y^2}\right)=-\frac{x^2}{y}$，$-\frac{x^9}{y^4}\div\frac{x^7}{y^3}=-\frac{x^2}{y}$，…，所以用任意一个分式去除它后面一个分式得到的结果一样. 由给定分式的排列规律可得第 9 个分式为$\frac{x^{19}}{y^9}$.

15.2.2 分式的加减

课时1 分式的加减

刷基础

1. A 【解析】原式 $=\frac{a+1}{a+1}=1$.

2. A 【解析】原式 $=\frac{x+1-1}{x}=1$,故选 A.

3. 2 【解析】$\because \frac{2x-3}{x+1}=A-\frac{5}{x+1}$,$\therefore A=\frac{2x-3}{x+1}+\frac{5}{x+1}=\frac{2x-3+5}{x+1}=\frac{2x+2}{x+1}=\frac{2(x+1)}{x+1}=2$.

4. 1 【解析】原式 $=\frac{2x+1-x}{x+1}=\frac{x+1}{x+1}=1$.

5. $x+1$ 【解析】原式 $=\frac{(x+1)(x-1)}{x-1}=x+1$.

6. 【解】$\frac{x^2}{x+1}-\frac{1}{x+1}=\frac{(x+1)(x-1)}{x+1}=x-1$.

7. C 【解析】$\frac{a}{b-a}+\frac{b}{a-b}=\frac{a}{b-a}-\frac{b}{b-a}=\frac{a-b}{b-a}=-1$. 故选 C.

8. C 【解析】原式 $=\frac{b}{ab}+\frac{a}{ab}=\frac{a+b}{ab}$.

9. A 【解析】原式 $=\frac{a(a+b)}{(a+b)(a-b)}-\frac{b(a-b)}{(a+b)(a-b)}=\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}$.

10. B 【解析】原式 $=\frac{y(x+y)}{(x+y)(x-y)}+\frac{x(x-y)}{(x+y)(x-y)}=\frac{x^2+y^2}{x^2-y^2}$.

11. B 【解析】原式 $=\frac{a+2}{(a+2)(a-2)}-\frac{2a}{(a+2)(a-2)}=\frac{2-a}{(a+2)(a-2)}=-\frac{1}{a+2}$.

12. $\frac{1}{a+2}$ 【解析】原式 $=\frac{4}{(a+2)(a-2)}+\frac{2(a-2)}{(a+2)(a-2)}-\frac{a+2}{(a+2)(a-2)}=\frac{a-2}{(a+2)(a-2)}=\frac{1}{a+2}$.

13. -3 【解析】原式 $=\frac{b}{ab}-\frac{a}{ab}=\frac{-(a-b)}{ab}=-\frac{3ab}{ab}=-3$.

14. $\frac{3}{x-3}$ 【解析】原式 $=\frac{(x+3)^2}{(x+3)(x-3)}-\frac{x}{x-3}=\frac{x+3}{x-3}-\frac{x}{x-3}=\frac{3}{x-3}$.

15. 【解】原式 $=\frac{(x+1)^2}{(x+1)(x-1)}-\frac{x}{x-1}=\frac{x+1}{x-1}-\frac{x}{x-1}=\frac{x+1-x}{x-1}=\frac{1}{x-1}$.

当 $x=2$ 时,原式 $=\frac{1}{2-1}=1$.

刷易错

16. 【解】原式 $=\frac{(x^2+xy)-(x^2-xy)}{xy}=\frac{x^2+xy-x^2+xy}{xy}=\frac{2xy}{xy}=2$.

易错警示 减式的分子是一个多项式,运算时要注意分数线的括号作用,防止出现 $\frac{x^2+xy-x^2-xy}{xy}=0$ 的错误.

刷提升

1. C 【解析】$\because \frac{1}{a}-\frac{1}{b}=\frac{1}{3}$,$\therefore \frac{b-a}{ab}=\frac{1}{3}$,则 $\frac{ab}{b-a}=3$,故选 C.

2. B 【解析】原式 $=\frac{a^2-b^2}{ab}+\frac{b(a-b)}{a(a-b)}=\frac{a^2-b^2}{ab}+\frac{b^2}{ab}=\frac{a^2}{ab}=\frac{a}{b}$.

3. D 【解析】$\because m+n=3mn$,$\therefore \frac{1}{m}+\frac{1}{n}=\frac{m+n}{mn}=3$. 故选 D.

4. 0 【解析】原式 $=\frac{(x+1)^2}{x+1}-\frac{x(x+1)}{x}=x+1-(x+1)=0$.

5. 1 2 【解析】$\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x-2}=\frac{A(x-2)}{(x-1)(x-2)}+\frac{B(x-1)}{(x-1)(x-2)}=\frac{(A+B)x-(2A+B)}{(x-1)(x-2)}=\frac{3x-4}{(x-1)(x-2)}$,$\therefore \begin{cases}A+B=3,\\2A+B=4,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}A=1,\\B=2.\end{cases}$

6. 5 【解析】$\because \frac{1}{a}-\frac{1}{b}=2$,$\therefore \frac{b-a}{ab}=2$,$a-b=-2ab$,$\therefore \frac{2a-ab-2b}{a+ab-b}=\frac{-4ab-ab}{-2ab+ab}=5$.

7. 3 【解析】$\because a^2-3ab+b^2=0$,$\therefore a^2+b^2=3ab$,$\therefore \frac{a}{b}+\frac{b}{a}=\frac{a^2+b^2}{ab}=\frac{3ab}{ab}=3$.

8. $\frac{3n^2+5n}{4(n+1)(n+2)}$ 【解析】$\because \frac{2}{1\times3}=\frac{1}{1}-\frac{1}{3}$,$\frac{2}{2\times4}=\frac{1}{2}-\frac{1}{4}$,$\frac{2}{3\times5}=\frac{1}{3}-\frac{1}{5}$,$\therefore \frac{1}{n(n+2)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)$,$\therefore \frac{1}{1\times3}+\frac{1}{2\times4}+\frac{1}{3\times5}+\cdots+\frac{1}{n(n+2)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{3}+\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)=\frac{3n^2+5n}{4(n+1)(n+2)}$.

9. 【解】原式 $=\frac{a+1}{a(a-1)(a+1)}+\frac{a(a-3)}{a(a-1)(a+1)}=\frac{a^2-2a+1}{a(a-1)(a+1)}=\frac{(a-1)^2}{a(a-1)(a+1)}=\frac{a-1}{a^2+a}$.

10. 【解】原式 $=\frac{a^2}{ab(a-b)}-\frac{b^2}{ab(a-b)}=\frac{a^2-b^2}{ab(a-b)}=\frac{(a-b)(a+b)}{ab(a-b)}=\frac{a+b}{ab}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\sqrt{5}$.

11. 【解】因为 $\frac{a-b}{a+b}=2$,所以 $\frac{a+b}{a-b}=\frac{1}{2}$.

$\frac{2(a+b)}{a-b}-\frac{a-b}{3(a+b)}=2\cdot\frac{a+b}{a-b}-\frac{1}{3}\cdot\frac{a-b}{a+b}=2\times\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\times2=\frac{1}{3}$.

刷素养

12. 【解】由 $\frac{x^2+3x+6}{x-1}$ 的分母为 $x-1$,可设 $x^2+3x+6=(x-1)(x+a)+b$,

则 $x^2+3x+6=(x-1)(x+a)+b=x^2+(a-1)x+(b-a)$.

$\because$ 对于任意 x,上述等式均成立,$\therefore \begin{cases}a-1=3,\\b-a=6,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=4,\\b=10,\end{cases}$

$\therefore \frac{x^2+3x+6}{x-1}=\frac{(x-1)(x+4)+10}{x-1}=x+4+\frac{10}{x-1}$.

由 $\frac{-2x^4-x^2+5}{-x^2+1}$ 的分母为 $-x^2+1$,

可设 $-2x^4-x^2+5=(-x^2+1)(2x^2+c)+d$,

则由 $-2x^4-x^2+5=(-x^2+1)(2x^2+c)+d=-2x^4+2x^2-cx^2+c+d=-2x^4+(2-c)x^2+(c+d)$.

∵对于任意x,上述等式均成立,∴$\begin{cases}2-c=-1,\\c+d=5,\end{cases}$解得$\begin{cases}c=3,\\d=2,\end{cases}$

∴$\frac{-2x^4-x^2+5}{-x^2+1}=\frac{(-x^2+1)(2x^2+3)+2}{-x^2+1}=2x^2+3+\frac{2}{-x^2+1}$.

课时2　分式的混合运算

刷基础

1.A　【解析】原式$=\frac{x}{(x+1)^2}\div\frac{x}{x+1}=\frac{x}{(x+1)^2}\cdot\frac{x+1}{x}=\frac{1}{x+1}$.

2.B　【解析】原式$=\left(\frac{x}{x}+\frac{1}{x}\right)\div\frac{(x+1)^2}{x}=\frac{x+1}{x}\cdot\frac{x}{(x+1)^2}=\frac{1}{x+1}$,故选B.

3.D　【解析】原式$=\frac{a^2-b^2}{a}\cdot\frac{a}{a-b}=\frac{(a+b)(a-b)}{a}\cdot\frac{a}{a-b}=a+b$.

4.B　【解析】∵$a+b=5$,∴$\left(\frac{b^2}{a}-a\right)\div\left(\frac{a-b}{a}\right)=\frac{b^2-a^2}{a}\cdot\frac{a}{a-b}=\frac{(b+a)(b-a)}{a-b}=-(a+b)=-5$,故选B.

5.B　【解析】原式$=\frac{x-1}{x+1}\cdot(x+1)(x-1)=(x-1)^2$.

6.$\frac{a}{a+b}$　【解析】原式$=\frac{a+2b}{a+b}\cdot\frac{a}{a+2b}=\frac{a}{a+b}$.

7.$-\frac{x-2}{x}$　【解析】原式$=\frac{(x-2)^2}{x(x+2)}\div\left(\frac{4}{x+2}-\frac{x+2}{x+2}\right)=\frac{(x-2)^2}{x(x+2)}\div\frac{2-x}{x+2}=\frac{(x-2)^2}{x(x+2)}\cdot\frac{x+2}{-(x-2)}=-\frac{x-2}{x}$.

8.1　【解析】原式$=\frac{x-2}{x-3}\cdot\frac{x-3}{x-2}=1$.

9.【解】原式$=\frac{x-2}{x+1}\cdot\frac{x^2+2x+1}{(x+2)(x-2)}=\frac{x-2}{x+1}\cdot\frac{(x+1)^2}{(x+2)(x-2)}=\frac{x+1}{x+2}$.

10.【解】原式$=\frac{x^2-6x+9}{x}\div\frac{x-3}{x}=\frac{(x-3)^2}{x}\cdot\frac{x}{x-3}=x-3$.

11.【解】原式$=\frac{a^2-ab}{b}\cdot\frac{b}{(a+b)(a-b)}$

$=\frac{a(a-b)}{b}\cdot\frac{b}{(a+b)(a-b)}$

$=\frac{a}{a+b}$.

当$a=\frac{1}{2}$,$b=1$时,原式$=\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}+1}=\frac{1}{3}$.

12.【解】原式$=\left[\frac{(x-1)^2}{x(x-1)}+\frac{(x-2)(x+2)}{x(x+2)}\right]\div\frac{1}{x}$

$=\left(\frac{x-1}{x}+\frac{x-2}{x}\right)\cdot x$

$=x-1+x-2$

$=2x-3$.

由于$x\neq0$且$x\neq1$且$x\neq-2$,所以$x=-1$,原式$=-2-3=-5$.

刷易错

13.【解】原式$=\frac{2(a-1)+a+2}{(a+1)(a-1)}\cdot\frac{a-1}{a}=\frac{3a}{a(a+1)}=\frac{3}{a+1}$.

易错警示　分式混合运算的顺序是先乘方,再乘除,最后算加减.如果有括号,要先算括号里面的.

刷提升

1.A　【解析】原式$=\frac{x^2-2x+1}{x^2}\div\frac{x^2-1}{x^2}=\frac{(x-1)^2}{x^2}\cdot\frac{x^2}{(x+1)(x-1)}=\frac{x-1}{x+1}$.

2.D　【解析】原式$=\frac{x-1}{x-2}\cdot\frac{(x-2)^2}{x-1}=x-2$.

3.C　【解析】原式$=\frac{1+x-(1-x)}{(1-x)(1+x)}\cdot\frac{x-1}{x}=\frac{2x}{(1+x)(1-x)}\cdot\frac{x-1}{x}=-\frac{2}{x+1}$.

4.A　【解析】原式$=\left(\frac{a^2}{a}-\frac{b^2}{a}\right)\cdot\frac{a}{a+b}=\frac{(a+b)(a-b)}{a}\cdot\frac{a}{a+b}=a-b$.∵$b-a=-6$,∴$a-b=6$,则原式$=6$.故选A.

5.$x+1$　【解析】原式$=\frac{x-2}{x-1}\cdot\frac{(x+1)(x-1)}{x-2}=x+1$.

6.12　【解析】$\left(x-y+\frac{4xy}{x-y}\right)\left(x+y-\frac{4xy}{x+y}\right)=\frac{(x-y)^2+4xy}{x-y}\cdot\frac{(x+y)^2-4xy}{x+y}=\frac{(x+y)^2}{x-y}\cdot\frac{(x-y)^2}{x+y}=(x+y)(x-y)$.当$x+y=4\sqrt{3}$,$x-y=\sqrt{3}$时,原式$=4\sqrt{3}\times\sqrt{3}=12$.

7.$\sqrt{3}$　【解析】原式$=\left(\frac{a^2+b^2}{2a}-\frac{2ab}{2a}\right)\cdot\frac{a}{a-b}=\frac{(a-b)^2}{2a}\cdot\frac{a}{a-b}=\frac{a-b}{2}$.当$a-b=2\sqrt{3}$时,原式$=\frac{2\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}$.

8.$a-b$　【解析】原式$=\frac{a}{a+b}\cdot\frac{(a+b)(a-b)}{a}=a-b$.

9.【解】$\frac{2x+y}{x^2-2xy+y^2}\cdot(x-y)=\frac{2x+y}{(x-y)^2}\cdot(x-y)=\frac{2x+y}{x-y}$.

由$x-3y=0$可得,$x=3y$,代入得原式$=\frac{7}{2}$.

10.【解】原式$=\left[\frac{2a(a+1)}{a^2-1}-\frac{a(a-1)}{(a-1)^2}\right]\cdot\frac{a-1}{2a}$

$=\left(\frac{2a}{a-1}-\frac{a}{a-1}\right)\cdot\frac{a-1}{2a}$

$=\frac{a}{a-1}\cdot\frac{a-1}{2a}$

$=\frac{1}{2}$.

11.【解】原式$=\left[\frac{x+2}{x(x-2)}-\frac{x-1}{(x-2)^2}\right]\cdot\frac{x}{x-4}$

$=\frac{(x+2)(x-2)-x(x-1)}{x(x-2)^2}\cdot\frac{x}{x-4}$

$=\frac{x-4}{x(x-2)^2}\cdot\frac{x}{x-4}$

$=\frac{1}{(x-2)^2}$.

12.【解】原式$=\frac{2(x-3)}{x-2}\div\left[\frac{5}{x-2}-(x+2)\right]$

$=\frac{2(x-3)}{x-2}\div\frac{5-(x+2)(x-2)}{x-2}$

$=\frac{2(x-3)}{x-2}\cdot\frac{x-2}{-(x+3)(x-3)}=-\frac{2}{x+3}$.

当$x=-2$时,原式$=-\frac{2}{-2+3}=-2$.

刷素养

13. (1) < < < < < < 都加上同一个正数 大 <

(2)【证明】∵ $a>b>0, m>0$, ∴ $b-a<0, a+m>0$,

∴ $\frac{b}{a}-\frac{b+m}{a+m}=\frac{b(a+m)-a(b+m)}{a(a+m)}=\frac{m(b-a)}{a(a+m)}<0$,

则 $\frac{b}{a}<\frac{b+m}{a+m}$.

(3)【解】m 克糖水里含有 n 克糖, 含糖率为 $\frac{n}{m}$, 若再加入 k 克糖, 含糖率为 $\frac{n+k}{m+k}$.

∵ $\frac{n}{m}<\frac{n+k}{m+k}$, ∴ 加入 k 克糖(仍不饱和)后含糖率变大, 则糖水更甜了.

15.2.3 整数指数幂

课时1 负整数指数幂

刷基础

1. D 【解析】$|-2\,018|^{-1}=2\,018^{-1}=\frac{1}{2\,018}$, 故选 D.

2. D 【解析】原式 $=\frac{1}{\frac{1}{2}}=2$.

3. C 【解析】$-4^0=-1$, A 项错; $(-3)^{-1}=\frac{1}{-3}=-\frac{1}{3}$, B 项错; $(-2^{m-n})^2=(-1)^2\cdot 2^{2(m-n)}=(2^2)^{m-n}=4^{m-n}$, C 项正确; $(a+b)^{-1}=\frac{1}{a+b}$, D 项错.

4. D 【解析】A 选项, $2a^{-3}\cdot a^4=2a$, 故此选项错误; B 选项, $(-3a^2)^3=-27a^6$, 故此选项错误; C 选项, $a^2\div a\cdot\frac{1}{a}=1$, 故此选项错误; D 选项, $a\cdot a^3+a^2\cdot a^2=2a^4$, 故此选项正确. 故选 D.

5. A 【解析】∵ $a=-2^2=-4, b=2^{-2}=\frac{1}{4}, c=\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}=4, d=\left(\frac{1}{2}\right)^0=1$, $-4<\frac{1}{4}<1<4$, ∴ $a<b<d<c$. 故选 A.

6. $-\frac{8}{3}$ 【解析】∵ $(3x+8)^{-2}=\frac{1}{(3x+8)^2}$, ∴ 当 $3x+8=0$, 即 $x=-\frac{8}{3}$ 时, $(3x+8)^{-2}$ 无意义.

7. A 【解析】原式 $=-2a^{-2}b^3\div\left(-\frac{2b^2}{3a^3}\right)^2=-2a^{-2}b^3\div\frac{4b^4}{9a^6}=-2a^{-2}b^3\cdot\frac{9a^6}{4b^4}=-\frac{9}{2}a^{-2+6}b^{3-4}=-\frac{9a^4}{2b}$.

8. 4 或 2 或 0 【解析】当 $a-4=0$, 即 $a=4$ 时, $(a-1)^{a-4}=1$;
当 $a-1=1$, 即 $a=2$ 时, $(a-1)^{a-4}=1$;
当 $a-1=-1$, 即 $a=0$ 时, $(a-1)^{a-4}=1$.
故 $a=4$ 或 2 或 0.

9. 2 【解析】原式 $=-1-1+4=2$.

10. $\frac{1}{2}$ 【解析】由题意, 得 $1-x=0, y+2=0$, 解得 $x=1, y=-2$, 则 $x^0+y^{-1}=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$.

11. $\frac{3}{2}$ $\frac{4x^4}{y^6}$ 【解析】$2^{-1}+3.14^0=\frac{1}{2}+1=\frac{3}{2}$; $\left(\frac{1}{2}x^{-2}y^3\right)^{-2}=\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}\cdot(x^{-2})^{-2}\cdot(y^3)^{-2}=4x^4y^{-6}=\frac{4x^4}{y^6}$.

12. 【解】$\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}+|-2|-(\pi-1)^0=2+2-1=3$.

13. 【解】(1) $(a^{-3}b^{-2})^{-2}\cdot(ab^3)^{-3}=a^6b^4\cdot a^{-3}b^{-9}=a^3b^{-5}=\frac{a^3}{b^5}$.

(2) $\left(-\frac{1}{2}\right)^{-2}-2^3\times 0.125+2\,018^0+|-1|=4-8\times 0.125+1+1=5$.

14. 【解】(1)原式 $=(-m^2)^2+(-8m^3)\cdot m^2+m^{-4}\div m^{-8}=m^4-8m^5+m^4=2m^4-8m^5$.

(2)原式 $=2+3\times 1-3+1=2+3-3+1=3$.

15. 【解】(1) $(-2m^2n^{-3})\cdot(3m^{-3}n^{-1})=(-2\times 3)\cdot(m^2\cdot m^{-3})\cdot(n^{-3}\cdot n^{-1})=-6m^{-1}n^{-4}=-\frac{6}{mn^4}$.

(2) $(-2m^2n^{-3})\div(3m^{-3}n^{-1})=(-2\div 3)\cdot(m^2\div m^{-3})\cdot(n^{-3}\div n^{-1})=-\frac{2}{3}m^5n^{-2}=-\frac{2m^5}{3n^2}$.

16. 【解】(1)原式 $=(2x^2y^2)^2\cdot(-3x^{-1}y^3)\cdot 6^{-1}x^2y^3\cdot(3^{-1}x^{-2}y^{-3})=-2\cdot 3^{-1}\cdot x^3y^7=-\frac{2x^3y^7}{3}$.

(2)原式 $=a^{-2}b^{-2}\cdot(-3a^{-3}b^3)\cdot 6^{-1}a^4b^5=-2^{-1}a^{-1}b^6=-\frac{b^6}{2a}$.

课时2 用科学记数法表示小于1的正数

刷基础

1. D 【解析】0.000 006 18 米, 用科学记数法表示为 6.18×10^{-6} 米. 故选 D.

2. A 【解析】$0.000\,15=1.5\times10^{-4}$, 故选 A.

3. A 【解析】将 0.000 002 5 用科学记数法表示为 2.5×10^{-6}.

4. B 【解析】28 nm $=28\times10^{-9}$ m $=2.8\times10^{-8}$ m. 故选 B.

5. B 【解析】$123\div10^9=1.23\times10^{-7}$.

6. 6.9×10^{-7} 【解析】$0.000\,000\,69=6.9\times10^{-7}$.

7. 5×10^{-7} 【解析】将 0.000 000 5 用科学记数法表示为 5×10^{-7}.

8. 1.05×10^{-5} 【解析】杨絮纤维的直径约为 0.000 010 5 m, 该数值用科学记数法表示为 1.05×10^{-5}.

9. 2.1×10^{-6} 【解析】0.000 002 1 用科学记数法表示为 2.1×10^{-6}.

10. 【解】(1) $(1\times10^3)^{-4}=10^{-12}$.

(2) $0.007\,12=7.12\times10^{-3}$.

11. C 【解析】$6.5\times10^{-6}=0.000\,006\,5$.

12. D 【解析】因为 $1\leqslant a<10$, 所以 $a=8.13$.

13. 【解】(1) $9\times10^{-5}\,g=0.000\,09\,g$.

(2) $45\div0.000\,09=500\,000=5\times10^5$.

故这块橡皮的质量是 1 cm^3 的氢气质量的 5×10^5 倍.

14. 【解】原式 $=[5.2\div(-4)]\times(10^{-9}\div10^{-3})=-1.3\times10^{-6}$.

专题 分式的化简求值

刷难关

1. A 【解析】原式 $=\frac{a^2}{a-b}-\frac{b^2}{a-b}=\frac{(a+b)(a-b)}{a-b}=a+b$. ∵ $a+b=\frac{1}{2}$, ∴ 原式 $=\frac{1}{2}$.

2.A 【解析】当 $a-3b=0$，即 $a=3b$ 时，原式 $=\frac{a^2-2ab+b^2}{a}\cdot\frac{a}{a^2-b^2}=\frac{(a-b)^2}{a}\cdot\frac{a}{(a+b)(a-b)}=\frac{a-b}{a+b}=\frac{3b-b}{3b+b}=\frac{1}{2}$. 故选 A.

3.6 【解析】原式 $=\frac{(a+b)(a-b)}{a}\cdot\frac{2a}{a-b}=2(a+b)$. $\because a+b=3$，$\therefore$ 原式 $=2(a+b)=6$.

4.$\frac{3}{2}$ 【解析】原式 $=\frac{a+b}{ab}=\frac{3}{2}$.

5.【解】原式 $=\left(\frac{a+2}{a+2}-\frac{4}{a+2}\right)\div\frac{(a-2)^2}{2(a-2)}=\frac{a-2}{a+2}\cdot\frac{2}{a-2}=\frac{2}{a+2}$，

当 $a=2^{-1}+(\pi-2\,018)^0=\frac{1}{2}+1=\frac{3}{2}$ 时，

原式 $=\frac{2}{\frac{3}{2}+2}=\frac{2}{\frac{7}{2}}=\frac{4}{7}$.

6.【解】原式 $=\frac{a(a-3)+6a}{a-3}\div\frac{a(a-3)+9a+9}{a-3}=\frac{a(a+3)}{a-3}\cdot\frac{a-3}{(a+3)^2}=\frac{a}{a+3}$.

当 $a=\sqrt{3}-3$ 时，原式 $=\frac{\sqrt{3}-3}{\sqrt{3}-3+3}=1-\sqrt{3}$.

7.A 【解析】$\because x^2+x-2=0$，$\therefore x^2+x=2$，$\therefore$ 原式 $=2-\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$.

8.C 【解析】原式 $=\frac{a^2-4}{a}\cdot\frac{a^2}{a-2}=\frac{(a+2)(a-2)}{a}\cdot\frac{a^2}{a-2}=a(a+2)$. $\because a^2+2a-1=0$，$\therefore a^2+2a=1$，$\therefore$ 原式 $=1$.

9.C 【解析】将 $x-\frac{1}{x}=3$ 的两边平方得 $\left(x-\frac{1}{x}\right)^2=x^2+\frac{1}{x^2}-2=9$，$\therefore x^2+\frac{1}{x^2}=11$，$\therefore$ 原式 $=\frac{1}{x^2+\frac{1}{x^2}}=\frac{1}{11}$.

10.C 【解析】原式 $=\frac{m^2+4m+4}{m}\cdot\frac{m^2}{m+2}=\frac{(m+2)^2}{m}\cdot\frac{m^2}{m+2}=m(m+2)$. $\because m^2+2m-2=0$，$\therefore m^2+2m=2$，$\therefore$ 原式 $=2$.

11.$-\frac{1}{2}$ 【解析】已知等式变形得 $a^2-a=2$，原式 $=\frac{a-1}{a(a-1)}-\frac{a}{a(a-1)}=-\frac{1}{a(a-1)}=-\frac{1}{a^2-a}=-\frac{1}{2}$.

12.C 【解析】由 $\frac{1}{4}m^2+\frac{1}{4}n^2=n-m-2$，得 $(m+2)^2+(n-2)^2=0$，则 $m=-2$，$n=2$，$\therefore\frac{1}{m}-\frac{1}{n}=-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}=-1$.

13.D 【解析】$\because(x-y)(2x-y)=0(xy\neq0)$，$\therefore x-y=0$ 或 $2x-y=0$，解得 $x=y$ 或 $2x=y$. 原式 $=\frac{(x+y)^2-2xy}{xy}=\frac{(x+y)^2}{xy}-2$. 当 $x=y$ 时，原式 $=\frac{4y^2}{y^2}-2=4-2=2$；当 $2x=y$ 时，原式 $=\frac{9x^2}{2x^2}-2=\frac{9}{2}-2=2\frac{1}{2}$. $\therefore$ 原式的值是 2 或 $2\frac{1}{2}$.

14.12 【解析】$\because\left(a+\frac{1}{a}\right)^2=4^2$，$\therefore a^2+\frac{1}{a^2}+2=16$，$\therefore a^2+\frac{1}{a^2}=14$，$\therefore\left(a-\frac{1}{a}\right)^2=a^2+\frac{1}{a^2}-2=14-2=12$.

15.【解】原式 $=1-\frac{(a+b)^2}{a(a-b)}\cdot\frac{a-b}{a+b}=1-\frac{a+b}{a}=-\frac{b}{a}$.

由 $(a+1)^2+\sqrt{b+1}=0$ 得 $a+1=0$，$b+1=0$，$\therefore a=-1$，$b=-1$.

当 $a=-1$，$b=-1$ 时，原式 $=-\frac{(-1)}{-1}=-1$.

15.3 分式方程

课时 1 分式方程及其解法

刷基础

1.B 【解析】①方程的分母中不含未知数 x，故①不是分式方程；②方程的分母中不含未知数 x，故②不是分式方程；③方程的分母中含表示未知数的字母 x，故③是分式方程；④方程的分母中含未知数 x，故④是分式方程.

2.B 【解析】去分母得 $1-3(x-2)=-4$，故选 B.

3.A 【解析】去分母，得 $1-(x-2)=x$，所以从第①步开始出现错误.

4.B 【解析】原方程可转化为 $y-\frac{4}{y}=3$，即 $y-\frac{4}{y}-3=0$.

5.$x=1$ 【解析】去分母得 $4x+2=9-3x$，解得 $x=1$，经检验，$x=1$ 是原分式方程的解.

6.【解】去分母得 $3+x^2-x=x^2$，

解得 $x=3$.

经检验，$x=3$ 是原分式方程的解.

7.【解】去分母得 $6x-3-4x-2=x+1$，

解得 $x=6$.

经检验，$x=6$ 是原分式方程的解.

8.D 【解析】去分母得 $2x+4+kx=3x-6$，当 $k=1$ 时，方程化简为 $4=-6$，无解，符合题意；由分式方程无解，得到 $x^2-4=0$，即 $x=\pm2$，把 $x=2$ 代入整式方程得 $4+4+2k=0$，解得 $k=-4$；把 $x=-2$ 代入整式方程得 $-4+4-2k=-12$，解得 $k=6$.

9.D 【解析】将 $x=3$ 代入方程 $\frac{kx}{x-1}-\frac{2k-1}{x}=2$，得 $\frac{3k}{2}-\frac{2k-1}{3}=2$，解得 $k=2$.

10.D 【解析】$\begin{cases}\frac{x-m}{2}>0①,\\ x-4<3(x-2)②,\end{cases}$ 解①得 $x>m$，解②得 $x>1$.

$\because$ 不等式组的解集是 $x>1$，$\therefore m\leqslant1$. 分式方程去分母，得 $1-x-m=3(2-x)$，去括号，得 $1-x-m=6-3x$，移项，得 $-x+3x=6-1+m$，合并同类项，得 $2x=5+m$，系数化为 1 得 $x=\frac{5+m}{2}$.

$\because$ 分式方程有非负整数解，$\therefore5+m\geqslant0$，且 $5+m$ 为 2 的倍数，$\therefore-5\leqslant m\leqslant1$，$\therefore m=-5,-3,-1,1$，$\therefore$ 符合条件的 m 的所有值的和是 -8.

11.【解】把 $x=2$ 代入方程 $\frac{4}{x}-\frac{m}{2x}=1$，得 $2-\frac{m}{4}=1$，解得 $m=4$，则 $(m-4)^2-2m+8=(4-4)^2-2\times4+8=0$.

刷易错

12.【解】去分母得 $2x=x-2+1$，

移项合并得 $x=-1$.

经检验，$x=-1$ 是原分式方程的解.

易错警示 去分母时不要漏乘不含分母的项，特别注意“检验”这一步骤不能省略.

刷提升

1.B 【解析】$-\frac{2}{x}=2$，$\frac{3x+9}{x}=1$ 是分式方程，故选 B.

2.D 【解析】A、B、C 选项中的方程分母中都含未知数，是分式方程；D 选项的方程分母中不含未知数，不是分式方程，故选 D.

3.D 【解析】∵ $x=2$ 是分式方程 $\frac{x+3}{3x-2}=\frac{2a-1}{a+1}$ 的解，∴ $\frac{2+3}{6-2}=\frac{2a-1}{a+1}$，解得 $a=3$，经检验，$a=3$ 是 $\frac{2+3}{6-2}=\frac{2a-1}{a+1}$ 的解，故选 D.

4.C 【解析】方程两边都乘 $(x-5)$ 得 $m=x-5$，解得 $x=m+5$. 当 $x-5\neq0$ 时，把 $x=m+5$ 代入得 $m+5-5\neq0$，即 $m\neq0$，此时方程有解，故选项 A 错误；当 $x>0$ 且 $x\neq5$ 时，即 $m+5>0$，解得 $m>-5$，则当 $m>-5$ 且 $m\neq0$ 时，方程的解为正数，故选项 B 错误；当 $x<0$，即 $m+5<0$ 时，解得 $m<-5$，则 $m<-5$ 时，方程的解为负数，故选项 C 正确；显然选项 D 错误. 故选 C.

5.D 【解析】解方程 $\frac{3x+a}{2x-3}=1$，得 $x=-a-3$. ∵ 方程 $\frac{3x+a}{2x-3}=1$ 的解是非负数，∴ $-a-3\geqslant0$ 且 $-a-3\neq\frac{3}{2}$，解得 $a\leqslant-3$ 且 $a\neq-\frac{9}{2}$，故选 D.

6.A 【解析】方程两边同时乘 $x(x-2)$ 得 $(x+1)(x-2)+x=x(x-2)$，去括号得 $x^2-x-2+x=x^2-2x$，解得 $x=1$，经检验，$x=1$ 是原分式方程的解，故选 A.

7.3 或 1 【解析】方程去分母得 $3(x-3)+2-kx=-1$，整理得 $(3-k)x=6$. 当整式方程无解时，$3-k=0$，即 $k=3$；当分式方程无解时，$x=3$，此时 $3-k=2$，解得 $k=1$. 所以当 $k=3$ 或 1 时，原分式方程无解.

8.$b\leqslant3$ 且 $b\neq2$ 【解析】方程去分母得 $2x-b=3x-3$，∴ $x=3-b$. ∵ $x\geqslant0$，∴ $3-b\geqslant0$，解得 $b\leqslant3$. 又∵ $x-1\neq0$，∴ $x\neq1$，即 $3-b\neq1$，解得 $b\neq2$，则 b 的取值范围是 $b\leqslant3$ 且 $b\neq2$.

9.-9 【解析】方程去分母得 $3x-1=4x+8$，解得 $x=-9$，经检验，$x=-9$ 是原分式方程的解.

10.3 【解析】方程去分母得 $x-5(x-3)=a$，由分式方程无解，得 $x-3=0$，即 $x=3$，把 $x=3$ 代入整式方程得 $a=3$.

11.【解】(1)去分母得 $2x+2=x+3$，

解得 $x=1$.

经检验，$x=1$ 是增根，此分式方程无解.

(2)去分母得 $7x-7+3x+3=x^3-x+7x-x^3$，

移项，合并同类项得 $4x=4$，

解得 $x=1$.

经检验，$x=1$ 是增根，此分式方程无解.

刷素养

12.(1)$\frac{16a+b}{3}$ 【解析】$T(4,-1)=\frac{a\times4^2+b\times(-1)^2}{4-1}=\frac{16a+b}{3}$.

(2)【解】①∵ $T(-2,0)=-2$，且 $T(5,-1)=6$，

$$\therefore\begin{cases}\frac{4a}{-2}=-2,\\ \frac{25a+b}{4}=6,\end{cases}\text{解得}\begin{cases}a=1,\\ b=-1.\end{cases}$$

②解法一：

∵ $a=1$，$b=-1$，且 $x+y\neq0$，

∴ $T(x,y)=\frac{x^2-y^2}{x+y}=\frac{(x+y)(x-y)}{x+y}=x-y$，

∴ $T(3m-10,m)=3m-10-m=2m-10$，

$T(m,3m-10)=m-3m+10=-2m+10$.

∵ $T(3m-10,m)=T(m,3m-10)$，

∴ $2m-10=-2m+10$，

解得 $m=5$.

解法二：由解法一可知 $T(x,y)=x-y$.

当 $T(x,y)=T(y,x)$ 时，$x-y=y-x$，∴ $x=y$.

∵ $T(3m-10,m)=T(m,3m-10)$，∴ $3m-10=m$，

∴ $m=5$.

课时 2　分式方程与实际问题的综合

刷基础

1.C 【解析】因为计划每天绿化 $x\ m^2$，所以实际每天绿化的面积为 $(1+20\%)x\ m^2$，则根据题意可列方程为 $\frac{2\,400}{x}-5=\frac{2\,400}{(1+20\%)x}$. 故选 C.

2.$\frac{160}{x}=\frac{200}{x+5}$ 【解析】甲工程队每天铺设 x 米，则乙工程队每天铺设 $(x+5)$ 米，由题意得 $\frac{160}{x}=\frac{200}{x+5}$.

3.【解】(1)设 B 工程公司单独建设完成此项工程需要 x 天.

根据题意得 $45\times\frac{1}{180}+54\times\left(\frac{1}{180}+\frac{1}{x}\right)=1$，解得 $x=120$，

经检验，$x=120$ 是原分式方程的解，且符合题意，

所以 B 工程公司单独建设完成此项工程需要 120 天.

(2)根据题意得 $m\times\frac{1}{180}+n\times\frac{1}{120}=1$，

整理得 $n=120-\frac{2}{3}m$.

因为 $m<46$，$n<92$，所以 $120-\frac{2}{3}m<92$，

解得 $42<m<46$.

因为 m 为正整数，所以 $m=43$ 或 44 或 45.

又因为 $120-\frac{2}{3}m$ 为正整数，所以 $m=45$，$n=90$.

答：A，B 两个工程公司各施工建设了 45 天和 90 天.

4.B 【解析】根据题意得快车的速度是 $2x$ km/h，快车到达目的地所用的时间为 $\frac{120}{2x}$，慢车所用的时间为 $\frac{120}{x}$，则所列方程为 $\frac{120}{x}-\frac{120}{2x}=1$.

5.【解】设 B 车行驶的时间为 t h，则 A 车行驶的时间为 $1.4t$ h.

根据题意得 $\frac{700}{t}-\frac{700}{1.4t}=80$，

解得 $t=2.5$.

经检验，$t=2.5$ 是原分式方程的解，且符合题意，所以 $1.4t=3.5$.

答：A 车行驶的时间为 3.5 小时，B 车行驶的时间为 2.5 小时.

6.【解】设甲种玩具的进价为 x 元/件，则乙种玩具的进价为 $(40-x)$ 元/件.

列方程得 $\frac{90}{x}=\frac{150}{40-x}$. 解得 $x=15$.

经检验，$x=15$ 是原分式方程的解，

则 $40-x=25$.

答：甲、乙两种玩具的进价分别是 15 元/件、25 元/件.

(2)设购进甲种玩具 y 件，则购进乙种玩具 $(48-y)$ 件.

根据题意得 $\begin{cases}y<48-y,\\ 15y+25(48-y)\leqslant1\,000.\end{cases}$

解得 $20\leqslant y<24$.

∵ y 是整数，且甲种玩具的件数少于乙种玩具的件数，

∴ y 取 20，21，22，23.

答：共有 4 种进货方案.

刷提升

1. C 【解析】由题意可知，小进跑 800 米用的时间为 $\frac{800}{1.25x}$ 秒，小俊跑 800 米用的时间为 $\frac{800}{x}$ 秒. ∵ 小进比小俊少用了 40 秒，∴ 列方程为 $\frac{800}{x}-\frac{800}{1.25x}=40$. 故选 C.

2. A 【解析】公共汽车的平均速度为 x 千米/时，则出租车的平均速度为 $(x+20)$ 千米/时，根据回来时路上所花时间比去时节省了 $\frac{1}{4}$，得出方程为 $\frac{40}{x+20}=\frac{3}{4}\times\frac{40}{x}$.

3. $\frac{7\,200}{x-720}-\frac{7\,200(1+20\%)}{x}=4$ 【解析】实际每天生产 x 顶帐篷，根据题意得 $\frac{7\,200}{x-720}-\frac{7\,200(1+20\%)}{x}=4$.

4. 120 【解析】设黄师傅单独整理这批实验器材需要 x 分钟完成，则黄师傅的工作效率为 $\frac{1}{x}$. 由题意，得 $30\left(\frac{1}{60}+\frac{1}{x}\right)+30\times\frac{1}{x}=1$，解得 $x=120$. 经检验，$x=120$ 是原分式方程的解.

所以黄师傅单独整理这批实验器材需要 120 分钟完成.

5. $\frac{550}{x}-\frac{550}{(1+10\%)x}=5$ 【解析】原计划每天铺设 x 米，实际施工时每天铺设 $(1+10\%)x$ 米，由题意得 $\frac{550}{x}-\frac{550}{(1+10\%)x}=5$.

6. 【解】(1) 设大巴车的平均速度为 x 千米/时，则小车的平均速度为 $1.5x$ 千米/时. 根据题意，得 $\frac{90}{x}=\frac{90}{1.5x}+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}$，

解得 $x=40$.

经检验，$x=40$ 是原分式方程的解，

则 $1.5x=60$.

答：大巴车的平均速度为 40 千米/时，小车的平均速度为 60 千米/时.

(2) 设苏老师追上大巴车的地点距离基地还有 y 千米.

根据题意，得 $\frac{1}{2}+\frac{90-y}{60}=\frac{90-y}{40}$，解得 $y=30$.

答：苏老师追上大巴车的地点距离基地还有 30 千米.

7. 【解】(1) 设 A 种设备每台的成本是 x 万元，则 B 种设备每台的成本是 $1.5x$ 万元.

根据题意得 $\frac{16}{x}+\frac{36}{1.5x}=10$. 解得 $x=4$.

经检验，$x=4$ 是原分式方程的解，

则 $1.5x=6$.

答：A 种设备每台的成本是 4 万元，B 种设备每台的成本是 6 万元.

(2) 设 A 种设备生产 a 台，则 B 种设备生产 $(60-a)$ 台.

根据题意得 $\begin{cases}(6-4)a+(10-6)(60-a)\geqslant 126,\\ a\geqslant 53.\end{cases}$

解得 $53\leqslant a\leqslant 57$.

∵ a 为整数，∴ $a=53,54,55,56,57$.

答：该公司有 5 种生产方案.

(3) 设水路运输 m 次，则航空运输 $(4-m)$ 次，该公司赠送 $4m$ 台 A 种设备，$(8-2m)$ 台 B 种设备.

根据题意得 $6(a-4m)+10[60-a-(8-2m)]-4a-6(60-a)=44$，

整理得 $a+2m-58=0$，

解得 $m=29-\frac{1}{2}a$.

∵ $53\leqslant a\leqslant 57$，$0<m<4$，且 a，m 均为正整数，∴ $m=1$ 或 2.

当 $m=1$ 时，$a=56$，

∴ $60-a=4$，$8-2m=6$.

∵ $4<6$，∴ $m=1$ 不合适，舍去；

当 $m=2$ 时，$a=54$，

∴ $60-a=6$，$8-2m=4$.

∵ $6>4$，∴ $m=2$ 符合题意.

∴ 水路运输的次数为 2 次.

全章综合训练

刷章测

1. B 【解析】∵ 分式 $\frac{x^2-1}{x+1}$ 的值为 0，∴ $\begin{cases}x^2-1=0,\\ x+1\neq 0,\end{cases}$ 解得 $x=1$. 故选 B.

2. D 【解析】A 选项，$2a$ 与 $3b$ 不是同类项，不能合并，故本选项错误；B 选项，原式 $=a^2b^2$，故本选项错误；C 选项，原式 $=a^6$，故本选项错误；D 选项，原式 $=2a^3$，故本选项正确. 故选 D.

3. D 【解析】将 x，y 的值均扩大为原来的 3 倍，A 选项，$\frac{2+3x}{3x-3y}\neq\frac{2+x}{x-y}$，不符合题意；B 选项，$\frac{6y}{9x^2}\neq\frac{2y}{x^2}$，不符合题意；C 选项，$\frac{54y^3}{27x^2}\neq\frac{2y^3}{3x^2}$，不符合题意；D 选项，$\frac{18y^2}{9(x-y)^2}=\frac{2y^2}{(x-y)^2}$，符合题意. 故选 D.

4. D 【解析】原式 $=2-1+8=9$.

5. D 【解析】$\frac{x}{x-2}-\frac{x}{x-2}\div\frac{x-2}{x}=\frac{x}{x-2}-\frac{x}{x-2}\cdot\frac{x}{x-2}=\frac{x^2-2x-x^2}{(x-2)^2}=\frac{-2x}{(x-2)^2}$，故选 D.

6. D 【解析】根据题意可知顺流速度为 $(x+4)$ 千米/时，逆流速度为 $(x-4)$ 千米/时. 根据共用去 9 小时，可列方程为 $\frac{48}{x+4}+\frac{48}{x-4}=9$，故选 D.

7. D 【解析】分式方程整理得 $\frac{ax}{x-2}=\frac{x+2}{x-2}$，去分母得 $ax=x+2$，即 $(a-1)x=2$. 当 $a-1\neq 0$，即 $a\neq 1$ 时，解得 $x=\frac{2}{a-1}$. 由分式方程有解，得 $\frac{2}{a-1}\neq 2$，即 $a\neq 2$，则 a 的取值为 $a\neq 1$ 且 $a\neq 2$.

8. 1×10^{-8} 【解析】10 nm 用科学记数法可表示为 1×10^{-8} m.

9. $\frac{60}{x}-\frac{60}{2x}=\frac{3}{2}$ 【解析】骑自行车的速度为 x 千米/时，则骑摩托车的速度为 $2x$ 千米/时，根据骑摩托车行驶完全程可比骑自行车少用 $\frac{3}{2}$ 小时，得 $\frac{60}{x}-\frac{60}{2x}=\frac{3}{2}$.

10. 5 【解析】由 $x^2+x-5=0$ 得 $x^2+x=5$，则原式 $=\frac{x+2}{x}\cdot\frac{x^2(x+1)}{x+2}=x^2+x=5$.

11. 【解】$\frac{a}{a-2}\div\left(\frac{a}{a-2}-\frac{4a}{a^2-4}\right)$

$=\frac{a}{a-2}\div\frac{a(a+2)-4a}{(a+2)(a-2)}$

$=\frac{a}{a-2}\div\frac{a(a-2)}{(a+2)(a-2)}$

$=\frac{a}{a-2}\cdot\frac{a+2}{a}$

$=\frac{a+2}{a-2}$.

当 $a=3$ 时,原式 $=\frac{3+2}{3-2}=5$.

12. 【解】(1)去分母,得 $1=x-1-3x+6$,

移项合并,得 $2x=4$,

解得 $x=2$.

经检验,$x=2$ 是增根,所以原分式方程无解.

(2)去分母,得 $x^2-3x+3=x^2-x$,

移项合并,得 $2x=3$,解得 $x=\frac{3}{2}$.

经检验,$x=\frac{3}{2}$ 是原分式方程的解.

13. 【解】∵ 原式 $=\frac{a(a+1)}{(a+1)(a-1)}-\frac{a+1}{(a+1)^2}\cdot\frac{a+1}{a-1}=\frac{a}{a-1}-\frac{1}{a-1}=1$.

∴ 算式的值与 a 无关,

∴ "小马虎"不小心把 $a=2\,017$ 错抄成 $a=2\,007$,但他的计算结果却是正确的.

14. 【解】(1)设二号施工队单独施工完成整个工程需要 x 天.

根据题意得 $\frac{40-14}{40}+\frac{40-5-14}{x}=1$,

解得 $x=60$,

经检验,$x=60$ 是原分式方程的解.

答:若二号施工队单独施工,完成整个工程需要 60 天.

(2)根据题意得 $1\div\left(\frac{1}{40}+\frac{1}{60}\right)=24$(天).

答:若此项工程由一号、二号施工队同时进场施工,完成整个工程需要 24 天.

15. 【解】(1)设 B 种原料每千克的价格为 x 元,则 A 种原料每千克的价格为 $(x+10)$ 元.

根据题意得 $1.2(x+10)+x\leqslant 34$,

解得 $x\leqslant 10$.

答:购入 B 种原料每千克的价格不超过 10 元.

(2)设这种产品的批发价为 a 元/件,则零售价为 $(a+30)$ 元/件.

根据题意得 $\frac{10\,000}{a}=\frac{16\,000}{a+30}$,

解得 $a=50$.

经检验,$a=50$ 是原分式方程的解,且符合题意.

答:这种产品的批发价为 50 元/件.

期末综合测试

刷速度

1. B 【解析】选项 A 中,12∶12 不是轴对称图形,故本选项错误;选项 B 中,10∶38 是轴对称图形,对称轴为中间水平方向的直线,故本选项正确;选项 C 中,15∶51 不是轴对称图形,故本选项错误;选项 D 中,22∶22 不是轴对称图形,故本选项错误.

2. C 【解析】选项 A 中,x 与 x^3 不是同类项,不能合并,故本选项错误;选项 B 中,$(x^{-4})^2=x^{-8}$,故本选项错误;选项 C 中,$x^{-2}\cdot x^5=x^3$,故本选项正确;选项 D 中,$x^8\div x^2=x^6\ (x\neq 0)$,故本选项错误.

3. D 【解析】选项 D 中,$a^2-6a+9=(a-3)^2$. A、B、C 选项不能进行因式分解.

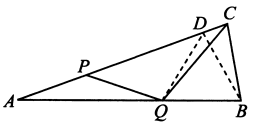
4. C 【解析】选项 A 中,设 a,b,c 分别为 $x,2x,3x,x\neq 0$,则有 $a+b=c$,不符合三角形的三边关系;选项 B 中,当 $a+b=4$ 时,$c=5$,$4<5$,不符合三角形的三边关系;选项 C 中,当 $a=3,b=4,c=5$ 时,$3+4>5$,符合三角形的三边关系;选项 D 中,设 a,b,c 分别为 $x,x,2x,x\neq 0$,则有 $a+b=c$,不符合三角形的三边关系. 故选 C.

5. D 【解析】选项 A 中,$\frac{2x^2}{3y^2}=\frac{6x^2}{9y^2}$,错误;选项 B 中,$\frac{2c}{-a+3b}=\frac{2c}{3b-a}$,错误;选项 C 中,$\frac{x-y}{x+y}=\frac{x-y}{y+x}$,错误;选项 D 中,$\frac{x}{y}=\frac{x\cdot y}{y\cdot y}=\frac{xy}{y^2}$,正确. 故选 D.

6. D 【解析】长方形木板锯掉一个角后可能是三角形或四边形或五边形,因而剩下的多边形木板的内角和是 180°或 360°或 540°.

7. D 【解析】因为 DE 垂直平分 AB,所以 $AE=BE=6$ cm. 因为在 $\mathrm{Rt}\triangle ACE$ 中,$\angle AEC=30°$,所以 $AC=\frac{1}{2}AE=\frac{1}{2}\times 6=3$(cm),故选 D.

8. A 【解析】如图,在 AC 上取点 D,使 $QD=PQ$,连接 QD,BD. 设 $\angle A=x$,则 $\angle QDP=\angle QPD=2x$,$\angle BQD=3x$. ∵ $DQ=QB$,∴ $\angle QBD=90°-1.5x$,$\angle BDC=90°-0.5x$. 又∵ $AB=AC$,∴ $\angle ABC=\angle ACB=90°-0.5x$,∴ $BD=BC$,∴ $BD=BQ=QD$,∴ $\triangle BDQ$ 为等边三角形,∴ $\angle QBD=90°-1.5x=60°$,∴ $x=20°$,∴ $\angle ABC=80°$,∴ $\angle QCB=50°$,∴ $\angle PCQ=80°-50°=30°$.



9. A 【解析】原计划每天植树 x 万棵,需要 $\frac{30}{x}$ 天完成,实际每天植树 $(1+20\%)x$ 万棵,需要 $\frac{30}{(1+20\%)x}$ 天完成. ∵ 提前 5 天完成任务,∴ 可列方程为 $\frac{30}{x}-\frac{30}{(1+20\%)x}=5$.

10. D 【解析】∵ $\triangle ABC$ 是等边三角形,$PR\perp AB$,$PS\perp AC$,且 $PR=PS$,∴ 点 P 在 $\angle BAC$ 的平分线上,故①正确;由①可知,$PB=PC$. ∵ $PS=PR$,∴ $\mathrm{Rt}\triangle BPR\cong\mathrm{Rt}\triangle CPS$(HL),∴ $CS=BR$,∴ $AS=AR$,故②正确;∵ $AQ=PQ$,∴ $\angle PQC=2\angle PAC=60°=\angle BAC$,∴ $QP/\!/AR$,故③正确;由③得,$\triangle PQC$ 是等边三角形,∴ $\triangle PQS\cong\triangle PCS$,又由②可知,$\triangle BRP\cong\triangle QSP$,故④正确,∴ ①②③④都正确.

11. 3.5×10^{-6} 【解析】$0.000\,003\,5=3.5\times10^{-6}$.

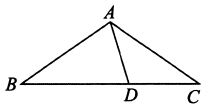
12. $\frac{1}{4}$ 【解析】∵ $a^2-b^2=(a+b)(a-b)=-\frac{1}{16}$,$a+b=-\frac{1}{4}$,∴ $a-b=\frac{1}{4}$.

13. -2 或 2 或 0 【解析】由题意可得 $\begin{cases}a-1\neq 0,\\ a+2=0\end{cases}$ 或 $a-1=1$,解得 $a=-2$ 或 $a=2$;当 $a=0$ 时,$(-1)^2=1$. 故 a 可取值 $-2,2,0$.

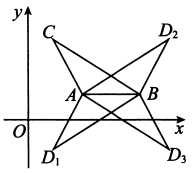
14. 3 【解析】方程去分母得 $ax-1=3x$,整理得 $(a-3)x=1$. 当 $a-3=0$,即 $a=3$ 时,方程无解.

15. 108° 【解析】如图,∵ $AB=AC$,∴ $\angle B=\angle C$. 设 $\angle B=\angle C=x$. ∵ $AB=BD$,$AD=DC$,∴ $\angle BAD=\angle BDA$,$\angle DAC=\angle C$,∴ $\angle ADB=2\angle C$,∴ $\angle BAC=3x$. ∵ $\angle BAC+\angle B+\angle C=180°$,∴ $5x=180°$,

$\therefore x=36°$,$\therefore \angle BAC=3x=108°$.



16. (1,-1)或(5,3)或(5,-1)　【解析】如图所示,共有3个符合条件的D点.$\because \triangle ABD$与$\triangle ABC$全等,$\therefore AB=AB$,$BC=AD$或$AC=AD$,$\because A(2,1)$,$B(4,1)$,$C(1,3)$.$\therefore D_1$的坐标是$(1,-1)$,D_2的坐标是$(5,3)$,D_3的坐标是$(5,-1)$.



17.【解】原式$=3a(b^2-2ab+a^2)=3a(b-a)^2$.

18.【解】原式$=\left(2x^2+\frac{1}{2}y^2\right)\left(2x^2-\frac{1}{2}y^2\right)=4x^4-\frac{1}{4}y^4$.

把$x=-3$,$y=4$代入得,原式$=260$.

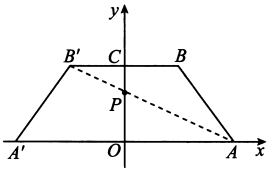
19.【解】方程两边同乘$(x-3)$,得$2-x-1=3(x-3)$,

整理得$2-x-1=3x-9$,

解得$x=2.5$.

经检验,$x=2.5$是原分式方程的解.

20.【解】(1)四边形$OABC$关于y轴对称的图形如图所示,点B的对应点的坐标为$(-2,3)$.



(2)使$PA+PB$的值最小的点P的坐标为$(0,2)$,如图所示.

21.【解】点E是线段BC的中点.理由:

$\because BM/\!/NC$,$\therefore \angle M=\angle CNE$.

在$\triangle BME$和$\triangle CNE$中,

$$\because \begin{cases}\angle M=\angle CNE,\\ \angle BEM=\angle CEN,\\ BM=CN,\end{cases}$$

$\therefore \triangle BME\cong\triangle CNE(\text{AAS})$,$\therefore BE=CE$,即$E$为$BC$中点.

22.【证明】$\because \angle BAC=90°$,$BD\perp DE$,$CE\perp DE$,

$\therefore \angle DAB+\angle DBA=\angle DAB+\angle EAC$,$\therefore \angle DBA=\angle EAC$.

在$\triangle ABD$与$\triangle CAE$中,

$$\because \begin{cases}\angle DBA=\angle EAC,\\ \angle BDA=\angle AEC,\\ AB=AC,\end{cases}$$

$\therefore \triangle ABD\cong\triangle CAE(\text{AAS})$.

$\therefore BD=AE$,$AD=CE$,$\therefore DE=AE+AD=BD+CE$.

23.【解】设A型机器人每小时搬运x袋大米,则B型机器人每小时搬运$(x-20)$袋大米.

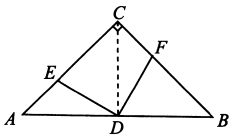
依题意得$\frac{700}{x}=\frac{500}{x-20}$,

解得$x=70$.

经检验,$x=70$是原分式方程的解,所以$x-20=50$.

答:A型机器人每小时搬运70袋大米,B型机器人每小时搬运50袋大米.

24.【证明】如图,连接CD.



$\because AC=BC$,$\angle ACB=90°$,

$\therefore \triangle ABC$是等腰直角三角形,$\angle A=\angle B=45°$.

$\because D$为AB的中点,$\therefore CD$平分$\angle ACB$,$CD\perp AB$.

$\therefore \angle DCF=45°$,$\therefore AD=BD=CD$.

在$\triangle ADE$和$\triangle CDF$中,$\because \begin{cases}AE=CF,\\ \angle A=\angle FCD,\\ AD=CD,\end{cases}$

$\therefore \triangle ADE\cong\triangle CDF(\text{SAS})$.$\therefore DE=DF$,$\angle ADE=\angle CDF$.

$\because \angle ADE+\angle EDC=90°$,

$\therefore \angle CDF+\angle EDC=\angle EDF=90°$,即$DE\perp DF$.

25.【解】$\because$点M是点P关于OA的对称点,$\therefore EP=EM$.

$\because$点N是点P关于OB的对称点,$\therefore PF=FN$.

$\therefore MN=ME+EF+FN=PE+EF+PF=\triangle PEF$的周长.

$\because \triangle PEF$的周长为20,$\therefore MN=20$.

26.【解】$\because a^2+b^2+c^2-ab-bc-ac=0$,

$\therefore 2a^2+2b^2+2c^2-2ab-2bc-2ac=0$.

$\therefore a^2+b^2-2ab+b^2+c^2-2bc+a^2+c^2-2ac=0$.

$\therefore (a-b)^2+(b-c)^2+(a-c)^2=0$,$\therefore a-b=0$,$b-c=0$,$a-c=0$,

$\therefore a=b=c$,$\therefore \triangle ABC$为等边三角形.

27.(1)=

(2)【解】=

$\because \triangle ABC$是等边三角形,$\therefore \angle ABC=\angle ACB=\angle A=60°$,$AB=AC=BC$.

$\therefore \angle AEF=\angle ABC=60°$,$\angle AFE=\angle ACB=60°$,

即$\angle AEF=\angle AFE=\angle A=60°$.

$\therefore \triangle AEF$是等边三角形,$\therefore AE=EF=AF$.

$\because \angle ABC=\angle ACB=\angle AFE=60°$,

$\therefore \angle DBE=\angle EFC=120°$,

$\angle D+\angle BED=\angle FCE+\angle ECD=60°$.

$\because DE=EC$,$\therefore \angle D=\angle ECD$,$\therefore \angle BED=\angle FCE$.

在$\triangle DEB$和$\triangle ECF$中,

$$\because \begin{cases}\angle BED=\angle FCE,\\ \angle DBE=\angle EFC,\\ DE=EC,\end{cases}$$

$\therefore \triangle DEB\cong\triangle ECF(\text{AAS})$.$\therefore DB=EF=AE$,即$AE=DB$.

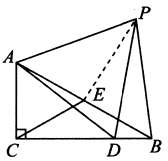
28.(1)$BE=CE$　【解析】$\because \angle ACB=90°$,$\angle B=30°$,$\therefore \angle A=60°$.

$\because AC=\frac{1}{2}AB=AE=EB$,

$\therefore \triangle ACE$是等边三角形,$\therefore EC=AE=EB$.

【解】(2)$PD=PB$.证明:

如图,连接PE.



$\because \triangle ACE$,$\triangle ADP$都是等边三角形,

$\therefore AC=AE$,$AD=AP$,$\angle CAE=\angle DAP=60°$,

$\therefore \angle CAD=\angle EAP$,$\therefore \triangle CAD\cong\triangle EAP$,

$\therefore \angle ACD=\angle AEP=90°$,$\therefore PE\perp AB$.

$\because EA=EB$,$\therefore PA=PB$.

$\because DP=AP$,$\therefore PD=PB$.

(3)当点D为边CB延长线上任意一点时,同法可证:$PD=PB$.

提供各种书籍的 PDF 电子版代找服务，如果您找不到您想要的书的 PDF 电子版，我们可以帮您找到，如有需要，请联系微信、QQ。





PDF 代找说明：

本公司可以帮助您找到您想要的 PDF 电子书。质量都很清晰，只要您提供给我们相关信息，一般都能找到，如果您有需求，请联系我们。

现已经帮助了很多人找到了大家需要的 PDF，其实网上有很多 PDF，大家如果在网上找不到的话，可以联系我们，大部分我们都可以找到。因 PDF 电子书都有版权，请不要随意传播，如果您有经济购买能力，请尽量购买正版。

声明：

本公司只提供代找服务，因寻找 PDF 电子书有一定难度，仅收取代找费用。如因 PDF 产生的版权纠纷，与本公司无关，我们仅仅只是帮助您寻找到您要的 PDF 而已。