第十四届“中环杯”小学生思维能力训练活动
五年级选拔赛

一、填空题

1. 计算： $\left(1+\frac{1}{2}\right)\times\left(1-\frac{1}{2}\right)\times\left(1+\frac{1}{3}\right)\times\left(1-\frac{1}{3}\right)\times\cdots\times\left(1+\frac{1}{10}\right)\times\left(1-\frac{1}{10}\right)=$_____。

【分析】原式$=\frac{3}{2}\times\frac{4}{3}\times\cdots\times\frac{11}{10}\times\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\times\cdots\times\frac{9}{10}=\frac{11}{2}\times\frac{1}{10}=\frac{11}{20}$

2. 最接近 2013 的质数是_____。

【分析】2011

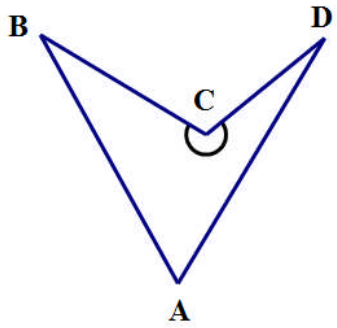
3. 黑箱中有 60 块大小、形状都相同的木块，每 15 块涂上相同的颜色。一次至少取出_____块才能保证其中至少有 2 块木块颜色相同。

【分析】共$60\div15=4$种颜色，需要取出$4+1=5$块

4. 一共有 52 个学生参加游园活动，其中参观植物馆的有 12 人，参观动物馆的有 26 人，参观科技馆的有 23 人，既参观植物馆又参观动物馆的有 5 人，既参观植物馆又参观科技馆的有 2 人，既参观动物馆又参观科技馆的有 4 人，三个馆都参观的有 1 人，则有_____人这三个馆都没有参观。

【分析】共有$12+26+23-5-2-4+1=51$人参观了至少一个馆，所以有 1 个人三个馆都没参观。

5. 如图， $\angle B=30°,\angle A=60°,\angle D=20°$**，则** $\angle BCD$ **（图中有圆弧部分的那个角）的度数为_____°。**



【分析】四边形内角和为 360° ，所以优角$\angle BCD=360°-30°-20°-60°=250°$

6. 一次考试中，小明需要计算 $37+31\times a$ **的值，结果他计算成了** $37+31+a$**。幸运的是，他仍然得到了正确的结果。则** $a=$_____**。**

【分析】由题意$37+31\times a=37+31+a\Rightarrow a=\frac{31}{30}$

7. 某次射箭比赛，满分是 10 份，初赛阶段淘汰所有参赛者的 50%。已知进入复赛的选手平均分比全体选手的平均分高 2 分，且进入复赛选手的平均分是 8 分。则被淘汰选手的平均分是_____。

【分析】设共有$2n$人，则进入复赛的选手为n人、被淘汰的选手也为n人。全体选手平均分为 6 分，总分为$6\times2n=12n$分，进入复赛选手总分为$8\times n=8n$分，所以被淘汰的选手总分为$12n-8n=4n$分，平均分为$4n\div n=4$分

8. 有若干本书和若干本练习本。如果按每 1 本书配 2 本练习本分给一些学生，那么练习本分完时还剩 2 本书；如果按每 3 本书配 5 本练习本分给另一些学生，那么书分完时还剩 1

本练习本。那么，书有_____本，练习本有_____本。

【分析】不妨设有 $x+2$ 本书，则练习本有 $2x$ 本，由题意 $\frac{x+2}{3}=\frac{2x-1}{5}\Rightarrow x=13$，所以书有 15 本，练习本有 26 本。

9. 在 51 个连续奇数$1,3,5,\cdots,101$**中选取** k **个数，使得它们的和为 2013，那么** k **的最大值是_____。**

【分析】要使 k 最大，则所选的数最好小

$1+3+\cdots+89=45^2=2025>2013$，所以所选的数必须少于 45 个

而 44 个奇数的和为偶数

所以 k 的最大值理论上为 43

下面开始构造 $1+3+\cdots+83=42^2=1764$，$2013-1764=249$，$249-101=148$，将 83 换成 99，和增大 16，81 换成 97，和增大 16，$148\div16=9\cdots4$，所以要替换 9 个数，再替换 1 个数使其大 4 即可

所以，可以选 1 至 63，69，以及 83 至 101 这 43 个数。

综上，k 最大为 43。

10. 小明和小强玩一个数字游戏，小明选择了一个数字 x **（0~9 之间），然后说：“我正在考虑一个三位数（百位允许为 0），这个三位数的百位为** x**，十位为 3，并且能被 11 整除，请你找出这个三位数的个位数。”小强非常开心，因为他知道能被 11 整除的数的规律。但是他思考后发现这样的三位数不存在。则** $x=$_____**。**

【分析】不妨设这个三位数为 $\overline{x3y}$，若这个三位数能被 11 整除，则有 $11\mid x+y-3$

由题意，无论 y 为 0 至 9 这十个数字中的哪一个时，这个三位数都不能被 11 整除

所以应有 $1\le x+y-3\le10$，即当 y 取 0 至 9 时，$x+y-3$ 依次对应为 1 至 10，

所以 $x=4$。

11. 我们将具有如下特性的四位数称为“中环数”：（1）四个数字各不相同；（2）千位数字既不是这四个数字中最大的，也不是这四个数字中最小的；（3）个位数字不是这四个数字中最小的。这样的“中环数”有_____个。

【分析】从 0 至 9 中任选 4 个不同的数字有 $C_{10}^4=210$ 种选法

不妨设取出的四个数字为 $a<b<c<d$

由题意，a 只能排在百位或十位，有 2 种选择

d 不能排在千位，还剩 2 个位置可选

剩下的 b,c 没有要求，依次有 2、1 个位置可选

综上，中环数共有 $210\times2\times2\times2\times1=1680$ 个。

12. 世纪公园里有一片很大的草地，每天总会生长出很多杂草（假设每分钟长出的杂草数量固定）。每天早上 8 点，一些工人会去除杂草（每个人的除杂草速度相同），一旦除完杂草（杂草的数量为 0，好的草不会被除掉），工人们就收工了，之后长出的杂草留待明天再除。第一天，一些工人去除草，除到 9 点收工；第二天，10 个工人去除草，除到 8 点 30 分收工；第三天，8 个工人去除草，除到_____点_____分收工（最后分钟的值四舍五入，填一个整数即可）。

【分析】不妨设草 1 分钟长 1 份

第一天 9 点时，整块草地上的杂草被除干净了，即草量为 0，所以到第二天 8 点 30 分时，草长了 23 小时 30 分钟，即 1410 分钟，共长了 1410 份草

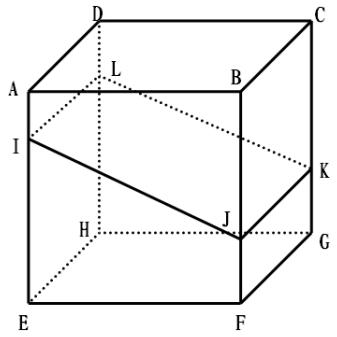
这些草被 10 位工人用 30 分钟除干净了，

所以 1 个工人 1 分钟可除草 $1410\div10\div30=4.7$ 份

第三天 8 点时，草长了 23 小时 30 分钟，即 1410 分钟，共长了 1410 份草，8 个工

人每分钟可除草 $8\times4.7=37.6$ 份，需要用 $1410\div(37.6-1)\approx39$ 分钟把草除干净，即第三天 8 点 39 分收工。

13. 如图，一个棱长为 12 厘米的正方体被切了一刀，这刀是沿着 IJ 切入的，从 LK 切出，使得 $AI=DL=4$ 厘米，$JF=KG=3$ 厘米，截面 $IJKL$ 为长方形。正方体被切成了两个部分，这两个部分的表面积之和为_____平方厘米。

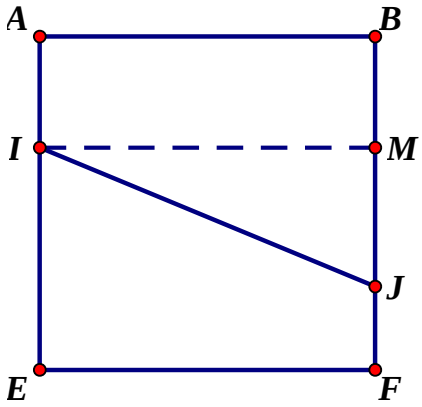


【分析】表面积比原来正方体的表面积增加了两个长方形

如下图，$MJ=12-4-3=5$，$MI=12$，由勾股定理，$IJ=13$

所以新增的长方形面积为 $12\times13=156$

两部分表面积之和为 $6\times12^2+2\times156=1176$ 平方厘米。



14. 如图是一个除法算式，在空格中填入合适的数字能使这个算式成立。那么被除数是_____。

$$\begin{array}{r} \square\square\square \\ \square\square\square\overline{)9\,\square\square\square\square} \\ \square\square1 \\ \square\square\square\square \\ \square\square\square7 \\ \hline \square\square\square \\ \square\square\,9 \\ \hline 0 \end{array}$$

【分析】由 1、7、9，可知 c,d,e,f 都为奇数，且 $c\neq5$，d,e,f 互不相同

由 $d\times\overline{abc}$ 为三位数，$e\times\overline{abc}$ 为四位数，$f\times\overline{abc}$ 为三位数，可知 e 为 d,e,f 中最大的一个，所以 $e\geq5$

若 $e=5$，则 $e\times\overline{abc}$ 的个位为 5 不为 7，所以 $e\neq5$

若 $e=7$，则由 $e\times\overline{abc}$ 的个位为 7，可知 $c=1$，此时由 $f\times\overline{abc}$ 的个位为 9，可知 $f=9$，与 $e>f$ 矛盾，所以 $e\neq 7$

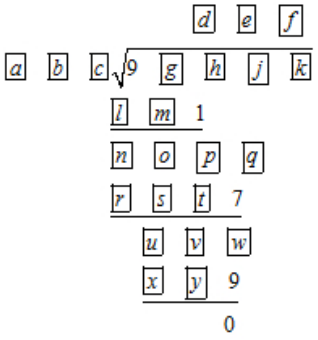
所以 $e=9$，则由 $e\times\overline{abc}$ 的个位为 7，可知 $c=3$，由 $d\times\overline{abc}$ 的个位为 1，可知 $d=7$，由 $f\times\overline{abc}$ 的个位为 9，可知 $f=3$，

由 $7\times\overline{abc}\le 999\Rightarrow\overline{abc}\le 142$，由 $9\times\overline{abc}\ge 1000\Rightarrow\overline{abc}\ge 112$，

所以 $\overline{abc}$ 为 113 或 123

而 $113\times 793=89609$，万位不为 9，所以 $\overline{abc}\neq 113$

所以 $\overline{abc}=123$，被除数为 $123\times 793=97539$



15. *A*、*B*、*C* **均为正整数。已知** *A* **有 7 个约数，** *B* **有 6 个约数，** *C* **有 3 个约数，** $A\times B$ **有 24 个约数，** $B\times C$ **有 10 个约数。则** $A+B+C$ **的最小值为_____。**

【分析】由 A 有 7 个约数，可知 $A=p^6$，其中 p 为质数，由 C 有 7 个约数，可知 $C=q^2$，其中 q 为质数，

若 B 不含有质因子 p，则 $A\times B$ 中质因子 p 的个数为 6，此时 $A\times B$ 的约数个数应为 $6+1=7$ 的倍数，不可能是 24 个，所以 B 含有质因子 p

由于 24 大于 7 的约数有 8、12、24，所以 $A\times B$ 中质因子 p 的个数可能为 7、11、23

若 $A\times B$ 中质因子 p 的个数为 11，则 B 中质因子 p 的个数为 5，由于 B 有 6 个约数，所以 $B=p^5$，此时 $B\times C=p^5\times q^2$，若 $p=q$，则 $B\times C=p^7$ 有 8 个约数，若 $p\neq q$，则 $B\times C$ 有 18 个约数，均不为 10 个约数，所以 $A\times B$ 中质因子 p 的个数不为 11

若 $A\times B$ 中质因子 p 的个数为 23，则 B 中质因子 p 的个数为 17，显然不可能为 6 个约数

所以 $A\times B$ 中质因子 p 的个数为 7，则 B 中质因子 p 的个数为 1

若 B 不含有质因子 q，则 $B\times C$ 中质因子 q 的个数为 2，此时 $B\times C$ 的约数个数应为 $2+1=3$ 的倍数，不可能是 10 个，所以 B 含有质因子 q

由于 10 大于 3 的约数有 5、10，所以 $B\times C$ 中质因子 q 的个数可能为 4、9

若 $B\times C$ 中质因子 q 的个数为 9，则 B 中质因子 q 的个数为 7，显然不可能为 6 个约数

所以 $B\times C$ 中质因子 q 的个数为 4，则 B 中质因子 q 的个数为 2

所以 $B=p\times q^2$，且 $p\neq q$

所以 $A+B+C=p^6+p\times q^2+q^2$，最小值为 $2^6+2\times 3^2+3^2=91$

16. 有这样的正整数 n**，使得均为完全平方数** $8n-7$、$18n-35$ **均为完全平方数。则所有符合要求的正整数** $n=$_____**。**

【分析】不妨设 $\begin{cases}18n-35=a^2\\8n-7=b^2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}72n-140=4a^2\\72n-63=9b^2\end{cases}\Rightarrow(3b)^2-(2a)^2=77$

所以 $(3b-2a)(3b+2a)=77=1\times77=7\times11$

解得 $\begin{cases}a=19\\b=13\\n=22\end{cases}$ 或 $\begin{cases}a=1\\b=3\\n=2\end{cases}$

17. 将 $2013\times1,2013\times2,2013\times3,2013\times4,2013\times5,2013\times6,2013\times7,2013\times8,2013\times9$ $2013\times10,\ 2013\times11$ **填入下表，使得填入的数能被其所在列的位置号整除，那么有_____种不同的填写方法。**

位置号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
填入的数											

【分析】由于 $2013=3\times11\times61$

所以 1 至 11 中，3 的约数有 1、3、11 这三个

所以除了 $2013\times1,2013\times2,2013\times3,2013\times6,2013\times9,2013\times11$ 这六个数可以互相交换位置

其余的 $2013\times4,2013\times5,2013\times7,2013\times8,2013\times10$ 必须填在 4、5、7、8、10 号下面

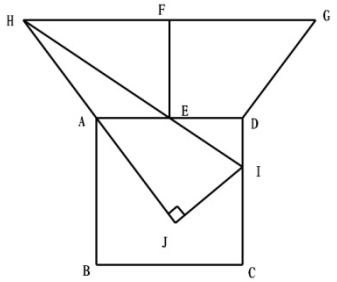
$2013\times2,2013\times6$ 可以填在 2、6 下面，有 2 种填法

9 下面可以填 $2013\times3,2013\times9$，有 2 种填法

剩下 3 个数可以随意填在 1、3、11 下面，有 6 种填法

综上共有 $2\times2\times6=24$ 种填法

18. 如图， *ABCD* **是边长为 6 的正方形，** *ADGH* **是一个梯形，点** *E*、*F* **分别是** *AD*、*GH* **的中点，** *HF* = 6，*EF* = 4，*EF* ⊥ *GH* **。联结** *HE* **并延长交** *CD* **于点** *I* **，作** *IJ* ⊥ *HA* **，则** *IJ*= _____**。**



【分析】如下图，连接 AI，延长 CD 较 GH 于 K

易知 $KD=4,GK=3$，所以 $GD=5$，同理 $AH=5$

又由 $HK=9,DE=3,KD=4$，$ID:IK=DE:HK$，可知 $ID=2$

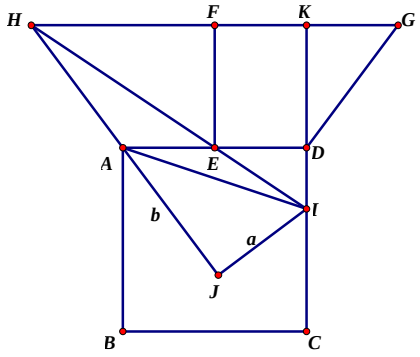
设 $IJ=a,JA=b$，由勾股定理

有 $\begin{cases}a^2+b^2=AJ^2\\a^2+(b+5)^2=HI^2\end{cases}$

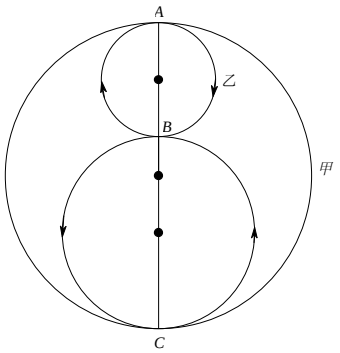
又由勾股定理 $\begin{cases}AJ^2=ID^2+DA^2=40\\HI^2=IK^2+KH^2=117\end{cases}$

所以 $\begin{cases} a^2+b^2=40 \\ a^2+(b+5)^2=117 \end{cases} \Rightarrow 10b+25=77 \Rightarrow b=5.2$

$\Rightarrow a^2+27.04=40 \Rightarrow a^2=12.96 \Rightarrow a=3.6$



19. 如图所示，甲、乙两只蚂蚁在下列圆周上运动。AC 为大圆的直径，点 B 在 AC 上，AB、BC 分别为两个小圆的直径。甲蚂蚁在大圆上顺时针爬行，乙蚂蚁在两个小圆上沿着箭头所指方向绕“8”字爬行（$A\to B\to C\to B\to A$）。甲蚂蚁与乙蚂蚁在某一时刻同时从 A 点出发，然后不断地爬行，速度比为 $v_{甲}:v_{乙}=3:2$。经过 T_1 分钟，两只蚂蚁相遇。接下来，甲蚂蚁将自己的速度提高了 $\frac{1}{3}$，乙蚂蚁的速度不变，继续在原来的轨道上爬行。经过 T_2 分钟，两只蚂蚁再一次相遇。已知 $T_1+T_2=100^3-99^3+98^3-97^3+\cdots+2^3-1^3$，则甲蚂蚁按原来的速度绕大圆爬行一周需要_____分钟（本题答案写为假分数）。



【分析】乙爬行一个 8 字的路程为 $\pi\times AB+\pi\times BC=\pi\times AC$，甲爬行一圈的路程为 $\pi\times AC$，所以甲乙爬行的路程相等，所以甲从 A 到 C 的路程与乙从 A 到 C 的路程相等

由于一开始 $V_{甲}:V_{乙}=3:2$，所以第一次相遇时，甲爬了 3 圈，乙爬了 2 个 8 字，在 A 点相遇

甲将速度提高 $\frac{1}{3}$ 后，$V_{甲}^{*}:V_{乙}=4:2$，所以第二次相遇时，甲爬行了 2 圈，乙爬了 1 个 8 字

T_1+T_2

$=(100-99)(100^2+100\times99+99^2)+\cdots+(2-1)(2^2+2\times1+1^2)$

$=100^2+99^2+\cdots+2^2+1^2+100\times99+\cdots+2\times1$

$=\frac{100\times101\times201}{6}+100^2-100+98^2-98+\cdots+2^2-2$

$=338350+2^2\times(50^2+49^2+\cdots+1^2)-(100+98+\cdots+2)$

$=338350+171700-2550$

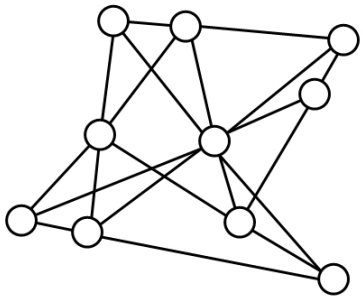
$=507500$

所以，在 507500 分钟当中，乙爬了 3 个 8 字，所以乙爬一个 8 字用时 $\frac{507500}{3}$ 分钟，

由于一开始 $V_{甲}:V_{乙}=3:2$，

所以甲以初始速度爬行一周需要 $\frac{507500}{3}\times\frac{2}{3}=\frac{1015000}{9}$

20. 将 0~9 填入下图圆圈中，每个数字智能使用一次，使得每条线段上的数字和都是 13。



【分析】如下图，$a-h$ 被算了 3 次，x 被算了 4 次，y 被算了 2 次

则 $10\times13=3\times(0+1+2+\cdots+9)+x-y\Rightarrow y-x=5$

由于 $a+g+b=c+x+y=h+e+d=13\Rightarrow f=6$

所以 $c+d=a+h=b+x=7\Rightarrow f=6$

所以，a,b,c,d,x,h 分别为 0、2、3、4、5、7

所以 e,g,y 分别为 1、8、9

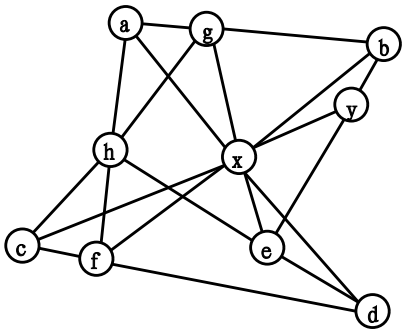
又 $y-x=5$，所以 $y=8$ 或 9

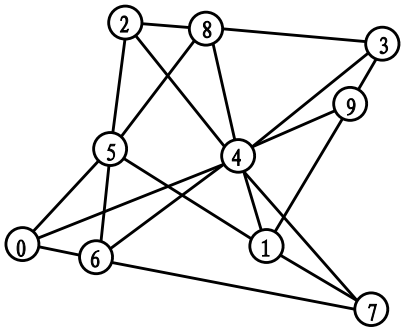
若 $y=8$，则 $x=3\Rightarrow b=4\Rightarrow e=1\Rightarrow g=9\Rightarrow a=0\Rightarrow d=10$ 矛盾

所以

$y=9\Rightarrow x=4\Rightarrow b=3\Rightarrow e=1\Rightarrow g=8$

$\Rightarrow a=2\Rightarrow d=7\Rightarrow c=0\Rightarrow h=5$





更多历年真题，敬请关注唯课数学公众号
vclassedu