第十八届华罗庚金杯少年数学邀请赛
初赛试题 C（小学高年级组）

（时间: 2013 年 3 月 23 日）

一、选择题（每小题 10 分, 满分 60 分. 以下每题的四个选项中, 仅有一个是正确的, 请将表示正确答案的英文字母写在每题的圆括号内.）

1. 如果 $\dfrac{2013\times2013}{2014\times2014+2012}=\dfrac{n}{m}$（其中 m 与 n 为互质的自然数), 那么 $m+n$ 的值是(　　).

（A）1243　（B）1343　（C）4025　（D）4029

解答：B。

在考试中，选择恰当的方法很重要。这道题，看到这道题后，我第一个想法就是归纳。$\dfrac{2^2}{3^2+1}=\dfrac{2}{5}$、$\dfrac{3^2}{4^2+2}=\dfrac{1}{2}$、$\dfrac{4^2}{5^2+3}=\dfrac{4}{7}$、$\dfrac{5^2}{6^2+4}=\dfrac{5}{8}$、写完前三个，发现第二个算式很不和谐，又写出了第四个，仔细一想，原来第二个可以写成 $\dfrac{3^2}{4^2+2}=\dfrac{3}{6}$，规律找到了，分子是原式中分子部分的一个因数，分母比分子大 3！答案一定是 $\dfrac{2013}{2016}$，很简单，第一题是很容易的年份题，等等，年份 2013 这个数是我们非常熟悉的，2013=3×11×61，是 3 的倍数，那么加 3 不还是 3 的倍数么？可以约分，所以最后的答案是 $\dfrac{2013}{2016}=\dfrac{671}{672}$ 所以选 B！

如果本题需要详细的过程，那么用规纳的方法是不合适的，因为这是不完全归纳法，你这么知道前几个适用的情况下，最后的 2013 也适用呢，所以最正确的方法是这样思考：如果这道题直接计算，分别算出分子分母，然后必然需要一个约分的过程（从选项可以看出），那么就太麻烦了，如果不计算出最后结果就可以约分，是件好事儿，那么转化分子还是转化分母呢？我们都知道，当分子分母都是乘法的形式，是比较好约分的，所以要转化分母，要在分母中“凑”出 2013.具体过程是这样的：

$$\text{原式}=\frac{2013\times2013}{2014\times(2013+1)+2012}$$

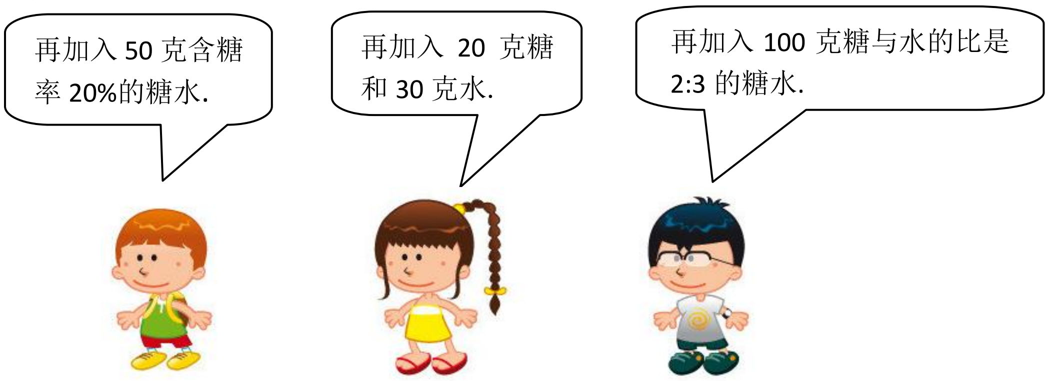
$$=\frac{2013\times2013}{2014\times2013+2014+2012}$$

$$=\frac{2013\times2013}{2014\times2013+2013\times2}$$

$$=\frac{2013\times2013}{2013\times(2014+2)}=\frac{2013}{2016}=\frac{671}{672},$$

$m+n=671+672=1343.$ 这个题做完了，很容易得分的一道题，也是容易马虎的一个题，如果不仔细读题，忽略了“m 与 n 为互质的自然数”，那么就容易把答案写成 D。

2. 甲、乙、丙三位同学都把 25 克糖放入 100 克水中混合成糖水，然后他们又分别做了以下事情：



甲　　乙　　丙

最终，（　　）得到的糖水最甜.

（A）甲　（B）乙　（C）丙　（D）乙和丙

解答：C。

根据题意和我们所学过的公式，可以分别求出三人得到的糖水的最终浓度！

(1) 甲配得的糖水含糖率：$\dfrac{25+50\times20\%}{100+25+50}\times100\%=20\%$；

(2) 乙配得的糖水含糖率：$\dfrac{25+20}{100+25+50}\times100\%\approx25.7\%$；

(3) 丙配得的糖水含糖率：$\dfrac{25+100\div5\times2}{100+25+100}\times100\%\approx28.9\%$.

所以，丙最甜！其实我们还可以用另一种方法来解答，如果对概念理解的比较清晰的话，我们可以知道，向共同的糖水中加另一种糖水，加的糖水的浓度越大，糖水质量越多就越甜。
甲又加入的是浓度为：20%的糖水 50 克
乙又加入的是浓度为 20÷（20+30）=40%的糖水 50 克
丙又加入的是浓度为 2÷（2+3）=40%的糖水 100 克
很明显，丙往里面加的糖水更甜，更多，所以最甜的一定是丙。

3. 一只青蛙 8 点从深为 12 米的井底向上爬，它每向上爬 3 米，因为井壁打滑，就会下滑 1 米，下滑 1 米的时间是向上爬 3 米所用时间的三分之一． 8 点 17 分时，青蛙第二次爬至离井口 3 米之处，那么青蛙从井底爬到井口时所花的时间为（　　）分钟.

（A）22　（B）20　（C）17　（D）16

解答：A。

无论上还是下，每一米所用的时间都是一样的，根据题意，每向上爬 3 米会下降 1 米，我们列一个表格。

青蛙实际高度	3	2	5	4	7	6	9	8	9	11	10	12
向上爬	3	0	3	0	3	0	3	0	1	2	0	2
向下滑	0	1	0	1	0	1	0	1	0	0	1	0

从上表可以看出，当第二次到达了离井口 3 的地方的时候，青蛙运动了，3×4+1+1×4=17 米。而当这只青蛙跳出井口的时候共走了 3×5+2+1×5=22 米。根据题意 17÷17×22=22 分钟。

4. 已知正整数 *A* 分解质因数可以写成 $A=2^{\alpha}\times 3^{\beta}\times 5^{\gamma}$，其中 α 、β 、γ 是自然数. 如果 *A* 的二分之一是完全平方数, *A* 的三分之一是完全立方数， *A* 的五分之一是某个自然数的五次方，那么 $\alpha+\beta+\gamma$ 的最小值是（　　）.

（A）10　　（B）17　　（C）23　　（D）31

解答：D。

根据“*A* 的二分之一是完全平方数”可以知道，（α-1）、β 、γ 都是 2 的倍数。

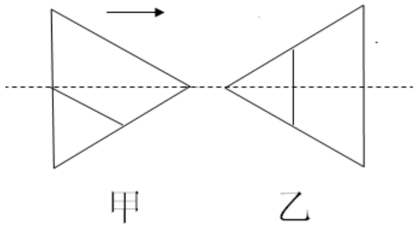
根据“*A* 的三分之一是完全立方数”可以知道，α 、（β-1）、γ 都是 3 的倍数。

根据“*A* 的五分之一是某个自然数的五次方”可以知道，α 、β 、（γ-1）都是 5 的倍数。

同时满足三个条件的 α 的最小值恰好是[3,5]=15；β 的最小值恰好是[2,5]=10；γ 的最小值恰好是[2,3]=6。所以，$\alpha+\beta+\gamma$ 的最小值是 15+10+6=31。

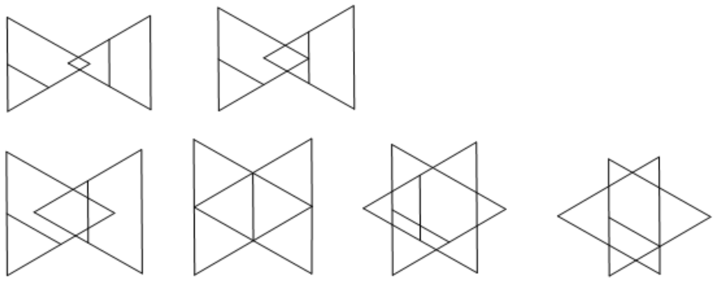
5. 今有甲、乙两个大小相同的正三角形，各画出了一条两边中点的连线. 如图，甲、乙位置左右对称，但甲、乙内部所画线段的位置不对称. 从图中所示的位置开始，甲向右水平移动，直至两个三角形重叠后再离开. 在移动过程中的每个位置，甲与乙所组成的图形中都有若干个三角形. 那么在三角形个数最多的位置，图形中有（　　）个三角形.

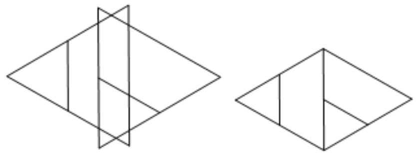
（A）9　　（B）10　　（C）11　　（D）12



解答：C。

可以把所有的情况都画出来然后通过比较找出三角形最多的图形，再仔细的数一下，发现有 11 个，所有的图如下：





还有一种办法，如果没有三角形内部的两条线捣乱的话，那么这个题就简单多了，我们从简单的情况入手！当没有三角形内部的两条线时，这两个三角形在移动的过程中，最多可以有 8 个三角形（如图 1），在这种情况下再按照题中条件，再添两条线，在不与已有边重合的情况下，至少多 2 个三角形（如图 2），而最多只能多 3 个（如图 3）。

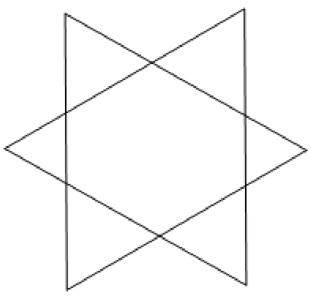


图 1

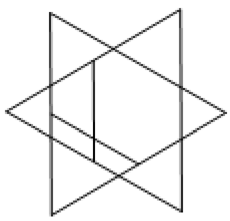


图 2

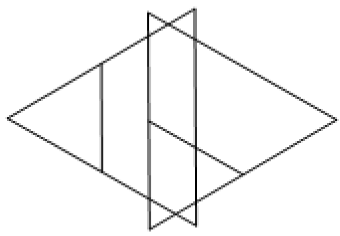


图 3

6. 从 1～11 这 11 个整数中任意取出 6 个数, 则下列结论正确的有（　　）个.

① 其中必有两个数互质;

② 其中必有一个数是其中另一个数的倍数;

③ 其中必有一个数的 2 倍是其中另一个数的倍数.

（A）3　　（B）2　　（C）1　　（D）0

解答：B。

对于“任意…必有”这样的语句，应该考虑到“抽屉原理”。如果需要证明结论正确的话，那就要构造抽屉，而抽屉的个数，应该是小于 6 的！看题：

第一句说必有两个数互质，如果这是正确的话，那么就要构造出小于 6 的抽屉，且每一组抽屉中的数一定是两两互质的，而很容易想到，每相邻的两个数都是互质的，所以可以这样构造（1,2,3）(4,5)（6,7）(8,9)（10,11）其实构造的方法不是唯一的，还有很多构造方法如:【（1,3,4）(2,9)（8，11）(5，6)（7,10)】;

第二句很容易举出反例，(6、7、8、9、10、11）最大的六个数就没有倍数关系，同样的还有:（4、5、6、7、9、11)；

第三句，根据第二句话的反例，可以看出，第三句话是成立的，那么就要严谨的证明一下，还是要构造抽屉，按照什么构造呢，可以按照 1 到 11 中的 5 个质因数来构造 5 个抽屉，1 放在哪个抽屉里都可以,（1,2,4,8）(3,6,9)（5,10）(7)（11）这五个抽屉中，要任意取 6 个数，必有两个数在同一个抽屉中，就必满足其中一个数的 2 倍是另一个数的倍数。

所以有两句是正确的，最后的答案是 B。

二、填空题（每小题 10 分, 满分 40 分)

7. 有四个人去书店买书, 每人买了 4 本不同的书, 且每两个人恰有 2 本书相同, 那么这 4 个人至少买了________种书.

解答：7。

从简单的情况思考，若只有两个人，那么为了符合题意，一定有 6 本不同的书，我们可以给这 6 本数编号为 1、2、3、4、5、6，那么设甲买的是 1、2、3、4，乙买的是 1、2、5、6.这时候又来了第三个人，我们称呼他为丙，这是丙为了符合题意，他可以选择不买其他的书，他买编号为 3、4、5、6 也符合题意，这时要注意的是，当三个人，只买 6 本书的时候，当甲、乙买的书确定之后，丙购买的编号是唯一的，就是丙不能买甲、乙都买的书，如果他买了一本甲乙都买的书，那么他就必须再买一本他自己“独有”的书！列一个表格让我刚才说的更清晰：

	1	2	3	4	5	6
甲	√	√	√	√		
乙	√	√			√	√
丙			√	√	√	√

把 3 个人的情况弄明白之后，看四个人的，这时丁来了，站在刚才丙的角度思考，他至少要有一本“独有”的书了，所以 4 个人的时候至少是 7 本，可以给出构造如下：

	1	2	3	4	5	6	7
甲	√	√	√	√			
乙	√	√			√	√	
丙			√	√	√	√	
丁	√		√		√		√

即甲买的书编号为（1, 2, 3, 4）, 那么乙买的书的编号为（1, 2, 5, 6）, 为使种数最少, 丙买的书的编号为（3, 4, 5, 6）, 此时丁可以买（1, 3, 5, 7）.

8. 每天，小明上学都要经过一段平路 *AB*、一段上坡路 *BC* 和一段下坡路 *CD*（如右图）．已知 *AB*:*BC*:*CD* = 1:2:1，并且小明在平路、上坡路、下坡路上的速度比为 3:2:4．如果小明上学与放学回家所用的时间比是 $\frac{n}{m}$(其中 m 与 n 是互质的自然数)，那么 m+n 的值是________.

解答：35。

简单的赋值法可以计算出结果，设 AB 是 100 米，那么 BC 的路程就是 200 米，CD 的路程就是 100 米；设小明平路的速度是 3 米/秒，那么他上坡路、下坡路上的速度就分别是 2 米/秒、4 米/秒.根据赋值来计算，

小明上学的时间是：$\frac{100}{3}+\frac{200}{2}+\frac{100}{4}=\frac{475}{3}$

小明放学回家的时间是：$\frac{100}{3}+\frac{200}{4}+\frac{100}{2}=\frac{400}{3}$

所以时间比为$\frac{475}{3}:\frac{400}{3}=\frac{19}{16}$！

如果觉得赋值法不够严谨的话，那么可以设 $AB=s$，则 $BC=2s$，$CD=s$；

设 $v_{平}=3a$，则 $v_{上}=2a$，$v_{下}=4a$．可以计算这些算式得：

$$t_{上学}=\frac{s}{3a}+\frac{2s}{2a}+\frac{s}{4a}=\frac{4+12+3}{12}\times\frac{s}{a}=\frac{19}{12}\times\frac{s}{a},$$

$$t_{放学}=\frac{s}{3a}+\frac{2s}{4a}+\frac{s}{2a}=\frac{4+6+6}{12}\times\frac{s}{a}=\frac{16}{12}\times\frac{s}{a},$$

所以

$$\frac{t_{上学}}{t_{放学}}=\frac{19}{16}=\frac{n}{m}，\text{m+n=35。}$$

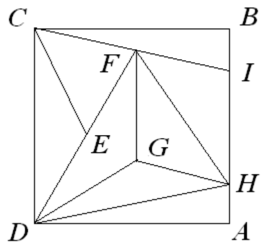
9. 黑板上有 11 个 1, 22 个 2, 33 个 3, 44 个 4．做以下操作：每次擦掉 3 个不同的数字,并且把没擦掉的第四种数字多写 2 个．例如：某次操作擦掉 1 个 1, 1 个 2, 1 个 3，那就再写上 2 个 4．经过若干次操作后，黑板上只剩下 3 个数字，而且无法继续进行操作，那么最后剩下的三个数字的乘积是________.

解答：12。

仔细阅读题中所说的操作，会发现无论如何操作，任意两种数的个数的差只有不变，加 3 和减 3 三种情况！（比如说 1 和 2 的个数，无论怎样操作，对于这两个数的个数只有 3 类情况，要么同时减少一个；要么 1 的个数加 2 个，2 的个数少一个；要么 1 的个数少 1 个，2 的个数加 2 个）。那么继续，看 1 的个数和 2 的个数，用 2 的个数减去 1 的个数，他们的差是 22-11=11，11 除以 3 的余数是 2，那就是说当数字 2 的个数比 1 的个数多时，他们的差一定是除以 3 余 2 的；但如果数字 1 的个数比 2 多的话，那么这个差除以 3 的余数一定是 1，（可以试着操作几次，让 1 的个数多与 2 的个数）。这样都算下来比较麻烦，观察一些特殊的，不用分类讨论的，可以发现 1 的个数和 4 的个数，它们的差是 33，正好是 3 的倍数，也就是说，操作到最后，剩下的 1 的个数和 4 的个数要么一样多，要么个数差 3。再根据题意，最后只剩下 3 个数，如果 1 的个数为 3，那么 2 的个数必然为 2，不合题意。如果的个数为 3，而 1 和 2 不可能都为 0 个，所以操作到最后时 1 的个数和 4 的个数都只能为 0，而 2 的个数一定是 2，那么 3 的个数就是 1，所以剩下的三个数是 2 个 2 和 1 个 3，他们乘积是 12.

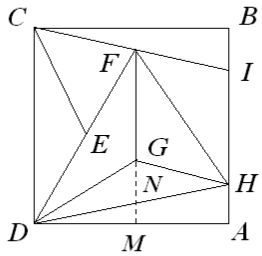
这个题，说了好多，其实就是考察模 3 同余的问题。同余是数论问题中比较难的一部分，而华杯中的数论问题是不可缺少的，看完答案的同学，如果你可以走进决赛，那就一定要在数论中再下一番功夫，功夫的重点在用代数式的形式解决数论问题，还有就是同余的应用等。

10. 如右图，正方形 *ABCD* 被分成了面积相同的 8 个三角形，如果 *DG* = 5，那么正方形 *ABCD* 面积是________.



解答：64。

题中只给出了一个具体数据 DG=5，要求出正方形的面积，我们可以用一个未知数 x 作为过渡，找到 DG 和正方形边长的关系，关系有了，就可以求出边长，进而求出面积。设边长是 8x。



$S_{\triangle ADH}=S_{\triangle BCI}$ 所以 BI=AH，若整个正方形的面积是 8 份的话，△ADH 的面积是 1 份，AH 是 AB 的 $\frac{1}{4}$，即 AH=BI=2x，HI=4x，如果连接 CH，那么△CHI 的面积是△CBI 的 2 倍，就是 2 份，而△FHI 的面积是 1 份，所以 CF=FI，进行不下去了，要向 DG 靠拢，所以做条辅助线：延长 FG 交 DH 于 N，DA 于 M（如右图） 根据燕尾模型，DN=NH，在梯形 CDHI 中，CF=FI,DN=NH，所以 FN 与 CD、HI 平行（平行线分线段成比例），所以 DM=MA

平行后，FG 与 HI 之间的距离相等，而 $S_{\triangle GFH}=S_{\triangle IHF}$ 所以 FG=HI=4x

又因为三角形 *FDG* 的面积是三角形 *DGN* 面积的 2 倍，所以 GN=2x

根据对称性可知，NM = (8x－6x)÷2 = x，所以 GM = 3x.

在直角三角形 GDM 中，DG = 5x. 又因为 DG = 5 所以 x = 1.

最终，正方形的面积为 8×8 = 64.

最后一题的难度比较大，考察了很多图形类的知识，里面有很多 5 年级学过的几何模型。还用到了平行线分线段的比例关系。作为高年级的试题，与比相关的试题是必不可少的，本次初赛中，已经有 3 道题涉及到了比，而且难度各不相同，相比较，初赛的行程题简单了一些，那么在复赛中，同学们要小心了，强烈建议多复习一些与比例相关的行程问题！