第十七届华杯赛高年级组决赛试题 A 卷

（时间: 2012 年 4 月 21 日 10:00～11:30）

一、填空题（每小题 10 分，共 80 分）

1. 算式 $10-10.5\div\left[5.2\times14.6-\left(9.2\times5.2+5.4\times3.7-4.6\times1.5\right)\right]$ 的值的 20 倍为_____.

【考点】计算

【难度】☆☆

【答案】186

【分析】原式=$10-10.5\div\left[5.2\times(14.6-9.2)-5.4\times3.7+4.6\times1.5\right]$

$=10-10.5\div(5.4\times1.5+4.6\times1.5)$

$=10-10.5\div15$

$=9.3$

$\Rightarrow 9.3\times20=186$

2. 箱子里已有若干个红球和黑球，放入一些黑球后，红球占全部球数的四分之一；再放入一些红球后，红球的数量是黑球的三分之二. 若放入的黑球和红球数量相同，则原来箱子里的黑球与红球数量的比值为_____.

【考点】应用题，比例

【难度】☆☆

【答案】2:1

【分析】设开始的黑球红球分别有 a 个和 b 个，每次放入 n 个球；

则有：$\begin{cases}\dfrac{b}{a+b+n}=\dfrac{1}{4}\Rightarrow 4b=a+b+n\Rightarrow n=3b-a\\ \dfrac{b+n}{a+n}=\dfrac{2}{3}\Rightarrow 3b+3n=2a+2n\Rightarrow n=2a-3b\end{cases}\Rightarrow 3b-a=2a-3b\Rightarrow a=2b\Rightarrow a:b=2:1$

3. 有两个体积之比为 5:8 的圆柱，它们的侧面的展开图为相同的长方形，如果把该长方形的长和宽同时增加 6，其面积增加了 114. 那么这个长方形的面积为_____.

【考点】几何，立体

【难度】☆☆☆☆

【答案】40

【分析】设长方形的长宽分别为 a 和 b；则两个圆柱体积分别为：$\pi\left(\dfrac{a}{2\pi}\right)^2 b$ 和 $\pi\left(\dfrac{b}{2\pi}\right)^2 a$

则有 $\pi\left(\dfrac{a}{2\pi}\right)^2 b:\pi\left(\dfrac{b}{2\pi}\right)^2 a=a:b=8:5$；

另根据面积增加 114 可知：$(a+6)(b+6)-ab=114\Rightarrow a+b=13$；

联立$\begin{cases}a:b=8:5\\a+b=13\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=8\\b=5\end{cases}\Rightarrow 8\times 5=40$.

4. 甲、乙两个粮库原来各存有整袋的粮食，如果从甲粮库调 90 袋到乙粮库，则乙粮库存粮的袋数是甲粮库的 2 倍．如果从乙粮库调若干袋到甲粮库，则甲粮库存粮的袋数是乙粮库的 6 倍．那么甲粮库原来最少存有_____袋的粮食．

【考点】应用题&组合，最值

【难度】☆☆☆☆

【答案】153

【分析】两粮库粮食总量一定，两次调动后甲粮库粮食分别占总量的$\frac{1}{3}$和$\frac{6}{7}$，可设粮食总袋数为$21a$，

则甲的袋数$\frac{1}{3}\times 21a+90=7a+90$，从乙调出若干袋到甲后，甲粮库的数量为$\frac{6}{7}\times 21a=18a$

$7a+90\leqslant 18a\Rightarrow a\geqslant 9\Rightarrow (7a+90)_{\min}=153$

5. 现有 211 名同学和四种不同的巧克力，每种巧克力的数量都超过 633 颗．规定每名同学最多拿三颗巧克力，也可以不拿．若按照所拿巧克力的种类和数量都是否相同分组，则人数最多的一组至少有_____名同学．

【考点】组合，计数&抽屉原理

【难度】☆☆☆☆

【答案】7

【分析】同学拿巧克力的颗数有 0、1、2、3 四种，对应取出的巧克力种类：

取 0 颗，有 1 种情况；

取 1 颗，有 4 种取法；

取 2 颗，2 颗相同有 4 种取法，2 颗不同有$C_4^2=6$种取法，共 10 种；

取 3 颗，3 颗相同有 4 种取法，2 颗相同有$4\times 3=12$种取法，3 颗不同有$C_4^3=4$种取法，共 20 种．

则同学们拿到的巧克力种类和数量的搭配方式共$1+4+10+20=35$种；

$211\div 35=6\cdots 1$，人数最多的一组至少有 7 人．

6. 张兵 1953 年出生，在今年之前的某一年，他的年龄是 9 的倍数并且是这一年的各位数字之和，那么这一年他_____岁．

【考点】数论，整除

【难度】☆☆☆

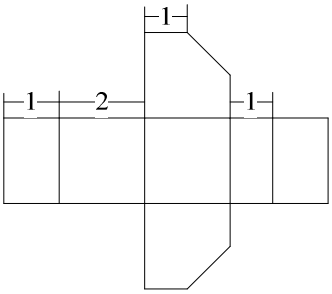
【答案】18

【分析】这一年的各位数字和为 9 的倍数，只能为 18 或 27，即张兵那年 18 岁或 27 岁

若张兵 18 岁，则这一年为 $1953+18=1971$，其中 $1+9+7+1=18$ 符合要求；

若张兵 27 岁，则这一年为 $1953+27=1980$，其中 $1+9+8+0=18$ 不符合要求；

7. 右图是一个五棱柱的平面展开图，图中的正方形边长都为 2. 按图所示数据，这个五棱柱的体积等于_____.



【考点】几何，立体

【难度】☆☆

【答案】7

【分析】底面积为：$2^2-\frac{1\times1}{2}=3.5$，高为 2，则体积为 $3.5\times2=7$

8. 在乘法算式 $\overline{草绿}\times\overline{花红了}=\overline{春光明媚}$ 中，汉字代表非零数字，不同汉字代表不同的数字，那么 $\overline{春光明媚}$ 所代表的四位数最小是_____.

【考点】组合，数字谜&最值

【难度】☆☆☆☆☆

【答案】4396

【分析】分析 9 余，只有 $\begin{cases}0\times0\Rightarrow0\\3\times6\Rightarrow0\\1\times4\Rightarrow4\end{cases}$ 三种情况符合要求；

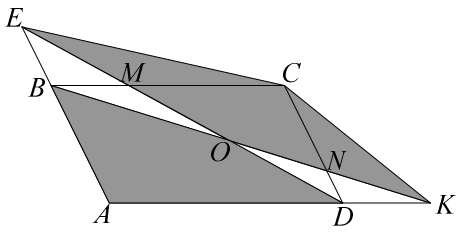
研究 $1\square\times2\square\square=\square\square\square\square$：$18\times297=5346$ 符合要求

研究 $2\square\times1\square\square=\square\square\square\square$：$\begin{cases}27\times198=5346\\28\times157=4396\end{cases}$ 符合要求

可见，最小的四位数为 4396

二、解答下列各题（每题 10 分，共 40 分，要求写出简要过程）

9. 如右图，*ABCD* 是平行四边形，*E* 为 *AB* 延长线上一点，*K* 为 *AD* 延长线上一点. 连接 *BK*, *DE* 相交于一点 *O*. 问：四边形 *ABOD* 与四边形 *ECKO* 的面积是否相等？请说明理由.



【考点】几何，基本方法

【难度】☆☆☆☆

【答案】相等

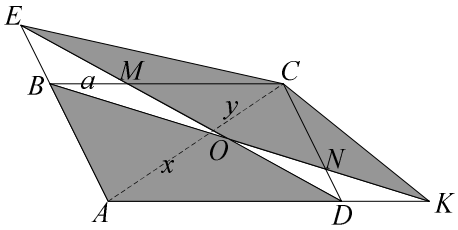
【分析】如下图，设四边形 $ABOD$ 面积为 x，四边形 $ECKO$ 面积为 y，三角形 EBO 的面积为 a；

设 $ABCD$ 的面积为 S，连接 AC；

则有 $y+a=S_{EBKC}=S_{\Delta BCE}+S_{\Delta BCD}=S_{\Delta BCE}+\frac{1}{2}S$；

而 $x+a=S_{\Delta EAD}=S_{\Delta EAC}=S_{\Delta BCE}+S_{\Delta BCA}=S_{\Delta BCE}+\frac{1}{2}S$；

可见 $y+a=x+a\Rightarrow x=y$



10. 能否用 500 个右图所示的 1×2 的小长方形拼成一个 5×200 的大长方形，使得 5×200 的长方形的每一行、每一列都有偶数个星？请说明理由.

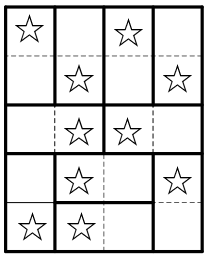


【考点】组合，构造与论证

【难度】☆☆☆☆

【答案】能

【分析】下图为满足要求的 5×4 长方形的构造方式，50 个 5×4 长方形可拼成 5×200 长方形



11. 将一个 $2n$ 位数的前 n 位数和后 n 位数各当成一个 n 位数，如果这两个 n 位数之和的平方正好等于这个 $2n$ 位数，则称这个 $2n$ 位数为卡布列克 (Kabulek) 怪数，例如，$(30+25)^2=3025$，所以 3025 是一个卡布列克怪数. 请问在四位数中有哪些卡布列克怪数?

【考点】数论，不定方程

【难度】☆☆☆☆

【答案】2025、3025、9801

【分析】设符合条件的四位数中，前后两位数分别为 a，b，且 $a+b<100$；

则有 $100a+b=(a+b)^2 \Rightarrow (a+b)^2-(a+b)=99a \Rightarrow (a+b)(a+b-1)=99a$

由于 $(a+b)$ 与 $(a+b-1)$ 互质，而两数之积为 99 的倍数，则有：

（1）其中一数为 99 倍，当 $a+b=99$ 时 $(a+b)^2=99^2=9801$ 符合要求；

（2）两数分别为 11 倍和 9 倍，符合条件的情况有：

$(a+b)(a+b-1)=45\times 44 \Rightarrow (a+b)^2=45^2=2025$ 符合要求；

$(a+b)(a+b-1)=55\times 54 \Rightarrow (a+b)^2=55^2=3025$ 符合要求；

综上，四位数中的卡布列克怪数有：2025、3025、9801

12. 已知 98 个互不相同的质数 $p_1, p_2, \cdots, p_{98}$，记 $N=p_1^2+p_2^2+\cdots+p_{98}^2$，问：$N$ 被 3 除的余数是多少？

【考点】数论，余数

【难度】☆☆☆☆

【答案】1 或 2

【分析】若自然数 p 是 3 的倍数，则 p^2 被 3 除余 0；若自然数不是 3 的倍数，则 p^2 被 3 除余 1；

因此，若 $p_1, p_2, \cdots, p_{98}$ 含 3，则 $N\equiv 97\equiv 1(\mathrm{mod}\,3)$；

若 $p_1, p_2, \cdots, p_{98}$ 中不含 3，则 $N\equiv 98\equiv 2(\mathrm{mod}\,3)$；

综上，N 被 3 除的余数是 1 或者 2.

三、解答下列各题（每小题 15 分，共 30 分，要求写出详细过程）

13. 小李和小张在一个圆形跑道上匀速跑步，两人同时同地出发，小李顺时针跑，每 72 秒跑一圈；小张逆时针跑，每 80 秒跑一圈. 在跑道上划定以起点为中心的 $\frac{1}{4}$ 圆弧区间，那么两人从出发到再次同时回到起点，同时在划定的区间内所持续的时间为多少秒?

【考点】应用题，行程

【难度】☆☆☆☆☆

【答案】46

【分析】两人从出发到再次同时回到起点，需要的时间为 $[72,80]=720s$；

设跑道周长为 $720m$，则 $V_{李}=10m/s$，$V_{张}=9m/s$，划定区间的长度 $720\div 4=180m$；

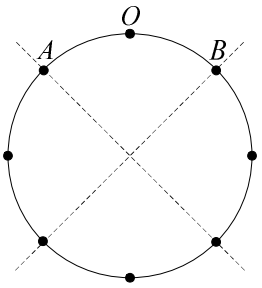
小李在划定区间内的时间段：

0~9,63~81,135~153,207~225,279~297,351~369,423~441,495~513,567~585,639~657,711~720

小张在划定区间内的时间段：

0~10,70~90,150~170,230~250,310~330,390~410,470~490,550~570,630~650,710~720

重合的时间段：0~9,70~81,150~153,567~570,639~650,711~720；合计 46 秒.



14. 把一个棱长均为整数的长方体的表面都涂上红色，然后切割成棱长为 1 的小立方块，其中，两面有红色的小立方块有 40 块，一面有红色的小立方块有 66 块，那么这个长方体的体积是多少?

【考点】几何，立体

【难度】☆☆☆☆

【答案】150

【分析】设这个长方体的长、宽、高分别为 a，b，c，则有：

$$\begin{cases}4[(a-2)+(b-2)+(c-2)]=40\\2[(a-2)(b-2)+(a-2)(c-2)+(b-2)(c-2)]=66\end{cases}$$，若设 $\begin{cases}x=a-2\\y=b-2\\z=c-2\end{cases}$，则其中 $x>2,y>2,z>2$；

整理得 $\begin{cases}x+y+z=10\\xy+xz+yz=33\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=3\\y=3\\z=4\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=5\\b=5\\c=6\end{cases}\Rightarrow V_{长方体}=5\times5\times6=150$.