第十一届“小机灵杯”数学竞赛决赛试卷（四年级组）
时间：60 分钟

1. 19=1×9+(1+9)
29=2×9+(2+9)
39=3×9+(3+9)
49=4×9+(4+9)
……..
189=18×9+(18+9)
则_____.

【答案】 $\overline{A9}=10A+9=9A+(A+9)$，**其中 A 是一个正整数**

【分析】**考点：找规律**

2. 110 除以一个两位数的余数是 5，符合条件的所有两位数是_____.

【答案】15，21，35

【分析】**考点：数论，余数，分解质因数**

110 除以这个两位数是 5，那么 $110-5=105$ 除以这个两位数没有余数，即能整除，$105=1\times105=3\times35=5\times21=7\times15$，于是，符合条件的所有两位数是 15、21、35

3. 把 2012 写成 N 个互不相同的正整数的和，N 最大等于_____.

【答案】62

【分析】**考点：等差数列，最值**

$1+2+\cdots+63=(63+1)\times63\div2=2016>2012$ ，即 $N<63$

$1+2+\cdots+62=(62+1)\times62\div2=1953<2012$，于是 $N=62$

4. 1×1+2×2+3×3+….2011×2011+2012×2012 的和最后一位数是_____.

【答案】0

【分析】**考点：尾数，数列规律**

算式中的每一项的个位以 1、4、9、6、5、6、9、4、1、0 这十个数为周期循环，

$2012\div10=201\cdots2$，

算式的个位与 $201\times(1+4+6+9+5+9+6+4+1)+1+4$ 的个位相等，个位为 0。

5.用 A、B、C、D 代表四个数字分别是 12,14,16,18,将四个数字代入等式
A×B+B×C+B×D+C×D 和最大是_____.

【答案】980

【分析】**考点：最值**

$A\times B+B\times C+B\times D+C\times D=B\times(A+C+D)+C\times D$，

显然 $C\times D$ 最大为 $16\times18=288$，下面考虑最大 $B\times(A+C+D)$，

由于 $B+(A+C+D)=12+14+16+18=60$，和是一个定值

于是，由于和一定时，两数的差越小，两数的积越大

于是，B 取 18 时，乘积最大，为 $18\times(12+14+16)=756$

但考虑到 18 只有一个，只能从 B、C、D 中选一个

若 B 取 18，则原式和为 $18\times(12+14+16)+14\times16=980$

若 B 取 16，则原式和为 $16\times(12+14+18)+14\times18=956$

若 B 取 14，则原式和为 $14\times(12+16+18)+16\times18=932$

综上，原算式和最大为 980

6.把一个三位数的百位与个位上的两个数字交换,十位数不变,所得的新数与原数相等,这样

的数共有_____个，其中能被 4 整除的有_____个.

【答案】20

【分析】考点：加乘原理，整除

百位与个位交换后，数字不变，即要求百位数字与个位数字相等，于是这样的三位数有 $9\times10\times1=90$ 个，考虑其能被 4 整除，首先，个位一定是偶数，当个位为 2、6 时，十位必须是奇数，有 5 种选择，当个位为 4、8 时，十位必须是偶数，有 5 种选择，综上，其中能被 4 整除的有 $4\times5=20$

7.

1

1 1

1 2 1

1 3 3 1

1 4 6 4 1

1 5 10 10 5 1

1 6 15 20 15 6 1

… … … … … … … …

第一百行第三个=_____.

【答案】4851

【分析】考点：数列规律，排列组合（杨辉三角）

（方法一）观察每一行的第三个数，发现第一、二行没有，从第三行开始，每行的第三个数为 1、3、6、10、15、21、……，规律：从第 3 行到第 4 行为+2，从第 4 行到第 5 行为+3，从第 5 行到第 6 行为+4，……，从第 99 行到第 100 行为+98，第一百行第三个数为：$3+3+4+5+\cdots+98=1+2+3+4+5+\cdots+98=4851$

（方法二）此三角形为杨辉三角，其中的数都是组合数，第 n 行第 m 个数为 C_{n-1}^{m-1}，第 100 行第 3 个数为 $C_{100-1}^{3-1}=C_{99}^{2}=99\times98\div2=4851$

8 将编号是 1,2,3,….15 的十五名学生按编号顺序面向里站成一圈,第一次,编号是 1 的同学向后转,第二次,编号是 2,3 的同学向后转,第三次编号是 4,5,6 的同学向后转,….第 15 次,全体同学向后转,当转完第 12 次时,这时面向外的同学还有_____名.

【答案】12

【分析】考点：逆推，奇偶性

若 15 次全部转完，共计有 $1+2+3+\cdots+15=120$ 人次向后转，其中每个学生转 $120\div15=8$ 次

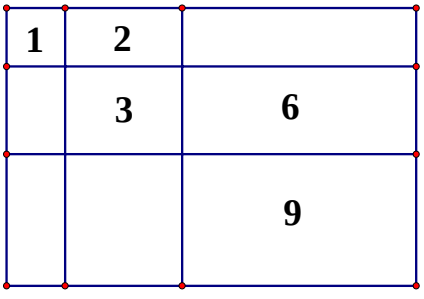
第 15 次，全体学生都转了 1 次，由于没有进行第 15 次，所以每个学生转 7 次

第 14 次，编号为 15、14、13、……、3、2 号的同学转身

第 13 次，编号为 1、15、14、13、……、5、4

这两次中，1、2、3 号同学转 1 次身，4、5、……、15 号同学转 2 次身。于是，当转完 12 次时，1、2、3 号同学转 6 次，向里；4、5、……、15 号同学转 5 次，向外，此时向外的同学有 12 名。

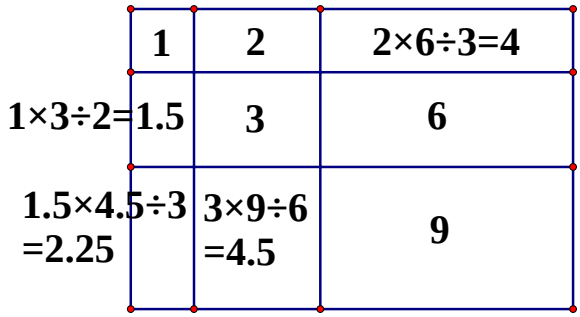
9.长方形 ABCD 的面积是_____.



【答案】33.25

【分析】考点：巧求面积

如下图，面积为：1+2+4+1.5+3+6+2.25+4.5+9=33.25



10.一只猎狗,在它前面十步有一只兔子,兔子跑九步的距离等于狗跑五步的距离,兔子跑三步的时间等于狗跑两步的时间,问狗跑_____步能追上兔子.

【答案】60

【分析】考点：猎狗追兔

兔子跑 9 步的距离等于狗跑 5 步的距离，而兔子跑 9 步的时间内狗能跑 6 步，原来狗和兔子的距离狗要跑 10 步，在兔子跑 9 步、狗跑 6 步的时间内，两只动物之间的距离缩短 $6-5=1$，即狗跑 1 步的距离，$10\div1=10$，狗要跑 $6\times10=60$ 步能追上兔子。

11. 把 1 到 200 这两百个自然数中,既不是 3 的倍数,又不是 5 的倍数的数从小排到大排成一排,其中第 100 个数是_____

【答案】187

【分析】考点：周期，数论

3 和 5 的最小公倍数是 15，1 到 15 中，既不是 3 的倍数，又不是 5 的倍数的数分别是：1、2、4、7、8、11、13、14，共有 8 个，所以以 8 个数为周期，$100\div8=12\cdots4$，所以，第 100 个数为 $12\times15+7=187$

12.黑板上一共写了 65 个数，包括 11 个 11，12 个 12，13 个 13，14 个 14，15 个 15，每次操作者都擦去其中 4 个不同的数并写上一个第 5 种数（如擦去 11,12,13,14,写上一个 15，或者是擦去 12,13,14,15,写上一个 11….），如果经过若干次操作后，黑板上恰好剩下两个数，这两数是_____.

【答案】12，14

【分析】考点：奇偶性

考虑奇偶性：黑板上有 3 种奇数，开始它们两两之间个数的差都是偶数，每做一次操作，可能的变化为：（1）3 种数各减少 1 个，则两两之间个数差不变；（2）1 种数增加 1 个，另 2 种数各减少 1 个，则两两之间个数的三个差中 1 个不变，2 个增大 2 或者减少 2；综上，3 种数两两之间个数的差奇偶性始终不曾变化，一直都是偶数。易知，操作结束后，3 种奇数至少有一种剩下 0 个，若最后剩下的两个数中存在奇数，则这两种奇数个数之差为 1，不为偶数。由上述讨论，可知剩下的数中不存在奇数。

黑板上有 2 种偶数，开始时它们个数的差是 2，每做一次操作，可能的变化为：（1）2 种数各减少 1 个，则个数差不变；（2）1 种数增加 1 个，另 1 种数各减少 1 个，则个数差增大 2 或者减少 2；

每一次操作，黑板上减少 3 个数，于是总共操作 $(65-2)\div3=21$ 次，在这 21 次操作中，39 个奇数全部消失，而对奇数操作 1 次，奇数减少 1 个；对偶数操作 1 次，奇数减少 3 个，于是，这 21 次操作中，对奇数操作了 12 次，对偶数操作了 9 次，于是，考虑黑板上两种偶数个数的差，对奇数操作的 12 次中，它们个数的差不变，对偶数操作的 9 次中，它们个数的差或者增大 2 或者减少 2，共变化 9 次，为奇数次，于是可知，操作结束后，它们个数的差会发生变化。开始时，这个差

为 2，而显然，最后之剩两个偶数，若这两个偶数相同，则个数差为 2，若这两个偶数不同，则个数差为 0，考虑到开始时为 2，结束时发生变化，所以结束时，黑板上所剩两个偶数不同，为 12、14

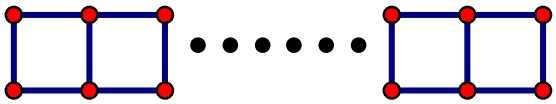
13.五个人比赛,每两个比一场,胜一场得 2 分,平一场得 1 分,负一场得 0 分;第一名没有平局,第二名没有输过,五个人得分各不相同,问每个人得分是_____.

【答案】6、5、4、3、2

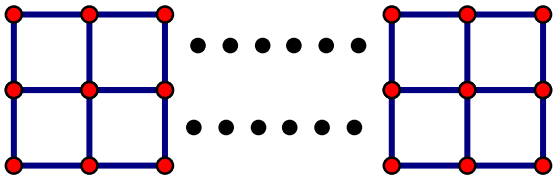
【分析】**考点：体育比赛中的逻辑推理**

5 个人比赛，赛制为单循环，故共比 $5\times4\div2=10$ 场分制为 2 分制，故总分为 $10\times2=20$ 分。第一名没有平局，故第一名的得分一定是偶数，每人赛了 4 场，故最多得 8 分，若第一名得 8 分，则必为全胜，于是他应胜过第二名，而第二名没有输过，矛盾，所以第一名不为 8 分，若第一名得 4 分，由于五人得分各不相同，则剩余四人得分只能是 3、2、1、0，五人总分为 10 分，与总分为 20 矛盾，所以第一名只能是三胜一负得 6 分，其中一负为负于第二名，由于五人得分各不相同，此时剩余四人得分最多为 5、4、3、2，此时五人总分恰为 20 分，这是五人总分的最高分，其他情况，五人总分只会比 20 分低，结合总分 20 分，所以五人得分分别为 6、5、4、3、2

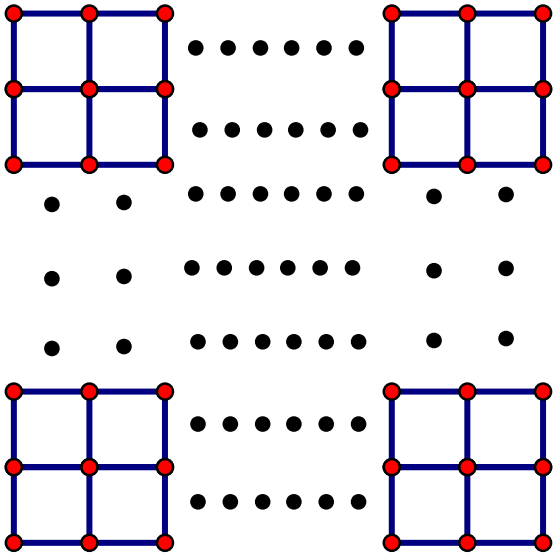
14.1000 多根棍子可以摆成图 1（一行的长方形）,也可以摆成图 2（二行的长方形）,还可以摆成图 3（正方形）的形状,都没有剩余,问棍子最少_____根.



图一



图二



图三

【答案】6、5、4、3、2

【分析】**考点：数列规律，余数**

设第一个图形为$1\times k$个小正方形，第二个图形为$2\times m$个小正方形，第三个图形为$n\times n$个小正方形，于是有$3k+1=5m+2=2n(n+1)$，即求一个大于1000的最小的数，这个数除以3余1，除以5余2，且能写成$2n(n+1)$的形式。首先，由$2n(n+1)$，这个数一定是偶数，且一定是4的倍数，再由，$5m+2$，这个数的末尾一定是2，再考虑最小，一次考察1002、1012、1022、1032、……，显然，1002是3的倍数，除以3余0，舍去。1012除以3余1，$1012=2^2\times11\times23=2\times22\times23$，符合要去，所以，最小的数是1012。

注：如果1012不能写成$2n(n+1)$的形式，那么下一个不用考虑1022和1032，由除以3余1，可直接考虑$1012+30=1042$、再下一个考虑1072……直到有符合题设要求的数为止。

15.所有三位回文数之和为_____.

【答案】**49500**

【分析】**考点：加乘原理，位值原理**

三位回文数中，只要百位与个位相等，十位取0到9都可以。于是，百位为1的回文数之和为$101\times10+10\times(0+1+2+\cdots+9)$，同理，百位为$a$的回文数之和为$a\times101\times10+10\times(0+1+2+\cdots+9)$，于是，三位回文数之和为

$101\times10\times(1+2+\cdots+9)+9\times10\times(0+1+2+\cdots+9)=49500$