第十三届“小机灵杯”数学竞赛决赛卷（四年级组）

2015年2月1日 11:00~12:00
时间：60分钟
总分：120分

第一部分（每题6分，共30分）

【第1题】
四个互不相同的正整数的乘积是231，则这四个数的和是_____。
【分析与解】
把231分解质因数：$231=3\times7\times11$;
所以把231拆成四个互不相同的正整数的乘积只能是$231=1\times3\times7\times11$;
则这四个数的和是$1+3+7+11=22$。

【第2题】
$86\times87\times88\times89\times90\times91\times92\div7$的余数是_____。
【分析与解】
（方法一）
因为$91=7\times13$是7的倍数;
所以$86\times87\times88\times89\times90\times91\times92$也是7的倍数;
即$86\times87\times88\times89\times90\times91\times92\div7$的余数是0。
（方法二）
连续n个自然数中，必有一个是n的倍数;
连续7个自然数中，必有一个是7的倍数。
故86~92中，必有一个是7的倍数;
则$86\times87\times88\times89\times90\times91\times92$也是7的倍数;
即$86\times87\times88\times89\times90\times91\times92\div7$的余数是0。

【第3题】
用四则运算符号及括号，对5、7、8、8这四个数进行四则运算，使所得结果是24。那么，这个四则运算的算式是_____。（列出一个即可）
【分析与解】
算24点:

$(7+8)\div5\times8=24$;

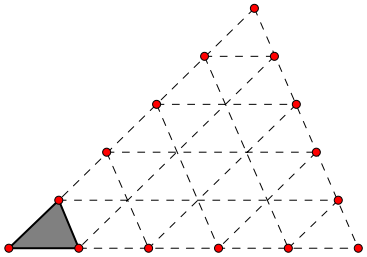
$(7-5)\times8+8=24$。

【第 4 题】

将一个三角形放在放大 5 倍的放大镜下看，周长是原三角形的 _____ 倍，面积是原三角形的 _____ 倍。

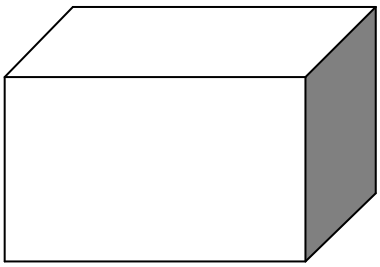
【分析与解】

将一个三角形放在放大 5 倍的放大镜下看，周长是原三角形的 5 倍，面积是原三角形的 $5^2=25$ 倍。



【第 5 题】

两条线段平行，构成一对平行线段。如图，在一个长方体的 12 条棱中，共有 _____ 对平行线段。



【分析与解】

长方体的 4 条长互相平行，有 $C_4^2=\dfrac{4\times3}{2\times1}=6$ 对平行线段；

同样地，长方体的 4 条宽互相平行，长方体的 4 条高互相平行；

共有 $6\times3=18$ 对平行线段。

第二部分（每题 8 分，共 40 分）

【第 6 题】

有以下两个数串：①1，3，5，7，…，2013，2015，2017；②1，4，7，10，…，2011，2014，2017。同时出现在这两个数串中的数共有 _____ 个。

【分析与解】

①1，3，5，7，…，2013，2015，2017；这些数 ÷2 余数 1；

②1，4，7，10，…，2011，2014，2017；这些数 ÷3 余数 1；

同时出现在这两个数串中的数既满足 ÷2 余数 1，又满足 ÷3 余数 1，即 ÷6 余 1；

同时出现在这两个数串中的数为 1，7，13，19，…，2011，2017；

同时出现在这两个数串中的数共有 $(2017-1)\div6+1=337$ 个。

【第 7 题】

一辆轿车油箱的容量为50升，加满油后由上海出发前往相距2560千米的哈尔滨。已知轿车每行驶100千米耗油8升，为保证行车安全油箱内至少应存油6升。那么，在去哈尔滨的途中至少需要加油 _____ 次。

【分析与解】

从上海到哈尔滨一共耗油 $2560\div100\times8=204\frac{4}{5}$ 升;

从加满油后最多可以耗油 $50-6=44$ 升就需要再次加油;

$204\frac{4}{5}\div44=4\frac{36}{55}$，进一法，得5次;

但这5次包括上海出发开始时加满油的一次;

所以在去哈尔滨的途中至少需要加油 $5-1=4$ 次。

【第 8 题】

已知 $x=\underbrace{222\cdots222}_{K个2}$，若 x 是198的倍数，那样的话，符合条件的最小的 K 的值是 _____ 。

【分析与解】

$x=\underbrace{222\cdots222}_{K个2}=\underbrace{111\cdots111}_{K个1}\times2$ 是 $198=2\times99$ 的倍数;

则只要 $\underbrace{111\cdots111}_{K个1}$ 是99的倍数;

根据99的整除特点，我们知道 $\underbrace{11+11+\cdots+11}_{9个11}=99$ 是99的倍数;

所以符合条件的最小的 K 的值是 $2\times9=18$ 。

【第 9 题】

小王、小李两人要加工数量相同的同一种零件，他们同时开工。已知小王每小时加工15个，每加工2小时后必须休息1小时；小李不间歇地工作，每小时加工12个。结果在某时刻两人恰好同时完工。小王加工零件 _____ 个。

【分析与解】

前2个小时，小王加工 $15\times2=30$ 个，小李加工 $12\times2=24$ 个;

前3个小时，小王加工 $15\times2=30$ 个，小李加工 $12\times3=36$ 个;

前5个小时，小王加工 $15\times4=60$ 个，小李加工 $12\times5=60$ 个;

之后每3小时，小王加工 $15\times2=30$ 个，小李加工 $12\times3=36$ 个，且小王加工的始终少于小李加工的;

因为在某时刻两人恰好同时完工;

所以小王加工零件60个。

【第 10 题】

学校三、四、五年级学生共100人参加植树活动，共植树566棵。已知三、四年级的人数相等，三年级学生平均每人植树4棵，四年级学生平均每人植树5棵，五年级学生平均每人植树6.5棵。三年级学生共植树 _____ 棵。

【分析与解】

（方法一）

如果100人都是五年级学生，那么共植树 $6.5\times100=650$ 棵；

比实际多植树 $650-566=84$ 棵；

把2名五年级学生换成1名三年级学生和1名四年级学生，就会少植树 $6.5\times2-4-5=4$ 棵；

三年级学生有 $84\div4=21$ 人；

三年级学生共植树 $4\times21=84$ 棵。

（方法二）

设三、四年级学生各有 x 人，五年级学生有 y 人；

$$\begin{cases}2x+y=100\\4x+5x+6.5y=566\end{cases}；\text{解得}\begin{cases}x=21\\y=58\end{cases}；$$

三年级学生共植树 $4\times21=84$ 棵。

第三部分（每题10分，共50分）

【第 11 题】

将6个灯泡排成一行，用○和●表示灯亮和灯不亮。如图是一行灯的五种情况，分别表示五个数字：1、2、3、4、5。那么○○○●○○表示的数是 _____ 。

● ● ● ● ● ○ 1
● ● ● ● ○ ● 2
● ● ● ● ○ ○ 3
● ● ● ○ ● ● 4
● ● ● ○ ● ○ 5

【分析与解】

二进制。

因为 $1=2^0$、$2=2^1$、$3=2^1+2^0$、$4=2^2$、$5=2^2+2^0$；

从左到右第1、2、3、4、5、6个灯对应 2^0、2^1、2^2、2^3、2^4、2^5，

即二进制中从左到右第1、2、3、4、5、6位；

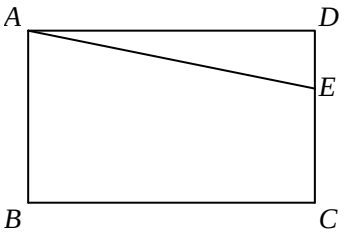
灯泡亮○表示该位为1，灯泡不亮●表示该位为0，

$$(111011)_2=(1\times2^5+1\times2^4+1\times2^3+0\times2^2+1\times2^1+1\times2^0)_{10}=(59)_{10}；$$

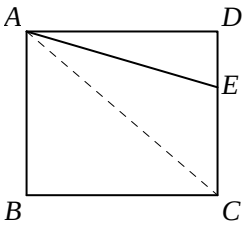
所以○○○●○○表示的数是59。

【第 12 题】

如图所示，长方形 $ABCD$ 中，$AD-AB=9$ 厘米，梯形 $ABCE$ 的面积是三角形 ADE 面积的 5 倍，三角形 ADE 的周长比梯形 $ABCE$ 的周长短 68 厘米。长方形 $ABCD$ 的面积是 _____ 平方厘米。



【分析与解】



联结 AC；

因为 $S_{梯形ABCE}=S_{\triangle ADE}\times 5$；所以 $S_{长方形ABCD}=S_{\triangle ADE}\times 6$；

因为 $S_{长方形ABCD}=S_{\triangle ADC}\times 2$；所以 $S_{\triangle ADC}=S_{\triangle ADE}\times 3$；所以 $DC=DE\times 3$，$DE:CE=1:2$；

三角形 ADE 的周长比梯形 $ABCE$ 的周长短 $AB+CE-DE=AB+AB\times\frac{2}{3}-AB\times\frac{1}{3}=AB\times\frac{4}{3}$，即短了 68 厘米；

$AB\times\frac{4}{3}=68$ 厘米，$AB=68\div\frac{4}{3}=51$ 厘米；

因为 $AD-AB=9$；所以 $AD=51+9=60$ 厘米；

$S_{长方形ABCD}=60\times 51=3060$ 平方厘米。

【第 13 题】

甲、乙两市相距 55 千米。小王同学从甲市出发去乙市，先骑车行了 25 千米，接着改乘大客车，速度提高了 1 倍。到达乙市后，他发现骑车所用的时间比乘车所用的时间多了 1 小时。小王同学骑车的速度是 _____ 千米/小时。

【分析与解】

甲、乙两市相距 55 千米，其中骑车行了 25 千米，乘车行了 $55-25=30$ 千米；

乘车的速度是骑车的速度的 2 倍；

则同样的时间，乘车的路程是骑车的路程的 2 倍；

那么乘车行了 30 千米，用同样的时间，骑车行了 $30\div 2=15$ 千米；

而骑车所用的时间比乘车所用的时间多了 1 小时；

骑车 1 小时走了 $25-15=10$ 千米；

小王同学骑车的速度是 $10\div 1=10$ 千米/小时。

【第 14 题】

毕达哥拉斯学派认为数是万物的本原，他们把1、3、6、10、…这样的数叫作三角数。那么把三角数从小到大排列，前100个三角数的总和是 _____ 。

【分析与解】

第 n 个三角数是 $1+2+\cdots+n=(1+n)\times n\div 2$；

所以前100个三角数的总和是

$$(1+1)\times 1\div 2+(1+2)\times 2\div 2+\cdots+(1+100)\times 100\div 2=(1\times 2+2\times 3+\cdots+100\times 101)\div 2$$

$$=\left[(1\times 2\times 3-0\times 1\times 2)\div 3+(2\times 3\times 4-1\times 2\times 3)\div 3+\cdots+(100\times 101\times 102-99\times 100\times 101)\div 3\right]\div 2$$

$$=(100\times 101\times 102-0\times 1\times 2)\div 3\div 2=100\times 101\times(102\div 3\div 2)=100\times 101\times 17=171700\text{。}$$

【第 15 题】

甲地到乙地有6条不同的路。小方第一天从甲地到乙地，然后从乙地返回甲地；第二天又从甲地去乙地，然后再返回甲地。小方每一次在从乙地返回甲地时都没有走过之前从甲地去乙地的路，那么小方这两天往返甲、乙两地共有 _____ 种不同的走法。

【分析与解】

(1)若第一、二天从甲地到乙地的路相同，

这两天从甲地到乙地的路有6种选择；

第一天从乙地返回甲地有5种；

第一天从乙地返回甲地有5种；

有 $6\times 5\times 5=150$ 种不同的走法；

(2)若第一、二天从甲地到乙地的路不同，

第一天从甲地到乙地有6种选择，第二天从甲地到乙地有5种选择；

第一天从乙地返回甲地有5种；

第一天从乙地返回甲地有4种；

有 $6\times 5\times 5\times 4=600$ 种不同的走法；

综上所述，小方这两天往返甲、乙两地共有 $150+600=750$ 种不同的走法。

更多杯赛信息敬请关注家长帮社区 http://jzb.com/bbs/sh/

家长帮 社区

上海学而思 外联竞赛部