第十三届“走进美妙的数学花园”青少年展示交流活动
趣味数学解题技能展示大赛初赛（上海决赛）
小学五年级试卷（B 卷）

2015 年 3 月 8 日　上午 10:45——12:15
满分 150 分

一、填空题（每小题 8 分，共 40 分）

【第 1 题】计算：$20150308=101\times\left(100000+24877\times\_\_\_\_\_\right)$

考点：整数计算
解析：

$$\begin{aligned}\left(20150308\div101-100000\right)\div24877&=\left(199508-100000\right)\div24877\\&=99508\div24877\\&=4\end{aligned}$$

【第 2 题】将 $\frac{2}{3}$，$\frac{5}{8}$，$\frac{15}{23}$，$\frac{10}{17}$ 按照从小到大顺序排列__________。

考点：分数比较大小
解析：

（解法一）先把分数化为小数形式：$\frac{2}{3}\approx0.666$，$\frac{5}{8}=0.625$，$\frac{15}{23}\approx0.652$，$\frac{10}{17}\approx0.588$

通过比较小数的大小，从小到大顺序排列为 $\frac{10}{17}<\frac{5}{8}<\frac{15}{23}<\frac{2}{3}$

（解法二）比较倒数

$\frac{2}{3}$，$\frac{5}{8}$，$\frac{15}{23}$，$\frac{10}{17}$ 的倒数分别为 $\frac{3}{2}$，$\frac{8}{5}$，$\frac{23}{15}$，$\frac{17}{10}$，通分后为 $\frac{45}{30}$，$\frac{48}{30}$，$\frac{46}{30}$，$\frac{51}{30}$

所以 $\frac{17}{10}>\frac{8}{5}>\frac{23}{15}>\frac{3}{2}$，倒数大的原分数反而小，所以 $\frac{10}{17}<\frac{5}{8}<\frac{15}{23}<\frac{2}{3}$

【第 3 题】 像 2，3，5，7 这样只能被 1 和自身整除的大于 1 的自然数叫做质数或素数。将 2015 分拆成 100 个质数之和，要求其中最大的质数尽可能小，那么这个最大质数是__________。

考点：质数合数
解析：要求最大的质数尽可能小，也就是当这 100 个数越接近越好。

$2015\div100=20\ldots15$

因此最大的质数再小也要比 20 大，比 20 大的最小的质数为 23.

$2015=23\times86+11\times1+2\times13$（2015 可以表示为 86 个 23、1 个 11、13 个 2 的和）

所以这个最大质数是 23.

【第 4 题】 质数就好像自然数的“建筑基石”，每一个自然数都能写成若干个质数（可以有相同的）的乘积，比如$4=2\times2$，$6=2\times3$，$8=2\times2\times2$，$9=3\times3$，$10=2\times5$等，那么，$5\times13\times31-2$写成这种形式为__

考点：分解质因数

解析：

$5\times13\times31-2=2015-2=2013$

$2013=3\times11\times61$

【第 5 题】“24 点游戏”是很多人熟悉的数学游戏，游戏过程如下：任意从 52 张扑克牌（不包括大小王）中抽取 4 张，用这 4 张扑克牌上的数字（$A=1$，$J=11$，$Q=12$，$K=13$）通过加减乘除四则运算得出 24，最先找到算法者获胜。游戏规定 4 张扑克牌都要用到，而且每张牌只能用 1 次，比如 2，3，4，Q 则可以由算法$(2\times Q)\times(4-3)$得到 24。

王亮在一次游戏中抽到了 4，4，7，7，经过思考，他发现，$\left(4-\frac{4}{7}\right)\times7=24$，我们将满足$\left(a-\frac{a}{b}\right)\times b=24$的牌组$\{a，a，b，b\}$称为“王亮牌组”，请再写出一组不同的“王亮牌组”____________________。

考点：24 点

解析：$\left(a-\frac{a}{b}\right)\times b=ab-a=a(b-1)=24$，所以 24 能被$a$整除，

所以a的可能取值为 1，2，3，4，6，8，12，24，对应的b的取值为 25，13，9，7，5，4，3，2

又因为a、b的取值范围为 1 至 13，

所以满足条件的“王亮牌组”有$\{2,2,13,13\}$、$\{3,3,9,9\}$、$\{4,4,7,7\}$（题目中已给出，不作答案）、$\{6,6,5,5\}$、$\{8,8,4,4\}$、$\{12,12,3,3\}$。

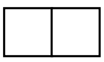
二、填空题（每小题 10 分，共 50 分）

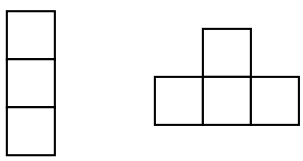
【第 6 题】用 2 个边长为单位长度的小正方形（单位正方形）可以构成 2—联方，这就是常说的多米诺，显然，经过平移、旋转、对称变换，能够重合的多米诺应该看成是同一个，因此，多米诺只有一个。

同理，用 3 个单位正方形构成的不同的 3—联方只有 2 个。

用 4 个单位正方形构成的不同的 4—联方有 5 个。

那么，用 5 个单位正方形构成的不同的 5—联方有________个。

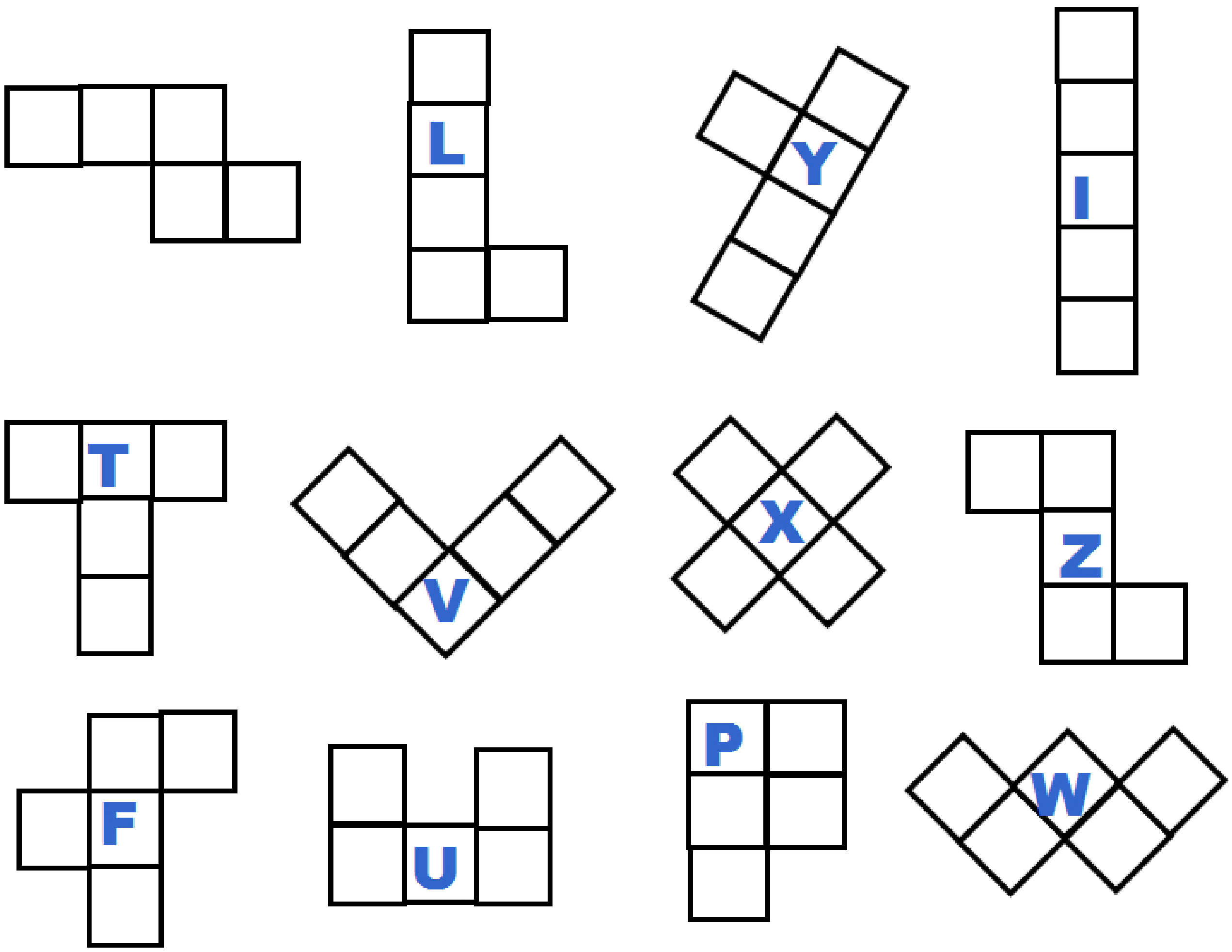
2—联方 

3—联方 

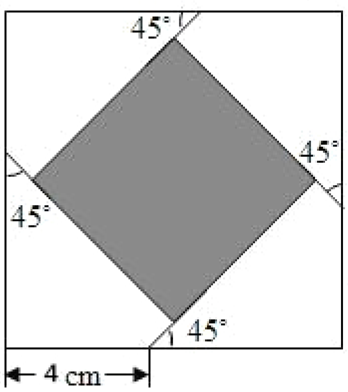
考点： 图形切拼割

解析： 用 5 个单位正方形构成的不同的 5—联方有 12 个

可以借助英文字母 F、I、L、P、T、U、V、W、X、Y、Z 直观形象记忆其中的 11 种。

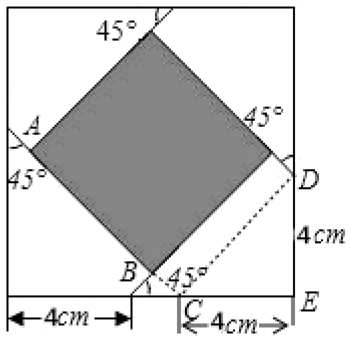


【第 7 题】如图所示，在边长为 15 厘米的正方形纸片从各顶点起 4 厘米处，沿着 45°角下剪，中间形成一个小正方形。这个小正方形的面积为__________（平方厘米）。



考点：勾股定理、组合图形面积
解析：

（解法一）



如图，延长小正方形的一边 AB，与大正方形的一边交于 C 点，连接 CD。

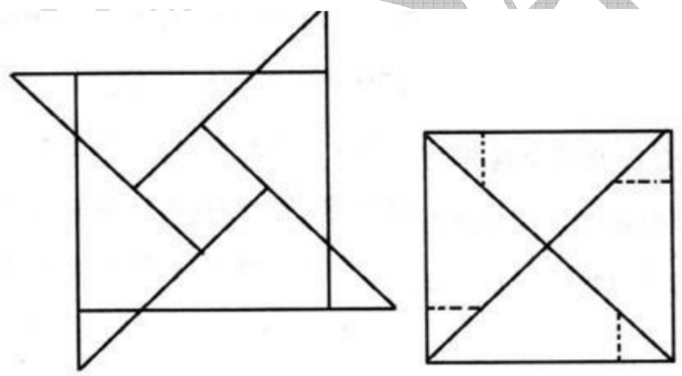
$\therefore \Delta CED$ 为直角边长为 4cm 的等腰直角三角形

$\therefore CD^2=CE^2+DE^2=4^2+4^2=32\left(cm^2\right)$

而 CD 等于小正方形的边长

$\therefore$ 阴影正方形的面积为 $32cm^2$

（解法二）

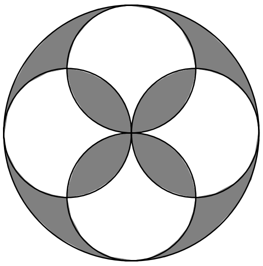


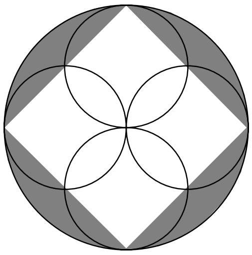
如图所示，在大正方形中有四个相同的图形，我们可以把它们缺的一角补上（左图），此时得到了四个相同的等腰直角三角形，且这个等腰直角三角形的斜边为 $15cm$，然后把这四个等腰直角三角形拼成一个正方形（右图），这个正方形的边长刚好为 $15cm$，恰好与原来的大正方形的边长一样。这说明补上的四个角，也就是直角边为 4 的四个等腰直角三角形的面积之和恰好等于中间阴影正方形的面积。

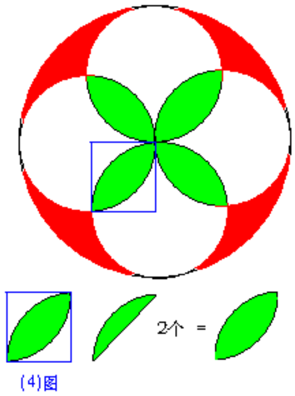
每个小等腰直角三角形的面积是 $4\times4\div2=8\left(cm^2\right)$

所以阴影正方形的面积为 $8\times4=32cm^2$

8. 【第 8 题】如图所示，已知大圆的半径为 2，则阴影部分的面积为_________（圆周率用 π 表示）。







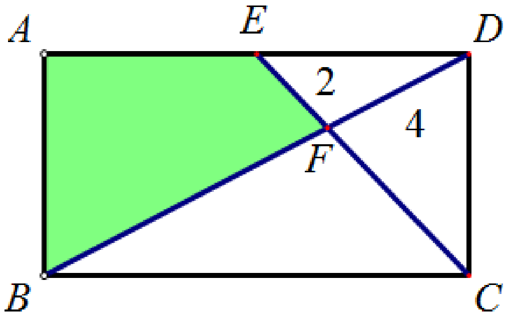
考点：园、组合图形的面积

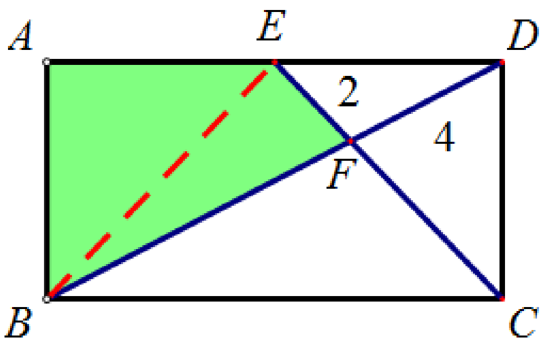
解析：可以把中间的四个叶子形状的图形分成两半，刚好可以补到正方形外边的空白处。

所以大圆的面积减去内接正方形的面积，就是阴影部分的面积。

$$S_{阴}=\pi\times2^2-\frac{4\times4}{2}=4\pi-8$$

【第 9 题】如图所示，已知长方形 $ABCD$ 中，ΔFDC 的面积为 4，ΔFDE 的面积为 2，则阴影四边形 $AEFB$ 的面积_________。





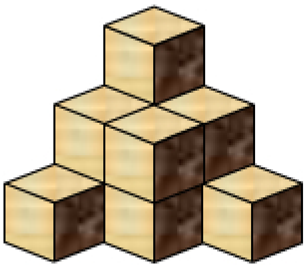
考点：蝴蝶定理、一半模型

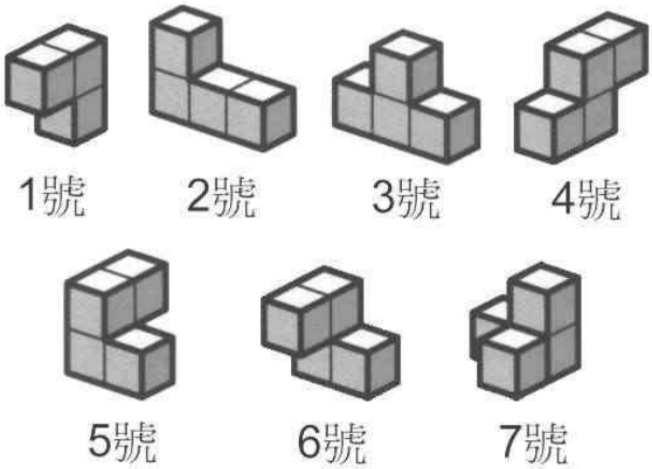
解析：连接 BE，由梯形蝴蝶定理可知，$S_{\Delta BEF}=S_{\Delta CDF}=4$，所以 $S_{\Delta BCF}=4\times4\div2=8$

所以 $S_{\Delta BCD}=4+8=12$，$S_{ABCD}=12\times2=24$

所以 $S_{AEFB}=24-2-4-8=10$

【第 10 题】索玛立方体是丹麦物理学家皮特·海音（Piet Hein）发明的 7 个小立方体组块（如图所示），如果假设这些小立方体的边长为 1，则利用这 7 个组块不仅可以组成一个3×3的立方体，还可以组成很多美妙的几何体。那么，要组成下面的几何体，需要用到的 3 个索玛立方体的编号是________。





考点：组合立体图形

解析：首先先确定目标图形需要多少块单位立方体（棱长为 1 的小立方体）。如左图所示，共需要 11 块。
索玛立方体的 1 号包含 3 块单位立方体，2 号至 7 号都是包含 4 块单位立方体，
而目标图形需要用到 3 个索玛立方体，只能是$11=3+4+4$，
所以 1 号必须选择。之后通过观察，发现 1 号、3 号、5 号或 1 号、3 号、6 号是成立的。（3 号放在最底层，且保持图中摆放的姿势，1 号放在 3 号的上面。）

三、填空题（每小题 **12** 分，共 **60** 分）

【第 11 题】一个自然数有 10 个不同的因数（即约数，指能够整除它的自然数），但质因数（即为质数的因数）只有 2 与 3。那么，这个自然数是__________。

考点：约数的个数

解析：设这个数为$2^a\times3^b$（a、b均为正整数），由题意可知$(a+1)\times(b+1)=10=2\times5$

所以$a=1$，$b=4$或$a=4$，$b=1$

所以这个自然数是$2^1\times3^4=162$或$2^4\times3^1=48$

【第 12 题】有 5 个自然数（允许有相等的），从其中任意选取 4 个数求和，可以而且只能得到 44，45，46，47，那么，原来的 5 个自然数分别是_________。

考点：不定方程、数论

解析：

设这 5 个自然数分别为a、b、c、d、e，设$m=a+b+c+d+e$
从其中任意选取 4 个数求和分别为$m-a$、$m-b$、$m-c$、$m-d$、$m-e$
当这 5 个数各不相同时，应该有 5 个不同的和，
而题目当中只能得到 4 个不同的和，说明这 5 个数中有两个是相等的。
假设$a>b>c>d$（e为重复的数），

则$\begin{cases} m-a=44 \\ m-b=45 \\ m-c=46 \\ m-d=47 \\ m-e=x \end{cases}$（其中$x$的可能取值为44、45、46、47）

将5个式子相加，可得$5m-(a+b+c+d+e)=44+45+46+47+x$

即$4m=182+x$
解之得，$x=46$，$m=57$
所以$a=13$，$b=12$，$c=e=11$，$d=10$

【第13题】如果两个自然数的积被9除余1，那么我们称这两个自然数互为“模9的倒数”。比如，$2\times5=10$，被9除余1，则2和5互为“模9的倒数”；$1\times1=1$，则1的“模9的倒数”是它自身。显然，一个自然数如果存在“模9的倒数”，则它的倒数并不是唯一的，比如，10就是1的另一个“模9的倒数”。判断1，2，3，4，5，6，7，8是否有“模9的倒数”，并将存在“模9的倒数”的数，以及它们相对应的最小的“模9的倒数”分别写出来________________________。
考点：余数问题
解析：当a、b满足$a\times b=9n+1$时，a、b互为“模9的倒数”（a、b、n均为自然数）
当$a=1$时，对应的最小的“模9的倒数”为1
当$a=2$时，对应的最小的“模9的倒数”为5
当$a=3$时，$a\times b=3b$，$3b$除以9的余数只能是0、3、6，所以3没有“模9的倒数”。
当$a=4$时，对应的最小的“模9的倒数”为7
当$a=5$时，对应的最小的“模9的倒数”为2
当$a=6$时，$a\times b=6b$，$6b$除以9的余数只能是0、3、6，所以6没有“模9的倒数”。
当$a=7$时，对应的最小的“模9的倒数”为4
当$a=8$时，对应的最小的“模9的倒数”为8

【第14题】我国南宋数学家杨辉在其《续古摘奇算法》上记载了这样一个问题：“二数余一，五数余二，七数余三，九数余四，问本数。”
用现代语言表述就是：“有一个数用2除余1，用5除余2，用7除余3，用9除余4，问这个数是多少？”请将满足条件的最小的自然数写在这里__________。
考点：中国剩余定理
解析：
（解法一）
先考虑除以5余2，除以7余3，除以9余4
用剩余定理得
5×7×______+5×9×______+7×9×______
5×7×5+5×9×1+7×9×4=472
[5, 7, 9]=315
故472±315k都符合除以5余2，除以7余3，除以9余4
最小是472−315=157，且也符合除以2余1。

（解法二）

除以 2 余 1 的数有：1，3，5，7，9，11，13，15，17，…；

除以 5 余 2 的数有：2，7，12，17…；

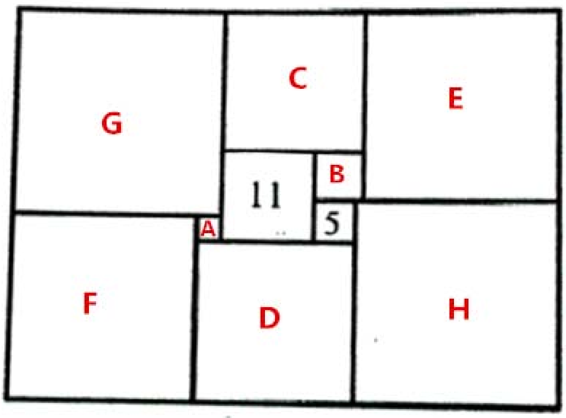
除以 7 余 3 的数有：3，10，17…；

所以满足“用 2 除余 1，用 5 除余 2，用 7 除余 3”的数的形式为 $[2,5,7]n+17=70n+17$（n 为自然数）

此时只需要找一个最小的 n，满足除以 9 余 4 即可

当 $n=2$ 时，满足除以 9 余 4，所以满足条件的最小的自然数为 $70\times2+17=157$

【第 15 题】如果一个长方形能够被分割为若干个边长不等的小正方形，则这个长方形成为完美长方形。已知下面的长方形是一个完美长方形，分割方法如图所示，其中小正方形中心的数字代表其边长，则图中没有标示边长的小正方形的边长按照从小到大的顺序分别为________。



考点：巧求周长

解析：用图中的字母代表该正方形的边长。

$B=11-5=6$

$C=11+6=17$

$E=6+17=23$

$H=23+(6-5)=24$

$D=24-5=19$

$A=19-5-11=3$

$F=19+3=22$

$G=22+3=25$

从小到大的顺序分别为 3、6、17、19、22、23、24、25

第十三届“走进美妙的数学花园”青少年展示交流活动
趣味数学解题技能展示大赛上海决赛
小学五年级（B 卷）