

## 第十四届“走进美妙的数学花园”上海决赛 试题解析（五年级组）

一、填空题（每小题8分，共40分）

1. 计算  $\frac{2}{1} \times \frac{2}{3} \times \frac{4}{3} \times \frac{4}{5} \times \frac{6}{5} \times \frac{6}{7} \times \frac{8}{7} =$  \_\_\_\_\_。（写成小数形式，精确到小数点后两位。）

知识点：计算，近似值

新舟同类型题目：2016春季五精第一讲例题6：

$$\left(1 + \frac{1}{2}\right) \times \left(1 - \frac{1}{2}\right) \times \left(1 + \frac{1}{3}\right) \times \left(1 - \frac{1}{3}\right) \times \cdots \times \left(1 + \frac{1}{48}\right) \times \left(1 - \frac{1}{48}\right) \times \left(1 + \frac{1}{49}\right) \times \left(1 - \frac{1}{49}\right) =$$

解析：

约分后变为： $\frac{2^{11}}{5^2 \times 7^2} = 2^{11} \div (5^2 \times 7^2) = 1.67183\dots$

保留两位小数后，答案为1.67。

难度系数：☆

2. 1角硬币的正面与反面如图所示，拿三个1角硬币一起投掷一次，得到两个正面一个反面的概率为\_\_\_\_\_。



知识点：概率问题，排列组合类型

解析：

三个硬币投掷一次，每个硬币都有正反两种情况，所以一共  $2 \times 2 \times 2 = 8$  种，两个正面一个反面的可能有  $C_3^1 = 3$  种，

概率为： $3 \div 8 = \frac{3}{8}$ 。

难度系数：☆☆

3. 大于0的自然数,如果满足所有因数之和等于它自身的2倍,则这样的数称为完美数或完全数。比如,6的所有因数为1,2,3,6,  $1+2+3+6=12$  6就是最小的完美数。是否存在无限多个完美数的问题至今仍然是困扰人类的难题之一。研究完美数可以从计算自然数的所有因数之和开始,8128的所有因数之和为\_\_\_\_\_。

知识点:数论,约数和

新舟同类型题目:2016春季四超第二讲例题7:360有( )个约数,所有约数的和是( )。

解析:

分解质因数为:  $8128=2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 127=2^6 \times 127$ ;

约数和为:  $(2^0+2^1+2^2+2^3+2^4+2^5+2^6) \times (127^0+127^1) = (1+2+4+8+16+32+64) \times (1+127) = 16256$ 。

难度系数:☆☆

4. 某大型会议上,要从小张、小赵、小李、小罗、小王五名志愿者中选派四人分别从事翻译、导游、礼仪、司机四项不同工作,若其中小张、小赵只能从事前两项工作,其余三人均能从事这四项工作,则不同的选派方案共有\_\_\_\_\_种。

知识点:排列组合

新舟同类型题目:2015暑假五超第八讲例题4:4名男生,5名女生,全体排成一行,问下列情形各有多少种不同的排法:

- (1)甲不在中间也不在两端;
- (2)甲、乙两人必须排在两端;
- (3)男、女生分别排在一起;
- (4)男女相间。

解析:

情况一:小赵和小张都参加工作:他们的选择有2种,剩余3人中选两个参加工作,有  $A_2^2 \times A_3^2 = 12$  种;

情况二:小赵或小张中一个参加工作:两个人中选一个有两种选法,每个人可以在两项工作中选一个,也有两种选法,共  $2 \times 2 = 4$  种,剩余3个人选三个参加工作,有  $A_3^3 = 6$  种,共  $4 \times 6 = 24$  种,总数  $12 + 24 = 36$  种。

难度系数:☆☆

5. 将从1开始到25的连续的自然数相乘, 得到 $1 \times 2 \times 3 \times \dots \times 25$ , 记作 $25!$  (读作25的阶乘)。用3除 $25!$ , 显然, $25!$ 被3整除, 得到一个商; 再用3除这个商,  $\dots$ , 这样一直用3除下去, 直到所得的商不能被3整除为止, 那么, 在这个过程中3整除了\_\_\_\_\_次。

知识点: 整除, 约数

新舟同类型题目: 2016春季五超第二讲练习6:  $N = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times \dots \times 100$  用 $N$ 除以12, 最多可以除多少次后商还是整数?

解析:

等同于计算 $25!$ 有多少个因数3;

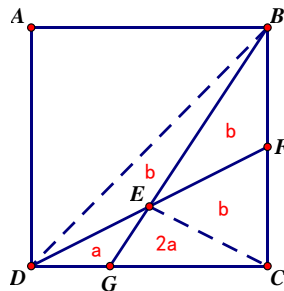
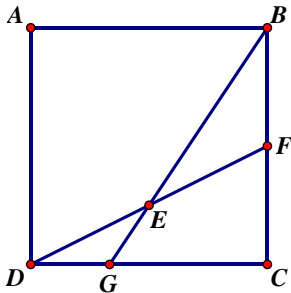
3的倍数:  $[25 \div 3] = 8$  (个), 9的倍数 $[8 \div 3] = 2$  (个)

因数3共有:  $8 + 2 = 10$  (个), 那么3整除了10次。

难度系数: ☆☆☆

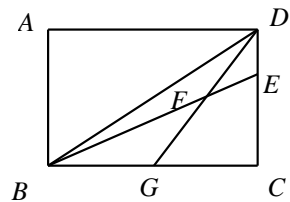
二、填空题 (每小题10分, 共50分)

6. 如图已知正方形 $ABCD$ 中,  $F$ 是 $BC$ 边的中点,  $GC = 2DG$ ,  $E$ 是 $DF$ 与 $BG$ 的交点。四边形 $ABED$ 的面积与正方形 $ABCD$ 的比是 5:8。



知识点: 燕尾, 等积变形

新舟同类型题目: 2015暑假五超第十二讲练习4: 如图, 在长方形 $ABCD$ 中,  $CE = 2DE$ ,  $G$ 是 $BC$ 的中点,  $DG = 12$ 厘米, 那么 $DF =$ \_\_\_\_\_厘米。



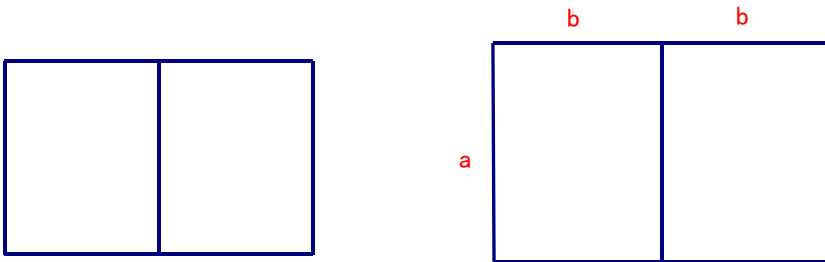
解析:

连结 $BD, CE$ , 设三角形 $DEG$ 面积为 $a$ ,  $CG = 2DG$ , 则三角形 $EGC$ 面积为 $2a$ , 设三角形 $ECF$ 面积为 $b$ , 由 $BF = CF$ , 则三角形 $EFB$ 面积为 $b$ , 由燕尾模型, 因为 $CG = 2DG$ , 所以三角形 $BDE$ 面积为 $b$ , 同样由燕尾模型, 由于 $BF = CE$ , 所以三角形 $BDE$ 面积等于三角形 $EDC$ 面积, 所以 $b = 3a$ , 由此得正方形面积为 $24a$ , 四边形 $ADEB$ 面积为 $15a$ ;

所以面积比为 $15a : 24a = 5 : 8$ 。

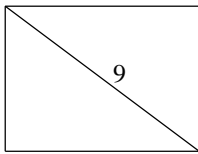
难度系数：☆☆☆

7. 如图所示，将一张A4纸沿着长边的2个中点对折，将得到2个小长方形，小长方形的长与宽之比与A4纸相同。如果设A4纸的长为29.7厘米，那么，以A4纸的宽为边长的正方形面积为\_\_\_\_\_平方厘米（精确到小数点后一位）。



知识点：比例，小数计算，小数的近似值

新舟同类型题目：2015暑假五超第十三讲例题1：如图所示，已知长方形的长是宽的2倍，对角线的长是9，则长方形的面积是\_\_\_\_\_。



解析：

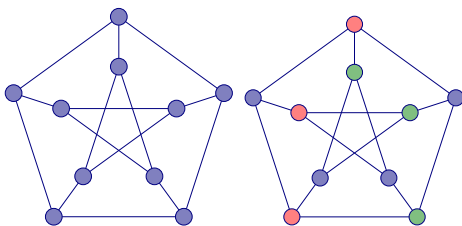
两个长方形长宽比相同，所以  $b:a = a:2b$ ，所以  $a^2 = 2b^2$ ， $2b = 29.7\text{cm}$ ， $2b^2 = 29.7 \times 29.7 \div 2 = 441.045\text{cm}^2$

由于要求精确到小数点后一位，所以答案应为：441.0

注：441为错误答案，保留一位小数概念不清

难度系数：☆☆☆

8. 由一些顶点和边构成的图形称为一个图，对一个图用不同的颜色给顶点染色，要求具有相同的边的两个顶点染不同的颜色，称为图的点染色，图的点染色通常要研究的问题是完成染色所需要的最少颜色数，这个数称为图的色数。下面的图称为皮特森图，皮特森图的色数为\_\_\_\_\_。



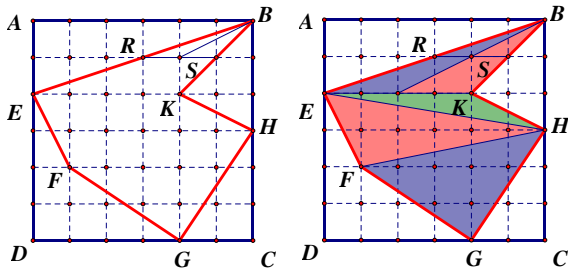
知识点：染色问题

解析：

这个图形的外围5个顶点，至少需要三种颜色才能做到有公共线段的两点颜色不同；所以，至少需要三种颜色，用三种颜色涂各点可得如上图，所以，皮特森图的色数为3。

难度系数：☆☆

9. 在平面上，用边长为1的单位正方形构成正方形网格，顶点都落在单位正方形的顶点（又称为格点）上的简单多边形叫做格点多边形。最简单的格点多边形是格点三角形，而除去三个顶点之外，内部或边上不含格点的格点三角形称为本原格点三角形，如右图所示的格点三角形  $BRS$ 。每个格点多边形都能够很容易地划分为若干个本原格点三角形。那么，右图中的格点六边形  $EFGHKB$  可划分为\_\_\_\_\_个本原格点三角形。



知识点：格点与面积

解析：

令一个小正方形的面积为1，则最小本原格点三角形的面积为0.5

题目中的区域面积为18，所以，最多可以划分为  $18 \div 0.5 = 36$  个本原格点三角形

最少可以划分为5个本原格点三角形。

最少情况如上图：

难度系数：☆☆☆

10. 在放置有若干小球的一排木格中，甲乙两人轮流移动小球，移动规则为：每个人每次可以选择某一木格中的任意数目的小球，并将其移动到该木格右边紧邻的那一木格中；当所有小球全部移动到最右端的木格中时，游戏结束，移动最后一个小球的一方获胜。

面对如图所示的局面（每个木格中的数字代表小球的数目，木格下方的数字表示木格编号），先手有必胜策略，那么，为确保获胜，先手第一步应该移动\_\_\_\_\_号木格中的\_\_\_\_\_个小球。

5	6	7	
3	2	1	0

知识点：策略性问题

解析：

这个游戏的题的策略是奇数性的利用

只要取成3号格和1号格里的球数相同即可确保获胜。

所以，要确保获胜，先手必须将1号格中的2个小球移入0号格。

后手无论怎么移，都会导致这两格球数不一样，先手只须保持两格一样即可最后获胜。

难度系数：☆☆☆☆

11.  $m, n$  是两个自然数, 满足  $26019 \times m - 649 \times n = 118$ , 那么  $m =$  \_\_\_\_\_,  $n =$  \_\_\_\_\_。

知识点: 整除, 不定方程

解析:

左右同时约去 59, 原式变为:  $441m - 11n = 2$

解方程得:  $n = (441m - 2) / 11$ , 解得  $m = 11k + 2$  时,  $n = 441k + 80$

所以最小值为  $m = 2, n = 80, m$  可以为所有除以 11 余 2 的自然数

难度系数: ☆☆

12. 以下由 1、2 构成的无穷数列有个有趣的特征, 从第一项开始, 把数字相同的项合成一个组, 再按照顺序将每组的项数写下来, 则这些数构成的无穷数列恰好是它自身。这个数列被称为库拉库斯基数列。按照这个特征, 继续写出这个数列后 8 项 \_\_\_\_\_ (从第 14 项到第 21 项), 如果已知这个数列的前 50 项的和为 75, 第 50 项为 2, 则可知道第 73 项、74 项、第 75 项、第 76 项分别 \_\_\_\_\_

知识点: 按规律填数, 奇偶性

解析:

把两列数列上下写成两排

前一问可以根据规律填出:

122112122122112112212.....

1221121221221.....

所以第 14 项到第 21 项是 12112212

如果前 50 项全部为 1, 则和应该是 50, 现在和为 75, 说明有 25 个 2, 每一个 2 意味着上面一列多一个数, 现在在 25 个, 说明第 50 个数 2 对应的数字是上排第 74, 75 个, 所以第 73, 74, 75, 76 四个数字形如 *abba*

因为下排每增加一个数字, 意味着上排对应数字改变一次奇偶性, 如下排第二个数字为 2, 对应上排数字从 1 变成 2, 下排第二个数字 2, 对应上排数字改变为 1, ..... 依次类推, 下排第 50 个, 意味着对应数字改变了 49 次奇偶性, 所以奇偶性和第一个不同, 第一个是 1, 所以 74, 75 个数字为 2, 所以 73~76 数字为 1221。

难度系数: ☆☆☆☆

13. 不全为零的两个自然数的公因数中的最大者，称作这两个数的最大公因数，如果不全为2个自然数的最大公因数为1，则称这两个数称为互素的或互质的，比如，2与3互素，3与8互素；12与15不是互素的，因为它们的最大公因数是3。不超过81的自然数中，有 \_\_\_\_个数与81互素。

知识点：数论，质数合数，互质的概念

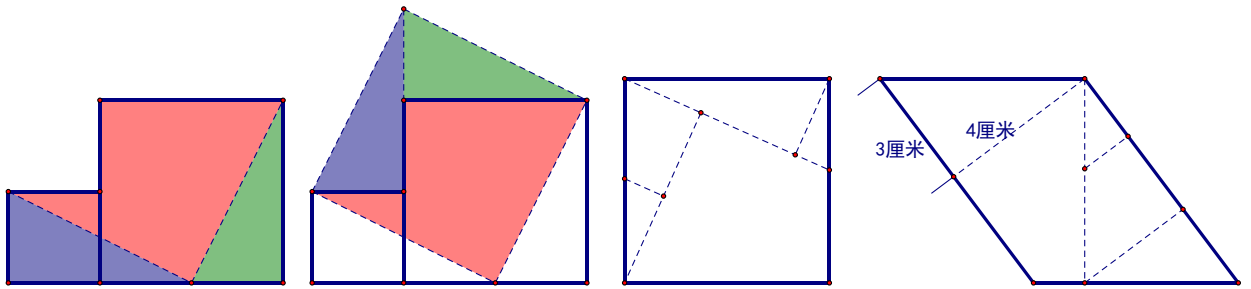
解析：

$81=3^4$ ，81只存在质因数3，所以所有含有因数3的数，不和81互质， $81 \div 3 = 27$ ，不大于81的，含有3的因数的数有27个，剩下的数都和81互质， $81 - 27 = 54$ 个。

难度系数：☆☆

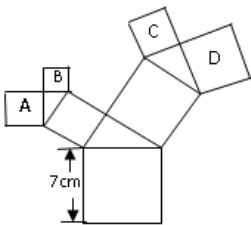
14. 任何一个直角三角形都有这样的性质：以两个直角边为边长的正方形的面积之和等于以斜边为边长的正方形的面积。这就是著名的勾股定理，在西方又被称为毕达哥拉斯定理。勾股定理有着悠悠4000年的历史，出现了数百个不同的证明，魏晋时期的中国古代数学家刘徽给出了如下左图所示的简洁而美妙的证明方法，如下右图则是以这个方法为基础设计的刘徽模式勾股拼图板：

刘徽模式勾股拼图板的5个组块，还可以拼成一个如右图所示的平行四边形，如果其中的直角边分别为3厘米与4厘米，那么，这个平行四边形的周长为 \_\_\_\_\_ 厘米



知识点：勾股定理

新舟同类型题目：2015暑假五超第十三讲例题2：如图，三角形ABC的面积是1，E是AC的中点，所有四边形都是正方形，所有的三角形都是直角三角形，其中最大的正方形的边长为7cm，则正方形A，B，C，D的面积之和为 \_\_\_\_\_  $cm^2$ 。

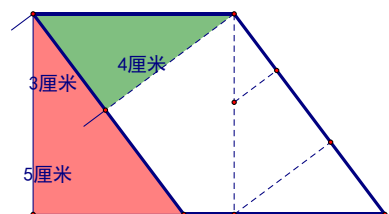


解析：

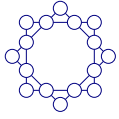
平行四边形的上下底长为5，下图红绿两个三角形是一样的，

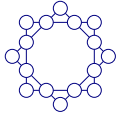
边长之比是4:5，其斜边长是 $5 \div 4 \times 5 = 6.25$  厘米，

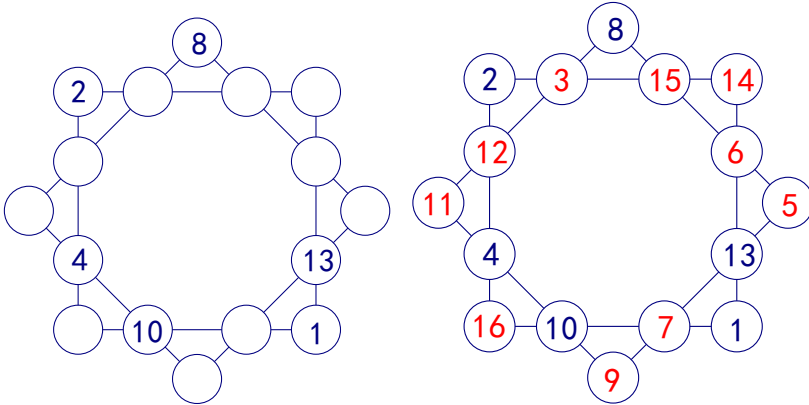
所以平行四边表周长是： $(5 + 6.25) \times 2 = 22.5$  厘米。



难度系数：☆☆☆

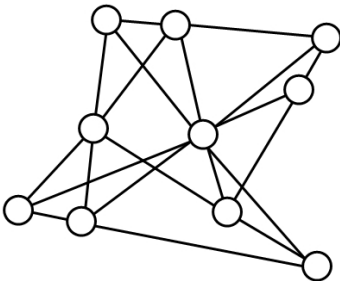


15. 在  的圆圈中填入1到16的自然数（每一个数用而且只能用一次），使连接在同一直线上的4个圆圈中的数字之和都相等，这称为一个8阶幻星图，这个相等的数称为8阶幻星图的幻和为\_\_\_\_\_，并继续完成以下8阶幻星图。



知识点：数阵图

新舟同类型题目：2015秋季五超第六讲练习7：（第十四届“中环杯”小学生思维能力训练活动五年级初赛）将0~9填入下图圆圈中，每个数字只能使用一次，使得，每条线段上的数字和都是13。



解析：每个数字都在两条线上，共有8条线，那么，共有8个幻和，且每个数字都重复两次；  
所以根据万能公式得：幻和 $\times 8 = (1 + 2 + 3 + \dots + 36) \times 2$ ；幻和 $= (1 + 2 + \dots + 16) \times 2 \div 8 = 34$ ；  
填完成后图形如上图：

难度系数：☆☆☆

感谢张培老师、陈银波老师、孙懿欧老师、孙梦思老师、岳娟老师、倪淑娴老师、葛亚宁老师、鲁林林老师、杨依春老师