南通市2023届高三第一次调研测试

数学

本试卷共6页，22小题，满分150分．考试用时120分钟．

注意事项：

1. 答卷前，考生务必将自己的姓名、考生号、考场号和座位号填写在答题卡上，将条形码横贴在答题卡“条形码粘贴处”
2. 作答选择题时，选出每小题答案后，用2B铅笔在答题卡上对应题目选项的答案信息点涂黑；如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案．答案不能答在试卷上
3. 非选择题必须用黑色字迹的钢笔或签字笔作答，答案必须写在答题卡各题目指定区域内相应位置上；如需改动，先划掉原来的答案，然后再写上新答案；不准使用铅笔和涂改液．不按以上要求作答无效．
4. 考生必须保持答题卡的整洁．考试结束后，将试卷和答题卡一并交回

一、选择题．本题共8小题，每小题5分，共40分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的．

1. 已知集合 $A=\{x|1\leqslant x\leqslant 3\}$，$B=\{x|2<x<4\}$，则 $A\cap B=$（　　）

A. $(2,3]$　　B. $[1,4)$　　C. $(-\infty,4)$　　D. $[1,+\infty)$

2. 已知向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 满足 $|\boldsymbol{a}|=1$，$|\boldsymbol{b}|=2$，$\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=\dfrac{2\pi}{3}$，则 $\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=$（　　）

A. -2　　B. -1　　C. 0　　D. 2

3. 在复平面内，复数 z_1，z_2 对应的点关于直线 $x-y=0$ 对称，若 $z_1=1-\mathrm{i}$，则 $|z_1-z_2|=$（　　）

A. $\sqrt{2}$　　B. 2　　C. $2\sqrt{2}$　　D. 4

4. 2022年神舟接力腾飞，中国空间站全面建成，我们的“太空之家”遨游苍穹．太空中飞船与空间站的对接，需要经过多次变轨．某飞船升空后的初始运行轨道是以地球的中心为一个焦点的椭圆，其远地点(长轴端点中离地面最远的点)距地面 S_1，近地点(长轴端点中离地面最近的点)距地面 S_2，地球的半径为 R，则该椭圆的短轴长为（　　）

A. $\sqrt{S_1S_2}$　　B. $2\sqrt{S_1S_2}$　　C. $\sqrt{(S_1+R)(S_2+R)}$　　D. $2\sqrt{(S_1+R)(S_2+R)}$

5. 已知 $\sin\left(\alpha-\dfrac{\pi}{6}\right)+\cos\alpha=\dfrac{3}{5}$，则 $\cos\left(2\alpha+\dfrac{\pi}{3}\right)=$（　　）

A. $-\dfrac{7}{25}$　　B. $\dfrac{7}{25}$　　C. $-\dfrac{24}{25}$　　D. $\dfrac{24}{25}$

6. 已知随机变量 X 服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$，有下列四个命题：

甲：$P(X>m+1)>P(X<m-2)$；

乙：$P(X>m)=0.5$；

丙：$P(X\leqslant m)=0.5$；

丁：$P(m-1<X<m)<P(m+1<X<m+2)$

如果只有一个假命题，则该命题为（　　）

A. 甲　　B. 乙　　C. 丙　　D. 丁

7. 已知函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$，且 $f(2x+1)$ 为偶函数，$f(x)=f(x+1)-f(x+2)$，若 $f(1)=2$，则 $f(18)=$（　　）

A. 1　　B. 2　　C. -1　　D. -2

8. 若过点 $P(t,0)$ 可以作曲线 $y=(1-x)\mathrm{e}^x$ 的两条切线，切点分别为 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，则 y_1y_2 的取值范围是

(　　)

A. $(0,4e^{-3})$　　B. $(-\infty,0)\cup(0,4e^{-3})$　　C. $(-\infty,4e^{-2})$　　D. $(-\infty,0)\cup(0,4e^{-2})$

二、多选题：本题共4小题，每小题5分，共20分．在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求．全部选对的得5分，部分选对的得2分，有选错的得0分．

9. 在棱长为2的正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中，AC与BD交于点O，则（　　）

A. AD_1∥平面BOC_1　　B. $BD\perp$平面COC_1

C. C_1O与平面$ABCD$所成的角为45°　　D. 三棱锥$C-BOC_1$的体积为$\frac{2}{3}$

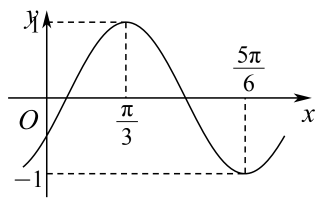
10. 函数$f(x)=\sin(\omega x+\varphi)\left(\omega>0,|\varphi|<\frac{\pi}{2}\right)$的部分图象如图所示，则（　　）

A. $\omega=2$

B. $\varphi=\frac{\pi}{6}$

C. $f(x)$的图象关于点$\left(\frac{\pi}{12},0\right)$对称

D. $f(x)$在区间$\left(\pi,\frac{5\pi}{4}\right)$上单调递增



11. 一个袋中有大小、形状完全相同的3个小球，颜色分别为红、黄、蓝．从袋中先后无放回地取出2个球，记"第一次取到红球"为事件A，"第二次取到黄球"为事件B，则（　　）

A. $P(A)=\frac{1}{3}$　　B. A，B为互斥事件　　C. $P(B\mid A)=\frac{1}{2}$　　D. A，B相互独立

12. 已知抛物线$x^2=4y$的焦点为F，以该抛物线上三点A，B，C为切点的切线分别是l_1，l_2，l_3，直线l_1，l_2相交于点D，l_3与l_1，l_2分别相交于点P，Q．记A，B，D的横坐标分别为x_1，x_2，x_3，则（　　）

A. $\overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{DB}=0$　　B. $x_1+x_2=2x_3$　　C. $|AF|\cdot|BF|=|DF|^2$　　D. $|AP|\cdot|CQ|=|PC|\cdot|PD|$

三、填空题：本题共4小题，每小题5分，共20分．

13. 已知函数$f(x)=\begin{cases}1+\log_2(2-x),x<1,\\2^{x-1},x\geqslant 1,\end{cases}$则$f(f(-2))=$______．

14. 写出一个同时满足下列条件①②的等比数列$\{a_n\}$的通项公式$a_n=$______．

①$a_na_{n+1}<0$；②$|a_n|<|a_{n+1}|$

15. 已知圆O:$x^2+y^2=r^2(r>0)$，设直线$x+\sqrt{3}y-\sqrt{3}=0$与两坐标轴的交点分别为A，B，若圆O上有且只有一个点P满足$|AP|=|BP|$，则r的值为______．

16. 已知正四棱锥$S-ABCD$的所有棱长都为1，点E在侧棱SC上，过点E且垂直于SC的平面截该棱锥，得到截面多边形Γ，则Γ的边数至多为______，Γ的面积的最大值为______．（第一空2分，第二空3分）

四、解答题：本题共6小题，共70分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．

17. (10分) 在①S_1，S_2，S_4成等比数列，②$a_4=2a_2+2$，③$S_8=S_4+S_7-2$这三个条件中任选两个，补充在下面问题中，并完成解答

已知数列$\{a_n\}$是公差不为0的等差数列，其前n项和为S_n，且满足______，______．

(1) 求$\{a_n\}$的通项公式；

(2) 求$\frac{1}{a_1a_2}+\frac{1}{a_2a_3}+\frac{1}{a_3a_4}+\cdots+\frac{1}{a_na_{n+1}}$

注：如果选择多个方案分别解答，按第一个方案计分。

18. (12 分) 第二十二届卡塔尔世界杯足球赛 (FIFAWorldCupQatar2022) 决赛中，阿根廷队通过扣人心弦的点球大战战胜了法国队．某校为了丰富学生课余生活，组建了足球社团．足球社团为了解学生喜欢足球是否与性别有关，随机抽取了男、女同学各 100 名进行调查，部分数

	喜欢足球	不喜欢足球	合计
男生		40	
女生	30		
合计			

(1) 根据所给数据完成上表，并判断是否有 99.9% 的把握认为该校学生喜欢足球与性别有关？

(2) 社团指导老师从喜欢足球的学生中抽取了 2 名男生和 1 名女生示范点球射门．已知男生进球的概率为 $\frac{2}{3}$，女生进球的概率为 $\frac{1}{2}$，每人射门一次，假设各人射门相互独立，求 3 人进球总次数的分布列和数学期望．

附：$K^2=\dfrac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$

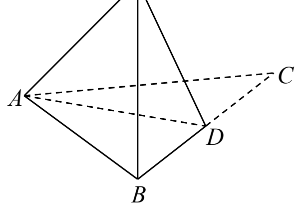
$P(K^2\geqslant k)$	0.050	0.010	0.001
k	3.841	6.635	10.828

19. (12 分) 在 $\triangle ABC$ 中，A，B，C 的对边分别为 a，b，c，$a\cos B-2a\cos C=(2c-b)\cos A$

(1) 若 $c=\sqrt{3}a$，求 $\cos B$ 的值；

(2) 若 $b=1$，$\angle BAC$ 的平分线 AD 交 BC 于点 D，求 AD 长度的取值范围．

20. (12 分) 如图，在 $\triangle ABC$ 中，AD 是 BC 边上的高，以 AD 为折痕，将 $\triangle ACD$ 折至 $\triangle APD$ 的位置，使得 $PB\perp AB$．



(1) 证明：$PB\perp$ 平面 ABD；

(2) 若 $AD=PB=4$，$BD=2$，求二面角 $B-PA-D$ 的正弦值．

21. (12 分) 已知双曲线 C：$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的左顶点为 A，过左焦点 F 的直线与 C 交于 P，Q 两点．当 $PQ\perp x$ 轴时，$|PA|=\sqrt{10}$，$\triangle PAQ$ 的面积为 3．

(1) 求 C 的方程；

(2) 证明：以 PQ 为直径的圆经过定点．

22. (12 分) 已知函数 $f(x)=\dfrac{x}{ae^{x-1}}$ 和 $g(x)=\dfrac{a+\ln x}{x}$ 有相同的最大值．

(1) 求实数 a；

(2) 设直线 $y=b$ 与两条曲线 $y=f(x)$ 和 $y=g(x)$ 共有四个不同的交点，其横坐标分别为 x_1，x_2，x_3，$x_4(x_1<x_2<x_3<x_4)$，证明：$x_1x_4=x_2x_3$．

2023届高三第一次调研测试

数学

答案与解析

一、选择题．本题共8小题，每小题5分，共40分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的．

1.【答案】A

【解析】$A\cap B=\{x\mid 2<x\leqslant 3\}$，选$A$．

2.【答案】C

【解析】$\boldsymbol{a}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\boldsymbol{a}^2+\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=1+1\times 2\times\left(-\dfrac{1}{2}\right)=0$，选$C$．

3.【答案】B

【解析】$z_1=1-\mathrm{i}$，z_1，z_2对应的点关于$x=y$对称，$z_2=-1+\mathrm{i}$，

$|z_1-z_2|=|2-2\mathrm{i}|=2\sqrt{2}$，选$B$

4.【答案】D

【解析】$a+c=S_1+R$，$a-c=S_2+R$，$b^2=a^2-c^2=(S_1+R)(S_2+R)$，$b=\sqrt{(S_1+R)(S_2+R)}$，$2b=2\sqrt{(S_1+R)(S_2+R)}$，选$D$．

5.【答案】B

【解析】$\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin\alpha-\dfrac{1}{2}\cos\alpha+\cos\alpha=\dfrac{3}{5}$，$\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin\alpha+\dfrac{1}{2}\cos\alpha=\dfrac{3}{5}$，

$\sin\left(\alpha+\dfrac{\pi}{6}\right)=\dfrac{3}{5}$，$\cos\left(2\alpha+\dfrac{\pi}{3}\right)=\cos 2\left(\alpha+\dfrac{\pi}{6}\right)=1-2\sin^2\left(\alpha+\dfrac{\pi}{6}\right)=1-2\times\dfrac{9}{25}=\dfrac{7}{25}$，

选B．

6.【答案】D

【解析】乙、丙一定都正确，则$\mu=m$，$P(X>m+1)=P(X<m-1)>P(X<m-2)$，

甲正确，$\therefore$丁错，选D．

7.【答案】A

【解析】$f(2x+1)$为偶函数，则$f(x)$关于$x=1$对称，$f(x)=2\sin\left(\dfrac{\pi}{3}x+\dfrac{\pi}{6}\right)$关于$x=1$对称，$f(x)+f(x+2)=2\sin\left(\dfrac{\pi}{3}x+\dfrac{\pi}{6}\right)+2\sin\left[\dfrac{\pi}{3}(x+2)+\dfrac{\pi}{6}\right]$

$=2\left[\sin\left(\dfrac{\pi}{3}x+\dfrac{\pi}{6}\right)+\sin\left(\dfrac{\pi}{3}x+\dfrac{5}{6}\pi\right)\right]$

$=2\left[\sin\dfrac{1}{3}\pi\cos\dfrac{\pi}{6}+\cos\dfrac{\pi}{3}\sin\dfrac{\pi}{6}+\sin\dfrac{\pi}{3}x\cos\dfrac{5\pi}{6}+\cos\dfrac{2\pi}{3}\sin\dfrac{5}{6}\pi\right]=2\cos\dfrac{1}{3}\pi x$．

$f(x+1)=2\sin\left(\dfrac{\pi}{3}x+\dfrac{\pi}{2}\right)=2\cos\dfrac{1}{3}\pi x$，$\therefore f(x+1)=f(x)+f(x+2)$，

即$f(x)=2\sin\left(\dfrac{1}{3}\pi x+\dfrac{\pi}{6}\right)$满足条件，$f(18)=2\sin\left(6\pi+\dfrac{\pi}{6}\right)=1$．

8.【答案】D

【解析】设切点$(x_0,(1-x_0)\mathrm{e}^{x_0})$，$y'=-\mathrm{e}^x+(1-x)\mathrm{e}^x=-x\mathrm{e}^x$，$k=-x_0\mathrm{e}^{x_0}$，

$y-(1-x_0)\mathrm{e}^{x_0}=-x_0\mathrm{e}^{x_0}(x-x_0)$过$(t,0)$，$-(1-x_0)\mathrm{e}^{x_0}=-x_0\mathrm{e}^{x_0}(t-x_0)$，

$x_0-1=-x_0(t-x_0)$，$\therefore x_0-1=-tx_0+x_0^2$，$x_0^2-(t+1)x_0+1=0$有两个不相等实根$x_1$，$x_2$，

其中$x_1x_2=1$，$x_1+x_2=t+1$，$\Delta=(t+1)^2-4>0$，$\therefore t>1$或$t<-3$

$y_1y_2=(1-x_1)(1-x_2)\mathrm{e}^{x_1+x_2}=[1-(x_1+x_2)+x_1x_2]\mathrm{e}^{x_1+x_2}=(1-t)\mathrm{e}^{t+1}$，

令$g(t)=(1-t)\mathrm{e}^{t+1}$，$t>1$或$t<-3$，$g'(t)=-t\mathrm{e}^{t+1}$，

$t<-3$时，$g'(t)>0$，$g(t)\nearrow$，$0<g(t)<g(-3)=4\mathrm{e}^{-2}$

$t>1$ 时，$g'(t)<0$，$g(t)\searrow$，$g(t)<g(1)=0$，

综上：$y_1y_2\in(-\infty,0)\cup(0,4e^{-2})$，选 D.

二、多选题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分．在给出的选项中，有多项符合题目要求．全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分．

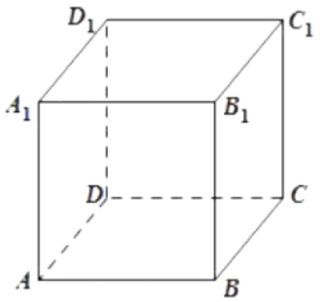
9.【答案】ABD

【解析】$AD_1 /\!/ BC_1$，$AD_1\not\subset$ 平面 BOC_1，$BC_1\subset$ 平面 BOC_1，$\therefore AD_1/\!/$ 平面 BOC_1，A 对 $BD\perp CO$，$BD\perp CC_1$，$CD\cap CC_1=C$，$\therefore BD\perp$ 平面 COC_1，B 对

$C_1C\perp$ 平面 $ABCD$，C_1O 与平面 $ABCD$ 所成角为 $\angle C_1OC$，$\tan\angle C_1OC=\frac{2}{\sqrt{2}}\neq 1$，

$\therefore\angle C_1OC\neq 45^\circ$，$C$ 错.

$V_{C-BOC_1}=V_{C_1-BOC}=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times 2\times 1\times 2=\frac{2}{3}$，$D$ 对．选 ABD



10.【答案】ACD

【解析】$\frac{T}{2}=\frac{5}{6}\pi-\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{2}$，$\therefore T=\pi=\frac{2\pi}{\omega}$，$\therefore\omega=2$，$f(x)=\sin(2x+\varphi)$，$f\left(\frac{\pi}{3}\right)=\sin\left(\frac{2}{3}\pi+\varphi\right)=1$，$\therefore\varphi=-\frac{\pi}{6}$，$A$ 对，B 错.

$f(x)=\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)$，$2x-\frac{\pi}{6}=k\pi$，$x=\frac{\pi}{12}+\frac{k\pi}{2}$，$k\in\mathbf{Z}$

$k=0$ 时，$f(x)$ 关于 $\left(\frac{\pi}{12},0\right)$ 对称，C 对

$-\frac{\pi}{2}+2k\pi<2x-\frac{\pi}{6}<\frac{\pi}{2}+2k\pi$，$-\frac{\pi}{6}+k\pi<x<\frac{\pi}{3}+k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$，

$f(x)$ 在 $\left(\frac{5}{6}\pi,\frac{4}{3}\pi\right)\nearrow$，而 $\left(\pi,\frac{5}{4}\pi\right)\subset\left(\frac{5}{6}\pi,\frac{4}{3}\pi\right)$，$\therefore f(x)$ 在 $\left(\pi,\frac{5}{4}\pi\right)\nearrow$，$D$ 对，

选 ACD.

11.【答案】AC

【解析】$P(A)=\frac{1}{3}$，A 对.

A，B 可同时发生，即“即第一次取红球，第二次取黄球”，A，B 不互斥，B 错.

在第一次取到红球的条件下，第二次取到黄球的概率为 $\frac{1}{2}$，C 对.

$P(B)=\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\times 0=\frac{1}{3}$，$P(AB)=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{6}$，$P(AB)\neq P(A)P(B)$，$\therefore A$，$B$ 不独立，

D 错，选 AC.

12.【答案】BCD

【解析】：$A\left(x_1,\frac{x_1^2}{4}\right)$，$B\left(x_2,\frac{x_2^2}{4}\right)$，$C\left(x_0,\frac{x_0^2}{4}\right)$，$y'=\frac{1}{2}x$，$k_1=\frac{1}{2}x_1$，

l_1：$y-\frac{x_1^2}{4}=\frac{1}{2}x_1(x-x_1)$，即 $y=\frac{1}{2}x_1x-\frac{1}{4}x_1^2$

l_2：$y=\frac{1}{2}x_2x-\frac{1}{4}x_2^2$，

$\begin{cases} y=\frac{1}{2}x_1x-\frac{1}{4}x_1^2 \\ y=\frac{1}{2}x_2x-\frac{1}{4}x_2^2 \end{cases}$，∴ $\begin{cases} x=\frac{x_1+x_2}{2} \\ y=\frac{x_1x_2}{4} \end{cases}$，即 $x_3=\frac{x_1+x_2}{2}$ 时，

$\overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{DB}=\left(x_1-\frac{x_1+x_2}{2},\frac{x_1^2}{4}-\frac{x_1x_2}{4}\right)\left(x_2-\frac{x_1+x_2}{2},\frac{x_2^2}{4}-\frac{x_1x_2}{4}\right)$

$=\left(\frac{x_1-x_2}{2},\frac{x_1(x_1-x_2)}{4}\right)\left(\frac{x_2-x_1}{2},\frac{x_2(x_2-x_1)}{4}\right)$

$=-\frac{(x_1-x_2)^2}{4}-\frac{x_1x_2(x_1-x_2)^2}{16}=-\frac{(x_1-x_2)}{16}(4+x_1x_2)$ 不一定为0，A 错.

$|AF|\cdot|BF|=\left(\frac{x_1^2}{4}+1\right)\left(\frac{x_2^2}{4}+1\right)=\frac{x_1^2x_2^2}{16}+\frac{x_1^2}{4}+\frac{x_2^2}{4}+1$，

$DF^2=\frac{(x_1+x_2)^2}{4}+\left(\frac{x_1x_2}{4}-1\right)^2=\frac{x_1^2+2x_1x_2+x_2^2}{4}+\frac{x_1^2x_2^2}{16}-\frac{x_1x_2}{2}+1$

$=\frac{x_1^2x_2^2}{16}+\frac{x_1^2}{4}+\frac{x_2^2}{4}+1=|AF||BF|$，$C$ 对

$D\left(\frac{x_1+x_2}{2},\frac{x_1x_2}{4}\right)$，$P\left(\frac{x_1+x_0}{2},\frac{x_1x_0}{4}\right)$，$Q\left(\frac{x_2+x_0}{2},\frac{x_2x_0}{4}\right)$，

$AP=\sqrt{\left(\frac{x_0-x_1}{2}\right)^2+\left(\frac{x_1x_0-x_0^2}{4}\right)^2}=\frac{|x_0-x_1|\sqrt{4+x_1^2}}{4}$，

$CQ=\sqrt{\left(\frac{x_2-x_0}{2}\right)^2+\left(\frac{x_2x_0-x_0^2}{4}\right)^2}=\frac{|x_2-x_0|\sqrt{4+x_0^2}}{4}$，

$PC=\sqrt{\left(\frac{x_1-x_0}{2}\right)^2+\left(\frac{x_1x_0-x_0^2}{4}\right)^2}=\frac{|x_1-x_0|\sqrt{4+x_0^2}}{4}$

$PD=\sqrt{\left(\frac{x_2-x_0}{2}\right)^2+\left(\frac{(x_0-x_2)x_1}{4}\right)^2}=\frac{|x_2-x_0|\sqrt{4+x_1^2}}{4}$

∴ $AP\cdot CQ=PC\cdot PD$，D 对

三、填空题：本题共4小题，每小题5分，共20分.

13.【答案】4

【解析】$f(-2)=1+\log_2(2-(-2))=1+\log_2 4=3$，

$f(f(-2))=f(3)=2^{3-1}=2^2=4$

14.【答案】$a_n=\left(-\frac{1}{2}\right)^n$

【解析】可构造等比数列，$a_na_{n+1}<0$，则公比为负数，$|a_n|>|a_{n+1}|$，∴ $1>|q|$，

q 取 $-\frac{1}{2}$，$a_n=\left(-\frac{1}{2}\right)^n$

15.【答案】$\frac{1}{2}$

【解析】$A(\sqrt{3},0)$，$B(0,1)$，$PA=PB$，∴ P 在 AB 的垂直平分线 $y=\sqrt{3}x-1$ 上，

P 在圆 $O{:}x^2+y^2=r^2$ 满足条件的 P 有且仅有一个，∴ 直线与圆相切，∴ $r=\frac{1}{2}$

16.【答案】5；$\frac{\sqrt{2}}{3}$

【解析】方法一：Γ 的边数至多为5，延长 EF，CD 交于点 J，

延长 EI，CB 交于点 K，连接 JK 分别与 AD，AB 交于 G，H，

连接 FG，HI 得截面五边形 $EFGHI$

设 $SE=x$，∴ $SF=2x$，$EF=\sqrt{3}x$，$CJ=2-2x$，∴ $JD=1-2x=DG$，$JF=\sqrt{3}(1-2x)$，

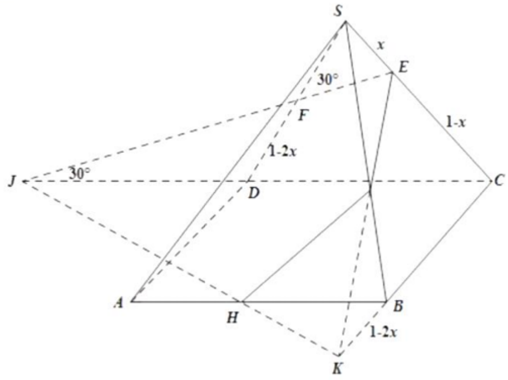
$JK=\sqrt{2}(2-2x)=2\sqrt{2}(1-x)$，$JG=HK=\sqrt{2}(1-2x)$，$FG=1-2x$，

∴ $JG^2+FG^2=JF^2$，∴ $JG\perp GF$

∴ $S_{\triangle JGF}=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{2}(1-2x)\cdot(1-2x)=S_{\triangle JHK}$，而 $EJ=\sqrt{3}(1-x)=EK$，$JK=2\sqrt{2}(1-x)$，

$S_{\Delta EJK}=\dfrac{1}{2}\cdot 2\sqrt{2}(1-x)^2=\sqrt{2}(1-x)^2$，

显然五边形时截面面积最大，



$\therefore S_{截面五边形}=\sqrt{2}(1-x)^2-\sqrt{2}(1-2x)^2$

$=\sqrt{2}(-3x^2+2x)\leqslant\sqrt{2}\cdot\dfrac{-4}{-12}=\dfrac{\sqrt{2}}{3}$，$x=\dfrac{1}{3}$ 时取“=”，

$\therefore \Gamma$ 面积的最大值为 $\dfrac{\sqrt{2}}{3}$.

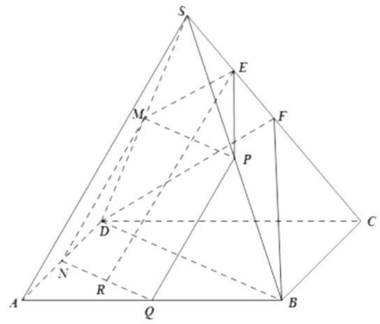
应填：5；$\dfrac{\sqrt{2}}{3}$

方法二：取 SC 中点 F，$BF\perp SC$，$DF\perp SC$，$\therefore SC\perp$ 平面 BDF.

作平面与 BDF 平行，如图至多为五边形.

令 $\dfrac{SE}{SF}=\lambda$，$\therefore EP=\lambda BF=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\lambda$，$SP=\lambda SB=\lambda$，

$\therefore PB=1-\lambda$，$BQ=1-\lambda$，$PQ=1-\lambda$，$NQ=MP=\lambda BD=\sqrt{2}\lambda$



$\cos\angle DFB=\dfrac{\frac{3}{4}+\frac{3}{4}-2}{2\times\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}}=-\dfrac{1}{3}$，$\sin\angle DFB=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$.

$S_{\triangle EMP}=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}\lambda\cdot\dfrac{2\sqrt{2}}{3}=\dfrac{\sqrt{2}}{4}\lambda^2$

MN 与 NQ 的夹角为 SA 与 BD 夹角，而 SA 与 BD 垂直，

$\therefore S_{PMNQ}=\sqrt{2}\lambda(1-\lambda)$，$S=\sqrt{2}\lambda(1-\lambda)+\dfrac{\sqrt{2}}{4}\lambda^2=-\dfrac{3}{4}\sqrt{2}\lambda^2+\sqrt{2}\lambda$，

$\lambda=\dfrac{2}{3}$ 时，S 取最大值 $\dfrac{\sqrt{2}}{3}$.

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17.【解析】

(1) 设 $\{a_n\}$ 公差为 d，若选①②，

则 $\begin{cases}S_1S_4=S_2^2\\a_4=2a_2+2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a_1(4a_1+6d)=(2a_1+d)^2\\a_1+3d=2(a_1+d)+2\end{cases}\Rightarrow d=2a_1$

$\therefore 7a_1=6a_1+2$，$a_1=2$，$d=4$，$\therefore a_n=2+4(n-1)=4n-2$.

若选①③或②③同理可得 $a_n=4n-2$

(2) $\dfrac{1}{a_na_{n+1}}=\dfrac{1}{(4n-2)(4n+2)}=\dfrac{1}{4}\cdot\dfrac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\dfrac{1}{8}\left(\dfrac{1}{2n-1}-\dfrac{1}{2n+1}\right)$

$\therefore \dfrac{1}{a_1a_2}+\dfrac{1}{a_2a_3}+\cdots+\dfrac{1}{a_na_{n+1}}=\dfrac{1}{8}\left(1-\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{5}+\cdots+\dfrac{1}{2n-1}-\dfrac{1}{2n+1}\right)$

$=\dfrac{1}{8}\left(1-\dfrac{1}{2n+1}\right)=\dfrac{n}{4(2n+1)}$.

18.【解析】

(1) 2×2 列联表如下：

	喜欢足球	不喜欢足球	合计
男生	60	40	100
女生	30	70	100
合计	90	110	200

$K^2=\dfrac{200\times(60\times70-40\times30)^2}{100\times100\times90\times110}\approx18.182>10.828$，

$\therefore$ 有 99.9% 的把握认为该校学生喜欢足球与性别有关

(2) 3 人进球总次数 ξ 的所有可能取值为 0，1，2，3

$P(\xi=0)=\left(\dfrac{1}{3}\right)^2\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{18}$，$P(\xi=1)=C_2^1\cdot\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}\times\left(\dfrac{1}{3}\right)^2=\dfrac{5}{18}$

$P(\xi=2)=C_2^1\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}+\left(\frac{2}{3}\right)^2\times\frac{1}{2}=\frac{4}{9}$，$P(\xi=3)=\left(\frac{2}{3}\right)^2\times\frac{1}{2}=\frac{2}{9}$

$\therefore\xi$的分布列如下：

ξ	0	1	2	3
P	$\frac{1}{18}$	$\frac{5}{18}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{2}{9}$

$\therefore\xi$的数学期望：$E(\xi)=1\times\frac{5}{18}+2\times\frac{4}{9}+3\times\frac{2}{9}=\frac{11}{6}$.

19.【解析】

(1) $\because a\cos B-2a\cos C=(2c-b)\cos A$，

$\therefore \sin A\cos B-2\sin A\cos C=(2\sin C-\sin B)\cos A$

$\Rightarrow \sin A\cos B+\cos A\sin B=2\sin A\cos C+2\cos A\sin C$

$\Rightarrow \sin(A+B)=2\sin(A+C)$

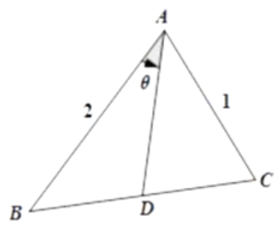
$\Rightarrow \sin C=2\sin B\Rightarrow c=2b$，$c=\sqrt{3}a\Rightarrow b=\frac{\sqrt{3}a}{2}$，

$\therefore \cos B=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=\frac{a^2+3a^2-\frac{3}{4}a^2}{2a\cdot\sqrt{3}a}=\frac{13\sqrt{3}}{24}$.

(2) 由(1)知 $c=2b$，$\because b=1$，$\therefore c=2$，设 $\angle BAD=\theta$，

$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}\cdot 2\cdot\sin 2\theta=\frac{1}{2}\cdot 2\cdot AD\cdot\sin\theta+\frac{1}{2}\cdot 1\cdot AD\cdot\sin\theta$

$\Rightarrow AD=\frac{4}{3}\cos\theta$，$\theta\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，$\therefore AD\in\left(0,\frac{4}{3}\right)$

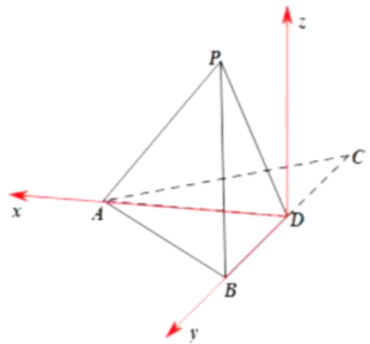


20.【解析】

(1) 证明：$\because PD\perp AD$，$AD\perp BD$，$PD\cap BD=D$，$\therefore AD\perp$平面PBD，$\therefore AD\perp PB$，

又$\because PB\perp AB$，AD，$AB\subset$平面ABD，$AD\cap AB=A$，$\therefore PB\perp$平面ABD

(2) 如图建系，则 $B(0,2,0)$，$P(0,2,4)$，$A(4,0,0)$，$D(0,0,0)$，



$\therefore \overrightarrow{BP}=(0,0,4)$，$\overrightarrow{PA}=(4,-2,-4)$，$\overrightarrow{DA}=(4,0,0)$，

设平面 BPA 与平面 PAD 的一个法向量分别为 $\vec{n_1}=(x_1,y_1,z_1)$，$\vec{n_2}=(x_2,y_2,z_2)$，

$\therefore\begin{cases}\vec{n_1}\cdot\overrightarrow{BP}=0\\\vec{n_1}\cdot\overrightarrow{PA}=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}4z_1=0\\4x_1-2y_1-4z_1=0\end{cases}\Rightarrow\vec{n_1}=(1,2,0)$，

$\begin{cases}\vec{n_2}\cdot\overrightarrow{PA}=0\\\vec{n_2}\cdot\overrightarrow{DA}=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}4x_2-2y_2-4z_2=0\\4x_2=0\end{cases}\Rightarrow\vec{n_2}=(0,2,-1)$，

设二面角 $B-PA-D$ 平面角为 θ，

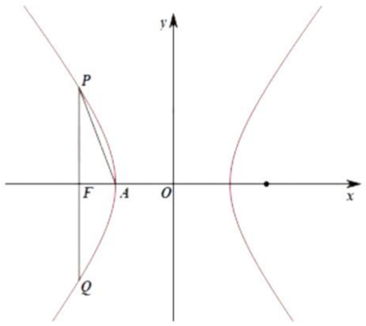
$\therefore |\cos\theta|=\dfrac{|\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{n_2}|}{|\overrightarrow{n_1}||\overrightarrow{n_2}|}=\dfrac{4}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{5}}=\dfrac{4}{5}$，$\therefore \sin\theta=\dfrac{3}{5}$.

21.【解析】

(1) 当 $PQ\perp x$ 轴时，$PQ=\dfrac{2b^2}{a}$，$PF=\dfrac{b^2}{a}$，

$\therefore \begin{cases}\left(\dfrac{b^2}{a}\right)^2+(c-a)^2=10\\ \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{2b^2}{a}\cdot(c-a)=3\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\dfrac{b^2}{a}=3\\ c-a=1\\ c^2=a^2+b^2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=1\\ b=\sqrt{3}\end{cases}$，

$\therefore$ 双曲线 C 的方程为：$x^2-\dfrac{y^2}{3}=1$.



(2) 方法一：设 PQ 方程为 $x=my-2$，$P(x_1,y_1)$，$Q(x_2,y_2)$，

$\begin{cases}x=my-2\\ 3x^2-y^2=3\end{cases}\Rightarrow 3(m^2y^2-4my+4)-y^2=3\Rightarrow(3m^2-1)y^2-12my+9=0$,

以 PQ 为直径的圆的方程为 $(x-x_1)(x-x_2)+(y-y_1)(y-y_2)=0$

$\Rightarrow x^2-(x_1+x_2)x+x_1x_2+y^2-(y_1+y_2)y+y_1y_2=0$，

由对称性知以 PQ 为直径的圆必过 x 轴上的定点，令 $y=0$

$\Rightarrow x^2-(x_1+x_2)x+x_1x_2+y_1y_2=0$，而 $x_1+x_2=m(y_1+y_2)-4=\dfrac{12m^2}{3m^2-1}-4=\dfrac{4}{3m^2-1}$，

$x_1x_2=(my_1-2)(my_2-2)=m^2y_1y_2-2m(y_1+y_2)+4$

$=\dfrac{9m^2}{3m^2-1}-2m\cdot\dfrac{12m}{3m^2-1}+4=\dfrac{-3m^2-4}{3m^2-1}$，

$\therefore x^2-\dfrac{4}{3m^2-1}x+\dfrac{-3m^2-4}{3m^2-1}+\dfrac{9}{3m^2-1}=0\Rightarrow(3m^2-1)x^2-4x+5-3m^2=0$

$\Rightarrow[(3m^2-1)x+3m^2-5](x-1)=0$ 对 $\forall m\in\mathbf{R}$ 恒成立，$\therefore x=1$.

$\therefore$ 以 PQ 为直径的圆经过定点 $(1,0)$.

方法二：设 PQ 方程为 $x=my-2$，$P(x_1,y_1)$，$Q(x_2,y_2)$，

$\begin{cases}x=my-2\\ 3x^2-y^2=3\end{cases}\Rightarrow(3m^2-1)y^2-12my+9=0$,

由对称性知以 PQ 为直径的圆必过 x 轴上的定点.

设以 PQ 为直径的圆过 $E(t,0)$，

$\therefore \overrightarrow{EP}\cdot\overrightarrow{EQ}=0\Rightarrow(x_1-t)(x_2-t)+y_1y_2=0\Rightarrow x_1x_2-t(x_1+x_2)+t^2+y_1y_2=0$，

而 $x_1x_2=(my_1-2)(my_2-2)=m^2y_1y_2-2m(y_1+y_2)+4$

$=m^2\cdot\dfrac{9}{3m^2-1}-2m\cdot\dfrac{12m}{3m^2-1}+4=\dfrac{-3m^2-4}{3m^2-1}$，

$x_1+x_2=m(y_1+y_2)-4=\dfrac{12m^2}{3m^2-1}-4=\dfrac{4}{3m^2-1}$

$\therefore \dfrac{-3m^2-4}{3m^2-1}-\dfrac{4t}{3m^2-1}+t^2+\dfrac{9}{3m^2-1}=0$，

$(3m^2-1)t^2-4t+5-3m^2=0$，即 $[(3m^2-1)t+3m^2-5](t-1)=0$ 对 $\forall m\in\mathbf{R}$ 恒成立，

$\therefore t=1$，即以 PQ 为直径的圆经过定点 $(1,0)$

22.【解析】

(1)$f'(x)=\frac{1}{a}\cdot\frac{e^{x-1}-e^{x-1}\cdot x}{(e^{x-1})^2}=\frac{1}{a}\cdot\frac{1-x}{e^{x-1}}$，令 $f'(x)=0\Rightarrow x=1$.

$\because f(x)$ 有最大值，$\therefore a>0$ 且 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 上↗；$(1,+\infty)$ 上↘，$\therefore f(x)_{max}=f(1)=\frac{1}{a}$.

$a=1$ 时，$g'(x)=\frac{1-a-\ln x}{x^2}=\frac{-\ln x}{x^2}$，

当 $0<x<1$ 时，$g'(x)>0$，$g(x)$↗；当 $x>1$ 时，$g'(x)<0$，$g(x)$↘，

$\therefore g(x)_{max}=g(1)=a$，$\therefore \frac{1}{a}=a\Rightarrow a=1$

(2) 方法：由 $f(x)=b\Rightarrow\frac{x}{e^{x-1}}-b=0$，由 $g(x)=b\Rightarrow\frac{1+\ln x}{x}-b=0$，

令 $F(x)=\frac{x}{e^{x-1}}-b$，$F(x)$ 在 $(0,1)$ 上↗；$(1,+\infty)$ 上↘，$\therefore F(x)$ 至多两个零点

令 $G(x)=\frac{1+\ln x}{x}-b$，$G(x)$ 在 $(0,1)$ 上↗；$(1,+\infty)$ 上↘；$\therefore G(x)$ 至多两个零点.

令 $F(x)=G(x)\Rightarrow\frac{x}{e^{x-1}}-\frac{1+\ln x}{x}=0$，

当 $x\in\left(0,\frac{1}{e}\right]$ 时，$\frac{x}{e^{x-1}}-\frac{1+\ln x}{x}>0$；

当 $x\in(1,+\infty)$ 时，由 $\frac{x}{e^x}=\frac{\ln ex}{ex}=\frac{\ln ex}{e^{\ln ex}}$ 且 $x>\ln ex>1$，

$\varphi(x)=\frac{x}{e^x}$ 在 $(1,+\infty)$ 上↘，$\therefore\varphi(x)<\varphi(\ln ex)$ 方程无解.

当 $x\in\left(\frac{1}{e},1\right]$ 时，由 $1\geqslant x\geqslant\ln ex$，$\varphi(x)=\frac{x}{e^x}$ 在 $(0,1]$ 上↗，

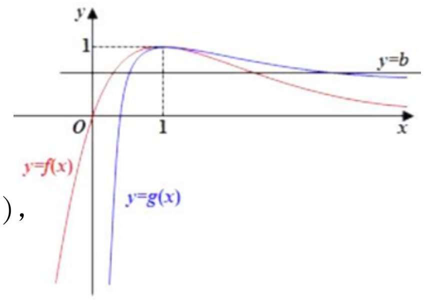
$\therefore\varphi(x)\geqslant\varphi(\ln ex)$ 方程有唯一解 $x=1$

当 $0<b<1$ 时，注意到 $F(0)=-b<0$，$F(1)=1-b>0$，

$F\left(\frac{1}{b}+2\right)=\frac{\frac{1}{b}+2}{e^{\frac{1}{b}+1}}-b<\frac{\frac{1}{b}+2}{\left(\frac{1}{b}+1\right)^2}-b<0$

$\therefore F(x)$ 在 $(0,1)$ 和 $\left(1,\frac{1}{b}+2\right)$ 上各有一个零点 x_1，x_3

$f(x)$，$g(x)$ 示意图



如下注意到 $G\left(\frac{1}{e}\right)=-b<0$，$G(1)=1-b>0$，$G\left(\frac{4}{b^2}\right)<0$，

$\therefore G(t)$ 在 $\left(\frac{1}{e},1\right)$ 和 $\left(1,\frac{4}{b^2}\right)$ 上各有一个零点 x_2，x_4.

且由 $f(x_1)=g(x_2)=\frac{x_1}{e^{x_1-1}}=\frac{\ln ex_2}{x_2}\Rightarrow\frac{x_1}{e^{x_1}}=\frac{\ln ex_2}{ex_2}=\frac{\ln ex_2}{e^{\ln ex_2}}$，而 x_1，$\ln ex_2\in(0,1)$，

而 $\varphi(x)=\frac{x}{e^x}$ 在 $(0,1)$ 上↗，由 $\varphi(x_1)=\varphi(\ln ex_2)\Rightarrow x_1=\ln ex_2\Rightarrow\therefore e^{x_1-1}=x_2$，

由 $f(x_3)=g(x_4)\Rightarrow\frac{x_3}{e^{x_3-1}}=\frac{1+\ln x_4}{x_4}\Rightarrow\frac{x_3}{e^{x_3}}=\frac{\ln e_4}{e^{\ln x_4}}$，而 x_3，$ex_4>1$

而 $\varphi(x)=\frac{x}{e^x}$ 在 $(1,+\infty)$ 上↘，由 $\varphi(x_3)=\varphi(\ln ex_4)\Rightarrow x_3=\ln x_4$，$\therefore e^{x_3-1}=x_4$，

$\therefore\frac{x_1}{x_2}=\frac{x_3}{x_4}\Rightarrow x_1x_4=x_2x_3$，证毕；