2024年新高考1卷

一、选择题

1．已知集合 $A=\{x\mid -5<x^3<5\}$，$B=\{-3,-1,0,2,3\}$，则 $A\cap B=$（　　）．

A．$\{-1,0\}$　　B．$\{2,3\}$　　C．$\{-3,-1,0\}$　　D．$\{-1,0,2\}$

2．若 $\dfrac{2}{z-1}=1+\mathrm{i}$，则 $z=$（　　）．

A．$-1-\mathrm{i}$　　B．$-1+\mathrm{i}$　　C．$1-\mathrm{i}$　　D．$1+\mathrm{i}$

3．已知向量 $\vec{a}=(0,1)$，$\vec{b}=(2,x)$，若 $\vec{b}\perp(\vec{b}-4\vec{a})$，则 $x=$（　　）．

A．-2　　B．-1　　C．1　　D．2

4．已知 $\cos(\alpha+\beta)=m$，$\tan\alpha\tan\beta=2$，则 $\cos(\alpha-\beta)=$（　　）．

A．$-3m$　　B．$-\dfrac{m}{3}$　　C．$\dfrac{m}{3}$　　D．$3m$

5．已知圆柱和圆锥的底面半径相等，侧面积相等，且它们的高均为 $\sqrt{3}$，则圆锥的体积为（　　）．

A．$2\sqrt{3}\pi$　　B．$3\sqrt{3}\pi$　　C．$6\sqrt{3}\pi$　　D．$9\sqrt{3}\pi$

6．已知函数 $f(x)=\begin{cases}-x^2-2ax-a,x<0\\ \mathrm{e}^x+\ln(x+1),x\geq 0\end{cases}$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增，则 a 的取值范围是（　　）．

A．$(-\infty,0]$　　B．$[-1,0]$　　C．$[-1,1]$　　D．$[0,+\infty)$

7．当 $x\in[0,2\pi]$ 时，曲线 $y=\sin x$ 与 $y=2\sin\left(3x-\dfrac{\pi}{6}\right)$ 的交点个数为（　　）．

A．3　　B．4　　C．6　　D．8

8．已知函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$，$f(x)>f(x-1)+f(x-2)$，且当 $x<3$ 时，$f(x)=x$，则下列结论中一定正确的是（　　）．

A．$f(10)>100$　　B．$f(20)>1000$　　C．$f(10)<1000$　　D．$f(20)<10000$

9．为了解推动出口后的亩收入（单位：万元）情况，从该种植区抽取样本，得到推动出口后亩收入的样本均值 $\overline{X}=2.1$，样本方差 $S^2=0.01$，已知该种植区以往的亩收入 X 服从正态分布 $N(1.8,0.1^2)$，假设失去出口后的亩收入 Y 服从正态分布 $N(\overline{X},S^2)$，则（　　）．（若随机变量 Z 服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$，则 $P(Z<\mu+\mu)\approx 0.8413$）

A．$P(X>2)>0.2$　　B．$P(X>Z)<0.5$　　C．$P(Y>Z)>0.5$　　D．$P(Y>Z)<0.8$

10．设函数$f(x)=(x-1)^2(x-4)$，则（　　）．

A．$x=3$是$f(x)$的极小值点

B．当$0<x<1$时，$f(x)<f(x^2)$

C．当$1<x<2$时，$-4<f(2x-1)<0$

D．当$-1<x<10$时，$f(2-x)>f(x)$

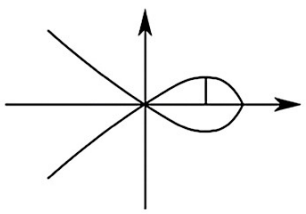
11．造型可以看作图中的曲线C的一部分，已知C过坐标原点O，且C上的点满足横坐标大于-2，到点$F(2,0)$的距离与到定直线$x=a(a<0)$的距离之积为4，则（　　）

A．$a=-2$

B．点$(2\sqrt{2},0)$在C上

C．C在第一象限的点的纵坐标的最大值为1

D．当点(x_0,y_0)在C上时，$y_0\le\dfrac{4}{x_0+2}$



二、填空题

12．设双曲线$C:\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$的左右焦点分别为$F_1$，$F_2$，过$F_2$作平行于$y$轴的直线交$C$于$A$，$B$两点，若$|F_1A|=13$，$|AB|=10$，则$C$的离心率为_____．

13．若曲线$y=e^x+x$在点$(0,1)$处的切线也是曲线$y=\ln(x+1)+a$的切线，则$a=$_____

14．甲、乙两人各有四张卡片，每张卡片上标有一个数字，甲的卡片分别标有数字1，3，5，7，乙的卡片上分别标有数字2，4，6，8，两人进行四轮比赛，在每轮比赛中，两个各自从自己持有的卡片中随机选一张，并比较所选卡片的数字的大小，数字大的人得1分，数字小的人得0分，然后各自弃置此轮所选的卡片（弃置的卡片在此后的轮次中不能使用）．则四轮比赛比赛后，甲的总得分小于2的概率为_____．

三、解答题

15．记$\triangle ABC$的内角A,B,C的对边分别为a,b,c，已知$\sin C=\sqrt{2}\cos B$，$a^2+b^2-c^2=\sqrt{2}ab$．

（1）求B；

（2）若$\triangle ABC$的面积为$3+\sqrt{3}$，求C．

16．已知$A(0,3)$和$P\left(3,\frac{3}{2}\right)$为椭圆$C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$上两点．

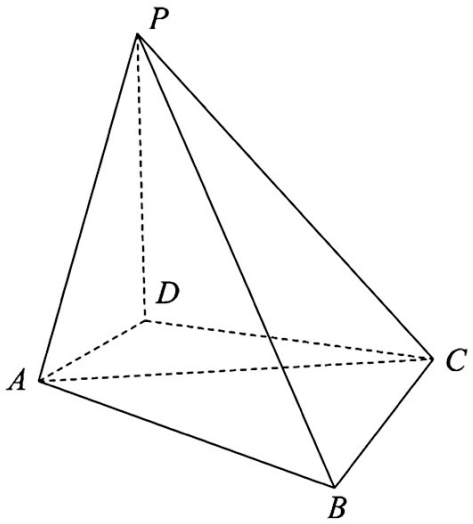
（1）求C的率心率；

（2）若过P的直线l交C于另一点B，且$\triangle ABP$的面积为9，求l的方程．

17．如图，四棱锥$P-ABCD$中，$PA\perp$底面$ABCD$，$PA=PC=2$，$PBC=1$，$AB=\sqrt{3}$．

（1）若$AD\perp PB$，证明：AD // 平面PBC；

（2）若$AD\perp DC$，且二面角$A-CP-D$的正弦值为$\frac{\sqrt{42}}{7}$，求AD．



18．已知函数$f(x)=\ln\frac{x}{2-x}+ax+b(x-1)^3$．

（1）若$b=0$，且$f'(x)\geq 0$，求a的最小值；

（2）证明：曲线$y=f(x)$是中心对称图形；

（3）若$f(x)>-2$，当且仅当$1<x<2$，求b的取值范围．

19．设m为正整数，数列$a_1,a_2,\cdots,a_{4m+2}$是公差不为0的等差数列，若从中删去两项a_i和$a_j(i<j)$后剩余的$4m$项可被平均分为m组，且每组的4个数都能构成等差数列，则称数列$a_1,a_2,\cdots,a_{4m+2}$是(i,j)——可分数列．

（1）写出所有的(i,j)，$1\leq i<j\leq 6$，使数列$a_1,a_2,\cdots,a_6$是(i,j)——可分数列；

（2）当$m\geq 3$时，证明：数列$a_1,a_2,\cdots,a_{4m+2}$是$(2,13)$——可分数列；

（3）从$1,2,\cdots,4m+2$中一次任取两个数i和$j(i<j)$，记数列$a_1,a_2,\cdots,a_{4m+2}$是(i,j)——可分

数列的概率为P_m，证明：$P_m > \frac{1}{8}$.