绝密★启用前　　试卷类型：A

# 2024年普通高等学校招生全国统一考试

# 数　学

**注意事项：**

1．答卷前，考生务必将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上。

2．回答选择题时，选出每小题答案后，用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其它答案标号。回答非选择题时，将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。

3．考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

**一、选择题：本题共8小题，每小题5分，共40分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。**

1．已知集合 $A=\{-1,0,1,2,3,4\}$，集合 $B=\{x\mid x=2n+1,n\in A\}$，则 $A\cap B=$

A．$\{-1,0,1,2,3,4\}$　　B．$\{-1,1,3\}$　　C．$\{1,3\}$　　D．$\{-1,1\}$

2．设 $z_1$ 是虚数，$z_2=z_1+\dfrac{1}{z_1}$ 是实数，则 $|z_2-z_1|$ 的值为

A．1　　B．2　　C．$\sqrt{3}$　　D．$\sqrt{5}$

3．已知向量 $\vec{a}$、$\vec{b}$、$\vec{c}$ 满足 $|\vec{a}|=|\vec{b}|=1$，$|\vec{c}|=\sqrt{3}$，且 $\vec{c}=\vec{a}+2\vec{b}$，则 $|\vec{c}-\vec{b}|=$

A．$\dfrac{1}{2}$　　B．1　　C．$\sqrt{3}$　　D．2

4．若等比数列 $\{a_n\}$ 前 $n$ 项和为 $S_n$，$a_1+a_2=12$ 且 $a_1$、$a_2+6$、$a_3$ 成等差数列，则 $\dfrac{S_{10}}{S_5}=$

A．241　　B．242　　C．243　　D．244

5．在平面直角坐标系中，过点 $P(-2,0)$ 作圆 $C:x^2+y^2-4x-4=0$ 的两条切线，切点分别为 $A$、$B$，则四边形 $PACB$ 的面积为

A．4　　B．$4\sqrt{2}$　　C．8　　D．$8\sqrt{2}$

6．设 $x>0$，函数 $y=x^2+x-7$、$y=2^x+x-7$、$y=\log_2 x+x-7$ 的零点分别为 $a$、$b$、$c$，则 $a$、$b$、$c$ 的大小关系是

A．$a<b<c$　　B．$b<a<c$　　C．$a<c<b$　　D．$c<a<b$

7．若双曲线 $C:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的左、右焦点为 $F_1$，$F_2$，$A$ 为 $C$ 的右顶点，以 $F_1F_2$ 为直径的圆与 $C$ 的一条渐近线交于 $P$，$Q$ 两点，$\angle PAQ=\frac{3\pi}{4}$，则 $C$ 的离心率为

A．$\sqrt{3}$　　B．$\frac{\sqrt{21}}{3}$　　C．$\sqrt{5}$　　D．3

8．已知函数 $f(x)=\frac{1}{e^x+1}-\frac{1}{2}$，则关于 $t$ 的不等式 $f(\ln t)+2(\ln\frac{1}{t})>0$ 的解集是

A．$(0,+\infty)$　　B．$(0,\frac{1}{2})$　　C．$(0,1)$　　D．$(1,+\infty)$

**二、选择题：本题共 3 小题，每小题 6 分，共 18 分。在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求。全部选对的得 6 分，部分选对的得部分分，有选错的得 0 分。**

9．已知斜率为 $k$ 的直线交抛物线 $y^2=2px(p>0)$ 于 $A(x_1,y_1)$、$B(x_2,y_2)$ 两点，$F$ 为抛物线的焦点，则下列说法正确的是

A．$x_1x_2$ 为定值　　B．线段 $AB$ 的中点在一条定直线上

C．$\frac{1}{k_{OA}}+\frac{1}{k_{OB}}$ 为定值　　D．$\frac{|AF|}{|BF|}$ 为定值

10．已知圆锥 $SO$ 的母线长为 $\sqrt{7}$，高为 $\sqrt{3}$，其中 $O$ 是底面圆的圆心，$S$ 是圆锥的顶点，若 $P$，$Q$ 为底面圆周上任意两点，则下列结论正确的是

A．三角形 $SPQ$ 面积的最大值为 $2\sqrt{3}$

B．三棱锥 $O-SPQ$ 体积的最大值为 $\frac{2\sqrt{3}}{3}$

C．四面体 $SOPQ$ 外接球表面积的最小值为 $11\pi$

D．直线 $SP$ 与平面 $SOQ$ 所成角的余弦值的最小值为 $\frac{\sqrt{21}}{7}$

11．甲乙两个口袋中各装有 1 个黑球和 2 个白球，现从甲、乙两口袋中各任取一个球交换放入另一口袋，重复进行 $n(n\in N^*)$ 次这样的操作，记甲口袋中黑球个数为 $X_n$，恰有 1 个黑球的概率为 $P_n$，下列说法正确的是

A．$P_1=\frac{5}{9}$　　B．$P(X_1=2)=\frac{1}{6}$

C．数列 $\left\{P_n-\frac{3}{5}\right\}$ 是等比数列　　D．$X_n$ 的数学期望 $E(X_n)=1$

**三、填空题：本题共 3 小题，每小题 5 分，共 15 分。**

12. 将 5 个不同的球放入 4 个不同的盒子中，每个盒子中至少有 1 个球，若甲球必须放入第 1 个盒子中，则不同的方法种数是_____（用数字表示）

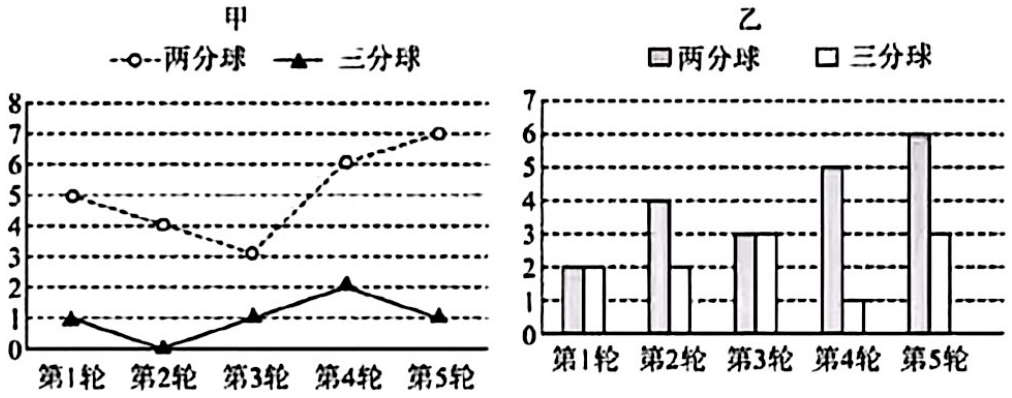
13. 已知函数 $y=\sin(\omega x+\varphi)$ ($\omega>0$，$\varphi\in(0,2\pi)$)的一条对称轴为 $x=-\frac{\pi}{6}$，且 $f(x)$ 在区间 $(\pi,\frac{4}{3}\pi)$ 上单调，则 $\omega$ 的最大值为_____.

14. 若点 $P$ 是棱长为 4 的正四面体 $S-ABC$ 表面上的动点，则该四面体的外接球的半径是_____；若 $MN$ 是该正四面体外接球的一条直径，则 $\overrightarrow{PM}\cdot\overrightarrow{PN}$ 的最小值是_____.（第一空 2 分，第二空 3 分）

**四、解答题：本题共 5 小题，共 77 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。**

15.（13 分）

某校将进行篮球定点投篮测试，规则为：每人至多投 3 次，先在 $M$ 处投一次三分球，投进得 3 分，未投进不得分，以后均在 $N$ 处投两分球，每投进一次得 2 分，未投进不得分. 测试者累计得分高于 3 分即通过测试，并终止投篮. 甲、乙两位同学为了通过测试，进行了五轮投篮训练，每人每轮在 $M$ 处和 $N$ 处各投 10 次，根据他们每轮两分球和三分球的命中次数情况分别得到如下图表：



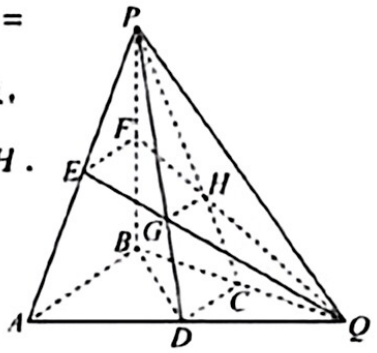

若以每人五轮投篮训练命中频率的平均值作为其测试时每次投篮命中的概率.

（1）已知该校有 300 名学生的投篮水平与甲同学相当，求这 300 名学生通过测试人数的数学期望；

（2）在甲、乙两位同学均通过测试的条件下，求甲得分比乙得分高的概率.

16.（15分）

如图，在三棱锥$P-ABQ$中，$PB\perp$平面$ABQ$，$BA=BP=BQ=2$，$D$，$C$，$E$，$F$分别是$AQ$，$BQ$，$AP$，$BP$的中点，$AB\perp BQ$，$PD$与$EQ$交于点$G$，$PC$与$FQ$交于点$H$，连接$GH$.




（1）求证：$AB//GH$；

（2）求平面$PAB$与平面$PCD$所成角的余弦值；

（3）求点$A$到平面$PCD$的距离.

17.（15分）

已知数列$\{a_n\}$的前$n$项和$S_n$满足$2S_n=3a_n-3$，数列$\{b_n\}$的前$n$项和$T_n$满足关系$\frac{T_{n+1}}{n+1}=\frac{T_n}{n}+1$且$b_1=1$.

（1）求数列$\{a_n\}$，$\{b_n\}$的通项公式；

（2）设$c_n=\frac{b_n}{a_n}$，求数列$\{c_n\}$的前$n$项和$P_n$；

（3）数列$\{S_n\}$中是否存在不同的三项$S_p$，$S_q$，$S_r$，使这三项恰好构成等差数列？若存在，求出$p$，$q$，$r$的关系；若不存在，请说明理由.

18.（17分）

已知椭圆$C$的中心为坐标原点，对称轴为$x$轴，$y$轴，且过$A(-2,0)$，$B\left(1,\frac{3}{2}\right)$两点.

（1）求椭圆$C$的方程；

（2）$F$为椭圆$C$的右焦点，直线$l$交椭圆$C$于$P$，$Q$（不与点A重合）两点，记直线$AP$，$AQ$，$l$的斜率分别为$k_1$，$k_2$，$k$，若$k_1+k_2=-\frac{3}{k}$，证明：$\triangle FPQ$的周长为定值，并求出定值.

19.（17分）

已知函数 $f(x)=\ln(x+1)-ax$，$f(x)\le 0$ 恒成立.

（1）求实数 $a$ 的值；

（2）若关于 $x$ 的方程 $f(x)=\frac{1}{4}(m-3x)$ 在 $[2,4]$ 上有两个不相等的实数根，求实数 $m$ 的取值范围；

（3）数列 $\{a_n\}$ 满足：$a_{n+1}=a_n+\ln(p-a_n)$，$a_1=\frac{1}{4}p^2+e^p-2$，若数列 $\{a_n\}$ 中有无穷个不同的项，求整数 $p$ 的值.