2023 高考技巧套路总结 50 讲（上册）

第 1 讲 函数问题的灵魂——定义域 4
方法一 直接法 4
方法二 抽象复合法 5
方法三 实际问题的定义域 6
第 2 讲 常见函数值域或最值的经典求法 8
方法一 观察法 9
方法二 分离常数法 9
方法三 配方法 9
方法四 反函数法 10
方法五 换元法 10
方法六 判别式法 10
方法七 基本不等式法 11
方法八 单调性法 11
方法九 数形结合法 12
第 3 讲 函数的单调性和最值的处理途径 16
方法一 定义法 17
方法二 导数法 18
方法三 复合函数解析法 18
方法四 图像法 19
第 4 讲 函数的奇偶性的判断及其应用 26
类型一 函数奇偶性的判断 26
类型二 利用函数的奇偶性求函数的解析式 27
第 5 讲 函数的周期性和对称性形影不离 31
类型一 函数的周期性的判定及应用 31
类型二 函数的对称性问题 32
第 6 讲 利用函数性质解决抽象函数不等式 38
类型一 确定抽象函数单调性解函数不等式 38
第 7 讲 分类讨论思想在分段函数中的应用 43
类型一 分段函数 44
类型二 含参数函数的最值问题 45
第 8 讲 函数零点问题 50
类型一 零点或零点存在区间的确定 50
类型二 零点的个数的确定 51
方法 1：定义法 51
方法 2：数形结合法 52
第 9 讲 函数图象的多变考查 57
方法一 特值法 57
方法二 利用函数的基本性质判断其图象 59
第 10 讲 函数应用问题 75
方法一 解函数应用题的一般步骤 75
第 11 讲 导数的几何意义应用 83

类型一 求在某点的切线方程 84
类型二 过点求曲线的切线方程 85
类型三 共切线问题 86
第 12 讲 导数与函数的单调性问题 92
类型一 求无参函数的单调区间 92
类型二 判定含参数的函数的单调性 93
类型三 由函数单调性求参数取值范围 94
第 13 讲 利用导数解决函数的极值、最值 101
类型一 利用导数研究函数的极值 101
类型二 求函数在闭区间上的最值 103
第 16 讲 三角函数的图象和性质问题 125
类型一 求三角函数的单调区间 125
类型二 由 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ 的图象求其函数式 126
类型三 求三角函数的周期 129
第 17 讲 求三角函数最值的常见题型及解题策略 139
方法一 化一法 139
方法二 配方法 141
第 18 讲 三角恒等变换 145
方法一 运用转化与化归思想 146
方法二 运用函数方程思想 146
方法三 运用换元思想 147
第 19 讲 解三角形 152
类型一 判断三角形的形状学 152
类型二 解三角形中的边和角 153
类型三 解决与面积有关问题 154
第 20 讲 平面向量共线定理 163
方法一 共线定理的代数运算 163
方法二 建系设坐标处理共线问题 164
方法三 几何法 165
第 21 讲 平面向量中最值、范围问题 172
方法一 利用基本不等式求平面向量的最值 172
方法二 建立直角坐标系法 173
方法三 构造目标函数求最值 174
第 22 讲 等差等比数列性质的巧用 181
类型一 由等差或等比数列的性质求值 181
类型二 有关等差或等比数列前 n 项和性质的问题 182
类型三 数列的最值问题 182
第 23 讲 数列通项公式的求解策略 190
方法一 数学归纳法 191
方法二 已知 S_n 求 a_n 191
方法三 累加法 192

方法四 累乘法 192
方法五 构造法一 193
方法六 构造法二 193
方法七 构造法三 194
方法八 构造法四 194
方法九 构造五 195
方法十 构造六 195
第 25 讲 含参数的“一元二次不等式”解法 214
类型一 根据二次项系数的符号分类 214
类型二 根据二次不等式所对应方程的根的大小分类 214
类型三 根据判别式的符号分类 215
第 26 讲 含参不等式的存在性与恒成立问题 219
方法一 判别式法 219
方法二 分离参数法 219
方法三 函数性质法 220
第 27 讲 应用基本不等式求最值的求解策略 225
方法一 凑项法 226
方法二 分离法 226
方法三 函数法 227
第 28 讲 证明不等式的常见技巧 231
方法一 比较法 232
方法二 分析法 232
方法三 综合法 232
方法四 放缩法 233
方法五 数学归纳法 233
方法六 换元法 234

第 1 讲　函数问题的灵魂——定义域

【高考地位】

在函数的三要素中，函数的定义域是函数的灵魂，对应法则相同的函数只有在定义域相同时才算同一函数．定义域问题始终是函数中最重要的问题，许多问题的解决都是必须先解决定义域，不要就会出现问题．通过对近几年高考试题的分析看出，本课时内容也是高考考查的重点之一，题型是选择题、填空题．试题难度较小．

方法一　直接法

万能模板	内　　容
使用场景	函数 $f(x)$ 的解析式已知的情况下
解题模板	第一步　找出使函数 $f(x)$ 所含每个部分有意义的条件，主要考虑以下几种情形： （1）　分式中分母不为 0； （2）　偶次方根中被开方数非负； （3）　x^0 的底数不为零； （4）　对数式中的底数大于 0、且不等于 1，真数大于 0； （5）　正切函数 $y=\tan x$ 的定义域为 $\{x\mid x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi,k\in Z\}$． 第二步　列出不等式（组）； 第三步　解不等式（组），即不等式（组）的解集即为函数 $f(x)$ 的定义域．

【例 1】（2021·新沂市第一中学高三模拟）函数 $y=\frac{\ln(1-x)}{\sqrt{x+1}}+\frac{1}{x}$ 的定义域是（　　）

A．$[-1,0)\cup(0,1)$　　B．$[-1,0)\cup(0,1]$

C．$(-1,0)\cup(0,1)$　　D．$(-1,0)\cup(0,1]$

【变式演练 1】（2021·广东高三模拟）设函数 $y=\sqrt{16-x^2}$ 的定义域为 A，函数 $y=\ln(1-x)$ 的定义域为 B，则 $A\cap B$ 等于（　　）

A．$(1,4)$　　B．$(1,4]$　　C．$[-4,1)$　　D．$(-4,1)$

例 2.【黑龙江省大庆市第四中学 2020 届月考】函数 $y=\log_{\frac{1}{2}}(1-\tan x)$ 的定义域为（　　）

A. $\left(-\frac{\pi}{2}+k\pi,\frac{\pi}{4}+k\pi\right),k\in Z$　　B. $\left(-\frac{\pi}{2}+2k\pi,\frac{\pi}{4}+2k\pi\right),k\in Z$

C. $\left(\frac{\pi}{4}+k\pi,\frac{\pi}{2}+k\pi\right),k\in Z$　　D. $\left(\frac{\pi}{4}+2k\pi,\frac{\pi}{2}+2k\pi\right),k\in Z$

【变式演练 2】求函数 $y=\log_a(a^x-1)$　$(a>0$且$a\neq 1)$ 的定义域.

例 3．若函数 $f\left(x\right)=\sqrt{x^2+ax+1}$ 的定义域为 R，则实数 a 取值范围是（　　）

A. $[-2,2]$　　B. $(2,+\infty)$　　C. $(-\infty,2)$　　D. $(-2,2)$

【变式演练 3】已知函数 f（x）=$\frac{\sqrt[3]{3x-1}}{ax^2+ax-3}$ 的定义域是 R，则实数 a 的取值范围是（　　）

A. $-12<a\leq 0$　　B. $-12<a<0$　　C. $a>\frac{1}{3}$　　D. $a\leq\frac{1}{3}$

方法二　抽象复合法

万能模板	内　　容
使用场景	涉及到抽象函数求定义域
解题模板	利用抽象复合函数的性质解答： (1)已知函数 $f(x)$ 的定义域为 (a,b)，求复合函数 $f[g(x)]$ 的定义域： 只需解不等式 $a<g(x)<b$，不等式的解集即为所求函数 $f[g(x)]$ 的定义域. (2)已知复合函数 $f[g(x)]$ 的定义域为 (a,b)，求函数 $f(x)$ 的定义域： 只需根据 $a<x<b$ 求出函数 $g(x)$ 的值域，即为函数 $f(x)$ 的定义域.

例 4．求下列函数的定义域：

（1）已知函数 f（x）的定义域为 $[-2,2]$，求函数 $y=f(x^2-1)$ 的定义域.

（2）已知函数 $y=f(2x+4)$ 的定义域为 $[0,1]$，求函数 f（x）的定义域.

（3）已知函数 f（x）的定义域为 $[-1,2]$，求函数 $y=f(x+1)-f(x^2-1)$ 的定义域.

【变式演练 4】（2021·全国高三模拟）已知函数 $f\left(x\right)$ 的定义域为 $[-1,0]$，若 $g\left(x\right)=f\left(x+a\right)-f\left(x-a\right)$ 有定

义，则实数a的取值范围是（　　）

A．$\left[-\frac{1}{2},0\right]$　　B．$\left[-1,-\frac{1}{2}\right]$　　C．$\left[0,\frac{1}{2}\right]$　　D．$\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$

【变式演练 5】【山东省泰安市 2020 届高三 6 月三模】已知函数$f\left(x\right)=\frac{x}{\sqrt{2^x-4^x}}$，则函数$\frac{f\left(x-1\right)}{x+1}$的定义域为（　　）

A．$\left(-\infty,1\right)$　　B．$\left(-\infty,-1\right)$

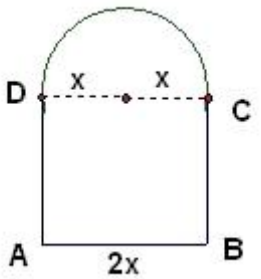
C．$\left(-\infty,-1\right)\cup\left(-1,0\right)$　　D．$\left(-\infty,-1\right)\cup\left(-1,1\right)$

【变式演练 6】（2021·湖北襄阳五中高三二模）已知函数$y=f\left(\frac{x^2+2x-1}{x^2+x-1}\right)$的定义域是$\left[1,+\infty\right)$，则函数$y=f\left(x\right)$的定义域是_____.

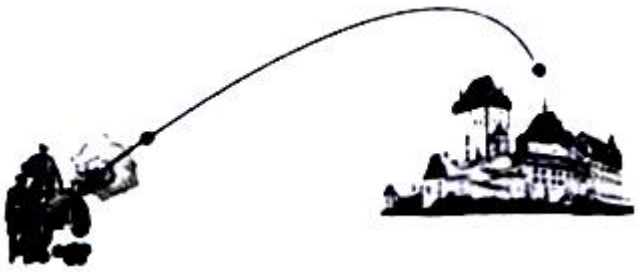
方法三　实际问题的定义域

万能模板	内　　容
使用场景	函数的实际应用问题
解题模板	第一步　求函数的自变量的取值范围； 第二步　考虑自变量的实际限制条件； 第三步　取前后两者的交集，即得函数的定义域.

例 5．用长为L的铁丝编成下部为矩形，上部为半圆形的框架（如图所示）．若矩形底边长为$2x$，求此框架围成的面积y与关于x的函数解析式，并求出它的定义域.



【变式演练 7】（2021·全国课时练习）一枚炮弹发射后，经过 26s 落到地面击中目标，炮弹的射高为 845m，且炮弹距地面的高度h（单位：m）与时间t（单位：s）的关系为$h=130t-5t^2$.①



求①所表示的函数的定义域与值域，并用函数的定义描述这个函数.

【高考再现】

1.【2017 山东理】设函数 $y=\sqrt{4-x^2}$ 的定义域 A，函数 $y=\ln(1-x)$ 的定义域为 B，则 $A\cap B=$

（A）（1，2）　　（B）$(1,2]$　　（C）（-2，1）　　（D）[-2，1)

2.【2016·全国卷II】 下列函数中，其定义域和值域分别与函数 $y=10^{\lg x}$ 的定义域和值域相同的是(　　)

A．$y=x$　B．$y=\lg x$　　C．$y=2^x$　D．$y=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$

3.【2014 山东．理 3】 函数 $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{(\log_2 x)^2-1}}$ 的定义域为（　　）

A．$(0,\dfrac{1}{2})$　　B．$(2,+\infty)$　　C．$(0,\dfrac{1}{2})\cup(2,+\infty)$　　D．$(0,\dfrac{1}{2}]\cup[2,+\infty)$

4.【2015 高考重庆，文 3】函数 $f(x)=\log_2(x^2+2x-3)$ 的定义域是（　　）

(A) $[-3,1]$　　(B) $(-3,1)$

(C) $(-\infty,-3]\cup[1,+\infty)$　　(D) $(-\infty,-3)\cup(1,+\infty)$

5.【2015 高考湖北，文 6】函数 $f(x)=\sqrt{4-|x|}+\lg\dfrac{x^2-5x+6}{x-3}$ 的定义域为（　　）

A．(2, 3)　　B．(2, 4]

C．$(2,3)\cup(3,4]$　　D．$(-1,3)\cup(3,6]$

6.【2020 年高考北京卷 11】函数 $f(x)=\dfrac{1}{x+1}+\ln x$ 的定义域是_____.

7．【2015 高考山东，理 14】已知函数 $f(x)=a^x+b(a>0,a\neq1)$ 的定义域和值域都是 $[-1,0]$，则 $a+b=$_____.

8．【2019 年高考江苏】函数 $y=\sqrt{7+6x-x^2}$ 的定义域是__▲__.

【反馈练习】

1.（2021·天津高三期末）函数 $f(x)=\frac{1}{x-1}+\log_2(2x-x^2)$ 的定义域为（　　）

A. $(1,2)$　　B. $(-\infty,0)\cup(2,+\infty)$

C. $(-\infty,1)\cup(1,2)$　　D. $(0,1)\cup(1,2)$

2.【云南省昆明市第一中学 2020 届高三考前第九次适应性训练】设函数 $y=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ 的定义域为 A，函数 $y=2^{x-1}$ 的值域为 B，则 $A\cap B=$(　　)

A. $(0,1)$　　B. $(0,1]$　　C. $(-1,1)$　　D. $[-1,1]$

3.（2021·哈尔滨市第三十二中学校高三期末（文））函数 $f(x)=\frac{1}{\lg x}+\sqrt{2-x}$ 的定义域为（　　）

A. $(0,2]$　　B. $(0,2)$

C. $(0,1)\cup(1,2]$　　D. $(-\infty,2]$

4.【2020 届河南省郑州市高三第二次质量预测】设函数 $y=\sqrt{9-x^2}$ 的定义域为 A，函数 $y=\ln(3-x)$ 的定义域为 B，则 $A\cap B=$（　　）

A. $(-\infty,3)$　　B. $(-8,-3)$　　C. $\{3\}$　　D. $[-3,3)$

5.（2021·广东深圳中学高三期中）已知等腰三角形的周长为 $40cm$，底边长 $y(cm)$ 是腰长 $x(cm)$ 的函数，则函数的定义域为(　　)

A. $(10,20)$　　B. $(0,10)$　　C. $(5,10)$　　D. $[5,10)$

6.【2020 届百师联盟高三联考】函数 $f(x)=\sqrt{\ln x}\cdot\lg\left(\frac{x+2}{2-x}\right)$ 的定义域为(　　)

A. $[1,2]$　　B. $[2,+\infty)$　　C. $[1,2)$　　D. $(1,2]$

7.（2019·河北张家口中学月考）若函数 $f(x)=\frac{x}{\sqrt{mx^2-mx+2}}$ 的定义域为 R，则实数 m 取值范围是（　）

A. $[0,8)$　　B. $(8,+\infty)$　　C. $(0,8)$　　D. $(-\infty,0)\cup(8,+\infty)$

8.（2021·北京清华附中高三其他模拟）函数 $f(x)=\sqrt{x+1}+\lg(4-x)$ 的定义域是_____.

第 2 讲　常见函数值域或最值的经典求法

【高考地位】

函数值域是函数概念中三要素之一,是高考中必考内容,具有较强的综合性,贯穿整个高中数学的始终.而在高考试卷中的形式可谓千变万化,但万变不离其宗,真正实现了常考常新的考试要求.所以,我们应该掌握一些简单函数的值域求解的基本方法.

方法一　观察法

万能模板	内　　容
使用场景	函数值域求解
解题模板	第一步　观察函数中的特殊函数； 第二步　利用这些特殊函数的有界性，结合不等式推导出函数的值域.

例 1 函数 $y=\frac{-2}{x}+3, x\in[4,5]$ 的值域_____.

【变式演练 1】求函数 $f(x)=\sqrt{8-2^x}$ 的值域.

方法二　分离常数法

万能模板	内　　容
使用场景	函数值域求解
解题模板	第一步　观察函数 $f(x)$ 类型，型如 $f(x)=\frac{ax+b}{cx+d}$； 第二步　对函数 $f(x)$ 变形成 $f(x)=\frac{a}{c}+\frac{e}{cx+d}$ 形式； 第三步　求出函数 $y=\frac{e}{cx+d}$ 在 $f(x)$ 定义域范围内的值域，进而求函数 $f(x)$ 的值域.

例 2　求函数 $f(x)=\frac{3x+5}{x-2}$ 的值域.

【变式演练 2】【北京大学附属中学 2021 届高三 5 月阶段性检测】若函数 $f(x)=\frac{x-1}{x+1}$ 的定义域是 $[0,+\infty)$，则 $f(x)$ 的值域是_____.

方法三　配方法

万能模板	内　　容
使用场景	函数值域求解
解题模板	第一步　将二次函数配方成 $y=a(x-b)^2+c$； 第二步　根据二次函数的图像和性质即可求出函数的值域.

例 3　定义在 R 上的函数 $f(x)=(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)$ 的值域是_____.

【变式演练 3】已知函数 $y=x^2-3x-4$ 的定义域是 $[0,m]$，值域为 $[-\frac{25}{4},-4]$，则 m 的取值范围是（　）

A．$(0,4]$　　B．$[\frac{3}{2},4]$　　C．$[\frac{3}{2},3]$　　D．$[\frac{3}{2},+\infty)$

方法四　反函数法

万能模板	内　　容
使用场景	函数值域求解
解题模板	第一步　求已知函数的反函数； 第二步　求反函数的定义域； 第三步　利用反函数的定义域是原函数的值域的关系即可求出原函数的值域

例 4　设 $f^{-1}(x)$ 为 $f(x)=2^{x-2}+\frac{x}{2}$，$x\in[0,2]$ 的反函数，则 $y=f(x)+f^{-1}(x)$ 的最大值为.

【变式演练 4】求函数 $f(x)=\frac{3x+4}{5x+6}$ 的值域.

方法五　换元法

万能模板	内　　容
使用场景	函数值域求解
解题模板	第一步　观察函数解析式的形式，函数变量较多且相互关联； 第二步　另新元代换整体，得一新函数，求出新函数的值域即为原函数的值域.

例 5 求函数 $f(x)=4^x-2^{x+1}-3$，　$x\in[-1,1]$ 的值域..

【变式演练 5】【2021 新高考高考最后一卷数学第二模拟】函数 $y=\frac{\sin^2 x+\sin 2x}{1+\sin^2 x}$ 的值域为_____.

例 6　求函数 $y=x+\sqrt{1-2x}$ 的值域.

【变式演练 6】　求函数 $y=(\sin x+1)(\cos x+1)$，$x\in\left[-\frac{\pi}{12},\frac{\pi}{2}\right]$ 的值域.

方法六　判别式法

万能模板	内　　容
使用场景	函数值域求解

解题模板	第一步　观察函数解析式的形式，型如 $y=\dfrac{dx^2+ex+f}{ax^2+bx+c}$ 的函数； 第二步　将函数式化成关于 x 的方程，且方程有解，用根的判别式求出参数 y 的取值范围，即得函数的值域.

例 7　求函数 $y=\dfrac{2x^2+4x-7}{x^2+2x+3}$ 的值域.

【变式演练 7】求函数 $y=\dfrac{x}{x^2+1}$ 的值域.

方法七　基本不等式法

万能模板	内　　容
使用场景	函数值域求解
解题模板	第一步　观察函数解析式的形式，型如 $y=\dfrac{ex+f}{ax^2+bx+c}$ 或 $y=\dfrac{ax^2+bx+c}{ex+f}$ 的函数； 第二步　对函数进行配凑成 $y=ax+\dfrac{b}{x}$ 形式，再利用基本不等式求函数的最值，进而得到函数的值域.

例 8　已知 $x\geq\dfrac{5}{2}$，求函数 $f(x)=\dfrac{x^2-4x+5}{2x-4}$ 的最小值.

例 9　已知函数 $f(x)=x+\dfrac{9}{x+1}(0\leq x\leq 3)$，求 $f(x)$ 的值域.

【变式演练 8 】【2021 届新高考同一套题信息原创卷】（多选）下列说法正确的是（　　）

A．已知 $x>1$，则函数 $f\left(x\right)=2x+\dfrac{1}{x-1}\geq 2+2\sqrt{2}$

B．已知 $2<x\leq 4$，则函数 $f\left(x\right)=x+\dfrac{1}{4x}$ 的值域为 $\left(\dfrac{17}{8},\dfrac{65}{16}\right]$

C．已知 $x>4$，则函数 $f\left(x\right)=\log_2 x+\log_x 2$ 的最小值为 2

D．已知 $xy=1$，则 $x+y\geq 2$.

【变式演练 9】 求 $y=\dfrac{x^2+5}{\sqrt{x^2+4}}$ 的最小值；

方法八　单调性法

万能模板	内　　容

使用场景	函数值域求解
解题模板	第一步　确定函数的定义域； 第二步　求出函数的单调区间； 第三步　确定函数的值域或最值.

例 10 求函数 $f(x)=\log_{\frac{1}{2}}(x^2-3x+5)\quad(0\le x\le 2)$ 的值域.

例 11 求函数 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^{-x^2+2x}$ 的值域.

【变式演练 10】 已知函数 $f\left(x\right)=\left(\log_4 x-3\right)\cdot\log_4 4x$.当 $x\in\left[\frac{1}{4},16\right]$ 时，求该函数的值域；

【变式演练 11】 求函数 $f\left(x\right)=\sqrt{5-2x}+\sqrt{x^2-4x-12}$ 的值域.

方法九　数形结合法

万能模板	内　　容
使用场景	函数值域求解
解题模板	第一步　作出函数在定义域范围内的图像； 第二步　利用函数的图像求出函数的值域.

例 12 求函数 $y=\frac{3-\sin x}{2-\cos x}$ 的值域.

例 13　求函数 $f(x)=\ln(\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{x^2-x+1})$ 的值域.

【变式演练 12】 定义运算 $a*b$，$a*b=\begin{cases}a\ (a\le b)\\ b\ (a>b)\end{cases}$，例如 $1*2=1$，则函数 $y=1*2^x$ 的值域为（　　）

A. $(0,1)$　　B. $(-\infty,1)$　　C. $[1,+\infty)$　　D. $(0,1]$

【高考再现】

1. 【2014 高考重庆理第 12 题】函数 $f(x)=\log_2\sqrt{x}\cdot\log_{\sqrt{2}}(2x)$ 的最小值为_____.

2.【2018 年全国普通高等学校招生统一考试理科数学（天津卷精编版）】已知函数 $f\left(x\right)=\begin{cases}x^2-x+3, x\le 1,\\ x+\frac{2}{x}, x>1.\end{cases}$

设 $a\in R$，若关于 x 的不等式 $f\left(x\right)\ge\left|\frac{x}{2}+a\right|$ 在 R 上恒成立，则 a 的取值范围是

A. $\left[-\frac{47}{16},2\right]$　　B. $\left[-\frac{47}{16},\frac{39}{16}\right]$　　C. $\left[-2\sqrt{3},2\right]$　　D. $\left[-2\sqrt{3},\frac{39}{16}\right]$

3. 【2014 上海理】$f(x)=\begin{cases}(x-a)^2,x\le 0,\\ x+\frac{1}{x}+a,x>0,\end{cases}$ 若 $f(0)$ 是 $f(x)$ 的最小值，则 a 的取值范围为（　　）.

(A)[-1,2]　　(B)[-1，0]　　(C)[1，2]　　(D) $[0,2]$

4.【2018 高考福建】若函数 $f(x)=\begin{cases}-x+6,x\le 2,\\ 3+\log_a x,x>2,\end{cases}$（$a>0$ 且 $a\neq 1$）的值域是 $[4,+\infty)$，则实数 a 的取值范围是.

5.【2015 高考北京，理 14】设函数 $f(x)=\begin{cases}2^x-a, & x<1,\\ 4(x-a)(x-2a), & x\geqslant 1.\end{cases}$

①若 $a=1$，则 $f(x)$ 的最小值为_____；

②若 $f(x)$ 恰有 2 个零点，则实数 a 的取值范围是_____.

6. 【2015 高考浙江，理 10】已知函数 $f(x)=\begin{cases}x+\frac{2}{x}-3,x\ge 1\\ \lg(x^2+1),x<1\end{cases}$，则 $f(f(-3))=$，$f(x)$ 的最小值是.

7. 【2017 浙江】若函数 $f(x)=x^2+ax+b$ 在区间[0，1]上的最大值是 M，最小值是 m，则 $M-m$

A．与 a 有关，且与 b 有关　　*B*．与 a 有关，但与 b 无关

C．与 a 无关，且与 b 无关　　*D*．与 a 无关，但与 b 有关

8.【2018 年全国普通高等学校招生统一考试数学（浙江卷精编版）】已知 $a\in R$，函数 $f(x)=\left|x+\frac{4}{x}-a\right|+a$ 在区间[1,4]上的最大值是 5，则 a 的取值范围是_____

9.【2017 北京，文 11】已知 $x\ge 0$，$y\ge 0$，且 $x+y=1$，则 x^2+y^2 的取值范围是_____.

10. 【2014 福建,理 13】要制作一个容器为 $4\,m^3$，高为 $1m$ 的无盖长方形容器，已知该容器的底面造价是每平方米 20 元，侧面造价是每平方米 10 元，则该容器的最低总造价是_____（单位：元）

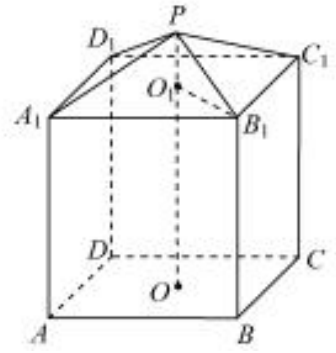
11.【2014 高考重庆理第 16 题】若不等式 $|2x-1|+|x+2|\ge a^2+\frac{1}{2}a+2$ 对任意实数 x 恒成立，则实数 a 的取值范围是_____.

12. 【2016 高考江苏卷】（本小题满分 14 分）

现需要设计一个仓库，它由上下两部分组成，上部分的形状是正四棱锥 $P-A_1B_1C_1D_1$，下部分的形状是正四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ (如图所示)，并要求正四棱柱的高 PO_1 的四倍.

（1）若 $AB=6m,\mathrm{PO}_1=2m$, 则仓库的容积是多少？

（2）若正四棱柱的侧棱长为 6m,则当 PO_1 为多少时，仓库的容积最大？



13【2018年普通高等学校招生统一考试数学（上海卷）】设定义在R上的函数$f(x)$满足：对于任意的x_1、$x_2\in R$，当$x_1<x_2$时，都有$f(x_1)\le f(x_2)$.

（1）若$f(x)=ax^3+1$，求a的取值范围；

（2）若$f(x)$为周期函数，证明：$f(x)$是常值函数；

（3）设$f(x)$恒大于零，$g(x)$是定义在R上、恒大于零的周期函数，M是$g(x)$的最大值.

函数$h(x)=f(x)g(x)$. 证明："$h(x)$是周期函数"的充要条件是"$f(x)$是常值函数".

【反馈练习】

1.【陕西省榆林市 2020-2021 学年高三上学期第一次高考模拟测试文科】下列四个函数：①$y=2x+3$；②$y=\frac{1}{x}$；③$y=2^x$；④$y=x^{\frac{1}{2}}$，其中定义域与值域相同的函数的个数为（）

A．1　　B．2　　C．3　　D．4

2.【上海市杨浦区 2021 届高三上学期一模（期末）】下列函数中，值域为$(0,+\infty)$的是（）

A．$y=x^2$　　B．$y=\frac{2}{x}$　　C．$y=2^x$　　D．$y=\left|\log_2 x\right|$

3.【上海市浦东新区 2021 届高三上学期一模】已知函数 $f(x)=\begin{cases}x^2,x\text{为无理数}\\x,x\text{为有理数}\end{cases}$，则以下 4 个命题：

①$f(x)$ 是偶函数；

②$f(x)$ 在$[0,+\infty)$上是增函数；

③ $f(x)$ 的值域为 R；

④对于任意的正有理数 a，$g(x)=f(x)-a$ 存在奇数个零点.

其中正确命题的个数为（）

A．0　　B．1　　C．2　　D．3

4.【贵州省安顺市 2021 届全市高三年级第一次教学质量监测统一考试】设集合 $A=\{x\,|\,-1\le x\le 3\},B=\left\{y\,|\,y=\sqrt{-x^2+4}\right\}$，则 $A\cap B=$（）

A．$[-1,2]$　　B．$[0,2]$　　C．$[-2,2]$　　D．$[0,3]$

5.【上海市南模中学 2021 届高三三模数学试题】下列函数中，与函数 $y=x^3$ 的值域相同的函数为（　）

A．$y=\left(\frac{1}{2}\right)^{x+1}$　　B．$y=\ln(x+1)$　　C．$y=\frac{x+1}{x}$　　D．$y=x+\frac{1}{x}$

6.【天津市南开中学 2019-2020 学年高三（上）】下列四个函数：① $y=3-x$；② $y=2^{x-1}(x>0)$；③ $y=x^2+2x-10$；

④ $y=\begin{cases}x,x\le 0\\ \frac{1}{x},x>0\end{cases}$，其中定义域与值域相同的函数的个数为（）

A．1　　B．2

C．3　　D．4

7.【云南省昆明市第一中学 2021 届高三高中新课标第一次摸底测试】函数 $y=\ln x+\frac{1}{\ln x}$ 的值域为（）

A．(-∞，-2]　　B．[2，+∞)

C．(-∞，-2] ∪ [2，+∞)　　D．[-2，2]

8．若函数 $y=x^2-3x-4$ 的定义域为 $[0,m]$，值域为 $\left[-\frac{25}{4},-4\right]$，则实数 m 的取值范围是（）

A．$(0,3]$　　B．$\left[\frac{3}{2},4\right]$　　C．$\left[\frac{3}{2},3\right]$　　D．$\left[\frac{3}{2},+\infty\right)$

9.【2020 年普通高等学校招生全国统一考试伯乐马模拟考试（三）文科】高斯函数属于初等函数，以大数学家约翰·卡尔·弗里德里希·高斯的名字命名，其图形在形状上像一个倒悬着的钟，高斯函数应用范围很广，在自然科学、社会科学、数学以及工程学等领域都能看到它的身影，设 $x\in\mathbf{R}$，用 $[x]$ 表示不超过 x 的最大

整数，则 $y=[x]$ 称为高斯函数，例如：$[-3.1]=-4$，$[4.8]=4$.则函数 $f(x)=\left[\dfrac{2^{x+1}}{1+2^x}-\dfrac{1}{3}\right]$ 的值域为（）

A．{0，1}　　B．$\{-1,1\}$　　C．$\{-1,0\}$　　D．$\{-1,0,1\}$

10.【金科大联考 2020 届高三 5 月质量检测数学（文科）】已知函数 $f(x)=2^{x+1}$ 可以表示成一个偶函数 $g(x)$ 和一个奇函数 $h(x)$ 之差，若 $[h(x)]^2+ag(x)\geq 1$ 对 $x\in\mathbf{R}$ 恒成立，则实数 a 的取值范围为（）.

A．$\left[\dfrac{1}{3},+\infty\right)$　　B．$[1,+\infty)$　　C．$\left[\dfrac{1}{2},+\infty\right)$　　D．$\left[-\dfrac{1}{4},+\infty\right)$

11.【2021 年普通高等学校招生全国统一考试 文科数学模拟测试题（二）】函数 $f(x)=\sqrt{2-x}+\sqrt{x^2-6x+10}$ 的值域为_____.

12．函数 $y=\dfrac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+3}$ 的值域是_____.

13．函数 $y=\dfrac{2-x^2}{2+x^2}$ 的值域是_____

14．函数 $y=\dfrac{\sin\theta}{2-\sin\theta}$ 的值域为_____.

15.【江西省顶级名校 2021 届高三下学期三模数学（理）试题】若函数 $f(x)=\begin{cases}-x+6,x\leq 2\\ 3+\log_a x,x>2\end{cases}$（$a>0$ 且 $a\neq 1$）的值域是 $[4,+\infty)$，则实数 a 的取值范围是_____.

16.【河南省漯河市 2020-2021 学年高三上学期期末】已知函数 $f(x)=|2x-1|+|x+3|$，$g(x)=|a-1|-a|x|$.

（1）求函数 $f(x)$ 的值域 M；

（2）若函数 $g(x)$ 的值域为 N，且 $M\cap N\neq\varnothing$，求实数 a 的取值范围.

17.【陕西省西安市八校 2020-2021 学年高三上学期第一次联考理科数学试题】已知 $f(x)=x|x-3|-4$.

（1）解不等式 $f(x)\leq 0$；

（2）设 $g(x)=\dfrac{f(x)}{x}(x\leq 3$，且 $x\neq 0)$，求 $g(x)$ 的值域.

第 3 讲　函数的单调性和最值的处理途径

【高考地位】

函数的单调性是函数的一个重要性质，几乎是每年必考的内容，例如判断和证明单调性、求单调区间、利用单调性比较大小、求值域、最值或解不等式.

方法一　定义法

万能模板	内　　容
使用场景	一般函数类型
解题模板	第一步　取值定大小：设任意 $x_1,x_2\in D$，且 $x_1<x_2$； 第二步　作差：$f(x_1)-f(x_2)$； 第三步　变形（合并同类项、通分、分解因式、配方等）； 第四步　定符号； 第五步　得出结论.

例 1　已知函数 $f(x)=\log_a(x-2a)+\log_a(4a-x)$（$a>0$ 且 $a\neq1$）.

（1）当 $a>1$ 时，写出函数 $f(x)$ 的单调区间，并用定义法证明；

（2）当 $0<a<1$ 时，若 $f(x)\geq\log_a\left(\frac{1}{4}a+\frac{1}{8}\right)$ 恒成立，求实数 a 的取值范围.

【来源】辽宁省辽西联合校 2020-2021 学年高三（上）期中数学试题

例 2　已知定义域为 $\mathbf{R}$ 的函数 $f(x)=\frac{1-2^x}{1+2^x}$.

（1）试判断函数 $f(x)=\frac{1-2^x}{1+2^x}$ 在 $\mathbf{R}$ 上的单调性，并用函数单调性的定义证明；

（2）若对于任意 $t\in\mathbf{R}$，不等式 $f(t^2-2t)+f(t^2-k)<0$ 恒成立，求实数 k 的取值范围.

【来源】上海市金山区 2021 届高三上学期一模（期末教学质量检测）数学试题

【变式演练 1】（多选）【海南省 2021 届高三年级第二次模拟考试】下列函数中是偶函数，且在区间 $(0,1)$ 上单调递增的是（）

A．$y=x^2-2$　　B．$y=\frac{2}{x}$

C．$y=|x|+\frac{1}{|x|}$　　D．$y=\frac{x^2}{|x|}$

例 3　定义在 $[-1,1]$ 上的奇函数 $f(x)$，对任意 $m,n\neq0$ 时，恒有 $\frac{f(m)+f(n)}{m+n}>0$.

（1）比较 $f(\frac{1}{2})$ 与 $f(\frac{1}{3})$ 大小；

（2）判断 $f(x)$ 在 $[-1,1]$ 上的单调性，并用定义证明；

（3）若 $a-8x+1>0$ 对满足不等式 $f(x-\frac{1}{2})+f(\frac{1}{4}-2x)<0$ 的任意 x 恒成立，求 a 的取值范围.

【变式演练 2】已知函数 $f\left(x\right)=\dfrac{x}{x^2+1}$.

（1）判断并证明函数 $f\left(x\right)$ 的奇偶性；

（2）判断当 $x\in\left(-1,1\right)$ 时函数 $f\left(x\right)$ 的单调性，并用定义证明；

（3）若 $f\left(x\right)$ 定义域为 $\left(-1,1\right)$，解不等式 $f\left(2x-1\right)+f\left(x\right)<0$.

方法二　导数法

万能模板	内　　容
使用场景	较复杂的函数类型
解题模板	第一步　求函数 $f(x)$ 的定义域； 第二步　求导 $f'(x)$； 第三步　在定义域范围内解不等式 $f'(x)>0$ 或 $f'(x)<0$； 第四步　得出函数 $f(x)$ 的增减区间.

例 4　已知函数 $f(x)=-x^3+3x^2+9x+a$．求 $f(x)$ 的单调递减区间；

【变式演练 3】函数 $f\left(x\right)=\sin^2 x\cdot\sin 2x$，$x\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$ 的单调递增区间为_____.

【来源】福建省三明第一中学 2021 届高三 5 月校模拟考数学试题

方法三　复合函数解析法

万能模板	内　　容
使用场景	简单的复合函数类型

解题模板	第一步　先求函数的定义域； 第二步分解复合函数，分别判断内外层函数的单调性； 第三步　根据同增异减，确定原函数的增减区间.

例 5　求$y=\log_{\frac{1}{2}}(x^2-3x+2)$的单调区间

【变式演练 4】已知定义在 R 上的函数 $y=f(x)$ 是偶函数，且 $x\geq 0$ 时，$f(x)=\ln(x^2-2x+2)$.

（1）当 $x<0$ 时，求 $f(x)$ 解析式；

（2）写出 $f(x)$ 的单调递增区间.

【变式演练 5】函数 $y=\dfrac{1}{x^2-ax-a}$ 在 $\left[-2,-\dfrac{1}{2}\right]$ 上单调递增，则实数 a 的取值范围是_____.

【来源】上海市大同中学 2021 届高三三模数学试题

方法四　图像法

万能模板	内　　容
使用场景	图像比较容易画出的函数类型
解题模板	第一步　通过题目条件画出函数图像； 第二步　从图像中读出函数的单调区间.

例 6　求函数 $f(x)=-x^2+|x|$ 的单调区间。

【变式演练 6】已知函数 $f\left(x\right)=1+2\left|x\right|-x\left(-1\leq x\leq 2\right)$.

（1）用分段函数的形式表示该函数.

（2）画出该函数的图象.

（3）写出该函数的单调区间及值域.

【高考再现】

1.（2021 年全国高考甲卷数学（文）试题）下列函数中是增函数的为（　　）

A．$f(x)=-x$　　B．$f(x)=\left(\frac{2}{3}\right)^x$　　C．$f(x)=x^2$　　D．$f(x)=\sqrt[3]{x}$

2.【2020 年高考全国Ⅱ卷文数 10】设函数 $f(x)=x^3-\frac{1}{x^3}$，则 $f(x)$　　（）

A．是奇函数，且在 $(0,+\infty)$ 单调递增　　B．是奇函数，且在 $(0,+\infty)$ 单调递减

C．是偶函数，且在 $(0,+\infty)$ 单调递增　　D．是偶函数，且在 $(0,+\infty)$ 单调递减

3.【2020 年高考全国Ⅱ卷理数 9】设函数 $f(x)=\ln|2x+1|-\ln|2x-1|$，则 $f(x)$　　（）

A．是偶函数，且在 $\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$ 单调递增　　B．是奇函数，且在 $\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$ 单调递减

C．是偶函数，且在 $\left(-\infty,-\frac{1}{2}\right)$ 单调递增　　D．是奇函数，且在 $\left(-\infty,-\frac{1}{2}\right)$ 单调递减

4.【2020 年高考山东卷 8】若定义在 **R** 上的奇函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 单调递减，且 $f(2)=0$，则满足 $xf(x-1)\geq 0$ 的 x 的取值范围是　　（）

A．$[-1,1]\cup[3,+\infty)$　　B．$[-3,-1]\cup[0,1]$　　C．$[-1,0]\cup[1,+\infty)$　　D．$[-1,0]\cup[1,3]$

5.【2018 年全国 2 卷】函数$f(x)=\ln(x^2-2x-8)$的单调递增区间是

A．$(-\infty,-2)$　　B．$(-\infty,1)$　　C．$(1,+\infty)$　　D．$(4,+\infty)$

6.【2018 年全国新课标 1 卷】已知函数$f(x)=\ln x+\ln(2-x)$，则

A．$f(x)$在（0，2）单调递增　　B．$f(x)$在（0，2）单调递减

C．$y=f(x)$的图像关于直线 x=1 对称　　D．$y=f(x)$的图像关于点（1，0）对称

【反馈练习】

1.【陕西省榆林市 2020-2021 学年高三上学期第一次高考模拟测试文】已知定义在 R 上的偶函数 $f(x)$ 在区间 $(-\infty,0)$ 上递减.若 $a=f\left(2^{0.7}\right)$，$b=f(-\ln 2)$，$c=f\left(\log_3 2\right)$，则 a，b，c 的大小关系为（）

A．$c<a<b$　　B．$c<b<a$　　C．$a<b<c$　　D．$b<a<c$

2.【上海市浦东新区 2021 届高三上学期一模数学】已知函数 $f(x)=\begin{cases}x^2,x\text{为无理数}\\ x,x\text{为有理数}\end{cases}$，则以下 4 个命题：

① $f(x)$ 是偶函数；

② $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上是增函数；

③ $f(x)$ 的值域为 R；

④对于任意的正有理数a，$g(x)=f(x)-a$存在奇数个零点.

其中正确命题的个数为（）

A．0　　B．1　　C．2　　D．3

3.【云南省陆良县2020届高三毕业班（9月）第一次摸底考试】已知$f(x)$是奇函数，且$\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}>0$对任意$x_1,x_2\in R$且$x_1\neq x_2$都成立，设$a=f\left(\frac{3}{2}\right)$，$b=f(\log_3 7)$，$c=f(-0.8^3)$，则（）

A．$b<a<c$　　B．$c<a<b$　　C．$c<b<a$　　D．$a<c<b$

4.【2021届百师联盟高三一轮复习联考（三）全国卷Ⅰ文科数学】已知函数$y=f(x)$的定义域为$\mathbf{R}$，$f(x)+f(-x)=0$且当$x_1>x_2\geq 0$时，有$\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}<0$，当$x+y=2020$时，有$f(x)+f(2020)>f(y)$恒成立，则$x$的取值范围为（）

A．$(0,+¥)$　　B．$(-¥,0)$　　C．$(1,+¥)$　　D．$(-\infty,1)$

5.【四川省宜宾市2021届高三上学期第一次诊断考试数学（文）】已知定义在R上的奇函数$y=f(x)$满足，$f(x+2)=-f(x)$，若$\forall x_1,x_2\in[0,1]$且$x_1\neq x_2$时，都有$x_1f(x_1)+x_2f(x_2)>x_2f(x_1)+x_1f(x_2)$，则下列四个结论中：①$y=f(x)$图象关于直线$x=2022$对称；②$f(2022)=0$；③$y=f(x)$在$[2019,2021]$上为减函数；④$f(\frac{1}{3})>f(\frac{3}{2})$.其中正确的个数（）

A．1　　B．2　　C．3　　D．4

6.【四川省宜宾市2021届高三上学期第一次诊断考试数学（理）】已知定义在R上的奇函数$y=f(x)$满足，$f(x+2)=-f(x)$，若$\forall x_1,x_2\in[0,1]$且$x_1\neq x_2$时，都有$x_1f(x_1)+x_2f(x_2)>x_2f(x_1)+x_1f(x_2)$，则下列结论正确的是（）

A．$y=f(x)$图象关于直线$x=2020$对称　　B．$y=f(x)$图象关于点$(2020,0)$中心对称

C．$y=f(x)$在$[2019,2021]$上为减函数　　D．$y=f(x)$在$[2020,2022]$上为增函数

7.【广西普通高中2021届高三高考精准备考原创模拟卷（一）数学（理）】设定义在R上的函数$f(x)$满足$f(-x)+f(x)=x^2$，且当$x\leq 0$时，$f'(x)<x$，若存在$x_0\in\left\{x\middle|f(x)+\frac{1}{2}\geq f(1-x)+x\right\}$，则$x_0$的取值范

围为（）

A．$(-\infty,1]$　　B．$[1,+\infty)$　　C．$\left[\frac{1}{2},+\infty\right)$　　D．$\left(-\infty,\frac{1}{2}\right]$

8．【甘肃省张掖市第二中学 2020-2021 学年高三第一学期 10 月月考数学（理）】已知函数

$f(x)=\begin{cases}2+\log_{\frac{1}{2}}x,\frac{1}{8}\le x<1\\ 2^x,1\le x\le 2\end{cases}$，若 $f(a)=f(b)(a<b)$，则 $b-a$ 的取值范围为（）

A．$\left(0,\frac{3}{2}\right]$　　B．$\left(0,\frac{7}{4}\right]$　　C．$\left(0,\frac{9}{8}\right]$　　D．$\left(0,\frac{15}{8}\right]$

9．（2021·济南市·山东师范大学附中高三其他模拟）若函数 $f\left(x\right)=\begin{cases}ax-2, & x\le 2\\ \left(3-2a\right)\ln\left(x-1\right), & x>2\end{cases}$ 在 R 上单调递增，则实数 a 的取值范围是（　　）

A．$\left(0,1\right]$　　B．$\left(0,2\right]$　　C．$\left(0,\frac{3}{2}\right)$　　D．$\left[1,\frac{3}{2}\right)$

10．（2021·北京高三二模）下列函数中，在区间 $(0,+\infty)$ 上单调递增的是（　　）

A．$y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$　　B．$y=x^{-1}$

C．$y=(x-1)^2$　　D．$y=\ln x$

11．已知函数 $f\left(x\right)=x^2-x^{-2}$（　　）

A．是奇函数，$\left(0,+\infty\right)$ 单调递增　　B．是奇函数，$\left(0,+\infty\right)$ 单调递减

C．是偶函数，$\left(0,+\infty\right)$ 单调递减　　D．是偶函数，$\left(0,+\infty\right)$ 单调递增

【来源】黑龙江省哈尔滨师范大学附属中学 2021 届高三第三次模拟文科数学试题

12．已知奇函数 $f\left(x\right)$ 的定义域为 $\left\{x\middle|x\in R,x\ne 0\right\}$，且有 $f\left(3x\right)=3f\left(x\right)$，$f\left(1\right)=1$，当 $x_1>x_2>0$ 时，$\left(x_1-x_2\right)\left(\frac{f\left(x_1\right)}{x_1^3}-\frac{f\left(x_2\right)}{x_2^3}\right)<0$，则不等式 $\frac{9f\left(x\right)}{x}\ge x^2$ 的解集为（　　）

A．$(-\infty,-3]\cup[3,+\infty)$　　B．$[-3,0)\cup(0,3]$

C．$(-\infty,-1]\cup[1,+\infty)$　　D．$[-1,0)\cup(0,1]$

【来源】押第 7、9 题 函数与方程-备战 2021 年高考数学（理）临考题号押题（全国卷 2）

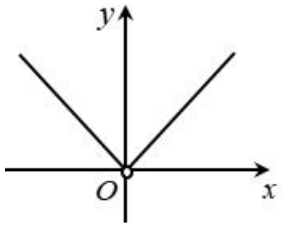
13．设函数 $f\left(x\right)=\ln\left|3x+1\right|+\ln\left|3x-1\right|$，则 $f\left(x\right)$（　　）

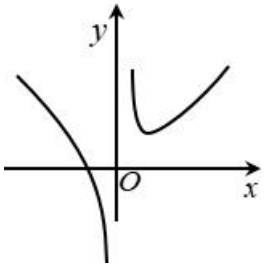
A．是偶函数，且在 $\left(-\infty,-\frac{1}{3}\right)$ 单调递增　　B．是奇函数，且在 $\left(-\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)$ 单调递减

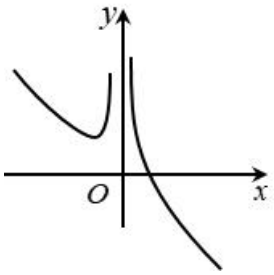
C．是偶函数，且在 $\left(\frac{1}{3},+\infty\right)$ 单调递增　　D．是奇函数，且在 $\left(-\infty,-\frac{1}{3}\right)$ 单调递减

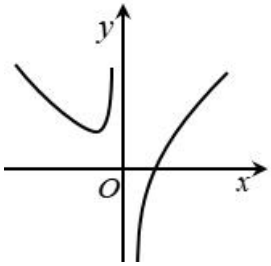
【来源】内蒙古包头市 2021 届高三第一次模拟考试数学（文）试题

14．函数 $f(x)=\left|x\right|-\frac{m}{x}$（其中 $m\in R$）的图像不可能是（　　）

A． 

B． 

C． 

D． 

【来源】湖北省荆门龙泉中学、宜昌一中 2021 届高三下学期 2 月联考数学试题

15．下列函数中，在区间 $\left(0,+\infty\right)$ 上为增函数的是（　　）

A．$y=\ln(x+2)$　　B．$y=-\sqrt{x+1}$　　C．$y=\left(\frac{1}{2}\right)^{x}$　　D．$y=x+\frac{1}{x}$

【来源】黑龙江省伊春林业管理局第二中学 2020-2021 学年高三上学期期中考试数学（文）试题

16．已知函数 $f(x)=x\cdot|x|-2x$，则下列结论正确的是（　　）

A．$f(x)$ 是偶函数，递增区间是 $(-\infty,0)$

B．$f(x)$ 是偶函数，递减区间是 $(-\infty,1)$

C．$f(x)$ 是奇函数，递减区间是 $(-1,1)$

D．$f(x)$ 是奇函数，递增区间是 $(0,+\infty)$

【来源】吉林省长春市东北师大附中 2021 届高三五模数学（文）试题

17．已知函数 $f(x)$ 满足：①对任意 x_1、$x_2\in(0,+\infty)$ 且 $x_1\neq x_2$，都有 $\dfrac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}>0$；②对定义域内的任意 x，都有 $f(x)=f(-x)$，则符合上述条件的函数是（　　）

A．$f(x)=x^2+|x|+1$　B．$f(x)=\dfrac{1}{x}-x$　C．$f(x)=\ln|x+1|$　D．$f(x)=\cos x$

【来源】广东省深圳福田区红岭中学 2021 届高考二模数学试题

18．若函数 $f(x)=\sin 2x+a\cos x+6x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上单调递增，则 a 的取值范围为（　　）

A．$[-4,4]$　B．$[-3,4]$　C．$[-4,-3]$　D．$[-3,3]$

【来源】重庆市第八中学 2021 届高三下学期高考适应性月考（六）数学试题

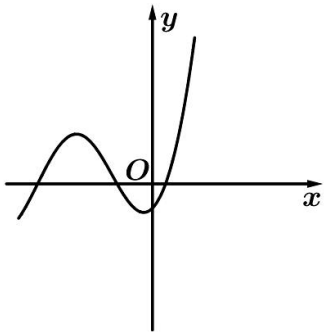
19．已知函数 $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$ 在 $[3,+\infty)$ 上是减函数，$a=4\ln 6^5, b=6\ln 4^5, c=6\ln 5^4$，则 a,b,c 的大小关系为（　　）

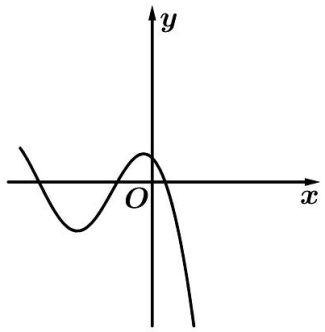
A．$c<a<b$　B．$a<c<b$

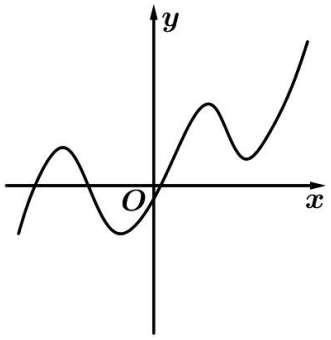
C．$b<c<a$　D．$a<b<c$

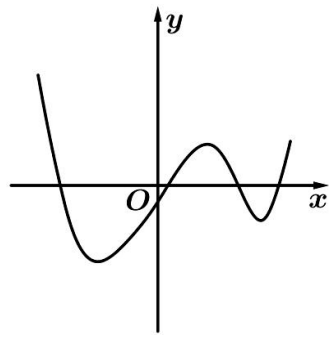
【来源】贵州省贵阳市第一中学 2021 届高三下学期高考适应性月考卷（五）数学（理）试题

20．函数 $y=e^x-2\cos x$ 的大致图象为（　　）

A． 

B． 

C． 

D． 

【来源】重庆市第八中学 2021 届高三下学期适应性月考卷（七）数学试题

21．已知函数 $f(x)=\dfrac{a}{x+1}+\ln x$，若对任意 $x_1,x_2\in(0,2]$，且 $x_1\neq x_2$，都有 $\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}>-1$，则实数 a 的取值范围是（　　）

A．$\left(-\infty,\dfrac{27}{4}\right]$　　B．$(-\infty,2]$　　C．$\left(-\infty,\dfrac{27}{2}\right]$　　D．$(-\infty,8]$

【来源】四川省成都市 2022 届高三文科数学零诊考试试题

22．已知函数 $f(x)=2x^3+a(x-1)e^x$ 在区间 $[0,3]$ 上不是单调函数，则实数 a 的取值范围是（　　）

A．$\left(0,\dfrac{6}{e}\right)$　　B．$\left(-\dfrac{6}{e},0\right)$　　C．$\left(-\dfrac{6}{e},-\dfrac{18}{e^3}\right)$　　D．$\left(-\dfrac{18}{e^3},0\right)$

【来源】全国Ⅰ卷 2021 届高三高考数学（文）押题试题（二）

23．已知函数 $f(x)=e^{x-1}-e^{1-x}+\dfrac{1}{2}\sin\pi x$，实数 a，b 满足不等式 $f(3a+b)+f(a-1)>0$，则下列不等式成立的是（　　）

A．$4a+b>3$　　B．$4a+b<3$

C．$2a+b>-1$　　D．$2a+b<-1$

【来源】福建省宁德市 2021 届高三三模数学试题

24．设函数 $f(x)=\ln|2x+1|-\ln|2x-1|$，则 $f(x)$（　　）

A．是偶函数　　B．是奇函数

C．在 $\left(-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right)$ 上单调递增　　D．在 $\left(-\infty,-\dfrac{1}{2}\right)$ 上单调递减

【来源】山东省日照第一中学 2020-2021 学年高三第二次联合考试数学试题

25．已知函数 $f(x)$ 满足 $f(x+y)=f(x)+f(y)-1(x,y\in R)$，当 $x>0$ 时，$f(x)>1$，且 $f(1)=2$．

（1）求 $f(0),f(-1)$ 的值，并判断 $f(x)$ 的单调性；

（2）当 $x\in[1,2]$ 时，不等式 $f(ax^2-3x)+f(x)<1$ 恒成立，求实数 a 的取值范围．

【来源】江苏省泰兴中学、南菁高级中学 2020-2021 学年高一上学期 12 月第二次阶段考试数学试题

26．已知定义域为 R 的函数 $f(x)=\dfrac{b-2^x}{2^x+a}$ 是奇函数．

（1）求 a，b 的值；

（2）用定义证明 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上为减函数；

（3）若对于任意 $t\in R$，不等式 $f(t^2-2t)+f(2t^2-k)<0$ 恒成立，求 k 的范围．

【来源】江苏省南通市启东中学 2020-2021 学年高三上学期期初数学试题

27.【上海市青浦区 2021 届高三上学期一模数学】设函数 $f(x)=x^2+|x-a|$，a 为常数．

（1）若 $f(x)$ 为偶函数，求 a 的值；

（2）设 $a>0$，$g(x)=\dfrac{f(x)}{x}$，$x\in(0,a]$ 为减函数，求实数 a 的取值范围.

28.【安徽省淮北市 2020-2021 学年高三上学期第一次模拟考试文科数学】已知函数

$f\left(x\right)=\dfrac{x^2+ax+b}{e^x}\left(x\in R\right)$ 的一个极值点是 $x=2$.

（1）求 a 与 b 的关系式，并求 $f\left(x\right)$ 的单调区间；

（2）设 $a>0$，$g\left(x\right)=a^2e^{x-2}$，若存在 x_1，$x_2\in[0,3]$，使得 $\left|f\left(x_1\right)-g\left(x_2\right)\right|<\dfrac{2}{e^2}$ 成立，求实数 a 的范围.

第 4 讲　函数的奇偶性的判断及其应用

【高考地位】

函数的奇偶性是函数的一个重要性质，几乎是每年必考的内容，例如判断和证明函数的奇偶性，利用函数的奇偶性解决实际问题.

类型一　函数奇偶性的判断

万能模板	内　　容
使用场景	一般函数类型
解题模板	第一步　确定函数的定义域； 第二步　判断其定义域是否关于原点对称； 第三步　若是，则确定 $f(x)$ 与 $f(-x)$ 的关系；若不是，则既不是奇函数也不是偶函数； 第四步　得出结论.

例 1　判断下列函数的奇偶性：

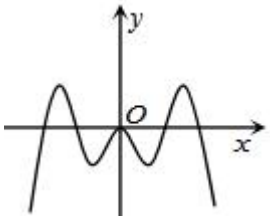
(1) $f(x)=\sqrt{9-x^2}+\sqrt{x^2-9}$；(2) $f(x)=(x+1)\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$；(3) $f(x)=\dfrac{\sqrt{4-x^2}}{|x+3|-3}$.

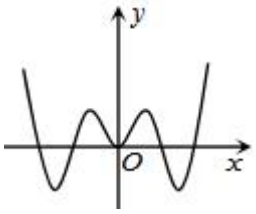
【变式演练 1】【四川省泸州市 2021 届高三第一次教学质量诊断性考试数学（文科）】下列函数中，在定义域上单调递增且为奇函数的是（）

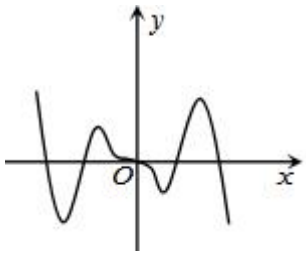
A．$f(x)=\dfrac{1}{x}$　　B．$f(x)=\sin x$

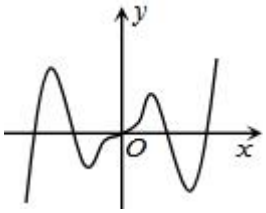
C．$f(x)=x\cos x$　　D．$f(x)=x+\sin x$

【变式演练 2】【四川省宜宾市 2021 届高三上学期第一次诊断考试数学（文）】函数 $f(x)=-\sin x+x\cos x$ 部分图象大致形状为（）

A. 

B. 

C. 

D. 

【变式演练 3】若函数 $f(x)=a(x-1)^3+\dfrac{b}{x-1}+x-1$ 存在 $\lambda\left(\lambda\in N^*\right)$ 个零点，则所有这些零点的和等于_____.

【来源】江苏省南京师范大学《数学之友》2021 届高三下学期一模数学试题

类型二利用函数的奇偶性求函数的解析式

万能模板	内　　容
使用场景	一般函数类型
解题模板	第一步　首先设出所求区间的自变量 x； 第二步　运用已知条件将其转化为已知区间满足的 x 的取值范围； 第三步　利用已知解析式确定所求区间相应的函数的表达式.

例 2 ．已知函数 $f(x)$ 是定义在 R 上的奇函数，当 $x\geq 0$ 时， $f(x)=x(1+x)$，求出函数 $f(x)$ 的解析式.

例 3　若函数 $f(x)$ 是奇函数，$g(x)$ 是偶函数，且其定义域均为 $\{x\mid x\in R,x\neq\pm 1\}$.若 $f(x)+g(x)=\dfrac{1}{x-1}$，求 $f(x)$，$g(x)$ 的解析式.

【变式演练 4】已知函数 f(x)是定义在 R 上的奇函数,当 $x>0$ 时, $f(x)=\log_2(x+1)$

（1）求函数 f(x)的解析式;

（2）若 $f(m)<-2$,求实数 m 的取值范围.

【变式演练 5】设函数 $f(x)$ 是定义在 R 上的奇函数，当 $x<0$ 时，$f(x)=-x^2-5x$，则不等式 $f(x)-f(x-1)<0$ 的解集为_____.

【来源】上海市控江中学 2021 届高三三模数学试题

【高考再现】

1.（2021·全国高考真题（理））设函数 $f(x)$ 的定义域为 R，$f(x+1)$ 为奇函数，$f(x+2)$ 为偶函数，当 $x\in[1,2]$ 时，$f(x)=ax^2+b$．若 $f(0)+f(3)=6$，则 $f\left(\frac{9}{2}\right)=$（　　）

A．$-\frac{9}{4}$　　B．$-\frac{3}{2}$　　C．$\frac{7}{4}$　　D．$\frac{5}{2}$

2.（2021·全国高考真题（理））设函数 $f(x)=\frac{1-x}{1+x}$，则下列函数中为奇函数的是（　　）

A．$f(x-1)-1$　　B．$f(x-1)+1$　　C．$f(x+1)-1$　　D．$f(x+1)+1$

3.（2021·全国高考真题）已知函数 $f(x)=x^3\left(a\cdot 2^x-2^{-x}\right)$ 是偶函数，则 $a=$_____.

5.【2020 年高考山东卷 8】若定义在 **R** 上的奇函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 单调递减，且 $f(2)=0$，则满足 $xf(x-1)\geq 0$ 的 x 的取值范围是（）

A．$[-1,1]\cup[3,+\infty)$　　B．$[-3,-1]\cup[0,1]$　　C．$[-1,0]\cup[1,+\infty)$　　D．$[-1,0]\cup[1,3]$

6.【2017 全国二文】已知函数 $f(x)$ 是定义在 **R** 上的奇函数，当 $x\in(-\infty,0)$ 时，$f(x)=2x^3+x^2$,则 $f(2)=$

7.【2018 年全国普通高等学校招生统一考试文科数学】已知 $f(x)$ 是定义在 R 上的偶函数，且在区间 $(-\infty,0)$

上单调递增，若实数a满足$f(2^{|a-1|})>f(-\sqrt{2})$，则$a$的取值范围是

A. $(-\infty,\frac{1}{2})$ B. $(-\infty,\frac{1}{2})\cup(\frac{3}{2},+\infty)$ C. $(\frac{1}{2},\frac{3}{2})$ D. $(\frac{3}{2},+\infty)$

8.【2018 年全国普通高等学校招生统一考试理数】已知 f(x)是定义域为$(-\infty,+\infty)$的奇函数,满足 $f(1-x)=f(1+x)$.若 $f(1)=2$，则 $f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(50)=$（　　）

A. -50　　B. 0　　C. 2　　D. 50

9. 【2015 高考广东，理 3】下列函数中，既不是奇函数，也不是偶函数的是（　　）

A. $y=x+e^x$　　B. $y=x+\frac{1}{x}$　　C. $y=2^x+\frac{1}{2^x}$　　D. $y=\sqrt{1+x^2}$

【反馈练习】

1.（多选）【海南省 2021 届高三年级第二次模拟考试】下列函数中是偶函数，且在区间$(0,1)$上单调递增的是（）

A. $y=x^2-2$　　B. $y=\frac{2}{x}$

C. $y=|x|+\frac{1}{|x|}$　　D. $y=\frac{x^2}{|x|}$

2.【安徽省淮北市 2020-2021 学年高三上学期第一次模拟考试文科】设函数$g(x)=f(x)+x^2$是定义在 R 上的奇函数，且$F(x)=f(x)+3^x$，若$f(1)=1$，则$F(-1)=$（）

A. $-\frac{4}{3}$　　B. $-\frac{7}{3}$　　C. $-\frac{8}{3}$　　D. $\frac{1}{3}$

3.【河南省郑州市 2020-2021 学年高三上学期第一次质量检测文科】设$f(x)$是R上的奇函数且满足$f(x-1)=f(x+1)$，当$0\le x\le 1$时，$f(x)=5x(1-x)$，则$f(-2020.6)=$（）

A. $\frac{21}{25}$　　B. $\frac{7}{10}$　　C. $-\frac{8}{5}$　　D. $-\frac{6}{5}$

4.【山东省淄博市 2021 届高三上学期教学质量摸底检测（零模）】已知定义在 **R** 上的奇函数$f(x)$满足$f(x)=f(2-x)$，且在$[-1,0)$上有$f(x)=4^x$，则$f(2020.5)=$（　　）

A．2　　B．$\frac{1}{2}$　　C．-2　　D．$-\frac{1}{2}$

5.【云南省昆明市官渡区 2021 届高三上学期两校联考】若定义在 R 上的函数 $f(x)$ 满足 $f(-x)=f(x)$，$f(2-x)=f(x)$，且当 $x\in[0,1]$ 时，$f(x)=\sqrt{1-x^2}$，则函数 $H(x)=\left|xe^x\right|-f(x)$ 在区间 $[-5,1]$ 上的零点个数为（）

A．4　　B．6　　C．8　　D．10

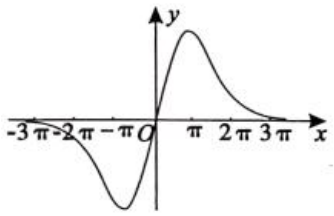
6.【2021 届全国著名重点中学新高考冲刺】已知定义在 R 上的函数 $y=f(x+1)-3$ 是奇函数，当 $x\in(1,+\infty)$ 时，$f'(x)\geq x+\frac{1}{x-1}-3$，则不等式 $\left[f(x)-3\right]\ln(x+1)>0$ 的解集为（）

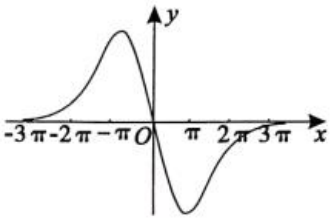
A．$(1,+\infty)$　　B．$(-1,0)\cup(e,+\infty)$　　C．$(0,1)\cup(e,+\infty)$　　D．$(-1,0)\cup(1,+\infty)$

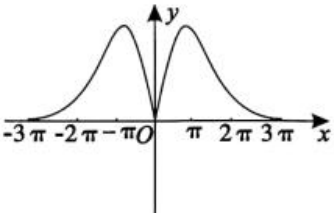
7.【安徽省安庆市怀宁中学 2020-2021 学年高三上学期第一次质量检测理科】已知定义在 R 上的奇函数 $f(x)$，对任意的实数 x，恒有 $f(x+3)=-f(x)$，且当 $x\in(0,\frac{3}{2}]$ 时，$f(x)=x^2-6x+8$，则 $f(0)+f(1)+f(2)+\ldots+f(2020)=$（　）

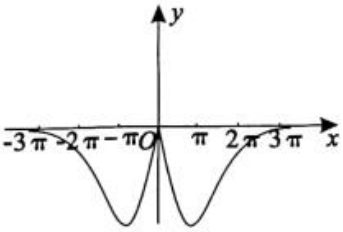
A．6　　B．3　　C．0　　D．-3

8.【山东省枣庄三中 2021 届高三 10 月份第二次质检】函数 $f(x)=\frac{x^3+\sin x}{e^x+e^{-x}}$ 的图象大致是（）

A． 

B． 

C． 

D． 

9.【湖北省“荆、荆、襄、宜“四地七校联盟 2020-2021 学年高三上学期期中联考】若函数 $f(x)=\sin x\cdot\ln(ax+\sqrt{1+4x^2})$ 的图象关于 y 轴对称，则实数 a 的值为（　　）

A．2　　B．±2　　C．4　　D．±4

10.【广西南宁市普通高中2021届高三10月摸底测试数学（文）】已知函数$f(x)=\dfrac{2^x-a}{2^x+1}$是$R$上的奇函数，当$a\in(0,\pi)$时，不等式$f(x\sin x-1)+f(\cos x-b)\le 0$恒成立，则整数$b$的最小值为（）

A．1　　B．2　　C．3　　D．4

11．设函数$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$内有定义，下列函数必为奇函数的是（　　）

A．$y=-|f(x)|$　　B．$y=xf(x^2)$　　C．$y=-f(-x)$　　D．$y=f(x)+f(-x)$

【来源】湖南省岳阳市岳阳县2021届高三下学期高考适应性考试数学试题

6．若$f(x)$为奇函数，当$x\le 0$时，$f(x)=a+2\cos x$，则$f\left(\dfrac{4\pi}{3}\right)=$（　　）

A．-3　　B．1　　C．3　　D．$2+\sqrt{3}$

【来源】辽宁省丹东市2021届高三二模数学试题

13．函数$f(x)=ax+\dfrac{2x}{2^x-1}$是偶函数，则实数$a=$_____.

【来源】重庆市巴蜀中学2021届高三适应性月考（十）数学试题

14．定义在R上的奇函数$f(x)$满足$f(x+1)=f(-x)$，当$x\in\left(0,\dfrac{1}{2}\right]$时，$f(x)=-x^2+x$，则当$x\in(1,2)$时，不等式$f(x)+\dfrac{3}{16}\le 0$的解为_____.

【来源】四川省攀枝花市2021届高三一模考试数学（文）试题

第5讲　函数的周期性和对称性形影不离

【高考地位】

函数的周期性和对称性是函数的两个基本性质。在高中数学中，研究一个函数，首看定义域、值域，然后就要研究对称性（中心对称、轴对称），并且在高考中也经常考查函数的对称性和周期性，以及它们之间的联系。因此，我们应该掌握一些简单常见的几类函数的周期性与对称性的基本方法。

类型一　函数的周期性的判定及应用

万能模板	内　　容
使用场景	几类特殊函数类型
解题模板	第一步　合理利用已知函数关系并进行适当地变形； 第二步　熟记常见结论，准确求出函数的周期性；

	（1）若函数 $f(x)$ 满足 $f(x+a)=f(x-a)$，则函数 $f(x)$ 的周期为 $2a$； （2）若函数 $f(x)$ 满足 $f(x+a)=-f(x)$ 或 $f(x+a)=\dfrac{1}{f(x)}$ 或 $f(x+a)=-\dfrac{1}{f(x)}$，则函数 $f(x)$ 的周期为 $2a$； 第三步　运用函数的周期性求解实际问题.

例 1 函数 $f(x)$ 定义域为 R，且对任意 $x\in R$，都有 $f(x+2)=f(x)$，若在区间 $[-1,1]$ 上 $f(x)=\begin{cases}ax+2,-1\le x\le 0,\\(a-2x)e^{x},0<x\le 1.\end{cases}$ 则 $f(2017)+f(2018)=$（　　）

A. 0　　B. 1　　C. 2　　D. 2018

【变式演练 1】【陕西省西安市 2020-2021 学年高三上学期第一次质量检测文科数学】已知定义域为 R 的函数 $f(x)$ 满足 $f(x+2)=f(x)$，且当 $0\le x\le 1$ 时，$f(x)=\lg(x^2+2)$，则 $f(-2021)=$（）

A．$-\lg 3$　　B．$\lg 9$　　C．$\lg 3$　　D．0

【变式演练 2】已知函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$，$f(x+2)$ 为偶函数，$f(2x+1)$ 为奇函数，则（　　）

A．$f\left(-\dfrac{1}{2}\right)=0$　　B．$f(-1)=0$　　C．$f(2)=0$　　D．$f(4)=0$

【变式演练 3】函数 y = f(x)在[0，2]上单调递增，且函数 f(x + 2)是偶函数，则下列结论成立的是(　　)

A．$f(1)<f(\frac{5}{2})<f(\frac{7}{2})$　　B．$f(\frac{7}{2})<f(\frac{5}{2})<f(1)$

C．$f(\frac{7}{2})<f(1)<f(\frac{5}{2})$　　D．$f(\frac{5}{2})<f(1)<f(\frac{7}{2})$

类型二　函数的对称性问题

万能模板	内　　容
使用场景	几类特殊函数类型
解题模板	记住常见的几种对称结论： 第一类　函数 $f(x)$ 满足 $f(x+a)=f(b-x)$ 时，函数 $y=f(x)$ 的图像关于直线 $x=\dfrac{a+b}{2}$ 对称； 第二类　函数 $f(x)$ 满足 $f(x+a)+f(b-x)=c$ 时，函数 $y=f(x)$ 的图像关于点

	$(\frac{a+b}{2},\frac{c}{2})$ 对称； 第三类　函数 $y=f(x+a)$ 的图像与函数 $y=f(b-x)$ 的图像关于直线 $x=\frac{b-a}{2}$ 对称.

例 2 .（多选）已知函数 $y=f(x-1)$ 的图象关于直线 $x=-1$ 对称，且对 $\forall x\in\mathbf{R}$ 有 $f(x)+f(-x)=4$.当 $x\in(0,2]$ 时， $f(x)=x+2$.则下列说法正确的是（　　）

A． $f(x)$ 的周期 $T=8$　　B． $f(x)$ 的最大值为 4

C． $f(2021)=2$　　D． $f(x+2)$ 为偶函数

【来源】重庆市南开中学 2021 届高三下学期第八次质量检测数学试题

例 3　已知定义在 R 上的函数 $f(x)$ 的图象关于点 $\left(-\frac{3}{4},0\right)$ 对称，且满足 $f(x)=-f\left(x+\frac{3}{2}\right)$,又 $f(-1)=1,f(0)=-2$,则 $f(1)+f(2)+f(3)+...+f(2008)=$（　　）

A． 669　　B． 670　　C． 2008　　D． 1

例 4　已知 $y=f(2x-1)$ 为奇函数， $y=f(x)$ 与 $y=g(x)$ 图像关于 $y=x$ 对称，若 $x_1+x_2=0$ ，则 $g(x_1)+g(x_2)=$（　　）

A. 2　　B. -2　　C. 1　　D. -1

【变式演练 4】已知函数 $f(x)=\tan x-\sin x\cos x$ ，现有下列四个命题：

①$f(x)$的最小正周期为π；

②$f(x)$的图象关于原点对称；

③$f(x)$的图象关于($\frac{\pi}{2}$，0)对称；

④$f(x)$的图象关于(π，0)对称.

其中所有真命题的序号是（　　）

A．①②③　　B．②③④　　C．①②③④　　D．①②④

【来源】山西省晋城市 2021 届高三三模数学（理）试题

【高考再现】

1．（2021·全国高考真题（理））设函数 $f(x)$ 的定义域为 R， $f(x+1)$ 为奇函数， $f(x+2)$ 为偶函数，当

$x\in[1,2]$时，$f(x)=ax^2+b$．若$f(0)+f(3)=6$，则$f\left(\frac{9}{2}\right)=$（　　）

A．$-\frac{9}{4}$　　B．$-\frac{3}{2}$　　C．$\frac{7}{4}$　　D．$\frac{5}{2}$

2．（2021·全国高考真题（理））设函数$f(x)=\frac{1-x}{1+x}$，则下列函数中为奇函数的是（　　）

A．$f(x-1)-1$　　B．$f(x-1)+1$　　C．$f(x+1)-1$　　D．$f(x+1)+1$

3．【2016 高考新课标 2 理数】已知函数$f(x)(x\in\mathbf{R})$满足$f(-x)=2-f(x)$，若函数$y=\frac{x+1}{x}$与$y=f(x)$图像的交点为$(x_1,y_1),(x_2,y_2),\cdots,(x_m,y_m)$，则$\sum_{i=1}^{m}(x_i+y_i)=$（　　）

（A）0　　（B）m　　（C）$2m$　　（D）$4m$

4．【2018 年全国普通高等学校招生统一考试理数（全国卷 II）】已知 f(x)是定义域为$(-\infty,+\infty)$的奇函数，满足 $f(1-x)=f(1+x)$.若 $f(1)=2$，则 $f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(50)=$（　　）

A．-50　　B．0　　C．2　　D．50

5．【2018 年全国文科数学】已知函数 $f(x)=\ln x+\ln(2-x)$，则

A．f(x)在（0，2）单调递增 B．f(x)在（0，2）单调递减

C．y = f(x)的图像关于直线 x=1 对称　　D．y = f(x)的图像关于点（1，0）对称

6.【2016 年高考四川理数】已知函数$f(x)$是定义在 R 上的周期为 2 的奇函数，当 0＜x＜1 时，$f(x)=4^x$，则$f(-\frac{5}{2})+f(1)=$.

7．【2018 年全国普通高等学校招生统一考试数学】函数 f(x)满足 $f(x+4)=f(x)(x\in R)$，且在区间$(-2,2]$上，$f(x)=\begin{cases}\cos\frac{\pi x}{2},0<x\le 2,\\ |x+\frac{1}{2}|,-2<x\le 0,\end{cases}$则 f(f(15))的值为____.

8．【2016 高考江苏卷】设$f(x)$是定义在R上且周期为 2 的函数，在区间$[-1,1)$上，$f(x)=\begin{cases}x+a,-1\le x<0,\\ \left|\frac{2}{5}-x\right|,0\le x<1,\end{cases}$其中$a\in\mathbf{R}$．若$f(-\frac{5}{2})=f(\frac{9}{2})$，则$f(5a)$的值是.

【反馈练习】

1．【河南省郑州市 2020-2021 学年高三上学期第一次质量检测文科】设$f(x)$是R上的奇函数且满足

$f(x-1)=f(x+1)$，当$0\le x\le 1$时，$f(x)=5x(1-x)$，则$f(-2020.6)=$（）

A．$\frac{21}{25}$　　B．$\frac{7}{10}$　　C．$-\frac{8}{5}$　　D．$-\frac{6}{5}$

2.【四川省宜宾市2021届高三上学期第一次诊断考试数学（文）】已知定义在R上的奇函数$y=f(x)$满足，$f(x+2)=-f(x)$，若$\forall x_1,x_2\in[0,1]$且$x_1\neq x_2$时，都有$x_1f(x_1)+x_2f(x_2)>x_2f(x_1)+x_1f(x_2)$，则下列四个结论中：①$y=f(x)$图象关于直线$x=2022$对称；②$f(2022)=0$；③$y=f(x)$在$[2019,2021]$上为减函数；④$f(\frac{1}{3})>f(\frac{3}{2})$.其中正确的个数（）

A．1　　B．2　　C．3　　D．4

3.【四川省宜宾市2021届高三上学期第一次诊断考试数学（文）】已知定义在R上的奇函数$y=f(x)$满足，$f(x+2)=-f(x)$，若$\forall x_1,x_2\in[0,1]$且$x_1\neq x_2$时，都有$x_1f(x_1)+x_2f(x_2)>x_2f(x_1)+x_1f(x_2)$，则下列四个结论中：①$y=f(x)$图象关于直线$x=2022$对称；②$f(2022)=0$；③$y=f(x)$在$[2019,2021]$上为减函数；④$f(\frac{1}{3})>f(\frac{3}{2})$.其中正确的个数（）

A．1　　B．2　　C．3　　D．4

4.【吉林省梅河口五中、辽源五中、四平四中2020-2021学年高三（上）第一次联考】已知函数$f(x)$的周期为5，当$0<x<5$时，$f(x)=x+\log_4 x$，则$f(54)=$（）

A．5　　B．6　　C．7　　D．8

5．已知函数$f(x)$对任意的实数x都满足$f(x+4)+f(x)=2f(2)$，且函数$y=f(x-2)$的图象关于点$(2,0)$对称，若$f(-1)+f(-2)=2$，则$f(2021)=$（　　）

A．0　　B．2　　C．−2　　D．2021

【来源】重庆市南开中学2021届高三下学期第七次质量检测数学试题

6．已知$y=f(x)$为R上的奇函数，$y=f(x+1)$为偶函数，若当$x\in[0,1]$，$f(x)=\log_2(x+a)$，则$f(2021)=$（　　）

A．−2　　B．−1　　C．1　　D．2

【来源】宁夏回族自治区银川一中2021届高三高考猜题卷数学（理）试题

7.【江苏省苏州中学2021届高三（10月份）调研】若定义在$\mathbf{R}$上的奇函数$f(x)$满足对任意的$x\in\mathbf{R}$，都

有$f(x+2)=-f(x)$成立，且$f(1)=8$，则$f(2019)$，$f(2020)$，$f(2021)$的大小关系是（）

A．$f(2019)<f(2020)<f(2021)$　　B．$f(2019)>f(2020)>f(2021)$

C．$f(2020)>f(2019)>f(2021)$　　D．$f(2020)<f(2021)<f(2019)$

8．已知奇函数$f(x)$定义域为R，且$f(x+2)$为偶函数，若$f(1)=a$，则$f(1)+f(3)+f(5)+\cdots f(2019)=$（　　）

A．0　　B．a　　C．$2a$　　D．$1010a$

【来源】江西省南昌市八一中学、洪都中学、十七中三校2021届高三上学期期末联考数学（文）试题

9.【贵州省贵阳市四校2021届高三上学期联合考试】已知定义域为R的函数$f(x)$满足$f(-x)=-f(x)$，$f(x+2)=-f(x)$，且当$0<x\le 1$时，$f(x)=2x^3-\log_5 x$，则$f(47)=$（）

A．-1　　B．-2　　C．0　　D．1

10.【安徽省滁州市定远县育才学校2020-2021学年高三上学期8月月考】定义在R上的奇函数$f(x)$满足$f(x+1)$是偶函数，且当$x\in[0,1]$时，$f(x)=x(3-2x)$，则$f(\frac{31}{2})=$（）

A．$\frac{1}{2}$　　B．$-\frac{1}{2}$　　C．-1　　D．1

11．定义在R上的函数$f(x)$满足$f(2+x)=f(x)$，$f(1-x)=f(1+x)$，当$x\in[0,1]$时，$f(x)=\sqrt{x}$，则函数$f(x)$的图象与$g(x)=\frac{|x|}{3}$的图象的交点个数为（　　）

A．5　　B．6　　C．7　　D．8

【来源】黑龙江省大庆市2021届高三二模数学（文）试题

12．（多选）已知函数$y=f(x)(x\in\mathbf{R})$的图象既关于点$(1,1)$中心对称又关于点$(2,2)$中心对称，则（　　）

A．$f(x)$是周期函数

B．$f(x)$是奇函数

C．$f(x)$既没有最大值又没有最小值

D．函数$g(x)=f(x)-x(x\in\mathbf{R})$是周期函数

【来源】辽宁省实验学校2020-2021学年高三下学期四模数学试题

13．（多选）函数$f(x)$的定义域为$\mathbf{R}$，且$f(x-1)$与$f(x+1)$都为奇函数，则下列说法正确的是（　　）

A．$f(x)$是周期为2的周期函数　　B．$f(x)$是周期为4的周期函数

C．$f(x+2)$为奇函数　　D．$f(x+3)$为奇函数

【来源】广东省 2021 届高三二模数学试题

14．（多选）定义在 R 上的函数$f(x)$满足：x为整数时，$f(x)=2021$；x不为整数时，$f(x)=0$，则（　　）

A．$f(x)$是奇函数　　B．$f(x)$是偶函数

C．$\forall x\in R, f(f(x))=2021$　　D．$f(x)$的最小正周期为1

【来源】山东省青岛市 2020-2021 学年高三上学期期末数学试题

15．函数$f(x)$是定义域为 R 的奇函数，满足$f\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=f\left(\frac{\pi}{2}+x\right)$，且当$x\in[0,\pi)$时，$f(x)=\frac{\sin x}{x^2-\pi x+\pi}$，给出下列四个结论：

① $f(\pi)=0$；

② π是函数$f(x)$的周期；

③ 函数$f(x)$在区间$(-1,1)$上单调递增；

④ 函数$g(x)=f(x)-\sin 1(x\in[-10,10])$所有零点之和为$3\pi$．

其中，正确结论的序号是_____.

【来源】安徽省六安市第一中学 2021 届高三下学期适应性考试理科数学试题

16．定义在 R 上的奇函数$f(x)$满足$f(x+1)=f(-x)$，且当$x\in\left[0,\frac{1}{2}\right]$时，$f(x)=4x$，则函数$g(x)=f(x)+\frac{1}{x-1}$在$[-2,4]$上的零点之和为_____.

【来源】山东省济南市济南市莱芜第一中学 2020-2021 学年高三下学期 2 月月考数学试题

17．定义在 R 上的函数$f(x)$满足$f(x+2)=f(x-2)$，当$x\in[-2,2)$时，$f(x)=\sin\frac{\pi}{2}x-x^3$，则函数$f(x)$在区间$[0,669)$上的零点个数是_____.

【来源】云南师范大学附属中学 2021 届高三高考适应性月考卷（六）数学（理）试题

18．已知定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数满足$f(3-x)=-f(3+x)$，且$f(x)$图像关于$x=1$对称，当$x\in(1,2]$时，$f(x)=\log_2(2x+1)$，则$f\left(\frac{825}{2}\right)=$_____.

【来源】专题 2.1 函数的性质-备战 2021 年高考数学精选考点专项突破题集（新高考地区）

19．定义在 R 上的函数$f(x)$满足$f(x+6)=f(x)$．当$x\in[-3,3)$时，$f(x)=\begin{cases}-(x+2)^2,-3\le x<-1\\ x,-1\le x<3\end{cases}$，则

$f(4)=$_____；$f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(2016)+f(2017)=$_____.

【来源】专题 06 函数及其性质的综合（客观题）-2021 年高考数学二轮复习热点题型精选精练（新高考地区专用）

第 6 讲　利用函数性质解决抽象函数不等式

【高考地位】

函数的单调性是函数的一个非常重要的性质，也是高中数学考查的重点内容。而抽象函数的单调性解函数不等式问题，其构思新颖，条件隐蔽，技巧性强，解法灵活，往往让学生感觉头痛。因此，我们应该掌握一些简单常见的几类抽象函数单调性及其应用问题的基本方法。

确定抽象函数单调性解函数不等式

万能模板	内　　容
使用场景	几类特殊函数类型
解题模板	第一步　（定性）确定函数 $f(x)$ 在给定区间上的单调性和奇偶性； 第二步　（转化）将函数不等式转化为 $f(M)<f(N)$ 的形式； 第三步　（去 f ）运用函数的单调性“去掉”函数的抽象符号“ f ”，转化成一般的不等式或不等式组； 第四步　（求解）解不等式或不等式组确定解集； 第五步　（反思）反思回顾，查看关键点，易错点及解题规范.

例 1　已知函数 $f\left(x\right)$ 是定义在 R 上的奇函数，若对于任意给定的实数 x_1,x_2 ，且 $x_1\neq x_2$ ，不等式 $x_1f\left(x_1\right)+x_2f\left(x_2\right)<x_1f\left(x_2\right)+x_2f\left(x_1\right)$ 恒成立，则不等式 $\left(x+1\right)f\left(1-2x\right)<0$ 的解集为_____.

【变式演练 1】若定义在 R 上的奇函数 $f(x)$ 在 $\left(0,+\infty\right)$ 上单调递增，且 $f\left(2\right)=0$ ，则不等式 $xf\left(x-1\right)\leq0$ 的解集为（　　）

A．$\left(-\infty,-1\right]\cup\left[3,+\infty\right)$　　B．$\left(-\infty,-1\right]\cup\left[1,3\right]$

C．$\left[-1,0\right]\cup\left[1,3\right]$　　D．$\left[-1,0\right]\cup\left[3,+\infty\right)$

【来源】安徽省池州市第一中学 2021 届高三模拟考试（临门一脚）数学（理）试题

【变式演练 2】【江西省赣州市部分重点中学 2021 届高三上学期期中考试文科】已知定义在 $[1,+\infty)$ 上的函

数 $f(x)$ 满足 $f(x)+x\ln xf'(x)<0$ 且 $f(2021)=0$，其中 $f'(x)$ 是函数 $f(x)$ 的导函数，e 是自然对数的底数，则不等式 $f(x)>0$ 的解集为（　　）

A．$(1,2021)$　　B．$(2021,+\infty)$　　C．$(1,+\infty)$　　D．$[1,2021)$

【变式演练 3】定义在非零实数集上的函数 $f(x)$ 满足 $f(xy)=f(x)+f(y)$，且 $f(x)$ 是区间 $(0,+\infty)$ 上的递增函数.

（1）求 $f(1),f(-1)$ 的值；

（2）求证：$f(-x)=f(x)$；

（3）解不等式 $f(2)+f(x-\frac{1}{2})\le 0$.

【变式演练 4】定义在 $(-1,1)$ 上的函数 $f(x)$ 满足下列条件：①对任意 $x,y\in(-1,1)$，都有 $f(x)+f(y)=f(\frac{x+y}{1+x+y})$；②当 $x\in(-1,0)$ 时，有 $f(x)>0$，求证：

（1）$f(x)$ 是奇函数；

（2）$f(x)$ 是单调递减函数；

（3）$f(\frac{1}{11})+f(\frac{1}{19})+\cdots+f(\frac{1}{n^2+5n+5})>f(\frac{1}{3})$，其中 $n\in N^*$.

【高考再现】

1.【2020 年高考浙江卷 9】已知 a，$b\in\mathbf{R}$ 且 $ab\neq 0$，若 $(x-a)(x-b)(x-2a-b)\ge 0$ 在 $x\ge 0$ 上恒成立，则（　　）

A．$a<0$　　B．$a>0$　　C．$b<0$　　D．$b>0$

2.【2020 年高考北京卷 6】已知函数 $f(x)=2^x-x-1$，则不等式 $f(x)>0$ 的解集是（　　）

A．$(-1,1)$　　B．$(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$　　C．$(0,1)$　　D．$(-\infty,0)\cup(1,+\infty)$

3.【2020 年高考山东卷 8】若定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 单调递减，且 $f(2)=0$，则满足 $xf(x-1)\ge 0$ 的 x 的取值范围是（　　）

A．$[-1,1]\cup[3,+\infty)$　　B．$[-3,-1]\cup[0,1]$　　C．$[-1,0]\cup[1,+\infty)$　　D．$[-1,0]\cup[1,3]$

4.【2017 全国卷一理】函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 单调递减，且为奇函数．若 $f(1)=-1$，则满足 $-1\le f(x-2)\le 1$ 的 x 的取值范围是（）

A．$[-2，2]$B．$[-1，1]$　　C．$[0，4]$　　D．$[1，3]$

【2018 年普通高等学校招生（江西卷）】已知 $f(x)$是定义在$(0，+\infty)$ 上的非负可导函数，且满足 $xf'(x)+f(x)\le 0$，对任意的 $0<a<b$，则必有(　　).

A．　$af(b)\le bf(a)$　　B．　$bf(a)\le af(b)$　　C．　$af(a)\le f(b)$　　D．　$bf(b)\le f(a)$

6. 【2014 辽宁理 12】已知定义在$[0,1]$ 上的函数 $f(x)$ 满足：

① $f(0)=f(1)=0$；

②对所有 $x,y\in[0,1]$，且 $x\neq y$，有 $|f(x)-f(y)|<\frac{1}{2}|x-y|$.

若对所有 $x,y\in[0,1]$，$|f(x)-f(y)|<k$，则 k 的最小值为（　　）

$A.\ \frac{1}{2}$　　$B.\ \frac{1}{4}$　　$C.\ \frac{1}{2\pi}$　　$D.\ \frac{1}{8}$

7. 【2018 年普通高校招生全国卷 一】已知函数 $f\left(x\right)$，任取两个不相等的正数 x_1，　x_2，总有 $\left[f\left(x_1\right)-f\left(x_2\right)\right]\left(x_1-x_2\right)>0$　，　对　于　任　意　的　$x>0$　，　总　有　$f\left[f\left(x\right)-\ln x\right]=1$　，　若 $g\left(x\right)=f'\left(x\right)+f\left(x\right)-m^2+m$ 有两个不同的零点，则正实数 m 的取值范围为_____.

【反馈练习】

1．已知 $f\left(x\right)$是定义在 R 上的以 5 为周期的偶函数，若 $f\left(-1\right)>-6$，$f\left(2021\right)=\frac{3-a}{2a-4}$，则实数 a 的取值范围是（　　）

A．$\left(-\infty,\frac{21}{11}\right)$　　B．$(2,+\infty)$

C．$\left(-\infty,\frac{21}{11}\right)\cup(2,+\infty)$　　D．$\left(\frac{21}{11},2\right)$

【来源】四川省南充市 2021 届高三第三次模拟考试数学（文）试题

2．定义在 $(-2,2)$ 上的函数 $f(x)$ 的导函数为 $f'\left(x\right)$，满足：$f\left(x\right)+e^{4x}f\left(-x\right)=0$，　$f\left(1\right)=e^2$，且当 $x>0$ 时，$f'(x)>2f(x)$，则不等式 $e^{2x}f(2-x)<e^4$ 的解集为（　　）

A．$(1,4)$　　B．$(-2,1)$　　C．$(1,+\infty)$　　D．$(0,1)$

【来源】重庆市南开中学 2021 届高三下学期第六次质量检测数学试题

3．已知函数 $f\left(x\right)$的定义域为 $\mathbf{R}$，$f\left(5\right)=4$，$f\left(x+3\right)$是偶函数，任意 $x_1,x_2\in\left[3,+\infty\right)$满足 $\frac{f\left(x_1\right)-f\left(x_2\right)}{x_1-x_2}>0$，则不等式 $f\left(3x-1\right)<4$ 的解集为（　　）

A．$\left(\frac{2}{3},3\right)$　　B．$\left(-\infty,\frac{2}{3}\right)\cup(2,+\infty)$

C．$(2,3)$　　D．$\left(\frac{2}{3},2\right)$

【来源】（全国 1 卷）2021 届高三 5 月卫冕联考数学（理）试题

4．设函数 $f'(x)$ 是奇函数 $f(x)(x\neq 0)$ 的导函数，$f(-1)=-1$.当 $x>0$ 时，$f'(x)>1$，则使得 $f(x)>x$ 成立的 x 的取值范围是（　　）

A．$(-\infty,-1)\cup(0,1)$　B．$(-1,0)\cup(1,+\infty)$　C．$(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$　D．$(-1,0)\cup(0,1)$

【来源】百校联盟 2021 届高三 5 月教育教学质量监测 （全国 I 卷）数学（理）试题

5．已知函数 $f(x)$ 满足 $f(-x)=-f(x)$，且对任意的 $x_1,x_2\in[0,+\infty),x_1\neq x_2$，都有 $\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}>2,f(1)=2020$，则满足不等式 $f(x-2020)>2(x-1011)$ 的 x 的取值范围是（　　）

A．$(2021,+\infty)$　　B．$(2020,+\infty)$　　C．$(1011,+\infty)$　　D．$(1010,+\infty)$

【来源】河南省 2021 届高三阶段性测试（六）文科数学试题

6．已知函数 $f(x)$ 在 R 上为增函数，若不等式 $f(-4x+a)\geq f\left(-3-x^2\right)$ 对 $\forall x\in(0,3]$ 恒成立，则 a 的取值范围为（　　）

A．$[-1,+\infty)$　　B．$(3,+\infty)$　　C．$[0,+\infty)$　　D．$[1,+\infty)$

【来源】“超级全能生”2021 届高三全国卷地区 4 月联考试题（丙卷）文科数学试题

7．已知定义在 R 上的偶函数 $f(x)$ 满足在 $[0,+\infty)$ 上单调递增，$f(3)=0$，则关于 x 的不等式 $\frac{f(x+2)+f(-x-2)}{x}>0$ 的解集为（　　）

A．$(-5,-2)\cup(0,+\infty)$　　B．$(-\infty,-5)\cup(0,1)$

C．$(-3,0)\cup(3,+\infty)$　　D．$(-5,0)\cup(1,+\infty)$

【来源】广西来宾、玉林、梧州等 2021 届高三 4 月模拟联考数学（理）试题

8．【山西省运城市 2021 届高三（上）期中数学（理科）】已知函数 $f(x)=x^5+3x^3+x+2$，若 $f(a)+f(a-2)>4$，则实数 a 的取值范围是（　　）

A．$(-\infty,1)$　　B．$(-\infty,2)$　　C．$(1,+\infty)$　　D．$(2,+\infty)$

9．【甘肃省兰州市西北师范大学附属中学 2020-2021 学年高三数学第一学期期中】函数 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 单

调递增，且$f(x+3)$关于$x=-3$对称，若$f(-2)=1$，则$f(x-2)\le 1$的x的取值范围（　　）

A．$[-2,2]$　　B．$(-\infty,-2]\cup[2,+\infty)$

C．$(-\infty,0)\cup[4,+\infty)$　　D．$[0,4]$

10.【黑龙江省哈尔滨六中 2020-2021 学年高三（上）开学数学（理科）】奇函数$f(x)$满足$f(2)=0$，且$f(x)$在$(0,+\infty)$上单调递减，则$\dfrac{2^x-1}{f(x)-f(-x)}<0$的解集为（　　）

A．$(-2,2)$　　B．$(-\infty,-2)\cup(2,+\infty)$

C．$(-\infty,-2)$　　D．$(2,+\infty)$

11.【河南省洛阳市 2020-2021 学年第一学期高三第一次统一考试】已知奇函数$f(x)$的定义域为$\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$，其图象是一段连续不断的曲线，当$-\dfrac{\pi}{2}<x<0$时，有$f'(x)\cos x+f(x)\sin x>0$成立，则关于$x$的不等式$f(x)<2f\left(\dfrac{\pi}{3}\right)\cos x$的解集为（　　）

A．$\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{3}\right)$　　B．$\left(-\dfrac{\pi}{2},-\dfrac{\pi}{3}\right)$

C．$\left(-\dfrac{\pi}{2},-\dfrac{\pi}{3}\right)\cup\left(\dfrac{\pi}{3},\dfrac{\pi}{2}\right)$　　D．$\left(-\dfrac{\pi}{3},0\right)\cup\left(\dfrac{\pi}{3},\dfrac{\pi}{2}\right)$

12.【河南省十所名校 2020-2021 学年高三上学期第二次考试数学（理）】设函数$f(x)$在R上存在导数$f'(x)$，对于任意的实数x，都有$f(x)+f(-x)+2x^2=0$，当$x>0$时，$f'(x)+2x<1$，若$f(m)\ge f(1)-m^2+m$，则实数m的最大值为（　　）

A．-1　　B．1　　C．-2　　D．2

13.【河南省郑州、商丘市名师联盟 2020-2021 学年高三上学期 12 月教学质量检测】已知$f(x)$是定义在$\mathbf{R}$上的减函数，对任意x、$y\in\mathbf{R}$，$f(x+y)=f(x)f(y)$恒成立，若$f(-5)=3$，则$f(3-x)<27$的解集为（　　）

A．$(-\infty,15)$　　B．$(-\infty,18)$　　C．$(15,+\infty)$　　D．$(18,+\infty)$

14.【江苏省常州市教育学会 2020-2021 学年高三上学期学业水平监测】已知奇函数 $f\left(x\right)$ 在 $\left(-\infty,+\infty\right)$ 上单调递减，且 $f\left(1\right)=-1$，则“$x>-1$”是“$\left|xf\left(x\right)\right|<1$”的（　　）

A．充分不必要条件　　B．必要不充分条件

C．充要条件　　D．既不充分也不必要条件.

15.【百校联盟 2021 届高三普通高中教育教学质量监测考试（全国卷 11 月）理科】数已知函数 $f\left(x\right)=\begin{cases}e^{x}+\ln\left(x+1\right)-1,x\geq 0\\ 1-\dfrac{1}{e^{x}}-\ln\left(1-x\right),x<0\end{cases}$，若 $f\left(e^{x}-1\right)+f\left(2e^{2x}\right)\leq 0$，则实数 x 的取值范围为（　　）

A．$\left(-\infty,\dfrac{1}{2}\right]$　　B．$\left[\dfrac{1}{2},+\infty\right)$　　C．$\left[-\ln 2,+\infty\right)$　　D．$\left(-\infty,-\ln 2\right]$

16.【天津市八校 2020-2021 学年高三上学期期中联考数学】设 $f(x)$ 为定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数，当 $x\geq 0$ 时，$f(x)=\log_{2}(x+1)+ax^{2}-a+1$（$a$ 为常数），则不等式 $f(3x+5)>-2$ 的解集为（　　）

A．$(-\infty,-1)$　　B．$(-1,+\infty)$　　C．$(-\infty,-2)$　　D．$(-2,+\infty)$

17.【海南省海南中学 2021 届高三第五次月考】设 $f(x)$ 是定义在 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$ 上的奇函数，对任意的 $x_{1},x_{2}\in(0,+\infty),x_{1}\neq x_{2}$，满足：$\dfrac{x_{2}f\left(x_{2}\right)-x_{1}f\left(x_{1}\right)}{x_{2}-x_{1}}>0$，且 $f(2)=4$，则不等式 $f(x)-\dfrac{8}{x}>0$ 的解集为（　　）

A．$(-2,0)\cup(2,+\infty)$　　B．$(-2,0)\cup(0,2)$

C．$(-\infty,-4)\cup(0,4)$　　D．$(-\infty,-2)\cup(2,+\infty)$

18．已知 $f\left(x\right)$ 是定义在 R 上的偶函数，在区间 $\left(-\infty,0\right]$ 上为增函数，且 $f\left(2\right)=0$，则不等式 $f\left(1+2x\right)\leq 0$ 的解集为_____.

【来源】重庆市清华中学 2022 届高三上学期 7 月月考数学试题

19．已知定义在 R 上的偶函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,0]$ 上单调递增，实数 a 满足 $f(\ln a)+2f\left(\ln\dfrac{1}{a}\right)\geq 3f(-1)$，则实数 a 的取值范围是_____.

【来源】2021 年普通高等学校招生全国统一考试（全国Ⅲ卷）理科数学试题（黑卷）

第 7 讲　分类讨论思想在分段函数中的应用

【高考地位】

分类讨论思想是一种重要的数学思想方法，它在人类的思维发展中起着重要的作用. 分类讨论思想实际上是一种化整为零、化繁为简、分别对待、各个击破的思维策略在数学解题中的运用. 主要涉及分段函数的求值、单调性和含参数的函数的单调性和最值问题.分类讨论思想，可培养逻辑思维能力和抽象思维能力和严密的思考问题的能力。

类型一　分段函数

万能模板	内　　容
使用场景	分段函数
解题模板	第一步　通过观察分析，决定如何对自变量进行分类； 第二步　通过运算、变形，利用常见基本初等函数，将问题转化为几段加以求解； 第三步　得出结论.

例 1　函数 $f(x)=\begin{cases}\log_2 x, & x>0\\ x^2+4x+1, & x\le 0\end{cases}$，若实数 a 满足 $f(f(a))=1$，则实数 a 的所有取值的和为（　　）

A．1　　B．$\frac{17}{16}-\sqrt{5}$　　C．$-\frac{15}{16}-\sqrt{5}$　　D．-2

【变式演练 1】已知函数 $f(x)=\begin{cases}\left(\frac{1}{2}\right)^x, x\ge 0\\ f(x+2), x<0\end{cases}$，则 $f\left(\log_2\frac{1}{5}\right)=$_____.

【来源】江苏省扬州中学 2021 届高三 3 月份高考数学考前试题

【变式演练 2】已知函数 $f(x)=\begin{cases}x^2-4x+6, x\ge 0\\ x+6, x<0\end{cases}$，则不等式 $f(x)>f(1)$ 的解集是（　　）

A．$(-3,1)\cup(3,+\infty)$　　B．$(-\infty,-1)\cup(2,3)$

C．$(-1,1)\cup(3,+\infty)$　　D．$(-\infty,-3)\cup(1,3)$

【来源】重庆市清华中学 2022 届高三上学期 7 月月考数学试题

例 2　已知函数 $f(x)=\begin{cases}x^2, x\in[0,+\infty)\\ x^3+a^2-3a+2, x\in(-\infty,0)\end{cases}$ 在区间 $(-\infty,+\infty)$ 上是增函数,则常数 a 的取值范围是（　）

A．$(1,2)$　　B．$(-\infty,1]\cup[2,+\infty)$　　C．$[1,2]$　　D．$(-\infty,1)\cup(2,+\infty)$

【变式演练 3】【甘肃省张掖市第二中学 2020-2021 学年高三第一学期 10 月月考数学（理）】已知函数

$f(x)=\begin{cases}2+\log_{\frac{1}{2}}x,\frac{1}{8}\le x<1\\ 2^x,1\le x\le 2\end{cases}$，若 $f(a)=f(b)(a<b)$，则 $b-a$ 的取值范围为（　　）

A. $\left(0,\frac{3}{2}\right]$　　B. $\left(0,\frac{7}{4}\right]$　　C. $\left(0,\frac{9}{8}\right]$　　D. $\left(0,\frac{15}{8}\right]$

例 3　$f(x)=\begin{cases}(x-a)^2,x\le 0,\\ x+\frac{1}{x}+a,x>0,\end{cases}$ 若 $f(0)$ 是 $f(x)$ 的最小值，则 a 的取值范围为（　　）.

(A)[-1,2]　　(B)[-1，0]　　(C)[1，2]　　(D) $[0,2]$

【变式演练 4】已知函数 $f(x)=\begin{cases}x+\frac{2}{x}-3,x\ge 1\\ \lg(x^2+1),x<1\end{cases}$，则 $f(f(-3))=$_____，$f(x)$ 的最小值是_____.

【变式演练 5】已知函数 $f(x)=\begin{cases}-x^2-2x & x\le a\\ -x+2 & x>a\end{cases}$，若存在实数 x_0，使得对于任意的实数 x 都有 $f(x)\le f(x_0)$ 成立，则实数 a 的取值范围是_____.

【来源】新高考 2021 届高三考前保温热身模拟卷数学试题（五）

类型二　含参数函数的最值问题

万能模板	内　　容
使用场景	含参函数在区间上的最值问题
解题模板	第一步　通过观察函数的特征，分析参数的位置在什么位置； 第二步　通过讨论含参函数的单调性和已知区间之间的关系进行分类讨论； 第三步　根据含参函数的图像与性质可判断函数在区间上的单调性，并根据函数的单调性求出其最值； 第四步　得出结论.

例 4 已知函数 $y=f(x)$ 是二次函数，且满足 $f(0)=3$，$f(-1)=f(3)=0$

（1）求 $y=f(x)$ 的解析式；

（2）若 $x\in[t,t+2]$，试将 $y=f(x)$ 的最大值表示成关于 t 的函数 $g(t)$.

【变式演练 6】【天津市静海区 2020-2021 学年高三上学期第一次月考】已知函数

$f(x)=\begin{cases}a^x,x>1\\\left(4-\frac{a}{2}\right)x+2,x\le 1\end{cases}$ 是 R 上的单调递增函数，则实数 a 的取值范围是（　　）

A．$(1,+\infty)$　　B．$[4,8)$　　C．$(4,8)$　　D．$(1,8)$

例 5.设函数 $f(x)=x^2-ax+b,a,b\in R$．

（1）当 $a=2$ 时，记函数 $|f(x)|$ 在[0，4]上的最大值为 $g(b)$，求 $g(b)$ 的最小值；

（2）存在实数 a，使得当 $x\in[0,b]$ 时，$2\le f(x)\le 6$ 恒成立，求 b 的最大值及此时 a 的值．

【变式演练 7】已知函数 $f(x)=\left|x^2-ax+2\right|+a$，$a\in\mathbf{R}$，若 $f(x)$ 在区间 $[-1,1]$ 上的最大值是 3，则 a 的取值范围是_____.

【来源】青海省西宁市大通回族土族自治县 2021 届高三二模数学（理）试题

【变式演练 8】已知函数 $g(x)=x+\frac{9}{x}-a(a\in R),x\in[1,9]$，则 $g(x)$ 的值域是_____.设函数 $f(x)=|g(x)|$，若对于任意实数 a，总存在 $x_0\in[1,9]$，使得 $f(x_0)\ge t$ 成立，则实数 t 的取值范围是_____

【来源】陕西省宝鸡市千阳中学 2021 届高三下学期第二次适应性训练理科数学试题

【高考再现】

1.（2021 年浙江省高考数学试题）已知 $a\in\mathrm{R}$，函数 $f(x)=\begin{cases}x^2-4,x>2\\|x-3|+a,x\le 2,\end{cases}$ 若 $f\left[f\left(\sqrt{6}\right)\right]=3$，则 $a=$_____.

2.【2020 年高考天津卷 9】已知函数 $f(x)=\begin{cases}x^3,&x\geq 0,\\-x,&x<0.\end{cases}$ 若函数 $g(x)=f(x)-\left|kx^2-2x\right|\ (k\in\mathbf{R})$ 恰有 4 个零点，则 k 的取值范围是（　　）

A．$\left(-\infty,-\frac{1}{2}\right)\cup(2\sqrt{2},+\infty)$　　B．$\left(-\infty,-\frac{1}{2}\right)\cup(0,2\sqrt{2})$

C．$(-\infty,0)\cup(0,2\sqrt{2})$　　D．$(-\infty,0)\cup(2\sqrt{2},+\infty)$

3.【2017 天津理】已知函数 $f(x)=\begin{cases}x^2-x+3,x\le 1,\\x+\frac{2}{x},x>1.\end{cases}$ 设 $a\in\mathbf{R}$，若关于 x 的不等式 $f(x)\ge\left|\frac{x}{2}+a\right|$ 在 $\mathbf{R}$ 上恒成立，则 a 的取值范围是__

（A）$[-\frac{47}{16},2]$　　（B）$[-\frac{47}{16},\frac{39}{16}]$　　（C）$[-2\sqrt{3},2]$　　（D）$[-2\sqrt{3},\frac{39}{16}]$

4.【2016 高考浙江文数】已知函数 $f(x)=x^2+bx$，则“$b<0$”是“$f(f(x))$ 的最小值与 $f(x)$ 的最小值相等”的（　　）

A.充分不必要条件　　B.必要不充分条件

C.充分必要条件　　D.既不充分也不必要条件

5.【2017 年全国普通考试理科数学】已知函数 $f(x)=\begin{cases}x^2-x+3, x\le 1,\\ x+\frac{2}{x}, x>1.\end{cases}$ 设 $a\in R$，若关于 x 的不等式 $f(x)\ge\left|\frac{x}{2}+a\right|$ 在 R 上恒成立，则 a 的取值范围是

A. $\left[-\frac{47}{16},2\right]$　　B. $\left[-\frac{47}{16},\frac{39}{16}\right]$　　C. $\left[-2\sqrt{3},2\right]$　　D. $\left[-2\sqrt{3},\frac{39}{16}\right]$

6.【2015 高考陕西，文 4】设 $f(x)=\begin{cases}1-\sqrt{x}, x\ge 0\\ 2^x, x<0\end{cases}$，则 $f(f(-2))=$（　　）

$A.\ -1$　　$B.\ \frac{1}{4}$　　$C.\ \frac{1}{2}$　　$D.\ \frac{3}{2}$

【反馈练习】

1．已知函数 $f(x)=\begin{cases}a^{x-1},(x<1)\\ (a-2)x+3a,(x\ge 1)\end{cases}$，满足对任意 $x_1\ne x_2$，都有 $\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}<0$ 成立，则 a 的取值范围是（　　）

A．$a\in(0,1)$　　B．$a\in\left[\frac{3}{4},1\right)$　　C．$a\in\left(0,\frac{3}{4}\right]$　　D．$a\in\left[\frac{3}{4},2\right)$

【来源】山东省（新高考）2021 届高三数学学科仿真模拟标准卷试题（二）

2．函数 $f(x)=\frac{x^2+ax+11}{x+1}(a\in R)$，若对于任意的 $x\in\mathrm{N}^*$，$f(x)\ge 3$ 恒成立，则 a 的取值范围是（　　）

A．$\left[-\frac{8}{3},+\infty\right)$　　B．$\left[-\frac{2}{3},+\infty\right)$　　C．$\left[-\frac{1}{3},+\infty\right)$　　D．$[-1,+\infty)$

【来源】四川省资阳中学 2022 届高三上学期第一次质量检测数学试题

3．设 $f(x)$ 是定义在 R 上的偶函数，且当 $x\le 0$ 时，$f(x)=\log_4(3-x)$，若对任意的 $x\in[0,b+1]$，均有 $f(x+b)\ge f(2x)$，则实数 b 的最大值是（　　）

A．$-\frac{2}{3}$　　B．$-\frac{3}{4}$　　C．0　　D．1

【来源】河南省“顶尖计划”2021 届高三第三次考试理科数学试题

4．若存在正数 x 使 $e^x(x+a)<1$ 成立，则 a 的取值范围是（　　）

A．$(-\infty,+\infty)$　　B．$(-\infty,1)$　　C．$\left(-\infty,\frac{1}{e}-1\right)$　　D．$(-\infty,-1)$

【来源】黑龙江省哈尔滨市第三中学 2021 届高三第四次模拟考试数学（文）试题

5．（多选）函数 $f(x)=\begin{cases}2^x-1(x\le 0)\\ \log_2 x(x>0)\end{cases}$，则下列说法正确的有（　　）

A．函数 $f(x)$ 是 R 上的单调递增函数

B．对于任意实数 a，不等式 $f(a^2+1)\ge f(-a)$ 恒成立

C．若 $x_1\ne x_2$，且 $f(x_1)=f(x_2)$，则 $x_1+x_2<0$

D．方程 $f(x)-f(-x)=0$ 有 3 个不相等实数解

【来源】重庆市清华中学 2022 届高三上学期 7 月月考数学试题

6．【江西省新余市第一中学 2021 届高三第四次模拟考试数学（文）】已知函数 $f(x)=\begin{cases}1+\log_2(-x),x<0\\ 2^x,x>0\end{cases}$，则 $f(-1)+f(1)=$（　　）

A．2　　B．3　　C．4　　D．5

7．【广西北海市 2021 届高三第一次模拟考试数学（理）】已知函数 $f(x)=\begin{cases}\log_2 x,x>0\\ 3-4x,x\le 0\end{cases}$，则 $f(1)-f(-1)=$（　　）

A．-7　　B．2　　C．7　　D．-4

8.已知函数 $f(x)=\begin{cases}(3-a)x-7,x\le 8\\ a^{x-8},x>8\end{cases}$，若数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_n=f(n)(n\in N^*)$，且 $\{a_n\}$ 是递增数列，则实数 a 的取值范围是（　　）

A．$(1,3)$　　B．$\left[\frac{17}{9},3\right)$　　C．$\left(\frac{17}{9},3\right)$　　D．$[2,3)$

9.【云南省红河州 2021 届高中毕业生第一次复习统一检测数学（文）】已知函数 $f\left(x\right)=\begin{cases}\sqrt{1-x^2},-1\le x<0\\1-x,0\le x<1,\\f\left(x-2\right),x\ge 1\end{cases}$

若函数 $g\left(x\right)=f\left(x\right)-k\left(0\le k\le 1\right)$ 的所有零点从小到大依次成等差数列，则 $g\left(x\right)$ 的零点一定不包含（　　）

A．$2019-\frac{\sqrt{2}}{2}$　　B．2019　　C．2020　　D．$2020+\frac{\sqrt{2}}{2}$

10.【宁夏银川一中 2021 届高三第四次月考数学（理科）】已知函数 $f(x)=\begin{cases}x^3+\left(a^2-4\right)x+4-a,x>0\\a^x,x\le 0\end{cases}$，是单调递增函数，则实数 a 的取值范围是（　　）

A．$(1,2)$　　B．$(1,3]$　　C．$[2,3]$　　D．$[3,+\infty)$

11.【河南省 2020 届高三（6 月份）高考数学（文科）质检】已知函数 $f(x)=\begin{cases}e^x-e^{-x},x>0,\\-x^2,x\bullet 0,\end{cases}$ 若 $a=5^{0.01},b=\frac{3}{2}\log_3 2,c=\log_3 0.9$，则有（　　）

A．$f(b)>f(a)>f(c)$　　B．$f(c)>f(a)>f(b)$

C．$f(a)>f(c)>f(b)$　　D．$f(a)>f(b)>f(c)$

12.【2020 届河北省衡水中学高三下学期第一次模拟数学（理）】已知函数 $f\left(x\right)=ax+1+\left|2x^2+ax-1\right|$（$a\in R$）的最小值为 0，则 $a=$（　　）

A．$\frac{1}{2}$　　B．-1　　C．± 1　　D．$\pm\frac{1}{2}$

13.【贵州省贵阳市四校 2021 届高三上学期联合考试】在区间[-2，2]随机取一个数 x，则事件“$y=\begin{cases}2^x,(x\le 0)\\x+1,(x>0)\end{cases}$，且 $y\in\left[\frac{1}{2},2\right]$”发生的概率为（　　）

A．$\frac{7}{8}$　　B．$\frac{5}{8}$　　C．$\frac{3}{8}$　　D．$\frac{1}{2}$

14.【安徽省宿州市泗县第一中学 2020 届高三下学期最后一卷数学（文）】已知函数

$f(x)=\begin{cases}|\log_2 x,|x>0\\ \frac{1}{4}x^2+x+2,x\le 0\end{cases}$，方程 $f(x)=a$ 有四个不同根 x_1，x_2，x_3，x_4，且满足 $x_1<x_2<x_3<x_4$，则 $\frac{x_4}{x_3}-\frac{x_1x_3^2+x_2x_3^2}{2}$ 的取值范围是（　　）

A．$\left[2\sqrt{2},+\infty\right)$　　B．$\left[2\sqrt{2},\frac{129}{8}\right]$　　C．$\left(\frac{9}{2},+\infty\right)$　　D．$\left(\frac{9}{2},\frac{129}{8}\right)$

15．【上海市闵行区 2021 届高三上学期一模】已知定义在 $[0,+\infty)$ 上的函数 $f(x)$ 满足 $f(x)=\begin{cases}15-|x-1|,0\le x<2\\ f(x-2)-2,x\ge 2\end{cases}$．设 $f(x)$ 在 $[2n-2,2n)\left(n\in\mathbf{N}^*\right)$ 上的最大值记作 a_n，S_n 为数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和，则 S_n 的最大值为_____．

16．若函数 $f(x)=\begin{cases}2^{x-2}-2m,&x<1\\ 2x^3-6x^2,&x\ge 1\end{cases}$ 有最小值，则 m 的一个正整数取值可以为_____．

【来源】广东 2021 届高三 5 月卫冕联考数学试题

17．已知函数 $f(x)=x^2-1$，$g(x)=x+1$．

（1）若当 $x\in\mathbf{R}$ 时，不等式 $f(x)\ge\mu g(x)$ 恒成立，求实数 μ 的值；

（2）求函数 $h(x)=|f(x)|+\lambda|g(x)|$ 在区间 $[-2,0]$ 上的最大值．

【来源】四川省资阳市乐至中学 2022 届高三第一次质量检测数学（理科）试题

18．已知函数 $f(x)=|2x+4|+x-2a+a^2(a\in R)$．

（1）当 $a=2$ 时，求不等式 $f(x)\ge 6$ 的解集；

（2）若关于 x 的不等式 $f(x)\ge 6$ 对 $x\in\mathbf{R}$ 恒成立，求实数 a 的取值范围．

【来源】2021 年普通高等学校招生全国统一考试（全国Ⅲ卷）理科数学试题（黑卷）

第 8 讲　函数零点问题

【高考地位】

函数的零点是新课标的新增内容，其实质是相应方程的根，而方程是高考重点考查内容，因而函数的零点亦成为新课标高考命题的热点.其经常与函数的图像、性质等知识交汇命题，多以选择、填空题的形式考查.

类型一　零点或零点存在区间的确定

万能模板	内　　容
使用场景	一般函数类型
解题模板	第一步　直接根据零点的存在性定理验证区间端点处的函数值的乘积是否小于 0； 第二步　若其乘积小于 0，则该区间即为存在的零点区间；否则排除其选项即可.

例 1　函数 $f\left(x\right)=e^{x}+4x-3$ 的零点所在的区间为（　　）

A. $\left(0,\frac{1}{4}\right)$　　B. $\left(\frac{1}{4},\frac{1}{2}\right)$　　C. $\left(\frac{1}{2},\frac{3}{4}\right)$　　D. $\left(\frac{3}{4},1\right)$

【变式演练 1】方程 $2^{x}+x-2=0$ 的解所在的区间为（　　）

A. $(-1,0)$　　B. $(0,1)$　　C. $(1,2)$　　D. $(2,3)$

【变式演练 2】【山西省运城市 2021 届高三上学期 9 月调研数学（理）】已知函数

$f\left(x\right)=\begin{cases}4^{x}+3,x\le 0\\ 2^{x}+\log_{9}x^{2}-9,x>0\end{cases}$，则函数 $y=f\left(f\left(x\right)\right)$ 的零点所在区间为（　　）

A. $\left(3,\frac{7}{2}\right)$　　B. $\left(-1,0\right)$　　C. $\left(\frac{7}{2},4\right)$　　D. $\left(4,5\right)$

【变式演练 3】函数 $f\left(x\right)=2e^{x}$ 的图象与函数 $g\left(x\right)=\frac{1}{x}+5$ 的图象交点所在的区间可能为（　　）

A. $\left(0,1\right)$　　B. $\left(1,2\right)$　　C. $\left(2,3\right)$　　D. $\left(3,4\right)$

【来源】全国Ⅰ卷 2021 届高三高考数学（文）押题试题（一）

类型二　零点的个数的确定

方法 1：定义法

万能模板	内　　容
使用场景	一般函数类型
解题模板	第一步　判断函数的单调性； 第二步　根据零点的存在性定理验证区间端点处的函数值的乘积是否小于 0；若其乘积小于 0，则该区间即为存在唯一的零点区间或者直接运用方程的思想计算出其零点； 第三步　得出结论.

例 2.函数 $f(x)=e^x+3x$ 的零点个数是（　　）

A．0　　B．1　　C．2　　D．3

【变式演练 4】已知函数 $f(x)$ 是定义在 **R** 上的偶函数，满足 $f(x+2)=f(x)$，当 $x\in[0,1]$ 时，$f(x)=\cos\frac{\pi}{2}x$，则函数 $y=f(x)-|x|$ 的零点个数是（　　）

A．2　　B．3　　C．4　　D．5

【来源】吉林省松原市长岭县第二中学 2021 届高三下学期三模考试数学试题

【变式演练 5】方程 $\sqrt{x}=3\sin x$ 的根的个数是（　　）

A．3　　B．4　　C．5　　D．6

【变式演练 6】（多选）若函数 $f(x)=\begin{cases}4^x-m, x<2\\ 2021(x-m)(x-3m), & x\geq 2\end{cases}$ 恰有两个零点，则正整数 m 的取值可能为（　　）

A．1　　B．2　　C．15　　D．16

【来源】山东省济南市章丘区 2021 届高三 5 月份模拟数学试题

方法 2：数形结合法

万能模板	内　　容
使用场景	一般函数类型
解题模板	第一步　函数 $g(x)$ 有零点问题转化为方程 $f(x)=m(x)$ 有根的问题； 第二步　在同一直角坐标系中，分别画出函数 $y=f(x)$ 和 $y=m(x)$ 的图像； 第三步　观察并判断函数 $y=f(x)$ 和 $y=m(x)$ 的图像的交点个数 第四步　由 $y=f(x)$ 和 $y=m(x)$ 图像的交点个数等于函数 $g(x)=0$ 的零点即可得出结论.

例 3. 方程 $(\frac{1}{3})^x=|\log_3 x|$ 的解的个数是（　　）

A．3　　B．2　　C．1　　D．0

【变式演练 7】【上海市徐汇区 2021 届高三上学期一模】方程 $\cos x=\log_8 x$ 的实数解的个数是（　　）

A．4　　B．3　　C．2　　D．1

【变式演练 8】已知函数 $f(x)=\begin{cases}e^{x-1},x\le 1\\ \ln x,x>1\end{cases}$，$g(x)=f(x)+a$，若 $g(x)$ 存在两个零点，则实数 a 的取值范围是（　　）

A．$[-1,0)$　　B．$(-1,0)$　　C．$(0,1)$　　D．$(0,1]$

【来源】重庆市第八中学 2021 届高三下学期高考适应性考试（二）数学试题

【变式演练 9】知关于 x 的方程 $\left|2^x-a\right|=\dfrac{a}{2^x}$ 有 3 个不同的实数解，则实数 a 的取值范围为（　　）

A．$(0,2)$　　B．$(2,4)$　　C．$(2,+\infty)$　　D．$(4,+\infty)$

【来源】重庆市第八中学 2021 届高三下学期适应性月考卷（七）数学试题

【高考再现】

1．【2021 年北京市高考数学试题】已知函数 $f(x)=|\lg x|-kx-2$，给出下列四个结论：

①若 $k=0$，则 $f(x)$ 有两个零点；

②$\exists k<0$，使得 $f(x)$ 有一个零点；

③$\exists k<0$，使得 $f(x)$ 有三个零点；

④$\exists k>0$，使得 $f(x)$ 有三个零点．

以上正确结论得序号是_____．

2.【2021 年天津高考数学试题】设 $a\in\mathbf{R}$，函数 $f(x)=\begin{cases}\cos(2\pi x-2\pi a). & x<a\\ x^2-2(a+1)x+a^2+5, & x\ge a\end{cases}$，若 $f(x)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 内恰有 6 个零点，则 a 的取值范围是（　　）

A．$\left(2,\dfrac{9}{4}\right]\cup\left(\dfrac{5}{2},\dfrac{11}{4}\right]$　　B．$\left(\dfrac{7}{4},2\right)\cup\left(\dfrac{5}{2},\dfrac{11}{4}\right)$

C．$\left(2,\dfrac{9}{4}\right]\cup\left[\dfrac{11}{4},3\right)$　　D．$\left(\dfrac{7}{4},2\right)\cup\left[\dfrac{11}{4},3\right)$

3.【2020 年高考天津卷 9】已知函数 $f(x)=\begin{cases}x^3, & x\ge 0,\\ -x, & x<0.\end{cases}$ 若函数 $g(x)=f(x)-\left|kx^2-2x\right|$ $(k\in\mathbf{R})$ 恰有 4 个零点，则 k 的取值范围是（　　）

A．$\left(-\infty,-\dfrac{1}{2}\right)\cup(2\sqrt{2},+\infty)$　　B．$\left(-\infty,-\dfrac{1}{2}\right)\cup(0,2\sqrt{2})$

C．$(-\infty,0)\cup(0,2\sqrt{2})$　　D．$(-\infty,0)\cup(2\sqrt{2},+\infty)$

4.【2020 年高考上海卷 11】已知 $a\in R$，若存在定义域为 R 的函数 $f(x)$ 同时满足下列两个条件，①对任意

$x_0 \in R$，$f(x_0)$ 的值为 x_0 或 x_0^2；②关于 x 的方程 $f(x)=a$ 无实数解；则 a 的取值范围为_____.

5. 【2016 高考天津理数】已知函数 $f(x)=\begin{cases}x^2+(4a-3)x+3a, x<0,\\ \log_a(x+1)+1, x\geq 0\end{cases}$（$a>0$,且 $a\neq 1$）在 R 上单调递减，且关于 x 的方程 $|f(x)|=2-x$ 恰好有两个不相等的实数解，则 a 的取值范围是（　　）

（A）$(0, \frac{2}{3}]$　（B）$[\frac{2}{3}, \frac{3}{4}]$　（C）$[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}]\cup\{\frac{3}{4}\}$（D）$[\frac{1}{3}, \frac{2}{3})\cup\{\frac{3}{4}\}$

6.【2018 年全国普通高等学校招生统一考试数学（浙江卷）】已知$\lambda\in$R，函数 $f(x)=\begin{cases}x-4, x\geq\lambda\\ x^2-4x+3, x<\lambda\end{cases}$，当 $\lambda=2$ 时，不等式 $f(x)<0$ 的解集是_____．若函数 $f(x)$恰有 2 个零点，则λ的取值范围是_____.

7.【2017 江苏】设 $f(x)$ 是定义在 **R** 且周期为 1 的函数，在区间 $[0,1)$ 上，$f(x)=\begin{cases}x^2, & x\in D,\\ x, & x\notin D,\end{cases}$ 其中集合 $D=\left\{x\,\middle|\,x=\frac{n-1}{n}, n\in \mathbf{N}^*\right\}$，则方程 $f(x)-\lg x=0$ 的解的个数是_____.

8.【2018 年全国普通高等学校招生统一考试理科数学（天津卷）】已知 $a>0$，函数 $f(x)=\begin{cases}x^2+2ax+a, & x\leq 0,\\ -x^2+2ax-2a, & x>0.\end{cases}$ 若关于 x 的方程 $f(x)=ax$ 恰有 2 个互异的实数解，则 a 的取值范围是_____.

【反馈练习】

1．函数 $f(x)=(\sqrt{e})^x$ 的图象与函数 $g(x)=2-\ln x$ 的图象交点横坐标所在的区间可能为（　　）

A．$(0,1)$　　B．$(1,2)$　　C．$(2,3)$　　D．$(3,4)$

【来源】重庆市南开中学 2022 届高三上学期 7 月考试数学试题

2．已知函数 $f(x)=x\ln x+x-k(x-1)$ 在 $(1,+\infty)$ 上有唯一零点，若 $k\in(n,n+1)$，$n\in Z$，则 $n=$（　　）

A．2　　B．3　　C．4　　D．5

【来源】全国名校 2021 届高三高考数学（文）冲刺试题（二）

3．函数 $y=x^3$ 和 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^{x-2}$ 存在公共点 $P(x_0,y_0)$，则 x_0 的范围为（　　）

A．$(0,1)$　　B．$(1,2)$　　C．$(2,3)$　　D．$(3,4)$

【来源】陕西省西安中学 2021 届高三下学期第二次仿真考试理科数学试题

4．已知函数 $f(x)=x+a$，$g(x)=\ln x$，若 $f(x)$ 的图象与 $g(x)$ 的图象在 $(2020,2021)$ 上恰有1个交点，则 a 的取值范围为（　　）

A．$(\ln 2020-2020,\ln 2021-2021)$　　B．$(\ln 2020-2021,\ln 2021-2020)$

C．$(\ln 2021-2020,\ln 2020-2021)$　　D．$(\ln 2021-2021,\ln 2020-2020)$

【来源】“超级全能生”2021 届高三全国卷地区 4 月联考试题（乙卷）数学（理）试题

5．函数 $f(x)=2^x+\frac{1}{4}x-5$ 的零点 $x_0\in[a-1,a]$，$a\in\mathbf{N}^*$，则 $a=$（　　）

A．1　　B．2　　C．3　　D．4

【来源】山西省吕梁市 2021 届高三上学期第一次模拟数学（文）试题

6．（多选）【2021 年 1 月普通高等学校招生全国统一考试适应性测试（八省联考）】已知函数 $f(x)=x\ln(1+x)$，则（　　）

A．$f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 单调递增

B．$f(x)$ 有两个零点

C．曲线 $y=f(x)$ 在点 $\left(-\frac{1}{2},f\left(-\frac{1}{2}\right)\right)$ 处切线的斜率为 $-1-\ln 2$

D．$f(x)$ 是偶函数

7．【四川省成都市 2020-2021 学年高三上学期第一次诊断性检测数学（文）】已知函数 $f(x)=x+\ln x$，$g(x)=x\ln x$，若 $f(x_1)=\ln t$，$g(x_2)=t$，则 $x_1x_2\ln t$ 的最小值为（　　）.

A．$\frac{1}{e^2}$　　B．$\frac{2}{e}$　　C．$-\frac{1}{e}$　　D．$-\frac{1}{e^2}$

8．已知函数 $f(x)=kx$，$\left(\frac{1}{e}\le x\le e^2\right)$，$g(x)=e^{-\frac{x+1}{2}}+1$，若 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的图象上分别存在点 M、N，使得 M、N 关于直线 $y=x+1$ 对称，则实数 k 的取值范围是（　　）

A．$\left[-\frac{1}{e},e\right]$　　B．$\left[-\frac{4}{e^2},2e\right]$　　C．$\left[-\frac{2}{e},2e\right]$　　D．$\left[-\frac{3}{e},3e\right]$

9.【河南省郑州市 2020-2021 学年高三上学期第一次质量检测理科】对于函数 $y=f(x)$ 与 $y=g(x)$，若存在 x_0，使 $f(x_0)=g(-x_0)$，则称 $M(x_0,f(x_0))$，$N(-x_0,g(-x_0))$ 是函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 图象的一对“隐对称点”.已知函数 $f(x)=m(x+1)$，$g(x)=\frac{\ln x}{x}$，函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的图象恰好存在两对“隐对称点”，则实数 m 的取值范围为（　　）

A．$(-1,0)$　　B．$(-\infty,-1)$　　C．$(0,1)\cup(1,+\infty)$　　D．$(-\infty,-1)\cup(-1,0)$

10.【2021 届全国著名重点中学新高考冲刺】已知函数 $f(x)=\ln x+ae^{x-1}+1$ 的图象与函数 $g(x)=\ln\dfrac{1}{2-x}-ae^{1-x}-1$ 的图象有唯一公共点，则实数 a 的值为（　　）

A．1　　B．0　　C．$\sqrt{2}$　　D．-1

11.【山东省枣庄市滕州一中 2020-2021 学年高三 10 月月考】定义：如果函数 $y=f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上存在 $x_1,x_2(a<x_1<x_2<b)$，满足 $f'(x_1)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$，$f'(x_2)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$，则称函数 $y=f(x)$ 是在区间 $[a,b]$ 上的一个双中值函数，已知函数 $f(x)=x^3-\dfrac{6}{5}x^2$ 是区间 $[0,t]$ 上的双中值函数，则实数 t 的取值范围是（　　）

A．$\left(\dfrac{3}{5},\dfrac{6}{5}\right)$　　B．$\left(\dfrac{2}{5},\dfrac{6}{5}\right)$　　C．$\left(\dfrac{2}{5},\dfrac{3}{5}\right)$　　D．$\left(1,\dfrac{6}{5}\right)$

12.【广西南宁三中 2020 届高三数学（理科）】方程 $|x^2-2x|=a^2+1,(a>0)$ 的解的个数是（　　）

A．1　　B．2　　C．3　　D．4

13.【天津市耀华中学 2021 届高三（上）】已知函数 $f(x)=\begin{cases}x^2-1,x\bullet 1\\ \dfrac{\ln x}{x},x>1\end{cases}$，若关于 x 的方程 $2[f(x)]^2+2tf(x)+t-\dfrac{1}{2}=0$ 有 5 个不同的实数根，则实数 t 的取值范围是（　　）

A．$\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{e},\dfrac{1}{2}\right)$　　B．$\left(\dfrac{1}{e}-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right)$　　C．$\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{e},\dfrac{3}{2}\right)$　　D．$\left(\dfrac{1}{e}-\dfrac{1}{2},\dfrac{3}{2}\right)$

14.【河南省信阳市 2021 届高三（10 月份）第一次质检数学（理科）】已知函数 $f(x)=\begin{cases}x^2-1,x<1\\ \dfrac{\ln x}{x},x\geq 1\end{cases}$，若关于 x 的方程 $2\left[f(x)\right]^2+(1-2m)f(x)-m=0$ 有 5 个不同的实数解，则实数 m 的取值范围是_____.

15．已知函数 $f(x)=\sqrt{1-x^2}+k(x-2)$ 有两个不同的零点，则常数 k 的取值范围是_____.

【来源】全国 2021 届高三高考数学（文）信息试题（一）

16．已知函数 $f(x)=\left(1-4^x\right)^{\frac{1}{2}}+k\left(2^{x-1}-1\right)$ 有两个不同的零点，则实数 k 的取值范围是_____.

【来源】河北省衡水市饶阳中学 2021 届高三 5 月数学精编试题

17.【陕西省榆林市 2020-2021 学年高三上学期第一次高考模拟测试文科】已知函数

$$f(x)=\begin{cases}e^{x},x\le 0\\ -x^{2}+2x-\dfrac{1}{2},x>0\end{cases}.$$

（1）求斜率为 $\dfrac{1}{2}$ 的曲线 $y=f(x)$ 的切线方程；

（2）设 $g(x)=\dfrac{f(x)}{x}-m$，若 $g(x)$ 有 2 个零点，求 m 的取值范围.

第 9 讲　函数图象的多变考查

【高考地位】

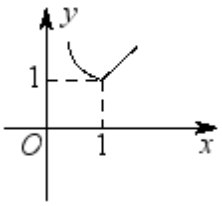
函数图象作为高中数学的一个“重头戏”，是研究函数性质、方程、不等式的重要武器，已经成为各省市高考命题的一个热点。在高考中经常以几类初等函数的图象为基础，结合函数的性质综合考查，多以选择、填空题的形式出现。

方法一　特值法

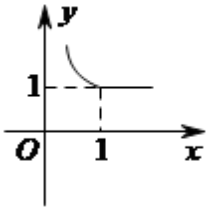
万能模板	内　　容
使用场景	函数 $f(x)$ 的解析式已知的情况下
解题模板	第一步　将自变量或者函数值赋以特殊值； 第二步　分别一一验证选项是否符合要求； 第三步　得出结论.

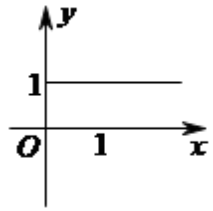
例 1 【云南省昆明市官渡区 2021 届高三上学期两校联考】**函数 $y=\mathrm{e}^{|\ln x|}-|x-1|$ 的图象大致为（　　）**

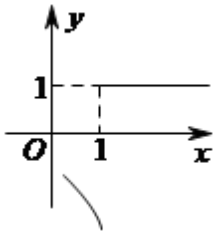
A.



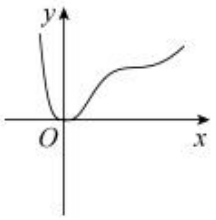
B.

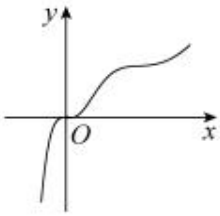


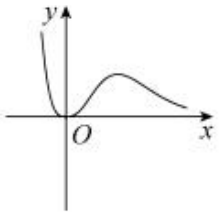
C. 

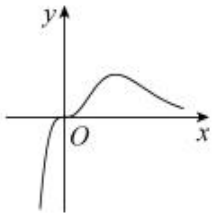
D. 

【变式演练 1】函数 $f(x)=\dfrac{x^3}{3^x+1}$ 的图象大致是（　　）

A. 

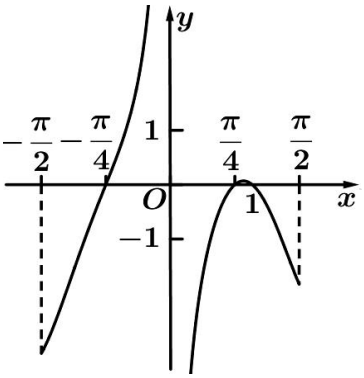
B. 

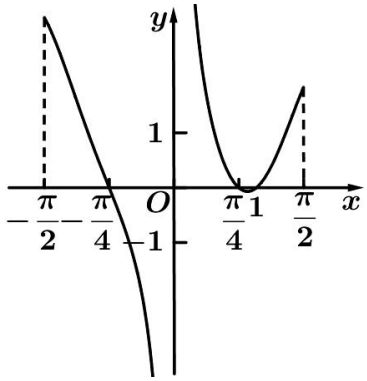
C. 

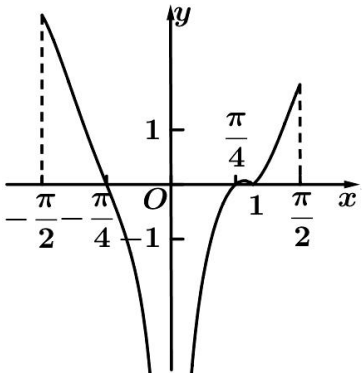
D. 

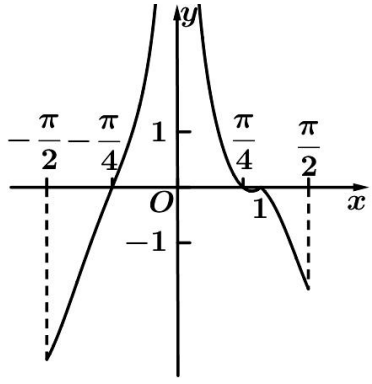
【来源】广东省实验中学 2021 届高三考前热身训练数学试题

【变式演练 2】函数 $f(x)=\left(x^2-\dfrac{1}{x}\right)\cdot\cos(2x)\left(-\dfrac{\pi}{2}\le x\le\dfrac{\pi}{2}\right)$ 的图象可能是（　　）

A. 

B. 

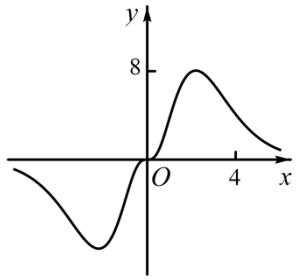
C. 

D. 

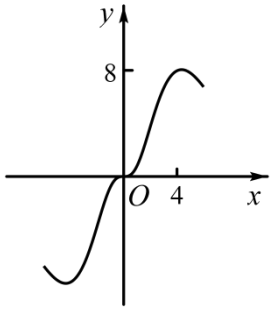
【来源】浙江省金华市义乌市 2021 届高三下学期适应性考试数学试题

【变式演练 3】【河南省郑州市 2020-2021 学年高三上学期第一次质量检测】函数 $y=\dfrac{2^{x+1}x^3}{4^x+1}$ 的图象大致为（　　）

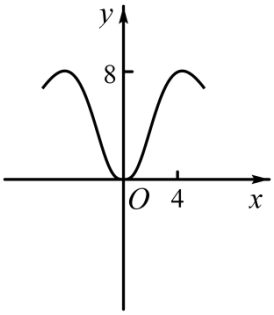
A.



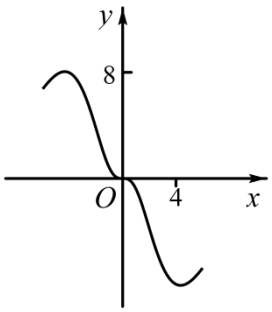
B.



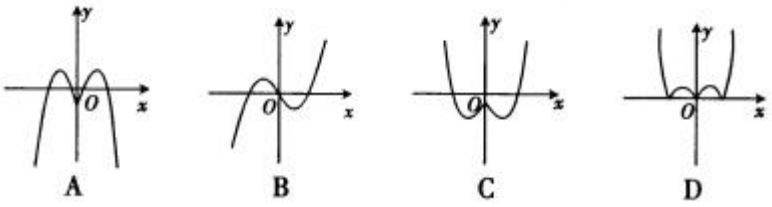
C.



D.



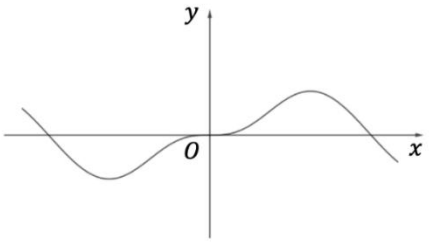
【变式演练 4】函数 $y=(x^2-1)e^{|x|}$ 的图象大致是（　　）

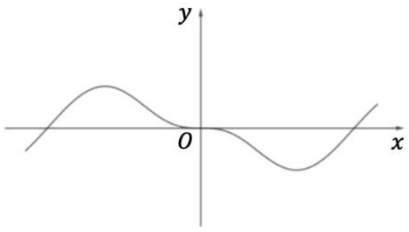


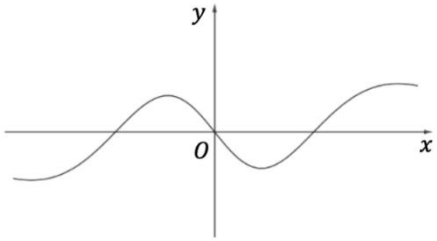
方法二　利用函数的基本性质判断其图象

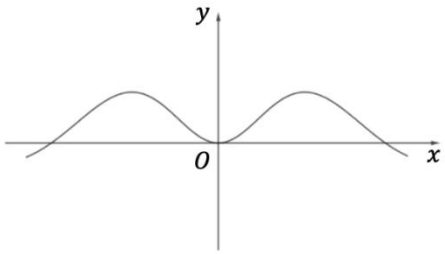
万能模板	内　　容
使用场景	函数 $f(x)$ 的解析式已知的情况下
解题模板	第一步　根据已知函数解析式分析其变化特征如单调性、奇偶性、定义域和值域等； 第二步　结合简单的基本初等函数的图象特征如对称性、周期性等进行判断即可； 第三步　得出结论.

例 2　函数 $f(x)=\dfrac{x^2\sin x}{2^x+2^{-x}}$ 的部分图象大致为（　　）

A. 

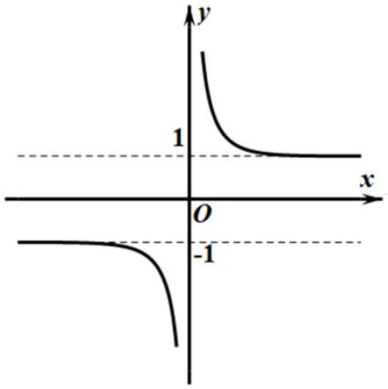
B. 

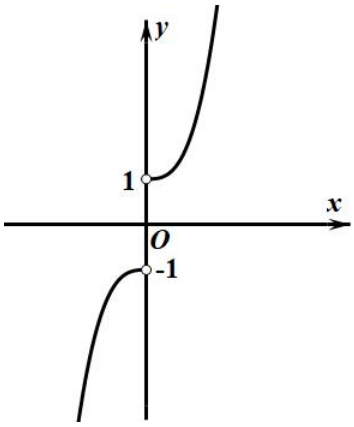
C. 

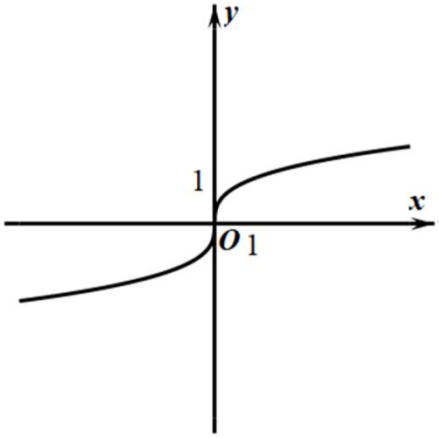
D. 

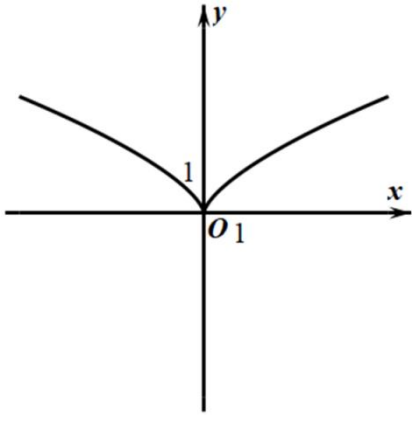
【来源】重庆市南开中学 2022 届高三上学期 7 月考试数学试题

【变式演练 5】【江苏省南通中学 2020-2021 学年高三上学期 12 月考】函数 $f(x)=\dfrac{e^{x}+e^{-x}}{e^{x}-e^{-x}}$ 的大致图象是（　　）

A. 

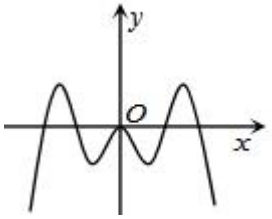
B. 

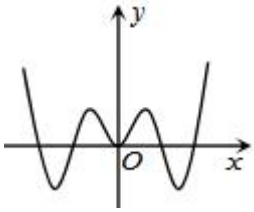
B. C. 

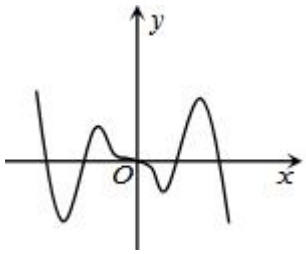
D. 

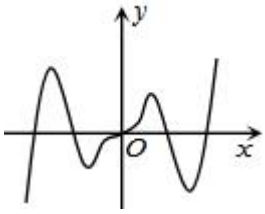
【变式演练 6】【四川省宜宾市 2021 届高三上学期第一次诊断】函数 $f(x)=-\sin x+x\cos x$ 部分图象大致

形状为（　　）

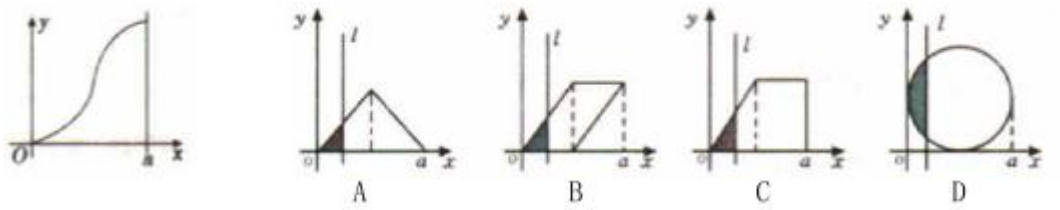
A. 

B. 

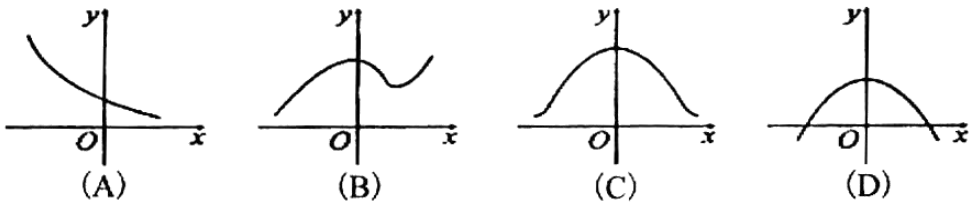
C. 

D. 

【变式演练 7】如图，有四个平面图形分别是三角形、平行四边形、直角梯形、圆，垂直于 x 轴的直线 $l:x=t(0\le t\le a)$ 经过原点 O 向右平行移动，l 在移动过程中扫过平面图形的面积为 y（图中阴影部分），若函数 $y=f(x)$ 的大致图象如图，那么平面图形的形状不可能是（　　）

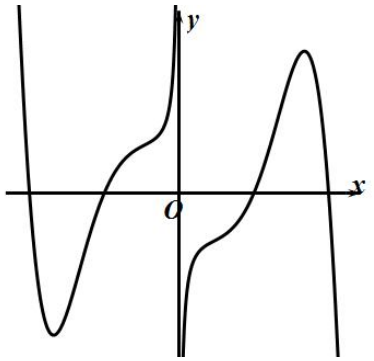


【变式演练 8】函数 $f(x)=e^{1-x^2}$（e 是自然对数的底数）的部分图象大致是（　　）

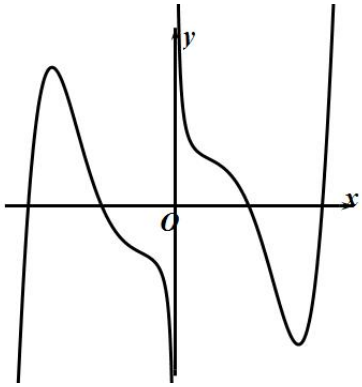


【变式演练 9】【广东省高州市 2021 届高三上学期第一次模拟】函数 $f(x)=\dfrac{e^{|x|}\cdot\sin x}{x^2}$ 的部分图象大致为（　　）

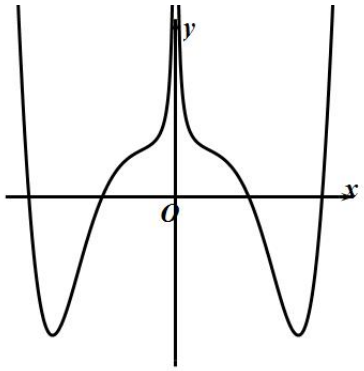
A.



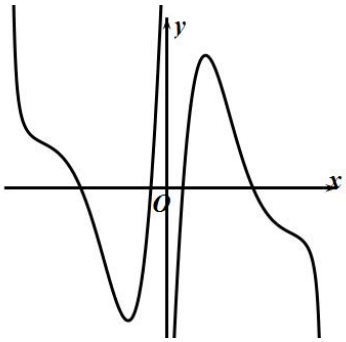
B.



C.

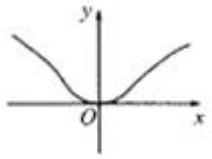


D.

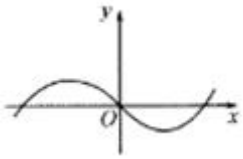


【变式演练 10】函数 $f\left(x\right)=\left(\dfrac{2}{1+\mathrm{e}^{x}}-1\right)\cos x$ 的图象的大致形状是（　　）

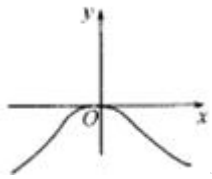
A.



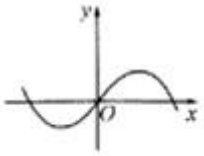
B.



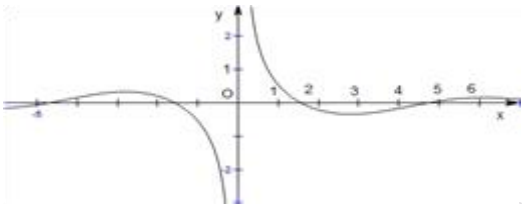
C.



D.



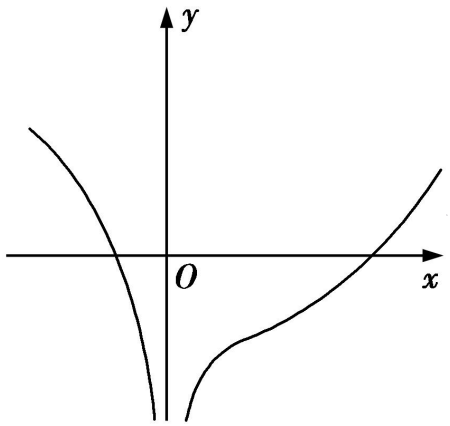
【变式演练 11】右图为函数$y=f(x)$的图象，则该函数可能为



A. $y=\dfrac{\sin x}{x}$　　B. $y=\dfrac{\cos x}{x}$　　C. $y=\dfrac{\sin x}{|x|}$　　D. $y=\dfrac{|\sin x|}{x}$

【变式演练 12】我国著名数学家华罗庚曾说．“数缺形时少直观，形少数时难入微，数形结合百般好，隔离分家万事休．”在数学的学习和研究中，有时可凭借函数的图象分析函数解析式的特征已知函数 $f\left(x\right)$ 在

$\left[-\frac{\pi}{2},\pi\right]$的大致图象如图所示，则函数$f(x)$的解析式可能为（　　）



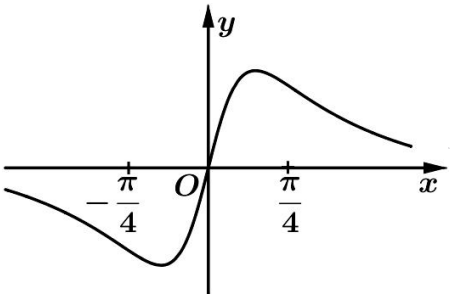
A．$f(x)=\ln|x|-\cos x$　　B．$f(x)=\ln|x|-\sin x$

C．$f(x)=\ln|x|+\cos x$　　D．$f(x)=\ln|x|+\sin x$

【来源】浙江省温州中学 2021 届高三下学期四模数学试题

【高考再现】

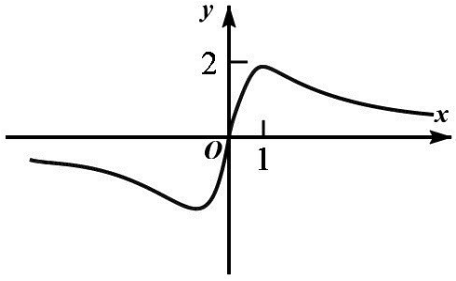
1．（2021·浙江高考真题）已知函数$f(x)=x^2+\frac{1}{4},g(x)=\sin x$，则图象为如图的函数可能是（　　）

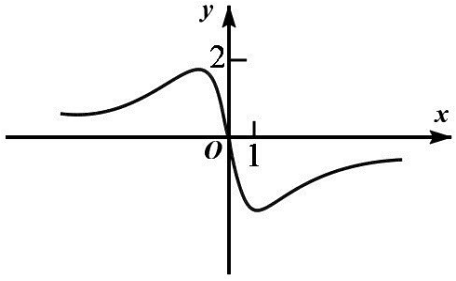


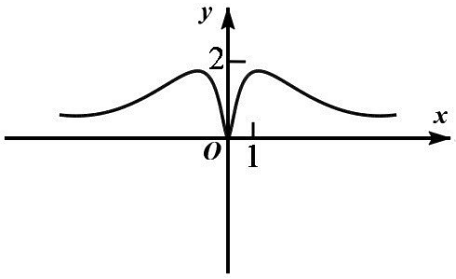
A．$y=f(x)+g(x)-\frac{1}{4}$　　B．$y=f(x)-g(x)-\frac{1}{4}$

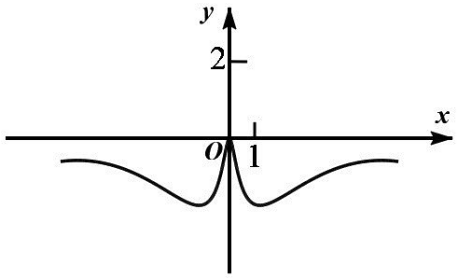
C．$y=f(x)g(x)$　　D．$y=\frac{g(x)}{f(x)}$

2.【2020 年高考天津卷 3】函数$y=\frac{4x}{x^2+1}$的图象大致为（　　）

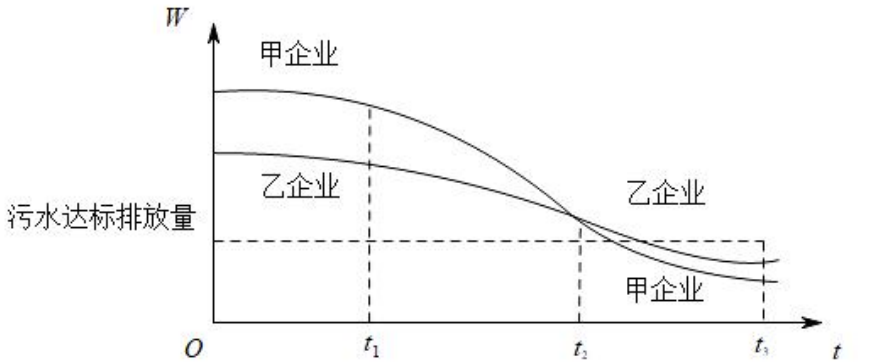
A． 

B． 

C. 

D. 

3.【2020 年高考北京卷 15】为满足人民对美好生活的向往，环保部门要求相关企业加强污水治理，排放未达标的企业要限期整改．设企业的污水排放量W与时间t的关系为$W=f(t)$，用$-\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$的大小评价在$[a,b]$这段时间内企业污水治理能力的强弱．已知整改期内，甲、乙两企业的污水排放量与时间的关系如下图所示．



给出下列四个结论：

①在$[t_1,t_2]$这段时间内，甲企业的污水治理能力比乙企业强；

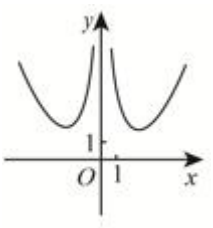
②在t_2时刻，甲企业的污水治理能力比乙企业强；

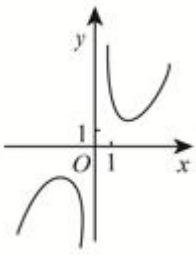
③在t_3时刻，甲、乙两企业的污水排放量都已达标；

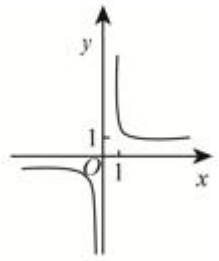
④甲企业在$[0,t_1]$，$[t_1,t_2]$，$[t_2,t_3]$这三段时间中，在$[0,t_1]$的污水治理能力最强．

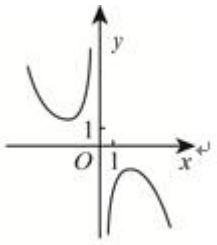
其中所有正确结论的序号是_____．

4.【2018 年全国普通高等学校招生统一考试理数（全国卷 II）】函数$f(x)=\frac{e^x-e^{-x}}{x^2}$的图象大致为（　　）

A. 

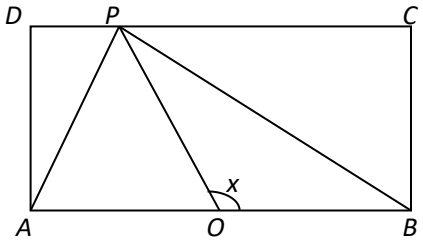
B. 

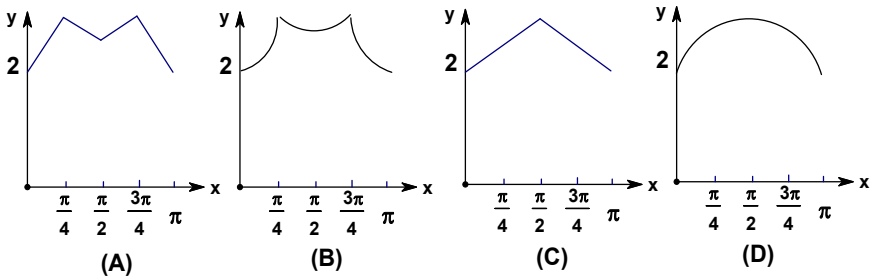
C. 

D. 

5.【2015 高考新课标 2，理 10】如图，长方形 $ABCD$ 的边 $AB=2$，$BC=1$，O 是 AB 的中点，点 P 沿着边 BC，CD 与 DA 运动，记 $\angle BOP=x$．将动 P 到 A、B 两点距离之和表示为 x 的函数 $f(x)$，则 $y=f(x)$ 的图象大致为（　　）

[来源:Zxxk.Com]



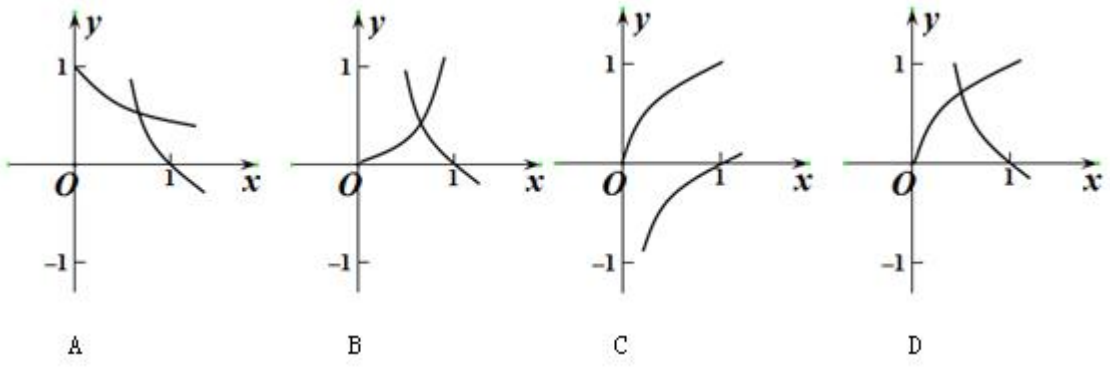


6.【2017 年全国普通高等学校招生统一考试理科数学（天津卷精编版）】已知函数 $f(x)=\begin{cases} x^2-x+3, x\le 1, \\ x+\dfrac{2}{x}, x>1. \end{cases}$

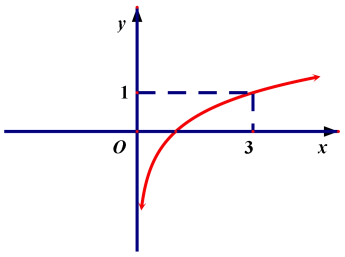
设 $a\in R$，若关于 x 的不等式 $f(x)\ge\left|\dfrac{x}{2}+a\right|$ 在 R 上恒成立，则 a 的取值范围是

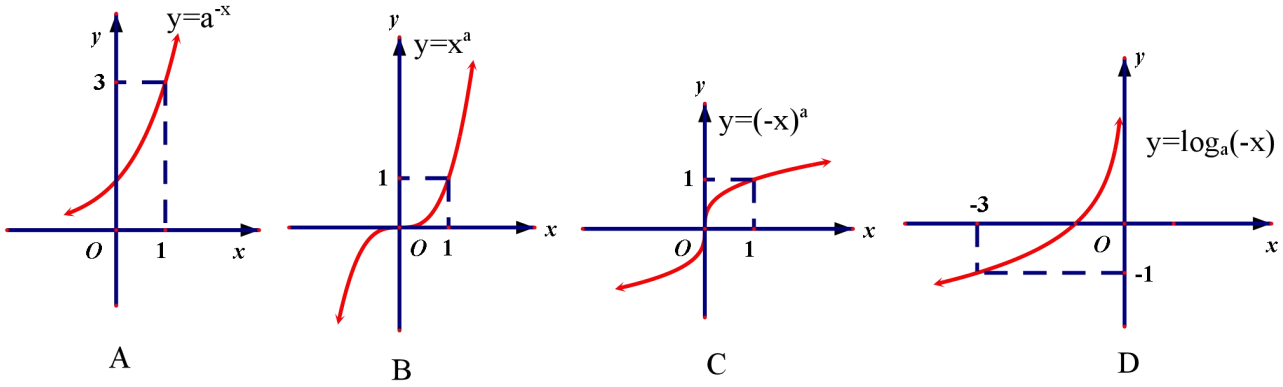
A. $\left[-\dfrac{47}{16},2\right]$　　B. $\left[-\dfrac{47}{16},\dfrac{39}{16}\right]$　　C. $\left[-2\sqrt{3},2\right]$　　D. $\left[-2\sqrt{3},\dfrac{39}{16}\right]$

7.【2014 年.浙江卷.理 7】在同意直角坐标系中，函数 $f(x)=x^a(x\ge 0), g(x)=\log_a x$ 的图象可能是（　　）



8.【2014 福建,理 4】若函数 $y=\log_a x(a>0,且a\neq 1)$ 的图象如右图所示，则下列函数图象正确的是（　　）

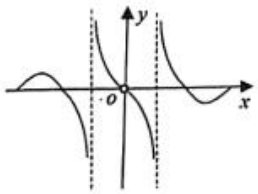




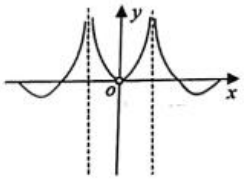
【反馈练习】

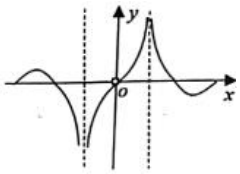
1．函数 $f(x)=\dfrac{\sin 2x}{\ln|x|}$ 的图象大致是（　　）

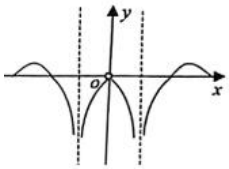
A.



B.

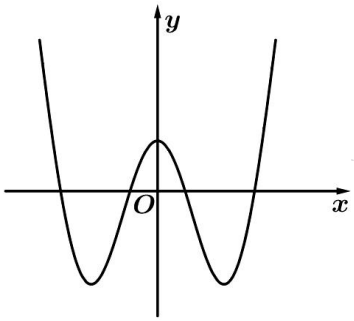


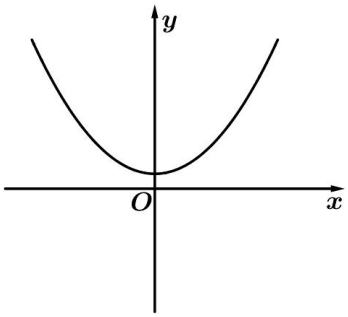
C. 

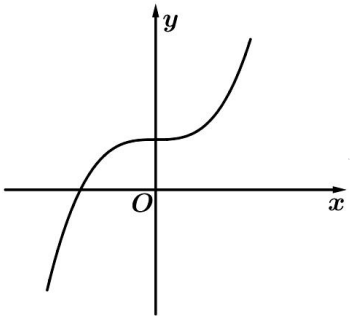
D. 

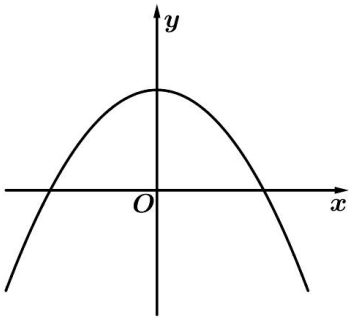
【来源】重庆市第八中学 2021 届高三下学期高考适应性考试（一）数学试题

2．函数 $h(x)=\dfrac{9^x-3^{x+1}+1}{3^x}+2\cos(\pi x)$ 的图象大致为（　　）

A. 

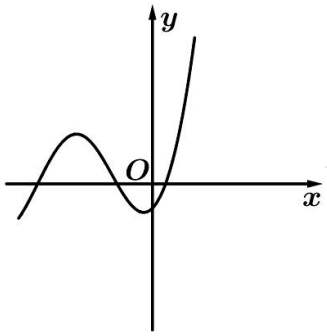
B. 

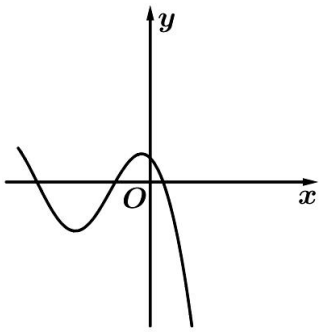
C. 

D. 

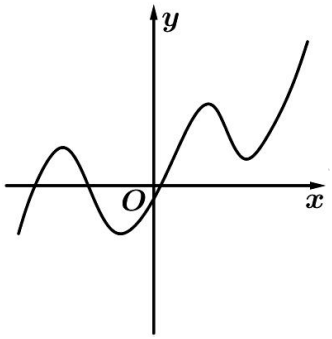
【来源】重庆市第一中学 2021 届高三下学期第二次月考数学试题

3．函数 $y=e^x-2\cos x$ 的大致图象为（　　）

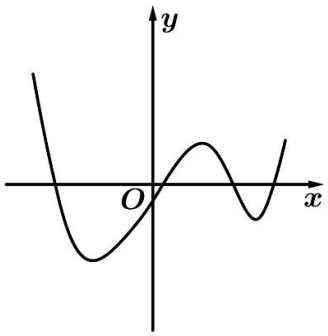
A. 

B. 

C.



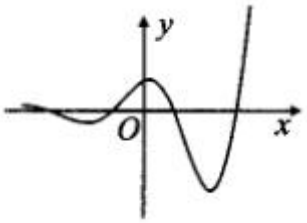
D.



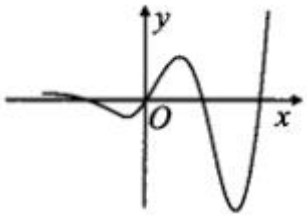
【来源】重庆市第八中学 2021 届高三下学期适应性月考卷（七）数学试题

4．函数 $f\left(x\right)=e^{tx}\sin x$（$t$ 为常数，$t>0$，e 为自然对数的底数）的图象可能为（　　）

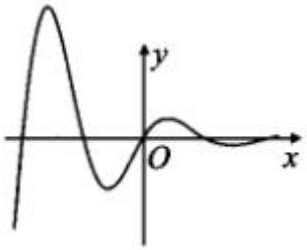
A.



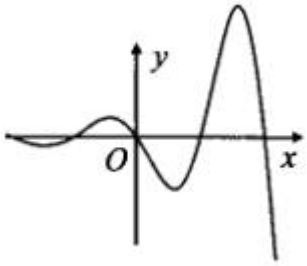
B.



C.



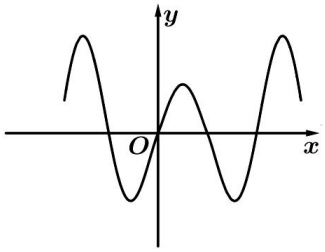
D.



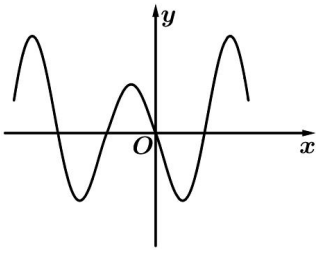
【来源】河北省衡水市饶阳中学 2021 届高三 5 月数学精编试题

5．函数 $y=(\sqrt{|x|}+\sqrt{|2-x|})\sin\frac{\pi x}{2}$ 的图象大致是（　　）

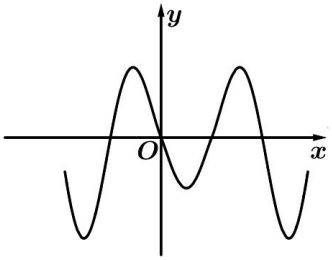
A.



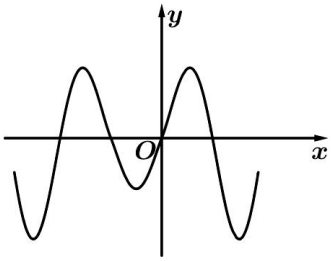
B.



C.

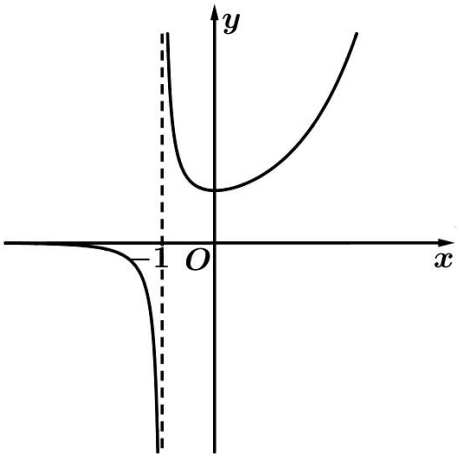


D.



【来源】浙江省杭州市高级中学 2021 届高三下学期高考仿真模拟数学试题

6．函数 *y=f(x)*的图象如图所示，则函数 *y=f(x)*的解析式可能为（　　）

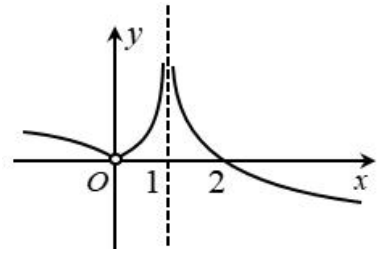


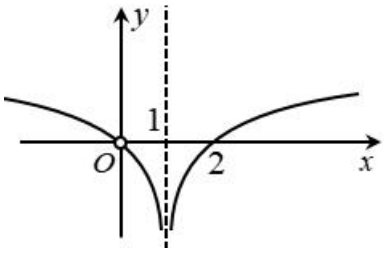
A. $y=\dfrac{\ln x}{x+1}$　　B. $y=\dfrac{\cos x}{x+1}$

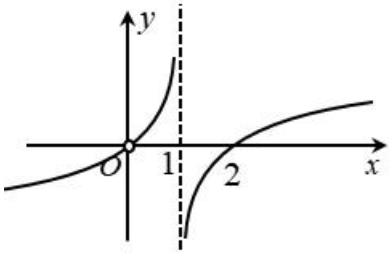
C. $y=\dfrac{e^x}{x+1}$　　D. $y=\dfrac{|x|}{x+1}$

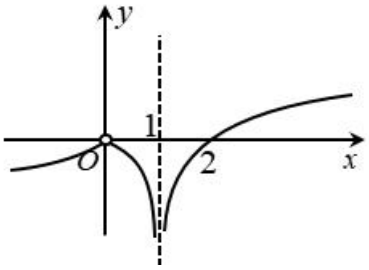
【来源】河南省商丘市 2020-2021 学年高三下学期春季诊断性考试理科数学试题

7. 函数 $g(x)=\dfrac{(x+1)\lg|x|}{|x+1|}$ 的图象向右平移 1 个单位长度得到函数 $f(x)$ 的图象，则 $f(x)$ 的图象大致为（　　）

A. 

B. 

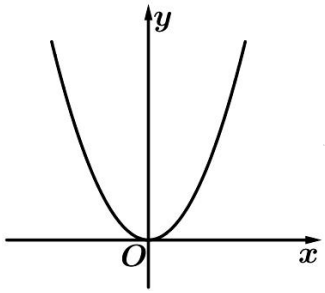
C. 

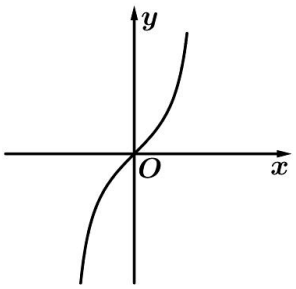
D. 

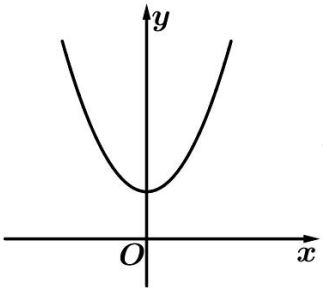
【来源】甘肃省靖远县 2021 届高三高考考前全真模拟数学（理）试题

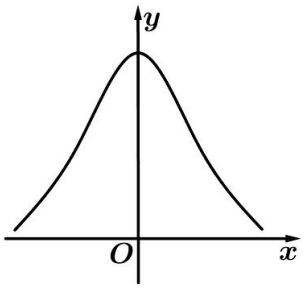
8. 意大利画家列奥纳多·达·芬奇的画作《抱银鼠的女子》（如图所示）中，女士颈部的黑色珍珠项链与她怀中的白貂形成对比.光线和阴影衬托出人物的优雅和柔美.达·芬奇提出：固定项链的两端，使其在重力的作用下自然下垂，形成的曲线是什么？这就是著名的“悬链线问题”.后人研究得出，悬链线并不是抛物线，而是与解析式为 $y=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$ 的“双曲余弦函数”相关.下列选项为“双曲余弦函数”图象的是（　　）



A. 

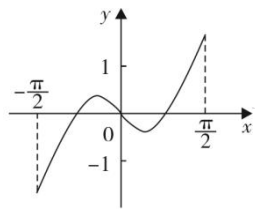
B. 

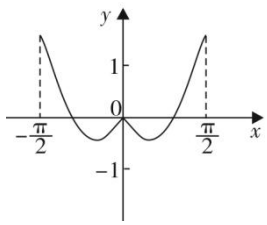
C. 

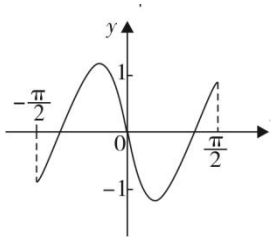
D. 

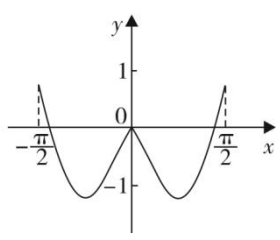
【来源】广东省珠海市第二中学 2021 届考前模拟数学试题

9.【云南省曲靖市第二中学、大理新世纪中学 2021 届高三第一次模拟考试数学（理）】函数 $f\left(x\right)=\dfrac{x^3-x}{\left|x\right|+\cos x}$ 在 $\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$ 的图象大致为（　　）

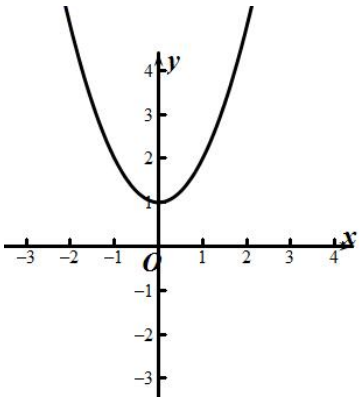
A. 

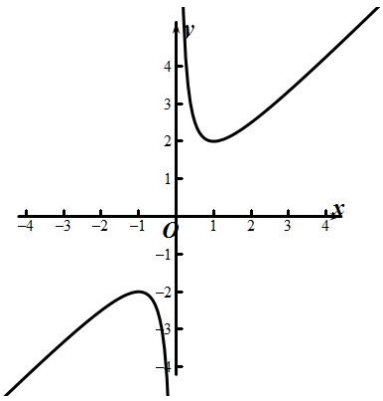
B. 

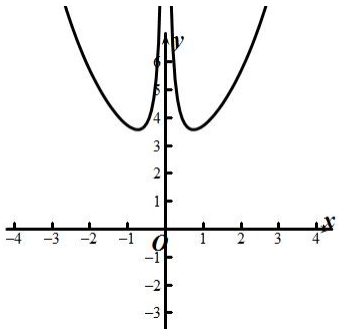
C. 

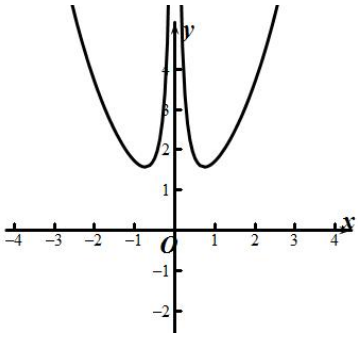
D. 

10.【海南省 2021 届高三年级第一次模拟考试】函数 $y=\dfrac{e^{|x|}}{|x|}+|x|$ 的图象大致为（　　）

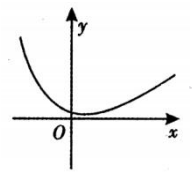
A. 

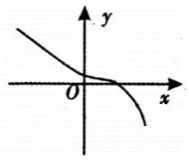
B. 

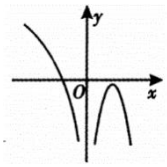
C. 

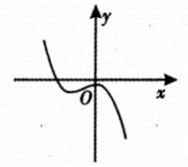
D. 

11.【江西省鹰潭市 2021 届高三第二次模拟考】函数 $f(x)=\ln(x^2+4)-e^{x-1}$ 的图象大致是　（　　）

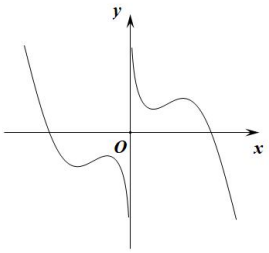
A. 

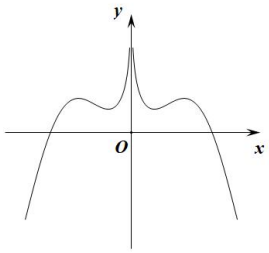
B. 

C. 

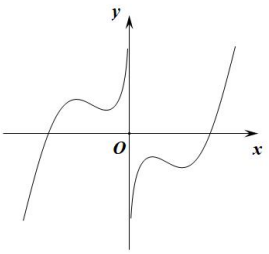
D. 

12.【甘肃省兰州一中 2020-2021 学年高三年级第一学期 10 月月考】函数 $f(x)=x\sin x-\ln|x|$ 的图象大致是（　　）

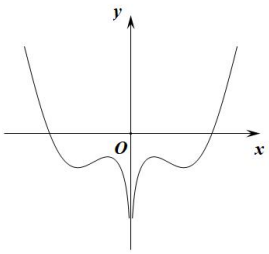
A. 

B. 

C.

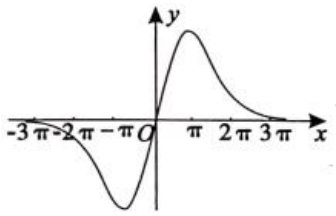


D.

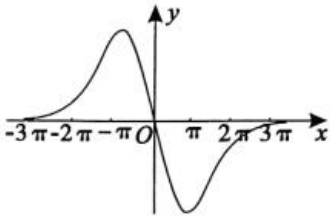


13.【山东省枣庄三中 2021 届高三 10 月份第二次质检】函数 $f\left(x\right)=\dfrac{x^3+\sin x}{e^x+e^{-x}}$ 的图象大致是（　　）

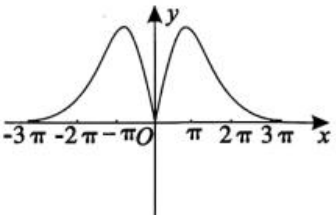
A.



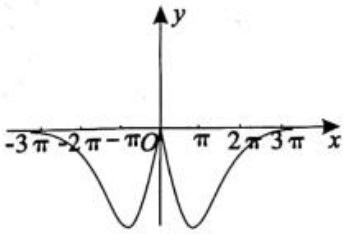
B.



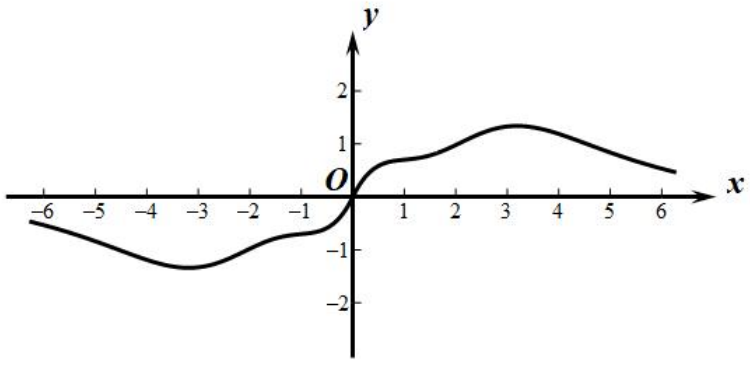
C.



D.



14.【云南省曲靖市第一中学 2021 届高三上学期高考复习质量监测】著名数学家华罗庚先生曾说过：“数缺形时少直观，形缺数时难入微，数形结合百般好，隔裂分家万事休.”在数学的学习和研究中，经常用函数的图象来研究函数的性质，也经常用函数的解析式来琢磨函数的图象的特征，已知函数 $y=f(x)$，$x\in\left[-2\pi,2\pi\right]$ 的部分图象如图所示 ，则 $f(x)$ 的解析式可能为（ ）

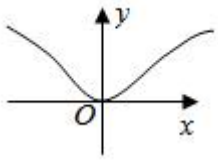


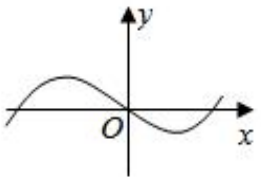
A. $f(x)=\dfrac{\sin 2x+x^3}{e^x}$

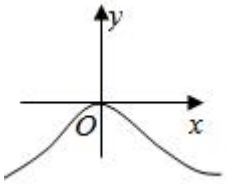
B. $f(x)=\left(\sin 2x+x^3\right)e^{|x|}$

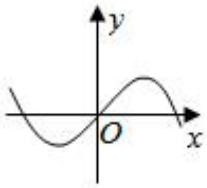
C．$f(x)=\dfrac{\sin 2x+x^3}{e^{|x|}}$　　D．$f(x)=\left(\sin 2x+x^3\right)e^x$

15.【江西省鹰潭市 2021 届高三（上）模拟】函数 $f\left(x\right)=(\dfrac{2}{1+e^x}-1)\cos x$（其中 e 为自然对数的底数）图象的大致形状是（　　）

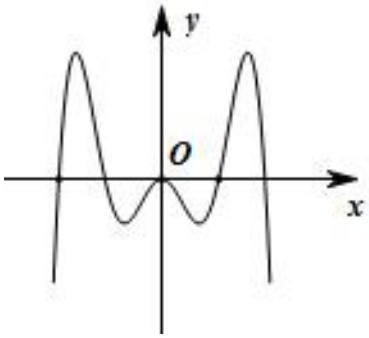
A． 

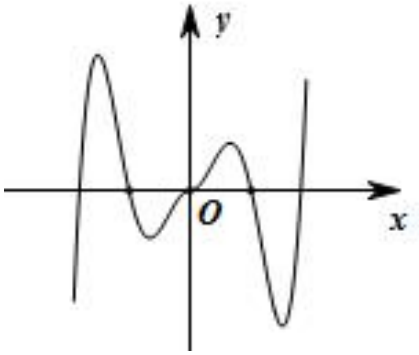
B． 

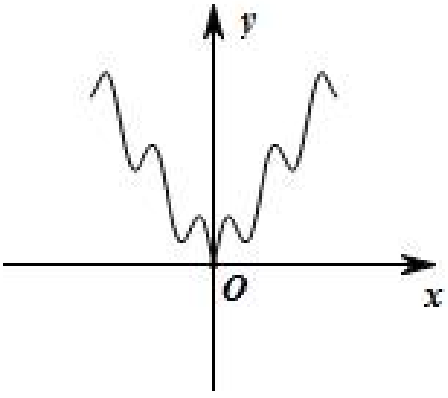
C． 

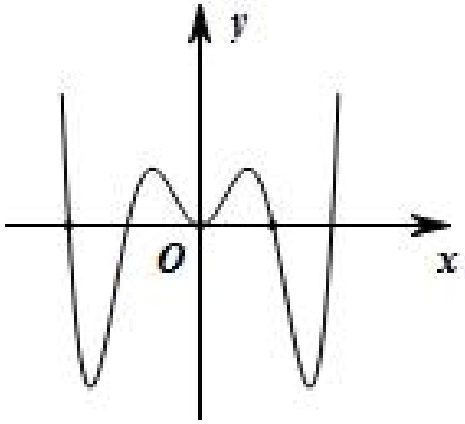
D． 

16.【云贵川桂四省 2021 届高三上学期联合考试】函数 $f\left(x\right)=\left(3x-x^3\right)\cdot\sin x$ 的部分图象大致为（　　）

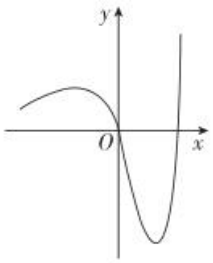
A． 

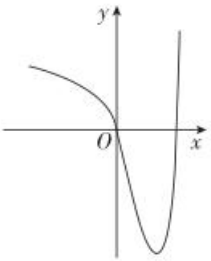
B． 

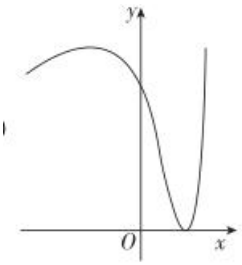
C． 

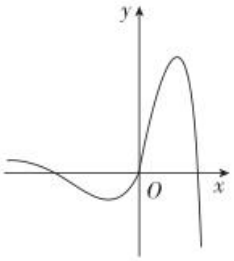
D． 

17.【天津市七校 2020-2021 学年高三上学期期末联考】函数 $f(x)=(x^2-2x)e^x$ 的图象大致是（　　）

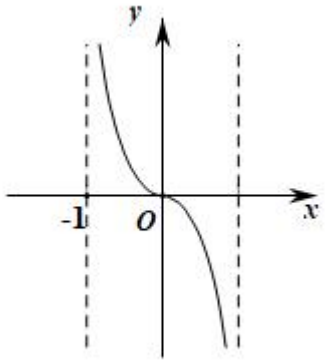
A． 

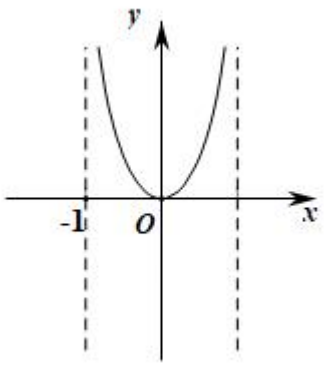
B． 

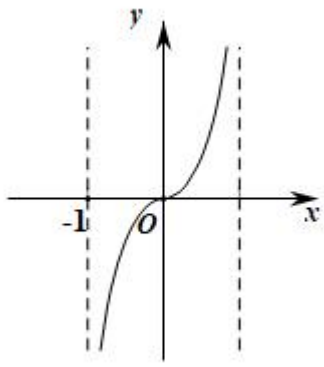
C． 

D． 

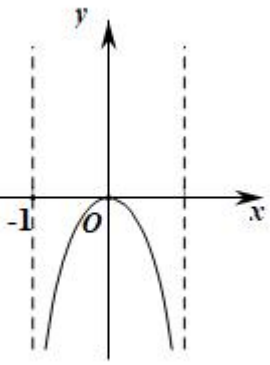
18．【江苏省南通市海安市 2020-2021 学年高三上学期阶段质量检测】设函数 $f\left(x\right)=x\ln\dfrac{1-x}{1+x}$，则函数的图象可能为（　　）

A． 

B． 

C． 

D.



第 10 讲　函数应用问题

【高考地位】

应用题是指利用数学知识解决一些非数学领域中的问题，在近几年全国各地高考中经常出现。数学的高度抽象性决定了数学应用的广泛性，因而应用题的非数学背景是多种多样的，解应用题往往需要在陌生的情景中去理解、分析给出的有关问题，并舍弃与数学无关的非本质因素，通过抽象转化成相应的数学问题，或许正是这个原因让学生比较惧怕数学应用题。在高考中要处理好函数应用题，学会数学建模分析的步骤和掌握数学建模的具体方法是关键.

方法　解函数应用题的一般步骤

万能模板	内　　容
使用场景	函数的实际应用问题
解题模板	第一步　审题——弄清题意，分清条件和结论，理顺数量关系； 第二步　建模——将文字语言转化成数学语言，用数学知识建立相应的数学模型； 第三步　解模——求解数学模型，得到数学结论； 第四步　还原——将用数学方法得到的结论还原为实际问题的意义； 第五步　反思——对于数学模型得到的数学结果，必须验证这个数学结果对实际问题的合理性.

例 1.已知某公司生产某产品的年固定成本为 100 万元，每生产 1 千件需另投入 27 万元，设该公司一年内生产该产品 x 千件 $\left(0<x\le 25\right)$ 并全部销售完，每千件的销售收入为 $R\left(x\right)$ 万元，且

$$R(x)=\begin{cases}108-\frac{1}{3}x^2,(0<x\le 10)\\ -x+\frac{175}{x}+57,(10<x\le 25)\end{cases}.$$

⑴ 写出年利润$f(x)$（万元）关于年产量x（千件）的函数解析式；

⑵ 当年产量为多少千件时，该公司在这一产品的生产中所获年利润最大？（注：年利润＝年销售收入－年总成本）.

【变式演练 1】【山东省淄博市 2021 届高三上学期教学质量摸底检测（零模）】我们知道，人们对声音有不同的感觉，这与声音的强度有关系，声音的强度常用I（单位：瓦/米^2，即$\mathrm{W/m^2}$）表示，但在实际测量时，声音的强度水平常用L（单位：分贝）表示，它们满足换算公式：$L=10\lg\frac{I}{I_0}$（$L\ge 0$，其中$I_0=1\times10^{-12}\mathrm{W/m^2}$是人平均能听到的声音的最小强度），国家《城市区域噪声标准》中规定白天公共场所不超过60分贝，则要求声音的强度不超过（　　）

A．$10^6\,\mathrm{W/m^2}$　　B．$10^{-6}\,\mathrm{W/m^2}$　　C．$6\times10^{-12}\,\mathrm{W/m^2}$　D．$\frac{1}{6}\times10^{-12}\,\mathrm{W/m^2}$

【变式演练 2】“百日冲刺”是各个学校针对高三学生进行的高考前的激情教育，它能在短时间内最大限度激发一个人的潜能，使成绩在原来的基础上有不同程度的提高，以便在高考中取得令人满意的成绩，特别对于成绩在中等偏下的学生来讲，其增加分数的空间尤其大．现有某班主任老师根据历年成绩在中等偏下的学生经历“百日冲刺”之后的成绩变化，构造了一个经过时间$t(30\le t\le 100)$（单位：天），增加总分数$f(t)$（单位：分）的函数模型：$f(t)=\frac{kP}{1+\lg(t+1)}$，$k$为增分转化系数，$P$为“百日冲刺”前的最后一次模考总分，且$f(60)=\frac{1}{6}P$．现有某学生在高考前$100$天的最后一次模考总分为$400$分，依据此模型估计此学生在高考中可能取得的总分约为（　　）（$\lg 61\approx1.79$）

A．440 分　　B．460 分　　C．480 分　　D．500 分

【来源】全国 2021 届高三高考数学（理）演练试题（一）

【变式演练 3】将51名学生分成A,B两组参加城市绿化活动，其中A组布置400盆盆景，B组种植300棵树苗.根据历年统计，每名学生每小时能够布置6盆盆景或者种植3棵树苗.设布置盆景的学生有x人，布置完盆景所需要的时间为$g(x)$，其余学生种植树苗所需要的时间为$h(x)$（单位：小时，可不为整数）.

⑴写出$g\left(x\right)$、$h\left(x\right)$的解析式；

⑵比较$g\left(x\right)$、$h\left(x\right)$的大小，并写出这51名学生完成总任务的时间$f\left(x\right)$的解析式；

⑶应怎样分配学生，才能使得完成总任务的时间最少？

【变式演练 4】某企业共有 20 条生产线，由于受生产能力和技术水平等因素的影响，会产生一定量的次品.根据经验知道，每台机器产生的次品数 p 万件与每台机器的日产量 x 万件 $(4\le x\le 12)$ 之间满足关系：$p=0.1125x^2-3.6\ln x+1$.已知每生产 1 万件合格的产品可以以盈利 3 万元，但每生产 1 万件次品将亏损 1 万元.

（I）试将该企业每天生产这种产品所获得的利润 y 表示为 x 的函数；

（II）当每台机器的日产量为多少时，该企业的利润最大，最大为多少？

【变式演练 5】有一种新型的洗衣液，去污速度特别快.已知每投放 k（$1\le k\le 4$ 且 $k\in R$）个单位的洗衣液在一定量水的洗衣机中，它在水中释放的浓度 y（克/升）随着时间 x（分钟）变化的函数关系式近似为 $y=k\cdot f\left(x\right)$，其中 $f\left(x\right)=\begin{cases}\left(\dfrac{16}{9-x}-1\right),0\le x\le 5\\ \left(11-\dfrac{2}{45}x^2\right),5<x\le 16\end{cases}$.根据经验，当水中洗衣液的浓度不低于 4(克/升）时，它才能起到有效去污的作用.

（1）若投放 k 个单位的洗衣液，3 分钟时水中洗衣液的浓度为 4 (克/升)，求 k 的值；

（2）若投放 4 个单位的洗衣液，则有效去污时间可达几分钟？

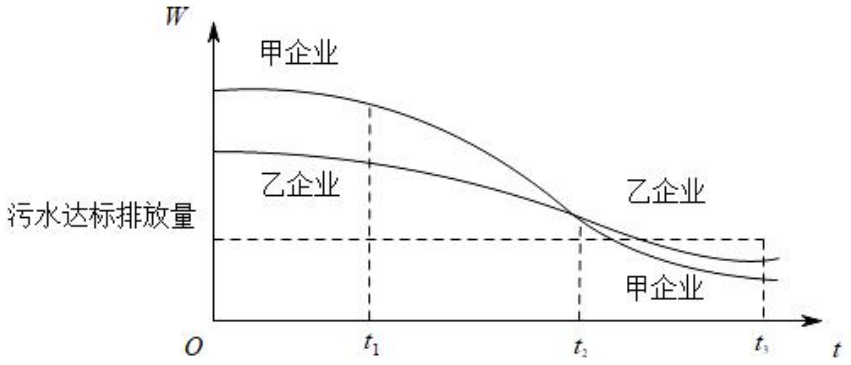
【高考再现】

1.【2020 年高考全国III卷文理数 4】Logistic 模型是常用数学模型之一，可应用于流行病学领域．有学者根据公布数据建立了某地区新冠肺炎累计确诊病例数 $I\left(t\right)$（t 的单位：天）的 Logisic 模型：$I\left(t\right)=\dfrac{K}{1+\mathrm{e}^{-0.23(t-53)}}$，其中 K 为最大确诊病例数．当 $I\left(t^*\right)=0.95K$ 时，标志着已初步遏制疫情，则 t^* 约为（$\ln 19\approx 3$）　　（　　）

A．60　　B．63　　C．66　　D．69

2.【2020 年高考北京卷 15】为满足人民对美好生活的向往，环保部门要求相关企业加强污水治理，排放未达标的企业要限期整改．设企业的污水排放量 W 与时间 t 的关系为 $W=f(t)$，用 $-\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$ 的大小评价在 $\left[a,b\right]$ 这段时间内企业污水治理能力的强弱．已知整改期内，甲、乙两企业的污水排放量与时间的

关系如下图所示.



给出下列四个结论：

①在$[t_1,t_2]$这段时间内，甲企业的污水治理能力比乙企业强；

②在t_2时刻，甲企业的污水治理能力比乙企业强；

③在t_3时刻，甲、乙两企业的污水排放量都已达标；

④甲企业在$[0,t_1]$，$[t_1,t_2]$，$[t_2,t_3]$这三段时间中，在$[0,t_1]$的污水治理能力最强.

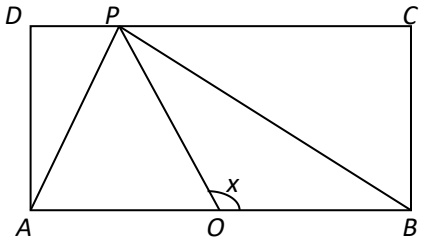
其中所有正确结论的序号是_____.

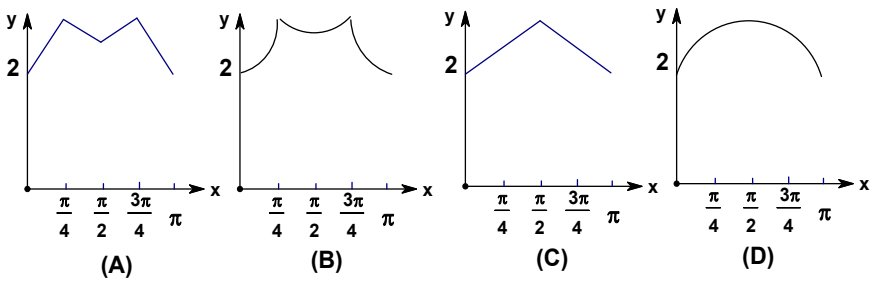
3.【2020年高考山东卷6】基本再生数R_0与世代间隔是新冠肺炎的流行病学基本参数．基本再生数指一个感染者传染的平均人数，世代间隔是指相邻两代间传染所需的平均时间．在新冠肺炎疫情初始阶段，可以用指数模型：$I(t)=e^{rt}$描述累计感染病例数$I(t)$随时间t（单位：天）的变化规律，指数增长率r与R_0，T近似满足$R_0=1+rT$．有学者基于已有数据估计出$R_0=3.28$，$T=6$．据此，在新冠肺炎疫情初始阶段，累计感染病例数增加1倍需要的时间约为（$\ln 2\approx 0.69$）（　　）

A．1.2天　　B．1.8天　　C．2.5天　　D．3.5天

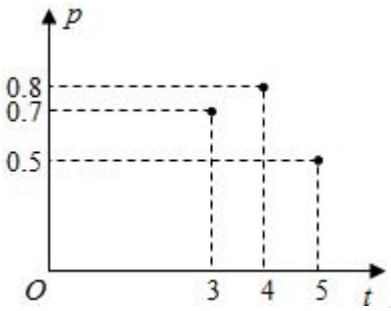
4.【2015高考新课标2，理10】如图，长方形$ABCD$的边$AB=2$，$BC=1$，O是AB的中点，点P沿着边BC，CD与DA运动，记$\angle BOP=x$．将动P到A、B两点距离之和表示为x的函数$f(x)$，则$y=f(x)$的图像大致为（　　）

[来源:Zxxk.Com]





5. 【2014•北京】加工爆米花时，爆开且不糊的粒数占加工总粒数的百分比称为“可食用率”，在特定条件下，可食用率 p 与加工时间 t（单位：分钟）满足函数关系 $p=at^2+bt+c$（a，b，c 是常数），如图记录了三次实验的数据，根据上述函数模型和实验数据，可以得到最佳加工时间为（ ）



A． 3.50 分钟　　B． 3.75 分钟　　C． 4.00 分钟　　D． 4.25 分钟

【反馈练习】

1．为了研究疫情有关指标的变化，现有学者给出了如下的模型：假定初始时刻的病例数为 N_0，平均每个病人可传染给 K 个人，平均每个病人可以直接传染给其他人的时间为 L 天，在 L 天之内，病例数目的增长随时间 t(单位：天)的关系式为 $N(t)=N_0(1+K)^t$，若 $N_0=2$，$K=2.4$，则利用此模型预测第 5 天的病例数大约为（　　）

(参考数据：$\log_{1.4}454\approx18$，$\log_{2.4}454\approx7$，$\log_{3.4}454\approx5$)

A．260　　B．580　　C．910　　D．1200

【来源】全国 2021 届高三高考数学（文）演练试卷（一）

2．核酸检测分析是用荧光定量 PCR 法，通过化学物质的荧光信号，对在 PCR 扩增进程中成指数级增加的靶标 *DNA* 实时监测，在 PCR 扩增的指数时期，荧光信号强度达到阈值时，*DNA* 的数量 X_n 与扩增次数 n 满足

$\lg X_n = n\lg(1+p)+\lg X_0$，其中 p 为扩增效率，X_0 为 DNA 的初始数量.已知某被测标本 DNA 扩增 10 次后，数量变为原来的 100 倍，那么该样本的扩增效率 p 约为（　　）

(参考数据：$10^{0.2}\approx 1.585$，$10^{-0.2}\approx 0.631$)

A．0.369　　B．0.415　　C．0.585　　D．0.631

【来源】广东 2021 届高三 5 月卫冕联考数学试题

3．“绿水青山就是金山银山”，党的十九大以来，城乡深化河道生态环境治理，科学治污．某乡村一条污染河道的蓄水量为 v 立方米，每天的进出水量为 k 立方米．已知污染源以每天 r 个单位污染河水，某一时段 t（单位：天）河水污染质量指数为 $m(t)$（每立方米河水所含的污染物）满足 $m(t)=\frac{r}{k}+\left(m_0-\frac{r}{k}\right)e^{-\frac{k}{v}t}$（$m_0$ 为初始质量指数），经测算，河道蓄水量是每天进出水量的 80 倍．若从现在开始关闭污染源，要使河水的污染水平下降到初始时的 10%，需要的时间大约是（参考数据：$\ln 10\approx 2.30$）（　　）

A．1 个月　　B．3 个月　　C．半年　　D．1 年

【来源】千校联盟 2021 届高三新高考终极押题数学试题

4．数字通信的研究中，需要解决在恶劣环境（噪声和干扰导致极低的信噪比）下的网络信息正常传输问题.根据香农 $(shannon)$ 公式 $C=\mathrm{W}\log_2\left(1+\frac{S}{N}\right)$，式中 W 是信道带宽（赫兹），s 是信道内所传信号的平均功率（瓦），C 是数据传送速率的极限值，单位 bit/s $\frac{S}{N}$ 是为信号与噪声的功率之比，为无量纲单位（如：$\frac{S}{N}=1000$，即信号功率是噪声功率的 1000 倍），讨论信噪比时，常以分贝 (dB) 为单位即 $SNR=10\lg\frac{S}{N}$（信噪比，单位为 dB）.在信息最大速率 C 不变的情况下，要克服恶劣环境影响，可采用提高信号带宽 (W) 的方法来维持或提高通信的性能.现在从信噪比 $SNR=30\mathrm{dB}$ 的环境转到 $SNR=0\mathrm{dB}$ 的环境，则信号带宽 (W) 大约要提高（　　）

（附：$\lg 2\approx 0.3$）

A．10 倍　　B．9 倍　　C．2 倍　　D．1 倍

【来源】湖南省衡阳市第八中学 2021 届高三下学期考前预测（二）数学试题

5．“一骑红尘妃子笑，无人知是荔枝来”描述了封建统治者的骄奢生活，同时也讲述了古代资源流通的不便利．如今我国物流行业蓬勃发展，极大地促进了社会经济发展和资源整合．已知某类果蔬的保鲜时间 y（单位：小时）与储藏温度 x（单位：℃）满足函数关系 $y=e^{ax+b}$（a，b 为常数），若该果蔬在 6℃的保鲜时间为 216 小时，在 24℃的保鲜时间为 8 小时，那么在 12℃时，该果蔬的保鲜时间为（　　）小时．

A．72　　B．36　　C．24　　D．16

【来源】湖南省衡阳市第八中学 2021 届高三下学期考前预测（三）数学试题

6．基本再生数 R_0 与世代间隔 T 是新冠肺炎的流行病学基本参数.基本再生数指一个感染者传染的平均人数，世代间隔指相邻两代间传染所需的平均时间.在新冠肺炎疫情初始阶段，可以用指数模型：$I(t)=e^{rt}$ 描述累计感染病例数 $I(t)$ 随时间 t(单位：天)的变化规律，指数增长率 r 与 R_0，T 近似满足 $R_0=1+rT$.有学者基于已有数据估计出 $R_0=3.28$，$T=6$.据此，在新冠肺炎疫情初始阶段，累计感染病例数增加 3 倍需要的时间约为(ln2≈0.69)（　　）

A．1.2 天　　B．1.8 天　　C．2.7 天　　D．3.6 天

【来源】黑龙江省大庆中学 2021 届高三第一次仿真考试数学（理）试题

7．为了测量某种海鱼死亡后新鲜度的变化.研究人员特意通过检测该海鱼死亡后体内某微量元素的含量来决定鱼的新鲜度.若海鱼的新鲜度 h 与其死亡后时间 t(小时)满足的函数关系式为 $h=1-m\cdot a^t$.若该种海鱼死亡后 2 小时，海鱼的新鲜度为 80%，死亡后 3 小时，海鱼的新鲜度为 60%，那么若不及时处理，这种海鱼从死亡后大约经过（　　）小时后，海鱼的新鲜度变为 40%.(参考数据：$\ln 2\approx 0.7$，$\ln 3\approx 1.1$)

A．3.3　　B．3.6　　C．4　　D．4.3

【来源】百师联盟 2021 届高三冲刺卷（二）新高考卷数学试题

8．【四川省泸县第五中学 2020-2021 学年高三上学期一诊模拟】某品牌牛奶的保质期 y（单位：天）与储存温度 x（单位：$^\circ C$）满足函数关系 $y=a^{kx+b}\left(a>0,a\neq 1\right)$.该品牌牛奶在 $0^\circ C$ 的保质期为 270 天，在 $8^\circ C$ 的保质期为 180 天，则该品牌牛奶在 $24^\circ C$ 的保质期是（　　）

A．60 天　　B．70 天　　C．80 天　　D．90 天

9．【2021 届全国著名重点中学新高考冲刺】复兴号动车组列车是中国标准动车组的中文名称，是由中国铁路总公司牵头组织研制、具有完全自主知识产权、达到世界先进水平的动车组列车.2019 年 12 月 30 日，$CR400BF-C$ 智能复兴号动车组在京张高铁实现时速 350km 自动驾驶，不仅速度比普通列车快，而且车内噪声更小.我们用声强 I (单位：$\mathrm{W/m^2}$)表示声音在传播途径中每平方米面积上的声能流密度，声强级 L (单位：dB)与声强 I 的函数关系式为 $L=10\lg\left(aI\right)$，已知 $I=10^{13}\,\mathrm{W/m^2}$ 时，$L=10\mathrm{dB}$.若要将某列车的声强级降低 $30\mathrm{dB}$，则该列车的声强应变为原声强的（　　）

A．10^{-5}　　B．10^{-4}　　C．10^{-3}　　D．10^{-2}

10．【湖南省长沙市广益实验中学 2020-2021 学年高三上学期第一次新高考】一种药在病人血液中的量保持 $1500\mathrm{mg}$ 以上才有效，现给某病人注射了这种药 $2500\mathrm{mg}$，如果药在血液中以每小时 20% 的比例衰减，为

了充分发挥药物的利用价值，那么从现在起经过（　　）小时向病人的血液补充这种药，才能保持疗效.(附：$\lg 2=0.301$，$\lg 3=0.4771$，答案采取四舍五入精确到0.1h)

A．2.3 小时　　B．3.5 小时　　C．5.6 小时　　D．8.8 小时

11.【云南省文山州 2021 届高三年级 10 月教学质量检测】2020 年 6 月 17 日 15 时 19 分，星期三，酒泉卫星发射中心，我国成功发射长征二号丁运载火箭，并成功将高分九号 03 星、皮星三号 A 星和德五号卫星送入预定轨道，携三星入轨，全程发射获得圆满成功，祖国威武.已知火箭的最大速度 v（单位：km/s）和燃料质量 M（单位：kg），火箭质量 m（单位：kg）的函数关系是：$v=2000\ln\left(1+\dfrac{M}{m}\right)$，若已知火箭的质量为 3100 公斤，燃料质量为 310 吨，则此时 v 的值为多少（参考数值为$\ln 2\approx 0.69$；$\ln 101\approx 4.62$）（　　）

A．13.8　　B．9240　　C．9.24　　D．1380

12.【北京市延庆区 2021 届高三上学期统测】某企业生产 A,B 两种型号的产品，每年的产量分别为10万支和20万支，为了扩大再生产，决定对两种产品的生产线进行升级改造，预计改造后的 A,B 两种产品的年产量的增长率分别为50%和20%，那么至少经过多少年后，A产品的年产量会超过 B 产品的年产量（取$\lg 2=0.3010$）（　　）

A．2年　　B．3年　　C．4年　　D．5年

13.【四川省内江市第六中学 2020 届高三强化训练】某地区植被被破坏，土地沙化越来越严重，最近三年测得沙漠面积增加值分别为 0.2 万公顷、0.39 万公顷和 0.78 万公顷，则沙漠面积增加数 y（万公顷）年数 x（年）的函数关系较为接近的是（　　）

A．$y=0.2x$　　B．$y=0.1x^2+0.1x$

C．$y=0.2+\log_4 x$　　D．$y=\dfrac{2^x}{10}$

14.【贵州省贵阳为明教育集团 2021 届高三第一次调研】为研究 A 型病毒细胞的变化规律，将 A 型病毒细胞注入一只健康的小白鼠体内进行实验.根据观测数据和统计分析，小白鼠体内病毒细胞的个数 y 与相应天数序号 n 满足函数关系式 $y=2^{n-1}(n\in N^*)$.已知 A 型病毒细胞在小白鼠体内的个数超过10^8时小白鼠将死亡.但如果注射某种药物，可杀死小白鼠体内的 A 型病毒细胞的 98%.为使小白鼠在实验过程中不死亡，第一次注射该种药物，最迟应在（　　）.参考数据：$\lg 2\approx 0.301$

A．第 25 天　　B．第 26 天　　C．第 27 天　　D．第 28 天

15.【湖南师大附中 2020-2021 学年高三上学期月考】Logistic 模型是常用数学模型之一，可应用于流行病学领域.有学者根据公布数据建立了某地区新冠肺炎累计确诊病例数 $I(t)$（t 的单位：天)的 Logistic 模型：$I(t)=\dfrac{K}{1+e^{-0.23(t-50)}}$，其中 K 为最大确诊病例数.当 $I(t^*)=0.95K$ 时，标志着已初步遏制疫情，则 t^* 约为（　　）(参考数据：$\ln 19\approx 3$)

A．60　　B．62　　C．66　　D．63

16.【江西省信丰中学 2020 届高三上学期期中模拟】某单位为鼓励职工节约用水，作出如下规定:每位职工每月用水不超过 10 立方米，按每立方米 3 元收费;用水超过 10 立方米，超过的部分按每立方米 5 元收费.某职工某月的水费为 55 元，则该职工这个月实际用水为（　　）

A．13 立方米　　B．14 立方米　　C．15 立方米　　D．16 立方米

17.【广东省清远市清新一中 2021 届高三上学期月测】已知地震释放出的能量 E 与地震的里氏震级 M 的关系为 $\lg E=4.8+1.5M$，2011 年 3 月 11 日，日本北部海域发生的里氏 9．0 级地震释放出的能量设为 E_1，2008 年 5 月 12 日，我国汶川发生的里氏 8.0 级地震释放出的能量设为 E_2，那么 $E_1:E_2=$（　　）

A．1.5　　B．$\lg 1.5$　　C．$10^{1.5}$　　D．$10^{-1.5}$

18．据观测统计，某湿地公园某种珍稀鸟类以平均每年 4%的速度增加.按这个增长速度，大约经过_____年以后，这种鸟类的个数达到现有个数的 4 倍或 4 倍以上.(结果保留整数)(参考数据：$\lg 2\approx 0.30,\lg 13\approx 1.11$)

【来源】江苏省姜堰中学、如东中学、沭阳如东中学 2021 届高三下学期 5 月适应性联考数学试题

19．某化工厂引进一条先进生产线生产某种化工产品，其生产的总成本 y 万元与年产量 x 吨之间的函数关系可以近似地表示为 $y=\dfrac{x^2}{5}-24x+2000$，已知此生产线的年产量最小为 60 吨，最大为 110 吨.

（1）年产量为多少吨时，生产每吨产品的平均成本最低?并求最低平均成本;

（2）若每吨产品的平均出厂价为 24 万元，且产品能全部售出，则年产量为多少吨时，可以获得最大利润?并求最大利润.

【来源】江苏省 2021 年普通高考对口单招文化统考数学试题

第 11 讲　导数的几何意义应用

【高考地位】

导数的几何意义是高考重点考查的内容，常与解析几何知识交汇命题，旨在考查学生对导数的几何意义的正确理解. 导数的几何意义主要用于求曲线的切线方程，在高考中多以选择题和填空题的形式出现，有

时也出现在解答题中关键的一步，其试题难度考查相对较小.

类型一　求在某点的切线方程

万能模板	内　　容
使用场景	在某点的切线方程
解题模板	第一步　计算函数 $f(x)$ 的在曲线上该点处的导函数 $f'(x_0)$； 第二步　运用导数的几何意义即可求出所求切线方程的斜率； 第三步　得出结论.

【例 1】【天壹名校大联盟 2020 届高三 6 月大联考】曲线 $y=\dfrac{\cos x}{\sin x}$ 在点 $\left(\dfrac{\pi}{4},1\right)$ 处的切线方程为（　　）.

A．$2x-y-\dfrac{\pi}{2}+1=0$　　B．$2x-y-\dfrac{\pi}{2}-1=0$

C．$2x+y-\dfrac{\pi}{2}+1=0$　　D．$2x+y-\dfrac{\pi}{2}-1=0$

【变式演练 1】已知曲线 $y=ae^x+\dfrac{\ln x}{x}$ 在 $(1,ae)$ 处的切线方程为 $y=ex+x+b$，则（　　）

A．$a=e$，$b=-1$　　B．$a=1$，$b=0$

C．$a=1$，$b=-1$　　D．$a=e$，$b=0$

【来源】贵州省贵阳市第一中学 2021 届高三下学期高考适应性月考卷（六）数学（文）试题

【变式演练 2】【2020 年普通高等学校招生全国统一考试伯乐马模拟考试（三）】曲线 $y=ax^3+5x-3$ 在 $(1,m)$ 处的切线与直线 $l:x+8y=0$ 相互垂直，则 $a=$（　　）

A．1　　B．-1　　C．2　　D．-2

【变式演练 3】【2020 年伯乐马模拟考试（二）】已知定义在 R 上的函数 $f(x)$ 满足 $f(x)=2f(-x)-3e^x$，则曲线 $y=f(x)$ 在点 $(0,f(0))$ 处的切线方程为（　　）

A．$y=3x+3$　　B．$y=3x-1$

C．$y=-x+3$　　D．$y=-x+1$

【变式演练 4】【陕西省西安市 2020 届高三下学期第三次质量检测】函数 $f(x)=e^x\cos x$ 的图象在点 $(0,f(0))$ 处的切线的倾斜角为（　　）

A．$\frac{\pi}{6}$　　B．$\frac{\pi}{4}$　　C．$\frac{\pi}{3}$　　D．$\frac{2\pi}{3}$

【变式演练 5】【河南省名校联盟 2020 届高三下学期 6 月联考】设点 P 是函数 $f(x)=2e^{x}-f'(0)x+f'(1)$ 图象上的任意一点，点 P 处切线的倾斜角为 α，则角 α 的取值范围是（　　）

A．$\left[0,\frac{3\pi}{4}\right)$　　B．$\left[0,\frac{\pi}{2}\right)\cup\left(\frac{3\pi}{4},\pi\right)$

C．$\left(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{4}\right)$　　D．$\left[0,\frac{\pi}{2}\right)\cup\left[\frac{3\pi}{4},\pi\right)$

【变式演练 6】【江苏省南京市玄武高级中学 2020 届高三下学期最后一卷】已知点 P 在曲线 $y=\frac{4}{e^{x}+1}$（其中 e 为自然对数的底数）上，α 为曲线在点 P 处的切线的倾斜角，则 $\tan\alpha$ 的取值范围是_____.

类型二　过点求曲线的切线方程

万能模板	内　　容
使用场景	过点求曲线的切线方程
解题模板	第一步　设出切点的坐标为 $(x_0,f(x_0))$ 并求出函数 $f(x)$ 在切点处的导数 $f'(x_0)$； 第二步　充分考虑题目的已知条件，抓住切线的定义，挖掘题目的隐含条件，寻找解题的等量关系； 第三步　利用方程的思想即可得出结论.

例 2　若直线 $y=kx(k\neq 0)$ 是曲线 $f(x)=2x^{3}-x^{2}$ 的一条切线，则 $k=$_____.

【变式演练 7】过坐标原点作曲线 $y=\ln x$ 的切线，则切点的纵坐标为（　　）

A．e　　B．1　　C．$\frac{1}{\sqrt{e}}$　　D．$\frac{1}{\mathrm{e}}$

【来源】重庆市巴蜀中学 2021 届高三适应性（九）数学试题

【变式演练 8】（多选）已知过点 $A(a,0)$ 作曲线 $C:y=\frac{x}{e^{x}}$ 的切线有且仅有两条，则实数 a 的值可以是（　　）

A．-2　　B．4　　C．0　　D．6

【来源】辽宁省 2021 届高三临门一卷（一）数学试题

【变式演练 9】【广西南宁三中 2019-2020 学年下学期期末考试】已知函数 $f(x)=2x^{3}-3x$.若过点 $P(1,t)$ 存在 3 条直线与曲线 $y=f(x)$ 相切，则 t 的取值范围为(　　)

A．$(-\infty,-3)$　　B．$(-3,-1)$　　C．$(-1,+\infty)$　　D．$(0,1)$

类型三　共切线问题

万能模板	内　　容
使用场景	两个曲线的公切线问题
解题模板	第一步　分别设出两个曲线上切点的坐标为$P(x_1,y_1)$，$Q(x_2,y_2)$,并求出函数$f(x)$和$g(x)$在切点处的导数$f'(x_0)$； 第二步　充分考虑题目的已知条件，抓住切线的定义，挖掘题目的隐含条件，寻找解题的等量关系，如斜率相等（尤其两点的斜率）和点既在曲线上又在曲线上； 第三步　利用方程的思想即可得出结论.

例 3．若直线$y=kx+b$是曲线$y=\ln x+1$的切线，也是曲线$y=\ln(x+2)$的切线，则$b=$_____.

【变式演练 10】已知曲线$C_1:f(x)=\mathrm{e}^x+a$和曲线$C_2:g(x)=\ln(x+b)+a^2\,(a,b\in\mathbf{R})$，若存在斜率为 1 的直线与$C_1$，$C_2$同时相切，则 b 的取值范围是（　　）

A．$\left[-\frac{9}{4},+\infty\right)$　　B．$[0,+\infty)$　　C．$(-\infty,1]$　　D．$\left(-\infty,\frac{9}{4}\right]$

【来源】重庆市 2021 届高三高考数学第三次联合诊断检测试题

【变式演练 11】【江苏省南通市 2020 届高三下学期高考考前模拟卷】已知函数$f(x)=x^2+m$，$g(x)=2n\ln x$，若曲线$y=f(x)$与$y=g(x)$在$x=1$处有相同的切线，则函数$F(x)=f(x)-g(x)$的最小值为_____.

【高考再现】

1．（2021·全国高考真题）若过点(a,b)可以作曲线$y=\mathrm{e}^x$的两条切线，则（　　）

A．$\mathrm{e}^b<a$　　B．$\mathrm{e}^a<b$

C．$0<a<\mathrm{e}^b$　　D．$0<b<\mathrm{e}^a$

2．（2021·全国高考真题（理））曲线$y=\frac{2x-1}{x+2}$在点$(-1,-3)$处的切线方程为_____.

3．【2020 年高考全国I卷理数 6】函数$f(x)=x^4-2x^3$的图像在点$(1,f(1))$处的切线方程为（　　）

A．$y=-2x-1$　　B．$y=-2x+1$　　C．$y=2x-3$　　D．$y=2x+1$

4. 【2020年高考全国III卷理数10】若直线l与曲线$y=\sqrt{x}$和圆$x^2+y^2=\frac{1}{5}$相切，则l的方程为（　　）

A. $y=2x+1$　　B. $y=2x+\frac{1}{2}$　　C. $y=\frac{1}{2}x+1$　　D. $y=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$

5. 【2020年高考全国I卷文数15】曲线$y=\ln x+x+1$的一条切线的斜率为2，则该切线的方程为_____.

6.【2018年全国普通高等学校招生统一考试文科数学（新课标I卷）】设函数$f(x)=x^3+(a-1)x^2+ax$. 若$f(x)$为奇函数，则曲线$y=f(x)$在点$(0,\ 0)$处的切线方程为(　　)

A. $y=-2x$　　B. $y=-x$　　C. $y=2x$　　D. $y=x$

7.【2018年全国普通高等学校招生统一考试理数（全国卷II）】曲线$y=2\ln(x+1)$在点$(0,0)$处的切线方程为_____.

8. 【2016高考山东理数】若函数$y=f(x)$的图象上存在两点，使得函数的图象在这两点处的切线互相垂直，则称$y=f(x)$具有T性质.下列函数中具有T性质的是（　　）

（A）$y=\sin x$　　（B）$y=\ln x$　　（C）$y=e^x$　　（D）$y=x^3$

9. 【2016年高考四川理数】设直线l_1，l_2分别是函数$f(x)=\begin{cases}-\ln x, 0<x<1,\\ \ln x, x>1,\end{cases}$图象上点$P_1$，$P_2$处的切线，$l_1$与$l_2$垂直相交于点$P$，且$l_1$，$l_2$分别与$y$轴相交于点$A$，$B$，则△$PAB$的面积的取值范围是(　　)

（A）(0,1)　（B）(0,2)　（C）(0,+∞)　（D）(1,+∞)

10. 【2018年全国卷III理数高考试题】曲线$y=(ax+1)e^x$在点$(0,\ 1)$处的切线的斜率为-2，则$a=$_____.

11.【2015高考陕西，文15】函数$y=xe^x$在其极值点处的切线方程为_____.

12.【2015新课标2文16】已知曲线$y=x+\ln x$在点$(1,1)$处的切线与曲线$y=ax^2+(a+2)x+1$相切，则a=_____.

13.【2017天津文，19】设$a,b\in\mathbf{R}$，$|a|\le 1$.已知函数$f(x)=x^3-6x^2-3a(a-4)x+b$，$g(x)=e^xf(x)$.

（I）求$f(x)$的单调区间；

（II）已知函数$y=g(x)$和$y=e^x$的图象在公共点（x_0，y_0）处有相同的切线，

（i）求证：$f(x)$在$x=x_0$处的导数等于0；

（ii）若关于x的不等式$g(x)\le e^x$在区间$[x_0-1,x_0+1]$上恒成立，求b的取值范围.

14.【2018 年全国普通高等学校招生统一考试理科数学（北京卷）】设函数$f(x)=[ax^2-(4a+1)x+4a+3]e^x$.

（1）若曲线$y=f(x)$在点（1，$f(1)$）处的切线与x轴平行，求a；

（2）若$f(x)$在$x=2$处取得极小值，求a的取值范围.

15.【2015 高考新课标 1，理 21】已知函数f（x）$=x^3+ax+\frac{1}{4}, g(x)=-\ln x$.

(I)当 a 为何值时，x 轴为曲线 $y=f(x)$ 的切线；

（II）用 $\min\{m,n\}$ 表示 m,n 中的最小值，设函数 $h(x)=\min\{f(x),g(x)\}(x>0)$，讨论 h（x）零点的个数.

【反馈练习】

1．已知曲线 $f(x)=e^x$ 在点 $P(1,f(1))$ 处的切线也是曲线 $g(x)=a\ln x$ 的一条切线，则 $a=$（　　）

A．$\frac{e}{3}$　　B．$\frac{e}{2}$　　C．e^2　　D．$\frac{e^3}{3}$

【来源】全国 2021 届高三高考数学（文）演练试卷（一）

2．设曲线 $f(x)=ae^x+b$ 和曲线 $g(x)=\cos\frac{\pi x}{2}+c$ 在它们的公共点 $M(0,2)$ 处有相同的切线，则 $b+c-a$ 的值为（　　）

A．0　　B．π

C．-2　　D．3

【来源】云南省曲靖市第一中学 2021 届高三高考复习质量监测卷（八）数学（理）试题

3．【2020 年普通高等学校招生伯乐马押题考试（三）】已知定义域为 R 的函数 $f(x)$ 的图像关于原点对称，且 $f(3-x)+f(-x)=0$，若曲线 $y=f(x)$ 在 $(6,f(6))$ 处切线的斜率为 4，则曲线 $y=f(x)$ 在 $(-2022,f(-2022))$ 处的切线方程为（　　）

A．$y=-4x-8088$　B．$y=4x+8088$　C．$y=-\frac{1}{4}x-\frac{1011}{2}$　D．$y=\frac{1}{4}x+\frac{1011}{2}$

4．【2020 年高考全国卷考前冲刺演练】已知函数 $f(x)=\frac{a}{x}+3\ln x-x^2$，曲线 $y=f(x)$ 在点 $P(1,f(1))$ 处的切线方程为 $bx+y-2=0$，则 $a+2b=$（　　）

A．-2　　B．1　　C．3　　D．4

5．【2020 年高考命题专家押题卷】已知函数 $y=x^2$ 与 $y=\ln x+a$ 在交点处有公共的切线，则 $a=$（　　）

A. $\frac{1+\ln 2}{2}$　　B. $\frac{1-\ln 2}{2}$　　C. $1+\frac{\ln 2}{2}$　　D. $1-\frac{\ln 2}{2}$

6.【陕西省西安市 2020 届高三下学期第二次质量检测】已知曲线 $y=ae^{x}+x\ln x$ 在点 $(1,ae)$ 处的切线方程为 $y=2x+b$，则（　）

A. $a=e,b=-1$　　B. $a=e,b=1$　　C. $a=e^{-1},b=1$　　D. $a=e^{-1},b=-1$

7.【浙江省 2020 届高三新高考模拟试题心态卷】已知正数 a、b、c 满足 $6c-4a\le b\le 5c-2a$，$c\ln b\ge a+c\ln c$，则 $\frac{b}{a}$ 的取值范围是（　　）

A. $[2,e]$　　B. $[e,8]$　　C. $[e^2,8]$　　D. $[e,e^2]$

8.【内蒙古开鲁县第一中学 2019-2020 学年下学期期末考试】设点 P 是曲线 $f(x)=(x+1)^2-\ln x$ 上的任意一点，则点 P 到直线 $3x-y-4=0$ 的距离的最小值为（　　）

A. $\frac{\sqrt{10}}{2}$　　B. $\frac{\sqrt{10}}{4}$　　C. $\frac{\sqrt{5}}{3}$　　D. $\frac{\sqrt{5}}{2}$

9.【湖南省长沙市长郡中学 2020 届高三下学期高考模拟（一）】已知函数 $f(x)=\begin{cases}\ln x, x>0\\ -x^2-ax, x\le 0\end{cases}$，若方程 $f(x)-x-a=0$ 有 3 个不同实数根，则实数 a 的取值范围是（　　）

A. $(0,1)$　　B. $(-2,-1)$　　C. $(-1,0)$　　D. $(-\infty,-1)$

10.【安徽省六安市第一中学 2019-2020 学年下学期期中】已知过点 A（a，0）作曲线 C：y＝x•e^x 的切线有且仅有两条，则实数 a 的取值范围是（　　）

A.（﹣∞，﹣4）∪（0，+∞）　　B.（0，+∞）

C.（﹣∞，﹣1）∪（1，+∞）　　D.（﹣∞，﹣1）

11.【福建省 2020 届高三考前冲刺适应性模拟卷(三)】已知曲线 $y=\frac{x}{e^x}$ 在 $x=x_1$ 处的切线为 l_1，曲线 $y=\ln x$ 在 $x=x_2$ 处的切线为 l_2，且 $l_1\perp l_2$，则 x_2-x_1 的取值范围是（　　）

A. $\left(0,\frac{1}{e}\right)$　　B. $(-\infty,-1)$　　C. $(-¥,0)$　　D. $\left(-\infty,\frac{1}{e}\right)$

12.【云南师范大学附属中学 2020 届高三适应性月考】若实数 a，b，c，d 满足 $\frac{3\ln a-a^2}{b}=\frac{c+2}{d}=1$，则

$(a-c)^2+(b-d)^2$ 的最小值为（　　）

A．$3\sqrt{2}$　　B．$2\sqrt{2}$　　C．8　　D．18

13.【甘肃省兰州市西北师大附中 2020 届 6 月高三诊断考试】已知点 $P(x_1,y_1)$ 是函数 $f(x)=2x$ 图象上一点，点 $Q(x_2,y_2)$ 是函数 $g(x)=2\ln x$ 图象上一点，若存在 x_1,x_2 使得 $|PQ|\le\frac{2\sqrt{5}}{5}$ 成立，则 x_1 的值为（　　）

A．$\frac{1}{5}$　　B．$\frac{2}{5}$　　C．$\frac{1}{2}$　　D．1

14.【2020 届重庆市南开中学高三高考模拟】若曲线 $y=\ln x$ 上恰有三个不同的点到直线 $y=x+a$ 的距离为 $\sqrt{2}$，则实数 a 的值为（　　）

A．-3　　B．$-2\sqrt{2}$　　C．1　　D．2

15.【山东省潍坊市五县 2020 届高三高考热身训练考前押题】已知函数 $f(x)=\ln x+2x^2-3x$，则函数 $f(x)$ 在 $x=1$ 处的切线方程为_____.

16.【金科大联考 2020 届高三 5 月质量检测】曲线 $f(x)=e^x-x$ 过原点 $O(0,0)$ 的切线方程为_____.

17.【四川省资阳市 2020 届高三模拟考试】已知函数 $f(x)=x\left(x^5-16x^2+x-4\right)$，且 $f(x)\ge f(x_0)$ 对 $x\in\mathbf{R}$ 恒成立，则曲线 $y=\frac{f(x)}{x}$ 在点 $\left(x_0,\frac{f(x_0)}{x_0}\right)$ 处的切线的斜率为_____.

18.【福建省三明市 2020 届高三（6 月份）】设曲线 $y=e^{x-1}+x$ 在 $x=1$ 处的切线与直线 $y=ax+2$ 平行，则实数 a 的值为_____.

19.【湖南省长沙市雅礼中学 2020 届高三下学期 5 月质量检测】已知奇函数 $f(x)$ 的定义域为 R，且当 $x<0$ 时，$f(x)=\ln(1-3x)$，则曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,f(1))$ 处的切线斜率为_____.

20.【宁夏银川唐徕回民中学 2019-2020 学年度高三年级 10 月月考】已知函数 $f(x)=-x^3+ax^2+b(a,b\in R)$ 图象上任意一点处的切线的斜率都小于 1，则实数 a 的取值范围是_____.

21．函数 $f(x)=\frac{2x}{x+1}$ 在点 $(1,1)$ 处的切线的方程为_____.

【来源】重庆市南开中学 2022 届高三上学期 7 月考试数学试题

22．曲线 $f(x)=x\cos x$ 在点 $(0,f(0))$ 处的切线方程为_____.

【来源】江西省九江市 2021 届高三三模数学（理）试题

23．设函数 $f\left(x\right)=\dfrac{\sin\left(\pi x\right)}{e^{x}}$，则曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,f(1))$ 处的切线方程为_____.

【来源】湖南省新高考 2021 届高三下学期考前押题《最后一卷》数学试题

24．曲线 $f\left(x\right)=x+\dfrac{1}{x}+b$ 在点 $\left(a,f\left(a\right)\right)$ 处的切线经过坐标原点，则 $ab=$_____.

【来源】全国 2021 届高三高考数学（文）预测试题

25．曲线 $y=x\ln x$ 的一条切线过点 $(0,-3)$，则该切线的斜率为_____.

【来源】安徽省合肥市第八中学 2021 届高三下学期高考模拟最后一卷文科数学试题

26．曲线 $f\left(x\right)=x\ln x+x^{2}-x+2$ 在点 $\left(x_{0},f\left(x\right)\right)\left(x_{0}>0\right)$ 处的切线恰好经过坐标原点，则 $x_{0}=$_____.

【来源】重庆市康德卷 2021 届高三下学期模拟 6 数学试题

27．若两曲线 $y=x^2+1$ 与 $y=a\ln x+1$ 存在公切线，则正实数 a 的取值范围是_____.

【来源】黑龙江省佳木斯市第一中学 2021 届高三下学期三模数学（理）试题

28．【山东省济宁市嘉祥县第一中学 2020 届高三第 9 次模拟考试】已知函数 $f(x)=e^{x}-ax^{2}(a\in\mathrm{R})$.

（1）若曲线 $f(x)$ 与直线 $l:y=(e-2)x+b(b\in\mathrm{R})$ 在 $x=1$ 处相切.

①求 $a+b$ 的值；

②求证：当 $x\geq 0$ 时，$f(x)\geq(e-2)x+b$；

（2）当 $a=0$ 且 $x\in(0,+\infty)$ 时，关于的 x 不等式 $x^{2}f(x)\leq mx+2\ln x+1$ 有解，求实数 m 的取值范围.

29．【福建省漳州市、南平市 2020 届高三高考数学（理科）二模】已知函数 $f(x)=e^{x},g(x)=x+a\ln x$.

（1）讨论 $g(x)$ 的单调性；

（2）若 $a=1$，直线 l 与曲线 $y=f(x)$ 和曲线 $y=g(x)$ 都相切，切点分别为 $P\left(x_{1},y_{1}\right)$，$Q\left(x_{2},y_{2}\right)$，求证：$x_{2}>\dfrac{1}{e^{2}-1}$.

30．已知函数 $f\left(x\right)=\ln\left(x+1\right),g\left(x\right)=e^{x-1}$

（1）若直线 $l:y=kx+b$ 既是曲线 $y=f\left(x\right)$ 的切线，也是曲线 $y=g\left(x\right)$ 的切线，求直线 l 的方程；

（2）证明：$x\ln x<e^{x}-x^{2}-1$.（参考数据：$0.69<\ln 2<0.7$）

【来源】重庆市第八中学 2021 届高三下学期高考适应性考试（三）数学试题

第 12 讲 导数与函数的单调性问题

【高考地位】

在近几年的高考中，导数在研究函数的单调性中的应用是必考内容，它以不但避开了初等函数变形的难点，定义法证明的繁杂，而且使解法程序化，优化解题策略、简化运算，具有较强的工具性的作用. 导数在研究函数的单调性中的应用主要有两方面的应用：一是分析函数的单调性；二是已知函数在某区间上的单调性求参数的取值范围.在高考中的各种题型中均有出现，其试题难度考查相对较大.

类型一　求无参函数的单调区间

万能模板	内　　容
使用场景	知函数 $f(x)$ 的解析式判断函数的单调性
解题模板	第一步　计算函数 $f(x)$ 的定义域； 第二步　求出函数 $f(x)$ 的导函数 $f'(x)$； 第三步　若 $f'(x)>0$，则 $f(x)$ 为增函数；若 $f'(x)<0$，则 $f(x)$ 为减函数.

例 1　【河北省衡水市枣强中学 2020 届高三下学期 3 月调研】已知函数 $f\left(x\right)=\dfrac{\ln x+a}{e^x}$.

（1）当 $a=1$ 时，判断 $f\left(x\right)$ 的单调性；

【变式演练 1】函数 $f\left(x\right)=\sin^2 x\cdot\sin 2x$，$x\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$ 的单调递增区间为_____.

【来源】福建省三明第一中学 2021 届高三 5 月校模拟考数学试题

【变式演练 2】已知函数 $f\left(x\right)=\ln\left(x^2+1\right)+e^x+e^{-x}$，则不等式 $f\left(x-2\right)-f\left(2x+1\right)\le 0$ 的解集为_____.

【来源】全国卷地区“超级全能生”2021 届高三 5 月联考数学（文）试题（丙卷）

【变式演练 3】【黑龙江省哈尔滨六中 2020 届高三高考数学（文科）二模】已知函数 $f(x)=-2x+\sin x$，若 $a=f(3^{\sqrt{3}})$，$b=-f(-2)$，$c=f(\log_2 7)$，则 a,b,c 的大小关系为（　　）

A．$a<b<c$　　B．$b<c<a$　　C．$c<a<b$　　D．$a<c<b$

【变式演练 4】【湖南省湘潭市 2020 届高三下学期第四次模拟考试】定义在 R 上的连续函数 $f\left(x\right)$，导函数为 $f'\left(x\right)$．若对任意不等于 -1 的实数 x，均有 $\left(x+1\right)\left[f\left(x\right)-f'\left(x\right)\right]>0$ 成立，且

$f(-1+x)=f(-1-x)e^{2x}$，则下列命题中一定成立的是（　　）

A．$f(-1)>f(0)$　　B．$ef(-2)<f(-1)$

C．$e^2f(-2)<f(0)$　　D．$e^2f(-2)>f(0)$

类型二　判定含参数的函数的单调性

万能模板	内　　容
使用场景	函数 $f(x)$ 的解析式中含有参数
解题模板	第一步　计算函数 $f(x)$ 的定义域并求出函数 $f(x)$ 的导函数 $f'(x)$； 第二步　讨论参数的取值范围，何时使得导函数 $f'(x)$ 按照给定的区间大于 0 或小于 0； 第三步　根据导函数的符号变换判断其单调区间.

例 2　【黑龙江省大庆市第四中学 2020 届高三下学期第四次检测】已知函数

$f(x)=\ln x+x^2-2ax+1(a\in R)$.

（1）讨论 $f(x)$ 的单调性；

【变式演练 5】（主导函数是一次型函数）【福建省三明市 2020 届高三（6 月份）高考数学（文科）模拟】已知函数 $f(x)=1nx-ax,a\in R$.

（1）讨论函数 $f(x)$ 的单调性；

【变式演练 6】（主导函数为类一次型）【山东省威海荣成市 2020 届高三上学期期中考试】已知函数 $f(x)=e^{-x}+ax$.

（I）讨论 $f(x)$ 的单调性；

【变式演练 7】（主导函数为二次型）【2020 届山西省高三高考考前适应性测试（二）】已知函数 $f(x)=x-\frac{a}{x}-2a\ln x$，$a\geq 0$.

（1）讨论 $f(x)$ 的单调性；

【变式演练 8】（主导函数是类二次型）【山西省太原五中 2020 届高三高考数学（理科）二模】已知函数 $f(x)=k(x-1)e^x-x^2$，其中 $k\in$R.

（1）当 $k\leq 2$ 时，求函数 $f(x)$ 的单调区间；

【变式演练 9】已知函数 $f(x)=2x^2-\ln x$，若 $f(x)$ 在区间 $(2m,m+1)$ 上单调递增，则 m 的取值范围是（　　）

A. $\left[\frac{1}{4},1\right)$　　B. $\left[\frac{1}{4},+\infty\right)$

C. $\left[\frac{1}{2},1\right)$　　D. $[0,1)$

【来源】江西省南昌市新建区第一中学 2020-2021 学年高三上学期期末考试数学（文）试题

类型三　由函数单调性求参数取值范围

万能模板	内　　容
使用场景	由函数单调性求参数取值范围
解题模板	第一步　计算函数 $f(x)$ 的定义域并求出函数 $f(x)$ 的导函数 $f'(x)$； 第二步　根据题意转化为相应的恒成立问题； 第三步　得出结论.

例 3.【江苏省南通市 2019-2020 学年高三下学期期末】若 $f(x)=-\frac{1}{2}x^2+b\ln(2x+4)$ 在 $(-2,+\infty)$ 上是减函数，则实数 b 的范围是（　　）

A. $(-\infty,-1]$　　B. $(-\infty,0]$　　C. $(-1,0]$　　D. $[-1,+\infty)$

【变式演练 11】（转化为任意型恒成立）【四川省绵阳市 2020 高三高考数学（文科）三诊】函数 $f(x)=e^x(-2x^2+ax+b)$ 在 $(-1,1)$ 上单调递增，则 $a^2+8b+16$ 的最小值为（　）

A．4　　B．16　　C．20　　D．18

【变式演练 12】（转化为变号零点）【山西省运城市 2019-2020 学年高三期末】已知函数 $f(x)=x^2-a\ln x+1$ 在 $(1,2)$ 内不是单调函数，则实数 a 的取值范围是（　　）

A. $[2,8)$　　B. $[2,8]$　　C. $(-\infty,2]\cup[8,+\infty)$　　D. $(2,8)$

【变式演练 13】（直接给给定单调区间）【辽宁省六校协作体 2019-2020 学年高三下学期期中考试】已知函数 $f(x)=\frac{1}{3}x^3+mx^2+nx+1$ 的单调递减区间是 $(-3,1)$，则 $m+n$ 的值为（　　）

A．-4　　B．-2　　C．2　　D．4

【变式演练 14】（转化为存在型恒成立）【四川省仁寿第一中学北校区 2019-2020 学年高三月考】若 f（x）$=-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2+2ax$ 在（1，+∞）上存在单调递增区间，则 a 的取值范围是(　　)

A.（－∞，0]　　B.（－∞，0）　　C.[0，+∞）　　D.（0，+∞）

【高考再现】

1.（2021·全国高考真题（理））设$a=2\ln 1.01$，$b=\ln 1.02$，$c=\sqrt{1.04}-1$．则（　　）

A．$a<b<c$　　B．$b<c<a$　　C．$b<a<c$　　D．$c<a<b$

2.（2021·全国高考真题（理））已知$a>0$且$a\neq 1$，函数$f(x)=\dfrac{x^a}{a^x}(x>0)$．

（1）当$a=2$时，求$f(x)$的单调区间；

（2）若曲线$y=f(x)$与直线$y=1$有且仅有两个交点，求 a 的取值范围．

3．已知函数$f(x)=x(1-\ln x)$.

（1）讨论$f(x)$的单调性；

（2）设a，b为两个不相等的正数，且$b\ln a-a\ln b=a-b$，证明：$2<\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}<\mathrm{e}$.

【来源】2021 年全国新高考Ⅰ卷数学试题

4.【2017 山东文，10】若函数$\mathrm{e}^x f(x)$(e=2.71828…,是自然对数的底数)在$f(x)$的定义域上单调递增,则称函数$f(x)$具有 M 性质,下列函数中具有 M 性质的是

A．$f(x)=2^{-x}$　　B．$f(x)=x^2$　　C．$f(x)=3^{-x}$　　D．$f(x)=\cos x$

5.【2017 江苏，11】已知函数$f(x)=x^3-2x+\mathrm{e}^x-\dfrac{1}{\mathrm{e}^x}$，其中 e 是自然对数的底数．若$f(a-1)+f(2a^2)\leqslant 0$，则实数$a$的取值范围是___▲___.

6．【2020 年高考全国Ⅰ卷文数 20】已知函数$f(x)=\mathrm{e}^x-a(x+2)$.

（1）当$a=1$时，讨论$f(x)$的单调性；

（2）若$f(x)$有两个零点，求a的取值范围．

7．【2020 年高考全国Ⅰ卷理数 21】已知函数$f(x)=\mathrm{e}^x+ax^2-x$.

（1）当$a=1$时，讨论$f(x)$的单调性；

（2）当$x\geq 0$时，$f(x)\geq\dfrac{1}{2}x^3+1$，求$a$的取值范围．

8．【2020 年高考全国Ⅱ卷文数 21】已知函数$f(x)=2\ln x+1$.

（1）若 $f(x)\le 2x+c$，求 c 的取值范围；

（2）设 $a>0$，讨论函数 $g(x)=\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ 的单调性.

9.（2018 年新课标 I 卷文）已知函数 $f(x)=ae^{x}-\ln x-1$.

（1）设 $x=2$ 是 $f(x)$ 的极值点．求 a，并求 $f(x)$ 的单调区间；

（2）证明：当 $a\ge\frac{1}{e}$ 时，$f(x)\ge 0$.

10.【2018 年全国普通高等学校招生统一考试理科数学（新课标 I 卷）】已知函数 $f(x)=\frac{1}{x}-x+a\ln x$.

（1）讨论 $f(x)$ 的单调性；

（2）若 $f(x)$ 存在两个极值点 x_1,x_2，证明：$\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}<a-2$.

【反馈练习】

1.【2020 届广东省梅州市高三总复习质检（5 月）】已知 $x>0$，$a=x$，$b=x-\dfrac{x^2}{2}$，$c=\ln(1+x)$，则（　　）

A．$c<b<a$　　B．$b<a<c$　　C．$c<a<b$　　D．$b<c<a$

2.【2020 届山东省威海市高三下学期质量检测】若函数 $f(x)=\dfrac{1}{2}\cos 2x+3a(\sin x+\cos x)+(2a-1)x$ 在 $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$ 上单调递减，则实数 a 的取值范围为(　　)

A．$\left[-1,\dfrac{1}{5}\right]$　　B．$\left[-\dfrac{1}{5},1\right]$

C．$\left(-\infty,-\dfrac{1}{5}\right]\cup[1,+\infty)$　　D．$(-\infty,-1]\cup\left[\dfrac{1}{5},+\infty\right)$

3.【河南省十所名校 2019—2020 学年高三毕业班阶段性测试】若函数 $f(x)=\sin 2x-4x-m\sin x$ 在 $[0,2\pi]$ 上单调递减，则实数 m 的取值范围为（　　）

A．$(-2,2)$　　B．$[-2,2]$　　C．$(-1,1)$　　D．$[-1,1]$

4.【黑龙江哈尔滨市第九中学 2019-2020 学年高三阶段验收】函数 $f(x)=x^3+ax$，若对任意两个不等的实数 $x_1,x_2\,(x_1>x_2)$，都有 $f(x_1)-f(x_2)>3x_1-3x_2$ 恒成立，则实数 a 的取值范围是（　　）

A．$(-2,+\infty)$　　B．$[3,+\infty)$　　C．$(-\infty,-2]$　　D．$(-\infty,3)$

5.【湖北省武汉市新高考五校联合体 2019-2020 学年高三期中检测】若函数 $f(x)=-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2+2ax$ 在 $\left[\frac{2}{3},+\infty\right)$ 上存在单调增区间，则实数 a 的取值范围是_____.

6.【四川省宜宾市 2020 届高三调研】若对 $\forall t\in(0,1]$，函数 $g(x)=x^2-(a+4)x+2a\ln x$ 在 $(t,2)$ 内总不是单调函数，则实数 a 的取值范围是_____

7.【河南省南阳市第一中学校 2019-2020 学年高三月考】若函数 $f(x)=2x^2-\ln x$ 在定义域内的一个子区间 $(k-1,k+1)$ 上不是单调函数，则实数 k 的取值范围_____.

8．若函数 $f(x)=\cos 2x+a\sin x$ 在区间 $\left(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2}\right)$ 是增函数，则 a 的取值范围是_____.

【来源】陕西省宝鸡市眉县 2021 届高三下学期高考模拟文科数学试题

9．已知函数 $f(x)=\frac{1+\ln x}{x}(x>1)$，若对任意两个不同的 x_1，x_2，都有 $|f(x_1)-f(x_2)|\le k|\ln x_1-\ln x_2|$ 成立，则实数 k 的取值范围是_____

【来源】江西省景德镇市 2021 届高三上学期期末数学（理）试题

10.【黑龙江省哈尔滨师范大学附属中学 2020-2021 学年高三上学期开学考试】（1）求函数 $f(x)=x\sin x+\cos x(0<x<2\pi)$ 的单调递增区间；

（2）已知函数 $f(x)=a\ln x-x^2+4x+3$ 在 $\left[\frac{1}{2},2\right]$ 上单调递增，求实数 a 的范围.

11.【黑龙江省哈尔滨三中 2020 届高三高考数学（文科）三模】函数 $f(x)=\ln x-\frac{2(x-1)}{x+1}$.

（1）求证：函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增；

（2）若 m，n 为两个不等的正数，求证 $\frac{\ln m-\ln n}{m-n}>\frac{2}{m+n}$.

12.【湖北省黄冈中学 2020 届高三下学期适应性考试】已知函数 $f(x)=ax\ln x-(a+1)\ln x$，$f(x)$ 的导数为 $f'(x)$.

（1）当 $a>-1$ 时，讨论 $f'(x)$ 的单调性；

（2）设 $a>0$，方程 $f(x)=\frac{3}{e}-x$ 有两个不同的零点 $x_1,x_2(x_1<x_2)$，求证 $x_1+e>x_2+\frac{1}{e}$.

13.【湖南省永州市宁远、道县、东安、江华、蓝山、新田 2020 届高三下学期六月联考】已知函数

$f(x)=a\ln(x+1)-2x(a\in\mathbf{R})$.

（1）讨论$f(x)$的单调性；

（2）当$x\geq 0$时，$f(x)\geq 1-e^x$，求实数a的取值范围.

14.【2020届山西省高三高考考前适应性测试（二）】已知函数$f(x)=ae^x-ex$，$g(x)=\ln x-b(x-1)e^x$，其中$a,b\in\mathbf{R}$.

（1）讨论$f(x)$在区间$(0,+\infty)$上的单调性；

（2）当$a=1$时，$f(x)g(x)\leq 0$，求b的值.

15.【河南省2020届高三（6月份）高考数学（文科）质检】已知函数$f(x)=x^2-2ax+2\ln x(a\in R)$.

（1）讨论函数$f(x)$的单调性；

（2）若$f(x)$存在两个极值点$x_1,x_2(x_2>x_1)$，求证：$f(x_2)-f(x_1)<(2-a)(x_2-x_1)$.

16.【山东省2020年普通高等学校招生统一考试数学必刷卷】已知实数$a>0$，函数$f(x)=\frac{2}{x}+a^2x+a\ln x$，$x\in(0,10)$.

（1）讨论函数$f(x)$的单调性；

（2）若$x=1$是函数$f(x)$的极值点，曲线$y=f(x)$在点$P(x_1,f(x_1))$，$Q(x_2,f(x_2))(x_1<x_2)$处的切线分别为l_1,l_2，且l_1,l_2在y轴上的截距分别为b_1,b_2．若$l_1//l_2$，求b_1-b_2的取值范围.

17.【福建省2020届高三（6月份）高考数学（理科）模拟】已知函数$f(x)=\ln(2x+2)+a(x^2+x)+2$，$a>0$.

（1）讨论函数$f(x)$的单调性；

（2）求证：函数$f(x)$有唯一的零点.

18.【山东省潍坊市五县2020届高三高考热身训练考前押题】已知函数$f(x)$满足

$f(x)=\frac{f'(1)}{2}e^{2x-2}+x^2-2f(0)x$，$g(x)=f\left(\frac{x}{2}\right)-\frac{1}{4}x^2+(1-a)x+a$，$x\in\mathbf{R}$.

（1）求函数$f(x)$的解析式；

（2）求函数 $g(x)$ 的单调区间；

（3）当 $a\geq 2$ 且 $x\geq 1$ 时，求证：$\left|\frac{e}{x}-\ln x\right|<\left|e^{x-1}+a-\ln x\right|$.

19.【陕西省商洛市商丹高新学校 2020 届高三下学期考前适应性训练】已知函数 $f(x)=x^3-a\ln x(a\in R)$.

（1）讨论函数 $f(x)$ 的单调性；

（2）若函数 $y=f(x)$ 在区间 $(1,e]$ 上存在两个不同零点，求实数 a 的取值范围.

20.【2020 年普通高等学校招生全国统一考试伯乐马模拟考试】已知函数 $f\left(x\right)=ax-\left(a+2\right)e^x+e^{2x}$.

（1）讨论函数 $f\left(x\right)$ 的单调性；

（2）若函数 $g\left(x\right)=f\left(x\right)-\frac{1}{2}ax^2+\left(x+a\right)e^x-e^{2x}$ 存在 3 个零点，求实数 a 的取值范围.

21.【金科大联考 2020 届高三 5 月质量检测】已知函数

$f\left(x\right)=\left(2x^2-4ax\right)\ln x-\left(2a+1\right)x^2+\left(4a^2+4a\right)x\ \left(a\in\mathbf{R}\right)$.

（I）讨论函数 $f\left(x\right)$ 的单调性；

（II）若 $a\leq 0$，证明：函数 $f\left(x\right)$ 在区间 $\left[e^{a-1},+\infty\right)$ 有且仅有一个零点.

22．已知函数 $f(x)=\frac{1}{3}x^3-a\left(x^2-x+1\right)$.

（1）若 $a=-2$，求函数 $f\left(x\right)$ 的单调区间；

（2）求证：对任意的 $a\in\mathbf{R}$，$f(x)$ 只有一个零点.

【来源】全国 II 卷 2021 届高三高考数学（理）仿真模拟试题

23．已知函数 $f\left(x\right)=\frac{1}{2}x^2-ax\ln x+ax$.

（1）当 $a=1$ 时，判断 $f\left(x\right)$ 的单调性；

（2）若 $f\left(x\right)$ 有两个极值点，求实数 a 的取值范围.

【来源】安徽省合肥六中 2021 届高三 6 月份高考数学（文）模拟试题

24．已知函数 $f\left(x\right)=x\cos x-\sin x,x\in\left(0,2\pi\right)$.

（1）求 $f\left(x\right)$ 的单调性；

（2）设函数$g(x)=f(x)-ax(0<a<1)$，讨论$g(x)$的零点个数.

【来源】重庆市高考康德卷 2021 届高三模拟调研卷数学试题（三）

25．已知函数$f(x)=\ln(x+a)-\dfrac{x}{x+a}$，$a\in R$

（1）讨论$f(x)$的单调性；

（2）若$a=4$，$g(x)=\cos x+\dfrac{1}{2}x(mx+2\sin x)$，$m>0$，用$\min\{m,n\}$表示$m$，$n$的最小值，记函数$h(x)=\min\{f(x),\ g(x)\}$，$x\in[-\pi,\pi]$，讨论函数$h(x)$的零点个数.

【来源】山东省泰安肥城市 2021 届高三高考适应性训练数学试题（二）

26．已知$f(x)=\ln x+ax$（$a\in R$）

（1）讨论$f(x)$的单调性；

（2）当$a=1$时，若$f(x)\le k(x+1)+b$在$(0,+\infty)$上恒成立，证明：$\dfrac{2k+b-2}{k-1}$的最小值为$-e+1$.

【来源】贵州省瓮安中学高三 2021 届 6 月关门考试数学（理）试题

27．已知函数$f(x)=x^2+ax+2+\ln x,(a\in R)$.

（1）讨论$f(x)$的单调性；

（2）若$f(x)\le e^x$恒成立，求a的最大值.

【来源】广东省佛山市五校联盟 2021 届高三 5 月数学模拟考试试题

28．已知函数$f(x)=xe^x-ax-a\ln x$.

（1）若$a\le 0$，证明：$f(x)$在$(0,+\infty)$单调递增；

（2）若$f(x)\ge 0$恒成立，求实数a的取值范围.

【来源】黑龙江省哈尔滨市第三中学 2021 届高三五模数学（理）试题

29．已知函数$f(x)=\dfrac{1}{2}x^2+ax+\cos x$.

（1）若$f(x)$在$[0,+\infty)$上为增函数，求实数a的取值范围；

（2）设$g(x)=f(x)-\dfrac{1}{2}x^2$，若$g(x)$存在两条相互垂直的切线，求函数$F(x)=\dfrac{\sin x-g(x)+1}{x}$在区间$\left[\dfrac{\pi}{2},\pi\right]$上的最小值.

【来源】四川省达州市 2021 届高三二模数学（文）试题

30．已知函数$f(x)=a\ln(x-1)+\dfrac{1}{x-1}$.

（1）如果函数 $g(x)=f(x)-2x+2$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递减，求 a 的取值范围；

（2）当 $a>0$ 时，讨论函数 $y=f(x)$ 零点的个数.

【来源】内蒙古赤峰市 2021 届高三模拟考试数学（文）试题

31．已知函数 $f(x)=\frac{1}{2}x^2+mx-\mathrm{e}^x+1(m\in\mathbf{R})$.

（1）若 $f(x)$ 在 R 上是减函数，求 m 的取值范围；

（2）如果 $f(x)$ 有一个极小值点 x_1 和一个极大值点 x_2，求证 $f(x)$ 有三个零点.

【来源】安徽省淮南市 2021 届高三下学期一模理科数学试题

32．已知函数 $f(x)=\mathrm{e}^x-ax+\sin x-1$.

（1）若函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上为增函数，求实数 a 的取值范围；

（2）当 $1\le a<2$ 时，证明：函数 $g(x)=(x-2)f(x)$ 有且仅有 3 个零点.

【来源】重庆市第二十九中学校 2021 届高三下学期开学测试数学试题

第 13 讲　利用导数解决函数的极值、最值

【高考地位】

导数在研究函数的极值与最值问题是高考的必考的重点内容，已由解决函数、数列、不等式问题的辅助工具上升为解决问题的必不可少的工具，特别是利用导数来解决函数的极值与最值、零点的个数等问题，在高考中以各种题型中均出现，对于导数问题中求参数的取值范围是近几年高考中出现频率较高的一类问题，其试题难度考查较大.

类型一　利用导数研究函数的极值

万能模板	内　　容
使用场景	一般函数类型
解题模板	第一步　计算函数 $f(x)$ 的定义域并求出函数 $f(x)$ 的导函数 $f'(x)$； 第二步　求方程 $f'(x)=0$ 的根； 第三步　判断 $f'(x)$ 在方程的根的左、右两侧值的符号； 第四步　利用结论写出极值.

例 1　已知函数 $f(x)=\dfrac{1}{x}+\ln x$，求函数 $f(x)$ 的极值.

【变式演练 1】（极值概念）【西藏日喀则市拉孜高级中学 2020 届月考】下列说法正确的是（　　）

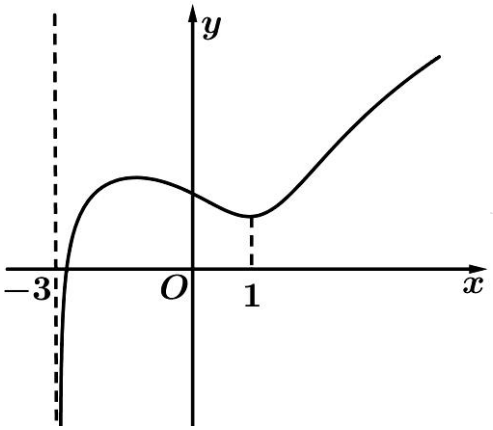
A．当 $f'(x_0)=0$ 时，则 $f(x_0)$ 为 $f(x)$ 的极大值

B．当 $f'(x_0)=0$ 时，则 $f(x_0)$ 为 $f(x)$ 的极小值

C．当 $f'(x_0)=0$ 时，则 $f(x_0)$ 为 $f(x)$ 的极值

D．当 $f(x_0)$ 为 $f(x)$ 的极值且 $f'(x_0)$ 存在时，则有 $f'(x_0)=0$

【变式演练 2】（图像与极值）已知函数 $f(x)=\ln\left(ax^3+bx+c\right)(a,b,c\in\mathbf{R})$ 的定义域为 $(-3,+\infty)$，其图象大致如图所示，则（　　）



A．$b<a<c$　　B．$b<c<a$　　C．$a<b<c$　　D．$a<c<b$

【来源】福建省莆田市 2021 届高三高中毕业班 3 月第二次教学质量检测数学试题

【变式演练 3】（解析式中不含参的极值）已知函数 $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}-x$，则（　　）

A．$f(x)$ 的单调递减区间为 $(0,1)$　　B．$f(x)$ 的极小值点为 1

C．$f(x)$ 的极大值为 -1　　D．$f(x)$ 的最小值为 -1

【来源】河北省沧州市 2021 届高三三模数学试题

【变式演练 4】（解析式中含参数的极值）【四川省德阳市 2020 届高三高考数学（理科）三诊】已知函数 $f(x)=ax-2\ln x-2$，$g(x)=axe^x-4x$.

（1）求函数 $f(x)$ 的极值；

（2）当 $a>0$ 时，证明：$g(x)-2(\ln x-x+1)\geq 2(\ln a-\ln 2)$.

【变式演练 5】（由极值求参数范围）若函数 $f(x)=\frac{1}{2}e^{2x}-me^{x}-\frac{m}{2}x^{2}$ 有两个极值点，则实数 m 的取值范围是（　　）

A．$\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$　　B．$(1,+\infty)$　　C．$\left(\frac{e}{2},+\infty\right)$　　D．$(e,+\infty)$

【来源】广西桂林市、崇左市 2021 届高三 5 月份数学（理）第二次联考试题

【变式演练 6】（由极值求其他）【四川省江油中学 2020-2021 学年高三上学期开学考试】已知函数 $f(x)=\frac{1}{3}x^{3}+ax^{2}+bx(a,b\in R)$ 在 $x=-3$ 处取得极大值为 9.

（1）求 a，b 的值；

（2）求函数 $f(x)$ 在区间 $[-4,4]$ 上的最大值与最小值.

类型二　求函数在闭区间上的最值

万能模板	内　　容
使用场景	一般函数类型
解题模板	第一步　求出函数 $f(x)$ 在开区间 (a,b) 内所有极值点； 第二步　计算函数 $f(x)$ 在极值点和端点的函数值； 第三步　比较其大小关系，其中最大的一个为最大值，最小的一个为最小值.

例 2【河南省天一大联考 2020 届高三阶段性测试】已知函数 $f(x)=\ln x-x$，$g(x)=ax^{2}+2x$　$(a<0)$.

（1）求函数 $f(x)$ 在 $\left[\frac{1}{e},e\right]$ 上的最值；

（2）求函数 $h(x)=f(x)+g(x)$ 的极值点.

【变式演练 7】（极值与最值关系）【安徽省皖江联盟 2019-2020 学年高三上学期 12 月联考】已知函数 $f(x)$ 在区间 (a,b) 上可导，则“函数 $f(x)$ 在区间 (a,b) 上有最小值”是“存在 $x_0\in(a,b)$，满足 $f'(x_0)=0$”的（　　）

A．充分不必要条件　B．必要不充分条件　C．充要条件　D．既不充分也不必要条件

【变式演练 8】（由最值求参数范围）【湖北省武汉市 2020 届高三下学期六月模拟】若函数 $f(x)=\begin{cases}a\ln x-x^{2}-2(x>0)\\ x+\frac{1}{x}+a(x<0)\end{cases}$ 的最大值为 $f(-1)$，则实数 a 的取值范围为（　　）

A. $\left[0,2e^2\right]$　　B. $\left[0,2e^3\right]$　　C. $\left(0,2e^2\right]$　　D. $\left(0,2e^3\right]$

【变式演练 9】（不含参数最值）【安徽省江淮十校 2020-2021 学年高三上学期第一次联考】已知函数 $f(x)=\cos^2 x\sin 2x$，若存在实数 M，对任意 $x_1,x_2\in\mathrm{R}$ 都有 $\left|f\left(x_1\right)-f\left(x_2\right)\right|\le M$ 成立.则 M 的最小值为（　　）

A. $\frac{3\sqrt{3}}{8}$　　B. $\frac{\sqrt{3}}{2}$　　C. $\frac{3\sqrt{3}}{4}$　　D. $\frac{2\sqrt{3}}{3}$

【变式演练 10】（含参最值）【重庆市经开礼嘉中学 2020 届高三下学期期中】已知函数

$f(x)=(x-a-1)e^{x-1}-\frac{1}{2}x^2+ax,x>0$

（1）若 $f(x)$ 为单调增函数，求实数 a 的值；

（2）若函数 $f(x)$ 无最小值，求整数 a 的最小值与最大值之和.

【变式演练 11】（恒成立转求最值）已知函数 $f(x)=e^{x-3}+x\ln x-x^2-ax$ 满足 $f(x)\ge 0$ 恒成立，则实数 a 的取值范围是（　　）

A. $(-\infty,\mathrm{e}]$　　B. $(-\infty,-2]$　　C. $[2,\mathrm{e}]$　　D. $[-2,2]$

【来源】安徽省宿州市 2021 届高三下学期第三次模拟考试文科数学试题

【变式演练 12】（构造函数求最值）函数 $f(x)=-2x+2(x<0)$，$g(x)=\frac{x}{\ln x}+x$.若 $f\left(x_1\right)=g\left(x_2\right)$，则 x_2-2x_1 的最小值为（　　）

A. $2\sqrt{e}-1$　　B. $4-\frac{2}{e}$

C. $4\sqrt{e}-2$　　D. $4\sqrt{e}-1$

【来源】四川省大数据精准联盟 2021 届高三第三次统一监测文科数学试题

【高考再现】

1.（2021·全国高考真题（理））设 $a\ne 0$，若 $x=a$ 为函数 $f\left(x\right)=a\left(x-a\right)^2\left(x-b\right)$ 的极大值点，则（　　）

A. $a<b$　　B. $a>b$　　C. $ab<a^2$　　D. $ab>a^2$

2.（2021·全国高考真题）函数 $f\left(x\right)=\left|2x-1\right|-2\ln x$ 的最小值为_____.

3.【2018 年全国普通高等学校招生统一考试数学（江苏卷）】若函数 $f(x)=2x^3-ax^2+1(a\in R)$ 在 $(0,+\infty)$ 内有且只有一个零点，则 $f(x)$ 在 $[-1,1]$ 上的最大值与最小值的和为_____.

4.【2018 年全国普通高等学校招生统一考试理科数学（新课标 I 卷）】已知函数 $f(x)=2\sin x+\sin 2x$，则 $f(x)$

的最小值是_____.

5. 【2020 年高考全国II卷理数 21】已知函数 $f(x)=\sin^2 x\sin 2x$.

（1）讨论 $f(x)$ 在区间 $(0,\pi)$ 的单调性；

（2）证明：$|f(x)|\le\frac{3\sqrt{3}}{8}$；

（3）设 $n\in\mathbf{N}^*$，证明：$\sin^2 x\sin^2 2x\sin^2 4x\cdots\sin^2 2^n x\le\frac{3^n}{4^n}$.

6. 【2020 年高考天津卷 20】已知函数 $f(x)=x^3+k\ln x(k\in R)$，$f'(x)$ 为 $f(x)$ 的导函数.

（I）当 $k=6$ 时，

（i）求曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,f(1))$ 处的切线方程；

（ii）求函数 $g(x)=f(x)-f'(x)+\frac{9}{x}$ 的单调区间和极值；

（II）当 k 开 -3 时，求证：对任意的 x_1，$x_2\in[1,+\infty)$，且 $x_1>x_2$，有 $\frac{f'(x_1)+f'(x_2)}{2}>\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}$.

7.【2018 年全国卷III理数】已知函数 $f(x)=(2+x+ax^2)\ln(1+x)-2x$.

（1）若 $a=0$，证明：当 $-1<x<0$ 时，$f(x)<0$；当 $x>0$ 时，$f(x)>0$；

（2）若 $x=0$ 是 $f(x)$ 的极大值点，求 a.

8.【2018 年全国普通高等学校招生统一考试文科】设函数 $f(x)=[ax^2-(3a+1)x+3a+2]e^x$.

（I）若曲线 $y=f(x)$ 在点 $(2,f(2))$ 处的切线斜率为 0，求 a；

（II）若 $f(x)$ 在 $x=1$ 处取得极小值，求 a 的取值范围.

9.【2018 年全国普通高等学校招生统一考试文科数学（天津卷）】

设函数 $f(x)=(x-t_1)(x-t_2)(x-t_3)$，其中 $t_1,t_2,t_3\in R$，且 t_1,t_2,t_3 是公差为 d 的等差数列.

（I）若 $t_2=0,d=1$，求曲线 $y=f(x)$ 在点 $(0,f(0))$ 处的切线方程；

（II）若 $d=3$，求 $f(x)$ 的极值；

（III）若曲线 $y=f(x)$ 与直线 $y=-(x-t_2)-6\sqrt{3}$ 有三个互异的公共点，求 d 的取值范围.

【反馈练习】

1. 已知函数 $f(x)=\cos(2x+\varphi)\left(|\varphi|<\frac{\pi}{2}\right)$，$F(x)=f(x)+\frac{\sqrt{3}}{2}f'(x)$ 为奇函数，则下述四个结论中说法正确的是（　　）

A. $\tan\varphi=\sqrt{3}$

B．$f(x)$在$[-a,a]$上存在零点，则a的最小值为$\frac{\pi}{6}$

C．$F(x)$在$\left(\frac{\pi}{4},\pi\right)$上单调递增

D．$f(x)$在$\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$有且仅有一个极大值点

【来源】内蒙古赤峰二中2021届高三三模数学（理）试题

2．已知函数$f(x)=\begin{cases}x^2-(2a+1)x+1, x\le 0\\ \frac{1}{2}ax^2+x\ln x, x>0\end{cases}$在$\mathbf{R}$上恰有三个极值点，则实数$a$的取值范围是（　　）

A．$\left(-1,-\frac{1}{2}\right)$　　B．$\left(-\frac{1}{2},0\right)$

C．$\left(-e,-\frac{1}{2}\right)$　　D．$(-e,-0)$

【来源】全国Ⅰ卷2021届高三高考数学（理）押题试题（三）

3．设函数$f(x)=e^x(\sin x-\cos x)$，若$0\le x\le 2022\pi$，则函数$f(x)$的各极大值之和为（　　）

A．$\frac{e^{\pi}\left(1-e^{2012\pi}\right)}{1-e^{2\pi}}$　　B．$\frac{e^{\pi}\left(1-e^{2021\pi}\right)}{1-e^{\pi}}$　　C．$\frac{e^{\pi}\left(1-e^{2022\pi}\right)}{1-e^{2\pi}}$　　D．$\frac{e^{\pi}\left(1-e^{2011\pi}\right)}{1-e^{\pi}}$

【来源】黑龙江省哈尔滨市呼兰区第一中学校2021届高三下学期5月第四次模拟考试数学（文）试试题

4．已知函数$f(x)=\frac{\ln x}{x}-e^x$，则下列说法正确的是（　　）

A．$f(x)$无极大值，也无极小值

B．$f(x)$有极大值，也有极小值

C．$f(x)$有极大值，无极小值

D．$f(x)$无极小值，有极大值

【来源】全国2021届高三5月份数学模拟试题（二）

5．已知函数$f(x)=\frac{1}{3}x^3-mx^2+mx+9$在$\mathbf{R}$上无极值，则实数$m$的取值范围为（　　）

A．$(-\infty,0)\cup(1,+\infty)$　　B．$(-\infty,0]\cup[1,+\infty)$　　C．$(0,1)$　　D．$[0,1]$

【来源】云南师范大学附属中学2021届高三高考适应性月考卷（九）数学（理）试题

6．若x_0是函数$f(x)=e^x-\frac{\ln x}{x}-\frac{1}{x}$的极值点，则$x_0$（　　）

A．$\frac{1}{x_0}+\ln x_0=0$　　B．$x_0-\ln x_0=0$

C．$x_0+\ln x_0=0$　　D．$\frac{1}{x_0}-\ln x_0=0$

【来源】四川省凉山州2021届高三三模数学（文）试题

7．下列函数中，y 的最小值为 2 的是（　　）

A．$y=x+\frac{1}{x}$　　B．$y=x-\ln x-1$

C．$y=e^{x}+1-x$　　D．$y=\cos x+\frac{1}{\cos x}\left(0<x<\frac{\pi}{2}\right)$

【来源】吉林省松原市前郭县、长岭县、乾安县 2021 届高三 5 月联考数学试题

8．若不等式 $\ln x\le ax+b$ 恒成立，则 $2a+b$ 的最小值为（　　）

A．2　　B．3　　C．$\ln 2$　　D．5

【来源】全国 2021 届高三 5 月份数学模拟试题（三）

9．函数 $f(x)=x\ln x-x$ 在 $\left[\frac{1}{2},2\right]$ 上的最小值为（　　）

A．$-\frac{1+\ln 2}{2}$　　B．-1　　C．0　　D．$2\ln 2-2$

【来源】河南省 2021 届高三仿真模拟考试（三）数学（文）试题

10．函数 $f(x)=-4x+2(x<0)$，$g(x)=\frac{x}{\ln x}$．若 $f(x_1)=g(x_2)$，则 x_2-2x_1 的最小值为（　　）

A．$1-\frac{1}{2e}$　　B．$2\sqrt{e}-1$

C．3　　D．$\frac{5}{2}$

【来源】四川省大数据精准联盟 2021 届高三第三次统一监测理科数学试题

11．若不等式 $\left(ax^2+bx+1\right)e^{x}\bullet 1$ 对一切 $x\in\mathbf{R}$ 恒成立，其中 $a,b\in\mathbf{R},e$ 为自然对数的底数，则 $a+b$ 的取值范围是（　　）

A．$(-\infty,-1]$　　B．$(-3,-1]$　　C．$(-\infty,-3]$　　D．$(-5,-3]$

【来源】湖北省黄冈中学 2021 届高三下学期第三次模拟考试数学试题

12．已知函数 $f(x)=a\ln x-3x$，当 $x\in(0,+\infty)$ 时，$f(x+1)+3e^{x}\ge ax$ 恒成立，则实数 a 的最大值为（　　）

A．0　　B．3

C．2　　D．1

【来源】云南师范大学附属中学 2021 届高三高考适应性月考卷（八）数学（理）试题

13．关于 x 的不等式 $2\sin^3 x\cos x-a\le 0$ 在 $x\in(0,\pi)$ 恒成立，则实数 a 的最小值为（　　）

A．$-\frac{3\sqrt{3}}{8}$　　B．0　　C．1　　D．$\frac{3\sqrt{3}}{8}$

【来源】安徽省皖江联盟 2021 届高三下学期最后一卷理科数学试题

14．设 $k>0$，若存在正实数 x，使得不等式 $\log_4 x-k\cdot 2^{kx-1}\ge 0$ 成立，则 k 的最大值为（　　）

A．$\frac{1}{e\ln 2}$　　B．$\frac{\ln 2}{e}$　　C．$\frac{e}{\ln 2}$　　D．$\frac{\ln 2}{2}$

【来源】四川省雅安市 2021 届高三三模数学（理）试题

15.【北京五中 2020 届高三（4 月份）高考数学模拟】设函数 $f(x)=me^x-x^2+3$，其中 $m\in R$.

（1）如果 $f(x)$ 同时满足下面三个条件中的两个：①$f(x)$ 是偶函数；②$m=1$；③$f(x)$ 在（0，1）单调递减.指出这两个条件，并求函数 $h(x)=xf(x)$ 的极值；

（2）若函数 $f(x)$ 在区间[－2，4]上有三个零点，求 m 的取值范围.

16.【辽宁省锦州市渤大附中、育明高中 2021 届高三上学期第一次联考】已知函数

$f(x)=ae^x-\cos x-x(a\in R).$

（1）若 $a=1$，证明：$f(x)\geq 0$；

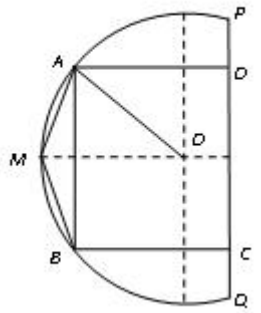
（2）若 $f(x)$ 在 $(0,\pi)$ 上有两个极值点，求实数 a 的取值范围.

17.【西南地区名师联盟 2020 届高三入学调研考试】已知函数 $f(x)=\frac{1}{3}x^3+bx^2+cx$，$b$、$c$ 为常数，且 $-\frac{1}{2}<b<1$，$f'(1)=0$.

（1）证明：$-3<c<0$；

（2）若 x_0 是函数 $y=f(x)-\frac{c}{2}x$ 的一个极值点，试比较 $f(x_0-4)$ 与 $f(-3)$ 的大小.

18.【山东省威海荣成市 2020 届高三上学期期中】某水产养殖公司在一片海域上进行海洋牧场生态养殖，如图所示，它的边界由圆 O 的一段圆弧 PMQ（M 为此圆弧的中点）和线段 PQ 构成.已知圆 O 的半径为12千米，M 到 PQ 的距离为16千米.现规划在此海域内修建两个生态养殖区域，养殖区域 R_1 为矩形 $ABCD$，养殖区域 R_2 为 $\triangle AMB$，且 A，B 均在圆弧上，C，D 均在线段 PQ 上，设 $\angle AOM=\alpha$.



（I）用 α 分别表示矩形 $ABCD$ 和 $\triangle AMB$ 的面积，并确定 $\cos\alpha$ 的范围；

（II）根据海域环境和养殖条件，养殖公司决定在R_1内养殖鱼类，在R_2内养殖贝类，且养殖鱼类与贝类单位面积的年产值比为$3:2$.求当α为何值时，能使年总产值最大.

19.【江苏省南通市2020届高三下学期高考考前模拟卷】已知函数$f\left(x\right)=\left(x-a\right)e^{x}+b\left(a,b\in\mathbf{R}\right)$.

（1）讨论函数$f\left(x\right)$的单调性；

（2）对给定的a，函数$f\left(x\right)$有零点，求b的取值范围；

（3）当$a=2$，$b=0$时，$F\left(x\right)=f\left(x\right)-x+\ln x$，记$y=F\left(x\right)$在区间$\left(\frac{1}{4},1\right)$上的最大值为$m$，且$m\in\left[n,n+1\right),n\in\mathbf{Z}$，求$n$的值.

20.【陕西省西安中学2020-2021学年高三上学期第一次月考】已知函数$f(x)=x-1-a\ln x$.

（1）当$a=1$时，求$f(x)$的最小值；

（2）设m为整数，且对于任意正整数n，$(1+\frac{1}{2})(1+\frac{1}{2^2})\cdots(1+\frac{1}{2^n})<m$，求$m$的最小值.

第14讲　导数综合应用的解题模板

【高考地位】

导数综合问题是高考的必考的重点内容，主要在导数解答题的的第2小问，已由解决函数、数列、不等式问题的辅助工具上升为解决问题的必不可少的工具，特别是利用导数来解决函数的极值与最值、零点的个数等问题，在高考中以各种题型中均出现，对于导数问题中求参数的取值范围是近几年高考中出现频率较高的一类问题，其试题难度考查较大.

类型一　利用导数研究不等式证明问题

万能模板	内　　容
使用场景	一般函数的不等式证明问题
解题模板	构造法证明不等式是指在证明与函数有关的不等式时，根据所要证明的不等式，构造与之相关的函数，利用函数单调性、极值、最值加以证明．常见的构造方法有： (1)直接构造法：证明不等式$f(x)>g(x)$($f(x)<g(x)$)转化为证明$f(x)-g(x)>0$($f(x)-g(x)<0$)，进而构造辅助函数$h(x)=f(x)-g(x)$； (2)适当放缩构造法：一是根据已知条件适当放缩，二是利用常见的放缩结论，如$\ln x\leqslant x-1$，$e^{x}\geqslant x+1$，$\ln x<x<e^{x}(x>0)$，$\frac{x}{x+1}\leqslant\ln(x+1)\leqslant x(x>-1)$；

	(3)构造“形似”函数：稍作变形再构造，对原不等式同解变形，如移项、通分、取对数，把不等式转化为左、右两边是相同结构的式子的形式，根据“相同结构”构造辅助函数； (4)构造双函数：若直接构造函数求导难以判断符号，导函数零点也不易求得，因此函数单调性与极值点都不易获得，则可构造函数 $f(x)$和 $g(x)$，利用其最值求解.

例 1　(2016·全国卷Ⅲ)设函数$f(x)=\ln x-x+1$.

(1)讨论$f(x)$的单调性；

(2)证明：当$x\in(1,+\infty)$时，$1<\dfrac{x-1}{\ln x}<x$；

(3)设$c>1$，证明：当$x\in(0,1)$时，$1+(c-1)x>c^x$.

【变式演练 1】（作差法证明不等式）【河南省郑州市第一中学 2021 届高三上学期开学测试数学（文）】已知函数$f(x)=(x+\sin x-\cos x)\mathrm{e}^x$，$f'(x)$为$f(x)$的导函数.

（1）设$g(x)=f'(x)-f(x)$，求$g(x)$的单调区间；

（2）若$x\geq 0$，证明：$f(x)\geq x-1$.

【变式演练 2】（换元法证明双变量不等式）【四川省成都市新都一中 2021 届高三 9 月月考数学（理）】已知函数$f(x)=x\ln x-2ax^2+x$，$a\in\mathbf{R}$.

（I）若$f(x)$在$(0,+\infty)$内单调递减，求实数a的取值范围；

（II）若函数$f(x)$有两个极值点分别为x_1，x_2，证明：$x_1+x_2>\dfrac{1}{2a}$.

【变式演练 3】（利用二次方程韦达定理证明双变量不等式）【四川省新津中学 2021 届高三上学期开学考试数学（文）】已知函数$f(x)=x^2+2(a-3)x+2a\ln x$，其中$a\in\mathbf{R}$.

（1）若曲线$y=f(x)$在点$(1,f(1))$处的切线与直线$2x+y+1=0$平行，求实数a的值及函数$g(x)=f(x)-4\ln x$的单调区间；

（2）若函数$f(x)$在定义域上有两个极值点x_1，x_2，且$x_1<x_2$，求证：$f(x_1)+f(x_2)+10>0$.

【变式演练 4】（极值点偏移类的不等式证明）【安徽省 2020 届高三 5 月五校联考数学理科】已知函数$f(x)=\dfrac{\cos x}{x}$，$g(x)=x\sin x+\cos x$.

（1）判断函数$g(x)$在区间$(0,2\pi)$上的零点的个数；

（2）记函数 $f(x)$ 在区间 $(0,2\pi)$ 上的两个极值点分别为 x_1，x_2，求证：$f(x_1)+f(x_2)<0$.

【变式演练 5】（函数与数列综合的不等式证明）【江苏省南通市如皋中学 2020 届高三创新班下学期高考冲刺模拟（二）】已知函数 $f\left(x\right)=\ln x+\lambda\left(\dfrac{1}{x}-x\right)\left(\lambda\in\mathbf{R}\right)$.

（1）当 $x>1$ 时，不等式 $f\left(x\right)<0$ 恒成立，求 λ 的最小值；

（2）设数列 $a_n=\dfrac{1}{n}\left(n\in\mathrm{N}^*\right)$，其前 n 项和为 S_n，证明：$S_{2n}-S_n+\dfrac{a_n}{4}>\ln 2$.

【变式演练 6】（拆分法证明不等式）【安徽省马鞍山市 2020 届高三第三次教学质量监测】已知 $f(x)=e^x-\dfrac{1}{2}x^2-x-1$，$g(x)=\cos 2x+2x^2-1$.

（1）证明：$x\geq 0$ 时，$f(x)\geq 0$；

（2）求函数 $g(x)$ 的单调区间；

（3）证明：$x\geq 0$ 时，$xe^x+\dfrac{1}{2}\sin 2x\geq 2\sin x+\sin^2 x$.

类型二　利用导数研究不等式恒成立问题

万能模板	内　　容
使用场景	有关不等式恒成立问题
解题模板	**分类讨论法**：常见有两种情况：一种先利用综合法，结合导函数的零点之间的大小关系的决定条件，确定分类讨论的标准，分类后，判断不同区间函数的单调性，得到最值，构造不等式求解；另外一种，直接通过导函数的式子，确定以导函数值正负为分类标准，通常导函数为二次函数或者一次函数. 对利用导数研究不等式恒成立问题(能成立问题)，一般可转化为最值问题处理．若 $a>f(x)$ 对 $x\in D$ 恒成立，则只需 $a>f(x)_{\max}$；若 $a<f(x)$ 对 $x\in D$ 恒成立，则只需 $a<f(x)_{\min}$.若存在 $x_0\in D$，使 $a>f(x_0)$ 成立，则只需 $a>f(x)_{\min}$；若存在 $x_0\in D$，使 $a<f(x_0)$ 成立，则只需 $a<f(x_0)_{\max}$.由此构造不等式，求解参数的取值范围.

例 2(2016·全国卷II)已知函数 $f(x)=(x+1)\ln x-a(x-1)$.

(1)当 $a=4$ 时，求曲线 $y=f(x)$ 在 $(1，f(1))$ 处的切线方程；

(2)若当 $x\in(1，+\infty)$ 时，$f(x)>0$，求 a 的取值范围.

【变式演练 7】（分离参数法解决不等式恒成立问题）【浙江省杭州高中 2020 届高三下学期 5 月高考质检】已知函数 $f\left(x\right)=\left(x-a\right)e^x\left(a\in\mathbf{R}\right)$.

（1）讨论 $f\left(x\right)$ 的单调性；

（2）当 $a=2$ 时，设函数 $g\left(x\right)=f\left(x\right)+\ln x-x-b,b\in \mathbf{Z}$，若 $g\left(x\right)\le 0$ 对任意的 $x\in\left(\frac{1}{3},1\right)$ 恒成立，求 b 的最小值.

【变式演练 8】（利用函数最值解决双参数恒成立问题）【黑龙江省哈尔滨市第三中学校 2020-2021 学年高三上学期第一次验收考试】已知函数 $f\left(x\right)=e^{x}+e^{-x}$，其中 e 为自然对数的底数.

（1）证明：$f\left(x\right)$ 在 $\left(0,+\infty\right)$ 上单调递增.

（2）设 $a>0$，函数 $g\left(x\right)=2x^{2}+ax-a-\frac{1}{3}$，如果总存在 $x_1\in\left[-a,a\right]$，对任意 $x_2\in\left[-1,1\right]$，$2f\left(x_1\right)\ge 3g\left(x_2\right)$ 都成立，求实数 a 的取值范围.

【变式演练 9】（等价转化法解决不等式恒成立问题）【湖南省长沙市长郡中学 2020-2021 学年高三上学期入学摸底考试】已知函数 $f(x)=e^{x}+e^{-x}$，其中 e 是自然对数的底数.

（1）若关于 x 的不等式 $mf(x)\le e^{-x}+m-1$ 在(0，+∞)上恒成立，求实数 m 的取值范围；

（2）已知正数 a 满足：存在 $x\in[1,+\infty)$，使得 $f(x_0)<a(-x_0^3+3x_0)$ 成立.试比较 e^{a-1} 与 a^{e-1} 的大小，并证明你的结论.

类型三　利用导数研究函数零点问题

万能模板	内　　容
使用场景	有关零点问题
解题模板	**两类零点问题的不同处理方法：**利用零点存在性定理的条件——函数图象在区间[a，b]上是连续不断的曲线，且 $f(a)\cdot f(b)<0$. ①直接法：判断一个零点时，若函数为单调函数，取值证明 $f(a)\cdot f(b)<0$； ②分类讨论法：判断几个零点时，需要先结合单调性，确定分类讨论的标准，再利用零点存在性定理，在每个单调区间内取值证明 $f(a)\cdot f(b)<0$.

例 3(2018·全国卷Ⅱ)已知函数 $f(x)=\frac{1}{3}x^3-a(x^2+x+1)$.

(1)若 $a=3$，求 $f(x)$的单调区间；

(2)证明：$f(x)$只有一个零点.

【变式演练 9】（研究函数零点个数）【江苏省淮安市淮阴中学 2020-2021 学年高三上学期 8 月测试】设函数 $f\left(x\right)=x^{3}+ax^{2}+bx$（$a$，$b\in\mathrm{R}$）的导函数为 $f\left(x\right)$.已知 x_1，x_2 是 $f\left(x\right)$ 的两个不同的零点.

（1）证明：$a^2>3b$；

（2）当$b=0$时，若对任意$x>0$，不等式$f\left(x\right)>x\ln x$恒成立，求a的取值范围；

（3）求关于x的方程$f\left(x\right)=f'(\frac{x_1+x_2}{2})\left(x-x_1\right)+f\left(x_1\right)$的实根的个数.

【变式演练 10】（已知零点存在情况求参数的值）【安徽省六校教育研究会 2020-2021 学年高三上学期第一次素质测试】已知函数$f\left(x\right)=e^x\left(ax+1\right)$.

（1）讨论函数$f\left(x\right)$的单调性；

（2）当$a=1$时，若P为直线$y=x+3$与函数$f\left(x\right)$图像的一个公共点，其横坐标为t，且$t\in\left(m,m+1\right)$，求整数m的所有可能的值.

【变式演练 11】（已知零点存在情况求参数的取值范围）【黑龙江省哈尔滨市第三中学校 2020-2021 学年高三上学期第一次验收考试】已知函数$f\left(x\right)=e^x+m\left(x+1\right)\left(m\in R\right)$.

（1）当$m=-1$时，讨论$f\left(x\right)$的单调性；

（2）若$f\left(x\right)$有两个零点，求实数m的取值范围.

【高考再现】

1.（零点问题）（2021·浙江高考真题）设a，b为实数，且$a>1$，函数$f\left(x\right)=a^x-bx+e^2(x\in\mathrm{R})$

（1）求函数$f\left(x\right)$的单调区间；

（2）若对任意$b>2e^2$，函数$f\left(x\right)$有两个不同的零点，求a的取值范围；

（3）当$a=e$时，证明：对任意$b>e^4$，函数$f\left(x\right)$有两个不同的零点x_1,x_2，满足$x_2>\frac{b\ln b}{2e^2}x_1+\frac{e^2}{b}$.

(注：$e=2.71828\cdots$是自然对数的底数)

2.（函数图象问题）（2021·全国高考真题（理））已知$a>0$且$a\neq1$，函数$f(x)=\frac{x^a}{a^x}(x>0)$.

（1）当$a=2$时，求$f\left(x\right)$的单调区间；

（2）若曲线$y=f\left(x\right)$与直线$y=1$有且仅有两个交点，求a的取值范围.

3.（不等式证明问题）（2021·全国高考真题（理））设函数$f\left(x\right)=\ln\left(a-x\right)$，已知$x=0$是函数$y=xf\left(x\right)$

的极值点.

（1）求 a；

（2）设函数 $g(x)=\dfrac{x+f(x)}{xf(x)}$．证明: $g\left(x\right)<1$.

4.（零点问题）【2020 年高考全国I卷文数 20】已知函数 $f\left(x\right)=\mathrm{e}^{x}-a\left(x+2\right)$.

（1）当 $a=1$ 时，讨论 $f\left(x\right)$ 的单调性；

（2）若 $f\left(x\right)$ 有两个零点，求 a 的取值范围.

5．（零点问题）【2020 年高考全国III卷文数 20】已知函数 $f\left(x\right)=x^{3}-kx+k^{2}$.

（1）讨论 $f\left(x\right)$ 的单调性；

（2）若 $f\left(x\right)$ 有三个零点，求 k 的取值范围.

6.（恒成立问题）【2020 年高考全国I卷理数 21】已知函数 $f\left(x\right)=\mathrm{e}^{x}+ax^{2}-x$.

（1）当 $a=1$ 时，讨论 $f\left(x\right)$ 的单调性；

（2）当 $x\geq 0$ 时，$f\left(x\right)\geq\dfrac{1}{2}x^{3}+1$，求 a 的取值范围.

7．（恒成立问题）【2020 年高考山东卷 21】

已知函数 $f(x)=a\mathrm{e}^{x-1}-\ln x+\ln a$.

（1）当 $a=\mathrm{e}$ 时，求曲线 $y=f(x)$ 在点 $\left(1,f\left(1\right)\right)$ 处的切线与两个坐标轴围成的三角形的面积；

（2）若 $f(x)\geq 1$，求 a 的取值范围.

8．（证明不等式问题）【2020 年高考全国III卷理数 21】设 $f\left(x\right)=x^{3}+bx+c$，$x\in\mathbf{R}$，曲线 $f\left(x\right)$ 在点 $\left(\dfrac{1}{2},f\left(\dfrac{1}{2}\right)\right)$ 处的切线与 y 轴垂直.

（1）求 b；

（2）若 $f\left(x\right)$ 有一个绝对值不大于 1 的零点，证明：$f\left(x\right)$ 的所有零点的绝对值都不大于 1.

9．（零点问题＋证明不等式问题）【2020 年高考浙江卷 22】已知 $1<a\leq 2$，函数 $f\left(x\right)=\mathrm{e}^{x}-x-a$，其中 e=2．71828…为自然对数的底数.

（I）证明：函数 $y=f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上有唯一零点；

（II）记 x_0 为函数 $y=f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上的零点，证明：

（i）$\sqrt{a-1}\le x_0\le\sqrt{2(a-1)}$；

（ii）$x_0 f(\mathrm{e}^{x_0})\ge(\mathrm{e}-1)(a-1)a$．

【反馈练习】

1．已知对任意的 $x\in(1,+\infty)$，不等式 $k\cdot(\mathrm{e}^{kx}+1)-\left(\frac{1}{x}+1\right)\ln x>0$ 恒成立，则正数 k 的取值范围是（　　）

A．$\left(\frac{1}{\mathrm{e}},+\infty\right)$　　B．$(\mathrm{e},+\infty)$　　C．$\left(\frac{1}{\mathrm{e}},\mathrm{e}\right)$　　D．$\left(\frac{1}{\mathrm{e}^2},\frac{1}{\mathrm{e}}\right)$

【来源】江苏省南京市第二十九中学 2021-2022 学年高三上学期 8 月第二次学情调研数学试题

2．已知函数 $f(x)=\frac{\ln x}{x}-x^2+2ex-a$（其中 e 为自然对数的底数）有两个零点，则实数 a 的取值范围是（　　）

A．$\left(-\infty,e^2+\frac{1}{e}\right]$　　B．$\left(-\infty,e^2+\frac{1}{e}\right)$

C．$\left[e^2-\frac{1}{e},+\infty\right)$　　D．$\left(e^2-\frac{1}{e},+\infty\right)$

【来源】解密 05 导数及其应用（分层训练）-【高频考点解密】2021 年高考数学（理）二轮复习讲义 分层训练

3．已知函数 $f(x)=a(x-1)^2,g(x)=e^{-x}$，若函数 $F(x)=f(x)-g(x)$ 有 3 个不同的零点，则实数 a 的取值范围是_____．

【来源】湖南省永州市第四中学 2021 届高三下学期高考冲刺（二）数学试题

4．已知函数 $f(x)=-ax^2+x-\ln x$．

（1）讨论 $f(x)$ 的单调性；

（2）若 $f(x)$ 在定义城上有两个极值点 x_1，x_2，求证：$f(x_1)+f(x_2)>3-2\ln 2$．

【来源】湖南省永州市第四中学 2021 届高三下学期高考冲刺（二）数学试题

5．已知函数 $f(x)=xe^x-2ax+a\ (a\in R)$．

（1）当 $a=0$ 时，求 $f(x)$ 在 $[-2,2]$ 上的最值；

（2）设 $g(x)=2e^x-ax^2$，若 $h(x)=f(x)-g(x)$ 有两个零点，求 a 的取值范围．

【来源】陕西省汉中市 2021 届高三下学期高考一模理科数学试题

6．已知函数 $f(x)=x+a\ln x$ （ $a\in R$ ）.

（1）讨论 $f(x)$ 的单调性；

（2）当 $a=1$ 时，证明： $xf(x)<e^x$.

【来源】押第 21 题 导数的应用-备战 2021 年高考数学（理）临考题号押题（全国卷 2）

7．定义在 $(0,+\infty)$ 上的关于 x 的函数 $f(x)=(x-1)e^x-\dfrac{ax^2}{2}$.

（1）若 $a=e$ ，讨论 $f(x)$ 的单调性；

（2） $f(x)\le 3$ 在 $(0,2]$ 上恒成立，求 a 的取值范围.

【来源】河南省洛阳市孟津县第一高级中学 2021 届高三下学期 4 月文科数学调研试题

8．已知定义在 $(0,+\infty)$ 内的函数 $f(x)$ 的导函数 $f'(x)=\dfrac{e^x}{x}$.

（1）证明： $f'(x)>1+\dfrac{1}{x}$ ；

（2）当 $f(1)>e$ 时，证明：函数 $g(x)=\dfrac{f(x)}{x}$ 恰有两个极值点.

【来源】全国 2021 届高三高考数学信心提升试题

9．已知函数 $f(x)=a\ln x-x$.

（1）若 $a\ge 0$ ，讨论函数 $f(x)$ 的零点个数；

（2）设 x_1 ， x_2 是函数 $f(x)$ 的两个零点，证明： $x_1+x_2-2a\ln a>0$.

【来源】江苏省南京市第二十九中学 2021-2022 学年高三上学期 8 月第二次学情调研数学试题

10．函数 $f(x)=2\ln(x+2)+\dfrac{a}{x+2}+x-2(x>-2)$.

（1）讨论 $f(x)$ 的极值点的个数；

（2）设 $g(x)=e^xf(x)$ ，若 $g(x)\ge\dfrac{5}{e}$ 恒成立，求 a 的取值范围.

【来源】河南省洛阳市孟津县第一高级中学 2021 届高三下学期 4 月理科数学调研试题

11．已知 $f(x)=x^2-4x-6\ln x$ ，

（1）求 $f(x)$ 在 $(1,f(1))$ 处的切线方程以及 $f(x)$ 的单调性；

（2）令 $g(x)=f(x)+4x-(a-6)\ln x$ ，若 $g(x)$ 有两个零点分别为 x_1 ， x_2 $(x_1<x_2)$ 且 x_0 为 $g(x)$ 唯一极值点，求证： $x_1+3x_2>4x_0$.

【来源】重庆市第七中学 2021 届高三下学期高考仿真模拟数学试题

12．设函数 $f(x)=2e^{x}+a\cos x, a\in \mathbf{R}$．

（1）若 $f(x)$ 在 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 上存在零点，求实数 a 的取值范围；

（2）证明：当 $a\in[1,2], x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 时，$f(x)>2x+3$．

【来源】福建省莆田市 2021 届高三高中毕业班 3 月第二次教学质量检测数学试题

13．已知函数 $f(x)=\frac{e^{x}}{x}$，$g(x)=\ln x$．

（1）当 $a>0$ 时，讨论函数 $F(x)=af(x)-g(x)-\frac{1}{x}$ 的单调性；

（2）当 $a>1$ 时，求证：$axf(x)-g(ax)>(e-1)x+1$．

【来源】重庆市南开中学 2022 届高三上学期 7 月考试数学试题

14．已知函数 $f(x)=ax^{2}+x-\ln x(a\in R)$．

（1）当 $a=1$ 时，求 $f(x)$ 在区间 $[\frac{1}{3},1]$ 上的最值；

（2）若 $g(x)=f(x)-x$ 在定义域内有两个零点，求 a 的取值范围．

【来源】重庆市南开中学 2022 届高三上学期 7 月考试数学试题

15．已知函数 $f(x)=x^{3}+ax^{2}+bx+c$ 在 $x=-\frac{2}{3}$ 与 $x=1$ 时都取得极值．

（1）求 a，b 的值与函数 $f(x)$ 的单调区间；

（2）若对 $x\in[-1,2]$，不等式 $f(x)<c^{2}$ 恒成立，求实数 c 的取值范围．

【来源】备战 2021 高考数学全真模拟卷（北京专用）

16．已知函数 $f(x)=x-a\ln x$．

（1）讨论 $f(x)$ 的单调性；

（2）若 $f(x)$ 有两个相异零点 x_1，x_2，求证：$x_1\cdot x_2>e^{2}$．

【来源】黑龙江省大庆市 2021 届高三二模数学（文）试题

17．已知函数 $f(x)=(x+1)\ln(x+1)-(x+1-m)\ln x$ 的导函数为 $f'(x)$．

（1）当 $m=0$ 时，求证：$f'(x)<0$；

（2）若 $f(x)$ 只有一个零点，求 m 的取值范围．

【来源】重庆市第八中学 2021 届高三下学期高考适应性考试（一）数学试题

18．已知函数 $f(x)=ax-\ln x-a(a\in R)$.

（1）求函数 $f(x)$ 的极值；

（2）当 $x\in\left[\frac{1}{2},2\right]$ 时，函数 $f(x)$ 有两个不同的零点，求实数 a 的取值范围.

【来源】贵州省贵阳市第一中学 2021 届高三下学期高考适应性月考卷（六）数学（文）试题

19．已知函数 $f(x)=ax-\ln x+b$.

（1）若 $a+b=0$，且 $f(x)\geq 0$，求 a 的值；

（2）证明：$\ln 2+\ln 3+\cdots+\ln(n+1)>\frac{n^2}{2(n+1)}\left(n\in N^*\right)$.

【来源】贵州省贵阳市第一中学 2021 届高三下学期高考适应性月考卷（六）数学（理）试题

20．已知函数 $f\left(x\right)=\frac{1}{2}x^2-\left(a+1\right)x\left(x>0\right)$.

（1）若 $g\left(x\right)=f\left(x\right)+a\ln x$，讨论函数 $g\left(x\right)$ 的单调性；

（2）已知 $m\left(x\right)=2f\left(x\right)-x\ln x+\left(2+a\right)x-2a+2$，若 $m\left(x\right)$ 在 $\left[\frac{1}{2},+\infty\right)$ 内有两个零点，求 a 的取值范围.

【来源】江西省景德镇一中 2022 届高三 7 月月考数学（理）试题

第 15 讲　三角函数求值问题

【高考地位】

三角函数式的化简和求值是高考考查的重点内容之一. 掌握化简和求值问题的解题规律和一些常用技巧，以优化我们的解题效果，做到事半功倍. 这也是解决三角函数问题的前提和出发点. 在高考中常以选择题、填空题出现，其试题难度考查不大.

方法一　切化弦，弦化切

万能模板	内　　容
使用场景	一般三角求值类型
解题模板	第一步　利用同角三角函数的基本关系 $\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}$，将题设中的切化成弦的形式； 第二步　计算出正弦与余弦之间的关系； 第三步　结合三角恒等变换可得所求结果.

例 1 若 $\tan\alpha=-\frac{2}{3}$，$\tan\beta=\frac{1}{3}$，则 $\sin(2\alpha+2\beta)=$（　　）

A．$-\frac{7\sqrt{130}}{130}$　　B．$\frac{11\sqrt{130}}{130}$　　C．$-\frac{33}{65}$　　D．$\frac{9}{130}$

【来源】全国Ⅱ卷2021届高三高考数学（理）冲刺预测试题

【变式演练1】【安徽省淮北市2020届高三下学期二模】若$\tan\alpha=\frac{2}{\tan\frac{\pi}{8}}$，则$\frac{\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{8}\right)}{\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{8}\right)}$的值为（　　）

A．$-\frac{1}{3}$　　B．0　　C．$\frac{1}{3}$　　D．1

【变式演练2】已知$\tan\alpha=-3$，则$\sin 2\alpha-2\cos 2\alpha=$（　　）

A．$-\frac{1}{2}$　　B．-1　　C．1　　D．2

【来源】“陕西名校”2021届高三5月检测数学（理）试题

方法二　统一配凑

万能模板	内　　容
使用场景	一类特殊三角求值类型
解题模板	第一步　观察已知条件中的角和所求的角之间的联系； 第二步　利用合理地拆角，结合两角和（或差）的正弦（或余弦）公式将所求的三角函数值转化为已知条件中的三角函数值； 第三步　利用三角恒等变换即可得出所求结果.

例2【黑龙江省哈尔滨市第六中学校2020届高三第一次模拟】若

$0<\alpha<\frac{\pi}{2},0<\beta<\frac{\pi}{2},\sin\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\alpha}{2}\right)=\frac{\sqrt{5}}{5},\cos\left(\frac{\beta}{2}-\frac{\pi}{3}\right)=\frac{4}{5}$，则$\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$的值为（　　）

A．$\frac{\sqrt{5}}{5}$　　B．$\frac{11\sqrt{5}}{25}$　　C．$\frac{2\sqrt{5}}{5}$　　D．$\frac{7\sqrt{5}}{25}$

【变式演练3】已知$\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{3}$，则$\sin\left(2\alpha-\frac{\pi}{6}\right)=$（　　）

A．$-\frac{7}{9}$　　B．$-\frac{2}{9}$　　C．$\frac{2}{9}$　　D．$\frac{7}{9}$

【来源】河北省衡水市饶阳中学2021届高三5月数学精编试题

【变式演练4】【2020届江西省吉安、抚州、赣州市高三一模】已知$\tan\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)=-\frac{3}{5}$，则$\sin\left(2\alpha+\frac{\pi}{3}\right)=$

（　　）

A．$\frac{8}{17}$　　B．$-\frac{8}{17}$　　C．$\frac{15}{17}$　　D．$-\frac{15}{17}$

方法三　公式活用

万能模板	内　　容
使用场景	一般求值题
解题模板	第一步　观察已知式与待求式的特征； 第二步　选择合适的公式进行化简； 第三步　注意一些公式逆用的情况使用.

例 3【2020 届河北省张家口市高三下学期第二次模拟】$\frac{1-\tan^2 105°}{1+\tan^2 105°}=$（　　）

A．$\frac{1}{2}$　　B．$-\frac{1}{2}$　　C．$\frac{\sqrt{3}}{2}$　　D．$-\frac{\sqrt{3}}{2}$

【变式演练 5】若 $3\sin 2\alpha-2\sin^2\alpha=0$，则 $\cos\left(2\alpha+\frac{\pi}{4}\right)=$（　　）

A．$\frac{\sqrt{2}}{2}$ 或 $-\frac{7\sqrt{2}}{10}$　　B．$-\frac{7\sqrt{2}}{10}$　　C．$-\frac{\sqrt{2}}{10}$ 或 $\frac{\sqrt{2}}{2}$　　D．$\frac{\sqrt{2}}{2}$

【来源】贵州省瓮安中学高三 2021 届 6 月关门考试数学（理）试题

【变式演练 6】【2020 届广东省梅州市高三上学期第一次质量检测】若 $\sin 78°=m$，则 $\sin 6°=$（）

A．$\sqrt{\frac{m+1}{2}}$　　B．$\sqrt{\frac{1-m}{2}}$　　C．$\frac{\sqrt{m+1}}{2}$　　D．$\frac{\sqrt{1-m}}{2}$

【高考再现】

1．（2021·全国高考真题）若 $\tan\theta=-2$，则 $\frac{\sin\theta(1+\sin 2\theta)}{\sin\theta+\cos\theta}=$（　　）

A．$-\frac{6}{5}$　　B．$-\frac{2}{5}$　　C．$\frac{2}{5}$　　D．$\frac{6}{5}$

2.【2020 年高考全国I卷理数 9】已知 $\alpha\in(0,\pi)$，且 $3\cos 2\alpha-8\cos\alpha=5$，则 $\sin\alpha=$　　（　　）

A．$\frac{\sqrt{5}}{3}$　　B．$\frac{2}{3}$　　C．$\frac{1}{3}$　　D．$\frac{\sqrt{5}}{9}$

3.【2020 年高考全国III卷文数 5】已知 $\sin\theta+\sin\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)=1$，则 $\sin\left(\theta+\frac{\pi}{6}\right)=$　　（　　）

A. $\frac{1}{2}$　　B. $\frac{\sqrt{3}}{3}$　　C. $\frac{2}{3}$　　D. $\frac{\sqrt{2}}{2}$

4.（2018 年全国卷III文）若 $\sin\alpha=\frac{1}{3}$，则 $\cos 2\alpha=$

A. $\frac{8}{9}$　　B. $\frac{7}{9}$　　C. $-\frac{7}{9}$　　D. $-\frac{8}{9}$

5. 【2016 高考新课标 3 理数】若 $\tan\alpha=\frac{3}{4}$，则 $\cos^2\alpha+2\sin 2\alpha=$（　　）

(A) $\frac{64}{25}$　　(B) $\frac{48}{25}$　　(C) 1　　(D) $\frac{16}{25}$

6.【2017 山东，文 4】已知 $\cos x=\frac{3}{4}$,则 $\cos 2x=$

A. $-\frac{1}{4}$　　B. $\frac{1}{4}$　　C. $-\frac{1}{8}$　　D. $\frac{1}{8}$

7.【2015 高考重庆，理 9】若 $\tan\alpha=2\tan\frac{\pi}{5}$，则 $\frac{\cos(\alpha-\frac{3\pi}{10})}{\sin(\alpha-\frac{\pi}{5})}=$（　　）

A、1　　B、2　　C、3　　D、4

8.（2018 年全国卷 II 文）已知 $\tan(\alpha-\frac{5\pi}{4})=\frac{1}{5}$，则 $\tan\alpha=$_____.

9.【2017 北京理，12】在平面直角坐标系 xOy 中，角α与角β均以 Ox 为始边，它们的终边关于 y 轴对称.若 $\sin\alpha=\frac{1}{3}$，$\cos(\alpha-\beta)=$_____.

10.【2018 年全国普通高等学校招生统一考试数学(江苏卷)】已知α,β为锐角，$\tan\alpha=\frac{4}{3}$,$\cos(\alpha+\beta)=-\frac{\sqrt{5}}{5}$.（1）求 $\cos 2\alpha$的值；（2）求 $\tan(\alpha-\beta)$的值.

11.【2018 年全国普通高等学校招生统一考试数学（浙江卷）】已知角α的顶点与原点 O 重合，始边与 x 轴的非负半轴重合，它的终边过点 P（$-\frac{3}{5}$，$-\frac{4}{5}$）.

（I）求 sin（α+π）的值；

（II）若角β满足 sin（α+β）=$\frac{5}{13}$，求 cosβ的值.

【反馈练习】

1．已知 $\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{3\sqrt{2}}{10}(0<\alpha<\pi)$，则 $\frac{\sin(\pi-2\alpha)}{\sin\alpha+\cos\alpha}=$（　　）

A. $-\frac{2\sqrt{7}}{21}$　　B. $-\frac{16\sqrt{41}}{205}$　　C. $\frac{16\sqrt{41}}{205}$　　D. $\frac{2\sqrt{7}}{21}$

【来源】湖南省永州市 2021 届高三高考押题卷数学试题（一）

2．已知 $\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{3}$，则 $\sin\left(2\alpha-\frac{\pi}{6}\right)$ 的值为（　　）

A．$\frac{1}{3}$　　B．$\frac{1}{9}$　　C．$-\frac{7}{9}$　　D．$\frac{7}{9}$

【来源】江苏省南通学科基地 2021 届高三高考数学全真模拟试题（五）

3．若 $\tan\theta=-2$，则 $\frac{\sin\theta(1+\sin 2\theta)}{\sin\theta+\cos\theta}=$（　　）

A．$-\frac{6}{5}$　　B．$-\frac{2}{5}$　　C．$\frac{2}{5}$　　D．$\frac{6}{5}$

【来源】专题 5.8—三角恒等变换 2-2022 届高三数学一轮复习精讲精练

4．已知 α,β 为锐角，$\tan\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{3},\tan\left(\frac{\pi}{12}-\beta\right)=\frac{1}{2}$，则 $\tan(\alpha+2\beta)=$（　　）

A．$-\frac{9}{13}$　　B．$-\frac{13}{9}$　　C．$\frac{13}{9}$　　D．$\frac{9}{13}$

【来源】湖南省衡阳市第八中学 2021 届高三下学期考前预测（二）数学试题

5．设 $a=\sin^2 46°$，$b=\cos^2 35°-\sin^2 35°$，$c=\frac{\tan 32°}{1-\tan^2 32°}$，则 a，b，c 的大小关系为（　　）

A．$b<c<a$　　B．$c<a<b$

C．$a<b<c$　　D．$b<a<c$

【来源】江苏省淮安市 2021 届高三下学期 5 月模拟数学试题

6．若 $\cos\left(\frac{\pi}{6}-\alpha\right)=\frac{1}{3}$，则 $\cos\left(\frac{2\pi}{3}+2\alpha\right)=$（　　）

A．$\frac{2}{9}$　　B．$-\frac{2}{9}$　　C．$\frac{7}{9}$　　D．$-\frac{7}{9}$

【来源】安徽省宿州市泗县第一中学 2021 届高三下学期最后一卷文科数学试题

7．已知角 θ 满足 $\sin\theta\cos\theta(\sin\theta+\cos\theta)=\frac{\sqrt{2}}{2}$，则 $\tan\left(\frac{\theta}{2}-\frac{3\pi}{8}\right)=$（　　）

A．$\frac{1}{2}$　　B．$\frac{\sqrt{2}}{2}$　　C．$-\frac{\sqrt{2}}{2}$　　D．-1

【来源】河南省商丘市第一高级中学 2020-2021 学年高三 5 月月考理科数学试题

8．已知 $\sin\alpha+\cos\alpha=\frac{1}{2}$，则 $\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)=$（　　）

A．$\frac{1}{9}$　　B．$\frac{1}{8}$　　C．$\frac{3}{8}$　　D．$\frac{2}{9}$

【来源】甘肃省天水市第一中学 2020-2021 学年高三下学期第九次模考数学（理）试题

9．已知 $\cos\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)=-\frac{3}{5}$，$-\pi<a<0$，则 $\cos\alpha=$（　　）

A．$\frac{\sqrt{2}}{10}$　　B．$-\frac{\sqrt{2}}{10}$　　C．$\frac{7\sqrt{2}}{10}$　　D．$-\frac{7\sqrt{2}}{10}$

【来源】浙江省宁波市效实中学 2021 届高三下学期高考模拟测试数学试题

10．已知 $m=2\sin 18°$，若 $m^2+n=4$，则 $\frac{1-2\cos^2 153°}{m\sqrt{n}}=$（　　）

A．$-\frac{1}{4}$　　B．$-\frac{1}{2}$　　C．$\frac{1}{4}$　　D．$\frac{1}{2}$

【来源】云南省昆明市第一中学 2021 届高三第九次考前适应性训练数学（理）试题

11．已知 $\alpha\in\left(-\frac{\pi}{2},0\right)$，$2\sin 2\alpha+1=\cos 2\alpha$，则 $\frac{1-\tan\frac{\alpha}{2}}{1+\tan\frac{\alpha}{2}}=$（　　）

A．$2\pm\sqrt{5}$　　B．$3+\sqrt{5}$　　C．$2+\sqrt{5}$　　D．$2+\sqrt{6}$

【来源】河南省安阳市 2021 届高三三模拟考试理科数学试题

12．若 $\sin\left(\frac{5}{4}\pi+\theta\right)=-\frac{3}{5}$，则 $\sin 2\theta$ 的值为（　　）

A．$\frac{7}{25}$　　B．$\frac{1}{5}$　　C．$-\frac{1}{5}$　　D．$-\frac{7}{25}$

【来源】贵州省毕节市 2021 届高三二模数学（理）试题

13．已知 $\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{3}$，则 $\cos\left(\frac{\pi}{3}-2\alpha\right)=$（　　）

A．$-\frac{7}{9}$　　B．$-\frac{2}{3}$　　C．$\frac{2}{3}$　　D．$\frac{7}{9}$

【来源】四川省雅安市 2021 届高三三模数学（理）试题

14．已知 $\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{3}$，则 $\cos\left(2\alpha+\frac{\pi}{3}\right)=$（　　）

A．$\frac{7}{9}$　　B．$-\frac{7}{9}$　　C．$\frac{8}{9}$　　D．$-\frac{8}{9}$

【来源】云南省红河州 2021 届高三三模数学（理）试题

15．设 $\sin 20°=m$，$\cos 20°=n$，化简 $\frac{\tan 10°+1}{1-\tan 10°}-\frac{1}{1-2\sin^2 10°}=$（　　）

A．$\frac{m}{n}$　　B．$-\frac{m}{n}$　　C．$\frac{n}{m}$　　D．$-\frac{n}{m}$

【来源】三角恒等变换 2-2022 届高三数学一轮复习精讲精练

16．已知 $\frac{2\cos\left(2\alpha+\frac{\pi}{3}\right)}{\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)}=7$，则 $\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{3}\right)=$（　　）

A．$-\frac{1}{2}$　　B．$\frac{1}{4}$　　C．$\frac{2}{7}$　　D．$\frac{2}{5}$

【来源】河南省安阳市 2021 届高三一模数学（理）试题

17．已知$\cos\alpha+\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{3}\right)=1$，则$\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{6}\right)=$（　　）

A．$\frac{1}{3}$　　B．$\frac{1}{2}$　　C．$\frac{\sqrt{2}}{2}$　　D．$\frac{\sqrt{3}}{3}$

【来源】内蒙古包头市 2021 届高三第二次模拟考试数学（文）试题

18．已知$\sqrt{3}\sin\alpha=\frac{2\sqrt{3}}{3}+\cos\alpha$，则$\sin\left(2\alpha+\frac{\pi}{6}\right)=$（　　）

A．$\frac{1}{3}$　　B．$-\frac{1}{3}$　　C．$\frac{2}{3}$　　D．$-\frac{2}{3}$

【来源】陕西省西安交通大学附属中学 2021 届高三下学期第四次模拟考试理科数学试题

19．已知$\alpha\in(\pi,\frac{3\pi}{2})$，若$\frac{1}{2}\sin 2\alpha+\sin\alpha+\cos\alpha=-\frac{23}{25}$，则$\sin\alpha+\cos\alpha=$（　　）

A．$-\frac{7}{5}$或$-\frac{3}{5}$　　B．$-\frac{7}{5}$　　C．$-\frac{3}{5}$　　D．$\frac{3}{5}$

【来源】文科数学-学科网 2021 年高三 5 月大联考（新课标Ⅰ卷）

20．已知$\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{3}{4}$，则$\sin\left(2\alpha+\frac{\pi}{6}\right)+\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}-\frac{\pi}{12}\right)$的值为（　　）

A．$\frac{1}{4}$　　B．$\frac{1}{2}$　　C．$\frac{3\sqrt{7}}{8}$　　D．1

【来源】江苏省南京市 2021 届高三下学期 5 月第三次模拟考试数学试题

21．已知角α满足$\frac{1+\cos 2\alpha}{1+\sin 2\alpha}=\frac{1}{2}$，则$\tan\alpha=$（　　）

A．1或−3　　B．1　　C．−1或3　　D．3

【来源】陕西省西安中学 2021 届高三下学期第九次模拟考试文科数学试题

22．已知$x\in\left(0,\frac{\pi}{8}\right)$，$\sin x\cos^3 x-\cos x\sin^3 x=\frac{1}{8}$，则$\tan 4x=$（　　）

A．$\sqrt{3}$　　B．$\frac{\sqrt{3}}{2}$　　C．$\frac{\sqrt{3}}{3}$　　D．1

【来源】宁夏回族自治区石嘴山市 2021 届高三二模数学（理）试题

23．已知$\sqrt{2}\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)=\sin\alpha\tan\frac{\alpha}{2}-1$，则$\tan\alpha=$（　　）

A．−2　　B．2　　C．$-\frac{1}{2}$　　D．$\frac{1}{2}$

【来源】宁夏中卫市 2021 届高三第二次优秀生联考数学（理）试题

24.【九师联盟 2018-2019 学年高三押题信息卷】若 $\sin\alpha=2\cos\alpha$，则 $\dfrac{\sin^2 2\alpha-2\cos^2 2\alpha}{\sin(\pi-4\alpha)}=$_____.

25.【2020 届河北省衡水中学高三上学期七调】已知 $\tan\alpha=\dfrac{1}{2}$，则 $\cos^2\alpha+\sin 2\alpha$ 的结果为____.

26.【辽宁省辽南协作校 2020 届高三（5 月份)高考数学（理科)模拟】若 $\dfrac{\sin\alpha}{\sin^2\dfrac{\alpha}{2}}=\dfrac{1}{3}$，则 $\dfrac{2\cos\alpha+3\sin\alpha-2}{\sin^2\dfrac{\alpha}{2}}=$_____.

27.【2020 届重庆市第八中学高三 6 月三诊】若 $\alpha\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$，且 $\sin\alpha+2\cos\alpha=\dfrac{\sqrt{10}}{2}$，则 $\tan\left(\alpha+\dfrac{\pi}{4}\right)=$_____.

28.【吉林省示范高中 2020 届高三第四次模拟】若 $\tan\alpha+\tan\beta=-\tan(\alpha+\beta)=3$，则 $\tan\alpha\tan\beta=$____.

第 16 讲　三角函数的图象和性质问题

【高考地位】

近几年高考降低了对三角变换的考查要求，而加强了对三角函数的图象与性质的考查，因为函数的性质是研究函数的一个重要内容，是学习高等数学和应用技术学科的基础，又是解决生产实际问题的工具，因此三角函数的性质是高考的重点和难点。要充分运用数形结合的思想，把图象与性质结合起来，同时也要能利用函数的性质来描绘函数的图象，这样既有利于掌握函数的图象与性质，又能熟练地运用数形结合的思想方法。在高考各种题型均有出现如选择题、填空题和解答题，其试题难度属中档题.

.类型一　求三角函数的单调区间

万能模板	内　　容
使用场景	一般三角函数类型
解题模板	第一步　先将函数式化为基本三角函数的标准式，要特别注意参数 A,ω 的正负； 第二步　利用三角函数的辅助角公式一般将其化为同名函数，且在同一单调区间； 第三步　运用三角函数的图象与性质确定其单调区间.

例 1 设向量 $\vec{a}=\left(\cos\frac{\pi}{4},-\cos 2x\right),\vec{b}=\left(\sin 2x,\sin\frac{\pi}{4}\right)$，$f\left(x\right)=\vec{a}\cdot\vec{b}$.

（1）求 $f\left(x\right)$ 的最小正周期；

（2）求 $f\left(x\right)$ 在区间 $\left[0,\pi\right]$ 上的单调递减区间.

【变式演练 1】【上海市虹口区 2021 届高三上学期一模】已知函数 $f(x)=A\sin(\omega x+\varphi)$（$A>0$，$\omega>0$）的图象与直线 $y=b(0<b<A)$ 的三个相邻交点的横坐标依次是 1、2、4，下列区间是函数 $f(x)$ 单调递增区间的是（　　）

A．$[0,3]$　　B．$[\frac{3}{2},3]$　　C．$[3,6]$　　D．$[3,\frac{9}{2}]$

【变式演练 2】【河南省信阳市 2021 届高三（10 月份）第一次质检数学（理科）】已知 $x=\frac{\pi}{4}$ 是函数 $f\left(x\right)=\sin\left(\omega x+\varphi\right)$（$0<\omega<3$，$0<\varphi<\pi$）的一个零点，将 $f\left(x\right)$ 的图象向右平移 $\frac{\pi}{12}$ 个单位长度，所得图象关于 y 轴对称，则函数 $f\left(x\right)$ 的单调递增区间是（　　）

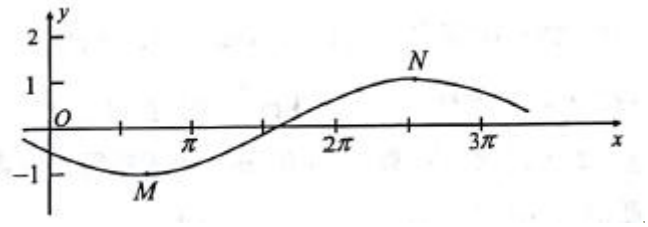
A．$\left[-\frac{3\pi}{4}+2k\pi,\frac{\pi}{12}+2k\pi\right]$，$k\in Z$　　B．$\left[-\frac{5\pi}{12}+\frac{4k\pi}{3},\frac{\pi}{4}+\frac{4k\pi}{3}\right]$，$k\in Z$

C．$\left[-\frac{5\pi}{12}+2k\pi,\frac{\pi}{4}+2k\pi\right]$，$k\in Z$　　D．$\left[-\frac{3\pi}{4}+\frac{4k\pi}{3},-\frac{\pi}{12}+\frac{4k\pi}{3}\right]$，$k\in Z$

类型二　由 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ 的图象求其函数式

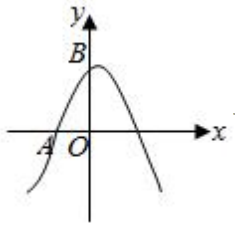
万能模板	内　　容
使用场景	一般函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ 求其函数式
解题模板	第一步　观察所给的图象及其图象特征如振幅、周期、与 x 轴交点坐标等； 第二步　利用特殊点代入函数解析式计算得出参数 A,ω,φ 中一个或两个或三个； 第三步　要从图象的升降情况找准第一个零点的位置，并进一步地确定参数； 第四步　得出结论.

例 2 已知函数 $f\left(x\right)=A\sin\left(\omega x+\varphi\right)\left(A>0,\omega>0,\left|\varphi\right|<\pi\right)$ 的部分图象如图所示，其中 $M\left(2,-1\right),N\left(8,1\right)$ 分别是函数 $f\left(x\right)$ 的图象的一个最低点和一个最高点，则 $\frac{\omega+\varphi}{A}=$（　）



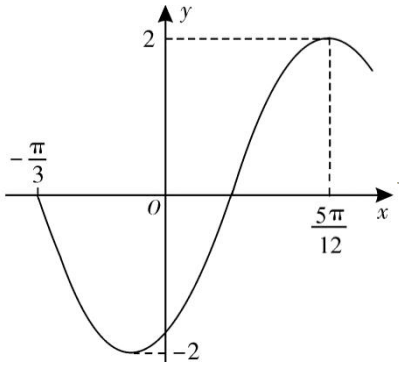
A. $-\frac{2\pi}{3}$　　B. $-\frac{\pi}{6}$　　C. $\frac{\pi}{6}$　　D. $\frac{2\pi}{3}$

【变式演练 3】【江西省南昌市师大附中 2021 届高三数学（文科）模拟】如图，已知函数 $f(x)=\sqrt{3}\cos(\omega x+\phi)\left(\omega>0,-\frac{\pi}{2}<\phi<0\right)$ 的部分图象与 x 轴的一个交点为 $A\left(-\frac{\pi}{6},0\right)$，与 y 轴的交点为 $B\left(0,\frac{3}{2}\right)$ 那么 $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=$（　　）



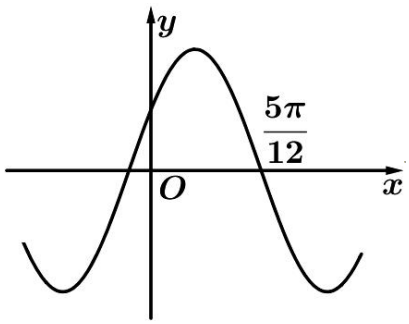
A. $\frac{3}{2}$　　B. $\frac{1}{2}$　　C. $-\frac{1}{2}$　　D. $-\frac{3}{2}$

【变式演练 4】已知函数 $f(x)=2\cos(\omega x-\varphi)(\omega>0,-\pi<\varphi<\pi)$ 的部分图象如下图所示，则 $\varphi=$（　　）



A. $-\frac{5\pi}{6}$　　B. $-\frac{\pi}{6}$　　C. $\frac{\pi}{6}$　　D. $\frac{5\pi}{6}$

【变式演练 5】函数 $f(x)=2\sin\left(\omega x+\frac{\pi}{6}\right)$（$\omega>0$）的图象如图，下列说法正确的是（　　）



A．$f(x)$的周期为2π

B．$f(x)$的图象关于$\left(-\frac{\pi}{6},0\right)$对称

C．$f(x)$的图象关于$x=\frac{\pi}{6}$对称

D．将$f(x)$图象上所有点向左平移$\frac{\pi}{12}$个单位长度得到$y=2\sin 2x$的图象

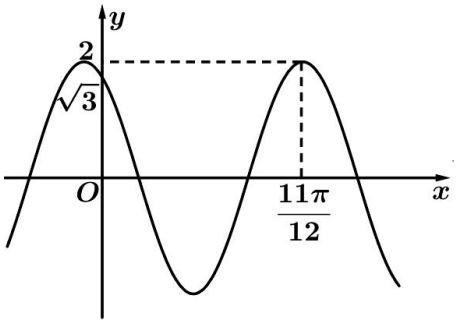
【来源】四川省宜宾市 2021 届高三三模数学（文）试题

【变式演练 6】函数$f(x)=2\sin(\omega x+\varphi)(\omega>0,0<\varphi<\pi)$的图象如图，把函数$f(x)$的图象上所有的点向右平移$\frac{\pi}{6}$个单位长度，可得到函数$y=g(x)$的图象，下列结论中：

①$\varphi=\frac{\pi}{3}$；②函数$g(x)$的最小正周期为π；

③函数$g(x)$在区间$\left[-\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{12}\right]$上单调递增；④函数$g(x)$关于点$\left(-\frac{\pi}{3},0\right)$中心对称

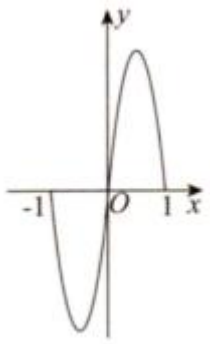
其中正确结论的个数是（　　）.



A．4　　B．3　　C．2　　D．1

【来源】天津市南大奥宇学校 2021 届高三下学期高考模拟数学试题

【变式演练 7】已知函数$y=f(x)$的图象如图所示，则$y=f(x)$可以是（　　）



A．$f(x)=e^{\sin \pi x}-e^{-\sin \pi x}$　　B．$f(x)=e^{-\sin \pi x}-e^{\sin \pi x}$

C．$f(x)=\sin(\pi x-\pi)$　　D．$f(x)=\cos(\pi x-\pi)$

【来源】河南省洛阳市孟津县第一高级中学 2021 届高三下学期 4 月文科数学调研试题

类型三　求三角函数的周期

万能模板	内　　容
使用场景	一般三角函数类型
解题模板	第一步　利用恒等变换将其化成“$y=A\sin(\omega x+\phi)$ 、 $y=A\cos(\omega x+\phi)$ ”的形式； 第二步　运用周期的计算公式 $T=\dfrac{2\pi}{\omega}$ 直接计算可得所求. 第三步　得出结论.

例 3　若函数$f(x)=2\sin\omega x(\omega>0)$在$(0,2\pi)$上的图象与直线$y=2$恰有两个交点.则$\omega$的取值范围是（　）

A. $\left(\frac{5}{4},\frac{9}{4}\right]$　B. $\left(\frac{5}{4},\frac{7}{4}\right]$　C. $\left(1,\frac{5}{4}\right]$　D. $\left(\frac{3}{4},\frac{5}{4}\right]$

【变式演练 8】【广西南宁市第二中学 2021 届高三上学期数学文科 10 月份考试】已知函数

$f(x)=2\sqrt{3}\sin x\cos x+2\cos^2 x+1$，则（　）

A．$f(x)$ 的最小正周期为π，最大值为3　　B．$f(x)$ 的最小正周期为π，最大值为4

C．$f(x)$ 的最小正周期为2π，最大值为3　　D．$f(x)$ 的最小正周期为2π，最大值为4

【变式演练 9】已知定义在 **R** 上的奇函数 $f(x)$ 满足 $f(\pi+x)=f(-x)$，当 $x\in(0,\pi)$ 时，$f(x)=\dfrac{\sin x}{x^2-\pi x+\pi}$，则下列结论正确的是（　　）

A．π 是函数 $f(x)$ 的周期

B．函数 $f(x)$ 在 **R** 上的最大值为 2

C．函数 $f(x)$ 在 $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ 上单调递减

D．方程 $f(x)-\frac{1}{2}=0$ 在 $x\in(-10,10)$ 上的所有实根之和为 3π

【来源】山东省烟台教科院 2021 届高三三模数学试题

【变式演练 10】已知函数 $f(x)=\sin(\omega x+\varphi)$（$\omega>0$，$0<\varphi<\pi$），$f(0)=\frac{\sqrt{2}}{2}$，$f\left(\frac{\pi}{4}\right)=0$，$f(x)$ 在 $\left(0,\frac{\pi}{4}\right)$ 内有相邻两个最值点，且最小值点距离 y 轴近，则 ω 的最小正整数值为（　　）

A．5　　B．7　　C．9　　D．10

【来源】黑龙江省大庆铁人中学 2021 届高三下学期第一次模拟数学（文）试题

【变式演练 11】已知函数 $f(x)=2\cos x(\sin x-\cos x)+1$.

（1）求函数 $f(x)$ 的最小正周期和单调增区间；

（2）ΔABC 中，锐角 A 满足 $f(A)=1$，$b=\sqrt{2}$，$c=3$，求 a 的值.

【高考再现】

1．（2021·全国高考真题）下列区间中，函数 $f(x)=7\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)$ 单调递增的区间是（　　）

A．$\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$　　B．$\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$　　C．$\left(\pi,\frac{3\pi}{2}\right)$　　D．$\left(\frac{3\pi}{2},2\pi\right)$

2．（2021·北京高考真题）函数 $f(x)=\cos x-\cos 2x$，试判断函数的奇偶性及最大值（　　）

A．奇函数，最大值为 2　　B．偶函数，最大值为 2

C．奇函数，最大值为 $\frac{9}{8}$　　D．偶函数，最大值为 $\frac{9}{8}$

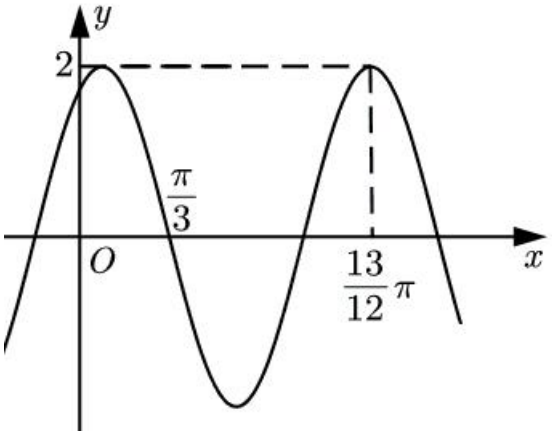
3．（2021·全国高考真题（理））把函数 $y=f(x)$ 图象上所有点的横坐标缩短到原来的 $\frac{1}{2}$ 倍，纵坐标不变，再把所得曲线向右平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位长度，得到函数 $y=\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$ 的图象，则 $f(x)=$（　　）

A．$\sin\left(\frac{x}{2}-\frac{7x}{12}\right)$　　B．$\sin\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{12}\right)$

C．$\sin\left(2x-\frac{7\pi}{12}\right)$　　D．$\sin\left(2x+\frac{\pi}{12}\right)$

4．（2021·全国高考真题（理））已知函数 $f(x)=2\cos(\omega x+\varphi)$ 的部分图象如图所示，则满足条件

$\left(f(x)-f\left(-\frac{7\pi}{4}\right)\right)\left(f(x)-f\left(\frac{4\pi}{3}\right)\right)>0$ 的最小正整数 x 为_____.

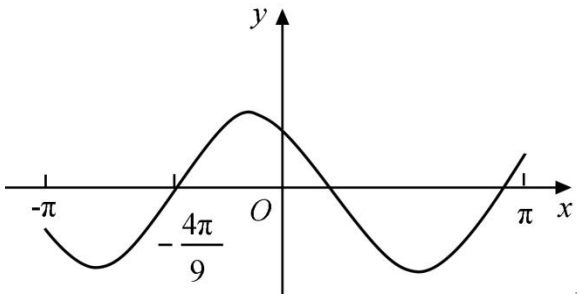


5.（2021·浙江高考真题）设函数 $f(x)=\sin x+\cos x(x\in\mathrm{R})$.

（1）求函数 $y=\left[f\left(x+\frac{\pi}{2}\right)\right]^2$ 的最小正周期；

（2）求函数 $y=f(x)f\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$ 在 $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 上的最大值.

6.【2020 年高考全国 I 卷文理数 7】设函数 $f(x)=\cos\left(\omega x+\frac{\pi}{6}\right)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 的图象大致如下图，则 $f(x)$ 的最小正周期为 （ ）



A. $\frac{10\pi}{9}$　　B. $\frac{7\pi}{6}$　　C. $\frac{4\pi}{3}$　　D. $\frac{3\pi}{2}$

7.【2020 年高考全国III卷文数 12】已知函数 $f(x)=\sin x+\frac{1}{\sin x}$，则 （ ）

A. $f(x)$ 的最小值为 2　　B. $f(x)$ 的图象关于 y 轴对称

C. $f(x)$ 的图象关于直线 $x=\pi$ 对称　　D. $f(x)$ 的图象关于直线 $x=\frac{\pi}{2}$ 对称

8.【2020 年高考天津卷 8】已知函数 $f(x)=\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$．给出下列结论：

①$f(x)$ 的最小正周期为 2π；

②$f\left(\frac{\pi}{2}\right)$ 是 $f(x)$ 的最大值；

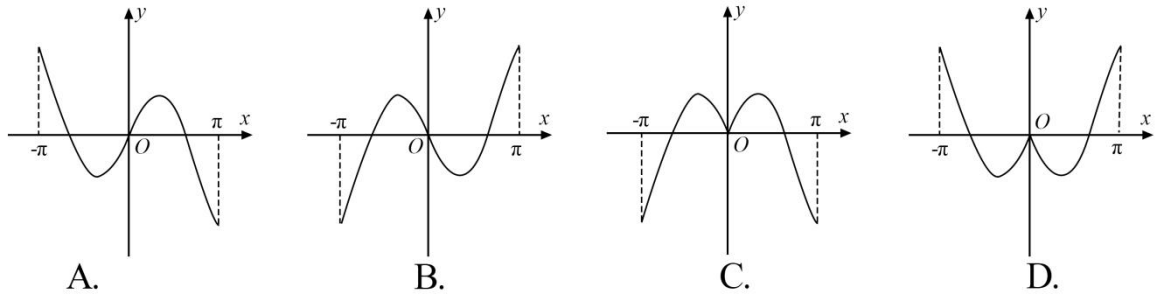
③把函数 $y=\sin x$ 的图象上所有点向左平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位长度，可得到函数 $y=f(x)$ 的图象．

其中所有正确结论的序号是

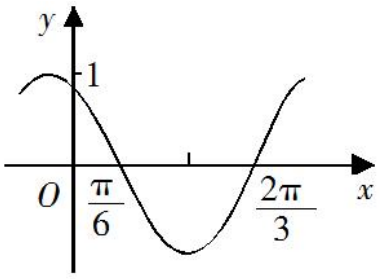
A．①　　B．①③　　C．②③　　D．①②③

9.【2020 年高考浙江卷 4】函数 $y=x\cos x+\sin x$ 在区间 $[-\pi,\pi]$ 的图象大致为　　（　　）

A.　　B.　　C.　　D.



10.【2020 年高考山东卷 10】右图是函数 $y=\sin(\omega x+\varphi)$ 的部分图象，则 $\sin(\omega x+\varphi)=$　　（　　）



A．$\sin(x+\frac{\pi}{3})$　　B．$\sin(\frac{\pi}{3}-2x)$　　C．$\cos(2x+\frac{\pi}{6})$　　D．$\cos(\frac{5\pi}{6}-2x)$

11.【2020 年高考全国Ⅲ卷理数 16】关于函数 $f(x)=\sin x+\frac{1}{\sin x}$．

①$f(x)$ 的图象关于 y 轴对称；②$f(x)$ 的图象关于原点对称；

③$f(x)$ 的图象关于 $x=\frac{\pi}{2}$ 对称；④$f(x)$ 的最小值为 2．其中所有真命题的序号是_____．

12.【2020 年高考江苏卷 10】将函数 $y=3\sin(2x+\frac{\pi}{4})$ 的图象向右平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度，则平移后的图象中与 y 轴最近的对称轴的方程是_____．

【反馈练习】

1.【贵州省安顺市 2021 届全市高三年级第一次教学质量监测统一考试理】将函数 $f\left(x\right)=\sin 2x+\sqrt{3}\cos 2x$ 的图象沿 x 轴向左平移 $\varphi\left(\varphi>0\right)$ 个单位后得到函数 $g\left(x\right)$，若 $g\left(x\right)$ 为偶函数，则 φ 的最小值为（　　）

A．$\frac{\pi}{12}$　　B．$\frac{\pi}{6}$　　C．$\frac{\pi}{4}$　　D．$\frac{5\pi}{12}$

2.【广西北海市 2021 届高三第一次模拟考试数学（理）】已知函数 $f(x)=\sqrt{3}\sin(\omega x+\varphi)\left(\omega>0,|\varphi|<\frac{\pi}{2}\right)$，当 $f\left(x_1\right)f\left(x_2\right)=3$ 时，$\left|x_1-x_2\right|_{\min}=\pi$，$f\left(0\right)=\frac{3}{2}$，则下列结论正确的是（　　）

A．函数 $f(x)$ 的最小正周期为 2π．

B．函数 $f(x)$ 的图象的一个对称中心为 $\left(\frac{\pi}{6},0\right)$

C．函数 $f(x)$ 的图象的一条对称轴方程为 $x=\frac{\pi}{3}$

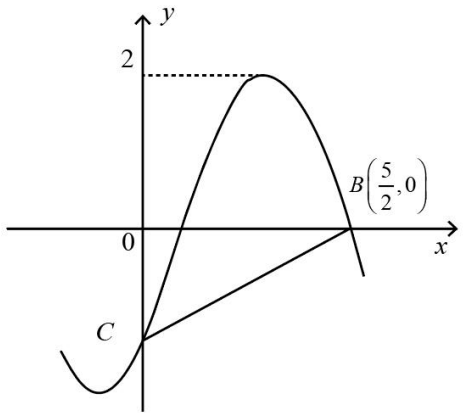
D．函数 $f(x)$ 的图象可以由函数 $y=\sqrt{3}\cos\omega x$ 的图象向右平移 $\frac{\pi}{12}$ 个单位长度得到

3.【云南省昆明市官渡区 2021 届高三上学期两校联考】已知函数 $f(x)=A\sin(\omega x+\varphi)+b(A>0,\omega>0,0\le\varphi<2\pi)$ 在同一周期内有最高点 $\left(\frac{\pi}{12},1\right)$ 和最低点 $\left(\frac{7\pi}{12},-3\right)$，则此函数在 $\left[-\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{6}\right]$ 的值域为（　　）

A．$\left[-\sqrt{3}-1,1\right]$　　B．$\left[-\sqrt{3}-1,\sqrt{3}-1\right]$

C．$\left[-\sqrt{3}-1,2\right]$　　D．$\left[\sqrt{3}-1,2\right]$

4.【2021 届全国著名重点中学新高考冲刺】函数 $f\left(x\right)=A\sin\left(\omega x+\varphi\right)\left(A>0,\omega>0,|\varphi|<\frac{\pi}{2}\right)$ 的部分图象如图所示，C 为函数 $f\left(x\right)$ 的图象与 y 轴的交点，B 为函数 $f\left(x\right)$ 的图象与 x 轴的一个交点，且 $\left|BC\right|=\frac{\sqrt{33}}{2}$．若函数 $f\left(x\right)$ 的图象与直线 $y=\frac{5}{4}$ 在 $\left(0,3\right)$ 内的两个交点的坐标分别为 $\left(x_1,y_1\right)$ 和 $\left(x_2,y_1\right)$，则 $f\left(x_1+x_2\right)=$（　　）



A．-1　　B．$-\sqrt{2}$　　C．$-\sqrt{3}$　　D．-2

5.【云南省曲靖市第一中学 2021 届高三上学期高考复习质量监测】将函数 $f(x)=\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{5}\right)$ 的图象向右平移 $\dfrac{\pi}{10}$ 个单位长度后得到函数 $y=g(x)$ 的图象，对于函数 $y=g(x)$ 有以下四个判断：

①该函数的解析式为 $y=2\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{10}\right)$；

②该函数图象关于点 $\left(\dfrac{\pi}{2},0\right)$ 对称；

③该函数在区间 $\left[-\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{4}\right]$ 上单调递增；

④该函数在区间 $\left[\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{2}\right]$ 上单调递增.

其中，正确判断的序号是（　　）

A．②③　　B．①②　　C．②④　　D．③④

6.【江西省鹰潭市 2021 届高三第二次模拟考理】将函数 $y=\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{6}\right)$ 的图象向右平移 $\dfrac{\pi}{3}$ 个单位，在向上平移一个单位，得到 $g\left(x\right)$ 的图象.若 $g\left(x_1\right)g\left(x_2\right)=4$，且 $x_1,x_2\in\left[-\pi,\pi\right]$，则 x_1-2x_2 的最大值为（　　）

A．$\dfrac{9\pi}{2}$　　B．$\dfrac{7\pi}{2}$　　C．$\dfrac{5\pi}{2}$　　D．$\dfrac{3\pi}{2}$

7.【北京市2020届高三数学高考考前冲刺模拟】将函数$f(x)=\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$的图象向右平移$\varphi(\varphi>0)$个单位后，关于$y$轴对称，则$\varphi$的可取值为（　　）

A．$\frac{\pi}{6}$　　B．$\frac{\pi}{4}$　　C．$\frac{\pi}{3}$　　D．$\frac{\pi}{2}$

8.【吉林省梅河口五中、辽源五中、四平四中2020-2021学年高三（上）第一次联考】若函数$f(x)=\sin^4 x+\cos^4 x$，则此函数的图象的对称中心为（　　）

A．$(\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{4},\ \frac{3}{4})(k\in Z)$　　B．$(\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{4},\ 0)(k\in Z)$

C．$(\frac{\pi}{8}+\frac{k\pi}{4},\ \frac{3}{4})(k\in Z)$　　D．$(\frac{\pi}{8}+\frac{k\pi}{4},\ 0)(k\in Z)$

9.【湖南省长郡中学、雅礼中学、河南省南阳一中、信阳高中等湘豫名校2020届高三（5月份）】设函数$f\left(x\right)=\sin\left(\omega x-\frac{\pi}{6}\right)\left(\omega\in\mathbf{N}^*\right)$在$\left[\frac{5\pi}{12},\frac{5\pi}{6}\right]$上单调递减，则下述三个结论：

①$f\left(x\right)$在$\left[\frac{\pi}{2},\pi\right]$上的最大值为$\frac{1}{2}$，最小值为$-1$；

②$f\left(x\right)$在$\left[0,2\pi\right]$上有且仅有4个零点；

③$f\left(x\right)$关于$x=\frac{7\pi}{12}$轴对称；

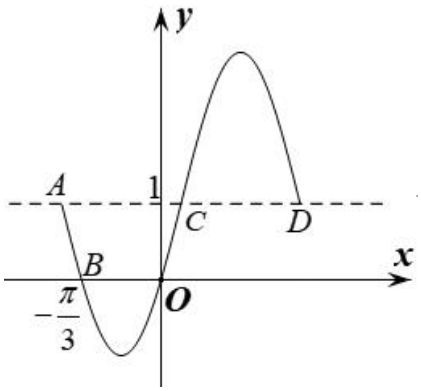
其中所有正确结论的编号是（　　）

A．①②　　B．①③　　C．②③　　D．①②③

10.【黑龙江省大庆实验中学2020-2021学年高三上学期第一次月考】已知函数$f(x)=2\sin(\omega x+\varphi)+1\left(\omega>0,|\varphi|<\frac{\pi}{2}\right)$，$f(\alpha)=-1$，$f(\beta)=1$，若$|\alpha-\beta|$的最小值$\frac{3\pi}{4}$，且$f\left(x\right)$的图象关于点$\left(\frac{\pi}{4},1\right)$对称，则函数$f\left(x\right)$的所有对称轴中，离原点最近的对称轴方程为（　　）

A．$x=-\frac{3\pi}{4}$　　B．$x=\frac{\pi}{4}$　　C．$x=-\frac{\pi}{2}$　　D．$x=\frac{\pi}{12}$

11．已知$\omega>0$且为整数，且$|\varphi|<\frac{\pi}{2}$，函数$f(x)=2\sin(\omega x+\varphi)+1$的图象如图所示，$A$、$C$，$D$是$f(x)$的图象与$y=1$相邻的三个交点，与$x$轴交于相邻的两个交点$O$、$B$，若在区间$(a,b)$上，$f(x)$有2020个零点，则$b-a$的最大值为（　　）



A．2020π　　B．$\frac{3034\pi}{3}$

C．$\frac{3032\pi}{3}$　　D．1012π

【来源】河南省洛阳市孟津县第一高级中学 2021 届高三下学期 4 月文科数学调研试题

12．已知函数 $f(x)=\sin(2x+\theta)\left(-\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$ 的图象经过点 $P\left(0,\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$，则下列命题是真命题的是（　　）

A．函数 $f(x)$ 在 $\left(-\frac{5\pi}{13},\frac{5\pi}{13}\right)$ 上单调递增.

B．函数 $f(x)$ 的图象的一个对称中心是 $\left(\frac{\pi}{6},0\right)$.

C．-2π 是函数 $f(x)$ 的一个周期.

D．函数 $f(x)$ 的图象的对称轴方程为 $x=k\pi+\frac{\pi}{6}$（$k\in Z$）.

【来源】云南省曲靖市 2021 届高三二模数学（文）试题

13．已知函数 $f(x)=\sin(2x+\varphi)$，其中 φ 为实数，若 $f(x)\le\left|f\left(\frac{\pi}{6}\right)\right|$ 对 $x\in\mathbf{R}$ 恒成立，且 $f\left(\frac{\pi}{2}\right)>f(\pi)$，则 $f(x)$ 的单调递增区间是（　　）

A．$[k\pi-\frac{\pi}{3},k\pi+\frac{\pi}{6}](k\in\mathbf{Z})$　　B．$[k\pi+\frac{\pi}{6},k\pi+\frac{2\pi}{3}](k\in\mathbf{Z})$

C．$[k\pi,k\pi+\frac{\pi}{2}](k\in\mathbf{Z})$　　D．$[k\pi-\frac{\pi}{2},k\pi](k\in\mathbf{Z})$

【来源】解密 06 三角函数的图象与性质（讲义）-【高频考点解密】2021 年高考数学（文）二轮复习讲义分层训练

14．已知 $f(x)=\sqrt{3}\sin x+3\cos x$ 在 $[-a,a]$ 上单调递增，则 a 的最大值为（　　）

A．$\frac{\pi}{6}$　　B．$\frac{\pi}{3}$

C．$\frac{5\pi}{6}$　　D．$\frac{2\pi}{3}$

【来源】贵州省贵阳市第一中学 2021 届高三下学期高考适应性月考卷（六）数学（文）试题

15．已知函数 $f(x)=\sin \omega x(\omega>0)$ 在区间 $\left[-\frac{2\pi}{3},\frac{\pi}{3}\right]$ 上单调递增，且 $f(x)=1$ 在区间 $[0,2\pi]$ 上有且仅有一解，则 ω 的取值范围是（　）

A．$\left(0,\frac{3}{4}\right]$　　B．$\left(\frac{3}{4},\frac{3}{2}\right)$　　C．$\left[\frac{1}{4},\frac{5}{4}\right)$　　D．$\left[\frac{1}{4},\frac{3}{4}\right]$

【来源】甘肃省民乐县第一中学 2021 届高三押题卷（二）数学（理）试题

16．已知函数 $f(x)=A\cos\left(\omega x+\frac{\pi}{6}\right)(A>0,\omega>0)$，若函数 $f(x)$ 在 $[0,2\pi]$ 上有且仅有 4 个零点和1个最大值点，则 ω 的取值范围为（　　）

A．$\left[\frac{5}{3},\frac{23}{12}\right)$　　B．$\left[\frac{11}{12},\frac{23}{12}\right)$　　C．$\left[\frac{5}{3},\frac{16}{3}\right)$　　D．$\left[\frac{23}{12},\frac{13}{6}\right)$

【来源】文科数学-学科网 2021 年高三 5 月大联考考后强化卷（新课标III卷）

17．若函数 $f(x)=\sqrt{3}\sin\left(\omega x-\frac{\pi}{3}\right)(\omega>0)$ 在 $\left(-\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{4}\right)$ 上单调递增，则实数 ω 的取值范围为（　　）

A．$(0,3]$　　B．$\left(0,\frac{1}{2}\right]$　　C．$\left(0,\frac{1}{4}\right]$　　D．$\left(0,\frac{10}{3}\right]$

【来源】全国 II 卷 2021 届高三高考数学（理）冲刺预测试题

18．已知函数 $f(x)=\left|\sin\left(\frac{1}{3}x-\frac{\pi}{3}\right)\right|+\left|\cos\left(\frac{1}{3}x-\frac{\pi}{3}\right)\right|$，现有下列四个结论：

①函数 $f(x)$ 的一个周期为 $\frac{3\pi}{2}$；

②函数 $f(x)$ 在 $\left[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right]$ 上单调递增；

③直线 $x=-\frac{5\pi}{4}$ 是函数 $f(x)$ 图象的一条对称轴；

④函数 $f(x)$ 的值域为 $\left[1,\sqrt{2}\right]$.

所有正确结论的序号是（　　）

A．①②④　　B．①③　　C．①③④　　D．②④

【来源】全国 100 所名校 2021 年高考冲刺试卷（样卷一）文科数学试题

19.【四川省遂宁市 2021 届高三零诊考试】已知向量 $\vec{m}=(2\sin x,1)$，$\vec{n}=(\sqrt{3}\cos x-\sin x,2)$，设函数 $g(x)=\vec{m}\cdot\vec{n}$，$f(x)=e^x+g\left(-\frac{\pi}{12}\right)\cdot\sin x$．则下列对函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的描述正确的命题有_____（请写出全部正确命题的序号）

① $g(x)$ 的最大值为 3．

②$g(x)$在$\left(-\frac{\pi}{3},0\right)$上是增函数

③$g(x)$的图象关于点$\left(\frac{5\pi}{12},0\right)$对称

④$f\left(x\right)$在$\left(-\pi,+\infty\right)$上存在唯一极小值点$x_0$，且$-1<f(x_0)<0$

20.【云南、四川、贵州、西藏四省名校2021届高三第一次大联考】已知函数$f\left(x\right)=\sin x\cos 2x$，关于函数$y=f\left(x\right)$有下列命题：

①$f\left(\frac{\pi}{3}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{4}$；②$f\left(x\right)$的图象关于点$\left(\frac{\pi}{2},0\right)$对称；

③$f\left(x\right)$是周期为π的奇函数；④$f\left(x\right)$的图象关于直线$x=\frac{\pi}{2}$对称.

其中正确的有_____.（填写所有你认为正确命题的序号）

21.【上海市普陀区2021届高三上学期一模】设a为常数，函数$f(x)=a\sin 2x+\cos(2\pi-2x)+1$（$x\in\mathrm{R}$）

（1）设$a=\sqrt{3}$，求函数$y=f(x)$的单调递增区间及频率f；

（2）若函数$y=f(x)$为偶函数，求此函数的值域.

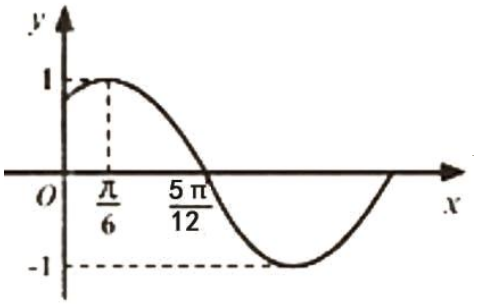
22.【吉林省汪清县第六中学2020-2021学年高三三模】已知函数

$f(x)=\sin^2 x-\cos^2 x-2\sqrt{3}\sin x\cos x(x\in R)$.

（1）求$f(\frac{2\pi}{3})$的值.

（2）求$f(x)$的最小正周期及单调递增区间.

23.【四川省遂宁市2021届高三零诊考试】已知函数$f(x)=M\sin(\omega x+\varphi)\left(M>0,|\varphi|<\frac{\pi}{2},\omega>0\right)$的部分图象如图所示.



（1）求函数 $f\left(x\right)$ 的解析式与对称中心；

（2）在 $\triangle ABC$ 中，角 A,B,C 的对边分别是 a,b,c，若 $b=2$，$(2a-c)\cos B=b\cos C$，当 $f\left(\dfrac{A}{2}\right)$ 取得最大值时，求 $\triangle ABC$ 的面积.

24.【吉林省梅河口五中、辽源五中、四平四中 2020-2021 学年高三（上）第一次联考】已知函数 $f(x)=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x+\cos^2 x$.

（1）求 $f(x)$ 的最小正周期及 $f(x)$ 的图象的对称轴方程；

（2）若 $x\in[-\dfrac{\pi}{4},\ \dfrac{\pi}{4}]$，求 $f(x)$ 的取值范围

第 17 讲　求三角函数最值的常见题型及解题策略

【高考地位】

三角函数的最值或相关量的取值范围的确定始终是三角函数中的热点问题之一，所涉及的知识广泛，综合性、灵活性较强。解这类问题时要注意思维的严密性，如三角函数值正负号的选取、角的范围的确定、各种情况的分类讨论、及各种隐含条件等等。求三角函数的最值常用方法有：配方法、化一法、数形结合法、换元法、基本不等式法等等。在高考各种题型均有出现如选择题、填空题和解答题，其试题难度属中档题.

方法一　化一法

万能模板	内　　容
使用场景	函数表达式形如 $f(x)=a\sin^2 x+b\cos^2 x+c\sin x\cos x+d$ 类型
解题模板	第一步　运用倍角公式、三角恒等变换等将所给的函数式化为形如 $y=a\sin x+b\cos x+c$ 形式； 第二步　利用辅助角公式 $a\sin x+b\cos x=\sqrt{a^2+b^2}\sin(x+\varphi)$ 化为只含有一个函数名的形式； 第三步　利用正弦函数或余弦函数的有界性来确定三角函数的最值.

例 1　已知函数 $f\left(x\right)=\sqrt{3}\sin 2x+2\sin\left(\dfrac{\pi}{4}+x\right)\cos\left(\dfrac{\pi}{4}+x\right)$，则 $f\left(x\right)$ 在 $x\in\left[0\ ,\ \dfrac{\pi}{2}\right]$ 上的最大值与最小值之差为_____.

【变式演练 1】【湖北省鄂东南省级示范高中教学改革联盟 2020 届高三下学期 6 月模拟】已知函数

$f(x)=2\sqrt{2}\cos x\sin\left(\frac{\pi}{4}-x\right)$，则 $f(x)$ 在区间 $\left(-\frac{5}{8}\pi,0\right)$ 上（　　）

A．既有最大值，又有最小值　　B．有最大值，没有最小值

C．有最小值，没有最大值　　D．既没有最大值，也没有最小值

【变式演练 2】【2020 届天津市河西区高考一模】已知函数

$f\left(x\right)=\sin\left(\omega x+\varphi\right)+\sqrt{3}\cos\left(\omega x+\varphi\right)\left(\omega>0,|\varphi|<\pi\right)$ 的最小正周期为 π，$f\left(x\right)$ 的图象关于 y 轴对称，且在区间 $\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$ 上单调递增，则函数 $g\left(x\right)=2\cos\left(\omega x+\varphi\right)$ 在区间 $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 上的值域为（　　）

A．$\left[-\sqrt{3},2\right]$　　B．$\left[-1,2\right]$

C．$\left[-2,1\right]$　　D．$\left[-\sqrt{3},1\right]$

【变式演练 3】【2020 届四川省宜宾市高三高考适应性考试（三诊）】已知函数

$f(x)=2\sqrt{3}\sin\omega x\cos\omega x-2\cos^2\omega x+a(\omega>0)$ 的最小正周期为 π，最大值为 4，则（　　）

A．$\omega=1,a=3$　　B．$\omega=2,a=3$

C．$\omega=2,a=7$　　D．$\omega=1,a=7$

【变式演练 4】【海南省海口市华侨中学 2021 届高三第一次月考】已知函数 $f\left(x\right)=A\sin\left(\omega x+\varphi\right)$，（$A>0$，$\omega>0$，$|\varphi|<\frac{\pi}{2}$）的最小正周期为 4π.

（1）从①$f\left(-\frac{\pi}{3}\right)=0$；②$f\left(-\frac{2\pi}{3}\right)=-1$；③$\forall x\in R$，都有 $f\left(x\right)\le f\left(\frac{2\pi}{3}\right)$ 这三个条件中，选择合适的两个条件，求函数 $f\left(x\right)$ 的解析式；

（2）求（1）中所求得的函数 $f\left(x\right)$ 在区间 $\left[-\frac{2\pi}{3},\frac{\pi}{3}\right]$ 上的最大值和最小值.

【变式演练 5】【2020 届湖南省湘潭市湘潭县一中高三下学期 5 月高考模拟】已知函数

$f(x)=\sin x(\sin x+\sqrt{3}\cos x)-\frac{1}{2}$.

（1）求 $f(x)$ 的单调递减区间；

（2）在 $\triangle ABC$ 中，a,b,c 分别为角 A,B,C 的对边，$B>\frac{\pi}{6}$ 且满足 $a\cos C+\frac{1}{2}c=b$，求 $f(B)$ 的取值范

围.

方法二　配方法

万能模板	内　　容
使用场景	函数表达式可化为只含有一个三角函数的式子
解题模板	第一步　先将所给的函数式化为只含有一个三角函数的式子，通常采取换元法将其变为多项式函数； 第二步　利用函数单调性求解三角函数的最值. 第三步　得出结论.

例 2　函数 $f(x)=\cos 2x+2\sin x$ 的最小值为_____.

【变式演练 5】函数 $f\left(x\right)=\cos^2x+\sqrt{3}\sin x-2\left(x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]\right)$ 的最大值是_____.

【变式演练 6】函数 $f\left(x\right)=\sin x+\cos x+2\sin x\cos x\left(x\in\left[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right]\right)$ 的最小值是_____.

【高考再现】

1.（2021·北京高考真题）函数 $f(x)=\cos x-\cos 2x$，试判断函数的奇偶性及最大值（　　）

A．奇函数，最大值为 2　　B．偶函数，最大值为 2

C．奇函数，最大值为 $\frac{9}{8}$　　D．偶函数，最大值为 $\frac{9}{8}$

2.（2021·浙江高考真题）设函数 $f\left(x\right)=\sin x+\cos x(x\in\mathrm{R})$.

（1）求函数 $y=\left[f\left(x+\frac{\pi}{2}\right)\right]^2$ 的最小正周期；

（2）求函数 $y=f(x)f\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$ 在 $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 上的最大值.

3．【2020 年高考北京卷 14】若函数 $f(x)=\sin(x+\varphi)+\cos x$ 的最大值为 2，则常数 φ 的一个取值为_____.

4.【2020 年高考全国Ⅱ卷理数 17】$\triangle ABC$ 中，$\sin^2A-\sin^2B-\sin^2C=\sin B\sin C$.

（1）求 A；

（2）若 $BC=3$，求 $\triangle ABC$ 周长的最大值.

5.【2020年高考浙江卷18】在锐角$\triangle ABC$中，角A，B，C的对边分别为a，b，c，且$2b\sin A=\sqrt{3}a$.

（I）求角B；

（II）求$\cos A+\cos B+\cos C$的取值范围.

6.【2018 年北京卷】已知函数$f(x)=\sin^2 x+\sqrt{3}\sin x\cos x$.

（I）求$f(x)$的最小正周期；

（II）若$f(x)$在区间$[-\frac{\pi}{3},m]$上的最大值为$\frac{3}{2}$，求m的最小值.

【反馈练习】

1．将函数 $f(x)=\sqrt{6}\sin x\cos x+\sqrt{2}\cos^2 x-\frac{\sqrt{2}}{2}$ 的图象上所有点的横坐标缩短为原来的$\frac{1}{2}$，纵坐标不变，得到函数 $g(x)$ 的图象.对于下列四种说法，正确的是

①函数 $g(x)$ 的图象关于点 $(\frac{\pi}{3},0)$ 成中心对称

②函数 $g(x)$ 在 $(-\pi,\pi)$ 上有 8 个极值点

③函数 $g(x)$ 在区间 $[-\frac{\pi}{2},-\frac{\pi}{4}]$ 上的最大值为 $\sqrt{2}$，最小值为 $-\frac{\sqrt{2}}{2}$

④函数 $g(x)$ 在区间 $(-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4})$ 上单调递增

A．①②　　B．②③　　C．②③④　　D．①③④

【来源】黑龙江省大庆铁人中学 2021 届高三下学期第一次模拟考试 数学（理）试试题

2．（多选）已知函数 $f(x)=\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)+\sin^2 x$，则下列说法正确的是（　　）

A．函数 $f(x)$ 的最大值为 2　　B．函数 $f(x)$ 的最小值为 -1

C．函数 $f(x)$ 在 $\left(\frac{\pi}{3},\pi\right)$ 上单调递减　　D．函数 $f(x)$ 在 $\left(-\frac{\pi}{3},\pi\right)$ 内有且只有一个零点

【来源】2021 新高考高考最后一卷数学第四模拟

3．【吉林省梅河口市第五中学 2019-2020 学年高三 4 月月考】已知函数 $f(x)=2\sin\left(\omega x-\frac{\pi}{6}\right)(\omega>0)$，相邻两个对称中心之间的距离为 $\frac{\pi}{2}$，若将函数 $f(x)$ 的图象向左平移 $\varphi\left(0<\varphi<\frac{\pi}{2}\right)$ 个单位长度，得到的函数图象关于 y 轴对称，则函数 $g(x)=\sqrt{3}\cos(\omega x+\varphi)$ 在 $\left[-\frac{2\pi}{3},-\frac{\pi}{3}\right]$ 上的最大值为（　　）

A．$\sqrt{3}$　　B．0　　C．$\frac{\sqrt{3}}{2}$　　D．$\frac{3}{2}$

4.【福建省三明市 2019-2020 学年高三（5 月份）高考（理科）数学模拟】关于函数 $f\left(x\right)=\cos\left|x\right|+\left|\cos x\right|$ 有下述四个结论：

①$f\left(x\right)$ 是偶函数；

②$f\left(x\right)$ 在区间 $\left(-\frac{\pi}{2},0\right)$ 上单调递增；

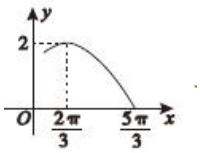
③$f\left(x\right)$ 在 $\left[-\pi,\pi\right]$ 上有 4 个零点；

④$f\left(x\right)$ 的最大值为 2.

其中所有正确结论的编号是（　　）

A．①②④　　B．②④　　C．①④　　D．①③

5.【安徽省皖江名校联盟 2020-2021 学年高三上学期 11 月第三次联考】函数 $f\left(x\right)=A\left[\sin\left(\omega x+\theta\right)+\cos\left(\omega x+\theta\right)\right]\left(\omega>0\right)$ 部分图象如图所示，当 $x\in\left[-\pi,2\pi\right]$ 时，$f\left(x\right)$ 最小值为（　　）



A．-1　　B．-2　　C．$-\sqrt{2}$　　D．$-\sqrt{3}$

6.【四川省泸县第二中学 2020-2021 学年高三上学期开学考试】函数 $f\left(x\right)=2\sin\left(2x+\varphi\right)\left(\left|\varphi\right|<\frac{\pi}{2}\right)$ 向左平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位后图象关于 y 轴对称，则 $f\left(x\right)$ 在 $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 上的最小值为（　　）

A．-1　　B．1　　C．$-\sqrt{3}$　　D．$\sqrt{3}$

7.【贵州省贵阳市第一中学 2020 届高三高考适应性月考】已知 $m,n\in\mathbf{R}$，则“直线 $x+my-1=0$ 与 $nx+y+1=0$ 平行”是“$mn=1$”的（　　）条件

A．充分不必要　　B．必要不充分　　C．充要　　D．既不充分又不必要

8.【广东省深圳实验学校 2021 届高三上学期 10 月月考】已知 $\frac{3\sin\alpha+\cos\alpha}{2\sin\alpha-3\cos\alpha}=7$，则函数 $f(x)=\sin^2 x+2\tan\alpha|\cos x|-6$ 的最小值为（　　）

A．-5　　B．-3　　C．$-\sqrt{2}$　　D．-1

9.【江西省乐平市第一中学 2021 届高三上学期联考理】函数 $f(x)=\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)+\frac{\sqrt{3}}{2}$ 在 $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 上的值域为_____.

10.【山东省德州市 2020-2021 学年高三上学期期中考试】函数 $f(x)=\sin x\cos x-\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)\cos x+\frac{1}{2}$，则 $f(x)$ 的最小值为_____.

11.【江苏省扬州市邗江区蒋王中学 2019-2020 学年高三上学期第三次学情检测】已知函数 $f(x)=3\sin\left(\omega x-\frac{\pi}{6}\right)$ 和 $g(x)=2\cos(2x+\varphi)+1$ 的图象的对称轴完全相同，且 $\omega>0$．若 $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$，则函数 $f(x)$ 的值域是_____.

12.【山东省淄博实验中学 2020-2021 学年第一学期高三第一次模块考试】已知向量 $\vec{m}=\left(\sqrt{3}\sin\frac{x}{2},1\right)$，$\vec{n}=\left(\cos\frac{x}{2},\cos^2\frac{x}{2}\right)$，函数 $f(x)=\vec{m}\cdot\vec{n}-\frac{1}{2}$.

（1）若 $x\in\left(-\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{6}\right)$，求 $f(x)$ 的取值范围；

（2）在 $\triangle ABC$ 中，角 A，B，C 的对边分别是 a，b，c，若 $f(B)=1$，$a=5$，$b=5\sqrt{3}$，求 $\triangle ABC$ 的面积.

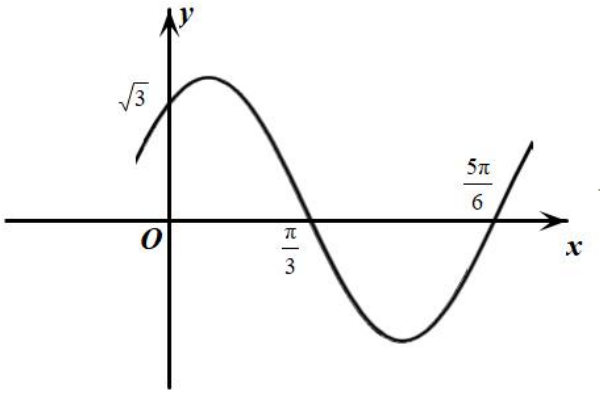
13.【山东师范大学附属中学 2020-2021 学年高三上学期第二次月考】已知函数 $f(x)=2\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\cos x$，$x\in\mathbf{R}$.

（1）求函数 $f(x)$ 的最小正周期；

（2）当 $x\in\left[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right]$ 时，求函数 $f(x)$ 的最大值与最小值及相应 x 的值.

14.【福建省厦门第一中学 2021 届高三（10 月月考）数学第一次质量检测】已知函数 $f(x)=A\sin(\omega x+\varphi)$

（$A>0$，$\omega>0$，$|\varphi|<\dfrac{\pi}{2}$）的部分图象如图所示.



（1）求函数$f(x)$的解析式；

（2）将函数$y=f(x)$的图象向右平移$\dfrac{\pi}{6}$个单位得到函数$g(x)$，当$x\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$时，求函数$h(x)=f(x)+g(x)$的值域.

15.【重庆市第八中学 2021 届高三上学期适应性月考】已知函数$f(x)=2\sin\left(\omega x+\dfrac{\pi}{3}\right)-\cos\left(\omega x+\dfrac{\pi}{6}\right)(0<\omega<1)$，将曲线$y=f(x)$向右平移$\dfrac{\pi}{4}$个单位，得到的曲线关于原点对称.

（1）求ω；

（2）求$f(x)$在$[0,\pi]$上的值域.

16．在锐角$\triangle ABC$中，角A，B，C所对的边分别为a，b，c.已知$\sin^2 C-\sin^2 B=\sin^2 A-\sqrt{3}\sin A\sin B$.

（1）求角C的大小；

（2）求$\sin A+\cos B+\tan C$的取值范围.

【来源】浙江省杭州市桐庐中学 2020-2021 学年高三上学期暑期阶段性测试试题

第 18 讲　三角恒等变换

【高考地位】

三角函数学习中，有关求值、化简、证明以及解三角方程与解几何问题等，都经常涉及到运用三角变换的解题方法与技巧，而三角变换主要为三角恒等变换，是常用的解题工具. 但由于三角公式众多，方法灵

活多变，若能熟练掌握三角恒等变换的技巧，不但能加深对三角公式的记忆与内在联系的理解，而且对发展数学逻辑思维能力，提高数学知识的综合运用能力都大有益处. 在高考各种题型均有出现如选择题、填空题和解答题，其试题难度属中档题.

方法一　运用转化与化归思想

万能模板	内　　容
使用场景	含不同角的三角函数式类型
解题模板	第一步　利用各种角之间的数值关系，将它们互相表示，改变原角的形式； 第二步　运用有关公式进行变形，主要是角的拆变； 第三步　得出结论.

例 1　已知 $\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{3}$，则 $\sin\left(\frac{5\pi}{3}-x\right)-cos\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)$ 的值为_____.

【变式演练 1】已知 $\sin\left(\frac{\pi}{5}-\alpha\right)=\frac{1}{4}$，则 $\cos\left(2\alpha+\frac{3\pi}{5}\right)=$（　　）

A. $-\frac{7}{8}$　　B. $\frac{7}{8}$　　C. $-\frac{\sqrt{15}}{8}$　　D. $\frac{\sqrt{15}}{8}$

【来源】广东省广州市省实、广雅、执信、六中四校 2022 届高三上学期 8 月联考数学试题

【变式演练 2】【2020 届吉林省高三第二次模拟】设 $\tan\alpha=\frac{1}{2}$，$\cos(\pi+\beta)=-\frac{4}{5}(\beta\in(0,\pi))$，则 $\tan(2\alpha-\beta)$ 的值为（　　）

A. $-\frac{7}{24}$　　B. $-\frac{5}{24}$

C. $\frac{5}{24}$　　D. $\frac{7}{24}$

方法二　运用函数方程思想

万能模板	内　　容
使用场景	一般三角函数类型
解题模板	第一步　将把某个三角函数式看作未知数，利用已知条件或公式列出关于未知数的方程； 第二步　求解方程组； 第三步　得出结论.

例 2　已知 $\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{3}$，则 $\sin 4x-2\cos 3x\sin x=$（　　）

A. $\frac{7}{9}$　　B. $-\frac{7}{9}$　　C. $\frac{4\sqrt{2}}{9}$　　D. $-\frac{4\sqrt{2}}{9}$

【变式演练 3】若函数 $f(x)=\sin 2x+a\cos x+6x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上单调递增，则 a 的取值范围为（　　）

A. $[-4,4]$　　B. $[-3,4]$　　C. $[-4,-3]$　　D. $[-3,3]$

【来源】重庆市第八中学 2021 届高三下学期高考适应性月考（六）数学试题

【变式演练 4】设α是第一象限角，满足 $\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)-\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}$，则 $\tan\alpha=$（　　）

A. 1　　B. 2　　C. $\sqrt{3}$　　D. $\frac{\sqrt{3}}{3}$

【来源】陕西省 2021 届高三下学期教学质量检测测评（六）理科数学试题

方法三　运用换元思想

万能模板	内　　容
使用场景	一般求值题
解题模板	第一步　运用换元法将未知向已知转化； 第二步　利用特定的关系，把某个式子用新元表示，实行变量替换； 第三步　得出结论.

例 3　若 $\sin\alpha+\sin\beta=\frac{\sqrt{2}}{2}$，求 $\cos\alpha+\cos\beta$ 的取值范围.

【变式演练 5】【江苏省 2020 届高三下学期 6 月高考押题】已知 $\sin\alpha+\cos\alpha=\frac{2\sqrt{5}}{5}$，则 $sin2\alpha+cos4\alpha$ 的值为_____.

【高考再现】

1.（2021·北京高考真题）函数 $f(x)=\cos x-\cos 2x$，试判断函数的奇偶性及最大值（　　）

A．奇函数，最大值为 2　　B．偶函数，最大值为 2

C．奇函数，最大值为 $\frac{9}{8}$　　D．偶函数，最大值为 $\frac{9}{8}$

2.（2021·全国高考真题）已知O为坐标原点，点$P_1(\cos\alpha,\sin\alpha)$，$P_2(\cos\beta,-\sin\beta)$，$P_3(\cos(\alpha+\beta),\sin(\alpha+\beta))$，$A(1,0)$，则（　　）

A．$|\overrightarrow{OP_1}|=|\overrightarrow{OP_2}|$　　B．$|\overrightarrow{AP_1}|=|\overrightarrow{AP_2}|$

C．$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OP_3}=\overrightarrow{OP_1}\cdot\overrightarrow{OP_2}$　　D．$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OP_1}=\overrightarrow{OP_2}\cdot\overrightarrow{OP_3}$

3.【2020 年高考全国III卷理数 9】已知$2\tan\theta-\tan\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)=7$，则$\tan\theta=$（　　）

A．-2　　B．-1　　C．1　　D．2

4.【2017 全国 III 文，4】已知$\sin\alpha-\cos\alpha=\frac{4}{3}$，则$\sin 2\alpha=$（　　）

A．$-\frac{7}{9}$　　B．$-\frac{2}{9}$　　C．$\frac{2}{9}$　　D．$\frac{7}{9}$

5.【2018 年全国 I 卷】已知角α的顶点为坐标原点，始边与x轴的非负半轴重合，终边上有两点$A(1,a)$，$B(2,b)$，且$\cos 2\alpha=\frac{2}{3}$，则$|a-b|=$

A．$\frac{1}{5}$　　B．$\frac{\sqrt{5}}{5}$　　C．$\frac{2\sqrt{5}}{5}$　　D．1

6.【2018 年全国卷III】若$\sin\alpha=\frac{1}{3}$，则$\cos 2\alpha=$

A．$\frac{8}{9}$　　B．$\frac{7}{9}$　　C．$-\frac{7}{9}$　　D．$-\frac{8}{9}$

7.【2020 年高考江苏卷 8】已知$\sin^2(\frac{\pi}{4}+\alpha)=\frac{2}{3}$，则$\sin 2\alpha$的值是_____.

8.【2020 年高考浙江卷 13】已知$\tan\theta=2$，则$\cos 2\theta=$_____；$\tan\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)=$_____.

9.【2018 年全国卷 II】已知$\tan(\alpha-\frac{5\pi}{4})=\frac{1}{5}$，则$\tan\alpha=$_____.

10.【2018 年浙江卷】已知角α的顶点与原点O重合，始边与x轴的非负半轴重合，它的终边过点$P(-\frac{3}{5},-\frac{4}{5})$.

（I）求 sin（$\alpha+\pi$）的值；

（II）若角β满足 sin（$\alpha+\beta$）$=\frac{5}{13}$，求 cosβ的值.

【反馈练习】

1.【吉林省梅河口市第五中学 2020 届高三第五次模拟】已知$\theta\in\left(-\frac{\pi}{2},0\right)$，且$\cos 2\theta+\sin\theta=0$，则

$\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)=$（　　）

A．$\frac{2-\sqrt{3}}{2}$　　B．$\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$　　C．$\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$　　D．$\frac{2+\sqrt{3}}{4}$

2．【2020 届福建省漳州市高三第一次教学质量检测】若 $\tan 2\alpha=-\frac{3}{4}$，则 $\frac{\sin 2\alpha+\cos^2\alpha}{1+2\sin^2\alpha}=$（　　）

A．$-\frac{1}{4}$ 或 $\frac{1}{4}$　　B．$\frac{3}{4}$ 或 $\frac{1}{4}$

C．$\frac{3}{4}$　　D．$\frac{1}{4}$

3.【四川省绵阳南山中学 2020 届高三高考仿真模拟】已知 $\alpha\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，且 $\frac{\cos\alpha}{\cos\frac{\alpha}{2}\sqrt{1-\sin\alpha}}=\frac{3}{2}$，则 $\cos\alpha=$（　　）

A．$\frac{4}{5}$　　B．$\frac{2\sqrt{5}}{5}$　　C．$\frac{3}{5}$　　D．$\frac{\sqrt{5}}{5}$

4.【2020 届山西省晋中市高三下学期一模】已知 a 为正整数，$\tan\alpha=1+\lg a$，$\tan\beta=\lg a$，且 $\alpha=\beta+\frac{\pi}{4}$，则当函数 $f(x)=a\sin\theta-\sqrt{3}\cos\theta(\theta\in[0,\pi])$ 取得最大值时，$\theta=$（　　）

A．$\frac{\pi}{2}$　　B．$\frac{2\pi}{3}$　　C．$\frac{5\pi}{6}$　　D．$\frac{4\pi}{3}$

5．已知函数 $f(x)=\sin x\cdot\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)-\frac{1}{4}$，则 $f(x)$ 的值不可能是（　　）

A．$-\frac{1}{2}$　　B．$\frac{1}{2}$　　C．0　　D．2

【来源】江苏省常州市前黄高级中学 2021 届高三下学期学情检测（一）数学试题

6．已知 $\tan 2\alpha=-2\sqrt{2}$，其中 α 是第三象限角，则 $\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right)\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)$ 的值为（　　）

A．$\frac{\sqrt{2}}{3}$　　B．$-\frac{\sqrt{2}}{3}$　　C．$\frac{2}{3}$　　D．$-\frac{2}{3}$

【来源】重庆市巴蜀中学 2021 届高三适应性（九）数学试题

7．（多选）以下式子均有意义，则下列等式恒成立的是（　　）

A．$\cos\alpha\sin\beta=\frac{\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)}{2}$

B．$\frac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha}=\frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha}$

C．$\frac{1-2\cos x\sin x}{\cos^2 x-\sin^2 x}=\frac{1-\tan x}{1+\tan x}$

D. $\frac{\sin(2\alpha+\beta)}{\sin\alpha}=2\cos(\alpha+\beta)+\frac{\sin\beta}{\sin\alpha}$.

【来源】专题 5.8—三角恒等变换 2-2022 届高三数学一轮复习精讲精练

8.【卓越高中千校联盟 2020 届高考文科数学终极押题】已知函数 $f(x)=\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$，$x\in\mathbf{R}$，则 $\left[f\left(x+\frac{\pi}{6}\right)\right]^2-\left[f\left(x+\frac{\pi}{12}\right)\right]^2$ 的最大值是_____.

9.【2020 届山西省运城市高中联合体高三模拟】$\tan\theta$，$\tan\left(\frac{\pi}{4}-\theta\right)$ 是方程 $x^2+ax-3=0$ 的两个根，则 $a=$_____.

10.【2020 届重庆市第八中学高三 6 月三诊】若 $\alpha\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，且 $\sin\alpha+2\cos\alpha=\frac{\sqrt{10}}{2}$，则 $\tan\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)=$_____.

11.【江苏省盐城市滨海县八滩中学 2020 届高三下学期四模】已知锐角 α 满足 $\sin 2\alpha-2\cos 2\alpha=-1$，则 $\tan\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)$ 的值为_____.

12.【黑龙江省绥化市 2020 届全市普通高中高三模拟联考质量检测】已知 $\sin\alpha-\cos\beta=\cos\alpha+\sin\beta=\frac{1}{5}$，则 $\sin(\alpha-\beta)=$_____.

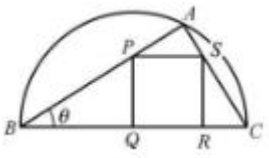
13.【2020 年普通高等学校招生全国统一考试理科数学样卷】平面直角坐标系 xOy 中，点 $P(x_0,y_0)$ 是单位圆在第一象限内的点，$\angle xOP=\alpha\left(\alpha<\frac{\pi}{2}\right)$，若 $\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)=-\frac{11}{13}$，则 x_0+y_0 为_____.

14.【广西桂林、崇左、防城港市 2020 届高三联合模拟】已知 $\tan\alpha$，$\tan\beta$ 分别是 $6x^2-5x+1=0$ 的两个实数根，则 $\tan(\alpha+\beta)=$_____.

15.【2020 届江苏省苏州市三校高三下学期 5 月联考】已知 α 为锐角，若 $2\sin 2\alpha=\sin\left(\frac{\pi}{2}+2\alpha\right)+1$，则 $\cos\alpha=$_____.

16.【安徽省黄山市 2019 届高三毕业班第三次质量检测】$(1+\tan 20^\circ)\cdot(1+\tan 25^\circ)=$_____.

17.【百校联盟 2020 届高三开学模拟】如图，某园林单位准备绿化一块直径为 BC 的半圆形空地， ΔABC 外的地方种草， ΔABC 的内接正方形 $PQRS$ 为一水池，其余的地方种花，若 $BC=a$ ， $\angle ABC=\theta$ ，设 ΔABC 的面积为 S_1 ，正方形 $PQRS$ 的面积为 S_2 ，当 a 固定， θ 变化时，则 $\dfrac{S_1}{S_2}$ 的最小值是_____.



18．已知 $\sin\left(2\alpha+\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{1}{2}$ ，且 $\alpha\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ ，则 $\sin 2\alpha$ _____； $\cos\left(4\alpha-\dfrac{\pi}{4}\right)-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\sin 4\alpha=$_____.

【来源】浙江省 2021 届高三高考考前模拟数学试题

19．已知 α 为锐角，且 $\tan\alpha=\dfrac{4}{3}$ ，则 $\cos\left(2\alpha+\dfrac{\pi}{2}\right)=$_____.

【来源】新疆巴音郭楞蒙古自治州第二中学 2021 届高三上学期第四次月考数学（文）试题

20．已知 $\tan\left(\theta-\dfrac{\pi}{4}\right)=3$ ，则 $\cos 2\theta=$_____.

【来源】江苏省南京市第二十九中学 2021-2022 学年高三上学期 8 月第二次学情调研数学试题

21．设 $x=\theta$ 是函数 $f(x)=3\cos x+\sin x$ 的一个极值点，则 $\cos 2\theta+\sin 2\theta=$_____.

【来源】陕西省宝鸡市陈仓区 2021 届高三下学期教学质量检测（二）理科数学试题

22．已知 α ， β 为锐角，且 $\cos(\alpha+\beta)+2\cos(\alpha-\beta)=\dfrac{\sin\alpha}{\sin\beta}$ ，则 $\tan(\alpha-\beta)$ 的最大值是_____.

【来源】全国Ⅰ卷 2021 届高三高考数学（文）押题试题（一）

23．已知角 $\alpha\in\left(0,\dfrac{\pi}{4}\right)$ ， $\beta\in\left(\dfrac{\pi}{2},\pi\right)$ ，若 $\sin\left(\alpha-\dfrac{\pi}{3}\right)=-\dfrac{3}{5}$ ， $\cos\left(\dfrac{\pi}{3}-\beta\right)=-\dfrac{1}{2}$ ，则 $\cos(\alpha-\beta)=$_____.

【来源】全国卷地区“超级全能生”2021 届高三 5 月联考数学（文）试题（丙卷）

24．设 $0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ ，向量 $\vec{a}=\left(\cos 2\theta,\dfrac{3}{2}\cos\theta\right)$ ， $\vec{b}=(-1,\sin\theta)$ ，若 $\vec{a}\perp\vec{b}$ ，则 $\tan\theta=$_____.

【来源】江苏省南通密卷 2021 届高三模拟试卷数学试题

25.【江苏省南京师大附中 2020 届高三下学期高考模拟】已知 $\vec{a}=(\sin 2\alpha,3)$ ， $\vec{b}=(4,\cos 2\alpha)$ ，

$\dfrac{\pi}{4}<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$ $-\dfrac{\pi}{2}<\beta<0$ ，且 $\vec{a}\perp\vec{b}$.

（1）求 $\cos 2\alpha$ 的值；

（2）若 $\cos\beta=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$ ，求 $\cos(\alpha-\beta)$ 的值.

26.【2020 届山东省高三下学期开学收心检测】在①$\cos 2B-\sqrt{3}\sin B+2=0$，②$2b\cos C=2a-c$，③$\frac{b}{a}=\frac{\cos B+1}{\sqrt{3}\sin A}$三个条件中任选一个，补充在下面问题中，并加以解答.

已知ΔABC的内角 A，B，C 所对的边分别是 a，b，c，若_____，且 a，b，c 成等差数列，则ΔABC是否为等边三角形？若是，写出证明；若不是，说明理由.

注：如果选择多个条件分别解答，按第一个解答计分.

第 19 讲　解三角形

【高考地位】

正余弦定理是三角函数中有关三角知识的继续与发展，进一步揭示了任意三角形的边与角之间的关系，其边角转换功能在求解三角形及判断三角形形状时有着重要应用. 在高考各种题型均有出现如选择题、填空题和解答题，其试题难度属中档题.

类型一　判断三角形的形状

万能模板	内　　容
使用场景	已知边与三角函数之间的等式关系
解题模板	第一步　运用正弦定理或余弦定理将已知等式全部转化为都是角或都是边的等式； 第二步　利用三角函数的图象及其性质或者边与边之间的等式关系得出所求的三角形的形状； 第三步　得出结论.

例 1 在ΔABC中，已知$a\cos B=b\cos A$，那么ΔABC一定是（　　）

A．等腰三角形　　B．直角三角形

C．等腰三角形或直角三角形　　D．等腰直角三角形

【变式演练 1】【上海市虹口区 2021 届高三上学期一模】在$\triangle ABC$中，若$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AB}^2=0$，则$\triangle ABC$的形状一定是（　　）

A．等边三角形　　B．直角三角形

C．等腰三角形　　D．等腰直角三角形

【变式演练 2】在$\triangle ABC$中，若满足$\frac{a}{b}=\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}+B\right)}{\cos(2\pi-A)}$，则该三角形的形状为（　　）

A．等腰三角形

B．直角三角形

C．等腰直角三角形

D．等腰三角形或直角三角形

【来源】西南名校联盟“3 3 3”2021 届高三 5 月份高考数学（文）诊断性试题（三）

类型二　解三角形中的边和角

万能模板	内　　容
使用场景	解三角形中的边和角
解题模板	第一步　直接运用正弦或余弦定理通常使用的条件判断是运用正弦定理还是余弦定理； 第二步　利用相应的正弦、余弦定理的计算公式即可得出所求的结论.

例 2、 设 ΔABC 的内角 A， B， C 所对的边长分别为 a， b， c，若 $a=\sqrt{2}$， $b=\sqrt{3}$， $B=\dfrac{\pi}{3}$，则 $A=$（　　）

A. $\dfrac{\pi}{6}$　　B. $\dfrac{5\pi}{6}$　　C. $\dfrac{\pi}{4}$　　D. $\dfrac{\pi}{4}$ 或 $\dfrac{3\pi}{4}$

【变式演练 3】【广西钦州市、崇左市 2021 届高三上学期第一次教学质量检测】在 $\triangle ABC$ 中，$\angle A=\dfrac{\pi}{4}$，$a^2+b^2-c^2=ab$，$c=3$，则 $a=$（　　）

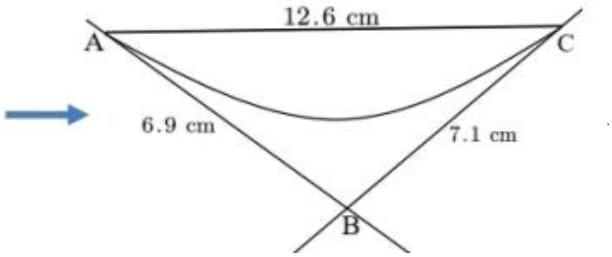
A．2　　B．$\sqrt{5}$　　C．$\sqrt{6}$　　D．3

【变式演练 4】【吉林省梅河口五中、辽源五中、四平四中 2020-2021 学年高三（上）第一次联考】在 $\triangle ABC$ 中，内角 A，B，C 所对的边分别为 a，b，c，且 $a=3$，$b=3\sqrt{2}$，$c=3\sqrt{5}$．若点 M 在 AB 边上，且 $BM=CM$，则 $\dfrac{AM}{AB}=$（　　）

A. $\dfrac{1}{4}$　　B. $\dfrac{1}{3}$　　C. $\dfrac{3}{4}$　　D. $\dfrac{2}{3}$

【变式演练 5】某艺术爱好者对《蒙娜丽莎》的同比例影像作品进行了测绘.将画中女子的嘴唇近似看作一个圆弧，在嘴角 A，C 处作圆弧的切线，两条切线交于 B 点，测得如下数据：$AB=6.9\text{cm}$，$BC=7.1\text{cm}$，$AC=12.6\text{cm}$.根据测量得到的结果推算女子的嘴唇视作的圆弧对应的圆心角位于（　　）





A. $\left(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{4}\right)$　　B. $\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{3}\right)$　　C. $\left(\frac{\pi}{3},\frac{5\pi}{12}\right)$　　D. $\left(\frac{5\pi}{12},\frac{\pi}{2}\right)$

【来源】江苏省南京市第二十九中学 2021-2022 学年高三上学期开学摸底数学试题

类型三　解决与面积有关问题

万能模板	内　　容
使用场景	解决与面积有关问题
解题模板	第一步　主要利用正、余弦定理求出三角形的基本元素如角与边； 第二步　结合三角形的面积公式直接计算其面积.

例 3　在 ΔABC 中，内角 A,B,C 的对边分别为 a,b,c，且 $A=2C,a=\sqrt{3}c$，若 $\sqrt{3}ab+c^2=28$，则 ΔABC 的面积为_____.

【变式演练 6】【云南省文山州 2021 届高三年级 10 月教学质量检测】已知 $\triangle ABC$ 的内角 A，B，C 的对边分别为 a，b，c，若 $\sin(A+B)=\cos C$，$a^2+b^2-c^2=4$，则 $\triangle ABC$ 的面积为（　　）

A．1　　B．2　　C．4　　D．6

【变式演练 7】（多选）在 $\triangle ABC$ 中，角 A，B，C 的对边分别为 a，b，c，若 $A=\frac{\pi}{3}$，$b+c=10$，$a=2\sqrt{10}$，则三角形的面积不可能是（　　）

A．$5\sqrt{3}$　　B．$6\sqrt{3}$　　C．$14\sqrt{3}$　　D．$16\sqrt{3}$

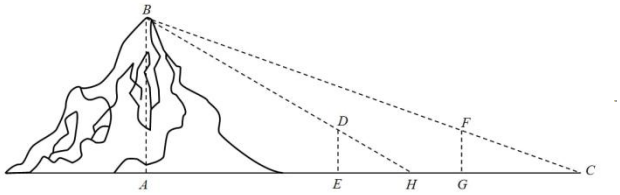
【来源】重庆市缙云教育联盟 2022 届高三上学期 8 月月度质量检测数学试题

【变式演练 8】【普通高等学校招生国统一考试 2020-2021 学年高三上学期数学（理）考向卷（四）】托勒密是古希腊天文学家、地理学家、数学家，托勒密定理就是由其名字命名，该定理指出：圆的内接凸四边形两对对边乘积的和等于两条对角线的乘积.已知四边形 $ABCD$ 的四个顶点在同一个圆的圆周上，AC,BD 是其两条对角线，$BD=8$，且 $\triangle ACD$ 为正三角形，则四边形 $ABCD$ 的面积为（　　）

A．$8\sqrt{3}$　　B．$16\sqrt{3}$　　C．$24\sqrt{3}$　　D．$32\sqrt{3}$

【高考再现】

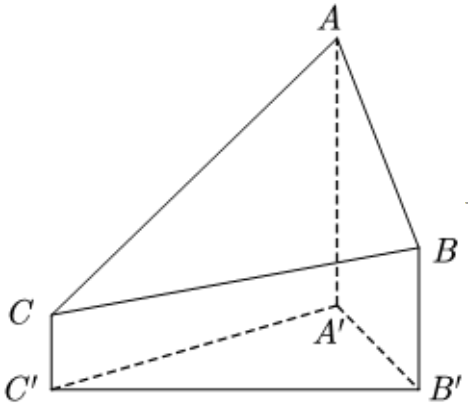
1.（2021·全国高考真题（理））魏晋时刘徽撰写的《海岛算经》是关测量的数学著作，其中第一题是测海岛的高．如图，点 E，H，G 在水平线 AC 上，DE 和 FG 是两个垂直于水平面且等高的测量标杆的高度，称为“表高”，EG 称为“表距”，GC 和 EH 都称为“表目距”，GC 与 EH 的差称为“表目距的差”则海岛的高 $AB=$（　　）



A．$\dfrac{\text{表高}\times\text{表距}}{\text{表目距的差}}+\text{表高}$　　B．$\dfrac{\text{表高}\times\text{表距}}{\text{表目距的差}}-\text{表高}$

C．$\dfrac{\text{表高}\times\text{表距}}{\text{表目距的差}}+\text{表距}$　　D．$\dfrac{\text{表高}\times\text{表距}}{\text{表目距的差}}-\text{表距}$

2.（2021·全国高考真题（理））2020 年 12 月 8 日，中国和尼泊尔联合公布珠穆朗玛峰最新高程为 8848.86（单位：m），三角高程测量法是珠峰高程测量方法之一．如图是三角高程测量法的一个示意图，现有 A，B，C 三点，且 A，B，C 在同一水平面上的投影 A',B',C' 满足 $\angle A'C'B'=45°$，$\angle A'B'C'=60°$．由 C 点测得 B 点的仰角为 $15°$，BB' 与 CC' 的差为 100；由 B 点测得 A 点的仰角为 $45°$，则 A，C 两点到水平面 $A'B'C'$ 的高度差 $AA'-CC'$ 约为（$\sqrt{3}\approx1.732$）（　　）



A．346　　B．373　　C．446　　D．473

3.（2021·浙江高考真题）在 $\triangle ABC$ 中，$\angle B=60°,AB=2$，M 是 BC 的中点，$AM=2\sqrt{3}$，则 $AC=$_____，$\cos\angle MAC=$_____.

4.（2021·全国高考真题）记 $\triangle ABC$ 是内角 A，B，C 的对边分别为 a，b，c.已知 $b^2=ac$，点 D 在边 AC 上，$BD\sin\angle ABC=a\sin C$.

（1）证明：$BD=b$；

（2）若 $AD=2DC$，求 $\cos\angle ABC$.

6.（2021·北京高考真题）已知在 $\triangle ABC$ 中，$c=2b\cos B$，$C=\dfrac{2\pi}{3}$.

（1）求 B 的大小；

（2）在下列三个条件中选择一个作为已知，使 $\triangle ABC$ 存在且唯一确定，并求出 BC 边上的中线的长度.

①$c=\sqrt{2}b$；②周长为 $4+2\sqrt{3}$；③面积为 $S_{\triangle ABC}=\dfrac{3\sqrt{3}}{4}$.

7. 【2020 年高考全国Ⅲ卷文数 11】在 ΔABC 中，$\cos C=\dfrac{2}{3}$，$AC=4$，$BC=3$，则 $\tan B=$（　　）

A．$\sqrt{5}$　　B．$2\sqrt{5}$　　C．$4\sqrt{5}$　　D．$8\sqrt{5}$

8.【2020 年高考全国Ⅲ卷理数 7】在 $\triangle ABC$ 中，$\cos C=\dfrac{2}{3}$，$AC=4$，$BC=3$，则 $\cos B=$　（　　）

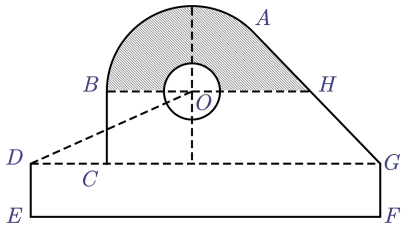
A．$\dfrac{1}{9}$　　B．$\dfrac{1}{3}$　　C．$\dfrac{1}{2}$　　D．$\dfrac{2}{3}$

9.【2020 年高考北京卷 10】2020 年 3 月 14 日是全球首个国际圆周率日（π Day）．历史上，求圆周率 π 的方法有多种，与中国传统数学中的“割圆术”相似，数学家阿尔·卡西的方法是：当正整数 n 充分大时，计算单位圆的内接正 $6n$ 边形的周长和外切正 $6n$ 边形（各边均与圆相切的正 $6n$ 边形）的周长，将它们的算术平均数作为 2π 的近似值．按照阿尔·卡西的方法，π 的近似值的表达方式是　　（　　）

A．$3n\left(\sin\dfrac{30^\circ}{n}+\tan\dfrac{30^\circ}{n}\right)$　　B．$6n\left(\sin\dfrac{30^\circ}{n}+\tan\dfrac{30^\circ}{n}\right)$

C．$3n\left(\sin\dfrac{60^\circ}{n}+\tan\dfrac{60^\circ}{n}\right)$　　D．$6n\left(\sin\dfrac{60^\circ}{n}+\tan\dfrac{60^\circ}{n}\right)$

10.【2020 年高考山东卷 15】某中学开展劳动实习，学生加工制作零件，零件的界面如图所示．O 为圆孔及轮廓圆弧 AB 所在圆的圆心，A 是圆弧 AB 与直线 AG 的切点，B 是圆弧 AB 与直线 BC 的切点，四边形 $DEFG$ 为矩形，$BC\perp DG$，垂足为 C，$\tan\angle ODC=\dfrac{3}{5}$，$BH/\!/DG$，$EF=12cm$，$DE=2cm$，$A$ 到直线 DE 和 EF 的距离均为 $7cm$，圆孔半径为 $1cm$，则图中阴影部分的面积为_____ cm^2.



11.【2020 年高考全国 I 卷文数 18】ΔABC 的内角 A，B，C 的对边分别为 a，b，c．已知 $B=150°$．

（1）若 $a=\sqrt{3}c$，$b=2\sqrt{7}$，求 ΔABC 的面积；

（2）若 $\sin A+\sqrt{3}\sin C=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，求 C．

12.【2020 年高考全国 II 卷文数 17】△ ABC 的内角 A，B，C 的对边分别为 a，b，c，已知 $\cos^2\left(\dfrac{\pi}{2}+A\right)+\cos A=\dfrac{5}{4}$．

（1）求 A；

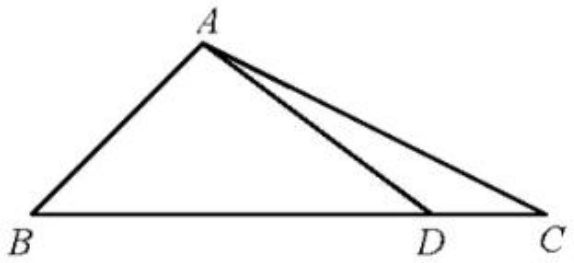
（2）若 $b-c=\dfrac{\sqrt{3}}{3}a$，证明：△ ABC 是直角三角形．

13.【2020 年高考全国 II 卷理数 17】$\triangle ABC$ 中，$\sin^2 A-\sin^2 B-\sin^2 C=\sin B\sin C$．

（1）求 A；

（2）若 $BC=3$，求 $\triangle ABC$ 周长的最大值．

14.【2020 年高考江苏卷 16】在 ΔABC 中，角 A，B，C 的对边分别为 a，b，c，已知 $a=3$，$c=\sqrt{2}$，$B=45°$．



（1）求 $\sin C$ 的值；

（2）在边 BC 上取一点 D，使得 $\cos\angle ADC=-\dfrac{4}{5}$，求 $\tan\angle DAC$ 的值．

16.【2020 年高考山东卷 17】在① $ac=\sqrt{3}$，② $c\sin A=3$，③ $c=\sqrt{3}b$ 这三个条件中任选一个，补充在下面问题中，若问题中的三角形存在，求 c 的值；若问题中的三角形不存在，说明理由．

问题：是否存在 $\triangle ABC$，它的内角 A,B,C 的对边分别为 a,b,c，且 $\sin A=\sqrt{3}\sin B$，$C=\dfrac{\pi}{6}$，_____？

注：如果选择多个条件分别解答，按第一个解答计分.

【反馈练习】

1.【广西南宁市普通高中 2021 届高三 10 月摸底测试】在 $\triangle ABC$ 中，角 A，B，C 的对边为 a，b，c 着 $a=4$，$b=5$，$c=6$，则 $\dfrac{\sin 2A}{\sin C}=$（　　）

A．$\dfrac{1}{2}$　　B．$\dfrac{2}{3}$　　C．$\dfrac{3}{4}$　　D．1

2.【宁夏石嘴山市第三中学 2021 届高三上学期第一次月考】已知 $\triangle ABC$ 中，a，b，c 分别为角 A，B，C 的对边，若 $a=2$，且满足 $\left(a+c\right)^2=b^2+\left(2+\sqrt{3}\right)ac$，则 AB 边上的高为（　　）

A．1　　B．$\dfrac{1}{2}$　　C．$\sqrt{3}$　　D．$\sqrt{2}$

3.【四川省巴中市 2021 届高三零诊考试数学（文）】在 $\triangle ABC$ 中，$\cos A=\dfrac{1}{2}$，$BC=3$，$AC=2$，则 $\cos C=$（　　）

A．$\dfrac{3-\sqrt{6}}{6}$　　B．$\dfrac{3+\sqrt{6}}{6}$　　C．$\dfrac{3-\sqrt{6}}{6}$ 或 $\dfrac{3+\sqrt{6}}{6}$　　D．$\dfrac{\sqrt{6}-3}{6}$

4.【河南省 2020 届高三（6 月份）高考数学（文科）质检】在 $\triangle ABC$ 中，角 A，B，C 的对边分别为 a，b，c，若 $\triangle ABC$ 的面积为 $\dfrac{ab}{8\sin C}$，则 $C=$（　　）

A．$\dfrac{\pi}{6}$　　B．$\dfrac{\pi}{3}$　　C．$\dfrac{\pi}{6}$ 或 $\dfrac{5\pi}{6}$　　D．$\dfrac{\pi}{3}$ 或 $\dfrac{2\pi}{3}$

5.【安徽师大附中 2020 届高三高考数学（文科）九模】已知 a,b,c 分别为 $\triangle ABC$ 内角 A,B,C 的对边，$a=2,2c\sin A=3\cos C,\triangle ABC$ 的面积为 3，则 $c=$（　　）

A．$2\sqrt{2}$　　B．$3\sqrt{5}$　　C．$\sqrt{13}$　　D．$3\sqrt{2}$

6.【重庆市第一中学 2020 届高三下学期 5 月月考】锐角 $\triangle ABC$ 的内角 A，B，C 的对边分别为 a，b，c 且 $a=1$，$b\cos A-\cos B=1$，若 A，B 变化时，$\sin B-2\lambda\sin^2 A$ 存在最大值，则正数 λ 的取值范围是（　　）

A．$(0,\frac{\sqrt{3}}{3})$　　B．$(0,\frac{1}{2})$　　C．$(\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{2}}{2})$　　D．$(\frac{1}{2},1)$

7.【重庆市巴蜀中学 2020 届高三下学期适应性月考九】在$\triangle ABC$中，角A、B、C对应的边分别为a、b、c，若$\sin^2 A-\sin^2 B=\sin^2 C-\sin B\sin C$，$a=\sqrt{3}$，则$\triangle ABC$的外接圆面积为（　　）

A．π　　B．2π　　C．4π　　D．8π

8.【江西省南昌二中 2020 届高三数学（文科）校测】已知$\triangle ABC$的外接圆直径为 1，D是BC的中点，且$|AC|\sin B-|AB|\sin c=\frac{1}{4}$，则$\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BC}=$（　　）

A．$\frac{1}{4}$　　B．$\frac{\sqrt{2}}{2}$　　C．$\frac{1}{8}$　　D．$\frac{\sqrt{3}}{2}$

9．在锐角$\triangle ABC$中，角A，B，C所对的边分别为a，b，c，若$b=a\cos C+2ac\cos A$，则$a=$（　　）

A．$\frac{1}{4}$　　B．1　　C．$\frac{1}{2}$　　D．2

【来源】河南省 2021-2022 学年高三入学考试数学（理科）数学试题

10．圭表（如图1）是我国古代一种通过测量正午日影长度来推定节气的天文仪器，它包括一根直立的标竿（称为“表”）和一把呈南北方向水平固定摆放的与标竿垂直的长尺（称为“圭”）.当正午太阳照射在表上时，日影便会投影在圭面上，圭面上日影长度最长的那一天定为冬至，日影长度最短的那一天定为夏至.图2是一个根据南京市的地理位置设计的圭表的示意图，已知南京市冬至正午太阳高度角（即$\angle ABC$）约为44.5°，夏至正午太阳高度角（即$\angle ADC$）约为88.5°，圭面上冬至线与夏至线之间的距离（即DB的长）为a，则表高（即AC的长）为（　　）

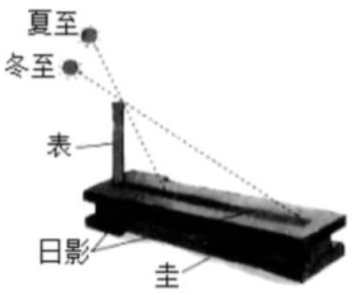


图1

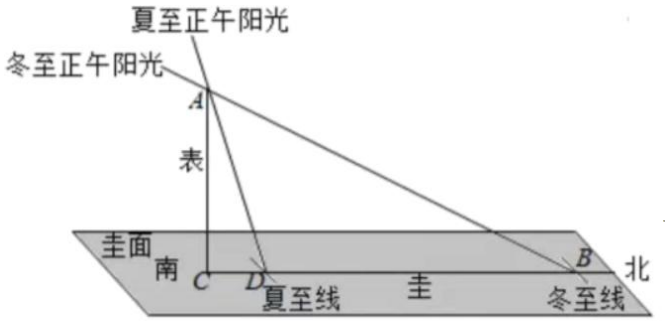


图2

A．$\frac{a\sin 44.5^\circ\sin 88.5^\circ}{\sin 44^\circ}$　　B．$\frac{a\tan 44.5^\circ\tan 88.5^\circ}{\tan 44^\circ}$

C．$\frac{a\tan 88.5^\circ}{\tan 44^\circ}$　　D．$\frac{a\sin 88.5^\circ}{\sin 44^\circ}$

【来源】江苏省南京市第二十九中学 2021-2022 学年高三上学期开学摸底数学试题

11．已知在$\triangle ABC$中，角A,B,C的对边分别为$a,b,c,\cos A=\frac{2}{3},b=2,c=3$.则$BC$边上的高为（　　）

A．1　　B．$\sqrt{2}$　　C．$\sqrt{3}$　　D．2

【来源】“陕西名校”2021 届高三 5 月检测数学（理）试题

12.【吉林省梅河口五中、辽源五中、四平四中 2020-2021 学年高三（上）第一次联考】在$\triangle ABC$中，角A，B，C所对的边分别为a，b，c，已知$B=30°$，$a=2$，$\sin A=\frac{1}{5}$，则$b=$__.

13.【吉林省通化市梅河口五中 2020 届高三数学（文科）五模】在$\triangle ABC$中，$a\cos B-b\cos A=c$，$b+c=4$，则$\triangle ABC$面积的最大值为_____.

14.【西藏山南市第二高级中学 2020 届高三第三次模拟考试】在$\triangle ABC$中，内角A,B,C所对的边分别是a,b,c，且$\sin C\cos\frac{A}{2}=(2-\cos C)\sin\frac{A}{2}$，$\cos A=\frac{3}{5},a=4$，则$\triangle ABC$的面积为_____.

15.【2020 届河北省承德市围场卉原中学高三模拟自测联考】在$\triangle ABC$中，角A、B、C的对边分别为a、b、c，若$\cos 2A=\cos^2 C-\sin^2 B$，则$\cos A$取最小值时，$\frac{c}{b}=$_____.

16．已知$\triangle ABC$外接圆的半径为R，且$2R\left(\sin^2 A-\sin^2 C\right)=(a-b)\sin B$，若$\triangle ABC$的面积为$\frac{\sqrt{3}}{8}abc$，则$c$的值为_____.

【来源】四川省绵阳中学 2021 届高三高考仿真模拟试卷数学（文）试题（一）

17．已知在△ABC中，角A，B，C所对的边分别是a，b，c，$\frac{a}{\sin A}=\frac{1}{\sin B},\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，则$b=$___，$C=$___.

【来源】全国 2021 届高三高考数学信心提升试题

18．已知$\triangle ABC$，$\sin A=\frac{3}{5}$，D是AB中点，$AC=DC$，则$\frac{AB}{AC}=$_____，$\sin\angle ACB=$_____.

【来源】浙江省稽阳联谊学校 2021 届高三 4 月联考数学试题

19．在$\triangle ABC$中，内角 A，B，C所对的边分别为a，b，c，若$\sqrt{3}a\cos B+\sqrt{3}b\cos A=2c\sin A$，则$A=$_____，若$a=b$，则三角形的形状为_____.

【来源】浙江省宁波市镇海中学 2021 届高三下学期高考仿真最后一卷数学试题

20.【广西北海市 2021 届高三第一次模拟考试】已知在$\triangle ABC$中，角A，B，C的对边分别为a，b，c，且$(a+b)\sin A=c\sin C+(2a-b)\sin B$.

（1）求角 C 的大小；

（2）若 $c=\sqrt{2}$，求 $\triangle ABC$ 面积的最大值.

21.【四川省广元市川师大万达中学 2020-2021 学年高三第一次诊断性考试】在 $\triangle ABC$ 中，内角 A，B，C 所对的边分别为 a，b，c，且满足 $2b\cos A-a\cos C=c\cos A$.

（1）求角 A 的大小；

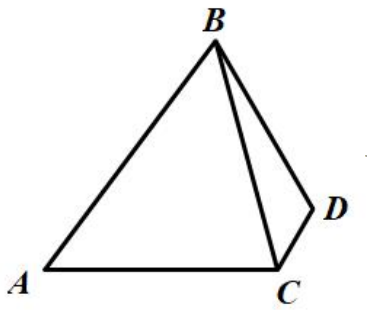
（2）若 $a=2$，求 $b+c$ 的最大值.

22.【广西名校 2021 届高三上学期第一次高考模拟】在 $\triangle ABC$ 中，角 A、B、C 的对边分别为 a、b、c，已知 $c+4b\sin B\cos C=4a\sin B$，且 A 为钝角.

（1）求角 B 的大小；

（2）若 $b=\sqrt{6}-\sqrt{2}$，$c=\dfrac{8\sqrt{5}}{5}$，求 $\dfrac{\sin(3A-B)}{\cos 3C}$ 的值.

23.【2021 届全国著名重点中学新高考冲刺】已知 $\triangle ABC$ 中，角 A，B，C 的对边分别为 a，b，c，且 $\dfrac{\sqrt{2}b\sin A-c}{\sin A+\sin B}=\dfrac{b-a}{\sin(A+B)}$.



（1）求 $\cos A$；

（2）若 $b=4\sqrt{3}$，D 为 $\triangle ABC$ 外一点，如图所示，且 $D=2A$，$DC=2$，$\triangle BCD$ 的面积为 $4\sqrt{2}$，求 c.

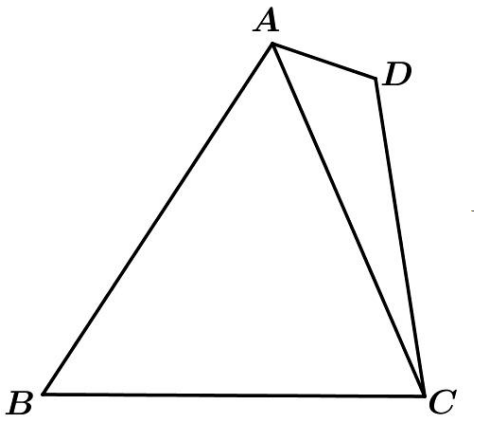
24．已知 $\triangle ABC$ 中，$\angle ABC=\dfrac{\pi}{3}$，$\angle ABC$ 的平分线交 AC 于点 D，$BD=2\sqrt{3}$.

（1）若 $AD=2DC$，求 AC 的长度；

（2）求 $\triangle ABC$ 面积的最小值.

【来源】广东省 2022 届高三上学期 8 月阶段性质量检测数学试题

25．如图所示，在四边形 $ABCD$ 中，$\angle D=2\angle B$，且 $AD=1$，$CD=3$，$\cos B=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

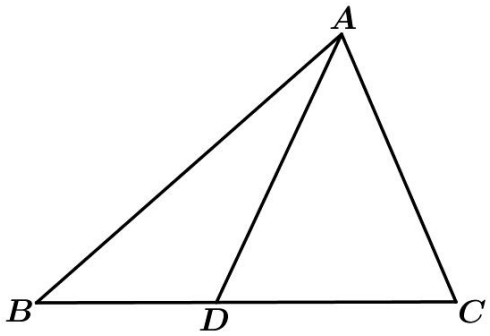


（1）若 $BC=\sqrt{6}$，求 AB 的长；

（2）求四边形 $ABCD$ 面积的最大值.

【来源】广东省广州市省实、广雅、执信、六中四校 2022 届高三上学期 8 月联考数学试题

26．如图，在 $\triangle ABC$ 中，$\angle B=45°$，点 D 在 BC 边上，且 $CD=2$，$AD=3$，$\cos\angle ADC=\frac{1}{3}$



（1）求 AC 的长；

（2）求 $\sin\angle BAD$ 的值.

【来源】湖南省 2021 年普通高等学校对口招生考试数学试题

27．在 $\triangle ABC$ 中，内角 A，B，C 所对的边分别为 a，b，c，且 $2b=2a\cos C+c$.

（1）求 A；

（2）若 $\triangle ABC$ 为锐角三角形，$c=2$，求 b 的取值范围.

【来源】四川省九市资阳、雅安、乐山、内江、眉山、广安、遂宁、自贡、广元 2021 届高三二模数学（理科）试题

28．在①$2a\sin C=c\tan A$；②$2a\cos B=2c-b$；③ $2\cos^2\frac{B+C}{2}=\cos 2A+1$；这三个条件中任选一个，补充在下面问题中，并作答.

在 $\triangle ABC$ 中，内角 A，B，C 所对的边分别是 a，b，c，已知____.

（1）求 A 的值；

（2）若$\triangle ABC$面积为$\frac{\sqrt{3}}{4}$，周长为5，求a的值.

【来源】山东省百师联盟2021届高三二轮联考数学试题（二）

第20讲　平面向量共线定理

【高考地位】

随着向量在科学研究中的工具性应用，与它在社会生产生活中所起的巨大作用，所以近年来数学高考题中，命入了共线向量内容考题.在今后的高考试题中，共线向量必将增长态势.其在高考题型多以选择题、填空题出现，其试题难度属低中档题.

方法一　共线定理的代数运算

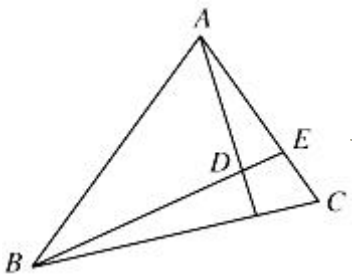
万能模板	内　　容
使用场景	共线条件求向量或条件
解题模板	第一步　表示共线； 第二步　列出等式； 第三步　得出结论.

例1、（1）2．已知向量$\vec{a}$，$\vec{b}$满足$|\vec{a}|=3|\vec{b}|=2$，$\vec{a}\cdot\vec{b}=1$，若$-\vec{a}+2\vec{b}$与$m\vec{a}+3\vec{b}$共线，则$|m\vec{a}+3\vec{b}|=$（　　）

A．2　　B．4　　C．$\sqrt{22}$　　D．22

【来源】湖南省2021届高三数学模拟试题（黑卷）

（2）在$\triangle ABC$中，$\overrightarrow{AE}=3\overrightarrow{EC}$，$D$是$BE$上的点，若$\overrightarrow{AD}=x\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$，则实数$x$的值为（　　）



A．$\frac{1}{3}$　　B．$-\frac{2}{3}$　　C．$\frac{4}{3}$　　D．$\frac{1}{9}$

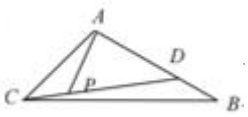
【来源】全国卷地区“超级全能生”（丙卷）2021届高三5月联考数学（理）试题

【变式演练 1】已知向量 $\vec{a},\vec{b}$ 满足 $|\vec{a}|=1$，$\vec{b}=(1,1)$，$\vec{b}=\lambda\vec{a}(\lambda\in R)$，则 $|\sqrt{2}\vec{a}+\vec{b}|=$（　　）

A．2 或 0　　B．$2\sqrt{3}$　　C．$2\sqrt{2}$　　D．$2\sqrt{2}$ 或 0

【来源】安徽省合肥市第六中学 2021 届高三下学期高考考前诊断暨预测卷理科数学试题

【变式演练 2】【湖北省武汉市武昌区 2020 届高三下学期六月适应性考试】**如图在 $\triangle ABC$ 中，$\vec{AD}=3\vec{DB}$，*P* 为 *CD* 上一点，且满足 $\vec{AP}=m\vec{AC}+\frac{1}{2}\vec{AB}$，则实数 *m* 的值为（　　）**

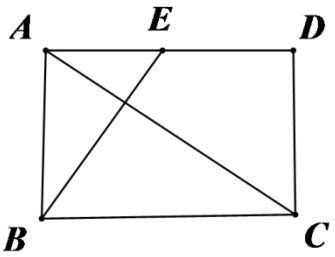


A．$\frac{1}{2}$　　B．$\frac{1}{3}$　　C．$\frac{1}{4}$　　D．$\frac{1}{5}$

方法二　建系设坐标处理共线问题

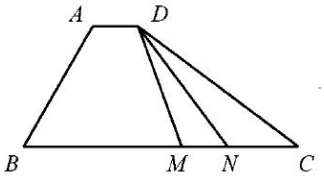
万能模板	内　　容
使用场景	共线，用已知向量表示未知向量
解题模板	第一步　根据条件建立合适的坐标系； 第二步　用坐标合理的表示各个向量以及关系； 第三步　得出结论.

例 2 【黑龙江省大庆一中 2020 届高三高考数学（文科）三模】**“勾 3 股 4 弦 5”是勾股定理的一个特例.根据记载，西周时期的数学家商高曾经和周公讨论过“勾 3 股 4 弦 5”的问题，毕达哥拉斯发现勾股定理早了 500 多年，如图，在矩形 $ABCD$ 中，$\triangle ABC$ 满足“勾 3 股 4 弦 5”，且 $AB=3$，E 为 AD 上一点，$BE\perp AC$. 若 $\overrightarrow{BE}=\lambda\overrightarrow{BA}+\mu\overrightarrow{BC}$，则 $\lambda+\mu$ 的值为（　　）**



A．$\frac{10}{7}$　　B．$\frac{9}{8}$　　C．$\frac{25}{16}$　　D．$\frac{29}{18}$

【变式演练 3】如图，在四边形 $ABCD$ 中，$\angle B=60^{\circ}$，$AB=3$，$BC=6$，且 $\overrightarrow{AD}=\lambda\overrightarrow{BC}$，$\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AB}=-\frac{3}{2}$，则实数 λ 的值为_____，若 M,N 是线段 BC 上的动点，且 $|\overrightarrow{MN}|=1$，则 $\overrightarrow{DM}\cdot\overrightarrow{DN}$ 的最小值为_____.



【来源】文科数学-2021 年高考考前 20 天终极冲刺攻略（一）（课标全国卷）

方法三　几何法

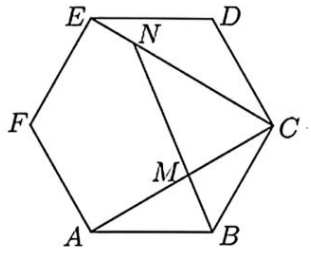
万能模板	内　　容
使用场景	平面几何证明、求值等问题中的应用
解题模板	第一步　将已知条件进行向量处理； 第二步　利用平面向量的运算法则和线性运算等性质进行求解； 第三步　得出结论.

例 3　平面内有一个 ΔABC 和一点 O，线段 OA、OB、OC 的中点分别为 E、F、G，BC、CA、AB 的中点分别为 L、M、N，设 $\overrightarrow{OA}=\vec{a},\overrightarrow{OB}=\vec{b},\overrightarrow{OC}=\vec{c}$.

（1）试用 $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ 表示向量 $\overrightarrow{EL},\overrightarrow{FM},\overrightarrow{GN}$；

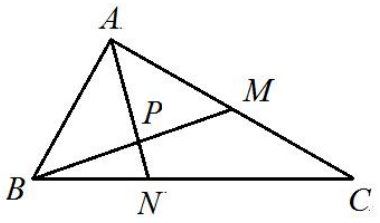
（2）证明线段 EL、FM、GN 交于一点且互相平分.

【变式演练 4】已知正六边形 $ABCDEF$，M、N 分别是对角线 AC、CE 上的点，使得 $\frac{AM}{AC}=\frac{CN}{CE}=r$，当 $r=$_____时，B、M、N 三点共线.



【来源】上海市南模中学 2021 届高三三模数学试题

【变式演练 5】【2020 届甘肃省高三第二次高考诊断考试】**如图，在 $\triangle ABC$ 中，M 是 AC 的中点，N 在边 BC 上，且 $\overrightarrow{BC}=3\overrightarrow{BN}$，$BM$ 与 AN 交于点 P，若 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=24\overrightarrow{BP}\cdot\overrightarrow{PN}$，则 $\frac{|AB|}{|BC|}$ 的值是（　　）**



A. $\frac{\sqrt{3}}{3}$　　**B.** $\sqrt{3}$　　**C.** $\frac{1}{3}$　　**D. 3**

【高考再现】

1.【2017 北京理，6】设 $\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}$ 为非零向量，则“存在负数 λ，使得 $\boldsymbol{m}=\lambda\boldsymbol{n}$”是“$\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}<0$”的

（A）充分而不必要条件　　（B）必要而不充分条件

（C）充分必要条件　　（D）既不充分也不必要条件

2. 【2017全国III卷理，12】在矩形 $ABCD$ 中，$AB=1$，$AD=2$，动点 P 在以点 C 为圆心且与 BD 相切的圆上．若 $\overrightarrow{AP}=\lambda\overrightarrow{AB}+\mu\overrightarrow{AD}$，则 $\lambda+\mu$ 的最大值为（）

A．3　　B．$2\sqrt{2}$　　C．$\sqrt{5}$　　D．2

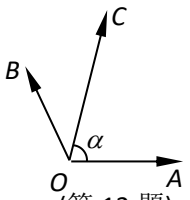
3.【2015 高考新课标 1，理 7】设 D 为 ΔABC 所在平面内一点 $\overrightarrow{BC}=3\overrightarrow{CD}$，则（　）

（A）$\overrightarrow{AD}=-\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{4}{3}\overrightarrow{AC}$　　(B) $\overrightarrow{AD}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}-\frac{4}{3}\overrightarrow{AC}$

（C）$\overrightarrow{AD}=\frac{4}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$　　(D) $\overrightarrow{AD}=\frac{4}{3}\overrightarrow{AB}-\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$

4.【2017 山东文，11】已知向量 $\boldsymbol{a}$=（2,6）,$\boldsymbol{b}=(-1,\lambda)$，若 $\boldsymbol{a}\|\boldsymbol{b}$,则 $\lambda=$_____.

5. 【2017 江苏，12】如图,在同一个平面内，向量 $\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OC}$ 的模分别为 $1,1,\sqrt{2}$，$\overrightarrow{OA}$ 与 $\overrightarrow{OC}$ 的夹角为 α，且 $\tan\alpha=7$，$\overrightarrow{OB}$ 与 $\overrightarrow{OC}$ 的夹角为 45°.若 $\overrightarrow{OC}=m\overrightarrow{OA}+n\overrightarrow{OB}$ $(m,n\in\mathbf{R})$，则 $m+n=$__▲__.

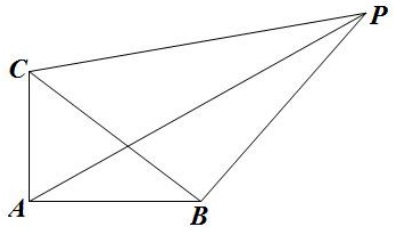


(第 12 题)

6.【2015 高考北京，理 13】在△ABC 中，点 M，N 满足 $\overrightarrow{AM}=2\overrightarrow{MC}$，$\overrightarrow{BN}=\overrightarrow{NC}$．若 $\overrightarrow{MN}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}$，则 $x=$_____；$y=$_____.

7.【2015 高考新课标 2，理 13】设向量 $\vec{a}$，$\vec{b}$ 不平行，向量 $\lambda\vec{a}+\vec{b}$ 与 $\vec{a}+2\vec{b}$ 平行，则实数 $\lambda=$_____.

8. 【2020年高考江苏卷13】在ΔABC中，$AB=4$，$AC=3$，$\angle BAC=90°$，D在边BC上，延长AD到P，使得$AP=9$，若$\overrightarrow{PA}=m\overrightarrow{PB}+(\frac{3}{2}-m)\overrightarrow{PC}$（$m$为常数），则$CD$的长度是_____.



9.【2017江苏，16】 已知向量$\boldsymbol{a}=(\cos x,\sin x),\boldsymbol{b}=(3,-\sqrt{3}),x\in[0,\pi]$.

（1）若$\boldsymbol{a}//\boldsymbol{b}$,求$x$的值；

（2）记$f(x)=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$,求$f(x)$的最大值和最小值以及对应的$x$的值.

【反馈练习】

1.【湖南省益阳市2020届高三下学期5月高考模拟理科】已知向量$\vec{a}=(x,1)$与向量$\vec{b}=\left(x^2-3x+\frac{9}{4},2x-3\right)$共线，则实数$x$的值为（　　）

A. $-\frac{3}{2}$　　B. $\frac{3}{2}$或$-\frac{3}{2}$　　C. $\frac{3}{2}$　　D. $\frac{3}{2}$或0

2.【湖南省衡阳市第八中学2020届高三下学期高考适应性考试】在$\triangle ABC$中，D，E分别为AB，BC上的点，且$AD=DB$，$BE=2EC$，若$\overrightarrow{DE}=m\overrightarrow{AB}+n\overrightarrow{AC}$，则$\frac{m}{n}=$（　　）

A. $-\frac{1}{4}$　　B. $-\frac{5}{8}$　　C. $\frac{1}{8}$　　D. $\frac{5}{4}$

3.【陕西省西安市八校2020届高三（6月份)高考数学（理科)联考】设$\vec{e_1},\vec{e_2}$是平面内两个不共线的向量，$\overrightarrow{AB}=(a-1)\vec{e_1}+\vec{e_2},\overrightarrow{AC}=b\vec{e_1}-2\vec{e_2}$（$a>0$，$b>0$），若$A$，$B$，$C$三点共线，则$\frac{1}{a}+\frac{2}{b}$的最小值是（　　）

A. 2　　B. 4　　C. 6　　D. 8

4.【辽宁省盘锦市辽河油田第三高级中学2020届高三下学期三模】在$\triangle ABC$中，点D在线段BC上，且$CD=2BD$，E为AC的中点，则$\overrightarrow{DE}=$（　　）

A. $-\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{6}\overrightarrow{AC}$　　B. $-\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}-\frac{1}{6}\overrightarrow{AC}$

C. $\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}-\frac{1}{6}\overrightarrow{AC}$　　D. $\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{6}\overrightarrow{AC}$

5.【2020届百校联盟TOP300八月尖子生联考(全国II卷)】在等腰梯形$ABCD$中，$AB//DC$，$AB=2DC$，

$\angle BAD=60°$，E 为 BC 的中点，则（　　）

A．$\overrightarrow{AE}=\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$　　B．$\overrightarrow{AE}=\frac{3}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$

C．$\overrightarrow{AE}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$　　D．$\overrightarrow{AE}=\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{4}\overrightarrow{AD}$

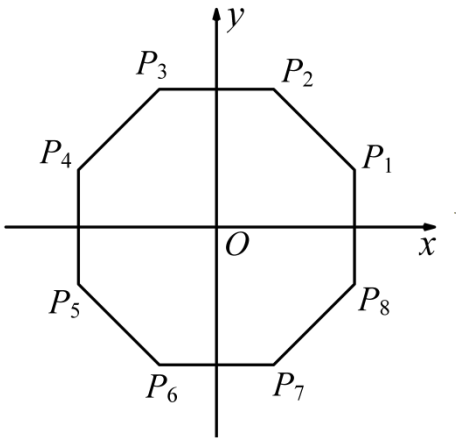
6.【河南省郑州市第一中学 2020 届高三名校联考】设 S_n，T_n 分别为等差数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ 的前 n 项和，且 $\frac{S_n}{T_n}=\frac{3n+2}{4n+5}$.设点 A 是直线 BC 外一点，点 P 是直线 BC 上一点，且 $\overrightarrow{AP}=\frac{a_1+a_4}{b_3}\cdot\overrightarrow{AB}+\lambda\cdot\overrightarrow{AC}$，则实数 λ 的取值为（　　）

A．$\frac{28}{25}$　　B．$-\frac{3}{25}$　　C．$\frac{3}{28}$　　D．$-\frac{18}{25}$

7.【湖北省部分重点中学 2019-2020 学年高三上学期第一次联考】点 P 是 $\triangle ABC$ 所在平面上一点，若 $\overrightarrow{AP}=\frac{2}{5}\overrightarrow{AB}+\frac{3}{5}\overrightarrow{AC}$，则 $\triangle ABP$ 与 $\triangle ACP$ 的面积之比是（　　）

A．$\frac{3}{5}$　　B．$\frac{5}{2}$　　C．$\frac{3}{2}$　　D．$\frac{2}{3}$

8.【山东省烟台市 2020 届高三适应性练习】窗的运用是中式园林设计的重要组成部分，常常运用象征、隐喻、借景等手法，将民族文化与哲理融入其中，营造出广阔的审美意境.从窗的外形看，常见的有圆形、菱形、正六边形、正八边形等.如图，在平面直角坐标系 xOy 中，O 为正八边形 $P_1P_2\cdots P_8$ 的中心，$P_1P_8\perp x$ 轴，现用如下方法等可能地确定点 M：点 M 满足 $2\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{OP_i}+\overrightarrow{OP_j}=\mathbf{0}$（其中 $1\le i,j\le 8$ 且 $i,j\in N^*$，$i\ne j$），则点 M（异于点 O）落在坐标轴上的概率为（　　）



A．$\frac{3}{5}$　　B．$\frac{3}{7}$　　C．$\frac{3}{8}$　　D．$\frac{2}{7}$

9.【黑龙江省哈尔滨市第三中学校 2020 届高三第三次模拟】已知 $\triangle ABC$ 中，长为 2 的线段 AQ 为 BC 边

上的高，满足：$\overrightarrow{AB}\sin B+\overrightarrow{AC}\sin C=\overrightarrow{AQ}$，且$\overrightarrow{AH}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$，则$BH=$（　　）

A．$\frac{4\sqrt{7}}{7}$　　B．$4\sqrt{7}$　　C．$\frac{4\sqrt{3}}{3}$　　D．$2\sqrt{7}$

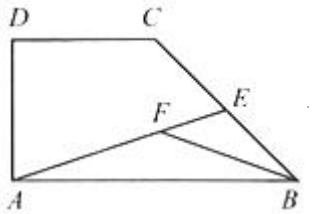
10.【黑龙江省哈尔滨师范大学附属中学2020届高三下学期第三次模拟】已知M为$\triangle ABC$的边AB的中点，N为$\triangle ABC$内一点，且$\overrightarrow{AN}=\overrightarrow{AM}+\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$，则$\frac{S_{\triangle AMN}}{S_{\triangle BCN}}=$（　　）

A．$\frac{1}{6}$　　B．$\frac{1}{3}$　　C．$\frac{1}{2}$　　D．$\frac{2}{3}$

11.【福建省三明市2020届高三毕业班质量检查测试】早在公元前十一世纪，周朝数学家商高就提出“勾三股四弦五”，《周髀算经》中曾有记载，大意为：“当直角三角形的两条直角边分别为3（勾）和4（股）时，径隅（弦）则为5”，故勾股定理也称为商高定理.现有$\triangle ABC$的三边满足“勾三股四弦五”，其中勾AC的长为3，点A在弦BC上的射影为点D，则$\left(\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{BA}\right)\cdot\overrightarrow{AD}=$（　　）

A．$\frac{36}{5}$　　B．$\frac{144}{25}$　　C．$-\frac{144}{25}$　　D．$-\frac{36}{5}$

12.【2020届广东省广州市高三二模】如图，在梯形$ABCD$中，$AB//CD$，$AB\perp AD$，$AB=2AD=2DC$，E是BC的中点，F是AE上一点，$\overrightarrow{AF}=2\overrightarrow{FE}$，则$\overrightarrow{BF}=$（　　）



A．$\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}-\frac{1}{3}\overrightarrow{AD}$　　B．$\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$

C．$-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AD}$　　D．$-\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$

13.【新疆2020届普通高考高三第二次适应性检测】设M是$\triangle ABC$所在平面上的一点，$\overrightarrow{MB}+\frac{3}{2}\overrightarrow{MA}+\frac{3}{2}\overrightarrow{MC}=\vec{0}$，$D$是$AC$的中点，$t\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{DM}$，则实数$t$的值为（　　）

A．$\frac{1}{2}$　　B．$\frac{1}{3}$　　C．2　　D．1

14.【河南省濮阳市2020届高三第二次模拟考试】已知$\triangle ABC$中，点M在线段AB上，$\angle ACB=2\angle BCM=60°$，且$\overrightarrow{CM}-\lambda\overrightarrow{CB}=\frac{2}{3}\overrightarrow{CA}$.若$|\overrightarrow{CM}|=6$，则$\overrightarrow{CM}\cdot\overrightarrow{AB}=$（　　）

A．$27\sqrt{3}$　　B．$18\sqrt{3}$　　C．27　　D．18

15．已知向量 a 和 b 不共线，向量 $\overrightarrow{AB}=a+mb$，$\overrightarrow{BC}=5\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{CD}=-3\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b}$，若 A、$B$、$D$ 三点共线，则 $m=$（　　）

A．3　　B．2　　C．1　　D．-2

【来源】百师联盟 2021 届高三冲刺卷（二）新高考卷数学试题

16．设 $\vec{e_1}$，$\vec{e_2}$ 是两个不共线的平面向量，若 $\vec{a}=3\vec{e_1}-2\vec{e_2}$，$\vec{b}=\vec{e_1}+k\vec{e_2}$，且 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 共线，则实数 k 的值为（　　）

A．$-\frac{1}{2}$　　B．$\frac{1}{2}$　　C．$-\frac{2}{3}$　　D．$\frac{2}{3}$

【来源】江苏省盐城中学 2021 届高三下学期仿真模拟数学试题

17．已知 $\vec{a}$，$\vec{b}$ 是两个不共线的非零向量，若 $(2\vec{a}+3\vec{b})//(3\vec{a}+\lambda\vec{b})$，则实数 $\lambda=$（　　）

A．$\frac{9}{2}$　　B．-2　　C．2　　D．$-\frac{9}{2}$

【来源】四川省成都市蓉城名校联盟 2021 届高三第三次联考理科数学试题

18．在四边形 $ABCD$ 中，$AB//CD$，设 $\overrightarrow{AC}=\lambda\overrightarrow{AB}+\mu\overrightarrow{AD}$（$\lambda$，$\mu\in R$）.若 $\lambda+\mu=\frac{4}{3}$，则 $\frac{\left|\overrightarrow{CD}\right|}{\left|\overrightarrow{AB}\right|}=$（　　）

A．$\frac{2}{3}$　　B．$\frac{1}{2}$　　C．$\frac{1}{3}$　　D．$\frac{1}{4}$

【来源】陕西省西安中学 2021 届高三高考模拟数学（文）试题（三）

19．在 $\triangle ABC$ 中，$\overrightarrow{AN}=t\overrightarrow{NC}\ (t>0)$，$P$ 是 BN 上一点，若 $\overrightarrow{AP}=\frac{1}{6}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$，则实数 t 的值为（　　）

A．$\frac{1}{6}$　　B．$\frac{1}{3}$　　C．$\frac{2}{3}$　　D．$\frac{5}{6}$

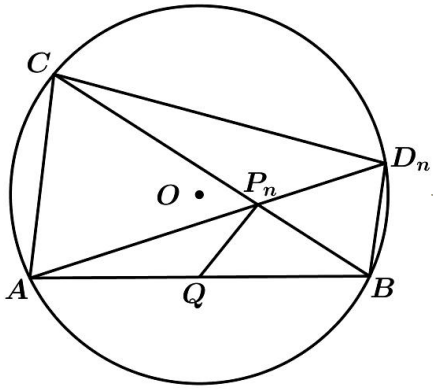
【来源】天一大联考 2020-2021 学年高中毕业班阶段性测试（五）数学试卷（新高考版 A 卷）试题

20.在三角形 ABC 中，E、F 分别为 AC、AB 上的点，BE 与 CF 交于点 Q 且 $\vec{AE}=2\vec{EC}$，$\vec{AF}=3\vec{FB}$，AQ 交 BC 于点 D，$\vec{AQ}=\lambda\vec{QD}$，则 λ 的值为（　　）

A．3　　B．4　　C．5　　D．6

【来源】陕西省宝鸡市千阳中学 2021 届高三下学期 5 月预测题数学（理）试题

21.（多选）如图，已知点 A,B,C 是 $\odot O$ 上三个不同定点，Q 为弦 AB 的中点，$D_n(n\in N^*)$ 是劣弧 BC 上异于 B,C 的一系列动点，连接 AD_n 交 BC 于 P_n，点 $P_n\left(n\in N^*\right)$ 满足 $\vec{P_nC}=a_{n+1}\cdot\vec{P_nA}-2\left(2a_n+1\right)\cdot\vec{P_nQ}$，其中数列 $\{a_n\}$ 是首项为 1 的正项数列，S_n 是数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和，则下列结论正确的是（　　）

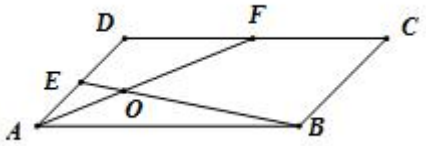


A．数列$\{a_n+1\}$是等比数列　　B．$a_3=7$

C．$a_n=2n-1$　　D．$S_n=2^n+n-2$

【来源】山东省济宁市任城区任兴高中联盟2020-2021学年高三上学期1月联考数学试题

22.【江苏省2020届高三下学期6月高考押题】**如图，在平行四边形$ABCD$中，$AB=2AD,E,F$分别为AD,DC的中点，AF与BE交于点O.若$12\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AB}=5\overrightarrow{OF}\cdot\overrightarrow{OB}$，则$\angle DAB$的余弦值为_____.**



23.【山东省2020届普通高等学校招生全国统一考试数学试题模拟卷】在$\triangle ABC$中，$AB=2$，$BC=3\sqrt{3}$，$\angle ABC=30^\circ$，AD为BC边上的高．若$\overrightarrow{AD}=\lambda\overrightarrow{AB}+\mu\overrightarrow{AC}$，则$\lambda-\mu=$_____.

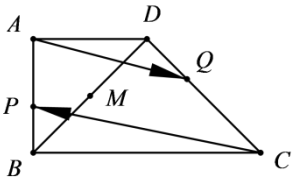
24．设向量$\vec{e_1},\vec{e_2}$不共线，向量$\lambda\vec{e_1}+2\vec{e_2}$与$\vec{e_1}+4\vec{e_2}$平行，则实数$\lambda=$_____.

【来源】解密09 平面向量（讲义）-【高频考点解密】2021年高考数学（理）二轮复习讲义 分层训练

25．设$\vec{e_1},\vec{e_2}$是不共线的向量，若$\overrightarrow{AB}=\vec{e_1}+\lambda\vec{e_2},\overrightarrow{CB}=\vec{e_1}+\vec{e_2},\overrightarrow{CD}=3\vec{e_1}-2\vec{e_2},A,B,D$三点共线，则$\lambda$的值为_____.

【来源】【新东方】【2021.5.19】【SX】【高三下】【高中数学】【SX00159】

26．如图所示，在直角梯形*ABCD*中，已知$AD//BC$，$\angle ABC=\frac{\pi}{2}$，$AB=AD=1$，$BC=2$，*M*为*BD*的中点，设*P*、*Q*分别为线段*AB*、*CD*上的动点，若*P*、*M*、*Q*三点共线，则$\overrightarrow{AQ}\cdot\overrightarrow{CP}$的最大值为__.



【来源】考点 33　平面向量的数量积-备战 2021 年高考数学经典小题考前必刷（新高考地区专用）

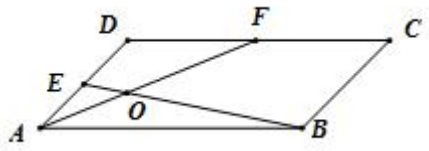
27．已知向量 $\vec{a}$，$\vec{b}$ 满足 $|\vec{a}+\vec{b}|=3$，$\vec{a}\cdot\vec{b}=0$．若 $\vec{c}=\lambda\vec{a}+(1-\lambda)\vec{b}$，且 $\vec{c}\cdot\vec{a}=\vec{c}\cdot\vec{b}$，则 $|\vec{c}|$ 的最大值为_____．

【来源】浙江省 2021 届高三高考数学压轴卷试题

28．已知 $\triangle ABC$ 的重心为 G，过 G 点的直线与边 AB 和 AC 的交点分别为 M 和 N，若 $\overrightarrow{AM}=5\overrightarrow{MB}$，则 $\triangle ABC$ 与 $\triangle AMN$ 的面积之比为_____．

【来源】山西省太原市 2021 届高三上学期期末数学（文）试题

29．如图，在平行四边形 $ABCD$ 中，$AB=2AD$，E,F 分别为 AD,DC 的中点，AF 与 BE 交于点 O．若 $12\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AB}=5\overrightarrow{OF}\cdot\overrightarrow{OB}$，则 $\angle DAB$ 的余弦值为_____．



【来源】第 18 练　平面向量的基本定理及坐标表示-2021 年高考数学（理）一轮复习小题必刷

第 21 讲　平面向量中最值、范围问题

【高考地位】

平面向量中的最值和范围问题，是一个热点问题，也是难点问题，这类试题的基本类型是根据给出的条件求某个量的最值、范围，如：向量的模、数量积、夹角及向量的系数．解决这类问题的一般思路是建立求解目标的函数关系，通过函数的值域解决问题，同时，平面向量兼具“数”与“形”的双重身份，解决平面向量最值、范围问题的另一个基本思想是数形结合．在高考各种题型均有出现如选择题、填空题和解答题，其试题难度属中高档题．

方法一　利用基本不等式求平面向量的最值

万能模板	内　　容
使用场景	一般平面向量求最值问题

解题模板	第一步　利用向量的概念及其基本运算将所求问题转化为相应的等式关系； 第二步　运用基本不等式求其最值问题； 第三步　得出结论.

例 1、已知点 A 在线段 BC 上（不含端点），O 是直线 BC 外一点，且 $\overrightarrow{OA}-2a\overrightarrow{OB}-b\overrightarrow{OC}=\vec{0}$，则 $\frac{a}{a+2b}+\frac{2b}{1+b}$ 的最小值是_____

【变式演练 1】在 $\triangle ABC$ 中，点 M 是边 AC 上的点，满足 $\overrightarrow{CM}=2\overrightarrow{MA}$，$\left|\overrightarrow{BM}\right|=1$，$\sin\frac{\angle ABC}{2}=\frac{\sqrt{6}}{4}$，则 $2\left|\overrightarrow{AB}\right|+\left|\overrightarrow{BC}\right|$ 的最大值为（　　）

A. $2\sqrt{10}$　　B. $\frac{16\sqrt{10}}{5}$　　C. $\frac{6\sqrt{10}}{5}$　　D. $\frac{2\sqrt{10}}{5}$

【来源】全国Ⅰ卷 2021 届高三高考数学（文）押题试题（二）

【变式演练 2】【浙江省 2020 届高三下学期 6 月新高考进阶】**若 $AB=4$，$\overrightarrow{AC}=3\overrightarrow{CB}$，平面内一点 P，满足 $\frac{\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PC}}{|\overrightarrow{PA}|}=\frac{\overrightarrow{PB}\cdot\overrightarrow{PC}}{|\overrightarrow{PB}|}$，$\sin\angle PAB$ 的最大值是（　　）**

A. $\frac{2}{3}$　　**B.** $\frac{1}{2}$　　**C.** $\frac{1}{3}$　　**D.** $\frac{1}{6}$

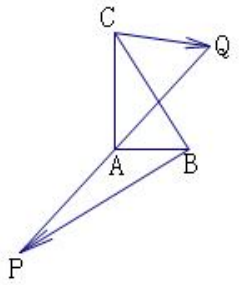
方法二　建立直角坐标系法

万能模板	内　　容
使用场景	一般向量求最值或取值范围类型
解题模板	第一步　根据题意建立适当的直角坐标系并写出相应点的坐标； 第二步　将平面向量数量积的运算坐标化； 第三步　运用适当的数学方法如二次函数的思想、基本不等式的思想、三角函数思想等求解即可.

例 2　（1）在 ΔABC 中，　$AB=3AC=9$，　$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AC}^2$，点 P 是 ΔABC 所在平面内一点，则当 $\overrightarrow{PA}^2+\overrightarrow{PB}^2+\overrightarrow{PC}^2$ 取得最小值时，　$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{BC}=$（　　）

A. -24　　B. $6\sqrt{2}$　　C. $\frac{9}{2}$　　D. 24

例 2　（2）在 $Rt\Delta ABC$ 中，$BC=a$，若长为 $2a$ 的线段 PQ 以 A 点为中点，问 $\overrightarrow{PQ}$ 与 $\overrightarrow{BC}$ 的夹角 θ 取何值时 $\overrightarrow{BP}\cdot\overrightarrow{CQ}$ 的值最大？并求出这个最大值.



【变式演练 3】【2020 届河南省开封市高三二模】已知平行四边形 $ABCD$ 中，$AB=AD=2$，$\angle DAB=60°$，对角线 AC 与 BD 相交于点 O，点 M 是线段 BC 上一点，则 $\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{CM}$ 的最小值为（　　）

A．$-\frac{9}{16}$　　B．$\frac{9}{16}$　　C．$-\frac{1}{2}$　　D．$\frac{1}{2}$

【变式演练 4】【浙江省 2020 届高三新高考模拟试题心态卷】已知 *AB* 是半圆 *O* 的直径，*AB*=2，等腰三角形 *OCD* 的顶点 *C*、*D* 在半圆弧 $\overset{\frown}{AB}$ 上运动，且 *OC*=*OD*，∠*COD*=120°，点 *P* 是半圆弧 $\overset{\frown}{AB}$ 上的动点，则 $\overrightarrow{PC}\cdot\overrightarrow{PD}$ 的取值范围（　　）

A．$[-\frac{3}{4},\frac{3}{4}]$　　B．$[-\frac{3}{4},1]$

C．$[-\frac{1}{2},1]$　　D．$[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]$

方法三　构造目标函数求最值

万能模板	内　　容
使用场景	一般向量求最值或取值范围类型
解题模板	第一步　根据条件设变量； 第二步　利用平面向量的运算法则列出关系式； 第三步　根据函数求出最值或范围.

例 3　【山东省济宁市第一中学 2020 届高三考前冲刺测试】在平行四边形 $ABCD$ 中，$\angle A=\frac{\pi}{3}$，$AB=2$，$AD=1$，若 M、N 分别是边 BC、CD 上的点，且满足 $\frac{|\overrightarrow{BM}|}{|\overrightarrow{BC}|}=\frac{|\overrightarrow{CN}|}{|\overrightarrow{CD}|}$，则 $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AN}$ 的最大值为（　　）

A．2　　B．4　　C．5　　D．6

【变式演练 5】【浙江省杭州二中 2020 届高三下学期高考仿真考】面积为 2 的 $\triangle ABC$ 中，E，F 分别是 AB，AC 的中点，点 P 在直线 *EF* 上，则 $\overrightarrow{PC}\cdot\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{BC}^2$ 的最小值是（　　）

A．$\sqrt{2}$　　B．$2\sqrt{2}$　　C．$\sqrt{3}$　　D．$2\sqrt{3}$

【高考再现】

1.【2020 年高考山东卷 7】已知 P 是边长为 2 的正六边形 $ABCDEF$ 内的一点，则 $\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AB}$ 取值范围是（　）

A．$(-2,6)$　　B．$(-6,2)$　　C．$(-2,4)$　　D．$(-4,6)$

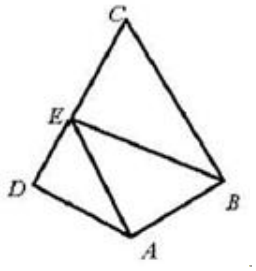
2.【2018 年浙江卷】已知 a，b，e 是平面向量，e 是单位向量．若非零向量 a 与 e 的夹角为$\frac{\pi}{3}$，向量 b 满足 $b^2-4e\cdot b+3=0$，则$|a-b|$的最小值是（　　）

A．$\sqrt{3}-1$　　B．$\sqrt{3}+1$　　C．2　　D．$2-\sqrt{3}$

3.【2017 全国 **II 卷理，12**】已知 ΔABC 是边长为 2 的等边三角形，P 为平面 ABC 内一点，则 $\overrightarrow{PA}\cdot(\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC})$ 的最小值是（　　）

A.-2　　B.$-\frac{3}{2}$　　C.$-\frac{4}{3}$　　D.-1

4.【2018 年天津卷】如图，在平面四边形 $ABCD$ 中，$AB\perp BC, AD\perp CD, \angle BAD=120°, AB=AD=1$,若点 E 为边 CD 上的动点，则$\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{BE}$的最小值为　（　　）

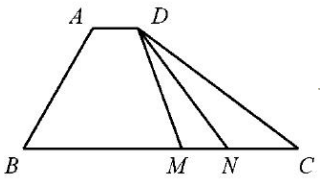


A．$\frac{21}{16}$　　B．$\frac{3}{2}$　　C．$\frac{25}{16}$　　D．3

5.【2017 浙江，15】已知向量 a，b 满足$|\boldsymbol{a}|=1,|\boldsymbol{b}|=2$,则$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|+|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$的最小值是_____，最大值是_____.

6.【2020 年高考浙江卷 17】设 $\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$ 为单位向量，满足$|2\boldsymbol{e}_1-\boldsymbol{e}_2|\le\sqrt{2}$，$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2$，$\boldsymbol{b}=3\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2$，设 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 的夹角为 θ，则 $\cos^2\theta$ 的最小值为__▲__.

7.【2020 年高考天津卷 15】如图，在四边形 $ABCD$ 中，$\angle B=60^\circ$，$AB=3$，$BC=6$，且 $\overrightarrow{AD}=\lambda\overrightarrow{BC}$，$\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AB}=-\frac{3}{2}$，则实数 λ 的值为_____，若 M,N 是线段 BC 上的动点，且$|\overrightarrow{MN}|=1$，则 $\overrightarrow{DM}\cdot\overrightarrow{DN}$ 的最小值为_____.



8.【2017 江苏，13】在平面直角坐标系 xOy 中，$A(-12,0), B(0,6)$，点 P 在圆 O：$x^2+y^2=50$ 上，若 $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}\leqslant 20$，则点 P 的横坐标的取值范围是_____.

9.【2017 北京文，12】已知点 P 在圆 $x^2+y^2=1$ 上，点 A 的坐标为(-2,0)，O 为原点，则 $\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{AP}$ 的最大值为_____.

10.【2018 年上海卷】已知实数 x_1、x_2、y_1、y_2 满足：$x_1^2+y_1^2=1$，$x_2^2+y_2^2=1$，$x_1x_2+y_1y_2=\frac{1}{2}$，则 $\frac{|x_1+y_1-1|}{\sqrt{2}}+\frac{|x_2+y_2-1|}{\sqrt{2}}$ 的最大值为_____.

11.【2018 年上海卷】在平面直角坐标系中，已知点 $A(-1,\ 0)$、$B(2,\ 0)$，E、F 是 y 轴上的两个动点，且 $|\overrightarrow{EF}|=2$，则 $\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{BF}$ 最小值为____.

【反馈练习】

1.【2020 届湖南省怀化市高三下学期 4 月第一次模拟考试】已知圆 $C:x^2+y^2-6x+8=0$ 和两点 $A(-t,0)$，$B(t,0)(t>0)$，若圆 C 上存在点 P，使得 $\overrightarrow{AP}\bullet\overrightarrow{BP}=0$，则实数 t 的取值范围是（　　）

A．$(1,3)$　　B．$(2,4)$　　C．$[1,3]$　　D．$[2,4]$

2.【甘肃省静宁县第一中学 2020 届高三第十次模拟】已知 $\triangle ABC$ 是边长为 $4\sqrt{3}$ 的等边三角形，其中心为 O，P 为平面内一点，若 $OP=1$，则 $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}$ 的最小值是（　　）

A．-11　　B．-6　　C．-3　　D．-15

3.【2020 届河南省天一大联考“顶尖计划”高三第二次考试】已知 AM，BN 分别为圆 $O_1:(x+1)^2+y^2=1$ 与 $O_2:(x-2)^2+y^2=4$ 的直径，则 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{MN}$ 的取值范围为（　　）

A．$[0,8]$　　B．$[0,9]$　　C．$[1,8]$　　D．$[1,9]$

4.【西南名校联盟 2020 届 3 3 3 高考备考诊断性联考卷】已知向量 $\vec{a}$，$\vec{b}$ 满足 $\vec{a}=\left(t,2\sqrt{2}-t\right)$，$|\vec{b}|=1$，且 $\left(\vec{a}-\vec{b}\right)\perp\vec{b}$，则 $\vec{a}$，$\vec{b}$ 的夹角的最小值为（　　）

A. $\frac{\pi}{6}$　　B. $\frac{\pi}{4}$　　C. $\frac{\pi}{3}$　　D. $\frac{\pi}{2}$

6.【黑龙江省哈尔滨师范大学附属中学 2020 届高三下学期第四次模拟】在 $\triangle ABC$ 中，$\left|\overrightarrow{AB}\right|=\left|\overrightarrow{AC}\right|=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=2$，点 Q 在线段 BC（含端点）上运动，点 P 是以 Q 为圆心，1 为半径的圆及内部一动点，若 $\overrightarrow{AP}=\lambda\overrightarrow{AB}+\mu\overrightarrow{AC}$，则 $\lambda+\mu$ 的最大值为（　　）

A. 1　　B. $\frac{\sqrt{3}}{3}$　　C. $\frac{3+\sqrt{3}}{3}$　　D. $\frac{3}{2}$

7.【2020 年山东省聊城市高考模拟考试（三模）】已知线段 AB 是圆 $C:x^2+y^2=4$ 的一条动弦，且 $\left|AB\right|=2\sqrt{3}$，若点 P 为直线 $x+y-4=0$ 上的任意一点，则 $\left|\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}\right|$ 的最小值为（　　）

A. $2\sqrt{2}-1$　　B. $2\sqrt{2}+1$　　C. $4\sqrt{2}-2$　　D. $4\sqrt{2}+2$

8.【黑龙江省哈尔滨市第一中学 2020 届高三 6 月第一次模拟】设 $\left|\overrightarrow{OA}\right|=2$，$\left|\overrightarrow{OB}\right|=1$，$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=0$，$\overrightarrow{OP}=\lambda\overrightarrow{OA}+\mu\overrightarrow{OB}$ 且 $\lambda+\mu=1$，则向量 $\overrightarrow{OA}$ 在 $\overrightarrow{OP}$ 上的投影的取值范围（　　）

A. $\left(-\frac{4\sqrt{5}}{5},2\right]$　　B. $\left(\frac{\sqrt{5}}{5},2\right]$　　C. $\left(-\frac{2\sqrt{5}}{5},2\right]$　　D. $\left(\frac{2\sqrt{5}}{5},2\right]$

9.【甘肃省兰州市第一中学 2020 届高三冲刺模拟考试】已知线段 $AB=4$，E,F 是 AB 垂直平分线上的两个动点，且 $|\overrightarrow{EF}|=2$，$\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{BF}$ 的最小值（　　）

A. -5　　B. -3　　C. 0　　D. 3

10.【甘肃省兰州市第一中学 2020 届高三冲刺模拟考试（二）】在平面直角坐标系 xOy 中，已知点 $A(0,-2)$，$N(1,0)$，若动点 M 满足 $\frac{|MA|}{|MO|}=\sqrt{2}$，则 $\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{ON}$ 的取值范围是（　　）

A. $[0,2]$　　B. $\left[0,2\sqrt{2}\right]$

C. $[-2,2]$　　D. $\left[-2\sqrt{2},2\sqrt{2}\right]$

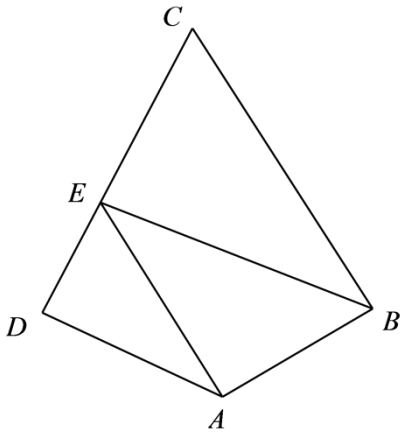
11.【河南省 2020 届高三考前适应性考试】已知点 $P(5,0)$，若双曲线 $C:x^2-\frac{y^2}{3}=1$ 的右支上存在两点 M，N，使得 $\overrightarrow{PM}\perp\overrightarrow{PN}$，则 $\overrightarrow{MP}\cdot\overrightarrow{MN}$ 的最小值为（　　）

A. $\frac{31}{2}$　　B. 15　　C. 16　　D. $\frac{63}{4}$

12.【河南省大联考 2020 届高三阶段性测试】**已知 $\triangle ABC$ 内接于半径为 3 的圆，$BC=2$，A 为圆上的动点，则 $\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BA}$ 的取值范围是（　　）**

A. $[-4,4]$　　B. $[-8,9]$　　C. $[-4,8]$　　D. $[0,12]$

13. 如图，在平面四边形 $ABCD$ 中，$AB\perp BC, AD\perp CD, \angle BAD=120°, AB=AD=2$.若点 E 为边 CD 上的动点，则 $\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{BE}$ 的最小值为（　　）



A. $\frac{7}{8}$　　B. 2　　C. $\frac{21}{8}$　　D. $\frac{21}{4}$

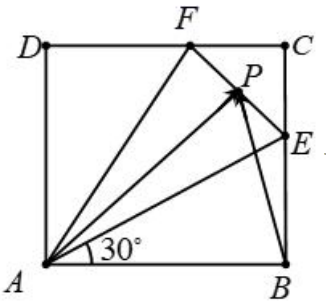
【来源】重庆市第八中学 2021 届高三下学期高考适应性考试（二）数学试题

14. $\triangle ABC$ 的外接圆的半径等于 3，$AB=4$，则 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$ 的取值范围是（　　）

A. $[-4,24]$　　B. $[-8,20]$　　C. $[-8,12]$　　D. $[-4,20]$

【来源】辽宁省铁岭市 2021 届二模数学试题

15. 如图，在正方形 $ABCD$ 中，边长为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$，E 是 BC 边上的一点，$\angle EAB=30°$，以 A 为圆心，AE 为半径画弧交 CD 于点 F，P 是弧 EF 上（包括边界点）任一点，则 $\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{BP}$ 的取值范围是（　　）



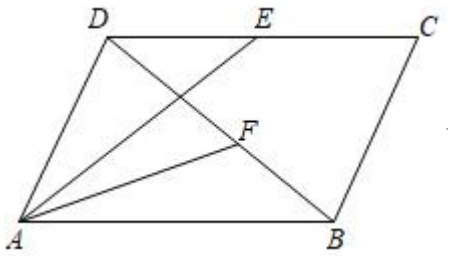
A. $\left[1-\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2}\right]$　　B. $\left[\frac{1}{4},1-\frac{\sqrt{3}}{4}\right]$　　C. $\left[\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right]$　　D. $\left[\frac{\sqrt{3}}{2},1\right]$

【来源】千校联盟 2021 届高三新高考终极押题数学试题

16．已知非零平面向量$\vec{a},\vec{b}$满足$|\vec{a}+\vec{b}|=\vec{a}\cdot\vec{b}$，则$|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|$的最小值是（　　）

A．4　　B．3　　C．2　　D．1

17．如图，在平行四边形$ABCD$中，点E是CD的中点，点F为线段BD上的一动点，若$\overrightarrow{AF}=x\overrightarrow{AE}+y\overrightarrow{DC}\left(x>0,y>0\right)$，则$\frac{2-3x}{4y^2+1}$的最大值为（　　）



A．$\frac{1}{2}$　　B．$\frac{3}{4}$　　C．1　　D．2

18．已知$\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{AC}$，$\left|\overrightarrow{AB}\right|=\frac{1}{t}$，$\left|\overrightarrow{AC}\right|=t$，若$P$点是$\triangle ABC$所在平面内一点，且$\overrightarrow{AP}=\frac{\overrightarrow{AB}}{\left|\overrightarrow{AB}\right|}+\frac{9\overrightarrow{AC}}{\left|\overrightarrow{AC}\right|}$，则$\overrightarrow{PB}\cdot\overrightarrow{PC}$的最大值等于（　　）

A．16　　B．4　　C．82　　D．76

【来源】云南省曲靖市第一中学 2021 届高三高考复习质量监测卷（八）数学（理）试题

19．已知$\vec{a},\vec{b}$为单位向量，向量$\vec{c}$满足$|2\vec{c}+\vec{a}|=|\vec{a}\cdot\vec{b}|$，则$\left|\vec{c}-\vec{b}\right|$的最大值为（　　）

A．$\sqrt{2}$　　B．2　　C．$\sqrt{3}$　　D．3

【来源】浙江省 2021 届高三下学期 6 月高考方向性考试数学试题

20．等边$\triangle ABC$的面积为$9\sqrt{3}$，且$\triangle ABC$的内心为M，若平面内的点N满足$|MN|=1$，则$\overrightarrow{NA}\cdot\overrightarrow{NB}$的最小值为（　　）

A．$-5-2\sqrt{3}$　　B．$-5-4\sqrt{3}$　　C．$-6-2\sqrt{3}$　　D．$-6-4\sqrt{3}$

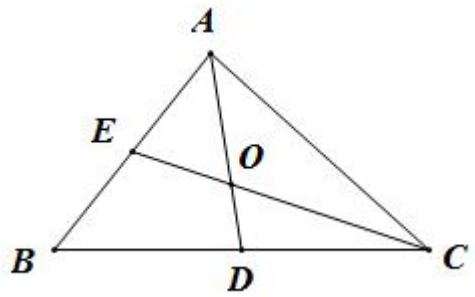
【来源】安徽省安庆市第一中学 2021 届高三下学期三模文科数学试题

21．【湖南省长沙市雅礼中学 2020 届高三下学期高考模拟试卷】**已知向量$\vec{a},\vec{b}$的夹角为θ，$\frac{\pi}{3}\le\theta\le\frac{2\pi}{3}$，$|\vec{a}|=|\vec{b}|=\lambda|\vec{a}+\vec{b}|$，则$\lambda$的取值范围是_____.**

22.【2020 届河北省衡水中学高三临考模拟】**已知向量** $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ **满足** $|\vec{a}|=1$，$|\vec{b}|=|\vec{c}|=5$，**且** $\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{a}\cdot\vec{b}-\vec{b}\cdot\vec{c}=1$，**则** $\vec{b}\cdot\vec{c}$ **的取值范围是**_____.

23.【江苏省南通市通州区西亭高级中学 2020 届高三下学期考前热身最后一练】**已知锐角三角形** ***ABC*** **中，** ***BC*=3**，$AH\perp BC$ **于** ***H***，**若** $\overrightarrow{AB}^2-4\overrightarrow{AC}^2=4\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{AB}$，**则** $\dfrac{\sin A}{\sin B\sin C}$ **的取值范围是**____.

24.【江苏省南通市 2020 届高三下学期高考考前模拟卷】如图，在 $\triangle ABC$ **中，** D、E **分别是** BC、AB **边上的中点，** AD **与** CE **的交点为** O，**若** $\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{BC}=-3$，$AB=3\sqrt{2}$，**则角** B **的最大值为**_____.



25. 已知 $\triangle ABC$ 中，$AB=4, AC=2, \angle BAC=60^\circ$，点 *M*、*N* 满足 $\overrightarrow{AM}=\lambda\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AN}=\mu\overrightarrow{AC}(\lambda>0,\mu>0)$，且 $\lambda\mu=\dfrac{1}{4}$，则 $\overrightarrow{BN}\cdot\overrightarrow{CM}$ 的最大值为_____.

【来源】重庆市南开中学 2021 届高三下学期第七次质量检测数学试题

26. 在直角三角形 ABC 中，$\angle A=90^\circ$，$AB=5$，$AC=12$，点 M 是 $\triangle ABC$ 外接圆上的任意一点，则 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AM}$ 的最大值是_____.

【来源】数学-学科网 2021 年高三 5 月大联考考后强化卷（广东卷）

27. 已知 $\vec{e_1}$，$\vec{e_2}$，$\vec{e_3}$ 是空间单位向量，$\vec{e_1}\cdot\vec{e_2}=\vec{e_2}\cdot\vec{e_3}=\vec{e_3}\cdot\vec{e_1}=\dfrac{1}{2}$，若空间向量 $\vec{a}$ 满足，$\vec{a}=x\vec{e_1}+y\vec{e_2}$（$x$，$y\in\mathbf{R}$），$|\vec{a}|=2$，则 $|\vec{a}\cdot\vec{e_3}|$ 的最大值是_____.

【来源】浙江省路桥中学 2021 届高三下学期数学综合练习试题（五）

28. 在△*ABC* 中，$\angle BAC=\dfrac{\pi}{3}$，△*ABC* 的面积为 $4\sqrt{3}$，*D* 为线段 *BC* 上一点，且 *CD*=2*BD*，点 *E* 在线段 *AD* 的延长线上，满足 $\overrightarrow{CE}=\lambda\overrightarrow{AB}+\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AC}$，则 $|\overrightarrow{CE}|$ 的最小值为_____.

【来源】全国新高考 2021 届高三数学方向卷试题（B）

29. 在四边形 *ABCD* 中，点 *E*，*F* 分别是 *AD*，*BC* 的中点，设 $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BC}=x$，$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}=y$，若 $AB=\sqrt{2}$，$EF=1$，$CD=\sqrt{3}$，则 *xy* 的最小值为_____.

【来源】浙江省温州市瑞安中学 2021 届高三下学期 5 月考前适应性考试数学试题

30．已知向量$\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}$垂直，且$\left|\overrightarrow{OA}\right|=\left|\overrightarrow{OB}\right|=12$，若$\lambda\in[0,1]$，则$\left|\lambda\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AO}\right|+\left|\frac{3}{4}\overrightarrow{BO}-(1-\lambda)\overrightarrow{BA}\right|$的最小值为_____.

【来源】浙江省温州中学 2021 届高三下学期四模数学试题

第 22 讲　等差等比数列性质的巧用

【高考地位】

从内容上看，等差、等比数列的性质一直是高考的热点；在能力方面，要求学生具备一定的创新能力和抽象概括能力；从命题形式上看，以选择、填空题为主，难度不大.

类型一　由等差或等比数列的性质求值

万能模板	内　　容
使用场景	等差，等比数列的求值问题
解题模板	第一步　观察已知条件和所求未知量的结构特征； 第二步　选择相对应的等差或等比数列的性质列出相应的等量关系； 第三步　整理化简，求得代数式的值.

例 1　在等差数列$\{a_n\}$中$a_n>0$,且$a_1+a_2+\cdots+a_{10}=30$,则$a_5\cdot a_6$的最大值等于

A. 3　　B. 6　　C. 9　　D. 36

例 2 已知等比数列$\{a_n\}$满足：$a_1+a_2+a_3+a_4+a_5=6,a_3=3$，则$\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_3}+\frac{1}{a_4}+\frac{1}{a_5}=$_____.

【来源】江西省重点中学协作体 2021 届高三第二次联考数学（理）试题

【变式演练 1】【2020 届北京市东城区高三一模线上统练】数列$\{a_n\}$是等差数列，$\{b_n\}$是各项均为正数的等比数列，公比$q>1$，且$a_4=b_4$，则（　　）

A．$a_2+a_6>b_3+b_5$　　**B．$a_2+a_6=b_3+b_5$**

C．$a_2+a_6<b_3+b_5$　　**D．a_2+a_6与b_3+b_5大小不确定**

【变式演练 2】【云南省红河州 2020 届高三高考数学（理科）一模】数列$\{a_n\}$是等差数列，$a_1=1$，且a_1,a_2,a_5构成公比为 q 的等比数列，则$q=$（　　）

A．1 或 3　　B．0 或 2　　C．3　　D．2

【变式演练 3】【2020 届河北省衡水中学高三卫冕联考数学（理）】已知等差数列$\{a_n\}$中，$a_3+a_7=22$，$a_4=9$，数列$\{b_n\}$满足$b_n=2^{a_n-1}$，则$b_1\cdot b_2\cdot b_3\cdot\ldots\cdot b_n=$_____.

【变式演练 4】【江苏省南通市 2020 届高三下学期 5 月联考】已知等比数列$\{a_n\}$的各项均为正数，且$8a_1$，a_3，$6a_2$成等差数列，则$\dfrac{a_7+2a_8}{a_5+2a_6}$的值是__.

类型二　有关等差或等比数列前n项和性质的问题

万能模板	内　　容
使用场景	等差或等比数列前n项和
解题模板	第一步　观察已知条件中前n项和的信息； 第二步　选择相对应的等差或等比数列前n项和的性质列出相应的等量关系； 第三步　整理化简，得出结论.

例 3. 已知等比数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，已知$S_{10}=10,S_{30}=130$，则$S_{40}=$（　　）

A. －510　　B. 400　　C. 400 或－510　　D. 30 或 40

【变式演练 4】【宁夏石嘴山市 2020 届高三适应性测试数学（文）】S_n为等差数列$\{a_n\}$的前n项和，若$S_{15}=0$，则$a_8=$（　　）.

A．-1　　B．0　　C．1　　D．2

【变式演练 5】【江西省南昌二中 2020 届高三（6 月份）高考数学（理科）校测】设S_n是等差数列$\{a_n\}$的前n项和，存在$n\in N^*$且$n>4$时,有$S_8=20$，$S_{2n-1}-S_{2n-9}=116$，则$a_n=$（　　）

A．8　　B．$\dfrac{17}{2}$　　C．17　　D．16

【变式演练 6】【2020 年普通高等学校招生全国统一考试（全国 2 卷）理科】已知数列$\{a_n\}$，$\{b_n\}$为等差数列，其前n项和分别为S_n，T_n，$\dfrac{S_n}{T_n}=\dfrac{4n+2}{n+2}$，则$\dfrac{a_5}{b_9}=$（　　）

A．$\dfrac{38}{11}$　　B．$\dfrac{10}{9}$　　C．$\dfrac{11}{10}$　　D．2

类型三　数列的最值问题

万能模板	内　　容
使用场景	有关数列的最值问题
解题模板	第一步　观察已知条件，选择合适的求解方法； 第二步　根据上一步选择的方法写出二次函数的最值形式或画出相对应的图像或列车相对应的不等式（组）； 第三步　整理化简，得出结论，注意 n 是正整数.

例 4 已知等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，$S_{11}=22$，$a_4=-12$，如果当 $n=m$ 时，S_n 最小，那么 m 的值为（　　）

A．10　　B．9　　C．5　　D．4

【变式演练 7】【河南省部分重点高中 2019-2020 学年度高三高考适应性考试】已知 S_n 为数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和，-2，a_n，$6S_n$ 成等差数列，若 $t=a_1a_2+a_2a_3+\ldots+a_na_{n+1}$，则（　　）

A． $-\frac{1}{8}<t\le-\frac{1}{24}$　　**B．** $-\frac{1}{8}<t\le-\frac{1}{12}$

C． $-\frac{1}{6}<t\le-\frac{1}{8}$　　**D．** $-\frac{1}{6}<t\le-\frac{1}{12}$

【变式演练 8】【贵州省贵阳为明教育集团 2021 届高三第一次调研】已知等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，若公比 $q=-\frac{1}{2}, S_6=\frac{21}{4}$，则数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项积 T_n 的最大值为（　　）

A．16　　B．64　　C．128　　D．256

【变式演练 9】【陕西省西安市西北工业大学附属中学 2020 届高三下学期高考猜题卷（三）】已知 S_n 是等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和，若 $a_2=5$，$a_4=1$，则 $\frac{S_n}{a_n}$ 的最小值为_____.

【高考再现】

1．（2021·北京高考真题）$\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 是两个等差数列，其中 $\frac{a_k}{b_k}(1\le k\le 5)$ 为常值，$a_1=288$，$a_5=96$，$b_1=192$，则 $b_3=$（　　）

A．64　　B．128　　C．256　　D．512

2．（2021·北京高考真题）数列 $\{a_n\}$ 是递增的整数数列，且 $a_1\ge 3$，$a_1+a_2+\cdots+a_n=100$，则 n 的最大值为（　　）

A．9　　B．10　　C．11　　D．12

3．【2020年高考全国Ⅰ卷文数10】设$\{a_n\}$是等比数列，且$a_1+a_2+a_3=1$，$a_2+a_3+a_4=2$，则$a_6+a_7+a_8=$（　　）

A．12　　B．24　　C．30　　D．32

4．【2020年高考全国Ⅱ卷文数6】记S_n为等比数列$\{a_n\}$的前n项和．若$a_5-a_3=12, a_6-a_4=24$，则$\frac{S_n}{a_n}=$（　　）

A．2^n-1　　B．$2-2^{1-n}$　　C．$2-2^{n-1}$　　D．$2^{1-n}-1$

5．【2020年高考全国Ⅱ卷理数4】北京天坛的圆丘坛为古代祭天的场所，分上、中、下三层，上层中心有一块圆形石板（称为天心石），环绕天心石砌9块扇面形石板构成第一环，向外每环依次增加9块，下一层的第一环比上一层的最后一环多9块，向外每环依次也增加9块．已知每层环数相同，且下层比中层多729块，则三层共有扇面形石板（不含天心石）（　　）

A．3699块　　B．3474块　　C．3402块　　D．3339块

6．【2020年高考全国Ⅱ卷理数6】数列$\{a_n\}$中，$a_1=2$，$a_{m+n}=a_m a_n$，若$a_{k+1}+a_{k+2}+\cdots+a_{k+10}=2^{15}-2^5$，则$k=$

A．2　　B．3　　C．4　　D．5

7．【2020年高考浙江卷7】已知等差数列$\{a_n\}$的前n项和S_n，公差$d\neq 0$，$\frac{a_1}{d}\leq 1$．记$b_1=S_2$，$b_{n+1}=S_{n+2}-S_{2n}$，$n\in\mathbf{N}^*$，下列等式不可能成立的是（　　）

A．$2a_4=a_2+a_6$　　B．$2b_4=b_2+b_6$　　C．$a_4^2=a_2a_8$　　D．$b_4^2=b_2b_8$

8．【2020年高考北京卷8】在等差数列$\{a_n\}$中，$a_1=-9$，$a_5=-1$，记$T_n=a_1a_2\ldots a_n(n=1,2,\ldots)$，则数列$\{T_n\}$（　　）

A．有最大项，有最小项　　B．有最大项，无最小项

C．无最大项，有最小项　　D．无最大项，无最小项

9．【2020年高考全国Ⅱ卷文数14】记S_n为等差数列$\{a_n\}$的前n项和，若$a_1=-2$，$a_2+a_6=2$，则$S_{10}=$_____．

10．【2020年高考江苏卷11】设$\{a_n\}$是公差为d的等差数列，$\{b_n\}$是公比为q的等比数列，已知$\{a_n+b_n\}$

的前 n 项和 $S_n=n^2-n+2^n-1(n\in N^*)$，则 $d+q$ 的值是_____.

11．【2020 年高考上海卷 7】已知等差数列 $\{a_n\}$ 的首项 $a_1\neq 0$，且满足 $a_1+a_{10}=a_9$，则 $\dfrac{a_1+a_2+\ldots+a_9}{a_{10}}=$_____.

12.【2018 年浙江卷】已知a_1,a_2,a_3,a_4成等比数列，且$a_1+a_2+a_3+a_4=\ln(a_1+a_2+a_3)$．若$a_1>1$，则

A．$a_1<a_3,a_2<a_4$　　B．$a_1>a_3,a_2<a_4$　　C．$a_1<a_3,a_2>a_4$　　D．$a_1>a_3,a_2>a_4$

13.【2018 年北京卷】“十二平均律” 是通用的音律体系，明代朱载堉最早用数学方法计算出半音比例，为这个理论的发展做出了重要贡献.十二平均律将一个纯八度音程分成十二份，依次得到十三个单音，从第二个单音起，每一个单音的频率与它的前一个单音的频率的比都等于$\sqrt[12]{2}$.若第一个单音的频率为f，则第八个单音的频率为

A．$\sqrt[3]{2}f$　　B．$\sqrt[3]{2^2}f$

C．$\sqrt[12]{2^5}f$　　D．$\sqrt[12]{2^7}f$

14.【2018 年新课标 I 卷】设S_n为等差数列$\{a_n\}$的前n项和，若 $3S_3=S_2+S_4$，$a_1=2$，则$a_5=$

A．-12　　B．-10　　C．10　　D．12

15.【2018 年上海卷】记等差数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，若$a_3=0$，$a_6+a_7=14$，则$S_7=$____.

16.【2018 年江苏卷】已知集合$A=\{x|x=2n-1,n\in N^*\}$，$B=\{x|x=2^n,n\in N^*\}$．将$A\cup B$的所有元素从小到大依次排列构成一个数列$\{a_n\}$．记S_n为数列$\{a_n\}$的前 n 项和，则使得$S_n>12a_{n+1}$成立的 n 的最小值为_____.

17.【2018 年北京卷】设$\{a_n\}$是等差数列，且 a_1=3，a_2+a_5=36，则$\{a_n\}$的通项公式为_____.

18.【2018 年浙江卷】已知等比数列$\{a_n\}$的公比 q>1，且 $a_3+a_4+a_5$=28，a_4+2 是 a_3，a_5 的等差中项．数列$\{b_n\}$满足 b_1=1，数列$\{(b_{n+1}-b_n)a_n\}$的前 n 项和为 $2n^2+n$．

（I）求 q 的值；

（II）求数列$\{b_n\}$的通项公式．

19.【2018 年北京卷】设$\{a_n\}$是等差数列，且$a_1=\ln 2,a_2+a_3=5\ln 2$.

（I）求$\{a_n\}$的通项公式；

（II）求$e^{a_1}+e^{a_2}+\cdots+e^{a_n}$.

20.【2018 年新课标 I 卷】已知数列$\{a_n\}$满足$a_1=1$，$na_{n+1}=2(n+1)a_n$，设$b_n=\frac{a_n}{n}$.

（1）求b_1，b_2，b_3；

（2）判断数列$\{b_n\}$是否为等比数列，并说明理由；

（3）求$\{a_n\}$的通项公式.

21.【2018 年全国卷III】等比数列$\{a_n\}$中，$a_1=1$，$a_5=4a_3$.

（1）求$\{a_n\}$的通项公式；

（2）记S_n为$\{a_n\}$的前n项和．若$S_m=63$，求m.

22.【2018 年全国卷 II】记S_n为等差数列$\{a_n\}$的前n项和，已知$a_1=-7$，$S_3=-15$.

（1）求$\{a_n\}$的通项公式；

（2）求S_n，并求S_n的最小值.

【反馈练习】

1.【陕西省部分学校 2020-2021 学年高三上学期摸底检测文科】数列$\left\{\frac{2}{a_n+1}\right\}$是等差数列，且$a_1=1$，$a_3=-\frac{1}{3}$，那么$a_5=$（　　）

A. $\frac{3}{5}$　　**B.** $-\frac{3}{5}$　　**C. 5**　　**D.** -5

2.【山西省太原市第五中学 2021 届高三上学期 9 月阶段性考试】设等差数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，若S_3,S_9,S_6成等差数列，且$a_2=10$，则S_9的值为（　　）

A. 28　　**B. 36**　　**C. 42**　　**D. 46**

3.【云南省红河州第一中学 2021 届高三年级理科数学第一次联考】设等差数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，且$S_{11}=44$，则$a_3+a_7+a_8$的值为（　　）

A. 11　　**B. 12**　　**C. 13**　　**D. 14**

4. 在等差数列$\{a_n\}$中，若$a_5+a_6+a_8+a_9=400$，则数列$\{a_n\}$的前 13 项和S_{13}=（　　）

A. 5200　　B. 2600　　C. 1500　　D. 1300

【来源】云南省曲靖市 2021 届高三二模数学（文）试题

5.【江西省南昌市 2021 届高三摸底测试数学（文）】S_n为等差数列$\{a_n\}$的前n项和，满足$3a_3=5a_2$，$S_{10}=100$，则$a_1=$（　　）

A．1　　B．2　　C．3　　D．4

6.【云南省昆明市第一中学 2021 届高三高中新课标第一次摸底测试】已知$\{a_n\}$是公差为$\frac{1}{2}$的等差数列，S_n为数列$\{a_n\}$的前 n 项和，若a_2,a_4,a_8成等比数列，则$S_7=$（　　）

A．$\frac{19}{4}$　　B．14　　C．12　　D．16

7.【2020 届重庆市第一中学高三下学期 6 月模拟】正项等差数列$\{a_n\}$的前n和为S_n，已知$a_2+a_8-a_5^2+8=0$，则$S_9=$（　　）

A．35　　B．36　　C．45　　D．54

8.【河北省石家庄二中 2020 届高三（3 月份）高考】数列$\{a_n\}$是等差数列，$a_1=1$，公差$d\in[1,2]$，且$a_4+\lambda a_{10}+a_{16}=15$，则实数$\lambda$的最大值为（　　）

A．$\frac{7}{2}$　　B．$\frac{53}{19}$　　C．$-\frac{23}{19}$　　D．$-\frac{1}{2}$

9.【山东省枣庄市滕州一中 2020-2021 学年高三 10 月月考】已知数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，且$a_1=2$，$a_{n+1}=S_n$，若$a_n\in(0,2020)$，则称项a_n为“和谐项”，则数列$\{a_n\}$的所有“和谐项”的平方和为（　　）

A．$\frac{1}{3}\times4^{11}+\frac{8}{3}$　　B．$\frac{1}{3}\times4^{11}-\frac{4}{3}$

C．$\frac{1}{3}\times4^{10}+\frac{8}{3}$　　D．$\frac{1}{3}\times4^{12}-\frac{4}{3}$

10.【北京市西城区 2020 届高三数学二模】设$\{a_n\}$为等比数列，则“对于任意的$m\in N^*,a_{m+2}>a_m$”是“$\{a_n\}$为递增数列”的（　　）

A．充分而不必要条件　　B．必要而不充分条件

C．充分必要条件　　D．既不充分也不必要条件

11.【云南省红河州第一中学 2021 届高三年级理科数学第一次联考】已知数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，且$S_n=a_{n+1}+n-2$，$n\in N^*$，$a_1=2$，则$\{a_n\}$的通项公式为（　　）

A．$a_n=2^{n-1}-1$　　B．$a_n=2^{n-1}$　　C．$a_n=2^{n-1}+1$　　D．$a_n=2^n$

12.【安徽省怀远一中、蒙城一中、淮南一中、颍上一中、涡阳一中 2020 届高三 5 月五校联考】设$\{a_n\}$为等差数列，$\{b_n\}$为等比数列，且$a_1=b_1>0$，$a_9=b_9$，则下列关系正确的是（　　）

A．$a_5>b_5$　　B．$a_5<b_5$　　C．$a_5\geq b_5$　　D．$a_5\leq b_5$

13．已知$\{a_n\}$为递增的等差数列，$a_3\cdot a_4=15$，$a_2+a_5=8$，若$a_n=21$，则$n=$（　　）

A．9　　B．10　　C．11　　D．12

【来源】专题 7.2 等差数列-2022 届高三数学一轮复习精讲精练

14．已知等差数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，$a_5=5$，$a_{n-4}=31$，若$S_n=198$，则$n=$（　　）

A．10　　B．11　　C．12　　D．13

【来源】四川省绵阳中学高三 2021 届高考仿真模拟（一）数学（理）试题

15．已知公差不为 0 的等差数列$\{a_n\}$满足$a_5^2+a_6^2=a_7^2+a_8^2$，则（　　）

A．$a_6=0$　　B．$a_7=0$　　C．$S_{12}=0$　　D．$S_{13}=0$

【来源】江西省南昌市 2021 届高三三模数学（理）试题

16．已知等差数列$\{a_n\}$，正整数p，q，s，t满足$a_p+a_q=a_s+a_t$，则$\dfrac{s^2+t^2}{p+q}$的取值范围是（　　）

A．$(1,+\infty)$　　B．$[1,+\infty)$

C．$\{x|\ x\in \boldsymbol{N}^*\}$　　D．以上均不正确

【来源】浙江省数海漫游 2021 届高三下学期第二次模拟考试数学试题

17．等比数列$\{a_n\}$的各项均为正数，且$a_4a_6+a_3a_7=18$，则$\log_3 a_1+\log_3 a_2+\log_3 a_3+\cdots+\log_3 a_9=$（　　）

A．12　　B．10　　C．9　　D．8

【来源】江苏省南京市第十二中学 2021-2022 学年高三上学期 8 月线上月考数学试题

18．在等比数列$\{a_n\}$中，a_2，a_{16}是方程$x^2-7x+4=0$的根，则$\dfrac{a_7a_8}{a_6}=$（　　）

A．2　　B．$\sqrt{7}$　　C．$-\sqrt{7}$或$\sqrt{7}$　　D．-2或2

【来源】模块综合练 02 数列-2022 年高考数学（理）一轮复习小题多维练（全国通用）

19．已知数列$\{a_n\}$为等比数列，给出下列结论：

①$a_1a_8=a_2a_7$；

②若$a_2=4$，$a_6=16$，则$a_4=\pm 8$；

③当$a_5>0$时，$a_3+a_7\geq 2a_5$；

④当$a_3<0$时，$a_3+a_7>a_4+a_6$.

其中所有正确结论的编号是（　　）

A．①②③　　B．②④　　C．①④　　D．①③

【来源】安徽省池州市第一中学2021届高三模拟考试（临门一脚）数学（理）试题

20．已知正项等比数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，若$a_3^2+a_5^2+2a_2a_6=8100$，$S_4-S_2=36$，则$S_{2021}=$（　　）

A．$\frac{3^{2021}-1}{2020}$　　B．$\frac{3^{2020}-1}{2}$　　C．$\frac{3^{2021}-1}{2}$　　D．$\frac{2^{2021}-1}{2020}$

【来源】四川省宜宾市天立学校2021届高三下学期模拟数学（文）试题

21．已知数列$\{a_n\}$是正项等比数列，且$\frac{2}{a_5}+\frac{3}{a_9}=\sqrt{6}$，则$a_7$的值可能是（　　）

A．$\sqrt{2}$　　B．$\sqrt{3}$　　C．$\frac{7}{5}$　　D．$\frac{7}{3}$

【来源】黑龙江省哈尔滨市第六中学2021届高三二模数学（文科）试题

22．（多选）设等差数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，公差为d．已知$a_3=12$，$S_{10}>0$，$a_6<0$，则（　　）

A．数列$\left\{\frac{S_n}{a_n}\right\}$的最小项为第6项　　B．$-\frac{24}{5}<d<-4$

C．$a_5>0$　　D．$S_n>0$时，n的最大值为5

【来源】江苏省常州市前黄高级中学2021届高三下学期5月高考适应性考试（一）数学试题

23.（多选）【福建省泉州市2021届高三毕业班质量检测】**设d为正项等差数列$\{a_n\}$的公差，若$d>0$，$a_3=2$，则（　　）**

A．$a_2\cdot a_4<4$　　B．$a_2^2+a_4\geq\frac{15}{4}$　　C．$\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_5}>1$　　D．$a_1\cdot a_5>a_2\cdot a_4$

24.【四川省宜宾市第四中学2021届高三上学期开学考试】**已知等差数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，且$a_1+a_5=-14$，$S_9=-27$，则使得S_n取最小值时的n为_____.**

25.【江苏省南通市如皋中学2020届高三创新班下学期高考冲刺模拟（三）】**设正项数列$\{a_n\}$满足$a_1+a_2+\ldots+a_n=S_n$，$S_1\cdot S_2\ldots S_n=T_n$，且$S_n+T_n=1$，则数列$\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$前10项的和为_____.**

26．已知等差数列$\{a_n\}$的前10项和为100，前100项和为10，则前110项和为_____

【来源】考点 36　等差数列-备战 2021 年高考数学经典小题考前必刷（新高考地区专用）

27．已知公比不等于 1 的等比数列$\{a_n\}$和公差不等于 0 的等差数列$\{b_n\}$满足$a_{2018}a_{2019}a_m = a_{2020}a_{2021}a_n$，$b_2 + b_3 = b_m + b_n$，则$n^2 - m^2 =$_____.

【来源】江西省重点中学协作体 2021 届高三第二次联考数学（文）试题

28．已知S_n是等比数列$\{a_n\}$的前n项和，$|a_{n+1}| > |a_n|, a_2 = -2, S_3 = 3$，则$|a_1| + |a_2| + \cdots + |a_n| =$_____.

【来源】内蒙古赤峰二中 2021 届高三 5 月适应性考试数学（文）试题

29.【广西南宁三中 2020 届高三数学（理科）考试四】已知数列$\{a_n\}$为等比数列，$a_2 = 4$，其中a_2，$a_3 + 2$，a_4成等差数列.

（1）求数列$\{a_n\}$的通项公式；

（2）设$b_n = 2\log_2 a_n - 1$，求数列$\left\{\dfrac{1}{b_n \cdot b_{n+1}}\right\}$的前$n$项和$T_n$.

30.【云南省文山州 2021 届高三年级 10 月教学质量检测】已知数列$\{a_n\}$成等差数列，各项均为正数的数列$\{b_n\}$成等比数列，$b_1 = 2, b_3 = 8$，且$3a_2 - a_3 = b_2$，$3a_3 - a_4 = b_3$.

（1）求数列$\{a_n\}$和$\{b_n\}$的通项公式；

（2）设$c_n = \dfrac{1}{a_n \cdot \log_2 b_{2n+1}}$，求数列$\{c_n\}$的前 *n* 项和$S_n$.

31.【福建省泉州市 2021 届高三毕业班质量检测】已知$\{a_n\}$为等差数列，$\{b_n\}$为单调递增的等比数列，$a_1 = b_1 = 1$，$a_2 + a_4 = 6$，$a_3 b_3 = 12$.

（1）求$\{a_n\}$与$\{b_n\}$的通项公式；

（2）求数列$\{a_n + b_n\}$的前n项和S_n

第 23 讲　数列通项公式的求解策略

【高考地位】

在高考中数列部分的考查既是重点又是难点，不论是选择题或填空题中对基础知识的考查，还是压轴题中与其他章节知识的综合，抓住数列的通项公式通常是解题的关键和解决数列难题的瓶颈。求通项公式也是学习数列时的一个难点。由于求通项公式时渗透多种数学思想方法，因此求解过程中往往显得方法多、

灵活度大、技巧性强。

方法一　数学归纳法

万能模板	内　　容
使用场景	根据数列的特征，猜想通项公式并证明
解题模板	第一步　求出数列的前几项，并猜想出数列的通项； 第二步　使用数学归纳法证明通项公式是成立的.

例 1　若数列$\{a_n\}$的前 n 项和为s_n，且方程$x^2-a_nx-a_n=0$有一个根为s_n-1，n=1,2,3..

(1) 求a_1,a_2；（2）猜想数列$\{S_n\}$的通项公式，并用数学归纳法证明

【变式演练 1】【浙江省宁波市余姚中学 2021 届高三月考】**设数列$\{a_n\}$满足$a_1=3$，$a_{n+1}=a_n^2-2na_n+2$，$n=1,2,3,\cdots$**

（1）求a_2，a_3，a_4的值，并猜想数列$\{a_n\}$的通项公式；

（2）用数学归纳法证明你的猜想.

方法二　已知S_n求a_n

万能模板	内　　容
使用场景	已知$S_n=f(a_n)$或$S_n=f(n)$
解题模板	第一步　利用S_n满足条件p，写出当$n\geq 2$时，S_{n-1}的表达式； 第二步　利用$a_n=S_n-S_{n-1}(n\geq 2)$，求出a_n或者转化为a_n的递推公式的形式； 第三步　根据$a_1=S_1$求出a_1，并代入$\{a_n\}$的通项公式进行验证，若成立，则合并；若不成立，则写出分段形式或根据a_1和$\{a_n\}$的递推公式求出a_n.

例 2　在数列$\{a_n\}$中，已知其前n项和为$S_n=2^n+3$，则$a_n=$_____.

【变式演练 2】【云南省曲靖市第一中学 2021 届高三上学期高考复习质量监测】**已知数列$\{a_n\}$满足**

$2a_1+2^2a_2+2^3a_3+\cdots+2^na_n=n\left(n\in N^*\right)$，**若**$b_n=\dfrac{1}{\log_2 a_n\cdot\log_2 a_{n+1}}$，**则数列$\{b_n\}$的前$n$项和**

$S_n=$_____.

方法三　累加法

万能模板	内　　容
使用场景	型如 $a_{n+1}-a_n=f(n)$ 或 $a_{n+1}=a_n+f(n)$
解题模板	第一步　将递推公式写成 $a_{n+1}-a_n=f(n)$； 第二步　依次写出 $a_n-a_{n-1},\cdots,a_2-a_1$，并将它们累加起来； 第三步　得到 a_n-a_1 的值，解出 a_n； 第四步　检验 a_1 是否满足所求通项公式，若成立，则合并；若不成立，则写出分段形式.

例 3　数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=1$，对任意的 $n\in\mathbf{N}^*$ 都有 $a_{n+1}=a_1+a_n+n$，则 $\dfrac{1}{a_1}+\dfrac{1}{a_2}+\cdots+\dfrac{1}{a_{2016}}=$（　　）

A、$\dfrac{2015}{2016}$　　B、$\dfrac{4032}{2017}$　　C、$\dfrac{4034}{2017}$　　D、$\dfrac{2016}{2017}$

【变式演练 3】若数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=13$，$a_{n+1}-a_n=n$，则 $\dfrac{a_n}{n}$ 的最小值为（　　）

A．$\dfrac{23}{5}$　　B．$\dfrac{14}{3}$

C．$\sqrt{26}-\dfrac{1}{2}$　　D．13

【来源】江苏省南京师大附中秦淮科技高中 2021-2022 学年高三上学期暑期检测（一）数学试题

方法四　累乘法

万能模板	内　　容
使用场景	型如 $\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=f(n)$ 或 $a_{n+1}=a_n\times f(n)$
解题模板	第一步　将递推公式写成 $\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=f(n)$； 第二步　依次写出 $\dfrac{a_n}{a_{n-1}},\cdots,\dfrac{a_2}{a_1}$，并将它们累加起来； 第三步　得到 $\dfrac{a_n}{a_1}$ 的值，解出 a_n； 第四步　检验 a_1 是否满足所求通项公式，若成立，则合并；若不成立，则写出分段形式.

例 4　已知数列$\{a_n\}$满足$a_1=\frac{2}{3},a_{n+1}=\frac{n}{n+1}a_n$,求$a_n$

【变式演练 4】【内蒙古赤峰市 2020 届高三（5 月份）高考数学（理科）模拟】**设数列$\{a_n\}$中$a_1=2$，若等比数列$\{b_n\}$满足$a_{n+1}=a_nb_n$，且$b_{1010}=1$，则$a_{2020}=$__.**

方法五　构造法一

万能模板	内　　容
使用场景	型如$a_{n+1}=pa_n+q$（其中p,q为常数，且$pq(p-1)\neq 0,$）
解题模板	第一步　假设将递推公式改写为$a_{n+1}+t=p(a_n+t)$; 第二步　由待定系数法，解得$t=\frac{q}{p-1}$; 第三步　写出数列$\{a_n+\frac{q}{p-1}\}$的通项公式; 第四步　写出数列$\{a_n\}$通项公式.

例 5　已知数列$\{a_n\}$满足a_1=1，a_{n+1}=$2a_n+1$（$n\in N^*$），求数列$\{a_n\}$的通项公式。

【变式演练 5】【南昌市 2020 届高三数学（理科）零模】**已知数列$\{a_n\}$中，$a_1=1$，且$a_{n+1}+2a_n+3=0$，$n\in N^*$，数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，则$S_6=$_____.**

方法六　构造法二

万能模板	内　　容
使用场景	型如$a_{n+1}=pa_n+qn+r$（其中p,q为常数，且$pq(p-1)\neq 0,$）
解题模板	第一步　假设将递推公式改写为$a_{n+1}+x(n+1)+y=p(a_n+xn+y)$; 第二步　由待定系数法，求出$x,y$的值; 第三步　写出数列$\{a_n+xn+y\}$的通项公式; 第四步　写出数列$\{a_n\}$通项公式.

例 6　已知数列$\{a_n\}$满足$a_{n+1}=2a_n+3n^2+4n+5$，$a_1=1$，求数列$\{a_n\}$的通项公式。

【变式演练 6】【新疆乌鲁木齐第 70 中学 2021 届高三月考】**设数列$\{a_n\}$中前n项的和$S_n=2a_n+3n-7$，**

则 $a_n=$_____.

方法七　构造法三

万能模板	内　　容
使用场景	型如 $a_{n+1}=pa_n+q^n$（其中 p,q 为常数，且 $pq(p-1)\neq 0,$）
解题模板	第一步　在递推公式两边同除以 q^{n+1}，得 $\frac{a_{n+1}}{q^{n+1}}=\frac{p}{q}\cdot\frac{a_n}{q^n}+\frac{1}{q}$； 第二步　利用方法五，求数列 $\{\frac{a_n}{q^n}\}$ 的通项公式； 第三步　写出数列 $\{a_n\}$ 通项公式.

例 7　已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_{n+1}=2a_n+3\times 2^n$，$a_1=2$，求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式。

【变式演练 7】【内蒙古赤峰二中 2021 届高三月考】**已知数列 $\{a_n\}$ 中，$a_1=1$，$a_{n+1}=3a_n+3^n$，则 $a_n=$_____.**

方法八　构造法四

万能模板	内　　容
使用场景	型如 $a_{n+1}=pa_n+qa_{n-1}$（其中 p,q 为常数，且 $pq\neq 0,n\geq 2$）
解题模板	第一步　假设将递推公式改写成 $a_{n+1}+sa_n=t(a_n+sa_{n-1})$； 第二步　利用待定系数法，求出 s,t 的值； 第三步　求数列 $\{a_{n+1}+sa_n\}$ 的通项公式； 第四步　根据数列 $\{a_{n+1}+sa_n\}$ 的通项公式，求出数列 $\{a_n\}$ 通项公式.

例 8　数列 $\{a_n\}$ 中，$a_1=1,a_2=2,3a_{n+2}=2a_{n+1}+a_n$，求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式。

【变式演练 8】【浙江省 2020 届高三下学期 6 月新高考进阶】**在数列 $\{a_n\}$ 中，$a_1=1$，$a_2=2$，$a_{n+2}=3a_{n+1}+4a_n$.**

（1）求 $\{a_n\}$ 的通项公式；

（2）$b_n=\sqrt{\dfrac{5a_{2n+1}-2}{3}}$，$S_n$ 是数列 $\left\{b_n-\sqrt{b_n}\right\}$ 的前 n 项和，$T_n=\dfrac{\sqrt{b_n}}{S_n}$，求证：$T_1+T_2+\cdots+T_n<\dfrac{3}{2}$.

方法九　构造五

万能模板	内　　容
使用场景	型如 $a_{n+1}=\dfrac{pa_n}{qa_n+r}$（其中 p,q,r 为常数）
解题模板	第一步　将递推公式两边取倒数得 $\dfrac{1}{a_{n+1}}=\dfrac{r}{p}\cdot\dfrac{1}{a_n}+\dfrac{q}{p}$； 第二步　利用方法五，求出数列 $\{\dfrac{1}{a_n}\}$ 的通项公式； 第三步　求出数列 $\left\{a_n\right\}$ 通项公式.

例 9　已知数列 $\left\{a_n\right\}$ 满足 $a_n=\dfrac{a_{n-1}}{3a_{n-1}+1},a_1=1$, 求数列 $\left\{a_n\right\}$ 的通项公式。

【变式演练 9】【广东省中山市华侨中学港澳台班 2021 高三月考】数列 $\{a_n\}$ 中，$a_1=1,a_n=\dfrac{a_{n-1}}{2a_{n-1}+1}$, 则 $a_n=$_____.

方法十　构造六

万能模板	内　　容
使用场景	型如 $a_n=pa_{n-1}^r(n\geq 2,p>0)$
解题模板	第一步　对递推公式两边取对数转化为 $b_{n+1}=pb_n+q$； 第二步　利用方法五，求出数列 $\{b_n\}$ 的通项公式； 第三步　求出数列 $\left\{a_n\right\}$ 通项公式.

例 10　若数列 $\{a_n\}$ 中，a_1=3 且 $a_{n+1}=a_n^2$（n 是正整数），求它的通项公式是 a_n。

【变式演练 10】【湖南省长沙市雅礼中学 2021 届高三月考】已知数列 $\left\{a_n\right\}$，$a_1=100$，$a_{n+1}=a_n^2\left(n\in \mathrm{N}^*\right)$.

（1）求数列 $\left\{a_n\right\}$ 的通项公式；

（2）设$b_n=(n+1)\lg a_n$，求数列$\{b_n\}$的前n项和T_n.

【高考再现】

1.（2021·浙江高考真题）已知数列$\{a_n\}$满足$a_1=1,a_{n+1}=\dfrac{a_n}{1+\sqrt{a_n}}(n\in \mathrm{N}^*)$.记数列$\{a_n\}$的前$n$项和为$S_n$，则（　　）

A．$\dfrac{3}{2}<S_{100}<3$　　B．$3<S_{100}<4$　　C．$4<S_{100}<\dfrac{9}{2}$　　D．$\dfrac{9}{2}<S_{100}<5$

2.（2021·浙江高考真题）已知数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，$a_1=-\dfrac{9}{4}$，且$4S_{n+1}=3S_n-9$.

（1）求数列$\{a_n\}$的通项；

（2）设数列$\{b_n\}$满足$3b_n+(n-4)a_n=0$，记$\{b_n\}$的前n项和为T_n，若$T_n\le \lambda b_n$对任意$n\in \mathrm{N}^*$恒成立，求λ的范围.

3.（2021·全国高考真题（理））已知数列$\{a_n\}$的各项均为正数，记S_n为$\{a_n\}$的前n项和，从下面①②③中选取两个作为条件，证明另外一个成立.

①数列$\{a_n\}$是等差数列；②数列$\{\sqrt{S_n}\}$是等差数列；③$a_2=3a_1$.

注：若选择不同的组合分别解答，则按第一个解答计分.

4.（2021·全国高考真题（理））记S_n为数列$\{a_n\}$的前n项和，b_n为数列$\{S_n\}$的前n项积，已知$\dfrac{2}{S_n}+\dfrac{1}{b_n}=2$.

（1）证明：数列$\{b_n\}$是等差数列;

（2）求$\{a_n\}$的通项公式.

5.【2020年高考全国III卷理数17】设等比数列$\{a_n\}$满足$a_1=3$，$a_{n+1}=3a_n-4n$.

（1）计算a_2，a_3，猜想$\{a_n\}$的通项公式并加以证明；

（2）求数列$\{2^n a_n\}$的前n项和S_n.

6.【2017全国III文，17】设数列$\{a_n\}$满足$a_1+3a_2+\ldots+(2n-1)a_n=2n$.

（1）求$\{a_n\}$的通项公式；

（2）求数列$\left\{\dfrac{a_n}{2n+1}\right\}$的前 n 项和.

7.【**2016 高考新课标III文数**】已知各项都为正数的数列$\{a_n\}$满足$a_1=1$，$a_n^2-(2a_{n+1}-1)a_n-2a_{n+1}=0$.

（I）求a_2,a_3；

（II）求$\{a_n\}$的通项公式.

8.【2016 高考新课标 3 理数】已知数列$\{a_n\}$的前 n 项和$S_n=1+\lambda a_n$，其中$\lambda\neq 0$.

（I）证明$\{a_n\}$是等比数列，并求其通项公式；

（II）若$S_5=\dfrac{31}{32}$，求λ.

9.【2015 高考广东，文 19】（本小题满分 14 分）设数列$\{a_n\}$的前 n 项和为S_n，$n\in\mathrm{N}^*$. 已知$a_1=1$，$a_2=\dfrac{3}{2}$，$a_3=\dfrac{5}{4}$，且当$n\geq 2$

时，$4S_{n+2}+5S_n=8S_{n+1}+S_{n-1}$.

（1）求a_4的值；

（2）证明：$\left\{a_{n+1}-\dfrac{1}{2}a_n\right\}$为等比数列；

（3）求数列$\{a_n\}$的通项公式.

【反馈练习】

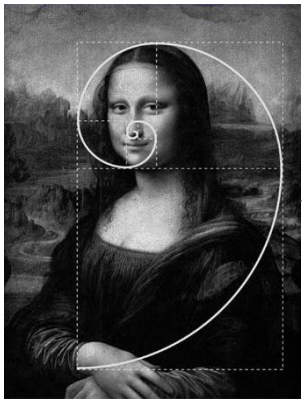
1.【重庆市第八中学 2021 届高三上学期适应性月考】斐波那契(约 1170~1250)是意大利数学家，他研究了一列数，这列数非常奇妙，被称为斐波那契数列.后来人们在研究它的过程中，发现了许多意想不到的结果，在实际生活中，很多花朵(如梅花，飞燕草，万寿菊等)的瓣数恰是斐波那契数列中的数，斐波那契数列还有很多有趣的性质，在实际生活中也有广泛的应用.斐波那契数列$\{a_n\}$满足$a_1=a_2=1$，

$a_{n+2}=a_{n+1}+a_n\left(n\in\mathrm{N}^*\right)$，设$1+a_3+a_5+a_7+a_9+\cdots+a_{2019}=a_k$，则$k=$（　　）

A．2019　　B．2020　　C．2021　　D．2022

2.（多选题）【江苏省徐州市市区部分学校 2020-2021 学年高三上学期 9 月学情调研】黄金螺旋线又名等角螺线，是自然界最美的鬼斧神工．在一个黄金矩形（宽长比约等于 0.618）里先以宽为边长做正方形，然后在剩下小的矩形里以其宽为边长做正方形，如此循环下去，再在每个正方形里画出一段四分之一圆弧，最后顺次连接，就可得到一条“黄金螺旋线”．达·芬奇的《蒙娜丽莎》，希腊雅典卫城的帕特农神庙等都符合

这个曲线．现将每一段黄金螺旋线与其所在的正方形所围成的扇形半径设为 $a_n(n\in\mathbf{N}^*)$，数列$\{a_n\}$满足 $a_1=a_2=1$，$a_n=a_{n-1}+a_{n-2}(n\geq 3)$．再将扇形面积设为 $b_n(n\in\mathbf{N}^*)$，则（　　）



A．$4(b_{2020}-b_{2019})=\pi a_{2018}\cdot a_{2021}$　　B．$a_1+a_2+a_3+\ldots+a_{2019}=a_{2021}-1$

C．$a_1^2+a_2^2+a_3^2\ldots+(a_{2020})^2=2a_{2019}\cdot a_{2021}$　　D．$a_{2019}\cdot a_{2021}-(a_{2020})^2+a_{2018}\cdot a_{2020}-(a_{2019})^2=0$

3．【重庆市巴蜀中学 2021 届高三上学期高考适应性月考】设数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 S_n，已知 $a_1=0$，$S_n=a_{n+1}-2$，若 $\dfrac{S_{n+1}}{S_{2n}}<\dfrac{a_{n+1}}{a_{n+4}}$，则 n 的最小值是_____．

4．【陕西省部分学校 2020-2021 学年高三上学期摸底检测】已知数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 S_n，若 $a_1=1$，$2S_n=a_{n+1}+1$ 则 $S_n=$_____．

5．【浙江省山水联盟 2020-2021 学年高三上学期开学考试】若数列$\{a_n\}$满足 $a_1=2$，$a_{n+1}=4a_n+4\sqrt{a_n}+1$，则使得 $a_n\geq 2020^2$ 成立的最小正整数 n 的值是_____．

6．【2020 届河北省石家庄市高三模拟（八）】已知数列$\{a_n\}$满足 $\dfrac{a_n}{n}=\dfrac{n-1}{n}\left(\dfrac{a_{n+1}}{n+1}-1\right)+1$（$n\in\mathbf{N}^*$），且 $a_2=6$，则$\{a_n\}$的通项公式为_____．

7．【山西省山西大学附属中学 2020-2021 学年高三上学期 9 月模块诊断】在数列$\{a_n\}$中，$a_1=\dfrac{1}{2}$，$a_n=1-\dfrac{1}{a_{n-1}}\left(n\geq 2,n\in\mathbf{N}_+\right)$，则 $a_{2020}=$_____．

8．【安徽省淮南市寿县第一中学 2020 届高三下学期最后一卷数学】已知数列$\{a_n\}$满足 $a_1=1$，$a_2=4$，$a_3=9$，数列$\{a_{n+1}-a_n\}$成等差数列.现从$\{a_n\}$中选取 $a_1,a_2,a_3,\cdots,a_{100}$ 这 100 个个体，从小到大依次编号为 1，2，…，99，100，依从小到大的编号顺序平均分成 10 个小组，组号依次为 1，2，3，…10.现从每组中抽取

一个号码，组成一个容量为 10 的样本，规定如果在第 1 组随机抽取的号码为 m，那么在第 k 组中抽取的号码个位数字与 $m+k$ 的个位数字相同.若 $m=7$，则在第 8 组中抽取的号码所对应数列 $\{a_n\}$ 的项的值是_____.

9.【湖北省武汉市华中师范大学第一附属中学 2020 届高三下学期高考押题】若数列{a_n}满足 $a_1=2$，$a_{n+1}=\dfrac{a_n+1}{1-a_n}$，$a_{2020}$=_____.

10.【广东省汕头市金山中学四校 2021 届高三上学期 10 月联考】已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，且 $S_n=3n^2+2n+1$，则数列 $\{a_n\}$ 的通项公式是_____，$a_1+a_3+a_5+\cdots+a_9=$_____.

11.【浙江省浙南名校联盟 2020-2021 学年高三上学期第一次联考】已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，满足 $a_3=\dfrac{1}{3}$，$(a_{n+1}+1)(a_n+1)=2$，则 $a_1=$_____；$S_{12}=$_____.

12．若正项数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=2, a_{n+1}^2=4a_n^2+4a_n+1$，则数列 $\{a_n\}$ 的通项公式是_____.

【来源】江西省智学联盟体（南昌市第二中学等）2022 届高三上学期第一次联考数学（文）试题

13．在数列 $\{a_n\}$ 中，$a_1=2$，$\dfrac{a_n}{a_{n-1}}=\dfrac{n}{n-1}(n\geq 2,\ n\in N^*)$，则 $a_9=$_____ .

【来源】重庆市缙云教育联盟 2022 届高三上学期 8 月月度质量检测数学试题

14．已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=\dfrac{1}{10}, a_n-a_{n+1}=a_na_{n+1}(n\in N^*)$，则 $\dfrac{n+2}{na_n}$ 的最小值为_____.

【来源】甘肃省西北师范大学附属中学 2020-2021 学年高三上学期第二次月考数学试题

15．数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=1$，且 $a_{n+1}-a_n=n+1\left(n\in N^*\right)$，则数列 $\left\{\dfrac{1}{a_n}\right\}$ 前 10 项的和为_____.

【来源】考点 38　数列求和-备战 2021 年高考数学经典小题考前必刷（新高考地区专用）

16.【海南、山东等新高考地区 2021 届高三上学期期中备考金卷】已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，且 $S_n=2S_{n-1}+2\left(n\geq 2, n\in N^*\right)$，数列 $\{b_n\}$ 中，$a_1=2b_1=2$.

（1）求 $\{a_n\}$ 的通项公式；

（2）若 $b_{2n}=b_{2n-1}+1$，$b_{2n+1}=b_{2n}+a_n$，求数列 $\{b_n\}$ 的前 10 项和.

17.【广东省 2021 届高三上学期 10 月联考】给出一下两个条件：①数列 $\{a_n\}$ 为等比数列，且 $a_{n+1}+a_n=3\cdot 2^n$，

②数列$\{a_n\}$的首项$a_1=2$，且$a_{n+1}-a_n=2^n$.从上面①②两个条件中任选一个解答下面的问题(如果选择多个条件分别解答，按第一个解答计分).

（1）求数列$\{a_n\}$的通项公式；.

（2）设数列$\{b_n\}$满足$b_n=\log_2 a_n$，求数列$\left\{\dfrac{1}{b_nb_{n+1}}\right\}$的前 *n* 项和$T_n$.

18.【江西省赣州市会昌县七校 2021 届高三联合月考】已知数列$\{a_n\}$中，$a_1=1$且$a_1+a_2+\cdots+a_n=a_{n+1}-1$．数列$\{b_n\}$中，$b_1=1$且$b_n=\dfrac{n}{n-1}b_{n-1}$（$n>1, n\in N^*$）.

（1）求数列$\{a_n\}$和$\{b_n\}$的通项公式；

（2）设$c_n=a_n\cdot b_n$，求数列$\{c_n\}$的前n项和为T_n，并求使得$T_n\geq\dfrac{1}{6}\left(m^2-5m\right)$恒成立的最大正整数$m$的值.

19.【广东省 2021 届高三上学期新高考适应性测试（一）】已知数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，$a_2=8$，且满足$S_n=\dfrac{2(n-1)a_n}{n}+2\left(n\in N^*\right)$.

（1）求证数列$\left\{\dfrac{a_n}{n}\right\}$是等比数列，并求数列$\{a_n\}$的通项公式；

（2）设$b_n=\dfrac{(2n-1)a_n}{n}$，求数列$\{b_n\}$的前n项和T_n.

20．已知数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，满足$S_n=2a_n-1$.

（1）求数列$\{a_n\}$的通项公式；

（2）记$b_n=\dfrac{2n-1}{a_n}$，求数列$\{b_n\}$的前n项和T_n.

【来源】重庆市第八中学 2022 届高三上学期入学摸底数学试题

21．已知数列$\{a_n\}$，$\{b_n\}$，$a_n>0$．$b_n=a_n+2^{n-1}$，数列$\{b_n\}$的前n项和为T_n，$4T_n=a_n^{\,2}+\left(2^n+2\right)a_n+4^{n-1}+2^n$（$n\in\mathbf{N}^*$）.

（1）求a_1的值和$\{b_n\}$的通项公式；

（2）令$c_n=2n+1-a_n$，求$\sum_{i=1}^{n}\dfrac{2^{i-1}}{c_ic_{i+1}}$.

【来源】山东省新高考质量测评联盟 2021 届高三 4 月联考数学试题

22．在①$a_n-a_{n-1}=8n-4$；②$a_{n+1}-a_n=2\left(\sqrt{a_{n+1}+1}+\sqrt{a_n+1}\right)$；③$n\left(a_{n+1}+1\right)=\left(n+1\right)\left(a_n+4n+1\right)$（$n\geq 2$）三个条件中任选一个，补充在下面问题中，并求解.

已知数列$\{a_n\}$中，$a_1=3$，_____.

（1）求a_n；

（2）若数列$\left\{\dfrac{1}{a_n}\right\}$的前$n$项和为$T_n$，证明：$\dfrac{1}{3}\leq T_n<\dfrac{1}{2}$.

【来源】重庆市杨家坪中学2021届高三下学期第二次月考数学试题

23．已知数列$\{a_n\}$满足：$a_1=1$，$a_{n+1}=2a_n+n-1$.

（1）证明：数列$\{a_n+n\}$是等比数列并求数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n.

（2）设$b_n=\left(2n-1\right)\cdot\left(a_n+n\right)$，求数列$\{b_n\}$的前$n$项和$T_n$.

【来源】广东省江门市蓬江区培英高中2021届高三5月份数学冲刺试题

24．已知S_n为数列$\{a_n\}$的前n项和，$6S_n=\left(a_n+1\right)\left(a_n+2\right)$，且$a_n>1$.

（1）求数列$\{a_n\}$的通项公式；

（2）对任意的$m\in N^*$，将$\{a_n\}$中落入区间$\left(3^m,3^{2m}\right)$内项的个数记为$\{b_m\}$，求数列$\{b_m\}$的前m项和T_m.

【来源】2021年秋季高三数学开学摸底考试卷02（新高考专用）

25．已知正项数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，$a_1=2$，当$n\geq 2$时，$\dfrac{1}{4}a_n^2$是S_n与S_{n-1}的等差中项.

（1）求数列$\{a_n\}$的通项公式；

（2）记$b_n=(-1)^n\dfrac{a_n+1}{S_n}$，求数列$\{b_n\}$的前$n$项和$T_n$.

【来源】湖南省新高考2021届高三下学期考前押题《最后一卷》数学试题

26．已知正项等差数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，满足$6S_n=a_n\cdot a_{n+1}+2\left(n\in\mathbf{N}^*\right)$，$a_1<2$，

（1）求数列$\{a_n\}$的通项公式；

（2）若$b_n=\left(-1\right)^n\lg\left(a_n\cdot a_{n+1}\right)$，记数列$\{b_n\}$的前$n$项和$T_n$，求$T_{33}$.

【来源】广东省揭阳市2021届高考数学模拟考精选题试题（一）

27．已知数列$\{a_n\}$中，$a_2=\dfrac{1}{3}$，$a_n=a_{n+1}+2a_na_{n+1}$.

（1）求数列$\{a_n\}$的通项公式；

（2）若$b_n=\dfrac{3^n}{a_n}$，且数列$\{b_n\}$的前n项和为T_n，求T_n.

【来源】四川省遂宁市2021届高三三模数学（理）试题

28．在①$S_n=na_{n+1}-n^2-n$，②$a_na_{n+1}-(2n+1)a_{n+1}+2na_n-2n(2n+1)=0$，③$a_{n+1}^2-a_n^2=8(n+1)$这三个条件中任选一个，补充在下面的问题中，并作答

问题：设数列$\{a_n\}$的前n项和为$S_n,a_n>0,a_1=3$，且_____，$b_n=\dfrac{1}{(a_n-1)(a_n+1)}$，$\{b_n\}$的前$n$项和$T_n$.

注：如果选择多个条件分别解答，按第一个解答计分.

【来源】山东省泰安市2021届高三数学考前冲刺卷试题（二）

第24讲　数列求和的常见方法

【高考地位】

数列是高中数学的重要内容,又是高中数学与高等数学的重要衔接点,其涉及的基础知识、数学思想与方法,在高等数学的学习中起着重要作用,因而成为历年高考久考不衰的热点题型,在历年的高考中都占有重要地位.数列求和的常用方法是我们在高中数学学习中必须掌握的基本方法，是高考的必考热点之一.此类问题中除了利用等差数列和等比数列求和公式外，大部分数列的求和都需要一定的技巧.下面，就近几年高考数学中的几个例子来谈谈数列求和的基本方法和技巧.

方法一　公式法

万能模板	内　　容
使用场景	等差，等比以及相关给定公式的数列
解题模板	第一步　结合所求结论，寻找已知与未知的关系； 第二步　根据已知条件列方程求出未知量； 第三步　利用前n项和公式求和结果

例1.　设$\{a_n\}$为等差数列，S_n为数列$\{a_n\}$的前n项和，已知$S_7=7$，$S_{15}=75$，T_n为数列$\{\dfrac{S_n}{n}\}$的前n项和，求T_n.

【变式演练1】【四川省名校联盟2020届高考模拟信息卷】**已知数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，且满足$2S_n=-$**

$a_n+n(n\in\mathbf{N}^*)$.

（1）求证：数列$\left\{a_n-\frac{1}{2}\right\}$为等比数列；

（2）求数列$\{a_n-1\}$的前 n 项和 T_n.

方法二　分组求和法

万能模板	内　　容
使用场景	可分解为几个可以直接求和的数列
解题模板	第一步　定通项公式：即根据已知条件求出数列的通项公式； 第二步　巧拆分：即根据通项公式特征，将其分解为几个可以直接求和的数列； 第三步　分别求和：即分别求出各个数列的和； 第四步　组合：即把拆分后每个数列的求和进行组合，可求得原数列的和.

例 2. 已知数列$\{a_n\}$是 $3+2-1,6+2^2-1,9+2^3-1,12+2^4-1$，…，写出数列$\{a_n\}$的通项公式并求其前 n 项 S_n.

【变式演练 2】【江苏省徐州市沛县 2020-2021 学年高三上学期第一次学情调研】已知数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，满足$a_{n+1}=S_n-1(n\in N_+)$，$a_1=2$，

（1）求证：数列$\{S_n-1\}$为等比数列；

（2）记$b_n=nS_n$，求数列$\{b_n\}$的前n项和T_n.

方法三　裂项相消法

万能模板	内　　容
使用场景	通项公式可以裂项为两项之差的形式
解题模板	第一步　定通项公式：即根据已知条件求出数列的通项公式； 第二步　巧裂项：即根据通项公式特征准确裂项，将其表示为两项之差的形式； 第三步　消项求和：即把握消项的规律，准确求和.

例 3. 已知数列$\{a_n\}:\frac{1}{2},\frac{1}{3}+\frac{2}{3},\frac{1}{4}+\frac{2}{4}+\frac{3}{4},\ldots,\ \frac{1}{10}+\frac{2}{10}+\frac{3}{10}+\cdots\frac{9}{10},\ldots$,若$b_n=\frac{1}{a_n\cdot a_{n+1}}$，那么数列$\{b_n\}$的前$n$项和$S_n$为（　　）

A. $\frac{n}{n+1}$　　B. $\frac{4n}{n+1}$　　C. $\frac{3n}{n+1}$　　D. $\frac{5n}{n+1}$

【变式演练 3】【广西钦州市、崇左市 2021 届高三上学期第一次教学质量检测】**已知数列$\{a_n\}$的前 *n* 项和为S_n，且$a_2=16$，$3S_n=a_{n+1}-4$.**

（1）求数列$\{a_n\}$的通项公式；

（2）若$b_n=\log_2 a_n$，求数列$\left\{\frac{1}{b_n b_{n+1}}\right\}$的前 2020 项和$T_{2020}$.

【变式演练 4】**设数列$\{a_n\}$满足$a_1=3, a_{n+1}=3a_n-4n$，若$b_n=\frac{4n^2+8n+5}{a_n a_{n+1}}$，且数列$\{b_n\}$的前$n$ 项和为S_n，则$S_n=$（　　）**

A. $n\left(1+\frac{2}{6n+9}\right)$　　**B.** $\frac{4}{3}+\frac{2n}{6n+9}$　　**C.** $n\left(1+\frac{1}{6n+9}\right)$　　**D.** $n\left(1+\frac{2}{6n+9}\right)$

【来源】2021 年秋季高三数学开学摸底考试卷 01（浙江专用）

方法四　错位相减法

万能模板	**内　　容**
使用场景	等差数列和等比数列乘积的形式
解题模板	第一步　巧拆分：即根据通项公式分解为等差数列和等比数列乘积的形式； 第二步　确定等差、等比数列的通项公式； 第三步　构差式：即写出S_n的表达式，然后两边同时乘以等比数列的公比得到另外一个式子，两式作差； 第四步　求和：根据差式的特征准确求和.

例 4. 已知数列$\{a_n\}$满足$a_1=1$，$a_{n+1}=\frac{2a_n}{a_n+2}$. 记$C_n=\frac{2^n}{a_n}$，则数列$\{C_n\}$的前 n 项和$C_1+C_2+\ldots+C_n=$_____.

【变式演练 5】【广西南宁市普通高中 2021 届高三 10 月摸底测试】**设数列$\{a_n\}$满足$a_1=1$，$a_{n+1}=2a_n-(2n-3)$.**

（1）计算a_2，a_3.猜想$\{a_n\}$的通项公式并利用数学归纳法加以证明；

（2）记$b_n=2^n\cdot a_n$，求数列$\{b_n\}$的前 *n* 项和S_n.

方法五　倒序相加法

万能模板	内　　容
使用场景	首项与末项相加为定值
解题模板	第一步　列出前 n 项和； 第二步　按倒序列出前 n 项和； 第三步　两式相加； 第四步　得出结果.

例 5.【湖北省武汉市三校联合体 2020 届高三期中】已知函数$f(x)=x+3\sin\left(x-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}$，则

$f\left(\frac{1}{2019}\right)+f\left(\frac{2}{2019}\right)+\cdots+f\left(\frac{2018}{2019}\right)=$（　　）

A．2018　　**B．2019**

C．4036　　**D．4038**

【变式演练 6】【江西省莲塘一中、临川二中 2020 届高三上学期第一次联考】已知$f(x)=e^{x-\frac{1}{2}}-e^{\frac{1}{2}-x}+1$，数列$\{a_n\}$满足$a_n=f(0)+f\left(\frac{1}{n}\right)+f\left(\frac{2}{n}\right)+\cdots+f\left(\frac{n-1}{n}\right)+f(1)$，则$a_{2017}=$_____.

方法六　并项求和法

万能模板	内　　容
使用场景	可几项进行结合的数列
解题模板	第一步　按给定数列的特点进行分类讨论； 第二步　将通项加和进行分析； 第三步　加和后的数列作为新数列求和； 第四步　得出结果.

例 6.【贵州省遵义市 2021 届高三上学期第一次联考】已知数列$\{a_n\}$满足$a_{n+1}+(-1)^n a_n=2n-1$，则数列$\{a_n\}$的前 32 项之和为_____.

【变式演练 7】【陕西省西安市高新一中 2019-2020 学年高三上学期期末】**已知数列$\{a_n\}$满足**

$a_{n+1}=a_n\cos(n+1)\pi+3n$，**则数列$\{a_n\}$的前 40 项和为_____.**

【高考再现】

1.（2021·浙江高考真题）已知数列$\{a_n\}$满足$a_1=1,a_{n+1}=\dfrac{a_n}{1+\sqrt{a_n}}\left(n\in\mathrm{N}^*\right)$.记数列$\{a_n\}$的前 n 项和为S_n，则（　　）

A．$\dfrac{3}{2}<S_{100}<3$　　B．$3<S_{100}<4$　　C．$4<S_{100}<\dfrac{9}{2}$　　D．$\dfrac{9}{2}<S_{100}<5$

2.（2021·全国高考真题）某校学生在研究民间剪纸艺术时，发现剪纸时经常会沿纸的某条对称轴把纸对折，规格为$20\mathrm{dm}\times12\mathrm{dm}$的长方形纸，对折 1 次共可以得到$10\mathrm{dm}\times12\mathrm{dm}$，$20\mathrm{dm}\times6\mathrm{dm}$两种规格的图形，它们的面积之和$S_1=240\mathrm{dm}^2$，对折 2 次共可以得到$5\mathrm{dm}\times12\mathrm{dm}$，$10\mathrm{dm}\times6\mathrm{dm}$，$20\mathrm{dm}\times3\mathrm{dm}$三种规格的图形，它们的面积之和$S_2=180\mathrm{dm}^2$，以此类推，则对折 4 次共可以得到不同规格图形的种数为_____；如果对折n次，那么$\sum_{k=1}^{n}S_k=$_____dm^2.

3.（2021·浙江高考真题）已知数列$\{a_n\}$的前 n 项和为S_n，$a_1=-\dfrac{9}{4}$，且$4S_{n+1}=3S_n-9$.

（1）求数列$\{a_n\}$的通项；

（2）设数列$\{b_n\}$满足$3b_n+(n-4)a_n=0$，记$\{b_n\}$的前 n 项和为T_n，若$T_n\le\lambda b_n$对任意$n\in\mathrm{N}^*$恒成立，求λ的范围.

4.【2020 年高考全国Ⅱ卷理数 4】北京天坛的圆丘坛为古代祭天的场所，分上、中、下三层，上层中心有一块圆形石板（称为天心石），环绕天心石砌9块扇面形石板构成第一环，向外每环依次增加9块，下一层的第一环比上一层的最后一环多9块，向外每环依次也增加9块．已知每层环数相同，且下层比中层多729块，则三层共有扇面形石板（不含天心石）　　（　　）

A．3699块　　B．3474块　　C．3402块　　D．3339块

5..【2020 年高考山东卷 14】将数列$\{2n-1\}$与$\{3n-2\}$的公共项从小到大排列得到数列$\{a_n\}$，则$\{a_n\}$的前 n 项和为_____.

6.【2020 年高考山东卷 18】已知公比大于1的等比数列$\{a_n\}$满足$a_2+a_4=20$，$a_3=8$.

（1）求$\{a_n\}$的通项公式；

（2）记b_m为$\{a_n\}$在区间$(0,m]\ (m\in\mathbf{N}^*)$中的项的个数，求数列$\{b_m\}$的前100项和$S_{100}$.

7.【2020年高考天津卷19】已知$\{a_n\}$为等差数列，$\{b_n\}$为等比数列，

$a_1=b_1=1,a_5=5(a_4-a_3),b_5=4(b_4-b_3)$.

（I）求$\{a_n\}$和$\{b_n\}$的通项公式；

（II）记$\{a_n\}$的前n项和为S_n，求证：$S_nS_{n+2}<S_{n+1}^2\ (n\in\mathbf{N}^*)$；

（III）对任意的正整数n，设$c_n=\begin{cases}\dfrac{(3a_n-2)b_n}{a_na_{n+2}}, & n\text{为奇数},\\ \dfrac{a_{n-1}}{b_{n+1}}, & n\text{为偶数}.\end{cases}$求数列$\{c_n\}$的前$2n$项和.

8.【2018年全国普通高等学校招生统一考试数学（江苏卷）】已知集合$A=\{x|x=2n-1,n\in N^*\}$，$B=\{x|x=2^n,n\in N^*\}$．将$A\cup B$的所有元素从小到大依次排列构成一个数列$\{a_n\}$．记S_n为数列$\{a_n\}$的前n项和，则使得$S_n>12a_{n+1}$成立的n的最小值为_____.

9.（2017新课标全国II理科）等差数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，$a_3=3$，$S_4=10$，则$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{S_k}=$_____.

10.【2017山东，文19】已知$\{a_n\}$是各项均为正数的等比数列,且$a_1+a_2=6,a_1a_2=a_3$.

(I)求数列$\{a_n\}$通项公式；

(II)$\{b_n\}$为各项非零的等差数列,其前n项和S_n,已知$S_{2n+1}=b_nb_{n+1}$,求数列$\left\{\dfrac{b_n}{a_n}\right\}$的前$n$项和$T_n$.

11.【2017北京文，15】已知等差数列$\{a_n\}$和等比数列$\{b_n\}$满足$a_1=b_1=1,a_2+a_4=10,b_2b_4=a_5$.

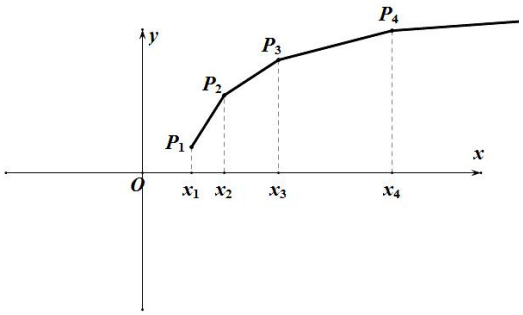
（I）　求$\{a_n\}$的通项公式；

（II）求和：$b_1+b_3+b_5+\ldots+b_{2n-1}$.

12.【2017山东，理9】已知$\{x_n\}$是各项均为正数的等比数列，且$x_1+x_2=3$，$x_3-x_2=2$

（I）求数列$\{x_n\}$的通项公式；

（II）如图，在平面直角坐标系xOy中，依次连接点$P_1(x_1,1)$，$P_2(x_2,2)\ldots P_{n+1}(x_{n+1},n+1)$得到折线$P_1P_2\ldots P_{n+1}$，求由该折线与直线$y=0$，$x=x_1,x=x_{n+1}$所围成的区域的面积$T_n$.



13.【2017 天津理，18】已知$\{a_n\}$为等差数列，前 n 项和为$S_n(n\in\mathbf{N}^*)$，$\{b_n\}$是首项为 2 的等比数列，且公比大于 0，

$b_2+b_3=12, b_3=a_4-2a_1$，$S_{11}=11b_4$.

（I）求$\{a_n\}$和$\{b_n\}$的通项公式；

（II）求数列$\{a_{2n}b_{2n-1}\}$的前 n 项和$(n\in\mathbf{N}^*)$.

【反馈练习】

1.【2020 届安徽省皖江名校联盟高三下学期 5 月联考】数列$\{F_n\}$：1，1，2，3，5，8，13，21，34，…，称为斐波那契数列，是由十三世纪意大利数学家列昂纳多·斐波那契以兔子繁殖为例子而引入的，故又称为“兔子数列”，该数列从第三项开始，每项等于其前相邻两项之和，记该数列$\{F_n\}$的前n项和为S_n，则下列结论中正确的是（　　）

A．$S_{2020}=F_{2022}+1$　　**B．$S_{2020}=F_{2022}-1$**

C．$S_{2020}=F_{2021}+1$　　**D．$S_{2020}=F_{2021}-1$**

2.【2020 届河南省六市（南阳市、驻马店市、信阳市、漯河市、周口市、三门峡市）高三第一次模拟调研】著名的斐波那契数列$\{a_n\}$：1，1，2，3，5，8，…，满足$a_1=a_2=1$，$a_{n+2}=a_{n+1}+a_n$，$n\in\mathrm{N}^*$，若$a_k=\sum_{n=1}^{2020}a_{2n-1}$，则$k=$(　　)

A．2020　　**B．4038**　　**C．4039**　　**D．4040**

3．已知数列$\{a_n\}$中，$a_1=1$，$a_{n+1}=\ln\left(e^{a_n}-a_n\right)\left(n\in N^*\right)$，（$e=2.71828$…是自然对数的底数）．记数列$\{a_n\}$的前$n$项和为$S_n$，则（　　）

A．$0\le S_{2021}<1$　　**B．$1\le S_{2021}<2$**

C．$2\le S_{2021}<3$　　**D．$3\le S_{2021}<4$**

【来源】浙江省 A9 协作体 2021-2022 学年高三上学期暑假返校联考数学试题

4.【2020 届湖南省长沙市长郡中学高考模拟】已知函数 $f\left(x\right)=\dfrac{3^x}{3^x+1}$，$\left(x\in R\right)$，正项等比数列 $\left\{a_n\right\}$ 满足 $a_{50}=1$，则 $f\left(lna_1\right)+f\left(lna_2\right)+\ldots+f\left(lna_{99}\right)$ 等于_____.

5.【湖南省衡阳市 2020 届高三下学期三模】已知数列 $\left\{a_n\right\}$ 的首项 $a_1=1$，函数 $f\left(x\right)=x^3+\left(a_{n+1}-a_n-\cos\dfrac{n\pi}{2}\right)x^2$ 为奇函数，记 S_n 为数列 $\left\{a_n\right\}$ 的前 n 项和，则 S_{2020} 的值为_____.

6. 函数 $y=x^2$ 在点 (n,n^2) $(n\in N_+)$ 处的切线记为 l_n，直线 l_n，l_{n+1} 及 x 轴围成的三角形的面积记为 S_n，则 $\dfrac{1}{S_1}+\dfrac{1}{S_2}+\dfrac{1}{S_3}+\cdots+\dfrac{1}{S_n}=$ _____.

【来源】贵州省贵阳市 2022 届高三摸底考试试卷数学（理）试题

7.【天津市和平区 2020-2021 学年高三上学期期中】已知数列 $\left\{a_n\right\}$ 的前 n 项和 $S_n=\dfrac{n^2+n}{2}$，数列 $\left\{b_n\right\}$ 满足：$b_1=b_2=2$，$b_{n+1}b_n=2^{n+1}\left(n\in N^*\right)$.

（I）求数列 $\left\{a_n\right\}$，$\left\{b_n\right\}$ 的通项公式；

（II）求 $\sum_{i=1}^{n}a_i\left(b_{2i-1}-\dfrac{1}{b_{2i}}\right)\left(n\in N^*\right)$.

8.【山东省枣庄市滕州一中 2020-2021 学年高三 10 月月考】已知函数 $f\left(x\right)=2x+1$，$g\left(x\right)=x$，$\left(x\in \mathrm{R}\right)$，数列 $\left\{a_n\right\}$，$\left\{b_n\right\}$ 满足 $a_1=1$，$g\left(b_{n+1}\right)=f\left(b_n\right)$，$a_n=f\left(b_n\right)$，$\left(n\in N^*\right)$.

（1）求证：数列 $\left\{b_n+1\right\}$ 是等比数列；

（2）设 $c_n=\left(2n-1\right)a_n$，求数列 $\left\{c_n\right\}$ 的前 n 项和 T_n.

9.【安徽省马鞍山市 2020 届高三数学（理科）二模】已知数列 $\{a_n\}$、$\{b_n\}$、$\{c_n\}$ 中，$a_1=1$，$\dfrac{1}{a_{n+1}}=\dfrac{2}{a_n}+n-1$，$b_n=\dfrac{1}{a_n}+n$，$c_n=1-\dfrac{1}{a_nb_n}$.

（1）求证：数列 $\{b_n\}$ 是等比数列，并求数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ 的通项公式；

（2）求数列 $\{c_n\}$ 的前 n 项和 S_n.

10.【广西南宁三中 2020 届高三数学（理科）考试四】已知数列$\{a_n\}$为等比数列，$a_2=4$，其中a_2，a_3+2，a_4成等差数列.

（1）求数列$\{a_n\}$的通项公式；

（2）设$b_n=2\log_2 a_n-1$，求数列$\left\{\dfrac{1}{b_n\cdot b_{n+1}}\right\}$的前$n$项和$T_n$.

11.【天津市滨海七校 2020 届高三下学期毕业班联考】已知数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，$S_n=n^2\left(n\in N^*\right)$，数列$\{b_n\}$为等比数列，且$a_2+1$，$a_4+1$分别为数列$\{b_n\}$第二项和第三项.

（1）求数列$\{a_n\}$与数列$\{b_n\}$的通项公式；

（2）若数列$c_n=a_nb_n+\dfrac{1}{a_na_{n+1}}$，求数列$\{c_n\}$的前$n$项和$T_n$.

12.【山东省临沂市第十九中学 2020 届高三上学期质量调研考】已知公差不为零的等差数列$\{a_n\}$中，$a_3=7$，又a_2，a_4，a_9成等比数列.

（1）求数列$\{a_n\}$的通项公式；

（2）设$b_n=\dfrac{1}{a_na_{n+1}}$，求数列$\{b_n\}$的前$n$项和$S_n$.

13.【云南省曲靖市第一中学 2021 届高三上学期高考复习质量监测】已知数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，且$2S_n=3a_n-3$.

（1）求数列$\{a_n\}$的通项公式；

（2）设$b_n=2\log_3 a_n+(-1)^n\cdot n$，求数列$\{b_n\}$的前$n$项和$T_n$.

14.【福建省泉州市 2021 届高三毕业班质量检测】已知$\{a_n\}$为等差数列，$\{b_n\}$为单调递增的等比数列，$a_1=b_1=1$，$a_2+a_4=6$，$a_3b_3=12$.

（1）求$\{a_n\}$与$\{b_n\}$的通项公式；

（2）求数列$\{a_n+b_n\}$的前n项和S_n

15.【重庆市巴蜀中学 2020 届高三下学期适应性月考】已知等比数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，$a_2a_7=3a_4^2$，

且-3，S_4，$9a_3$成等差数列.

（1）求数列$\{a_n\}$的通项公式；

（2）设$b_n=(-1)^n a_n+\dfrac{1}{n(n+1)}$，求数列$\{b_n\}$的前 n 项和T_n.

16.【福建省福州第一中学 2020 届高三下学期开学质检】已知等差数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，且$a_1=1$，$S_3+S_4=S_5$.

（1）求数列$\{a_n\}$的通项公式；

（2）令$b_n=(-1)^{n-1}a_n a_{n+1}$，求数列$\{b_n\}$的前$2n$项和$T_{2n}$.

17．已知数列$\{a_n\}$的前n项和为$\dfrac{1}{2}n^2+\dfrac{1}{2}n$，数列$\{b_n\}$满足$b_1=2$，$nb_{n+1}-4a_n b_n-3n=0$，$n\in N^*$.

（1）求数列$\{a_n\}$，$\{b_n\}$的通项公式；

（2）若$c_n=\dfrac{1}{b_n+(-1)^{a_n}}$，数列$\{c_n\}$的前$n$项和为$T_n$，求证：$T_{2n}\le\dfrac{6}{5}$.

【来源】浙江省百校 2021-2022 学年高三上学期开学联考数学试题

18．已知正项数列$\{a_n\}\left(n\in N^*\right)$及其前$n$项和$S_n$满足：$4S_n=(a_n+1)^2$.

（1）求数列$\{a_n\}$的通项公式；

（2）令$b_n=\dfrac{2}{a_n\cdot a_{n+1}}\left(n\in N^*\right)$，数列$\{b_n\}$的前$n$项和为$T_n$．若不等式$T_n\ge\dfrac{M}{\sqrt{a_{n+1}}}$对任意$n\in N^*$都成立，求$M$的取值范围.

【来源】浙江省 A9 协作体 2021-2022 学年高三上学期暑假返校联考数学试题

19．已知数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，满足$S_n=2a_n-1$.

（1）求数列$\{a_n\}$的通项公式；

（2）记$b_n=\dfrac{2n-1}{a_n}$，求数列$\{b_n\}$的前n项和T_n.

【来源】重庆市第八中学 2022 届高三上学期入学摸底数学试题

20．已知数列$\{a_n\}$的前n项和$S_n=\dfrac{n(n+1)}{2}$，令$b_n=\left[\log_3^{a_n}\right]$，其中$[x]$表示不超过$x$的最大整数，$[0.9]=0$，$\left[\log_3^8\right]=1$.

（1）求a_n；

（2）求b_{100}；

（3）求数列$\{b_n\}$的前$3^m-1\left(m\in N^*\right)$项之和.

【来源】广东省佛山市南海区 2022 届高三上学期 8 月开学摸底数学试题

21．已知数列$\{a_n\}$，$\{b_n\}$满足$a_1=-2b_1=4$，且$\{a_n\}$是公差为 1 的等差数列，$\{a_n+b_n\}$是公比为 2 的等比数列.

（1）求$\{a_n\}$，$\{b_n\}$的通项公式；

（2）求$\{b_n\}$的前 *n* 项和T_n.

【来源】广东省 2022 届高三上学期金太阳大联考开学数学试题

22．已知数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，且满足$S_n=\frac{2}{3}\left(4^n-1\right)\left(n\in N^*\right)$，设$b_n=\log_2 a_n$.

（1）分别求$\{a_n\}$和$\{b_n\}$的通项公式；

（2）求数列$\left\{\frac{4}{(b_n+1)(b_n+3)}\right\}$的前$n$项和$T_n$.

【来源】安徽省六校教育研究会 2021-2022 学年高三上学期第一次素质测试文科数学试题

23．已知各项均为正数的数列$\{a_n\}$满足$a_1=2$，$a_{n+1}^2-2a_na_{n+1}-3a_n^2=0$.

（1）求$\{a_n\}$的通项公式；

（2）若$a_nb_n=\frac{2}{3}n$求数列$\{b_n\}$的前 *n* 项和.

【来源】广东省 2022 届高三上学期综合能力测试（一）数学试题

24．已知数列$\{a_n\}$中，$a_1=2,a_2=3$，其前n项和S_n满足$\left(S_{n+1}-S_n\right)-\left(S_n-S_{n-1}\right)=1\left(n\geq 2,n\in N^*\right)$.

（1）求证：数列$\{a_n\}$为等差数列，并求$\{a_n\}$的通项公式；

（2）设$b_n=3^n\cdot a_n$，求数列$\{b_n\}$的前n项和T_n.

【来源】江西省赣州市南康区第三中学 2021 届高三数学（理）期中考试模拟试题

25．已知正项数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，且$4S_n=\left(a_n+1\right)^2$.

（1）求数列$\{a_n\}$的通项公式；

（2）在①$b_n=\dfrac{1}{a_na_{n+1}}$；②$b_n=3^n\cdot a_n$；③$b_n=\dfrac{1}{4S_n-1}$这三个条件中任选一个，补充在下面的问题中并求解.

若_____，求$\{b_n\}$的前n项和T_n.

注：如果选择多个条件分别解答，按第一个解答计分.

【来源】山东省（新高考）2021 届高三模拟冲关押题卷（二）数学试题

26. 已知数列$\{a_n\}$ 的前n项和为S_n，且$a_1=1$，$a_{n+1}=2S_n+1$，$n\in\mathbf{N}^*$，在公差不为 0 的等差数列$\{b_n\}$中$b_2=4$且b_1，b_2，b_4成等比数列.

（1）求数列$\{a_n\}$，$\{b_n\}$的通项公式；

（2）记$c_n=\dfrac{b_n}{a_n}$，求$\{c_n\}$的前n项和T_n.

【来源】江苏省南京市第一中学 2021-2022 学年高三上学期期初学情调研数学试题

27. 已知公比$q>1$的等比数列$\{a_n\}$和等差数列$\{b_n\}$满足：$a_1=2$，$b_1=1$，其中$a_2=b_4$，且a_2是b_2和b_8的等比中项.

（1）求数列$\{a_n\}$与$\{b_n\}$的通项公式；

（2）记数列$\{a_nb_n\}$的前n项和为T_n，若当$n\in\mathrm{N}^*$时，等式$(-1)^n\lambda-T_n<0$恒成立，求实数λ的取值范围.

【来源】浙江省 Z20 名校联盟（名校新高考研究联盟）2021-2022 学年高三上学期第一次联考数学试题

28. 等比数列$\{a_n\}$的各项均为正数，且$a_1+a_3=10$，$4a_3^2=a_2\cdot a_6$.

（1）求数列$\{a_n\}$的通项公式；

（2）求数列$\{n\cdot a_n\}$的前n项和T_n.

【来源】贵州省贵阳市 2022 届高三摸底考试试卷数学（理）试题

29. 已知数列$\{a_n\}$满足$a_1=1$，$a_{n+1}=\dfrac{2a_n}{a_n+2}$.

（1）求证数列$\left\{\dfrac{1}{a_n}\right\}$为等差数列；

（2）设$b_n=a_na_{n+1}$，求数列$\{b_n\}$的前n项和T_n.

【来源】2021 年秋季高三数学（理）开学摸底考试卷 03

第 25 讲　含参数的“一元二次不等式”解法

【高考地位】

解含参一元二次不等式，常涉及对参数的分类讨论以确定不等式的解，这是解含参一元二次不等式问题的一个难点. 在高考中各种题型多以选择题、填空题等出现，其试题难度属中高档题.

类型一　根据二次项系数的符号分类

万能模板	内　　容
使用场景	参数在一元二次不等式的最高次项
解题模板	第一步　直接讨论参数大于 0、小于 0 或者等于 0； 第二步　分别求出其对应的不等式的解集； 第三步　得出结论.

例 1　已知关于 x 的不等式 $ax^2-3x+2>0\ (a\in R)$.

（1）若不等式 $ax^2-3x+2>0$ 的解集为 $\{x\,|\,x<1或x>b\}$，求 a,b 的值.

（2）求不等式 $ax^2-3x+2>5-ax\ (a\in R)$ 的解集

【变式演练 1】【湖北省黄冈市麻城市 2020-2021 学年模拟】已知二次函数 $f(x)=x^2+2ax+2$.

（1）若 $x\in[1,5]$ 时，不等式 $f(x)>3ax$ 恒成立，求实数 a 的取值范围.

（2）解关于 x 的不等式 $(a+1)x^2+x>f(x)$（其中 $a\in\mathbf{R}$）.

类型二　根据二次不等式所对应方程的根的大小分类

万能模板	内　　容
使用场景	一元二次不等式可因式分解类型
解题模板	第一步　将所给的一元二次不等式进行因式分解； 第二步　比较两根的大小关系并根据其大小进行分类讨论； 第三步　得出结论.

例 2　解关于 x 的不等式 $ax^2-(a+1)x+1>0$（a 为常数且 $a\neq0$）.

【变式演练 2】【北京市第八中学 2019-2020 学年高三下学期期末】设 $m\in\mathbf{R}$，不等式

$mx^2-(3m+1)x+2(m+1)>0$ 的解集记为集合 P.

（1）若 $P=\{x|-1<x<2\}$，求 m 的值；

（2）当 $m>0$ 时，求集合 P.

类型三　根据判别式的符号分类

万能模板	内　　容
使用场景	一般一元二次不等式类型
解题模板	第一步　首先求出不等式所对应方程的判别式； 第二步　讨论判别式大于 0、小于 0 或等于 0 所对应的不等式的解集； 第三步　得出结论.

例 3　设集合 A={$x|x^2+3k^2\geqslant 2k(2x-1)$}，B={$x|x^2-(2x-1)k+k^2\geqslant 0$}，且 A⊆B，试求 k 的取值范围.

【变式演练 3】在区间 $(1,2)$ 上，不等式 $-x^2-mx-4<0$ 有解，则 m 的取值范围为（　　）

A. $m>-4$　　B. $m<-4$　　C. $m>-5$　　D. $m<-5$

【变式演练 4】【2020 湖北襄阳四中高三六月全真模拟一数学（文）试卷】若存在$x\in[-2,3]$，使不等式 $2x-x^2\geq a$成立，则实数a的取值范围是（　　）.

A. $(-\infty,1]$　　B. $(-\infty,-8]$　　C. $[1,+\infty)$　　D. $[-8,+\infty)$

【高考再现】

1.【2015 高考江苏，7】不等式 $2^{x^2-x}<4$ 的解集为_____.

2.【2012 年福建卷】已知关于 x 的不等式 $x^2-ax+2a>0$ 在 R 上恒成立，则实数 a 的取值范围是_____.

3.【2015 高考广东，文 11】【2008 年高考广东卷理科数学试题】已知 $a\in R$，若关于 x 的方程 $x^2+x+\left|a-\frac{1}{4}\right|+|a|=0$ 有实根，则 a 的取值范围是_____。

4.【2015 高考上海，文 16】 下列不等式中，与不等式 $\frac{x+8}{x^2+2x+3}<2$ 解集相同的是（　　）.

A. $(x+8)(x^2+2x+3)<2$　　B. $x+8<2(x^2+2x+3)$

C. $\frac{1}{x^2+2x+3}<\frac{2}{x+8}$　　D. $\frac{x^2+2x+3}{x+8}>\frac{1}{2}$

【反馈练习】

1．【浙江省嘉兴市 2020 届高三模拟】已知函数$f(x)=x^2+ax+b$，集合$A=\{x|f(x)\le 0\}$，集合$B=\{x|f(f(x))\le\frac{5}{4}\}$，若$A=B\neq\emptyset$，则实数$a$的取值范围是（　　）

A．$[\sqrt{5},5]$　　B．$[-1,5]$　　C．$[\sqrt{5},3]$　　D．$[-1,3]$

2．【湖北省龙泉中学、荆州中学、宜昌一中 2020-2021 学年高三上学期 9 月联考】**设 p：实数 x 满足 $x^2-(a+1)x+a\le 0(0<a<5)$，q：实数 x 满足 $\ln x<2$，则 p 是 q 的（　　）**

A．充分不必要条件　　**B．必要不充分条件**

C．充要条件　　**D．既不充分也不必要条件**

3．【河南省 2020 届高三 6 月联考全国 1 卷阶段性测试】**关于 x 的不等式 $(x-a)(x-3)>0$ 成立的一个充分不必要条件是 $-1<x<1$，则 a 的取值范围是（　　）**

A．$a\le -1$　　**B．$a<0$**　　**C．$a\ge 2$**　　**D．$a\ge 1$**

4．【吉林省长春市普通高中 2020 届高三质量监测】若关于x的方程$(\ln x-ax)\ln x=x^2$存在三个不等实根，则实数a的取值范围是

A．$(-\infty,\frac{1}{e^2}-\frac{1}{e})$　　B．$(\frac{1}{e^2}-\frac{1}{e},0)$　　C．$(-\infty,\frac{1}{e}-e)$　　D．$(\frac{1}{e}-e,0)$

5．【2020 浙江省高三五校联考】若“$0<x<1$”是“$(x-a)[x-(a+2)]\le 0$”的充分而不必要条件，则实数a的取值范围是（　）

A．$[-1,0]$　　B．$(-1,0)$

C．$(-\infty,0]\cup[1,+\infty)$　　D．$(-\infty,-1)\cup(0,+\infty)$

6．【2020 届山东省兖州市上学期期中】不等式 $ax^2+bx+2>0$ 的解集是$(-\frac{1}{2},\frac{1}{3})$，则 $a+b$ 的值是(　　)

A．10　　B．-10　　C．-14　　D．14

7．设常数 $a\in R$，集合 $A=\{x|(x-1)(x-a)>0\}$，$B=\{x|x\le a-1\}$，若 $A\cup B=A$，则 a 的取值范围为（　　）

A．$(-\infty,1)$　　**B．$(-\infty,2)$**　　**C．$(-\infty,2]$**　　**D．$[2,+\infty)$**

【来源】专题 06 等式与不等式-【备战高考】2021 年高三数学高考复习刷题宝典（单项选择专练）

8．已知关于 x 的不等式组 $\begin{cases}x^2-2x-8>0\\2x^2+(2k+7)x+7k<0\end{cases}$ 仅有一个整数解，则 k 的取值范围为（　　）

A．$(-5,3)\cup(4,5)$　　**B．$[-5,3)\cup(4,5]$**　　**C．$(-5,3]\cup[4,5)$**　　**D．$[-5,3]\cup[4,5]$**

【来源】专题 01 集合与常用逻辑用语-【备战高考】2021 年高三数学高考复习刷题宝典（单项选择专练）

9．若$a<0$，则关于x的不等式$(ax-1)(x-2)>0$的解集为（　　）

A． $\left\{x\middle|2<x<\frac{1}{a}\right\}$　　**B．** $\left\{x\middle|\frac{1}{a}<x<2\right\}$

C． $\{x|x<\frac{1}{a}$**或**$x>2\}$　　**D．** $\{x|x<2$**或**$x>\frac{1}{a}\}$

【来源】湖南省跨地区普通高等学校对口招生 2021 届高三下学期 3 月二轮联考数学试题

10．已知不等式$ax^2+bx+2>0$的解集为$\{x|-1<x<2\}$，则不等式$2x^2+bx+a<0$的解集为（　　）

A． $\{x|-1<x<\frac{1}{2}\}$　　**B．** $\{x|x<-1$**或**$x>\frac{1}{2}\}$　　**C．** $\{x|-2<x<1\}$　　**D．** $\{x|x<-2$**或**$x>1\}$

【来源】预测 08 不等式-【临门一脚】2021 年高考数学三轮冲刺过关（新高考专用）【学科网名师堂】

11．设$p:2x^2-3x+1\le 0$，$q:x^2-(2a+1)x+a(a+1)\cdot 0$，若$\neg q$的必要不充分条件是$\neg p$，则实数$a$的取值范围是（　　）

A． $\left[0,\frac{1}{2}\right]$　　**B．** $\left(0,\frac{1}{2}\right]$　　**C．** $(-\infty,0)\cup\left[\frac{1}{2},+\infty\right)$　　**D．** $(-\infty,0)\cup\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$

【来源】2021 年秋季高三数学（理）开学摸底考试卷 03

12．（多选）对于给定的实数a，关于实数x的一元二次不等式$a(x-a)(x+1)>0$的解集可能为（　　）

A． $\varnothing$　　**B．** $(-1,a)$　　**C．** $(a,-1)$　　**D．** $(-\infty,-1)\cup(a,+\infty)$

【来源】黄金卷 06-【赢在高考?黄金 20 卷】备战 2021 年高考数学全真模拟卷（江苏专用）

13.【天津市十二校 2020 届高三二模联考】已知$a>b$，二次三项式$ax^2+4x+b\ge 0$对于一切实数x恒成立，又$\exists x_0\in R$，使$ax_0^2+4x_0+b=0$成立，则$\frac{a^2+b^2}{a-b}$的最小值为_____.

14.【江西省吉安市安福二中、吉安县三中 2020-2021 学年 10 月联考】已知函数

$f(x)=x^2-(a+2)x+2a(a\in R)$.

（1）求不等式$f(x)<0$的解集；

（2）若当$x\in\mathbf{R}$时，$f(x)\ge -4$恒成立，求实数a的取值范围.

15.【江苏省无锡市青山高级中学 2020-2021 学年上学期期中】**已知函数**$f(x)=x^2+bx+c$（b，$c\in\mathbf{R}$），且$f(x)\le 0$**的解集为**$[-1,2]$

（1）求函数 $f\left(x\right)$ 的解析式；

（2）解关于 x 的不等式 $mf\left(x\right)>2\left(x-m-1\right)$，其中 $m\geq 0$

16.【上海市实验学校 2020-2021 学年上学期期中】设关于 x 的不等式 $x^2-(2a+1)x+(a+2)(a-1)>0$ 和 $(x-a^2)(x-a)<0$ 的解集分别为 A 和 B.

（1）求集合 A；

（2）是否存在实数 a，使得 $A\cup B=\mathbf{R}$？如果存在，求出 a 的值，如果不存在，请说明理由；

（3）若 $A\cap B\neq\varnothing$，求实数 a 的取值范围.

17.【重庆市缙云教育联盟 2020-2021 学年上学期 10 月月考】已知函数 $f(x)=2x+\dfrac{a}{x}(x>0).$

（1）若 $a=-2$，求函数 $f(x)$ 的零点；

（2）若 $f(x)\geq 0$ 在 $(1,+\infty)$ 恒成立，求 a 的取值范围；

（3）设函数 $g(x)=f(x)-(a+2)(x>0)$，解不等式 $g(x)>0$.

18．已知 $p:\left|2x-5\right|\leq 3,q:x^2-\left(a+2\right)x+2a\leq 0$，设命题 p 的不等式解集构成集合 A，命题 q 的不等式解集构成集合 B

（1）若 P 是真命题，求集合 A

（2）若 $B\subseteq A$，则 a 的取值范围.

【来源】江苏省扬州市高邮市临泽中学 2021-2022 学年高三上学期 7 月末阶段性测试数学试题

19．已知 $f(x)=ax^2+(a-1)x-1(a\in\mathrm{R})$.

（Ⅰ）若 $f\left(x\right)\geq 0$ 的解集为 $\left[-1,-\dfrac{1}{2}\right]$，求关于 x 的不等式 $\dfrac{ax+3}{x-1}\leq 0$ 的解集；

（Ⅱ）解关于 x 的不等式 $f\left(x\right)\geq 0$.

【来源】专题 08 不等式（练）-2021 年高考数学二轮复习讲练测（文理通用）

20．$f\left(x\right)=x^2-4ax$，$x\in\mathbf{R}$，$a\in\mathbf{R}$.

（1）当 $a=2$ 时，求 $f\left(x\right)>0$ 的 x 的取值范围；

（2）解关于 x 的不等式 $f\left(x\right)>12a^2$ 的解集；

（3）对于任意的 $x\in\left(2,+\infty\right)$，$f\left(x\right)>-2$ 恒成立，求 a 的取值范围.

【来源】专题 08 不等式（测）-2021 年高考数学二轮复习讲练测（文理通用）.

第 26 讲　含参不等式的存在性与恒成立问题

【高考地位】

含参不等式的恒成立问题越来越受到高考命题者的青睐，由于新课标高考对导数应用的加强，这些不等式的恒成立问题往往与导数问题交织在一起，这在近年的高考试题中不难看出这个基本的命题趋势. 解决这类问题的关键是揭开量词隐含的神秘面纱还函数问题本来面目，在高考中各种题型多以选择题、填空题和解答题等出现，其试题难度属高档题.

方法一　判别式法

万能模板	内　　容
使用场景	含参数的二次不等式
解题模板	第一步　首先将所求问题转化为二次不等式； 第二步　运用二次函数的判别式对其进行研究讨论； 第三步　得出结论.

例 1　设 $f(x)=x^2-2mx+2$，当 $x\in[-1,+\infty)$ 时，$f(x)\geq m$ 恒成立，求实数 m 的取值范围.

【变式演练 1】【2020 届百校联考高考考前冲刺必刷卷】**已知集合 $A=\left\{x\middle|x^2+2ax+2a\leq 0\right\}$，若 A 中只有一个元素，则实数 a 的值为（　　）**

A．0　　**B．0 或 −2**　　**C．0 或 2**　　**D．2**

【变式演练 2】【安徽省皖江名校联盟 2021 届高三第二次联考】**对 $\forall x\in R$，不等式 $(a-1)x^2+(a-1)x-1<0$ 恒成立，则实数 a 的取值范围是（　　）**

A． $(-3,1)$　　**B．** $(-3,1]$　　**C．** $(-4,1)$　　**D．** $[-4,1]$

方法二　分离参数法

万能模板	内　　容
使用场景	对于变量和参数可分离的不等式

解题模板	第一步　首先对待含参的不等式问题在能够判断出参数的系数正负的情况下，可以根据不等式的性质将参数分离出来，得到一个一端是参数，另一端是变量表达式的不等式； 第二步　先求出含变量一边的式子的最值； 第三步　由此推出参数的取值范围即可得出结论.

例 2　已知函数 $f(x)=kx^2-\ln x$，若 $f(x)>0$ 在函数定义域内恒成立，则 k 的取值范围是（　　）

A. $\left(\frac{1}{e},\mathrm{e}\right)$　　B. $\left(\frac{1}{2e},\frac{1}{e}\right)$　　C. $\left(-\infty,\frac{1}{2e}\right)$　　D. $\left(\frac{1}{2e},+\infty\right)$

【变式演练 3】【江苏省苏州市新草桥中学 2020-2021 学年高三上学期 10 月月考】**正数 a，b 满足 $9a+b=ab$，若不等式 $a+b\geq -x^2+2x+18-m$ 对任意实数 x 恒成立，则实数 m 的取值范围是（　　）**

A. $[3,+\infty)$　　**B.** $(-\infty,3)$　　**C.** $(-\infty,6)$　　**D.** $[6,+\infty)$

【变式演练 4】【北京市人大附中 2021 届高三年级 10 月数学月考】**已知方程 $x^2+ax-1=0$ 在区间 $[0,1]$ 上有解，则实数 a 的取值范围是（　　）**

A. $[0,+\infty)$　　**B.** $(-\infty,0)$　　**C.** $(-\infty,2]$　　**D.** $[-2,0]$

方法三　函数性质法

万能模板	内　　容
使用场景	对于不能分离参数或分离参数后求最值较困难的类型
解题模板	第一步　首先可以把含参不等式整理成适当形式如 $f(x,a)\geq 0$、$f(x,a)<0$ 等； 第二步　从研究函数的性质入手，转化为讨论函数的单调性和极值； 第三步　得出结论.

例 3　设函数 $f(x)=e^x-1-x-ax^2$，若 $x\geq 0$ 时，$f(x)\geq 0$，求 a 的取值范围.

【变式演练 5】【云南省昆明市第一中学 2021 届高中新课标高三第二次双基检测】**记函数 $f(x)=\ln(x+1)+\sqrt{1-x}$ 的定义域为 A，函数 $g(x)=e^x-e^{-x}+\sin x+1$，若不等式 $g(2x+a)+g(x^2-1)>2$ 对 $x\in A$ 恒成立，则 a 的取值范围为（　　）**

A. $[2,+\infty)$　　**B.** $(2,+\infty)$　　**C.** $(-2,+\infty)$　　**D.** $[-2,+\infty)$

【高考再现】

1.【2020 年高考浙江卷 9】已知 a，$b\in\mathbf{R}$ 且 $ab\neq 0$，若 $(x-a)(x-b)(x-2a-b)\geq 0$ 在 $x\geq 0$ 上恒成立，则 （ ）

A．$a<0$　　B．$a>0$　　C．$b<0$　　D．$b>0$

2.【2020 年高考上海卷 11】已知 $a\in R$，若存在定义域为 R 的函数 $f(x)$ 同时满足下列两个条件，①对任意 $x_0\in R$，$f(x_0)$ 的值为 x_0 或 x_0^2；②关于 x 的方程 $f(x)=a$ 无实数解；则 a 的取值范围为_____.

3.【2018 年全国普通高等学校招生统一考试数学（江苏卷）】在△ ABC 中，角 A,B,C 所对的边分别为 a,b,c，$\angle ABC=120°$，$\angle ABC$ 的平分线交 AC 于点 D，且 $BD=1$，则 $4a+c$ 的最小值为_____.

4.【2015 年全国普通高等学校招生统一考试理科数学】已知函数 $f(x)=\begin{cases}2-|x|, & x\leq 2,\\ (x-2)^2, & x>2,\end{cases}$ 函数 $g(x)=b-f(2-x)$，其中 $b\in R$，若函数 $y=f(x)-g(x)$ 恰有 4 个零点，则 b 的取值范围是（ ）

A．$\left(\frac{7}{4},+\infty\right)$　　B．$\left(-\infty,\frac{7}{4}\right)$　　C．$\left(0,\frac{7}{4}\right)$　　D．$\left(\frac{7}{4},2\right)$

5.【2017 天津理，8】已知函数 $f(x)=\begin{cases}x^2-x+3, x\leq 1,\\ x+\frac{2}{x}, x>1.\end{cases}$ 设 $a\in\mathbf{R}$，若关于 x 的不等式 $f(x)\geq|\frac{x}{2}+a|$ 在 $\mathbf{R}$ 上恒成立，则 a 的取值范围是

（A）$[-\frac{47}{16},2]$　　（B）$[-\frac{47}{16},\frac{39}{16}]$　　（C）$[-2\sqrt{3},2]$　　（D）$[-2\sqrt{3},\frac{39}{16}]$

6.【2016 高考新课标 1 卷】已知函数 $f(x)=(x-2)e^x+a(x-1)^2$ 有两个零点.

(I)求 a 的取值范围；

(II)设 x_1,x_2 是 $f(x)$ 的两个零点,证明：$x_1+x_2<2$.

7.【2016 高考江苏卷】已知函数 $f(x)=a^x+b^x(a>0,b>0,a\neq 1,b\neq 1)$. 设 $a=2,b=\frac{1}{2}$.

（1）求方程 $f(x)=2$ 的根；

（2）若对任意 $x\in R$，不等式 $f(2x)\geq mf(x)-6$ 恒成立，求实数 m 的最大值；

（3）若 $0<a<1,b>1$，函数 $g(x)=f(x)-2$ 有且只有 1 个零点，求 ab 的值.

8.【2016 年高考四川理数】设函数 $f(x)=ax^2-a-\ln x$，其中 $a\in\mathbf{R}$.

（Ⅰ）讨论 $f(x)$ 的单调性；

（Ⅱ）确定 a 的所有可能取值，使得 $f(x)>\frac{1}{x}-e^{1-x}$ 在区间（1，+∞）内恒成立(e=2.718…为自然对数的底数).

【反馈练习】

1.【2020 届陕西省西安市西北工业大学附中高三第三次高考适应性考试】不等式 $x^2-2x+5>a^2$ 对 $x\in(1,+\infty)$ 恒成立，则实数 a 的取值范围是（　　）

A. $[-2,2]$　　**B.** $(-2,2)$

C. $(-\infty,-2)\cup(2,+\infty)$　　**D.** $(-\infty,-2]\cup[2,+\infty)$

2.【吉林省通榆县第一中学 2020-2021 学年高三上学期第二次月考】若命题“$\exists x\in R$，使 $x^2+(a-1)x+1<0$”是假命题，则实数 a 的取值范围为（　　）

A. $(-1,3)$　　**B.** $[-1,3]$

C. $(-\infty,-1)\cup(3,+\infty)$　　**D.** $(-\infty,-1]\cup[3,+\infty)$

3.【河北省邯郸市 2021 届高三上学期摸底】若命题 p：“$\forall x\in\mathbf{R}$，$2ax^2-ax-1\le 0$”为真命题，则实数 a 的取值范围是（　　）

A. $(-\infty,8]$　　**B.** $[-8,0]$　　**C.** $(-\infty,-8)$　　**D.** $(-8,0)$

4.【江西省上高二中 2021 届高三上学期第一次月考】已知函数 $f(x)=x^2+\ln(|x|+1)$，若对于 $x\in[-1,2]$，$f\left(x^2+2ax-2a^2\right)<9+\ln 4$ 恒成立，则实数 a 的取值范围是（　　）

A. $-1<a<\frac{2-\sqrt{6}}{2}$　　**B.** $-1<a<1$

C. $a>\frac{2+\sqrt{6}}{2}$ 或 $a<\frac{2-\sqrt{6}}{2}$　　**D.** $\frac{2-\sqrt{6}}{2}<a<\frac{2+\sqrt{6}}{2}$

5.【天津市第七中学 2020-2021 学年高三上学期第一次月考】若不等式 $ax^2+2ax-1<0$ 对于一切实数 x 都恒成立，则实数 a 的取值范围是（　　）

A.（－∞，－1）　　**B.**（－1，0）　　**C.** $(-1,0]$　　**D.** $[0,+\infty)$

6.【海南省临高中学 2021 届高三上学期第一次月考】若不等式 $x^2+ax-2>0$ 在区间 $[1,5]$ 上有解，则 a 的取值范围是（　　）

A. $\left(-\frac{23}{5},+\infty\right)$　　B. $\left[-\frac{23}{5},1\right]$　　C. $(1,+\infty)$　　D. $\left(-\infty,-\frac{23}{5}\right)$

7. 设函数 $f(x)=|x+a|+|e^x+b|\,(a,b\in R)$，当 $x\in[0,1]$ 时，记 $f(x)$ 的最大值为 $t(a,b)$，若 $2t(a,b)\geq 2m^2+4m+e-1$ 恒成立，则 m 的最大值为（　　）

A. e　　B. -2　　C. 0　　D. $\frac{3}{2}$

【来源】浙江省百校 2021-2022 学年高三上学期开学联考数学试题

8. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}-x^2-2x-2, x\leq 0,\\ \ln(x+1), x>0,\end{cases}$ 若关于 x 的不等式 $f(x)\leq ax+a-\frac{1}{2}$ 在 $\mathbf{R}$ 上恒成立，则实数 a 的取值范围是（　　）

A. $\left[e^{-\frac{1}{2}},\sqrt{2}\right]$　　B. $\left[\sqrt{2},e^{\frac{1}{2}}\right]$　　C. $\left[e^{-\frac{1}{2}},\sqrt{6}\right]$　　D. $\left[e^{\frac{1}{2}},\sqrt{6}\right]$

【来源】江西省临川第一中学暨临川一中实验学校 2021 届高三三模数学（理）试题

9. 若关于 x 的不等式 $x^2-4x-2-a>0$ 在区间(1，4)内有解，则实数 a 的取值范围是（　）

A. $(-\infty,-2)$　　B. $(-\infty,-2]$　　C. $(-6,+\infty)$　　D. $(-\infty,-6)$

【来源】备战 2021 高考数学全真模拟卷（北京专用）

10. 已知函数 $f(x)=x+x\ln x$，$g(x)=kx-k$，若 $k\in Z$，且 $f(x)>g(x)$ 对任意 $x>e^2$ 恒成立，则 k 的最大值为（　　）

A. 2　　B. 3　　C. 4　　D. 5

【来源】山东省泰安肥城市 2021 届高三高考适应性训练数学试题（一）

11. 设 $k>0$，若存在正实数 x，使得不等式 $\log_{27}x-k\cdot 3^{kx-1}\geq 0$ 成立，则 k 的最大值为（　　）

A. $\frac{1}{e\ln 3}$　　B. $\frac{\ln 3}{e}$　　C. $\frac{e}{\ln 3}$　　D. $\frac{\ln 3}{2}$

【来源】湖南省邵阳市第二中学 2021-2022 学年高三上学期 7 月第一次月考数学试题

12. 已知函数 $f(x)=x-\ln(x+3)$，$g(x)=e^{x-a}+9e^{a-x}$，其中 e 为自然对数的底数，若存在实数 x_0 使得 $f(x_0)+g(x_0)=4$ 成立，则实数 a 的值为（　　）

A. $-\ln 3$　　B. $\ln 3$　　C. $-2+\ln 3$　　D. $-2-\ln 3$

【来源】河南省 2021 届高三仿真模拟考试（三）数学（理）试题

13.（多选题）【江苏省南京市玄武高级中学 2020-2021 学年高三上学期学情检测】已知 $m\in \mathrm{N}^{*}$，若对任意的 $x\in[1,2]$，$x+\frac{m}{x}\le 4$ 恒成立，则实数 m 的值可以为（　　）

A．1　　B．2　　C．3　　D．4

14.（多选）若不等式 $\sin^2 x-a\sin x+2\ge 0$ 对任意的 $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right]$ 恒成立，则实数 a 可能是

A．1　　B．2　　C．3　　D．4

【来源】专题 24 函数、不等式恒成立问题（练）-2021 年高考数学二轮复习讲练测（新高考版）

15.【天津市南开中学 2020-2021 学年高三上学期统练】设函数 $f(x)=x^2-1$，对任意 $x\in[\frac{3}{2},+\infty),f\left(\frac{x}{m}\right)-4m^2f(x)\le f(x-1)+4f(m)$ 恒成立，则实数 m 的取值范围是_____.

16.【2020 年浙江省新高考考前原创冲刺卷】已知不等式 $\cos^2 x-a\sin x+a^2\ge 1-\sin x$ 对任意的实数 x 均成立，则实数 a 的取值范围为_____.

17.【2020 届浙江省金华十校高三下学期 4 月模拟考试】设 $a,b\in R$，若函数 $f(x)=\frac{2}{3}ax^3+\frac{1}{2}bx^2+(1-a)x$ 在区间[－1，1]上单调递增，则 $a+b$ 的最大值为_____.

18.【广西防城港市防城中学 2021 届高三 10 月月考】已知 $f(x)=\begin{cases}ax^2+x,x>0\\-2x,x\le 0\end{cases}$，若不等式 $f(x-2)\ge f(x)$ 对一切 $x\in\mathbf{R}$ 恒成立，则 a 的最大值为_____.

19.【上海市行知中学 2021 届高三上学期 10 月月考】若对任意实数 $x\in[-1,1]$，不等式 $m^2-1>x(m+1)$ 恒成立，则实数 m 的取值范围是_____.

20.【天津市和平区 2020-2021 学年高三上学期期中】$\forall x\in\mathbf{R}$，$ax^2+ax-2<0$ 都成立.则 a 的取值范围是_____.

21.【湖北省鄂西北五校（宜城一中、枣阳一中、襄州一中、曾都一中、南漳一中）2020-2021 学年高三上学期期中】已知函数 $f(x)=x^2+ax-2(a\in R)$，若 $\exists x\in(1,4)$，使得 $f(x)\le 0$，则 a 的取值范围是_____.

22. 已知 a，$b\in R$，若对任意 $x\le 0$，不等式 $(ax+2)(x^2+2bx-1)\le 0$ 恒成立，则 $a+b$ 的最小值为_____.

【来源】浙江省普通高中强基联盟协作体 2021 届高三下学期统测数学试题

23. 若不等式 $m\cos x-\cos 3x-\frac{1}{8}\le 0$ 对任意 $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 恒成立，则实数 m 的取值范围是_____.

【来源】重庆市江津中学 2021 届高三下学期第二次适应性月考数学试题

24．已知函数 $f\left(x\right)=1+x\left(e^{ax}-\dfrac{ax+2}{2}\right)$（$a<0$）.若存在 $x_0>1$，使得 $2f\left(x_0\right)<a$，则实数 a 的取值范围是_____.

【来源】重庆市育才中学 2022 届高三上学期高考适应性考试（二）数学试题

25.【辽宁省营口第五中学 2020-2021 学年高三上学期第二次月考】已知函数 $f(x)=|3x-1|+|3x+a|$，$g(x)=x\cdot f(x)$，$h(x)=x^2-5x-3$.

（1）若 $f\left(x\right)\geq 3$ 恒成立，求实数 a 的取值范围；

（2）是否存在这样的实数 a（其中 $a>-1$），使得 $\forall x\in\left[-\dfrac{a}{3},\dfrac{1}{3}\right]$，都有不等式 $g(x)\geq h(x)$ 恒成立？若存在，求出实数 *a* 的取值范围；若不存在，请说明理由.

26.【江苏省苏州市相城区 2020-2021 学年高三上学期阶段性诊断】已知二次函数 $f(x)=ax^2+bx$，满足 $f\left(-2\right)=0$ 且方程 $f\left(x\right)=x$ 有两个相等实根.

（1）求函数 $f\left(x\right)$ 的解析式；

（2）解不等式 $f(x)<\dfrac{3}{2}$

（3）当且仅当 $x\in\left[4,m\right]$ 时，不等式 $f\left(x-t\right)\leqslant x$ 恒成立，试求 *t*，*m* 的值.

27.【西藏山南市第二高级中学 2021 届高三上学期第一次月考】已知二次函数 $f\left(x\right)$ 的最小值为 1，且 $f(0)=f(2)=3$.

（1）求 $f\left(x\right)$ 的解析式，并写出单调区间；

（2）当 $x\in[-1,1]$ 时，$f(x)>2x+2m+1$ 恒成立，试确定实数 m 的取值范围.

28.【重庆市西南大学附属中学 2021 届高三上学期第一次月考】已知命题 p：存在实数 $x\in\left[1,2\right]$，$x^2-4ax+1\leq 0$ 成立

（1）若命题 p 为真命题，求实数 a 的取值范围；

（2）命题 q：函数 $f\left(x\right)=\log_a\left(ax^2-x\right)$ 在区间 $x\in\left(2,4\right)$ 内单调递增，如果 $p\wedge q$ 是假命题，求实数 a 的取值范围.

第 27 讲　应用基本不等式求最值的求解策略

【高考地位】

基本不等式是《不等式》一章重要内容之一，是求函数最值的一个重要工具，也是高考常考的一个重要知识点。应用基本不等式求最值时，要把握基本不等式成立的三个条件“一正二定三相等”，忽略理任何一个条件，就会导致解题失败，因此熟练掌握基本不等式求解一些函数的最值问题的解题策略是至关重要的。

方法一　凑项法

万能模板	内　　容
使用场景	某一类函数的最值问题
解题模板	第一步　根据观察已知函数的表达式，通常不符合基本不等式成立的三个条件“一正二定三相等”，将其配凑（凑项、凑系数等）成符合其条件； 第二步　使用基本不等式对其进行求解即可； 第三步　得出结论.

例 1　已知 $x<\frac{5}{4}$，求函数 $y=4x-2+\frac{1}{4x-5}$ 的最大值。

【变式演练 1】【河南省许昌市、济源市、平顶山市 2020 届高三数学（文科）第三次质检】$\triangle ABC$ 的内角 A、B、C 的对边分别为 a、b、c，已知 $a=\sqrt{3}$，$b\sin B+c\sin C=a\sin A+c\sin B$，则 $\triangle ABC$ 的周长的最大值是（　　）

A．$3\sqrt{3}$　　B．$3+\sqrt{3}$　　C．$2\sqrt{3}+\sqrt{6}$　　D．$4+\sqrt{3}$

【变式演练 2】设 $a>0$，$b>0$，且 $2a+b=1$，则 $\frac{1}{a}+\frac{2a}{a+b}$ 的最小值为（　　）

A．4　　B．$2\sqrt{2}+1$　　C．$\frac{14}{3}$　　D．2

【来源】重庆市第七中学 2022 届高三上学期第一次月考数学试题

【变式演练 3】江西省临川二中、临川二中实验学校 2020 届高三第二次模拟】若函数 $f\left(x\right)=\cos^2 x-\sin^2 x$ 的最大值为 m，正数 a，b 满足 $a+b=m$，则 $\frac{1}{a}+\frac{4}{b}$ 的最小值为_____.

方法二　分离法

万能模板	内　　容
使用场景	某一类函数的最值问题

解题模板	第一步　首先观察已知函数的表达式的特征，如分子（或分母）是二次形式且分母（或分子）是一次形式； 第二步　把分母或分子的一次形式当成一个整体，并将分子或分母的二次形式配凑成一次形式的二次函数形式； 第三步　将其化简即可得到基本不等式的形式，并运用基本不等式对其进行求解即可得出所求的结果.

例 2　求 $y=\dfrac{x^2+7x+10}{x+1}(x>-1)$ 的值域。

【变式演练 4】若实数 x，y 满足 $x>2y$，且 $xy=1$，则 $\dfrac{x^2+4y^2}{x-2y}$ 的最小值是_____.

【来源】重庆市第八中学 2021 届高三下学期高考适应性考试（一）数学试题

方法三　函数法

万能模板	内　　容
使用场景	在应用最值定理求最值时，若遇等号取不到的情况
解题模板	第一步　运用凑项或换元法将所给的函数化简为满足基本不等式的形式； 第二步　运用基本不等式并检验其等号成立的条件，若等号取不到则进行第三步，否则，直接得出结果即可； 第三步　结合函数 $f(x)=x+\dfrac{a}{x}$ 的单调性，并运用其图像与性质求出其函数的最值即可； 第四步　得出结论.

例 3　求函数 $y=\dfrac{x^2+5}{\sqrt{x^2+4}}$ 的值域。

【变式演练 5】下列函数中，最小值为 4 的是（　　）

A．$y=x+\dfrac{4}{x}$

B．$y=\sin x+\dfrac{4}{\sin x}$（$0<x<\pi$）

C．$y=e^x+4e^{-x}$

D．$y=\log_3 x+4\log_x 3$

【变式演练 6】【云南省昆明市第一中学 2021 届高三高中新课标第一次摸底测试】**函数 $y=\ln x+\dfrac{1}{\ln x}$ 的值域为（　　）**

A．(-∞，-2]　　**B．[2，+∞)**

C．(-∞，-2] ∪ [2，+∞)　　**D．[-2，2]**

【高考再现】

1．（2020 全国 3 文 12）已知函数 $f(x)=\sin x+\dfrac{1}{\sin x}$，则(　　)

A．$f(x)$ 的最小值为 2　　B．$f(x)$ 的图像关于 y 轴对称

C．$f(x)$ 的图像关于直线 $x=\pi$ 对称　　D．$f(x)$ 的图像关于直线 $x=\dfrac{\pi}{2}$ 对称

2．（2020 上海 13）下列不等式恒成立的是．　　（　　）

A．$a^2+b^2\le 2ab$　　B．$a^2+b^2\ge -2ab$　　C．$a+b\ge -2\sqrt{|ab|}$　　D．$a+b\le 2\sqrt{|ab|}$

3．【2018 年江苏卷】在△ABC中，角A,B,C所对的边分别为a,b,c，$\angle ABC=120°$，$\angle ABC$的平分线交AC于点 D，且$BD=1$，则 $4a+c$的最小值为_____．

4．【2015 高考湖南，文 7】若实数 a,b 满足 $\dfrac{1}{a}+\dfrac{2}{b}=\sqrt{ab}$，则 ab 的最小值为(　　)

A、$\sqrt{2}$　　B、2　　C、$2\sqrt{2}$　　D、4

5．【2015 高考福建，文 5】若直线 $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=1(a>0,b>0)$ 过点 $(1,1)$，则 $a+b$ 的最小值等于（　　）

A．2　　B．3　　C．4　　D．5

6．【2018 年天津卷】已知$a,b\in$R，且$a-3b+6=0$，则$2^a+\frac{1}{8^b}$的最小值为_____．

7．【2015 高考天津，文 12】已知 $a>0,b>0,ab=8$，则当 a 的值为_____时 $\log_2 a\cdot\log_2(2b)$ 取得最大值．

8．【2018 年天津卷】已知 a，$b\in$R，且 $a-3b+6=0$，则 $2^a+\frac{1}{8^b}$的最小值为_____．

【反馈练习】

1．【贵州省遵义市 2021 届高三上学期第一次联考】已知 c 是双曲线 $C:\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的半焦距，则 $\dfrac{a+b}{c}$ 的最大值是（　　）

A．$\dfrac{\sqrt{3}}{3}$　　**B．$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$**　　**C．$\sqrt{2}$**　　**D．$\sqrt{3}$**

2.【浙江省东阳中学 2021 届高三暑期第三次检测】已知 F_1，F_2 为双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的左右焦点，过 F_1 的直线 *l* 与双曲线的左右两支分别交于 *A*，*B* 两点，若 $\triangle ABF_2$ 为等边三角形，则 $b^2+\frac{1}{a^2}$ 的最小值为（　　）

A．$\frac{\sqrt{6}}{3}$　　B．$6+\frac{\sqrt{6}}{3}$　　C．$6+2\sqrt{6}$　　D．$2\sqrt{6}$

3.【云南省文山州 2021 届高三年级 10 月教学质量检测】若 *a*，*b* 为正实数，且 $\frac{1}{3a}+\frac{1}{b}=2$，则 $3a+b$ 的最小值为（　　）

A．2　　B．$\frac{3}{2}$　　C．3　　D．4

4.【广西来宾市 2020 届高三 4 月教学质量诊断性联合考试】设函数 $f(x)=a\ln x+bx^2(a>0,b>0)$，若函数 $f(x)$ 的图象在 $x=1$ 处的切线与直线 $x+y-2\mathrm{e}=0$ 垂直，则 $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$ 的最小值为（　　）

A．1　　B．$\frac{1}{2}$　　C．$3-2\sqrt{2}$　　D．$3+2\sqrt{2}$

5.【安徽省宿州市泗县第一中学 2020 届高三下学期最后一卷】已知正实数 *x*，*y* 满足 $2x+2y=xy$，则 $x+4y$ 的最小值为（　　）

A．6　　B．12　　C．18　　D．36

6.【2020 年普通高校招生全国统一考试猜题密卷 B 卷】已知 a，b 均为正实数，且 $a-b=4a^2b^2$，则 $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$ 的最小值为（　　）

A．3　　B．$2\sqrt{3}$　　C．9　　D．12

7.【湖北省龙泉中学、荆州中学、宜昌一中 2020-2021 学年高三上学期 9 月联考】已知函数 $f(x)=\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$，若正实数 a，b 满足 $f(4a)+f(b-1)=0$，则 $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$ 的最小值为（　　）

A．4　　B．8　　C．9　　D．13

8．已知 $x>2,y>1,(x-2)(y-1)=4$，则 $x+y$ 的最小值是（　　）

A．1　　B．4　　C．7　　D．$3+\sqrt{17}$

【来源】重庆市高考康德卷 2021 届高三模拟调研卷数学试题（三）

9.（多选）若 $x>1$，$y>2$，且满足 $xy-2x=y$，则 $\frac{1}{x-1}+\frac{8}{y-2}$ 的值可以为（　　）

A. $\frac{7}{2}$　　**B. 3**　　**C. 4**　　**D.** $\frac{11}{2}$

【来源】全国 2021 届高三 5 月份数学模拟试题（二）

10.【广西钦州市、崇左市 2021 届高三上学期第一次教学质量检测】直线 $2ax+by-1=0(a>0,b>0)$ 过函数 $y=\frac{1}{x-1}+1$ 图象的对称中心，则 $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$ 的最小值为_____.

11.【河南省信阳市普通高中 2021 届高三上学期第一次教学质量检测】若 $b>a>1$ 且 $3\log_a b+6\log_b a=11$，则 $a^3+\frac{2}{b-1}$ 的最小值为_____

12.【天津市滨海七校 2020 届高三下学期毕业班联考】已知 $x>0,y>0$，则 $\frac{2xy}{x^2+4y^2}+\frac{xy}{x^2+y^2}$ 的最大值是_____.

13.【宁夏石嘴山市 2020 届高三适应性测试】已知 $f(x)$ 是奇函数并且是 R 上的单调函数,若函数 $y=f\left(x^2+2\right)+f\left(-2x-m\right)$ 只有一个零点,则函数 $g(x)=mx+\frac{4}{x-1}(x>1)$ 的最小值为_____.

14.【2020 届河北省衡水中学高三下学期第一次模拟】$\triangle ABC$ 的内角 A,B,C 的对边分别为 a,b,c，若 $3b\cos C+3c\cos B=5a\sin A$，且 A 为锐角，则当 $\frac{a^2}{bc}$ 取得最小值时，$\frac{a}{b+c}$ 的值为_____.

15.【江苏省南京市秦淮中学 2020 届高三下学期最后一练】正数 x，y，z 满足 $x^2+y^2+z^2=1$，$\frac{1+z}{xy}+\frac{1}{z}$ 的最小值为_____.

16.【2020 届江苏省七市（南通、泰州、扬州、徐州、淮安、连云港、宿迁）高三下学期第二次调研】若 $x>1$，则 $2x+\frac{9}{x+1}+\frac{1}{x-1}$ 的最小值是_____.

17.【河南省新乡市安阳市鹤壁市顶尖名校 2020-2021 学年高三 10 月联考】若 $a>0,b>0$,则 $\frac{2a^2+2b^2+4ab+8}{a+b}$ 的最小值为_____.

18. 已知 $x>-1$，$y>0$ 且满足 $x+2y=1$，则 $\frac{1}{x+1}+\frac{2}{y}$ 的最小值为_____.

【来源】江苏省南京市金陵中学 2021-2022 学年高三上学期网课质量检测数学试题

19．若$x,y\in R^+$，$(x-y)^2=(xy)^3$，则$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$的最小值为_____.

【来源】重庆市南开中学 2022 届高三上学期 7 月考试数学试题

20．已知正实数 *x*，*y* 满足$x-2y=1$，则$\frac{8}{x}+y$的最小值为_____.

【来源】重庆市第八中学 2021 届高三下学期高考适应性考试（三）数学试题

21．若实数x、y满足$2x^2+xy-y^2=1$，则$5x^2-2xy+2y^2$的最小值为_____.

【来源】浙江省宁波中学 2021 届高三下学期适应性考试数学试题

22．已知正实数x,y满足$(x+3y-1)(2x+y-1)=1$，则$x+y$的最小值是_____.

【来源】2021 年秋季高三数学开学摸底考试卷 03（浙江专用）

23．已知正数a，b满足$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=2$，则$\frac{3}{b+1}-a$的最大值为_____.

【来源】浙江省宁波市效实中学 2021 届高三下学期高考模拟测试数学试题

24.【福建省福州市 2021 届高三数学 10 月调研】△*ABC* 中，角 *A*，*B*，*C* 所对的边分别为 *a*，*b*，*c*，已知$a=1$，$c(\sin B-\cos B)=b\cos C$.

（1）求 *BC* 边上的高 AD 的长；

（2）求$\tan A$的最大值.

25.【河南省平顶山市 2020-2021 学年高三 10 月阶段测试】佩戴口罩能起到一定预防新冠肺炎的作用，某科技企业为了满足口罩的需求，决定开发生产口罩的新机器.生产这种机器的月固定成本为400万元，每生产x台，另需投入成本$p(x)$（万元），当月产量不足 70 台时，$p(x)=\frac{1}{2}x^2+40x$（万元）；当月产量不小于 70 台时，$p(x)=101x+\frac{6400}{x}-2060$（万元）.若每台机器售价$100$万元，且该机器能全部卖完.

（1）求月利润y（万元）关于月产量x（台）的函数关系式；

（2）月产量为多少台时，该企业能获得最大月利润？并求出其利润.

第 28 讲　证明不等式的常见技巧

【高考地位】

证明数列不等式，因其思维跨度大、构造性强，需要有较高的证明技巧。这类问题的求解策略往往是：通过多角度观察所给数列通项的结构，深入剖析其特征，抓住其规律进行恰当地选择不等式的证明技巧. 在高考中常常以解答题出现，其试题难度属中高档题.

方法一　比较法

万能模板	内　　容
使用场景	一般不等式证明
解题模板	第一步　通过两个实数 a 与 b 的差或商的符号（范围）确定 a 与 b 大小关系； 第二步　得出结论.

例 1 设实数 a,b 满足 $a\neq b$，求证：$a^4+b^4>ab(a^2+b^2)$.

【变式演练 1】【2020 年全国普通高等学校统一招生考试试验检测卷】**设不等式** $-2<|x-1|-|x+2|<0$ **的解集为** M **且** a，$b\in M$.

（1）证明： $\left|\frac{a}{3}+\frac{b}{6}\right|<\frac{1}{4}$；

（2）比较 $|1-4ab|$ **与** $2|a-b|$ **的大小.**

方法二　分析法

万能模板	内　　容
使用场景	一般不等式证明
解题模板	第一步　从求证的不等式出发，分析这个不等式成立的充分条件； 第二步　把证明这个不等式的问题转化为证明这些条件是否具备的问题； 第三步　如果能够肯定这些条件都已具备，那么就可以判定所证的不等式成立.

例 2　设 $a,b,c\in R^+,ab+bc+ca\geq 3$, 证明：$a^5+b^5+c^5+a^3(b^2+c^2)+b^3(c^2+a^2)+c^3(a^2+b^2)\geq 9$ 。

【变式演练 2】吉林省通化市梅河口五中 2020 届高三高考数学（文科）七模】**设函数** $f(x)=|2ax+b|$.

（1）若 $f(x)\leq 3$ **的解集为** $[1,4]$，**求实数** a，b **的值；**

（2）当 $a=1$，$b=2$ **时，若存在** $x_0\in\mathbf{R}$，**使得** $f(x_0)+|2x_0-1|\leq 5+m-m^2$ **成立的** m **的最大值为** M，**且实数** p，q **满足** $p^3+q^3=M$，**证明：** $0<p+q\leq 2$.

方法三　综合法

万能模板	内　　容
使用场景	一般不等式证明

解题模板	第一步　从已知或证明过的不等式出发，逐步推出其必要条件； 第二步　根据不等式的性质及公理推导出欲证的不等式； 第三步　得出结论.

例 3 已知 $a,b\in R^+$，$a+b=1$，求证：$(a+\frac{1}{a})^2+(b+\frac{1}{b})^2\geq\frac{25}{2}$

【变式演练 3】【四川省巴中市 2021 届高三零诊考试】**已知** $f(x)=|x-1|+|x+3|$.

（1）若存在 x_0 **使得** $f(x_0)+m^2\leq m+6$，**求** m **的取值范围；**

（2）记 m_0 **是（1）中** m **的最大值且** $a^3+b^3=m_0$，**证明** $0<a+b\leq 2$.

方法四　放缩法

万能模板	内　　容
使用场景	一般不等式证明
解题模板	第一步　根据已知找出其通项公式 $a_n=f(n)$； 第二步　然后运用恰当的放缩法对通项进行放缩； 第三步　利用数列求和公式即可得出结论.

例 4 设 $S_n=\sqrt{1\cdot 2}+\sqrt{2\cdot 3}+\cdots+\sqrt{n(n+1)}$. 求证 $\frac{n(n+1)}{2}<S_n<\frac{(n+1)^2}{2}$.

【变式演练 4】求证：$\frac{6n}{(n+1)(2n+1)}\leq 1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\cdots+\frac{1}{n^2}<\frac{5}{3}$.

【变式演练 5】设 a、b、c 是三角形的边长，求证 $\frac{a}{b+c-a}+\frac{b}{c+a-b}+\frac{c}{a+b-c}\geq 3$.

【变式演练 6】【四川省巴中市 2021 届高三零诊考试】**已知数列** $\{a_n\}$ **满足** $a_1=2$，$a_{n+1}=2a_n+2^{n+1}$.

（1）证明：数列 $\left\{\frac{a_n}{2^n}\right\}$ **为等差数列；**

（2）设 $b_n=\frac{a_n}{2^n}$，**证明：** $\frac{1}{b_1^2}+\frac{1}{b_2^2}+\cdots+\frac{1}{b_n^2}<2$.

方法五　数学归纳法

万能模板	内　　容
使用场景	对于含有 $n(n\in N)$ 的不等式类型

解题模板	第一步　验证当 n 取第一个值时不等式成立； 第二步　当 n 取第一个值时不等式成立，如果使不等式在 $n=k(n\in N)$ 时成立的假设下，还能证明不等式在 $n=k+1$ 时也成立； 第三步　这个不等式对 n 取第一个值以后的自然数都能成立得出结论.

例 5　若 $x_i>0(i=1,2,3,\cdots,n)$，观察下列不等式：

$(x_1+x_2)(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2})\geq 4$，$(x_1+x_2+x_3)(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3})\geq 9$，…，

请你猜测 $(x_1+x_2+\cdots+x_n)(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\cdots+\frac{1}{x_n})$ 将满足的不等式，并用数学归纳法加以证明。

【变式演练 7】**已知数列{a_n}满足 $a_1=2$，$a_{n+1}+2a_n=(-1)^n$（$n\in N^*$）.**

（1）求证：数列 $\{a_n-(-1)^n\}$ 是等比数列；

（2）比较 $|a_n|$ 与 $\frac{3n+1}{2}$ 的大小，并用数学归纳法证明；

（3）设 $b_n=\frac{-2^n}{a_na_{n+1}}$，数列{$b_n$}的前 n 项和为 T_n，若 $T_n<m$ 对任意 $n\in N^*$ 恒成立，求实数 m 的取值范围.

方法六　换元法

万能模板	内　　容
使用场景	对于一般的不等式证明
解题模板	第一步　恰当的换元，适当的引入参数； 第二步　利用已知求出新元的取值范围； 第三步　根据现有的不等式放缩法得出结论.

例 7　求证 $1<\sqrt[n]{n}<1+\sqrt{\frac{2}{n-1}}(n\in N^*,n\geq 2)$.

【变式演练 8】已知：$a+b+c=1$，求证：$ab+bc+ca\leq\frac{1}{3}$.

【高考再现】

1. 【2016 高考浙江理数】已知实数 a，b，c（　　）

A．若 $|a^2+b+c|+|a+b^2+c|\leq 1$，则 $a^2+b^2+c^2<100$

B．若 $|a^2+b+c|+|a^2+b-c|\leq 1$，则 $a^2+b^2+c^2<100$

C．若 $|a+b+c^2|+|a+b-c^2|\leq 1$，则 $a^2+b^2+c^2<100$

D．若$|a^2+b+c|+|a+b^2-c|\le 1$，则$a^2+b^2+c^2<100$.

2.【2015 年陕西卷】设$f(x)=\ln x, 0<a<b$，若$p=f(\sqrt{ab})$，$q=f(\frac{a+b}{2})$，$r=\frac{1}{2}(f(a)+f(b))$，则下列关系式中正确的是

A．$q=r<p$　　B．$q=r>p$

C．$p=r<q$　　D．$p=r>q$

3.【2014 年四川卷】若 a＞b＞0，c＜d＜0，则一定有（　　）.

A．$\frac{a}{d}>\frac{b}{c}$　　B．$\frac{a}{c}<\frac{b}{c}$　　C．$\frac{a}{c}>\frac{b}{d}$　　D．$\frac{a}{c}<\frac{b}{d}$

4.【2014 年四川卷】若$a>b>0, c<d<0$, 则一定有（ ）.

A．$\frac{a}{c}>\frac{b}{d}$　　B．$\frac{a}{c}<\frac{b}{d}$　　C．$\frac{a}{d}>\frac{b}{c}$　　D．$\frac{a}{d}<\frac{b}{c}$

5.【2011 年上海市文科数学】若$a,b\in R$，且$ab>0$，则下列不等式中，恒成立的是

A．$a^2+b^2>2ab$　　B．$a+b\ge 2\sqrt{ab}$　　C．$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}>\frac{2}{\sqrt{ab}}$　　D．$\frac{b}{a}+\frac{a}{b}\ge 2$

6.【2015 高考浙江，理 20】已知数列$\{a_n\}$满足$a_1=\frac{1}{2}$且$a_{n+1}=a_n-a_n^2$（$n\in N^*$）

（1）证明：$1\le\frac{a_n}{a_{n+1}}\le 2$（$n\in N^*$）；

（2）设数列$\{a_n^2\}$的前n项和为S_n，证明$\frac{1}{2(n+2)}\le\frac{S_n}{n}\le\frac{1}{2(n+1)}$（$n\in N^*$）.

7.【2015 高考广东，理 21】数列$\{a_n\}$满足$a_1+2a_2+\cdots na_n=4-\frac{n+2}{2^{n-1}}\left(n\in N^*\right)$，

(1) 求a_3的值；

(2) 求数列$\{a_n\}$前n项和T_n；

(3) 令$b_1=a_1$，$b_n=\frac{T_{n-1}}{n}+\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}\right)a_n\ (n\ge 2)$，证明：数列$\{b_n\}$的前$n$项和$S_n$满足$S_n<2+2\ln n$.

8.【2015 高考湖南，文 21】 函数$f(x)=ae^2\cos x(x\in[0,+\infty)$，记$x_n$为$f(x)$的从小到大的第$n(n\in N^*)$个极值点。

（I）证明：数列$\{f(x_n)\}$是等比数列；

（II）若对一切$n\in N^*,x_n\le\left|f(x_n)\right|$恒成立，求$a$的取值范围。

9.【2015 高考陕西，文 21】设$f_n(x)=x+x^2+\cdots+x^n-1,n\in N,n\ge 2.$

(I)求$f_n'(2)$；

(II)证明：$f_n(x)$在$\left(0,\frac{2}{3}\right)$内有且仅有一个零点（记为$a_n$），且$0<a_n-\frac{1}{2}<\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^n$.

10.【2019 新课标 1】已知 *a*，*b*，*c* 为正数，且满足 *abc*=1．证明：

（1）$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\le a^2+b^2+c^2$；

（2）$(a+b)^3+(b+c)^3+(c+a)^3\ge 24$.

【反馈练习】

1．已知函数$f(x)=|1-2x|+|x-2|$.

（1）解不等式$f(x)\le 2x$；

（2）若正实数a，a**满足**$a+b=2$，**试比较**$f\left(\frac{1}{1+a^2}+\frac{1}{1+b^2}\right)$**与**$f(1)$**的大小.**

2．设不等式$-2<|x-1|-|x+2|<0$**的解集为 *M*，**$a,b\in M$.

（1）求 *M*；

（2）证明$|1-4ab|>2|a-b|$.

3．已知实数a，b**满足**$0<a<2$，$b>2$.

（1）求证：$|b-2a|+|3a-1|>\frac{4}{3}$；

（2）求证：$3(a+b)>ab+6$.

4．已知函数$f(x)=|x-1|$.

（1）求不等式$f(x)+f(2x+2)>3$**的解集**M；

（2）设$a,b\in M$，**求证：**$f\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}+1\right)<f\left(\frac{1}{ab}\right)$.

5．已知函数$f(x)=|x+1|+|x-1|$，**不等式**$f(x)\le x+2$**的解集为 *A*.**

（1）求 *A*；

（2）当 *a*，$b\in A$**时，证明：**$0\le a+b-\frac{ab}{2}\le 2$.

6．已知函数 $f(x)=|x+4|+|x|$.

（1)解不等式 $f(2x-1)\le 6$；

（2)记函数 $f(x)$ **的最小值为** a，**且** $m^2+n^2=\frac{a}{4}$，**其中** m,n **均为正实数，求证：** $\frac{m^3}{n}+\frac{n^3}{m}\ge\frac{a}{4}$.

7．已知函数 $f(x)=x^2-(a-2)x-a\ln x$（$a\in R$）

（1）求函数 $y=f(x)$ **的单调区间；**

（2）当 $a=1$ **时，证明：对任意的** $x>0$，$f(x)+e^x>x^2+x+2$.

8．设 $a,b\in\mathbf{R}$，**已知函数** $f(x)=e^{-ax}+\frac{1}{\sqrt{x+1}}+b$ **在点** $(0,f(0))$ **处的切线方程为** $y=-\frac{3}{2}x$.

（Ⅰ）求 *a*，*b* 的值；

（Ⅱ）证明：当 $x\in(0,6)$ **时，** $f(x)<\frac{-3x}{x+6}$.

9．已知数列 $\{a_n\}$ **满足** $a_1=2$，$a_{n+1}=\frac{2a_n-1}{a_n}$.

（1）证明：数列 $\left\{\frac{1}{a_n-1}\right\}$ **是等差数列；**

（2）令 $b_n=\frac{1}{a_1a_2\cdots a_n}$，**证明：** $b_1^2+b_2^2+\cdots+b_n^2<1$.

10．已知函数 $f(x)=\frac{1}{x}+\frac{\ln x}{x}$.

（1）若 $x\ge 1$ **时，** $f(x)\ge\frac{m}{x+1}$，**求实数** m **的取值范围；**

（2）求证： $\sum_{k=1}^{n}\left[\ln k+\ln(k+1)\right]>\frac{n^2-n-1}{n+1}\left(n\in N^*\right)$.

11．已知数列 $\{a_n\}$ **的前 *n* 项和为** S_n，**若** $a_n+S_n=1$.

（1）求 $\{a_n\}$ **通项公式；**

（2）若 $c_n=\frac{1}{1+a_n}+\frac{1}{1-a_n}$，$T_n$ **为数列** $\{c_n\}$ **的前 *n* 项和，求证：** $T_n<2n+1$.

12．已知数列 $\{a_n\}$ **满足** $a_1=\frac{2}{3}$，**且当** $n\ge 2$ **时，** $a_1a_2\cdots a_{n-1}=\frac{2}{a_n}-2$.

（1）求证：数列 $\{\frac{1}{1-a_n}\}$ **是等差数列，并求数列** $\{a_n\}$ **的通项公式；**

（2）记 $T_n=\frac{1}{2}a_1a_2\cdots a_n$，$S_n=T_1^2+T_2^2+\cdots+T_n^2$，**证明：当** $n\in\mathbf{N}^*$ **时，** $a_{n+1}-\frac{2}{3}<S_n$.

13．若 $x_i>0(i=1,2,3\cdots n)$，**观察下列不等式：**

$(x_1+x_2)\left(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}\right)\geq 4$，$(x_1+x_2+x_3)\left(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}\right)\geq 9,\cdots$，**请你猜测**$(x_1+x_2+\cdots+x_n)\left(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\cdots+\frac{1}{x_n}\right)$**将满足的不等式，并用数学归纳法加以证明.**

10.【上海市南模中学 2019-2020 学年高三模拟】函数 $y=\sqrt{9-x^2}+\lg(2\cos 2x-1)$ 的定义域是_____.

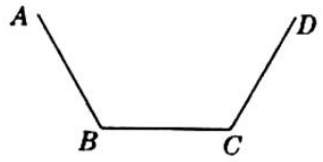
11.（2021·北京高三一模）函数 $f(x)=\ln(2x)+\sqrt{1-x}$ 的定义域为_____.

12.（2021·贵州省思南中学高三一模（理））函数 $f(x)=\sqrt{4-4^x}+\ln(x+4)$ 的定义域为_____.

13.【2020 届陕西省咸阳市高三上学期期末】如果几个函数的定义域相同、值域也相同，但解析式不同，称这几个函数为“同域函数”. 试写出 $y=\sqrt{x-1}-\sqrt{2-x}$ 的一个“同域函数”的解析式为_____.

14.【2020 届江西省分宜中学高三上学期第一次段考】已知函数 $f(2x-1)$ 的定义域为 $(-1,2)$，则函数 $f(2-3x)$ 的定义域为_____.

15.（2021·全国）设计一个水渠，其横截面为等腰梯形（如图），要求满足条件 $AB+BC+CD=a$（常数），$\angle ABC=120^\circ$，写出横截面的面积 y 关于腰长 x 的函数，并求它的定义域和值域.



16.【2020 届湖南新课标普通高中学业水平考试仿真模拟卷】已知函数 $f(x)=2\ln x+\frac{a}{\ln x}(a\in R)$.

（1）若 $f(e)=1$，求 a 的值；

（2）求函数 $y=f(x)$ 的定义域；

（3）若对任意的 $x\geq e$，不等式 $f(x)\geq 1$ 恒成立，求实数 a 的取值范围.